RAZONAMIENTO MATEMATICO 2012

LA ENCICLOPEDIA

NIVEL PREUNIVERSITARIO

8000 PROBLEMAS RESUELTOS

(1700 PAGINAS)

TEÓRICO - PRÁCTICO

- 130 capítulos completamente desarrollados.
- Desarrollo completo del programa de matemáticas para el ingreso a las universidades peruanas.

RUBIÑOS EDICIONES

Raz. Matemático Virtual

Versión 2012

8000 PROBLEMAS RESUELTOS

(1700 PAGINAS)

RAZONAMIENTO MATEMATICO 2012

LA ENCICLOPEDIA

www. razonamientomatematicototal . blogspot . com

PROGRAMA
CURRICULAR ACTUALIZADO 2012

(Edición corregida y aumentada)

- PROBLEMAS CON PALITOS DE FOSFOROS.
- PROBLEMAS CON MONEDAS.
- TRASLADOS , VIAJES Y TRASVASES.
- PROBLEMAS CON DADOS Y DOMINOS.
- PESADAS Y PARTICIONES GEOMETRICAS.
- CUADRADOS MÁGICOS.

...., ETC.

130 CAPITULOS

INCLUYE 2 DVD

RUBIÑOS EDICIONES

www. fullpresanmarcos . blogspot . com

TEÓRICO - PRÁCTICO

WWW . MIACADEMIA1 . BLOGSPOT . COM

Dedicatoria :

- *A la facultad de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA (U.N.I.)*
- *A mis alumnos, colegas y familiares, quienes comparten el dia a dia de mi existencia.*

RAZONAMIENTO MATEMATICO 2012

LA ENCICLOPEDIA

8000 PROBLEMAS RESUELTOS

NUEVA EDICIÓN : ENERO 2012

RAZÓN SOCIAL: ***EDICIONES RUBIÑOS***

DEPÓSITO LEGAL: 1501352006-1194

I.S.B.N.: 2008 - 07518

REGISTRO DEL PROYECTO EDITORIAL: ***S00055240***

REGISTRO DE LA PROPIEDAD INDUSTRIAL:

CERTIFICADO Nº 00055240

La Dirección de Signos Distintivos del Instituto Nacional de Defensa de la Competencia y de la Protección de la Propiedad Intelectual - INDECOPI, certifica que por mandato de la Resolución Nº 002630-2009DSD - INDECOPI de fecha de 25 de febrero de 2009, ha quedado inscrito en el Registro de Marcas de Servicio, el siguiente signo: RUBIÑOS EDICIONES (El logotipo conformado por la denominación RUBIÑOS EDICIONES escrita en letras características, sobre la representación estilizada de un tumi).

TELÉFONO: 5281921-7259505

rmrubinos@hotmail.com

Diagramación y diseño:

- Lila Córdova
- Karin Cabrera
- Khaterin Cabrera
- Elizabeth , Alex , Nelly , Oscar , Esther ,Eder ,...,etc.

Impresión:

- Raquel Becerra
- Khaterin Cabrera
- Brandy Torres
- Clisman Carrasco
- Alberto Moran
- Yuri Moran
- Roberto Moran

Presentación

La Aptitud no es algo que pueda enseñarse o estudiarse, en cambio sí se puede guiar al alumno en su capacidad reflexiva, y con ella en sus Razonamientos. Si ahora nos detenemos, en el campo del Razonamiento Matemático en nuestro país (con referencia a los Exámenes de Admisión) podemos ver que en las pruebas de Aptitud Matemática, y luego de un análisis desde sus inicios hasta la actualidad, notamos que en ellas año a año incorporan, cada vez más preguntas en las que intervienen las matemáticas recreativa, el razonamiento lógico matemático,......,etc.

El curso de Razonamiento Matemático tiene por fin primordial, contribuir en forma organizada, al desarrollo de la capacidad reflexiva del alumno, despejando de él, falsos prejuicios en lo relacionado a la «dificultad» de las Matemáticas, y de los problemas «ingeniosos» y sus «artificios», haciendo ver que todos ellos no son más que algunos que otros principios de las Matemáticas, que están además, a su alcance, como instrumentos para ejercitar y desarrollar la capacidad reflexiva de los alumnos. En esta obra utilizaremos los principales tipos de problemas que suelen presentarse en un concurso de Admisión (principalmente), para así lograr óptimos resultados en nuestro objetivo.

Las anteriores consideraciones y conclusiones son productos de mis reflexiones en base a mi experiencia. Honestamente admito, que el tener experiencia es algo que no implica necesariamente que las conclusiones sean correctas, es por eso que recibiré, con mucho agrado las sugerencias y críticas, de usted amable lector, y de mis colegas, a quienes de paso doy testimonio de mi respeto y admiración por la gran calidad pedagógica que todos ellos poseen, y de quienes mucho he aprendido y estoy seguro, tendré más que aprender.

Acabar estas líneas introductorias, sería injusto, si no expresase mi más sincero AGRADECIMIENTO, a quienes de una o de otra forma han apoyado la aparición del presente trabajo y en forma muy especial a todos los integrantes de la EDITORIAL RUBIÑOS, espero así que esta obra satisfaga la confianza de la que he sido depositario.

El Autor.

CONTENIDO

OBJETIVOS :

* Inducir al alumno al razonamiento lógico matemático y al desarrollo de su capacidad de análisis.

* Construir , a partir del juego , esquemas básicos de razonamiento lógico matemático .

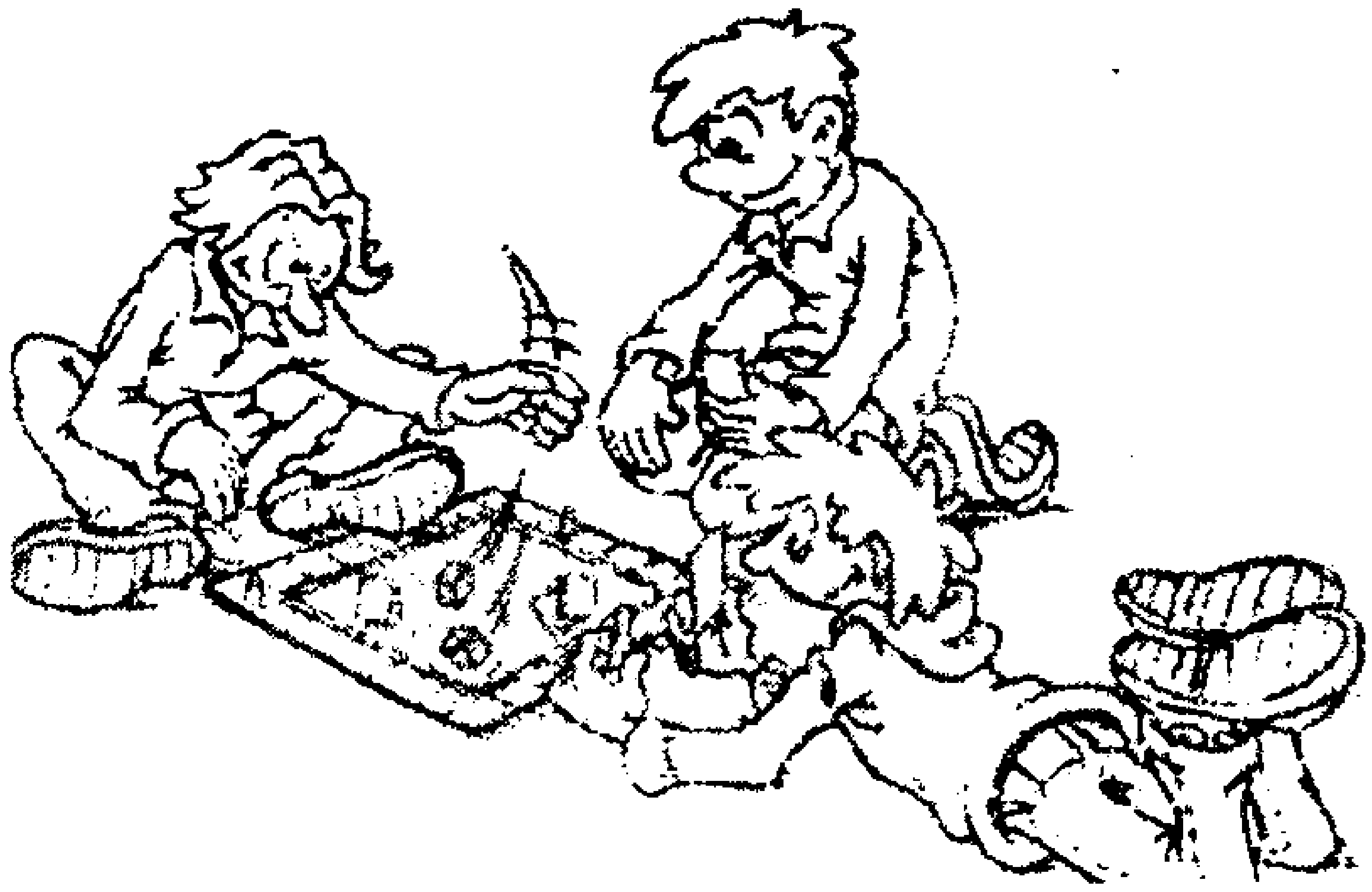
* Apreciar lo divertido que es el razonamiento matemático al afrontar situaciones problemáticas , que requieren una dosis de ingenio en sus resoluciones.

INTRODUCCIÓN :

Gardner comparaba la lógica recreativa con el ajedrez, cada uno con su propio encanto. El ajedrez combina la belleza de una estructura matemática con las delicias recreativas de un juego competitivo y la lógica recreativa combina la belleza de una estructura matemática con el entretenimiento que aporta dicha resolución. Las situaciones que se presentan en este acápite lógico recreativo , aporta , en ese sentido a la diversión y desarrollo del pensamiento creativo . Para dar con las respuestas deberemos previamente plantearnos preguntas , como : ¿he comprendido bien el enunciado del problema?, ¿he identificado claramente lo que me están pidiendo calcular , encontrar , discernir o resolver? , entonces . ¿ Qué estrategia debo aplicar?, ¿Qué pasos me conducirán hasta la respuesta?, pues , primero debemos precisar lo que realmente está pasando en la situación dada, para luego situarnos frente a ella y proponer un abanico de posibilidades que nos conduzcan a la respuesta requerida ; a continuación te presentamos una serie de problemas de diversa índole , los cuales tienen como objetivo despertar y evaluar , los alcances de tu creatividad .

APTITUD :

Es la disposición natural que nos permite el buen desenvolvimiento en una actividad determinada , siempre que hayamos adquirido la preparación necesaria . Es algo que poseemos en nuestro capital biológico y que podemos desarrollar o no . Puede descubrirse en los individuos mediante pruebas psicológicas .



APTITUD :

Capacidad para realizar satisfactoriamente una tarea o desempeñar un cargo.

«La aptitud no supone más que disposición; la capacidad supone facilidad de acción; la idoneidad incluye la idea de facultades adquiridas. Un joven tiene aptitud o disposición para las matemáticas, y en poco tiempo adquiere bastante capacidad para resolver problemas difíciles.

En un recluta puede haber aptitud para aprender el ejercicio; un teniente se halla con bastante capacidad para mandar una compañía; pero no en todos los jefes de cuerpo hay la idoneidad que se requiere para mandar una división.»

RAZONAMIENTO :

Serie de conceptos encaminados a demostrar una cosa o a persuadir a oyentes o lectores , descubrir demostrar , o concluir sobre algo .

Es un hecho , entonces , que se puede considerar a la aptitud como algo innato , que no necesita para su existencia en nosotros , de la adquisición de conocimientos básicos . Por ejemplo : es muy probable que usted tenga la aptitud para desempeñarse con éxito en el campo de la medicina , pero es también posible que usted no lo sepa , es más , que no sepa en que consiste el campo de acción y de investigación de tal carrera , pero al margen de estos hechos , la aptitud mencionada existe en usted independientemente de que usted este enterado o no . En cambio si usted no poseyese tal aptitud , difícilmente podría decirse que a travéz del estudio podrá adquirirla.

En cuanto el Razonamiento sucede algo diferente: para poder concluir sobre algo, debe usted de haber tenido necesariamente que utilizar premisas o bases en las que apoyarse, estas útimas son conocimientos de alguna especie , ya sean adquiridas a travéz de la vida diaria o de sus estudios , por ejemplo, si en este momento se le plantease un problema de geometría, que usted no pudiese resolver por desconocimiento de algunas propiedades ,tiene usted la capacidad intelectual suficiente (así no le guste la geometría) para dedicarse a su estudio y comprensión, y luego de un cierto tiempo ,teniendo ya los conocimientos necesarios y a travéz de algunos Razonamientos podrá hallar la respuesta al problema que inicialmente no podía resolver . Debo aclarar , sin embargo , que no sólo se puede razonar sobre problemas que le sean familiares ,en realidad mientras más desarrollada tenga usted su capacidad reflexiva y unida a algunos conocimientos podrá usted resolver en base a Razonamientos, . situaciones nuevas o diferentes , por su experiencia.

RAZONAMIENTO LÓGICO

La habilidad lógica evalúa la capacidad para obtener conclusiones a partir de distintos tipos de información . Debemos tener presente que la manera en que son presentados los datos varía según el tipo de pregunta ; y es por eso que en algunos casos la información es simple y directa y en otros se necesita sacar conclusiones en diferentes niveles, para así llegar a una conclusión general . Sacar conclusión significa sustentar una idea nueva, la que debe estar suficientemente justificada en nuestros datos de partida .Así , la habilidad lógica pretende poner a prueba la capacidad para obtener conclusiones necesariamente correctas .

Por lo tanto , para resolver los ejercicios , hay que tener en cuenta , básicamente , la capacidad para ordenar , analizar y deducir estas capacidades , las que están ligadas y dependen unas de otras.

LÓGICA :

Es la ciencia que se ocupa de los procesos de valoración del razonamiento humano. Utiliza el concepto, el juicio, el razonamiento y la demostración. También llamado Lógica Formal o Simbólica , es un estudio que hace abstracción del contenido concreto de los pensamientos y toma sólo el proceso general de conexión entre las partes del contenido dado . El objetivo primordial de la Lógica formal consiste en formular leyes y principios de una inferencia válida . Es decir , la Lógica llega a la verdad utilizando como instrumento el pensamiento .

PENSAMIENTO CREATIVO

Cuando abordamos un problema de corte lógico , nos encontraremos con algunos sencillos , pero otros no son fáciles de resolver a simple vista y eso es lo que los vuelve interesantes. En este último caso es posible llegar a la respuesta de cada uno de ellos, de una manera lógica, deducida a partir de los datos mencionados en dichos ejercicios. Para afrontar con éxito estos ejercicios o problemas se sugiere:

Leer y observar cuidadosamente, según sea el caso, la situación descrita y lo más importante comprender sobre qué trata el ejercicio o problema y luego interpretar las preguntas que se formulan.

Idenlificar los datos que se encuentran en el enunciado y que son necesarios para resolverlos. A partir de la idenlificación se deduce y se razona , no es correcto pretender adivinar ni obtener conclusiones apresuradas.

Asimismo, es *recomendable resolver los ejercicios*

realizando siempre enfoques creativos, nuevos, que desafíen el pensamiento convencional, que conduzcan a soluciones novedosas y mejores, en cada problema. Por ello en ocasiones será necesario en lugar del pensamiento convencional, emplear el pensamiento lateral, cuyo procedimiento consiste en lo siguiente:

* No atascarse en caminos sin salida.

* No dejarse llevar por ideas preconcebidas.

* Cambiar constantemente el punto de vista o enfoque del problema.

* Debes intentar una y otra alternativa de solución al problema y decidirte por la que cumpla con el más mínimo detalle.

* Algunas preguntas son de ***tipo capcioso.*** Probablemente tengas que leerlos más veces que en los problemas comunes, hasta encontrar el pequeño truco escondido.

* Libera tu imaginación. Los problemas aquí planteados tienen pequeños detalles que aparentemente no son muy útiles, sin embargo debes tenerlos en cuenta.

RAZONAMIENTO MATEMATICO

Se denomina así al acto de pensar inherente al desarrollo de un curso de matemáticas que puede ser Aritmética, Álgebra o un curso de Análisis Matemático , basandose en esta definición se puede considerar como razonamiento matemático al desarrollo de cualquier tema que tenga que ver con las matemáticas .

CREATIVIDAD

La creatividad es el poder y la capacidad de imaginación. Imaginar significa salirse de lo rutinario e ir a concebir algo nuevo: construir una escalera, hacer un relato, preparar un viaje, construir nuestro futuro, etc. Ser creativos, significa tener invención.

El espíritu creativo se manifiesta plenamente en el matemático que demuestra un teorema o una fórmula, al ver casos y relaciones nuevas.

EJEMPLO 1 :

¿Cómo utilizarías el agua, que no sea lo común?

RESOLUCIÓN:

* Para producir corriente eléctrica (mediante las centrales hidroeléctricas).
* Para jugar en los carnavales.
* Para pasar pastillas o cápsulas.

EJEMPLO 2 :

Indicar *4* formas de utilizar una vela que no sean lo común.

RESOLUCIÓN:

Si nos preguntan cómo utilizaríamos una vela, responderíamos para ver en la oscuridad, que es lo común, pero la tarea consiste en ser creativos, por ejemplo:

* Para hacer dibujos o retratos en el techo o pared.

* Para sacar huellas o rastros de personas.

* Para hacer figuras utilizando la sombra que proyecta la luz de las velas.

* Para darle más consistencia a una pita y poder coser o amarrar con mayor facilidad algo que necesitamos.

INGENIO

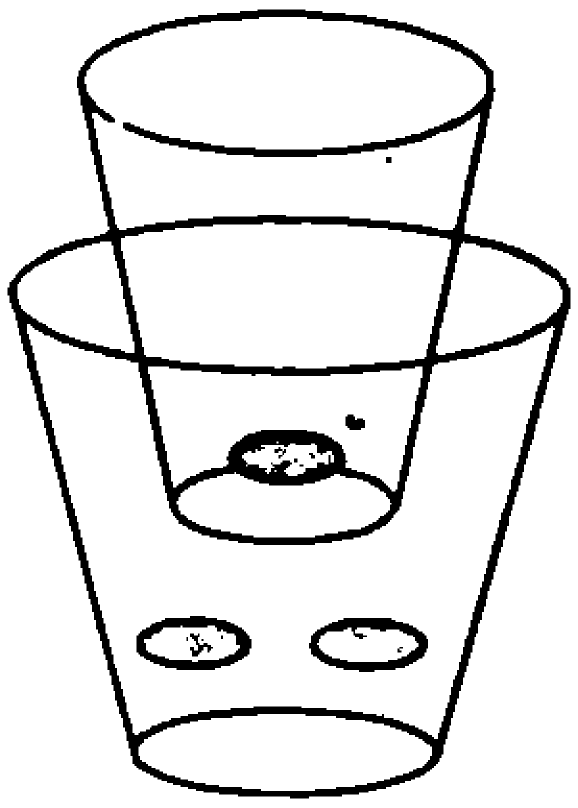
El ingenio es la predisposición para resolver algo en el mínimo tiempo y con el mínimo esfuerzo; es solucionar algo en base a la creatividad, es talento par discurrir con prontitud y facilidad. El ingenio se puede conseguir sometiendo el talento en embrión a excitantes ejercicios intelectuales. La lectura de textos será la mejor gimnasia y entrenamiento, para que el cerebro discurra con imaginación, facilidad y originalidad; que son las cualidades calificadas del ingenio.

En segundo lugar, luego de la lectura, está el trato frecuente con personas que gocen de justa fama de ingeniosas, y por último, tratar de resolver la mayor cantidad de problemas recreativos, que figuran en esta sección; dedicada a amenidades y que hoy es imprescindible en todas las revistas y periódicos.

EJEMPLO 1 :

Colocar *3* monedas en los *2* vasos, de tal manera que en cada vaso haya un número impar de monedas.

RESOLUCIÓN



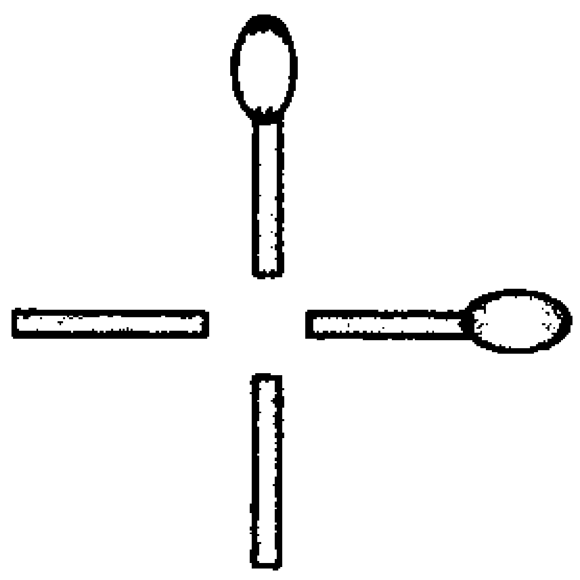
Para ello se coloca un vaso encima del otro y se colocan las monedas. En el vaso de arriba una moneda (impar) y el vaso de abajo tiene 3 monedas (impar) que son las dos del fondo y una que está en el otro vaso, pero que le pertenece por encontrarse en su espacio.

EJEMPLO 2 :

Hacer una cruz con *2* palitos de fósforos, sin que se crucen, ni que se toquen.

RESOLUCIÓN :

Se cortan los *2* palitos de fósforos por la mitad y se pone en la forma indicada, porque no estaba indicado no partirlos.



Matemática Recreativa

Es un área de las matemáticas que se concentra en la obtención de resultados acerca de actividades lúdicas (Juegos matemáticos) , o bien de resultar entretenida en su práctica.

El concepto de matemáticas recreativa **es tan viejo como lo son los juegos en los que interviene la lógica, o el cálculo de algún modo.**

Si siempre has identificado las Matemáticas con aquello de que «es tan claro como que dos y dos son cuatro», ¡ten cuidado!, porque, cuando leas este libro comprenderás que, bueno, sí, dos y dos *pueden ser* cuatro, pero depende de a *qué dos* y de a *qué cuatro* nos estemos refiriendo.

A continuación te esperan problemas diferentes, diferentes entre sí y diferentes muchos de ellos a lo que probablemente estés acostumbrado (y, quizá en algunos casos a lo que consideras Matemáticas). Es cierto, aparecerán números y habrá que hacer operaciones, pero en la inmensa mayoría de los casos, no harán falta más que las cuatro reglas básicas (y eso sí, grandes dosis de imaginación).

El objetivo de este capítulo no es que te conviertas en un *problemero* (alguien que conoce una gran cantidad de acertijos matemáticos) sino en un *problemista* (un experto en problemas que posea las armas necesarias para enfrentarse a nuevos retos).

Dicho de otra manera, si nunca te han gustado mucho las Matemáticas, quizá a partir de este capítulo quieras darles una nueva oportunidad. Si siempre te han gustado, abróchate el cinturón, que comienza el viaje.

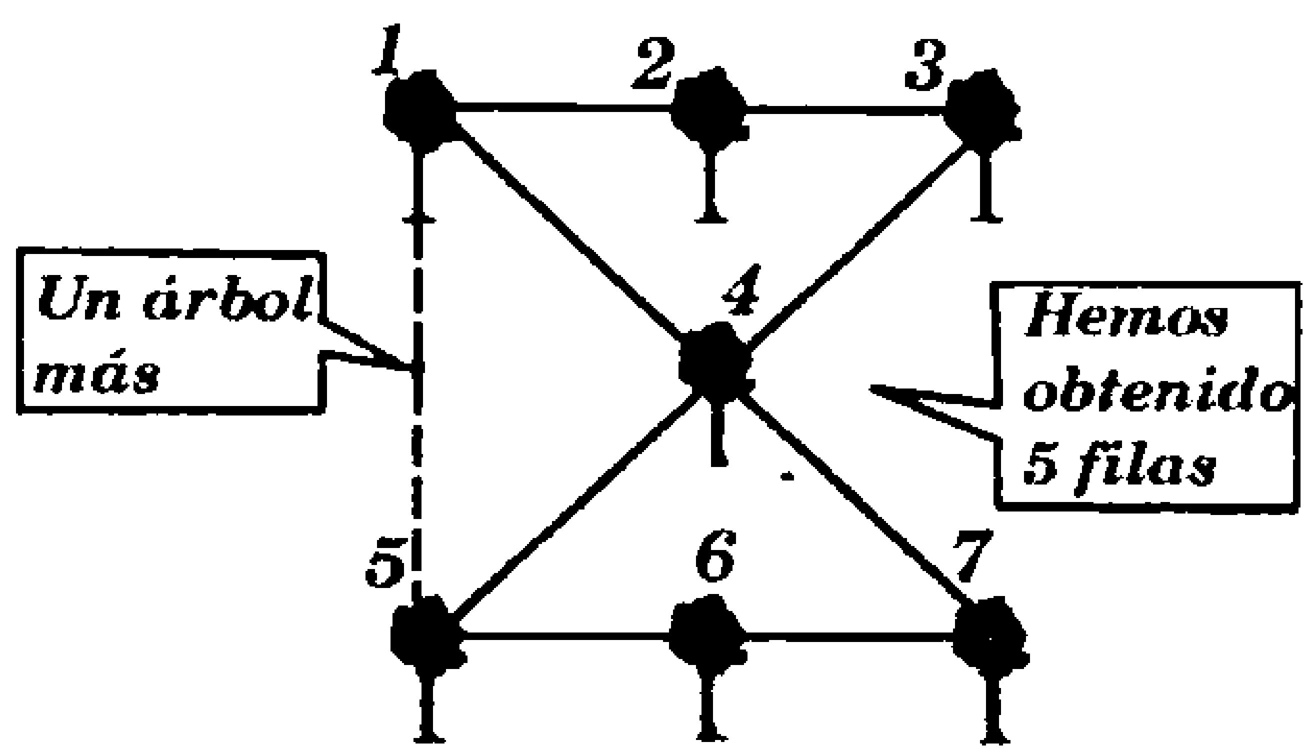
EJEMPLO 1 :

¿Cuántos árboles, como mínimo, se podrán plantar en *6* filas, si cada fila debe tener *3* árboles?

A) 18 *B) 10* *C) 9* *D) 8* *E) 7*

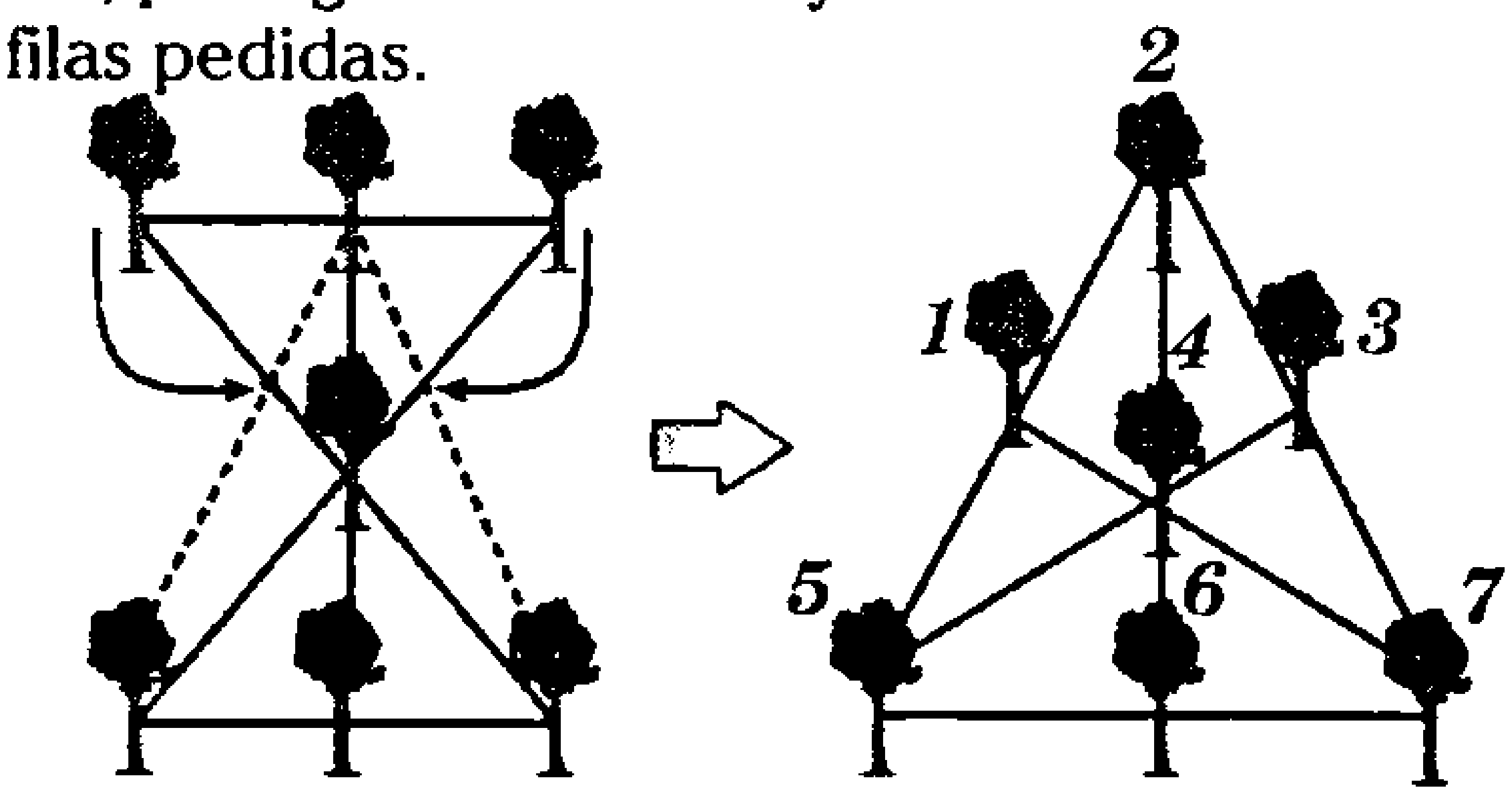
RESOLUCIÓN :

Piden obtener *6* filas de árboles cada una con el menor número de árboles. Podemos empezar con una distribución de *7* árboles.



Solo nos falta una fila, la cual podemos obtener ubicando un árbol más entre los árboles *1* y *5* ó *3* y *7*.

Sin embargo, podemos mover dos árboles (por ejemplo, el *1* y el *3*) lo cual implicaría perder una fila, pero ganar dos filas y así obtendremos las *6* filas pedidas.

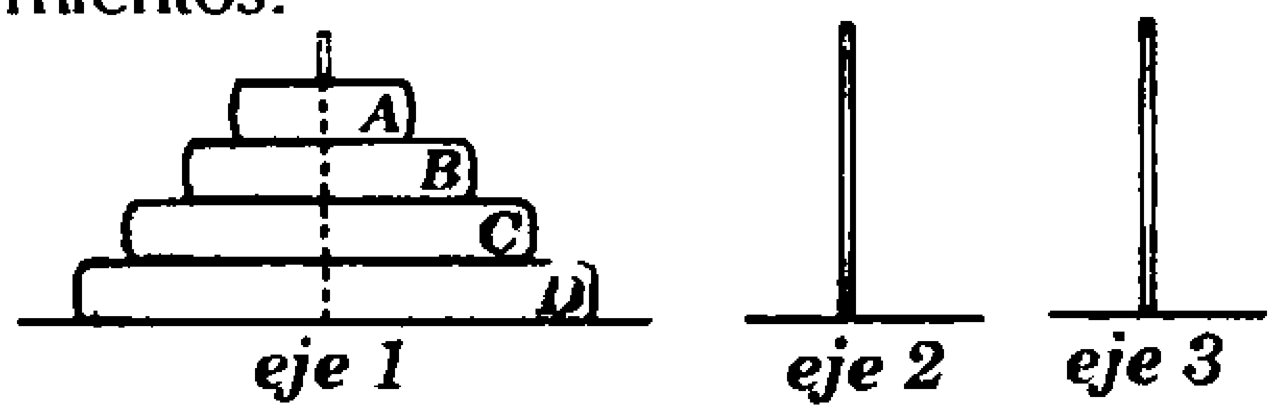


Por lo tanto, para formar *6* filas plantamos como mínimo *7* árboles.

RPTA : "E"

EJEMPLO 2 :

Se desea trasladar los cuatro discos del eje *1* al eje *3* con el mínimo número de movimientos. Solo se puede mover un disco por vez y nunca un disco de mayor diámetro puede estar sobre otro de menor diámetro. ¿Cuáles serán los tres últimos movimientos?

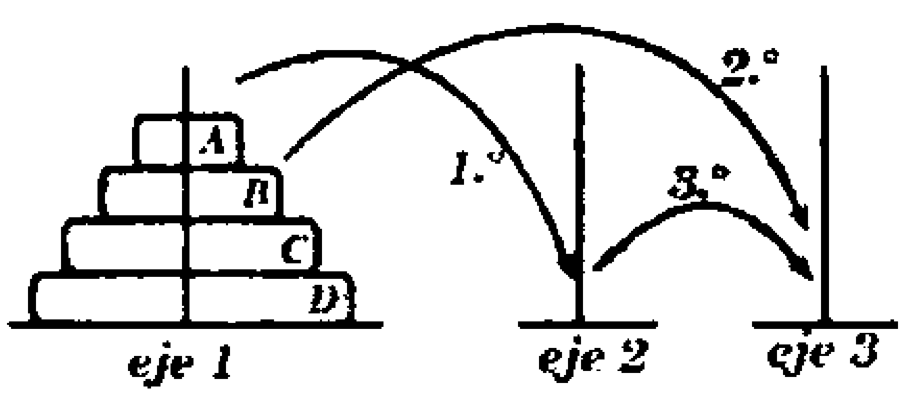


RESOLUCIÓN :

Nos piden trasladar los cuatro discos al eje *3*.

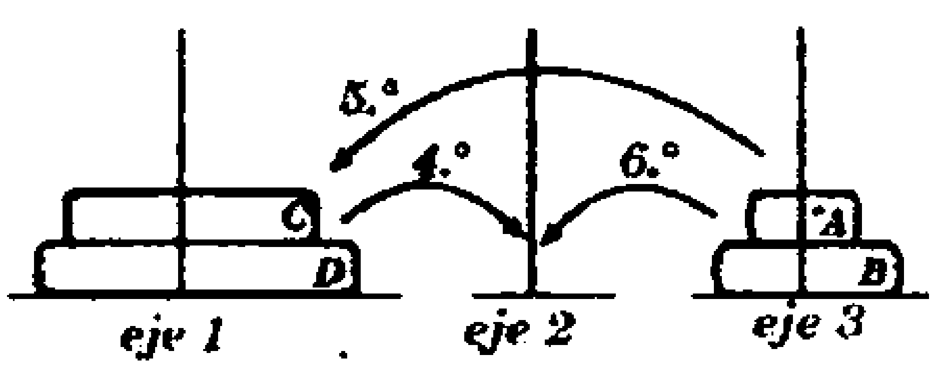
Condición del problema

Un disco grande no puede estar sobre otro más pequeño. Según ello podemos realizar los siguientes movimientos:

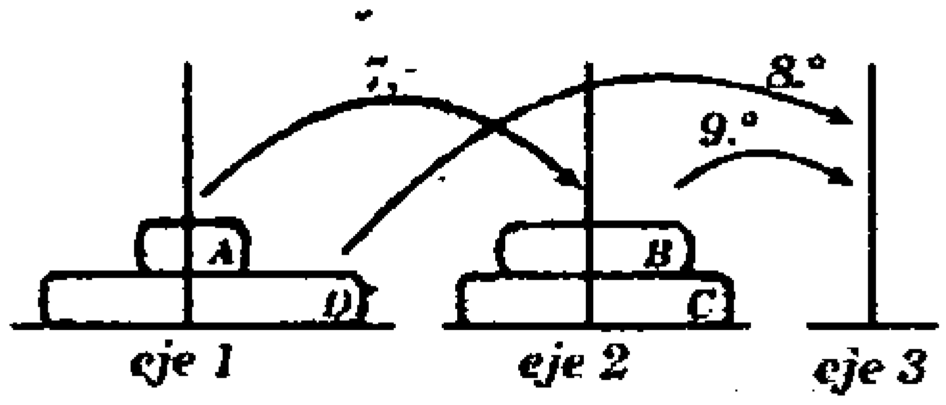


Movimientos

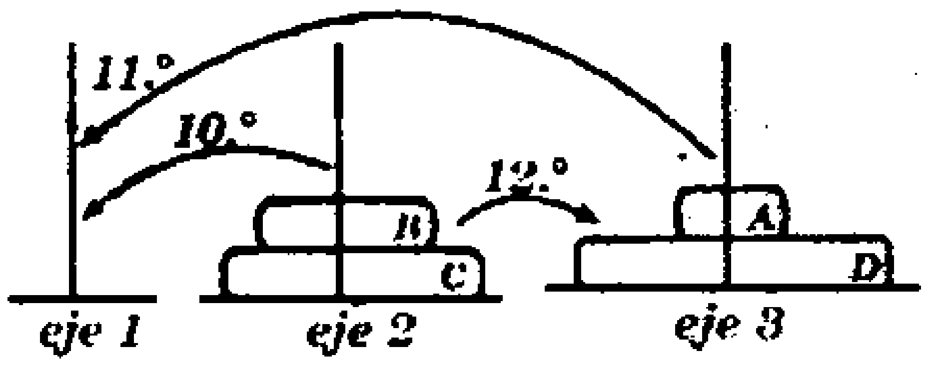
1.°Disco A al eje 2
2.°Disco B al eje 3
3.°Disco A encima de B



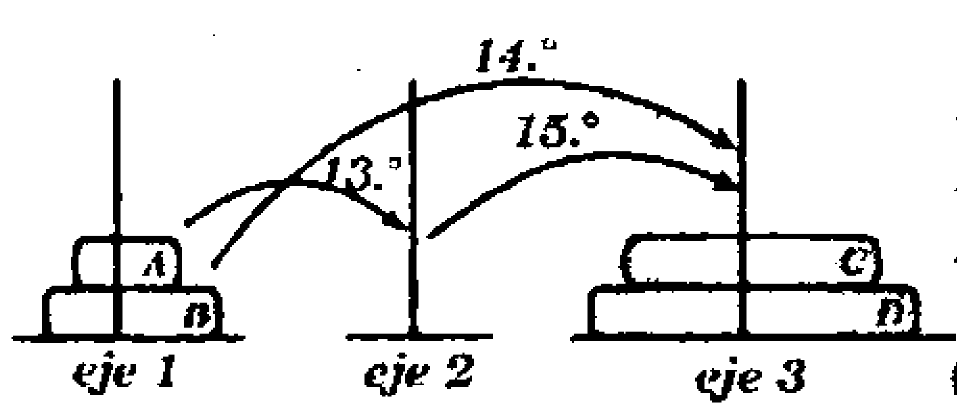
4.°Disco C al eje 2
5.°Disco A encima de D
6.°Disco B encima de C



7.°Disco A encima de B
8.°Disco D al eje 3
9.°Disco A encima de D



10.°Disco B al eje 1
11.°Disco A encima de B
12.°Disco C encima de D

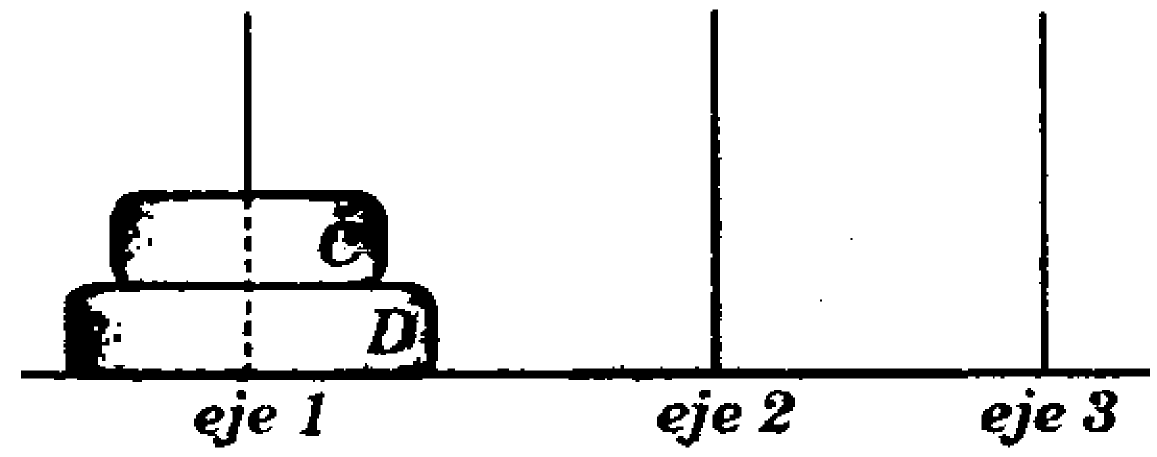


13.°Disco A al eje 2
14.°Disco B encima de C
15.°Disco A encima de B

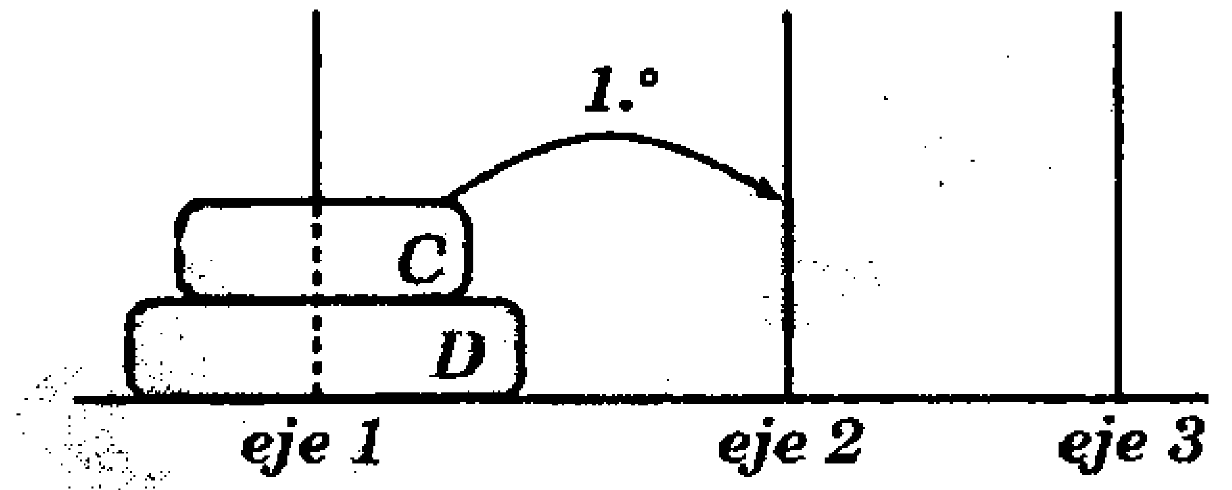
(estos son los tres últimos movimientos)

OBSERVACIÓN :

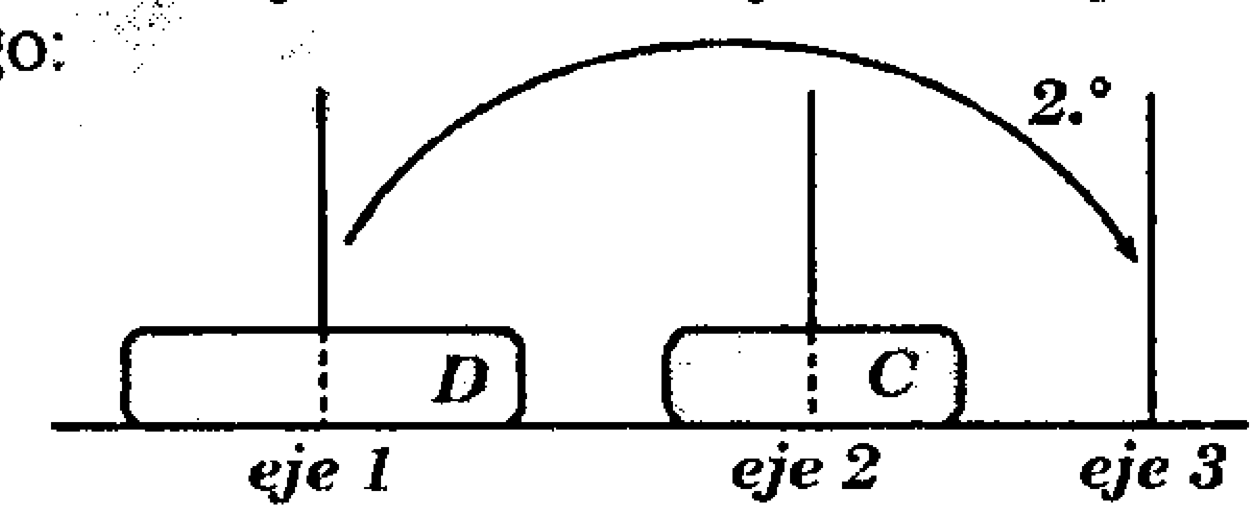
En problemas sobre traslados conviene realizar ensayos con un número menor de elementos, de esta forma habrá una mayor comprensión de las reglas y movimientos a realizar. Por ejemplo, antes de resolver el problema anterior podemos ensayar con dos discos.



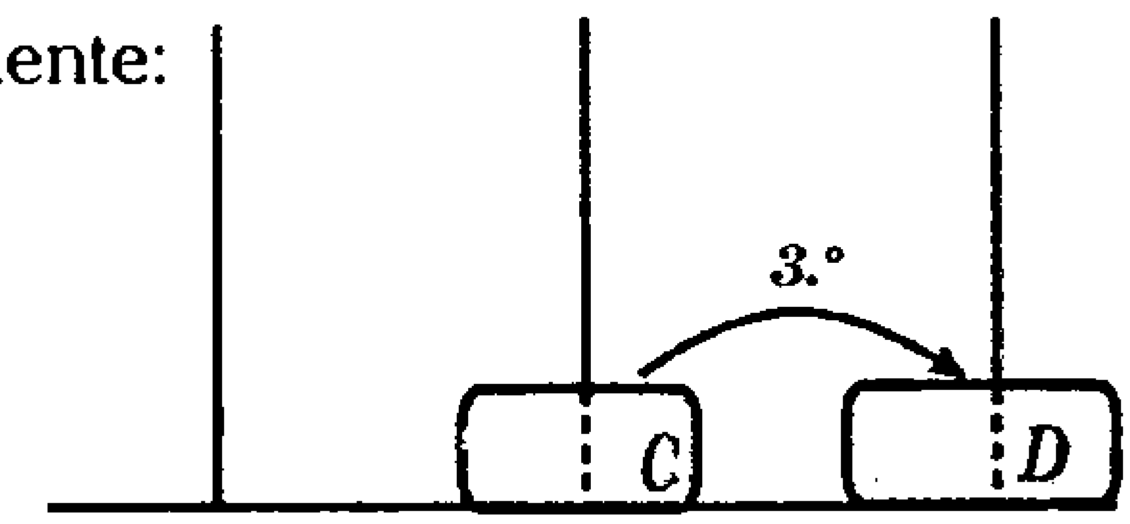
Como no está permitido que *D* esté encima de *C* (condición del problema) entonces *C* no puede pasar directamente al eje *3*. Por lo tanto:



Luego:



Finalmente:



Con lo cual fueron necesarios *3* movimientos.

En el caso de *3* discos***(B; C; D)*** se necesitarían como mínimo *7* movimientos (le dejamos como ejercicio probar esta afirmación).

EJEMPLO 3 :

Cierta clase de microbio tiene la propiedad de duplicarse en cada minuto. Si hay un recipiente y lo llena por la mitad a los *16* minutos, ¿en cuántos minutos se llenará el recipiente?

A) 32 B) 16 C) 17 D) 15 E) 18

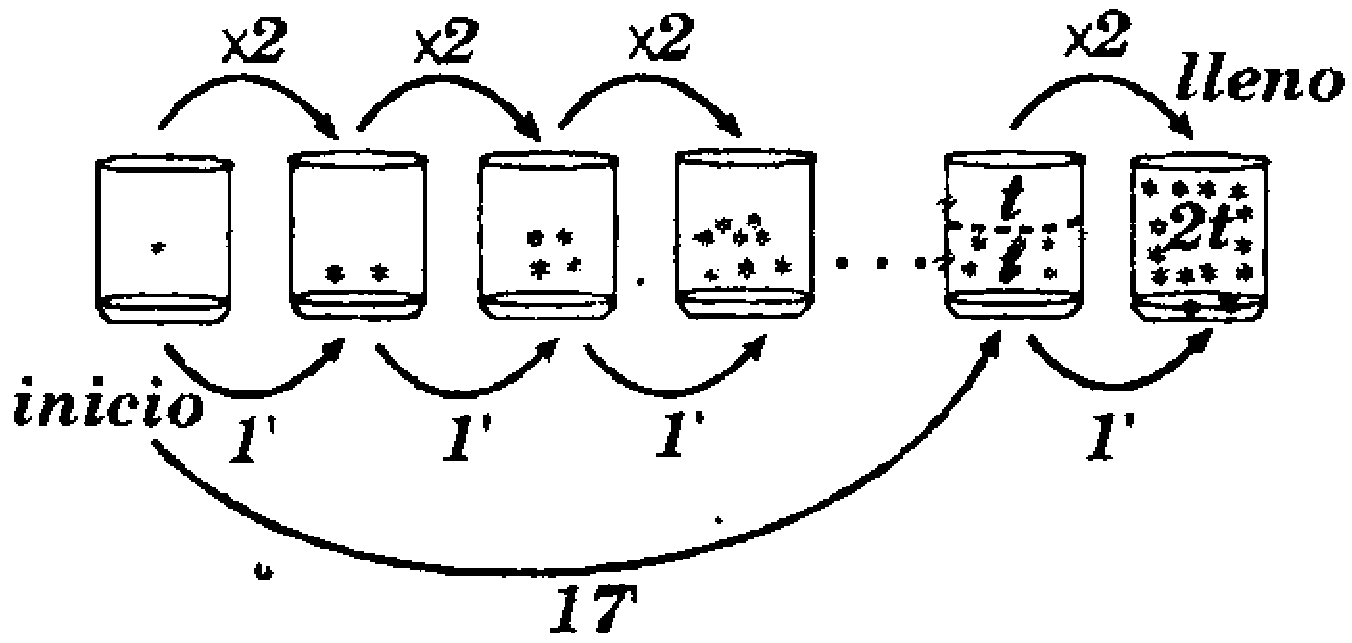
RESOLUCIÓN :

Piden: ¿en cuánto tiempo se llenará el recipiente?

Datos:

- Cierta clase de microbio se duplica cada minuto.
- Llena la mitad de un recipiente en *16* minutos.

Graficamos y analizamos los datos:



Observamos que para completar el recipiente, solo es necesario un minuto adicional.

Por lo tanto, el tiempo total para que se llene el recipiente de bacterias es *17* minutos.

RPTA : "C"

JUEGO

Modelo simplificado y formalizado que hace posible analizar matemáticamente una situación de conflicto, el juego se diferencia de una situación real en que éste se realiza en base a reglas completamente determinadas.

JUGADA :

Es la elección de una de las variantes previstas dentro de las reglas del juego. Se denominará jugada personal a la elección consciente por uno de los jugadores en la situación creada de una de las posibles jugadas y su realización.

Se denominará jugada de azar a la elección que se realiza dentro de una serie de posibilidades no por la decisión del jugador, sino por algún mecanismo de elección causal.

ESTRATEGIA :

Conjunto de reglas que determinan de manera única la elección en cada jugada personal del jugador, dado en dependencia de la situación que se haya creado en el proceso del juego.

PROBLEMAS SOBRE ESTRATEGIAS

En realidad, para resolver todo tipo de problema aplicamos ciertas estrategias, pero en este caso nos referimos a los juegos en que participan dos o más personas en forma alternada.

Debemos considerar que cada persona en su turno realizara su jugada(sometida a ciertas reglas) buscando anticipar la jugadas de sus oponentes y siguiendo un procedimiente lógico que le permita tomar el control del juego y garantizar su victoria.

EJEMPLO 1 :

Brian y Bruno juegan a extraer fichas de una caja con las siguientes reglas: se puede extraer de *1* a *4* fichas, gana el que retira la última. Si en la caja quedan *5* fichas, le toca jugar a Brian y ninguno de los dos se equivoca, ¿quién ganará?; y si en vez de *5* quedasen *8*, ¿quién ganaría?

RESOLUCIÓN :

Por condición del problema gana el que retire la última ficha.

En el caso que hubiesen 5 fichas

○○○○○, Brian no podría retirarlas todas (pues a lo más puede retirar *4* fichas); las fichas que quedasen las retiraría Bruno y entonces él ganaría.

En el caso que hubiesen 8 fichas

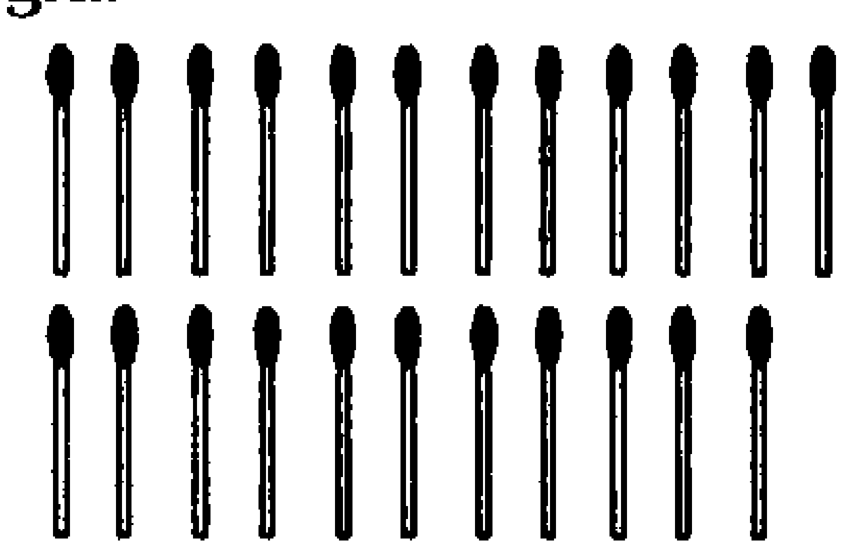
○○○○○○○○, Brian puede aprovechar la situación anterior retirando *3* fichas. Al quedar $8-3=5$ fichas tendríamos la situación inicial solo que ahora le tocaría a Bruno (se invierten los papeles) y por lo tanto ganaría Brian, pues ahora sería él quien retire la última ficha.

OBSERVACIÓN :

En problemas sobre estrategias conviene usar las condiciones desfavorables en unos casos como condiciones favorables para otros en la elaboración de la estrategia ***(intercambio de roles).***

EJEMPLO 2 :

Lenin y Bryan juegan a retirar cerillas de la mesa, cada uno en su turno puede retirar ***1; 2; 3*** ó ***4*** cerillas, gana aquel que deja la mesa sin cerillas. En la mesa hay ***23*** cerillas. Si Lenin inicia, ¿cuántos cerillas(palitos de fosforo) debe retirar en su primer turno para asegurar su triunfo, siguiendo una estrategia?

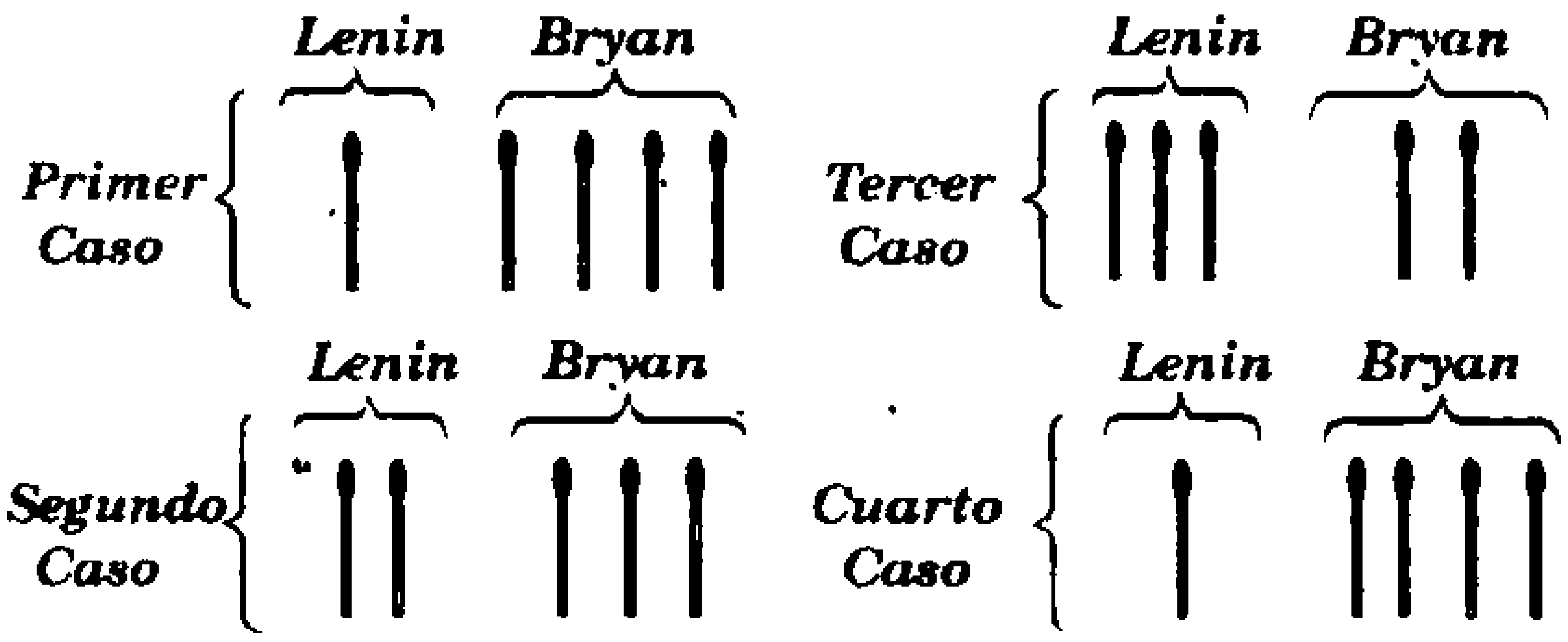


RESOLUCIÓN :

Consideremos lo siguiente:

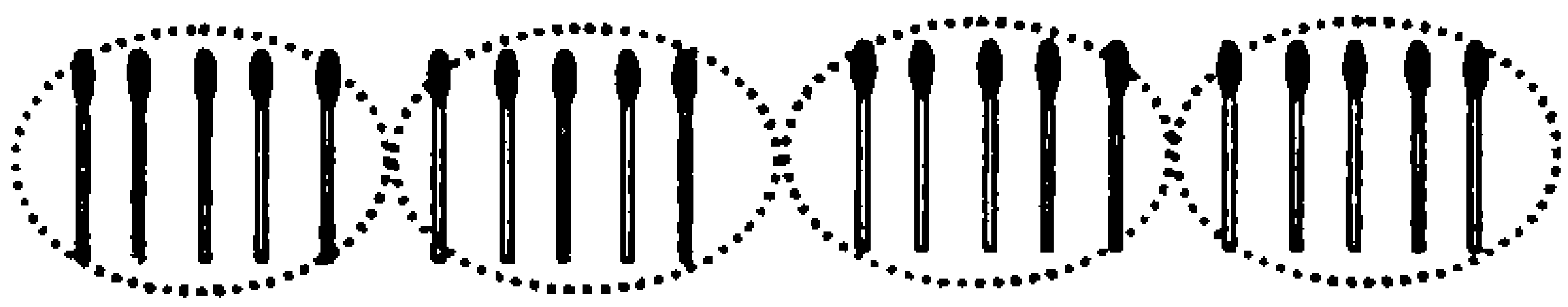
* Si hubiesen *4* ó menos cerillas , Lenin ganaría.

* Si hubiesen ***5*** cerillas , Lenin perdería, así :



Luego del turno de Lenin, Bryan puede eliminar por completo la fila (con lo cual gana).

De igual forma, si hubiesen ***10 ; 15*** ó ***20*** cerillas.



Luego del turno de Lenin, Bryan puede eliminar una fila (grupo de ***5***) quedando ***3*** grupos de ***5***, similarmente puede eliminar estos grupos luego del turno de Lenin hasta que no queden cerillas (con lo cual gana).

En el caso de ***23*** cerillas a Lenin le convendría retirar ***3*** cerillas. Quedando ***23 – 3=20*** cerillas y siendo el turno de Bryan, este perderá (como se describió en los casos anteriores pero con los papeles invertidos: Lenin por Bryan y viceversa).

Estrategias de Lenin :

En su primera jugada Lenin debe retirar ***3*** cerillos y luego en su turno eliminar un grupo de ***5*** cerillas en conjunto con lo que retire Bryan en su turno.

¿ES ENSEÑABLE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?

Para resolver un problema no existen fórmulas mágicas *(Encontrar reglas infalibles aplicables* a *todo tipo* de *problemas no* es *mas que un viejo sueño filosófico sin ninguna posibilidad de realizarse* - Polya), pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: *la única manera de resolver un problema* es *por ideas brillantes que* se *tienen* o *no* se *tienen.*

La habilidad se adquiere mediante la imitación y la practica, por ello en los alumnos debe hacerles interesarse y darles el mayor número posible de ocasiones de imitación y práctica.

No se puede negar que en el camino hacia la resolución de un problema aparecen *ideas brillantes* pero esto esta al alcance. ¿Qué es una *idea brillante?* Es una transformación brusca y esencial de nuestro punto de vista, una reorganización repentina de nuestro modo de concebir el problema, una previsión de las etapas ~~que nos llevarán a la solución, previsión en la cual~~ pese a su aparición repentina.

JUEGOS LÓGICOS

Preguntas que requieren de la habilidad de pensar clara y lógicamente a partir de los datos dados en cada enunciado , la habilidad de comprender y ordenar un conjunto de datos , y de manejarlos simultáneamente en la solución de problemas . En muchas situaciones será necesario de utilizar gráficos .¿Cómo emprenderemos , la resolución de los problemas?

EJEMPLO 1 :

La siguiente tabla muestra el resultado de los partidos de un torneo de ajedrez. Si los partidos ganados abonan ***2*** puntos , los empatados ***1*** punto y los perdidos ***0*** puntos y sólo falta el encuentro entre José y Martín , ¿a quién le ganó José?

Nombres	P.J.	P.G	P.E.	P.P.	Ptos.
Juan	6	6	0	0	12
Carlos	6	5	0	1	10
Javier	6	3	1	2	7
Eduardo	6	2	0	4	4
José	6	1	2	2	4
Martín	6	1	0	4	2
Pedro	6	0	1	5	1

A) Carlos ***B) Martín*** ***C) Pedro***
D) Eduardo ***E) Javier***

RESOLUCIÓN :

* Son en total 7 personas :

Juan tiene ***6*** partidos jugados y ***6*** partidos ganados. Entonces Juan ganó a todos

⇒Juan le ganó a José ...***(I)***

* Carlos tiene ***6*** partidos jugados y ganó ***5*** partidos y perdió ***1,*** entonces Carlos perdió ante Juan y ganó a los demás, entonces : Carlos le ganó a José .

* Viendo la columna de los partidos empatados ...***(II)***

Javier empató ***1*** partido

José empató ***2*** partidos

Pedro empató *1* partido

⇒ José empató con Javier y José empató con Pedro ....*(III)*

José todavía no juega con Martín ......*(IV)*

* Sólo falta saber como fue el partido entre José y Eduardo.

* En la columna de partidos ganados, se observa que José ganó *1* partido y de *(I),(II),(III)* y *(IV)* ⇒ José ganó a Eduardo

RPTA : "D"

PROBLEMAS RESUELTOS

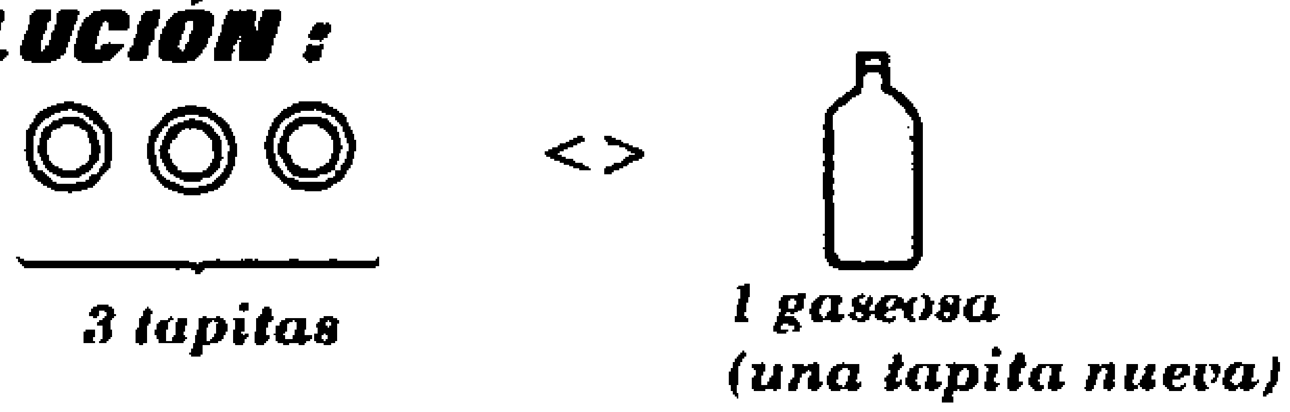
PROBLEMA 1 :

La promoción de una nueva gaseosa dice que por *3* de sus tapitas se regala una nueva gaseosa. Si ya se tienen *11* tapitas, ¿cuántas gaseosas más se podrá consumir como máximo?

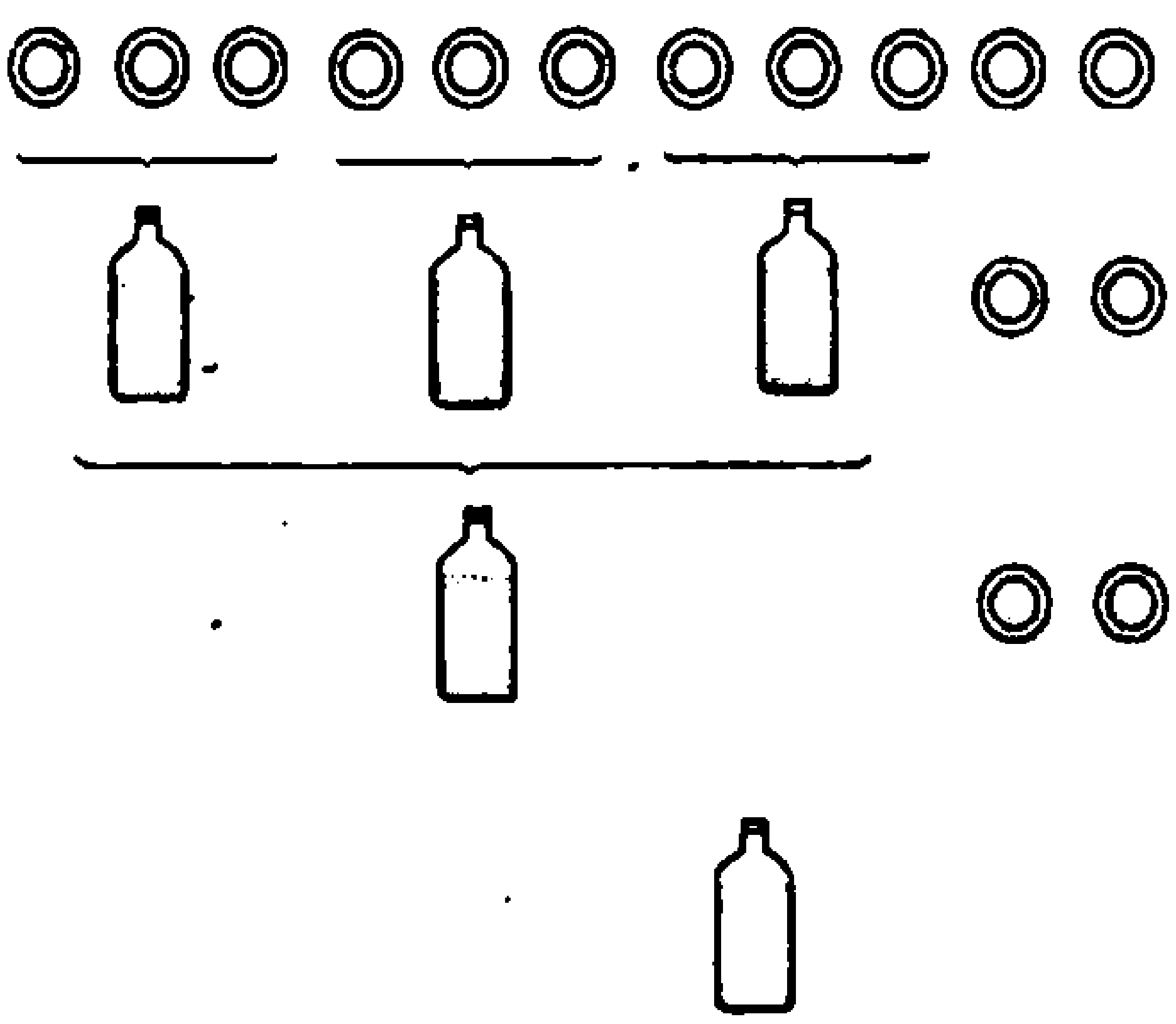
A) 4 *B) 3* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

Dato:



Entonces, cono tenemos 11 tapitas



⇒ Número de gaseosas adicionales: *5*

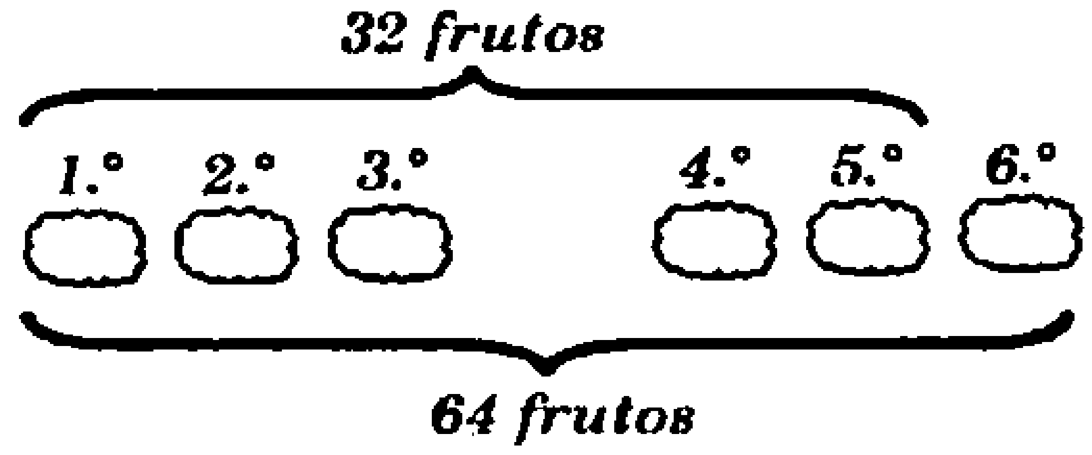
RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Un árbol cada día duplica los frutos que tenía hasta el día anterior. Si en *6* días el árbol tenía *64* frutos, ¿En cuántos días tuvo el árbol *16* frutos?

A) 4 *B) 5* *C) 6* *D) 2* *E) 3*

RESOLUCIÓN :



Como cada día duplica los frutos que tenía hasta el día anterior, entonces el sexto día duplicó lo que tenía hasta el día *5* y el quinto día duplicó lo que tenía el día *4*.

$\begin{cases} 6.^{to} \text{ día } 64 \text{ frutos} \\ 5.^{to} \text{ día } 32 \text{ frutos} \\ 4.^{to} \text{ día } 16 \text{ frutos} \end{cases}$

Por lo tanto, tuvo *16* frutos a los *4* días.

RPTA : "A"

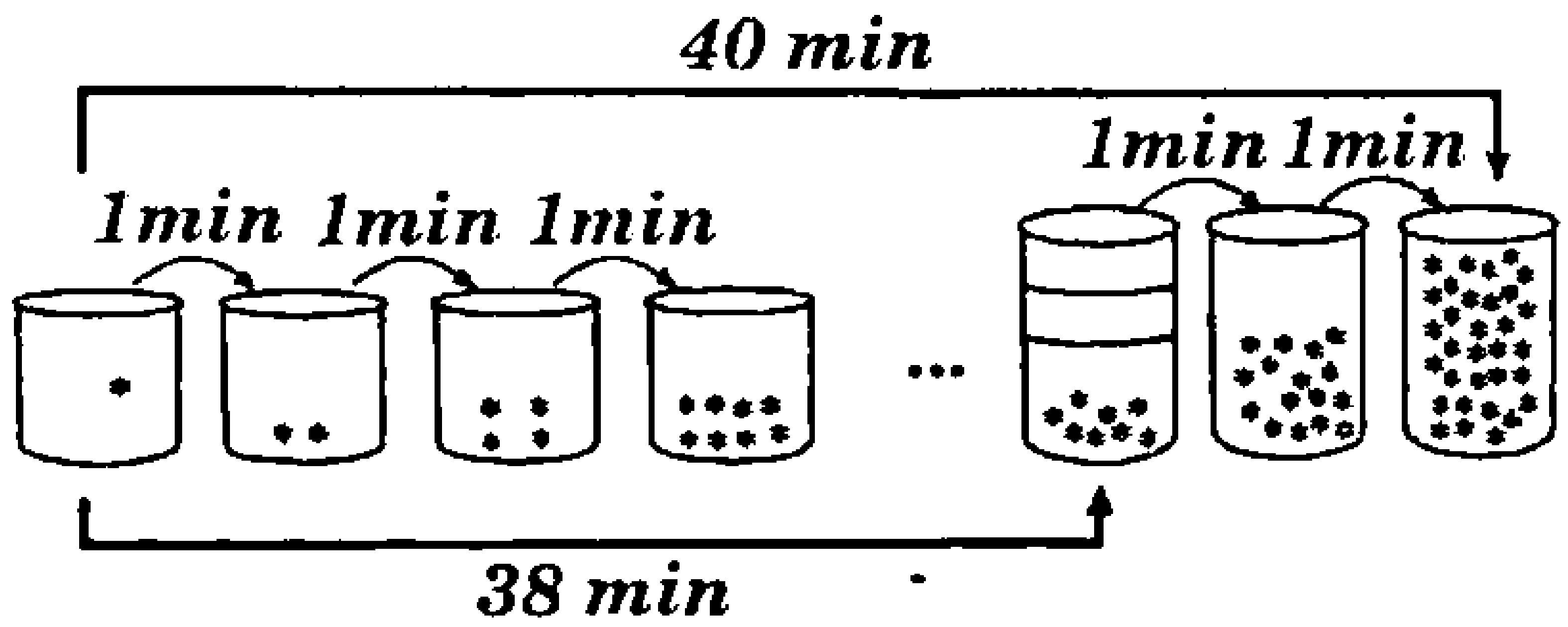
PROBLEMA 3 :

Un hongo se duplica cada minuto. Si se coloca *1* hongo en un frasco, este frasco se llena en *40* minutos. ¿A los cuántos minutos el frasco estuvo lleno hasta su cuarta parte?

A) 5 *B) 10* *C) 20* *D) 30* *E) 38*

RESOLUCIÓN :

Del enunciado del problema:

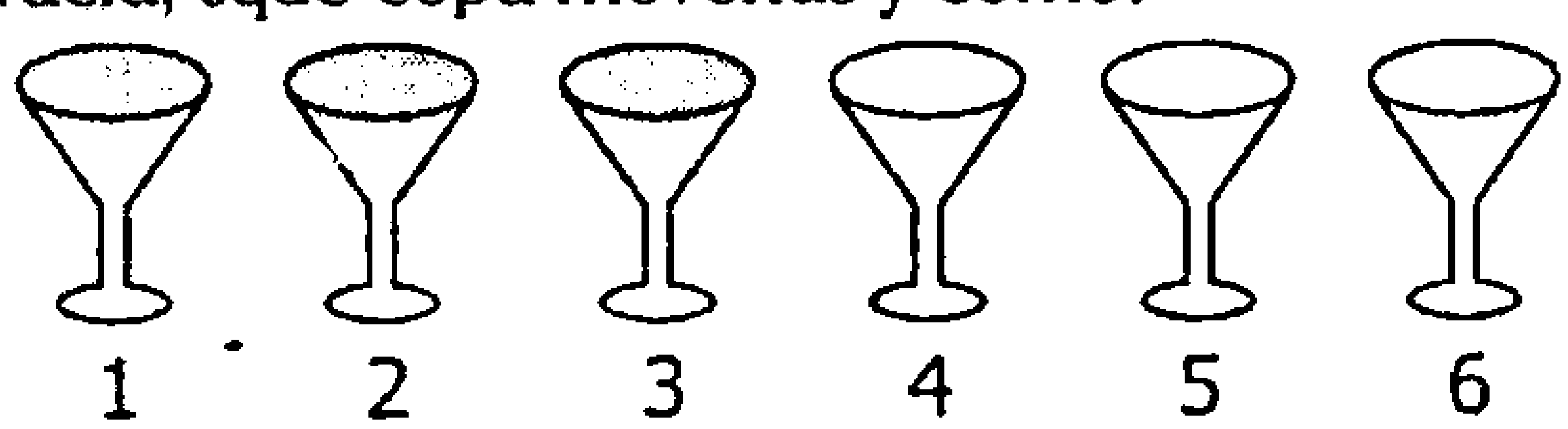


Por lo tanto, estuvo lleno en *38* minutos.

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

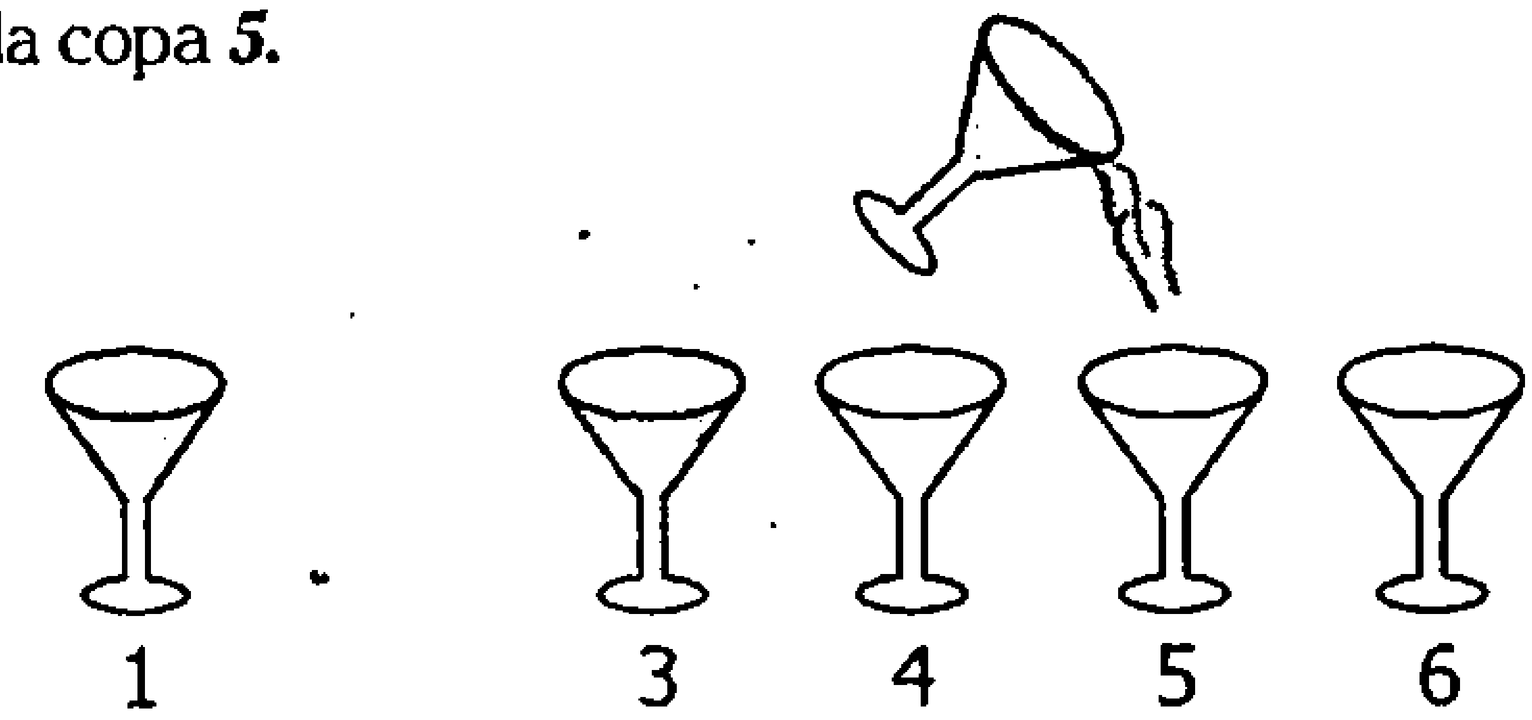
La siguiente figura representa seis copas, las tres primeras están llenas con vino y las tres últimas están vacías. Moviendo una sola copa lograr que éstas queden alternadas; es decir, una llena y una vacía, ¿qué copa moverías y cómo?



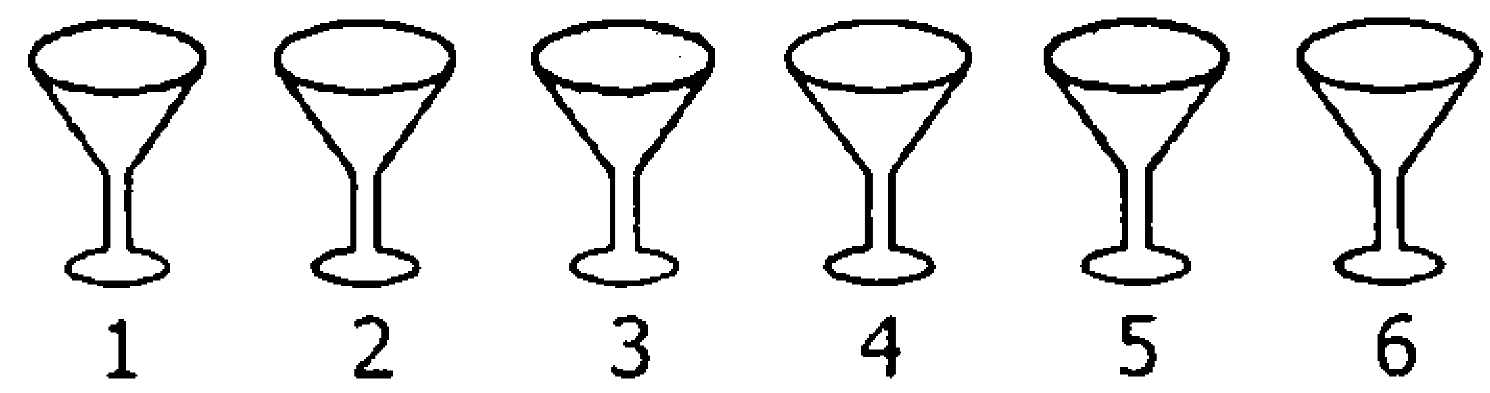
RESOLUCIÓN

Moveríamos la copa *2* y vaciamos su contenido en

la copa *5*.



Luego de ello quedaría así:



PROBLEMA 5 :

La siguiente figura representa *8* vasos, los cuatro primeros vacíos y los *4* restantes con gaseosa , moviendo únicamente *2* copas , deben quedar intercambiados los vasos con gaseosa , es decir, uno vacío , otro lleno. ¿Qué vasos moverías y como?

RESOLUCIÓN:

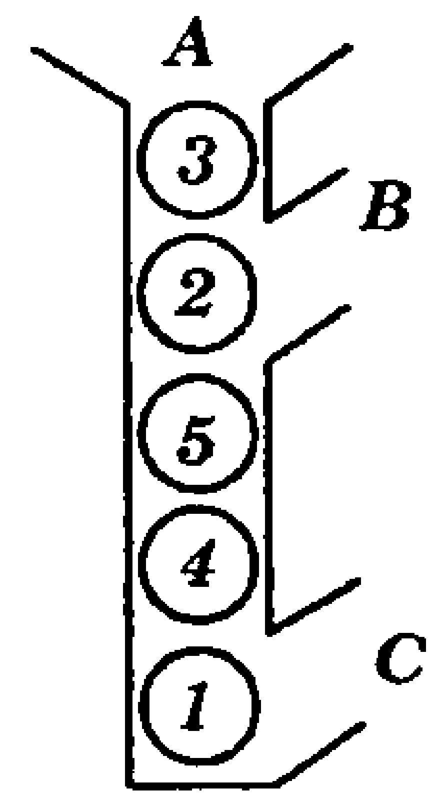
Ver la siguiente figura:

Bastará solamente vaciar la octava copa en la primera y la sexta copa en la segunda.

Entonces: deben moverse como mínimo *2* vasos.

PROBLEMA 6 :

En el gráfico se muestra un recipiente abierto en *A*, *B* y *C* con cinco esferas numeradas. Si una operación consiste en sacar solo una esfera por *B* o *C* e inmediatamente introducirla por *A*, ¿cuántas operaciones, como mínimo, se deben realizar para obtener el orden *1*; *2*; *3*; *4*; *5* de arriba hacia abajo?



A) 4

B) 7

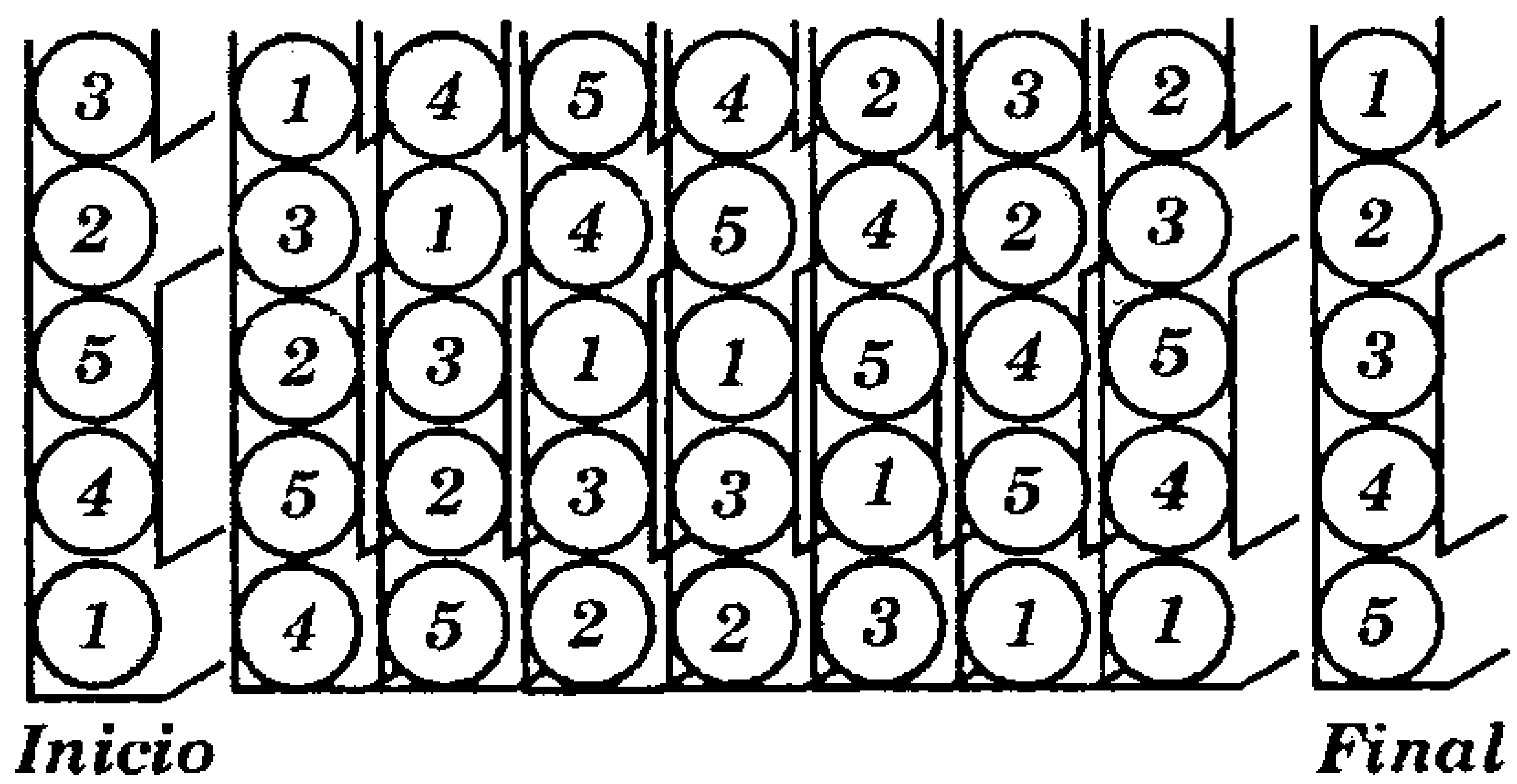
C) 8

D) 10

E) 12

RESOLUCIÓN :

De las condiciones del gráfico para obtener el orden deseado se puede retirar esferas por los orificios del recipiente. Se ha coloreado la esfera que debe salir por el orificio respectivo en cada movimiento.

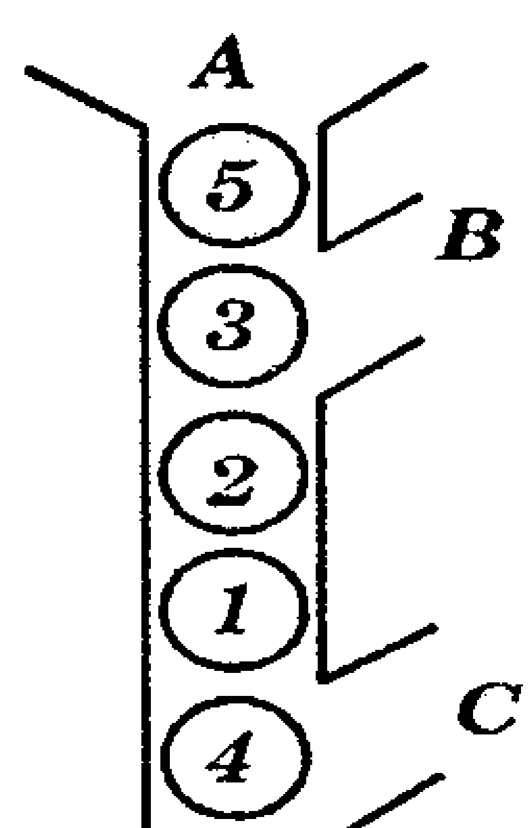


El menor número de operaciones es *8*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

En el gráfico se muestra un recipiente abierto en *A*, *B* y *C*, con cinco esferas numeradas del *1* al *5*. Si una operación consiste en extraer solo una esfera por *B* o *C* e inmediatamente introducirla por *A*, ¿cuántas operaciones se deben realizar, como mínimo, para obtener el orden de *1*; *2*; *3*; *4* y *5* de arriba hacia abajo?



A) 5

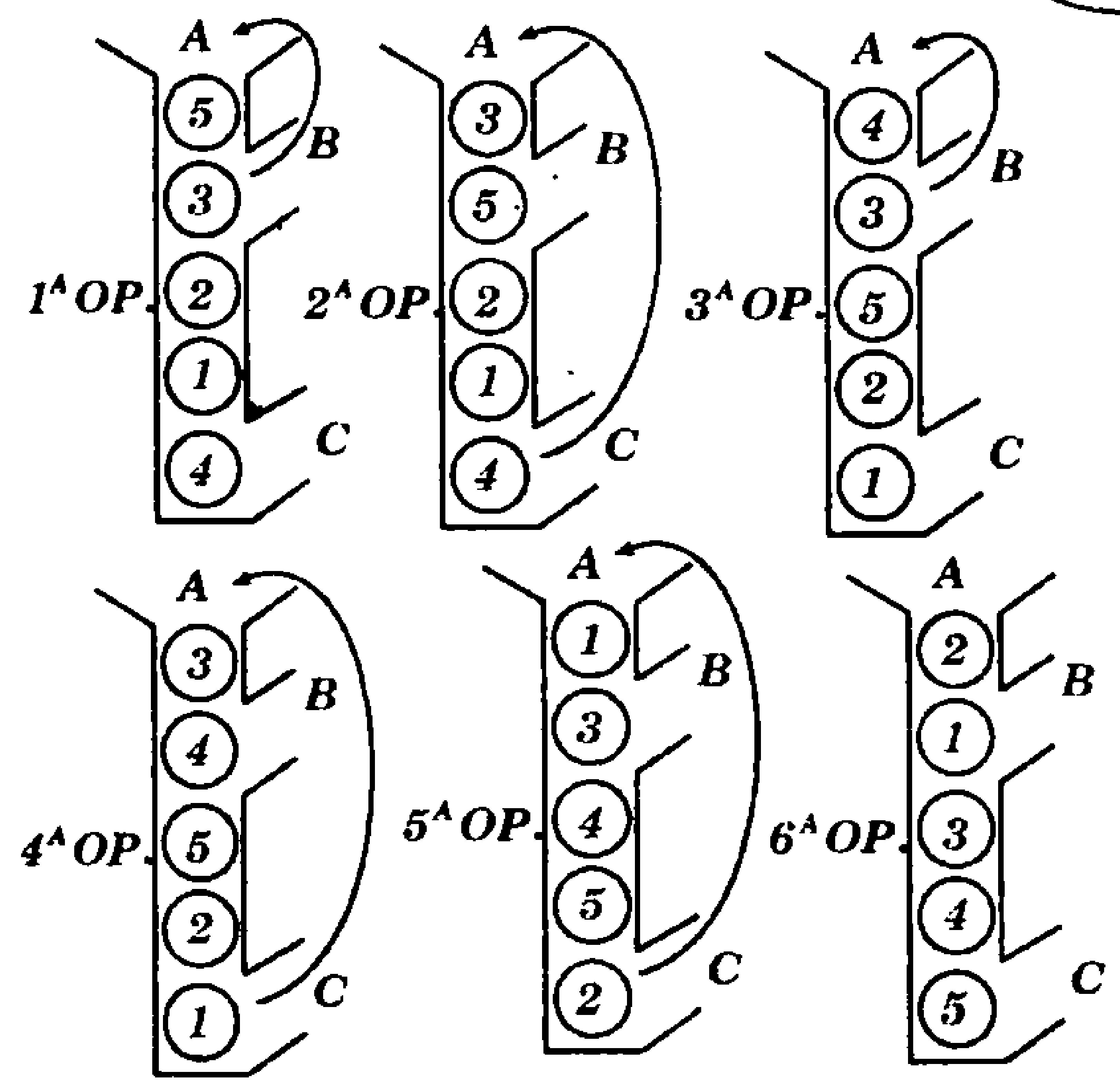
B) 7

C) 9

D) 6

E) 8

RESOLUCIÓN :



Realizando la sexta operación se obtiene el orden pedido.

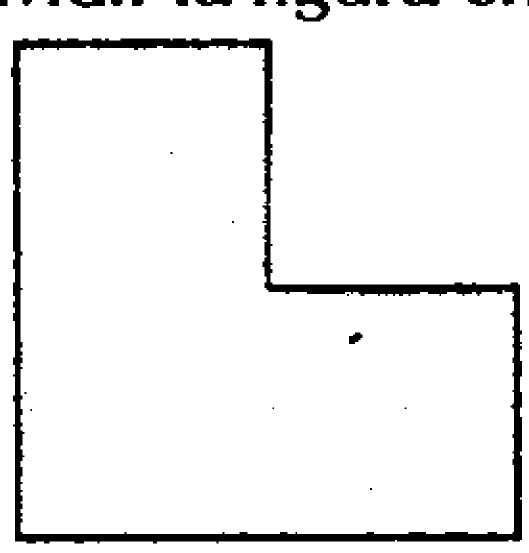
El mínimo número de operaciones es *6*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

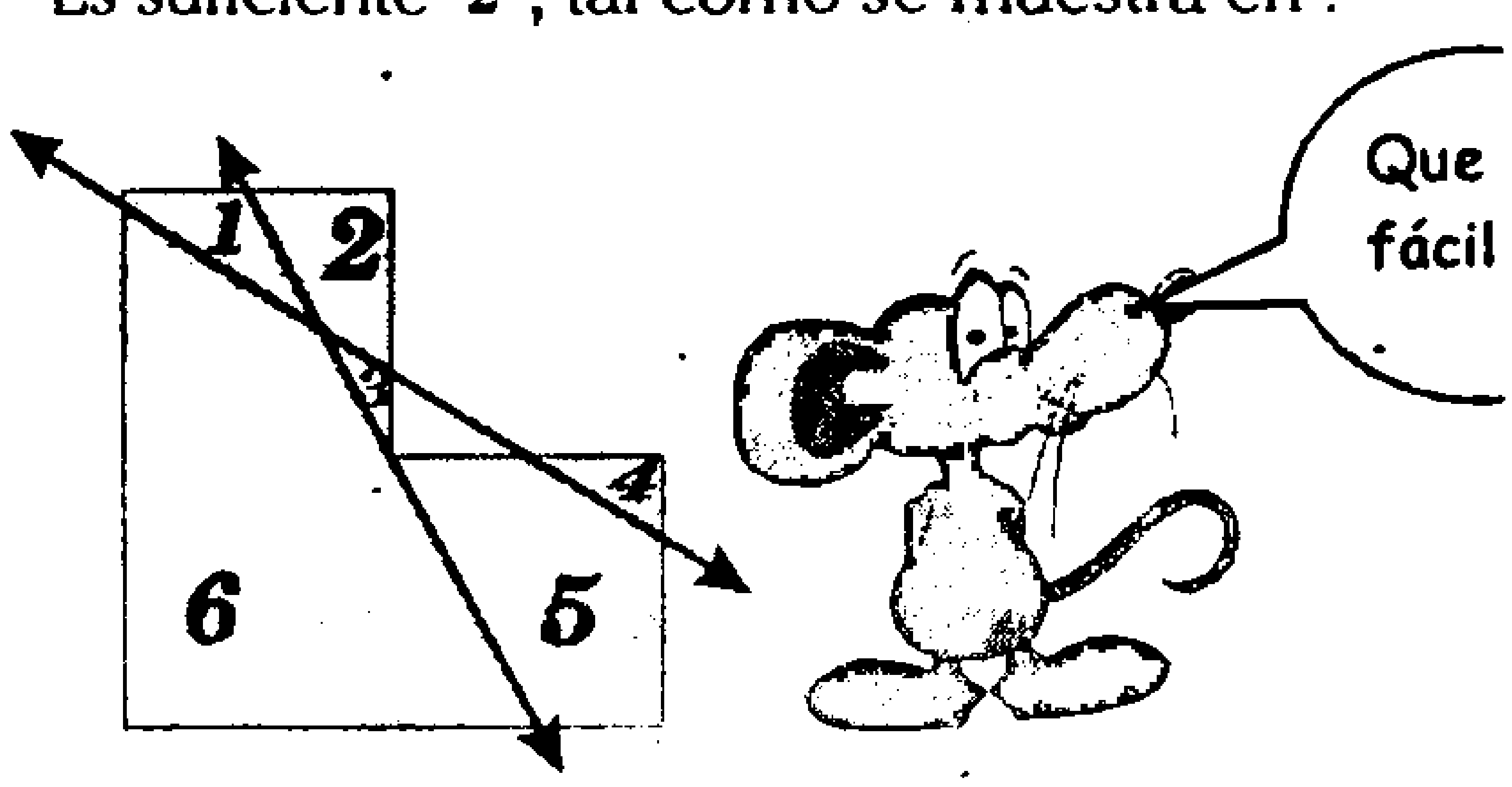
¿Cuál es el menor número de rectas que deben trazarse, para dividir la figura en *6* regiones?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN :

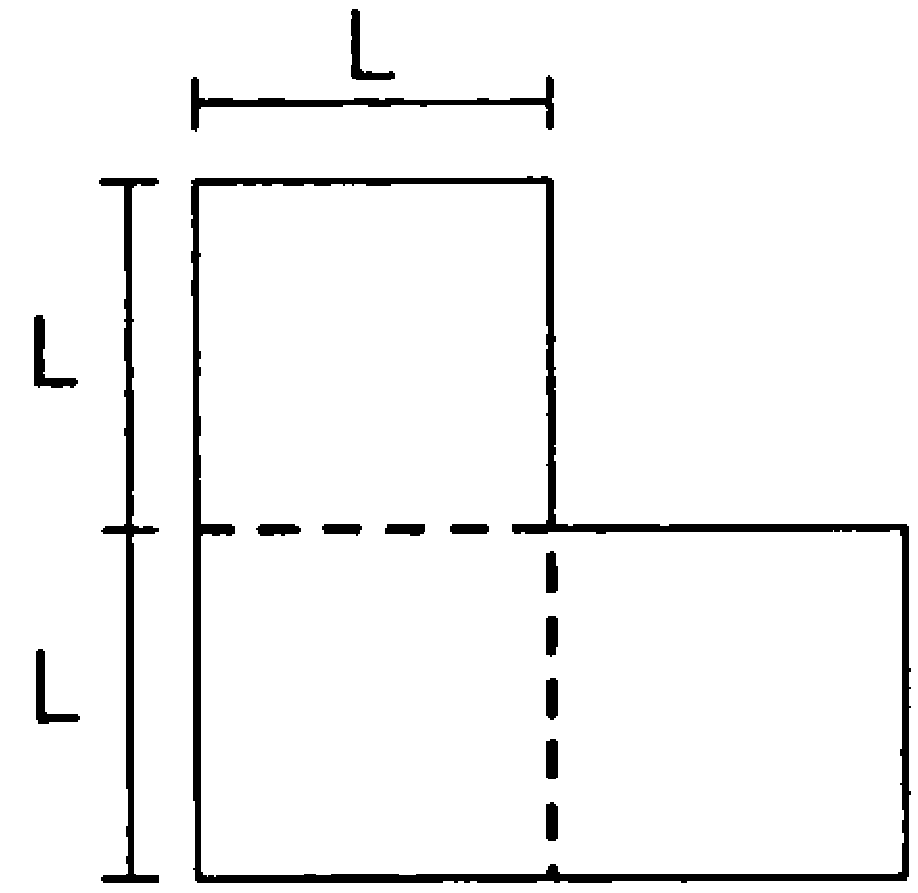
* Es suficiente *2* , tal como se muestra en :



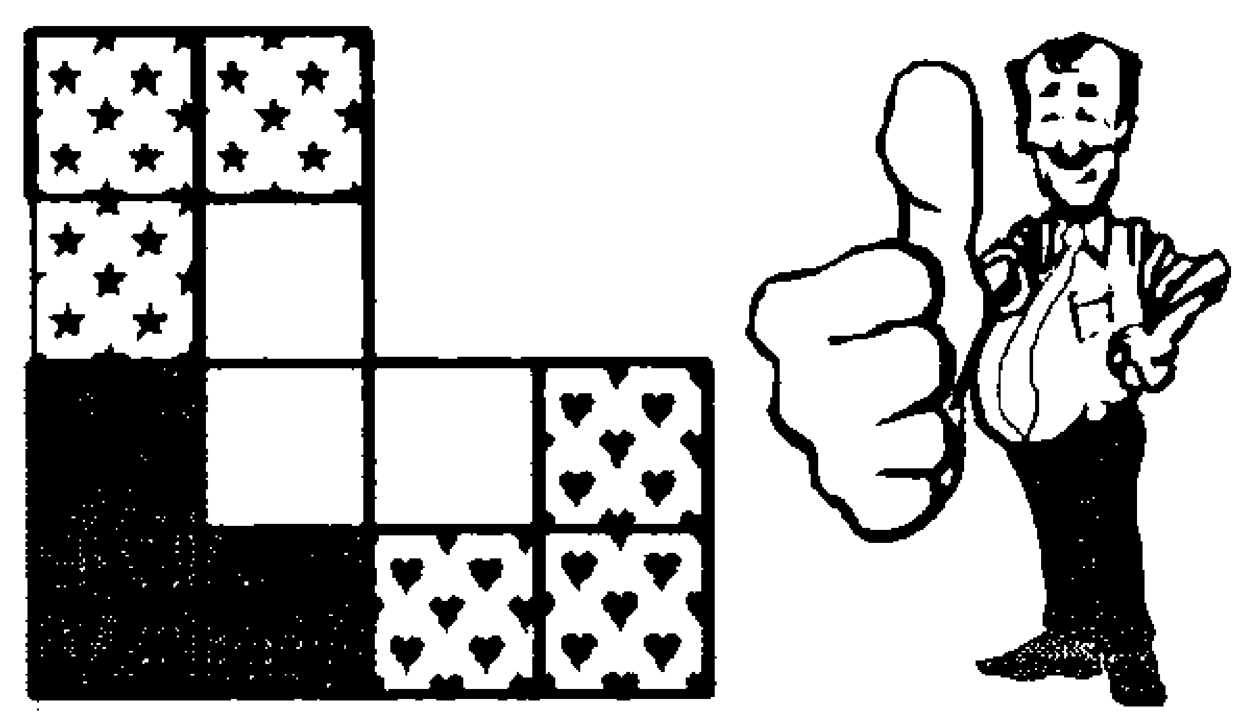
RPTA: "B"

PROBLEMA 9 :

Dividir la figura en cuatro partes exactamente iguales en forma y tamaño. (La figura está compuesta por *3* cuadrados de lado "*L*")



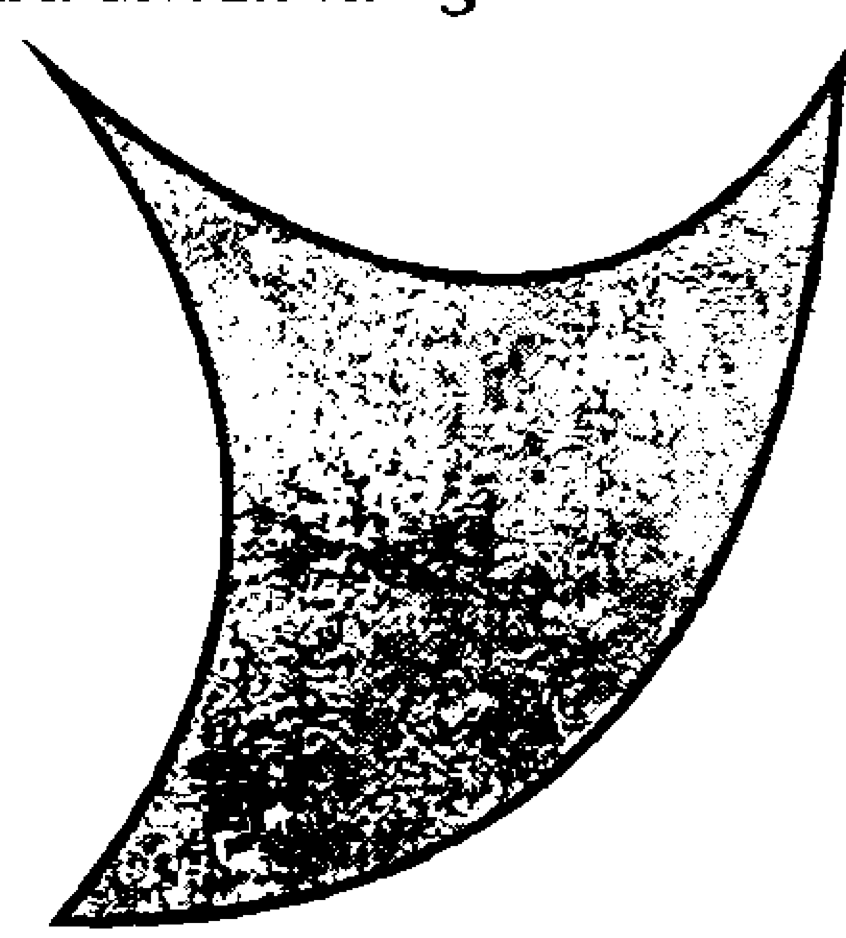
RESOLUCIÓN:



PROBLEMA 10 :

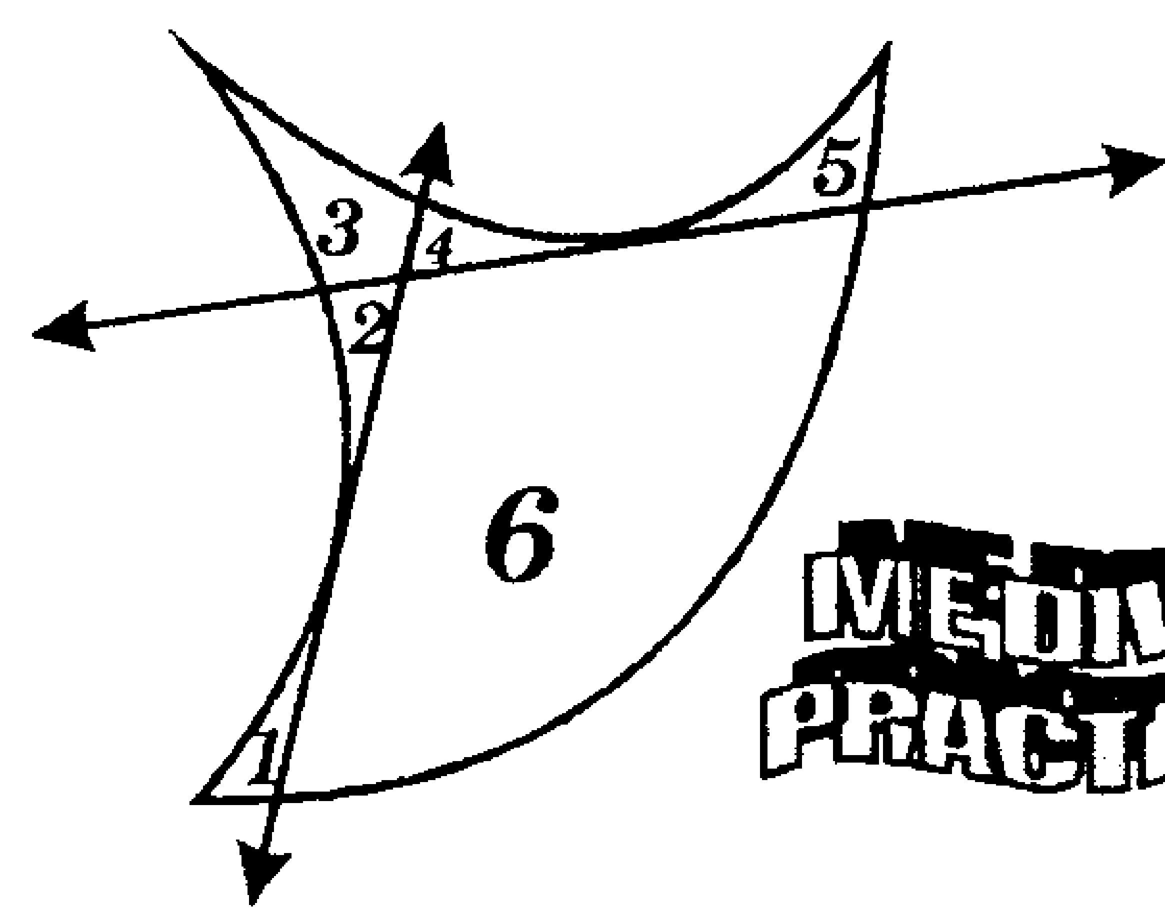
¿Cuál es el menor número de rectas que deben trazarse, para dividir la figura en *6* regiones?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



RESOLUCIÓN :

* Es suficiente *2*, tal como se muestra en :



RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

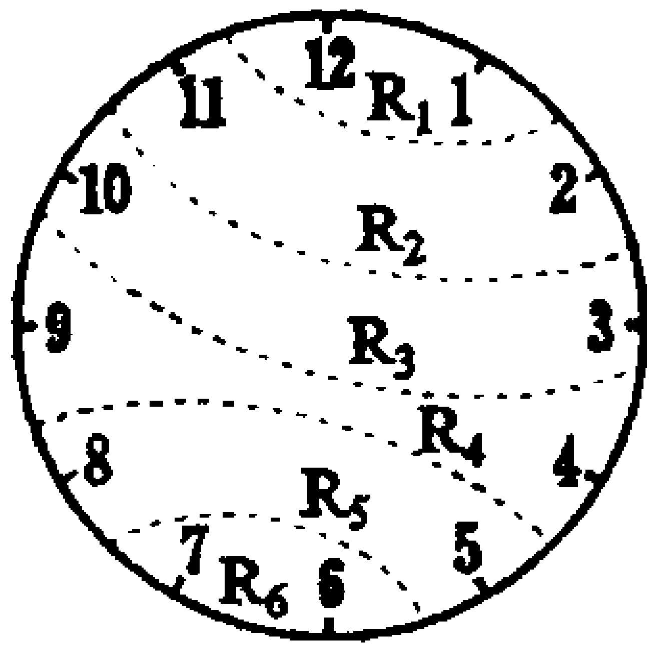
Se trata de dividir la esfera de un reloj en *6* regiones de tal manera que en cada región la suma de los números sea la misma. ¿Cuál es la suma de cada región?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 10

RESOLUCIÓN :

La suma de cada región es :

$$\frac{\text{Suma de todos los \#s del reloj}}{\text{\# de regiones iguales}}=\frac{78}{6}=13$$



RPTA : "A"

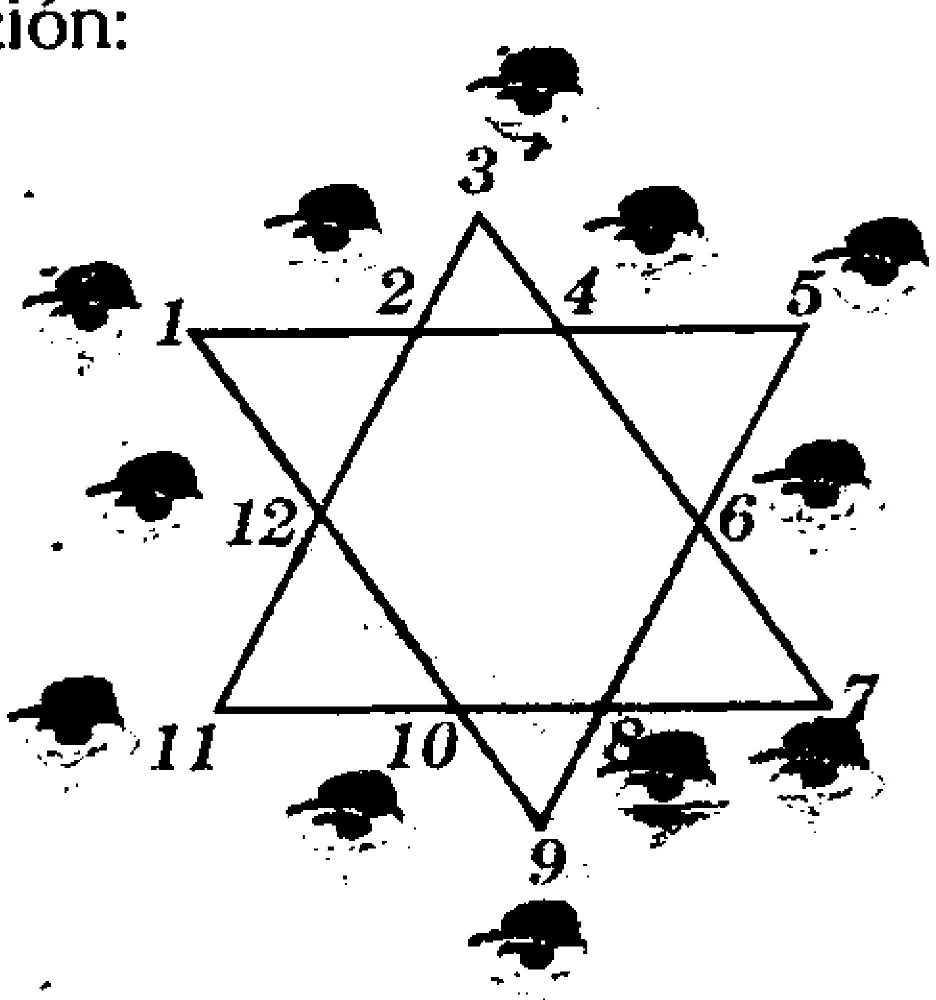
PROBLEMA 12 :

¿Cuántas filas de *4* personas cada una se puede obtener con *12* personas?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

Construimos un polígono como se muestra a continuación:



* Las personas son los puntos (*12* personas)

* Como se podrá observar hay *6* filas

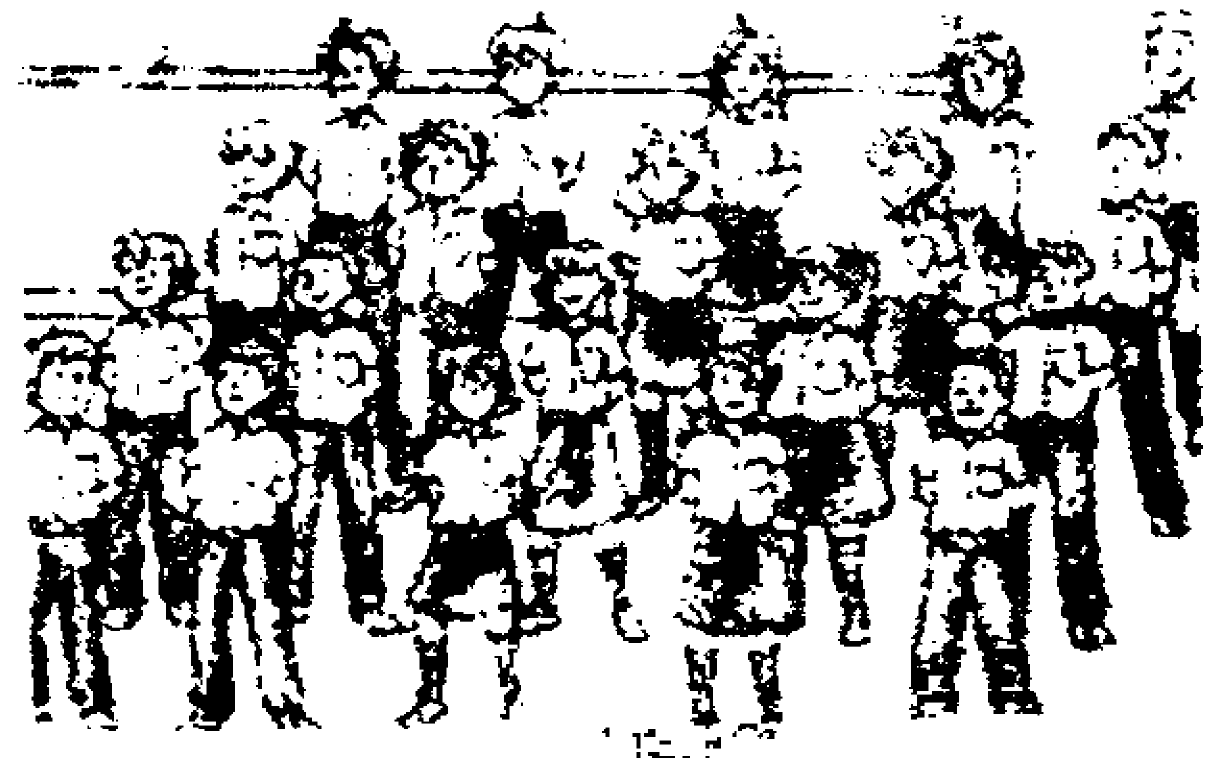
⇒ El número de filas es *6*

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

¿Cuántos alumnos, como mínimo, se requieren para formar en *5* filas, de modo que cada fila contenga *4* alumnos?

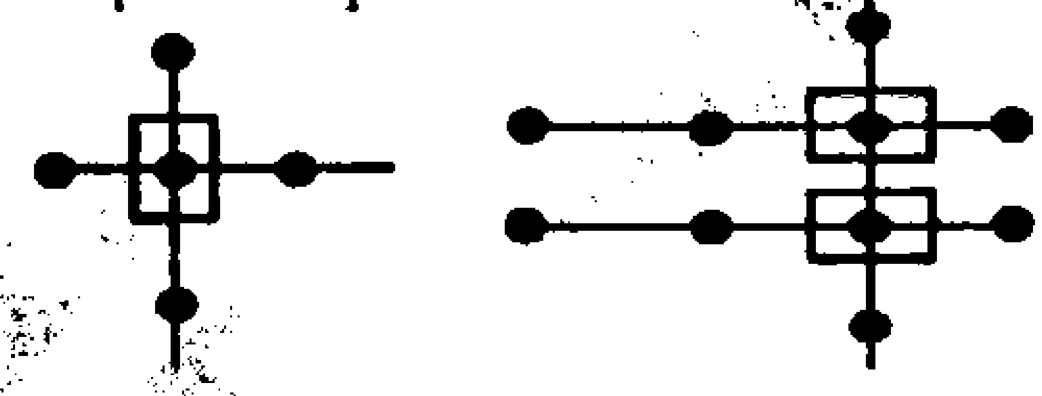
RESOLUCIÓN:



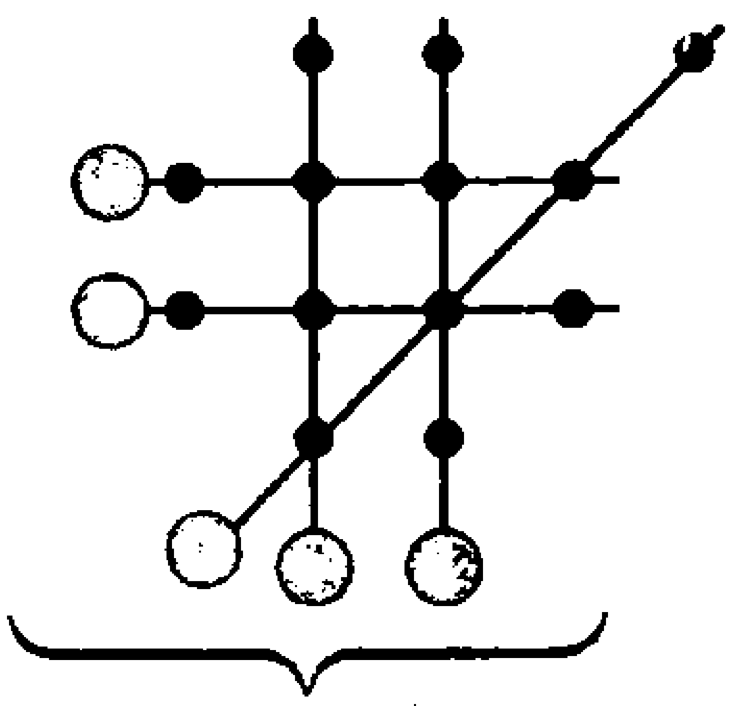
• **Si contamos como** en la ilustración, tendríamos un total de ***20*** alumnos, que no es necesariamente el mínimo número buscado.

¡ATENCIÓN!

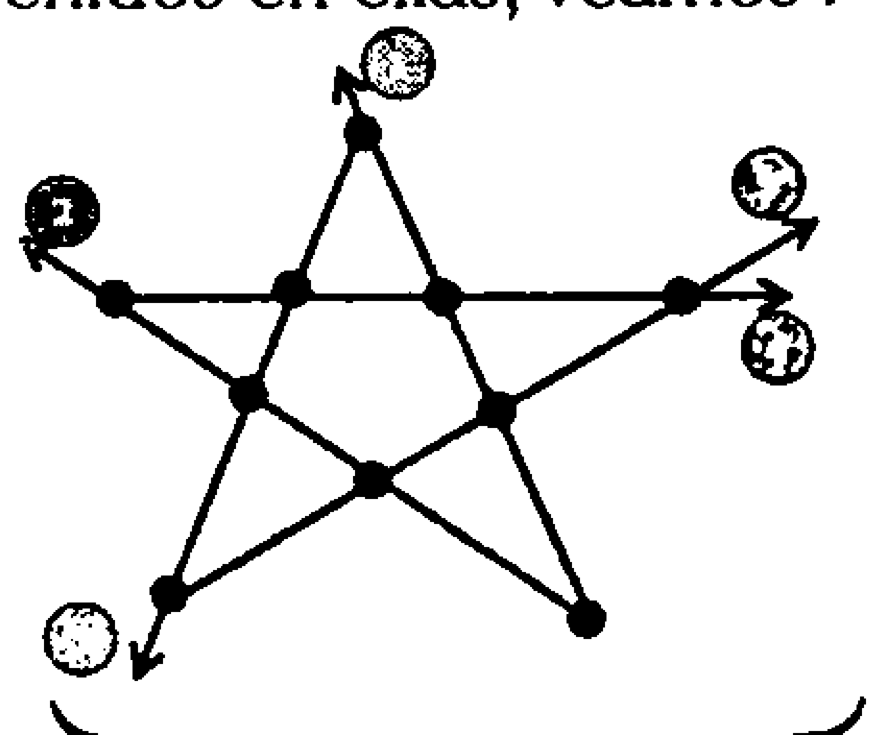
Un alumno podría pertenecer a dos o más filas



Si las filas se cruzaran entre ellas uno o más alumnos, estarían contenidos en ellas, veamos :



5 Filas , 13 Alumnos

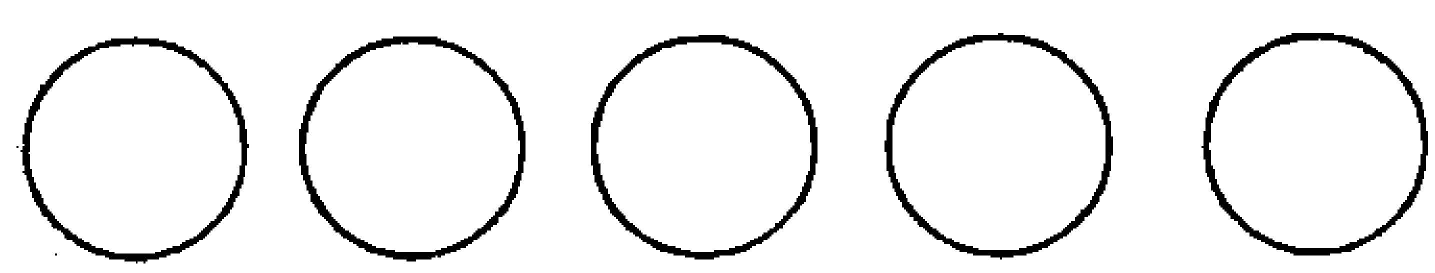


5 Filas , 10 Alumnos

* Luego el mínimo de alumnos que se puedan colocar en *5* filas, de modo que cada fila contenga *4* alumnos , es ***10*** .

PROBLEMA 14 :

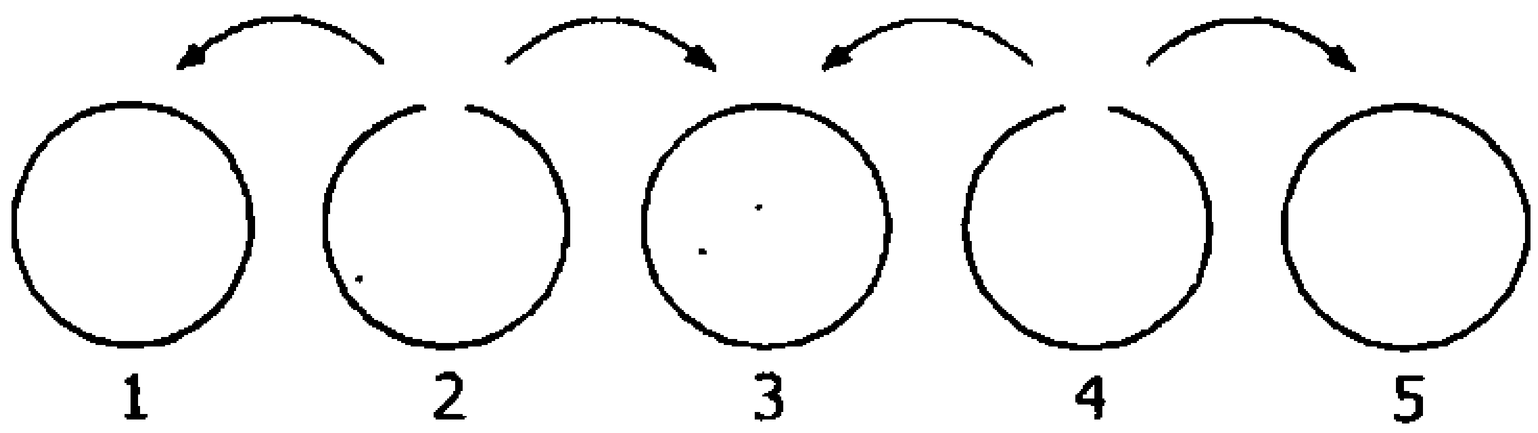
Tenemos *5* aros como los de la siguiente figura:



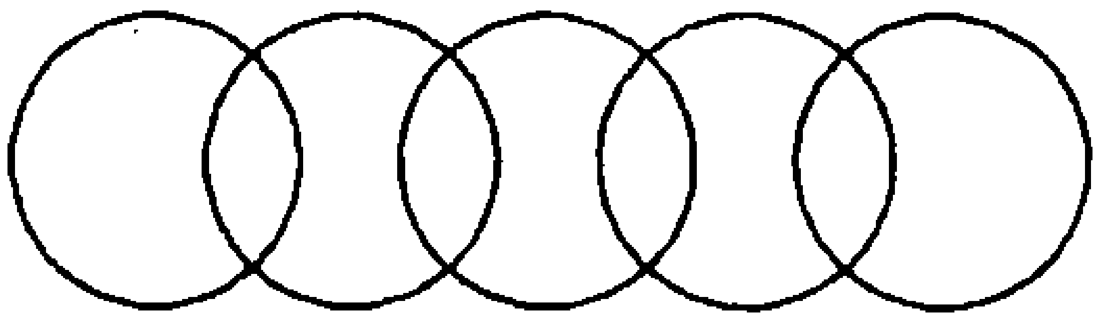
¿Cuál es la menor cantidad de aros que debemos abrir y cerrar para obtener una cadena?

RESOLUCIÓN

Seguro que muchos pensaron que hay que abrir cuatro aros, pero esa no es la solución, ya que la condición del problema es que abramos y cerremos la menor cantidad de aros.



Lo correcto es abrir el aro *2*, engancharlo con los aros *1* y *3* y luego cerrarlo, después abrir el aro *4* y engancharlo con los aros *3* y *5* para luego cerrarlo; de esa manera obtendremos la cadena pedida.



PROBLEMA 15 :

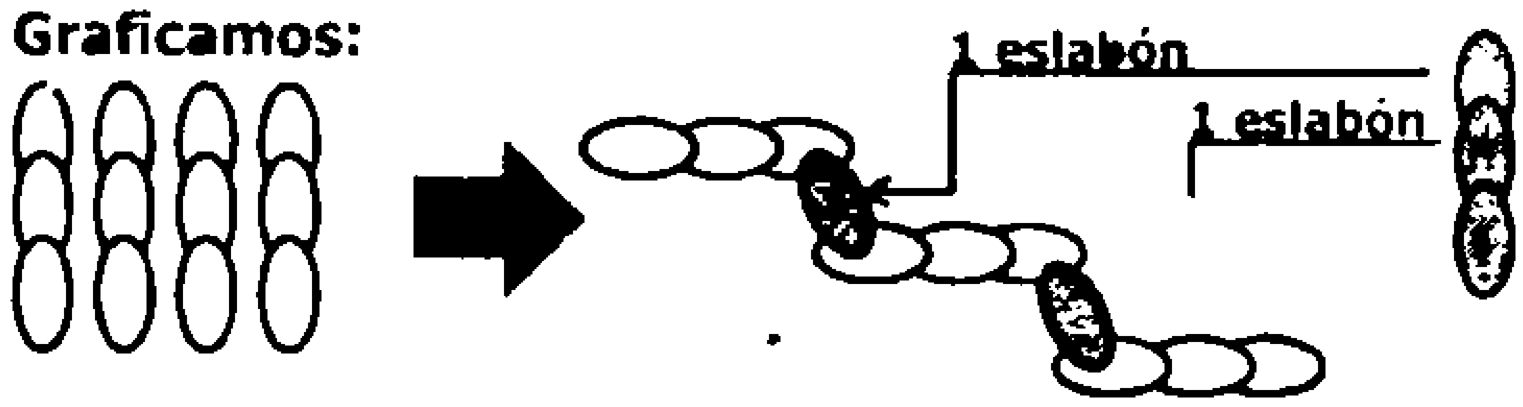
Se tiene *cuatro* trozos de cadena de *3* eslabones cada uno y se les quiere unir formando una cadena circular. Si por cortar y soldar un eslabón cobran *S/. 12* ¿cuánto se gastará como mínimo para formar dicha cadena?

A) 32 *B) 48* *C) 60* *D) 36* *E) 72*

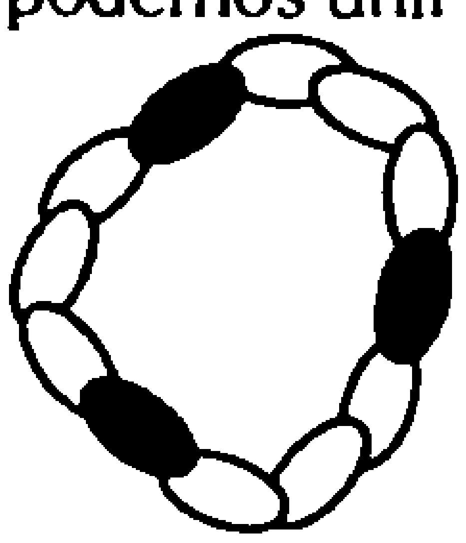
RESOLUCIÓN :

Podemos unir los trozos de cadena cortando y soldando los eslabones de un solo trozo de cadena.

- **Graficamos:**



- Observamos que con el último eslabón, podemos unir el inicio y el final de la cadena.



* Observemos los eslabones que se cortan y se sueldan.

- **El gasto será: $3\times 12 = S/. 36$**

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Dexter y Genio , juegan a sacar fichas de una caja, con las siguientes reglas:

- Se puede sacar *1; 2* ó *3* fichas en cada turno.
- Pierde el que saca la última ficha.

Si le toca jugar a Dexter y ninguno de los dos se equivoca, ¿qué afirmaciones son ciertas?

I) Si sobran *5* fichas , gana Dexter.

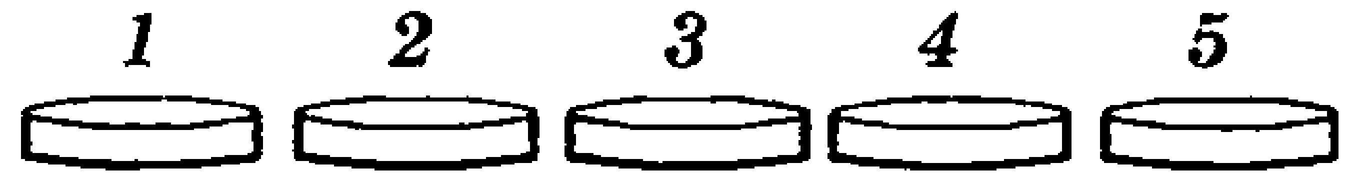
II) Si sobran *8* fichas , gana Genio.

III) Si sobran *10* fichas gana Dexter.

A) Solo I *B) Solo II* *C) Solo III*
D) I y II *E) II y III*

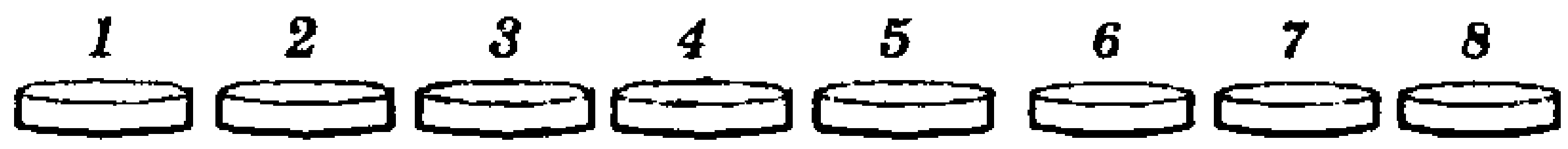
RESOLUCIÓN :

* Analicemos cada alternativa :

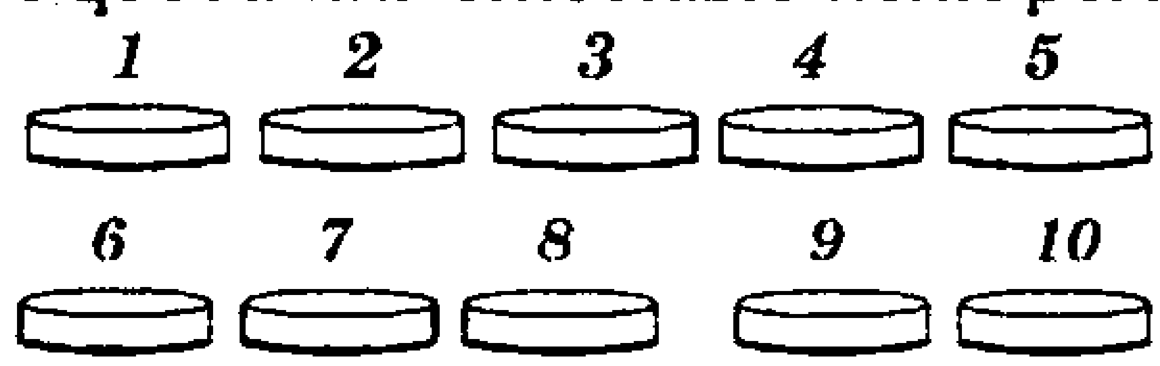


Si Dexter juega , estará perdido ya que:

- Al sacar la *1*, Genio saca la *2 ; 3* y *4*, ganando.
- Al sacar la *1* y *2* , Genio saca la *3* y *4*, ganando.
- Al sacar la *1* y Genio saca la *2 ; 3* y *4* ganando ⇒ *(F)*



Si Dexter juega , basta con que saque la *1; 2* y *3* para poner a Genio en el caso anterior , en el que este último quedaría irremediablemente perdido. ⇒ *(F)*



* Ya se habrá dado cuenta que el que se quede con *5* fichas tocándole jugar , pierde , por lo cual a Dexter le basta sacar la ficha *1*, y luego a cualquier jugada de Genio , Dexter sacará la ficha *5* , y como estamos en el caso *1*, tocándole a Genio , este último perderá. ⇒ *(V)*

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Dos estudiantes *A* y *B* juegan de forma alternada a retirar de un montón de *25* monedas una, dos o tres monedas, en su turno. Si *A* inicia y gana aquél que retira la última moneda, ¿cuántas monedas debe retirar en su primer juego, de manera que asegure su triunfo, si se sabe que sigue una estrategia?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) cualquier cantidad permitida
E) B siempre gana

RESOLUCIÓN :

Gana quien toma la última moneda, esto es quien toma la moneda número *25*, entonces perderá quien tome la moneda anterior: número *24*, también perderá quien tome solo hasta la moneda número *23*, porque según las reglas del

juego un jugador podrá tomar *1*; *2* ó *3* monedas en su turno y si se toma hasta la moneda *23*,el siguiente podrá tomar las últimas *24* y *25*. Similar ocurre quien tome sólo hasta la *22*, el siguiente tomará las monedas *23*, *24* y *25*, y ganará en consecuencia.

Gana: toma la moneda *25*

Pierde: toma hasta la moneda *24* o toma hasta la moneda *23* o toma hasta la moneda *22*.

De lo anterior, ganará quien saque la moneda *21*, porque el siguiente jugador a lo más podrá sacar hasta la moneda *24* (máximo número de monedas a sacar *3*) y entonces perderá, siguiendo el mismo razonamiento anterior se tendrá:

Gana: toma la moneda *21*.

Pierde: toma hasta la moneda *20* o toma hasta la moneda *19* o toma hasta la moneda *18*.

Entonces se puede afirmar que se ganará si se extraen las monedas correspondientes a los números.

Gana: toma las monedas *25*, *21*, *17*, *13*, *9*, *5* y *1*.

Si *A* inicia, debe retirar la primera moneda para ganar el juego y su estrategia será sacar las monedas indicadas para obtener la última.

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Se colocan monedas, una por vértice, en todos los vértices de un polígono regular de *10* lados.

Dos jugadores retiran alternadamente una, dos o tres monedas, en estos últimos casos deben estar en vértices consecutivos. Gana el que retire la última moneda. Si tuviera que jugar, ¿para ganar, qué turno escogería y cuántas monedas retiraría en su primer turno?

A) primero; 2 monedas.

B) primero; 1 ó 3 monedas.

C) segundo; 2 monedas.

D) segundo; lo mismo que el primero en su turno.

E) segundo; diferente a lo que retiró el primero en su turno.

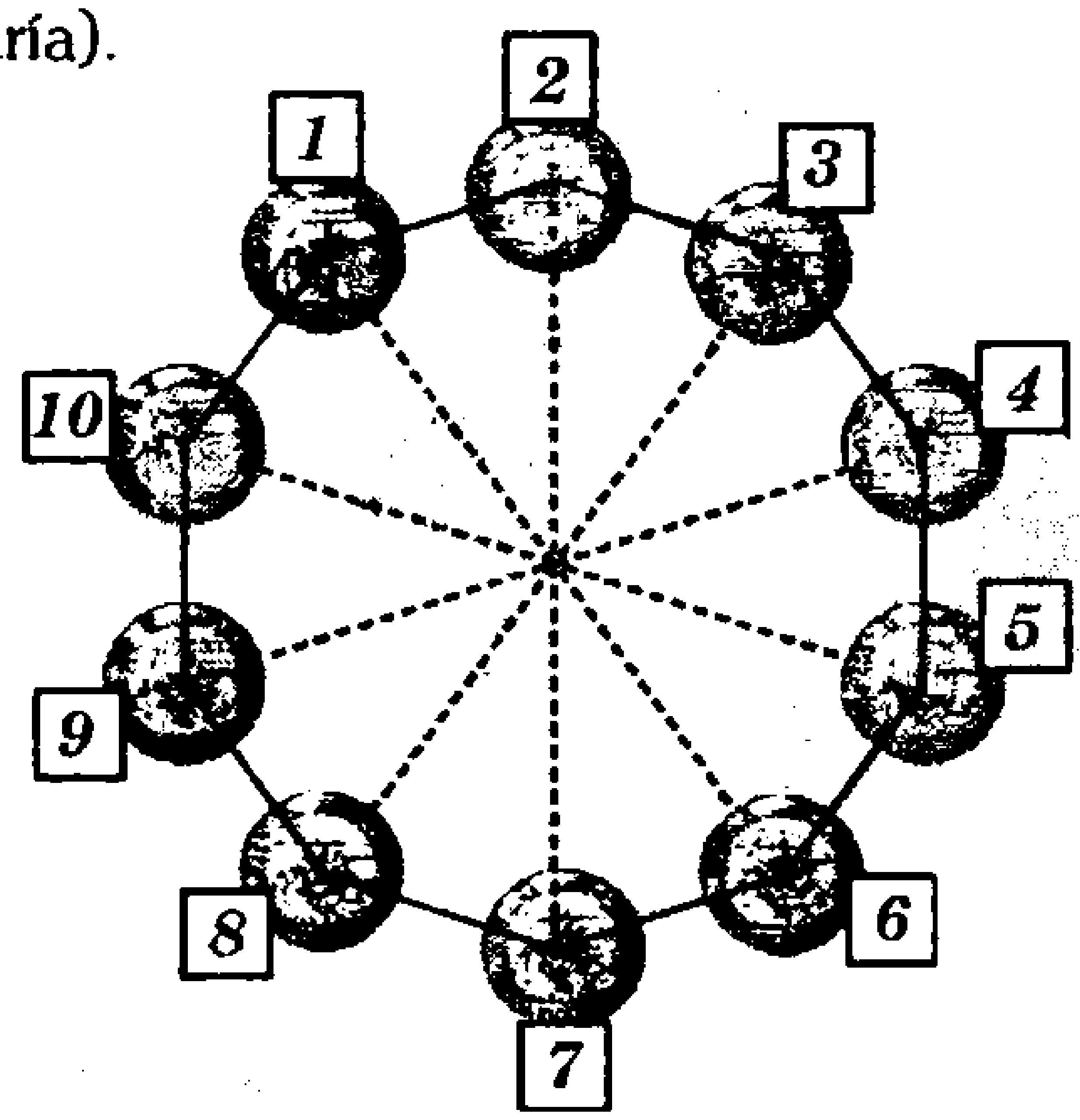
RESOLUCIÓN :

Nos piden escoger el turno y la cantidad de monedas a retirar para ganar siguiendo una estrategia.

El juego consiste en retirar de una a tres monedas (consecutivas) por turno de un total de *10* monedas distribuidas en un polígono.

Gana el que retira la última ficha (es decir cuando el otro ya no puede retirar).

Notamos que ante cualquier jugada del primero, el segundo puede hacer una jugada igual (por simetría).



Estrategia del segundo jugador:

Si el primer jugador retira la ficha *1* el segundo podrá (y debe) retirar la ficha *6*.

Si el primer jugador retira la ficha *2* el segundo podra (y debe) retirar la ficha *7*.

Siempre que el primero retire una ficha el segundo también podrá hacerlo, de igual forma si retira más de una (el segundo retiraría los simétricos de estos).

Conclusión:

Para ganar conviene jugar en el segundo turno y sacar un número de monedas igual al primero (las simétricas).

Luego,debemos escoger el segundo turno y sacar el mismo número de monedas que el primero en su turno.

RPTA : "D"

RETO :

Sebastián y Martín juegan a sacar fichas, de manera alternada, de un montón de *1001* fichas que se encuentran sobre la mesa. Cada uno en su turno pueden retirar *1*; *3*; *5*; *7* ó *9* fichas; además pierde el que retira la última ficha. Si Martín inicia el juego retirando *5* fichas, ¿cuántas fichas debe retirar Sebastián en su primera jugada para asegurar el triunfo?

A) 3 *B) 3 ó 1* *C) 5* *D) cualquiera*

PROBLEMA 19 :

Una planta acuática en un lago dobla su tamaño todos los días . En un mes ha cubierto la totalidad del lago . ¿Cuánto tiempo habrían tardado ***2*** plantas acuáticas en cubrir todo el lago?

A) Medio mes .
B) La mitad de un mes más un día .
C) Un mes menos un día .
D) Un mes menos dos días .
E) La mitad de un mes menos dos días .

RESOLUCIÓN :

* Sea como "***2***" lo que cubre la planta acuática en ***1*** día , luego en un mes de ***30*** días habrá cubierto :

$$\underbrace{2\times 2\times 2\times \ldots\ldots\times 2}_{30 \text{ VECES}}=2^{30}(\textit{totalidad})$$

* Sea "***x***" el número de días que demoran las ***2*** plantas , luego se planteará :

$$2^{30}=2^x+2^x$$

$$\Rightarrow 2^{30}=2\times 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{30}=2^{x+1}\Rightarrow\ x=29\ \textit{días}$$

* Entonces se cubrirá todo en un mes normal menos un día .

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Truquini se encuentra en apuros . Conduce un camión de alto tonelaje , al que detiene ante la presencia de un túnel con un cartel donde se indica que la altura máxima para pasar por él , es ***2,50*** **m**. ¿Cómo pasará truquini con el camión por el túnel , si su camión tiene una altura de ***2,54*** **m**; sin hacer daño público , y de una manera lógica real?.

A) Levantar el túnel, con una palanca hidráulica.
B) Escarbar la pista, para luego parcharlo.
C) Empujando el camión.
D) Imposible, idea absurda.
E) Desinflando adecuadamente las llantas

RESOLUCIÓN :

* Echando una pequeña dosis de ingenio , desinfló las ruedas hasta que la altura del camión quedó disminuida en ***5 cm***.

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Carlos iba camino a la Costa del Sol , a pasar unas vacaciones , cuando , al atravesar un pueblo , se le averió el auto . Mientras se lo arreglaban , decidió hacerse cortar el pelo . El pueblo sólo tenía dos peluquerías , la de Pepe y la de Tony . Carlos echó una ojeada por la luna de la peluquería de Pepe . El espectáculo no fue de su agrado.

Carlos : "¡ Vaya suciedad ! Hay que limpiar el espejo, el suelo está lleno de pelo , el peluquero está sin afeitar y lleva un corte de pelo horrible". No es de extrañar que Carlos se marchara de allí , y fuera a dar un vistazo a la peluquería de Tony . Carlos miró a través del escaparate .

Carlos : ¡ Qué diferencia ! El espejo está limpio , el suelo bien barrido y Tony lleva un corte de pelo perfecto. Pero Carlos no entró . Regresó en cambio a la otra peluquería , pese a los sucia que estaba , para que le cortaran el pelo allí. ¿A qué obedece su conducta?

A) No le gustó Tony
B) Pepe le ofreció otro servicio adicional
C) Escogió al azar
D) Escogió al mejor peluquero, que en esta ocasión es Pepe.
E) La de Pepe estaba más cerca de su casa

RESOLUCIÓN :

* Como ningún peluquero se corta el cabello así mismo y como la villa tienen solamente ***2*** , entonces cada uno lleva el corte que le hizo el otro . Carlos fue prudente al decidirse por la más sucia de las peluquerías , pues su dueño le había hecho un corte de pelo perfecto al propietario de la otra.

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Dos cazadores se detienen para comer sus panes , uno llevó ***5*** panes y el otro ***3*** panes. En ese momento se presenta otro cazador , a quien le invitan en forma equitativa . Al despedirse el cazador invitado les obsequió ***8*** monedas para que se repartan en forma proporcional . ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

A) 5 y 3 B) 6 y 2 C) 4 y 4 D) 7 y 1 E) 8 y 0

RESOLUCIÓN :

* Para compartir en partes iguales , de cada pan hicieron ***3*** pedazos iguales , uno para cada uno , con ***8*** panes hicieron ***24*** pedazos , de los cuales cada uno consumió ***8*** . El ***1ro*** aportó : $5\times 3=15$ pedazos, de éstos se comió ***8*** y dio al otro ***7*** ; mientras que el ***2do*** aportó $3\times 3=9$ pedazos , ***8*** de los cuales se comió y dió a José sólo ***1*** . Por tanto , de las ***8*** monedas , ***7*** le corresponden al ***1ro*** y ***1*** al ***2do***.

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Ana , Cory y José fueron de paseo al campo , Ana y Carmen llevaron ***5*** y ***4*** panes respectivamente . Ellas compartieron con José en partes iguales . Él en agradecimiento , les retribuyó con ***9*** soles . ¿Cuánto le correspondió a cada una?

A) 5 soles y 4 soles *B) 7 soles y 2 soles*
C) 4,5 soles y 4,5 soles *D) 6 soles y 3 soles*
E) 5 soles y 1 sol.

RESOLUCIÓN :

* Para compartir en partes iguales , de cada pan hicieron tres pedazos iguales , uno para cada uno . Con ***9*** panes hicieron ***27*** pedazos, de los cuales cada uno consumió ***9***. Ana aportó $5 \times 3 = 15$ pedazos , de éstos se comió ***8*** y dio a José ***6*** ; mientras que Cory aportó con $4 \times 3 = 12$ pedazos , ***9*** de los cuales se comió y dio a José sólo ***3*** . Por tanto de los ***9*** soles , ***6*** le corresponden a Ana y ***3*** a Cory .

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

Se dispone de **2** mechas irregulares , cada una tarda una hora en consumirse completamente ; esto quiere decir que , una vez que se le ha prendido fuego a una de estas , la mecha se termina en quemar en ***1*** hora , y eso es todo lo que sabemos . es importante señalar que una mecha no tiene por qué consumirse al mismo ritmo , es decir no se queman uniformemente , Lo único que se sabe es que cada mecha tarda una hora en consumirse completamente. ¿ Cómo podemos medir ***45*** minutos de tiempo , usando únicamente estas mechas ?

Se de tener claro que podemos encenderlas cuando queramos ; y desde luego , no puede usarse ningún tipo de reloj , así como ninguna otra forma de medir el tiempo que no sea las mechas . la solución debe indicar un procedimiento exacto de medir los ***45*** minutos.

RESOLUCIÓN :

* Se enciende simultáneamente las dos mechas : una por los dos extremos y la otra sólo por uno . la mecha quemada por ambos extremos , tardará ***30*** minutos en consumirse . Tras ello , a la segunda mecha que se quemo por un extremo , le quedan ***30*** minutos , pero se convertirán en ***15*** minutos , al encenderse en ese instante por el otro extremo .

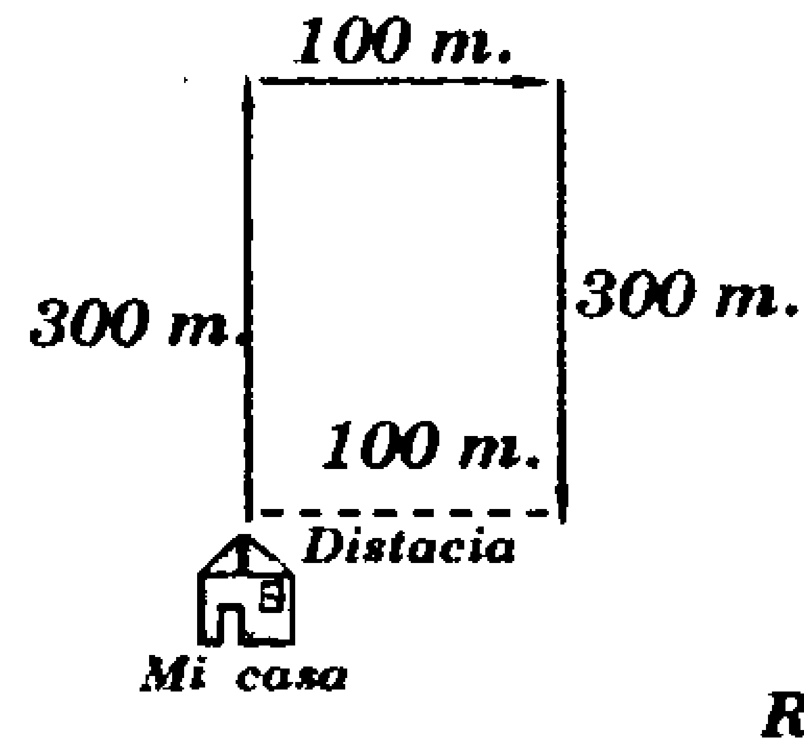
PROBLEMA 25 :

Desde mi casa camino de frente ***300 m***., luego doblo hacia la derecha y camino ***100 m*** y por último doblo de nuevo hacia la derecha y camino ***300 m***. más en una dirección paralela a la que había caminado primero. ¿A qué distancia estoy de mi casa?

A) 70 m *B) 500* *C) 300* *D) 400* *E) 100*

RESOLUCIÓN :

* Graficando así :



RPTA : "E"

PROBLEMA 26 :

Carlos y Rocio deciden verse a las ***8 p.m.*** Carlos tiene un reloj ***15*** minutos adelantado y Rocio ***15*** minutos atrasados . Si Carlos llega a la cita ***15*** minutos antes según su reloj y Rocio llega ***15*** minutos retrasada según su reloj . ¿Cuánto tiempo esperó Carlos?

A) 15 mim. *B) 30 min.* *C) 20 min.*
D) 1 hora *E) 45 min.*

RESOLUCIÓN:

* Se deduce que Carlos llegó a las ***7: 30 p.m.*** y Rocio a la s ***8: 30***; por lo que el primero tuvo que esperar ***1*** hora.

RPTA : "D"

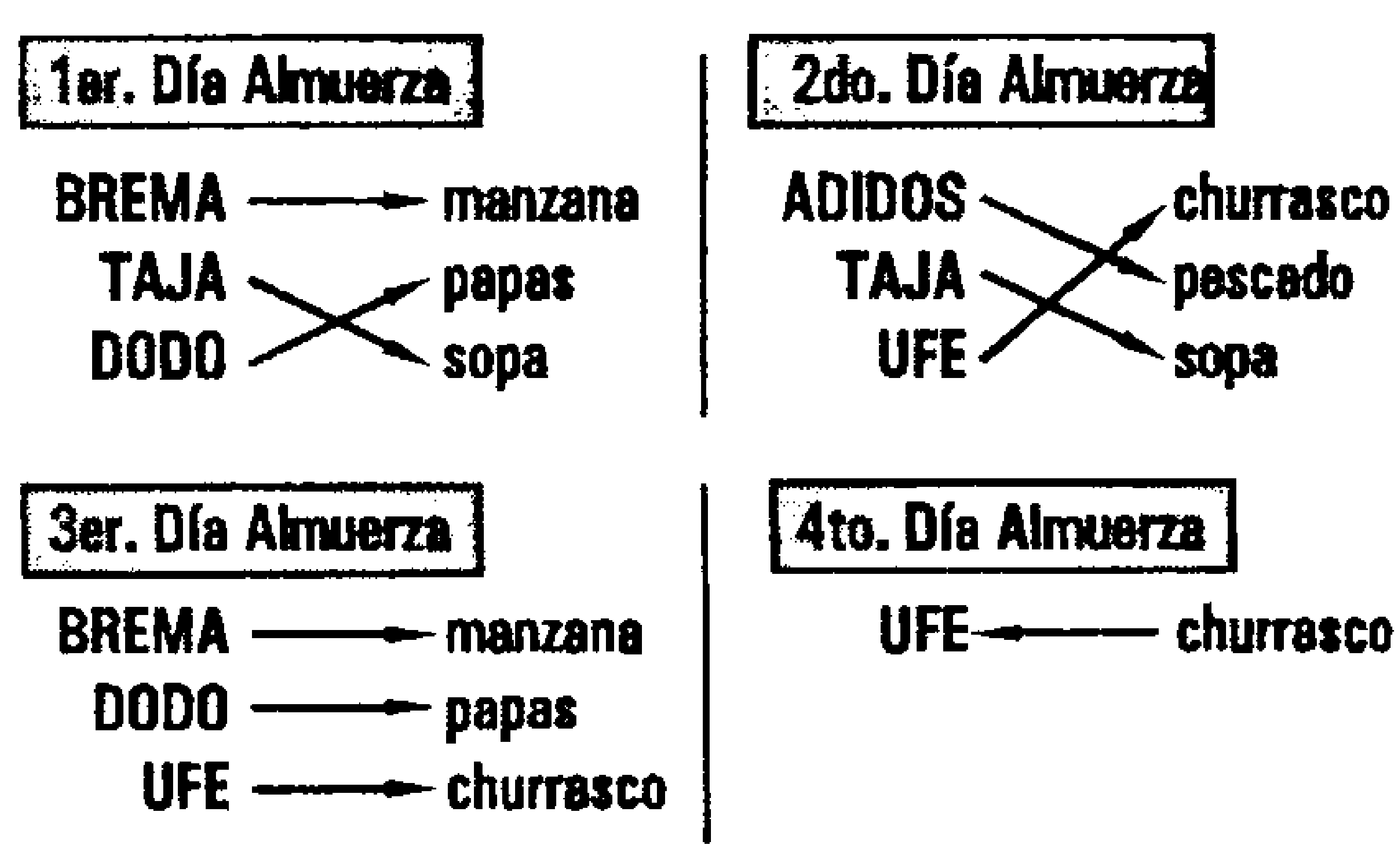
PROBLEMA 27 :

Encontrándose Pitito en un país cuya lengua desconoce, entró en un hotel para almorzar. Al ver la lista del menú, pidió *BREMA* ; *TAJA* y *DODO* y le sirvieron una manzana, papas y sopa. Al día siguiente solicito *ADIDOS* , *TAJA* y *UFE* , y le sirvieron un churrasco, pescado y sopa. El tercer día pidió, *BREMA*, *DODO* y *UFE* y le sirvieron una manzana, papas y churrasco. El cuarto día desea almorzar un churrasco. Qué tendrá que pedir?

A) ADIDOS *B) BREMA* *C) DODO*
D) TAJA *E) UFE*

RESOLUCIÓN :

* Deduciendo las comparaciones comunes en los tres primeros días, entre los potajes y el lenguaje desconocido tenemos :



RPTA: "E"

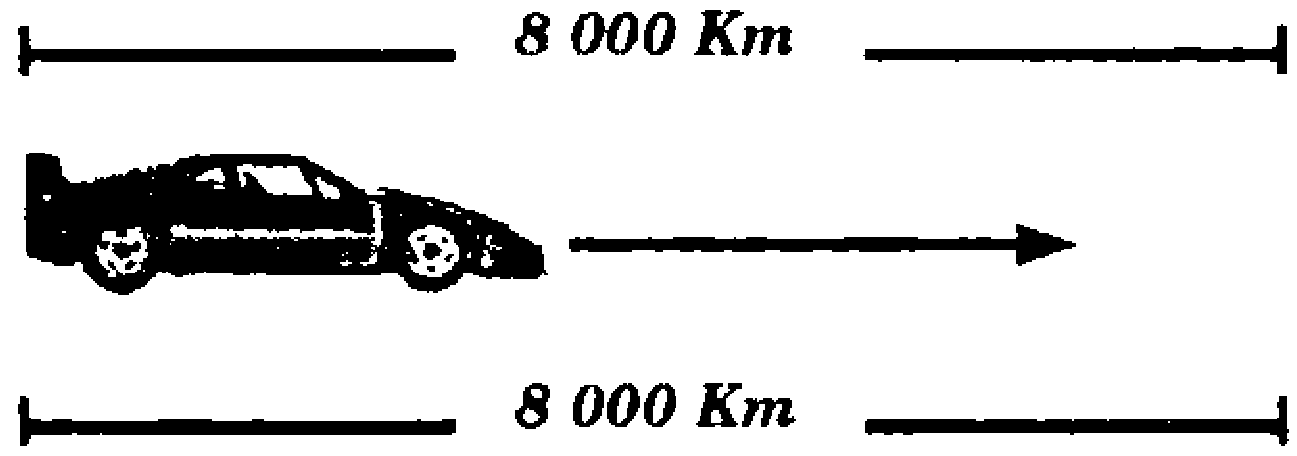
PROBLEMA 28 :

Un automóvil que recorre ***8000 km***. permutando sus llantas (incluyendo la de repuesto), para que todas tengan igual desgaste . ¿Qué distancia recorre cada llanta?

A) 3200 ***B) 8000*** ***C) 1600*** ***D) 6400*** ***E) 4800***

RESOLUCIÓN :

* Un automóvil lleva siempre ***5*** llantas (***1*** de repuesto) de las cuales ***4*** de ellas siempre están en movimiento.



* Como las ***5*** llantas se permutan entonces cada llanta recorre $\frac{4\times 8000}{5}=6400\,Km.$

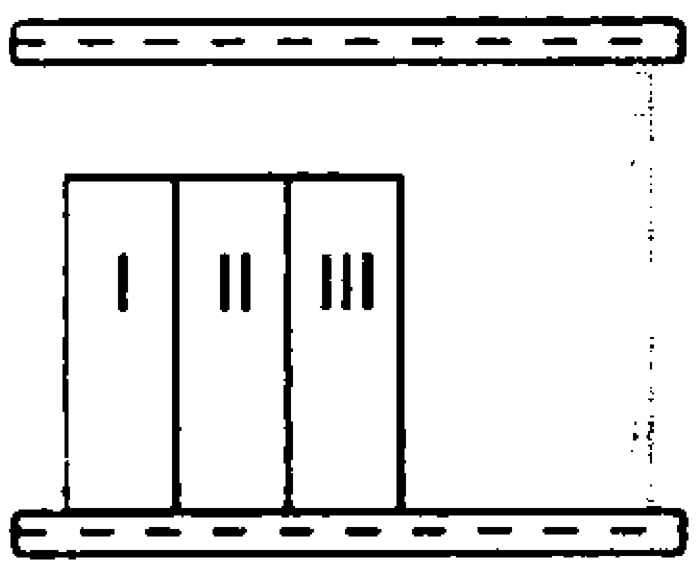
RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

En un estante se tiene una colección de ***3*** volúmenes ***(I, II, III)*** tal como se indica en la figura .

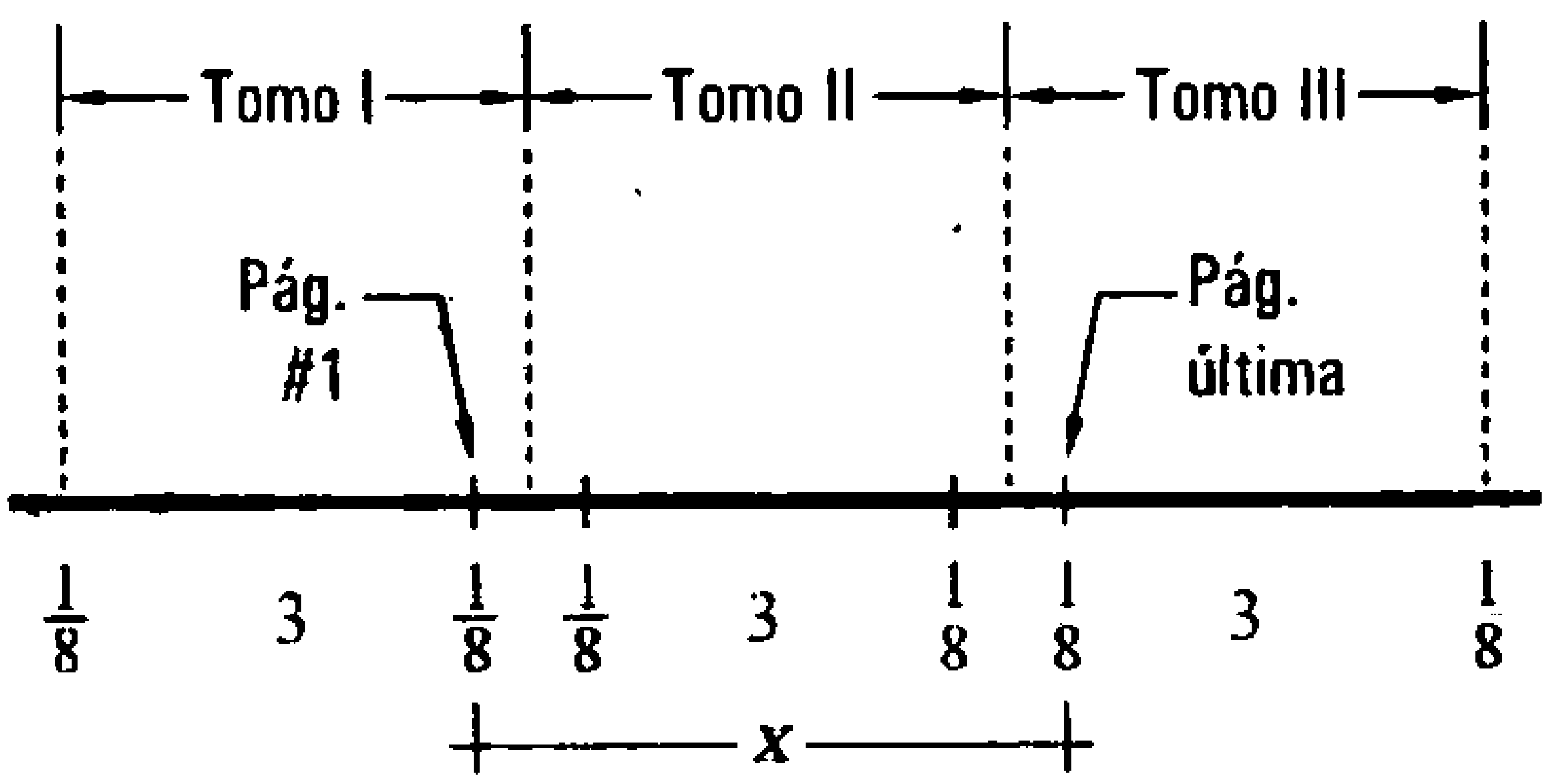
Una polilla ha hecho una perforación en línea recta y normal a las cubiertas de los libros , en forma tal que partió de la primera página del vol. ***I*** y terminó en la última página del vol. ***III***. Sabiendo que en cada volumen las páginas constituyen un espesor de ***3*** pulgadas y que cada cubierta (tapa o contratapa) tiene un espesor de ***1/8*** de pulgada . Determinar la longitud total del hueco hecho por la polilla .

A) 9 5/8 plg.
B) 6 ½ plg.
C) 9 ½ plg.
D) 3 ½ plg.
E) 9 plg.



RESOLUCIÓN :

* La primera página del Tomo ***I*** empieza en el extremo derecho del volumen , mientras que la última página del Tomo ***III*** se encuentra en el extremo izquierdo de dicho volumen .



$$x=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+3+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\quad\Rightarrow x=3\frac{1}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Un capitán en el caribe fue rodeado por un grupo de serpientes marinas, muchas de las cuales eran ciegas. Tres no veían con los ojos a estribor, ***3*** no veian nada a babor , ***3*** podrían ver a estribor, ***3*** a babor, ***3*** podían ver tanto a estribor como a babor, en tanto que otras ***3*** tenían ambos oJos arruinados. ¿Cuál es el mínimo número de serpientes necesarias para que con ellas se den todas esas circunstancias?

RESOLUCIÓN:

Había tres serpientes totalmente ciegas y tres con ambos ojos sanos.

Como mínimo habían ***6*** serpientes.

PROBLEMA 31 :

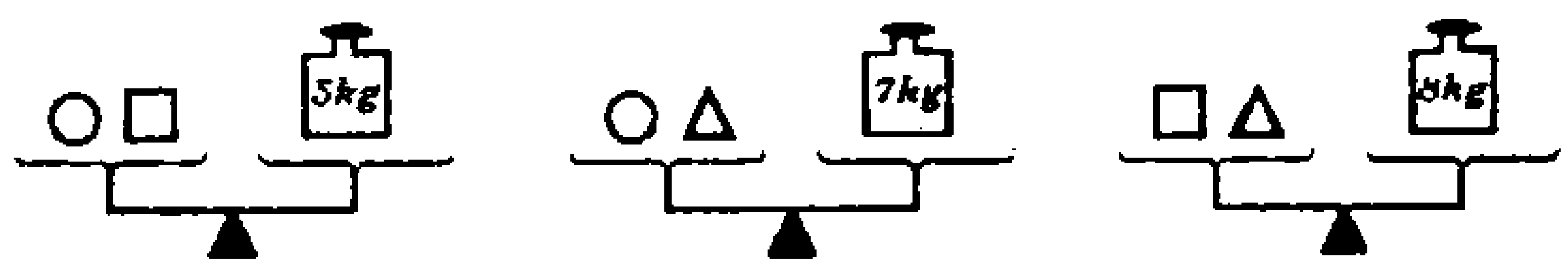
Un explorador cayó en manos de una tribu de indígenas, se le propuso la elección entre morir en la hoguera o envenenado. Para ello, el condenado debía pronunciar una frase tal que, si era cierta, moriría envenenado, y sí era falsa, moriría en la hoguera. ¿Cómo escapó el condenado a su funesta muerte?

RESOLUCIÓN:

El condenado dijo ***«MORIRÉ EN LA HOGUERA»***. Si esta frase es cierta, el condenado debe morir envenenado. Pero en ese caso ya es falsa. Y si es falsa, debe morir en la hoguera, pero en este caso es verdadera. El condenado fue indultado.

PROBLEMA 32 :

Si las balanzas mostradas están en equilibrio:

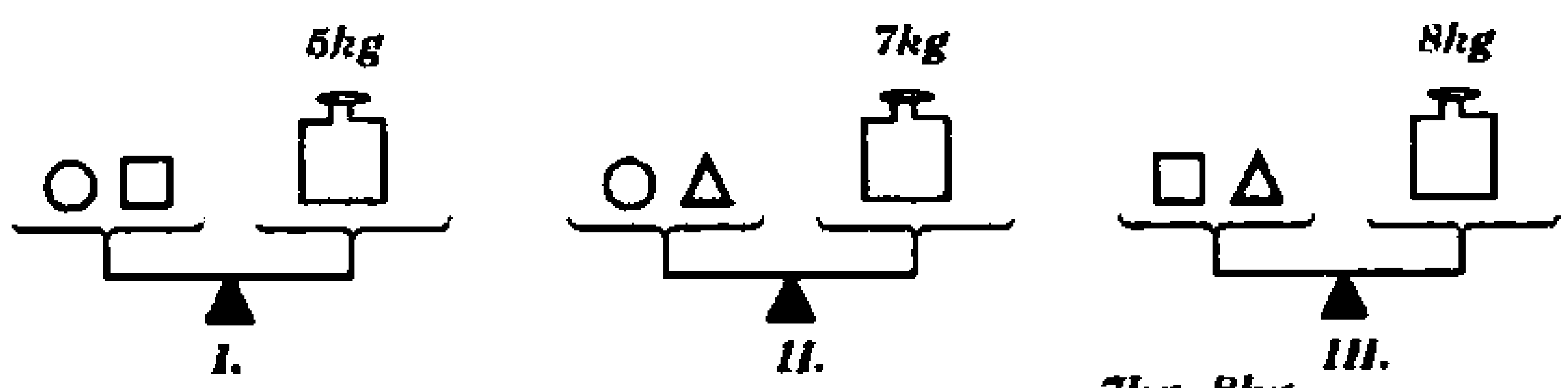


La siguiente balanza se equilibrará con una pes‹ de:

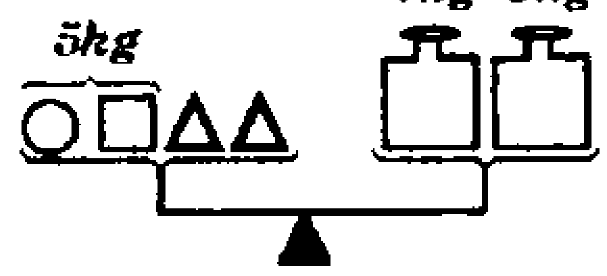
A) 11kg ***B) 10kg*** ***C) 9kg*** ***D) 12kg*** ***E) 13kg***

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que las balanzas están en equilibrio



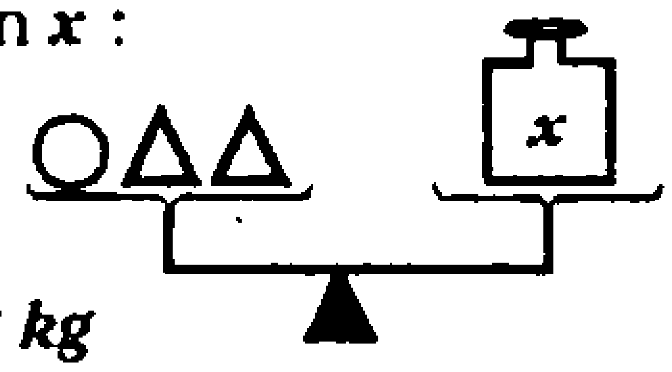
* Juntamos ***(II)*** y ***(III)*** :



$\rightarrow \Delta\Delta <> 10kg \Rightarrow \Delta <> 5kg$

* Al reemplazar en *(II)* se deduce que : ○ <> *2kg*

* Luego nos piden *x* :



$\Rightarrow x = 12\ kg$

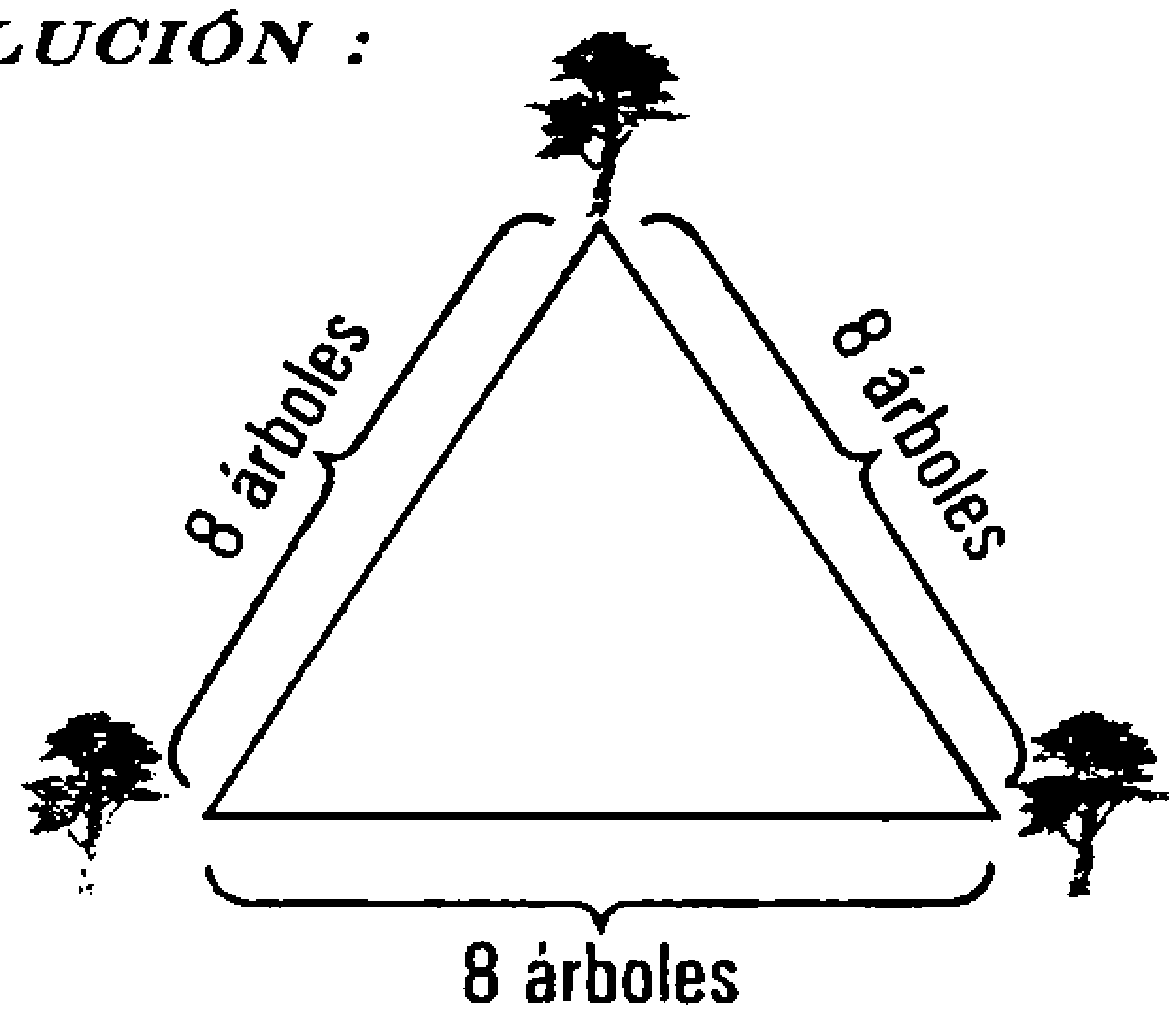
RPTA : «E»

PROBLEMA 33 :

¿Cuántos árboles hay en un campo triangular que tiene *10* árboles en cada lado y un árbol en cada esquina?

A)30 ***B)33*** ***C)29*** ***D)27*** ***E)10***

RESOLUCIÓN :



$\Rightarrow$ Total de árboles : $8 \times 3 + \underbrace{3}_{\text{De las esquinas}} = 27$

RPTA : "D"

PROBLEMA 34 :

Si subes tres veces por un ascensor . ¿Cuántas veces debes bajarte?

A) 3 ***B) 4*** ***C) 2*** ***D)5*** ***E) F. d.***

RESOLUCIÓN :

* Al ejecutar las siguientes acciones :

Subir	Bajar	
↑	↓	1ra. vez:
↑	↓	2da. vez:
↑	—	3ra. vez:

* Entonces bajas : Dos veces

RPTA: "C"

PROBLEMA 35 :

En la competencia automovilística "Presidente del Perú" , dos autos participantes son manejados por el piloto favorito y su hijo mayor . La carrera la ganó el hijo y en segundo lugar quedó el piloto favorito . Sin embargo , al llegar a la meta , el triunfador recibe una llamada telefónica desde una clínica de *EE . UU* . en la cual le comunican la infausta noticia de la muerte de su padre . Entonces ¿Quién era el piloto favorito?

A) Su abuelo ***B) Su padrastro***

C) Su maestra ***D) Su madre***

RESOLUCIÓN :

* Al tener un hijo el piloto favorito , cabe la posibilidad de ser padre o madre ; pero al final se descarta la posibilidad de ser padre.

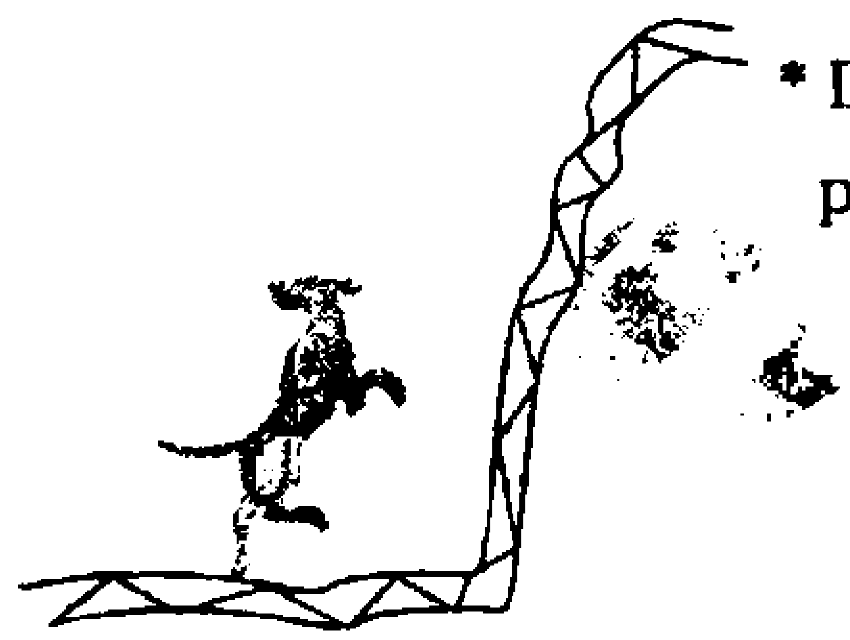
RPTA: "D"

PROBLEMA 36 :

Si un "perro" cae de una altura de nueve metros , luego salta cuatro metros . ¿Cuánto le falta para salir?

A) Cinco metros ***B) Nada***
C) Cuatro metros ***D) Nueve metros***

RESOLUCIÓN :



* Debe saltar nueve metros para poder salir .

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

Cuando Abdul se dirigía a la Meca , se cruzó en el camino con un jeque , quien tenía *5* esposas y cada esposa tenía *3* hijos y cada hijo *2* esclavas , ¿cuántas personas iban a la ciudad?.

A) 1 ***B) 23*** ***C) 22*** ***D) 18*** ***E) 21***

RESOLUCIÓN :

* El único que iba a la Meca era Abdul.

RPTA : "A"

PROBLEMA 38 :

La figura muestra un ejemplo de un código de identificación de *4* dígitos que utiliza un banco para seguridad . Si los dígitos aparecen en el código en forma descendente y un dígito no puede aparecer más de una vez , ¿cuál es la diferencia entre el código mayor posible y el código menor posible?

A) 2222 ***B) 321***
C) 112 ***D) 6666***

9	8	6	3

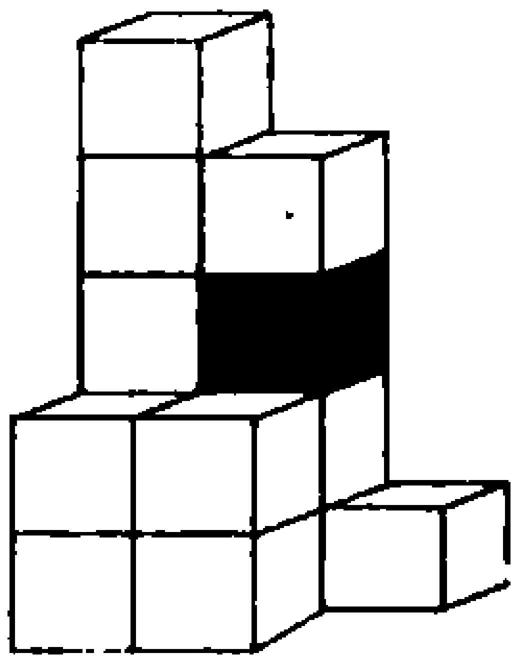
RESOLUCIÓN :

Mayor código : $9876 -$
Menor código : 3210
diferencia : 6666

RPTA: "D"

PROBLEMA 39 :

¿Cuántos cubitos están en contacto con el cubito ubicado inmediatamente debajo del cubito sombreado?.



A) 4
B) 5
C) 6
D) 10
E) 14

RESOLUCIÓN :

* Por simple inspección se cuentan *10* .

RPTA : "D"

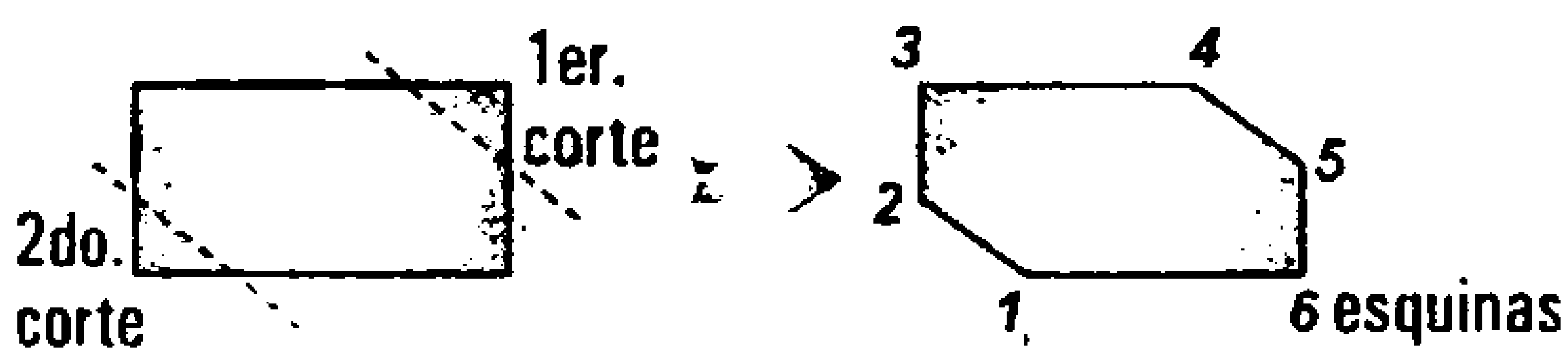
PROBLEMA 40 :

¿Cuántas esquinas tendrá una mesa rectangular que ha sido cortada en *2* de sus esquinas?

A) 2 *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E) No se puede saber.*

RESOLUCIÓN :

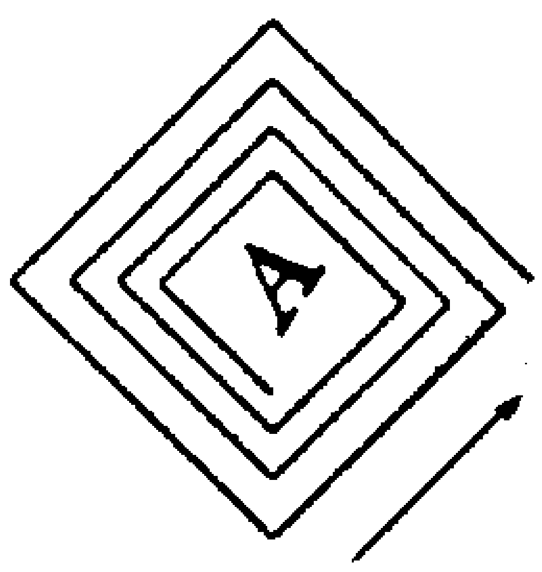
Resulta



RPTA : "C"

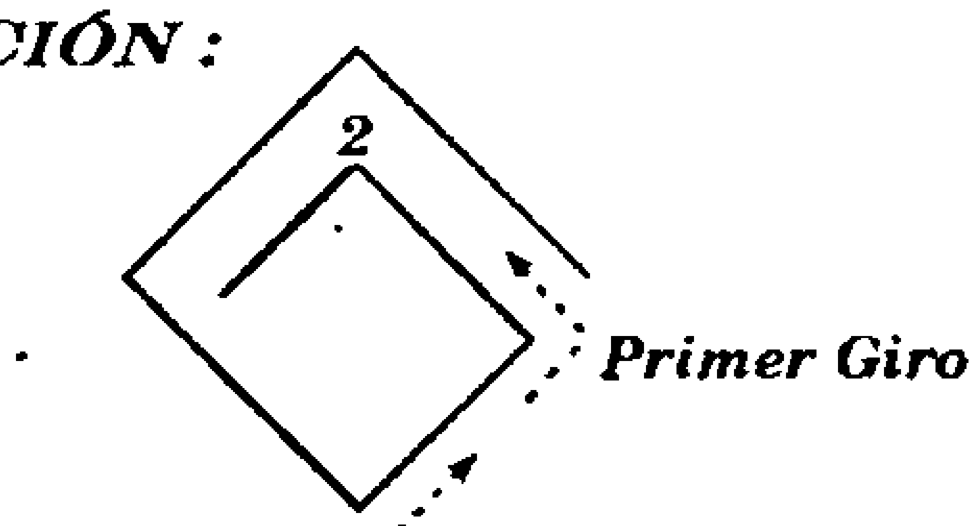
PROBLEMA 41 :

En la siguiente figura si un auto circula en una vía que sigue la dirección de la flecha, ¿cuántos giros de timón realizará el conductor hasta llegar a la posición final de A?



A) 14 *B) 15* *C) 16* *D) 17* *E) 18*

RESOLUCIÓN :



* A partir del primer giro contamos *16* esquinas y por ende *16* giros .

RPTA : "C"

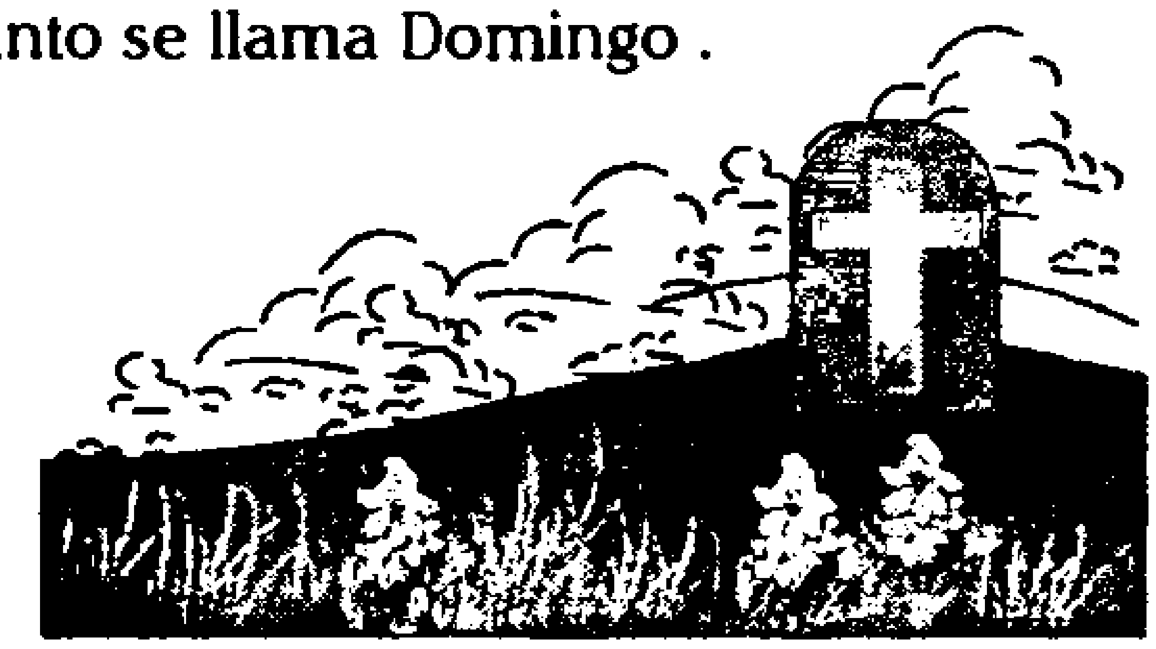
PROBLEMA 42 :

En el paraninfo de un colegio se comentaba: "No puede ser, "domingo", murió, sábado lo enterraron". ¿Cómo se llama el difunto?, ¿Se sabrá?.

A) Sábado *B) No se sabe*
C) Si *D) Faltan datos*

RESOLUCIÓN :

*El difunto se llama Domingo .



RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

En un almacén hay *4* cajas, en cada una de ellas, hay *4* cajas más pequeñas ; y en cada una de éstas hay *4* cajas aún más pequeñas. el número total de cajas es:

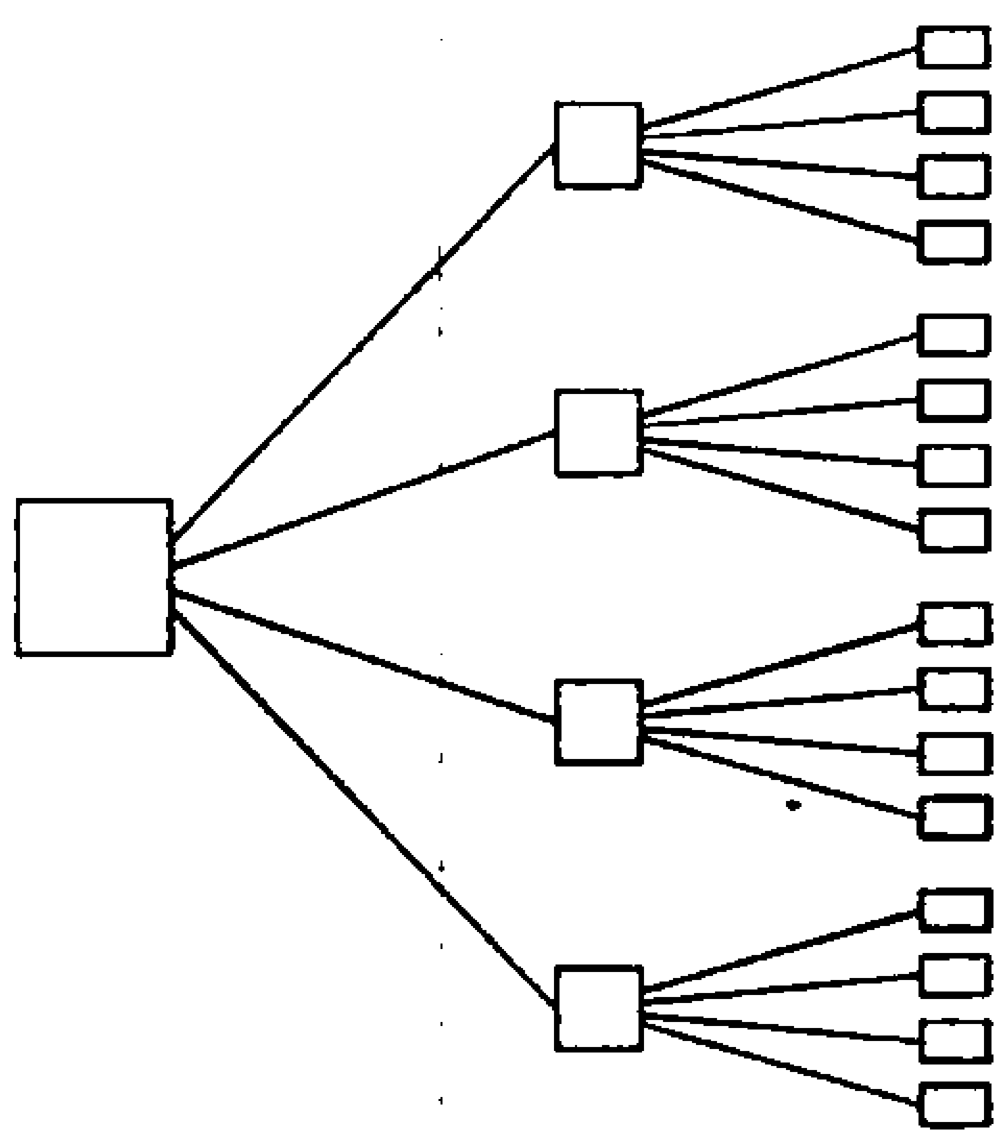
A) 84 *B) 80* *C) 12* *D) 16* *E) 64*

RESOLUCIÓN :

* Analizando cada caja de las *4* primeras:

En cada caja mayor están contenidas *20* cajas, considerándose ella misma habrá : $20 + 1 = 21$ cajas

Ver el "Arbol de secuencias".



Luego, el total de cajas en *4* primeras cajas grandes es $4\times(21) = 84$ cajas

RPTA : "A"

PROBLEMA 44 :

Juan cada día avanza *3* metros y retrocede *2* metros . Si ha recorrido *13* metros, ¿cuánto ha avanzado?

A) 3 metros *B) 10 metros* *C) 5 metros*
D) 13 metros *E) 6 metros*

RESOLUCIÓN:

Cada : $3 + 2 = 5\,m$ avanza $1\,m$.

↓ *Adelante* ↓ *Atrás*

⇒ En *10 m* avanzó *2 m*. y como ha recorrido *13 m*., entonces a avanzado :

$$2 + 3 = 5\,m$$

↓

Tres últimos hacia adelante

RPTA: "C"

PROBLEMA 45 :

Un conejo sale de un conejero, avanza *2* saltos y retrocede un salto. Luego avanza *4* saltos y retrocede *2*; avanza *6* y retrocede *3*, avanza *10* y retrocede *4*. Finalmente salta *12* pasos y retrocede *5* pasos.

¿A cuántos pasos se encontrará de su conejero?

A)22 B)23 C) 27 D)19 E)38

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado :

	SALTOS	REGRESA	AVANZA
1°	2	1	2 – 1 = 1
2°	1 + 4 = 5	2	5 – 2 = 3
3°	3 + 6 = 9	3	9 – 3 = 6
4°	6 + 10 = 16	4	16 – 4 = 12
5°	12 + 12 = 24	5	24 – 5 = (19)

posición final

por lo tanto el final estará a *19* pasos de su conejero:

RPTA: "D"

PROBLEMA 46 :

Iván, José y Christian postulan a una universidad. Dos de ellos eligen Medicina y el restante Filosofía o Literatura. Si José y Christian no escogieron la misma especialidad. ¿Cuál de las siguientes alternativas de elección deberá inferirse con total certeza como conclusión?

A) José a Literatura B) José a Medicina

C) Christian a Filosofía D) Iván a filosofía

E) Iván a Medicina

RESOLUCIÓN :

* Como José y Christian escogieron especialidades diferentes, eso quiere decir que uno de ellos escogió Medicina ; pero falta la otra persona que escogió Medicina la cual necesariamente debe ser Iván.

RPTA : "E"

PROBLEMA 47 :

Tres amigos jugaron partidas de ajedrez, todos contra todos. Si en total jugaron *6* partidas, ¿cuántas partidas jugó cada uno?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN :

*Sean los equipos : *"A"*, *"B"* y *"C"*

$$\overbrace{\underbrace{AB\,,\,AC\,,\,BC}_{\text{3 Partidas}}}^{\text{1ra. Rueda}} \quad y \quad \overbrace{\underbrace{BA\,,\,CA\,,\,CB}_{\text{3 Partidas}}}^{\text{2da. Rueda}}$$

* Se observa que cada uno, jugó *4* partidas

RPTA : "D"

PROBLEMA 48 :

Una vez que fueron creados el cielo, la tierra y todas las criaturas ; la serpiente que era muy astuta decidió contribuir a la obra: se propuso mentir indefectiblemente los días martes, jueves y sábados, los demás días diría la verdad.

Eva, "¿Por qué no pruebas la manzana? sugirió la serpiente –"¡Bah! puedes aprovechar en comerla hoy que es sábado y él está descansando" – "No, hoy no, se apuro a decir la primera dama», agradeciendo : tal vez la pruebe mañana. – "2 Mañana es miércoles y será muy tarde", insistió la serpiente. De este modo Eva cayó en el engaño. ¿Qué día fue?

A) Martes B) Miércoles C) Jueves

D) Viernes E) No se sabe

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que la serpiente está mintiendo y que hoy no es sábado ni tampoco martes ; necesariamente será jueves.

RPTA : "C"

PROBLEMA 49 :

• *MpN* se lee: *"M"* es preferido a *"N"*

• *(MpL)* y *(NpM)* ⇒ *(NpL)*

Si:

- *ApB*
- *XpY*
- *BpY*
- *YpC*

Entonces, de las siguientes alternativas, ¿Cuántas son correctas?

I) ApX II) XpC III) ApY IV) BpC

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Ordenemos los datos verticalmente colocando arriba a los que tienen mayor grado de preferencia:

A	X
B	Y
Y	Z
C	

I) No se puede determinar.

II) Correcto.

III) Correcto.

IV) Correcto.

⇒ Hay *3* alternativas correctas.

RPTA: "B"

PROBLEMA 50 :

Cuatro amigos van a ir a la Oroya en tren , el cual parte a las *18* horas exactamente.

• El reloj de Diego está *10* minutos adelantado, aunque él cree que esta *5* minutos atrasado.

• El reloj de Carolina está *5* minutos atrasado , aunque ella cree que está *10* minutos adelantado.

• El reloj de Fernando está *5* minutos adelantado, aunque él cree que está *10* minutos atrasado.

• El reloj de Melani está *10* minutos atrasado , aunque ella cree que está *10* minutos adelantado.

Si todos salen , de acuerdo con su reloj , con el tiempo justo para tomar el tren , ¿quiénes pierden el tren?

***A)* Diego y Fernando** ***B)* Diego y Carolina**
***C)* Fernando y Melani** ***D)* Carolina y Melani**
***E)* Diego y Melani**

RESOLUCIÓN :

	Quieren llegar a las	*Piensan llegar cuando su reloj sean las*	*Hora real de la llegada*
Diego	*6:00*	*5:55*	*5:45*
Carolina	*6:00*	*6:10*	*6:15* ✓
Fernando	*6:00*	*5:50*	*5:45*
Melani	*6:00*	*6:10*	*6:20* ✓

RPTA: "D"

PROBLEMA 51 :

¿Qué tecla de la calculadora esta estropeada? si para las siguientes operaciones la calculadora dio los siguientes resultados :

$$526 + 845 + 91 + 28 + 231 = 1511$$

$$87 \times 569 = 49503$$

$$143,06 + 582 = 596,06$$

$$437,2 \div 59 = 0,8$$

***A)* 1** ***B)* 2** ***C)* 3** ***D)* 7** ***E)* 9**

RESOLUCIÓN :

* Por simple inspección se nota que la *1ra*, *3ra* y *4ta* operación está equivocada , la *2da* está correcta , luego de esta podemos afirmar , que están correctas las teclas: *5 ; 6 ; 7 ; 8* y *9*

* En *3* operaciones equivocadas , tiene que aparecer la tecla estropeada , luego la que no aparece en las *3* operaciones , funciona correctamente: **+ ; = ; , ; ÷**, luego la tecla malograda puede ser ***2 ; 3*** ó ***4*** . En *4ta* operación , si la tecla estropeada fuera ***2*** ó ***4*** , el error continua , luego la tecla estropeada es la tecla ***3***, ya que : $47,2 \div 59 = 0,8$

RPTA : "C"

PROBLEMA 52 :

Para reconocer una palabra palindrómica , esta se debe leer igual de izquierda a derecha , que de derecha a izquierda , como por ejemplo en la palabra ***"somos"***. Encontrar una palabra palindrómica en español en este enunciado , que tenga *9* letras y dar como respuesta la letra central.

***A)* N** ***B)* R** ***C)* M** ***D)* S** ***E)* O**

RESOLUCIÓN :

• No es necesario ponerse a pensar en todo el diccionario ....

• La segunda palabra del texto del problema te dará la respuesta : ***reconocer***

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

Los pesos de *4* paquetes son ***M, N, P*** y ***Q*** y se sabe que: $M<N<P<Q$. ¿Cuál de las siguientes alternativas podría ser verdadera?

A) $M+P=Q+N$ ***B)*** $M+N=P+Q$ ***C)*** $M+N+Q=P$
D) $N+P=M$ ***E)*** $M+Q=N+P$

RESOLUCIÓN :

* La única posibilidad es que: $M+Q = N+P$, lo cual sucede por ejemplo . siendo :

$M=1, N=2, P=3$ y $Q=4 \Rightarrow 1+4=2+3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 54 :

Inocencia se fue acostar a las *8* de la noche, puso el despertador de agujas para las *9* de la mañana y se fue a dormir de inmediato .

¿Cuántas horas había dormido cuando el despertador lo despertó?

***A)* 12h** ***B)* 13h** ***C)* 11h** ***D)* 1h** ***E)* F. D**

RESOLUCIÓN :

* ***Una hora*** , la alarma la despertó a las *9* de esa misma noche.

RPTA : "D"

PROBLEMA 55 :

"Este lorito es capaz de repetir , todo lo que oiga", le aseguró a la señora el dueño de la pajarería . Pero una semana después , la señora que compró estaba de vuelta en la tienda , molesta porque el lorito no

decía ni una sola palabra y sin embargo el vendedor no había mentido. ¿Cuál de las siguientes proposiciones , sería una razón lógica?.

A) El loro era lora
B) No repetía, porque extraña la pajarería
C) No le gustaba la nueva dueña
D) La compradora era muda o el loro era sordo.
E) Al loro no le gustaba que lo vendan

RESOLUCIÓN :

* Lo más coherente sería que la señora que lo compró sea muda , o que el loro sea sordo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 56 :

Tenemos 2 latas llenas de agua y un recipiente .¿Cómo podrías poner toda el agua dentro de este último recipiente , de manera que luego se pueda distinguir que agua salió de cada lata , sin poner ningún objeto adicional dentro de dicho recipiente?

A) Imposible
B)Echando colorantes distintos antes de mezclarlos.
C) Hirviendo una de ellas
D) Congelando una de ellas
E) Partiendo el recipiente mayor en 2

RESOLUCIÓN :

* Congelando el contenido de ambas latas , y poner en el recipiente mayor los dos trozos de hielo ; o congelando una de ellas.

RPTA : "D"

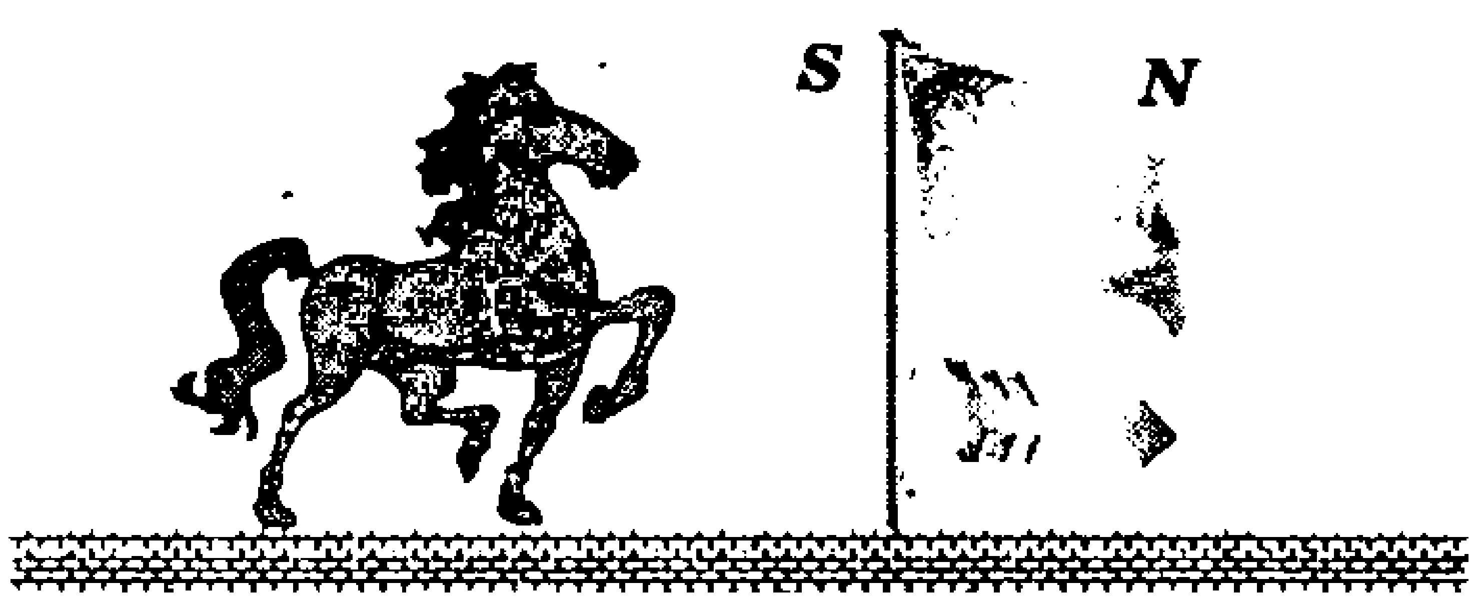
PROBLEMA 57 :

Sabiendo que cuando una bandera flamea de sur a norte , la dirección en que va el viento es la misma . Entonces si un caballo se dirige de sur a norte .
¿Hacia que dirección apunta la cola?

A) Hacia el norte *B) Hacia el sur*
C) Hacia el centro *D) Hacia abajo*

RESOLUCIÓN :

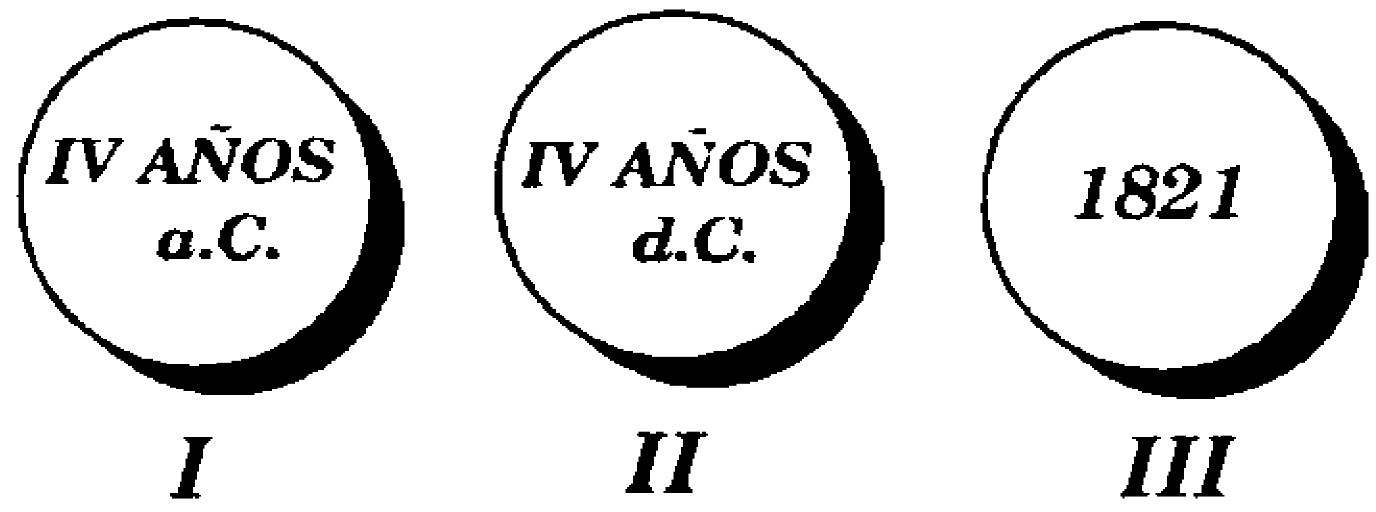
* La cola del caballo apunta hacia abajo :



RPTA : "D"

PROBLEMA 58 :

Un comerciante debe de escoger dos monedas de las tres que le presentan . ¿Cuál de ellas le es conveniente no escoger?



A) I *B) II* *C) III* *D) Cualquiera de ellas*

RESOLUCIÓN :

* No debe escoger la moneda *I* , ya que es falsa ; porque ningún personaje normal que haya nacido antes de Cristo , podría saber sobre la venida de Cristo , y de esa manera, tomar como referencia , la fecha de nacimiento de Cristo .

RPTA : "A"

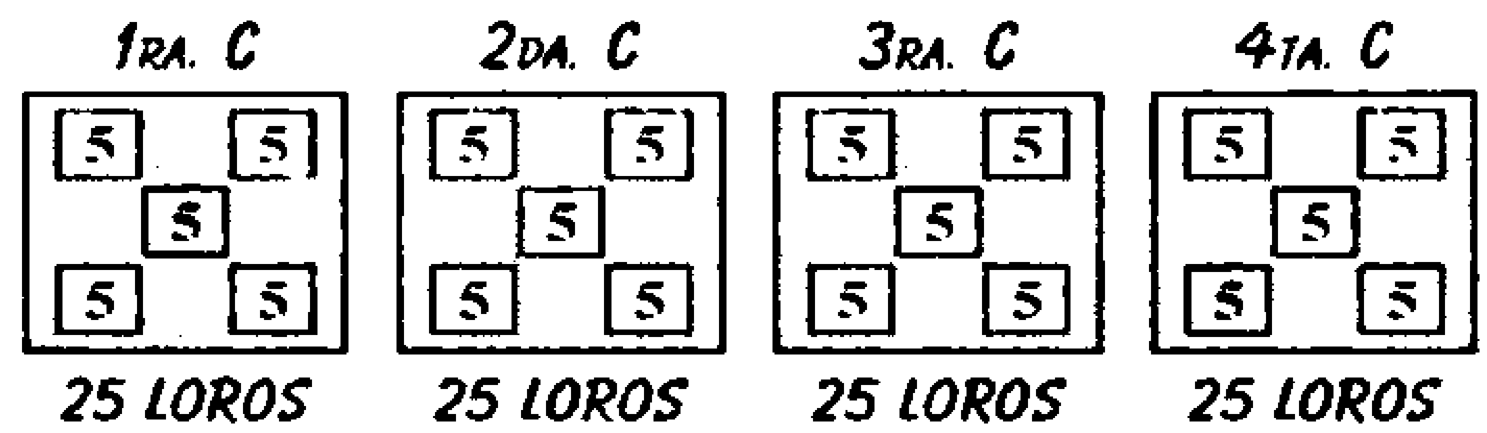
PROBLEMA 59 :

Por una calle van cuatro camionetas , en cada camioneta hay cinco jaulas , y en cada una hay cinco loros . ¿Cuántos loros vienen?

A) 25 loros. *B) 20 loros.* *C) 15 loros.*
D) 100 loros. *E) Ninguno*

RESOLUCIÓN :

* Van : 4 camionetas



* Van 100 : loros.

* Entonces vienen : ninguno porque todos van.

RPTA : "E"

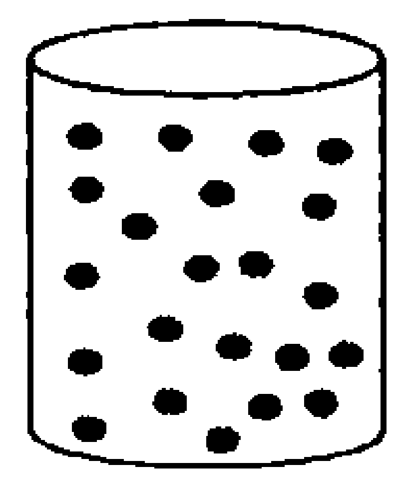
PROBLEMA 60 :

Si se tiene vacío un cilindro que almacena agua. ¿De qué hay que llenarlo para que pierda peso?

A) De aire *B) De hidrógeno*
C) De H_2O *D) De agujeros*

RESOLUCIÓN :

* A un cilindro vacío , para que pierda peso, hay que llenarlo de huecos.



RPTA: "D"

PROBLEMA 61 :

Un extraño insecto se triplica en cada hora. Si al colocar un ejemplar en un frasco de cierta capacidad, éste se llena en 18 horas. ¿En qué tiempo se llenó la tercera parte de dicho recipiente?

A) 6 h *B) 9 h* *C) 3 h* *D) 19 h* *E) 17 h*

RESOLUCIÓN :

Como cada siguiente hora se triplica, entonces una hora anterior a cualquiera fue la tercera parte, y como el frasco le lleno en *18* horas, luego a las *17* horas fue la tercera parte

RPTA : "E"

PROBLEMA 62 :

Cuatro estudiantes de diferentes edades, al comparar sus edades con la relación "mayor que" ; responden de la siguiente manera :

>	A	B	C	D
A	--	V	F	F
B	F	--	F	F
C	V	V	--	V
D	V	V	F	--

Ordenados de mayor a menor se tiene :

A)CDAB *B)CBAD* *C)ABCD* *D)ACBD* *E)CBDA*

RESOLUCIÓN :

* Del cuadro :

$A > B$; $C > A$; $C > B$; $C > D$; $D > A$; $D > B$

* De mayor a menor : $C > D > A > B$

RPTA : "A"

PROBLEMA 63 :

Un anciano padre había muerto y había dejado una cuantiosa herencia a cualquiera de sus 2 hijos . Se quedaría con la herencia aquel cuyo dueño del caballo , en una carrera llegara en segundo lugar , resulta que ninguno de ellos quería llegar primero , por los que pasó cierto tiempo sin que se lleve a cabo dicha carrera . Si se sabe que de todas maneras se llevó a cabo la carrera y hubo un ganador ¿cómo hicieron para realizarla?

A) Utilizaron otros caballos.

B) Se intercambiaron los caballos.

C) Corrieron a pie.

RESOLUCIÓN :

* Se intercambiaron caballos, porque de esa manera cada uno va ha querer llegar primero con el caballo de el otro , para que así su caballo quede en segundo lugar:

RPTA : "B"

PROBLEMA 64 :

Se cometió un asesinato . Se sospecha de Roberto , José , Manuel y Luis . De ser Manuel el homicida , el delito fue premeditado. Si los autores fueron José y Roberto , ocurrió en la noche . Si el asesino es Luis , no ocurrió el día domingo . Como cuestión de hecho sabemos que el suceso ocurrió el domingo por la tarde . En con secuencia. ¿Cuál de los mencionados sería el sospechoso principal?

A) Roberto *B) Luis* *C) Manuel*
D) José *E) Ninguno*

RESOLUCIÓN :

Del texto se tiene que si el homicida es :

* Manuel ⇨ delito premeditado
* José y Roberto ⇨ ocurrió en la noche
* Luis ⇨ no ocurrió el día domingo

SEGÚN DATO : "El suceso ocurrió el domingo por la tarde", con lo cual se descarta como sospechosos a José y Roberto , además de Luis . Sospechoso principal : Manuel

RPTA : "C"

PROBLEMA 65 :

Encontrándose Toño en un país cuya lengua desconoce , entró en un hotel para almorzar . Al ver la lista de platos del menú pidió *BREMA* ; *TAJA Y DODO* y le sirvieron una manzana , papas y sopa. Al día siguiente solicitó *ADIDOS* ; *TAJA* y *UFE* , y le sirvieron un churrasco , pescado y sopa . El tercer día pidió *BREMA* , *DODO* y *UFE* ; y le sirvieron una manzana , papas y un churrasco .

El cuarto día desea almorzar un churrasco ¿qué tendrá que pedir?

A)ADIDOS *B) BREMA* *C) DODO*
D) TAJA *E) UFE*

RESOLUCIÓN :

* El primer día pidió :

BREMA , *TAJA* y *DODO* , y le sirvieron una manzana , papas y sopa .

* El segundo día pidió :

ADIDOS , *TAJA* y *UFE* y le sirvieron un churrasco , pescado y sopa .

* El tercer día pidió :

BREMA , *DODO* y *UFE* ; y le sirvieron manzana , papas y churrasco . De donde se deduce :

* Del primer día y segundo día , la palabra común es *TAJA* y en comida es sopa , entonces : *TAJA* = sopa .
* Del segundo y tercer día , la palabra común es *UFE* y en comida es churrasco , entonces: *UFE* = churrasco

⇒ El cuarto día para almorzar un churrasco , debe pedir un *UFE* .

RPTA : "E"

PROBLEMA 66 :

Si cuatro leones comen cuatro ovejas en cuatro minutos . ¿En qué tiempo un león se comerá a una oveja?

A) Un minuto ***B) Cuatro minutos***
C) Dos minutos ***D) Falta información***

RESOLUCIÓN :

* Un león se comerá a una oveja en cuatro minutos .

RPTA: "B"

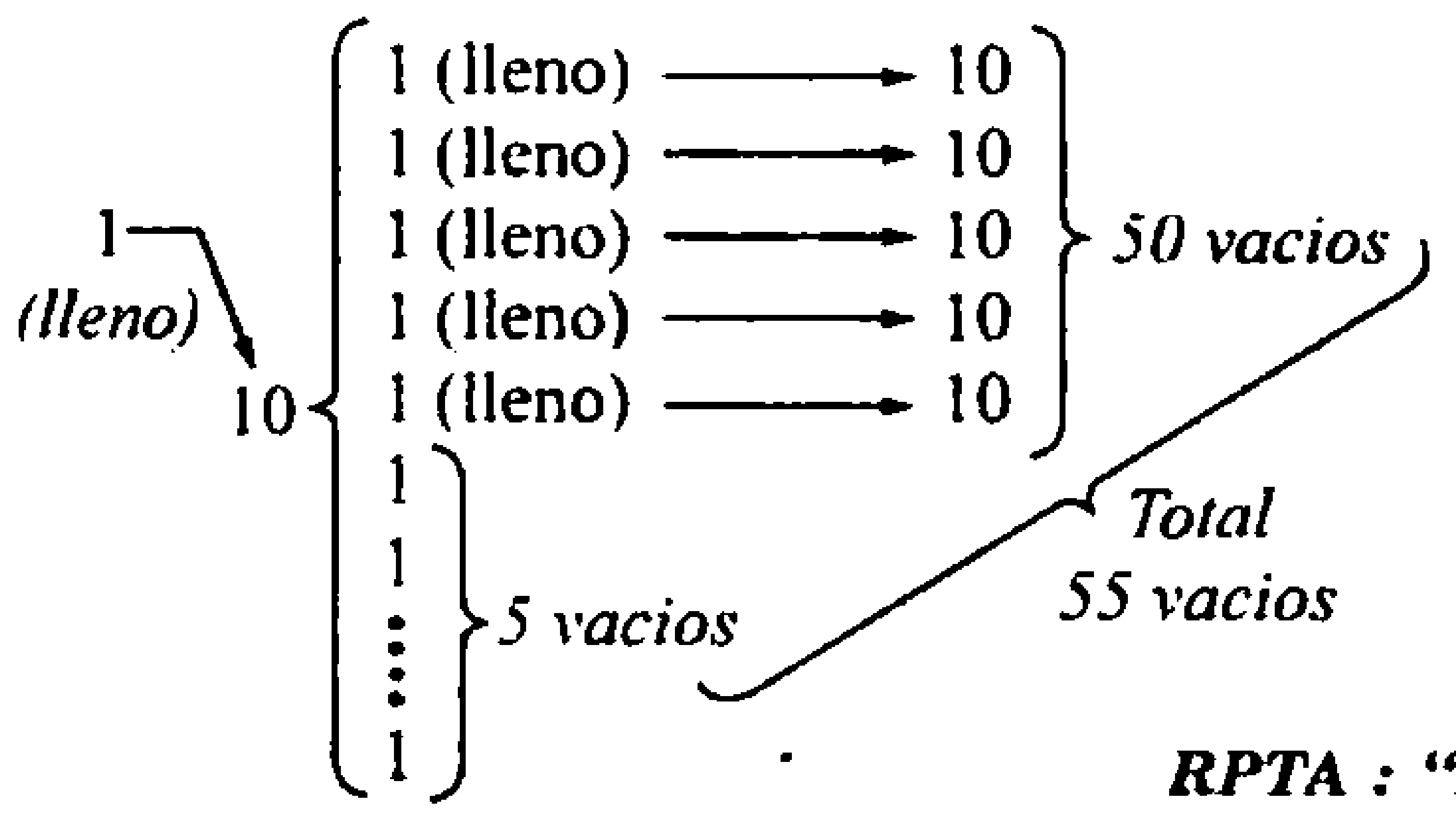
PROBLEMA 67 :

En un cajón se han metido ***10*** cajones en cada uno de estos ***10*** cajones o bien se han metido ***10*** cajones o no se ha metido ninguno .

¿Cuántos cajones quedarán vacíos si se cuentan ***6*** cajones llenos?

A)55 ***B)5*** ***C)6*** ***D)11*** ***E) 93***

RESOLUCIÓN :



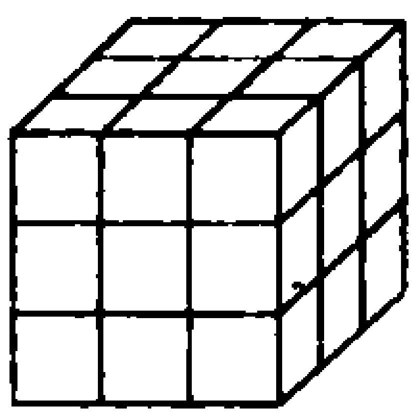
RPTA : "A"

PROBLEMA 68 :

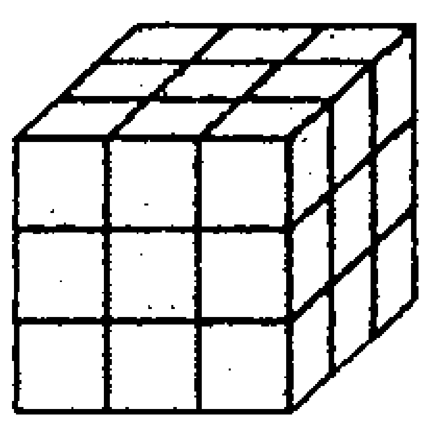
Se colocan ***27*** cubitos formando un solo cubo , y se pinta cada cara del cubo grande . El número de cubos que tiene ***1 ; 2*** y ***3*** caras pintadas en cada caso .

A) 6 ; 12 y 8 ***B) 6 ; 10 y 6*** ***C) 4 ; 10 y 8***

RESOLUCIÓN :

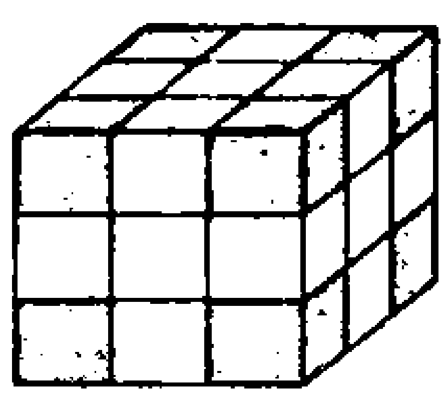


Sean los 27 cubos.



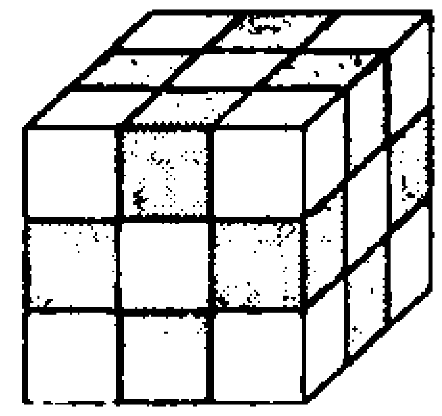
Pintamos cada cara del cubo , obteniendo.

* Los cubos que tienen ***3*** caras pintadas son los que le muestran en la siguiente figura,como se observan son ***8*** los cubos que tienen ***3*** caras pintadas .



Se puede decir que en todos los cubos formados de esta manera el máximo número de cubos pintados en sus tres caras es 8.

* Los cubos que tienen ***2*** caras pintadas son los que se muestran en la siguiente figura :

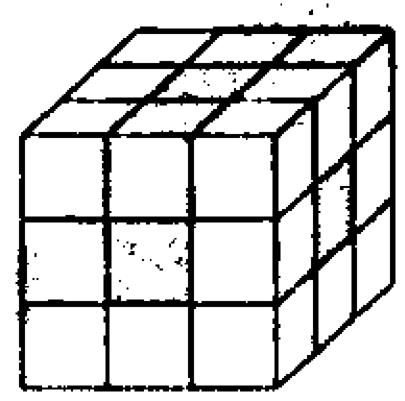


* Si analizamos en una de sus aristas vemos un cubo pintado en sus dos caras , como el cubo tiene ***12*** aristas entonces tendrá :$12 \times 1 = 12$ cubos

NOTA :

Generalizando : si el cubo tiene "***x***" cubitos en su arista , entonces tendrá $(x-2)$ cubitos pintados en sus dos caras en ***1*** arista y en total tendrá : $(x-2)(12)$ = Total de cubitos pintados en sus dos caras

* Los cubos que tiene ***1*** cara pintada , son los que se muestran en la siguiente figura :



Como se observará en cada cara del cubo grande hay ***1*** cubo con una cara pintada , como el cubo (mayor) tiene ***6*** caras , el total de cubos con una cara pintada será : $6 \times 1 = 6$

RPTA : "A"

PROBLEMA 69 :

Si la suma de dos números es igual a uno de ellos , y su producto es igual al otro. ¿qué alternativas son ciertas?

I) Al menos uno de los números es cero.

II) Al menos uno de los números es uno.

III) Ambos números son iguales a cero.

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo III*** ***D) I y II*** ***E) I y III***

RESOLUCIÓN :

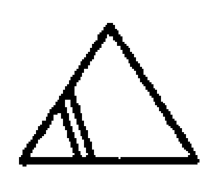
• $a+b=b \Rightarrow a=0$

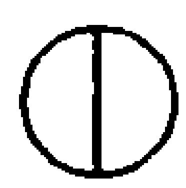
• $ab=b$; como : $a=0 \Rightarrow 0 \times b=b \Rightarrow b \in R$

$\Rightarrow$ Solo ***I*** es cierta

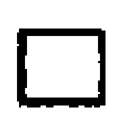
RPTA : "A"

PROBLEMA 70 :

Sabiendo que :  = ***hombres***

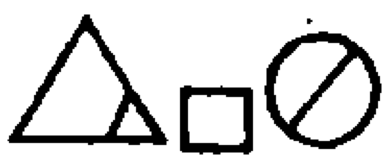
 = ***la mujer***

= ***una caja***

 = ***y***

¿Cómo se representará: "Un hombre y una mujer"?

A) B) C)

D)  E)

RESOLUCIÓN :

• El triángulo representa ***"hombre"*** y el círculo representa ***"mujer"*** ; las líneas , interiores representan singular si hay una , plural si hay dos , femenino hacia la derecha (/) y masculino hacia la izquierda (\ )

RPTA : "E"

PROBLEMA 71 :

En un barco la distancia entre la línea de flotación y la bandera es ***10,5 m***. Si la marea sube ***2 m***, ¿cuál será la distancia entre la bandera y la linea de flotación?

A)8,5 m B)9,5 m C)10,5 m D)11,5 m E)12,5 m

RESOLUCIÓN :

* El barco sube con la marea , así que la linea de flotación se mantendrá , y por lo tanto la distancia pedida será la misma.

RPTA : "C"

PROBLEMA 72 :

Dos alpinistas se detienen para comer , llevando uno de ellos ***5*** panes y el otro ***3*** panes. En ese instante se presenta otro alpinista que les pide compartir sus panes con él ; así lo hicieron , de modo que los ***3*** comieron por igual. Al final el tercer alpinista , en compensación , les ofrece ***8*** monedas de un sol para que se las repartan. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

A) S/. 5 y S/. 3 B) S/. 6 y S/. 2 C) S/. 4 y S/. 4
D) S/.7 y S/.1 E) S/. 8 y S/. 0

RESOLUCIÓN :

• En total llevan ***8*** panes , que como no se dividen exactamente entre ***3***, vamos a partirlos en ***3*** pedazos cada uno ; tenemos entonces: $8\times3 = 24$ pedazos y cada alpinista comerá : $24 \div 3 = 8$ pedazos.

• El que llevaba ***5*** panes , es decir : $5\times3 = 15$ pedazos , se comió ***8*** , así que aportó : $15 - 8 = 7$ pedazos.

• El que llevaba ***3*** panes , es decir : $3\times3 = 9$ pedazos , se comió ***3*** , así que aportó : $9 - 8 = 1$ pedazo.

⇒ Al 1°, le corresponde ***S/.7*** y al 2°, ***S/. 1***

RPTA : "D"

PROBLEMA 73 :

Compré un libro en ***S/. 30*** y luego se lo vendi a un amigo a ***S/. 35.*** Luego le pedí a mi amigo que me lo vendiera y pagué ***S/. 40*** por el libro , pero posteriormente se lo volví a vender a mi amigo en ***S/. 45.*** ¿Cuánto gané o perdí?

A) gané S/. 10 B) gané S/. 15 C) gané S/. 5
D)no gané ni perdí E) gané S/. 20

RESOLUCIÓN :

• En la ***1ª*** venta gané : $35 - 30 = S/.\ 5$

• En la ***2ª*** venta gané : $45 - 40 = S/.\ 5$

⇒ En total gané : $5+5 = S/.\ 10$

RPTA : "C"

PROBLEMA 74 :

Tres misioneros y tres caníbales se hallan en la orilla de un río y para cruzarlo solo disponen de una barca con capacidad para dos hombres .

Si en ningún momento deben haber más canibales que misioneros porque sino se los comen , ¿en cuántos viajes como mínimo podrán cruzar todos el río?

A)9 B)10 C)11 D)12 E)13

RESOLUCIÓN :

• Llamemos M_1, M_2 y M_3 a los misioneros y C_1,C_2 y C_3 a los caníbales.

• ***1er*** viaje: se van C_1 y C_2

• ***2do*** viaje: regresa C_1

• ***3ro*** viaje: se van C_1 y C_3

• ***4to*** viaje: regresa C_3

• ***5to*** viaje: se van M_1 y M_2

• ***6to*** viaje: regresan M_2 y C_2

• ***7mo*** viaje se van M_2 y M_3

• ***8vo*** viaje: regresa C_1

• ***9no*** viaje: se van C_1 y C_2

• ***10mo*** viaje: regresa C_2

• ***11vo*** viaje: se van C_2 y C_3

⇒ ***11*** viajes.

RPTA : "C"

PROBLEMA 75 :

Cuatro profesores de la academia y dos alumnas tienen que cruzar un río en una canoa , en cada viaje puede ir uno de los profesores o las dos alumnas, pero no un profesor y una alumna a la vez . ¿Cuál es el mínimo número de veces que la canoa tiene que cruzar el río en cualquier sentido para que se pase a todos?

A)4 B)8 C)12 D)17 E)19

RESOLUCIÓN :

1ro) Cruzan las ***2*** alumnas

2do) Regresa una de las alumnas

3ro) Cruza un profesor

4to) Regresa la otra alumna.

Hasta aquí , con ***4*** viajes ha cruzado un profesor,

luego con $3\times4=12$ viajes cruzan los *3* profesores restantes, quedando las *2* alumnas en la primera orilla , que en *1* viaje más logran cruzar.

⇒Total de viajes : $4 + 12 + 1 = 17$

RPTA : "D"

PROBLEMA 76 :

Saúl, Aníbal y Marco son médicos. Dos de ellos son cardiólogos y uno es pediatra. Aníbal y marco afirman que uno de ellos es cardiólogo y el otro pediatra, por lo que podemos deducir que

A) Anibal y Marco son pediatras.
B) Anibal y Marco son cardiólogos
C) Saúl es cardiólogo.
D) Saúl es pediatra.
E) Anibal es cardiólogo y pediatra.

RESOLUCIÓN:

Si de Anibal y Marco se sabe que uno es cardiólogo y el otro pediatra

* Falta un cardiólogo que debe ser Saúl .

RPTA : "C"

PROBLEMA 77 :

Juan recorrió varias librerías, encontrando *5* libros que eran importantes. Como no tenía dinero para comprar todos, decidió compra uno. Juan tomó la decisión después de

A) eliminar uno de ellos.
B) controlar y eliminar el 90% de posibilidades.
C) evaluar y eliminar el 80% de posibilidades.
D) aceptar el 25% de posibilidades.
E) sopesar y desechar el 99% de posibilidades.

RESOLUCIÓN:

Como de los *5* libros compró uno, decidió comprar el ***20%*** . Evaluó y no compró el ***80%*** .

RPTA : "C"

PROBLEMA 78 :

Un mono está al fondo de un pozo de *26* metros. Cada día salta hacia arriba *6 m*. y resbala *2 m*. Si la ascensión comenzó el Lunes. Que día llegará el mono al borde del pozo?

A) Miércoles ***B) Martes*** ***C) Sábado***
D) Domingo ***E) Viernes***

RESOLUCIÓN:

En realidad sólo avanza cada día :$6 - 2 = 4\ m$.

* Como el pozo es de *26 m*., aparentemente deberá llegar al borde en : $\frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$ días, o sea el Domingo.

* Pero lo real es lo siguiente : Al finalizar el 5^{to} día, es decir, antes de comenzar su ascensión del 6^{to} día, el mono estaba a $5\times4=20m$. del fondo.

* Como el 6^{to} día sube *6m* . más, llegará al borde o sea: $20+6=26\ m$. y una vez que llegó a este, se trepará bien y saldrá del pozo y no tendrá porque resbalarse.

Por lo tanto el mono llega al borde después de *6* días, o sea el Sábado.

RPTA: "C"

PROBLEMA 79 :

José se encuentra en el 6^{to} piso de un edificio; luego baja al 3^{er} piso, vuelve a subir al 5^{to} piso y finalmente baja al 2^{do} piso. Si entre piso y piso las escaleras tienen *12* peldaños. ¿Cuántos peldaños ha bajado José?

A) 72 ***B) 96*** ***C) 84*** ***D) 120*** ***E) 48***

RESOLUCIÓN:

Del 6^{to} al 3^{er} piso baja *3* pisos. Del 5^{to} al 2^{do} piso baja 3 pisos. En total bajó *6* pisos.

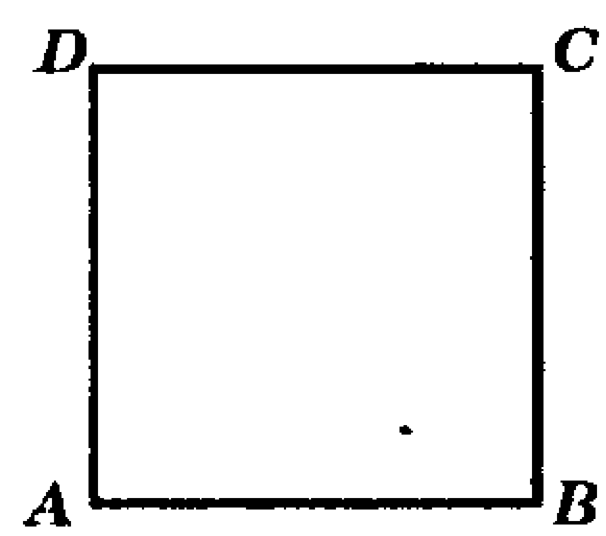
Como la escalera tiene *12* peldaños de piso a piso. Entonces ha bajado : $6\times12 = 72$ peldaños

RPTA: "A"

PROBLEMA 80 :

Una persona está parada en el punto *A* y decide, tirando una moneda, hacia cuál de las esquinas próximas: (D ó *B*) se dirigirá. En la próxima esquina volverá a hacer lo mismo. Si tira la moneda tres veces, diga cuál de estos tres recorridos no es posible:

A) ADCD
B) ADAB
C) ABCB
D) ADCA
E) ABAD



RESOLUCIÓN :

Del gráfico : El recorrido no es posible es ***ADCA*** , ya que el trayecto ***CA*** no es hacia los lados contiguos.

RPTA : "D"

PROBLEMA 81 :

Elisa, Jaime, Magda y Fernando han comprado bicicletas, cada una de color diferente para no confundirlas: blanca, amarilla, roja, verde.

Pero de vez en cuando las intercambian, como ocurrió el domingo pasado.

– El o la propietaria de la bicicleta verde se entrenaba muy duramente para una carrera con la bicicleta de Elisa.

– Magda estaba descansando con la bicicleta amarilla apoyada en un árbol.

– Jaime, que no es el propietario de la amarilla, paseaba tranquilamente con la roja.

¿De qué color es la bicicleta de Magda?

A) Blanca *B) Amarilla* *C) Roja*
D) Verde *E) F.D.*

RESOLUCIÓN:

Elisa no es la propietaria de la verde tampoco es Magda (que está descansando) ni Jaime (que pasea tranquilo) entonces es Fernando .De la misma manera, la de Elisa, que sirve para carreras, es ni la verde ni la amarilla, ni la roja. Será, por lo tanto, la blanca:la de Jaime no es ni la blanca, ni la amarilla ni la verde, sino la roja. La amarilla será de Magda.

RPTA : "B"

PROBLEMA 82 :

¿Cuántas bisabuelas tuvo mi abuela?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D)4* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

* Ten en cuenta que cualquier persona (mi amigo, mi profesor o mi abuela) debió tener *2* padres , *4* abuelos y *8* bisabuelos. Pero como nos preguntan por "las bisabuelas", estas debieron ser *4*.

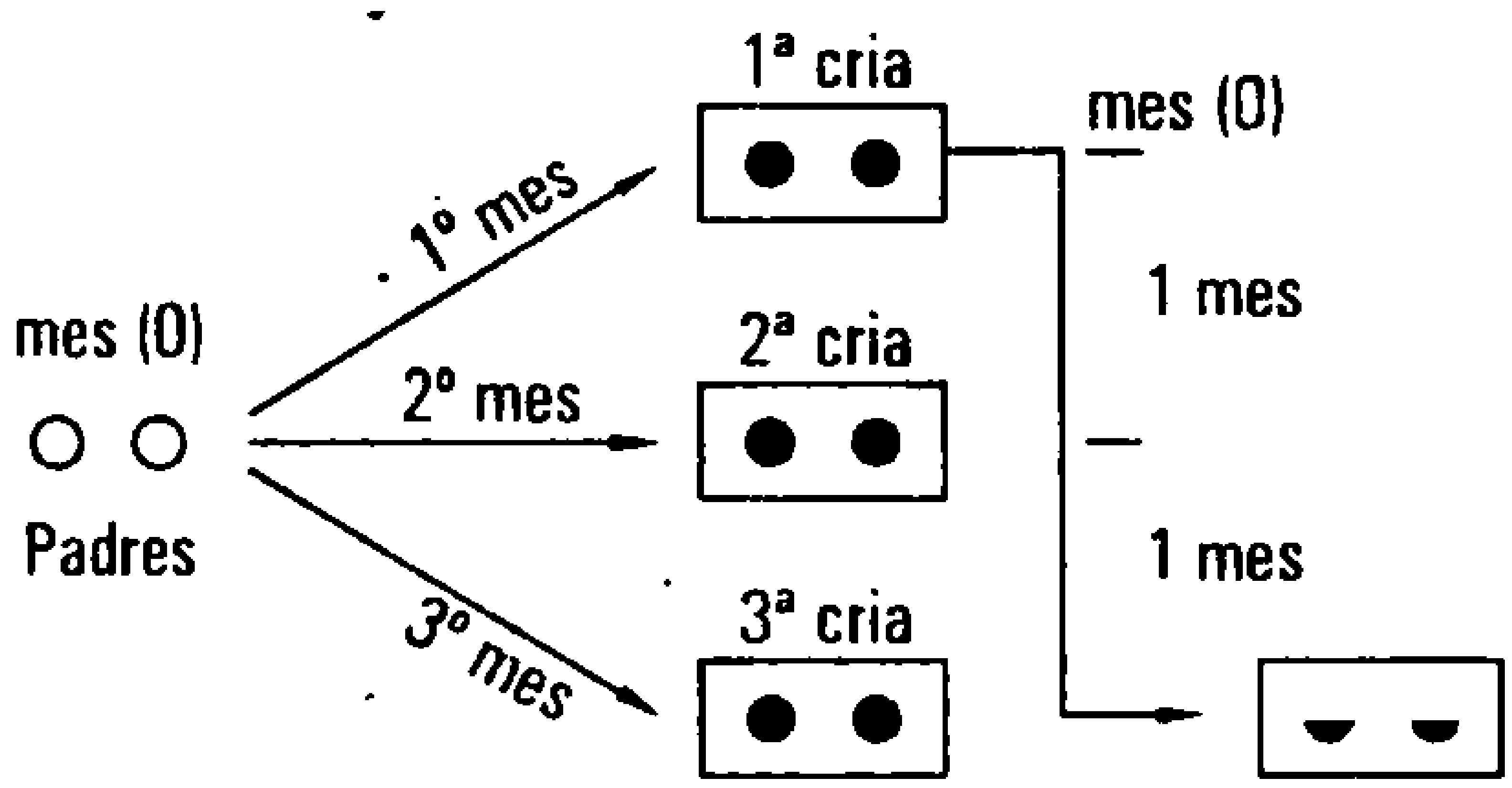
RPTA : "D"

PROBLEMA 83 :

Una pareja de conejos dan una vez al mes una cría de *2* conejitos (un macho y una hembra), al cabo de *2* meses de nacimiento los conejos recién nacidos ya dan cría. ¿Cuántos conejos habrán al cabo de *3* meses si al comienzo habían un par de conejos?

A) 4 *B) 6* *C) 8* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN :



PROCEDIMIENTO :

1) Los padres en *3* meses tendrán *3* crías de conejos (macho y hembra). O sea : $3\times2 = 6$ conejos.

2) En el tercer mes la primera cría, al cabo de *2* meses tienen una cría de *2* conejos que transcurridos dan *3* meses : luego en *3* meses, el total de conejos al final incluyendo los padres son : $2 + 6 + 2 = 10$ conejos

RPTA : "D"

PROBLEMA 84 :

Un tren sale de Huancayo para Huancavelica. Una hora después otro tren sale de Huancavelica para Huancayo. Los dos trenes van exactamente a la misma velocidad. ¿Cuál de los dos estará más cerca de Huancayo cuando se encuentren?

A) El que parte de Huancayo
B) El que parte de Huancavelica
C) Se encuentran a la misma distancia
D) Faltan datos
E) Uno de ellos

RESOLUCIÓN :

* Si se encuentran, es porque están a la misma distancia de Huancayo .

RPTA : "C"

PROBLEMA 85 :

Un rey árabe que tenía dos hijos dispuso en su testamento que su reino y su fortuna fuera para aquel de sus hijos cuyo caballo llegara en segundo lugar en una carrera, entre ellos dos , a la Meca . Al morir el rey y abrirse el testamento , los hijos estuvieron muchos días sin saber cómo realizar la carrera, hasta que decidieron consultar a un renombrado sabio, quien les habló a cada uno de ellos en el oído. Inmediatamente los dos montaron a caballo y salieron raudos hacia la Meca . ¿Qué les dijo el sabio?

A) Que corran hacia atrás.

B) No corriesen

C) Intercambien caballos

D) No se puede hacer nada.

E) Que es absurdo.

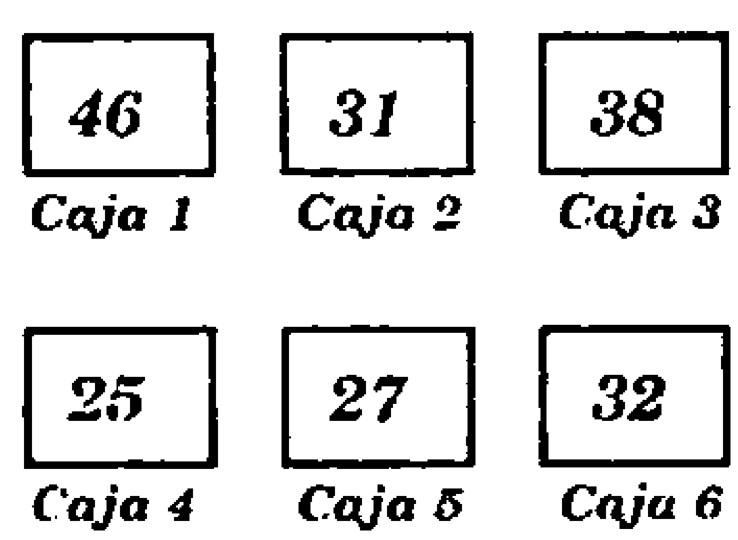
RESOLUCIÓN:

Que intercambien caballos, para que así sea una carrera justa, ya que cada uno va a querer ganar, para que así su caballo quede segundo.

RPTA: "C"

PROBLEMA 86 :

En la figura, se muestran cajas que contienen caramelos, en unas hay sólo caramelos de limón en las otras, sólo de menta La cantidad está en indicada en cada caja. Si al vender dos de estas cajas quedan tantos caramelos de limón como de menta, ¿Cuáles son las dos cajas que deben ser vendidas?



A) Caja 3 y caja 4
B) Caja 2 y caja 6
C) Caja 1 y caja 4
D) Caja 2 y caja 3
E) Caja 1 y caja 5

RESOLUCIÓN :

En el gráfico tenemos lo siguiente:

46	31	38
Caja 1	*Caja 2*	*Caja 3*
25	27	32
Caja 4	*Caja 5*	*Caja 6*

Se tiene la siguiente condición: al vender **2** de ellas queda la misma cantidad de caramelos de limón y de menta. Entonces, debemos bucar **2** parejas de números que sumen lo mismo.

* Es decir : $\boxed{31}_{caja2} + \boxed{32}_{caja6} = \boxed{38}_{caja3} + \boxed{25}_{caja4}$

* Luego, las cajas que deben ser vendidas son :

caja 1 $\boxed{46}$ *y caja 5* $\boxed{27}$

$\therefore$ $\boxed{\textit{caja 1 y caja 5}}$

RPTA : «C»

PROBLEMA 87 :

En los tiempos de la antiguedad la gracia o el castigo se dejaban frecuentemente al azar. Asi, éste es el caso de un reo al que un sultán decidió que se salvase o muriese sacando al azar una papeleta de entre dos posibles. Una con la sentencia «MUERTE», y la otra con la palabra «VIDA», indicando gracia. Lo malo es que el Gran Visir, que deseaba que el acusado muriese, hizo que en las dos papeletas se escribiese la palabra «MUERTE».

¿Cómo se las arregló el reo, enterado de la trama del Gran Visir, para estar seguro de sal- varse?

Al reo no le estaba permitido hablar y descubrir así el enredo del Visir.

RESOLUCIÓN:

Eligió una papeleta y, con gesto fatalista, como correspondía a un árabe , se la tragó. El sultán hubo de mirar la que quedaba, para saber lo que decía la elegida por el reo, con lo que su salvación quedó asegurada merced al Gran Visir y a su propio ingenio.

PROBLEMA 88 :

Un sultán encierra a un prisionero en una celda con dos guardianes, uno que dice siempre la verdad y otro que siempre miente. La celda tiene dos puertas: la de la libertad y la de la esclavitud. La puerta que elija el prisionero para salir de la celda decidirá su suerte.

El prisíonero tiene derecho de hacer una pregunta y sólo una a uno de los guardianes. Por supuesto, el prisionero no sabe cuál es el que dice la verdad y cual es el que miente. ¿Puede el prisionero obtener la libertad de forma segura?

RESOLUCIÓN:

El prisionero pregunta a uno de los dos guardias:

«SI LE DIJERA A TU COMPAÑERO QUE ME SEÑALE LA PUERTA DE LA LIBERTAD.

¿QUÉ ME CONTESTARIA?».

En los dos casos , el guardia señala la pueta de la esclavitud. Por supuesto elegiría la otra puerta para salir de la celda.

EJEMPLO :

• Suponiendo que le pregunta al guardia que dice la verdad. Entonces el otro que miente en vez de señalar la de LIBERTAD diria la de ESCLAVITUD (por que miente).

PROBLEMA 89 :

Una reina cautiva, con su hijo y su hija, fueron encerrados en lo alto de una torre , en la parte exterior de la ventana había una polea de la que pendía una soga con dos canastas atadas, una en cada extremo, ambas canastas de igual peso. Los cautivos lograron escapar sanos y salvos usando una pesa que había en la habitación. Habría sido peligroso para cualquiera de los tres descender pesando más de ***15 kg*** que el contenido de la canasta inferior, porque habría bajado demasiado rápido; y se las ingeniaron para no pesar tampoco menos de esa diferencia de ***15 kg***. La canasta que bajaba hacía subir, naturalmente, a la otra ¿Cómo lo consiguieron?

La reina pesaba ***75 kg***; la hija ***45 kg***, el hijo ***30 kg*** y la pesa ***15 kg***.

RESOLUCIÓN:

Se realizan los siguientes procesos:

* Ponen la pesa , la canasta baja, se sube el hijo en la otra canasta, la canasta baja, quitan la pesa y en su lugar se sube la hija y su canasta baja, se quita el hijo y pone la pesa, la hija se quita y la pesa baja.

* Se pone el hijo en la otra y su canasta baja.

* Se pone la hija en la canasta del hijo y la reina se pone en la pesa y baja.

*El hijo se sube en una canasta y la pesa en otra y baja el hijo.

* Se quita la pesa y se pone la hija y baja.

* Se pone la pesa sóla y baja.

*Se pone el hijo y en la otra canasta la pesa y baja el hijo.

PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

Si : $m = 2m$

Calcular : $m + m + m + m + m$

A) m *B) 3m* *C) 5m* *D) 1* *E) 0*

PROBLEMA 2 :

Si de cada *50* mujeres *10* son casadas. De *10* solteras. ¿cuántas casadas habrían?

A)10 *B)20* *C)Más de 20*
D)Menos de 20 *E)Ninguna*

PROBLEMA 3 :

Si Juan parado en un pie sobre una balanza pesa *80 kg*. ¿cuánto pesará con los *2* pies sobre la balanza?

A) 40 kg. *B) 80 kg.* *C)160 kg.*
D) 100 kg. *E) 120 kg.*

PROBLEMA 4 :

¿Se podrá dibujar una cruz , sin levantar la mano , ni repetir el trazo (ni tampoco mover el papel o el objeto donde se esté dibujando)?

A)Imposible *B)Si se puede* *C)Si , escribiendo "cruz"*

PROBLEMA 5 :

¿Hasta donde puede entrar un lobo en el bosque?

A)Todo el bosque *B) Mitad del bosque*
C)Un cuarto del bosque *D) Diez metros*

PROBLEMA 6 :

¿Porqué una persona longeva que vive en Lima, no puede ser enterrada en Arequipa?

A) Porque en Arequipa no se entierra a los limeños.
B) Por que la ley no lo permite .
C) Porque a los limeños no les gusta Arequipa.
D) Por que en Arequipa no hay cementerios.
E) Por que no se puede enterrar a una persona viva.

PROBLEMA 7 :

Después de sufrir un accidente Pedro quedó manco y zurdo , entonces , ¿de qué mano no es manco?

A) De la siniestra *B) De la derecha*
C) Faltan datos *D) De la diestra*

PROBLEMA 8 :

En un cuarto hay gatos , cada gato mira cinco gatos. ¿Cuántos gatos hay en el cuarto?

A) Cinco *B) Seis* *C) Siete*

PROBLEMA 9 :

¿Cuántos huevos te puedes comer como mínimo?

A) 1 *B) 2* *C) Depende* *D) No me gusta los huevos*

PROBLEMA 10 :

Un hombre sin ojos vio ciruelas en un árbol , no comió ciruelas , ni dejo ciruelas. ¿cuántas ciruelas había en el árbol?

A) Varias *B) 1* *C) 2* *D) Ninguna* *E) Falta datos*

PROBLEMA 11 :

Yo poseo *20* pavos . Hoy en la mañana se murieron *5* pavos . ¿Cuántos pavos tuve en la mañana poco después de ver a los que se murieron?

A) 15 *B) 5* *C) 10* *D) 20* *E) 25*

PROBLEMA 12 :

En una granja habían ciento cincuenta gallinas ; se mueren todas , menos cien . ¿Cuántas quedan?

A)100 *B)50* *C)150* *D)149* *E) 0*

PROBLEMA 13 :

En el circo romano salieron a luchar *12* gladiadores en parejas . Al final de la lucha el Emperador dispuso que se diera muerte a igual número de gladiadores que la cantidad de ganadores . ¿Cuántos gladiadores murieron?

A) 6 *B) 8* *C)12* *D) Ninguno* *E) 3*

PROBLEMA 14 :

Cuando Ivanov se dirigía a la Meca; se cruzó en el camino con un jeque, quien tenía *3* esposas y cada esposa tenía *5* hijos y cada hijo *3* esclavas. ¿Cuántas personas iban a la ciudad?

A)1 *B 23* *C) 22* *D)18* *E) 21*

PROBLEMA 15 :

Rosa, va al mercado y por un plátano paga *21* céntimos por una tuna *12* céntimos y por una sandía *18* céntimos. ¿Cuánto gastará al comprar un mamey, un melocotón y una naranja?

A) 63 *B) 56* *C) 81* *D) 27* *E) 65*

PROBLEMA 16 :

En un árbol se encontraban *20* pájaros, un cazador dispara y mata todos menos la mitad. ¿Cuántos quedan en el árbol?

A) 10 B) 20 C) Ninguno D) 15 E) F.D.

PROBLEMA 17 :

Por un desorden ambiental, en un pozo artesanal del Mantaro, mueren todos los peces menos los que mueren. ¿Cuántos quedan?

A)Todos B)Ninguno C) La mitad D) Absurdo E) F.D.

PROBLEMA 18 :

Naranjas ví, naranjas no comí y naranjas no me quedaron. ¿Cuántas naranjas ví ?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 1 E) Ninguna

PROBLEMA 19 :

Cierta clase de microbio se duplica en cada minuto . Si colocamos un microbio en un frasco de cierta capacidad , éste se llena en *30* minutos . ¿En qué tiempo se llenará un recipiente del doble volumen que el anterior , si ponemos *2* microbios?

A)15 minutos B)30 minutos C) 29 minutos D) 31 minutos

PROBLEMA 20 :

Una determinada especie microscópica se duplica cada mínuto . Se coloca un microbio en un recipiente y este se llena en *20* mínutos . Si colocamos *8* microbios en un recipiente de doble capacidad que el anterior . ¿En qué tiempo se llenará?

A) 19 mín. B) 18,5 mín. C)18 mín.

PROBLEMA 21 :

En aquellos lejanos tiempos en que cualquier viaje para cruzar el desierto necesita del auxilio del camello , eran frecuentes los problemas que como este buscaban el máximo de seguridad con un mínimo de costo . Se trataba de un viajero que quiere cruzar un desierto cuya travesía dura *8* días , y donde ningún auxilio se puede recibir . El peso que en provisiones y en agua pueden llevar tanto el viajero como cada camello sólo puede alcanzar para el consumo de *5* días , sea del viajero o del camello , ¿Cuál será el menor número necesario de camellos para que la travesía ofrezca la seguridad de que no falten provisiones? se entiende que los camellos tienen que regresar a su lugar de origen sin sufrir falta de provisiones o agua .

A) 5 B) 10 C) 3 D) 2 E) 25

PROBLEMA 22 :

Una señora compra carne por un valor de ***S/.3*** y paga con un billete de ***S/.10***. El carnicero que no tenía cambio, cruza la calzada y se dirige hacia la botica , cambia el billete en dos de ***S/.5***. Cruza nuevamente la calzada y cambia en la panadería uno de los billetes de ***S/.5*** en ***5*** monedas de ***S/.1***, con lo cual consigue dar vuelto. Luego de algunos minutos el boticario le devuelve el billete de ***S/.10*** soles, pues ¡ era falso ! Y el carnicero compungido le entrega un billete de ***S/.10*** verdadero. ¿Cuánto perdió el carnicero?

A) S/. 20 B) S/. 10 C) S/. 17 D) S/. 5 E) S/. 40

PROBLEMA 23 :

Sometido al tribunal de la Santa Inquisición , al prisionero le dieron a elegir entre *2* sobres cerrados que habían en una ánfora . Si sacaba el que decía «Inocente» salvaría la vida . Si sacaba al que decía «Culpable» lo condenarían a la muerte . Allí parado frente a la vela encendida que iluminaba el ánfora , pensó unos segundos hasta que , tomó la decisión que le salvó la vida .... ¿Qué hizo el condenado para salvarse teniendo que escoger un sobre?

A) Utilizó una moneda

B) Hizo que lo abriera el verdugo

C) Utilizó fuego

D) No supo que hacer

E) Imposible que se salve

PROBLEMA 24 :

De tres prisioneros que se hallaban en cierta cárcel , uno tenía visión normal , el otro tenía un solo ojo y el tercero era totalmente ciego . Los tres eran , por lo menos , de inteligencia media . El carcelero dijo a los prisioneros que de un conjunto de tres sombreros blancos y dos rojos , elegiría tres de ellos y los colocaría sobre sus cabezas . Se prohibía a cada uno de ellos que viera el color del sombrero que tenía sobre su propia cabeza . Se los reunió y el carcelero ofreció la libertad al prisionero con visión normal si podía decir de qué color era el sombrero que tenía sobre su cabeza . El prisionero confesó que no podía. Luego , el carcelero , ofreció la libertad al prisionero que tenía un solo ojo , a condición de que dijera cuál era el color de su sombrero. El segundo prisionero confesó que no podía decirlo. El carcelero no se molestó en hacer el

ofrecimiento al prisionero ciego, pero a pedido de éste aceptó concederle la misma oportunidad . El prisionero ciego esbozó. entonces una ancha sonrisa y dijo : «No necesito de mi vista ; pues , por lo que mis amigos con los ojos han dicho, veo claramente que mi sombrero es ....

A) Rojo *B) Blanco* *C) Rojo o blanco*
D) Azul *E) No se sabe*

PROBLEMA 25 :

Durante una antigua guerra *3* prisioneros fueron llevados aun cuarto . En el lugar había una gran caja que contenía *3* sombreros blancos y *2* sombreros negros , a cada prisionero se le vendaron los ojos y le fue puesto en la cabeza uno de los sombreros . Los hombres fueron colocados en filas , uno tras otro, dirigidos hacia la pared . Al prisionero que se encontraba mas , alejado de la pared le fue quitado el vendaje y se le permitió mirar los sombreros de los dos prisioneros que se encontraban delante de él. Si deducía (no adivinando) el color del sombrero colocado en su cabeza , sería puesto en libertad . Sin embargo , fue incapaz de decirlo. Luego le fue quitado el vendaje al siguiente prisionero, quien podía ver solamente el sombrero que tenia puesto el hombre que se encontraba delante de él . Este prisionero tuvo la misma oportunidad de obtener su libertad , pero fue incapaz de decir el color de su sombrero. El hombre restante entonces dijo a los guardias , el color del sombrero que el tenia puesto y fue dejado en libertad . ¿De qué color era este sombrero y como lo dedujo .

A) NEGRO *B) BLANCO* *C) ROJO*
D) NEGRO O BLANCO *E) AZUL*

SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

RESOLUCIÓN 1 :

* Como : $m = 2m$

$\Rightarrow 0 = 2m - m$

$\Rightarrow 0 = m$

$\Rightarrow m + m + m + m + m = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 2 :

* De las *10* solteras, ninguna será casada.

RPTA : "E"

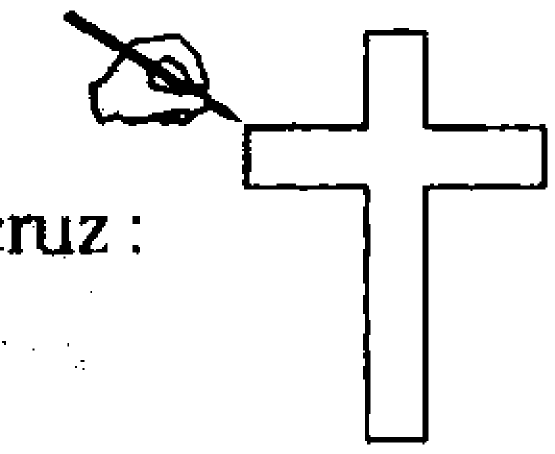
RESOLUCIÓN 3 :

* En ambos casos estará sobre la balanza, la cual indicará *80 kg* .

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 4 :

Si es posible , pero la siguiente cruz :



RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 5 :

* El lobo puede entrar hasta la mitad del bosque , porque después ya estaría saliendo.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 6 :

* El enunciado indica que la persona vive .

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 7 :

* Pedro después de sufrir el accidente quedó con la mano izquierda (zurdo).
* Por lo tanto , no es manco de la mano izquierda .

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 8 :

* En el cuarto hay seis gatos :

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 9 :

* Hablan de huevos (plural) , entonces el mínimo grupo de huevos que uno puede comer , será de *2* huevos

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 10 :

* Este acertijo se descifra , considerando el plural . El hombre no tiene ojos , pues tiene un solo ojo .

* El enunciado señala : "Vio ciruelas" (está en plural) , nos indica que en el árbol hay *2* o más ciruelas . Luego al decir "no comió ciruelas", nos señala que comió *1* ciruela ; entonces : "Ni dejo ciruelas", será que dejo *1* ciruela .

* ***Conclusión :***

I) Comió 1 ciruela }
II) Dejó 1 ciruela } ***Había 2 ciruelas***

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 11 :

* En el instante pedido , estarán los vivos y los muertos , es decir todos los pavos .

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 12 :

* No piden las vivas , ni las que mueren , según enunciado se requiere las que quedan , es decir todas (las vivas y las muertas)

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 13 :

* En cada lucha muere el perdedor , luego como pelearon *6* parejas , entonces hubo *6* ganadores y *6* que murieron ; pero por orden se debe matar a *6* (igual que los ganadores) , es decir a los *6* ganadores.

* Por lo tanto murieron :

6 perdedores + 6 ganadores = 12 gladiadores

RPTA: "B"

RESOLUCIÓN 14 :

* El único que se iba a la Meca es Ivanov, las demás personas venían de ella .

RPTA: "A"

RESOLUCIÓN 15 :

* Debemos descubrir la siguiente analogía :

Plátano ⟶ 7 letras < > 21 céntimos

Tuna ⟶ 4 letras < > 12 céntimos

Sandía ⟶ 6 letras < > 18 céntimos

1 letra < > 3 céntimos

⇒ Número mínimo de extracciones: 5

* Luego para :

Mamey , melocotón y naranja; necesitará *21* letras de *3* céntimos cada una , es decir : $21 \times 3 = 63$ céntimos

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 16 :

Ninguno , ya que los muertos caen y los demás se escapan.

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 17 :

Quedan todos, los vivos y los muertos .

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 18 :

I) Ví naranja (s) , nos indica que se encontraban como mínimo **2** naranjas (en plural).

II) Naranjas no comí, indica que comí una naranja (Pues no habla de naranjas y sabemos que hay como mínimo **2**)

II) Naranjas no me quedaron, indica que queda una.

⟹ ***1*** naranja comí y ***1*** quedó, quiere decir que al comienzo ví **2** naranjas

RPTA: "A"

RESOLUCIÓN 19 :

	1°	2°	3°	....		30°
Primer recipiente	1	2	4	....		$\overset{\text{Capacidad en microbios}}{N}$
Segundo recipiente	2	4	8	....	N	$\underset{\text{Capacidad en microbios}}{2N}$

Explicación : Al colocar **2** microbios en el ***1er*** minuto en el ***2do*** recipiente nos ahorraremos ***1'*** en llenar un recipiente igual al primero , pero como nos piden llenar de doble capacidad , entonces se necesitará un ***1'*** adicional , luego lo pedido será :

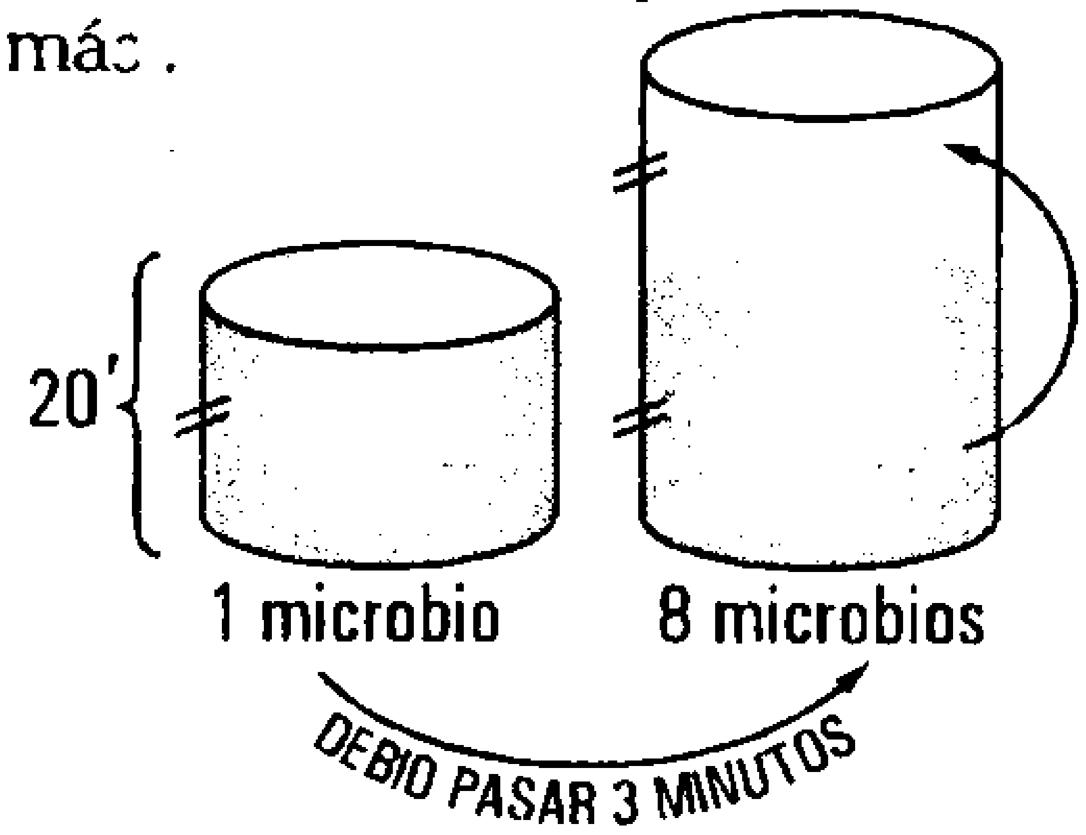
Tiempo pedido : *30' – 1' + 1' = 30'*

Ahorro por colocar 2 microbios ↲ *Para llenar uno de doble capacidad que el primero*

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 20 :

* Para que sea de doble capacidad debe pasar *1* minuto más .



* Por colocar *8* microbios en vez de *1* nos ahorraremos *3* minutos es decir necesitaremos : *20' – 3'=170'* para llenar un recipiente de igual capacidad que el primero , pero *17' + 1' = 18'* para que sea de doble capacidad.

RPTA: "C"

RESOLUCIÓN 21 :

* Se sale con *3* camellos el primer día , se regresa *1* camello , él tiene entonces víveres para *3* días más , el segundo día se regresa otro camello , el tiene víveres para *1* día más aparte del anterior , por último el tercer día, se regresa otro camello dándole el víveres para un día que le falta .

* Por lo tanto, si ganó *4* días y perdió *1* día le quedó víveres para *3* días , como el tiene para *5* días , le alcanza en total para *8* días .

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 22 :

* Lo que perdió el carnicero fue el valor de los *S/.10* falso, que le dio la señora y que él asumió , pues el boticario recuperó su dinero .

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 23 :

* Cogió uno de los sobres y sin abrirlo , lo quemó en la llama de la vela . Este sobre decía culpable , luego cogió el que decía inocente y se salvó .

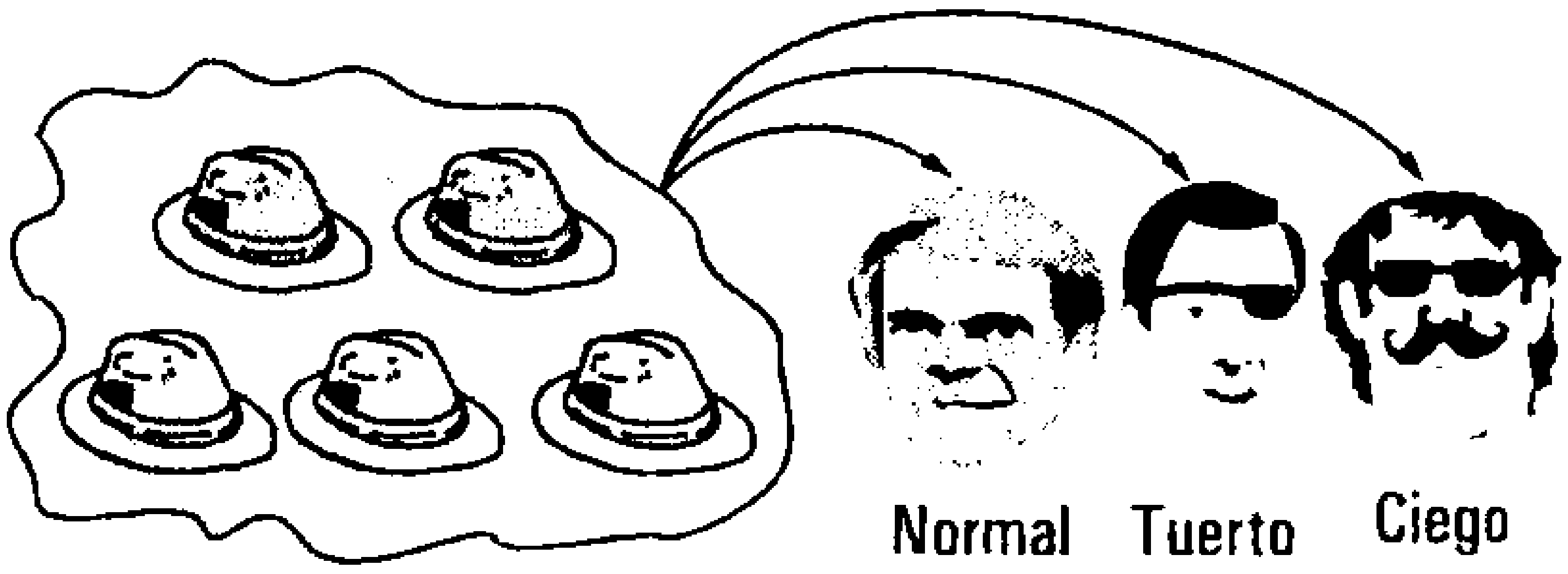
RPTA: "C"

RESOLUCIÓN 24 :

* Al colocar los *3* sombreros a cada uno el de visión normal podía ver el color del sombrero de los otros *2* , como no puede decir el color de su sombrero se deduce que ha visto *2* blancos ó *1* blanco y *1* rojo pero de ninguna manera *2* rojos porque en ese caso

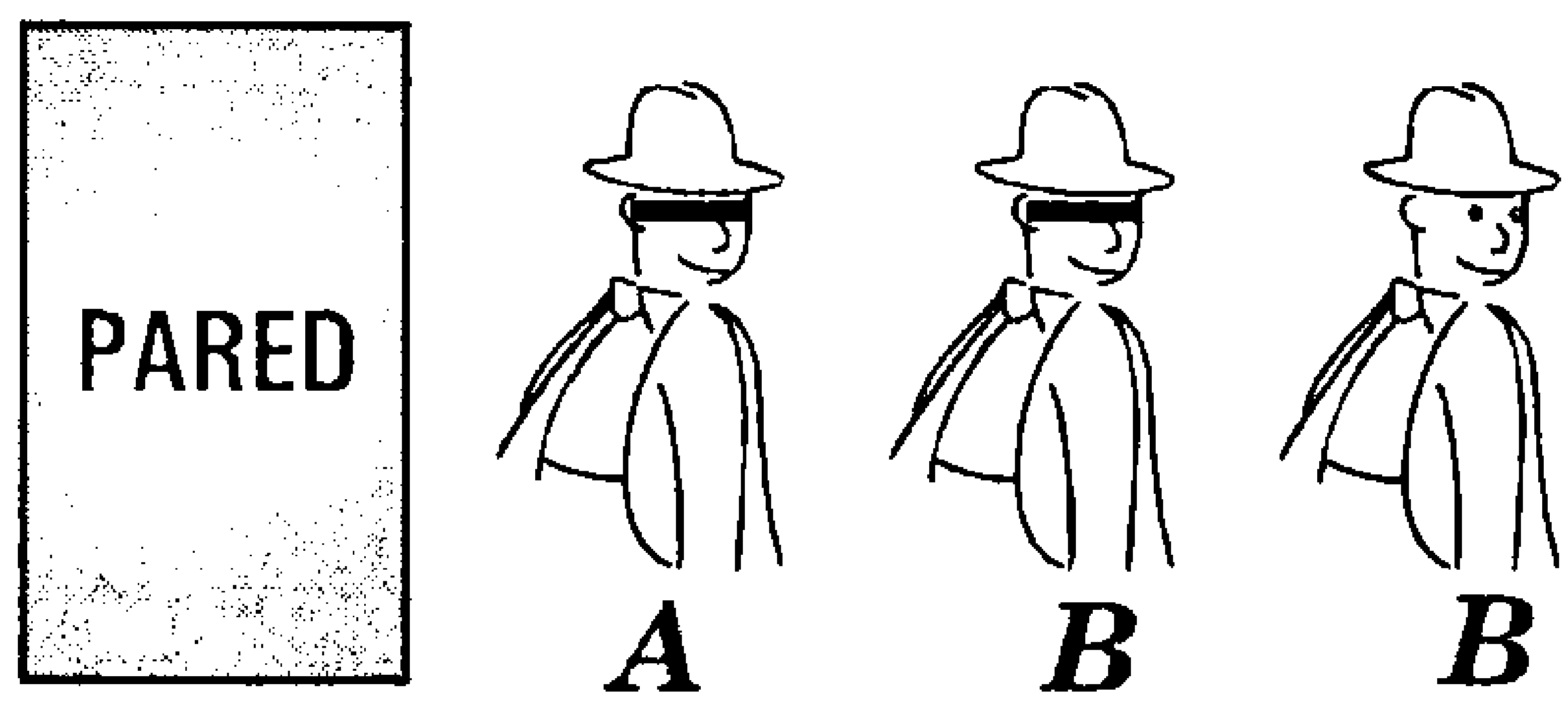
* Al preguntarle al segundo , él escucho lo que dijo el primero y se sabe que entre él y el ciego *2* blancos ó *1* blanco y *1* rojo , como no puede decir el color de su sombrero , ha visto el color del sombrero del ciego blanco.

* Luego el ciego sabe que su sombrero es de color blanco (debido a que escuchó a los dos primeros)



RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 25 :



¿Qué vio el prisionero *C*?; hay cuatro posibilidades :

	I	*II*	*III*	*IV*
A :	*BLANCO*	*BLANCO*	*NEGRO*	*NEGRO*
B :	*BLANCO*	*NEGRO*	*BLANCO*	*NEGRO*

* Si hubiera visto la cuarta posibilidad, habría deducido que él tenía puesto un sombrero blanco . (¿porqué?) no pudo hacer la deducción así que quedan las posibilidades *I*, *II* ó *III* .

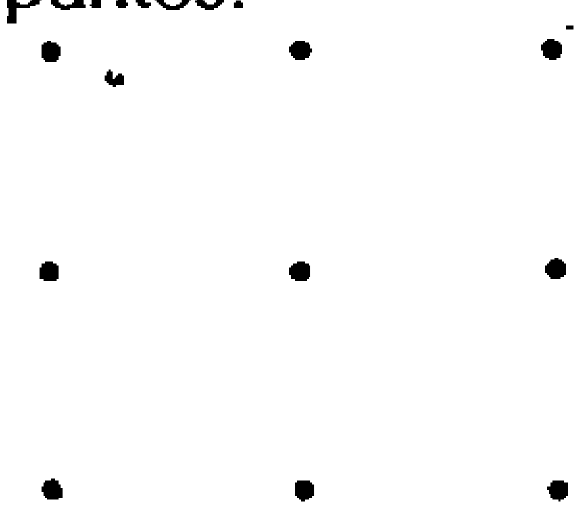
* ¿Qué vio el prisionero *B*? Si hubiera visto un sombrero negro , entonces habría deducido que su sombrero era blanco. (¿porqué?) esto elimina el caso *III*.

* Puesto que ambas posibilidades restantes , *I* y *II* indican un sombrero blanco para el hombre de adelante, el prisionero *"A"* dedujo que tenía un sombrero blanco.

RPTA : "B"

PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos segmentos continuos, como mínimo, serán necesarios trazar para unir los nueve puntos?



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

02 En una hilera de *10* vasos, los cinco primeros están llenos de vino y los siguientes vacíos. ¿Cuántos vasos como mínimo se deben mover para que los vasos llenos y vacíos se alternen uno a otro?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

03 ¿Qué número hay que cambiar de posición para obtener una operación correcta? ***62–31 =5***

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 5 *E) 6*

04 La promoción de una nueva gaseosa dice que por *3* de sus tapitas se regala una nueva gaseosa. Si ya se tienen *11* tapitas, ¿cuántas gaseosas más se podrá consumir como máximo?

A) 4 *B) 3* *C) 5*
D) 6 *E) 7*

05 ¿Cuántos cortes se deben hacer a la tira de papel mostrada para que al sumar los números obtenidos resulte *1000*?

8	8	8	8	8	8	8	8

A) 2 *B) 3* *C) 4*
D) 5 *E) 6*

06 Cierta clase de microbio tiene la propiedad de duplicarse en cada minuto. Si un recipiente se llena hasta la mitad en *28* minutos, ¿en cuántos minutos se llenará el recipiente completamente?

A) 56 *B) 50* *C) 29*
D) 30 *E) 52*

07 Sobre una mesa hay *120* vasos en fila entre vacíos y llenos de vino, tal como se muestra en la figura. ¿Cuál es el mínimo número de vasos que deben ser movidos para que aparezcan todos los vasos llenos en un lado y todos los vacíos en el otro?

A) 27 *B) 30* *C) 33*
D) 36 *E) 39*

08 Cuántos árboles, como mínimo, se deben sembrar en un huerto, de modo que haya cuatro filas con 3 árboles en cada fila?

A) 12 *B) 6* *C) 10*
D) 8 *E) 9*

09 Llevé *5* trozos de cadena, de *3* eslabones cada uno, a un herrero para que este hiciera de ellos una cadena continua. Si el herrero cobra S/.*5* por cada eslabón que tenía que cortar y luego soldar, ¿cuál es el menor costo para formar la cadena?

A) S/.5 *B) S/.10* *C) S/.15*
D) S/.20 *E) S/.25*

10 Cierto software educativo para niños funciona del siguiente modo: Se ingresa un número entero positivo, si se presiona [A] el valor se triplica, si se presiona [B] el valor queda disminuido en *10* unidades y si se presiona [C] el programa devuelve la suma de las cifras del número ingresado. Si Juanito ingresa el número *73*, determine la suma del máximo y el mínimo valor que puede obtener luego de presionar consecutivamente y solo una vez las tres teclas.

A) 27 *B) 36* *C) 45*
D) 33 *E) 42*

11 En un campeonato interno del Centro Pre, quedaron como finalistas los tres equipos que se muestran en la tabla; estos disputaron un torneo de todos contra todos, al final aparece una tabla de posiciones con sólo algunos de los datos de partidos jugados, ganados, perdidos, etc. ¿Cuál fue el resultado del partido entre Lógico Matemática y Literatura?

	Jugado	Ganado	Perdido	Empatado	Goles a Favor	Goles en Contra
Lógico matemática		2			5	0
Literatura					3	
Biología				1		4

A) 4 - 0 *B) 1 - 0* *C) 3 - 1*
D) 4 - 2 *E) 4 - 1*

12 La siguiente tabla, muestra los goles a favor *(GF)* y los goles en contra *(GC)* de tres equipos que han jugado un partido de fútbol todos entre si. Si se sabe que *ABSORCIÓN* ganó por *2* goles de diferencia a *CUÁNTICO*, ¿cuál fue el resultado de dicho partido?

EQUIPOS	GF	GC
ABSORCION	7	3
CUANTICOS	7	8
LANTANIDOS	5	8

A) 3 -1
B) 2–0
C) 6–4
D) 4–2
E) 5 -3

13 Se requiere trasladar las monedas de *5*; *2*; *0,5* y *0,1*, soles de la primera bandeja a la tercera, con los siguientes requerimientos:

* No trasladar más de una moneda por vez.

* La moneda quitada deberá colocarse en una bandeja libre o sobre una moneda de mayor valor (mayor tamaño).

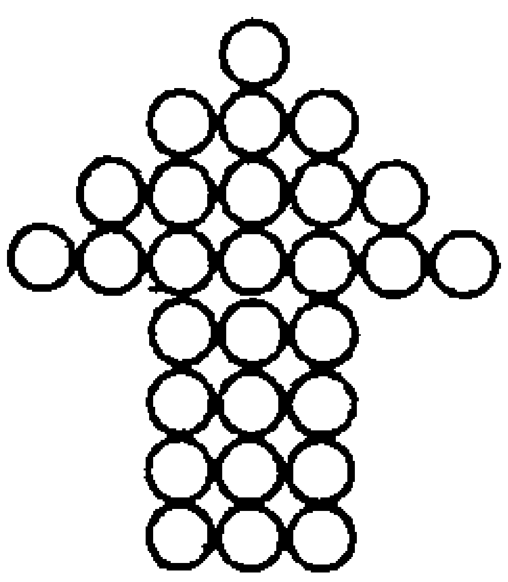
* En ninguna bandeja se permite poner una moneda mayor. encima de otra de menor valor.

¿Cuántos movimientos de las monedas se deberán realizar, como mínimo, para lograrlo?

A) 15 *B) 13* *C) 16*
D) 17 *E) 14*

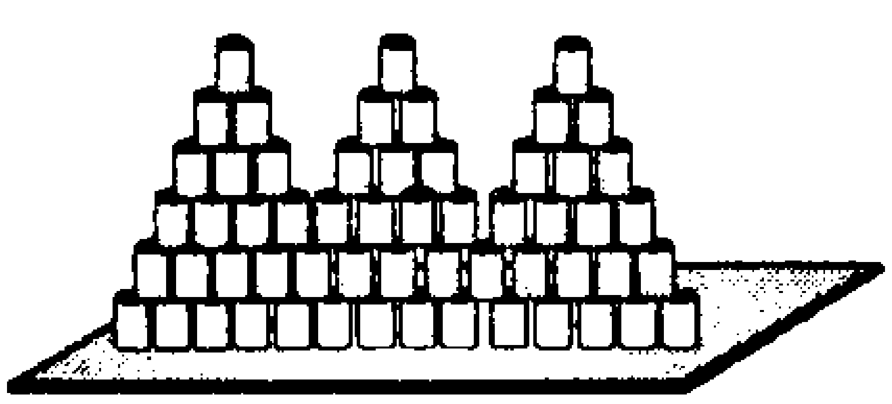
14 En la figura, ¿cuántos discos se tienen que mover como mínimo para que la flecha apunte hacia la derecha?

A) 7
B) 8
C) 6
D) 5
E) 9

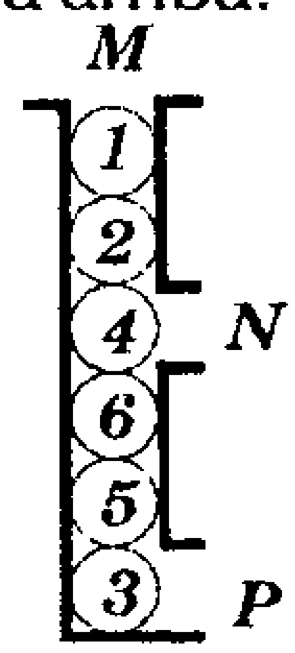


15 Se ha formado una ruma con latas cilíndricas como se muestra en la figura. Cada bola que se lanza da en una sola lata, tira esa lata y todas las que pierden apoyo. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que se deben lanzar para tirar las latas negras?

A) 5
B) 4
C) 8
D) 6
E) 7



16 En la figura se muestra un recipiente abierto en *M, N* y *P*, con *6* bolas numeradas. Si una operación consiste en sacar sólo una bola por *N* ó *P*, pero no simultáneamente e inmediatamente introducirla por *M*, ¿cuántas operaciones como mínimo se deben realizar para obtener el orden ascendente desde *1* hasta *6*, de abajo hacia arriba?



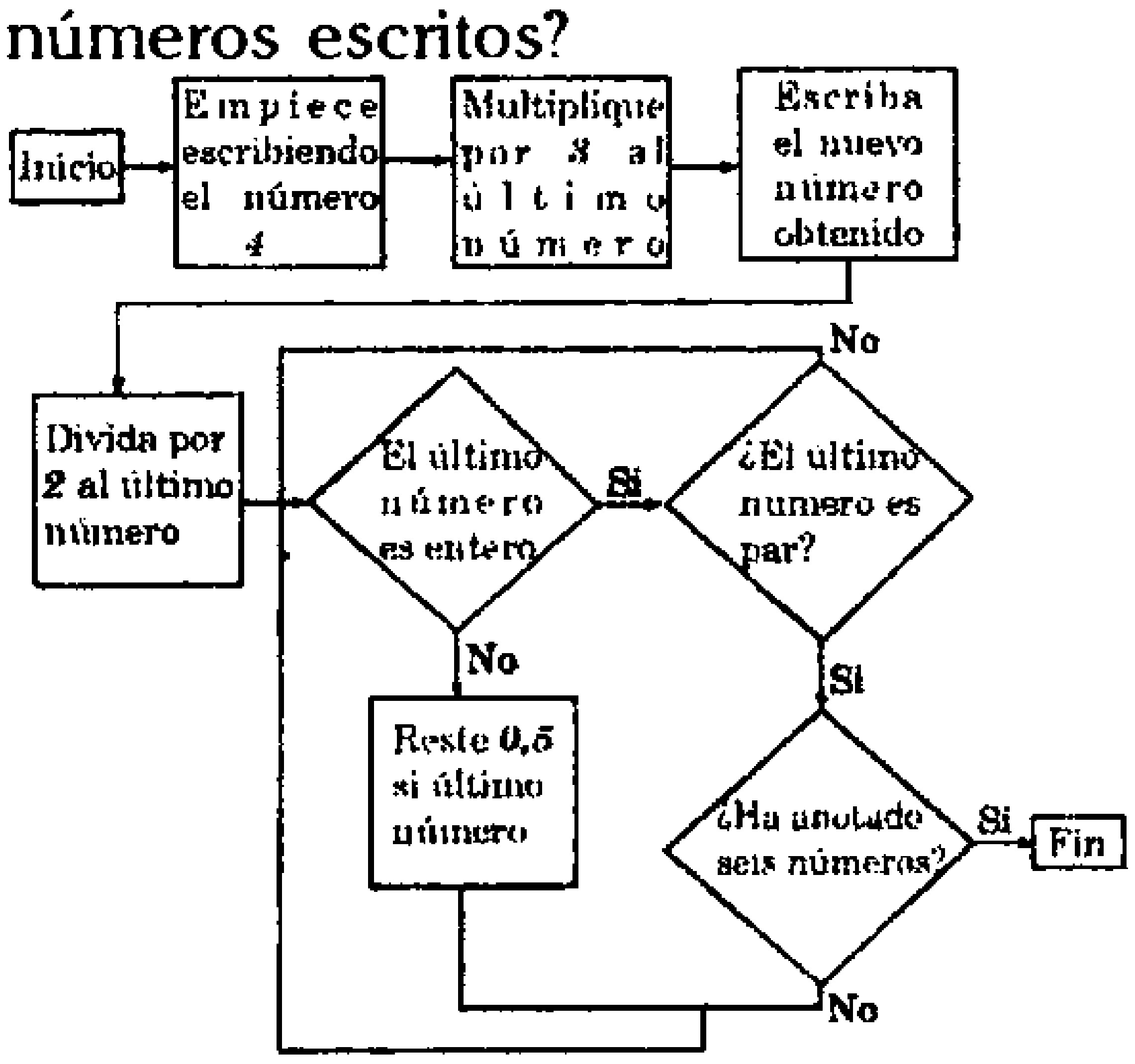
A) 7
B) 8
C) 6
D) 5
E) 4

17 Nicolás en una tabla anota los goles a favor y en contra, de tres equipos que se en enfrentaron entre sí en tres partidos de fúbol; pero se olvidó de llenar una casilla. ¿Cuál fue el resultado del partido entre Alianza y Cristal, en ese orden?

A) 2 –1
B) 1 –0
C) 2 –0
D) 3 –1

Equipos	GF	GC
UNIVERSITARIO	5	0
ALIANZA		4
CRISTAL	1	4

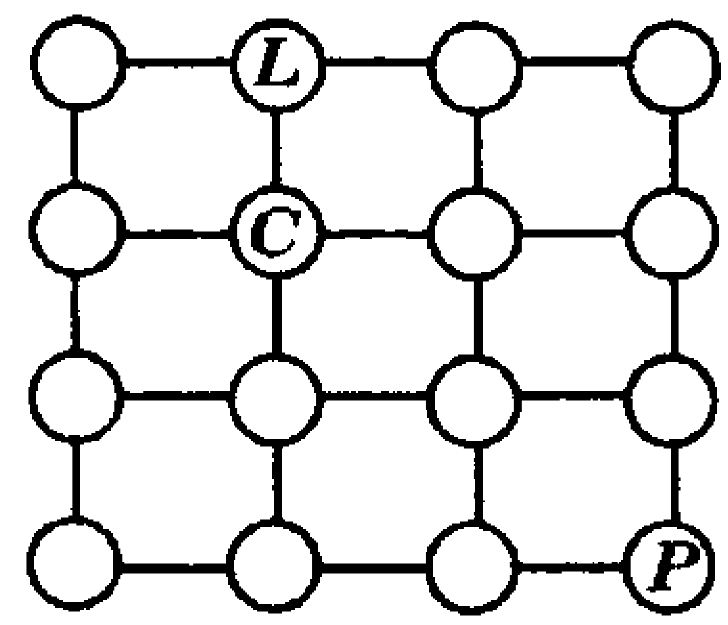
18 En el siguiente algoritmo, ¿cuál es la suma de los seis números escritos?



A) 156 *B) 157* *C) 158*
D) 154 *E) 153*

19 Las intersecciones de ciertas calles se muestran en el gráfico: Un policía y un ladrón están ubicados en las casillas *P* y *L*, respectivamente. El policía se mueve siempre antes que el ladrón. Ambos se movilizan a lo largo de las calles, por turnos y en cualquier sentido pero sin retroceder, ocupando siempre la intersección más cercana. ¿En cuántos movimientos, como mínimo, el policía atrapa al ladrón, si este en ningún momento debe pasar por *C*?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



20 Un hotel dispone de *10* habitaciones y *10* camareros. Un día, los camareros actuaron en forma particular. El primer camarero cierra las puertas de todas las habitaciones, un segundo camarero abre las puertas de las habitaciones cuya numeración es par, un tercero cambia de posición (abre o cierra) todas las puertas con numeración múltiplo de *3*, un cuarto camarero cambia de posición todas las puertas con numeración múltiplo de *4*, así hasta que ha pasado el último camarero. ¿Qué puertas quedaron cerradas al final? . Dé como respuesta la suma de los números de dichas puertas.

A) 15 *B) 18* *C) 14* *D) 16*

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	B	B	C	C	C	B	B	C	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	D	A	A	D	C	A	B	A	C

OBJETIVOS :

* Propiciar la creatividad de los alumnos a partir de la resolución de problemas con fosforos o cerillas , facilitando el manejo de estrategias para aprender a pensar .

* Desarrollar tu destreza visual, empleando para ello imaginación e ingenio.

INTRODUCCION :

Al observar nuestro mundo podemos darnos cuenta que matemática hay en todo lo que vivimos, comenzando por el día de nuestro nacimiento que involucra fecha, lugar en el planeta, época, situación geográfica, etc. y a medida que vamos tomando conciencia en nuestra infancia empezando a hacer cuentas, a guardar recuerdos, a contar juguetes lo cual indica que los números están siempre en nuestra mente y hay necesidad de enseñar al niño a disfrutar del número en todas sus formas. Pero a cambio de esto, en la mayoría de los casos los presentamos de una forma rígida y aún sin entrar a la escuela ellos comienzan a temerle por referencia de los mayores. Todo esto ocurre porque nos falta como docentes vivir la matemática para acompañar a los estudiantes a vivenciarla y disfrutarla en todo momento y en todas sus actividades. Vivir la matemática quiere decir hacerla activa, participativa, disfrutarla, tomarla como algo propio.

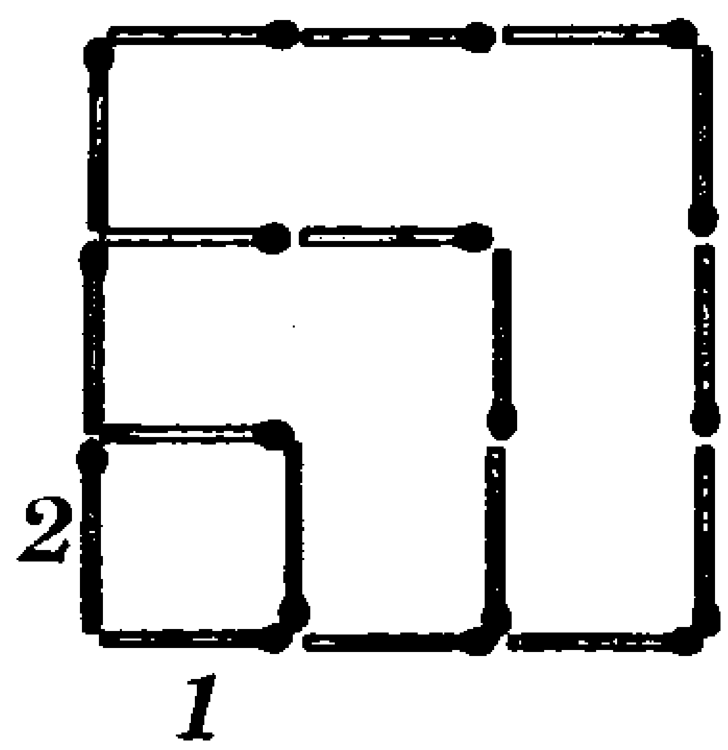
Otra de las categorías habituales en los acertijos matemáticos es la de las figuras formadas por palillos o cerillas en las que hay que añadir o quitar alguno de esos elementos con el fin de conseguir otro tipo de figura. Hemos seleccionado dos (en realidad son cuatro pues el primero de ellos es un «pack» de tres acertijos, a cuál más exigente), en los que con total probabilidad tendrás que echar mano de toda tu imaginación.

SITUACIONES CON PALITOS DE FÓSFORO

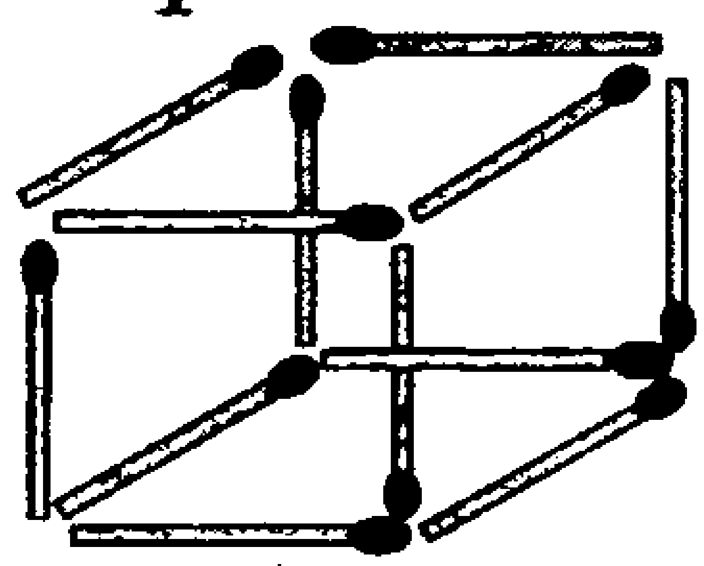
Esta parte de la matemática recreativa trata de resolver situaciones en los cuales intervienen palitos de fósforo o cerillas.

Las situaciones problemáticas se dividen en dos tipos de análisis:

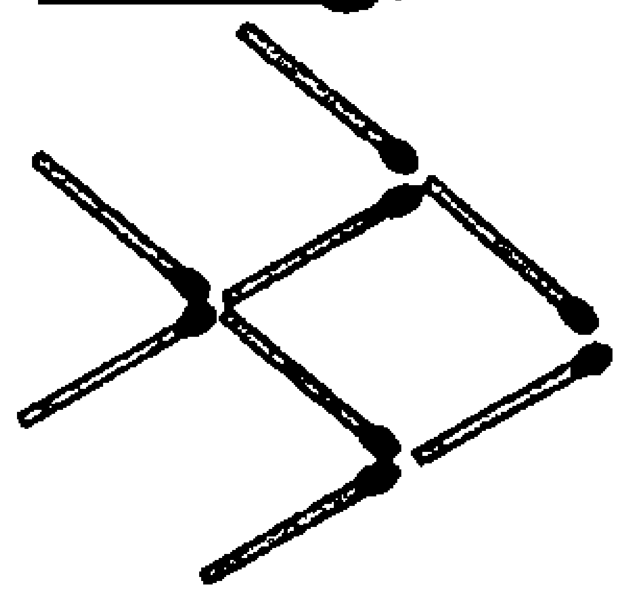
EJEMPLOS GEOMÉTRICOS :



Tres cuadrados de diferente tamaño. Si se retiran los cerillos 1 y 2, no se formarán cuadrados.



Doce cerillos forman un cubo que cuenta con seis caras cuadradas



Ocho cerillos que forman un pez con dirección a la derecha.

EJEMPLOS CON OPERACIONES ARITMETICAS

La operación $4\times8+3=35$ usando cerillos sería

$4\times8+3=35$

Moviendo un cerillo podemos obtener

$4\times9+3=39$

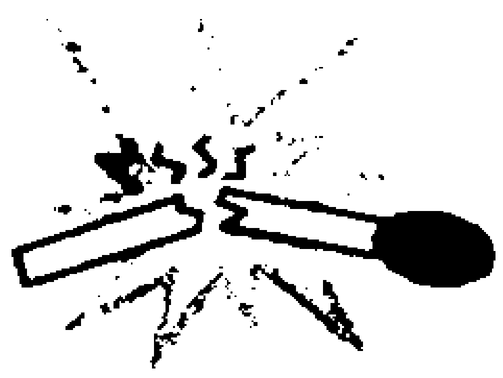
lo cual también es correcto, pues 4×9+3=39

Un ejemplo en números romanos sería.

$\sqrt{IV} = II$ *($\sqrt{4} = 2$)*

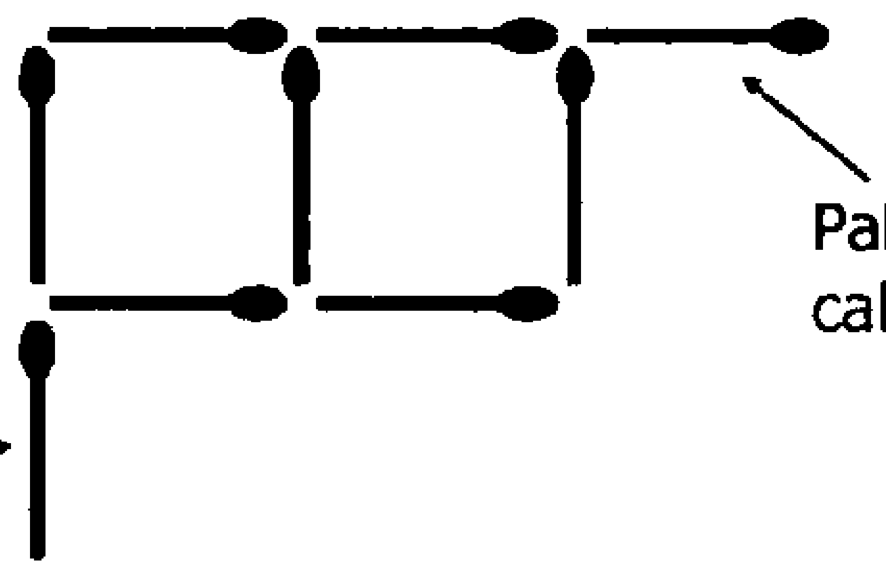
Las condiciones para resolver problemas que involucren palitos de fósforo son:

I) Los palitos de fósforo no se pueden ROMPER ni DOBLAR .

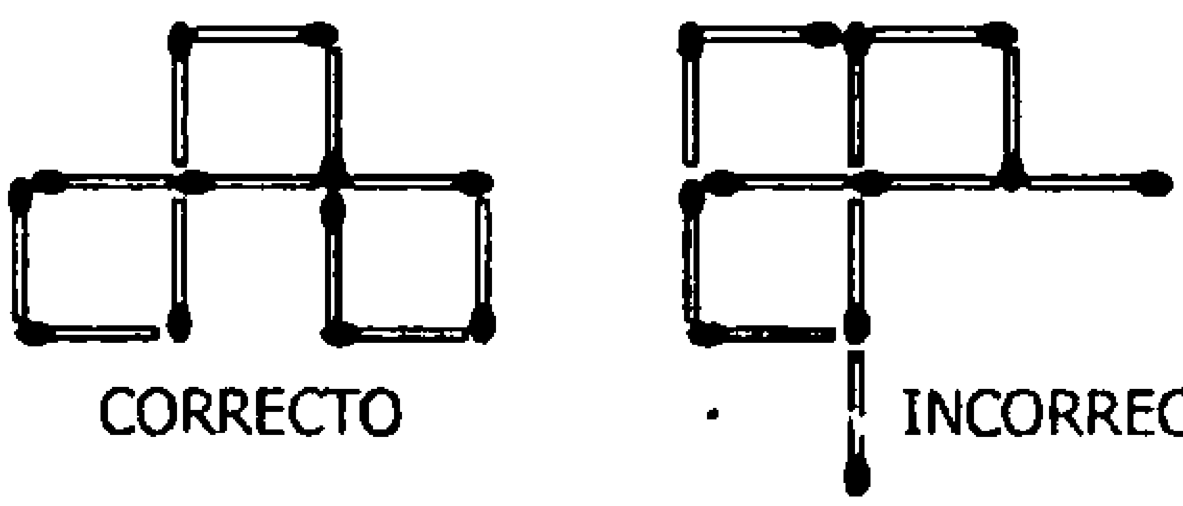


II) No pueden quedar cabos sueltos .

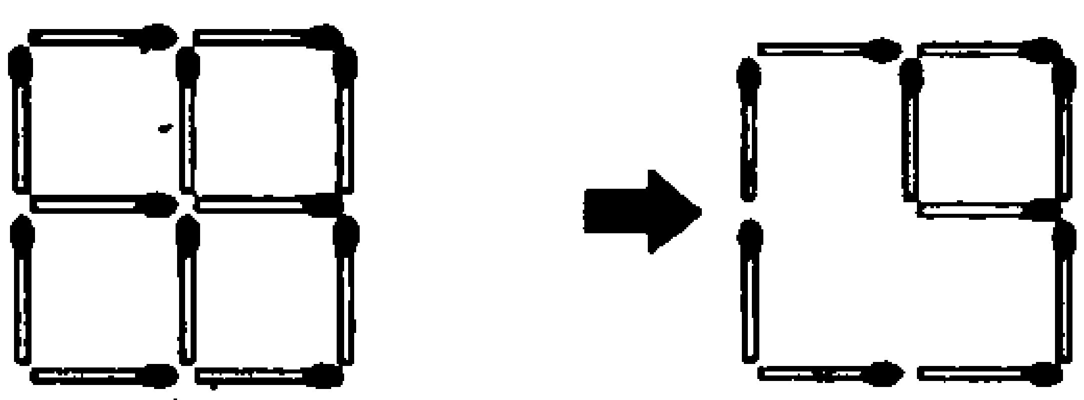
; es decir, es incorrecto dejar una figura de la siguiente manera:



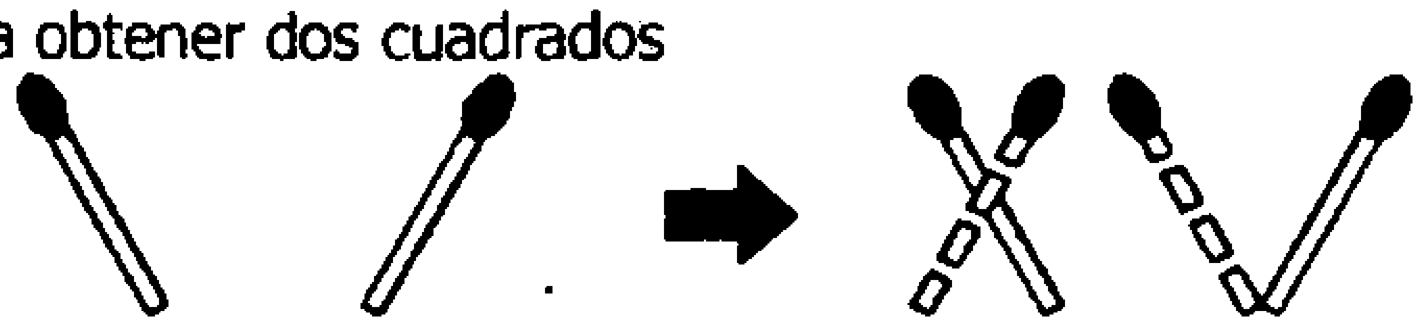
por ejemplo, si nos piden formar tres cuadrados con *12* palitos de fósforo ...



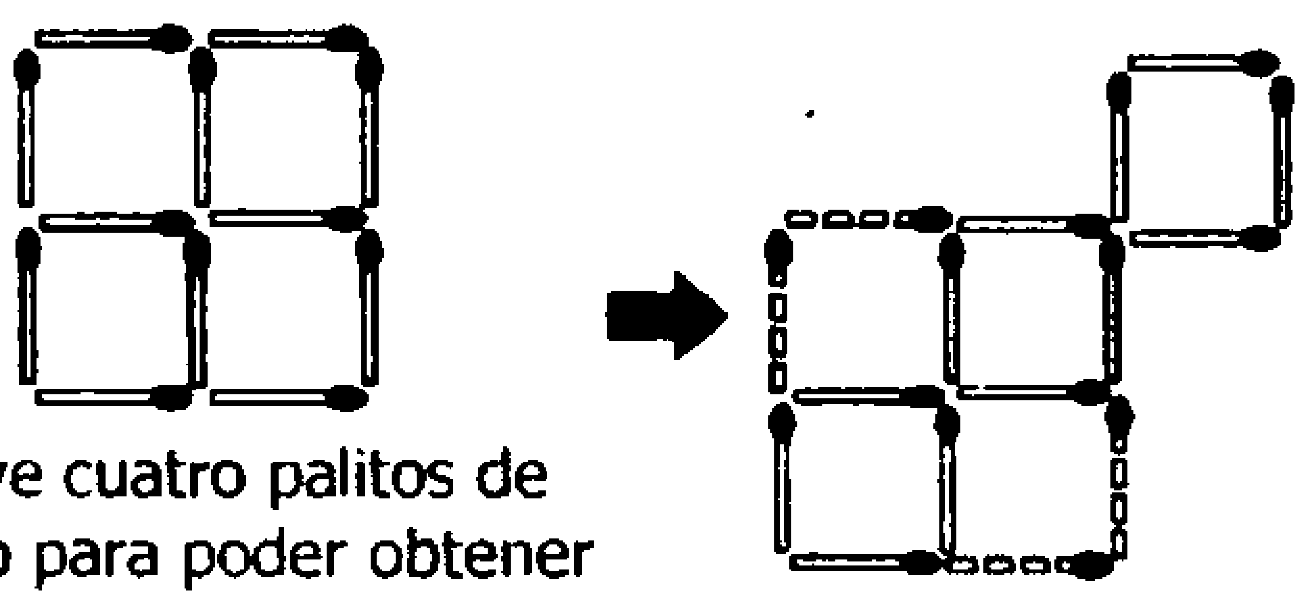
CORRECTO INCORRECTO



Retira dos palitos de fósforo para obtener dos cuadrados



Agrega dos fósforos para obtener quince



Mueve cuatro palitos de fósforo para poder obtener tres cuadrados

¡ RECUERDA !

Estimado alumno para el análisis de las situaciones anteriormente descritas debes de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

* No es válido doblar o romper los palitos.

* En las figuras conformadas por cerillas no es válido dejar palitos libres (cabos sueltos).

* Uno de los casos particulares de los problemas con cerillos son los referentes a los números romanos; para ello consideremos:

1=I ➡ | *5=V* ➡ V *100=C* ➡ [

2=II ➡ || *10=X* ➡ X *1000=M* ➡ M

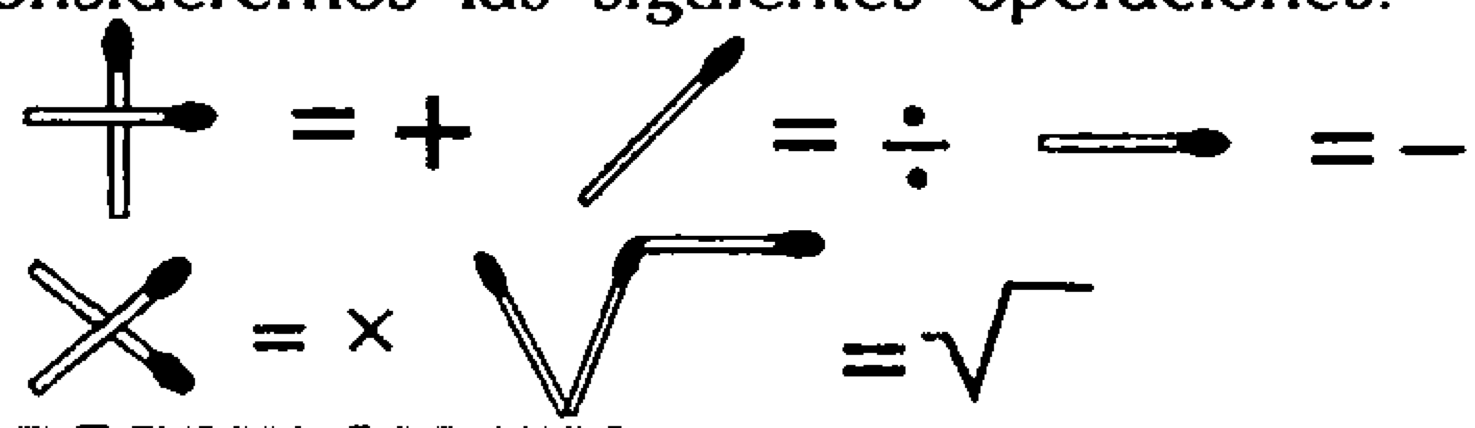
3=III ➡ ||| *50=L* ➡ L

Según la norma de escritura de números romanos grandes, considere que:

99=IC....¡incorrecto! *999=IM....¡incorrecto!*

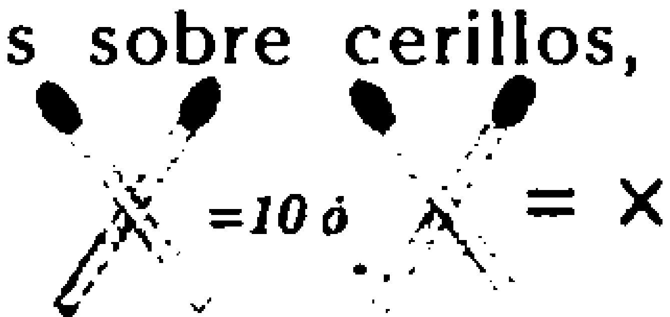
99=XCIX....¡correcto! *99=CMXCIX....¡incorrecto!*

Consideremos las siguientes operaciones:



OBSERVACIONES:

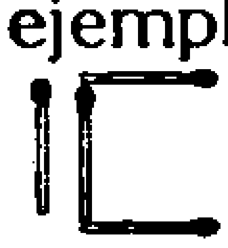
* En problemas sobre cerillos, debemos considerar que:

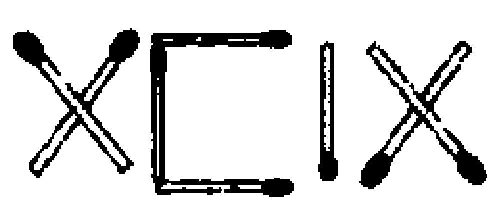


Según sea más conveniente para la solución del problema.

*** A pesar de que las soluciones de los problemas sobre los cerillos requieren de mucha creatividad estas no deben ir en contra de las reglas de formación de los números romanos.**

Por ejemplo:

 *=99 ....(error)*

 *=99.................. (correcto)*

=1998................ (error)

=1998 ....(correcto)

PROBLEMAS RESUELTOS

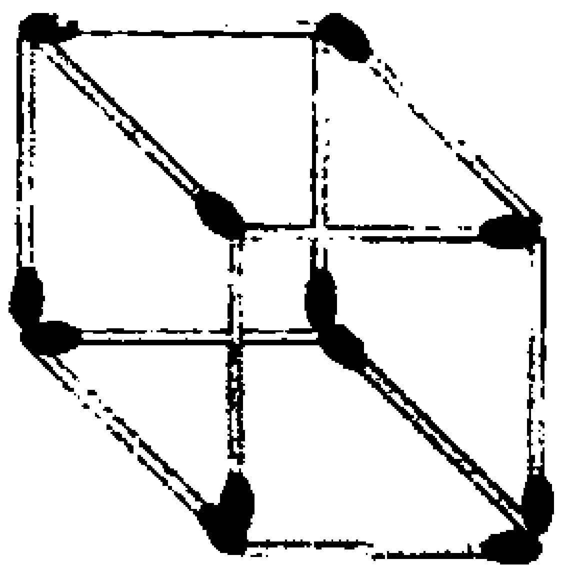
PROBLEMA 1 :

¿Cuál es el máximo número de cuadrados que se puede fotmar con *12* cerillos iguales, si la longitud del lado de los cuadrados debe ser la de un cerillo?

A) 7 B) 8 C) 5 D) 6 E) 4

RESOLUCIÓN :

Se forma un cubo:



Se forma 6 cuadrados iguales.

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

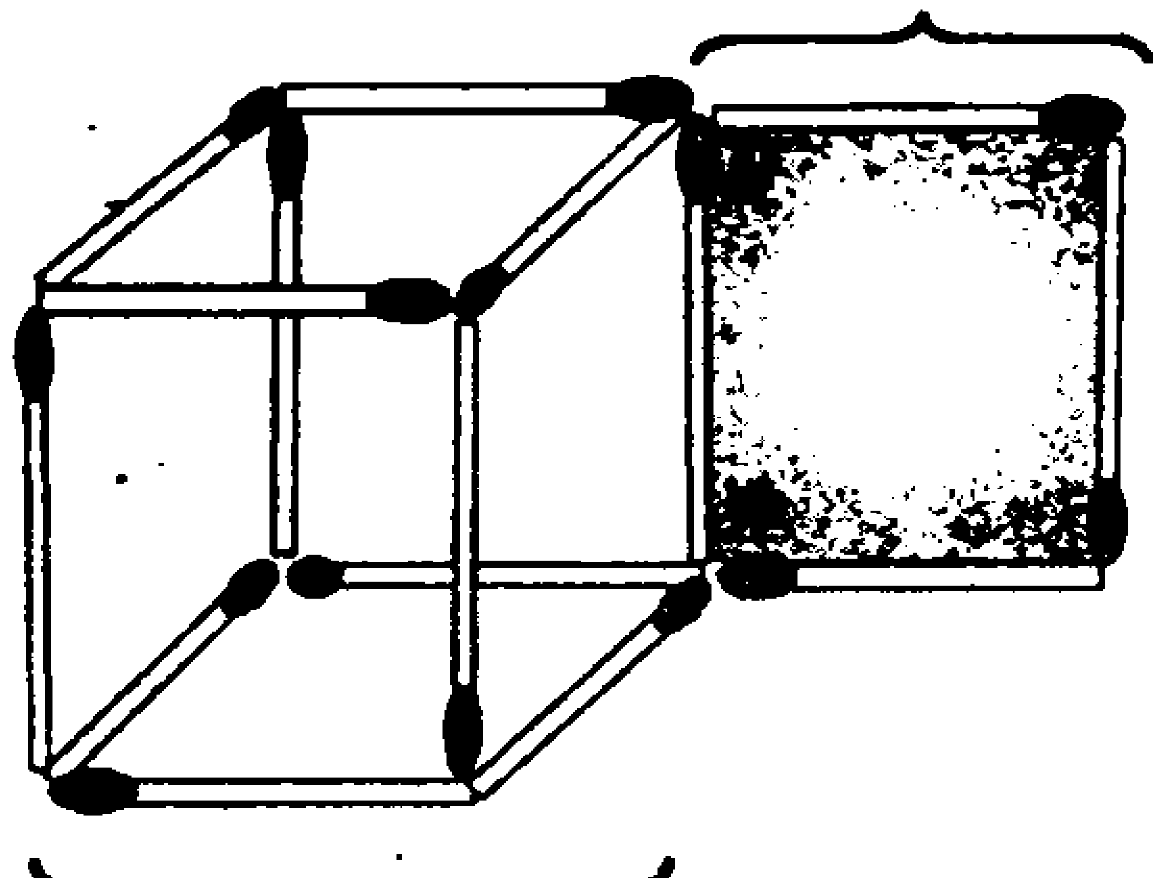
¿Cuántos cuadrados, cuyo lado sea un cerillo, se puede formar como máximo con *15* cerillos?

A) 10 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

Para conseguir la mayor cantidad de cuadrados formaremos un cubo cuya longitud de arista sea igual a un cerillo.

Con los otros 3 cerillos formamos un cuadrado más



Aquí se han utilizado 12 cerillos y formamos 6 cuadrados

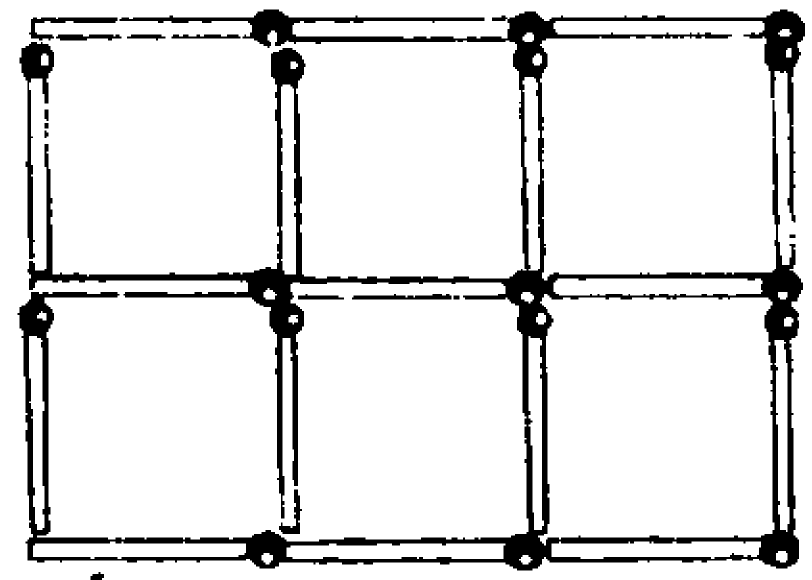
⇒ Total de cuadrados: $6+1=7$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

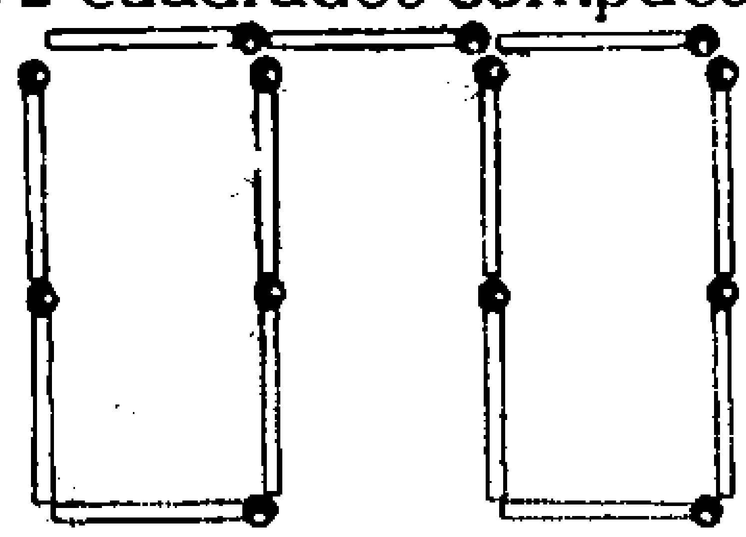
En el siguiente gráfico, ¿cuántos cerillos se deben retirar , como mínimo, para que no quede algún cuadrado?

A)1
B)2
C)3
D)4
E)5



RESOLUCIÓN:

Para lograr que no se formen los *6* cuadrados simples, quitaremos los tres cerillos horizontales interiores y el cerillo central de la tercera fila de cerillos horizontales para evitar que se forme alguno de los **2** cuadrados compuestos.



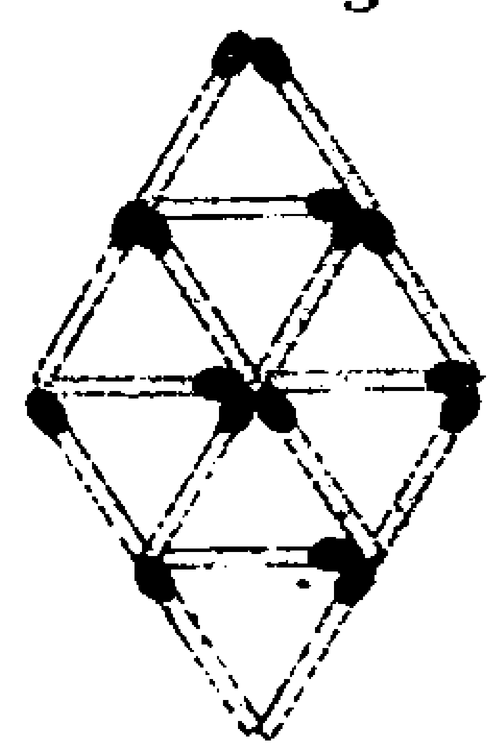
Por lo tanto, se deben retirar como mínimo *4* cerillos.

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

¿Cuántos cerillos se debe retirar, como mínimo, para que no se observe ningún triángulo ?

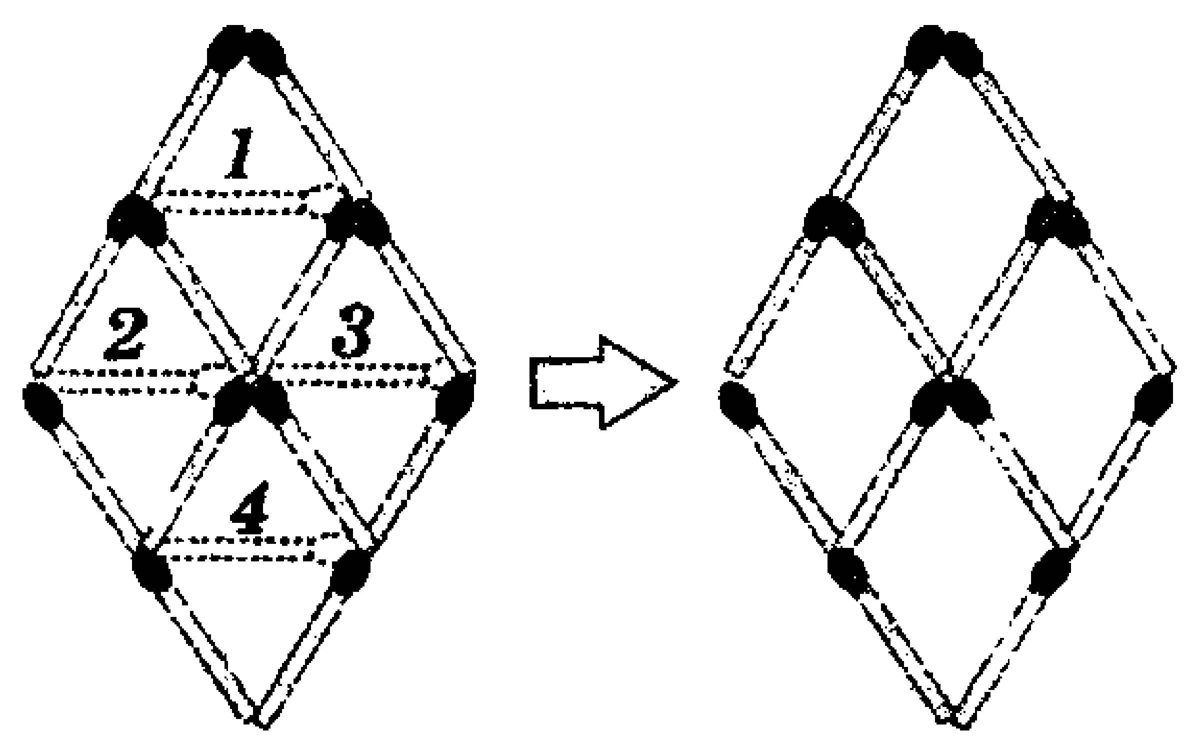
A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



RESOLUCIÓN :

Si retiramos los cerillos desde el borde y en forma alternada aún nos quedan triángulos en el interior.

Por eso retiramos del interior de la figura de la siguiente manera.



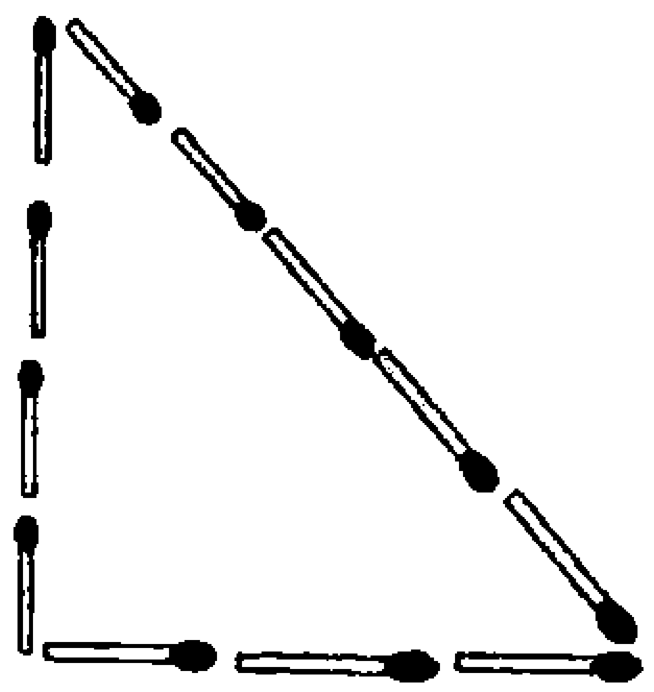
Por lo tanto retiramos como mínimo *4* cerillos.

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

El triángulo rectángulo del gráfico está formado por *12* cerillos de un centímetro cada uno. Si *X* es la cantidad de cerillos que se deben mover, como máximo, para obtener una figura de $5\ u^2$ de área, y la letra *Y* es la cantidad de cerillos que se deben mover, como mínimo, para obtener una figura de $4\ u^2$ de área, calcule el valor de $X + Y$.

A) 3
B) 5
C) 8
D) 9
E)6

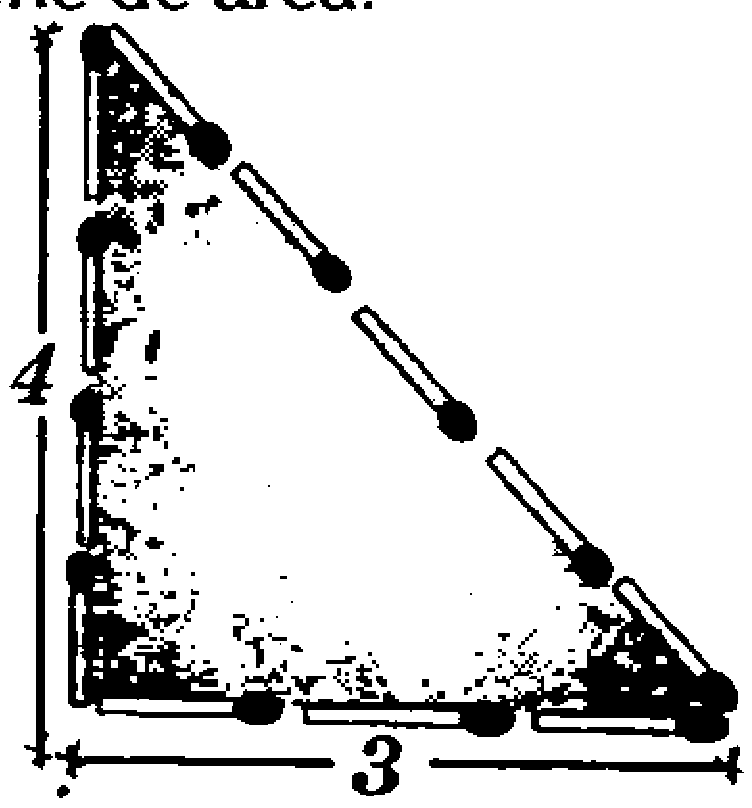


RESOLUCIÓN :

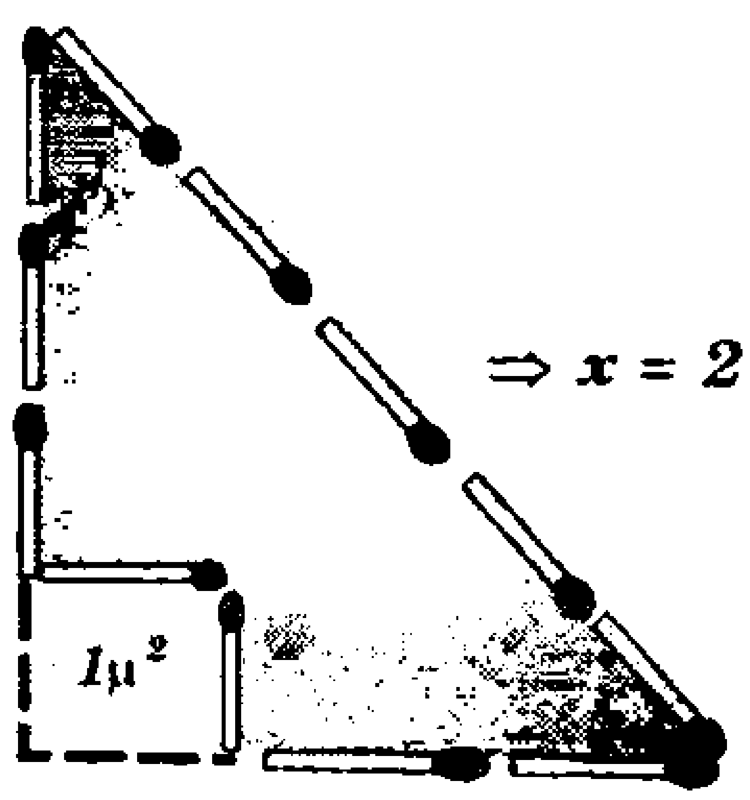
Se pide el valor de $X + Y$.

El triángulo del gráfico tiene de área:

$$Area = \frac{4 \times 3}{2} = 6u^2$$

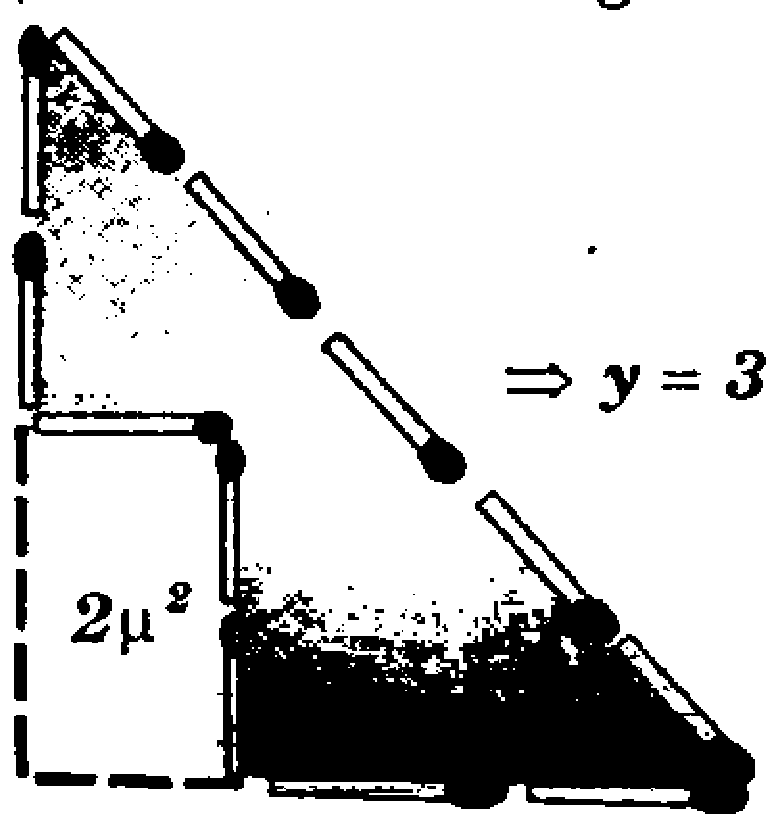


* Para que tenga $5u^2$ reducimos $1u^2$ moviendo solo dos cerillos, veamos:



$\Rightarrow x = 2$

* Para que tenga $4u^2$ reducimos $2u^2$ moviendo como mínimo, *3* cerillos de la siguiente manera:



$\Rightarrow y = 3$

$\Rightarrow x + y = 5$

RPTA : "B"

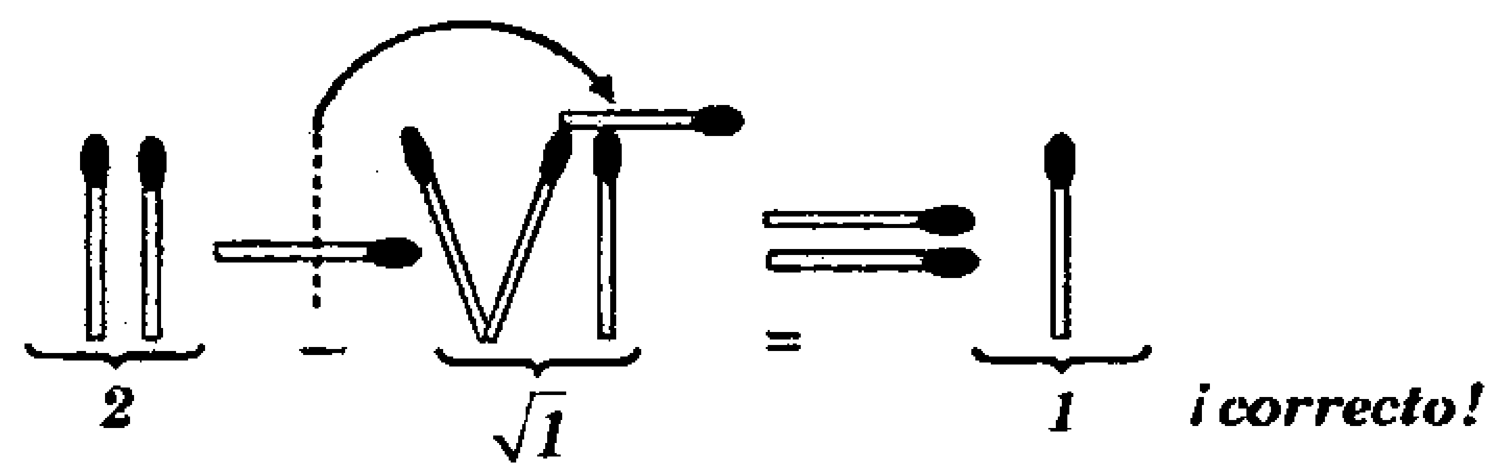
PROBLEMA 6 :

¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad que se muestra en el gráfico sea correcta?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

En la igualdad moveremos un cerillo para que sea correcta de la siguiente manera:

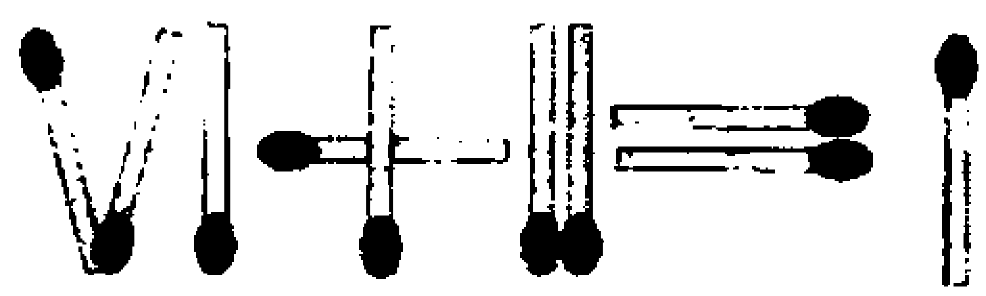


$\Rightarrow$ Se moverá un cerillo.

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Cuántos palitos hay que mover, como mínimo, para formar una expresión matemática correcta?

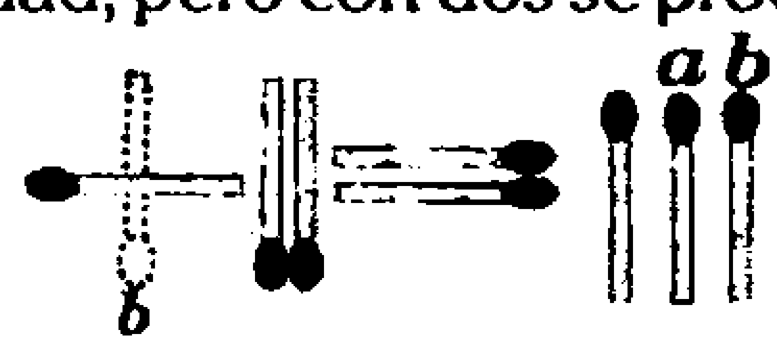


A) 1 *B) 2* *C) 3*
D)4 *E) no es necesario mover*

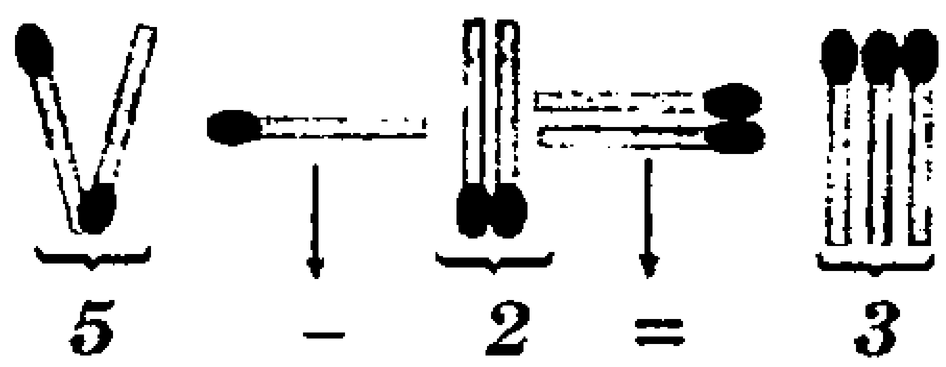
RESOLUCIÓN :

* La operación en números romanos es: $4 + 2 = 1$ es incorrecta.

* Si movemos como mínimo un cerillo, no logramos la igualdad, pero con dos se procede así:



* Moviendo adecuadamente el cerillo *a* y *b* se obtiene:

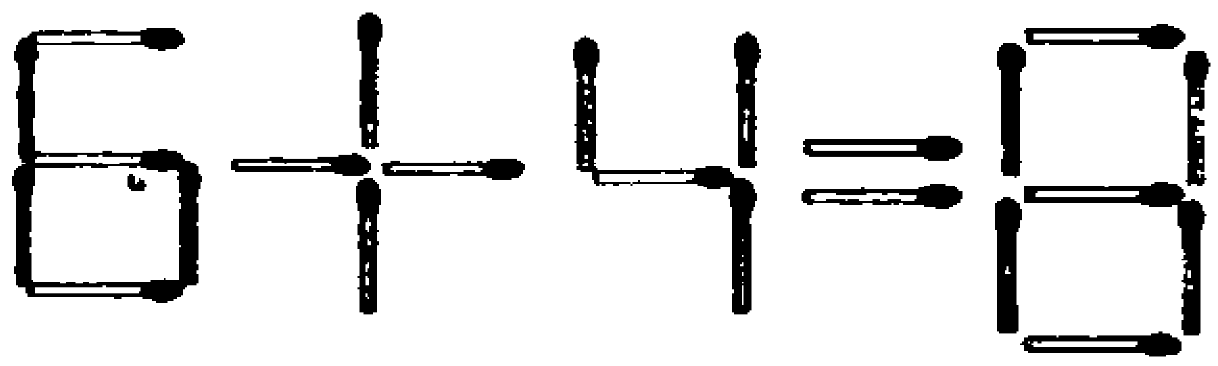


y la igualdad es válida

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

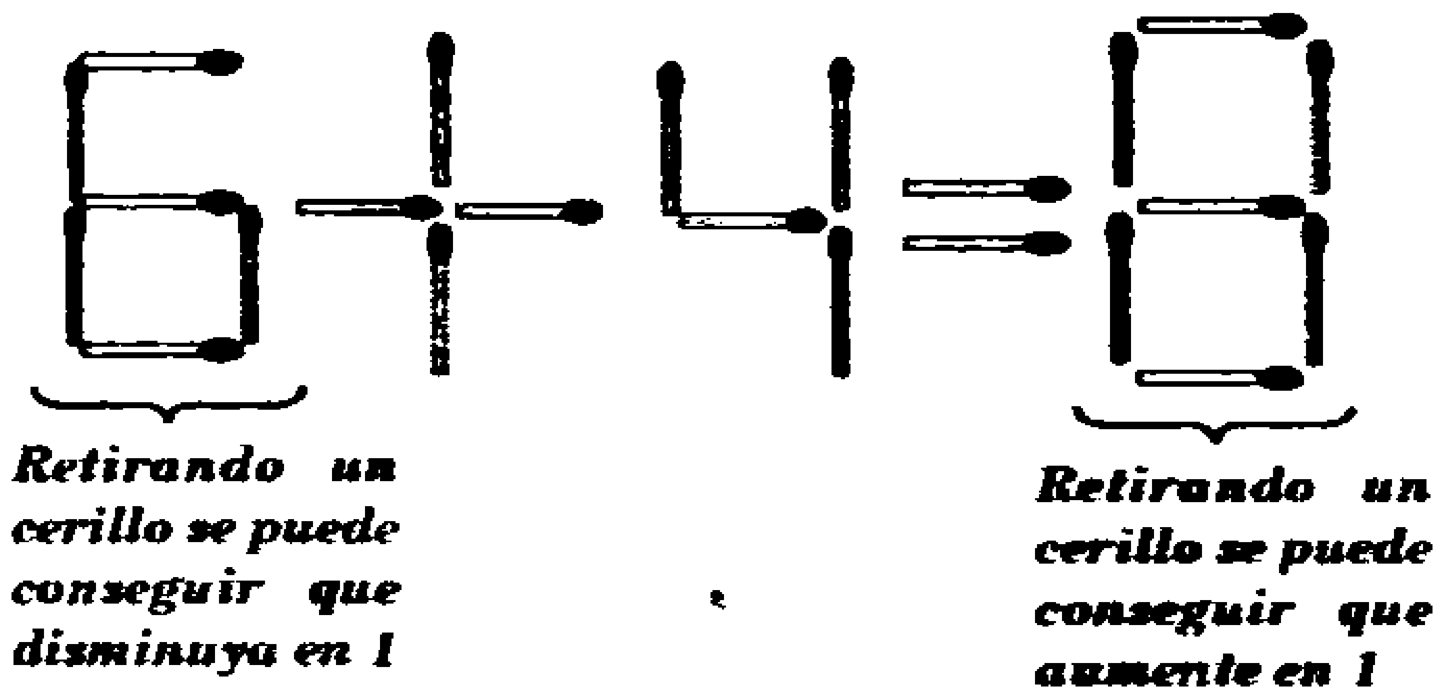
¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, en el siguiente gráfico para que la igualdad se verifique?



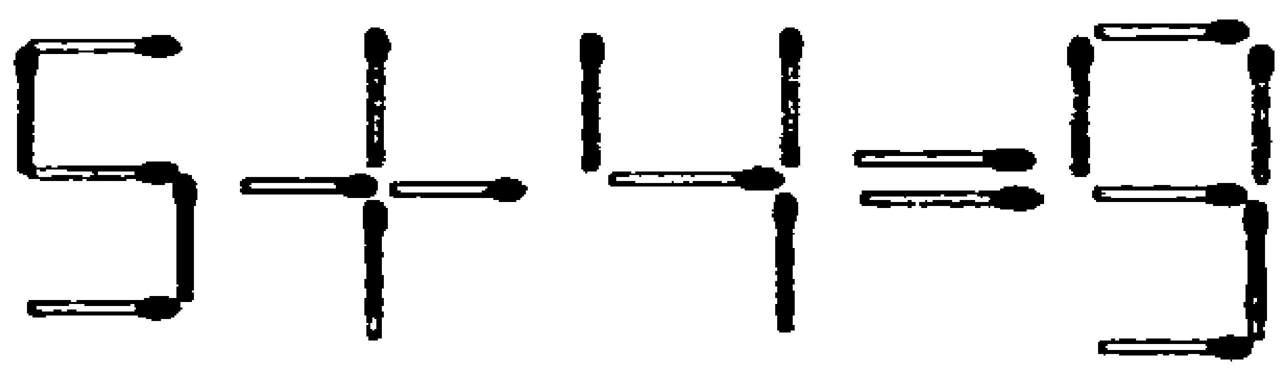
A) 5 *B) 4* *C) 2* *D) 1* *E) 3*

RESOLUCIÓN :

En la expresión observamos que el primer miembro es **2** más que el segundo.



Entonces, ahora la igualdad se verifica:

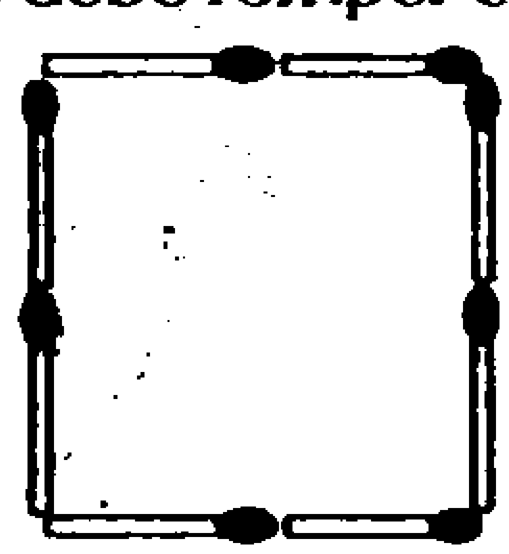


⇒ Se deben retirar como mínimo dos cerillos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Halle la cantidad de cerillos que se tiene que mover en el gráfico, como mínimo, para obtener un cubo, si no se debe romper cerillos.

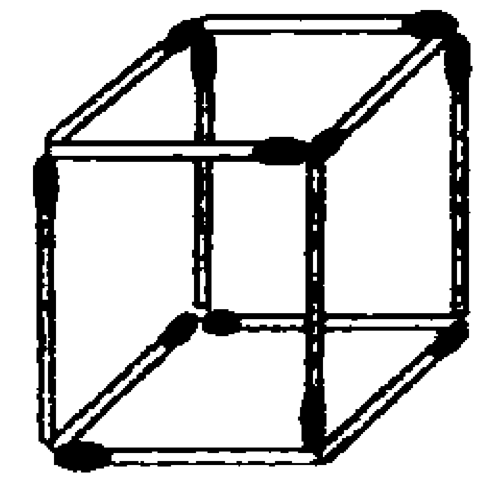


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

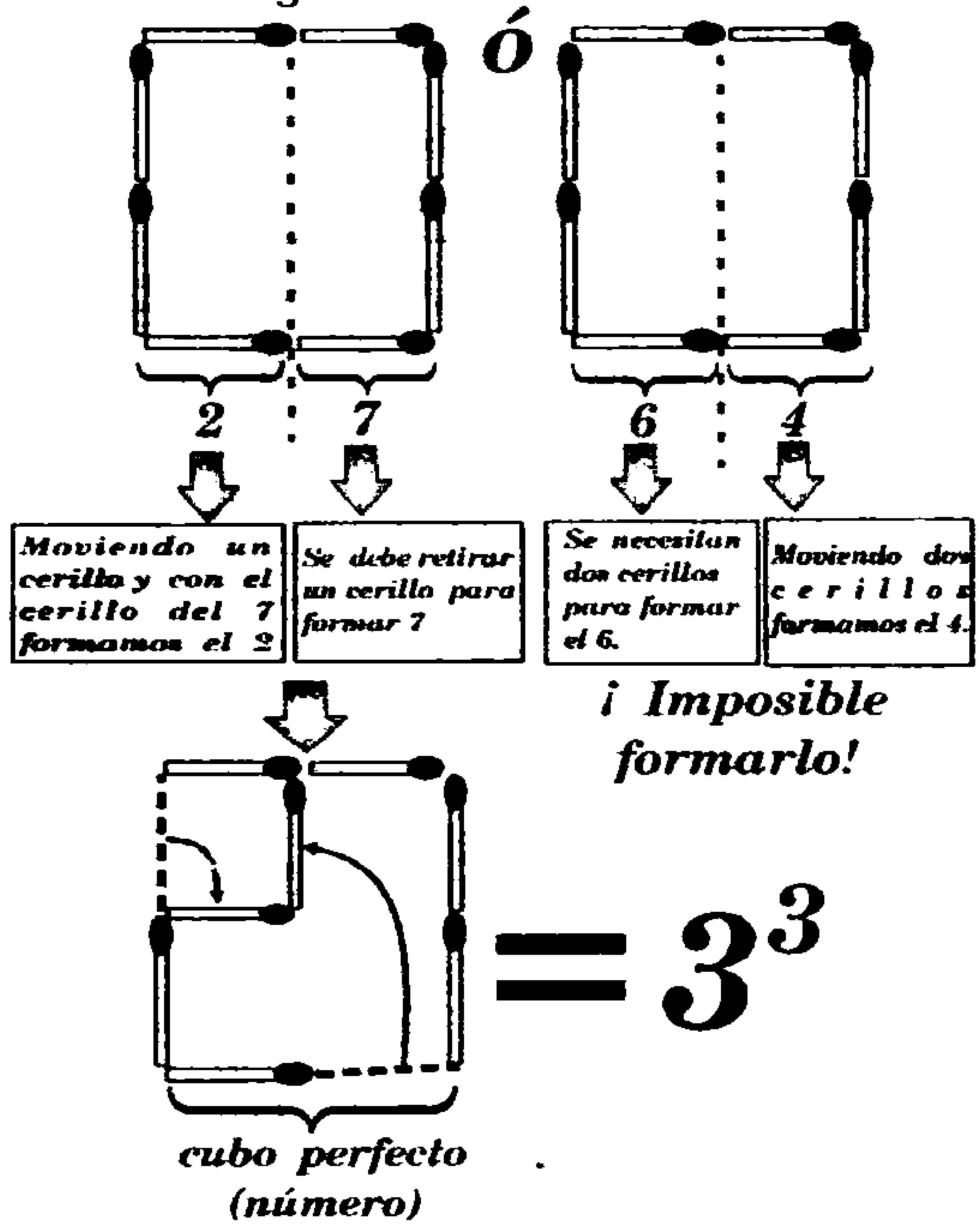
Se pide mover la menor cantidad de cerillos para obtener el cubo.

En el cuadrado del gráfico se observan ocho cerillos en total, pero para formar el cubo (sólido geométrico). Se necesita **12** cerillos (cada uno sería un arista), entonces, sería ¡*IMPOSIBLE*!. Sin embargo, se podría pensar en el cubo como aquel número que tiene raíz cúbica exacta, como por ejemplo:



$$8 = 2^3 ; 27 = 3^3 ; 64 = 4^3 ; ....$$

Entonces, en el gráfico buscaremos formar **27** ó **64** moviendo la menor cantidad de cerillos. Analizando el gráfico tenemos:

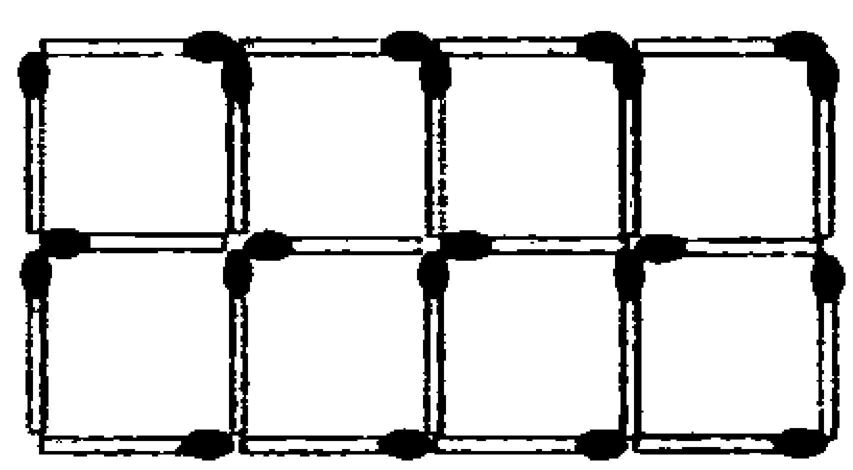


⇒ Se tiene que mover **2** cerillos, como mínimo.

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

En el gráfico se muestra **22** cerillos que forman en total m cuadrados. Si para que quede exactamente **4** cuadrados iguales , sin que sobre cerillos, se deben retirar n cerillos como mínimo. Calcule el valor de $m + n$.

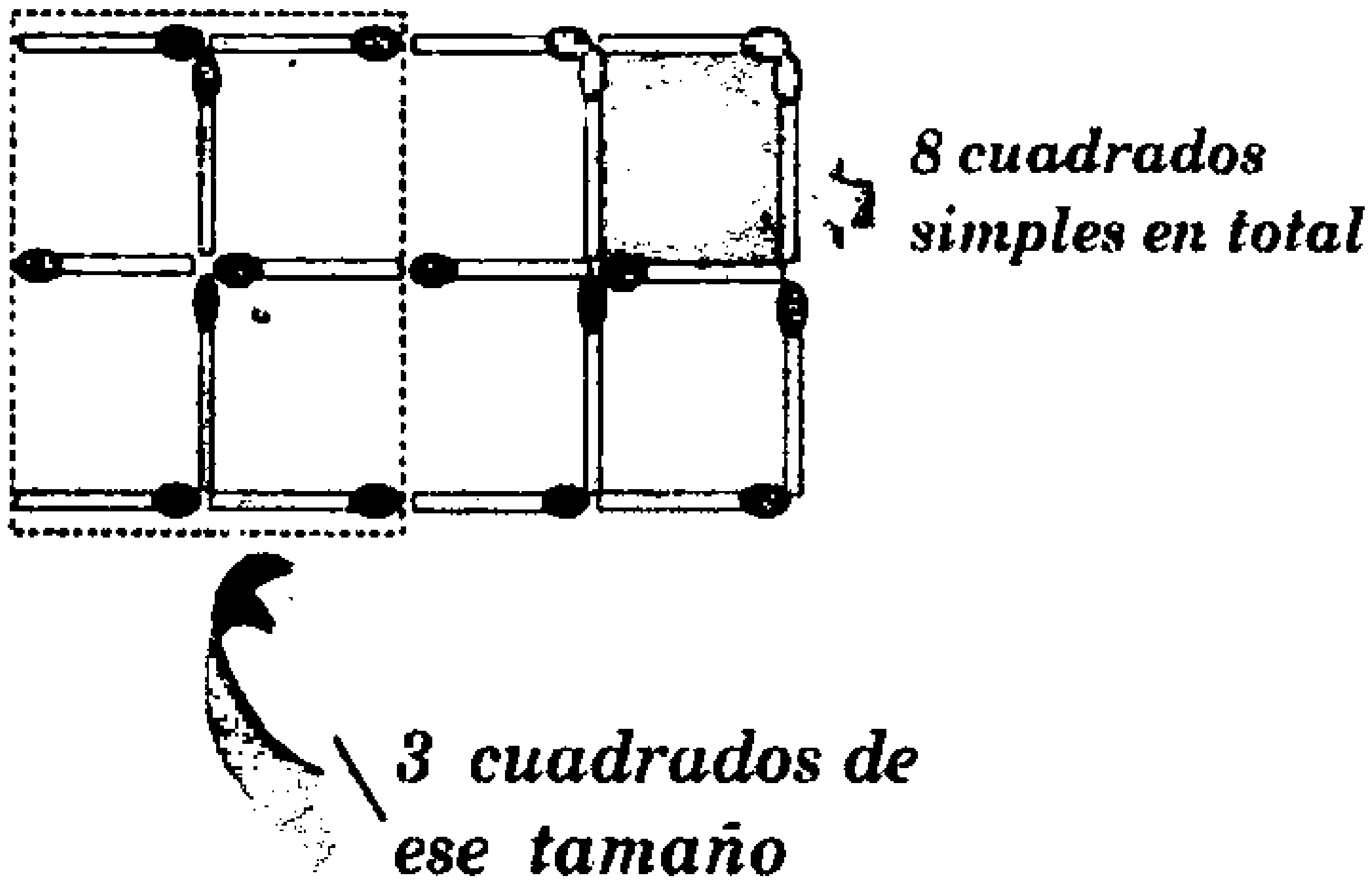


A) 18 *B) 17* *C) 16* *D) 15* *E) 14*

RESOLUCIÓN :

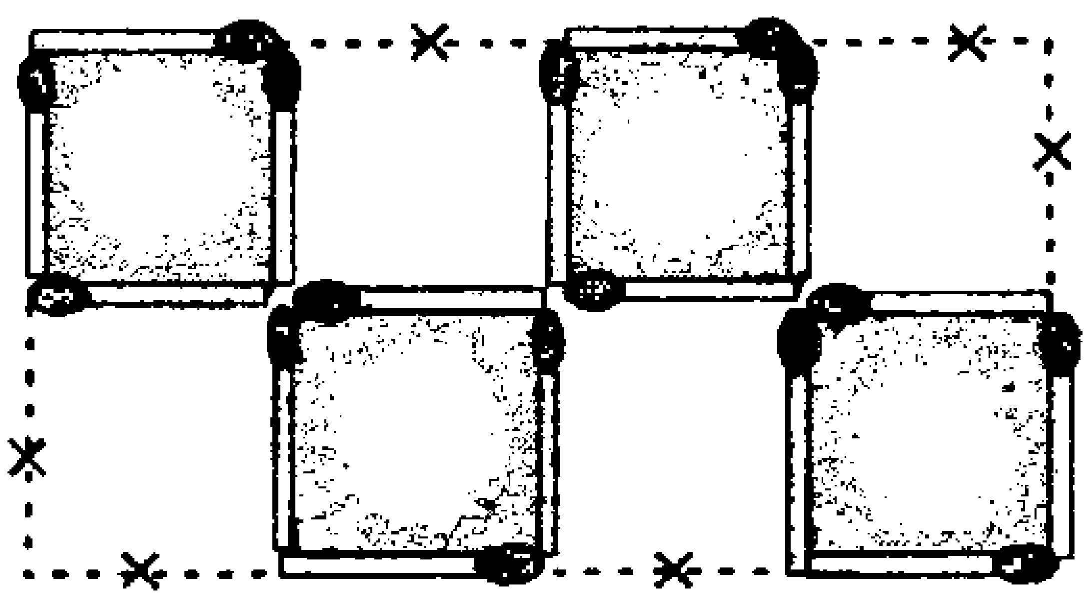
Se pide el valor de $m + n$.

En el gráfico contamos el total de cuadrados.



$\Rightarrow m=8+3=11$

Ahora retiraremos algunos cerillos para que queden *4* cuadrados ,exactamente. Veamos:



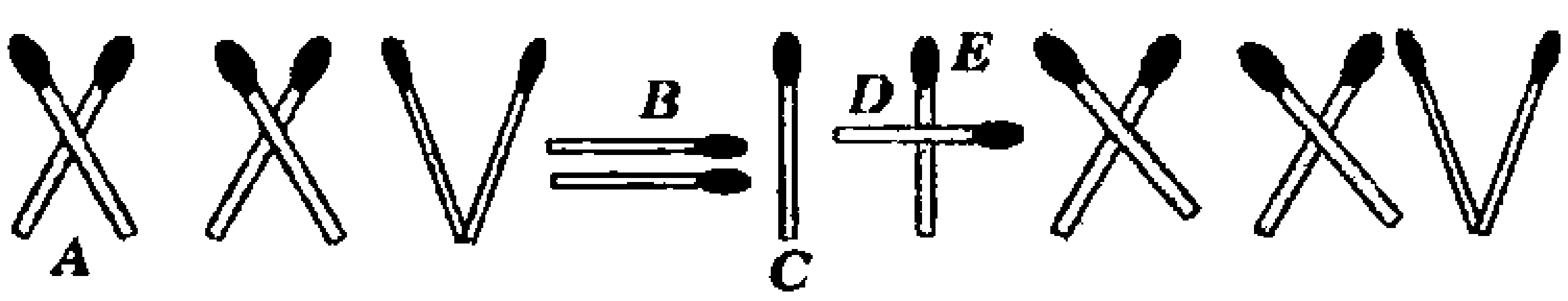
Se retiran *6* cerillos

$\Rightarrow n=6 \Rightarrow m+n=17$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

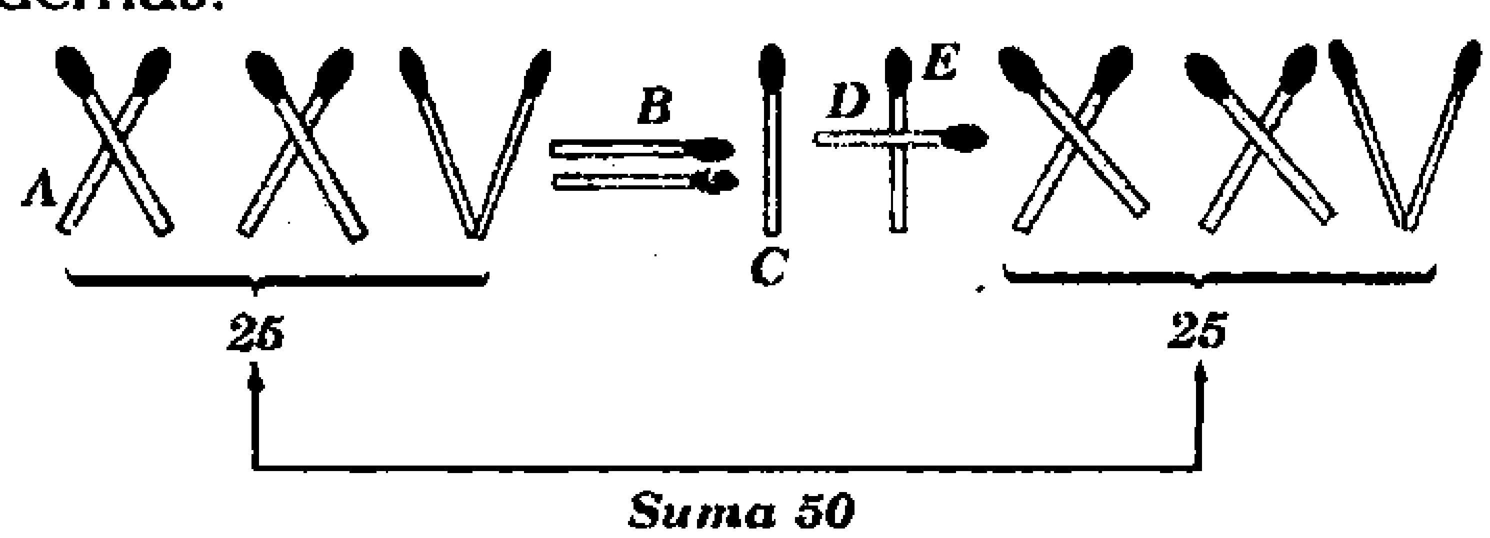
¿Cuál de los cerillos debe ser cambiado de posición para obtener una igualdad?



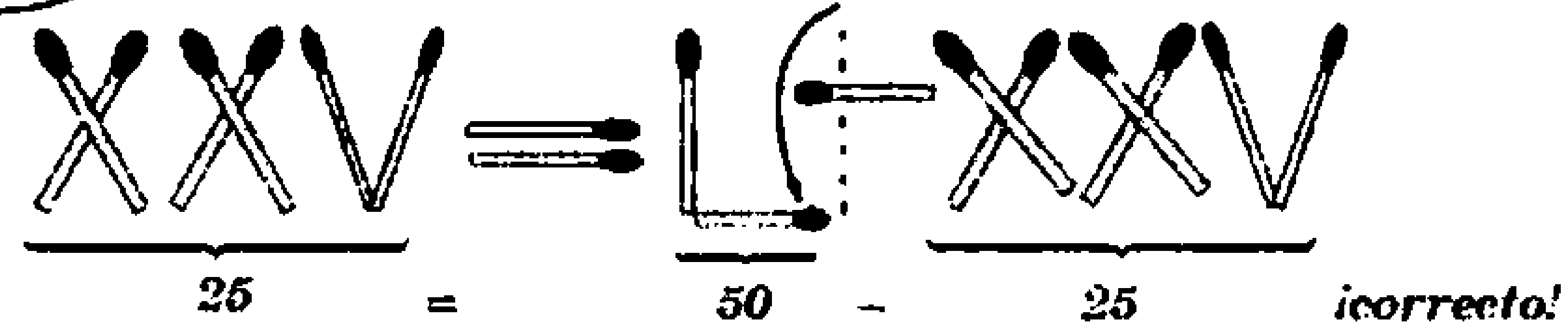
A) A *B) B* *C) C* *D) D* *E) E*

RESOLUCIÓN :

En la igualdad vemos que los siguientes números romanos utilizados están correctamente escritos, además:



Entonces en el segundo miembro formaremos el *50* (en romanos) cambiando de posición el cerillo *E*, veamos:

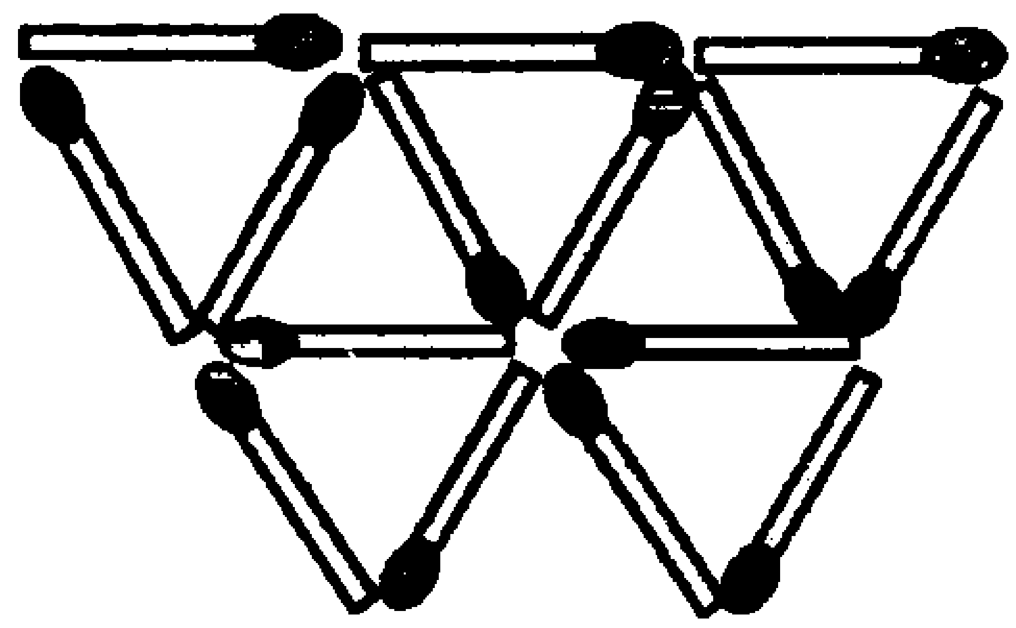


$\Rightarrow$ *Se cambia el cerillo E.*

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

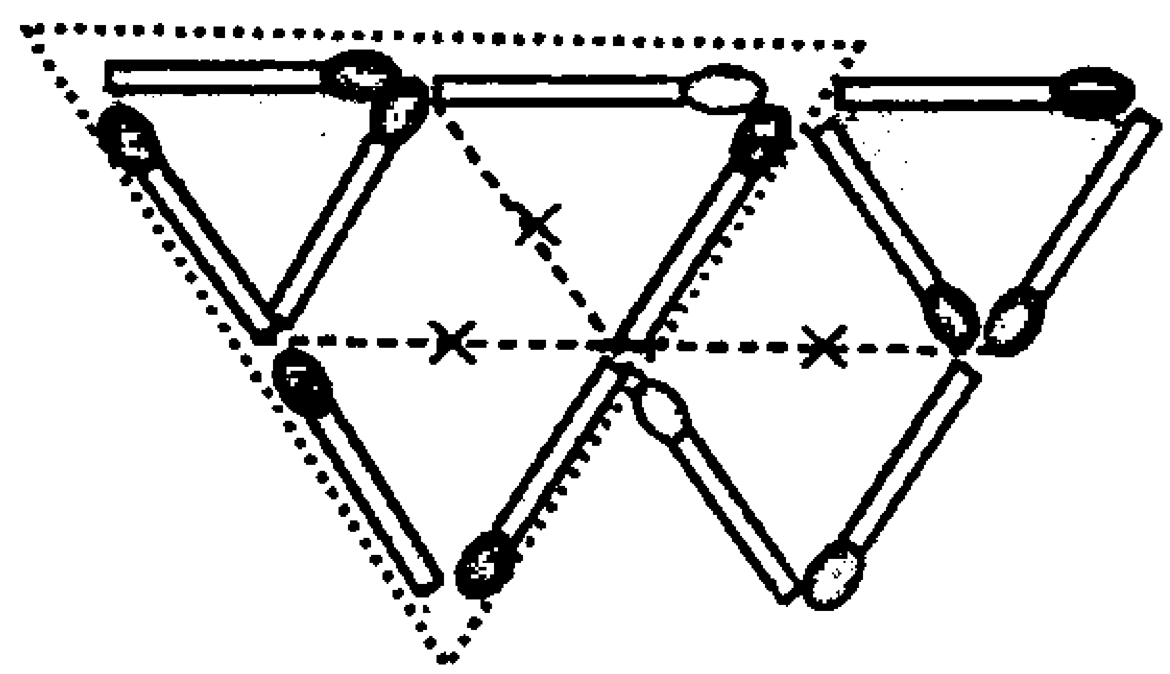
En el gráfico se cuentan *9* triángulos equiláteros en total, ¿Cuántos cerillos se tienen que retirar, como mínimo, para contar *3* triángulos exactamente?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

Se pide retirar la menor cantidad de cerillos para contar exactamente *3* triángulos.



$\Rightarrow$ Retiramos *3* cerillos como mínimo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

¿Cuántos cerillos son necesarios, como mínimo para obtener *7* triángulos iguales cuya longitud de cada uno de sus lados sea del tamaño de un cerillo?

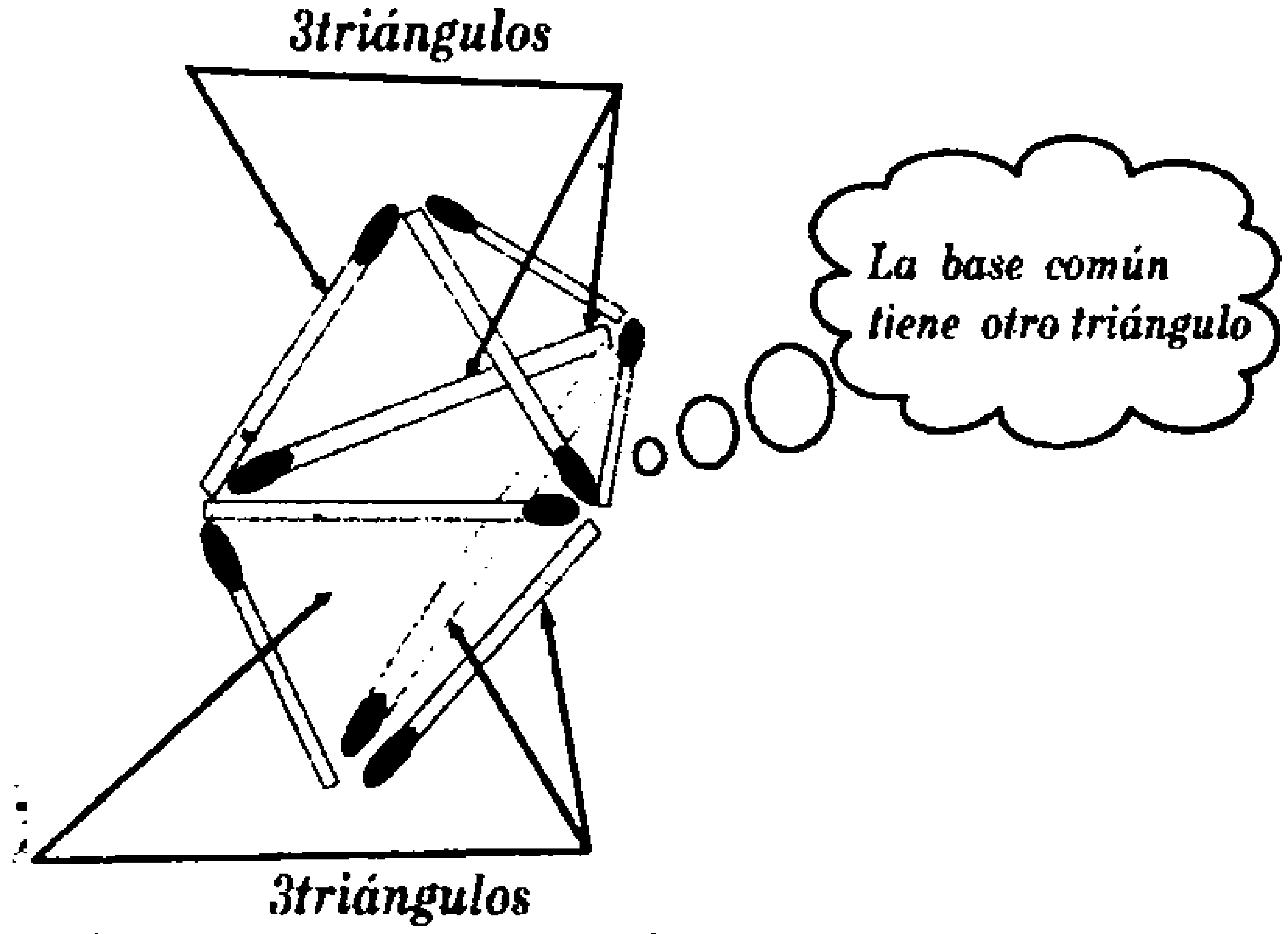
A) 15 *B) 10* *C) 9* *D) 7* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

Se le pide la menor cantidad de cerilo necesarios para obtener *7* triángulos iguales.

Condición: Cada lado del triángulo es de la longitud de un cerillo.

Por la condición del problema pensaremos en un sólido cuyas caras sean triángulos, es decir dos pirámides de base triangular donde ésta es la cara común.

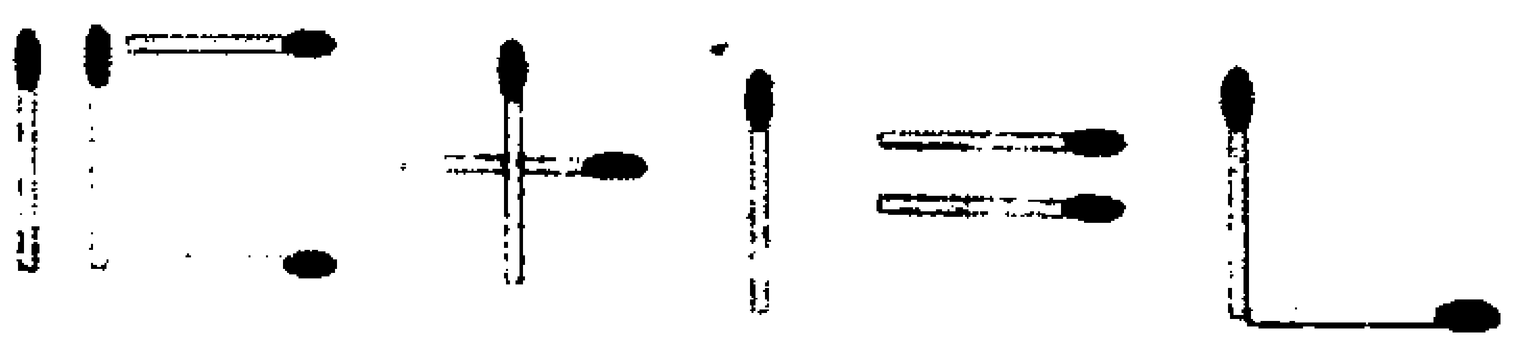


⇒ Son necesarios **9** cerillos como mínimo.

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 14 :

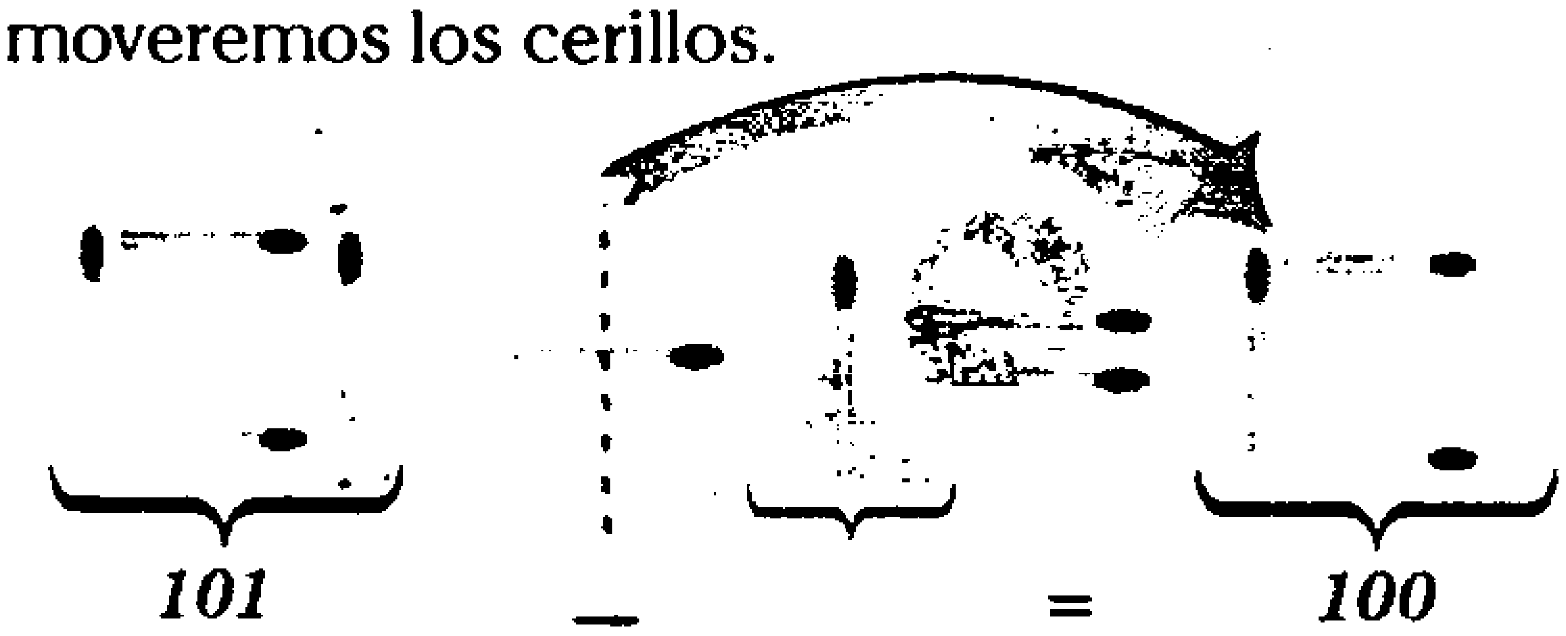
En el siguiente gráfico, ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad sea correcta?



A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) más de 4***

RESOLUCIÓN :

En la igualdad se observa que el primer sumando, no es un número, se podría pensar que es ***99*** en romanos, pero es incorrecto, entonces, de él moveremos los cerillos.

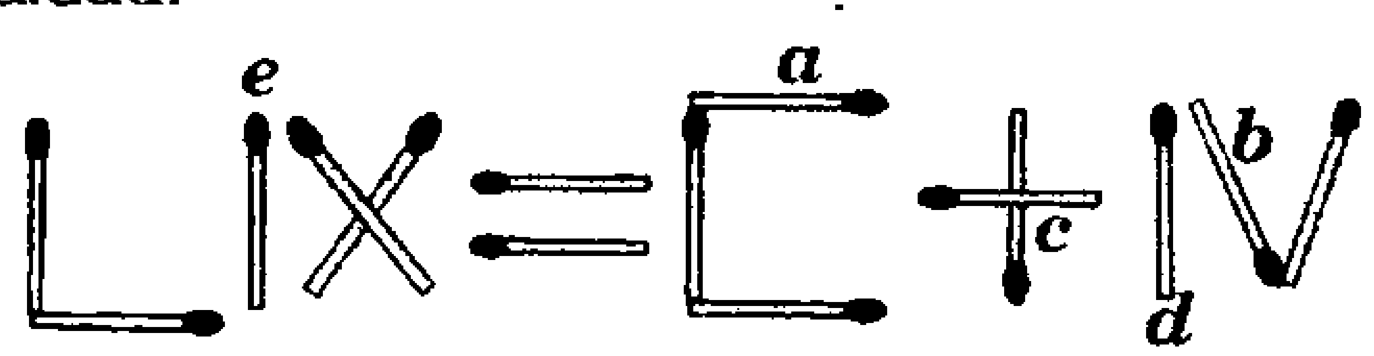


⇒ Se moverán como mínimo **2** cerillos.

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

En el siguiente gráfico, ¿qué cerillos se deben mover, como mínimo, para que se verifique la igualdad?

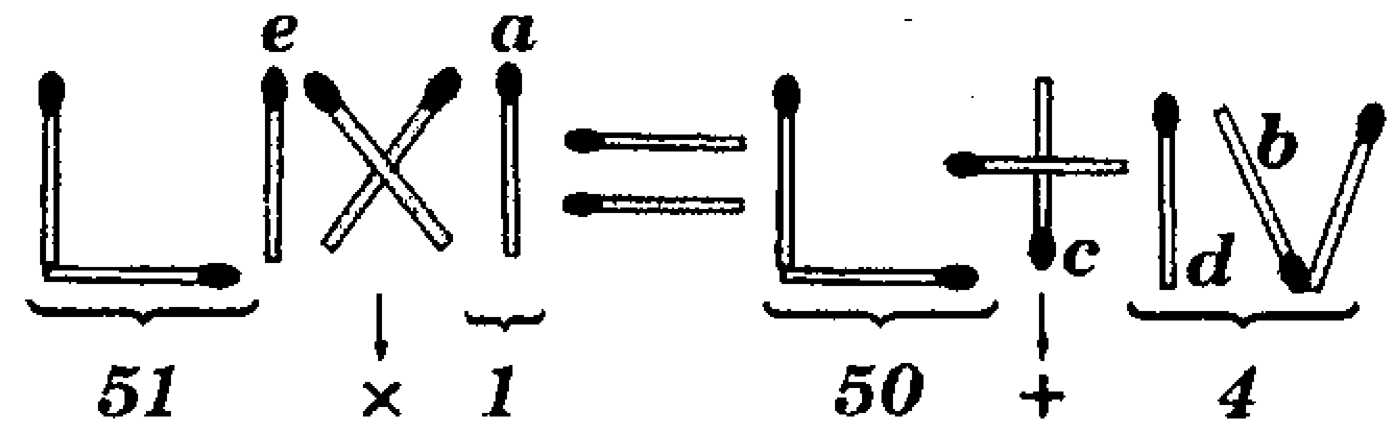


A) 1 ***B) 2*** ***C)3*** ***D) 4*** ***E) 5***

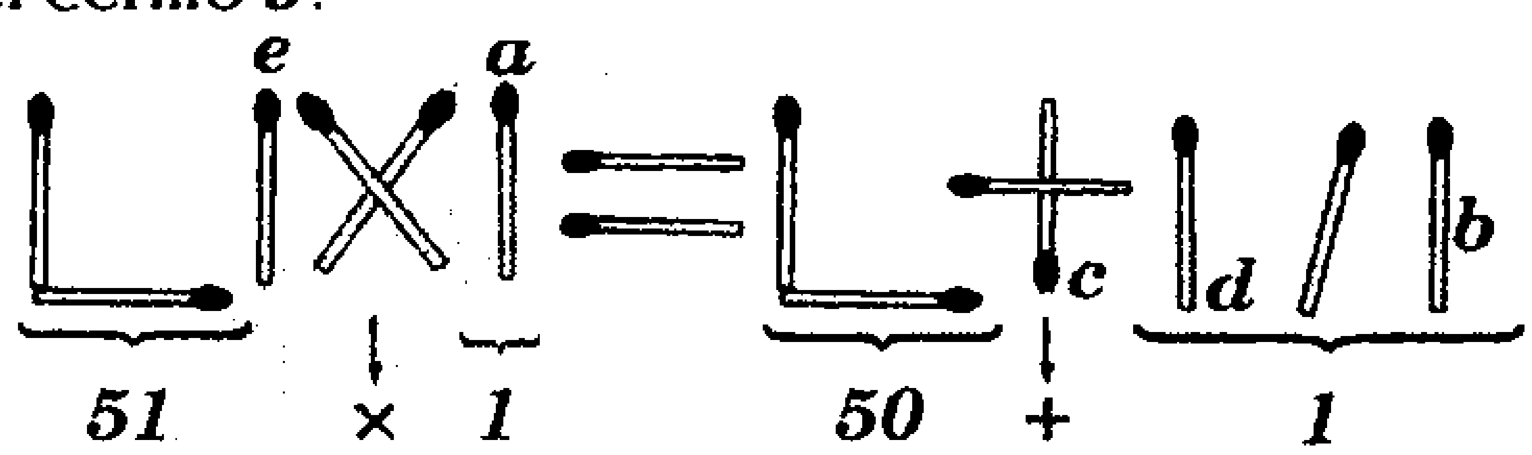
RESOLUCIÓN :

Recordemos que la representación del número romano ***LIX*** corresponde al núnero ***59*** y que el número romano resultante de la operación ***C+IV*** corresponde a ***104***.

Entonces, para homogenizar dichas cantidades moveremos el cerillo ***a*** del siguiente modo.



Como se observa, las cantidades a los extremos de la igualdad son próximas mas no iguales; para ello sería necesario mover un cerillo más, este es el cerillo ***b***.

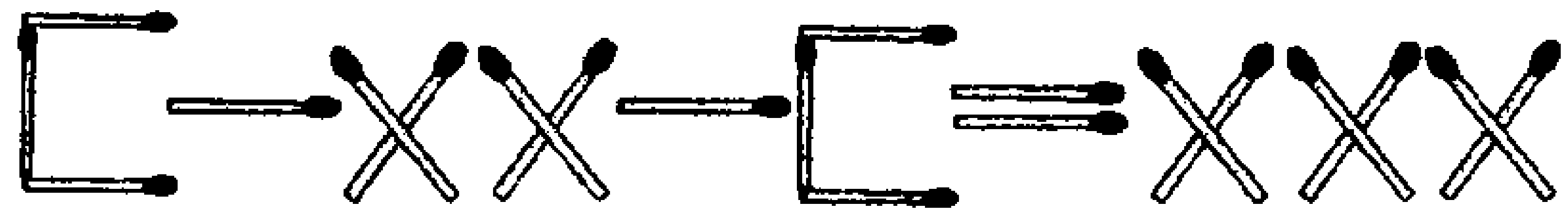


Por lo tanto, como mínimo, solo es necesario mover los cerillos ***a*** y ***b*** para que se verifiquen la igualdad.

RPTA : " B"

PROBLEMA 16 :

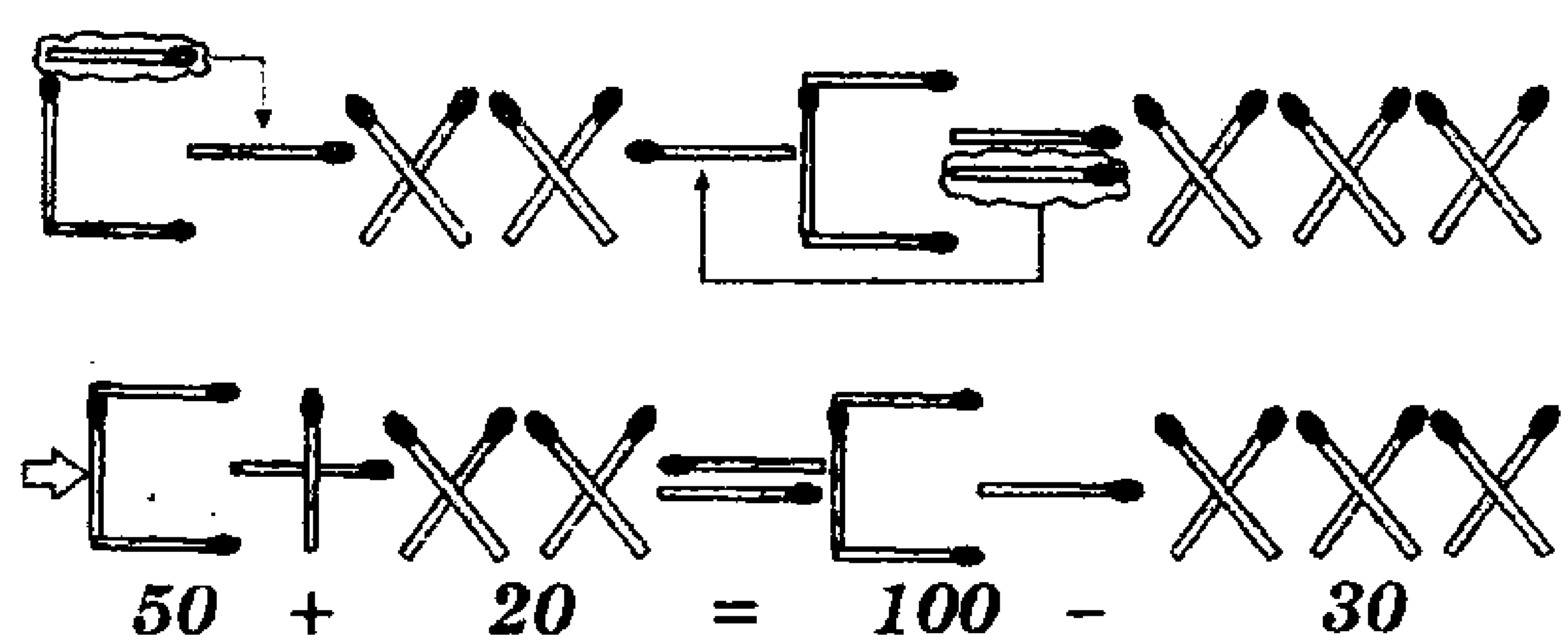
¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para obtener una igualdad válida?



A) 1 ***B) 2*** ***C)3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN

La operación está escrita en números romanos y es ***100 – 20 – 100=30***, la cual no es válida. Debemos considerar que podemos obtener otros números romanos como ***L:50***; ***XL:40***; ***XC:90***, etc. Lo mínimo sería mover un cerillo, pero vemos que no será suficiente (pruebe todas las posibilidades); lo siguiente sería mover dos cerillos.



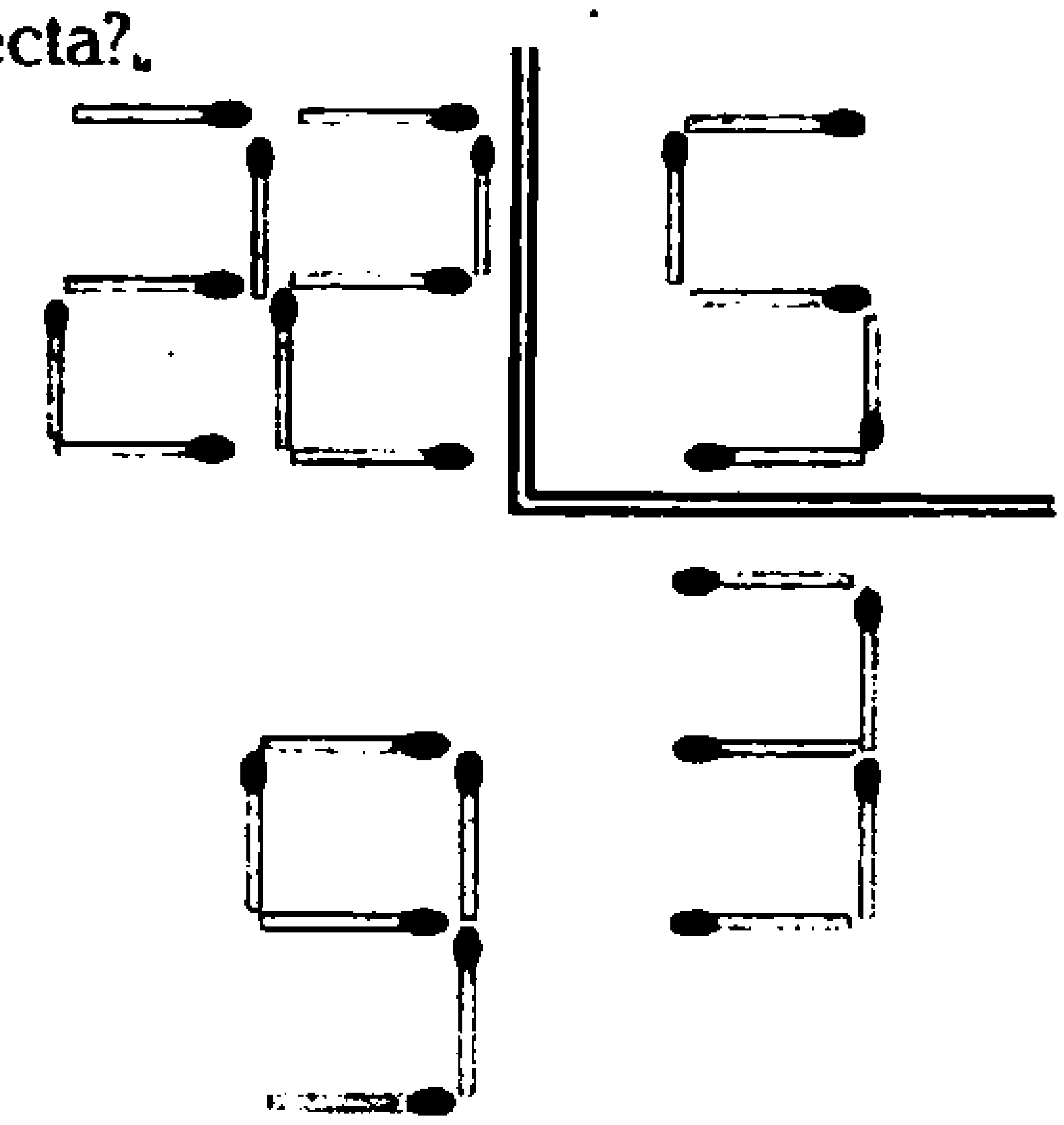
lo cual es una igualdad válida.

Por lo tanto, movemos como mínimo **2** cerillos.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 17 :

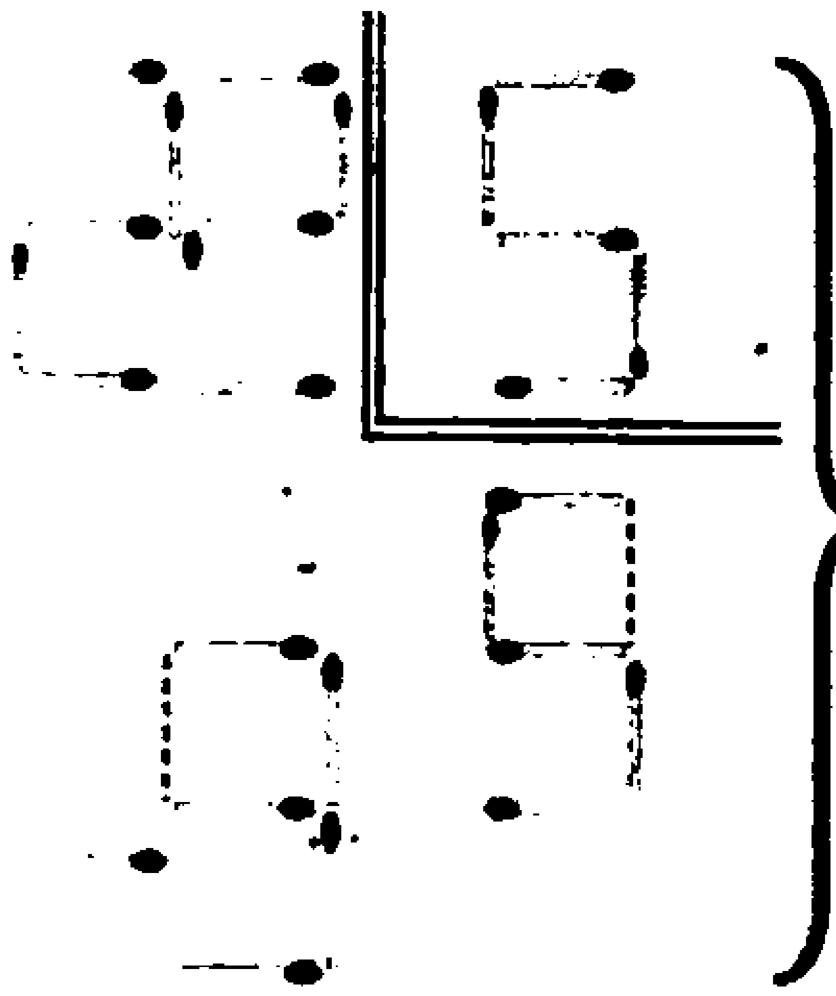
En el siguiente gráfico, ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo para que la operación sea la correcta?.



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

El la división haremos que el cociente aumente, de esa manera al multiplicarlo con el divisor se acerque más al dividendo *(22)*, para luego variar el residuo. Veamos:



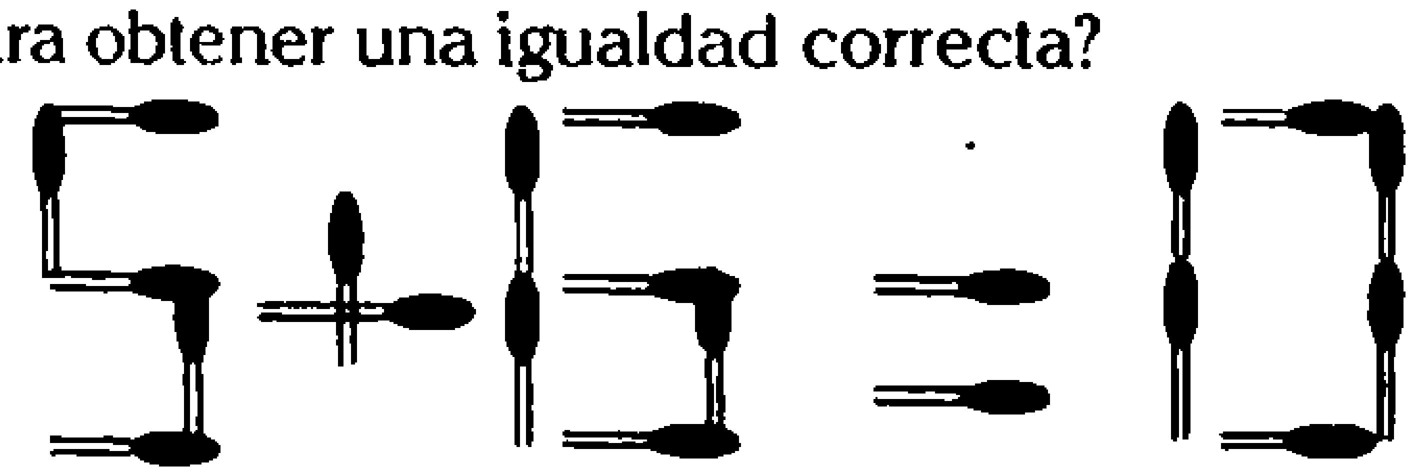
22|5 (División
5 por exceso)
-3

⇒ Deben moverse **2** cerillos.

RPTA : "B"

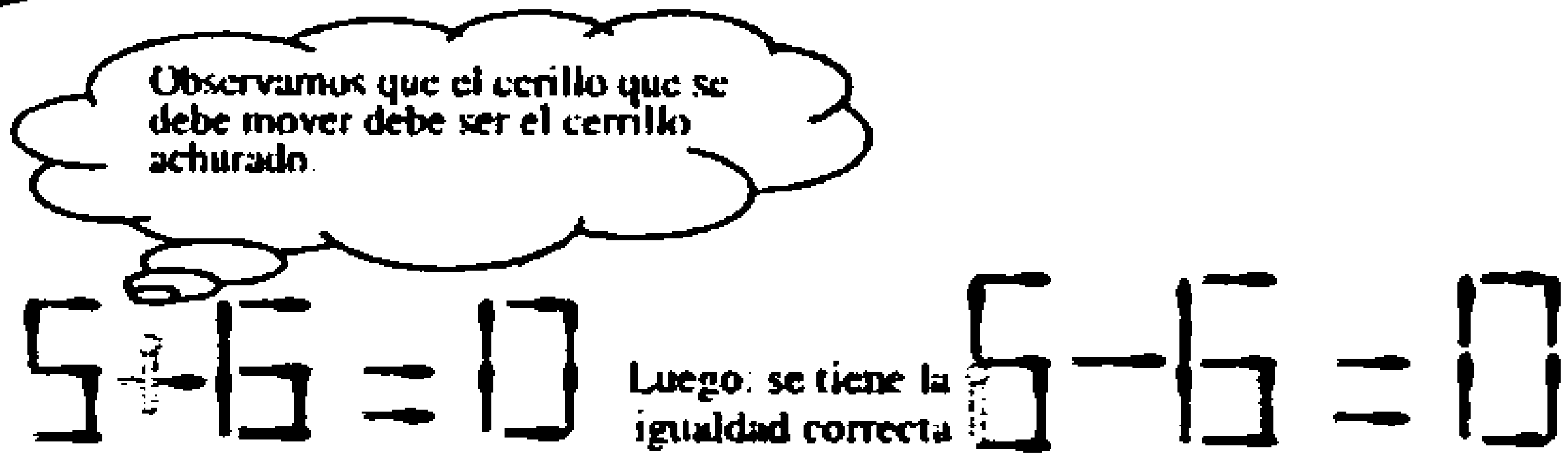
PROBLEMA 18 :

¿Cuántos cerillos se debe mover como mínimo para obtener una igualdad correcta?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

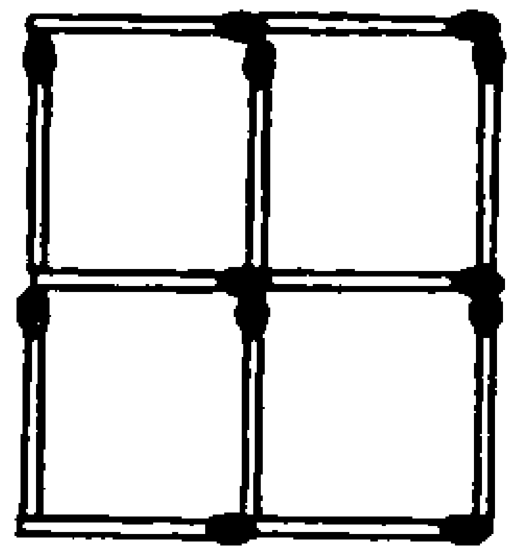


Por lo tanto se debe mover *1* cerillo como mínimo

RPTA : "A"

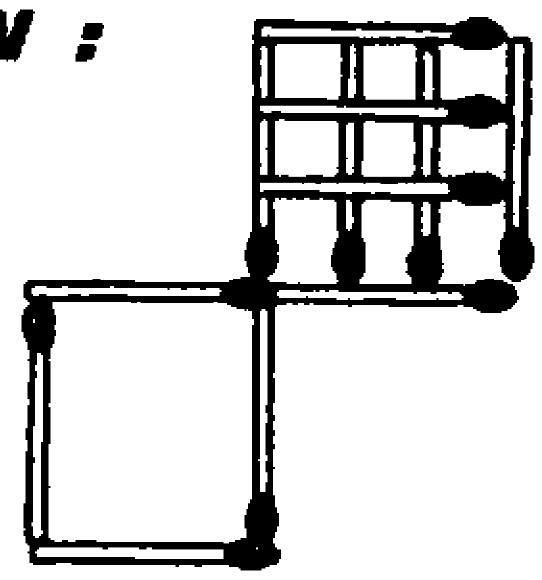
PROBLEMA 19 :

¿Cuántos palitos debes mover como mínimo, para formar *15* cuadrados?



A) 5
B) 2
C) 3
D) 4
E) 6

RESOLUCIÓN :

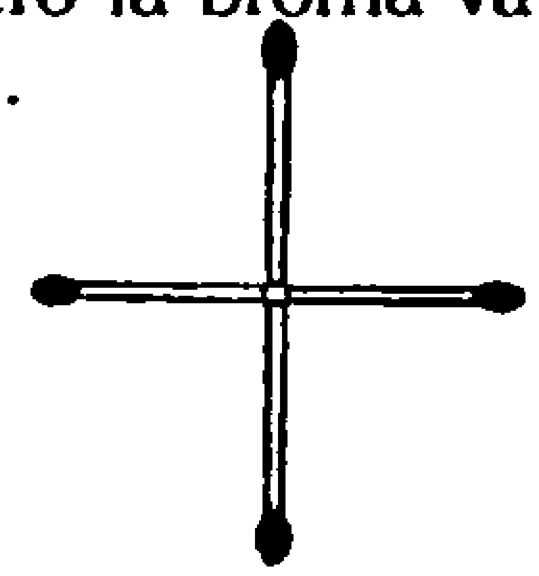


Se deben mover *4* palitos para formar *15* cuadrados.

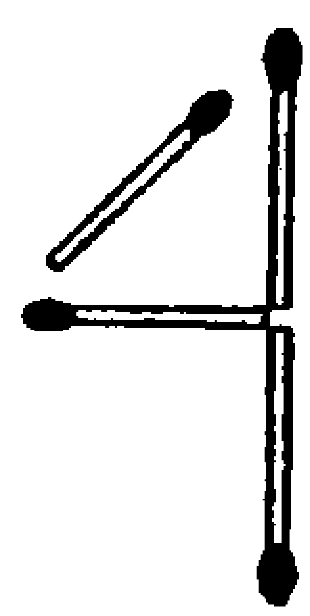
RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Moviendo solamente un cerillo hay que formar un cuadrado. (La vieja broma de deslizar uno o dos milímetros hacía arriba el cerillo central superior, y dejar en el centro de la cruz un minúsculo hueco cuadrado no es válido. La solución también es humorística, pero la broma va ahora por muy distinto camino).

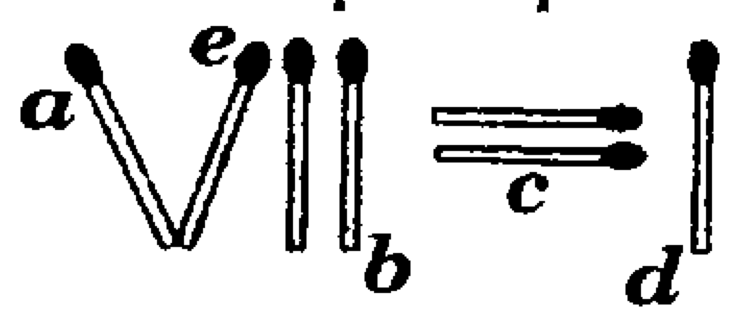


RESOLUCIÓN :



PROBLEMA 21 :

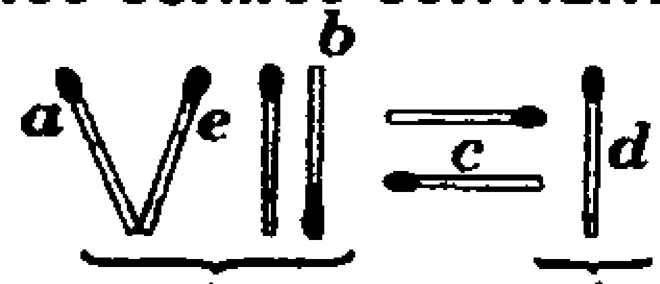
En el gráfico se observa la igualdad correcta. ¿Qué cerillo se debe mober para que la igualdad sea correcta?



A) c B) a C) b D) e E) d

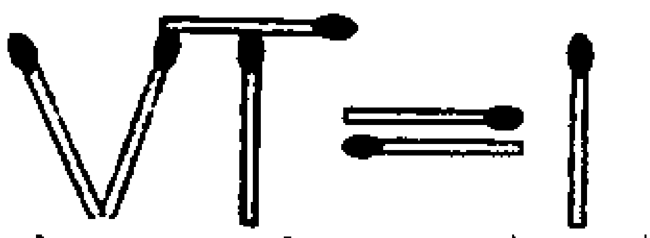
RESOLUCIÓN :

Considerando la igualdad planteada relacionemos los cerillos con números romanos, así:



7 = 1
¡ incorrecto !

Trasladando el cerillo *b*; tenemos:



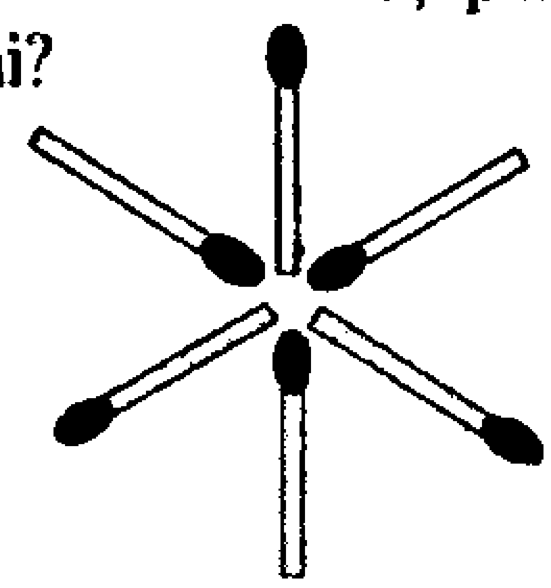
$\sqrt{1} = 1$

Por lo tanto, solo es necesario el cerillo *b*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

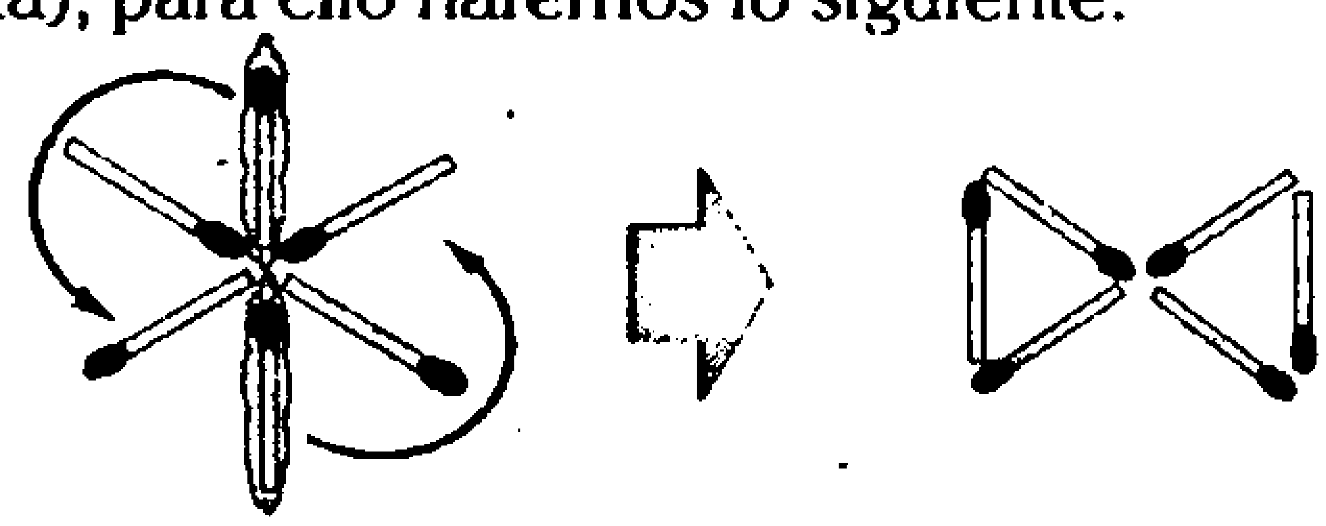
En el siguiente gráfico, ¿Cuántos cerillos se tienen que mover como mínimo, para obtener una corbata de Michi?



A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

Se quiere obtener con la menor cantidad de movimientos de cerillos una corbata de Michi (de fiesta), para ello haremos lo siguiente:

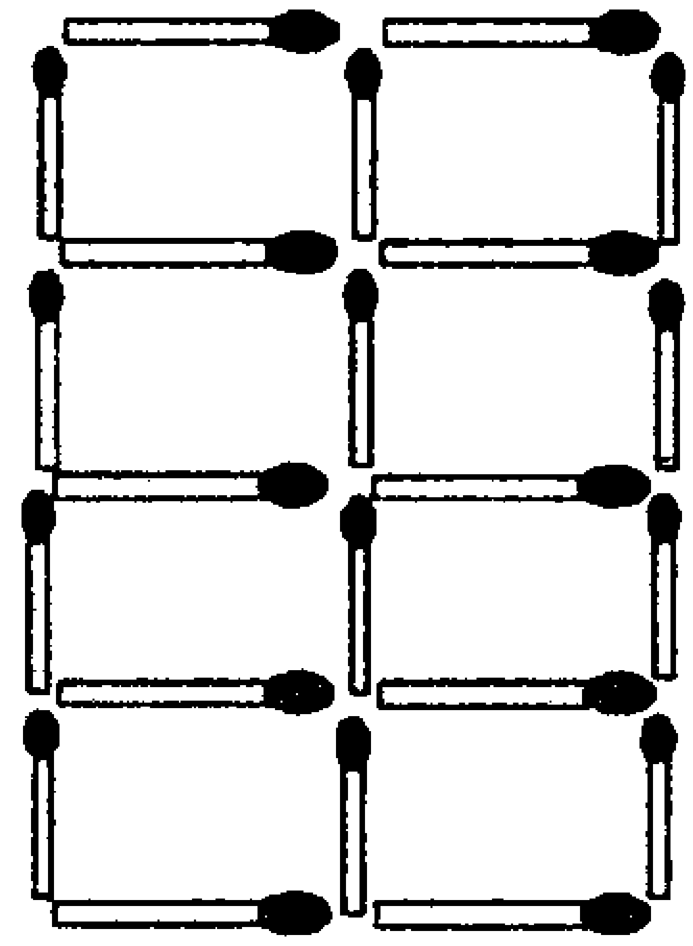


⇒ Se moverán como mínimo dos cerillos

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

En el gráfico, ¿Cuántos cerillos, como mínimo, deben retirarse para obtener siete cuadrados exactamente?

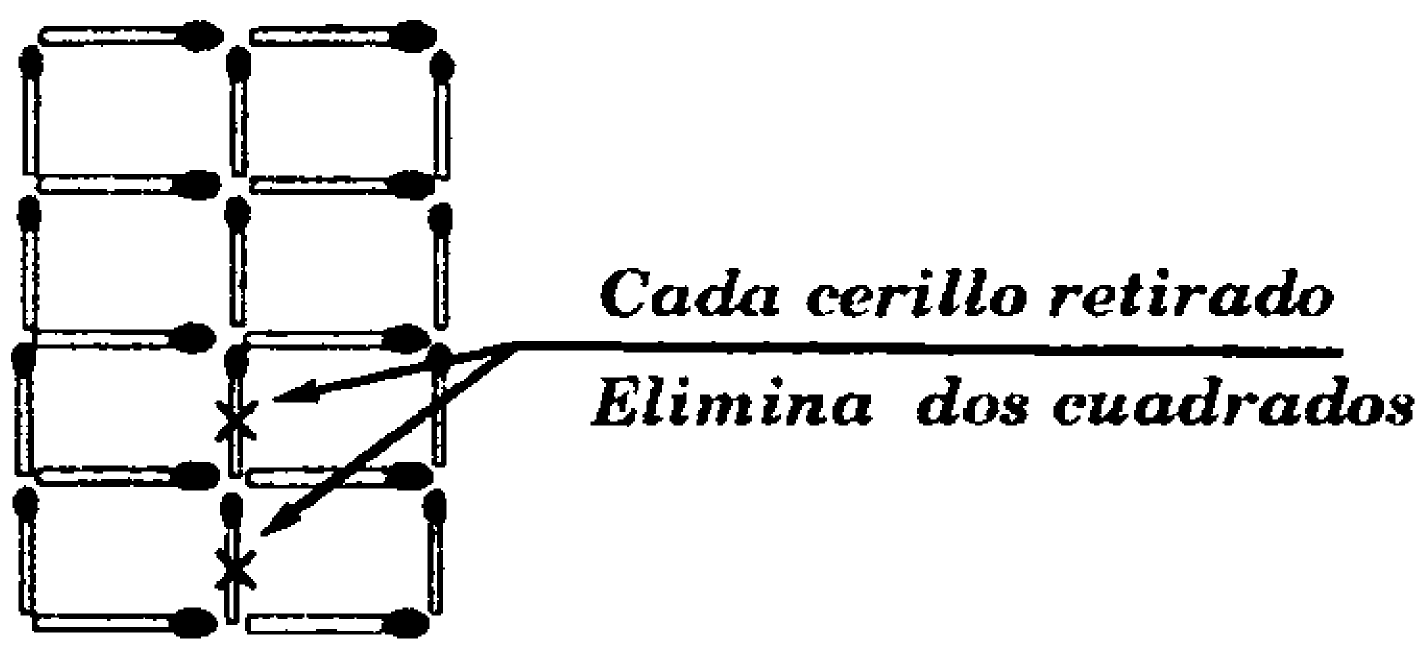


A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN :

Se pide retirar la menor cantidad de cerillos para obtener siete cuadrados exactamente.

En el gráfico mostrado se cuentan en total *11* cuadrados ***(8 simples y 3 compuestos)*** de manera que eliminando cuadrados obtendremos lo pedido , así :



⇒ Se deben retirar dos cerillos

RPTA : "D"

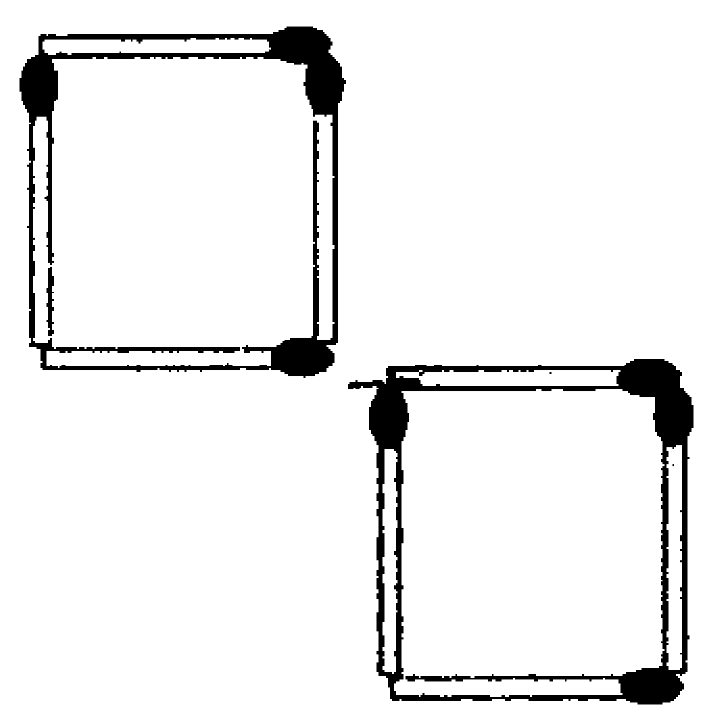
PROBLEMA 24 :

¿Cuántos cerillos se requieren, como mínimo, para formar exactamente dos cuadrados y *8* triángulos iguales? Considere que no se deben romper los cerillos.

A) 8 B) 7 C) 10 D) 6 E) 9

RESOLUCIÓN :

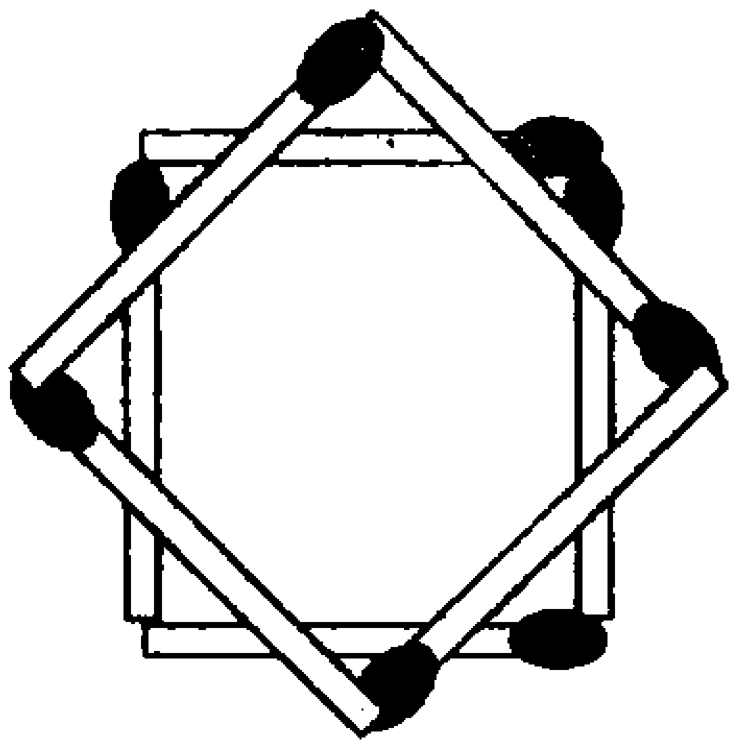
Se pide formar dos cuadrados y *8* triángulos con la menor cantidad de cerillos.



Para formar un cuadrado necesitamos *4* cerillos

solamente, como queremos dos cuadrados necesitaremos *8* cerillos, es decir:

Ahora, para generar los triángulos podemos intersectar lós cuadrados obtenidos del siguiente modo:

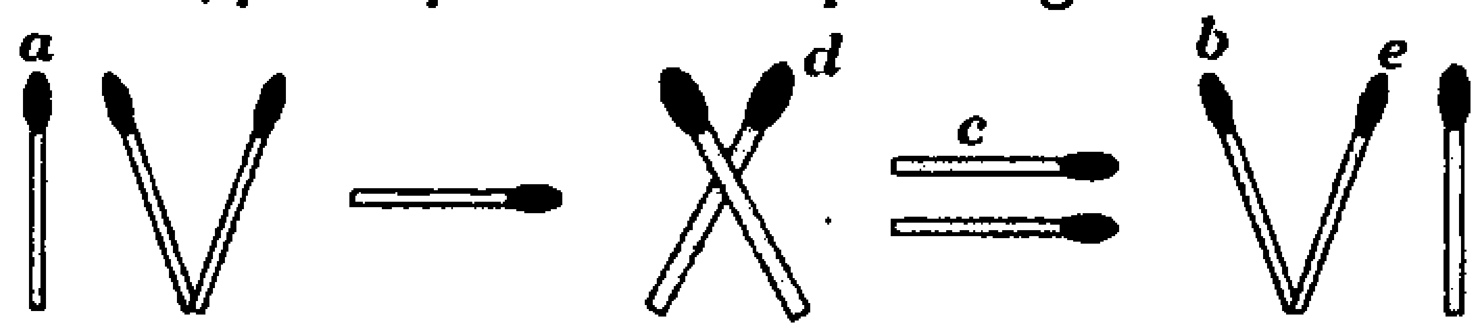


⇒ Se requiere *8* cerillos como mínimo.

RPTA : "A"

PROBLEMAS 25 :

En el gráfico, ¿Qué cerillos se deben mover, como mínimo, para que se verifique la igualdad?

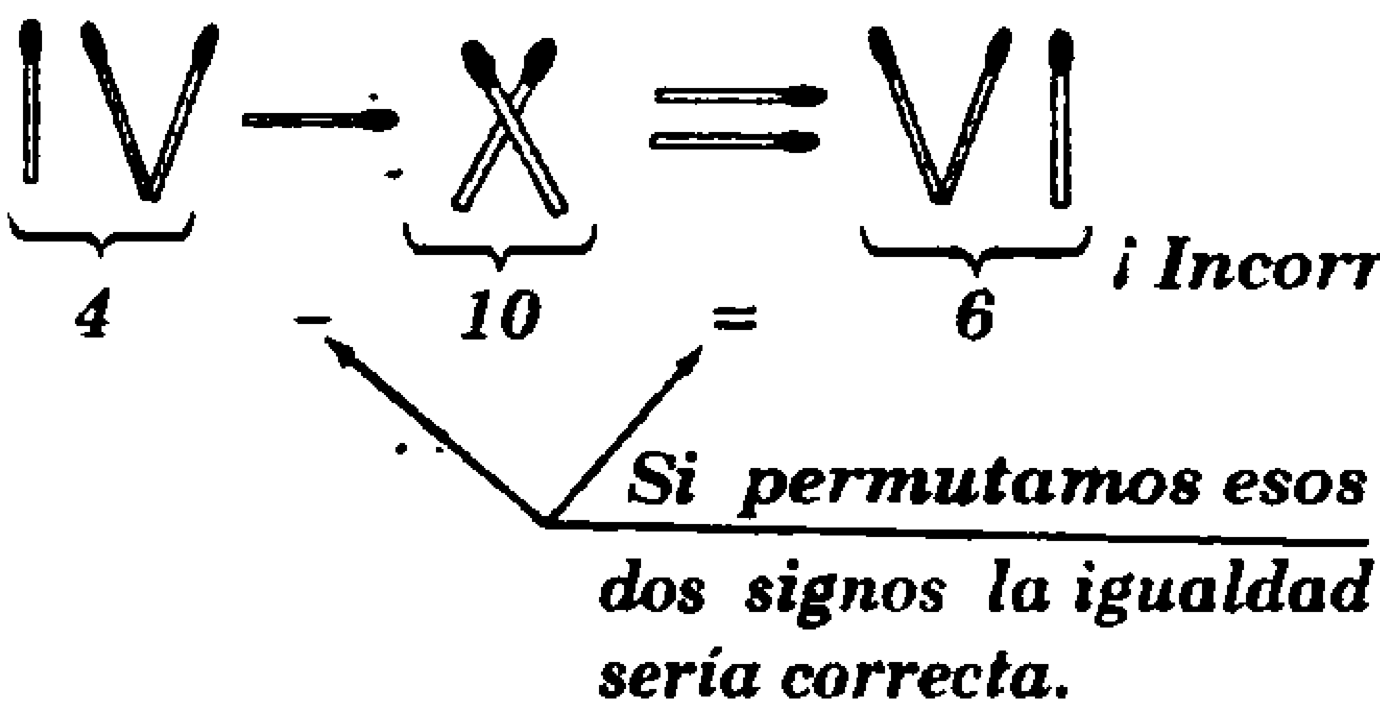


A) a *B) b* *C) c* *D) b y c* *E) d y e*

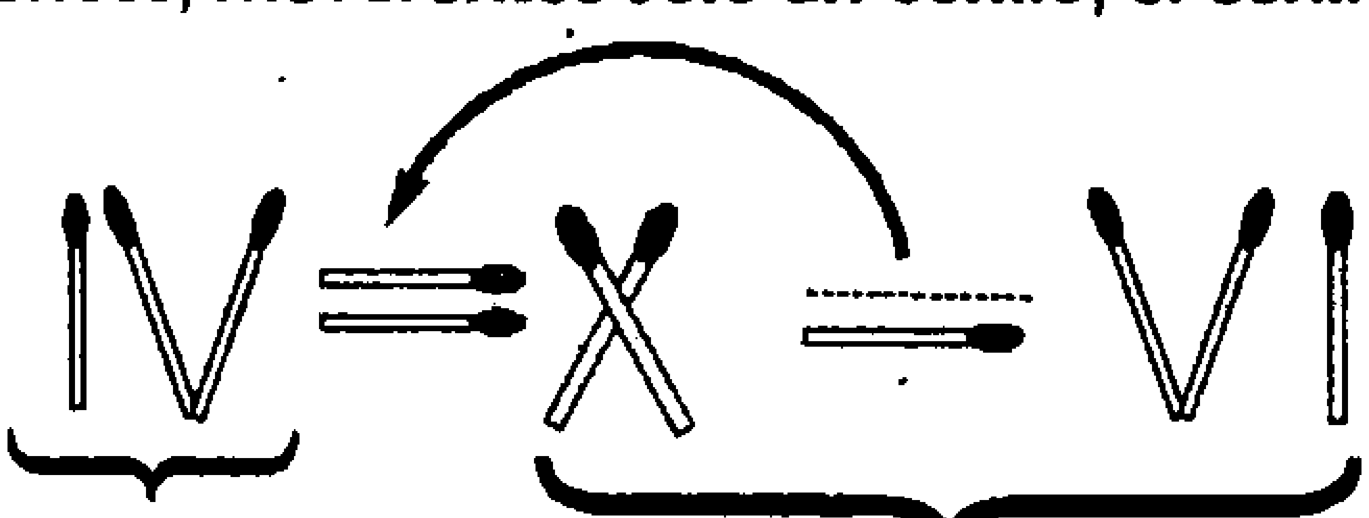
RESOLUCIÓN :

Se pide indicar el cerillo o cerillos que se debe mover como mínimo para que se verifique la igualdad.

Al ver la expresión se observa que todos los números están bien escritos.



Entonces, moveremos solo un cerillo, el cerillo *C*



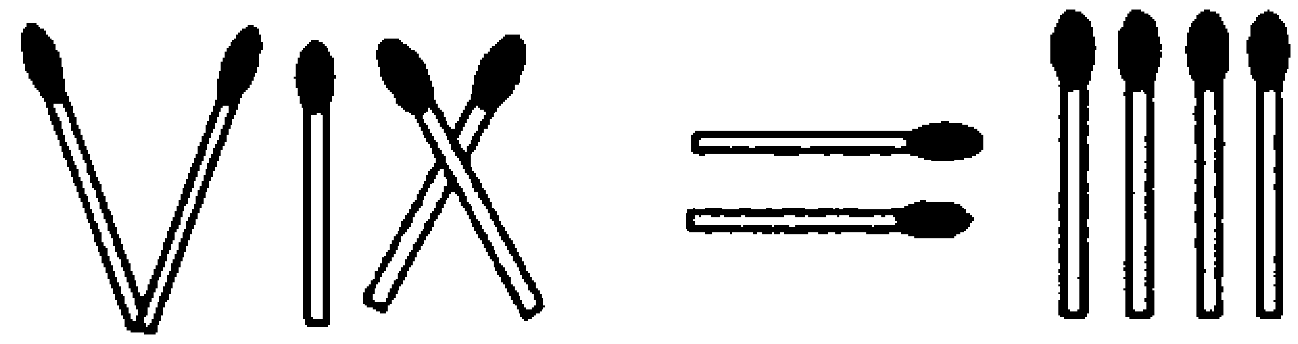
4 = 10 – 6

⇒ Se debe mover el cerillo *c* como mínimo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

En el gráfico, ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo para obtener la igualdad?

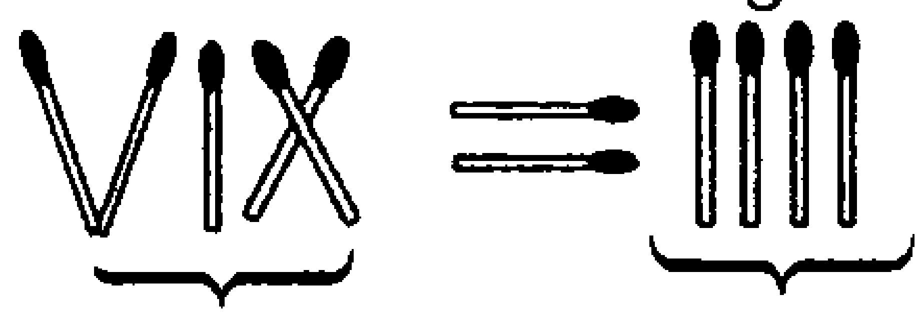


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

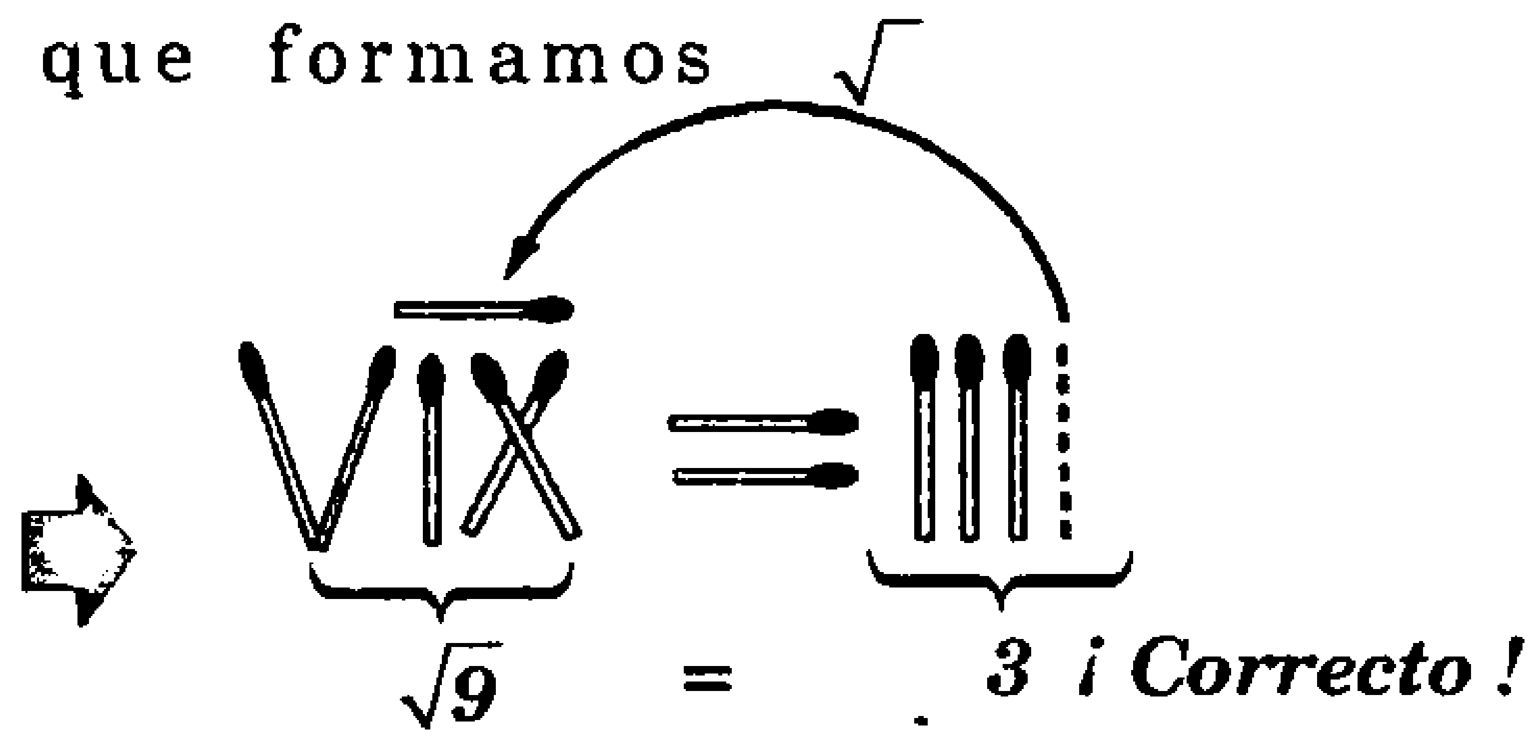
Se pide mover la menor cantidad de cerillos para que la igualdad sea correcta.

En el gráfico observamos los siguiente:



No es número, el cerillo que se retira del otro miembro lo ubicaremos horizontalmente de modo que formamos √

No es número, para que lo sea habrá que retirar un cerillo.

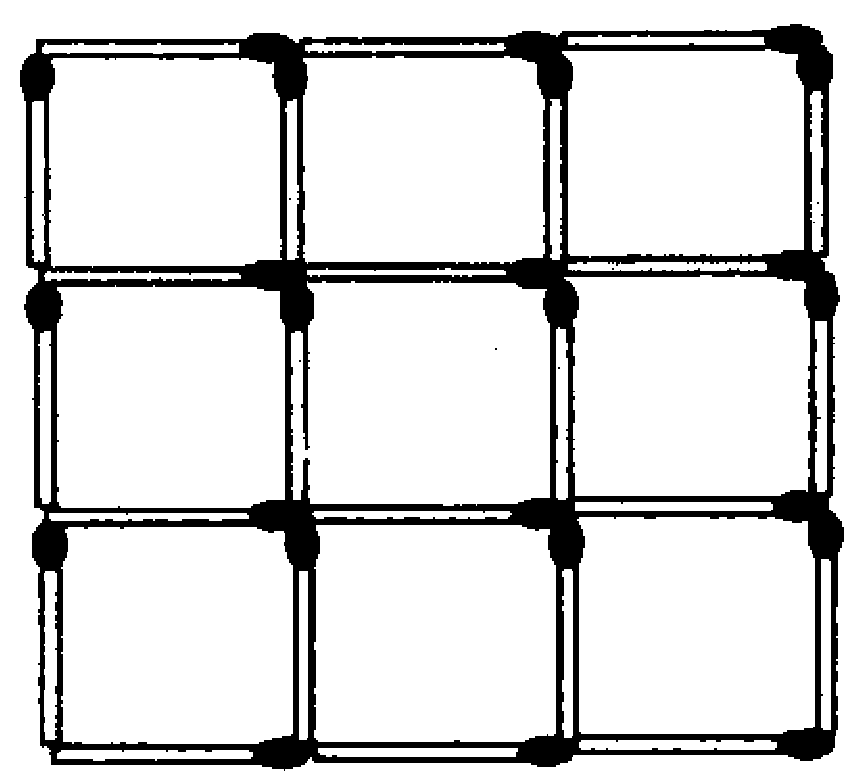


⇒ Se mueve un cerillo.

RPTA : "A"

PROBLEMA 27 :

En el gráfico, ¿Cuántos cerillos de deben mover, como mínimo, para obtener exactamente *11* cuadrados?

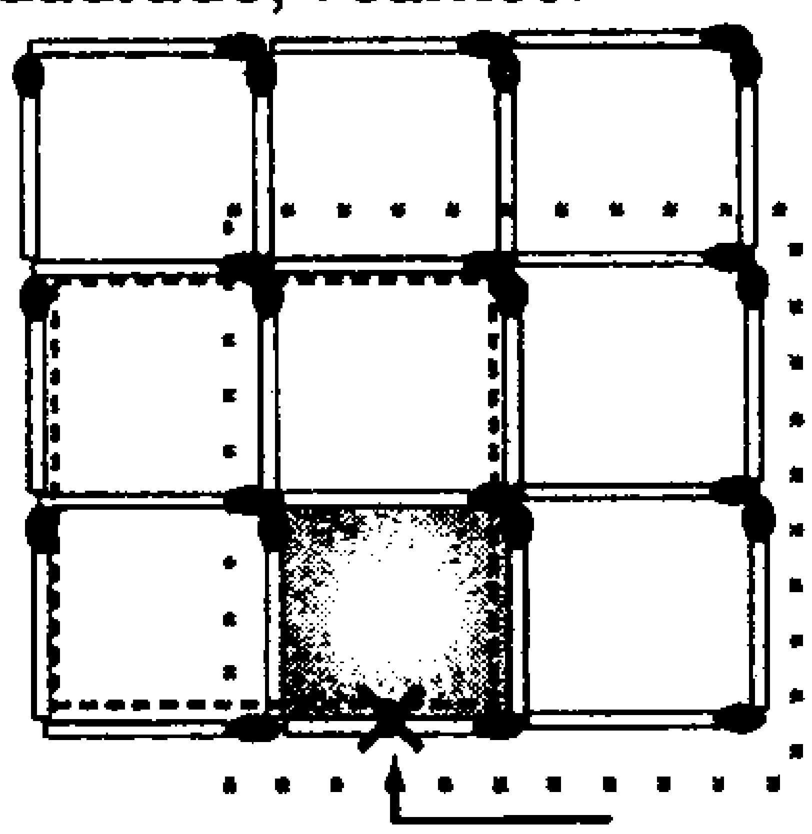


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

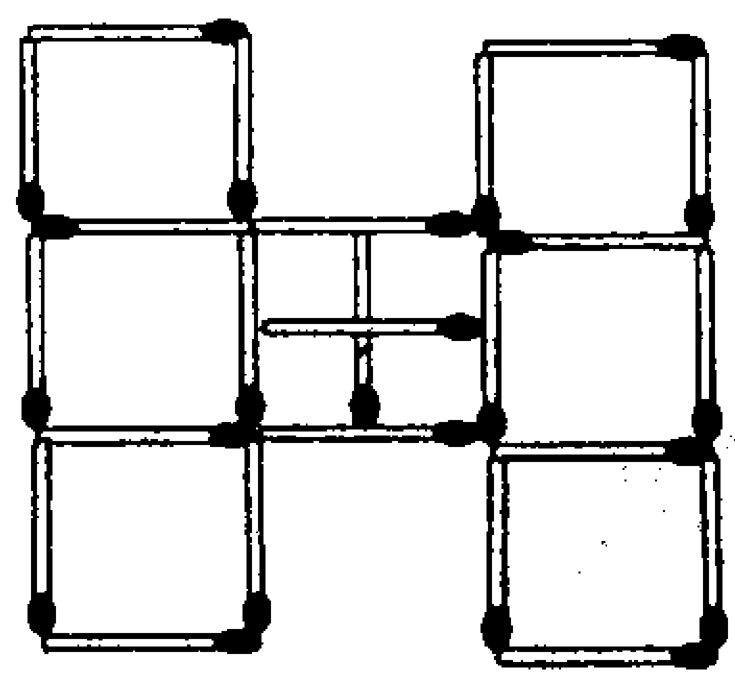
Se quiere obtener exactamente ***11*** cuadrados moviendo la menor cantidad de cerillos.

En el gráfico se cuentan en total ***14*** cuadrados ***(9 simples y 5 compuestos)*** y solo queremos ***11***, para ello debemos mover aquellos cerillos que desarmen la mayor cantidad de cuadrados, es decir, el cerillo que esta al centro de cada lado del mayor cuadrado, veamos:



Al retirar el cerillo señalado se eliminan ***4*** cuadrados, es la mayor cantidad que se puede eliminar.

Entonces, moveremos dos cerillos y ubicaremos en el centro del gráfico como se muestra. Se cuentan en total ***11*** cuadrados.

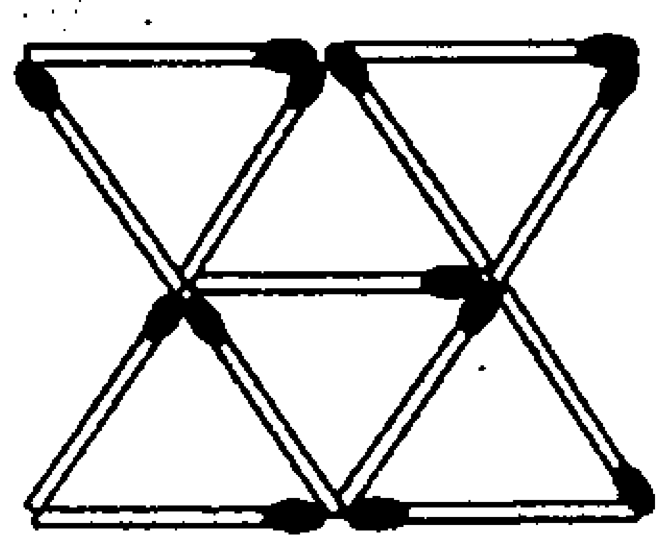


⇒ ***Se tienen que mover 2 cerillos.***

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

¿Cuántos cerillos deben retirar, como mínimo, para que en el gráfico no se observe triángulos?

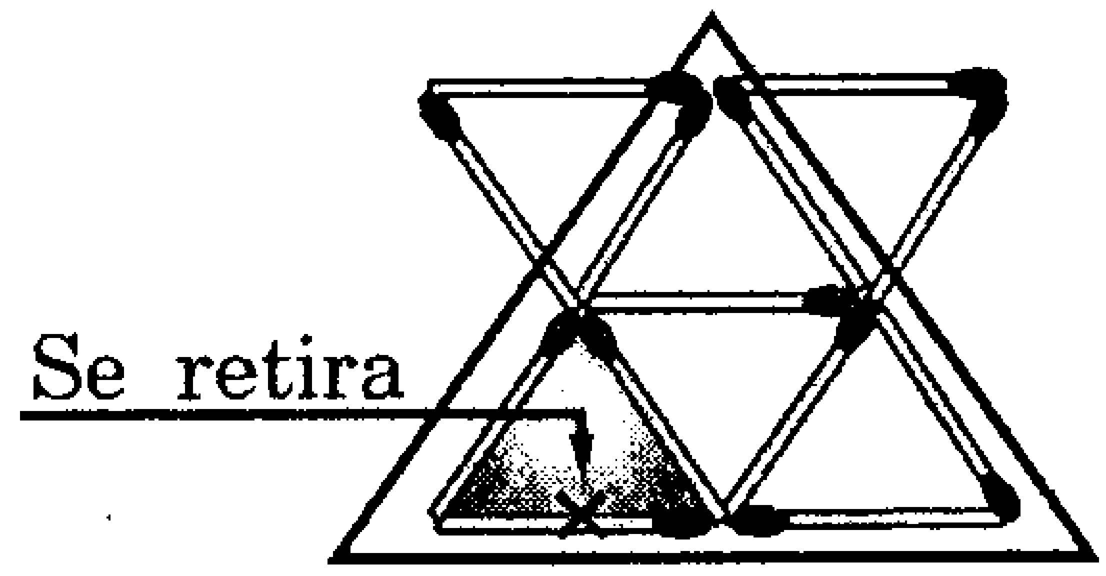


A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D) 5*** ***E) 6***

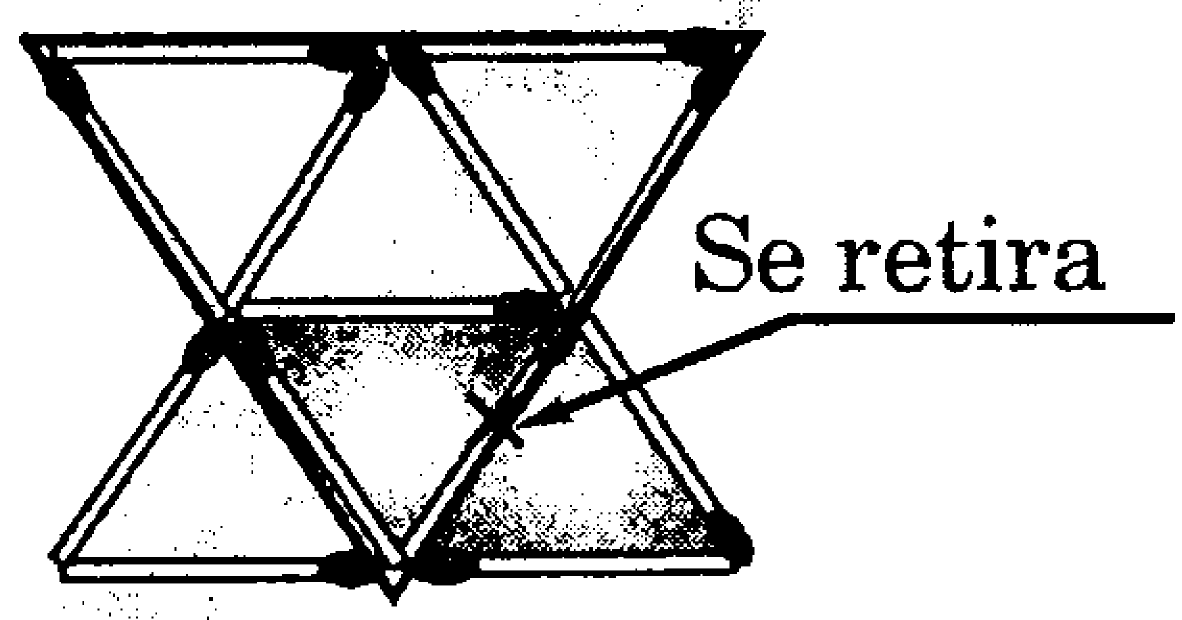
RESOLUCIÓN :

Se pide retirar cerillos para que no queden triángulos.

En el gráfico observamos lo siguiente:

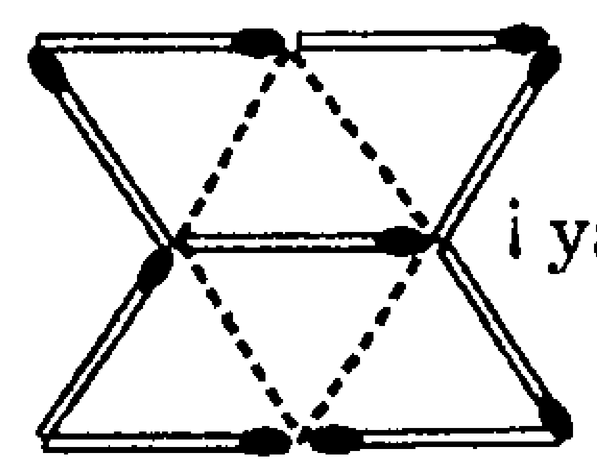


Si retiramos un cerillo del perímetro como el que se indica en el gráfico, eliminamos ***2*** triángulos (uno simple y otro compuesto).



Se retiramos un cerillo interior como en que se indica en el gráfico, eliminamos ***3*** triángulos (dos pequeños o simples y uno grande o compuesto)

Como se quiere retirar la menor cantidad de cerillos, entonces retiraremos aquellos que eliminen más triángulos, es decir, los interiores. Es decir:

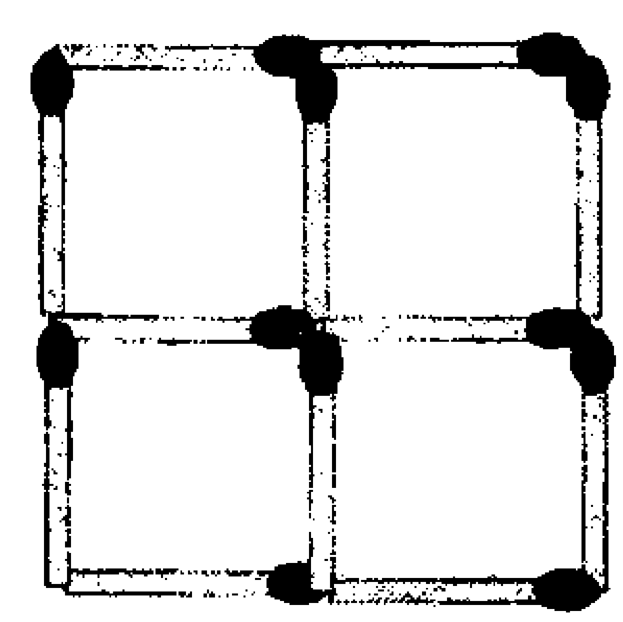


⇒ Deben retirarse ***4*** cerillos como mínimo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

En la siguiente formación, se pueden contar cuatro cuadrados iguales. ¿Cuántos palitos se deben mover, como mínimo, para que solo haya tres cuadrados?



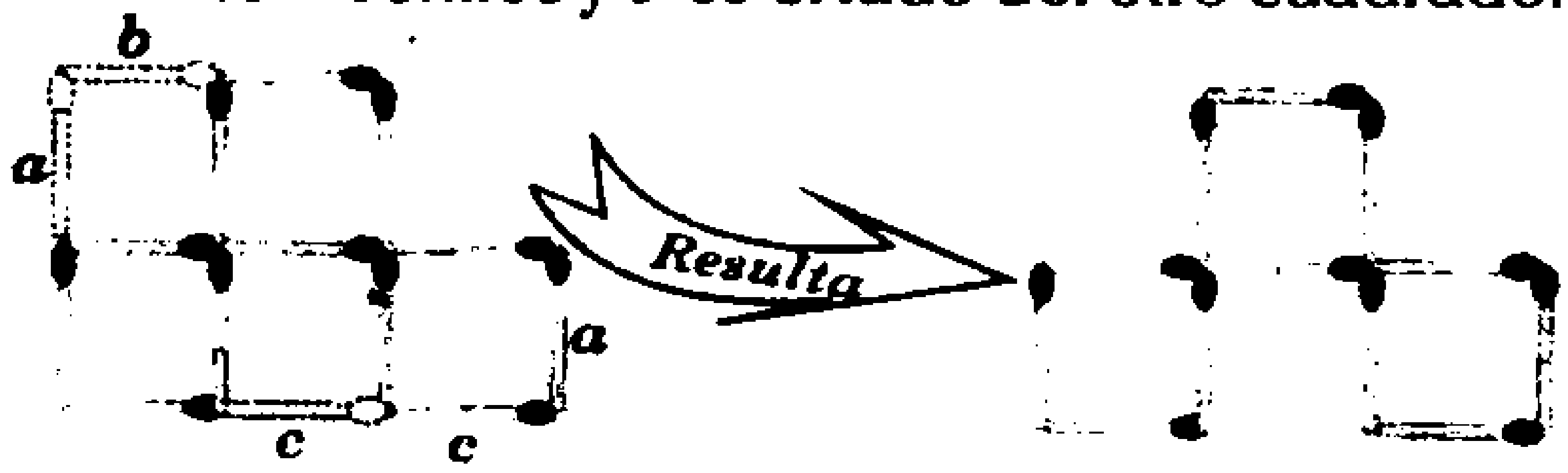
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

RESOLUCIÓN :

Para formar ***4*** cuadrados iguales con el mínimo de movimientos tenemos que aprovechar los

cuadrados iguales que hay.

Si nos quedamos con dos cuadrados opuestos, tenemos *4* cerillos y *1* es el lado del otro cuadrado.

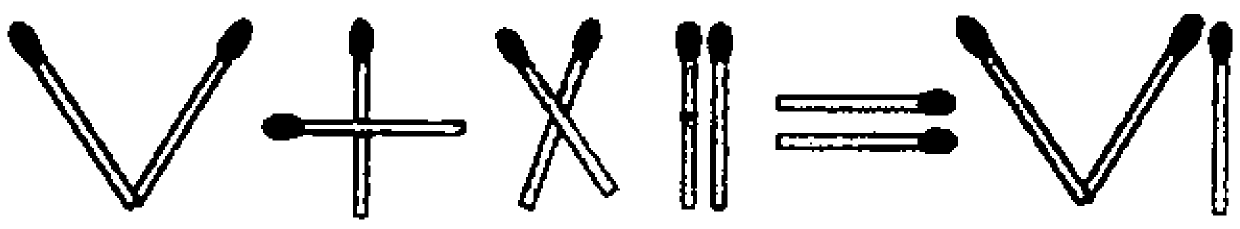


Con lo que es necesario mover como mínimo los cerillos ***a***, ***b*** y ***c***.

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

El gráfico muestra una operación que no es correcta.

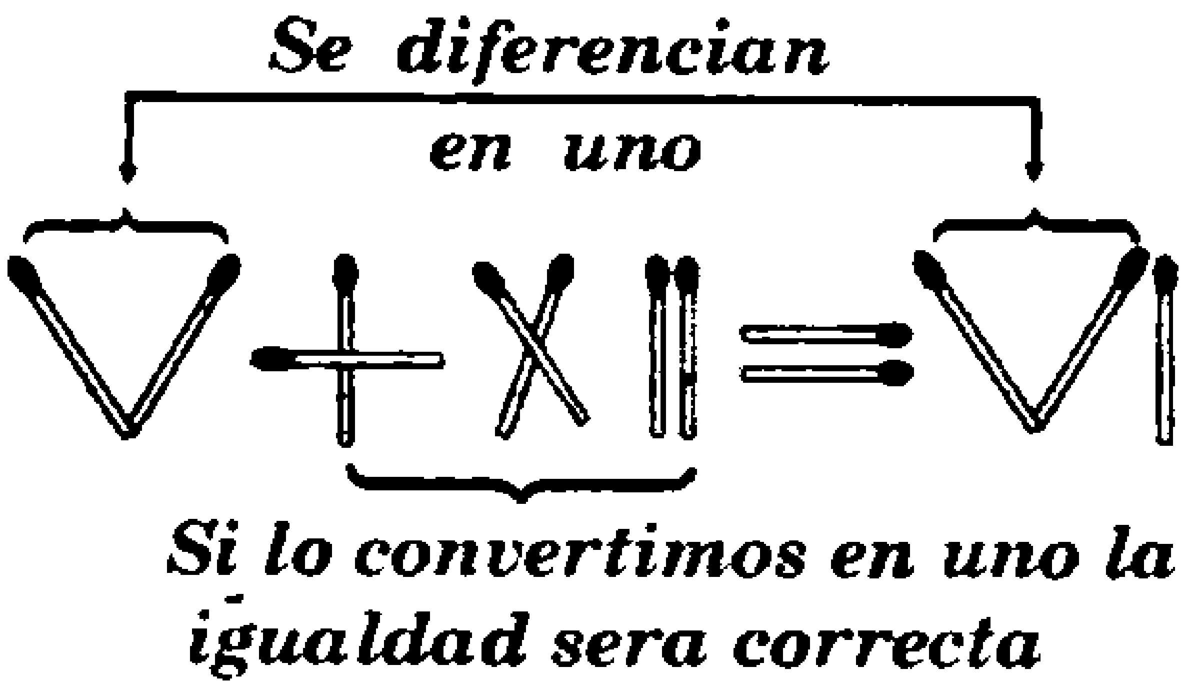


¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la operación sea correcta?

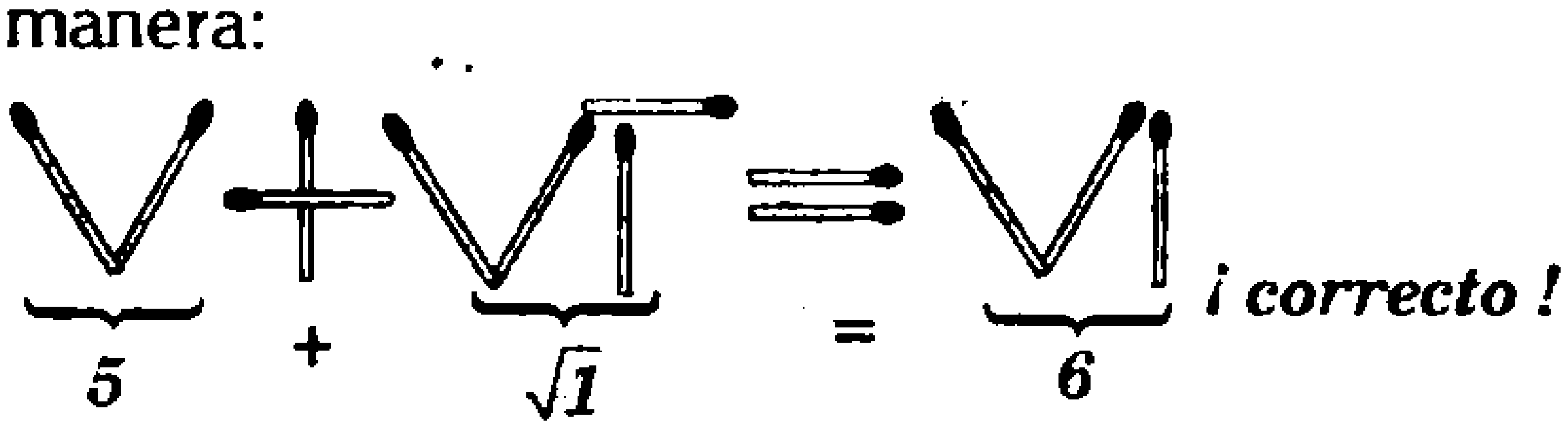
A) 5 ***B) 4*** ***C) 3*** ***D) 2*** ***E) 1***

RESOLUCIÓN :

En la expresión observamos los siguiente:



Entonces moveremos dos cerillos de la siguiente manera:

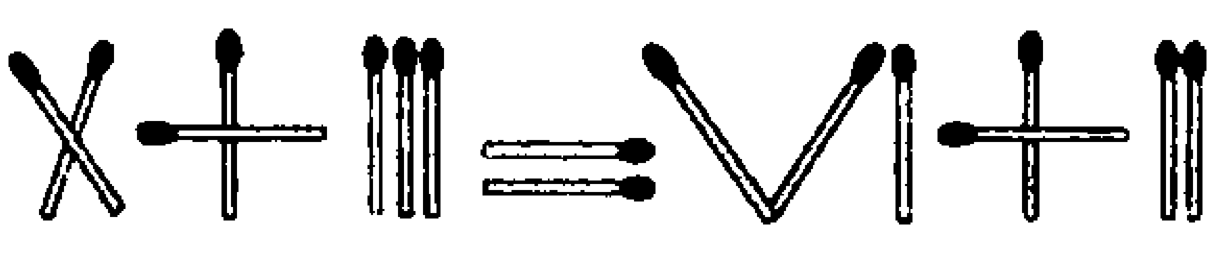


⇒ Se moveran, como mínimo *2* cerillos.

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

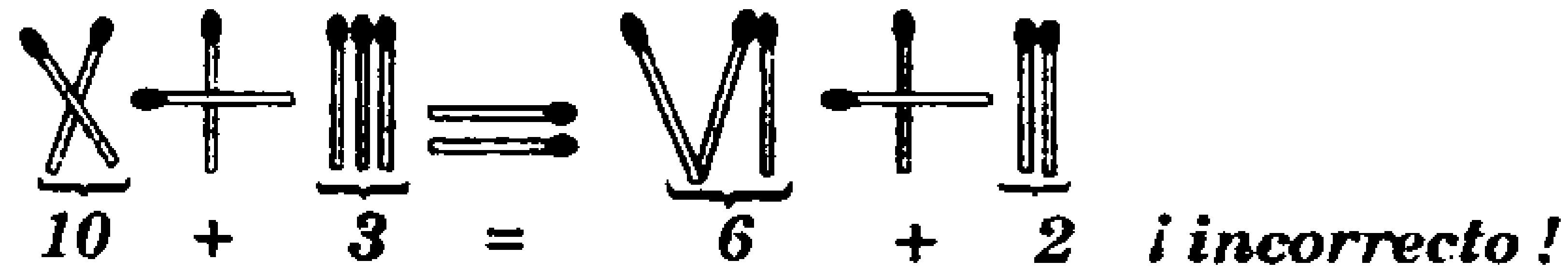
¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo para que se verifique que la siguiente igualdad?



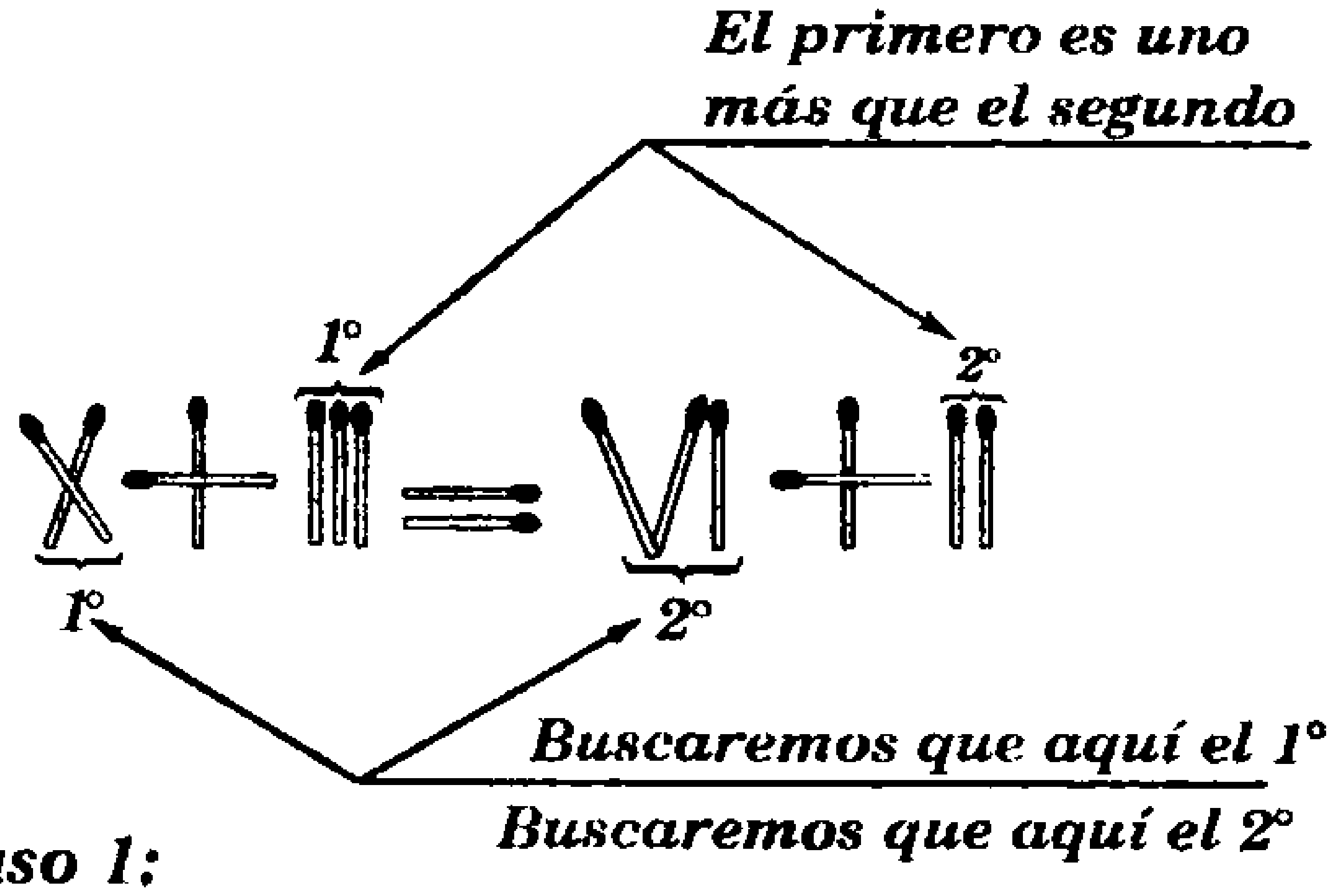
A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :

En la expresión se tiene todos los números bien escritos, pero:

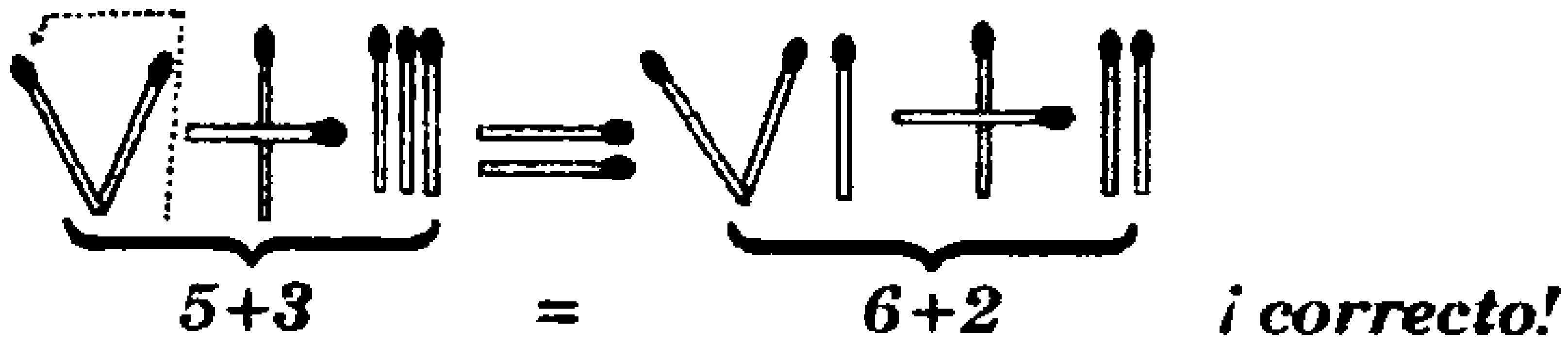


Entonces, tendremos que mover uno de los cerillos para conseguir que la igualdad sea correcta (de no conseguirlo moveremos más cerillos).



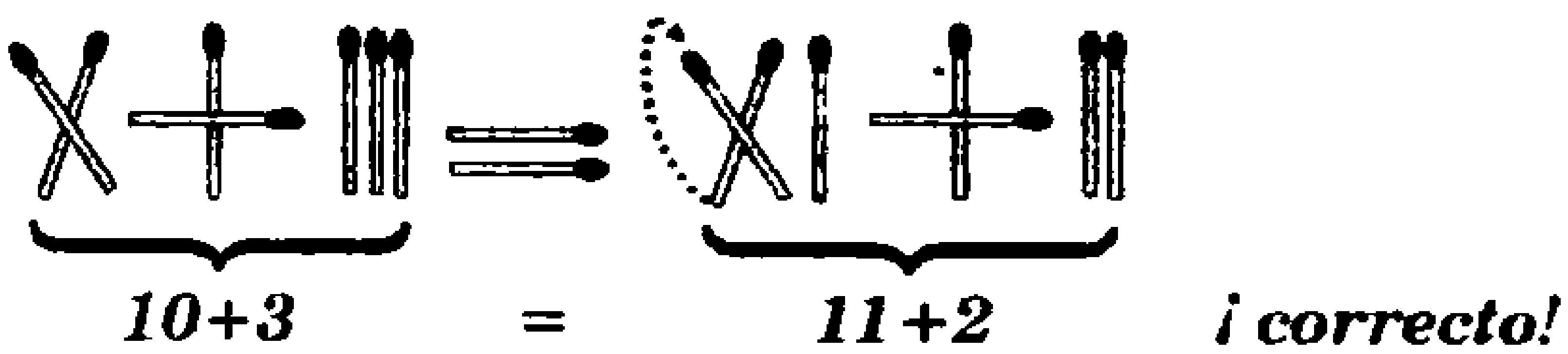
Caso 1:

El diez del primer miembro lo convertiremos en cinco, uno menos que seis (del segundo miembro).



Caso 2 :

El seis del segundo miembro lo convertiremos en once, uno más que diez (del primer miembro).

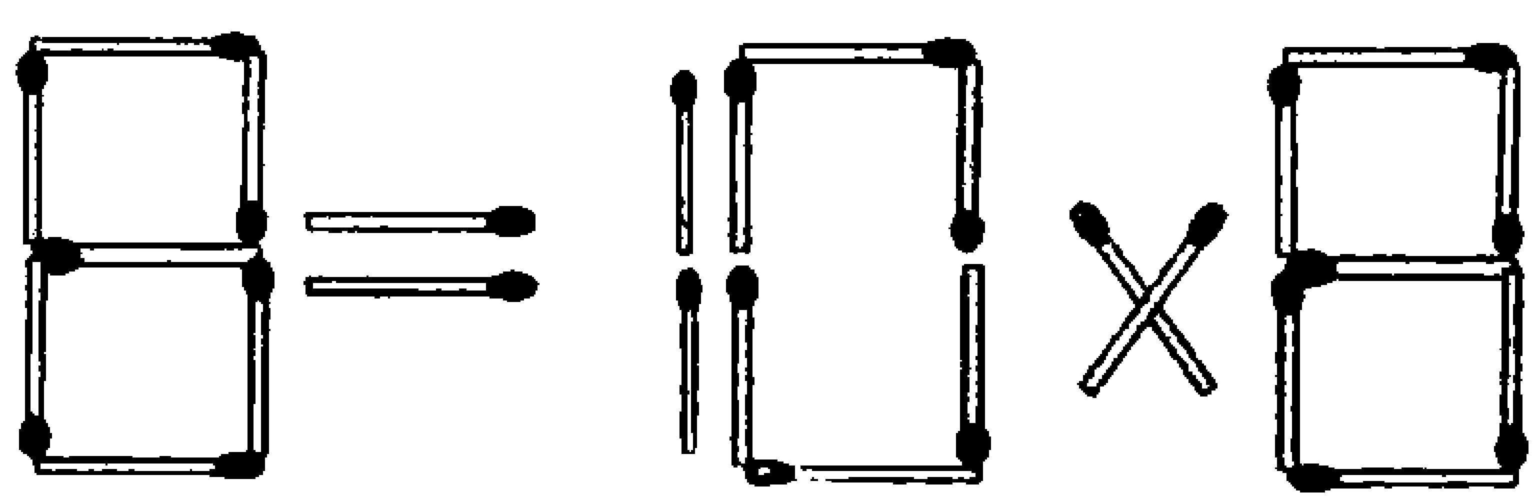


⇒Se moverá solo un cerillo

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

En la igualdad mostrada, ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que sea correcta?

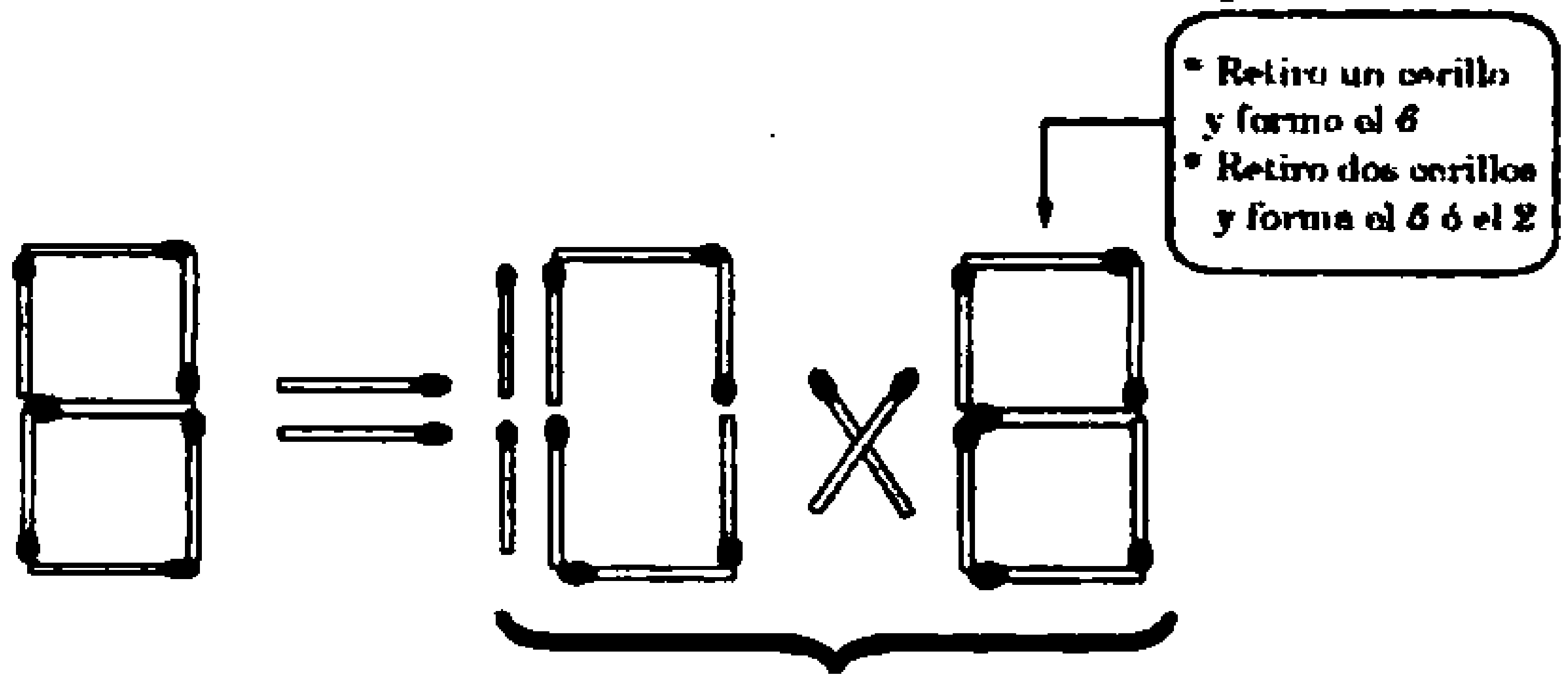


A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :

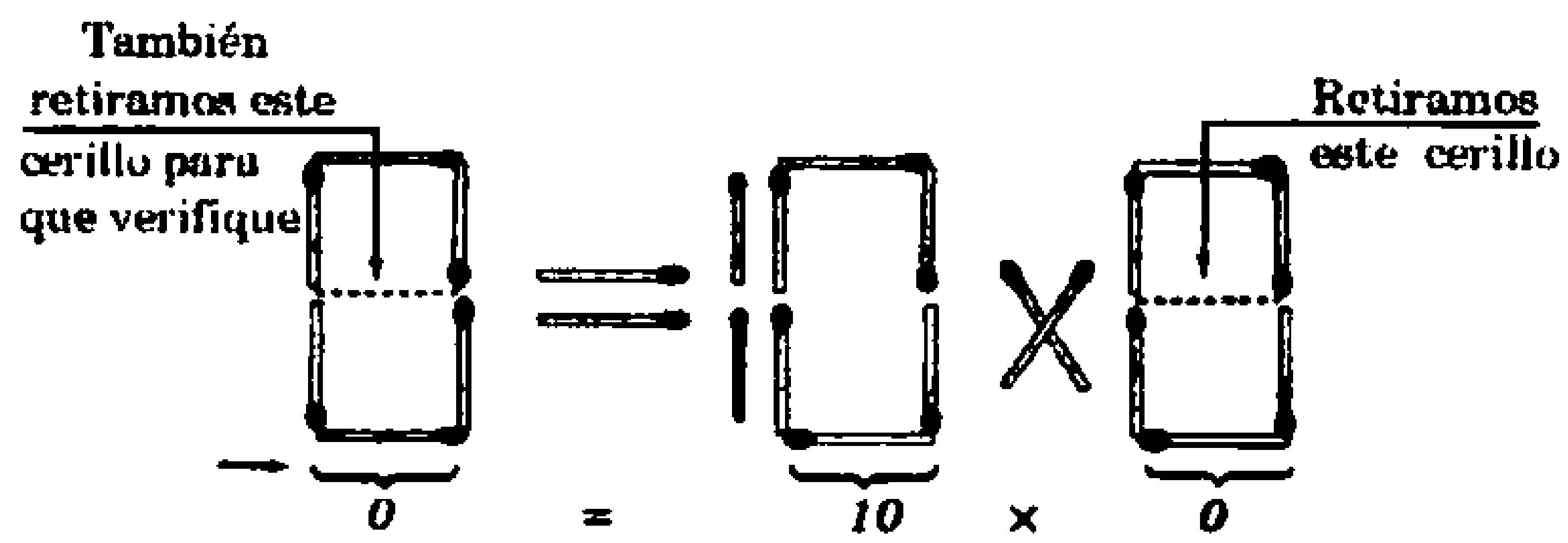
Se pide retirar la menor cantidad de cerillos para que la igualdad sea correcta.

En la expresión mostrada se observa que:



Si reducimos el *8* retirando algún cerillo, siempre el resultado es mayor que el del primer miembro

Entonces, lo que haremos es retirar la menor cantidad de cerillos de manera que el producto en el segundo miembro sea el menor posible. Para conseguirlo, retiraremos solo un cerillo del *8* de la siguiente manera:

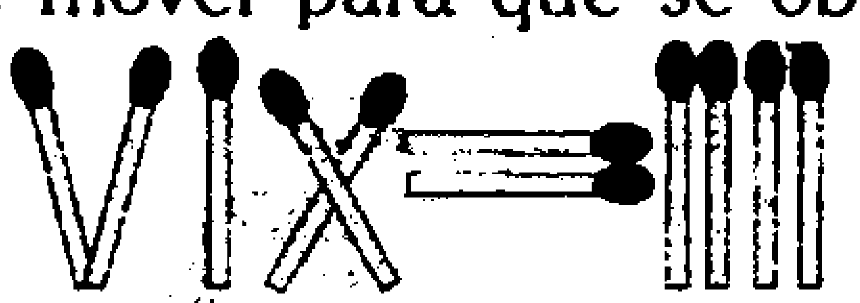


⇒ Se deben retirar **2** cerillos como mínimo

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

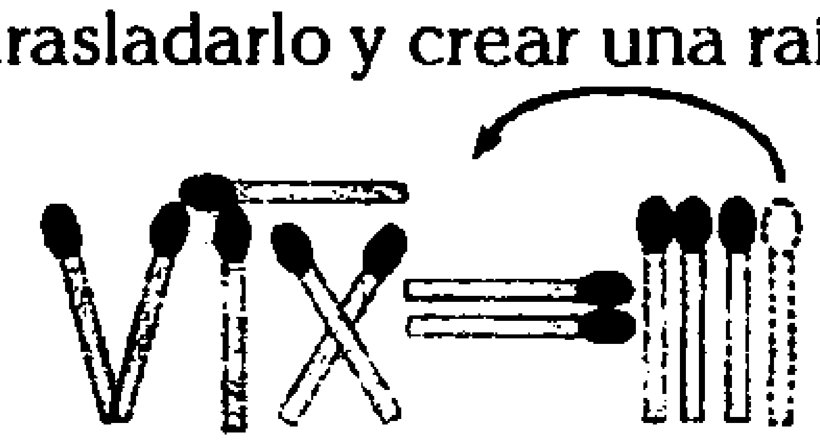
En la figura, ¿cuántos cerillos, como mínimo, se tienen que mover para que se obtenga una igualdad?



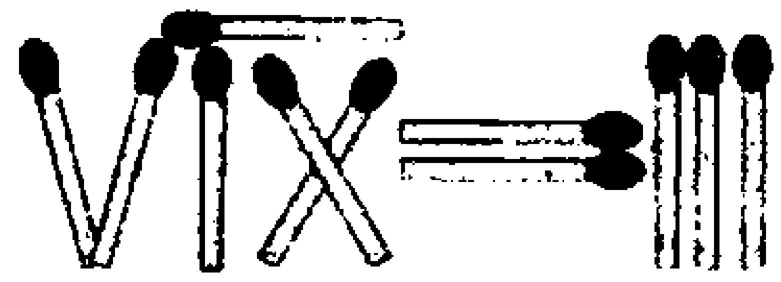
A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

Al lado izquierdo de la igualdad esta formado el número romano: ***V=5*** y ***IX=9***, al otro lado número tres y sobra uno, el cual podemos facilmente trasladarlo y crear una raíz cuadrada:



Se forma la raíz cuadrada de **9** es igual a **3**.

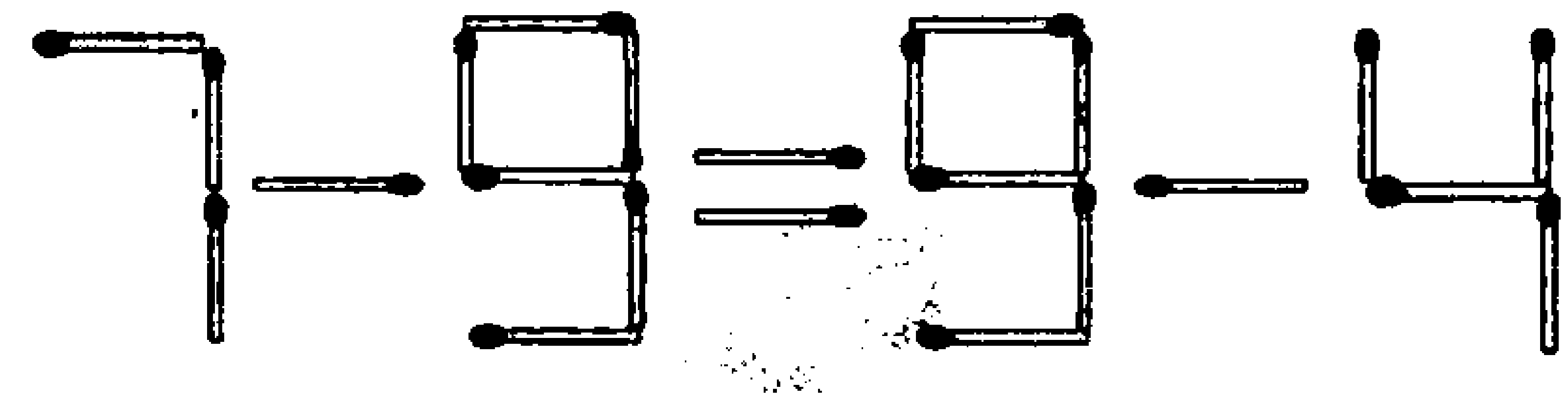


se mueve como mínimo un cerillo.

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

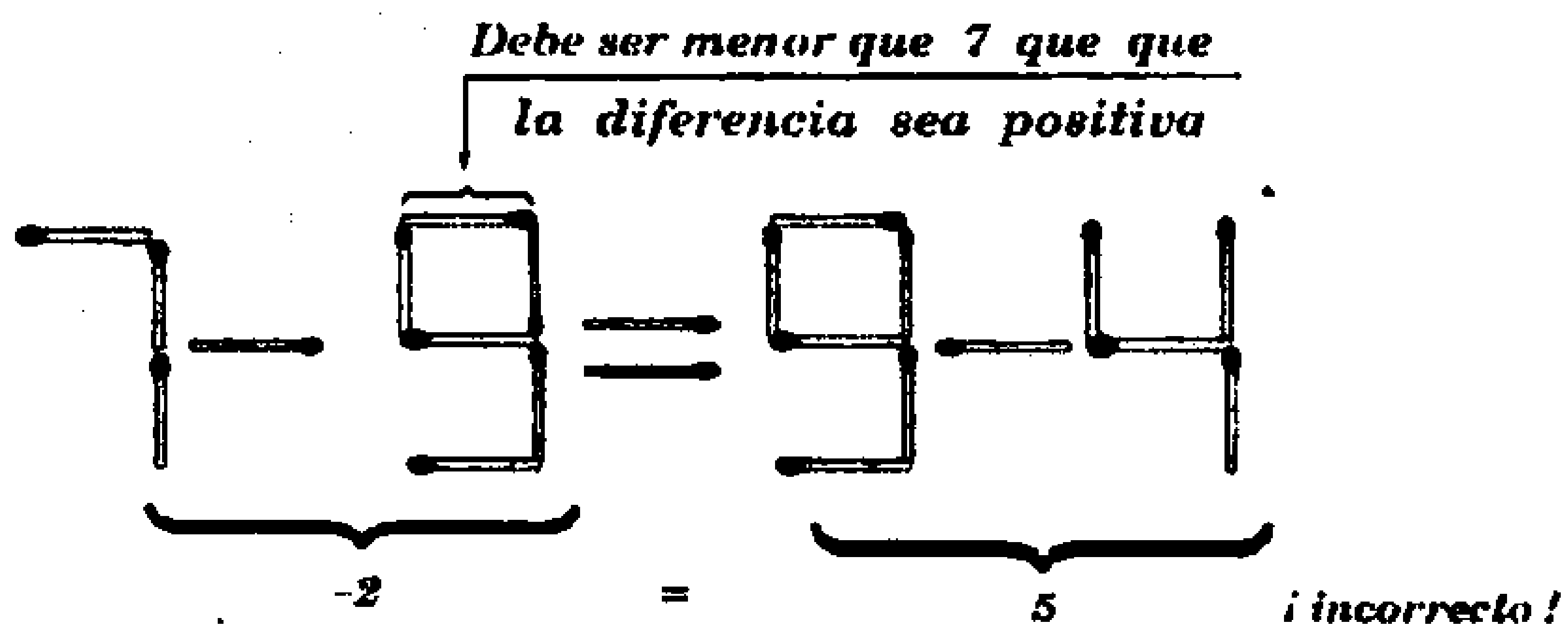
En la igualdad mostrada, ¿Cuántos cerillos se moverán como mínimo, para que se verifique?



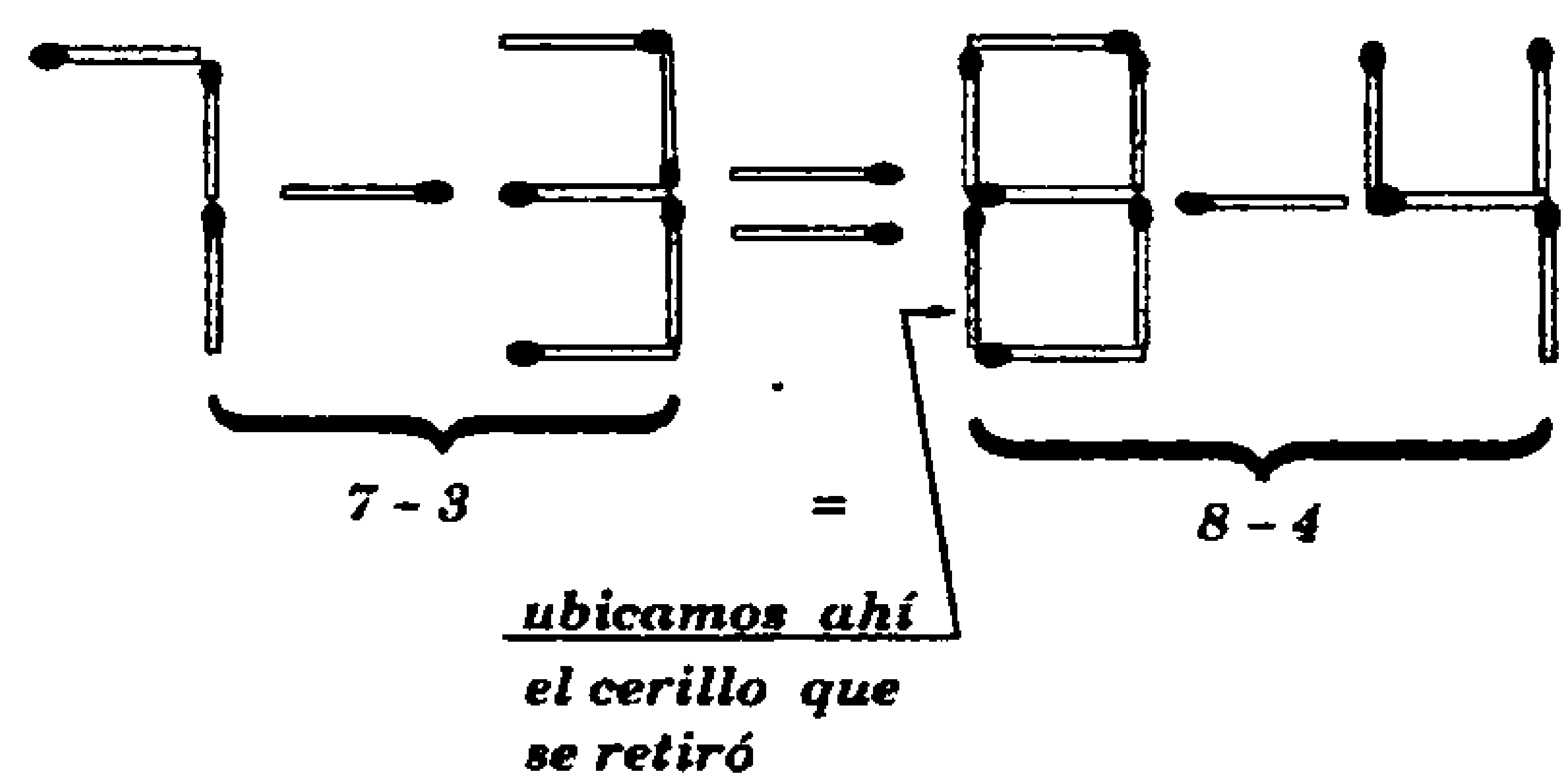
A) 5 *B) 2* *C) 4* *D) 1* *E) 3*

RESOLUCIÓN :

En la expresión todos los números arábicos son cercanos, sin enbargo, no es correcta:



Conseguiremos que el **9** (nueve) disminuya retirando momentaneamente un cerillo, con lo que obtenemos:



⇒ Se moverá solo un cerillo.

RPTA : "D"

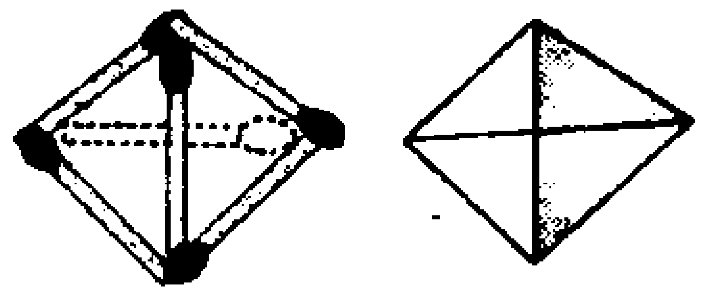
PROBLEMA 35 :

¿Cuántos cerillos, como mínimo, será necesario tener para formar con ellos cuatro triángulos equiláteros iguales, en la que la longitud del lado del triángulo sea la de un cerillo?

A) 6 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

Para formar *4* triángulos necesitamos *9* cerillos, como mínimo, pero en el espacio, cuyo lado sería su arista, para ello formamos:



un tetaedro

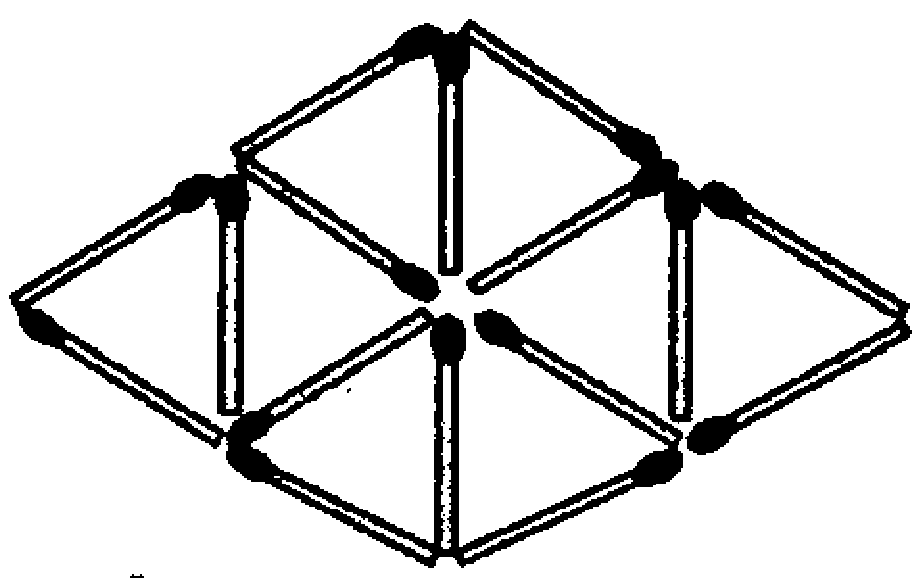
Por lo tanto lo solicitado es *6* cerillos.

RPTA : "A"

PROBLEMA 36 :

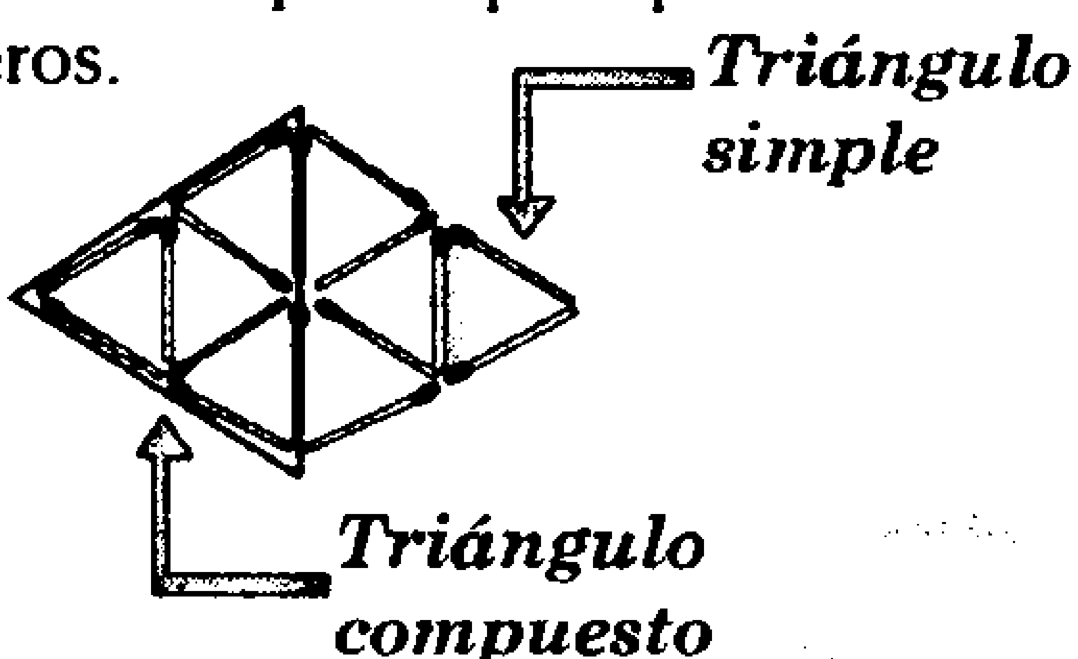
¿Cuántos cerillos, como mínimo se deben retirar del gráfico para que queden exactamente *5* triángulos equiláteros?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



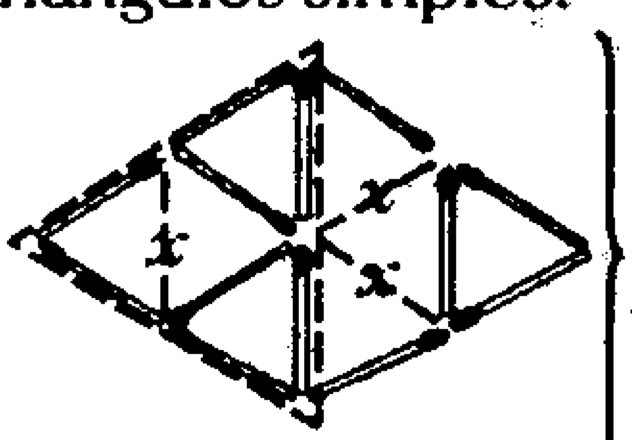
RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad de cerillos que se debe retirar, como mínimo para que queden *5* triángulos equilateros.



En el gráfico se observa que hay ocho triángulos simples y dos compuestos en total, diez. Se debe eliminar *5* triángulos retirando cerillos (la menor cantidad).

Entonces, al retirar un cerillo interior, se eliminan dos triángulos, de esa manera eliminaremos *5* triángulos simples.



3 triángulos simples (sombreados).
2 triángulos compuestos (delineado).

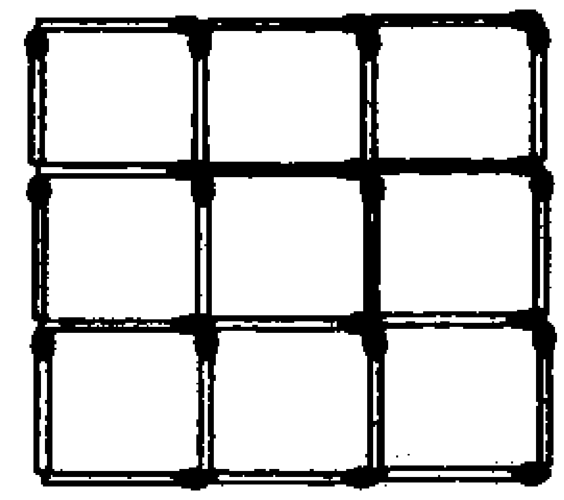
⇒ se retiran 3 cerillos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 37 :

¿Cuántos cerillos se deben quitar como mínimo para que no quede un cuadrado alguno en el siguiente gráfico?

A) 3
B) 5
C) 7
D) 4
E) 8

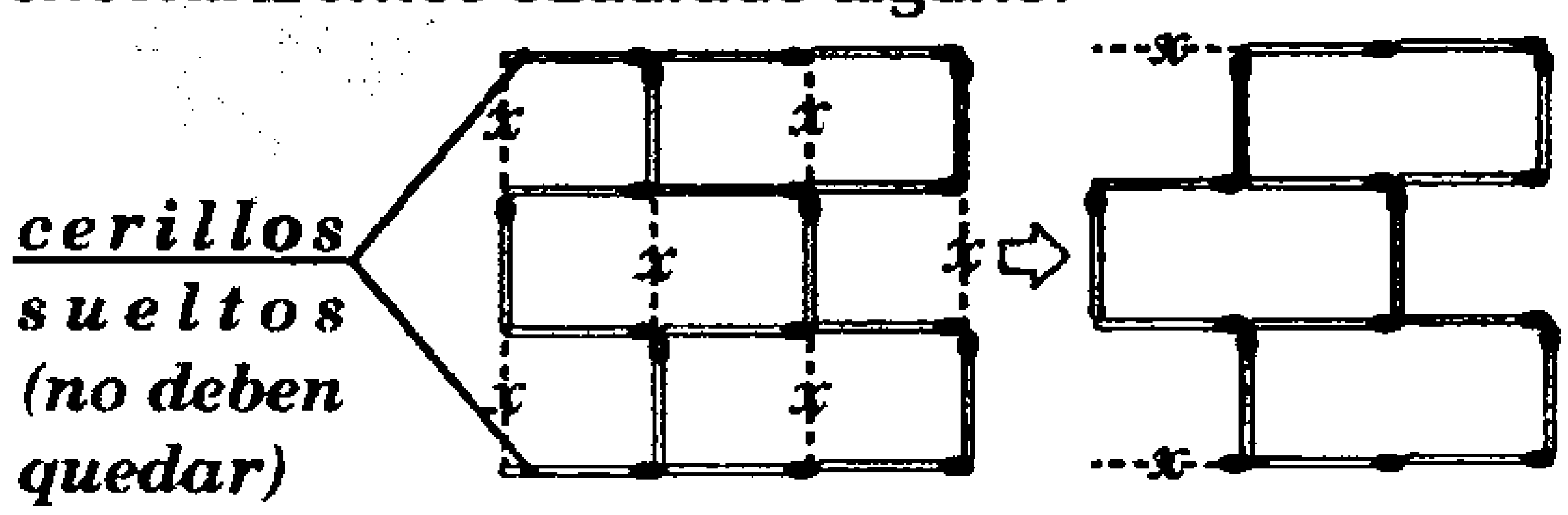


RESOLUCIÓN :

Se pide quitar la menor cantidad de cerillos para que no quede cuadrado alguno.

Buscaremos eliminar la mayor cantidad de cuadrados al retirar un cerillo, de ese modo garantizaremos que la cantidad de cerillos retirados sea la menor posible.

En el gráfico mostrado se cuentan en total *14* cuadrados ***(9 simples y 5 compuestos)***, de manera que retirando dos cerillos por la fila no encontraremos cuadrado alguno.



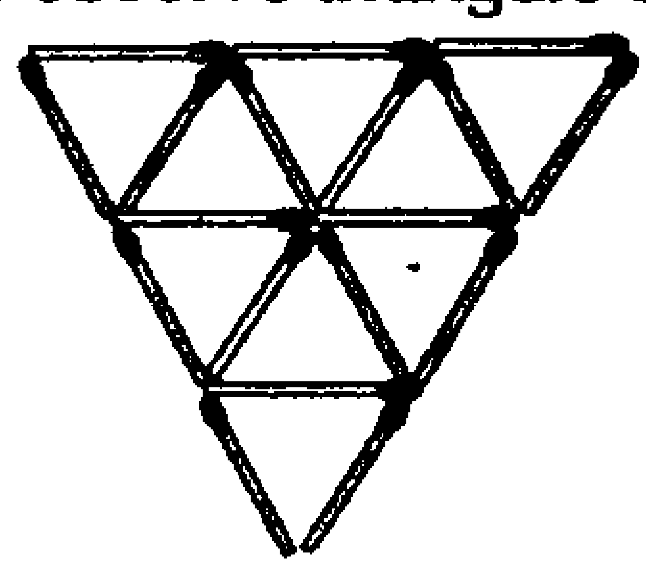
⇒ Se deben retirar 8 cerillo.

RPTA : "E"

PROBLEMA 38 :

¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo para que no se observe triángulo alguno?

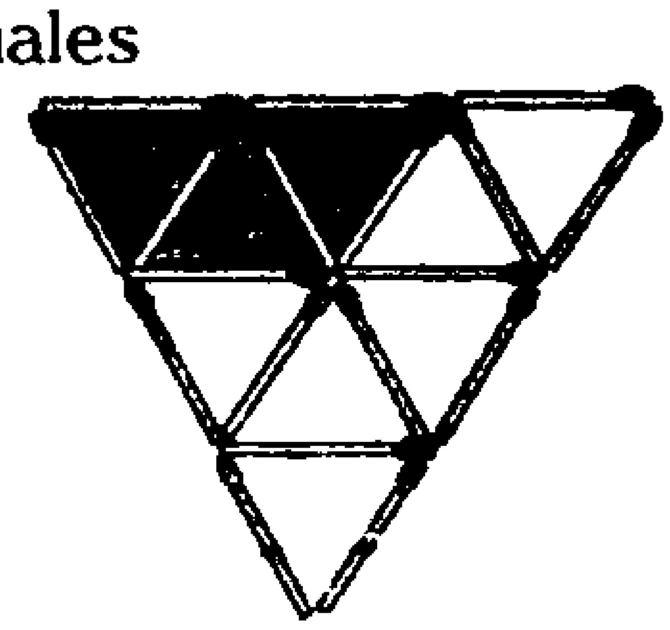
A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8



RESOLUCIÓN :

Se pide retirar la menor cantidad de cerillos para que no se observe triángulos.

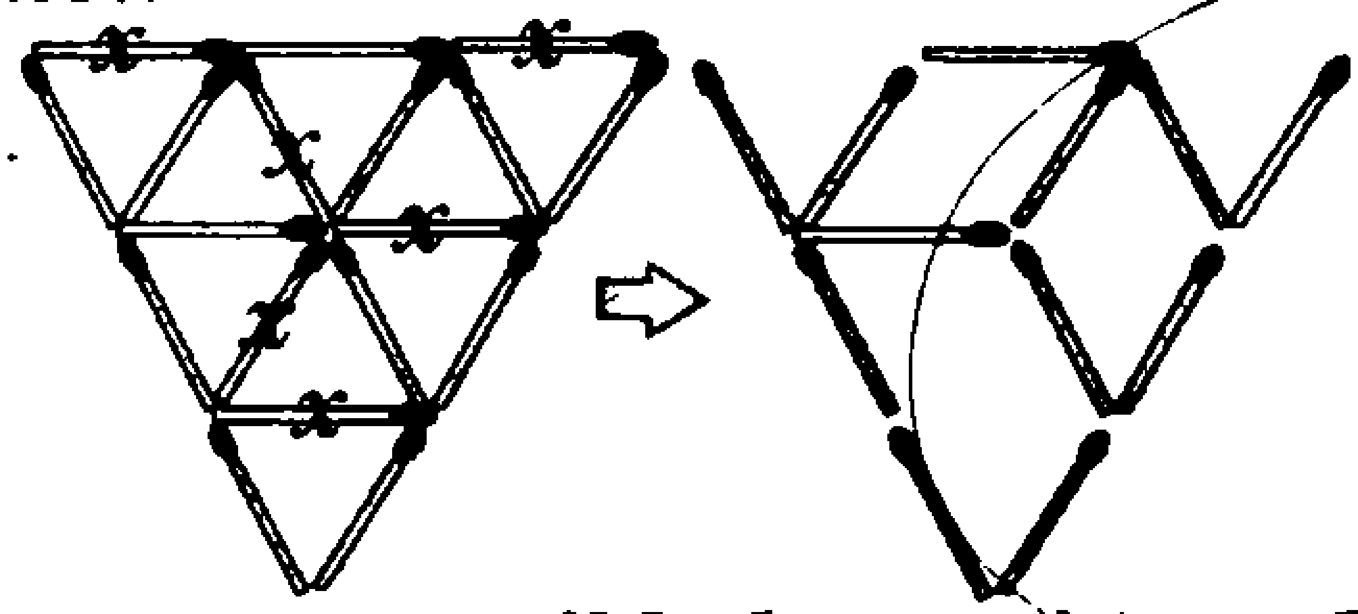
En el gráfico observamos que se puede dividir en tres partes iguales



Ahora en cada parte vemos que para no observar triángulos retiraremos los siguientes cerillos, como mínimo:

necesariamente para que no queden triángulos

Entonces, en el gráfico retiramos del siguiente modo:



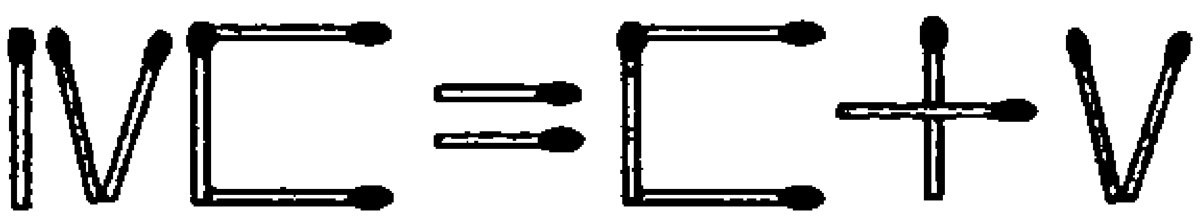
¡No hay triángulos!

⇒ Se deben retirar 6 cerillos como mínimo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

En la siguiente operación, ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que sea correcta?

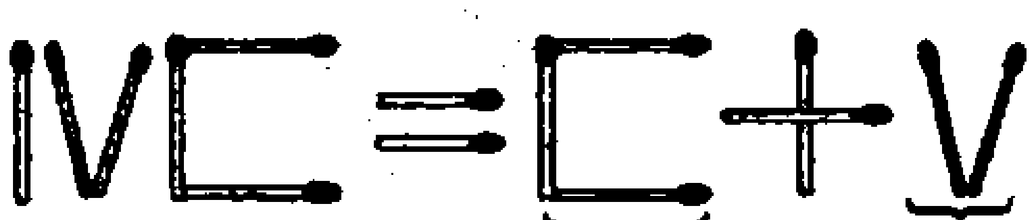


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad mínima de cerillos que se deben mover para que la operación sea correcta.

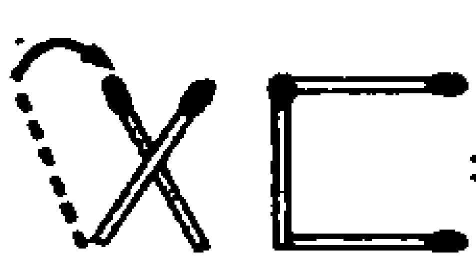
Entonces, para garantizar que la cantidad a mover sea la mínima, primero veremos si todos los números romanos que se muestren estan bien escritos.



↳ de aquí moveremos cerillos

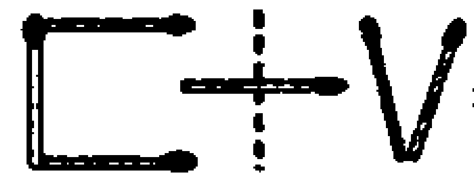
Caso 1:

Se podría mover un cerillo y otro sacarlo, momentaneamente:

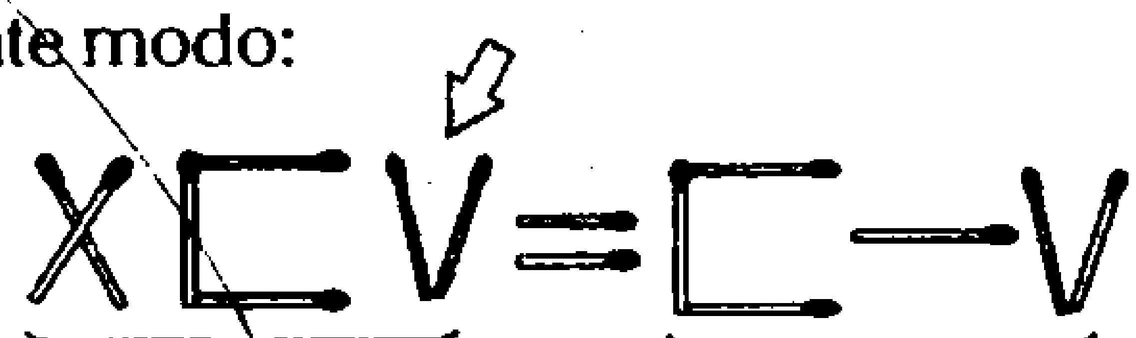


Ahora, ubicando cerillos a la derecha del número ***90*** obtenido, formaremos un número mayor de ***90*** pero menor de ***100*** $(\overline{9a})$.

Entonces, en el segundo miembro donde se tiene ***105 (100+5)***, se debe hacer que se reduzca moviendo la menor cantidad de cerillos, es decir, moviendo un cerillo:



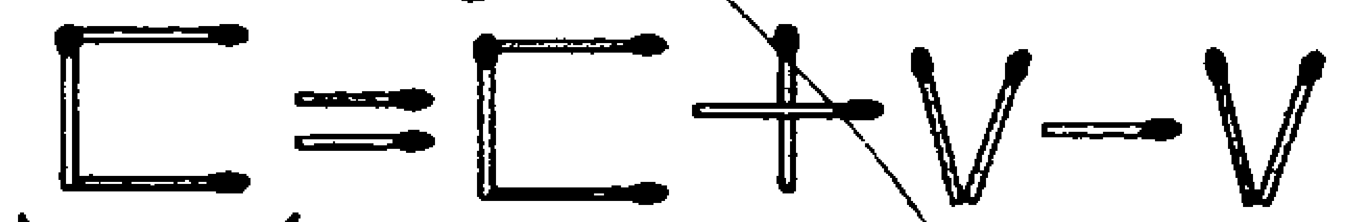
Finalmente, para formar la igualdad ubicamos los dos cerillos que hemos sacado momentaneamente en el primer miembro del siguiente modo:



⇒ Se moverán 3 cerillos como mínimo

Caso 2:

Se pudo hace que en el primer miembro solo queda la letra ***C*** (cien en romano) y estos cerillos ubicarlos en el segundo miembro, es decir:



⇒Tambien se moverán 3 cerillos como mínimo

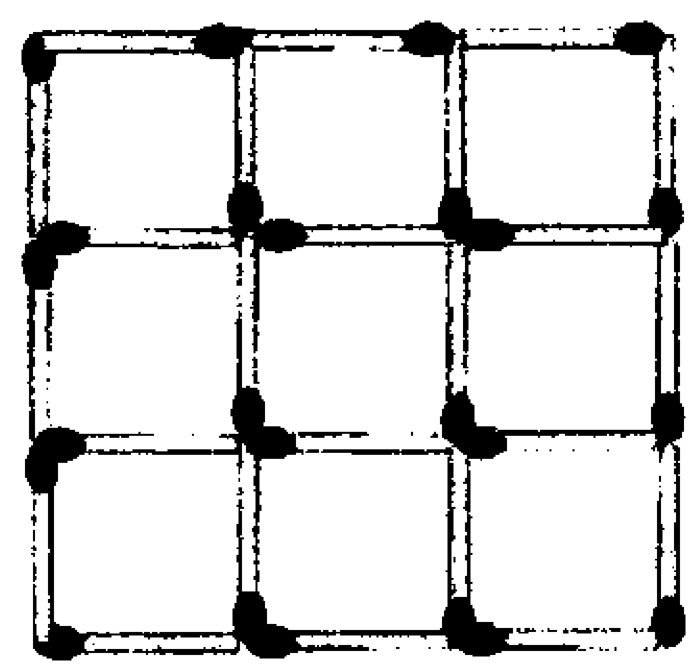
⇒Se deben mover 3 cerillos como mínimo

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

¿Cuántos cerillos deben retirarse, como mínimo, para obtener un gráfico formado por ***5*** cuadrados iguales?

A) 6
B) 5
C) 8
D) 7
E) 4

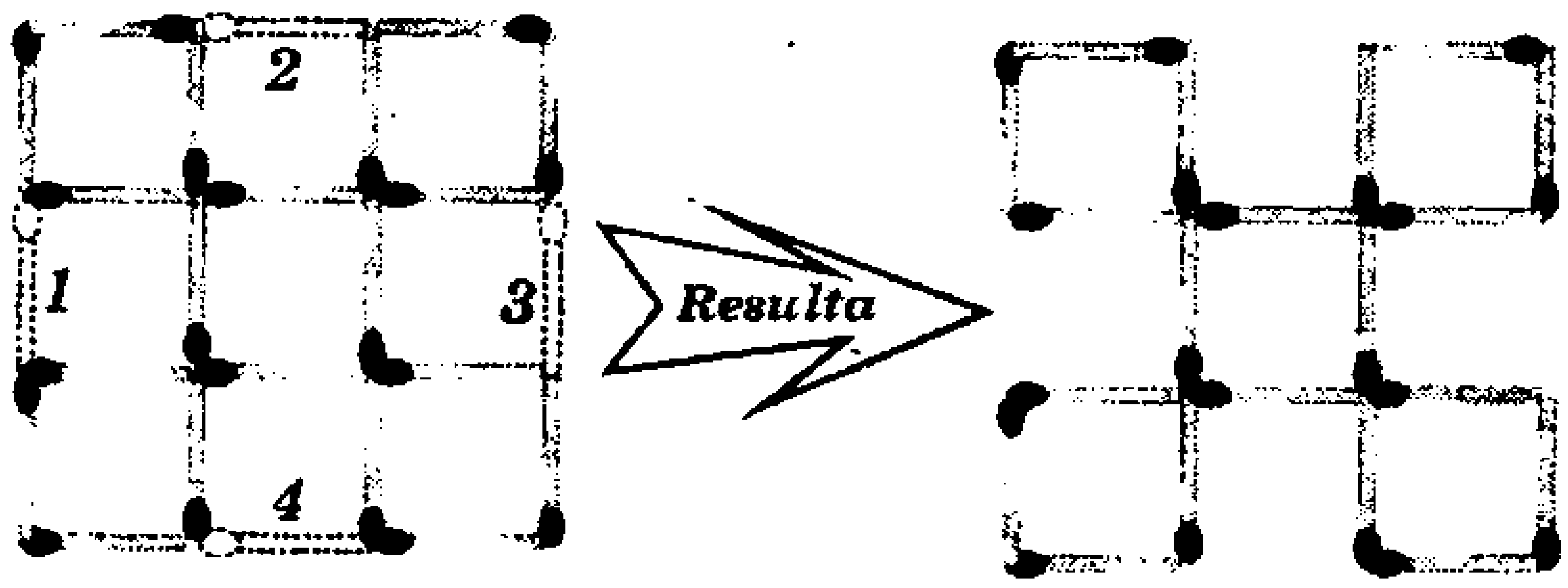


RESOLUCIÓN :

Si observamos bien, nos damos cuenta que hay ***9*** cuadrados iguales, entonces debemos retirar ***4*** cuadrados.

De las esquinas sería ***8*** cerillos, como me piden el mínimo número de cerillos, entonces lo hacemos

de manera alternada y no los que están en las esquinas.

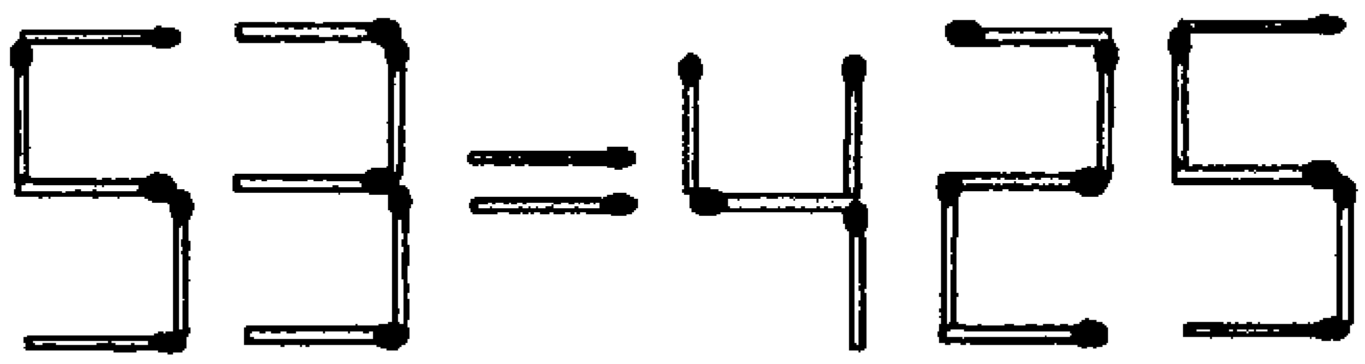


Para eso se deben retirar **4** cerillos.

RPTA : "E"

PROBLEMA 41 :

En la igualdad que se muestra, para que se verifique se tiene que mover ***X*** cerillos como mínimo. Halle el valor de ***X***.

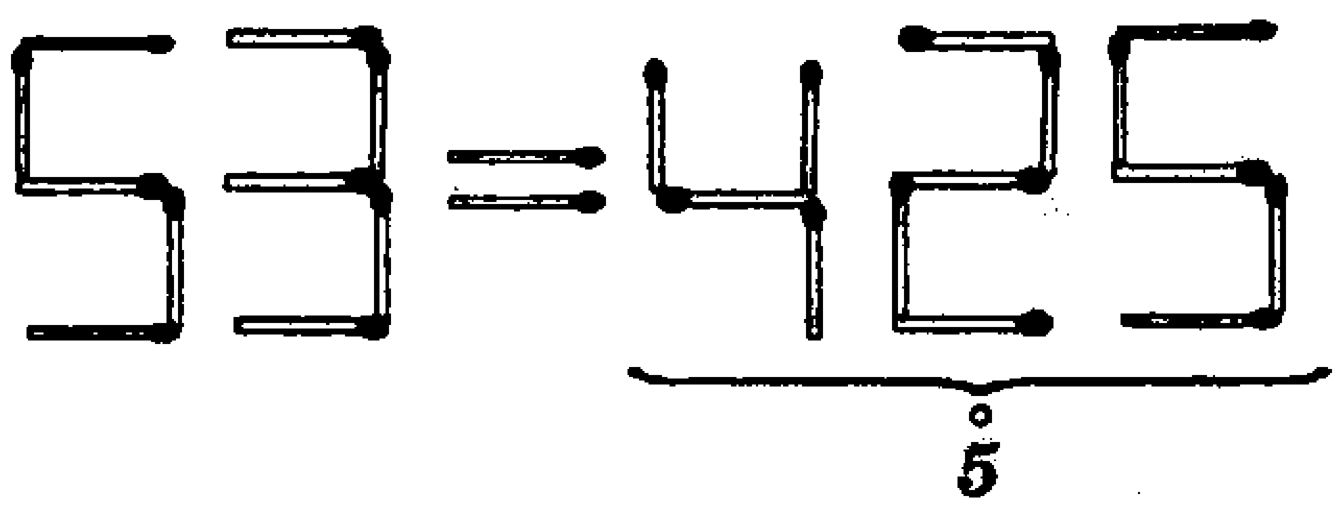


A) 1 ***B) 5*** ***C) 2*** ***D) 4*** ***E) 3***

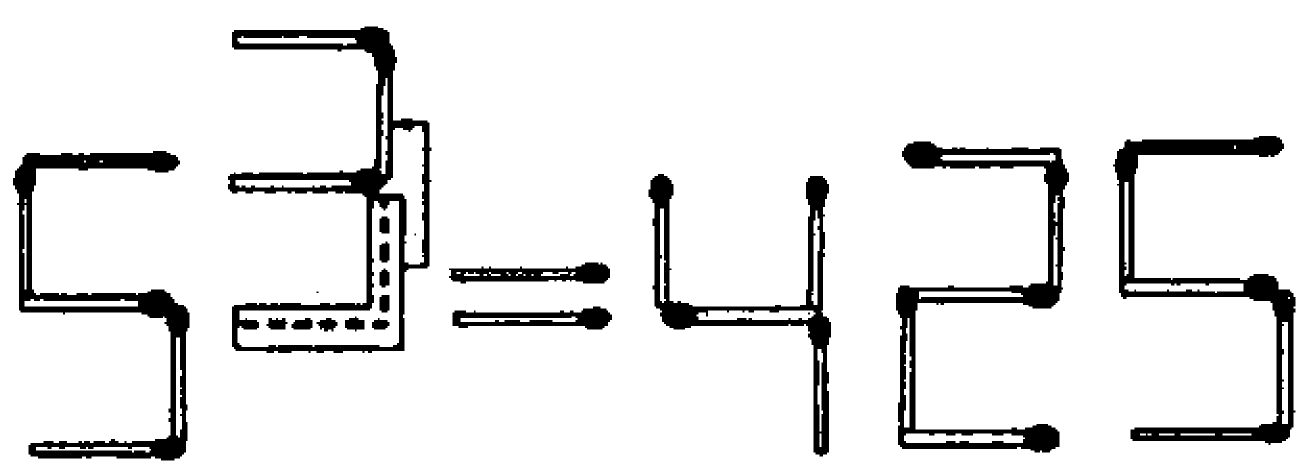
RESOLUCIÓN :

Se pide hallar el valor de ***X***.

En la expresión se observa una igualdad entre un número de dos cifras y otro de tres cifras,lo cual es imposible.



Para lograr que la igualdad sea correcta es necesario introducir una operación en alguno de los números pero sin aumentar cerillos, solo moviendo la menor cantidad. Al ser el múltiplo de ***5*** el segundo número, podemos originarlo a partir de una potencia de ***5*** de la siguiente manera:



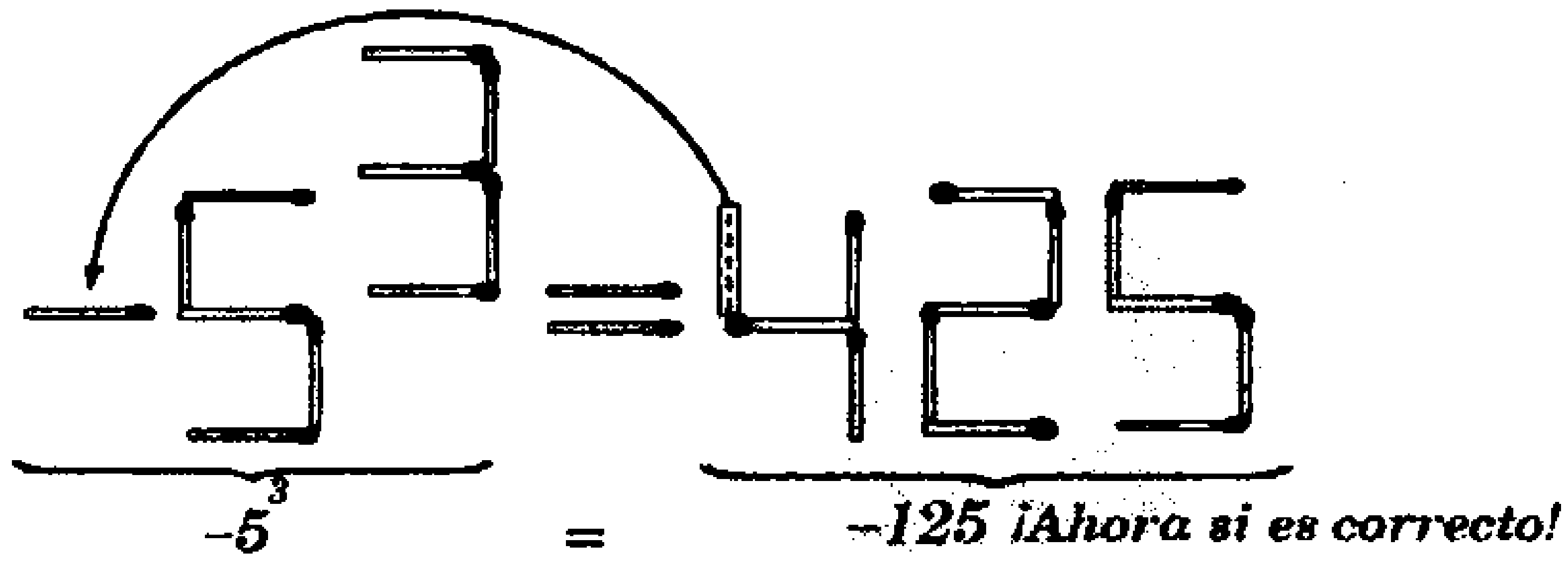
¡Pero aún no verifica!

Vemos que resulta:

$5^3 = 125 \neq 425$

└→ ***debe ser 1***

Lo que hacemos es mover un cerillo más de la siguiente manera.



⇒ ***Se deben mover 3 cerillos como mínimo***

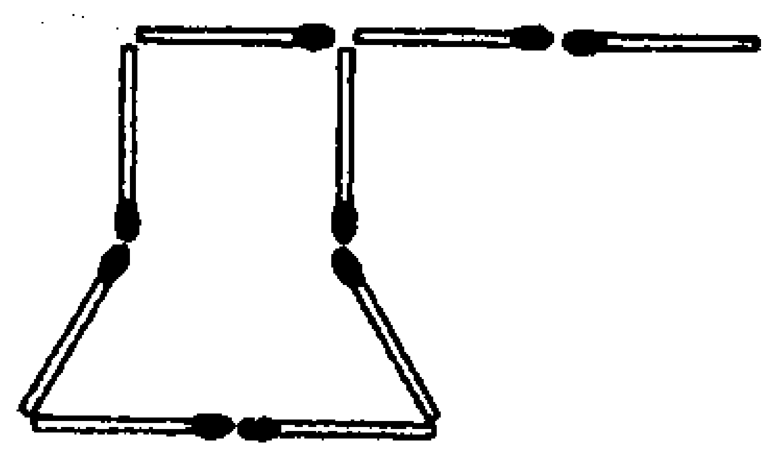
⇒ $X=3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 42 :

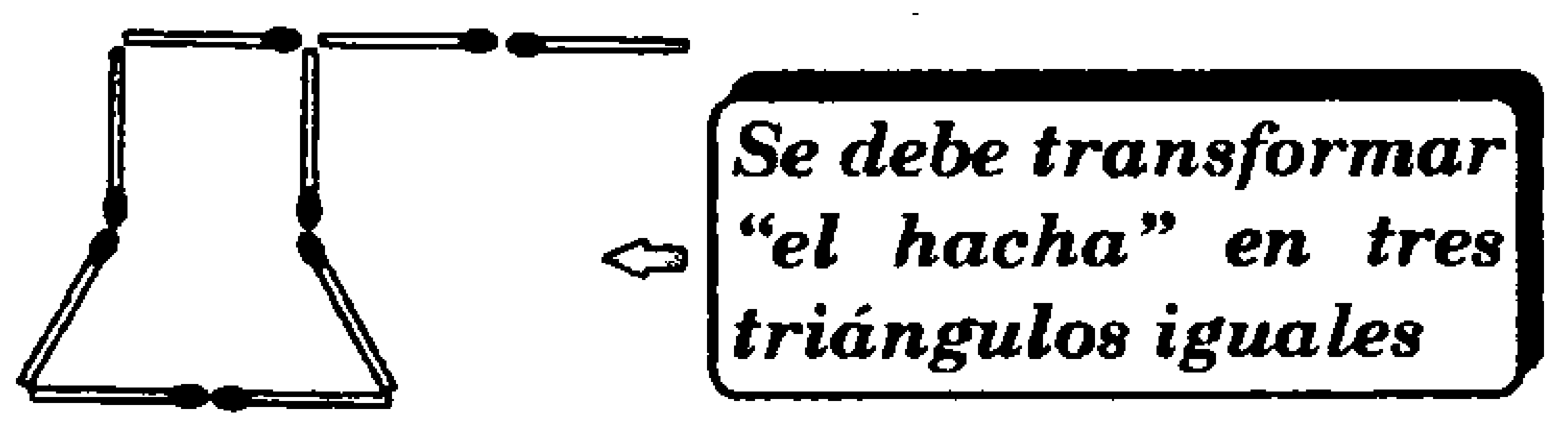
Mueva ***x*** cerillos y transforme "el hacha" en tres triángulos iguales. Calcule ***x***. **Siendo** ***x*** es la menor cantidad de cerillos.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

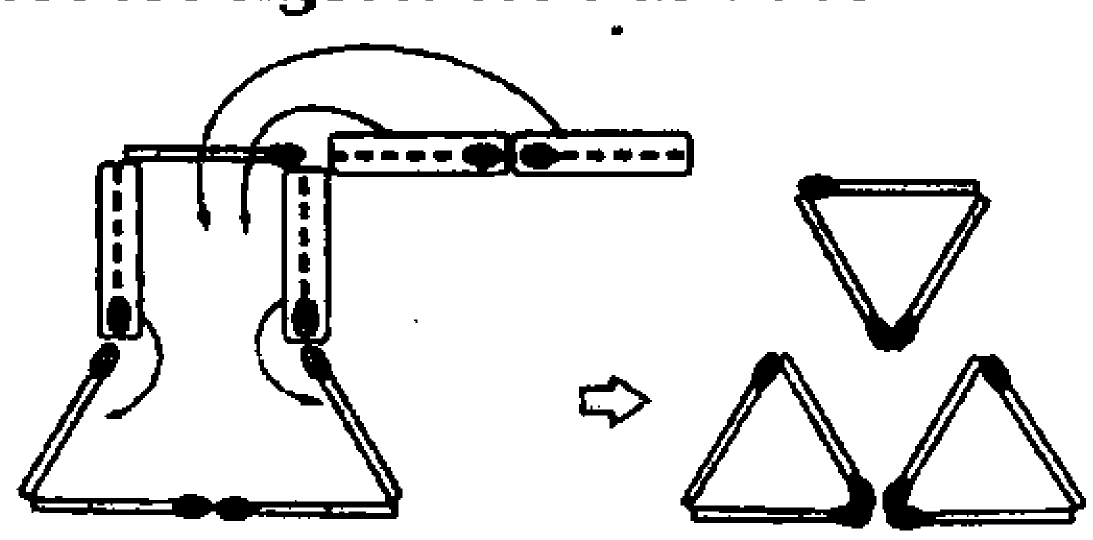


RESOLUCIÓN :

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben mover?



Manteniendo los cerillos de la base, solo son necesarios los siguientes traslados.



Por lo tanto, solo es necesario trasladar cuatro cerillos.

RPTA : "D"

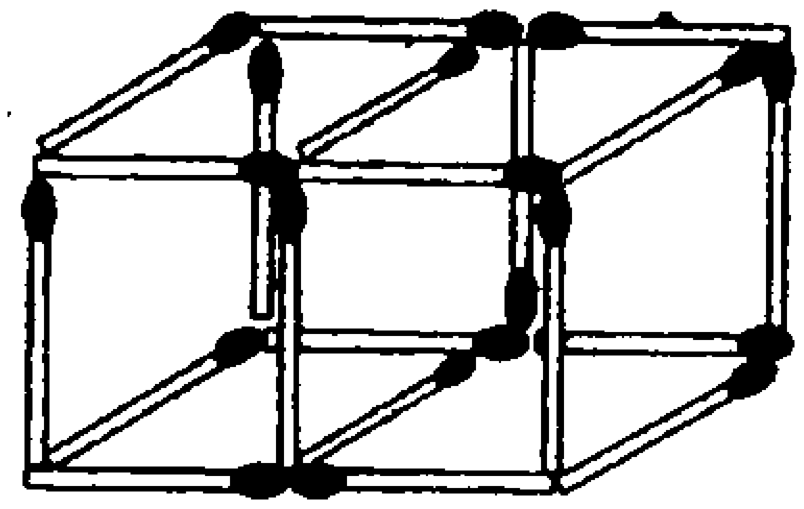
PROBLEMA 43 :

Con ***20*** palitos, ¿cuántos cuadrados, como máximo, pueden formarse tal que su lado sea un palito?

A) 8 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 7*** ***E) 6***

RESOLUCIÓN :

La figura que me da mayor cantidad de cuadrados de un palito por lado debe ser tridimensional.

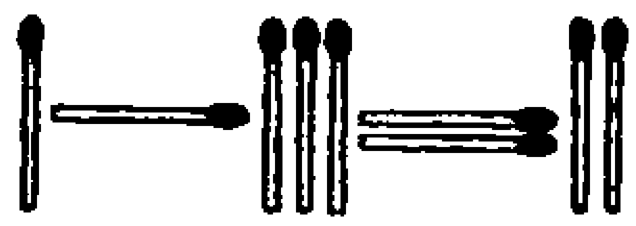


Por lo tanto, pueden formarse *11* cuadrados.

RPTA : "C"

PROBLEMA 44 :

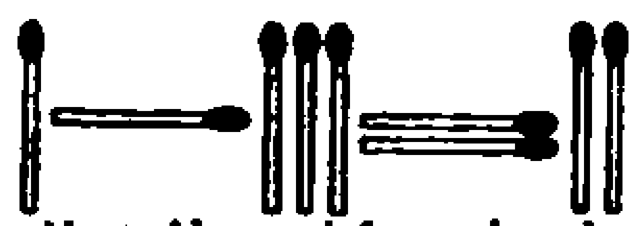
En el siguiente gráfico, ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de lugar para obtener una igualdad correcta?



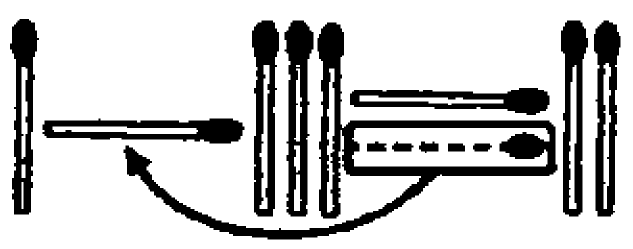
A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

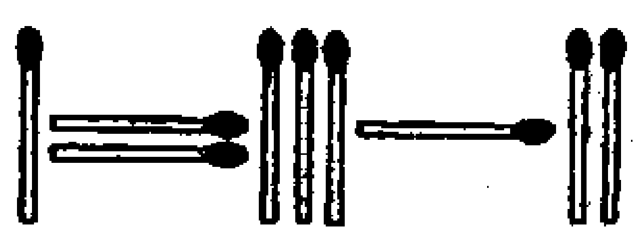
RESOLUCIÓN

Piden: ¿cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de lugar?



Asociamos la distribución de los cerillos a la sustracción:



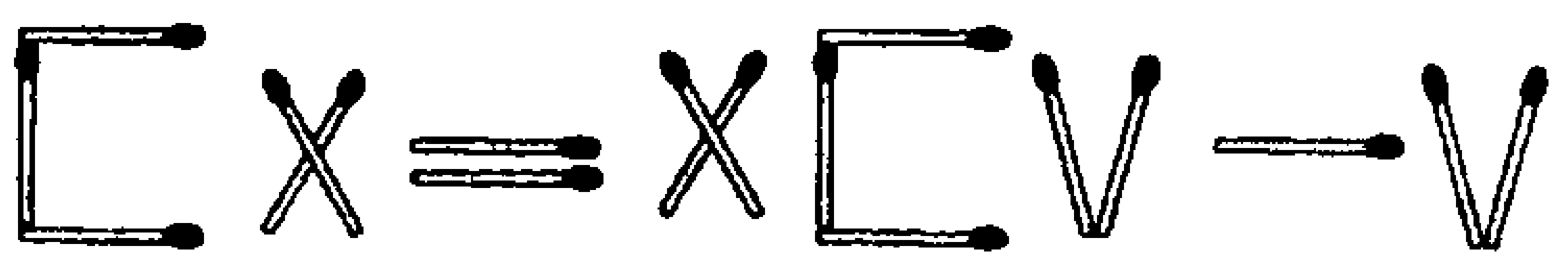


Por lo tanto, solo se debe cambiar de lugar un cerillo.

RPTA : "A"

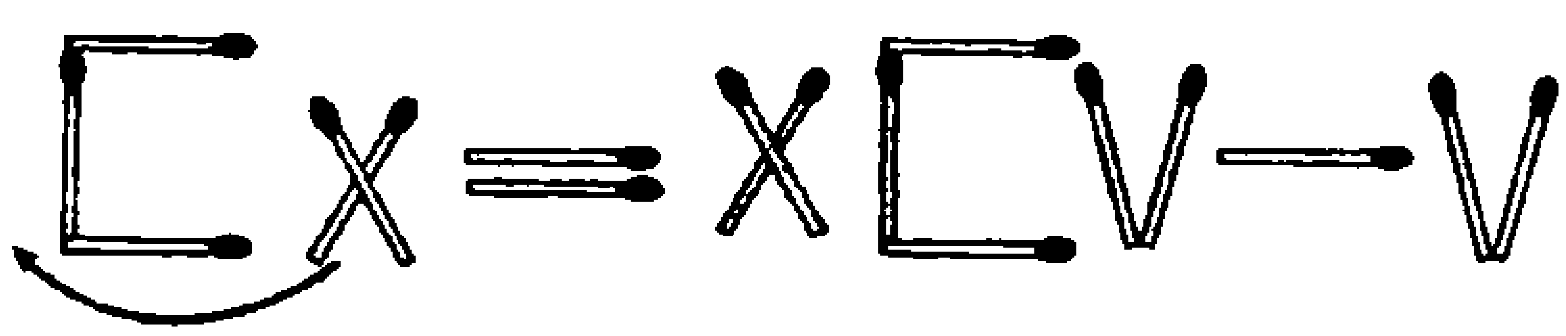
PROBLEMA 45 :

En el gráfico, ¿cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que se verifique la siguiente igualdad?

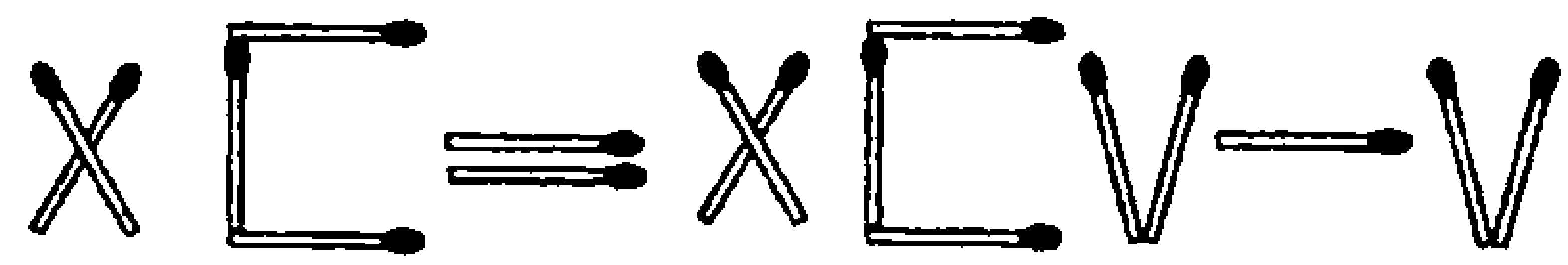


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :



Moviendo como se indica, se tiene:

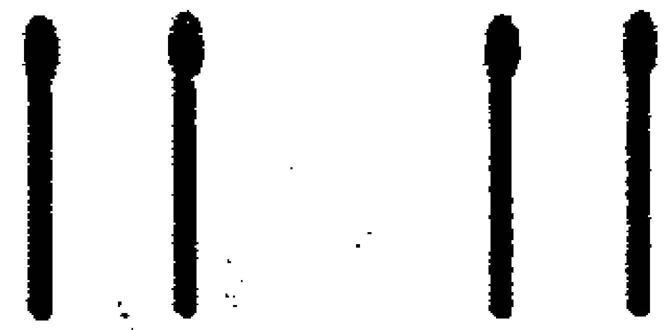


Por lo tanto es necesario mover *2* cerillos como mínimo .

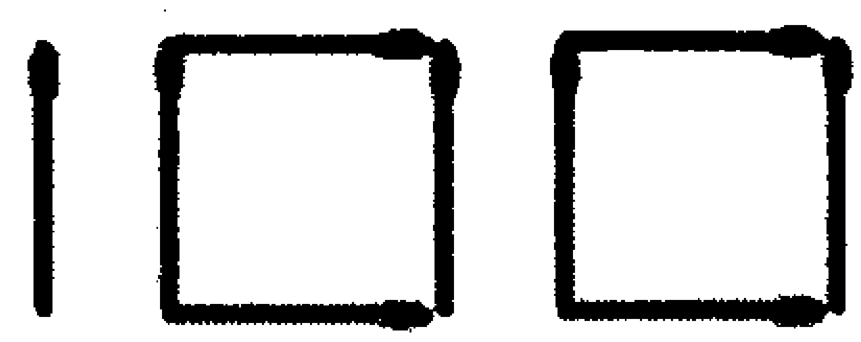
RPTA : "B"

PROBLEMA 46 :

Adjuntar a las cuatro cerillas , cinco cerillas más de tal forma que obtengamos cien.



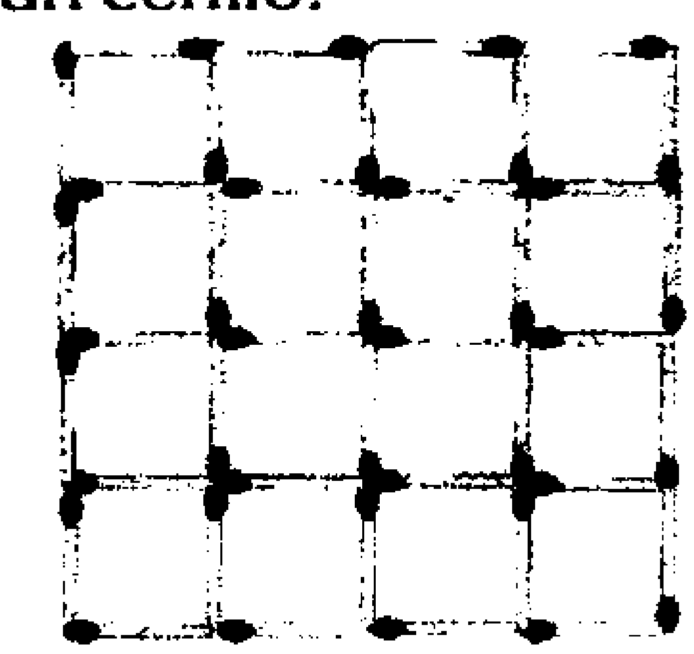
RESOLUCIÓN :



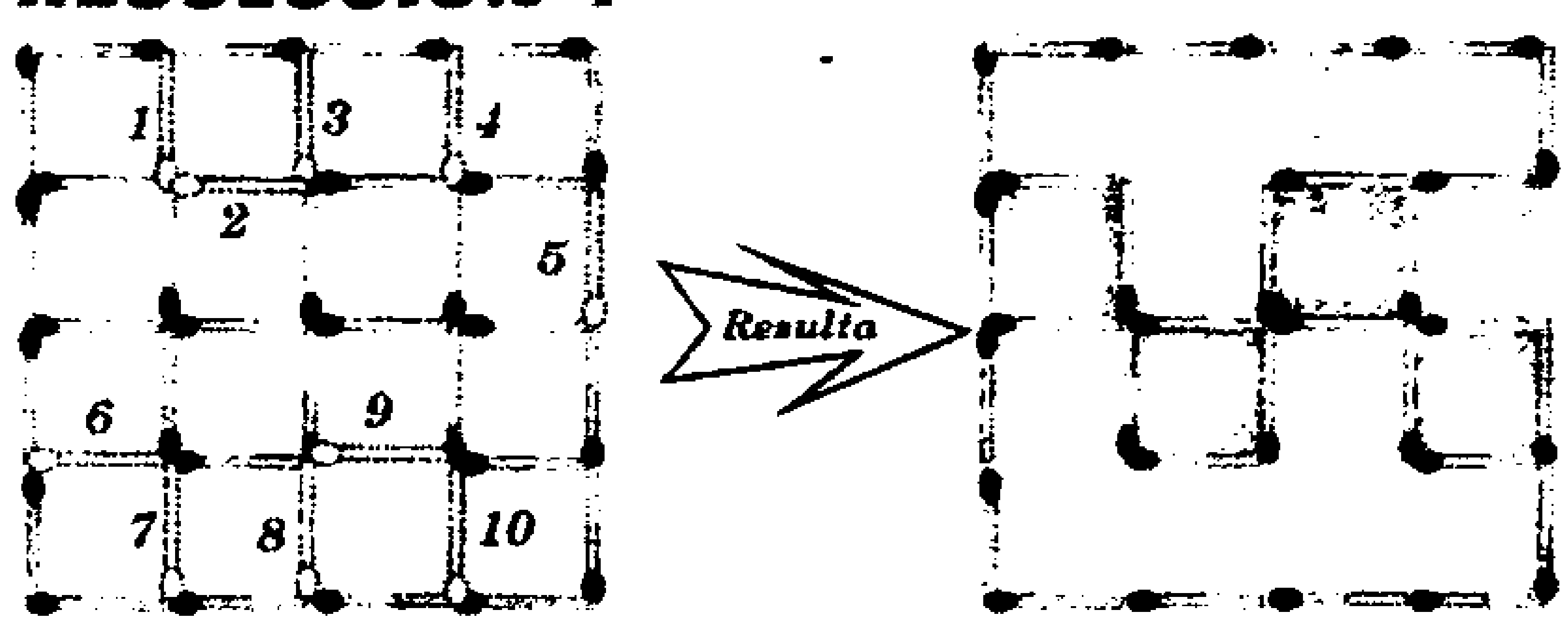
PROBLEMA 47 :

En el gráfico, ¿cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para tener solo *4* cuadrados sin que sobre algún cerillo?

A) 10
B) 12
C) 13
D) 14
E) 16



RESOLUCIÓN :

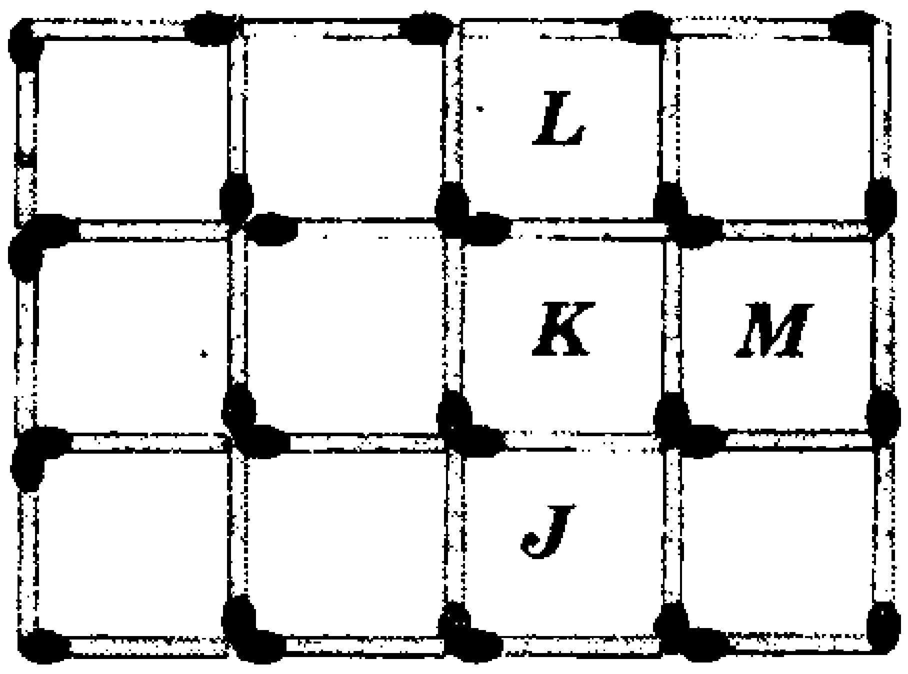


RPTA : "C"

PROBLEMA 48 :

El gráfico muestra *12* jaulas conformadas por *4* cerillos cada una. Las letras *J*, *K*, *L*, y *M* indican la ubicación exacta de una jirafa, una koala, una liebre y un mono, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se debe retirar, como mínimo, para que el koala, el mono, la liebre y la jirafa estén

encerrados en una jaula cuadrada, una rectangular, una hexagonal y una octogonal, respectivamente? Considere que los datos de las nuevas jaulas contienen un número exacto de cerillos.

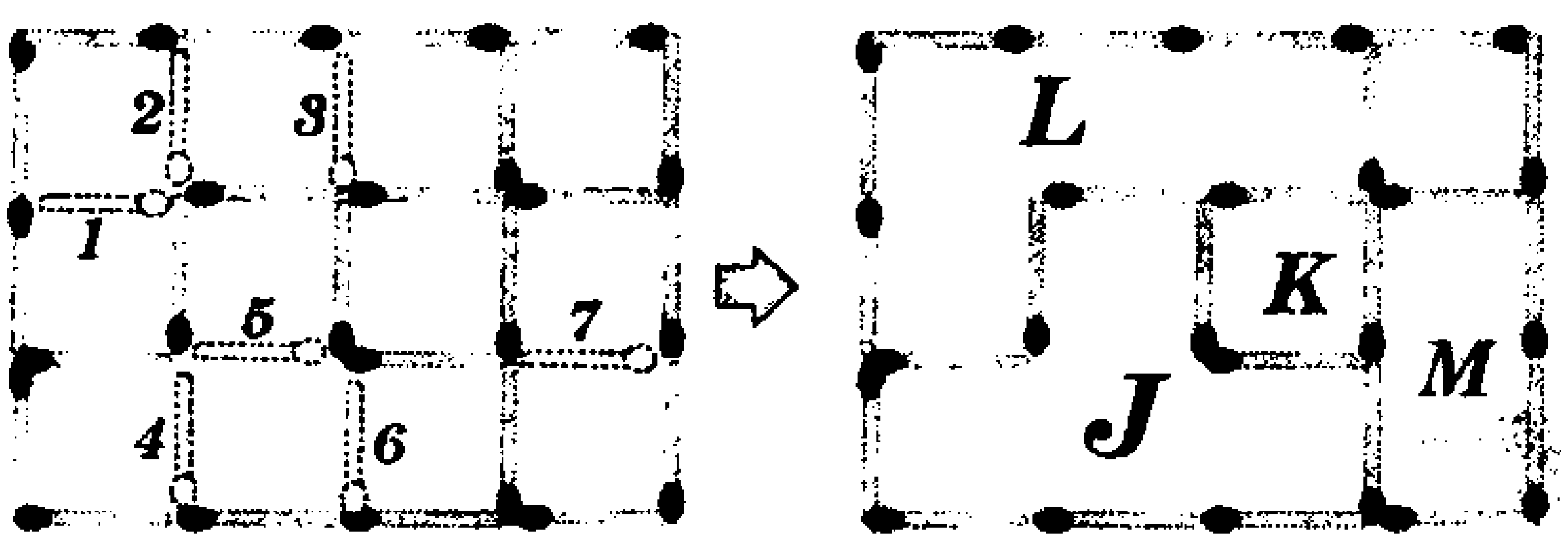


A) 10
B) 7
C) 6
D) 8
E) 9

RESOLUCIÓN :

La koala ⇒ jaula cuadrada.
El mono ⇒ jaula rectangular.
La liebre ⇒ jaula hexagonal.
La jirafa ⇒ jaula octagonal.

Empezamos en el orden indicado con un número exacto de cerillos.



Por lo tanto hemos retirado **7** cerillos.

RPTA : "D"

PROBLEMA 49 :

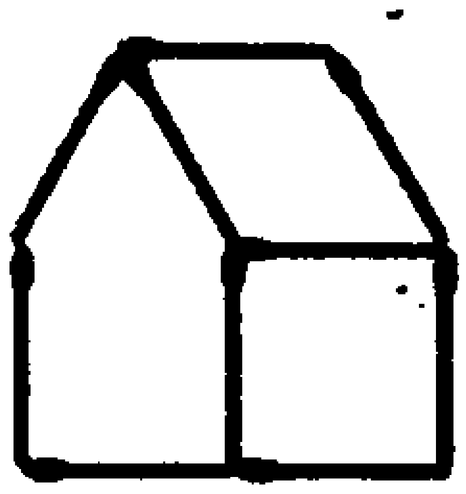


FIGURA I

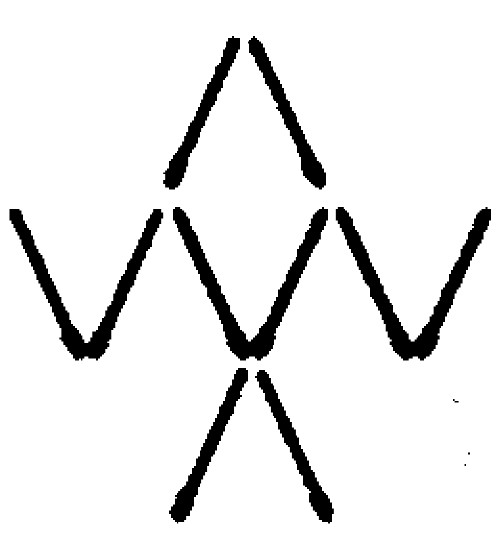


FIGURA II

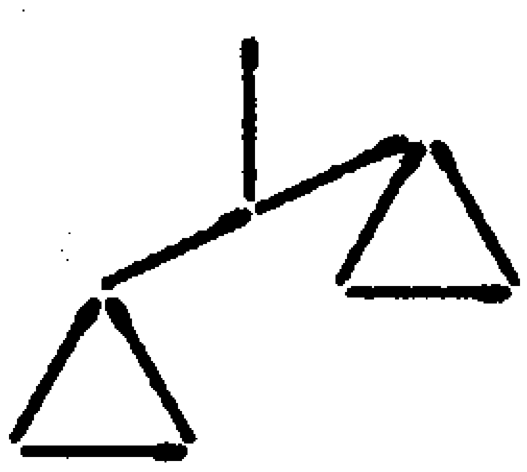


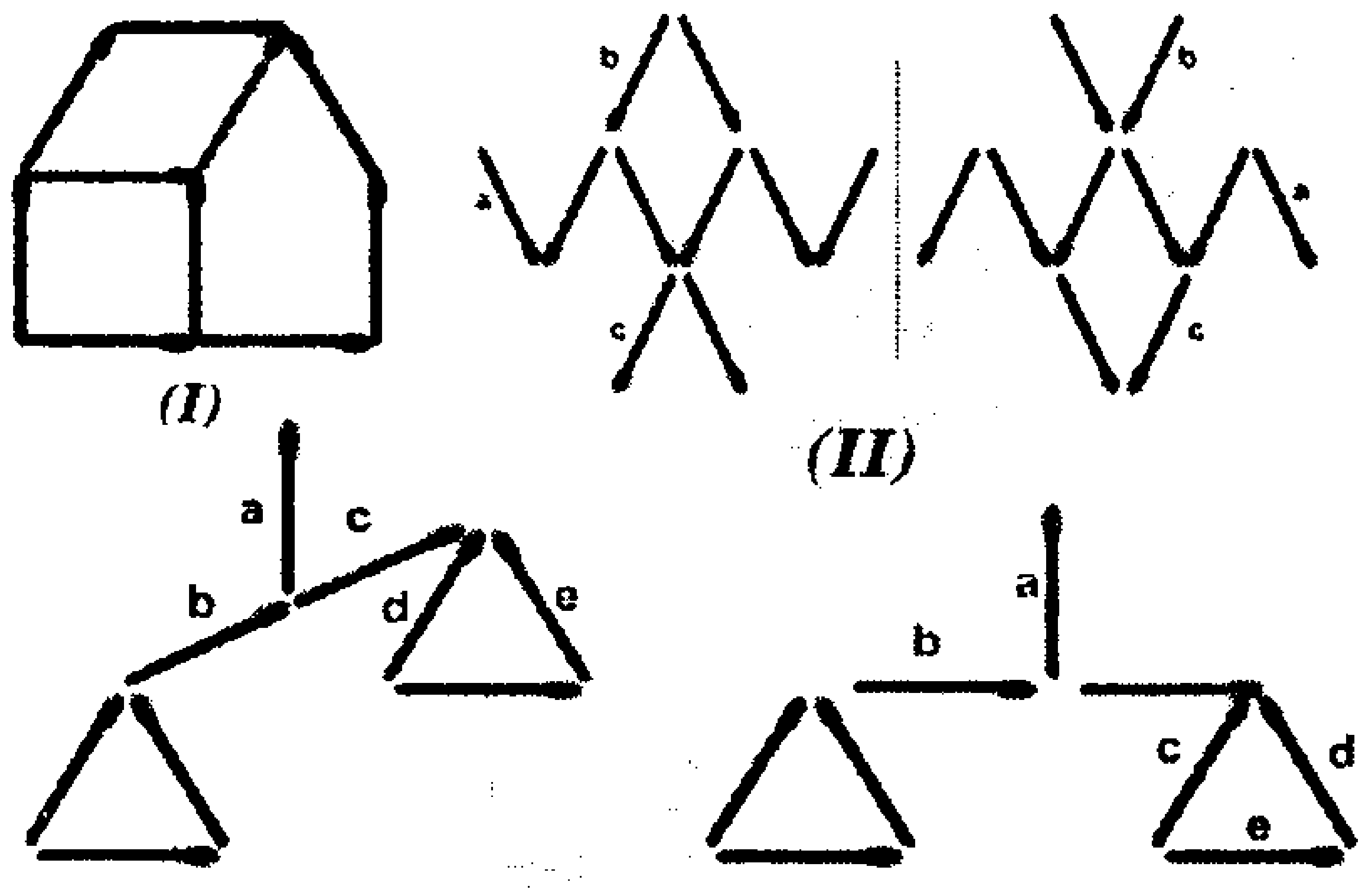
FIGURA III

I) Se ha construido una casa utilizando cerillas Cambiar en ella la posición de dos cerillas, de tal forma que la casa aparezca de otro costado.

II) Un cangrejo de cerillas camina hacia arriba . Cambiar la posición de tres cerillas, de tal forma que el cangrejo camine hacia abajo.

III) Una balanza, compuesta por nueve cerillas se halla en estado de desequilibrio . Es preciso cambiar la posición de cinco cerillas, de tal forma que la balanza quede en equilibrio.

RESOLUCIÓN :



(I) *(II)* *(III)*

PROBLEMA 50 :

FIGURA I

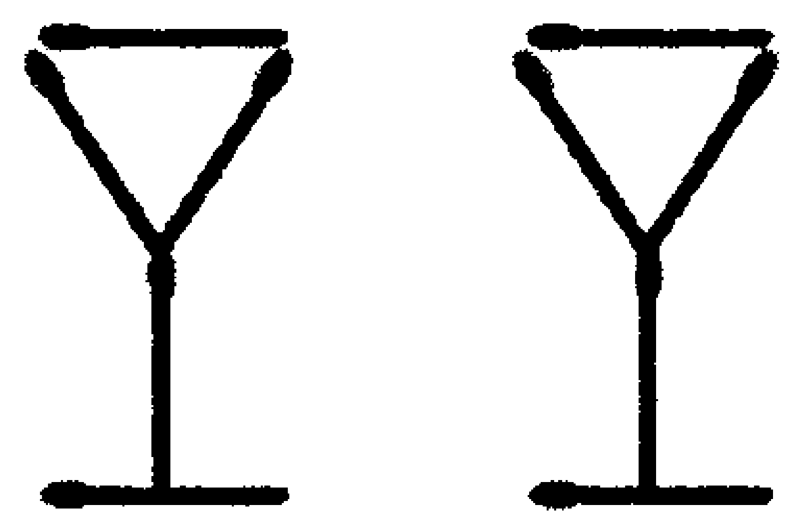


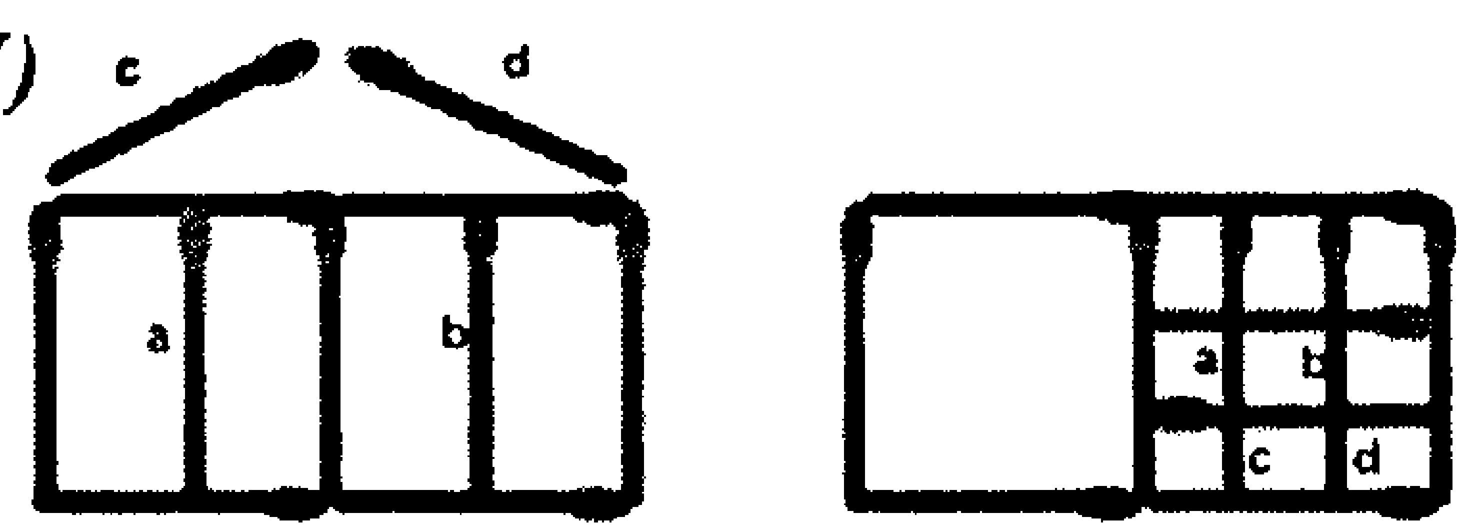
FIGURA II

I) Para edificar este templo griego , se necesitaron once cerillas. Se requiere cambiar en él la posición de cuatro cerillas, de tal forma que resulten quince cuadrados.

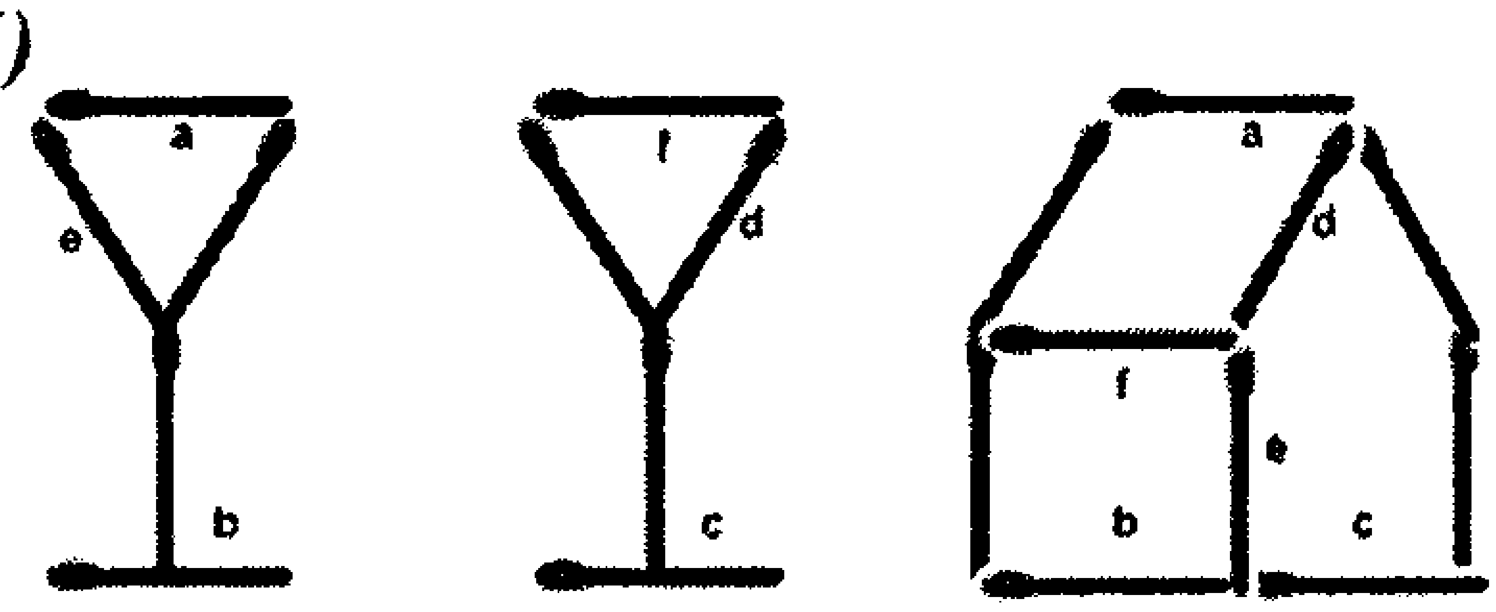
II) En dos copas, hechas con diez cerillas, cambiar la posición de seis cerillas, de tal modo que resulte una casa

RESOLUCIÓN :

I)



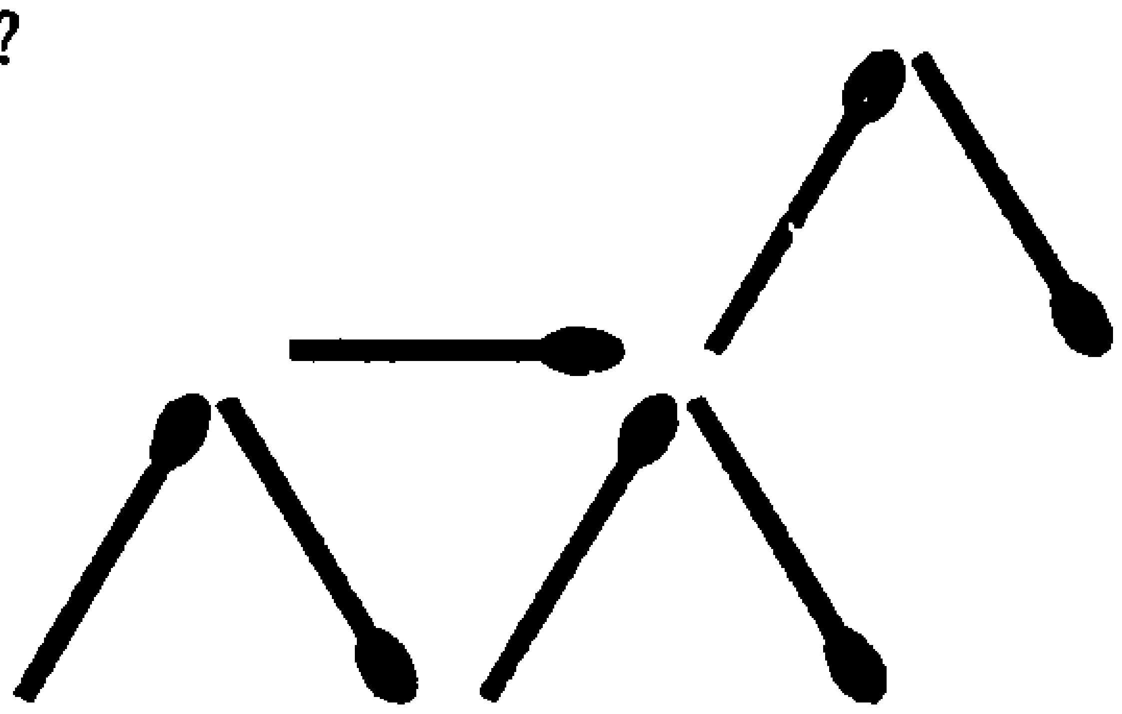
II)



PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

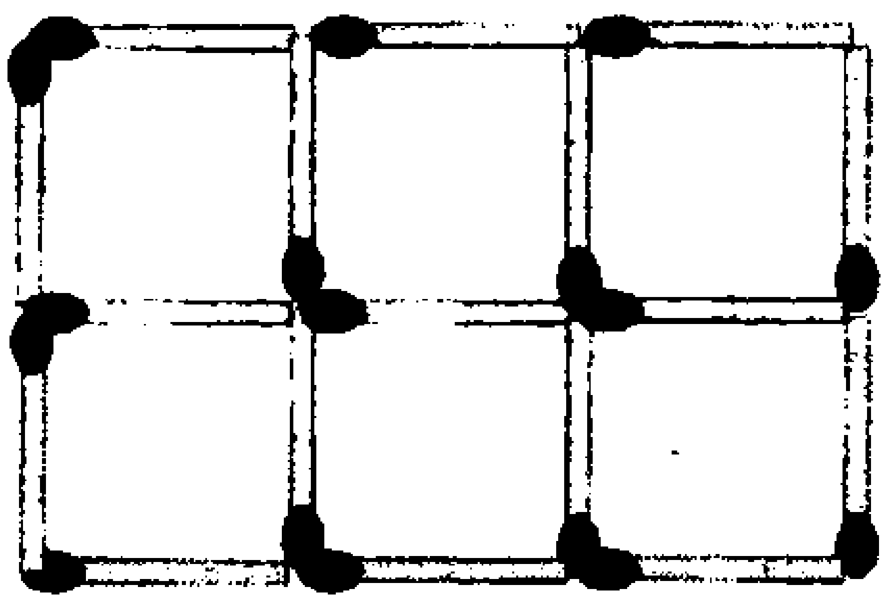
¿Cuál será la menor cantidad de palitos a mover para que el animal mire para el otro sentido?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA 2 :

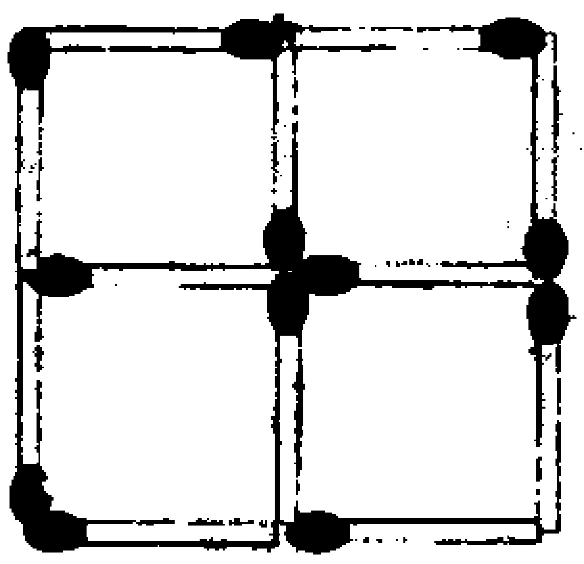
Del gráfico, ¿cuántos cerillos se debe retirar, como mínimo, para obtener *2* cuadrados, sin que sobre cerillos?



A) 5
B) 6
C) 8
D) 7
E) 4

PROBLEMA 3 :

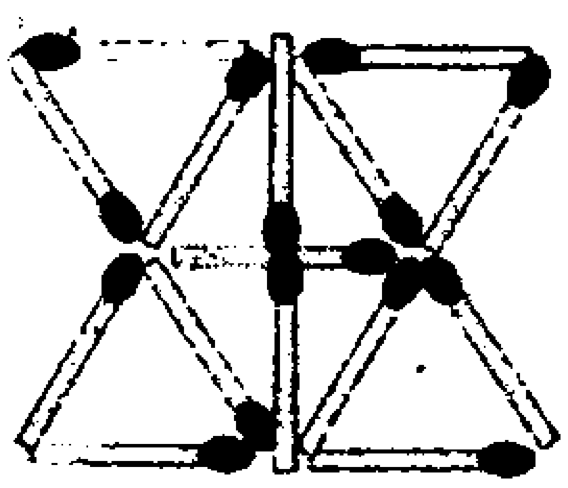
¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que queden exactamente *15* cuadrados?



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

PROBLEMA 5 :

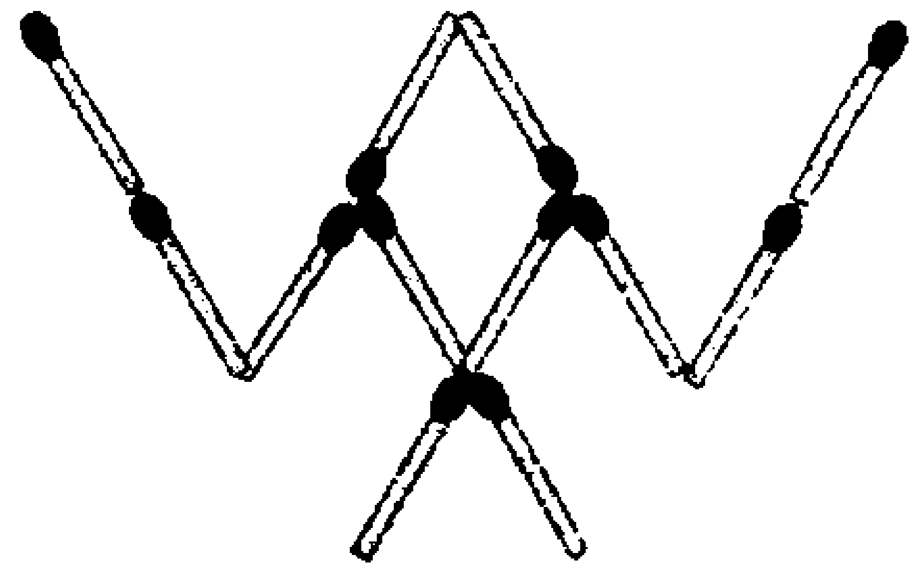
¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que en el gráfico no quede triángulo alguno?



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

PROBLEMA 6 :

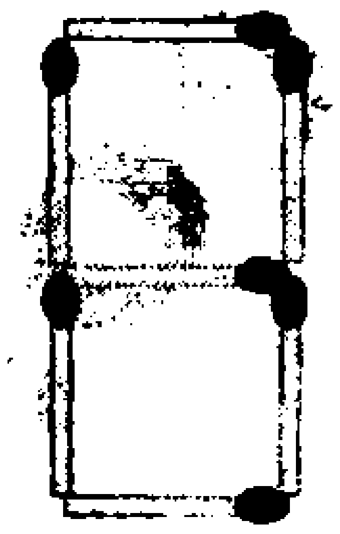
En el gráfico muestra una rana formada por cerillos. ¿Cuántos cerillos es necesario mover, como mínimo, para que la rana mire en sentido contrario?



A) 7
B) 8
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA 7 :

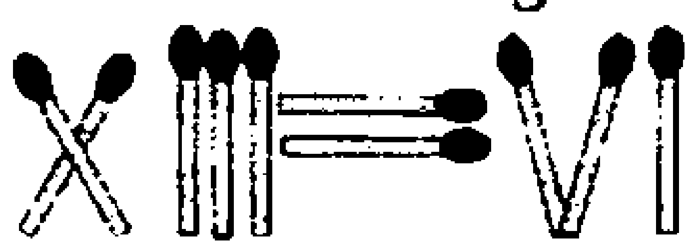
¿Cuántos cerillos, como mínimo, se debe retirar en el gráfico para obtener un cuadrado?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

PROBLEMA 8 :

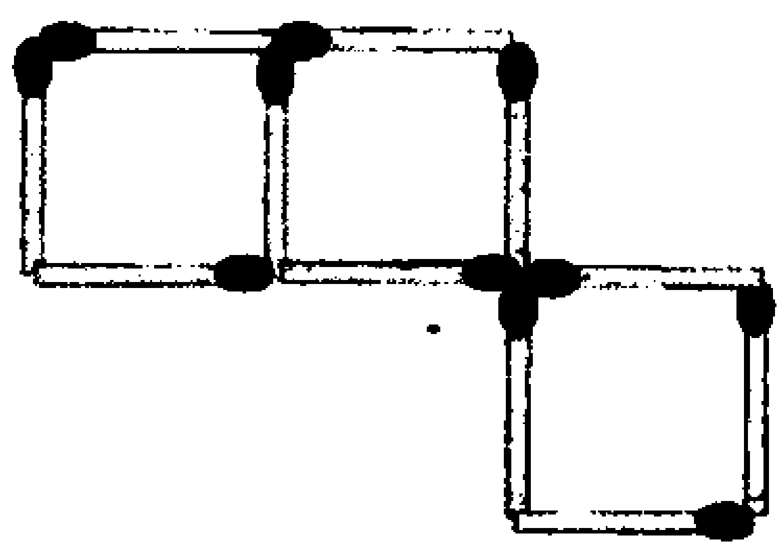
¿Cuántas cerillos hay que mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5

PROBLEMA 9 :

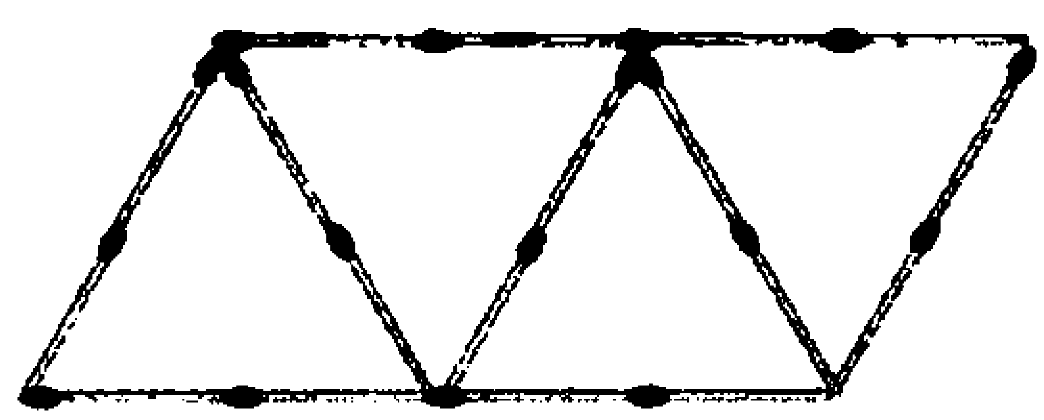
¿Cuántos cerillos se deben agregar, como mínimo, para obtener exactamente *8* cuadrados?



A) 6
B) 4
C) 5
D) 7
E) 3

PROBLEMA 10 :

¿Cúantos fósforos como mínimo debes mover para formar cuatro triángulos iguales que tengan *2* fósforos por lado y *3* rombos?



A) 3
B) 4
C) 5
D) 2
E) 6

PBOBLEMA 11 :

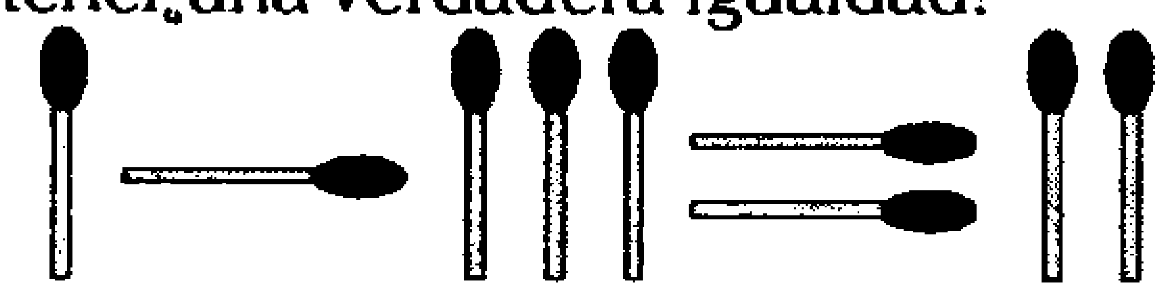
¿Cuántos cuadrados , como maximo se pueden formar con *20* cerillos, de tal manera que la

longitud del lado del cuadrado sea del tamaño de un cerillo?

A)10 B)9 C)8 D)12 E)11

PROBLEMA 12 :

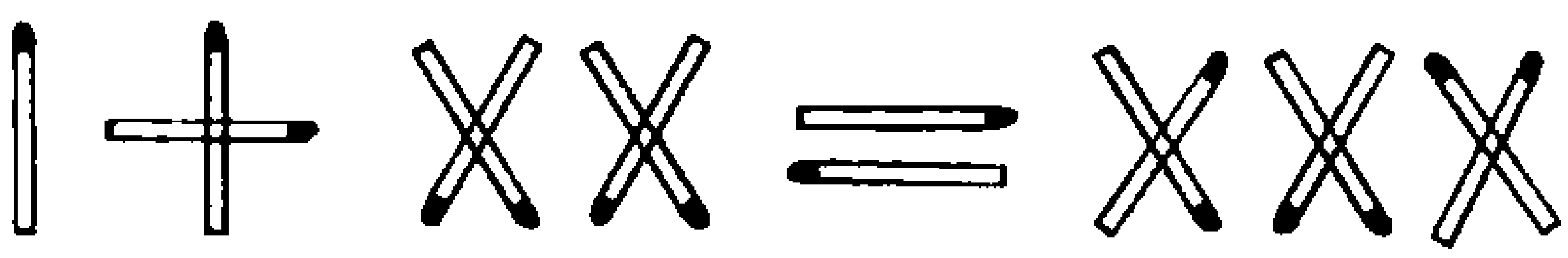
¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 13 :

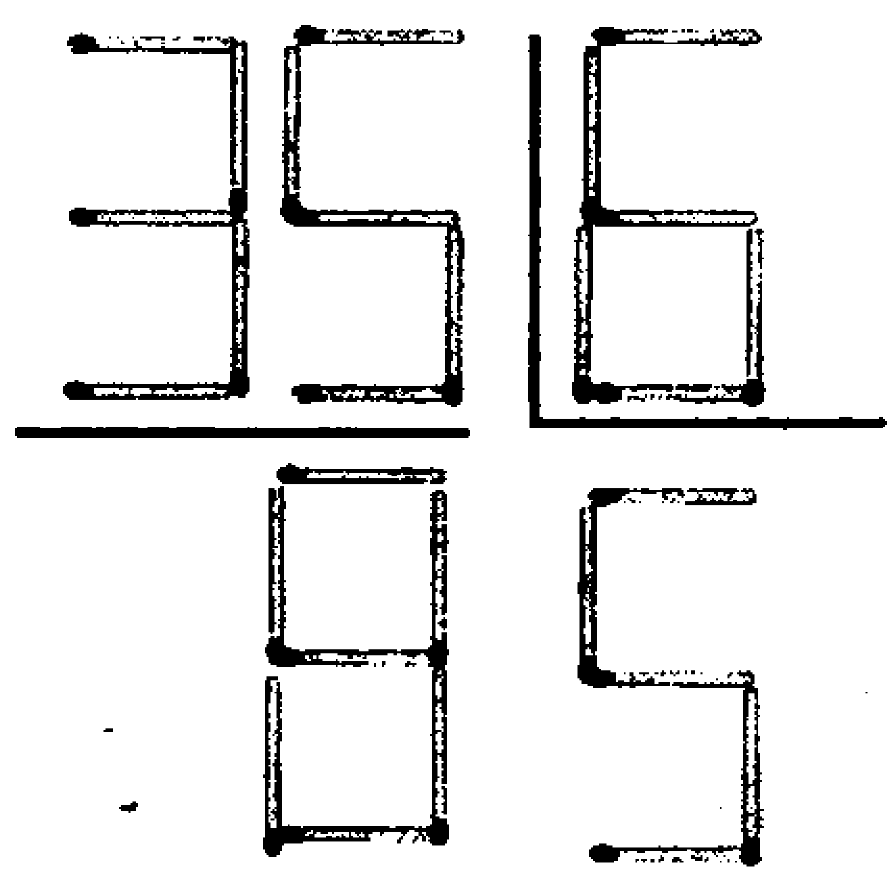
Del gráfico, ¿cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para obtener una igualdad correcta?



A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

PROBLEMA 14 :

En el gráfico adjunto, ¿cuántos cerillos, cómo mínimo, se deben mover para que la operación sea correcta?.

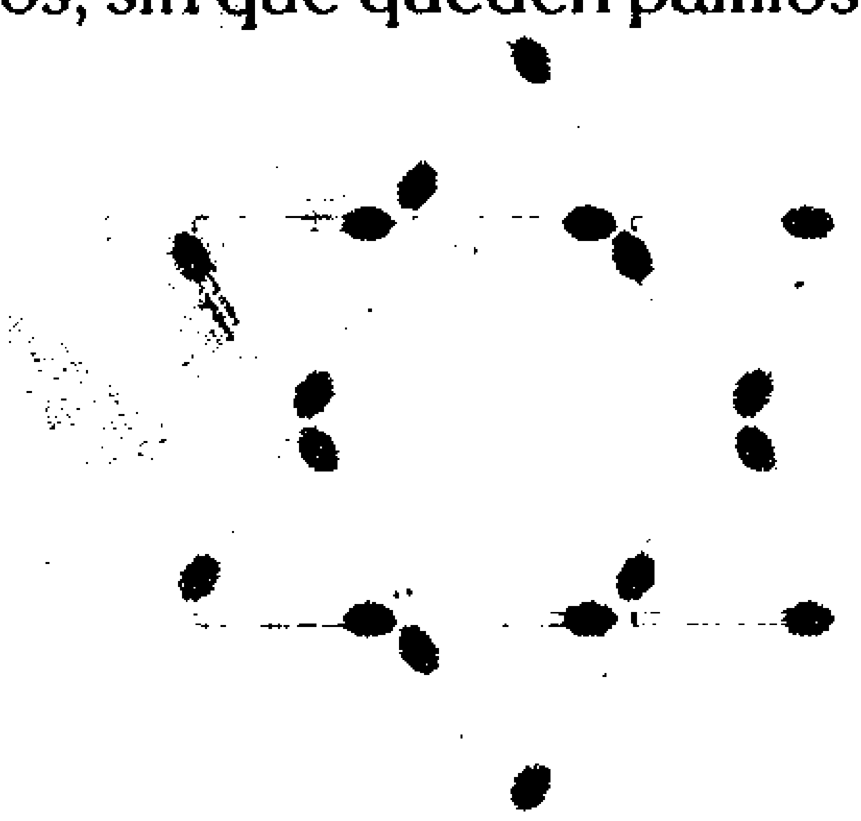


A)2 B)3 C)4 D)5 E)3

PROBLEMA 15 :

La estrella de la figura hace posible que contemos *8* triángulos equiláteros en total, ¿cuántos palillos de fósforo se debe cambiar de posición, como mínimo, para que solo se cuenten 6 triángulos equiláteros, sin que queden palillos sueltos.

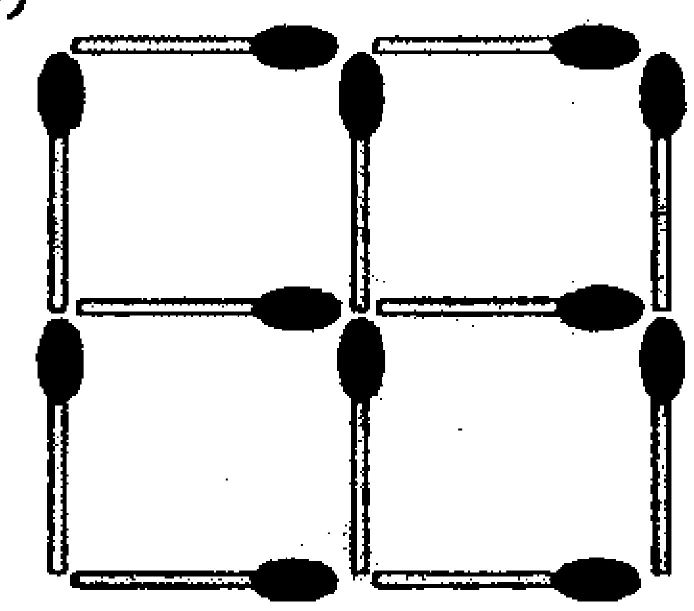
A) 3
B) 4
C) 5
D) 2
E) 6



PROBLEMA 16 :

La figura está formada por *12* palitos de fósforo. ¿Cuántos hay que mover como mínimo para obtener *3* cuadrados del mismo tamaño?. (No dejar cabo suelto)

A) 1
B) 4
C) 3
D) 2
E) 6



PROBLEMA 17 :

La figura muestra una operación con números romanos formada con palillos de fósforo.

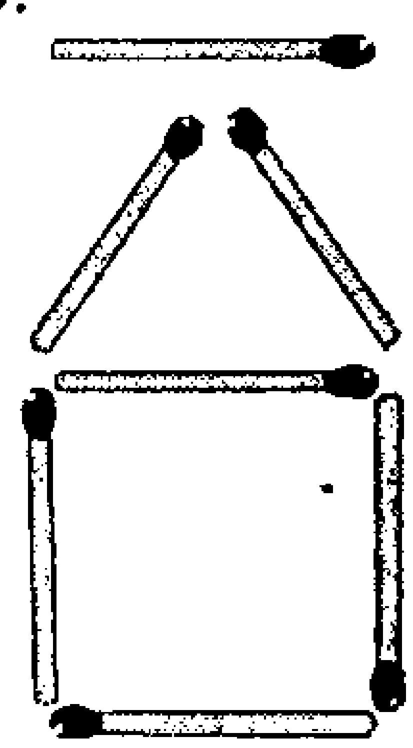
¿Cuántos palillos, como mínimo, debemos cambiar de posición para generar una nueva igualdad que sea verdadera? (la igualdad debe utilizar números romanos)

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

PROBLEMA 18 :

¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para formar un cubo?

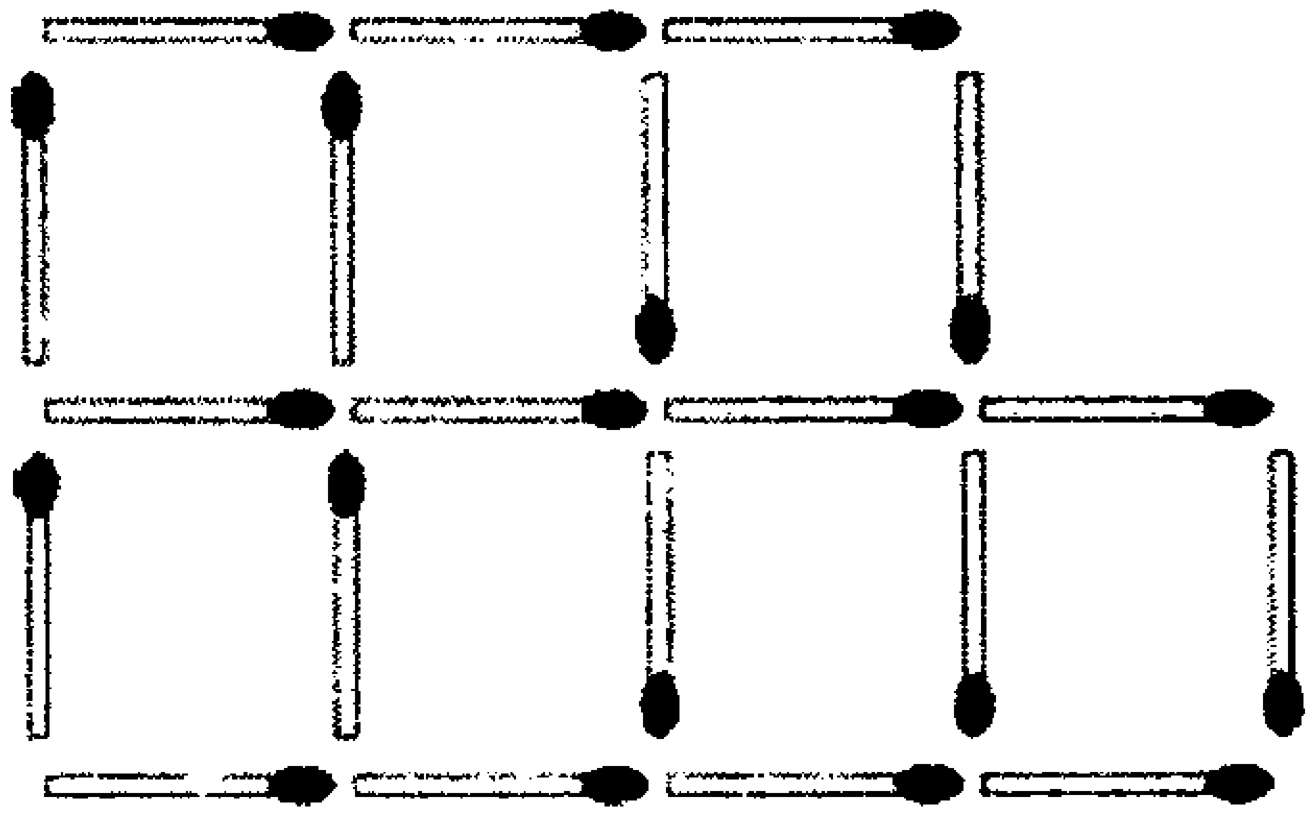
A)1
B)2
C)3
D)4
E)5



PROBLEMA 19 :

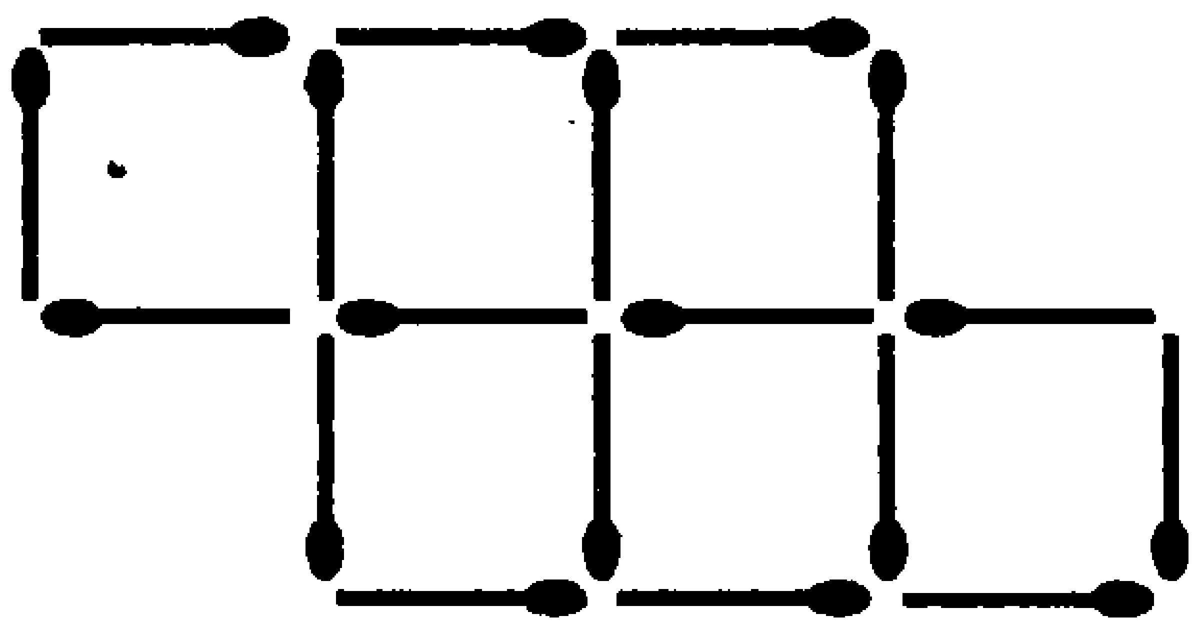
¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, de la figura para que queden exactamente *4* cuadrados del mismo tamaño ?

A)1
B)2
C)3
D)4
E)5



PROBLEMA 20 :

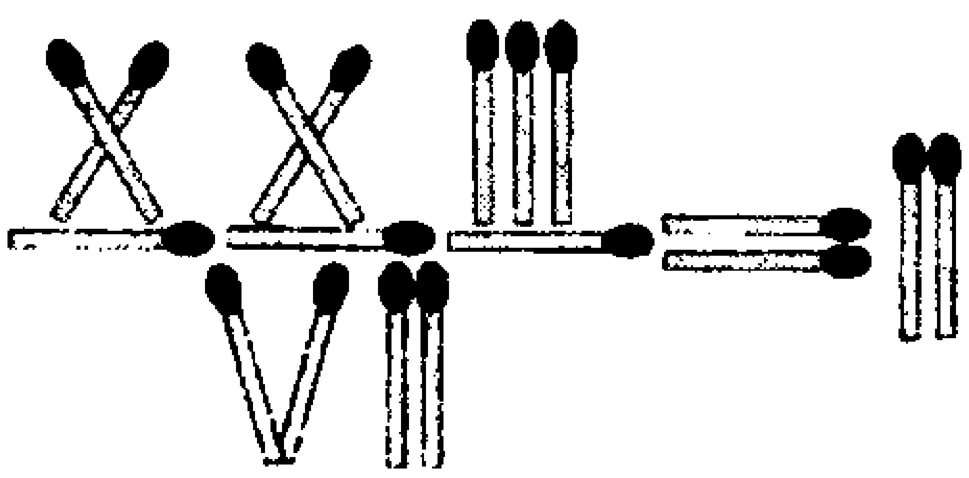
¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, de la figura para que queden solamente cuatro cuadrados iguales.



A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 1* *E) 5*

RETO :

¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para obtener una igualdad? (No está permitido romper o doblar palitos)

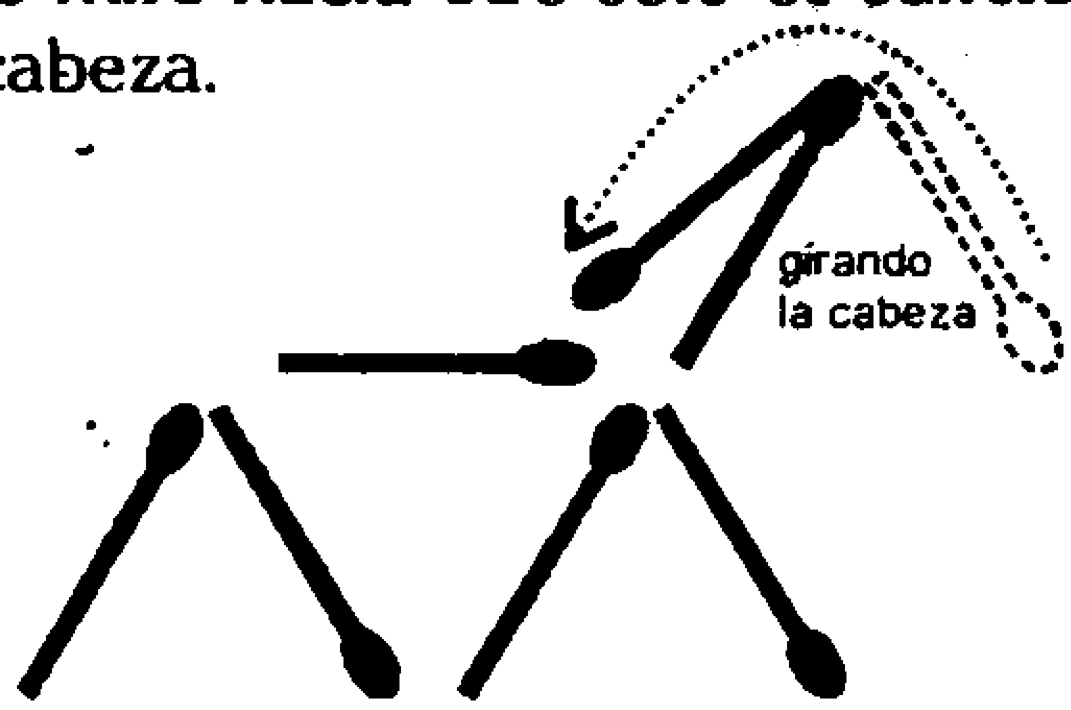


A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

RESOLUCIÓN 1 :

Como se trata de un animal, entonces la parte superior de la figura será su cabeza , por lo que para que mire hacia otro solo es suficiente que gire su cabeza.

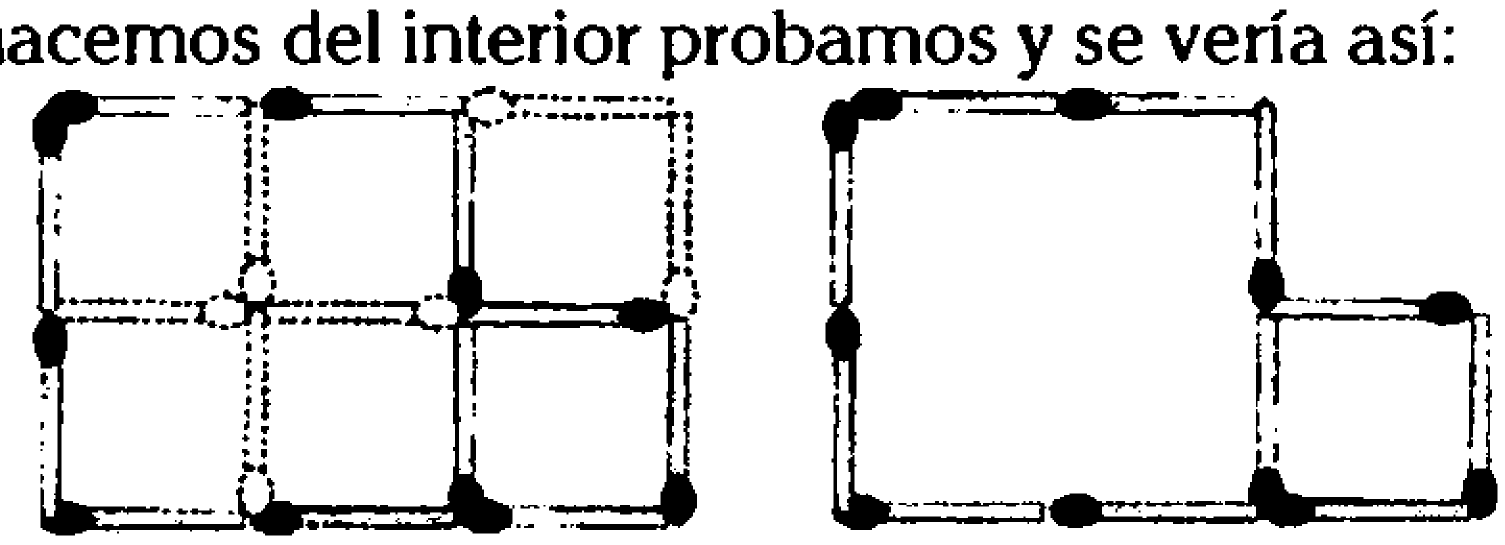


Hemos movido *1* cerillo como mínimo.

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 2 :

Si retiramos cerillos del borde sería solo *9*, pero si hacemos del interior probamos y se vería así:



Por lo tanto movemos como mínimo *6* cerillos.

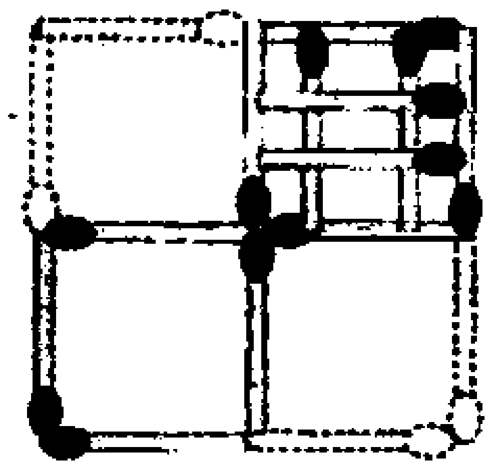
RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 3 :

Si los cuadrados son del mismo tamaño, entonces podemos formar triángulos más pequeños:

Cuenta detenidamente y verás *15* cuadrados.

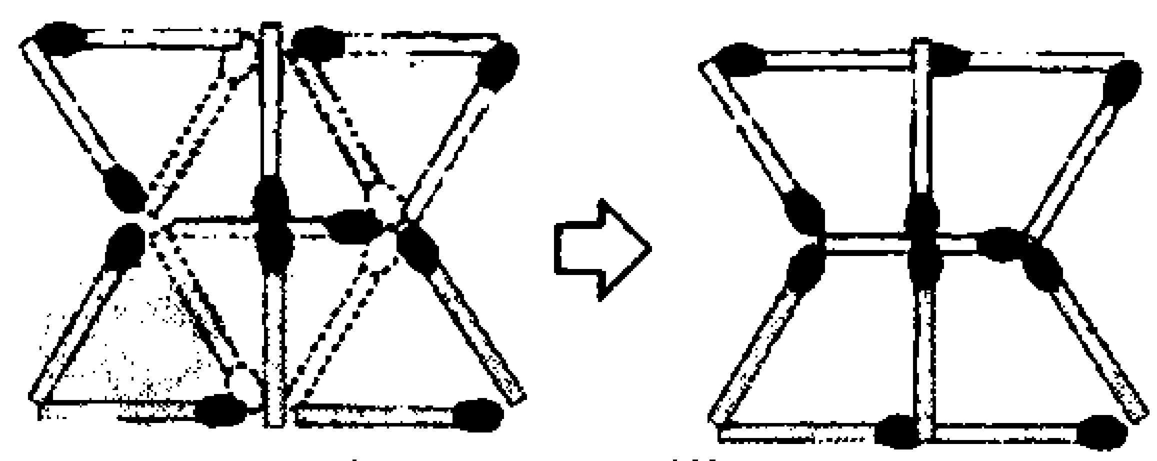
Mover solo *4* cerillos como mínimo .



RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 5 :

Retiramos los cerillos del interior del gráfico:

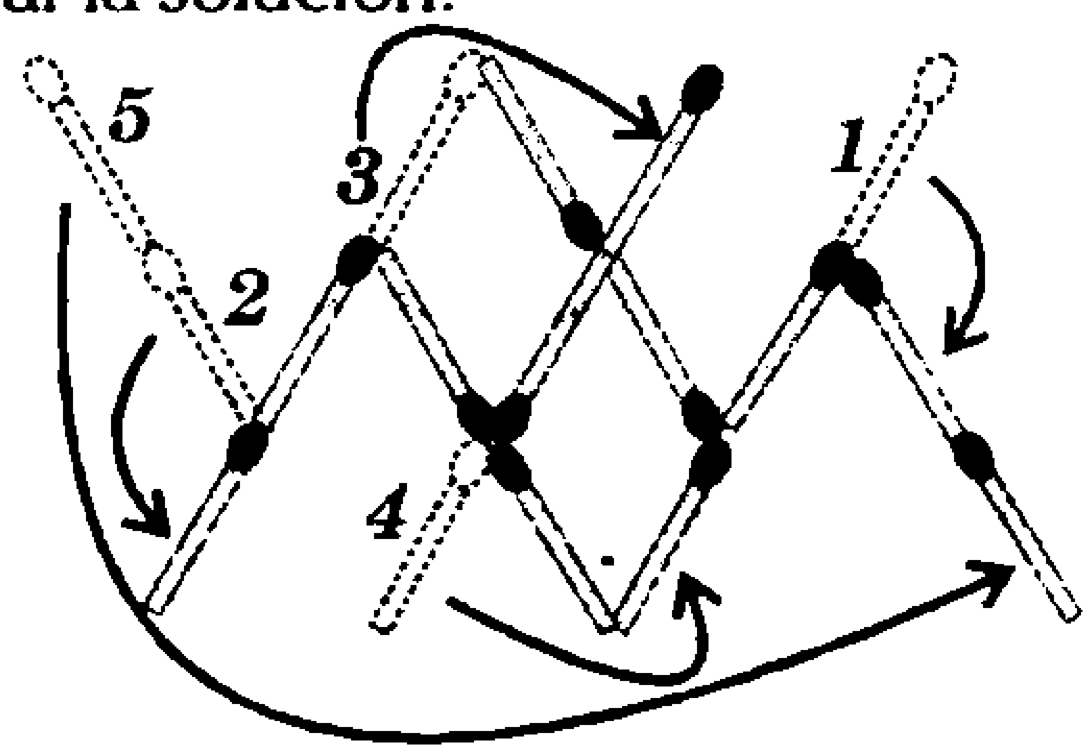


Por lo tanto se retiran *4* cerillos como mínimo.

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 6 :

Si lo escribes en un papel y lo volteas podrás encontrar la solución:



se movió como mínimo *5* cerillos.

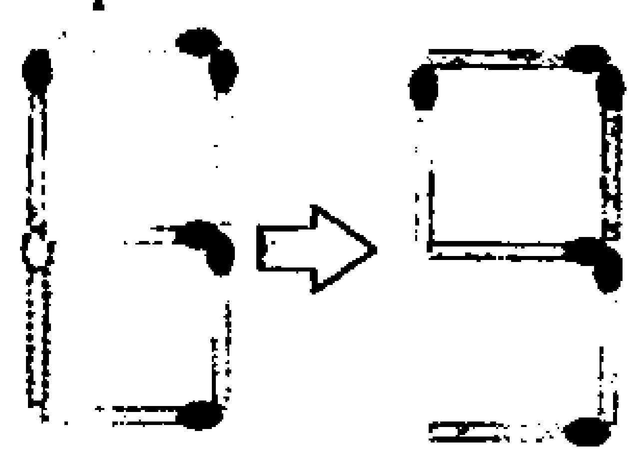
RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 7 :

Para formar un cuadrado se necesita *4* cerillos y tenemos *7* cerillos. Debemos imaginar que se desea obtener un cuadrado perfecto.

ejemplo: *4, 9, 16,* etc....

El único que cumple es el número *9*.



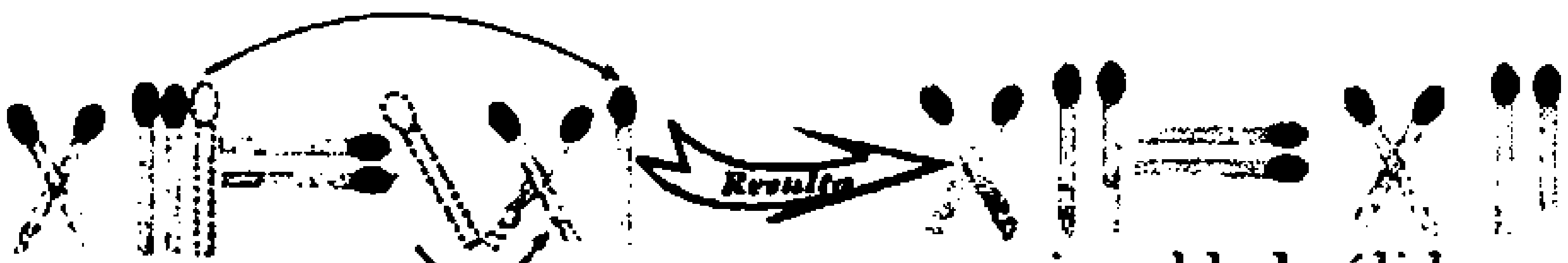
RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 8 :

La operación en números romanos es: *13 =6* "lo cual no es válido"

Para una verdadera igualdad disminuimos *a 13* y le agregamos *a 6*.

Para ello movemos los cerillos convenientemente (ingenio)



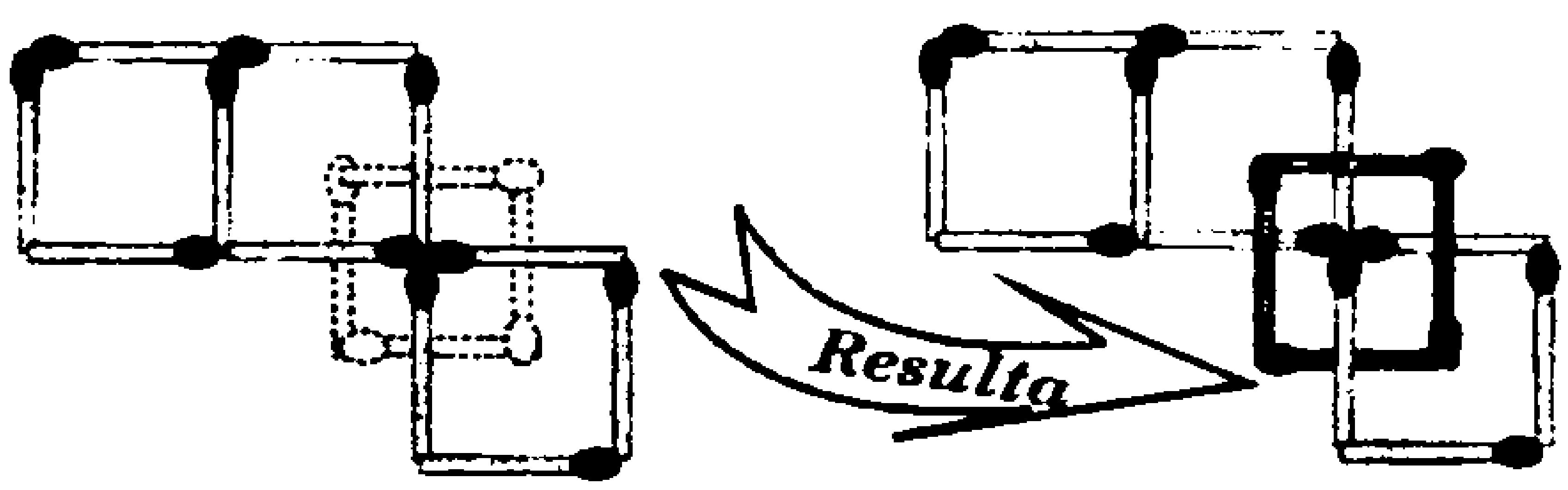
igualdad válida

*Por lo que es necesario mover como mínimo **2** cerillos.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 9 :

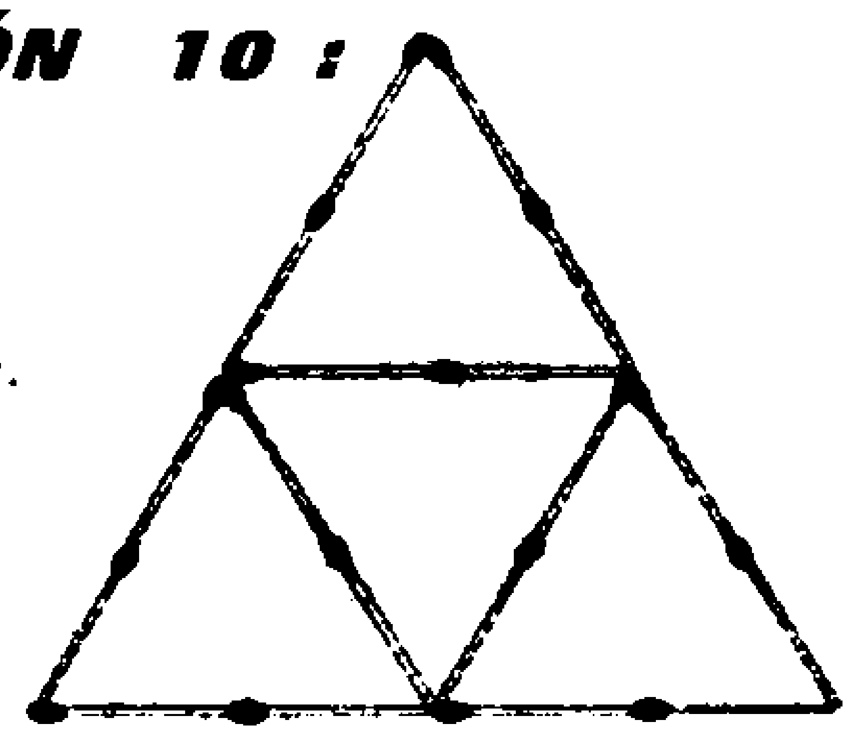
* Se podría obtener *8* cuadrados idénticos, agregando *6* cerillos y se formaría un rectángulo de 3×2; pero se pide el mínimo número de cerillos y no necesariamente del mismo tamaño. Entonces vamos adicionar *4* cerillos de la siguiente forma:



* Así obtenemos exactamente *8* cuadrados.

RPTA : "B"

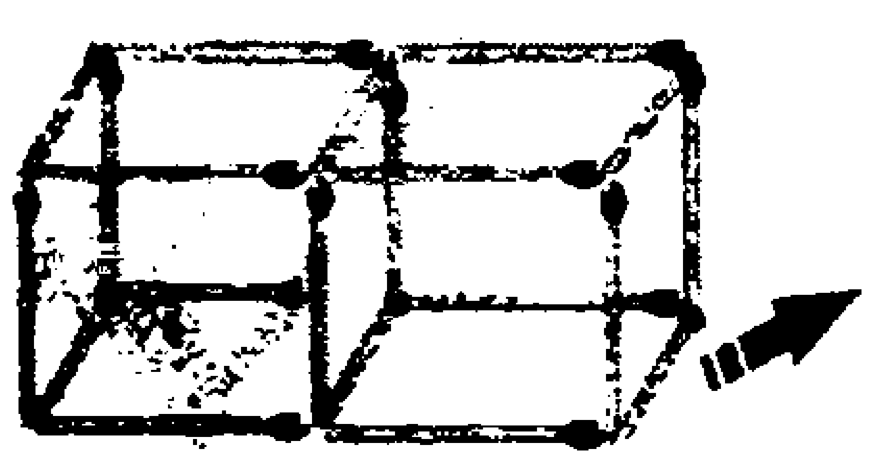
RESOLUCIÓN 10 :



RPTA : "D"

RESOLUCION 11 :

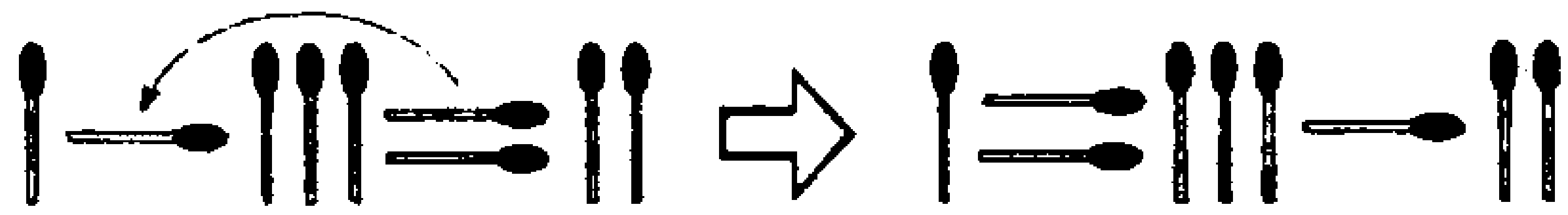
Piden formar el maximo número de cuadrados con **20** cerillos.



Son 2 cubos y como tienen una cara en común hay 11 cuadrados.

RPTA : "E"

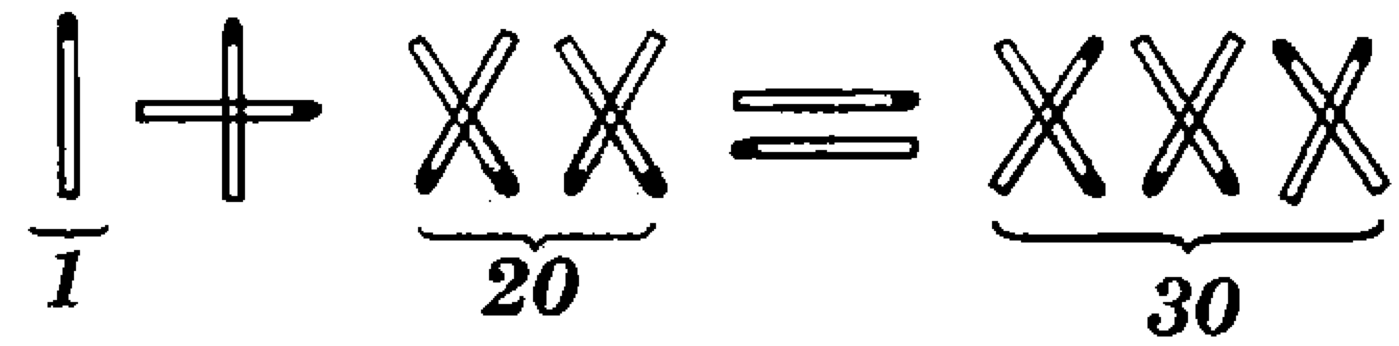
RESOLUCIÓN :



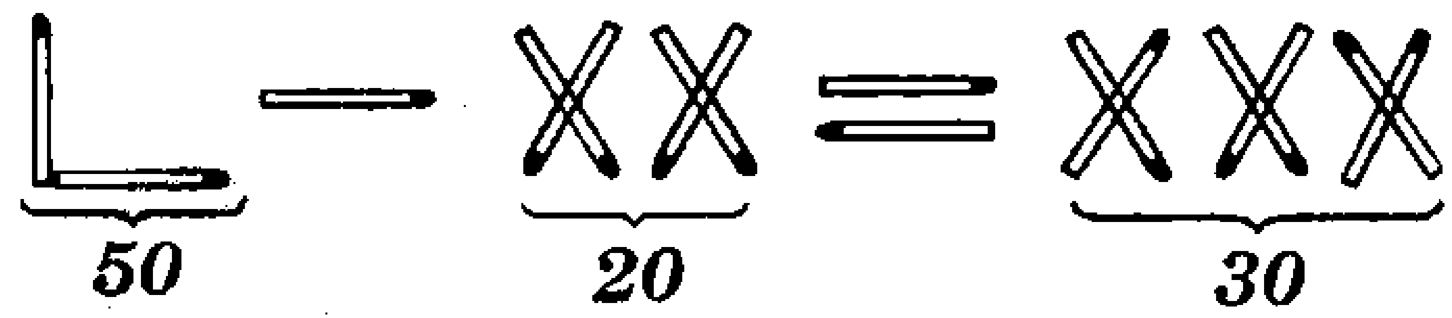
RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 13 :

* Considerando la igualdad planteada, relacionemos los cerillos con números romanos; así:



trasladando un cerillo

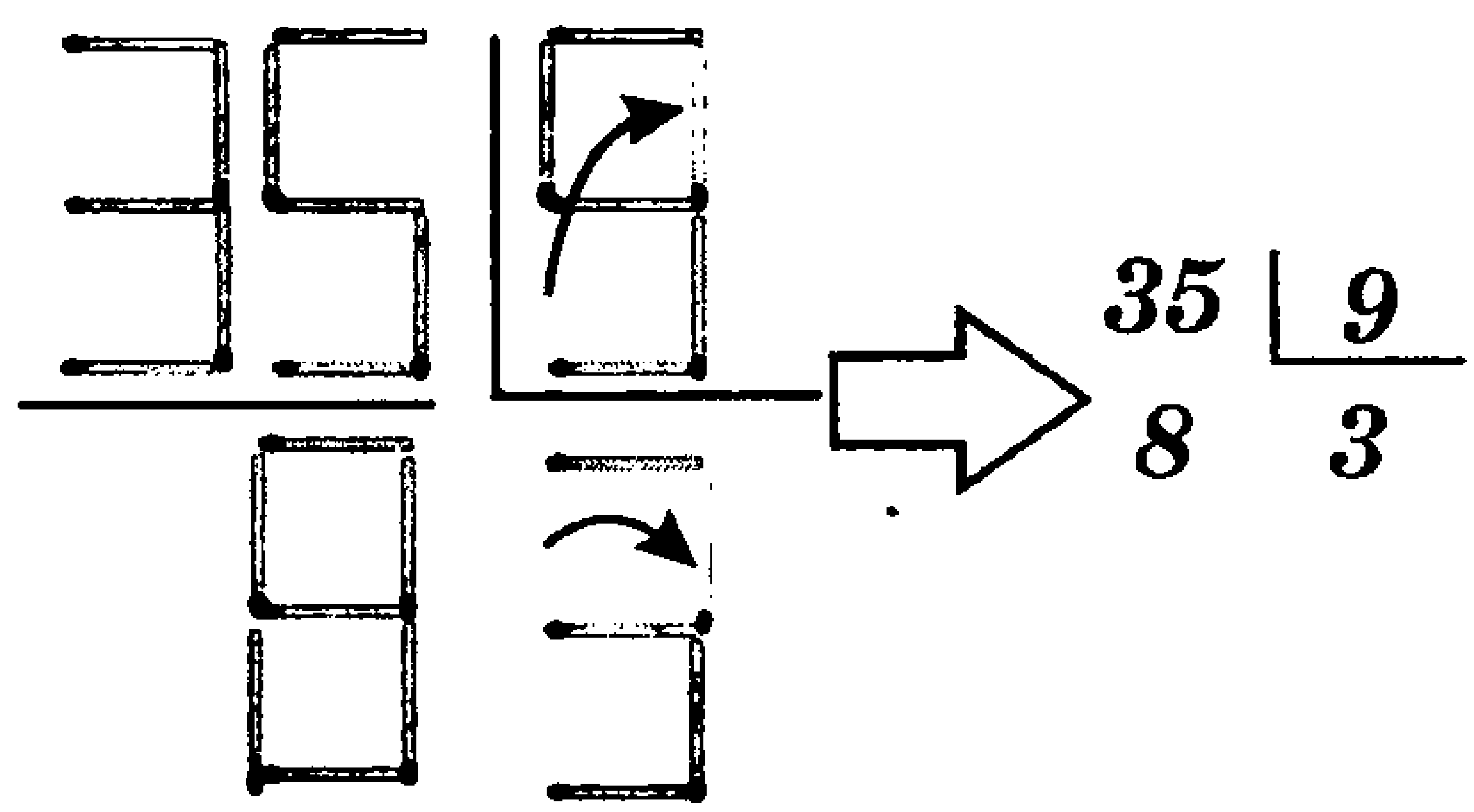


Por lo tanto, solo es necesario mover un cerillo.

RPTA : "C"

RESOLUCION 14 :

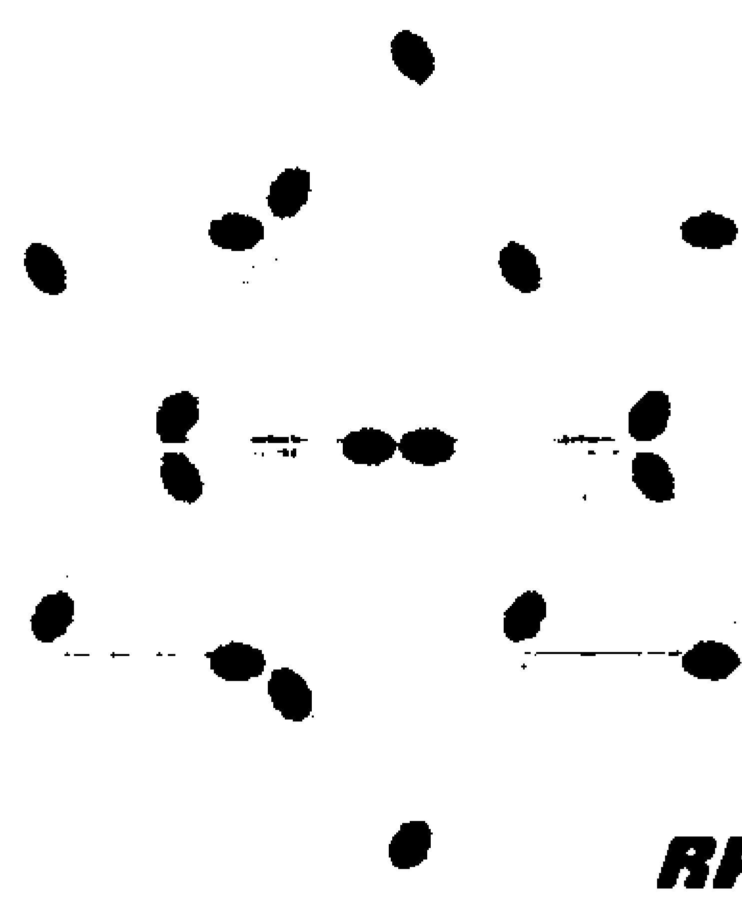
Es suficiente cambiarse de posición **2** palillos, así :



RPTA : "A"

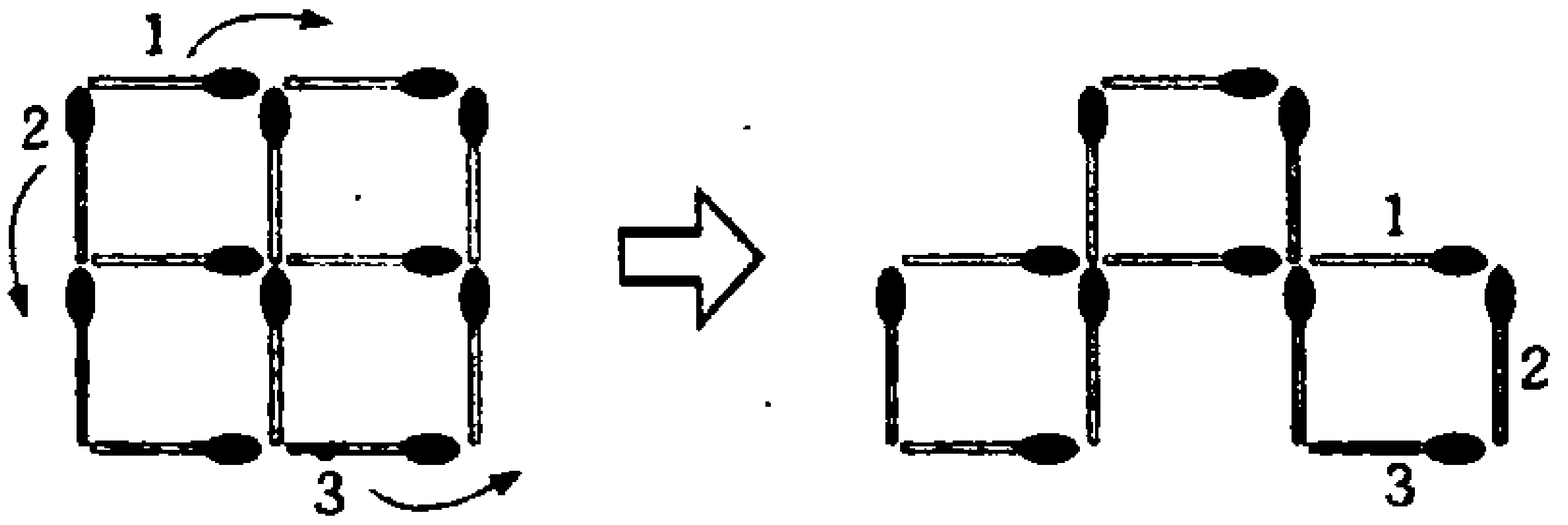
RESOLUCIÓN 15 :

* Sólo deben cambiarse de posición **2** palillos, así :



RPTA : "D"

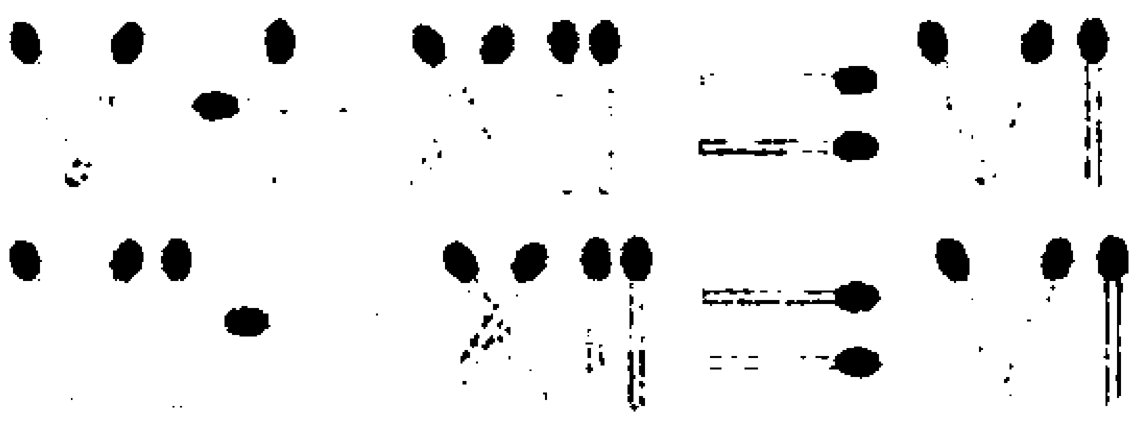
RESOLUCIÓN 16 :



RPTA : "A"

RESOLUCIÓN :

* Sólo se deben cambiar dos palillos , veamos el primer cambio.



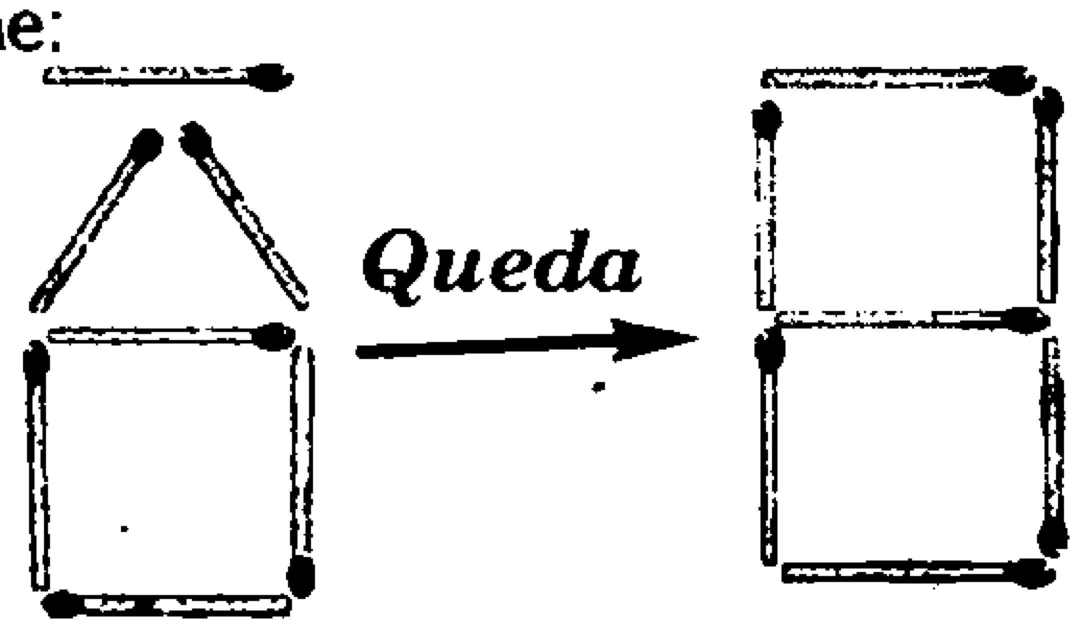
*Ahora el segundo cambio es casi evidente.

RPTA : "B"

RESOLUCION 18 :

Piden el número mínimo de cerillos a mover

Se tiene:

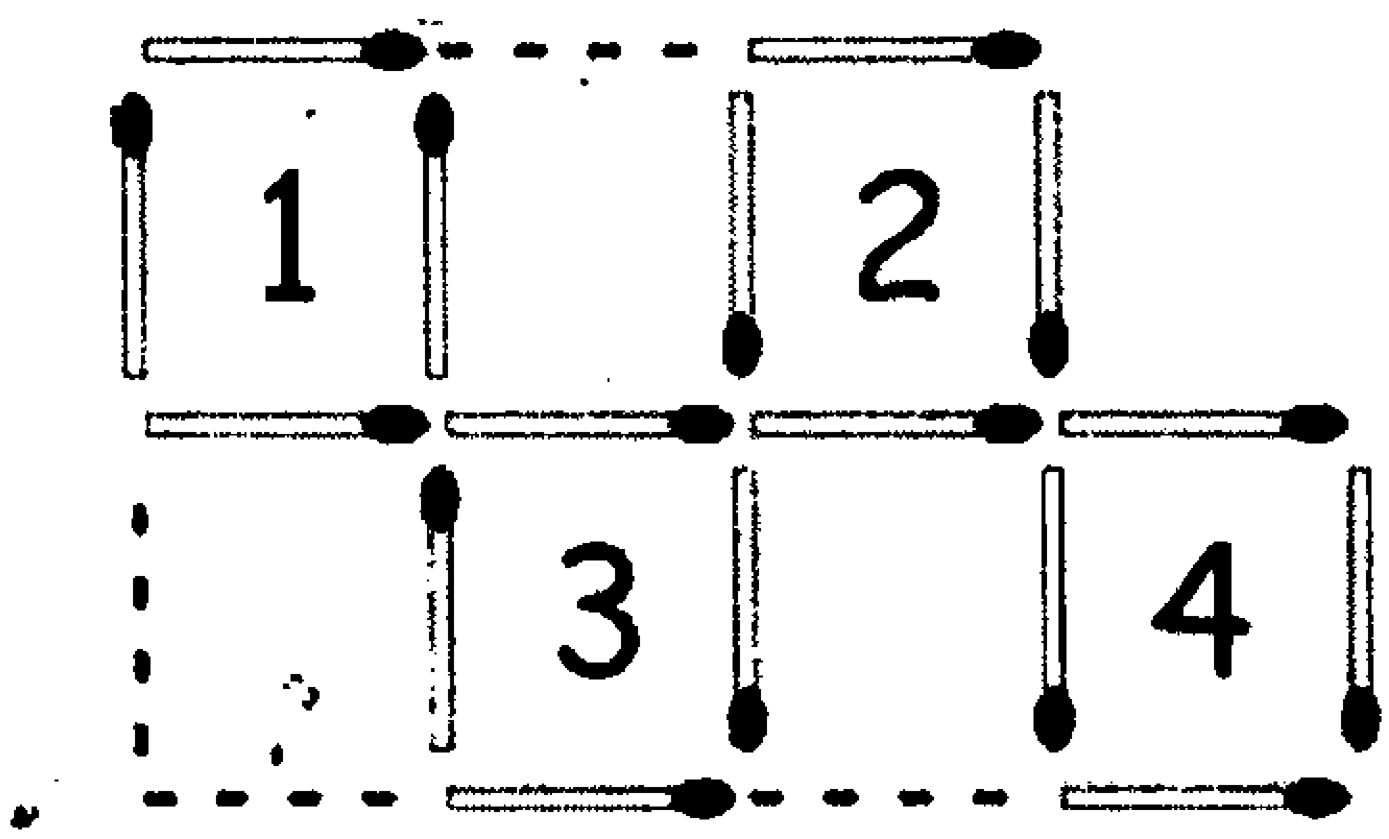


El número *8* es un cubo perfecto

RPTA : "B"

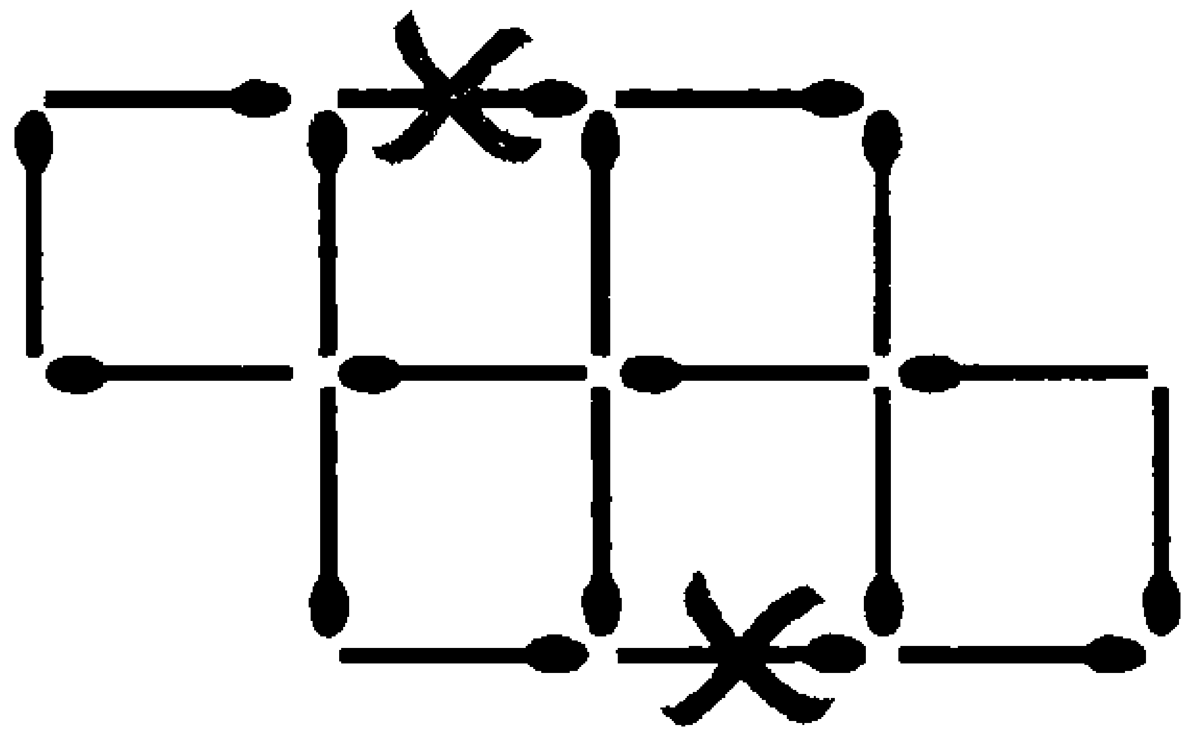
RESOLUCIÓN 19 :

Quitando dos palitos de la izquierda, un palito de arriba y un palito de abajo. Quedando así los 4 cuadrados, como se muestra en la figura.

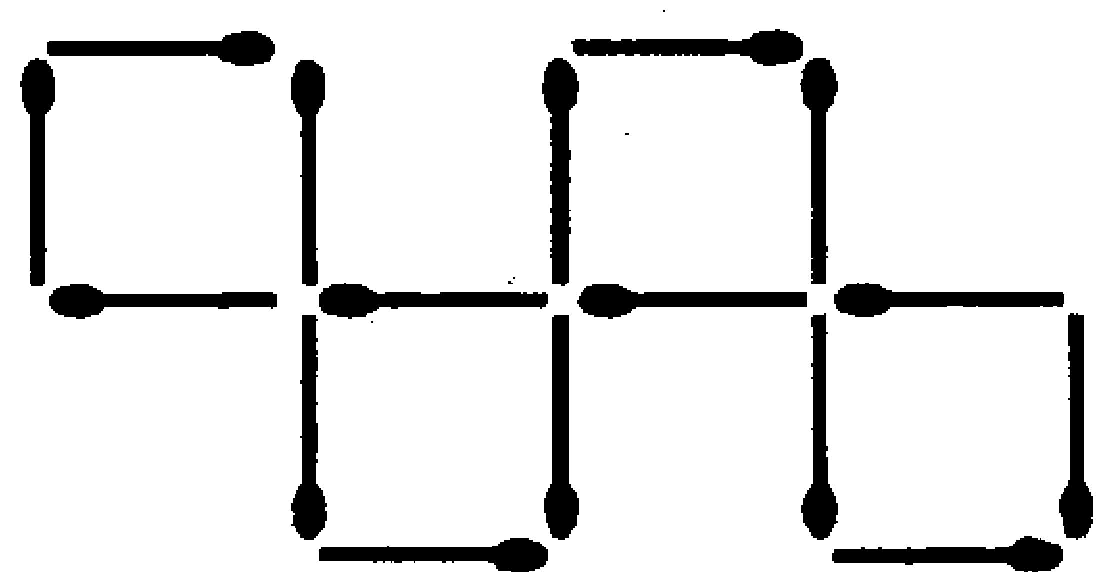


RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 20 :



Al eliminar los palitos indicados, quedarán cuatro cuadrados iguales de la siguiente manera:



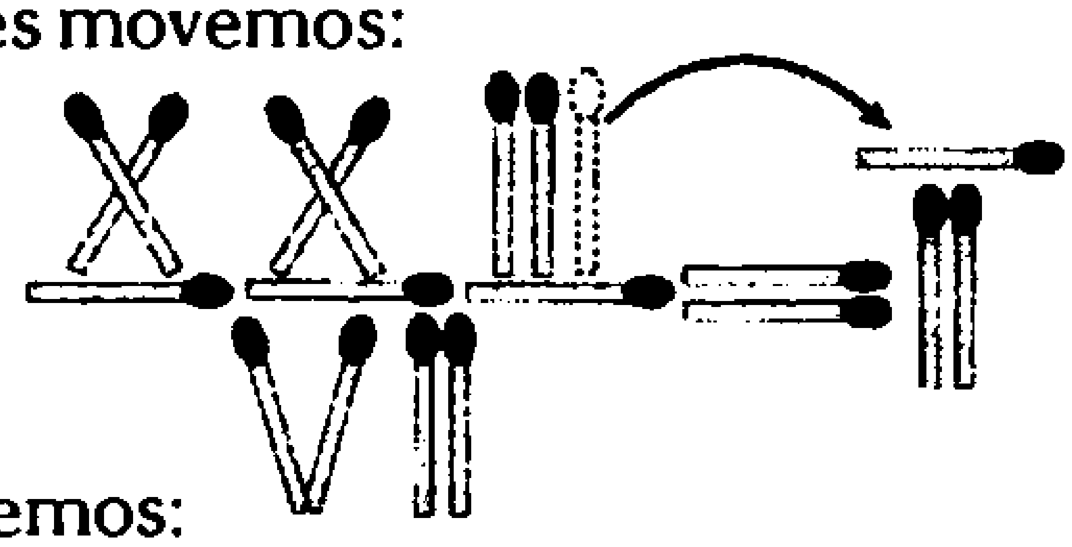
RPTA : "A"

RESOLUCIÓN :

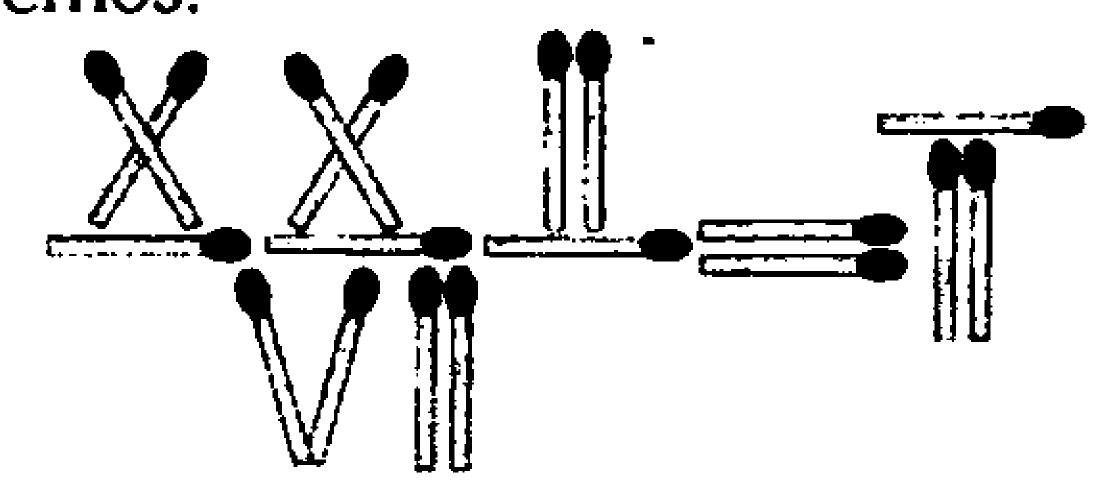
Para resolver éste problema , traemos a la mente un cociente aprendido en matemática como:

$$\frac{22}{7} \cong 3.141..... = \pi$$

Entonces movemos:



y obtenemos:



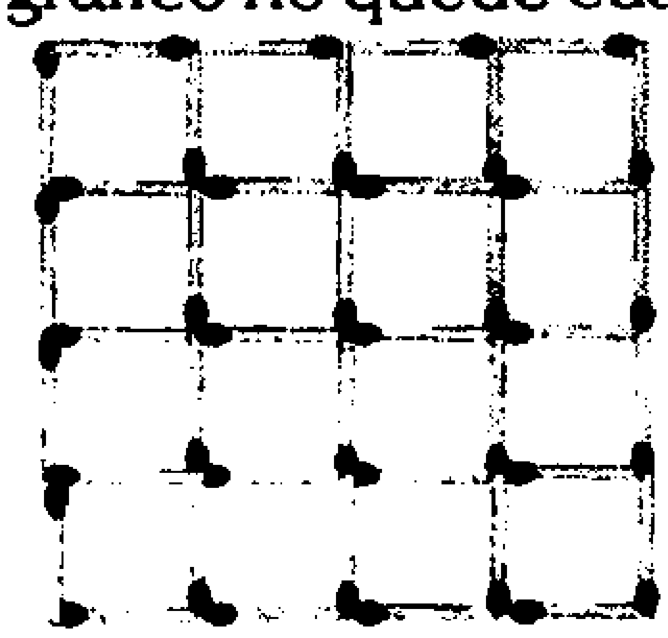
Por lo tanto movemos un palito.

RPTA : "A"

RETO :

¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que en el gráfico no quede cuadrado alguno?

A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

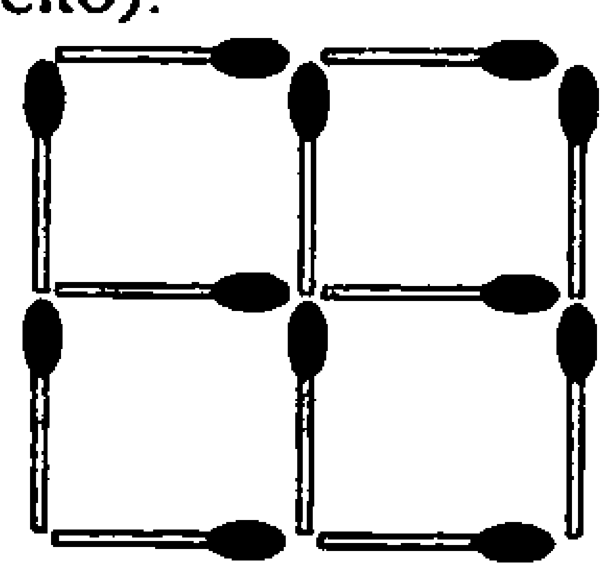


PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos cerillos, como mínimo, se tienen que mover en el gráfico mostrado para obtener una igualdad?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

02 ¿Cuántos palitos hay que quitar como mínimo para obtener *2* cuadrados de diferente tamaño? (No dejar cabo suelto).



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

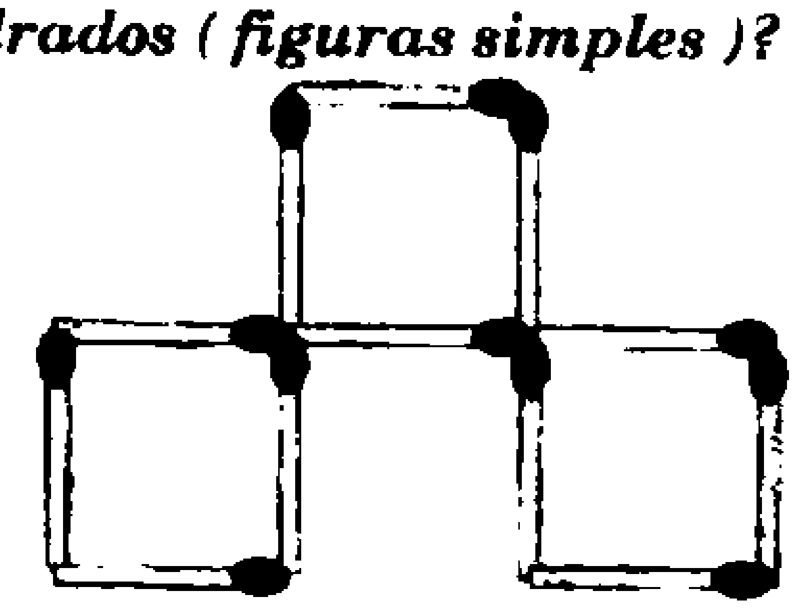
03 Determine la máxima cantidad de triángulos que se puedan formar con *5* cerillos. Considere que los cerillos pueden superponerse.

A) 8 *B) 2* *C) 10* *D) 12*

04 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad mostrada sea correcta?

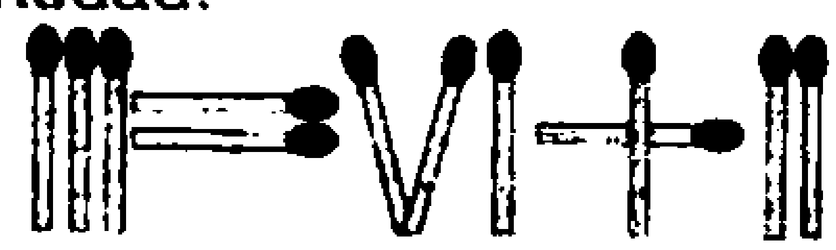
A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4*

05 ***En el gráfico, ¿cuántos cerillos se deben mover, como mínimo , para obtener solo dos cuadrados (figuras simples)?***



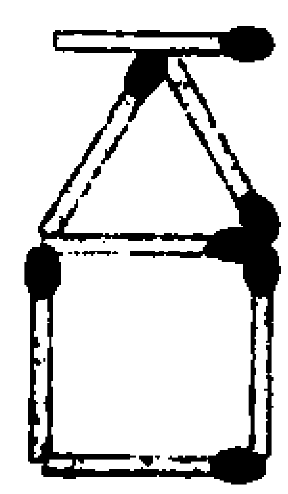
A) 2
B) 3
C) 5
D) 6
E) 7

06 En el siguiente gráfico, moviendo la menor cantidad de palitos debemos formar una igualdad correcta. ¿Cuál es esa cantidad?



A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) es imposible*

07 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para formar un cubo?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

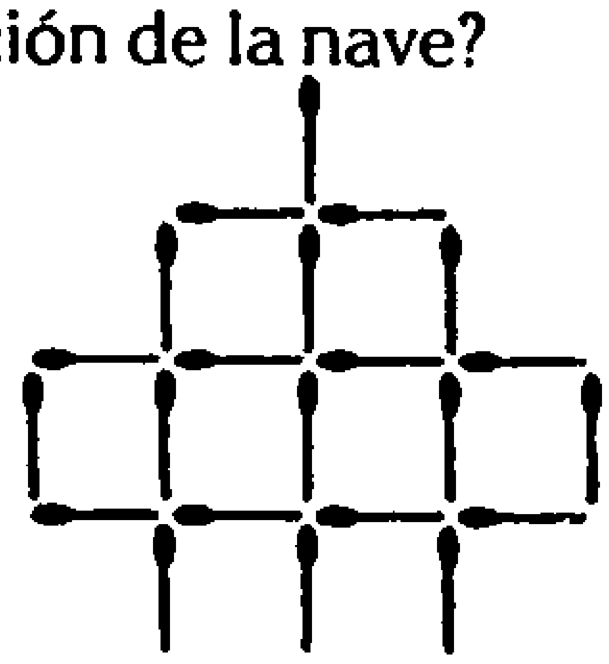
08 En el gráfico mostrado, ¿cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para que se verifique la igualdad?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4*

09 ¿Con cuántos cerillos, como mínimo, se pueden formar *2* cuadrados, *8* triángulos y una estrella de *8* puntas? Los cerillos pueden superponerse, pero no romperse.

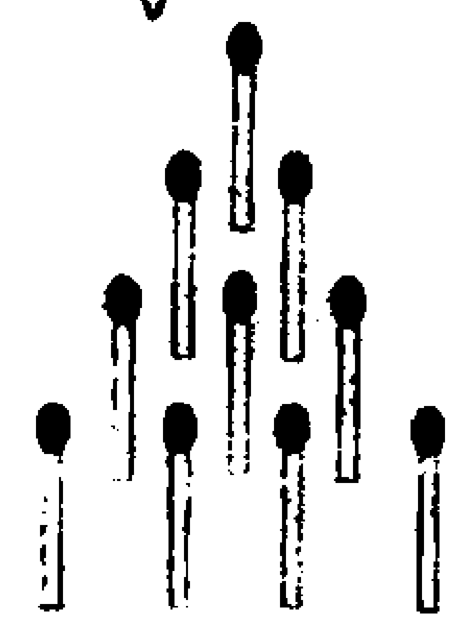
A) 6 *B) 8* *C) 10* *D) 12*

10 ¿Cuál es el menor número de palitos de fósforo que se deben mover para cambiar la dirección de la nave?



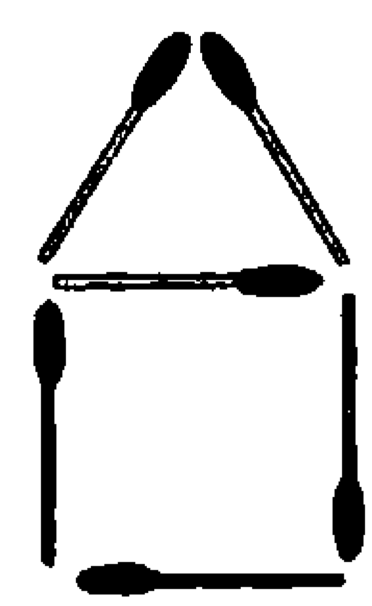
A) 3
B) 5
C) 6
D) 8
E) 10

11 ¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para que la figura triangular (△) cambie de posición ▽?



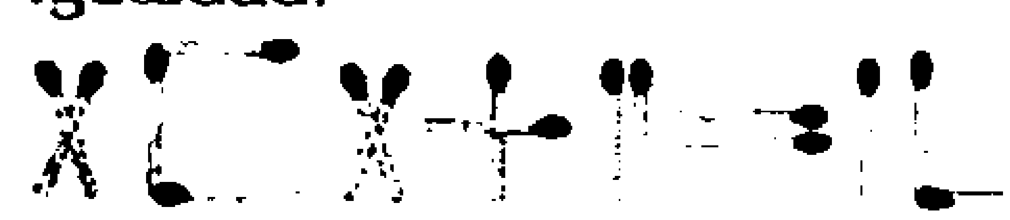
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

12 ¿Cuántos palitos se deben cambiar de posición como mínimo de la siguiente figura, para obtener *4* triángulos equiláteros congruentes?



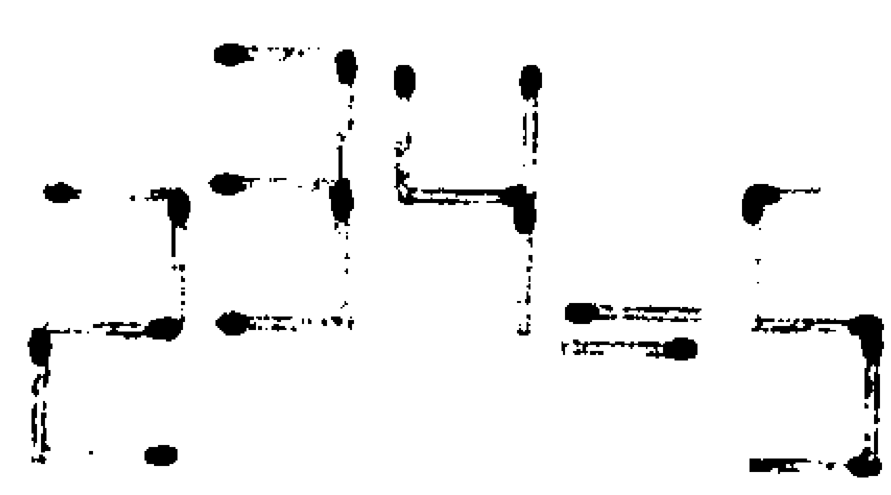
A) 5
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

13 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo , para que se verifique la siguiente igualdad?



A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) más de 4*

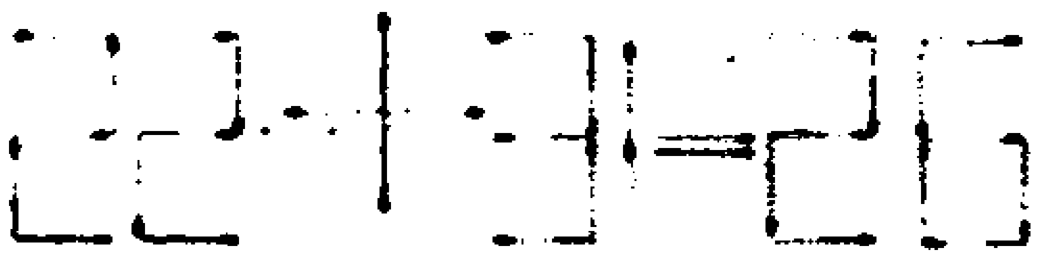
14 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que se verifique la siguiente igualdad?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

15 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que

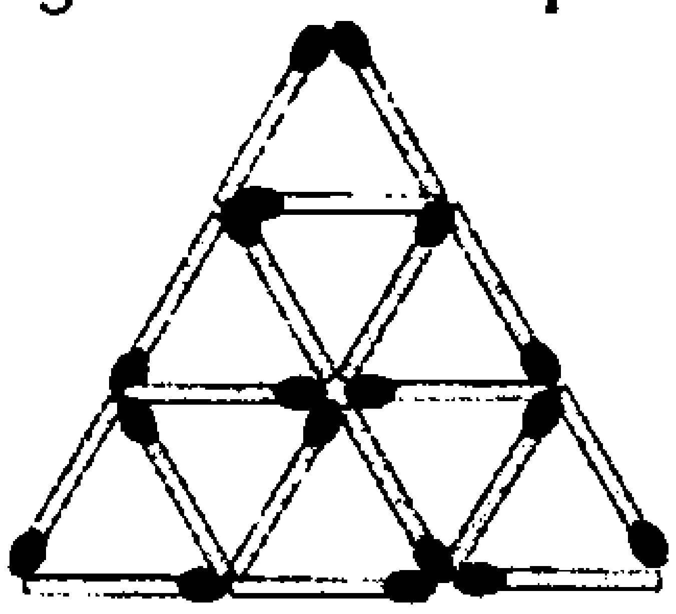
se verifique la siguiente igualdad?



A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) más de 4*

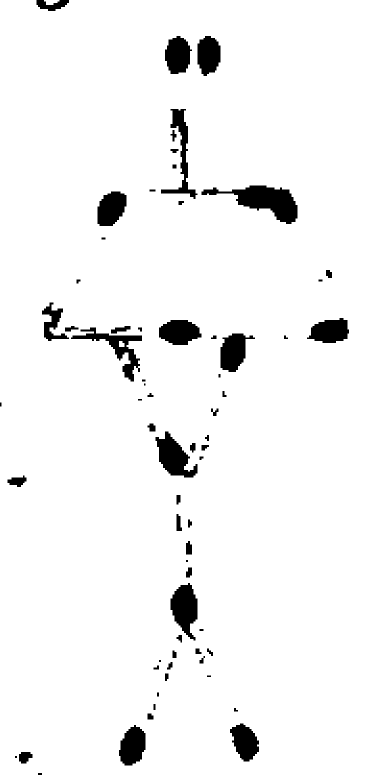
16 ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que el triángulo cambie de posición?

A) 3
B) 4
C) 6
D) 7
E) 9



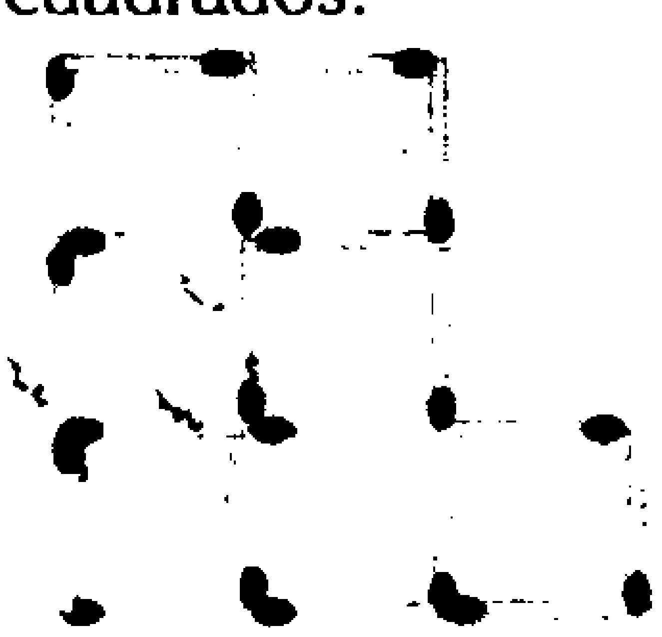
17 El siguiente gráfico representa una lámpara compuesta por *12* cerillos. ¿Cuántos cerillos se deben cambiar de lugar, como mínimo, para que queden *5* triángulos iguales?

A) 2
B) 1
C) 3
D) 4
E) 5

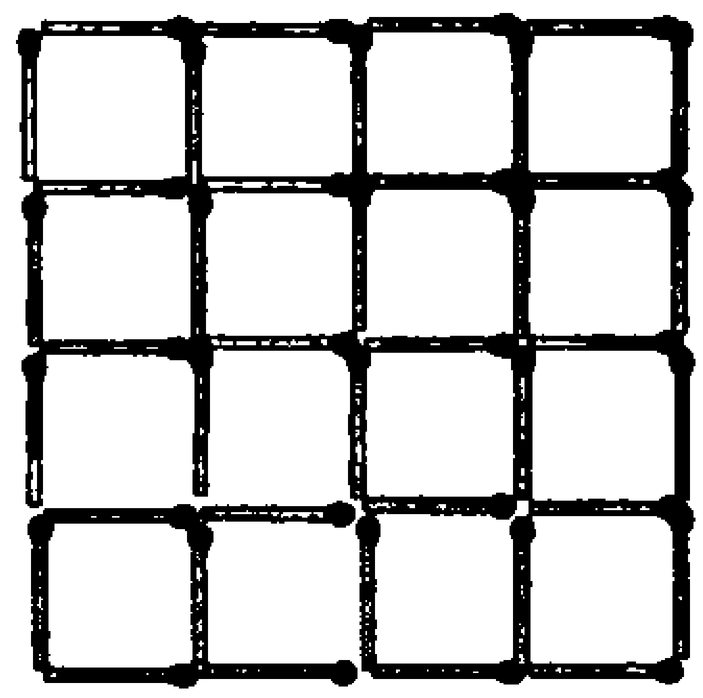


18 En la figura se tiene *20* cerillos de igual longitud. ¿Cuál es el mínimo número de cerillos que se debe cambiar de posición para que resulten cuatro cuadrados?

A) 4
B) 1
C) 2
D) 3
E) 5

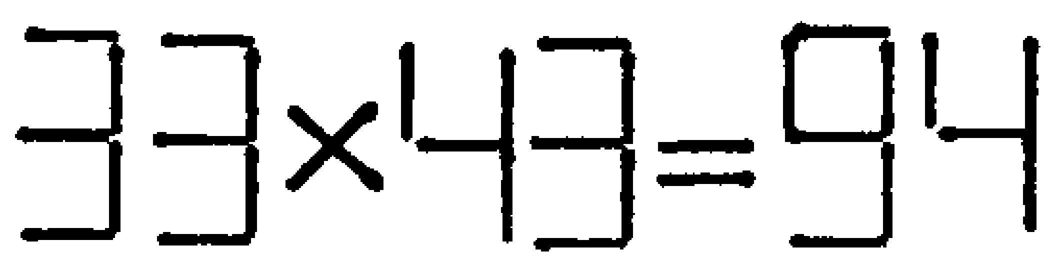


19 El siguiente arreglo está formado por cerillos de igual longitud. Indique la mínima cantidad de cerillos que se deben retirar para que no quede cuadrado alguno.



A)7 *B)8* *C)9* *D)10*

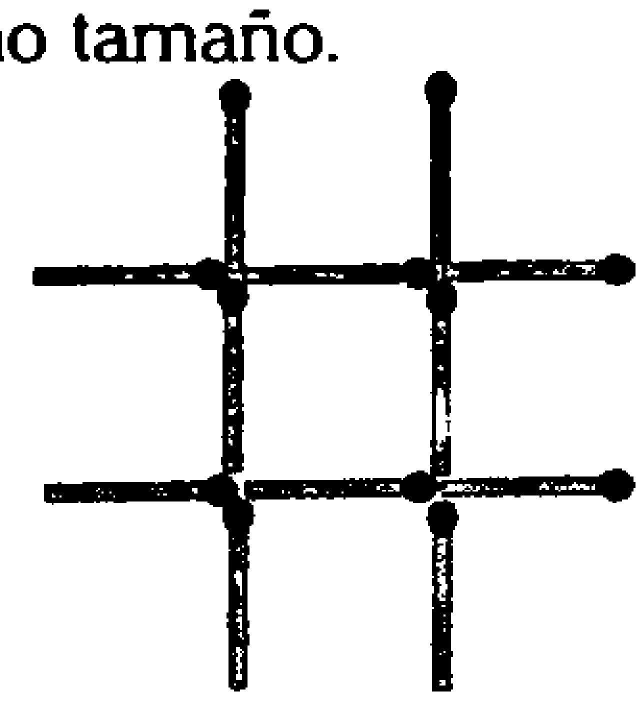
20 Determine la mínima cantidad de cerillos que deben ser cambiados de posición para que la operación sea corerecta.



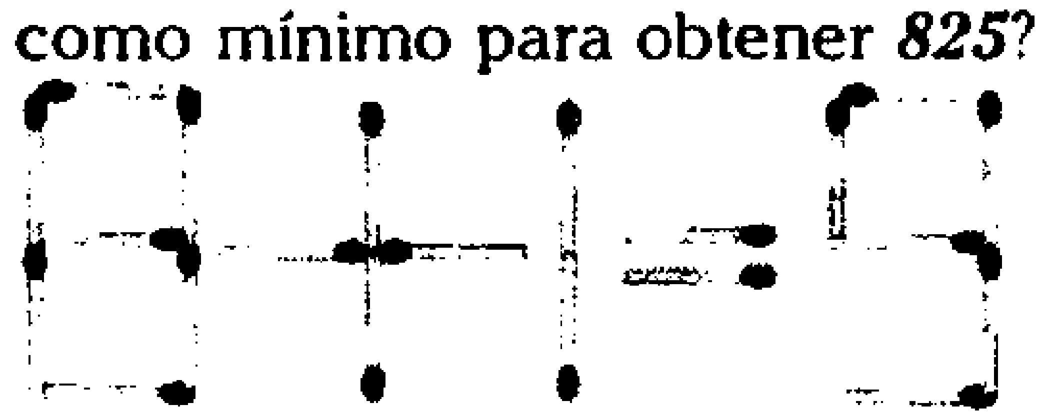
A)1 *B)2* *C)3* *D)4*

21 Determine la mínima cantidad de cerillos que deben ser cambiados de posición para tener solo *3* cuadrados del mismo tamaño.

A) 4
B) 5
C) 3
D) 2
E)6

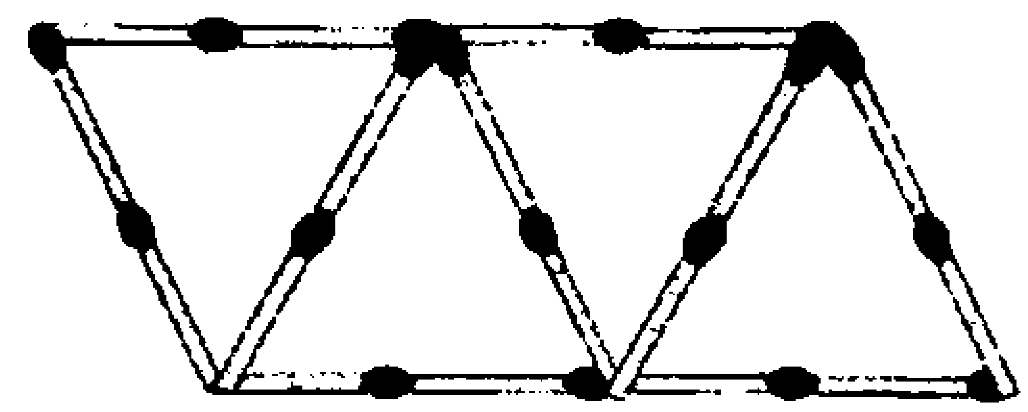


22 En la siguiente operación, ¿cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener *825*?



A)1 *B)2* *C)3* *D)4*

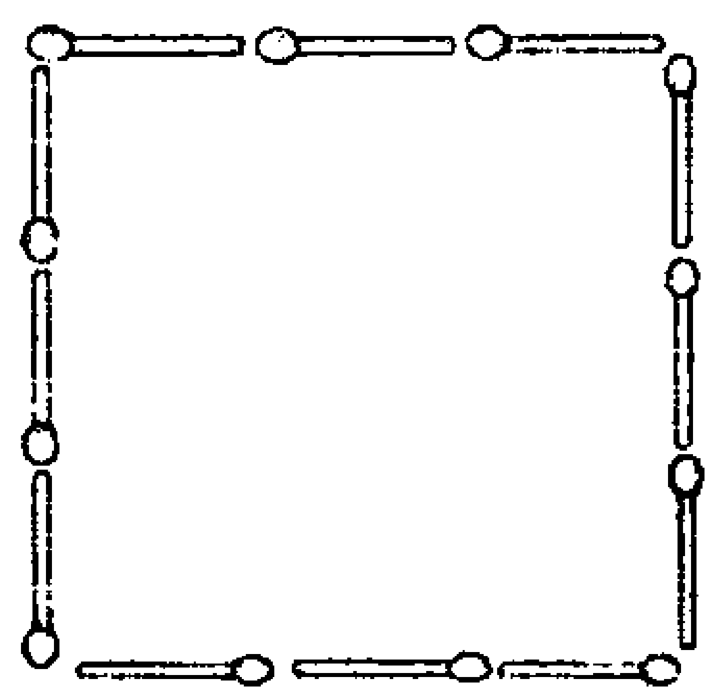
23 En la figura, se tiene *18* cerillos de igual longitud. ¿Cuántas cerillos como mínimo se debe cambiar de posición, para formar el máximo número de triángulos iguales que tenga un cerillo por lado?



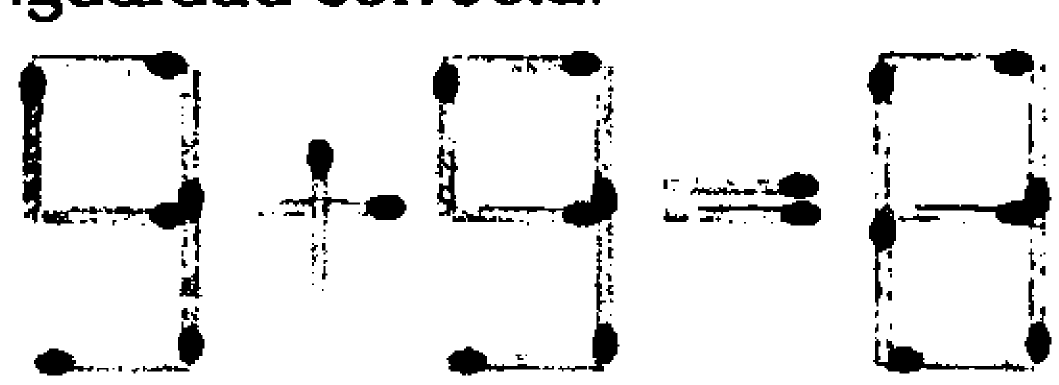
A)7 *B)8* *C)9* *D)10*

24 La figura, es un cuadrado que esta formado por doce cerillos idénticos. ¿Cuántos cerillos hay que mover como mínimo para obtener una figura que tenga el mismo perímetro que el cuadrado y que su área sea los *5/9* del área del cuadrado?

A) 4
B) 5
C) 3
D) 2
E)6



25 En la siguiente figura, ¿cuál es el menor número de cerillos que se debe de cambiar de posición para obtener una igualdad correcta?

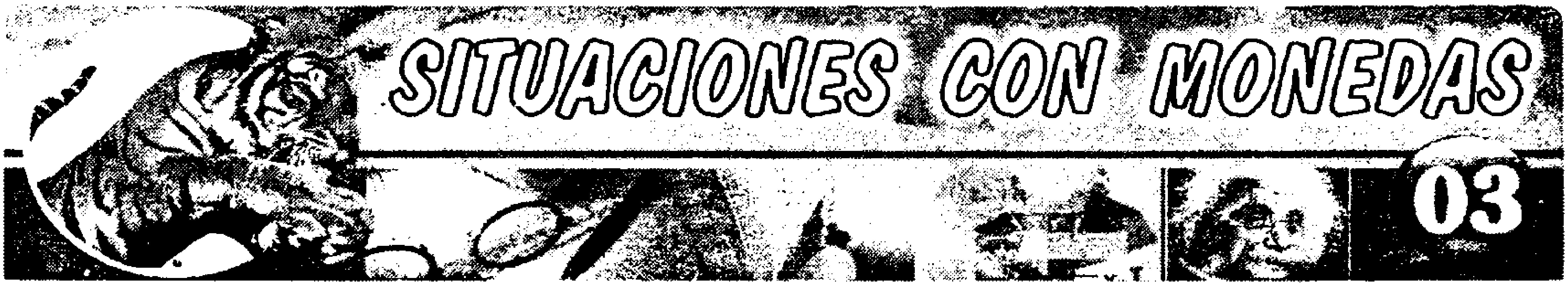


A) 1 *B) 3* *C) 2*
D) 5 *E) 4*

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	B	C	A	C	A	B	A	B	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	C	C	B	C	A	C	C	B
21	22	23	24	25					
C	C	A	A	A					

SITUACIONES CON MONEDAS 03



OBJETIVO :

* Desarrollar a través de situaciones cotidianas y lúdicas , habilidades y destrezas lógicas.

INTRODUCCION :

Existe una gran variedad de problemas que desafían nuestra capacidad de imaginación, creatividad e ingenio.

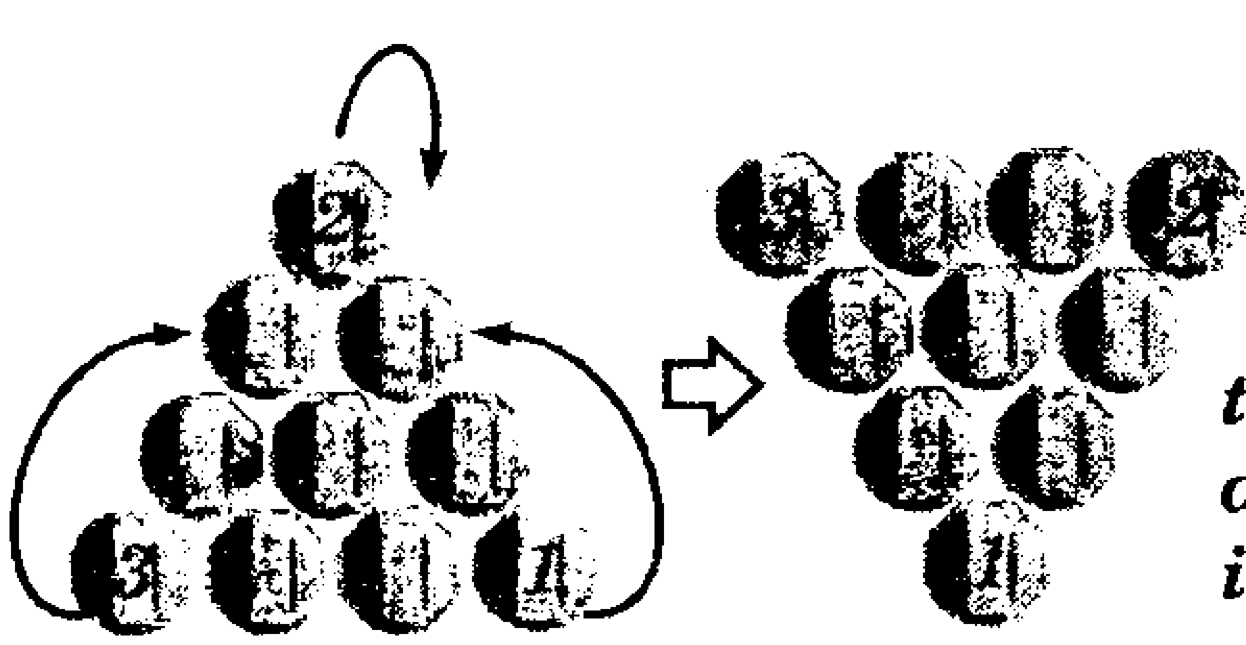
En el capítulo anterior se da con cerillos, llamados también palitos de fósforo, pero se pueden plantear otras situaciones con dados, fichas de dominó, esferas, monedas, etc. instrumentos que están a nuestro alcance y que puestos de cierta manera generan todo un desafío a nuestra habilidad imaginativa, creativa y a nuestro ingenio.

En el caso de las monedas, debemos conocer o haber experimentado algunas posiciones entre ellas; por ejemplo, en el problema siguiente.

¿Cuántas monedas del mismo tamaño se pueden colocar de forma tangencial a las mostradas?

La cantidad de monedas puede ser una, dos o más, ¿pero cuántas monedas se podrán ubicar como máximo? Para responder esta pregunta, previamente debemos responder otra: ¿alrededor de una moneda, exactamente cuántas monedas del mismo tamaño se podrán colocar como máximo? .

Arreglo de monedas



triángulo de monedas invertido

Es aquí donde interviene su habilidad para ingeniarse la forma de obtener la respuesta, y el tiempo que se demore dependerá de la experiencia y los conocimientos que tenga respecto a estos casos.

EL ACERTIJO DE LAS OCHO MONEDAS

Ocho monedas están distribuidas en un tablero con ***10*** casillas, tal como muestra el gráfico ***1***. Se sabe que ***S*** es sello y ***C*** cara. El juego consiste en seleccionar cada vez dos monedas contiguas ***(SS, CC, SC ó CS)***; y manteniendo su posición (orden), debemos desplazarlas hacia otros dos casilleros vacíos también contiguos. ¿Cuál es el menor número de desplazamientos que debe realizarse para obtener, finalmente, la distribución de las ocho monedas como muestra el gráfico ***2***.

Gráfico 1⇒			S	S	S	S	C	C	C	C
Gráfico 2⇒			C	S	C	S	C	S	C	S

RESOLUCIÓN :

Los desplazamientos que resuelven el acertijo se muestran a continuación:

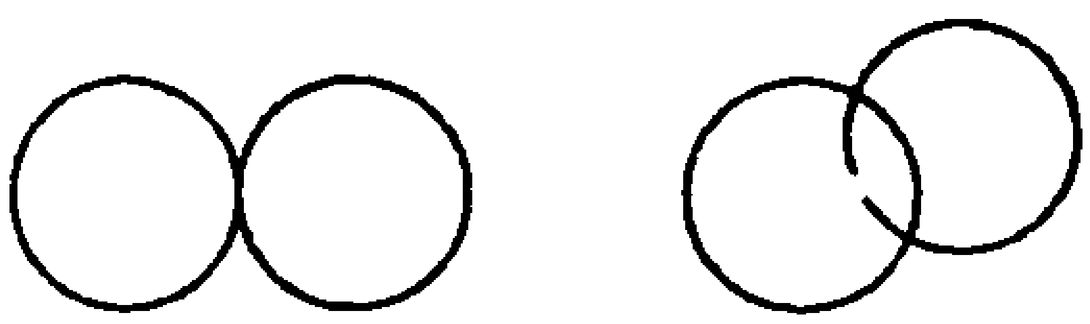
			S	S	S	S	C	C	C	C
1.er movimiento⇒	C	C	S	S	S	S	C	C		
2.° movimiento⇒	C			S	S	S	C	C	C	S
3.er movimiento⇒	C	S	C	S	S			C	C	S
4.° movimiento⇒	C	S	C			S	S	C	C	S
5.° movimiento⇒	C	S	C	S	C	S			C	S
6.° movimiento⇒	C	S	C	S			C	S	C	S
7.° movimiento⇒	C	S			C	S	C	S	C	S
8.° movimiento⇒			C	S	C	S	C	S	C	S

PROBLEMAS CON MONEDAS

En este tipo de problemas debemos de tener en cuenta las siguientes pautas:

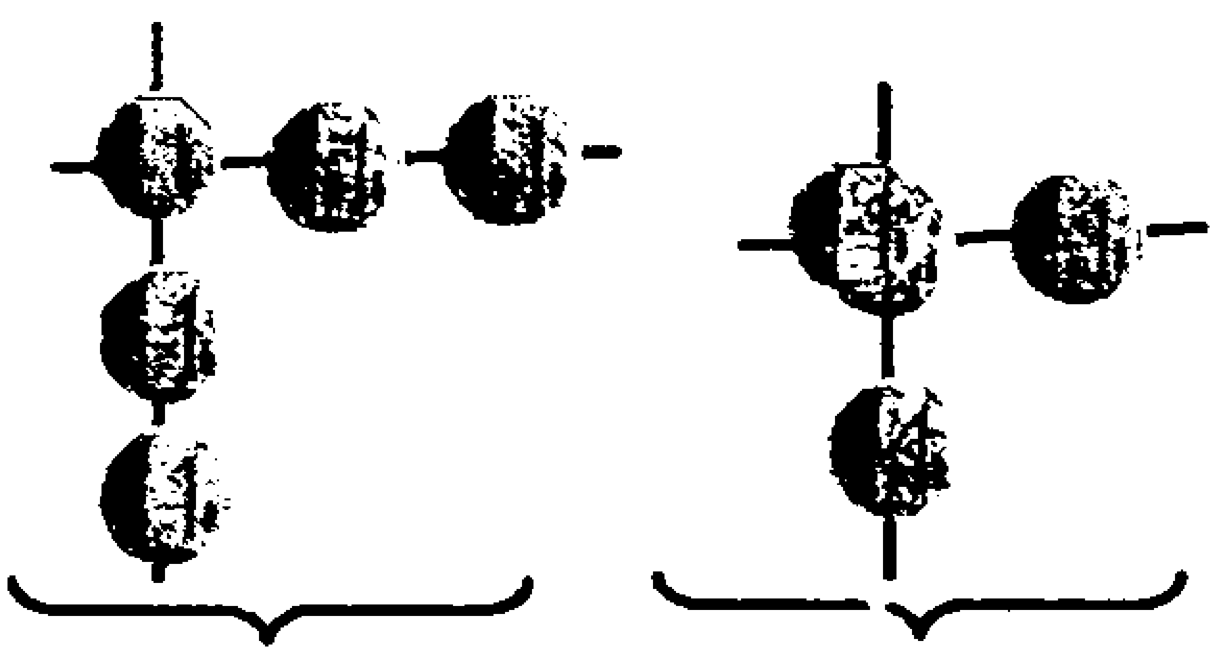
I) Cuando dos monedas son de la misma denominación, entonces son del mismo tamaño y peso.

II) Se dice que dos monedas son tangentes cuando están en contacto como se muestra en el gráfico.



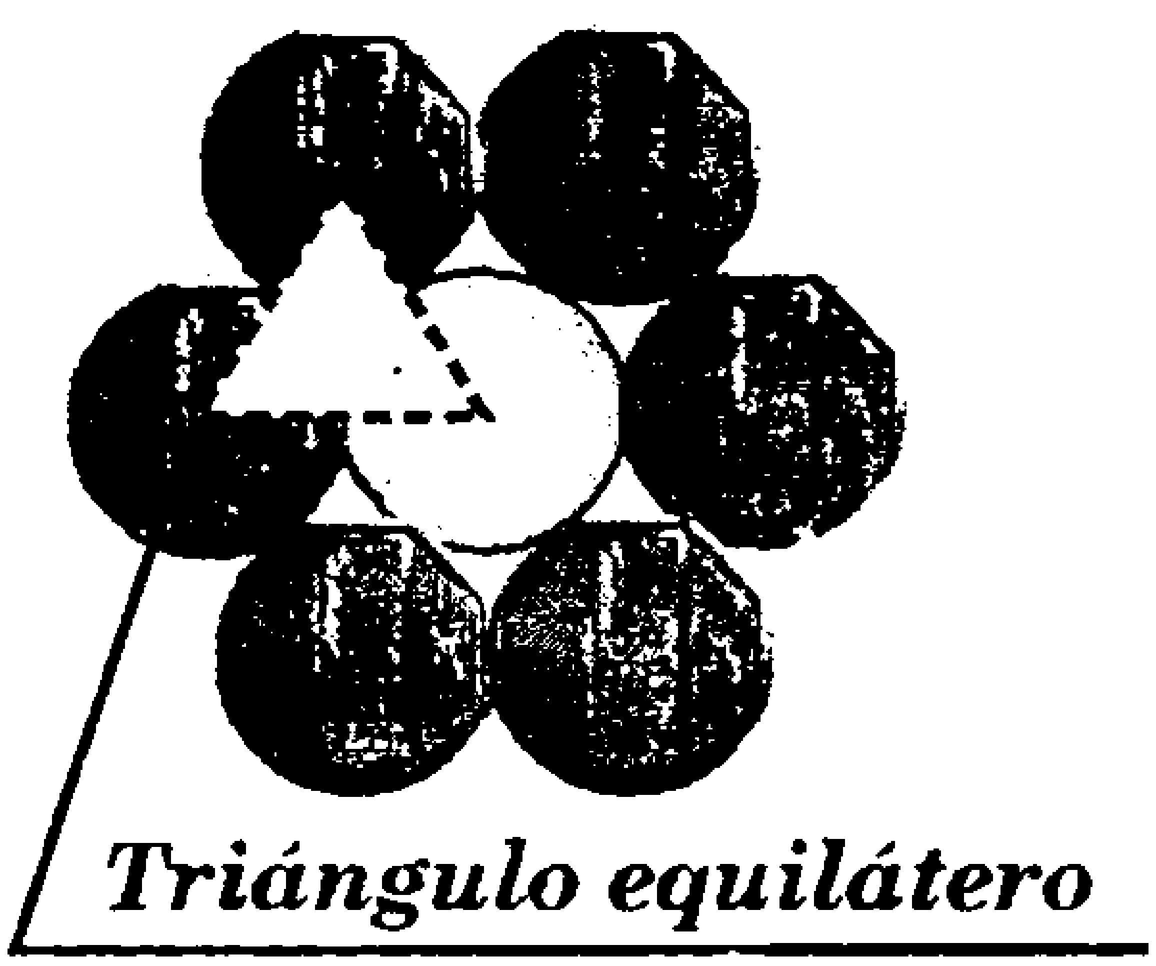
correcto *incorrecto (no deben superonerse)*

III) En aquellos problemas donde nos pidan formar hileras o filas con cierta cantidad de monedas como mínimo, podemos considerar colocar una moneda sobre la otra.



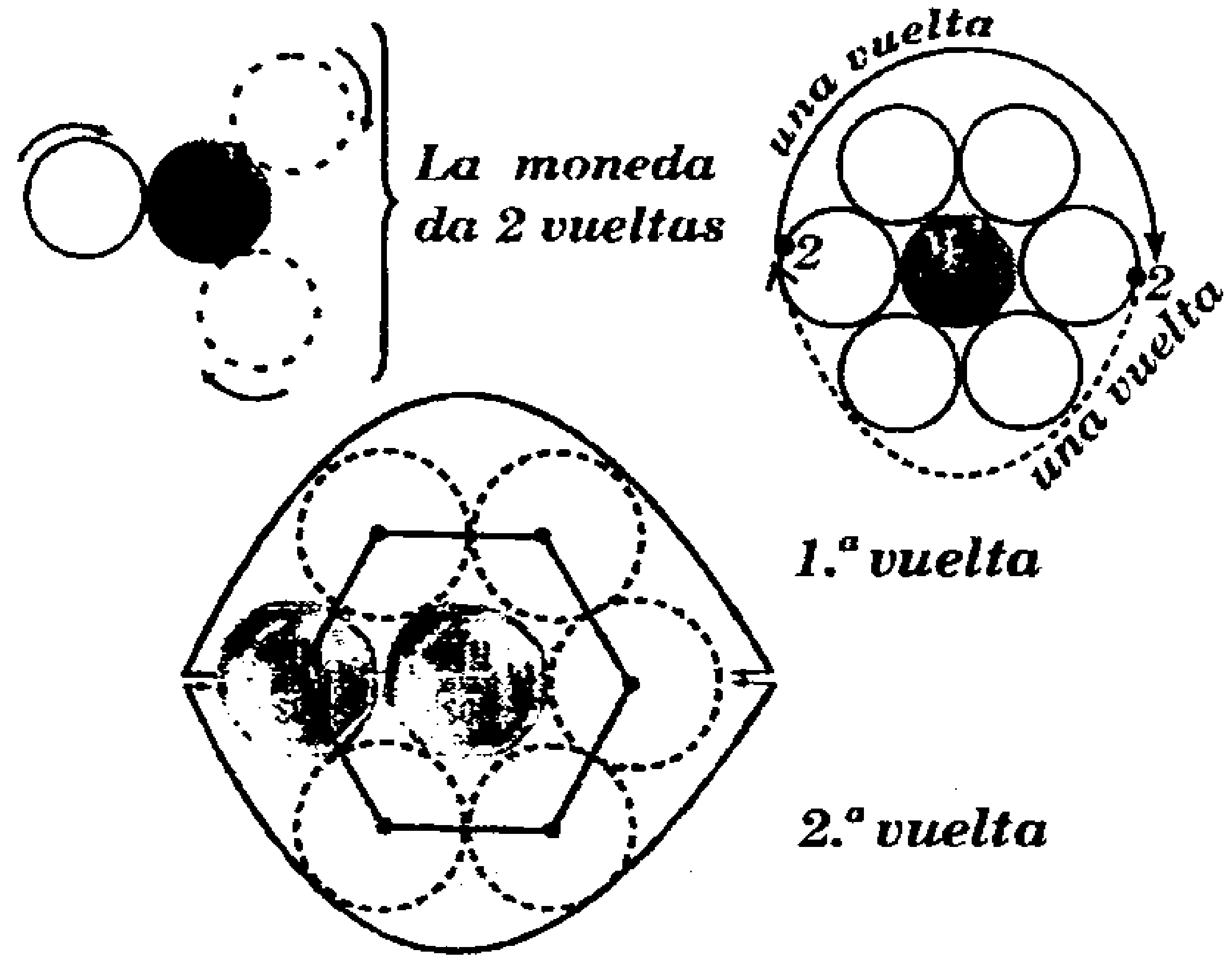
Dos filas de *3* monedas, formadas con *5* monedas. Dos filas de *3* monedas, formadas con *4* monedas.

IV) Alrededor de una moneda se pueden ubicar exactamente, y en forma tangencial, ***6*** monedas de igual tamaño a ella (igual denominación).



V) Una moneda dará dos vueltas alrededor y en forma tangente a otra de igual tamaño (igual denominación).

Apoyándonos en el punto ***2*** podemos decir que cada tres posiciones consecutivas la moneda ha dado una vuelta.



Por ende, cada segmento que une los centros de la moneda, en dos posiciones contiguas, representa ***1/3*** de vuelta.

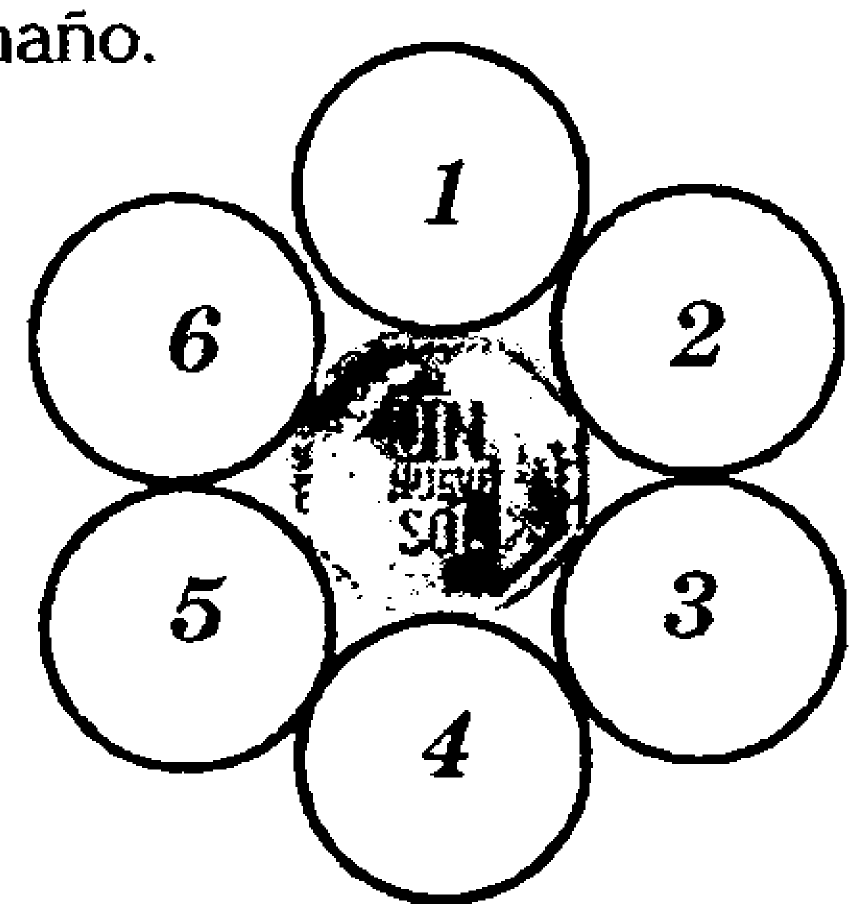
En arreglos de la forma mostrada en los casos anteriores se deduce que:

$$\left[\begin{array}{l}\text{Número de}\\ \text{vueltas que}\\ \text{puede dar}\\ \text{una moneda}\\ \text{alrededor}\end{array}\right] = \frac{1}{3} \times \left[\begin{array}{l}\text{Número de}\\ \text{monedas que}\\ \text{se pueden}\\ \text{colocar}\\ \text{alrededor}\end{array}\right]$$

¡ RECUERDA !

* Si dos monedas son de igual demominación, entonces, son de igual tamaño. Lo contrario no es necesariamente cierto.

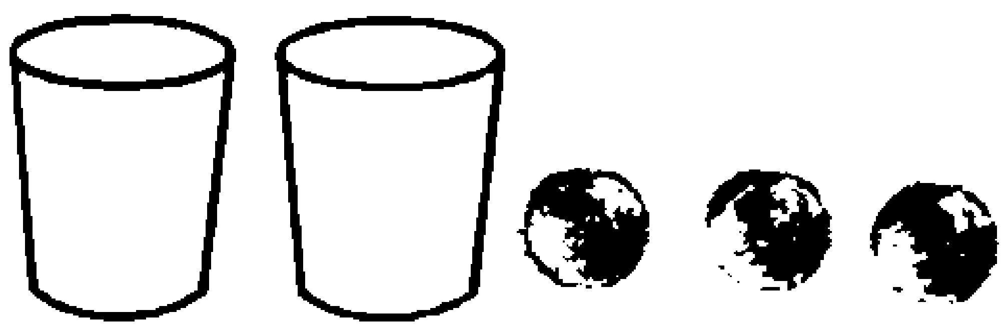
* Para resolver problemas que implican colocar monedas en contorno de otras, se recomienda dibujarlas teniendo en cuenta que en el contorno de una pueden haber seis, como máximo, del mismo tamaño.



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

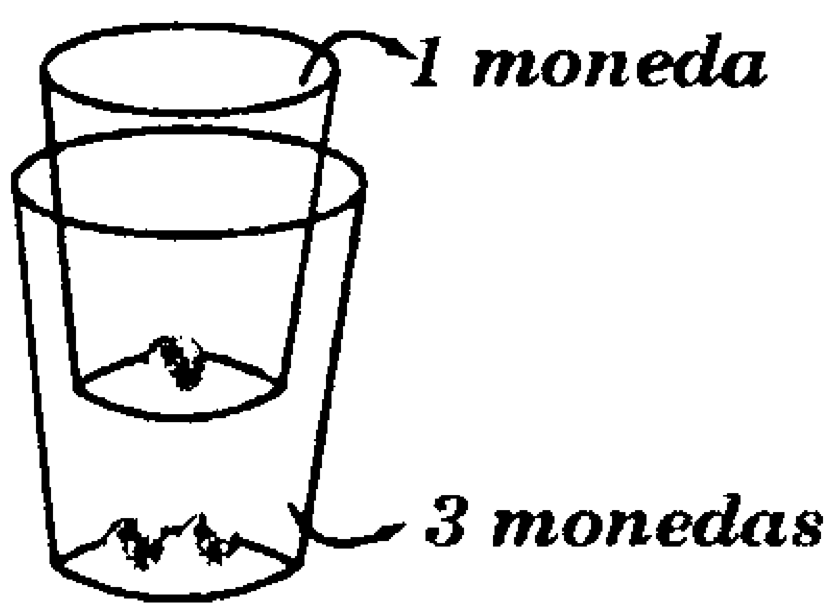
Coloque *3* monedas en los *2* vasos de tal manera que en cada vaso haya un número impar de monedas. ¿Se puede lograr?



A) es imposible *B) faltan datos*
C) faltan monedas *D) se puede colocar*
E) faltan vasos

RESOLUCIÓN :

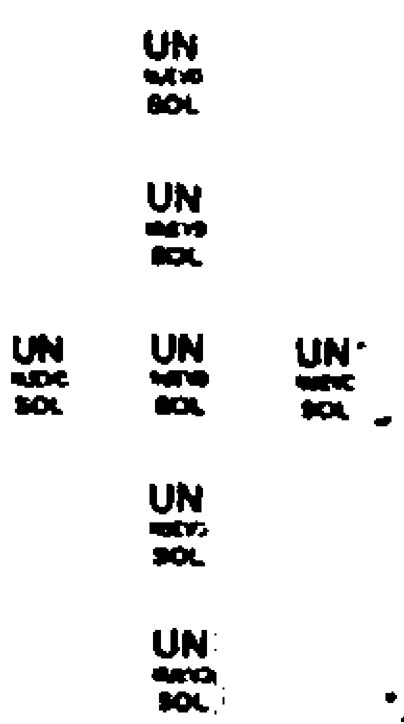
La forma de colocarlo sería:



Por lo tanto, sí se puede colocar.

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :



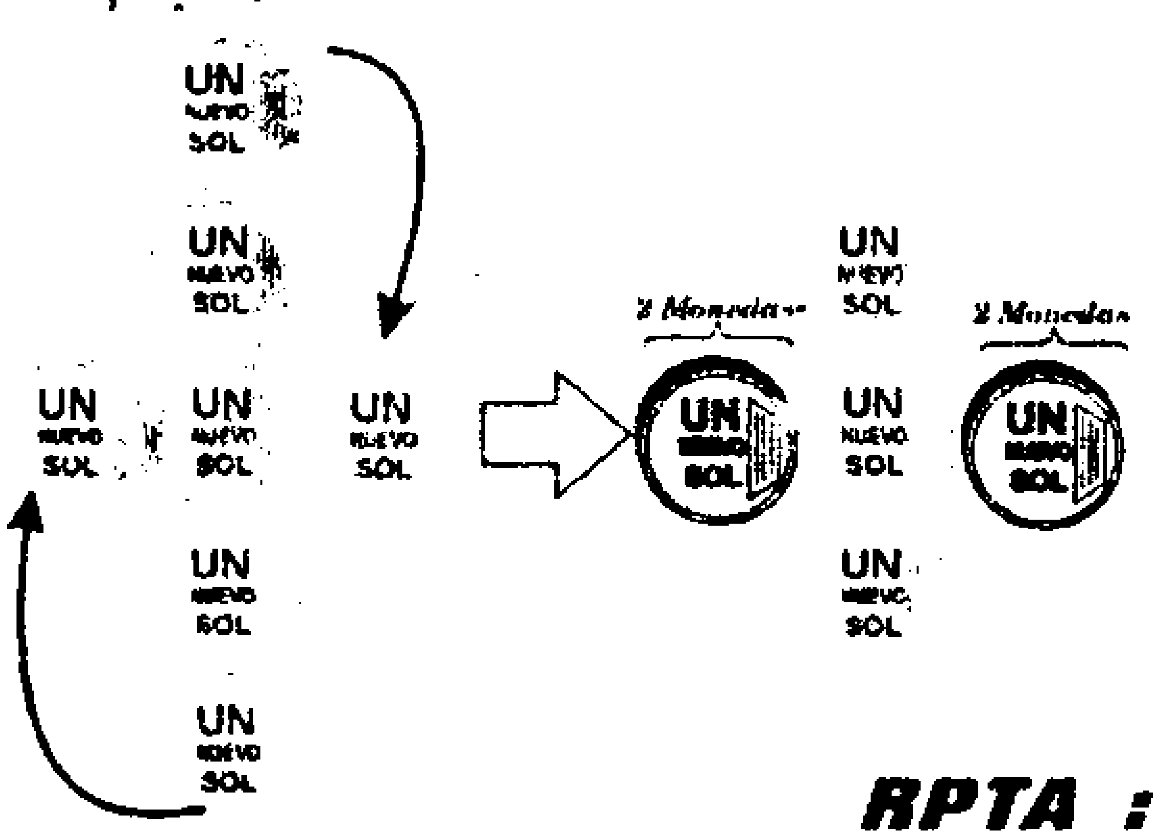
Con siete monedas se forma una cruz como se muestra en el siguiente gráfico.

¿Cuántas monedas se deben cambiar de posición, como mínimo, para obtener una cruz simétrica?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 6* *E) 5*

RESOLUCION :

Es suficiente mover y a la vez superponer dos monedas , así :



RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

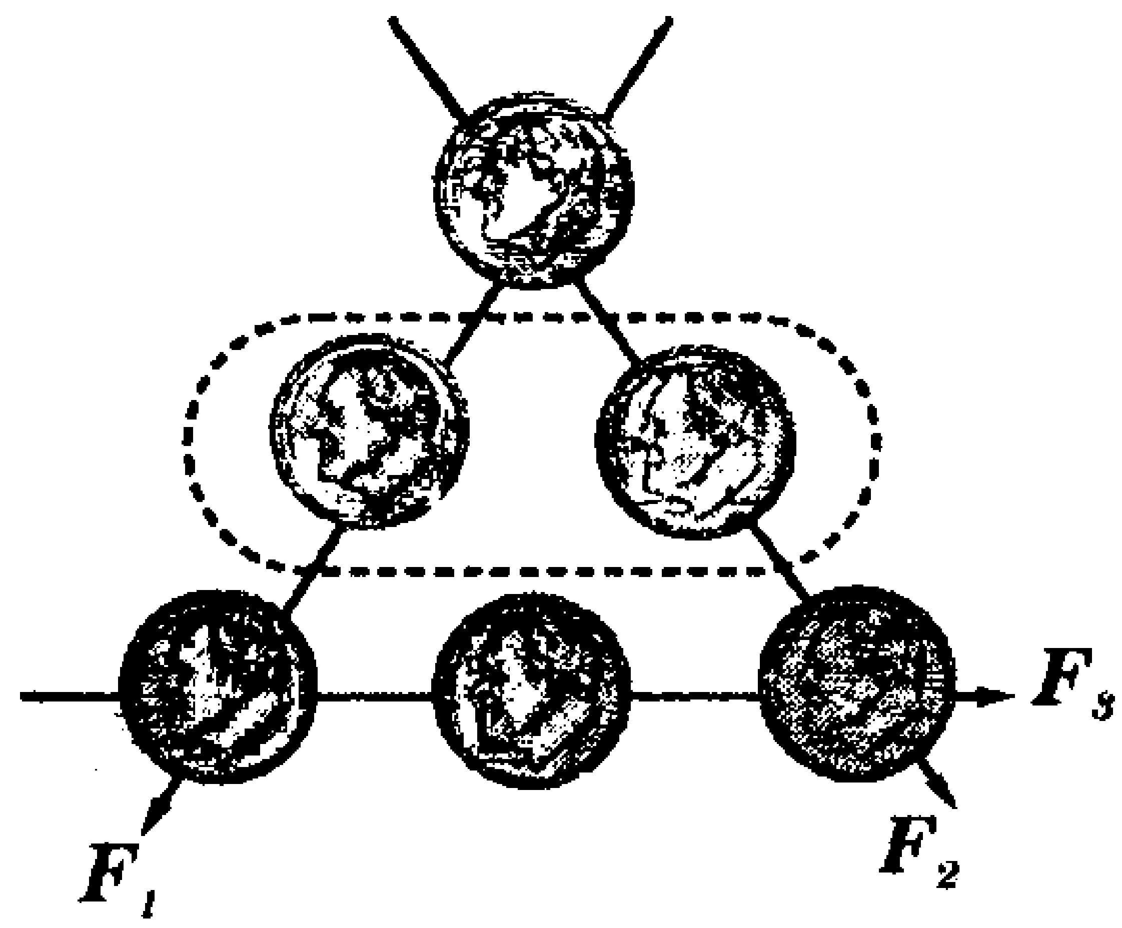
¿Cuántas monedas del mismo tamaño se deben colocar, como mínimo sobre una mesa para obtener *4* filas de *3* monedas cada una?

A) 5 *B) 8* *C) 4* *D) 6* *E) 7*

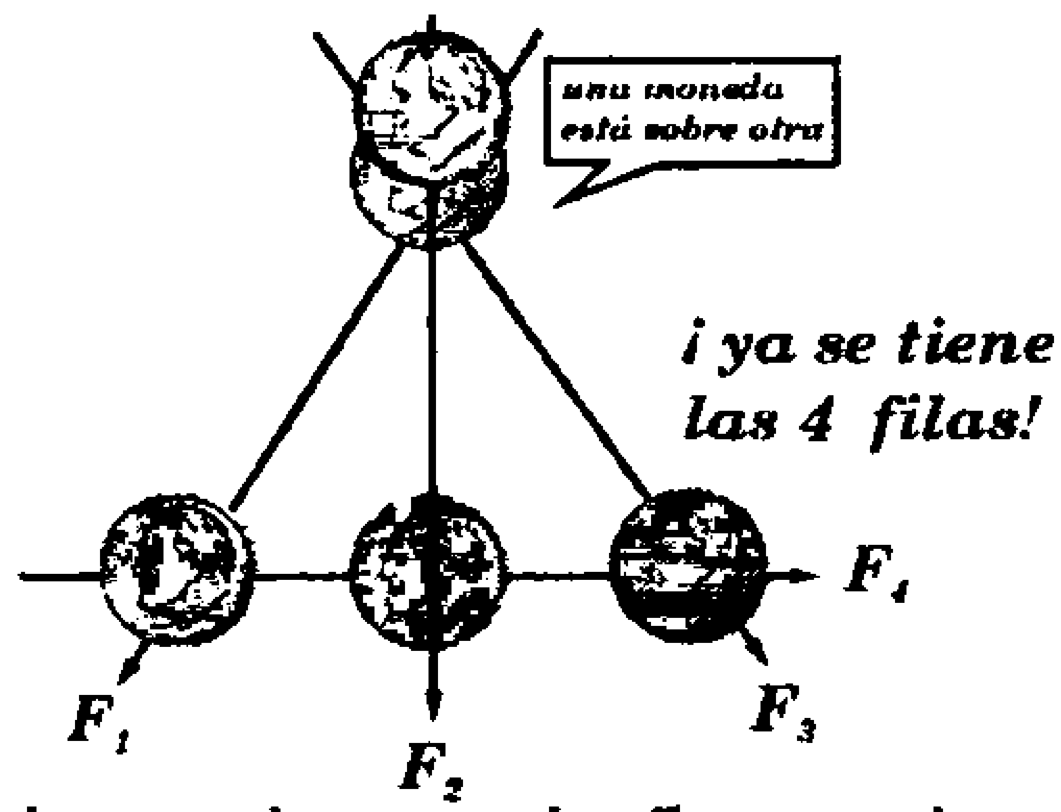
RESOLUCIÓN :

Se pide la menor cantidad de monedas para formar *4* filas de *3* monedas cada una.

En lo primero que se podría pensar es en formar un triángulo con *3* monedas por lado.



Pero solo conseguimos *3* filas de *3* monedas cada una. Además, si reemplazamos las *2* monedas que se han seleccionado, solo por una moneda, podemos obtener lo pedido.



⇒Se deben colocar solo *5* monedas sobre la mesa.

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

¿Cuántas monedas son necesarias, como mínimo, para poder formar *6* filas de tres monedas cada una, si no debe haber monedas en contacto?

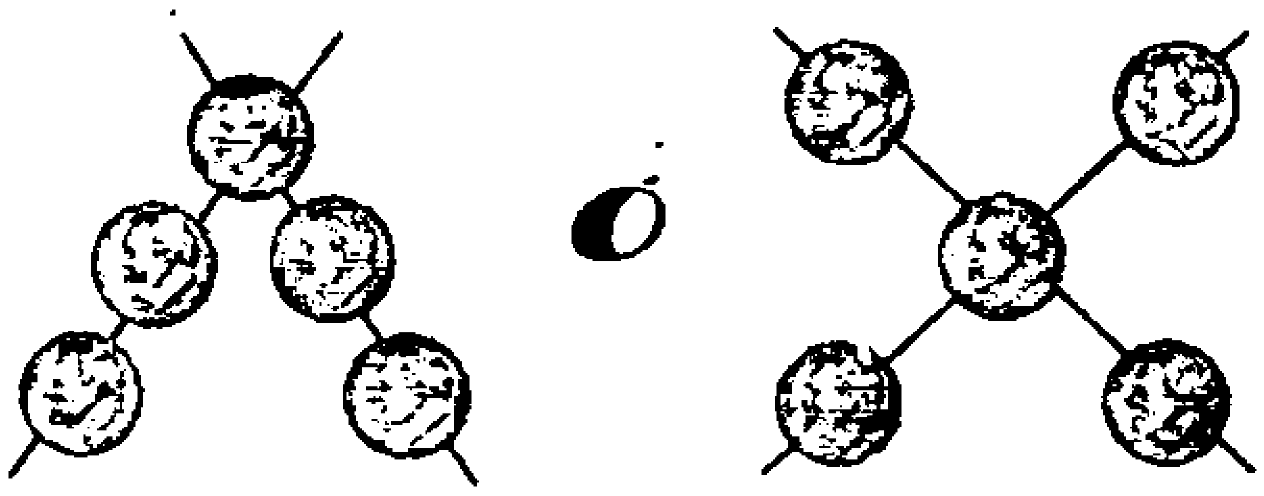
A) 7 *B) 9* *C) 6* *D) 8* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

Se pide la menor cantidad de monedas para formar *6* filas de *3* cada una.

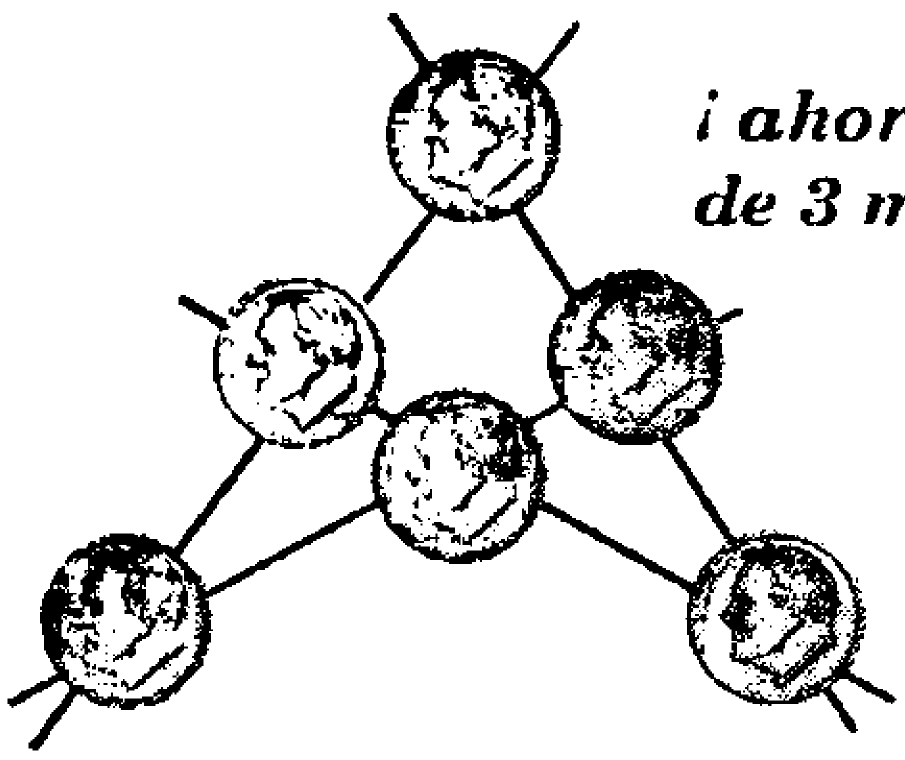
CONDICIÓN: No debe haber monedas en contacto.

Para garantizar que la cantidad a utilizar sea la menor posible debemos hacer que cada moneda pertenezca a más de una fila. Por ejemplo:



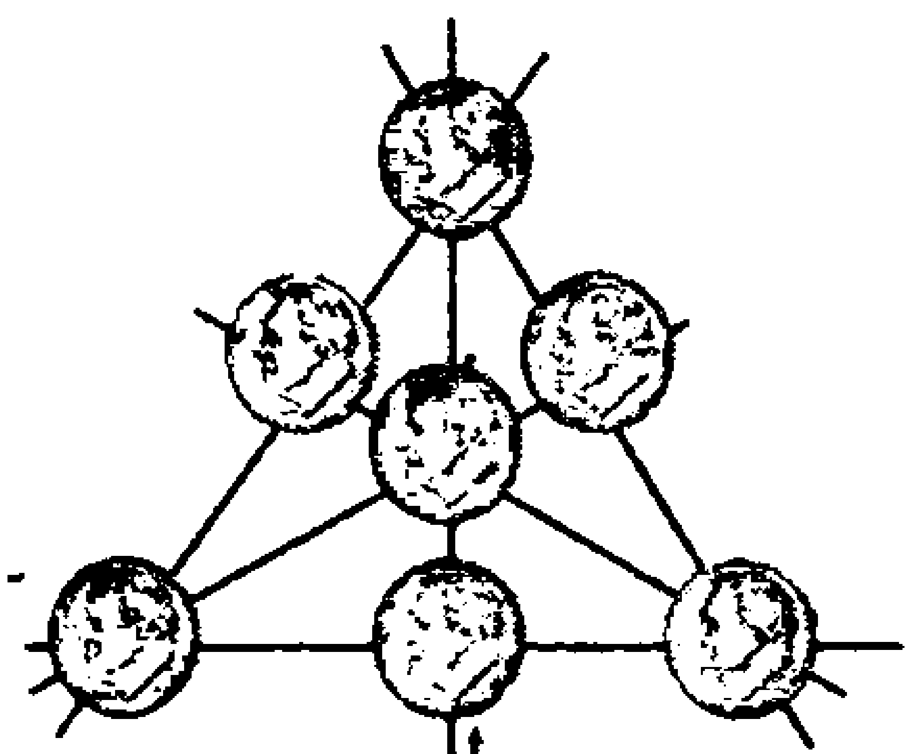
Para ambos casos obtenemos dos filas con **5** monedas en total.

Si juntamos los dos casos anteriores en uno, haciendo que la mayor cantidad de monedas coincidan obtendremos lo siguiente:



¡ ahora tenemos 4 filas de 3 monedas cada una !

Para obtener las dos filas ***(de 3 monedas)*** que faltan será necesario aumentar solo una moneda. Veamos:



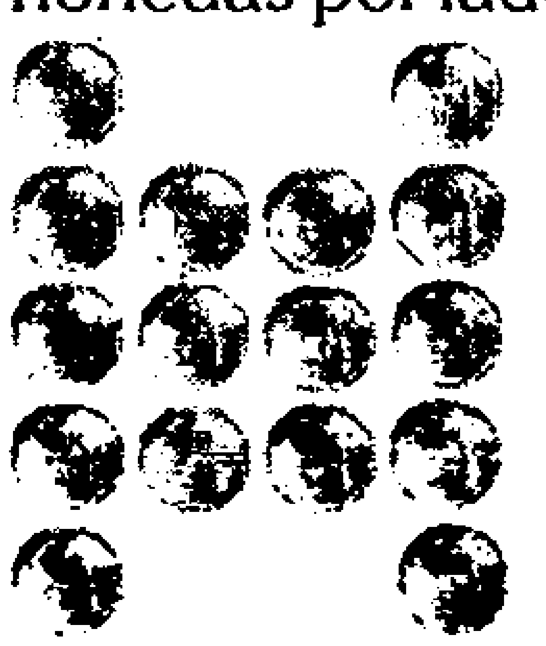
⇒ ***Son necesarias 7 monedas como mínimo.***

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

El siguiente gráfico muestra en arreglo de monedas de igual tamaño. ¿Cuántas monedas se tienen que mover, como mínimo, para formar un cuadrado con **6** monedas por lado?

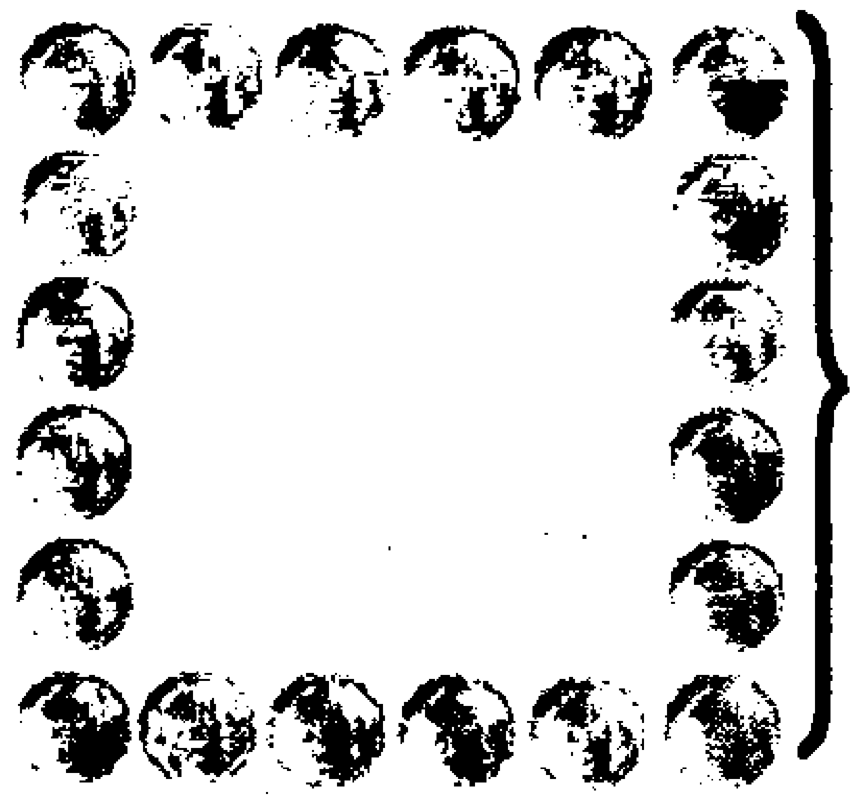
A) 9
B) 7
C) 4
D) 6
E) 8



RESOLUCIÓN :

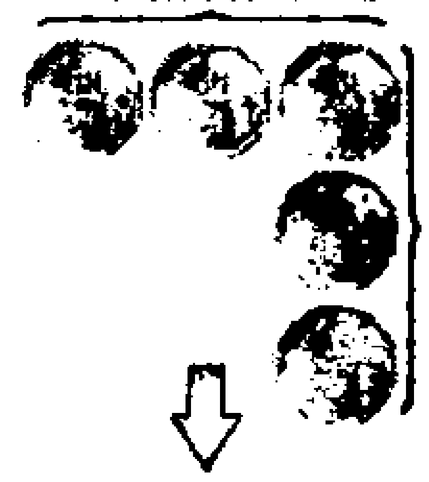
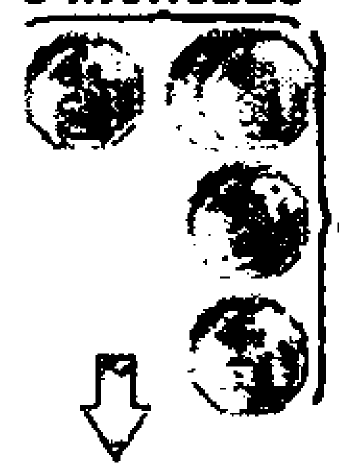
Se pide la menor cantidad de movimiento de monedas para formar un cuadrado con **6** monedas por lado.

En el gráfico se observa ***16*** monedas en total, y se podría pensar que es imposible formar un cuadrado con 6 monedas por lado, en el caso que el cuadrado sea como el que mostramos.

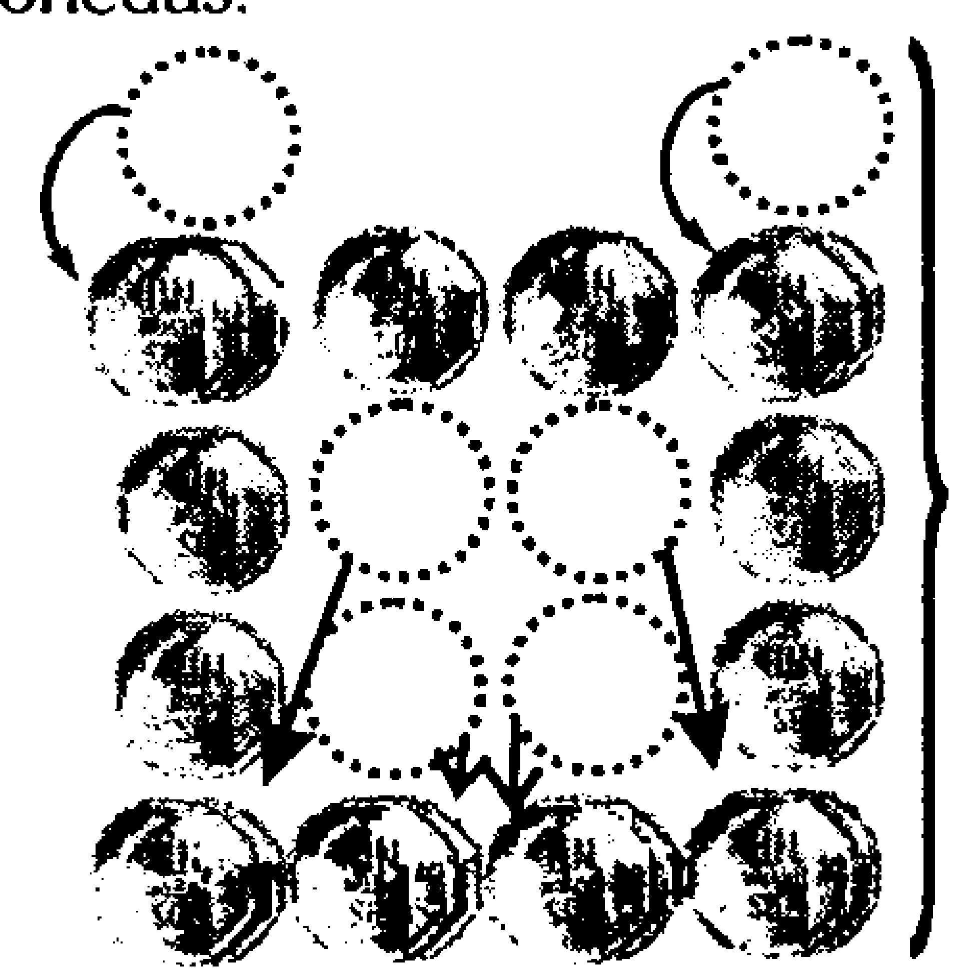


¡Faltarían 4 monedas!

Pero para compensar esas **4** monedas que aparentemente faltan, colocaremos ***una moneda sobre otra***, veamos:

Caso 1	*Caso 2*
3 monedas  *3 monedas* ⇩ *5 monedas en total*	*3 monedas*  *3 monedas* ⇩ *4 monedas en total (Una moneda menos al colocar una moneda sobre otra)*

Haremos lo mostrado en el caso **2** para formar el cuadrado pedido moviendo la menor cantidad de monedas.

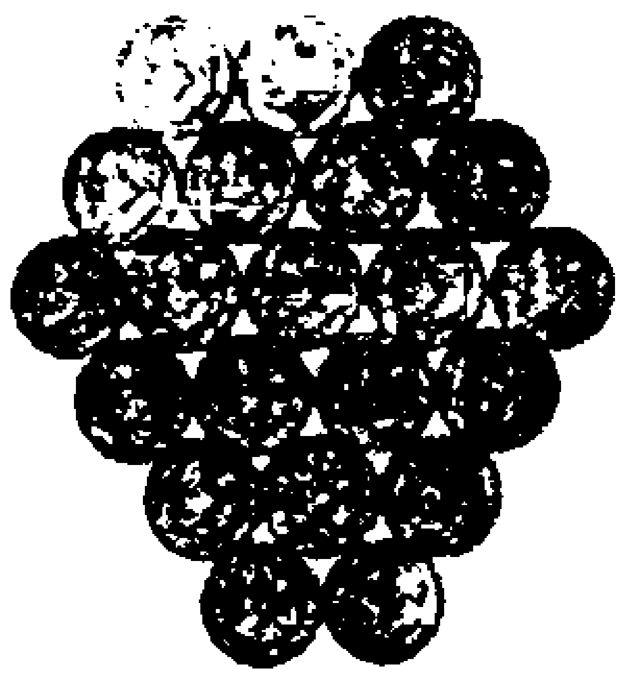


⇒ ***Se mueven 6 monedas como mínimo.***

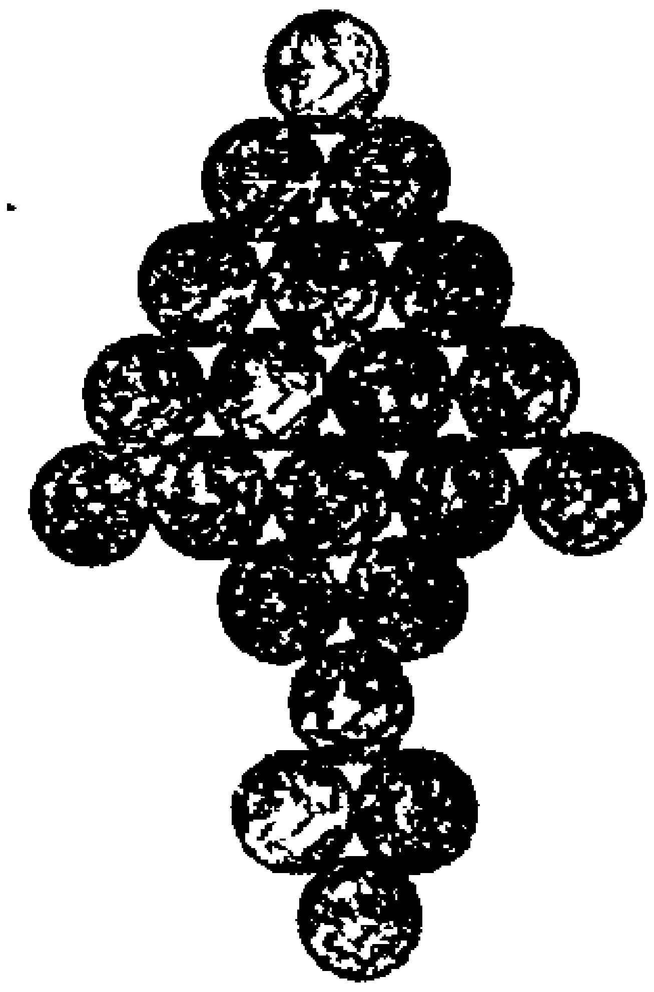
RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

¿Cuántas monedas del gráfico *I* se deben mover, como mínimo, para obtener el gráfico *II*?



(I)



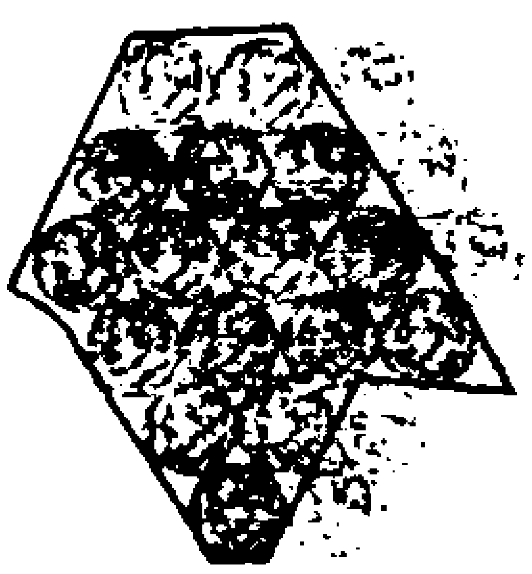
(II)

A) 6 *B) 9* *C) 3* *D) 7* *E) 5*

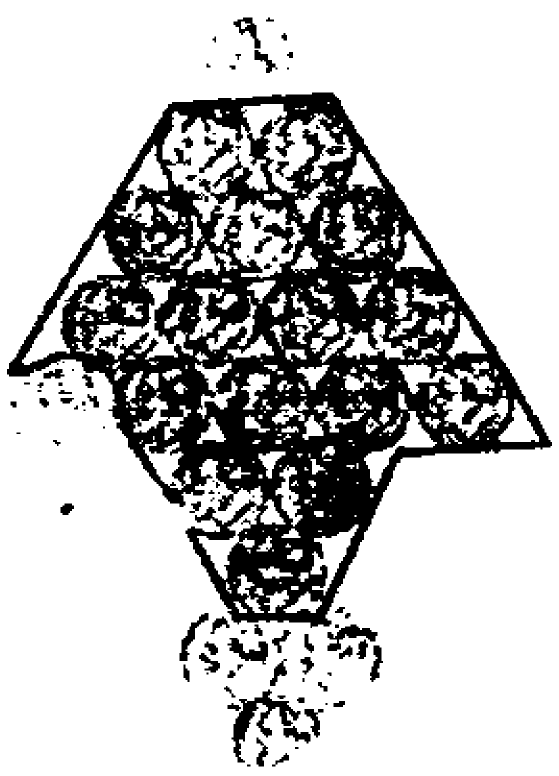
RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad mínima de monedas que se deben mover para obtener el gráfico *II* a partir del *I*.

Comparemos ambos gráficos y ubiquemos la mayor cantidad de monedas que presente la misma posición, es decir:

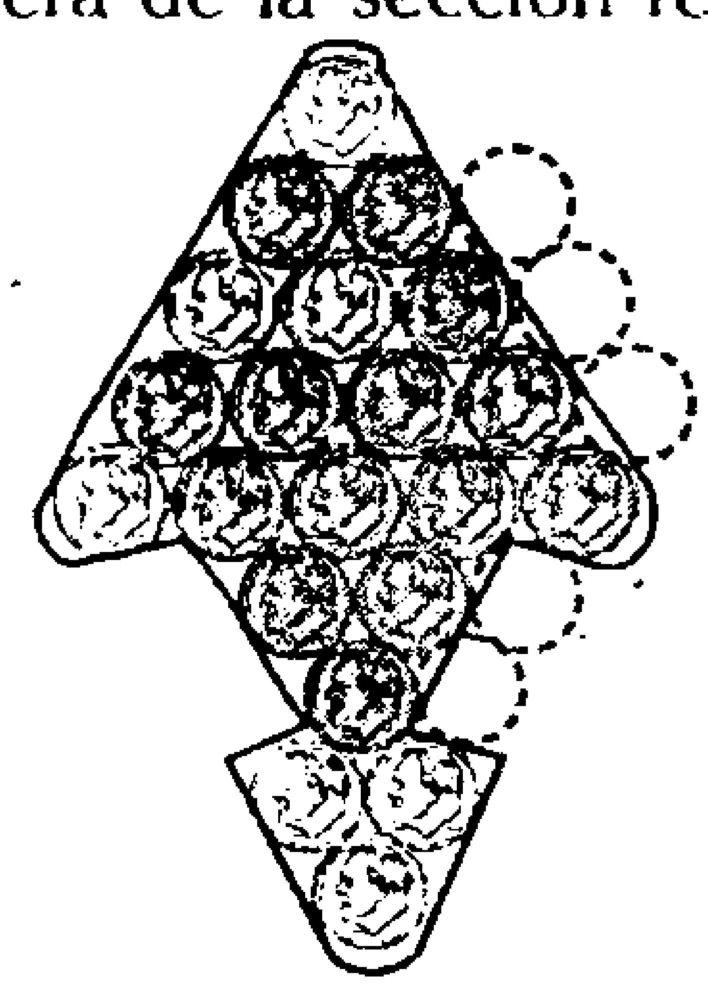


(I)



(II)

Esas *5* monedas que queden fuera de la sección que se ha resaltado en el gráfico *I* son las que deben de mover a las posiciones de las monedas que están fuera de la sección resaltada en el gráfico *II*.



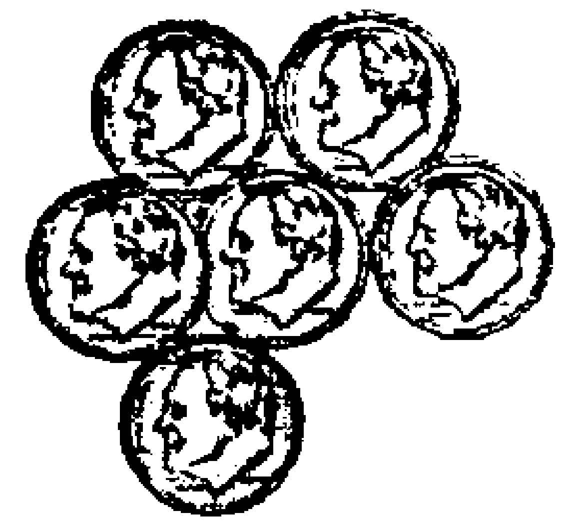
⇒ *Se* moverán como mínimo *5* monedas

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Sobre una mesa se han distribuido *6* monedas como se muestra en el gráfico, todas de la misma denominación. Si ubicamos una moneda (igual a las anteriores) de modo que sea tangente a algunas de las mostradas, ¿Cuántas monedas se pueden ubicar alrededor y tangente a la nueva distribución de monedas como máximo? Considere que estas últimas monedas también son de igual denominación que las anteriores.

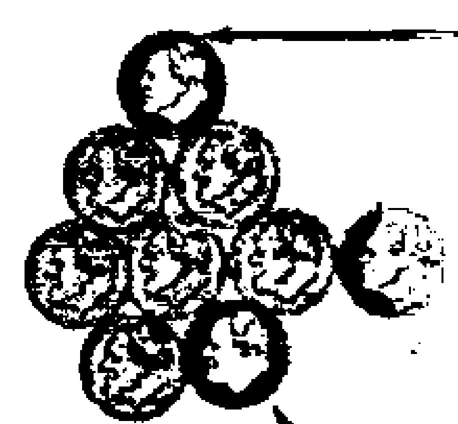
A) 11
B) 12
C) 13
D) 14
E) 15



RESOLUCIÓN :

En el gráfico que se muestra, primero se debe ubicar una moneda tangente a alguna de las que se tiene y luego ubicar la mayor cantidad de monedas alrededor y tangentes. Para ello, tenemos los siguientes casos:

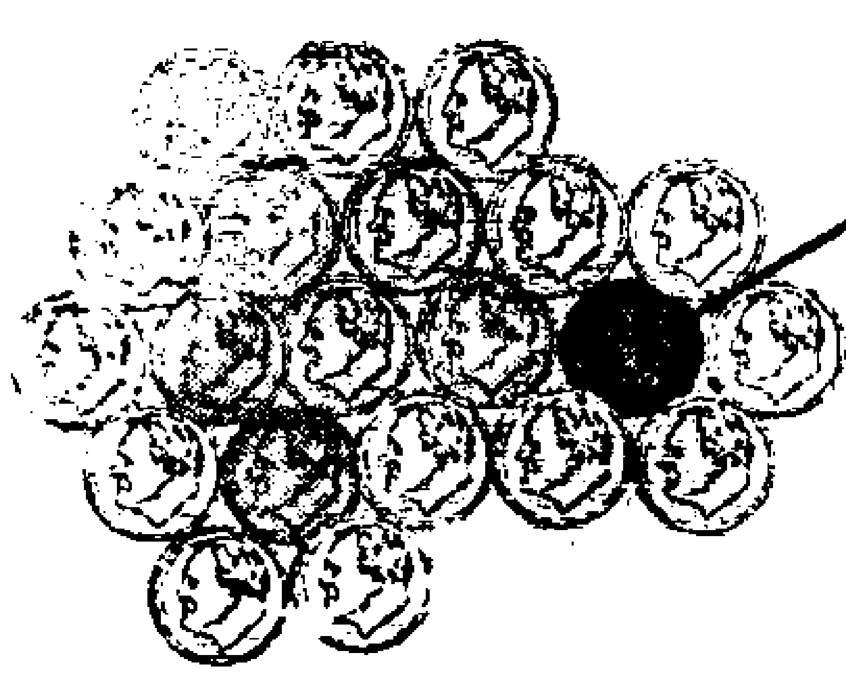
Para rodearla faltan 4 monedas (caso 1)



Para rodearla faltan 5 monedas (caso 2)

Para rodearla falta 3 monedas (caso 3)

Para que se garantice que la cantidad de monedas a colocar alrededor y tangente a las que ya se tiene sea máxima, consideramos el *caso 2*, ya que para rodear a dicha moneda se necesitan *5* monedas más ***(la mayor cantidad de los 3 casos)***. Entonces ahora ubicaremos las monedas alrededor y tangentes:

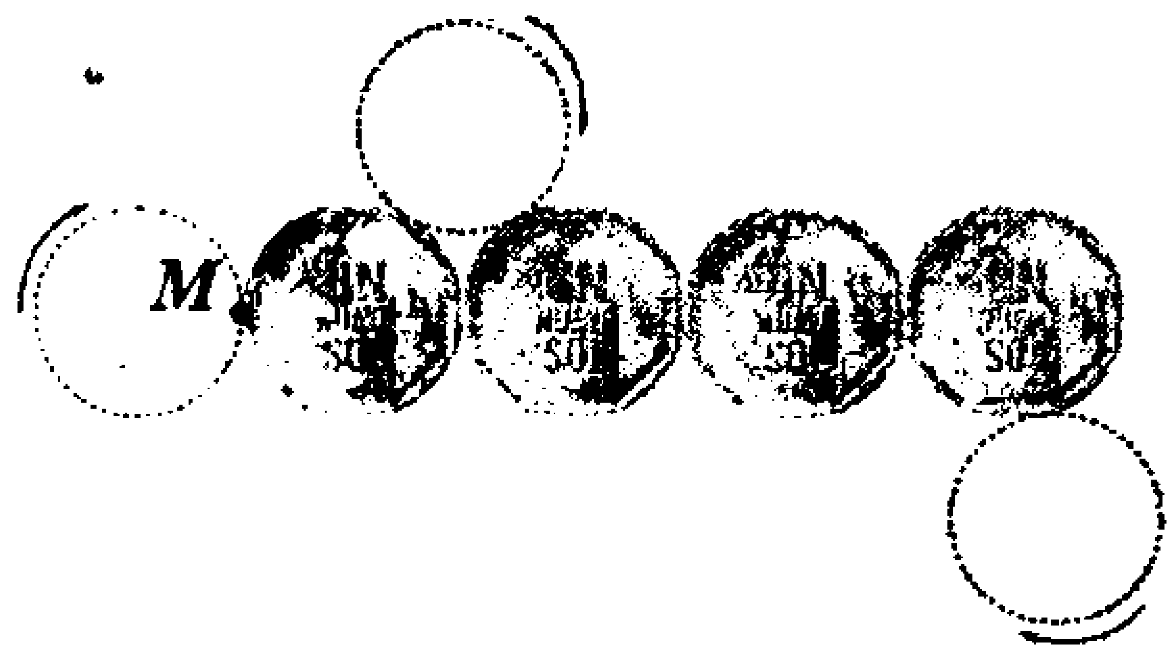


⇒ Se ubicarán como máximo *14* monedas.

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

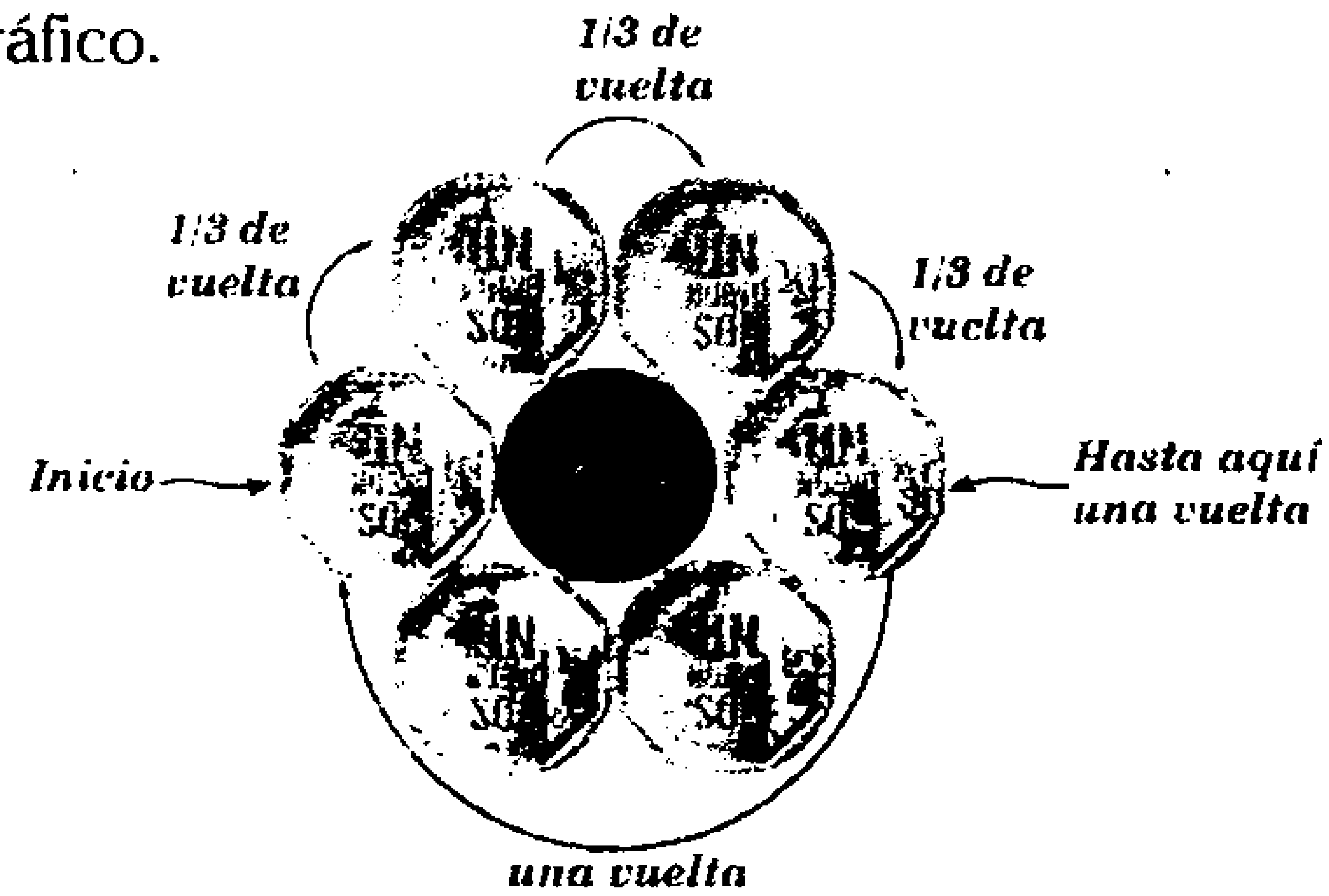
¿Cuántas vueltas dará una moneda alrededor de las cuatro monedas del mismo tamaño que están ubicadas en fila y tangencialmente, como muestra el gráfico, si inicia y temina su recorrido en *M*?



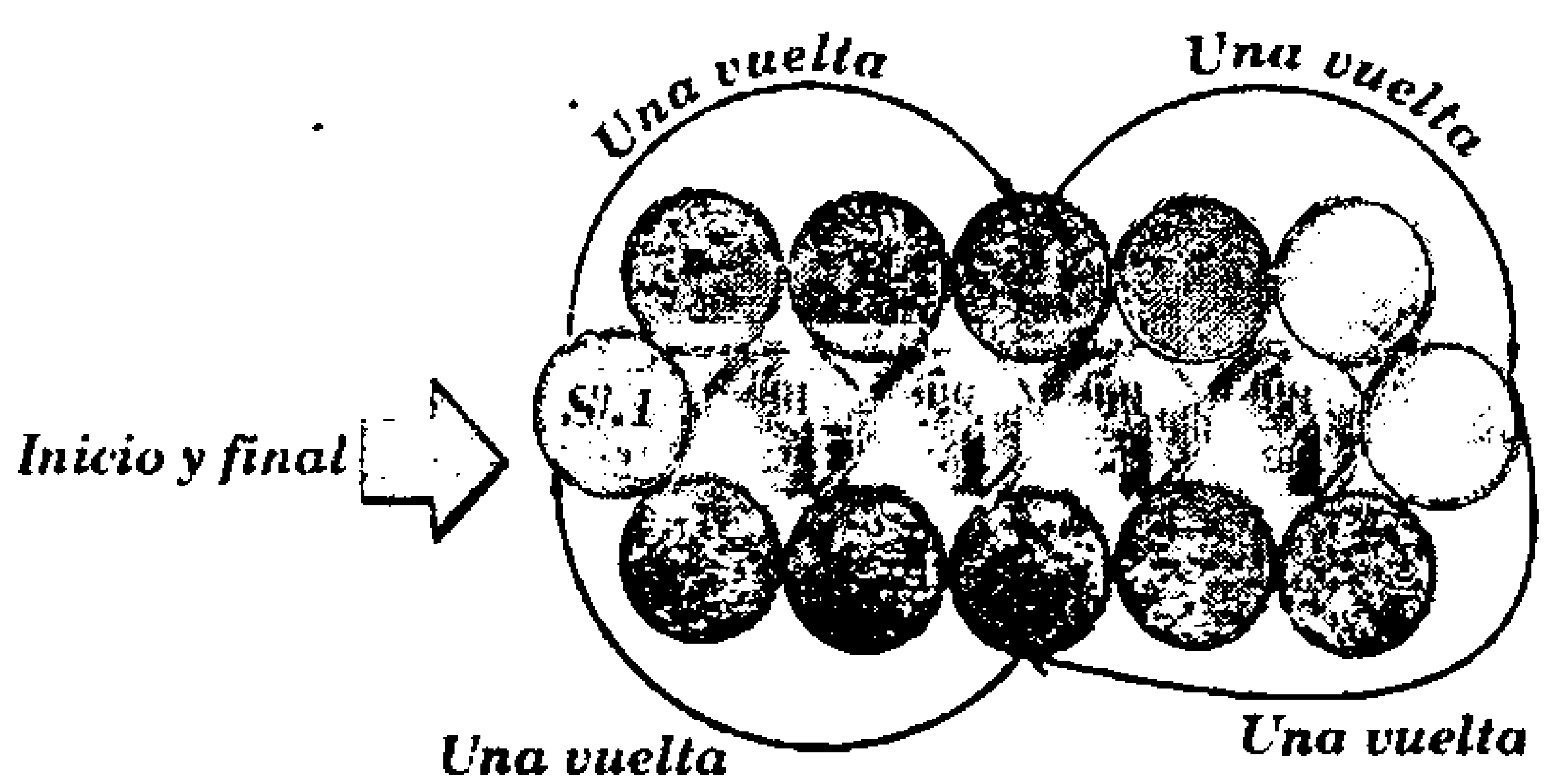
A) 6 *B) 2* *C) 4* *D) 3* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

Se pide el número de vueltas que dará una moneda alrededor de todas las mostradas en el gráfico.



Recordemos que una moneda dará dos vueltas, alrededor y en forma tangencial, a otra moneda de igual denomincación; entonces, en el gráfico vemos que cada cambio de posición es ***1/3*** de una vuelta, o que cada ***3*** cambios de posición completa una vuelta. Lo que primero haremos es colocar monedas en forma tangente alrededor de las ***4*** monedas del gráfico, cada una representará una posición tendremos una vuelta, es decir:

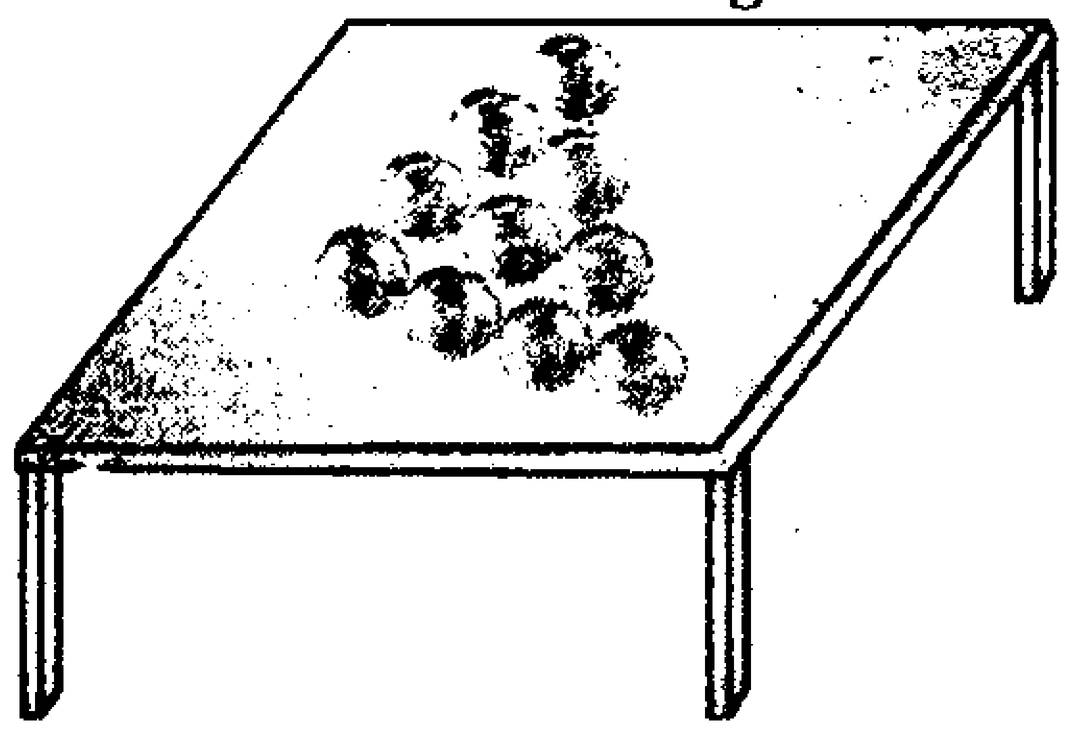


$\Rightarrow$ ***4 vueltas en total***

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

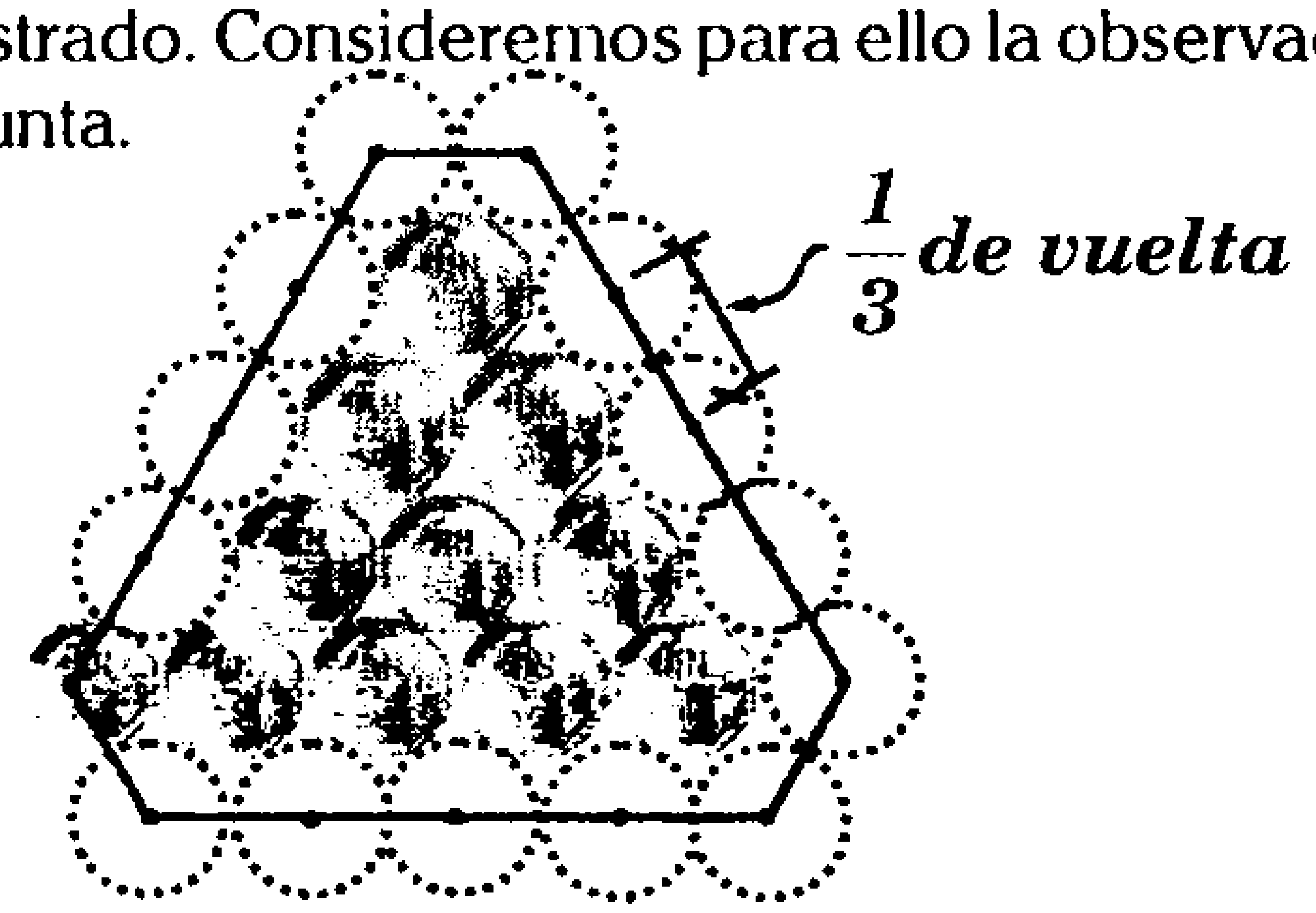
¿Cuántas vueltas dará una moneda de un sol alrededor de las monedas ubicadas sobre la mesa, como se muestra en el gráfico?



A) 6 *B) 2* *C) 4* *D) 3* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

Analizamos el recorrido que realizará una moneda de un sol alrededor de las monedas del arreglo mostrado. Consideremos para ello la observación adjunta.



Del gráfico, el recorrido total de la moneda de un sol es $15\left(\frac{1}{3}\ vueltas\right) = 5\ vueltas.$

Por lo tanto, el número de vueltas que dará la moneda de un sol alrededor de las monedas ubicadas en el gráfico es ***5***.

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

¿Cuántas vueltas más dará una moneda igual a las mostradas, alrededor y en forma tangencial al hexágono del gráfico ***I*** respecto al gráfico ***II***?

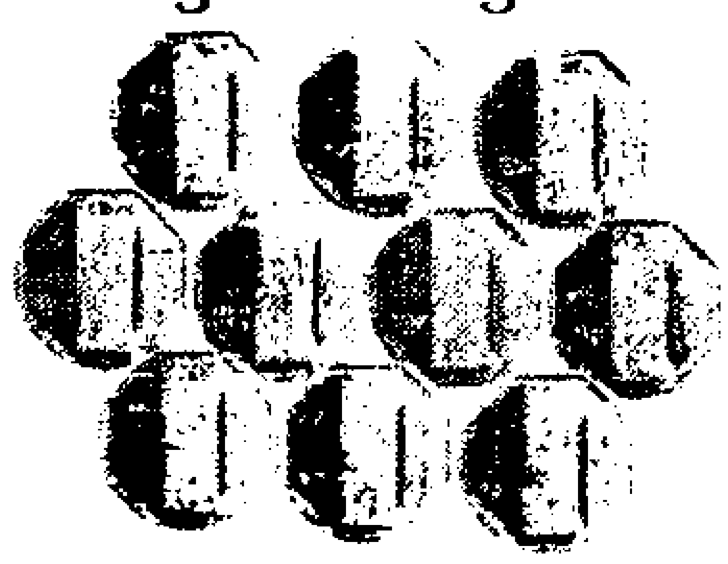


Gráfico I

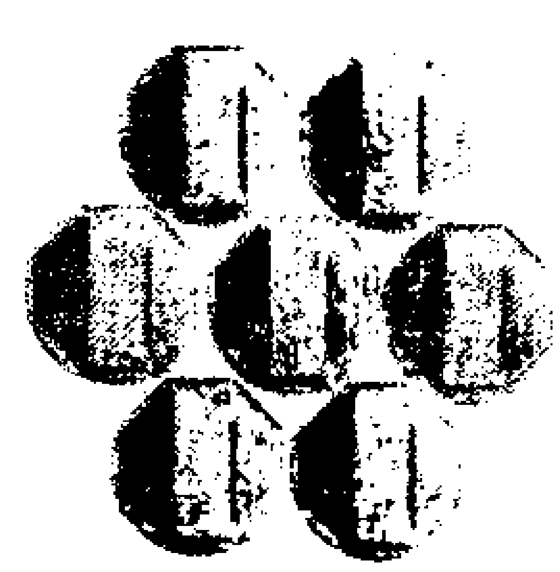


Gráfico II

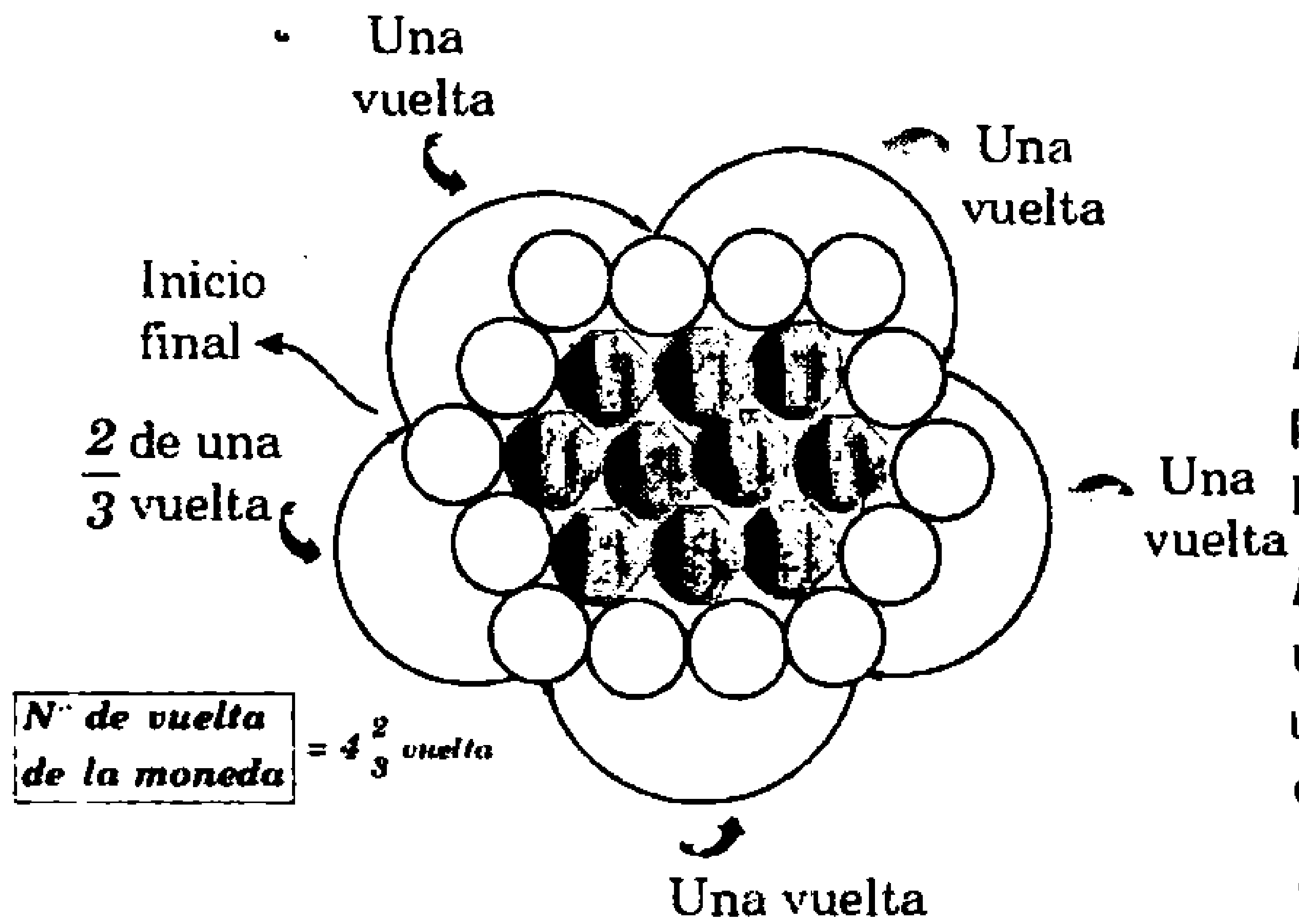
A) 2 *B) 1* *C) 1 1/3* *D) 2/3* *E) 1/3*

RESOLUCIÓN :

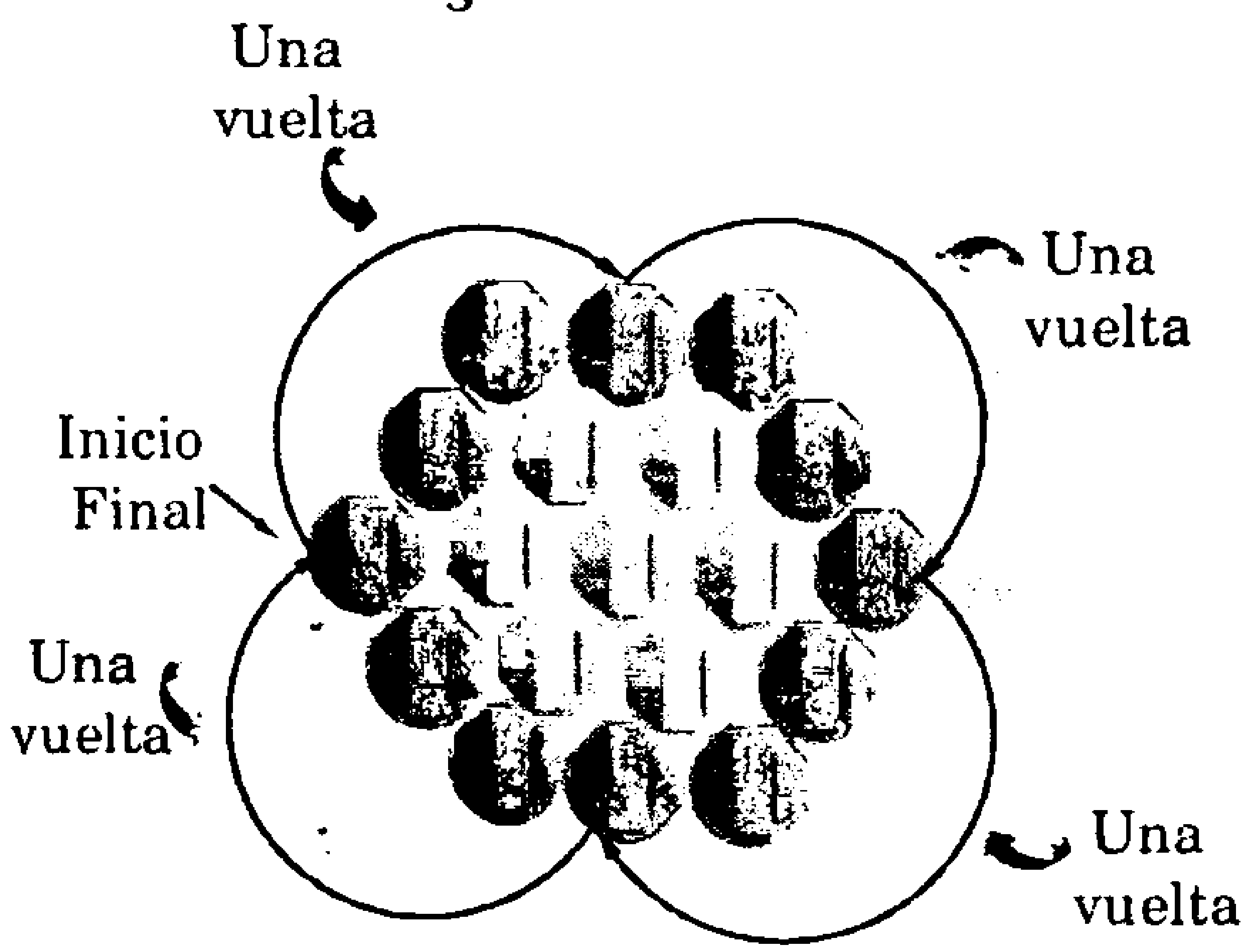
Se pide :

$$\begin{pmatrix} N^{\circ}\ de\ vueltas \\ de\ la\ moneda\ I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N^{\circ}\ de\ vueltas \\ de\ la\ moneda\ II \end{pmatrix}$$

* Calculando la cantidad de vueltas que dará la moneda en el gráfico *I*.



* Calculando la cantidad de vueltas que dará la moneda en el gráfico *II*.



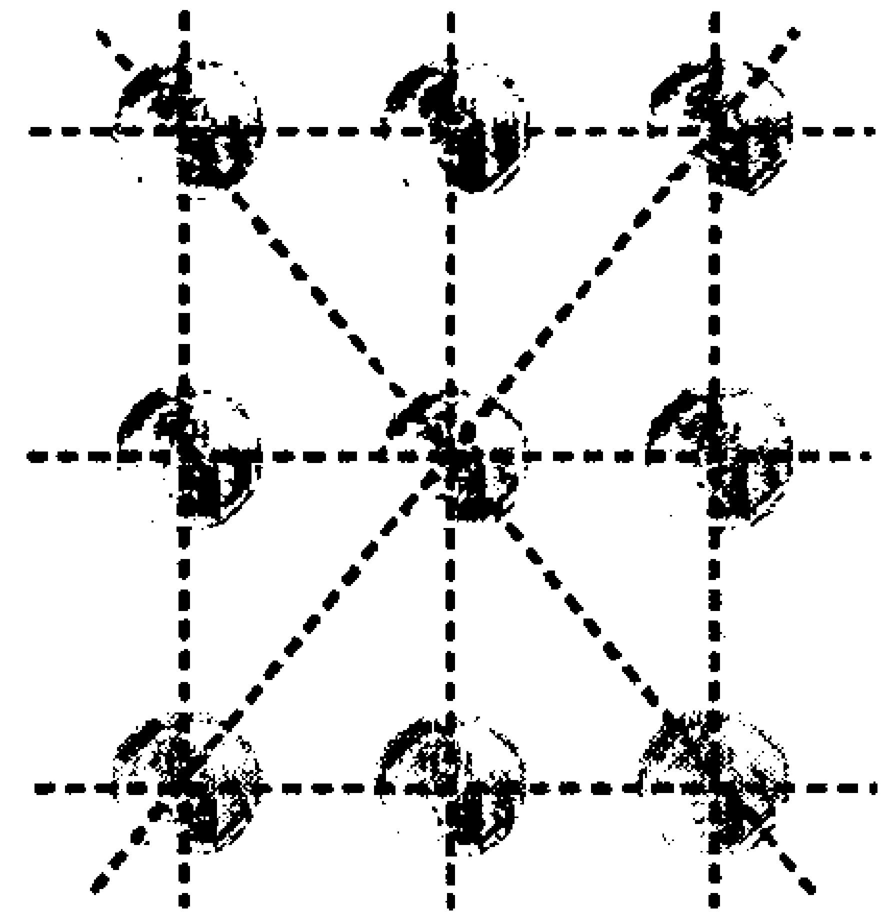
*Calculando la cantidad de vueltas que mas dará una respecto a la otra :

$$\Rightarrow 4\frac{2}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

Hemos cogido nueve monedas y las hemos colocado tal como se indica en la figura, de manera que hay ocho posibles alineaciones de tres monedas (tres horizontales, tres verticales y dos diagonales).

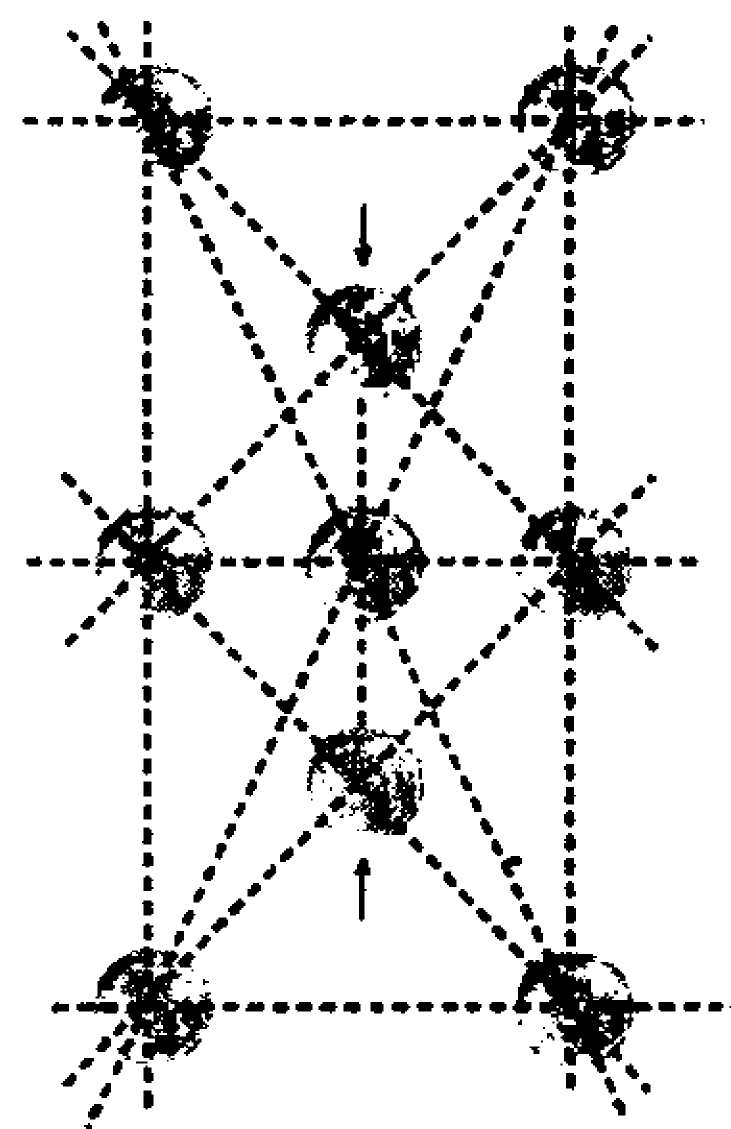


I) Cambiando únicamente dos monedas de posición, consiga una formación donde haya diez posibles alineaciones de tres monedas.

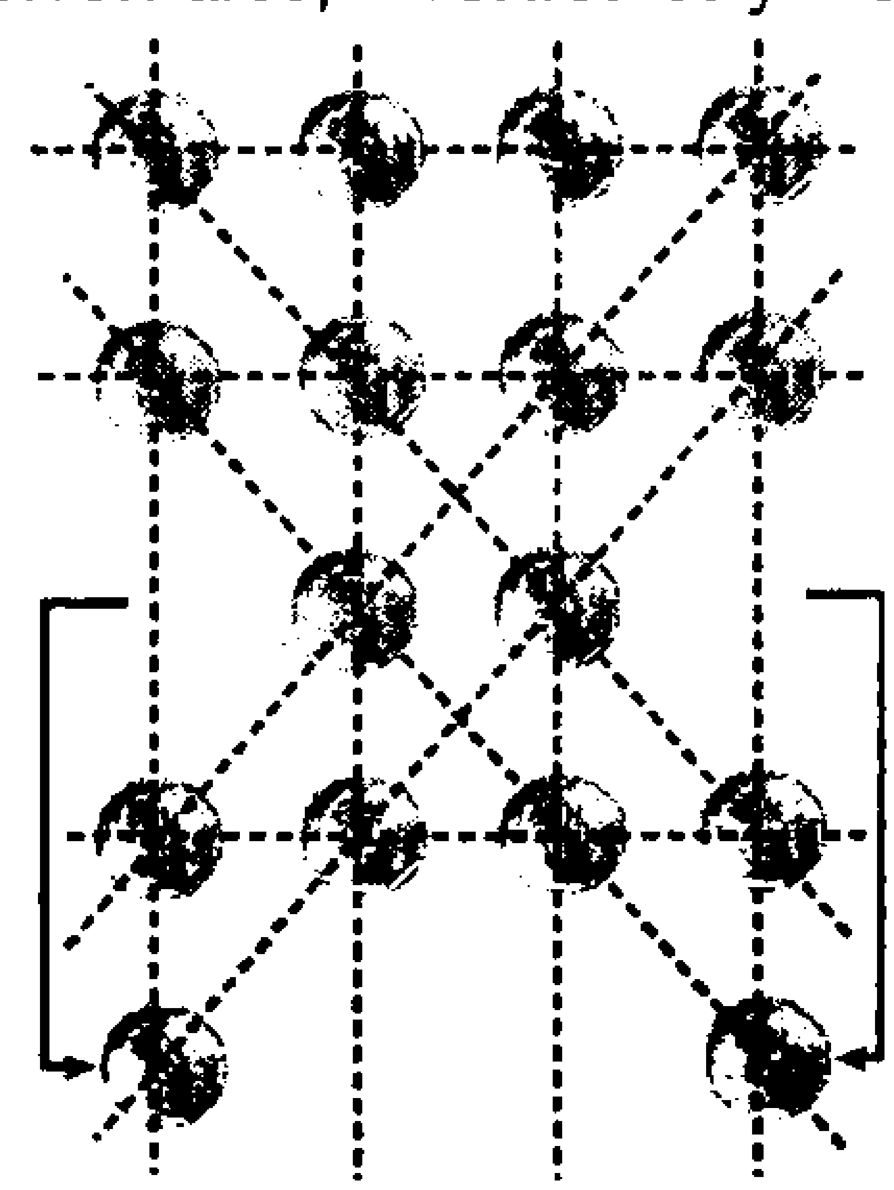
II) Con *16* monedas *(4×4)* y cambiando únicamente dos monedas de posición, consiga una formación donde haya once alineaciones de cuatro monedas.

RESOLUCIÓN :

I) Tres verticales, *1* horizontal, *4* inclinadas *45°* y *2* inclinadas *53/2°*.



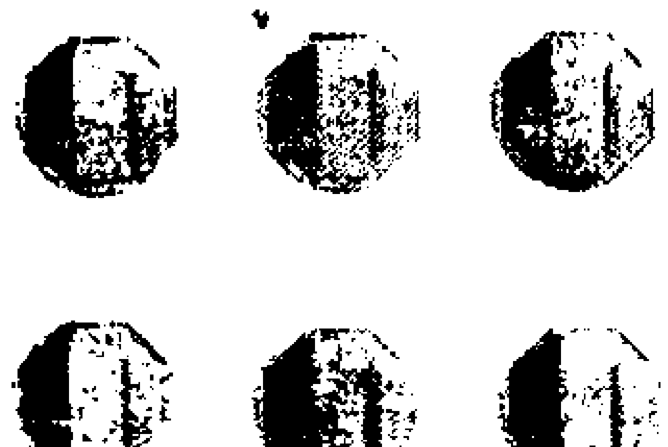
II) Tres horizontales, *4* verticales y *4* diagonales.



PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

En el siguiente gráfico, ¿Cuántas monedas de igual tamaño a las mostradas se deben agregar, como mínimo, para contar *5* filas de *3* monedas cada una?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 6* *E) 5*

PROBLEMA 2 :

El gráfico *I* muestra *28* monedas. ¿Cuántas monedas, como mínimo, deben trasladarse de lugar para tener la distribución del gráfico *II* ?

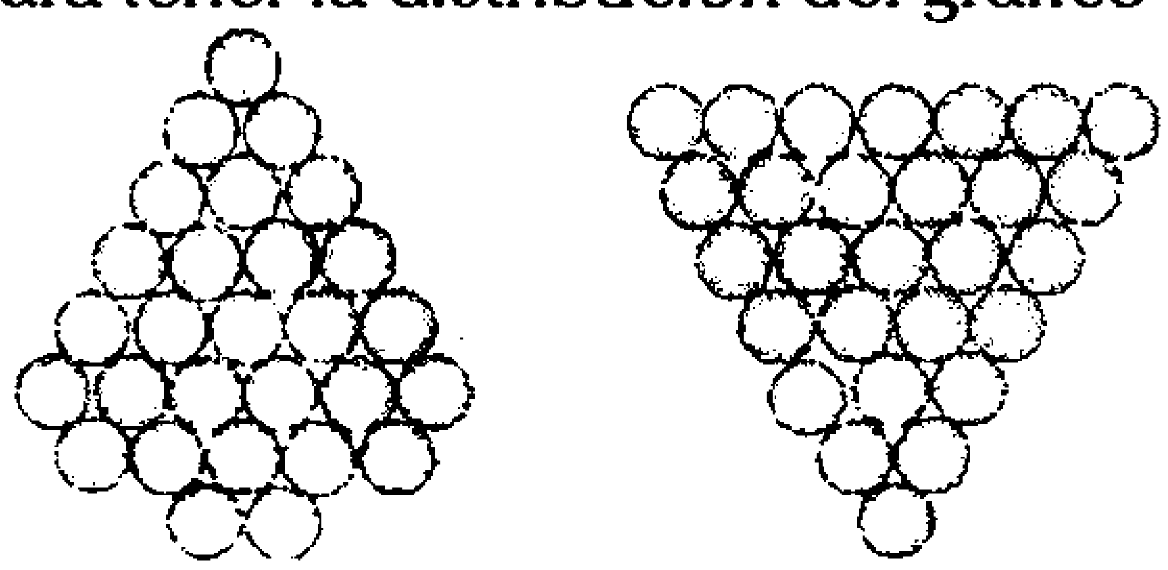
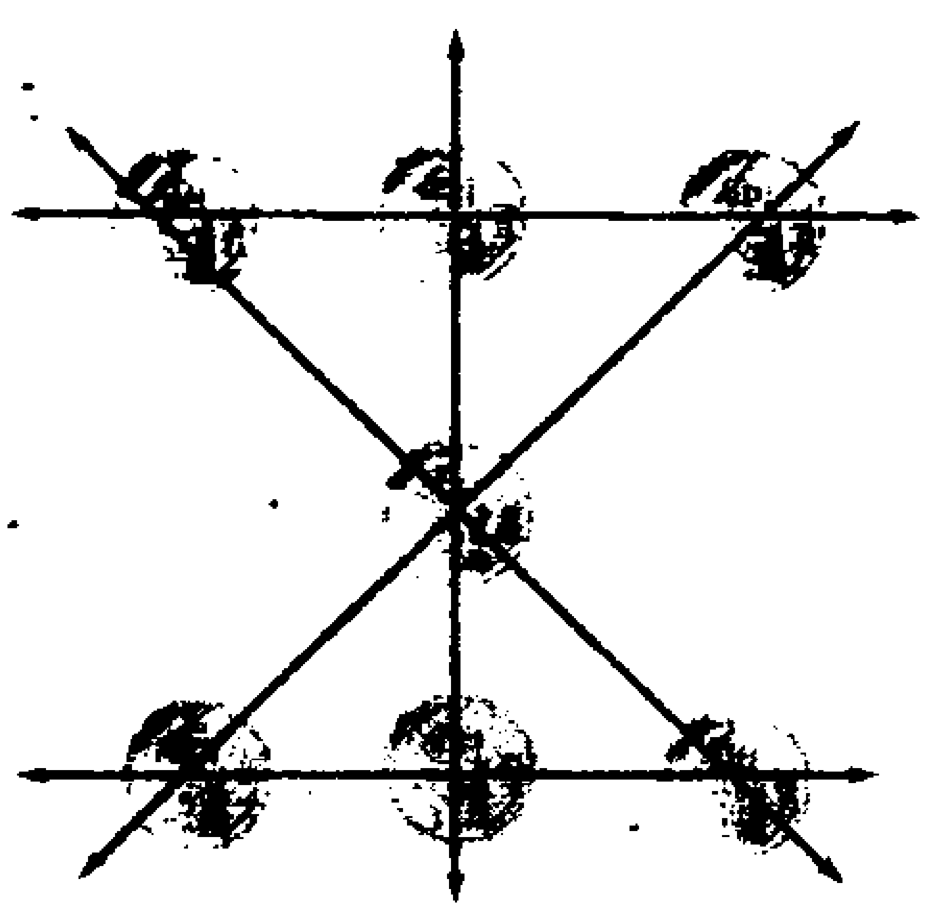


Gráfico I Gráfico II

A)10 *B)8* *C)7* *D)9* *E)11*

PROBLEMA 3 :

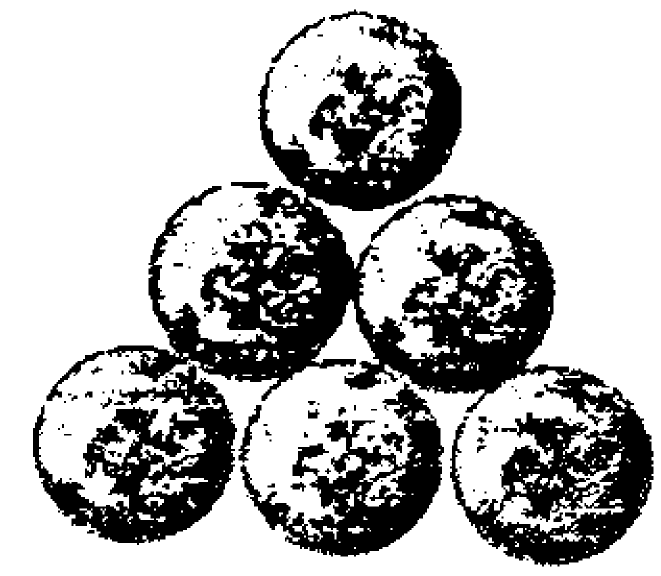
En el siguiente gráfico se presentan *7* monedas, ubicadas de tal manera que forman *5* hileras de *3* monedas cada una. ¿Cuántas monedas, como mínimo, se deben agregar para formar *10* hileras de *3* monedas cada una?



A) 5 *B) 2* *C) 3* *D) 1* *E) 4*

PROBLEMA 4 :

¿Cuántas monedas de *S/. 2* se pueden colocar, como máximo, alrededor de las que se muestran en el gráfico, tangencialmente, a éstas?

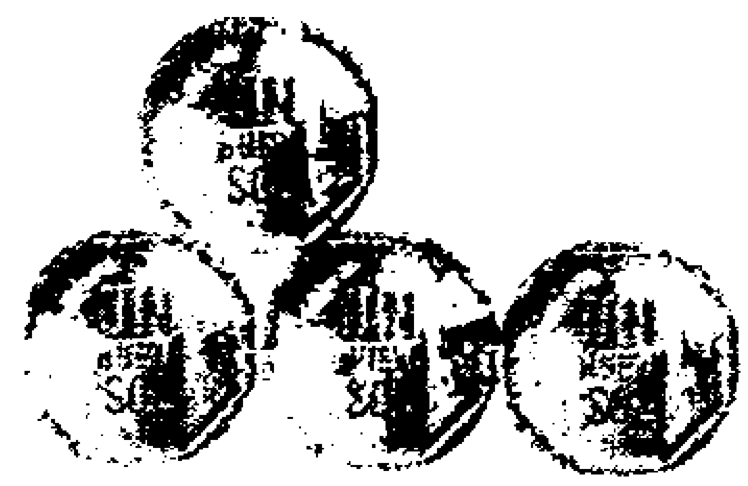


A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13* *E) 14*

PROBLEMA 5 :

¿Cuantas monedas de un sol, como máximo,se podra colocar alrededor y en contacto de las monedas que se muestra en el gráfico ?

A) 8
B)10
C)11
D)9
E) 12



PROBLEMA 6 :

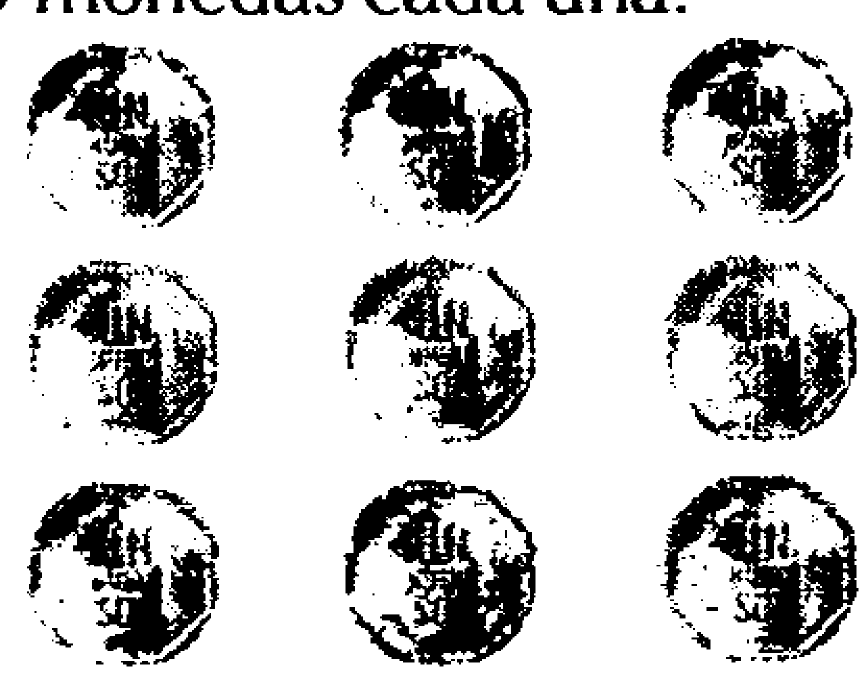
¿Cuántas monedas del mismo tamaño a las ya ubicadas se podrá ubicar , como máximo, alrededor de las monedas que se muestra en el gráfico?

A)12 *B)16* *C)17*
D)18 *E) 19*

PROBLEMA 7 :

En el gráfico se muestran *9* monedas de igual tamaño. ¿Cuántas monedas se deben mover, como mínimo, para formar exactamente *10* hileras de *3* monedas cada una?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



PROBLEMA 8 :

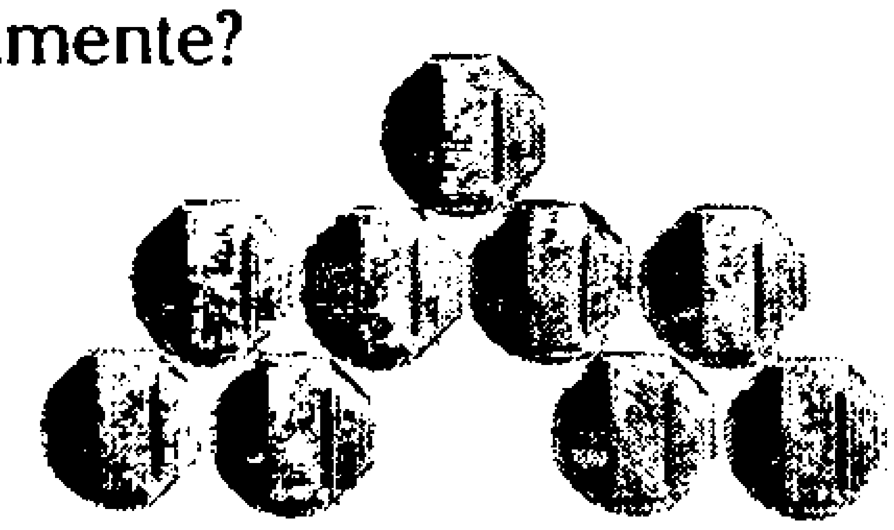
En el siguiente gráfico, ¿Cuántas monedas se deben mover, como mínimo, para contar *6* filas

de cuatro monedas cada una?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) más de 5

PROBLEMA 9 :

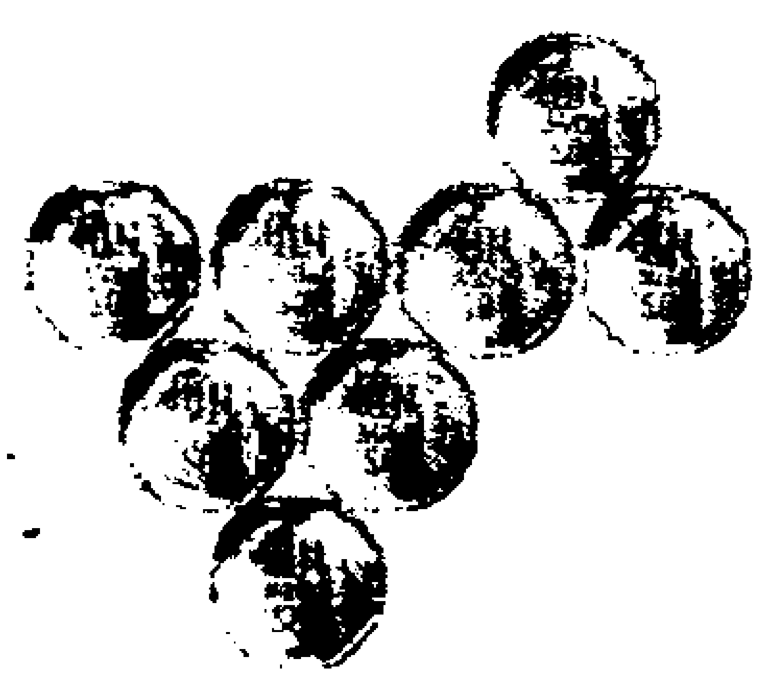
En el gráfico todas las monedas tienen igual diámetro. ¿Cuántas monedas iguales a las mostradas se pueden colocar, como máximo, tangencialmente?



A) 19 B) 15 C) 20 D) 18 E) 17

PROBLEMA 10 :

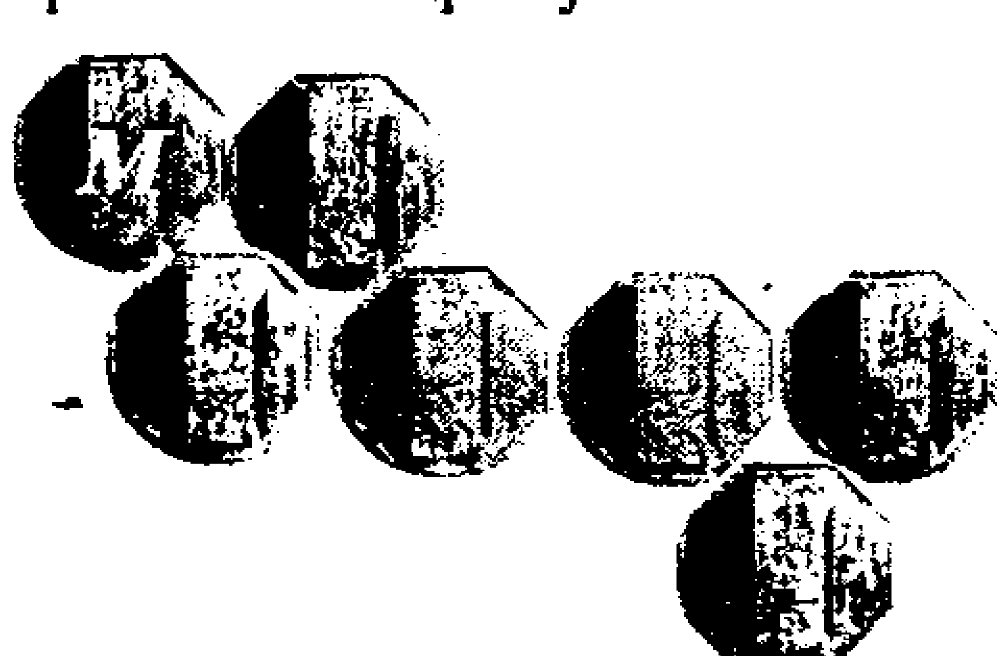
Indique la cantidad máxima de monedas de *S/.1* que se pueden ubicar tangencialmente y alrededor de las mostradas.



A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 16

PROBLEMA 11 :

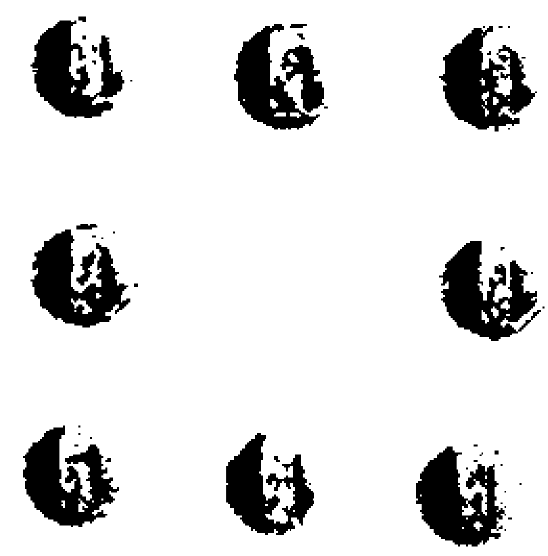
¿Cuántas vueltas dará la moneda ***M*** de igual denominación a las que se muestran en el gráfico en forma tangencial a ellas para ubicarse en posición opuesta a la que ya se encuentra?



A) 2 B) 5/3 C) 7/3 D) 3 E) 10/3

PROBLEMA 12 :

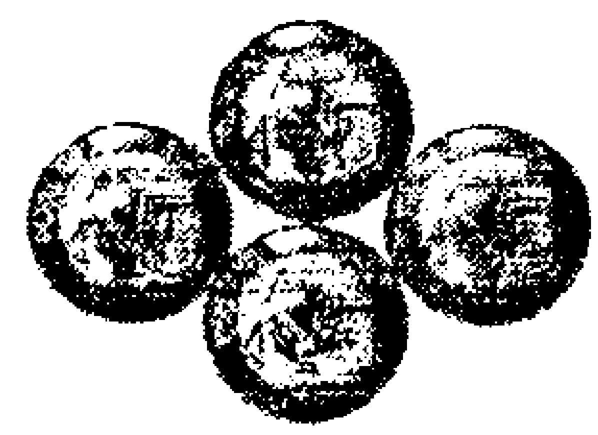
En el gráfico se observan ***8*** monedas distribuidas de manera que se cuentan ***4*** filas de **3** monedas cada una, ¿Cuántas monedas deben mover, como mínimo, para obtener ***6*** filas de ***3*** monedas cada una?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

PROBLEMA 13 :

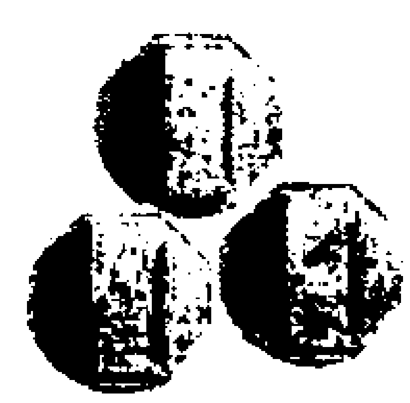
¿Cuántas monedas se pueden ubicar, de forma tangencial y como máximo, alrededor de las monedas mostradas en el gráfico? Considere a todas las monedas del mismo tamaño.



A) 9 B) 13 C) 8 D) 10 E) 12

PROBLEMA 14 :

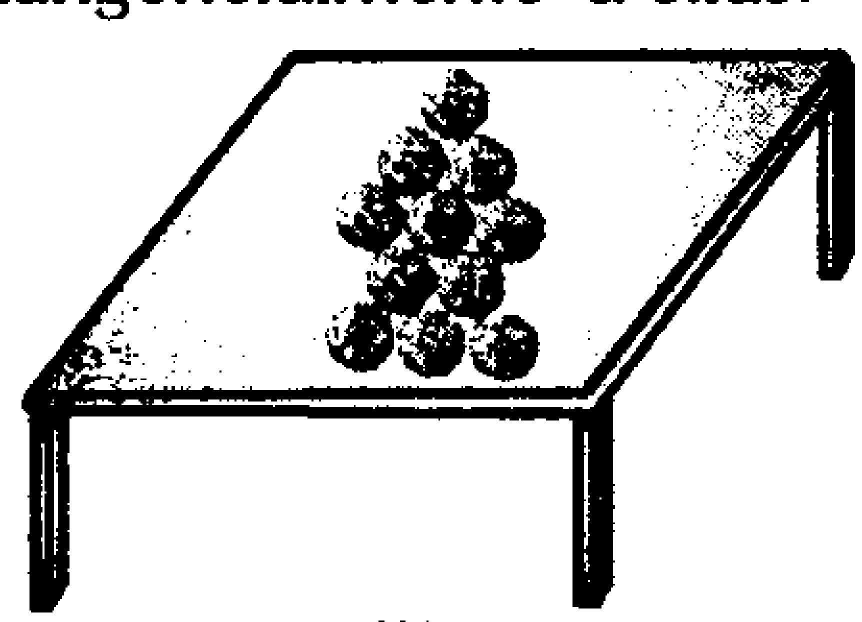
En el siguiente gráfico, ¿Cuántas vueltas dará una moneda alrededor de ellas en forma tangencial, si todas las monedas utilizadas son del mismo tamaño?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 15 :

En el gráfico se muestran ***11*** monedas de ***S/.2*** colocadas sobre una mesa. ¿Cuál es el máximo número de monedas de ***S/. 2*** que pueden ser colocadas tangencialmente a ellas?

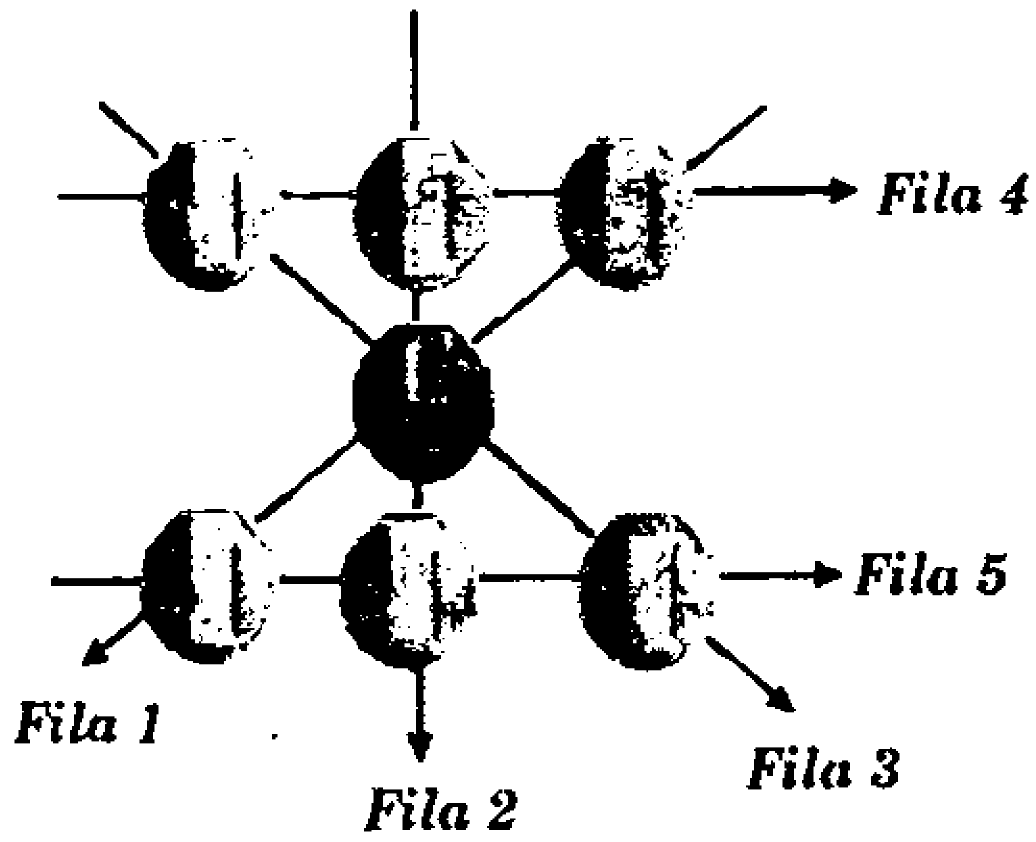


A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

RESOLUCIÓN 1 :

En el gráfico se observa dos filas de *3* monedas, faltan generar *3* filas más de *3* monedas y eso lo conseguiremos agregando una moneda, veamos:

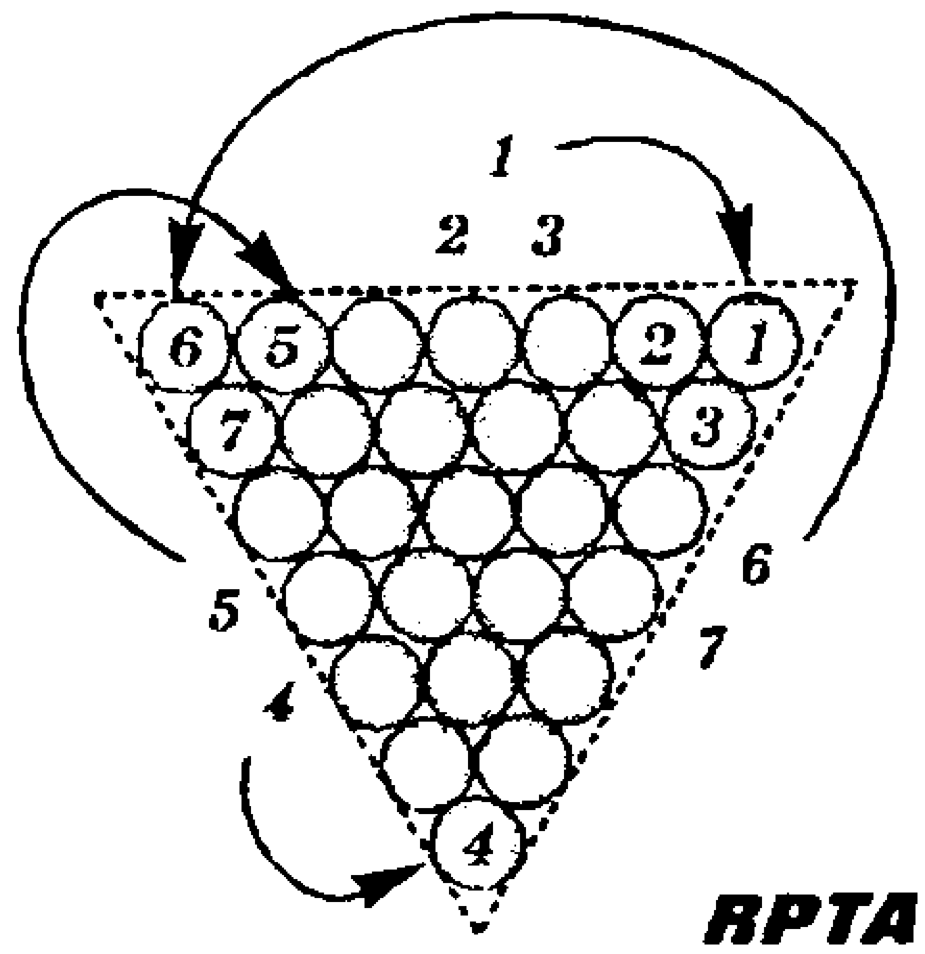


⇒ Se agregará solo una moneda.

RPTA : "A"

RESOLUCION 2 :

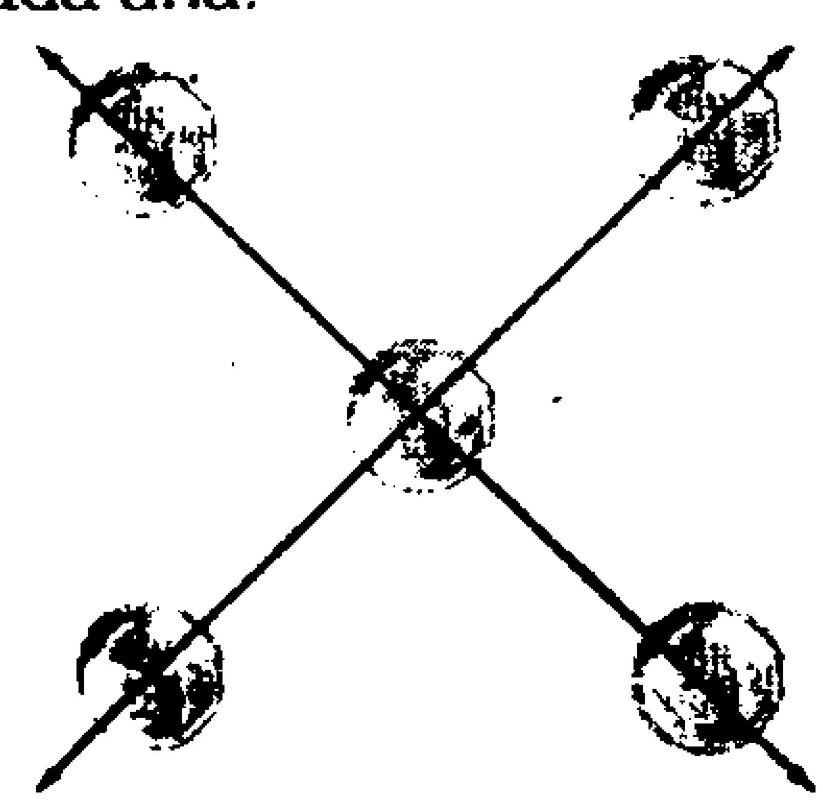
Piden el mínimo de fichas a trasladarse.



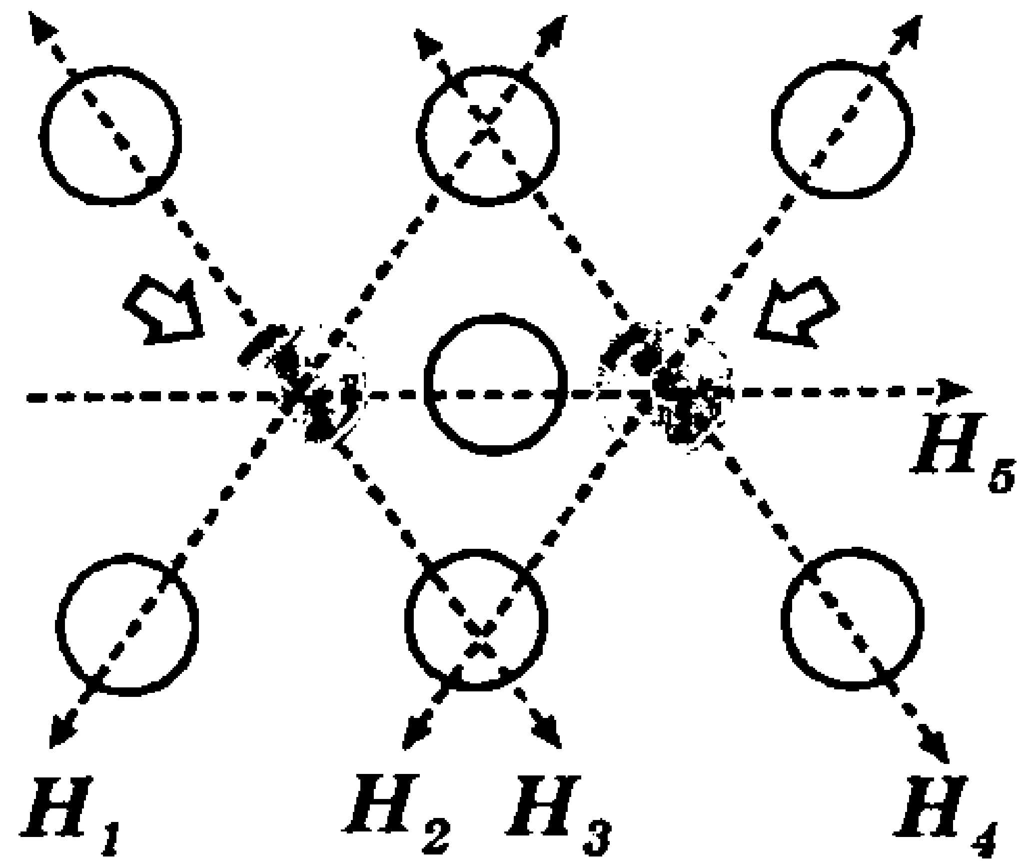
RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 3 :

En el gráfico se necesitan generar otras *5* hileras de *3* monedas cada una para completar las *10* hileras que se piden. Observamos del gráfico que *5* monedas nos pueden generar *2* hileras de *3* monedas cada una.



Entonces, en el gráfico original agregaremos dos monedas de la siguiente manera:



Se observa que se forman *5* hileras más al aumentar dos monedas y que con las *5* hileras que se tiene al inicio se completan las *10* hileras, de *3* monedas cada una, que se pedía. Por lo tanto, se agregaron dos monedas como mínimo.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 4 :

Se pide la mayor cantidad de monedas tangencialmente, a las mostradas y que sean de *S/2.*

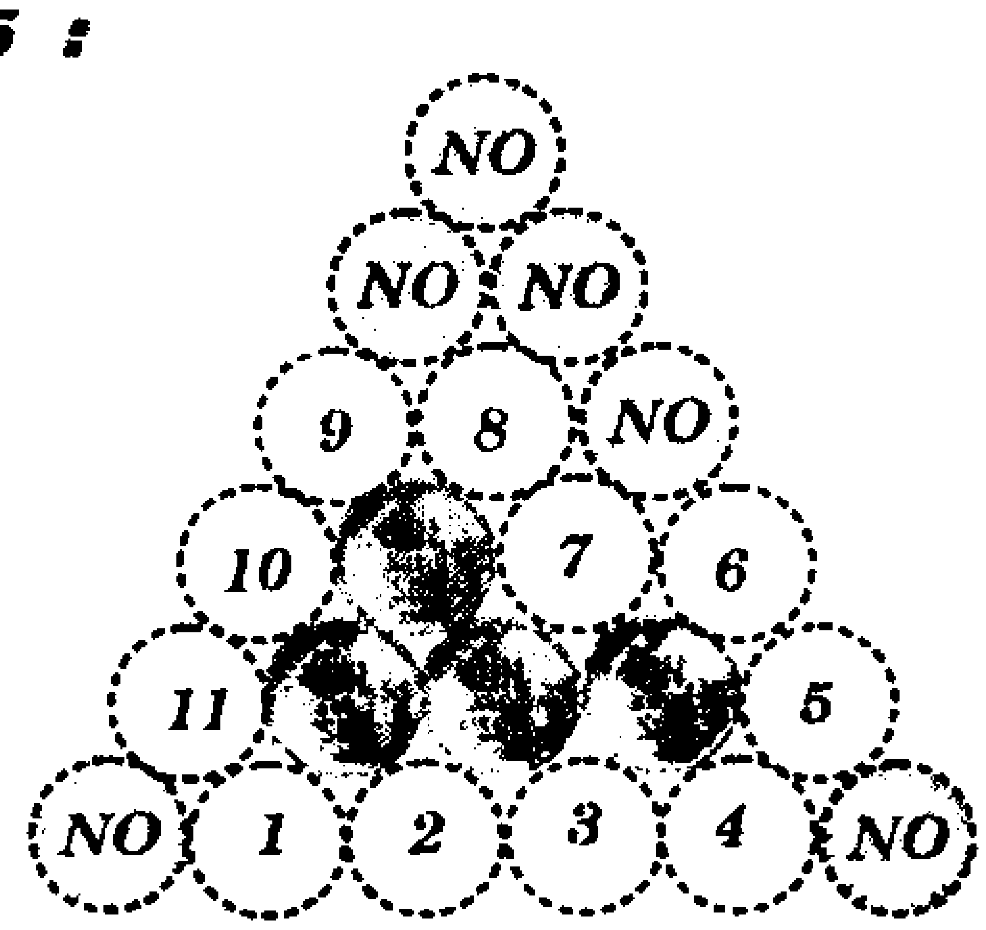
Como sabemos que se pueden ubicar *6* monedas alrededor de otra, tangencialmente, entonces, haremos lo siguiente:

⇒ *12* monedas como máximo

RPTA : "C"

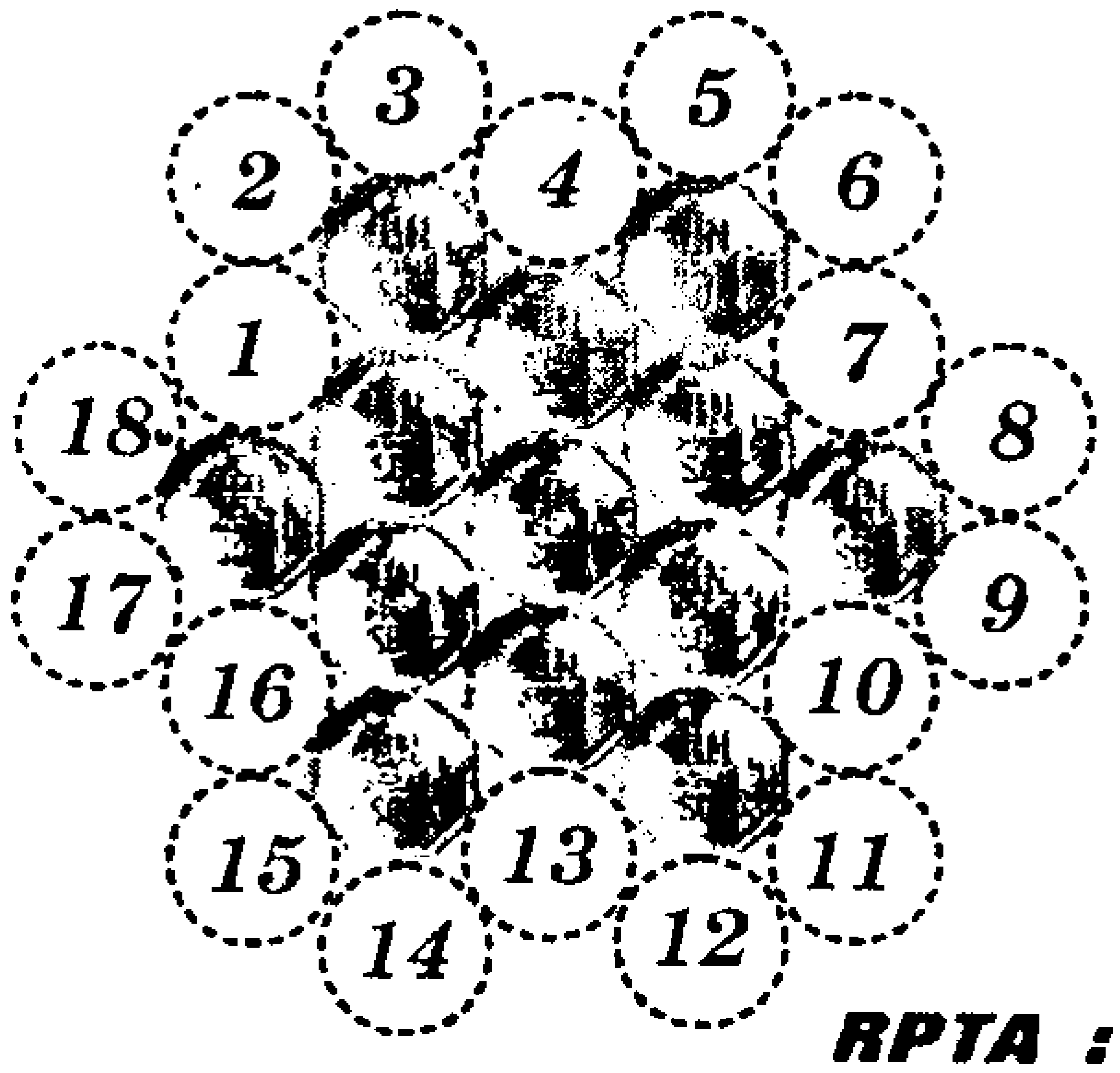
RESOLUCIÓN 5 :

Al formar un triángulo al aumentar monedas adecuadamente, se aprecia que el número de monedas tangentes a las dadas es *11*.



RPTA : "C"

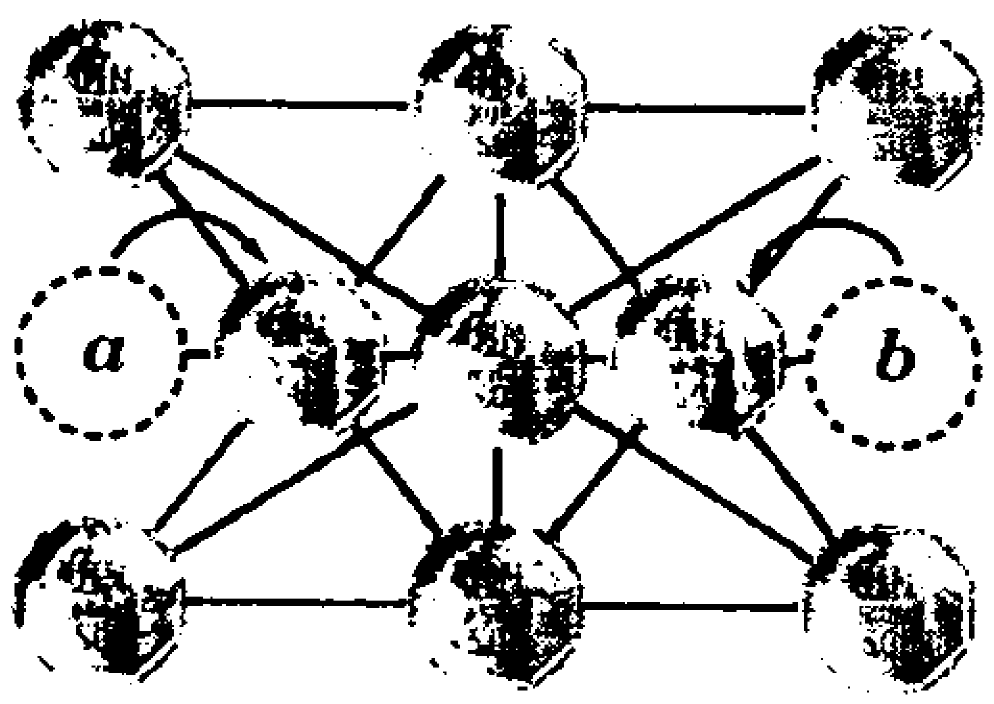
RESOLUCIÓN 6 :



RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 7 :

Nos piden formar ***10*** hileras de ***3*** monedas cada una. Moviendo las monedas de ***a*** y ***b*** se obtienen las ***10*** hileras.



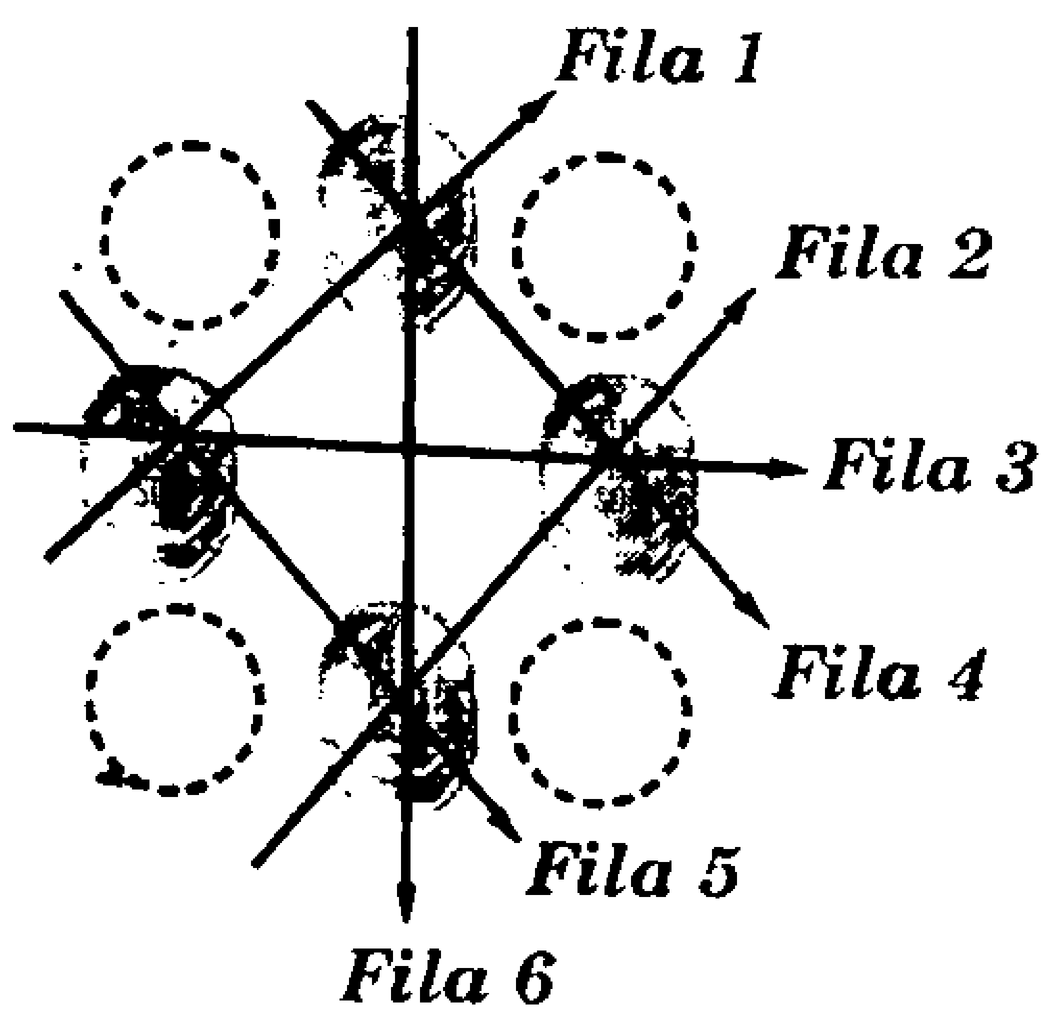
Por lo tanto, se deben mover ***2*** monedas.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 8 :

Se pide mover la menor cantidad de monedas para contar ***6*** filas de ***4*** monedas cada una.

Moveremos las ***4*** monedas de los vértices del cuadrado del gráfico y colocaremos cada una sobre cada moneda restante, es decir:



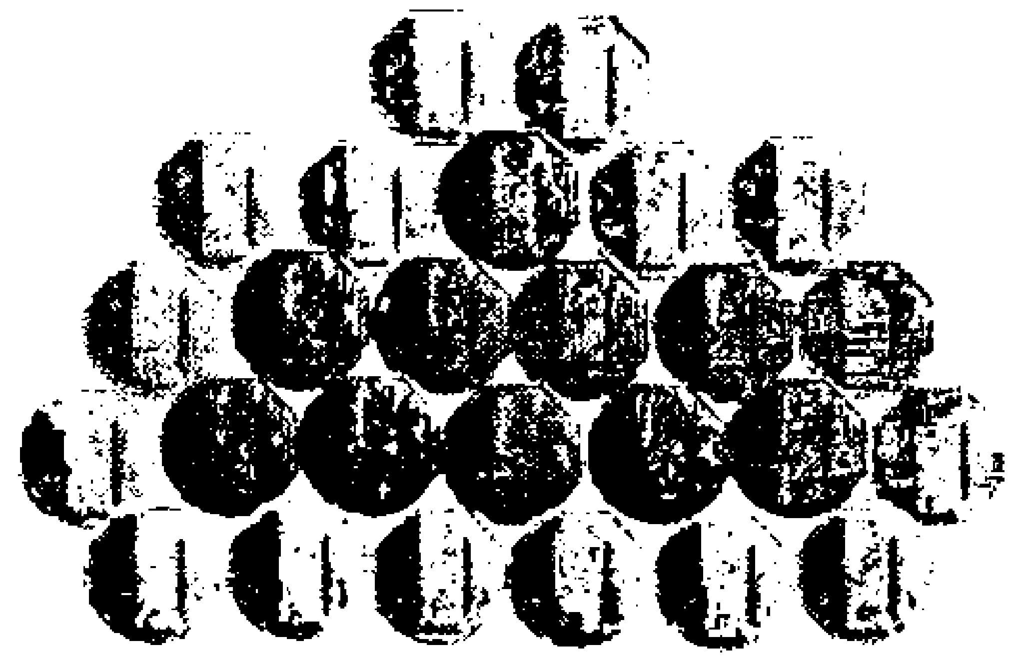
$\Rightarrow$ ***4 monedas como mínimo.***

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 9 :

Se pide la mayor cantidad de monedas que se pueden colocar alrededor y tangentes a las monedas del gráfico.

Colocaremos las monedas teniendo en cuenta que alrededor de una moneda se ubican seis exactamente. Veamos:

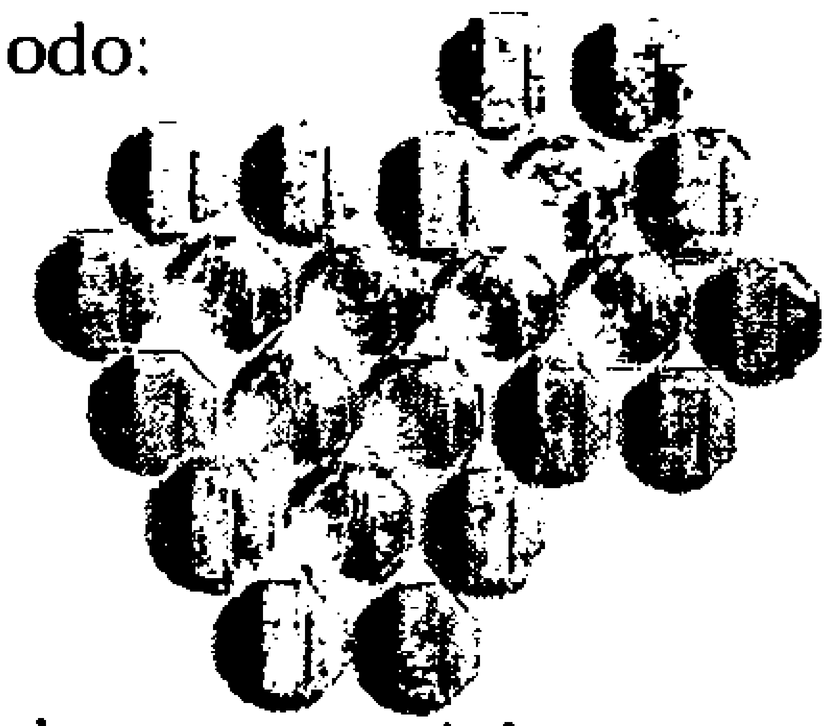


$\Rightarrow$ ***17 monedas como máximo.***

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 10 :

Se pide la máxima cantidad de monedas de ***S/1*** que se pueden ubicar alrededor del gráfico tangencialmente. Ubicaremos las monedas del siguiente modo:

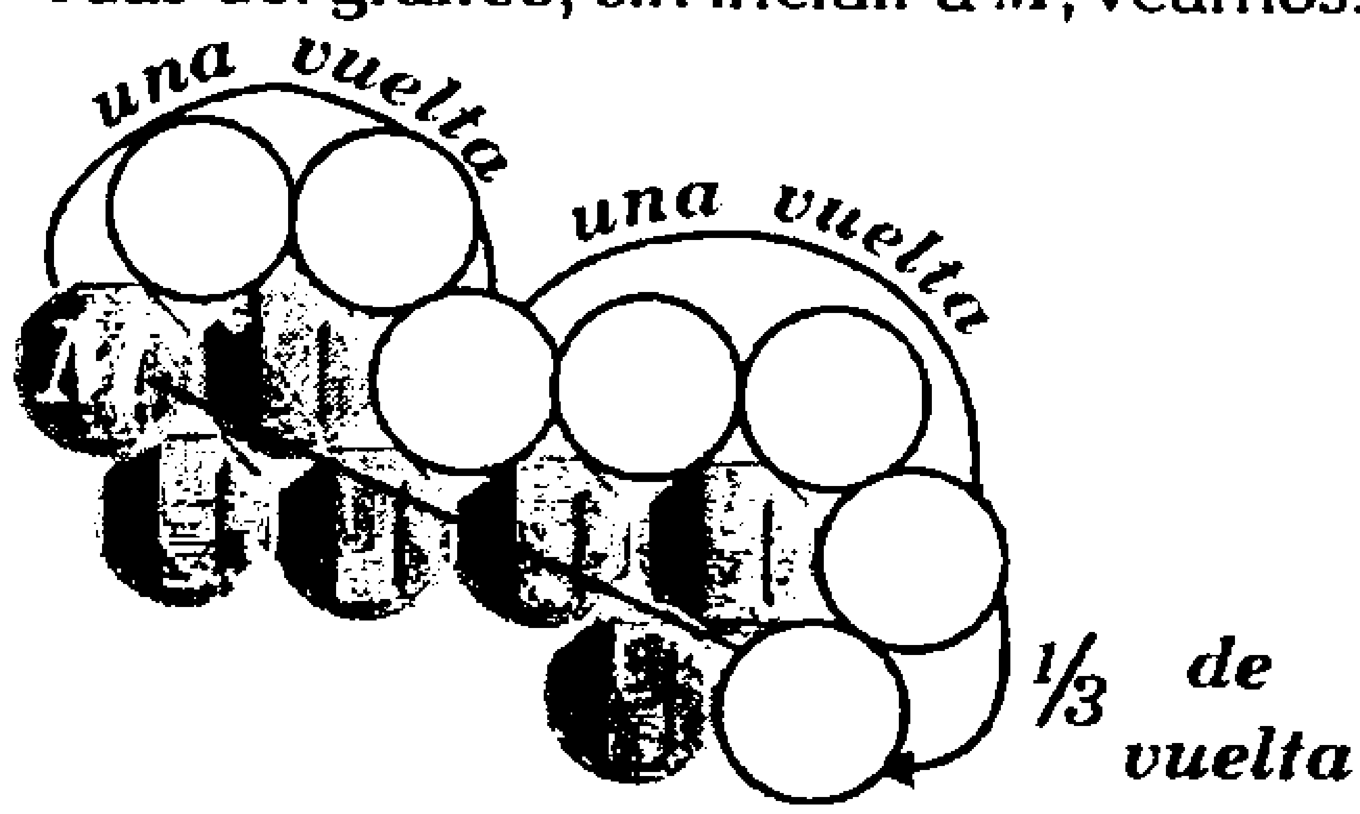


$\Rightarrow$ ***15*** monedas como máximo se podrán ubicar.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 11 :

Se pide la cantidad de vueltas que dará la moneda ***M*** para ubicarse en su posición opuesta a la que ya se encuentra. Utilizando el criterio de colocar alrededor de otra, rodearemos a todas las monedas del gráfico, sin incluir a ***M***, veamos:



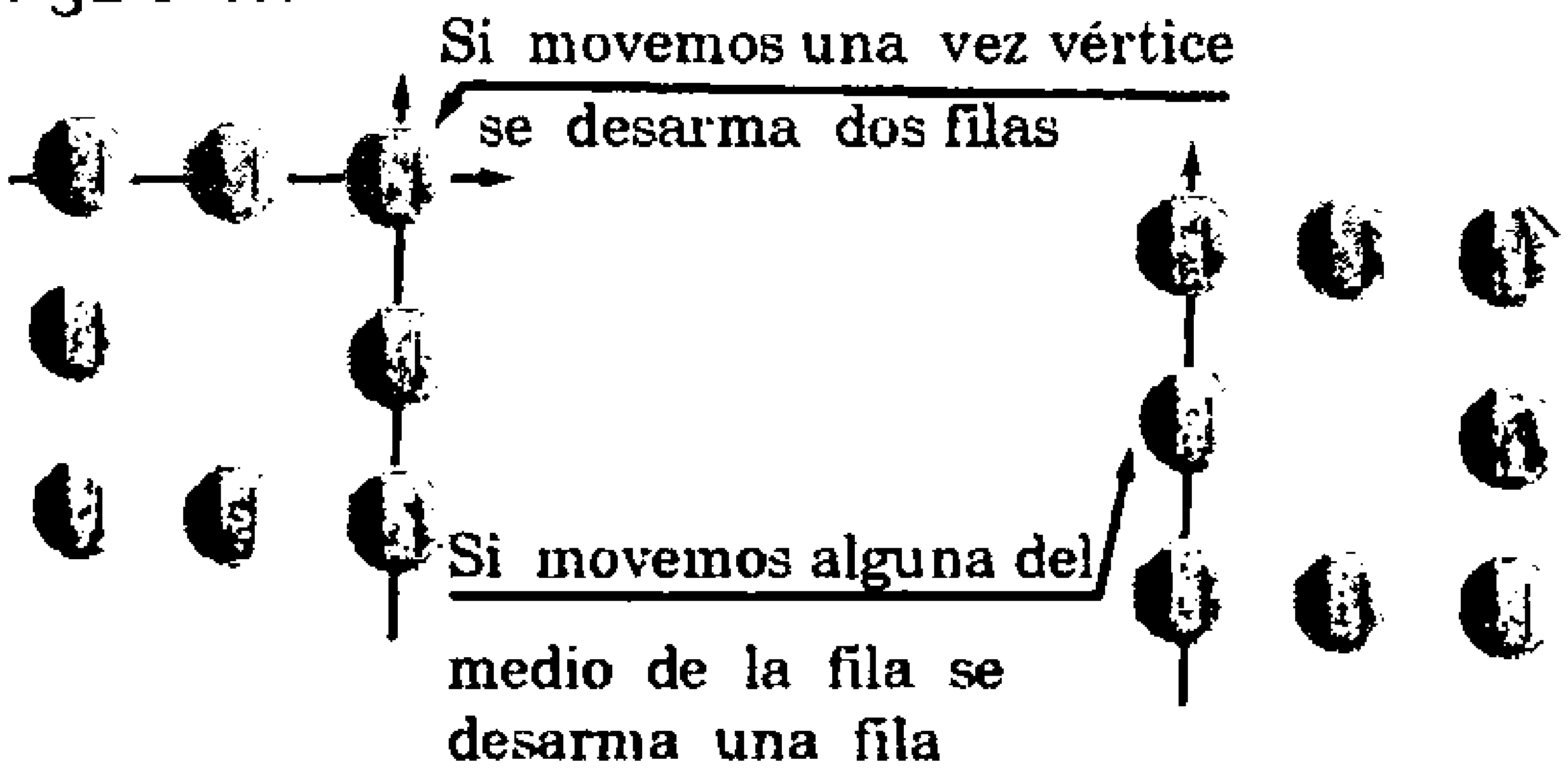
$\Rightarrow$ Dará ***2 1/3*** vueltas en total.

RPTA : "B"

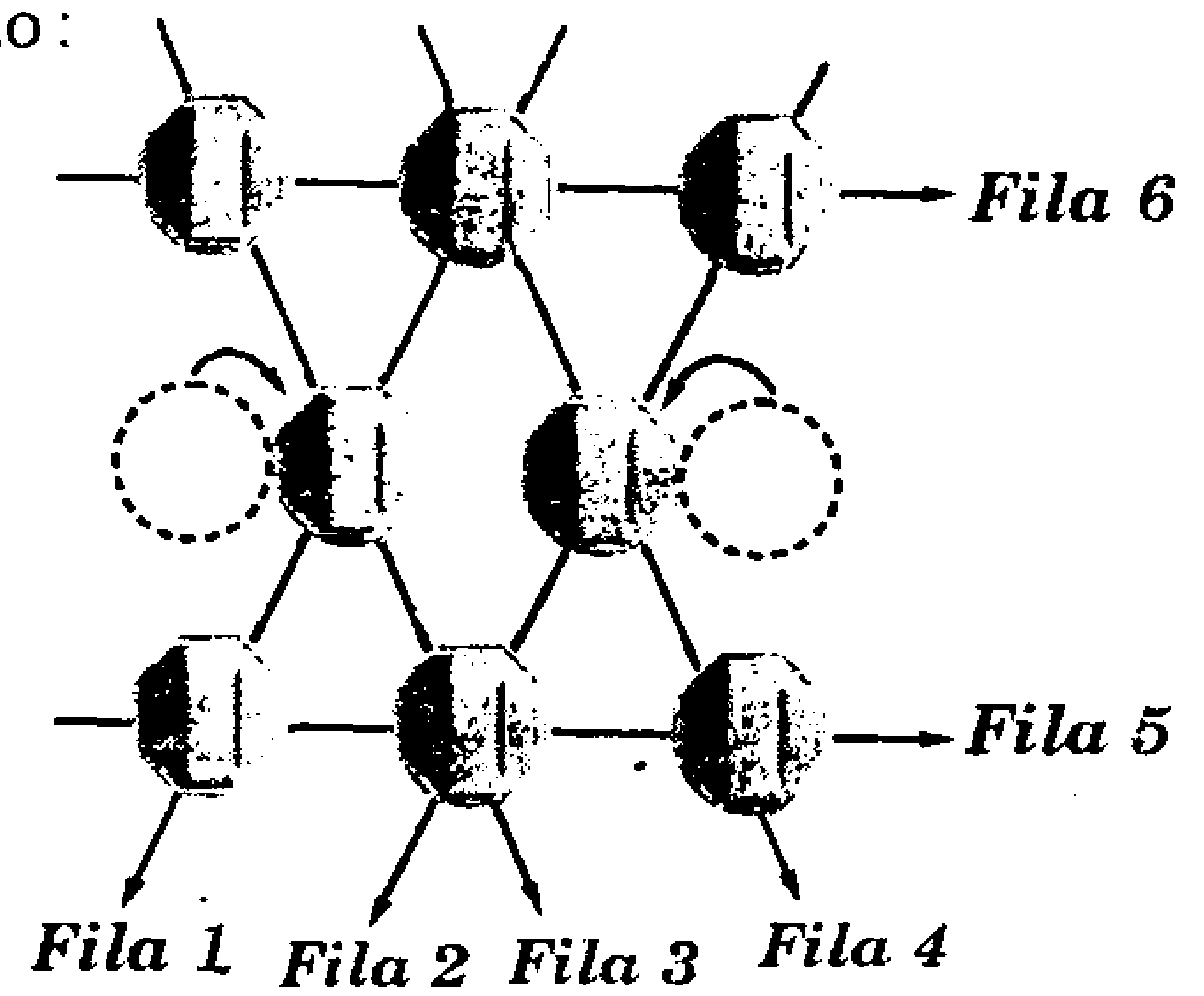
RESOLUCIÓN 12 :

Se pide mover la menor cantidad de monedas para obtener **6** filas de **3** monedas cada una.

En el gráfico ya se tiene **4** filas de **3** monedas, solo faltan dos filas, las cuales podemos obtenerlas moviendo alguna moneda, pero, veamos lo siguiente:



Entonces, de los anterior, moveremos algunas monedas como en el ***gráfico de la derecha*** y con ello generamos las que faltan del siguiente modo :



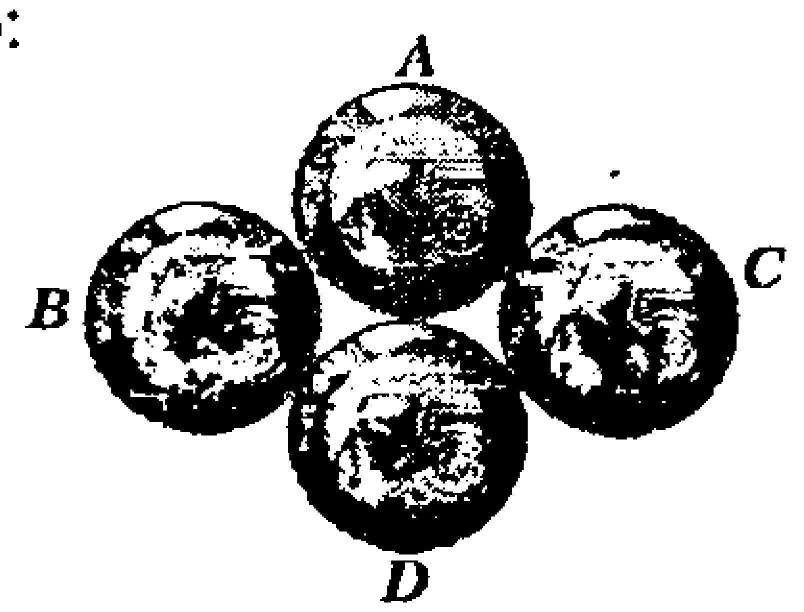
⇒ Se deben mover **2** monedas como mínimo.

RPTA : "D"

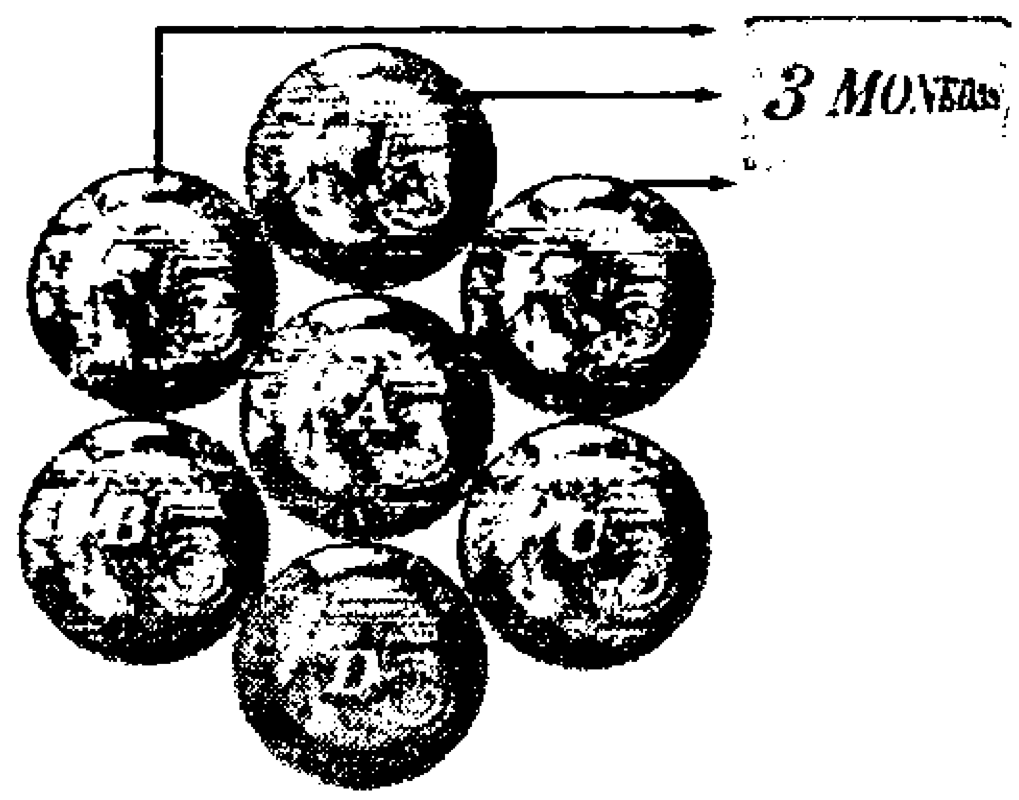
RESOLUCIÓN 13 :

Se pide la mayor cantidad de monedas de igual tamaño a las mostradas, que se pueden colocar tangencialmete alrededor de ellas.

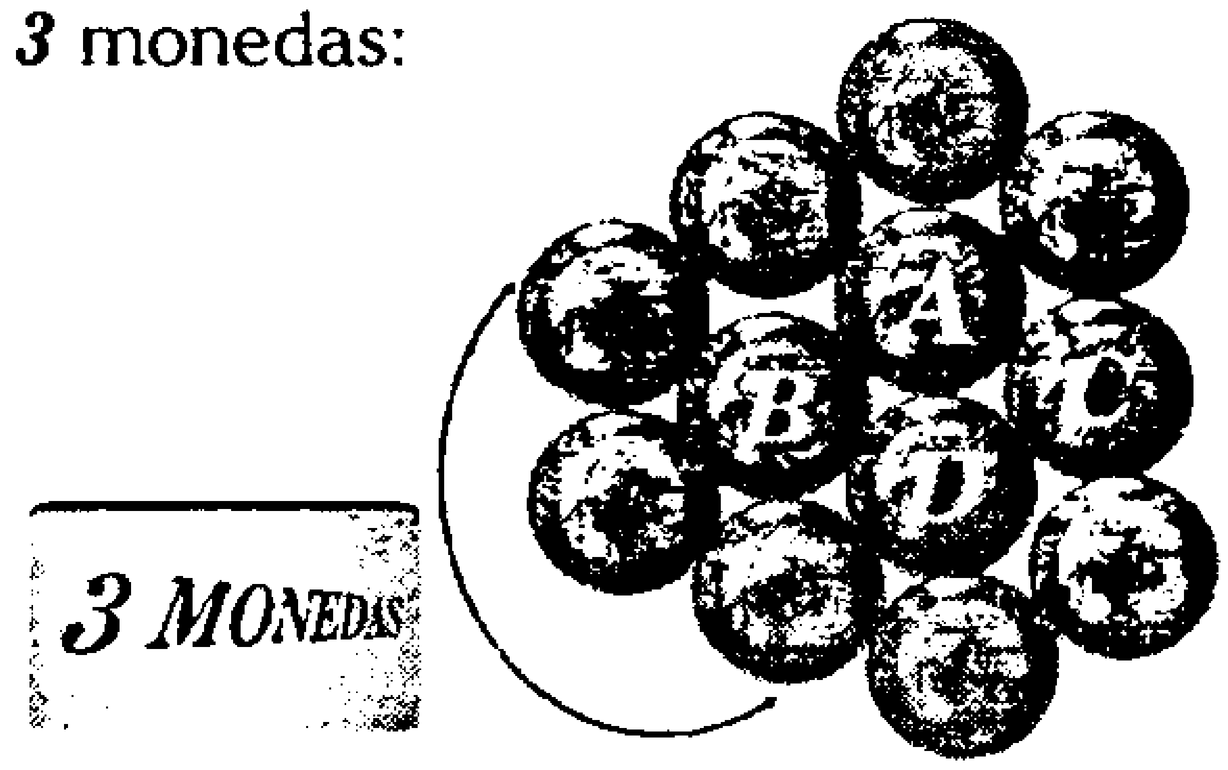
Como alrededor de una se pueden ubicar **6** monedas, como máximo y tangentes, entonces, en el gráfico:



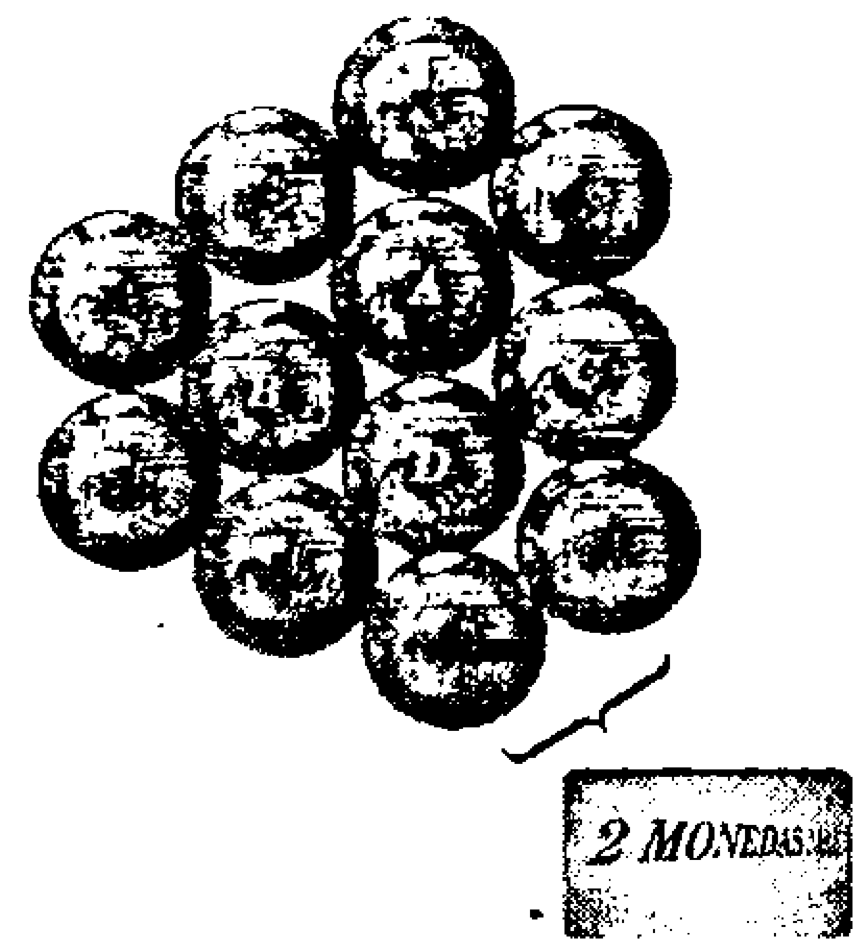
* Alrededor de la moneda *A* hay **3** monedas, faltan otras **3**:



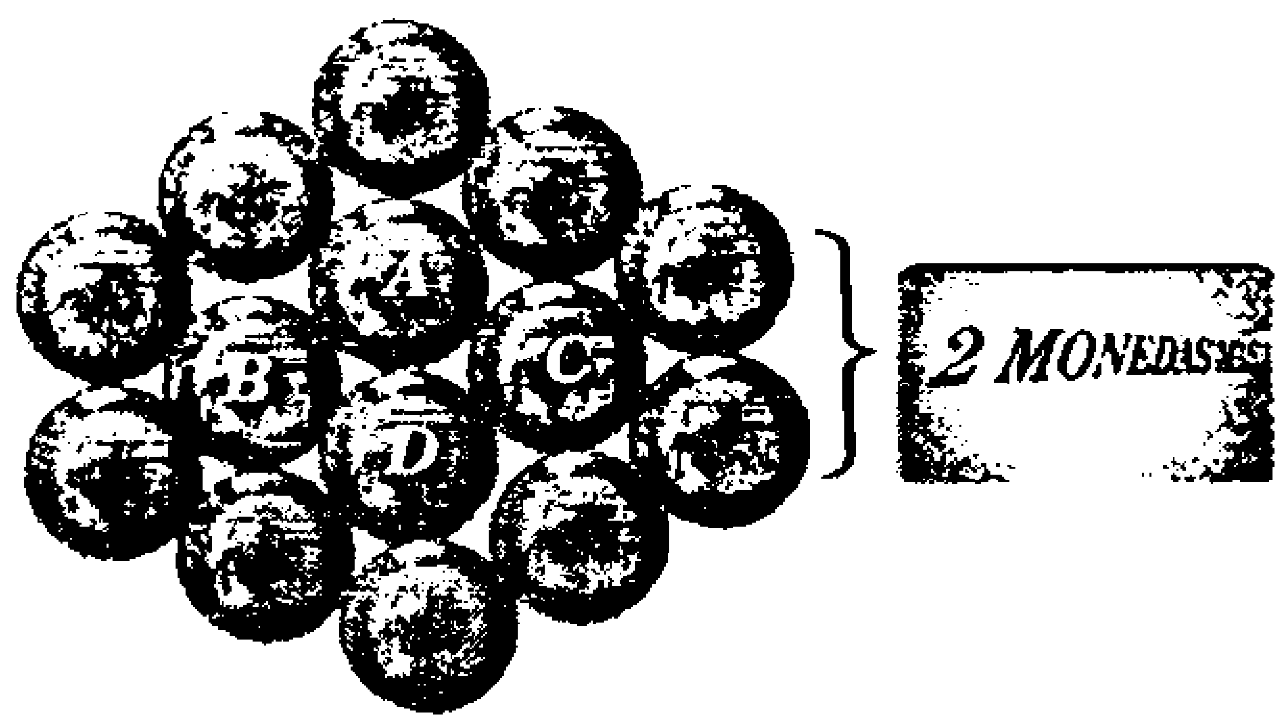
* Ahora, alrededor de la moneda *B* también faltan **3** monedas:



* Alrededor de la moneda *D* contamos **4** monedas, faltarán solo dos monedas:



* Finalmente, alrededor de la moneda *C* solo faltarán **2** monedas:



⇒ Total de monedas=**3+3+2+2=10**, como máximo

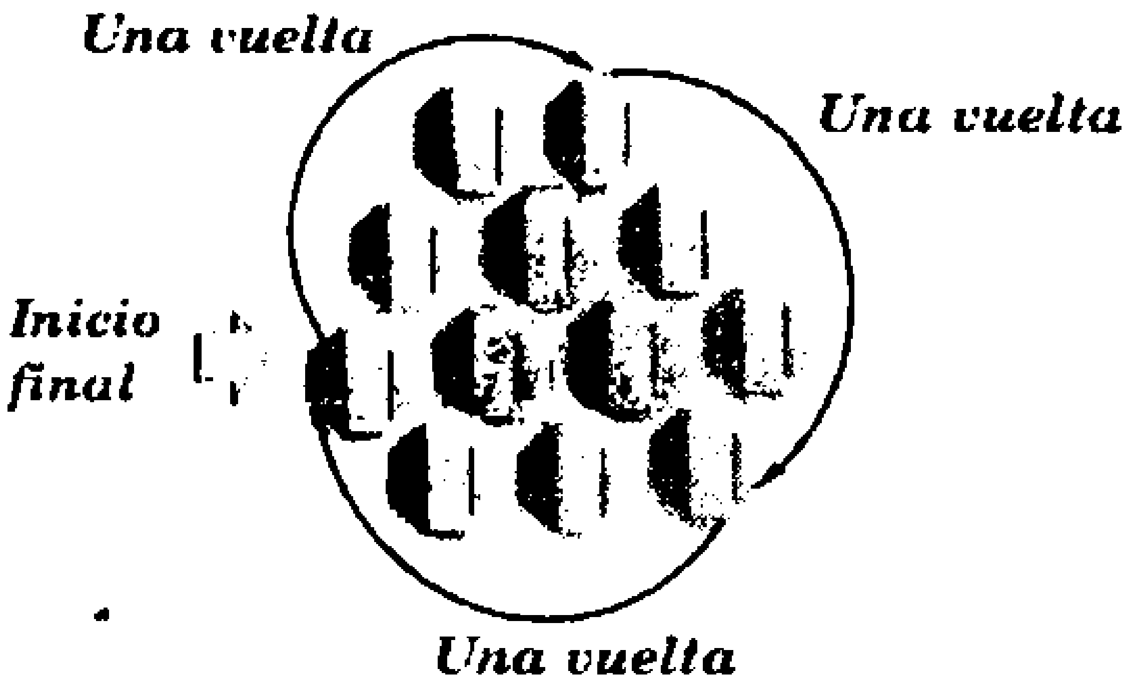
RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 14 :

Se pide el número de vueltas que dará una moneda alrededor y tangencialmente a las que

se muestran.

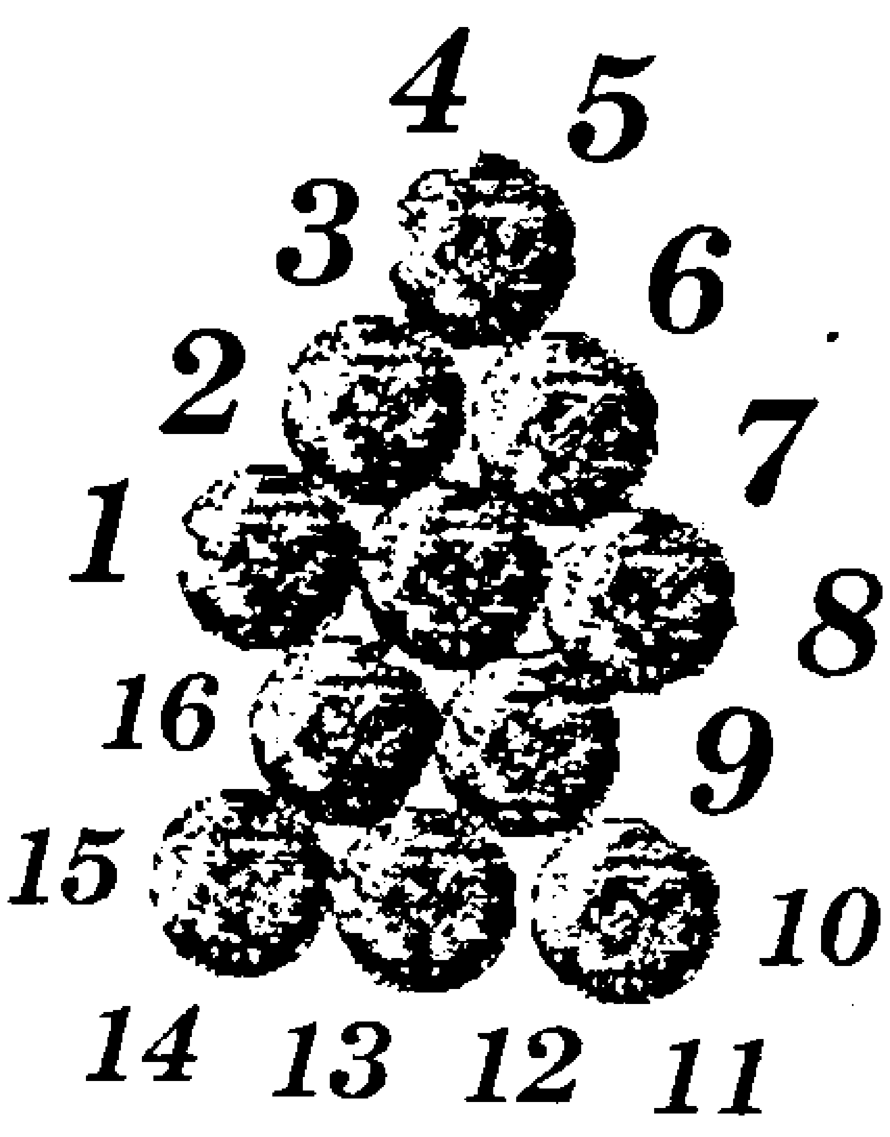
Coloquemos en tangente y alrededor de las monedas del gráfico, monedas de igual tamaño a ellas, teniendo en cuenta que se pueden ubicar *6* como máximo alrededor de cada una y luego, cada *3* posiciones mostradas contamos una vuelta, grafiquemos las vueltas que dará la moneda :



⇒ Dará *3* vueltas exactamente.

RPTA : "B"

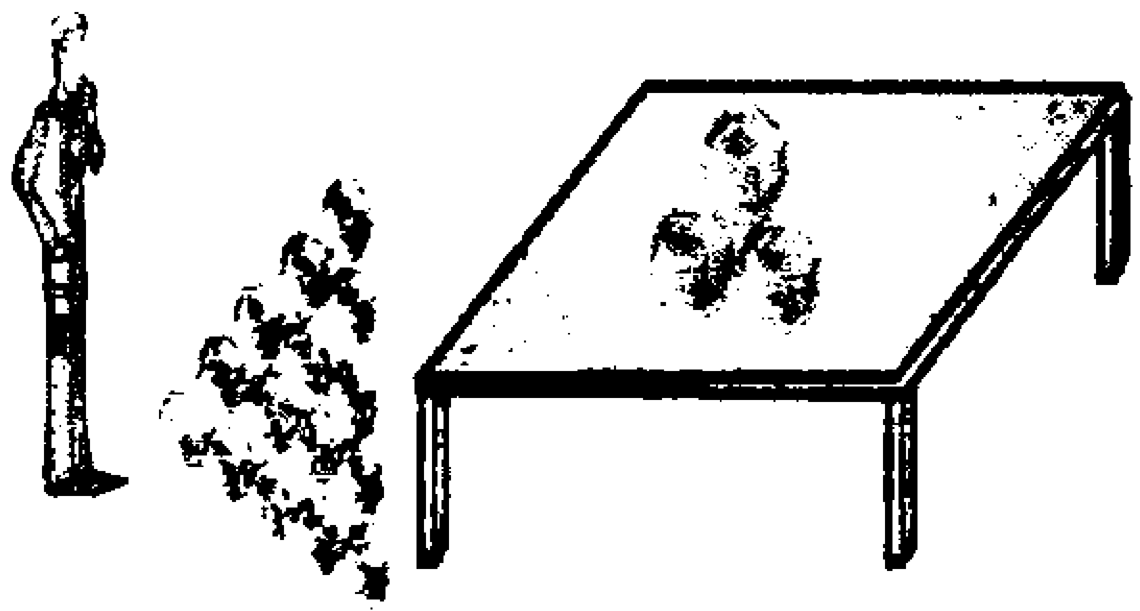
RESOLUCION 15 :



RPTA : "C"

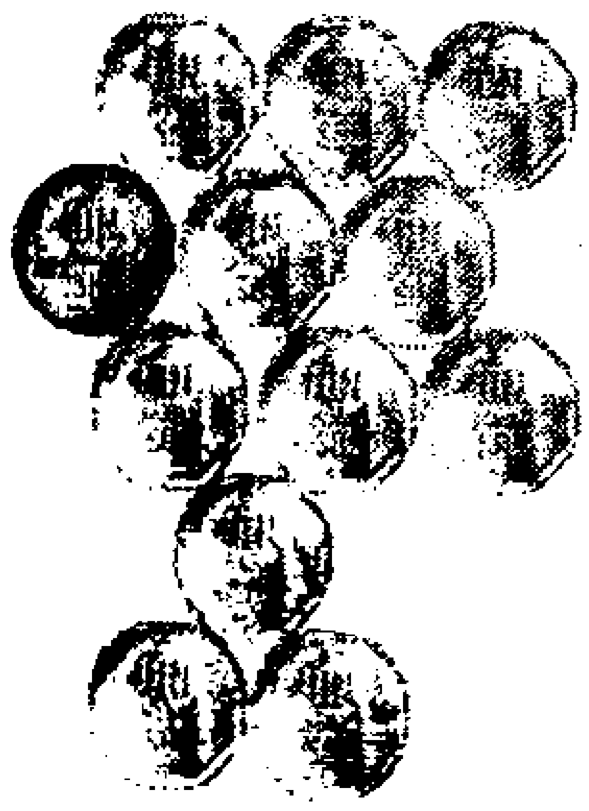
PRACTICA DIRIGIDA

01 En el gráfico, se tiene una ruma de monedas de un sol y *3* monedas de un sol sobre la mesa. ¿Cuántas de las monedas de la ruma pueden ubicarse, como máximo, alrededor y en contacto con las monedas ubicadas sobre la mesa?



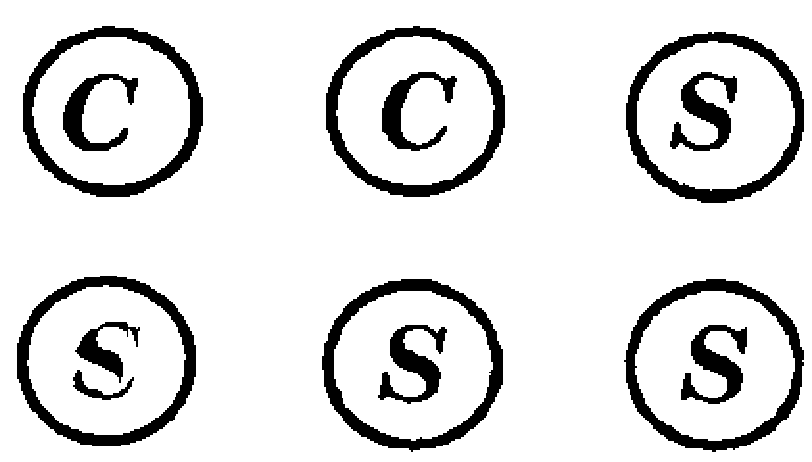
A) 7 *B) 9* *C) 10*
D)8 *E) 12*

02 ¿Cuántas vueltas dará la moneda más sombreada de un sol alrededor del arreglo formado por las otras monedas que se muestran en el gráfico hasta regresar a su posición inicial?



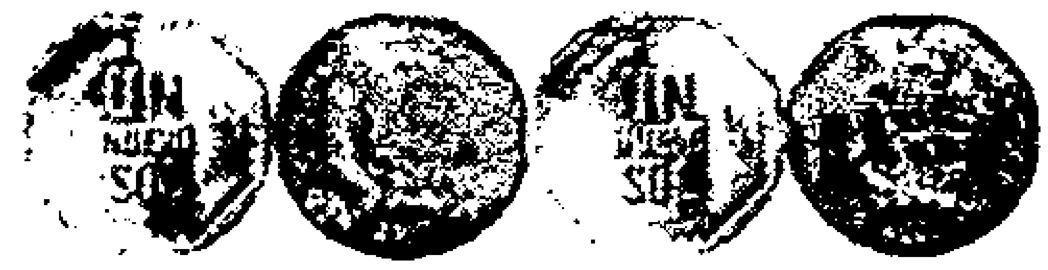
A) 4 *B)5* *C)6*
D) 7 *E) 8*

03 Si tenemos seis monedas como muestra la figura y llamamos un «movimiento» a la acción e voltear todas las monedas a su reverso. Sabiendo que *C* es cara y *S* es sello, ¿cuántas caras y cuántos sellos tendremos en la figura en *37* movimientos?



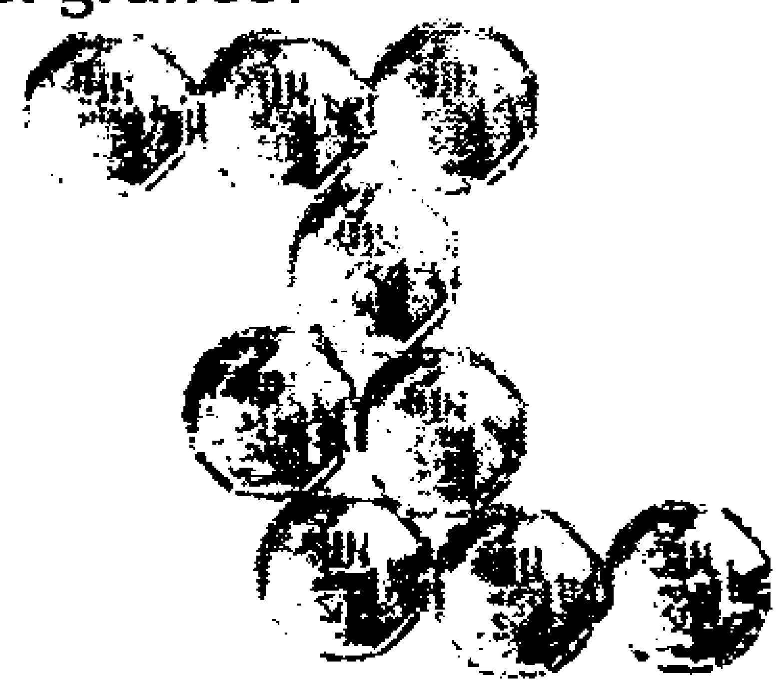
A) 3 caras y 3 sellos
B) 2 sellos y 4 caras
C) 5 sellos y 1 cara
D) 2 caras y 4 sellos
E) 1 sello y 5 caras

04 Se distribuyen *4* monedas en fila, tal como muestra el gráfico. El objetivo es seleccionar *2* monedas contiguas y voltearlas simultáneamente repitiendo el proceso hasta dejar todas las monedas mostrando una misma figura. ¿Cuántas veces se realizará el proceso, como mínimo, para lograr el objetivo?



A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

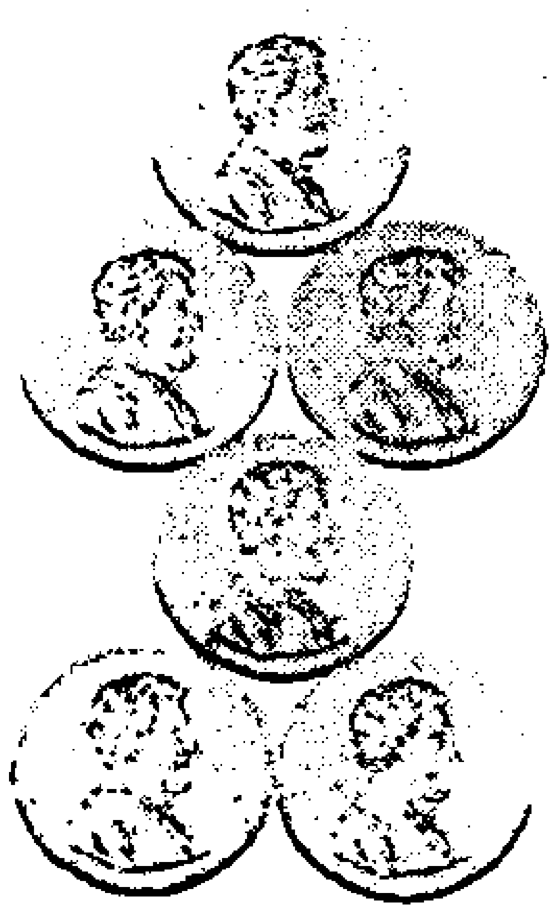
05 ¿Cuántas vueltas dará una moneda de un sol alrededor de las monedas que se muestran en el gráfico?



A) 4 *B) 5* *C) 6*
D) 7 *E) 8*

06 Sobre la mesa se tienen *6* monedas idénticas tal como se indica en el gráfico. ¿Cuántas monedas de igual valor se podrán colocar, como máximo, tangencialmente a las ya dadas?

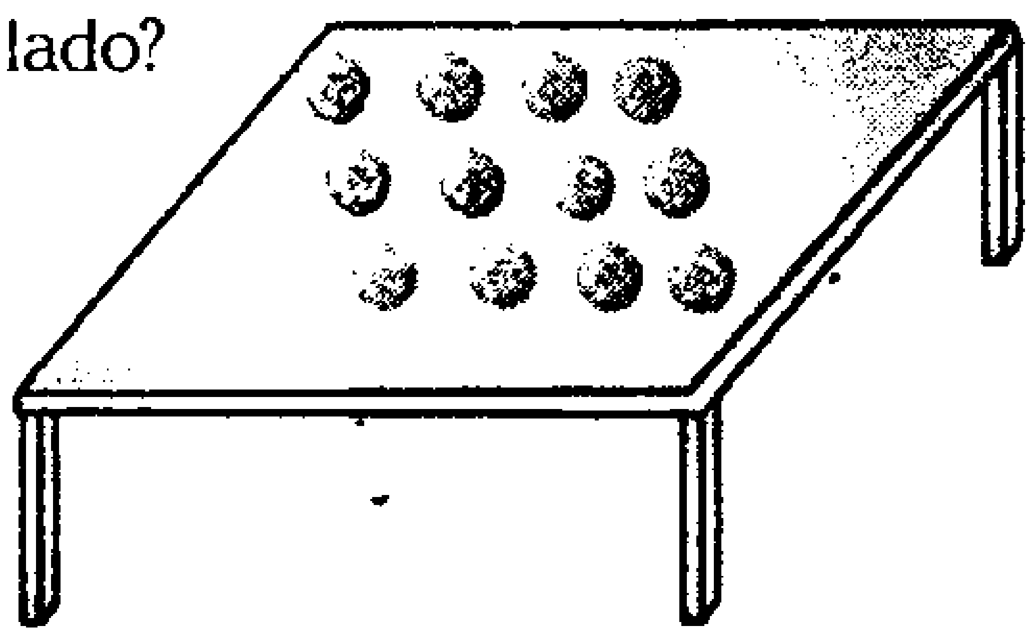
A) 10
B) 11
C) 12
D) 13
E) 14



07 En el siguiente distribucion de monedas ¿cuántas monedas se deben cambiar de lugar como mínimo, para formar un triángulo con *7* monedas en cada lado?

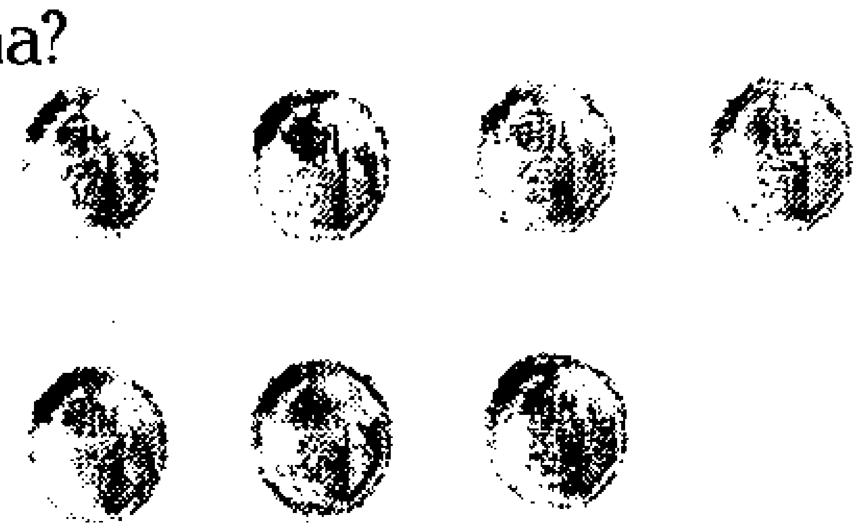
A) 5 *B) 2* *C) 3*
D) 6 *E) 8*

08 Sobre una mesa se ubican *12* monedas del mismo tamaño, distribuidas según el gráfico. ¿Cuántas monedas se debe cambiar de lugar, como, mínimo, para que se observe un cuadrilátero de *4* monedas por lado?



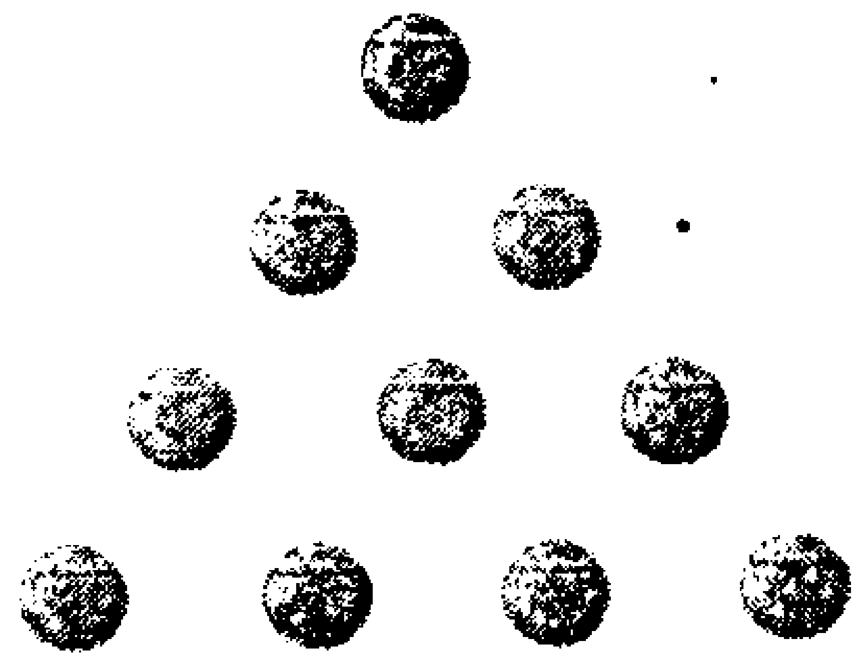
A) 4 *B)5* *C) 2*
D)3 *E) 1*

09 En el gráfico, ¿cuántas monedas se tiene que mover, como mínimo, para que se pueda trazar *5* líneas rectas que contengan solo *3* monedas cada una?



A) 2 *B) 1* *C) 4*
D)3 *E) 5*

10 En la siguiente distribución de monedas, ¿cuántas monedas se deben cambiar de lugar, como mínimo, para formar *5* hileras de *4* monedas cada una?

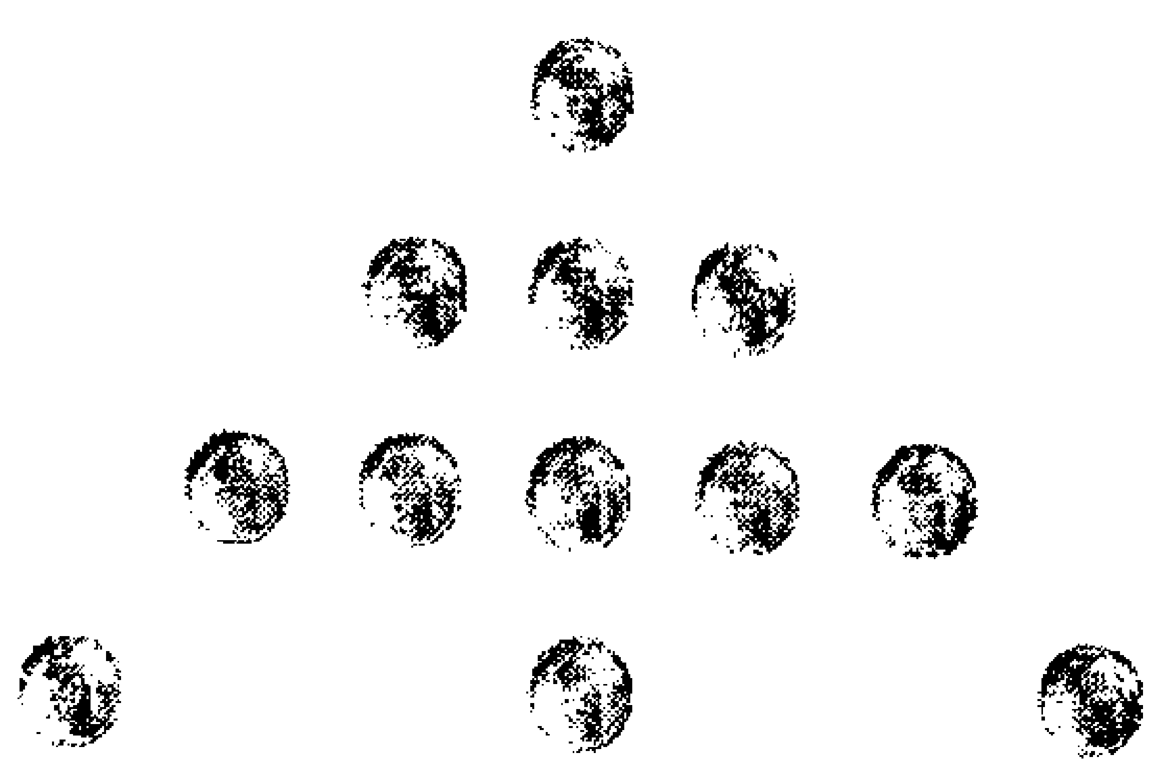


A) 3 *B) 2* *C)4*
D) 5 *E)1*

11 ¿Cuántas nonedas de *S/.2,* como máximo, se pueden colocar tangencialmente, alrededor y en contacto con la monedas del siguiente gráfico.

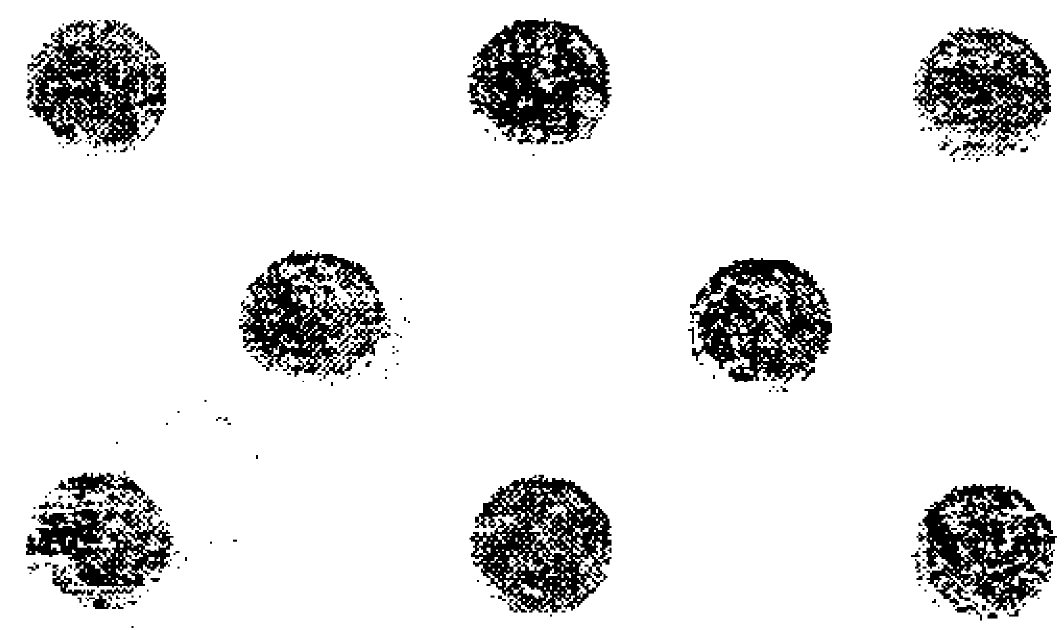
A)15 *B)16* *C)17*
D)18 *E)20*

12 En el gráfico, ¿cuántas monedas se deben mover, como mínimo, para que se observen *7* hileras de *4* monedas cada uno.



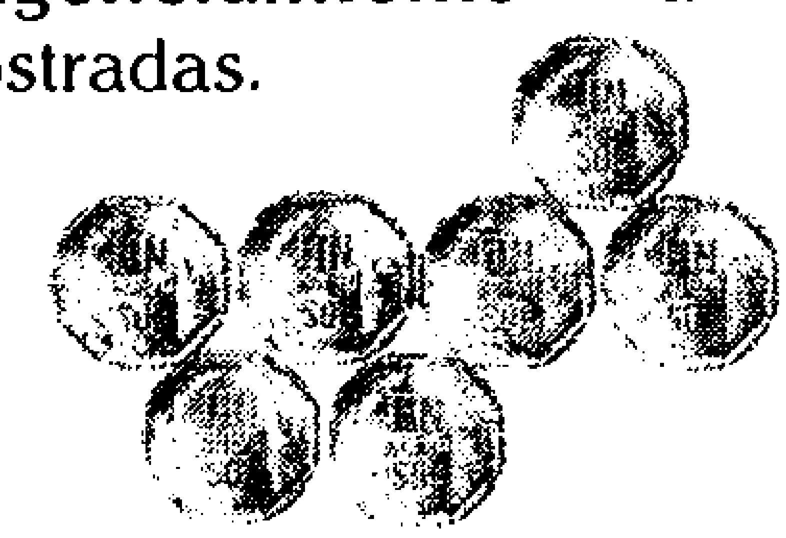
A)3 *B)4* *C)6*
D)5 *E)2*

13 En el siguiente arreglo, formado por *8* monedas, se cuentan *6* filas de *3* monedas. Indique la mínima cantidad de monedas que se deben agregar para tener *12* filas de *3* monedas.



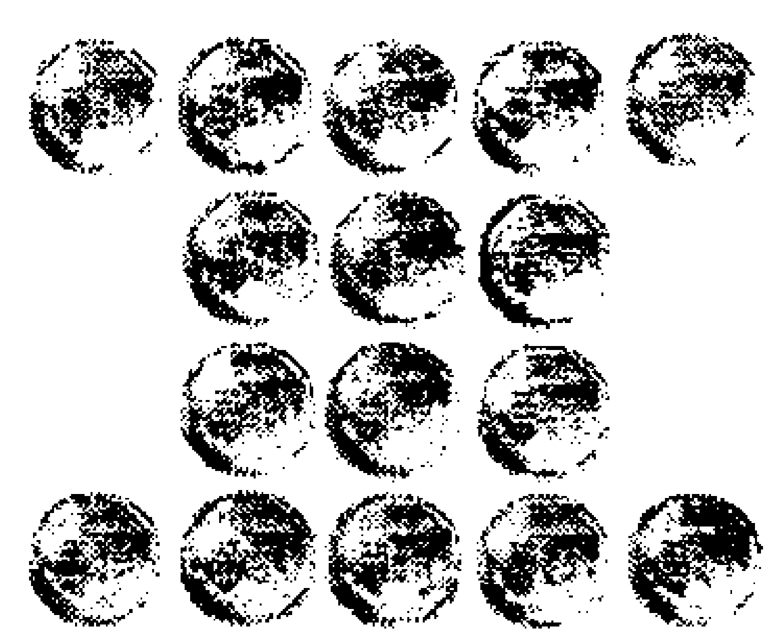
A)1 *B)2* *C)3*
D)4 *E)5*

14 Indique la cantidad máxima de monedas de *S/.1* que se puedan ubicar tangencialmente a las mostradas.



A)16 *B)12* *C)15*
D)13 *E)14*

15 El siguiente gráfico muestra en arreglo de monedas de igual tamaño. ¿Cuántas monedas se tienen que mover, como mínimo, para formar un cuadrado con *6* monedas por lado?



A) 9
B) 7
C) 4
D) 6
E) 8

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	C	B	B	C	D	C	C	*	A
11	12	13	14	15					
C	E	B	F	D					

VIAJES , TRASLADOS Y TRASVASES

04

OBJETIVOS :

* *Estimular la creatividad y el interés por la matemática.*
* *Mostrar ejercicios , juegos matemáticos y procedimientos de uso que ayuden a despertar y fomentar en el alumnado el interés por las matemáticas .*

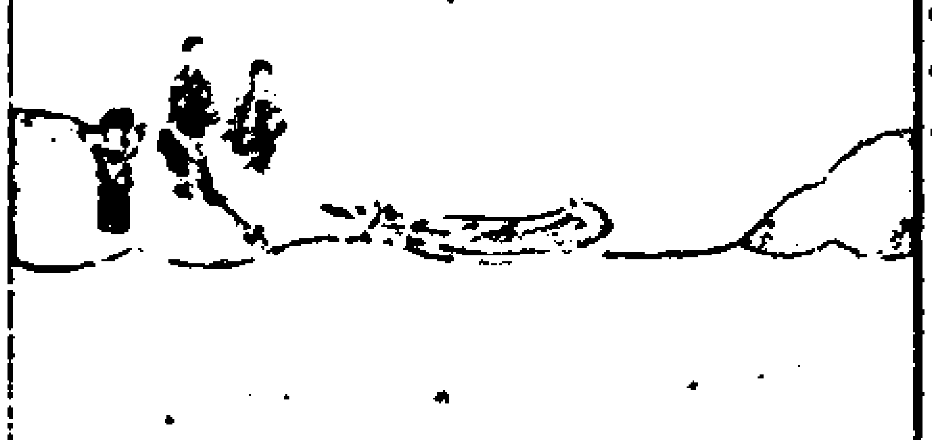
INTRODUCCION :

La creatividad es el poder y la capacidad de imaginación. Imaginar significa salirse de lo rutinario para ir a concebir algo nuevo: construir una puerta, hacer un cuento, prepararse para un viaje imaginario, etc., ser creativo significa tener invención.

El espíritu creativo se manifiesta plenamente, incluso en el ingenio que tiene que hacer un puente, tiene que pensar no sólo en el verano, sino también en el invierno y determinar su posible influencia. En un matemático, para demostrar una fórmula, tiene que ver casos y relaciones nuevas.

SOBRE TRASLADOS

Consiste en encontrar la menor cantidad de traslados que deben realizar una cantidad de personas para ir de una orilla a otra



SOBRE TRASVASES

Con recipientes sin graduar de diferentes capacidades, se deben obtener un cierto volumen de liquido realizando la menor cantidad de trasvases

Los problemas que se presentan en este capítulo, aportan diversión y desarrollo del pensamiento creativo. Ellos constituyen todo un reto para el alumno ya que se necesita de mucho ingenio para lograr resolver las situaciones lógico recreativas propuestas.

Para poder resolver apropiadamente este tipo de problemas debemos leer y comprender claramente el enunciado del problema, identificar lo que nos piden calcular y definir el proceso a seguir para obtener la respuesta al problema.

En este capítulo resolveremos problemas que involucran , viajes y traslados , trasvases, ..etc.

PROBLEMAS SOBRE TRASLADOS

Bajo ciertas condiciones del problema, trasladaremos personas, animales u objetos hacia otra posición, con el menor número de movimientos. Son muy frecuentes los problemas referentes a traslados de personas en bote(viajes).

EJEMPLO:

¿Cuántos traslados tendrán que realizar *4* jóvenes, como mínimo, para cruzar un río, si el bote solo puede llevar a dos personas a la vez?

OBSERVACIONES :

* Estos problemas consisten en encontrar la menor cantidad de traslados (viajes) que debe realizar una cantidad de personas para ir de una orilla a la otra.
* La capacidad máxima del bote.
* El bote siempre dede ser conducido al menos por una persona, en ida o en regreso.
* Se asumirá que todas las personas saben remar

(conducir el bote) a menos que el problema precise alguna condición distinta.

* Para garantizar la menor cantidad de traslados o viajes, generalmente se buscará que en cada ida vaya la mayor cantidad de personas.

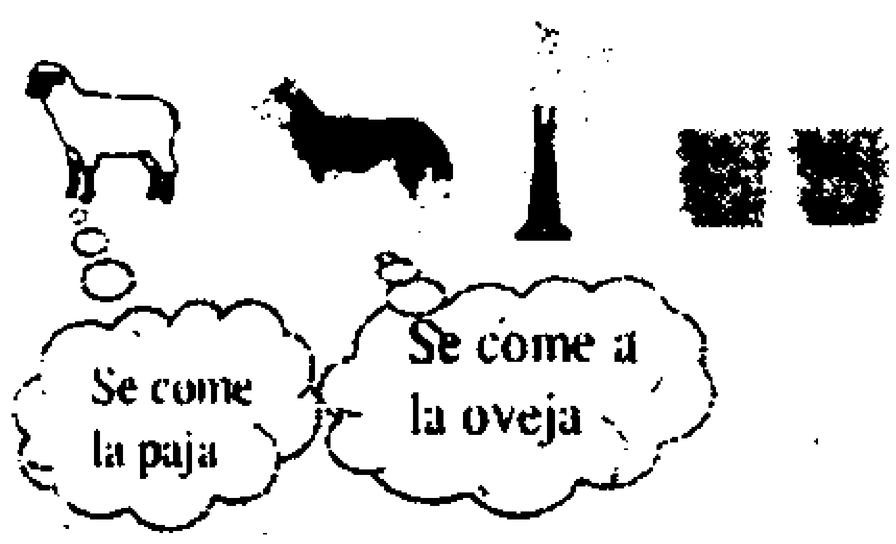
* Evitar viajes en que regresen inmediatemente los mismos elementos que partieron . Así también garantizamos el menor número de viajes.

EJEMPLO :

Un pastor quiere pasar un lobo, una oveja y un cubo de paja de una a otra orilla de un río. Dispone para ello de una barca en la que solo caben él y una de las otras tres cosas. Si el lobo se queda solo con la oveja, se la come. Si la oveja se queda solo con la paja, se la come. ¿Cuántos viajes necesita realizar el pastor, como mínimo, para lograr pasar a la otra orilla?

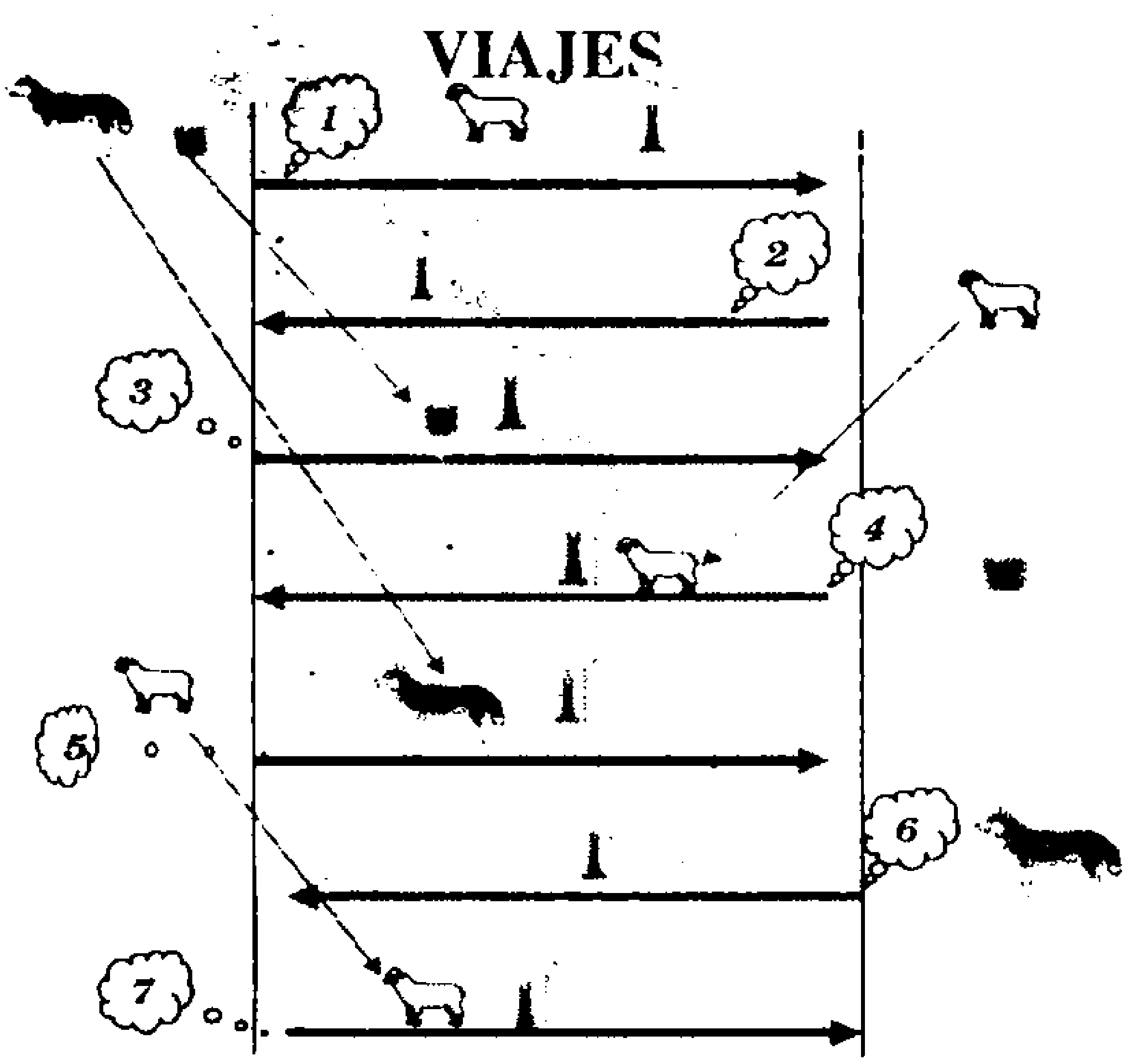
RESOLUCIÓN:

De los datos se tiene:



Solo puede llevar al pastor y una de los otros (oveja, lobo, paja)

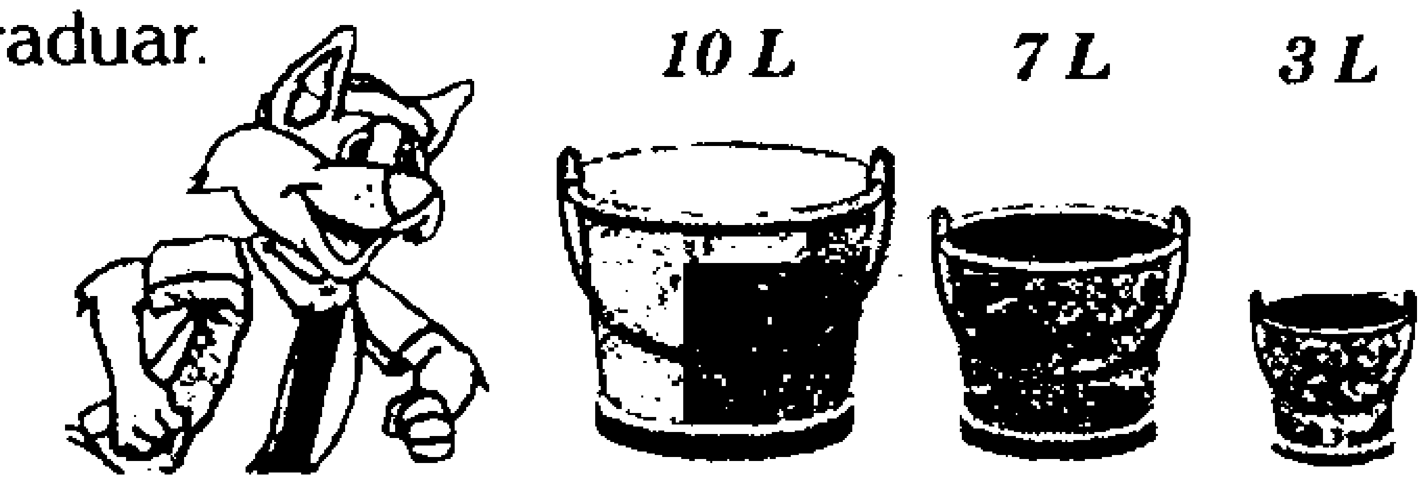
Realizando los viajes:



Por lo tanto , se realizan 7 viajes como mínimo

PROBLEMAS SOBRE TRASVASES

Se deberá verter líquido de un recipiente a otro hasta obtener el volumen del líquido requerido, pero con el menor número de traslados. La mayor dificultad recide en que los recipientes estarán sin graduar.

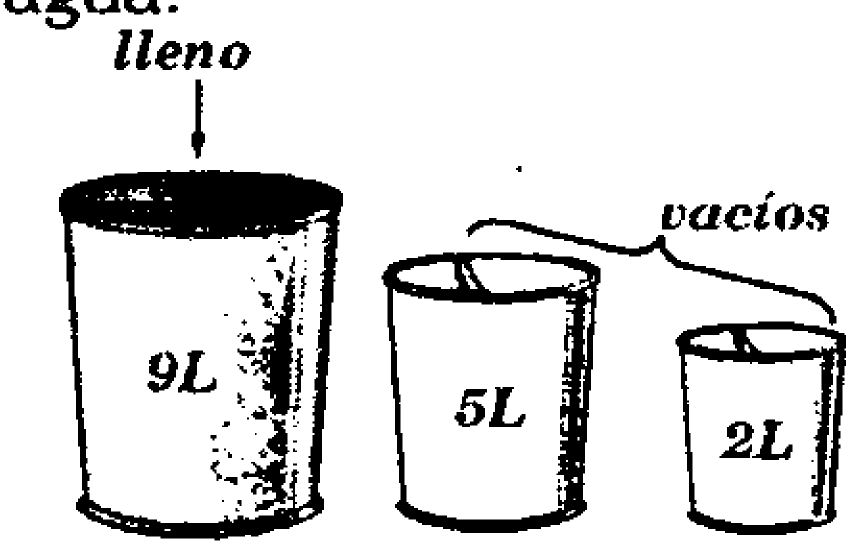


En los problemas sobre trasvases, considere que

- No es posible realizar dos o más trasvases simultáneos.
- No se desperdicia líquidos.
- En cada trasvase, solo es posible llenar un recipiente o vaciar el otro.

EJEMPLO:

Si se tiene tres recipientes sin graduar, de capacidades ***9L, 5L*** y **2L**, solo el primero está completamente lleno de agua. ¿Cuántos trasvases se tiene que realizar, como mínimo, para tener un litro de agua?



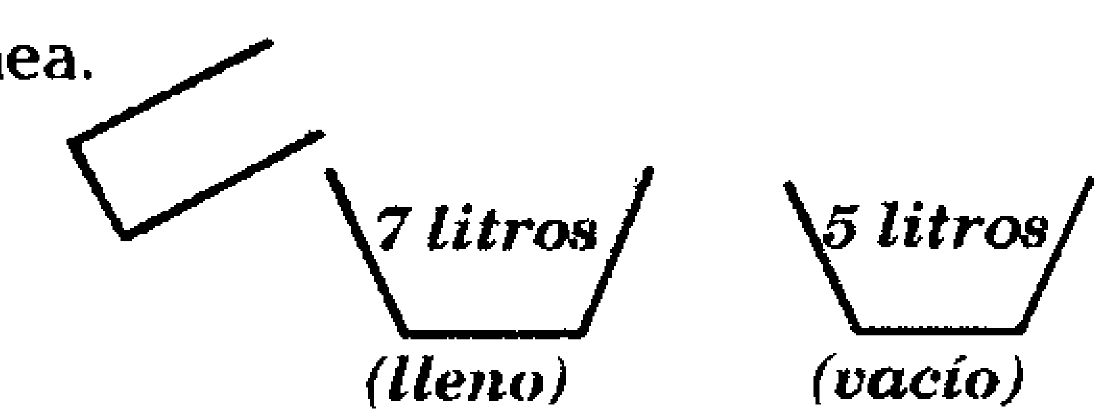
OBSERVACIONES :

* Aquí lo que se busca es que con recipientes de diferentes capacidades se pueda obtener un cierto volumen de líquido realizando la menor cantidad de trasvases.

* En estos ejercicios no se desperdicia el líquido.

* En cada trasvase, solo es posible llenar un recipiente o vaciar el otro.

* No es posible realizar más de un trasvase en forma simultánea.



Volumen: *7L* *0L*

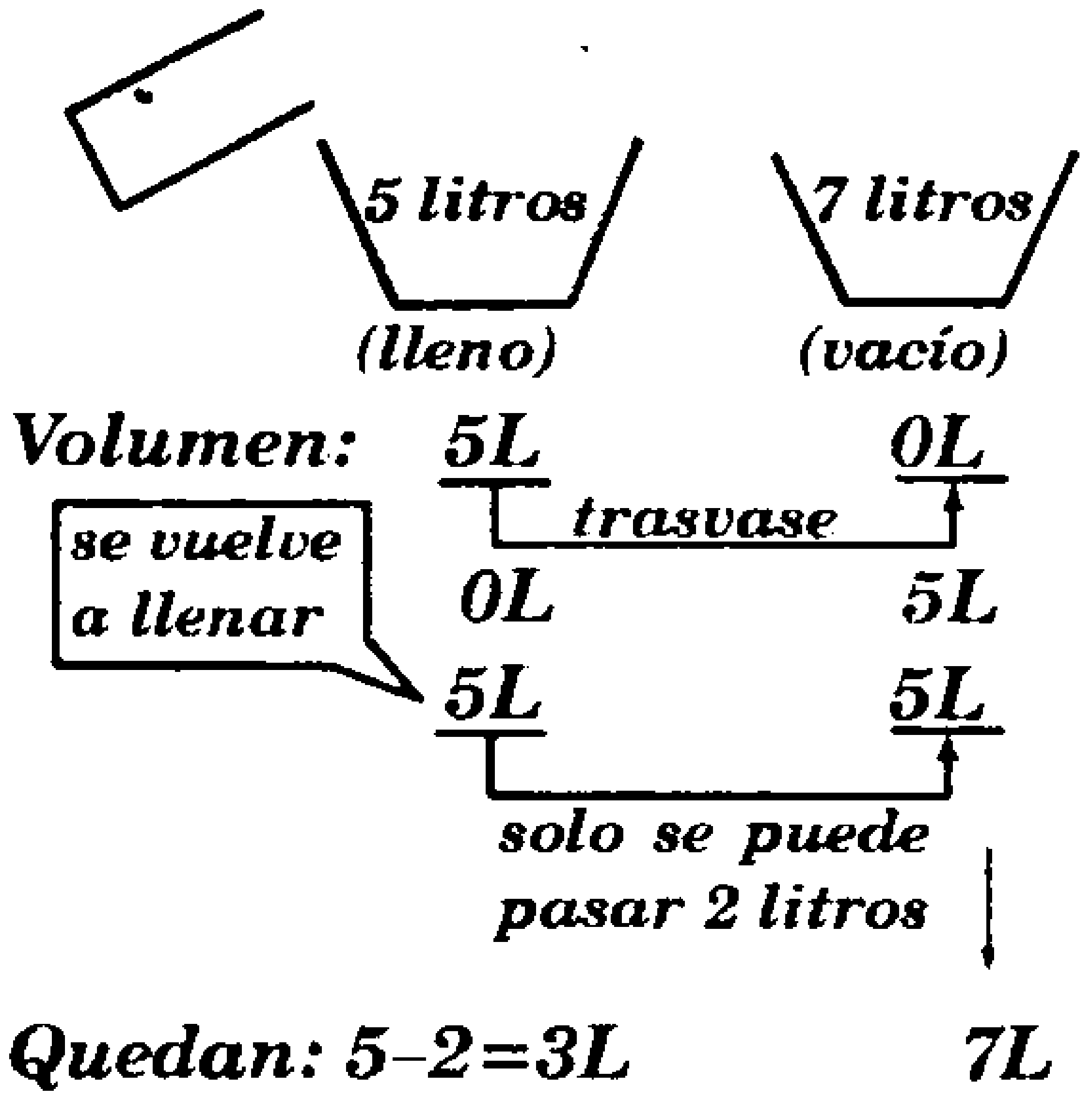
trasvase

Queda: *2L* *5L*

$2=7-5$

En problemas sobre trasvases, los volúmenes se pueden obtener por sumas y diferencias sucesivas.

Para obtener $3 = 2(5) - 7$, se realizarían los siguientes trasvases:

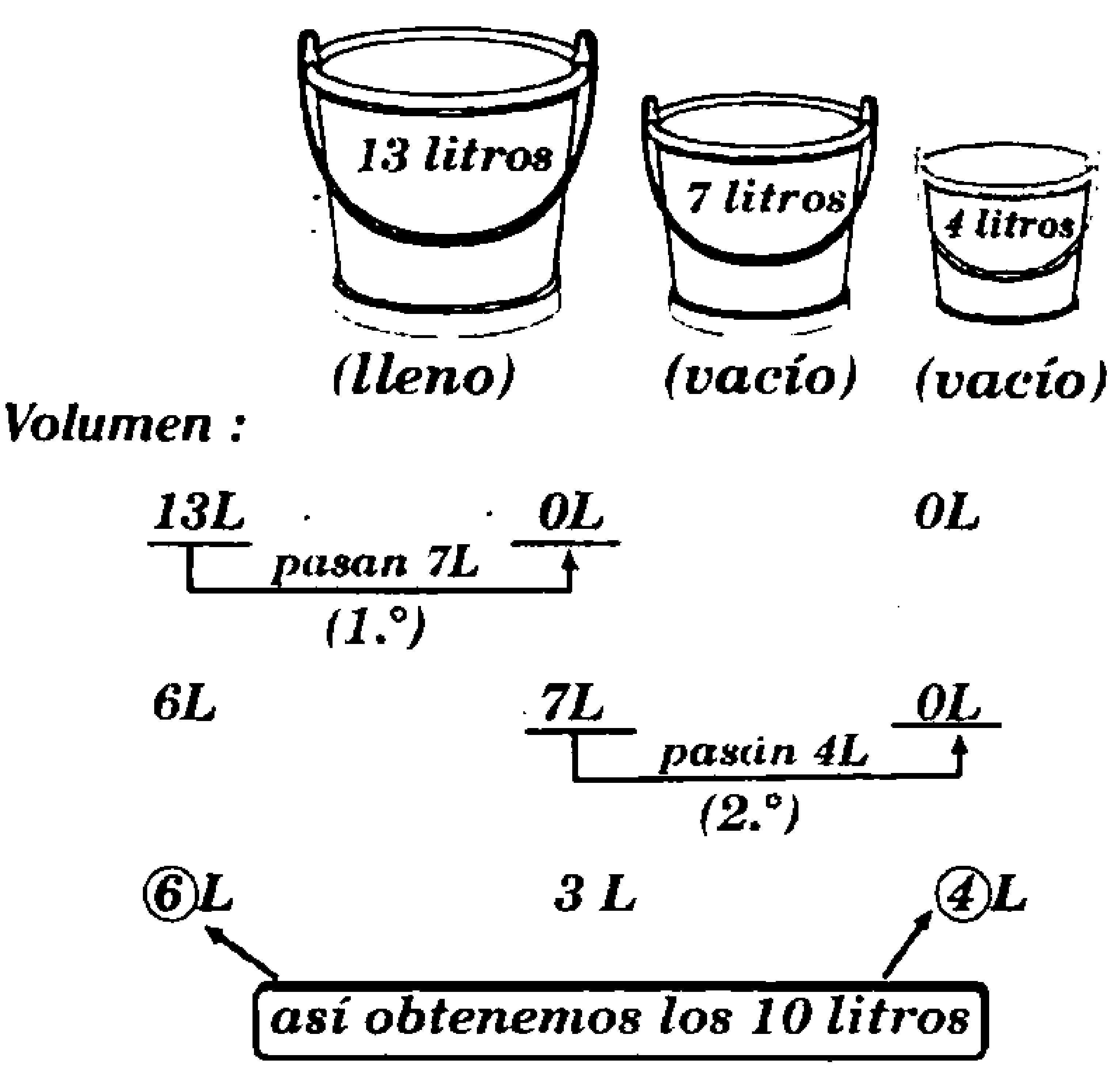


EJEMPLO :

Se tiene un balde con *13* litros de vino del cual solo se requieren *10* litros. Si además solo se posee dos baldes vacíos: uno de *4* litros y otro de *7* litros, ¿cuántos trasvases serán necesarios para obtener el volumen deseado? Considere que los baldes no tienen marca alguna.

RESOLUCIÓN :

Para obtener *10* litros de los *13* dados debemos separar $13-10=3$ litros y estos se pueden obtener de los baldes de *4* y *7* litros (como una diferencia $7-4=3$). Los trasvases serían los siguientes:



Por lo tanto, son necesarios 2 trasvases.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Una familia conformada por el padre y la madre, cuyos pesos son de *70 Kg* cada uno; dos hijas mayores de edad de *50 Kg* de peso cada una, dos hijos pequeños de *30 Kg* cada uno y un gato de *10 Kg*, se encuentran de excursión por algún lugar de la selva. En cierto momento llegan a un río que deben cruzar para continuar su camino, y para lograrlo utilizarán una balsa inflable automáticamente que resiste un peso de *120 Kg*. Si los niños y el gato no pueden quedarse solos en ningún instante porque se pueden perder. ¿Cuántos viajes en total (ida y vuelta) tienen que realizar como mínimo, para que toda la familia cruce el río?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

RESOLUCIÓN :

Sean los datos:

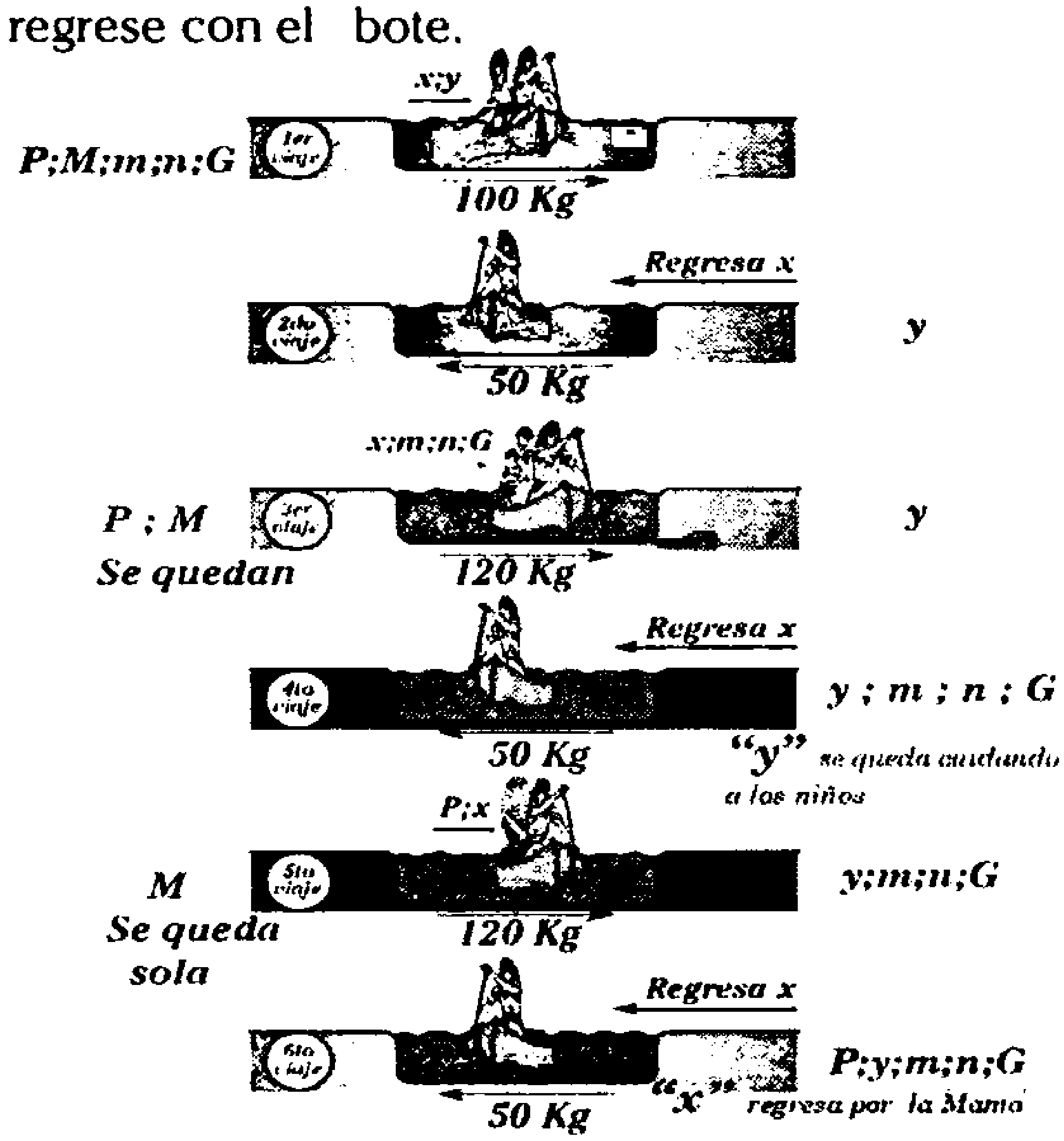
* Padre: *P (70 Kg)* * Madre: *M (70 Kg)*

* Hijas: *x ; y (50 Kg c/u)* * Hijos: *m; n (30 Kg c/u)*

* Gato: *G (10 Kg)*

* La balsa soporta un peso máximo de *120 Kg*.

Los viajes a realizar los indicamos en el siguiente esquema, sin olvidar que siempre en el primer viaje cruzan más de una persona, para que regrese con el bote.



P;y;m;n;G

⇒ *7* viajes en total.

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Una familia compuesta por una pareja de esposos y sus dos hijos se encuentran en la orilla derecha de un río, y desean pasar en un bote a la otra orilla. Se sabe que el bote puede trasladar a lo más *2* personas, y los hijos son muy celosos entre sí, ya que en ningún instante permiten que su hermano esté con la madre en ausencia de él. ¿Cuántos traslados se deben realizar, como mínimo, para lograrlo? Considere que las *4* personas saben remar.

A) 6 B) 8 C) 3 D) 6 E) 5

RESOLUCIÓN:

Asignaremos letras a los miembros de la familia de la siguiente manera:

P: padre: ***M:*** madre; ***H:*** hijo mayor y ***h:*** hijo menor

La tabla siguiente muestra los viajes que realizarán..

N.° de viajes	Integrantes	Acción realizada
1°	P y M	Cruzan el río →
2°	M	Regresa con el bote ←
3°	H y h	Cruzan el río
4°	P	Regresa con el bote ←
5°	P y M	Cruzan el río

⇒ Total de traslados (viajes)=*5*

RPTA "E'

PROBLEMA 3 :

Hay *4* botes , en una de las orillas del río , sus nombres son ***ocho*** , ***cuatro*** , ***dos*** y ***uno*** ; porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río . Se puede atar un bote a otro , pero no más de uno y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los *2* botes.

Un sólo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla . ¿Cuál es el menor tiempo para que logre pasar todos los botes?

A) 16 H B) 14 C) 15 D) 17 E) 8

RESOLUCIÓN :

* La intención es que la demora de los que utilizan más tiempo , se obvie (que evidentemente no podrá ser el de ocho) pero quizás el de ***cuatro*** ; así , de la siguiente manera:

Pasando uno y dos ↦ ***demora de 2 h***

⇐ **Regresando uno** ↦ ***demora de 1 h***

Pasando ocho y cuatro ↦ ***demora de 8 h***

⇐ **Regresando dos** ↦ ***demora de 2 h***

Pasando finalmente uno y dos ↦ ***demora de 2 h***

* Entonces el tiempo total necesario será de :

$2+1+8+2+2=15$ horas

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Un viajero que debe cruzar un río , tiene un lobo , una oveja y un atado de alfalfa . El único bote disponible es muy pequeño y no puede llevar más que al viajero y a uno de sus bienes ; si logró transportar todos sus bienes a la otra orilla y sin ninguna otra ayuda externa . ¿Cuántas veces cruzó el río en el bote?

A) 6 B) 7 C) 5 D) 9 E) 8

RESOLUCIÓN :

Debe pasar primero a la oveja y dejarla en la otra orilla. A continuación, volver por el lobo y dejarlo también en la otra orilla, pero regresando a buscar el atado de alfalfa volviendo a traerse a la oveja, para que el lobo no la mate.

Dejará la cabra en la orilla inicial y se llevará al atado de alfalfa que dejará en la otra orilla junto al amigo lobo. No queda sino regresar a recoger de nuevo a la cabra.

1°) L , A $\xrightarrow{O}$	5°) O $\xrightarrow{A}$ L
2°) L , A ←—— O	6°) O ←—— L , A
3°) A $\xrightarrow{L}$ O	7°) O ——→ L , A , O
4°) A $\xleftarrow{O}$ L	

* Total *7* viajes .

RPTA "B"

PROBLEMA 5 :

Dos adultos con tres niños desean cruzar el río, para lo cual cuentan con un bote que soporta como máximo el peso de dos niños o de un adulto; pero no de un adulto y un niño a la vez.

¿Cuántos viajes tendrán que realizar como mínimo?.(Considere que uno de los niños no sabe remar)

A) 9 B) 13 C) 17 D) 15 E) 11

RESOLUCIÓN :

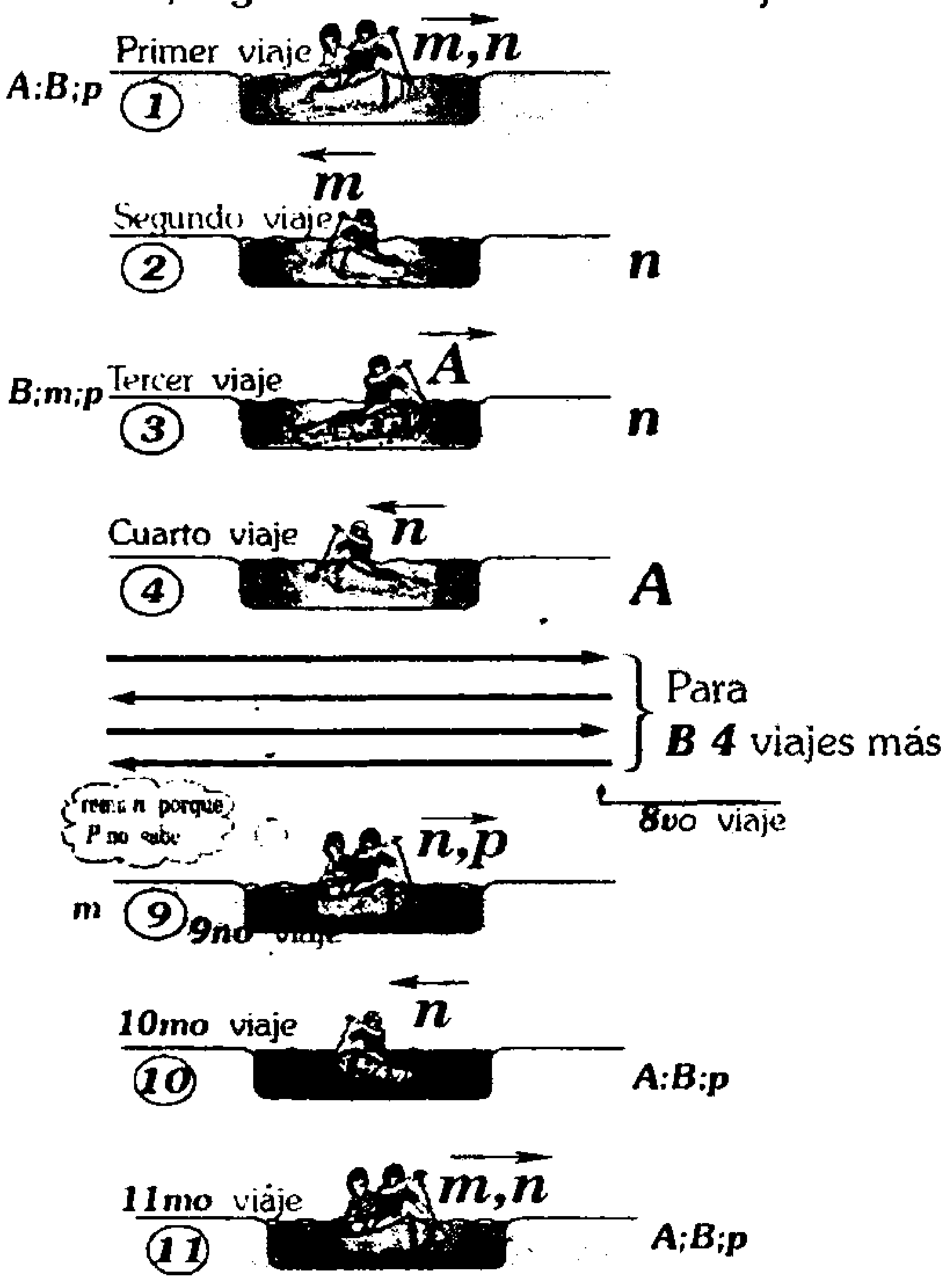
Datos:

* Adultos: ***A,B***

* Niños: ***m, n, p*** (no sabe remar)

* En el bote solo pueden ir dos niños o un adulto

Entonces, según las condiciones los viajes serán:



⇒ ***11 viajes.***

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Tres hombres de ***90 kg*** y dos niños de ***42 kg***, cada uno, tienen que cruzar un río en una balsa, la cual solo puede soportar ***95 kg***. ¿Cuántos traslados, como mínimo, se deben realizar para que todos crucen el río?

A) 13 B) 19 C) 17 D) 15 E) 11

RESOLUCIÓN :

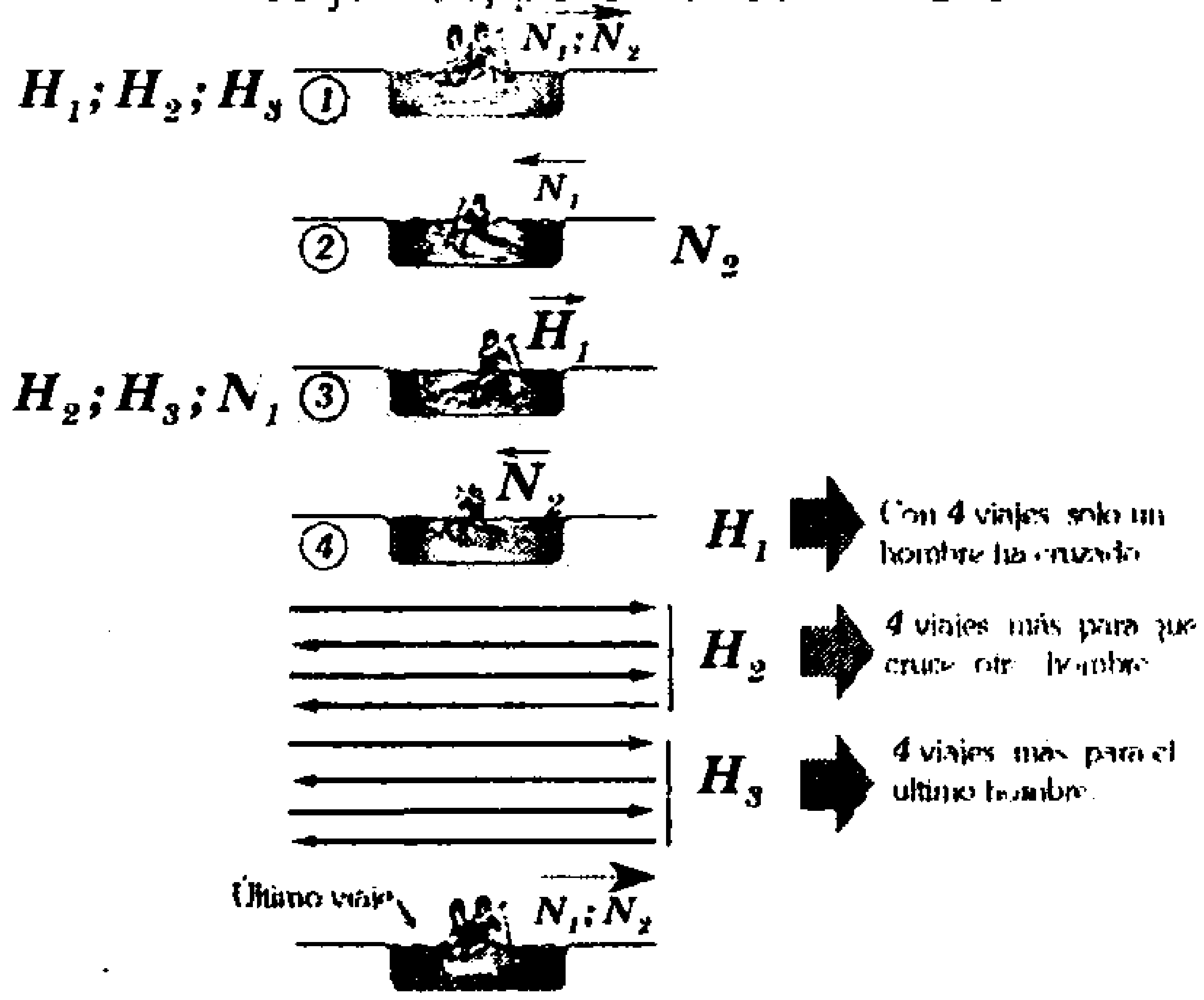
Se pide la cantidad mínima de traslados.

De los datos se tiene:

* Hombres: $H_1; H_2; H_3$ (cada uno pesa ***90 kg***)

* Niños: $N_1; N_2$ (cada uno pesa ***42 kg***)

* La balsa soporta hasta ***95 kg*** es decir, pueden ir los dos niños juntos, pero no los hombres.



Por los tres hombres

⇒ Total de traslados$=4\times 3+1=13$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

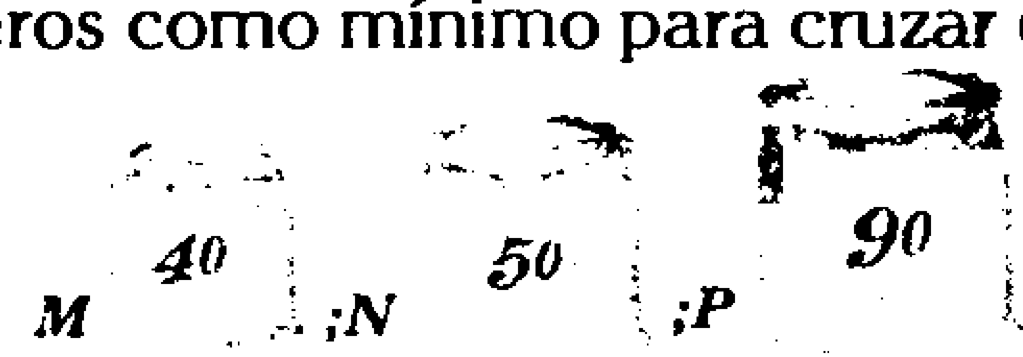
Tres mineros: ***M***; ***N*** y ***P*** cada uno con carga de ***40***; ***50*** y ***90*** kilos respectivamente, se disponen a cruzar un río, pero el bote solo puede transportar a dos personas o a una persona y una de las cargas, además, en ningún momento debe ocurrir que uno o dos de los mineros se encuentren solos con una carga cuyo peso sea mayor a la suma de los pesos de las cargas asignadas originalmente. Si esta permitido llevar la carga de otro de los mineros, ¿Cuántos viajes, como mínimo deben realizar para cruzar el río?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad de viajes que deben realizar los mineros como mínimo para cruzar el río.

Datos:



* El bote solo transporta a dos mineros o a un minero y una carga.

* La suma de los pesos de las cargas de uno o dos mineros en ningún momento debe ser mayor a la suma de los pesos de sus cargas originales.

Por ejemplo:

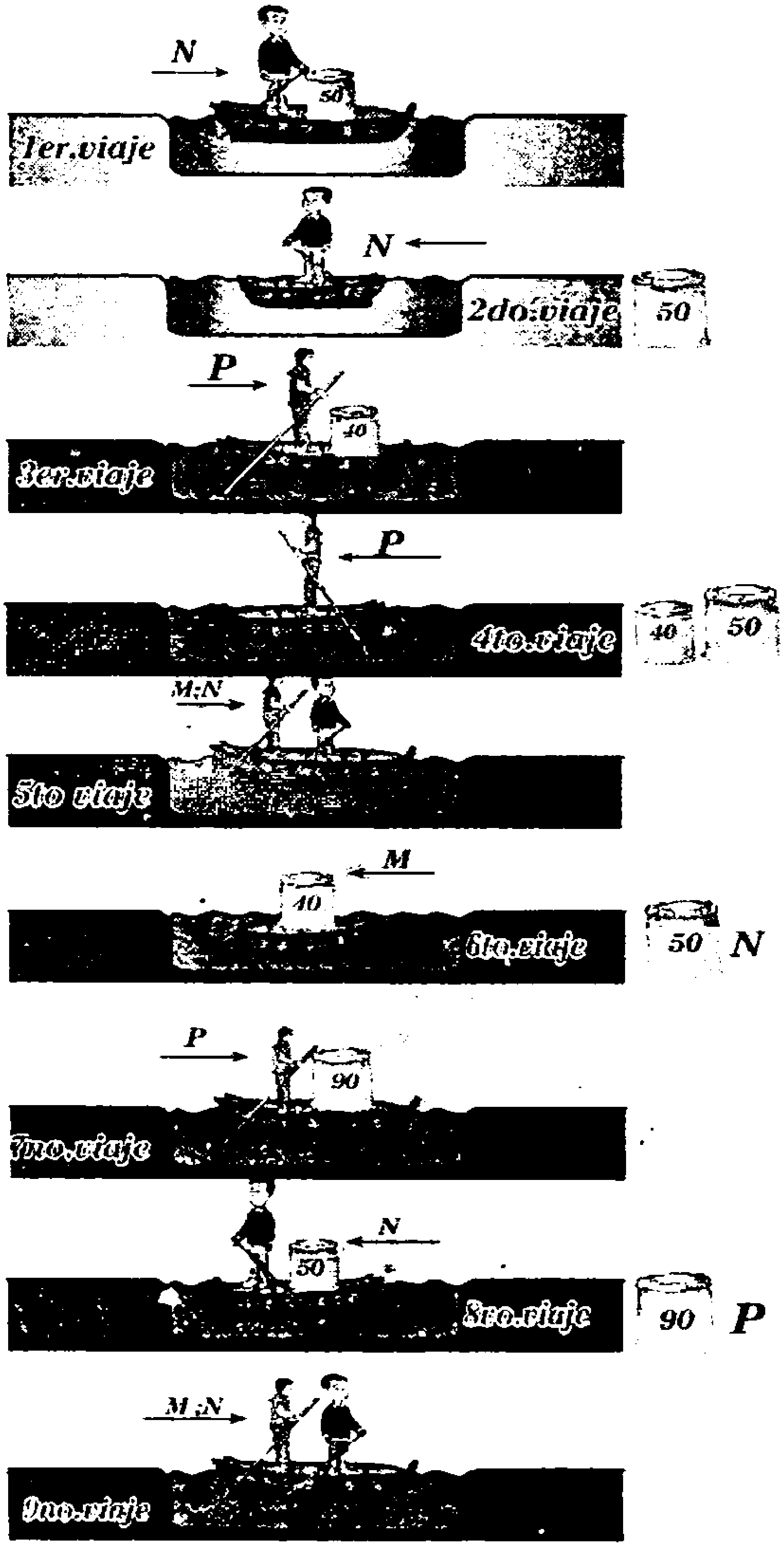
	Peso orginal	Peso en algún momento
M	40	50
N	50	90
Total	90 <	140

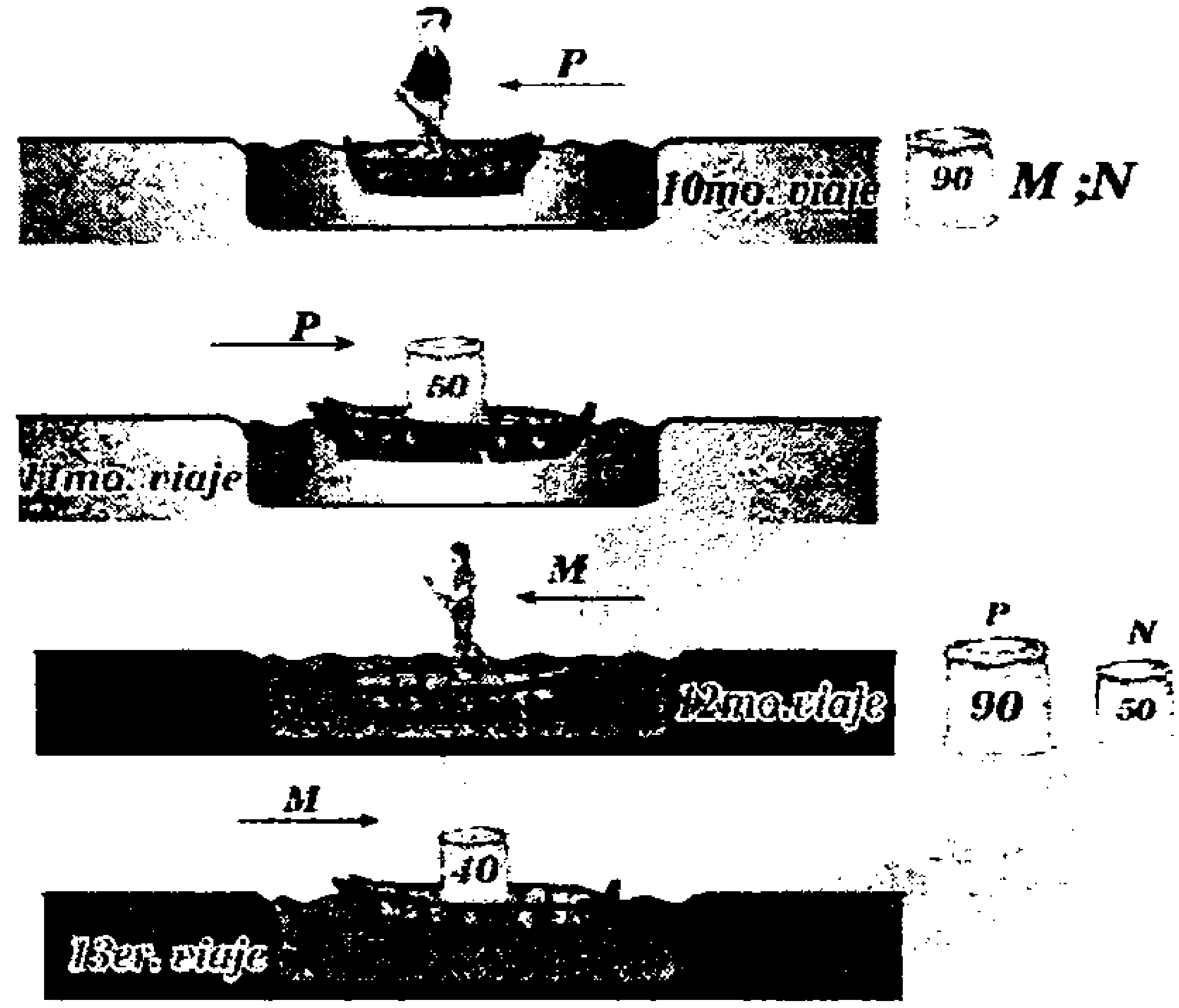
¡ No se puede dar!

	Peso orginal	Peso en algún momento
N	50	40
P	90	50
Total	140 >	90

¡ Si se puede dar!

* Los viajes se darían de la siguiente manera:





⇒ Se deben realizar *13* viajes.

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Seis hombres y tres niños tienen que cruzar un río en una canoa, en cada viaje solo pueden ir dos de los hombres o los tres niños, pero no un niño con un hombre a la vez. ¿Cuál es el menor número de veces que la canoa tendrá que cruzar el río, en cualquier sentido, para que todos se trasladen?

A) 9 *B) 15* *C) 13* *D) 11* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

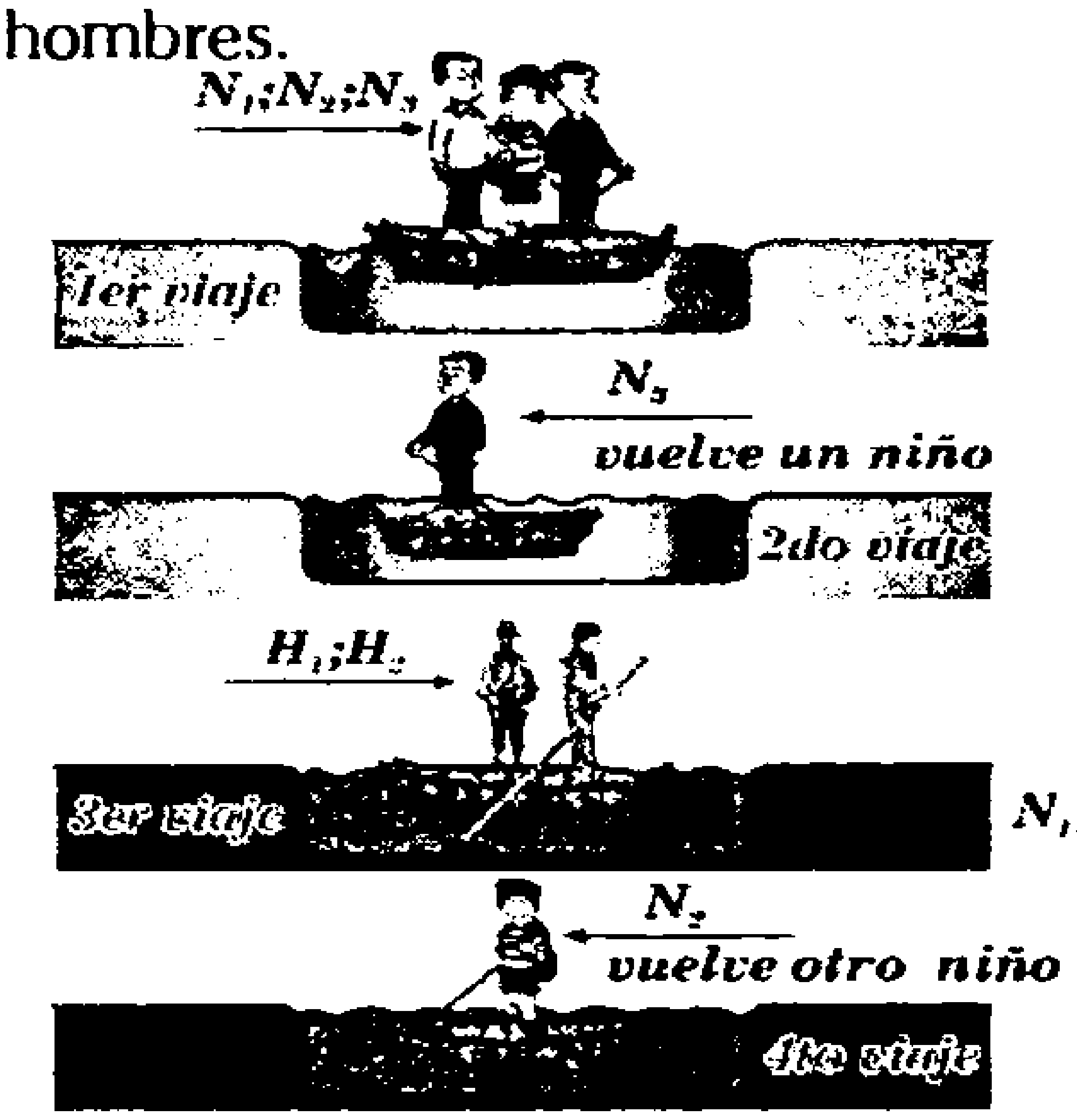
Se pide el menor número de veces que la canoa cruzará el río, en cualquier sentido.

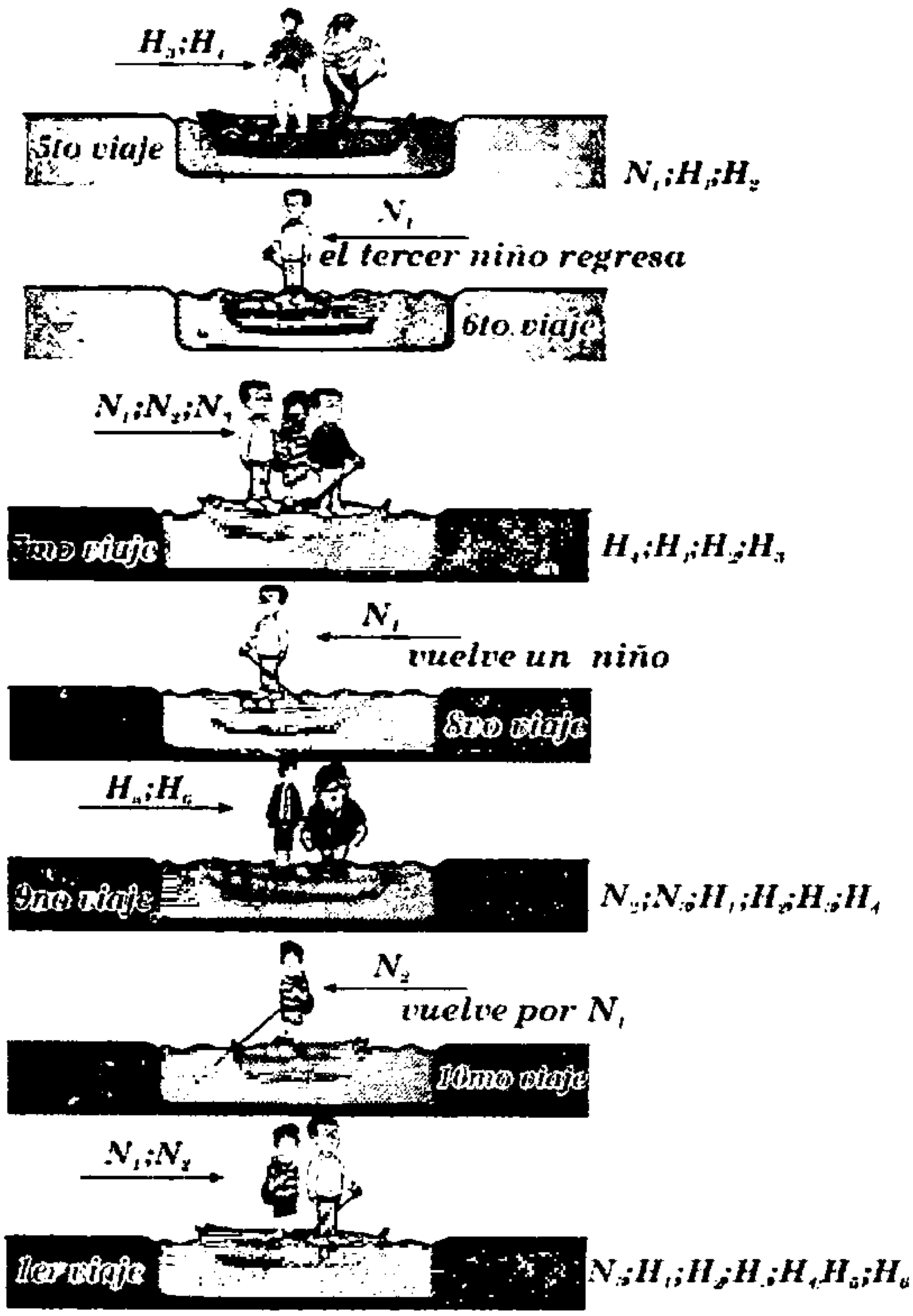
Datos:

* Hombres: $H_1; H_2; H_3; H_4; H_5; H_6$

* Niños: $N_1; N_2; N_3$

* Solo pueden ir en la canoa los tres niños o dos hombres.





⇒ once viajes en total.

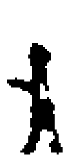
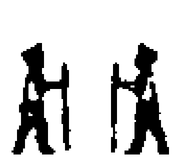
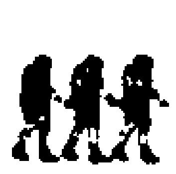
RPTA : "D"

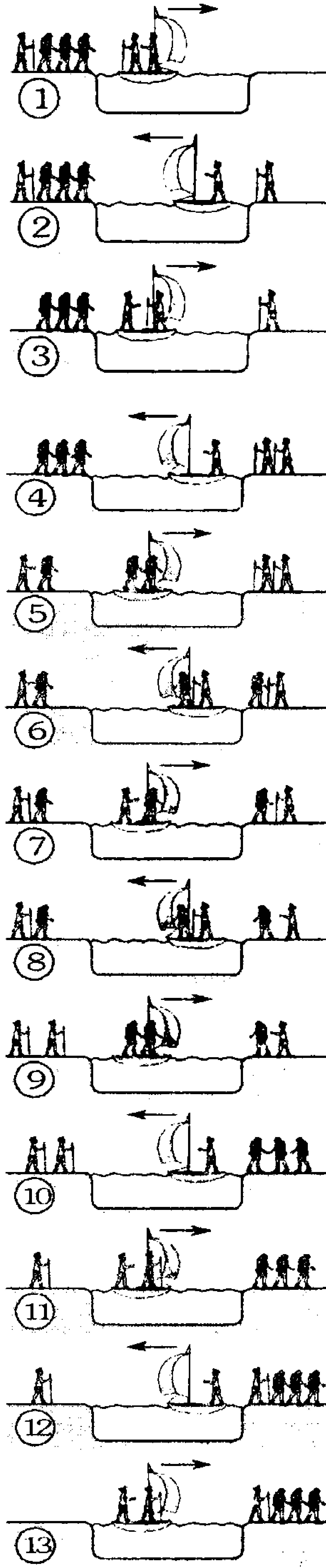
PROBLEMA 9 :

Se hallan en el extremo de un río tres hombres blancos y tres caníbales . ¿Cómo deben pasar al otro extremo si únicamente caben dos en una barca y no debe existir mayor número de caníbales que de blancos en un extremo, con la restricción adicional de que sólo un caníbal sabe como remar y además los tres blancos saben también dicho arte?

RESOLUCIÓN :

* Esto se puede realizar en *13* viajes :

caníbal que rema	caníbales	hombres blancos
		



1. Se va el caníbal que rema con otro caníbal
2. Regresa el caníbal que rema
3. Se va el caníbal que rema con otro caníbal
4. Regresa el caníbal que rema
5. Van dos hombres blancos
6. Regresa un hombre blanco con un caníbal
7. Va el caníbal que rema con un hombre blanco
8. Regresa un hombre blanco con un caníbal
9. Van dos hombres blancos
10. Regresa el caníbal que rema
11. Va el caníbal que rema con un caníbal
12. Regresa el caníbal que rema
13. Finalmente va el caníbal que rema con otro caníbal

PROBLEMA 10 :

Se hallan en el extremo de un río tres hombres blancos y tres caníbales . Únicamente caben dos en una barca y pueden desembarcar en una isla que existe en medio del río exactamente a la mitad de la distancia a los extremos . Si no debe haber en ningún extremo ni en la isla mayor número de caníbales que de blancos, y si cualquier hombre sabe remar , ¿cómo podrán trasladarse al otro extremo del río recorriendo la menor distancia posible?

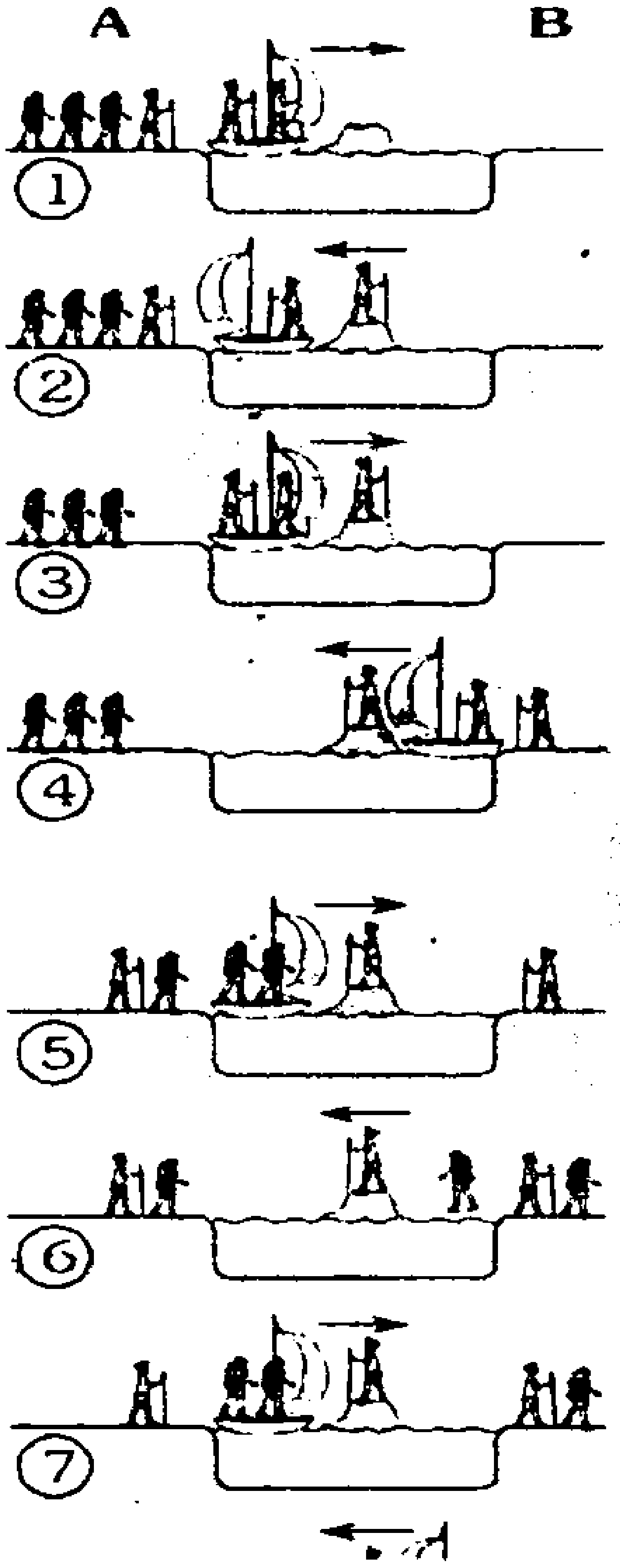
RESOLUCIÓN :

*La solución óptima no sería pasar a los hombres a la isla (*11* movimientos) y después pasarlos de la isla al otro extremo (en total *22* movimientos) ; tampoco arreglárselas para que quede una pareja en la isla y así pasar a las otras dos parejas al otro extremo , ni pasar a los seis hombres de un extremo al otro ignorando la isla.

*La solución óptima se puede realizar en *11* viajes con un trayecto de recorrido de *18* unidades de distancia.

*He aquí una solución óptima :

Extremo A — Extremo B



① Se van dos caníbales hacia la isla (1)

② Regresa uno de ellos (1)

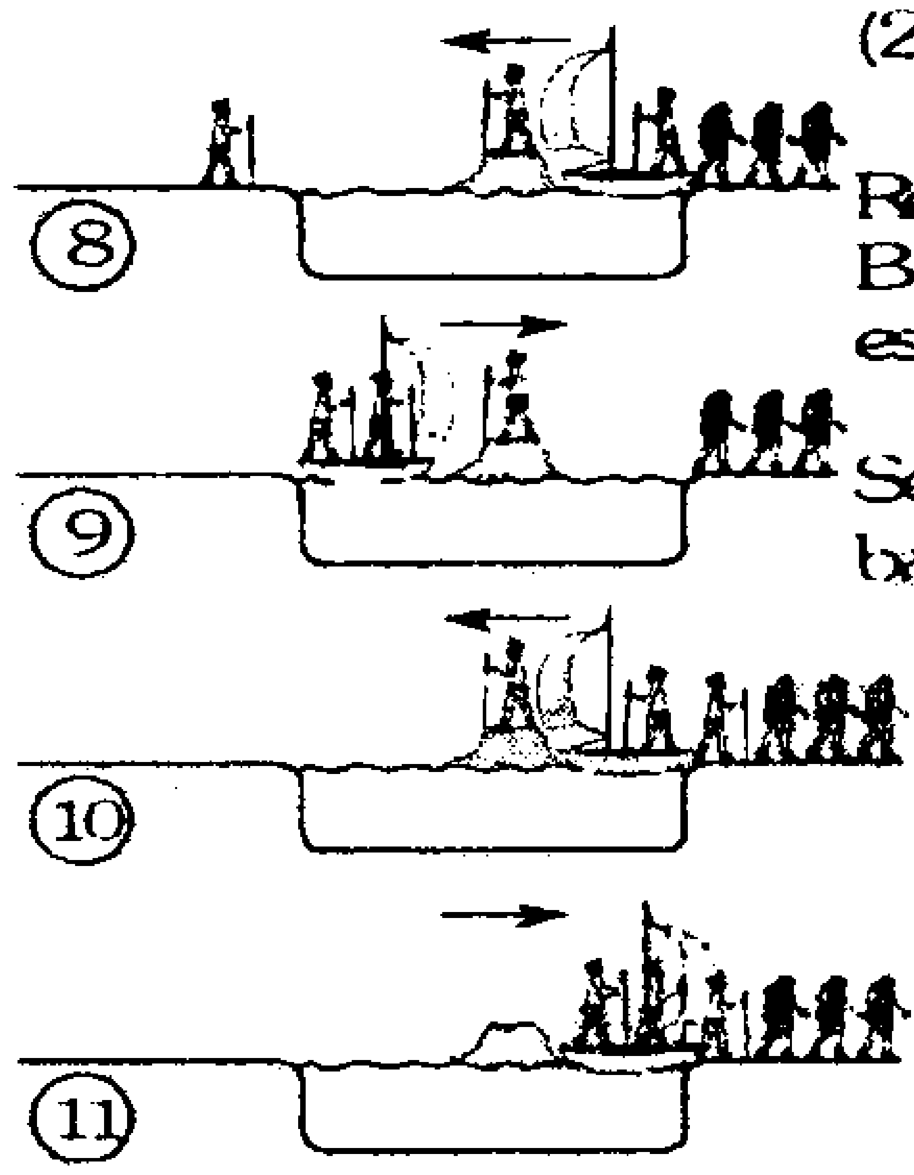
③ Se van los dos caníbales del extremo A hacia el extremo B (2)

④ Se regresa un caníbal del extremo B al extremo A (2)

⑤ Se trasladan los dos hombres blancos que no están con su pareja de A hacia el extremo B (2)

⑥ Se regresa de B hacia A el hombre blanco que no está con su pareja (2)

⑦ Se trasladan a B los dos hombres blancos (2)



(2)

⑧ Regresa un caníbal de B a recoger al que está en A (2)

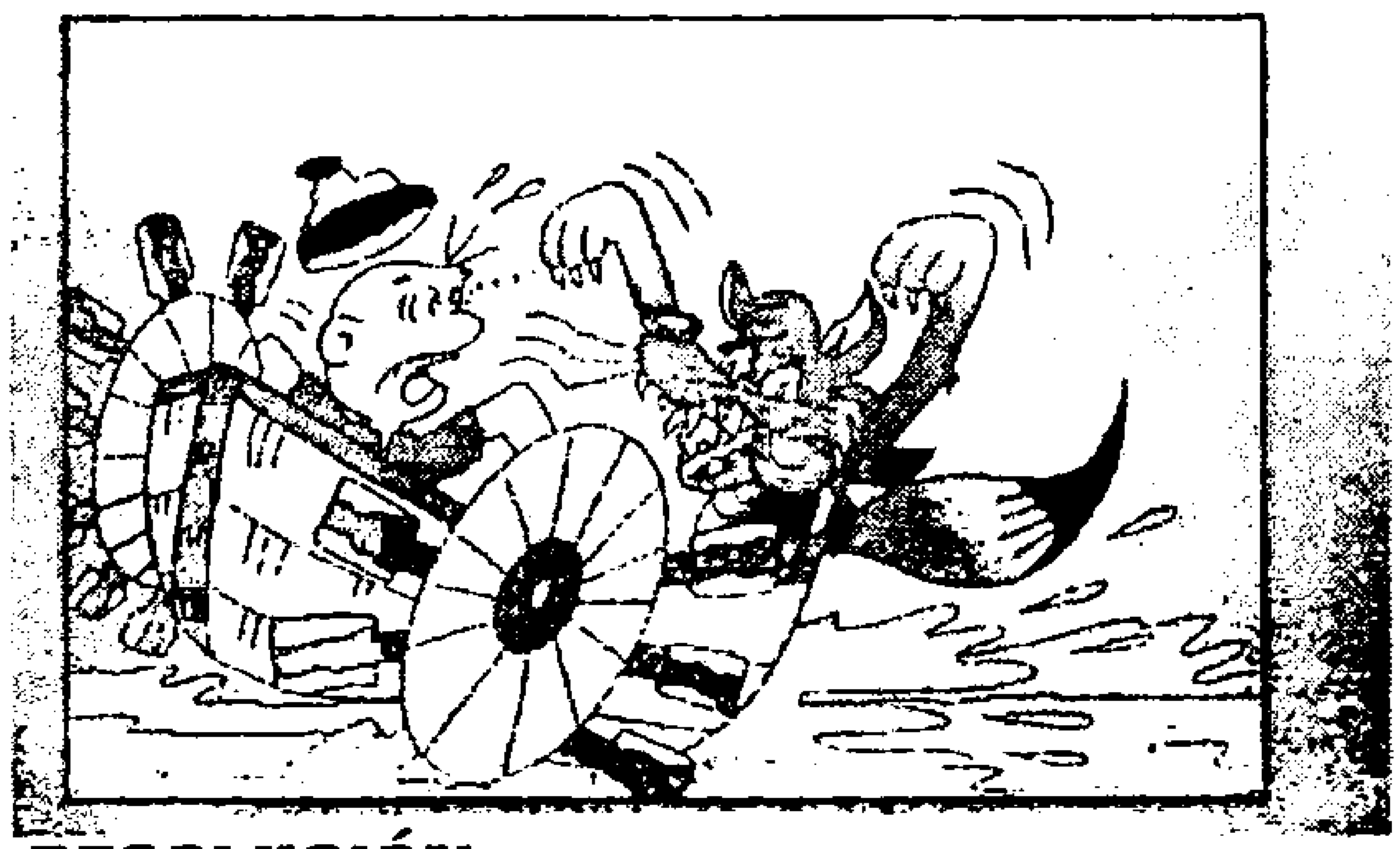
⑨ Se van los dos caníbales de A hacia B (2)

⑩ Se traslada un caníbal de B a la isla (1)

⑪ Finalmente se trasladan los dos caníbales al extremo B (1)

PROBLEMA 11 :

Se tienen que transportar los dos animales junto con la berza al otro extremo de un río, en el cual existe una isla en medio . Si de un extremo al otro del río hay una distancia doble que de cualquier extremo a la isla y si en el bote sólo cabe el remero y un animal o el remero y la berza ; ¿qué traslados tendrá que realizar el hombre para llevarlos al otro extremo del río, de tal forma que tenga que recorrer la mínima distancia sin que el lobo se coma a la cabra o ésta a la berza?



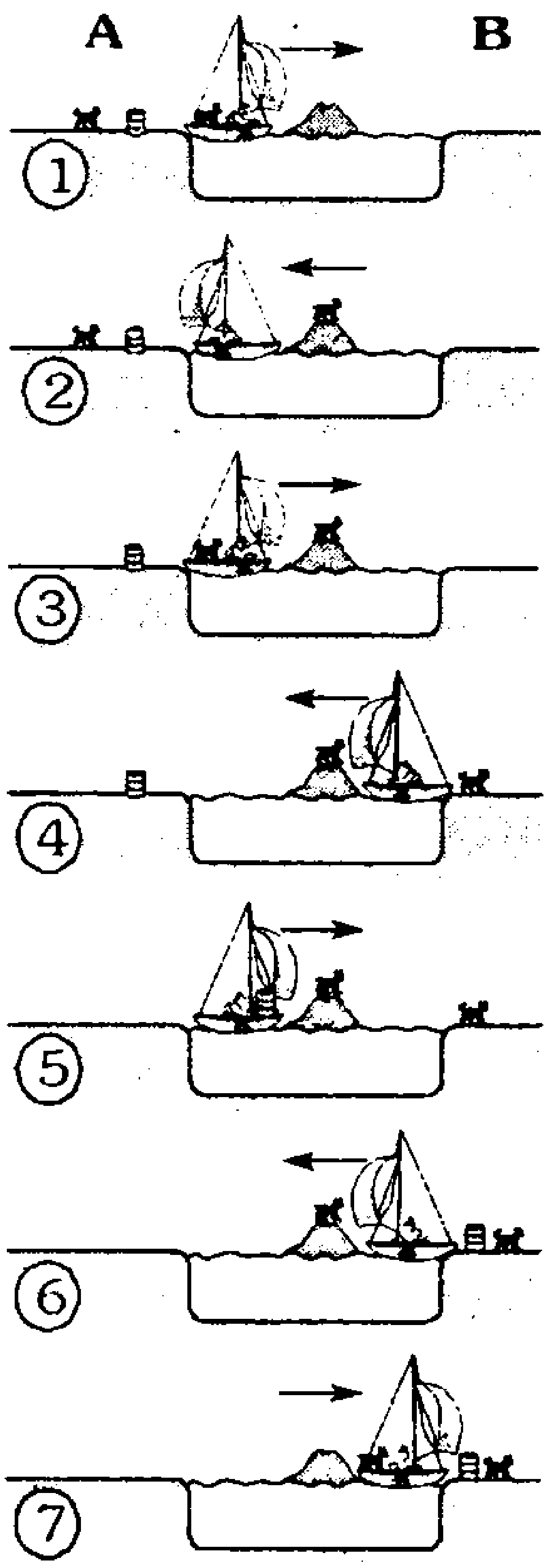
RESOLUCIÓN :

* La solución óptima no sería pasar las tres cargas a la isla en siete movimientos y luego realizar otros siete movimientos hacia el otro extremo , lo que haría un total de *14* viajes , sino que se puede efectuar el traslado en siete viajes cubriendo una distancia de *10* unidades, considerando que de cualquier extremo a la isla existe una unidad y de extremo a extremo hay dos unidades de distancia .

*La clave de la solución es hacer a un lado la

cabra, es decir, dejarla en la isla para pasar las otras cargas al otro extremo.

Extremo A Extremo B



(1) Se traslada la cabra a la isla (1)

(2) Se regresa al extremo A (1)

(3) Se traslada al lobo o la berza al extremo B (2)

(4) Se regresa por la berza al extremo A (2)

(5) Se traslada la berza al extremo B (2)

(6) Se regresa por la cabra a la isla (1)

(7) Finalmente se traslada la cabra al extremo B

PROBLEMA 12 :

Cinco mujeres que pesan ***50 kg*** cada una de ellas y dos hombres que pesan ***70 kg*** cada uno, tienen que cruzar un río con una canoa que puede llevar como máximo ***100 kg***. ¿Cuántos viajes, por lo menos, deben hacer estas personas para lograr llegar a la otra orilla del río?

A) 13 *B) 11* *C) 19* *D) 15* *E) 17*

RESOLUCIÓN :

Se pide la menor cantidad de viajes que deben hacer para estar en la otra orilla.

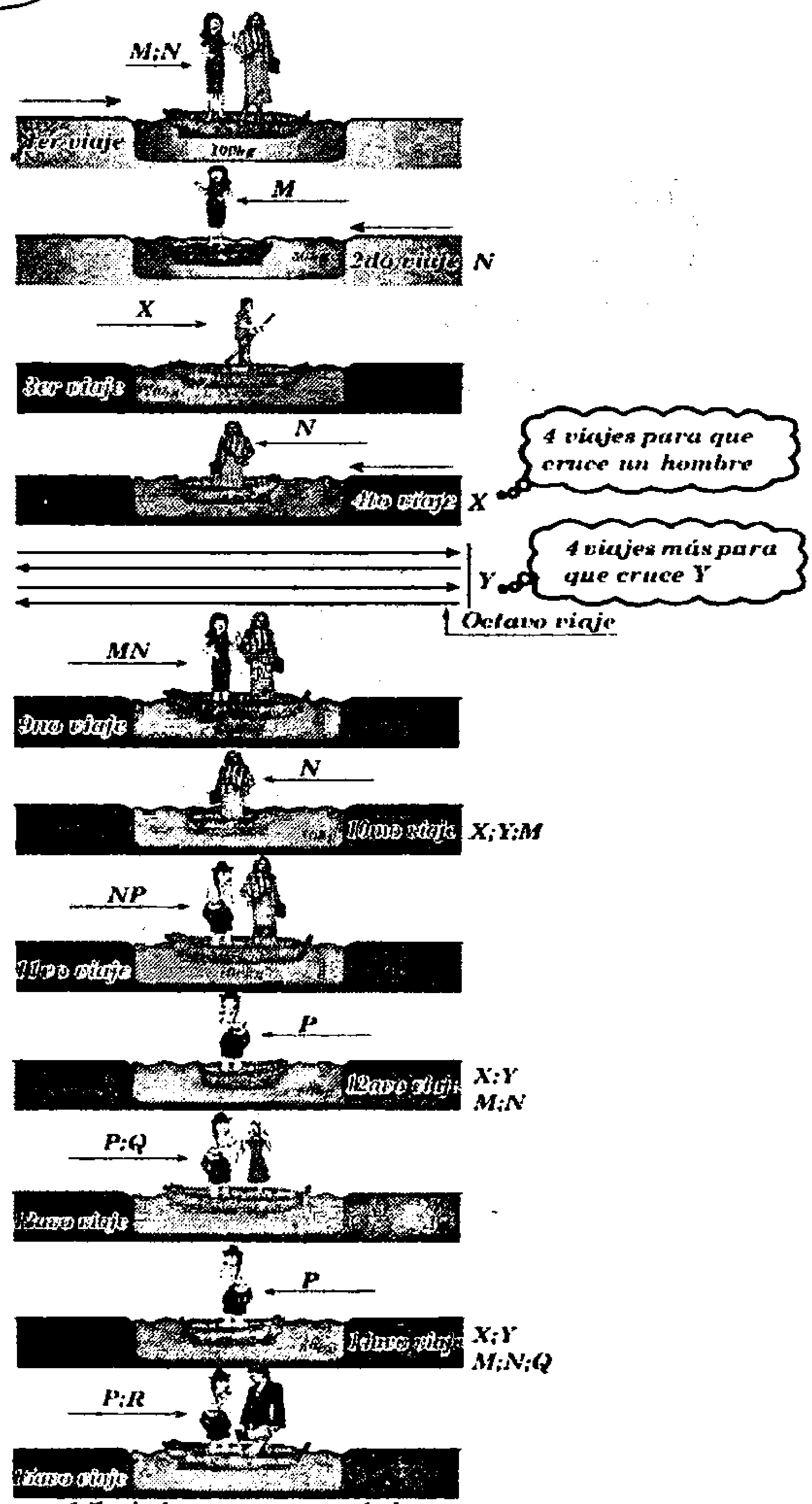
Datos:

* Mujeres: ***M; N; P; Q; R (50 kg*** cada uno*)*

* Hombres: ***X; Y (70kg cada uno)***

* El bote lleva como máximo ***100 kg***.

Los viajes se realizarán de la siguiente manera.



⇒ ***15*** viajes como mínimo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

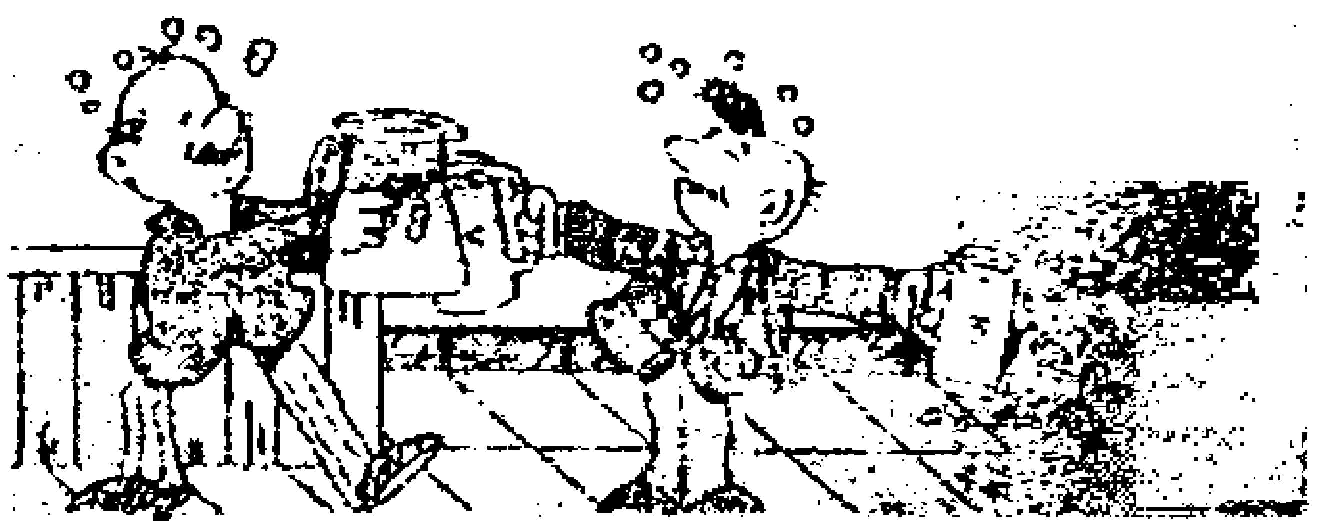
Los primeros problemas sobre decantar líquido de un vaso a otros fueron propuestos por Incola Fontana, conocido como Tartaglia (***1 500 – 1 559***). Uno de sus problemas consistía en dividir ***24*** onzas de un bálsamo en tres partes iguales, teniendo únicamente frascos con capacidad para ***5 ; 11*** y ***13*** onzas respectivamente.

Para resolver este tipo de problemas no es válido aproximar o medir ni marcar un resultado de medición, sino sólo proceden los trasvases de un recipiente a otro. Se trata además de resolver este tipo de problemas en el menor número de

movimientos posibles. Por otra parte, si existen varias soluciones, optimizar, es decir, en este caso encontrar la solución en la que el total del líquido trasvasado sea mínimo.

He aquí algunos problemas que se pueden resolver utilizando como recurso árboles de flujo o diagramas de decisión y realizando varios ensayos.

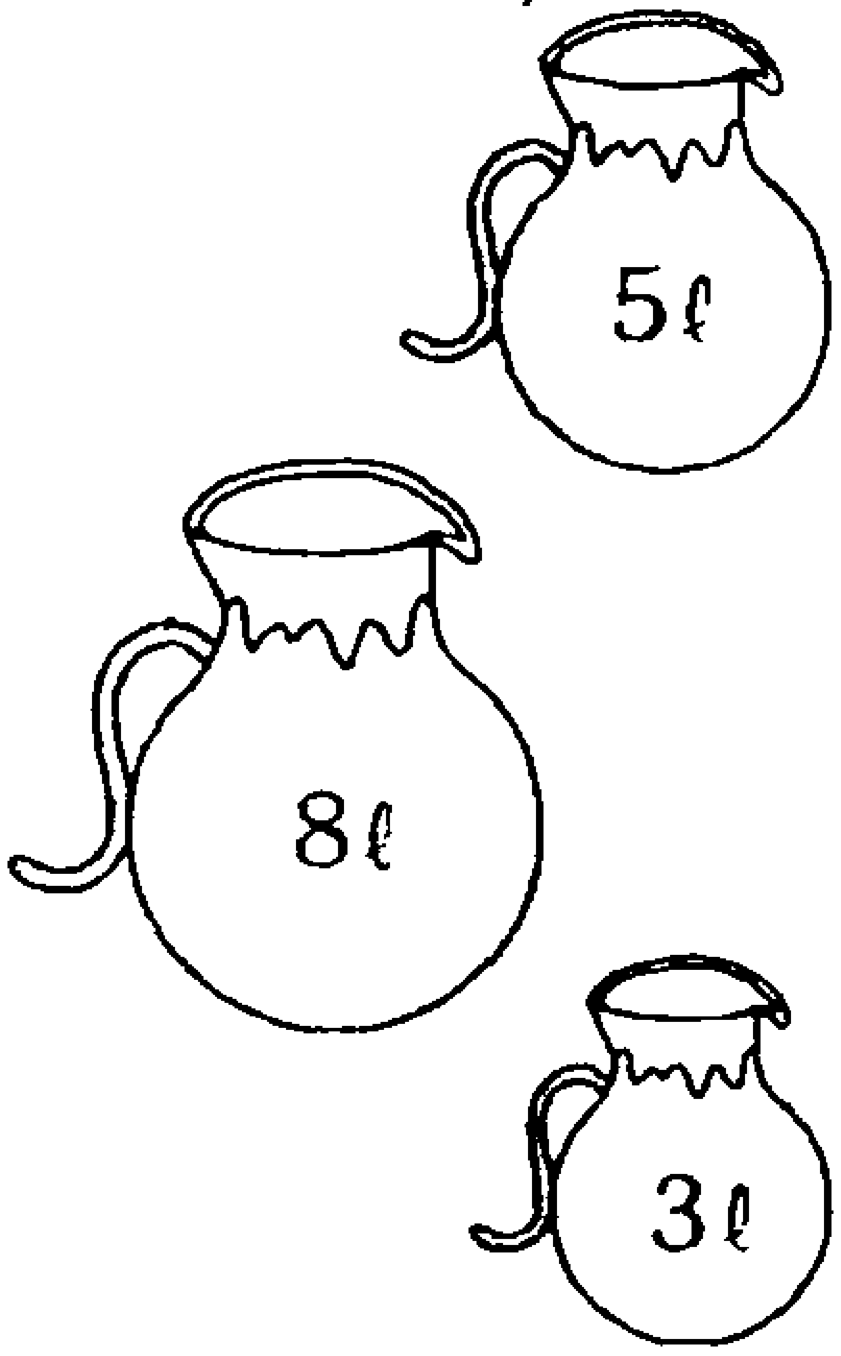
Dos amigos poseen una jarra de vino de ocho litros, y desean repartírsela equitativamente. Para la operación disponen de dos vasos vacíos, uno con capacidad de cinco litros y otro con capacidad de tres. ¿Cuál sería la solución óptima?



RESOLUCIÓN :

*A continuación presentamos la solución óptima que se obtiene al realizar siete movimientos, trasvasando un total de 22 litros.

8	5	3
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0



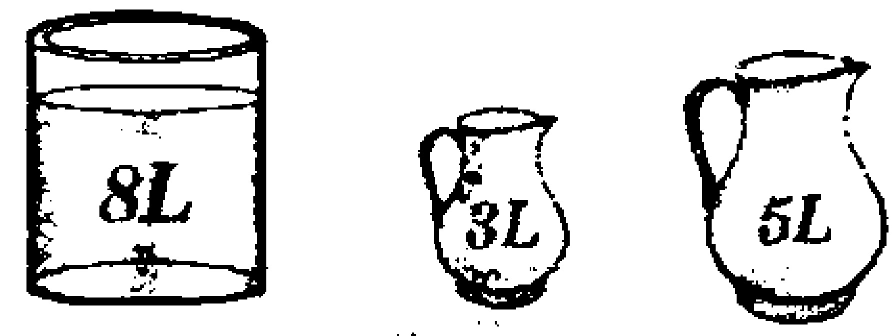
PROBLEMA 14 :

Se tiene un envase lleno con *8* litros de leche, del cual se requiere separar un litro; como el envase no tiene marcas, emplearemos *2* jarras de *3* y *5* litros de capacidad, respectivamente. ¿Cuántos trasvases se tendrán que realizar como mínimo?

A) 8 *B) 6* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

Una forma de conseguir un litro sería vaciar en la jarra de *5* litros el contenido de la jarra de *3* litros dos veces consecutivamente. En el segundo vaciado quedará un litro en esta jarra. Veamos esto detalladamente en la siguiente tabla:



	Contenido de los envases		
Inicio	8	0	0
1.^er trasvase	5	3	0
2.° trasvase	5	0	3
3.^er trasvase	2	3	3
4.° trasvase	2	1	5

el litro solicitado

Por lo tanto, se realizarán como mínimo *4* trasvases.

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Se dispone de tres recipientes sin graduar cuyas capacidades son *9*; *5* y *3* litros respectivamente. Si el recipiente de *9* litros está lleno con vino y los demás están vacíos, ¿cuántas veces como mínimo se tendrá que pasar el vino de un recipiente a otro para obtener *3* litros de vino en cada uno de ellos?

A) 3 *B) 4* *C) 2* *D) 5* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

Construimos un cuadro donde mostramos los pasos de vino :

Detalle	Pasos	$Recipiente_1$ 9	$Recipiente_2$ 5	$Recipiente_3$ 3
Inicialmente	*0*	9	0	0
Del $Recipiente_1$ al $Recipiente_3$	*1*	9 - 3 = 6	0	0+3=3
Del $Recipiente_3$ al $Recipiente_2$	2	6	0 + 3 = 3	3 - 3=0
Del $Recipiente_1$ al $Recipiente_3$	3	6 - 3=3	3	0+3=3

⇒ Como mínimo se pasarán *3* veces el vino.

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

La madre de Juan quiere comprar un litro de leche fresca, y para ello lleva su envase de *8L* de capacidad al establo. Al llegar observa que la leche es envasada en recipientes de *15L* totalmente llenos y que con jarras de *5L* y *2L* de capacidad atienden los pedidos. La experiencia del lechero le permite indicarle a la señora que al prestarle su envase de *8L*, solo necesitará realizar x trasvases para que lleve su litro de leche. Si todos los recipientes carecen de algún tipo de

marca, halle el valor de x.

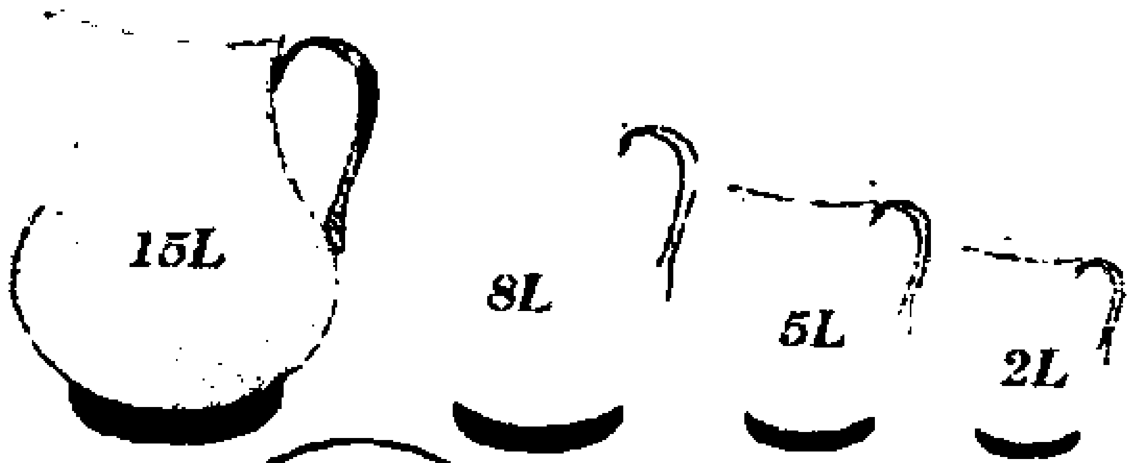
A) 2 *B) 3* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de x.

Para obtener *1L* en el envase de *8L*, llenamos primero este y luego, su contenido lo trasvasamos a las jarras de *5* y *2* litros.

Veamos:



	15L	8L	5L	2L
Primer trasvase:	15	0	0	0
Segundo trasvase:	7	8	0	0
Tercer trasvase:	7	3	5	0
	7	1	5	2

En el envase de la madre de Juan.

$\Rightarrow x=3$ trasvases.

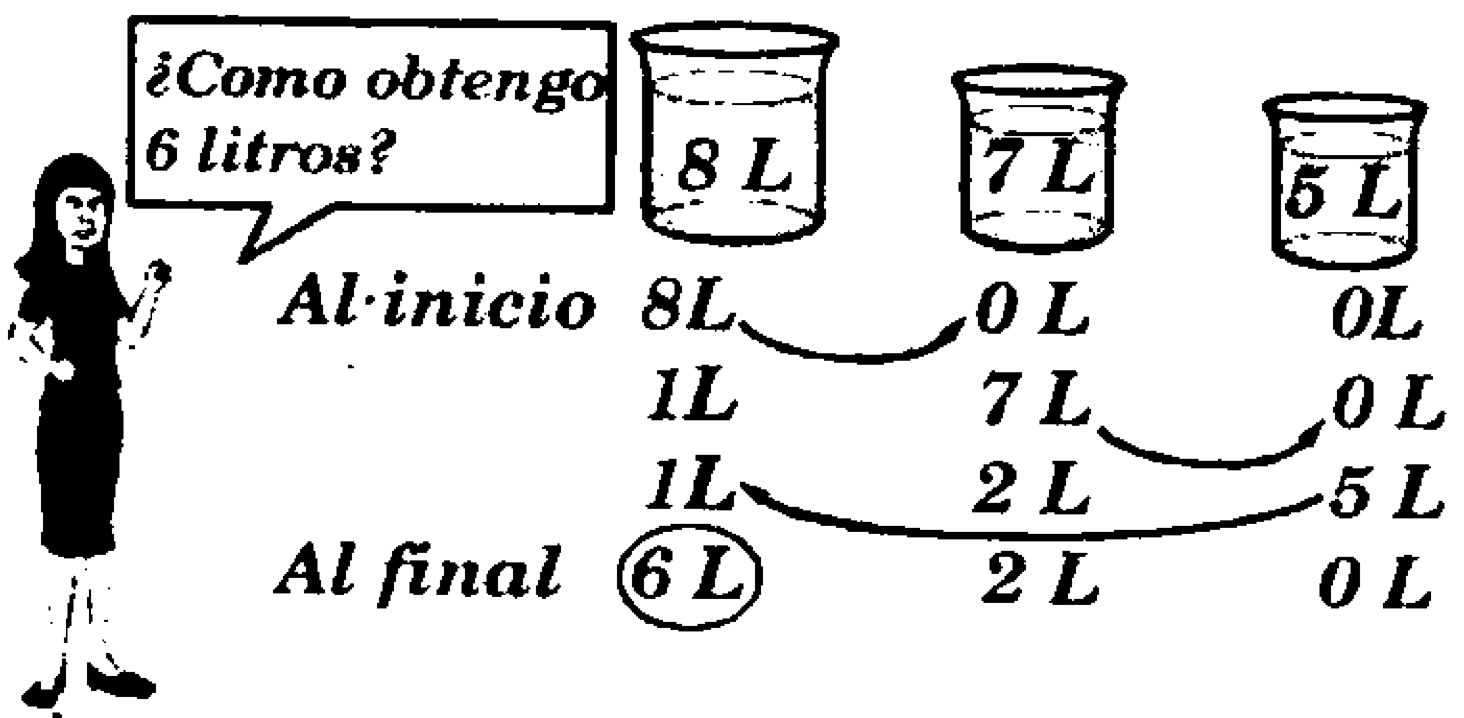
RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Ana tiene un recipiente con *8* litros de agua. Desea obtener exactamente *6* litros de agua, utilizando envases sin marcas de *7* y *5* litros. ¿Cuántos trasvases se debe realizar, como mínimo, para lograr el objetivo? Considere que el agua no se desperdicia.

A) 4 *B) 3* *C) 5* *D) 6* *E) 2*

RESOLUCIÓN :



Por lo tanto, el número de trasvases por realizar, como mínimo es *3*.

BPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

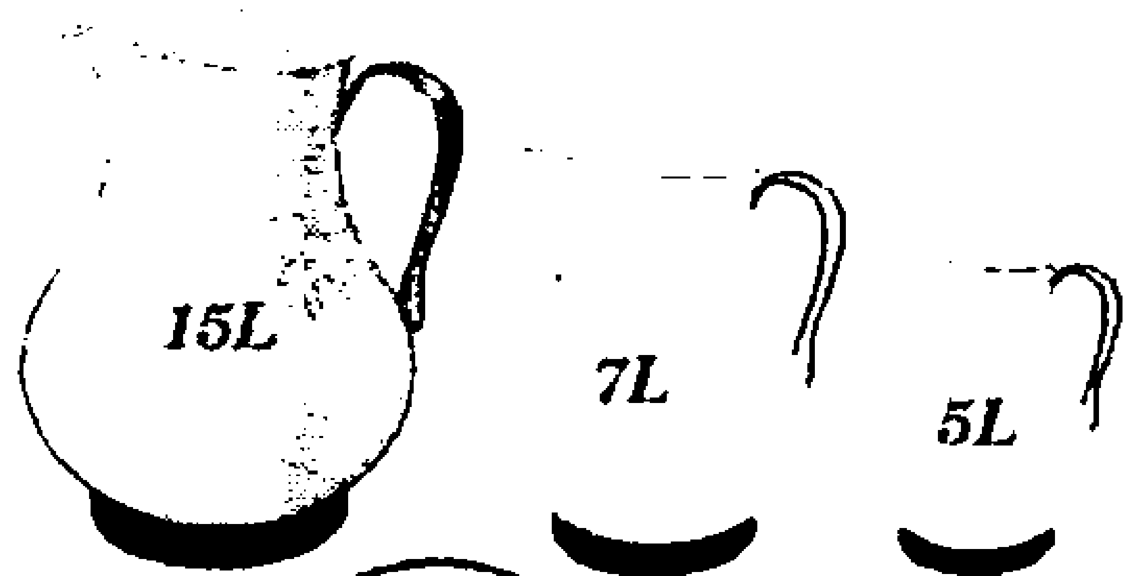
Un vendedor de leche tiene un recipiente de *15 L* de capacidad totalmente lleno y cuenta con dos jarras de *7* y *5* litros de capacidad con los que se ayuda para atender los pedidos de sus clientes. Juan, uno de sus antiguos clientes, llega donde él con un recipiente de *19L* de capacidad, totalmente vacío, para llevarse sus *13L* de leche, como todas las semanas. ¿Cuántos trasvases tendrá que realizar, como mínimo, el vendedor para cumplir con el pedido de Juan?

A) 8 *B) 5* *C) 4* *D) 6* *E) 2*

RESOLUCIÓN :

Se pide el menor número de trasvases para que Juan se lleve los *13* litros de leche.

Para conseguir los *13L* requeridos bastará trasvasar 2 litros del recipiente de *15L* que se encuentra lleno, de la siguiente manera:



	15L	7L	5L
Primer trasvase:	15	0	0
Segundo trasvase:	8	7	0
Tercer trasvase:	8	2	5
	13	2	0

Los *13L* pedidos por Juan

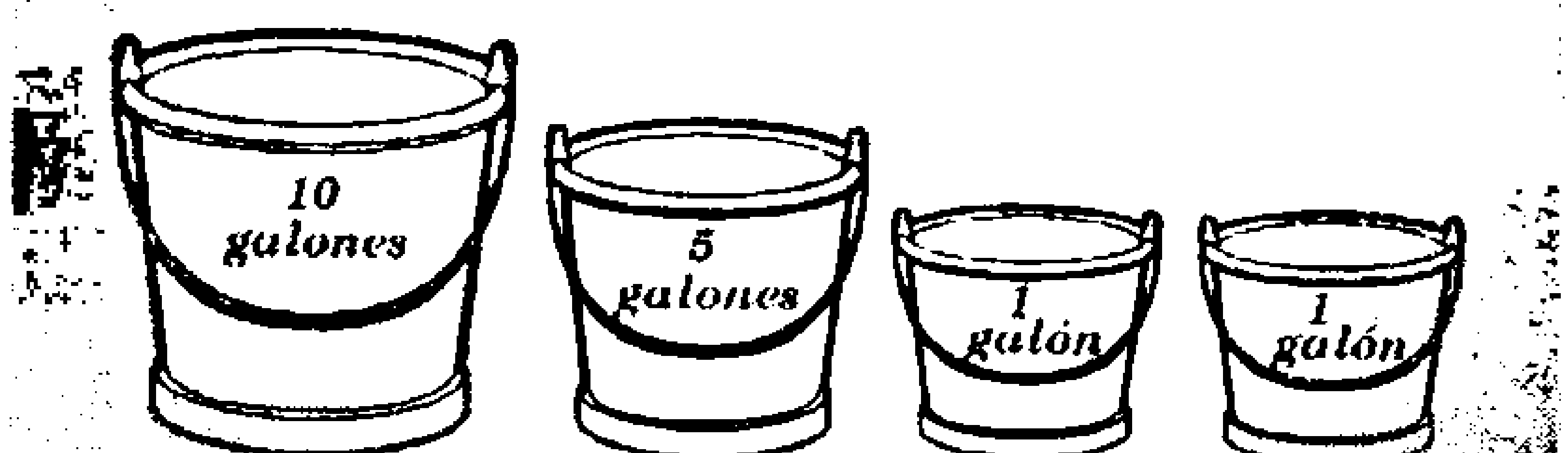
Pero, para que Juan se lo pueda llevar debe estar en el recipiente de *19L* que el ha traído. Para esto es necesario un trasvase más.

$\Rightarrow$ Debe realizar: $3 + 1 = 4$ trasvases

BPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Carlitos carga agua en sus baldes de un galón de capacidad, para que los *4* depósitos contengan la misma cantidad de agua (no menor de un galón).



Si al inicio los depósitos estaban vacíos, ¿cuántos viajes realizará Carlitos como mínimo?

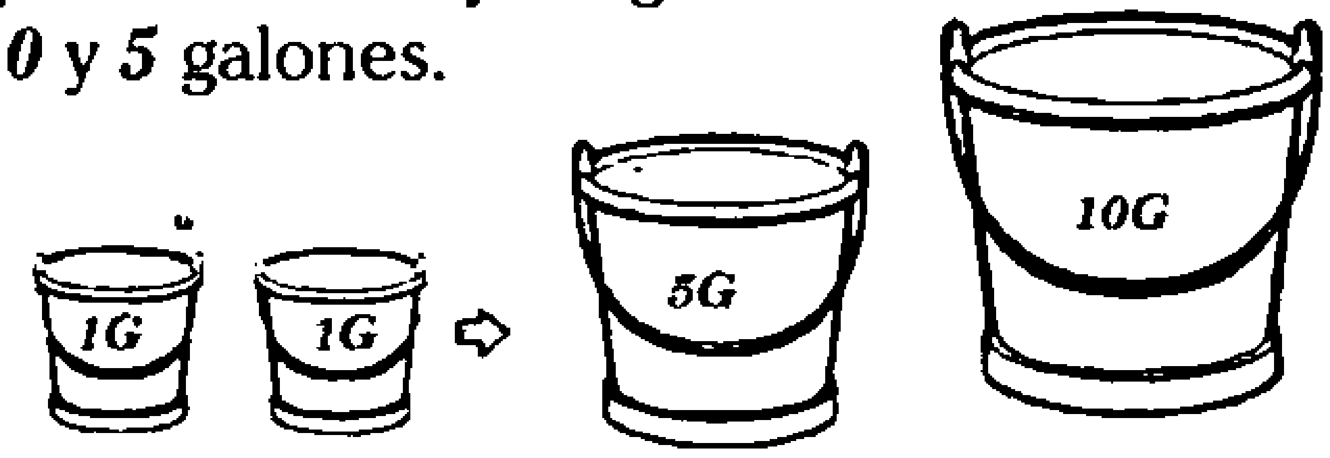
A) 6 *B) 2* *C) 5* *D) 4* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

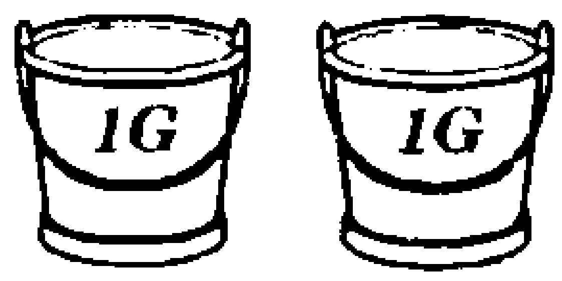
Para que los *4* depósitos contengan la misma

cantidad de agua, Carlitos debe realizar los siguientes viajes:

Primer viaje: Se lleva los ***2*** baldes de ***1*** galón a la vez para llenarlos y luego vaciarlos a los baldes de ***10*** y ***5*** galones.



Segundo viaje: Se vuelve a llevar los ***2*** baldes de ***1*** galón para volver a llenarlos.



Así obtiene ***4*** baldes con igual cantidad de agua, no menor de un galón.

Por lo tanto, Carlitos realizó como mínimo ***2*** viajes.

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

La señora Carmen quiere cocinar durante ***8 mín*** exactamente un huevo de codorniz, pero no cuenta con un cronómetro o reloj convencional para medir el tiempo. Si su hijo le consigue dos relojes de arena, uno de ***11 mín*** y otro de ***5 mín***, ¿Cuántas veces tendrá que cambiar de posición el reloj de ***11mín*** (volteado); como mínimo, para lograr cocinar un huevo, en el tiempo deseado?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :

Buscaremos medir ***4 mín*** dos veces seguidos del siguiente modo :

Inicio	fin	Inicio	fin	Inicio	fin	Inicio	fin
5	0	5	0	5	4	4	0
0	5	0	5	0	1	1	5

Reloj de 5 mín.

11	6	6	1	1	0	11	7	4	0
0	5	5	10	10	11	0	4	7	11

Reloj de 11 mín.

5mín | *5mín* | *1mín* | *4mín* (*mide 4 mín*) | *4mín*

Cae los 11 mín. de arena y se voltea el reloj por 1er. vez. — *Se voltea por 2da. vez.*

Se pide el menor número de veces que se debe voltear el reloj de ***11mín***, para medir ***8 mín***, con ayuda del reloj de ***5mín*** para medir ***8 mín*** exactamente.

⇒ Se volteará ***2*** veces el reloj de ***11mín*** como mínimo

RPTA : "B"

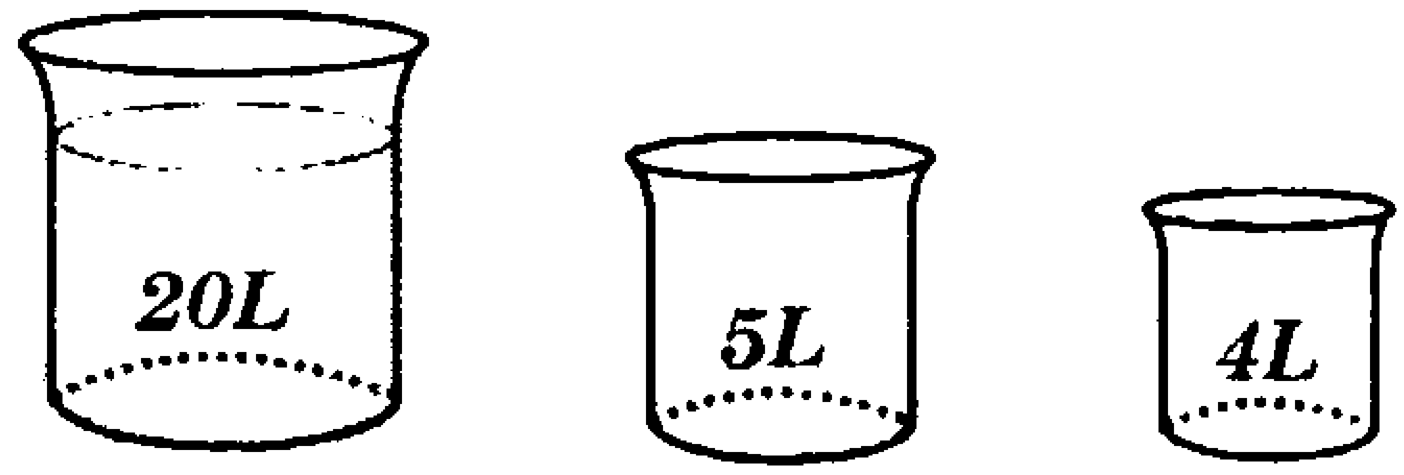
PROBLEMA 21 :

Un lechero se encuentra preocupado porque debe cumplir con un pedido urgente de ***13*** litros de leche. Si tiene un envase de ***20*** litros de capacidad lleno de leche, dos recipientes de ***5*** y ***4*** litros vacíos, y ninguno de los ***3*** tiene marca alguna, ¿cuántos trasvases se tendrán que realizar, como mínimo, para cumplir con el pedido si la leche no se desperdicia?

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 10***

RESOLUCIÓN :

Nos piden obtener ***13 L*** .



	20L	5L	4L
Inicio	***20***	***0***	***0***
1.°	***16***	***0***	***4***
2.°	***16***	***4***	***0***
3.°	***12***	***4***	***4***
4.°	***12***	***5***	***3***
5.°	***17***	***0***	***3***
6.°	***17***	***3***	***0***
7.°	***13***	***3***	***4***

Por lo tanto, como mínimo, tendrá que realizar ***7*** trasvases.

RPTA : "B"

PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

Lenin desea transportar un lobo, una cabra y un atado de alfalfa al otro extremo de un río. Para ello dispone de un bote donde sólo cabe Lenin y un animal o Lenin y el atado de alfalfa. ¿cuántos viajes como mínimo tendrá que realizar Lenin para lograr cruzar el río sin que el lobo se coma a la cabra ni que la cabra se coma el atado de alfalfa?.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

PROBLEMA 2 :

Un abuelo, su hijo y su nieto se disponen a cruzar un río, pero para ello deberán usar una balsa en que a lo más pueden ir dos personas. Calcule la menor cantidad de viajes que deben realizar para lograr su ojetivo

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 3 :

Tres soldados deben cruzar un río y no saben nadar. Dos muchachos que poseen una canoa están dispuestos a ayudarlos , pero la canoa es tan pequeña que no soporta el peso de un soldado y un niño . Solamente soporta el peso de un soldado o de los dos muchachos . ¿Cuál es el mínimo número de viajes que hacen para pasar de una orilla a otra?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

PROBLEMA 4 :

Cuatro hombres y dos muchachos tienen que cruzar un río en una canoa ; en cada viaje puede ir uno de los hombres o los dos muchachos , pero no un hombre y un muchacho a la vez . ¿Cuál es el número de veces que la canoa tiene que cruzar el río , en cualquier sentido , para que pase a todos?

A) 4 B) 12 C) 5 D) 16 E) 17

PROBLEMA 5 :

Un balcero debe transportar; de una orilla a otra de un río, a un lobo, una col y una oveja, pero el bote solo tiene capacidad para trasladar al balcero y uno de esos tres seres. Se sabe que en ausencia del balcero, el lobo puede comerse a la oveja, y la oveja puede comerse la col. Si el balcero debe garantizar el cuidado de cada ser, ¿cuántos viajes, como mínimo, debe realizar para que todos pasen a la otra orilla?.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 11

PROBLEMA 6 :

Tres adolecentes acompañados de tres adultos deben cruzar un río usando una canoa. En cada viaje, puede ir dos adultos o los tres adolescentes, pero no un adolecente y un adulto. ¿Cuál es el número de veces que la canoa tiene que cruzar el río, en cualquier sentido, para que todos pasen?

A) 7 B) 13 C) 11 D) 5 E) 15

PROBLEMA 7 :

Un grupo conformado por un joven de ***18*** años, dos señoritas de ***23*** años, dos niños y una niña, se encuentran a orillas de un río, el cual tienen que cruzar y solo tienen un bote que para que se mantenga a flote debe llevar un peso de ***130 kg***. Si el peso de las personas mayores de edad es de ***65 kg*** cada una, el de los niños es de ***35 kg*** cada uno, además, por lo peligroso del lugar ninguno de los niños (varones y mujeres) pueden quedarse sólos en ningún instante, ¿Cuántos viajes tendrá que realizar, como mínimo, para poder conseguir que todo el grupo se traslade a la otra orilla?

A) 7 B) 11 C) 13 D) 15 E) 9

PROBLEMA 8 :

Tres amigos, cada uno con dos hermanas quieren cruzar un río y solo cuentan con un bote que pueden utilizar para trasladarse de una a otra orilla del río. El problema surge porque ninguna de las hermanas están dispuestas a permanecer en el bote o en alguna orilla con uno o más hombres que no sean sus hermanos, al menos que su hermano este presente. Si en el bote pueden ir a lo más ***3*** personas, ¿Cuántos traslados deben realizar, como mínimo, para que todas las personas crucen el río?

A) 5 B) 9 C) 7 D) 13 E) 11

PROBLEMA 9 :

Una familia conformada por un padre, una madre, sus tres trillizos y un perro, tienen que cruzar un río con un bote que solo puede soportar ***90 kg***. Si el peso del padre, la madre y de cada uno de los trillizos es ***90; 50*** y ***30 kg*** respectivamente, además, la mascota pesa ***10kg***, ¿Cuántos viajes deben realizar, como mínimo, para lograr su objetivo?. Considere que las personas saben remar

A) 9 *B) 5* *C) 13* *D) 7* *E) 11*

PROBLEMA 10 :

Un grupo de *X* turistas adultos contratan a *Y* niños para que los traslade al otro lado de un río en un bote que soporta como máximo el peso de dos niños o de un turista. ¿Cuántos viajes, como mínimo, se deben realizar para que los *X* turistas puedan ser trasladados?

A) 4X *B) 4X + 1* *C) 4X - 1*
D) 4X + Y *E) 4X – Y*

PROBLEMA 11 :

Cuatro miembros de una familia deben cruzar un túnel muy oscuro y es indispensable el uso de una linterna para conseguirlo. En el túnel solo pueden entrar dos personas, como máximo sin importar la edad que tengan y solo cuentan con una linterna. Si el padre tarda de cruzar el túnel un minuto, la madre tarda ***3*** minutos, el hijo mayor tarda ***9*** minutos y el bebé ***18*** minutos. Si cuando cruzan dos personas el tiempo que demoran es el del más lento, ¿Cuánto tiempo, como mínimo, tardarán en cruzar la familia el túnel?

A) 28 min *B) 29 min* *C) 32 min*
D) 33 min *E) 25 min*

PROBLEMA 12 :

Cinco adultos y cinco niños desean cruzar un río, pero solo cuentan con un bote que puede transportar a lo más ***100 kg***. Todos los adultos saben remar y solo dos de los niños no saben remar. Si cada niño pesa ***40 kg*** y cada adulto ***80 kg***, ¿cuántos viajes tendrán que realizar, como mínimo, para lograr su objetivo?

A) 23 *B) 25* *C) 27* *D) 29* *E) 31*

PROBLEMA 13 :

Tres madres, cada una junto con su hija, desean cruzar un río en un bote que a lo más puede transportar a dos personas. Las tres niñas se niegan terminantemente a subirse en el bote con alguna de las mamás de las otras niñas o quedarse con alguna de las señoras en ausencia de su madre. ¿Cuántos viajes, como mínimo, deben realizarse para que todos crucen? Considere que todos pueden remar.

A) 7 *B) 9* *C) 11* *D) 13* *E) 15*

PROBLEMA 14 :

Tres soldados deben cruzar un río y no saben nadar. Dos niños poseen una canoa y están dispuestos a ayudarlos, pero la canoa solo soporta el peso de un soldado o de los dos niños. ¿Cuál es el mínimo número de viajes que hacen para pasar todos a la otra orilla?

A) 15 *B) 5* *C) 11* *D) 7* *E) 13*

PROBLEMA 15 :

Cuatro profesores de la academia y ***2*** alumnas tienen que cruzar un rio en una canoa , en cada viaje puede ir uno de los profesores o las ***2*** alumnas , pero no un profesor y una alumna a la vez . ¿Cuál es el mínimo número de veces que la canoa tiene que cruzar el río en cualquier sentido para que todos logren cruzar dicho río ?

A) 12 *B) 16* *C) 17* *D) 21* *E) 9*

PROBLEMA 16 :

Se tienen tres recipientes, uno de seis litros, otro de cinco litros y el último de dos litros, pero sólo el recipiente de seis litros está lleno. ¿Cuántas veces, como mínimo, se tendría que pasar el contenido de un recipiente a otro, de tal manera que al final los tres tengan el mismo contenido?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

PROBLEMA 17 :

Dos viajeros van vendiendo vino por los pueblos, en su furgoneta llevan tres barriles: uno de ***8 L*** lleno de vino y otros dos vacíos de ***3 L*** y ***5 L*** de capacidad. A mitad del camino se pelean y deciden repartir el vino en partes iguales, pero solo disponen de los barriles citados. ¿Cuántos traslados de vino como mínimo de un barril a otro se tendrán que hacer?

A) 4 *B) 5* *C) 6* *D) 7* *E) 8*

PROBLEMA 18 :

Para una de sus recetas culinarias, doña Pepa requiere exactamente ***4*** litros de agua . Si sólo dispone de dos jarras , ambas sin graduar , de ***3*** y ***5*** litros de capacidad , ¿cuántas veces como mínimo tendrá que pasar el agua de una jarra a otra para obtener lo requerido ?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

PROBLEMA 19 :

Se tiene tres baldes sin graduar de ***8L***, ***5L*** y ***3L***. El balde de ***8L*** está totalmente lleno de leche, y otros están vacíos. ¿Cuántos trasvases se deben realizar, como mínimo, para obtener ***4L*** de leche

en uno de los baldes?

A) 8 B) 7 C) 5 D) 6 E) 6

PROBLEMA 20 :

Se tienen tres recipientes de **20** ; **13** y **7** litros, sin marca alguna ; el primero está lleno de agua y los otros dos están vacíos. ¿Cuántos trasvases se deben realizar, como mínimo, para obtener exactamente **12** litros? . Considere que el líquido no se desperdicia.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

PROBLEMA 21 :

Para preparar una bebida exótica, el barman Garzón tiene que medir exactamente **4** litros de agua. Si dispone de un cilindro lleno con **12** litros de agua y **2** jarras vacías de **5** y **7** litros de capacidad y ningún recipiente está graduado, ¿Cuántos trasvases tendrá que realizar , como mínimo , para obtener lo requerido?.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 4 E) 5

PROBLEMA 22 :

De un recipiente de **20L** de capacidad completamente lleno de agua, se debe separar **6** litros exactamente.Si solo se tiene para medir el agua de dos recipientes, uno de **4** litros y otro de **9** litros sin marcas, ¿Cuántos trasvases se tendrá que realizar, como mínimo para conseguirlo?.

A) 9 B) 4 C) 8 D) 5 E) 7

PROBLEMA 23 :

Se tiene **3** baldes sin marcas cuyas capacidades son **12L , 5L** y **6L**, El balde de **12L** se encuentra totalmente lleno de agua y los demás vacíos, Si se desea tener exactamente en uno de los recipientes **2L**, ¿Cuántos trasvases se debe realizar como mínimo?

A) 5 B) 3 C) 6 D) 4 E) 7

PROBLEMA 24 :

Un barril contiene **8** litros de vino, de los cuales se quieren separar **7** litros empleando dos jarras sin graduar de **3** y **5** litros de capacidad. Si estas jarras están completamente vacías, ¿Cuántos trasvases se tienen que realizar, como mínimo, para conseguirlo?

A) 3 B) 6 C) 4 D) 7 E) 5

PROBLEMA 25 :

Sebastián necesita obtener exactamente **5L** de leche, pero cuenta con dos baldes no graduados de **4L** y **3L** de capacidad. ¿Cuántos trasvases tendrá que realizar, como mínimo, para llevarse los litros de leche que necesita si sabe que el señor que la distribuye tiene un recipiente de **10 L** de capacidad totalmente lleno y no está graduado?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

PROBLEMA 26 :

Eduardo quiere **3L** de chicha exactamente que los obtendrá de un balde que contiene **16L** de chicha, pero no cuenta con ningún cucharón para extraerlos, solo tiene dos recipientes de **9L** y **5L** de capacidad, pero no tienen estos marca alguna.¿Cuántas veces tendrá Eduardo que pasar el refresco de un recipiente al otro como mínimo, para lograr su objetivo?

A) 4 B) 3 C) 5 D) 7 E) 6

PROBLEMA 27 :

S e tiene dos recipientes sin ningún tipo de marca, con capacidades de **13** y **16** litros. Si se realizaron x trasvases, como mínimo, para obtener **7L** de agua, la cual está contenida en un barril de **36 L** completamente lleno, calcule el valor de x.

A) 11 B) 13 C) 5 D) 6 E) 8

PROBLEMA 28 :

Se tiene un recipiente totalmente lleno con **11L** de agua y otros dos recipientes vacíos cuyas capacidades son **7** y **4** litros, todos los recipientes carecen de marca alguna. Si para conseguir exactamente un litro y seis litros se necesita X e Y trasvases como mínimo, respectivamente, calcule el valor de $Y-X$.

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2

PROBLEMA 29:

Una persona quiere comprar **12** litros de leche y para ello lleva un recipiente de **15** litros de capacidad a un establo donde el lechero tiene dos recipientes de **5** y **11** litros, cada uno lleno de leche pero ninguno de los tres recipientes tiene alguna marca. ¿Cuántos trasvases, como mínimo deberá realizar el lechero para cumplir con el pedido de la persona?

A) 5 B) 8 C) 6 D) 9 E) 7

PROBLEMA 30 :

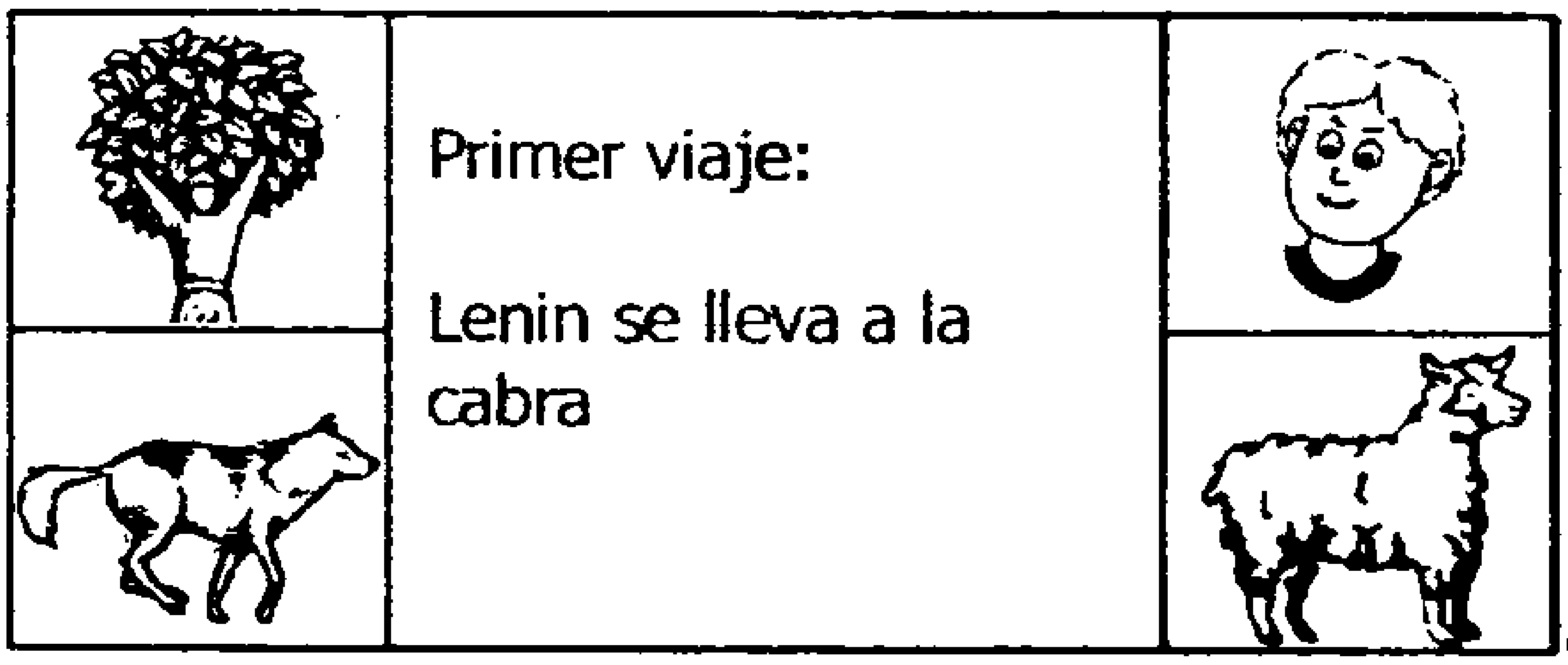
Juan tiene dos relojes de arena, uno de **8 min.** y el otro de **13 min**. Se quiere cronometrar **6 min**

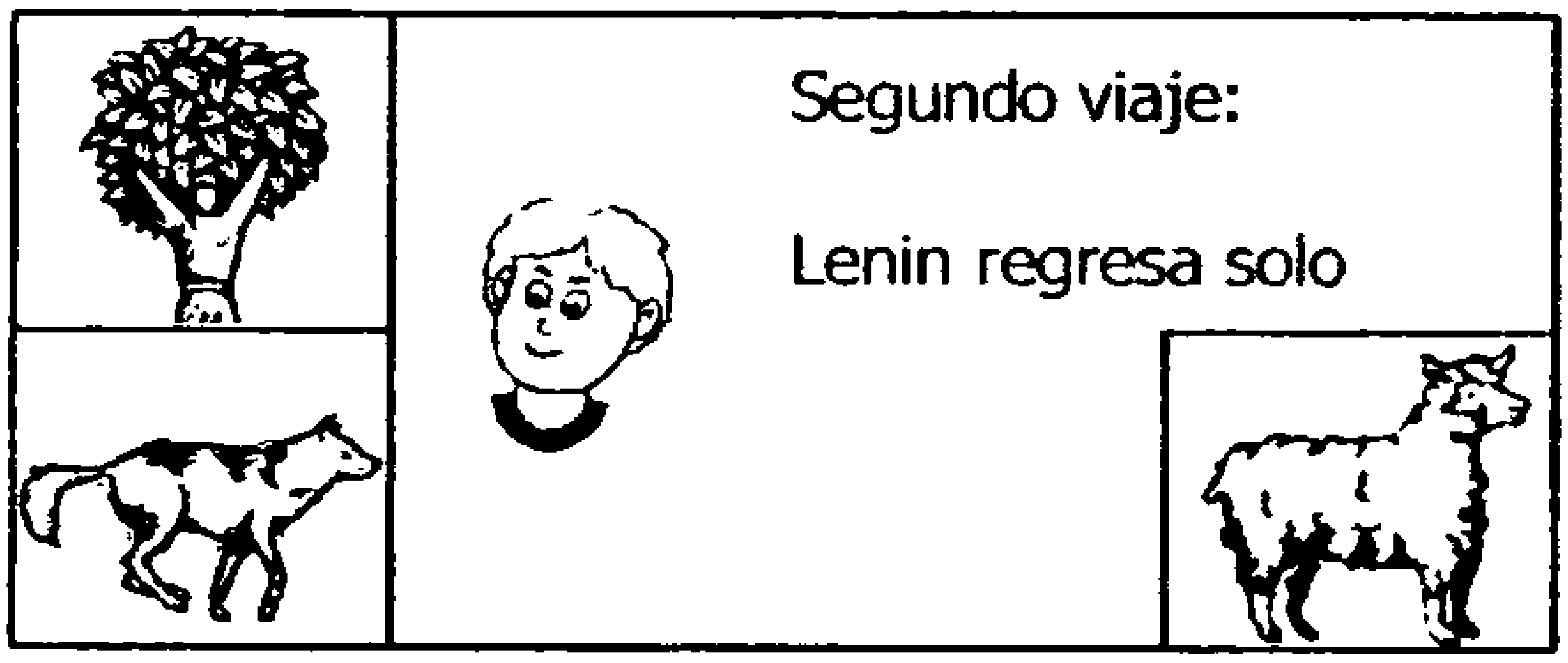
exactamente, ¿Cuántas veces volteará uno de los relojes con respecto al otro, si lo quiere conseguir en el menor tiempo posible?

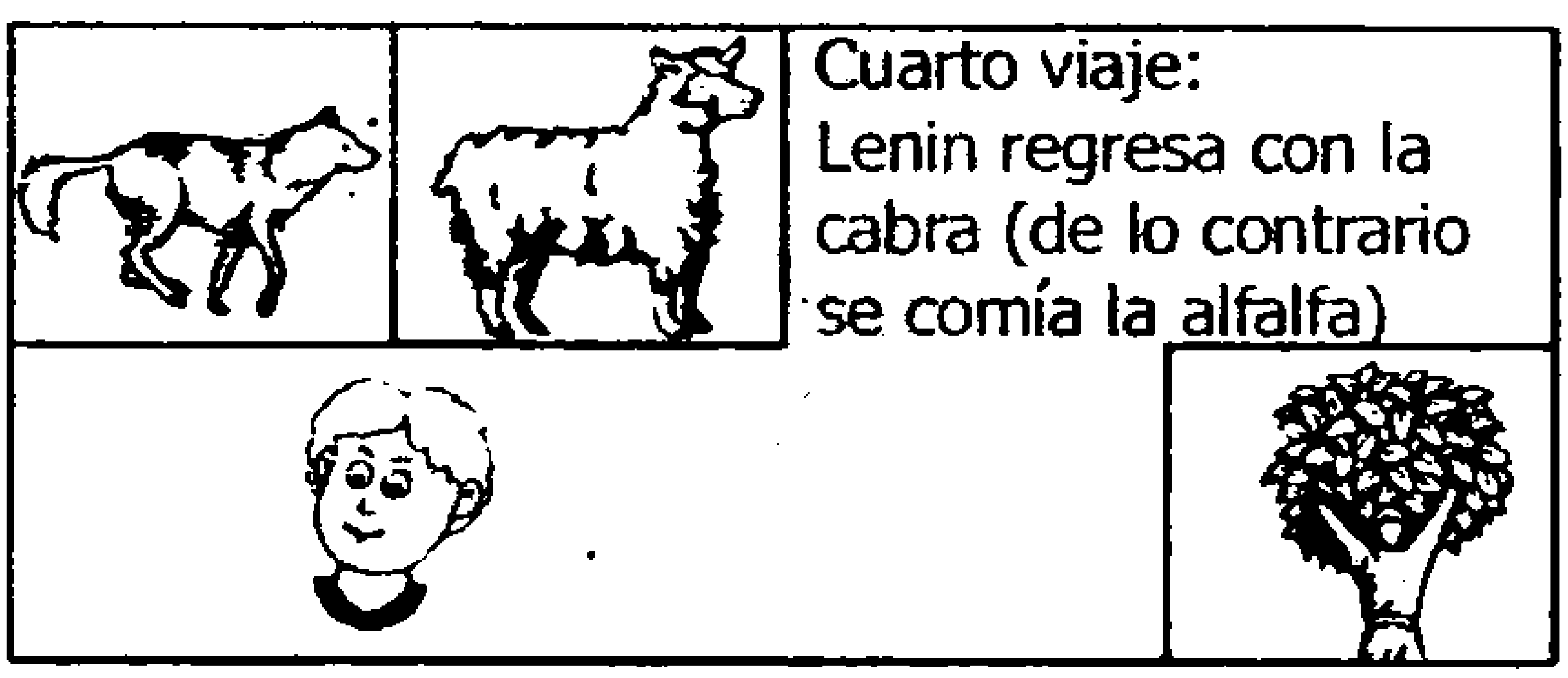
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

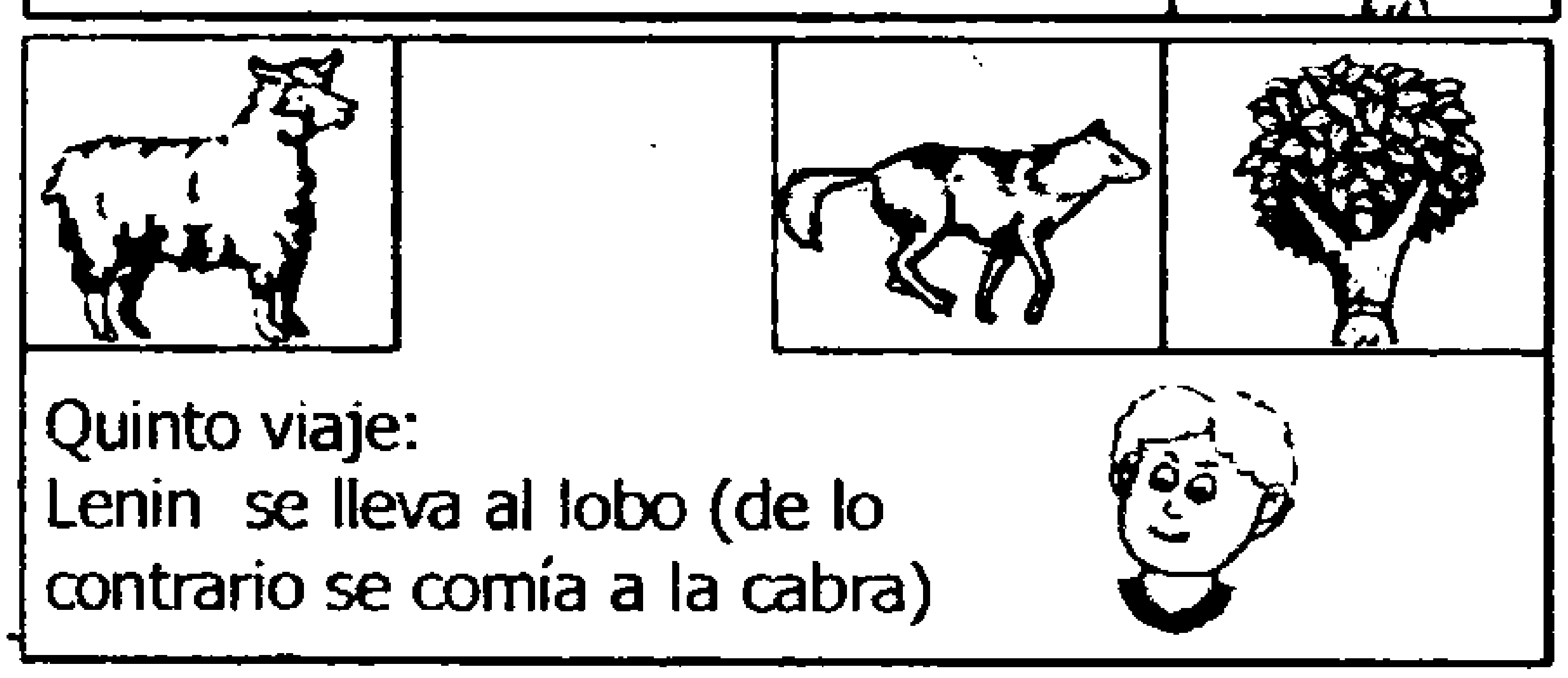
SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

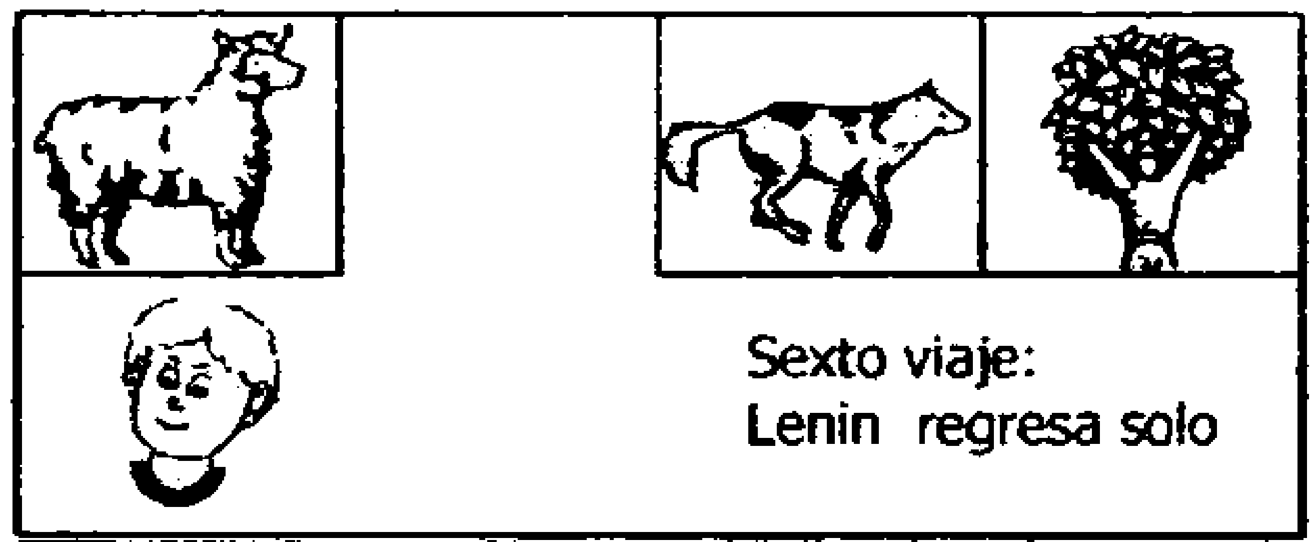
RESOLUCIÓN 1 :

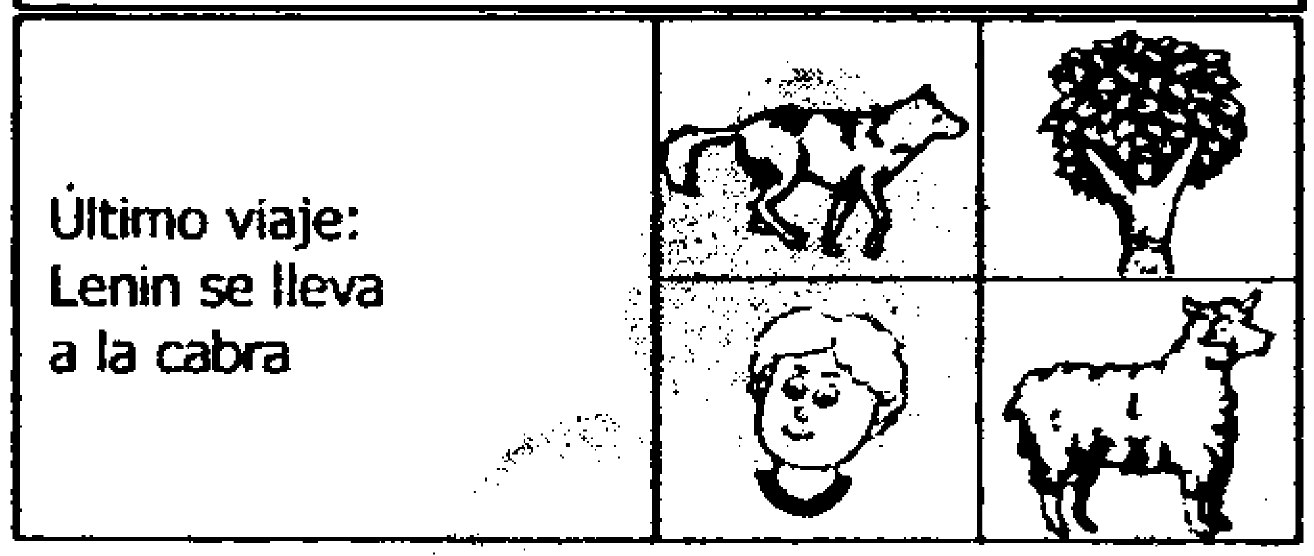












En total, Lenin necesitó 7 viajes.

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 2 :

Se pide la menor cantidad de viajes que deben realizar para cruzar.

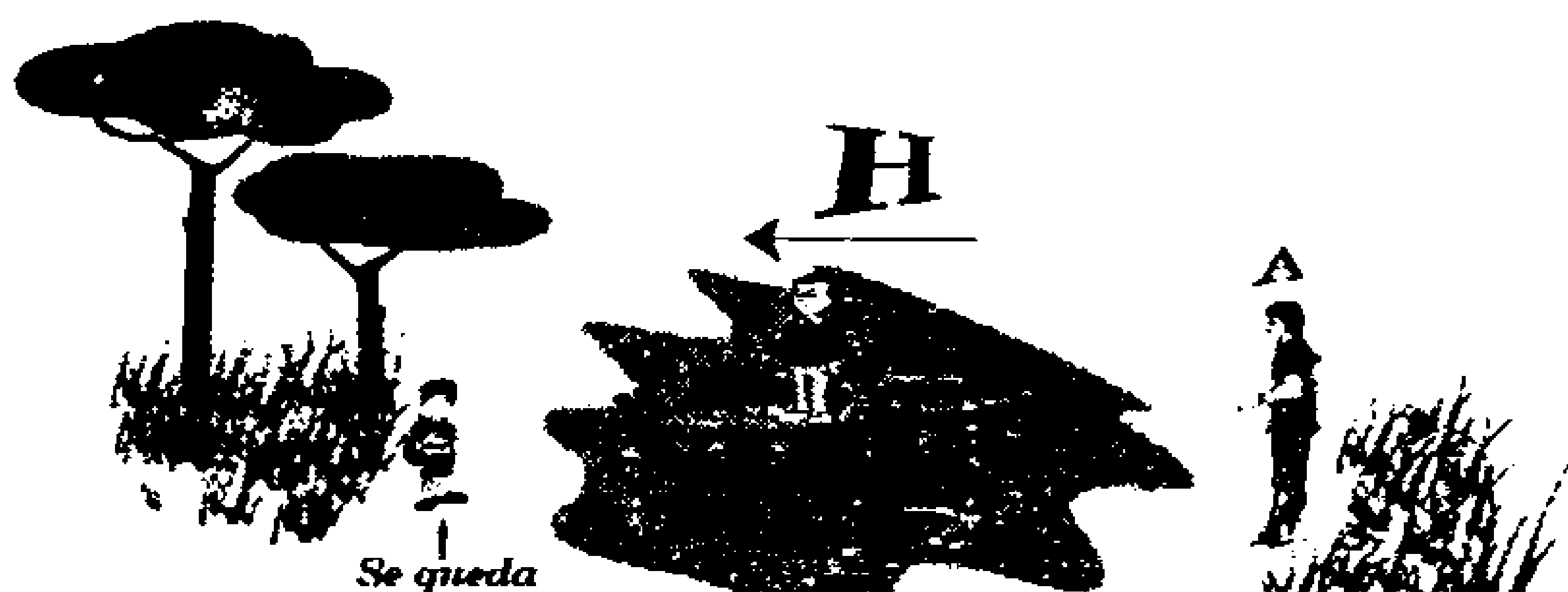
Datos:

* Abuelo *(A)*; hijo *(H)* y el nieto *(N)*
* En el bote solo pueden ir dos personas

Según las condiciones los viajes se realizarán de la siguiente manera:

1er viaje: Cruzan el abuelo y el hijo, pudo haber sido tambien el abuelo con el nieto o el hijo con el nieto.

2do viaje: Regresa uno de los dos por el nieto.



3er viaje: Cruzan el hijo y el nieto, logrando así cruzar todos.

⇒ Se deben realizar *3* viajes como mínimo

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 3 :

* Viajan los dos niños y regresa uno ⇄ de ellos.

* Cruza un soldado y vuelve el otro ⇄ niño.

* Viajan los dos niños y regresa uno ⇄ de ellos.

* Pasa el segundo soldado y vuelve ⇄ el niño que quedó.

* Cruza el tercer y último soldado. ⟶

* Total de viajes : **9**

RPTA: "D"

RESOLUCIÓN 4 :

1°) Cruzan **2** muchachos.

2°) Retorna **1** de los muchachos.

3°) Cruza *1* hombre.

4°) Retoma el otro muchacho.

* Hasta aquí, con **4** viajes ha cruzado un hombre, con $3\times4=12$ viajes, cruzan los *3* hombres restantes, quedando los dos muchachos en la primera orilla, que en *1* viaje más logran cruzar. ⇒ Total = $4+12+1=17$

RPTA: "E"

RESOLUCIÓN 5 :

A partir del enunciado, sea el balsero*(B)*, el lobo *(L)*, col*(C)* y oveja*(V)*, surgen las siguientes interrogantes:

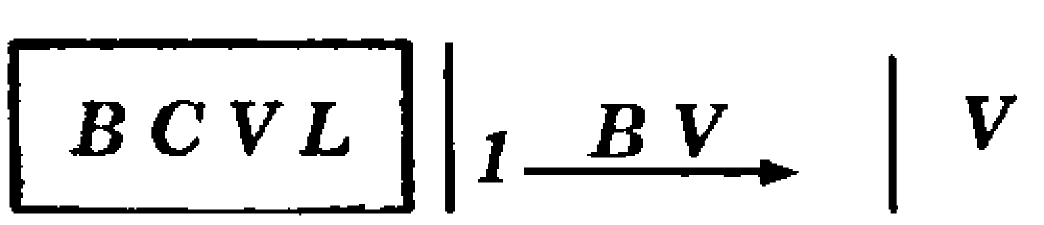
¿Qué debe trasladar el balsero en el *1ᵉʳ* viaje?

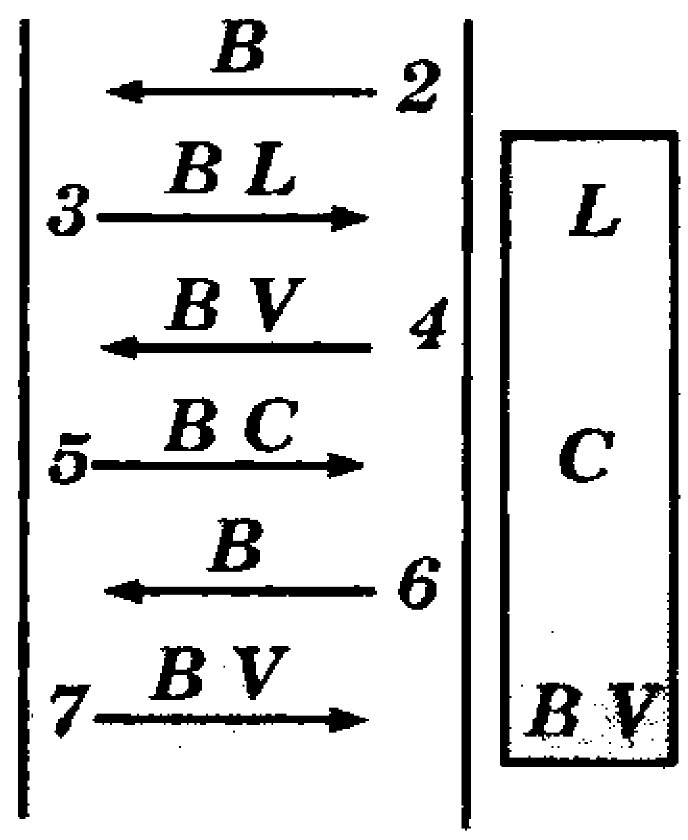
- Si *B* viaja con *C*, entonces *L*, se come a *V*.
- Y si viaja *B* con *L*, entonces *V* se come a *C*.

Se concluye que el balsero viajará con *V*, luego el balsero deja a *V* en la orilla y regresa (*2ᵈᵒ* viaje).

Para el *3ᵉʳ* viaje:

- Si *B* viaja con *C* o con *L*, necesariamente *B* debe regresar con *V* para evitar que sea alimento de *L* o se coma a *C*. Luego el balsero continúa con los viajes, cumpliendo las condiciones dadas.
- En el siguiente gráfico, mostramos los viajes que se realizan.





- En el *3ᵉʳ* viaje, decidimos que *B* viaja con *L*.
- En el *4ᵗᵒ* viaje, *B* regresa con *V*.

Por lo tanto, el balsero debe realizar como mínimo, siete viajes.

RPTA: "C"

RESOLUCIÓN 6 :

Se pide el menor número de veces que la canoa cruzará el río.

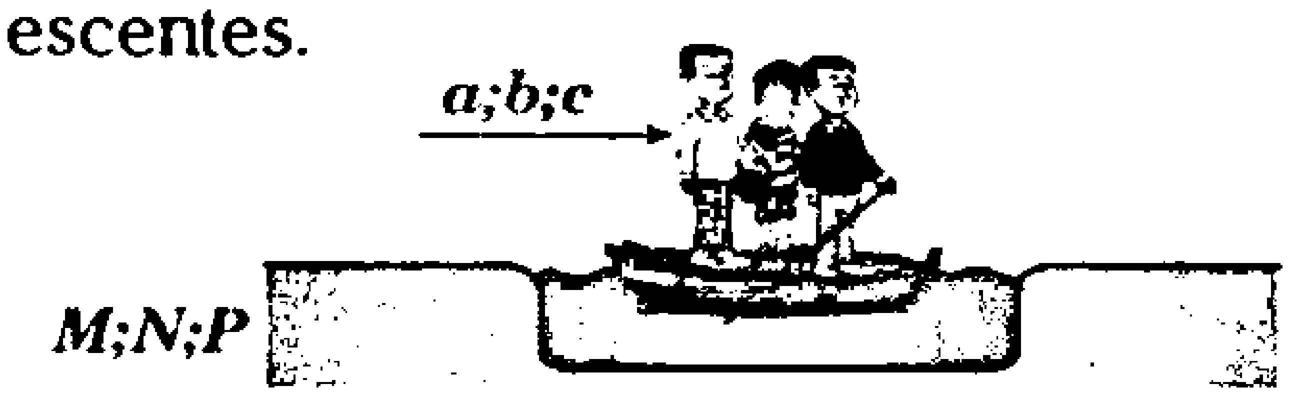
Datos:

* Adultos: ***M; N; P***

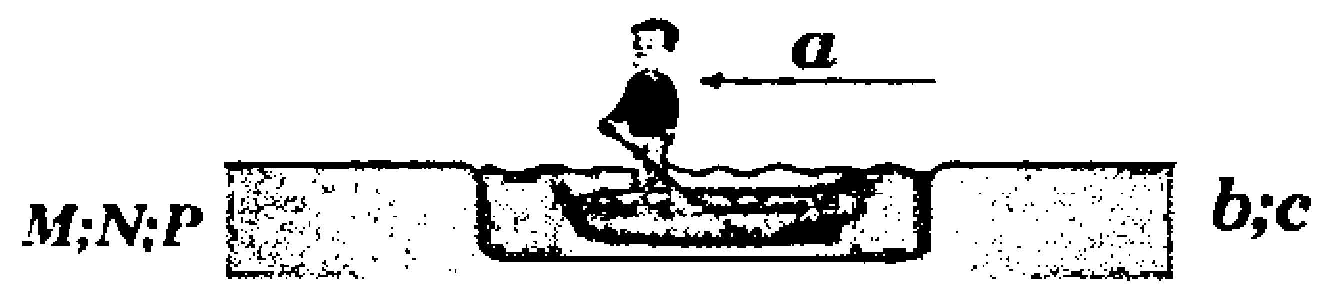
* Adolescentes: ***a; b; c***

* Los viajes pueden ser **2** adultos ó **3** adolescentes

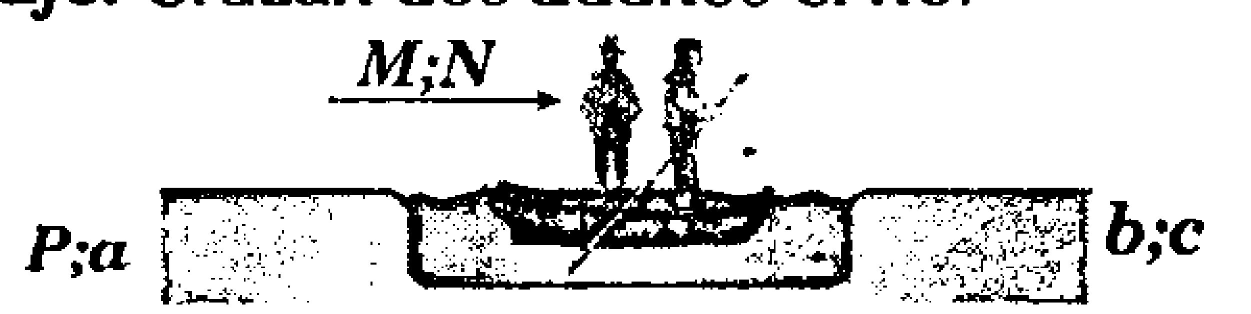
1er viaje: Iniciamos el cruce con los *3* adolescentes.



2do viaje: Regresa uno de los adolescentes.

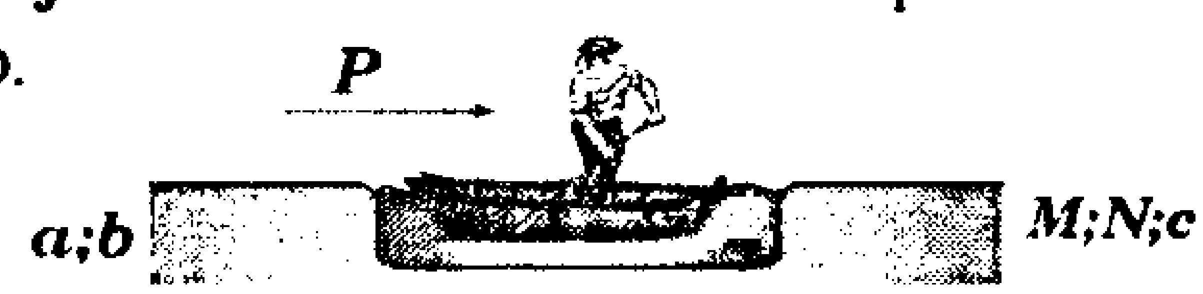


3er viaje: Cruzan dos adultos el río.

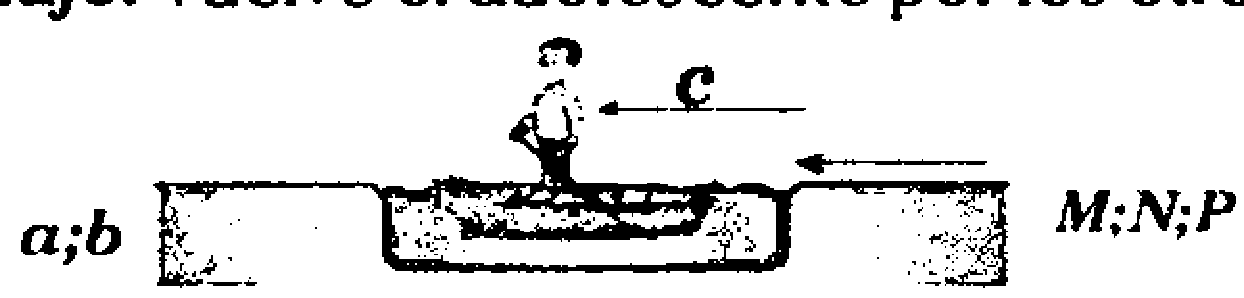


4to viaje: Regresa uno de los adolecentes.

5to viaje: Cruza el río el adulto que aún no lo ha hecho.



6to viaje: Vuelve el adolescente por los otros dos



7mo viaje: Cruzan en la canoa los tres adolescentes.

⇒ ***7*** veces como mínimo.

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 7 :

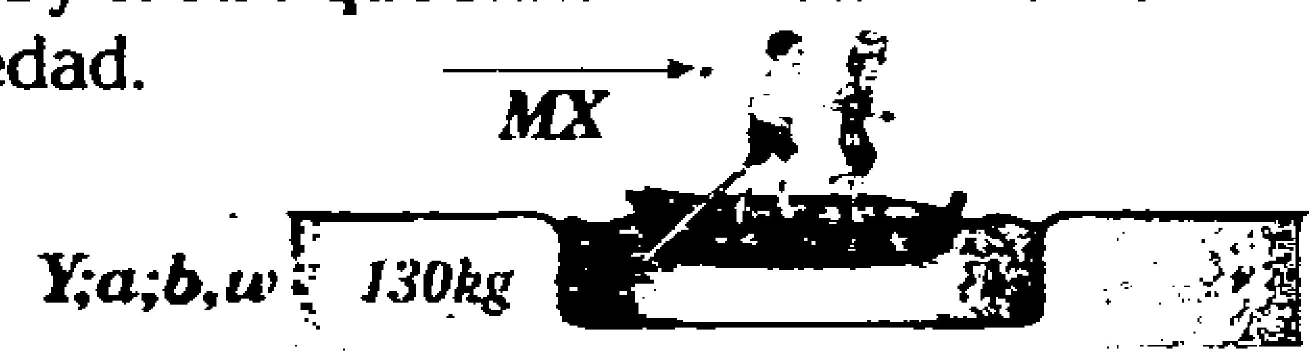
Se pide el total de viajes para que todo el grupo cruce el río.

Datos:

* Un joven de ***18*** años : ***M***
* Dos señoritas de ***23*** años: ***X; Y***
* Dos niños: ***a; b*** * Una niña: ***w***
* Peso de mayores de edad: ***65 kg c/u***
* Peso de menores de edad: ***35 kg c/u***
* Los niños no pueden estar solos en ningún momento.
* El bote soporta un peso no mayor a ***130 kg*** .

Se debe garantizar primero que haya personas mayores de edad al otro lado del río para que cuando crucen los niños se los pueda dejar al cuidado de ellos. También, en cada viaje de ida, que crucen la mayor cantidad de personas y al regreso que solo uno traiga el bote. Veamos:

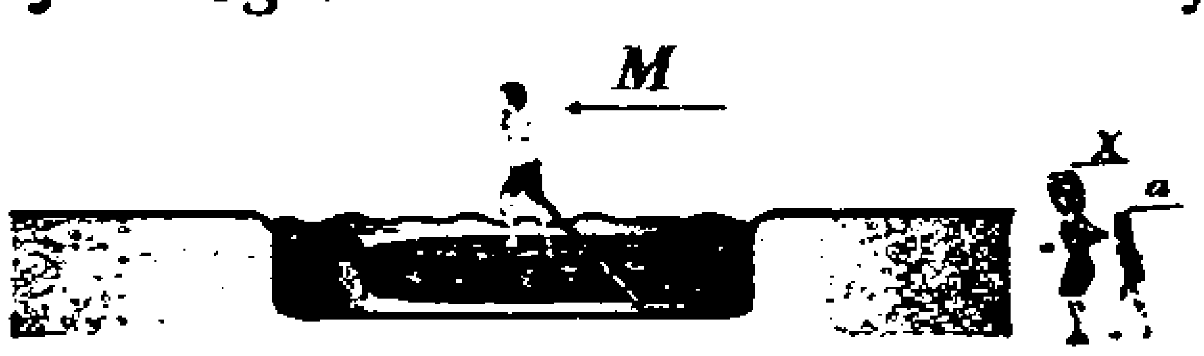
1er viaje: Cruzarán dos de los tres mayores de edad y el otro quedará al cuidado de los menores de edad.



2do viaje: Vuelve uno de los mayores de edad

3er viaje: Cruza un mayor de edad con uno menor, los cuales acumulan ***100 kg*** en total

4to viaje: Regresa con el bote un mayor de edad.



Se observa en estos dos últimos viajes ***(3ero y 4to)*** que con dos viajes en total un menor de edad logra cruzar el río, entonces, como faltan ***b*** y ***w*** necesitaremos ***4*** viajes más (dos por cada uno). Luego:

9no viaje: Solo faltan cruzar dos mayores de edad ***(M; Y)***.

⇒ ***Tendrán que realizar 9 viajes.***

RPTA : "E"

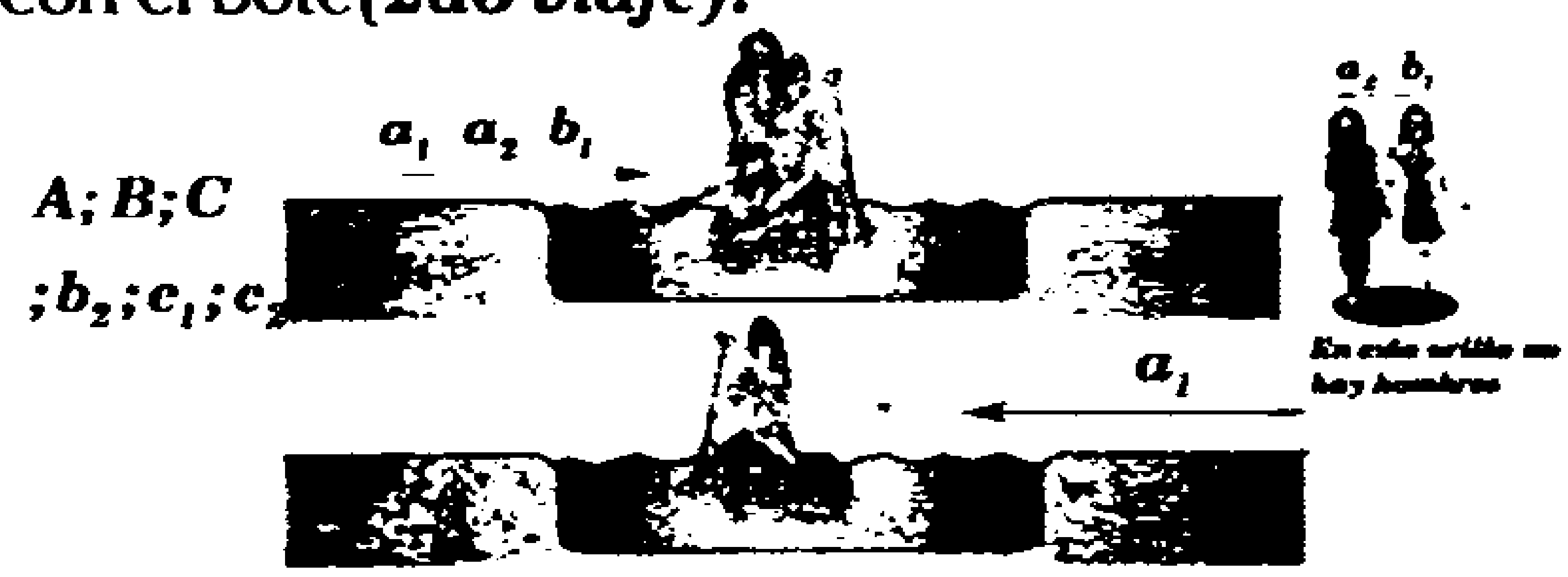
RESOLUCIÓN 8 :

Se pide el menor número de traslados para que todas las personas crucen el río.

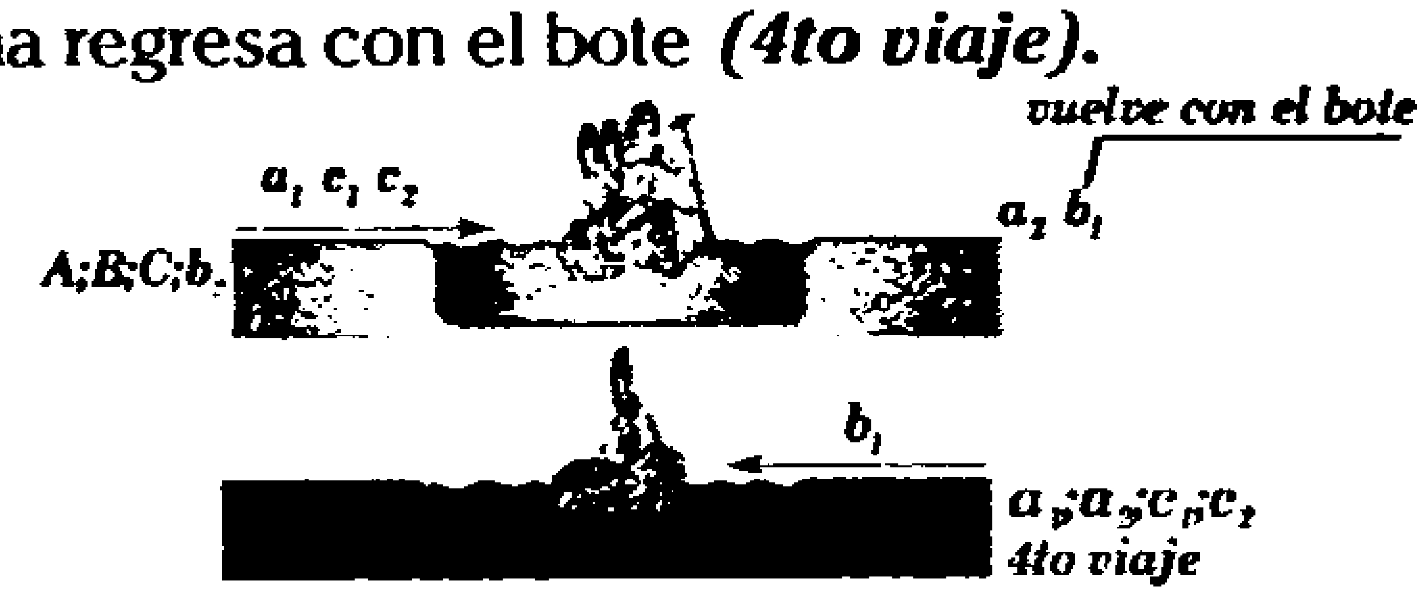
Datos:

* Amigos: ***A; B; C***
* Hermanas: $\underbrace{a_1;a_2}_{de\ A}$; $\underbrace{b_1;b_2}_{de\ B}$; $\underbrace{c_1;c_2}_{de\ C}$
* En el bote pueden viajar como máximo 3 personas.
* Las hermanas no quieren estar en compañía de uno o más hombres si es que su respectivo hermano no está presente.

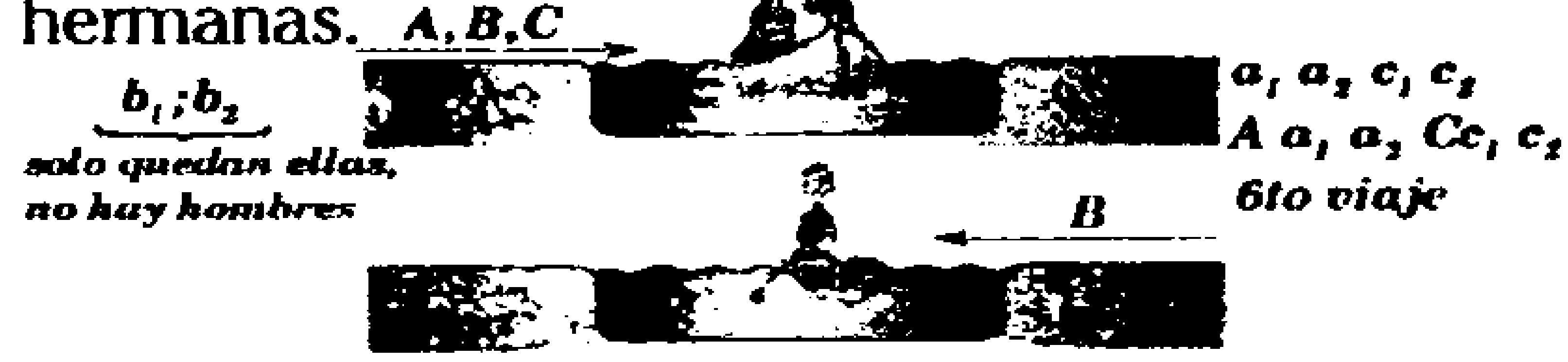
1er viaje: Que crucen tres hermanas y una vuelve con el bote ***(2do viaje).***



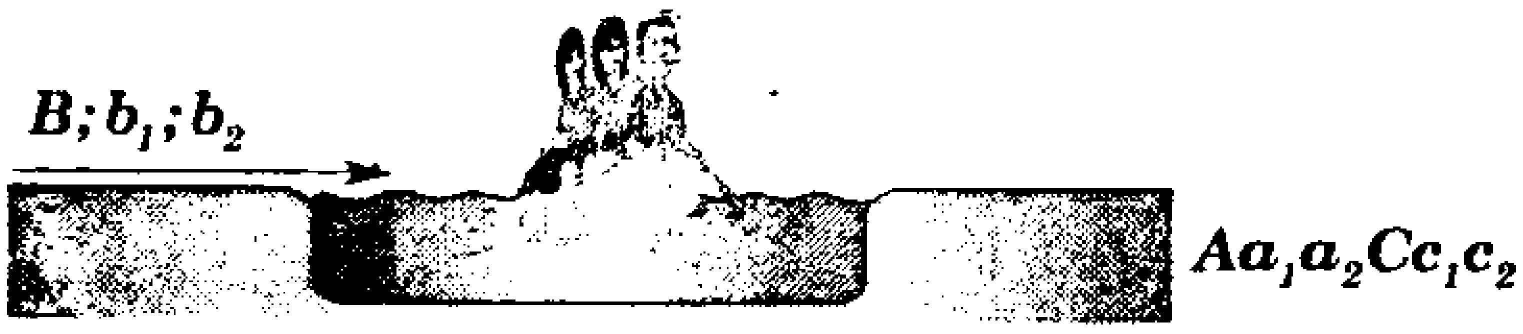
3er viaje: Nuevamente cruzan tres hermanas y una regresa con el bote ***(4to viaje).***



5to viaje: Como en la otra orilla están las hermanas de ***A*** y ***C***, estos viajarán con ***B*** para que este vuelva con el bote ***(6to viaje)*** por sus hermanas.



7mo viaje: *B* y sus hermanas cruzan el río, siendo los últimos en cruzar.



⇒ Se realizan 7 traslados como mínimo

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 9 :

Se pide la cantidad mínima de viajes para que toda la familia cruce el río.

Consideremos que : Padre***(P)***, madre***(M)***, Trillizos ***(T)*** y perro ***(d)***, entonces, de los datos:

* Familia: ***P; M;*** T_1; T_2; T_3; ***d***
* Pesos: ***90kg; 50kg; 30kg; 30kg; 30kg; 10kg***
* El bote soporta hasta ***90kg.***

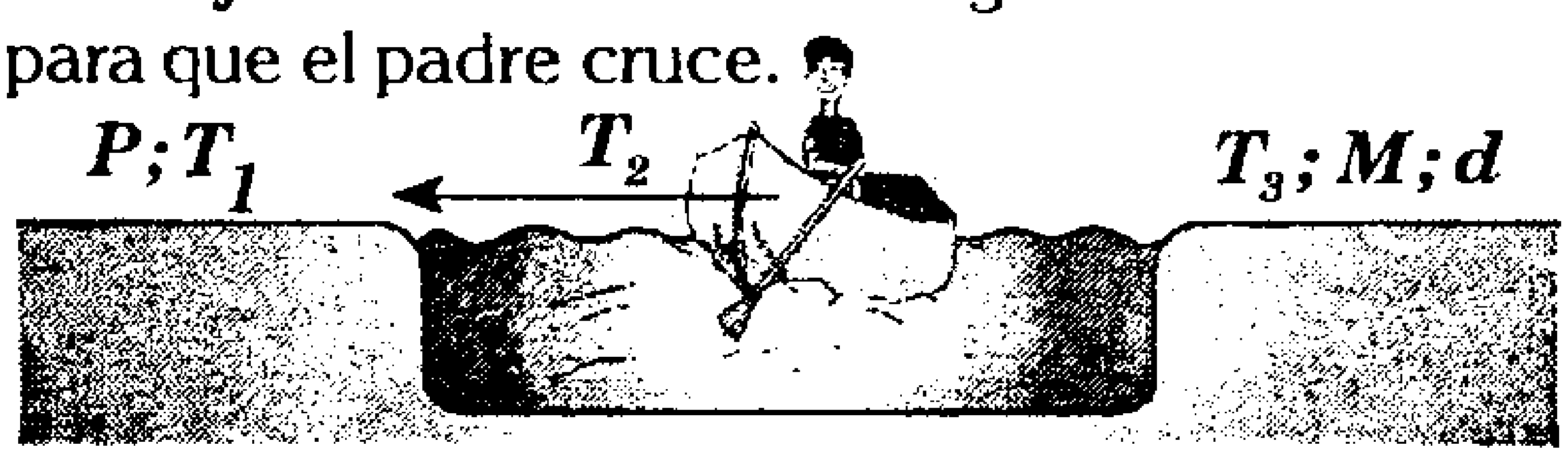
Para garantizar que se realice la menor cantidad de viajes, en cada uno de estos que sea para pasar a la otra parte del río haremos que vaya la menor cantidad de personas (los trillizos) y alguien siempre debe regresar el bote. Grafiquemos los viajes a realizar:

1er viaje: Cruzarán los tres trillizos que hacen un peso total de ***90kg***.

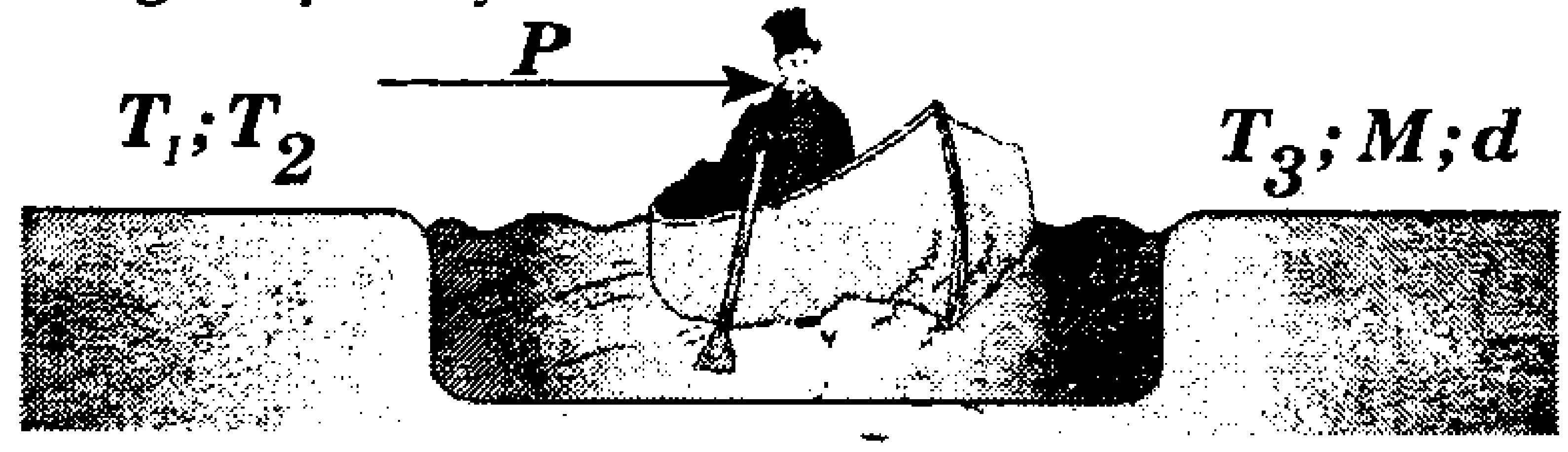
2do viaje: Un trillizo regresará con el bote mientras que los otros dos se quedaron esperando

3er viaje: La madre con el perro que hacen un total de ***60 kg*** cruzarán en el bote, se quedan el padre y el trillizo que volvió.

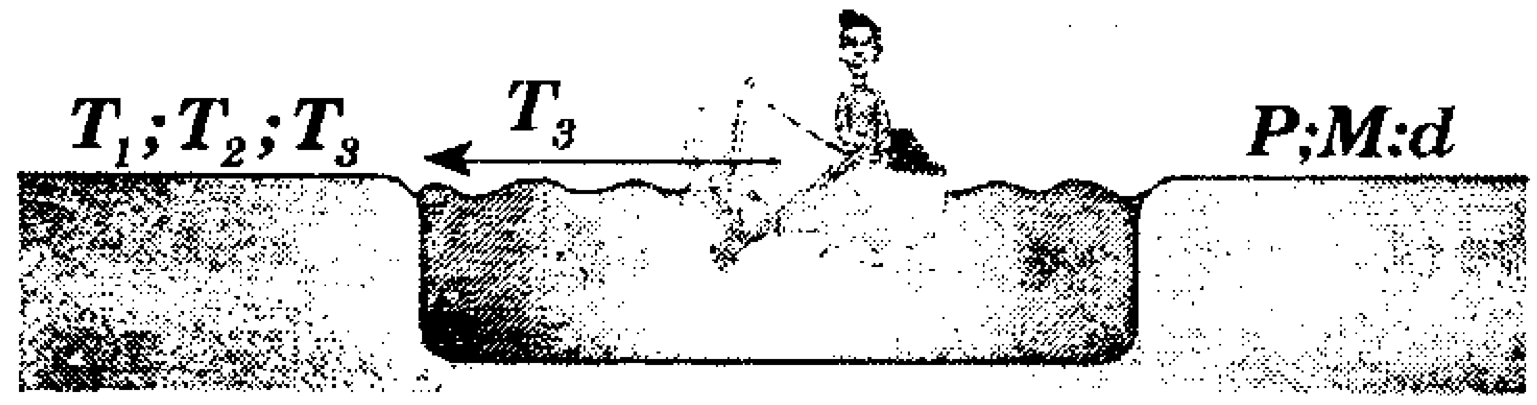
4to viaje: Otro de los trillizos regresará con el bote para que el padre cruce.



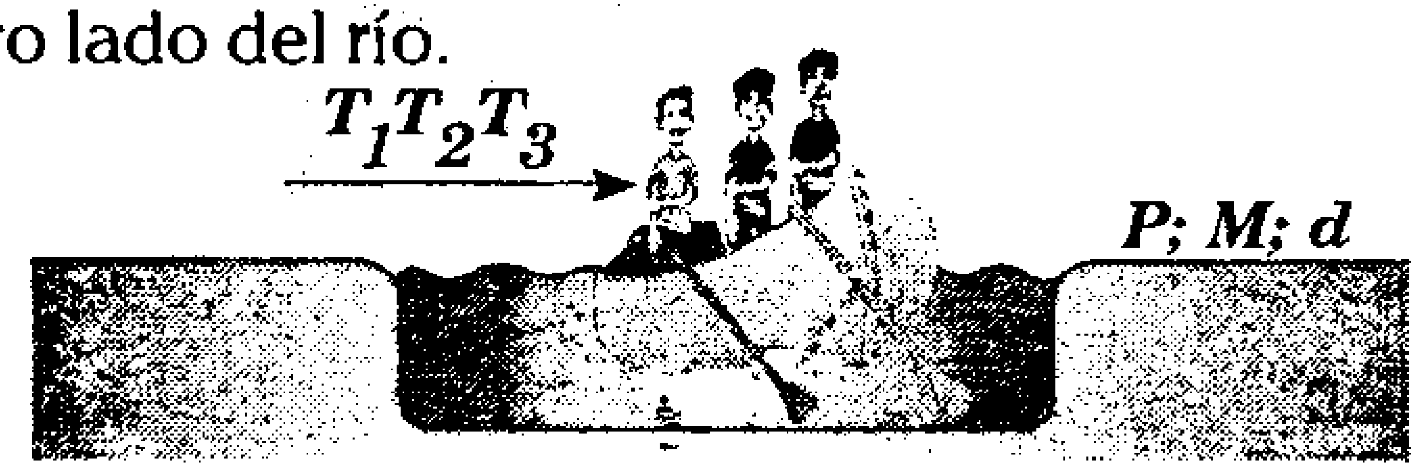
5to viaje: Ahora cruzará el padre solo porque tiene ***90 kg*** de peso y un trillizo traerá el bote.



6to viaje: El tercer trillizo vuelve con el bote.



7mo viaje: Finalmente cruzarán los tres trillizos (con ***90 kg*** en total) y todos ya se encontrarán al otro lado del río.



⇒ Se realizarán 7 viajes en total

RPTA : "D"

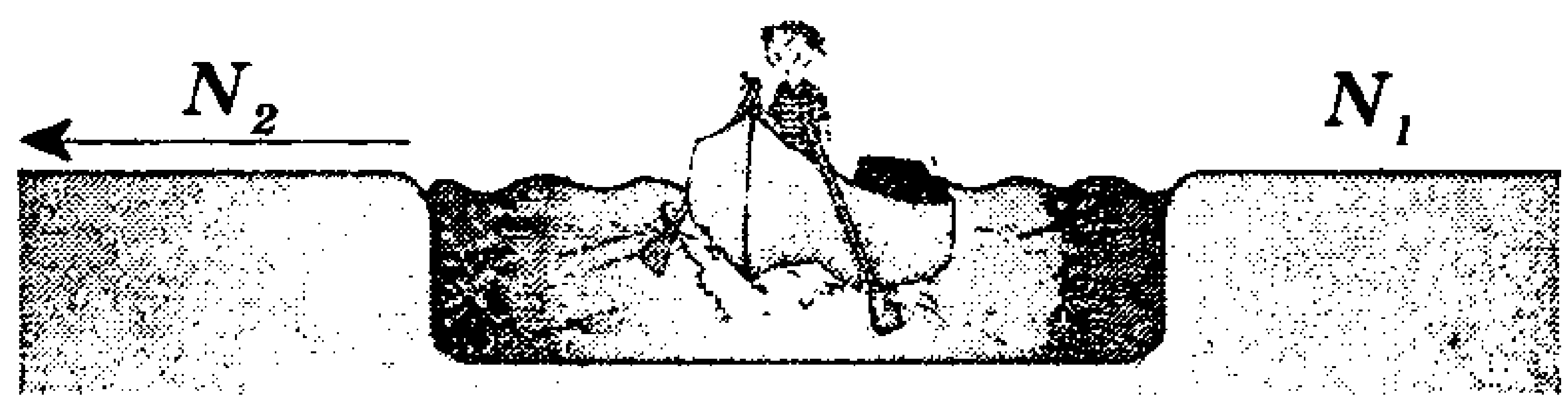
RESOLUCIÓN 10 :

Se pide la cantidad mínima de viajes para que los *X* turistas se trasladen a la otra orilla.

Según las condiciones, en el bote solo pueden ir dos niños o un turista, entonces, en el primer viaje cruzarán los dos niños, de modo que uno vuelva con el bote para que cruce un turista. Grafiquemos esos viajes:

1er viaje: Cruzan los niños N_1 y N_2

2do viaje: Vuelve el niño N_2.



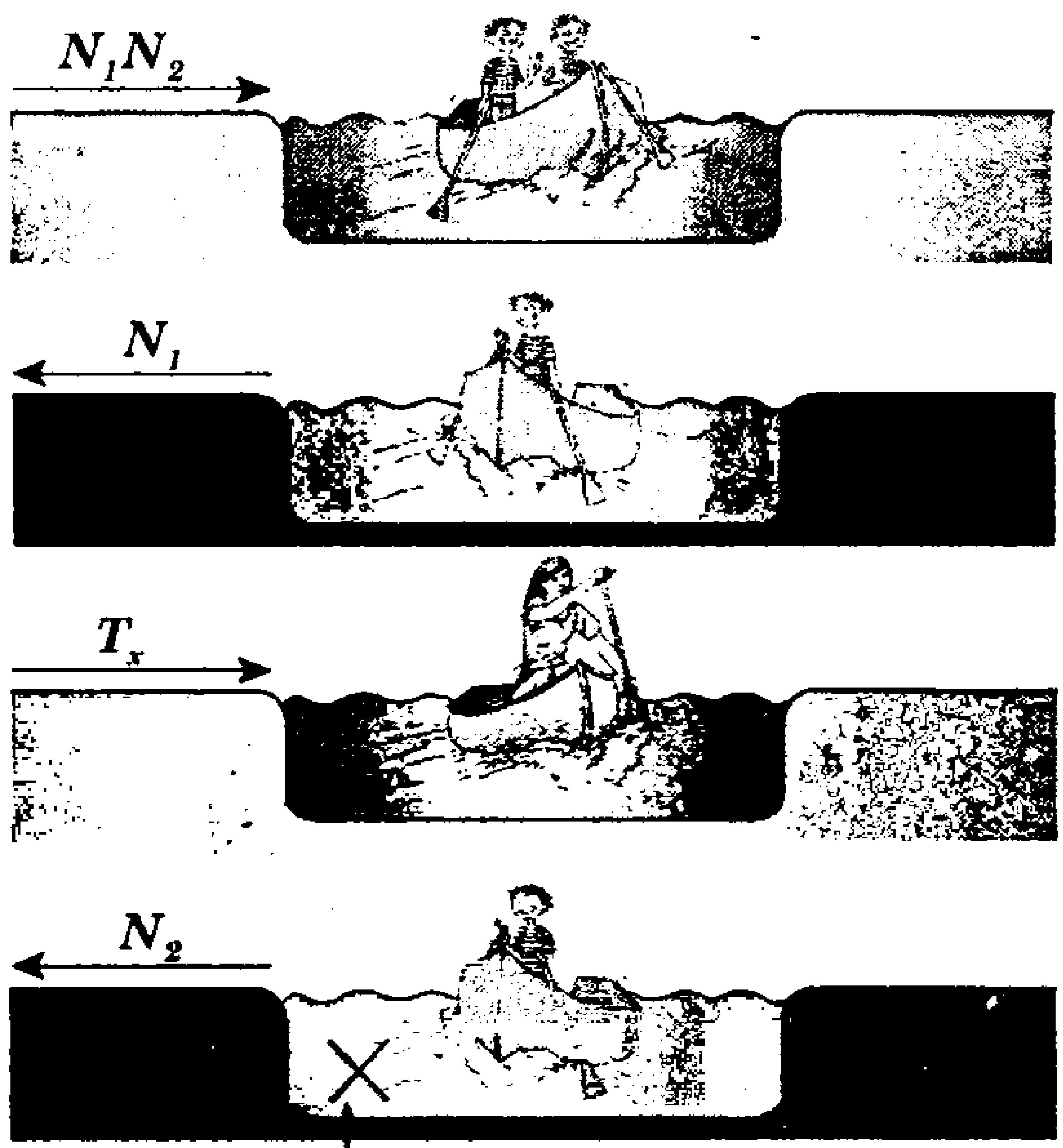
3er viaje: Cruza un turista en el bote.

4to viaje: Vuelve el otro niño que cruzó en el ***1er*** viaje.

De lo anterior, se observa que para que el turista se encuentre en la otra orilla y el resto de personas en la orilla inicial, es necesario ***4*** viajes en total. Entonces, como son un total de ***X*** turistas y por cada uno es necesario ***4*** viajes.

Total de viajes=4x

Pero, esto sería el total de viajes si se hubiera pedido que los niños se encuentren en la orilla inicial. Con esto, vemos que el viaje que realizaría cada niño para volver, al pasar el último turista no es necesario. Es decir :



$\Rightarrow$ ***Total de viajes=4x – 1***

RPTA : "D"

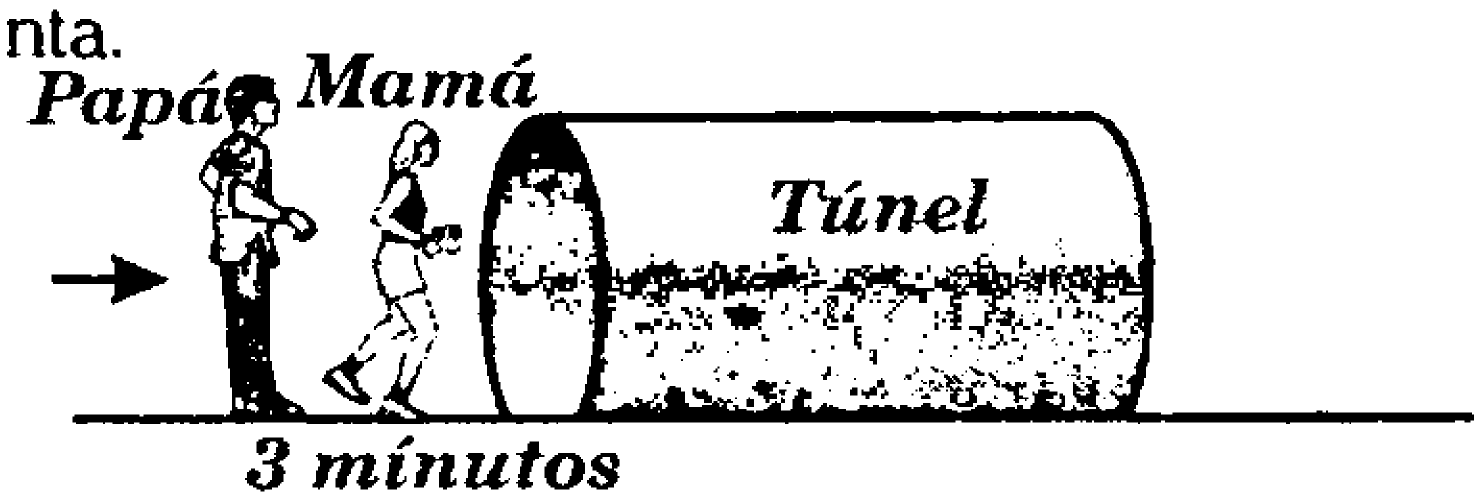
RESOLUCIÓN 11 :

Se pide el tiempo mínimo que tardarán en cruzar el túnel los miembros de la familia.

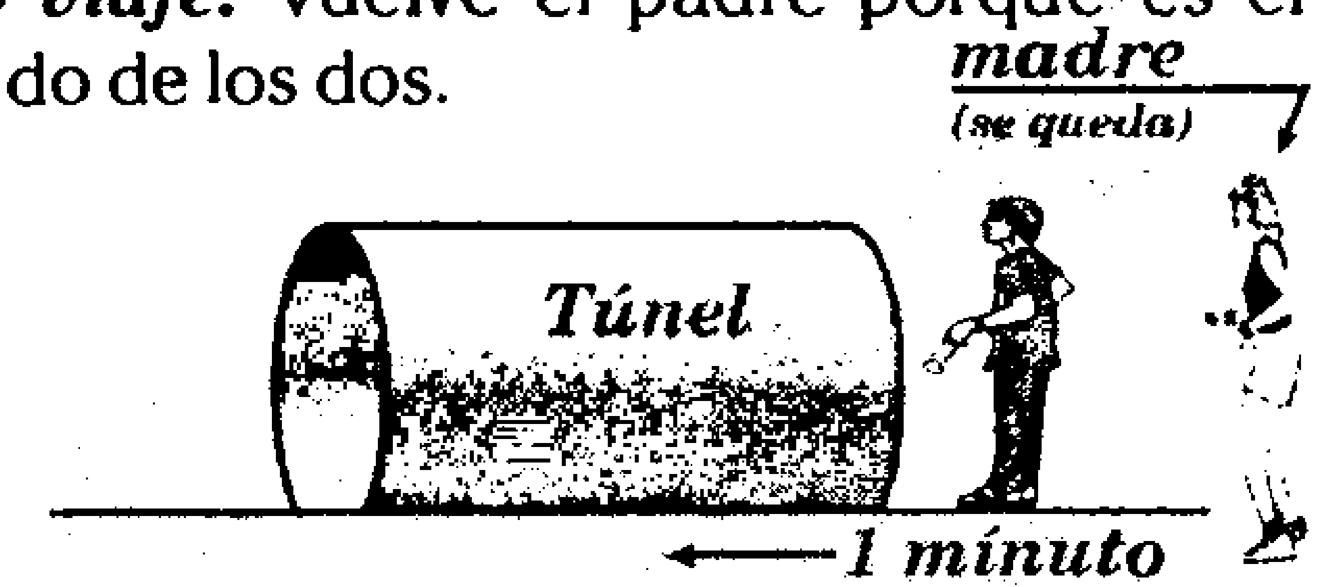
Condición: Cuando cruzan dos personas el tiempo que demoran en cruzar es el del más lento.

Para que tarden el menor tiempo haremos que crucen dos personas (con la linterna), para que una de ellas vuelva con la linterna y esta sea la persona que demora menos tiempo. Por ello , que primero crucen los padres (por ser los más rápidos) y luego los hijos juntos.

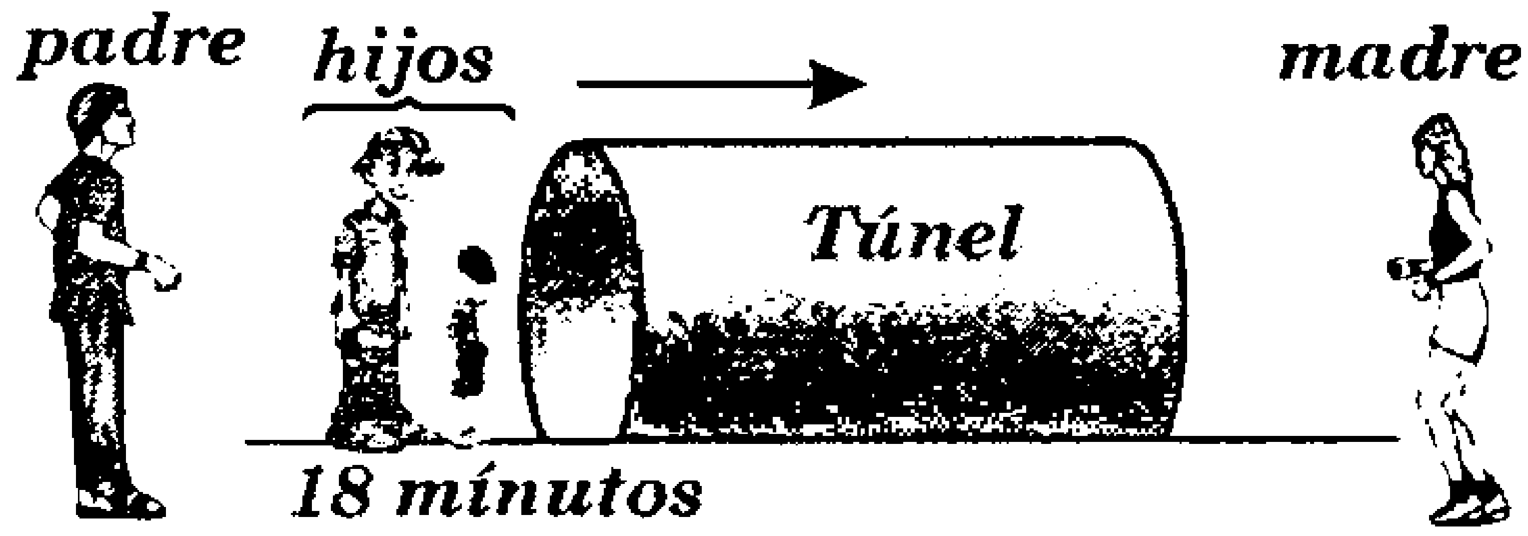
1er viaje: Cruzan los padres, el tiempo que demorarían sería el de la madre por ser la más lenta.



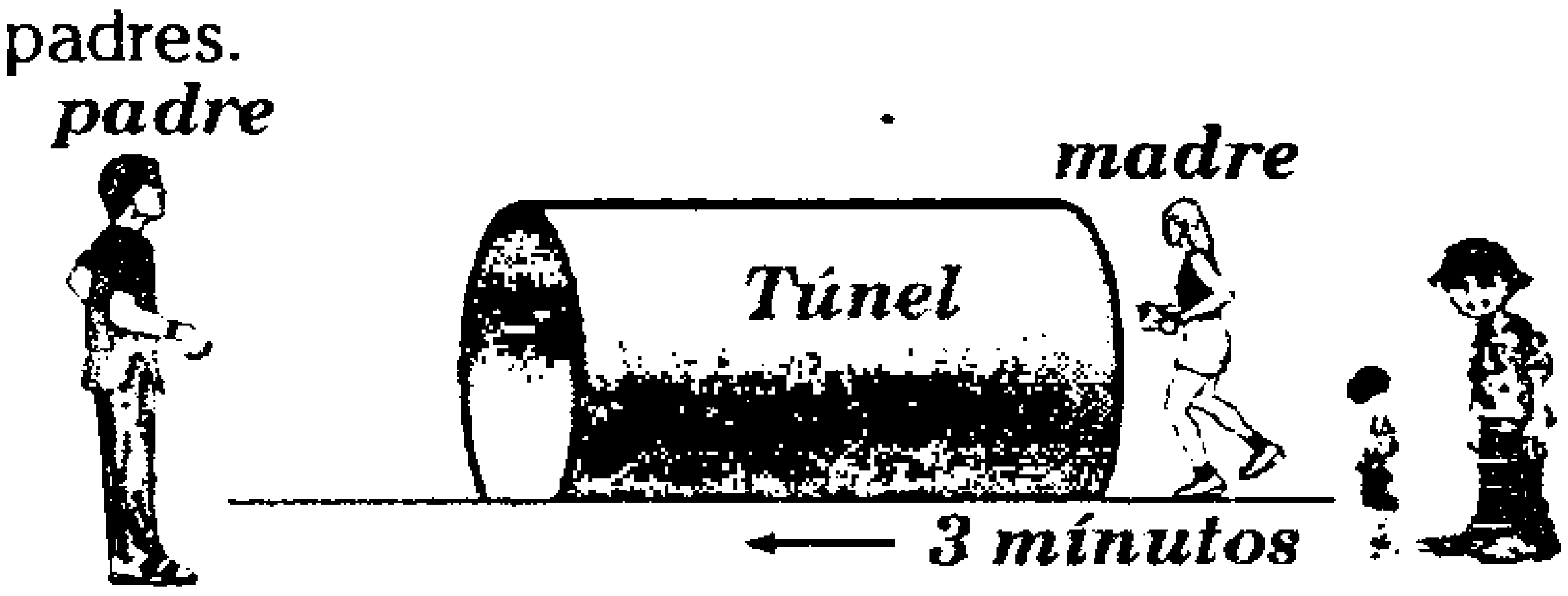
2do viaje: Vuelve el padre porque es el más rápido de los dos.



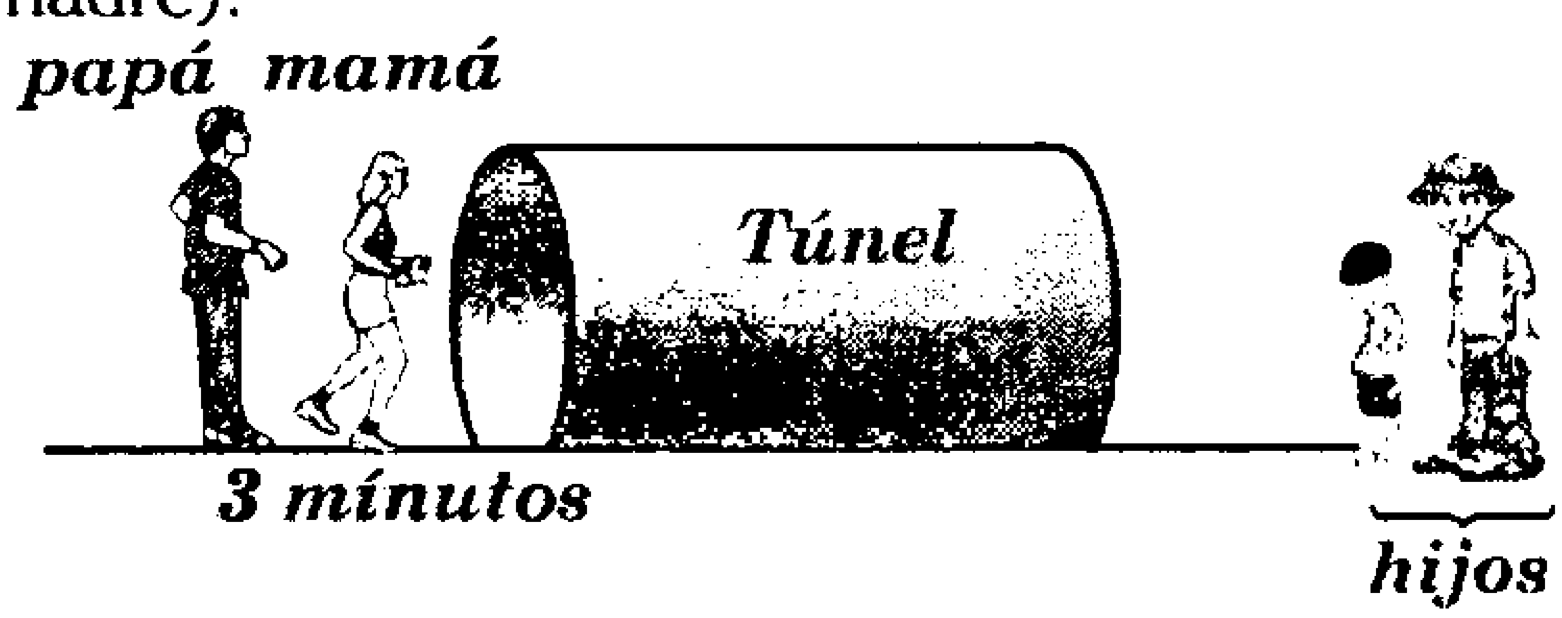
3er viaje: Cruzan los hijos, el tiempo que demorarán sería el del bebé ***(18 minutos)*** el más lento de los dos.



4to viaje: Vuelve la madre tardando ***3*** minutos, mientras los hijos se quedan esperando a los padres.



5to viaje: Será el último viaje , en él cruzarán los dos padres tardando ***3 minutos*** (el tiempo de la madre).



$\Rightarrow$ ***Tiempo mínimo total=3+1+18+3+3= 28min***

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 12 :

Para el traslado de las personas nos apoyaremos en los niños que saben remar:

A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3 N N	N N3 →	
	N3 ←	N
A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3 N	N N3 →	
	N3 ←	N N

Observamos que para pasar a los *2* niños que no saben nadar *(N, N)* se usaron *4* viajes.

A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3	N2 N3 →	
	N2 ←	N N N3
A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2	A5 →	
	N3 ←	N N A5

Luego para pasar a cada adulto *(A)* se usan *4* viajes, entonces esta última etapa se repite con los otros adultos.

A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3 NN	N N3 →	
	N3 ←	N
A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3 N	N N3 →	
	N3 ←	NN
A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3	N2 N3 →	
	N2 ←	N N N3
	A5 →	
A1 A2 A3 A4 N1 N2	N3 ←	N N A5
.	⋮	A1 A2 A3 A4 A5 N N
N1 N2 N3	N 2 N3 →	
	N 2 ←	A1 A2 A3 A4 A5 N3 N N
N1 N2	N1 N2 →	
		A1 A2 A3 A4 A5 N1 N2 N3 N N

Finalmente, como son *5* adultos entonces se emplearon $4(5) = 20$ viajes; finalmente para pasar a los *3* niños que saben remar *(N1, N2, N3)* se usaron *3* viajes adicionales.

El mínimo número de viajes es $4 + 20 + 3 = 27$

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 13 :

Nos piden, cuántos viajes se deben realizar como mínimo para que todos puedan cruzar el río.

Hay *3* madres, cada una con su respectiva hija.

Condición:

* Se dispone de un bote con capacidad para dos personas.

* Ninguna hija debe quedarse a solas con otras madres en ausencia de la suya.

Los viajes son los siguientes:

M1 M2 M3 H1 H2 H3	H2 H3 →	
	H3 ←	H2
M1 M2 M3 H1 H3	H1 H3 →	
	H1 ←	H2 H3
M1 M2 M3 H1	M3 M2 →	
	M2 H2 ←	M3 H3
M1 M2 H1 H2	M1 M2 →	
	H3 ←	M1 M2 M3
H1 H2 H3	H2 H3 →	
	M1 ←	M2 M3 H2 H3
M1 H1	H1 M1 →	
		M1 M2 M3 H1 H2 H3

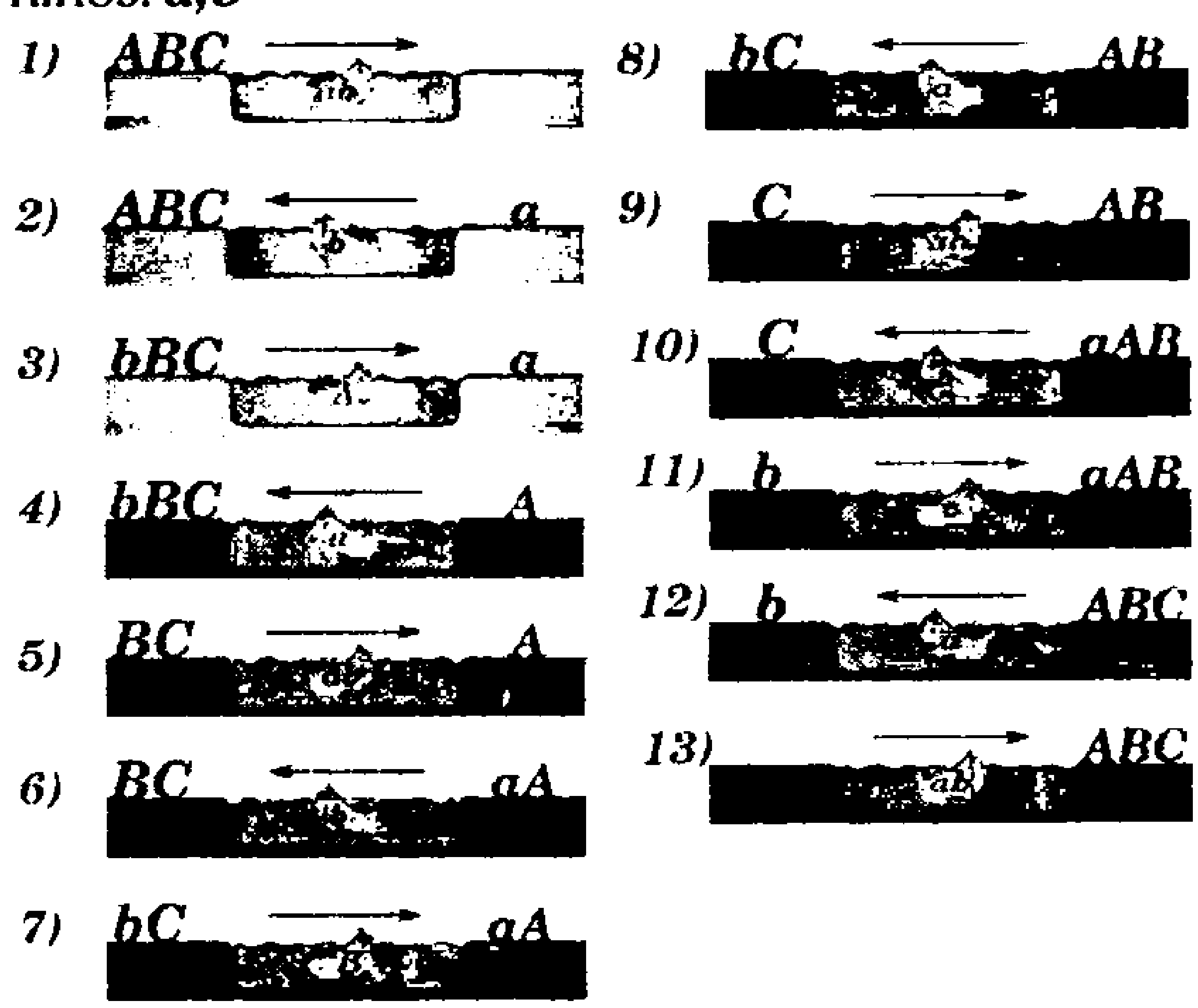
El menor número de viajes es *15*.

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 14 :

soldados: *A;B;C*

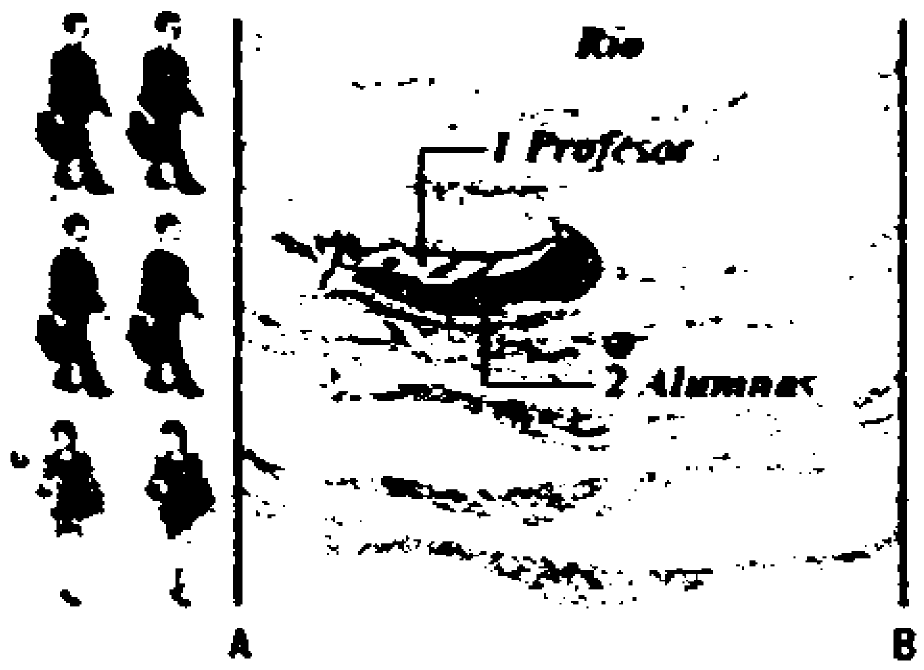
niños: *a;b*



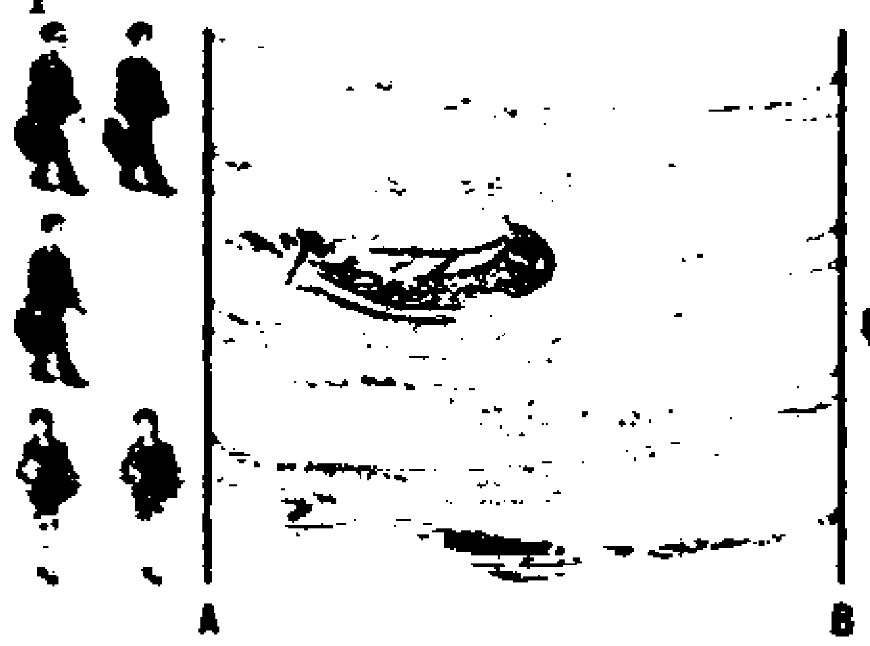
Mínimo número de viajes es *13*.

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 15 :



*En el 1^{er} viaje : van 2 alumnas $(A \to B)$
*En el 2^{do} viaje : regresa 1 alumna $(B \to A)$
*En el 3^{er} viaje : va 1 profesor $(A \to B)$
*En el 4^{to} viaje : regresa 1 alumna $(B \to A)$
Luego , del 4^{to} viaje se observa que se ha logrado pasar a un profesor a la orilla *B* .



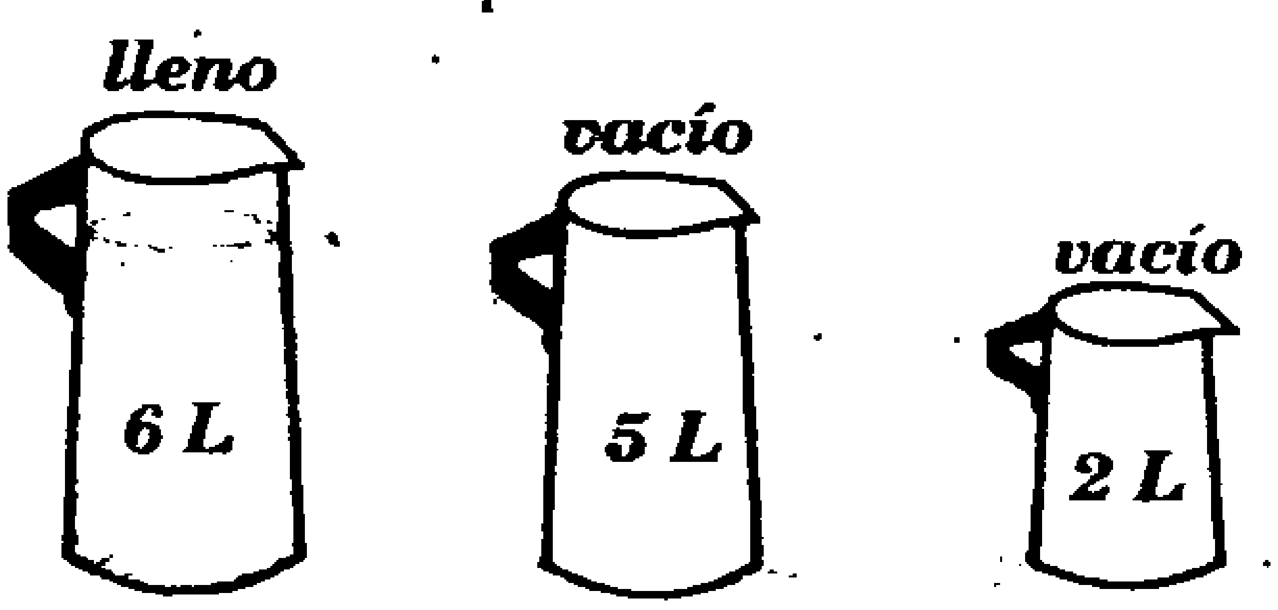
*Es decir , cada cuatro viajes realizados un profesor pasa a la orilla *B* .
*Por lo tanto , para pasar a los *4* profesores se han realizado *16* viajes , es decir :

*Finalmente hay que efectuar un último viaje (*17* avo) para pasar a las 2 alumnas .

RPTA : "C

RESOLUCIÓN 16 :

Se desea que finalmente cada recipiente tenga el mismo contenido (*2 L* cada uno). Presentamos el mínimo número de pasos:



Inicio	*6*	*0*	*0*
1.er paso	*4*	*0*	*2*
2.° paso	*4*	*2*	*0*
3.er paso	*2*	*2*	*2*

Por lo tanto, la respuesta es *3* pasos.

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 17 :

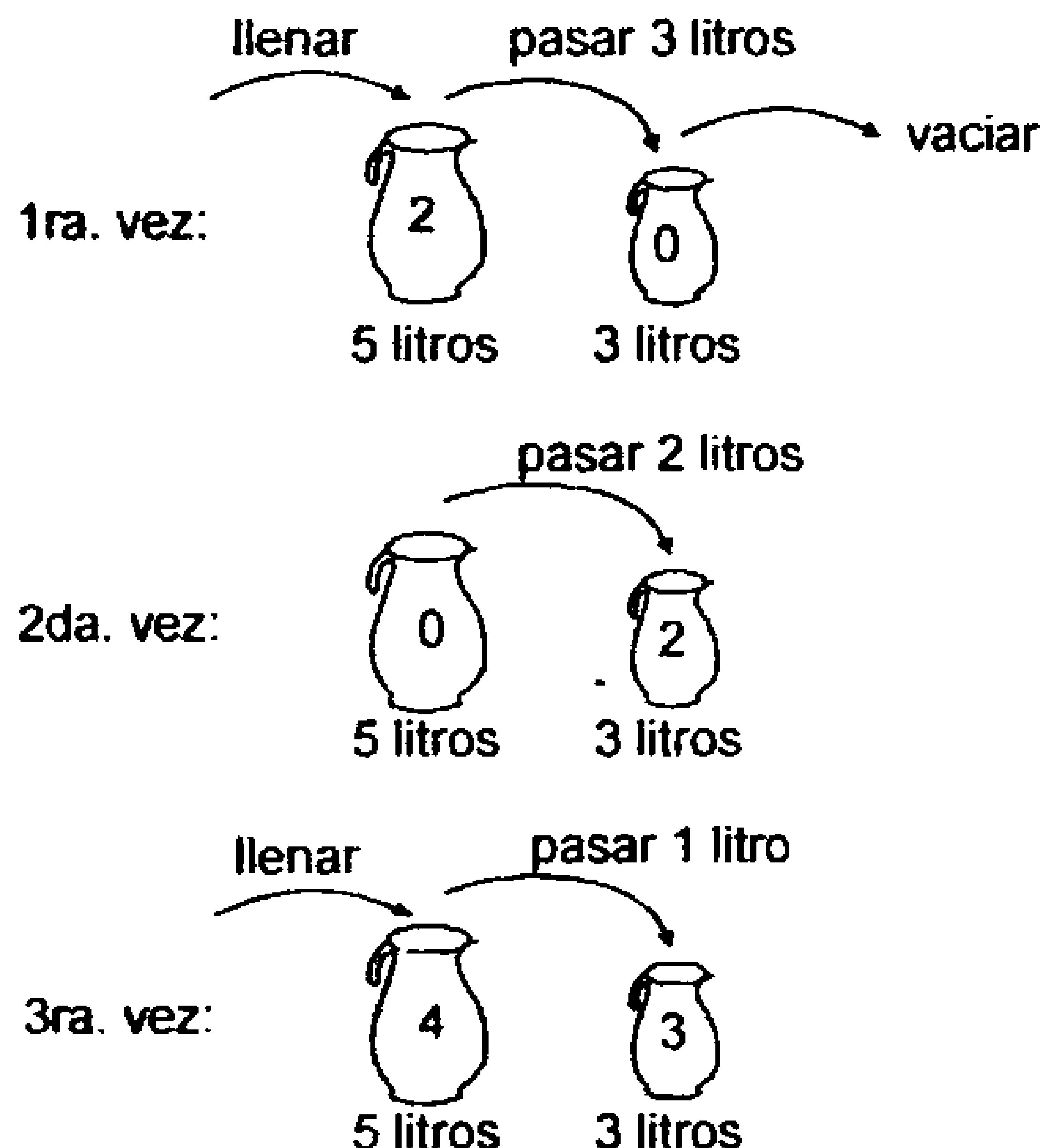
Envase de 8 litros	Envase de 5 litros	Envase de 3 litros
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

Se realizan como mínimo *7* traslados.

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 18 :

* Los números en las jarras indican la cantidad de litros que quedan en ellas al final de cada vez



⇒ Son suficientes *3* veces

RPTA: "C"

RESOLUCIÓN 19 :

Se pide la menor cantidad de trasvases para obtener *4L* de leche.

Lo que necesitamos es que el recipiente de *3L* tenga solo *2L* para luego completar el litro que falta trasvasando ese litro del recipiente lleno de *5L*, así quedará *4L* en este recipiente.

Veamos los trasvases a realizar.

Primer trasvase:	8	0	0
Segundo trasvase:	3	5	0
Tercer trasvase:	3	2	3
Cuarto trasvase:	6	2	0
Quinto trasvase:	6	0	2
Sexto trasvase:	1	5	2
	1	4	3

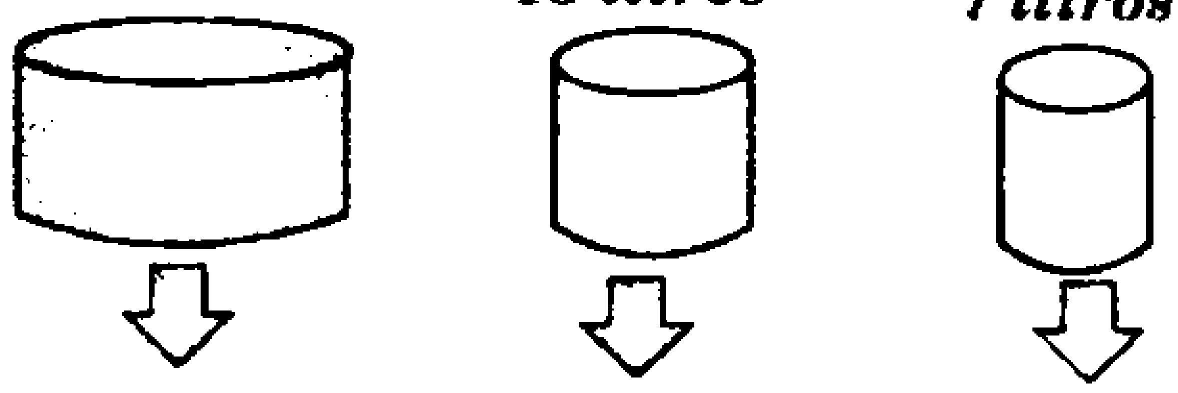
⇒ **6** trasvases

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 20 :

Nos piden el número mínimo de trasvases para obtener *12* litros.

Capacidad: 20 litros — *13 litros* — *7 litros*



Contenido: (en litros) 20 — 0 — 0

1er trasvase (13 litros)

7	13	0

2do trasvase (7 litros)

7	6	7

3er trasvase (7 litros)

14	6	0

4to trasvase (6 litros)

14	0	6

5to trasvase (13 litros)

1	13	6

6to trasvase (1 litro)

1	12	7

lo pedido

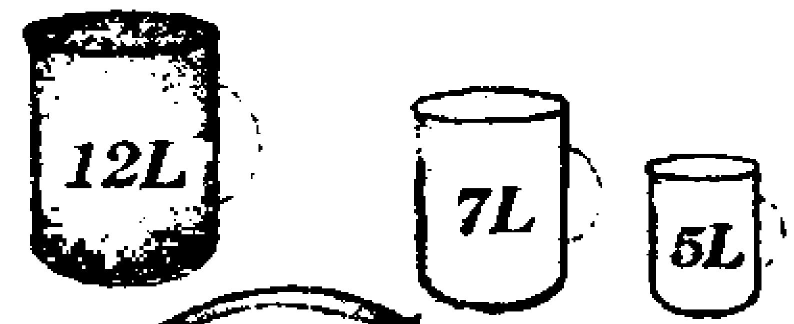
El mínimo número de trasvases es *6*.

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 21 :

Se pide la cantidad de trasvases que debe realizar. como mínimo, el barman Garzón para medir *4* litros de agua.

Buscaremos que en el recipiente de **5L** haya solo **2L**, para completar los **3L** restantes, trasvasamos de la jarra de **7L** para que queden los **4L** requeridos. Grafiquemos los trasvases:



Primer trasvase:	12	0	0
Segundo trasvase:	5	7	0
Tercer trasvase:	5	2	5
Cuarto trasvase:	10	2	0
Quinto trasvase:	10	0	2
sexto trasvase:	3	7	2
	3	4	5

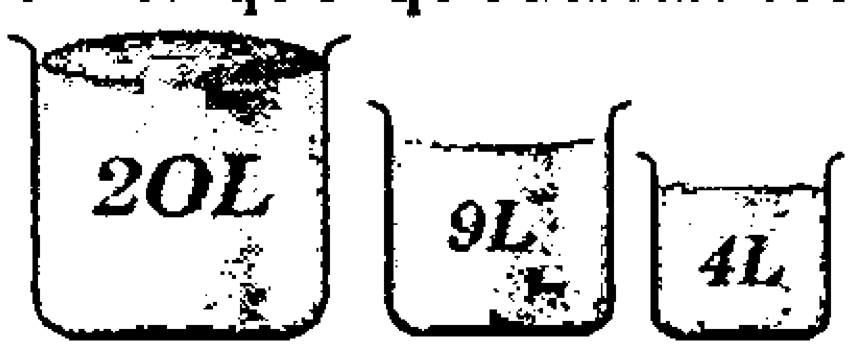
Los 4 Requeridos

⇒ Se necesitan **6** trasvases.

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 22 :

Se pide la menor cantidad de trasvases para obtener **6L**. Para obtenerlo buscaremos que en el recipiente de **4L** haya solo un litro, para que los **3L** que faltan lo obtengamos al trasvasarlos del recipiente de **9L**, en el que quedarían los **6L** pedidos.



1er. trasvase :	20	0	0
2do. trasvase :	11	9	0
3er. trasvase :	11	5	4
4to. trasvase :	15	5	0
5to. trasvase :	15	1	4
6to. trasvase :	19	1	0
7mo. trasvase :	19	0	1
8mo. trasvase :	10	9	1
	10	6	4

Los 6L que Se pedían

⇒ ***Se realizarán 8 trasvases.***

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 23 :

Se pide el número de trasvases como mínimo para tener **2L**.

Formemos **2L** llenando dos veces el balde de

5L y quedará los *2L* necesitamos en el recipiente de *12L* , es decir:

Vacíos

1er. trasvase:	12	0	0	(llenamos en balde de 5L)
2do. trasvase:	7	0	5	(trasvasamos los 5L al balde de 6L)
3er. trasvase:	7	5	0	(llenamos nuevamente el balde de 5L)
los 2L pedidos	2	5	5	

⇒ *3* trasvases como mínimo

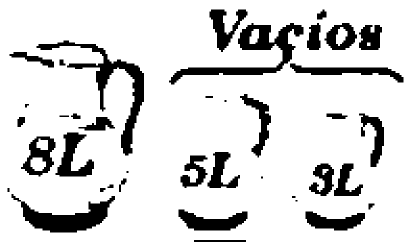
RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 24 :

Se pide la menor cantidad de trasvases para conseguir *7* litros.

Buscaremos que en uno de los recipientes quede un litro, de esa manera se tendrá *7* litros en los otros (en uno solo o entre los dos recipientes). Para esto, llenaremos dos veces la jarra de *3L* y lo vaciaremos en la jarra de *5L*.

Vacíos



1er. trasvase:	8	0	0	(llenamos la jarra 3L)
2do. trasvase:	5	0	3	(trasvasamos de la jarra de 3L a la de 5L)
3er. trasvase:	5	3	0	(llenamos otra vez la jarra de 3L)
4to. trasvase:	2	3	3	(trasvasamos a la jarra de 5L para llenarla)
	2	5	1	(queda 1L en la jarra de 3L)

7 litros

⇒ ***Se realizarán 4 trasvases como mínimo.***

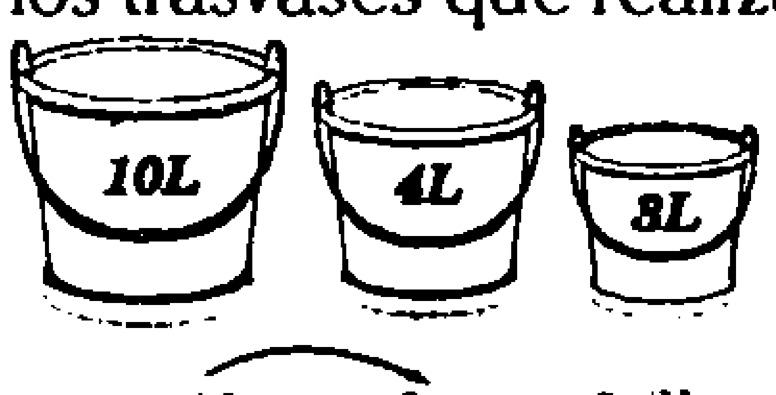
RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 25 :

Se pide la cantidad de trasvases que debe realizar Sebastián, como mínimo para obtener *5L* en sus baldes.

Para obtener *5 L* se puede hacer algunos trasvases (menor posible) para que haya un litro en el balde de *3L* de capacidad, de manera que con el balde de *4L* llenos se completaría los *5L* pedidos.

Veamos los trasvases que realizaremos:



1er trasvase:	10	0	0	(llenamos el balde de 4L)
2do trasvase:	6	4	0	(llenamos el balde de 3L con el balde de 4L)
3er trasvase:	6	1	3	(debe pasar al de 3L, para ello primero vaciamos éste. (llenamos el balde de 4L)
4to trasvase:	9	1	0	
5to trasvase:	9	0	1	
	5	4	1	

5L

⇒ ***Sebastián debe realizar 5 trasvases como mínimo.***

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 26 :

Se pide el menor número de veces que Eduardo tiene que pasar la chicha de un recipiente a otro para obtener *3L*.

Como no se podrá obtener *3L* de manera directa llenando los recipientes de *9L* y *5L* (como lo hemos hecho en otro problema) lo que haremos será separar *4L* del balde de *16L* con los *12L* que quedan llenaremos el recipiente de *9L* y lo que quedará será los *3L*. Para separar *4L* hacemos los siguientes trasvases.

1er trasvase:	16	0	0	
2do trasvase:	7	9	0	
3er trasvase:	7	4	5	
4to trasvase:	12	4	0	deben estar en el recipiente de 5L
5to trasvase:	12	0	4	
los 3 litros que quería Eduardo	3	9	4	

⇒ ***5 trasvases como mínimo.***

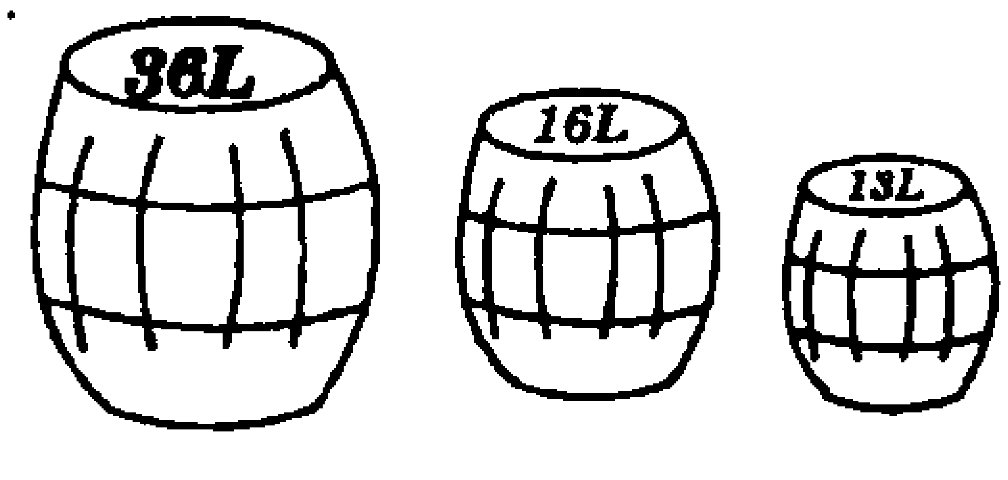
RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 27 :

Se pide valor de *x*.

Para obtener los *7L* de agua se puede trasvasar del recipiente de *13L*, *6* litros exactamente; pero para esto, haremos que en el recipiente de *16L* solo haya *10L* .

Grafiquemos:



1er trasvase:	36	0	0	llenamos el recipiente de 13L dos veces y lo vamos trasvasando al de 16L para conseguir los 10L
2do trasvase:	23	0	13	
3er trasvase:	23	13	13	
4to trasvase:	10	13	13	
5to trasvase:	10	16	10	
6to trasvase:	26	0	10	trasvasamos los 10L al recipiente de 16L
7to trasvase:	26	10	0	
8to trasvase:	13	10	13	trasvasamos 6L del recipiente de 13L al de 10L para que queden los 7L.
	13	16	7	

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 28 :

Se pide $X - Y$

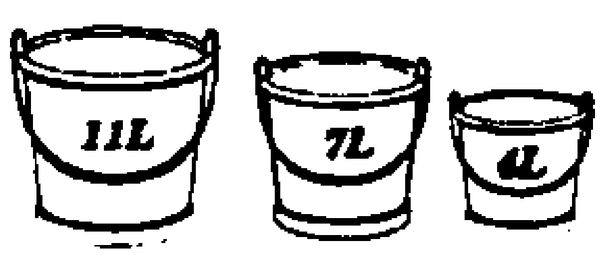
Datos:

X: menor cantidad de trasvases para conseguir *1L*.

Y: menor cantidad de trasvases para conseguir *6L*.

Calculando el valor de X:

Para obtener *1L* llenaremos dos veces el recipiente de *7L* tendríamos *8L* y con este contenido llenamos el recipiente de *4L* . Así, nos quedará *1L* en el recipiente de *4L*.Veamos

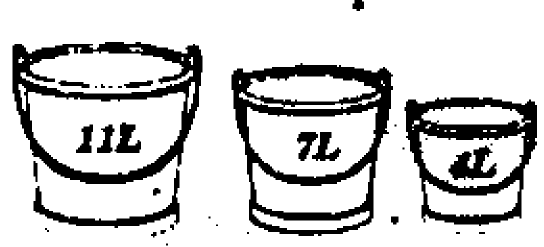


1er trasvase:	11	0	0	(llenamos el recipiente de4L)
2do trasvase:	7	0	4	(vaciamos los 4L en el recipiente de 7L para llevar nuevamente 4L)
3er trasvase:	7	4	0	(llenamos el recipiente de 4L por segunda vez)
4to trasvase:	3	4	4	(llenamos el recipiente de 7L con 3L del recipiente de 4L)
	3	7	1	Obtenemos un litro

$\Rightarrow$ ***X=4 trasvases***

Calculando el valor de Y:

Podemos obtener *6L* quitándole un litro al recipiente de *7L* cuando este totalmente lleno. Para ello buscaremos que el recipiente de *4L* tenga solo *3L*, de ese modo, para llenarlo, trasvasamos *1L* del recipiente de *7L*.



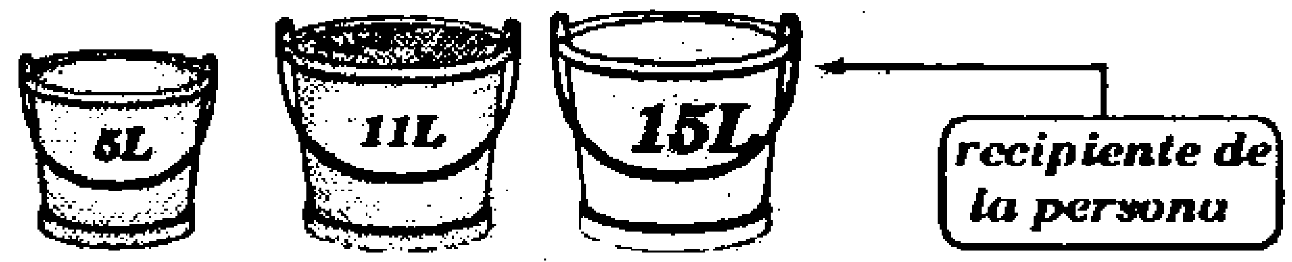
1er trasvase:	11	0	0	llenamos del recipiente de 7L)
2do trasvase:	4	7	0	(del recipiente de 7L llenamos el de 4L)
3er trasvase:	4	3	4	(Vaciamos el de 4L para trasvasar los 3L a dicho recipiente)
4to trasvase:	8	3	0	(llenamos el recipiente de 7L)
5to trasvase:	8	0	3	(llenamos el recipiente de 4L trasvasando un litro del recipiente de 7L)
6to trasvase:	1	7	3	
	1	6	4	obtenemos los 6 litros

$\Rightarrow$ ***Y=6 trasvase*** $\Rightarrow Y - X = 6 - 4 = 2$

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 29 :

Se le pide la menor cantidad de trasvases para tener *12L*, como se tiene *16L* de leche en total distribuidos en recipientes de *5* y *11* litros, lo que haremos es separar *4L* con la menor cantidad de trasvases, de esa manera quedaría solo los *12L* de *5L* que está lleno, de la siguiente manera:



1er trasvase:	5	11	0	Vaciaremos el recipiente de 11L para trasvasarle 5L dos veces, de esa manera tendremos 10L en él.
2do trasvase:	5	0	11	
3er trasvase:	0	5	11	
4to trasvase:	5	5	6	Llenamos ahora el de 5L para trasvasar 1L al recipiente que tiene 10L, con esto conseguimos los 4L.
5to trasvase:	0	10	6	
6to trasvase:	5	10	1	
7to trasvase:	4	11	1	
	4	0	12	Es necesario el último trasvase porque estos 12L deben estar en el recipiente de la persona.

$\Rightarrow$ ***Se deben realizar 7 trasvases como mínimo.***

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 30 :

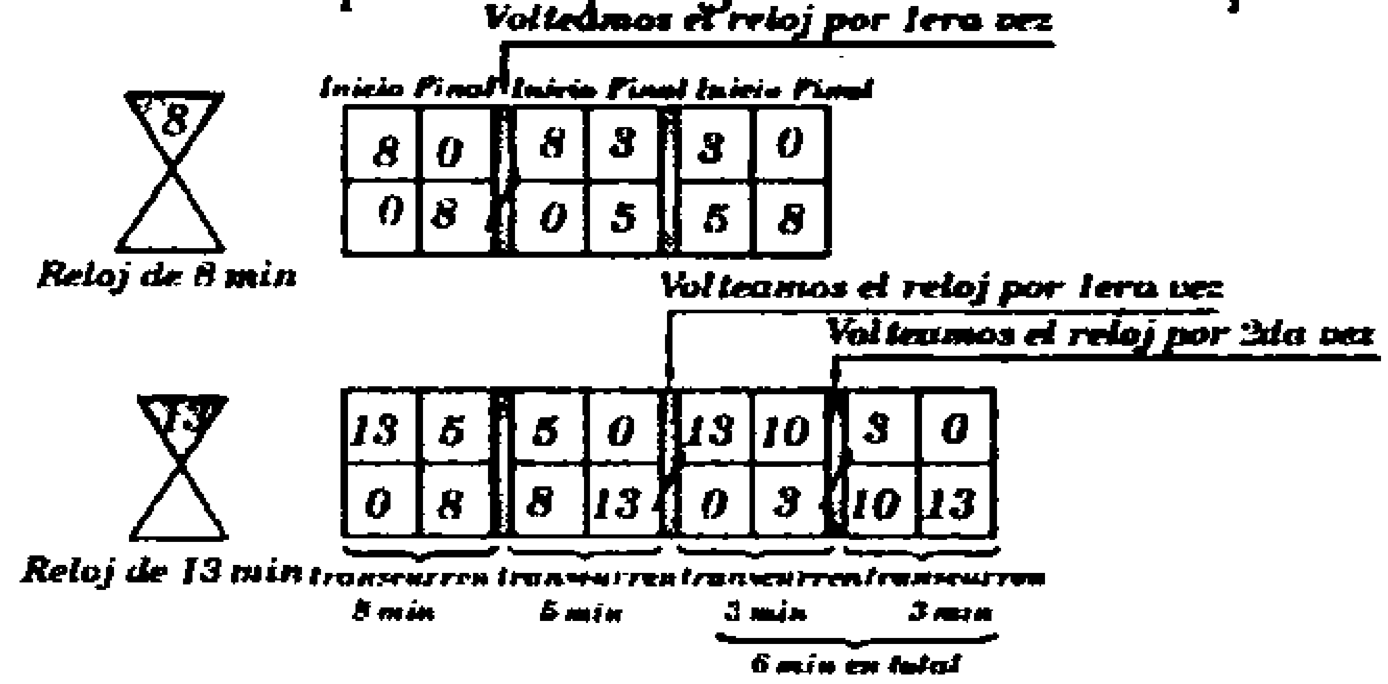
Para calcular lo pedido en el problema debe cronometrarse los *6 min* exactamente, en el menor tiempo, de esa manera se sabrá cuántas veces tuvieron que voltear los relojes. Ahora, ¿Cómo mediremos los *6* minutos?.

Lo que bucaremos es medir exactamente *3 min* con uno de los relojes, de tal manera que pasado el tiempo volteamos ese mismo reloj y tendríamos *3 min* más,con lo que se tendría los *6 min* pedidos.

Buscamos el resultado *3* con los tiempos que miden los relojes es decir:

$$\underbrace{13-8}_{\text{pasan 8 min y tenemos 5min en el reloj de 13 min}} = 5 \Rightarrow \underbrace{8-5}_{\text{pasan 5min y tenemos 3min en el reloj de 8min}} = 3 \text{ ¡Listo!}$$

Veamos el esquema que graficará todo el proceso.



* Uno de los relojes se volteará una vez.

RPTA : "A"

PRACTICA DIRIGIDA

01 Los esposos Ramirez y sus 2 hijos deben cruzar un río en un bote que puede soportar como máximo ***90 kg*** de carga. El señor Ramírez pesa ***90 kg***, su esposa ***60 kg*** y sus hijos pesan ***50 kg*** y ***30 kg***, respectivamente, y además les acompaña su perro Pluto que pesa ***10 kg***. Si todos deben trasladarse sobre el bote, halle el menor número de veces que el bote tendrá que ir de una orilla a la otra, para que todos crucen el río.

A) 7 B) 8 C) 6 D) 9

02 Manuela, su hija y su nieta se disponen a cruzar un río, pero para ello deberán usar una balsa en que a lo más pueden ir dos personas. Calcule la menor cantidad de viajes que deben realizar para lograr su ojetivo

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

03 Lewis desea transportar un lobo, una cabra y un atado de alfalfa al otro extremo de un río. Para ello dispone de un bote donde sólo cabe Lewis y un animal o Lewis y el atado de alfalfa. ¿cuántos viajes como mínimo tendrá que realizar Lewis para lograr cruzar el río sin que el lobo se coma a la cabra ni que la cabra se coma el atado de alfalfa?.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9

04 Una familia compuesta por una pareja de esposos y sus dos hijos se encuentran en la orilla derecha de un río, y desean pasar en un bote a la otra orilla. Se sabe que el bote puede trasladar a lo más ***2*** personas, y los hijos son muy celosos entre sí, ya que en ningún instante permiten que su hermano esté con la madre en ausencia de él. ¿Cuántos traslados se deben realizar, como mínimo, para lograrlo?. Considere que las ***4*** personas saben remar.

A) 7 B) 8 C) 5 D) 6

05 Un pastor quiere pasar un perro, una oveja y un cubo de paja de una a otra orilla de un río. Dispone para ello de una barca en la que solo caben él y una de las otras tres "cosas". Si el perro, se queda solo con la oveja, se la come. Si la oveja se queda sola con la paja, se la come. ¿Cuántos viajes necesita realizar el pastor, como mínimo, para lograr pasar a la otra orilla?

A) 51 B)7 C) 9 D) 11

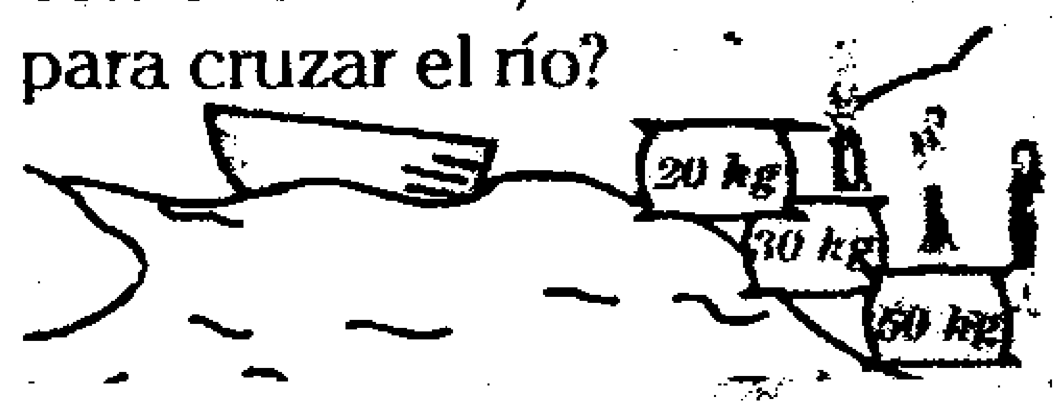
06 Si ***20*** señoritas que pesan ***50*** kilos cada una,y dos niños cuyos pesos son de ***25*** kilos cada uno, deciden cruzar un río en una barca que solo puede mantenerse a flote con ***50*** kilos como máximo, ¿cuántos viajes tendrán que realizar, como mínimo, para pasar todas las personas al otro lado del río?

A) 81 B) 84 C) 90 D) 96

07 Un hombre y su esposa acompañados por sus dos hijos mellizos y un perro tenían que cruzar un río, pero su bote solo podía soportar ***80 kg***. El hombre pesaba ***80 kg*** al igual que su esposa. Los dos niños pesaban ***40 kg*** cada uno y el perro, ***10***. ¿Cuántos viajes tiene que realizar, como mínimo, para conseguir cruzar todos al otro extremo del río?

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13

08 Tres personas, cada una con un saco, se disponen a cruzar un río, pero el bote solo puede transportar a dos personas o a una persona y un saco, además, en ningún momento debe ocurrir que una o dos personas se encuentren solas con un saco cuyo peso sea mayor a la suma de pesos de los sacos asignados originalmente. Está permitido llevar el saco de otra persona. ¿Cuánto viajes, como mínimo, deben realizar para cruzar el río?



A) 11 B) 13 C) 15 D) 17

09 Dos padres, cada uno con su respectivo hijo y su respectiva mascota, se disponen a cruzar un río. Para ello cuentan con un bote que puede trasladar a los dos niños o un adulto, o un niño y su mascota. ¿Cuántos viajes deben realizar, como mínimo, para lograr su objetivo, si la mascota debe estar siempre al cuidado de al menos uno de sus dueños?

A) 9 B)13 C)11 D)12

10 Tres caníbales y tres cazadores se encuentran en la orilla de un río y desean trasladarse a la otra orilla, para lo cual tienen un bote en el que pueden ir a lo más dos personas.

Si en una orilla o en el bote los caníbales superan en número a los cazadores, estos son devorados. ¿En cuántos viajes, como mínimo, se trasladarán a la otra orilla?

A)7 *B) 9* *C)15* *D)11*

11 Carmen tiene en un recipiente *10* litros de leche. Ella desea repartir a una de sus hermanas, exactamente, *4* litros de leche en una jarra, para ello dispone de una jarra de *5* litros y otra de *3* litros, sin marca alguna. ¿Cuántos trasvases debe realizar, como mínimo, para lograr su objetivo?

A) 3 *B) 6* *C)7* *D) 5*

12 Un bodeguero quiso repartir entre dos personas, en partes iguales, *8* litros de vino contenidos en una jarra de igual capacidad, pero al intentar hacer las medidas se vio con el problema de que solamente disponía, aparte de la jarra de *8* litros, de dos jarras con capacidades de *3* y de *5* litros. Si ninguna jarra tenía medidas, ¿cuántos traslados como mínimo debe realizar para que las dos personas tengan la misma cantidad de vino?

A) 6 *B) 5* *C) 7* *D) 8*

13 En casa tenemos un balde de *11* litros lleno de chicha; pero dado que este no tiene marca alguna empleamos dos jarras de *5* y *8* litros que, aunque no poseen divisiones, nos permiten obtener cualquier volumen de líquido sin desperdiciar. Indique cuántos transvases debería realizar, como mínimo, para obtener exactamente lo siguiente:

I) Un litro de chicha.

II) Dos litros de chicha.

III) Cuatro litros de chicha.

Dé como respuesta la suma de las tres cantidades obtenidas.

A) 10 *B) 11* *C) 12* *D) 13*

14 Se tiene un recipiente lleno con *7* litros de agua y dos jarras vacías de *5* y *3* litros de capacidad. Los tres recipientes no tienen marcas que permita hacer mediciones. Empleando solamente el recipiente y las dos jarras. ¿Cuántos traslados se deben realizar como mínimo para que el recipiente y la jarra de *3* litros contenga cada uno *1* litro de agua ?

A) 2 *B) 4* *C) 3* *D)6*

15 El dueño de una taberna quiere separar un litro de líquido que lleva un recipiente de *16* litros . Para hacerlo no tiene a su disposición más que el recipiente original y dos recipientes vacíos con capacidades de *11* y *6* litros. ¿Cuántos trasvases son necesarios, como mínimo, para obtener lo requerido sin perder ni una gota de líquido?.

Obs.: Todos los recipientes no presentan marcas.

A) 5 *B)7* *C) 4* *D)8*

16 Se tienen *3* baldes cuyas capacidades son ***15 L***, ***5L*** y ***6 L***. El balde de ***15 L*** se encuentra totalmente lleno de agua y los otros, vacíos. Si se desea tener exactamente en uno de los recipientes ***2 L***, ¿cuántos trasvases se deben realizar, como mínimo? . Considere que no se desperdicia el agua y que los baldes no tienen marcas.

A) 5 *B) 3* *C) 6*
D) 4 *E) 7*

17 Se tienen tres baldes sin marcas cuyas capacidades son ***12 L***; ***5 L*** y ***6 L***. El balde de ***12 L*** se encuentra totalmente lleno de agua y los otros vacíos. Si se desea tener exactamente en uno de los recipientes ***2 L***, ¿cuántos trasvases se deben realizar como mínimo? Considere que no se desperdicia el agua.

A) 5 *B) 3* *C) 6*
D) 4 *E) 7*

18 El señor Juan acaba de llenar un recipiente de ***16L*** que no está graduado, con la producción de leche de una de sus vacas. Con dicha cantidad de leche entregará un pedido de ***4 L*** en el domicilio de la señora Norma y el pedido de ***4 L*** de la señora Diana, quien se ha acercado con su recipiente de ***5 L*** de capacidad, el cual no tiene marcas. Si el señor Juan solo tiene un recipiente de ***5 L*** y otro de ***3 L***, ambos sin graduar, para cumplir con ambos pedidos, ¿cuántos trasvases tendrá que realizar, como mínimo?

A) 7 *B) 12* *C) 10*
D) 9 *E) 13*

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	C	C	C	B	A	C	B	B	D
11	12	13	14	15	16	17	18		
B	A	D	B	C	C	B	A		

SITUACIONES CON DADOS y DOMINOS

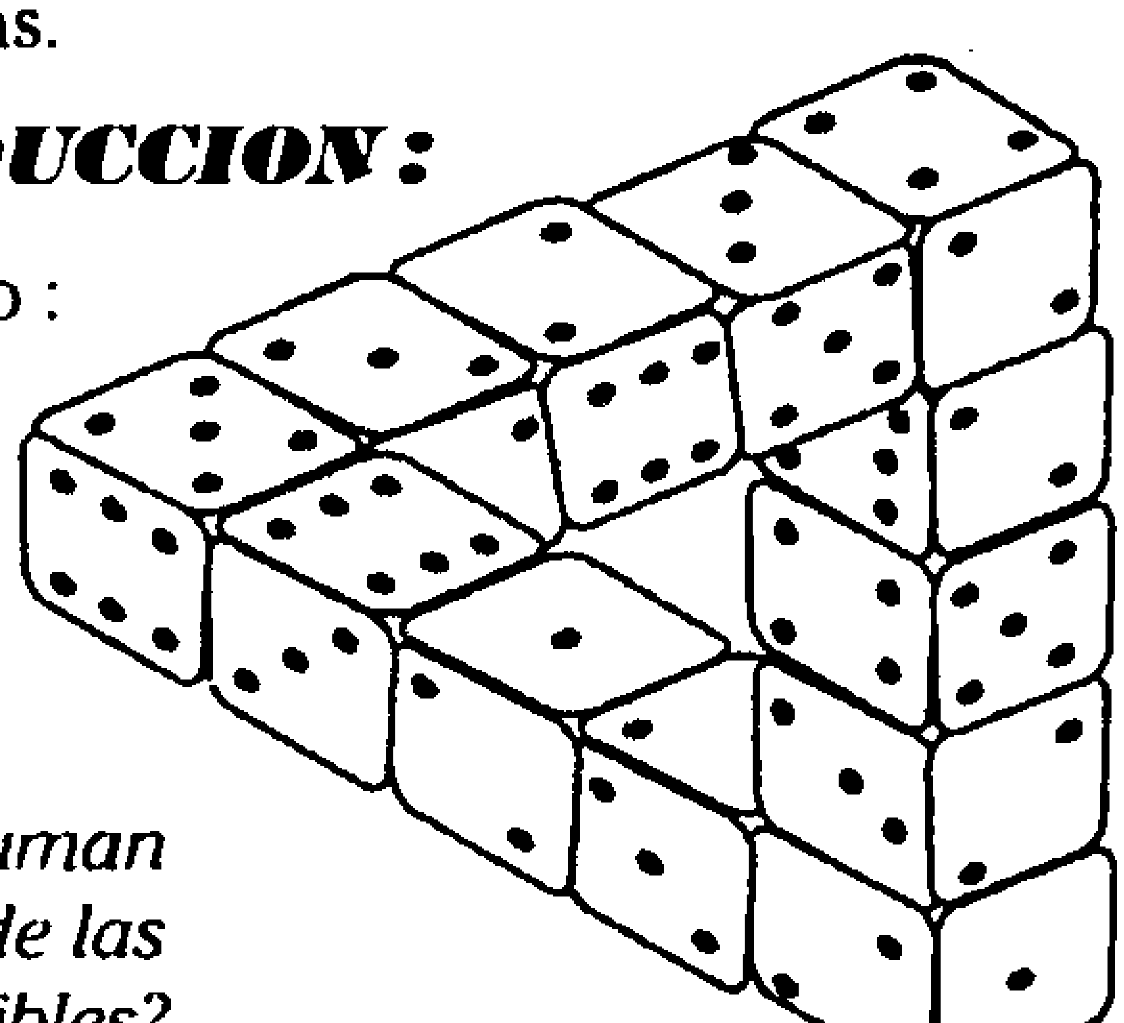
05

OBJETIVOS :

* Desarrollar diferentes formas de pensamiento.
* Explorar aquellos campos de la matemática que no suelen ser vistos con frecuencia .
* Fomentar la creatividad .
* Presentar algunos problemas o tópicos que se han ido tratando a lo largo de las historia de las matemáticas.

INTRODUCCION :

En el gráfico :



¿ Cuánto suman los puntos de las caras no visibles?

En ***1125 d.C.*** Sir William de Tyre era el líder de los Cruzados que llegaron a un castillo llamado Asart o Hazarth. Sir William de Tyre y sus caballeros hicieron cerco al castillo, que dio su nombre a su pasatiempo favorito, un juego de azar. Aún hoy, la palabra inglesa "***hazard***" significa riesgo, oportunidad.

Algunos expertos creen que el Juego de Azar proviene de un juego árabe llamado "***al zar***", que significa «***dados***» en árabe, y tal vez el juego haya migrado para la Europa Antigua con la ayuda de comerciantes aún antes del siglo ***XII***.

Hay pruebas de la existencia de los ***Dados*** en Egipto que datan de ***2600 a.C.***, lo que puede probar que el juego de dados nació en el mundo árabe, teniendo un papel vital en la historia de los Dados. Sin embargo, los estudiosos no consiguen ligar estos hechos con los demás descubiertos en la historia de los Dados, por lo menos por ahora.

El Juego de Azar logró mucha popularidad en Inglaterra, y en el siglo ***XVII*** no había ni una sola taberna en el país donde no fuera conocido. El Juego de Azar fue practicado en casinos de lujo y muchos nobles lo apreciaban. Aún estábamos muy lejos de la democratización de los casinos en línea.

Los franceses trajeron el Juego de Azar de sus vecinos, pero le alteraron el nombre para que se diferenciara del de los ingleses. Los franceses le llamaron «***crabes***», que es una corrupción de "***crabs***".

Esa palabra describe una situación de pérdida en el Juego de Azar, en la cual un jugador saca un ***2***. Aunque no haya pruebas que confirmen esa teoría, cuando las personas hablan de la historia de los Dados o Craps, esa suposición suele aparecer . Los expertos creen que el nombre "***craps***" nació en América como resultado de una corrupción del término "***crabs***".

El Juego de Azar llegó a América con la ayuda de los colonos franceses o ingleses (nadie sabe decir cuál fue el pueblo que trajo el juego para el Nuevo Mundo). Después, el juego se fue para el sur a lo largo de la costa y se volvió una actividad de ocio popular donde más adelante en la historia del póquer, John H. Winn se destacó

En el inicio del siglo ***XIX***, la historia de los Dados dio otra vuelta, pues John H. Winn simplificó el Craps e inventó el concepto moderno del juego (que fue inicialmente conocido como el «dibujo de Filadelfia»). Según John Scarne, un famoso fabricante de dados, John H. Winn es el padre del juego de Dados modernos. Winn trajo a los juegos las apuestas «Pasar» y «No Pasar», el "Big ***6*** y ***8***" y es gracias a él que hoy los jugadores pueden apostar contra el "***shooter***". Básicamente, él inventó las reglas del juego de Dados o Craps, aún encontradas hoy , ya sea en casinos en vivo, o en casinos en línea.

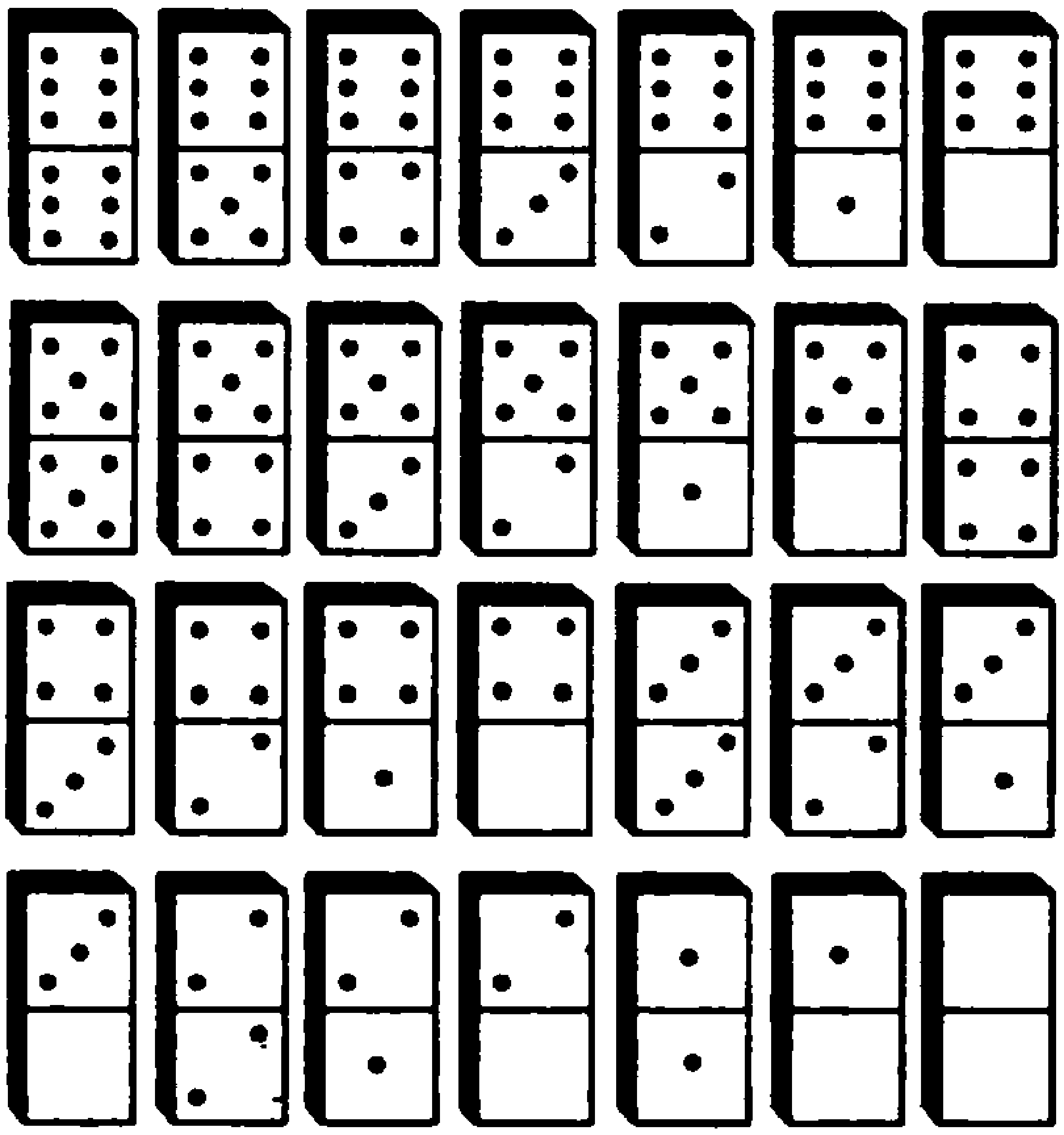
La nueva variedad de apuestas no sólo impidió el uso de dados viciados (debido que ahora los jugadores pueden apostar contra el "shooter") sino que elevó la popularidad del juego a otros niveles.

El juego de Dados se volvió mundialmente famoso durante los siglos ***XX*** y ***XXI***. En la Segunda Guerra Mundial, soldados de ambas partes jugaban Craps y los usaban para pasar el tiempo entre batallas. El juego viajó con los soldados americanos para partes distantes del mundo y hoy son pocos los locales en el planeta donde no se conoce el juego de Dados. Por otra parte, en muchas películas aparecen muchas imágenes del juego de Dados, lo que lo puso en la mente del público automáticamente.

DOMINÓ

El dominó es un juego de mesa en el que se emplean unas fichas rectangulares, divididas en dos cuadrados, cada uno de los cuales lleva marcados de uno a seis puntos, o no lleva ninguno. El juego clásico completo de fichas de dominó consta de *28* piezas.

El juego del dominó ha estado siempre presente en la sociedad moderna. ¿Quién no ha visto en cualquier lugar partidas de este juego alguna vez? Y ¿quién no se ha detenido algunos minutos a observar este interesante juego?

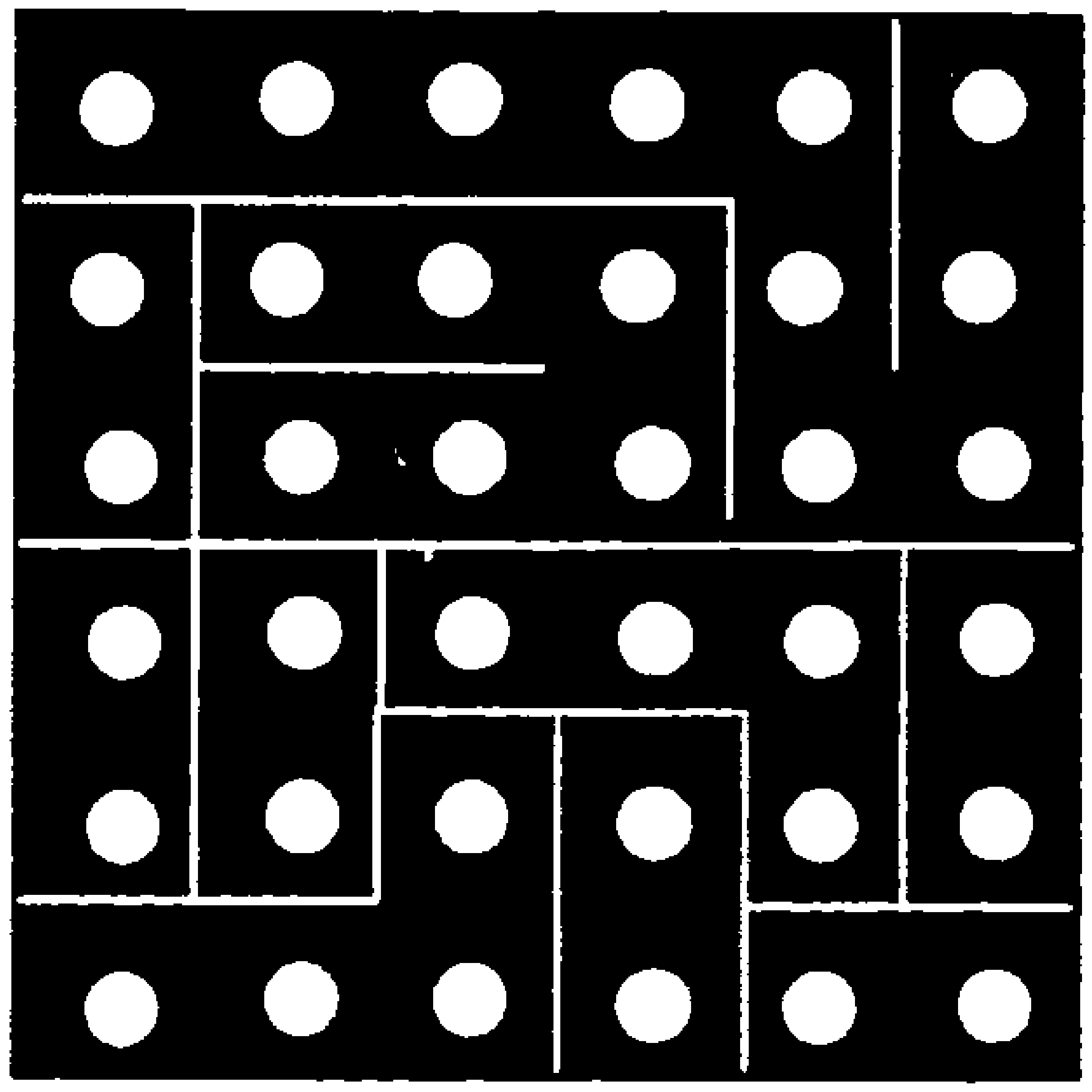


Un juego completo de fichas de dominó

Y no es por el simple hecho de ser una forma entretenida de cubrir el tiempo libre, sino que este juego es formativo, no pasivo, intelectual y muy participativo; además, a muchos jugadores les agrada mover las fichas, levantarlas y esperar una buena jugada, con lo cual se demuestra mucha paciencia.

Ahora le mostraremos una actividad relacionada con el dominó. Estamos seguros de que podrá salir airoso.

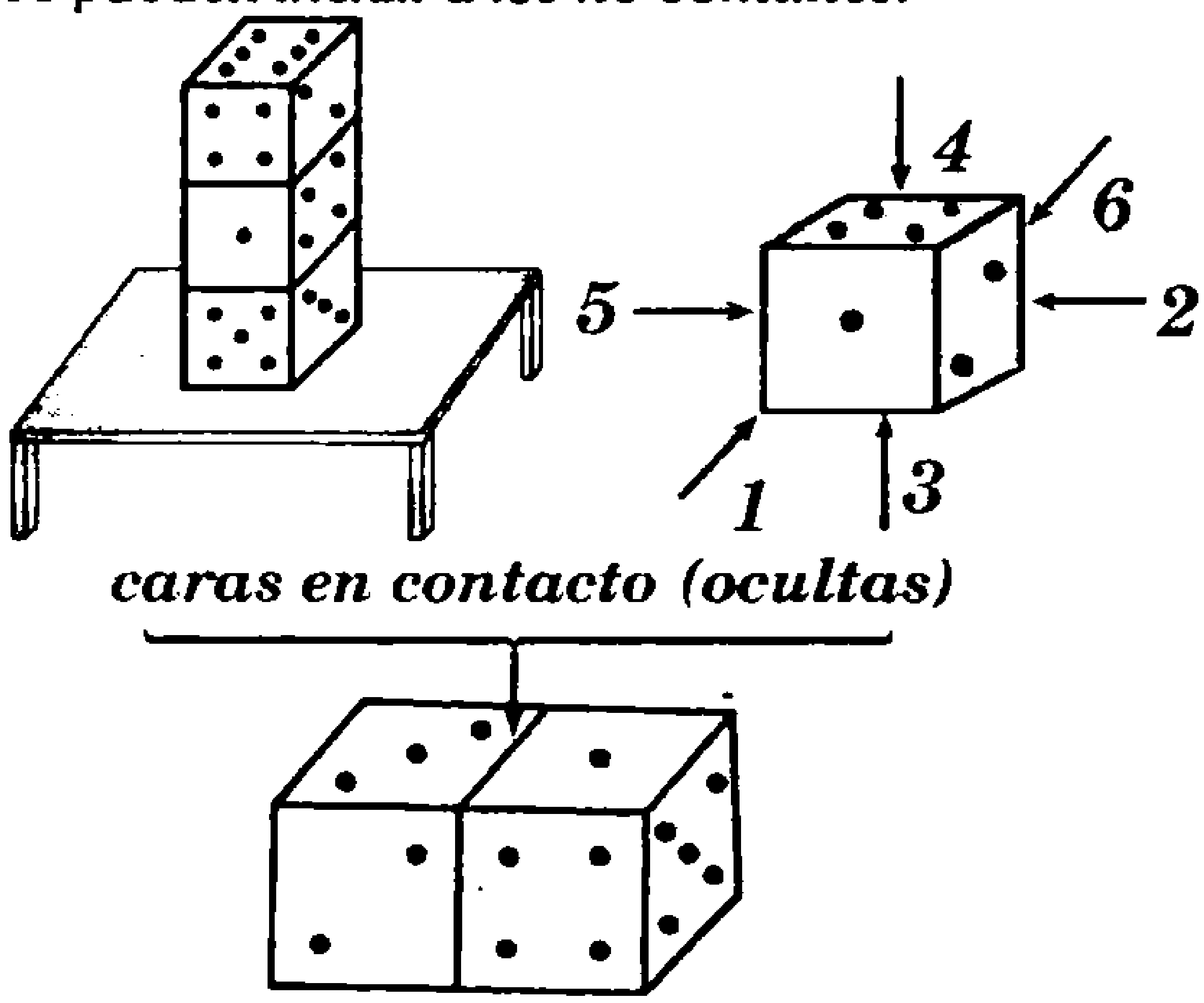
El gráfico muestra un arreglo cuadrado conformado por *18* fichas de dominó. Sombree un punto de cada ficha de dominó de manera tal que la cantidad de puntos no sombreados sea igual en cada fila y columna.



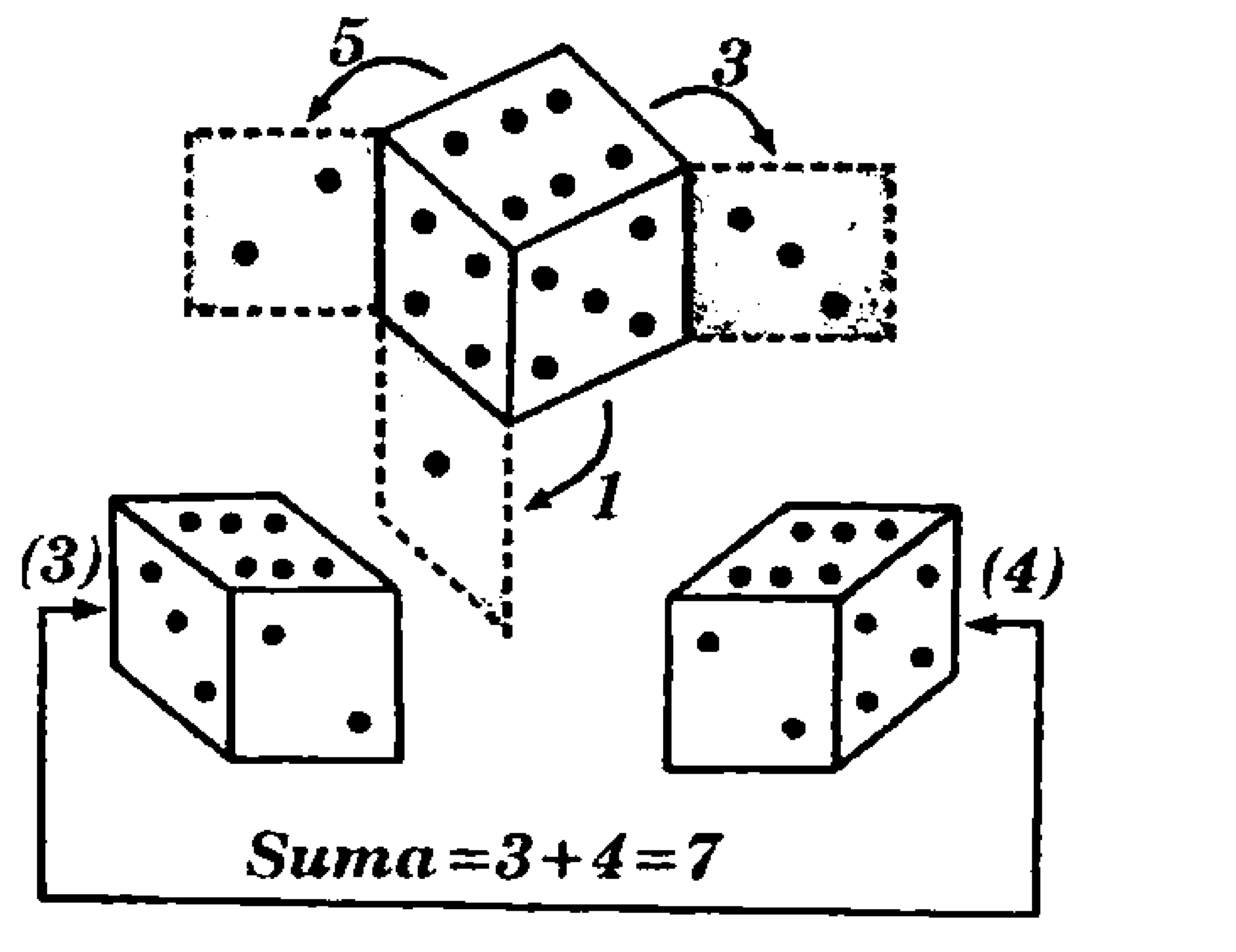
Arreglo formado con *18* fichas de dominó.

SITUACIONES CON DADOS

En este tipo de problemas generalmente se debe calcular el total de puntos de las caras no visibles de un dado. En la mayoría de situaciones se considera a los ***dados comunes***, pero también se pueden incluir a los ***no comunes.***



EN TODO DADO COMÚN :



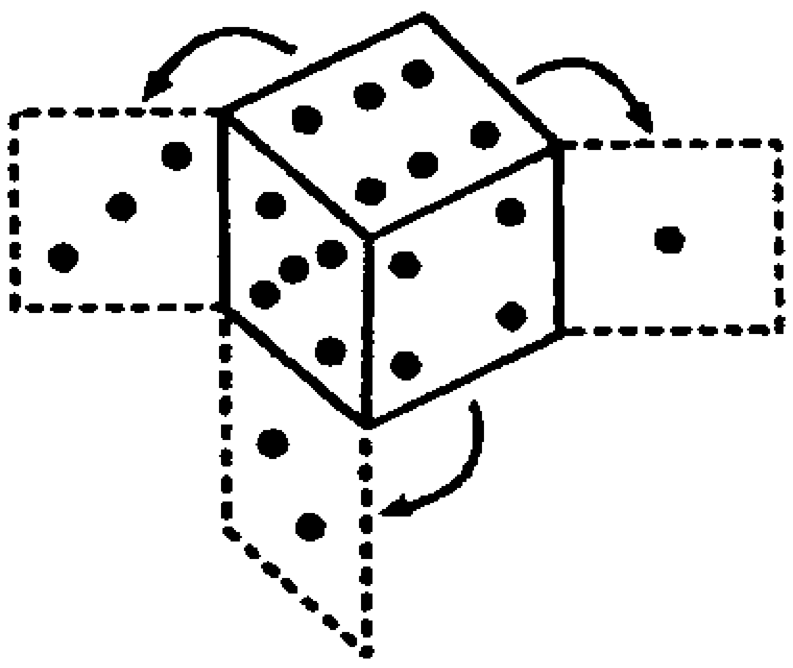
- Adelante tenemos **2** puntos, entonces atrás habrá $7-2=5$ puntos.
- En la cara inferior habrá $7-6=1$ punto.

CONCLUSIÓN :

* El total de puntos en dos caras opuestas es **7**.
* El total de puntos en una dado común es **21**.

$$1+2+3+4+5+6=21$$

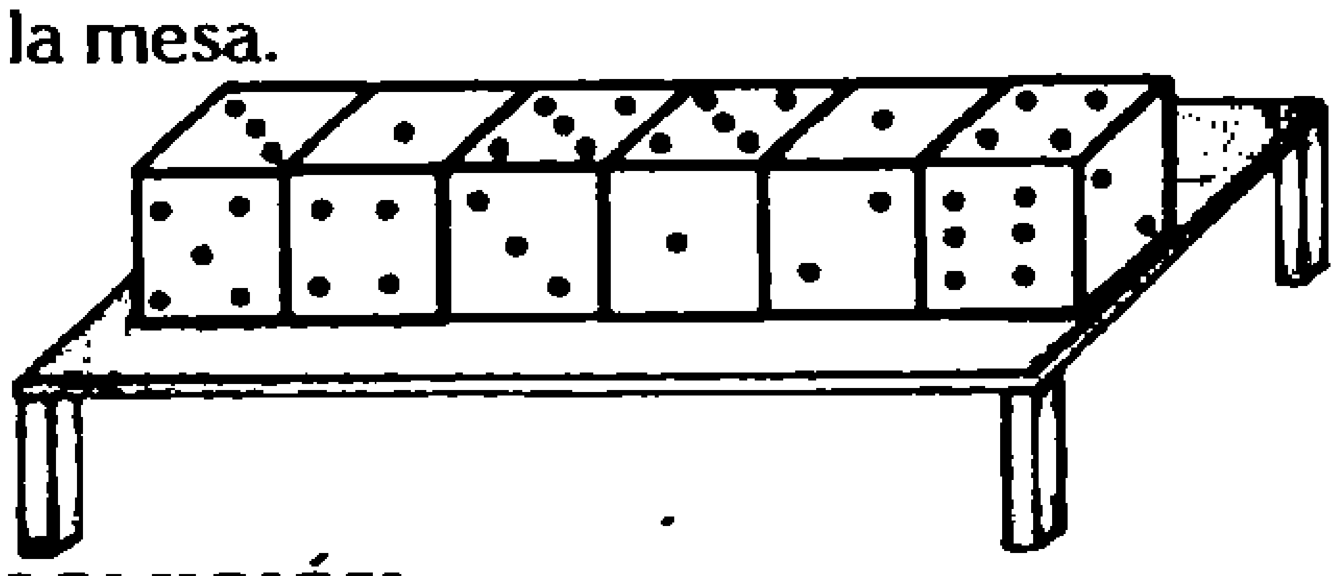
DADO NO COMÚN :



* El total de puntos en dos caras opuestas ***no debe ser siete***, necesariamente.

EJEMPLO 1 :

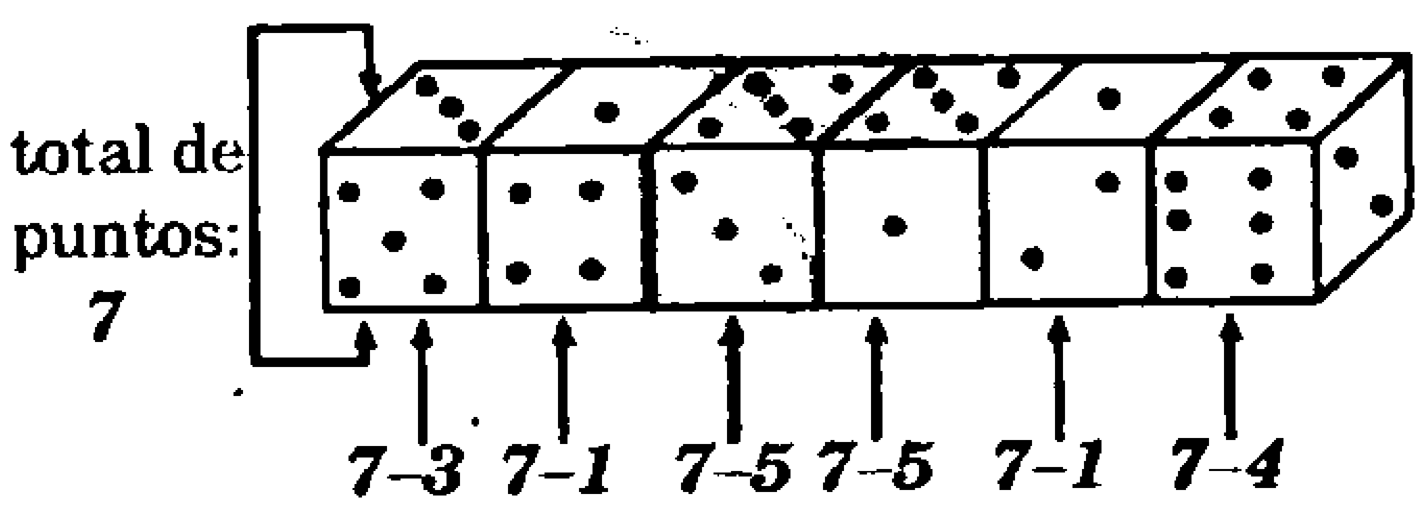
En el gráfico se muestran **6** dados comunes, calcule el total de puntos de las caras en contacto con la mesa.



RESOLUCIÓN :

Como se trata de dados comunes, el total de puntos en caras opuestas es siete, entonces, calcularemos lo pedido del siguiente modo:

En el gráfico se observa que:



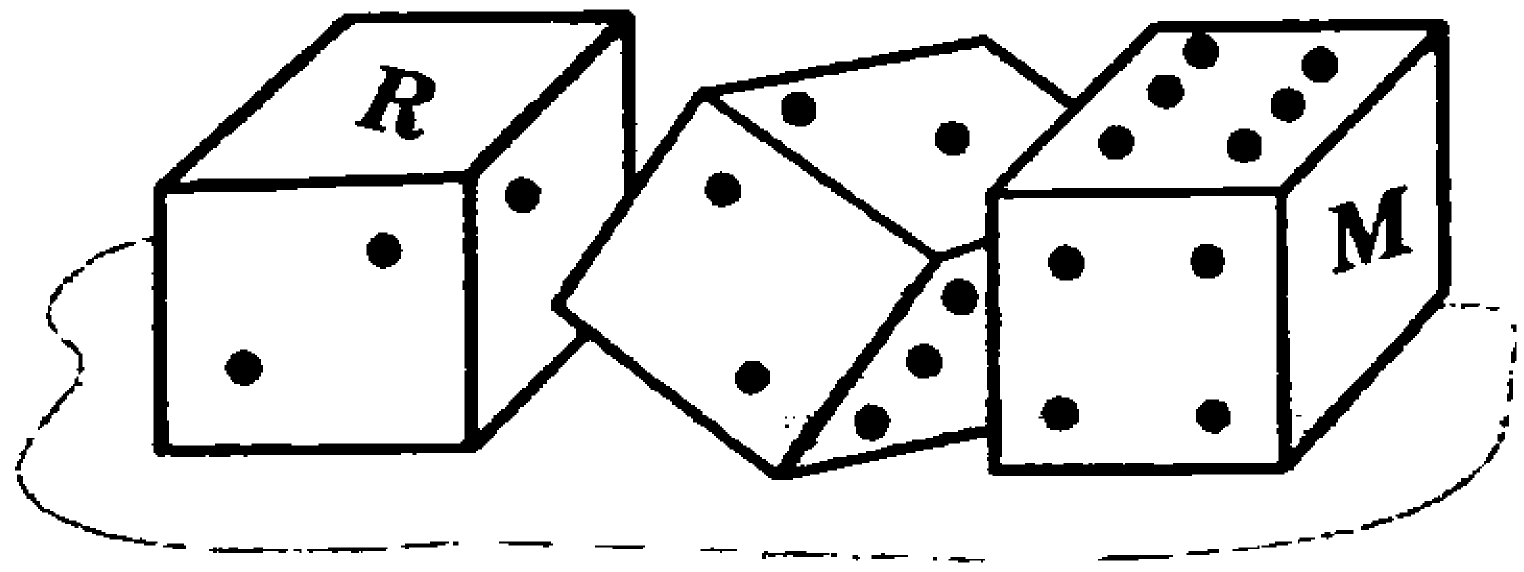
Entonces, el total de puntos de las caras en contacto con la mesa lo hallamos así:

$$\underbrace{7\times6}_{\text{total de puntos en caras opuestas}}-\underbrace{(3+1+5+5+1+4)}_{\text{total de puntos en caras visibles}}=23$$

total de dos caras opuestas → 7; (dados) → 6

EJEMPLO 2 :

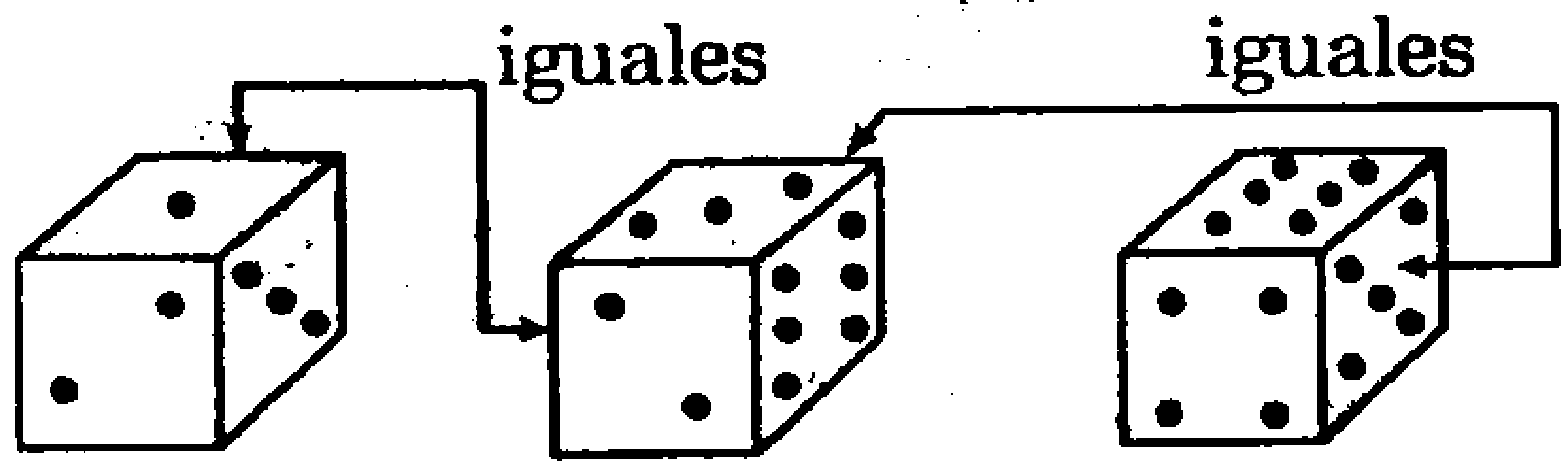
En el siguiente gráfico se observan **3** dados comunes e iguales.



Determine la cantidad de puntos que hay en cada una de las caras *R* y *M* y de como respuesta *R – M*.

RESOLUCIÓN :

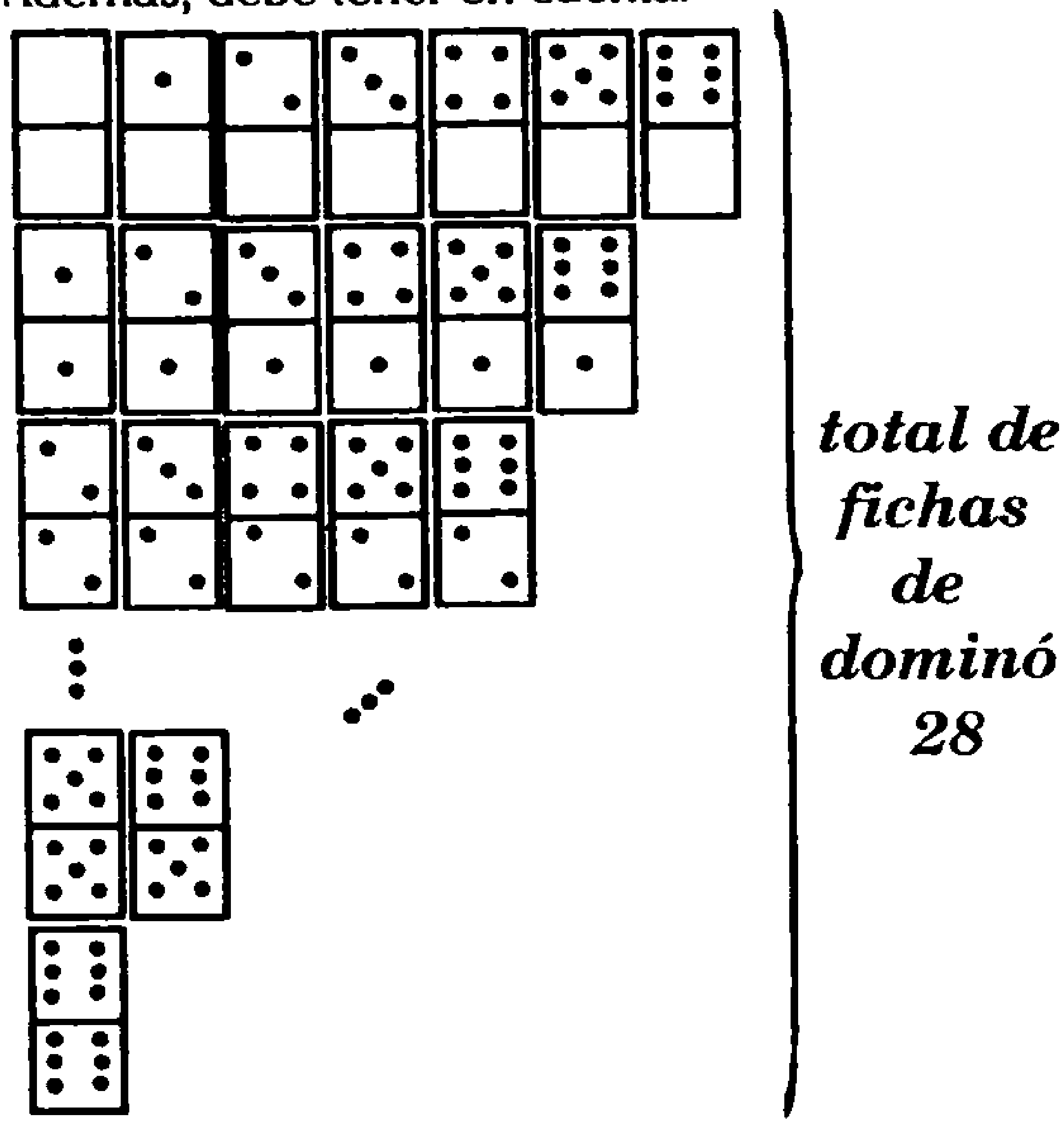
Los dados comunes e iguales son aquellos cuya cantidad de puntos en dos caras opuestas es 7 y la forma de distribuirlas es la misma:



$\Rightarrow R-M=1-5=-4$

CON LAS FICHAS DE UN DOMINÓ

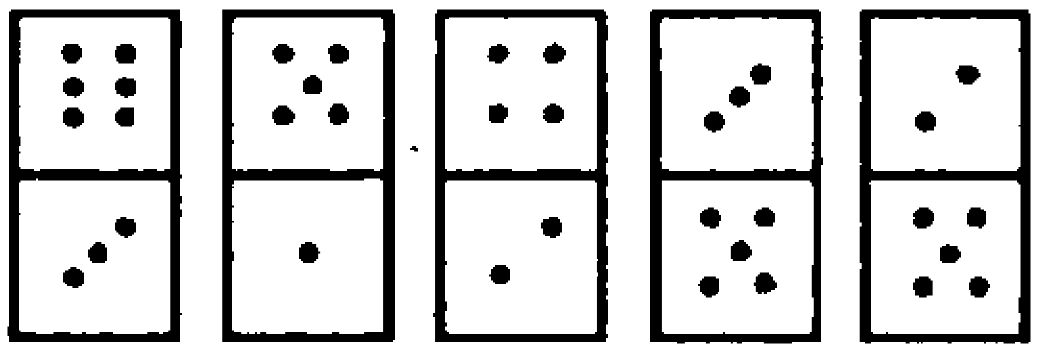
Generalmente en las preguntas de la *UNMSM* se pide invertir fichas con la finalidad de obtener una relación entre la suma de puntos de la parte superior y la suma de puntos de la parte inferior. Además, debe tener en cuenta.



EJEMPLO :

¿Cuál de las cinco fichas mostradas debe ser invertida para que la suma de los puntos de las fichas sea igual a la suma de los puntos de las partes inferiores?

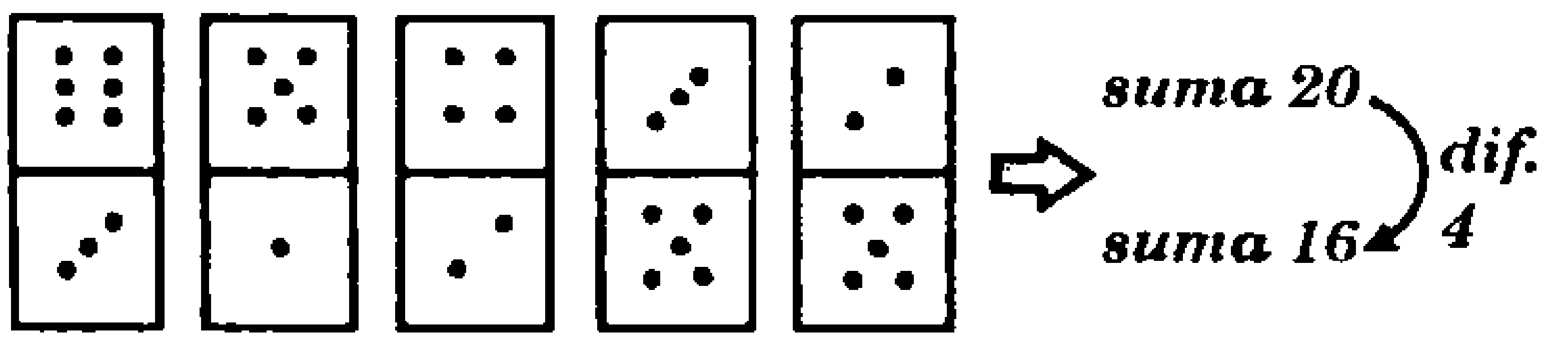
A)Ficha 2
B)Ficha 5
C)Ficha 4
D)Ficha 3
E)Ficha 1



Ficha 1 Ficha 2 Ficha 3 Ficha 4 Ficha 5

RESOLUCION :

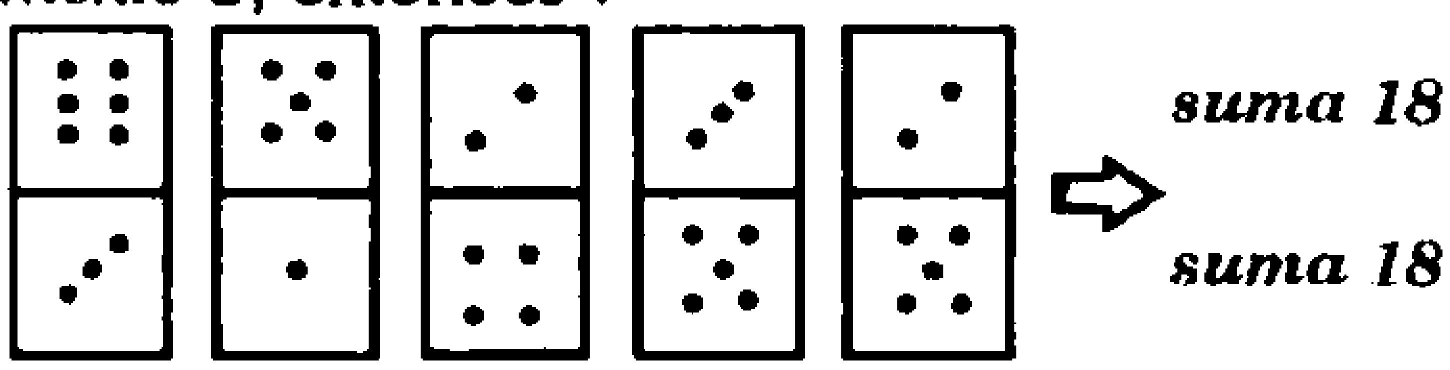
*Del ordenamiento inicial de las fichas, se tiene :



Ficha 1 Ficha 2 Ficha 3 Ficha 4 Ficha 5

* Para que ambas filas resulten con igual suma, se debe intercambiar una ficha tal que:

* *La primera fila disminuya 2 y la segunda fila aumente 2*, entonces :



Ficha 1 Ficha 2 Ficha 3 Ficha 4 Ficha 5

* Entonces , se debe invertir la ficha *3*.

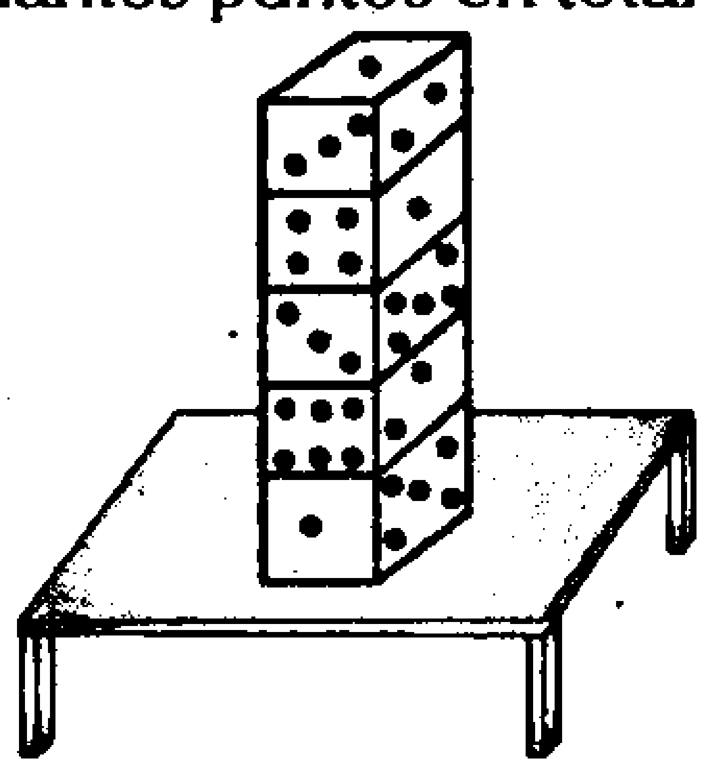
RPTA : «D»

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Sobre la mesa hay *5* dados comunes , uno encima de otro. El pequeño hijo de Rubiños da vueltas alrededor de la mesa y quiere averiguar, sin tocar los dados, ¿cuántos puntos en total han quedado ocultos?

A) 34
B) 36
C) 38
D) 30
E) 32



RESOLUCIÓN :

Se pide el total de puntos que han quedado ocultos.

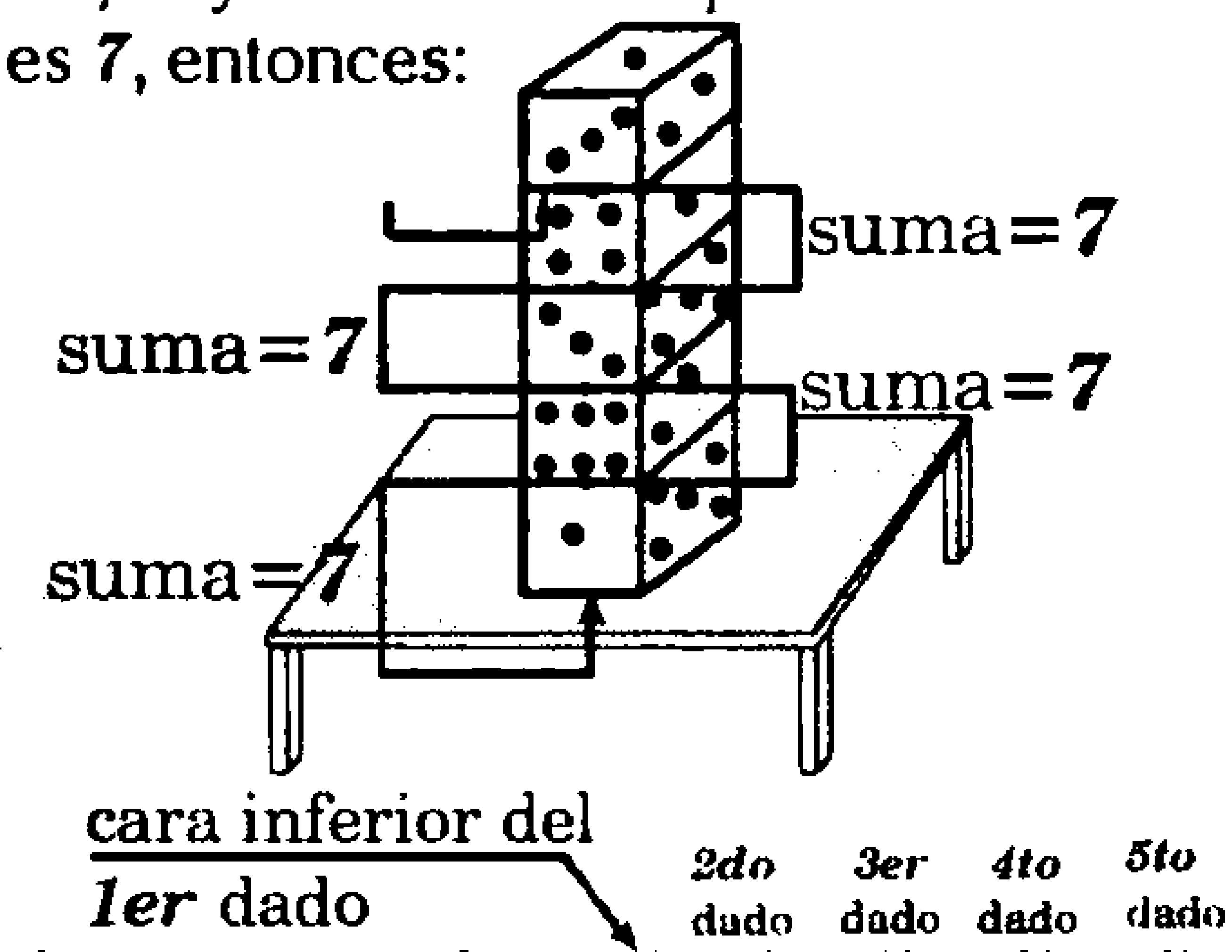
Datos:

* Son *5* dados comunes.

* El pequeño hijo de Rubiños da vueltas alrededor de la mesa.

De las condiciones del problema, se deduce que los puntos ocultos son todos aquellos comprendidos en dos caras en contacto, incluyendo la que está en contacto con la mesa.

En el gráfico, a partir del segundo dado, comenzando de arriba, se observa que las caras en contacto con otras o con la mesa, son caras opuestas, cuya cantidad de puntos entre ambas caras es *7*, entonces:



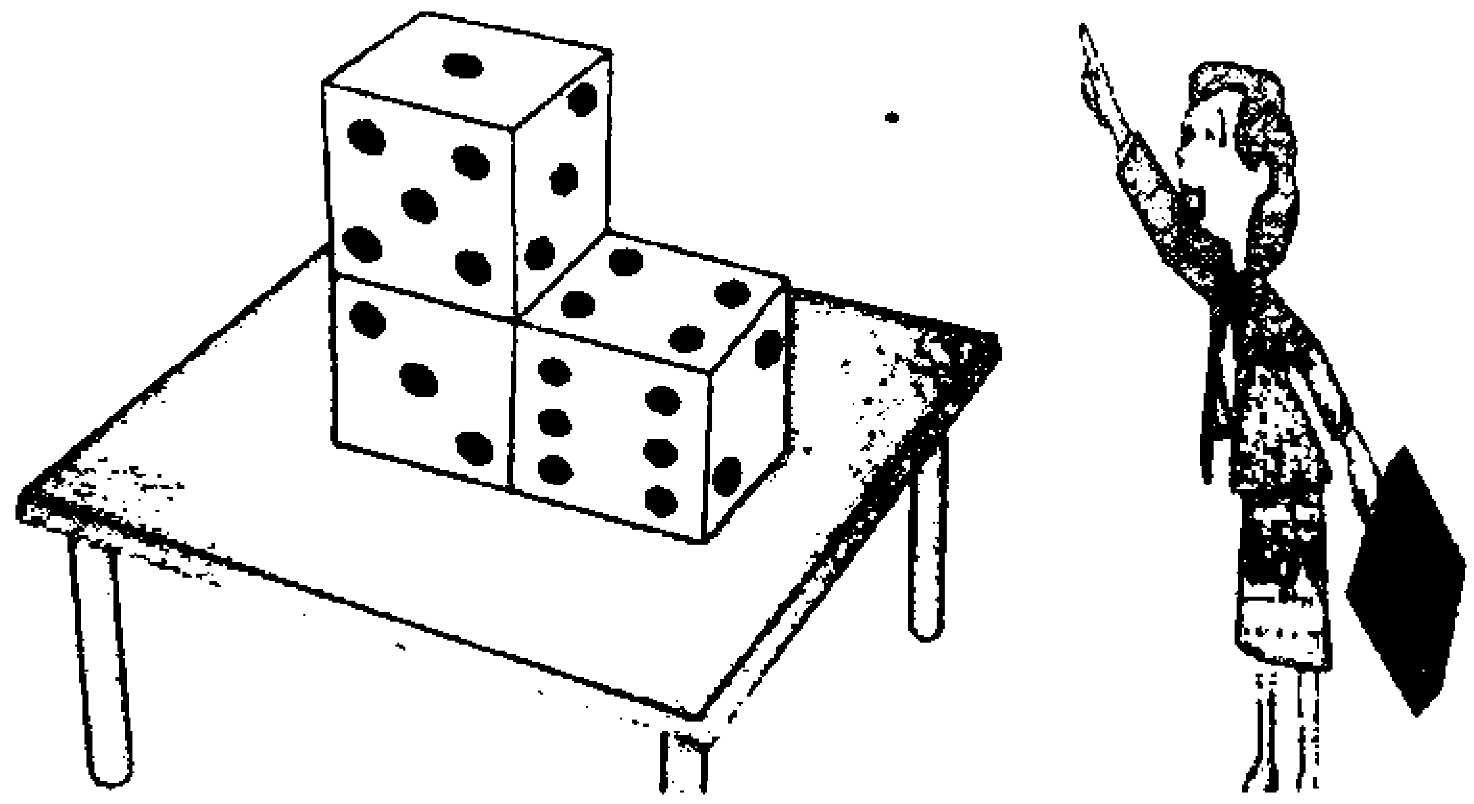
Total de puntos ocultos=*6*+*7* + *7* + *7* + *7*

⇒ Total de puntos ocultos es *34*.

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

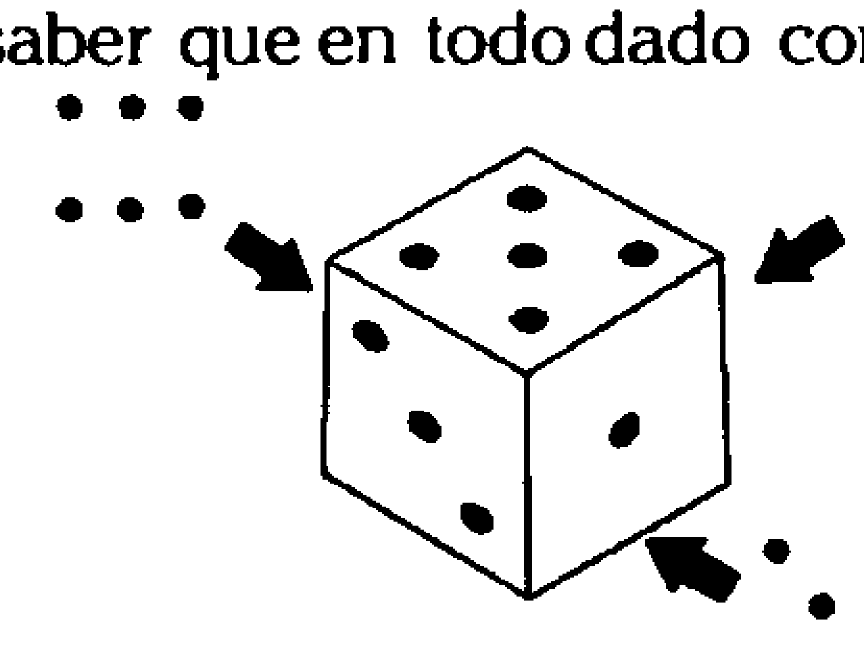
Se observan *3* dados comunes ubicado sobre una mesa; según el gráfico, ¿cuál es la suma de todos los puntos ubicados en las caras no visibles?



A) 37 *B) 39* *C) 17* *D) 16* *E)21*

RESOLUCIÓN :

Debemos saber que en todo dado común , ocurre que :



« La suma de los puntos ubicados en caras opuestas resulta siete»

* Para calcular la suma de los puntos ubicados en las caras no visibles, utilizamos los puntos ubicados en las caras visibles de la siguiente manera :

$$S_{\left(\substack{caras\ no \\ visibles}\right)} = S_{\left(\substack{total\ en \\ los\ 3\ dados}\right)} - S_{\left(\substack{caras \\ visibles}\right)}$$

$$= \overline{3(21)} - \overline{(1+3+5+3+4+2+6)}$$

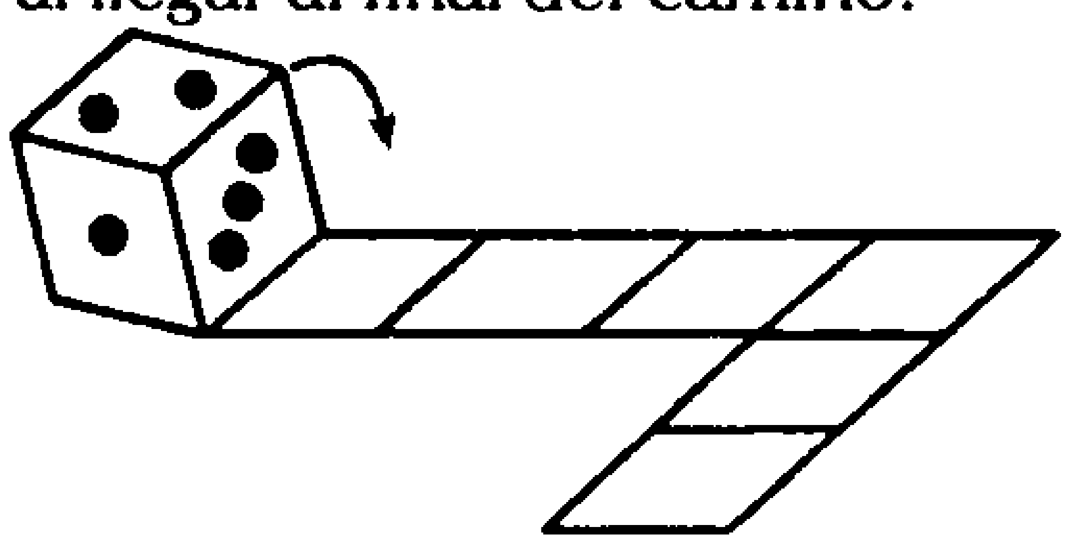
Por lo tanto, $S_{\left(\substack{caras\ no \\ visibles}\right)} = 39$

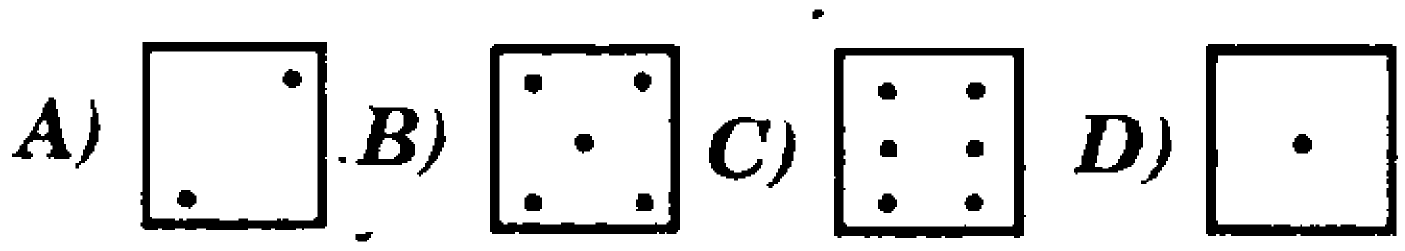
De donde : $S_{\substack{total\ de \\ puntos}} = 3(7) = 21$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3 :

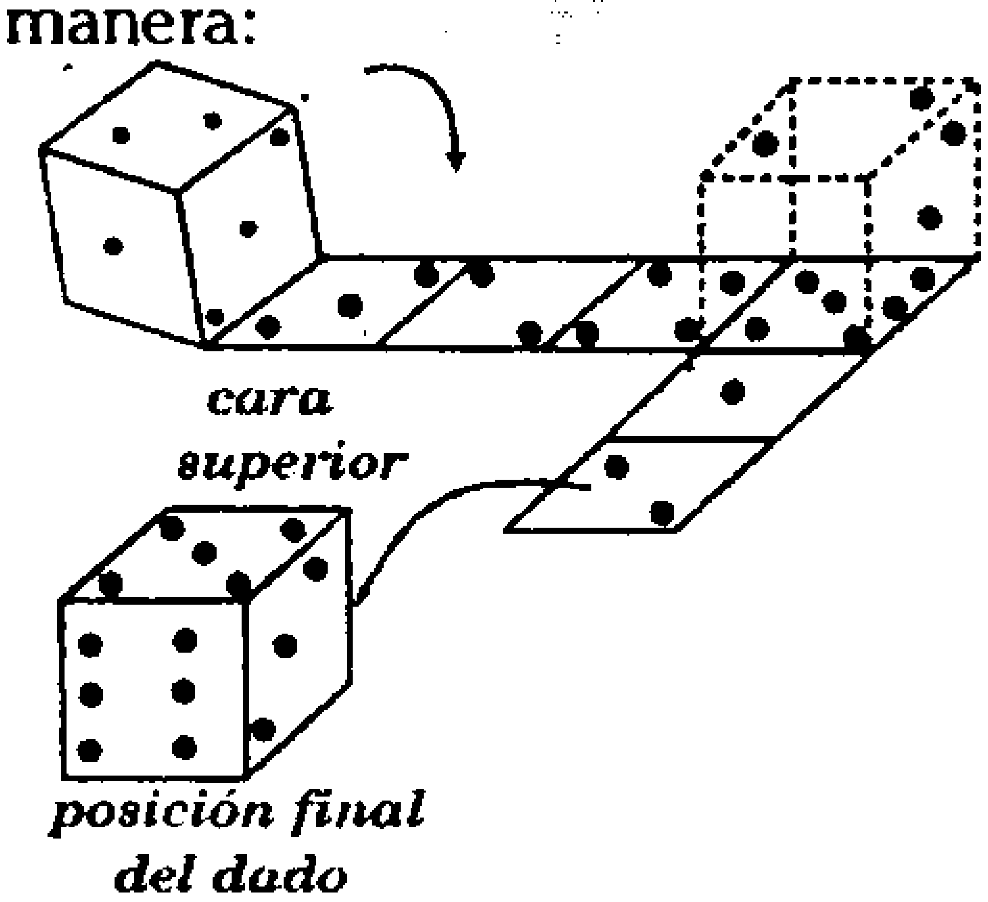
Un dado común se encuentra en un extremo de un camino formado por casillas cuyo tamaño es igual a las caras del lado. Si el dado comienza a rotar en el sentido que indica la flecha sobre dicho camino, coincidiendo cada cara con una casilla, ¿qué puntuación mostrará la cara superior del dado al llegar al final del camino?





RESOLUCIÓN :

Recordemos que en todo dado común, la suma de los puntajes de dos caras opuestas es *7*. De tal manera que, si en una casilla del camino se encuentra apoyada una cara con puntuación *3* (cara inferior), en la cara superior se tendrá *4*. Según lo anterior, el desplazamiento del dado será de la siguiente manera:

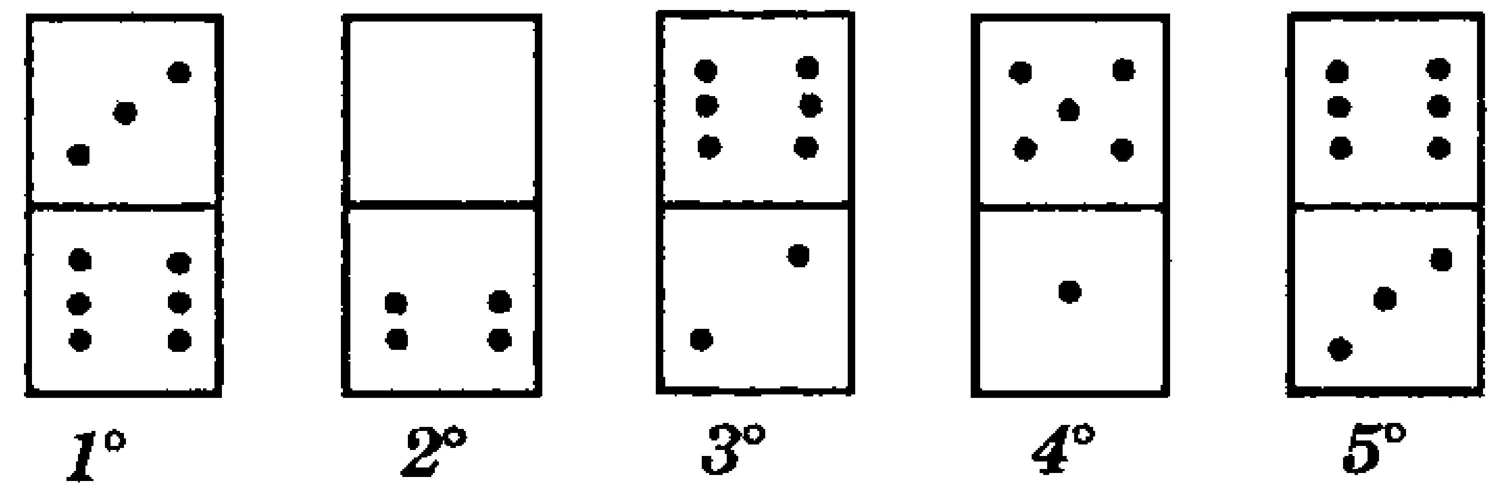


Por lo tanto, la puntuación en la cara superior en la posición final es *5*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

La figura muestra *5* fichas de dominó. ¿Cuáles deben ser invertidas para que la suma de los puntos de la parte superior sea el triple de la suma de los puntos de la parte inferior?

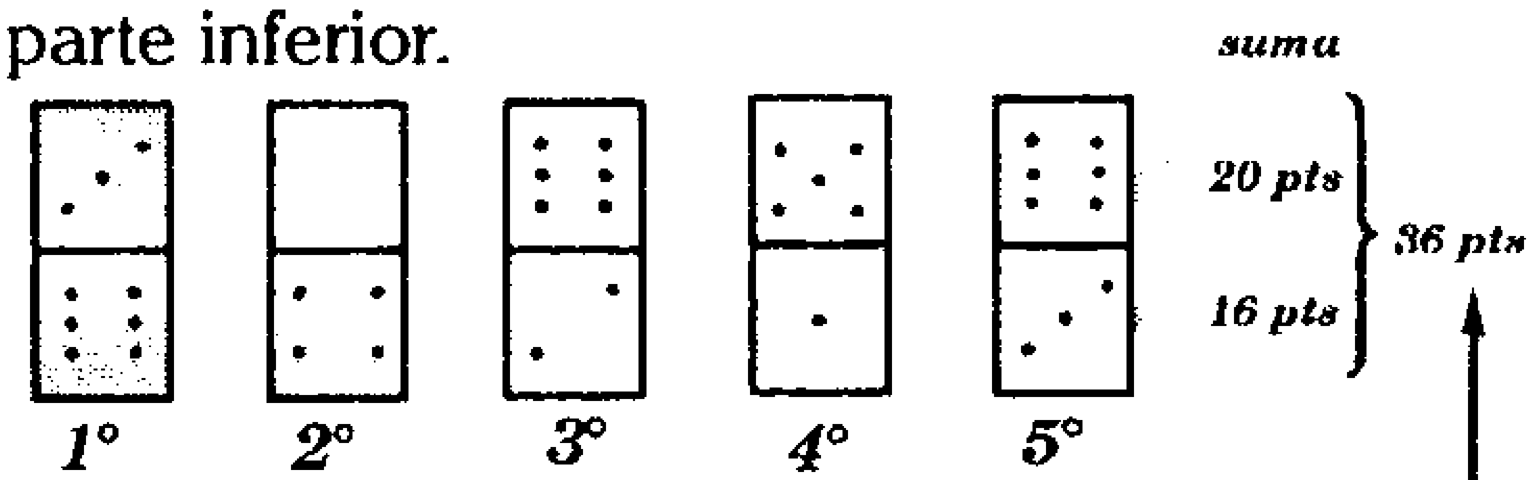


A) 1° y 2° *B) 1° y 3°* *C) 2° y 5°*

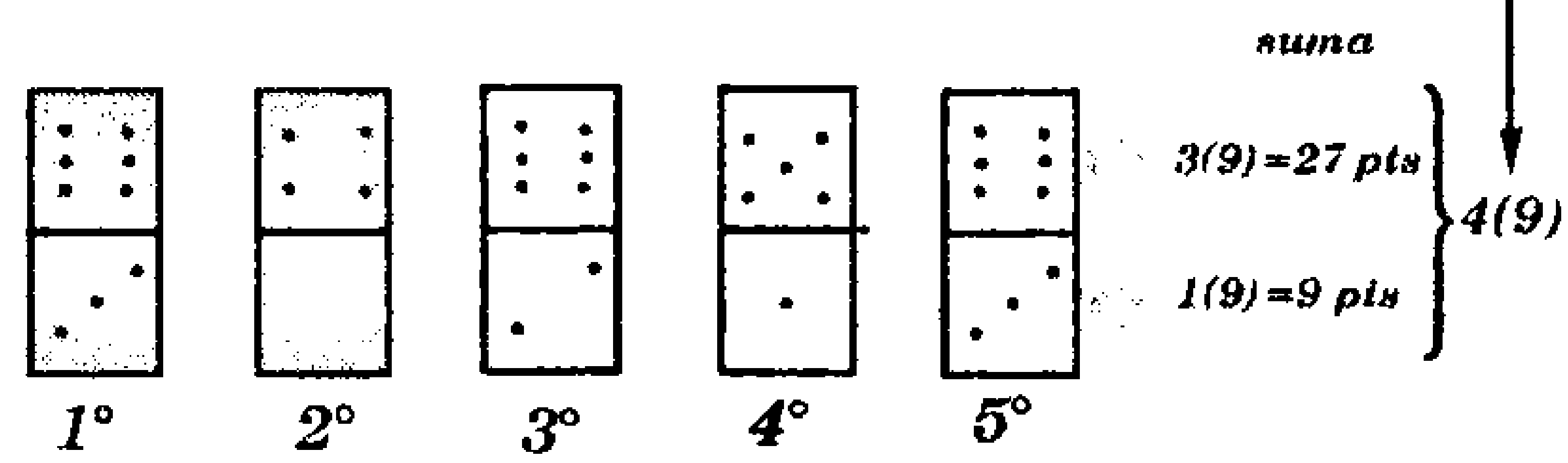
D) 2° y 4° E) 3° y 4°

RESOLUCIÓN :

En el gráfico, debemos invertir fichas para que la suma de los puntos ubicados en la parte superior sea el triple de la suma de los puntos ubicados en la parte inferior.



Al invertir las fichas, debe resultar :



Al analizar la suma inferior ***(16)***, concluimos que debemos reducirla en *7* puntos para obtener *9*. Por ello, al invertir la *1°* ficha restamos *3* puntos a la suma inferior y al invertir la *2°* ficha restamos *4* puntos a la suma inferior.

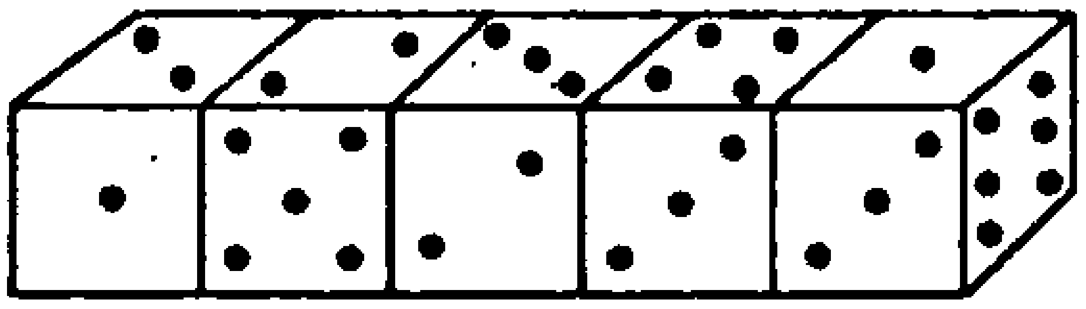
* Por lo tanto Debemos invertir la *1°* ficha y la *2°* ficha.

RPTA : «A»

PROBLEMA 5 :

Cinco dados idénticos se arreglan en una fila como se muestra en el gráfico. Los dados pueden no ser estándares, es decir, la cantidad total de puntos ubicados en sus caras opuestas podría no ser necesariamente *7*. ¿Cuál es la cantidad total de

puntos ubicados en las *8* caras en contacto de los dados mostrados?



A) 22 *B) 25* *C) 28* *D) 23* *E) 27*

RESOLUCIÓN :

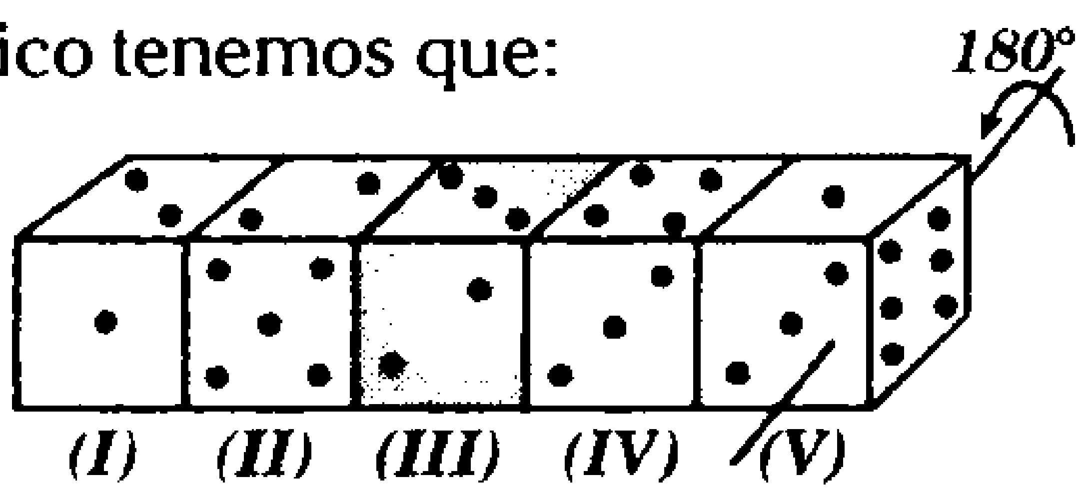
Se pide la cantidad total de puntos en las *8* caras en contacto.

Dato:

* Son dados idénticos, pero no necesariamente los dados son comunes.

Lo primero que haremos es identificar la cantidad de puntos que hay en cada una de las caras de un dado.

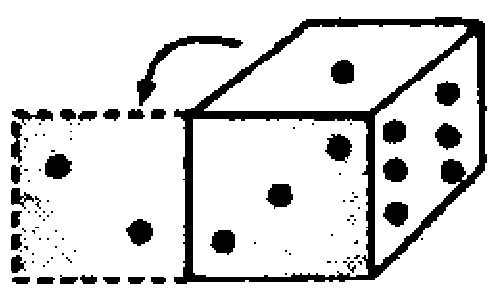
Del gráfico tenemos que:



1°) El dado *(V)* gira *180°* sobre el eje indicado y se obtiene el dado *(IV)*. Se deduce entonces que el *1* y *4* están en caras opuestas.

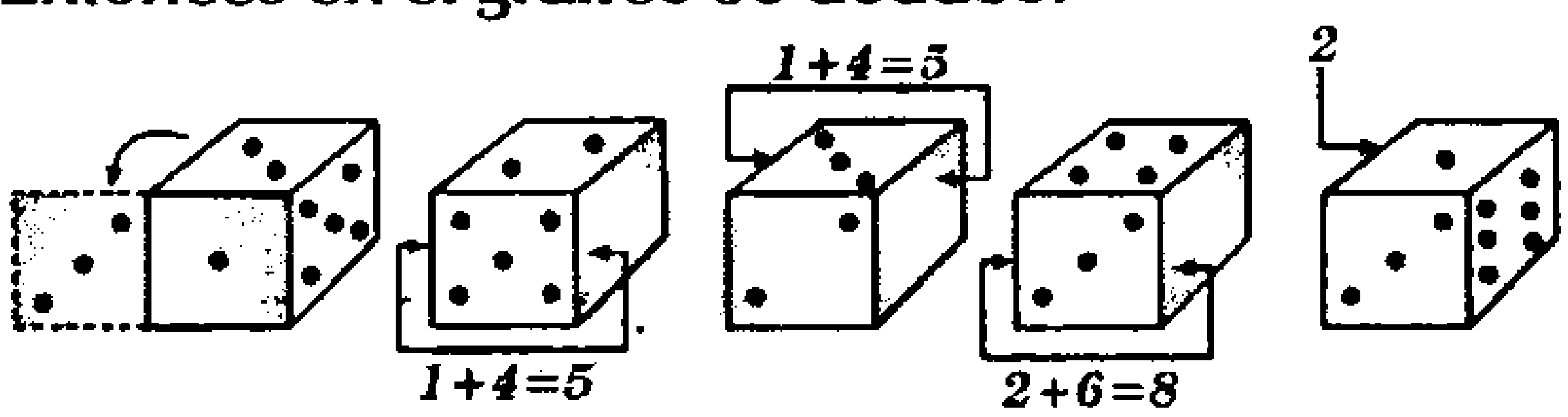
2°) En el dado *(V)*, nuevamente, si desplegamos la cara lateral izquierda, las dos caras sombreadas coinciden con las que se ven el dado *(III)*.

Entonces el *2* y *6* están en caras opuestas.



3°) Se deduce que el *3* y el *5* están en caras opuestas.

Entonces en el gráfico se deduce:



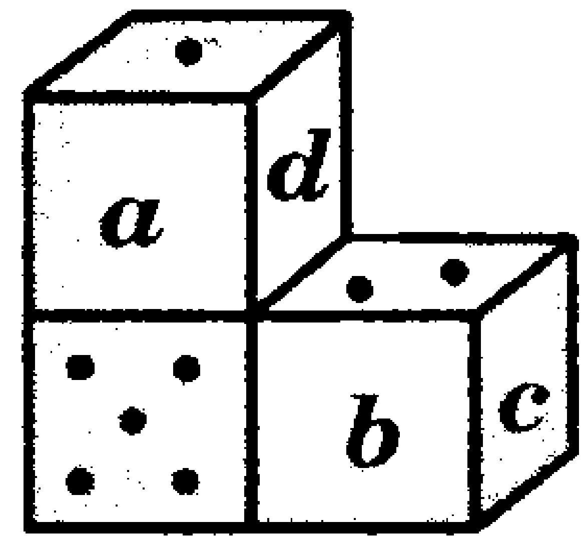
$\Rightarrow$Total de puntos en caras en contacto=

$5+\underbrace{5+5+8}_{\text{suma en caras opuestas}}+2=25$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

En los tres dados que se muestran, las caras en contacto tienen el mismo puntaje. Calcule la mayor suma de puntajes de las caras de *a, b* y *c*.



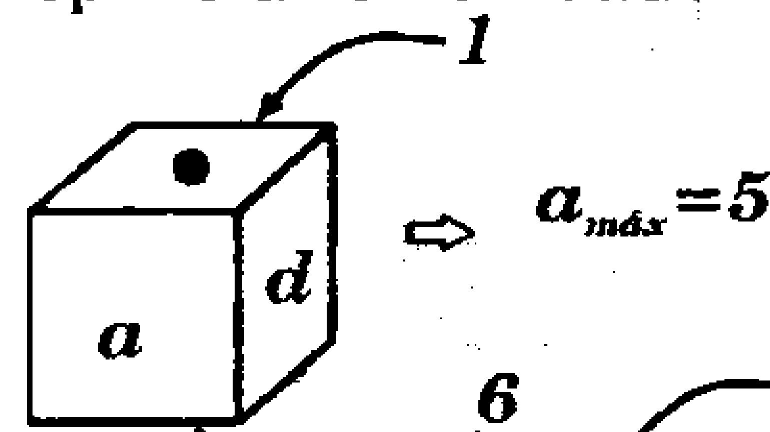
A) 10
B) 12
C) 13
D) 11
E) 15

RESOLUCIÓN :

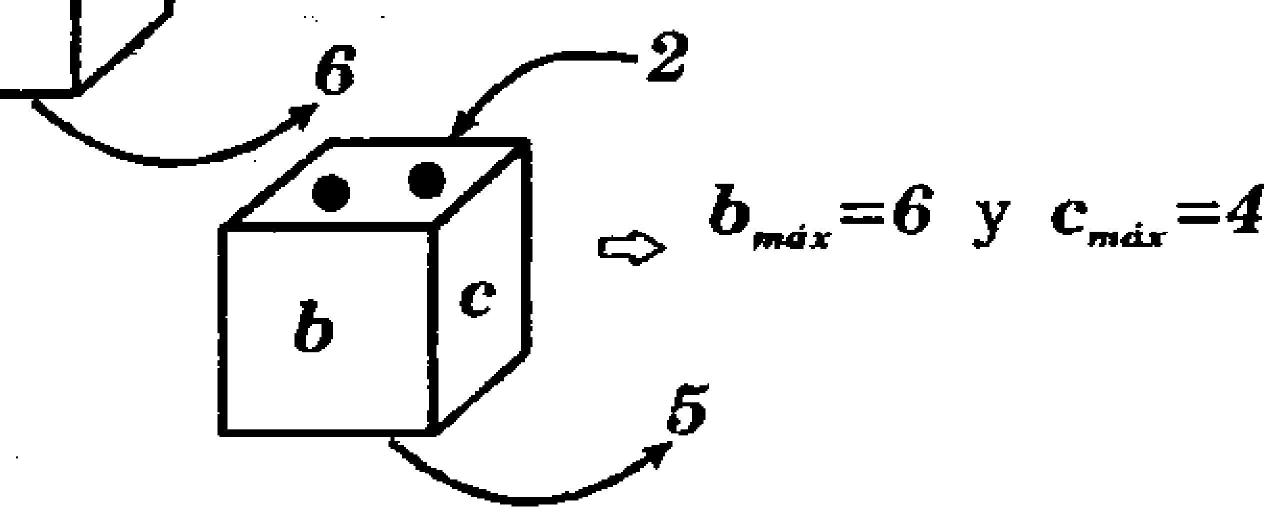
Recordar:

Caras opuestas en un dado suman: *7*

i) En:



ii) En:



$\Rightarrow$ Nos piden: $(a+b+c)_{máx}=5+6+4=15$

RPTA : "E"

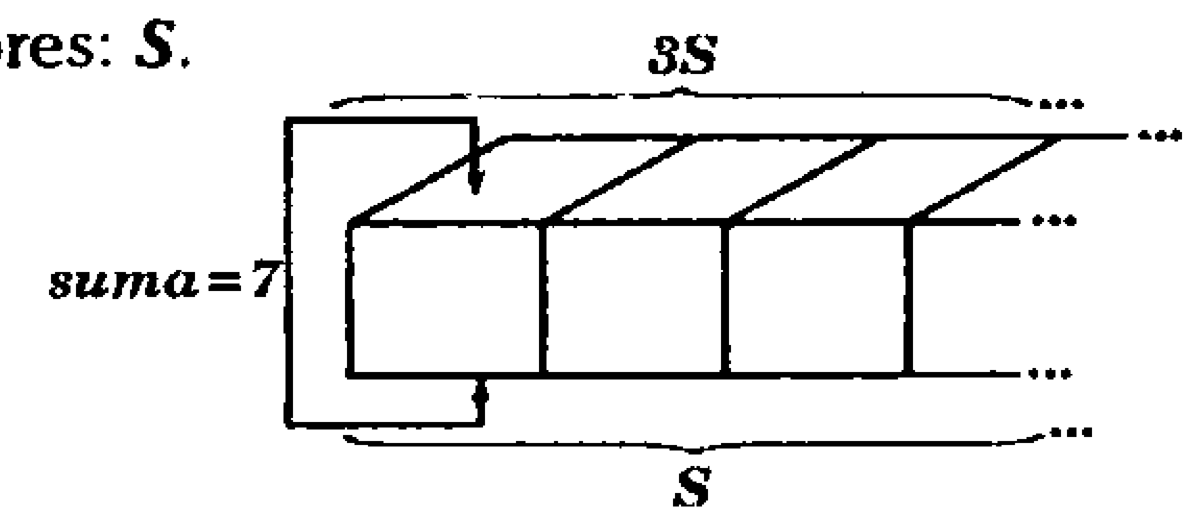
PROBLEMA 7 :

¿Cuántos dados, como mínimo, se deben colocar sobre la mesa para que la suma de los puntos de sus caras superiores sea el triple de la suma de los puntos de sus caras inferiores?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

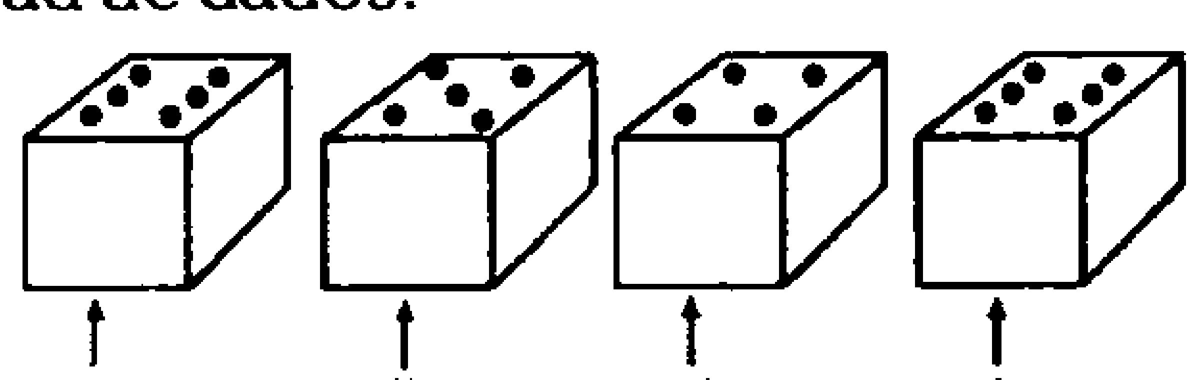
Se pide la cantidad mínima de dados para conseguir que la suma de puntos superiores sea el triple de los números inferiores. Sea la suma de puntos inferiores: *S*.



Pero, la suma en caras opuestas es *7*, entonces.

$$3S+S=7 \Rightarrow 4S=7 \Rightarrow S_{min}=7$$

Entonces realizamos la distribución en la menor cantidad de dados:

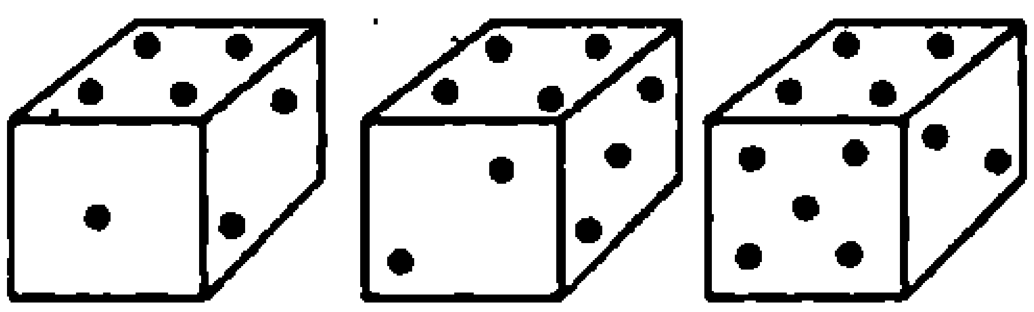


$\Rightarrow$ *4* dados son necesarios.

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

En el gráfico se muestra tres vistas de un mismo dado:



(I) (II) (III)

Indique la cantidad de puntos que se oponen al *4* y al *1*, respectivamente.

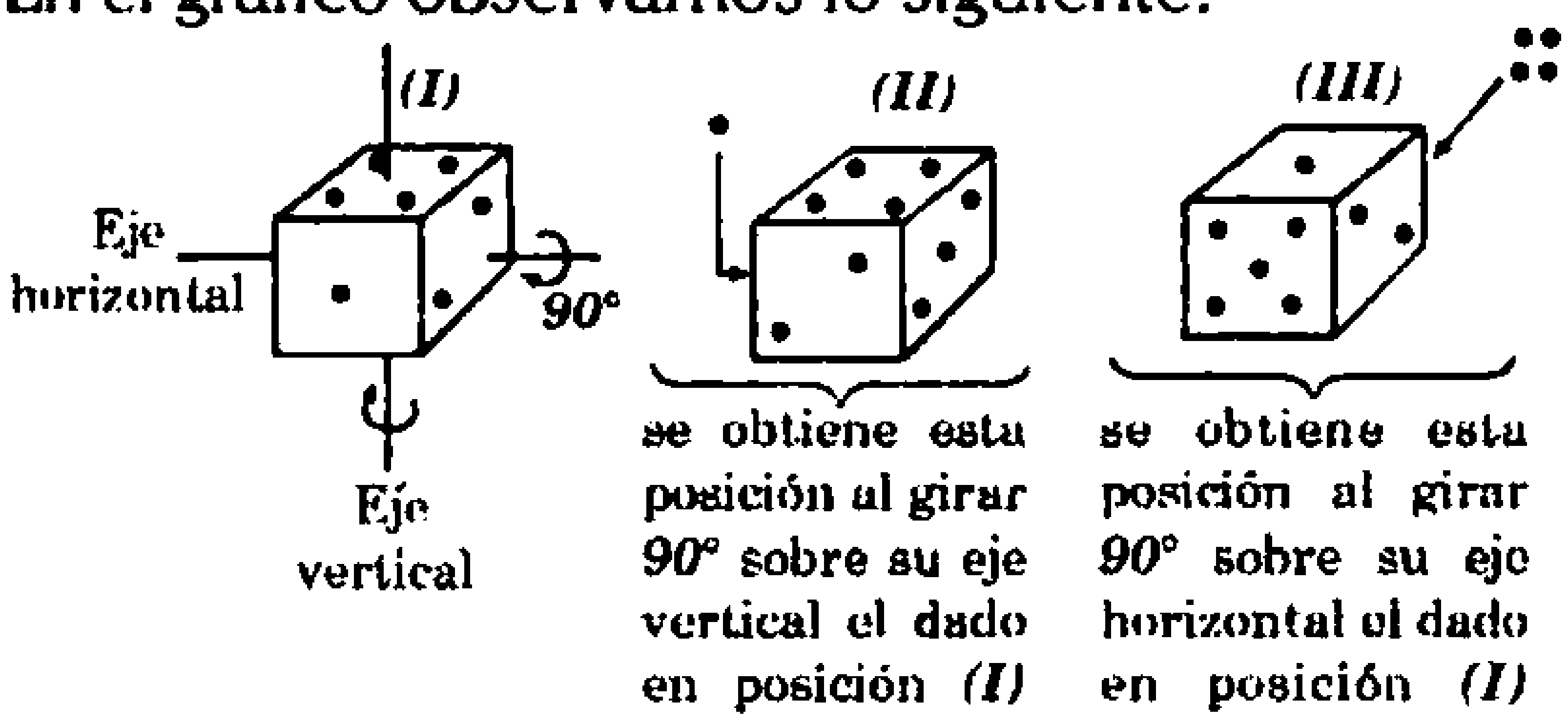
A) 3 y 6 *B) 3 y 5* *C) 6 y 3*
D) 5 y 3 *E) 5 y 6*

RESOLUCIÓN :

Se pide indicar la cantidad de puntos en las caras opuestas al *4* y al *1*, respectivamente.

Según el gráfico, el dado no es común, es decir, la cantidad de puntos en dos caras opuestas no necesariamente debe ser *7*.

En el gráfico observamos lo siguiente:



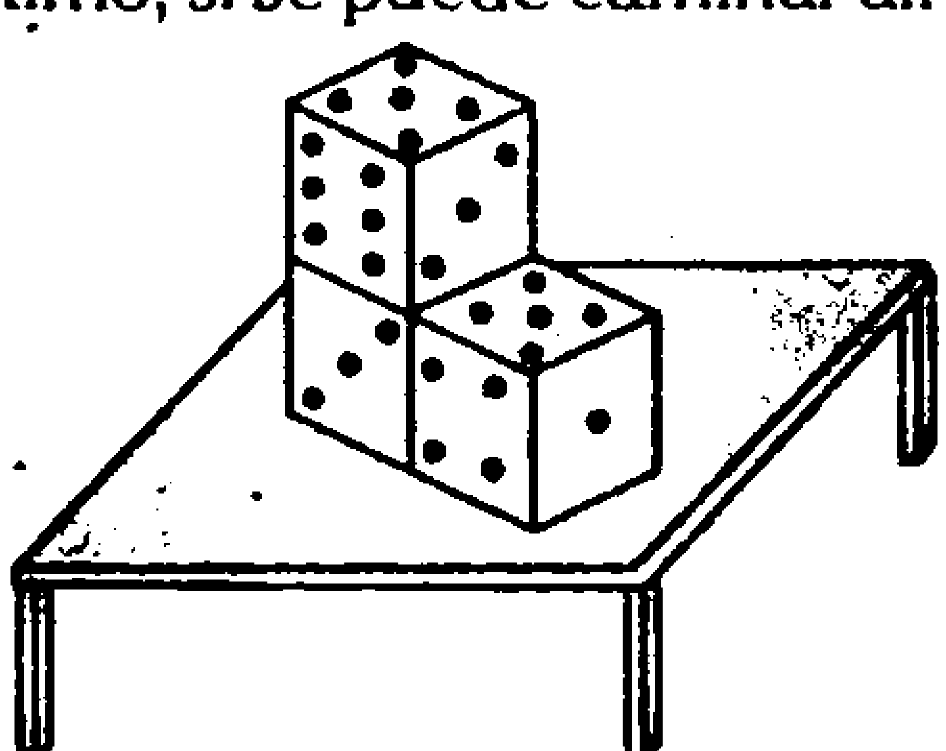
⇒ Al *4* se le opone *5* y al *1* se le opone *3*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Se han ubicado tres dados comunes sobre una mesa como se muestra en el gráfico. En aquella ubicación, ¿cuántos puntos, en total son no visibles como máximo, si se puede caminar alrededor de la mesa?

A) 21
B) 23
C) 27
D) 24
E) 26



RESOLUCIÓN :

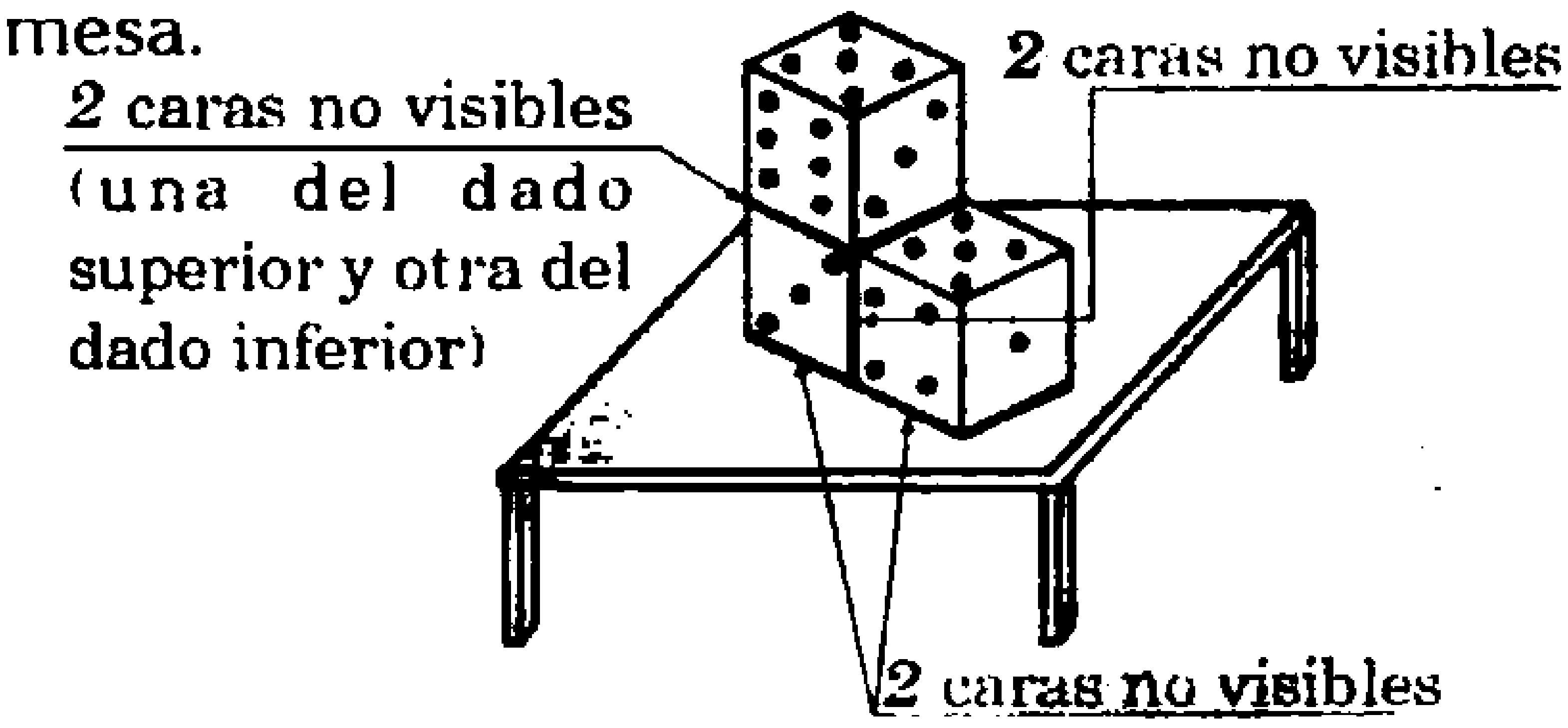
Se pide la cantidad máxima de puntos no visibles de los tres dados.

Dato:

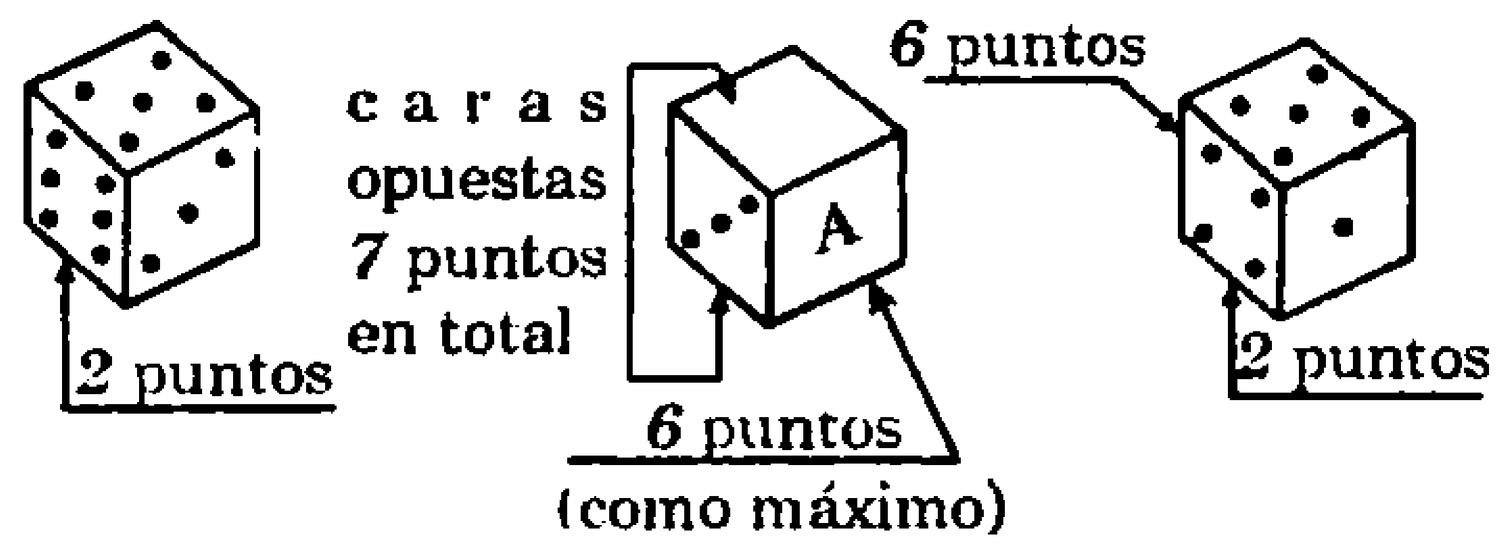
* Se puede caminar alrededor de la mesa.

*Los tres dados son comunes.

Por ser los tres dados comunes sabemos que el total de puntos en dos caras opuestas es *7*. Además, como se puede caminar alrededor de la mesa, los puntos no visibles estarán en las caras que esten tapadas por otras caras (caras en contacto) o por el contacto de la superficie de la mesa.



En el gráfico se observa *6* caras no visibles en total, entonces hallaremos la cantidad de puntos que tiene cada una.



Como se pide la mayor cantidad de puntos no visibles, la cara *A* debe tener la mayor cantidad de puntos posibles, es decir, *6* puntos.

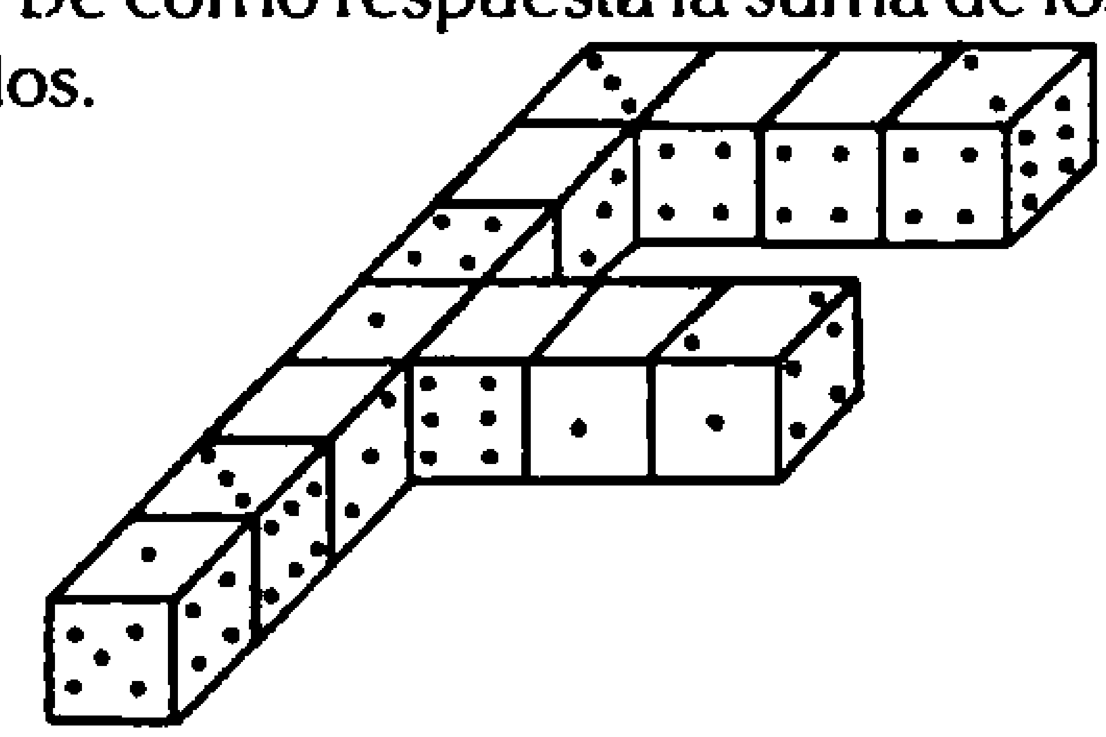
⇒ Cantidad mínima de puntos $=2+7+6+6+2=23$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Pedro ha construido la letra *F* con *13* dados comunes e iguales. Los ha unido conforme a la siguiente regla: las caras que están en contacto tienen el mismo número de puntos. Complete las seis caras vacías y sombreadas dibujando los puntos. Dé como respuesta la suma de los puntos dibujados.

A) 18
B) 10
C) 21
D) 25
E) 24



RESOLUCIÓN :

Se pide la suma de los puntos dibujados en las caras sombreadas.

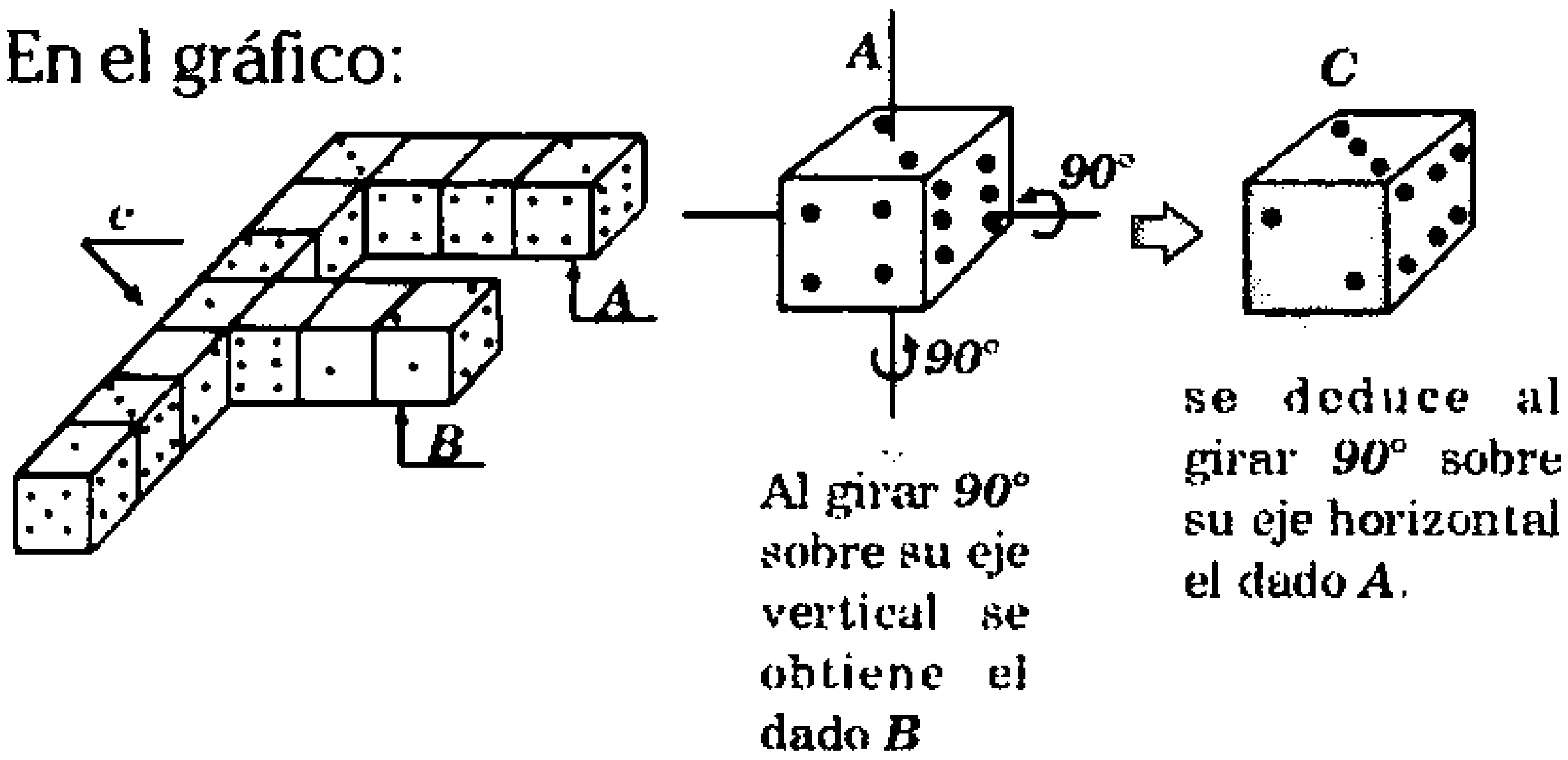
Datos:

* Todos los dados son comunes e iguales.

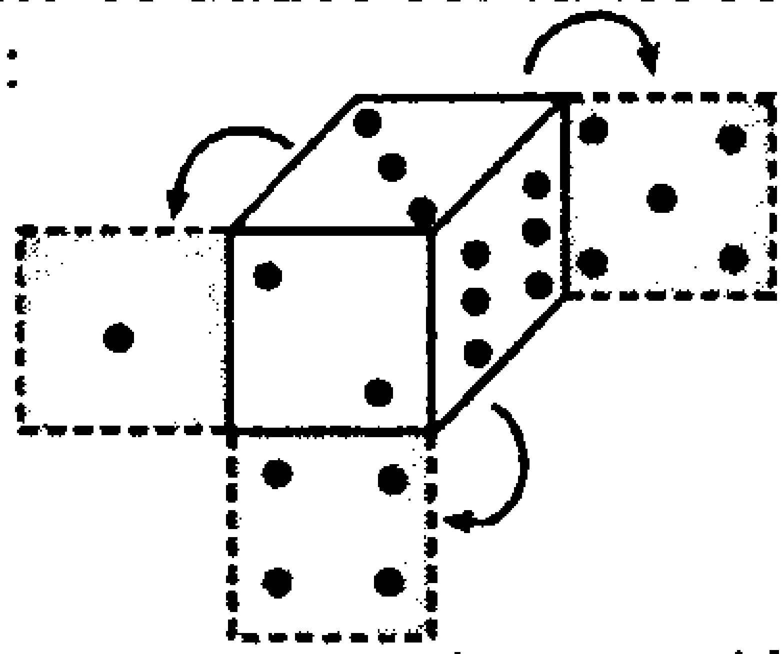
* Las caras que estan en contacto tienen la misma cantidad de puntos.

Primero se debe determinar la distribución exacta (en cantidad y forma) de puntos en los dados, que para todos ellos será la misma.

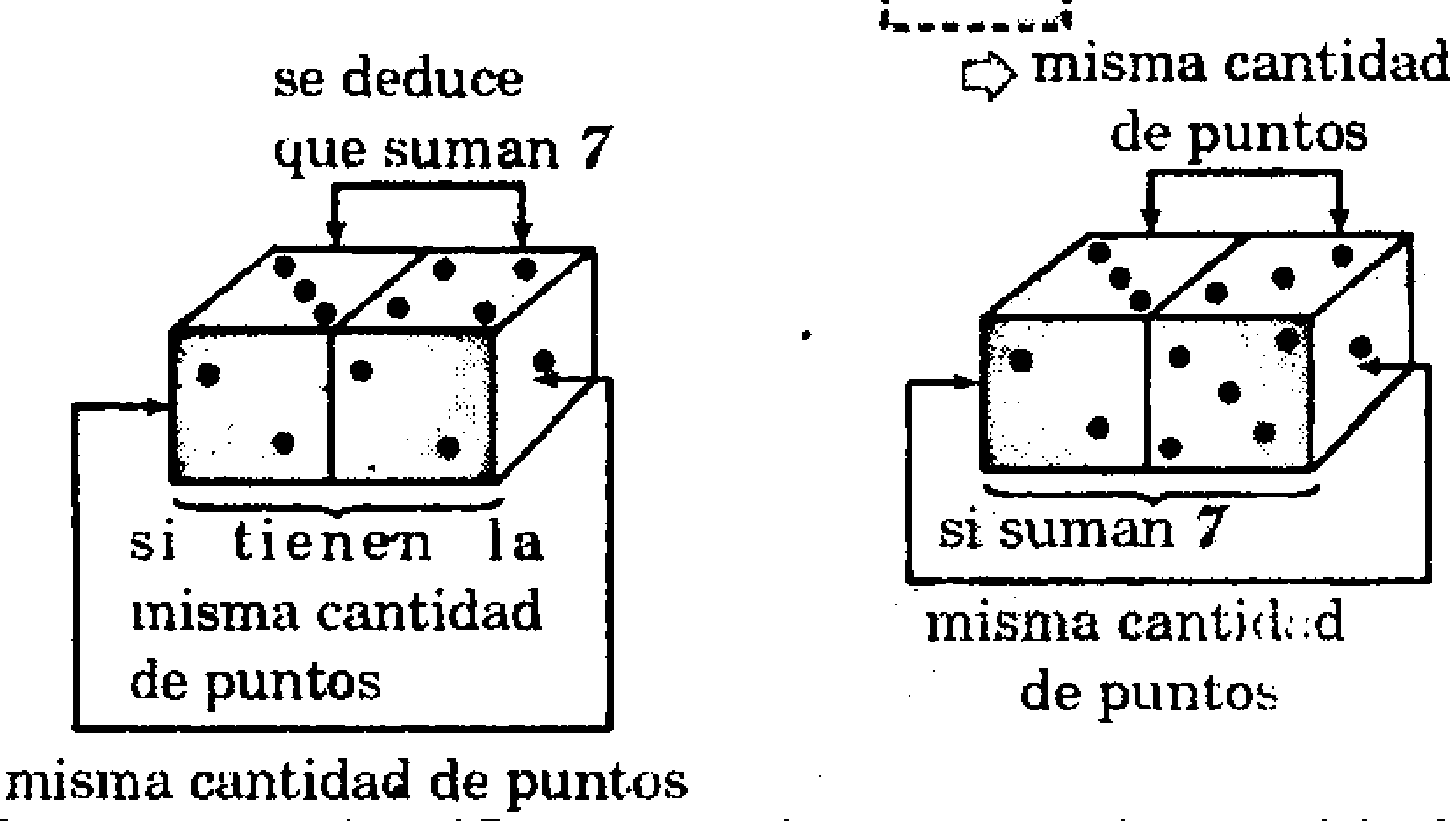
En el gráfico:



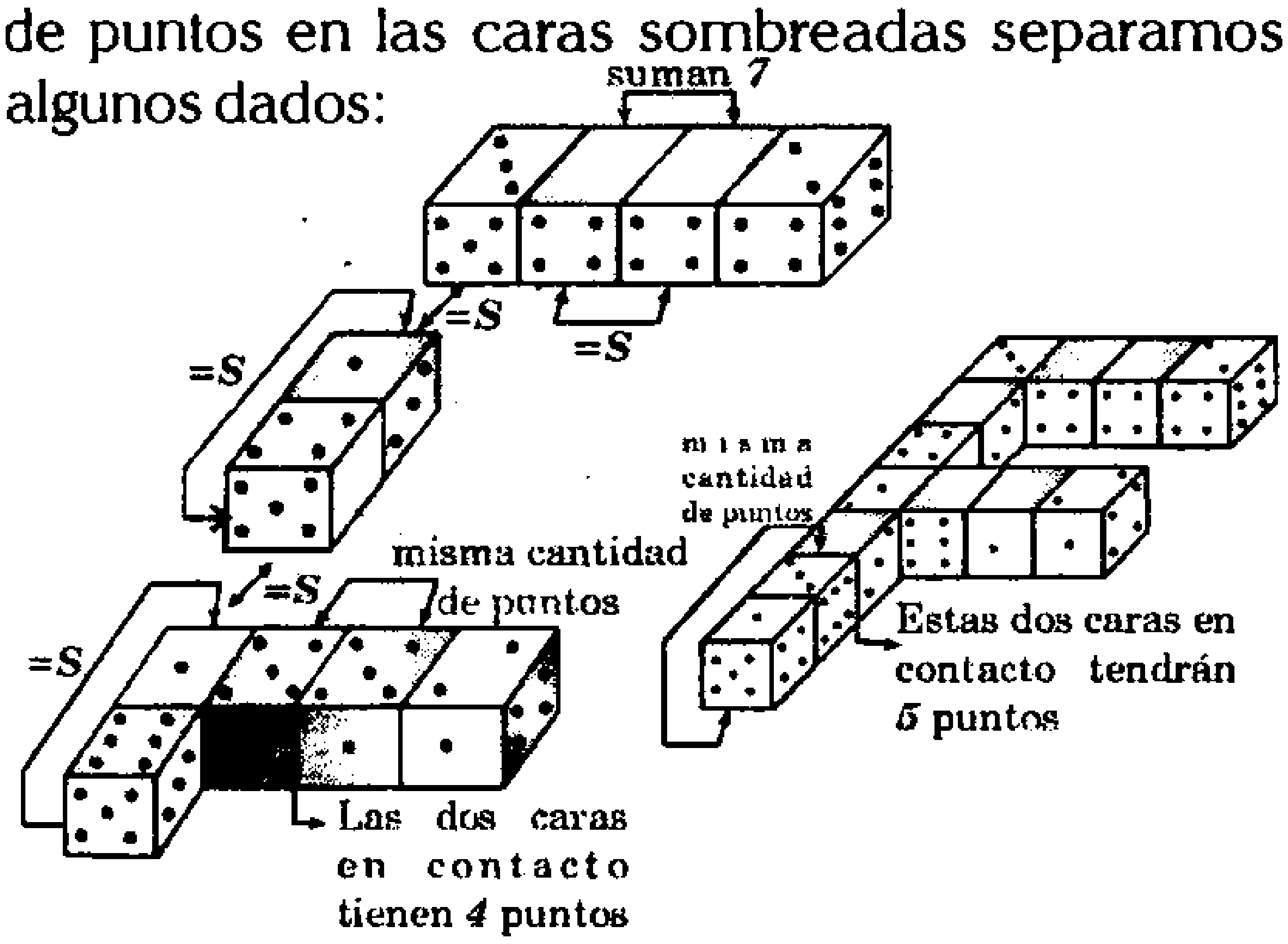
De los tres dados anteriores se deduce que la distribución de puntos en los dados comunes será de la siguiente manera:



Además, en dos dados en contacto se observa lo siguiente (por la regla del dato):



Luego, en el gráfico para determinar la cantidad de puntos en las caras sombreadas separamos algunos dados:



Entonces, suma de puntos en caras sombreadas

$$= \underbrace{7}_{\text{las dos caras que suman 7}} + 1 + 5 + 5 + 6$$

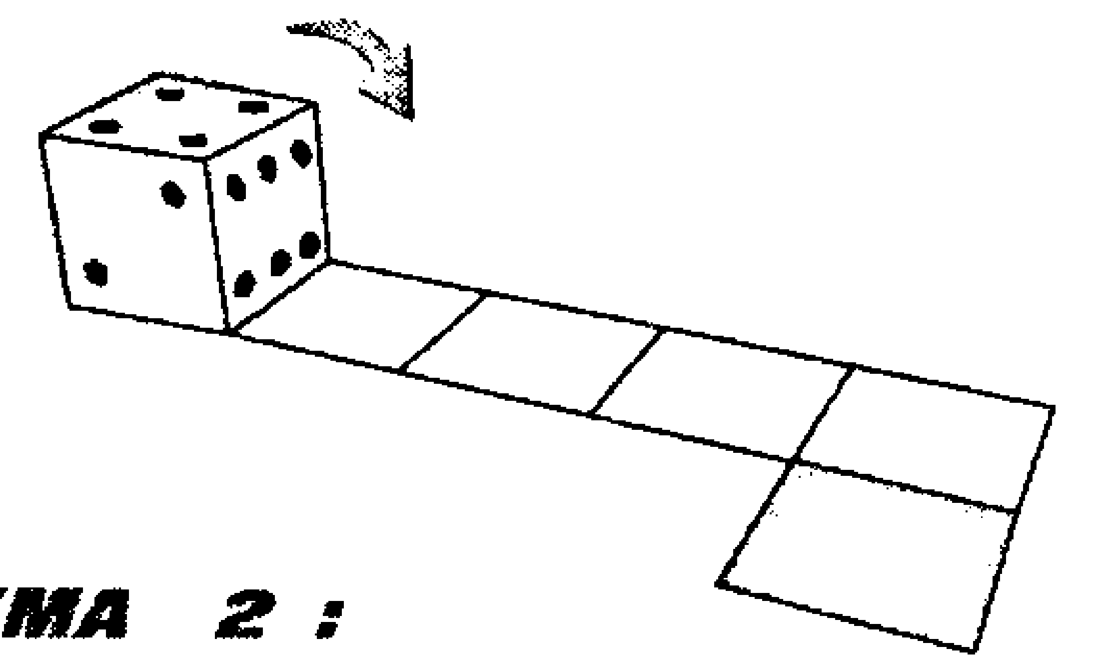
$\Rightarrow$ Suma de puntos en caras sombreadas es *24*.

RPTA : "E"

PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

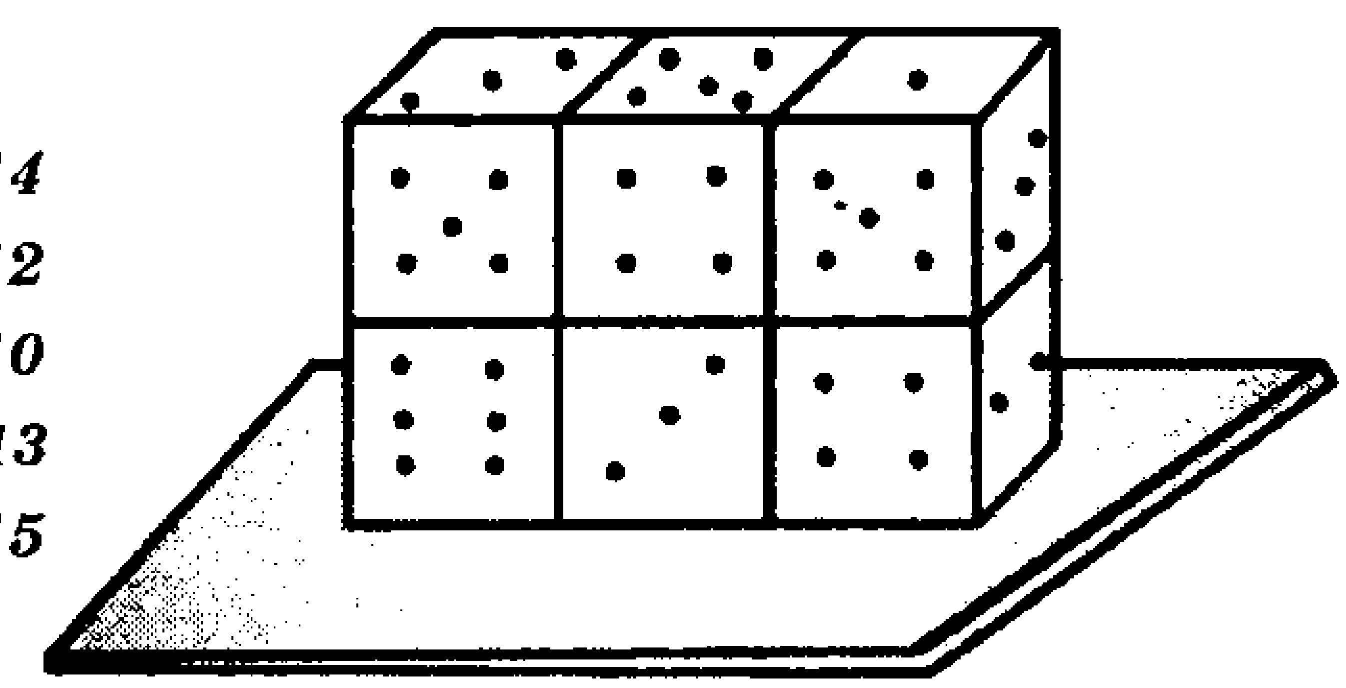
Sobre un tablero se encuentra un dado común, según el gráfico mostrado. Si el dado gira sobre cada una de las casillas sin despegarse del tablero hasta llegar a la casilla sombreada, ¿cuántos puntos presenta la cara superior del dado en la posición final?



A)1
B)2
C)3
D)4
E)5

PROBLEMA 2 :

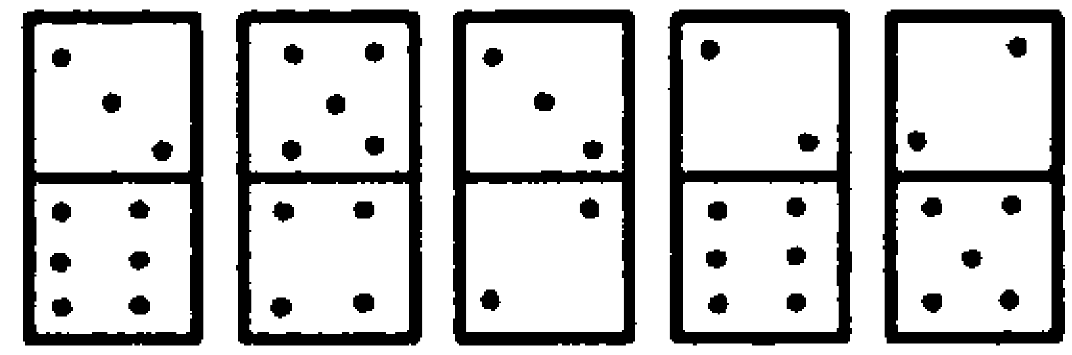
Sobre una mesa. Alexander formó una ruma con seis dados tal como se muestra en la figura. Determinar el número que representa al total de puntos como máximo que no son visibles para él y dar como respuesta la suma de sus cifras.



A) 14
B) 12
C) 10
D) 13
E) 15

PROBLEMA 3 :

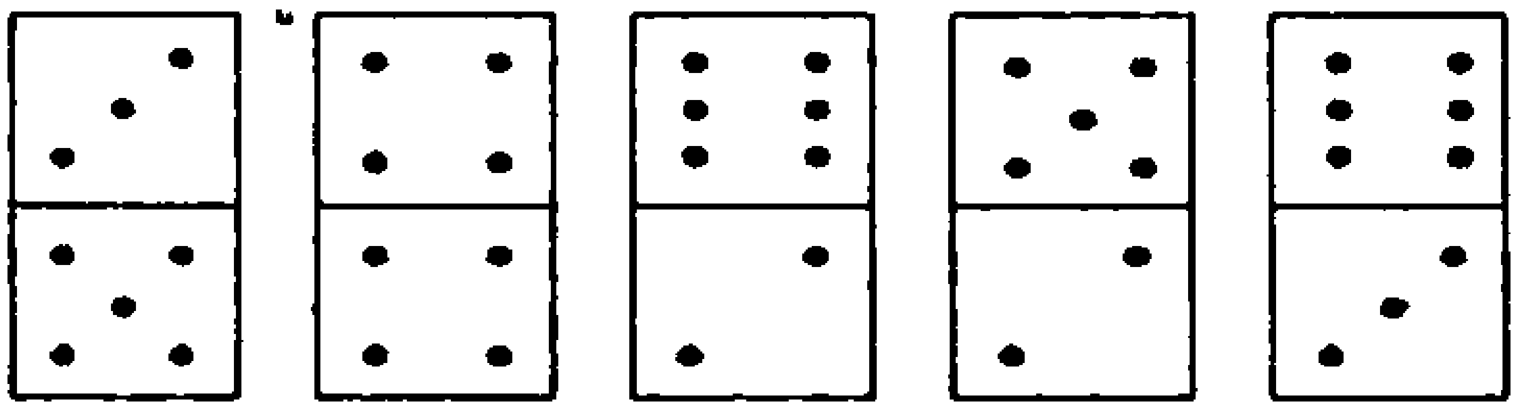
En la figura, se muestra cinco fichas de dominó. Para que la suma de los puntos de las partes superiores y la suma de los puntos de las partes inferiores de las fichas sean iguales, ¿cuántas fichas, como mínimo, se debe invertir?



A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 2* *E) 4*

PROBLEMA 4 :

La suma de los puntos de las partes superiores de estas fichas no es igual a la suma de los puntos de las partes inferiores. Para que ambas sumas sean iguales se debe invertir sólo una ficha. ¿Cuál es ésta?



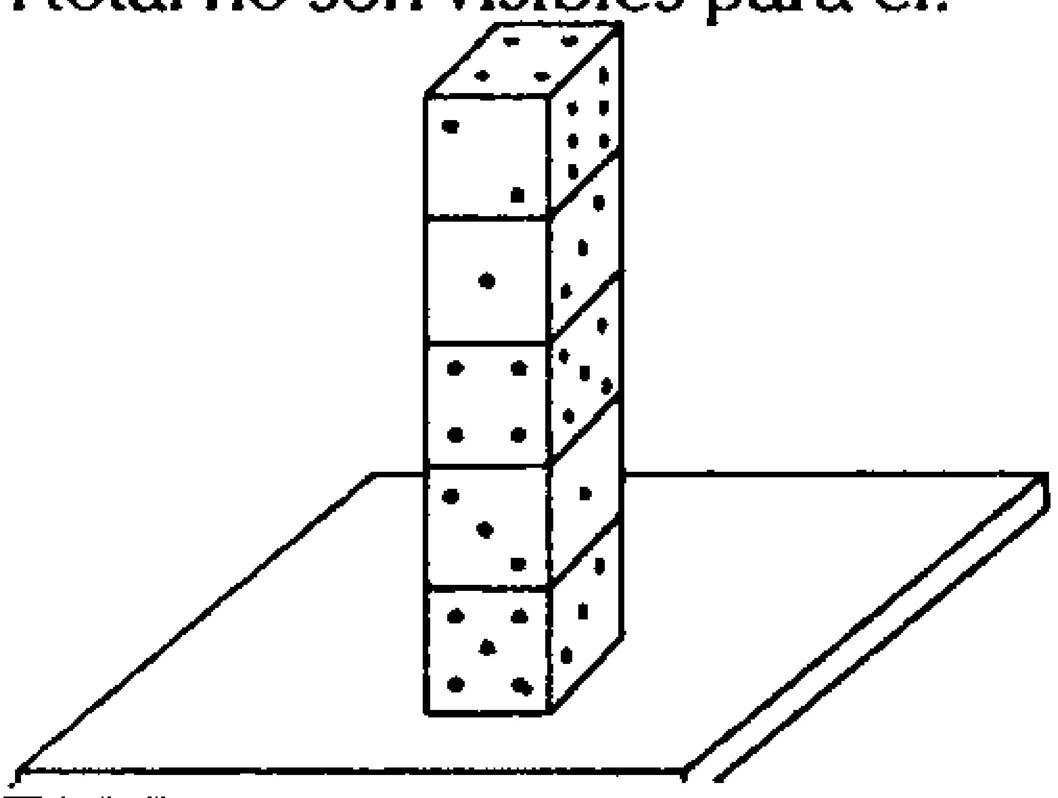
ficha roja *ficha blanca* *ficha azul* *ficha verde* *ficha amarilla*

A)La ficha blanca. *B) La ficha roja.*
C) La ficha azul. *D) La ficha amarilla.*
E) La ficha verde.

PROBLEMA 5 :

Sobre una mesa Lenin forma una torre con cinco dados tal como se muestra en la figura . ¿Cuántos puntos en total no son visibles para él?

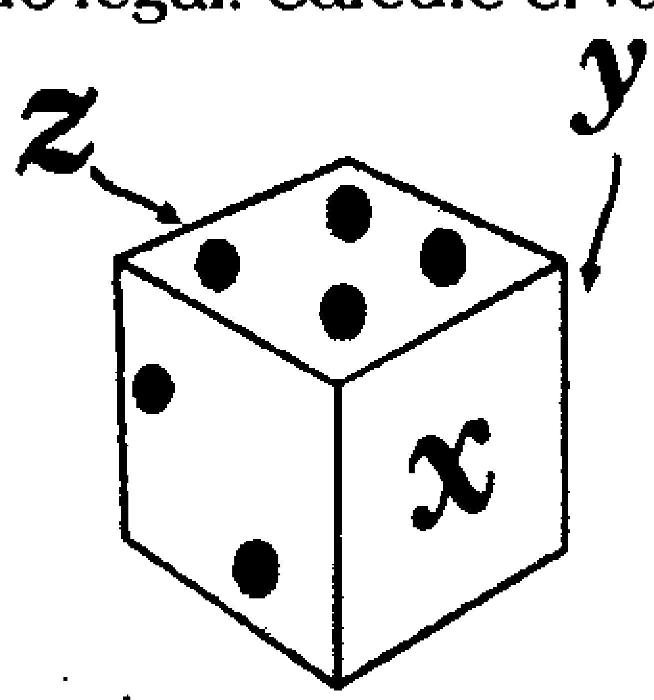
A) 31
B) 32
C) 35
D) 28
E) 36



PROBLEMA 6 :

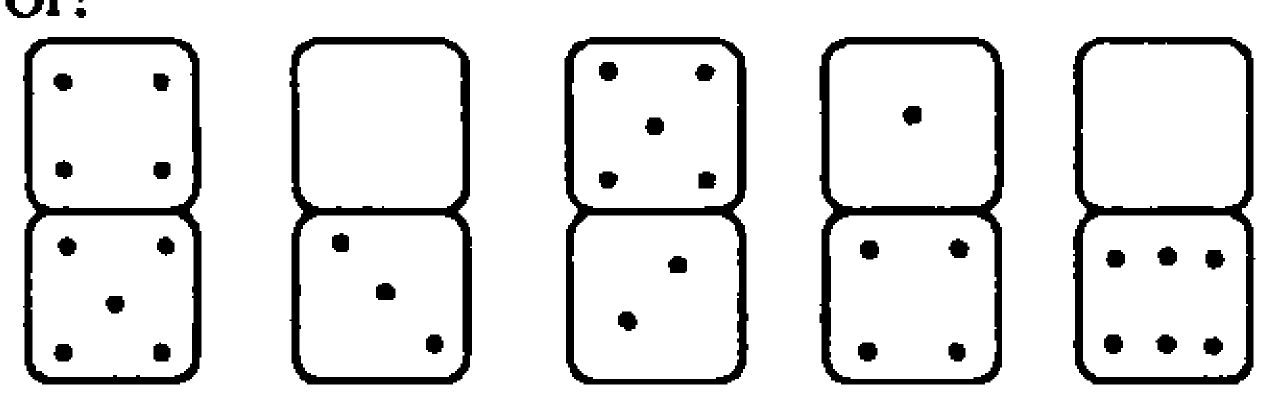
Se tiene un dado legal. Calcule el valor de $x+y+z$.

A) 9
B) 10
C) 12
D) 15
E) 18



PROBLEMA 7 :

¿Cuántas fichas del dominó deben invertirse para que la suma de los puntos de la parte superior sea el doble de la suma de los puntos de la parte inferior?

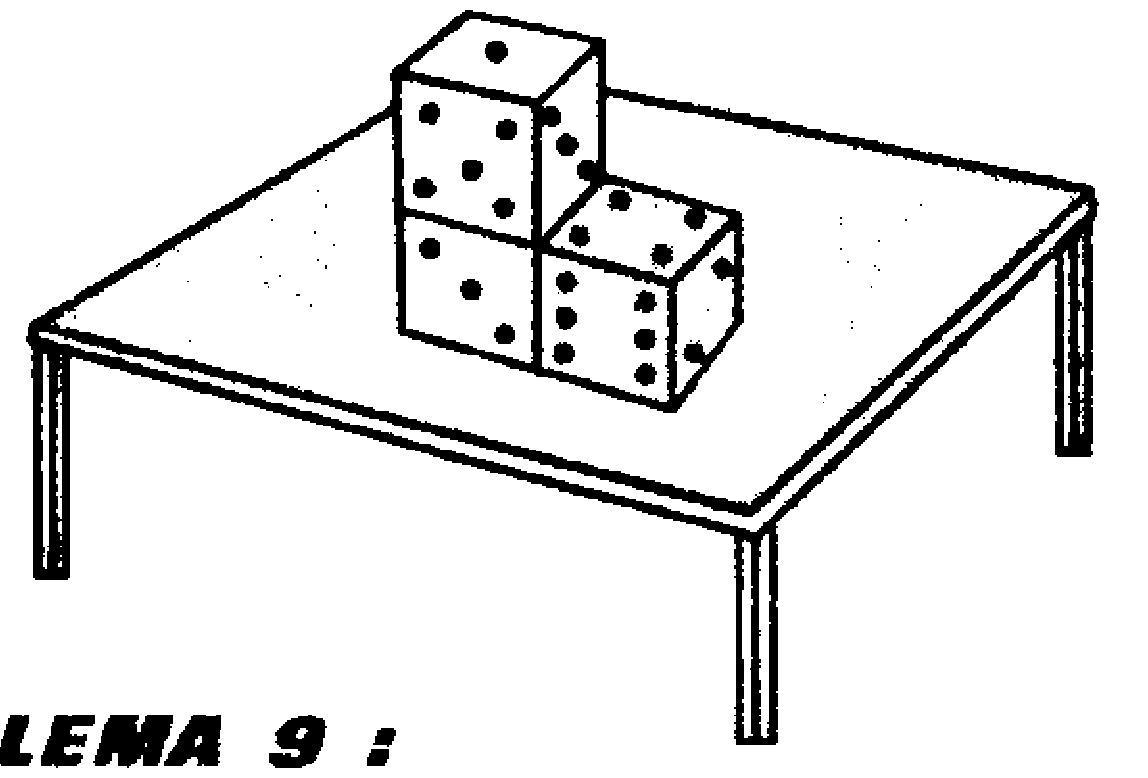


A) 3 *B) 1* *C) 4* *D) 2* *E) 5*

PROBLEMA 8 :

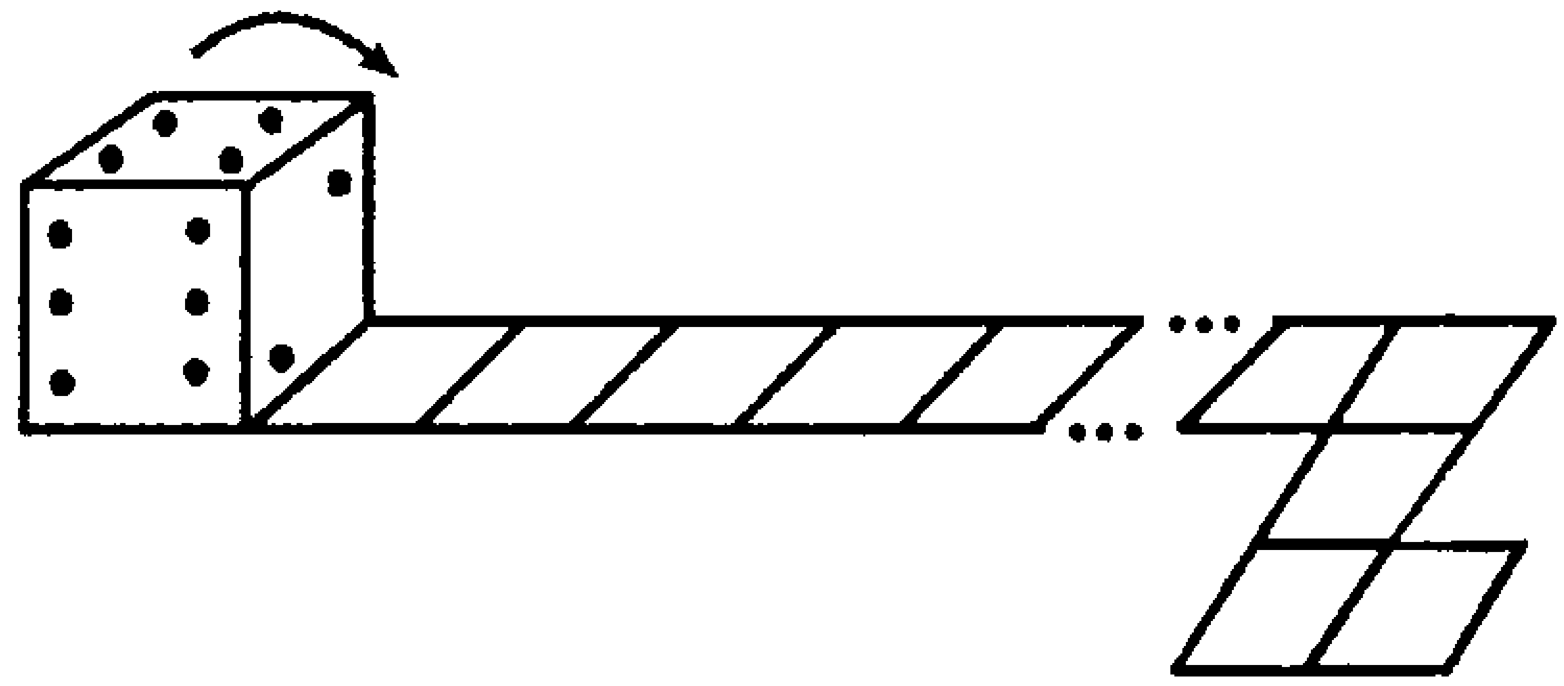
Se observan ***3*** dados comunes ubicados sobre una mesa, según el gráfico. ¿Cuál es la suma de todos los puntos ubicados en las caras no visibles?

A) 47
B) 39
C) 36
D) 42
E) 43



PROBLEMA 9 :

En el gráfico un dado gira en el sentido que se indica y recorre todo el camino formado por ***33*** casilleros cuyo tamaño es igual a las caras del dado. ¿Cuántos puntos presentará la caras superior del dado en la posición final? . Considere que el dado es común

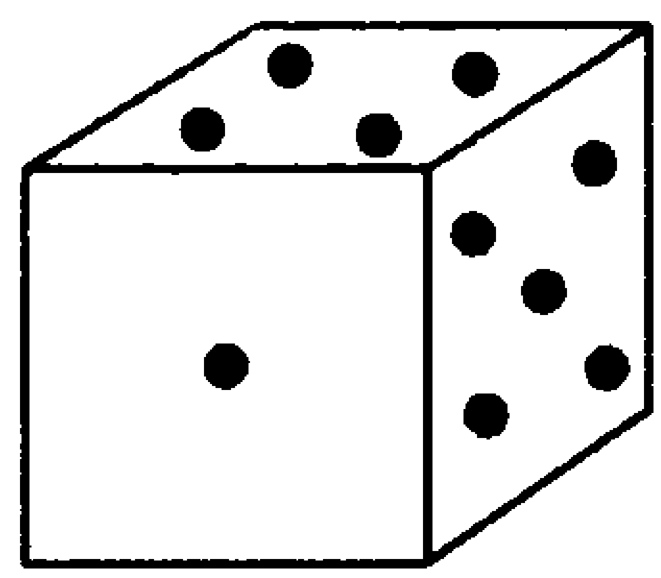


A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

PROBLEMA 10 :

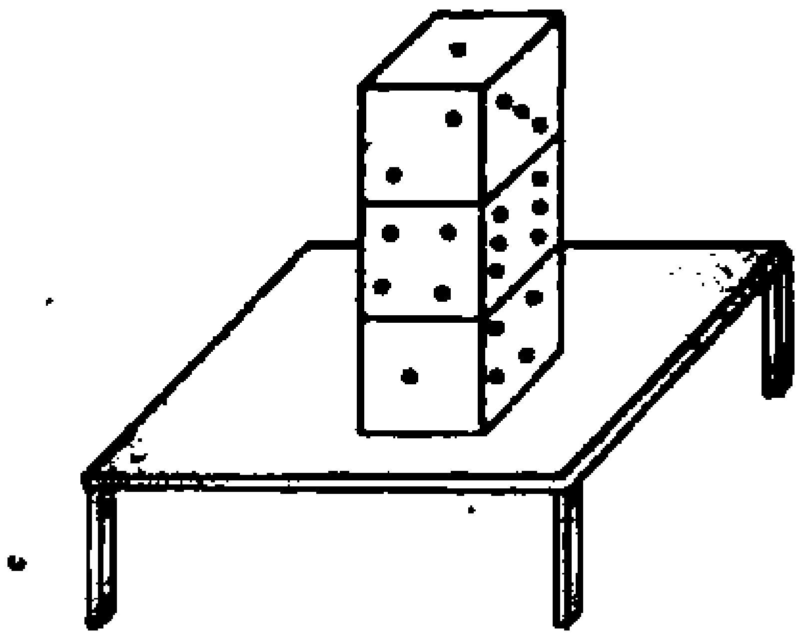
En el gráfico, la cara inferior del dado tiene ***2*** puntos; la cara lateral izquierda tiene ***6*** puntos y la cara posterior ***3*** puntos. Si coloco el dado sobre mi mano, ¿cuál es la mayor suma de los puntos que yo puedo ver? Considere que sólo puedo observar ***3*** caras del dado.

A) 15
B) 14
C) 13
D) 12
E) 11



PROBLEMA 11 :

Se colocan ***3*** dados comunes sobre una mesa, tal como se muestra. ¿Cuánto suman en total los puntos de las caras no visibles en el gráfico?



A) 40

B) 41

C) 42

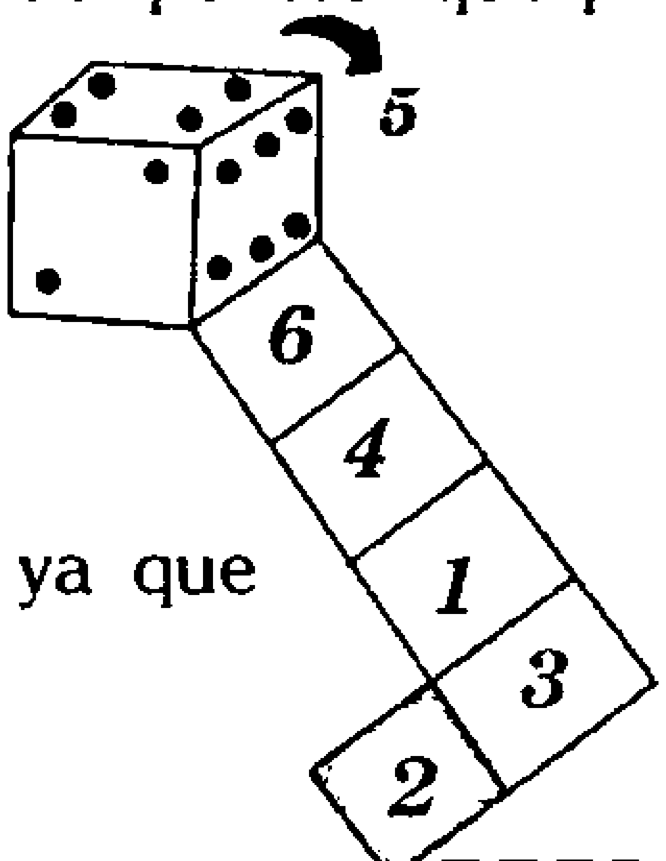
D) 43

E) 44

SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

RESOLUCION 1 :

Piden el número de puntos que presenta la cara superior.

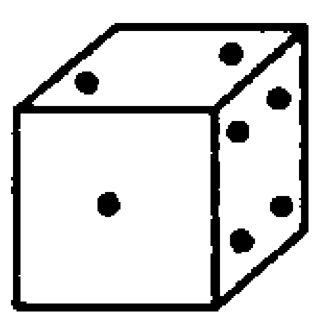


La respuesta es *5*, ya que está opuesto a *2*.

RPTA : "E"

RESOLUCIÓN 2 :

Se tiene en un dado :



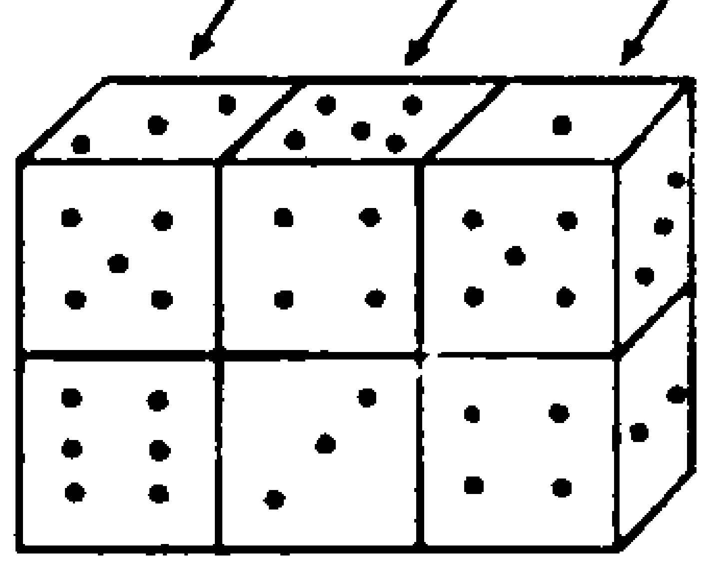
Suma de puntos $=1+2+3+...+6=21$

Además en caras opuestas su suma=*7*

Tenemos: $7-5=2$ $7-4=3$ $7-5=2$

$min\{1, 6\}=1\rightarrow$

$min\{2, 3, 4, 5\}=2\rightarrow$



Luego:

$$Suma\ puntos_{no\ visibles} = Puntos_{totales} - Puntos_{visible}$$

$$= 6 \times 21 - \{3 + 5 + 1 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 1 + 2 + 3 + 2\} = 67$$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $= 6 + 7 = 13$

RPTA : "D"

RESOLUCIÓN 3 :

De la figura:

Total suma de fichas = *38*

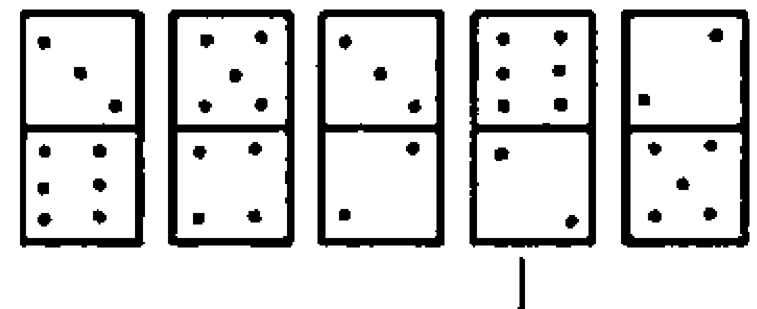
Suma superior= *19* }
Suma inferior = *19* } Para que se cumpla lo que se pide

En la actual: Suma superior = *15*

Suma superior = *23*

De la figura:

1° 2° 3° 4°



Suma superior=*19*
Suma inferior=*19*

Invertido

Luego: # fichas invertidas = *1*

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 4 :

* Sean:

S_1=Suma de puntos de las partes superiores: *24*

S_2=Suma de puntos de las partes inferiores: *16*

Total : *40*

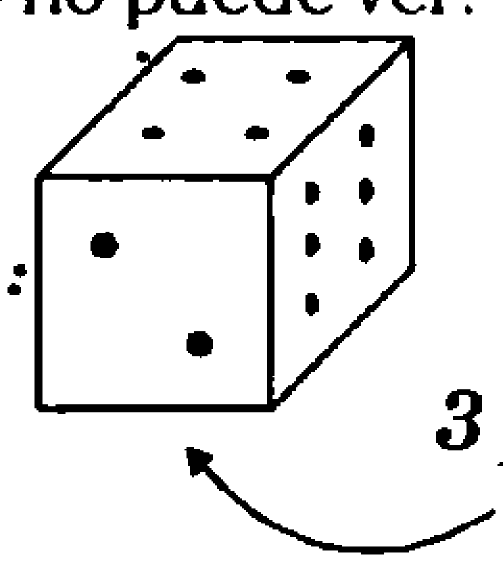
* *Para que* $S_1 = S_2 = 20$: $S_1 \xrightarrow{4} S_2$

$\Rightarrow$ Debe invertirse la ficha que en la parte superior tiene *4* puntos más que en la parte inferior, es decir, la ficha azul.

RPTA: "C"

RESOLUCIÓN 5 :

* Lenin puede ver todos los puntos excepto aquellos que se encuentran en los lados Superior e inferior de casi todos los dados. Como la suma de los puntos en lados opuestos es *7*, entonces desde la base de la torre hasta al cuarto nivel, la suma de los puntos que Lenin no puede ver es 4×7, y en el quinto dado no puede ver:



$\Rightarrow$ ***En total, Lenin no ve :***
$4\times7 + 3 = 31$ ***puntos.***

3 puntos

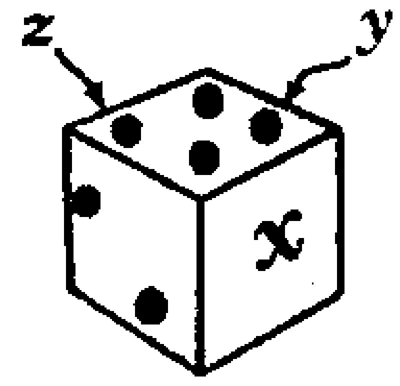
RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 6 :

Como es un dado es legal, se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\boxed{\text{suma de los puntos de 2 caras opuestas} = 7}$$

Así tenemos:



$y+2=7$; $x+z=7$

Entonces

$y=5$

$\Rightarrow x+y+z=12$

RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 7 :

Suma de la fila superior $= 4 + 0 + 5 + 1 + 0 = 10$

Suma de la fila inferior $= 5 + 3 + 2 + 4 + 6 = 20$

Como la cara superior debe sumar el doble de la cara inferior, la suma deberá ser *20* y abajo debe ser *10*.

$$A = \boxed{4} + 0 + 5 + \boxed{1} + \boxed{0} = 10$$
$$B = \boxed{5} + 3 + 2 + \boxed{4} + \boxed{6} = 20$$

Diferencia 1   *Diferencia 3*   *Diferencia 6*

Se invierte lo señalado resulta:

5	0	5	4	6
4	3	2	1	0

⇒ Basta mover *3* fichas. **RPTA : "A"**

RESOLUCIÓN 8 :

• Para calcular la suma de los puntos de las caras no visibles, utilizamos los puntos de las caras visibles de la siguiente manera:

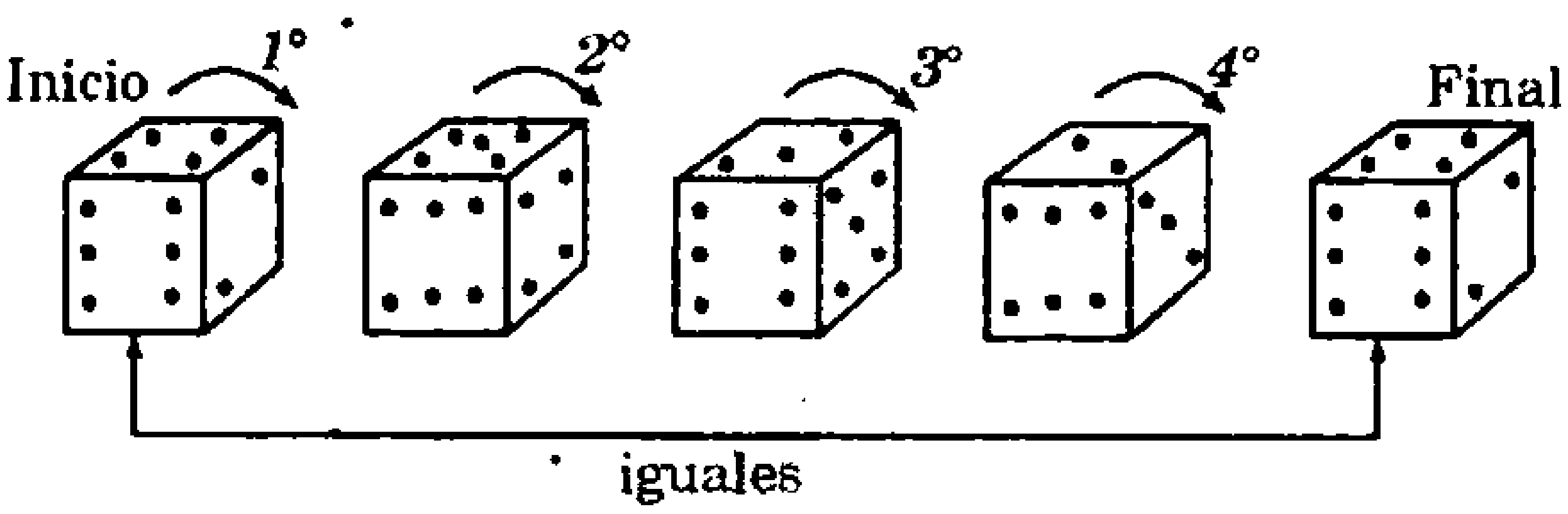
$$S_{caras\ no\ visibles} = S_{total\ en\ los\ 3\ dados} - S_{caras\ visibles}$$
$$= 3(21) - (1 + 3 + 5 + 3 + 4 + 2 + 6)$$
$$S_{caras\ no\ visibles} = 39$$

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 9 :

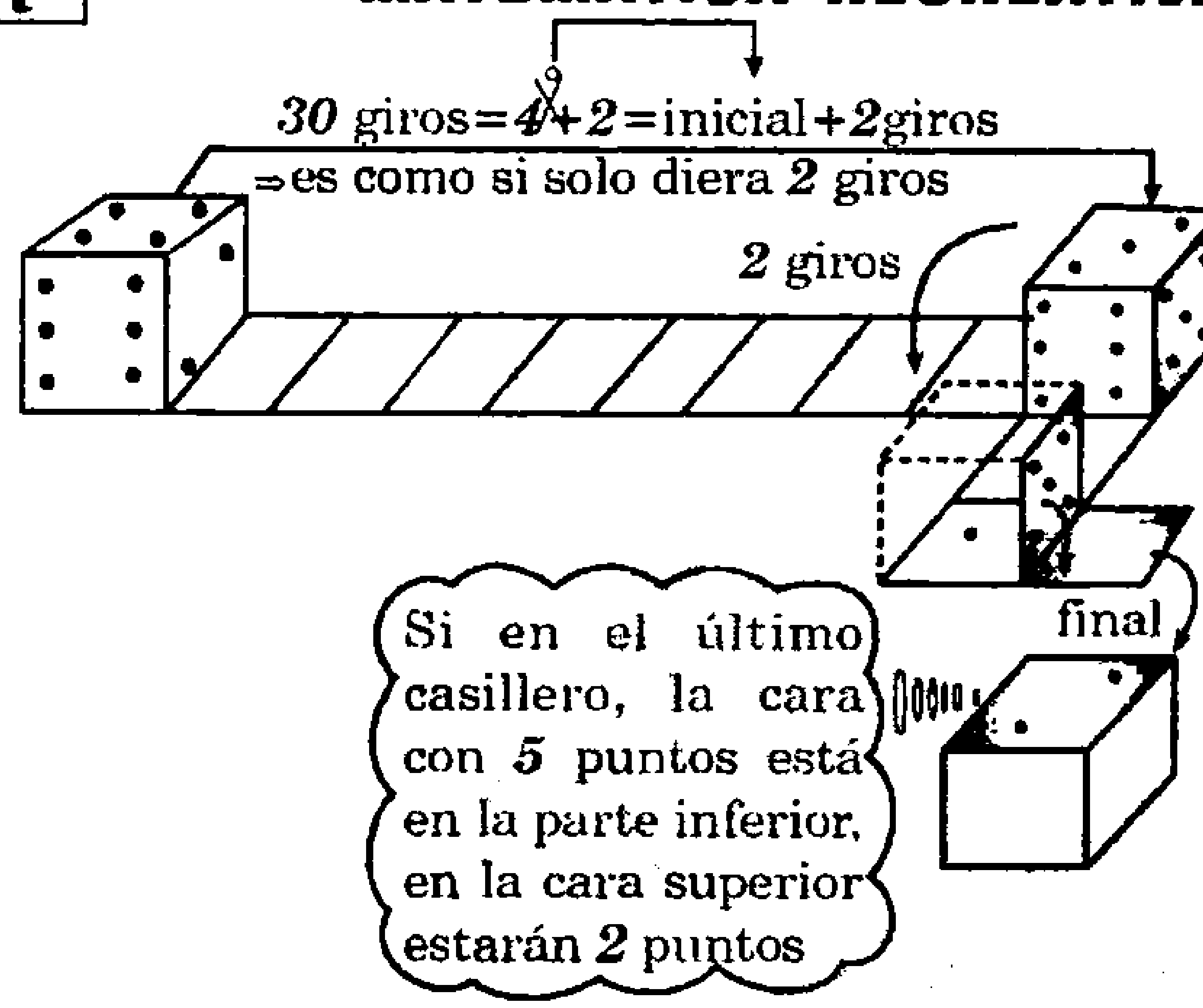
Se pide la cantidad de puntos de la cara superior del dado al final del camino.

Se sabe que al girar el dado *4* veces se obtiene:



⇒ Por cada *4* giros del dado se obtiene el dado inicial.

En el gráfico se tiene un camino de *33* casilleros de los cuales *30* están en línea recta, entonces, al girar el dado.

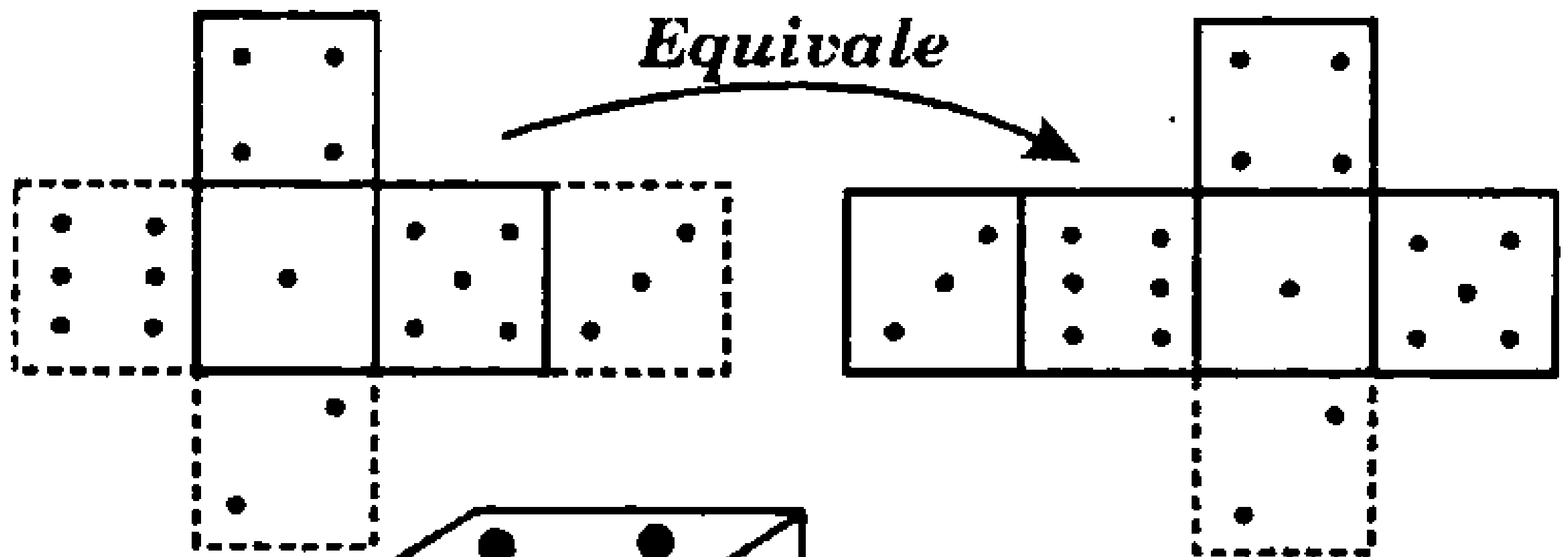


⇒ La cara superior presenta *2* puntos en la posición final.

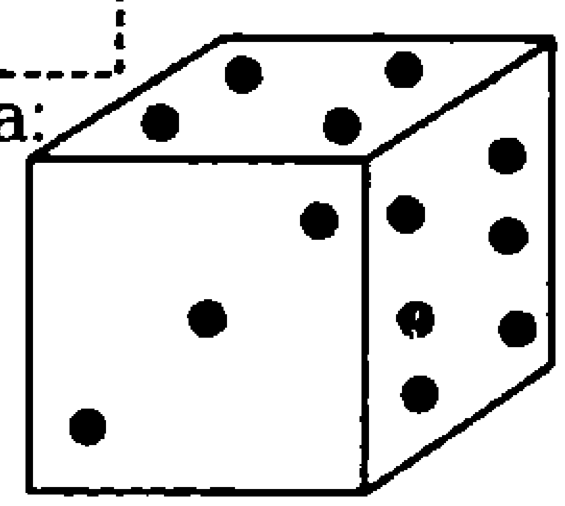
RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 10 :

Del problema y desdoblando el dado:



Se forma:



RPTA : "C"

RESOLUCIÓN 11 :

Sea S= la suma de puntos de todas las caras no visibles, según el gráfico.

Para no calcular los puntos en cada una de las caras no visibles (ya que no es necesario) haremos lo siguiente:

$$S = \left(\begin{array}{c}\text{suma de todos}\\ \text{los puntos de}\\ \text{los tres dados}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{suma de puntos}\\ \text{de todas las}\\ \text{caras visibles}\end{array}\right)$$

recuerde que por cada dado común la suma total de puntos es 21.

Luego: $S = 3(21) - (1+2+3+4+6+1+4 = 42)$

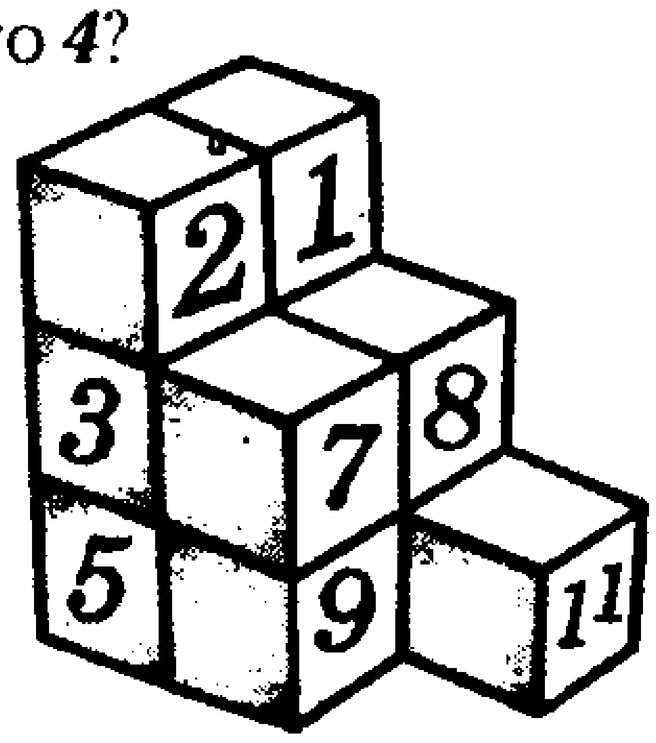
(3: total de dados; 21: suma total de puntos en un dado.)

RPTA : "C"

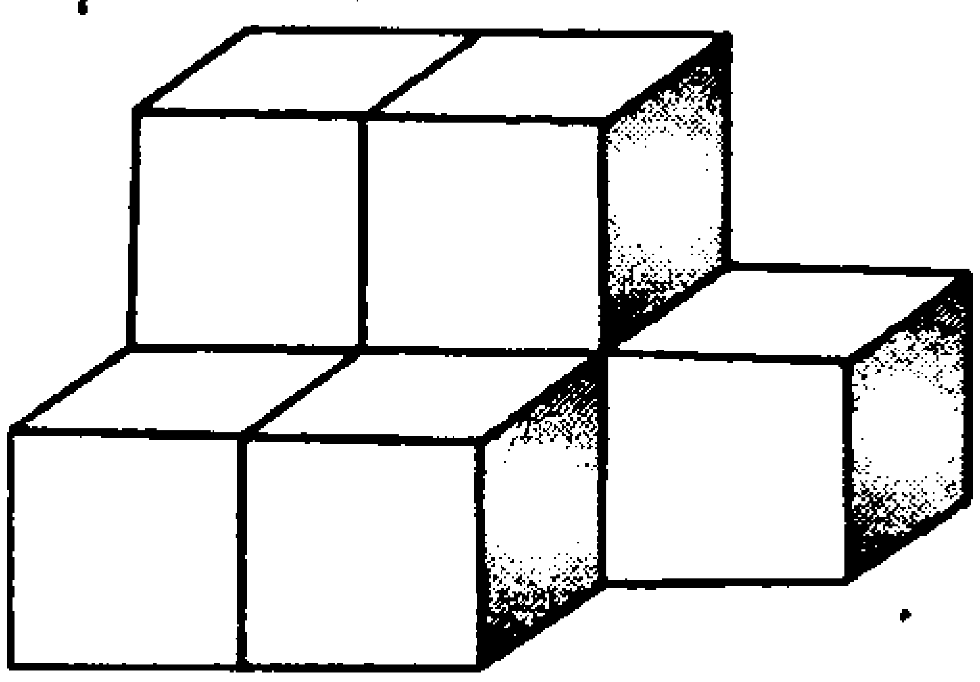
PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos cubos están en contacto con el cubo con el número *4*?

A) 8
B) 7
C) 6
D) 10
E) 9

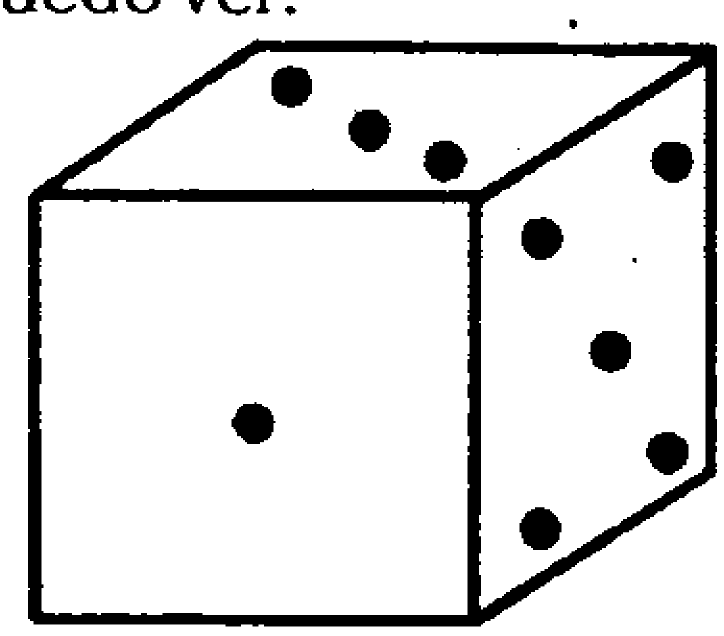


02 En la figura, el sólido que está formado por *7* cubos iguales pegados entre sí se sumerge completamente en un recipiente con pintura. Luego de secar y despegar, ¿cuántas caras pintadas hay más que las no pintadas?



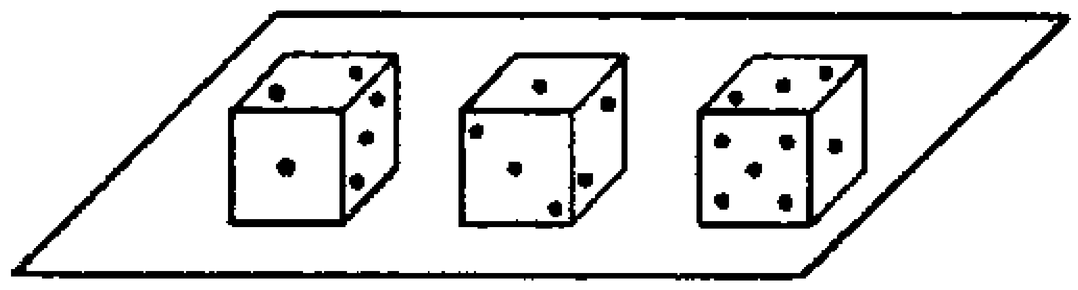
A) 13 B) 16 C) 14
D) 29 E) 10

03 La cara de abajo del dado, en la figura, tiene *6* puntos. La cara izquierda tiene *4* puntos y la de atrás *2* puntos. Si coloco el dado sobre mi mano, ¿cuál es la mayor suma de los puntos que yo puedo ver?



A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 9

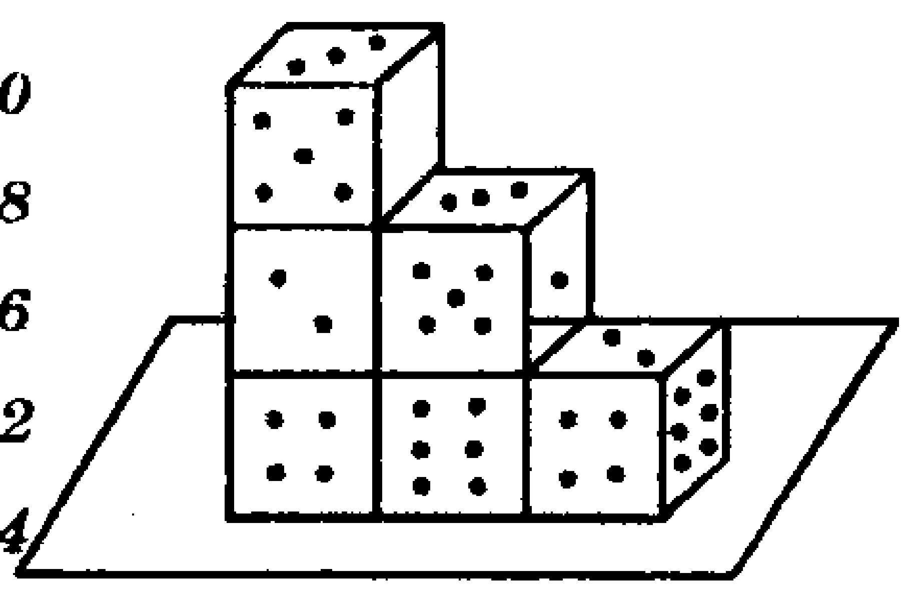
04 Se tiene *3* dados normales sobre una mesa como se muestra en la figura. Girar un dado consiste en hacer caer una de sus caras laterales sobre la mesa, siempre apoyándose sobre una de sus aristas. Si cada dado solo se hace girar una sola vez, ¿cuál es la mayor suma de puntos en sus caras superiores que se puede obtener?



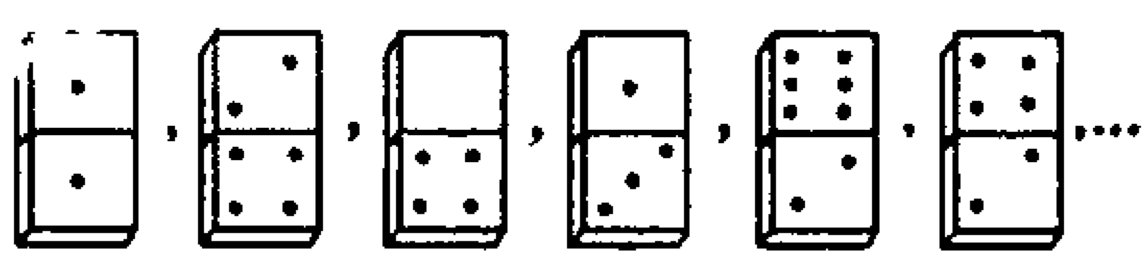
A) 18 B) 17 C) 15
D) 12 E) 16

05 En la figura se muestra seis dados normales sobre la mesa, calcule la suma máxima de puntos de todas las caras ocultas.

A) 60
B) 58
C) 56
D) 62
E) 64

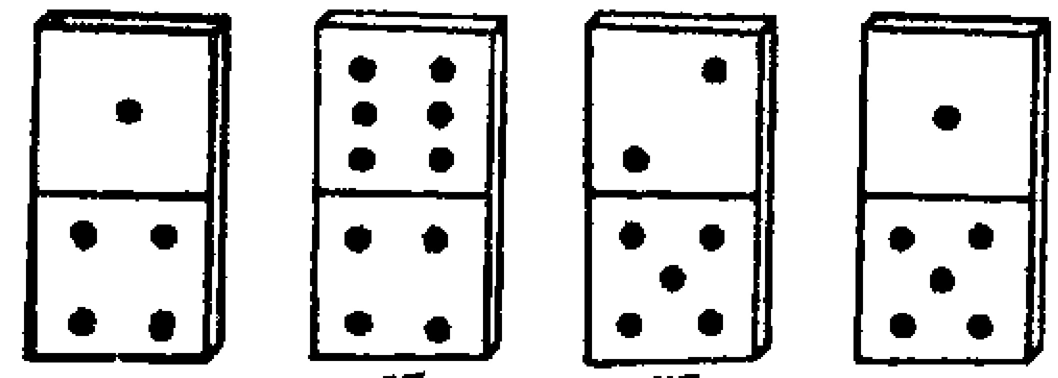


06 Halle la diferencia positiva de puntos de la ficha que continua.



A) 2 B) 4 C) 6
D) 3 E) 5

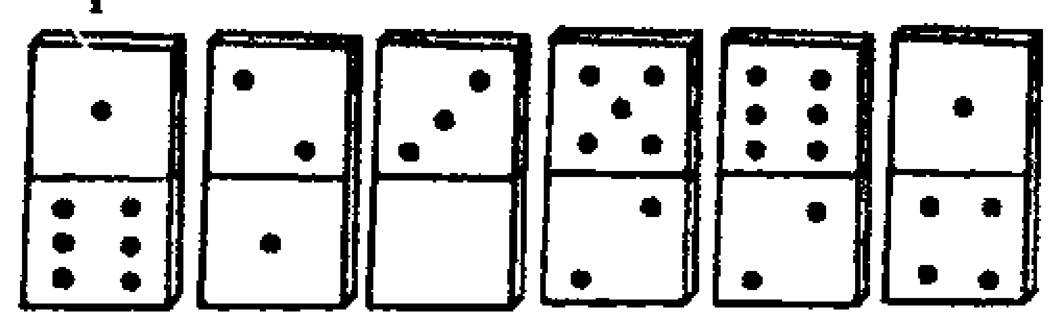
07 En el siguiente gráfico se muestran cuatro fichas de dominó alineadas. Observamos que la suma de los puntos ubicados en la parte superior es *10* y la suma de los puntos ubicados en la parte inferior es *18*. ¿Cuál es la ficha que debemos voltear para que la suma de los puntos ubicados en la parte superior y en la parte inferior sea la misma?



I II III IV

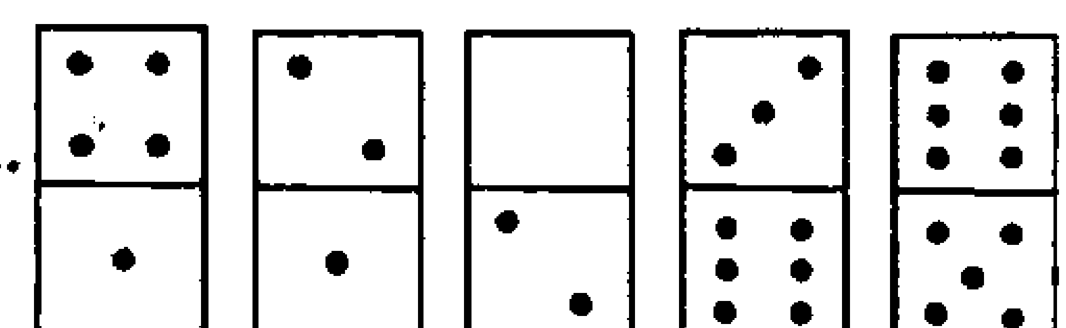
A) ficha I B) ficha II
C) ficha III D) ficha IV
E) no es posible

08 En el gráfico se muestran seis fichas de dominó alineadas. ¿Cuántas fichas se deben invertir, como mínimo, para que la suma de los puntos de las partes inferiores sea el doble de la suma de los puntos de las partes superiores?



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

09 El gráfico muestra cinco fichas de dominó alineadas. ¿Qué ficha se debe invertir para que la suma de los puntos de la parte superior sea la mitad del triple de la suma de los puntos de la parte inferior?

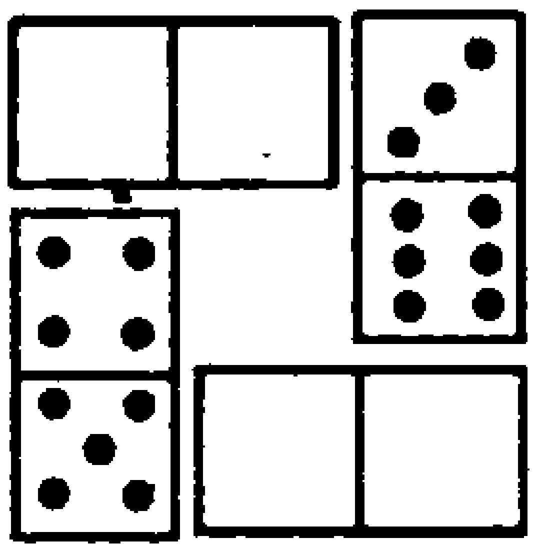


I II III IV V

A) la ficha I B) la ficha II
C) la ficha III D) la ficha IV
E) la ficha V

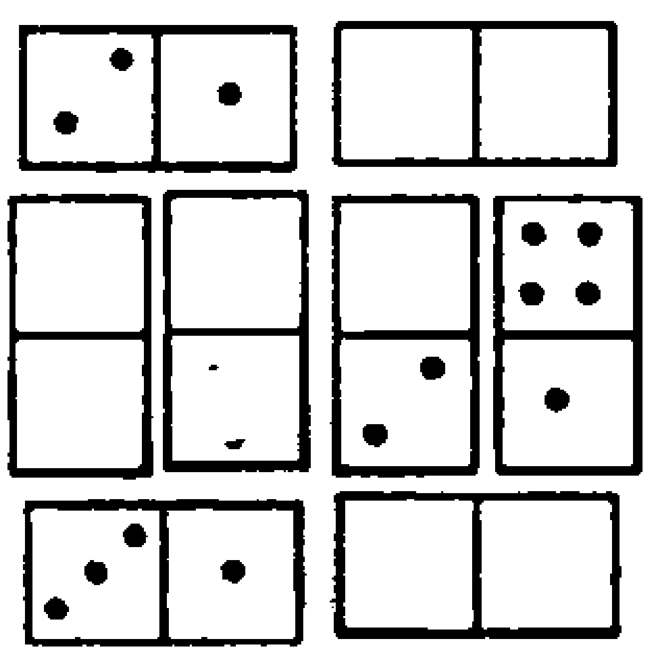
10 Nicolás tiene un juego completo de dominó, con algunas de las fichas ha formado un cuadrado, como se muestra en la figura, de modo que la suma de los puntos en

cada lado del cuadrado sea la misma. Calcule la suma máxima de los puntajes de las dos fichas en blanco.



A) 18
B) 22
C) 16
D) 17
E) 19

11 Con las fichas de un juego de dominó se desea construir un cuadrado mágico cuya constante mágica sea *10*. En la figura se muestra este cuadrado mágico, de las cuales se conocen los puntajes de *4* fichas y se desconocen los puntajes de las otras *4*. Se muestra una ficha desconocida con una de sus partes sombreada. Si el puntaje que va en la parte sombreada de esta ficha es máximo, ¿qué puntaje indica la otra parte de la misma ficha?

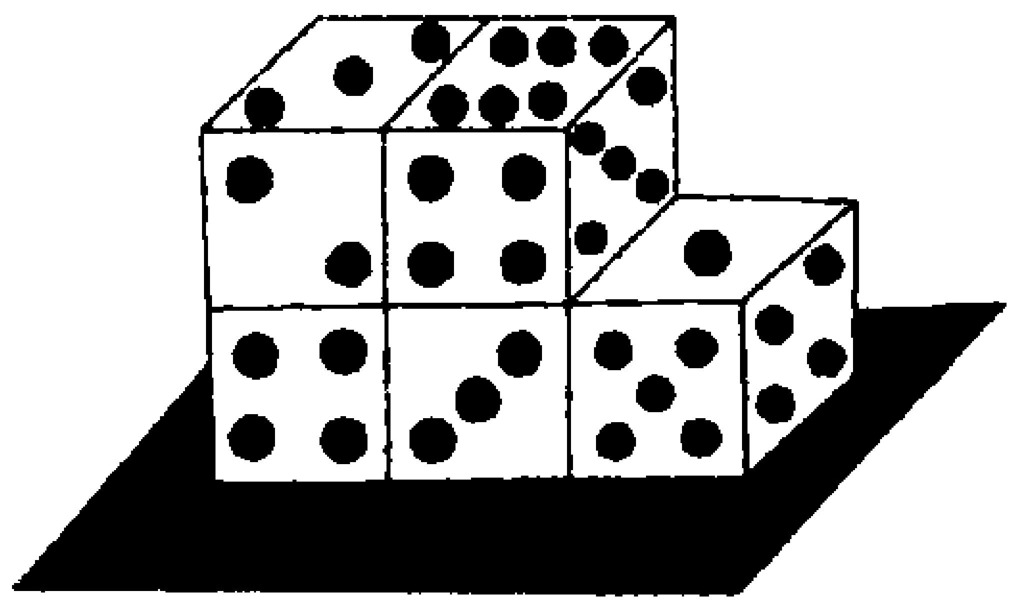


A) 0
B) 5
C) 2
D) 3
E) 4

12 Después de lanzar seis dados normales sobre una mesa, Diana observa que los puntos de las caras superiores de tres dados son cantidades Impares y en los demas dados no..¿Cuántos puntos en total, como máximo, son visibles para Diana?

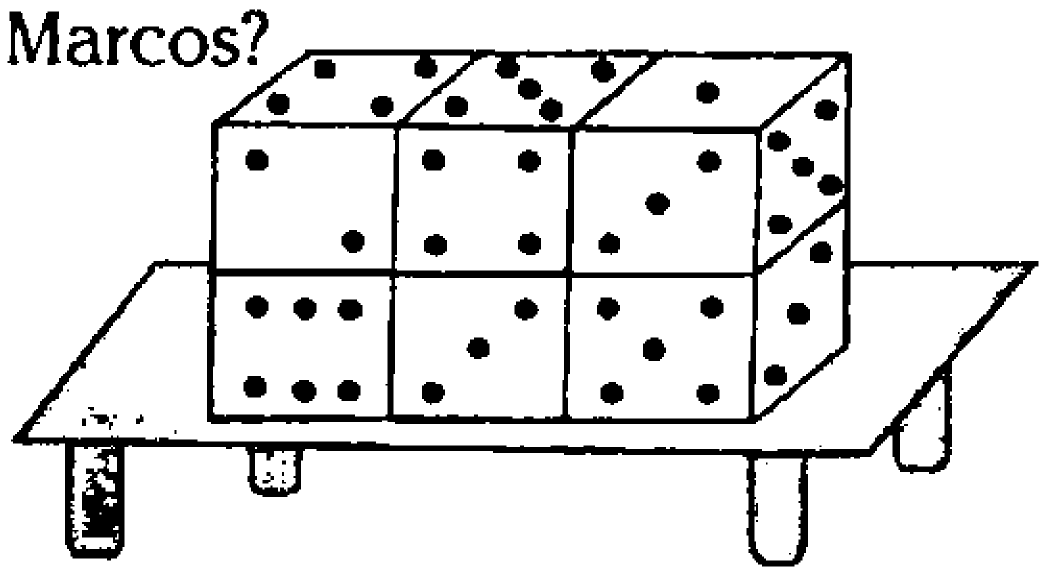
A)110 *B) 113* *C) 115*
D)117 *E) 118*

13 Sobre una mesa no transparente, Coquito formó una ruma con cinco dados normales tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos puntos en total, como máximo, no son visibles pare él?



A)52 *B) 49* *C) 48*
D)50 *E) 51*

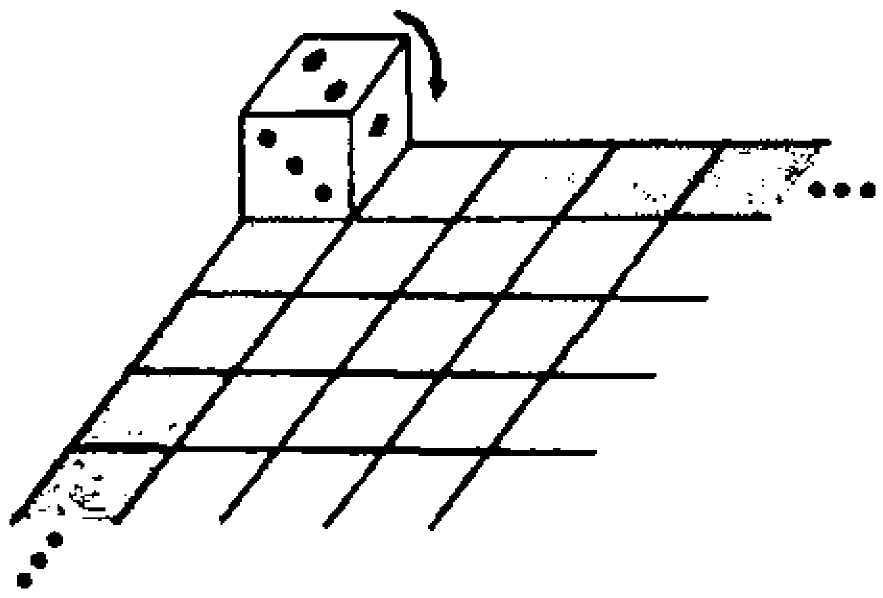
14 Sobre una mesa, Marcos formó una ruma de seis dados tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos puntos como mínimo en total no son visibles para Marcos?



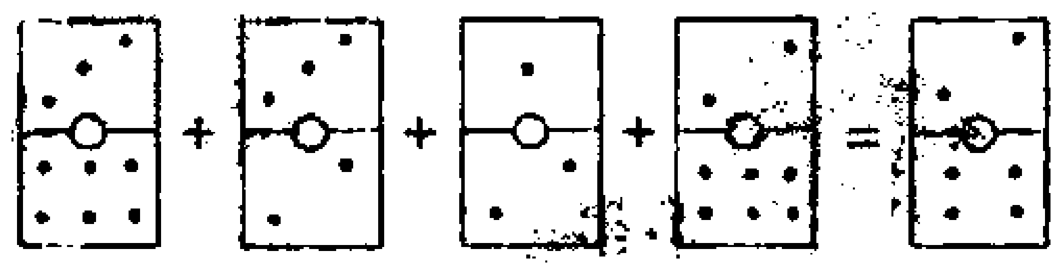
A) 53 *B) 54* *C) 55*
D)56 *E) 57*

15 Un dado común se encuentra en la posición mostrada en el gráfico y rueda a lo largo de las casillas que conforman el borde de un tablero de ajedrez (camino sombreado). ¿Qué cantidad de puntos tendrá la cara superior del dado al completar una vuelta por el camino?

A)1
B)2
C)3
D)4
E)5

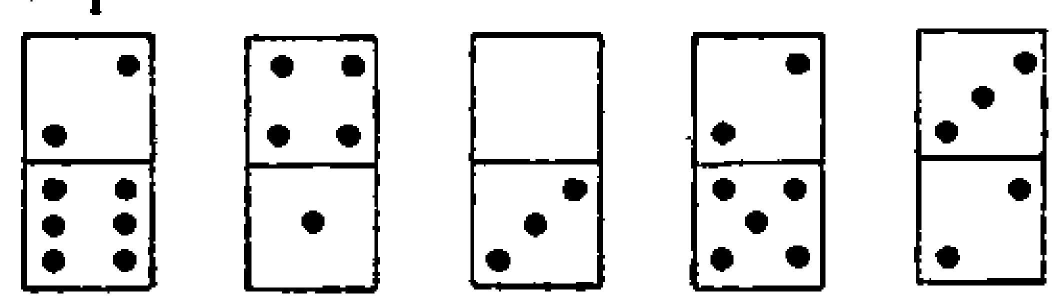


16 Para el siguiente problema, definimos el giro de una ficha como la rotación de ésta en *180°* respecto a su centro. Se interpretan las puntuaciones, superior e inferior, de una ficha de dominó como los términos de una fracción. Si los únicos movimientos válidos son los giros, ¿cuántos giros de fichas como mínimo se deben hacer para que la ecuación sea correcta?



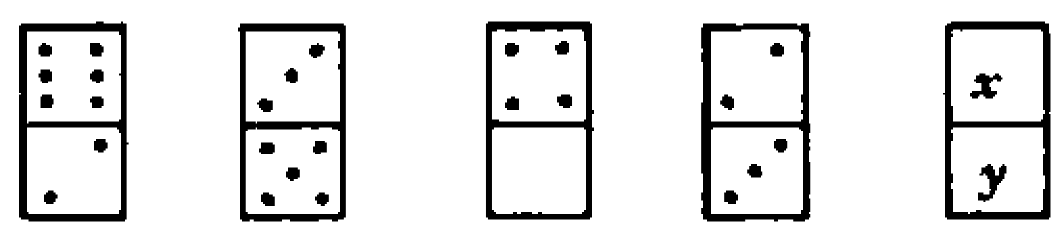
A)1 giro *B)2 giros*
C)3 giros *D)4 giros*
E)5 giros

17 ¿Cuántas de las cinco fichas de dominó mostradas deben invertirse, para que la suma de los puntos de la parte inferior, sea el triple que la suma de los puntos de la parte superior?



A) 4 *B) 2* *C) 1*
D) 5 *E)0*

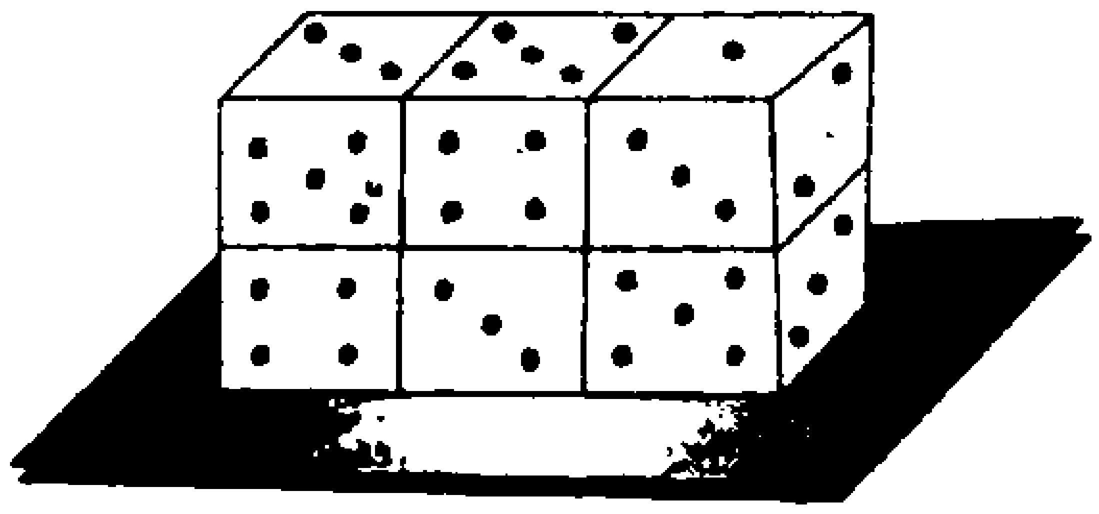
18 De las fichas que se muestran en el gráfico, hallar el mayor valor de *(x + y)*, para que la suma de puntos de la parte superior, sea igual a la suma de puntos de la parte inferior.



A) 5 *B) 6* *C) 7*
D) 9 *E) 11*

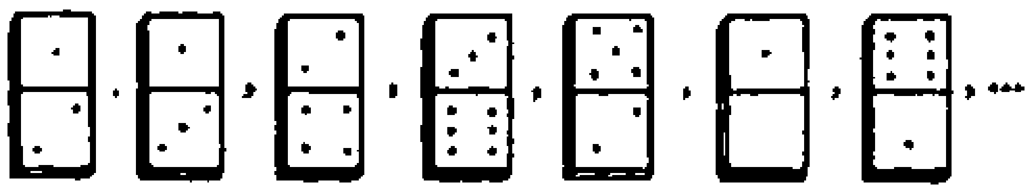
19 Sobre una mesa, Eric formó una ruma con seis dados tal como se muestra en la figura. Determinar la diferencia positiva entre los números que

representan al total de puntos como máximo que no son visibles con el total de puntos impares visibles para él.

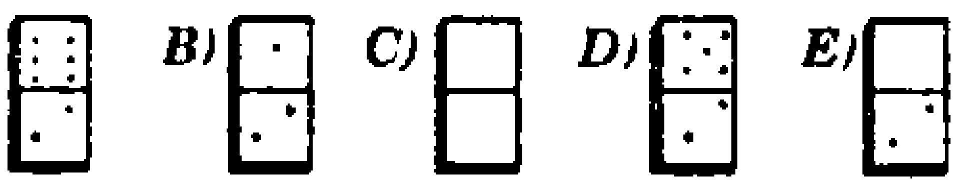


A) 33 *B) 36* *C) 32*
D) 34 *E)35*

20 En la siguiente secuencia de dominós, indique la ficha que continua.

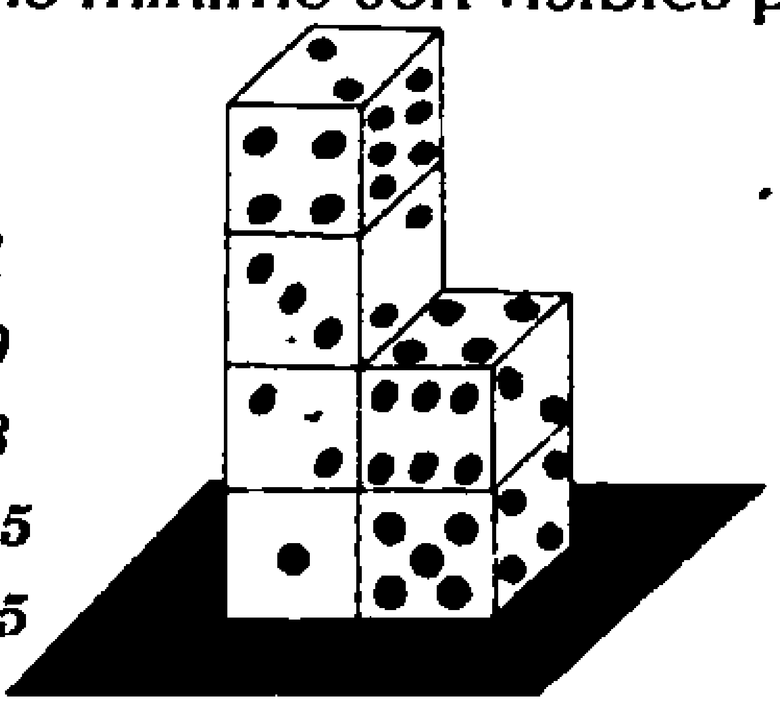


A) B) C) D) E)



21 Markito forma una torre con seis dados normales sobre una mesa, tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos puntos como mínimo son visibles para él?

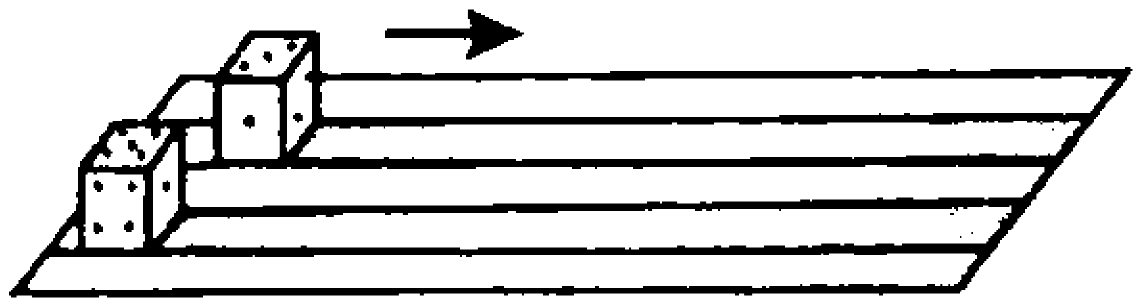
A)71
B)80
C)73
D) 65
E) 75



22 Se lanza tres dados normales sobre una mesa, y se observa que la cantidad de puntos de las caras superiores de los tres dados son diferentes. Si al multiplicar las cifras del producto, que se obtiene multiplicando los números que representan la cantidad de puntos que están en contacto con la mesa, se obtiene un valor mínimo. Halle la suma máxima de la cantidad de puntos de las tres caras superiores de los dados.

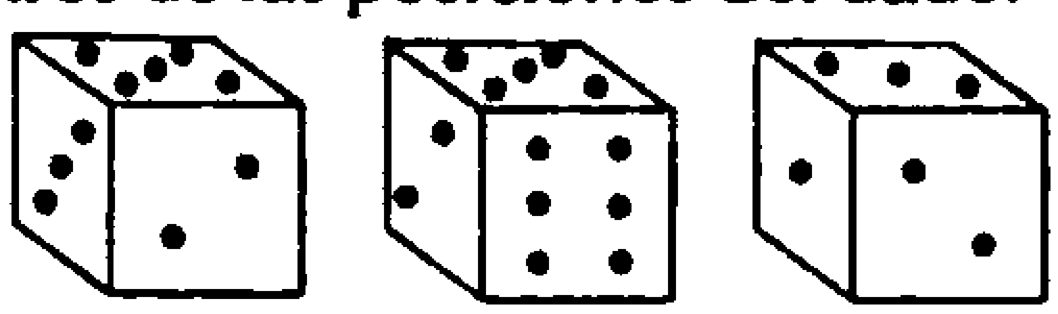
A) 12 *B) 13* *C) 14*
D) 15 *E) 16*

23 En la figura se muestra dos dados, los cuales rodarán sobre sus carriles correspondientes desde la posición mostrada en la dirección de la flecha. Si los dados dan dos vueltas y media, sin deslizarse, ¿cuántos de sus puntos resaltados en total después de la posición mostrada tendrán contacto con la superficie sombreada?



A) 64 *B) 67* *E) 70*
D) 73 *E) 61*

24 Se ha construido un dado especial. En la figura se observa tres de las posiciones del dado.



¿Qué número se opone al *4* y cuál al *1* respectivamente?

A) 3 y 5 *B) 2 y 5* *C) 6 y 3*
D) 2 y 4 *E) 5 y 2*

25 Cada cara de un dado se pinta de un color distinto. Pablo, Sara e Isabel cogen el cubo, y sin girarlo, dicen los colores de las caras que ven.

Pablo: *Azul, blanco, amarillo.*

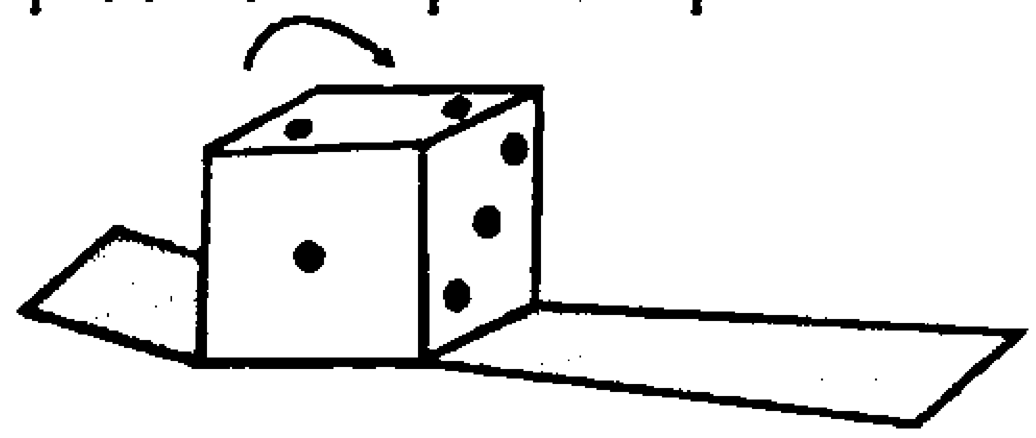
Sara: *Negro, azul, rojo.*

Isabel: *verde, blanco, negro.*

¿Cuál es el color de la cara opuesta a la que está pintada de blanco?

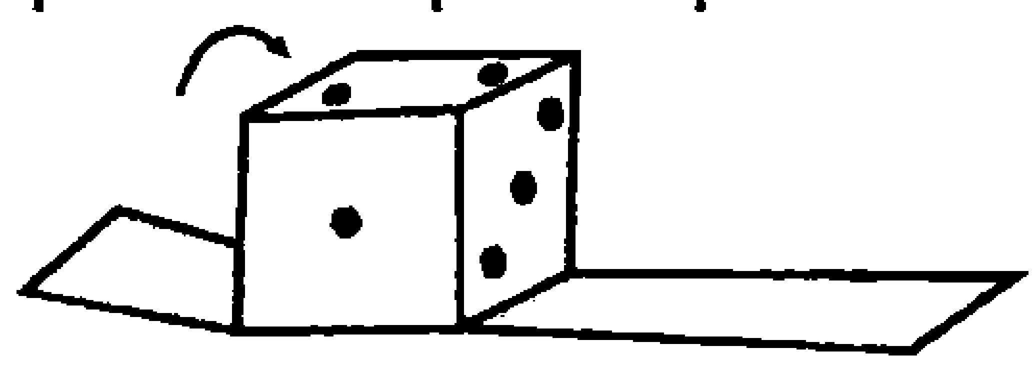
A) rojo *B) azul* *C) negro*
D) verde *E) amarillo*

26 En una dado común, la suma de los puntos ubicados en las caras opuestas, es *7.* El dado del gráfico se va volteando sobre sus caras a lo largo de la franja gris. Si lo volteamos *200* veces, ¿cuál es el puntaje de la cara que queda en su parte superior?



A) 2 *B) 5* *C) 6*
D)3 *E)4*

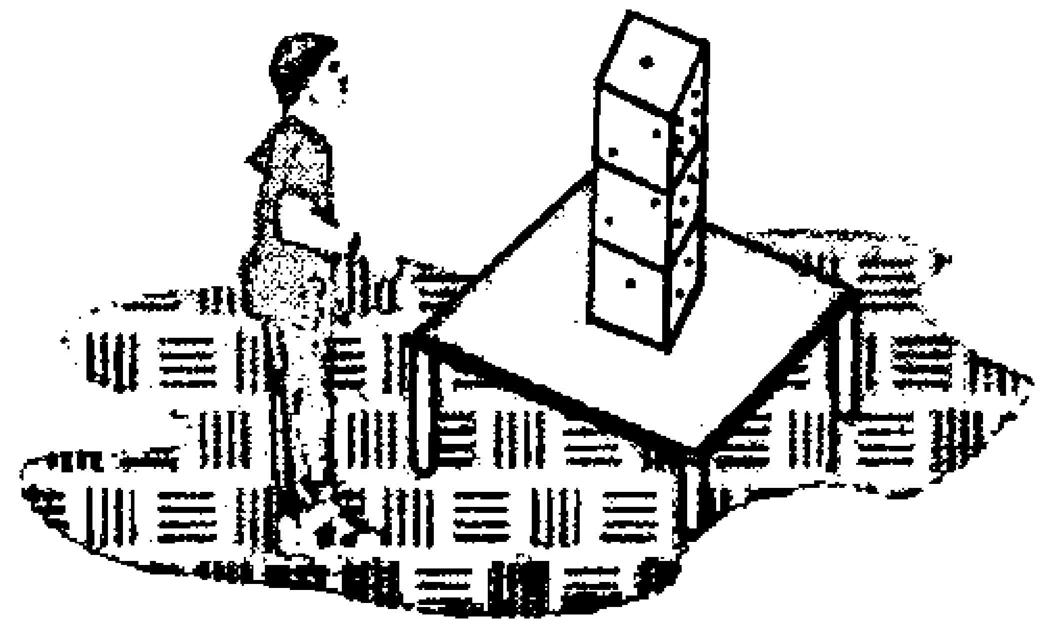
27 En un dado común, la suma de los puntos ubicados en las caras opuestas es *7.* El dado del gráfico se va volteando sobre sus caras a lo largo de la franja gris. Si lo volteamos *2009* veces, ¿cuál es el puntaje de la cara que queda en su parte superior?.



A) 2 *B) 5* *C) 6*
D) 3 *E)4*

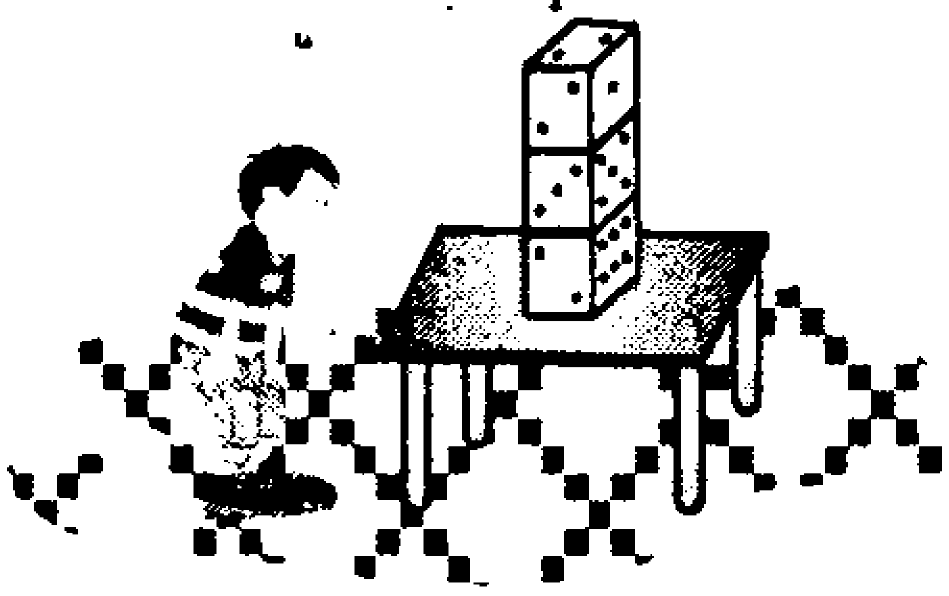
28 Sobre una mesa se muestran tres dados comunes, uno sobre otro. ¿Cuántos puntos podrá observar el joven como máximo?

Observación: El joven no debe tocar los dados.



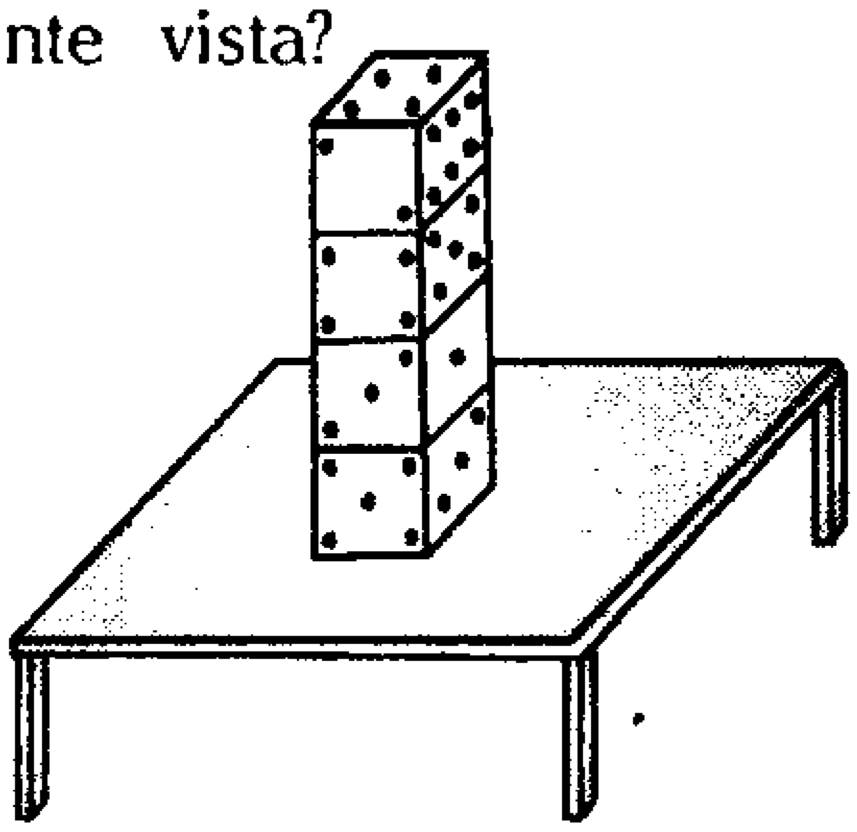
A) 38 *B) 40* *C) 41*
D) 43 *E) 48*

29 Un niño observa en una mesa *3* dados normales, da una vuelta alrededor de esta y suma todos los puntos que pudo ver. ¿Cuál es el total que obtuvo?



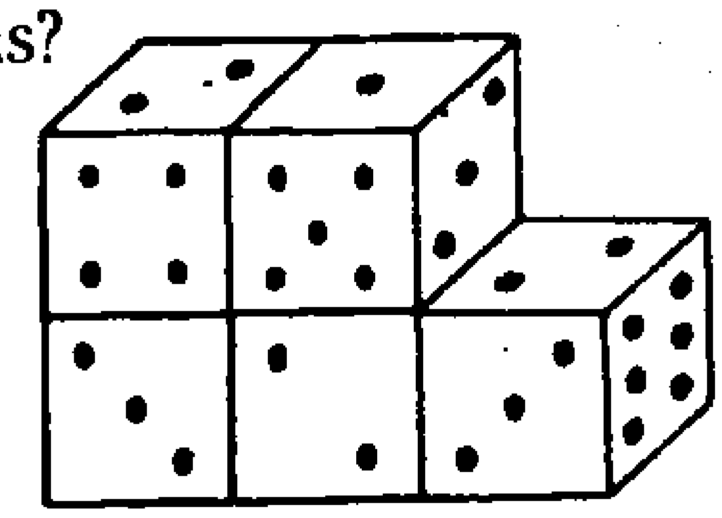
A) 49 *B) 46* *C) 45*
D)42 *E)48*

30 En el gráfico, se observan *4* dados comunes pegados.¿Cuántos suma en total los puntos ubicados en las caras no visibles , dadas la siguente vista?



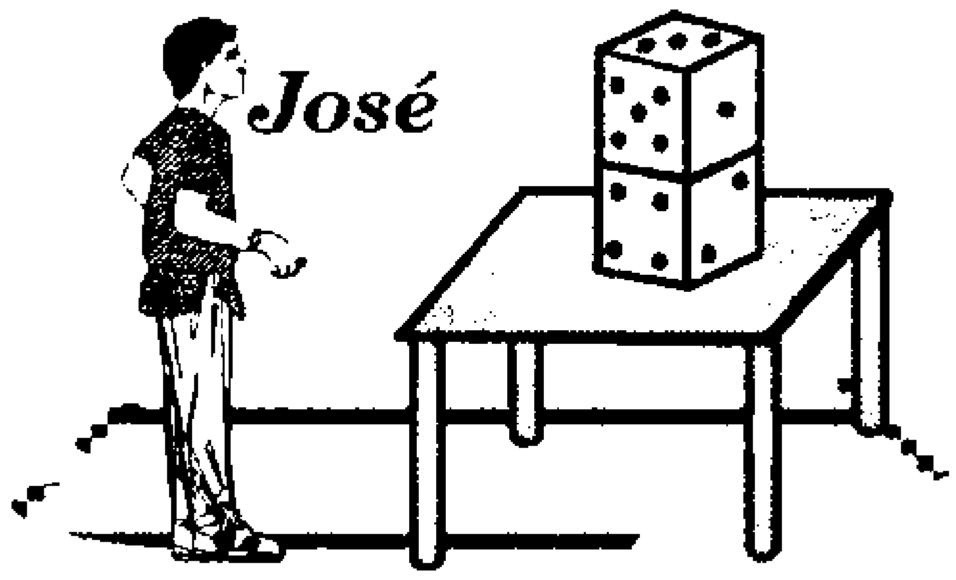
A) 51
B) 54
C) 52
D)60
E)53

31 El siguiente arreglo está conformado por dados comunes, no necesariamente iguales. ¿Cuántas caras no son visibles en la vista dada por el gráfico y cuánto suma el total de puntos contenidos en dichas caras?



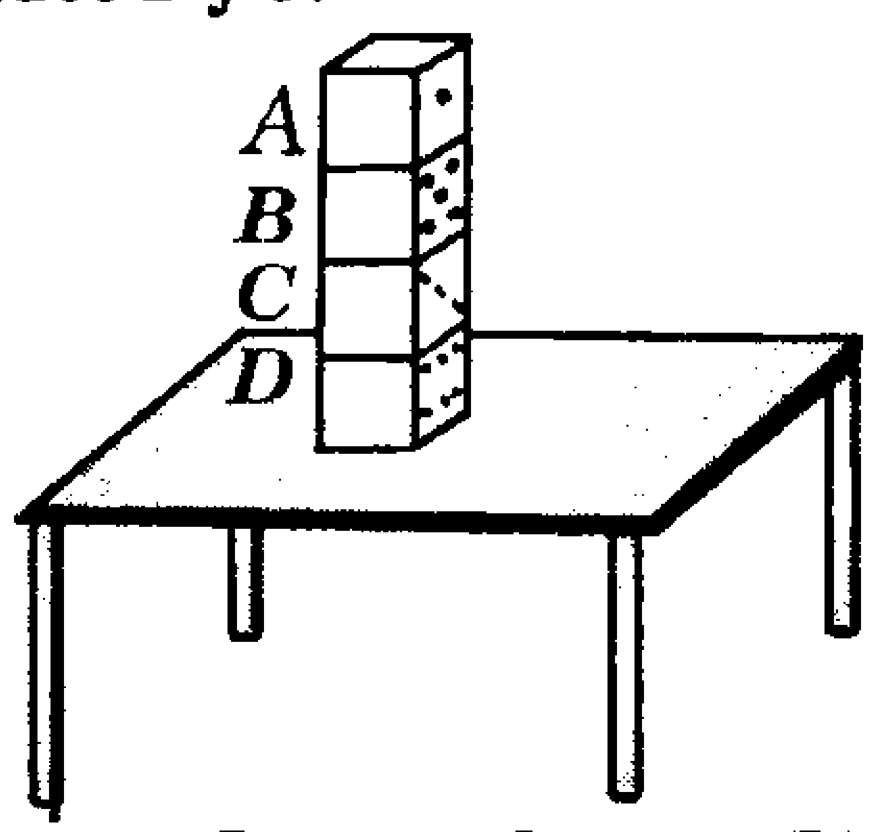
A) 18 y 74 *B) 20 y 72*
C) 22 y 76 *D) 20 y 74*
E) 18 y 72

32 En el gráfico, se observa dos dados normales sobrepuestos, ubicados sobre una mesa. José da una vuelta alrededor de la mesa sumando todos los puntos que son visibles para él. ¿Cuánto suman los puntos ubicados en las caras que José no pudo ver?



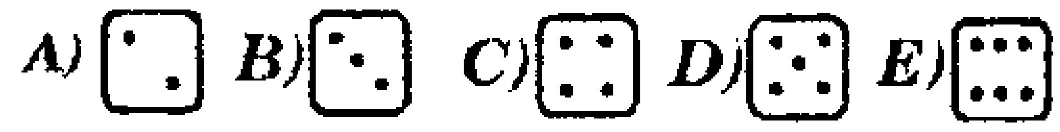
A) 10 *B) 14* *C) 11*
D) 12 *E) 9*

33 El gráfico muestra *4* dados comunes ubicados en columna. Si los puntajes de las caras en contacto de los dados ***A*** y ***B*** son iguales, asimismo, los puntajes de las caras en contacto de los dados ***C*** y ***D*** también son iguales, determine la menor suma de los puntajes que habría en las caras en contacto de los dados ***B*** y ***C***.

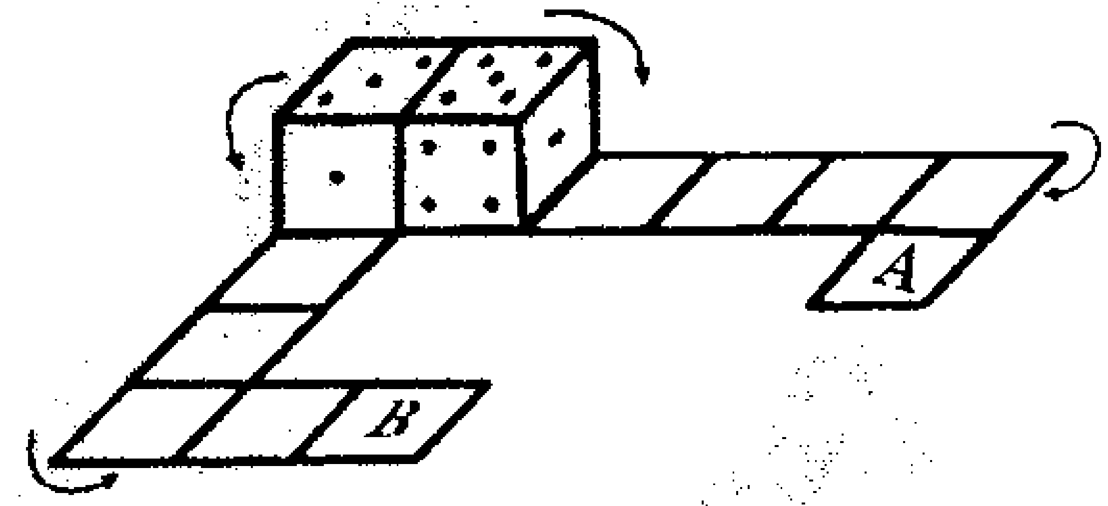


A) 2 *B) 3* *C) 4* *D)5*

34 Manuel lanza cinco dados comunes y le resulta cinco números distintos. Él los divide en dos grupos de modo que la suma de los puntos de las caras no visibles de cada grupo es la misma. Luego los reúne y los vuelve a dividir en dos grupos de manera que los puntos de las caras no visibles de un grupo sumen el doble que los puntos de las caras no visibles del otro grupo. ¿Qué resultado no obtuvo al lanzar los cinco dados?

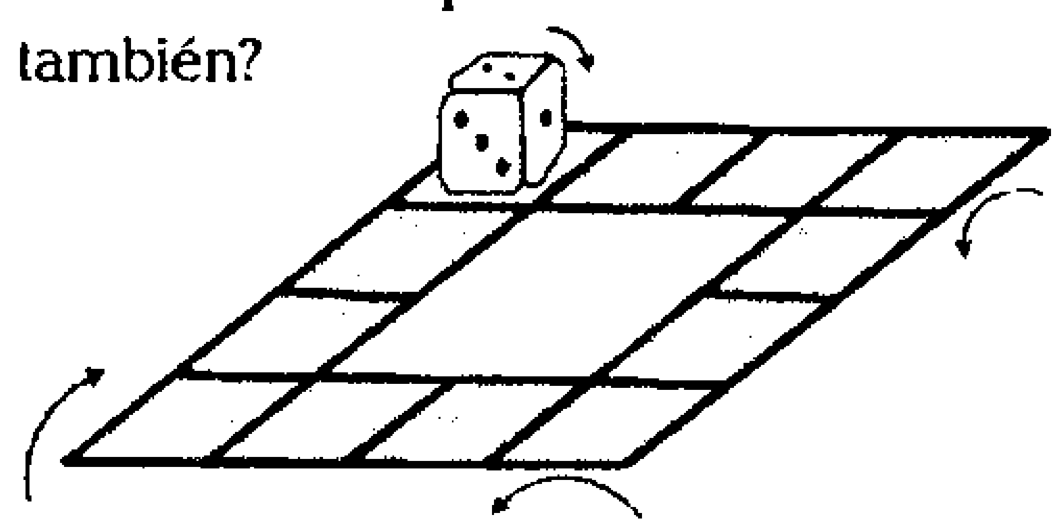


35 ¿Cuál es la suma de los puntos de las caras superiores al final del recorrido de los dados?



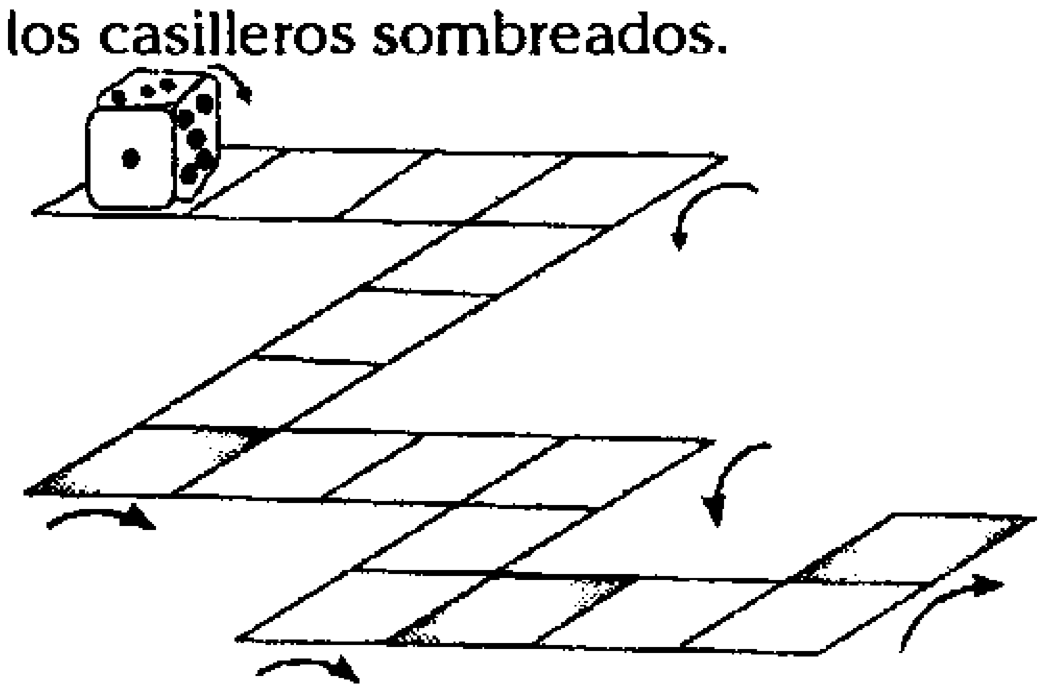
A) 7 *B) 10* *C) 6* *D)9*

36 Un dado común se encuentra en la posición mostrada en el gráfico y rueda a lo largo de los *12* cuadrados que conforman el camino sombreado. ¿Cuántas veces debe recorrer el camino, como mínimo, hasta que vuelva a su posición inicial con sus caras en sus posiciones iniciales también?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4*

37 Si el dado común gira sobre cada casilla cuadrada en los sentidos señalados por las flechas, indique la suma del total de puntos ubicados en la cara superior cuando el dado ocupe los casilleros sombreados.



A) 12 *B) 15* *C) 18* *D) 16*

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	E	C	B	A	B	D	B	D	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	B	C	A	B	B	C	C	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	B	B	B	A	A	E	D	D	A
31	32	33	34	35	36	37			
D	C	D	C	D	C	D			

OBJETIVO :

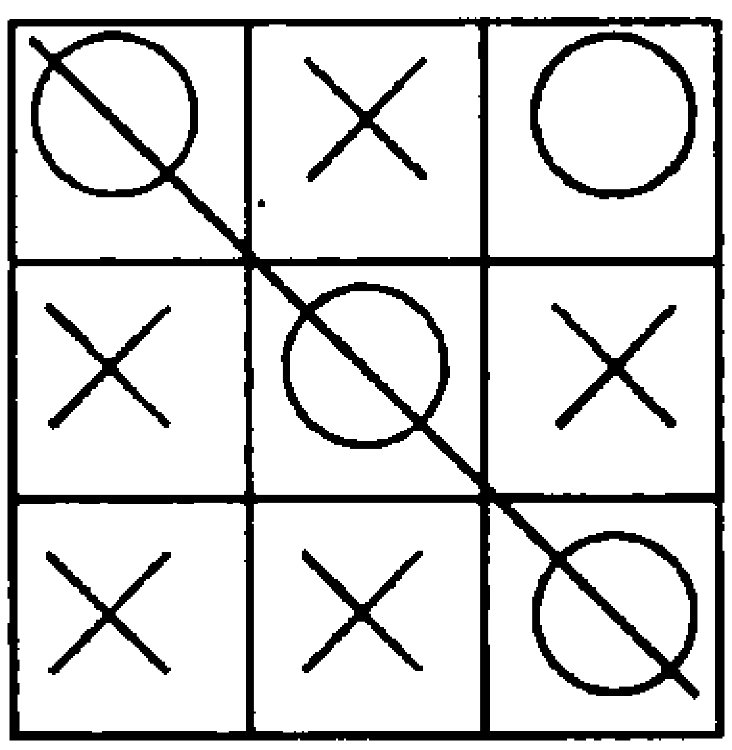
* Fomentar el ingenio y la creatividad de los alumnos a partir de la resolución de problemas con pesadas y cortes , facilitando el manejo de estrategias para aprender a pensar .

LA MATEMÁTICA Y LOS JUEGOS

La actividad matemática ha tenido desde siempre un componente lúdico que ha sido lo que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones más importantes que en ella han surgido.

La historia de la matemática está llena de pasatiempos, acertijos, juegos de ingenio, historias paradójicas, ilusiones ópticas. El carácter lúdico ha dado importantes frutos al desarrollo aplicado y teórico de la matemática.

Los juegos han sido estudiados a lo largo de la historia, e incluso se han establecido modelos matemáticos desarrollando una serie de técnicas y algoritmos que resuelven los juegos conocido como ***teoría del juego***, que señala que un juego está constituido por su descripción, el número de jugadores que pueden participar, los objetivos que se desea lograr en el juego, los materiales utilizados, las reglas del juego y sus variantes.



¿Te acuerdas la primera vez que jugaste tres en raya (un juego muy conocido por la mayoría)? De seguro perdiste, quizá fue por tu inexperiencia o porque no tenías bien en cuenta las reglas o los objetivos , por ello no pensastes en alguna estrategia, la cual si es aplicada correctamente es muy importante en el desarrollo del juego. Sufrimos muchas derrotas, pero estas también tienen un grado de importancia para mejorar nuestra estrategia. También son muy conocidos los juegos de tablero.

En la mayoría de estos, los dos bandos que se enfrentan son idénticos. En el ajedrez, en el backgammon, en el go, en las damas, uno y otro jugador tienen el mismo objetivo, las mismas piezas que se mueven de la misma manera, desde la misma posición inicial. Sin embargo, hay unos pocos juegos donde se enfrentan bandos desiguales.

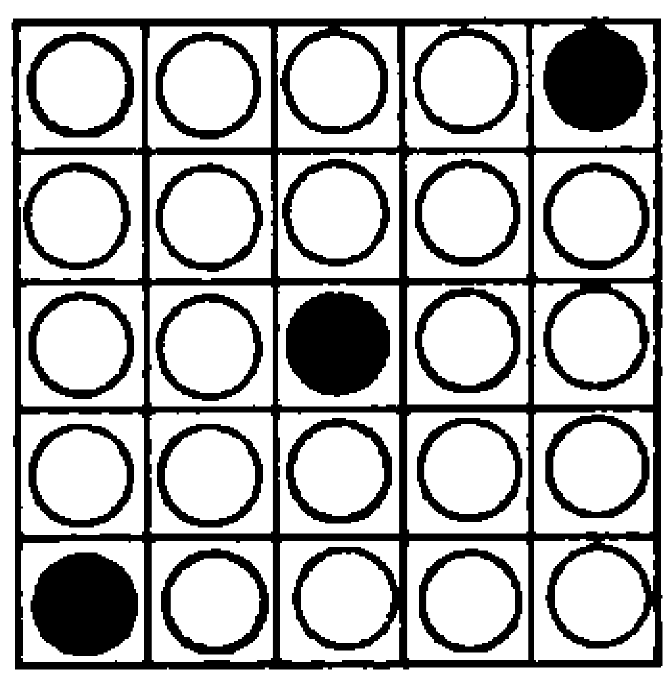
Hoy te presentamos un buen juego de bandos desiguales:

LOS TRES MOSQUETEROS

Se juega sobre un tablero de cinco por cinco casillas. Los tres mosqueteros, aquí de color más oscuro, empiezan en esquinas opuestas y en el centro. Todas las demás casillas están ocupadas por los *22* soldados del rey, aquí de color gris claro. *¿Un combate injusto?* No, porque aunque los mosqueteros sean menos también son más hábiles, y porque los objetivos de cada bando son diferentes. Cada jugador mueve una de sus fichas por turno. Un mosquetero mueve a una casilla vecina en horizontal o vertical que esté ocupada por un soldado. Cuando ocurre esto, el soldado es liquidado y se lo retira del tablero de inmediato. Por su parte, un soldado mueve a una casilla vecina en horizontal o vertical que esté vacía. No puede capturar a los mosqueteros: son demasiado hábiles.

Los soldados ganan si logran que los tres mosqueteros queden sobre la misma fila o columna. Los mosqueteros ganan si ya no pueden mover, porque todas sus casillas vecinas están vacías.

Puedes construirlo sobre papel o cartón y usar monedas, botones o fichas de otro juego. ***¿Qué bando elegirías y cuál sería tu estrategia ganadora?***



Juego de los tres mosqueteros

PROBLEMAS SOBRE PESADAS

En este tipo de problemas generalmente se debe calcular el número mínimo de pesadas para identificar el objeto que pesa más de un conjunto de elementos iguales.

! RECUERDE ¡

Se n el total de elementos de apariencia y peso igual , a excepción de una de ellos, y se cuenta con una balanza de **2** platillos.

Para determinar el número mínimo de pesadas necesarias para determinar el elemento de peso distinto , utilizamos la siguiente relación :

$$3^{k-1} < n \leq 3^{k} ; k \in \mathbb{Z}^{+}$$

donde k es el número de pesadas necesarias.

EJEMPLO 1 :

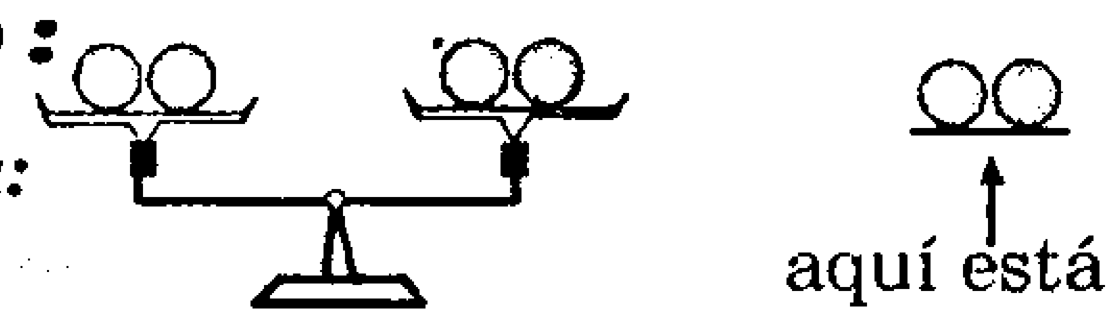
Se tiene ***6*** esferas todas de igual peso de apariencia, a excepción de una que pesa ligeramente más que el resto. Si se cuenta con una balanza de dos platillos, ¿cuántas veces se tendrá que usar, como mínimo, dicha balanza para identificar a la esfera más pesada?

RESOLUCIÓN:

De las ***6*** esferas, separamos tres grupos de ***2*** esferas cada uno, y comparamos dos de ellos en la balanza:

1ER CASO :

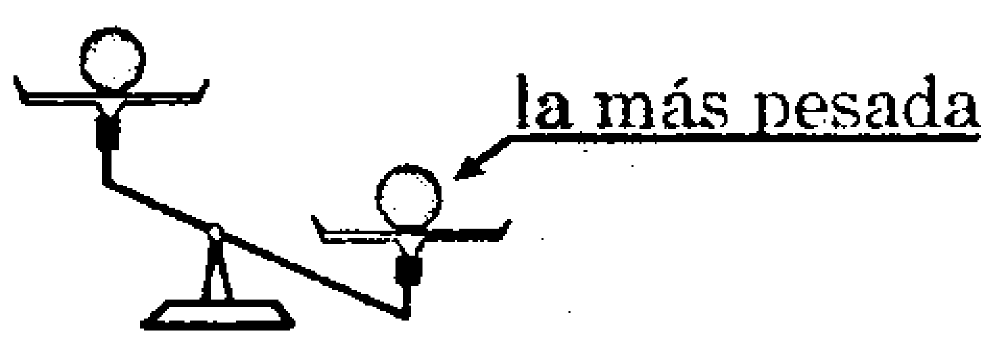
1era Pesada:



si está en equilibrio — aquí está la más pesada

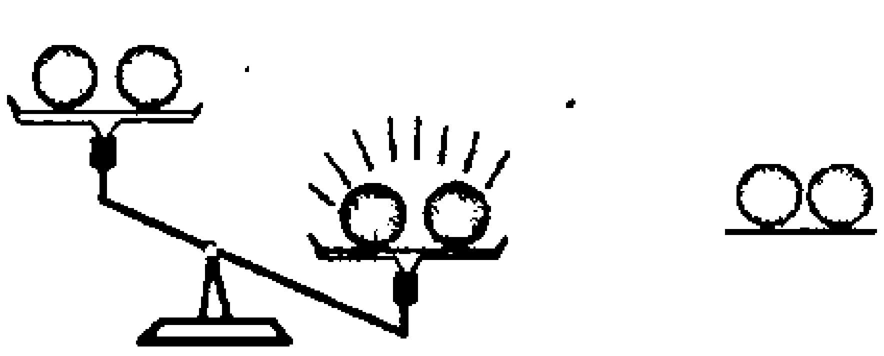
2da Pesada:

Comparamos esas dos últimas.



2DO CASO :

1era Pesada:



si resulta la balanza desequilibrada
⇒Aquí está la más pesada

2da pesada

comparamos estas dos esferas como en el caso anterior.

** Para ambos posibles resultados de la primera pesada, se necesitan solo dos pesadas , como mínimo.*

EJEMPLO 2 :

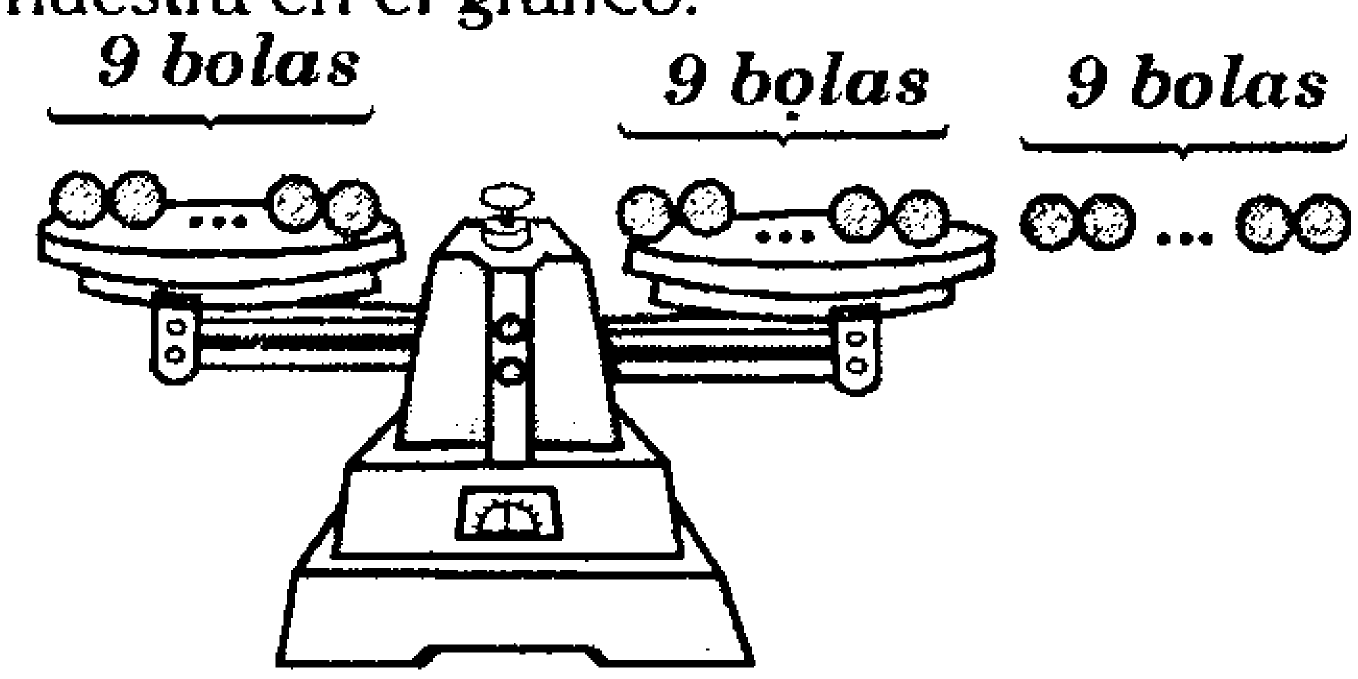
Hay ***27*** bolas de billar que parecen idénticas, sin embargo, hay una defectuosa que pesa más que las otras. Disponemos de una balanza de dos platillos, pero no de un juego de pesas, de manera que lo único que podemos hacer es comparar pesos. ¿Cuál es el número mínimo de pesadas necesarias para ubicar la bola defectuosa?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

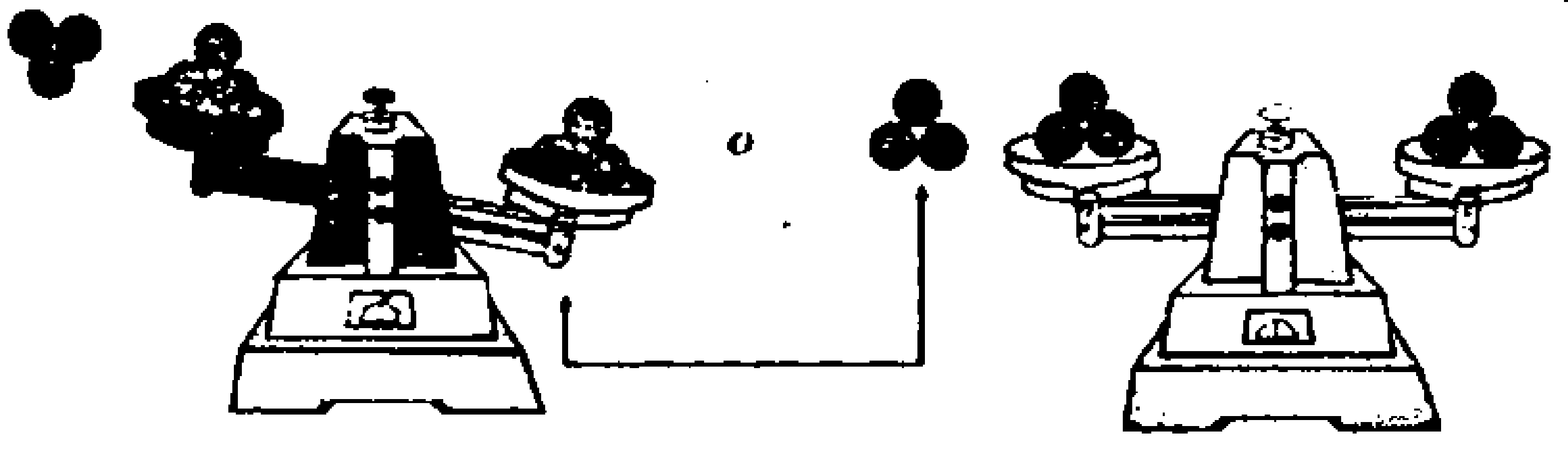
Según el enunciado, hay ***26*** bolas de billar de igual peso y una bola de billar con mayor peso que las demás (defectuosa). Solo podemos utilizar una balanza de dos platillos para encontrar (con seguridad) la bola defectuosa; sin embargo, debemos hallarla en el menor número de pesadas, por lo que debemos trazar un plan de cómo efectuar las pesadas y decidir si es conveniente formar grupos.

• Procedemos a dividir las ***27*** bolas de billar en tres grupos de igual número de bolas y luego a comparar los pesos de los dos primeros, como se muestra en el gráfico.



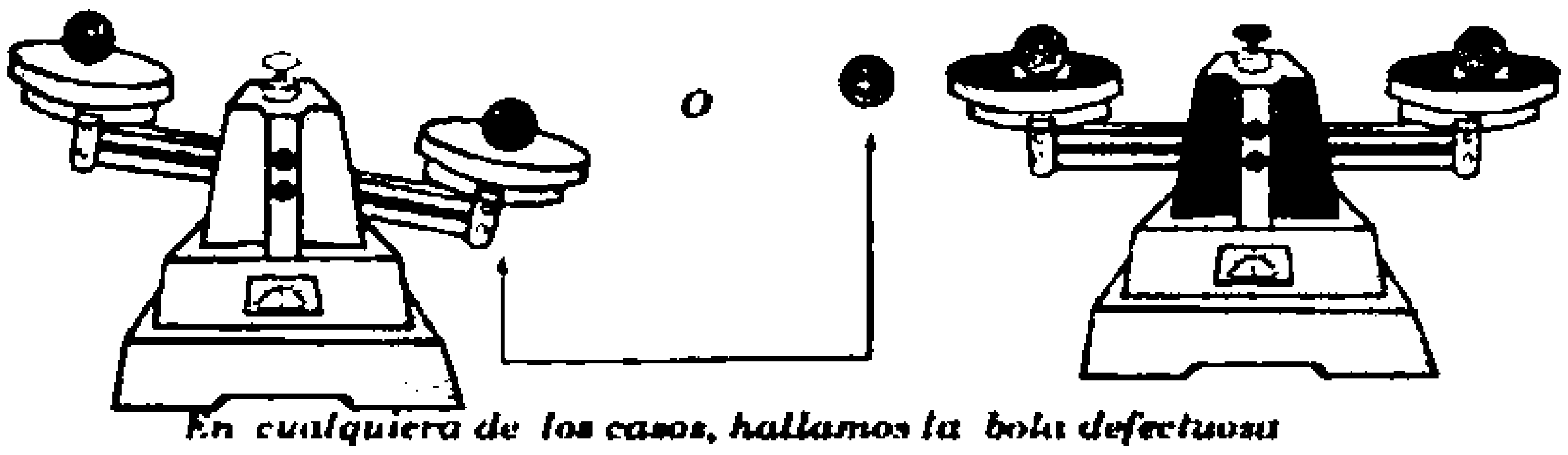
Si hay desequilibrio, aseguramos que la bola defectuosa se encuentre en cualquiera de los grupos que inclina más la balanza. Pero si hay equilibrio, afirmamos con seguridad que la bola defectuosa está en el tercer grupo. Entonces, con una pesada, aseguramos que la bola defectuosa se encuentra en cualquier grupo de ***9*** bolas.

• De forma similar procedemos a dividir ese grupo de nueve bolas en tres grupos de tres bolas cada uno; comparamos el peso de dos grupos y se presentan los casos.



En uno de estos grupos se encuentra la bola defectuosa

Después de dos pesadas, nos quedamos con tres esferas (una de ellas es la bola defectuosa). Para hallarla con seguridad, realizamos una pesada más.



En cualquiera de los casos, hallamos la bola defectuosa

Por lo tanto, son necesarias, como mínimo, tres pesadas.

• ***En conclusión***, se tienen ***n*** esferas de apariencia y peso igual, a excepcion de una de ellas, y se cuenta con una balanza de ***2*** platillos, el número de pesadas necesarias para determinar la esfera de peso distinto está dado por la siguiente relación

$$3^{k-1} < n \leq 3^k ; k \in \mathbb{Z}^+$$

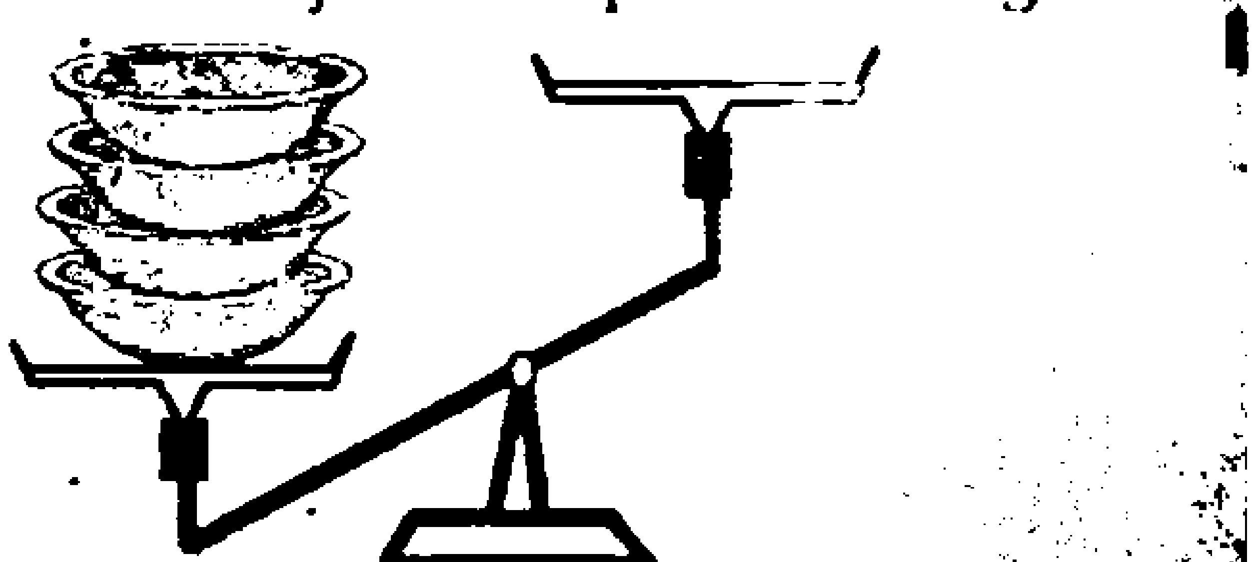
donde ***k*** es el número de pesadas necesarias.

• En el problema: $3^2 < 27 \leq 3^3 \Rightarrow k = 3$

EJEMPLO 3 :

Las balanzas mostradas están en equilibrio.

¿Con cuántas naranjas se equilibra la siguiente balanza?

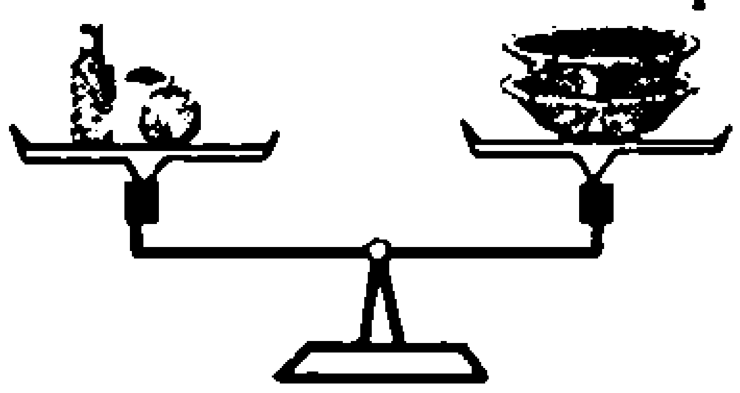


A) 11
B) 8
C) 12
D) 10

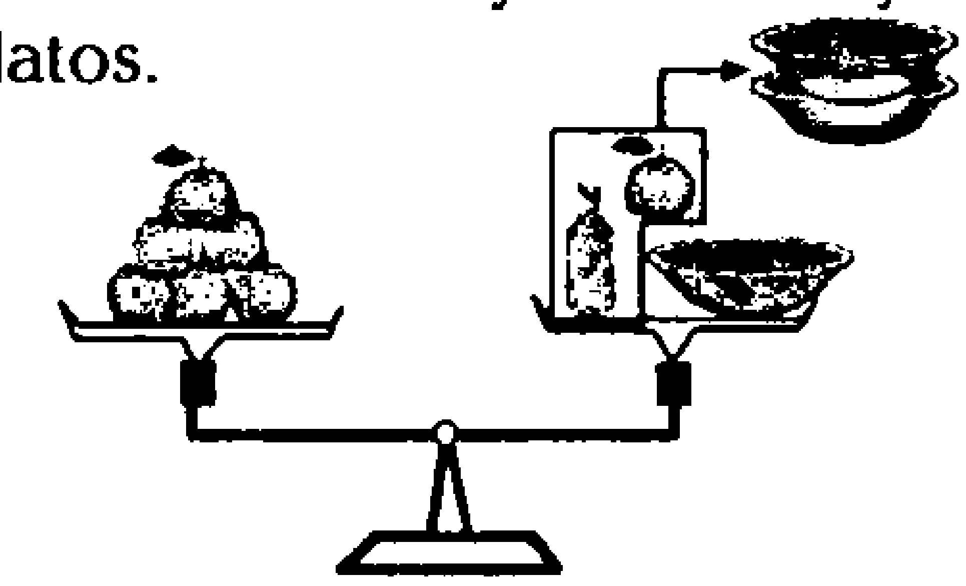
RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad de naranjas que equilibra la balanza que tiene ***4*** platos iguales.

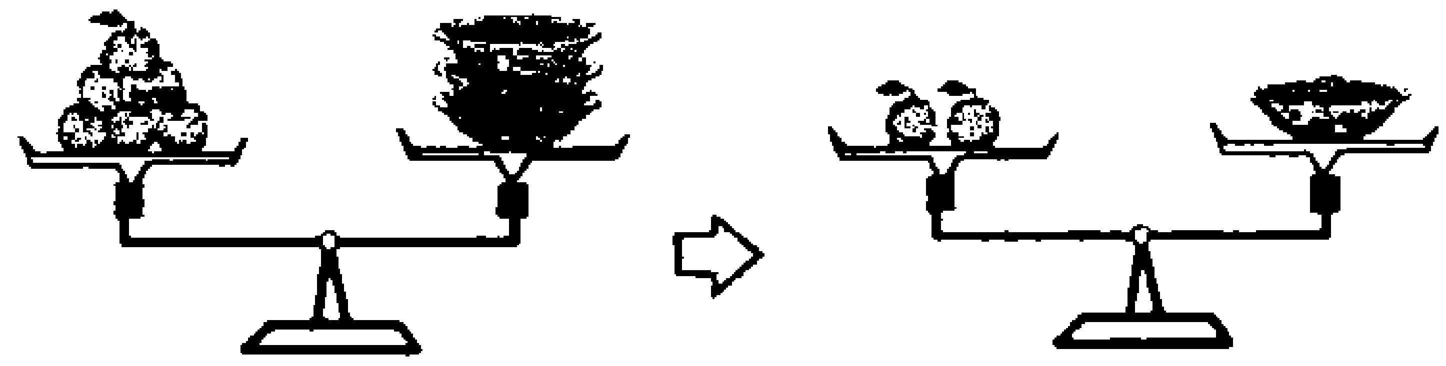
En el gráfico de las balanzas en equilibrio.



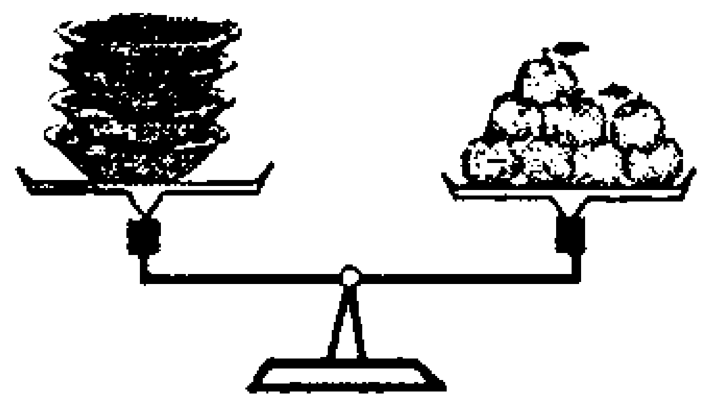
* El peso de una botella y una naranja equivale al de dos platos.



* Del equilibrio mostrado, aumentamos una naranja en cada platillo, de manera que la botella y la naranja se reemplace con ***2*** platos.



* Dos naranjas pesa igual que un plato.



¡En equilibrio!

$\Rightarrow$ ***8*** naranjas equilibra la balanza.

RPTA : "B"

PARTICIONES GEOMETRICAS

En este tipo de problemas generalmente se debe calcular el número mínimo de cortes o trazados de líneas , para determinar el máximo número de partes de una figura plana o tridimensional , no necesariamente las partes a obtener son de igual tamaño y forma.

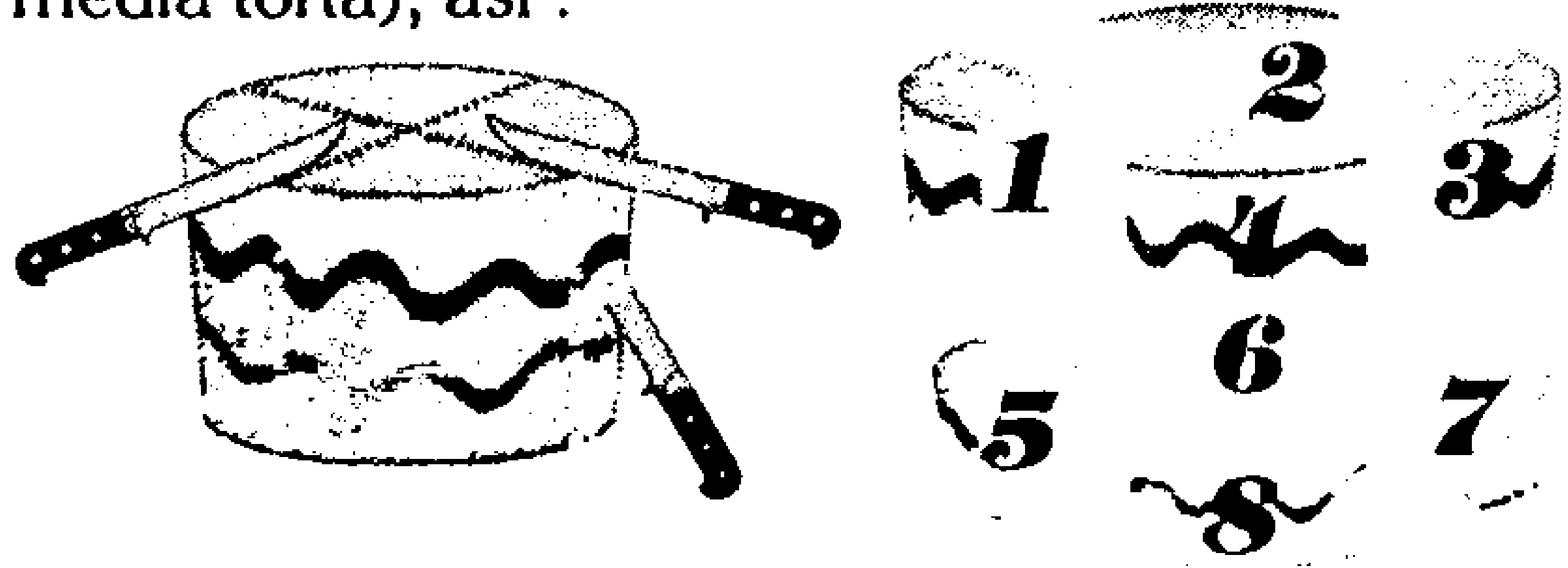
EJEMPLO 1 :

¿Cuántos cortes rectos como mínimo se debe realizar a una torta en forma cilíndrica para repartir en partes iguales a ***8*** niños?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

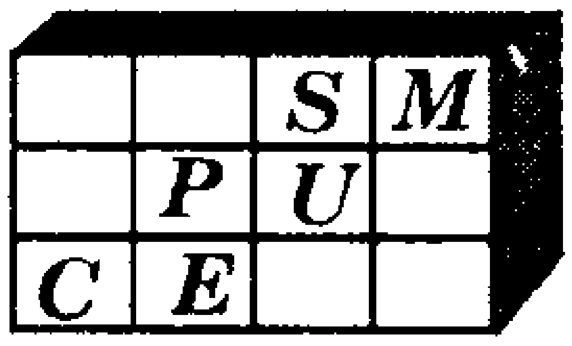
* Debemos tener ***8*** pedazos , por lo que tenemos que hacer ***2*** cortes verticales y ***1*** transversal (en media torta), así :



RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

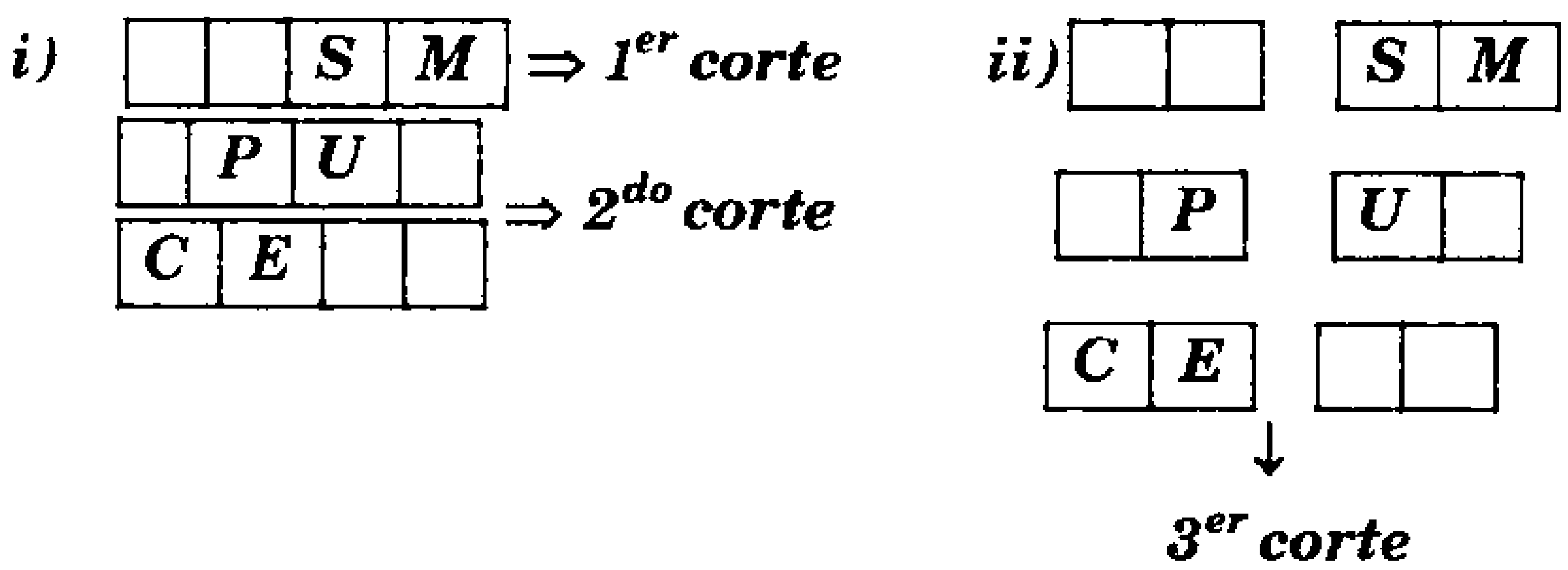
En la figura ,se tiene un trozo de madera cuadriculada de *1cm* de espesor ,el cual será cortado por una sierra eléctrica para obtener seis cuadritos con las letra ***"C", "E", "P", "U", "S"*** y ***"M"***. Si la sierra no corta más de *1cm* de espesor ¿cuántos cortes rectos como mínimo debería realizarse?



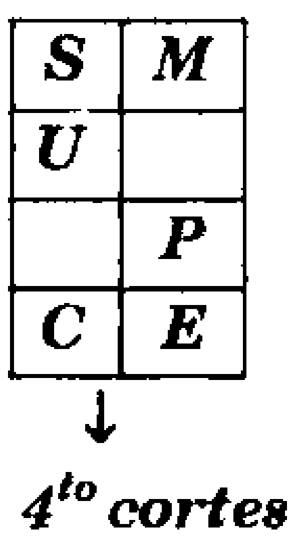
A)5 *B)3* *C)7* *D)4* *E)6*

RESOLUCIÓN :

Se tiene:



iii) Juntamos los bloques encerrados y cortamos

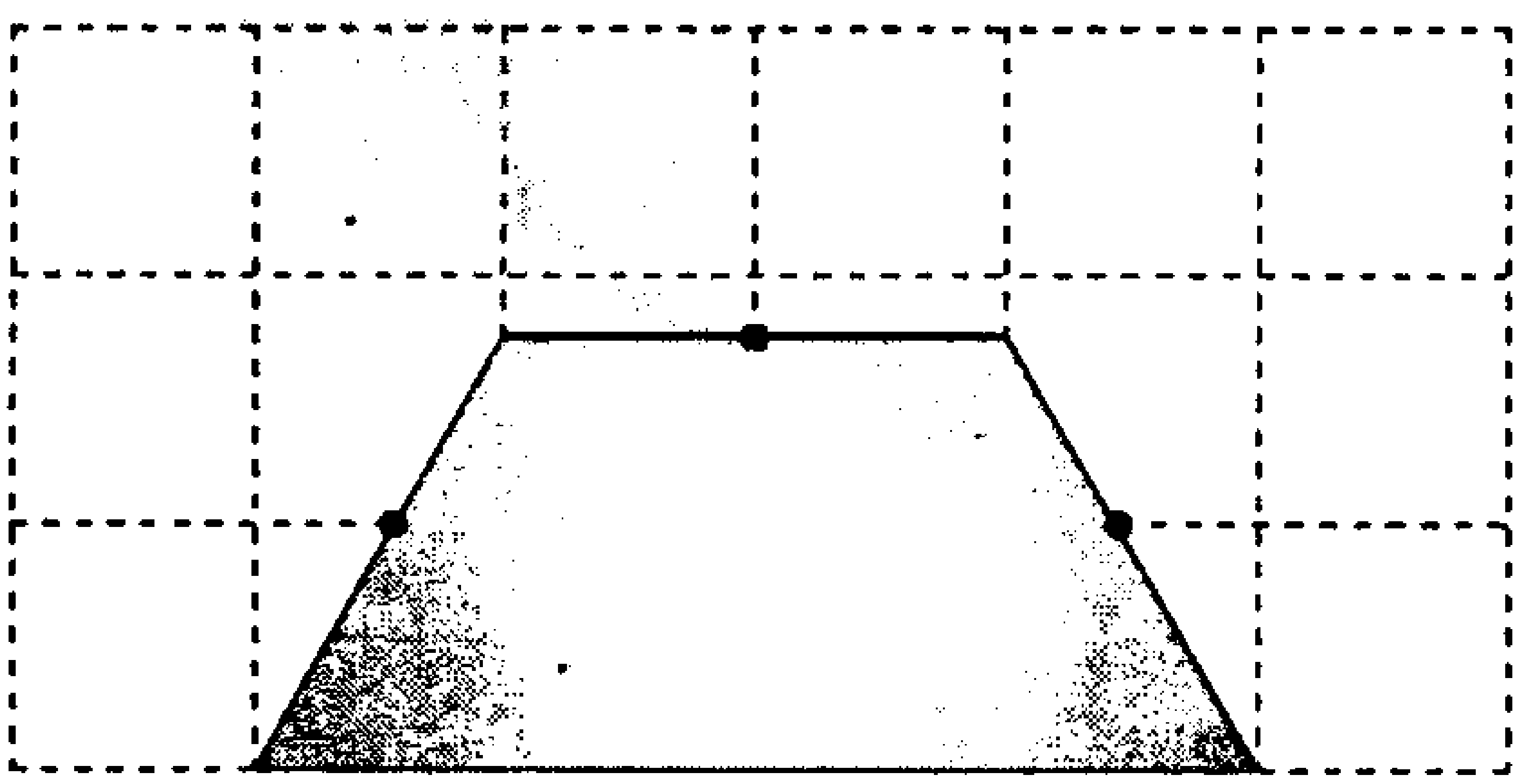


Luego , como mínimo se deben realizar *4* cortes .

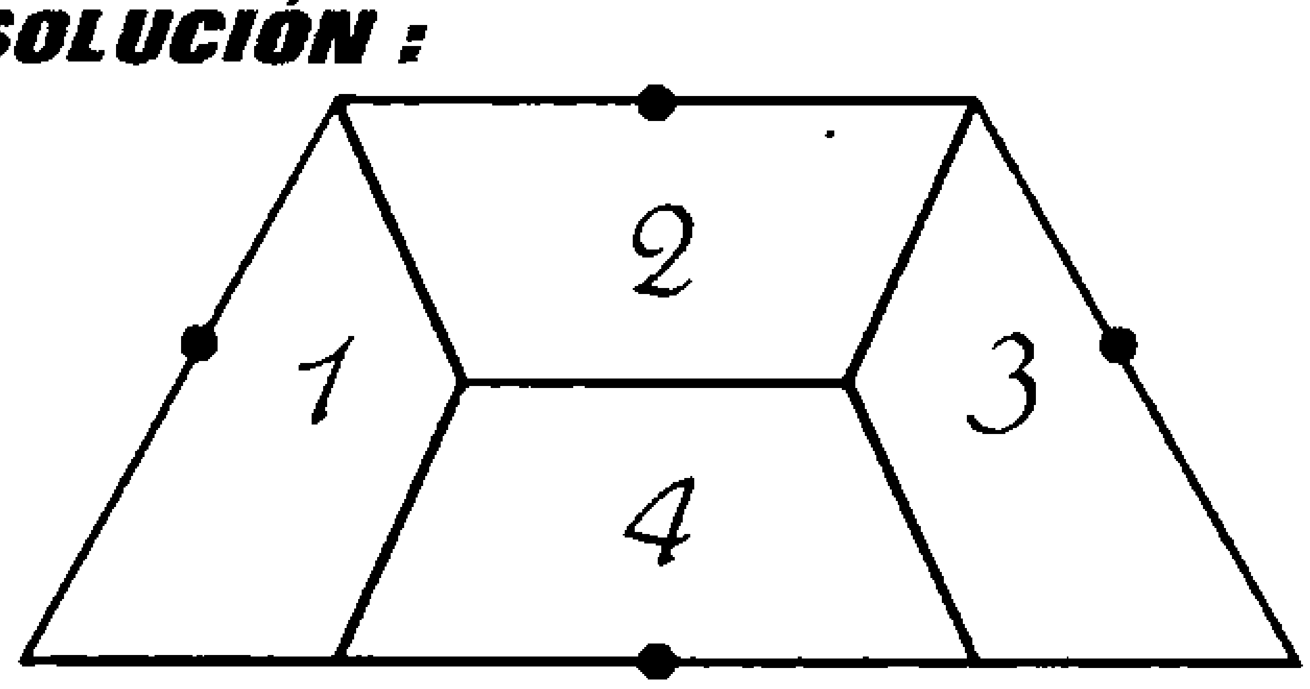
RPTA : "D"

EJEMPLO 3 :

Dividir la figura sombreada en *4* partes iguales en forma y tamaño :

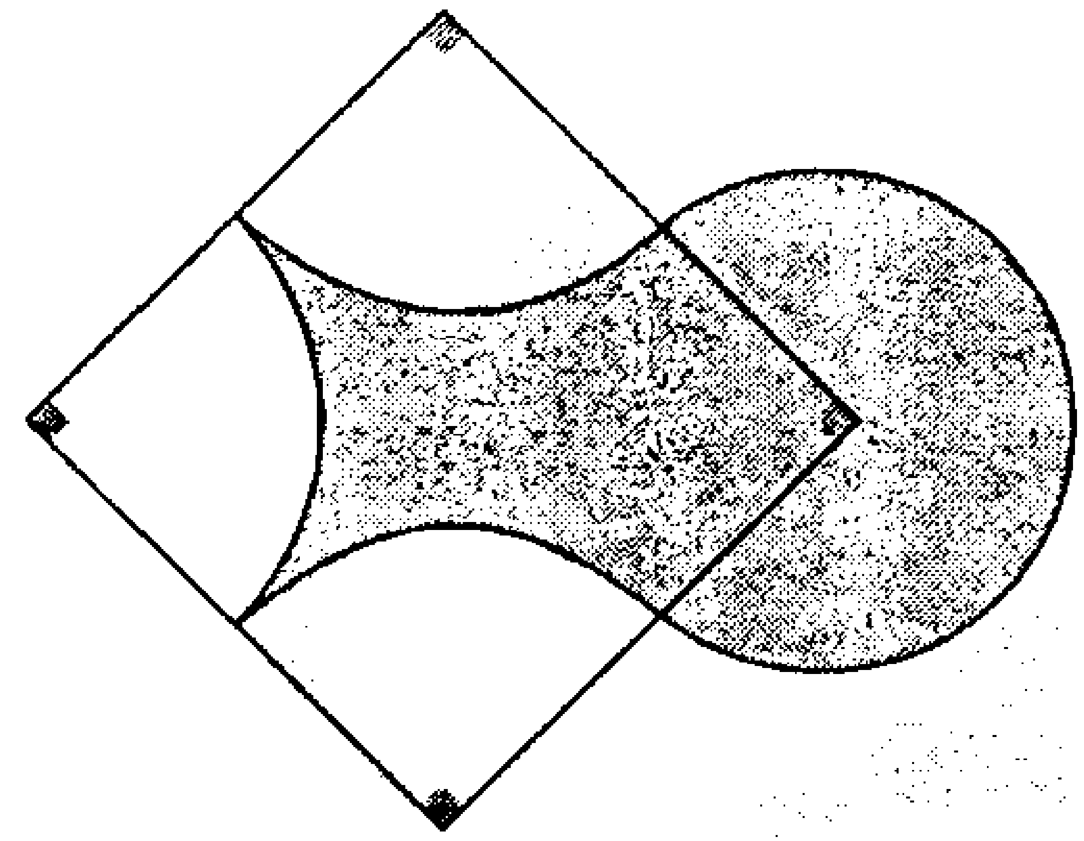


RESOLUCIÓN :

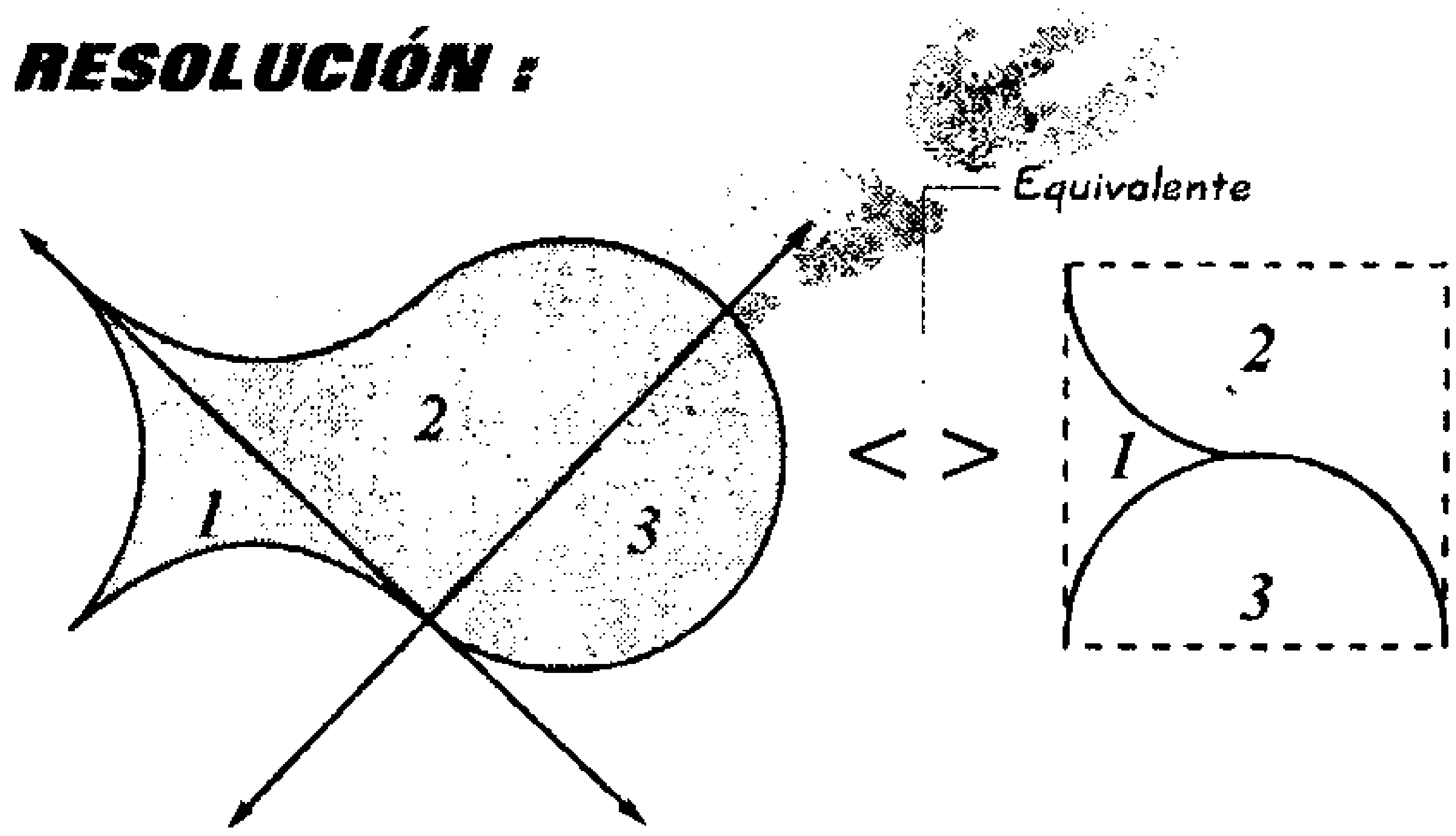


EJEMPLO 4 :

Divida la figura sombreada en tres partes con únicamente *2* cortes rectos, de modo que las *3* partes puestas juntas de otro modo, formen un cuadrado.

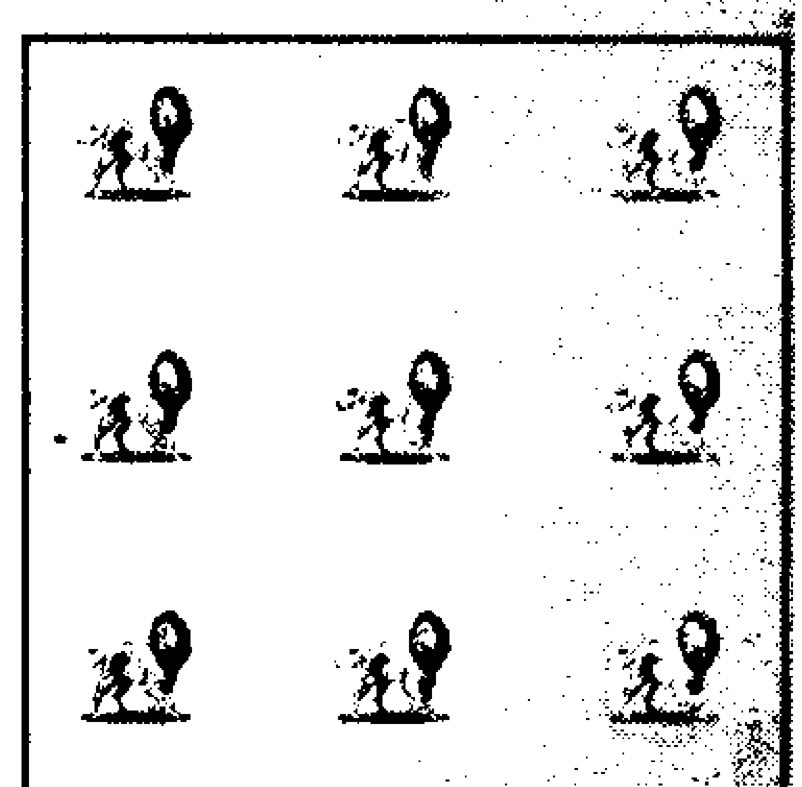


RESOLUCIÓN :



EJEMPLO 5 :

En un recinto cuadrado del zoológico hay nueve leones.

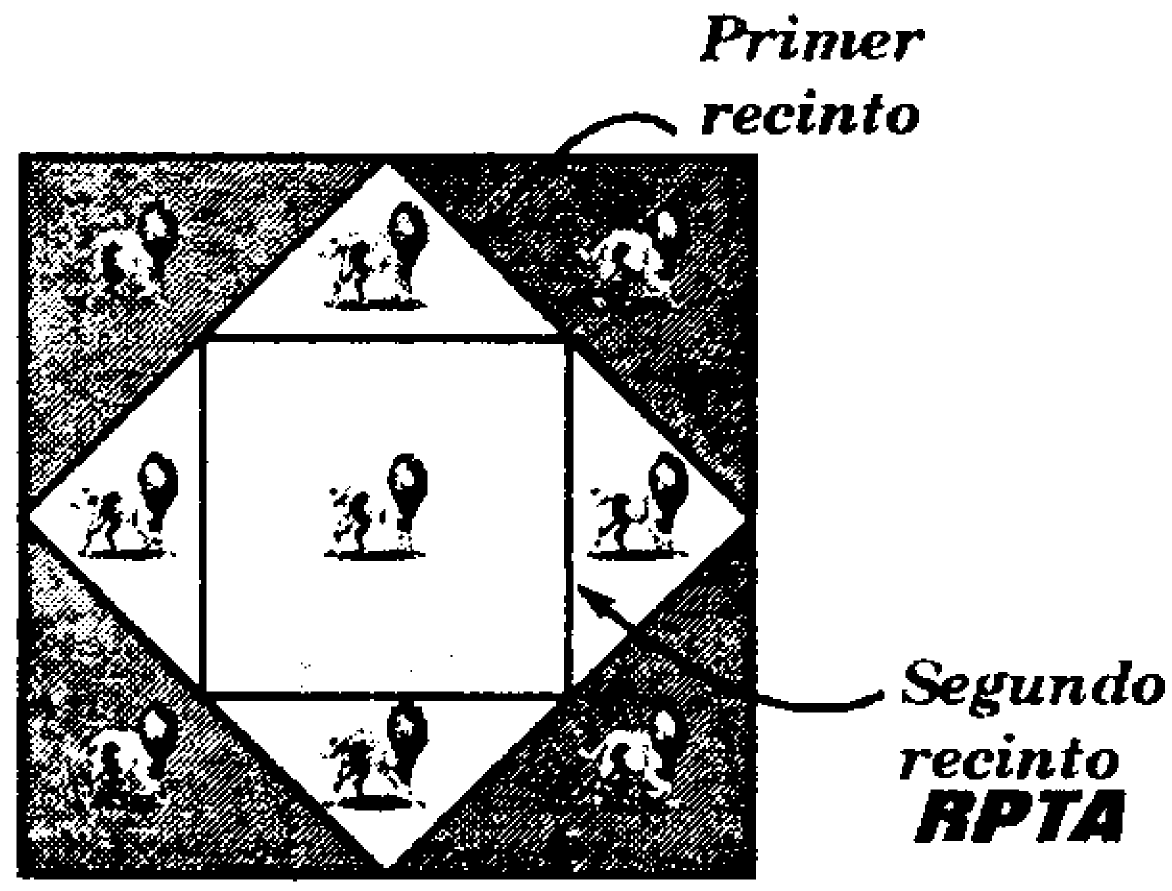


¿Cuántos recintos cuadrados, como mínimo, se deben construir de tal manera que cada león permanezca en un recinto separado?

A) 1 *B) 2* *C)3* *D) 4* *E)5*

RESOLUCIÓN:

Basta construir *2* recintos cuadrados:



RPTA : "B"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 27 :

Tenemos *9* bolas, una de las cuáles pesa menos que el resto. Averiguar cuál es , utilizando una balanza de dos platillos la menor cantidad de veces posible.

RESOLUCIÓN :

Si tengo que decidir qué bola es la más ligera de dos posibles, basta poner cada una en un platillo y compararlas. ¿Y si tengo que elegir entre tres candidatas? Pues, simplemente, ponemos una bola en cada platillo y dejamos otra fuera. Si la balanza está desequilibrada, compruebo cuál es más ligera y, si está equilibrada, la más ligera es la que se ha quedado fuera.

Por tanto, el objetivo será quedarse sólo con tres «finalistas». ¿Cómo lo haremos? Realizando el mismo procedimiento pero con grupos de tres. Separo las nueve bolas en tres grupos de tres y comparo dos de esos grupos. Si la balanza está desequilibrada el grupo más ligero de tres bolas será el de las finalistas. Si está equilibrada será el grupo que se ha quedado fuera.

Así, ***bastan dos pesadas*** para comprobar cuál de las nueve es la que pesa menos que el resto.

OBSERVACIÓN :

Este es un claro ejemplo de cómo dos problemas casi idénticos en su enunciado, pueden ser radicalmente diferentes en su dificultad. Si en vez de decir que una bola pesa *menos* que el resto dijéramos que pesa *más*, el problema sería idéntico en su forma de resolución. Ahora bien si la condición fuera que hay una bola cuyo peso es *distinto* (sin saber si es mayor o menor) al del resto, la dificultad aumenta enormemente. La solución ocupa un folio repleto de posibles casos y la prueba de lo poco intuitivo de su resolución es que, aunque yo la obtuve en su día, hoy tendría que dedicar un cierto tiempo para *recuperarla* en su totalidad.

OBSERVACIÓN :

El problema generalizado para la «*x*» bolas , la respuesta será "***n***",

Donde : $3^{n-1} < x \leq 3^{n}$

EJEMPLO :

Para *147* bolas , se tendrá que ubicar el *147* entre las *2* potencias de *3* más cercanas a *147* , es decir :

$3^{4} < 147 \leq 3^{5}$ ⟶ ***Se necesita 5 pesadas como mínimo***

$3^4 \downarrow 81$; $3^5 \downarrow 243$

PROBLEMA 2 :

El amigo Jacinto tiene doce monedas, pero sabe que una de ellas es falsa, esto es, que tiene un peso mayor que el peso de cada una de las restantes. Le dicen que use una balanza de dos platillos y que con solo tres pesadas averigüe cuál es la moneda de peso diferente.

RESOLUCIÓN:

Jacinto separa las monedas en tres conjuntos de cuatro monedas cada uno. Coloca cuatro monedas en un plato y cuatro en el otro. Las otras cuatro monedas las deja sobre la mesa. Si los dos platos de la balanza se equilibran quiere decir que la moneda falsa es una de las cuatro de la mesa. En cambio si uno de los platos pesa mas que el otro, es éste el que tiene la falsa moneda. En la primera pesada, pues, averigua en cual de los tres conjuntos de cuatro monedas está la moneda falsa. La segunda pesada la hace colocando dos de esas cuatro monedas en uno de los platos y las otras dos monedas en el otro, con lo que logra averiguar en qué conjunto de solo dos monedas está la falsa. La última pesada, evidentemente, la hará colocando esas dos monedas una en cada plato. La que pese más es la falsa.

PROBLEMA 3 :

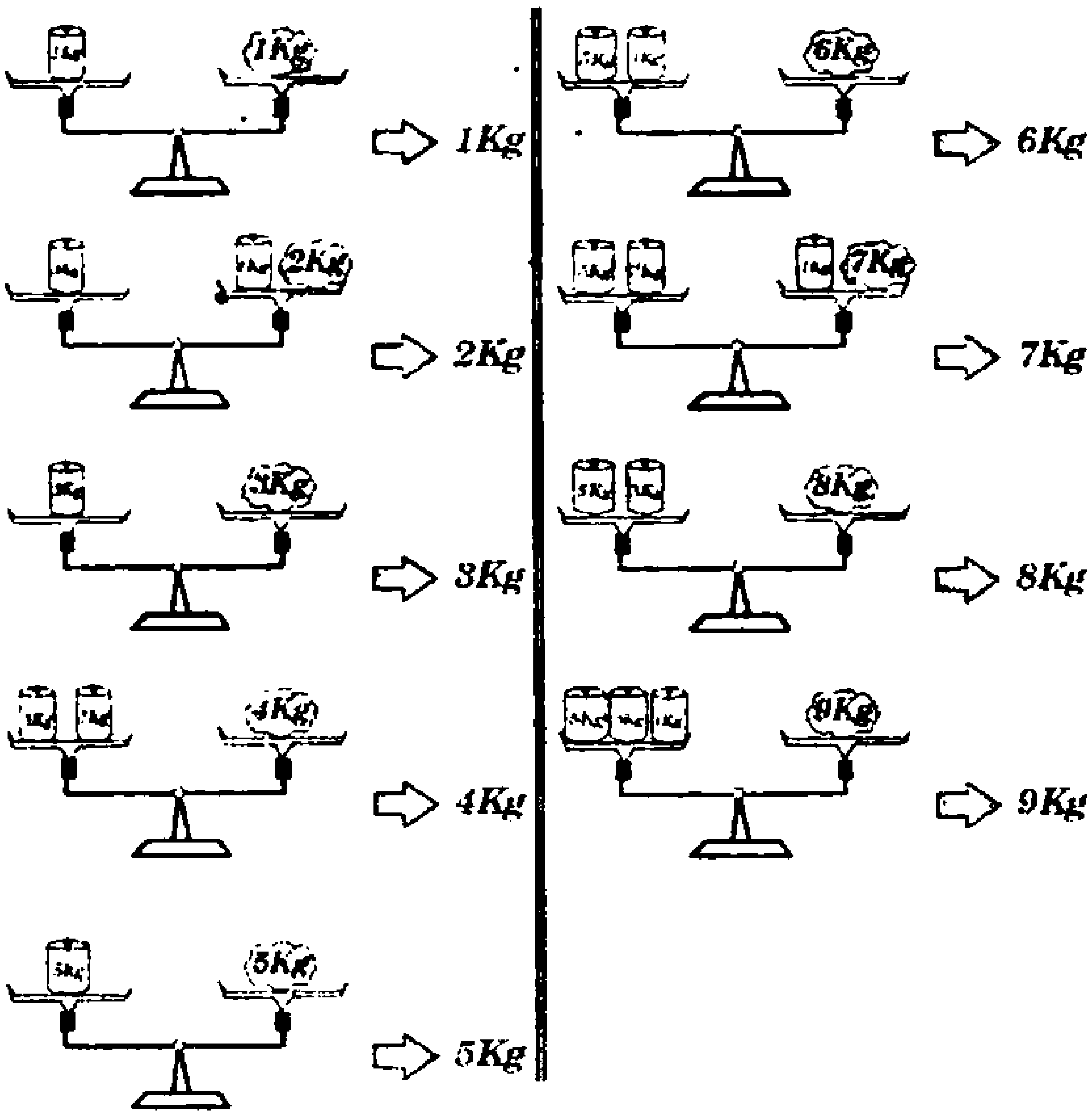
Se tiene una balanza de *2* platillos con solo tres pesas de ***1 kg***, ***3 kg*** y ***5 kg***. ¿Cuántos objetos con pesos diferentes se pueden pesar, como máximo, si las pesas pueden ubicarse en cualquier platillo? Considere que los objetos pesados no se pueden considerar como pesas.

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

Se pide el número de objetos diferentes que se pueden pesar con las pesas de ***1 kg***, ***3 kg*** y ***5 kg***.

Comenzamos a pesar de menor a mayor.



⇒ Se pueden pesar ***9*** pesos diferentes.

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Utilizando una balanza con dos platillos y una colección de pesas de ***1g***; ***10 g***; ***100 g***; ...;10^n ***g***. Halle el menor número de pesadas que se necesitan para pesar un objeto de ***5478*** gramos.

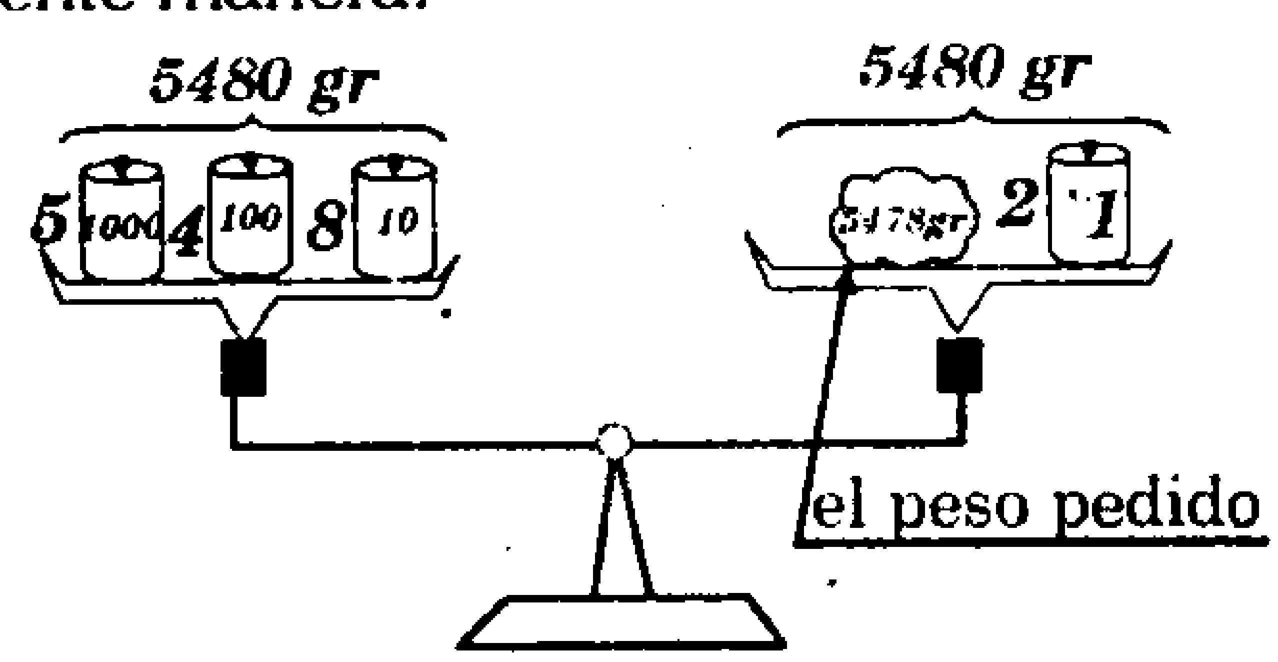
A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :

Se pide el menor número de pesadas que se deben realizar para pesar un objeto de ***5478 g***.

Se tiene pesas de: ***1g***, ***10g***, ***100g***, ...10^n***g***.

Para obtener ***5478 g*** utilizaremos la balanza de dos platillos solo una vez y pesaremos de la siguiente manera:



⇒ Se necesita solo una pesada.

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

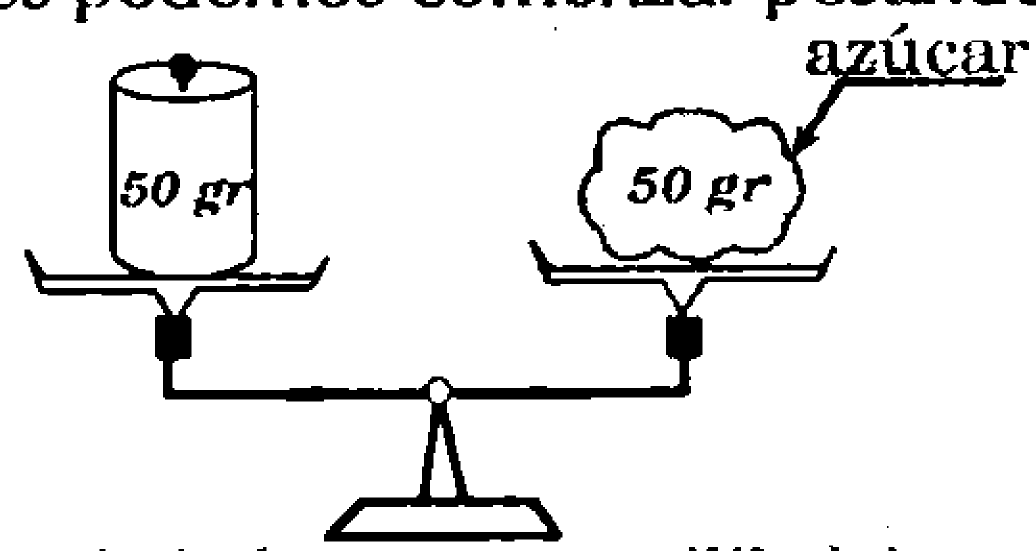
Se dispone de una balanza de dos platillos, una pesa de ***50 gr*** y un kilo de azúcar. Si se quiere separar ***300 gr*** de azúcar, ¿cuántas pesadas se deberán realizar, como mínimo, para lograrlo?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad mínima de pesadas para separar ***300 gr***.

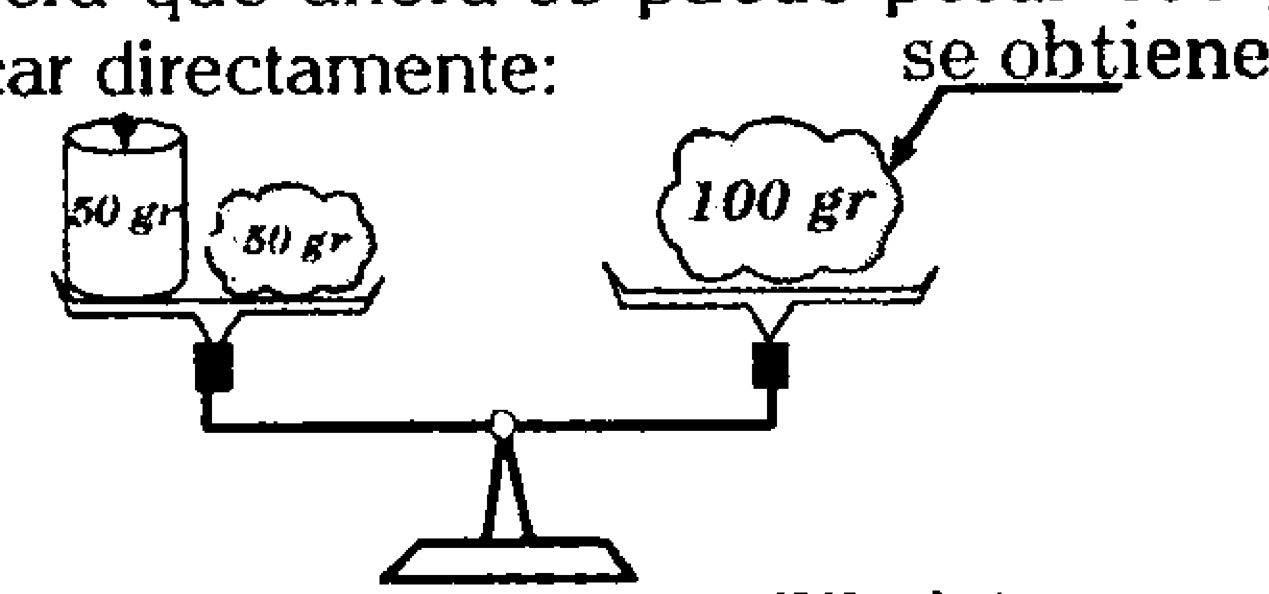
* Como solo se dispone de una pesa de ***50 gr***, entonces podemos comenzar pesando ***50 gr***, es decir:



(la balanza en equilibrio)

⇒ Con un primera pesada se tiene ***50 gr***.

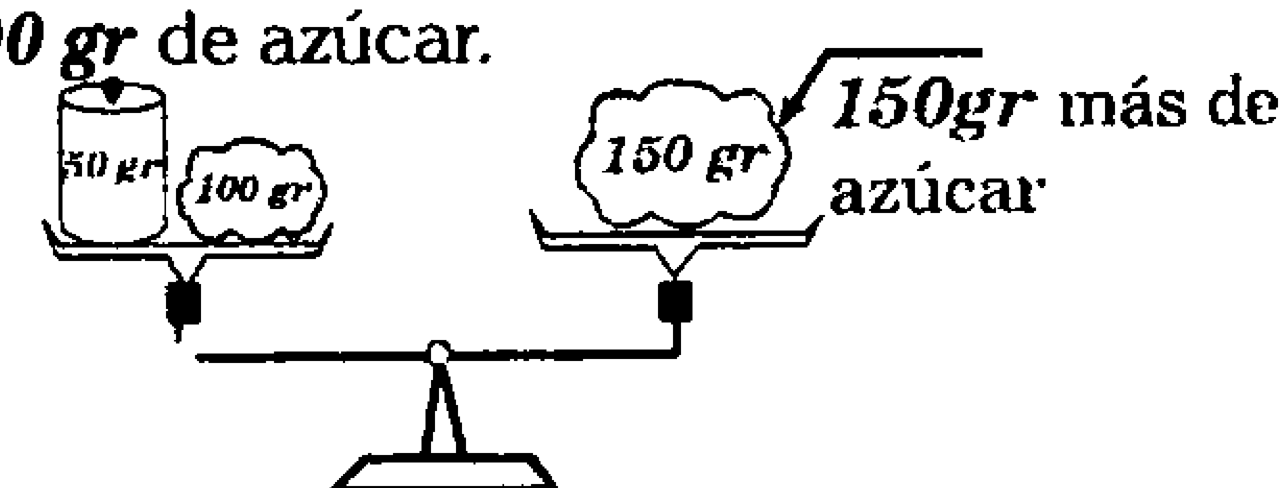
* Ahora, como se quiere la menor cantidad de pesadas y no hay alguna restricción, utilizaremos los ***50 gr*** de azúcar obtenidos como pesa, de manera que ahora se puede pesar ***100 gr*** de azúcar directamente:



(la balanza en equilibrio)

⇒ Con una segunda pesada se tiene ***100gr*** más, es decir, se tiene un total de ***150 gr***.

* Finalmente, con la pesa de ***50 gr*** y los ***100 gr*** de azúcar que utilizaremos como pesa, obtendremos ***150 gr*** más de azúcar, y ya con ello, acumulamos los ***300 gr*** de azúcar.



(la balanza en equilibrio)

	En la ***1era*** pesada		En la ***2da*** pesada		En la ***3ra*** pesada	
⇒ Peso total obtenido	= ***50 gr***	+	***100 gr***	+	***150 gr***	= ***300 gr***

⇒ Se realizan ***3*** pesadas como mínimo.

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Se tiene una bolsa de arroz que pesa ***2 kg***. Disponemos de una balanza de dos platillos y de

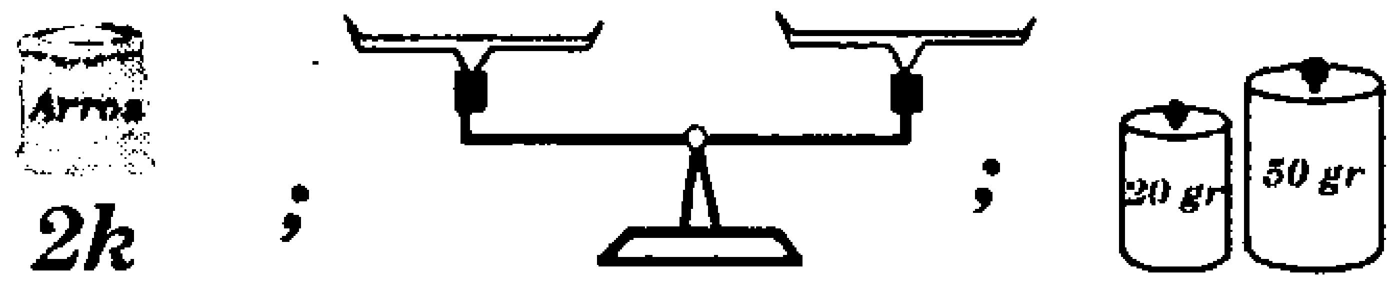
dos pesas (una de **20** gramos y otra de **50** gramos). ¿Cuántas pesadas, como mínimo, se necesitan para hacer separar **110** gramos de arroz?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

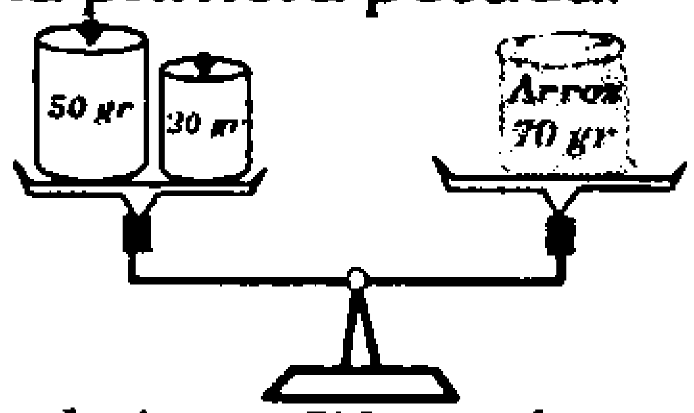
RESOLUCIÓN :

Se pide la menor cantidad de pesadas para separar ***110 gr*** de arroz.

Se dispone de:

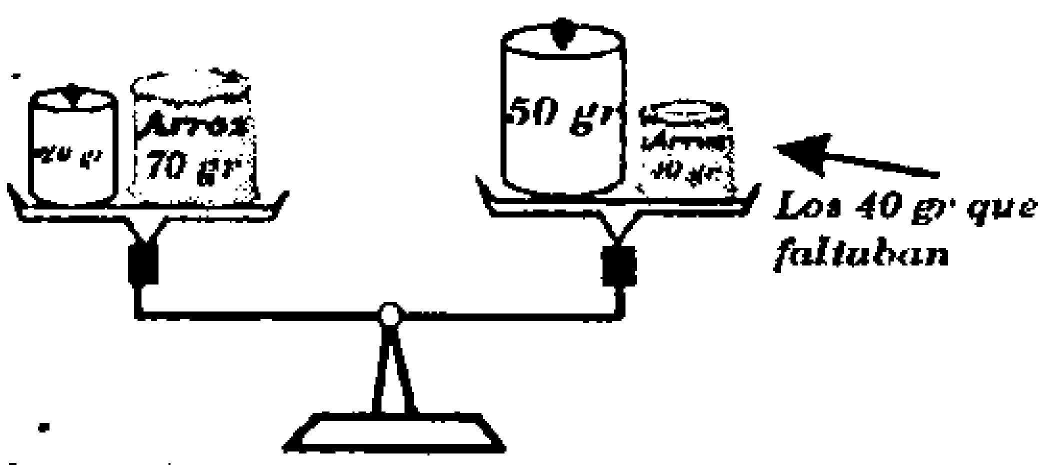


* Para obtener ***110 gr*** con la menor cantidad de pesadas comenzaremos pesando el mayor número de gramos para acertar el peso buscado. Entonces, en una primera pesada:



⇒ Se obtiene ***70 gr*** de arroz

* Falta solo ***40 gr*** para obtener los ***110 gr*** de arroz, y como tenemos una pesa de ***20 gr***, aparentemente tendríamos que usarla dos veces. Pero si queremos la menor cantidad de pesadas podemos utilizar el peso de ***70 gr*** obtenido en la primera pesada, ya que no hay ningún impedimento de hacerlo en el problema, de modo que pesaremos ***40 gr*** del siguiente modo:



(la balanza en equilibrio)

$$\Rightarrow \text{peso total} = \underset{\text{1era pesada}}{70\ gr} + \underset{\text{2da pesada}}{40\ gr} = 110\ gr$$

⇒ Se necesitan solo dos pesadas.

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Se desea pesar ***385 gr*** en una balanza de dos platillos, utilizando una colección de pesas de ***1 g, 6 g, 36 g, 216 g, (10 de c/u)***. ¿Cuántas pesas como mínimo, serán necesarias?

A) 4 *B) 6* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

Se pide el número de pesas a utilizar para pesar ***385 gr*** en una balanza de dos platillos.

* Se tiene ***10*** pesas de ***c/u*** de los pesos; ***1 g, 6 g, 36 g, 216 g***.

Como se puede utilizar la menor cantidad de pesas, será conveniente usar la pesa más pesada cierto número de veces, de manera que se acerque más a ***385 g***. Veamos:

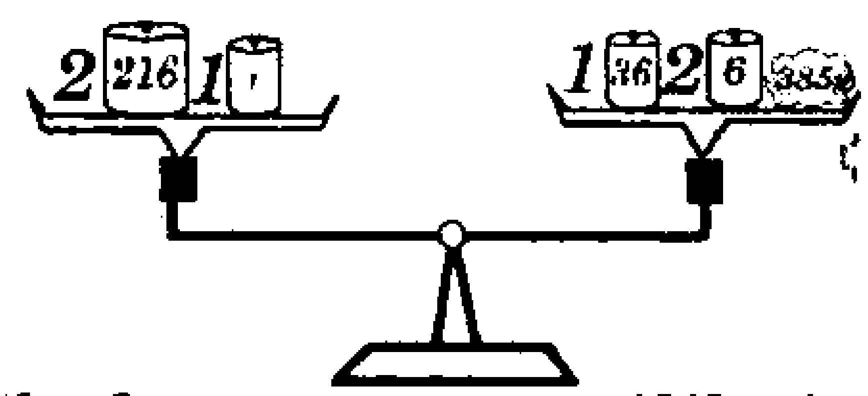
* Si utilizo una pesa de ***216 g***, me faltaría:

$385 - 216 = 169\ g$.

* Si utilizo dos pesas de ***216 g***, me pasé en:

$2(216) - 385 = 47\ g$.

Es más conveniente usar dos pesas de ***216 g*** para no necesitar muchas pesas de los otros pesos. De tal manera que utilizando la balanza de dos platillos, pesaremos ***385 g*** del siguiente modo:



n° de pesas utilizadas $=2+1+1+2$

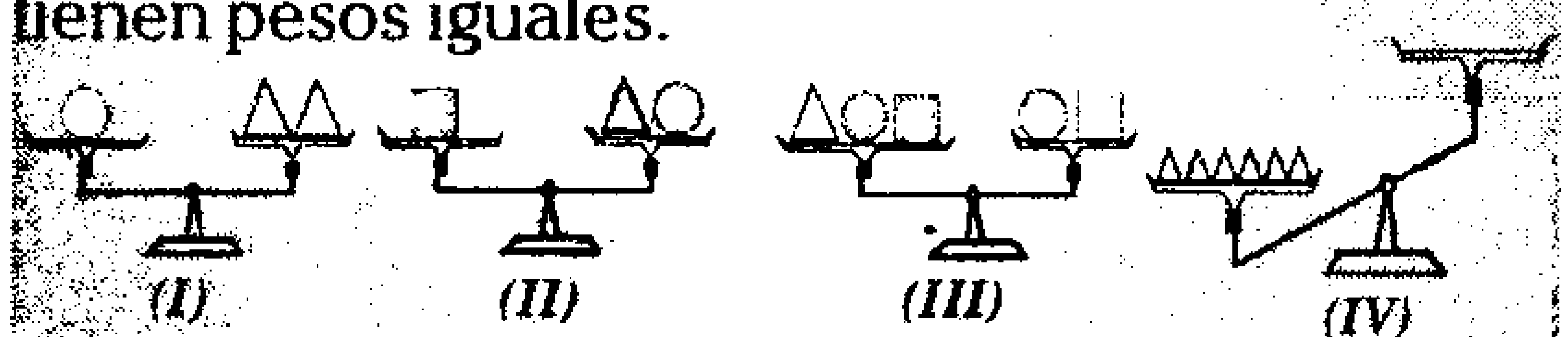
(balanza en equilibrio)

⇒ Número de pesas utilizadas como mínimo $=6$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

En la figura, las balanzas ***I***, ***II*** y ***III*** están en equilibrio y los objetos idénticos en color y forma tienen pesos iguales.



La balanza ***(IV)*** se equilibra con:

A) □□○ *B)* ○○ *C)* □○ *D)* □□□ *E)* ○○□

RESOLUCIÓN :

i) En la balanza ***I***: ○=2△ ***...(1)***

ii) En la balanza ***II***: □=△ +○ ***...(2)***

iii) En la balanza ***III***: △+○ +□ =○+□ ***...(3)***

Reemplazando ***(1)*** y ***(2)*** en ***(3)***:

△ + (2△) + (△ +○) =○+ □ ⇒ 4△ =□

Sumando ***(1)***: 4△+2△=□+○

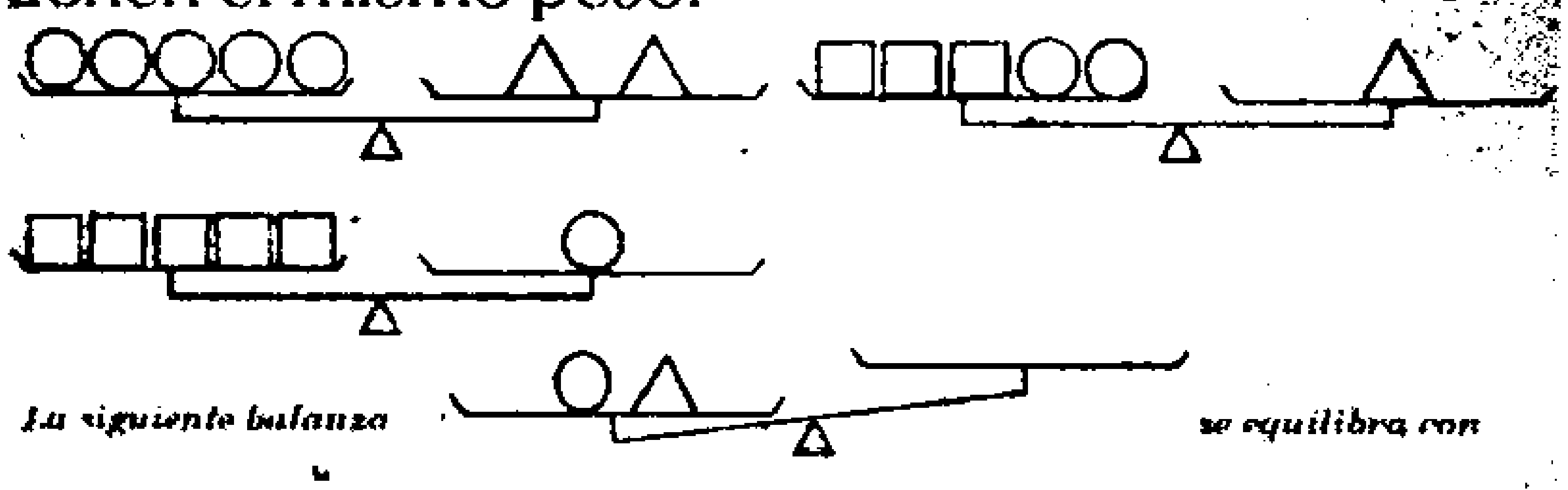
△+△+△+△+△+△=□+○

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

La figura muestra tres balanzas que se encuentran en equilibrio. Los objetos de igual forma y color

tienen el mismo peso.



A) ○○○○○○ B) △△□□ C) ○○○□
D) ○○○○□ E) ○○○□□○○

RESOLUCIÓN :

De cada uno de las balanzas se infiere:

I) $5\bigcirc = 2\triangle$ ....(1)
$3\square + 2\bigcirc = \triangle$ ....(2)
$5\square = \bullet$ ....(3)

II) Reemplazando (2) en (1):

$5\bigcirc = 2(3\square + 2\bigcirc) \Rightarrow 5\bigcirc = 6\square + 4\bigcirc$

$\Rightarrow \bigcirc = 6\square = 5\square + \square$

De (2): $\bigcirc = \bullet + \square$ ....(4)

III) De (2) y (4):

$3\square + 2(\bullet + \square) = \triangle \Rightarrow \underbrace{5\square} + 2\bullet = \triangle$

$\bullet + 2\bullet = \triangle$

$\Rightarrow 3\bullet = \triangle$ ....(5)

IV) Nos piden:

$\bigcirc + \triangle = (\bullet + \square) + (3\bullet) = 4\bullet + \square$

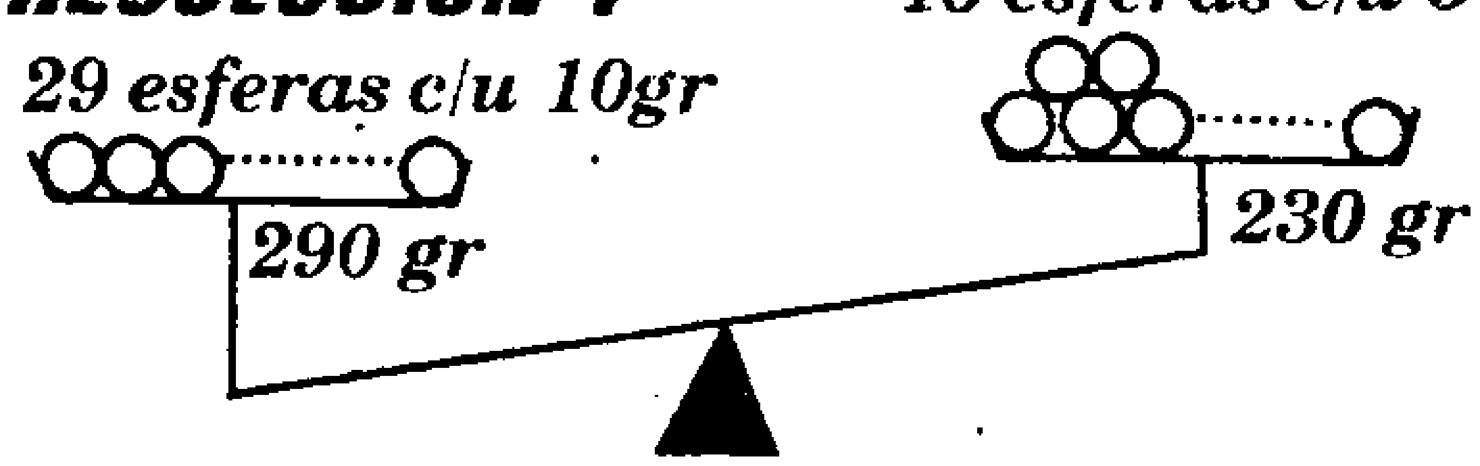
RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Se tiene una balanza de dos platillos que no están en equilibrio debido a que en un platillo hay ***29*** esferas de ***10*** gramos cada una, y en el otro platillo ***46*** esferas de ***5*** gramos cada una. Para que la balanza quede equilibrada, ¿cuántas esferas de ***10*** gramos cómo mínimo se debe , trasladar al otro platillo?

A) 5 *B) 2* *C) 4* *D) 3* *E) 1*

RESOLUCIÓN :



El peso total = ***290 + 230 = 520gr***

Para que la balanza este equilibrada en cada platillo debe haber:

$$\frac{520}{2} = 260\ gr$$

Entonces el platillo de la izquierda debe disminuir en ***30gr*** esto equivale a ***3*** de sus esferas.

RPTA : "D"

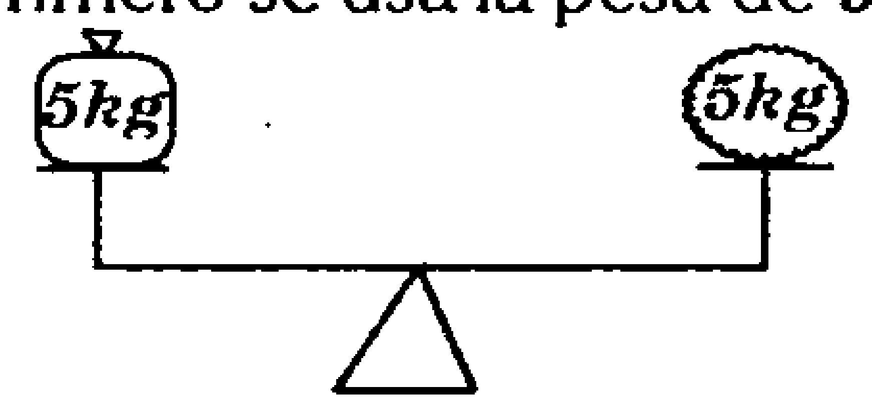
PROBLEMA 10 :

Un vendedor de abarrotes dispone de una balanza de dos platillos y solo tiene ***2*** pesas, una da ***5 kg*** y otra de ***8 kg***. Si un cliente pide ***7 kg*** de arroz, ¿cuántas pesadas como mínimo debe realizar para cumplir con dicho pedido?

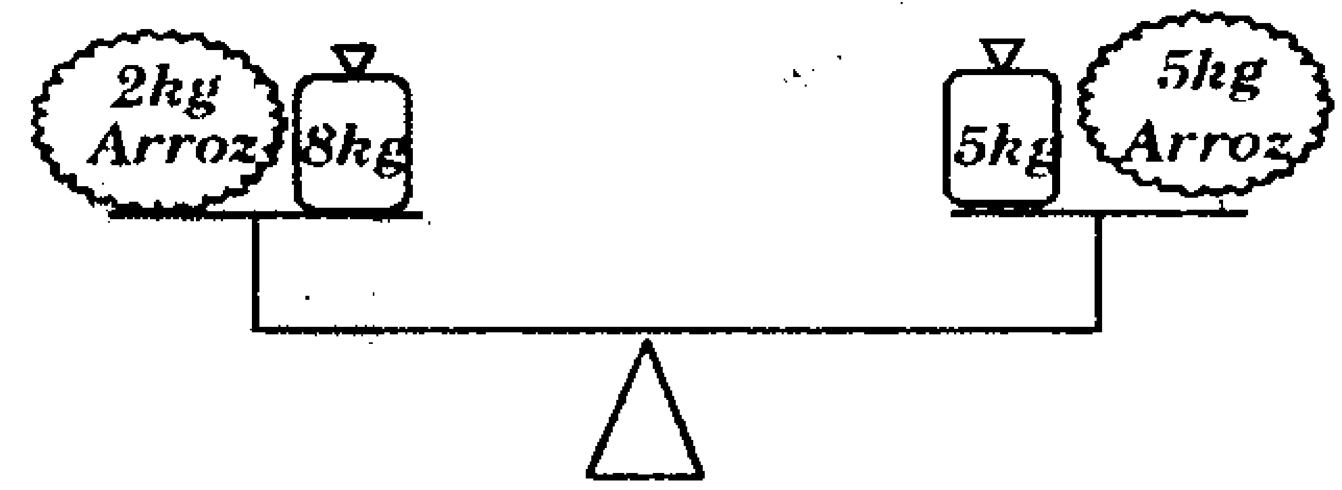
A) 1 *B) 5* *C) 3* *D) 4* *E) 2*

RESOLUCIÓN :

I) Primero se usa la pesa de ***5 kg***



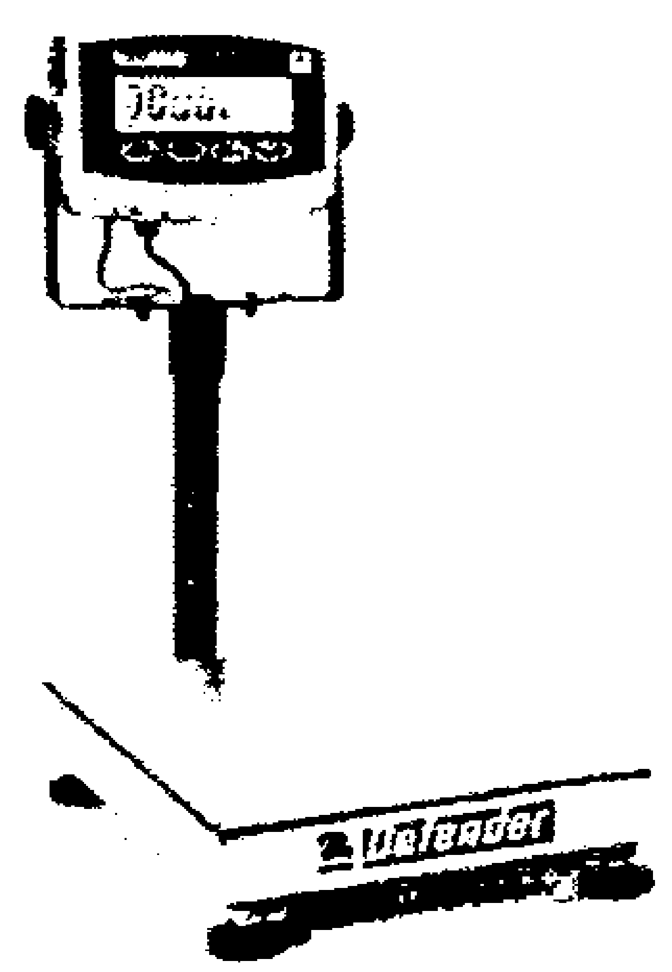
II)



$\Rightarrow$Se deben realizar como mínimo **2** pesadas.

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :



Tenemos ***100*** sacos con ***100*** bolas cada uno. Todas las bolas pesan ***10 g*** salvo las que contiene uno de los sacos, en el que todas pesan ***9 g***. ¿Se puede averiguar cuál es utilizando solamente una vez una balanza (báscula) ?

RESOLUCIÓN:

El siguiente problema supone un salto cualitativo y es uno de esos pocos problemas en el que los apresurados se quedan cruzados de brazos. Y es que hablamos ya de ***100*** sacos llenos de bolas, ¡y sólo podemos usar una vez la balanza!

En este problema la clave es que, dado que sólo podemos usar la balanza una vez, de alguna forma hay que poner *información de todos los sacos*, es decir, que haya en la balanza «algo» de cada saco pero además algo que sea diferente a lo que hemos puesto de los otros sacos. ¿Como podemos hacerlo?

El hecho de que cada uno de los cien sacos tenga a su vez cien bolas nos permite sacar un número distinto de bolas de cada saco, en concreto, podemos sacar *1* bola del primer saco, *2* del segundo y así, sucesivamente, hasta sacar **100** bolas del último saco.

Es decir estaríamos pesando:

1 + 2 + ...+ 99 +100 = 5050 bolas (ya veo a los hiperrealistas echándose las manos a la cabeza, « pesar ***5050*** bolas en una balanza », aunque, sin duda, lo más difícil sería contar las de los últimos sacos sin equivocarse). Por cierto, sumar del ***1*** al ***100***, como ya hizo el matemático Gauss siendo un infante , equivale a multiplicar :

101 (100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3...) por ***50*** parejas.

Una vez que comprobamos el peso de todas las bolas, realizamos el siguiente razonamiento:

* Si todas las bolas pesaran ***10g***, el total de bolas de la balanza pesaría ***50500g*** , es decir ***50,5 kg.***

* Pero sabemos que no puede ser así, ya que hay un saco con bolas más ligeras de ***9 g.*** Por tanto la balanza marcará menos.

* Supongamos que marca ***50480 g***. Eso significa que el conjunto ha pesado ***20 g***. menos que si todas pesaran ***10 g*** y, *dado que cada bola ligera pesa 1 g menos que una pesada,* si el conjunto de bolas ha pesado ***20 g*** menos es que *había 20 bolas ligeras* y el saco es el número veinte.

Por supuesto, en este problema no podemos decir *qué número tiene* el saco de las bolas ligeras (ya que ni siquiera tenemos los sacos delante). si que facilitamos un método con el que lo podríamos av guar.

PROBLEMA 12 :

Se tiene cinco bolsas con igual cantidad de monedas de oro donde en una de las bolsas las monedas pesan un gramo más que las otras bolsas. Teniendo una balanza (báscula) ¿se podrá ubicar con exactitud la bolsa que pesa más con una sola pesada? (no se permite tanteos con las bolsas)

RESOLUCIÓN :

Aplicaremos un procedimiento análogo a la resolución del problema anterior :

* Suponiendo que cada moneda pesa ***10 g***

Se extrae :

1 moneda de la primera bolsa
2 monedas de la segunda bolsa
3 monedas de la tercera bolsa
4 monedas de la cuarta bolsa
5 monedas de la quinta bolsa

El peso total sería :

$$10g + 20g + 30g + 40g + 50g = 150g$$

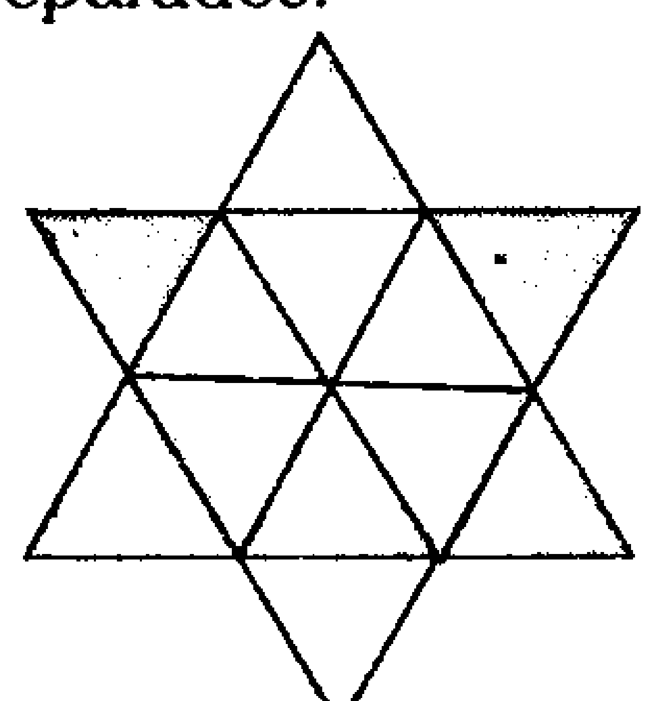
* Pero en la realidad en una de las bolsas las monedas pesan ***11g***, esto significa que la bolsa más pesada estaría en:

*La primera bolsa el peso total realmente sería ***151 g.***
* La segunda bolsa el peso total realmente sería ***152 g.***
*La tercera bolsa el peso total realmente sería ***153 g.***
* La cuarta bolsa el peso total realmente sería ***154 g.***
*La quinta bolsa el peso total realmente sería ***155 g.***

Como observamos, si se puede detectar la bolsa que pesa más ya que el peso final indica en qué bolsa está sólo verificando las cifras de las unidades de cada resultado.

PROBLEMA 13 :

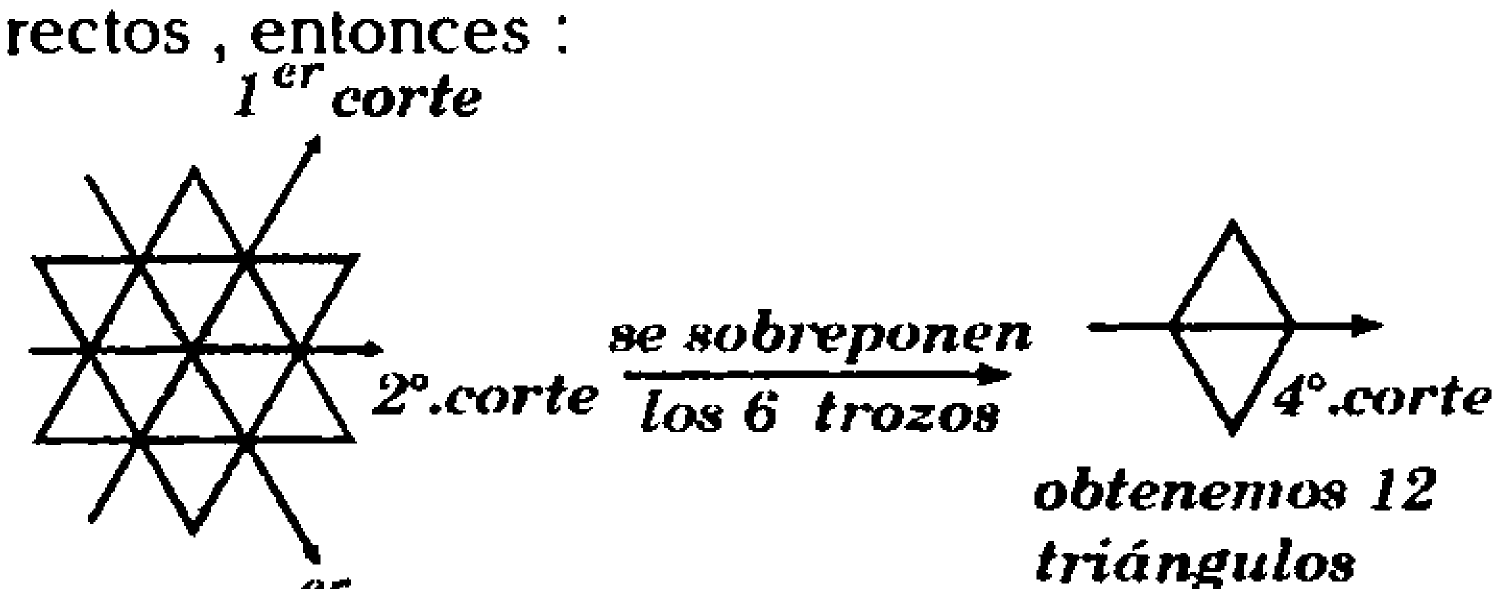
En el gráfico se muestra un trozo de madera delgada, en la cual se trazaron líneas rectas formando ***12*** triángulos equiláteros congruentes. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo debemos realizar con una sierra eléctrica para obtener los ***12*** triángulos separados?



A) 3
B) 4
C) 7
D) 5
E) 6

RESOLUCIÓN :

Como el problema menciona un trozo de madera ***delgada***, esto nos permitirá colocar un trozo encima del otro para obtener la menor cantidad de cortes rectos , entonces :

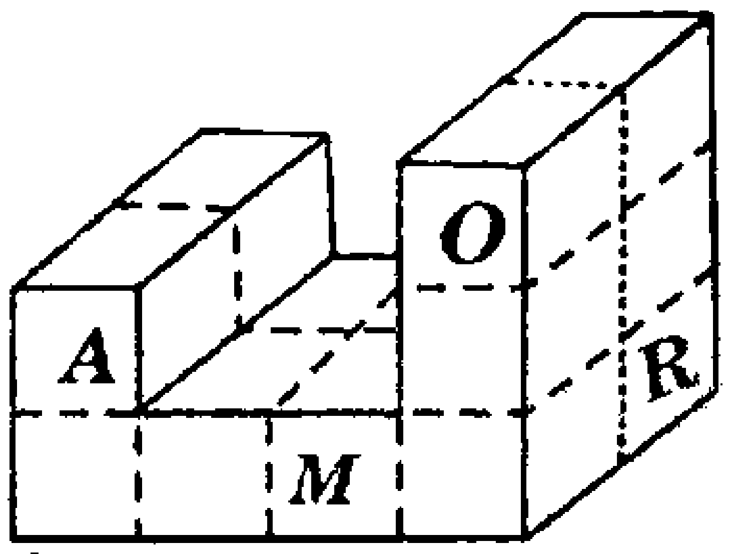


RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

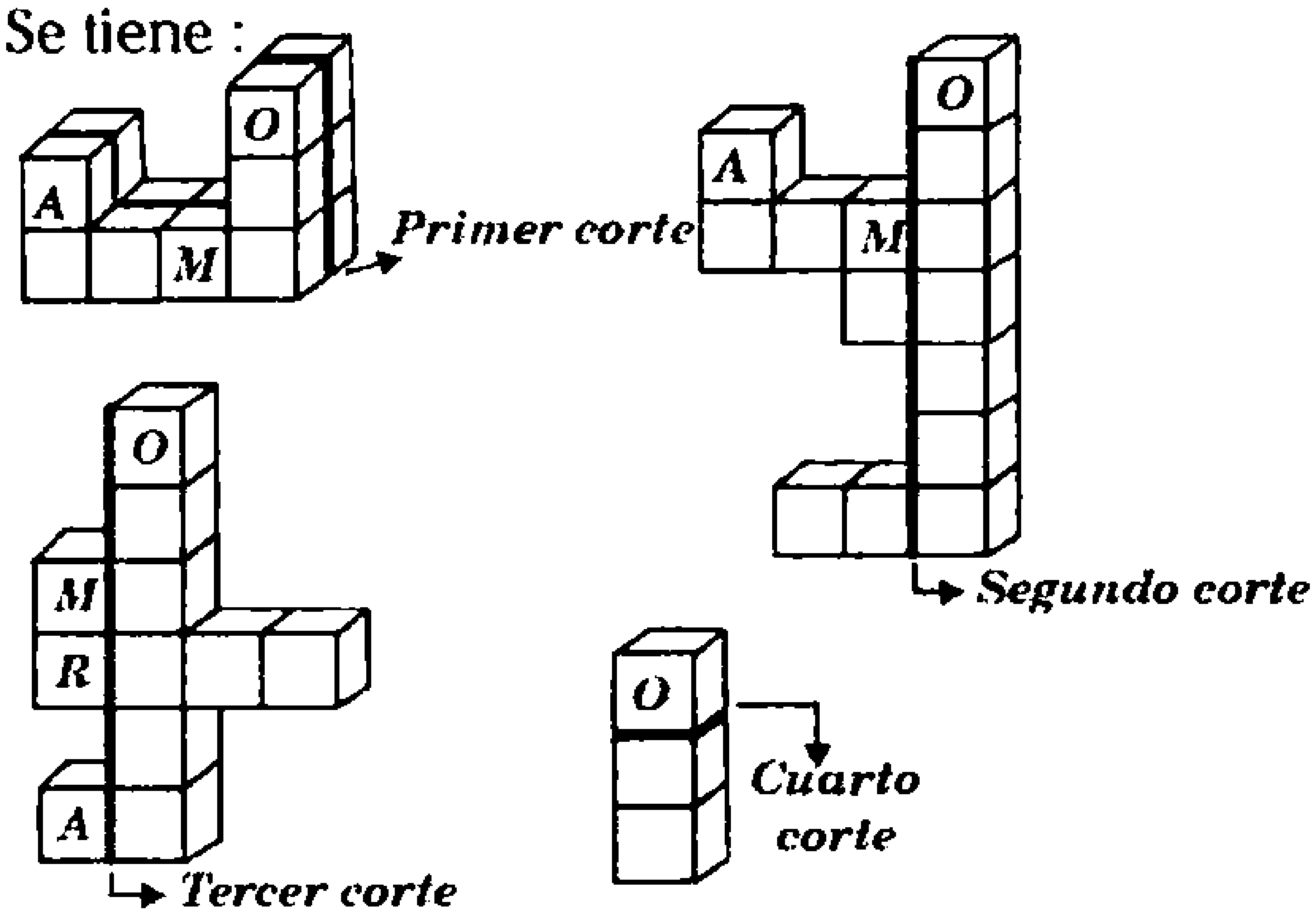
En la figura se tiene un trozo de madera, del cual, al ser cortado siguiendo las líneas punteadas, se obtendrían *14* cubitos congruentes. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo se hará con una sierra eléctrica para obtener los cuatro cubitos marcados con las letras *A, M, O* y *R*?

A) 3
B) 4
C) 7
D) 5
E) 6



RESOLUCIÓN :

Se tiene :



⇒ Se necesitan como mínimo *4* cortes

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Un joyero llegó a un pueblo buscando posada para quedarse durante *7* días . Una vez encontrado y como no disponía de efectivo ofreció pagarle con una barra de *7cm*. de oro . El posadero aceptó la oferta , pero con la condición de que el pago se hiciera diariamente y por adelantado ¿Cuántos cortes como mínimo tuvo que realizar el joyero sobre la barra de oro, para efectuar el pago diario?

A) 6 B) 9 C) 2 D) 12 E) 7

RESOLUCIÓN :

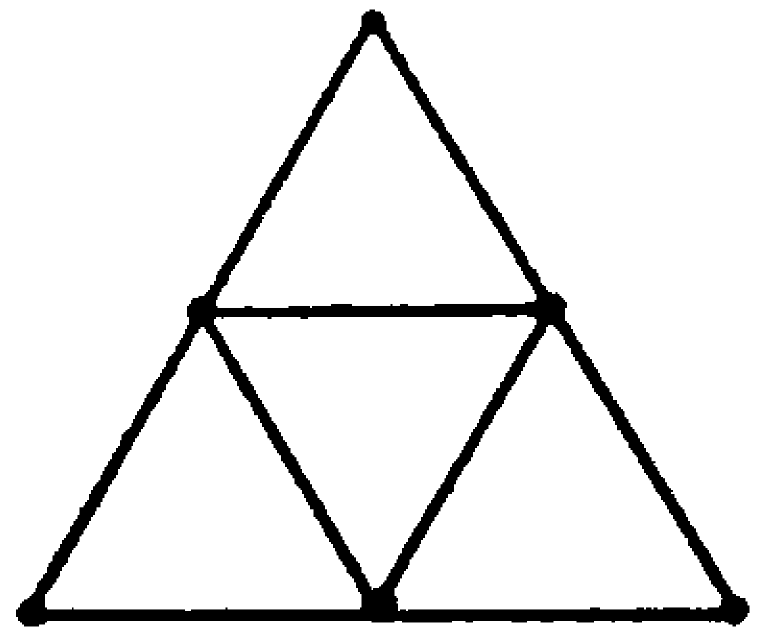
* Divide la barra en tres trozos de *1* , de *2* y de *4cm*. El primer día paga con el trozo de *1 cm*. ; el segundo con el de *2 cm*. y recibe de vuelto el de *1* cm. con el que pagó el día anterior ,... *etc*. Así se puede realizar los *7* pagos diarios . Para lo cual debe efectuar *2* cortes

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

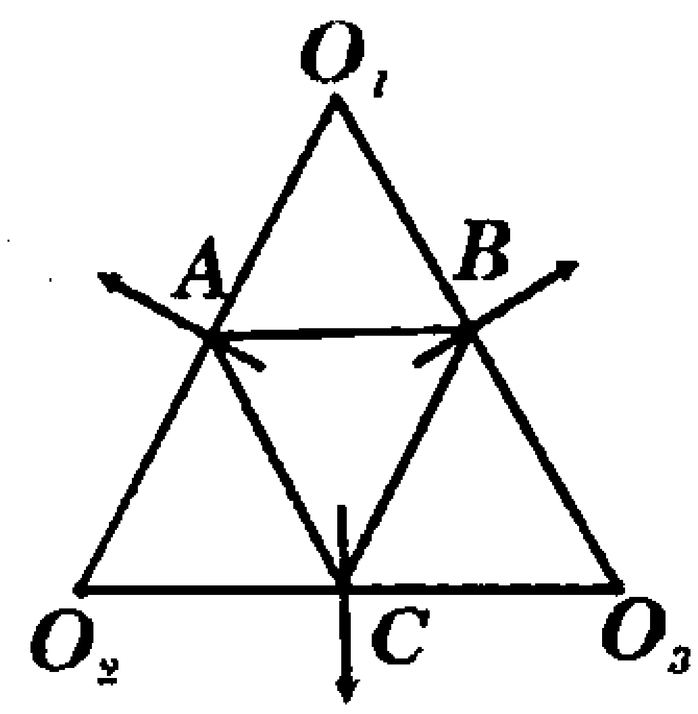
En la figura se muestra una rejilla de alambre formada por cuatro triángulos equiláteros de *10 cm* de lado. Si se tiene una guillotina recta y no se permite doblar el alambre en ningún momento, ¿cuántos cortes como mínimo se debe realizar para obtener *9* trozos de alambre de *10 cm* de longitud?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2



RESOLUCIÓN :

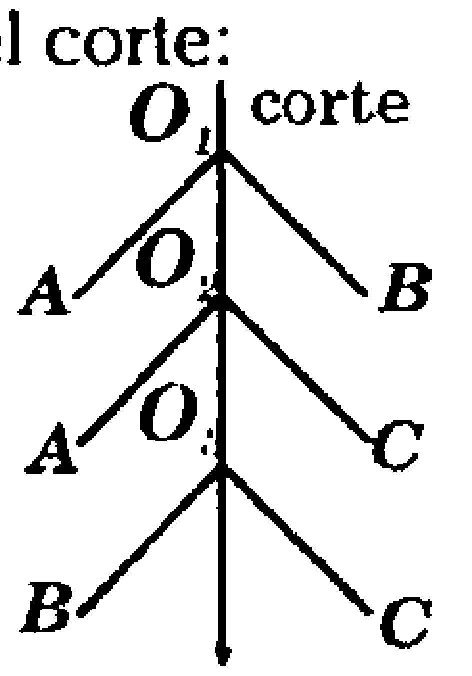
i) Se hacen *3* cortes inicialmente como se muestra:



⇒ Se liberan los alambres:

$\overline{AC}$ $\overline{AB}$ $\overline{BC}$

ii) Se alinean los alambres de la forma mostrada y se hace el corte:



Total: *4* cortes

Se liberan:

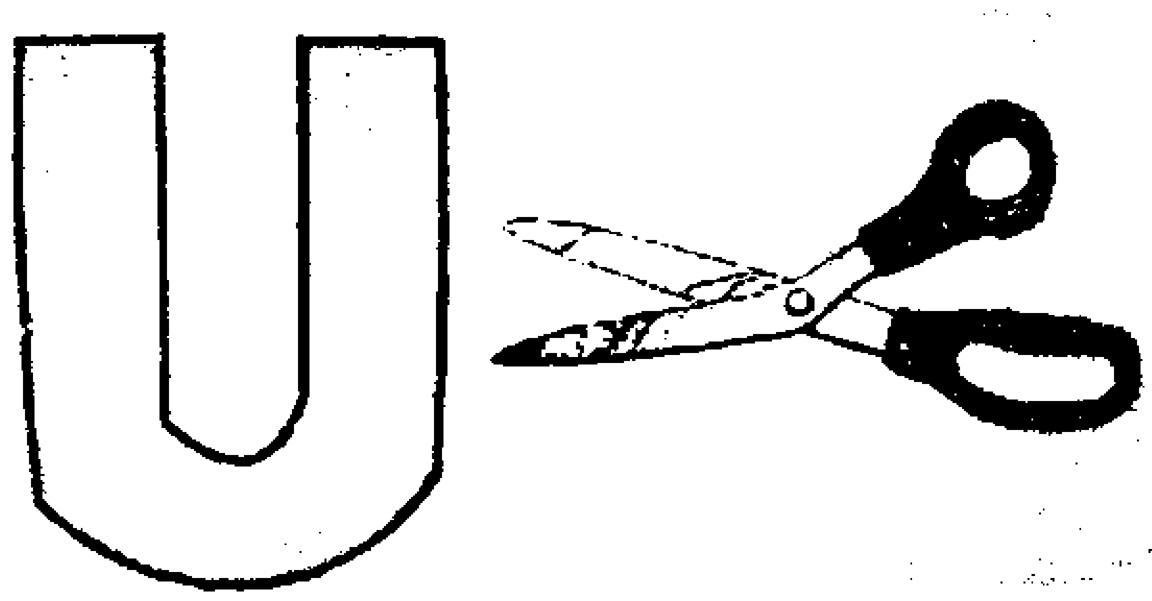
$\overline{AO_1}$
$\overline{BO_1}$
$\overline{AO_2}$
$\overline{CO_2}$
$\overline{BO_3}$
$\overline{CO_3}$

RPTA : "B"

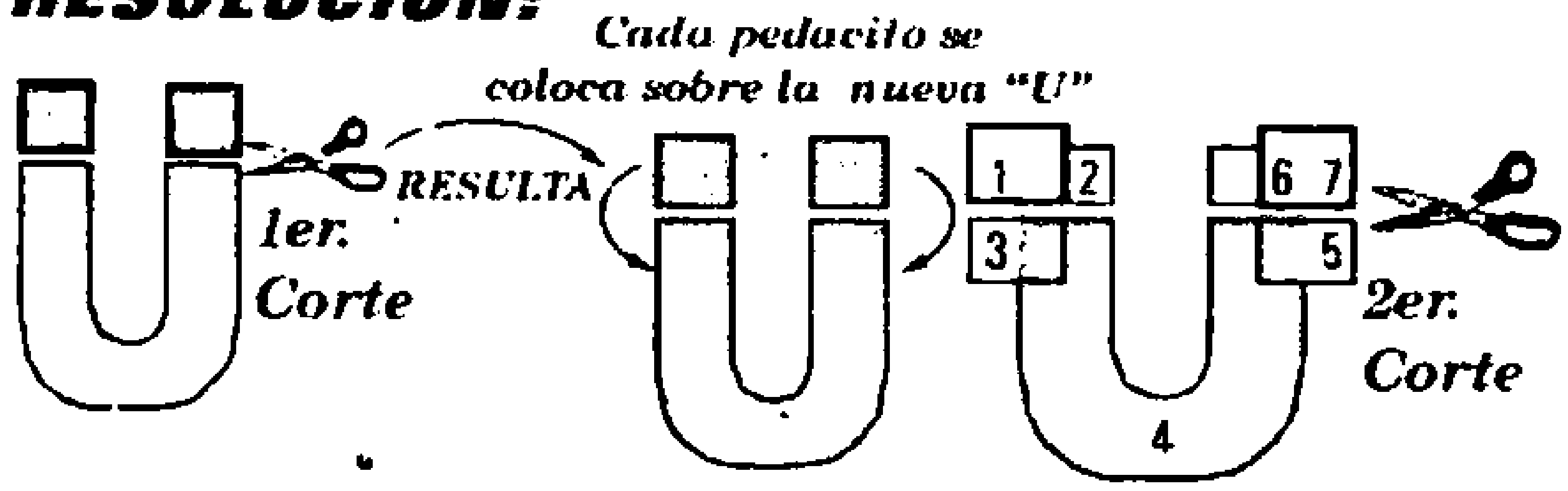
PROBLEMA 17 :

¿Cuántos cortes rectos como mínimo se debe hacer a la siguiente figura, que representa un pedazo de papel en forma de *"U"*, para que quede dividida en *7* pedazos?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4



RESOLUCIÓN:



⇒ Como mínimo se necesitan *2* cortes.

RPTA: "B"

PROBLEMA 18 :

Un buscador de plata, que necesitaba pagar el alquiler de marzo por adelantado y no tenía dinero, le propuso a la casera pagarle con una barra de plata de ***31 cm***, de forma que cada día le entregaría como pago un cm de barra. ¿Cuál es el mínimo número de cortes necesario que debía hacer el buscador de plata a la barra (y dónde debía hacer esos cortes) para que pudiera llevar a cabo el pago de esa forma?

RESOLUCIÓN :

La mejor indicación es echar mano al problema anterior ya que,si se resolvió el anterior, este tiene una «filosofía» parecida.

Como en el problema anterior la clave está en elegir las «monedas de distinto valor» necesarias para conseguir todas las longitudes de *1* a *31*.

Si empezamos por el primer día, es evidente que necesitamos un trozo de ***1.cm.*** Para el segundo podríamos añadir otro igual, pero es más rentable usar uno de ***2 cm*** (de ***3 cm*** ya no, ya que entonces no tendríamos para el segundo día). Combinándolos tenemos para el tercer día. Para el cuarto ya no, por lo que elaboramos uno de ***4***, que combinándolos con los más pequeños, nos permitiría llegar hasta el ***7***.

Siguiendo el mismo razonamiento, cortaríamos uno de ***8 cm***, que, en combinación con los demás sería útil hasta el día ***15***. Y con la pieza sobrante de ***16 cm*** podríamos realizar las otras combinaciones, ya que los demás trozos suman los ***15 cm*** necesarios para llegar a ***31 cm***.

Como se ve en el esquema el número de cortes necesario seria de cuatro, que daría lugar a los cinco trozos mencionados: *1; 2; 4; 8* y *16* cm., respectivamente.

Por cierto, que algún lector se habrá dado cuenta de que la longitud de los trozos son las distintas potencias de dos. De hecho, si escribiéramos el número en binario, nos indicaría *qué trozos habría que coger*. Por ejemplo *13* en binario (con *5* cifras) es ***01101*** por lo que de mayor a menor habría que coger el segundo trozo *(8)*, el tercero *(4)* y el último *(1)*.

PRACTICA DE CLASE RESUELTA

PROBLEMA 1 :

Se tiene tres bolas de billar de la misma forma y tamaño, pero una de ellas es más pesada. ¿Cuál será el menor número de pesadas que tendrá que hacer para determinar la bola más pesada, utilizando una balanza de dos platillos?

A) 1   *B) 2*   *C) 3*   *D) 4*   *E) 5*

PROBLEMA 2 :

Se tiene *6* bolas de billar idénticas en tamaño y color. Todas ellas tienen el mismo peso, con excepción de una que es ligeramente más pesada que las demás. Si se tiene una balanza de dos platillos, ¿cuántas veces se tendrá que utilizar como mínimo la balanza para identificar la bola de billar más pesada?

A) 1   *B) 2*   *C) 3*   *D) 4*   *E) 5*

PROBLEMA 3:

Se tiene *27* monedas , todas del mismo tamaño y forma, pero una de ellas con más peso. Con una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas como mínimo serían necesarias para determinar dicha moneda? .

A) 3   *B) 4*   *C) 6*   *D) 2*   *E) 1*

PROBLEMA 4 :

Se tienen nueve bolas (o balines) de acero del mismo tamaño y color . Una de las nueve bolas es ligeramente más pesada ; todas las demás pesan lo mismo . Empleando una balanza de dos platillos , ¿cuál es el mínimo número de pesadas necesarias para determinar la bola (o balín) de peso diferente?

A) 1   *B) 2*   *C) 3*   *D) 4*   *E) 5*

PROBLEMA 5 :

Usando tres pesas de ***1 kg, 3 kg*** y ***9 kg,*** y una balanza de dos brazos, ¿cuántos objetos diferentes se pueden pesar si los objetos y las pesas se pueden colocar en cualquier platillo de la balanza?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 7

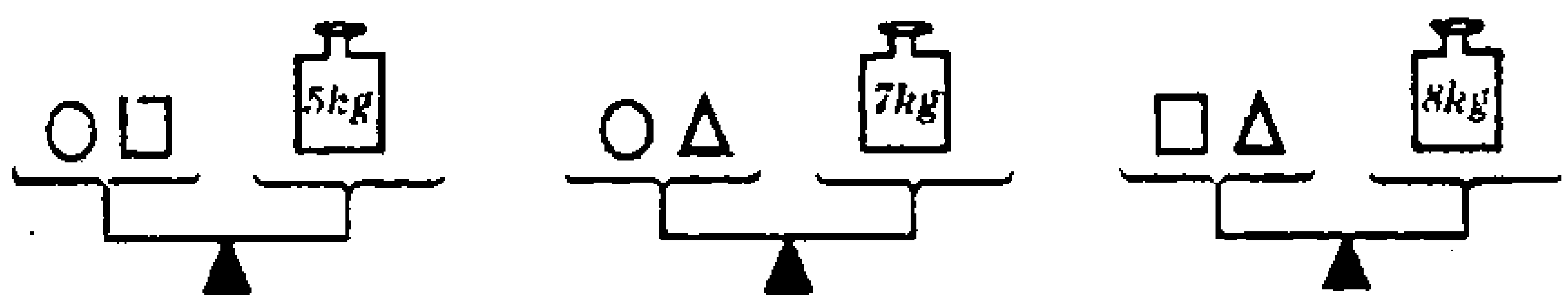
PROBLEMA 6 :

Se tiene *4* cajas que contienen tornillos de *2* gramos cada uno y *1* caja que contiene tornillos de *3* gramos cada uno . ¿Cuántas pesadas como mínimo se necesita hacer en una balanza de platillos , para determinar la caja que contiene los tornillos de mayor peso?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

PROBLEMA 7 :

Si las balanzas mostradas están en equilibrio:



La siguiente balanza se equilibrará con una pesa de:

A)11kg B)10kg C)9kg D)12kg E)13kg

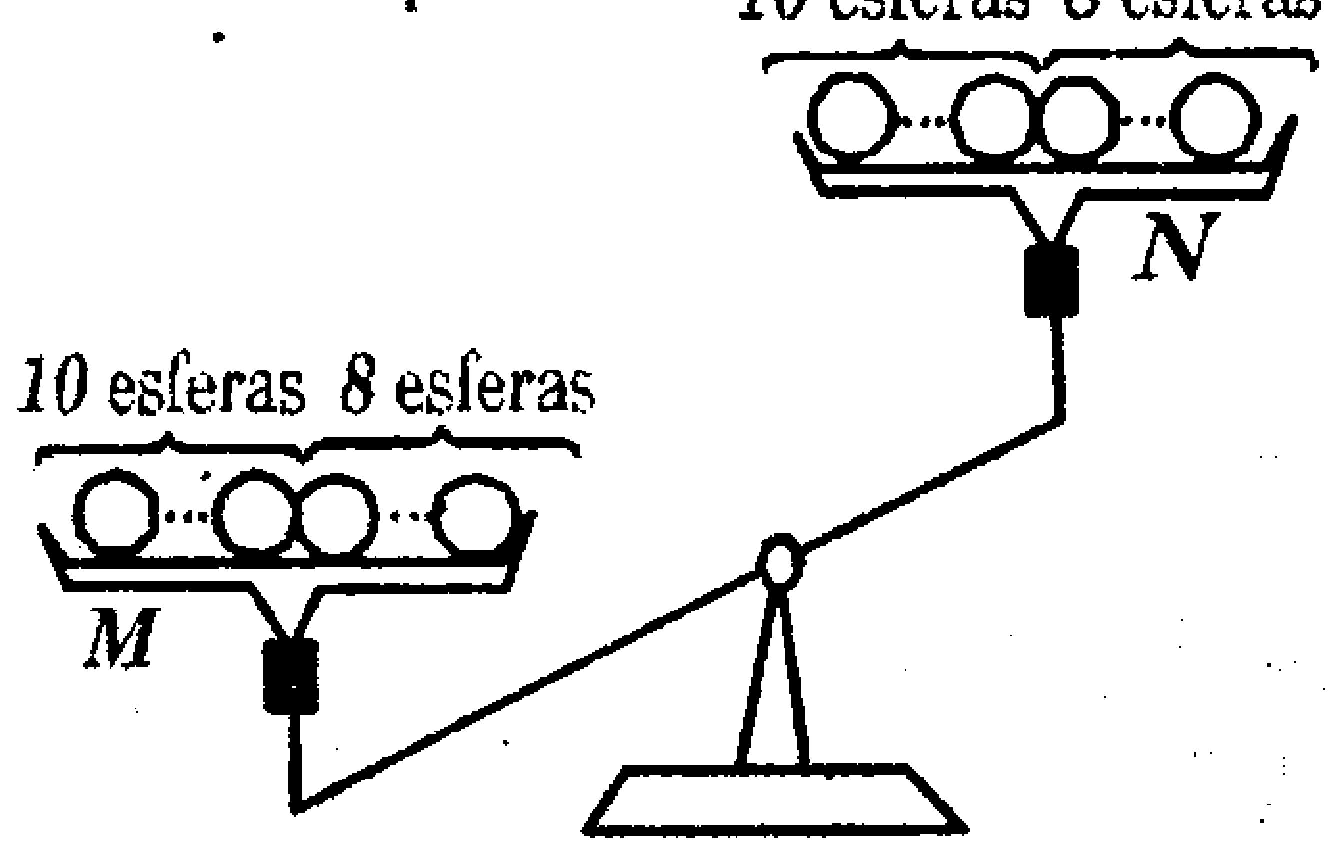
PROBLEMA 8 :

Se dispone de una balanza de dos brazos , una pesa de *50* gramos y *1* kg de azúcar. ¿En cuántas pesadas como mínimo se logrará obtener *300 g* de azúcar?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 1

PROBLEMA 9 :

En la figura mostrada se observa una balanza de dos platillos. Si el peso de cada esfera negra es el triple de cada esfera blanca, ¿cuántas esferas blancas se debe trasladar de *M* a *N* para que la balanza esté en equilibrio?



A) 3
B) 2
C) 5
D) 6
E) 4

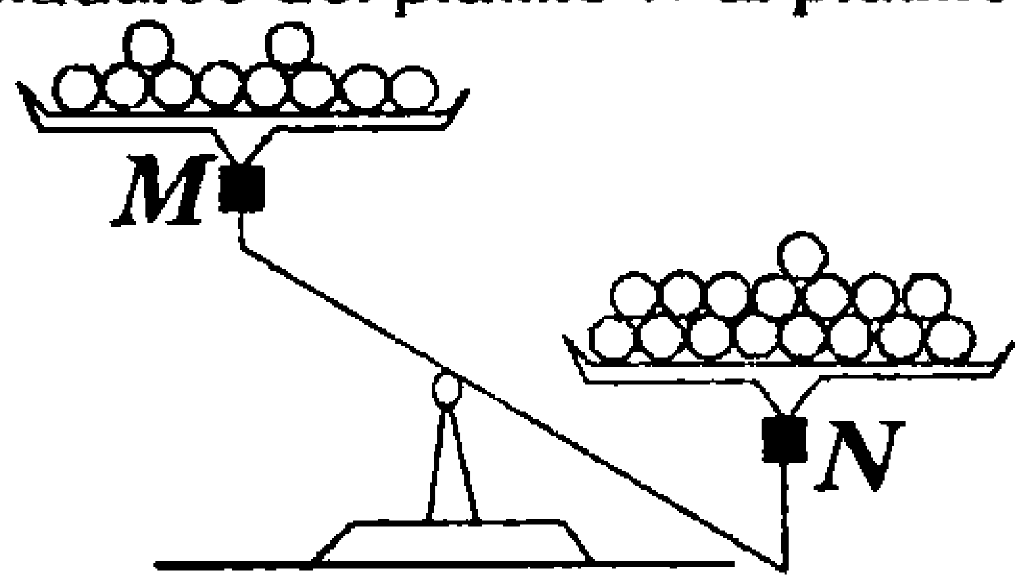
PROBLEMA 10 :

Se tiene 3^6 canicas de un mismo tamaño y de un mismo peso, a excepción de una canica que pesa más. Empleando una balanza de dos platillos, ¿cuántas pesadas deben realizarse como mínimo para obtener con seguridad la canica más pesada.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 7 E) 8

PROBLEMA 11:

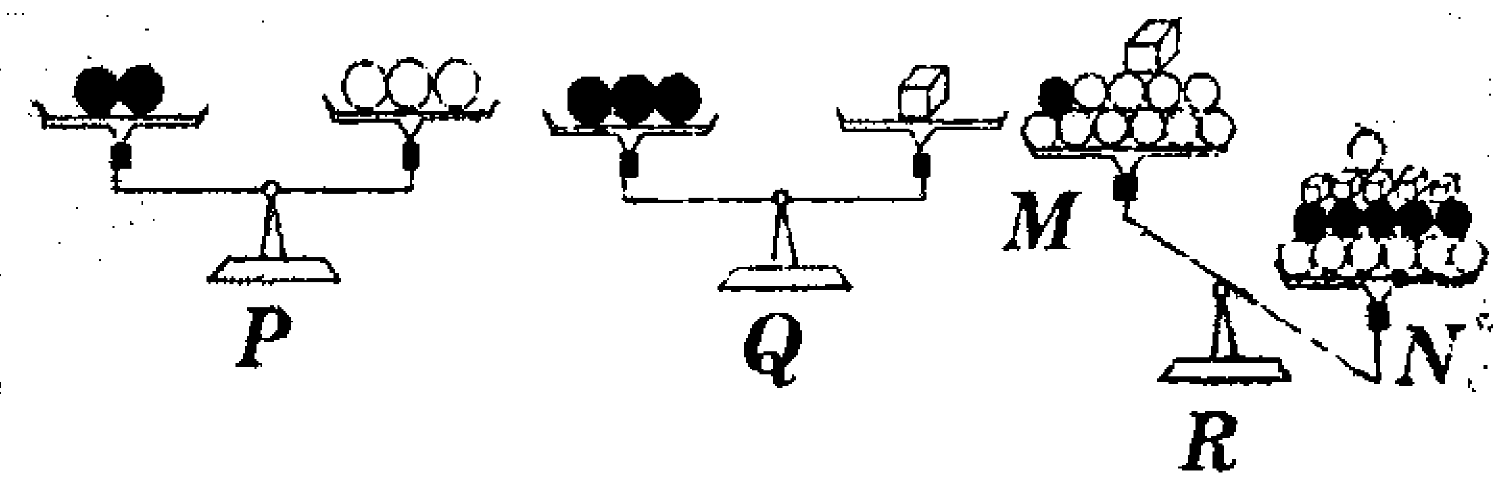
En la balanza mostrada, el peso de *2* canicas negras es igual al peso de *3* canicas blancas. Para equilibrar la balanza, ¿cuántas canicas negras debe trasladarse del platillo *N* al platillo *M*?



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 2

PROBLEMA 12 :

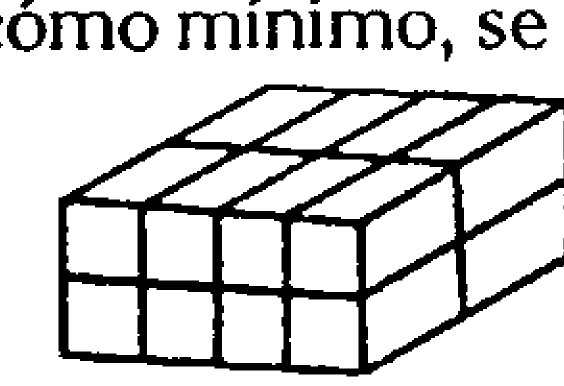
En la figura, las balanzas *P* y *Q* están en equilibrio. Si los objetos iguales tienen el mismo peso, ¿cuántos objetos, como mínimo, deben ser trasladados del platillo *N* al platillo *M* para que la balanza *R* se equilibre?



A) 2
B) 3
C) 5
D) 4
E) 6

PROBLEMA 13 :

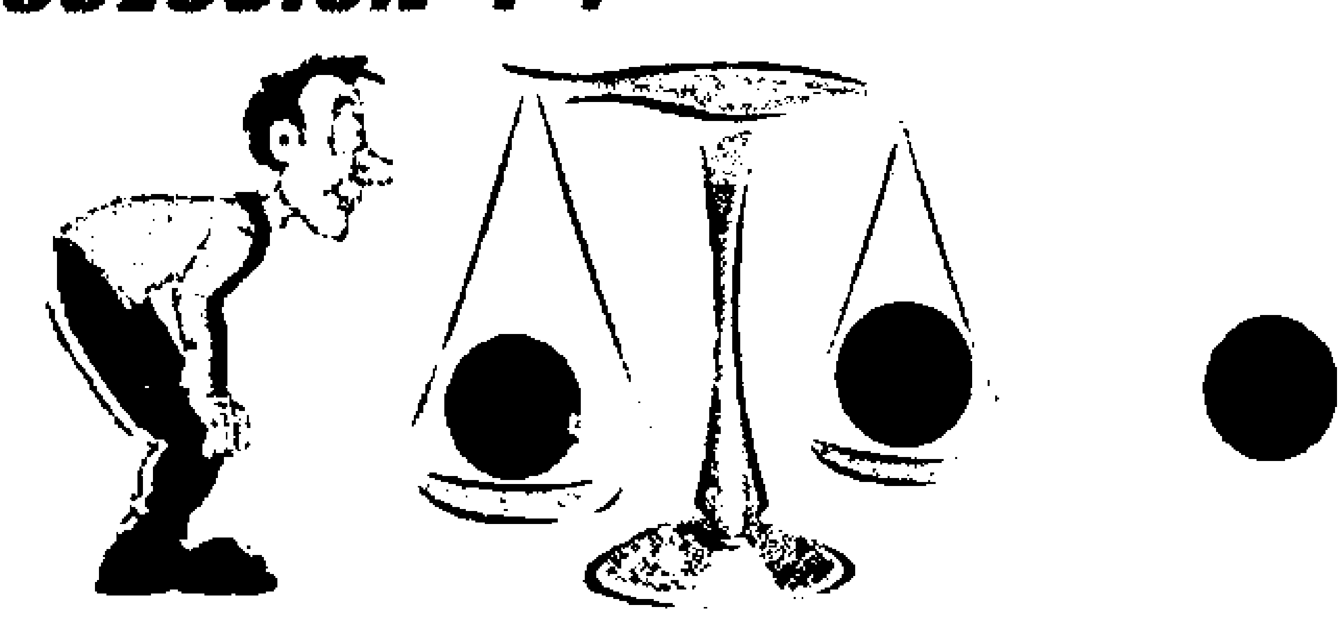
En la figura se muestra un trozo de madera que será cortado con una sierra eléctrica en *16* trozos iguales siguiendo las líneas marcadas. ¿Cuántos cortes rectos, cómo mínimo, se debe hacer?



A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 7

SOLUCIONARIO (PRACTICA DE CLASE)

RESOLUCIÓN 1 :



Bastará con hacer una sola pesada poniendo una

bola de billar en cada platillo y una afuera. Donde se incline estará la bola pesada, caso contrario la pesada será la de afuera.

RPTA: "A"

RESOLUCIÓN 2 :

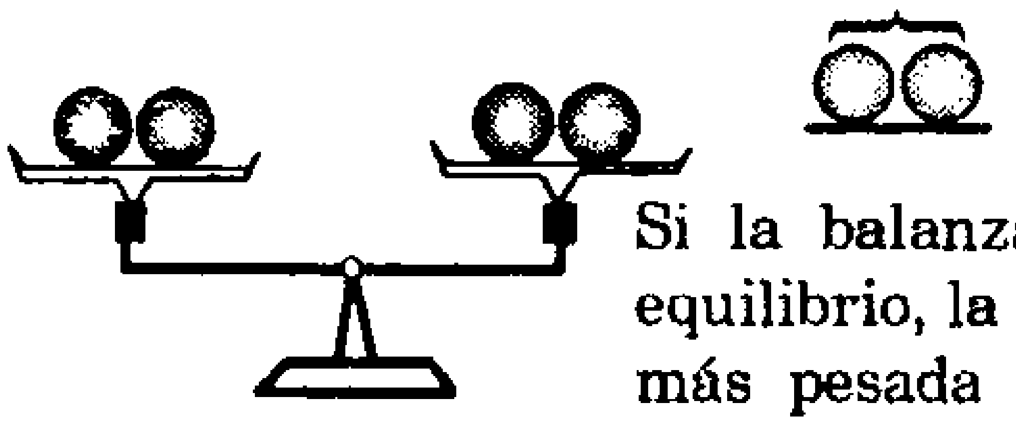
Si se pide el menor número de veces que se debe usar la balanza para identificar la bola de billar que pesa más.

Dato:

* Son *6* bolas de billar de las cuales solo una pesa más.

* Lo primero que haremos es dividir a las *6* bolas entre tres grupos iguales y comparamos dos grupos en la balanza. Es decir:

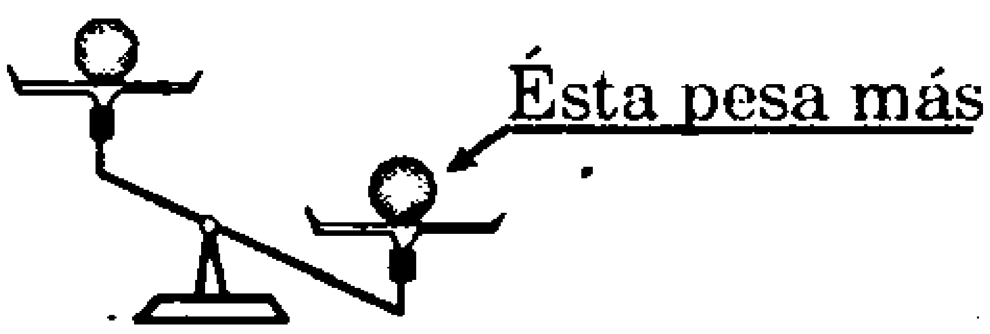
1era pesada: Aquí estará la bola de billar más pesada



Si la balanza resulta en equilibrio, la bola de billar más pesada estará en el tercer grupo.

* Comparamos las dos bolas de billar del tercer grupo con la balanza y la que pesa más será la que incline la balanza.

2da pesada:



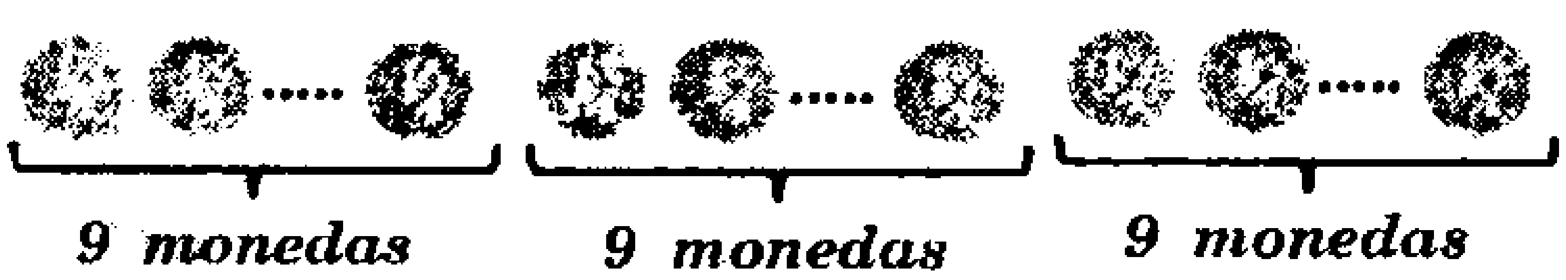
⇒ Se necesitan *2* pesadas, como mínimo.

RPTA : "B"

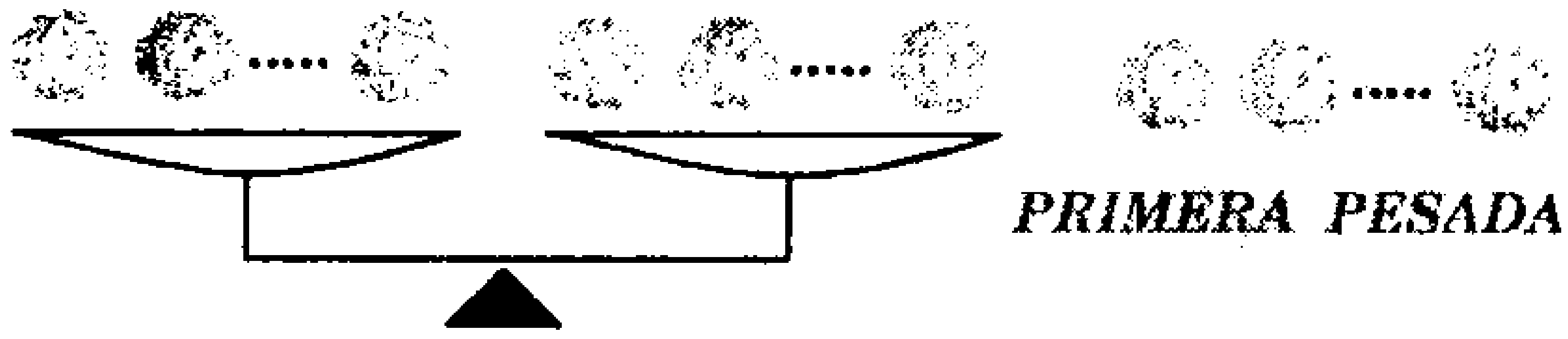
RESOLUCIÓN 3 :

* Para que el número de pesadas sea mínimo la comparación se debe hacer con la mayor cantidad de grupos en forma simultánea con la balanza , de hecho que lo más fácil será dividir el total en *2* grupos , pero nos atreveremos a comparar *3* grupos en forma simultánea (dos en la balanza y un grupo no , pero los *3* grupos deben ser similares) , verás que si se puede así :

****Agrupando en tres grupos de 9 monedas cada uno :***



Comparamos *2* grupos en la balanza de platillos (primera pesada)

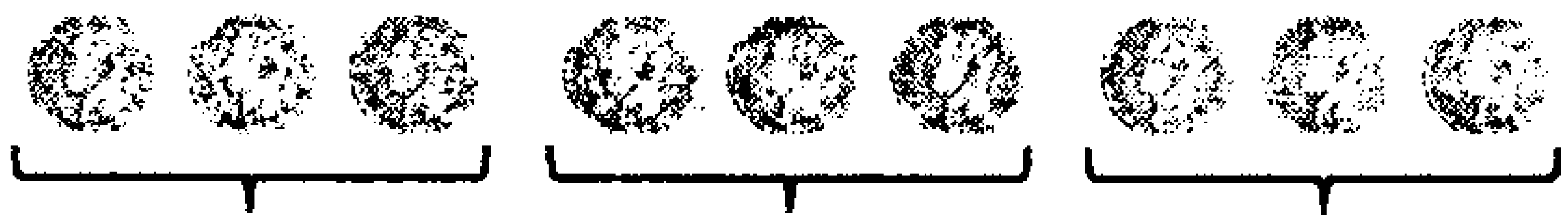


• Necesariamente en uno de los grupos se encontrará la que más pesa.

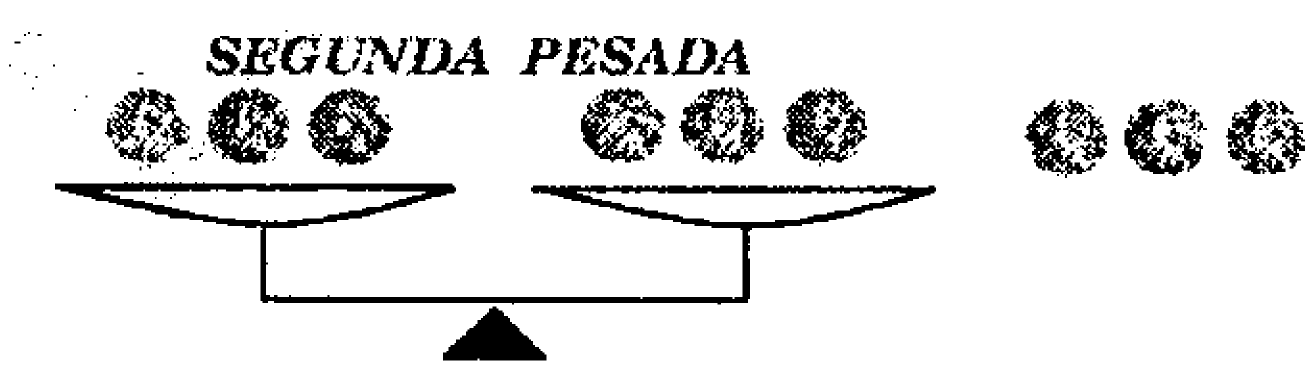
i) Si la balanza no se nivela, está en uno de estos grupos.

ii) Si la balanza se nivela, está en el tercer grupo.

• Agrupamos en *3* grupos de *3* copas cada uno:



• Comparamos *2* grupos en la balanza de platillos (segunda pesada)

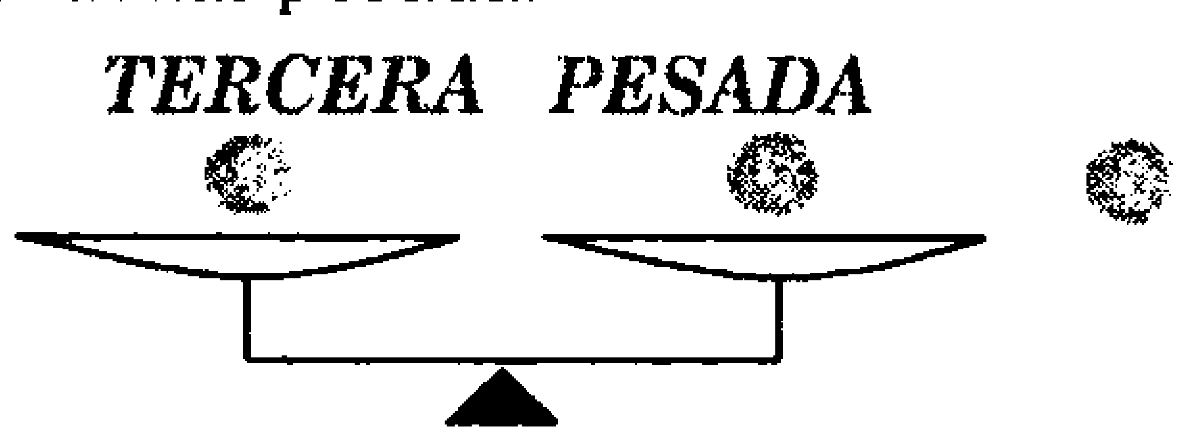


• **Necesariamente en uno de los grupos se** encontrará la que más pesa.

i) Si la balanza no se nivela, está en uno de estos grupos.

ii) Si la balanza se nivela, está en el tercer grupo.

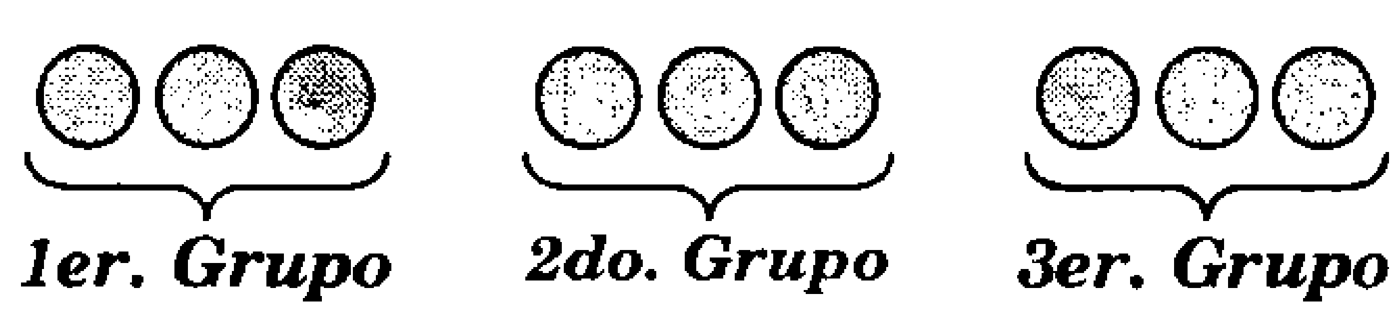
• **Ahora realizamos la comparación de las tres últimas que faltan comparar** para determinar cuál es la más pesada:



• **Luego como mínimo se realizarán** *3* **pesadas**

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 4:



I) Se dividen las *9* bolas de acero en *3* grupos de *3*. Primera pesada : se colocan *3* en cada platillo .

* La balanza o queda en equilibrio o no (ley del

medio excluido)

* Si queda en equilibrio , entonces la bola de mayor peso se encuentra en el grupo que no ha sido pesado. Si no hay equilibrio , entonces se retira y aparta el grupo con la bola más pesada.

II) Se dividen las *3* bolas del grupo más pesado. Segunda pesada : se coloca una bola en cada platillo:

* La balanza o queda en equilibrio o no (¿por qué?)

* Si no hay equilibrio , entonces el balin de mayor peso es el que hace que se incline la balanza . Si hay equilibrio .

* Luego , es suficiente *2* pesadas .

RPTA : "B"

OJO: El problema generalizado para la "*x*" bolas , la respuesta será "*n*",

Donde : $3^{n-1} < x \leq 3^{n}$

EJEMPLO :

Para *65* bolas , se tendrá que ubicar el *65* entre las *2* potencias de *3* más cercanas a *65* , es decir :

$3^{3} < 65 \leq 3^{4}$ ⟶ ***CLAVE: 4 pesadas***

(3^3 ↓ 27 ; 3^4 ↓ 81)

RESOLUCIÓN 5 :

• Si queremos pesar ***2 Kg*** , bastara colocar la pesa de ***1 Kg*** en un platillo y la de ***3 Kg*** en el otro platillo ; así podemos obtener el peso deseado por diferencia : $3-1=2$

• De la misma manera podemos obtener cualquier número entero de kilogramos desde el *1* hasta el: $1+3+9=13$ como se muestra a continuación:

$1=1$	$9-1=8$
$3-1=2$	$9=9$
$3=3$	$9+1=10$
$3+1=4$	$9+3-1=11$
$9-3-1=5$	$9+3=12$
$9-3=6$	$9+3+1=13$
$9-3+1=7$	

⇒ Se pueden obtener *13* pesos diferentes.

RPTA : "B"

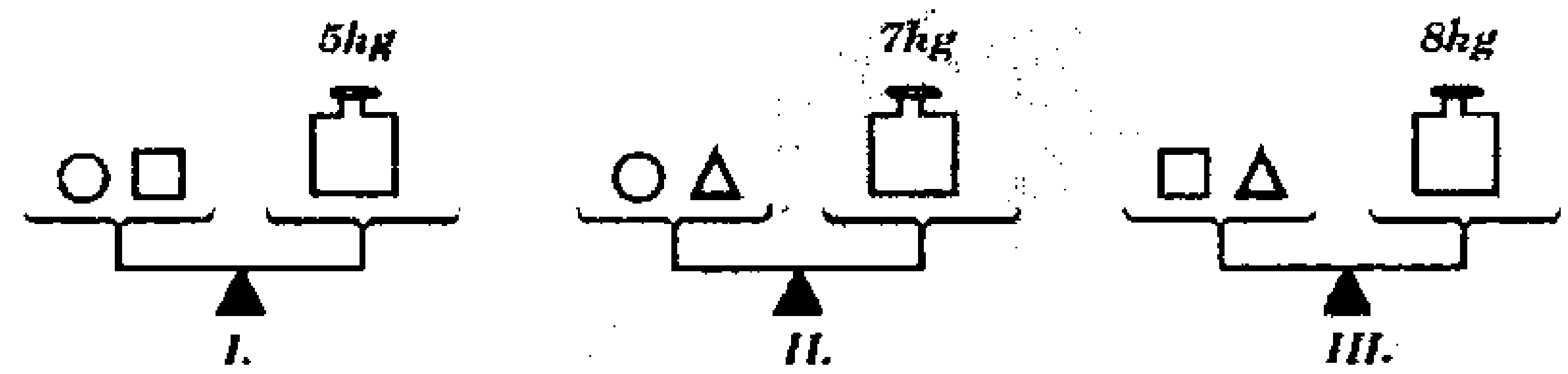
RESOLUCIÓN 6 :

* Con *1* es suficiente , se coloca *1; 2 ; 3 ; 4* y *5* tornillos en cada caja , y luego se determina su peso , si pesan *17* gramos estará en la primera caja , si pesan *18* gramos en la segunda , *19* gramos en la tercera , *20* gramos en la cuarta y *21* gramos en la quinta caja .

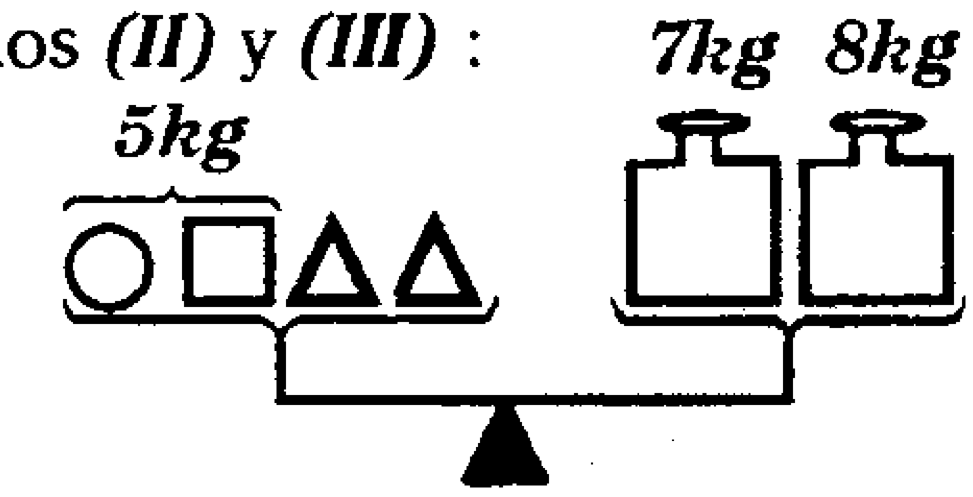
RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 7 :

* Se sabe que las balanzas están en equilibrio



* Juntamos *(II)* y *(III)* :

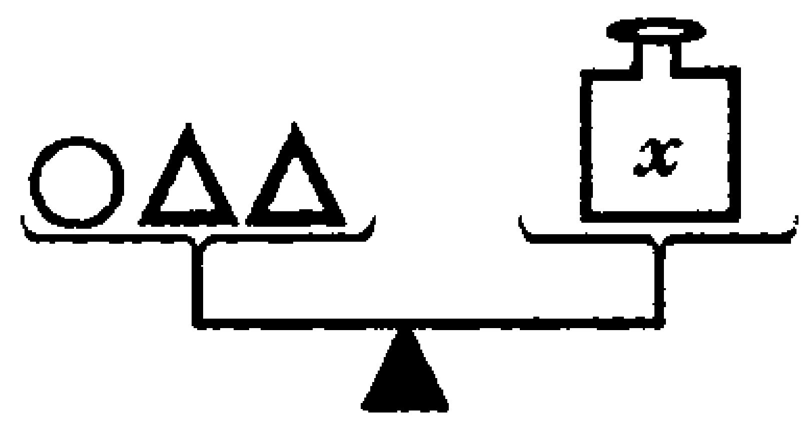


→ ΔΔ <> *10kg* ⇒ Δ <> *5kg*

* Al reemplazar en *(II)* se deduce que :

○ <> *2kg*

* Luego nos piden *x* :

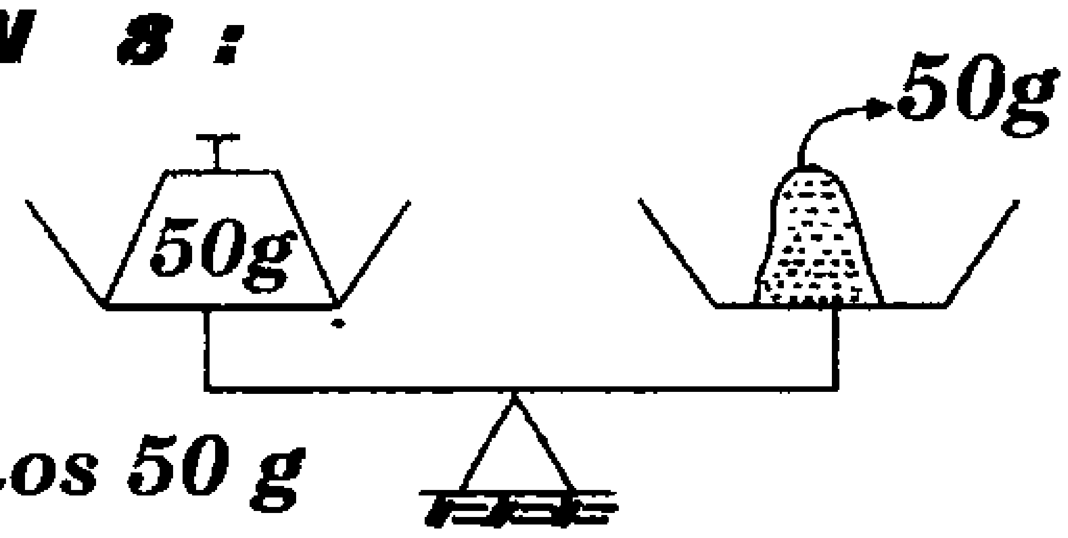


$\Rightarrow x = 12\ kg$

RPTA : «D»

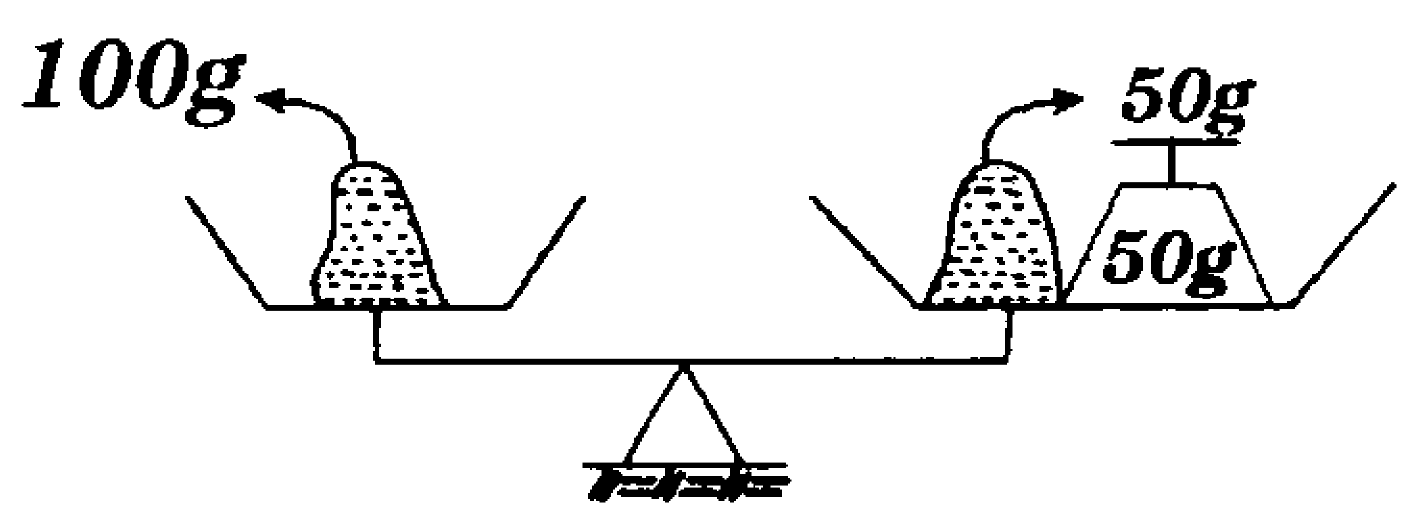
RESOLUCIÓN 8 :

* *1ª)* pesada :



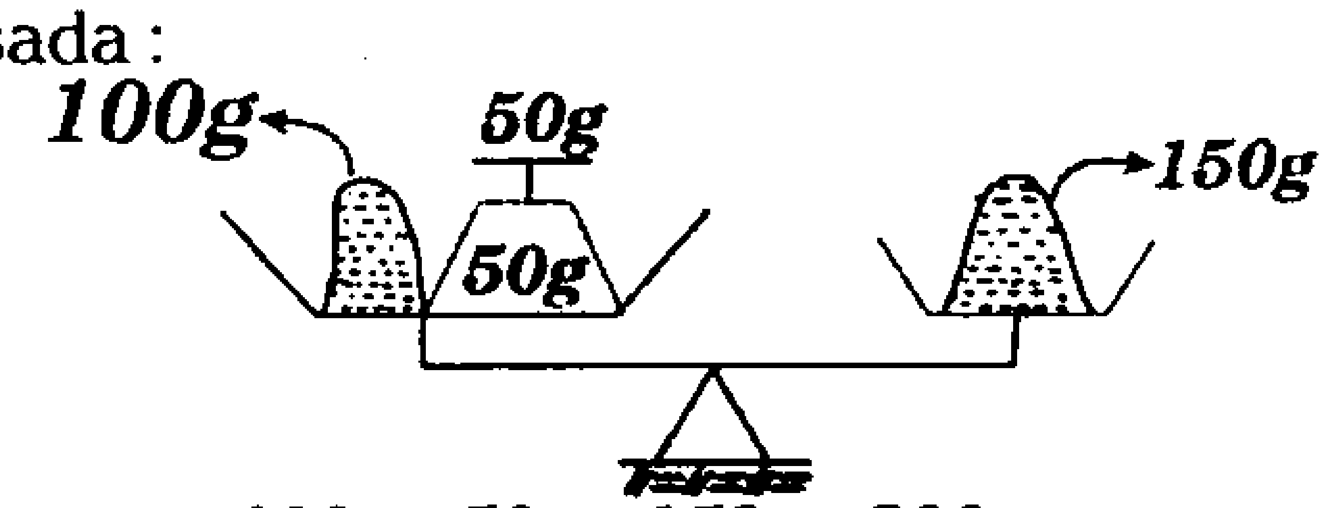
⇒ ***ya tenemos 50 g***

* *2ª)* pesada :



⇒ ***ya tenemos 100 + 50 = 150 g***

* *3ª)* pesada :



⇒ ya tenemos ***100 + 50 + 150 = 300 g***

⇒ Como mínimo se requieren solo *3* pesadas.

RPTA: "A"

RESOLUCIÓN 9 :

Peso de la esfera negra: $3x$

Peso de la esfera blanca: x

i) En el platillo M:

Peso $total_M = 10\,(3x) + 8(x) = 38x$

ii) En el platillo N:

Peso $total_N = 10(x) + 8(3x) = 34x$

iii) Ahora de N tenemos que pasar un peso total de $2x$ para lograr tener un peso de $36x$ en cada platillo.

$\Rightarrow 2x = 2$ veces el peso de la esfera blanca

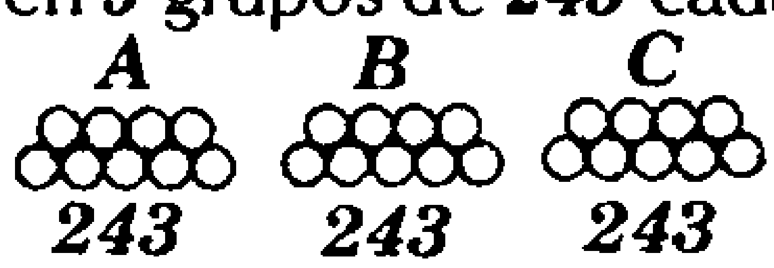
⇒ Se deben trasladar *2* esferas blancas.

RPTA : "B"

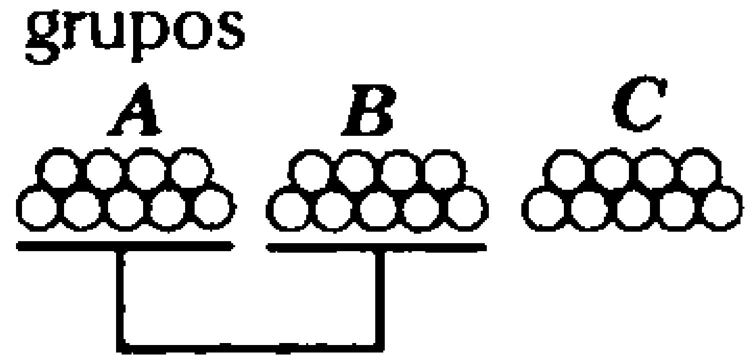
RESOLUCIÓN 10 :

$$3^6 = 729$$

lo dividimos en *3* grupos de *243* cada uno



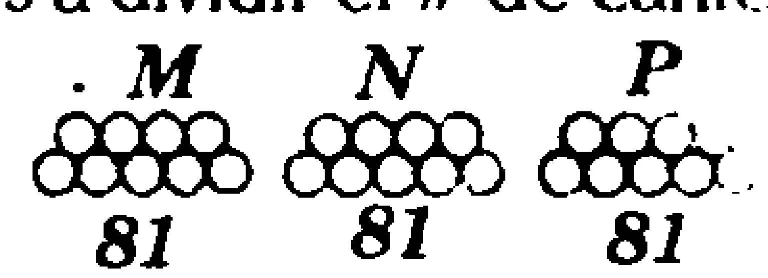
i) Pesamos *2* grupos



Si la balanza se desnivela entonces la canica pesada se encuentra entre A ó B (la que haga bajar el platillo); si no entonces dicha canica esta en C.

ii) ⇒ Al final podemos saber en que grupo se encuentra nuestra canica pesada.

* Volveremos a dividir el # de canicas:



y hacemos el mismo procedimiento

iii) Si nos damos cuenta dicho proceso se repite con *27*, *9*, ③ ⇒ cuando llegamos a *3* canicas entonces con el mismo procedimiento lo logramos encontrar:

pesadas$(243, 81, 27, 9, 3, 1) = 6$

RPTA : "A"

RESOLUCIÓN 11 :

Dato:

2 canicas negras pesan lo mismo que *3* blancas.

$$\Rightarrow 2N = 3B$$

$$\frac{N}{B} = \frac{3}{2} = K \Rightarrow \begin{matrix} N = 3K \\ B = 2K \end{matrix}$$

i) En la balanza M:

Total ○ $= 8 \Rightarrow Peso = 8(B) = 8(2k) = 16k$

Total ○ $= 2 \Rightarrow Peso = 2(N) = 2(3k) = 6k$

Total $= 16k + 6k = 22k$

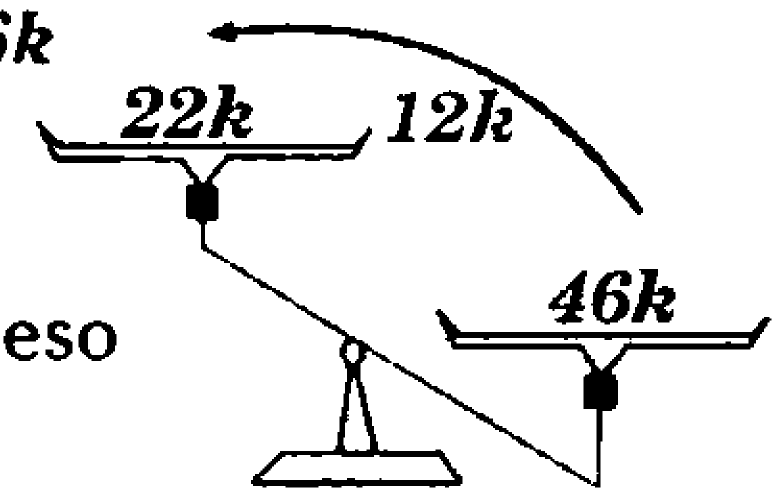
ii) En la balanza N:

Total ○ $= 2 \Rightarrow$ Peso $= 2(B) = 2(2k) = 4k$

Total ○ $= 14 \Rightarrow$ Peso $= 14(N) = 14(3k) = 42k$

Total $= 4k + 42k = 46k$

iii) Luego:



Sólo debe pasar *12k* de peso

⇒ # canicas negras:

$$\frac{12k}{\text{Peso de } 1 \text{ canica negra}} = \frac{12k}{3N} = 4$$

RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 12 :

Definimos:

Peso de la bola blanca: B

Peso de la bola negra: N

Peso del cubo: C

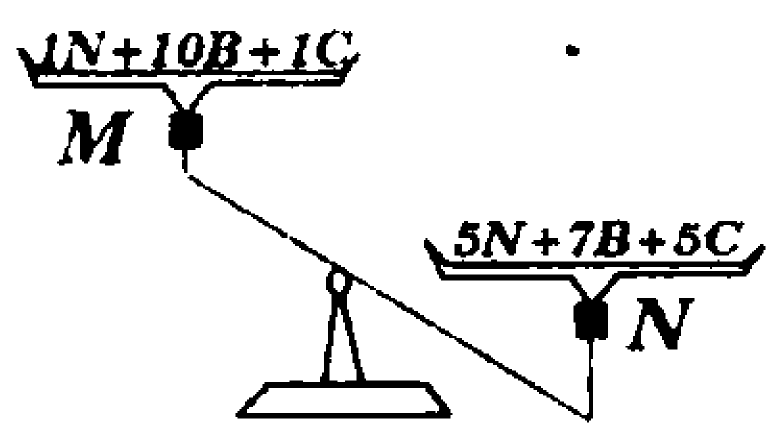
i) De la balanza P: $2N = 3B$........(I)

ii) De la balanza Q: $3N = 1C$........(II)

iii) De (I) y (II): $6N = 9B = 2C = 18K$

$\Rightarrow N = 3K \;\; ; \;\; B = 2K \;\; ; \;\; C = 9K$

iv) Luego en la balanza R



En M:

Peso$(M) = 1(3k) + 10(2k) + 1(9k)$

Peso$(M) = 32k$

En N:

Peso$(N) = 5(3k) + 7(2k) + 5(9k)$

Peso$(N) = 74k$

v) Para el equilibrio:

$$32k + x = 74k - x \Rightarrow x = 21k$$

vi) Sea: # bolas blancas trasladadas: b

bolas negras trasladadas: n

#cubos trasladados: c

Peso total trasladados :

$3k(n) + 2k(b) + 9k(c) = 21k$

$\Rightarrow 3n + 2b + 9c = 21$

Si queremos trasladar la mínima cantidad de objetos $\Rightarrow$ c debe ser máximo (pues pesa más)

Luego:

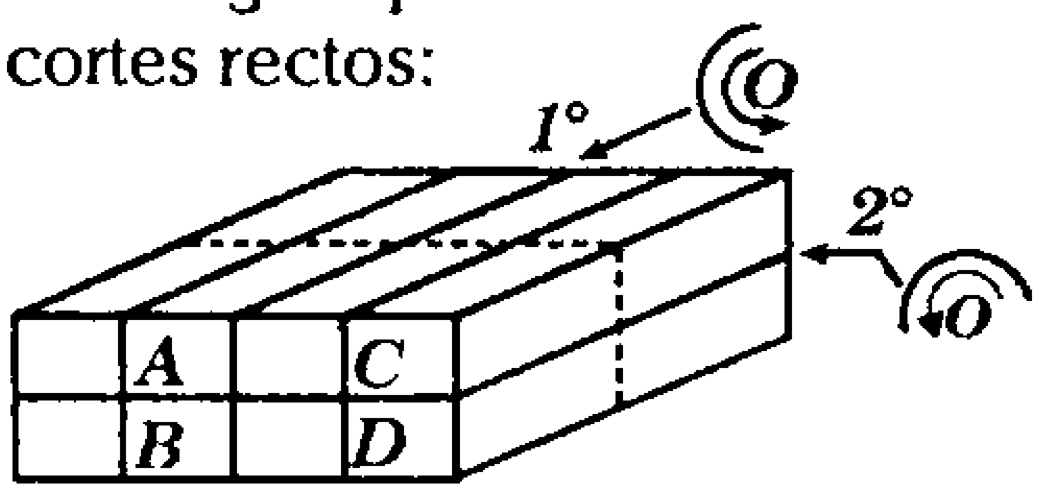
$c_{máx} = 2 \Rightarrow b = 0 \ ; \ n = 1$

$\Rightarrow$ # objetos trasladados $= 2 + 0 + 1 = 3$

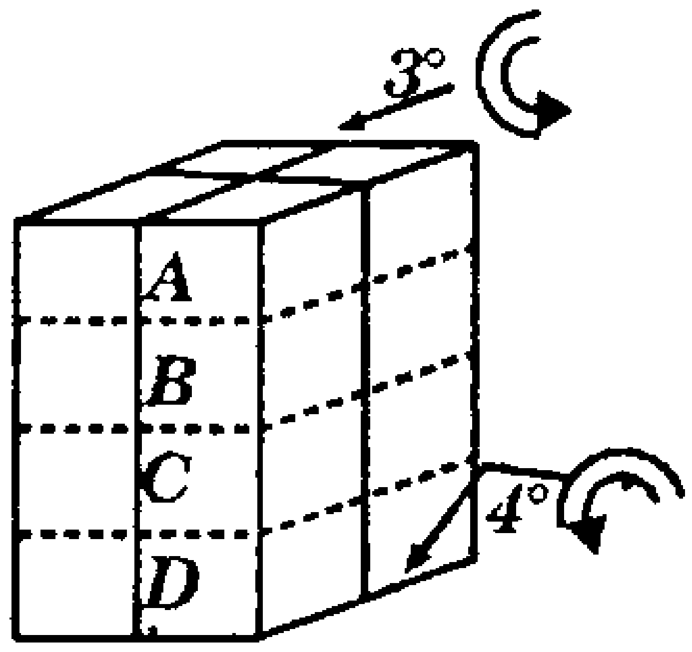
RPTA : "B"

RESOLUCIÓN 13 :

De la figura primero se hacen **2** cortes rectos:



Luego se acomoda uno encima de otro en el orden ***A, B, C, D*** (cualquier orden que se desee)



Por lo tanto como mínimo se necesitan **4** cortes.

RPTA : "C"

PRACTICA DIRIGIDA
PESADAS

01 Se tiene **6** monedas idénticas en tamaño y color. Todas ellas tienen el mismo peso, con excepción de una que es ligeramente más pesada que las demás. Si se tiene una balanza de dos platillos, ¿cuántas veces se tendrá que utilizar como mínimo la balanza para identificar la moneda más pesada?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

02 Un comerciante dispone de una balanza de un solo platillo, que sólo puede pesar ***3 ; 6 ; 9*** ó ***12 kg***, exactamente. Si además tiene una pesa de ***2 kg***, ¿cuántas veces como mínimo tendrá que utilizar la balanza para pesar exactamente ***44 kg*** de azúcar ?

A) 3 *B) 5* *C) 6*
D) 4 *E) 7*

03 Se tiene una balanza de dos platillos y ***12*** esferas iguales en apariencia y peso, excepto una cuyo peso es ligeramente menor. indique el menor número de pesadas que se deben realizar para identificar la esfera más ligera.

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

04 Un comerciante dispone de una balanza de dos platillos y cuatro pesas distintas. Estas pesas son tales que le permite pesar cualquier número entero de kilogramos desde ***1*** al ***15***. Si sólo debe haber pesas en uno de los platillos. ¿cuánto debe pesar cada uno de ellas?

A) 1;3;4 y 7kg *B) 1;2;5 y 7kg*
C) 1;2;3 y 9kg *D) 1;2;4 y 8kg*
E) 2;3;4 y 6kg

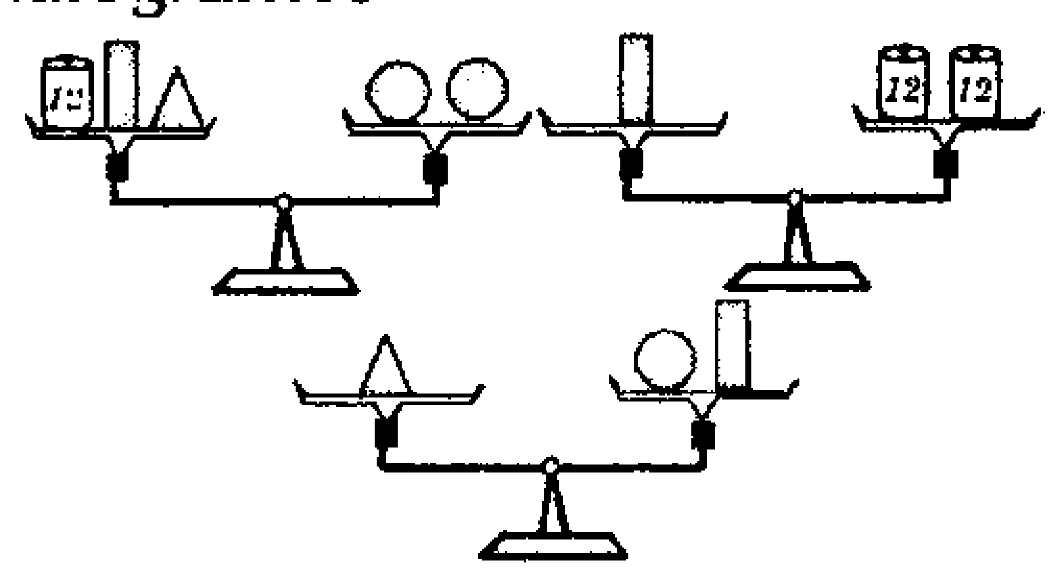
05 Se dispone de varias pesas de ***5*** tipos, cuyos pesos en gramos son: ***30 ; 50 ; 70 ; 110*** y ***130***. Si siempre se usa los ***5*** tipos de pesas, ¿cuál es el menor número de pesas que se necesitan para obtener ***1450g*** ?

A) 15 *B) 14* *C) 13* *D) 16*

06 Luego de cambiar S/.***90*** en monedas de S/.***5*** (iguales en apariencia), uno de mis vecinos me informó que el bodeguero me ha entregado una moneda falsa y que se diferencia de las demás porque pesa menos. Dispuesto a reclamar, empleo una balanza de dos platillos para identificar dicha moneda. ¿Cuántas pesadas tendré que realizar como mínimo?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

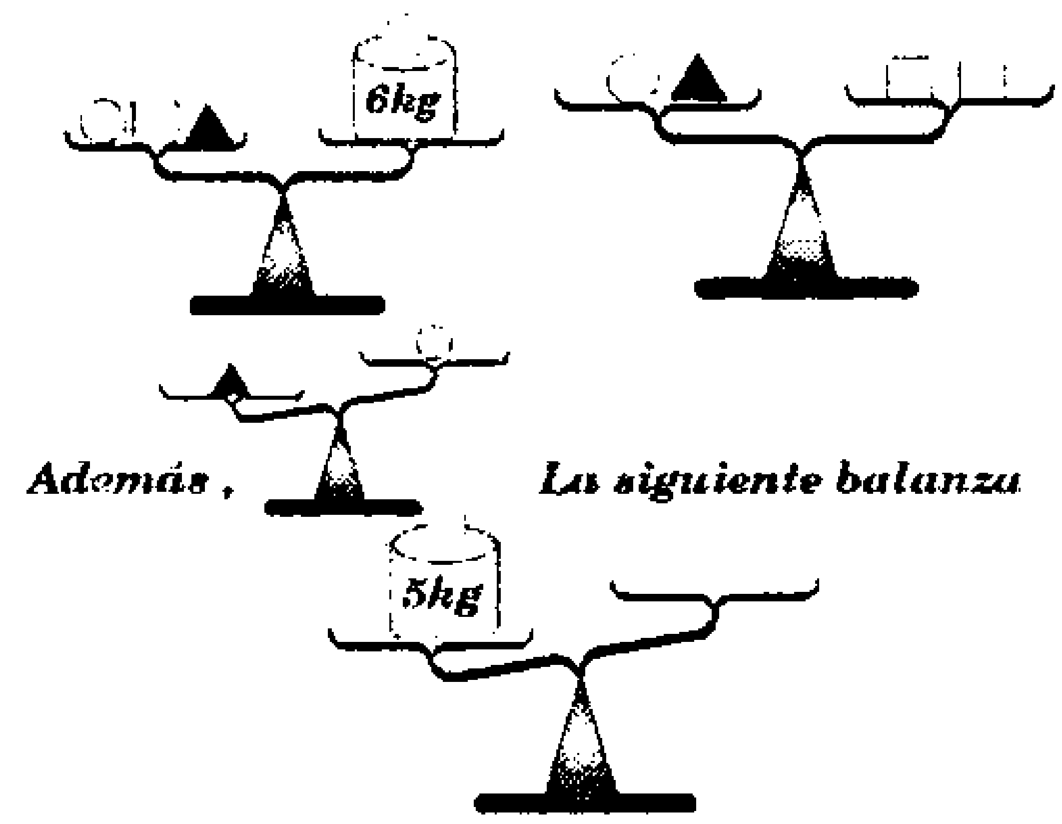
07 En las figuras, las balanzas están en equilibrio y las pesas tienen su peso indicado en kilogramos



¿Cuánto pesa △ en kilogramos?

A) 72 *B) 96* *C) 69*
D) 48 *E) 84*

08 Si las balanzas mostradas están en equilibrio y los objetos diferentes tienen pesos enteros diferentes;



Se equilibra con

A)□□ *B)*▲○ *C)*□□▲ *D)*▲□ *E)*○□

09 Se tiene ***3*** cajas que contienen canicas de ***3*** gramos

cada una y una caja que contiene canicas de **2** gramos cada una. Si cada caja contiene **4** canicas, ¿cuántas pesadas como mínimo se debe realizar en una balanza para identificar la caja que contiene las canicas de menor peso?

A) 3 ***B) 5*** ***C) 2***
D) 1 ***E) 4***

10 De un mismo material se han hecho **6** cubos macizos cuyas aristas miden:

2cm, 4cm, 6cm, 8cm, 10cm y ***12cm***, con sus respectivos pesos: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 .
Si colocamos los **6** cubos y una pesa de peso $9P_1$, en los platillos de una balanza de dos brazos de modo que queden en equilibrio, ¿cuál o cuáles de las siguientes relaciones se cumple?

$I)\ P_6 + 9P_1 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5.$
$II)\ P_6 + 10P_1 = P_2 + P_3 + P_4 + P_5.$
$III)\ P_6 + P_2 = 10P_1 + P_3 + P_4 + P_5.$
$IV)\ P_6 + P_1 + P_2 = 9P_1 + P_3 + P_4 + P_5.$

A) Sólo I ***B) I y III*** ***C) Sólo III***
D) I y IV ***E) Todas***

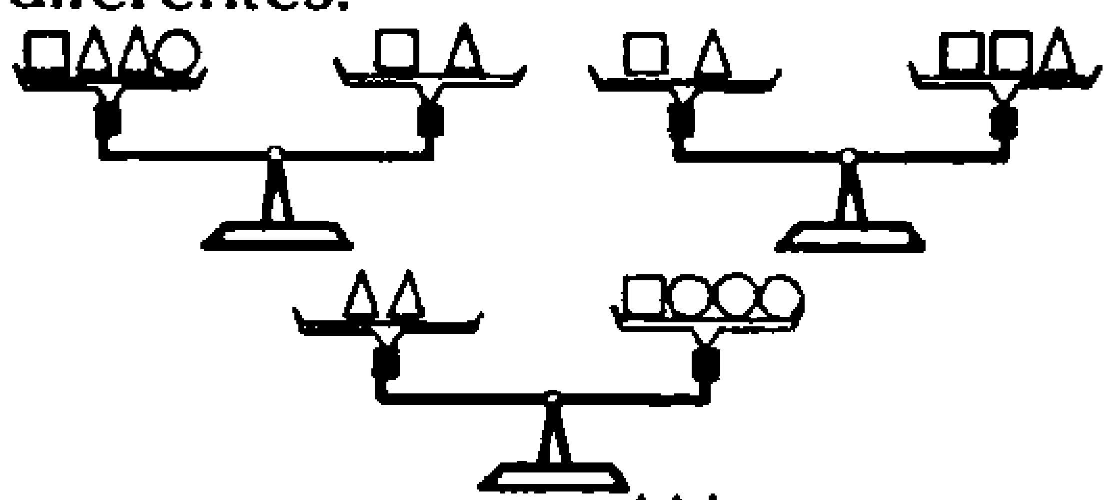
11 Se tiene ***96 kg*** de trigo y se desea pesar ***28,5 kg*** de ella. Disponemos de una balanza de dos platillos, pero no tenemos ninguna pesa. ¿Cuántas pesadas como mínimo se tendrá que realizar para obtener los ***28,5 kg*** de trigo?

A) 8 ***B) 5*** ***C) 7***
D) 6 ***E) 4***

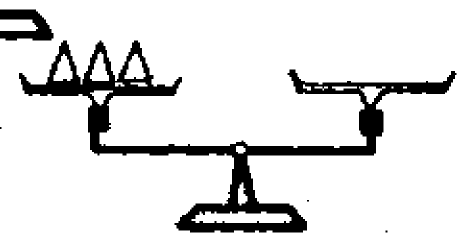
12 Se tiene **5** cajas iguales que contienen clavos de acero; en cuatro de ellas cada uno de los clavos pesa **7** gramos y en la otra caja cada clavo pesa **6** gramos. ¿Cuántas pesadas como mínimo se necesita realizar en una balanza para determinar la caja que contiene los clavos de menor peso?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3***
D) 4 ***E) 5***

13 Si las balanzas mostradas están en equilibrio, y los objetos diferentes tienen pesos diferentes.



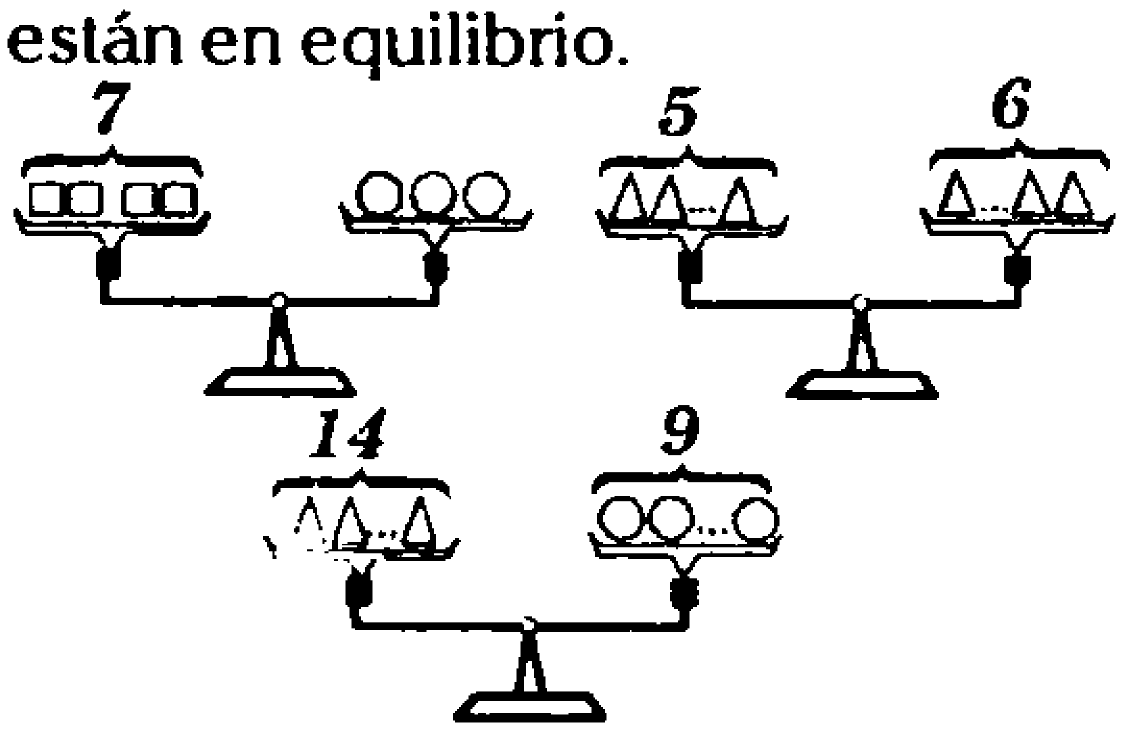
La siguiente



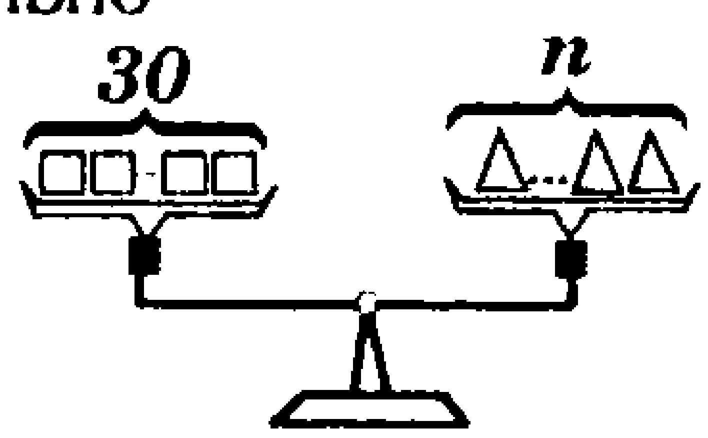
balanza se equilibra con:

A) □○○□ ***B)*** □○○□ ***C)*** ○○△△
D) ○○□□ ***E)*** □○○△

14 En la figura, las balanzas están en equilibrio.



Halle el valor de ***n*** para que la siguiente balanza esté en equilibrio

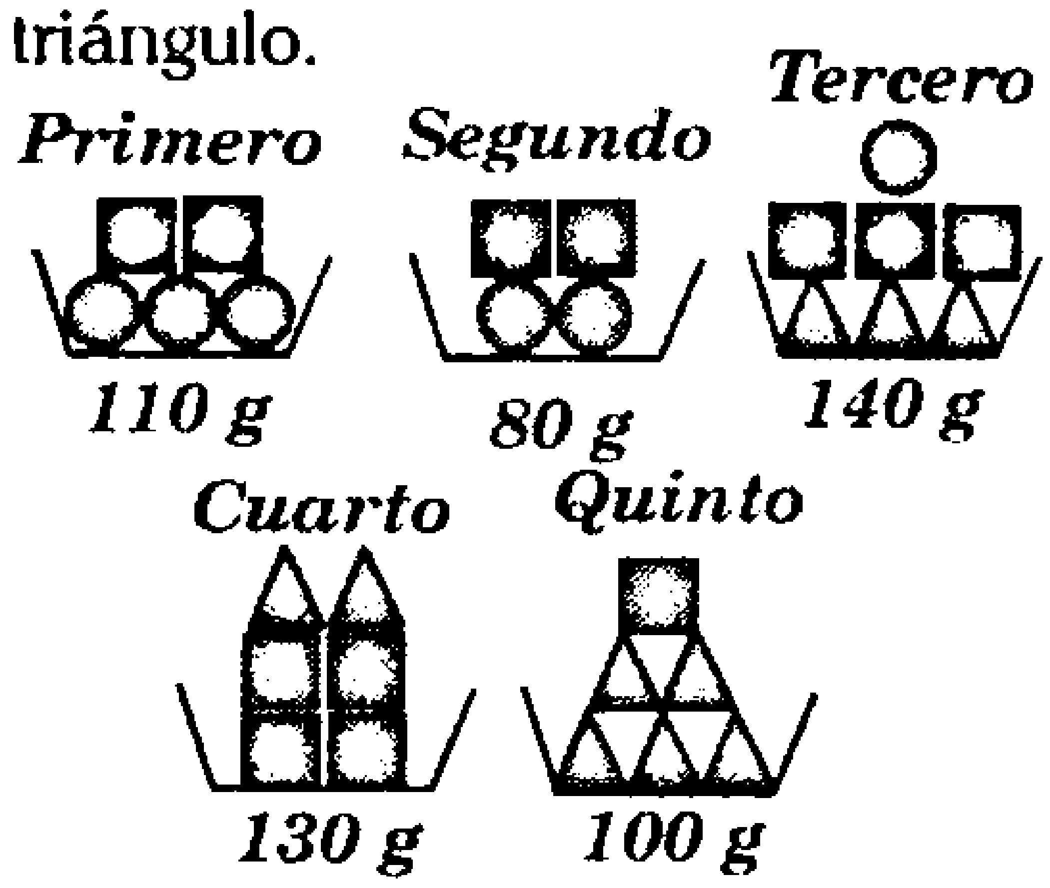


A) 18 ***B) 30*** ***C) 28***
D) 24 ***E) 36***

15 Se dispone de varias pesas de **5** tipos, cuyos pesos en kilogramos son: ***2, 5, 7, 11*** y ***13*** respectivamente. ¿Cuál es el menor número de pesas que se necesitan para obtener ***214 kg*** si siempre se utilizan los cinco tipos de pesas?

A) 21 ***B) 20*** ***C) 19***
D) 18 ***E) 22***

16 La figura muestra **5** balanzas con objetos y los pesos totales en cada balanza. Una de las balanzas funciona mal y las otras **4** indican el peso correcto. Determine el peso conjunto de un cuadrado, un círculo y un triángulo.

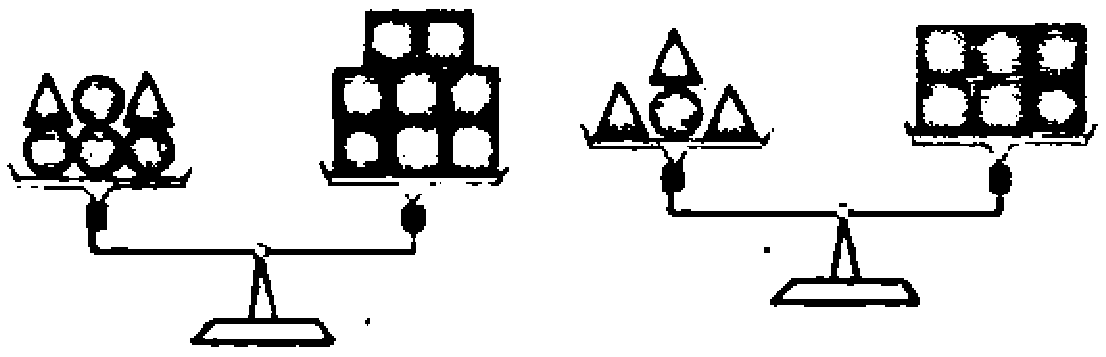


A) 70g ***B) 60g*** ***C) 50g***
D) 40g ***E) 65g***

17 Un vendedor de abarrotes dispone de una balanza de un solo platillo, que solo puede pesar exactamente ***7; 9*** ó ***13 kg***. Si el vendedor posee una pesa de ***2 kg***, ¿cuántas veces como mínimo tendrá que utilizar la balanza para pesar exactamente ***41 kg*** de azúcar?

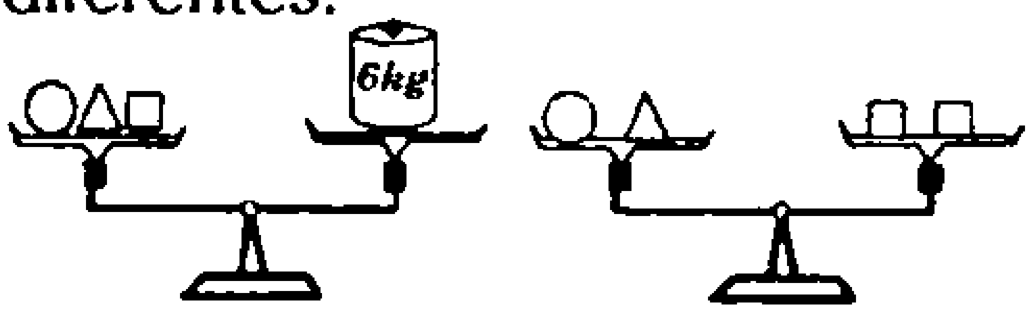
A) 5 ***B) 7*** ***C) 4***
D) 6 ***E) 8***

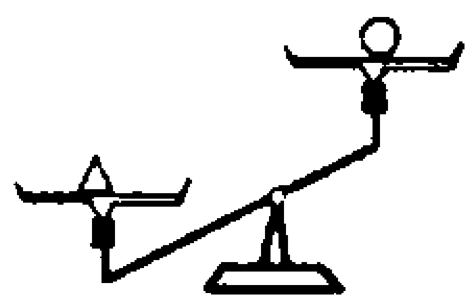
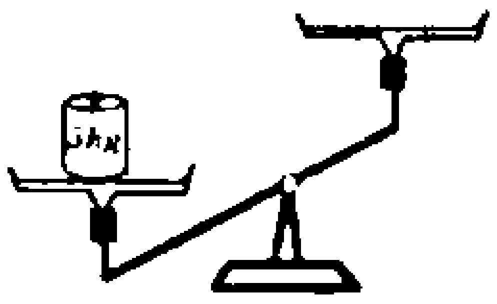
18 En la figura, ocho cuadrados pesa lo mismo que dos triángulos y cuatro círculos juntos, mientras que el peso de seis cuadrados es igual al de un círculo y tres triángulos juntos. ¿Cuántos cuadrados se necesitan para equilibrar el peso de cuatro triángulos y el peso de tres círculos, juntos?



A) 9 *B) 13* *C) 11*
D) 12 *E) 10*

19 Si las balanzas mostradas están en equilibrio y los objetos diferentes tienen pesos enteros diferentes:



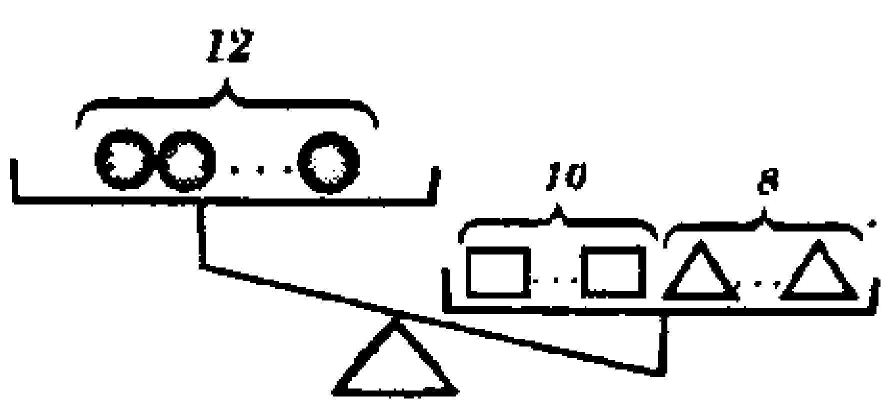
Además,  . La siguiente balanza 

se equilibra con:

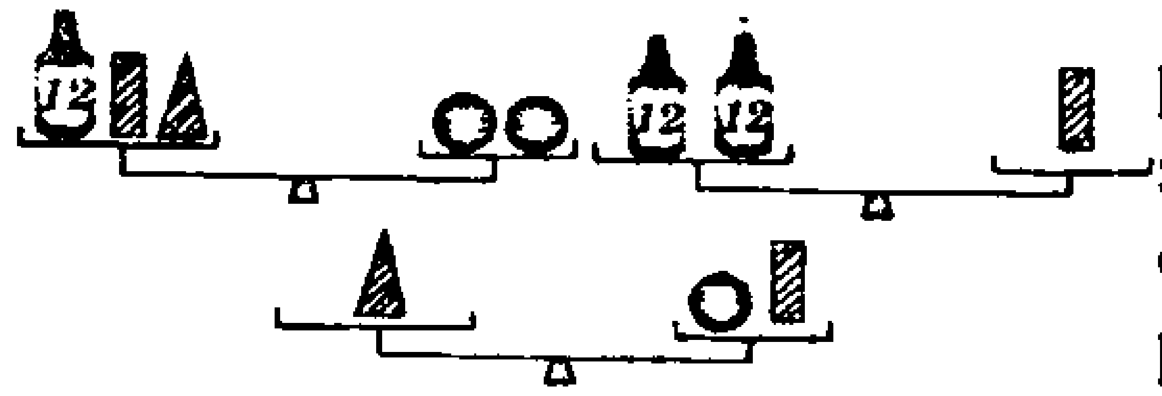
A) □□ *B)* △○ *C)* □□△ *D)* □△ *E)* □○

20 La figura representa una balanza de dos platillos,con ***12*** canicas negras,***10*** láminas cuadradas, ***8*** láminas triangulares y objetos del mismo tipo tienen igual peso, Si el peso ***4*** canicas es igual al peso de ***3*** láminas cuadradas y el peso de una lamina triangular es la mitad del peso de una lamina cuadrada. ¿ Cuántos objetos como mínimo se debe trasladar de un platillo al otro, para equilibrar la balanza?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

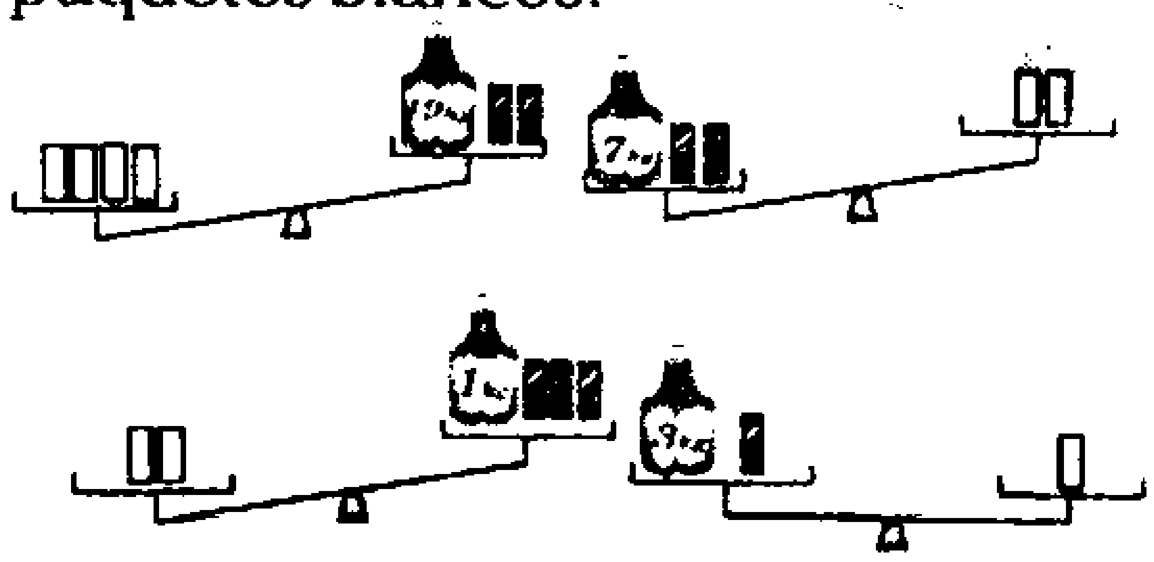


21 Las balanzas mostradas están en equilibrio y las pesas tienen su peso indicado en kilogramos. ¿Cuánto pesa un objeto triangular?



A) 72 kg *B) 96 kg*
C) 69 kg *D) 48kg*
E) 84 kg

22 Del gráfico, los paquetes del mismo color pesan el mismo número entero de kilogramos y las pesas tienen su peso indicado en kilogramos. Determine el peso de ***3*** paquetes negros y ***4*** paquetes blancos.



A) 37 kg *B) 40 kg*
C) 11 kg *D) 13 kg*
E) 30 kg

23 Utilizando una balanza con dos platillos y una colección de pesas de ***1 g;10 g;100 g ;.... ;10ⁿ g***. Halle el menor número de pesas que se necesitan para pesar un objeto de ***8947*** gramos en una sola pesada.

A) 10 *B) 11* *C) 12*
D) 22 *E) 28*

24 Se dispone de una balanza de dos platillos, una bolsa que contiene ***50 kg*** de arroz y dos pesas una de ***7kg*** y otra de ***5kg***. ¿Cuántas veces como mínimo se debe utilizar la balanza para pesar ***23,5 kg*** de arroz?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

25 Se tiene ***6*** bolas de billar idénticas en tamaño y color. Todas ellas tienen el mismo peso, con excepción de dos que son ligeramente más pesadas que las demás. Si estas dos pesas tienen el mismo peso, ¿cuántas pesadas como mínimo se debe realizar en una balanza de ***2*** platillos, para identificar con certeza a las dos más pesadas? .

A) 6 *B) 3* *C) 4*
D) 5 *E) 2*

CLAVES

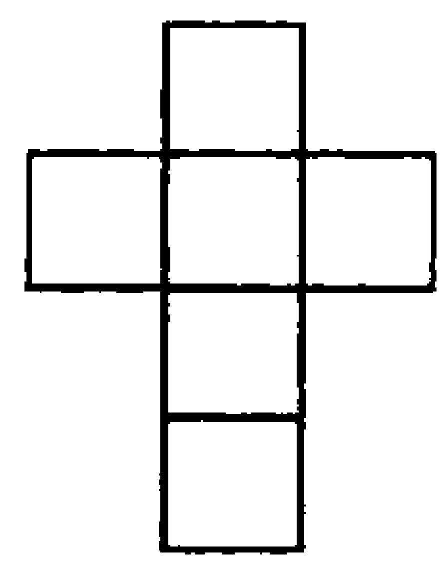
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	D	C	D	A	D	E	D	D	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	A	A	D	C	B	A	E	D	C
21	22	23	24	25					
E	B	A	B	B					

PRACTICA DIRIGIDA

PARTICIONES

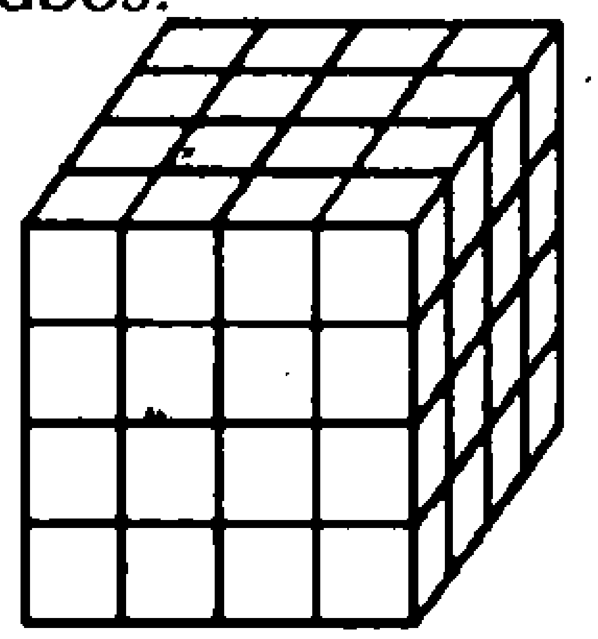
01 Se tiene un pliegue de papel de la forma señalada en el gráfico. ¿Cuántos cortes rectos son necesarios emplear, como mínimo, para que los ***6*** cuadrados queden separados?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



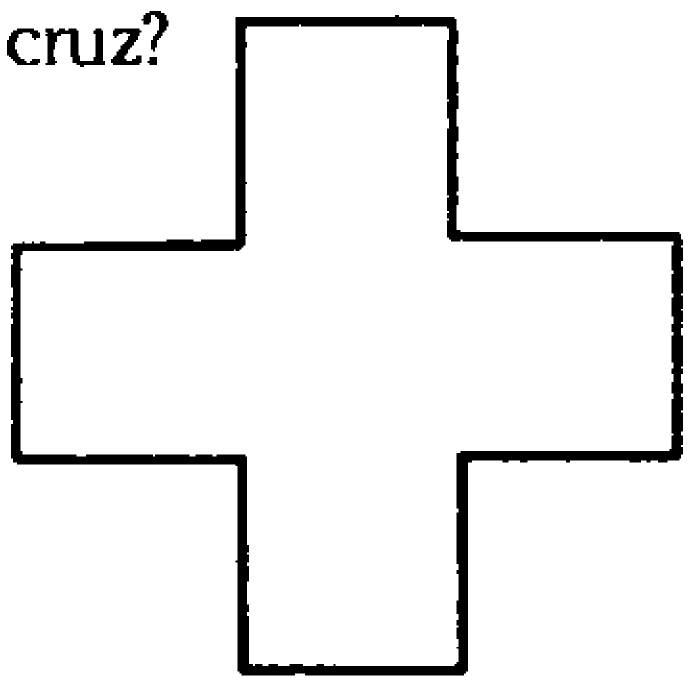
02 En la figura se muestra un cubo de madera ***20 cm*** de arista. Este cubo se puede seccionar y obtener ***64*** cubos de ***5 cm*** de arista. Si solamente deseamos obtener los ocho cubos de ***5 cm*** de arista que tienen una cara sombreada, ¿cuántos cortes rectos como mínimo deberá realizarse con

una sierra eléctrica para obtener estos cubos?



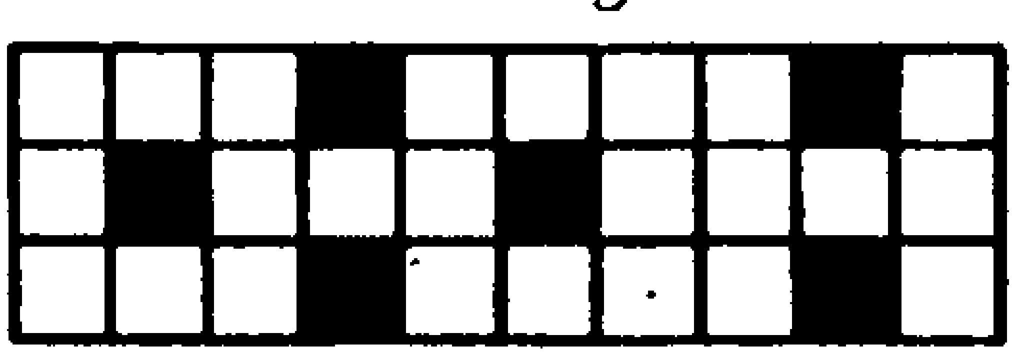
A) 5
B) 7
C) 8
D) 6
E) 4

03 Leonardo, tiene una cruz hecha en cartón, ver figura, cuyos lados son iguales y todos los ángulos son rectos. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo debe realizar, para que con las piezas que resulten forme un cuadrado de área equivalente al de la cruz?



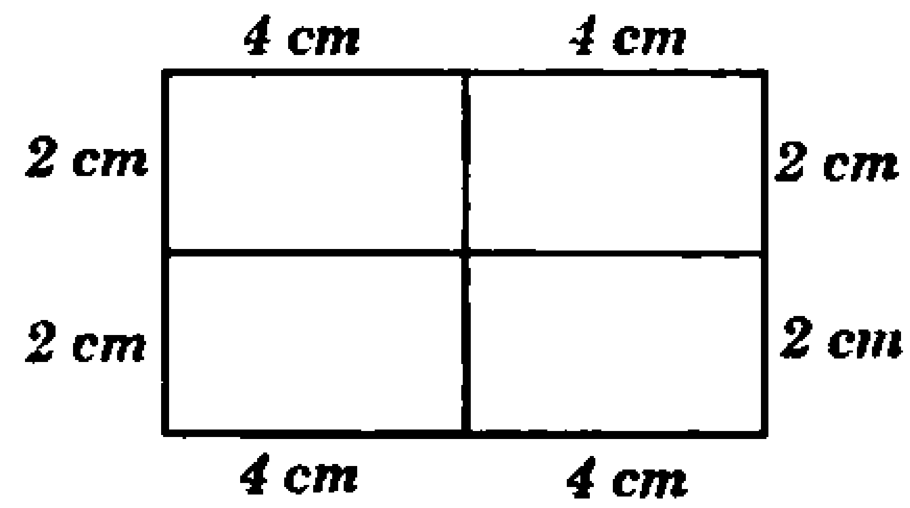
A) 4
B) 2
C) 3
D) 5
E) 6

04 Se dispone de un trozo de cartón cuadriculado de ***2 cm*** de espesor, tal como se muestra en la figura , y de una guillotina que puede cortar a lo más un espesor de ***2 cm*** de cartón. Para obtener los seis cuadrados sombreados de cartón, ¿cuántos cortes rectos como mínimo deberán realizarse con la guillotina?



A) 4 B) 6 C) 5
D 8 E) 10

05 La figura representa a una rejilla rectangular construida de alambre. Se desea obtener ***18*** varillas de alambre de ***2 cm*** de longitud. Si no se puede doblar el alambre, ¿cuántos cortes rectos como mínimo se deberá realizar para obtener las varillas?

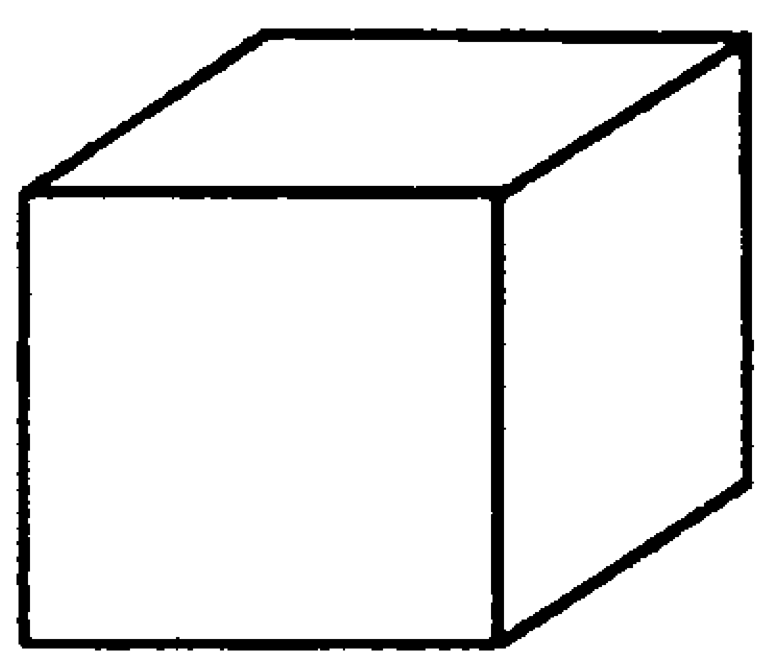


A) 3
B) 5
C) 7
D) 6
E) 4

06 Se tiene ***3*** varillas de fierro de longitudes ***126*** ; ***189*** y ***210 cm***. Determine el número total de cortes que se debe realizar para obtener la menor cantidad posible de trozos de la misma longitud sin que sobre material. Si todos los cortes los hará sin juntar, ni doblar, ni alinear, ni superponer las varillas en ningún momento.

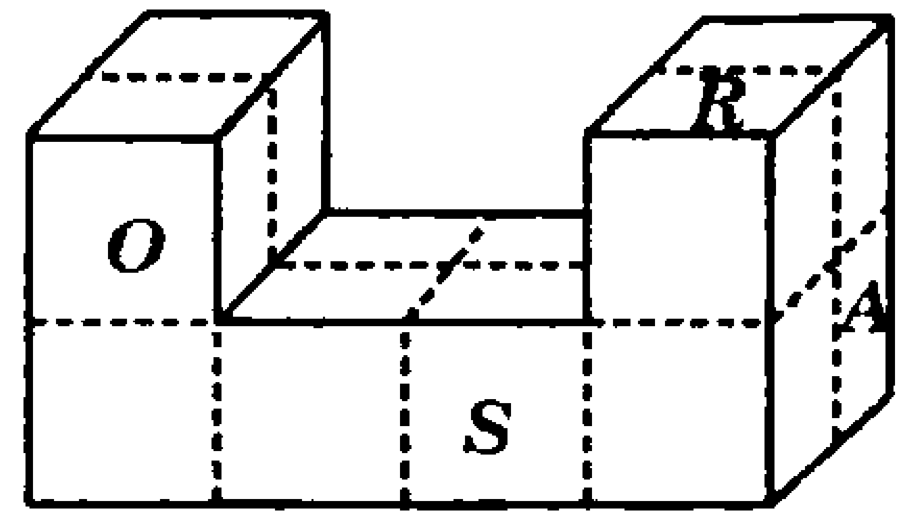
A) 25 B) 24 C) 22
D) 27 E) 20

07 En la figura se muestra un cubo de madera. ¿Cuántos cortes como mínimo se debe realizar para obtener ***18*** trozos idénticos de madera?



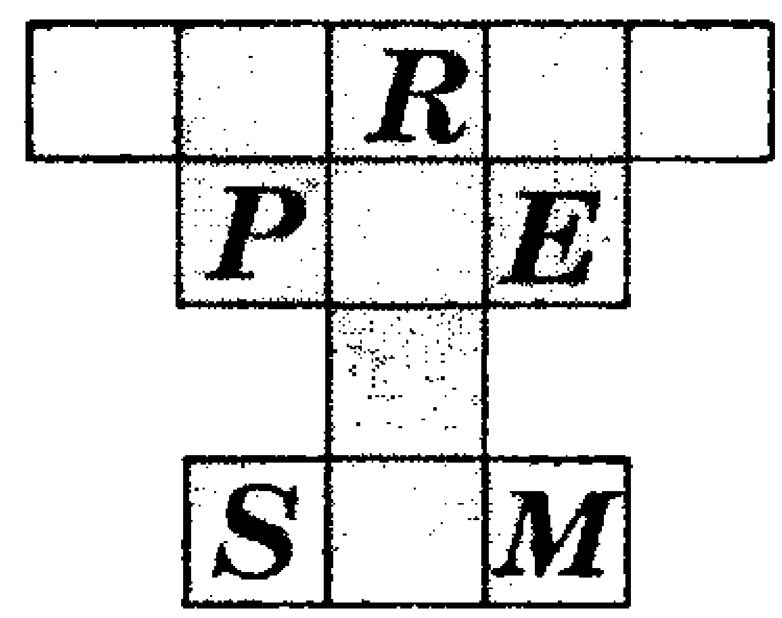
A) 4 B)5 C) 6
D) 7 E) 8

08 En la figura se tiene un trozo de madera, el cual al ser cortado siguiendo las líneas punteadas se obtendría ***12*** cubitos. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo deberá realizarse con una sierra eléctrica para obtener los cuatro cubitos con las letras ***R***, ***O***, ***S***, ***A***?



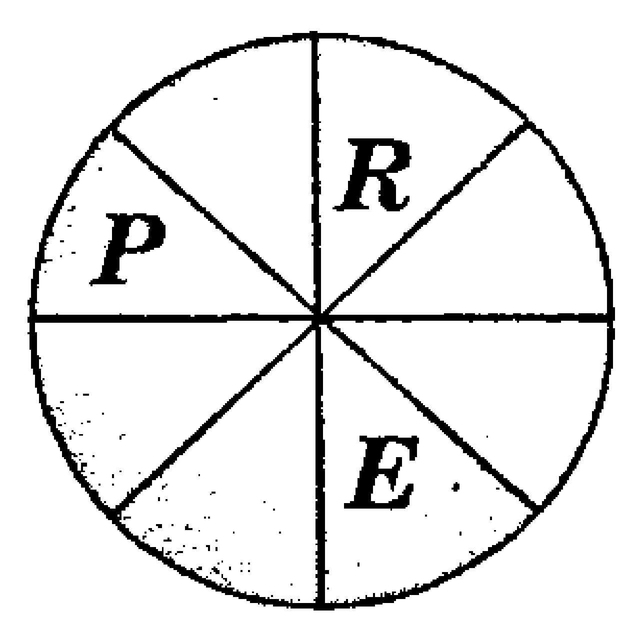
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

09 En la figura se tiene un trozo de madera cuadriculada de ***1 cm*** de espesor, el cual será cortado por una sierra eléctrica para obtener cinco cuadraditos con las letras, ***P,R, E, S*** y ***M***.
Si la sierra no corta más de ***1 cm*** de espesor, ¿cuántos cortes rectos como mínimo deberán realizarse?



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

10 En la figura, se tiene un trozo de madera de forma circular de ***1 cm*** de espesor, el cual será cortado por una sierra eléctrica para obtener tres sectores circulares con las letras ***P, R*** y ***E***. Si la sierra no corta más de ***1 cm*** de espesor, ¿cuántos cortes rectos como mínimo deberán realizarse?



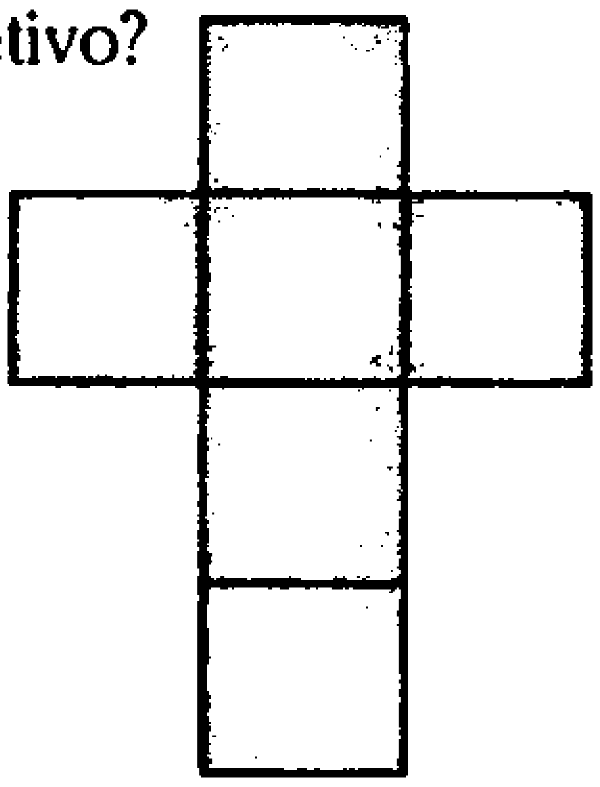
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

11 Se dispone de una tela cuadrada de ***6 m*** de lado y de una guillotina que puede cortar una longitud máxima de ***2 m*** y a lo más tres capas a la vez de esta tela. Si se desea obtener trozos rectangulares de ***2 m*** por

1 m de esta tela, ¿cuántos cortes como mínimo deberá realizarse para obtener el máximo número de trozos?

A) 9 ***B) 8*** ***C) 6***
D) 7 ***E) 5***

12 En la figura se muestra una hoja de papel cuadriculada y deseamos seccionar los ***6*** cuadrados de la cuadrícula. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo debemos realizar con una tijera de costura, para lograr el objetivo?



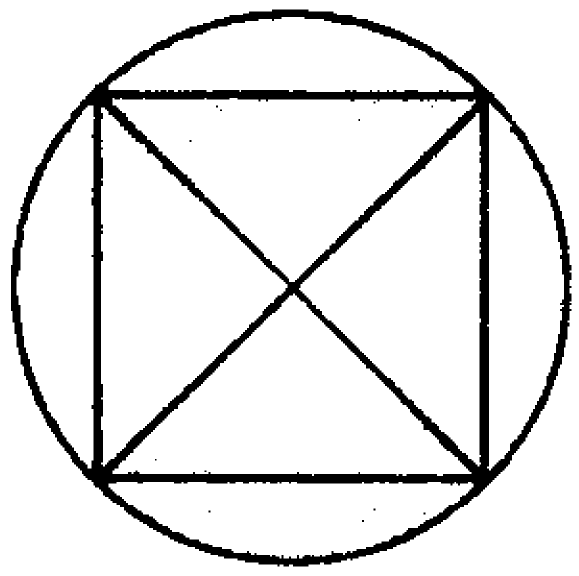
A) 4
B) 3
C) 1
D) 5
E) 2

13 Un alambre, de ***«n» cm*** de longitud, se divide mediante un corte en dos partes de igual longitud, luego en cada parte se realizan nuevos cortes y se obtiene un número exácto de trozos, en el primero trozos de ***n/16 cm***, y en el segundo trozos de ***n/32 cm***. Halle el número total de cortes realizados, si estos se hicieron uno a uno.

A)n ***B) 12*** ***C)24n***
D) 23 ***E) 48n***

14 En la figura se muestra una hoja de papel de forma circular. En ella se ha dibujado un cuadrado con sus dos diagonales. Si se desea seccionar las ocho regiones simples del círculo, ¿cuántos cortes rectos como mínimo debemos realizar con una tijera de costura, para lograr el objetivo?

A) 4
B) 3
C) 1
D) 5
E) 2



15 Se dispone de una tela de ***15 m*** de largo por medio metro de ancho y de una tijera única especial cuya longitud de corte es de medio metro y que puede cortar a lo más tres capas. Si se desea obtener ***15*** trozos de tela de ***1m*** de largo por medio metro de ancho, ¿cuántos cortes rectos como mínimo deberá realizarse?

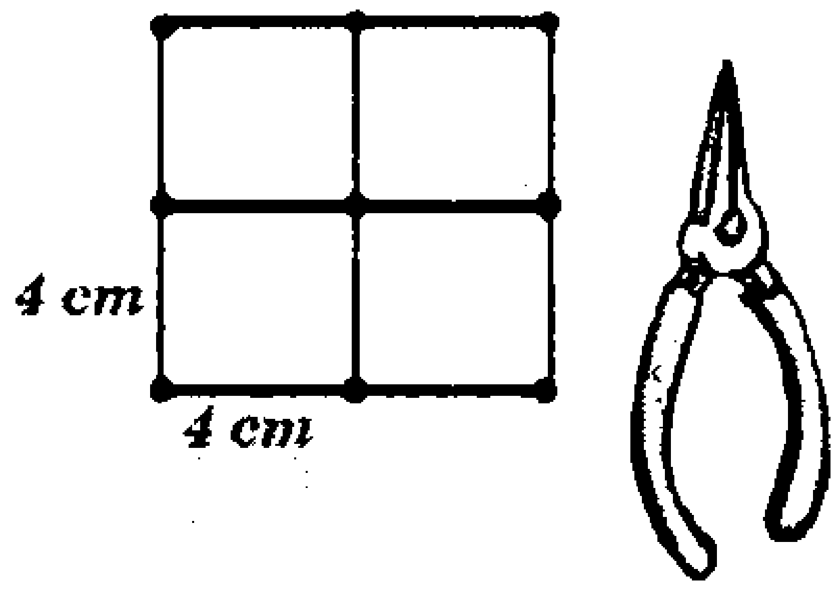
A) 7 ***B) 6*** ***C) 5***
D) 4 ***E) 3***

16 Un carpintero tiene un tablero de madera de forma rectangular cuyas dimensiones son ***50cm*** de largo, ***35 cm*** de ancho y ***1 cm*** de espesor. Si desea obtener tableros idénticos de ***10 cm*** de ancho por ***25 cm*** de largo, y para ello la única herramienta de la que dispone es de una sierra circular que puede cortar a lo más ***1 cm*** de espesor de madera, ¿cuántos cortes rectos como mínimo debe realizar para obtene. la máxima cantidad de piezas?

A) 4 ***B) 3*** ***C)5***
D) 2 ***E) 6***

17 En la figura, se indica una malla hecha de alambre delgado y los puntos de soldadura. Si se desea obtener los ***12*** segmentos de alambre de ***4 cm*** de longitud con una tijera especial cuya longitud de corte máximo es de ***6 cm***, ¿cuántos cortes como mínimo son necesarios, si el alambre no se puede doblar en ningún momento?

A) 3
B) 2
C) 5
D) 4
E) 6



18 ¿Cuál es el máximo número de trozos de papel que se puede obtener haciendo ***19*** cortes rectos a una hoja de papel de forma rectangular, sin doblar ni superponer en ningún momento?

A) 193 ***B) 189*** ***C) 192***
D) 190 ***E) 191***

19 Se dispone de una tela de ***20 m*** de largo por ***0,5 m*** de ancho y de una tijera que puede cortar a lo más tres capas y ***0,5 m*** de ancho de esta tela a la vez. Si se desea obtener ***20*** trozos de tela de ***1m*** de largo por ***0,5 m*** de ancho, ¿cuántos cortes como mínimo deberá realizarse?

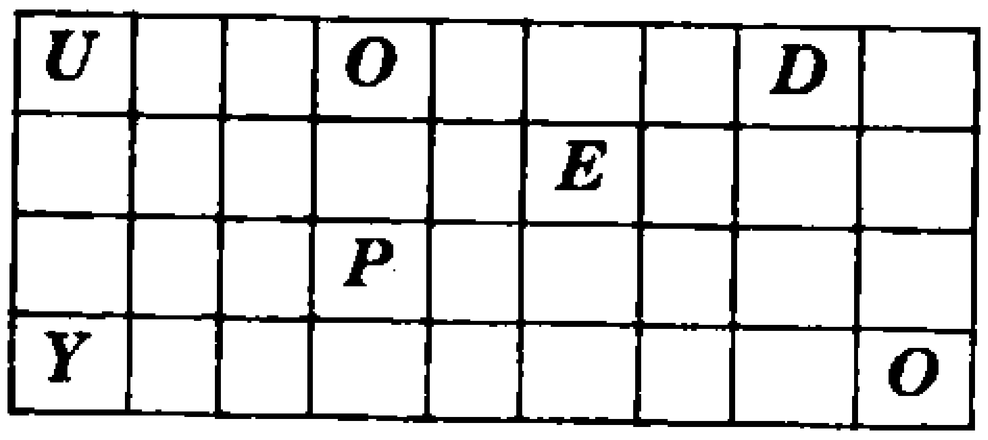
A) 9 ***B) 8*** ***C) 6***
D) 7 ***E) 5***

20 Un carpintero tiene un tablero de madera cuyas medidas son ***70 cm*** de largo y ***60 cm*** de ancho. Si desea obtener piezas rectangulares de ***30 cm*** de largo y ***20 cm*** de ancho, ¿cuántos cortes rectos, como mínimo, debe realizar para obtener la mayor cantidad de piezas?

A) 4 ***B) 3*** ***C) 5***
D) 6 ***E) 7***

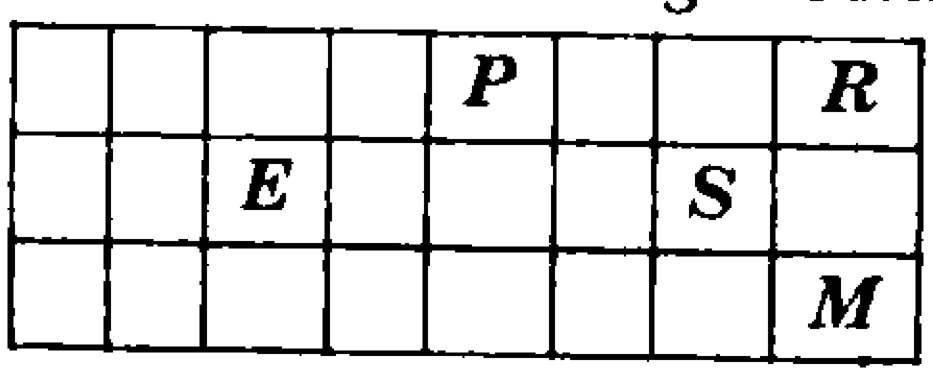
21 Se dispone de una lámina cuadriculada de cartón de ***1 cm*** de espesor, tal como se muestra en la figura, y de una guillotina

que puede cortar a lo más un espesor de ***1 cm*** de cartón. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo deberán realizarse con la guillotina para obtener los siete cuadraditos con las letras ***Y, O, P, U, E, D, O***?



A) 7 ***B)*** 5 ***C)*** 9
D) 6 ***E)*** 8

22 Se dispone de un trozo de cartón cuadrilátero de ***2 cm*** de espesor, tal como se muestra en la figura, y de una guillotina que puede cortar a lo más un espesor de ***2cm*** . Para obtener los cinco cuadraditos con las letras ***P, R, E, S, M***. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo se deberá realizar con la guillotina?



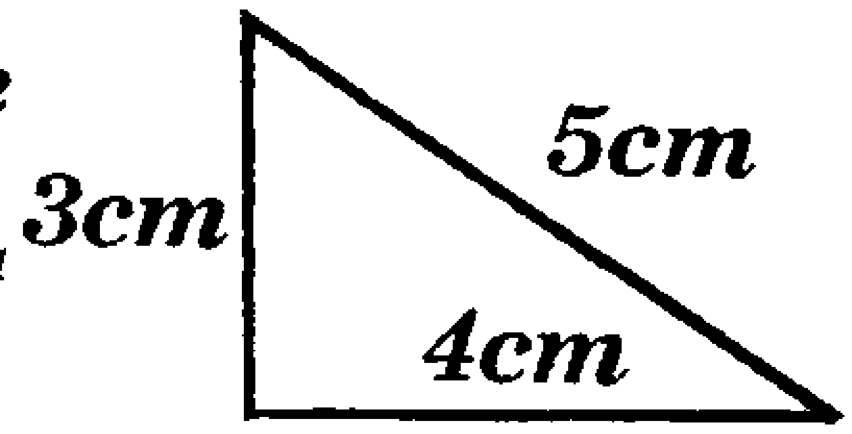
A) 4 ***B)*** 7 ***C)*** 5 ***D)*** 6 ***E)*** 8

23 Se corta un alambre de ***360 cm*** en dos partes de igual longitud, luego en cada parte se realizan nuevos cortes y se obtiene un número exacto de trozos, en el primero trozos de ***6 cm***, y en el segundo trozos de ***3 cm***. Hallar el número total de cortes que se realizaron si no se juntó ni se dobló el alambre en ningún momento.

A) 91 ***B)***85 ***C)*** 89 ***D)*** 93 ***E)*** 90

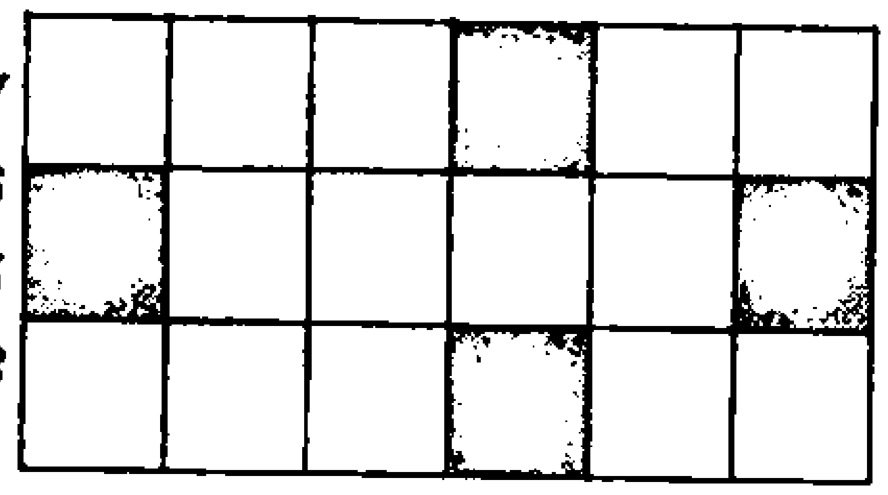
24 En la figura, se muestra un triángulo construido por una sola pieza cerrada de alambre. Se desea obtener el mínimo número de piezas rectas de alambre de igual longitud entera. ¿Cuantos cortes rectos como mínimo se deberá realizar para obtener las piezas deseadas , si no se puede doblar en ningún momento?

A) 2
B)3
C) 4
D)5
E)6



25 En la figura se muestra un trozo de madera cuadriculada de ***1 cm*** de espesor el cual será cortado por una sierra eléctrica para obtener los cuatro cuadraditos sombreados. Si la sierra no corta más de ***1 cm*** de espesor. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo deberá realizarse?

A) 7
B) 6
C) 5
D) 3
E) 4



26 ¿Cuál es el máximo número de trozos en que puede dividirse un bloque de madera de forma cilíndrica mediante ***6*** cortes rectos?

A) 8 ***B)*** 16 ***C)*** 32 ***D)*** 64 ***E)***128

27 Un cubo compacto de madera cuya arista mide ***60 cm*** es dividido en la mayor cantidad de paralelepípedos rectangulares iguales , mediante ***5*** cortes rectos. Determinar la mayor longitud que se obtiene al colocar cada paralelepípedo rectangular uno a continuación de otro, con una de sus caras apoyadas en el piso y en línea recta.

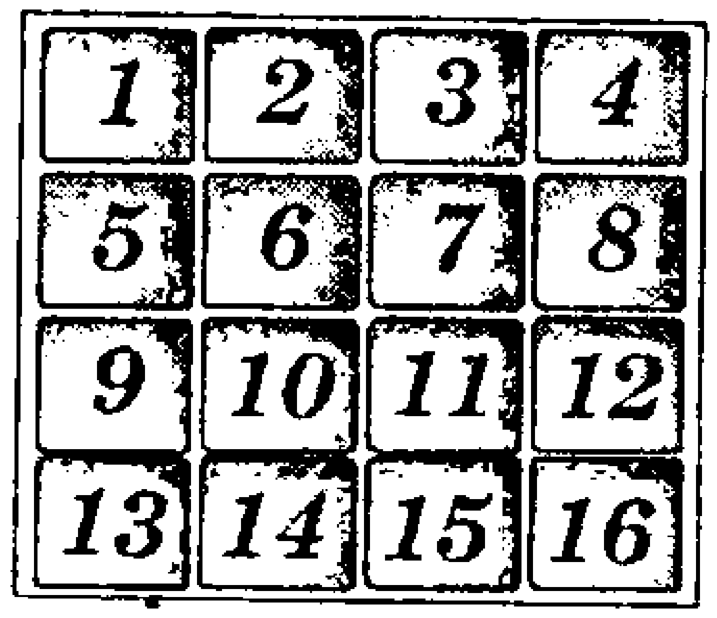
A) $480\sqrt{3}cm$ ***B)*** $490\sqrt{5}cm$ ***C)*** $480\sqrt{5}cm$
D) $600\sqrt{5}cm$ ***E)*** $960\sqrt{2}cm$

28 Benito tiene dos cuadrados de madera, de ***30*** y ***40 cm*** de lado respectivamente. Como buen estudiante de geometría, el sabe que cortando adecuadamente a estos cuadrados, con las piezas que resulten, el puede formar un nuevo cuadrado, sin que sobre ninguna pieza. ¿Cuál es el mínimo número de piezas que conforman el nuevo cuadrado?

A) 7 ***B)*** 3 ***C)*** 5 ***D)*** 4 ***E)*** 6

29 En fa figura se muestra un trozo de madera cuadriculada. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo se debe realizar con una sierra eléctrica para obtener los cuadraditos con los números ***13, 6, 10,*** y ***3***?

A) 5
B) 6
C) 4
D) 3
E) 7



30 Un cubo compacto de madera, de ***36 cm*** de arista, será cortado con una sierra eléctrica en ***216*** cubitos Iguales. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo se deben hacer?

A) 7 ***B)*** 8 ***C)*** 9 ***D)*** 10 ***E)*** 6

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
A	D	B	C	A	C	B	C	A	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	D	C	C	A	A	E	D	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	C	*	E	*	*	*	C	*

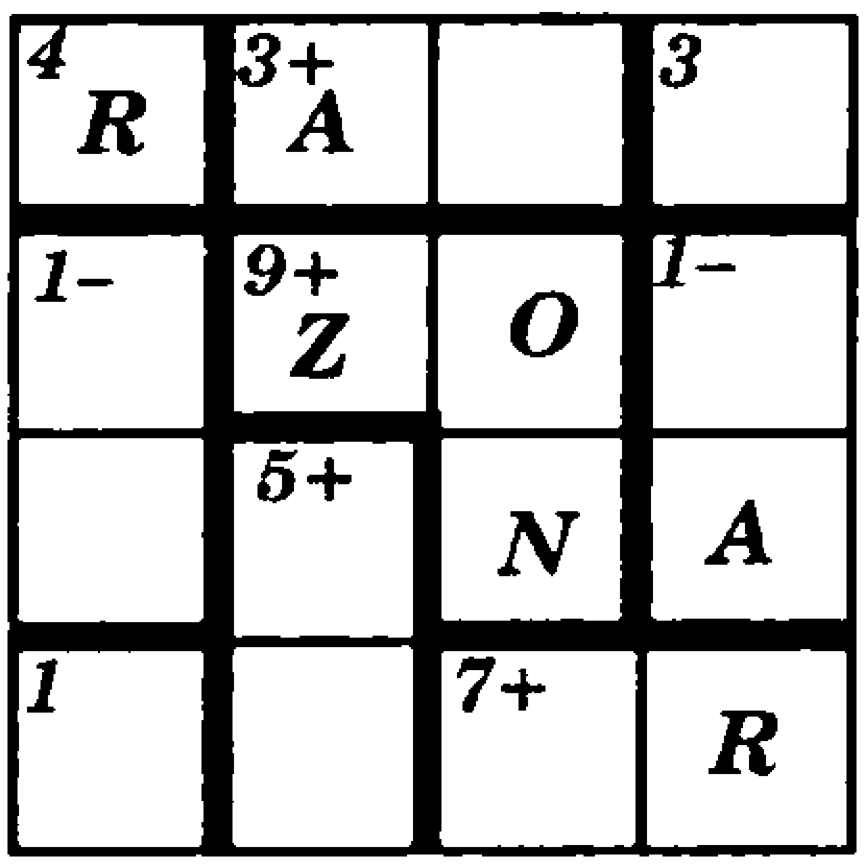
OBJETIVOS :

* Desarrollar nuestra capacidad de deducción para distribuir números bajo ciertas condiciones.

* Conocer y aplicar las propiedades de cuadrados mágicos para la resolución de problemas.

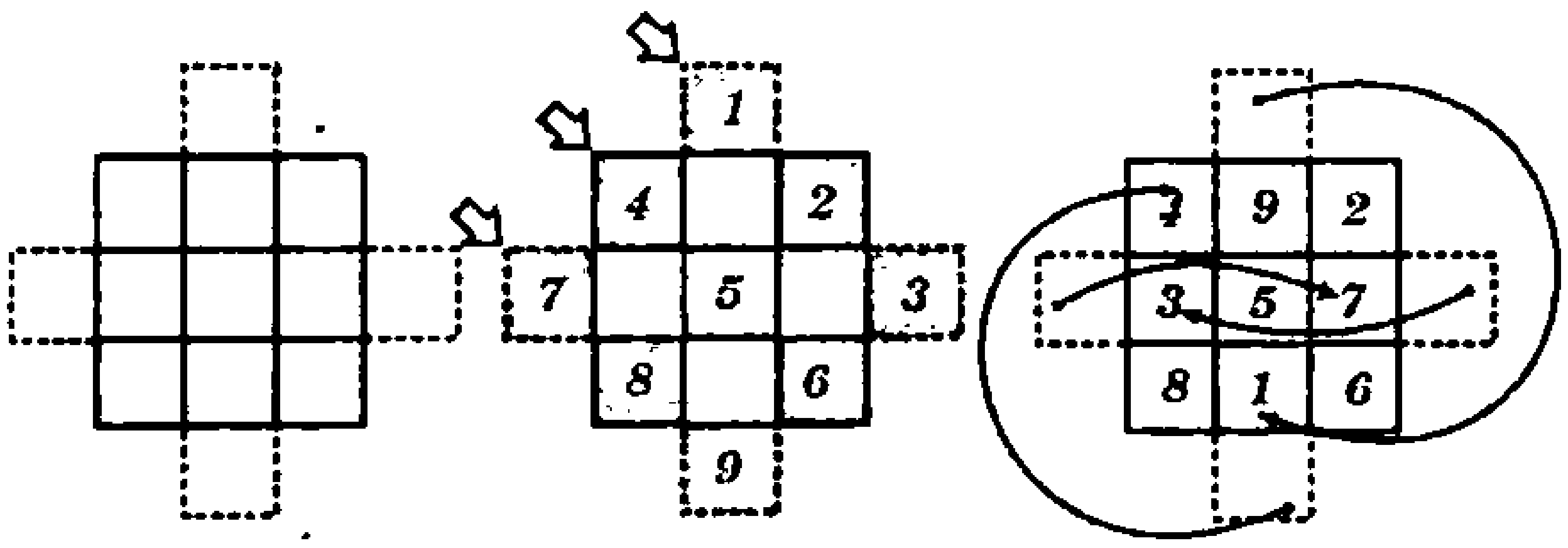
INTRODUCCION :

Distribuya los números *1*; *2*; *3* y *4* sin repetir en fila o columna de manera que resulte el número indicado en cada zona resaltada al realizar la operación indicada por el signo que acompaña al número. Determinar el valor de $\overline{RAZONAR}$.



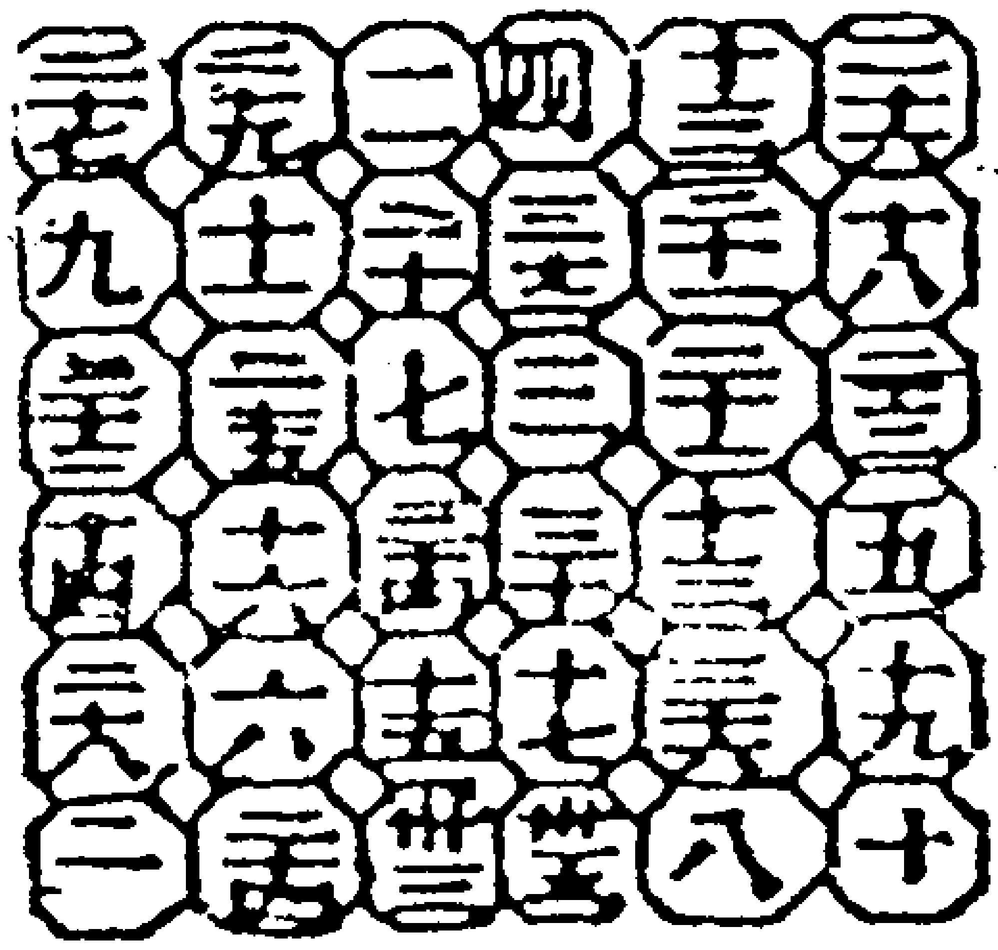
Construcción de un cuadrado mágico de orden 3

Ubicaremos los *9* primeros números naturales.



Constante mágica =15

El origen de los cuadrados mágicos es aún desconocido, pero aparecen en todas las épocas y culturas. Los sacerdotes egipcios le atribuían poderes místicos, los empleaban para predecir el futuro, y en China, a través de las generaciones se cuentan que en el año ***2200 a.n.e.*** el emperador Shu vio el cuadrado mágico de ***3×3*** en el caparazón de una tortuga en el río Lo.



Cuadrado mágico chino

El primer texto conocido en que se muestra un cuadrado mágico, es un manuscrito árabe del ***s.VIII***. El cuadrado mostrado es de ***3×3***, y el autor se lo atribuye a Apolonio de Tiana (Tiana, Capadacia) del año ***3***, que fue un filósofo, matemático y místico griego de la escuela pitagórica . El mismo cuadrado de orden 3 aparece nuevamente en un trabajo del judío Jehuda Ibn Esra, (Ibraim de Sevilla) del ***s. XII.***

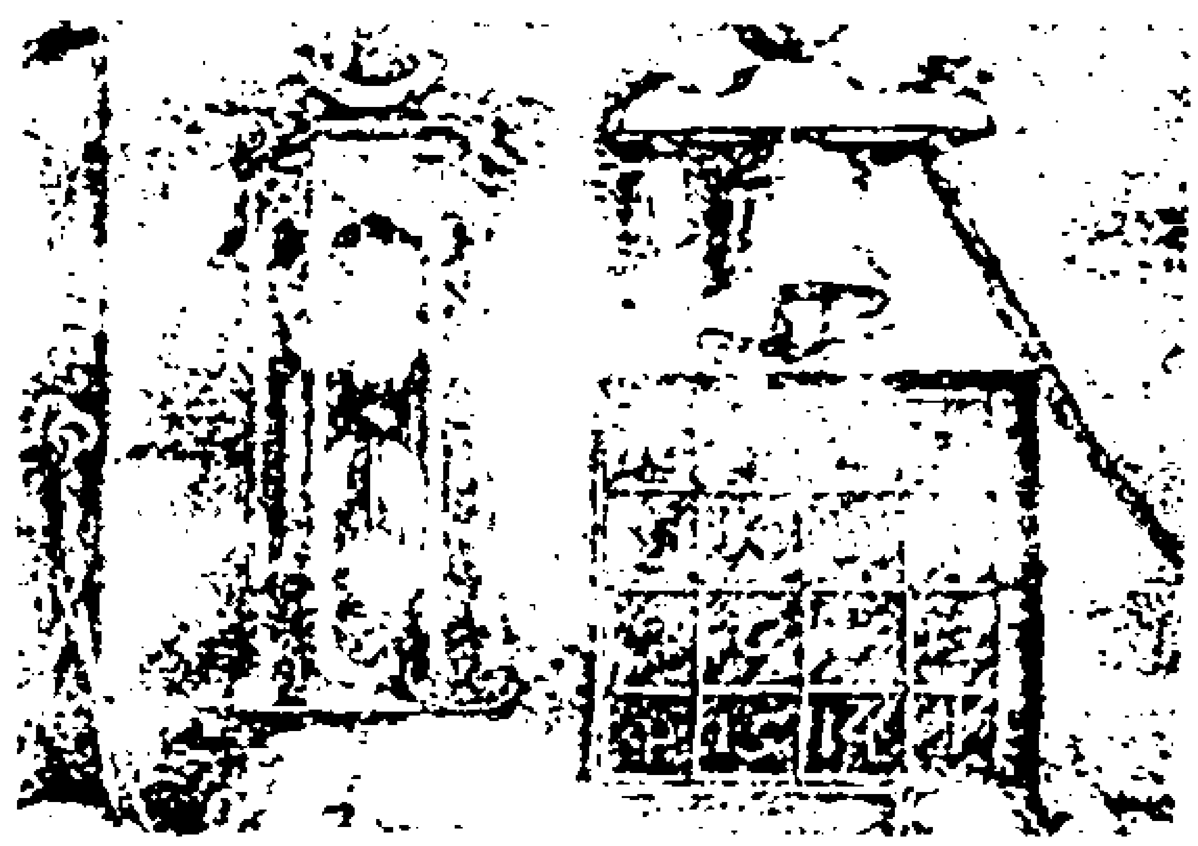
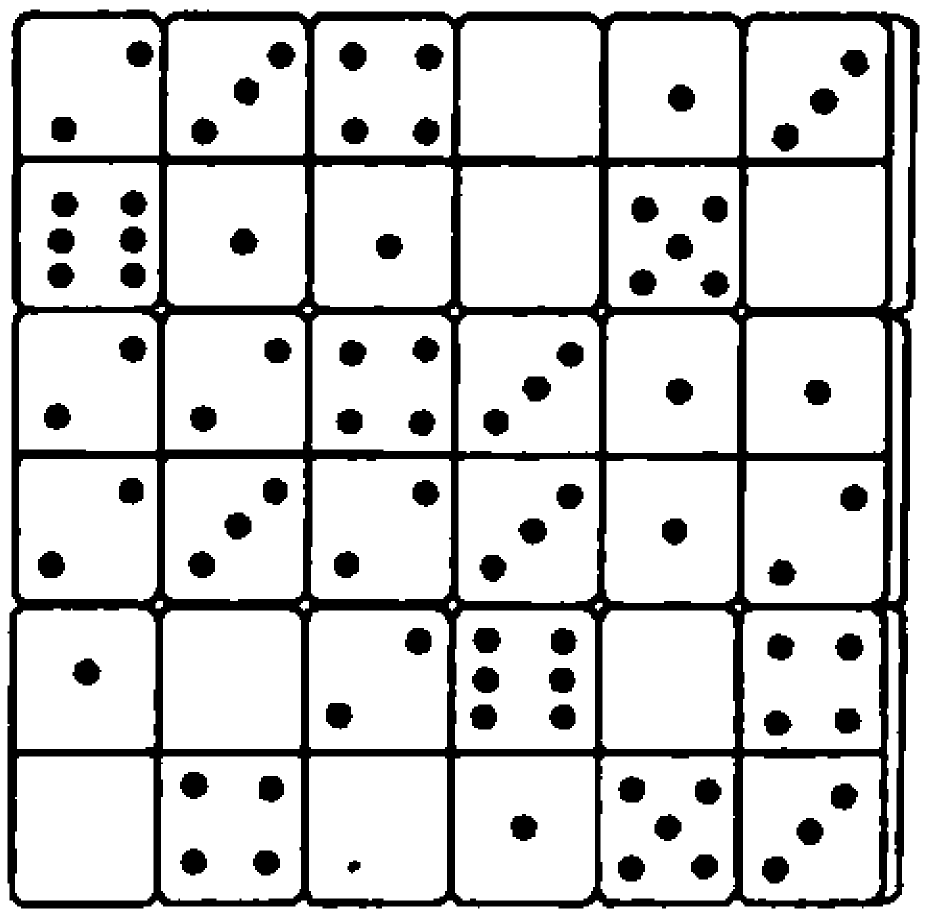


Imagen extraída del cuadro Melancolía

Parece ser que los cuadrados mágicos fueron introducidos en Europa por el gramático bizantino Moschopoulos, que vivió durante el reinado de ***Andrómico II Paleólogo (1282 –1328)***. Se ha encontrado un manuscrito suyo en el que hay varios cuadrados de orden ***4*** y otros de orden impar, dando un procedimiento general para construirlos. Hay además un cuadrado de orden ***6*** sin aportar el método por el cual lo obtuvo.

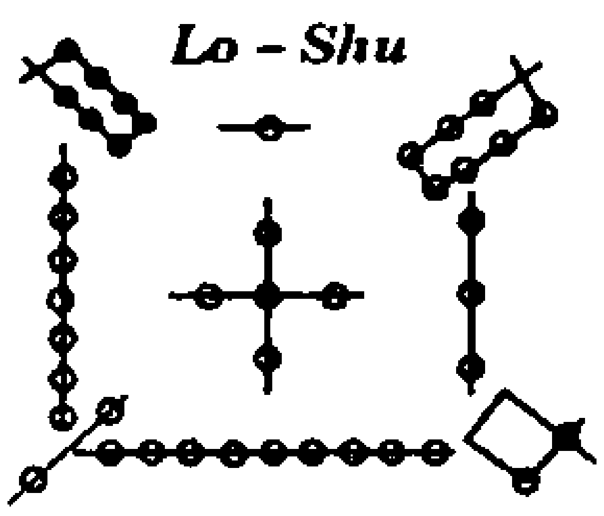
Entre los matemáticos famosos que en los *s. XVI* y *XVII* se ocuparon de los cuadrados mágicos debemos mencionar a Fermat, Pascal y Stieffel. También podemos mencionar el cuadrado mágico de Euler, que se completa empleando los movimientos del caballo del juego del ajedrez.

Así, se podría seguir mencionando la cronología respecto de los diferentes momentos en que los cuadrados mágicos van apareciendo y estudiándose; sin embargo, también podemos mencionar que esta distribución particular ha sido utilizada para crear situaciones problemáticas interesantes. Por ejemplo, con *18* fichas de dominó se puede construir un cuadrado mágico como se muestra en el gráfico, la constante mágica, en el gráfico, resulta ser *13*. Pero no es el único cuadrado mágico que se puede generar, es ahí donde le proponemos a usted que empleando otras *18* fichas de dominó construya otro cuadrado mágico con otra constante. Si le sirve de ayuda, la menor constante que se puede obtener es *13* y el mayor es *23*.



Recordemos que los cuadrados mágicos son distribuciones numéricas particulares que consisten en cuadrículas de igual número de filas y columnas en las que se cumple cierta condición, según sea su tipo: los hay aditivos (que son los más conocidos) y multiplicativos.

Sus orígenes se remontan a los chinos e indios. Según una leyenda, se dice que en el año *2200a.n.e.* el emperador chino Shu vio el cuadrado mágico de , orden *3* en el caparazón de una tortuga, en el río Lo.



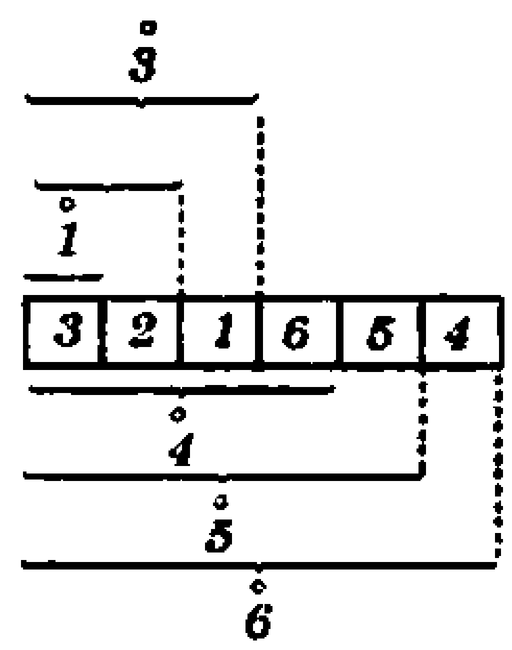
El tamaño del cuadrado mágico está relacionado con la cantidad de filas y columnas que presente. A este tamaño se le conoce como el orden del cuadrado mágico.

A continuación veremos problemas en los cuales se busca completar arreglos gráficos en función de condiciones particulares (suma constante, producto constante, garantizar sumas indicadas, etc.)

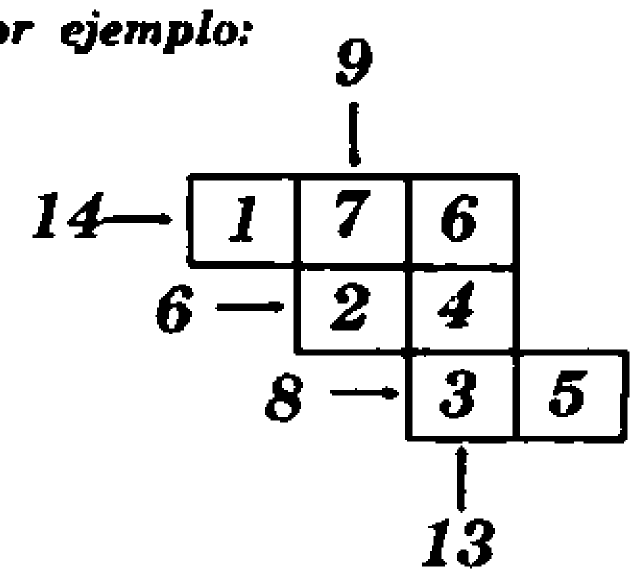
DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS

Este tipo de problemas consiste en distribuir un conjunto de números (o letras) bajo ciertas condiciones dadas que podemos clasificar de la siguiente manera:

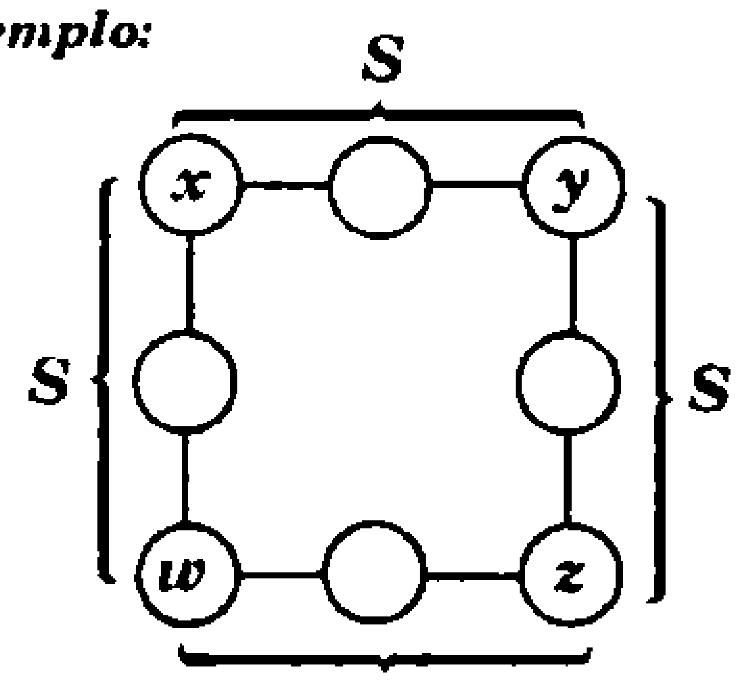
Condiciones de secuencia, paridad, divisibilidad, números que siempre estén juntos o siempre estén separados, etc.



Condiciones de sumas o productos dados para completar. En algunos casos, el problema nos mencionará qué números se deben distribuir.
Por ejemplo:



Obtener sumas o productos constantes sin necesidad de distribuir todos los números, sino mediante ecuaciones.
Por ejemplo:

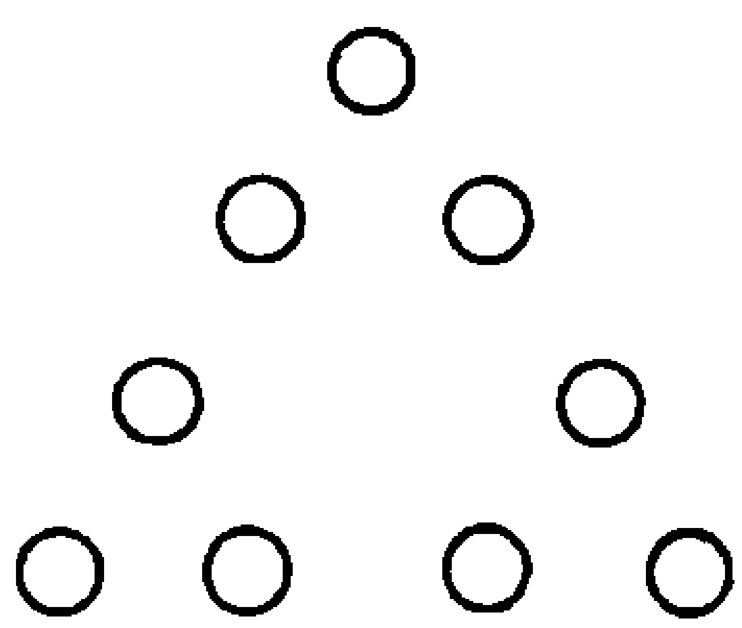


4S=suma de todos los números + (x+y+z+w)

Inicialmente se suele rellenar el arreglo a través del tanteo, pero este método llega a ser más que tedioso e inclusive en alguno de los casos conlleva a que no se desarrolle el problema por el tiempo que demanda su solución. Hay que indicar que ello depende también del grado de dificultad del arreglo (cantidad de hileras, cantidad de casillas vacías, etc.)

EJEMPLO 1 :

En las casillas circulares del gráfico distribuya los números naturales del *3* al *11* inclusive, de la manera que los números en cada lado del triángulo sumen *25*.

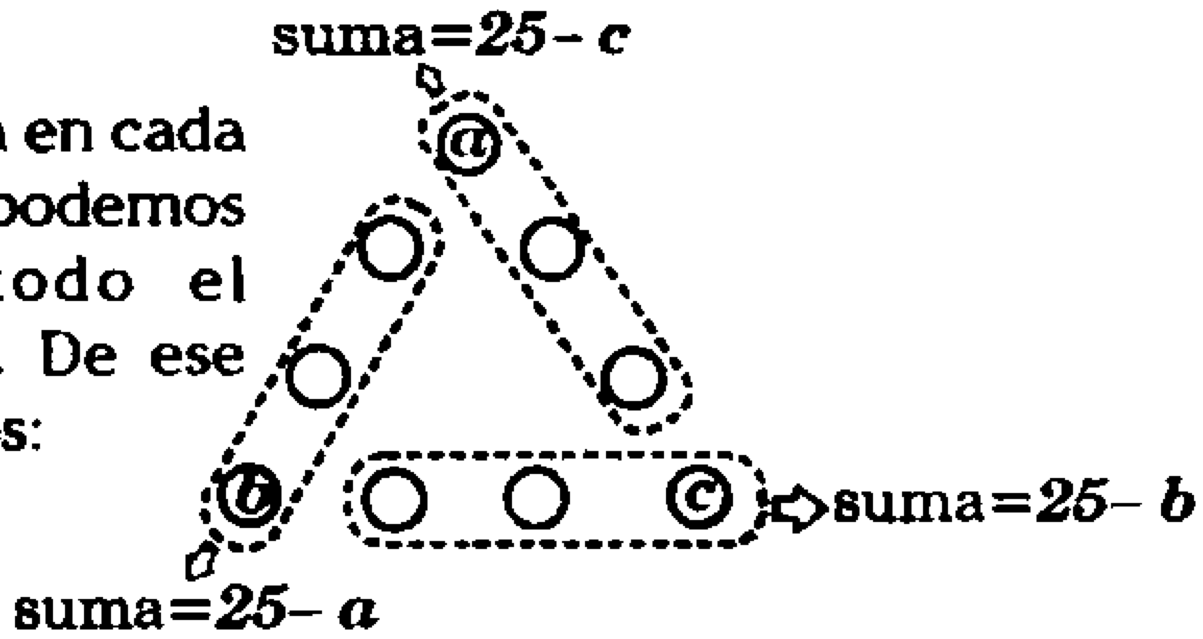


Calcule la suma de los números ubicados en los vértices.

RESOLUCIÓN:

En este tipo de ejercicios no es necesariamente conocer la ubicación exacta de cada número, bastará con encontrar una estrategia para hallar lo que nos piden.

Como la suma en cada lado es **25**, podemos tomar de todo el lado, algunos. De ese modo tenemos:



* Del gráfico:

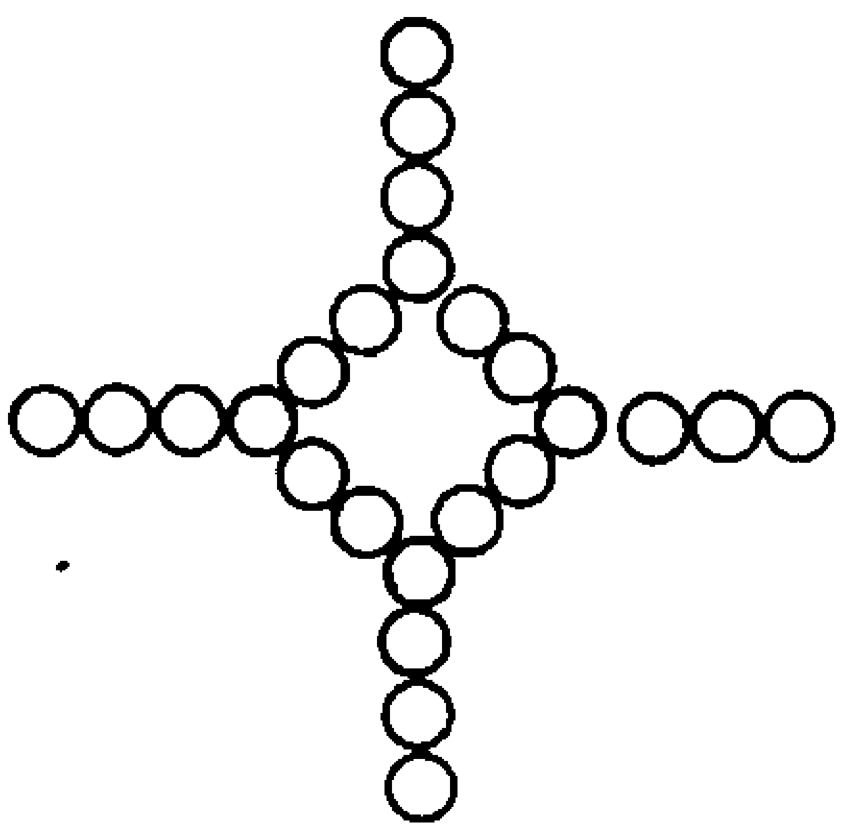
$$(20-a)+(25-b)+(25-c)=3+4+5+...+11$$

$$\Rightarrow 75-a-b-c=\frac{(3+11)\times 9}{2}$$

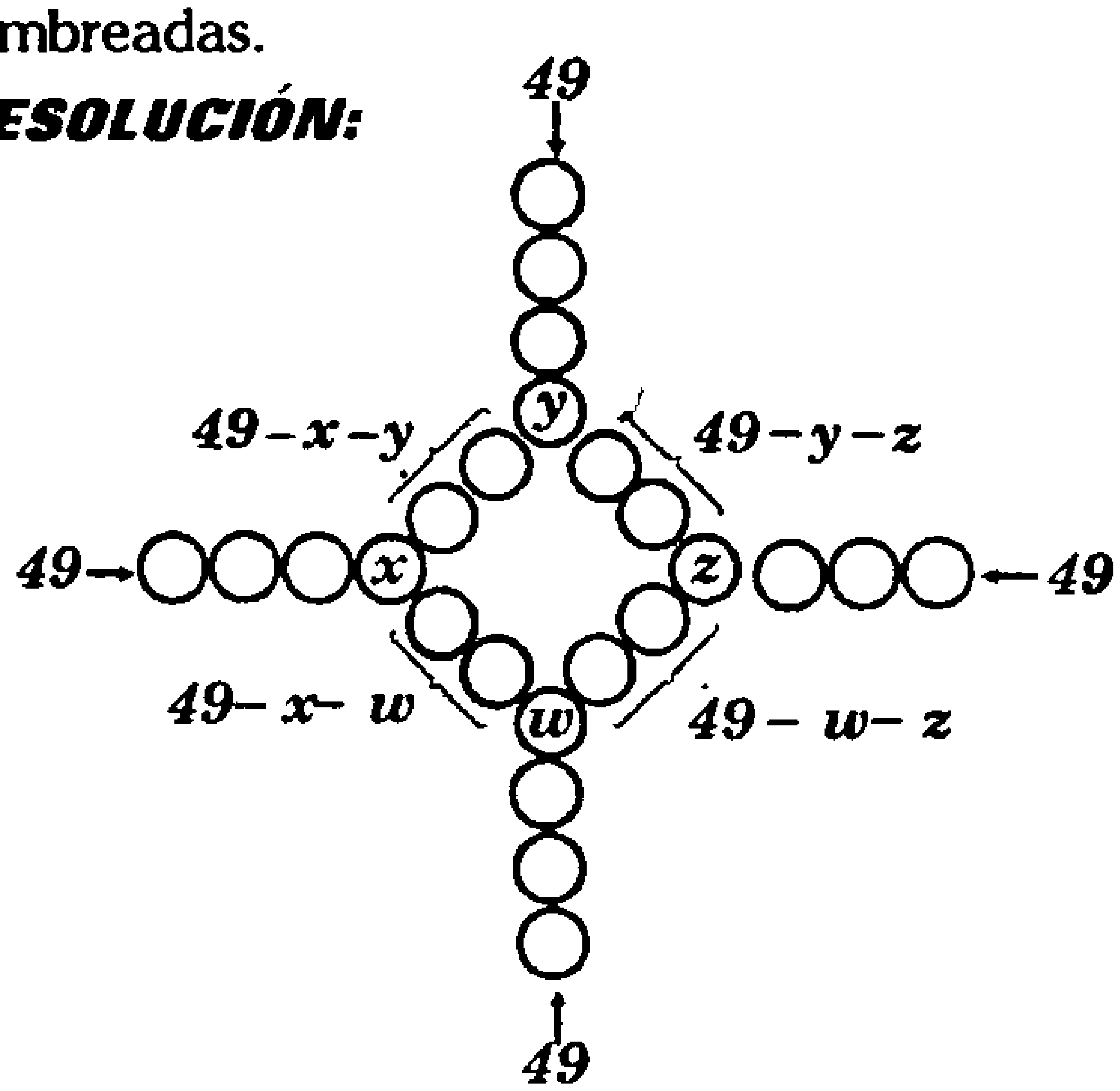
$$\Rightarrow a+b+c=12$$

EJEMPLO 2 :

En el siguiente arreglo ubique los números del *1* al *24*, de tal manera que la suma de los números que se encuentran en cada hilera sea *49*. Dé como respuesta la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



RESOLUCIÓN:



Es claro que en este caso el método de tanteo no conlleva resultados satisfactorios. Por lo tanto, emplearemos uno más certero en función a lo pedido: $x + y + w + z$.

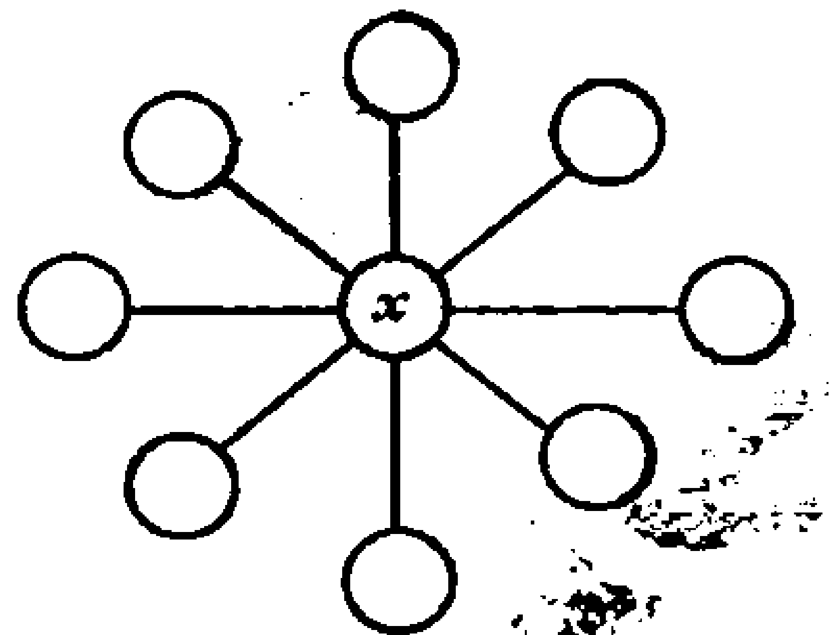
La suma de los **24** números es:

$$49\times 4+(49-x-y)+(49-y-z)+(49-w-z)+(49-x-w)=1+2+3+4+...+24$$

$$\Rightarrow 392-2(x+y+w+z)=300 \Rightarrow x+y+w+z=46$$

EJEMPLO 3 :

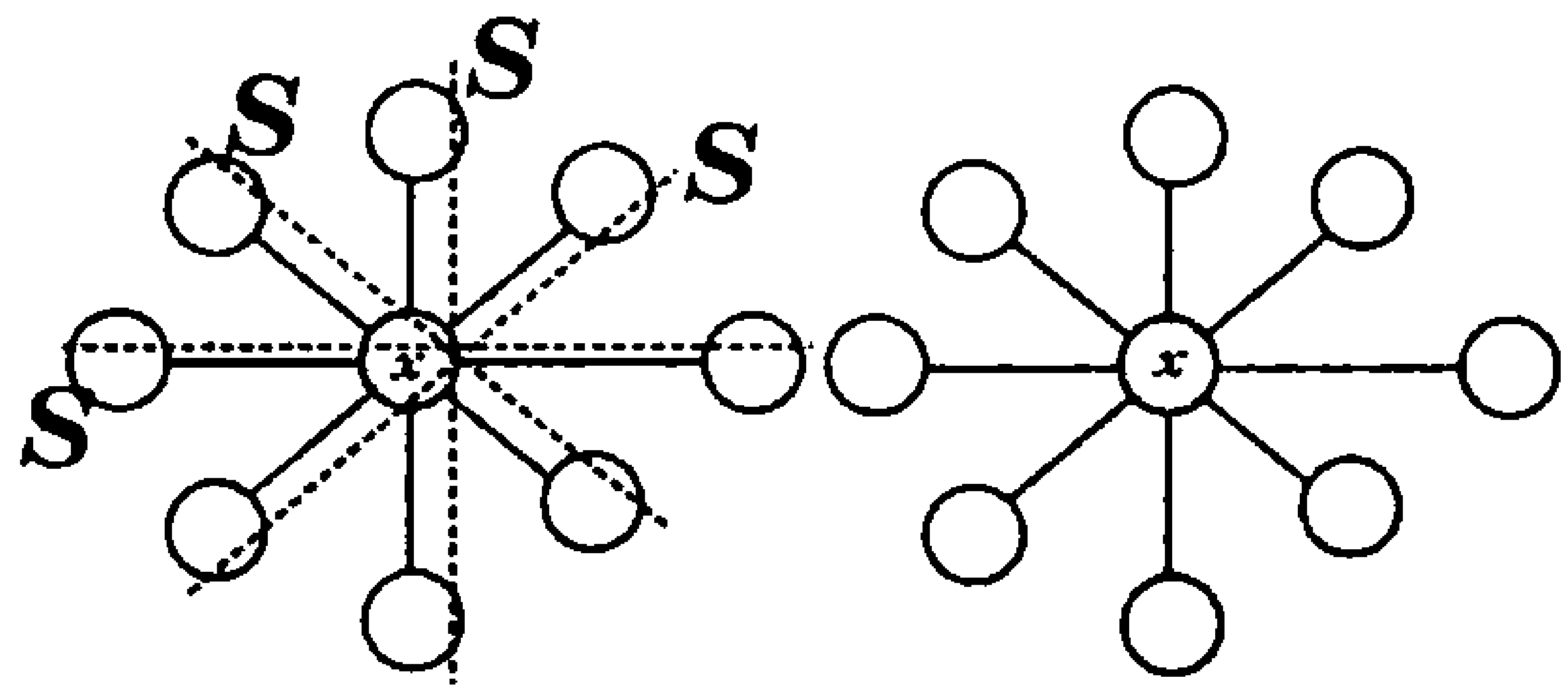
Distribuya los números de *1* al *9* de modo que la suma en cada hilera sea la misma.



Calcule el máximo y el mínimo valor de x.

RESOLUCIÓN:

Se distribuyen *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*



Si x es máximo

$\Rightarrow$ Suma constante: máximo

Del gráfico:

$$4S=\underbrace{1+2+3+...+9}+3x$$

$$4S=\frac{9\times 10}{2}+3x$$

$$4S=45+3\underset{\substack{\downarrow\\ 9}}{x} \Rightarrow S=18$$

Si x es mínimo

$\Rightarrow$ Suma constante: mínima

En forma análoga:

$$4S=\underbrace{1+2+3+...+9}+3x$$

$$4S=\frac{9\times 10}{2}+x \Rightarrow 4S=45+3\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{x}$$

$$\Rightarrow S=12$$

$\Rightarrow$ *9* y *1* valores máximo y mínimo.

SUGERENCIA:

*Cuando se quiere distribuir números de manera que haya sumas iguales, el resultado máximo y mínimo **dependerá del número que se ubica en la casilla que más veces aparece en las sumas.***

CUADRADOS MÁGICOS

Es una matriz cuadrada de números que satisfacen la condición de que la suma de los números ubicados en las filas , columnas y las dos diagonales sea siempre la misma suma(Constante mágica=*C.M.*).

Ejemplos:

Cte.mágica=$15=4+5+6$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Orden del C.M. 3×3

Cte mágica=34

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Orden del C.M. 4×4

CUADRADO MÁGICO ADITIVO DE ORDEN 3

En estas distribuciones cuadriculadas la suma de los números ubicados en las casillas de cada fila, columna y diagonal es constante. Esta suma constante se denomina constante mágica, el de tres filas y tres columnas es el más pequeño y el primero en darse a conocer.

17	3	13	⇨ 33 Constante mágica
7	11	15	⇨ $33=7+11+15$
9	19	5	⇨ $33=9+19+5$

Columnas: 33, 33, 33; diagonales: 33 y $33=17+11+5$

CUADRADO MÁGICO MULTIPLICATIVO DE ORDEN 3

En estas distribuciones se ubica un número en cada casilla de la cuadrícula de tal forma que el producto de los números ubicados en las casillas de cada fila, columna y diagonal sea constante.

5	100	2	⇨ $1000=5\times100\times2$
4	10	25	⇨ $1000=4\times10\times25$
50	1	20	⇨ $1000=50\times1\times20$

Columnas: 1000, 1000, 1000; diagonales: 1000 y $1000=5\times10\times20$

• ***Para conocer el valor de la constante mágica en el cuadrado mágico aditivo*** que se ha completado con los n^2 primeros números enteros positivos, se puede utilizar la siguiente expresión: $\frac{n(n^2+1)}{2}$

donde n: orden del cuadrado mágico.

• *La suma de los números ubicados en dos casillas simétricas respecto de la casilla central es igual al doble del número que se encuentra en dicha casilla central.*

Ejemplo:

En el siguiente cuadrado mágico de orden ***3***.

2	⑦	6
9	5	1
4	③	8

. $\frac{3(3^2+1)}{2}=15$

. $7+3=4+6=2(5)$

OBSERVACIÓN :

Sea n la cantidad de filas y cantidad de columnas de un cuadrado mágico, entonces:

. $n\geq3$

• El cuadrado mágico es de orden n.

Cuadrado mágico de orden 4

46	4	7	37	⇨ 94
13	31	28	22	⇨ 94
25	19	16	34	⇨ 94
10	40	43	1	⇨ 94

Columnas: 94, 94, 94, 94; diagonales: 94 y 94

Dentro de las distribuciones numéricas se deben considerar algunos arreglos particulares como el sudoku, el kakuro, el sidoku, etc.

A continuación se muestra un ejemplo de sidoku:

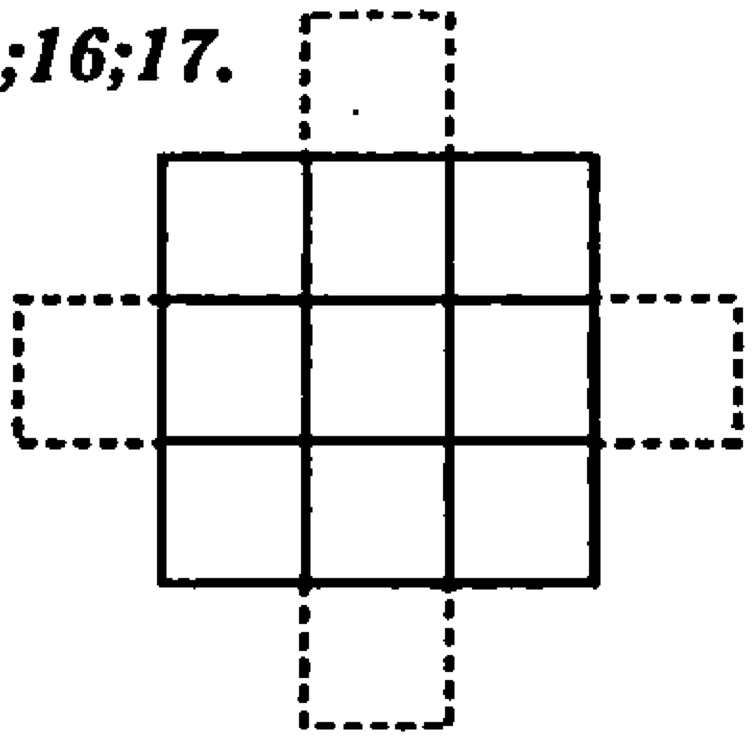
Si	Fa	Sol	Mi	Re	Do	La
Do	Re	La	Si	Mi	Fa	Sol
Mi	La	Do	Sol	Fa	Re	Si
La	Sol	Si	Re	Do	Mi	Fa
Sol	Mi	Re	Fa	La	Si	Do
Re	Si	Fa	Do	Sol	La	Mi
Fa	Do	Mi	La	Si	Sol	Re

CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS MÁGICOS DE ORDEN IMPAR

De orden 3 (Método de Bachet):

Construyamos un cuadrado mágico con el *1; 3;5;4;5; ...;16;17.*

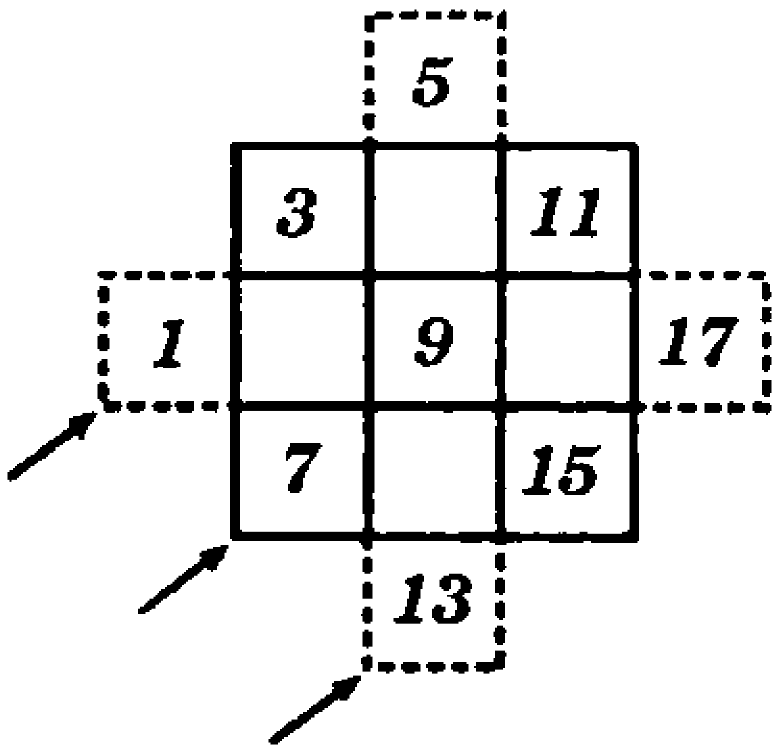
1ER PASO :



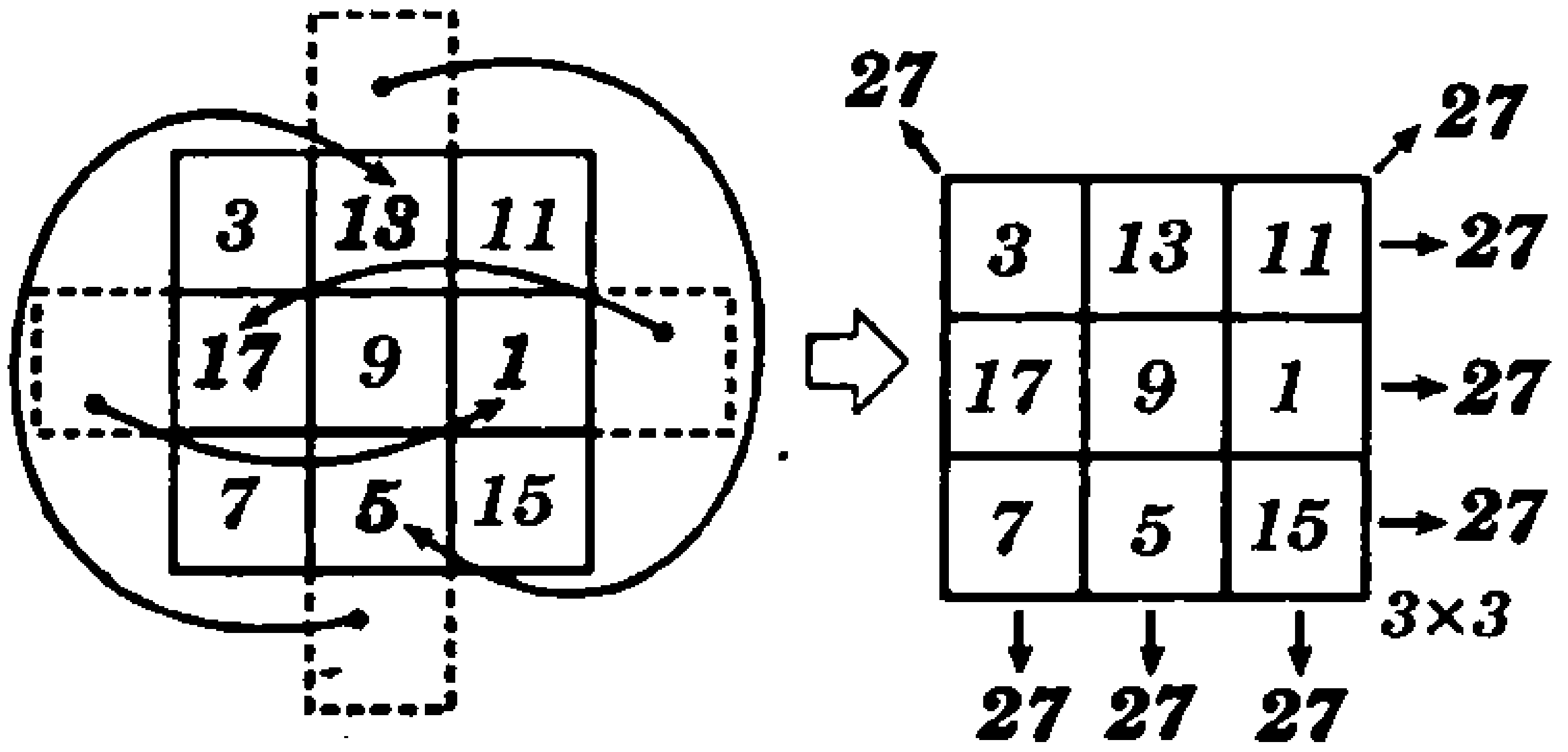
* Aumentamos un casillero en cada lado del cuadrados mágico (***MÉTODO DE LAS ALITAS***).

2DO PASO :

* Ubicamos de manera ascendente o descendente los números como se indica en el gráfico.



3ER PASO :



OBSERVACIÓN :

En el cuadrado mágico aditivo de 3×3 se cumple lo siguiente:

17	3	13
7	11	15
9	19	5

También: $17=\dfrac{19+15}{2}$

17	3	13
7	11	15
9	19	5

Término central:

$$11=\frac{17+5}{2}$$

$$11=\frac{3+19}{2}$$

Además:

$$\text{Término central}=\frac{\text{Suma constante}}{\text{Orden}} \qquad 11=\frac{33}{3}$$

$$\text{Término central}=\left(\begin{matrix}\text{Semisuma de}\\ \text{Extremos}\end{matrix}\right)$$

Finalmente:

$$\text{Suma constante}=\frac{\text{Suma total}}{\text{orden}} \qquad 33=\frac{99}{3}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{CONSTANTE}\\ \text{MÁGICA}\end{matrix}\right)=\frac{\left(\begin{matrix}\text{SUMA DE TODOS}\\ \text{LOS NÚMEROS}\end{matrix}\right)}{3}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{NÚMERO UBICADO}\\ \text{EN LA CASILLA CENTRAL}\end{matrix}\right)=\frac{\left(\begin{matrix}\text{CONSTANTE}\\ \text{MÁGICA}\end{matrix}\right)}{3}$$

PROPIEDADES DEL CUADRADO MÁGICO DE ORDEN 3

a	b	c
d	e	f
g	h	i

3×3

1) $\boxed{\text{Constante mágica} = 3e}$

2) $\boxed{2e = a+i = b+h = c+g = f+d}$

3) $\boxed{a=\dfrac{f+h}{2}}$ $\boxed{c=\dfrac{d+h}{2}}$ $\boxed{g=\dfrac{b+f}{2}}$ $\boxed{i=\dfrac{b+d}{2}}$

EJEMPLO 1 :

Distribuya números enteros en el recuadro mostrado, de modo que se obtenga un cuadrado mágico. Calcule el valor de *ab*.

	12	7
	b	10
a		

RESOLUCIÓN:

	12	7
	b	10
a		

número central

Aplicaremos algunas relaciones y propiedades de cuadrados mágicos.

• $a = \dfrac{12+10}{2} \Rightarrow a = 11$ • $\dfrac{a+7}{2} = b \Rightarrow \dfrac{11+7}{2} = b$

$\Rightarrow ab = 11 \times 9 = 99$

EJEMPLO 2 :

Complete las casillas vacías del siguiente tablero con números enteros y positivos de manera que se obtenga un cuadrado mágico.

Halle el valor de x.

10		18
20	x	

RESOLUCIÓN:

10		18
20	x	
	a	

Se pide el valor de x.

En el tablero se puede observar que conociendo el número que se ubica en la casilla central de la última fila (lo conoceremos momentáneamente como a) se puede hallar el valor de x. Para esto, aplicaremos la propiedad, es decir:

$$18 = \frac{a+20}{2} \Rightarrow a = 16$$

Luego:

10	b	18
20	x	
	16	

Observamos que la primera fila y la segunda columna, que se encuentran sombreadas, tienen una casilla en común (la que contiene la letra b), de donde, por tratarse de un cuadrado mágico, podemos plantear lo siguiente:

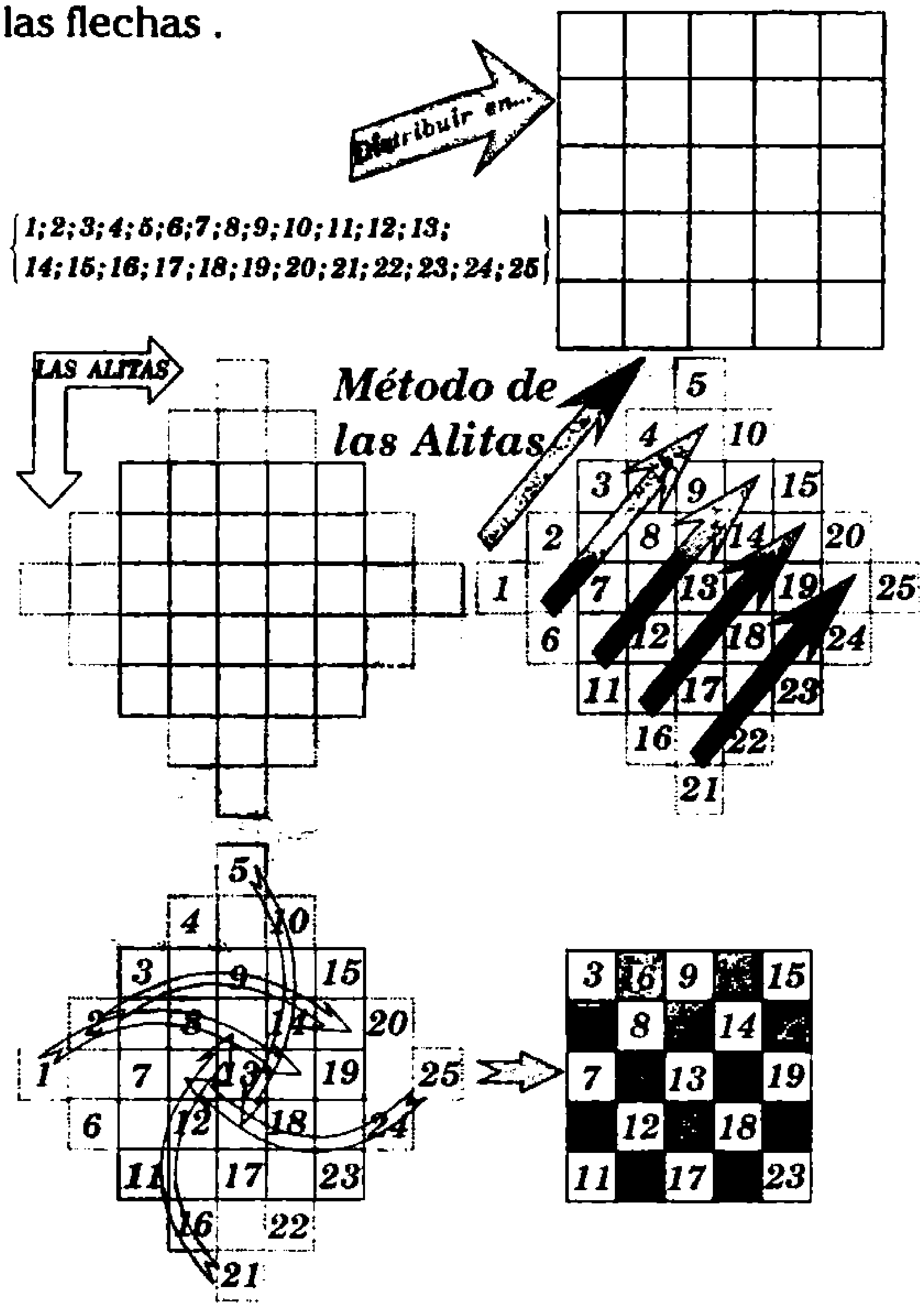
$$\not{b} + x + 16 = 10 + \not{b} + 18 \Rightarrow x = 12$$

CUADRADO MÁGICO DE 5×5

Distribuir los números enteros del *1* al *25* en las nueve casillas de una cuadrícula de 5×5 de tal modo que la suma de los números de las filas (horizontales, verticales y diagonales) de el mismo resultado. Dar como respuesta la suma de cada fila.

RESOLUCIÓN :

• Luego de graficar cuadrícula de 5×5 y haciendo un artificio gráfico (realizando casilleros adicionales) en el exterior de dicha cudrícula escribiremos en orden creciente los números del *1* al *25*, disponiéndolas en filas oblicuas, según las flechas .

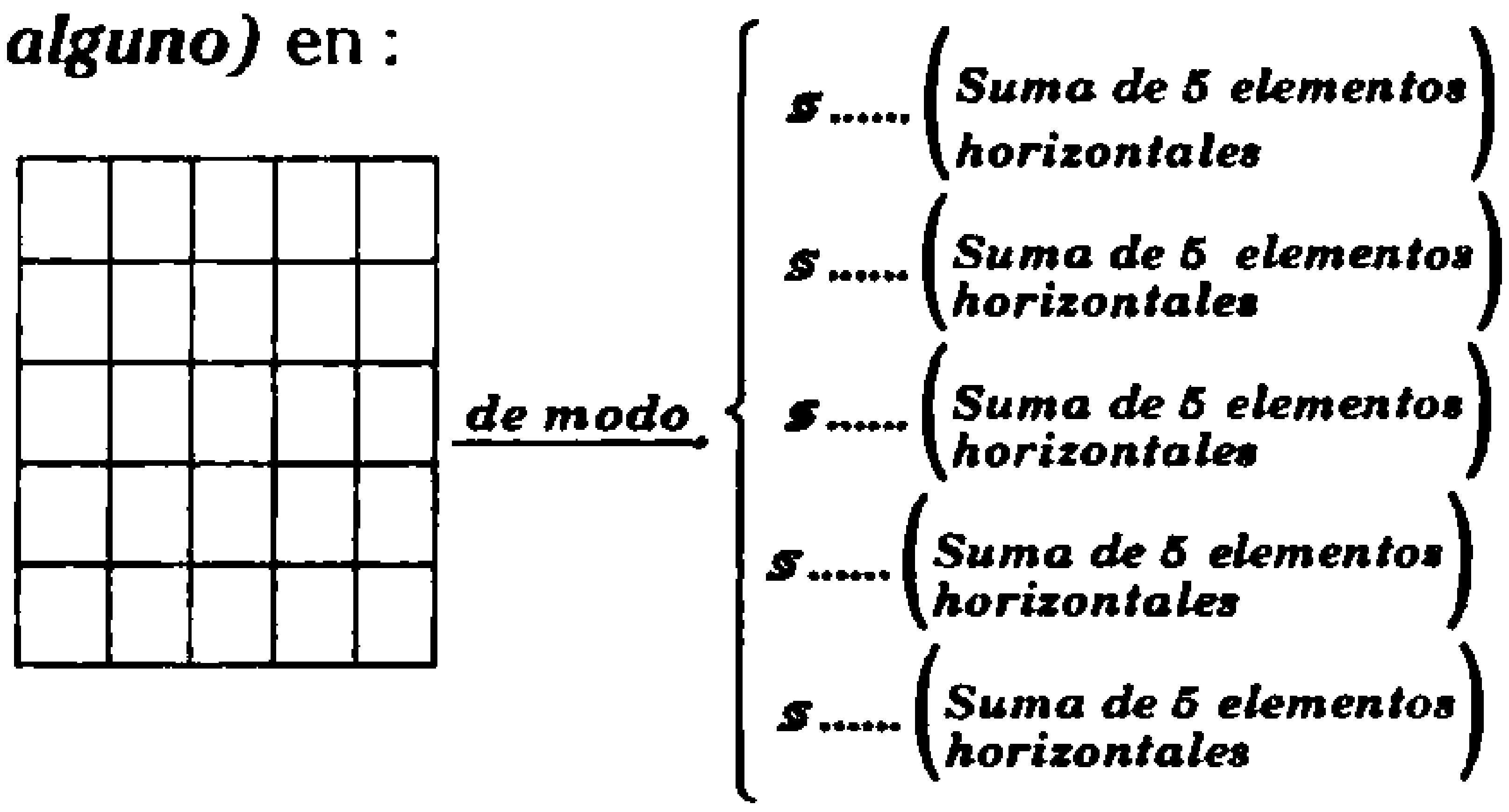


Los números que están al exterior de la cuadrícula , se pasan a los lados opuestos del cuadrado permaneciendo en las mismas columnas o filas en que estaban.

OBSERVACION :

• Si solo nos avocaramos a determinar la suma de cada fila , columna y diagonal (sin necesidad de colocar los números) que según enunciado debe ser la misma (*CONSTANTE MÁGICA*), procederíamos así:

Considerando que se debe distribuir ***1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9;10;11;12;.....;24;25 (Todos en 25 posiciones, uno en cada casillero si repetir alguno)*** en :



* Entonces :

$$S+S+S+S+S=1+2+3+4+...+24+25$$

$$\Rightarrow 5S=\frac{25\times 26}{2} \Rightarrow S=65 \ldots\ldots \left(\begin{matrix}Constante\\ Mágica\end{matrix}\right)$$

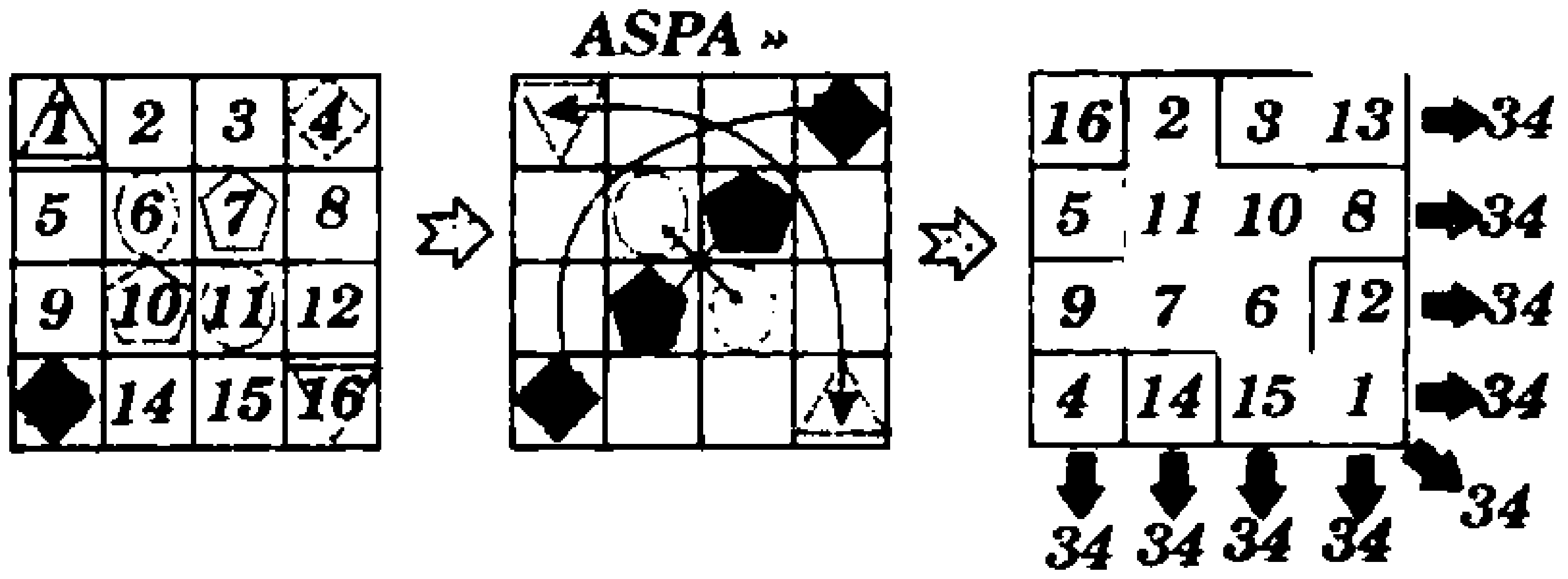
CUADRADO MÁGICO DE 4×4

Distribuir los números enteros del *1* al *16* en las nueve casillas de una cuadrícula de *4×4* de tal modo que la suma de los números de las filas (horizontales, verticales y diagonales) de el mismo resultado. Dar como respuesta la suma de cada fila(Constante mágica).

RESOLUCIÓN :

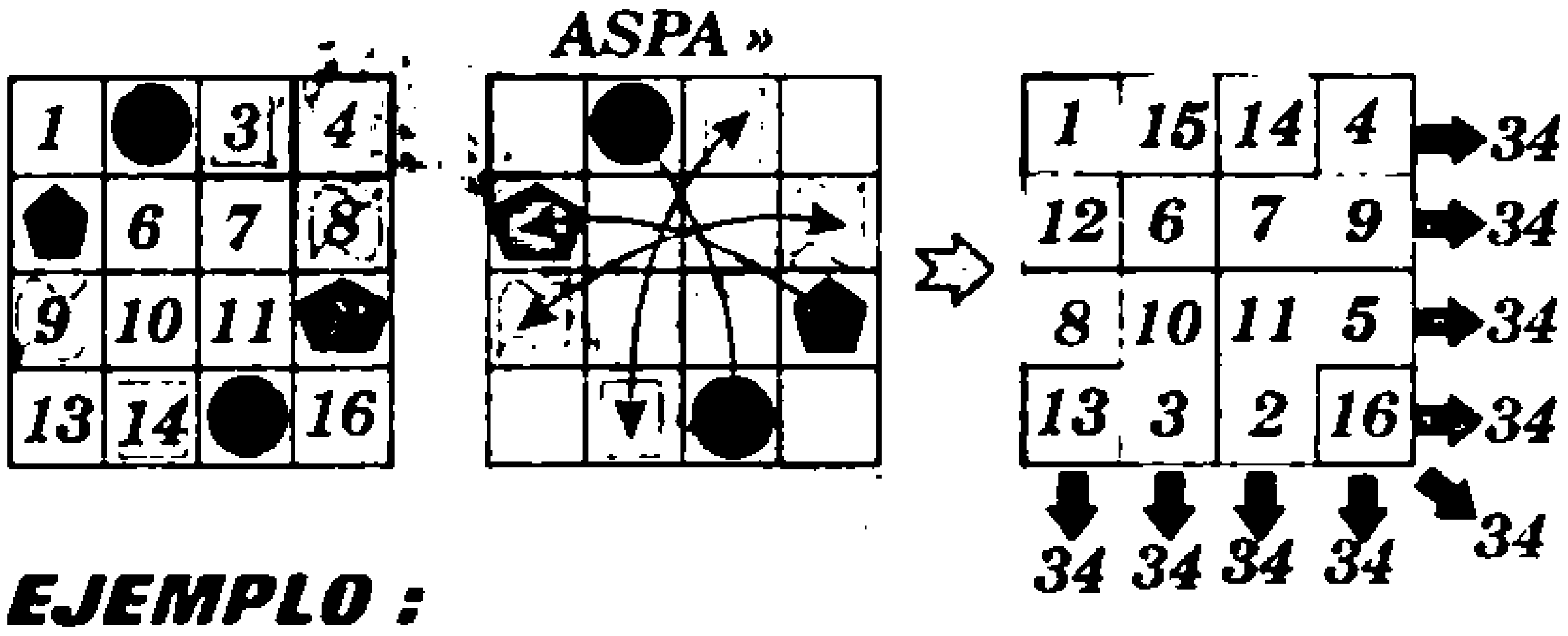
En primer lugar se numera en forma ascendente ,para luego intercambiar de posición los números ubicados en las diagonales (principal y secundaria) , con su simétrico respecto del centro de la cuadrícula *(METODO DEL ASPA)* :

«METODO DEL ASPA »



OTRA FORMA DE DISTRIBUIR :

«METODO DEL ASPA »



EJEMPLO :

Construyamos un cuadrado mágico con el *1*; *2*; *3*; ...; *15* ; *16*.

1^er paso:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

* Ubicamos los números en forma ordenada de menor a mayor o viceversa, en filas o en columnas.

2^do paso:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

* Se traza las dos diagonales y algunos números quedarán tapados por ellas.

3^er paso:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

3 × 3

* Permutamos aquellos números que han sido tapados por las dos diagonales y que equidistan del centro, es decir: el *16* y el *1*; el *6* y el *11*; el *4* y el *13*; el *7* con el *10*.

PROPIEDAD :

Para encontrar la constante mágica haremos:

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	p	q

cte mágica $= a + d + m + q$

cte mágica $= f + g + j + k$

OBSERVACION :

* Si solo nos avocaramos a determinar la suma de cada fila , columna y diagonal (sin necesidad de colocar los números) que según enunciado debe ser la misma (*CONSTANTE MÁGICA*), procederíamos así:

Considerando que se debe distribuir ***1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9;10;11;12;13;14;15;16 (Todos en 16 posiciones, uno en cada casillero si repetir alguno)*** en :

de modo

S...... (Suma de 4 elementos horizontales)

S...... (Suma de 4 elementos horizontales)

S...... (Suma de 4 elementos horizontales)

S...... (Suma de 4 elementos horizontales)

* Entonces :

$$S+S+S+S=1+2+3+4+...+15+16$$

$$\Rightarrow 4S=\frac{16\times 17}{2} \Rightarrow S=34 \ldots\ldots \left(\begin{matrix}Constante\\ Mágica\end{matrix}\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

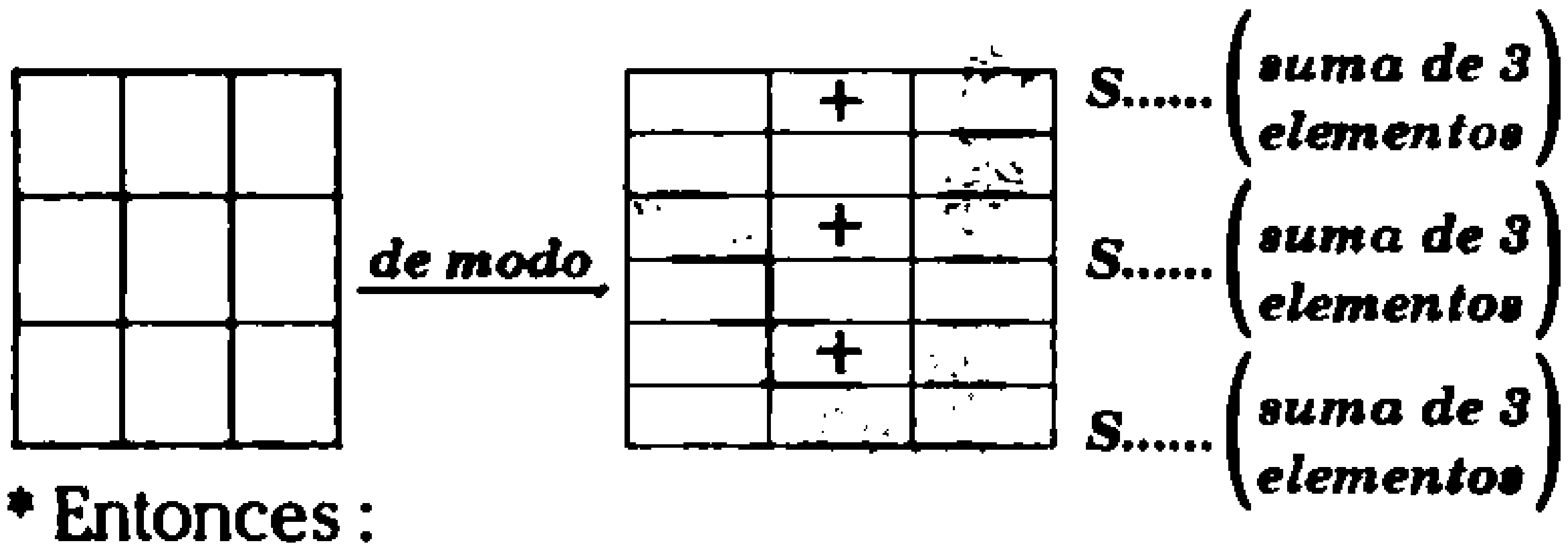
PROBLEMA 01 :

En una cuadrícula de 3×3, distribuir los números enteros del *1* al *9*, uno en cada casilla (sin repetir), de modo que se obtenga un ***cuadrado mágico aditivo***, es decir que al sumar los tres números de cada línea (horizontal, vertical o diagonal) se obtenga siempre el mismo resultado (constante mágica). ¿Cuál es el valor de dicha constante?

A) 16   B) 14   C) 16   D) 17   E) 8

RESOLUCIÓN :

Se desea colocar *1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9* en



* Entonces :

$$S+S+S=1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

$$\Rightarrow 3S=45 \Rightarrow S=\frac{45}{3}=15 \;.....\left(\text{Constante mágica}\right)$$

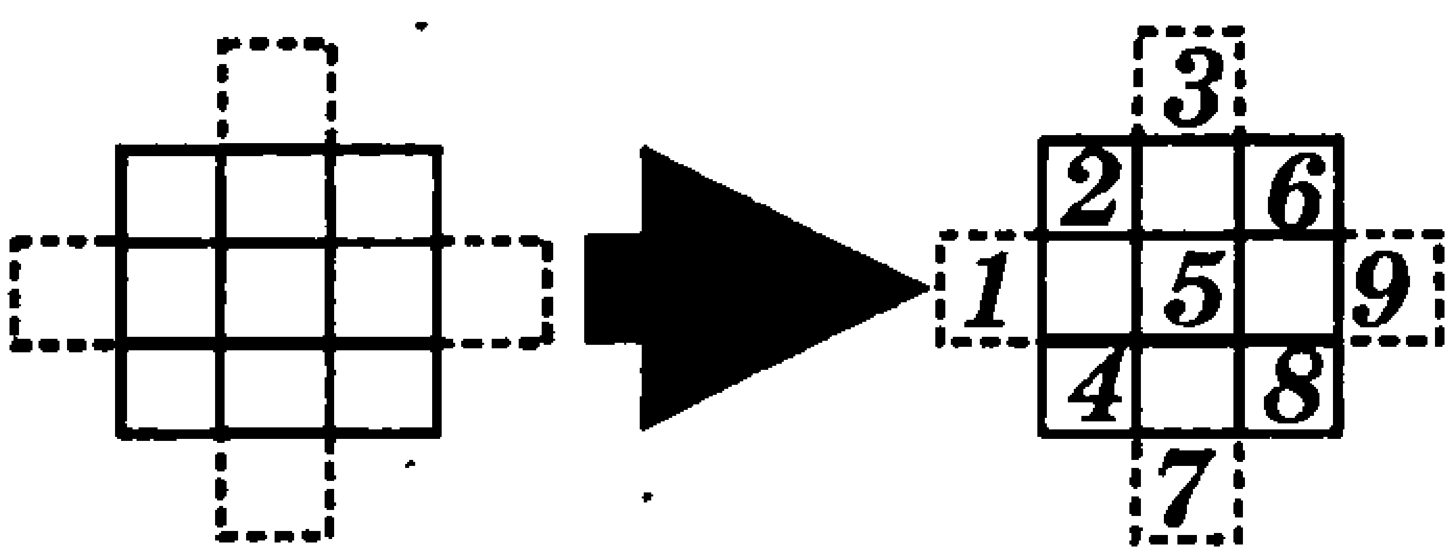
RPTA: "C"

NOTA : $1+2+3+4+\dots\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

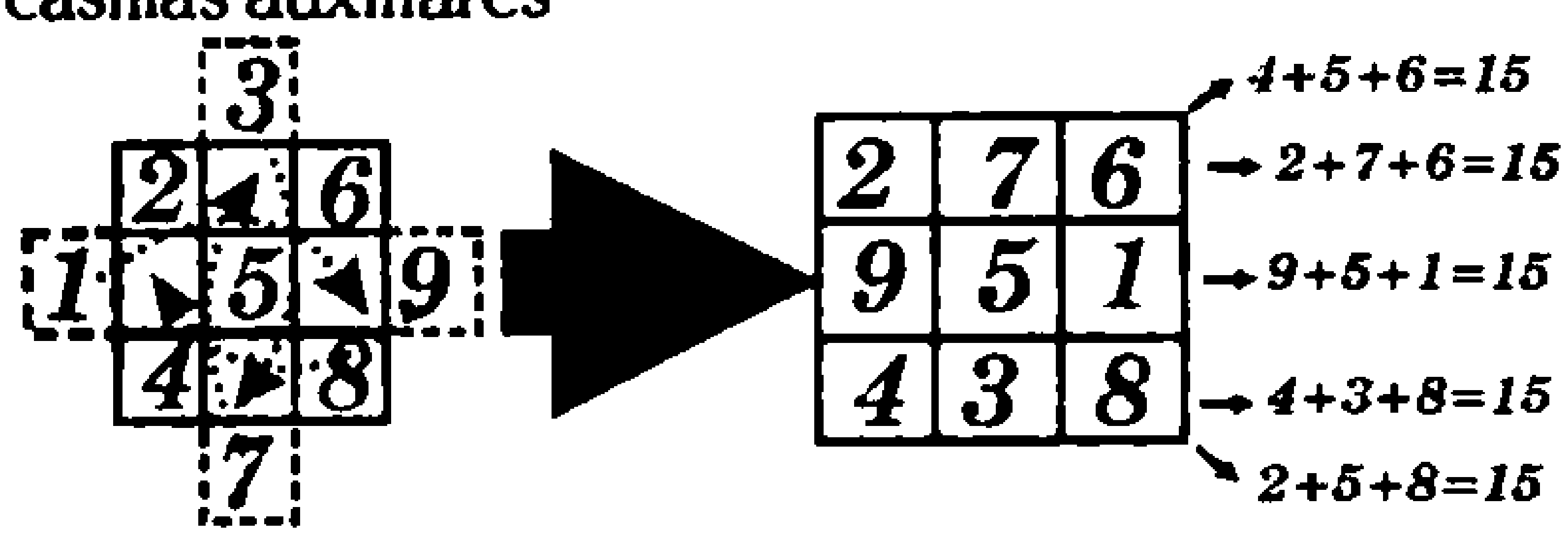
OBSERVACIÓN:

Para observar la distribución de los números, se seguirá el siguiente procedimiento :

* se traza *4* casillas auxiliares, y se distribuye los números así :

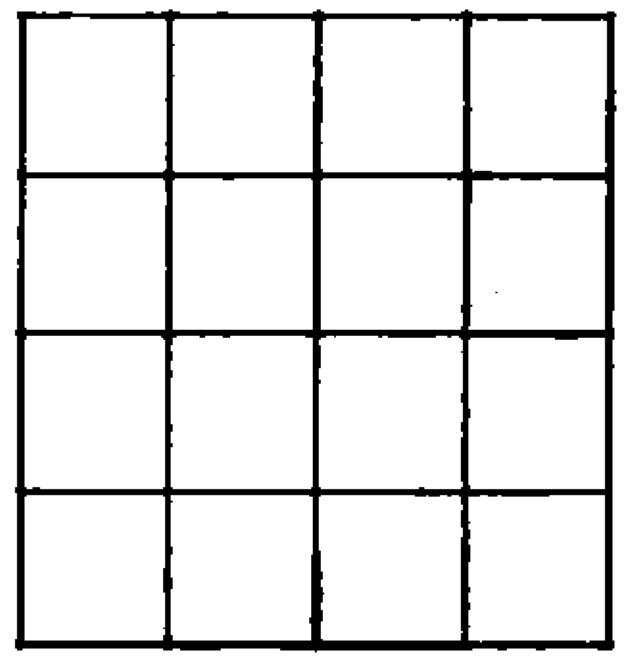


* Se transpone los números ubicados en las casillas auxiliares, eliminando por último dichas casillas auxiliares



PROBLEMA 02 :

En el esquema colocar todos los números del *1* al *16* tal que cada fila, cada columna y cada diagonal siempre sume lo mismo. Dar como respuesta la cantidad constante de dicha suma.



A) 16
B) 15
C) 30
D) 34
E) 45

RESOLUCIÓN :

* Utilizaremos un método analogo que el problema anterior.

* Sea "*S*" la suma de cada horizontal pero al distribuirse del *1* al *16*, se tendrá que :

$$S+S+S+S=1+2+3+\dots+15+16$$

$$\Rightarrow 4S=\frac{16\times17}{2} \Rightarrow S=34$$

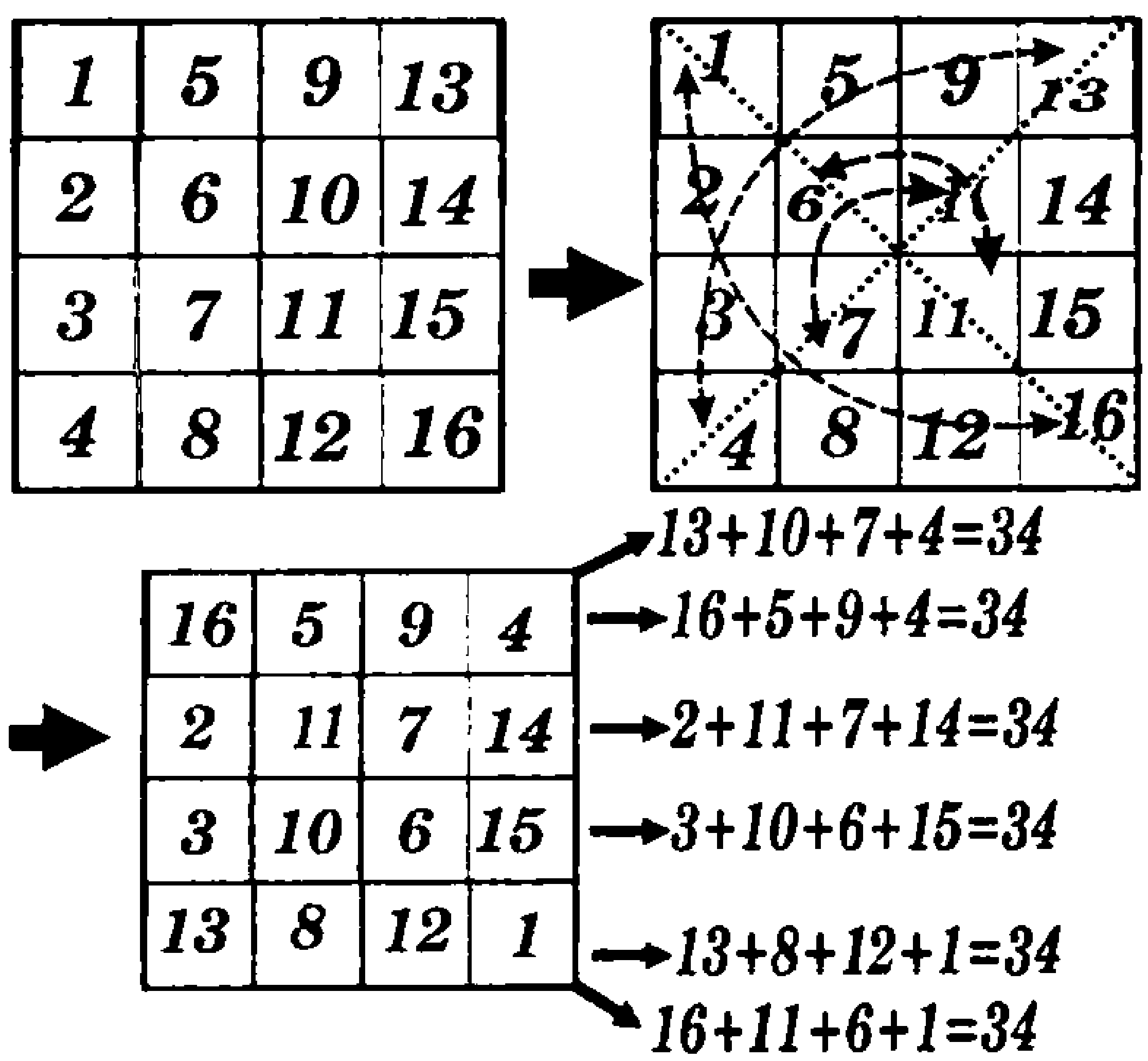
RPTA : "D"

OBSERVACIÓN :

Para observar la distribución de los números, se seguirá el siguiente procedimiento :

Se numera en forma ascendente ,para luego intercambiar de posición los números ubicados en las diagonales (principal y secundaria), con su simétrico respecto del centro de la cuadrícula

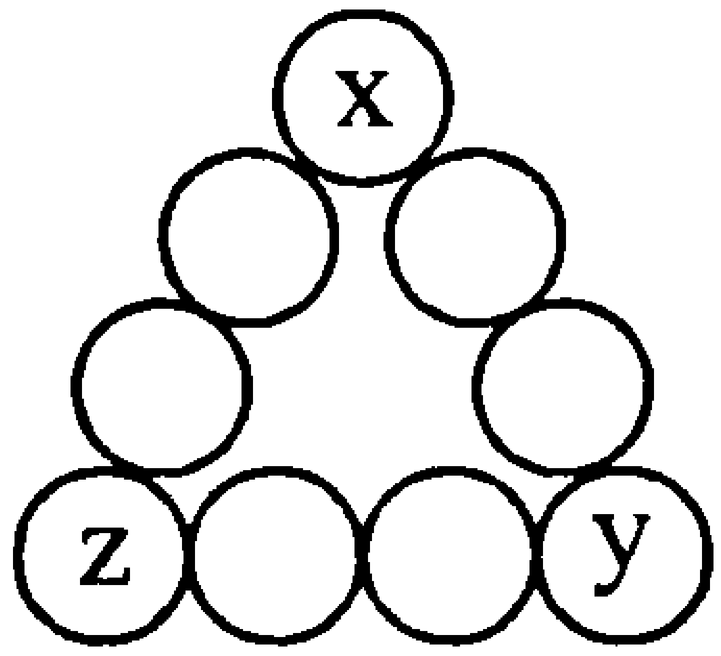
CUADRADO DIABÓLICO



PROBLEMA 03 :

Si en los círculos de la figura escribimos los números naturales del 3 al 11, de manera que los números en cada lado del triángulo sumen 25, ¿cuál es la suma de los números que se escriben en los círculos etiquetados con x, y, z?

A) 21
B) 13
C) 15
D) 18
E) 12



RESOLUCIÓN :

* Supuestamente la suma de los 3 lados es: $25+25+25=75$, pero lo real es que suman :

$$3+4+5+6+7+8+9+10+11=63$$

Ese exceso de $75-63=12$, se debe a que tanto a "x", "y", "z" le hemos considerado 2 veces y sólo debe ser 1 vez, por lo que dicho exceso será

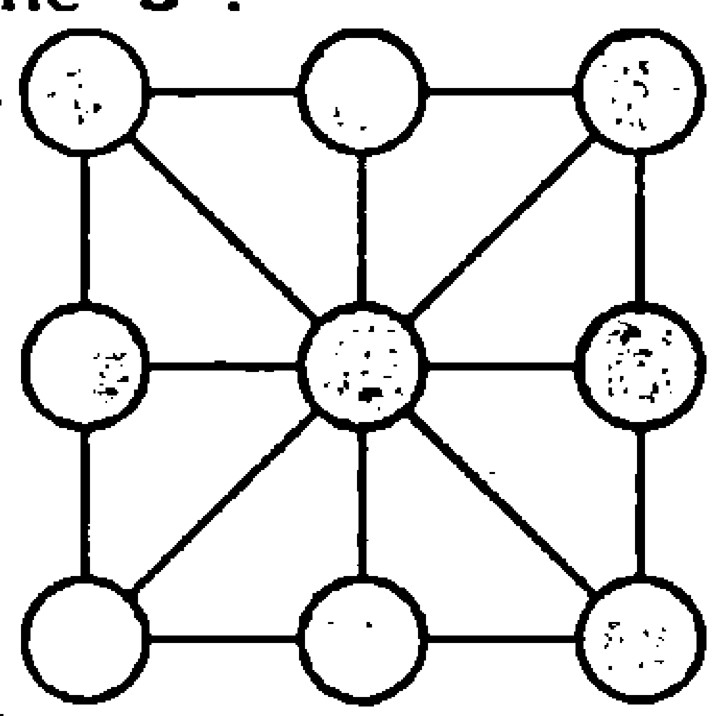
$$\underbrace{x+y+z=12}_{\text{Esa vez de más considerada}}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 04 :

Si se distribuyen los números del 2 al 10 en el siguiente arreglo de modo que la suma de cada fila y columna de 3 círculos sea la misma e igual a "S". Determine "S".

A) 9
B) 18
C) 15
D) 20
E) 16



RESOLUCIÓN :

* Los elementos a participar son :

$\{2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; que al colocarlos, su suma total se distribuirá en 3 partes, la cual será la suma constante "S", entonces :

$$2+3+4+5+6+7+8+9+10=3S$$
$$\Rightarrow 54=3S \Rightarrow S=18$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 05 :

Se tiene que colocar las cifras del 1 al 9 en los casilleros, de manera que la suma en vertical, horizontal y diagonal sumen la misma cantidad.

Dar como respuesta $x+y+z$

A) 12
B) 16
C) 15
D) 20
E) 14

		z
	y	
x		

RESOLUCIÓN:

* Suponiendo que en cada horizontal sumen "S", entonces la suma del 1 al 9 debe ser "$3S$"

$$\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9}_{\Rightarrow 45=3S}=3S \Rightarrow 15=S$$

* Pero "S" también debe sumar los números de la diagonal. $\Rightarrow x+y+z=15$

RPTA: "C"

PROBLEMA 06 :

Escribe en cada recuadro uno de los números enteros del 3 al 7 de manera que ninguno se repita y se verifique la igualdad ¿Cual es el número que debe escribirse en el recuadro sombreado?

$$\{[(\square+\square)-\square]\times\square\}\div\square=16$$

A)3 *B)5* *C)4* *D)7* *E)6*

RESOLUCIÓN:

* Los números a utilizar son $3;4;5;6$ y 7.

$$\{[(\boxed{a}+\boxed{b})-\boxed{c}]\times\boxed{b}\}\div\boxed{e}=16$$

*La cifra e, por corresponder a la división, es la menor; es decir, $e=3$.

*La cifra d, para que el resultado sea entero ,es múltiplo de e; es decir, $d=6$.

*Las cifras a,b y c son tales que $a+b-c=8$, pero usando los dígitos $4;5$ y 7; es decir, $7+5-4=8$ ó $5+7-4=8$ se observa que en ambos casos la cifra c es 4.

$$\{[(5+7)-4]\times 6\}\div 3=16$$

RPTA : «C»

PROBLEMA 07 :

Usando los números enteros del 1 al 6 de manera que ninguno se repita, y efectuando las operaciones usuales de adición, sustracción,

multiplicación y división, en ese orden, una sola vez cada una. ¿Cuál es el máximo resultado que se puede obtener?

A)42 B)36 C)48 D)40 E)45

RESOLUCION :

* Según las condiciones, debemos llenar las casilas en blanco con cinco números diferentes de conjunto {*1; 2; 3; 4; 5; 6*} de modo que el resultado de la operación (de izquierda a derecha) sea el máximo posible.

$$\overset{A}{\square} + \overset{B}{\square} - \overset{C}{\square} \times \overset{D}{\square} \div \overset{E}{\square} = ?$$

* Se deduce que en los casilleros *D* y *E* deben estar el *6* y *1*, respectivamente
* Luego, en el casillero *C* debe ir el *2.*
* De los restantes, los dos mayores *(4 y 5)* deben ocupar los casilleros *A* y *B*.
* Finalmente :

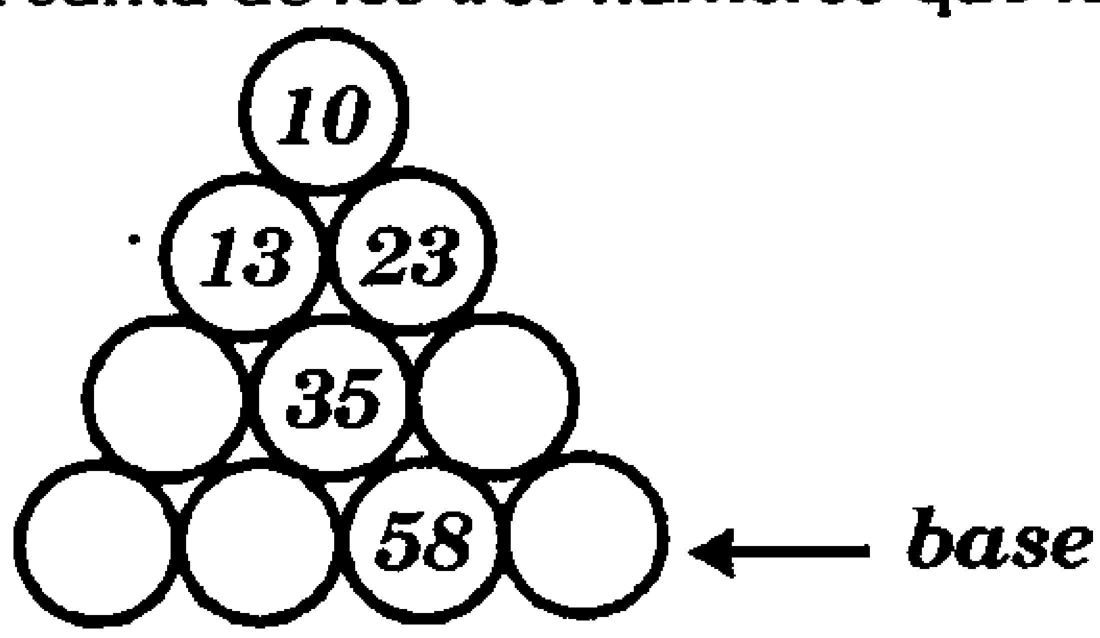
$$\overset{A}{\boxed{4}} + \overset{B}{\boxed{5}} - \overset{C}{\boxed{2}} \times \overset{D}{\boxed{6}} \div \overset{E}{\boxed{1}} = \underset{\text{max imo posible}}{42}$$

RPTA : «A»

PROBLEMA 08 :

En la figura mostrada, el número en cada círculo representa la diferencia positiva entre los números de los dos círculos sobre los que se apoya. Si en la fila de la base todos los números tienen dos cifras y se emplean todos los números enteros del *1* al *8* , hallar la suma de los tres números que faltan en la base.

A)138
B)140
C)144
D)130
E)135

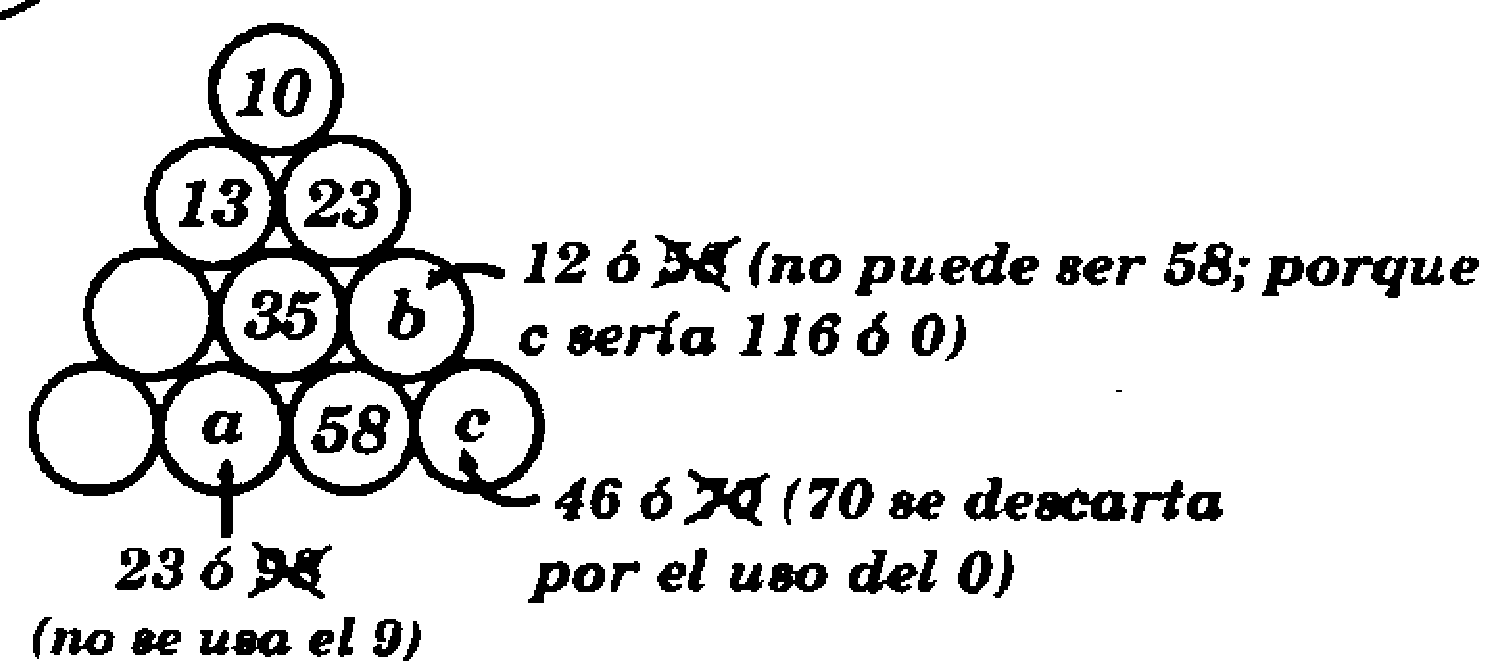


RESOLUCIÓN :

De las condiciones tenemos lo siguiente:

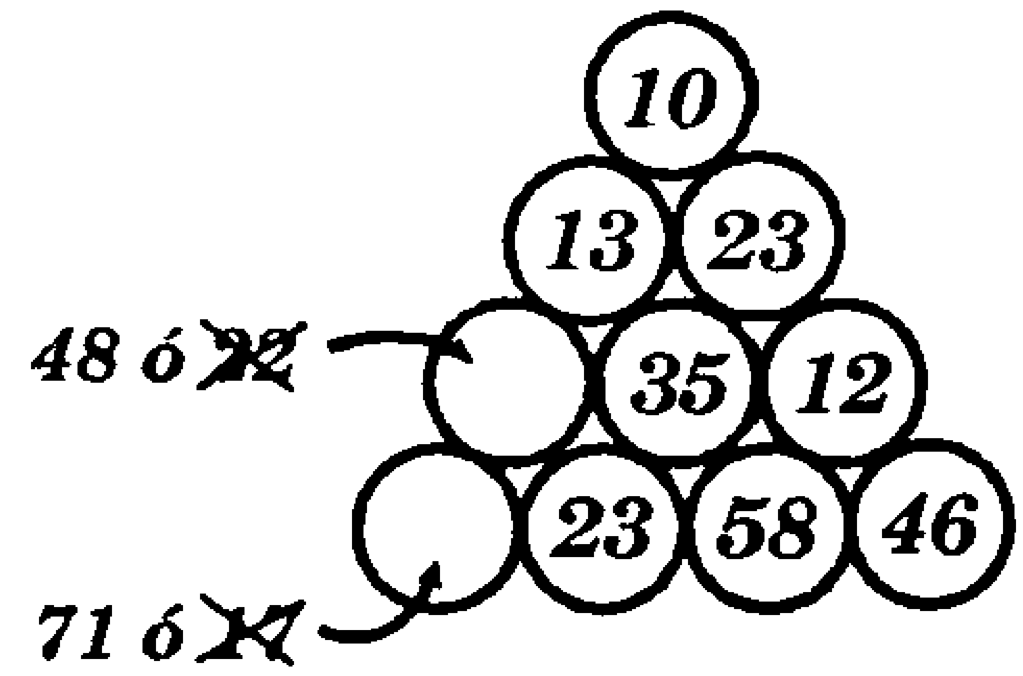
* Los números de la base son de cifras y deben usarse todos los dígitos del *1* al *8.*
* El número de cada círculo es la diferencia positiva entre los dos números sobre los que se apoya.

El desarrollo se realiza completando el siguiente orden: *a; b; c*; ...



* Quedaría de la siguiente forma:

(pues sólo quedan las cifras *1* y *7* por utilizar) Se descarta *17*, pues no cumple con el número de la parte superior.



→ Los números que faltan en la base son *71;23;46.*
71+23+46=140

RPTA : «B»

PROBLEMA 09 :

En el esquema se muestran cuatro cuadrículas de *2×2*. Escriba en los cuadrados sombreados y en blanco , números enteros del *1* al *4* de manera que ninguno se repita en la misma fila, columna o cuadrícula. ¿Cuánto suman los números de los cuadrados sombreados?

A)6
B)5
C)8
D)7
E)9

1			
	2	3	
	4		
			4

RESOLUCIÓN :

* Completando los números adecuadamente, de acuerdo a las condiciones dadas y en forma ordenada según los pasos :

1			
	2	3	1 paso I
paso V 2	4	1 paso IV	3 paso III
	1 paso II		4

* Los pasos *I* y *II* se deducen directamente
* Paso *III*: En la cuadrícula de cuatro casillas

(inferior derecho), se deduce la única ubicación que puede tener la cifra *3.*

* Los pasos *IV* y *V* de deducen directamente

Luego, la suma de los números ubicados en los casilleros sombreados es : $2 + 1 + 1 + 1 = 5$

RPTA : «B»

PROBLEMA 10 :

Complete las casillas en blanco con números de un dígito, de manera que al sumar los valores de cada fila o columna, resulte *34*. Luego responda : ¿cuántas veces aparece el dígito *9* en ambas diagonales?

	8		9
8			
8			8
		9	

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

RESOLUCIÓN :

* Empecemos por la tercera fila desde arriba :

8			8

* para que la suma de los términos de dicha fila sea *34*, los dos casilleros en blanco deben sumar :

$34-(8+8)=18$. y esto solo es posible cuando sumamos *9* y *9*.

• Lo mismo se aplica para la primera columna ; luego el cuadro se completa fácilmente.

9✓	8	8	9✓
8	9✓	8	9
8	9✓	9✓	8
9✓	8	9	8

⇒ Ambas diagonales contienen en total *6* nueves.

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

El cuadro, tiene una distribución numérica de tal forma que las filas, columnas y diagonales suman *15*. Los dígitos son del *1* al *5* y no se repiten en una fila o columna. Determine que números ocupan los casilleros *UNI.*

5				4
	U	N	I	
		1		
U	N	I		
2	5			3

A) 3 ; 4 ; 2
B) 3 ; 5 ; 6
C) 3 ; 5 ; 4
D) 4 ; 3 ; 5
E) 4 ; 5 ; 3

RESOLUCIÓN :

* Completamos la distribución numérica :

5				4
	U	N	I	
		1		
U	N	I		
2	5	(4)	1	3

* Analizando la fila y la columna señalada, el espacio debe ser ocupado por el *4*.

5		(2)		4
	U	N	I	
		1		
U	N	I		
2	5	4	1	3

* Se completa con *2*, entonces, *N* e *I=(3;5)*

5		2		4
	U	N	I	
		1		
U	N	I		
2	5	4	1	3

Se observa que $N \neq 5$, entonces, $N=3 ; I=5$

5		2		4
	U	3	5	
		1		
U	N	I		
2	5	4	1	3

* Analizando de manera simultánea

$U \neq 2$

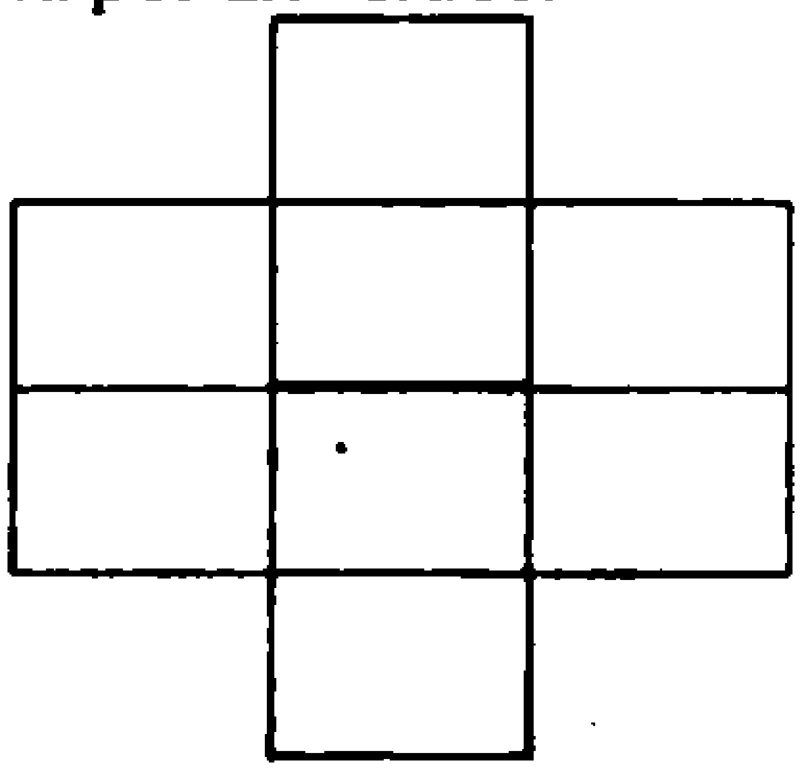
$U \neq 1 \rightarrow U=4$

* Por lo tanto, la respuesta es *4; 3* y *5*

RPTA : «D»

PROBLEMA 12 :

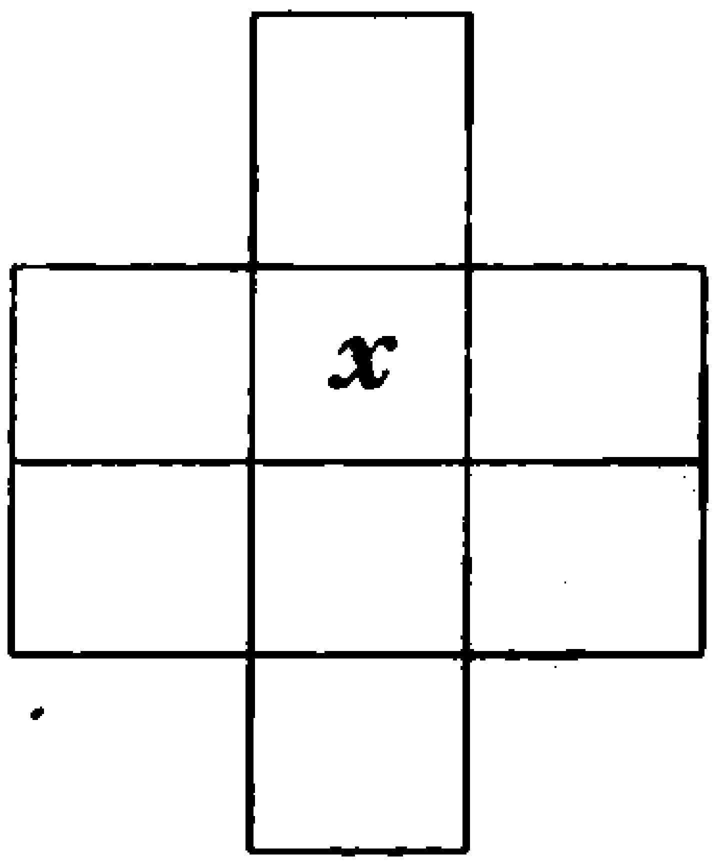
La figura muestra *8* casillas en las cuales usted deberá colocar todos los números enteros del *1* al *8*, con la condición de que dos números consecutivos no sean adyacentes ni por el lado de una casilla ni por un vértice.



Dé como respuesta la suma de los números de las casillas sombreadas.

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

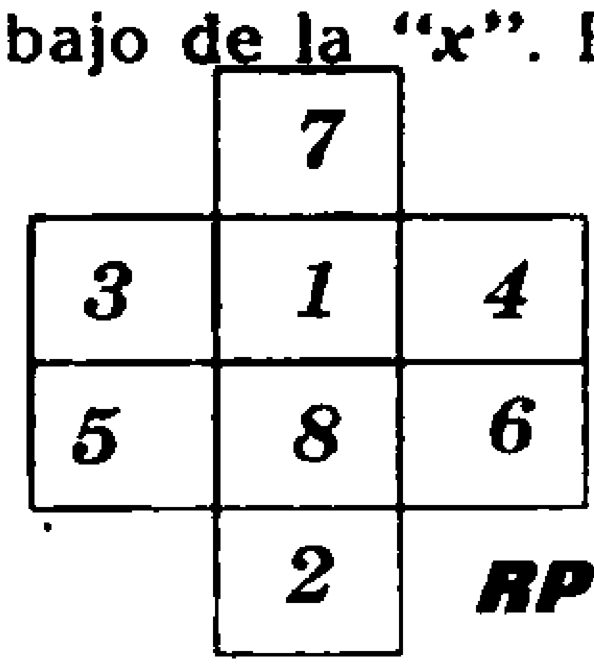
RESOLUCIÓN :



• Si en la casilla señalada con "*x*" colocamos por ejemplo el número *5* , su consecutivo que es el *6* solo podrá ir en la casilla inferior ; sin embargo el *4* también es consecutivo con el *5* y no tendría ninguna casilla disponible.

• Este análisis nos permite deducir que el valor de "*x*" solo puede ser *1* u *8*, que poseen un solo consecutivo; lo mismo ocurre para la casilla inmediatamente debajo de la "*x*". El resto se completa fácilmente.

$\Rightarrow 1+8=9$

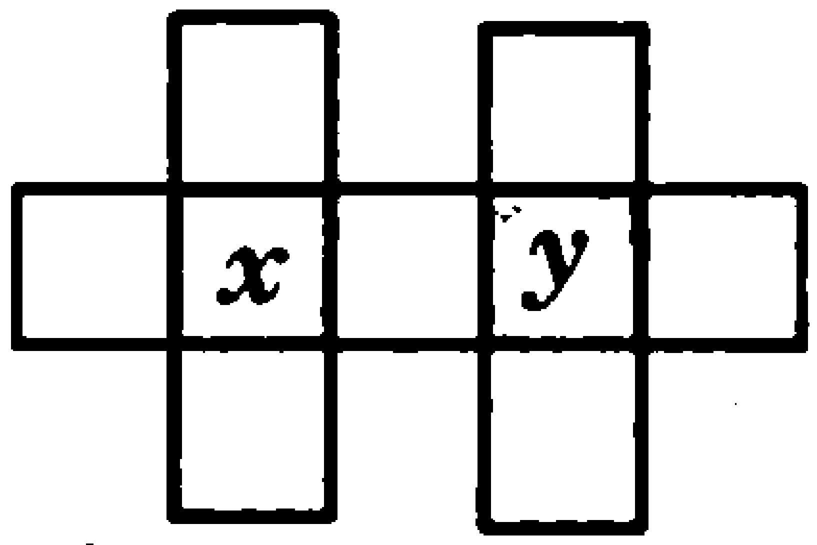


RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

En el gráfico, distribuya los números enteros del *1* al *9*, sin repetir, uno en cada casilla de modo que no debe haber *2* casilleros con un lado o vértice común que contengan dos números consecutivos. Determine la diferencia positiva entre el menor y mayor valor de $(x+y)$.

A) 10
B) 14
C) 12
D) 16
E) 15



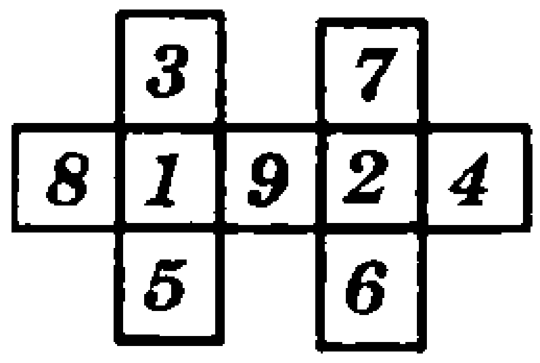
RESOLUCIÓN :

Se pide la diferencia positiva entre el mayor y menor valor de $(x+y)$.

* Se distribuyen: *1, 2, 3, ..., 9.*

* No debe haber dos números consecutivos en dos casilleros con un lado ó vértice común.

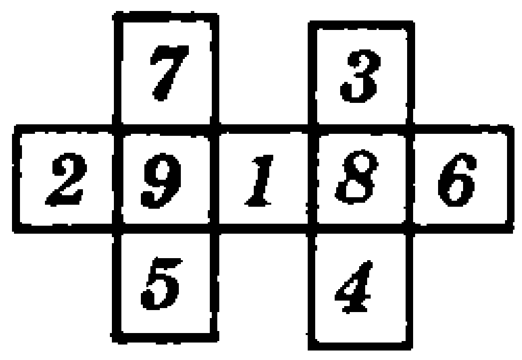
Hallaremos el menor valor de $x + y$ verificamos si se pueden distribuir los números de $x=1$ e $y=2$.



$\Rightarrow (x+y)_{mínimo} = 3$

¡Si es posible!

Se puede deducir que también es posible distribuir los números si $x=9$ e $y=8$.



$\Rightarrow (x+y)_{máximo} = 17$

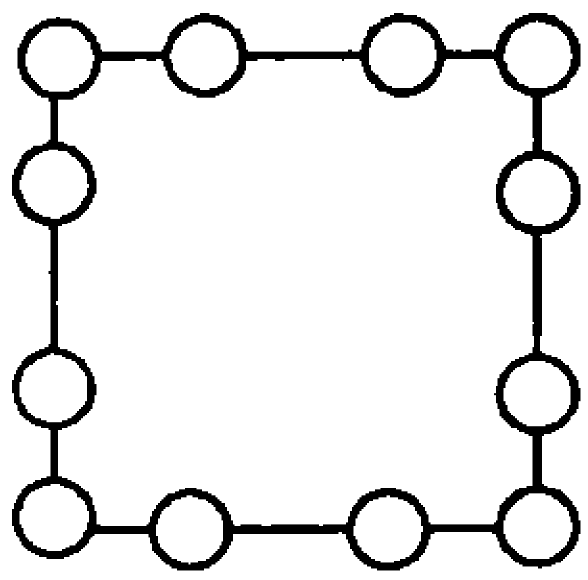
$\Rightarrow (x+y)_{máximo} - (x+y)_{mínimo} = 14$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

En el gráfico, distribuir los números del *2* al *13* (uno en cada casilla circular) de modo que la suma de los números que se hallan en cada lado del cuadrado sea *26*. Dé como respuesta la suma de los números que no se ubican en los vértices.

A) 90
B) 52
C) 78
D) 76
E) 92



RESOLUCIÓN :

Se pide la suma de los números que no se ubican en los vértices.

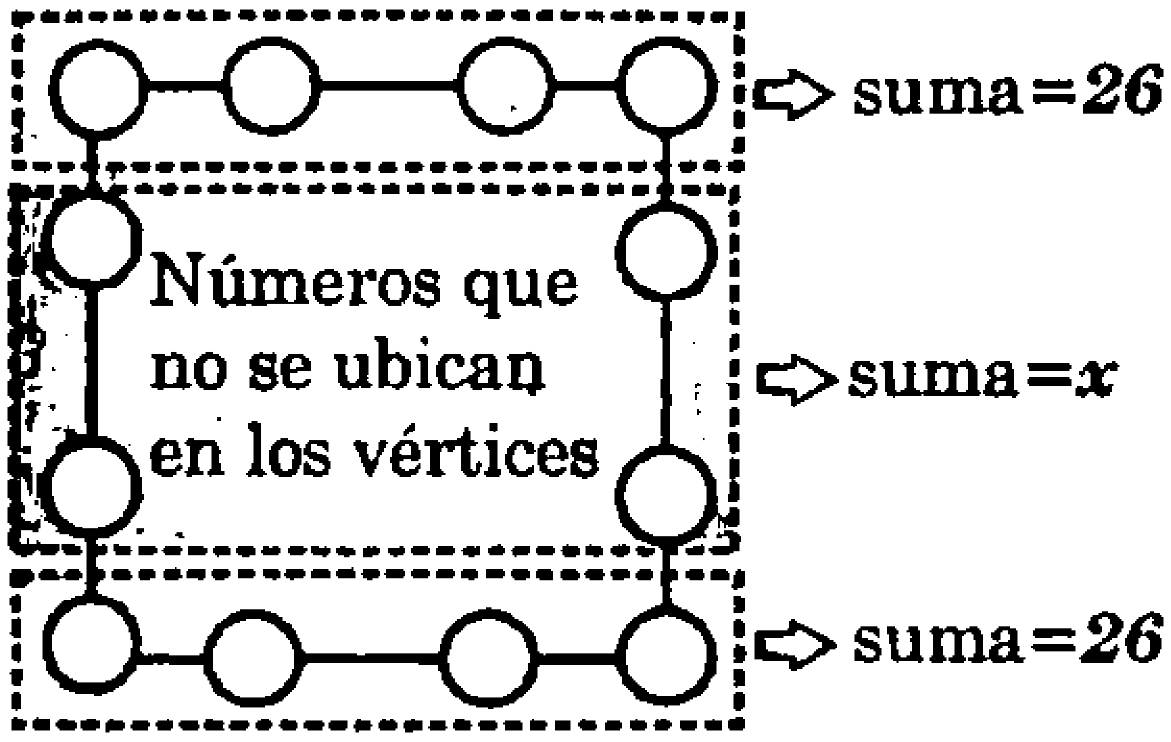
Datos:

* Se distribuyen los números: *2, 3, 4, ..., 13.*

* Suma en cada lado es *26*.

En el gráfico, para calcular lo pedido sumaremos los números ubicados en dos lados opuestos

(suma =26) y el resto de números, es decir:



Del gráfico : $26+x+26=\underbrace{2+3+4+...+13}$

$$\Rightarrow x+52=\frac{13\times 14}{2}-1\Rightarrow x=38$$

Del gráfico: $26+y+26=\underbrace{2+3+4+...+13}$

$$\Rightarrow y+52=90\Rightarrow y=38$$

$\Rightarrow$ Suma de los números que no se ubican en los vértice $=x+y=76$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Complete con números enteros cada una de las casillas del gráfico de manera que obtenga un cuadrado mágico y dé el valor de x.

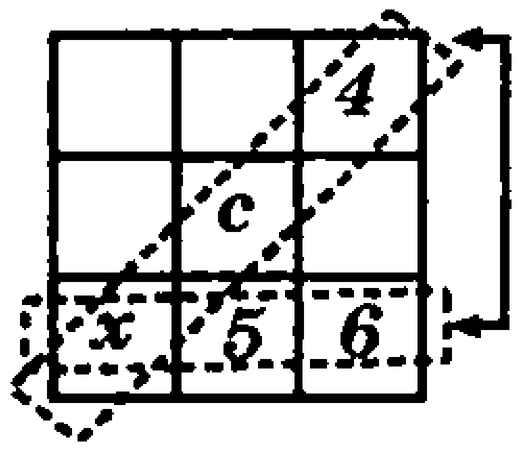
		4
x	5	6

A) 7
B) 9
C) 8
D) 10
E) 12

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de x.

Como se debe completar con números de manera que se obtenga un cuadrado mágico, entonces se cumplirá que:



sumas iguales:
$x+c+4=x+5+6$
$c=7$

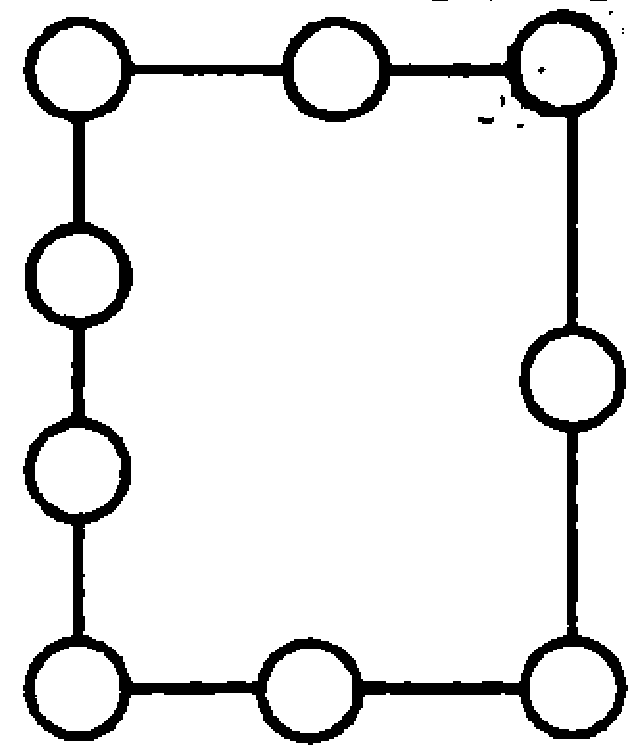
Luego, por propiedad:

$$x+4=2c\Rightarrow x=2c-4\Rightarrow x=10$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Distribuya los números enteros del *1* al *9* en las casillas circulares del rectángulo mostrado, sin repetirlos, de manera que la suma de los números ubicados en cada lado del rectángulo sea la misma y la menor posible. Dé como respuesta la menor suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



A) 10
B) 8
C) 12
D) 11
E) 13

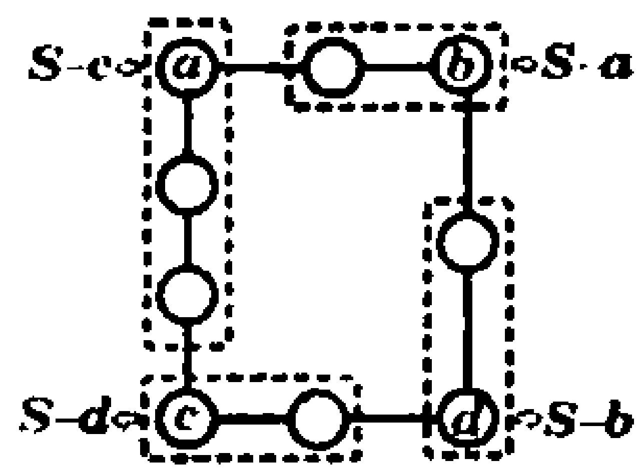
RESOLUCIÓN :

* Se distribuyen; *1, 2, 3,...,9*.

* La suma en cada lado debe ser la misma y la menor posible.

* En el gráfico, si la suma de cada lado es S:

$$(S-a)+(S-b)+(S-c)+(S-d)=\underline{1+2+3+...+9}$$

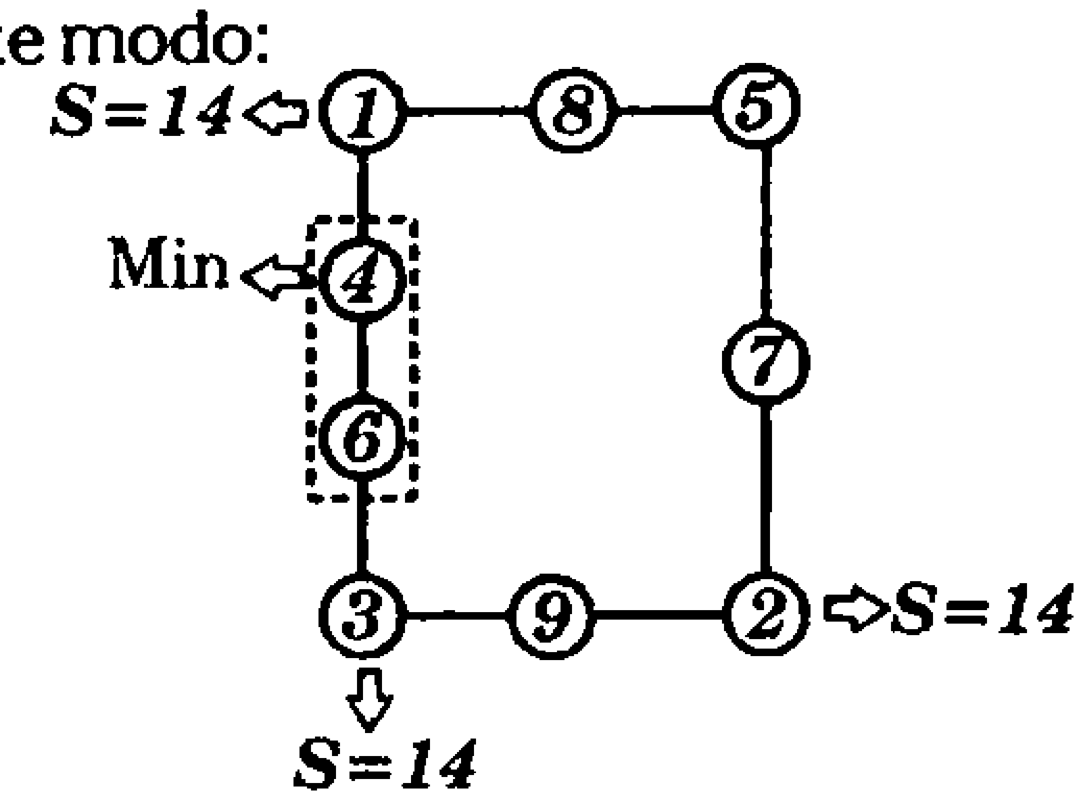


$$4S-(a+b+c+d)=\frac{9\times 10}{2}$$

$$4S=45+\overbrace{(a+b+c+d)}^{min}_{1+2+3+5}$$

min $\Rightarrow S_{min}=14$

Luego al distribuir *1, 2, 3, 5* en los vértices, el resto de números: *4, 6, 7, 8, 9*, para que en las casillas sombreadas la suma sea mínima, ubicaremos el *4* y *6*, con lo que la distribución quedará del siguiente modo:



Se pide la menor suma de los números ubicados en las casillas circulares.

⇒ Suma mínima en casilleros sombreados = **10**.

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

En el siguiente cuadrado, distribuir los números impares del *1* hasta el *17*, sin repeticiones, de modo que la suma en cada fila, columna y diagonal sea la misma. Halle el valor de $(a+b)$.

	17	
13		b
	a	

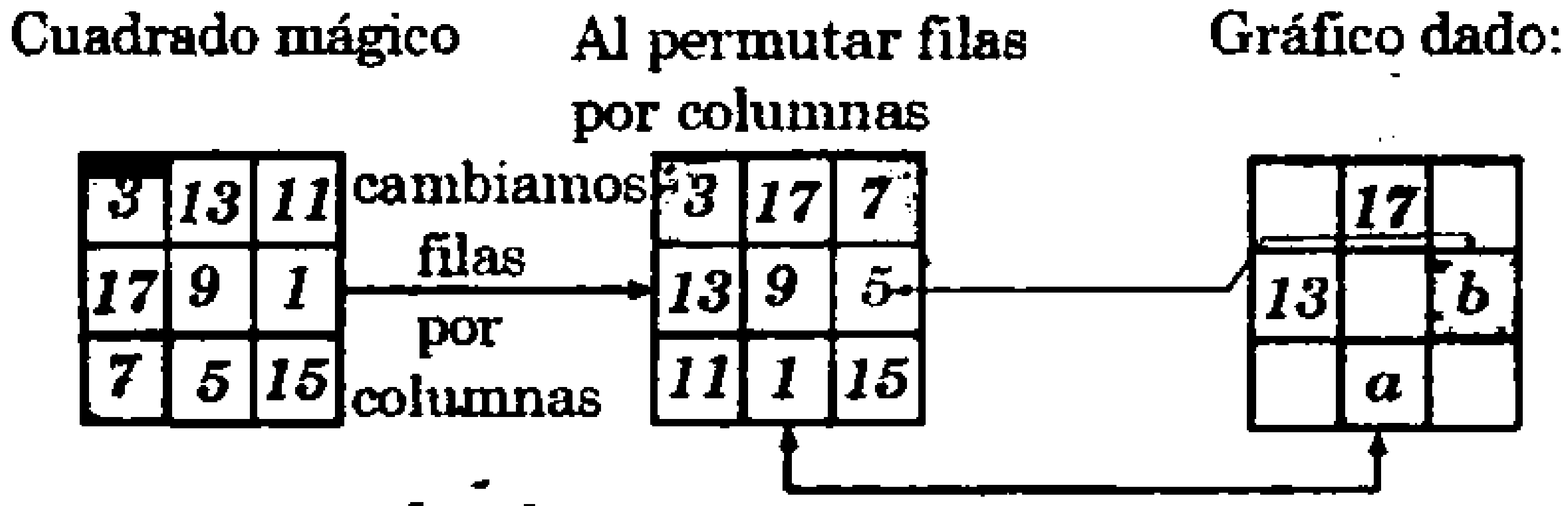
A) 14
B) 30
C) 6
D) 16
E) 24

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $a+b$.

Datos:

* Se distribuyen los impares: *1*; *3*; *5*; ...; *17*.
* La suma de números de cada fila, columna y diagonal sea la misma.
* Construiremos un cuadrado mágico con los números y luego lo comparamos con el del gráfico dado para hallar el valor de *a* y *b*.



$\Rightarrow a+b=6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

Distribuya los números *1, 2, 3, ...9* en la cuadrícula cuadrada del gráfico, uno por casilla, de manera que la multiplicación de los tres números de cada fila o columna resulte el número que se indica en parte exterior de la cuadrícula.

Con la mayor suma de los *3* números de una de las diagonales de la cuadrícula.

			70
			48
			108
64	45	126	

A) 6
B) 9
C) 12
D) 15
E) 8

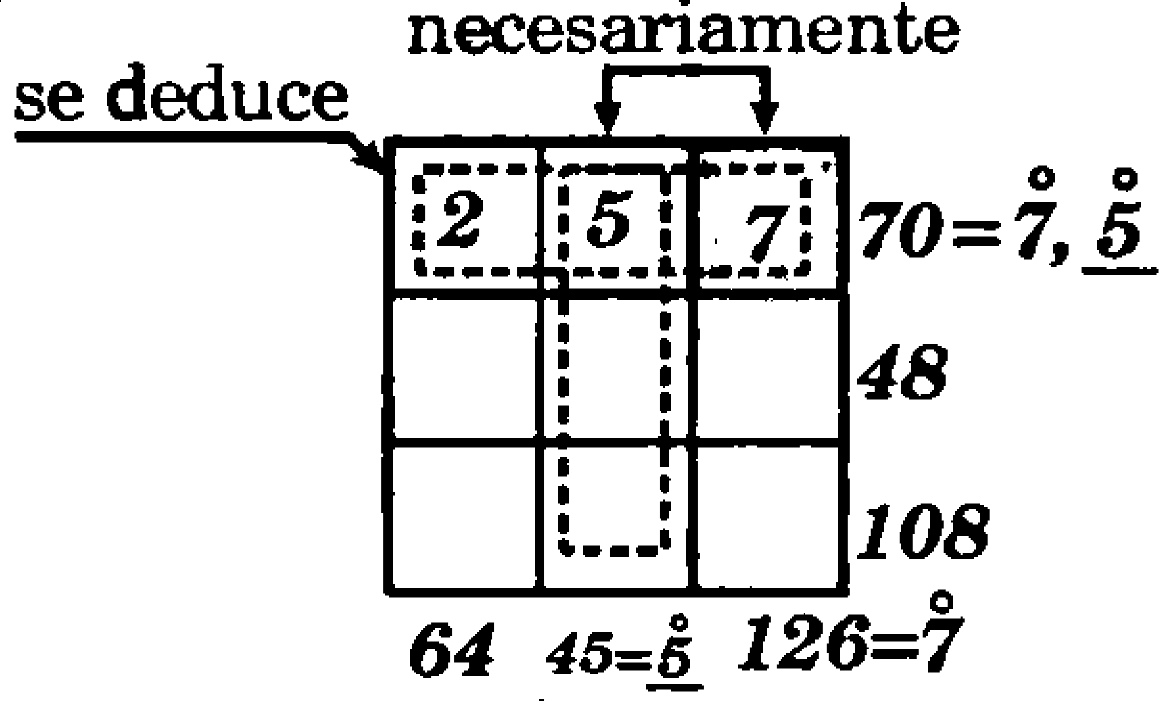
RESOLUCIÓN :

Se pide la mayor suma de los *3* números de una de las diagonales.

Se debe cumplir que:

* Deben ubicarse: *1, 2, 3, ...9*.
* Producto en fila o columna igual al número exterior correspondiente a su fila o columna.

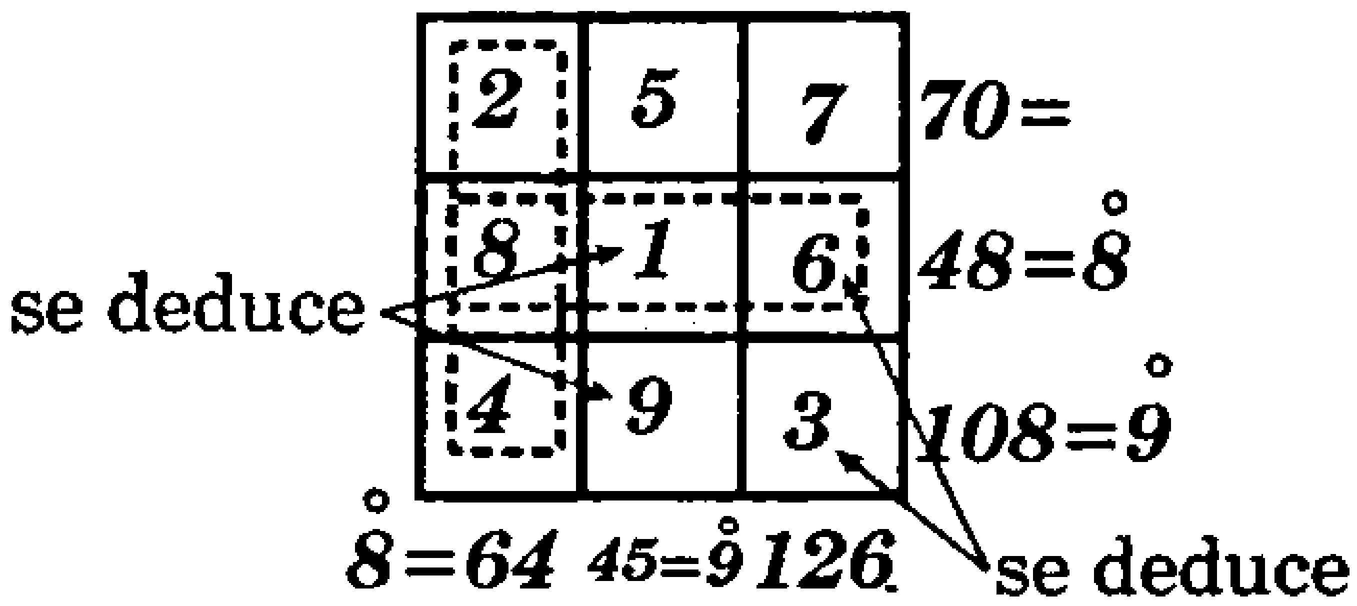
Comenzaremos la distribución de números buscando casillas que sean de una misma fila o columna, de esa manera el número que se ubicará debe ser un divisor de los correspondientes números de su fila o columna.



I) Como *70* y *126* son $\overset{\circ}{7}$, entonces en el casillero común debe ir *7*.

II) En forma análoga ubicaremos el *5* en el casillero común señalado.

Luego, en otra fila y columna:



III) Como *45* y *108* som ambos múltiplos de *9*, entonces, en su casillero común irá el *9*.

IV) De la misma manera ubicamos el *8* en ese casillero común a la fila y columna señalada.

⇒ Mayor suma en una diagonal = *7+4+1=12*

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Determine el valor de $x+y$ si la siguiente cuadrícula cuadrada es un cuadrado mágico.

$2x+2$	x	$z+1$
$z-2$	$x+2$	$5x-6$
$y-1$	$2z+1$	$x-1$

A) 6
B) 10
C) 5
D) 12
E) 8

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $x + y$.

Dato:

* El tablero cuadriculado es un cuadrado mágico.

$2x+2$	x	$z+1$
$z-2$	$x+2$	$5x-6$
$y-1$	$2z+1$	$x-1$

Del dato, se cumplirá en el gráfico que:

* $\frac{x+(5x-6)}{2} = y-1$ (propiedad)

$6x-6=2y-2 \Rightarrow 6x=2y+4$

$\Rightarrow 3x=y+2....(\alpha)$

Además:

$\frac{(2x+2)+(x-1)}{2} = x+2$........(propiedad)

$\Rightarrow 3x+1=2x+4 \Rightarrow x=3$

En (α):

$y+2=3x$

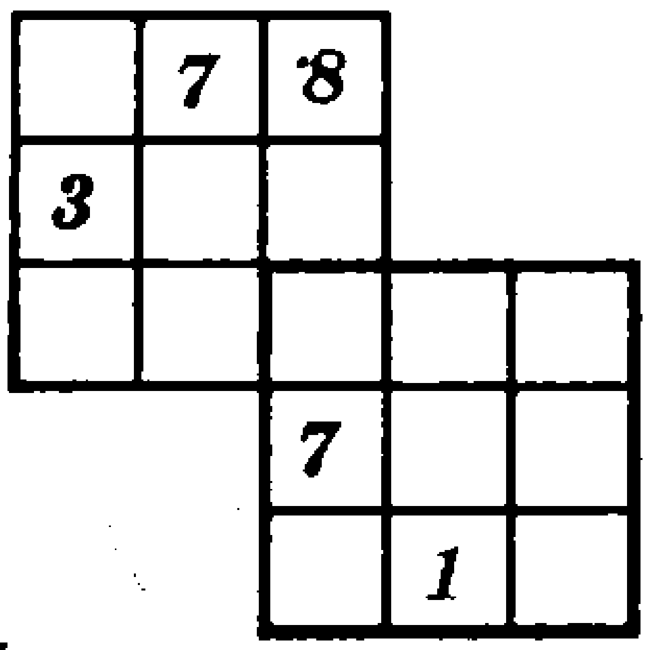
$y+2=3(3) \Rightarrow y=7$

$\Rightarrow x+y=10$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

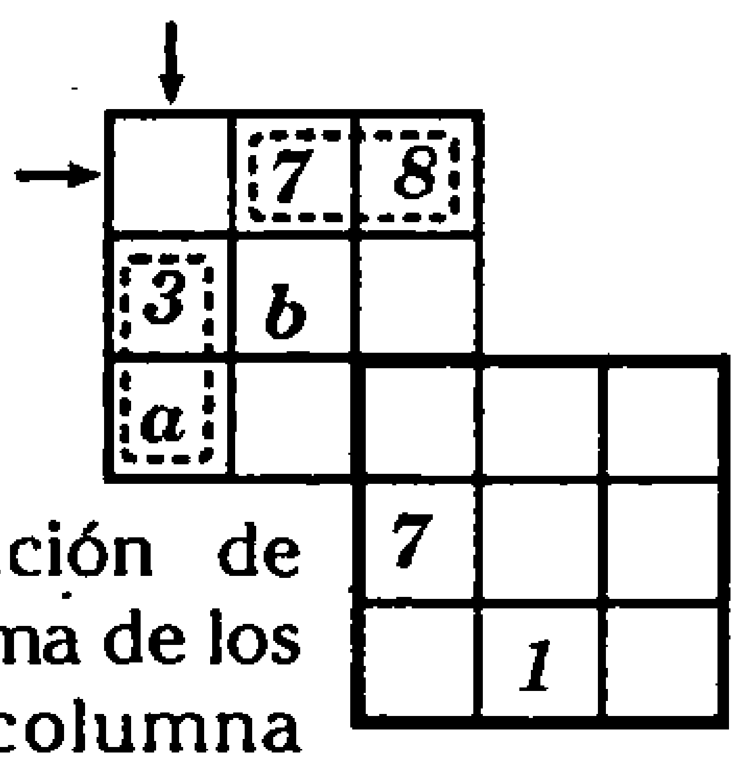
Calcule el producto de las constantes mágicas de los dos cuadrados mágicos de orden 3 que se completa con números enteros, mostrados en el gráfico.



A) 240
B) 510
C) 360
D) 820
E) 720

RESOLUCIÓN :

Se pide el producto de las constantes de los cuadrados mágicos de orden 3 mostrados.

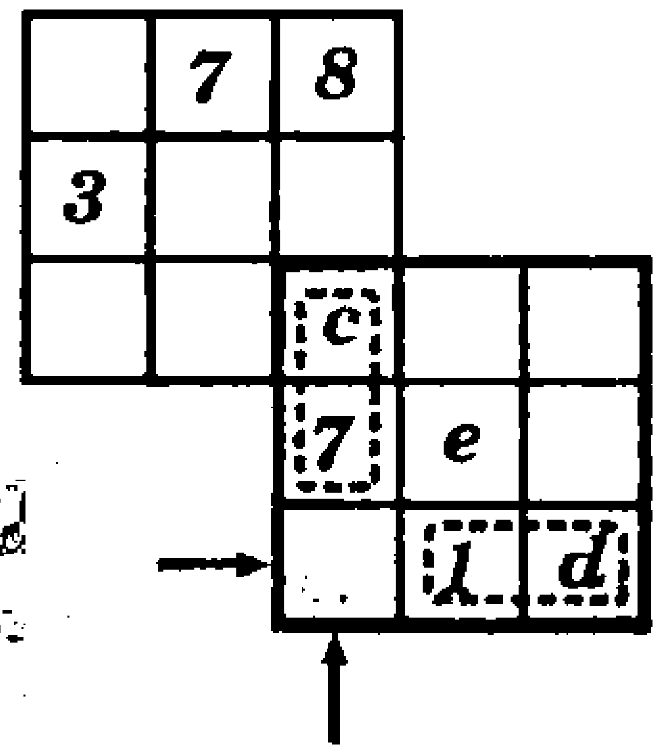


En el gráfico, por definición de cuadrados mágicos, la suma de los números en la fila y columna indicada es la misma entonces:

$a+3=7+8 \Rightarrow a=12$

Por propiedad : $b=\frac{a+8}{2}=10$

$\Rightarrow$ constante mágica$=a+b+8=30$



Por propiedad: $c=\frac{3+7}{2}=5$

De manera análoga, por definición, la suma en la columna y fila indicada resulta lo mismo.

$d+1=c+7 \Rightarrow d=11$

luego, por propiedad : $e=\frac{c+d}{2}=8$

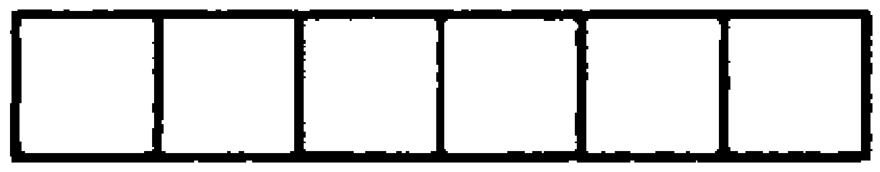
$\Rightarrow$ constante mágica: $c+e+d=24$

$\Rightarrow$ Producto de constantes mágicas: $30\times24=720$.

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Ubique las cifras del 1 al 6 en las casillas del tablero mostrado, una por casilla, empezando por la izquierda, de manera que el número formado por las dos primeras casillas sea múltiplo de 2; el número formado las tres primeras casillas sea múltiplo de 3, y así sucesivamente, hasta que el número formado por las 6 casillas resulte un múltiplo de 6. Halle la suma mayor de las dos cifras de las casillas sombreadas.



A) 9 *B) 8* *C) 6* *D) 10* *E) 12*

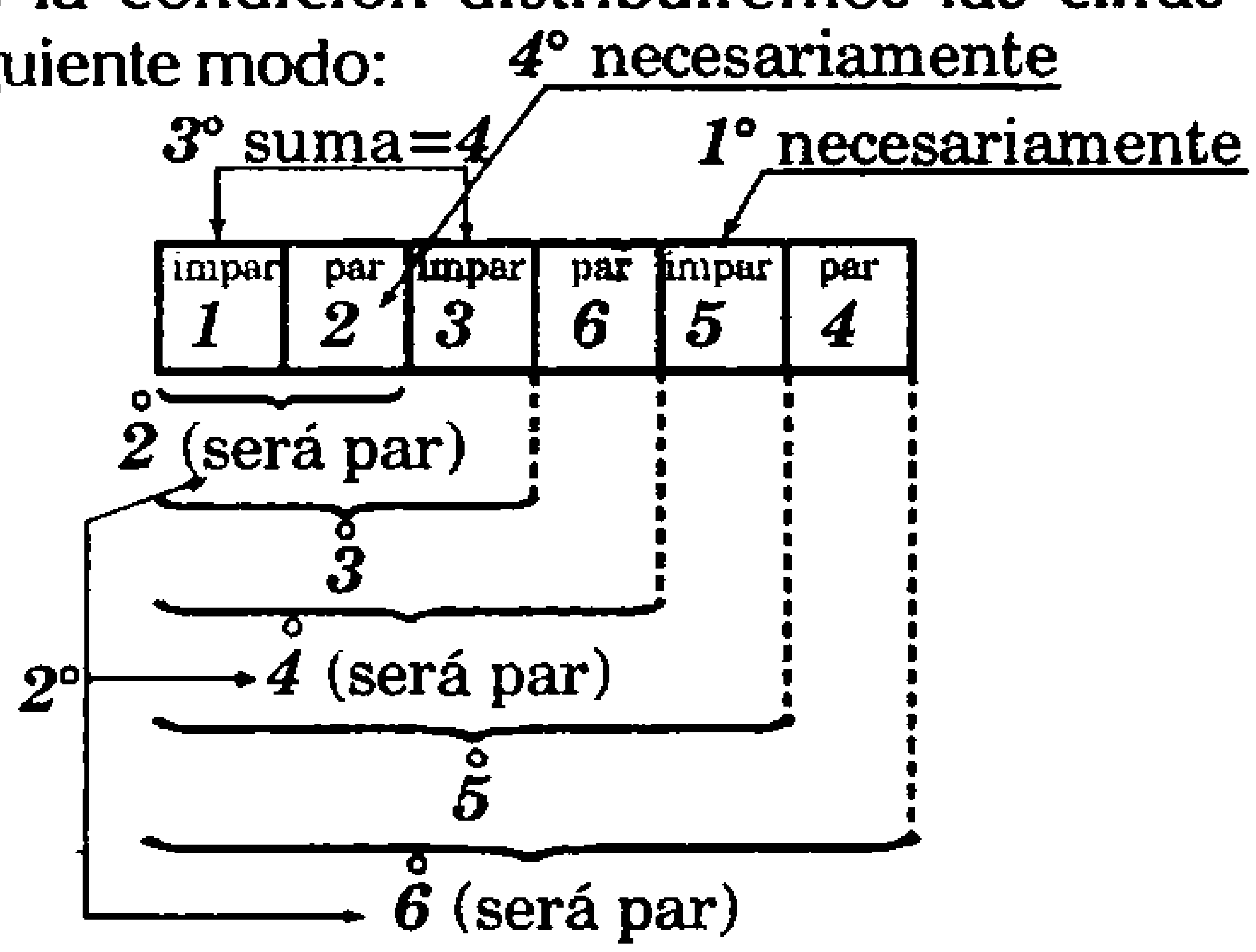
RESOLUCIÓN :

Se pide la mayor suma de las dos cifras de las casillas sombreadas.

Dato:

* Se distribuyen el $1; 2; 3; 4; 5; 6$.

De la condición distribuiremos las cifras del siguiente modo:



1°) Ubicamos el cinco para que el # sea múltiplo de ***5***.

2°) Encontramos donde se ubican las cifras pares.

3°) La suma de siempre será ***4***, así que ***1*** y ***3*** deben ser ubicados en estas casillas, primera y tercera respectivamente.

4°) Necesariamente el ***2*** debe ubicarse en la segunda casilla.

5°) Finalmente se ubican el ***4*** y el ***6***.

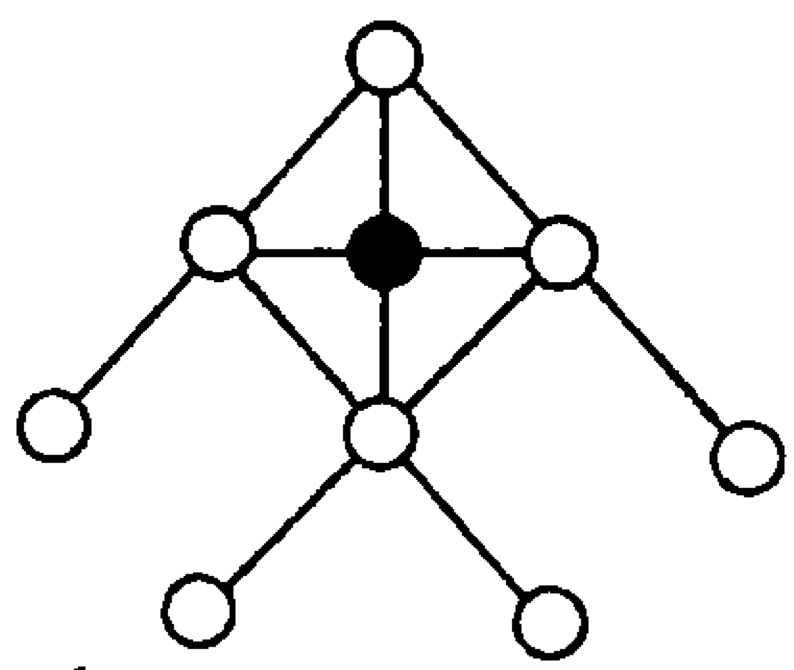
$\Rightarrow$ Mayor de las sumas de las cifras de las casillas sombreadas$=3+6=9$.

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 :

Complete el siguiente arreglo con los números del ***2*** al ***10*** de manera que la suma de los números ubicados en cada ***3*** casillas colineales sea constante e igual a ***18***. Dé como respuesta el número ubicado en la casilla sombreada.

A) 5
B) 3
C) 7
D) 6
E) 9



RESOLUCIÓN :

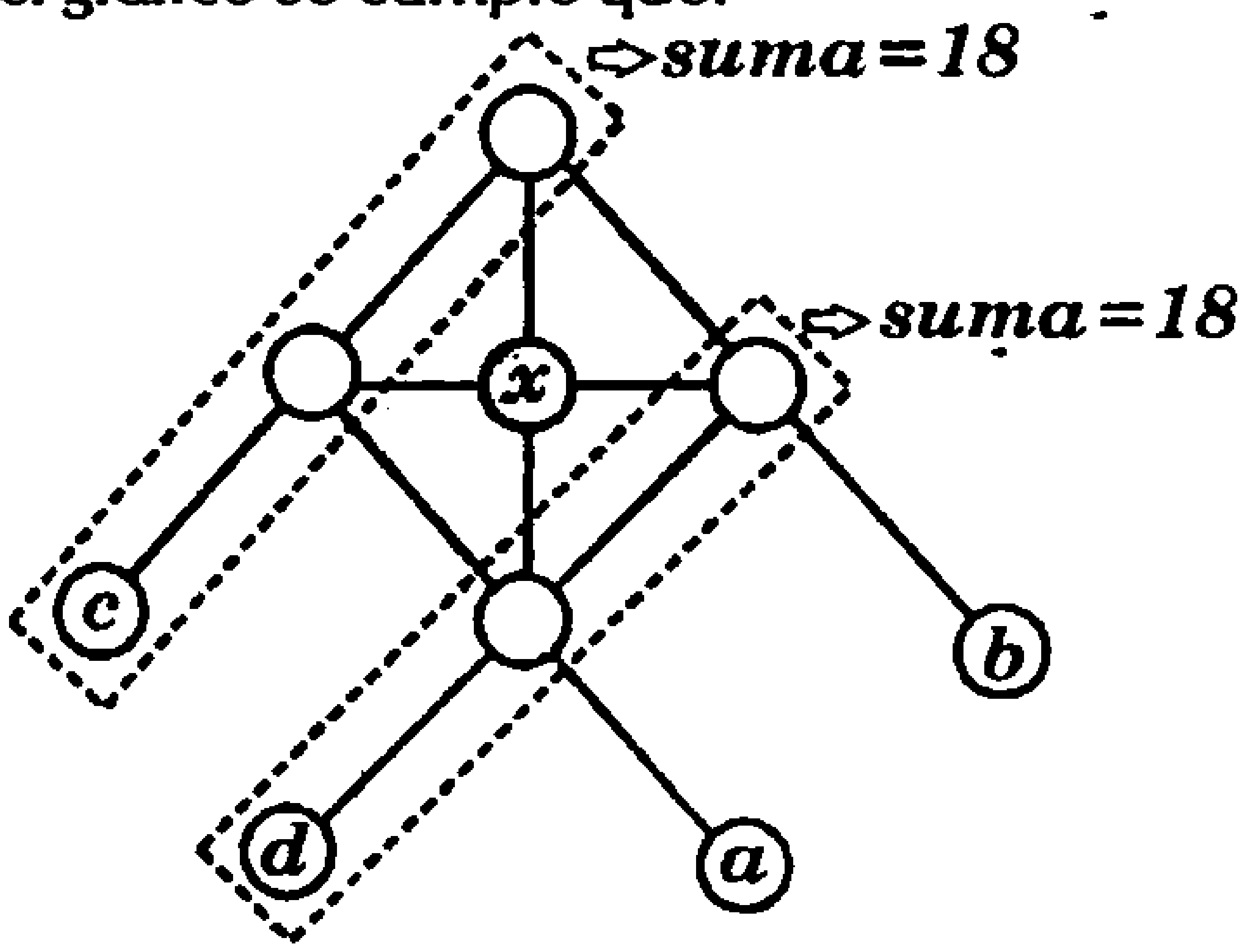
Se pide el número del casillero sombreado: x:

Datos:

* Se distribuyen el ***2; 3; 4; ...10***.

* La suma en cada ***3*** casillas colineales es ***18***.

En el gráfico se cumple que:

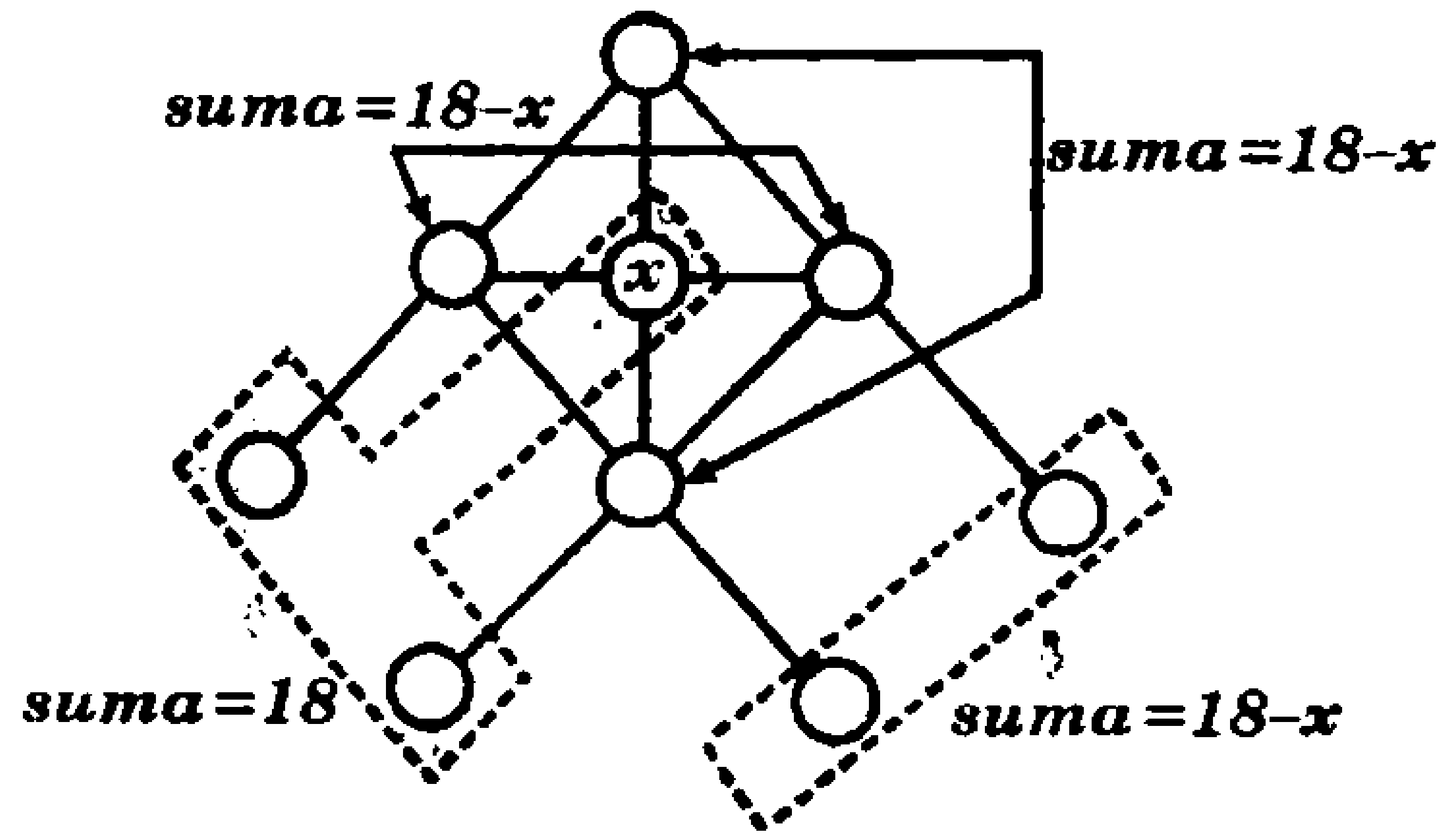


$$x+a+b+18+18=\underbrace{2+3+4+...+10}$$

$$\Rightarrow x+a+b+36=\frac{10\times 11}{2}-1=54 \Rightarrow x+a+b=18$$

En forma análoga se deduce que: $x+c+d=18$.

Entonces, como la suma en ***3*** casillas colineales es ***18***, hacemos lo siguiente:



$3(18-x)+18=54$ (suma de los todos)

$\Rightarrow \cancel{3\times 18}-3x+18=\cancel{54}$

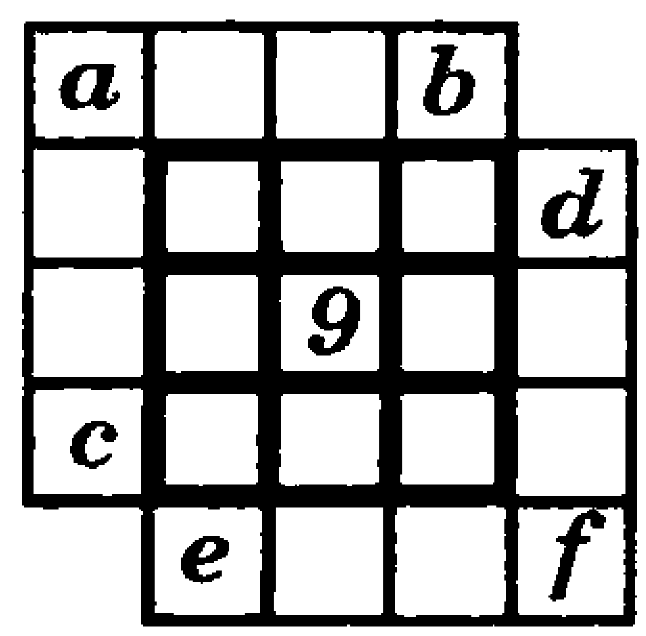
$\Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

El gráfico muestra dos cuadrados mágicos de orden ***4***, que al intersecarse forman un cuadrado mágico resaltado de orden ***3***. Halle el valor de $a+b+c+d+e+f$.

A) 36
B) 45
C) 63
D) 54
E) 81



RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $a+b+c+d+e+f$.

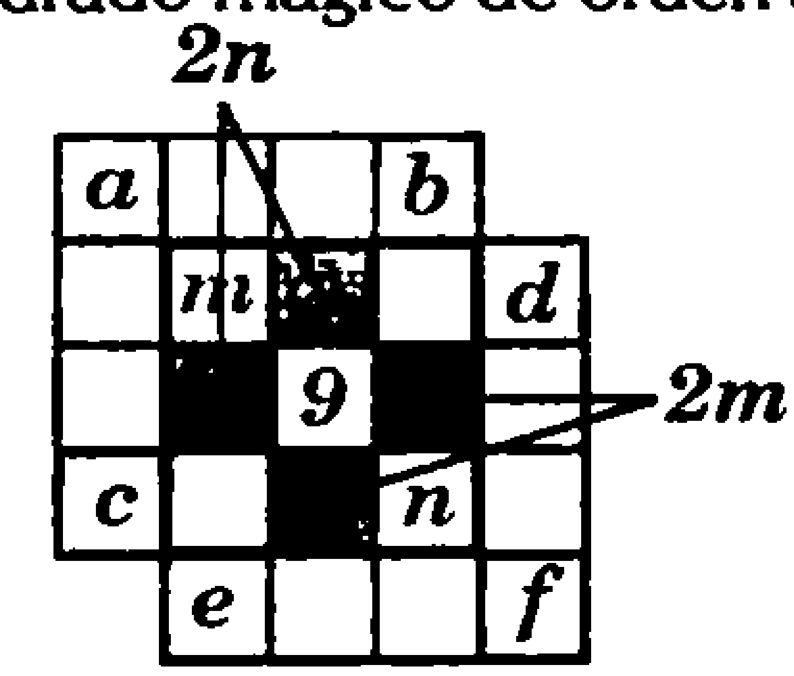
Dato:

* Se tiene dos cuadrados mágicos de orden ***4*** y su intesección determina un cuadrado mágico de orden ***3***.

En el gráfico, en el cuadrado mágico de orden ***3***, por propiedad.

$$\frac{m+n}{2}=9$$

$$\Rightarrow m+n=18$$



Luego, en los cuadrados mágicos de orden ***4*** calculamos las constantes mágicas:

$$a+b+c+\cancel{n}=\cancel{m}+9+2n$$
$$d+e+f+\cancel{m}=\cancel{n}+9+2m \quad +$$

$$a+b+c+d+e+f=9+9+2(m+n)$$

$$\Rightarrow a+b+c+d+e+f=54$$ **RPTA : "D"**

PROBLEMA 24 :

El gráfico muestra un cuadrado mágico multiplicativo. Calcule el valor de $3x$.

A) 12
B) 6
C) 8
D) 9
E) 15

	6		
2		8	
6		4	8
	$2x$		

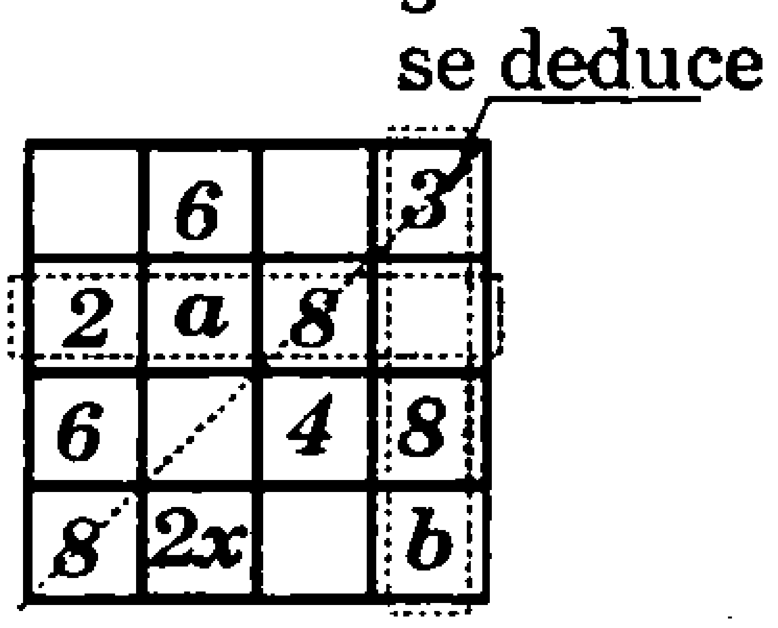
RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $3x$.

Dato:

* La cuadrícula cuadrada es un cuadrado mágico multiplicativo.

En el cuadrado mágico mostrado, aplicando la definición se deduce lo siguiente:



$$\not{6} \times \not{2}x \times a = \not{6} \times \not{4} \times 8 \Rightarrow a = \frac{16}{x}$$

$$2 \times a \times \not{8} = 3 \times \not{8} \times b \Rightarrow b = \frac{32}{3x}$$

Luego:

$$a \times 4 \times b = 2 \times 6 \times 8 \Rightarrow \frac{16}{x} \times 4 \times \frac{32}{3x} = 2 \times 6 \times 8$$

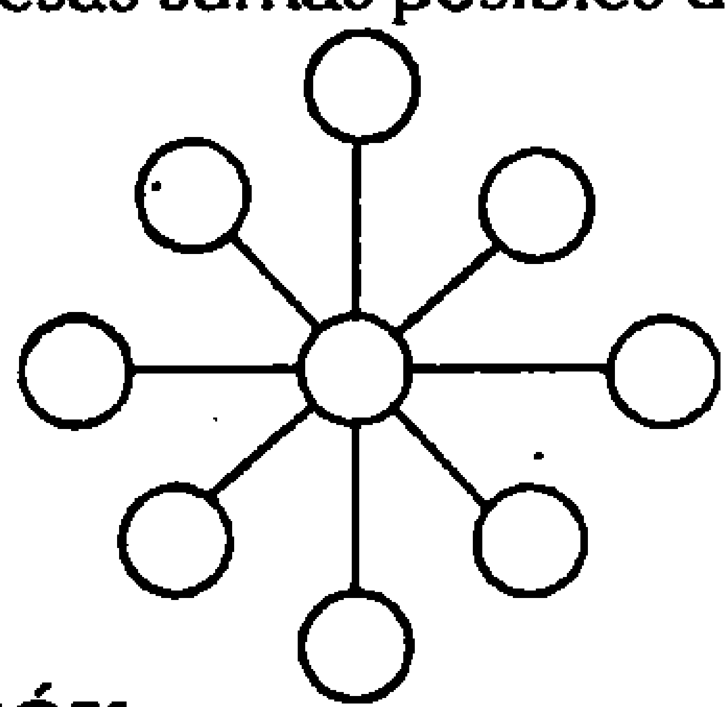
$$\Rightarrow x^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow 3x = 8$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

Ubique los nueve primeros números pares en las casillas del gráfico, de forma que en cada fila la suma sea la misma. Calcule la mayor diferencia entre dos de esas sumas posibles de obtener.

A) 10
B) 12
C) 8
D) 14
E) 6



RESOLUCIÓN :

Se pide la mayor diferencia entre dos sumas que se pueden obtener.

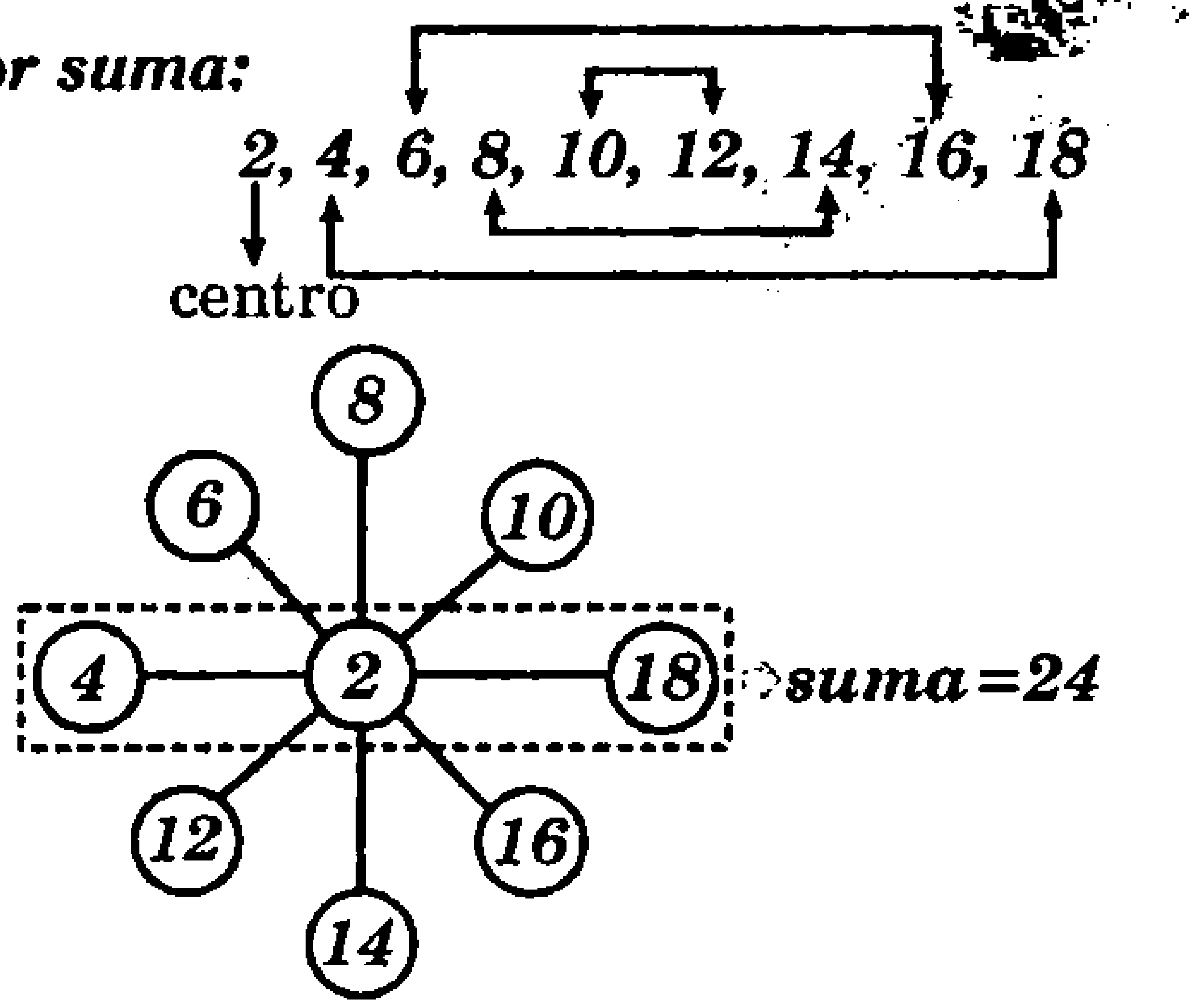
Datos:

* Se distribuyen: ***2, 4, 6, ...18***.
* La suma en cada fila debe ser la misma.

La mayor diferencia se obtendrá a partir de calcular la mayor suma constante en cada fila y la menor suma constante, también por cada fila.

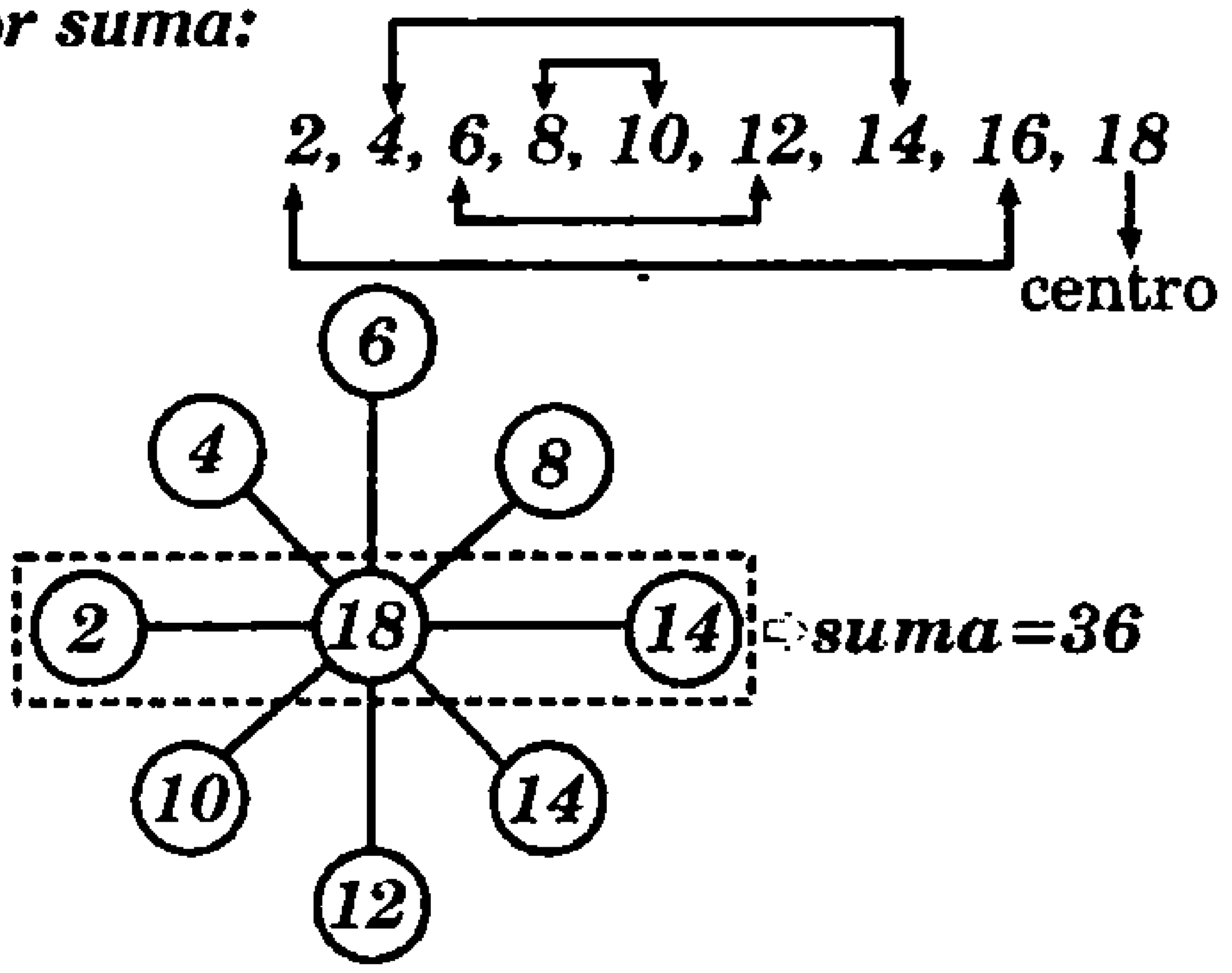
En el gráfico se observa que al indicar cada fila, siempre el casillero central está presente en cada una, de modo que, si se quiere la menor y mayor suma, en la casilla central debe ubicarse el menor y mayor de los números a distribuir, respectivamente

Menor suma:



El ***2*** en el centro y con el resto de números juntamos de dos en dos de manera que la suma sea la misma. ⇒ suma menor=***24***.

Mayor suma:



El ***18*** en el centro y el resto de números los juntamos de dos en dos de manera que la suma sea la misma. ⇒ suma mayor=***36***.

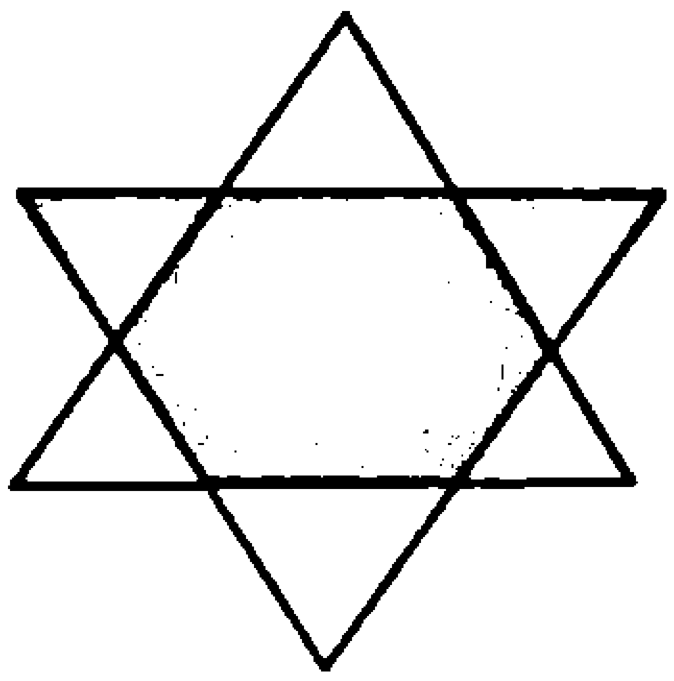
⇒ Mayor diferencia = ***36 – 24=12***.

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Escoja ***7*** números enteros positivos diferentes y menores o iguales que ***12*** y distribúyalos en la

estrella mostrada, uno en cada región simple de manera que la suma de los números escogidos sea **45**, y que los números de cada cuadrilátero formado por tres regiones simples, sumen siempre un número impar. ¿Cuál es la menor suma de los números ubicados en la región sombreada?



A) 7
B) 13
C) 9
D) 11
E) 15

RESOLUCIÓN :

Se pide la menor suma de los números ubicados en la región sombreada.

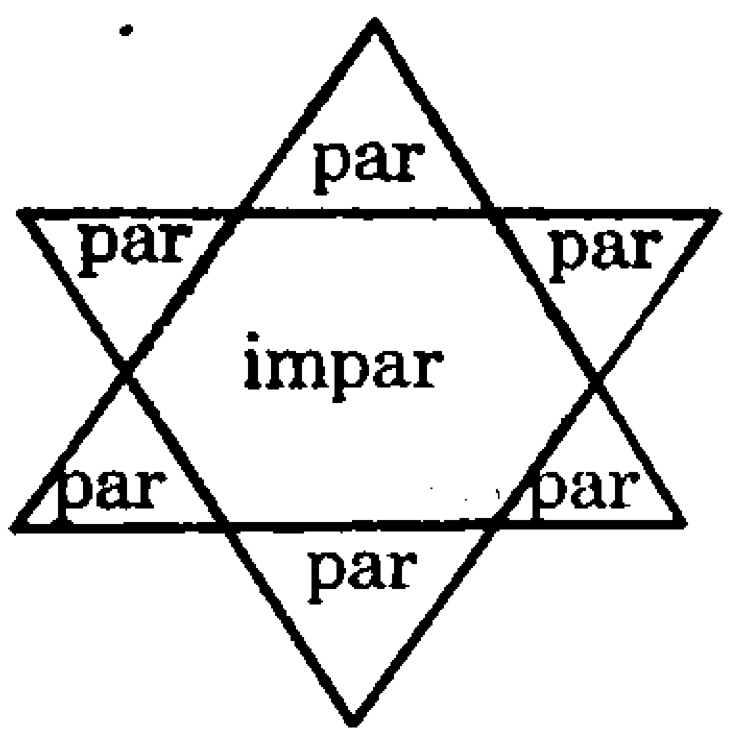
Datos:

* Se escogen **7** números positivos y diferentes menores o iguales que **12**.

* Suma en cuadriláteros formado por **3** regiones simples es impar.

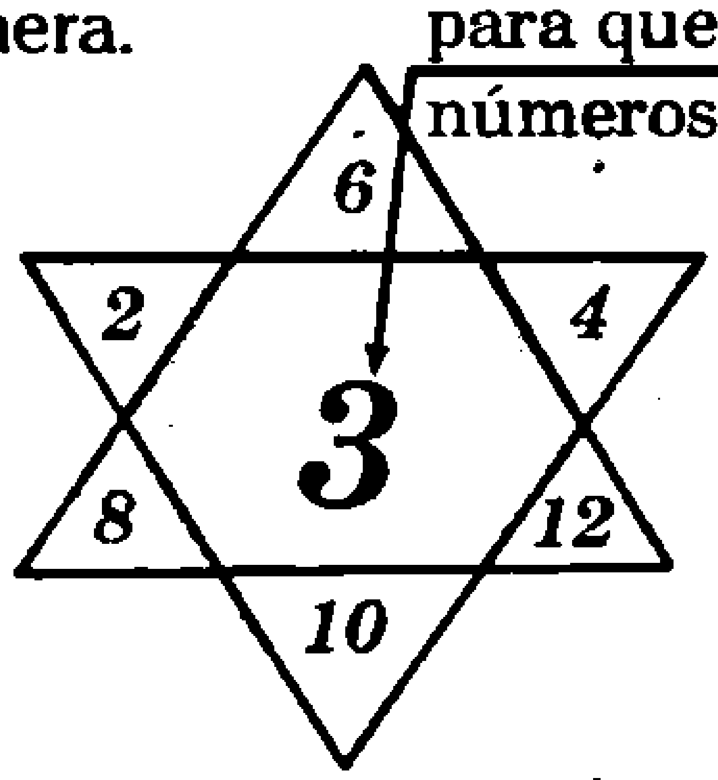
Para garantizar que la suma en cuadriláteros formado por **3** regiones simples sea impar hacemos que en la región simple del centro se ubique un número impar y en el resto de regiones simples, números pares.

Se observa en el gráfico que se necesitan **6** números pares para hacer la distribución de estos, pero se tiene que escoger de :**1; 2; 3;....;12** solo **6** pares.



De lo anterior, la distribución será de la siguiente manera.

para que la suma de los números escogidos sea **45**.



⇒ La menor suma en la región sombreada es **9**.

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Ubique los números **2; 4; 6; ...;32** en cada casillero de la cuadrícula cuadrada que se muestra, de tal manera que la suma de los números de cada fila, columna y diagonal sea la misma.

Calcule el valor de $a - x + b - y + c - z + d - w$.

a			b
	x	y	
	z	w	
c			d

A) 32
B) 16
C) 8
D) 4
E) 0

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $a - x + b - y + c - z + d - w$.

Agrupando lo pedido convenientemente se obtiene que: $(a+b+c+d) - (x+y+z+w) = ?$

Pero sabemos por dato que al distribuir los números en la cuadrícula se debe obtener un cuadrado mágico, entonces, ahí se cumple:

$a+b+c+d = x+y+z+w =$ constante mágica

$\Rightarrow (a+b+c+d) - (x+y+z+w) = 0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

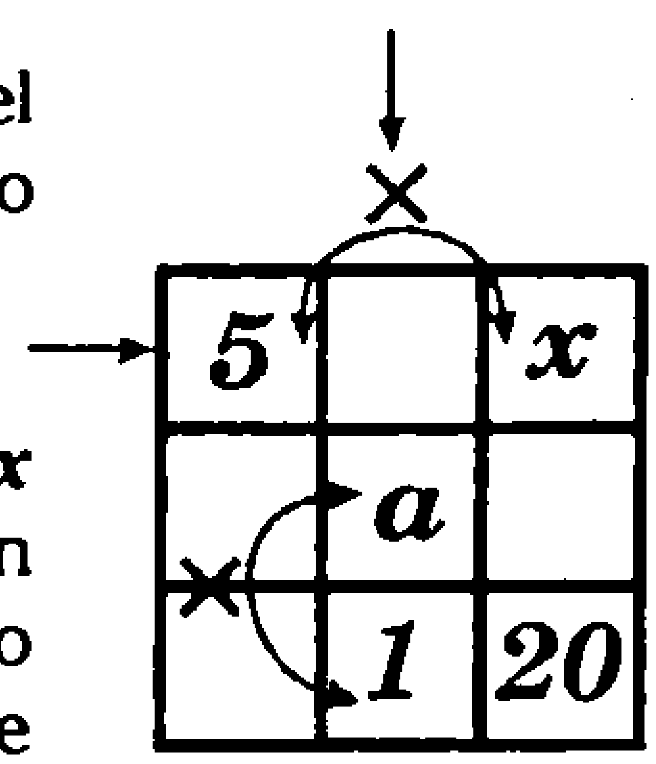
Un cuadrado mágico multiplicativo es tal que el producto de los números en cada fila, columna y diagonal es el mismo. Si las casillas del cuadrado se completan con números enteros positivos, de manera que se obtenga un cuadrado mágico multiplicativo, ¿cuál es el valor de x?

5		x
	1	20

A) 2
B) 3
C) 5
D) 7
E) 11

RESOLUCIÓN :

Se pide el volor de x en el cuadrado mágico multiplicativo.



Para calcular el valor de x aplicaremos la definición del cuadrado mágico multiplicativo de la siguiente manera:

$$5\times x=a\times 1 \Rightarrow a=5x$$

Luego por propiedad :

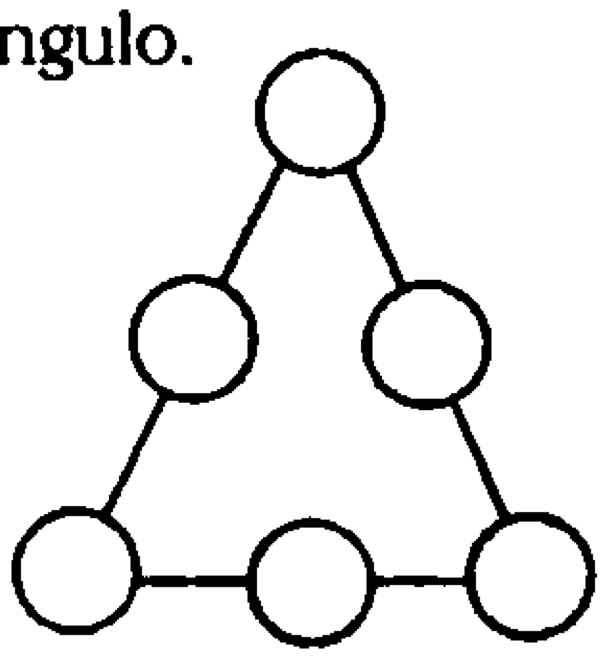
$$a^2=5\times 20\Rightarrow (5x)^2=5\times 20\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Distribuya los números *3, 4, 5, 6, 7* y *8* en las casillas circulares mostradas, uno por casilla, de tal manera que la suma de los números en los lados del triángulo sean *17; 18* y *19*. Dé como respuesta la suma de los números que van en los vértices del triángulo.

A) 21
B) 23
C) 19
D) 25
E) 20

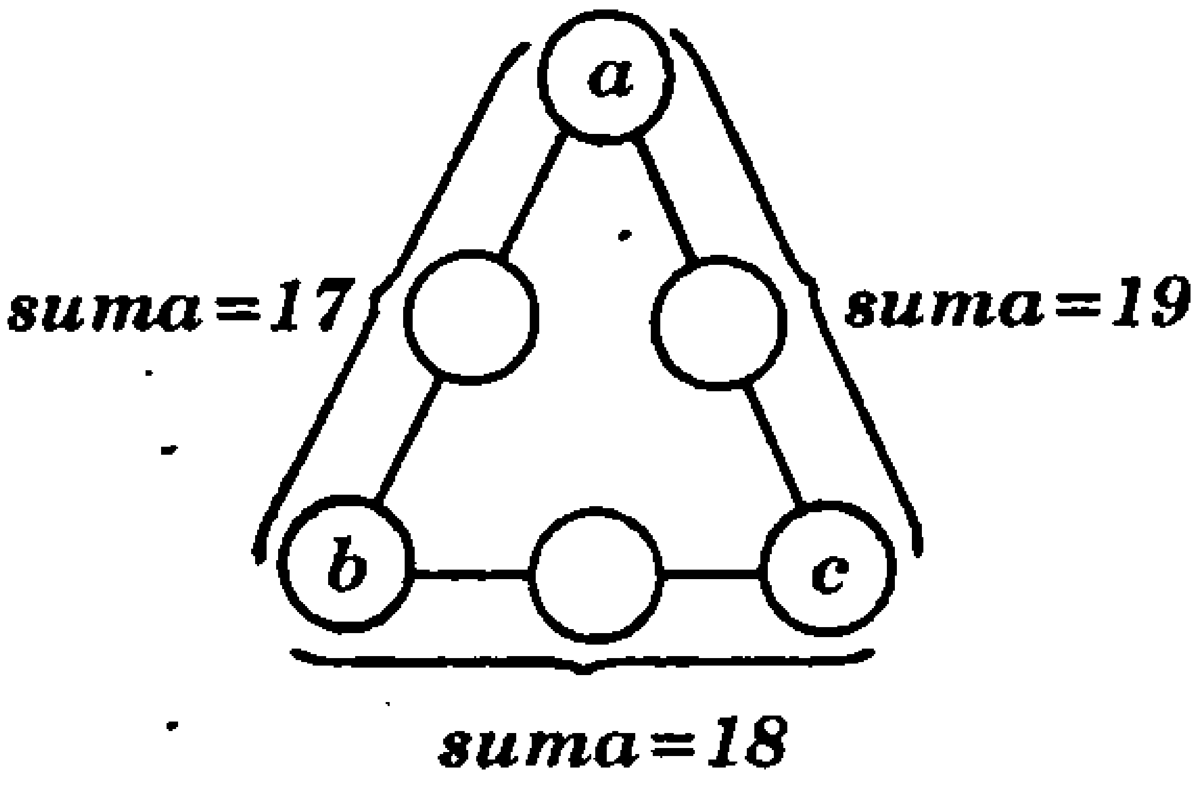


RESOLUCIÓN :

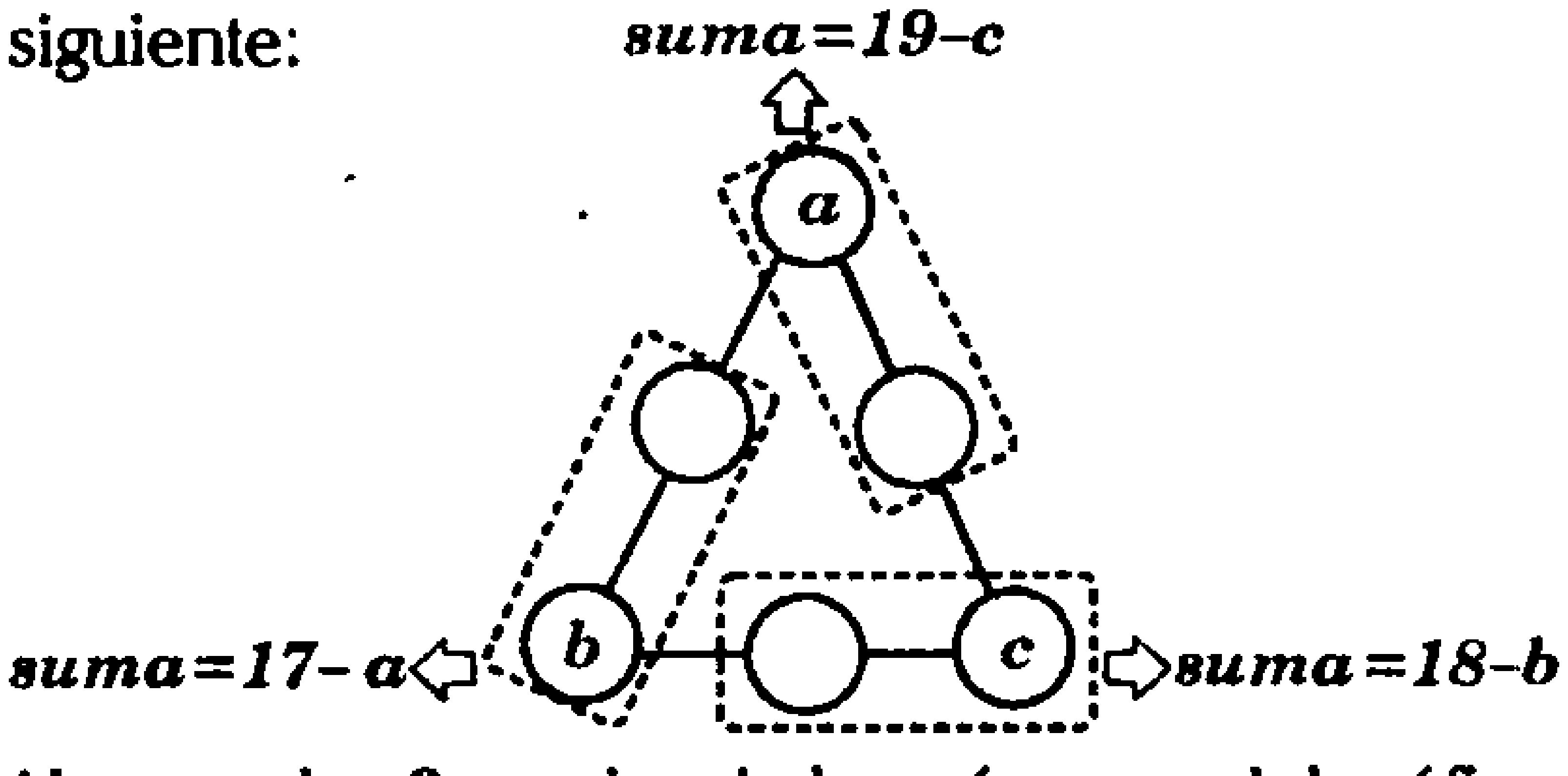
Se pide la suma de los números ubicados en los vértices del triángulo $(a+b+c)$.

Se distribuyen los números: *3, 4, 5, 6, 7* y *8*.

Por la condición de la distribución numérica se tiene en el gráfico las sumas pueden ser distribuidas de la siguiente manera:



Como se quiera calcular la suma de *a, b* y *c* y conocemos la suma en cada lado haremos lo siguiente:



Al sumar las *3* parejas de los números del gráfico se estaría sumando todos los números distribuidos en el triángulo , es decir:

$$(17-a)+(18-b)+(19-c)=\underbrace{3+4+5+6+7+8}$$

$$\underbrace{(17+18+19)}-(a+b+c)=33$$

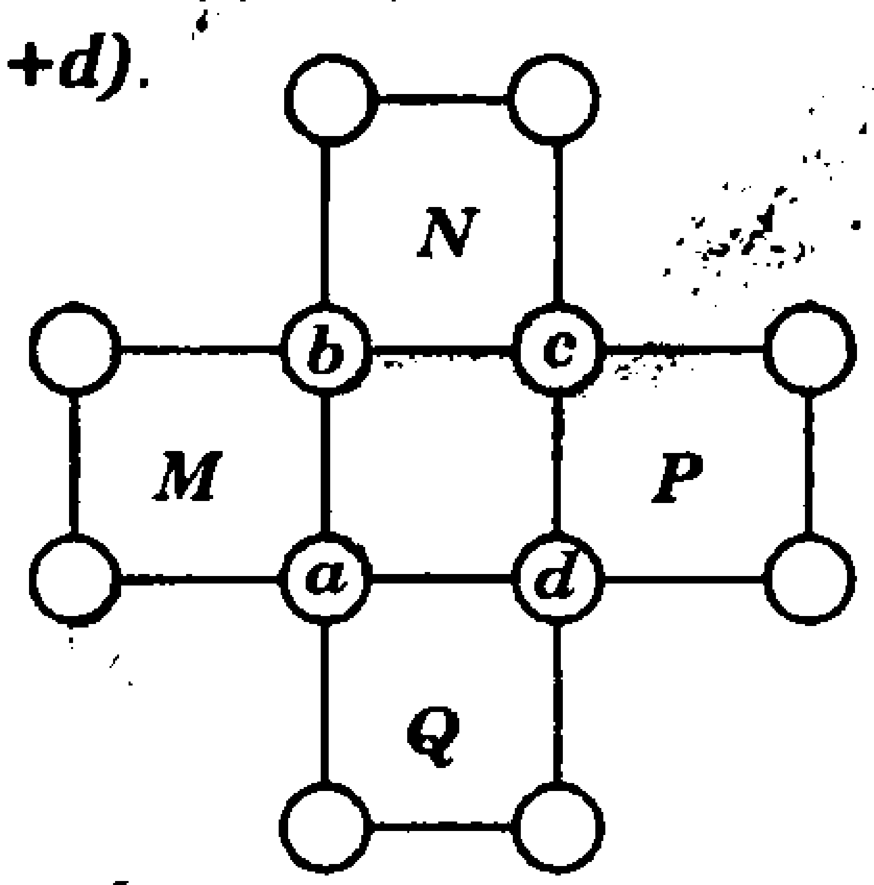
$$54-(a+b+c)=33\Rightarrow a+b+c=21$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 30 :

Distribuir los números enteros positivos del *1* al *12*, sin repetir, en las casillas circulares del siguiente gráfico, de manera que, en cada cuadrado identificado por las letras *M, N, P, Q* , la suma de los *4* números asignados a sus vértices sean cantidades consecutivas. Calcule el mayor valor de $(a+b+c+d)$.

A) 42
B) 41
C) 37
D) 40
E) 36



RESOLUCIÓN :

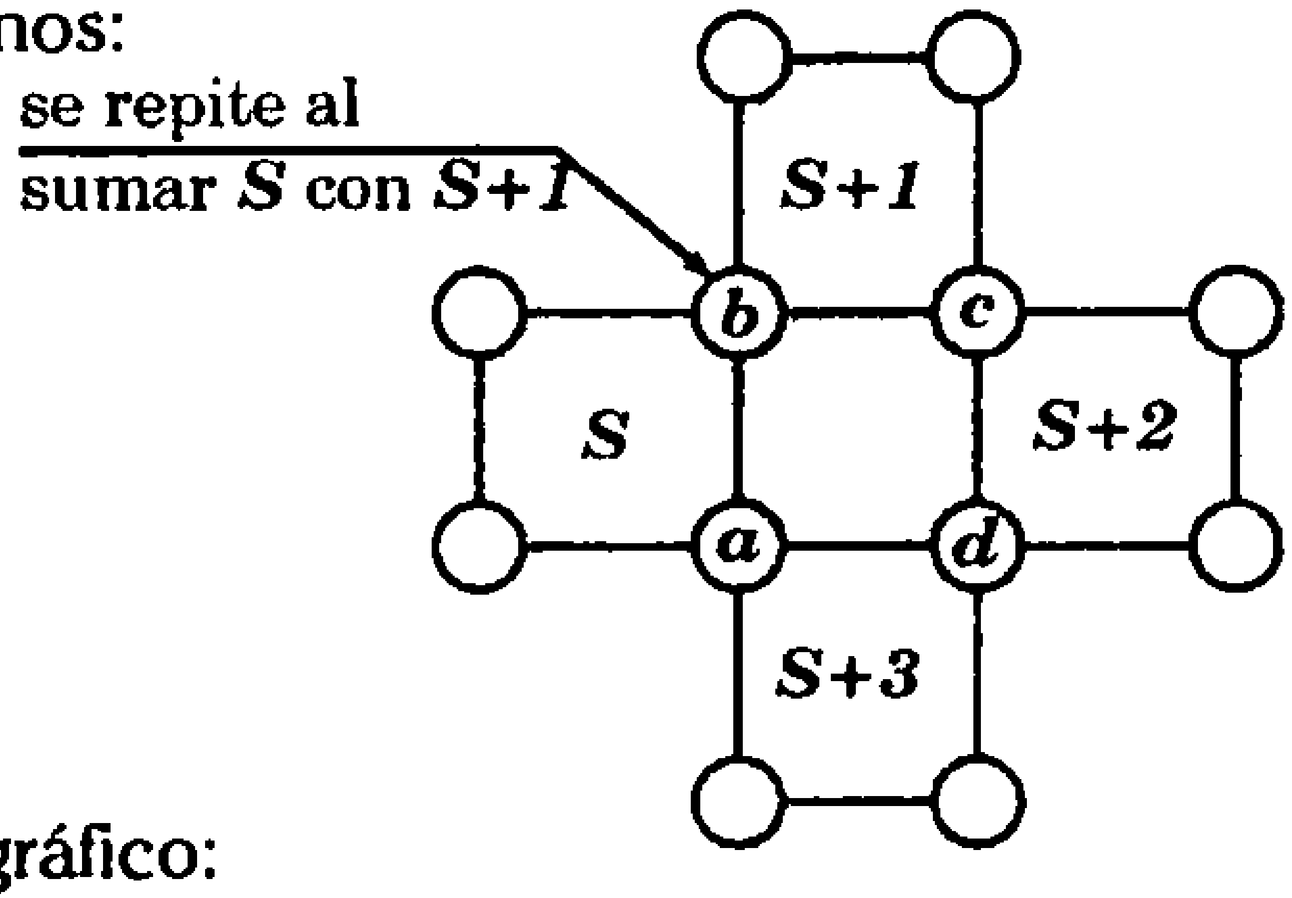
Se pide el mayor valor de $(a+b+c+d)$.

Datos:

* Se distribuyen: *1, 2, 3, ...,12* sin repetir.

* La suma de los números de los vértices de cada cuadrado identificado por una letra resultan cantidades consecutivas.

En el gráfico como *M, N, P* y *Q* representan cantidades consecutivas, entonces, las representaremos por: *S, S+1, S+2, S+3*, veamos:



Del gráfico:

$$S+(S+1)+(S+2)+(S+3)=\underbrace{(1+2+...12)}+(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow 4S+6=\frac{12\times 13}{2}+(a+b+c+d)\Rightarrow 4S=72+(\overbrace{\underbrace{a+b+c+d}_{12,11,10,7}}^{máximo})$$

$$\Rightarrow S=28 \quad \Rightarrow (a+b+c+d)_{máximo}=40$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

En la figura, complete las casillas circulares con los número impares del 1 al 23, de tal manera que la suma de los números de las casillas colineales sean iguales. Halle la suma de los números de las casillas sombreadas.

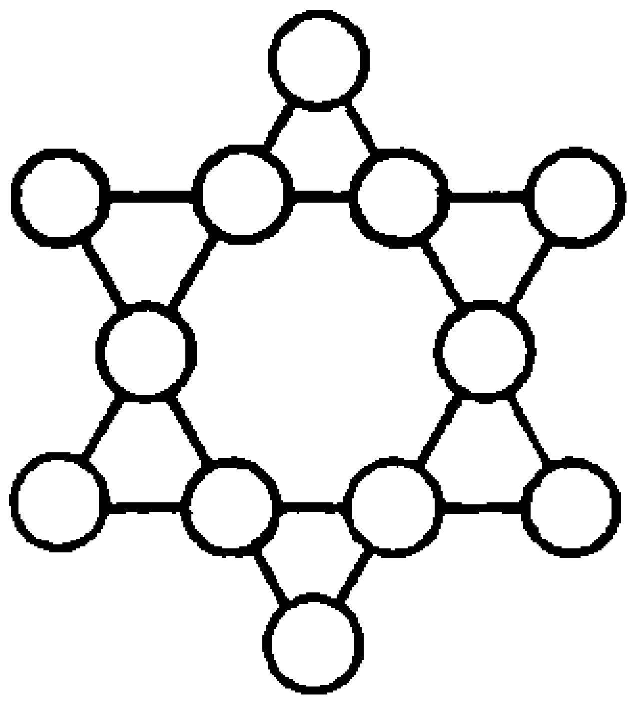
A) 42

B) 50

C) 46

D) 48

E) 56



RESOLUCIÓN :

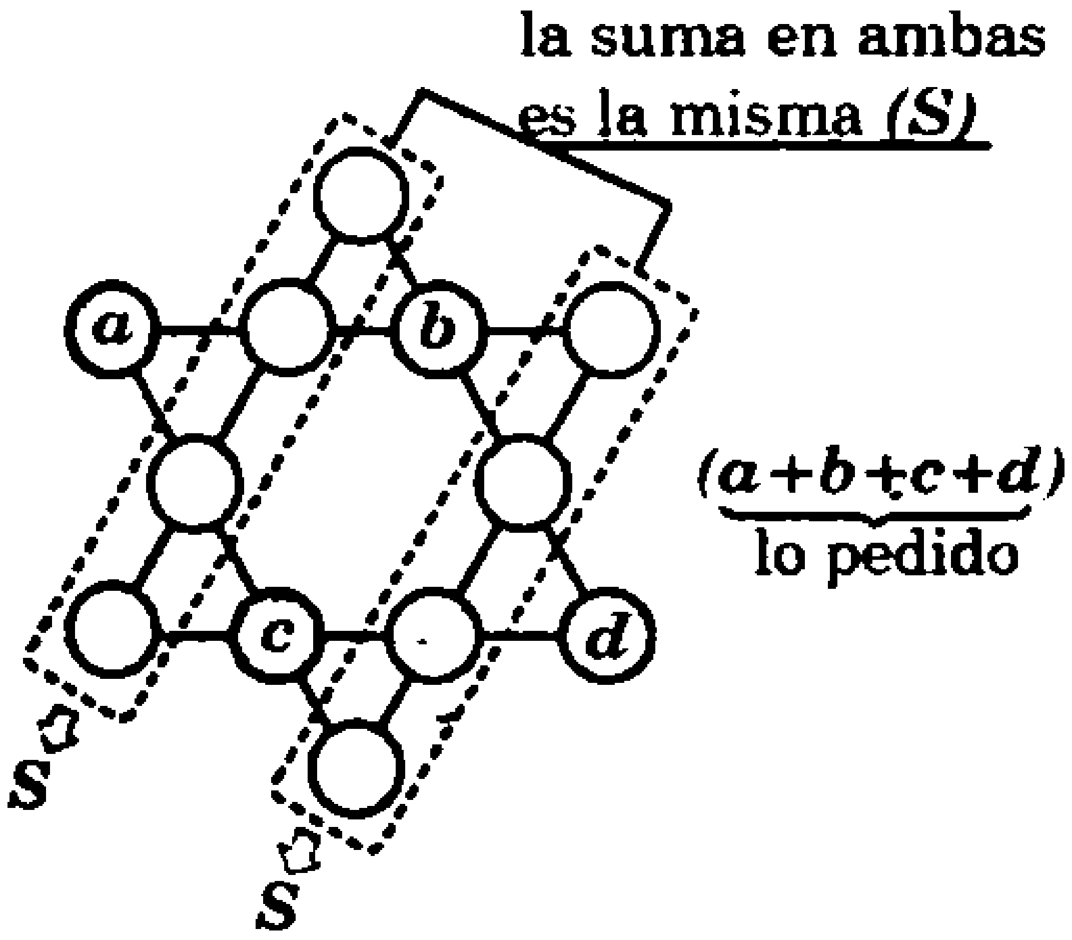
Se pide la suma de los números de las casillas sombreadas.

Dato:

* La suma de los números de las casillas colineales es la misma (S).

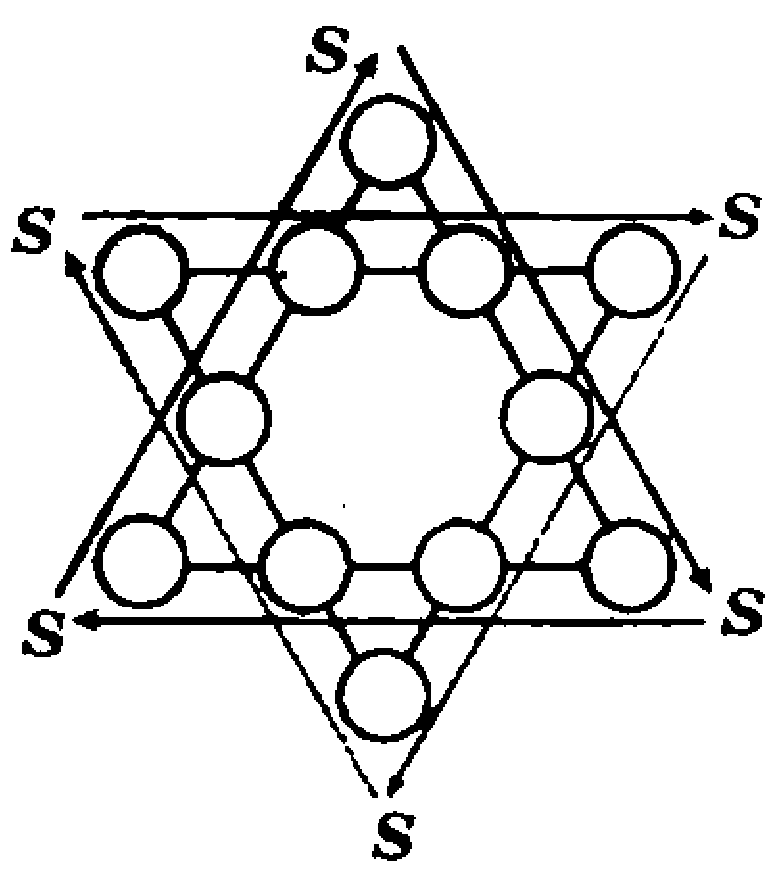
* Se distribuyen el $1; 3; 5; ....; 23$.

En el gráfico se observa que:



$$\underbrace{(a+b+c+d)}_{\text{lo pedido}}+2S= \text{suma de los números distribuidos}$$

Entonces es necesario conocer el valor de la suma constante (S), para la cual, sumaremos los números de las casillas circulares colineales en donde:

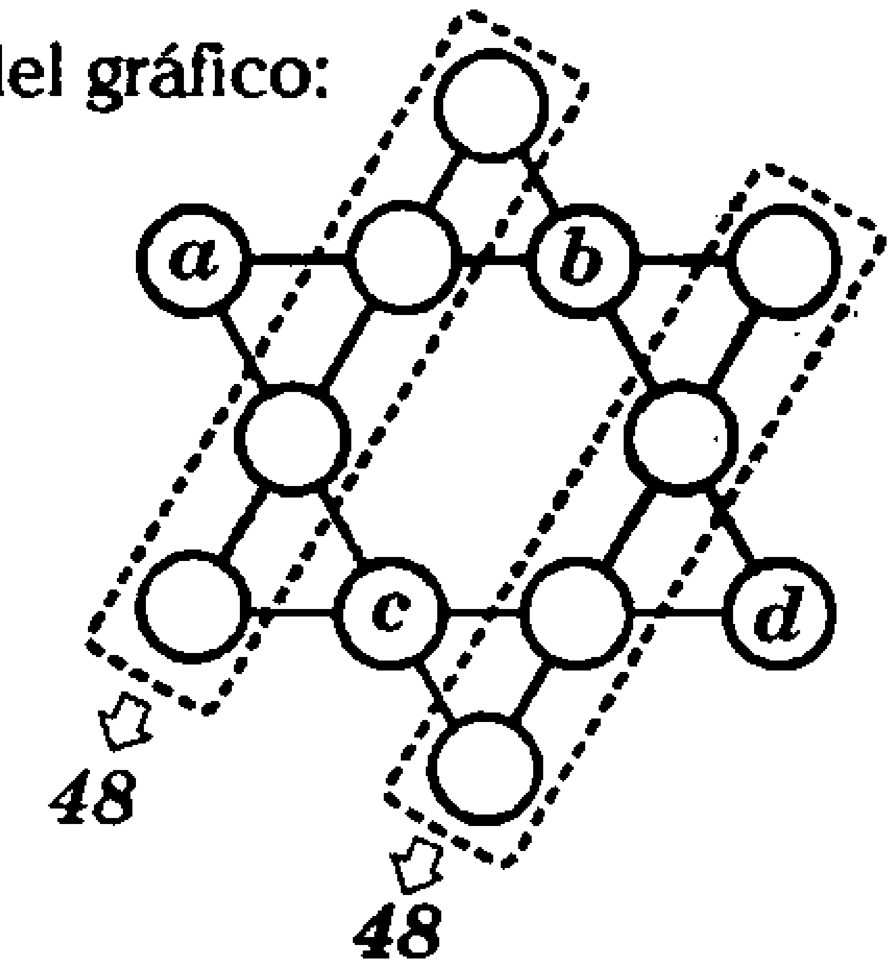


Del gráfico se observa que cada número de cada casilla se suma dos veces, con la cual se deduce que:

$$6S = 2\underbrace{(1+3+5+...+23)}_{12\ \text{sumandos}}$$

$$\Rightarrow 6S = 2\times 12^2 \Rightarrow S = 48$$

Finalmente del gráfico:



$$(a+b+c+d)+2\times 48 = 1+3+...+23$$

$$(a+b+c+d)+96 = 12^2$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = 48$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

En el gráfico se escriben los números enteros $2, 4, 6, ..., 14$ uno en cada casilla, sin repeticiones, de modo que la suma de los tres números de cada una de las tres líneas (una horizontal y dos verticales) sea la misma. Si se han escrito los números 6 y 8. ¿Cuál es el número ubicado en la casilla sombreada?

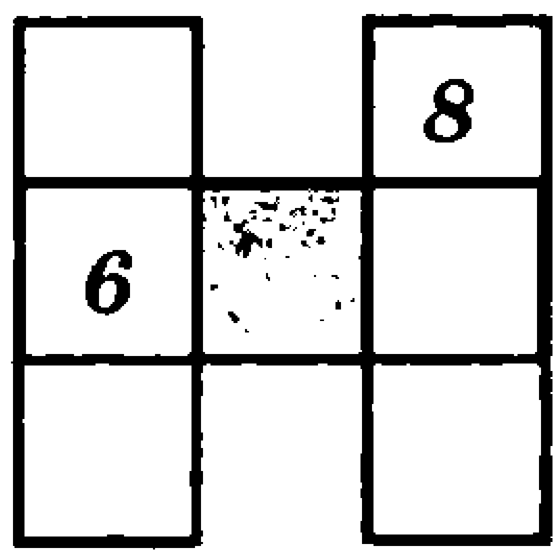
A) 4

B) 8

C) 10

D) 12

E) 14



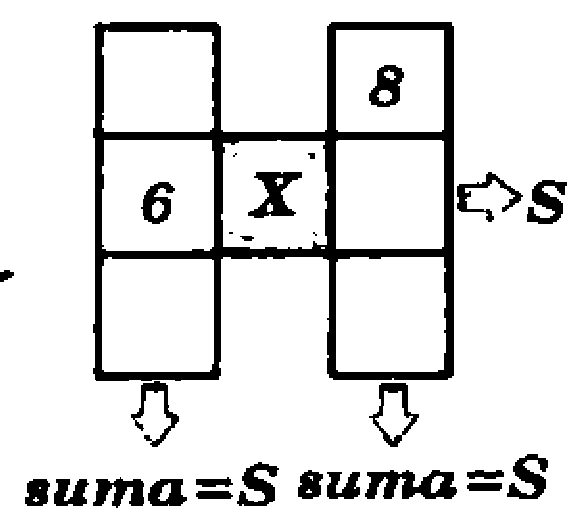
RESOLUCIÓN :

Se pide el número que se ubica en la casilla sombreada (X).

Se distribuyen: $2, 4, 6, ..14$.

* La suma en cada una de las 3 líneas (2 verticales y una horizontal) es la misma: S

En el gráfico se tiene que:



$$2S + X = \underbrace{2+4+6+...+14}_{\text{par}}$$

$$2S + X = 7\times 8$$

$$2S + X = 56$$

$\downarrow \quad \downarrow$

✗ 26   4 ⇒ (no llega la suma a 26)

✗ 24   8 ⇒ (ya se ubicó el 8 (dato))

✓ 22   12

La distribución queda de la siguiente manera:

2		8
6	12	4
14		10

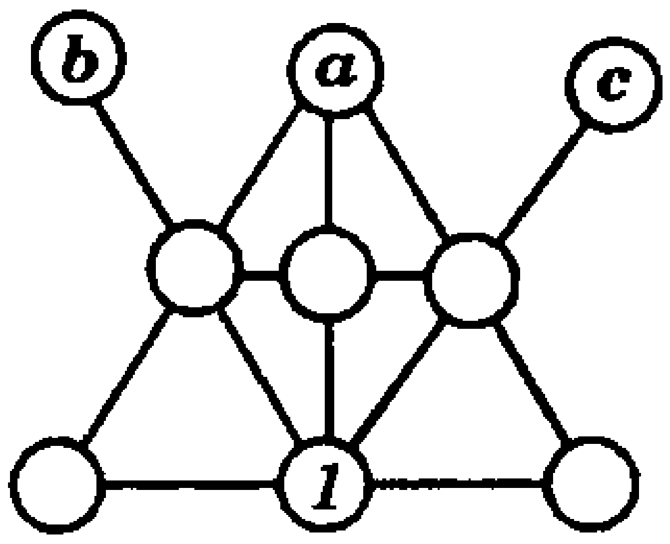
⇒ El número en la casilla sombreada es *12*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Distribuya los números del **2** al **9**, uno en cada casilla circular vacía del gráfico, de tal manera que la suma de los números ubicados en tres casillas circulares unidas por una misma línea sea la misma. Calcule el valor de $M=(b+c)a$.

A) 64
B) 75
C) 76
D) 94
E) 68



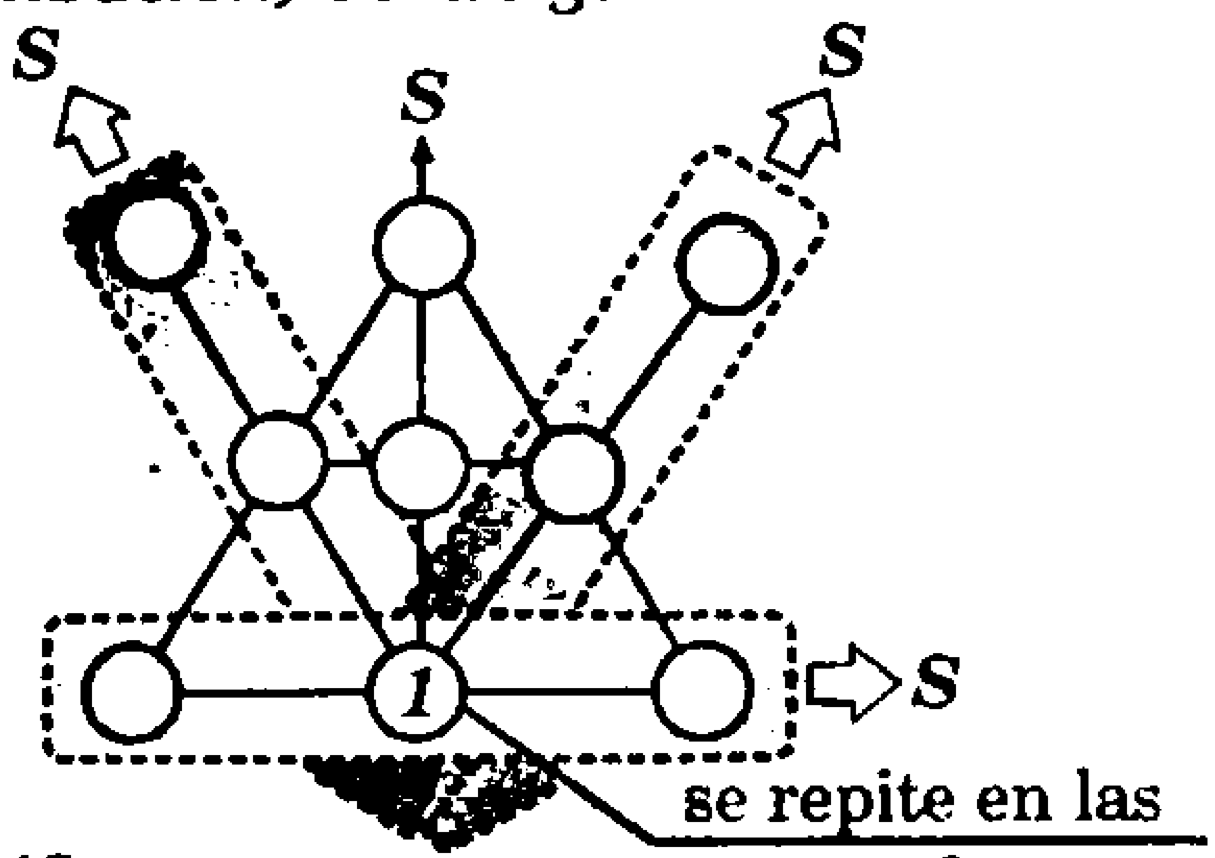
RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $M=(b+c)a$.

Datos:

* Se distribuyen: *2, 3, 4,....,9*.
* Suma de números ubicados en tres casillas unidas por una línea debe ser la misma. *(S)*.

En el gráfico indicamos la suma *S* (condición de la distribución) de la siguiente manera:

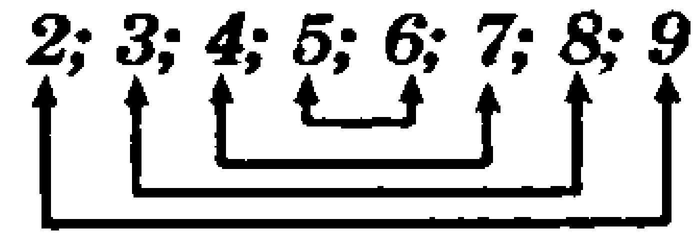


Del gráfico:

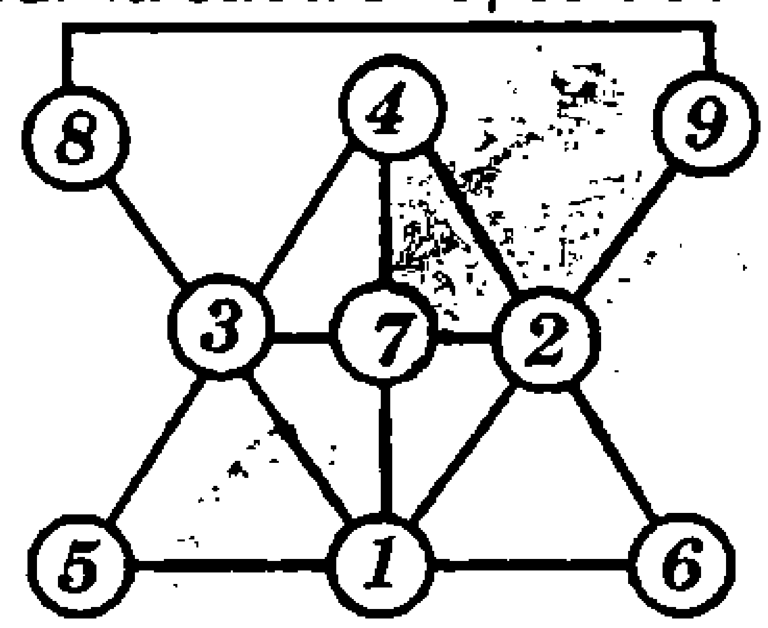
$$4S = (1+2+3+...+9)+\overbrace{(1+1+1)}$$

$$\Rightarrow 4S = \frac{9\times 10}{2}+3 \Rightarrow 4S = 48 \Rightarrow S = 12$$

Como en cada una de las sumas señaladas en el gráfico siempre interviene el *1*, se deduce que los otros dos números de cada suma, deben sumar *11*, y como los números que faltan distribuir son del **2** al **9**, con estos formaremos **4** parejas cuya suma en cada una sea *11*:



Realizamos la distribución considerando que el **9** y **8**, por ser los mayores valores, deben intervenir en una sola suma cada uno, es decir:



Del gráfico: $a=4$; $b=8$ y $c=9$

$$\Rightarrow M=(8+9)\times 4=68$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 34 :

Complete el siguiente tablero con los nueve primeros números primos de tal manera que se cumpla las sumas indicadas tanto en fila, columna y diagonal principal. Halle la suma de los números ubicados en los casilleros sombreados.

A) 25
B) 31
C) 27
D) 23
E) 28

			33
			24
			43
28	33	39	59

RESOLUCIÓN :

Se pide la suma de los números de los casilleros sombreados.

* Se distribuyen: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**.
* La suma en cada fila, columna y diagonal principal es la que se indica.

En el tablero, como se distribuye números impares (primos) a excepción del **2**, y se suman **3** números, la suma, en su mayoría resulta impar, excepto cuando interviene el **2** en la suma.

			33	
2			24	par
			43	
28	33	39	59	
par				

En la diagonal principal tenemos: $59=23+19+17$ (único caso), además, en las sumas pares se tiene que:

$24=2+5+17$ $\qquad$ $28=2+7+19$

Reemplazando en el tablero según verifique los números con los de la diagonal, se tiene:

Finalmente, los números pedidos son los números primos que faltan ubicar: *3, 11, 13*.

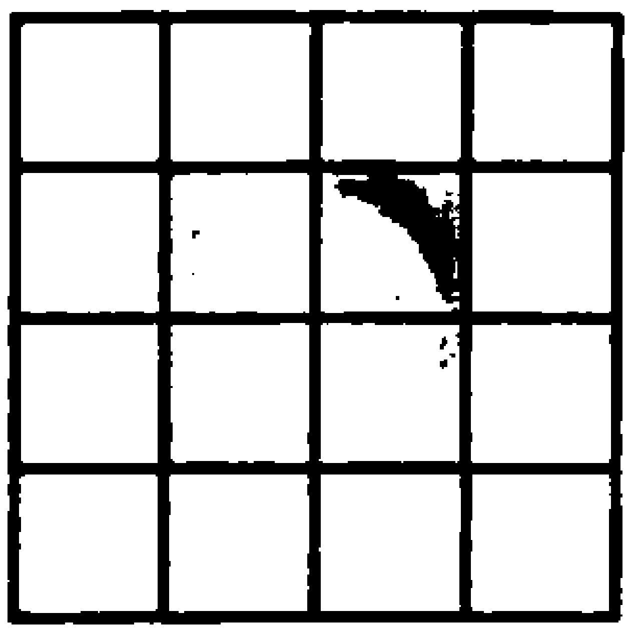
19			33
2	17	5	24
7		23	43
28	33	39	59

⇒ Suma en casilleros sombreados: *3+11+13=27*

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

En la siguiente cuadrícula ubique los números pares del **2** al **32** de modo que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal de un mismo resultado. Dé como respuesta la suma de los números de las casillas sombreadas.



A) 64
B) 68
C) 72
D) 76
E) 60

RESOLUCIÓN :

Se pide la suma de los números de las casillas sombreadas.

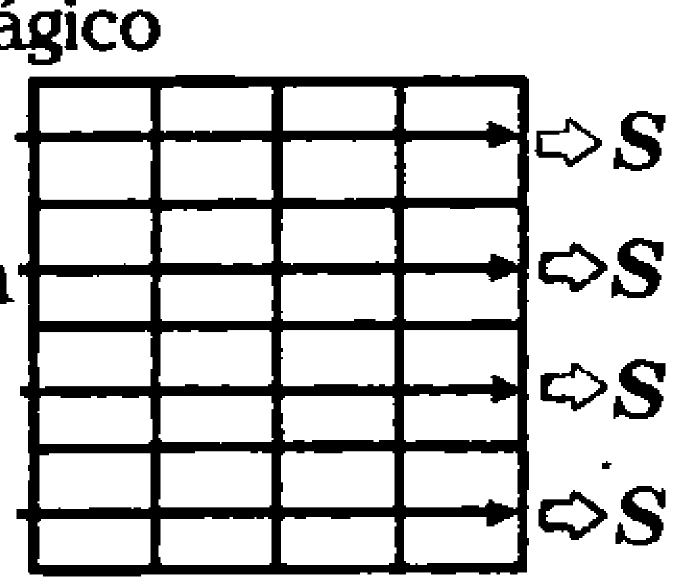
* Se distribuyen: **2, 4, 6, ...,32**.
* La suma en cada fila, columna y diagonal debe dar un mismo resultado.

Lo que se quiere es distribuir los números de manera que se obtenga un cuadrado mágico de orden **4**, en el cual se cumple, por propiedad, lo siguiente:

Suma de las casillas sombreadas= Constante mágica

Entonces, para calcular la constante aplicamos la del cuadrado mágico

Sea la suma en cada fila: *S*



$$4S = \underbrace{2+4+6+...+32}_{16\ números}$$

$$\Rightarrow \cancel{4}S = \cancel{16} \times 17 \Rightarrow S = 4 \times 17 = 68$$

⇒ Suma en los casilleros sombreados =*68*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

En el siguiente tablero cuadrado deben estar todos los números impares desde el *1* al *31* inclusive, de tal manera que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal sea siempre la misma, es decir se obtenga un cuadrado mágico. Dé como respuesta el valor de *S×M*.

25		S	
	21	13	27
5	M	11	29

A) 374
B) 734
C) 524
D) 683
E) 437

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de *S×M*.

Se distribuyen los números impares: *1; 3; 5;...;31*.

Como se conoce los números que se distribuyen, construimos el cuadrado mágico y luego lo comparamos con el del gráfico para identificar el valor de *S* y *M*.

Para construir el cuadrado mágico distribuimos en forma ascendente en cada columna y luego intercambiamos los números de las diagonales:

1	9	17	25
3	11	19	27
5	13	21	29
7	15	13	31

⇨

31	9	17	7
3	21	13	27
5	19	11	29
25	15	23	1

4×4 cuadrado mágico

Comparamos el cuadrado mágico obtenido con el gráfico observamos que algunos números no coinciden con su ubicación para ello, intercambiamos la *1era* y la *4ta* fila del cuadrado mágico obtenido, al hacerlo, seguirá siendo un cuadrado mágico. Entonces, ahora comparemos:

C. Mágico Construido — *Gráfico de Problema*

25	15	23	1
3	21	13	27
5	19	11	29
25	15	23	1

25		S	
	21	13	27
5	M	11	29

⇒ *S×M=23×19=437*.

RPTA : "E"

ROBLEMA 37 :

Distribuya todas las cifras desde el *1* al *9*, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

HORIZONTALES

A:número par no múltiplo de *4*.

D: número par.

E: número menor de *500*.

VERTICALES

A: múltiplo de *9*.

B: cuadrado perfecto.

C: cubo perfecto

¿Cuál es el mayor valor de la suma de los números que se ubican en los casilleros sombreados?

A	B	C
	D	
E		

A) 17
B) 24
C) 28
D) 15
E) 19

RESOLUCIÓN :

Se pide la mayor suma de números que se ubican en los casilleros sombreados.

Se distribuyen: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*.

Como se tiene que cumplir varias condiciones según la fila o columna en la que se deben ubicar las cifras, comenzaremos por aquellas condiciones que generan el único número a ubicar o en todo caso, pocas opciones.

I) De *A* y *D* horizontales se tiene dos casilleros con cifras par.

II) De *C* vertical, los cubos perfectos que se pueden ubicar son:

125 y 729
par

A	B par	C
	D	par 2
E		

III) De *A* vertical (múltiplo de *9*) se descarta que *C* vertical sea *729* porque en *A* vertical se ubicaría un múltiplo de *9* formado por:

9°

A	B par	C 1
	D	par 2
E		5

3;7;8 necesariamente

* *4, 6* y *8*, no habría una cifra par para ubicar en el casillero *B*.

* *1, 3* y *5*, con estas cifras en *A* horizontal no se podría ubicar un número par que no sea múltiplo de *4*.

IV) En una columna central se ubicarían las cifras *4, 6, 9* y en el casillero *E* se ubicaría el *3*, por *E* horizontal (menor que *500*)

A	B par	C 1
	D	par 2
E 3		5

4; 6; 9

V) Como se pide la mayor suma en los casilleros sombreados, se distribuye el resto de las cifras de la siguiente manera:

A 8	B 6	C 1
7	D 4	2
E 3	9	5

Con la cual se verifica el resto de las condiciones

Con la cual se verifica el resto de las condiciones.

⇒ Mayor suma en casilleros sombreados
$=2 + 6 + 7 + 9 = 24$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

En las siguientes casillas, deben estar todos los números del *1* al *15*, de tal forma que la suma de los números de cada fila resulten cantidades consecutivas en forma ascendente de la fila *1* hasta la fila *5* y también en las columnas de la izquierda a derecha. Halle la suma de los números que se ubiquen en las casillas sombreadas.

Fila 1→			
Fila 2→			
Fila 3→			
Fila 4→			
Fila 5→			

A) 52
B) 48
C) 46
D) 54
E) 44

RESOLUCIÓN :

Se pide la suma de los números en las casillas sombreadas.

Datos:

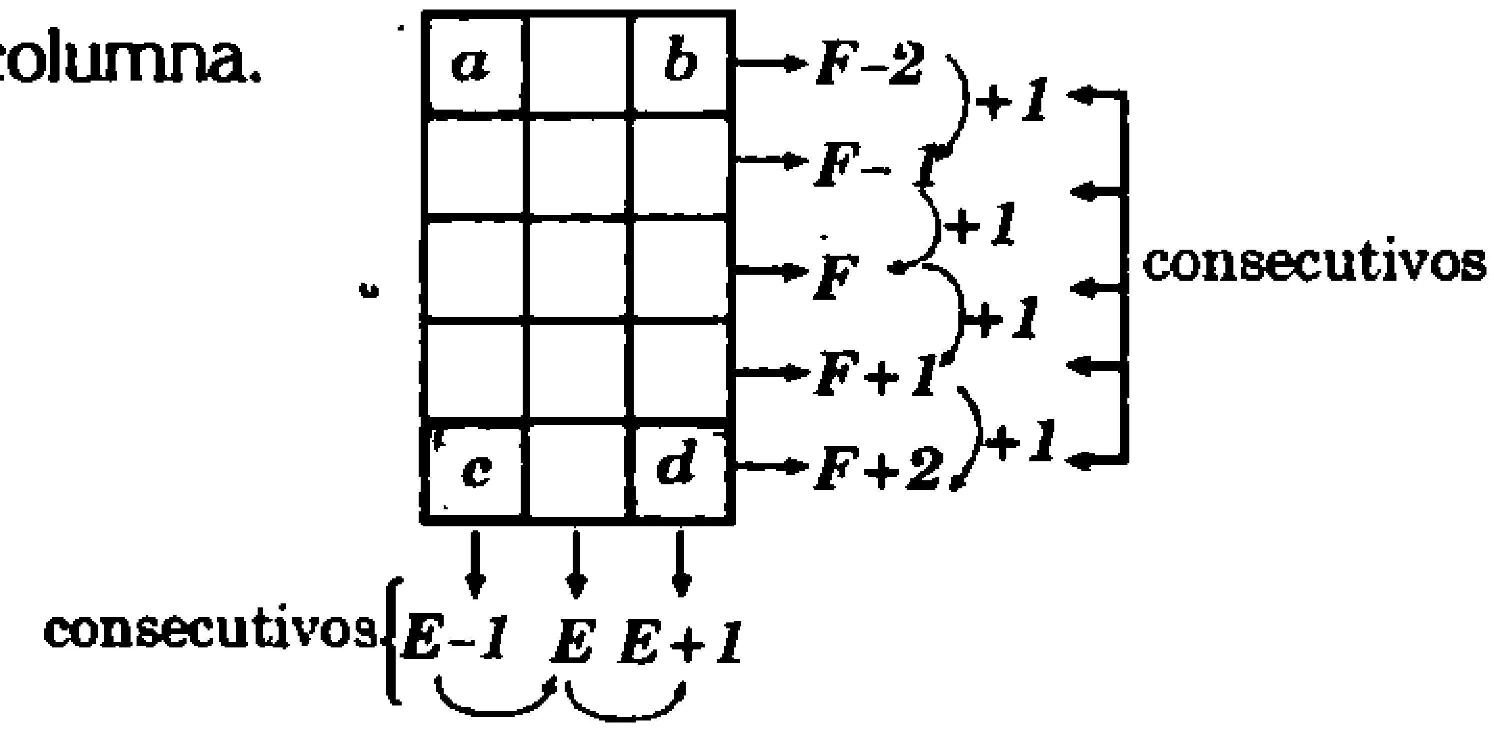
* Suma de números en cada fila resultan cantidades consecutivas.

* Suma de números en cada columna resultan

cantidades consecutivas.

* Se distribuyen del *1* al *15*.

De los datos calculamos la suma en cada fila y columna.



Al sumar los resultados de las filas:

$(F-2)+(F-1)+F+(F+1)+(F+2)=\underbrace{1+2+3+...+15}$

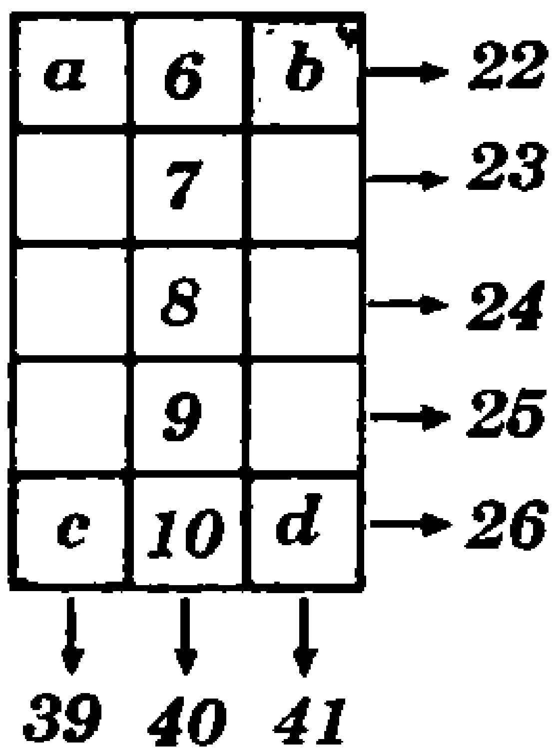
$\Rightarrow 5F=\dfrac{15\times 16}{2}\Rightarrow F=24$

Ahora en las columnas:

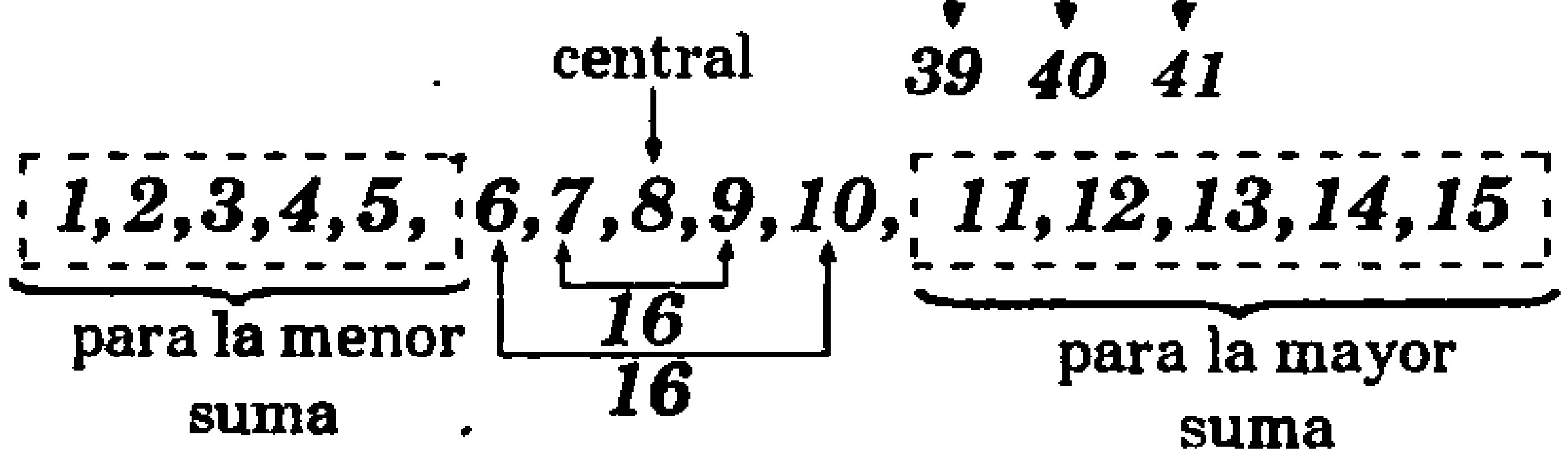
$(E-1)+E+(E+1)=1+2+3+...15$

$\Rightarrow 3E=\dfrac{15\times 16}{2}\ \Rightarrow E=40$

Entonces, reemplazamos en el gráfico las sumas calculadas y se deducen que:



Si los números son:



Los menores números con algunos intercambios de números mayores resultan la mayor y menor suma en columna.

Finalmente, para calcular lo pedido haremos:

$$\begin{array}{r} a+b+6=22 \\ c+d+10=40 \\ \hline a+b+c+d+16=62 \end{array}\ +$$

$\Rightarrow a+b+c+d=46$ **RPTA : "C"**

PROBLEMA 39:

Con los números *2,4,8,16,...,512* construya un cuadrado mágico multiplicativo de orden *3* y dé como respuesta el cociente entre la constante mágica y el número del casillero central.

A) 1024 *B) 512* *C) 256* *D) 2048* *E) 128*

RESOLUCIÓN :

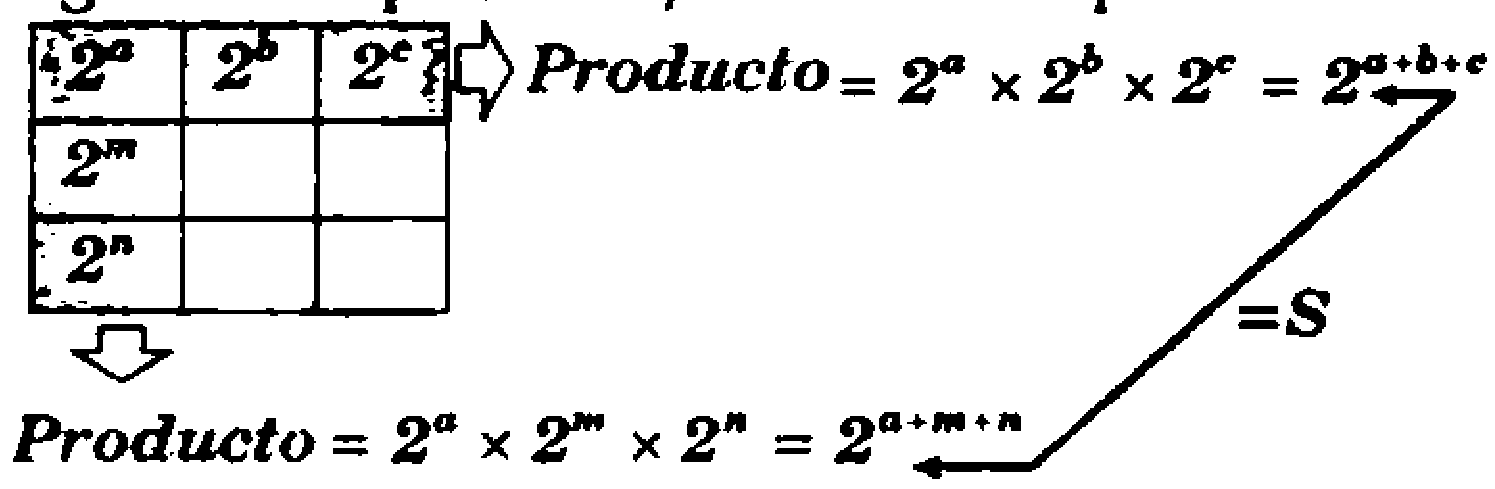
Se pide el valor de $\dfrac{\text{Constante mágica}}{\textbf{\textit{número}}\text{ de la casilla central}}$.

Dato:

* Se distribuyen: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^9$

* Se debe formar con los números un cuadrado mágico multiplicativo.

Al distribuir los números: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^9$ en el cuadrado, de manera que se obtenga un cuadrado mágico multiplicativo, se observa que:

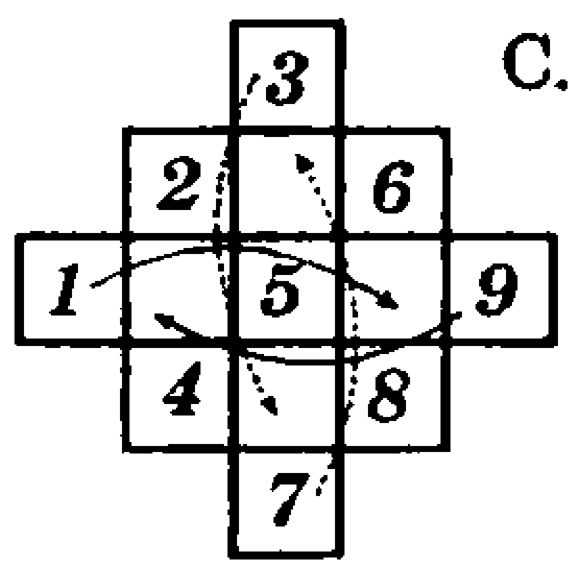


$\Rightarrow 2^{a+b+c}=2^{a+m+n}$

$\Rightarrow a+b+c=a+m+n$

Comparando el producto de los números de una fila, con el producto de los números en una columna, se observa que la suma de sus respectivos exponentes debe resultar lo mismo (cte.), entonces, con los exponentes se debe formar un cuadrado mágico aditivo. Veamos:

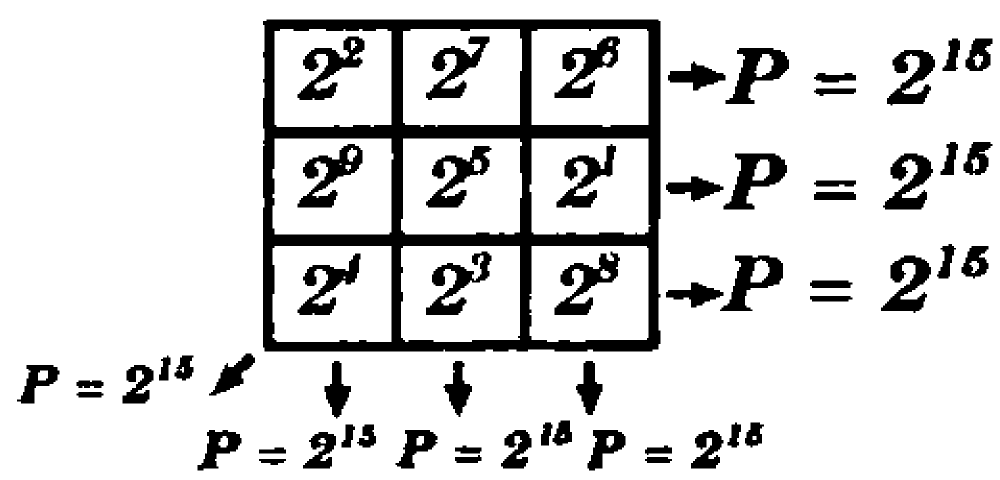
* Con los exponentes: *1, 2, 3,...9,* de las potencias de *2* construimos un cuadrado mágico aditivo:



C. mágico con los exponentes

2	7	6
9	5	1
4	3	8

De manera que el cuadrado mágico multiplicativo formado por $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^9$ quedaría de la siguiente manera:



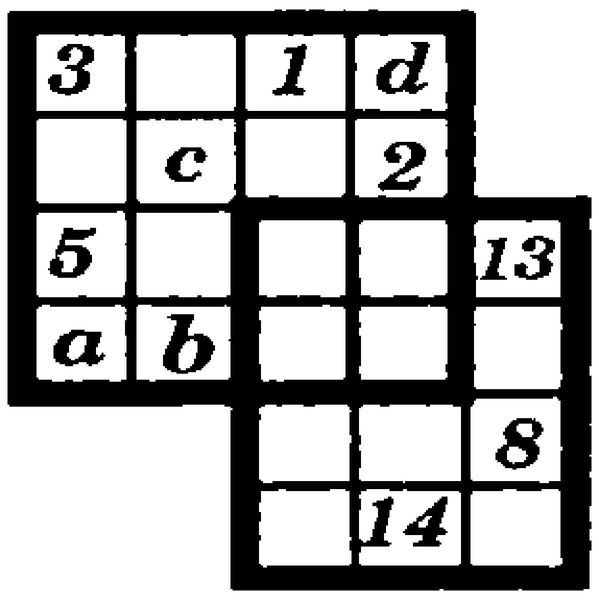
Constante mágica $=2^{15}$

$\Rightarrow \dfrac{\textit{Cte mágica}}{\textit{\# de casilla central}}=\dfrac{2^{15}}{2^5}=2^{10}=1024$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40 :

En el gráfico se muestra dos cuadrados mágicos, uno de orden *3* y otro de orden *4* (ambos se encuentran resaltados), en cada casillero se deben ubicar números enteros. Si ambos cuadrados mágicos tienen la misma constante mágica, halle el valor de $a+b+c+d$.



A) 11
B) 13
C) 15
D) 22
E) 23

RESOLUCIÓN :

Se pide el valor de $a+b+c+d$.

Dato:

* Los cuadrados mágicos de orden *3* y de orden *4* tienen la misma constante mágica.

En el cuadrado mágico de orden *3* calcularemos la constante mágica aplicando propiedades:

	z	13
x	y	
	14	8

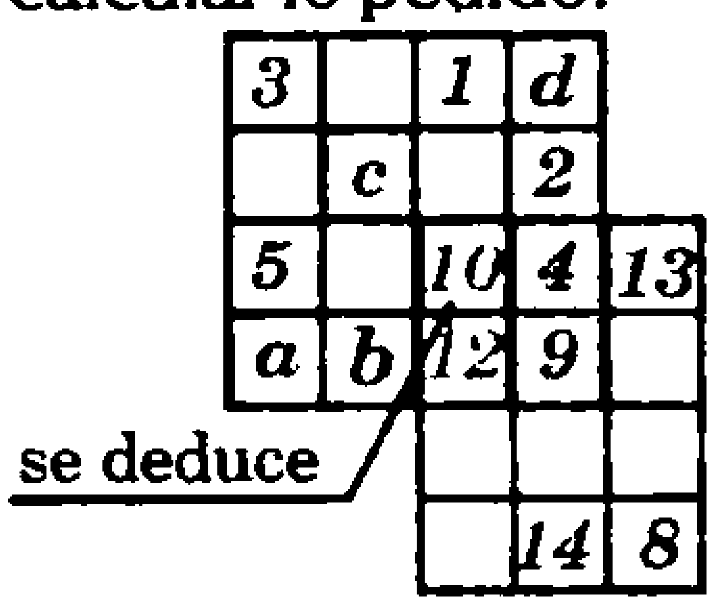
* $\frac{x+14}{2}=13 \Rightarrow x=12$

* $\underbrace{x+y=8+13}_{\text{(definición de C. mágico)}} \Rightarrow y=9$

* $\frac{z+14}{2}=y \Rightarrow z=4$

$\Rightarrow$ cte $=14+y+z=27$

Ahora, ubicamos los números hallados en el gráfico original para calcular lo pedido:



Del gráfico:

* $a+b+12+9=27$....(cte)

$\Rightarrow a+b=6$

* $c+3+10+9=27$

$\Rightarrow c=5$

* $d+2+4+9=27$...(cte)

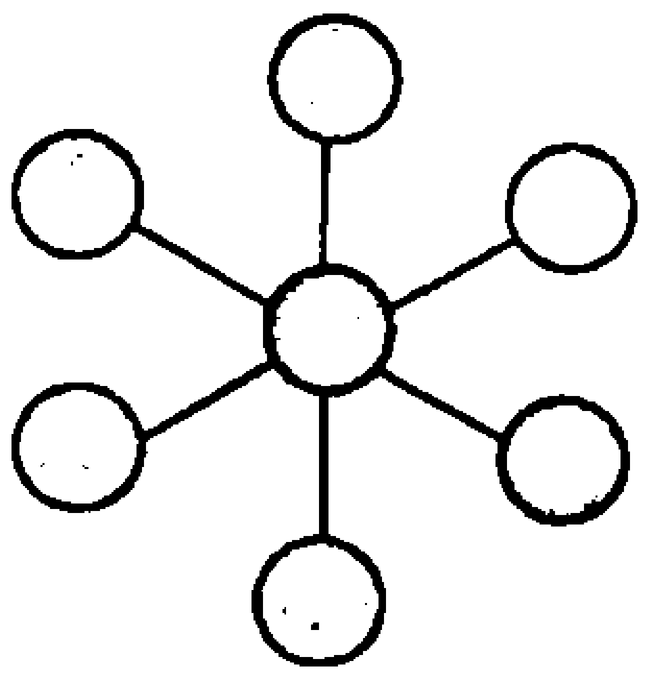
$\Rightarrow d=12$

$\Rightarrow a+b+c+d=23$

RPTA : "E"

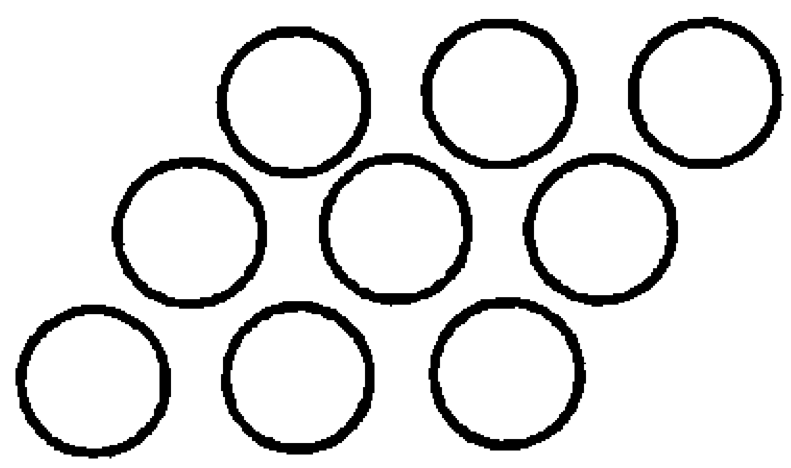
PRACTICA DIRIGIDA

01 Las cifras del *1* al *7* hay que distribuirlas en la figura que se muestra (una en cada círculo), de manera que las tres cifras de cada una de las filas sumen siempre *12*. ¿Qué cifra debe ir en el círculo central?



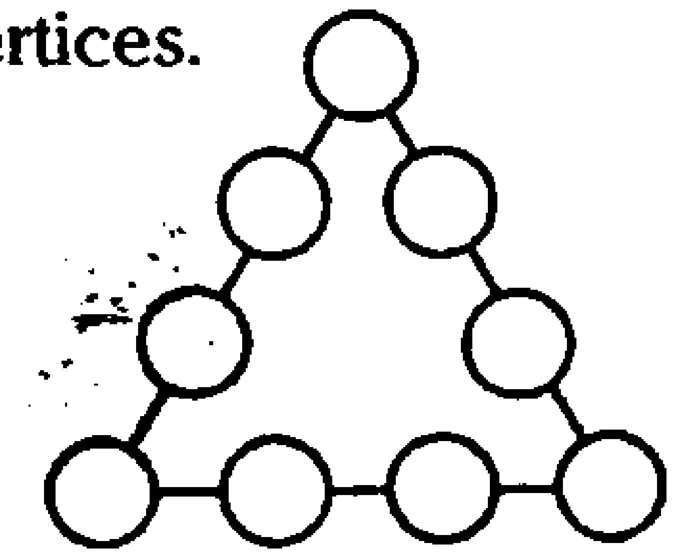
A)6 B)4 C)5
D)2 E) 3

02 Si se distribuyen los números del *1* al *9* en el siguiente arreglo, de tal manera que la suma de cada fila de *3* elementos sea la misma e igual a *S*, calcule el valor de "*S*".



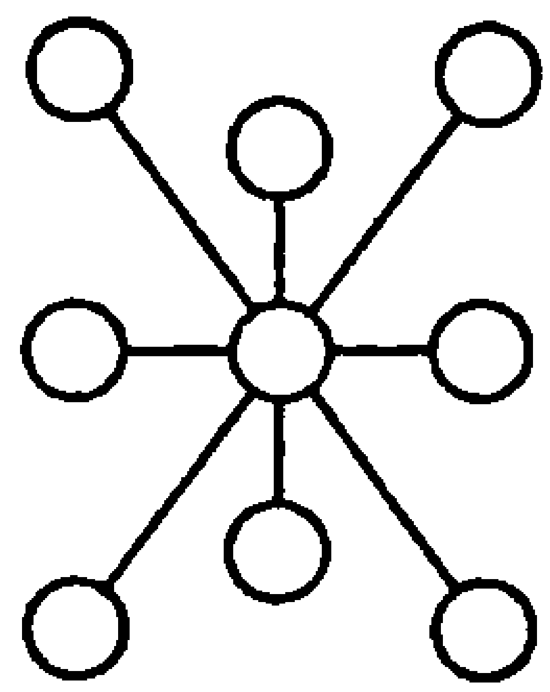
A)15 B)12 C)18
D)16 E) 21

03 Hay que distribuir los *9* primeros números naturales en el triángulo mostrado, tal que la suma de cada lado sea *k*. Dé como respuesta la mayor suma que puede obtenerse al sumar los *3* vértices.



A) 24 B)18 C)15
D)6 E)11

04 Ubique los *9* primeros números impares en las casillas del gráfico, de tal forma que la suma de cada tres números colineales sea la misma. ¿Cuál es el máximo valor de dicha suma constante?



A) 27 B) 25 C) 33
D) 29 E) 35

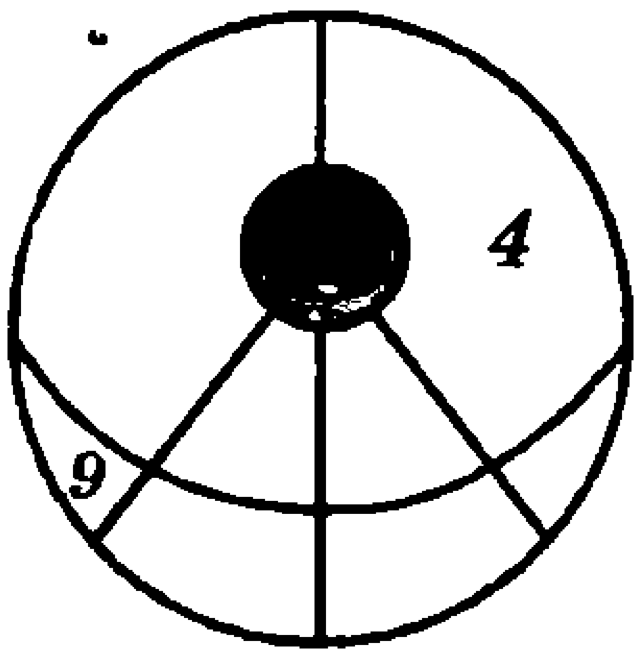
05 En el cuadrado mágico faltan cinco números. En el cuadrado mágico, la suma de los tres números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal es la misma. ¿Cuál es el valor de la letra *A*?

15		35
50		
25	A	

A) 50
B) 40
C) 30
D)20
E)10

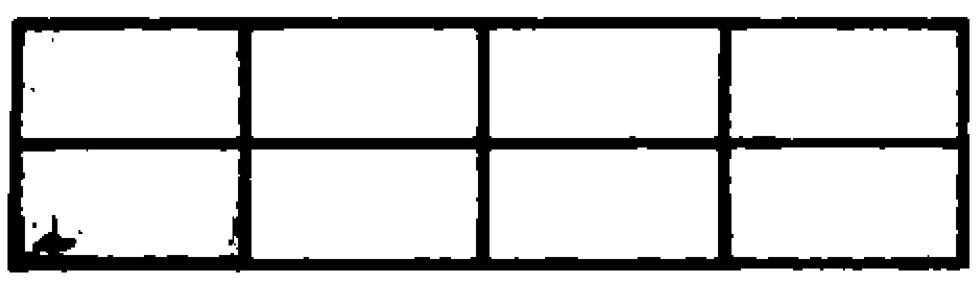
06 Distribuya los dígitos positivos que faltan, uno en cada región vacía, de tal manera

que en ningún par de regiones que estén en contacto (por lado o por vértice) haya dígitos consecutivos. ¿Qué número va en el círculo interior?



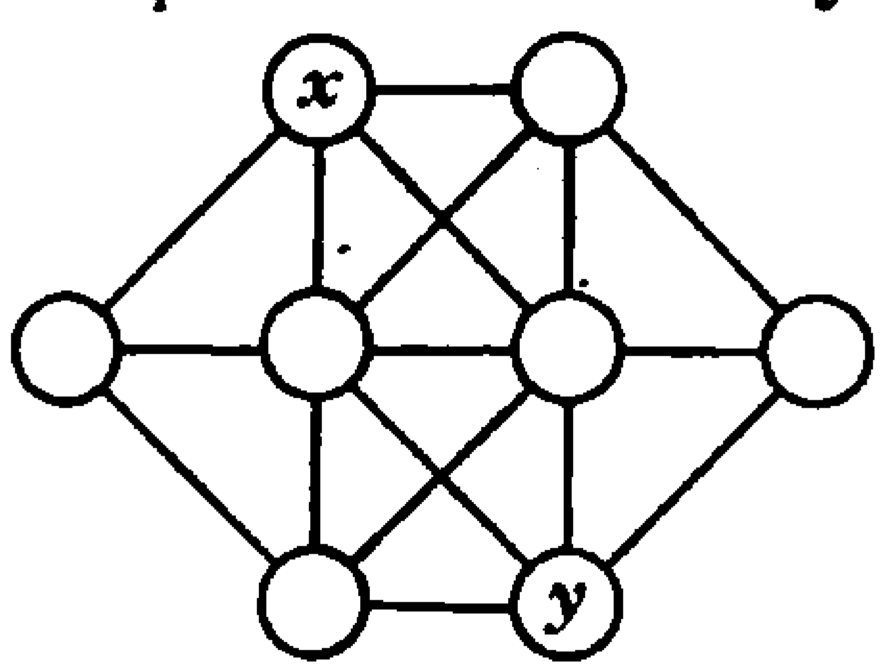
A) 1
B) 2
C) 5
D) 6
E) 7

07 Distribuya los números del *1* al *8* en los ocho casilleros de la figura, con la condición de que no puede haber dos números consecutivos en casilleros adyacentes (por el lado o vértice). Calcule la suma de los números que se ubican en los casilleros sombreados.



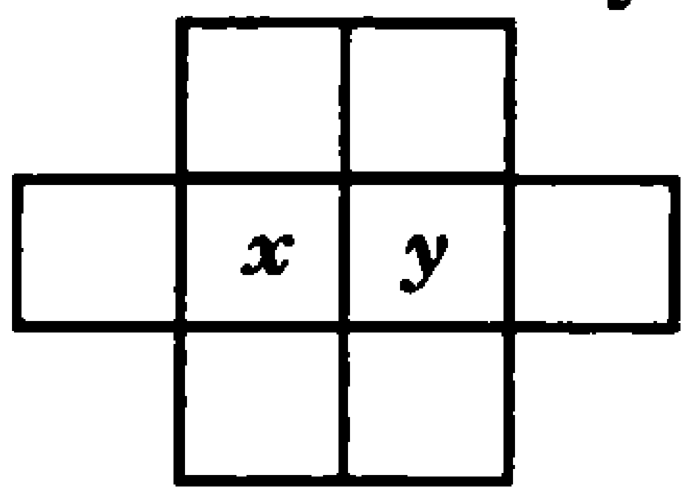
A) 15 *B) 20* *C) 18*
D) 17 *E) 10*

08 En el gráfico, escriba los números del *1* al *8*, sin repetir, uno en cada casillero de modo que dos números consecutivos no tengan conexión directa. Dé como respuesta el valor de $x+y$.



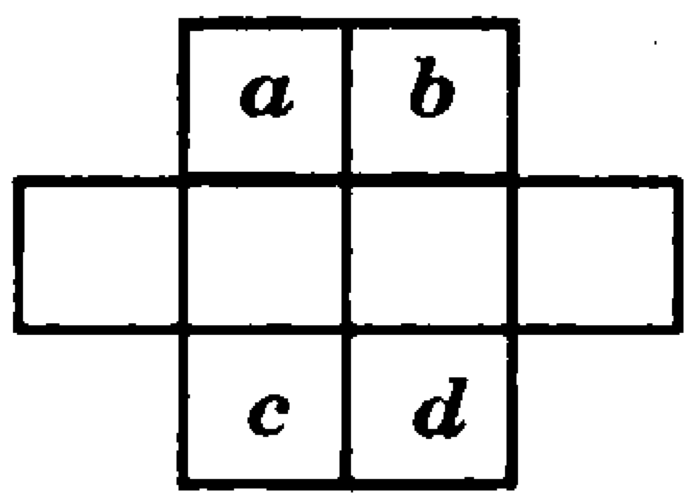
A)5
B)6
C)7
D) 8
E) 9

09 Coloque en cada casilla uno de los *8* primeros números primos (sin repetir números), de tal modo que dos números primos consecutivos no sean adyacentes por un lado o por el vértice. Calcule: $x + y$



A) 24 *B)29* *C) 16*
D)21 *E)19*

10 En el siguiente esquema coloque los números : *2; 4; 6; ....;16*, de tal forma que no haya dos números pares consecutivos en casilleros contiguos . Dé como respuesta el valor de : $a+b+c+d$



A) 30
B) 32
C) 34
E)40
D) 36

11 En el siguiente arreglo deben estar ubicados números enteros positivos y diferentes, de tal manera que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal resulta lo mismo. Calcule $y-x$

	9	4
x		y
12		

A)10
B)12
C)14
D)16
E) 18

12 En el cuadrado mágico del gráfico, la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es la misma. Si las letras x, y, z representan números, halle x^2+z^2.

4	$3x$	z
x	5	$7y$
$4z$	y	6

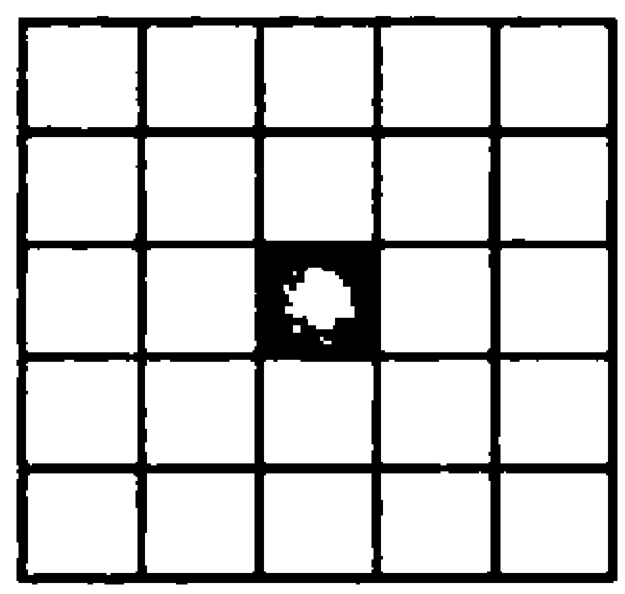
A)17 *B)25* *C)10*
D)13 *E) 18*

13 Halle el valor de $x+y$ en el siguiente cuadrado mágico cuyos números componentes son los *9* primeros números impares.

		$3x$
		x
y		

A)6 *B) 8* *C) 10*
D)12 *E) 14*

14 Se completa el siguiente cuadrado mágico con los *25* primeros números pares, ¿Qué número está en la casilla sombreada?



A) 20
B)26
C)18
D)40
E)30

15 La figura muestra un cuadrado mágico multiplicativo, es decir, el producto de los números ubicados en fila, columna y diagonal siempre es constante. Calcule el valor de "x".

	x	
	1	
4		2

A) 8
B)4
C) 1/2
D)16
E)6

16 Un cuadrado mágico multiplicativo es tal que el

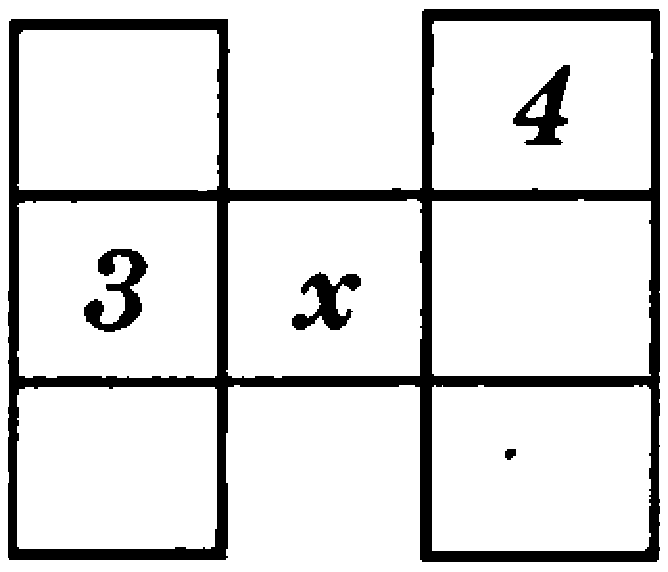
producto de los números en cada fila , columna y diagonal es el mismo. Si las casillas del cuadrado se completan con enteros positivos, de modo que se forma un cuadrado mágico multiplicativo, ¿cuál es el valor de "*x*"?

5		*x*
4		
	1	

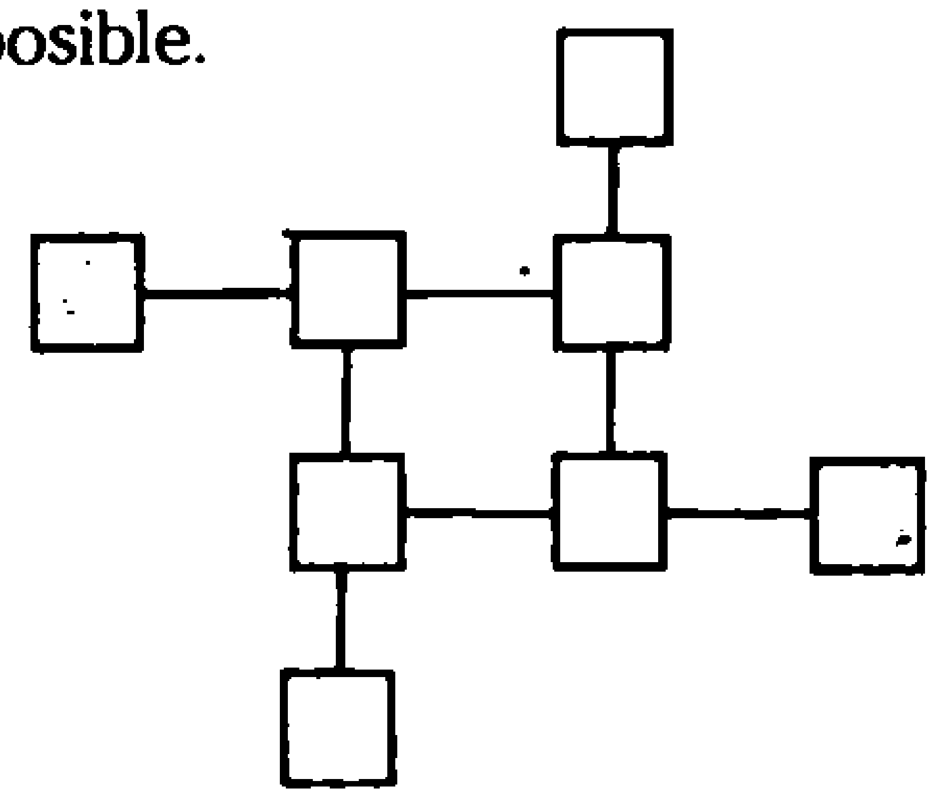
A) 3 *B)* 2 *C)*4 *D)*5 *E)*1

17 En la figura, distribuya los números del *1* al *7*, uno en cada casilla sin repeticiones, de modo que la suma de los tres números ubicados en cada una de las tres líneas (dos verticales y una horizontal) sea la misma. Halle el valor de ***x***.

*A)*1 *B)*2 *C)*5 *D)*6 *E)*7



18 Distribuya los números del *1* al *8* en las casillas de tal manera que la suma de los números en *3* casillas colineales sea la misma y la menor posible.



Dé como respuesta la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.

A) 10 *B)*12 *C)* 14 *D)*8 *E)* 13

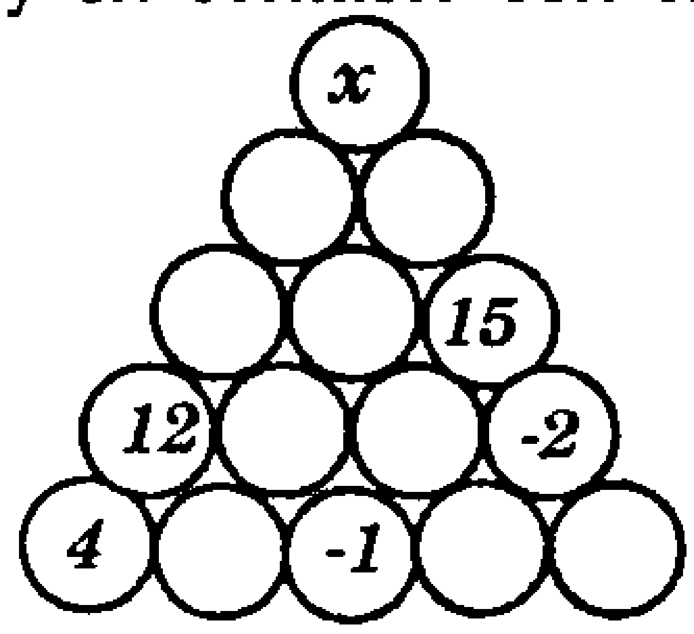
19 En la siguiente tabla (*x*, *y*, *z* representan números enteros) la suma de los cuatro números de la primera fila es igual a *78* (como indica la figura). de manera similar los otros resultados que se indican. Complete adecuadamente y obtenga el valor de $x + y - z$.

x	*y*	*x*	*x*	→ 78
23	*x*	*z*	*y*	
y	*y*	23	*z*	
x	*z*	*x*	*z*	→ 102
↓ 81				

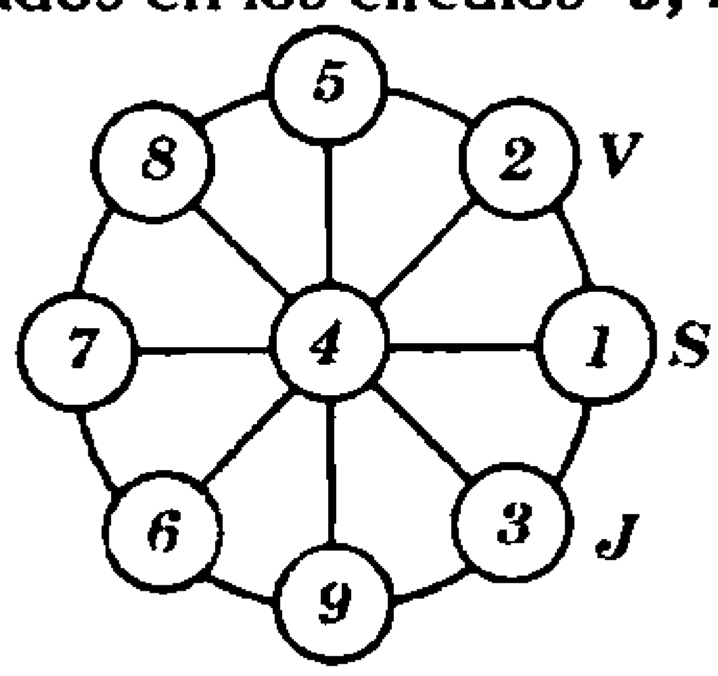
A)–6 *B)* 6 *C)* -1 *D)* 5 *E)* 12

20 En la figura, halle el valor de *x*, donde cada número ubicado en una circunferencia es el resultado de sumar, los números ubicados en las circunferencias que estan debajo y en contacto con ella.

*A)*36 *B)* 82 *C)*96 *D)*56 *E)* 64



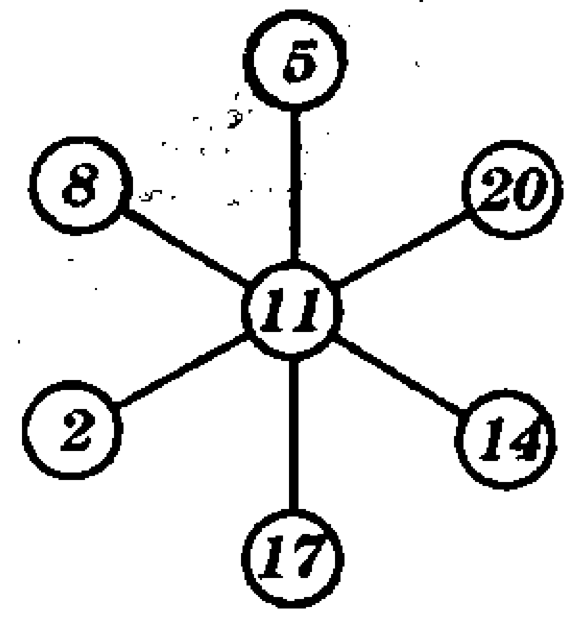
21 En la figura que se muestra, trasladar las fichas circulares de manera que las tres cifras de cada una de las filas (diámetros) sumen siempre *15*. Calcular la máxima suma de los números ubicados en los círculos *J*, *S* y *V*.



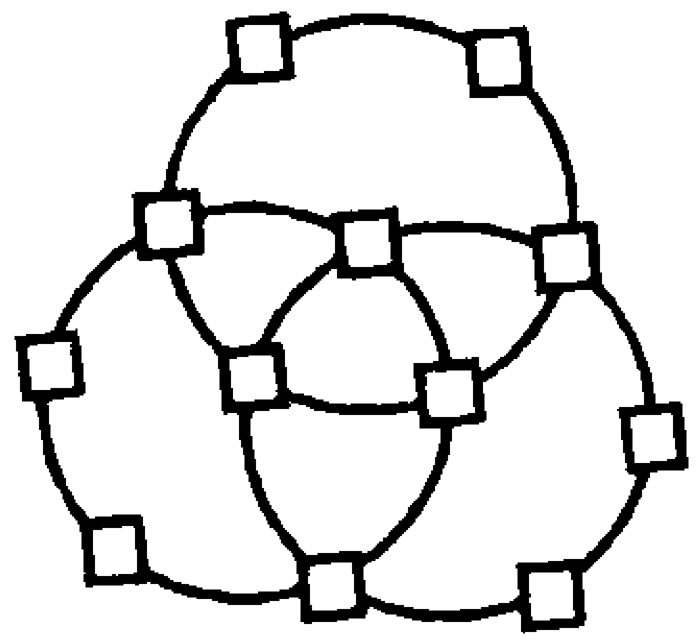
A) 20 *B)*22 *C)*25 *D)*23 *E)*24

22 En el gráfico se encuentran los números, de tal manera que la suma de cada *3* en fila resulta siempre la misma ¿Dicha suma constante es la máxima posible?, de no ser así, ¿cuántos números, como mínimo, deben ser cambiados de posición para obtener la máxima suma constante.

A) Si *B)* no, 2 *C)* no, 3 *D)* no, 4 *E)* no, 5



23 En las casillas cuadradas del gráfico, ubique los *12* primeros números naturales mayores que *4*, de tal forma que al sumar los números que están en cada circunferencia se obtengan los números *67; 68* y *69* en algún orden. Dé como respuesta la suma de los números que se ubicarán en las casillas sombreadas.



A) 76 *B)* 78 *C)* 80 *D)*82 *E)* 84

CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	A	A	C	D	B	C	E	D	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	D	B	B	E	B	D	B	B	B
21	22	23							
E	C	B							

VERDADES y MENTIRAS
PRINCIPIO DE SUPOSICION
CAPITULO 008

OBJETIVOS:

Relacionar e identificar el valor de verdad bajo ciertas condiciones establecidas.

* Emplear métodos prácticos que nos permitan distinguir contradicciones en los enunciados propuestos.

* Reforzar los conceptos básicos de la lógica.

INTRODUCCIÓN:

En éste capítulo resolveremos problemas que implican obtener conclusiones a partir de un conjunto de proposiciones cuyo valor de verdad de cada una se desconoce; sin embargo, debido a que están relacionadas entre sí con condiciones particulares dadas se puede determinar cuál es verdadera y cuál es falsa. A continuación se presentan ejemplos en el cual se observa un conjunto de proposiciones que serán analizadas.

I) Un antiguo rey sometía a sus prisioneros a una prueba para dejarlos en libertad, la cual consistía en determinar en que habitación estaba la dama y el tigre, siendo uno de los enunciados verdadero y el otro falso:

1) En esta habitación hay una dama y en la otra hay un tigre.	*2) En una de estas habitaciones hay una dama, y en una de estas habitaciones hay un tigre.*

Podría usted ayudar al prisionero.

II) En una comunidad alejada de Centroamérica, producto de las necesidades básicas por las que pasan sus habitantes, estos adquieren ciertas deficiencias físicas pero especialmente psicológicas; muchos de ellos llevan días, meses, sin alimentarse en forma adecuada, por ello carecen de razón al hablar y proliferan las sectas religiosas y de cultos. Cerca de Haití hay una isla en la que cierta cantidad de habitantes, debido a su forma de vida, se comportan como zombies. Pero no son unos zombies típicos, muertos vivientes, sino que se confunden con los humanos normales. No hay nada que los distinga externamente, solo un pequeño detalle: los zombies mienten siempre y los humanos normales siempre dicen la verdad. Hay otra particularidad que tener en cuenta: todos los nativos entienden nuestro idioma, pero solo pueden contestar a nuestras preguntas con dos palabras, ***CHA*** o ***CHI***. Una significa ***SI*** y otra ***NO***, pero no sabemos qué significado corresponde a cada una. El verano pasado visité la isla. Me encontré con un nativo y le pregunté: ¿Es verdad que ***CHA*** significa ***SÍ***? Él me respondió: ***CHA***. A partir de la respuesta a mi pregunta, ¿puedo saber lo que significa ***CHA***? ¿Puedo deducir si el nativo con el que me encontré es zombie o humano?

En este punto veremos aquellos problemas donde un grupo de personas hace ciertas afirmaciones que pueden ser verdades o mentiras. Para su resolución aplicaremos el principio de contradicción o el principio de suposición.

VERDAD

El concepto de verdad lo usamos para calificar las proposiciones como verdaderas o falsas; en cambio, el concepto de validez (invalidez o no válido) lo usamos para decidir si existe una conexión adecuada entre las premisas y la conclusión de una estructura de proposiciones.

PROPOSICIÓN:

Se define como una afirmación que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas.

EJEMPLOS :

* La ***UNI*** es la universidad decana de América.
* $21 + 12 = 2112$

• Julio es mayor que Mario.

NEGACIÓN :

La negación de una proposición verdadera es falsa, y la negación de una proposición falsa es verdadera.

EJEMPLO :

• Carla postula Medicina. Entonces su negación:

- Carla no postula a Medicina.
- No es el caso que Carla postula a Medicina.

VALOR DE VERDAD :

Es un valor que indica en qué medida una afirmación es verdad. En lógica clásica, los únicos valores de verdad son verdadero y falso.

PROPOSICIONES CONTRADICTORIAS y PROPOSICIONES CONTRARIAS

Dos proposiciones son contradictorias cuando se oponen de tal manera que si la primera es falsa, la segunda es verdadera, y si la primera es verdadera, la segunda es falsa. Dos proposiciones son contrarias de modo que al menos hay una proposición falsa entre ellas.

LEY DE LAS CONTRADICTORIAS

Dos proposiciones contradictorias no pueden ser al mismo tiempo verdaderas o falsas.

* En las proposiciones contrarias o contradicción parcial, ambas no pueden ser verdad a la vez, pero sí pueden ser ambas falsas.

Ejemplo:

• ***Lenin :*** Hoy es martes.

• ***Dany :*** Hoy es lunes.

En las proposiciones contradictorias o contradicción total, necesariamente una de ellas es verdadera y la otra es falsa.

Ejemplo:

• ***Lila :*** Brandy es menor de edad.

• ***Nelly :*** Brandy es mayor de edad.

Analicemos las siguientes afirmaciones:

Juan : María tiene ***30*** años.

Luis : María tiene ***34*** años.

De las dos afirmaciones ***no podemos concluir que son contradictorias*** (si una es verdadera, la otra es falsa o viceversa) . Sin embargo , ***sí concluimos que son contrarias*** (al menos una de ellas es falsa), es decir, o hay una verdadera y una falsa o las dos proposiciones son falsas.

* En los problemas sobre verdades y mentiras, debemos priorizar las ***condiciones dadas, así como garantizar el número de afirmaciones verdaderas y falsas.***

* En los problemas sobre verdades y mentiras se sugiere analizar la contradicción entre los enunciados.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN

* POR CONTRADICCIÓN :

Se agrupan proposiciones que se contradigan en forma parcial o total , de esta forma se asegura la existencia de proposiciones falsas. Luego, a partir de los datos y demás proposiciones, se obtiene las conclusiones.

EJEMPLO :

Cuatro hermanas son interrogadas por su madre, pues una de ellas usó sus joyas en una fiesta sin su permiso a lo que contestaron:

Katia : Liliana fue.

Liliana : Maribel fue.

Maribel : yo no fui.

Zulema : yo no fui.

Si ***3*** de ellas mienten, ¿quién es la culpable?

RESOLUCIÓN :

Identificamos dos proposiciones contradictorias:

* ***Liliana:*** Maribel fue ( )
* ***Maribel:*** yo no fui ( )

contradicción(***1*** Ⓥ y ***1*** Ⓕ)

Del dato se sabe que tres de ellas mienten, entonces:

* ***Katia:*** Liliana fue ***(F)***
* ***Zulema***: yo no fui ***(F)***

se deduce que Zulema fue.

* POR SUPOSICIÓN :

A falta de proposiciones que se contradigan , se asigna un valor de verdad a una de ellas y se examina el valor de verdad de las demás. Cuando se cumplan todas las condiciones, habremos obtenido la solución.

EJEMPLO :

Se escucha la siguiente afirmación de cuatro amigos:

* ***Mariana:*** uno de nosotros es mentiroso.
* ***Renato:*** dos de nosotros somos mentirosos.
* ***Fabiola:*** tres de nosotros somos mentirosos.
* ***Esteban:*** todos somos mentirosos.

¿Cuántos de los *4* amigos son mentirosos?

RESOLUCIÓN :

Analicemos lo que dice Esteban:

* ***Esteban:*** todos somos mentirosos. *(V)* ← *supuesto*

entonces el también sería mentiroso ¡imposible!

⇒Esteban miente

Ahora analogamente con lo que afirma Fabiola:

* Esteban: todos somo mentirosos *(F)* ← *supuesto*
* ***Fabiola:*** tres de nosotros somos mentirosos. *(V)*
* ***Renato:*** dos de nosotros somos mentirosos *(F)*.
* ***Mariana:*** uno de nosotros es mentiroso *(F)*.

Como Esteban miente, ya se tiene un mentiroso, para que lo dicho por Fabiola sea verdadero deben haber *3* mentirosos, entonces, Renato y Mariana también deben mentir.

⇒ *3* amigos son mentirosos.

PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA

Consiste en reconocer entre las proposiciones dadas, dos que sean equivalentes, osea dos que afirmen lo mismo, por lo tanto ellas tendrán el mismo valor de verdad *(V – V ó F –F)*.

EJEMPLO:

Se detienen a tres sospechosos de haber cometido ***« La gran estafa »*** a un casino de las vegas y al interrogarlos responden:

* ***George :*** *«Yo soy el estafador»*
* ***Brad :*** *«El estafador es George»*
* ***Matt :*** *« Yo no fuí»*

Los agentes saben que sólo uno de ellos es el culpable y sólo uno de ellos dice la verdad, entonces ¿quién cometió la estafa?

RESOLUCIÓN:

Analizando las afirmaciones de cada uno George y Brad dicen enunciados equivalentes por lo tanto tendrán los mismo valores de verdad *(V – V ó F – F)*, pero como por condición del problema sólo uno de ellos dice la verdad por lo tanto los otros dos mienten *(V–F– F)*, entonces se deduce que George y Brad dicen dos enunciados falsos, veamos:

Testimonios	*No cumple*	*Si cumple*
George: Yo soy el estafador	*V*	*F*
Brad: El estafador es George.	*V*	*F*
Matt : Yo no fuí.	*F*	*V*

Del cuadro se concluye que Matt no es el culpable, porque dice la verdad y George como miente al decir yo « soy el estafador» tampoco es el culpable.

Por lo tanto el culpable de la «Gran estafa» es Brad.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Tres alumnas: Lucía, Ana, Sofía responden verdadero *(V)* o falso *(F)* en un exámen de *3* preguntas de la siguiente manera.

	Lucía	Ana	Sofía
1ra. pregunta	*V*	*V*	*F*
2da. pregunta	*V*	*F*	*F*
3ra. pregunta	*F*	*F*	*V*

Se sabe que una de ellas contestó todas las preguntas correctamente; otra falló en todas y la tercera solo falló en una pregunta. ¿Quién acertó todas las preguntas y quién falló en una respectivamente?

A) Lucía - Sofía *B) Ana - Sofía*
C) Sofía - Lucía *D) Ana - Lucía*
E) Lucía - Ana

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar la que acertó en todas y falló en una pregunta respectivamente.

Comparando las respuestas del la que acertó en todas y falló en todas, todas sus respuestas deben ser contrarias, entonces, en la tabla se deduce que:

Una acertó todas y la otra falló en todas

	Lucía	Ana	Sofía
1ra. pregunta	*V*	*V*	*F*
2da. pregunta	*V*	*F*	*F*
3ra. pregunta	*F*	*F*	*V*

Ana falló solo en una

Luego como Ana falló sólo en una pregunta, entonces debe tener solo una respuesta distinta al compararla con la que respondió todo bien. En la tabla se observa que:

	Lucía	Ana	Sofía
1ra. pregunta	*V*	*V*	*F*
2da. pregunta	*V*	*F*	*F*
3ra. pregunta	*F*	*F*	*V*

solo una repuesta es diferente

⇒ Lucía acertó en todas las respuestas.

∴ Lucía acertó todas y Ana falló solo en una.

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Una isla es habitada por los positivos y los negativos; los primeros siempre dicen la verdad y los últimos siempre mienten. Si se sabe que *C* dice « *B* es negativo « y *B* dice « *A* y *C* son del mismo tipo», ¿qué tipo es *A*?

A) positivo *B) negativo*
C) positivo o negativo *D) neutro*
E) no se puede determinar

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar a que tipo pertence *A*.

Datos:

* Los positivos ⇒ siempre dicen la verdad: *(V)*
* Los negativos ⇒ siempre mienten: *(F)*

para determinar lo pedido supondremos que:

<u>*Caso 1:*</u> *B* dice la verdad (es positivo)

B: A y *C* son del mismo tipo *(V)*
se deduce:
C: B es negativo *(F)* ⇒ *C:* negativo
A: negativo

<u>*Caso 2*</u> *: B* miente (es negativo)

B: A y *C* son del mismo tipo *(F)* ⇒ son de diferente tipo
se deduce:
C: B es negativo *(V)* *C:* positivo
A: negativo

En ambos casos *A* resulta negativo.

⇒ *A* es negativo.

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Ana, Brenda, Clara, Daniela y Elena de ***20***, ***21***, ***22***, ***23*** y ***24*** años respectivamente son cinco sospechosas de haber introducido mercadería de contrabando al país. Al ser capturadas e interrogadas por la policía contestaron:

Ana: Brenda participó.
Brenda: "La que tiene **22** años participó".
Clara: "La que tiene ***21*** años miente".
Daniela: "Yo no participé".
Elsa: "Yo no participé".

Si la única que no es culpable es la única que dice la verdad, ¿cuál es la edad de la inocente?

A) 20 años *B) 21 años* *C) 22 años*
D) 23 años *E) 24 años*

RESOLUCIÓN :

Se pide la edad de la inocente.

Datos:

* Edad de las amigas Ana *(20)*; Brenda *(21)*; Clara *(22)*; Daniela *(23)* y Elsa *(24)*.
* Solo hay una que no es culpable y dice la verdad.

⇒ *1* Ⓥ y *4* Ⓕ

En las afirmaciones dadas por las ***5*** señoritas buscaremos dos contradictorias *(1V y 1 F)* de ese modo, las otras ***3*** afirmaciones serán necesariamente falsas.

<u>*Ana:*</u> "Brenda participó" *(F)* ⇒ Brenda no participó <u>*(inocente)*</u>

Brenda: "la que tiene *22* años" (clara) participó ( )
Clara: "la que tiene *21* años" (Brenda) miente ( )
} contradicción *1 V y 1 F*

<u>*Daniela:*</u> "yo no participé" *(F)*.

<u>*Elsa:*</u> "yo no participé" *(F)*.

⇒ La inocente (Brenda) tiene ***21*** años.

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Un padre sabía que ***4*** de sus ***5*** hijos: Martha, Claudia, Francisco, Manuel y Fernando, eran los que causaron desorden en la casa. Cada hijo mencionó una afirmación:

Martha: Yo no causé desorden en casa.

Claudia: Martha miente.

Francisco: Claudia miente.

Manuel: Claudia causó el desorden en casa.

Fernando: Manuel dice la verdad.

Si sólo una afirmación es cierta, ¿quién es el inocente?

A) Martha ***B) Claudia*** ***C) Francisco***
D) Manuel ***E) Fernando***

RESOLUCIÓN :

Se pide identificar quién es el inocente.

Datos:

* Sólo uno de los ***5*** hijos es inocente.
* Sólo una afirmación es cierta.

Buscaremos la afirmación verdadera identificando dos afirmaciones contradictorias.

Martha: Yo no causé desorden en casa (+) contradictorias
Claudia: Martha miente. (-) ***1 V y 1 F***
Francisco: Claudia miente. ***(F)*** se deduce
Manuel: Claudia causó el desorden en casa ***(F)***
⇒ Claudia es inocente
Fernando: Manuel dice la verdad. ***(F)***

⇒ Claudia.

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Ellos y Nuestro hicieron unas preguntas a Mío, Suyo y Tuyo, obteniéndose las siguientes respuestas:

	MIO	SUYO	TUYO
¿De quién es el celular?	Tuyo	Mío	Nuestro
¿De quién es el polo azul?	Nuestro	Tuyo	Mío
¿De quién es la laptop?	Mío	Suyo	Ellos

Si se sabe que cada objeto le pertenece solo a uno de los preguntados y de las tres respuestas que dió cada uno, solo una es verdadera, ¿quién es el dueño de la laptop?

A) Mío ***B) Ellos*** ***C) Tuyo***
D) Nuestro ***E) Suyo***

RESOLUCIÓN :

Se pide identificar al dueño de la laptop.

Datos:

* Los dueños de los objetos son: Mío, Suyo y tuyo, uno de cada objeto.
* Cada uno solo tuvo una respuesta verdadera: ***1V y 2F.***

Como se sabe que los dueños de los objetos son solo Mío, Suyo y Tuyo, toda respuesta que sea distinta a una de las tres sería falsa, entonces, en la tabla se deduce que:

1ro ⇩ (TUYO)

	MIO	SUYO	TUYO
¿De quién es el celular?	Tuyo	Mío	Nuestro ***(F)***
¿De quién es el polo azul?	Nuestro ***(F)***	Tuyo	Mío ***(V)***
¿De quién es la laptop?	Mío ***(F)***	Suyo ***(V)***	Ellos ***(F)***

se deduce

De la tabla se obtiene que:

Mío es el dueño del polo azul, entonces, Mío no es el dueño de la laptop.

∴ ***Suyo es dueño de la laptop.***

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Tres monedas de ***S/0,20*** ; ***S/ 0,50*** y ***S/.1*** están en el interior de tres frascos cerrados no transparentes. Una moneda en cada frasco. En cada uno de estos frascos hay un letrero como se muestra en el gráfico:

I ***II*** ***III***

Si en cada frasco hay solo una moneda y de las inscipciones solo una es verdadera, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) El frasco ***II*** tiene la moneda de ***0,50*** soles.

II) El frasco ***I*** tiene la moneda de ***S/.0,20*** y el frasco ***III*** la moneda de ***S/.0,50***

III) La suma de las cantidades en los frascos ***I*** y ***II*** es ***1,20*** soles.

IV) La suma de las cantidades en los frascos ***II*** y ***III*** es ***0,70*** soles.

A) I y II ***B) II y III*** ***C) III y IV***
D) I y IV ***E) II y IV***

RESOLUCIÓN :

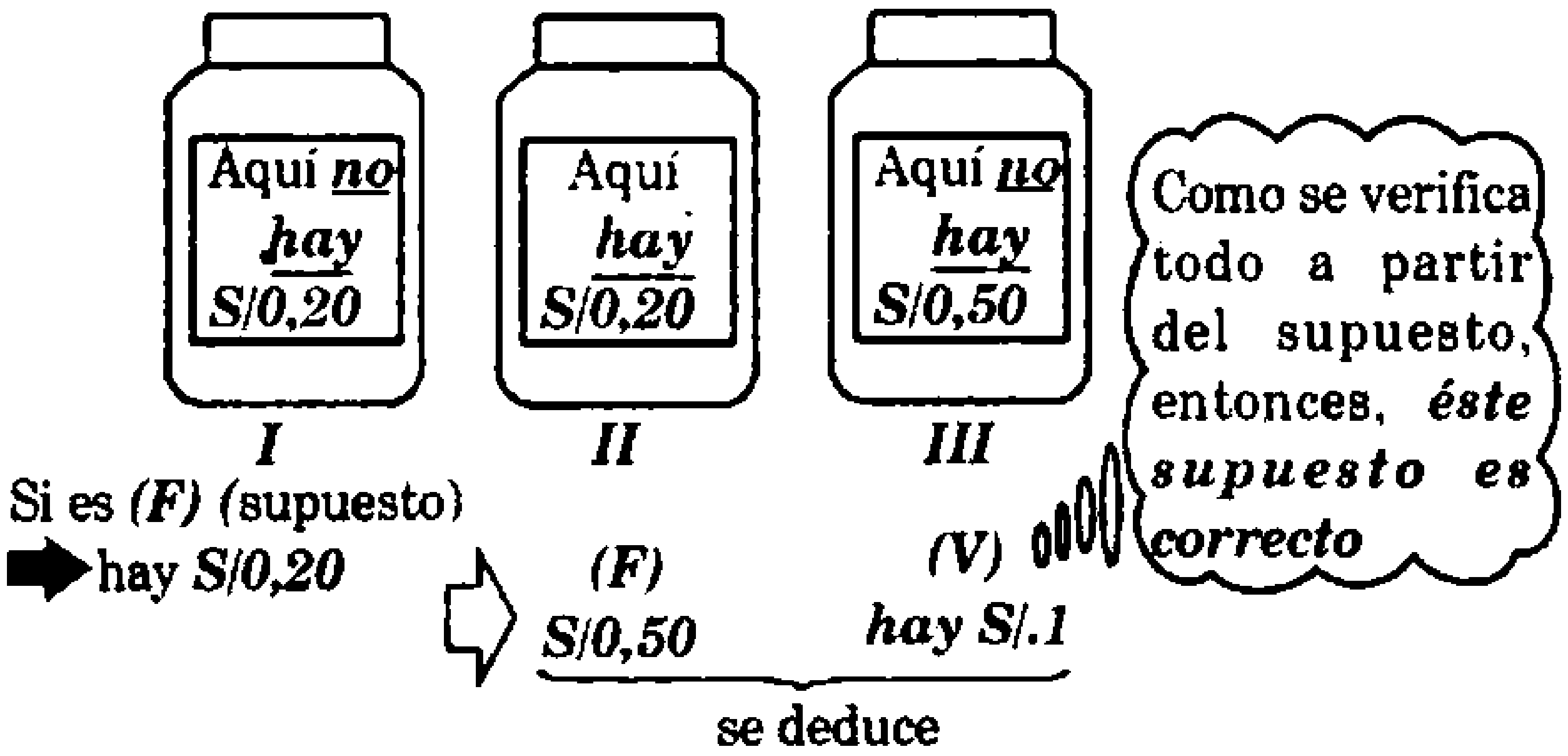
Se pide señalar cuales de las afirmaciones son verdaderas.

Datos:

* Son ***3*** monedas: ***S/.0,20***; ***S/.0,50***; ***S/.1***, una en cada frasco.
* Una de las inscipciones de es verdadera ***(1V y 2F)***

En las inscripciones de los frascos no se puede

apreciar claramente la contradicción entre dos de ellas, por ello, consideramos algunos supuestos, es decir:



Luego, en las afirmaciones:

I) El frasco ***II*** tiene la moneda de ***S/.0,50***. ***(F)***

II) El frasco ***I*** tiene la moneda de ***S/.0,20*** y el frasco ***III*** la moneda de ***S/.0,50***. ***(V)***

III) La suma de las cantidades en los frascos ***I*** y ***II*** es ***S/.1,20***. ***(V)***

IV) La suma de las cantidades en los frascos ***II*** y ***III*** es ***S/.0,70***. ***(F)***

$\Rightarrow$ Son verdaderas ***II*** y ***III***.

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

En una caja hay cuatro fichas de colores diferentes blanco, verde, amarillo y lila. Andrea, Milton, Paula y Diana cogieron una ficha cada uno, aunque no necesariamente en ese orden , interrogados cada uno contestó:

Andrea: "Yo tengo la ficha de color blanco"

Milton: "Yo tengo la ficha de color verde".

Paula: "Yo tengo la ficha de color de verde".

Diana: "Milton tiene la ficha de color lila".

Si solo uno de ellos miente, ¿quienes tienen las fichas de color amarillo y blanco?

A) Andrea - Paula ***B) Milton - Paula***
C) Paula - Diana ***D) Diana - Andrea***
E) Diana - Milton

RESOLUCIÓN :

Se pide los nombres de los que tienen las fichas de color blanco y amarillo.

Datos:

* Cada uno tiene solo una ficha.
* Solo uno de ellos miente $\Rightarrow$ ***1 F*** y ***3 V***.

En las afirmaciones de cada uno se observa que lo que dice Diana contradice a Milton, entonces:

Andrea: Yo tengo la ficha de color blanco. ***(V)*** se deduce
Milton: Yo tengo la ficha de color verde. ***(F)*** contradictorias
Paula: Yo tengo la ficha de color verde. ***(V)*** 1Ⓥ y 1Ⓕ
Diana: Milton tiene la ficha de color lila. ***(V)***

Luego:

	Andrea	Paula	Milton	Diana
color	blanco	verde	lila	amarillo

∴ ***Diana - Andrea.***

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

Cinco sospechosos son interrogados por el robo de un supermercado, pues uno de ellos es el ladrón. Durante la intervención policial cada uno afirma lo siguiente:

Carlos: Cesár robó el supermercado.

César: Claudio robó el supermercado.

Cristian: Lo que dice Carlos no es cierto.

Claudio: Cristian robó el supermercado.

Ciro: Soy inocente.

Si cuatro de ellos mienten, ¿quién dice la verdad?

A) Carlos ***B) Cesár*** ***C) Cristian***
D) Claudio ***E) Ciro***

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar al que dice la verdad.

Datos:

* Sólo uno es el ladrón.
* Cuatro mienten ***(4 F*** y ***1 V)***.

Como sólo uno de ellos dice la verdad, bastará encontrar dos afirmaciones contradictorias (***1V*** y ***1F***) de modo que las otras tres serán necesariamente falsas.

Carlos: César robó el supermercado. ***(F)*** se deduce
César: Claudio robó el supermercado . ***(F)*** contradictorias
Cristian: Lo que dice Carlos no es cierto. ***(V)*** ***(1V ; 1 F)***
Claudio: Cristian robó el supermercado. ***(F)***
Ciro: Soy inocente ***(F)*** ➡ es el culpable (LADRON)
con lo cual se observa que Carlos miente (lo que dice es falso)

∴ Cristian dice la verdad.

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

En una reunión se encuentran tres amigas conversando sobre sus edades y durante la charla afirmaron:

ANA: Tengo ***22*** años, soy ***2*** años menor que Carla y tengo ***1*** año más que Beatriz.

BEATRIZ: Soy más joven que Ana, Ana tiene

23 años y Carla tiene *3* años más que Ana.

CARLA: No soy la más joven, entre Beatriz y yo hay *3* años de diferencia y Beatriz tiene *25* años.

Si cada una mintió solo una vez, ¿qué edad tiene Carla?

A) 24 años *B) 21 años* *C) 25 años*
D) 22 años *E) 23 años*

RESOLUCIÓN :

Se pide la edad de Carla.

Dato:

* Cada una mintió solo una vez.

Del dato se deduce que cada una de las amigas tiene: *2V* y *1 F*, de manera que si identificamos la afirmación falsa en alguna de las amigas, sus otras dos serán verdaderas.

Analizamos dos afirmaciones que mencionan a una de las amigas pero con diferentes edades, ***supondremos que una sea verdadera y la otra falsa*** . También esribiremos proposiciones equivalentes a las afirmaciones de cada una. Veamos:

Ana: Tengo *22* años. *(V)*
Carla tiene *24* años. *(F)*
Beatriz tiene *21* años. *(V)*
Beatriz: Beatriz < Ana. *(V)*
Ana tiene *23* años. *(F)* — supuesto *1 V* y *1 F*
Carla tiene *26* años. *(V)*
Carla: No soy la menor *(V)*
Entre Beatriz y yo hay *3* años de diferencia. *(V)* ¡no cumple!
Beatriz tiene *25* años. *(F)*

Del supuesto que:

* Ana tiene *22* años se deduce:

⇒Beatriz tiene *21* años
⇒Carla tiene *26* años — ***no hay 3 años de diferencia entre ellas.***

Entonces, cambiamos el supuesto:

Ana: tengo *22* años. ■
Carla tiene *24* años. *(V)*
Beatriz tiene *21* años. *(V)*
Beatriz: Beatriz < Ana *(V)*
Ana tiene *23* años. *(V)* — supuesto correcto.
Carla tiene *26* años. *(F)*

Carla: No soy la menor. *(V)*

Entre Beatriz y yo hay *3* años de diferencia *(V)*

Beatriz tiene *25* años. *(F)* ....***¡ todo verifica!***

Veamos que a partir del supuesto correcto se deduce que:

* Ana tiene *23* años. * Carla tiene *24* años.
* Beatriz tiene *21* años.

∴ Carla tiene *24* años.

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Tres hermanos, Manuel, Miguel y Moisés fueron a dar un mismo exámen y ninguno obtuvo la misma nota. Al llegar a casa afirmaron:

Manuel: "Yo obtuve la mayor nota, Moisés la menor".

Miguel: "Yo obtuve la mayor nota, más que Manuel y Moisés juntos".

Moisés: "Yo obtuve la mayor nota, Miguel sólo la mitad de la mía".

Si solo tres de las afirmaciones anteriores son falsas, ¿quiénes obtuvieron la menor y mayor nota respectivamente?

A) Manuel - Miguel *B) Miguel - Moisés*
C) Moisés - Manuel *D) Miguel - Manuel*
E) Moisés - Miguel

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar a los hermanos que obtuvieron la menor y mayor nota.

Dato:

* Ninguno de los hermanos obtuvo la misma nota.
* Del total de afirmaciones: *3V* y *3F*.

Para determinar el valor de la verdad de las afirmaciones iniciaremos suponiendo, para ello, buscaremos dos afirmaciones que mencionen al mismo hermano pero con diferente nota para que una sea verdadera y la otra falsa.

Manuel :Yo obtuve la mayor nota. *(F)*
Moisés la menor. *(F)*
Miguel: Yo obtuve la mayor nota. *(F)*
más que Manuel y Moisés juntos. *(V)*
Moisés: Yo obtuve la mayor nota. *(V)* — supuesto
Miguel solo la mitad de la mía. *(V)*

Se observa que las dos afirmaciones de Miguel deben tener el mismo valor de verdad, ya que una refuerza a la otra afirmación, pero con el supuesto se deduce que son de diferente valor de verdad. ***¡Incorrecto!.***

Entonces, cambiaremos el supuesto, con lo que se deduce que:

Manuel : Yo obtuve la mayor nota. (F)
Moisés la menor. (V)
Miguel: Yo obtuve la mayor nota. (V) supuesto correcto
más que Manuel y Moisés juntos. (V)
Moisés: Yo obtuve la mayor nota. (F)
Miguel solo la mitad de la mía. (F)

⇒ Miguel > Manuel > Moisés

∴ Moisés y Miguel.

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Liz, Carmen y Mónica conversan sus edades afirmando lo siguiente:

* ***LIZ :*** Tengo ***22*** años, Carmen tiene ***24*** y Mónica ***21*** años.
* ***CARMEN :*** No soy la menor, entre Mónica y yo hay tres años de diferencia, Mónica tiene ***25*** años.
* ***MÓNICA :*** Tengo ***27*** años, Liz no miente al decir su edad ; la edad de Carmen es menor que la mía.

Si una de ellas mintió una vez y la diferencia de edades entre Carmen y Mónica es de un año, ¿Cuál es la edad de Carmen?

A) 21 años *B) 24 años* *C) 23 años*
D) 25 años *E) 22 años*

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar la edad de Carmen.

Datos:

* Cada una mintió solo una vez.
* Diferencia de edades entre Carmen y Mónica es un año.

De este último dato, se deduce que:

* ***Liz:*** Tengo ***22*** años. (V) *se deduce*
Carmen tiene ***24*** años. ( ) una tiene
Mónica tiene ***21*** años. ( ) que ser falsa

* ***Carmen:*** No soy la menor, (V) *por dato*
<u>*Entre Mónica y yo hay 3 años de diferencia*</u>. (F)
Mónica tiene ***25*** años. (V)

* ***Mónica***: <u>Tengo ***27*** años</u>, (F)

Liz no miente al decir su edad. (V) se
La edad de Carmen es menor que la mía. (V) deduce

De lo dicho por Carmen y Mónica se tiene:

Nombre	Mónica	Liz	Carmen
Edad	*25*	*22*	*24*

⇒ Carmen tiene ***24*** años.

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

Tres amigas: Emilia, Gabriela y Leonor se encuentran conversando.

Emilia: Tengo ***7*** nietos, tengo ***2*** nietos menos que Gabriela, tengo un nieto más que Leonor.

Gabriela: Yo no soy la que tengo menos nietos. Entre el número de nietos de Leonor y el mío hay una diferencia de ***3***, Leonor tiene ***10*** nietos.

Leonor: Tengo menos que Emilia, Emilia tiene ***8*** nietos, Gabriela tiene menos nietos que Emilia.

Si cada uno dio dos afirmaciones verdaderas y una falsa, ¿cuántos nietos tienen en total?

A) 18 *B) 24* *C) 27* *D) 25* *E) 28*

RESOLUCIÓN :

Se pide el número de nietos que tienen las amigas

Dato:

* Dos afirmaciones son verdaderas y una falsa para cada amiga: ***2V*** y ***1F*** c/u.

En las afirmaciones de las amigas buscaremos identificar aquellas que sean contradictorias para conocer su valor de verdad. Analicemos las afirmaciones de Emilia y Leonor:

Emilia: Tengo ***7*** nietos. (F) — 3° 1V y 1F se deduce
<u>Tengo ***2*** nietos menos que Gabriela.</u> (V) 5°
Tengo un nieto más que Leonor. (V) 2°
Leonor: Tengo menos nietos que Emilia. (V) 2° — 1° contradicción (V y F)
<u>Emilia tiene ***8*** nietos.</u> (V)
Gabriela tiene menor nietos que Emilia (F)

Se observa que la segunda afirmación de Emilia con la tercera de Leonor son contradictorias (Emilia dice tener menos que Gabriela y Leonor dice lo contrario), y la tercera afirmación de Emilia con la primera de leonor tienen el mismo valor de verdad (las dos afirman que Leonor tiene menos nietos que Emilia), entonces necesariamente estas afirmaciones tienen que ser verdaderas. Con esto se deduce que:

* Emilia tiene un nieto más que Leonor.
* Emilia debe tener ***7*** u ***8*** nietos.

De esta última deducción, se concluye que la tercera afirmación de Gabriela es falsa.

Gabriela:
Yo no soy la que tengo menos nietos. (V) 4° se deduce
Entre el # de nietos de Leonor y el mío
hay una diferencia de ***3***, (V)
Leonor tiene ***10*** nietos. (F) 4°

Finalmente, con la segunda afirmación de Gabriela se concluye que la segunda afirmación de Emilia es verdadera y el resto de valores de verdad se puede completar.

Emilia	Leonor	Gabriela
8 nietos	*7* nietos	*10* nietos

∴ Total de nietos=*25*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Alan siempre miente los lunes, miércoles y viernes y dice la verdad los demás días de la semana. Cierto día tuvo el siguiente diálogo con Liliana:

Pregunta Liliana: ¿Vamos al teatro?

Responde Alan: No , porque hoy es lunes.

Pregunta Lillana: ¿y si vamos mañana?

Responde Alan: No, porque mañana será jueves

¿Qué día de la semana se realizó la conversación?

A) domingo ***B) martes*** ***C) viernes***
D) lunes ***E) sábado***

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar el día de la conversación.

Datos:

* Alan miente: lunes, miércoles y viernes;
* Alan dice la verdad el resto de los días.

De las respuestas de Alan:

Alan: No , porque ***hoy es lunes***.

Alan: No, porque ***mañana será jueves***.

Se deduce que el miente (si hoy es lunes, mañana no sería jueves, y viceversa). Entonces la conversación fue un día que Alan miente, lunes, miércoles o viernes, pero si:

Alan: No porque hoy es lunes ***(F)*** ⇒ hoy no es lunes

Alan: No porque mañana será jueves ***(F)*** ⇒ hoy no es miércoles.

∴ La conversación fue día viernes.

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

En una casa donde habita una familia numerosa los *7* hijos siempre dicen la verdad o siempre mienten. Los hijos cuyos nombres son: Juan, Carlos y Pablo afirman lo siguiente:

Juan: hay ***5*** mentirosos entre los hijos.

Carlos: Hay ***4*** mentirosos entre los hijos.

Pablo: Juan siempre dice la verdad.

Si se sabe que exactamente **2** de estos tres hijos son mentirosos, ¿cuántos hijos de dicha familia siempre dicen la verdad?

A) 2 ***B) 5*** ***C) 4*** ***D) 3*** ***E) 6***

RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad de hijos que siempre dicen la verdad.

Dato:

* Cada uno de los **7** hijos dice la verdad o miente.
* Dos de los hijos que se nombran son mentirosos, de las afirmaciones : ***1V*** y ***2F***.

Por los datos se deduce que solo una de las ***3*** afirmaciones es verdadera ***(V)***, entonces, al identificarla, las otras dos afirmaciones serían falsas ***(F)*** necesariamente.

Analicemos lo que dice Pablo: supuesto

Pablo: Juan siempre dice la verdad. ***(V)***
Juan: Hay ***5*** mentirosos entre los hijos. ***(V)***

Dos de las **3** afirmaciones serían verdaderas, contradice las condiciones.

Se deduce entonces que lo dicho por Pablo es falso ***(F)***.

Juan: hay ***5*** mentirosos entre los hijos. ***(F)***
Carlos: Hay ***4*** mentirosos entre los hijos. ***(V)***
Pablo: Juan siempre dice la verdad. ***(F)***

La afirmación de Carlos necesariamente es la verdadera, es decir, ***4*** de los ***7*** hijos son mentirosos.

∴ ***3*** hijos siempre dicen la verdad.

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Andrea, Beatriz, Carla, Diana y Eva han competido en la gran maratón de Lima. Al preguntarles quién de ellas ganó, sus respuestas fueron las siguientes:

Andrea : Ganó Beatriz.

Beatriz : Ganó Carla

Carla : Ganó Eva.

Diana : Yo gané.

Eva : Carla mintió cuando dijo que yo gané.

Si una de ellas, es la ganadora y solo una de ellas

dice la verdad, ¿quién es la veraz?

A) Andrea *B) Beatriz* *C) Carla*
D) Diana *E) Eva*

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar a la que dice la verdad (veraz)

Datos:

* Una de las cinco es la ganadora.
* Solo una dice la verdad ***(1V* y *4F)***.

Para determinar quien dice la verdad identificaremos dos proposiciones que son contradictorias ***(1V* y *1F)*** de tal manera que entre esas dos proposiciones está la verdadera, con ello, las otras tres proposiciones que quedan serán necesariamente falsas.

Andrea: Ganó Beatriz. ***(F)*** ← se deduce
Beatriz: Ganó Carla ***(F)***
Carla: Ganó Eva. ***( )*** ← contradictorias
Diana: Yo gané. ***(F)*** **V y F**
Eva: Carla mintió cuando dijo que yo gané. ***( )***

Luego, de lo que dice Beatriz:

Beatriz: <u>No</u> ganó Carla ***(F)*** ⇒ si ganó Carla.

Entonces , en las proposiciones contradictorias se deduce:

Carla: Ganó Eva .... ***(F)...solo una de ellas ganó (dato)***
Eva: Carla mintió cuando dijo que yo gané. ***(V)***

∴ Eva es la veraz.

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

En un edificio de ***3*** pisos se sabe que los del primer piso siempre mienten, los del segundo piso siempre dicen la verdad y los del tercer piso a veces dicen la verdad o a veces mienten.

Liz conversa con tres personas Antonio, Bruno y César cada uno de un piso diferente, y le dicen lo siguiente:

Antonio : Yo soy del tercer piso.
Bruno : Yo soy del segundo piso.
César : Antonio miente

Si se sabe que el día de hoy el del tercer piso dijo la verdad, ¿quién vive en el segundo piso?

A) Antonio *B) Bruno* *C) César*
D) Antonio ó Bruno *E) Bruno o César*

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar la persona que vive en el segundo piso.

Datos: (es el valor de verdad de sus proposiciones)

*Los del ***1er*** piso: siempre mienten ⟶ ***(F)***
*Los del ***2do*** piso: siempre dicen la verdad ⟶ ***(V)***
*Los del ***3er*** piso: mienten o dicen la verdad ***(V y F)***
*Hoy el del ***3er*** piso dijo la verdad.

Del último dato se deduce, entonces, que el valor de verdad de las tres proposiciones son:

2V (la del ***2do*** y ***3er*** piso) y ***1F*** (la del ***1er*** piso)

En las proposiciones, solo bastará identificar ***2*** de ellas que sean contradictorias (una será ***V*** y la otra ***F***) ya que con esto, la ***3ra*** proposición será necesariamente VERDADERA).

Antonio: Yo soy del ***3er*** piso.( ) se deduce
Bruno: Yo soy del ***2do*** piso. (V) contradictorias ***(V y F)***
César: Antonio miente ( )

Se observa que lo que dice Antonio y César son proposiciones contradictorias, ya que, si Antonio dice la verdad, entonces César miente, y viceversa; con la cual se deduce que lo dicho por Bruno es necesesariamente verdadero (soy del ***2do*** piso).

∴ Bruno vive en el ***2do*** piso.

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Hugo, Paco y Luis asaltaron una joyería de la que robaron dinero y joyas y se pusieron de acuerdo para ocultar un maletín con el dinero y otro con las joyas posteriormente fueron capturados y sus declaraciones fueron.

Hugo: "el maletín con el dinero lo tiene Luis"
Paco: "el maletín con el dinero lo tengo yo"
Hugo: "el maletín con joyas lo tiene Paco"
Luis: "el maletín con las joyas lo tiene Hugo"

Si los tres mienten siempre, ¿quién tiene el maletín con el dinero y quién el maletín con las joyas, respectivamente?

A) Paco - Hugo *B) Luis - Paco* *C) Hugo - Luis*
D) Hugo - Paco *E) Luis - Hugo*

RESOLUCIÓN :

Se pide los nombres de los que tienen el maletín con el dinero y el maletín con las joyas, respectivamente.

Datos:

* Un maletín tiene dinero y el otro maletín las joyas.

* Los *3* siempre mienten...... *4F*.

Analizamos las declaraciones de cada uno teniendo en cuenta que son falsas, en donde:

Hugo: El maletín con el dinero lo tiene Luis. ***(F)***

⇒ no lo tiene Luis.

Paco: El maletín con el dinero lo tengo yo. ***(F)***

⇒ no lo tiene Paco.

Hugo: El maletín con las joyas lo tiene Paco. **(F)**

⇒ no lo tiene Paco.

Luis: El maletín con las joyas lo tiene Hugo. ***(F)***

⇒ no lo tiene Hugo.

Se deduce de las dos primeras conclusiones que:

Hugo tiene el maletín con el dinero.

y de las dos últimas conclusiones que:

Luis tiene el maletín con joyas.

∴ Hugo - Luis

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

Cinco amigos se encontraban conversando escalando una montaña, cada uno de ellos traía puesto un chullo y en la conversación se escucho el siguiente diálogo:

Mario : "Yo no tengo cabellos rubios"

Luis : "Yo no tengo cabellos negros"

Antonio : "Yo no tengo cabellos rubios"

Ismael : "Yo tengo el cabello rubio"

José : "Yo tengo el cabello castaño"

Si se sabe que uno de ellos tiene cabello rubio y los demás tienen cabellos negros, y que solo una de las afirmaciones es cierta. ¿Quién tiene cabellos rubios?

A) Mario ***B) Luis*** ***C) Antonio***
D) Ismael ***E) José***

RESOLUCIÓN :

Se pide identificar al que tiene cabellos rubios.

Dato:

* Solo uno tiene cabellos rubios y el resto cabellos negros.

* Solo una afirmación es cierta *(1V* y *4F)*.

Del primer dato se sabe que los amigos tienen cabellos negros (*4* de ellos) y cabellos rubios (solo uno), por lo tanto, lo que dice José será necesariamente verdadero.

José: Yo no tengo cabellos castaños. ***(V)***

Entonces, el sería el único que dice una afirmación verdadera con lo cuál , los otros *4* amigos dan afirmaciones falsas. Se deduce luego :

Mario : Yo <u>no</u> tengo cabellos rubios ***(F)***⇒ Tiene cabellos rubios.

Luis : Yo <u>no</u> tengo cabellos negros ***(F)*** ⇒ tiene cabellos negros.

Antonio : Yo <u>tengo</u> cabellos rubios ***(F)***⇒ tiene cabellos negros .

Ismael : Yo <u>tengo</u> cabellos rubios ***(F)*** ⇒ tiene cabellos negros.

Jose : Yo no tengo cabellos castaños ***(V)*** ⇒ tiene cabellos negros.

∴ Mario tiene cabellos rubios.

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

En la selva la tribu *A* miente los jueves, viernes y sábado, la tribu *B* miente los domingos, lunes y martes; y en los días en los que no mienten las tribus dicen la verdad. Un día se encontraron un miembro de cada tribu y sostuvieron un diálogo:

Tribu *A*: ¡Hola! ¡ayer yo mentí!

Tribu *B*: ¡Hola! ¡ayer yo también mentí!

¿ En que día sucedió ese encuentro?

A) miércoles ***B) domingo*** ***C) jueves***
D) sábado ***E) martes***

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar el día del encuentro (hoy)

Se sabe que las tribus *A* y *B* dicen la verdad ***(V)*** o mienten ***(F)*** los días:

	Dom	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab
Tribu A	V	V	V	V	F	F	F
Tribu B	F	F	F	V	V	V	V

Al encontrarse un miembro de cada tribu dialogan, entonces, según sea el día del encuentro los dos pueden decir la verdad (día miércoles) o puede uno decir la verdad y el otro mentir (cualquier otro día). Analicemos los casos:

<u>*Caso 1*</u>: (que los dos digan la verdad)

	Ayer	Hoy
Tribu *A*: ¡Hola! ¡ayer te mentí! ***(V)***	F	V
Tribu *B*: ¡Hola! ¡ayer yo también mentí! ***(V)***	F	V

<u>imposible</u>

⇒ No hay un día de la semana en que las dos

tribus mientan.

Caso 2: (que uno diga la verdad y el otro mienta)

Tribu *A*: ayer mentí *(V)*
Tribu *B*: ayer mentí *(F)* ⇨

Ayer	Hoy
F	V
V	F

ó

Tribu *A*: ayer mentí *(F)*
Tribu *B*: ayer mentí *(V)* ⇨

Ayer	Hoy
V	F
F	V

¡imposible!

	Dom	Lun	Mar	Mie	Jue	Vie	Sab	Dom
Tribu A	V	V	V	V	F	F	F	V
Tribu B	F	F	F	V	V	V	V	F
							ayer	hoy

∴ El día del encuentro fue domingo.

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

Raúl se encuentra después de tiempo con dos hermanas gemelas cuyos nombres son Lola y Lita y les pregunta sus nombres, a lo cual responden:

* "Yo soy Lola" - contesta una.
* "Si lo que ella dice es verdad, entonces yo soy Lita" - responde la otra.

Si se sabe que solo una de ellas miente, ¿quién dice la verdad y quién miente respectivamente?

A) Lita - Lola *B) Lola - Lita* *C) Lola - Raúl*
D) Lita - Raúl *E) no se puede determinar*

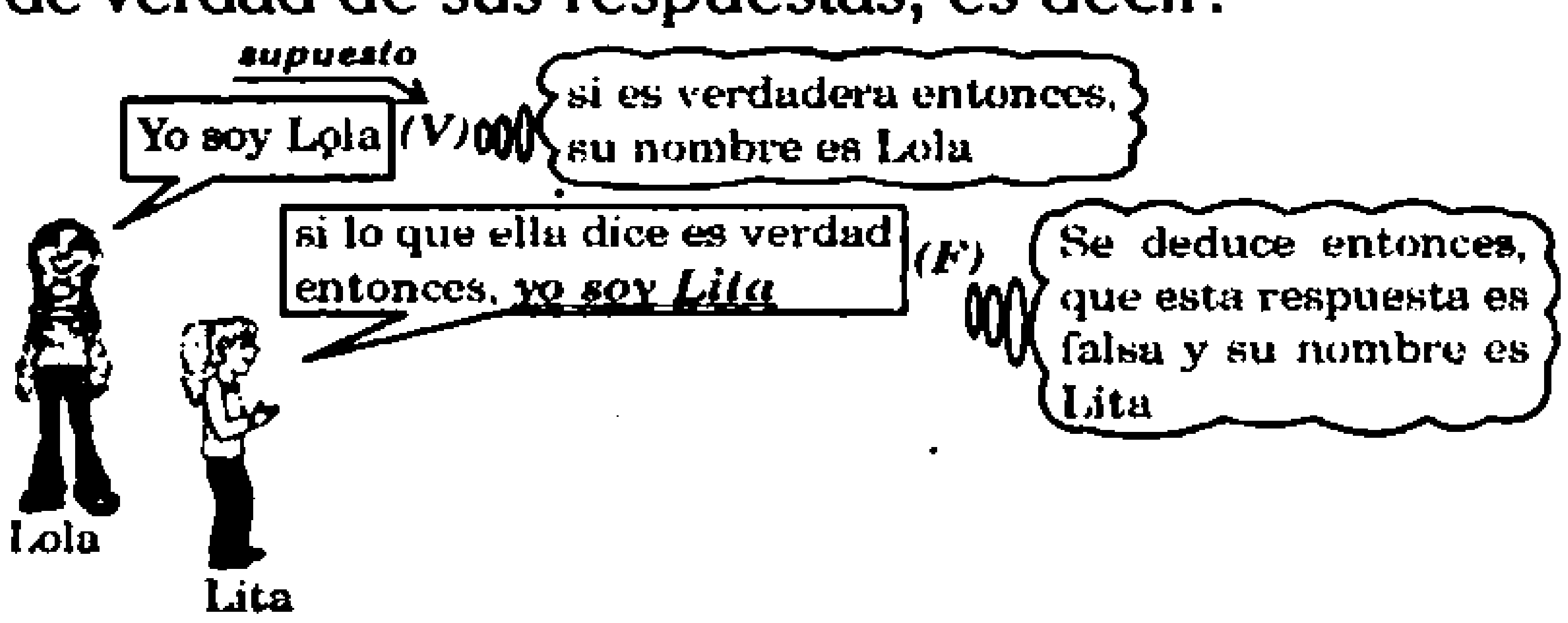
RESOLUCIÓN :

Se pide determinar quién dice la verdad y quién miente respectivamente.

Datos:

* Una se llama Lola y otra Lita.
* Solo una miente.

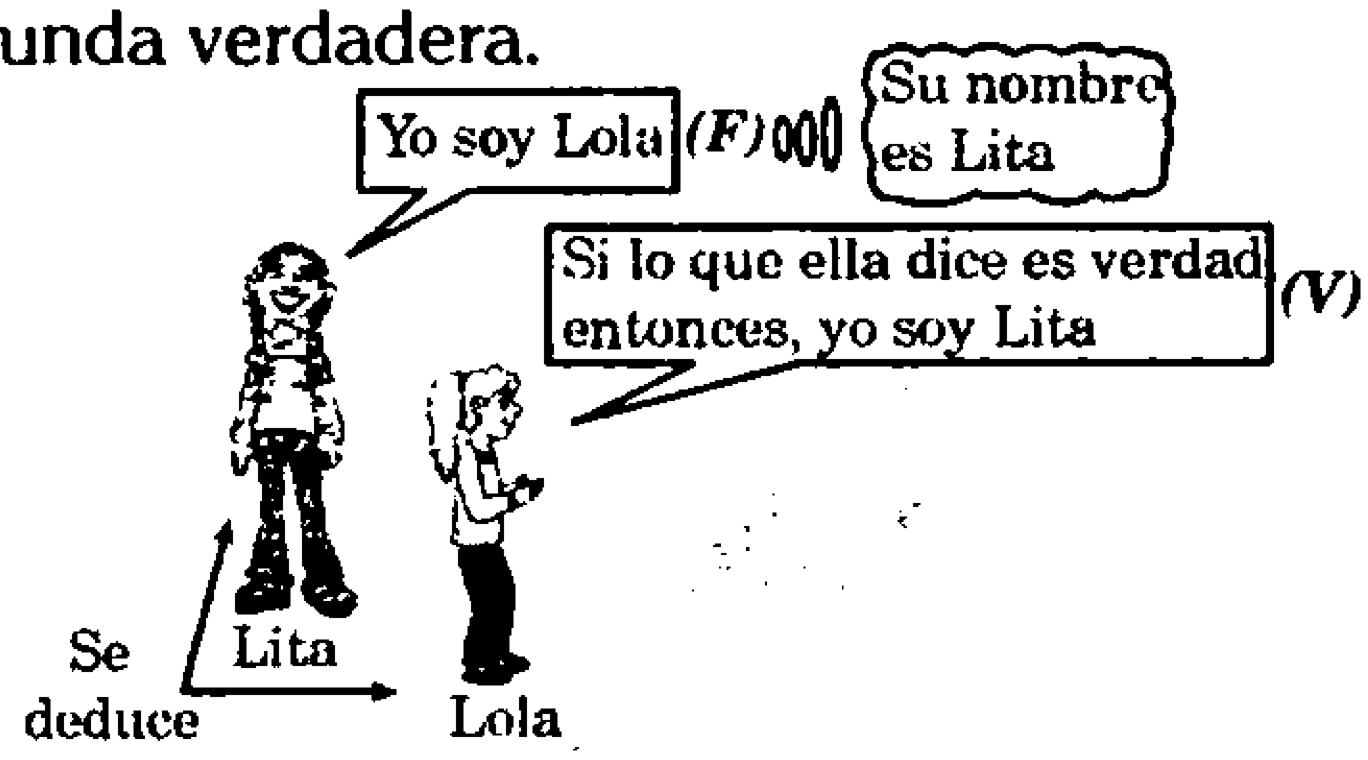
Además, ellas responden pero no se sabe quién miente, entonces tenemos que suponer el valor de verdad de sus respuestas, es decir:



* Pero, lo que dice Lita, en realidad, es VERDADERO, entonces, no puede ser FALSO, encontramos una ¡contradicción!.

Esto quiere decir que se partió de un supuesto INCORRECTO.

Entonces la primera respuesta es FALSA y la segunda verdadera.

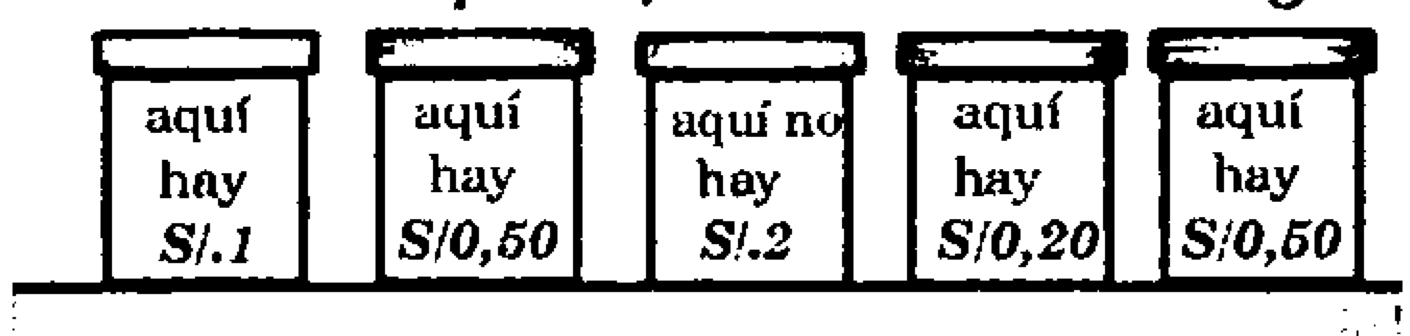


∴ Lola dice la verdad y Lita miente.

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

En *5* cajas de distintos colores, se han distribuido *5* monedas: Una de ***S/.2*** ; dos de ***S/.1*** ; una de ***S/.0,50*** y otra de ***S/.0,20***. Luego, en cada caja se realiza una inscripción, tal como indica el gráfico.



Si en cada caja solo hay una moneda y solo una de las inscripciones es falsa, ¿cuánto suman lo que contiene la caja azul y la caja marrón?

A) S/.0,70 *B) S/.3* *C) S/.1,50*
D) S/.2 *E) S/.1,20*

RESOLUCIÓN :

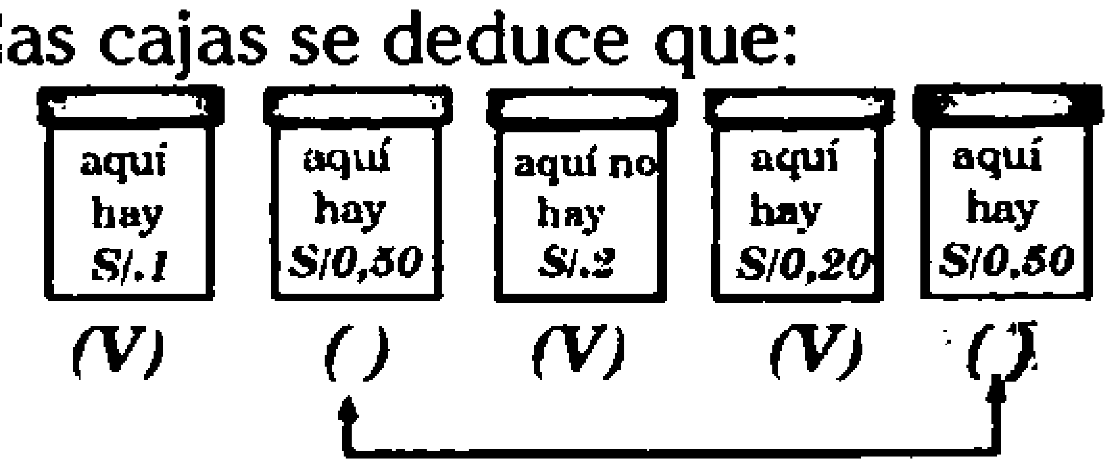
Se pide la suma de los contenidos de las cajas azul y marrón.

Datos:

* Se tiene *5* monedas: ***S/.2; S/.1;0,50 ; S/.0,20.***
* Cada moneda está dentro de una caja.
* Solo una inscripción es falsa.

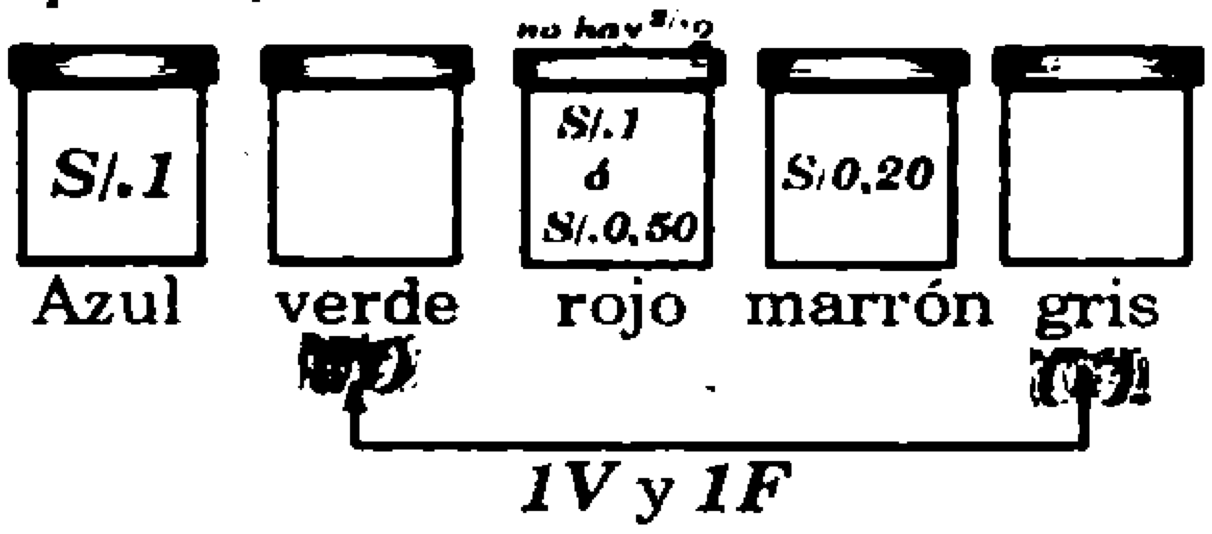
Analizamos las inscripciones en cada caja para ver si encontramos dos afirmaciones que sean contradictorias, de ser así, la afirmación falsa será una de ellas, y las otras *3* restantes serán necesariamente verdaderas.

En las cajas se deduce que:



necesariamente ***1V*** y ***1F***, por que solo hay una moneda de ***S/0,50***

Luego,indicamos el contenido en cada caja (lo que se pueda):



$\Rightarrow C_{azul} + C_{marrón} = S/.1 + S/.0{,}20 = S/.1{,}20$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

En un grupo de cuatro personas, tres de ellos tiene ojos negros y la otra tiene ojos azules. Las personas que tienen ojos negros siempre mienten y las personas que tienen ojos azules dicen la verdad. En una conversación entre estas cuatro personas se escuchó decir de cada una lo siguiente:

Gina: Yo tengo ojos azules.

Irene: Gina mintió cuando dijo que tiene ojos azules.

Cecilia: Irene es quien tiene ojos azules.

Susan: Cecilia dice la verdad.

¿Quién tiene ojos azules?

A) Gina ***B) Irene*** ***C) Cecilia***
D) Susan ***E) María***

RESOLUCIÓN :

Se pide identificar a la persona que tiene los ojos azules.

Datos:

* Los que tiene ojos NEGROS, siempre MIENTEN.
* Los que tienen ojos AZULES, dicen la VERDAD.
* Hay ***3*** con ojos negros y una con ojos azules.

Del último dato se deduce que de las afirmaciones dadas por las cuatro personas, serán ***3F*** y solo ***1V***, entonces, al identificar dos afirmaciones contradictorias estaremos hallando la afirmación verdadera y las otras dos que restan, deben ser falsas.

Entonces, en las afirmaciones:

contradicción *1 V y 1 F*

* ***Gina:*** Yo tengo ojos azules.*( )*
* ***Irene:*** Gina mintió cuando dijo que tiene ojos azules.*( )*
* ***Cecilia:*** Irene es quien tiene ojos azules.*(F)* → se deduce
* ***Susan:*** Cecilia dice la verdad. *(F)*

De lo dicho por Cecilia se deduce:

Irene tiene ojos negros, entonces ¡miente!, luego, en las afirmaciones contradictorias se deduce:

* Gina: *Yo tengo ojos azules*. ***(V)***
* Irene: Gina mintió cuando dijo tener ojos azules. ***(F)***

$\therefore$ Gina tiene ojos azules.

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

El jefe de una pandilla se encontraba furioso porque uno de sus pandilleros acababa de asaltar una tienda, cuando el estaba ausente. Al interrogarlos, cada uno dice lo siguiente:

Alberto dijo: "fue Bruno o Darío"

Bruno dijo: "Ni Elmer ni yo lo hicimos"

Carlos dijo: "Ustedes dos están mintiendo"

Darío dijo: "No uno de ellos está mintiendo, el otro está diciendo la verdad"

Elmer dijo: "No, Darío, eso no es cierto"

Ahora bien, el jefe sabía que tres de los pandilleros siempre decían la verdad, pero que dos siempre mentirían. ¿Quién asaltó la tienda?

A) Alberto ***B) Bruno*** ***C) Carlos***
D) Darío ***E) Elmer***

RESOLUCIÓN :

Se pide encontrar al que asaltó la tienda.

Datos:

* Del valor de verdad de las afirmaciones se sabe que: ***3V*** y ***2F***.

Para determinar el valor de verdad de las afirmaciones de cada uno de los pandilleros buscaremos afirmaciones contradictorias, así, una será verdadera y la otra falsa, y con ayuda del dato ***(3V*** y ***2F)*** identificaremos al que asaltó la tienda.

De lo dicho por cada uno:

Alberto: Fue Bruno o Darío.

Bruno: Ni Elmer ni yo lo hicimos.

Carlos: Ustedes dos están mintiendo.

Darío: No uno de ellos está mintiendo, el otro está diciendo la verdad *( )*

Elmer : No Darío, eso no es cierto*( )*

contradictorias ***(V y F)***

Se observa que lo que dice Darío y Elmer se contradicen, es decir, si Darío dice la verdad, Elmer mentiría, y viceversa.

Con esto, ya tenemos una ***V*** y una ***F***, falta una ***F*** y

2V.

Ahora, analicemos lo que dice Carlos, quien se refiere a lo que dice Alberto y Bruno.

Carlos: ustedes dos están mintiendo. *(V)* supuesto

⇒ Alberto y Bruno darían afirmaciones falsas *(2F)*.

Pero solo faltaba una afirmación falsa, se deduce entonces que:

Alberto: Fue Bruno o Darío. *(V)* se deduce
Bruno: Ni Elmer ni yo lo hicimos. *(V)*
Carlos: Ustedes dos están mintiendo *(F)* necesariamente la F que faltaba
Darío: No, uno de ellos está mintiendo, el otro está diciendo la verdad. ( ) V; F
Elmer: No Darío, eso no es cierto. ( )

Como Alberto y Bruno dicen la verdad, de lo dicho por Alberto de deduce que fue ***Bruno o Darío***. Pero Bruno también dice la verdad, de donde se deduce que Bruno no fue el culpable, entonces ! fue Darío ¡.

∴ Darío asaltó la tienda.

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

En una lejana comunidad existen solo dos clases de personas: los afirmados siempre dicen la verdad y los negados que siempre mienten. Un día un extranjero llegó de visita a dicha comunidad y se encontro con cuatro de sus habitantes. Al preguntarles por sus clases respondieron, uno después del otro, de la siguiente manera:

Primero: Tres de nosotros somos afirmados.

Segundo: Eso no es cierto, sólo uno de nosotros es afirmado.

Tercero: Si , eso es verdad.

Cuarto: Si , lo que dijo el segundo es verdad.

¿Cuántos de los cuatro interrogados son negados?

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

Se pide la cantidad de negados de los cuatro habitantes interrogados

Datos:

* Afirmados, siempre dicen la verdad. *(V)*
* Negados, siempre mienten. *(F)*

En lo dicho por los *4* habitantes se observa que el ***3ero*** y ***4to*** confirman lo dicho por el ***2do***, de aquí, si el ***2do*** dice la verdad o miente, entonces el ***3ero*** y ***4to*** también dirán la verdad o mentirán respectivamente. Se deduce entonces que:

Primero: Tres de nosotros somos ***afirmados***.
Segundo: Eso no es cierto, sólo uno de nosotros es ***afirmado***.
Tercero: Si eso es verdad. ■ igual valor de verdad
Cuarto: Si lo que dijo el segundo es verdad. ■

Pero lo dicho por el ***2do*** no puede ser verdadero, pero sino solo debería haber una proposición verdadera y con ello se contradice lo deducido.

Primero: Tres de nosotros somos ***afirmados***. *(F)*
Segundo: Eso no es cierto, sólo uno de nosotros es ***afirmado***. *(F)* se deduce
Tercero: Si eso es verdad. *(F)*
Cuarto: Si lo que dijo el segundo es verdad. *(F)*

Se deduce que lo dicho por el primero no podría ser verdadero porque sino habrían ***3*** proposiciones verdaderas, por ello, tiene que ser falso.

∴ Los *4* interrogados son ***negados***.

RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

Manuel, Nico, Orlando y Pablo participaron en un concurso de atletismo. Un periodista que llegó cuando ya había terminado la competencia, preguntó a tres de ellos en que puesto habían llegado, al cual contestaron de la siguiente manera:

Manuel: "Pablo fue el primero y Nico el segundo"

Nico: "Pablo fue segundo y Orlando el tercero"

Pablo: "Orlando fue el último y Manuel fue segundo"

Si cada uno de los entrevistados dijo una verdad y una mentira , además no hubo empates, ¿quién llegó primero y quién llego segundo respectivamente?

A) Manuel - Nico *B) Orlando -Nico*
C) Manuel - Orlando *D) Pablo - Manuel*
E) Nico - Pablo

RESOLUCIÓN :

Se pide los nombres del que llegó primero y segundo respectivamente.

Datos.

* Solo participaron los cuatro: Manuel, Nico, Orlando y Pablo.
* De las afirmaciones de cada uno, ***1V*** y ***1F***.

* No hubo empates.

Como no hubo empates, no puede haber dos personas llegando en el mismo lugar, además, tampoco una persona puede haber llegado en dos lugares distintos . Entonces, encontraremos el valor de verdad de las proposiciones analizando aquellas que mencionan a la misma persona en lugares distintos o personas distintas en el mismo lugar:

Manuel: Pablo fue el primero.
Nico fue el segundo. ■
Nico: Pablo fue el segundo. ■
<u>*Orlando fue el tercero*</u> ( ) — V y F (necesariamente)
Pablo: Orlando fue el último*(4to)*( ) — F y V (se deduce)
Manuel fue el segundo. ■

Lo dicho por Nico y Pablo sobre Orlando no pueden ser ambas falsas ***(F)*** porque lo dicho por ambos sobre quién llegó ***2do*** serían verdaderas ***(V)***, lo cual contradice el dato de que no hay empates. De aquí se deduce también que:

Manuel: Pablo fue el primero. ***(V)***
Nico fue el segundo. ***(F)***
Nico: Pablo fue el segundo. ( )
Orlando fue el tercero ( )
Pablo: Orlando fue el último ***(4to)***( )
Manuel fue el segundo. ( )
(como hay 1V y 1F, uno de los dos fue 2do)

Finalmente, el valor de verdad del resto de afirmaciones ya se puede deducir a partir de lo encontrado sobre Manuel:

Manuel : Pablo fue el primero ***(V)***
Nico fue el segundo ***(F)***
Nico : Pablo fue segundo ***(F)***
Nico fue el tercero ***(V)***
Pablo : Orlando fue el último (***4to***) ***(F)***
Manuel fue segundo ***(V)***

1°	2°	3°	4°
Pablo	***Manuel***	***Orlando***	***Nico***

∴ Pablo y Manuel.

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

En una comunidad existen dos tipos de nativos, los políticos que siempre mienten y los no políticos que siempre dicen la verdad. Un extranjero se encuentra con ***3*** nativos y pregunta al primero de ellos si es político, este responde a la pregunta. Luego el segundo de ellos informa que el primero niega ser político, pero el tercero informa que el segundo miente. ¿Qué tipo de nativo es el segundo y tercero respectivamente?

A) político -político ***B) político -no político***
C) no político -no político ***D) no político -político***
E) no se puede determinar

RESOLUCIÓN :

Se pide determinar el tipo de nativo que es el segundo y tercero respectivamente.

Dato:

* Los políticos siempre mienten.
* Los no políticos siempre dicen la verdad.

Analicemos la respuesta de los nativos al preguntarle el extranjero si son políticos:

Si es <u>***político***</u> (miente), negará ser político.

Si es <u>***no político***</u> (dice la verdad), negará ser político.

La respuesta siempre es la misma para cualquiera de los dos tipos de nativos: ***¡no soy político!***

Entonces, del enunciado: ..:<u>*El segundo informa que el primero niega ser político, pero el tercero informa que el segundo miente*</u>, se deduce que:

* El segundo dice ***la verdad*** ⇒ es no político.
* El tercero ***miente*** ⇒ es político.

⇒ No político – político

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Cuatro niños acusados de haber realizado una travesura son interrogados y responden de la siguiente manera:

* ***Juan:*** Yo no fui.
* ***Antonio:*** Yo no soy el culpable.
* ***Javier:*** Tres de ellos están mintiendo.

* ***Claudio:*** Fue Antonio.

Si dos de ellos están mintiendo y solo uno de estos es el culpable, con seguridad, ¿quién realizó la travesura?

A) Juan ***B) Antonio*** ***C) Javier***
D) Claudio ***E) Andrés***

RESOLUCIÓN :

Se pide identificar al niño que realizó la travesura.

Datos:

* ***2*** mienten, donde uno es culpable. ***2F*** y ***2V***
* En las proposiciones de deduce, a partir de los datos que:

* ***Juan***: Yo no fui. ***(V)*** ← se deduce
* ***Antonio***: Yo no soy culpable. ***(F)***
* ***Javier***: Tres de ellos mienten. ***(F)*** — contradicción V y F
* ***Claudio***: Fue Antonio. ***(F)***

→ solo 2 mienten

Lo dicho por Javier es falso y en la contradicción también hay otra afirmación falsa, con lo cual ya se completa las afirmaciones falsas, entonces, lo dicho po Juan necesariamente es verdadero (Juan no realizó la travesura). Luego, en las afirmaciones contradictorias se tiene los siguientes casos:

* ***Juan***: Yo no fui. ***(V)*** ➡ Juan no fue
* ***Antonio***: Yo no soy culpable. ***(V)*** ➡ Antonio no fue
* ***Javier***: Tres de ellos mienten. ***(F)*** } cualquiera de
* ***Claudio***: Fue Antonio. ***(F)*** } los dos puede ser

⇒ No se puede asegurar quién ***es el culpable***.

En cambio, sí:

* ***Juan***: Yo no fui. ***(V)***
* ***Antonio***: Yo no soy culpable. ***(F)***
* ***Javier***: Tres de ellos mienten. ***(F)***
* ***Claudio***: Fue Antonio. ***(V)*** ← Antonio hizo la travesura

∴ Antonio realizó la travesura con seguridad.

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Un señor tiene solo dos hijos y cada uno de estos tiene un sólo hijo. Estas cinco personas establecen la siguiente conversación:

Antonio: Soy hijo de David ; Bruno es mi primo.

Bruno: Soy primo de Enzo, David es mi tío.

César: Bruno es mi primo, Antonio es mi tío.

David: No soy menor que Enzo, soy sobrino de César.

Enzo: Soy hijo de César, Antonio es mi sobrino.

Si uno de ellos solo dijo mentiras, otros dos solo dijeron la verdad y los dos restantes dijeron cada uno, una verdad y un mentira, ¿cuál de los siguientes enunciados son correctos?

I) César y David son primos.

II) David es hijo de César

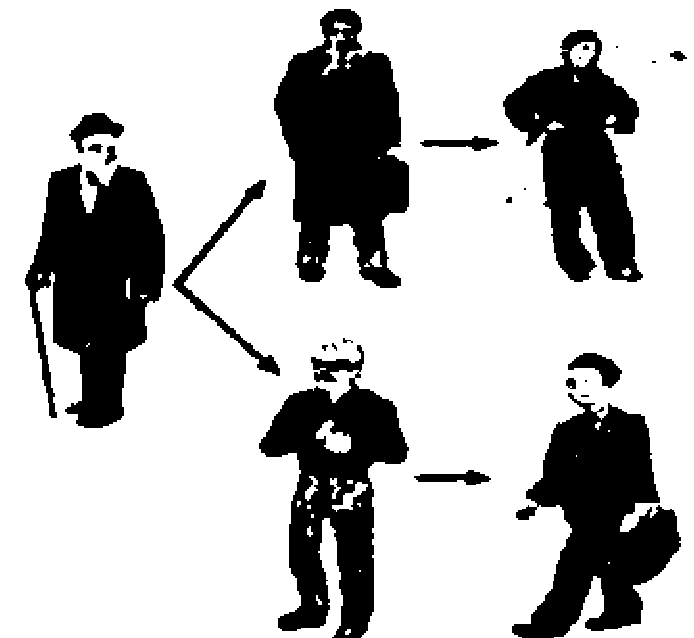
III) César es padre de Bruno.

A) solo I ***B) solo II*** ***C) solo III***
D) I y II ***E) II y III***

RESOLUCIÓN :

Datos:

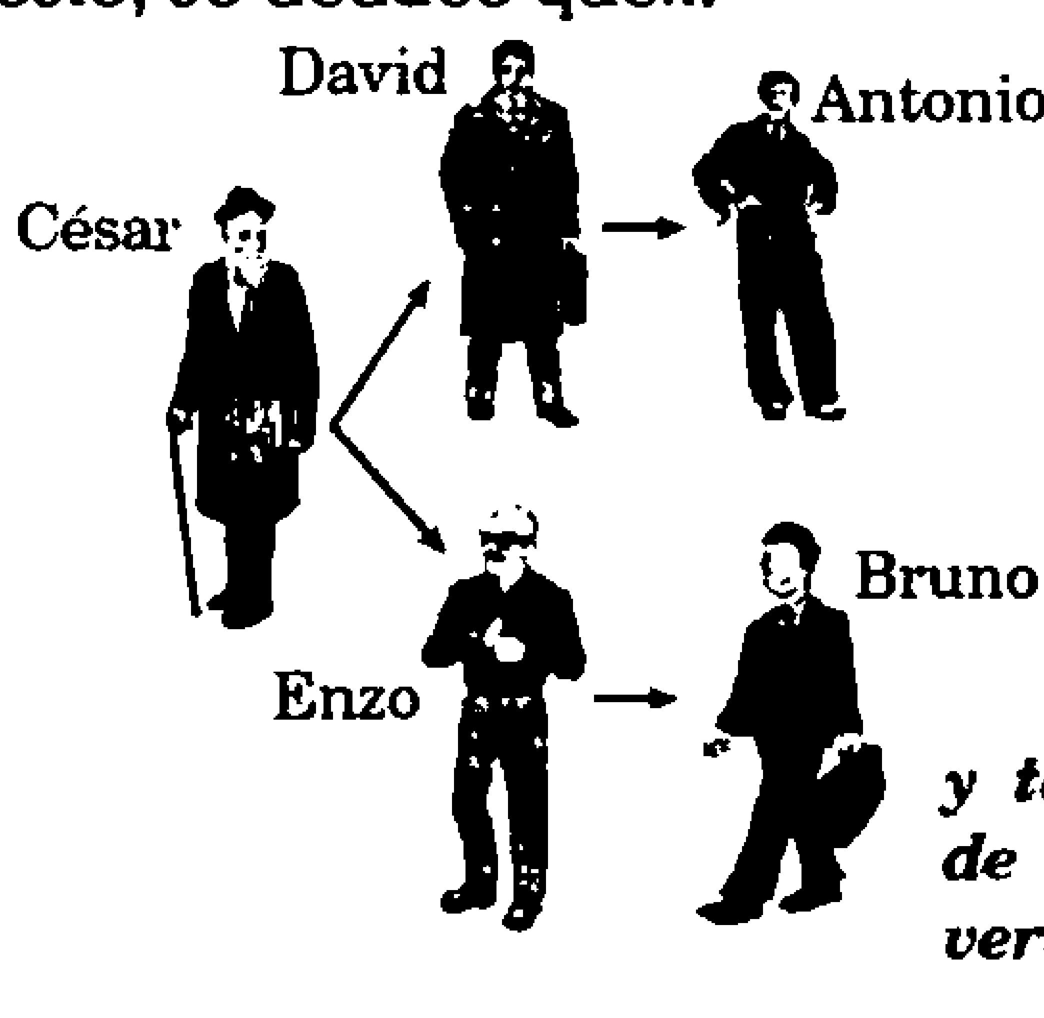
* ***1FF; 2VV; 2(V*** y ***F)***
* Un señor tiene ***2*** hijos y estos un hijo cada uno



Analizaremos las proposiciones para encontrar valores contrarios o iguales:

Antonio: Soy hijo de David. ***(F)***
Bruno es mi primo ***(F)*** ← 1° al menos uno es falso
Bruno: Soy primo de Enzo.
David es mi tío. ***(V)***
César: Bruno es mi primo. ***(F)***
Antonio es mi tío. ***(F)*** — al menos uno es falso (2°)
David: No soy menor que Enzo.
Soy sobrino de César ***(F)*** ← César no tiene sobrinos
Enzo: Soy hijo de César ***(V)***
Antonio es mi sobrino ***(V)***

Como los ***4*** primeros tienen una misma afirmación señalada que puede ser falsa , entonces , Enzo será el que dice ***verdades***. Con esto, se deduce que...



y tambien el resto de los valores de verdad

Finalmente :

I) César y David son primos.*(F)*

II) David es hijo de César *(V)*

III) César es padre de Bruno.*(F)*

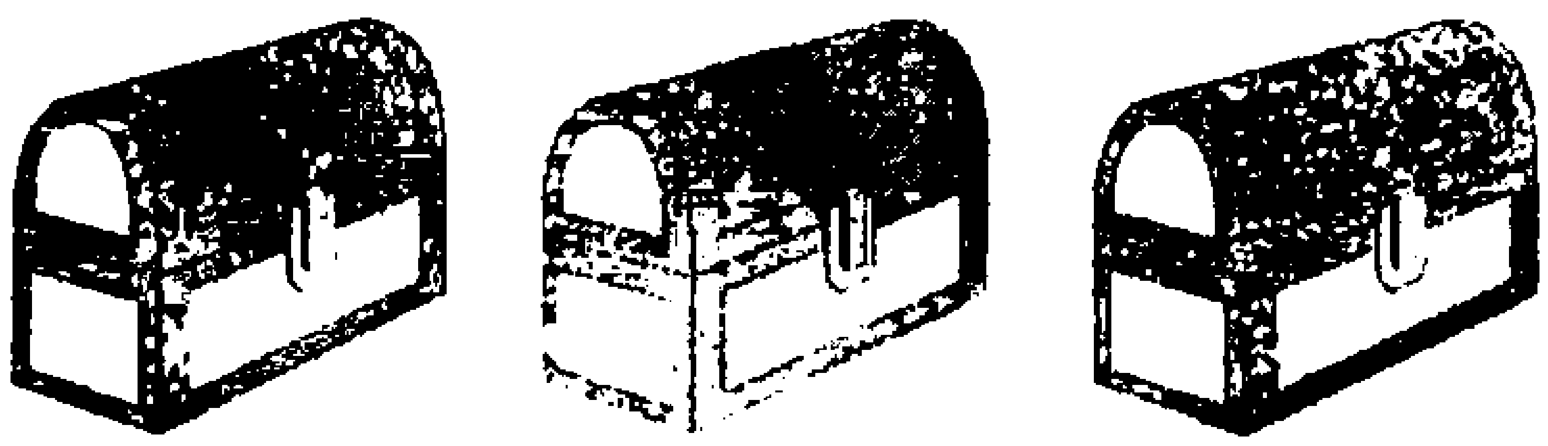
⇒Es correcto solo *II*

RPTA : "B"

PRACTICA DIRIGIDA

01 En uno de los cofres se encuentra el retrato de una bella dama , la única ayuda que dispone el adivinador es saber que uno y sólo uno de los letreros está mal . ¿Dónde está el retrato?

El retrato está aquí	El retrato no está en este cofre	El retrato no está en el cofre del centro



(I) (II) (III)

A)en I ***B)en II*** ***C) enIII*** ***D) en I ó III***

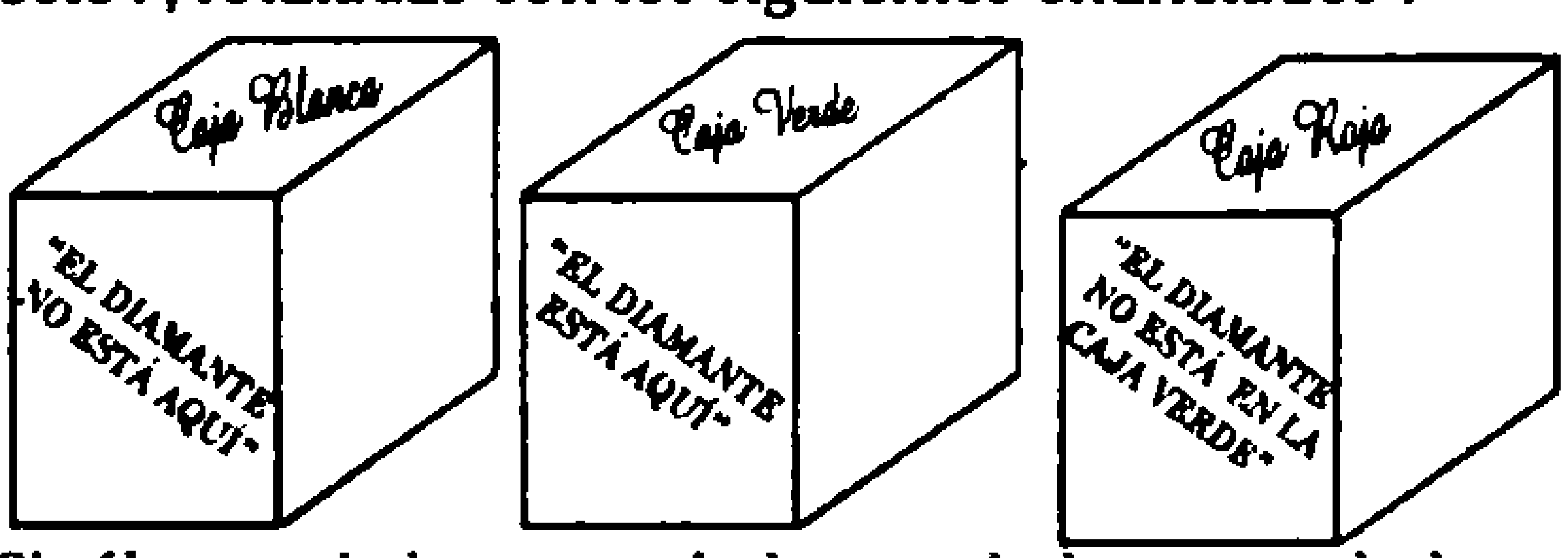
02 Cuatro hermanas son interrogadas por su madre , pues una de ellas usó sus joyas en una fiesta sin su permiso:

- Katia: ***"Liliana fue"***
- Liliana: ***"Maribel fue"***
- Maribel: ***"Liliana miente al decir que fui yo"***
- Zulema: ***"yo no fui"***

Si la madre sabe que solo una de ellas dice la verdad, ¿Quién es la culpable?

A) Katia ***B) Liliana*** ***C) Maribel***
D) Zulema ***E) No se puede determinar***

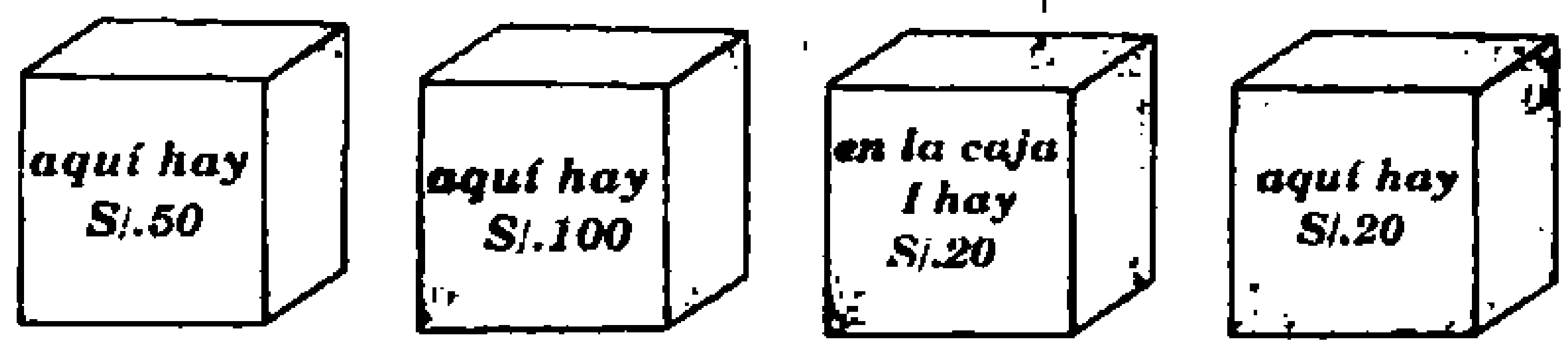
03 Hay *1* diamante y *3* cajas cerradas de diferente colo*r*, rotuladas con los siguientes enunciados :



Si sólo uno de los enunciados rotulados es verdadero. ¿En qué caja está el diamante?

A) Verde ***B) Blanca*** ***C) Roja***
D) Negra ***E) "A" o "C"***

04 Cuatro billetes de ***S/.50 , S/.200 ,S/.100*** y ***S/.20*** están depositados en las cuatro cajas cerradas. En cada una de estas hay un letrero como muestra la ilustración.



caja I *caja II* *caja III* *caja IV*

Si en cada caja hay solo un billete y de las inscripciones solamente una es falsa, ¿cuánto suman las cantidades de las cajas ***I*** y ***III*** ?

A) S/.120 ***B) S/.70*** ***C) S/.300*** ***D) S/.150*** ***E) S/.250***

05 Dos personajes del cuento "Alicia en el país de las maravillas", el león y el unicornio, tienen una rara característica: uno de ellos miente lunes , miércoles y viernes y dice la verdad los otros días ; mientras que el otro miente martes , jueves y sábado y dice la verdad los otros días. Cuando Alicia les pregunta qué día era, le respondieron:

- ***León:*** "Hoy es domingo'
- ***Unicornio:*** "Ayer fue domingo"
- ***León:*** "Estamos en primavera"

Alicia pudo deducir correctamente que:

A) Es un domingo de primavera.
B) Es un lunes de primavera.
C) Es un lunes pero no de primavera.
D) Es un domingo pero no de primavera.
E) Es un lunes de verano.

06 Marco , Luis , Ignacio , Leonardo son acusados de cometer un delito , por lo cual son sometidos a un interrogatorio y el acta consigna la siguiente manifestación :

Marco : *"Fue Luis"*

Leonardo : *"Luis miente"*

Ignacio : *"yo no fui , soy Inocente."*

Luis : *"El delito lo cometió Leonardo".*

Si se sabe que sólo uno de ellos miente ,

¿quién cometió el delito?

A) Leonardo ***B) Ignacio*** ***C) Luis***
D) Marco ***E) Falta información***

07 Cuatro "hackers" son sospechosos de haber introducido un ultravirus en la Internet, y al ser interrogados por la policía contestaron:

- ***Felipe*** : "Hernán participó"

- ***Hernán***: "Victor participó"
- ***Victor*** : "Hernán miente"
- ***Jesús*** : "Yo no participé"

Si el único inocente , es el único que dice la verdad, ¿Quién es?

A) Felipe ***B) Hernán*** ***C) Victor***
D) Jesús ***E) No se puede determinar.***

08 Liliana , Paulina , Sara y Maribel participaron en un concurso de equitación. Cuando un periodista que había llegado tarde les preguntó en qué puestos habían llegado , respondieron así:

- ***Liliana :*** "Maribel fue primera y Paulina fue segunda"
- ***Paulina :*** "Maribel fue segunda y Sara fue tercera"
- ***Maribel :*** "Sara fue última y Liliana fue segunda"

* Si cada una dijo una verdad y una mentira .

¿Quién ganó el concurso?

A) Liliana ***B) Paulina*** ***C) Sara***
D) Maribel ***E) No se puede determinar***

09 Un juez estaba convencido que tres de los cuatro : Lenin , Rony , Peter o Daga , eran los asesinos de "Nemesio". Cada delincuente hizo una afirmación , pero sólo una de las cuatro afirmaciones es verdadera.

* *Lenin dijo : "**Yo no lo maté**"*
* *Rony dijo : "**Lenin miente**"*
* *Peter dijo : "**Rony miente**"*
* *Daga dijo : "**Rony lo mató**"*

¿Quién no es el asesino?

A)Lenin ***B) Rony*** ***C) Peter*** ***D)Daga***

10 Los alumnos Abel, Juan y Darío responden una evaluación de tres preguntas; cada pregunta tiene dos posibles respuestas, verdadero (V) o falso (F). Sus repuestas se muestran en el cuadro adjunto.

	Abel	Juan	Darío
1° pregunta	V	F	F
2° pregunta	F	V	V
3° pregunta	V	V	F

Se sabe que uno de ellos contestó correctamente todas las preguntas, otro se esquivocó en todas sus respuestas y el tercero falló sólo en una repuesta. ¿Cuál fue el orden de mérito de dichos alumnos?

A) Darío, Juan y Abel ***B)Darío, Abel y Juan***
C) Juan, Darío y Juan ***D) Abel, Juan y Darío***

11 Un individuo miente siempre los martes , jueves y sábados y es completamente veraz los demás días. Cierto día mantiene el siguiente diálogo con una dama:

- Pregunta la dama : ***¿Qué día es hoy?***
- Responde el individuo : ***Sábado***
- Pregunta la dama : ***¿Qué dia será mañana?***
- Responde el individuo : ***Miercoles***

¿De qué día de la semana se trata?

A) Martes ***B) Miércoles*** ***C) Jueves***
D) Viernes ***E) Domingo***

12 Un pueblo estaba dividido en dos barrios ***A*** y ***B*** . Los de ***A*** decían siempre la verdad y los de ***B*** siempre mentían . En cierta ocasión llego un turista a las afueras del pueblo y encontró un grupo de tres personas . Preguntó a uno de ellos de qué barrio era y no entendió la contestación. Entonces el turista preguntó a los otros dos ¿Qué ha dicho?

*La segunda persona le dijo:***"Ha dicho que es de A".***

* *La tercera persona le dijo :***"Ha dicho que es de B"***

¿Cuál de estas personas es la embustera?

A) La primera ***B) La segunda*** ***C) La tercera***
D) Ninguna ***E) Faltan datos para decidir.***

13 Miguel, Mario, Fernando y David son sospechosos de haber robado una billetera en una reunión a la cual los cuatro habían asistido. Cuando se les interrogó acerca del robo, ellos afirmaron lo siguiente:

Miguel: *Yo no fui.*

Fernando: *Mario fue.*

Mario: *Fernando miente al decir que fui yo.*

David: *Yo la robé.*

Si se sabe que solo uno robó la billetera y que tres mienten, ¿quién dice la verdad?

A) Miguel ***B) Mario*** ***C) David***
D) Fernando ***E) David y Fernando***

14 Karyn y Katherin , son gemelas , las cuales señalan lo siguiente :

* ***"Yo soy Karyn"*** , dice una de ellas .
* La otra comenta : "Si lo que ella dice es cierto, ***yo soy Katherin***" .

Si una de las ***2*** miente y la otra nunca lo hace , indique el nombre de la sincera .

A) Karyn ***B) Katherin*** ***C) Karina*** ***D) Falta datos***

15 Nilda, Lucía, Miriam, Sonia y Ángela son amigas y se sabe que solo una de ellas es casada. Al preguntárseles quién es la casada, ellas respondieron:

Nilda : Lucía es la casada.

Lucía : Miriam es la casada.

Miriam : Ángela es la casada.

Sonia : Yo no soy casada.

Ángela : Miriam mintió cuando dijo que yo soy casada.

Si solamente es cierta una de las afirmaciones, ¿quién es la casada?

A) Lucía *B) Miriam* *C) Nilda*
D) Sonia *E) Ángela*

16 Pepe se encuentra después de tiempo con *2* hermanos gemelos y les pregunta sus nombres, a lo cual responden .

"*Yo soy Pepe*". "*Yo soy Pipo*", "Si lo que él dice es verdad". Si se sabe que uno de ellos miente . ¿Quién dijo la verdad ?

A) Pipo *B) Pepe* *C) Ninguno*

17 En una evaluación en la que participan *3* estudiantes *"A"*, *"B"* y *"C"* respondieron *3* preguntas de la siguiente manera :

	A	B	C
1ra.	V	V	F
2da.	V	F	F
3ra.	F	F	V

Si se sabe que uno de ellos contesta todas la preguntas correctamente , otro falló en todas y el tercero falló en una . ¿Quién fallo en todas las preguntas?

A)A *B)B* *C)C* *D)Faltan datos*

18 Fernando realizó una encuesta entre *3* amigos : Miguel , Oscar y Willy , obteniendo las siguientes respuestas a las preguntas .

	MIGUEL	OSCAR	WILLY
¿Eres profesional	SI	SI	NO
¿Tienes auto?	NO	NO	SI
¿Te gusta viajar?	SI	NO	NO

Pero luego recordó que uno de ellos miente siempre, otro sólo miente una vez cada tres preguntas que se le hace y el otro siempre dice la verdad . Además , si todos hubiesen dicho la verdad las respuestas de los tres hubiese sido la misma . ¿Quién miente siempre?

A)Miguel *B)Oscar* *C)Willy* *D)F.D.* *E)N.A.*

19 Tres amigas conversaban amenamente preguntándose mutuamente sobre la tenencia de ciertos bienes . Te ofrecemos un resumen de las preguntas y las correspondientes respuestas:

	M	N	P
¿Tienes mascota?	Si	Si	No
¿Eres casada?	No	Si	Si
¿Te gusta el pollo?	Si	Si	No

Pero no te confíes en estas respuestas , porque sólo una de ellas siempre dice la verdad y la otra miente . La otra miente una vez cada tres respuestas . Además si todas dijeran la verdad , las respuestas de las tres serían las mismas . ¿Puedes deducir las verdaderas respuestas? ¿Quién es siempre veraz?

A)M *B)N* *C)P* *D)Todas* *E) Ninguna*

20 Un explorador encontró a *3* indígenas y les preguntó a que raza pertenecían .

**El primero contestó tan bajo que el explorador no oyó.*

* El *2do* . dijo señalando al primero "ha dicho que es un taca" .

* *El 3ro . interpeló al segundo "tú eres un mentiroso"* .Si se sabe que los tacas siempre mienten y los tiquis siempre dicen la verdad . ¿De qué raza era el tercer indígena?

A)Taca *B)Tiqui* *C)Taca o Tiqui*
D)Taca y Tiqui *E)No se puede determinar*

21 En una convención de *20* abogados , cada abogado era o bien honesto o bien deshonesto . Dadas las premisas :

I) Al menos uno de los abogados era honesto .

II) Dado cualquier par de abogados , al menos uno de los dos era deshonesto .

¿Puede determinarse partiendo de estos dos datos cuántos abogados eran honestos y cuántos deshonestos?

A)1 y 19 *B)2 y 18* *C)10 y 10* *D)20 y 0*

22 De *A* , *B* y *C* se sabe que dos de ellas tienen ojos verdes y la otra ojos azules . Si las personas que tienen ojos verdes mienten y las que tienen ojos azules dicen la verdad y sabiendo que *A* dijo : "*B* tiene ojos azules"

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) A y *B* tiene ojos verdes *II) A* y *C* tienen ojos verdes

III) A dijo la verdad *IV) A* miente

V) B y *C* tienen ojos verdes

A)II y III *B)I y III* *C)II y IV* *D)IV y V* *E)I y IV*

23 Tres animalitos , el gusano , el gato y el murciélago , amigos de Alicia en el País de las Maravillas , fueron acusados de haberse robado la sal y de habérsela comido . Al ser interrogados , declararon :

Gusano : El gato se comió la sal

Gato : Eso no es cierto

Murciélago : *Nunca comí la sal*

Si se sabe que al menos una de las declaraciones es verdadera y al menos una es falsa. ¿Quién se comió la sal?

A)Gusano ***B)Gato*** ***C)Murciélago***
D)Faltan datos ***E)Hay más de una solución***

24 En Lima , Wilder , José y un extranjero son acusados y llevados a juicio , uno de los cuales es el culpable y siempre miente , el extranjero sólo habla inglés por lo que el juez decide tomar como intérprete a los otros dos acusados . El juez le pregunta al extranjero: ¿Es usted culpable? , el extranjero responde en ingles.

El primer interprete (se llama Wilder) le dice al juez que el extranjero ha dicho que si .

El segundo interprete (se llama José) le dice al juez que el extranjero ha dicho que no .

¿Quién es el culpable?

A)Wilder ***B)Wilder o José***
C)José ***D)El extranjero***

25 Tres amigos: Hugo, paco y Luis tienen la siguiente conversación:

- ***Hugo:*** "Yo soy menor de edad"
- ***Paco:*** "Hugo miente"
- ***Luis:*** "Paco es mayor de edad"

Si se sabe que solo uno miente y que solo uno es mayor de edad , ¿quién miente y quién es mayor de edad , respectivamente?

A)Paco – Paco ***B)Hugo – Paco*** ***C)Paco – Luis***
D)Paco – Hugo ***E)Luis – Paco***

26 Dora , Flora y Matilde conversan sobre sus edades,y durante la charla afirman:

- ***Dora :*** Tengo ***22*** años , Soy ***2*** años menor que Flora , Tengo ***1*** año más que Matilde.
- ***Flora:*** No soy la más joven , Entre Matilde y yo hay ***3*** años de diferencia , Matilde tiene ***25*** años.
- ***Matilde :*** Soy más joven que Dora , Dora tiene ***23*** años , Flora tiene ***3*** años más que Dora.

Si cada una mintió una sola vez , ¿qué edad tiene Matilde?

A)22 ***B)23*** ***C)21*** ***D)25*** ***E)24***

27 Señale usted la única alternativa correcta.

A)La "e" es verdadera
B)La "c" es falsa
C)La "d" es falsa
D)La "a" es verdadera
E)La "b" es verdadera

28 Adrián dice: ***"Beto miente"***

Beto dice: ***"Coco miente"***

Coco dice: ***"Adrián y Beto mienten"***

¿ Quién es el que dice la verdad?

A)Adrián ***B)Beto*** ***C)Coco***
D)Todos dicen la verdad

29 En un pueblo solo hay dos razas , los buenos y los malos. Los buenos siempre dicen la verdad y los malos siempre mienten.

Un día un turista llegó de visita al pueblo y encontró ***3*** pueblerinos. Al preguntarles por su raza respondieron consecutivamente:

Primero : Dos de nosotros somos buenos.

Segundo : Eso no es cierto , Solo uno de nosotros es bueno.

Tercero: Si , eso es verdad.

¿Cuántos buenos hay?

A)ninguno ***B)1*** ***C)2***
D)3 ***E)al menos uno***

30 Cuatro alumnas , Maribel , Liliana , Sara y Zulema , respondieron una prueba de tres preguntas , teniendo que contestar verdadero o falso. A continuación se muestra cómo respondió cada una:

	1	2	3
Maribel	V	V	F
Liliana	V	F	F
Sara	F	F	V
Zulema	F	V	F

Si se sabe que una de ellas contestó todas las preguntas correctamente , que la otra falló en todas y que las otras dos fallaron solo en una cada una, ¿Quién falló en todas las preguntas?

A) Maribel ***B) Liliana*** ***C) Sara***
D) Zulema ***E) No se puede determinar.***

CLAVES

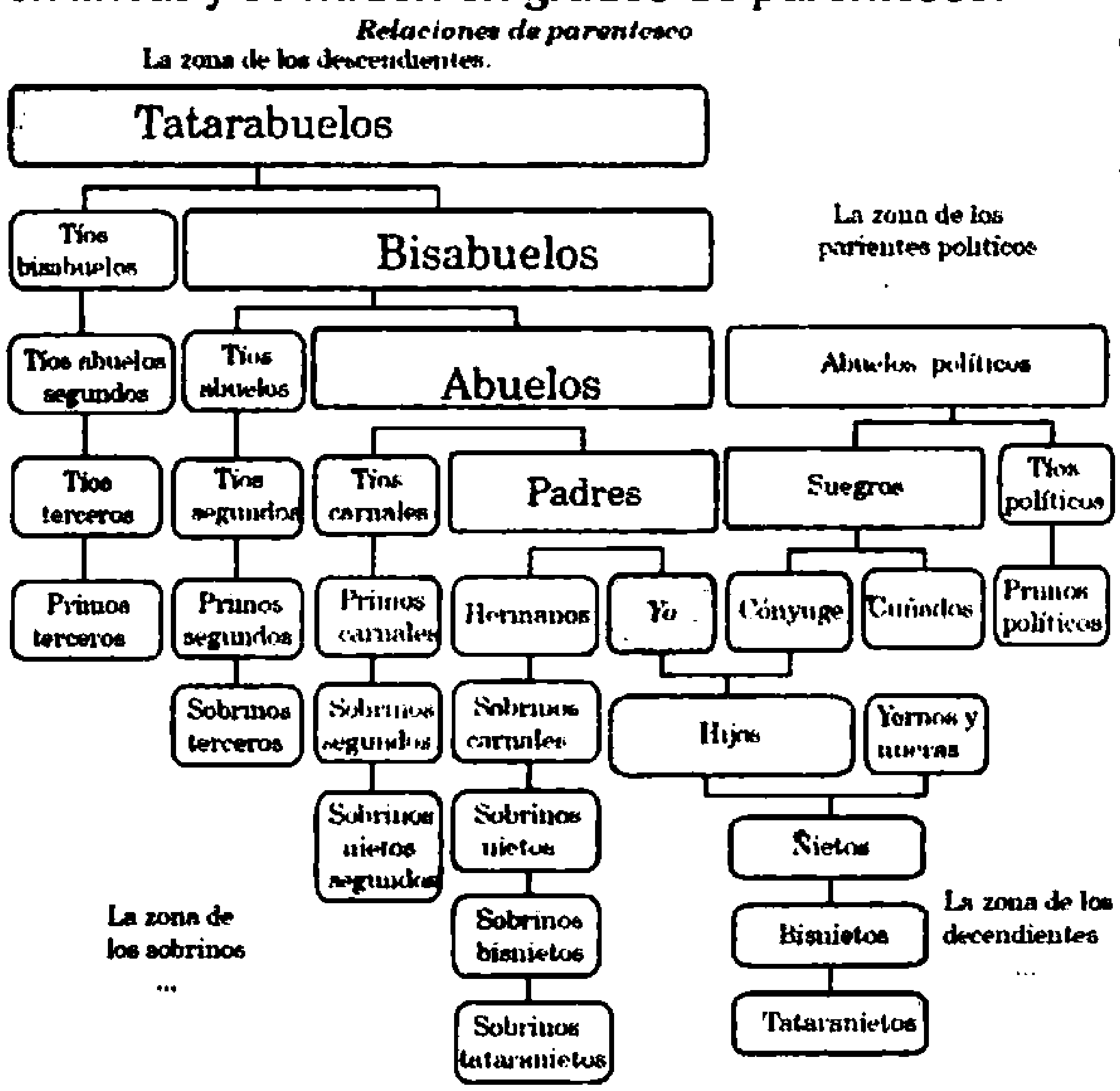
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
C	D	B	E	C	C	B	D	B	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	A	D	B	C	C	A	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	E	E	A	A	A	C	B	A	C

OBJETIVO :

- *Conocer y aplicar técnicas que permitan resolver de forma práctica problemas relacionados con situaciones familiares.*
- *Establecer la mayor cantidad de relaciones de parentescos que se le puede asignar a una persona.*

INTRODUCCION :

El *parentesco* es la relación o vínculo, biológico o no, que une a dos personas, miembros de una misma familia. Los vínculos de parentesco pueden generarse de tres formas diferentes: por consanguineidad, por afinidad y por adopción o también llamado civil. Estos vínculos se organizan en líneas y se miden en grados de parentesco.



A modo de práctica le invitamos a organizar los grados de parentesco de la siguiente familia, asimismo a responder a la pregunta planteada.

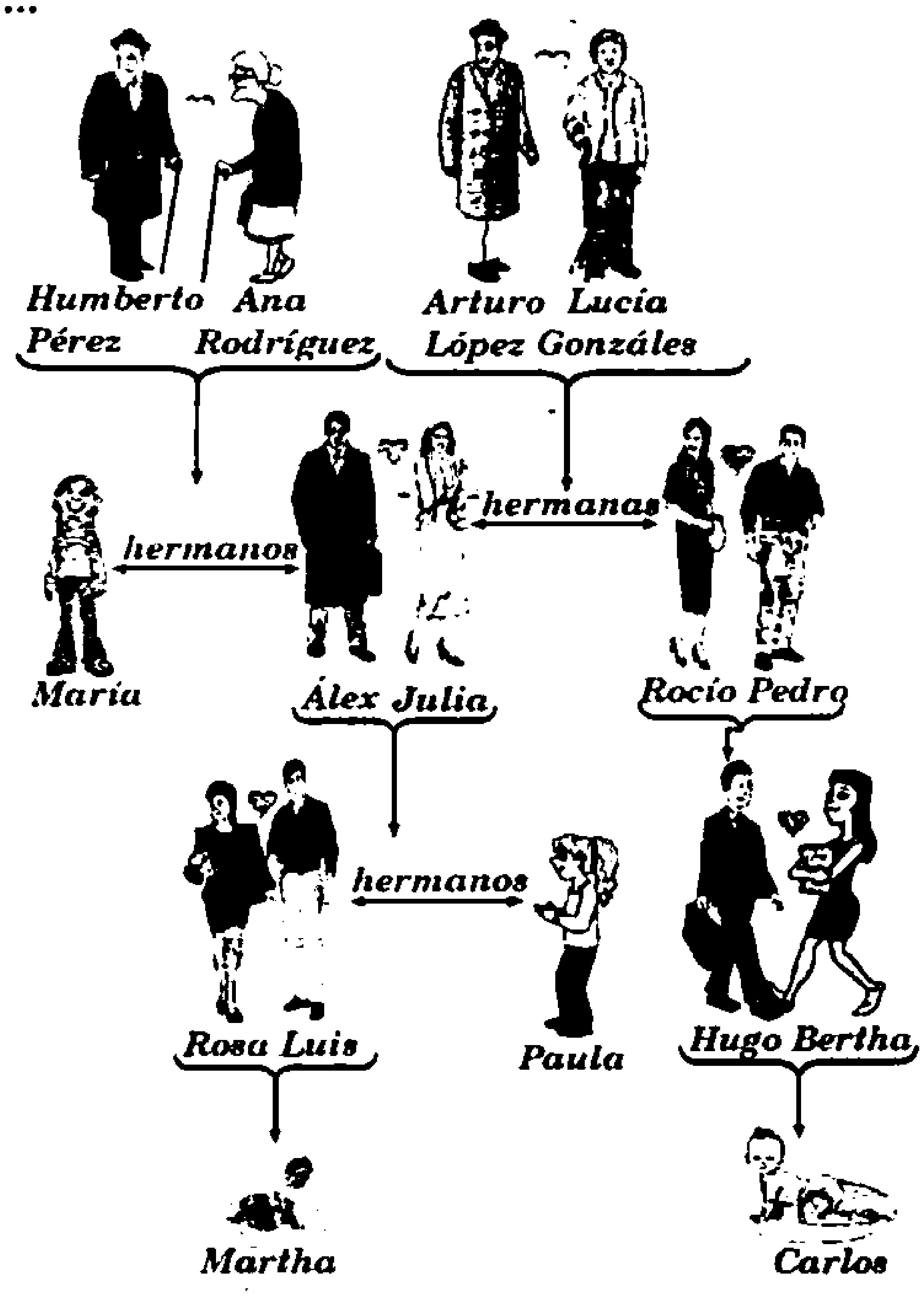
El matrimonio Torres tiene tres hijos: Jorge, Nancy y Antonio; el matrimonio García tiene cuatro hijos Rosa, Carmen, Pablo y Walter; y finalmente el matrimonio Cordova tiene dos hijas: Elena y Estela. Antonio se casó con una de las hijas de la familia García, del cual nacen Alejandro y juana. Walter se casó con Elena, matrimonio del cual nace Víctor. La tía, por parte de madre, de Víctor se casa con el señor Manuel Rodayera, con quien tiene una hija llamada Betty, la que con el tiempo llega a casarse con Alejandro Torres García y tienen un hijo llamado Ernesto.

¿Qué viene a ser de Ernesto la mamá de Jorge Torres?

OTRO EJEMPLO :

Una fecha no muy lejana, ***25*** de febrero para ser más exactos, a las ***5*** de la tarde están reunidas ***16*** personas en la casa de Álex y Julia. Los padres de ella llegaron tarde, justo cuando Rocío presentaba a sus parientes.

Hugo se sorprendió de que Álex sea su tío, Bértha se...



En cierto momento, un cartero toca la puerta trayendo correspondencia para el señor Pérez y la señora Gonzáles. ***¿Cuál es el nombre de las personas a quienes le podrían pertenecer la correspondencia?***

PARENTESCOS

En este punto veremos aquellos problemas que se generan por la relación de parentesco que existe entre los integrantes de una familia.

En este capítulo desarrollaremos problemas sobre:

– ***Un tipo específico de relación de parentesco.***

– ***Cantidad mínima de personas.***

TIPOS ESPECÍFICOS DE RELACIÓN DE PARENTESCO

Un criterio que se puede considerar para la relación de este tipo de problemas es realizar una lectura empezando de la parte final del enunciado e ir estableciendo las relaciones de parentesco siguiendo un procedimiento regresivo hasta llegar a la parte inicial.

EJEMPLO 1:

¿Qué representa para mí el esposo de la abuela paterna de la hija de mi único hermano?

A) mi hermano B) mi padre C) mi cuñado D) mi tío E) mi abuelo

RESOLUCIÓN :

Uno de los criterios que se puede considerar para la resolución de este tipo de problemas es estableciendo el árbol genealógico familiar e ir determinando las relaciones de parentesco, comenzando de la parte final del enunciado hasta determinar la última persona (relación de parentesco) ubicada en el enunciado.

Consideremos *2* métodos para la resolución de este tipo de problema ; el método literal y el método gráfico.

MÉTODO LITERAL :

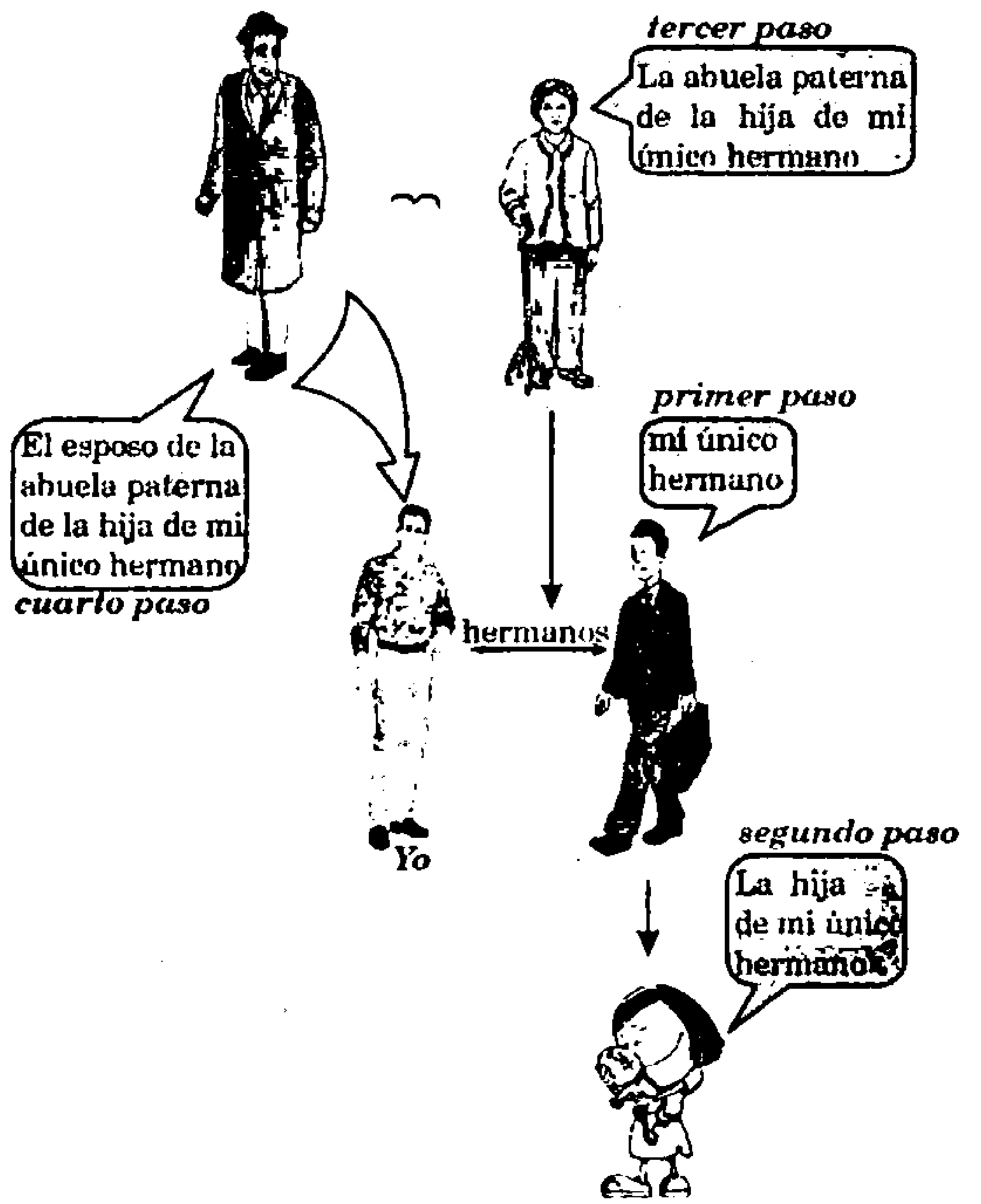
...el esposo de la abuela paterna de la hija de mi único hermano

...el esposo de la abuela paterna de [mi sobrina]

...el esposo de [mi madre]

⇒[mi padre]

MÉTODO GRÁFICO :



Por lo tanto, el esposo de la abuela paterna de la hija de mi único hermano ***es mi padre***.

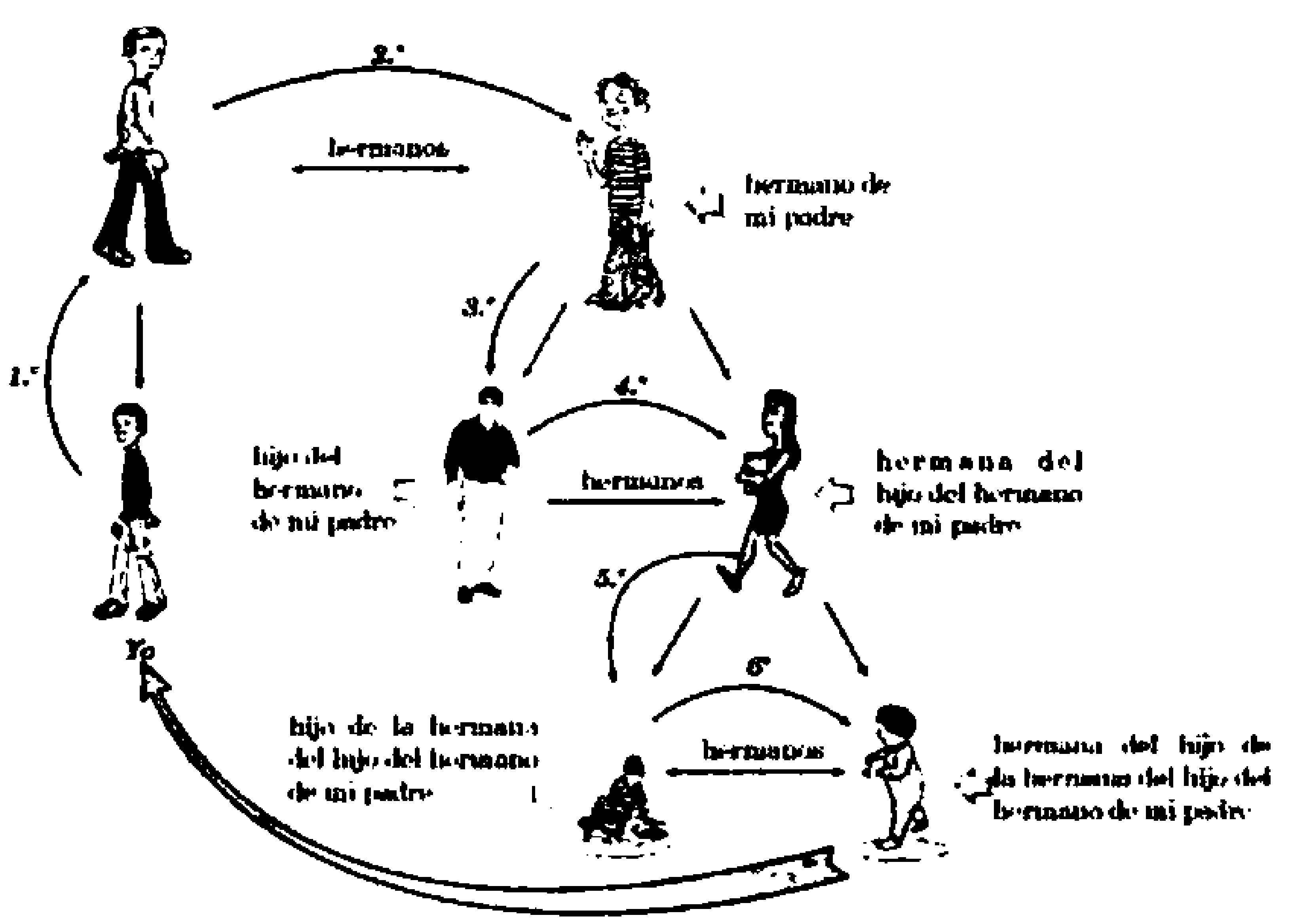
RPTA : "B"

EJEMPLO 2 :

La hermana del hijo de la hermana del hijo del hermano de mi padre es mi

A) hija B) madre C) nieta D) sobrina

RESOLUCIÓN :



Por lo tanto, la hermana del hijo de la hermana del hijo del hermano de mi padre ***es mi sobrina.***

RPTA : "D"

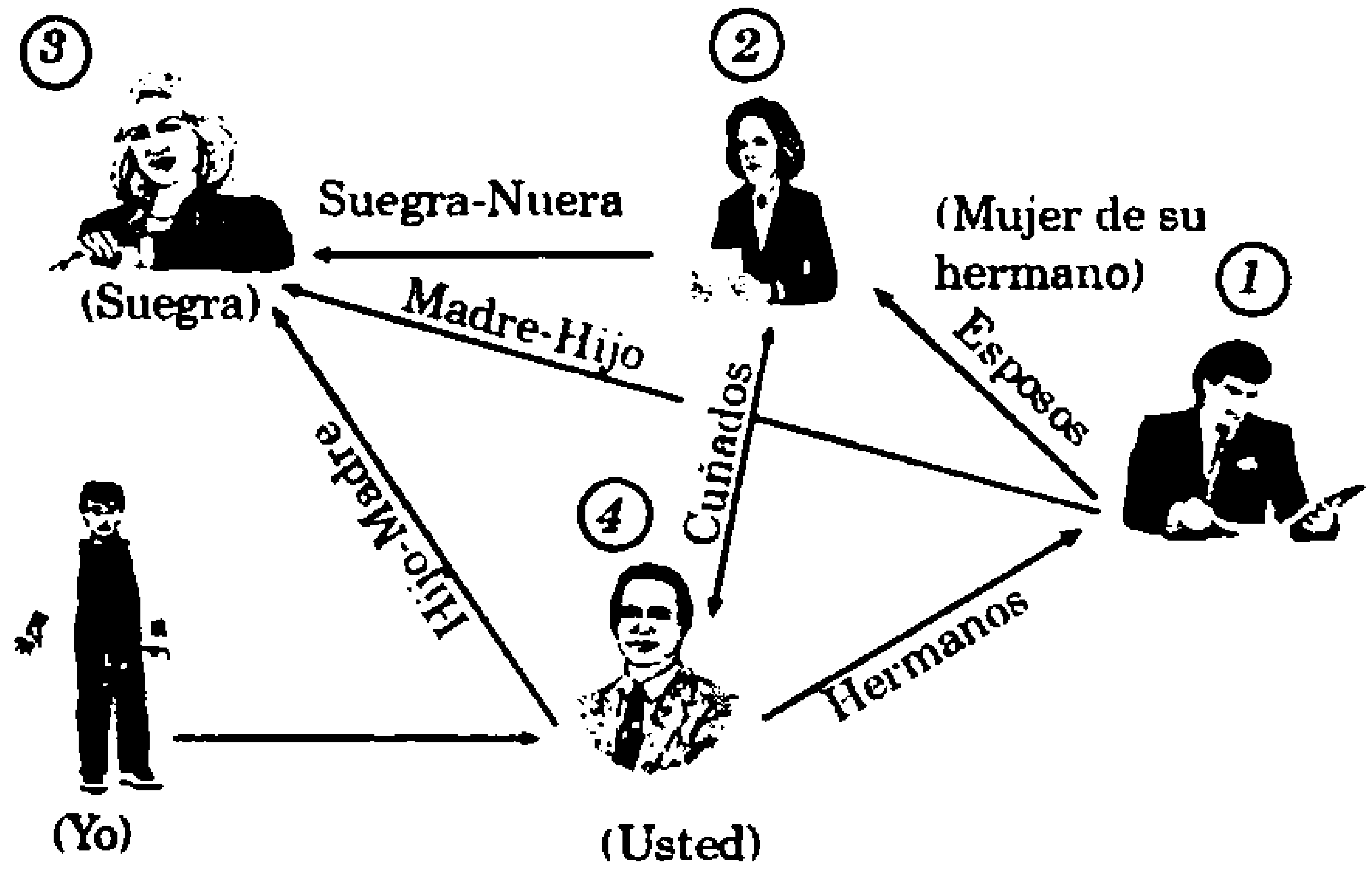
EJEMPLO 3 :

¿Qué parentesco tiene usted con la suegra de la mujer de su hermano?

A) Es mi hermana *B) Es mi madre*
C) Es mi abuela *D) Es mi sobrina*

RESOLUCIÓN :

Qué parentesco tiene usted (4) con la suegra (3) de la mujer (2) de su hermano (1)



La respuesta correcta es: ***Mi madre.***

RPTA : "B"

PROBLEMAS SOBRE CANTIDAD MÍNIMA DE INTEGRANTES DE UNA FAMILIA

El este tipo de problemas se sugiere iniciar reconociendo la cantidad de generaciones que integran la familia (*2*, *3* ó más); luego, ubique la cantidad de integrantes que pertenecen a la generación de mayor jerarquía (primera generación) y a la de menor jerarquía (última generación), complementando el resto de las relaciones de parentesco y priorizando a los de mayor jerarquía.

En general, se debe buscar que cada integrante de la familia asuma la mayor cantidad de roles familiares (padre, tío,.cuñado, suegro, etc.).

OBSERVACIONES :

I) Cuando en un problema sobre cantidad mínima del personas mencionan por ejemplo *2* hijos, se refiere solo a los hijos varones, si se hace referencia tanto a hijos varones como mujeres mencionarán hijos en total.

II) Hay que tener en cuenta que cuando se representa gráficamente un problema, pueden aparecer más parentescos de los que se mencionan, puesto que hay diferentes soluciones para un mismo problema;pero se debe encontrar el que contenga el menor número de personas.

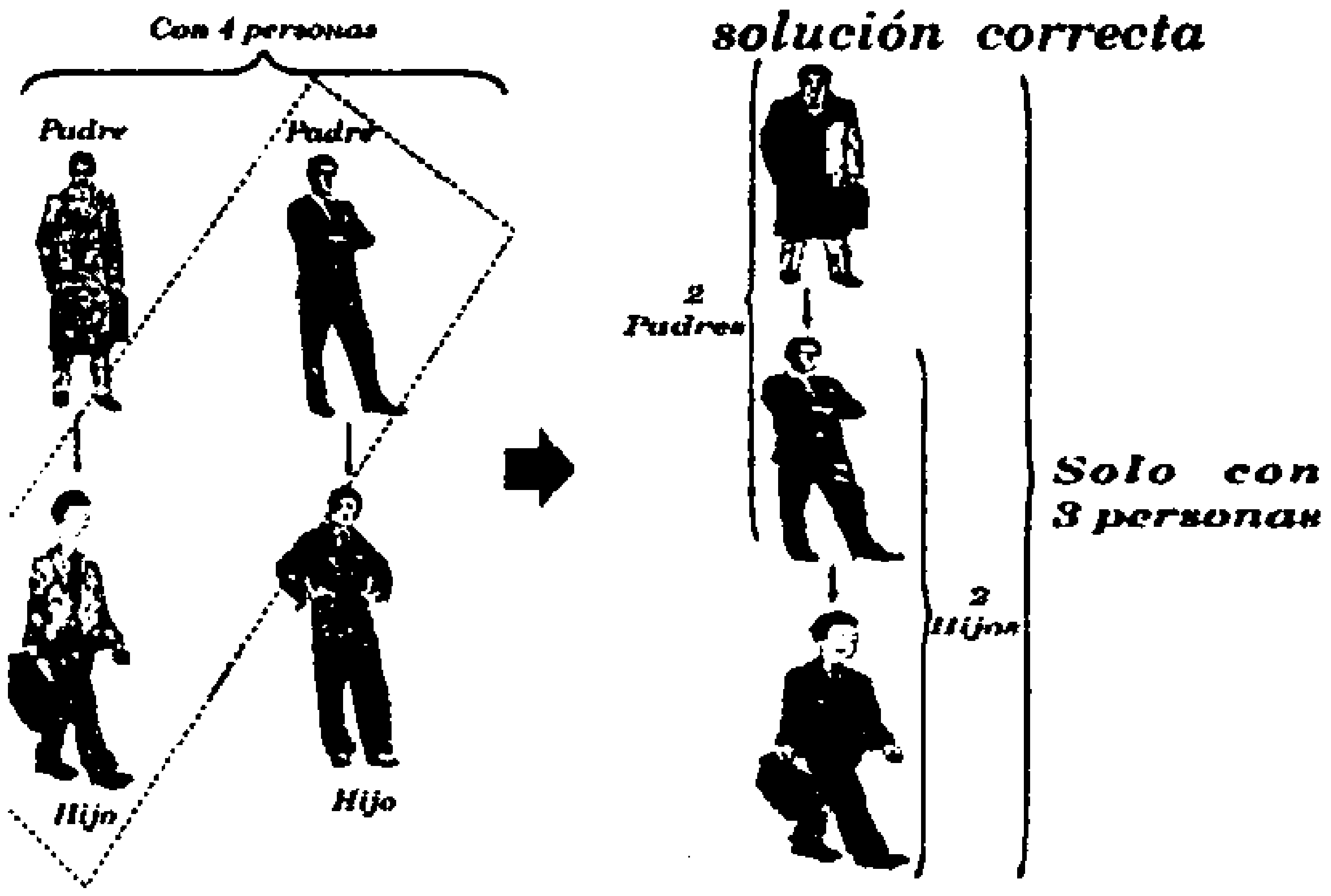
III) Tenga en cuenta que hijos de hermanos, es decir, los primos hermanos pueden casarse, ya que en ocasiones esto puede ser considerado para garantizar la menor cantidad de integrantes en una familia.

EJEMPLO 1 :

Hay presentes *2* padres y *2* hijos. ¿Cuántas personas , como mínimo, estarán presentes?

A) 1 *B) 3* *C) 4* *D)5* *E) 6*

RESOLUCIÓN :



Por lo tanto, la cantidad mínima de personas que estan presentes será *3*.

RPTA : "B"

EJEMPLO 2 :

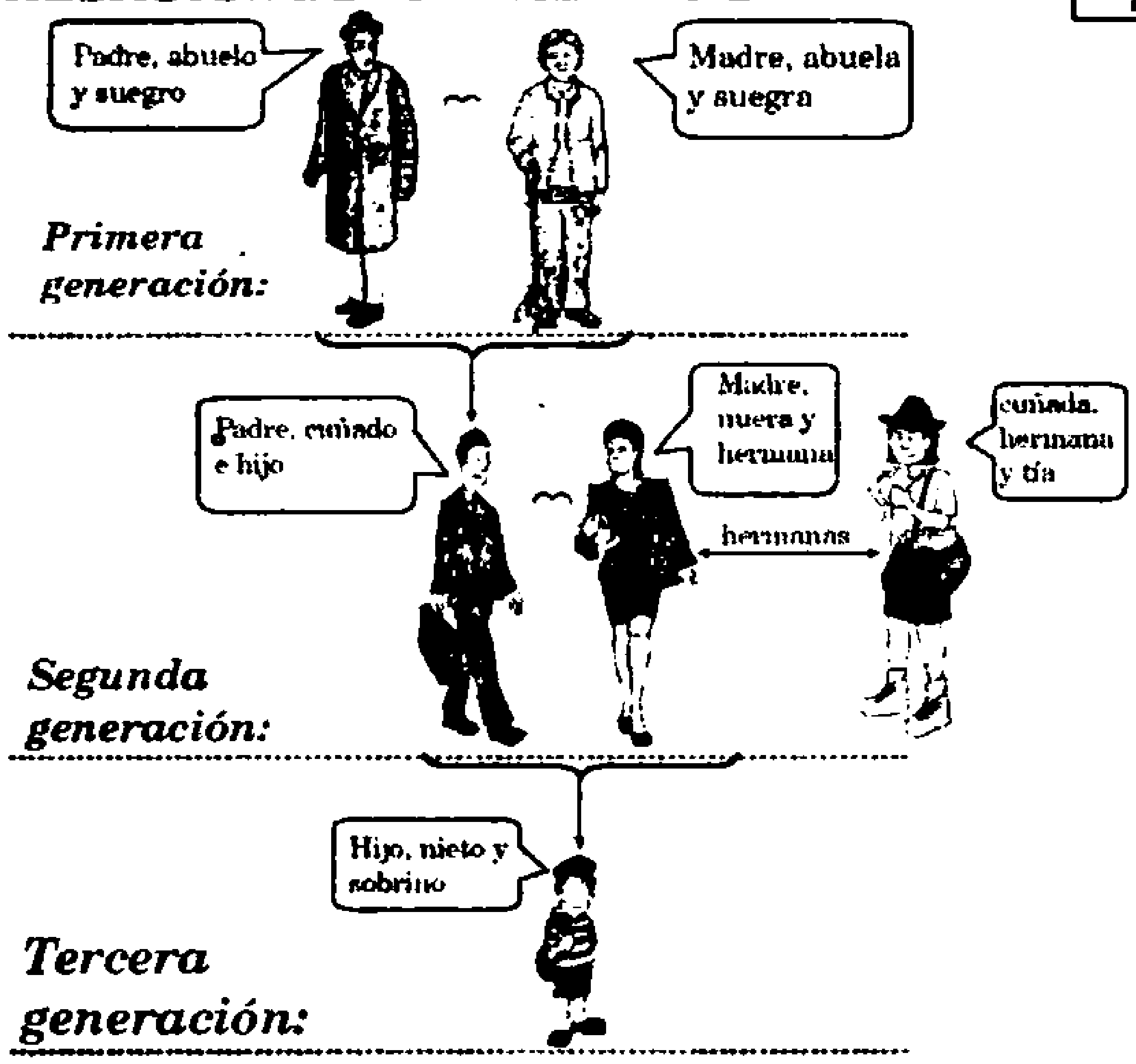
En una reunión familiar se encuentran presentes un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, un nieto, dos hermanas, dos hijos, una tía, un cuñado, una cuñada, un sobrino, una suegra, un suegro y una nuera. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión familiar?

A) 5 *B) 8* *C) 6* *D)7* *E) 9*

RESOLUCIÓN :

Analizando las relaciones de parentesco entre abuelo, abuela y nieto, se deduce que en dicha familia se presentan *3* generaciones.

Además, en la segunda generación debe haber *2* mujeres y un varón para complementar los *2* padres, *2* madres y la tía . De esto se establece el siguiente esquema familiar.



Por lo tanto, en dicha reunión, como mínimo, asistieron *6* personas.

RPTA : "C"

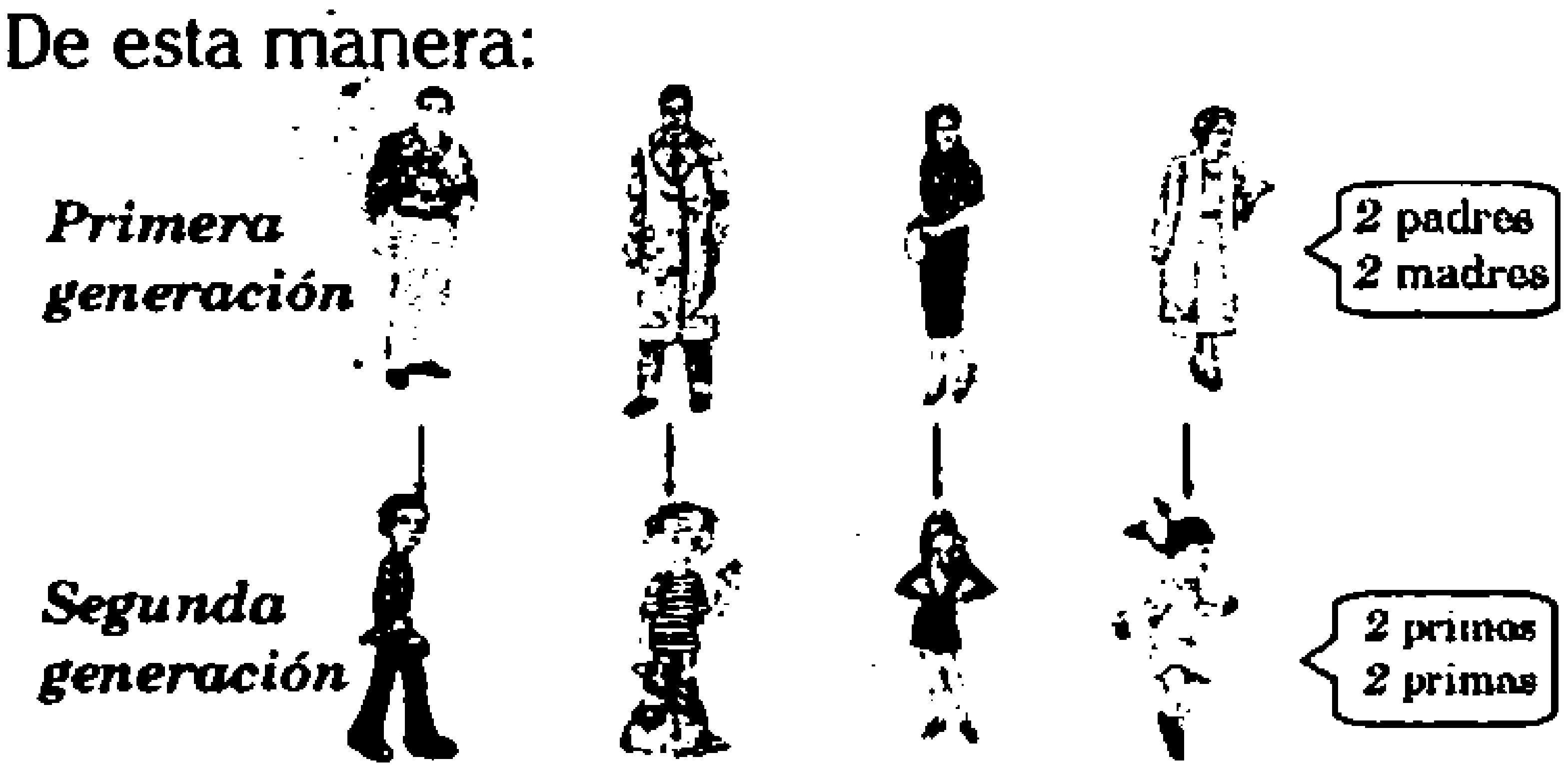
EJEMPLO 3 :

Una familia está compuesta por *4* hermanos en total, *4* tíos en total, *2* padres, *2* madres, *2* sobrinos, *2* sobrinas, *2* primos y *2* primas. ¿Cuál es el mínimo número de personas que la conforman?

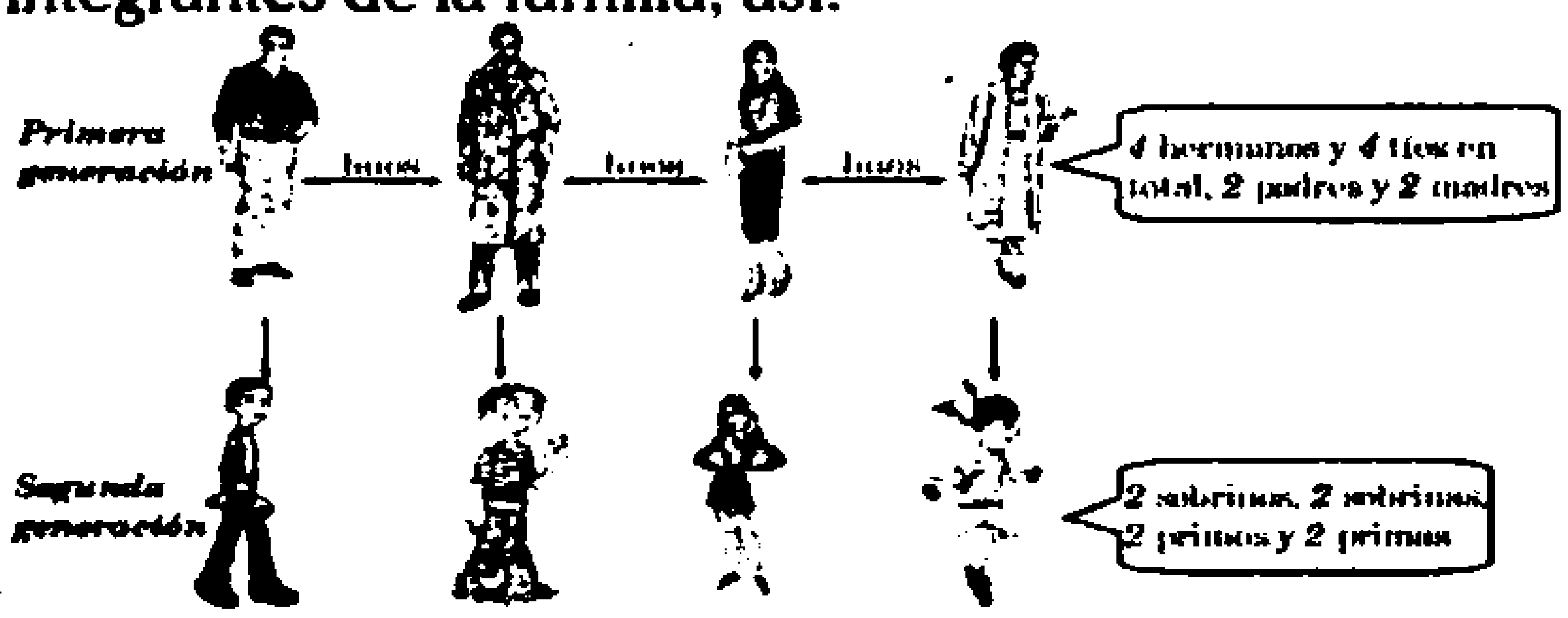
A) 8 *B) 7* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

Consideremos que en esta familia no hay abuelos ni nietos; es suficiente asignarle dos generaciones. De esta manera:



Además, debe haber *4* tíos en total, que podrían ser los mismos padres para minimizar la cantidad de integrantes de la familia, así:



Por lo tanto, el mínimo número de personas que conforman esta familia es *8*.

RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

¿Qué es para mi, el primo del abuelo paterno del único hijo del hijo de mi hermano?

A) mi hermano ***B) mi primo*** ***C) mi padre***
D) mi hijo ***E) mi abuelo***

RESOLUCIÓN :

Para resolver este tipo de problemas se sugiere empezar desde la última persona que se menciona e ir retrocediendo de persona a persona hasta llegar a la persona que se pide.

¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno del hijo del hijo de mi hermano?
(hijo de mi hermano = mi sobrino)

¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno del hijo de mi sobrino?
(hijo de mi sobrino = mi sobrino nieto)

¿Qué es para mi el primo del abuelo paterno de mi sobrino nieto?
(abuelo paterno de mi sobrino nieto = mi hermano)

¿Qué es para mi el primo mi hermano?
(= Mi primo)

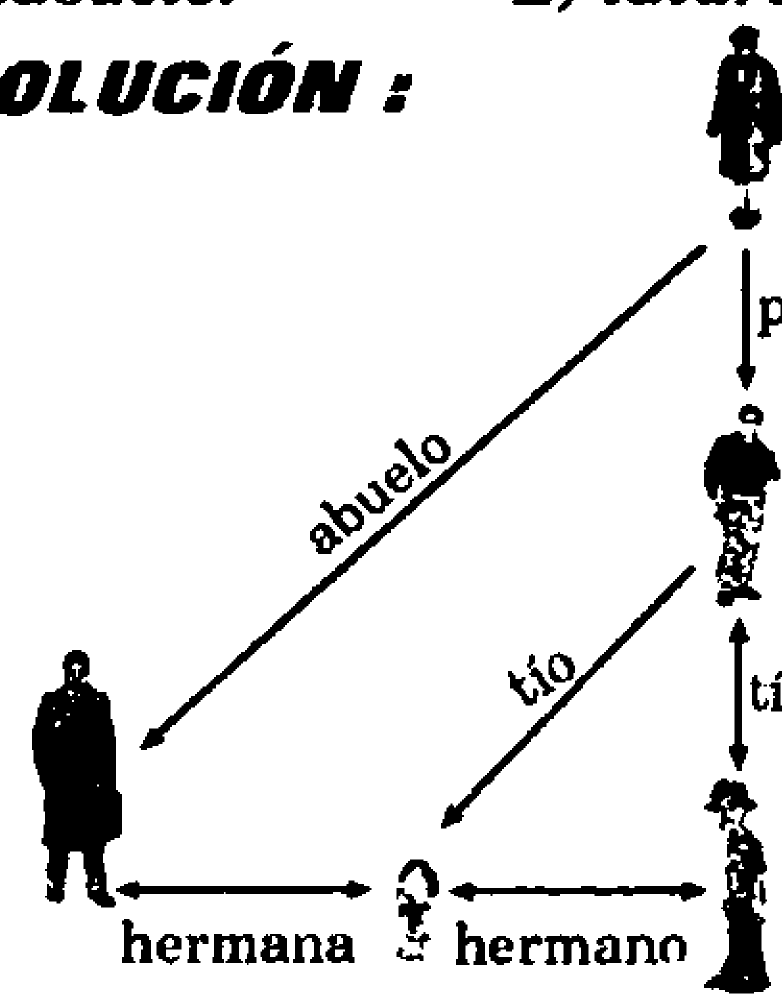
RPTA : " B"

PROBLEMA 2 :

El padre del tío de mi hermano, es de mi hermana su

A) tío. ***B) padre.*** ***C) abuelo.***
D) bisabuelo. ***E) tatarabuelo.***

RESOLUCIÓN :



Si es tío de mi hermano también es mi tío, el padre de mi abuelo y también abuelo de mis hermanos. Por lo tanto, es su abuelo.

RPTA : "C"

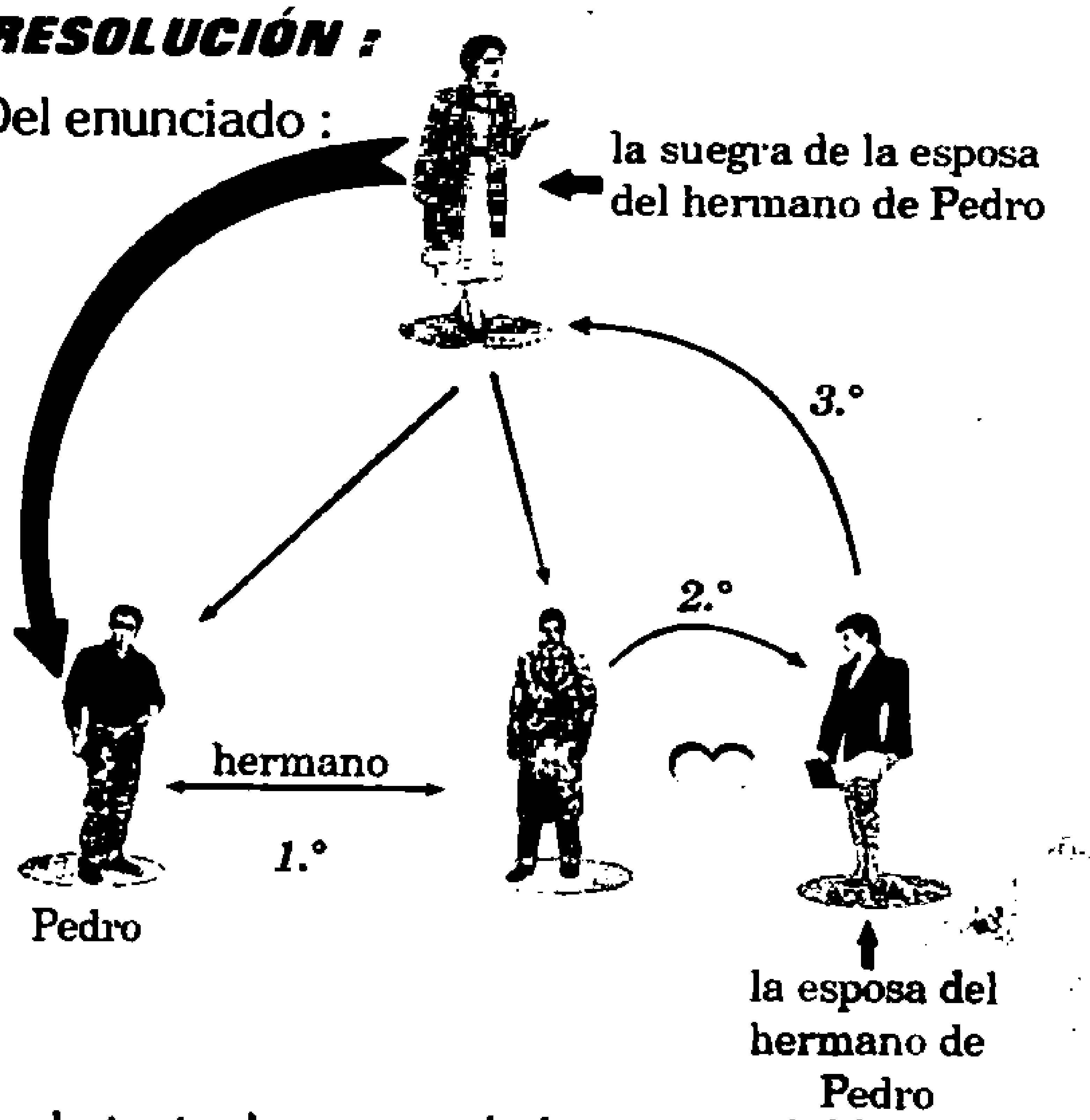
PROBLEMA 3 :

Pedro se jactaba de tratar muy bien a la suegra de la esposa de su hermano. ¿Por qué?

A) es su hermana *B) es su hija* *C) es su tía*
D) es su mamá *E) es su abuela*

RESOLUCIÓN :

Del enunciado :



Por lo tanto, la suegra de la esposa del hermano de Pedro es su mamá.

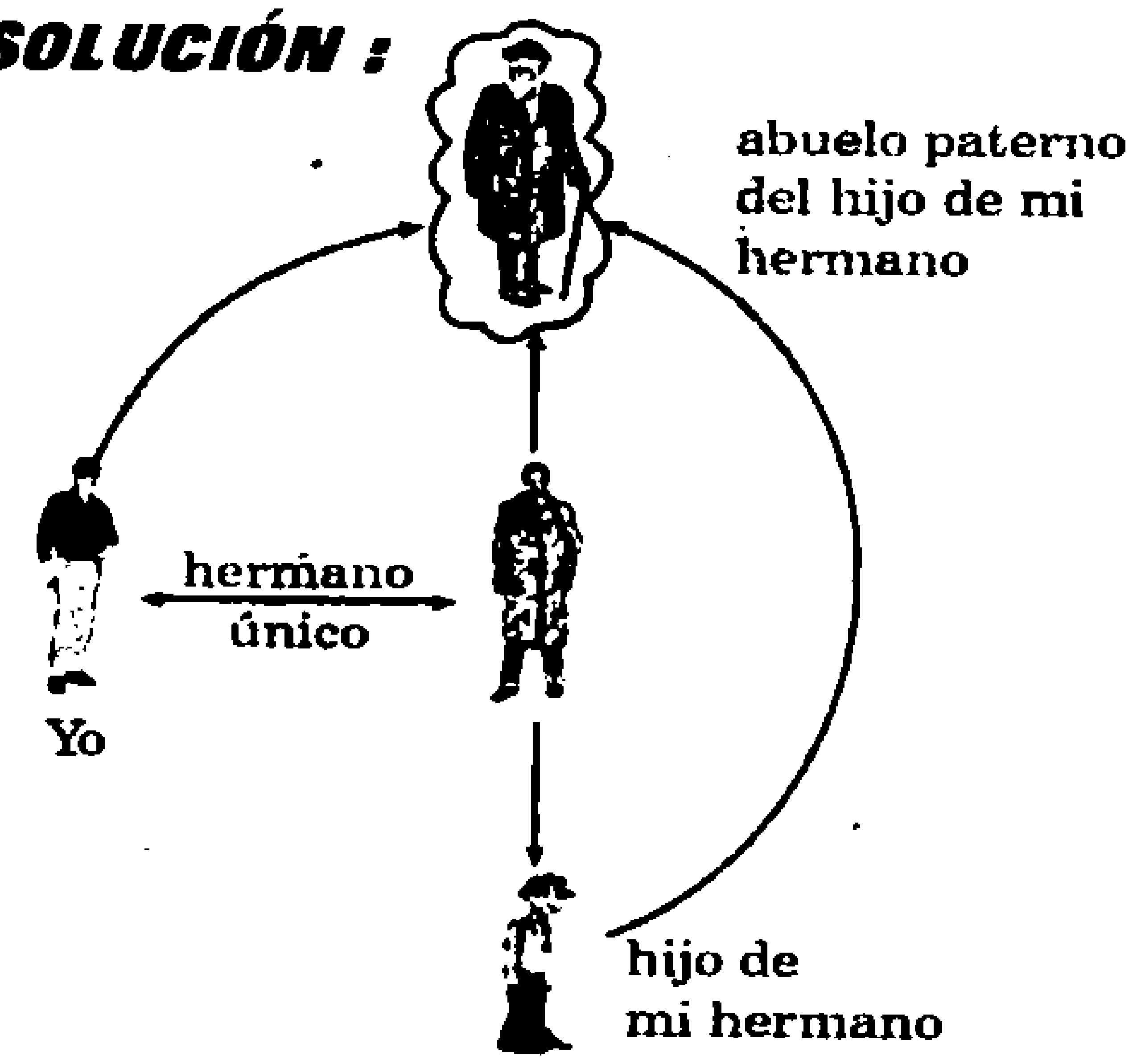
RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

El abuelo paterno del hijo de mi único hermano es mi

A) hermano. *B) tío.* *C) padre.*
D) hijo. *E) abuelo.*

RESOLUCIÓN :



Por lo tanto, el padre de mi hermano será mi padre.

RPTA : "C"

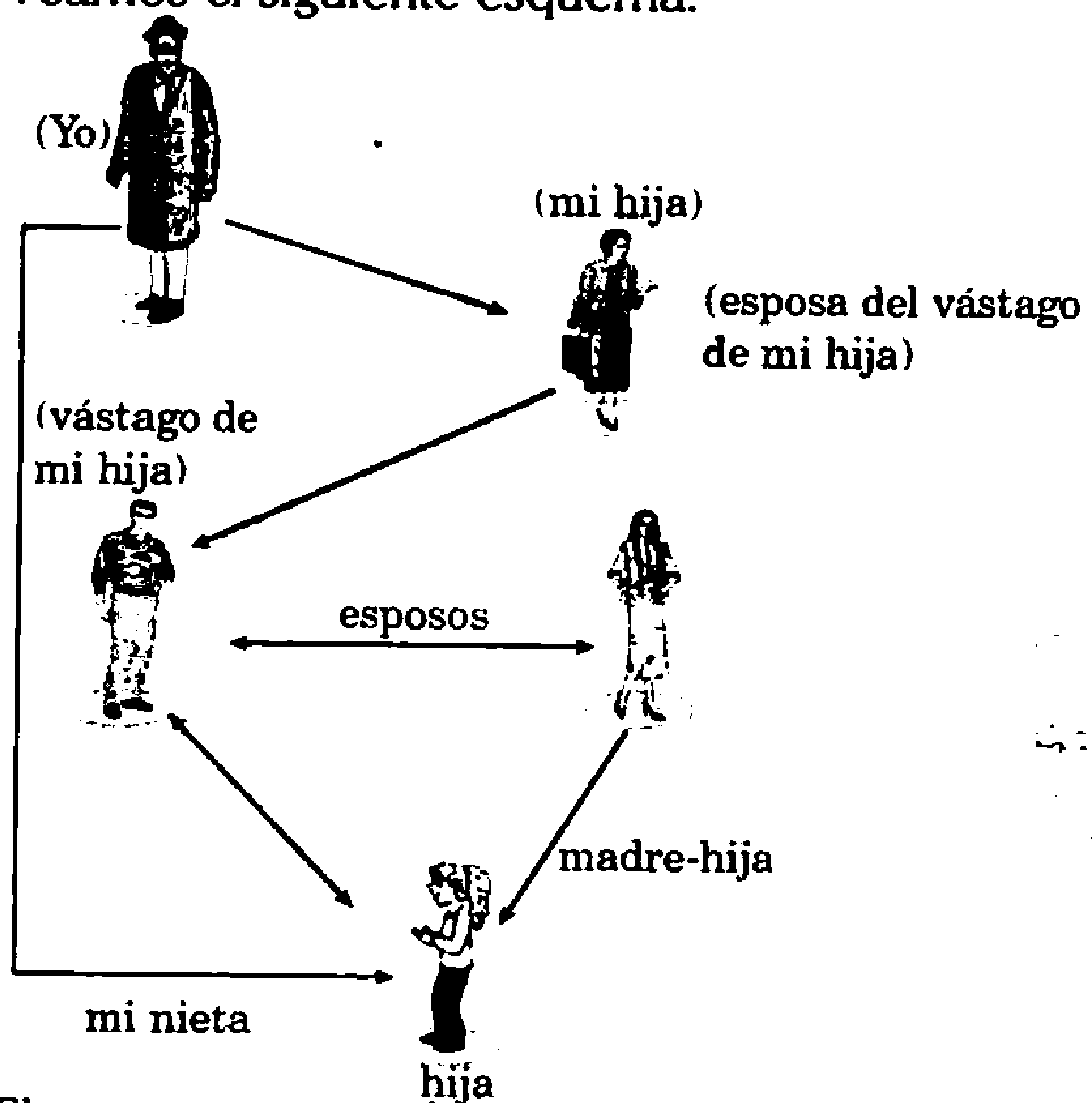
PROBLEMA 5 :

¿Qué parentesco tiene conmigo la hija de la esposa del único vástago de mi hija?

A) Hija *B) Nieta* *C) Sobrina*
D) Nuera *E) Bisnieta*

RESOLUCIÓN :

Veamos el siguiente esquema:



El parentesco que tiene conmigo es bisnieta.

RPTA : "E"

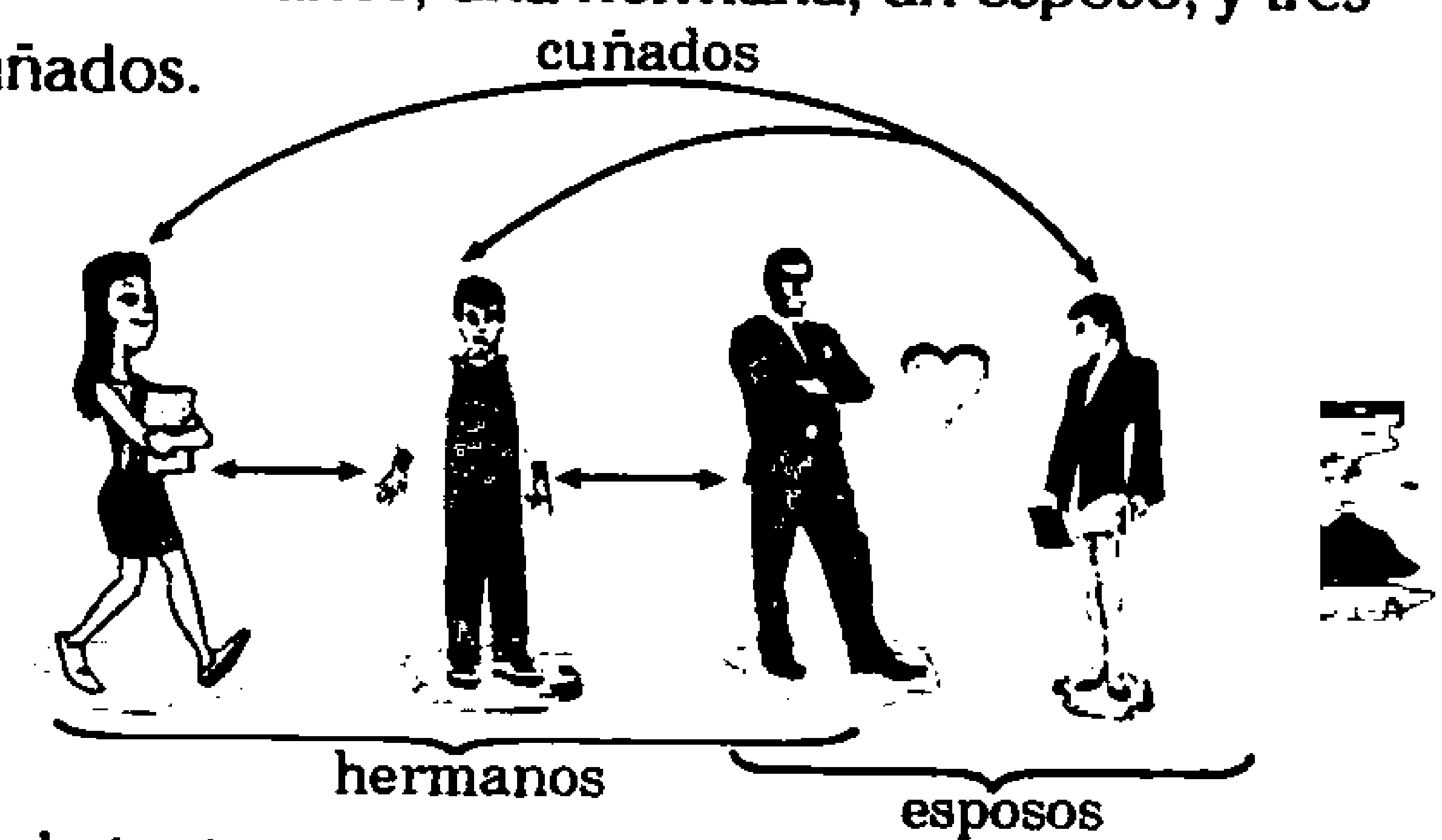
PROBLEMA 6 :

En una reunión están presentes dos hermanos, una hermana, un esposo y tres cuñados. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión?

A) 7 *B) 5* *C) 9* *D) 10* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

En el problema de parentesco se pide determinar a dos hermanos, una hermana, un esposo, y tres cuñados.



Por lo tanto, cuatro personas.

RPTA : "E"

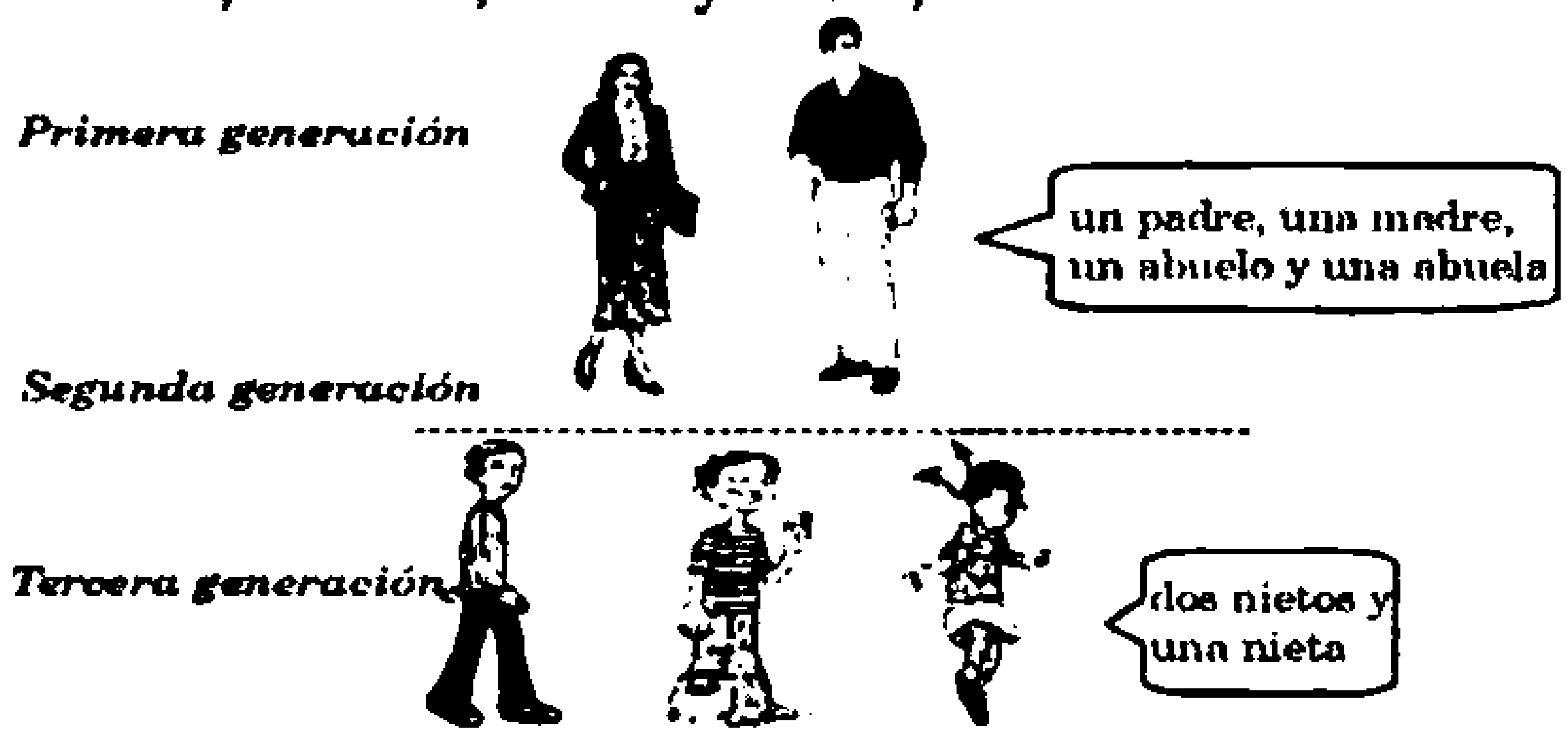
PROBLEMA 7 :

¿Cuántas personas como mínimo forman una familia que consta de un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, dos sobrinos, un tío, una tía, una nieta, dos nietos, una nuera, una suegra y un suegro?

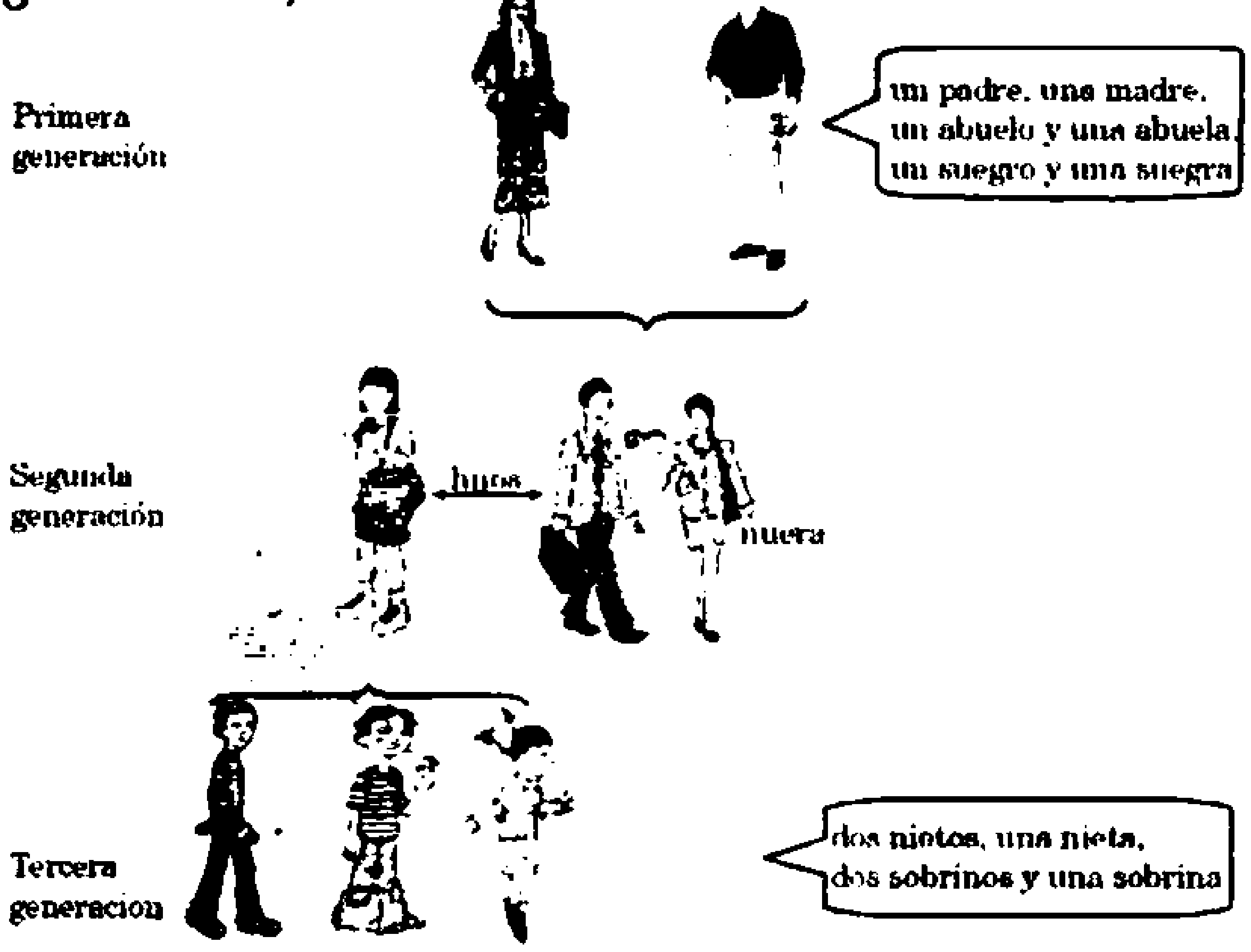
A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

Analizando el dato, es necesario considerar ***3*** generaciones para garantizar los parentescos abuelo, abuela, nieto y nieta, así:



Además, falta ubicar un padre, una madre, un tío y una tía, lo cuál se podría garantizar en la segunda generación, así:



Por lo tanto, la cantidad mínima de personas que conforman dicha familia es ***8***.

RPTA : "B"

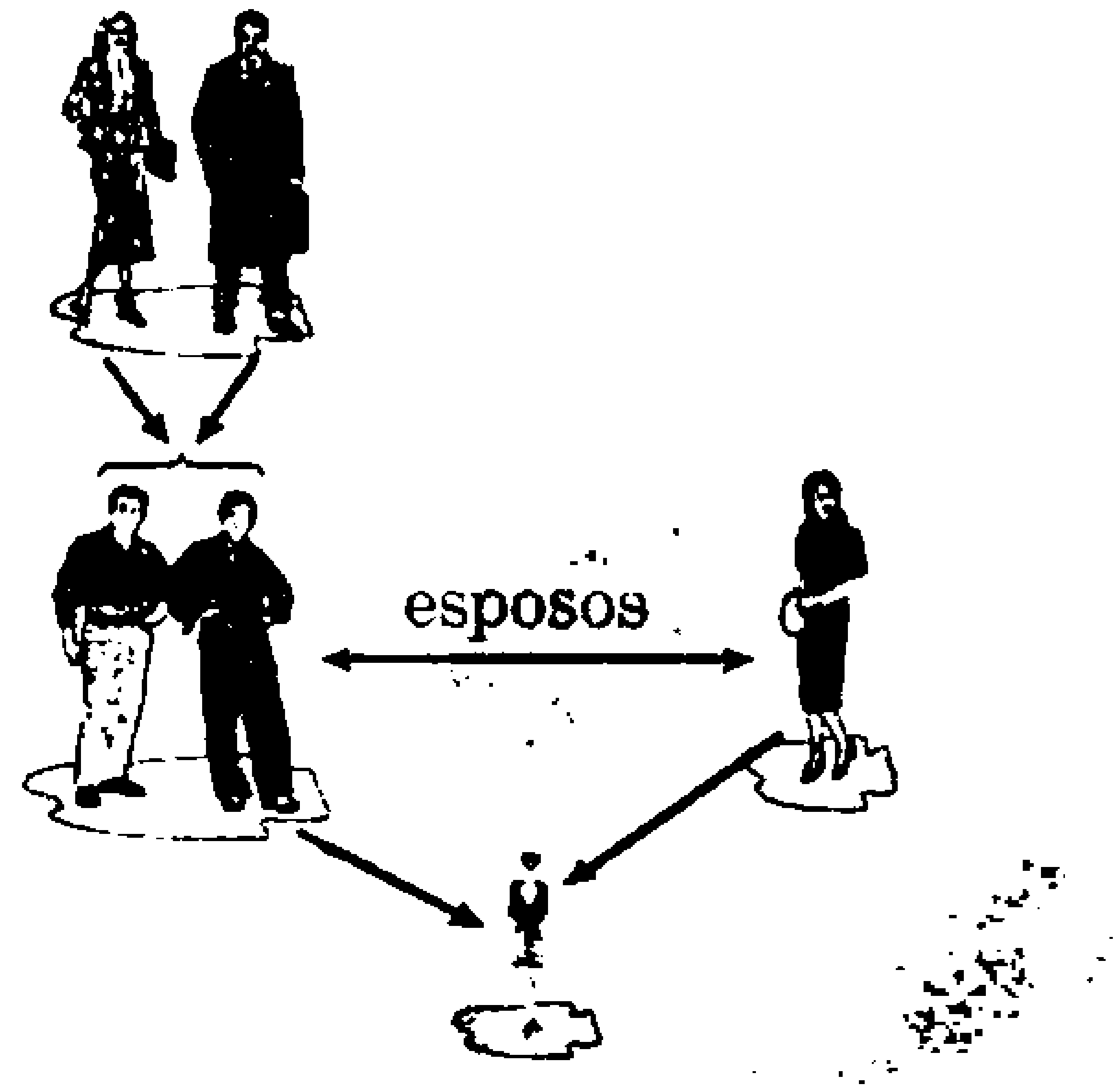
PROBLEMA 8 :

En una reunión familiar se observa a un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, dos hijos, una hija, una nieta, una sobrina, un tío, un cuñado, una cuñada, una suegra, un suegro, una nuera y dos hermanos.¿Cuántas personas como mínimo se encuentran en dicha reunión?

A) 12 *B) 10* *C) 6* *D) 8* *E) 4*

RESOLOCIÓN :

Del enunciado se deduce :



Por lo tanto, se encuentran ***6*** personas.

RPTA : "C"

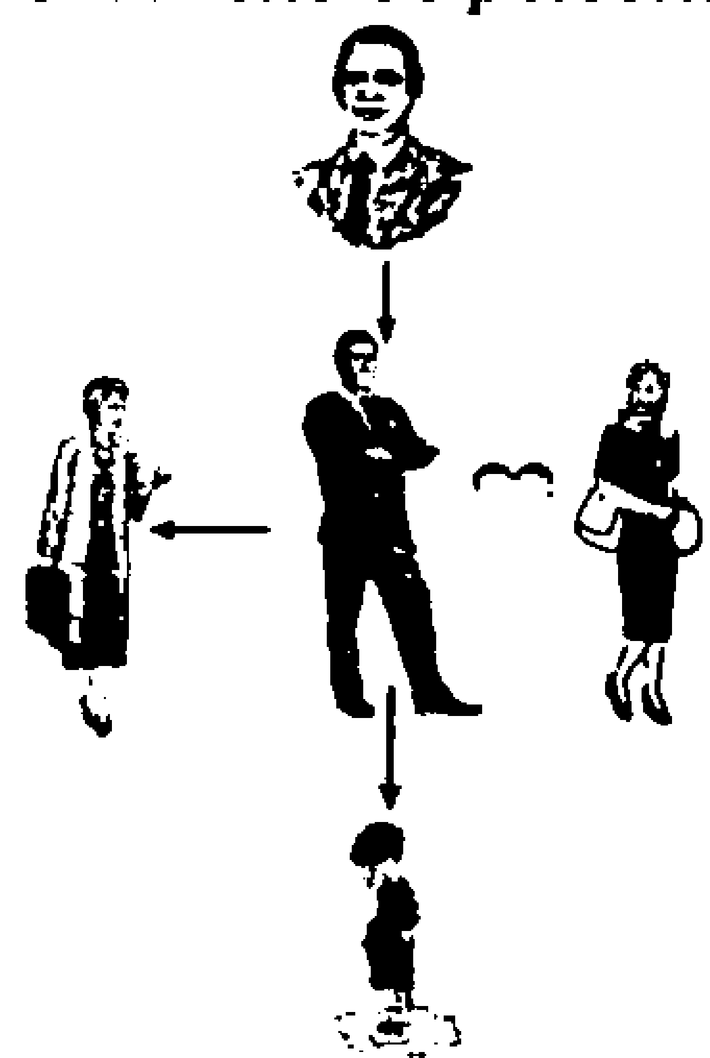
PROBLEMA 9 :

En una reunión familiar, se encuentran presentes un abuelo, dos padres, una madre, dos hijos, una hija, un nieto, una tía, un sobrino, una esposa, un esposo, una nuera, un suegro y dos cuñadas. ¿Cuántas personas, como mínimo , hay en dicha reunión?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

Piden: Número mínimo de personas



RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

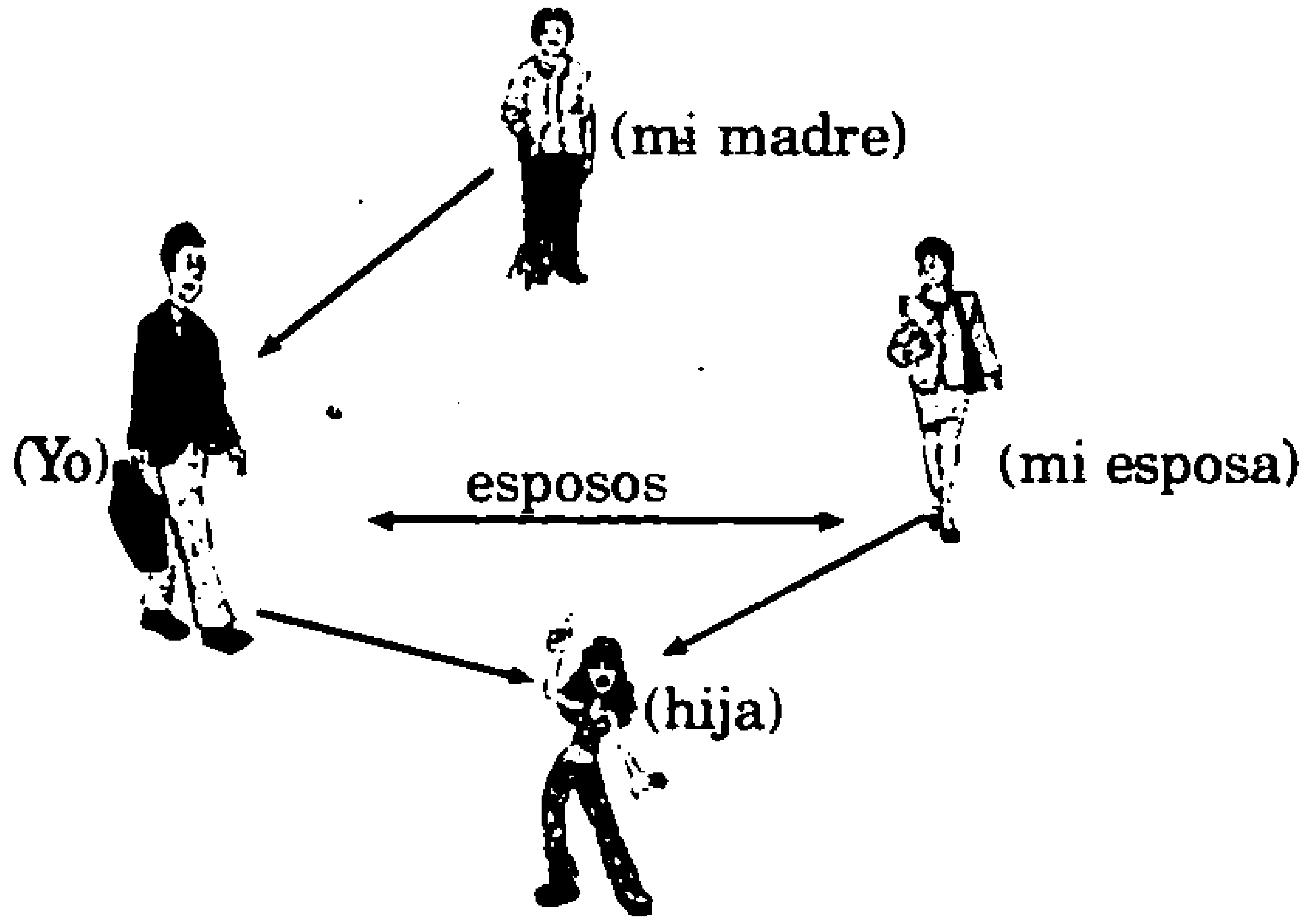
¿Quién es el hombre que es el padre de la hija de la esposa del único vástago de mi madre?

A) Mi hermano *B) Mi tío* *C) Mi padre*
D) Abuelo *E) Yo*

RESOLUCIÓN :

- El único vástago de mi madre soy yo.
- La esposa del único vástago de mi madre será mi esposa y su hija será también mi hija.

Veamos el siguiente esquema:



Luego: el hombre, que es el padre de la hija de la esposa del único vástago de mi madre, *soy yo.*

RPTA : "E"

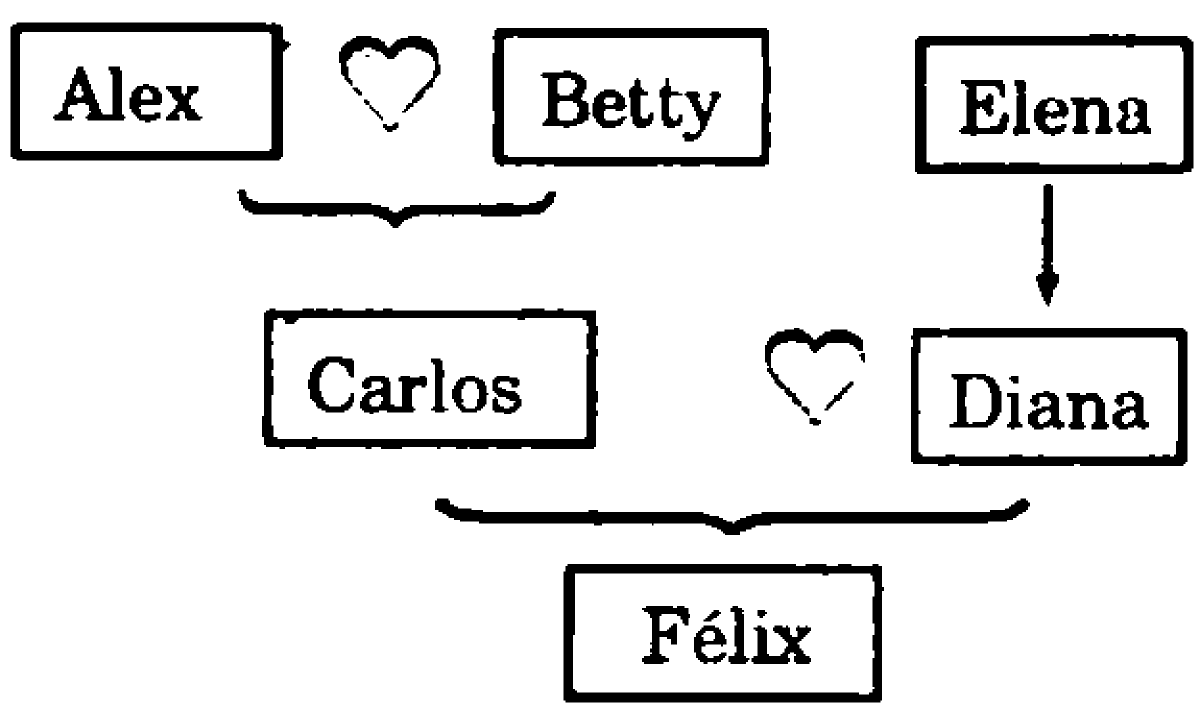
PROBLEMA 11 :

El hijo de Betty está casado con Diana, que es la hija de Elena y esta es a su vez abuela de Félix y suegra de Carlos. Si Diana es hija única y a la vez nuera de Álex, ¿qué proposición es totalmente falsa?

A) Félix es nieto del padre de Carlos.
B) Carlos es hijo del suegro de Diana.
C) La nuera de Betty es madre de Félix.
D) El padre de Carlos es esposo de Elena.
E) Álex es suegro de la madre de Félix.

RESOLUCIÓN :

Piden proposición falsa



RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Los parentescos son curiosos observó Andrés - *Jaime tiene el mismo parentesco contigo que el que yo tengo con tu hijo*. Así es respondió Carlos, *y tú tienes el mismo parentesco conmigo que Jaime contigo*. ¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

A) padre - hijo ***B) tío - sobrino*** ***C) son hermanos***
D) nieto - abuelo ***E) son primos***

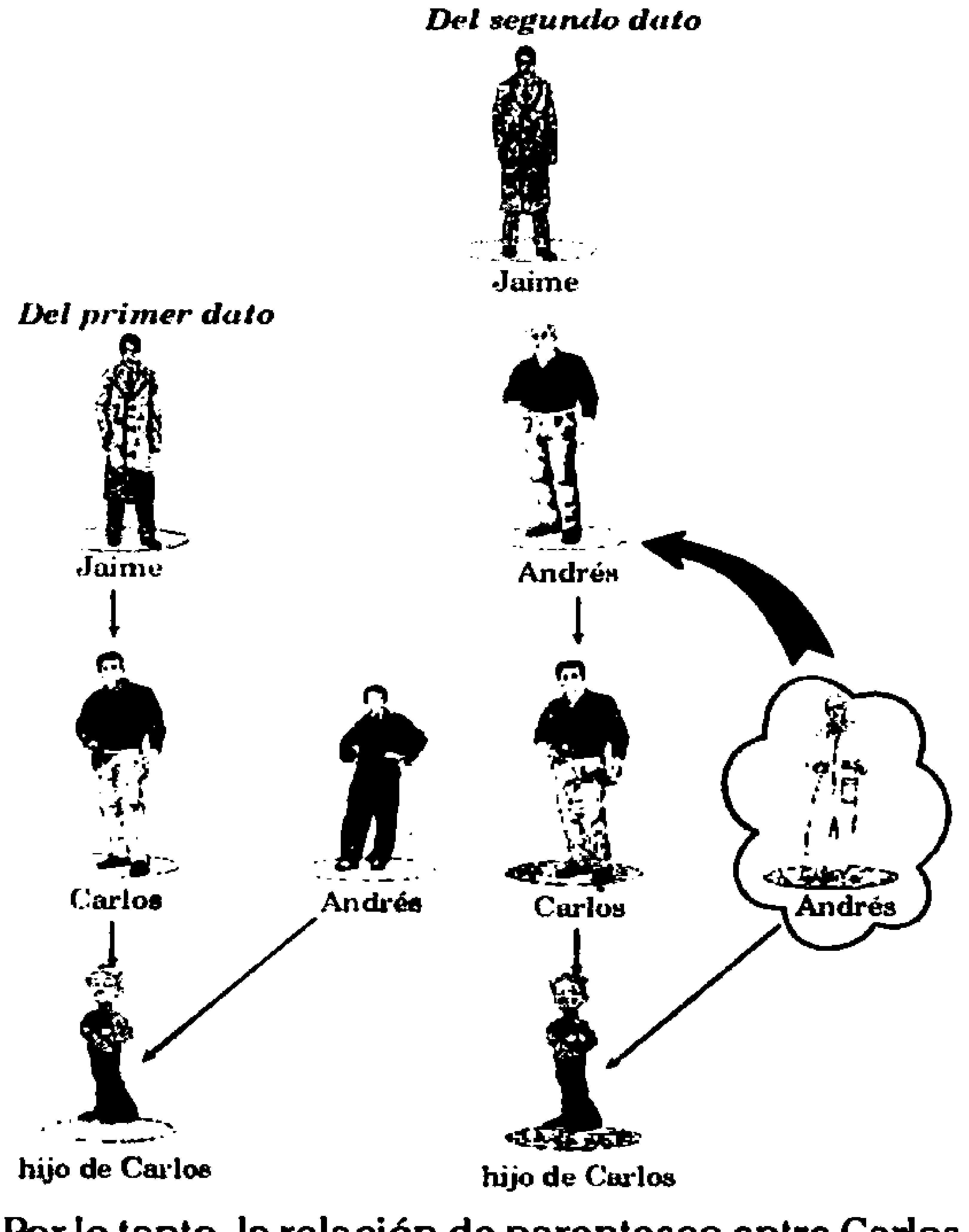
RESOLUCIÓN :

Piden: ¿Cuál es el parentesco entre Carlos y Jaime?

Datos:

- La relación de parentesco entre Jaime y Carlos es igual a la relación de parentesco entre Andrés y el hijo de Carlos.
- La relación de parentesco entre Andrés y Carlos es igual a la relación de parentesco entre Jaime y Andrés.

Analizamos el primer dato y observamos que una de las relaciones se establece con respecto al hijo de Carlos; por ende, la relación de parentesco es vertical (de abuelos y padres a hijos y nietos), así:



Por lo tanto, la relación de parentesco entre Carlos y Jaime es de nieto a abuelo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Carmen es la única tía del hijo del primo hermano de Juan. ¿Qué relación de parentesco tiene Enrique, que es el padre de Juan, respecto del sobrino de Carmen? Considere que Juan es el único hijo varón y que solo tiene una hermana.

A) abuelo ***B) tío*** ***C) tío abuelo***
D) bisabuelo ***E) abuelo***

RESOLUCIÓN :

Dato:

Juan es el único hijo varón y que sólo tiene una hermana.

Carmen es la única tía del ***hijo del primo hermano de Juan*** (Sobrino de Juan)

Luego se tiene:

Carmen es ***la única tía del sobrino de Juan*** (hermana de Juan)

Finalmente:

Carmen es hermana de Juan.

De aquí: como Enrique es padre de Juan también en padre de Carmen, por lo tanto, respecto al sobrino de Carmen, Enrique es su tío abuelo.

RPTA : "C"

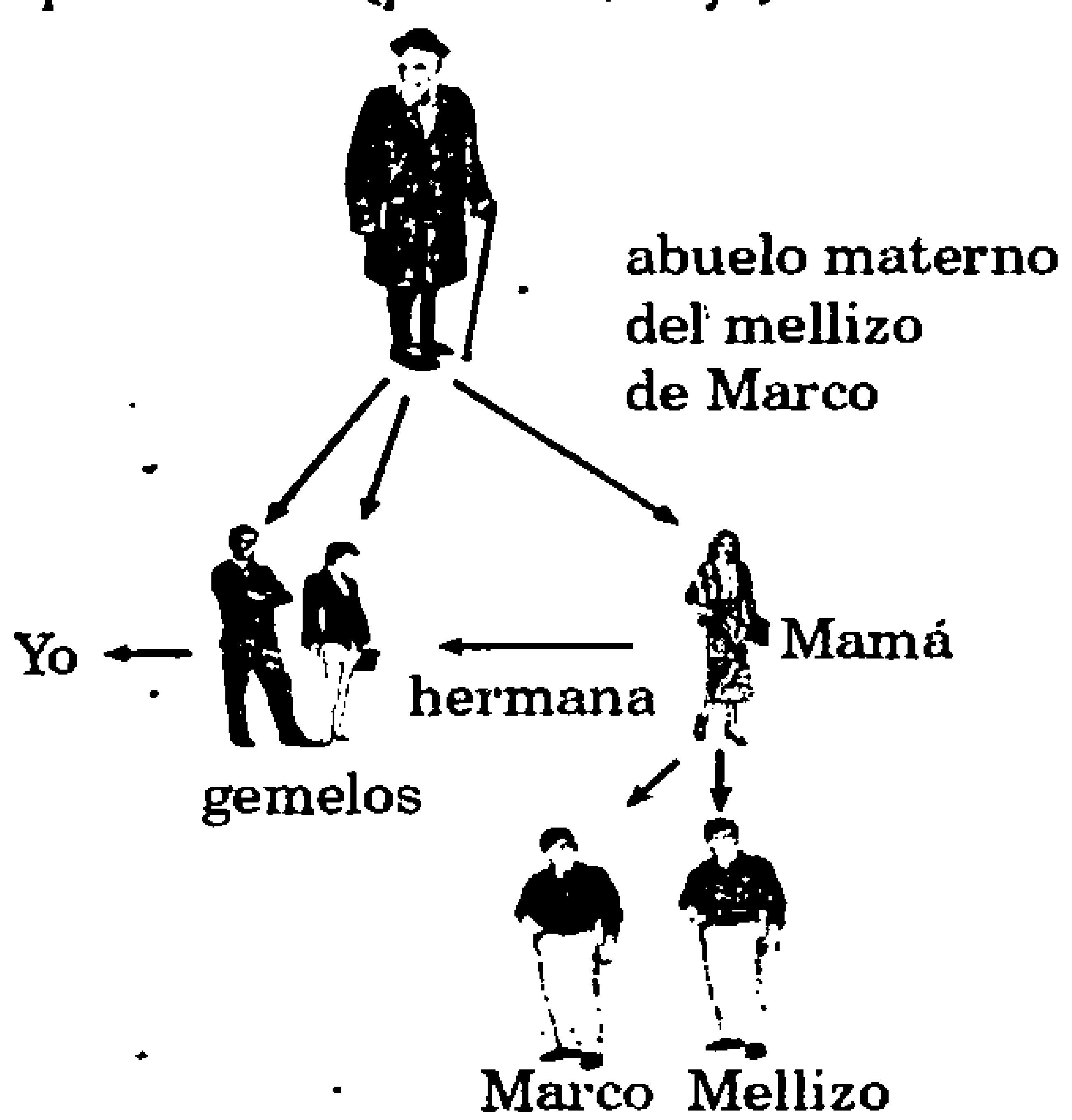
PROBLEMA 14 :

¿Qué es respecto a mí el abuelo materno del mellizo de Marco, si la madre de Marco es la hermana de mi hermano gemelo?

A) Abuelo ***B) Hijo*** ***C) Tío***
D) Padre ***E) Yerno***

RESOLUCIÓN :

Representamos gráficamente las condiciones sobre parentesco (padre ⇒ hijo).



El abuelo materno del mellizo de Marco es mi padre.

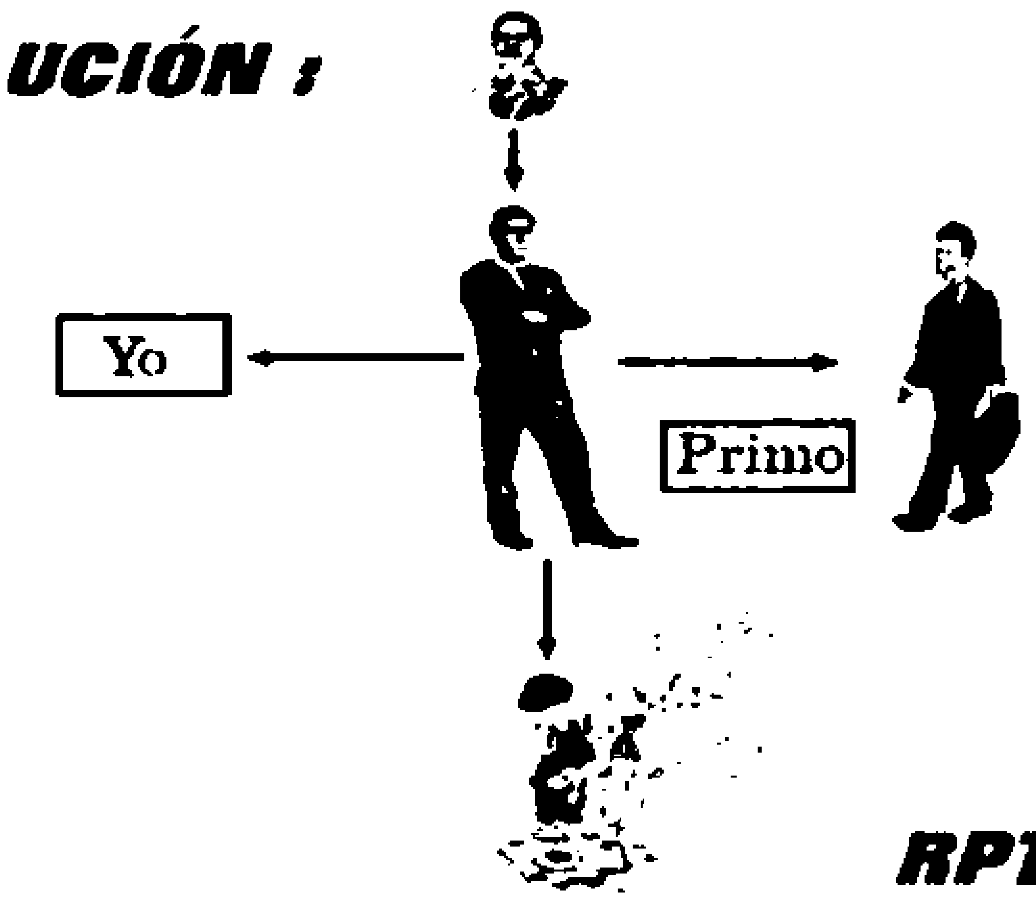
RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

¿Quién es el primo del abuelo paterno del único hijo del hijo de mi hermano?

A) mi primo ***B) mi nieto*** ***C) mi hijo***
D) mi sobrino ***E) mi hermano***

RESOLUCIÓN :



RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

El único tío del hijo del padre de Daniel es mi primo hermano. ¿Qué viene a ser de mí, el padre de único tío de Daniel, si se sabe que Daniel es hijo único?

A) mi sobrino ***B) mi tío*** ***C) mi primo***
D) mi hermano ***E) mi padre***

RESOLUCIÓN :

Dato importante: Daniel es hijo único.

El único tío del ***hijo del padre de Daniel*** es mi primo hermano. Daniel (ver dato)

Esto es equivalente a:

* El único tío de Daniel es mi primo hermano.

Luego:

El padre del ***único tío de Daniel*** (mi primo hermano) — mi tío

RPTA : "B"

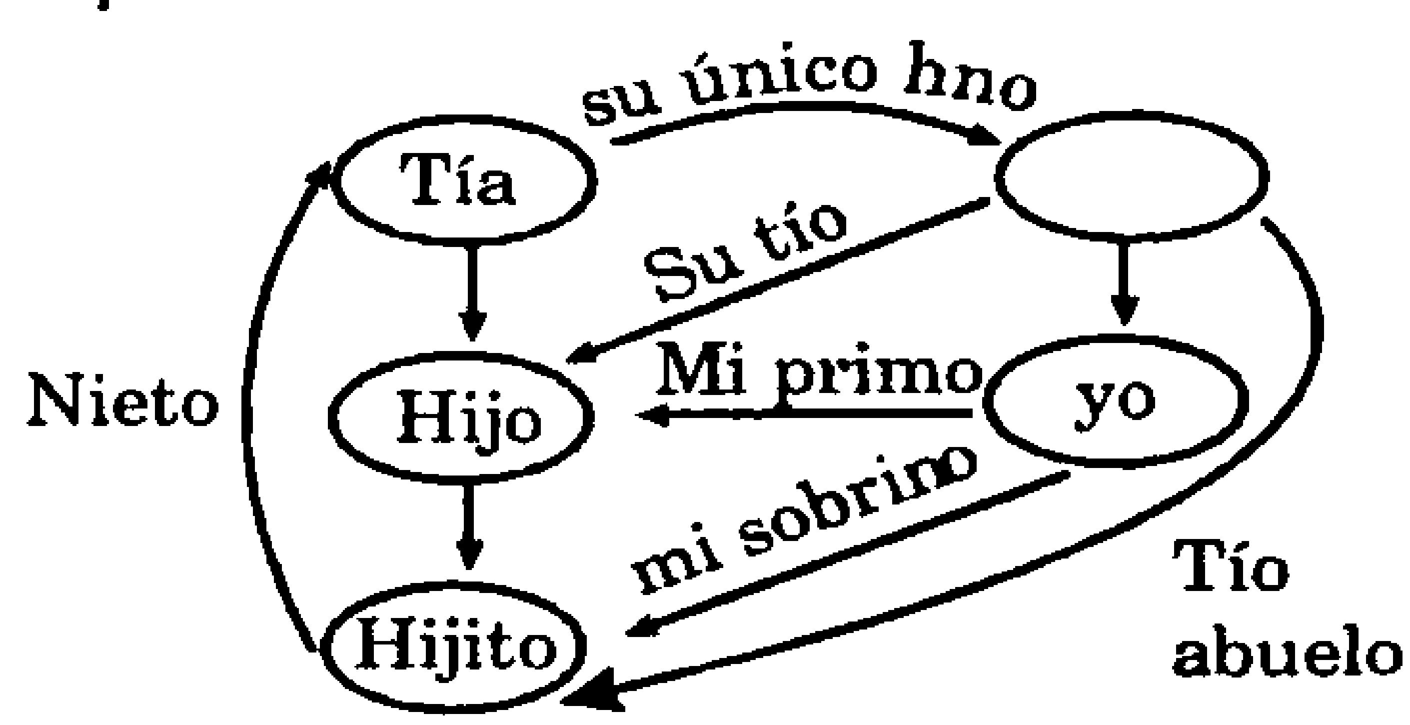
PROBLEMA 17 :

El nieto de mi tía es mi único sobrino. Indique qué parentesco tiene conmigo el tío de mi primo, si se sabe que es el tío abuelo de mi sobrino, además mi tía tiene un solo hermano.

A) mi hermano ***B) mi tío*** ***C) mi padre***
D) mi abuelo ***E) mi primo***

RESOLUCIÓN :

Grafiquemos de acuerdo al enunciado:



Parentesco: Mi padre

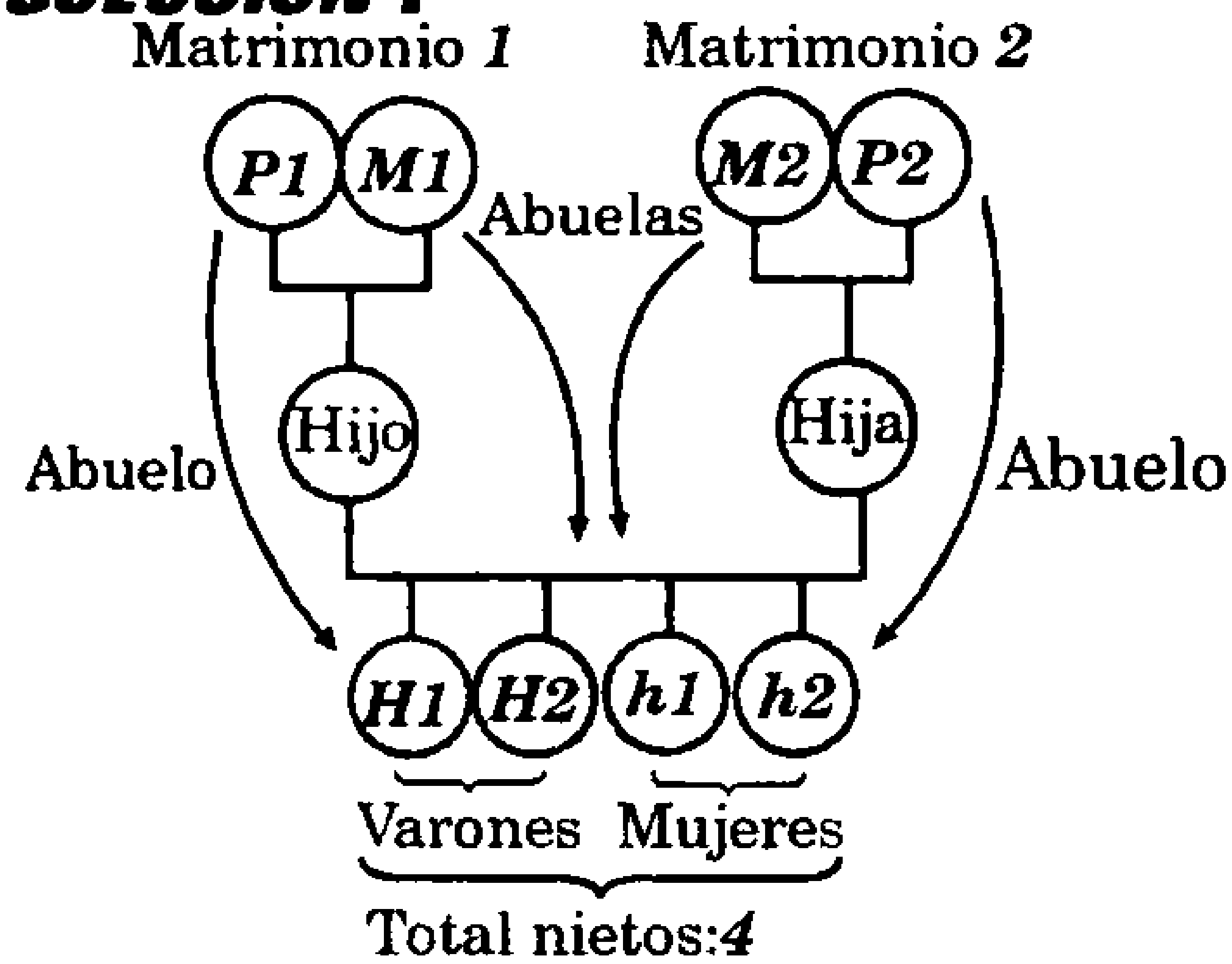
RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

En una reunión familiar están presentes dos abuelos, dos abuelas, tres padres, tres madres, tres hijas, tres hijos, dos suegras, dos suegros, un yerno, una nuera, dos hermanas, dos hermanos y cuatro nietos en total. ¿Cuántas personas se encuentran presentes, como mínimo?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

RESOLUCIÓN :



mínimo de personas es *10*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Mi hermana decía : "La mitad de mis hermanos usan anteojos en cambio , yo sólo veo que la *1/3* parte de mis hermanos usan anteojos" . ¿Cuántos hermanos somos?

A)3 B)7 C)133 D)9 E)4

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que el número total de hermanos es

$\overset{\circ}{2}+1$ y $\overset{\circ}{3}+1$; entonces será : $\overset{\circ}{6}+1$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

En la familia del chino Chang hay *6* hijas y cada hija tiene un hermano . ¿Cuántas personas conforman la familia del chino Chang?

A)18 B)15 C)13
D)9 E)7

RESOLUCIÓN :

* Ese hermano es común para las seis hijas , por lo que en la familia habrá :

$$\underbrace{6}_{\text{Hijas}} + \underbrace{1}_{\text{Hermano (chino Chang)}} + \underbrace{2}_{\text{Padres}} = 9$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Mis padres siempre anhelaron tener una docena de hijos , aunque no llegaron a dicho número . La tercera parte de mis hermanos son futbolistas y la quinta parte de mis hermanas son enfermeras. ¿Cuántos hijos somos , si mi nombre es Panchito?

A) 10 B) 11 C) 9 D) 8 E) 6

RESOLUCIÓN :

* La cantidad de hijos que somos es menor que *12*

* Mis hermanos es un número que se puede dividir entre *3* (múltiplo de *3*)

* Mis hermanas es un número que se puede dividir entre *5* (múltiplo de *5*) .

* Luego :

$$\text{Total de hijos : } \underbrace{\text{Mis hermanos}}_{3} + \underbrace{\text{yo}}_{1} + \underbrace{\text{Mis hermanas}}_{5} = 9$$

RPTA : "C"

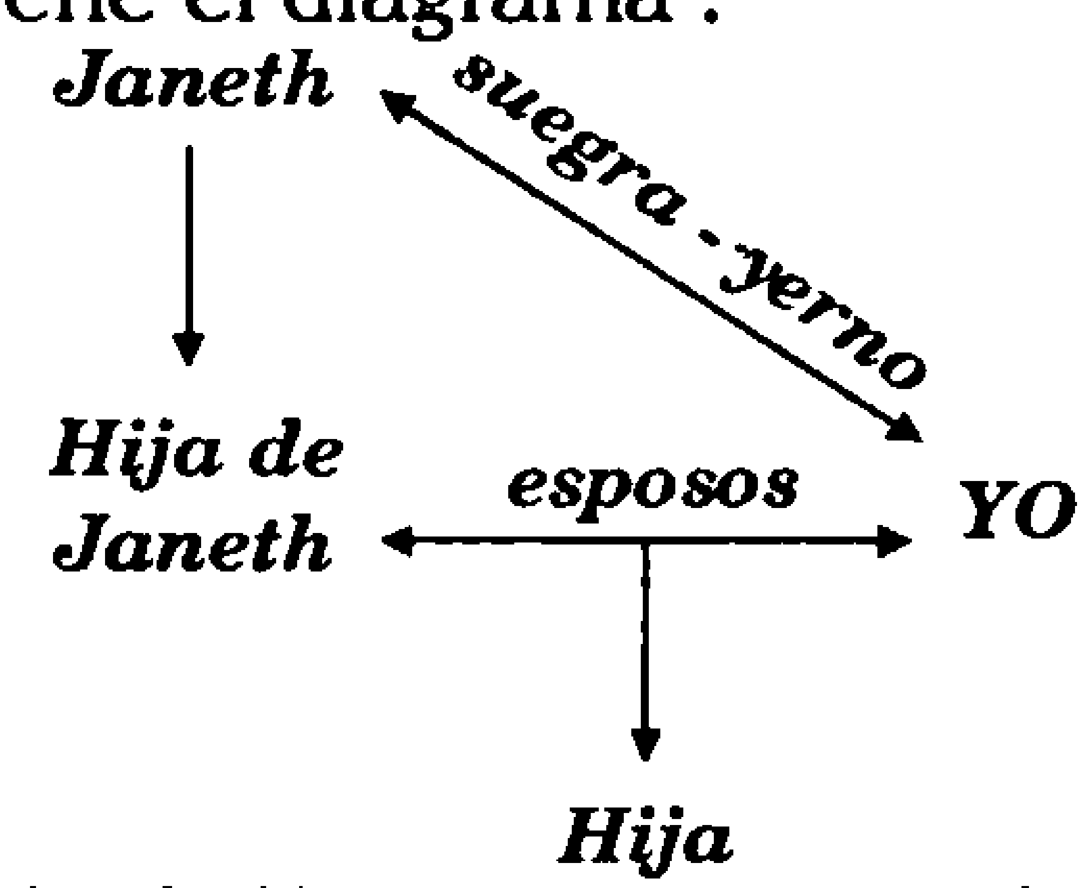
PROBLEMA 23 :

Si la hija de Janeth es la madre de mi hija , ¿qué parentesco tengo con Janeth?

A) Yerno–suegra B) Hijo – madre
C) Sobrino – tía D) Suegro – nuera
E) Nieto – abuela

RESOLUCIÓN :

* Se tiene el diagrama :



* Luego,la relación que tengo con Janeth es *yerno – suegra* .

RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

2 niños nacieron el mismo día del mismo mes , del mismo año y tienen los mismos padres , sin embargo, no son mellizos , ni gemelos . ¿porqué?

A) Porque nacieron un 29 de Febrero

B) Porque nacieron muertos

C) Porque son trillizos o quizás cuatrillizos

RESOLUCIÓN :

* Cuando nacen sólo *2* personas se les denomina melliza o gemela a cada una de ellas.

* Cuando nacen sólo *3* personas se les denominan trilliza a cada una de ellas, además a las tres se les llama trillizas.

* Entonces los *2* niños pueden ser trillizos y al otro no se hace alusión .

RPTA : "C"

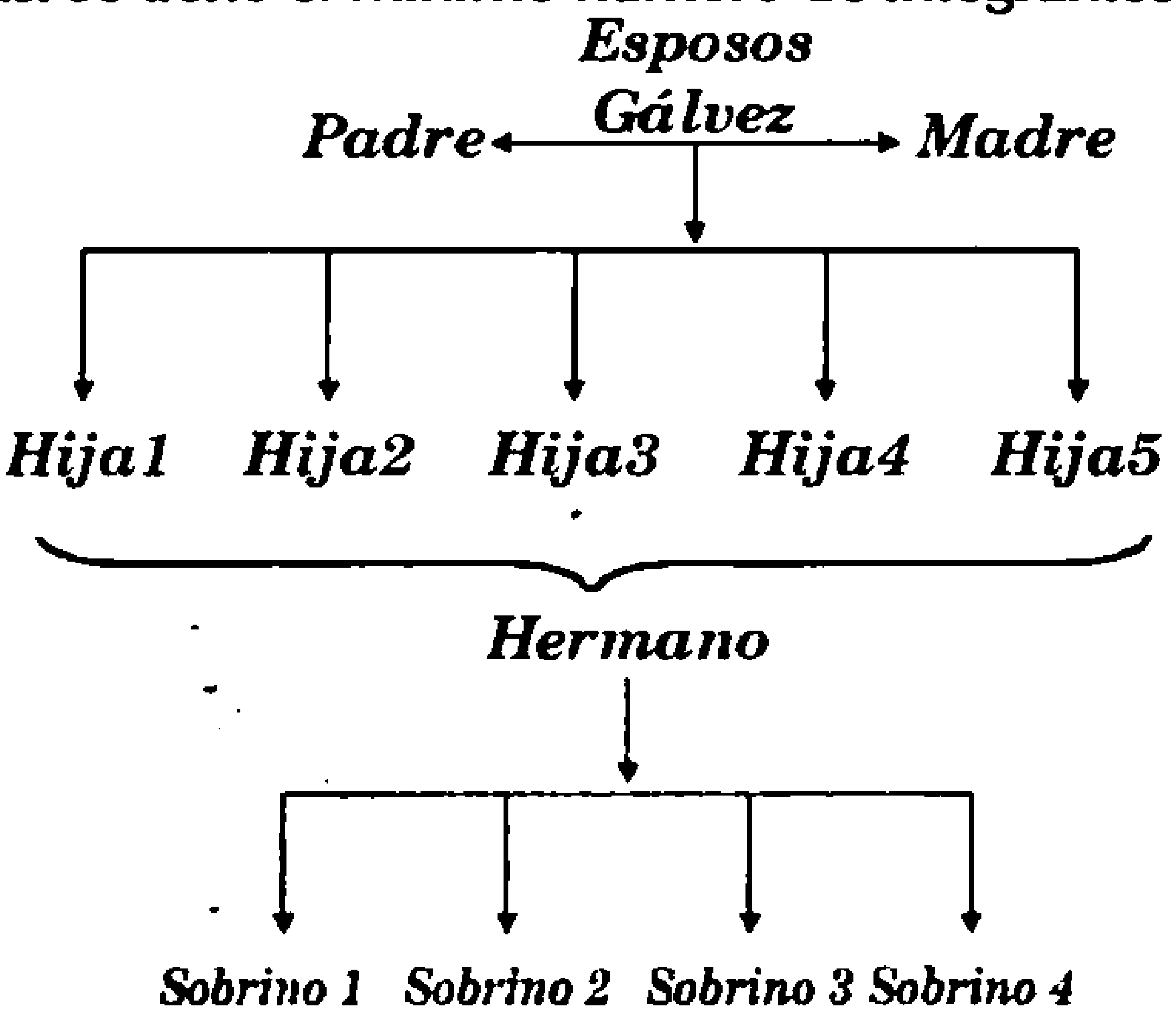
PROBLEMA 25 :

Los esposos Gálvez tienen *5* hijas. Si cada hija tiene un hermano y cada hermana tiene *4* sobrinos, ¿cuál es el mínimo número de personas que conforman esta familia?

A)11 B)14 C)13 D)12 E)15

RESOLUCIÓN :

* Minimizando el número de integrantes , todas las hijas tienen un solo hermano y éste cuatro hijos . Así se tiene el mínimo número de integrantes :



* Así, el mínimo número de personas es *12* .

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

No es cierto que Juan no sea sobrino de Alberto , quien es el tío de Pedro. Si es falso que Pedro y Juan sean hermanos y además Juan y María son hermanos. Por lo tanto :

A) Pedro y María son esposos

B) María y Pedro son hermanos

C) María y Pedro son primos

D) María es nieta de Alberto

RESOLUCIÓN :

La expresión equivalente a :

No es cierto que Juan no sea sobrino de Alberto será:

"Juan es sobrino de Alberto"

• Además que Alberto es tío de Pedro

• Pedro y Juan no son hermanos

• Juan y María son hermanos.

Luego se deduce que Pedro y Juan son primos y como éste último es hermano de María , entonces Pedro y María son primos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Pedro es concuñado de José porque su única hermana se ha casado con el único hermano de éste. Si los hijos de Pedro y José son ahijados de Carmen – hermana de Pedro – pero no de Juan – hermano de José – entonces los hijos, en relación con Juan, resultan ser

A) o bien ahijados, o bien hijos.

B) ambos, sus sobrinos naturales

C) uno su sobrino natural, el otro su ahijado.

D) uno su sobrino político, el otro su ahijado.

E) uno sobrino natural, el otro sobrino político.

RESOLUCIÓN :

Se deduce que Carmen y Juan son esposos y que Carmen es madrina de los hijos de Pedro y José . Pero su esposo no es padrino de estos hijos . Por lo tanto con respecto a Juan :

• El hijo de José es su sobrino natural y el hijo de Pedro es su sobrino político.

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Lenín le dice a Vlady : "es curioso. Conoci a *2* hermanos mellizos que nacieron en años diferentes . Vlady le responde : "tengo *7* años , nací el mismo día que mi padre y para el próximo verano , ambos tendremos el mismo número de cumpleaños ¿En que fecha nacierón cada uno de los mellizos y el padre de Vlady? Indicar cuál de las siguientes fechas no corresponde a lo pedido".

A) 1 de Agosto B) 1 de Enero

C) 31 de Diciembre D) 29 de Febrero

RESOLUCIÓN :

* Lenin se refiere a que uno de los mellizos nació un *31* de Diciembre , faltando minutos para las

12 de la noche y el otro , minutos después de la medianoche, cuando ya era primero de Enero de un año distinto .

* Vlady y su padre nacieron una fecha muy especial: *29* de Febrero y en un año bisiesto . De este modo, el niño cuenta sus años consecutivamente , pero su padre considera sus cumpleaños cada *4* años . En el próximo verano . El *29* de Febrero él cumplirá *8* años y su padre en su octavo cumpleaños , tendrá *8 4= 32* años .

* En consecuencia, un mellizo nació el *31* de Diciembre , el otro el *1* de Enero y el padre de Vlady , el *29* de Febrero .

RPTA : "A"

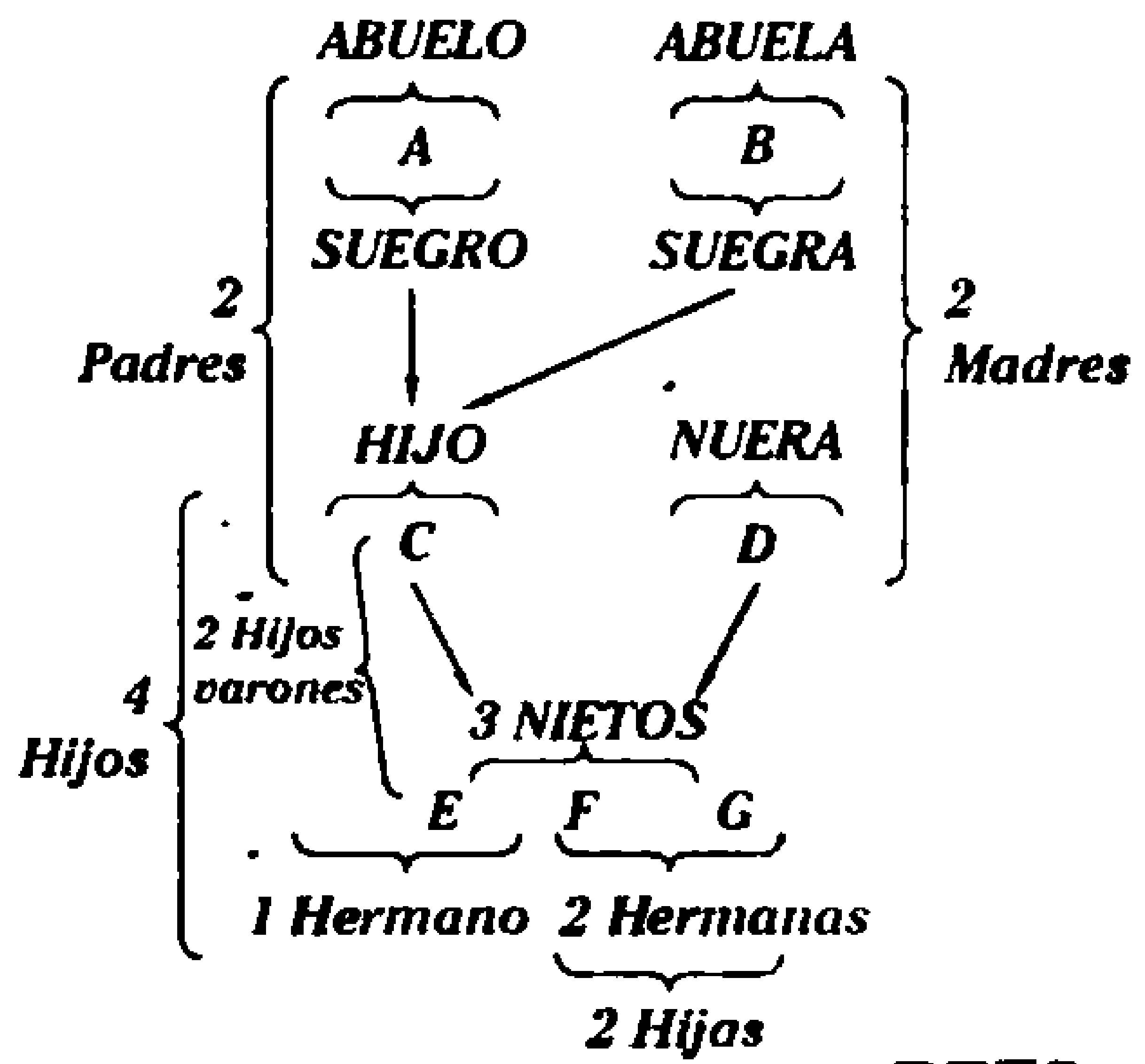
PROBLEMA 29 :

En una cena se encuentra : *1* abuelo , *1* abuela , *2* padres, *2* madres , *4* hijos , *3* nietos , *1* hermano, *2* hermanas, *2* hijos varones , *2* hijas , *1* suegro , *1* suegra y *1* nuera, ¿Cuál es el menor número de personas que satisface dichos parentescos?

A)23 *B)18* *C)7* *D)14* *E)9*

RESOLUCIÓN :

El árbol genealógico es :



RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Si todas tus tatarabuelas vivieran. ¿Cuántas tendría?

A)16 *B)12* *C)4* *D)8* *E)6*

RESOLUCIÓN :

* La pregunta es para un tataranieto , luego *1* persona tiene :

2 < > *4* < > *8* < > *16*

↓ ↓ ↓ ↓

Padres *Abuelos* *Bisabuelos* *Tatarabuelos*

Pero sólo piden las tatarabuelas, las cuales serán : $\frac{16}{2} = 8$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Si se sabe que Diana es hija de Lourdes , quien a su vez es madre de Katy , quien es hija de la hermana de Martha . Si Estela es hermana de Katy y Diana no es su madre , podemos afirmar :

I) Diana y Martha son hermanas .

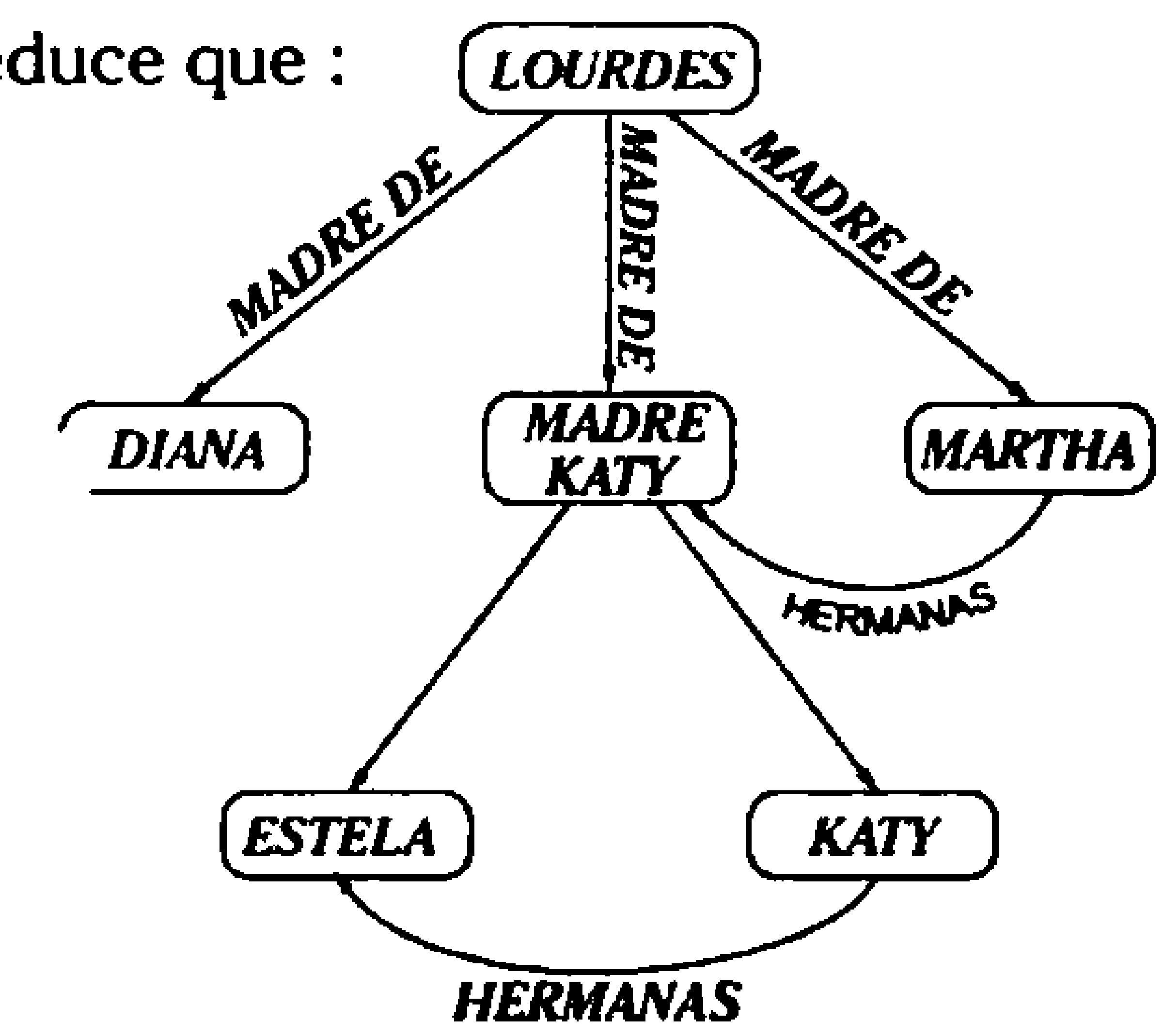
II) Lourdes es madre de Estela .

III) Martha es tía de Estela .

A) I *B) II* *C) I y II* *D) I y III* *E) III*

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que :



* Luego : *I) V* *II) F* *III) V*

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

2 pasajeros , que aparentaban mucha sinceridad , dialogaban en un microbús. El primero le decía al otro : "yo siendo varón ; el hijo de Luis es el padre de mi hijo". El segundo le replica: "que casualidad , Luis es el esposo de mi suegra". ¿Qué parentesco unía a estos pasajeros?

A) Hermanos *B) Primos* *C) Cuñados*
D) Esposos *E) Suegro y nuera*

RESOLUCIÓN :

*Cuando el primer pasajero dice : " El padre de mi hijo " se está refiriendo a él mismo (recuerde que es varón) , de modo que su frase :

* "El padre de mi hijo" puede ser reemplazado por "yo", con lo que se deduce que Luis es el padre del primer pasajero .

* El segundo pasajero (no se descarta que sea mujer)

dice que "Luis es el esposo de mi suegra" de modo que Luis también es su suegro esta persona está casada con el hijo que precisamente es el primer pasajero.

⇒ los pasajeros son esposos

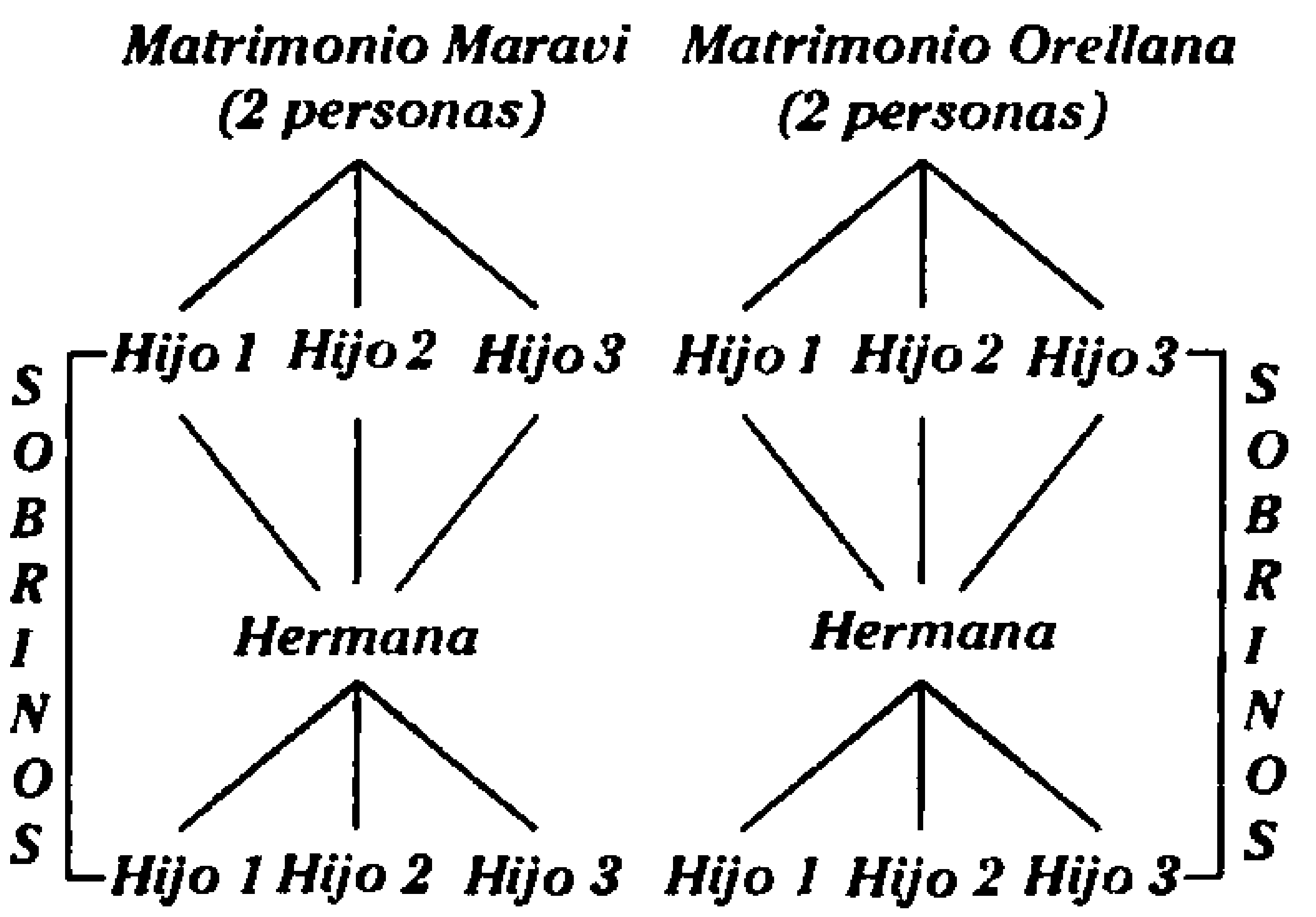
RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

En la fiesta de Sicaya (*4* de agosto) se encontraron los matrimonios Maraví y Orellana en la que cada uno de ellos tiene *3* hijos (varones) cada hijo tiene una hermana y cada hermano tiene *3* sobrinos . ¿Cuál es el número mínimo de personas que se encontraron?

A) 22 *B) 20* *C) 18* *D) 16* *E) 10*

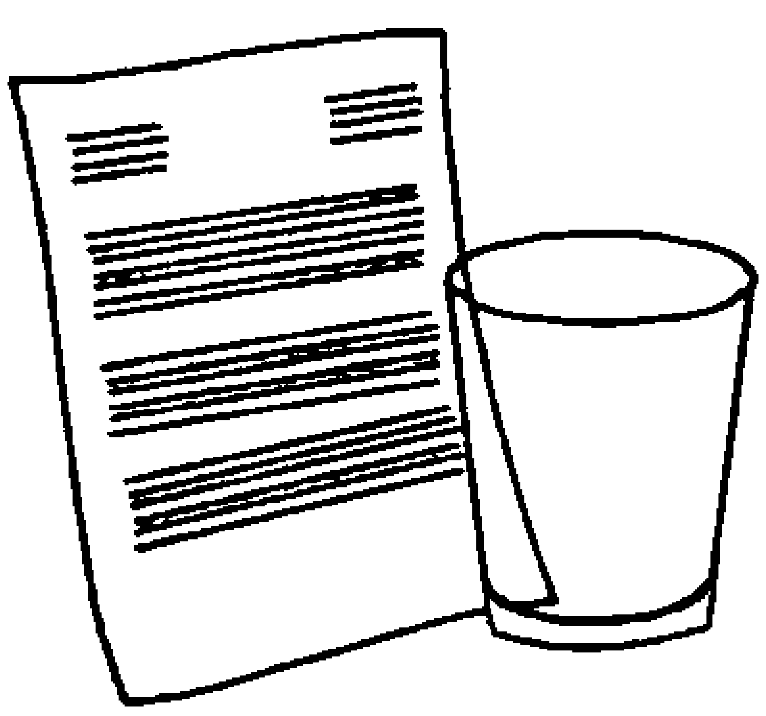
RESOLUCIÓN :



⇒ Total de personas : $9+9=18$

RPTA : "C"

CURIOSAS RELACIONES DE LOS PARENTESCOS



Carlos era una persona trabajadora, de vida rutinaria. De repente su vida fue cambiando a partir de su matrimonio; intensificó su día de trabajo, no se estableció con su recién esposa ya que ella tenía una familia ya formada, entre otras desavenencias.

Cierto día, su esposa no sabía nada de él, no llegaba de su trabajo durante días. Preocupada estuvo buscándolo en varios lugares, en su trabajo le informaron que no se presentaba y fue así que decidió dar parte a la Policía.

Uno días después, la Policía encontró a Carlos, pero muerto, en un cuarto de un hotel; en la habitación se encontraron un vaso, con apariencia de haber contenido cierta bebida, y una carta:

A continuación se reseña el contenido de dicha carta:

Carta póstuma escrita por un hombre con problemas existenciales

Estimado señor juez:

Escribo esta carta para pedir que no se culpe a nadie de mi muerte. Me quité la vida porque si hubiese vivido unos días más, habría perdido la razón tratando de averiguar quién soy.

Verá usted mi tragedia:

Tuve la debilidad de casarme con una señora viuda que tenía una hija casadera; mi padre, que también era viudo, se enamoró tiempo después de mi hija política (hijastra) y se casó con ella, por lo que mi padre pasó a ser mi yerno y mi hija política mi madrastra, por ser la esposa de mi padre.

Algún tiempo después, su esposa tuvo un hijo, el cual pasó a ser mí hermano, por ser hijo de mi padre y al mismo tiempo, mi nieto, puesto que era hijo de mi hija política.

Mi esposa resultó entonces ser mi abuela, ya que era madre de la madre del hijo de mi padre, así que yo era nieto y esposo al mismo tiempo. El resultado de esta serie de parentescos y problemas es que he llegado a ser mi propio abuelo.

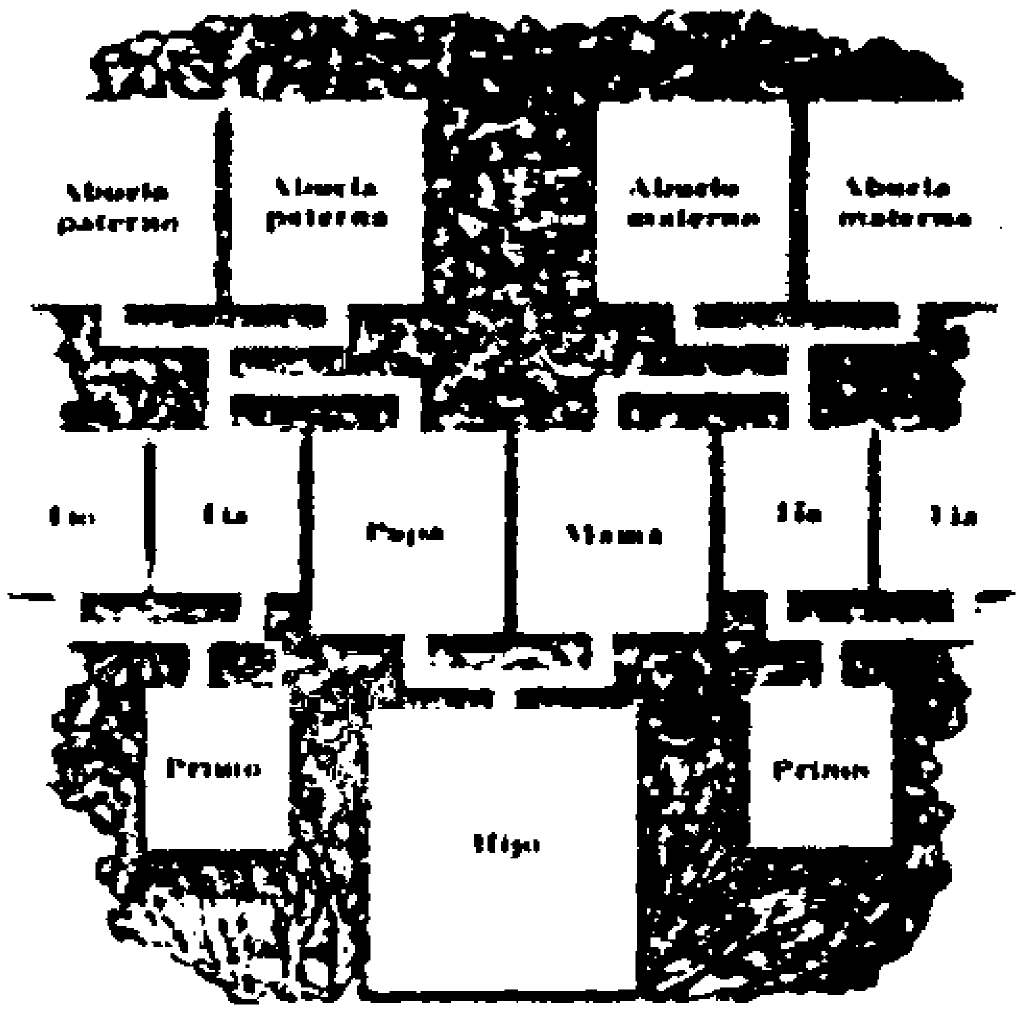
Me quito la vida porque mi esposa está esperando un hijo; no quiero imaginar las diversas y confusas relaciones de parentesco que se generarán entre mi hijo, mi hijastra - madrastra, mi esposa - abuela, mi hermano - nieto y mi padre - yerno.

ÁRBOL GENEALÓGICO

Un **árbol genealógico** es una representación gráfica que expone los datos genealógicos de un individuo en una forma organizada y sistemática, sea en forma de árbol o tabla. Puede ser ascendiente, es decir que expone los antepasados o ancestros de un sujeto o puede ser descendiente, es decir que expone todos los descendientes del sujeto. Para realizar un árbol genealógico es necesario, primeramente, haber realizado una investigación genealógica o genealogía del individuo.

Dependiendo de la finalidad o uso que quiera dársele al árbol genealógico, éste puede referirse sólo a la filiación y sucesión masculina, llamada también *línea de sangre* o *linaje*, o puede referirse a la filiación y sucesión femenina, llamada también *línea de ombligo*.

El árbol genealógico no se aplica solamente en seres humanos, también se utiliza para mostrar el pedigrí de un animal, representar la evolución de una lengua o idioma, seguir la trayectoria de un partido político, una disciplina artística o un arte marcial y ver sus ramificaciones.



PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿ Qué representa para Carlos el único nieto del abuelo del padre de Carlos ?

A) El mismo *B) El nieto*
C) Su hijo *D) Su papá*
E)Su abuelo

02 La mamá de Luisa es la hermana de mi padre. ¿Qué representa para mi el abuelo del mellizo de Luisa?

A) Mi hermano *C) Mi tía*
B) Mi sobrino *D) Mi abuelo*
E) Mi hijo

03 ¿Qué es de mí, la hija de la hija de la hermana de la mamá del esposo de mi madre?

A)mi madre *B)mi hermana*
C)mi prima *D)mi tía*
E)mi abuela

04 ¿Qué parentesco tiene conmigo el primo del abuelo paterno del único hijo de mi hermano?

A)mi abuelo *B)mi tío*
C)mi hermano *D)mi primo*
E)mi padre

05 Los esposos Ramírez tienen *4* hijos varones. Cada hijo tiene una hermana y cada hermano tiene *3* sobrinos. ¿Cuál es el número mínimo de personas que conforman esta familia? .

A)9 *B)8* *C) 10*
D) 11 *E) 12*

06 Una familia presente en una reunión consta de dos padres, dos madres, cuatro hijos varones, una hermana, un abuelo, una abuela, tres nietos, una nieta, dos esposos, una nuera. ¿Cuántas personas comomínimo conforman dicha familia?

A)6 *B)7* *C)8*
D)9 *E)10*

07 Juan es el hijo de la esposa del hijo de Pedro; y el hijo de la esposa del yerno de Pedro se llama Carlos. ¿Qué relación familiar existe entre Juan y Carlos?

A)hermanos *B)primos*
C)cuñados *D)padre - hijo*
E)sobrino - tío

08 ¿Qué parentesco hay entre Darío y Beto, si se sabe que Darío es el hijo del hermano del hijo del abuelo paterno de Carla, y Beto es el hijo del padre del único tío de Carla, además, Darío y Carla no son hermanos?

A)hijo - padre *B)hermanos*
C)sobrino - tío *D)primos*
D)nieto - abuelo

09 En una reunión de solo varones, se puede observar que hay tres padres, tres hijos, dos abuelos, dos nietos, un bisabuelo y un bisnieto. ¿Cuántas personas están presentes en dicha reunión, como mínimo?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 7* *E) 14*

10 Mario tiene el doble de hermanos que de hermanas, pero si al número total de hermanos, se le restan el número total de hermanas de la familia, incluida ella; el resultado sería tres. Si todos ellos pertenecen a un mismo tronco de una familia, ¿cuánto suman el número de hermanos y el número de hermanas que componen la familia?

A) 12 *B) 15* *C) 13*
D) 14 *E) 11*

11 En una reunión están presentes un bisnieto, tres hijos y tres padres. Cada uno lanzó cinco dados, obteniendo entre todos *89* puntos. Si todos, excepto el bisnieto, obtuvieron al sumar en total sus puntos, el mismo puntaje impar cada uno, y la cantidad de personas reunidas es la mínima, ¿cuál es el mínimo puntaje que puede obtener el bisnieto?

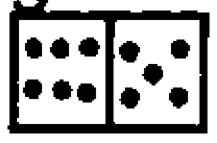
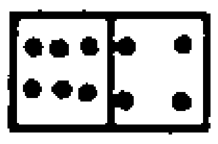
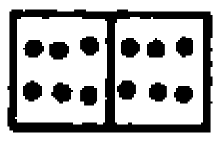
A) 2 *B) 3* *C) 8*
D) 5 *E) 6*

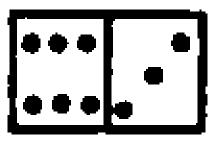
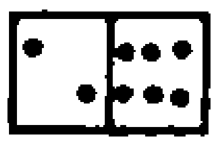
12 María es mamá de Iván. Carmela es hermana de Jesús . Carola es suegra de Néstor. María es hija única de Carola y Jesús hijo de Néstor. Si María y Néstor no tuvieron compromiso alguno antes, ¿qué parentesco existe entre Carmela e Iván?

A) Son hermanos.
B) Son primos.
C) Son hermanos o primos.
D) Carmela es sobrina de Iván.
E) Iván es sobrino de Carmela.

13 En cierta reunión familiar se encuentran *1* abuelo, *1* abuela, *2* padres, *2* madres, *1* nieto, *2* nietas, *1* hermano, *2* hermanas, *2* hijos, *2* hijas, *1* suegro, *1* suegra y *1* nuera. En esta reunión hay una urna que contiene *28* fichas de un juego de dominó de la cual cada una de las personas extrae una ficha al azar, de manera que la suma de los puntos de sus fichas resulta igual a *22*. Si la cantidad de personas reunidas es la mínima, ¿cuál es la ficha con máximo puntaje que extrajo la

suegra?

A)  *B)*  *C)* 

D)  *E)* 

14 En una reunión familiar están presentes un abuelo que pasa de los ochenta pero no llega a los noventa años, dos padres y tres hijos, y la suma de sus edades, en años es ***172***. Las edades de todas las personas reunidas son números primos diferentes no menores de ***18*** años, y la cantidad de personas reunidas es la mínima ¿Cuál es la máxima edad que puede tener uno de los hijos?

A) 41 años ***B) 47 años***
C) 43 años ***D) 53 años***
E) 37 años

15 A un miembro de la familia Cusiurpi se le hace las siguientes preguntas:

¿Alberto es tu padre?, ¿Delia es tu hermana?, ¿Bernardo es tu hermano?, ¿César es tu hermano?, ¿Elena es tu madre?. Se obtuvo dos **no** y tres **si** como respuestas. Dado que esta familia solo está compuesta por un papá, una mamá, la cual no es Elena, y tres hijos, y sus miembros son los que se nombraron en las preguntas, ¿a qué miembro de la familia se le hizo la pregunta?

A) Delia ***B) Elena***
C) Bernardo ***D) Cesar***
E) Alberto

16 En una fiesta se encuentran ***3*** padres, ***3*** hermanos, ***3*** tíos, ***3*** sobrinos y ***3*** primos. Si cada uno necesita una señorita para bailar la canción que están tocando en ese momento, ¿cuántas señoritas como mínimo se necesitan?

A) 5 ***B) 7*** ***C) 9***
D) 8 ***E) 6***

17 Una familia está compuesta por ***4*** parejas de hermanos (una pareja de hermanos está compuesta por un hermano y una hermana), ***2*** tíos, ***2*** tías, ***2*** padres, ***2*** madres, ***2*** sobrinos, ***2*** sobrinas, ***2*** primos y ***2*** primas. ¿Cuál es el mínimo número de personas que conforman esta familia?

A) 5 ***B) 6*** ***C) 8***
D) 12 ***E) 16***

18 Antonio es tío de Rosa; Ana es abuela de Pedro; Fabiola es hermana de Antonio; Antonio es papá de Pedro. ¿Qué parentesco existe entre Rosa y Pedro?

A) Son hermanos.

B) Son primos.

C) Rosa es tía de Pedro.

D) Pedro es padre de Rosa.

E) Pedro es nieto de Rosa.

19 Miguel es el único hijo del Abuelo de Cirilo, y Carla es la única nuera del abuelo de Miguel. Si el único hijo de Cirilo tiene ***3*** años y de una generación a otra consecutiva, han transcurrido ***20*** años. ¿Cuál es la suma de las edades del abuelo y el bisabuelo de Cirilo?

A) 146 años ***B) 86 años***
C) 126 años ***D) 106 años***
E) 66 años

20 A una mesa se sientan a tomar desayuno un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, cuatro hijos, tres nietos, un hermano, dos hermanas, dos hijos varones, dos hijas mujeres, un suegro, una suegra y una nuera. Si en la mesa se colocan ***29*** panes y cada uno come dos, ¿cuántos panes como máximo sobran luego del desayuno?

A) 15 ***B) 18*** ***C) 10***
D) 14 ***E) 12***

21 Sonia le dice a María: « Tú tienes el mismo parentesco con mi hija, que el que Gloria tiene conmigo», y María le responde: «Es cierto, y tú tienes el mismo parentesco conmigo, como el que yo tengo con Gloria». Entonces es cierto que:

A) María es hermana de Gloria
B) Sonia es hija de María
C) Gloria es madre de Sonia
D) Sonia es tía de María
E) Gloria es hija de Sonia

22 Manuel es esposo de Lupe y tienen únicamente dos hijas, un hijo y ningún hijo extramatrimonial. Los nietos de Lupe, que son hijos únicos, se llaman Ricardo, Carlos y Sofía. Manuel es abuelo paterno de Carlos. La suegra del esposo de Sofía se llama Carla. María quién no tiene hermanos, es cuñada de Perla y madre de Carlos. Si el esposo de Perla es José, entonces

A) José es padre de Sofía

B) María y José son hermanos

C) El padre de Ricardo es José

D) El esposo de María es yerno de Lupe

E) José es el padre de Carlos

23 En una reunión están presentes ***2*** padres, ***2*** hermanos, un tío y un sobrino. Cada uno lanzo ***2*** dados, obteniendo entre todos ***40*** puntos. Si todos excepto el sobrino obtuvieron el mismo puntaje cada uno, y la

cantidad de personas reunidas es la mínima, ¿cuál es el mínimo puntaje que obtuvo el sobrino?

A) 5 *B) 3* *C) 4*
D) 8 *E) 6*

24 Al caer la noche, mientras descansaban junto a la fogata, Luis le preguntó a su esposa: ¿Qué relación de parentesco tiene conmigo el hijo del único primo del único sobrino del papá del padre de mi nieto? ¿Qué respondió la esposa, si es correcto? Considere que Luis no tiene hijas.

A)tu padre *B)tu tío*
C)tu hermano *D)tu primo*
E)tu nieto

25 ¿Qué viene a ser, de mí, el hijo del único primo del único sobrino del papá del padre de mi hijo?

A)mi nieto *B)mi hijo*
C)mi padre *D)mi sobrino*
E)mi hermano

26 A una reunión asistieron un esposo, una esposa, tres hermanos, una madre, dos padres, cuatro hijos, una nuera, un suegro, dos cuñados, una cuñada, un nieto, un abuelo, dos tíos y un sobrino. ¿Cuál es la cantidad mínima de personas que integran esta reunión?

A) 6 *B) 7* *C) 8*
D) 9 *E) 10*

27 En una reunión familiar observé a dos abuelos, un bisabuelo, un bisnieto, dos nietas, un nieto, dos padres, una madre, un tío, una tía, dos hermanos, dos hermanas, un sobrino, dos sobrinas y un tío abuelo. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión?

A) 5 *B) 6* *C) 7*
D) 8 *E) 9*

28 Una familia se compone de dos padres, dos madres, cuatro hijos en total, dos hermanos, una hermana, un abuelo, una abuela, dos nietos, una nieta, dos parejas de esposos y una nuera. ¿Cuántas personas son como mínimo?

A) 5 *B) 6* *C) 7*
D) 8 *E) 9*

29 Luis y su esposa tuvieron cuatro hijas, cada una se casó y tuvo a su vez cuatro niños cada una. Si nadie en las tres generaciones falleció, ¿cuántos miembros tiene la familia, como mínimo?

A) 22 *B) 23* *C) 24*
D) 25 *E) 26*

30 Los esposos Gálvez tienen *5* hijas. Si cada hija tiene un hermano y cada hermana tiene *4* sobrinos, ¿cuál es el mínimo número de personas que conforman esta familia?

A)11 *B)14* *C)13*
D)12 *E)15*

31 Lenín le dice a Vlady : "es curioso. Conoci a *2* hermanos mellizos que nacieron en años diferentes . Vlady le responde : "tengo *7* años , nací el mismo día que mi padre y para el próximo verano , ambos tendremos el mismo número de cumpleaños ¿En que fecha nacierón cada uno de los mellizos y el padre de Vlady? Indicar cuál de las siguientes fechas no corresponde a lo pedido".

A) 1 de Agosto *B) 1 de Enero*
C) 31 de Diciembre
D) 29 de Febrero

32 Pedro es concuñado de José porque su única hermana se ha casado con el único hermano de éste. Si los hijos de Pedro y José son ahijados de Carmen – hermana de Pedro – pero no de Juan – hermano de José – entonces los hijos, en relación con Juan, resultan ser

A) o bien ahijados, o bien hijos.
B) ambos, sus sobrinos naturales
C) uno su sobrino natural, el otro su ahijado.
D) uno su sobrino político, el otro su ahijado.
E) uno sobrino natural, el otro sobrino político.

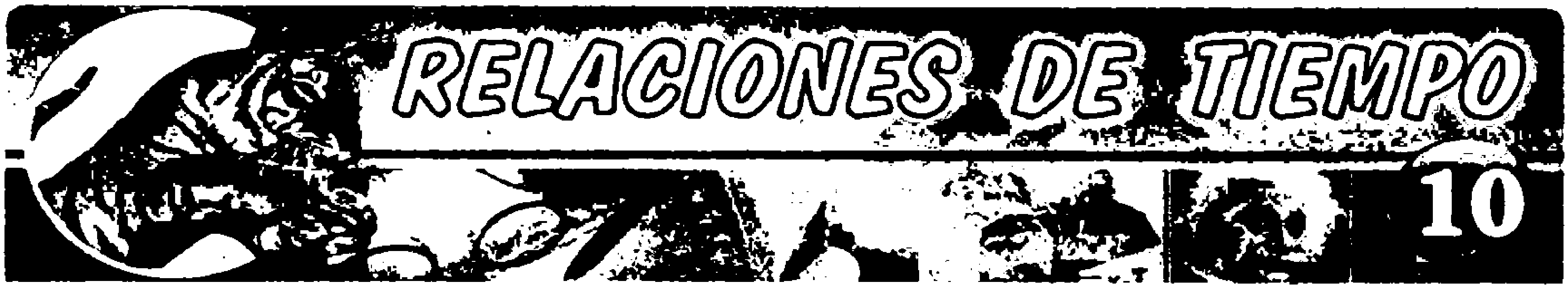
33 No es cierto que Juan no sea sobrino de Alberto , quien es el tío de Pedro. Si es falso que Pedro y Juan sean hermanos y además Juan y María son hermanos. Por lo tanto :

A) Pedro y María son esposos
B) María y Pedro son hermanos
C) María y Pedro son primos
D) María es nieta de Alberto

34 En una cena se encuentra : *1* abuelo , *1* abuela , *2* padres, *2* madres , *4* hijos , *3* nietos , *1* hermano, *2* hermanas, *2* hijos varones , *2* hijas , *1* suegro , *1* suegra y *1* nuera, ¿Cuál es el menor número de personas que satisface dichos parentescos?

A)23 *B)18* *C)7*
D)14 *E)9*

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
D	D	C	B	C	C	B	D	B	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	A	A	B	B	E	C	B	A	A
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	C	C	F	B	A	C	C	E	D
31	32	33	34						
A	E	C	C						



OBJETIVO :

Desarrollar la capacidad espacio temporal a través de la determinación de fechas en el transcurrir del tiempo.

INTRODUCCIÓN:

Los calendarios son sistemas ordenados que ajustan los días en meses y los meses en años.

Un año comercial es una forma de contabilizar el tiempo mediante el cual la duración del año se ajusta a ***360*** días.

En la distribución de los días de un mes encontramos relaciones numéricas interesantes. Por ejemplo, parte de la fecha 1 hasta la fecha 30, saltando como lo hace el caballo en el juego de ajedrez. Suma las fechas que pises y llega con el mismo puntaje.

D	L	M	M	J	V	S
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

AÑO BISIESTO

El año bisiesto existe como una corrección para un problema de exactitud estelar. Sabemos que el año se define como el periodo de tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del sol. En términos terrestres, este periodo es de, aproximadamente, ***365,25*** días. Así que esos. ***0,25*** días adicionales se van acumulando, y al cabo de ***4*** años, ya suman un día completo adicional. Antiguamente, se decidió utilizar los años con cifras divisibles entre ***4 (2004, 2008, etc.)***, y a estos años incluirle el día adicional para compensar esta variación.

Encima de esto, el año no dura exactamente ***365, 25*** días, sino ***365, 242216*** días, esta pequeña diferencia va acumulando un error adicional a través de los siglos, por lo cual existe una regla adicional para los años bisiestos. De todos los años divisibles entre ***100***, ninguno es bisiesto, a excepción de los que son divisibles entre ***400*** (esta fue la razón por la cual el año ***2000*** si fue un año bisiesto). Afortunadamente, no tendremos que preocuparnos por esta regla durante los siguientes ***90*** años por lo menos.

Históricamente, el calendario Juliano, establecido por el emperador romano Julio César ya agregaba un día adicional cada ***4*** años, pero no tomaba en cuenta el pequeño error adicional de ***0,007784*** días cada año. Esto hizo qué para el ***S. XVI***, el año estaba atrasado ***11*** días, y algunas fechas históricamente no coincidían. Al analizar esto, en ***1582*** el Papa Gregorio ***XIII*** ordenó adelantar el calendario oficial por ***11*** días, para compensar, el error acumulado hasta ese momento, y estableció la regla adicional de los años divisibles entre ***100*** y ***400***, con lo cual queda establecido oficialmente los años bisiestos.

¿Y por qué el término bisiesto? Históricamente, esto viene del nombre dado al día adicional en el año, que originalmente era el ***24*** de Febrero. Este día, según el calendario romano, era el "sexto día antes del Calendas de Marzo". Como era un día adicional, era el día ***bi-sexto***, que después se volvió bisiesto. Posteriormente, el día adicional se cambió al ***29*** de Febrero.

RELACIONES TEMPORALES

En este punto veremos aquellos problemas que se generan al relacionar los tiempos (hoy, ayer, mañana...) con los días de la semana.

En el presente capítulo encontraremos diversos tipos de problemas que los clasificaremos en:

* ***Variación de días.***
* ***Calendarios.***
* ***Variación de años.***

PROBLEMAS SOBRE VARIACIÓN DE DÍAS

Para resolver estos tipos de problemas podemos utilizar un método regresivo o asignando valores númericos al tiempo en mención.

REGLA PRÁCTICA :

En los enunciados podemos encontrar términos que no necesariamente sean los que habitualmente se utilizan para representar variación de días (mañana, pasado mañana,...), entre ellos tenemos:

Anteayer <> hace 2 días
Ayer < > el día que precede
Ayer<> el día que antecede
Ayer<> el día anterior
Mañana <> el día posterior
Mañana <>el siguiente día
Mañana <> el día que sigue

Pasado mañana <> el día que subsigue.

Considere las siguientes equivalencias :

Anteayer <>*–2*
Ayer <> *–1*
Hoy <>*0*
Mañana <> + *1*
Pasado mañana <>+2
Hace *n* días <>– *n*
Dentro de *m* días <>+ *m*

•MÉTODO REGRESIVO :

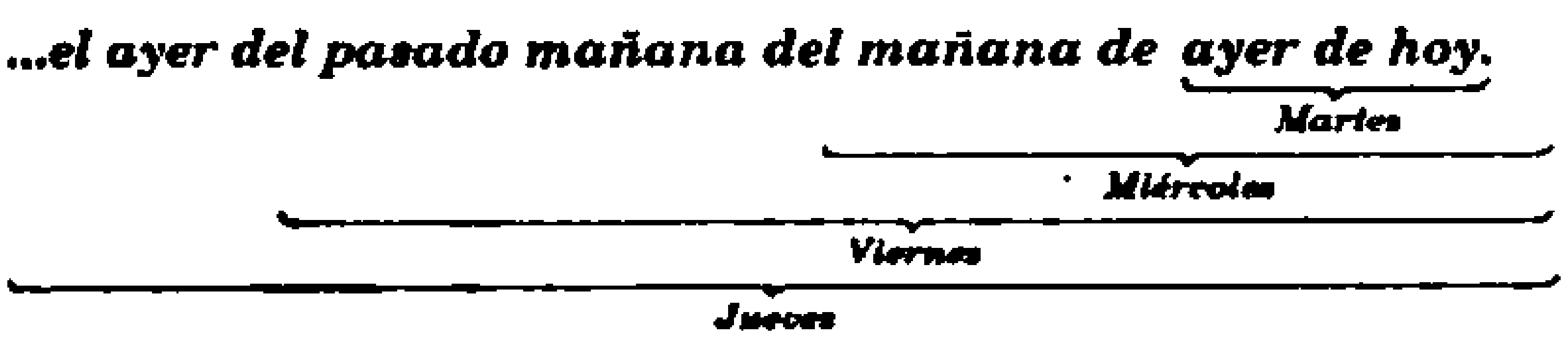
EJEMPLO 1 :

Hoy es miércoles, ¿qué día de la semana será el ayer del pasado mañana del mañana del ayer de hoy?

RESOLUCIÓN:

Se sabe que hoy es miércoles.

Luego, lo pedido es:

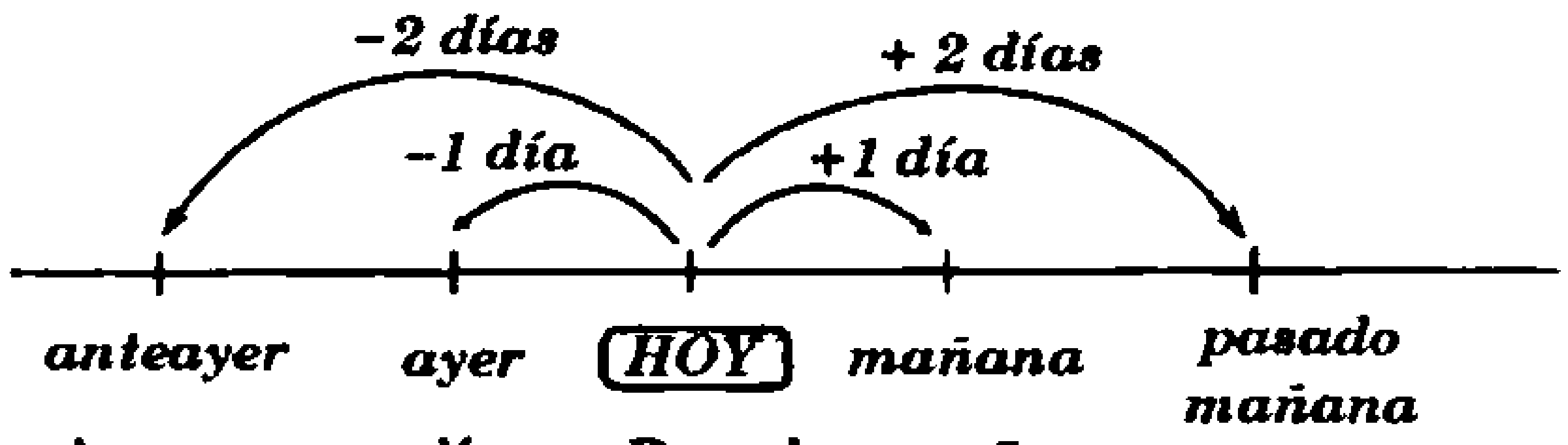


∴ *El día pedido es jueves.*

•POR EQUIVALENTES NUMÉRICOS :

Veamos el siguiente esquema:

A partir de hoy:



– Avanzo un día → Resulta mañana.
– Avanzo dos días → Resulta pasado mañana.
– Retrocedo un día → Resulta ayer.
– Retrocedo dos días → Resulta anteayer.

Importante:
Recuerde que como la semana tiene 7 días, cada 7; 14; 21;...;$\overset{\circ}{7}$ días , el día se repite.

EN RESUMEN:

• ***Anteayer <> – 2***
•***Ayer <> precede <> antecede <> – 1***
•***Hoy <> 0***
•***Mañana <> inmediato posterior <>+1***
• ***pasado mañana <> subsiguiente<>+2***

Observación :

• ***También consideraremos:***

Es <>fue <> será <> $\underset{\text{Igual}}{=}$

En el ejemplo anterior reemplazamos con los equivalentes númericos de la siguiente manera:

$$\text{... el } \underbrace{\text{ayer}}_{\not{-1}} \text{ de } \underbrace{\text{pasado mañana}}_{+2} \text{ del } \underbrace{\text{mañana}}_{\not{+1}}$$

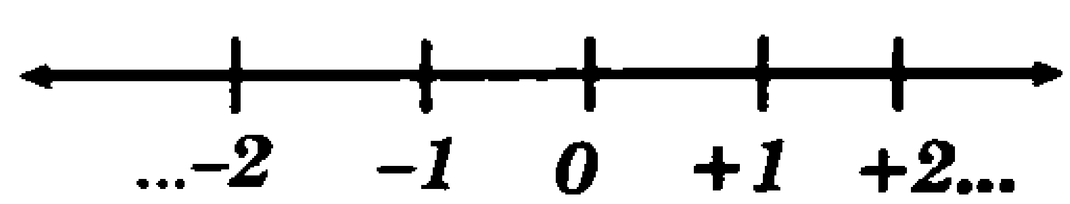
$$\text{del } \underbrace{\text{ayer}}_{-1} \text{ de } \underbrace{\text{hoy?}}_{\text{miércoles}} = \underbrace{+1 \text{ de miércoles}}_{=\text{jueves}}$$

EJEMPLO 2 :

El ayer del anteayer de mañana fue jueves. ¿Qué día será el mañana del mañana de pasado mañana?

RESOLUCIÓN :

Para resolver este tipo de problemas aplicaremos el criterio de la recta numérica.



Para aplicar este criterio debemos conocer primero las siguientes equivalencias.

* Hoy = *0*
* Ayer = *–1*

* Mañana = *+1* * Anteayer = *–2*
* Pasado mañana = *+2*

El criterio consiste en cambiar los tiempos por su valor numérico, sumamos esos valores y el resultado lo llevamos a la recta numérica. Veamos:

El $\underbrace{\underbrace{\text{ayer}}_{-1}\ \underbrace{\text{del anteayer}}_{-2}\ \underbrace{\text{de mañana}}_{+1}}_{\text{suma}=-2}$ fue jueves

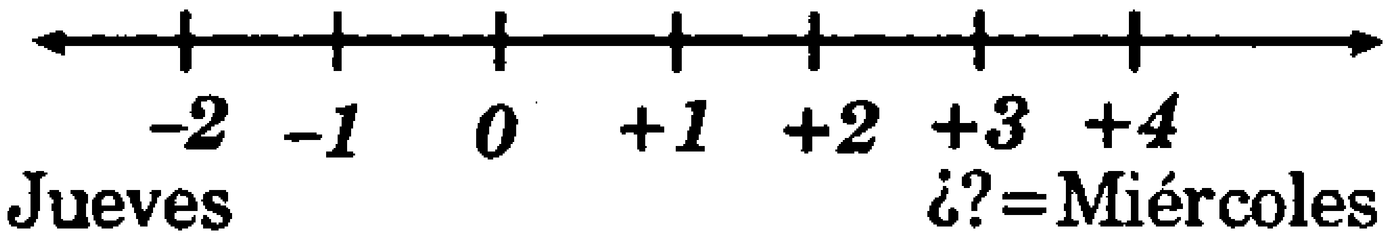
⇒ –2 fue jueves...*(I)*

¿Qué día será

$\underbrace{\underbrace{\text{el mañana}}_{+1}\ \underbrace{\text{del mañana}}_{+1}\ \underbrace{\text{de pasado mañana}}_{+2}}_{\text{suma}=+4}$?

⇒ ¿Qué día será + *4*?...*(II)*

(I) y *(II)* los llevamos a la recta:



∴ *RPTA:Miércoles.*

¡ Recuerde !

Otras equivalencias a tener en cuenta:

* Hace *1* día ó *1* día antes =*–1*
* Hace *2* días ó *2* días antes =*–2*
* Hace *3* días ó *3* días antes=*–3*
* Dentro de *1* día ó *1* día después =*+1*
* Dentro de *2* días ó *2* días después=*+2*
* Dentro de *3* días ó *3* días después = *+3*

EJEMPLO 3 :

El día que está *3* días después del mañana del anteayer de mañana será domingo. ¿Qué día fue el ayer del pasado mañana de hace *4* días?

RESOLUCIÓN :

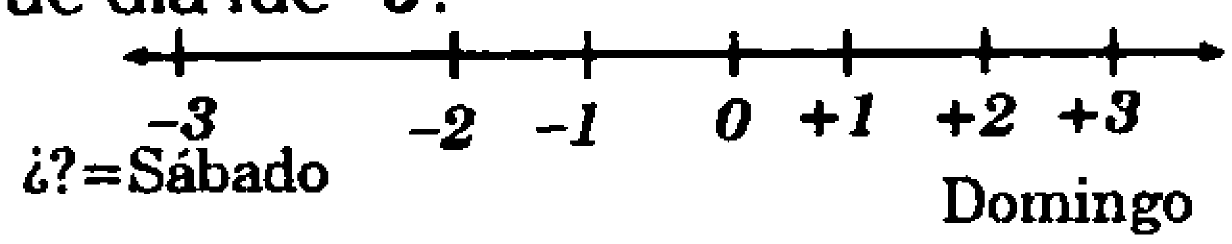
Cambiando los tiempos por sus valores numéricos

tendremos: $\underbrace{+3+1-2+1}_{\text{suma}=+3}$ será domingo

⇒ *+3* será domingo

¿Qué día fue $\underbrace{-1+2-4}_{\text{suma}=-3}$?

⇒ ¿Qué día fue –3?



∴ *RPTA : sábado.*

EJEMPLO 4 :

¿A qué día equivale el mañana del ayer del pasado mañana del mañana del anteayer del mañana del hoy?

A) hoy *B) ayer* *C) mañana*
D) pasado mañana *E) anteayer*

RESOLUCIÓN :

Analizando el enunciado a partir de la parte final, siguiendo un proceso regresivo hasta llegar a la parte inicial del mismo, se tiene:

El mañana del ayer del pasado mañana del mañana del anteayer del $\underbrace{\text{mañana del hoy}}_{\text{mañana}}$.

$\underbrace{\text{anteayer del}^{\text{mañana}}}_{\text{ayer}}$

$\underbrace{\text{mañana del}^{\text{ayer}}}_{\text{hoy}}$

$\underbrace{\text{pasado mañana de}^{\text{hoy}}}_{\text{pasado mañana}}$

$\underbrace{\text{ayer del}^{\text{pasado mañana}}}_{\text{mañana}}$

$\underbrace{\text{El mañana del}^{\text{mañana}}}_{\text{pasado mañana}}$

Entonces, el mañana del ayer del pasado mañana del mañana del anteayer del mañana de hoy equivale a ***pasado mañana***.

RPTA : "D"

EJEMPLO 5 :

¿Qué día será el pasado mañana del mañana de domingo?

A) miércoles *B) martes* *C) lunes*
D) sábado *E) jueves*

RESOLUCIÓN :

Del enunciado del problema, se deduce qué día será

$\underbrace{\text{pasado mañana del}\ \underbrace{\text{mañana de domingo}}_{\text{lunes}}}_{\text{miércoles}}$

Por lo tanto, el día será miércoles.

RPTA : "A"

EJEMPLO 6 :

Si hoy es el mañana del subsiguiente día del anteayer del lunes, ¿qué día será el día que antecede al posterior día del pasado mañana del anteayer del día que precede al siguiente día de hoy?

A) Lunes *B) Martes* *C) Domingo*
D) Miércoles *E) Sábado*

RESOLUCIÓN :

Considerando las equivalencias numéricas tenemos

Si hoy es $+1+2-2$ del lunes, ¿qué día será $-1+1+2-2-1+1$ de hoy?

Desarrollando obtenemos:

Si hoy es $\underbrace{+1 \text{ del lunes}}_{\text{martes}}$, ¿qué día será hoy?

Entonces, el día pedido es martes.

RPTA : "B"

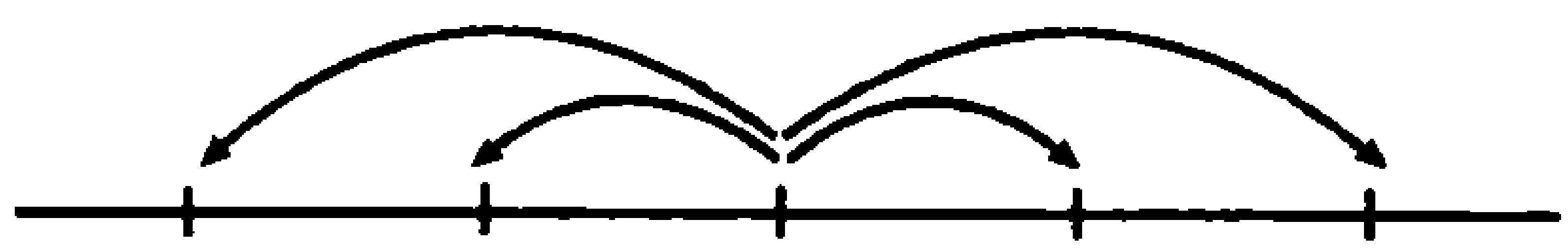
EJEMPLO 7 :

Si el ayer del posterior día a mañana será lunes, ¿qué día será el día que precede a mañana?

A) domingo *B) lunes* *C) miércoles*

RESOLUCIÓN :

Observación:



Del enunciado: $-1+1+1$ <> lunes

⇒ Mañana será lunes

por lo tanto, hoy es domingo.

Nos piden : $-1+1$ <> 0

Mirando el gráfico, el 0 representa hoy, pero hoy es domingo.

Por lo tanto, la respuesta es domingo.

RPTA : "A"

PROBLEMAS SOBRE CALENDARIOS

Aquí es necesario conocer la cantidad de días que tiene cada mes. Veamos la siguiente tabla con la cantidad de días:

Ene	Feb	Mar	Abr	Mayo	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
31	28 ó 29	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

En la tabla se observa que:

I) Todos los meses del año, excepto febrero, tienen *30* ó *31* días.

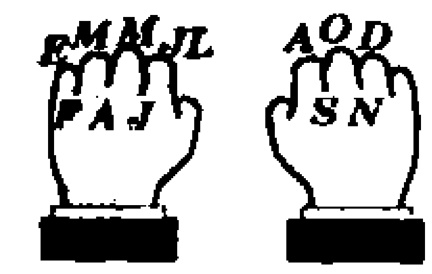
II) Febrero es el único mes que puede tener *2* cantidades distintas de días: *28* días en un año común y *29* días en un año bisiesto.

III) Julio y Agosto son los únicos ***meses consecutivos de un mismo año que presentan igual cantidad de días***.

IV) El mes anterior y el mes posterior a un mes de *30* días siempre presentarán *31* días.

***REGLA DE LOS NUDILLOS :**

Una manera sencilla y práctica de recordar la cantidad de días que tiene cada mes es mediante los nudillos de la mano.
** Todos los meses que se encuentran en los nudillos tienen 31 días.*
** Los meses que se encuentran en los entrenudillos tienen 30 días, excepto febrero.*



• <u>Tienen 31 días</u>: enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre, diciembre.
• <u>Tienen 30 días</u>: abril, junio, septiembre, noviembre.

Ahora veamos algunas características de los meses según la cantidad de días que presentan.

• <u>Mes de 28 días ó 29 días</u> :

FEBRERO

D	L	M	M	J	V	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29						

Con 28 días:

•Todos los días de la semana aparecen *4* días.

•***Inicio del mes:*** domingo

•***Final del mes***: sábado

Con 29 días:

•Sólo un día de la semana aparece *5* veces, el resto *4* veces.

•***Inicio del mes***: domingo.

•***Final del mes***: domingo.

•Mes de 30 días

D	L	M	M	J	V	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

•Dos días de la semana aparecen *5* veces (domingo y lunes).

•***Inicio del mes***: domingo

• ***Final del mes***: lunes

• ***Mes de 31 días***

D	L	M	M	J	V	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

• Tres días de la semana aparecen ***5*** veces (domingo, lunes, martes)

• ***Inicio del mes:*** domingo

• ***Final del mes:*** martes

EJEMPLO 1 :

Un mes tiene más jueves, viernes y sábados que otros días de la semana. ¿Qué fecha será el primer lunes del siguiente mes?

RESOLUCIÓN:

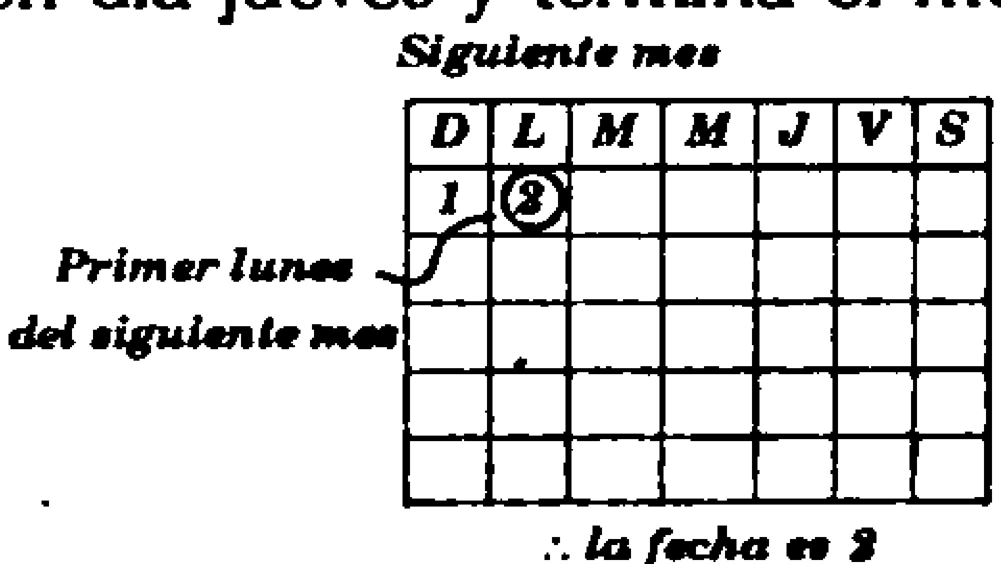
Del dato:...tiene más jueves, viernes y sábados que otros días.

Entonces se concluye que:

– Tiene ***31*** días dicho mes .

– Inicia en día jueves y termina el mes en día sábado.

Luego:



EJEMPLO 2 :

En cierto mes se observó que había más días domingos que otros días de la semana. ¿Qué día de la semana será el ***17*** de dicho mes?

A) domingo ***B) martes*** ***C) lunes***
D) miércoles ***E) jueves***

RESOLUCIÓN :

Para que un mes tenga un día más que los demás, ese mes debe tener ***29*** días.

El único mes que tiene ***29*** días es febrero (año bisiesto).

Si ese día de más fue domingo, dicho mes debe iniciar en domingo.

Domingo Lunes Martes.............................
1 ....
8 ....
15 ***16*** ***17*** ....

Por lo tanto, el día será martes.

RPTA : "B"

EJEMPLO 3 :

En un año bisiesto, ¿cuántos días lunes y martes habrá como máximo y en qué día debe terminar dicho año?

A) 51, lunes ***B) 52, martes*** ***C) 53, martes***
D) 60, domingo ***E) 61, lunes***

RESOLUCIÓN :

Piden: en un año bisiesto, ¿cuántos lunes y martes habrá como máximo y en qué día terminará dicho año?

> ***Recuerda***
> Un año bisiesto presenta ***366*** días, que equivale a ***52*** semanas más ***2*** días.
> En estas ***52*** semanas contamos con ***52*** domingos, ***52*** lunes, ***52*** martes, ***52*** sábados.
> Adicionalmente, a ello se le debe aumentar ***2*** días de la semana, pero consecutivos.

Convenientemente, ya que se desea que el año presente la mayor cantidad de lunes y martes, se aumentará un día lunes y un martes. (***53*** lunes y ***53*** martes).

Concluyendo el año en el último día aumentado: martes.

Por lo tanto, en un año como máximo habrá ***53*** lunes y martes, y dicho año terminará martes.

RPTA : "C"

EJEMPLO 4 :

En un determinado mes existen ***5*** lunes, ***5*** martes y ***5*** miércoles, se pide hallar qué día de la semana cae ***25*** y cuántos días trae dicho mes.

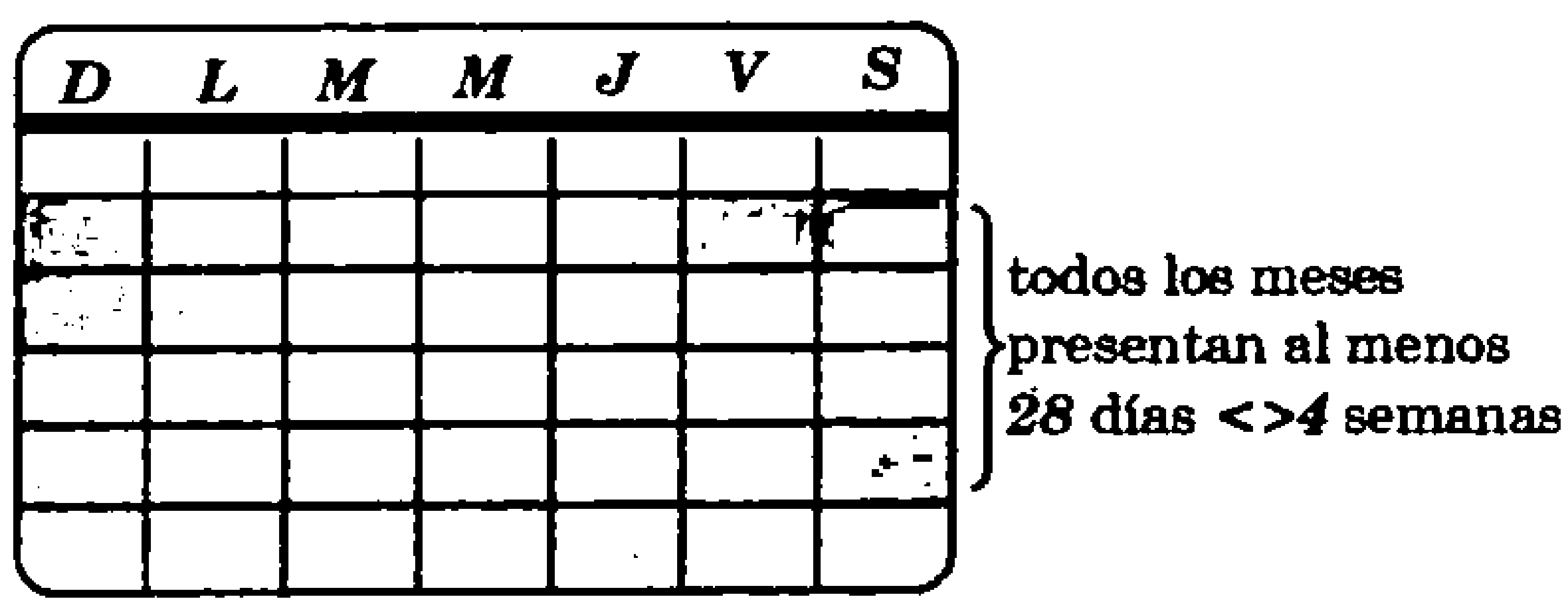
A) martes, 30 ***B) sábado, 31*** ***C) miércoles, 31***
D) jueves, 30 ***E) jueves, 31***

RESOLUCIÓN :

Piden: ¿qué día de la semana cae ***25*** y cuántos días trae ,dicho mes?

Dato: el mes tiene, ***5*** lunes, ***5*** martes y ***5*** miércoles.

Analizando la composición del mes, se tiene:



En este caso, faltaría aumentar un día lunes, un martes y un miércoles, así:

D	L	M	M	J	V	S

Ahora, como los días de un mes deben ser consecutivos, trasladaremos el día domingo de la primera semana a la última, así:

D	L	M	M	J	V	S

⇨

D	L	M	M	J	V	S
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Por lo tanto, el ***25*** de este mes es jueves y el mes tiene ***31*** días.

RPTA : "E"

PROBLEMAS SOBRE VARIACIÓN DE AÑOS

<u>Año común</u> : ***365*** días <> ***52*** semanas y ***1*** día

<> $\overset{o}{7}+1$ (La fecha avanza un día)

<u>Año bisiesto</u> : ***366*** días <> ***52*** semanas y ***2*** días

<> $\overset{o}{7}+2$ (La fecha avanza dos días)

*Tiene un día más, el **29** de febrero*

• CRITERIO PARA RECONOCER AÑOS BISIESTOS :

Sea la representación del año: $\overline{abcd}$.

$\overline{abcd}$ =

- ***Si $\overline{cd}=\overset{o}{4}$ ⇒ el año es bisiesto.***
  ejemplo: ***2008 ; 2012 ; 1980....*** (08, 12, 80 = $\overset{o}{4}$)
- ***$\overline{cd}=00 \wedge \overline{ab}=\overset{o}{4}$ ⇒ el año es bisiesto.***
  ejemplo: ***2000; 2400; 1600;....*** (20, 24, 16 = $\overset{o}{4}$)

EJEMPLO 1 :

Veamos el caso de la fecha ***12*** de enero del ***2011***, fue día miércoles, ¿qué día de la semana será la fecha los siguientes ***3*** años ?

2011	***2012*** (Año bisiesto)	***2013***	***2014***
12 Enero	12 Enero (← 29 febrero)	12 Enero	12 Enero
Miércoles	Jueves	Sábado	Domingo

Miércoles → ***+1 día*** → Jueves → ***+2 día*** → Sábado → ***+1 día*** → Domingo

Pero si la fecha fuera ***12*** de abril del ***2011***, martes, veamos los siguientes años:

2011	***2012*** (Año bisiesto)	***2013***	***2014***
12 Abril	12 Abril (29 febrero)	12 Abril	12 Abril
Martes	Jueves	Viernes	Sábado

Martes → ***+2 día*** → Jueves → ***+1 día*** → Viernes → ***+1 día*** → Sábado

¡ IMPORTANTE !

En realidad quien determina si la fecha avanza un día o dos en el año bisiesto es la fecha misma, es decir:

- *Si la fecha está antes del **29** de febrero, entonces la fecha avanza dos días.*
- *Si al fecha se encuentra después del **29** de febrero, entonces dicha fecha avanza un día.*

EJEMPLO 2 :

Hoy es viernes ***15*** de agosto del ***2008*** y es viernes. ¿Qué día de la semana será dicha fecha dentro de ***40*** años?

RESOLUCIÓN:

Realizamos el siguiente esquema:

+ 40 años

2008 ***15 agosto*** → ***2048*** ***15 agosto***

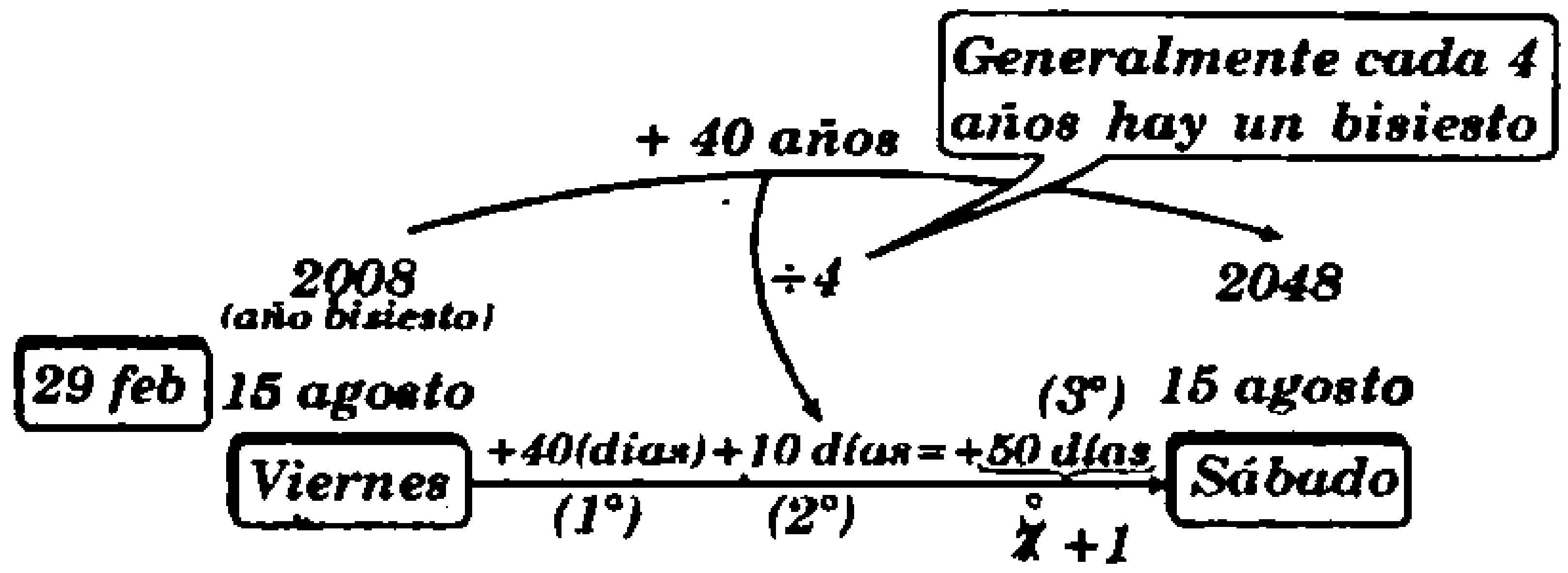
viernes → ***+?*** → [ ]

En el intervalo de ***40*** años encontraremos algunos años bisiestos, en esos años la fecha avanzará dos días. Lo que haremos será :

1° vamos a suponer que en los años comprendidos no existe ningún año bisiesto, con lo cual, la fecha avanzará tantos días como años.

2° Aumentaremos un día por cada año bisiesto que exista en el intervalo.

3° Finalmente, la suma de ambos resultados nos dará la cantidad de días que avanza, en total, dicha fecha.



Observación:

A pesar de que el año ***2008*** es bisiesto, no lo consideramos como tal , porque el ***15*** de Agosto está después del ***29*** de febrero.

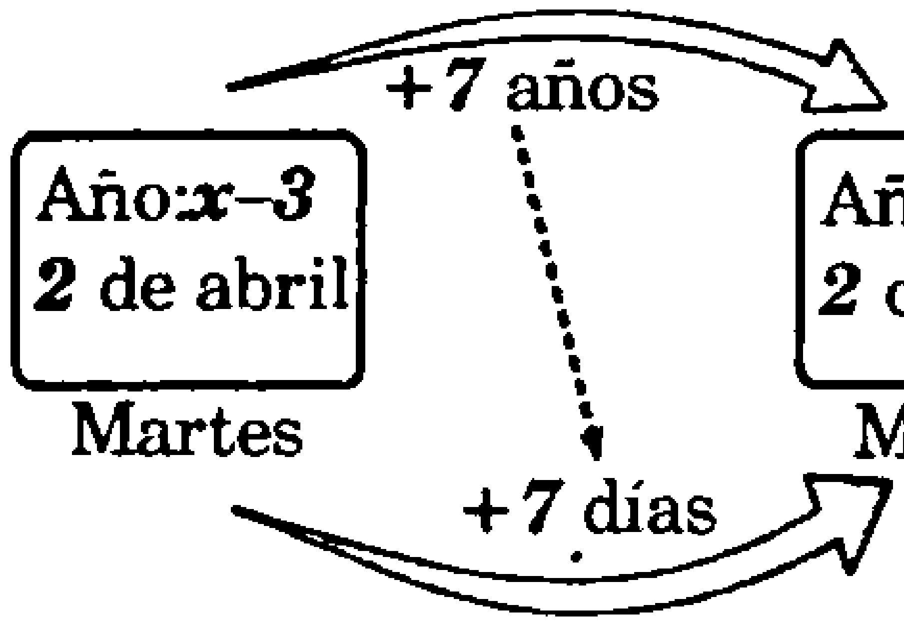
EJEMPLO 3 :

Si en el año ***x–3*** el ***2*** de abril fue martes y en el año ***x+4*** el ***2*** de abril fue también martes, ¿qué día de la semana fue el ***4*** de abril del año ***x***? Considere que los años mencionados son anteriores al ***S.XXI***.

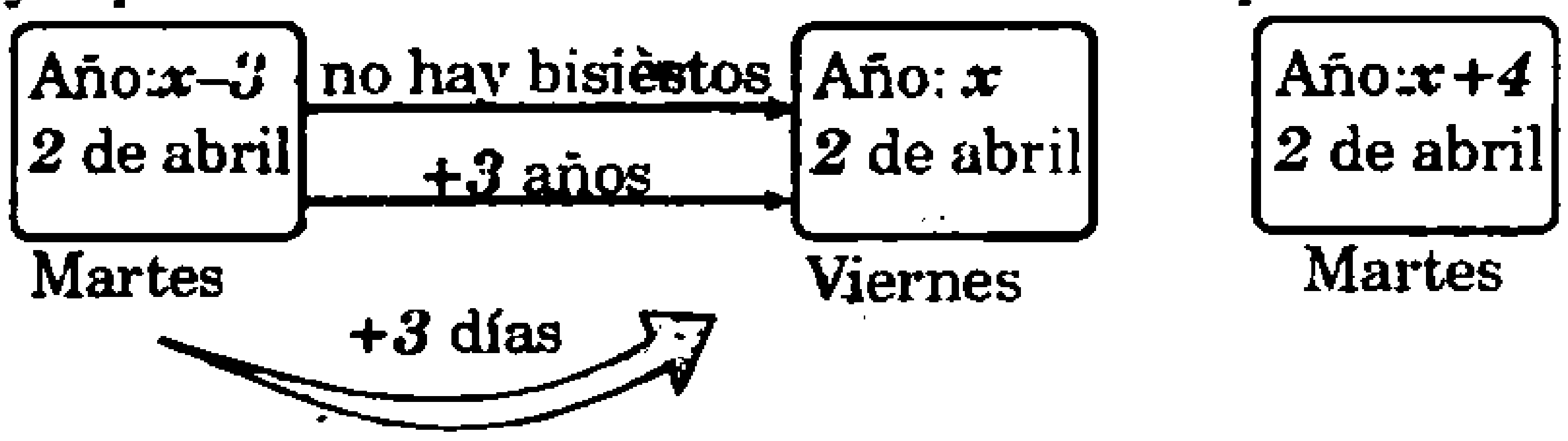
A) sábado ***B) martes*** ***C) viernes***
D) miércoles ***E) domingo***

RESOLUCIÓN :

Analizamos los años indicados.



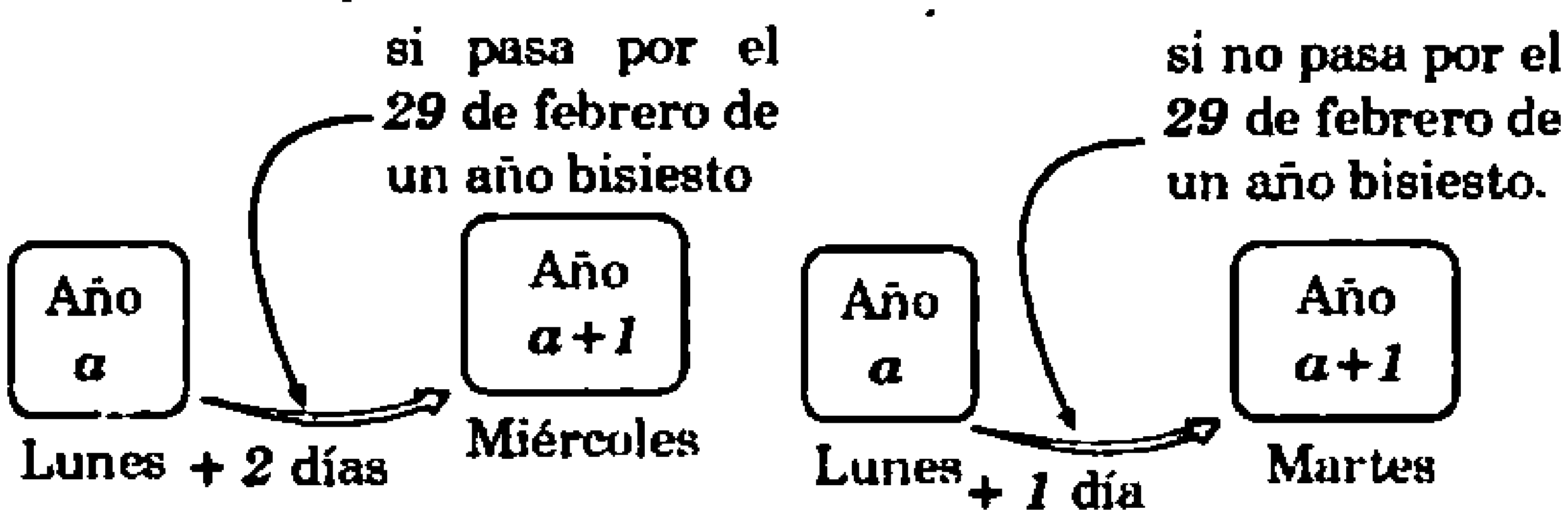
De lo que deducimos que necesariamente entre esos siete años no hubo algún año bisiesto. Esta situación es muy particular y antes del ***S.XXI*** ocurrió, por ejemplo, entre los años ***1896*** y ***1903***, ya que el año ***1900*** no fue bisiesto. En el problema:



Entonces, el ***4*** de abril del año ***x*** fue domingo.

RPTA : "E"

Recuerde que...!



EJEMPLO 4 :

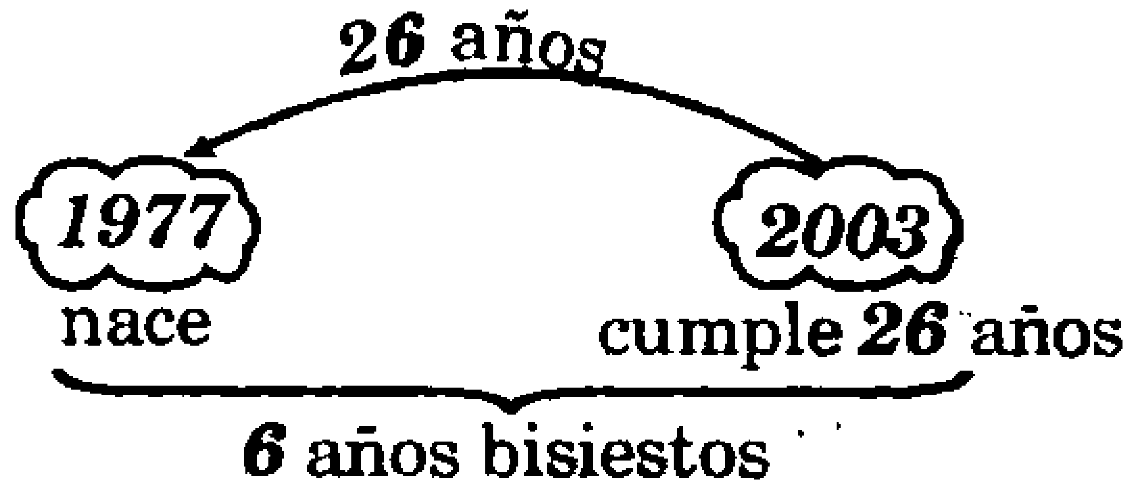
Si el sábado ***19*** de abril del ***2003*** Fito celebró sus ***26*** años, ¿qué día de la semana nació Fito?

A) lunes ***B) martes*** ***C) miércoles***
D) jueves ***E) domingo***

RESOLUCIÓN :

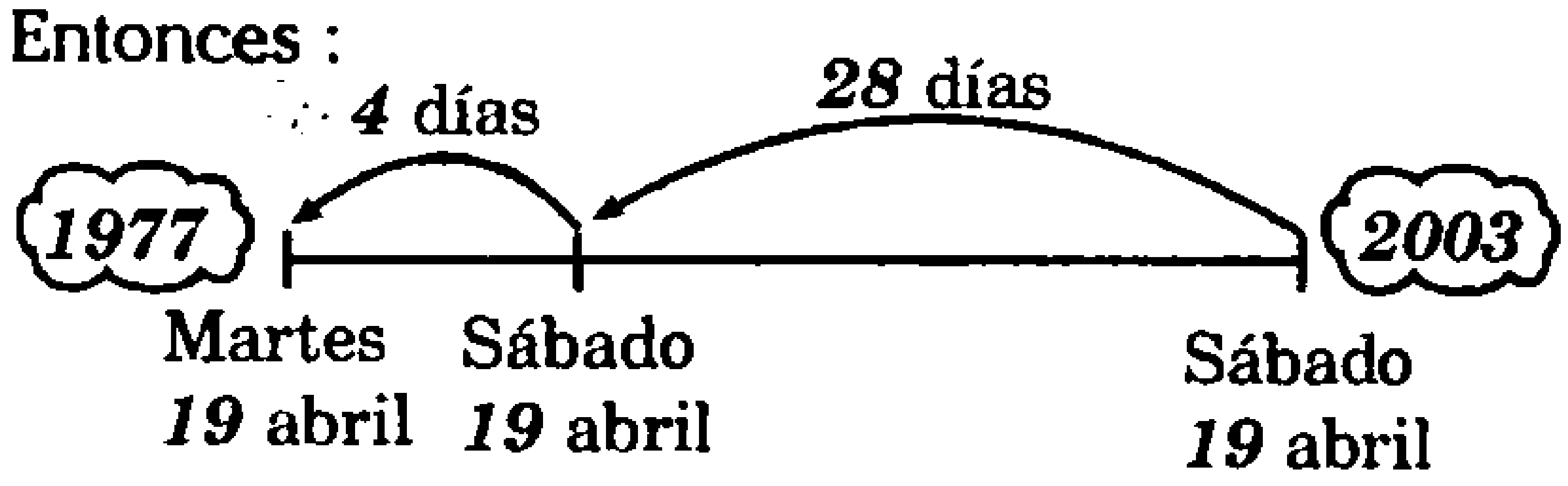
- Los años bisiestos se repiten cada ***4*** años.
- El día de la fecha de cumpleaños varía en ***1*** cada año normal y en ***2*** en un año bisiesto.

Luego



Variación de días$=20+6\times 2=32$

Entonces :



Por lo tanto, nació un martes ***19*** de abril.

RPTA : "B"

ALGORITMO PARA UN CALENDARIO PERPETUO

Este algoritmo consta de cuatro pasos que nos permitirán determinar el día de la semana en que cae un día/mes/año dado.

El procedimiento :

Este algoritmo requiere varios números clave. Los números clave para el mes, día y siglo se determinan por medio de las tablas siguientes.

Mes	Clave
enero	1(0 si es año bisiesto)
febrero	4(3 si es año bisiesto)
marzo	4
abril	0
mayo	2
junio	5
julio	0
agosto	3
septiembre	6
octubre	1
noviembre	4
diciembre	6

Día	Clave
sábado	0
domingo	1
lunes	2
martes	3
miércoles	4
jueves	5
viernes	6

Centuria	Clave
1700, 2100,...	4
1800, 2200,...	2
1900, 2300,...	0
2000, 2400,...	6

Nota :

Un año es bisiesto si es divisible entre cuatro, la

única excepción es que un año secular (años cuyas dos últimas cifras son ceros) es año bisiesto solo cuando es divisible entre **400**. El algoritmo funciona como sigue (como ejemplo, usamos el **12** de octubre de **1949**):

***Paso 1*:** Obtenga los cinco números siguientes:

I) El número formado por los últimos dos dígitos del año...**49**

II) Divida entre **4** el número en el paso ***I***, ignorando el residuo...**12**

III) La clave del mes (en nuestro ejemplo, ***1*** para octubre)..***1***

IV) El día del mes (**12** para **12** de octubre)......**12**

V) La clave de la centuria (***0*** para **1900**) ***0***

***Paso 2*:** Sume estos cinco números.

$$49+12+1+12+0=74$$

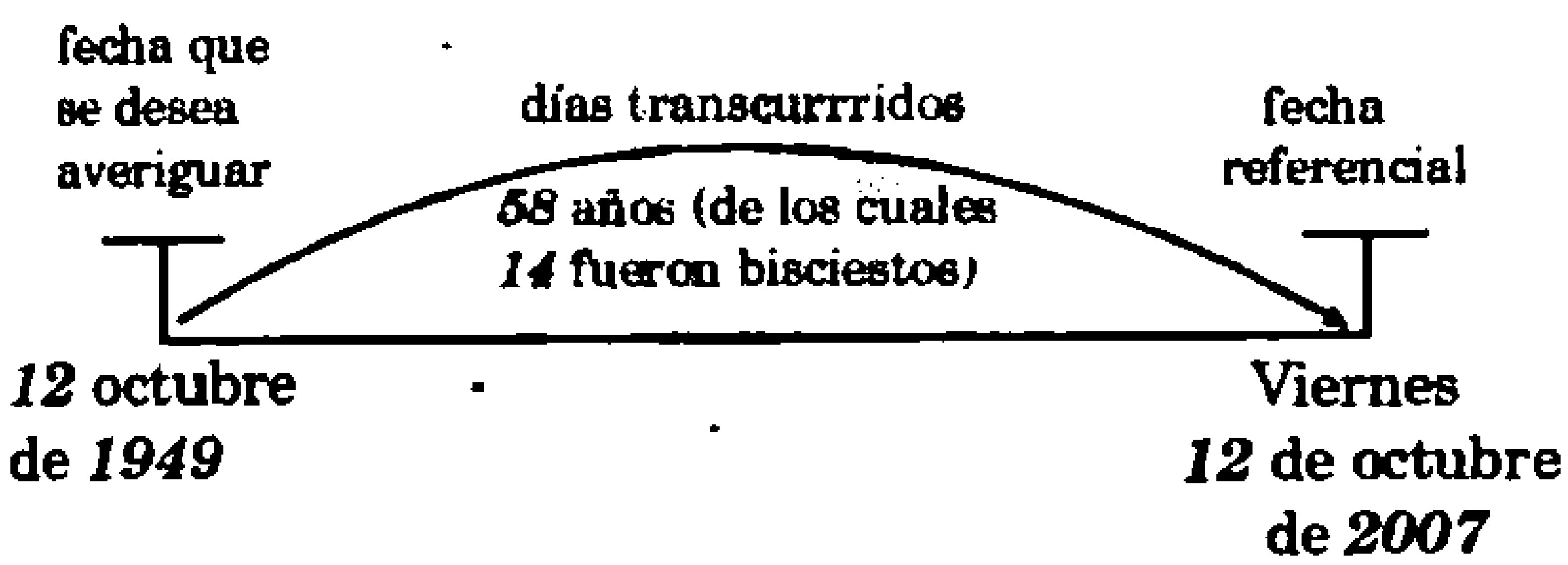
Paso 3: Divida la suma entre ***7*** y quédese con el residuo (***74/7=10***, con residuo ***4***).

Paso 4: Encuentre este residuo en la tabla de claves para los días (el número ***4*** implica que el **12** de octubre de **1949** fue miércoles).

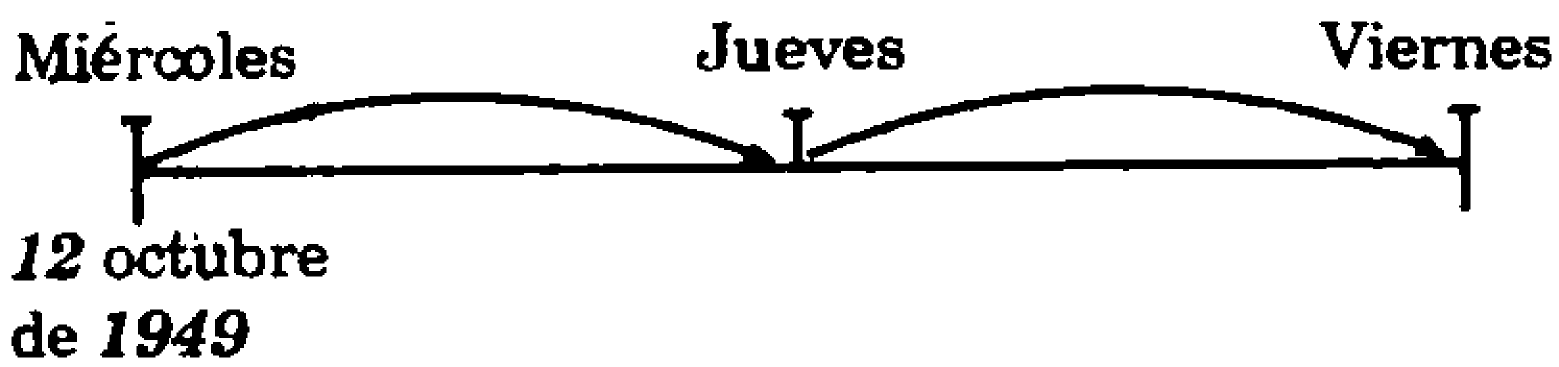
Otra manera de determinar qué día de la semana fue (o será una fecha determinada) es usando divisibilidad, para lo cual se cuenta la cantidad de días transcurridos (o por transcurrir) respecto a un día referencial que se toma y se expresa respecto al módulo ***7***. Solo nos interesa el residuo y luego se suman (o restan) días adicionales al día referencial tomado.

EJEMPLO :

Usando este método calculemos que día de la semana cayó el **12** de octubre de **1949**.



Entonces, la cantidad de días es $58\times365+14$ que al expresar respecto al módulo ***7*** resulta $\overset{o}{7}+2$.



Ejercicios :

I) Haga que cada integrante de su familia determine el día de la semana en que nació.

II) De termine el día de la semana en que ocurrió el **28** de julio de **1821**, día de la Independencia del Perú.

CÁLCULO DEL DÍA DE LA SEMANA DE CUALQUIER FECHA RÁPIDAMENTE

A Alberto Coto se le considera la persona más rápida del mundo haciendo cálculos mentales, como así lo certifican sus récords Guinness y su doble título de campeón del mundo en suma y multiplicación conseguidos en Alemania en **2004**. Él primero por la suma mental de ***100*** dígitos en un tiempo de ***19*** segundos, algo que según prestigiosos especialistas roza lo imposible, el segundo por la multiplicación mental de dos números de ***8*** dígitos en una marca de ***38*** segundos. Durante los últimos años ha dado cientos de conferencias y demostraciones, sobre todo a estudiantes, a los que el cálculo y las matemáticas pueden ser un atractivo estimulante mental, a la par que ha creado una escuela en el aprendizaje del cálculo y la potenciación de la mente.

Alberto Coto

A él se le atribuye una regla práctica para determinar con facilidad el día de la semana que corresponde a cualquier fecha. Para ello, debemos tener presente el siguiente código numérico de ***12*** dígitos que están asociados a cada uno de los meses del año.

enero = ***0***	febrero = ***3***	marzo = ***3***
abril = ***6***	mayo = ***1***	junio = ***4***
julio = ***6***	agosto = ***2***	setiembre = ***5***
octubre = ***0***	noviembre = ***3***	diciembre = ***5***

Ejemplo*:** Si nos preguntan qué día de la semana fue el ***24 de agosto de ***1967***, procederemos de la siguiente forma:

Primer paso: 24 (el día)

Segundo paso: 2 (equivalencia a agosto, en la tabla)

Tercer paso: 67 (dos últimas cifras del año)

Cuarto paso: 16 (cociente de dividir ***67*** entre ***4***, se obtiene así el número aproximado de años bisiestos).

Ahora sumamos: ***24+2+67+16=109***

Lo dividimos entre ***7*** y obtenemos un cociente ***15*** y resto ***4***, que es el dato que nos interesa.

Quinto paso: Consideramos la siguiente tabla según el año.

01 Enero *1600* – *31* de Dic. *1699*	Al resultado le restamos *1*
01 Enero *1700* – de Dic. *1799*	Al resultado le sumamos *4*
01 Enero *1800* – *31* de Dic. *1899*	Al resultado le sumamos *2*
01 Enero *1900* – *31* de Dic. *1999*	El resultado ***no varía***
01 Enero *2000* – *31* de Dic. *2099*	Al resultado le restamos *1*
01 Enero *2100* – *31* de Dic. *2199*	Al resultado le sumamos *4*
01 Enero *2200* – *31* de Dic. *2299*	Al resultado le sumamos *2*

Como el año ***1967*** está en la cuarta fila, entonces el resultado sigue siendo ***4***.

Finalmente observamos la siguiente equivalencia:

Dom. = *0*	Lun. = *1*	Mar. = *2*	Mié. = *3*
Jue. = *4*	Vie. = *5*	Sáb. = *6*	

Por lo tanto, el ***24*** de agosto de ***1967*** fue jueves.

OBSERVACIÓN:

Para los meses de enero y febrero de años bisiestos (aquellos cuyas dos últimas cifras son múltiplos de ***4***) tendremos que restar uno al resultado final.

A modo ejercicio emplée este método para deducir qué día de la semana nació.

FÓRMULA DE ZELLER

Fórmula para determinar de manera directa el día que corresponderá a una fecha determinada.

$$q+\left[\frac{(m+1)26}{10}\right]+K+\left[\frac{K}{4}\right]+\left[\frac{J}{4}\right]-2J=\dot{7}+h$$

donde h es el día de la semana (*0* = sábado; *1* = domingo; *2* = lunes; ...), q es el día del mes, m es el mes, J es la centuria (la parte entera de la división del año entre ***100***) y K es el resto de dividir el año entre ***100***. Enero y febrero se cuentan como meses ***13*** y ***14*** del año anterior. Considere que $\left[\frac{K}{4}\right]$ representa la parte entera de dicha división.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si el día de mañana fuese como pasado mañana entonces faltaría ***2*** días a partir de hoy para ser domingo, ¿qué día de la semana será el mañana de ayer de hoy?

A) jueves ***B) viernes*** ***C) domingo*** ***D) sábado*** ***E) miércoles***

RESOLUCIÓN :

Piden: ¿qué día será el mañana del ayer?

Dato: si el día de mañana fuese como pasado mañana, faltarían ***2*** días para ser domingo.

Representamos el dato gráficamente:

Tiempo real	Tiempo supuesto
mañana	pasado mañana
hoy ?	hoy viernes

De la comparación se concluye que hoy realmente es jueves.

Además, lo pedido es el mañana del ayer que equivale a hoy.

Por lo tanto, el mañana del ayer es jueves.

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Ayer tenía ***20*** años, el próximo año tendré ***21*** años. Si el día de mañana cumplo años, ¿qué fecha será?

A) 01 de enero ***B) 31 de diciembre*** ***C) 02 de enero*** ***D) 30 de diciembre***

RESOLUCIÓN :

Piden: ¿qué fecha será mi cumpleaños?

- Ayer tenía ***20*** años, el próximo año tendré ***21*** años.
- Mañana es mi cumpleaños.

Representamos los datos gráficamente:

Ayer	Hoy	Mañana	
20 años	*20* años	*21* años	

cumplo años

Próximo año tendré *21* años

Se observa que el mañana debe ubicarse en el próximo año; por lo tanto, hoy es *31* de diciembre.

Por lo tanto, el cumpleaños es el *1* de enero.

RPTA : "A"

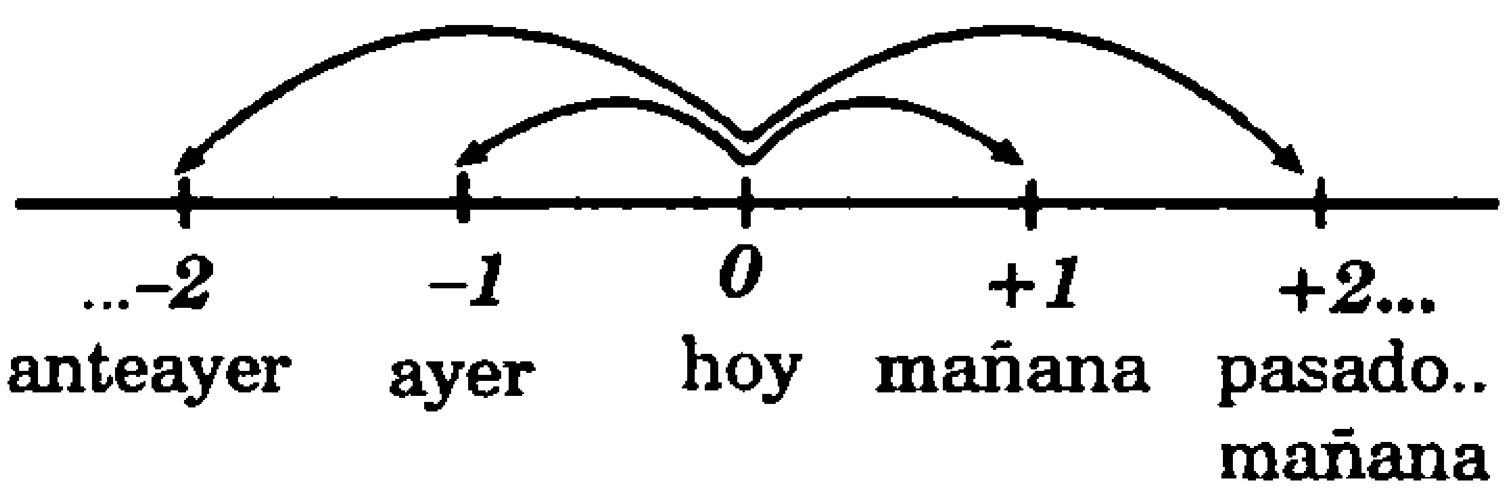
PROBLEMA 3 :

¿Qué fecha será el mañana del pasado mañana del ayer de pasado mañana del ayer de pasado mañana del ayer de pasado mañana, tantas veces el ayer de pasado mañana como días han transcurrido del presente mes hasta hoy, *21* de septiembre?

A) 11 de octubre ***B) 15 de octubre***
C) 14 de octubre ***D) 17 de octubre***

RESOLUCIÓN :

Observación:



Del enunciado, han transcurrido del presente mes, hasta el *21* de septiembre, *20* días.

$\Rightarrow +1+2-1+2-1+2-1+2+...-1+2$ del *(21 sept.)*

$+3 \underbrace{+1 \quad +1 \quad +1+ ... \quad +1}_{20 \text{ veces}}$

$\Rightarrow +3+20$ del *21* sept. <>$+23$ del *21* sept. <> dentro de *23* días del *21* de sept.

Así tenemos:

21 sept. —(+*9* días)→ *30 sept.* —(+*14* días)→ *14 oct.*

Luego, la fecha será *14* de octubre.

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Si el *1* de enero del *2001* fue lunes, en la primera década del siglo *XXI (2001-2010)*, ¿cuántos años tendrán más domingo que lunes?

A) 0 ***B) 1*** ***C) 2*** ***D) 3*** ***E) 4***

RESOLUCIÓN :

* Año común, tiene:

365 días <>*52* semanas +un día $(365=\dot{7}+1)$

Si un año común empieza un día determinado de la semana, también termina ese mismo día de la semana.

* Año bisiesto, tiene:

366 días <>*52* semanas + dos días $(366=\dot{7}+2)$

Si un año bisiesto empieza un determinado día de la semana, terminará un día después del día de la semana que empezó.

Por lo anterior:

Recuerde:

* Un año común tendrá más domingos que lunes cuando dicho año empiece un sábado o domingo.

Común { *1°* de enero *2001* es lunes; *1°* de enero *2002* es martes; *1°* de enero *2003* es miércoles }

Bisiesto ⇒ *1°* de enero *2004* es jueves

Común { *1°* de enero *2005* es sábado; **[*1°* de enero *2006* es domingo]**; *1°* de enero *2007* es lunes }

Bisiesto ⇒ *1°* de enero *2008* es martes

Común { *1°* de enero *2009* es jueves; *1°* de enero *2010* es viernes }

Nótese: los años bisiestos no empiezan sábado ni domingo.

Sólo hay un año en común que empieza domingo *(2006)*

⇒ Años que tienen más domingos que lunes: sólo *1*.

RPTA : "B"

NOTA :

El estándar *ISO 8601* identifica al lunes como *1*. En casi todos los países del mundo la semana empieza en lunes, mientras que en Portugal, Brasil, Argentina, México, Colombia y en algunos países anglosajones (como EE. UU. y Reino Unido), la semana empieza en el domingo.De todas formas se identifica al sábado y al domingo como «fin de semana». La Biblia judía establecía al domingo como el día siguiente al Sabbath de descanso, o sea, como el primer día de la semana. En los países tradicionalmente cristianos se practica el descanso laboral en domingo, en los musulmanes el viernes y los judíos (y por lo tanto Israel) el sábado.

PRACTICA DIRIGIDA

01 Si el ayer de pasado mañana es jueves, ¿qué día será el mañana de anteayer?

A) Lunes B) Martes C) Jueves D) Miércoles

02 Si el pasado mañana del mañana de anteayer es martes, ¿qué día será el ayer de pasado mañana de hace 3 días?

A) sábado B) Martes C) Jueves D) Miércoles

03 Si el ayer del pasado mañana del día que sigue al posterior día de anteayer es lunes, ¿qué día de la semana será el pasado mañana del día que será dentro de *5* días al subsiguiente día de hoy?

A)miércoles B)domingo C)martes
D)sábado E)lunes

04 Ayer era el pasado mañana del mañana del ayer del domingo. ¿Qué día fue el anteayer del día que precede a hoy?

A)domingo B)lunes C)jueves
D)miércoles E)viernes

05 Si el ayer del pasado mañana del mañana del anteayer de hace *3* días es lunes, ¿qué día de la semana será el ayer del ayer del pasado mañana del día posterior al mañana de mañana?

A) domingo B) sábado C) lunes
D) viernes E) martes

06 Si el ayer del mañana del ayer del anteayer del pasado mañana del mañana del ayer del mañana del ayer del mañana del anteayer de pasado mañana es lunes, ¿qué día será pasado mañana?

A) domingo B) lunes C) martes
D) miércoles E) sábado

07 Si mañana fuese domingo, faltaría dos días a partir de hoy para que sea el día de la semana que realmente fue ayer. ¿Qué día de la semana será dentro de *32* días?

A)domingo B)jueves C)viernes
D)sábado E)martes

08 El tercer día de este mes y el tercer día del próximo mes son lunes. ¿Qué día de la semana será el *13* del subsiguiente mes?

A) lunes B) miércoles C) viernes
D) sábado E) domingo

09 ¿Cuántos martes y miércoles, respectivamente, podría haber como máximo en un año?

A) 53 y 53 B) 52 y 52 C) 52 y 53
D) 53 y 52 E) 53 y 54

10 Cierto mes inicia y termina el mismo día. ¿Cuánto suman las fechas del primer viernes y el primer lunes de dicho mes, si en el mes siguiente dicha suma es *9*?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

11 En el mes de enero de cierto año bisiesto hubo exactamente cuatro lunes y cuatro viernes. ¿Qué día de la semana fue el *23* de setiembre de dicho año?

A) Lunes B) Miércoles C)Domingo
D) Jueves E) Martes

12 ¿Cuál es el día que está inmediatamente después del día anterior al siguiente día del anteayer del mañana del día que está inmediatamente antes del día posterior a hoy miércoles?

A) lunes B) miércoles C) jueves
D) viernes E) sábado

13 En un determinado mes, el primer día fue lunes y el último día también. ¿Qué día fue el 26 de septiembre de dicho año?

A) sábado B) viernes C) jueves
D) martes E) lunes

14 En el planeta Razonador, los días de la semana en ese orden son razona, razone, razoni, razono y razonu. Si dentro de *42* días el ayer del mañana del subsiguiente día del pasado mañana será razono, ¿qué día de la semana es hoy?

A)razona B)razone C)razoni

D)razono *E)razonu*

15 Sumac Urpy y Rumi Chaqui nacieron el miércoles *29* de febrero de *1984*. Si ellos se conocieron un *29* de febrero cuando cumplían *20* años de edad , se enamoraron y después decidieron contraer matrimonio exactamente *60* días después de cuando cumplan *32* años de edad. ¿qué día de la Semana y fecha se realizaría la boda?

A) Sábado, 28 de abril de 2016.
B) Viernes, 29 de abril de 2016.
C) Jueves, 30 de abril de 2016.
D) Viernes, 27 de abril de 2016.
E) Jueves, 26 de abril de 2016.

16 Mateo nació el jueves *11* de febrero del *2010* en la clínica Marcos, institución que el *3* de mayo de ese año cumplió *150* años de fundación en el Perú. ¿Qué día de la semana se fundó la clínica?

A) Jueves *B) Miércoles* *C) Martes*
D) Sábado *E) Viernes*

17 ¿Qué día de la semana se celebro el primer *29* de febrero en el que el Perú fue independiente de España (el primer *29* de febrero después del año *1821)* si el *29* de febrero del *2008* fue viernes?

A) Lunes *B) Sábado* *C) Domingo*
D) Viernes *E) jueves*

18 Si Angie nació el jueves 14 de mayo de 1998, ¿qué día de la semana Angie cumplió 6 años?

A) Lunes *B) Martes* *C) viernes* *D) Miércoles*

19 Isaac Newton padre de la ciencia moderna, nació el día de navidad de *1642* y murió el *18* de mayo de *1727*. Si el *25* de diciembre del año *2010* fue sábado, ¿qué día de la semana nació Newton?

A) Miércoles *B) Jueves* *C) Sábado*
D) Domingo *E) Lunes*

20 El lunes *25* de octubre de *2004*. Ana cumplió *22* años y ese día se comprometió en contraer matrimonio; exactamente el día que cumpla *27* años. Si Ana cumplió su compromiso, ¿qué día de la semana se realizó su boda?

A) Sábado *B) Viernes* *C) Jueves*
D) Miércoles *E) Domingo*

21 Un cierto mes tiene cinco jueves, cinco viernes y cinco sábados, ¿Qué día de la semana es el *25* del siguiente mes?

A) Lunes *B) Domingo* *C) Martes*
D) Sábado *E) Miércoles*

22 Mateo nació el Jueves *11* de febrero del año *2010*, año del tigre *(HU)* en el calendario chino, ¿qué día de la semana fue el *11* de febrero del año *1910*?

A) Lunes *B) Martes* *C) Viernes*
D) Domingo *E) Sábado.*

23 El premio Nobel de Literatura *2010* fue concedido a Mario Vargas Llosa, quien nació el *28* de marzo del año *1936*. Si el *28* de marzo del año *2011* será lunes, ¿qué día de la semana nació Mario Vargas Llosa?

A) Lunes *B) Martes* *C) Viernes*
D) Domingo *E) Sábado*

24 En cierto mes del año *2011* hay exactamente *5* lunes, *5* sábados y *5* domingos. Si el *8* de dicho mes Pedro cumple años, ¿qué día de la semana es el cumpleaños de Pedro?

A) Sábado *B) Domingo* *C) Lunes*
D) Martes *E) Jueves*

25 Federico Villareal Vidarreal, matemático peruano conocido por sus contribuciones al campo de la matemática y la ingeniería, nació en Túcume el *3* de agosto de *1850*. Si el *3* de agosto del *2010* fue martes, ¿qué día de la semana nació Villarreal?

A) Domingo *B) Viernes* *C) Jueves*
D) Lunes *E) Sábado*

26 Brenda cumplió *25* años el domingo *29* de agosto del *2010*. Si su primo Luis nació el primer miércoles posterior al día en que nació Brenda, ¿en qué fecha nació Luis?

A) 31 de agosto *B) 4 de setiembre*
C) 2 de setiembre *D) 30 de agosto*

E) 5 de setiembre

27 En el mes de marzo de cierto año bisiesto hubo exactamente cuatro lunes y cuatro viernes. ¿Qué día de la semana fue el ***11*** de noviembre del año anterior?

A) Lunes *B) Miércoles* *C) Domingo*
D) Jueves *E) Martes*

28 Rosa y Eduardo se casaron el lunes ***16*** de julio de ***2007***. Si el ***18*** mayo del siguiente año nació su hija, ¿qué día de la semana nació su hija?

A) lunes *B) martes* *C) jueves*
D) viernes *E) domingo*

29 Mario Vargas Llosa nació el ***28*** de marzo de ***1936*** en la ciudad de Arequipa. Si el ***28*** de marzo de ***2009*** fue sábado, ¿qué día de la semana nació Mario Vargas Llosa?

A) lunes *B) viernes* *C) sábado*
D) domingo *E) martes*

30 La Toma de la Bastilla ocurrió el ***14*** de julio de ***1789***. Si el ***28*** de julio del ***2009*** fue martes, ¿qué día de la semana se celebrará el tercer centenario de la Toma de la Bastilla?

A) lunes *B) martes* *C) miércoles*
D) jueves *E) viernes*

31 Nicólás nació en el año $\overline{19xy}$. Si el sábado ***17*** de octubre del ***2009*** cumplió tantos años como la suma de los dígitos del año de su nacimiento, más ocho años, ¿ en qué día de la semana nació Nicolás?

A) domingo *B) lunes* *C) martes*
D) miércoles *E) jueves*

32 Un adivino profetizó: «El hombre pisará el planeta Marte el día ***N° 125*** del año ***2020***». Si el primero de enero del ***2012*** será domingo, ¿en qué fecha y día de la semana ocurrirá ello, si se cumple la predicción?

A) domingo 4 de mayo *B) lunes 4 de mayo*
C) martes 4 de mayo *D) miércoles 4 de mayo*
E) sábado 4 de mayo

33 El miércoles ***9*** de febrero del ***2000*** nació Judith, y José nació ***7*** semanas y ***4*** días después. ¿Qué día de la semana nació José?

A)domingo 31 de marzo *B)domingo 2 de abril*
C)domingo 3 de abril *D)sábado 1 de abril*
E)sábado 2 de abril

34 Si la suma de las fechas de los días viernes de un determinado mes es igual a ***80***, entonces, ¿qué día cae el ***15*** de dicho mes?

A) lunes *B) martes* *C) miércoles*
D) jueves *E) viernes*

35 Roberto miente los días miércoles, jueves y viernes, y dice la verdad el resto de los días de la semana; Enrique miente domingo, lunes y martes, y dice la verdad el resto de los días de la semana.
Si ambos dicen: Mañana es un día en el cual yo no miento, ¿qué día de la semana es hoy?

A) lunes *B) martes* *C) jueves*
D) miércoles *E) viernes*

36 Alberto miente los lunes, jueves y domingo, los demás días dice la verdad. Un día, Pedro le preguntó que día de la semana será el seminario, y Alberto respondió: Pasado mañana será viernes, el día del seminario, ayer Miércoles me lo confirmaron. Puedes preguntármelo mañana, porque diré la verdad. ¿Qué día ocurre esta conversación?

A) martes *B) sábado* *C) miércoles*
D) domingo *E) jueves*

37 El ***12*** de enero de ***1871***, bajo el gobierno de José Balta, se creó el distrito de San Luis de Cañete conocido como une de los centros del folklore afroperuano. Si el ***12*** de enero de ***2011*** fue miércoles, ¿qué día de la semana se creó este distrito?

A) Sábado *B) Viernes* *C) Jueves*
D) Lunes *E) Domingo*

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	A	A	E	A	D	D	E	A	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
E	B	E	C	B	A	C	C	B	E
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	C	E	A	E	B	B	E	C	D
31	32	33	34	35	36	37			
C	B	B	D	B	D	C			

MAXIMOS y MINIMOS

CAPITULO 011

OBJETIVOS :

* Entender la importancia de la optimización.
* Aumentar la diversidad de recursos para maximizar o minimizar ciertas expresiones con teoría elementales.
* Agudizar el sentido de análisis frente a situaciones matemáticas que se presenten.

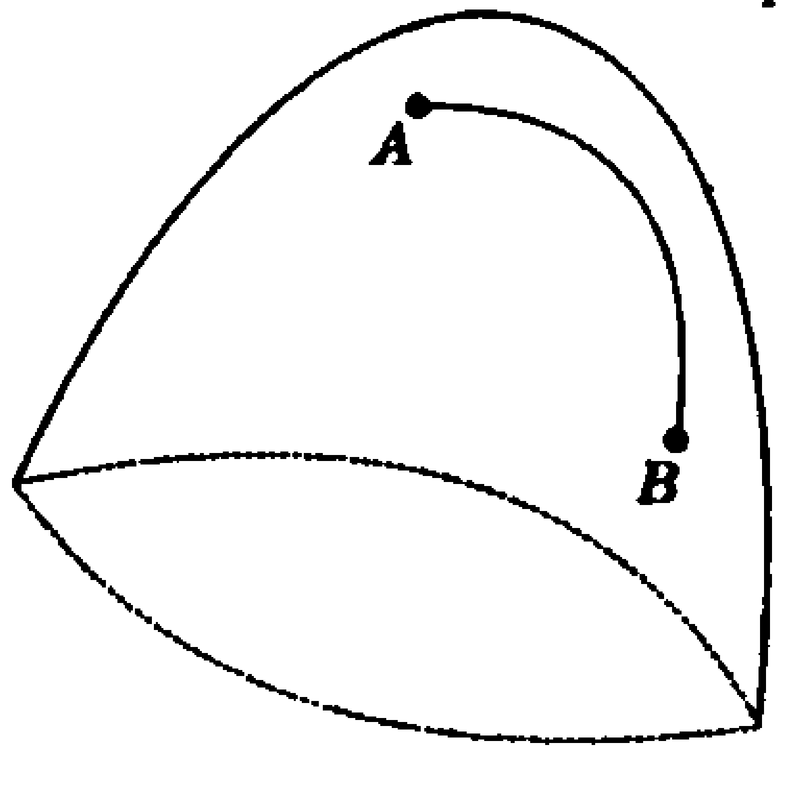
INTRODUCCIÓN :

Una necesidad importante para cualquier persona en el desarrollo de sus actividades es la optimización de sus actividades, es decir, que con el mínimo esfuerzo alcancemos máxima eficiencia, por ejemplo un ingeniero busca en sus diseños utilizar la menor cantidad de elementos sin que la seguridad del proyecto se vea afectada.

Estos tipos de problemas han sido una necesidad desde la antigüedad, por ejemplo en ***1696*** Johanis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre la línea de deslizamiento más rápido o braquistócronas. En este problema se pide determinar la curva que une dos puntos dados ***A*** y ***B*** que posea la propiedad de que una esfera se deslice desde el punto ***A*** hasta el ***B*** en el menor tiempo posible.

Una de las primeras respuestas, nos diría que es la recta, pero a pesar que la recta sea la curva de menor longitud que une los puntos ***A*** y ***B*** , no es la curva que cumple la condición del problema.

La solución del problema de la braquistócrona fue dado porI. Bernoulli , J. Bernoulli, G. Leibnilz, I. Newton y G. L'Hopital, la línea de deslizamiento más rápido resultó ser la cicloide.



A *nivel superior es costumbre comenzar* el *estudio de problemas de optimización junto con el estudio de derivadas , sin embargo, es posible tratar problemas de máximos y mínimos con métodos simples, apoyándonos en criterios básicos y teoremas de desigualdades.*

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En varias circunstancias para un mismo problema existen varias respuestas, lo cual puede llevar a que lo pedido sea la solución máxima o mínima. No existiendo un método general para resolver estos tipos de problemas, mostraremos la situaciones más conocidas.

EN LAS EXPRESIONES CUADRÁTICAS

EJEMPLO 1 :

Calcular el mínimo valor de: $P(x) = x^2 + 7$

RESOLUCIÓN:

*Como $x^2 \geq 0$, es decir el mínimo valor de cualquier cuadrado es cero, luego:

$$\Rightarrow \underline{x^2 + 7} \geq 0 + 7 \Rightarrow P(x) \geq 7$$

*Por lo tanto el mínimo valor que puede tomar ***P(x) es 7.***

EJEMPLO 2 :

Calcule el mínimo valor de $P = x^2 - 6x + 11$

Para maximizar o minimizar una expresión cuadrática la idea es completar cuadrados, es decir expresarlos de la forma $(a+b)^2+c$. Entonces de la expresión :

$$P = x^2 - 6x + 11$$

$$\Rightarrow P = \underbrace{x^2 - 2(x)(3) + 3^2}_{\substack{\text{trinomio} \\ \text{cuadrado perfecto}}} + 2 = (x-3)^2 + 2$$

* Teniendo en cuenta que: $x^2 \geq 0; \forall x \in R$

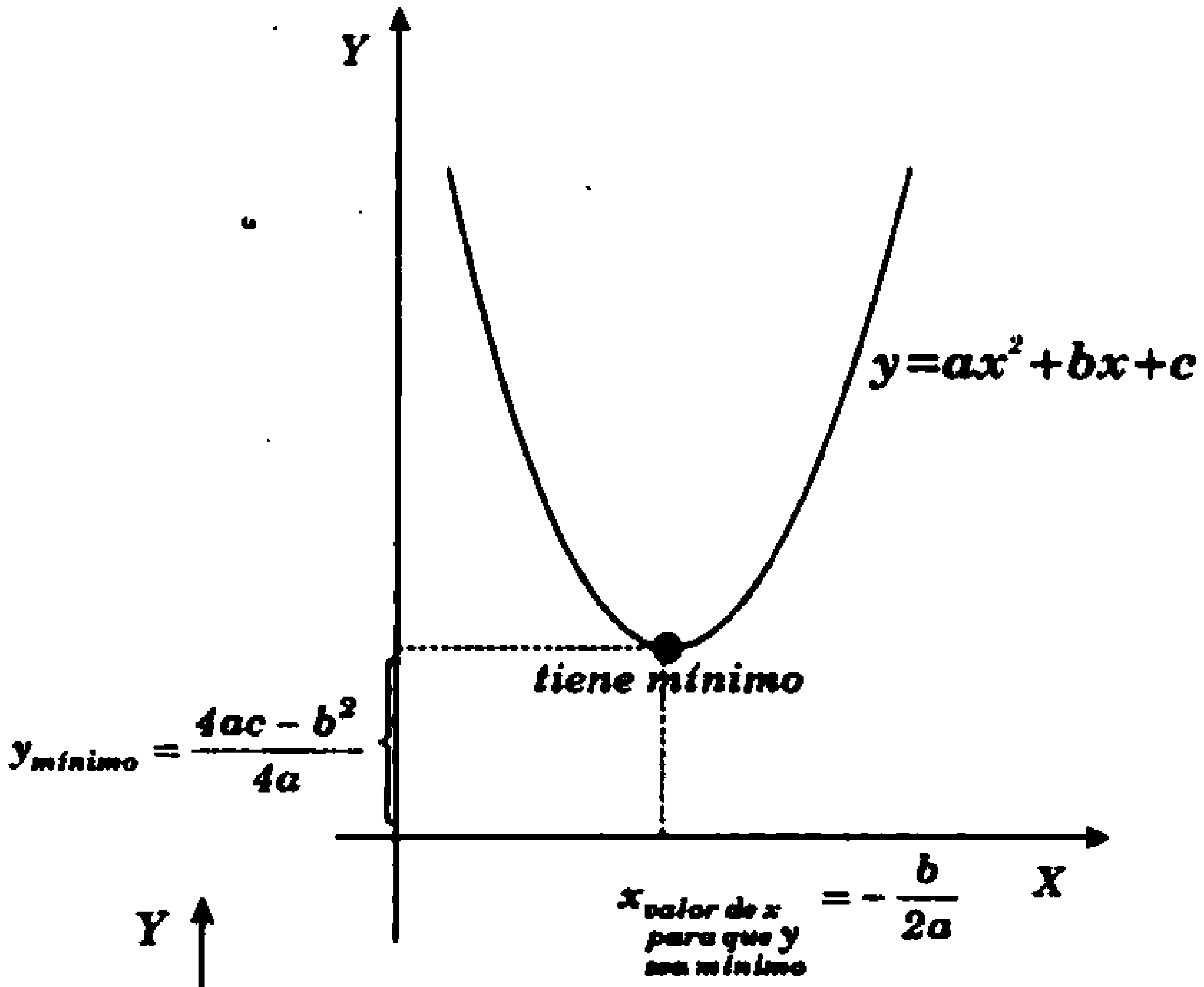
Entonces : $P_{mínimo} = \underbrace{(x-3)^2}_{\substack{\text{debe ser} \\ \text{mínimo}}} + 2$

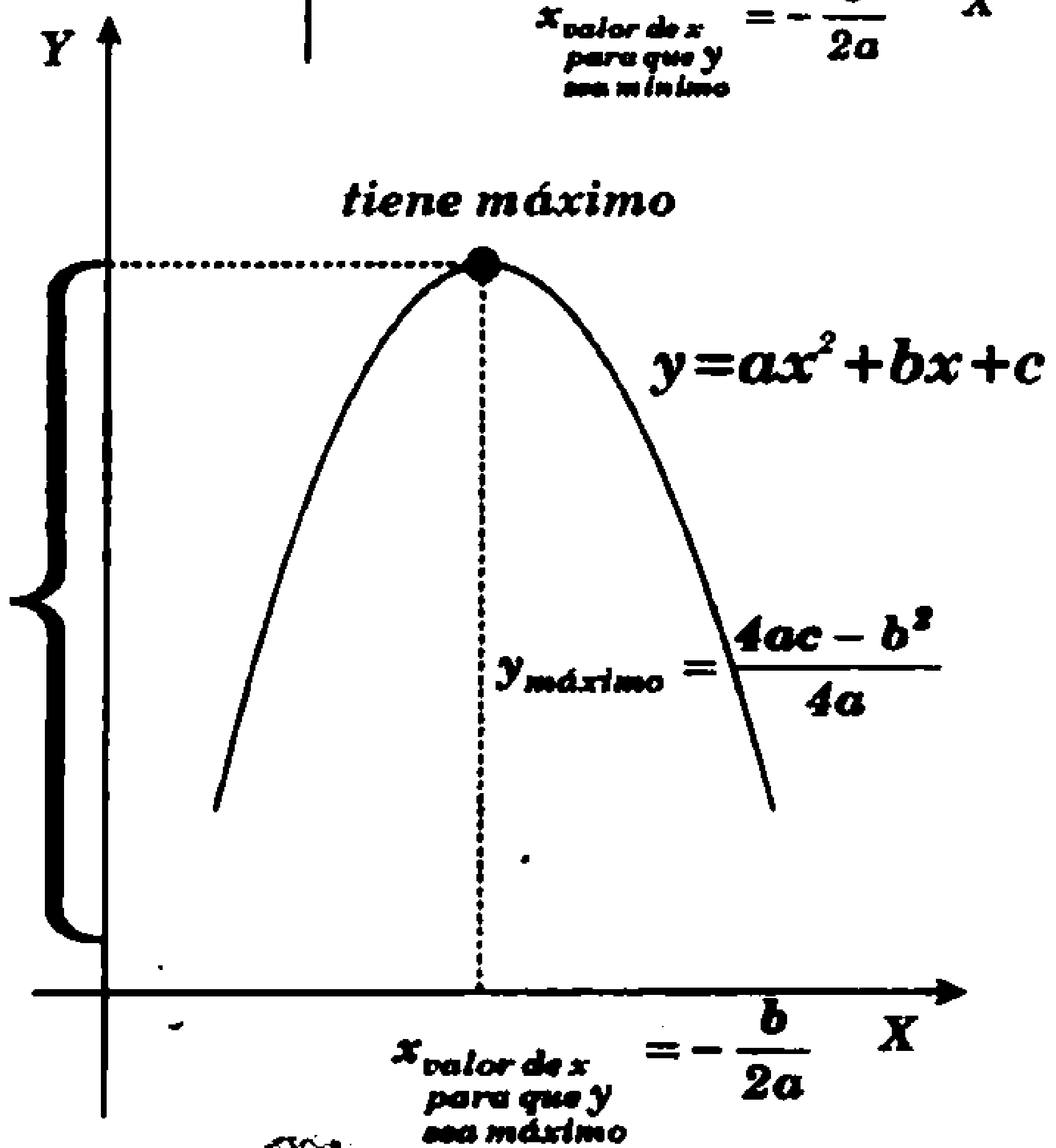
$$\Rightarrow P_{mínimo} = 0 + 2 = 2$$

¿Cuál sería su máximo valor?

NOTA :

Una expresión cuadrática , puede representar gráficamente como una parábola.





Es decir o tiene mínimo o tiene máximo

Analicemos así :

$y = ax^2 + bx + c$

Completando cuadrados:

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{Su mínimo es } 0} - \underbrace{\frac{b^2 + 4ac}{4a}}_{\text{Máximo ó Mínimo según se desee}}$$

$$\boxed{\left(\begin{matrix}\text{Máximo ó Mínimo}\\ \text{según se desee}\end{matrix}\right) = \frac{b^2 + 4ac}{4a}}$$

$$\boxed{\left(\begin{matrix}\text{Valor de "x" para}\\ \text{obtener el Máximo o Mínimo de "y"}\end{matrix}\right) = x = \frac{-b}{2a}}$$

RELACIÓN ENTRE LA MEDIA ARITMÉTICA Y LA MEDIA GEOMÉTRICA

Un teorema importante se $MA \geq MG$

En general: $\boxed{MA \geq MG \geq MH}$

MH : media armónica

*Para dos números "a" y "b" :

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}}$$

EJEMPLO 1 :

Calcule el mínimo valor de $x + \frac{1}{x}$

RESOLUCIÓN :

Aplicando la relación de la media aritmética y de la media geométrica ,así :

$$\frac{\overset{a}{x} + \overset{b}{\frac{1}{x}}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \times \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)_{mínimo} = 2$$

NOTA :

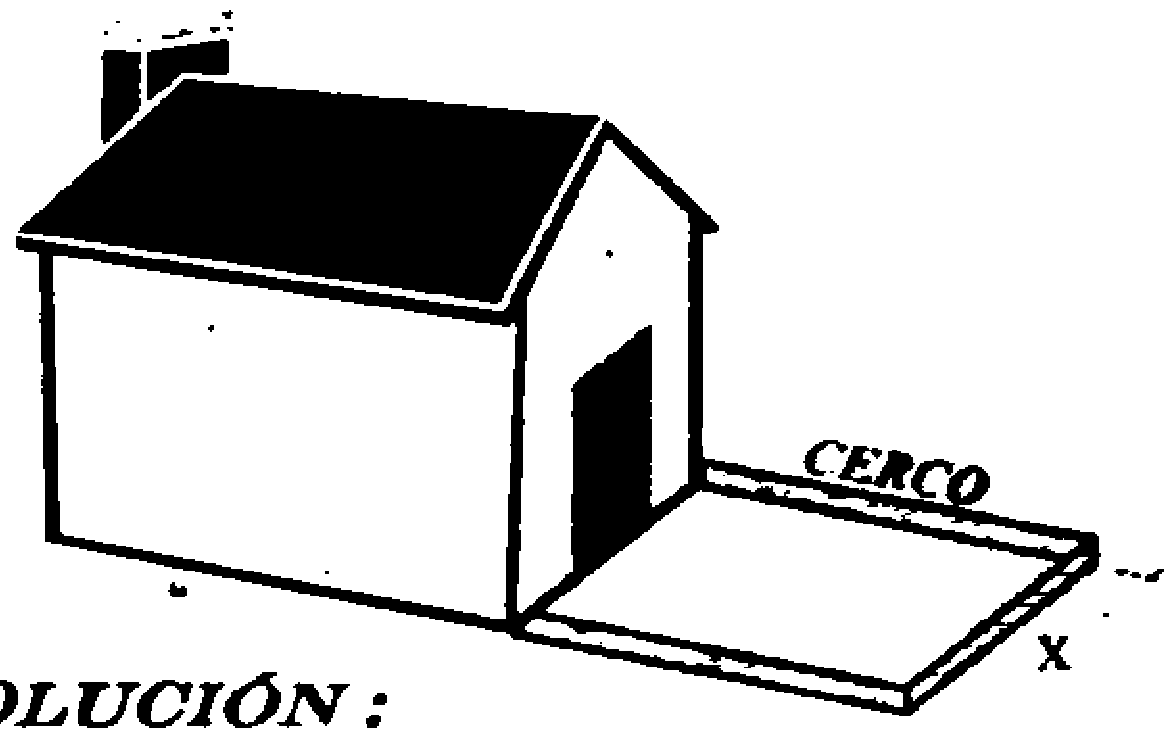
Si: $p + q = k$; k : constante

Luego el máximo valor de «pq» será cuando: $p = q = \frac{k}{2}$

*Es decir: $pq = \frac{k}{2} \times \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$

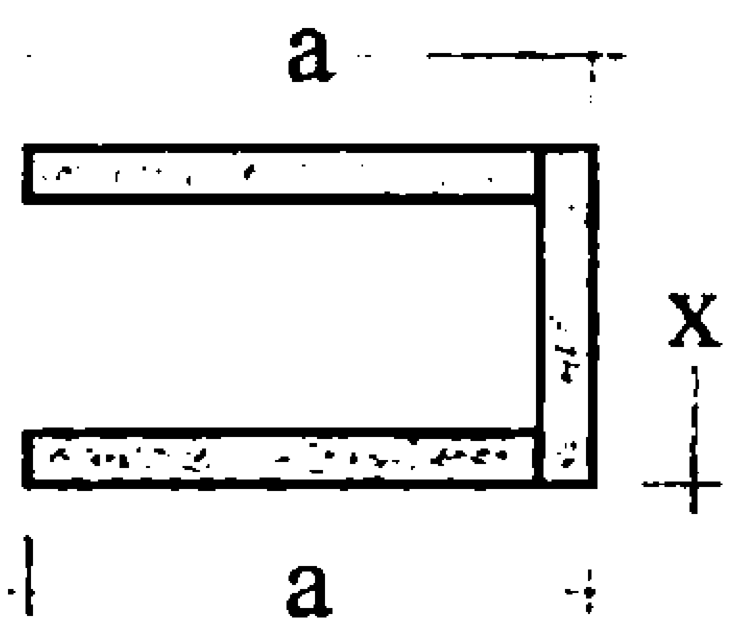
EJEMPLO 1 :

Con *20m.* de malla metálica se cercó el jardín rectangular ubicado a un costado de la casa. Hallar «x» para que el área del jardín sea la máxima posible.



RESOLUCIÓN :

* El cerco que se necesita será:



$\Rightarrow 2a + x = 20$

*Sabemos que:

$$\underbrace{(2a + x)^2 - (2a - x)^2}_{\text{Análogo a la identidad de Legendre}} = 4(2a)(x)$$

$$\Rightarrow \quad 20^2 - \underbrace{(2a - x)^2}_{\text{Debe ser mínimo}} = \underbrace{8\,a\,x}_{\text{Área máxima}}$$

* Se deduce que para que el área sea máxima se debe cumplir que:

$2a - x = 0 \Rightarrow 2a = x$

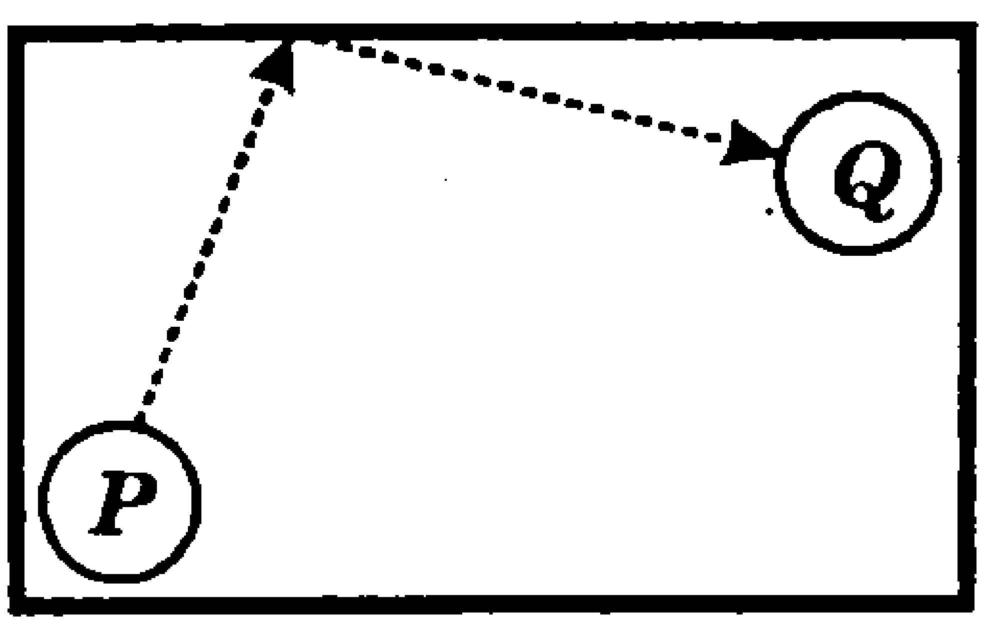
* Pero : $\underline{2a} + x = 20 \Rightarrow x + x = 20 \Rightarrow x = 10$

PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

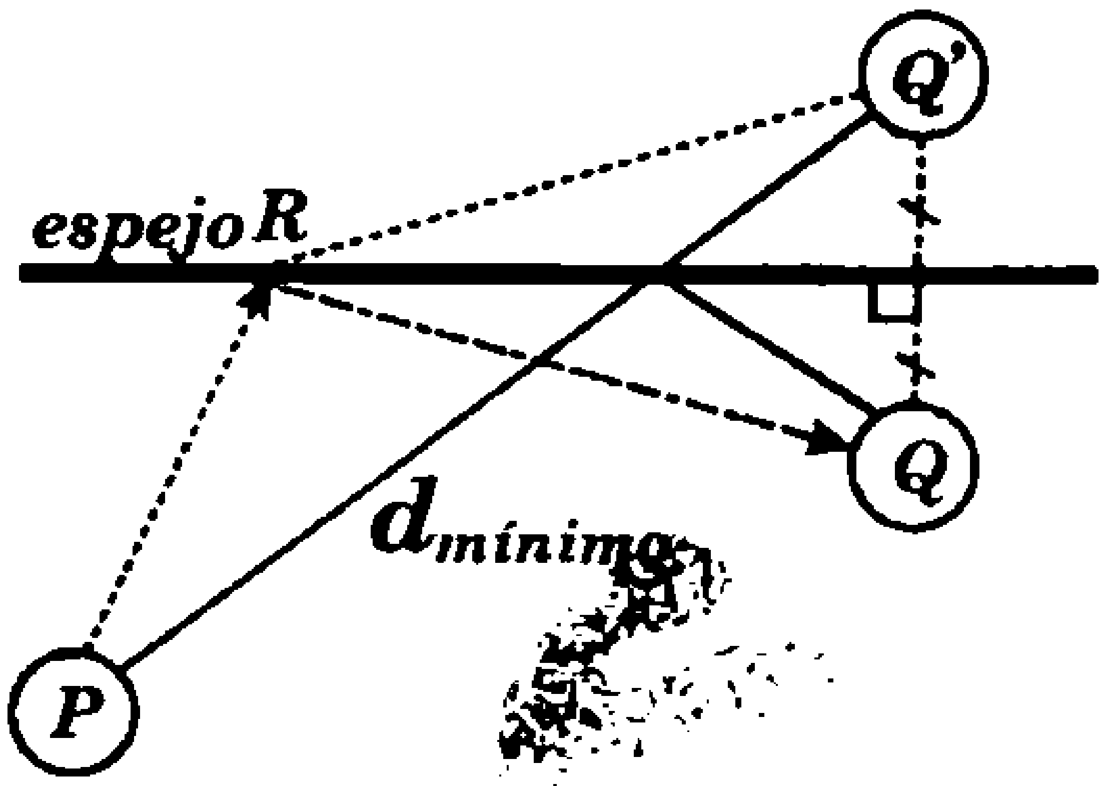
Es importante tener en cuenta aspectos teóricos de geometría.

EJEMPLO 1 :

Imaginemos que en la mesa de billar de la figura queremos golpear la bola *Q* con la bola *P* realizando para ello una carambola, ¿qué criterio deberíamos seguir para realizar el menor recorrido?



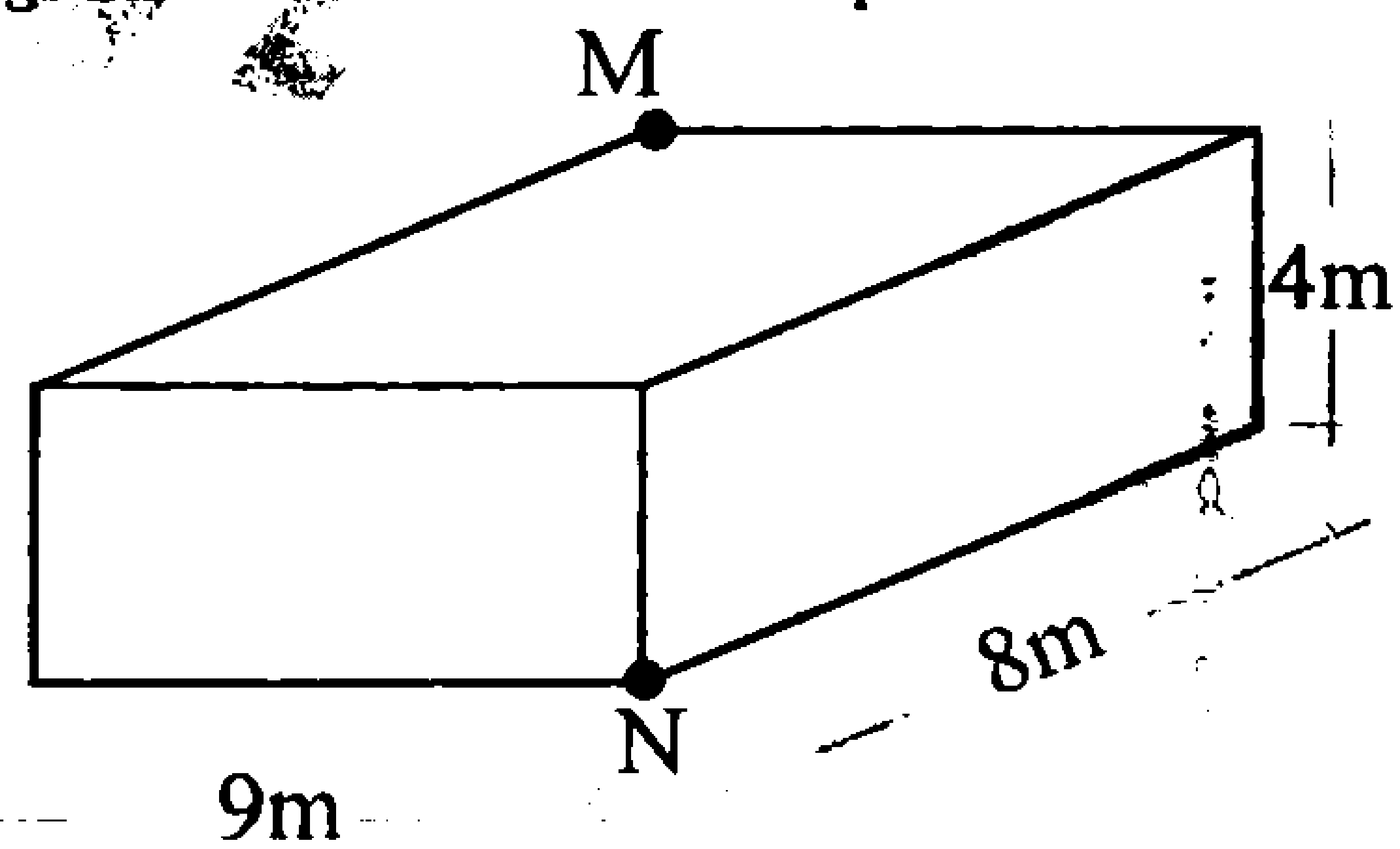
Para resolver este problema tomamos una banda como un espejo y reflejamos una bola.



Del gráfico observamos que el triángulo *RQQ'* es isósceles. El camino pedido es *PR* y *RQ* pero de lo anterior *(RQ=RQ')*, es decir, el camino sería *PR* y *RQ'* en otras palabras debemos unir el punto *P* con *Q'* y sabemos que el camino más corto es la línea recta.

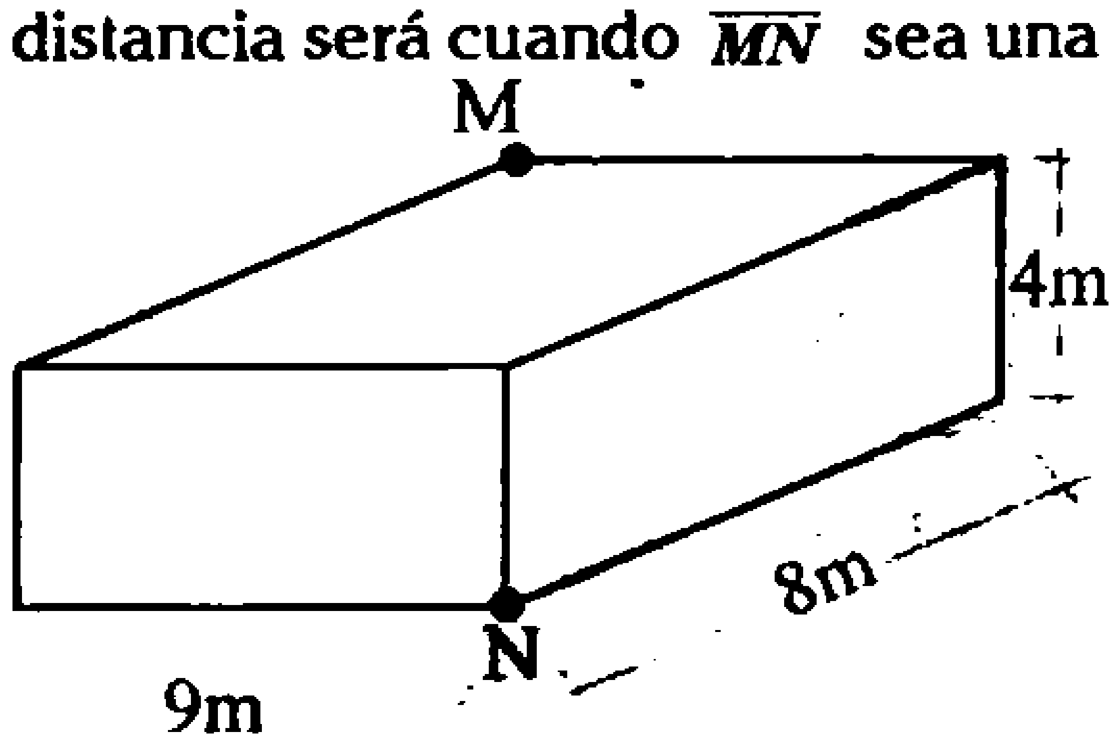
EJEMPLO 2 :

Una arañita se encuentra en el vértice *"M"* de un ladrillo; y desea llegar al vértice opuesto *"N"*, ¿Cuál es la longitud de la menor distancia que debe recorrer?

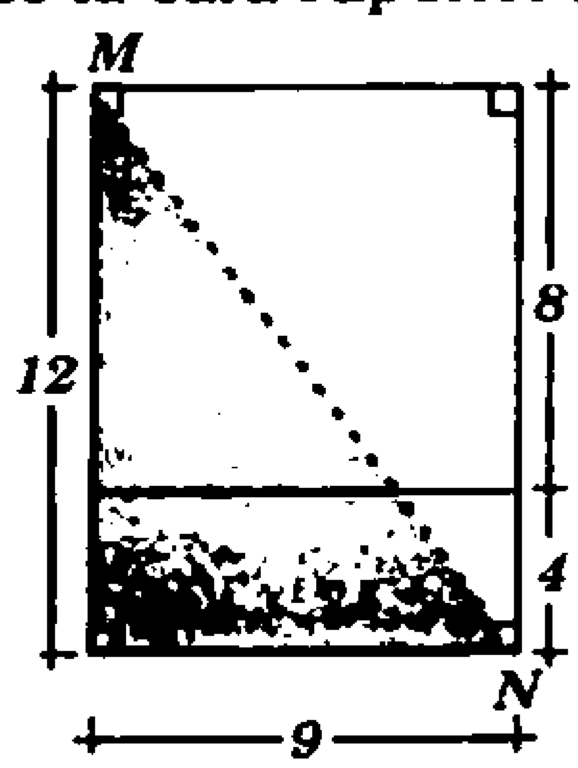


RESOLUCIÓN :

* La menor distancia será cuando $\overline{MN}$ sea una línea recta .



* Luego levantando la cara superior :



* Por el Teorema de Pitágoras:

$$12^2 + 9^2 = MN^2_{mín} \Rightarrow MN_{mín} = 15$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En una caja se tiene ***36*** bolas de billar del mismo tamaño, pero una de ellas tiene mayor peso que las otras, que si tienen el mismo peso. Se desea reconocer la más pesada usando una balanza de dos platillos o de equilibrio.¿ Cuántas pesadas son indispensables como mínimo para determinar esa bola?.

A) 5 B) 3 C) 4 D) 1 E) 2

RESOLUCIÓN :

Son necesarias ***4*** pesadas.

1°) Pesada : Se efectúa con ***18*** bolas en cada platillo.

Entonces :

* Si no hay equilibrio, la más pesada es aquella que está en el platillo hacia donde se inclinó la balanza con las ***18*** bolas. Se retiran las ***18*** bolas del platillo que queda elevada y se realiza la :

2°) Pesada : Las ***18*** bolas que quedan se reparten en dos grupos de ***9*** bolas, se obtiene así un grupo de ***9*** bolas donde se encuentra la más pesada (después de haber retirado las ***9*** bolas del platillo que quedó elevada).

3°) Pesada : Se toman las ***9*** bolas, grupos de 3 bolas en cada platillo quedando ***3*** sobre la mesa (conjuntamente con las ***9*** bolas restantes después de la ***2da*** pesada.

* Si hay equilibrio , la más pesada es una de las que quedó en la mesa.

* Si no hay equilibrio se hace la :

4°) Pesada : Tomando ***2*** de los ***3*** que estuvieron en el platillo , hacia donde se inclinó la balanza, y entonces :

* Si hay equilibrio, la más pesada es la que quedó fuera de los platillos

* Si no hay equilibrio, la más pesada es aquélla, que está en el platillo hacia donde se inclinó la balanza .

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Calcular el mínimo valor de: $P(x) = x^2 + 3$

A)3 B)0 C)–1 D)–3 E) 6

RESOLUCIÓN:

Como $x^2 \geq 0$, es decir el mínimo valor de cualquier cuadrado es cero, luego: $x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow P(x) \geq 3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Calcular el máximo valor que puede tomar la siguiente expresión: $\frac{3}{x^2 - 4x + 7}$

A)2 B) 3/7 C)1 D)3 E)

RESOLUCIÓN:

* Completando cuadrados:

$$\frac{3}{x^2 - 2(2)x + 4 + 3} = \frac{3}{(x^2 - 2(2)x + 2^2) + 3}$$

$$= \frac{3}{(x-2)^2 + 3}$$

*La expresión tendrá un mayor valor, cuando el denominador tome el menor valor posible, entonces el denominador: $(x-2)^2 + 3$ tomará el menor valor, cuando el cuadrado $(x-2)^2$ tome su mínimo valor que es «0» cero.

$\Rightarrow$ Máximo valor: $\frac{3}{0+3} = 1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Determinar el máximo valor que alcanza la expresión: $\dfrac{32}{x^2 - 6x + 13}$

A)8 B)16 C)4 D)3 E)6

RESOLUCIÓN :

* De lo dado: $\frac{32}{x^2 - 6x + 9 + 4}$.

* Dándole la forma de un cuadrado al denominador: $\frac{32}{(x-3)^2 + 4}$

* Como nos piden el valor máximo, entonces el denominador debe ser una cantidad mínima, de ahí que $(x-3)^2$ debe ser igual a cero (su mínimo valor)

* Luego: $\frac{32}{0+4} = 8$

RPTA : "A"

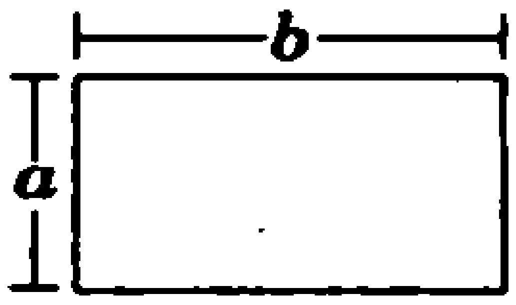
PROBLEMA 5 :

Lenin desea comprar un lote de terreno de forma rectangular. Se sabe que el doble del perímetro del terreno excede en ***168 m*** al ancho del terreno. Hallar el área máxima del terreno que puede comprar Lenin.

A) 588 m² B) 300 m² C) 540 m² D) 630 m²

RESOLUCIÓN:

* Sea el terreno rectangular el siguiente:



Por el dato sabemos que el doble del perímetro excede en *168* al ancho del rectángulo

$$2(2a+2b)-a=168 \Rightarrow 3a+4b=168$$

Nos piden el área máxima , para ello aplicamos la propiedad $\overline{MA} \geq \overline{MG}$

* Para los números *(3a)* y *(4b)* se tiene que.

$$\frac{3a+4b}{2} \geq \sqrt{3a \times 4b} \Rightarrow 84 \geq \sqrt{12ab}$$

Elevando al cuadrado obtenemos :

$$588 \geq ab \Rightarrow ab_{máximo}=588$$

$\Rightarrow$ El área máxima es $588\ m^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

Si "a" y "b" son dos números reales tales que $a^2+b^2=3$, ¿cuál es el menor valor que puede tomar "$a+b$"?

A) $-\sqrt{6}$ B) $-2\sqrt{2}$ C) $-3\sqrt{2}$ D) $-2\sqrt{3}$ E) $-\frac{3}{2}\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN:

Dato : a y $b \in R$ además, $a^2+b^2=3$

Nos piden $(a+b)_{mínimo}$

$$(\underbrace{a+b}_{mínimo})^2=(\underbrace{a^2+b^2}_{3})+\underbrace{2ab}_{mínimo}$$

Se sabe que $MA \geq MG$ para a^2 y b^2

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$\Rightarrow 3 \geq 2ab \Rightarrow \underbrace{2ab}_{mínimo}=3$$

Reemplazando :

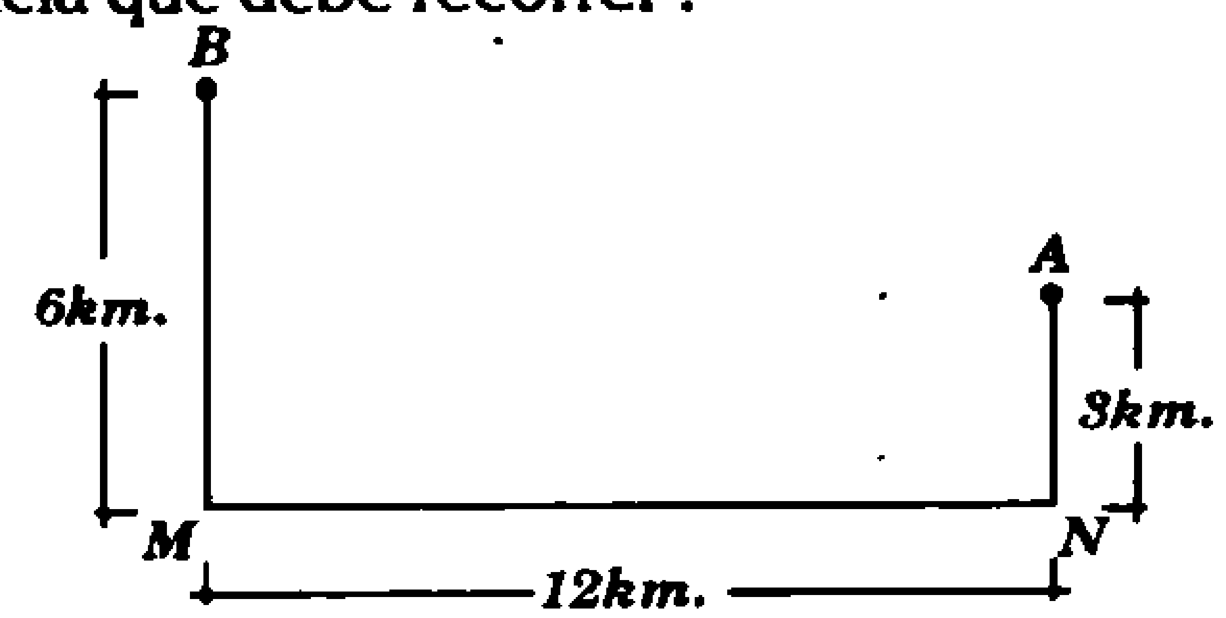
$$(a+b)^2=\underbrace{a^2+b^2}_{3}+\underbrace{(2ab)_{mínimo}}_{3} \Rightarrow (a+b)^2=6$$

$$\Rightarrow (a+b)=\pm\sqrt{6} \Rightarrow (a+b)_{mínimo}=-\sqrt{6}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

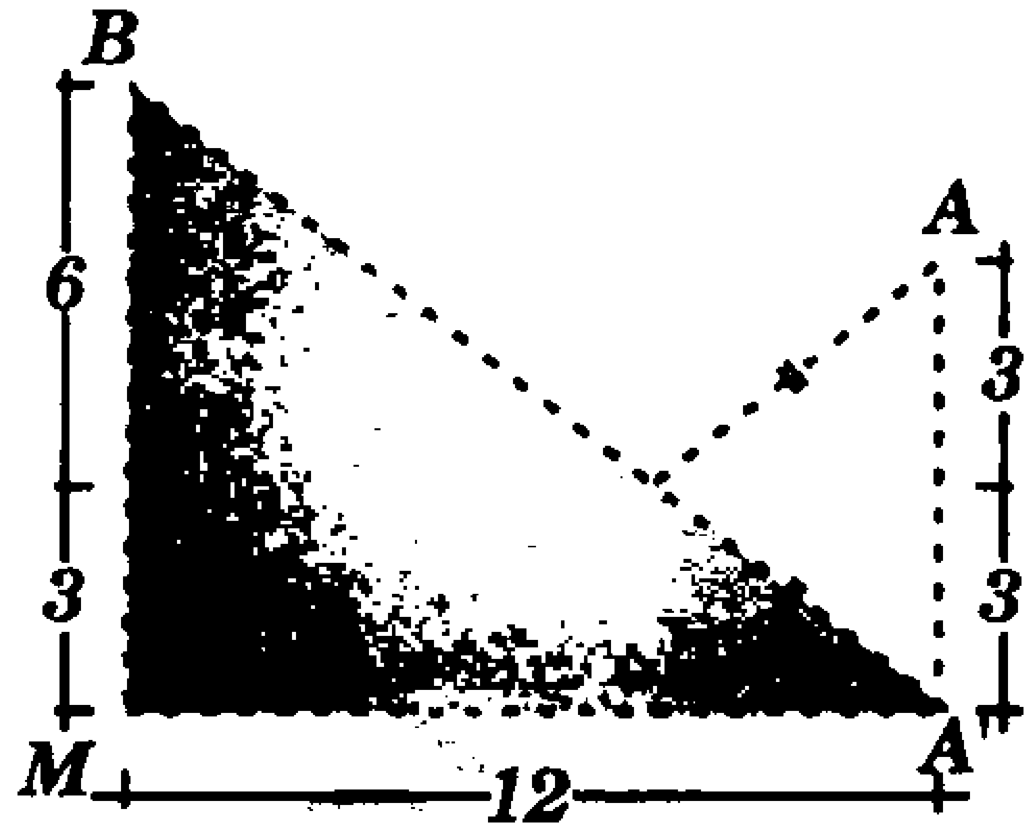
Según el gráfico, una persona debe ir de *A* a *B* tocando un punto del segmento *MN*. ¿Cuál es la menor distancia que debe recorrer .



A)15 B) 21 C)24 D)10 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Construyendo el simétrico del punto "*A*", la menor distancia será cuando $\overline{BA'}$ es una línea recta.



* Por el Teorema de Pitágoras :

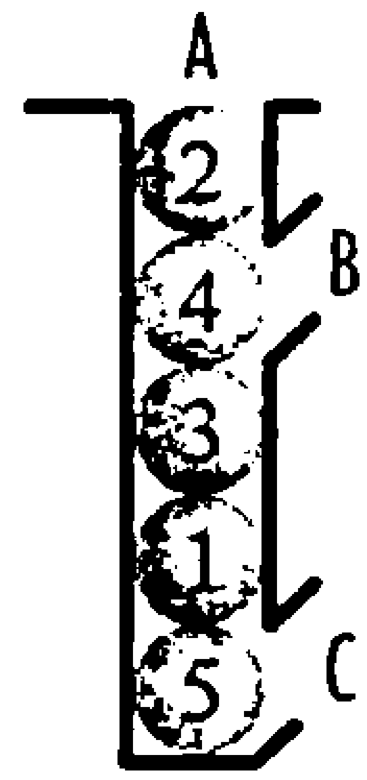
$$9^2+12^2=BA'^2 \Rightarrow BA'=15m$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

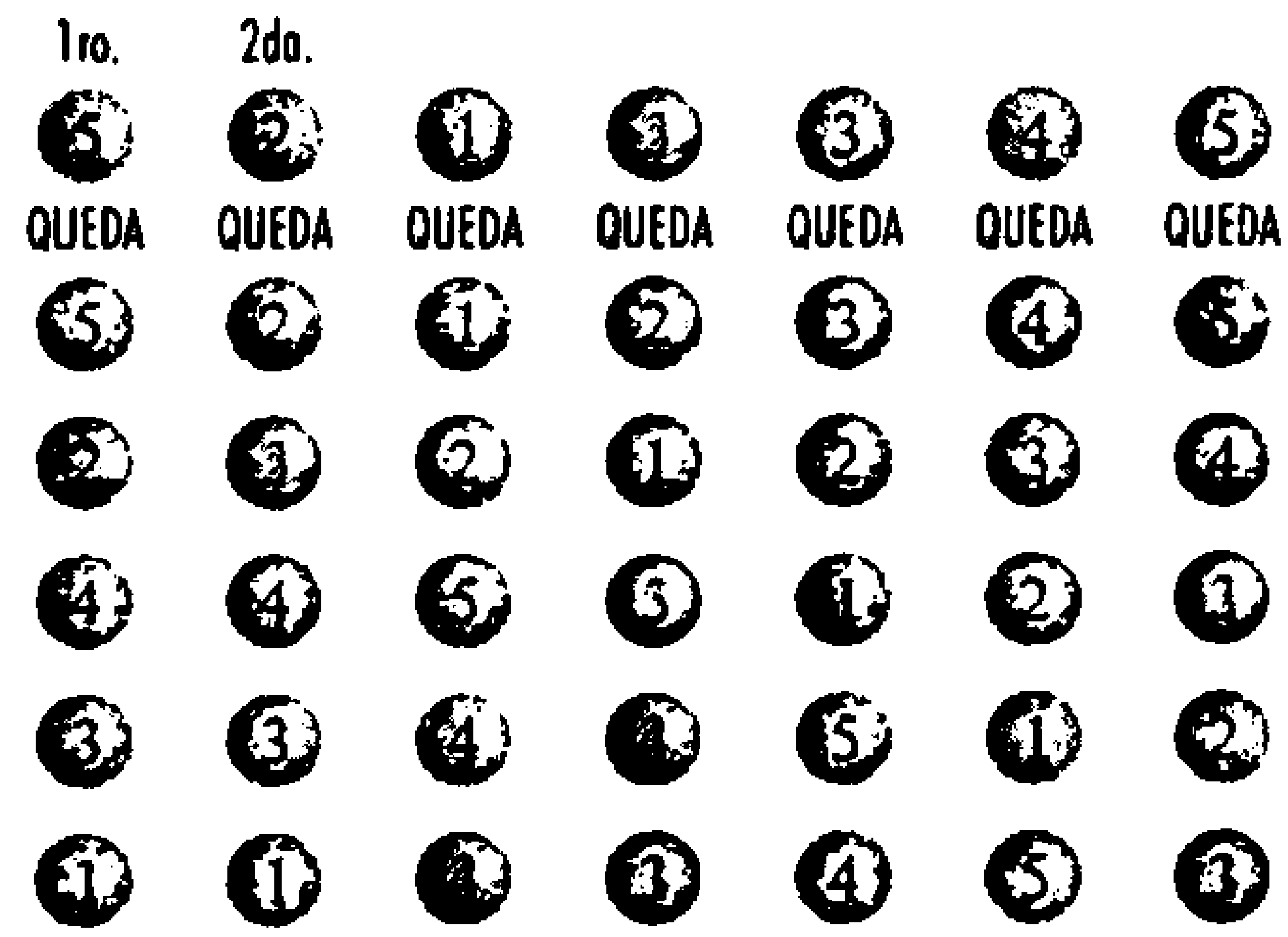
En la figura se muestra un recipiente abierto en *A* , *B* y *C* , con *5* bolas numeradas . Si una operación consiste en: sacar solo una bola por *B* ó *C* e inmediatamente introducirlo por *A*, ¿Cuántas operaciones como mínimo se deben realizar para obtener el orden : *1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5* de abajo hacia arriba?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 9
E) 7



RESOLUCIÓN :

* Se debe hacer la siguientes extracciones quedando :



* Con lo que es necesario *7* operaciones como mínimo

RPTA: "E"

PROBLEMA 9 :

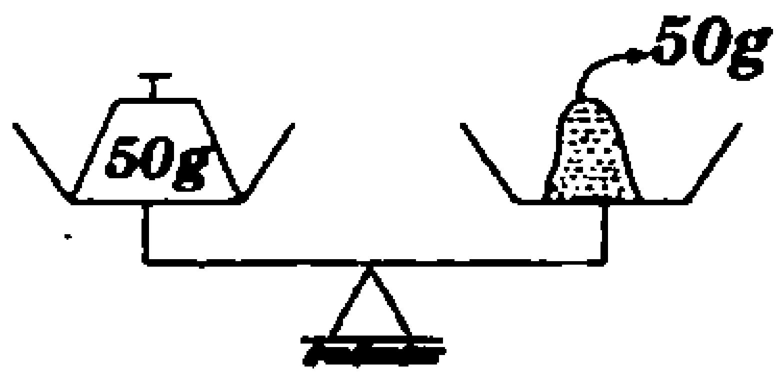
Se dispone de una balanza de dos brazos , una pesa de *50* gramos y *1* kg de azúcar. ¿En cuántas pesadas

como mínimo se logrará obtener ***300 g*** de azúcar?

A) 3 ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 7***

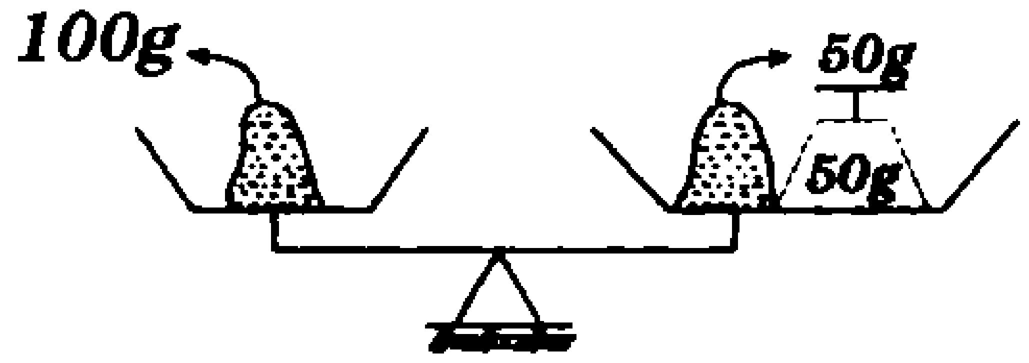
RESOLUCIÓN :

* ***1ª)*** pesada :



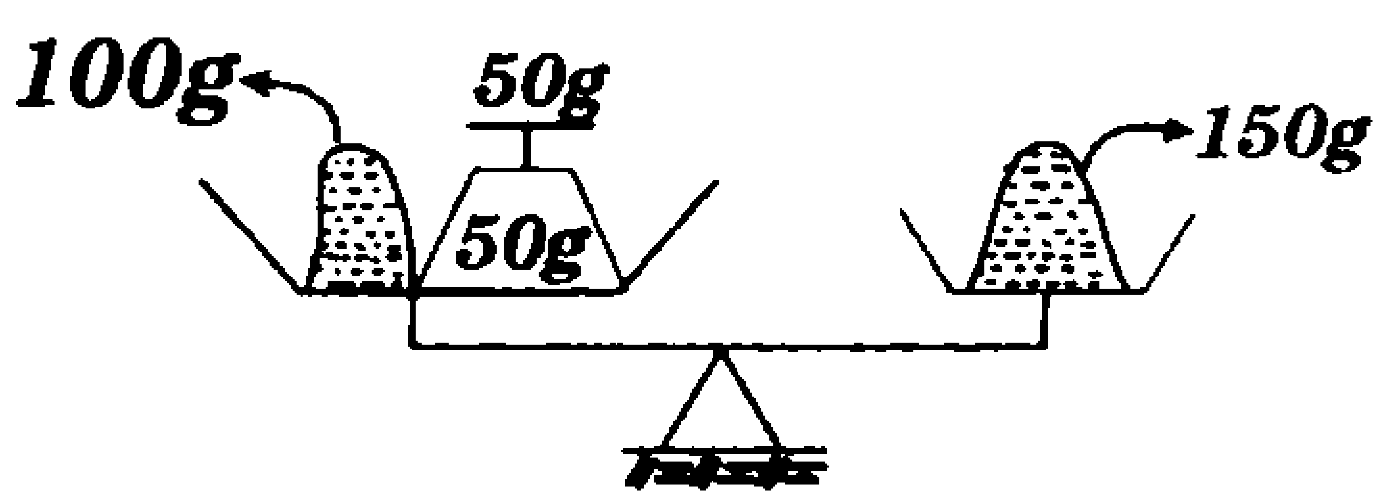
⇒ ***ya tenemos 50 g***

* ***2ª)*** pesada :



⇒ ***ya tenemos 100+50=150 g***

* ***3ª)*** pesada :



⇒ ya tenemos ***100 + 50 + 150 = 300 g***

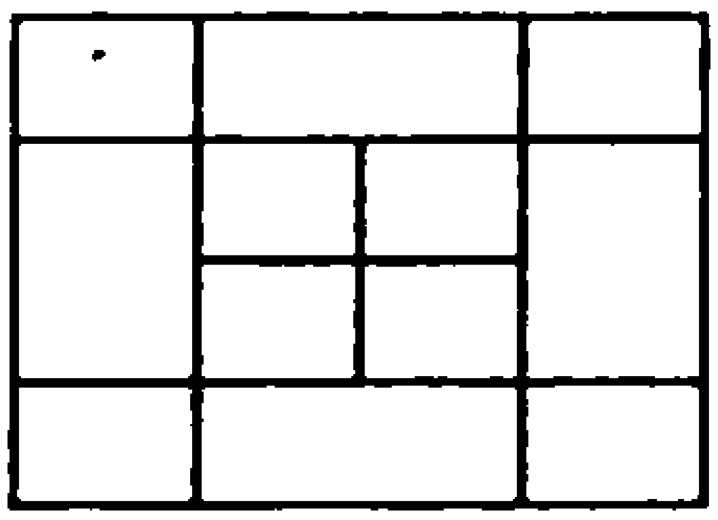
⇒ Como mínimo se requieren solo ***3*** pesadas.

RPTA: "A"

PROBLEMA 10 :

Elida desea pintar la siguiente figura de modo que no existan ***2*** cuadriláteros contiguos (con un lado común) del mismo color. ¿Cuál es el mínimo número de colores que ella deberá utilizar?

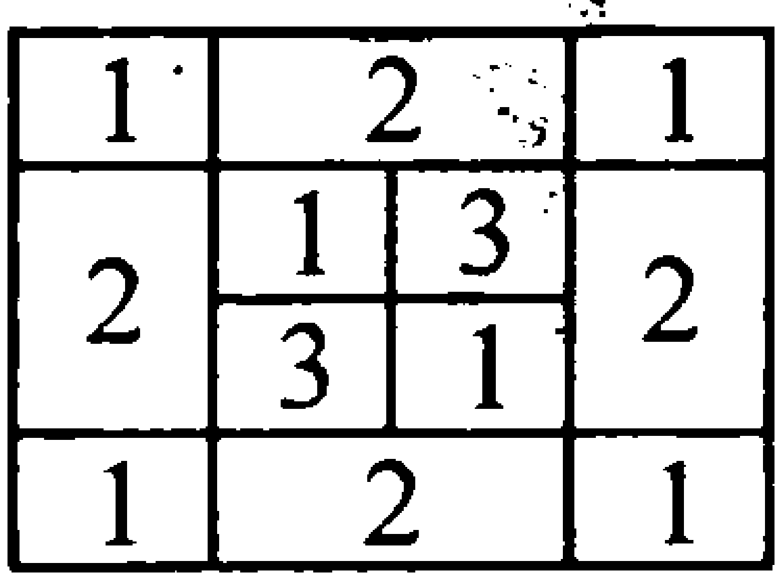
A) 3
B) 5
C) 4
D) 2
E) 6



RESOLUCIÓN :

* Para que la cantidad de colores sea , mínimo, debemos pintar la máxima cantidad de regiones posibles con un color , para luego pasar a otro color y así sucesivamente, consideraremos cada número un color .

* Luego :

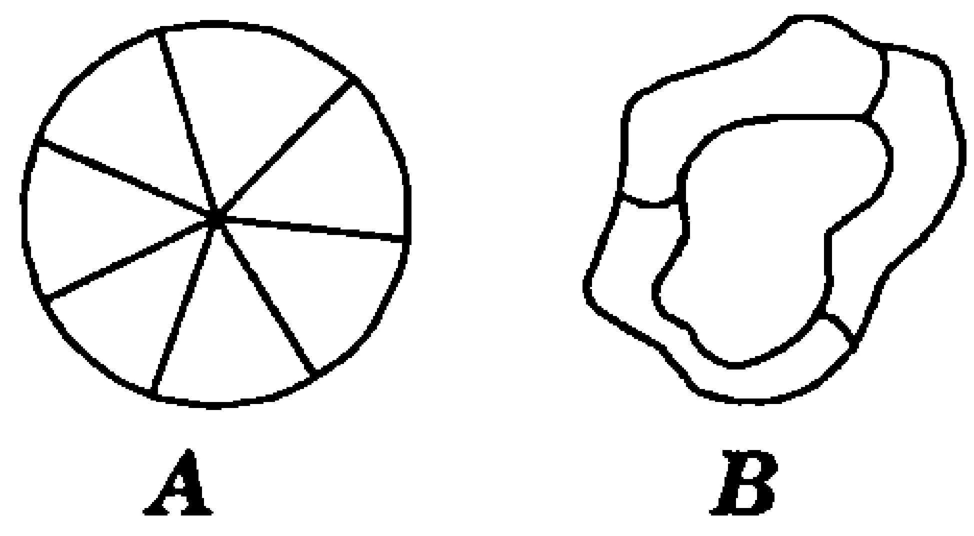


RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

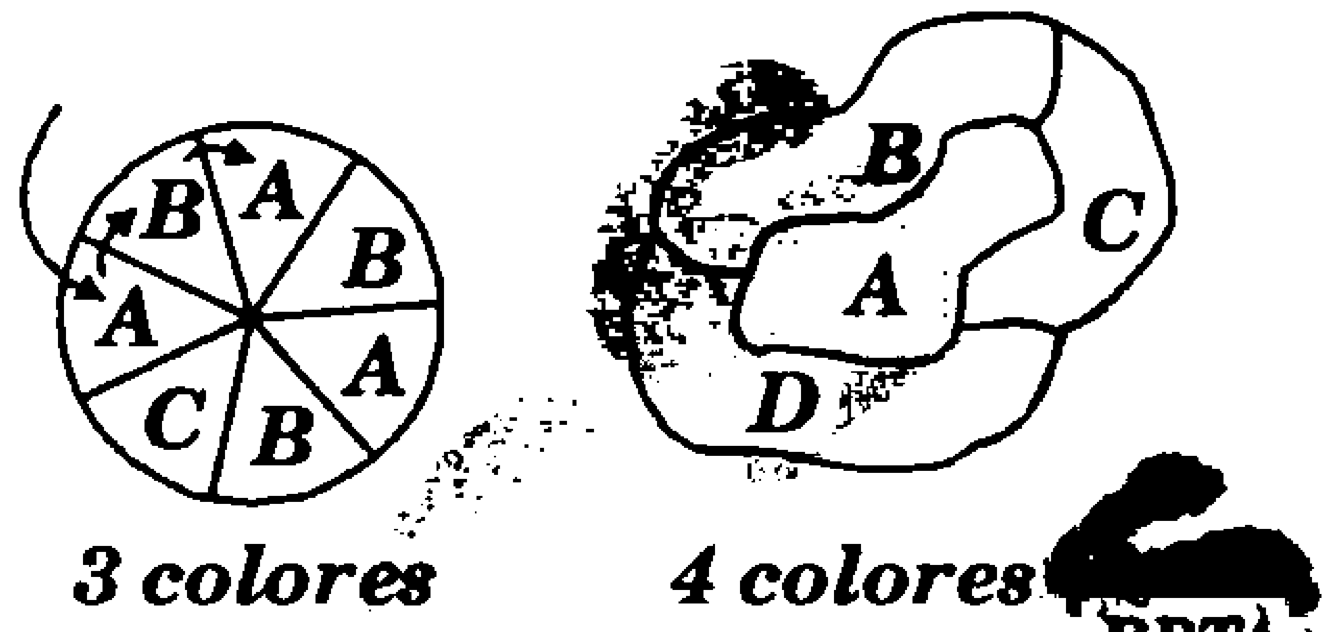
¿Cuántos colores diferentes , como mínimo , son necesarios para pintar los siguientes mapas de modo que dos regiones vecinas no tengan el mismo color?

A) 3 y 4
B) 3 y 5
C) 4 y 6
D) 4 y 5



RESOLUCIÓN :

* Sea ***A , B , C*** y ***D*** colores diferentes , luego :

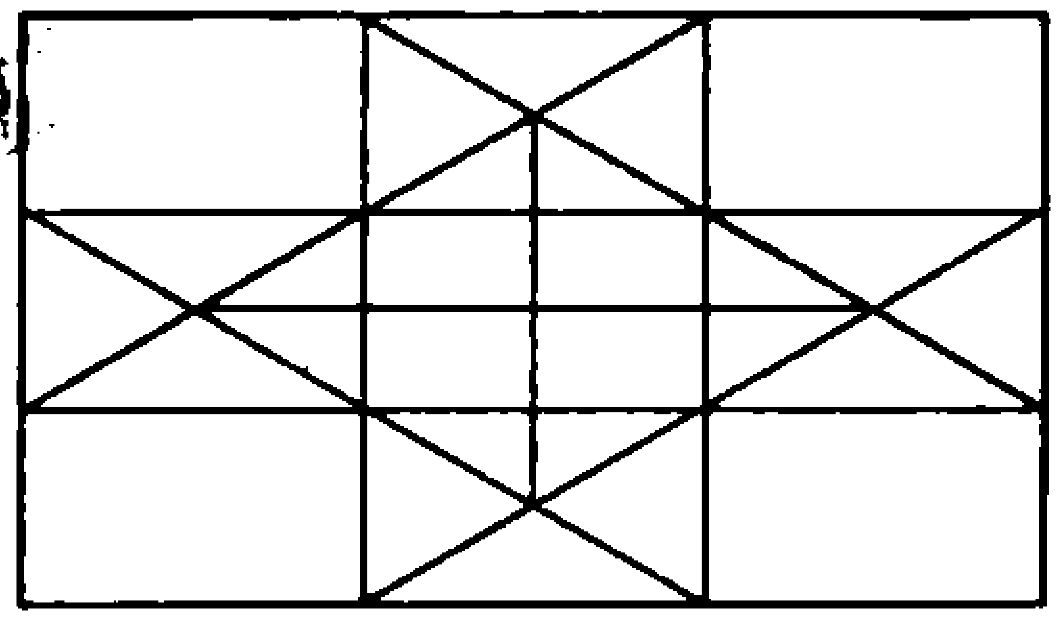


RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

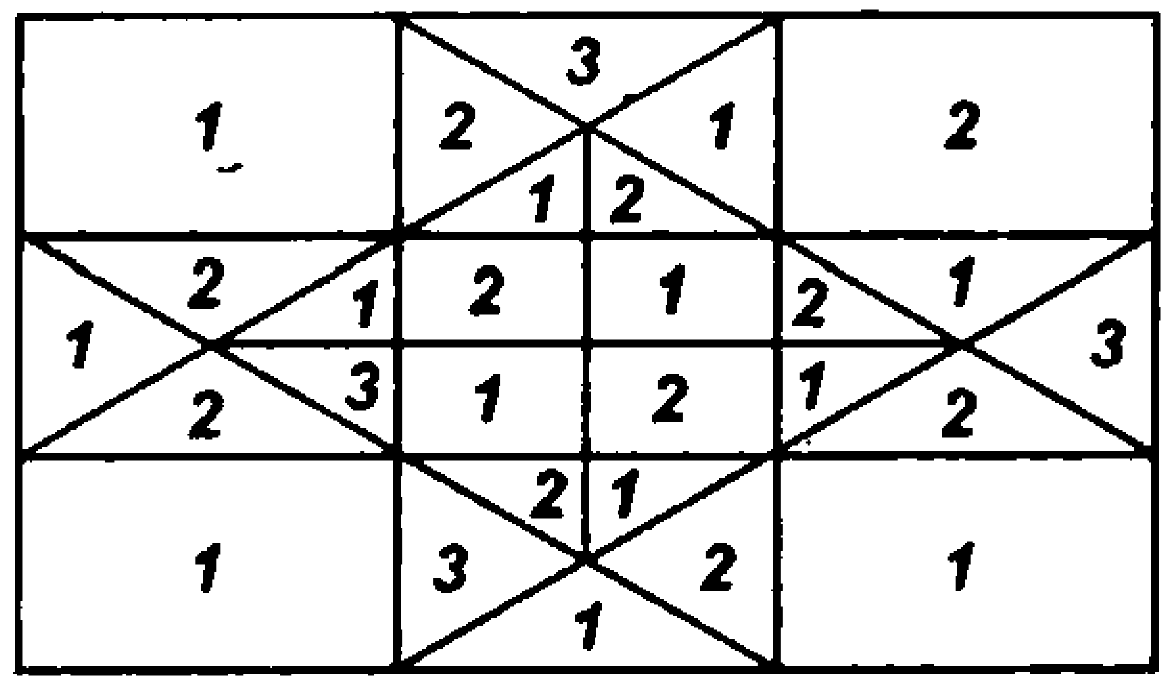
Roxy desea pintar la siguiente figura de modo que no existan ***2*** regiones vecinas (con un lado común) del mismo color . ¿Cuál es el mínimo número de colores que utilizará?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 5



RESOLUCIÓN :

* Al igual que el problema anterior :



RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

De treinta invitados, ninguno tiene menos de ***15*** años. ¿Cuál será la máxima edad que ***2*** de ellos pueden tener para que el promedio de edades (considerando las edades de todos los invitados) sea ***18*** años?.

A) 50 años ***B) 36 años***
C) 40 años ***D) 70 años***
E) 60 años

RESOLUCIÓN:

Sea x la máxima edad que pueden tener ***2*** personas

30 invitados

$\underbrace{15;15;15;\ldots;15;}_{\text{28 invitados con la mínima edad}} \quad \underbrace{x;x}_{\text{2 invitados con la máxima edad}}$

Como

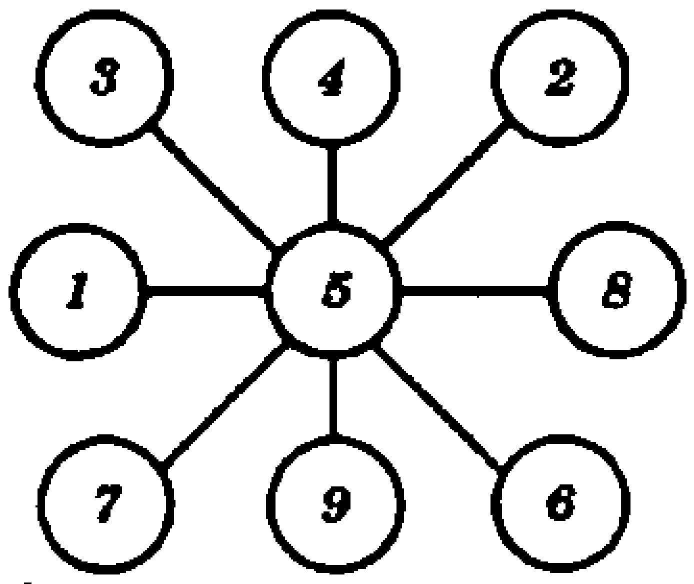
$\overline{MA}=18=\dfrac{15(28)+2x}{30}$

Resolvemos $x=60$

RPTA "E"

PROBLEMA 14 :

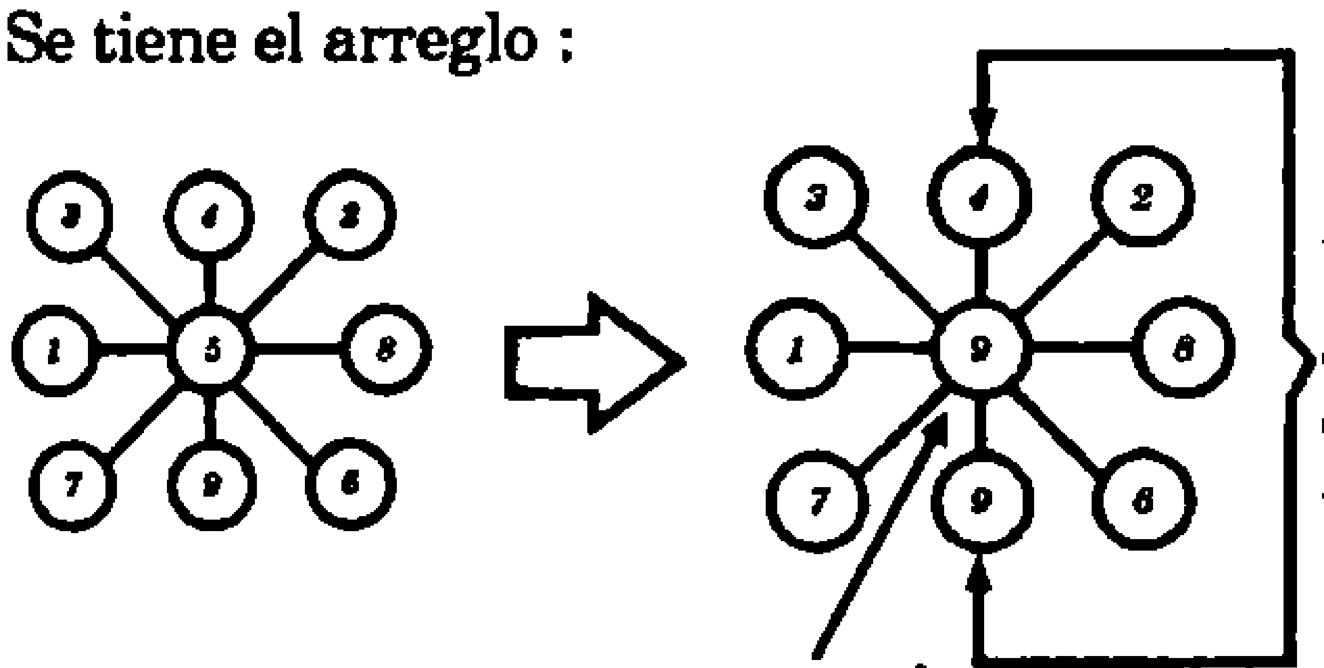
¿Cuántos de los números de la figura, por lo menos, deben ser cambiados de ubicación para que la suma de los tres números contenidos en círculos unidos por una línea recta sea la misma y, además, la máxima suma posible?



A)2
B)4
C)3
D)5
E)6

RESOLUCIÓN:

Se tiene el arreglo :



⇒ Solo se deben cambiar 2 números.

RPTA "A"

PROBLEMA 15 :

Jorge quiere comprar *6* lapiceros negros por cada *5* lapiceros rojos y *9* lapiceros negros por cada *4* lapiceros azules. Si el bazar tiene *240* lapiceros negros, *150* lapiceros azules y *170* lapiceros rojos, ¿cuál es la cantidad máxima de lapiceros negros, azules y rojos que puede comprar?

A) 533 *B) 451* *C) 738* *D) 369* *E) 574*

RESOLUCIÓN:

De los datos tenemos :

$\left\{\dfrac{Negros}{Rojos}=\dfrac{6\times 3k}{5\times 3k}\right\} \quad \left\{\dfrac{Negros}{Azules}=\dfrac{9\times 2k}{4\times 2k}\right\}$

$Negros=18k$

$\Rightarrow Azules=8k$

$Rojos=15k$

$Total=41k$

Pero: $Negros=18k\le 240 \Rightarrow k\le 13,\hat{3}$

$Azules=8k\le 150 \Rightarrow k\le 18,75$

$Rojos=15k\le 170 \Rightarrow k\le 11,3$

Escogemos $k=11$ porque es el mayor que cumple las *3* condiciones.

⇒ Total de lapiceros $=41(11)=451$

RPTA "B"

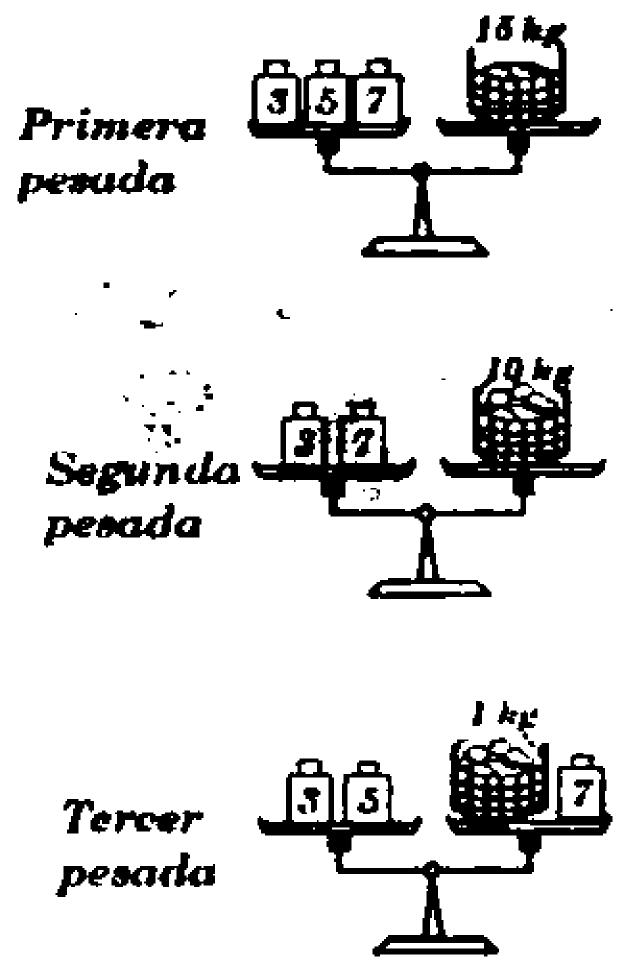
PROBLEMA 16 :

Para vender sus productos , un comerciante mayorista de tubérculos sólo dispone de una balanza con dos platillos y pesas de *3 kg*, *5 kg* y *7 kg*, una de cada una. ¿Cuántas veces como mínimo utilizará las pesas para vender exactamente *26 kg* de papas?

A) 3 *B) 4* *C) 2* *D) 8* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

Se debe obtener *26 kg* de papas , para ello utilizarán las pesas 3 kg , 5 kg y 7 kg



Se obtiene 15 kg faltan 11 kg

Se obtiene 10 kg (10+15=25 kg, entonces faltan 1kg)

Se obtiene 1 kg con lo que se completa 26 kg

Se utilizaron *3* veces las pesas.

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

Alonso pagó una deuda de *S/.350* con billetes de *S/.10* , *S/.20* y *S/.50*. ¿Cuál fue la mínima cantidad de billetes que utilizó en el pago de su deuda?

A)9 *B)8* *C)10* *D)11* *E)7*

RESOLUCIÓN:

* Por dato , la deuda es *S/. 350*

Asumimos (# billetes):
- de s/.10 ⟶ x
- de s/.20 ⟶ y
- de s/.50 ⟶ z

* Entonces:

$$10x+20y+50z=350 \Rightarrow x+2y+5z=35$$

Nos piden la menor cantidad de billete; entonces , z es máximo, además, se ha empleado por lo menos un billete de cada denominación.

* Luego : $x + 2y + 5z = 35$, con $x=1$, $y=2$, $z=6$ (máximo)

⇒ Se empleó como mínimo *9* billetes

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Cada lápiz cuesta *S/.0,30* y cada lapicero , *S/.1,50*. Si

se compra al menos uno de cada clase ¿cuál es el máximo número de lápices y lapiceros que se puede comprar con *S/.25,50?*

A) 81 *B) 85* *C) 80* *D) 82* *E) 83*

RESOLUCIÓN:

Sean : x el número de lápices

y el número de lapiceros

Entonces: $(0,3)x + (1,5)y = 25,5$

$3x + 15y = 255$

$\rightarrow x + 5y = 85$

x	y	
80	1	máxima cantidad de lápices y lapiceros
75	2	
70	3	
64	4	
⋮	⋮	
5	16	

$\Rightarrow$ Cantidad máxima es ***81***

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Un carpintero puede construir estantes para libros a un costo de ***60*** soles cada uno. Si los vende a ***"x"*** soles la unidad , se estima que puede vender ***"480 - 2x"*** estantes al año. ¿Cuál sería la mayor ganancia anual (en soles) del carpintero?

A) 16 200 *B) 28 800* *C)14 400* *D)20 000* *E)24 300*

RESOLUCIÓN:

*Para un estante : $P_c = S/.60$ $P_V = S/.\,x$

Entonces : $G = x - 60$

Si en un año vende ***(480 – 2x)*** estantes , entonces, la ganancia anual será:

$$G_{anual} = (480 - 2x)(x - 60) = 2(240 - x)(x - 60)$$

Para que la ganancia anual sea máxima entonces

$$204 - x = x - 60 \Rightarrow x = 150$$

* Luego $G_{anual}\,máxima = 2(240 - 150)(150 - 60) = 16200$

$\Rightarrow$ La mayor ganancia anual es ***S/.16 200.***

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

En un colegio que tiene menos de ***1650*** alumnos , se sabe que la cuarta parte del número total de alumnos está en nivel inicial , la quinta parte en primaria , la sexta parte en secundaria y el resto en el nivel preuniversitario. ¿Cuál es el máximo número de alumnos de este colegio , que pueden estar en nivel preuniversitario?

A) 729 *B) 693* *C) 585* *D) 657* *E) 621*

RESOLUCIÓN:

Del enunciado, tenemos

total de alumnos < 1650

Inicial	Primaria	
$15x$ (cuarta parte)	$12x$ (Quinta parte)	sea total de alumnos $= 60x$
Secundaria	**Preuniversitario**	
$10x$ (sexta parte)	$23x$ (resto)	$(\dot{4}\,;\,\dot{5}\,;\,\dot{6})$

Para que el número de alumnos del nivel preuniversitario sea máximo entonces , x es máximo.

* Además , $60x < 1650$

$$x < 27,5 \Rightarrow x = 1; 2; 3; \ldots, 26; 27$$

$$\Rightarrow x_{máx} = 27$$

* Luego : $23x = 23(27) = 621$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Se quiere almacenar chocolates en barras , en ***3*** compartimientos diferentes conteniendo ***2115; 10575*** y ***36495 g*** de chocolate respectivamente. ¿Cuál debe ser el mayor peso de la barra para realizar el almacenamiento con barras del mismo peso?

A) 49 *B) 47* *C) 45* *D) 35* *E) 55*

RESOLUCIÓN:

Sea el peso de cada barra: P

Según la condición el peso de cada barra de chocolate debe ser ***máximo*** y además en cada compartimiento deben alcanzar los chocolates en cantidades exactas ; entonces el peso de cada barra debe ser un ***divisor común*** de ***2115 ; 10575*** y ***36495***.

$\Rightarrow P = MCD\,(2115\,;\,10575\,;\,36495) = 45$

RPTA : "C"

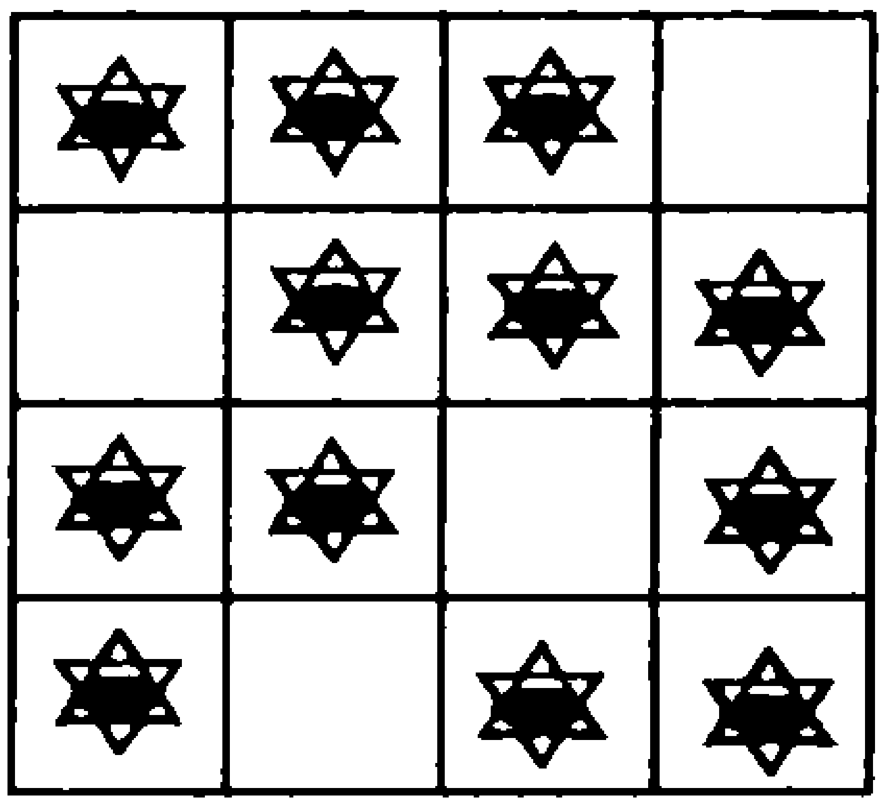
PROBLEMA 22 :

Kike tiene una retícula de 4×4 cuadrados en los cuales está tratando de colocar tantas fichas como le sea posible. No se puede colocar más de una ficha en cada cuadrado y no se pueden colocar más de tres fichas en cada fila , columna o diagonal. ¿Cuál es el máximo número de fichas que Kike puede colocar?

A) 9 *B) 10* *C) 11* *D) 12* *E) 13*

RESOLUCIÓN :

* Podrá colocar un máximo de ***12*** fichas , como muestra el siguiente diagrama:



RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

Hallar el menor valor posible de:

$$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$$

$;a \in R$

A) 10 *B) 1* *C) 0*
D) – 2 *E) 9*

RESOLUCIÓN:

Asociando adecuadamente:

$$(a-1)(a-6)\,(a-3)(a-4)+10$$

$$\Rightarrow (a^2-7a+6)(a^2+7a+12)+10$$

Haciendo: $a^2-7a=x$

$$(x+6)(x+12)+10$$

$$= x^2+18x+72+10$$

$$= x^2+18x+82=(x+9)^2+1$$

Para que la expresión sea mínima el cuadrado debe ser «0» (cero).

$\Rightarrow$ Lo mínimo será: «1»

RPTA: "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS

ENUNCIADO :

Un kilogramo de limones tiene desde *12* a *20* limones y cada kilo cuesta desde *S/.2* hasta *S/.5*.

01 Si deseo *60* limones, ¿cuántos *kg* como mínimo puedo comprar?

A) 3kg *B) 4* *C) 5*
D) 2 *E) 2,5*

02 Si deseo *120* limones, ¿cuánto *kg* como máximo puedo comprar?

A) 8kg *B) 6* *C) 10*
D) 12 *E) 15*

03 Si tengo *S/.20*, ¿cuánto *kg* de limones como máximo podré comprar?

A) 4 *B) 5* *C) 8*
D) 10 *E) 12*

04 Si tengo *S/.50*, ¿cuánto kg de limones como mínimo podré comprar?

A) 10 *B) 12* *C) 25*
D) 20 *E) 8*

05 Si deseo *120* limones, ¿cuánto dinero como mínimo puedo gastar?

A) S/.15 *B) 20* *C) 12*
D) 10 *E) 18*

06 Si tengo *S/.30*, ¿cuánto limones como máximo puedo comprar?

A) 300 limones *B) 120* *C) 72*
D) 240 *E) 18*

ENUNCIADO :

En cada caso, determinar el valor de "*x*" $(x \in R)$

07 $M=\dfrac{(1+x)^2}{5}$ si "*M*" es mínimo .

A) –1 *B) 1* *C) 2*
D) 4 *E) 10*

08 $M=\dfrac{1}{(x+3)^2+1}$ si "*N*" es máxima.

A) 2 *B) –3* *C) 4*
D) 6

09 $P=x^2+4x+3$, si "*P*" es mínima.

A) 1 *B) –1* *C) –2*
D) 3 *E) 4*

10 $Q=-\,x^2+6x+5$, si "*Q*" es máximo .

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 6 *E) –3*

11 Determine el mínimo valor de $x^2+3x+15;\ x \in R$

A) 27/4 *B) 51/4* *C) 17/4*
D) 31/4 *E) 41/4*

12 Si : $x;y \in R$ tal que $x+y=1$ entonces el valor máximo de *xy* es

A) 3/4 *B) 1/4* *C) 1/8*
D) 31/4 *E) 41/42*

13 Si *P* representa el máximo valor de $4x+3-x^2$ y *p* el mínimo valor de $x^2-12x+46;\ x \in R$.

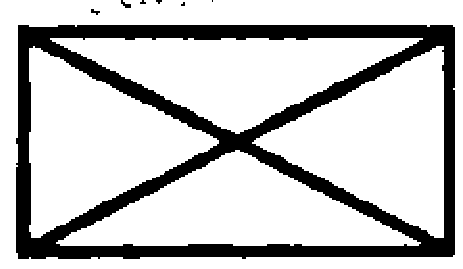
Calcule $P+p$

A) 20 *D) 12* *C) 17*
E) 24 *B) 16*

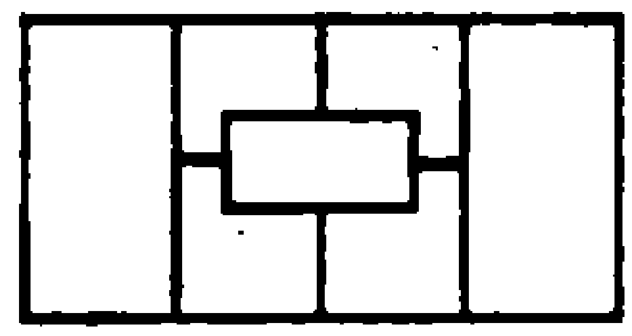
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

ENUNCIADO :

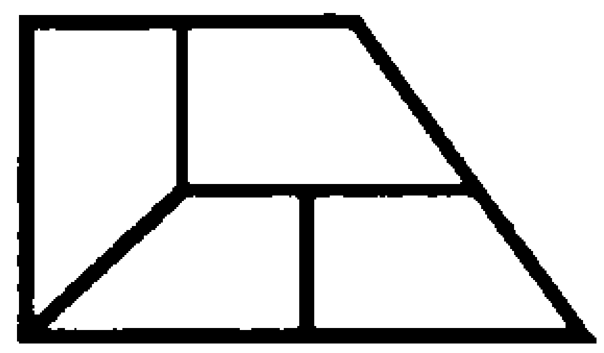
Se desea pintar figuras de modo que no existe dos zonas contiguas (con un lado común) del mismo color. ¿Cuál es el mínimo número de colores que se deberá utilizar?

01 

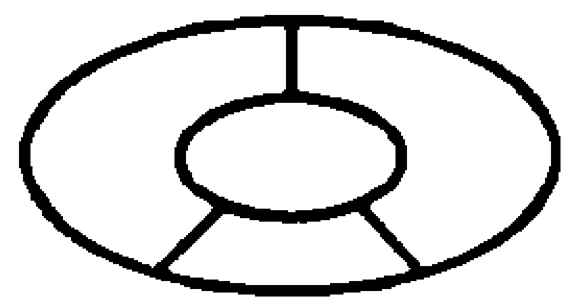
A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

02 

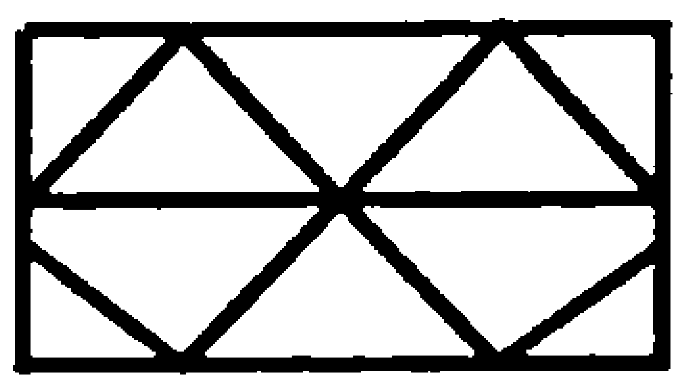
A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

03 

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

04 

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

05 

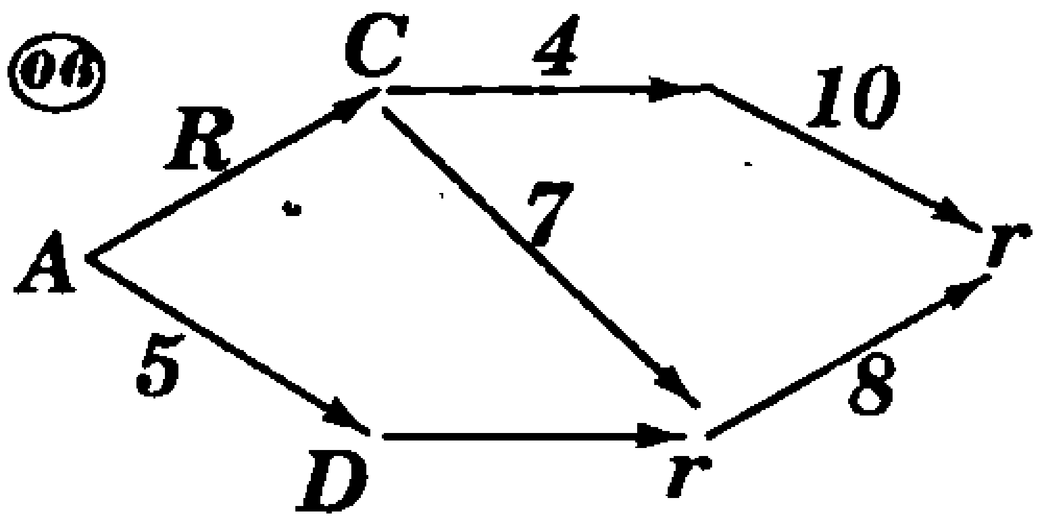
A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

ENUNCIADO :

Las figuras muestran redes de caminos mediante las cuales se va de la ciudad "*A*" a la ciudad "*B*", pasando a lo más una vez por las otras ciudades. Si los números representan las horas que demora ir de una ciudad a otra, determinar el mínimo número de horas que

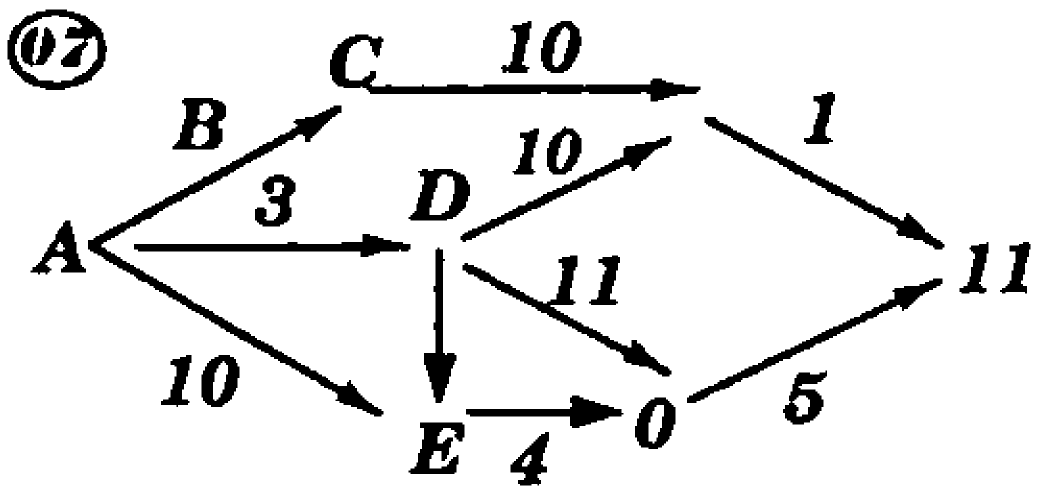
tomará ir de "A" a "B". (El sentido de la flecha significa que si va de *C* a *F* (*C* ⇒ *F*), se puede ir de *C* a *F* pero no de *F* a *C*)

06

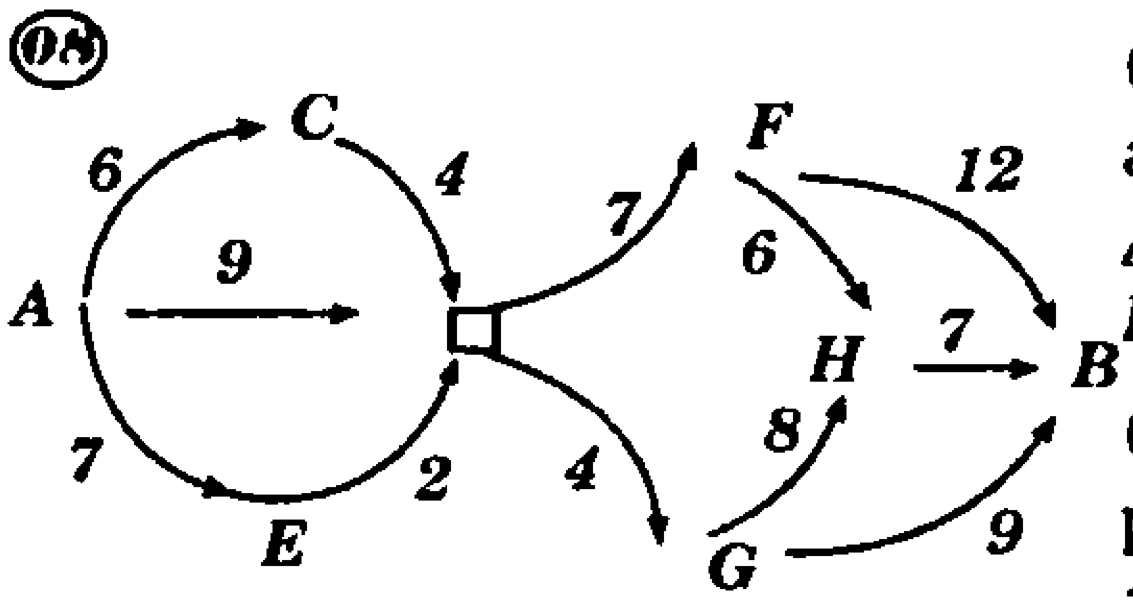


A) 18 *B) 19* *C) 20*
D) 21 *E) 22*

07



08



A) 19 *B) 20* *C) 21*
D) 22 *E) 23*

ENUNCIADO :

Si : $a+b=2$ y $a \geq 0; b \geq 0$

09 Hallar el menor valor de "$a-b$"

A)–2 *B)–1* *C) 0*
D)–4 *E) 2*

10 Hallar el mayor valor de

$$``a^2+b^2"$$

A) 2 *B) 4* *C)* $2\sqrt{2}$
D) 3 *E) 5*

11 Hallar el menor valor de "a/b".

A) 0 *B) 1* *C) 2*
D) 1/3 *E) 1/4*

12 Hallar el mayor valor de "ab".

A) 2 *B) 3* *C) 1*
D) 1,5 *E) 0,90*

ENUNCIADO :

En una caja hay *6* bolas blancas , *8* bolas verdes , *5* bolas azules y *4* bolas celestes , cuál es el mínimo número de bolas que se deben sacar para tener la seguridad de haber extraido :

13 Una bola de cada color.

A) 16 *B) 4* *C) 18*
D) 20 *E) 19*

14 Dos bolas de un mismo color.

A) 3 *B) 20* *C) 5*
D) 9 *E) 7*

15 Al menos una bola verde.

A)12 *B)14* *C)15*
D)16 *E)17*

16 Más bolas blancas que celestes.

A)9 *B)15* *C)17*
D)21 *E)22*

17 *6* bolas verdes y una bola azul.

A)22 *B)21* *C)20*
D)19 *E)18*

18 Una señora preparó deliciosos panes : pan de yema , pan de aceituna , pan de chirimoya . Por lo que decidió enviarlos a su hija , para ello los colocó en cajas distintas . Por error los nombres han sido puestos en cajas que no corresponden al tipo de pan que contienen . ¿Cuántas cajas se deben abrir para saber con seguridad el tipo de pan que contiene cada una?

A)3 *B)2* *C)1* *D)0*
E)Falta información

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Si "*k*", "*h*", "*c*" y "*r*" son números positivos de una cifra, todos diferentes, ¿cuál es el menor valor de *S*?

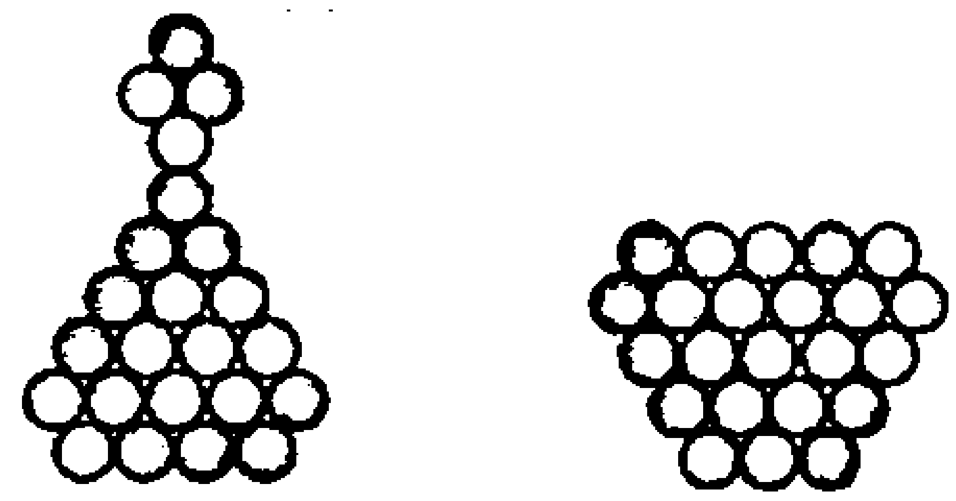
$$S = [(k+h)-c] \times r$$

A) –27 *B) –32* *C) –64*
D) –48 *E) –56*

02 Se va a repartir una herencia de *S/. 600* entre un abuelo, un padre, un tío, una madre, un nieto, dos hijos, un sobrino, una hija, un hermano y una hermana. ¿Cuál es la máxima cantidad de dinero que podría recibir cada persona? .

A) S/. 100 *B) S/. 50* *C) S/. 200*
D) S/. 150 *E) S/. 120*

03 Las figuras *(I)* y *(II)* están formadas por fichas circulares idénticas. ¿Por lo menos, cuántas fichas de la figura *(I)* deben ser trasladadas de posición para ser idéntica a la figura *(II)*?



(I) *(II)*

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

04 En una caja se observan fichas triangulares y cuadradas, en total se cuentan *40* lados. Calcule la mayor cantidad de triángulos que puede contener la caja.

A) 12 *B) 10* *C) 11* *D) 8* *E) 9*

05 Una caja de naranjas contiene entre *20* y *25* unidades. Si el precio de compra varía entre *10* y *15* soles por caja, y el precio de venta varía entre *20* y *25* soles por caja, ¿cuál será la máxima ganancia a obtener por la venta de *100* naranjas?

A) S/. 50 *B) S/. 60* *C) S/. 75*
D) S/. 80 *E) S/. 70*

06 Un kilogramo de naranjas contiene entre *8* y *12* naranjas. El precio de las más grandes varía entre *2* y *3,5* soles cada kilo y el de las más pequeñas entre *1* y *1,5* soles el kilo. Si Isabel compra *4* docenas pagando lo máximo posible y Silvia la misma cantidad con el mínimo posible de dinero, ¿cuál es la diferencia entre lo pagado por ambas?

A) S/. 15 *B) S/. 17* *C) S/. 8*
D) S/. 12 *E) S/. 6*

07 Un automóvil consume "*x*" soles de gasolina en su primer kilómetro de recorrido, e "*y*" soles

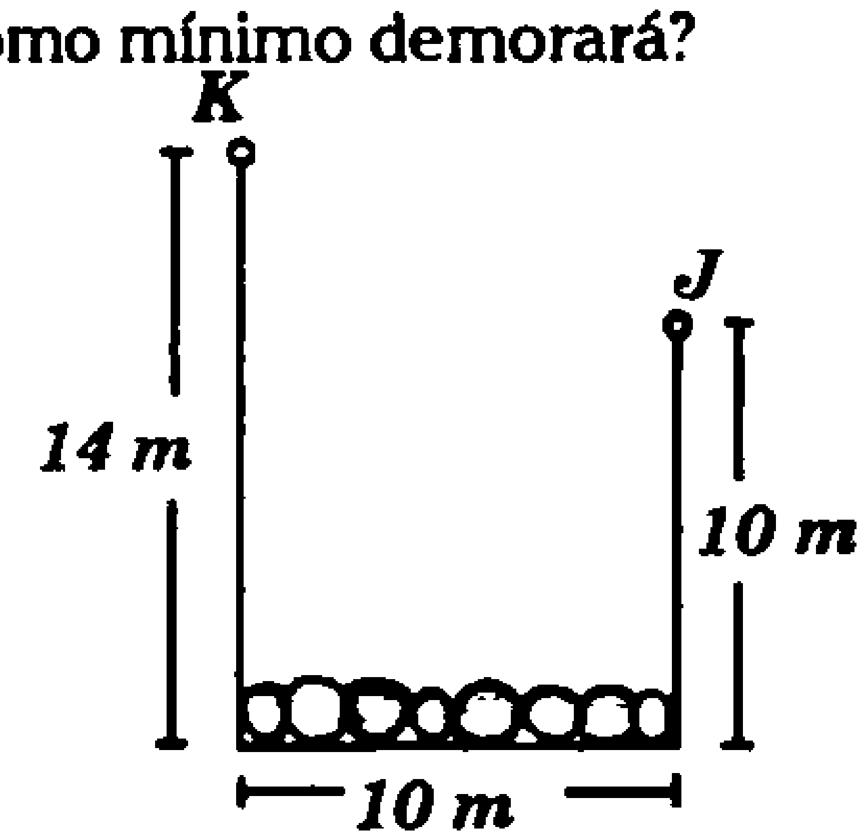
por cada kilómetro adicional. ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer con "z" soles de gasolina? ($z > x$)

A) $\frac{z}{y}+x$ B) $\frac{z}{y}-x$ C) $\frac{y+z-x}{y}$
D) $\frac{1+z-x}{y}$ E) $\frac{y-z-x}{y}$

08 Una librería tiene ***9*** tiendas distribuidas en todo el país. Si en total cuenta con ***100*** empleados y ninguna tienda tiene menos de ***7*** ni más de ***13*** de ellos, ¿cuál es el menor número de empleados que puede haber en ***3*** tiendas?

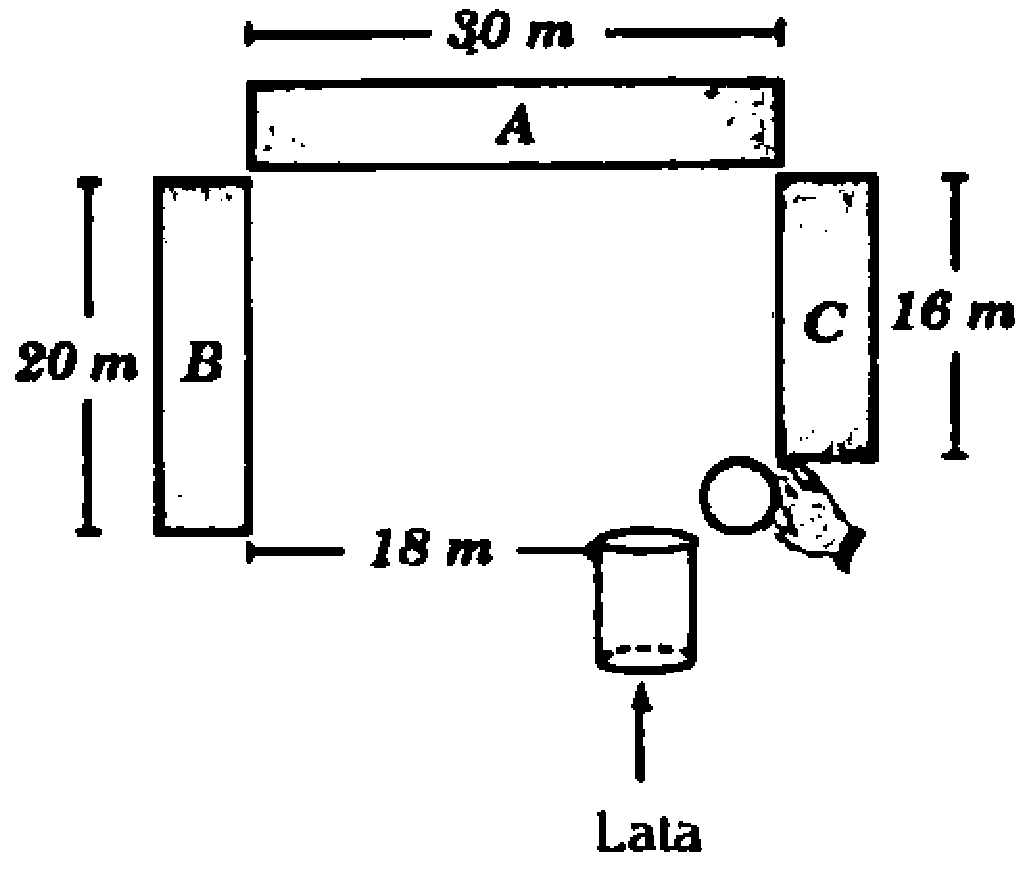
A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 20

09 Una persona debe partir del punto ***K***, coger una piedra e ir inmediatamente a ***J***, con rapidez constante de ***2 m/s***. ¿Cuánto tiempo como mínimo demorará?



A) 10 s B) 11s C) 12s
D) 13 s E) 14 s

10 Un juego consiste en lanzar una pelota desde el lugar indicado y hacer que ésta golpee la pared ***A*** y luego la pared ***B*** hasta llegar a tumbar la lata. ¿Qué tiempo empleara como mínimo para lograrlo, si la pelota debe salir con rapidez constante de ***3 m/s***?



A) 20 s B) 15 s C) 40 s
D) 31 s E) 22 s

11 Lenin desea comprar un lote de terreno de forma rectangular. Se sabe que el doble del perímetro del terreno excede en ***168 m*** al ancho del terreno. Calcular el área máxima del terreno que puede comprar Lenin.

A) 588 m² B) 300 m² C) 540 m²
D) 630 m² E) 672 m²

12 Se tiene ***6*** candados: ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** y ***F***, y ***3*** llaves: ***X***, ***Y***, ***Z***. Si se sabe que cada llave sólo abre un candado, ¿cuál es el mínimo número de intentos en que puede determinarse con seguridad qué llave corresponde a qué candado?

A) 11 B) 10 C) 12 D) 13 E) 9

13 Lenin dispone de pesas de ***1***; ***2***; ***4***; ***8***; ***16***, ... etc, ***kg*** cada una. Si él desea equilibrar un peso de ***341 kg*** utilizando el mínimo número de pesas posibles, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Lenin debe utilizar ***4*** pesas en total.

II) La pesa de ***4 kg*** es parte de la solución.

III) La pesa de ***8 kg*** no es parte de la solución.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II
D) II y III E) Todas

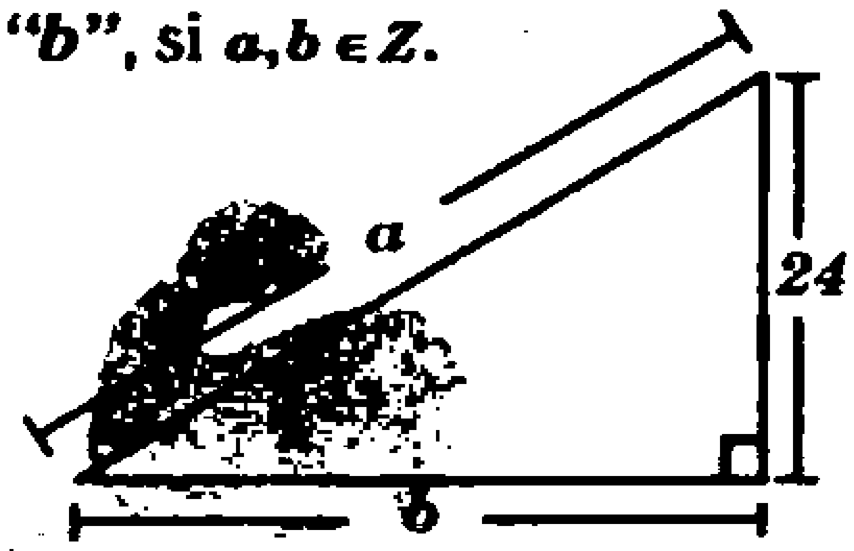
14 Un vendedor de abarrotes tiene una balanza de dos platillos y tres pesas de ***5***; ***4*** y ***3*** ***kg***, respectivamente. Asimismo posee bolsas con capacidad para ***5***; ***4*** y ***3*** ***kg***. ¿Cuántas pesadas como mínimo tendra que realizar para vender ***33 kg*** de arroz?

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2 E) 5

15 Se tiene una balanza de dos platillos y pesas de ***1 g*** ; ***3 g***; 3^2 ***g***; 3^3 ***g***; 3^4 ***g***; 3^5 ***g***; 3^6 ***g***; 3^7 ***g***, una de cada tipo. ¿Cuántas de ellas se deben usar como mínimo para pesar un objeto de ***1511 g***, pudiendo colocar las pesas en ambos platillos de la balanza?

A) 6 B) 9 C) 5 D) 7 E) 8

16 En el triángulo rectángulo mostrado, calcule el máximo valor de "***b***", si $a, b \in Z$.



A) 141 B) 143 C) 145
D) 147 E) 149

17 En el sistema de coordenadas rectangulares, consideramos los puntos ***P(−1; −2)***, ***Q(4; 2)*** y ***R(1; m)*** de manera que ***PR + RQ*** sea mínimo. El valor de "***m***" es:

A) $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

18 Lenin lanzó un dado varias veces y en todas ellas obtuvo puntaje menor que ***5*** y mayor que ***1***, haciendo un total de ***49*** puntos. ¿Cuántas veces como máximo habra lanzado el dado en total?

A) 21 B) 24 C) 22 D) 23 E) 25

19 ¿Cuál es el menor número de billetes de ***S/. 10*** que deben darse para pagar una deuda de ***S/. 92***, si el vuelto debe darse en monedas de ***S/. 2*** y ***S/. 5***, y necesariamente el vuelto debe tener por lo menos una moneda de ***S/. 5***?

A) 12 B) 9 C) 10 D) 11 E) 13

20 Carlos tiene menos de ***S/. 220*** entre billetes de ***S/. 10*** y ***S/. 20***. Si el número de billetes de ***S/. 10*** no es mayor que el número de billetes de ***S/. 20***, ¿cuántos billetes tendría de ***S/. 20***, si tuviera el máximo número de billetes de ***S/. 10***?

A) 9 B) 8 C) 11 D) 7 E) 10

TAREA DOMICILIARIA

01 ¿ Cuál es el menor número de paréntesis que se debe colocar, sin cambiar de posición los números ni cambiar los signos, para que la igualdad:

$30 - 10 - 15 + 20 - 25 + 5 = 45$
sea correcta?

A) 4 *B) 3* *C) 1* *D) 2* *E) 5*

02 En *3* kilos de naranjas vienen de *10* a *15* naranjas. Entonces el máximo peso de *30* naranjas sería:

A) 6 kilos *B) 9* *C) 12*
D) 15 *E) 10*

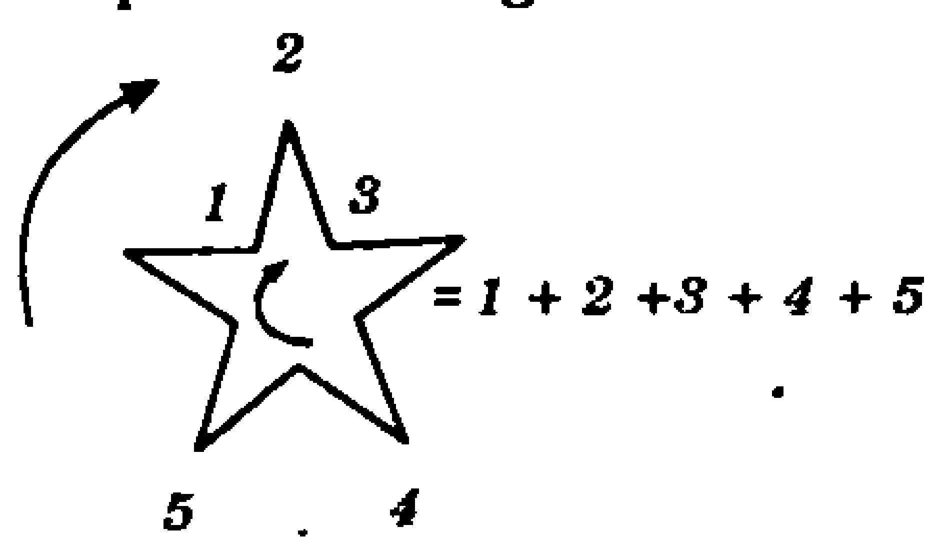
03 Se tiene *5* candados: *A, B, C, D* y *E*, y *5* llaves: *V, W, X, Y, Z*. Si se sabe que cada llave sólo abre un candado, ¿cuál es el mínimo número de intentos en que puede determinarse con seguridad qué llave corresponde a qué candado?

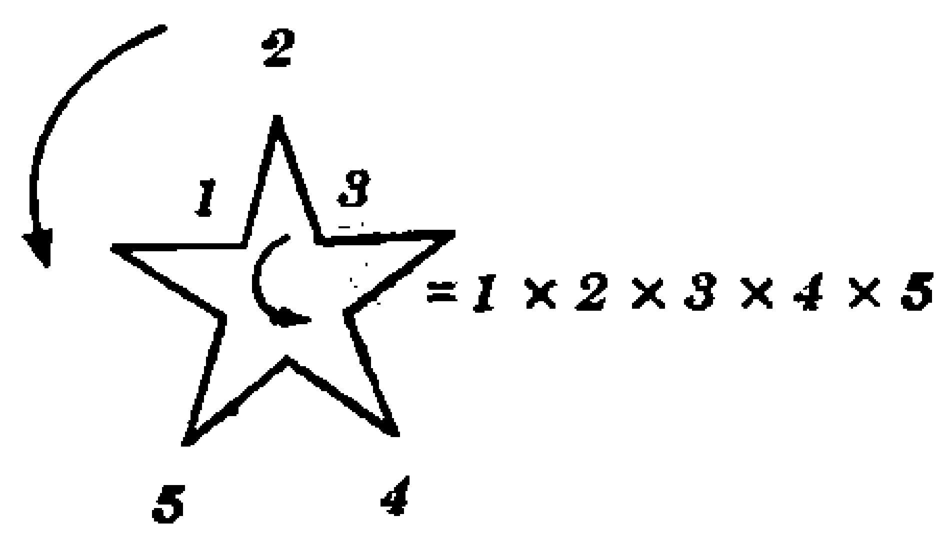
A) 15 *B) 14* *C) 13* *D) 12* *E) 10*

04 Si *A* tiene *3* cifras y *B* tiene *4* cifras, ¿cuántas cifras tiene como mínimo $A^2 \times B^3$?

A) 12 cifras *B) 14* *C) 13*
D) 7 *E) 8*

05 La estrella dada al girar en sentido horario y antihorario se comporta de la siguiente manera:





El menor número de giros que dará la estrella para que sus valores de giro horario y antihorario sean iguales sería:

A) 8 giros *B) 16* *C) 9*
D) 14 *E) 12*

06 Se dispone de pesas de *1*; *2*; *4*; *8*; *16*; *32*; etc *kg* cada una. ¿Cuál será el mínimo número de pesas necesarias para equilibrar un peso de *393 kg*?

A) 12 *B) 5* *C) 13* *D) 8* *E) 4*

07 LENIN pagó una deuda de *28* soles con monedas de *1*; *2* y *5* soles. ¿Cuál fue la máxima cantidad de monedas que utilizó en el pago de su deuda?

A) 20 *B) 18* *C) 22* *D) 23* *E) 24*

08 Si hubiera que reunir *7,50* soles en monedas de un sol, de *50* y *10* céntimos, ¿cuál es el menor número de monedas que se reuniría si debiera haber por lo menos una moneda de cada valor?

A) 13 *B) 10* *C) 9* *D) 8* *E) 12*

09 En las siguientes expresiones, "*n*" es un número entero mayor que *1*. ¿Cuál es el menor de todos?

A) $\frac{2}{n-1}$ B) $\frac{1}{n}$ C) $\frac{1}{n+1}$ D) $\frac{2}{n}$ E) $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

10 ¿Cuál es el menor número de *4* dígitos que dividido sucesivamente entre *3*; *7* y *13* deja siempre como residuo *5*?

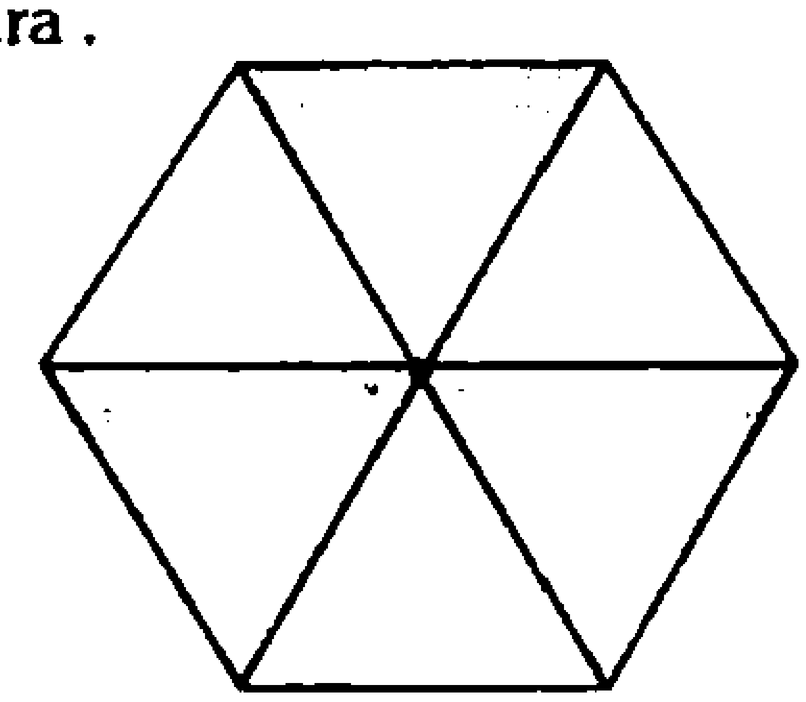
A) 1 097 *B) 1 087* *C) 1 122*
D) 1 192 *E) 1 092*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) B	2) C	3) A	4) C	5) B	6) B	7) C	8) D	9) A	10) B
11) A	12) C	13) D	14) C	15) D	16) E	17) B	18) C		

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)E	3)C	4)A	5)C	6)B	7)C	8)B	9)D	10)A
11)A	12)C	13)D	14)A	15)C	16)B	17)D	18)B	19)D	20)[illegible]
1)C	2)B	3)E	4)B	5)C	6)E	7)D	8)A	9)E	10)C

RETO 1:

Lila traza un hexágono dividido en seis triángulos , tres triángulos los colorea de gris como muestra la figura .



Lila juega escribiendo números del *1* al *6* dentro de los triángulos, teniendo en cuenta las siguientes condiciones

* No puede repetir números.
* No puede escribir el *6* en los triángulos grises.

Si dos números consecutivos no pueden estar juntos, entonces ¿cuál es la mínima suma de dos triángulos opuestos?

A) 3 *B)6* *C) 4*
D)5 *E) 7*

RETO 2:

Había una vez un hombre que no tenía reloj, ni de pulsera, ni de bolsillo, pero tenía un reloj de pared muy exacto que sólo se paraba cuando se olvidaba de darle cuerda. Cuando esto ocurría, iba a casa de un amigo suyo, pasaba la tarde con él y al volver a casa ponía el reloj en hora. ¿Cómo es posible esto sin saber de antemano el tiempo que tardaba en el camino?

RETO 3:

En un lago de forma exactamente circular, y muy profundo desde la orilla, nada una jovencita. Cuando se encuentra justo en el centro observa la cercanía de un hombre, según las apariencias muy fuerte y muy inteligente, pero también muy feo y con evidente mala intención, que afortunadamente no sabe nadar y puede correr por la orillaa cuatro veces más rápido que lo que ella puede nadar, pero que no corre tan rápido como ella. ¿Qué debe hacer la joven para escapar?

RETO 4:

Roberto Penoura y Sinesio Cutre son dos vecinos que no se llevan muy bien. Tienen dos fincas pegadas y, en su afán de molestar al otro, Roberto compró 8 postes y doscientos cuarenta metros de alambre de espinos. Colocó los postes, a distancias iguales, y el alambre, dando tres vueltas, alrededor de su finca perfectamente cuadrada. (No dejó ninguna puerta).

Sinesio, más avispado, esperó a que Roberto terminase su obra. Compró nueve postes y trescientos metros de alambre. Colocó los postes a la misma distancia que los colocados por Roberto y rodeó, con tres vueltas de alambre, su finca, también cuadrada. (Se olvidó, como no, de dejar una puerta).

¿Cuáles son las dimensiones del terreno de Sinesio?

CERTEZAS
CAPÍTULO 012

OBJETIVOS :

* Identificar e interpretar el concepto de certeza lograr diferenciar lo certero de lo probable, manifestando flexibilidad y tolerancia.

CERTEZAS

¿En qué se funda la certeza? ¿Cuándo podemos decir que estamos seguros de algo? Ante estas interrogantes, lo que debe quedar claro es que si no estamos seguros de algo , no podemos dar un paso en el conocimiento científico, ni podemos tomar decisiones relacionadas con los negocios o la vida misma.

Desde el punto de vista probabilístico, debemos considerar la certeza como la condición de evento seguro, es decir, de un evento de probabilidad igual a uno. En condiciones ideales, podemos construir modelos de certeza en esquemas hipotéticos representados en un experimento aleatorio con objetos perfectos y circunstancias infalibles.

Por ejemplo, el lanzamiento de un dado se postula como un experimento sobre un objeto exactamente cúbico que cae sobre una superficie perfectamente plana y horizontal que puede extenderse indefinidamente. Lo real es que el dado no es una construcción simétrica, ni la superficie en la que cae es absolutamente plana. Además, debemos considerar la rugosidad de la superficie sobre la cual se lanza el dado.

Una superficie idealmente lisa no permitiría la rodadura del dado al hacer contacto con dicha superficie.

Según la Real Academia Española, la certeza es una forma de adhesión de la mente a algo conocible, sin temor a errar. En el curso de razonamiento matemático, este término designa el proceso por el cual obtenemos el resultado de un problema con anticipación.

PROBLEMAS SOBRE CERTEZAS

Para estos problemas debemos buscar una cierta cantidad de elementos (la menor posible) que nos asegure conseguir lo que buscamos.

Se reconoce este tipo de problemas por tres palabras básicas que se encuentran presentes en la formulación de la pregunta ***«extraer»***, ***«mínimo»*** y ***«seguro»***. Puede usar exactamente estas palabras o sus equivalentes: seleccionar, escoger, sacar, la seguridad, certeza, ...

El objetivo de estos problemas es la de escoger entre varias posibilidades la más óptima, es decir, la que con el mínimo esfuerzo estemos completamente seguro que va a ocurrir la condición planteada, Veamos algunos ejemplos.

SITUACIONES NEGATIVAS (CASOS DESFAVORABLES O EN CONTRA)

Son las situaciones que son contrarias a lo que buscamos, de acuerdo a la pregunta.

Para dar solución a los problemas de certezas, generalmente primero se analiza las situaciones negativas y luego se le añaden los elementos necesarios hasta dar solución al problema.

EJEMPLO 1 :

Lenin estando con los ojos vendados ingresa su mano en un deposito donde hay solamente ***8*** bolas negras y ***6*** bolas blancas. ¿Cuántas bolas, debe ,sacar como mínimo para tener la certeza de haber extraído una bola negra?

RESOLUCIÓN :

* Si *LENIN* saca una bola, ¿tendrá la certeza de haber extraído una bola negra?

NO . Porque puede ser blanca.

* Si LENIN saca dos bolas, ¿ tendrá la certeza de haber extraído una bola negra ?

NO . Porque las dos pueden ser blancas.

* Si LENIN saca tres bolas, ¿tendrá la certeza de haber extraído una bola negra?

NO . Porque las tres pueden ser blancas.

* Si LENIN saca cuatro bolas, ¿ tendrá la certeza de haber extraído una bola negra?

NO . Porque las cuatro pueden ser blancas.

* Si LENIN saca cinco bolas, ¿tendrá la certeza de haber extraído una bola negra!

***NO*.** Porque las cinco pueden ser blancas.

* Si LENIN saca seis bolas, ¿ tendrá la certeza de haber extraído una bola negra!

***NO*.** Porque las seis pueden ser blancas.

Si LENIN saca siete bolas, ¿tendrá la certeza de haber extraído una bola negra?

***SI*.** Porque ya habra extraído todas las bolas blancas y la otra bola será con certeza de color negra.

Entonces; ¿cuál sería la respuesta a la pregunta formulada por LENIN?

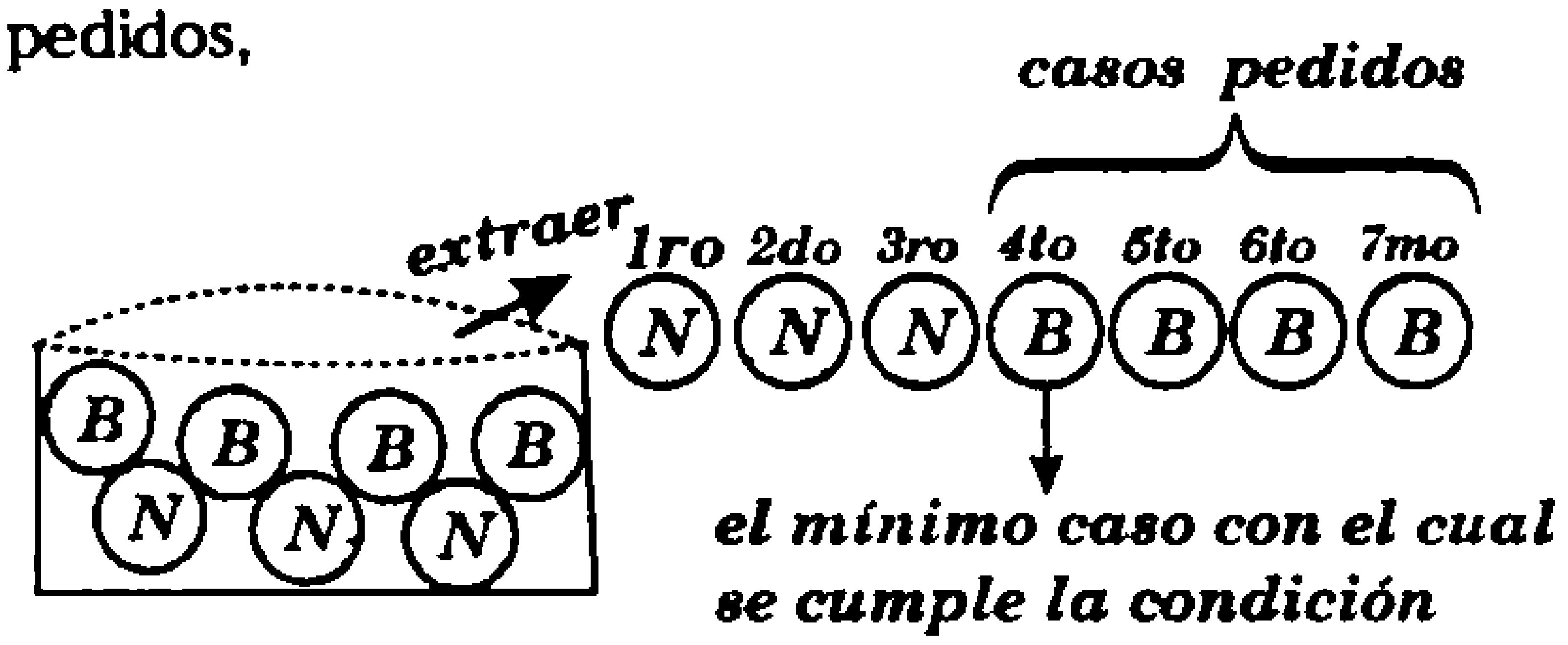
RPTA : ¡SIETE BOLAS!

EJEMPLO 2 :

Dentro de una caja cerrada tenemos ***3*** bolitas negras y ***4*** bolitas blancas, ¿cuántas bolitas como mínimo se deberán extraer para tener la seguridad de haber elegido una bolita blanca?

RESOLUCIÓN :

Para estar completamente seguro de que ocurra tal condición (extraer una bolita blanca), vayámonos al caso más extremo(situación negativa), es decir, que ocurran primero los otros casos que no sean los pedidos,



⇒ El mínimo número de extracciones es ***4***.

OBSERVACIONES :

* Para obtener la condición planteada, ***asumiremos que tenemos una mala suerte*** que lo que pedimos no ocurre si no es hasta el final, es decir, analizaremos el problema llevándolo al caso más extremo.

Cuando existan varios tipos de elementos y la condición pedida sólo solicite un solo tipo entonces primero ocurrirán todos los otros tipos y al final ocurrira el tipo pedido.

* *Cuando existan varios tipos de elementos y la. condición pedida solicite más de una de estos **tipos de elementos, entonces primero ocurren** todos los caso no pedidos y de los casos pedidos primero ocurren aquellos casos que tienen mayor cantidad de elementos para que recién al final ocurra el caso que hace cumplir* la *condición pedida.*

EJEMPLO 3 :

En una urna hay ***2*** bolas azules y ***3*** bolas negras ¿Cuántas bolas debo extraer como mínimo, para poder decir con certeza que he sacado una bola de color azul?

RESOLUCIÓN:

Para extraer una bola y decir con seguridad, que es de color azul, tendría que haber sólo bolas de color azul en la urna, por eso primero habrá que agotar o extraer todas las bolas negras y luego en la próxima extracción saldrá con seguridad una de color azul.

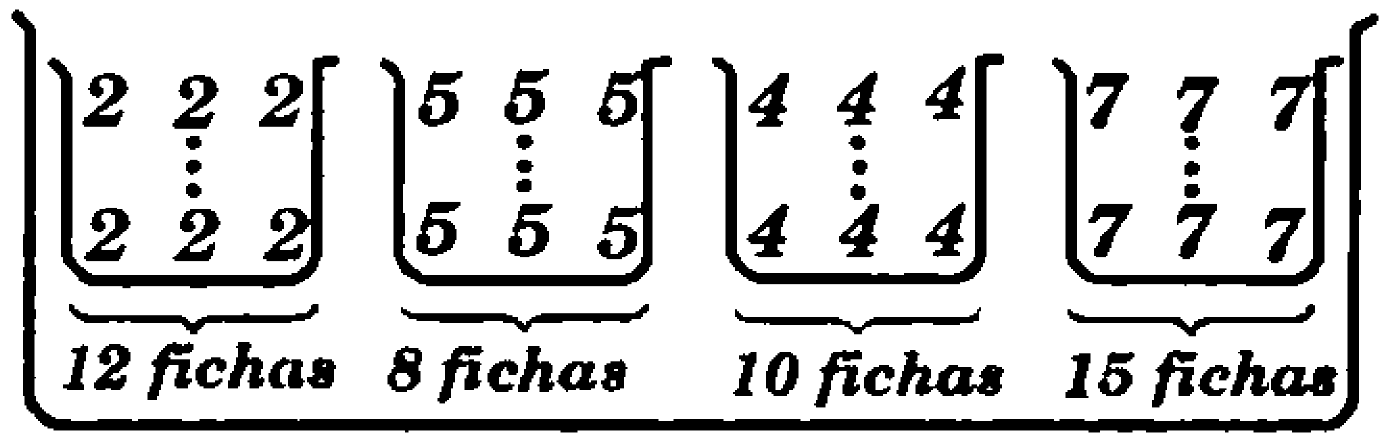
Número de extracciones: $\underbrace{3}_{NEGRA} + \underbrace{1}_{AZUL}$

EJEMPLO 4 :

En una urna hay ***45*** fichas, de las cuales ***12*** están enumeradas con la cifra ***2,8***; con la cifra ***5***; ***10***, con la cifra ***4***, y el resto con la cifra ***7***. ¿Cuántas fichas se debe extraer al azar, como mínimo, para tener la certeza de obtener, entre ellas. ***3*** fichas con numeración diferente y que sumen exactamente ***11***?

RESOLUCIÓN:

De los datos se tiene:



Objetivo: obtener las fichas ②, ⑤ y ④, una de cada tipo.

Número de extracciones:

⇒ Se debe extraer ***38*** fichas.

EJEMPLO 5 :

En una caja hay ***3*** fichas blancas y ***3*** fichas rojas. ¿Cuántas fichas debo sacar de la caja como mínimo para decir con certeza, que he sacado ***2*** fichas de diferente color?

RESOLUCIÓN:

Primero tendré que agotar un color y en la próxima extracción necesariamente saldrá el otro color.

Mínimo número de extracciones: $\underbrace{3}_{\text{Un color (rojo o blanco)}} + \underbrace{1}_{\text{Del otro color}} = 4$

NOTA :

En éste tipo de Problemas por lo común nos ubicaremos en el «peor de los casos» (situación más crítica o no deseable) y así tendremos con seguridad lo pedido.

PROBLEMAS RESUELTOS

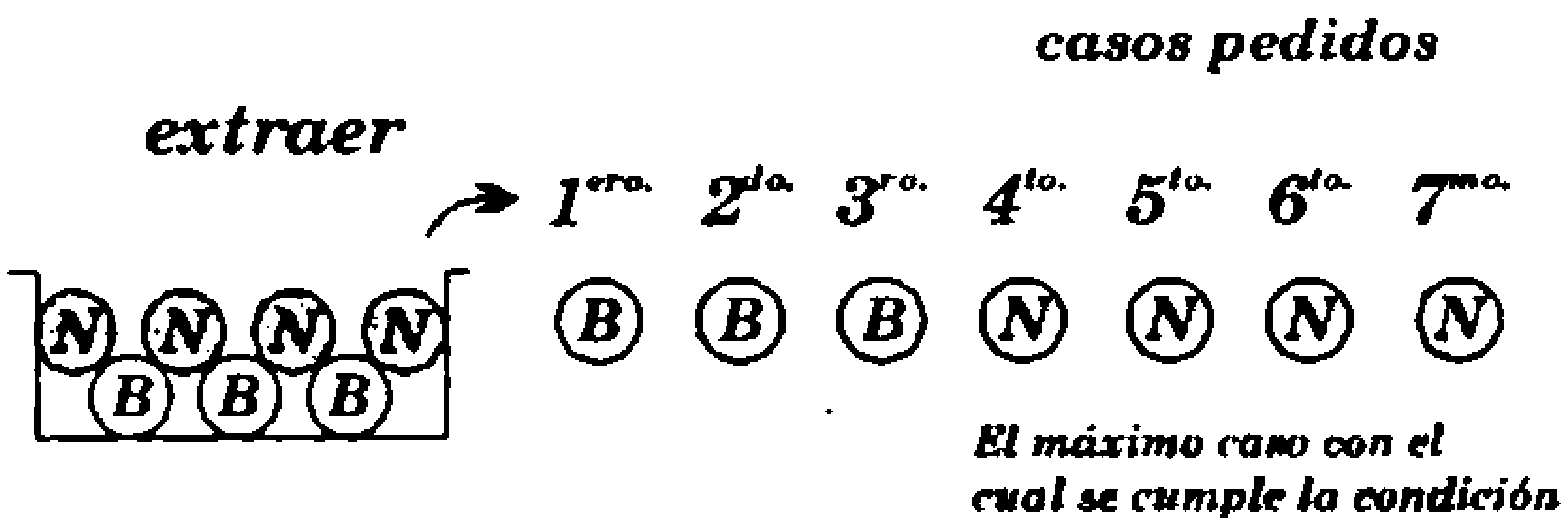
PROBLEMA 1 :

Dentro de una caja cerrada tenemos ***3*** bolitas blancas y ***4*** bolitas negras . ¿Cuántas bolitas como mínimo , se deben extraer para tener la seguridad de haber elegido una bolita negra?

A)1 ***B)2*** ***C)3*** ***D)4*** ***E)5***

RESOLUCIÓN :

* Para estar completamente seguro de que ocurra tal evento o resultado (extraer bolita negra), vayamos al caso más extremo , es decir, que ocurran primero los otros casos que no sean los pedidos .



⇒ mínimo numero de extracciones

RPTA : "D"

OBSERVACIÓN :

* Para obtener el resultado planteado , asumiremos que tenemos tan mala suerte que lo que pedimos no ocurre sino , hasta el final , es decir, analizaremos el problema llevándolo al ***"caso más extremo"*** (descartar el factor suerte) .

* Cuando existan varios tipos de elementos y el resultado pedido solicite un solo tipo , entonces primero ocurrirán todos los otros tipos y luego al final ocurrirá el tipo pedido .

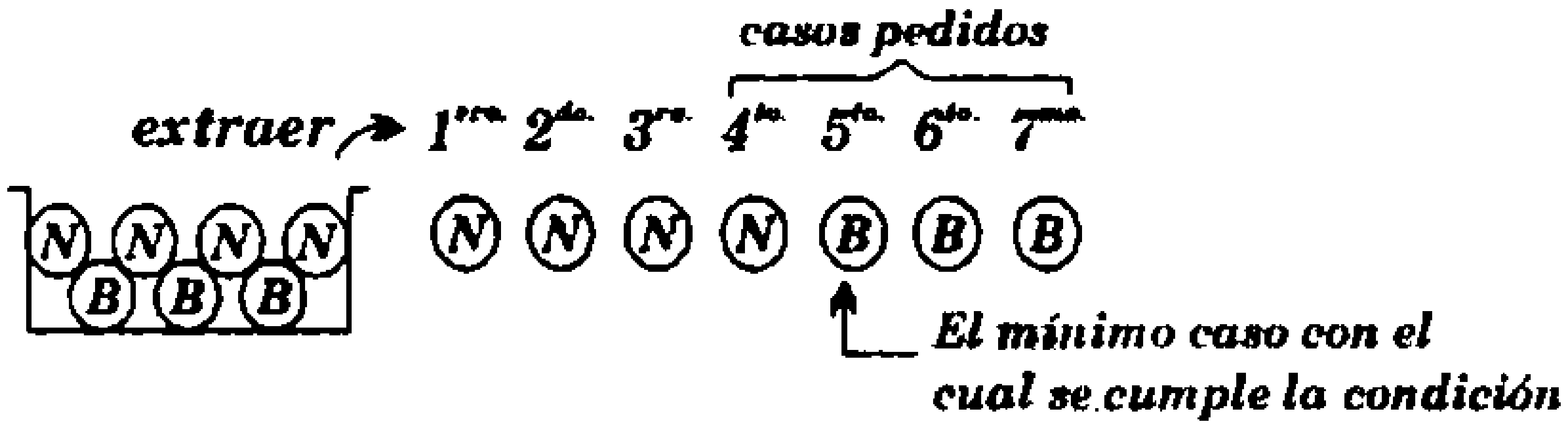
PROBLEMA 2 :

Del problema anterior ¿Cuántas bolitas como mínimo se deberán extraer para tener la certeza de haber elegido al menos uno de cada color?

A)3 ***B)4*** ***C)5*** ***D)7*** ***E) 9***

RESOLUCIÓN :

* Para estar completamente seguro de que ocurrirá el caso pedido , analizamos el caso más extremo , es decir extraemos primero las bolitas que se presentan en mayor cantidad (las bolitas negras) para que recién al final ocurra el resultado pedido extrayendo una bolita blanca .



⇒ ***Número mínimo de extracciones: 5***

RPTA : "C"

OBSERVACIÓN :

Cuando existan varios tipos de elementos y el resultado pedido contenga a más de uno de estos tipos de elementos , entonces primero ocurre todos los casos no pedidos , y de los casos pedidos primero ocurren aquellos casos que tienen mayor cantidad de elementos para recién al final ocurra el resultado pedido .

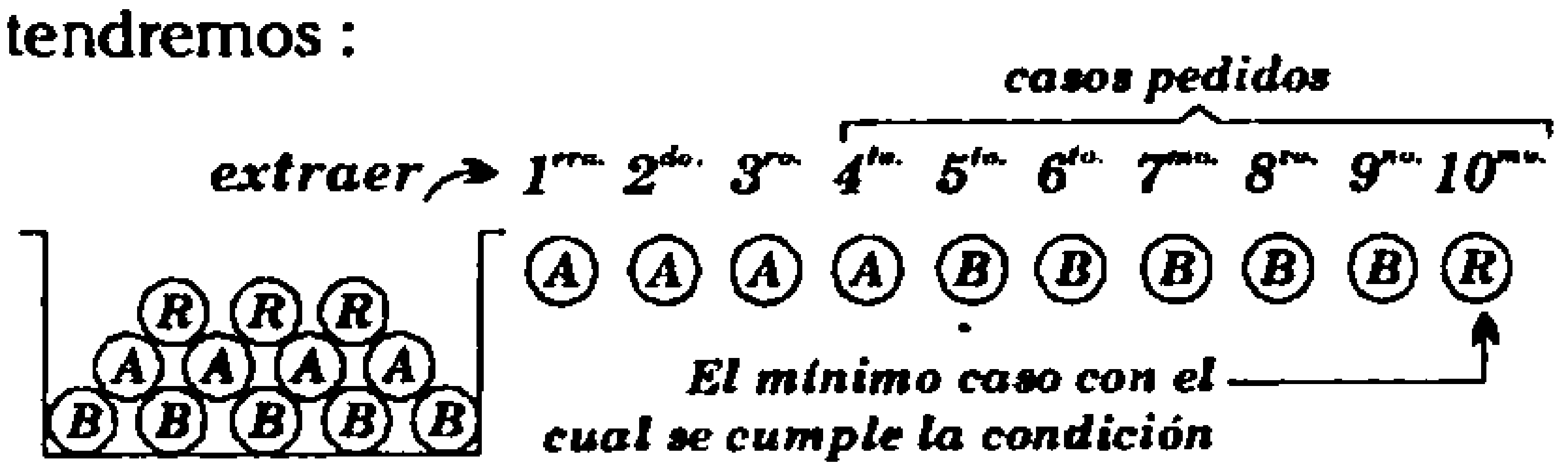
PROBLEMA 3 :

Dentro de una caja se tiene ***3*** fichas rojas , ***4*** fichas azules y ***5*** fichas blancas. ¿Cuántas fichas como mínimo se tendrán que extraer para estar seguro de haber extraído al menos una ficha blanca y una ficha roja?

A)10 ***B)5*** ***C)3*** ***D)12*** ***E)6***

RESOLUCIÓN :

* Asociando este ejemplo con la nota anterior tendremos :



* El marco teórico que se ha presentado hasta el momento no es el único existente ; existen casos particulares que , analizándolos en torno a la teoría mostrada y con un poco de habilidad e ingenio por parte nuestra , los podremos resolver .

PROBLEMA 4 :

Un estudiante tiene en una urna cuatro bolos blancos, seis bolos rojos y cinco bolos negros . ¿Cuántos bolos tendrá que extraer al azar , para obtener con certeza un par del mismo color .

A)5 ***B)6*** ***C)4*** ***D)7***

RESOLUCIÓN :

* Debemos resaltar de que se solicitan dos bolos de igual color, una estrategia sugerida es tratar de obtener lo opuesto a lo que la pregunta solicita; es decir como

hacer para no obtener dos bolos de igual color, veamos :Supuesto ⇒ ***1° Extracción :*** ***1*** bolo rojo

Si el segundo bolo extraído fuera rojo ya se tendrían dos iguales, y esto sería considerado buena suerte, recuerde que debemos elegir el peor caso o lo que equivale a lo mismo obtener lo contrario ; es decir que no se logren dos bolos iguales :

Supuesto ⇒ ***2° Extracción :*** ***1*** bolo blanco

Siguiendo el criterio de lo opuesto , el tercer bolo extraído no puede ser ni rojo ni blanco , a fin de no obtener dos bolos iguales , luego :

⇒ ***3° Extracción :*** ***1*** bolo negro

Ahora bien , en la urna sólo se presentan bolos de tres colores , luego el cuarto bolo , necesariamente tendrá que ser rojo , blanco o negro , en razón a que no hay bolos de otros colores ; por lo tanto el cuarto bolo tendrá un color repetido , es decir :

*"Se tendrán que extraer **4** bolos con certeza **2** bolos de igual color"*

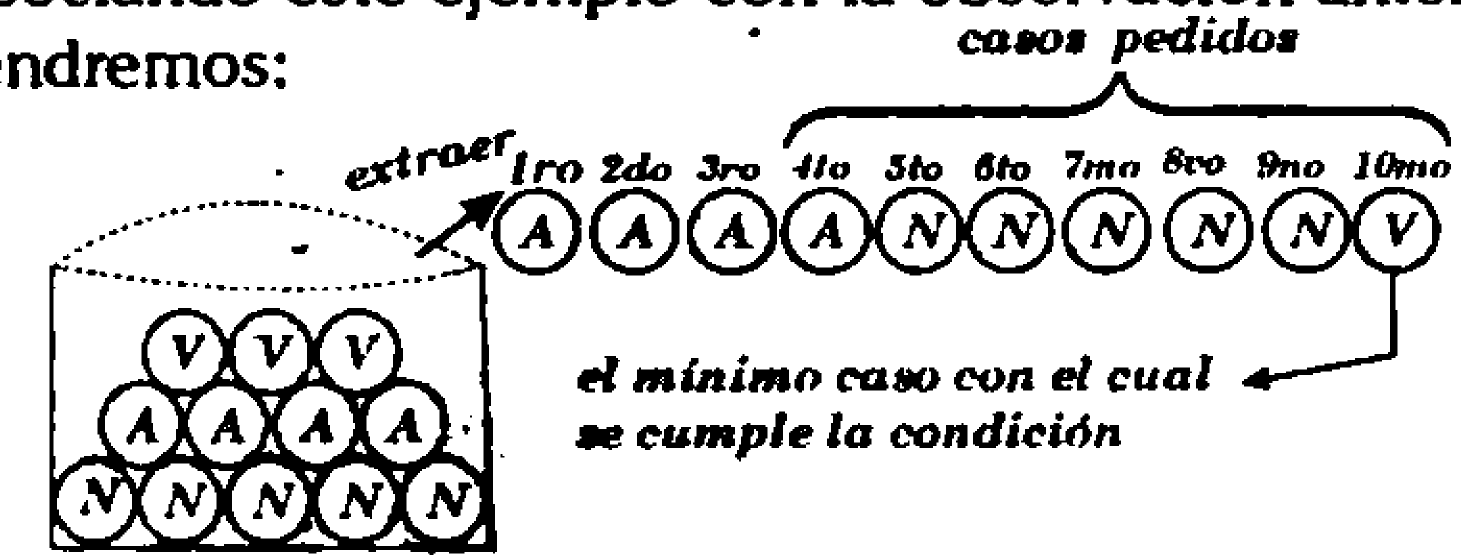
RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Dentro de una caja se tiene ***3*** fichas verdes , ***4*** fichas amarillas y ***5*** fichas negras, ¿Cuántas fichas como mínimo se tendrán que extraer al azar para estar seguro de haber extraído al menos una ficha negra y una ficha verde?

RESOLUCIÓN :

Asociando este ejemplo con la observación anterior tendremos:



⇒ El mínimo número de extracciones es ***10*** .

PROBLEMA 6 :

Lenin guarda en un depósito doce medias rojas , seis azules , diez blancas y ocho medias negras ¿Cuántas medias se tendrán que extraer al azar , para obtener con certeza un par del mismo color?

A)4 ***B)12*** ***C)5*** ***D)9*** ***E)3***

RESOLUCIÓN :

* Otra forma de interpretar los problemas de estas características , siempre considerando el caso menos favorable , es extraer el máximo número de elementos (en este caso calcetines) de tal manera que no se consiga lo solicitado . El cálculo tratando de no obtener dos calcetines de igual color será :

SUPUESTO : ***1*** media blanca , ***1*** media roja , ***1*** media negra , ***1*** media azul.

* Aunque el orden de extracción es indistinto, lo importante radica en que las cuatro medias extraídas son de diferente color ; pues bien, si se extrae una quinta media ésta tendrá que ser de uno de los cuatro colores ya extraído ; es decir que no es posible extraer cinco medias de diferente color en razón de que sólo se presentan cuatro colores , el quinto calcetín formará , con certeza , en el peor de los casos , un par de medias del mismo color .

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Se depositan dos pares de guantes marrones y tres pares de guantes negros ; se desea obtener con certeza un par útil del mismo color ¿Cuántos guantes se deberán extraer al azar?

A)3 ***B)2*** ***C)5*** ***D)6*** ***E)7***

RESOLUCIÓN :

* Es probable que más de un lector presuma que en este caso se deben extraer tres guantes para obtener dos guantes útiles de igual color , lo cual es relativamente correcto en razón de que habiendo sólo dos colores , tres garantizan la aparición de por lo menos dos de igual color , pero es necesario acotar que el requerimiento es que además de igual color , también sean útiles es decir podría darse el caso de obtener tres guantes negros de la mano izquierda , luego es conveniente empezar el supuesto eligiendo guantes de la mano izquierda o de la mano derecha , veamos :

SUPUESTO: ***2*** guantes marrones izquierdos + ***3*** guantes negros izquierdos.

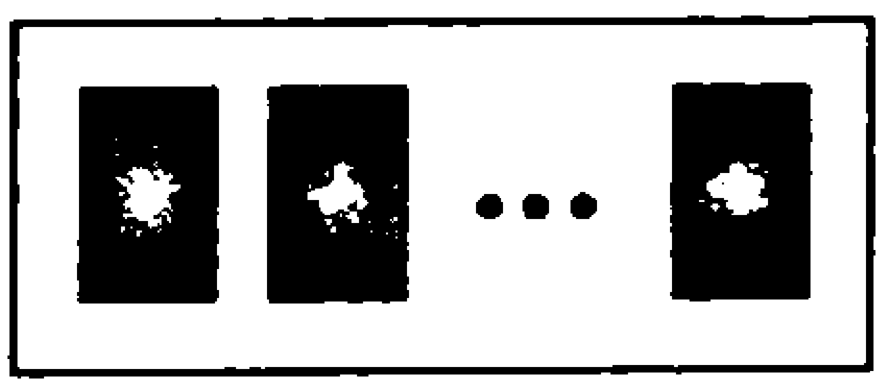
Teniéndose sólo cinco guantes izquierdos , el sexto guante a extraer tendrá que ser derecho , y sea negro o marrón conformará , en el peor de los casos , con certeza , un par útil del mismo color , luego , se deben extraer ***6*** guantes para obtener con certeza ***2*** útiles de igual color .

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

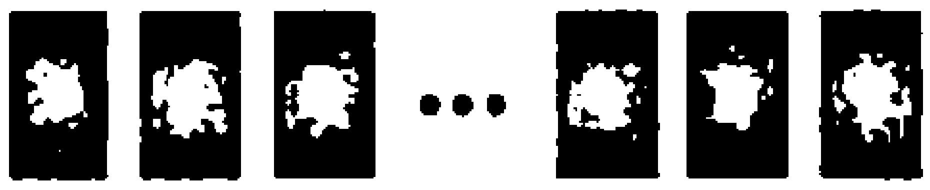
Se tiene ***13*** fichas numeradas del ***1*** al ***13*** , todas con las caras que indican su valor contra la superficie de la mesa como se muestra en la figura. ¿Cuántas fichas como mínimo se debe voltear al azar para tener la certeza de que la suma de los valores de todas las fichas volteadas sea mayor que ***21***?

A) 6
B) 5
C) 7
D) 8
E) 9



RESOLUCIÓN:

Se tiene ***13*** fichas numeradas del ***1*** al ***13***, dispuestas boca a bajo.



* Nos piden la menor cantidad de cartas que se debe voltear para tener la certeza de que la suma de los valores sea mayor que ***21***. Considerando el caso más desfavorable y volteando los de menor valor, tenemos.

* Por lo tanto , es necesario voltear ***7*** cartas como mínimo para tener la certeza de que la suma de los valores sea mayor de ***21***.

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Se tiene ***5*** automóviles y ***4*** llaves de las cuales ***3*** abren la puerta de tres de ellos y la otra llave no abre ninguna puerta. ¿Cuántas veces, como mínimo, se tendrá que probar al azar las llaves para saber con certeza a qué automóvil corresponde cada una?

A) 4 ***B) 14*** ***C) 5*** ***D) 17*** ***E) 11***

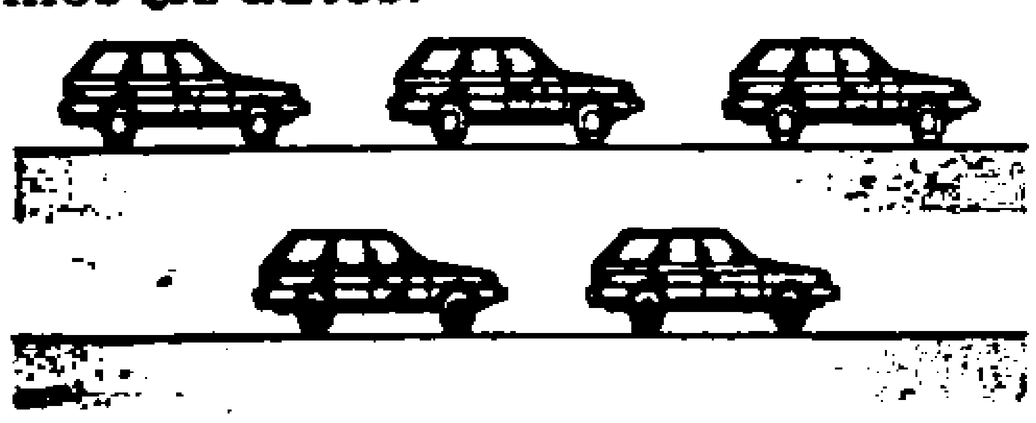
RESOLUCIÓN:

* Del enunciado:

son ***5*** autos ; ***4*** llaves (***3*** de las cuales abren un auto cada uno y la otra no abre ninguno).

En un problema de certeza se asume el peor de las casos.

Enumeramos los autos:



Luego probamos llave tras llave , iniciando por la que no abre ninguno de los autos (peor de los casos).

1ra llave: se prueba la llave y no abre ningún auto (***5*** veces).

2da llave: se prueba la llave y no abre hasta el auto ***4*** (***4*** veces)

3ra llave: se prueba la llave y no abre hasta el auto ***3*** (***3*** veces)

4ta llave: se prueba la llave y no abre hasta el auto ***2*** (***2*** veces).

total de veces a probar: ***5+4+3+2=14***

RPTA : "B"

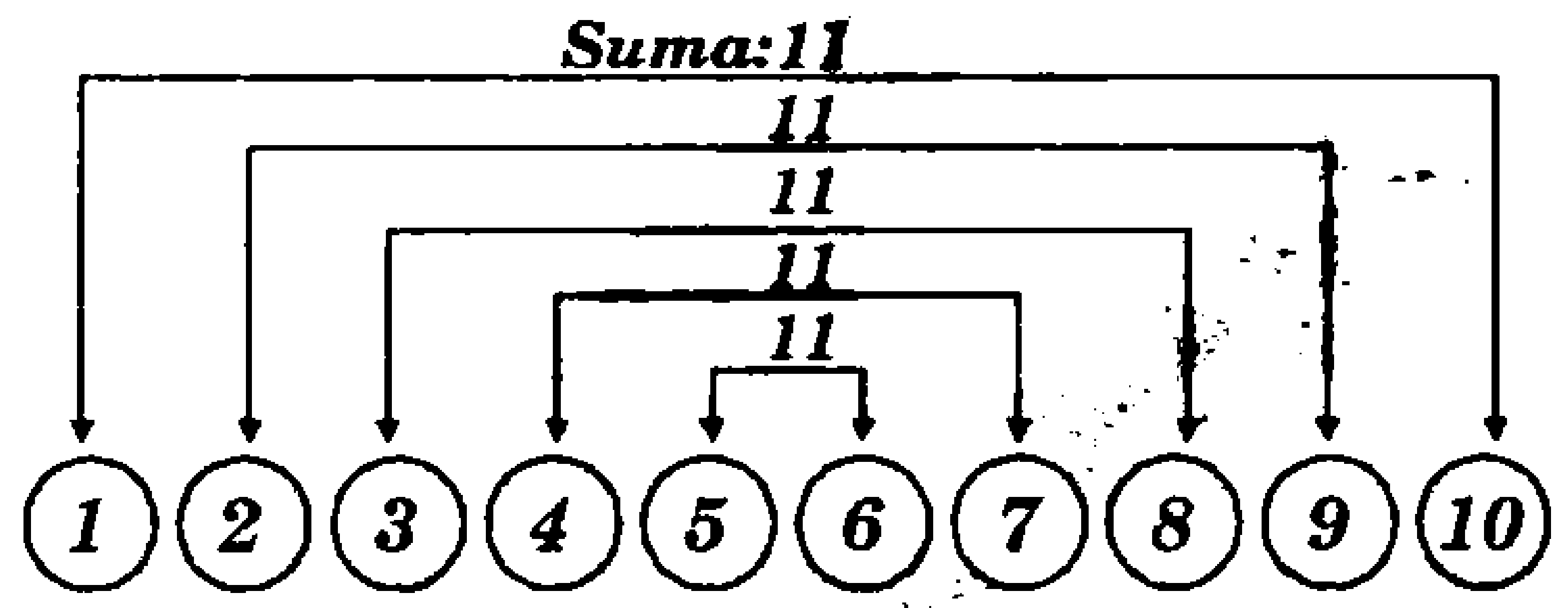
PROBLEMA 10 :

Se tiene fichas numeradas del ***1*** al ***10***. ¿Cuál es el número menor de fichas que se deben extraer para estar seguro de haber obtenido por lo menos ***2*** fichas cuya suma sea ***11***?

A)5 ***B)6*** ***C)3*** ***D)7*** ***E)9***

RESOLUCIÓN :

* Sabemos, por el tema de sucesiones aritméticas que la suma de términos equidistantes de los extremos suman un mismo resultado , así:



* El peor de los casos sucede cuando en primer lugar extraemos una ficha de cada una de las parejas cuya suma es ***11***, así por ejemplo :

Completará con cualquiera de las extraídas; una pareja cuya suma es 11

* Completará con cualquiera de las extraídas ; una pareja cuya suma es ***11***

⇒ Se deben extraer , ***6*** como mínimo .

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

De un mazo de ***52*** cartas ¿Cuántas habrá que extraer consecutivamente y sin reposición para obtener con certeza una carta de color rojo?

A)27 ***B)2*** ***C)3*** ***D)45*** ***E)18***

RESOLUCIÓN :

* Partamos de la consideración de que en todo mazo de ***52*** barajas se tienen ***13*** que son de espadas (♠) y de color negro , trece son de trébol (♣) también de color negro , trece de diamantes (♦) , y de color rojo , trece de corazones (♥) , es decir ***26*** barajas serán de color negro y ***26*** barajas de color rojo ; ahora la extracción sin reposición implica que una vez que se ha extraído una baraja ésta no retorna al mazo mientras continúa el proceso , pues bien siempre descartando el factor suerte y considerando el peor de los casos , se obtendrá consecutivamente ***26*** barajas de color negro siendo la ***27°*** baraja necesariamente de color rojo , luego :

Habrá que extraer ***27*** barajas para obtener con certeza una carta de color rojo .

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

En cierto bolso hay ***30*** bolos numerados en el orden de los primeros ***30*** enteros positivos .¿cuántos bolos se deben extraer al azar para obtener con certeza un bolo cuyo número sea primo?

A)21 ***B)10*** ***C)12***

RESOLUCIÓN :

*Primero ubiquemos a los números primos comprendidos entre los treinta primeros enteros positivos, estos son : ***2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17; 19; 23; 29***. es decir hay diez números primos en este rango y obviamente veinte no primos .

* Ahora bien considerando el caso más desfavorable, este se da si al extraer veinte bolos en forma consecutiva estos resultan ser bolos que contienen números no primos , quedando solo bolos que contienen números primos , será evidente de que el bolo ***21°*** contendrá un número primo, por lo tanto:

⇒ Se tendrán que extraer ***21*** bolos para obtener con certeza un bolo cuyo número sea primo.

RPTA : "C"

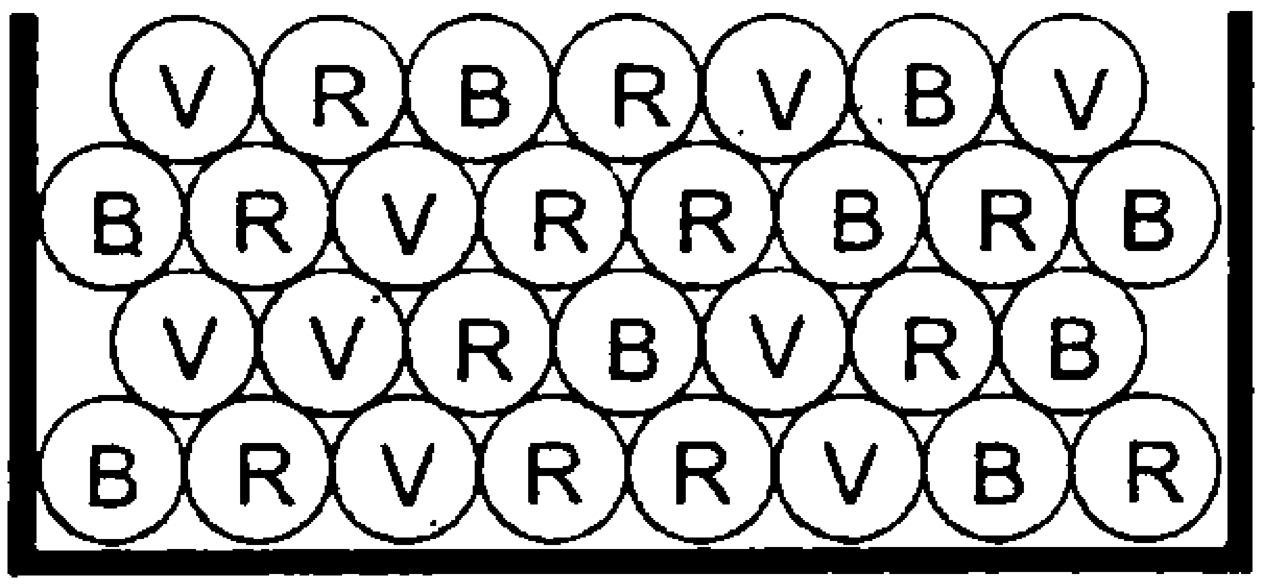
PROBLEMA 13 :

En una urna se tiene ***10*** bolas verdes , ***8*** blancas y ***12*** rojas . Se extraen al azar una por una, ¿cuántas se debe extraer como mínimo para estar seguro de tener ***5*** bolas de un mismo color?.

A)12 ***B)7*** ***C)13*** ***D)9*** ***E)11***

RESOLUCIÓN :

* Para poder tener a lo seguro ***5*** bolas de un mismo color , debemos tener primero ***4*** bolas de cada color; es decir ***4*** verdes , ***4*** blancas y ***4*** rojas . Luego , al sacar una sola más cualquiera sea su color tendremos ya ***5*** de un mismo color :



* Por lo tanto lo mínimo que se debe extraer es:

$4 + 4 + 4 + 1 = 13$ bolas

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

En una urna hay ***2*** bolas azules y ***3*** bolas negras ¿Cuántas bolas debo extraer como mínimo , para poder decir con certeza que he sacado una bola de color azul?

A)1 ***B)2*** ***C)3*** ***D 4*** ***E)5***

RESOLUCIÓN :

* Para extraer una bola y decir con seguridad , que es de color azul , tendría que haber solo bolas de color azul en la urna , por eso primero habrá que agotar o extraer todas las bolas negras y luego en la próxima extracción saldrá con seguridad una de color azul .

* Número de extracciones :

$$\overbrace{3}^{Negra} + \overbrace{1}^{Azul} = 4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

En una caja hay ***3*** fichas blancas y ***3*** fichas rojas . ¿Cuántas fichas debo sacar de la caja como mínimo para decir con certeza , que he sacado ***2*** fichas de diferente color?

A)6 ***B)5*** ***C)2*** ***D)4*** ***E)3***

RESOLUCIÓN :

* Primero tendré que agotar un color y en la próxima extracción necesariamente saldrá el otro color :

$$\begin{pmatrix}\text{Mínimo número}\\ \text{de extracciones}\end{pmatrix} : \underbrace{3}_{\substack{\text{Un color}\\ \text{(rojo o blanco)}}} + \underbrace{1}_{\text{Del otro color}} = 4$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

De una baraja de ***52*** naipes. ¿Cuántas cartas debo extraer como mínimo, para que salga con seguridad una carta de corazones?

A)13 ***B)26*** ***C)51*** ***D)49*** ***E)40***

RESOLUCIÓN :

* Primero debo agotar todas las cartas que no son corazones , es decir que debo extraer :

$$\underbrace{13}_{\text{Trébol}} + \underbrace{13}_{\text{Espadas}} + \underbrace{13}_{\text{Diamantes}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{Corazón}\\ \text{necesario}}} = 40$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 17 :

En una caja hay ***12*** bolas azules , ***15*** blancas , ***18*** verdes y ***20*** rojas. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que se deben sacar para tener la certeza de haber extraído ***13*** bolas de uno de los colores?

A)48 ***B)49*** ***C)51*** ***D)52*** ***E)50***

RESOLUCIÓN :

* El peor de los casos , sería extraer ***12*** bolas , de cada color y la próxima extracción completará cualquiera de los colores .

* Número de extracciones :

$\underbrace{12}_{Azules} + \underbrace{12}_{Blancas} + \underbrace{12}_{Verdes} + \underbrace{12}_{Rojas} + \underbrace{1}_{\text{Cualquier color}} = 49$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

De *6* fichas rojas , *8* azules y *10* verdes , ¿cuál es el mínimo número que se debe extraer para tener la certeza de haber extraído un color por completo?

A)21 B) 22 C)23 D)20 E)18

RESOLUCIÓN :

* El peor de los casos sería extraer todos los colores a punto de completarse (faltando una ficha para completar)

* Número de extracciones :

$\underbrace{(6-1)}_{Rojas} + \underbrace{(8-1)}_{Azules} + \underbrace{(10-1)}_{Verdes} + \underbrace{1}_{\text{Cualquier color}} = 22$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

En un cajón se colocan guantes de box ; *3* pares de guantes rojos , *4* pares de guantes negros y *2* pares de guantes blancos . ¿Cuál es el menor número de guantes que deben extraerse al azar para obtener con certeza un par del mismo color?

A)18 B)10 C)4 D)11 E)8

RESOLUCIÓN :

Paso *1* : *Cajón* ⟶ *3 pares rojos* / *4 pares negros* / *2 pares blancos*

Paso *2* : Suponer el peor de los casos

3 pares rojos / *4 pares negros* / *2 pares blancos* → *1 rojo + 1 negro + 1 blanco + 1*

El último guante será el que complete el par del mismo color , pues será un guante ya sea rojo , negro o blanco

\# total de guantes extraídos : *4*

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Una urna contiene *13* bolas negras , *12* rojas y *7* blancas . La menor cantidad que debe sacarse para obtener el menor número de bolas de cada color es :

A)25 B)19 C)21 D)28 E)26

RESOLUCIÓN :

* El menor número de cada color seria *1* de cada color . Pero no podemos asegurar que con tres extracciones podamos conseguirlo .

Suponiendo un caso extremo , las *13* primeras pueden ser negras y las *12* siguientes rojas , pero la siguiente sería necesariamente blanca .

Con *13 + 12 + 1= 26* extracciones tenemos con seguridad *3* colores diferentes .

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

Si Gastón sólo tiene las llaves de *6* habitaciones de un hotel . ¿Cuántas veces tendrá que probar estas para determinar con certeza que llave corresponde a su respectiva puerta?

A) 6 B) 5 C) 15 D) 19 E) 14

RESOLUCIÓN :

Puerta Pruebas : (En el peor de los casos)

Puerta	Pruebas		Quedan
1ra	*5*	*llaves no abren ⇒ abre la 6ta llave*	*5 llaves*
2da	*4*	*llaves no abren ⇒ abre la 5ta llave*	*4 llaves*
3ra	*3*	*llaves no abren ⇒ abre la 4ta llave*	*3 llaves*
4ta	*2*	*llaves no abren ⇒ abre la 3ra llave*	*2 llaves*
5ta	*1*	*llaves no abren ⇒ abre la 2da llave*	*1 llave*
6ta		*ya no prueba pues la única llave que queda será de la 6ta. puerta .*	

⇒ # pruebas $= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

En una reunión se encuentran *480* personas. ¿Cuántas personas como máximo deberán retirarse para que en dicha reunión tengamos la seguridad de que estén presentes dos personas con la misma fecha de cumpleaños?

A)113 B)115 C)112 D)110 E)118

RESOLUCIÓN :

* El peor de los casos , será que estén presente el máximo número de personas con fechas de cumpleaños diferentes , por lo que debemos considerar un año bisiesto (*366* formas diferentes) más un día y con seguridad quedarán *2* personas con la misma fecha , luego deben retirarse:

$$\overbrace{400}^{Total} - (366 + 1) = 113$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Si *1 kg* . de manzana contiene entre *6* y *8* manzanas, ¿cuál es el mayor peso que pueden tener *3* decenas de manzanas?

A)3 kg. B)4 kg. C)5 kg. D)6 kg. E)7 kg.

RESOLUCIÓN :

* Como deseo el mayor peso de *30* manzanas , debo escoger los kilos que tengan la menor cantidad de manzanas, es decir los de *6* manzanas :

$$\begin{pmatrix} Mayor \\ peso \end{pmatrix} = \frac{30}{6} = 5Kg$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Una urna contiene **5** bolas rojas , **3** bolas negras y **2** bolas blancas. La menor cantidad de bolas que debe sacarse para obtener al menos una de cada color es

A)3 ***B)10*** ***C)8*** ***D)5*** ***E)9***

RESOLUCIÓN :

* Si extraemos **3** bolas; todas ***pueden*** ser rojas

* Si extraemos ***8 bolas*** , las primeras **7** bolas pueden distribuirse así: **5** (rojas), **2** (blancas) y la octava, ***tiene*** que ser negra, se lograría el objetivo. Pero : éstas **8** bolas también pueden repartirse así: *5*rojas+*3*(negras). No se consigue el fin que perseguimos. Faltaría una bola blanca.

* Si extraemos ***9 bolas*** ; por más mala suerte que tengamos, la distribución será :

5 (rojas) + **3** (negras) + **1** (blanca) = **9**

bolas, la novena tiene que ser necesariamente blanca.

Claro que puede darse el caso que al extraer **3** bolas, se saque una bola de cada color . Sin embargo no hay seguridad que ello ocurra . Con **9** bolas si hay certeza.

RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

Una máquina dispensadora de gomas de mascar contiene **9** bolitas de goma rojas , **7** blancas y **8** azules. Se le coloca una moneda y sale una bolita de goma al azar. El menor número de bolitas de goma que una persona ha de comprar para estar segura de obtener cuatro del mismo color es:

A) 8 ***B) 9*** ***C) 10*** ***D) 12*** ***E) 18***

RESOLUCIÓN :

* Poniéndonos en el peor de los casos , sacamos primero **3** de cada color y solo al final la que completa el cuarteto.

⇒ **3** rojas + **3** blancas + **3** azules + **1** = **10**

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

En una urna hay **20** fichas numeradas del **1** al **20**. El menor número de fichas que habrá que extraer para tener la certeza de haber conseguido una ficha que contenga un número compuesto es:

A)9 ***B)10*** ***C)11*** ***D)12*** ***E)13***

RESOLUCIÓN :

• Poniéndonos en el peor de los casos extraeremos primero las fichas que no contengan números compuestos :

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ⇒ 9 fichas

• La siguiente ficha que se extraiga contendrá necesariamente un número compuesto: ⇒ ***9+1=10***

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

En una bolsa oscura hay **7** caramelos de limón , **5** de naranja , **9** de fresa y **10** de menta. Hallar en cada caso , cuál es el menor número de caramelos que se deben extraer para conseguir con certeza:

I) Al menos un caramelo de cada sabor.

II) Siete caramelos de cada sabor.

Dar como respuesta , la suma de dichos resultados.

A) 47 ***B) 48*** ***C) 49*** ***D) 50*** ***E) 51***

RESOLUCIÓN

• La estrategia para obtener algo con certeza , es ponerse ***"en el peor de los casos"***.

• En el caso ***(I)*** queremos uno de cada sabor , es decir , variedad , y por lo tanto lo peor que puede ocurrir , es que salgan repetidos :

10(M)+9(F)+7(L)+1(N)=27

• En el caso ***(II)*** se quiere **7** caramelos iguales , así que lo peor sería sacar tan solo **6** de cada sabor :

6(L) + 5(N) + 6(F) + 6(M) + 1 = 24

⇒ 27+24=51

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Dany tiene **4** cajas iguales; en una de ellas, coloca clavos de **1** pulgada; en dos de ellas, clavos de **2** pulgadas; y en la cuarta, clavos de **3** pulgadas. Luego las cierra y empaqueta, pero al momento de rotularlas, se equivoca en todas.

Para poder rotularla, correctamente, ¿cuántas cajas como mínimo deberá abrir y qué caja (o cajas)?

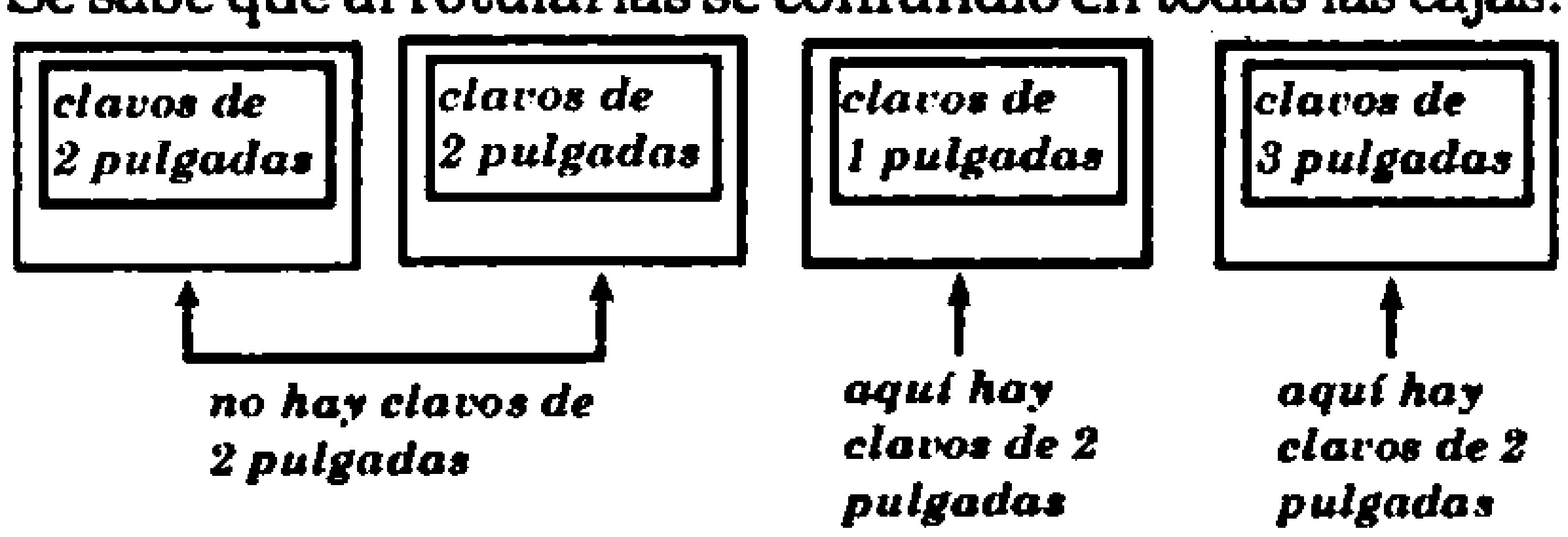
A) Dos cajas y las que dicen: 2 pulgadas y 1 pulgada.
B) Una caja y la que dice 1 pulgada.
C) Una caja y la que dice 3 pulgadas.
D) Dos cajas y las que dicen: 1 pulgada y 3 pulgadas.
E) Una caja y la que dice 2 pulgadas.

RESOLUCIÓN :

Del enunciado tenemos :

Hay **2** cajas que contienen clavos de **2** pulgadas. Hay una caja que contiene clavos de **1** pulgada y otra caja que contiene clavos de **3** pulgadas.

Se sabe que al rotularlas se confundió en todas las cajas.



⇒ edwin tiene ***48***

RPTA "E"

PROBLEMA 29 :

En una caja hay ***16*** bolas cuyos pesos son: ***2; 4; 6; 8;...32*** gramos , respectivamente. Si se extrae cierta cantidad de bolas , el peso total de las bolas de la caja disminuye en ***242*** gramos. ¿Cuál es la mayor cantidad de bolas que quedan en la caja?

A) 4 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 3*** ***E) 5***

RESOLUCIÓN:

Determinamos el peso total entre todas las bolas de la caja$=2+4+6+8+...+32=16\times17=272$

• Por dato , se extraen cierto número de bolas y el peso disminuye en ***242 gr.***, luego el peso restante es $272-242=30$ ***gr.***

• Nos piden que los ***30 gr***. que quedan en la caja comprenda la mayor cantidad de bolas , entonces son las bolas de menor peso.

$$\underbrace{2+4+6+8+10}_{5\ bolas}=30 \quad \Rightarrow 5$$

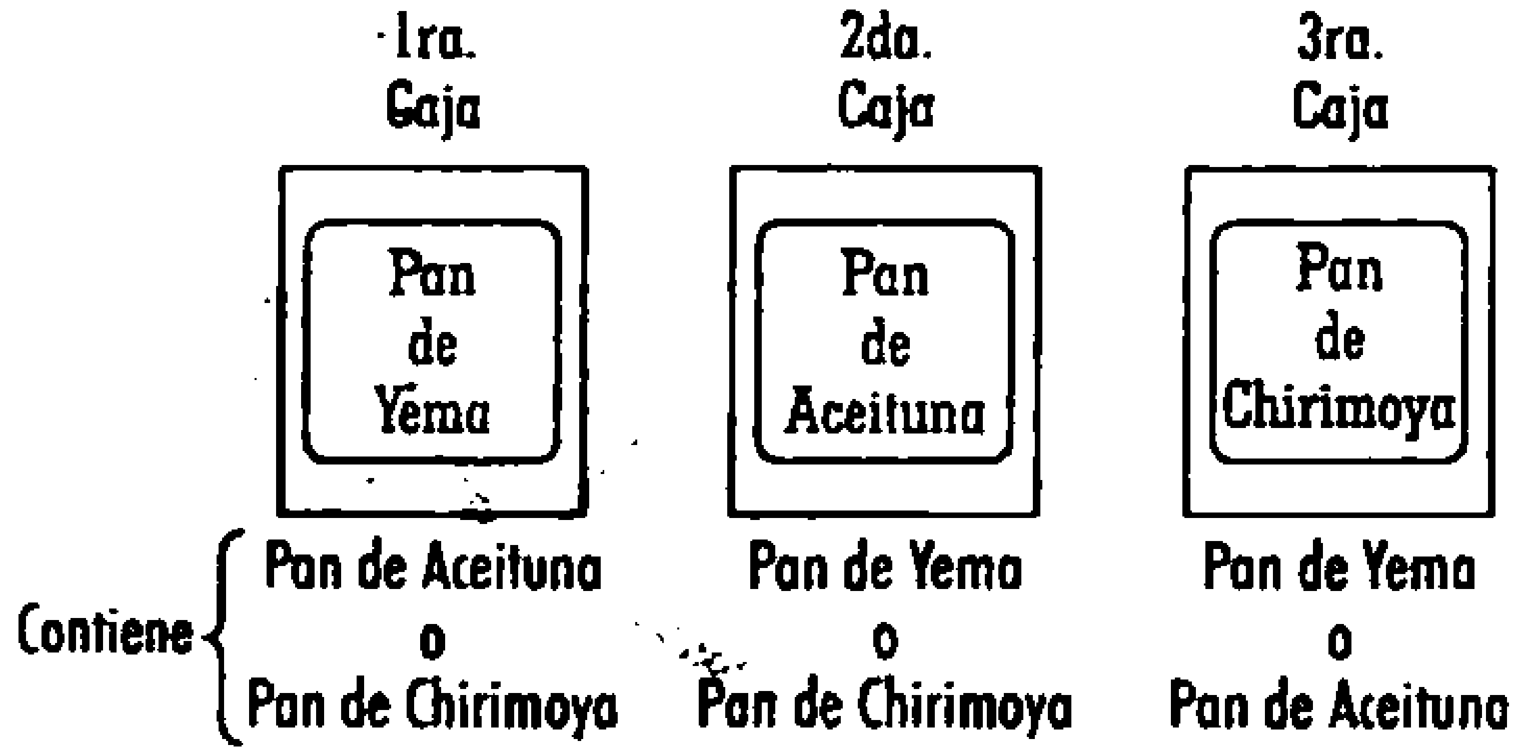
RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Una señora preparó deliciosos panes : pan de yema , pan de aceituna , pan de chirimoya . Por lo que decidió enviarlos a su hija , para ello los colocó en cajas distintas . Por error los nombres han sido puestos en cajas que no corresponden al tipo de pan que contienen . ¿Cuántas cajas se deben abrir para saber con seguridad el tipo de pan que contiene cada una?

A)3 ***B)2*** ***C)1*** ***D)0*** ***E)Falta información***

RESOLUCIÓN :



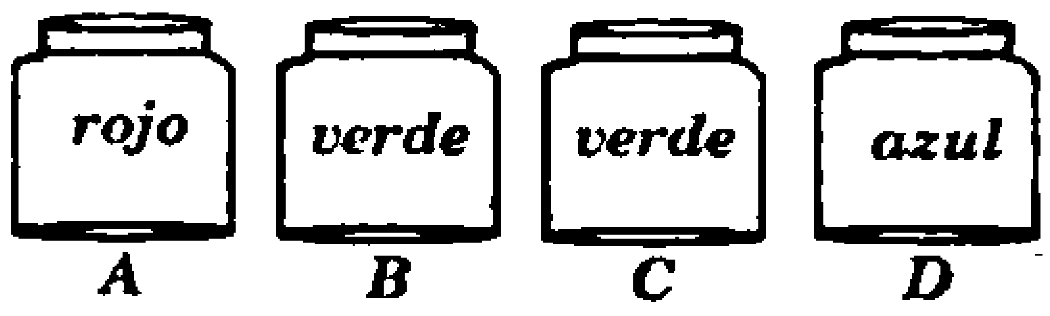
* Ahora suponemos que abres la primera caja y encuentras pan de aceituna , entonces el pan de chirimoya estará necesariamente en la segunda caja (puesto que no puede estar en la tercera caja) ; pero si encuentras pan de chirimoya , entonces el pan de aceituna estará en la tercera caja.

* Por lo tanto , para saber que pan corresponde a que caja , es suficiente abrir una caja .

RPTA: "C"

PROBLEMA 31 :

Se tiene ***4*** frascos cerrados y etiquetados que contienen bolitas: uno contiene solo bolitas de color rojo, dos de ellos contienen solo bolitas de color verde y el cuarto, solo bolitas de color azul.



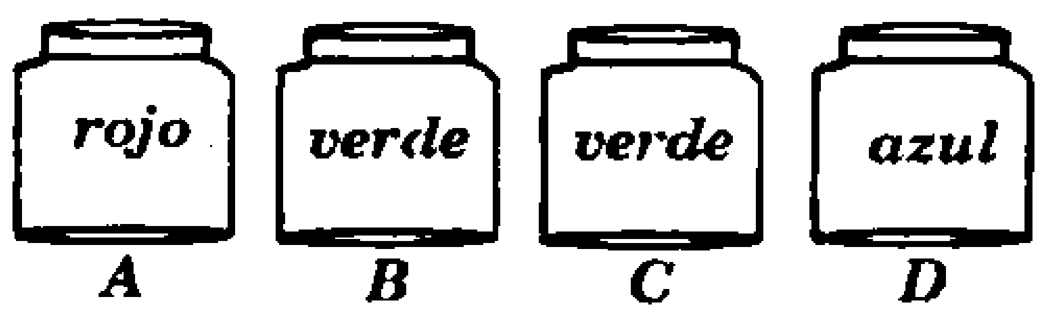
Si todos los frascos han sido etiquetados de manera equivocada, ¿cuántos y qué frascos se tendría que abrir como mínimo para averiguar el contenido de cada uno y reetiquetarlos correctamente?

A)un frasco, A. ***B)un frasco, B o C.***
C)un frasco,D ***D)dos frascos, B y C.***
E)dos frascos, A y D.

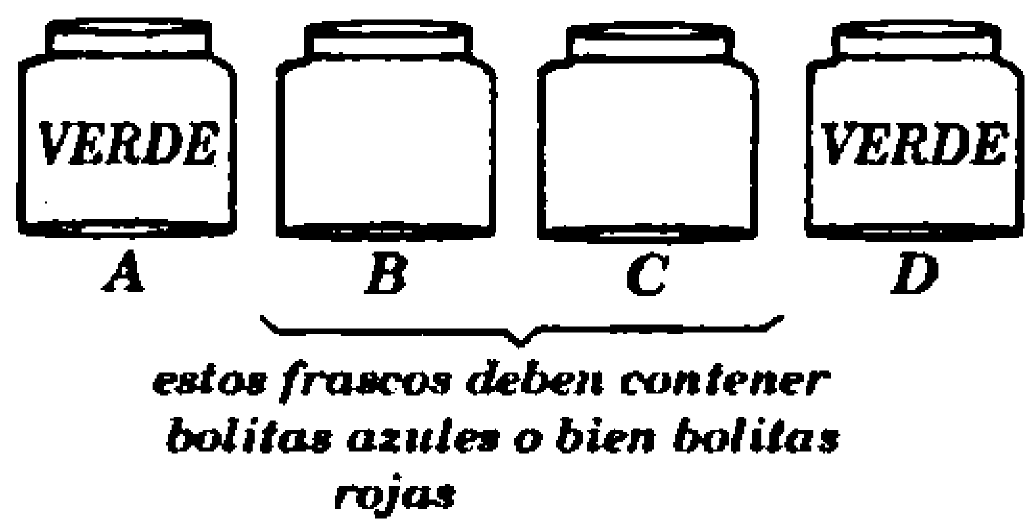
RESOLUCIÓN:

En este tema se busca poner en práctica la habilidad y el ingenio, utilizando herramientas de orden, deducción y un modo de pensar lógico. Al afrontar ejercicios correspondientes a este tema, debemos responder a las interrogantes: ¿qué alcances me dan los datos?. ¿qué puedo deducir de ellos?, ¿en qué casos puedo priorizar alguno de ellos?

Iniciamos por la ubicación y la etiqueta de cada frasco:



Considerando la condición que nos indica que cada frasco ha sido etiquetado de manera incorrecta, deducimos que los frascos ***A*** y ***D*** contienen bolitas de color verde.



Por lo tanto, nos bastará con abrir alguno de ellos (un frasco, ***B*** o ***C***). para determinar los correspondientes colores.

RPTA: "B"

PROBLEMA 32 :

Un comerciante adquirió tres bolsas de caramelos. La primera contenía ***100*** caramelos de limón , la segunda contenía ***100*** caramelos de naranja , y la tercera contenía ***50*** caramelos de limón y ***50*** de naranja. Estas bolsas eran oscuras y estaban etiquetadas como "Limón", "Naranja" y "Surtido", respectivamente .

Pero el hijo del comerciante cambió las etiquetas de las bolsas. de modo que ya ninguna corresponde a su verdadero contenido. ¿Cuántos caramelos tendrá que extraer el comerciante como mínimo, para averiguar el contenido correcto de las bolsas?

A) 51 *B) 101* *C) 3* *D) 2* *E)1*

RESOLUCIÓN :

• Como las etiquetas no corresponden con su contenido, la que dice "surtido" contendrá los ***100*** caramelos de limón, o bien los ***100*** de naranja.

• Por lo tanto basta sacar un solo caramelo de dicha bolsa, pues si por ejemplo sale de naranja, su contenido real será ***"N"***; la etiquetada con ***"L"*** contendrá ***"S"***, y la etiqueta con ***"N"*** contendrá ***"L"***

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

ENUNCIADO :

En una urna oscura hay ***10*** bolas rojas, ***7*** blancas y ***4*** negras. Indica cuántas bolas como mínimo se deben extraer al azar, para tener la certeza de obtener:

01 Una bola roja.

A) 1 *B) 11* *C) 5* *D) 12* *E) 8*

02 Una bola negra.

A)1 *B)18* *C) 8* *D) 17* *E) 11*

03 Tres bolas blancas.

A)14 *B) 15* *C)17* *D) 18* *E) 16*

04 Una bola roja o blanca.

A)2 *B) 4* *C)6* *D) 5* *E) 15*

05 Una de cada color.

A)12 *B) 15* *C)18* *D) 17* *E) 4*

06 Dos bola del mismo color.

A)12 *B) 15* *C) 18* *D) 17* *E) 4*

07 Dos bolas de cada color.

A) 16 *B) 4* *C) 7* *D) 19* *E) 13*

08 Tres bolas del mismo color.

A)7 *B) 20* *C)21* *D) 10* *E) 14*

09 Una bola negra y tres rojas.

A)18 *B) 14* *C)20* *D) 11* *E) 12*

10 Dos bolas rojas y tres blancas.

A)17 *B) 13* *C)18* *D) 9* *E) 20*

ENUNCIADO :

En una caja oscura hay ***5*** pares de guantes blancos, ***5*** pares marrones y ***5*** pares negros. Indica cuántos guantes como mínimo se deben extraer al azar para tener la certeza de obtener:

11 Un guante marrón.

A)10 *B) 20* *C)21* *D) 11* *E) 22*

12 Dos guantes blancos.

A)10 *B) 20* *C)12* *D) 21* *E) 22*

13 Un guante izquierdo.

A)10 *B) 15* *C)16* *D) 20* *E) 26*

14 Un guante negro izquierdo.

A)21 *B) 10* *C)26* *D) 16* *E) 15*

15 Un par de guantes negros usables.

A)17 *B) 13* *C)18* *D) 9* *E) 20*

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 En una urna se tiene ***5*** esferas rojas, ***8*** esferas verdes y ***10*** esferas blancas. Indique cuántas esferas se tiene que extraer, al azar y como mínimo, para estar seguros de que hayan entre las extraídas lo siguiente:

I) Tres esferas del mismo color.

II) Una esfera blanca y una esfera verde.

III) Un color completo.

A) 7; 15; 21 ***B) 8;16; 20*** ***C) 8;19; 21*** ***D) 7; 16; 21*** ***E) 7; 16; 20***

02 En una caja tenemos ***5*** esferas rojas, ***6*** negras y ***7*** blancas. Indique cuántas esferas se deben extraer, al azar y como mínimo, para estar seguros de obtener por lo menos tres esferas del mismo color.

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 10***

03 En una urna se tiene ***5*** caramelos de fresa, ***8*** de limón, ***10*** de menta, ***10*** de naranja y ***13*** de leche. ¿Cuántos caramelos debemos extraer al azar y sin ver, como mínimo, para estar seguros de obtener ***9*** caramelos del mismo sabor?

A) 36 ***B) 38*** ***C) 42*** ***D) 40*** ***E) 35***

04 Si se tiene un mazo de ***52*** cartas (***13*** de cada palo), ¿cuántas cartas hay que sacar, como mínimo, al azar para tener la seguridad de haber obtenido una carta que sea de numeración impar y de color negro?

A) 37 ***B) 38*** ***C) 39*** ***D) 40*** ***E) 45***

05 En una urna hay ***20*** pares de guantes negros, ***15*** pares de guantes rojos y ***10*** pares de guantes blancos, todos para boxeo. Cuál es el número mínimo de guantes que se deben extraer al azar para obtener:

I) Dos pares de guantes utilizables, todos del mismo color.

II) Dos pares de guantes utilizables, ambos pares de diferente color.

A) 49; 65 ***B) 53; 65*** ***C) 50; 66*** ***D) 55; 66*** ***E) 49; 66***

06 Se tiene bolos numerados del ***1*** al ***20***. ¿Cuántos bolos, como mínimo, se deberían extraer al azar para estar completamente seguros de que la suma de los números de los bolos extraídos sea mayor o igual que ***70***?

A) 12 B) 14 C) 10 D) 17 E) 11

07 En una urna se tiene ***20*** fichas, numeradas del ***0*** al ***9***, y dos de cada valor. ¿Cuántas fichas se tendrá que extraer, al azar y como mínimo, para tener la certeza de que con las extraídas se pueda formar un número de dos cifras múltiplo de ***4***?

A) 11 B) 13 C) 14 D) 15 E) 12

08 Se convocó a una reunión a todas aquellas personas que nacieron en febrero. ¿Cuántas personas deben presentarse, como mínimo, para tener la seguridad de encontrar entre los presentes a cuatro personas con la misma fecha de cumpleaños?

A) 31 B) 62 C) 88 D) 90 E) 93

09 A Pepito le han pedido que dibuje y coloree las luces de un semáforo, para ello dispone en una caja de ***10*** colores rojos, ***8*** azules, ***7*** verdes y ***9*** amarillos. ¿Cuántos colores tendrá que extraer de la caja, como mínimo, para estar seguro de que con ellos podrá pintar las luces del semáforo?

A) 3 B) 4 C) 28 D) 6 E) 26

10 En una caja hay ***25*** canicas del mismo tamaño, pero de diferentes colores: azules, blancas, celestes, verdes y negras (***5*** de cada color). ¿Cuántas se debe extraer, al azar y como mínimo, para tener la certeza de haber extraído ***4*** de color azul y ***4*** de color negro?

A) 23 B) 25 C) 22 D) 24 E) 21

11 Se tiene dos cajas conteniendo la primera ***8*** lapiceros rojos y ***8*** azules, y la segunda ***8*** plumones rojos y ***8*** azules. ¿Cuántas extracciones se deben realizar, al azar y como mínimo, para estar seguros de obtener ***3*** lapiceros y ***3*** plumones todos del mismo color?

A) 14 B) 10 C) 11 D) 16 E) 8

12 En una caja se tiene ***"m"*** plumones azules, ***"p"*** plumones rojos y ***"n"*** plumones amarillos. ¿Cuántos plumones se deben extraer, al azar y como mínimo, para estar seguros de obtener por lo menos un plumón amarillo?

A) $m + n + 1$ *B)* $m + p + 1$
C) $n + p + 1$ *D)* $mn + p$
E) $m + n + p$

13 En una municipalidad se han mezclado las partidas del nacimiento de los años ***1900*** y ***2000***. ¿Cuántas partidas se deben seleccionar, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de que entre las extraídas se encuentren la de dos personas que hayan nacido el mismo día (día, mes y año)?

A) 733 B) 731 C) 734 D) 730 E) 732

14 En una reunión se encuentran ***320*** personas. ¿Cuántas personas como mínimo deben adicionarse para estar seguros de encontrar por lo menos ***3*** personas con la misma fecha de nacimiento en día y mes?

A) 410 B) 412 C) 413
D) 417 E) 450

15 Se tiene tres manojos de cinco llaves cada uno, además, se sabe que uno de los manojos tiene tres llaves que corresponden a tres candados, pero no se sabe cuál. ¿Cuántos intentos se tendrá que realizar, como mínimo, para encontrar cada llave con su respectivo candado?

A) 16 B) 19 C) 18 D) 15 E) 20

16 Se tiene ***172*** perlas iguales en forma, color, brillo y tamaño, o sea rigurosamente iguales, pero sólo una de ellas es más ligera que las otras, siendo todas las demás de igual peso. ¿Cuántas veces, como mínimo, usaremos una balanza de dos platillos para asegurar que encontraremos la perla más ligera?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 Pablo y yo nos disponemos a jugar de la siguiente manera: Se tiene ***40*** fichas de las cuales sólo se pueden sacar por turnos ***1***; ***2*** ó ***3*** fichas y pierde el que saque la última ficha. Si yo comienzo el juego, ¿cuántas fichas debo sacar para asegurar la victoria?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
E) Siempre pierdo al comenzar primero.

18 En una reunión se encuentran ***12*** varones, ***9*** niños y algunas damas. Cada asistente ha escrito su nombre en un papelito y lo ha depositado en un ánfora para la realización de un sorteo. Si se sabe que el menor número de papelitos que se debe extraer del ánfora para tener la seguridad de que entre ellos haya el nombre de por lo menos un varón y una dama es ***2/3*** del total de asistentes, calcule la suma de las cifras del número de damas en la reunión.

A) 1 B) 2 C) 6 D) 8 E) 3

19 Se tiene tres cajas con figuras geométricas, tal como se indica en el gráfico:

Triángulos	Cuadrados	Círculos
8 blancas *7* rojos	*5* blancas *7* rojos	*6* blancas *6* rojos

¿Cuantas figuras geométricas se debe extraer, al azar y como mínimo, para tener una de cada tipo de figura del mismo color?

A) 16 B) 17 C) 15 D) 14 E) 18

20 Se tiene tres cajas rotuladas que indican su contenido de las mismas, tal como se muestra en el siguiente esquema:

Letra U	Letra N	Letra O
Colores *6* azules *5* blancas	Colores *4* azules *7* blancas	Colores *6* azules *6* blancas

¿Cuantas letras se tienen que extraer, como mínimo, para tener la certeza de que con las extraídas se forme la palabra ***UNO***, pero con letras del mismo color?

A) 14 B) 17 C) 15 D) 16 E) 18

TAREA DOMICILIARIA

01 En una urna hay ***6*** esferas rojas, ***8*** esferas azules y ***10*** esferas blancas. ¿Cual es el mínimo número de esferas que se han de extraer para tener la seguridad de haber extraído dos esferas del mismo color de dos de los colores?

A) 11 ***B) 12*** ***C) 13***
D) 14 ***E) 15***

02 Se tiene dos cajas conteniendo la primera ***5*** lapiceros rojos y ***5*** azules; la segunda ***5*** plumones rojos y ***5*** azules. ¿Cuantas extracciones se deben realizar, al azar y como mínimo, para estar seguros de obtener ***3*** lapiceros y ***3*** plumones todos del mismo color?

A) 5 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 13*** ***E) 8***

03 De ***10*** esferas negras, ***8*** azules, ***7*** blancas y ***11*** verdes, ¿cual es el mínimo número de esferas que hay que extraer para tener la certeza de haber extraído por lo menos ***5*** de dos colores?

A) 22 ***B) 23*** ***C) 24*** ***D) 25*** ***E) 26***

04 En una urna hay ***15*** esferas blancas, ***12*** rojas y ***10*** celestes. ¿Cual es el mínimo número de esferas que se han de extraer para tener la seguridad de haber extraído por lo menos una de cada color?

A) 26 ***B) 27*** ***C) 28*** ***D) 30*** ***E) 31***

05 En una reunión están presentes ***240*** personas. ¿Cuántas personas, como mínimo, deberán adicionarse en dicha reunión, de manera que hayan por lo menos cuatro personas cuyas fechas de cumpleaños (día y mes) sean iguales?

A) 854 ***B) 859*** ***C) 746*** ***D) 857*** ***E)798***

06 En una caja hay ***10*** pares de guantes de color azul y ***10*** pares de guantes de color blanco. ¿Cuántos guantes se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la certeza de haber conseguido dos pares de guantes utilizables en colores diferentes?

A) 32 ***B) 30*** ***C) 35*** ***D) 31*** ***E) 28***

07 Se tiene bolos numerados del ***1*** al ***20***. ¿Cuántos bolos, como mínimo, se deberán extraer al azar para estar completamente seguros de que la suma de los números de los bolos extraídos sea mayor o igual que ***80***?

A) 12 ***B) 14*** ***C) 10*** ***D) 17*** ***E) 13***

08 Se tiene ***3*** cajas, en una hay ***10*** dados negros y ***10*** blancos; en la otra hay ***10*** esferas blancas y ***10*** negras, y en la última hay ***10*** chapas blancas y ***10*** negras. ¿Cuál es el menor número de objetos que se deben sacar de las tres cajas para tener necesariamente entre ellos un par de dados, un par de esferas y un par de chapas, todos del mismo color?

A) 21 ***B) 18*** ***C) 27*** ***D) 23*** ***E) 16***

09 Se tiene ***3*** cajas, en una hay ***6*** esferas blancas, ***6*** esferas azules y ***6*** esferas negras; en otra hay ***6*** conos blancos, ***6*** conos azules y ***6*** conos negros, y en la tercera caja hay ***6*** cubos blancos, ***6*** cubos azules y ***6*** cubos negros. ¿Cuántos objetos se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la certeza de haber obtenido un par de esferas, un par de conos y un par de cubos, todos del mismo color?

A) 26 ***B) 11*** ***C) 16*** ***D) 14*** ***E) 15***

10 Se tiene una bolsa con ***7*** caramelos de fresa, ***5*** caramelos de limón y ***9*** caramelos de menta. ¿Cuál es el mínimo número de caramelos que hay que sacar al azar, para tener la seguridad de haber extraído, por lo menos, uno de cada sabor?

A) 16 ***B) 20*** ***C) 18***
D) 17 ***E) 19***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)[illegible]	2)B	3)B	4)E	5)E	6)A	7)[illegible]	8)C	9)C	10)D
11)D	12)[illegible]	13)E	14)C	15)B	16)[illegible]	17)C	18)[illegible]	19)A	20)[illegible]
1)C	2)D	3)B	4)C	5)B	6)D	7)E	8)B	9)D	10)D

RETO 1 :

Dicen que un hombre estaba durmiendo y sognaba que estaba desactivando una bomba de relojeria que podia estallar en cualquier momento.De repente sono el despertador con estruendo y el hombre se desperto tan sobresaltado que le dio un infarto al instante,sin poder pronunciar palabra y sin tener tiempo alguno para reaccionar y murio sin remedio. ES ESTA HISTORIA VERDADERA O FALSA?

RETO 2 :

Dos hombres estan encerrados en una habitación sin ventanas a la que pudieron ingresar llevando un objeto cualquiera. La habitacion no cuenta con conductos de aire, rejillas ni ninguna otra salida al exterior que no sea la puerta (la misma cierra la habitacion casi hermeticamente, lo que impide pasar objetos de la habitacion hacia afuera o viceversa). La policia abre la puerta y encuentra a uno de los dos hombres muerto de 10 puñaladas sin embargo jamas fue encontrada el arma homicida. ¿ Como se explica?

RETO 3 :

Erase un emirato cuyo Jeque estaba preocupado por la falta de mujeres para su haren. Consulto a su asesor estadistico-matematico Abdul «El oque» Fernandez y este le dijo «En la region del norte hay 1048576 familias que no tienen hijos y dado que de cada dos nacimientos nacen exactamente un ninio y una ninia, hagamos una ley que obligue a cada familia a tener hijos hasta el nacimiento del primer varon, es decir que deberan continuar procreando mientras el hijo nacido sea ninia. Las familias asi creadas tendran 3 ninias y 1 ninio, 10 ninias y un ninio y así, por lo cual habrá muchas mas mujeres que varones para la proxima generacion». El Jeque le hizo caso y suponiendo que el tiempo transcurrido no es un problema (es decir se pueden tener hijos ad infinitum (idea interesante si las hay por lo de los intentos)), el Jeque mando a decapitar al «El Roque». Sabiendo que todas las familias cumplieron con la ley al pie de la letra, porque el Jeque realizo semejante cosa? Cuantos ninios y cuantas ninias resultaron de la aplicacion de esta ley (recordar el tiempo no es problema)

RETO 4 :

Los autos que chocaron: en una ruta cuya máxima velocidad era ***50 Km*** por hora chocaron de frente ***2*** autos de igual marca y modelo pero uno rojo y uno azul. Tontin dijo: Por testigos sabemos que sumando las velocidades obtenemos ***100 km/h***. Con este unico e importante dato sin ninguna duda Piolin encarcelo al conductor del auto azul por exceso de velocidad. Este conductor todavia preso, sigue preguntandose como hizo Piolin. Podemos ayudar al conductor?

ORDENAMIENTO LINEAL

CAPITULO 013

OBJETIVOS :

* *Ordenar y relacionar informaciones.*
* *Afianzar la capacidad de orden y relación , como también analítica .*
* *Ejercitar la rapidez mental en el razonamiento ordenado.*
* *Esquematizar los datos usando gráficos, líneas, figuras, etc.*
* *Desarrollar la habilidad analítica.*

INTRODUCCION :

En este capítulo encontraremos problemas en los que es indispensable emplear esquemas para ordenar datos: competencias, personas que viven en edificios, personas sentadas en una banca, hechos. etc. Sólo siendo muy ordenados se logrará dar soluciones rápidas a las diferentes situaciones presentadas.

Debemos tratar de representar gráfica y esquemáticamente lo que dice el ejercicio y no tratar de llevar todos los datos y relaciones en la mente , pues sería muy confuso desarrollar los ejercicios.

ORDENAMIENTO DE INFORMACIÓN

Como su nombre lo indica, el objetivo del presente capítulo , consiste en ordenar convenientemente la información que, en la mayoría de los casos, se nos entrega desordenada.

En éste capítulo nos encontraremos con diversos tipos de problemas, en cuya resolución debemos tener en cuenta las siguientes sugerencias:

* La información que nos brinda el problema se debe ordenar utilizando algún tipo de esquema que facilite la comprensión del mismo.
* Se debe tener mucho cuidado al analizar las situaciones posibles ya que muchas veces hay más de una solución que cumple las condiciones del problema.
* Se debe verificar que la respuesta final que hallemos cumpla con las condiciones del problema.

En el presente capítulo dedicaremos a resolver problemas de Ordenamiento Lineal

ORDENAMIENTO LINEAL

Consiste en ordenar un grupo de objetos o personas de acuerdo a una característica común, por ejemplo: la posición, el peso, la edad, la talla, la antigüedad, etc.

El ordenamiento lineal se subdivide en:

* ***El ordenamiento lineal horizontal :***

Ejemplo: El orden de llegada de autos de carrera a la meta.

* ***El ordenamiento lineal vertical:***

Ejemplo: la distribución de departamentos dentro de un edificio.

ORDENAMIENTO HORIZONTAL Y VERTICAL

Se trata de situaciones que presentan característicamente criterios de comparación cuantitativa; utilizando mayormente la palabra mayor, menor , más , menos , adelante , primero , ... etc. Como por ejemplo : El orden de la llegada de una competencia atlética , la relación de las edades de un grupo de estudiantes , comparación de estaturas, etc . Para la solución de éste tipo de problemas es conveniente la utilización de un segmento de recta puntualizando en éste la información , con precisión, estableciendo las relaciones entre los datos que presente el enunciado , es recomendable no suponer lo que el problema no señale .

Debemos tomar en cuenta :

1) "*A*" a la derecha de "*B*" : $B \longrightarrow A$

"*A*" está a la derecha de "*B*" no implica necesariamente que «*A*» esté junto a «*B*»

2) Izquierda de "*P*" Derecha de "*P*"

$\longleftarrow (P) \longrightarrow$

3) "*A*" a la izquierda de "*B*" : $A \longleftarrow B$

4) "*A*" junto y a la derecha de "*B*"

B	A

5) "*A*" y "*B*" están adyacentes o contiguos.

B	A

ó

A	B

6) "*A*" junto y a la izquierda de "*B*".

A	B

7) "*A*" se sienta a dos sitios de "*B*".

A		B

ó

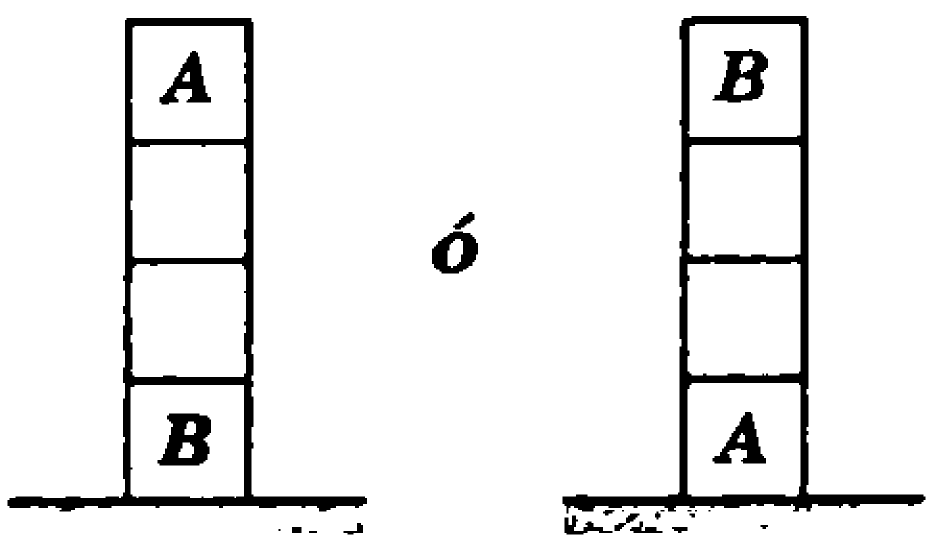
B		A

Si "*B*" está en el primer casillero, entonces "*A*" está en el tercero.

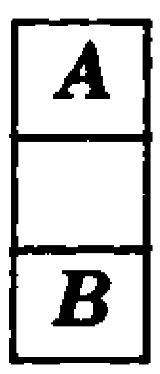
8) "*A*" se sienta en el extremo izquierdo, y "*B*" a tres sitios de él.

A			B

9) "*A*" está a tres pisos de "*B*" (en un edificio de cuatro pisos).



10) Para ir de "*A*" a "*B*" hay que bajar dos pisos.



11) "*A*" está adyacente a "*B*" y "*C*".

B	A	C

ó

C	A	B

* Se empezará ordenando por el dato más conciso (que sirva como una referencia inicial).

· "*A*" se encuentra entre «*B*» y «*C*» no necesariamente significa que está junto a ellos.

"A se encuentra a la derecha de B" **B ... A** Entre ellos puede que se encuentre otro elemento	**"A está adyacente a B"** **A B** Puede ser AB o BA
"A está junto y a la derecha de B" **B A**	**"A está entre B y C"** **C...A...B** Puede ser C...A...B ó B...A...C
"A está a la izquierda de B" **A...B** Entre ellos puede que se encuentre otro elemento	**"A está adyacente a B y C"** **B A C** Puede ser BAC o CAB

"A se encuentra a la derecha de B y a la izquierda de C" **B ... A ... C** Entre A y B puede haber otros elementos. Entre A y C puede haber otros elementos	**"A está dos lugares a la derecha de B"** **B ___ A**
	"A está dejando dos lugares a la derecha de B" **B ___ ___ A**

OBSERVACIÓN:

Para que una proposición sea verdadera, se debe verificar en todas las posibilidades; basta que no se cumpla en una de ellas, ya será falsa.

Tu esquema debe representar todos los posibles ordenamientos generados por los datos y reglas del problema.

Veamos los siguientes ejemplos:

Casa de Julio *Casa de Robin* *Casa de Jorge* *Casa de Fernando*

* La casa de Robin está a la derecha de la casa de Julio

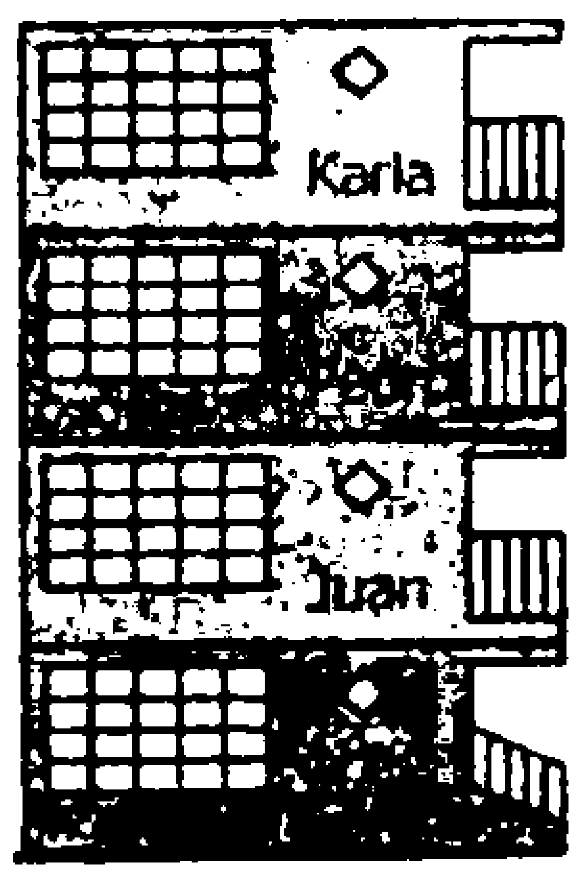
* La casa de Jorge está a la izquierda de la casa de Fernando

* La casa de Julio está al extremo izquierdo

* La casa de Fernando está al extremo derecho.

* La casa de Jorge está adyacente a las casas de Robin y Fernando

* La casa de Robin se encuentra entre las casas de Julio y Fernando



*Karla vive más arriba que Juan.

*Ana vive más abajo que Pedro.

*Juan vive adyacente a Pedro y Ana.

* Pedro vive entre Karla y Ana.

EJEMPLO 1 :

Claudio es más alto que César. Pablo es más bajo que Vicente. Alfredo es más alto que Raúl. Claudio es menos alto que Pablo. Alfredo no llega a ser tan alto como César. ¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa?

A) Pablo es más alto que César.

B) Claudio es más bajo que Vicente.
C) Alfredo es menos alto que Claudio.
D) Raúl es más bajo que Pablo.
E) Raúl es menos bajo que César.

RESOLUCIÓN :

• Grafiquemos el *1er* dato :

Cl
Cé

• Ahora busca un dato que se relacione con Claudio o cón César *(4° y 5°)*:

Pa
Cl
Cé
Al

• Con los otros datos se completa el ordenamiento:

Vi
Pa
Cl
Cé
Al
Ra

* La alternativa ***"E"*** indica que : "Raúl es ***menos bajo*** que César", que equivale a decir: "Raúl ***más alto*** que César", lo cual según el gráfico, ***es falso***.

RPTA: "E"

EJEMPLO 2 :

Chosica está ubicado al este de San Mateo , Huancayo se ubica al oeste de Pucallpa . Chosica a su vez está ubicado al oeste de Huancayo . ¿Cuál de los pueblos está ubicado más al oeste?

A)Chosica ***B)Pucallpa***
C)San Mateo ***D)Huancayo***

RESOLUCIÓN :

Haciendo gráficos de acuerdo al enunciado así :

* Chosica está ubicado al este de San Mateo :

oeste —— ***San Mateo*** —— ***Chosica*** —— ***este***

* Huancayo se ubica al oeste de Pucallpa :

oeste —— ***Huancayo*** —— ***Pucallpa*** —— ***este***

* Chosica al oeste de Huancayo

oeste —— ***Chosica*** —— ***Huancayo*** —— ***este***

*Finalmente relacionamos las gráficas , tenemos :

oeste —— ***San Mateo*** —— ***Chosica*** —— ***Huancayo*** —— ***Pucallpa*** —— ***este***

RPTA : "C"

EJEMPLO 3 :

En un edificio de ***6*** pisos viven las familias : Andrade, Barrantes , Canales , Dávalos , Estrada y Alva .

Los pisos que ocupan las familias Dávalos y Estrada son contiguos . El piso de la familia Barrantes no es contiguo al de la familia Andrade .

Un piso separa las casas de las familias Canales y Dávalos . El piso de la familia Andrade está separado por tres pisos del piso de la familia Canales .

Los Barrantes viven en la planta baja separados por tres pisos de los Estrada .

Un piso separa a los Estrada de los Alva.

Se quiere saber ¿En qué piso viven los Dávalos?

A) 1er Piso ***B) 2do Piso***
C) Tercer Piso ***D) Cuarto Piso***

RESOLUCIÓN :

1ro)

(I)	(II)
Dávalos	Estrada
Estrada	Dávalos

2do) Barrantes y Andrade no juntos

3ro)

(I)	(II)
Canales	Dávalos
Dávalos	Canales

4to)

Andrade
Canales

Se deduce que queda anulada (I) de la 3ra.

Finalmente :

Según 4to.	Andrade	
	Estrada	← Según 1ro.
	Dávalos	
	Alva	← Según último dato
	Canales	
	Barrantes	

⇒ Los Dávalos viven en el ***4to.*** piso

RPTA : "D"

EJERCICIO APLICATIVO :

* Pablo es más bajo que Joaquín y más alto que Andrés.

* Mario es más bajo que Joaquín.

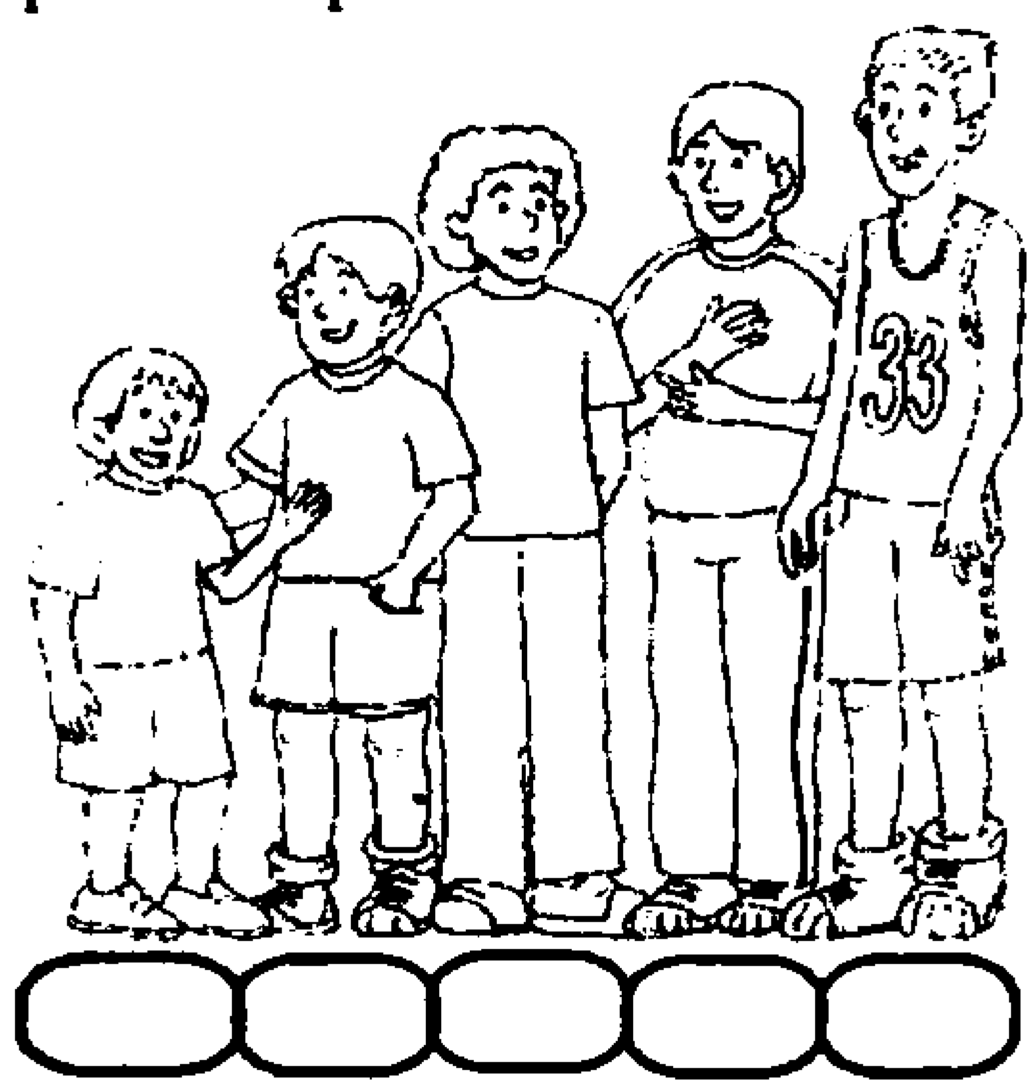
* Leonardo es más alto que Pablo.

* Mario no es más alto que Pablo.

* Sólo un integrante del grupo es más alto que Joaquín.

* Si Pablo mide ***1,50 m*** de estatura, ¿Cuál es el orden de mayor a menor según la estatura?

Coloca en los recuadros el nombre que corresponda.



EJEMPLO 4 :

Cuatro parejas de esposos se reúnen para jugar ajedrez. Como solo hay un tablero, ellos acuerdan lo siguiente:

•Ninguno de ellos puede jugar dos partidas seguidas.

•Marido y esposa no juegan entre sí.

•En la primera partida, Celina juega con Alberto.

•En la segunda, Ana juega con el marido de Julia.

•En la tercera, la esposa de Alberto juega con el marido de Ana.

•En la cuarta, Celina juega con Carlos.

•En la quinta, la esposa de Gustavo juega con Alberto.

¿Quién es la esposa de Raúl y quién es el marido de Elena?

RESOLUCIÓN:

De los datos :

•Esposos: Alberto, Carlos, Gustavo, Raúl.

•Esposas: Celina, Ana, Julia, Elena.

•Ninguno juega dos partidas seguidas.

•Marido y esposa no juegan entre sí.

Ordenamos según los datos mediante el siguiente esquema.

Orden en la partida:	*1ra*	*2da*	*3ra*	*4ta*	*5ta*
	Celina	Ana	esposa de Alberto	Celina	esposa de Gustavo
Mujeres:			se ubica Julia o Elena		no es Celina
Varones:	Aberto	esposo de Julia (no es Alberto)	esposo de Ana	Carlos	Alberto

⇒Se concluye que la esposa de Alberto es Elena, además, Celina no es esposa de Alberto, ni de Carlos ni de Gustavo.

⇒Celina es esposa de Raúl.

Luego, con las conclusiones se tiene

Orden en la partida:	*1ra*	*2da*	*3ra*	*4ta*	*5ta*
			esposa de Alberto	esposa de Raúl	esposa de Gustavo
Mujeres:	Celina	Ana	Elena	Celina	
Varones:	Alberto	esposo de Julia	esposo de Ana	Carlos	Alberto

De donde Celina es esposa de Raúl y Alberto es esposo de Elena.

¡ RECUERDA !

Recuerda que cualquier afirmación que se haga debe cumplirse necesariamente en todos los casos para que sea verdadera. Si con los datos que se tengan no se puede determinar el ordenamiento exacto, entonces, para que una afirmación sea verdadera, debe cumplirse en todos los ordenamientos posibles.

ORDENAMIENTO POR COMPARACIÓN CUANTITATIVA

Situaciones donde nos piden ordenar individuos según cualidades de mayor a menor o de menor a mayor, para lo cual se debe tener en cuenta las siguientes proposiciones y su respectiva simbolización:

1) "*A*" es mayor que "*B*" : $A>B$ ó $B<A$

2) "*A*" es menor que "*B*" : $A<B$ ó $B>A$

3) "*A*" no es mayor que "*B*" :

$$A \leq B \Rightarrow (A<B \text{ ó } A=B)$$

4) "*A*" no es menor que "*B*" :

$$A \geq B \Rightarrow (A>B \text{ ó } A=B)$$

* Decir: «*A*» no es mayor que «*B*» equivale a decir: «*A*» puede ser menor o igual que «*B*»

* Decir: «*A*» no es menor que «*B*» equivale a decir: «*A*» puede ser mayor o igual que «*B*»

5) "*A*" es menor que "*B*", pero mayor que "*C*"

$$C<A<B \text{ ó } B>A>C$$

6) "*A*" es menor que "*B*", y éste menor que "*C*"

$$(A<B \text{ y } B<C) \Rightarrow A<B<C$$

7) Si : $(A<B \text{ y } A=B) \Rightarrow A<B$

8) Si : $B>A$ y $C>A$, entonces no hay comparación entre "*B*" y "*C*" (No se puede determinar quien es el mayor)

9) Si : $A=\dfrac{B+C}{2}$ y $B<C \Rightarrow B<A<C$

10) Si: $A>B>C \Rightarrow A>C$

EJEMPLO 1 :

En cierta prueba, Taty obtuvo menos puntos que Vanessa, Karina menos puntos que Sandra, Noemí el mismo puntaje que Cory; Taty más puntaje que Zaray; Karina el mismo puntaje que Vanessa y Noemí más puntos que Sandra. ¿Quién obtuvo el menor puntaje?

A) Taty B) Noemí C) Zaray D) Vanessa E) Karina

RESOLUCIÓN :

* Se tratará de colocar las comparaciones en un solo sentido (ya sea todo a mayor o únicamente menor).

Taty < Vanessa .... *(I)*

Karina< Sandra .... *(II)*

Noemí = Cory .... *(III)*

Zaray < Taty .... *(IV)*

Karina = Vanessa .... *(V)*

Sandra < Noemí .... *(VI)*

* Como nos piden la menor, descartaremos a las mayores , entonces :

* De *(I)* se elimina a Vanessa , como también Karina (según *V*)

* De *(II)* se elimina Sandra, como también Noemí (según *VI*); con lo cual también eliminamos a Cory

* Nos queda (*IV*), que indica que la menor de todas es Zaray

OBSERVACIÓN :

También hemos podido juntar todos los datos:

Zaray<Taty<Vanessa=Karina<Sandra<Noemi=Cory

EJEMPLO 2 :

Cinco personas rinden un examen .

Si se sabe que :

* ***B*** obtuvo un punto más que ***D*** .

* ***D*** obtuvo un punto más que ***C*** .

* ***E*** obtuvo dos puntos menos que ***D*** .

* ***B*** obtuvo dos puntos menos que ***A*** .

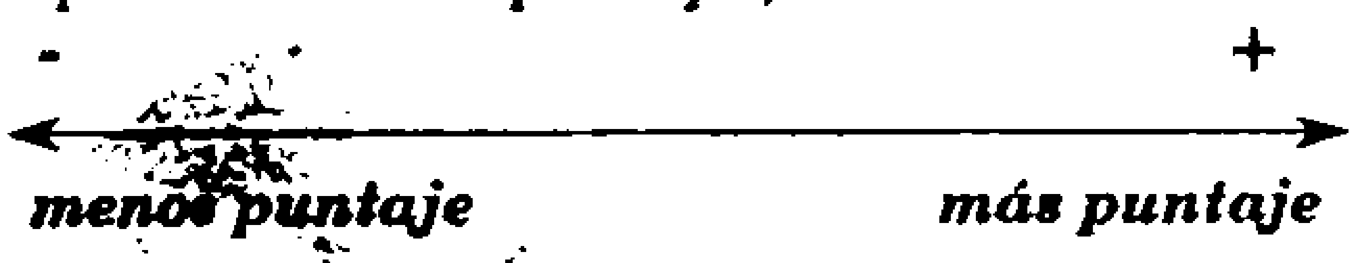
Ordena de manera creciente , e indica quien obtuvo el mayor puntaje .

RESOLUCIÓN :

* Tengamos presente dos sugerencias importantes , que nos permitan afrontar con éxito esta parte :

1°) Tomar una orientación .

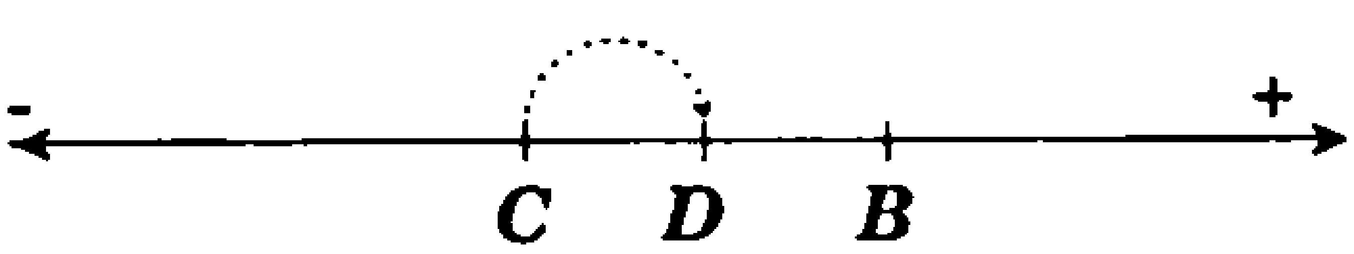
Por ejemplo si dibujamos una línea , entonces hacia el lado derecho consideramos más puntaje y hacia el lado izquierdo menos puntaje , así :



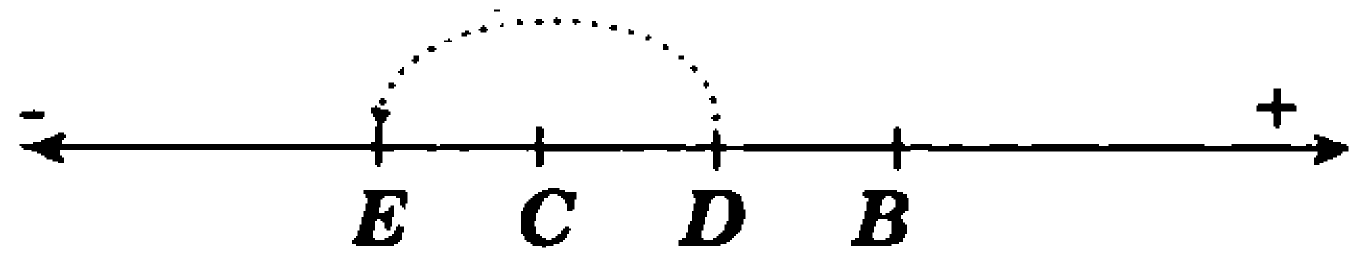
2°) *Colocar toda información en función de esa orientación veamos:*

* "***B*** obtuvo un punto más que ***D***"

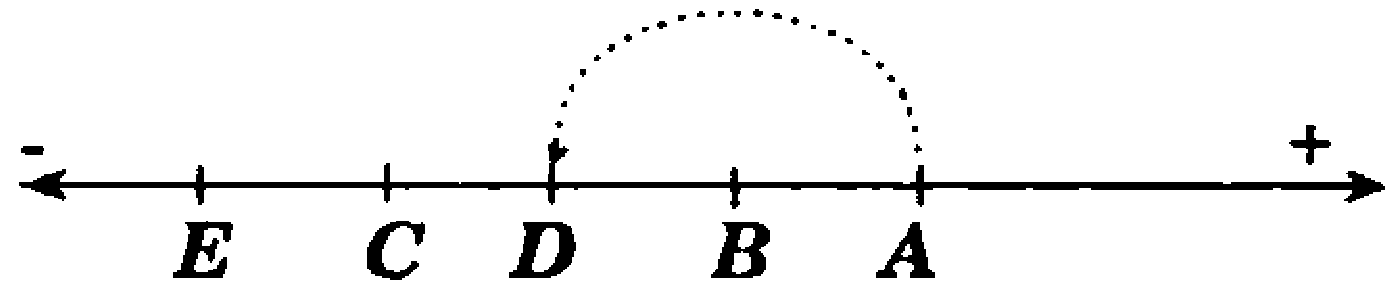
* "***D*** obtuvo un punto más que ***C*** "



* "***E*** obtuvo dos puntos menos que ***D***"



* "***D*** obtuvo dos puntos menos que ***A***"

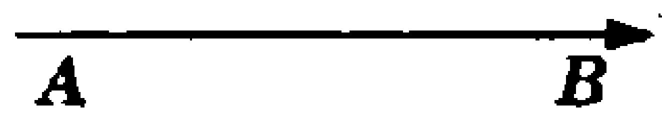


⇒ En el diagrama final podemos observar que quien obtuvo más puntaje fue "***A***" .

DIAGRAMA DE REDES

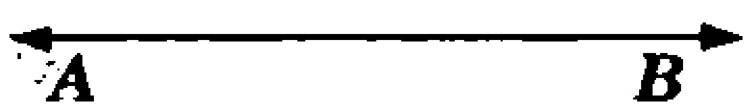
Son aquellos gráficos que representan caminos que unen dos puntos. Estos caminos pueden ser en un sólo sentido o doble sentido .

EN UN SENTIDO



Representa que se puede ir desde "***A***" hacia "***B***" , pero no se puede regresar de "***B***" hacia "***A***" .

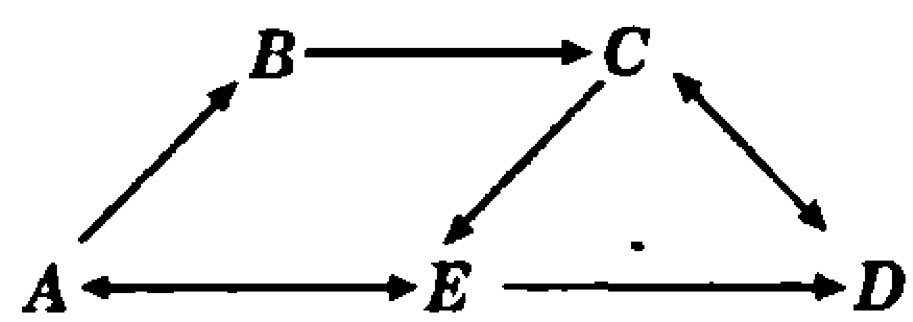
EN DOBLE SENTIDO



Representa que se puede ir desde "***A***" hacia "***B***" , y también se puede ir de "***B***" hacia "***A***" .

La combinación de más de dos puntos con sus respectivas conexiones en uno u otro sentido es lo que determina una ***RED.***

EJEMPLO APLICATIVO 1 :



El esquema representa una RED de caminos , de donde se observa lo siguiente:

• De "***A***" se puede ir a "***B***" y "***E***" directamente

• De "***B***" se puede ir a "***C***" directamente

• De "***C***" se puede ir a "***E***" y "***D***" directamente

• De "***D***" se puede ir a "***C***" directamente

• De "***E***" se puede ir a "***A***" y "***D***" directamente

De acuerdo a lo anterior, responder:

PREGUNTA 1 :

Si se desea ir de "***B***" a "***D***" , ¿qué rutas son posibles?

I) BCD ***II) BCED*** ***III) BAED***

RPTA: ....

PREGUNTA 2:

¿De cuántas maneras se puede viajar de "A" hacia "D", sin pasar dos veces por un mismo punto?

RPTA: ....

EJEMPLO APLICATIVO 2:

La red vial en cierta ciudad, permite viajar directamente de la siguiente manera:

- *De la Alcaldía al Museo y a la Biblioteca*
- *Del Museo a la Zona Comercial*
- *De la Biblioteca a la Alcaldía y Aeropuerto*
- *Del Aeropuerto a la Alcaldía y Zona Comercial.*
- *De la Zona Comercial al Museo, la Biblioteca y el Puerto.*
- *Del Puerto a la Zona Comercial.*

De acuerdo a lo anterior, responde:

PREGUNTA 1:

Si una persona se encuentra en la Biblioteca y quiere ir al Puerto, ¿cuántas rutas puede usar, sin pasar dos veces por un mismo lugar?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

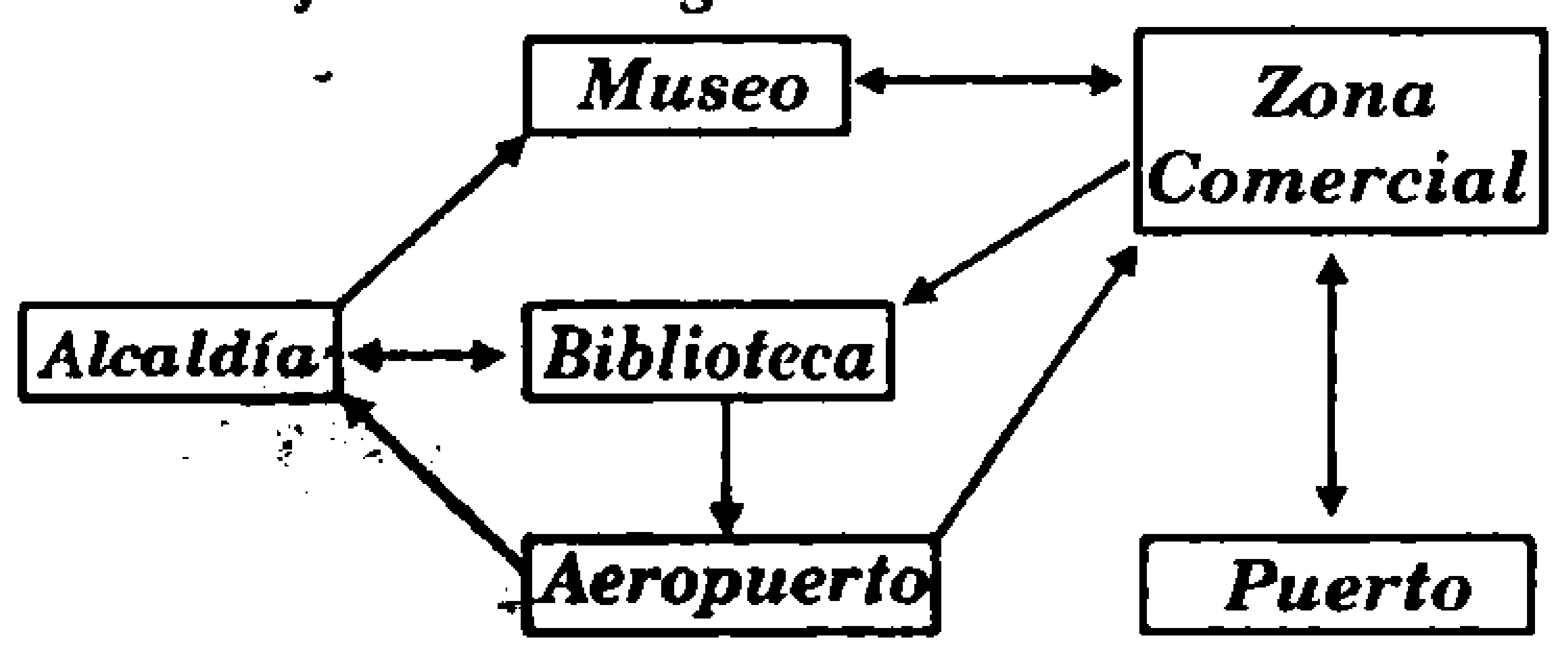
PREGUNTA 2:

Si una persona está en el Museo y quiere ir al Aeropuerto, la ruta que debe seguir es:

A) Museo - Alcaldía - Biblioteca - Aeropuerto
B) Museo - Biblioteca - Aeropuerto
C) Museo - Zona Comercial - Aeropuerto
D) Museo-Zona Comercial -Biblioteca -Aeropuerto
E) Museo - Zona Comercial - Puerto - Aeropuerto

RESOLUCIÓN:

Se construye una red siguiendo las instrucciones:



RESOLUCIÓN 1:

- Biblioteca - Aeropuerto - Zona Comercial - Puerto
- Biblioteca - Aeropuerto - Alcaldía - Museo - Zona Comercial - Puerto
- Biblioteca - Alcaldía - Museo - Zona Comercial- Puerto

RPTA: 3 MANERAS

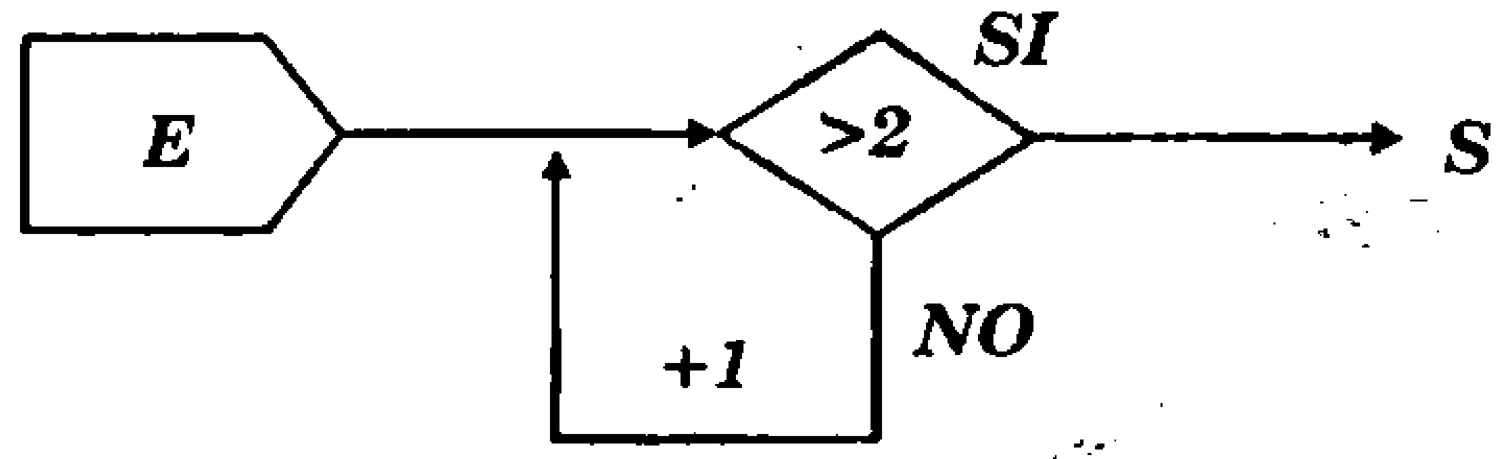
RESOLUCION 2:

A) No puede ser Museo → Alcaldía
B) No puede ser Museo → Biblioteca
C) No puede ser Zona Comercia → Aeropuerto
D) Sí puede realizar el recorrido
Museo → Zona Comercial → Biblioteca → Aeropuerto
E) No puede ser Puerto → Aeropuerto

DIAGRAMA DE FLUJOS

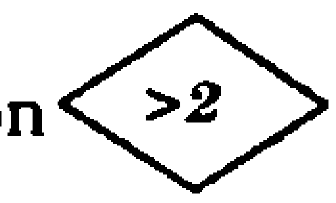
Son esquemas gráficos que representan instrucciones (usando las operaciones aritméticas) cuyos resultados deben cumplir o no cierta condición para poder seguir otra instrucción.

EJEMPLO 1:



El diagrama anterior indica que en "*E*" (entrada) se coloca un número y siguiendo la flecha se llega al "rombo" donde hay una condición, si el número de "*E*" es mayor que ***2***, sigue la flecha hasta "*S*" (salida), pero si no es mayor que ***2*** sigue la otra flecha donde después de sumarle ***1***, se llega a la primera flecha y se repite el proceso.

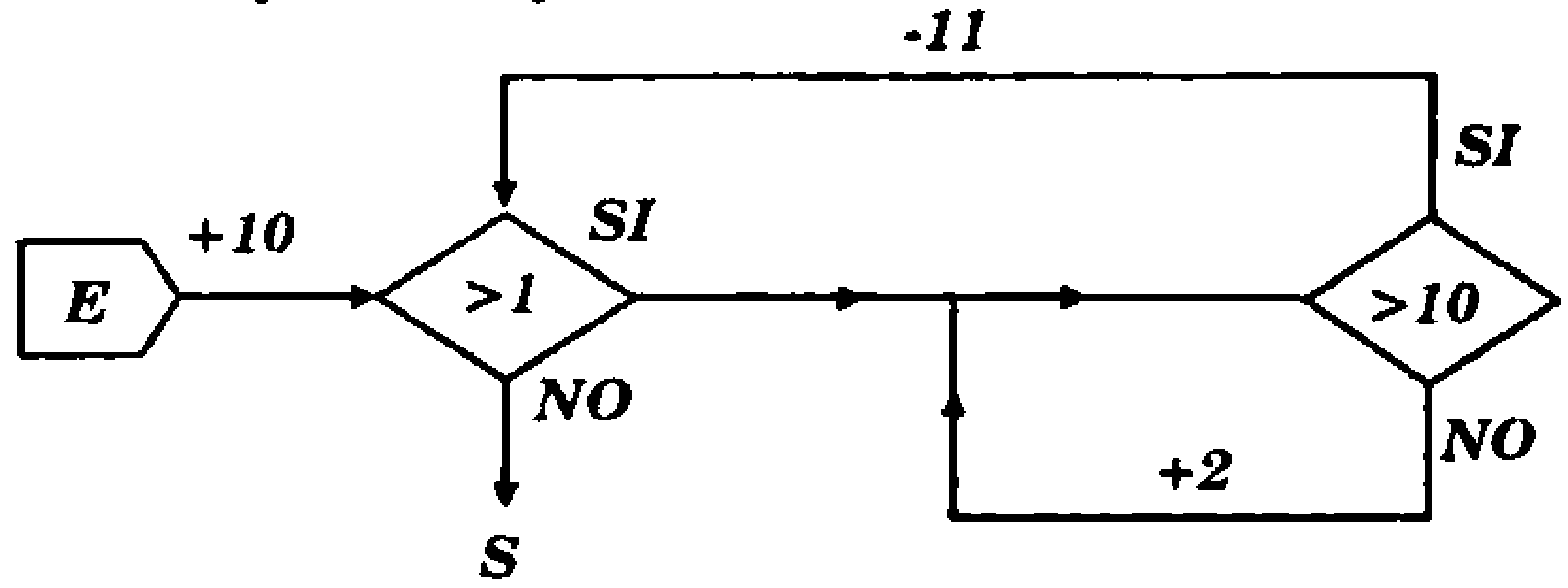
* Por ejemplo :

si: ***E=2***, se llega a la condición 

y no cumple, entonces la otra flecha indica que hay que sumar ***1***, luego: ***2+1=3***. Ahora el ***3*** sí cumple la condición y por lo tanto por "*S*" sale ***3***.

EJEMPLO 2:

Según el diagrama, por "*E*" ingresa – ***8***, entonces al final del proceso, por '*S*'' resultará:



RESOLUCIÓN:

Por "*E*" ingresa – ***8***, luego: – ***8+10=2***

¿2>1? sí, entonces se sigue a la siguiente condición de acuerdo a la flecha.

* Luego:

¿2>10? NO ,entonces corresponde: ***2+2= 4,***
¿4>10? NO , entonces corresponde: ***4+2= 6,***
¿6>10? NO, entonces corresponde:***6+2= 8,***
¿8>10? NO, entonces corresponde:***8+2=10,***
¿10>10? NO,entonces corresponde:***10+2 =12,***

¿12>10? SÍ, entonces corresponde: *12-11= 1,*
¿1>1? NO, entonces por *"S"* resulta: *1*

RECORDAR:

I) Las flechas *(→)* indican una instrucción seguir, o sea una operación por efectuar.

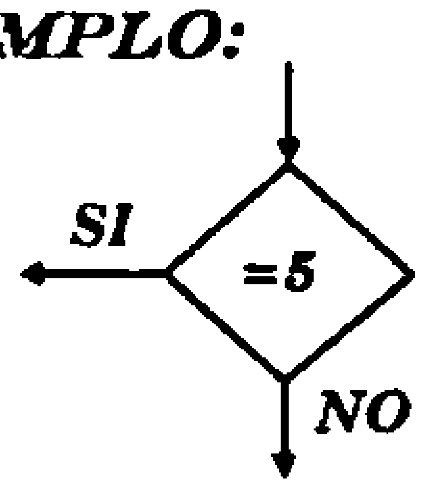
EJEMPLO:

$\xrightarrow{+3}$ ***...sumar 3***

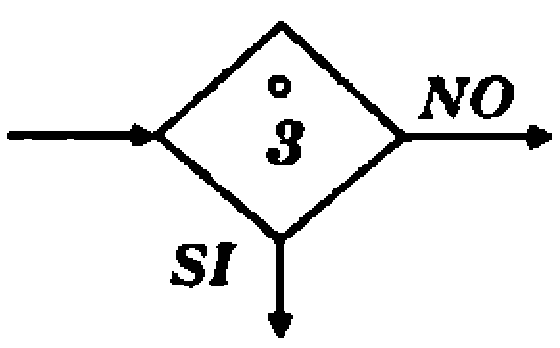
$\xrightarrow{\times 5}$ ***...multiplicar por 5***

II) Los rombos *(◇)* indican una determinada condición, que se puede cumplir **SÍ** o **NO**

EJEMPLO:



¿ es igual a 5?



¿es múltiplo de 3?

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Miguel y Enrique nacieron el mismo día y el mismo año . Oliver es menor que Enrique . Claudio es menor que Oliver , pero Gerardo es mayor que Miguel . Por lo tanto el menor de todos es :

A) Enrique ***B) Gerardo*** ***C) Miguel***
D) Oliver ***E) Claudio***

RESOLUCIÓN :

* De los datos tenemos :
* Miguel = Enrique * Oliver < Enrique
* Claudio < Oliver * Gerardo > Miguel
* Relacionándolos se concluye :

Gerardo > Miguel = Enrique > Oliver > Claudio

⇒ El menor de todos es Claudio .

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Tres amigos , Raúl , Félix y Ricardo , deciden ponerse a trabajar para afrontar sus gastos. Raúl gana menos que Félix y éste menos que Ricardo. Raúl gasta más que Félix y éste más que Ricardo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente verdadera?

I) Sí Ricardo gasta todo su dinero , Raúl queda endeudado.

II) Si Ricardo ahorra , Raúl ahorra.

III) Sí Raúl y Félix ahorran , Félix tendrá más dinero que Raúl.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN :

• *Ganan:*	• *Gastan:*
+ *Ricardo*	+ *Raúl*
Félix	*Félix*
− *Raúl*	− *Ricardo*

• Analicemos las alternativas:

I) Si Ricardo gasta todo su dinero , Raúl debe gastar aún más . pero como Raúl gana menos, entonces quedaría endeudado. ***(VERDADERO)***

II) Si Ricardo ahorra gastaría menos de lo que gana , pero no se podría determinar si con Raúl sucede lo mismo. ....*(?)*

III) Si Raúl y Félix ahorran , depende del monto del ahorro de cada uno, para determinar quien tendrá más dinero. .... *(?)*

RPTA: "A"

PROBLEMA 3 :

4 amigos : Lenín , Benito , José y Clay viven en un edificio en diferentes pisos , ya se sabe que :

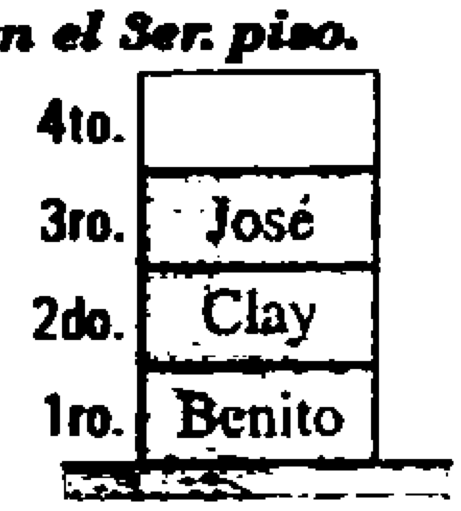
* Benito vive en el primer piso .
* Clay vive contiguo a José y Benito .
* Lenín vive más arriba que José .

Es cierto que :

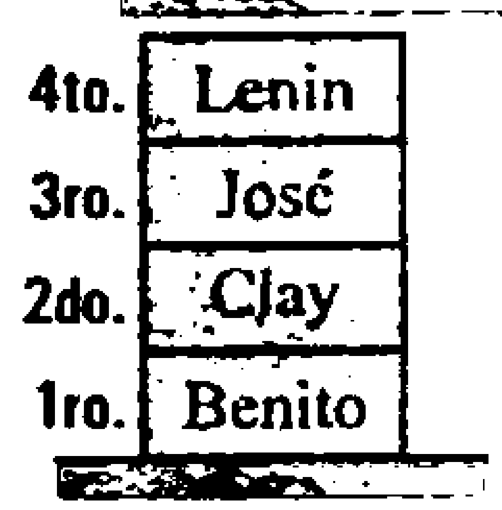
A)Clay vive en el 3er. piso. ***B)José vive en el 2do. piso.***
C)Lenín vive en el 3er. piso ***D)José vive en el 3er. piso.***

RESOLUCIÓN:

* Benito vive en el *1er*. piso, además Clay vive adyacente a José y Benito .



* Lenín vive más arriba que José .



⇒ Será cierto que José vive en el tercer piso .

RPTA: "D"

PROBLEMA 4 :

En una carrera participaron tres parejas de esposos: Los Arévalo , Los Castillo y los Gutiérrez. Se sabe que:

• Los esposos llegaron antes que sus respectivas esposas.
• La Sra. Gutiérrez llegó antes que el Sr. Arévalo.
• El Sr. Castillo no llegó primero y fue superado por una dama.
• La Sra. Arévalo llegó quinta , justo después que su esposo.

¿En qué lugares llegaron el Sr. y la Sra. Castillo respectivamente?

A) 4°– 6° B) 3°– 6° C) 1°–3° D) 3°–4° E) 2°–6°

RESOLUCIÓN :

* Empecemos ubicando el último dato :

1°	2°	3°	4°	5°	6°
			Sr. A	Sr. A	

• Del tercer dato , si el Sr. Castillo no fue primero , dicho lugar debe corresponder al Sr. Gutiérrez: además si el Sr. Castillo fue superado por una dama , tampoco puede llegar *2°*, por lo cual su puesto es el *3°*:

1°	2°	3°	4°	5°	6°
Sr. G		Sr. C	Sr. A	Sr. A	

• Teniendo en cuenta que cada esposo supera a su esposa , completamos las ubicaciones restantes:

1°	2°	3°	4°	5°	6°
Sr. G	Sr. G	Sr. C ✓	Sr. A	Sr. A	Sr. C ✓

RPTA: "B"

PROBLEMA 5 :

Cinco autos numerados del *1* al *5* participan en una carrera:

• El auto *1* llegó en tercer lugar.

• La diferencia en la numeración de los dos últimos autos en llegar es igual a *2*.

• La numeración del auto no coincidió con su orden de llegada.

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son necesariamente ciertas?

I) No es cierto Que el auto *2* llegó en último lugar.

II) El auto *3* ganó la carrera.

III) El auto *4* llegó después del auto *2*.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I y II E) I y III

RESOLUCIÓN :

• Del primer dato :

1°	2°	3°	4°	5°
		1		

• Del segundo dato , los dos últimos autos solo podrían ser *5* y *3* ó *2* y *4 ;* teniendo en cuenta el último dato , habría dos opciones :

1°	2°	3°	4°	5°
		1	5	3
		1	2	4

• Con el tercer dato completamos los lugares restantes:

1°	2°	3°	4°	5°
2	4	1	5	3
3	5	1	2	4
5	3			

• Analicemos las alternativas :

I) Cierta , porque se cumple en todos los casos.

II) No necesariamente , porque también pudieron ganar *4* ó *5*.

III) Cierta , por que se cumple en los tres casos.

RPTA: "E"

PROBLEMA 6 :

Sobre una mesa hay *3* naipes en hilera. Se sabe que:
• A la izquierda del Rey hay un as.
• A la derecha de la jota hay un diamante.
• A la izquierda del diamante hay un trébol.
• A la derecha del corazón hay una jota.

¿Cuál es el naipe del medio?

A) Jota de trébol B) As de corazones
C) Rey de diamante D) Jota de diamante

RESOLUCIÓN :

* Ten el cuenta que solo son *3* naipes : Rey *(K)*, as *(A)* y jota *(J)*; y uno de estos es de ♦ otro de ♣ y el otro de ♥.

• Es recomendable empezar a ubicar primero aquellos datos que se encuentren relacionados , como el : *2°* y el *4°* que informan sobre la jota:

[J] *Derecha*→ [♦] *y* [♥] *Derecha*→ [J]

• Con dichos datos podemos concluir que la *J* se ubicará en el medio , y por descarte su figura será el trébol :

[♥] [J♣] ✓ [J♦]

RPTA: "A"

PROBLEMA 7 :

Seis amigos *(A, B, C, D, E* y *F)* se sientan en una fila de asientos contiguos en una iglesia. Se sabe Que:

• *A* se sienta junto y a la izquierda de *B*

• *C* está a la derecha de *A* y entre *F* y *D*

• *D* está junto y a la izquierda de *E*

• *F* está a la izquierda de *B*

¿Quién ocupa el cuarto asiento de izquierda a derecha?

A) C *B) B* *C) D* *D) A* *E) F*

RESOLUCIÓN :

Izquierda ⟵⟶ *Derecha*

• Del 1^{er} dato : [A|B]

• Del 4^{to} dato : F [A|B]

• Del 2^{do} dato : F [A|B] C D

• Del 3^{er} dato : F [A|B] C D [D|E]

	1°	2°	3°	4°	5°	6°
⟶	F	A	B	C ✓	D	E

RPTA: "A"

PROBLEMA 8 :

Pepe , Enrique , Rafael , Álvaro y Juan son amigos ,se sabe que :

* Enrique es mayor que Pepe , pero menor que Rafael
* Álvaro es mayor que Enrique,pero menor que Juan
* Juan es mayor que Álvaro , pero menor que Rafael.

Si los ubicamos por edades de mayor a menor , ¿quién ocupa la posición intermedia?

A) Juan *B) Enrique* *C) Pepe*
D) Álvaro *E) Rafael*

RESOLUCIÓN:

* De los datos, se deduce:

1°dato : $P<E<R$

2 °dato : $E<A<$ ⇒ $P<E<A<J<R$

3 °dato : $A < J < R$

* Por lo tanto , la posición intermedia la ocupa Álvaro.

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

De cuatro números : *A* , *B* , *C* y *D*, se sabe que:

• *A* es mayor que *B* • *C* es mayor que *D*

• *D* es menor que *C*

Para determinar el orden relativo entre los cuatro números , es suficiente saber que :

I) *A* es mayor que *C* *II)* *B* es mayor que *C*

A) I pero no II *B) II pero no I*
C) I y II a la vez *D) I ó II indistintamente*
E) falta información.

RESOLUCIÓN:

• Grafiquemos los datos :

A	A	C
B	D	D

• Usando el dato *I*:

A	A
C	B
D	

⇒ no conoceríamos la ubicación exacta de *B*.

• Usando el dato *II*: A, B, C ✓, D

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Tres amigas: María , Lucía y Irene están formando cola para entrar al circo . Si se sabe que Lucía no está delante de Irene , para determinar la posición de cada una con respecto a las otras , es necesario saber que:

I) María no está delante de Irene .

II) Lucía está detrás de María .

A) I pero no II *B) II pero no I* *C) I y II a la vez*
D) I ó II indistintamente. *E) F.D.*

RESOLUCIÓN :

Dato : *Irene* ⟶ *Lucía*

* Con *"I"* quedarán :

María ⟶ *Irene* ⟶ *Lucía*

* Con *"II"* quedarán :

Irene ⟶ *Lucía* ⟶ *María .*

RPTA: "D"

PROBLEMA 11 :

Si se sabe que Liliana es mayor que Lorena y que Melissa es mayor que Inés , pero que esta última no es menor que Liliana. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) Lorena no es mayor que Inés .
B) Melissa no es menor que Liliana .
C) Lorena no es menor que Melissa .
D) Inés no es menor que Lorena .

RESOLUCIÓN:

$Li > Lo$; $Me > I$; $I \geq Li$

"Si Inés no es menor que Liliana , entonces será mayor o igual"

* La afirmación que no es verdadera es la *C* .

"Lorena no es menor que Melissa".

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Roberto nació *5* años después que Jorge, pero *5* años antes que Martín, Carlos nació *2* años después que Roberto , Paúl nació *3* años después que Roberto.

Entonces :

A) Martín es menor que Carlos
B) Martín es mayor que Paúl
C) Paúl es el menor de todos
D) Martín no es el menor de todos
E) Paúl es mayor que Carlos

RESOLUCIÓN :

$J = R+5$; $M = R-5$; $C = R-2$; $P = R-3$ (MENOR) $\Rightarrow J > C > P > M$

RPTA: "A"

PROBLEMA 13 :

Jessica es más alta que Alexandra y más gorda que Ximena . Ximena es más alta que Katiuska y más flaca que Alexandra . Si Katiuska es más baja que Jessica y más gorda que Alexandra . ¿Quién es más alta y más flaca que Katiuska?

A) Jessica *B) Ximena* *C) Alexandra*
D) Jessica y Ximena *E) Ninguna*

RESOLUCIÓN :

RELACIÓN DE ESTATURA	RELACIÓN DE PESO
$J > A$	$J > X$
$X > K$	$A > X$
$J > K$	$K > A > X$

* Analizando , se deduce que las persona que cumple con las condiciones , es Ximena .

RPTA: "B"

PROBLEMA 14 :

María es menor que Juan , Rosa es mayor que María . Tres quintos de la edad de Juan es menos que cuatro séptimos de la edad de Rosa . ¿Quién es mayor?

A) María *B) Juan* *C) Rosa*
D) Juan y Rosa tienen la misma edad

RESOLUCIÓN:

* Si : $R=21 \Rightarrow J< 20$

$$M<J \;\; ; \;\; M<R \;\; ; \;\; \frac{3}{5}J<\frac{4}{7}R \;\; ; \;\; J<\frac{20}{21}R$$

* Luego la mayor será Rosa .

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

Cinco automóviles P , Q , R , S y T son comparados de acuerdo a su costo y tiempo de fabricación . Si se sabe que :

* P es menos caro que R y menos moderno que Q.
* Q es más caro que P y más moderno que T .
* R es más caro que T y más moderno que S .
* S es menos caro que P y más moderno que Q.
* T es más caro que Q y más moderno que P .

¿Cuál (es) de los siguientes autos es más caro que P y más moderno que T?

A) Sólo Q *B) Sólo R* *C) Sólo S* *D) Q v R* *E) R v S.*

RESOLUCIÓN:

* De acuerdo a su costo : $P < R$

$Q > P \longrightarrow P < R$
$R > T \longrightarrow T < R$
$S < P$
$T > Q \longrightarrow Q < T$

Juntando todo: $S < P < Q < T < R$

Los más caros que P son R, T y Q .

* De acuerdo a su tiempo de fabricación :

$P < Q \longrightarrow Q > P$
$Q > T$
$R > S$
$S > Q$
$T > P$

Juntando todo: $R > S > Q > T > P$

$\therefore$ *"Los más modernos que T son R , S y Q .*

* Piden los más caros que "P" y a la vez más modernos que "T", los únicos que cumplen son : R y Q .

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Un edificio de **6** pisos está ocupado por **6** familias . Cada familia ocupa un piso . Los Aburto viven **2** pisos más arriba que ios Calderón y **2** pisos más abajo que los Barrera . Los Durán viven en el segundo piso y los Gómez no viven adyacente con los Aburto . ¿En qué piso viven los Muñoz?

A) 1° *B) 3°* *C) 4°* *D) 5°* *E) 6°*

RESOLUCIÓN:

* Según el primer dato hay dos posibilidades :

Piso	(1)	(2)
6°		Barrera
5°	Barrera	
4°		Aburto
3°	Aburto	
2°		Calderón
1°	Calderón	

* Puesto que los Durán viven en el 2^do^. piso , sólo es posible *(1)* . Los Gómez no viven en el 4^to^. piso, sino en el 6^to^. En consecuencia los Muñoz viven en el 4^to^. piso .

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

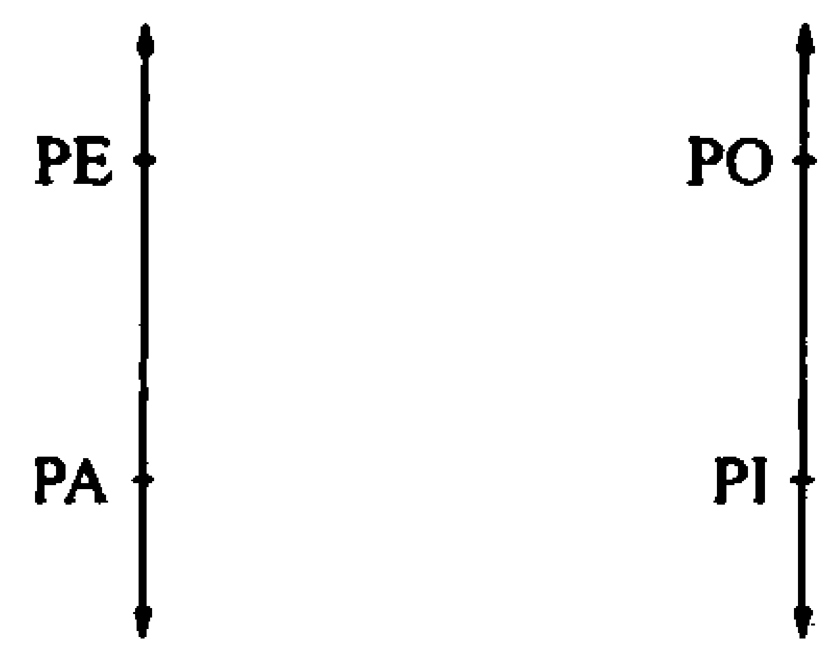
PA es menor que ***PE*** , ***PI*** es menor que ***PO*** y ***PE*** es menor que ***PI*** . ¿Cuál de ellos es mayor?

A) PA　*B) PE*　*C) PI*　*D) PO*　*E) PU*

RESOLUCIÓN :

* Empecemos representando en segmentos verticales la información inicial con precisión , no debemos suponer lo que el enunciado no indique ; veamos :

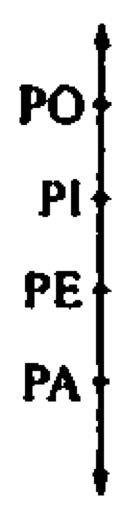
"PA es menor que PE"　"PI es menor que PO"



NOTA :

Nótese que es necesario trazar ***2*** segmentos debido a que no se presenta ningún vínculo entre las anteriores proposiciones.

"PA es menor que PI"



* Ahora utilicemos , el vínculo que los relaciona :

* Se aprecia que el mayor es ***"PO"***

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

En la llegada a la meta de los ***400*** metros planos en Sidney , un periodista hizo las siguientes anotaciones de los seis atletas participantes ***(N; P; M; Q; K*** y ***X)***:

* ***N*** llegó antes que ***P*** y después que M.

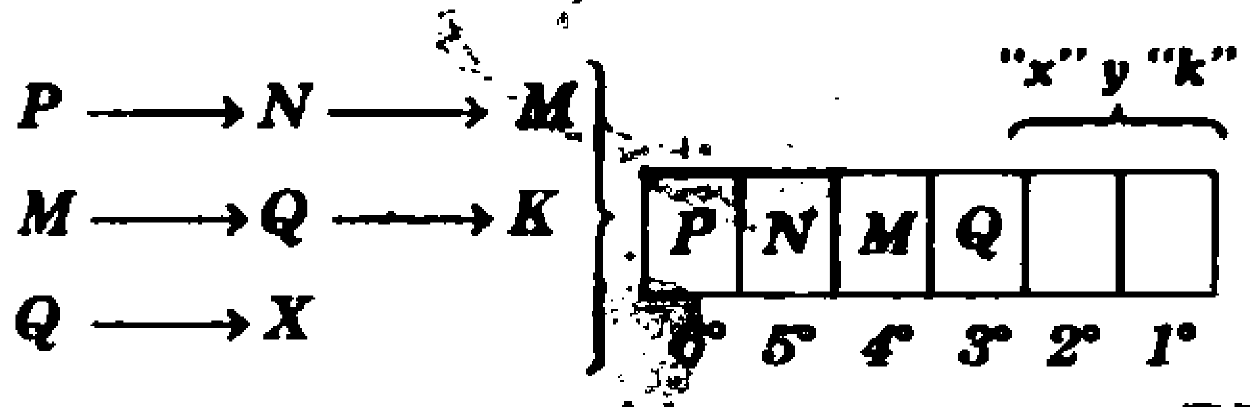
* ***M*** llegó después que ***Q*** y éste después que K .

* ***X*** llegó antes que ***Q*** .

¿Quién llegó en cuarto lugar?

A) X　*B) P*　*C) M*　*D) Q*　*E) K*

RESOLUCIÓN:



RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Lima es la ciudad más poblada del Perú . Ica tiene más habitantes que Tumbes pero menos que Cajamarca .

De estas afirmaciones se puede decir :

I) Ica , Cajamarca y Tumbes tienen menos población que Lima .

II) Cajamarca tiene menos población que Ica y más que Tumbes.

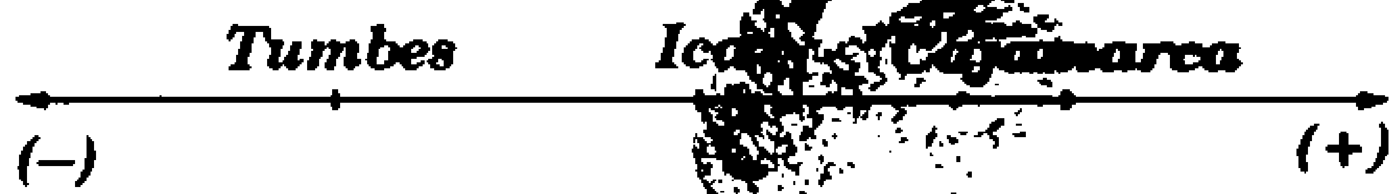
III) Cajamarca tiene menos población que los demás.

Son verdaderas :

A) Sólo I.　*B) Sólo I y II.*　*C) Sólo I y III.*
D) Sólo II y III.　*E) Todas .*

RESOLUCIÓN :

* Si Ica tiene más habitantes que Tumbes pero menos que Cajamarca ; entonces se obtiene:



* Como Lima es la ciudad más poblada del Perú , se concluye :

* Luego : ***I) V***　***II) F***　***III) F***

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

En la puntuación final de una competición atlética se pudo observar que Rossi tuvo menor puntuación que Merie , Nelly menos puntos que Katty , Nora el mismo puntaje que Susy , Rosy más que Sonia , Nelly el mismo puntaje que Merie y Nora más que Katty . ¿Quién ocupó el penúltimo lugar?

A) Rossi　*B) Merie*　*C) Katty*
D) Merie y Nelly　*E) Susy*

RESOLUCIÓN:

* Representamos verticalmente los datos , respetando el orden , recuerde que es importante no suponer ni graficar lo que el problema no proponga; veamos lo que el enunciado dice :

"Rossi menor puntuación que Marie"　"Nelly menos puntos que Katty"

(1)

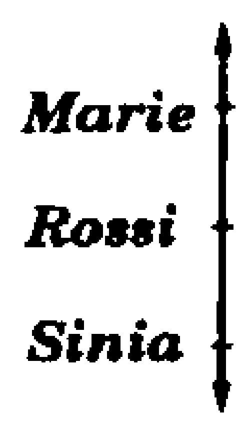
(2)

* Hemos trazado dos segmentos debido a que aun no hay relación de Merie y Rossi con Katty y Nelly; sigamos evaluando el enunciado :

"Nora el mismo que Susy"..............................***(3)***

Nora _ Susy

"Rosy más que Sonia" en ***(1)***:



Como se puede observar, estamos vinculando esta última información con la señalada en el dato (1).

* Continuemos analizando el enunciado :

Nelly el mismo que Marie

(4) Marie – Nelly
Rossi
Sonia

Deducimos de (2) y (4) :

Katty
Marie – Nelly (5)
Rossi
Sonia

* Luego del último dato :

"Nora más que Katty" en *(5)*

Nora – Susy
Katty
Marie – Nelly
Rossi
Sonia

"El penúltimo lugar será ocupado por Rossi"

RPTA: "A"

PROBLEMA 21 :

6 amigas están escalando una montaña, *"A"* está más abajo que *"B"*, quien se encuentra un lugar más abajo que *"C"*, *"D"* está más arriba que *"A"*, pero un lugar más abajo que *"E"*, quien está más abajo que *"F"*, está última que se encuentra entre *"B"* y *"E"*. ¿Quién está en el tercer lugar del ascenso?

A) B ***B) C*** ***C) A*** ***D) D*** ***E) F***

RESOLUCIÓN :

* Haciendo un ordenamiento lineal horizontal vertical, tenemos :

Más arriba
C
B
A
Más abajo

Más arriba
B
F
E
D
A
Más abajo

* *D* está más arriba que *A* pero un lugar más abajo que *F*, esta última se encuentra entre *B* y *E* ; *A* está más abajo que *B* quien se encuentra un lugar más abajo que *C* .

Más arriba
C
B
F
E
D
A
Más abajo

* Ubicación final, deducida de las conclusiones anteriores , de la cual se puede apreciar que el tercer lugar será ocupado por *"F"*.

RPTA: "E"

PROBLEMA 22 :

Dada la siguiente información :

I) Aristóteles es menor que José .

II) José es un año menor que Walter .

III) Walter es *21* años menor que Renán

Si resto las edades de Renán y José obtengo.

A) 20 años ***B) 21*** ***C) 18*** ***D) 22*** ***E) 19***

RESOLUCIÓN :

Renán
21
Walter ⊕ =22
1
José

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Manuel es *4* años menor que Alberto , Raúl es un año mayor que Pedro, Raúl es *2* años menor que Juan y Alberto es *7* años mayor que Juan . Al restar la edad de Alberto y la edad de Pedro obtenemos .

A) 11 años ***B) 10 años*** ***C) 12 años***
D) 9 años ***E) 8 años***

RESOLUCIÓN :

* Alberto, * Manuel: +4

* Raúl, * Pedro: +1

* Juan, * Raúl: +2

* Alberto, * Juan: +7

Al relacionar todos los datos resultará :

Alberto
+4
Manuel
+3
Juan
+2
Raúl
+1
Pedro

(Alberto – Juan: +7; Alberto – Pedro: +10 Se deduce)

∴ La diferencia entre Alberto y Pedro es de 10 años

RPTA: "B"

PROBLEMA 24 :

En una competencia atlética participaron tres parejas de esposos los Contreras , los Gonzáles y los Flores . Además se sabe que :

* Las esposas llegaron antes que sus respectivos esposos .

* La señora Flores llegó antes que el señor Contreras.

* El señor Gonzáles no llegó primero y fue esperado

por una dama .

* La señora Contreras llegó quinta, justo después de su esposo , entonces , ¿En qué posición llegaron el señor y la señora Gonzáles?

A) 1ro. y 6to. ***B) 3ro. y 5to.*** ***C) 3ro. y 6to.***
D) 4to. y 6to. ***E) 2do. y 6to.***

RESOLUCIÓN :

I)

6to.	5to.	4to.	3ro.	2do.	1ro.
Mujer					Varón

II) Sr . Contreras ⟶ Sra . Flores

III) Sr . Gonzales ⟶ Mujer

IV)

	5to.	4to.			
	Sra. Contreras	Sr. Contreras			

* Como el ***Sr*** . Gonzáles no llegó primero , ni tampoco último (ese lugar es para una mujer) , además que está detrás de una mujer , entonces la única posibilidad es que llegue ***3ro***. y que su mujer no puede ser ***2da***. , necesariamente será la ***6ta*** .

RPTA: "C"

PROBLEMA 25 :

Se ha establecido que los cuatro equipos que han superado los cuartos de final del Mundial de Fútbol ***2010*** (Perú , Brasil , Nigeria e Italia) . Jugarán todos contra todos. Si el Perú es favorito sobre Brasil , Brasil lo es sobre los equipos restantes a excepción de Nigeria, y si se estima que Nigeria va a campeón , el equipo con menos posibilidades de campeonar resulta

A) Perú ***B) Italia*** ***C) Brasil***
D) Nigeria ***E) Indeterminable***

RESOLUCIÓN :

* Por simple deducción resulta Italia el de menor posibilidad .

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

En una maratón compiten las personas ***"A"***, ***"B"***, ***"C"***, ***"D"*** y ***"E"***; se sabe que ***"C"*** llegó detrás de ***"B"*** y un poco antes que ***"D"***, además ***"E"*** por poco llega en último lugar . ¿Quién llegó en el primer lugar y quién en el último?

A) B – A B) A – B C) C – A D) D – E E) B – E

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado deducimos :

B	C	D	E	A
1°	2°	3°	4°	5°

⇒ En ***1°*** lugar llegó ***B*** y último lugar llegó ***A*** .

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Cinco personas : María , Estela , Mercedes , Verónica y Rubí están sentados en fila . Estela está en el extremo de la fila y Mercedes en el otro extremo . Verónica estaba al lado de Estela y María al lado de Mercedes . ¿Quién estaba en el medio?

A) Rubí ***B) Verónica*** ***C)María***
D) Mercedes ***E) Estela***

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que en el centro no pueden estar Estela , Mercedes ni Verónica , ni María ; luego la única posibilidad será para Rubí .

RPTA : "A"

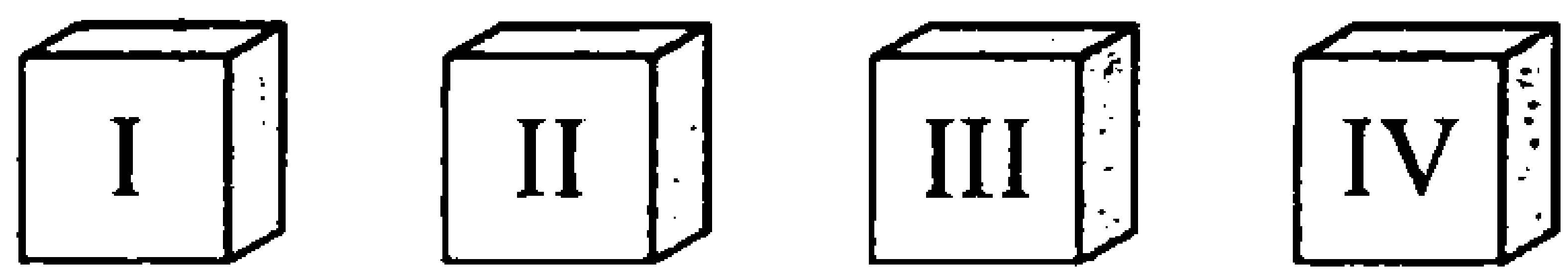
PROBLEMA 28 :

En una hilera de cuatro casas ; los Alvarez viven al lado de los Barrios , pero no al lado de los Córdova . Si los Córdova no viven al lado de los Durán ¿Quiénes son los vecinos inmediatos de los Durán?

A) Alvarez ***B) Córdova*** ***C) Barrios***
D) Alvarez y Barrios ***E) N.A.***

RESOLUCIÓN :

* Configuremos cuatro casas , enumerándolas:



ANALICEMOS :

Los Alvarez viven al lado de los Barrios ; pero no al lado de los Córdova . Significa que los Alvarez y los Barrios son vecinos (casa ***I*** y ***II*** ó casa ***II*** y ***III*** etc.) : sin embargo , a los Alvarez y los Córdova los separa una o dos casas.

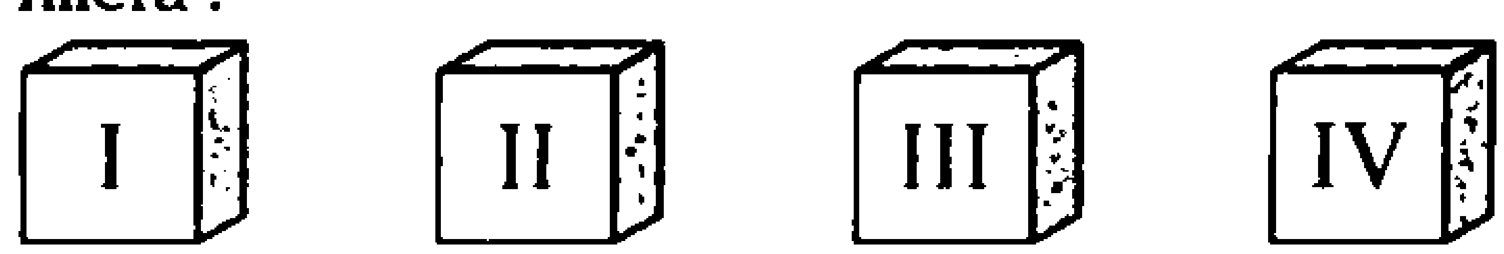
* Supongamos que: Alvarez ***(I)***; Barrios ***(II)*** y Córdova ***(III)*** .

Eso satisface; por el momento, los datos proporcionados.

"*Los Córdova no viven al lado de los Durán*".

Eso contradice nuestra hipótesis; pues en nuestra suposición ; los Córdova ***(III)*** y los Durán ***(IV)*** serían vecinos. Al invertir el orden de estas dos últimas casas; seguirán viviendo una familia al lado de otra .

Eso nos obligará a ubicar a los Durán , al principio de la hilera :



Durán Alvarez Barrios Córdova

Los vecinos inmediatos a los Durán , serían los Alvarez.

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Angela , Brenda , Carla , Dalia y Elena ingresan al teatro y ocupan un palco de cinco asientos . Angela y Elena se sientan en los extremos del palco , Brenda y Dalia siempre se sienta juntas. Brenda se sienta junto a Elena . ¿Quién se sienta en el tercer asiento?

A)Dalia B)Carla C)Brenda D)Elena E)Angela

RESOLUCIÓN :

+ Datos :

1°

A			E

ó

E			A

2°

B	D

ó

D	B

3°

B	E

ó

E	B

+ Ordenando :

5°	4°	3°	2°	1°
A		D	B	E

ó

1°	2°	3°	4°	5°
E	B	D		A

⇒ Dalia siempre ocupa el tercer asiento .

RPTA: "A"

PROBLEMA 30 :

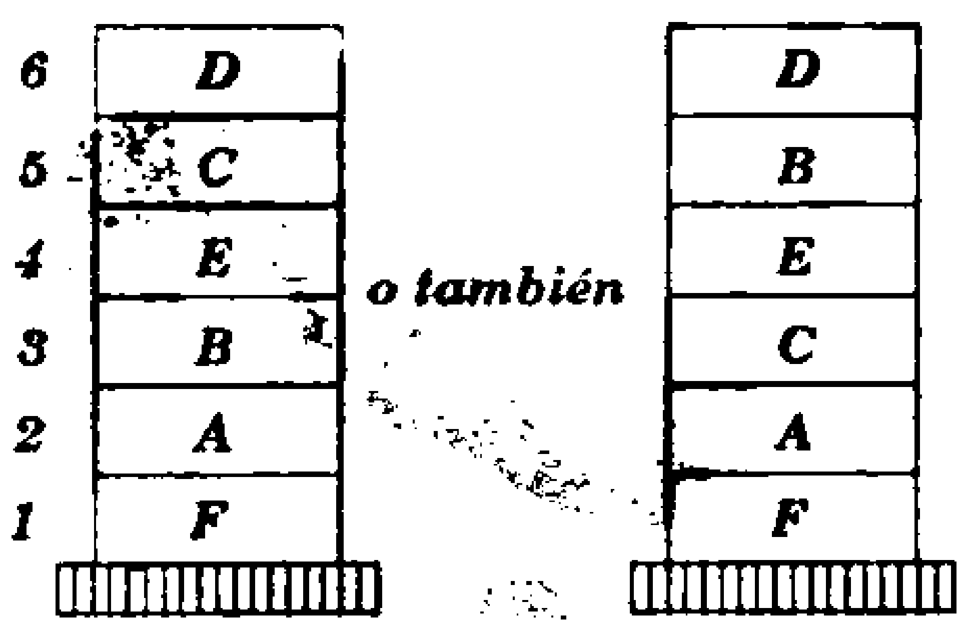
En un edificio de seis pisos viven seis personas *A; B; C; D; E* y *F*, cada una en un piso diferente .

Se sabe que :

* E vive en un piso adyacente a *C* y *B*.
* Para ir de la casa de *E* a la de *F* hay que bajar *3* pisos.
* *A* vive en el segundo pisó. ¿Quién vive en el último piso?

A) F B) C C) E D) C E) B

RESOLUCIÓN :



⇒ En el último piso vive *D*

RPTA: "B"

PROBLEMA 31 :

Si se sabe que :

1) El Cedro está ubicado al Este del Pino .

2) La Caoba al Oeste del Nogal .

3) El Pino al Este del Nogal .

4) El Eucalipto está entre la Caoba y el Cedro.

Podemos concluir como verdadero .

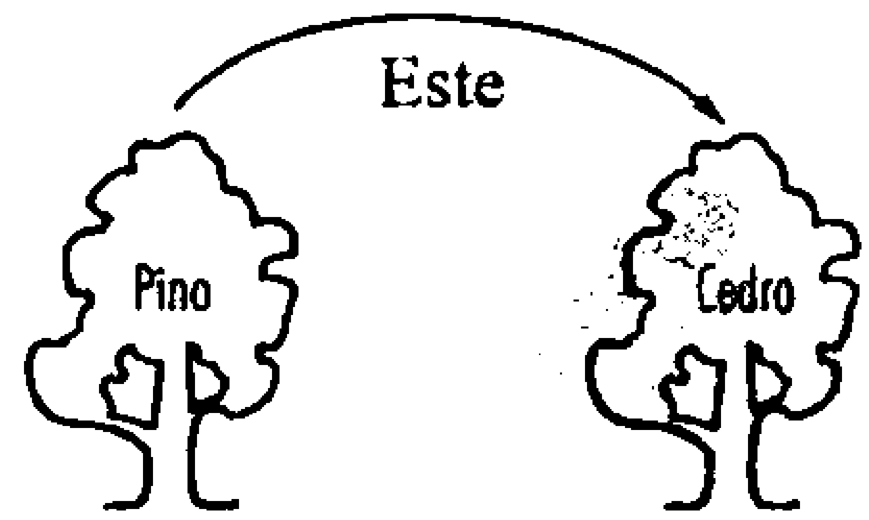
I) El árbol más al Oeste es la Caoba.

II) El Eucalipto está entre el Pino y la Caoba.

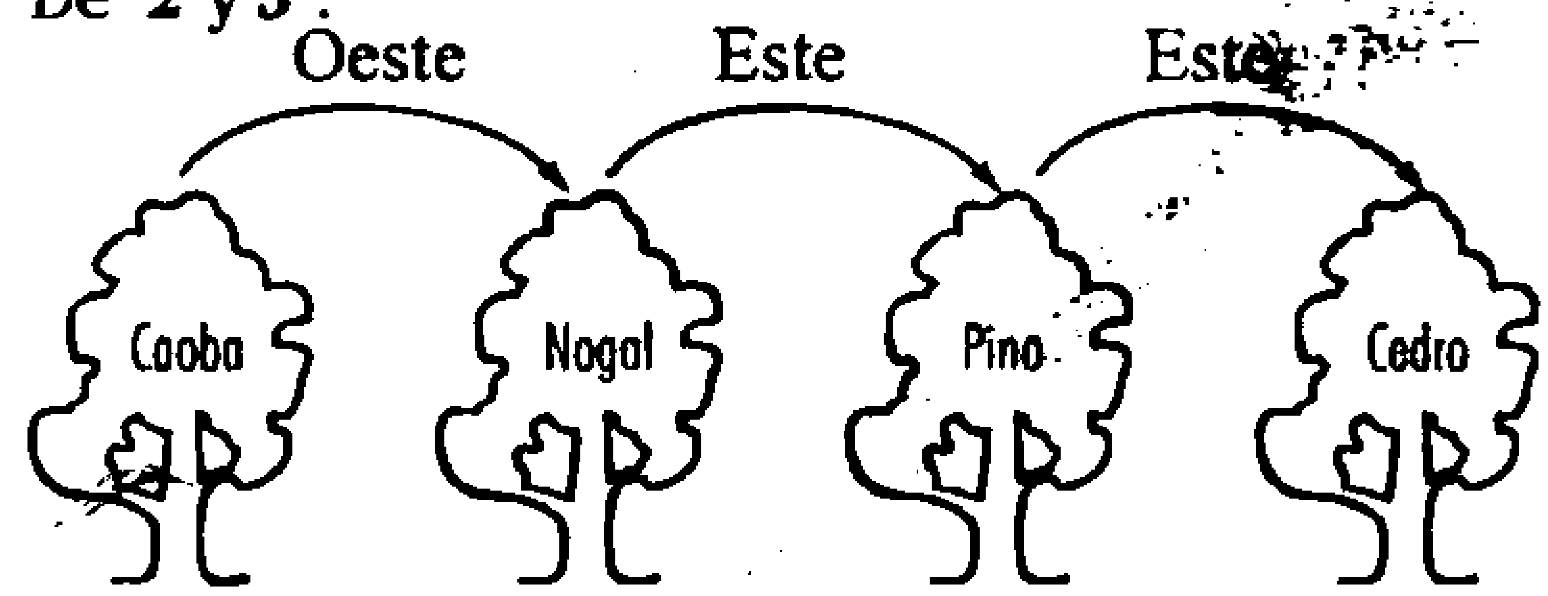
A) Sólo II B) I y II C) Sólo I
D) Ninguna E) Faltan datos.

RESOLUCIÓN :

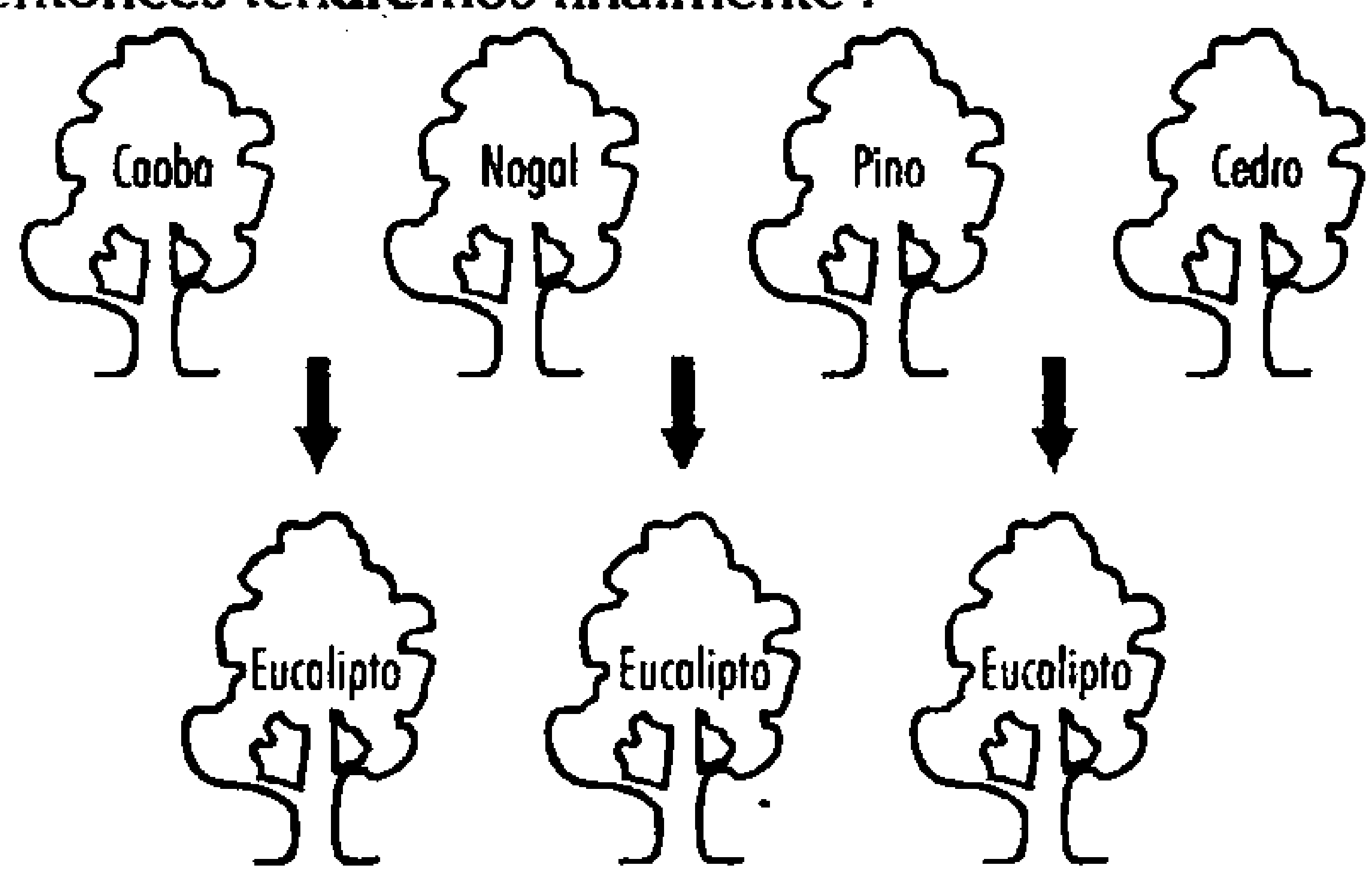
* De *1* :



* De *2* y *3* :



* De *4* : Si el Eucalipto está entre la Caoba y el Cedro, entonces tendremos finalmente .



* Luego :

I) (*VERDADERO*) : *II)* No necesariamente (*FALSO*):

RPTA: "C"

PROBLEMA 32 :

Tres amigos: Jorge, Orlando y Agustín viven en las casas: *A, B* y *C* , y tienen cada uno un auto: azul, verde y rojo, no necesariamente en ese orden. Se sabe además que:

- Nadie tiene su auto estacionado frente a su casa.
- Agustín es dueño del auto verde y de la casa *C*.
- El auto rojo está frente a la casa *B*.
- El auto verde está frente a la casa de Orlando.

¿Quién es el dueño del auto que está frente a la casa, del, dueño del auto azul?

A) Jorge B) Orlando C) Agustín
D) Javier E) No se puede determinar

RESOLUCIÓN :

* De los datos :

• *Casas* →	*A*	*B*	*C*
• *Amigos* →	*Orlando*	*Jorge*	*Agustín*
• *Autos* →	*Verde*	*Rojo*	*Azul*

⇒ El dueño del auto azul es Jorge y frente a su casa está el auto rojo , cuyo dueño es Orlando.

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Sobre una mesa hay tres naipes en hilera . Sabemos que a la izquierda del rey hay un as ; a la derecha de la jota hay un diamante ; a la izquierda del diamante hay un trébol , y a la derecha del corazón hay una jota . ¿Cuál debe ser el naipe del centro?

A) Rey de trébol B) Jota de trébol C) As de trébol D) Jota de corazón E) As de diamante.

RESOLUCIÓN:

Primero : As ⟵ Rey

Segundo : Jota ⟶ Diamante

Tercero : Trébol ⟵ Diamante

Cuarto : Corazón ⟶ Jota

* Relacionando todos los datos , se deduce que en medio va la "Jota", y tendremos :

Número		Jota	
Figura o Tipo	Corazón		Diamante

Se deduce que le queda ser Trebol

⇒ En el centro irá la jota de Trébol .

RPTA: "B"

PROBLEMA 34 :

De seis alumnos que rindieron un examen : *"R"* obtuvo cuatro veces más puntos que *"M"*; *"S"* la mitad de *"P"*; *"T"* el triple que *"S"*; *"P"* igual que *"R"* ¿Quién está en el primer y tercer lugar?

A) "Q" y "T" B) "T" y "P" C) "Q" y "R" D) "Q" y "P" E) "P" y "R"

RESOLUCIÓN:

$$R = 5M \qquad R = 5M$$
$$S = \frac{P}{2} \qquad P = 6M \quad (3er.\ lugar)$$
$$T = 3S \qquad S = 3M$$
$$P = R + M \qquad T = 9M$$
$$Q = 2R \qquad Q = 10M \quad (1er.\ lugar)$$

RPTA: "D"

ENUNCIADO :

Cuatro amigas van al cine y se sientan en una sola fila.

* Carmen y Gabriela no se sientan al lado de Juana.

* Carmen se siente entre Adela y Gabriela.

PROBLEMA 35:

Adjunta a Carmen está:

A) Juana y Adela B) Gabriela y Juana C) Gabriela y Adela D) Adela y Juana

RESOLUCIÓN :

Empezamos con el 2° dato y vemos que existe 2 ordenamientos:

1° *Adela Carmen Gabriela*

ó

2° *Gabriela Carmen Adela*

Luego, agregamos el 1 er dato

1° *Juana Adela Carmen Gabriela*

2° *Gabriela Gabriela Carmen Adela*

La respuesta es la alternativa «*C*» y vemos que se cumple en ambos ordenamientos.

PROBLEMA 36 :

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es posible?

I) Adela está al lado de Gabriela.

II) Juana está a la izquierda de Carmen.

III) Carmen está a la derecha de Gabriela.

RESOLUCIÓN:

I) En ambos ordenamientos es Imposible que Adela esté al lado de Gabriela........ ***(FALSO)***

II) Vemos que si es posible que Juana este a la e izquierda de Carmen y lo vemos en el *1er* ordenamiento .... ***(VERDADERA)***

III) Vemos que si es posible que Carmen este a la derecha de Gabriela y lo vemos en el *2do* ordenamiento. .... ***(VERDADERA)***

PROBLEMA 37 :

Si Juana está a la izquierda de Carmen. ¿Cuál de los siguientes enunciados son ciertos?

I) Juana está a la derecha de Gabriela .

II) Hay dos ordenamientos

III) Adela está a la izquierda de Carmen.

RESOLUCIÓN:

Analicemos solamente el *1er* ordenamiento.

I) Vemos que Juana no está a la derecha de Gabriela...... *(FALSO)*

II) De acuerdo a la pregunta, solamente éxiste un ordenamiento .... *(FALSO)*

III) Es cierto. ...... *(VERDADERA)*

OBSERVACION :

* El orden es la clave para tener éxito en la resolución de problemas del tema.

* El trazar líneas horizontales o verticales depende del tipo de problema que se presenta.

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 *"D"* está al sur de *"B"*; *"C"* está al sur de *"A"*; *"C"* está al norte de *"B"*. ¿Quién está más al sur?

A) A *B) B* *C) C*
D) D *E) E*

02 En un examen, se observan estos resultados: *"Q"* sacó más puntaje que *"N"*; *"M"* sacó menos puntaje que *"P"*; *"Q"* sacó menos puntaje que *"M"* ¿quién sacó más puntaje?

A) M *B) N* *C) P* *D) Q*

03 En el problema anterior, ¿quién sacó menos puntaje?

A) N *B) M* *C) P* *D) Q*

04 Ayacucho está al oeste de cusco, pero al este de Ica; Huancavelica está al este de Ica pero al oeste de cusco. ¿Quién está más al oeste?

A) Huancavelica *B) Ica*
C) Cusco
D) Ayacucho *E) Lima*

05 Se sientan cuatro personas *"A"*, *"B"*, *"C"*, *"D"* alrededor de una mesa cuadrada, uno en cada lado. *"A"* no está al frente de *"D"*; y *"C"* está a la derecha de *"B"*, quien no está frente a *"A"*.

¿Quién está a la derecha de *"C"*?

A) A *B) B* *C) C*
D) D *E) E*

06 En el problema anterior, ¿Quién está a la izquierda de *"A"*?

A) A *B) B* *C) C*
D) D *E) E*

07 En una familia hay *5* hermanos: Manuel, Carmen; César, Raúl y Fito. Se sabe que :

* Carmen no es la menor.

* Fito es menor que César pero mayor que Raúl.

* Manuel es menor que Raúl.

* Carmen le lleva *4* años Raúl pero es menor en dos años que Fito.

¿Quién es mayor que todos?

A) César *B) Fito* *C) Raúl*
D) Manuel *E) Carmen*

08 Del problema anterior, ¿Quién está entre Carmen y Manuel?

A) César *B) Rosa* *C) Juan*
D) Manuel *E) Raúl*

09 Del problema *7*, ¿Quién es el menor de todos?

A) César *B) Raúl* *C) Manuel*
D) Carmen *E) Fito*

10 En una avenida hay *5* establecimientos: peluquería, bar, lavandería, banco y sastrería. A la izquierda del banco esta el bar, el sastre esta a la derecha de la lavandería, la peluquería está a la izquierda del bar, a la derecha de la lavandería hay solo dos establecimientos. la sastrería tiene dos frentes. ¿quién está a la izquierda y junto al bar?

A) Lavandería *B) bar*
C) peluquería *D) mercado*
E) cine

11 Del problema anterior, ¿qué establecimiento está entre la sastrería y el banco?

A) cine *B) bar*
C) Peluquería *D) lavandería*
E) ninguno

12 De la pregunta *10*, ¿qué establecimientos está más a la izquierda?

A) peluquería *B) bar*
C) lavandería *D) banco*
E) sastrería

13 En una carrera de cinco amigas, María va en primer lugar, Lucía en quinto puesto. si Leticia va en el puesto intermedio entre ambas, Juana le sigue a Leticia, e Irene esta mejor ubicada que Juana ¿quien ocupa el segundo lugar?

A) Irene *B) Leticia*
C) Juana
D) María *C) Lucía*

14 Carlos es mas grande que Rafael y mas chico que Juan. Si la altura de Carlos es *"J"*, la de Juan es *"R"* y la de Rafael, es *"C"*. ¿Cual es la verdadera?

A) $R<C<J$ *B)* $C<J<R$
C) $R<J<C$
D) $C<R<J$ *E)* $J<C<R$

15 Cinco personas rinden un examen, si se sabe que:

"B" obtuvo un punto más que *"D"*

"D" obtuvo un punto más que *"C"*

"E" obtuvo dos puntos menos que *"D"*

"B" obtuvo dos puntos menos que *"A"* ordenarlos en forma creciente

A) ABCDE *B) ECBDA*
C) EDCBA
D) BADEA *E) EDBAC*

16 Si se sabe que :

"A" es más alto que *"C"*

"B" es más bajo que *"D"*

"E" y *"D"* son más bajos que *"C"*

"B" es más alto que *"E"*

Se afirma :

A) el más bajo es "B"
B) "C" es más alto que "D"
C) "E" no es más bajo que "A"
D) no es cierto que "A" sea el más alto.
E) "D" es más alto que "E"

17 En cierta prueba Nataly obtuvo menos puntos que Vanesa, Karina menos puntos que Sandra Noemí el mismo puntaje que Susana : Karina más puntaje que Vanessa, y Noemí más puntos que Sandra. ¿Quién obtuvo el menor puntaje?

A) Nataly *B) Noemí*
C) Susana
D) Vanesa *E) Karina*

18 Se tiene una casa de cuatro pisos y en cada piso vive una Familia. La Familia Castillo vive un piso mas

arriba que la Familia Muñoz ; la Familia fernandez vive más arriba que la Familia Díaz y la Familia Castillo más abajo que la Familia Díaz . ¿En que piso viven los castillo?

A) primero ***B) segundo*** ***C) tercero***
D) cuarto ***E) primero y segundo***

(19) Si el Cerro Negro esta el este del Cerro Blanco , el Río Azul está al Este del Cerro Negro , el Lago Verde está al lado Este del Cerro Negro , pero al oeste del Río Azul , ¿Cuál está más al este?

A) el río azul ***B) el cerro negro***
C) el lago verde ***D) el cerro blanco***
E) el cerro azul

(20) Se sabe que :

I) Lucho no es más bajo que Arturo .

II) Alberto es más alto que Lucho .

III) Abel es más alto que Lucho .

IV) no es cierto que Pancho sea más alto que Lucho.

V) Lucho es más bajo que Alfonso .

Se afirma :

A) Arturo es el más bajo
B) Alfonso es el más alto
C) Abel es más alto que lucho
D) Arturo es más bajo que alfonso
E) no es cierto que Alberto sea más alto que Pancho.

TAREA DOMICILIARIA

(01) Si Luis es más alto que Carlos y Raúl es más alto que Luis . ¿Cuál de los tres es el más alto?

A) Luis ***B) Carlos*** ***C) Raúl***
D) Los tres tienen la misma altura

(02) Raúl es ménor que Alicia, Jorge es mayor que Raquel; si Raúl es mayor que Jorge , ¿quién es el mayor de todos?

A) Raúl B) Alicia C) Jorge D) Raquel E) Caro

(03) Rosa es menor que Teresa , Juan es mayor que Teresa y Juan es menor que Nelly . ¿Quién es mayor?

A) Rosa ***B) Teresa*** ***C) Juan***
D) Nelly ***E) Faltan datos***

(04) La casa está al este del cerro blanco ; el río azul , al este de la casa ; el árbol , al este del cerro blanco , pero al oeste del río azul. ¿Qué está más al este?

A) la casa ***B) el cerro blanco***
C) el árbol ***D) el río azul***

(05) Richard se encuentra a la derecha de Peter , Juan a la izquierda de Peter . ¿Quién está más a la izquierda?

A) Richard B) Peter C) Juan D) Miguel E) N.A.

(06) Kike es más alto que Daniel y Orlando más alto que Kike . ¿Quién es el de menor estatura?

A) Kike ***B) Daniel*** ***C) Orlando***
D) Kike y Daniel ***E) Orlando y Daniel***

(07) En una barca , Rosemary se sienta a la derecha de Leticia , pero a la izquierda de Giovanna. Si Rosemary y Leticia siempre se sientan juntas, se puede decir que:

A) Al medio está Rosemary.
B) Al medio está Giovanna.
C) Al medio está Leticia.
D) A la derecha esta Leticia.
E) A la izquierda de Rosemary.

(08) Tres muchachos se encuentran escalando por un cerro . Luis se encuentra más arriba que Pedro. Miguel se encuentra más arriba que Luis. Entonces :

A) Pedro se encuentra más abajo que Miguel.
B) Pedro se encuentra más arriba que Miguel.
C) Pedro y Miguel se encuentran a la misma altura.
D) Luis y Miguel se encuentran a la misma altura.
E) No se puede establecer relaciones.

(09) Se tiene *3* números : x , y , z, enteros de los cuales sólo un de ellos es negativo .

Para saber cuál de ellos es negativo es necesario saber:

$$I)\ xz>0$$

$$II)\ xyz<0$$

A) I ***B) F. D.*** ***C) I ó II*** ***D) I y II*** ***E) II***

(10) Se tiene un edificio de *6* pisos y *6* personas: ***A , B , C , D , E*** y ***F***, viven cada una en un piso . Se sabe que :

- E vive adyacente a ***C*** y ***B***.
- Para ir de ***E*** a ***F*** hay que bajar ***3*** pisos.
- A vive en el 2[do] piso .

¿Quién vive en el último piso?

A) D ***B) E*** ***C) E*** ***D) F*** ***E) C***

(24) Si por "***E***" ingresa ***4***, entonces por "***S***" saldrá:

A) 4 ***B) 11*** ***C) 6*** ***D) 10*** ***E) 12***

(25) Si por "***E***" ingresa ***5***, entonces por "***S***" saldrá:

A) 10 ***B) 6*** ***C) 4*** ***D) 8*** ***E) 12***

(26) Si por "***E***" ingresa ***8***, entonces por "***S***" saldrá:

A) 8 ***B) 6*** ***C) 10*** ***D) 16*** ***E) 12***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)[illegible]	2)C	3)A	4)B	5)D	6)D	7)A	8)E	[illegible]	10)C
11)B	12)A	13) A	14)B	15)B	16) E	17) C	18)[illegible]	19) A	20)[illegible]
1) C	2) A	3) C	4) D	5)C	6)B	7) C	8)C	[illegible]	10)D

ORDENAMIENTO CIRCULAR

CAPITULO 014

OBJETIVOS :

Aprender a resolver de manera practica problemas que se relaciones con ordenamientos circulares .

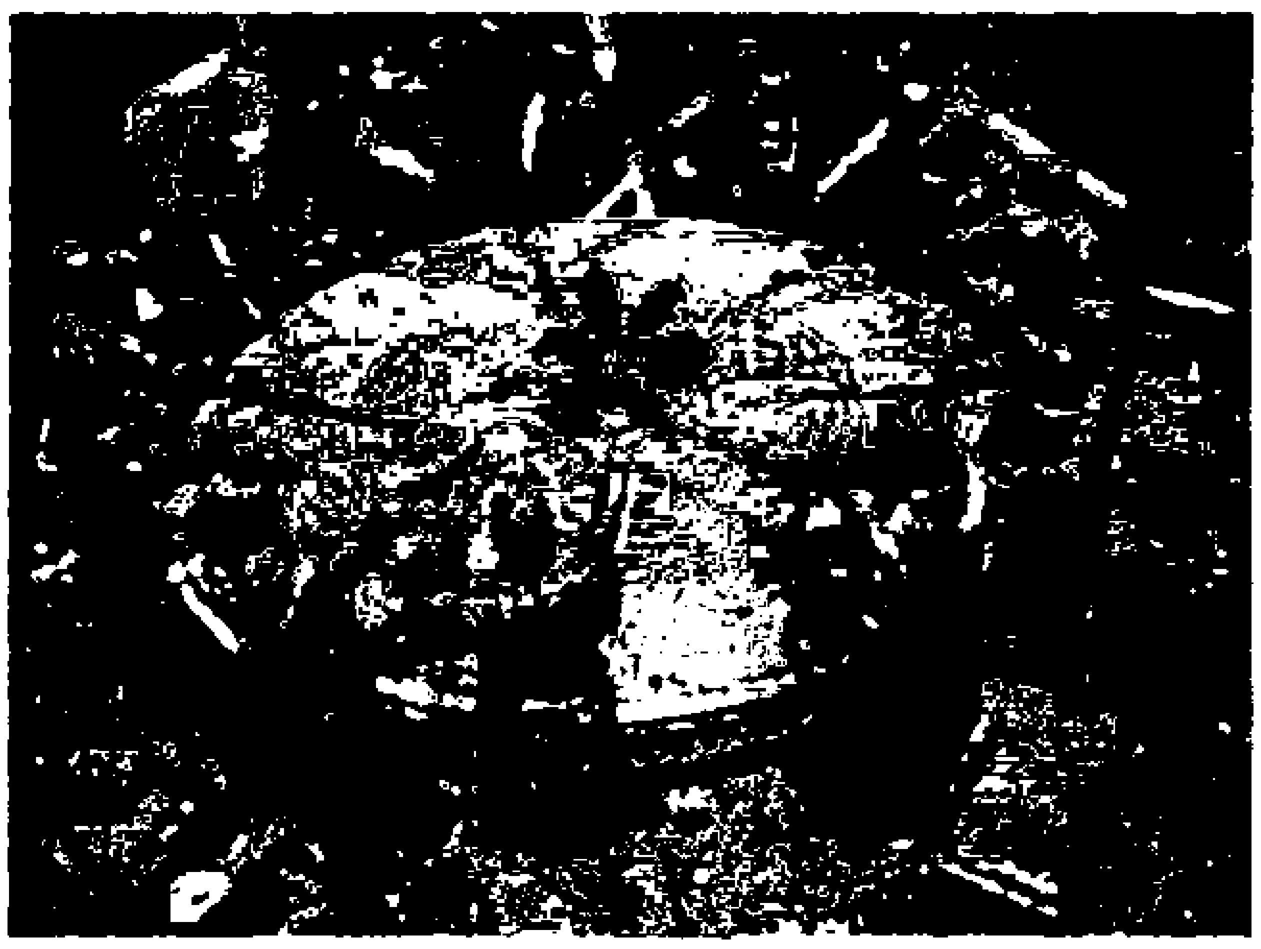
* *Afianzar la capacidad de orden y relación , como también analítica .*

* *Ejercitar la rapidez mental en el razonamiento ordenado.*

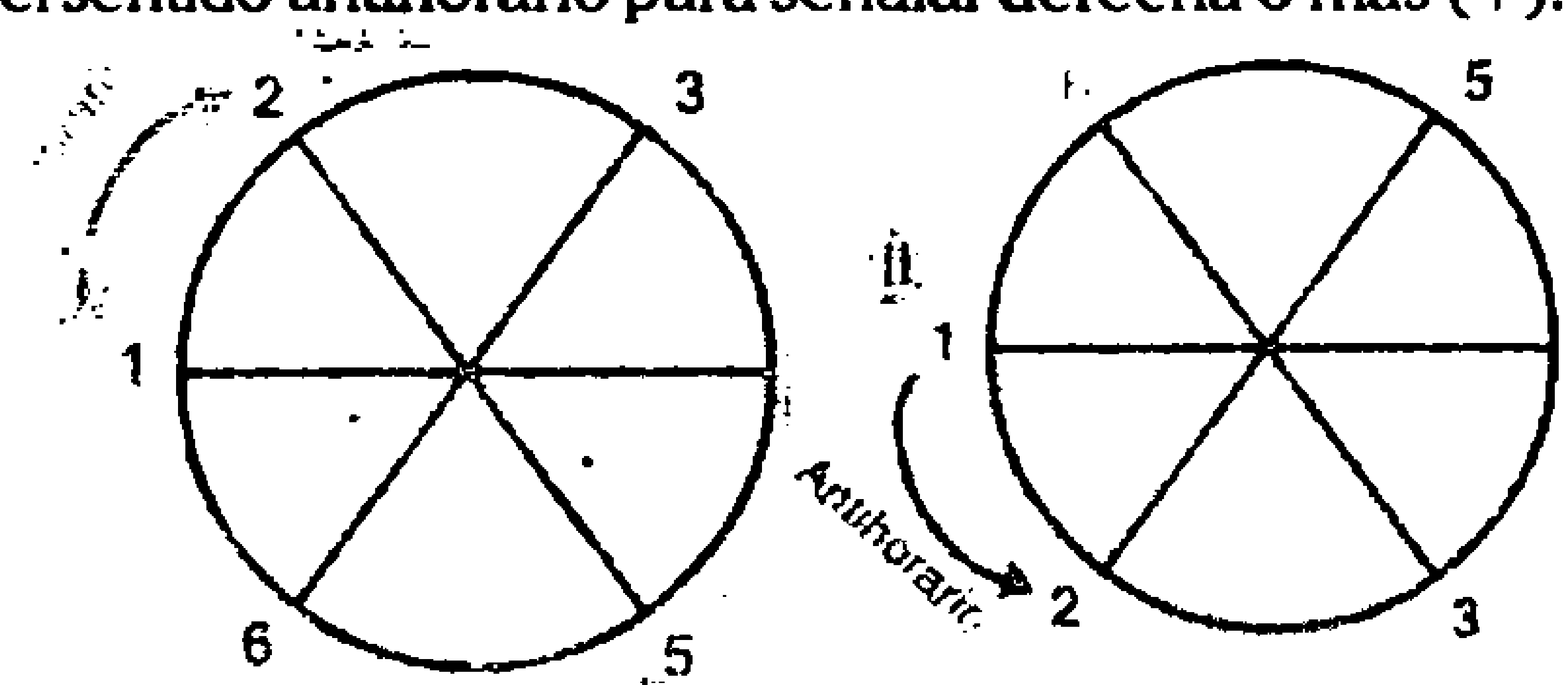
• *Afianzar el desarrollo de la creatividad y el ingenio.*

INTRODUCCIÓN :

En estos casos se presenta la información indicándose que se ubican los datos alrededor de un objeto(normalmente en forma simétrica), formando así una línea cerrada (circunferencia).



Para este tipo de problemas debemos considerar: el sentido horario para señalar izquierda o menos (–); y el sentido antihorario para señalar derecha o más (+).



Cabe recordar que los términos (,estar entre ...» o «estar a la derecha o izquierda de ... », no significa necesariamente que estén juntos o sea continuidad.

En este capítulo nos encontraremos con diversos tipos de problemas, pero en su resolución debemos tener en cuenta lo siguiente:

* La información que nos da el problema necesita ser ordenada.

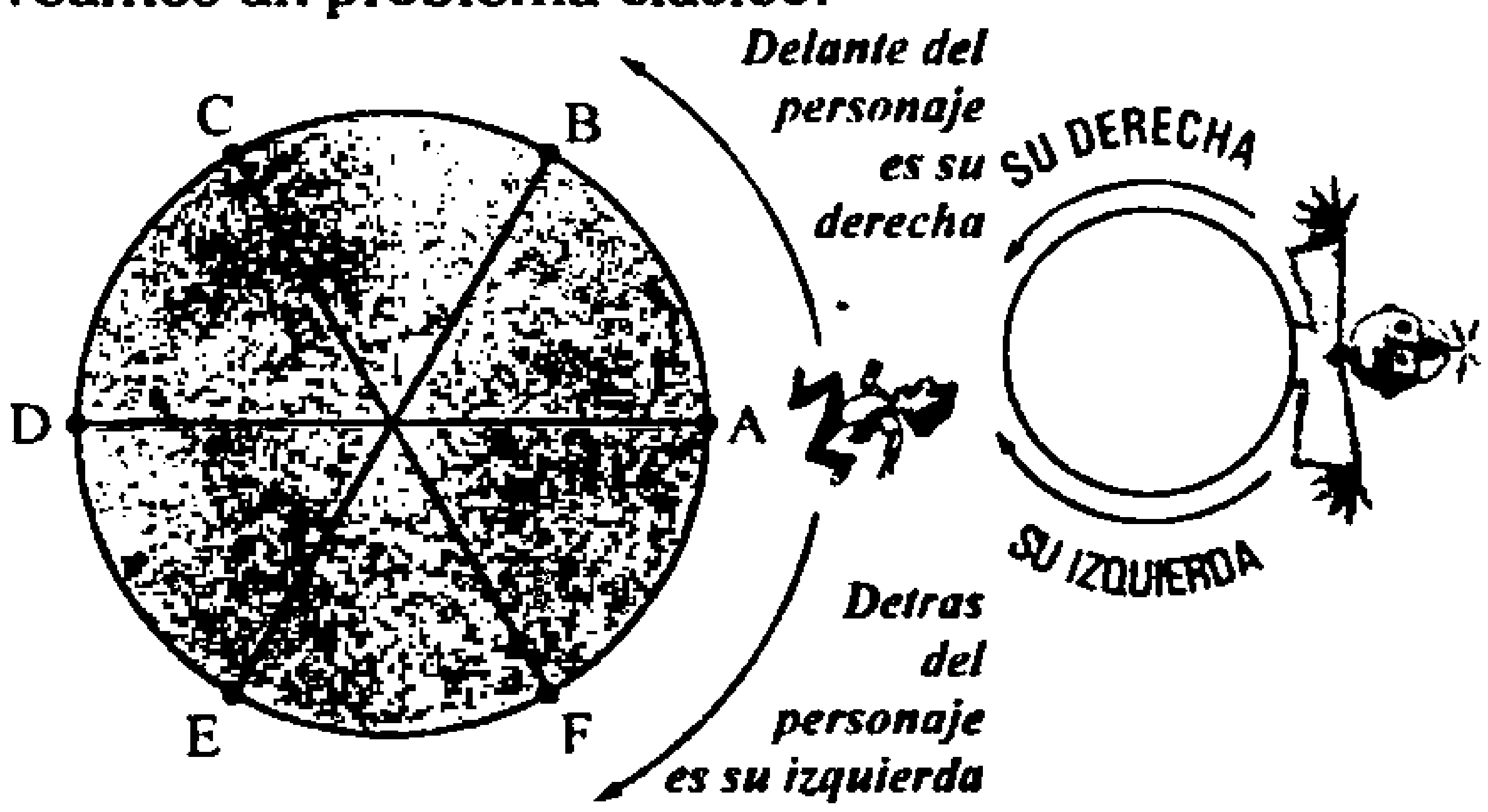
*Debemos verificar que la respuesta al final cumpla con las condiciones del problema.

*Empezar siempre por el dato que diga adyacente , está al extremo ,....,etc. que no necesariamente es el primer dato del enunciado .

* Ser muy ordenado al realizar tu gráfico , te ayudará mucho .

ORDENAMIENTO CIRCULAR

En este caso evaluaremos problemas que en su representación esquemática conformen circuitos cerrados y tal es el caso de : Personas alrededor de una fogáta , niños jugando a la ronda , personas alrededor de una mesa. etc . ***Es importante en este caso asumir que todos se ubican mirando al centro del círculo*** , de tal forma que se pueda establecer fácilmente las ubicaciones a la izquierda y/o derecha de cada persona o elemento presente en relación , veamos un problema clásico.



En estos casos basta ubicarse en un eje fijo, es decir, tomar un sentido u orientación referencial.

* "*B*" está junto y a la derecha de "*A*"
* "*C*" está a la derecha de "*A*" (existe 2 posibilidades).
* "*D*" está al frente de "*A*".
* "*F*" está junto y a la izquierda de "*A*".
* "*E*" está a la izquierda de "*A*" (existe 2 posibilidades).

* *"E"* está a la derecha y junto a *"D"*.

OBSERVACIONES :

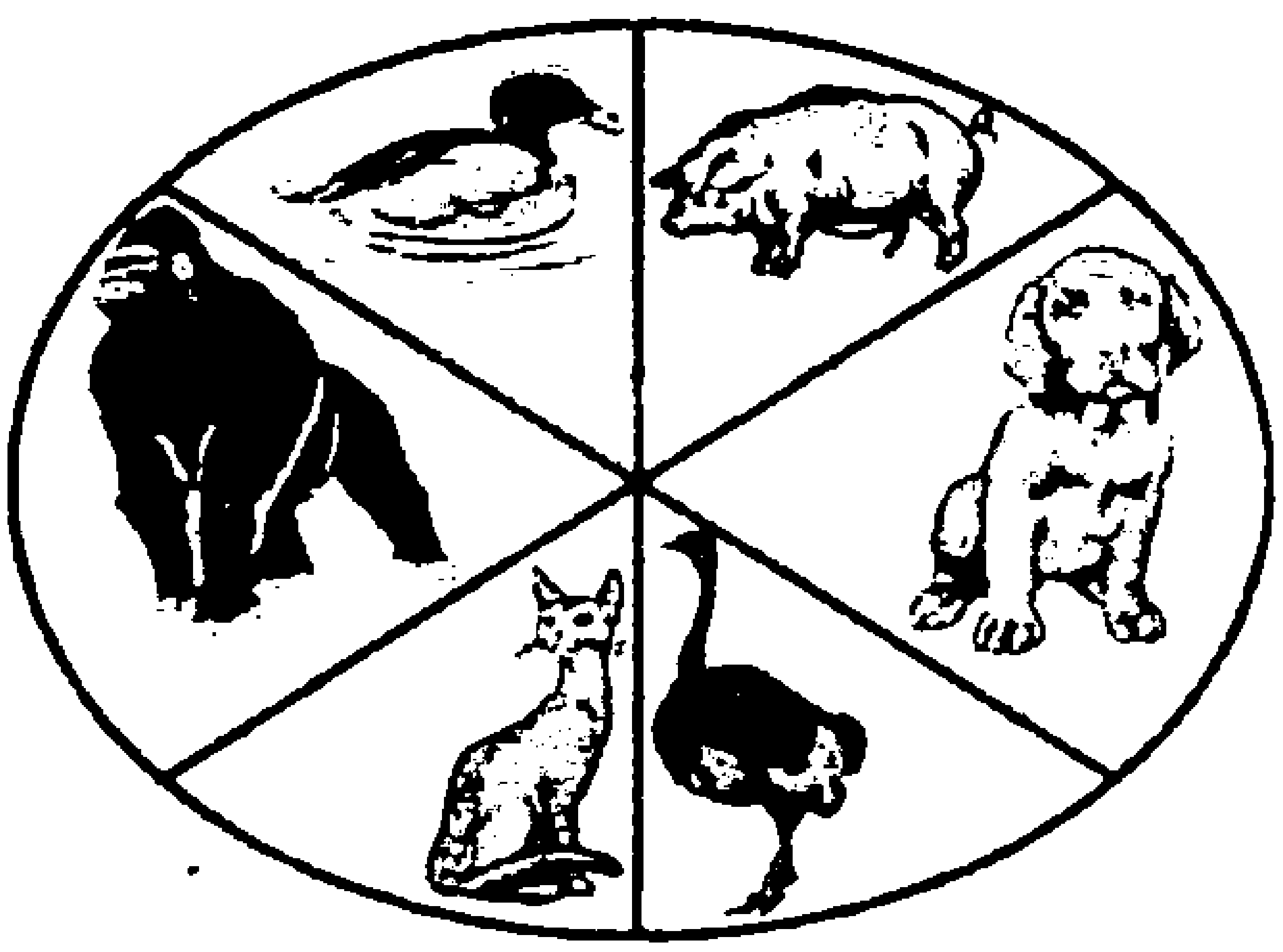
La orientación se da de acuerdo a lo que se coloca en el papel y no depende del que está leyendo (lector).

En los problemas de ordenamiento circular asumimos que: «Todas las personas se ubican mirando al centro del círculo» (con ello podremos establecer las ubicaciones a la izquierda y las ubicaciones a la derecha)

* Antes de empezar a resolver los problemas observa la cantidad de asientos y la cantidad de personas, ya que si éstos no coinciden, habrán algunas sillas desocupadas.

* También debes fijarte si es un número par o impar de asientos igualmente espaciados alrededor de la mesa; ya que si es un número par de asientos, unos quedarán frente a otras, de lo contrario jamás ocurriría que haya uno al frente del otro.

*A continuación se muestra algunas situaciones básicas asociadas con el ordenamiento circular. (Analizaremos una situación donde hay seis animales distribuidos simétricamente alrededor de una mesa circular).



• Frente al gato está el chancho.

• Junto al gorila están el gato y el pato.

• A la derecha del perro están el chancho y el pato.

• A la izquierda del avestruz están el gato y el gorila.

• Junto y a la derecha del pato está el gorila.

• A dos asientos del gato están el pato y el perro.

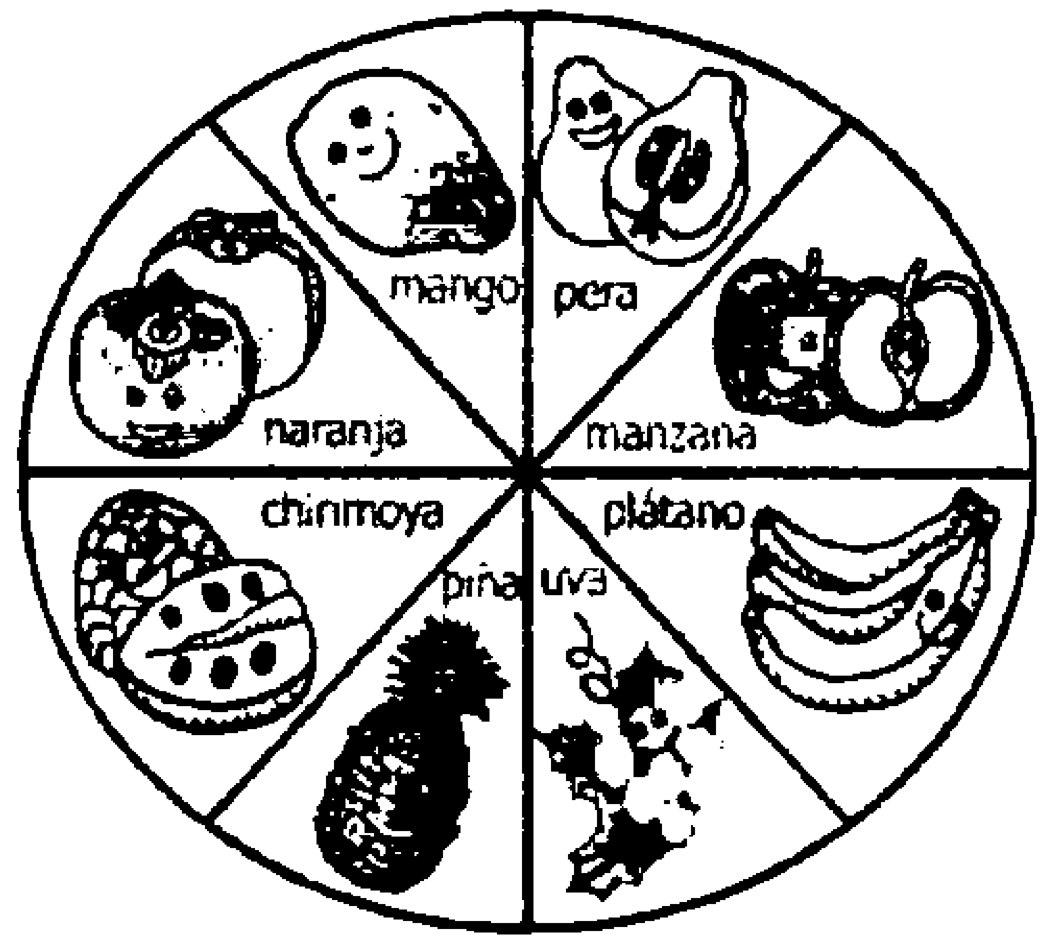
• A tres asientos a la izquierda del chancho está el gato.

• Entre el chancho y la avestruz está el perro.

• El gorila y el chancho tienen un vecino en común, ese es el pato.

EJERCICIO :

Ocho frutas han sido distribuidas alrededor de una mesa de manera simétrica tal como se muestra en el siguiente gráfico:



• ¿Junto a qué frutas está la pera? ....

• ¿Qué frutas están a la derecha del plátano? ....

• ¿Qué frutas están a la izquierda de la naranja?...

• ¿Frente a qué fruta están las uvas?................ ....

• Tres frutas a la izquierda de la manzana está: ....

• Dos frutas a la derecha de la chirimoya está: ....

• Frente a la manzana está: ....

• A la derecha de la chirimoya están: ....

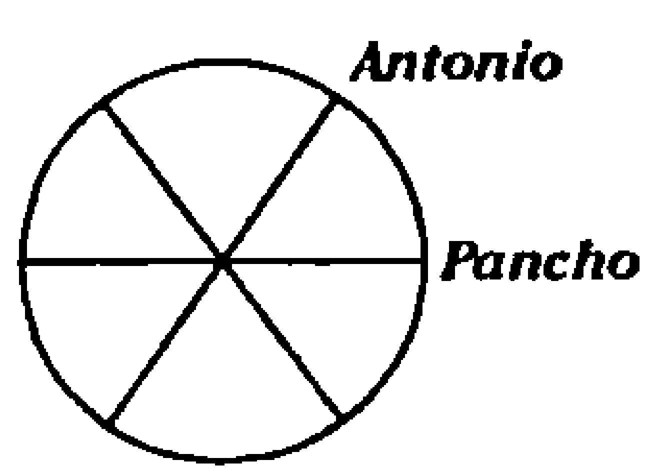
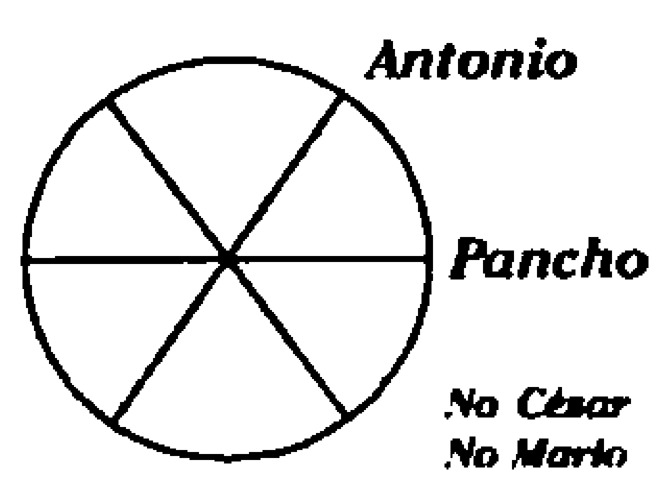
• Entre el plátano y la chirimoya están: ....

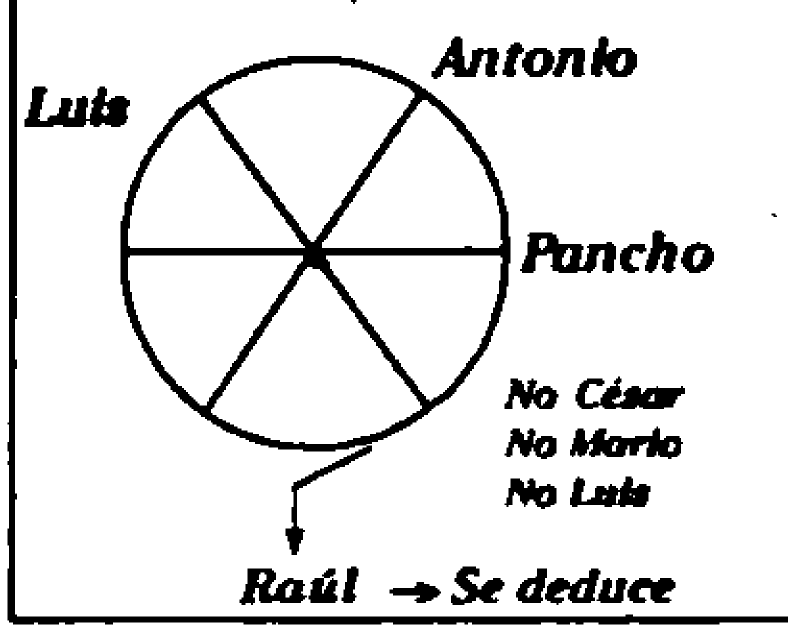
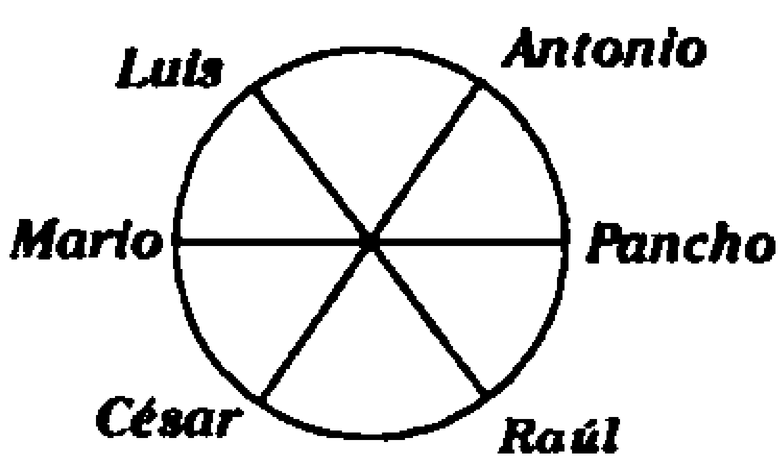
EJERCICIO RESUELTO 1 :

En una mesa circular hay seis asientos simétricamente colocados, ante la cual se sientan seis amigos a almorzar. Si Luis no está sentado al lado de César ni de Raúl; Pancho no está al lado de César ni de Mario, Antonio está junto y a la derecha de Pancho , Luis está a la derecha de Antonio ¿Quién está junto y a la derecha de Mario?

RESOLUCIÓN :

* Se empezará por el dato más conciso (empezando por cualquier parte) , entonces:

PRIMER PASO	SEGUNDO PASO
Antonio está junto y a la derecha de Pancho. 	***Pancho no está al lado de César ni de Mario.*** 

TERCER PASO	CUARTO PASO
Luis está a la derecha de Antonio. 	*Pancho no está al lado de César ni de Mario.* 

⇒ *"Junto y a la derecha de Mario está César"*

EJERCICIO RESUELTO 2 :

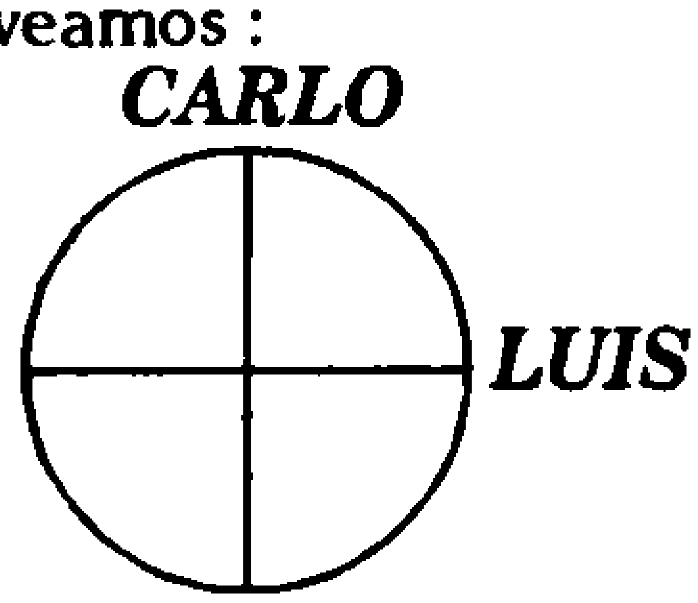
Durante una cena cuatro amigos se sientan al rededor de una mesa redonda en la que hay cuatro sillas distribuidas simétricamente . Carlo se sienta junto y a la derecha de Luis ; Juan se sienta junto a Luis ; Marcos está muy entretenido observando como los otros tres discuten , luego no es cierto que :

A) Marcos y Carlo se sientan juntos.
B) Luis y Marcos no están juntos.
C) No es cierto que Marcos y Carlo no se sientan juntos.
D) Juan se sienta junto y a la derecha de Marcos.
E) Juan se sienta junto y a la derecha de Carlo.

RESOLUCIÓN :

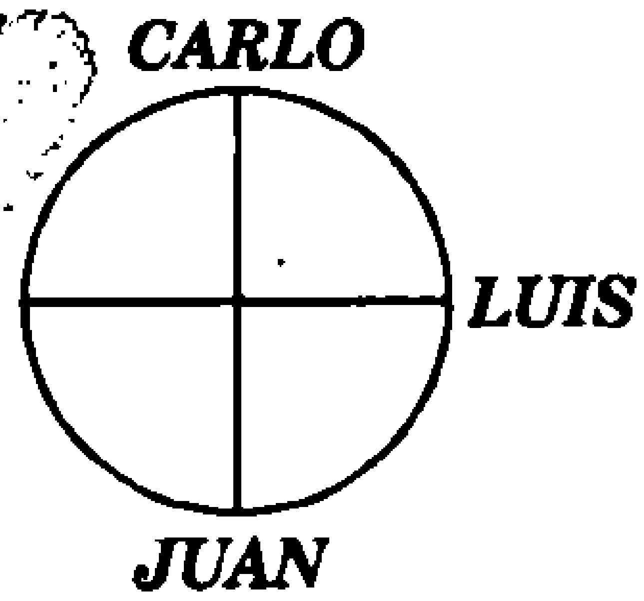
* Una lectura global nos permite determinar el tipo de esquema a utilizar , luego una revisión por fases , paso a paso nos debe permitir ir dando solución , empecemos por el dato que menciona una distribución simétrica , veamos :

«Carlo junto a la derecha de Luis»

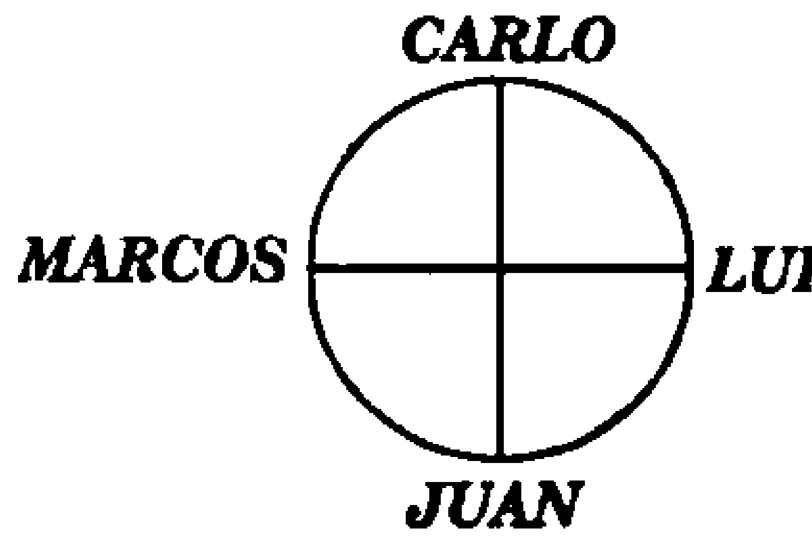


* Considerando que Luis mira hacía el centro del círculo es posible identificar cual es su derecha y determinar su ubicación de Carlo, sigamos con la siguiente información :

"Juan se sienta junto a Luis"



* De este último esquema es fácil deducir que Marcos ocupará la cuarta ubicación , es decir:



* El esquema implicará que no es cierto que Juan se sienta junto a Carlo .

RPTA: "E"

EJERCICIO RESUELTO 3 :

Seis amigos ***A, B, C, D, E*** y ***F*** se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente .

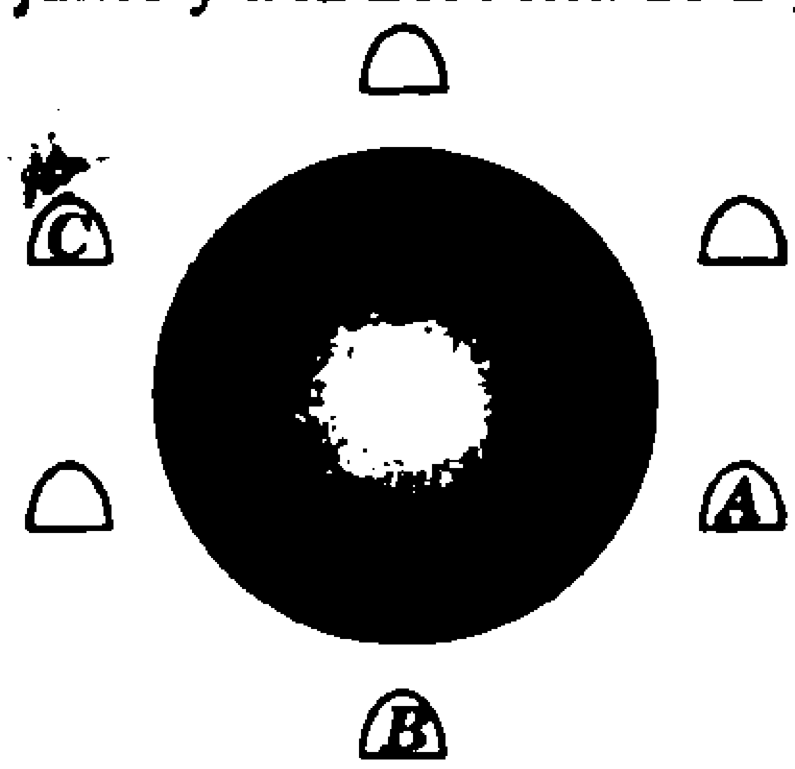
Si se sabe que :

* ***A*** se sienta junto y a la derecha de ***B*** y frente a ***C*** .
* ***D*** no se sienta junto a ***B*** .
* ***E*** no se sienta junto a ***C*** .

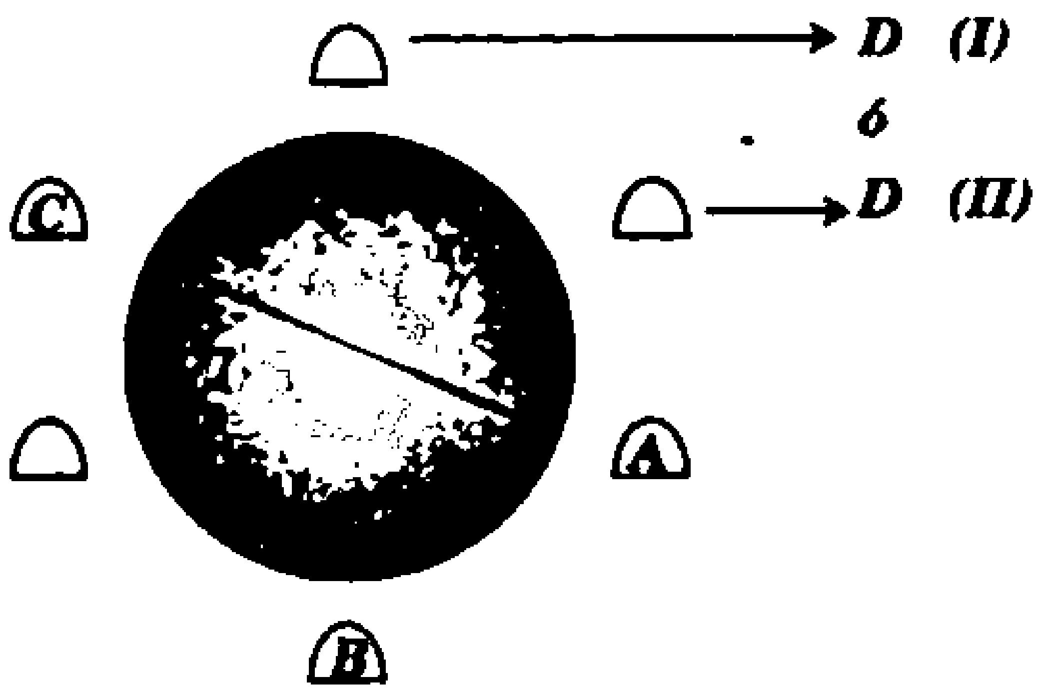
¿Entre quienes se sienta ***F***?

RESOLUCIÓN :

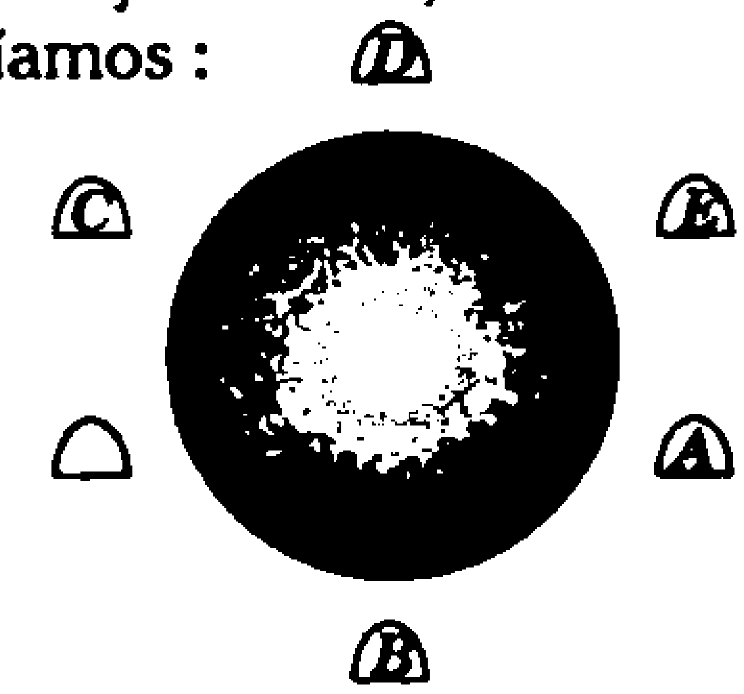
* "***A*** se sienta junto y a la derecha de ***B*** y frente a ***C*** ".



* "***D*** no se sienta junto a ***B*** " .

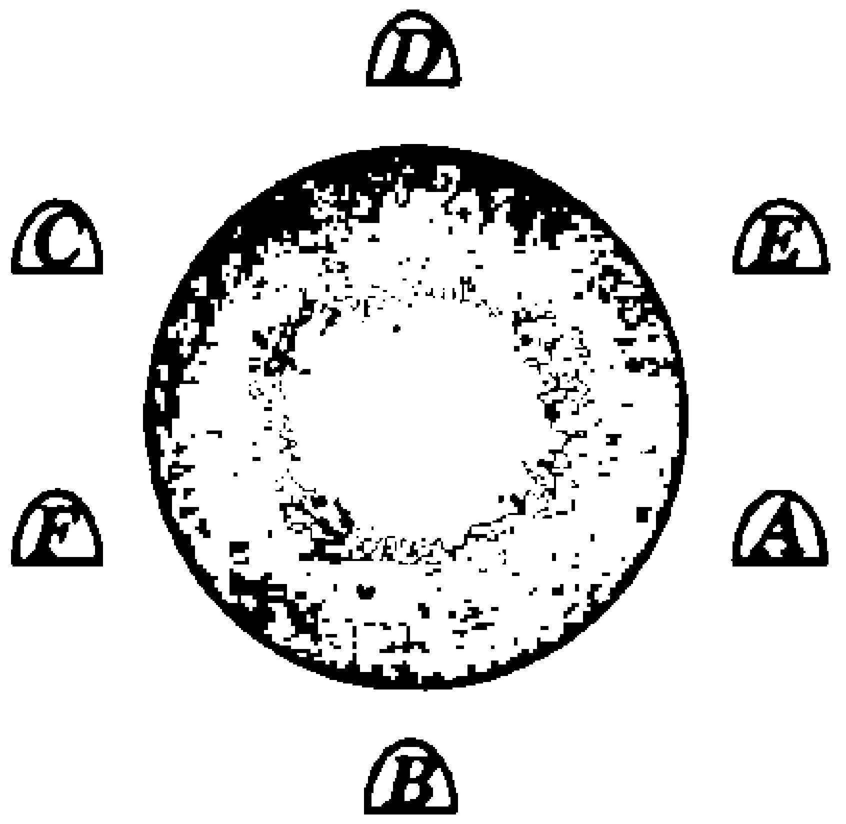


* "***E*** no se sienta junto a ***C*** " ; esto descarta la posibilidad ***(II)*** y tendríamos :



* Luego terminando de completar :

"F" esta entre ***"B"*** y ***"C"***.



→ ***"F" está entre "B" y "C"***

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Cuatro amigos se sientan alrededor de una mesa redonda con *4* sillas distribuidas simétricamente, y se sabe que:

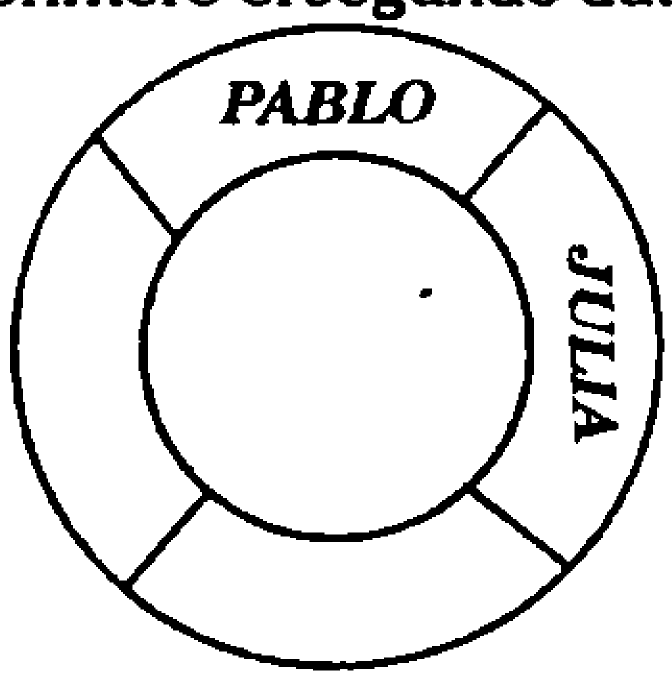
* Pilar no se sienta junto a Julia.
* Pablo se sienta junto ya la derecha de Julia.

¿Dónde se sienta Hugo?

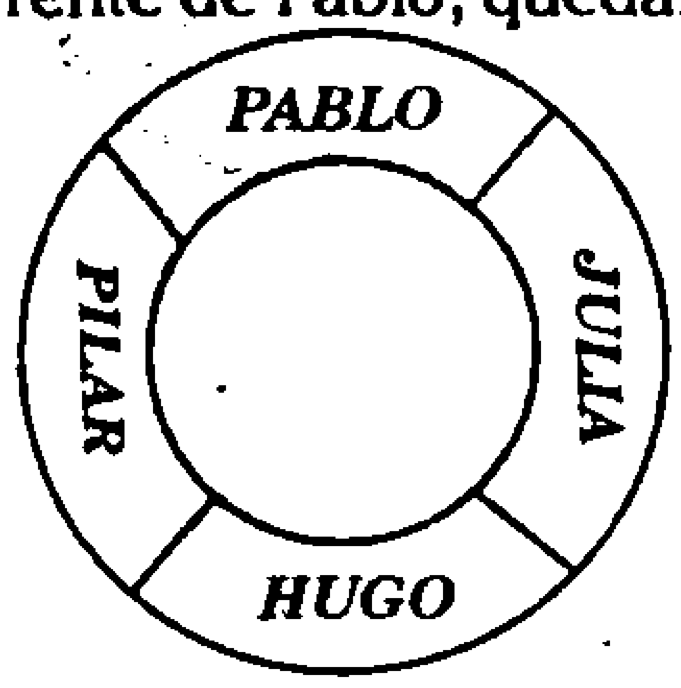
A)Frente a Pablo ***B)Frente a Pilar***
C)A la derecha de Julia ***D)A la derecha de Pilar***
E)Más de una es correcta.

RESOLUCIÓN:

Consideramos primero el segundo dato por ser el más conciso.



Como Pilar no se sienta junto a Julia, entonces necesariamente estará al frente de Julia y a Hugo le queda estar al frente de Pablo; quedando el gráfico así :



Analizando las alternativas observamos que las que se cumplen son *A* y *D*.

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Tres parejas se sientan alrededor de una mesa circular con *6* asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

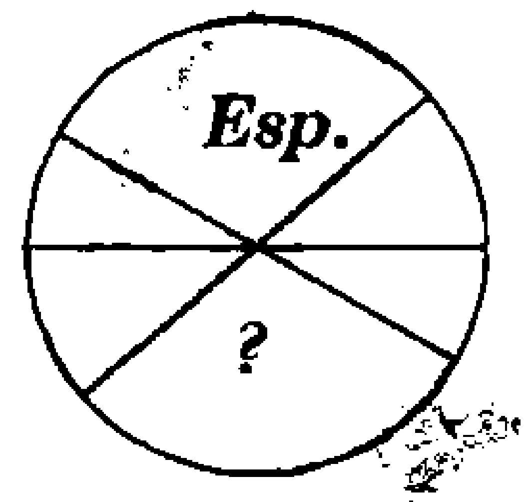
* A la derecha de la novia de Antonio se sienta Gabriel.
* Maritza, que está sentada a la derecha de Dora, está al frente de su propio novio.
* Antonio está a la izquierda de Mario.
* Esperanza está al frente de la novia de Gabriel.

¿Quién es el novio de Dora?

A) Gabriel ***B) Antonio*** ***C) Mario***
D) Felipe ***E) No se puede determinar***

RESOLUCIÓN :

* Empecemos con el último dato , ya que nos brinda una sola posibilidad :



Novia de Gabriel

* El lugar señalado con ? debe ser ocupado por una dama , pero por el 2° dato , Maritza está al frente de su propio novio ; luego , "?" no puede ser Maritza.
* Evidentemente "?" tampoco puede ser Esperanza.
* Entonces la única posibilidad es que la novia de Gabriel sea Dora.

⇒ El novio de Dora es Gabriel.

RPTA : "A"

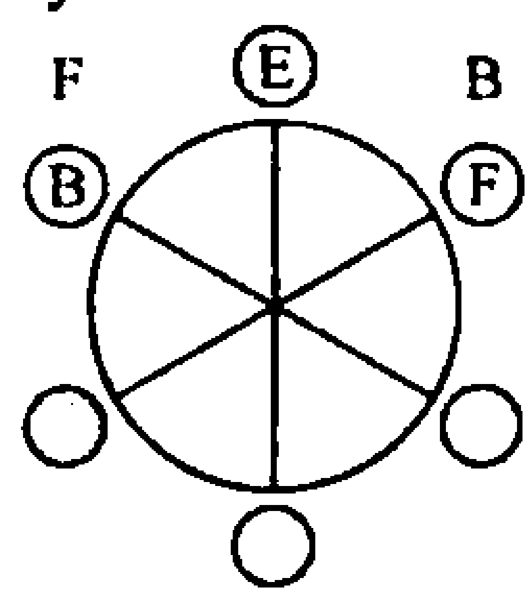
PROBLEMA 3 :

"En el comedor del colegio pre , ocho estudiantes de diferentes aulas se sientan en una mesa circular , guardando distancias proporcionales ; el del aula ***"E"*** está frente al aula ***"A"*** y entre los de las aulas ***"F"*** y ***"B"***. El del ***"C"*** está a la izquierda del de la aula ***"A"*** y frente al del ***"F"*** . Frente al de ***"B"*** está el de ***"D"***, este a su vez está a la izquierda de ***"H"***. ¿Cuál de ellos está entre los estudiantes del ***"G"*** y ***"A"***?

A) "F" ***B) "H"*** ***C) "D"*** ***D) "C"*** ***E) "B"***

RESOLUCIÓN :

* Consideremos la mesa circular y las distancias proporcionales , veamos :

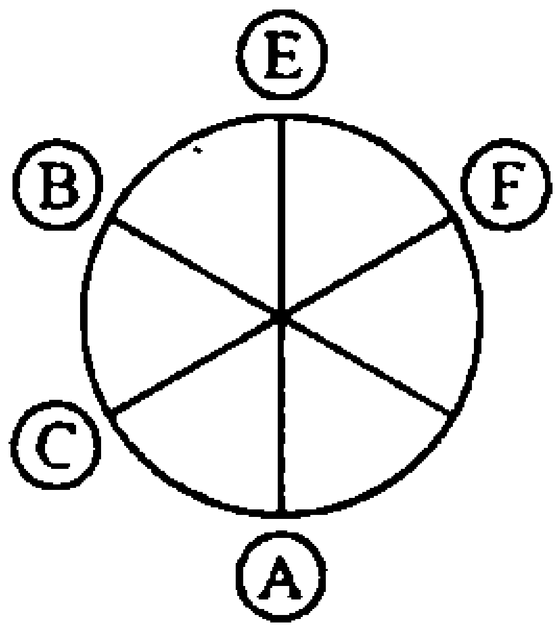


El del aula ***"E"*** frente al aula ***"A"***

Entre los de las aulas ***"F*** y ***B"***. nótese que hay dos opciones para ***"F*** y ***B"***.

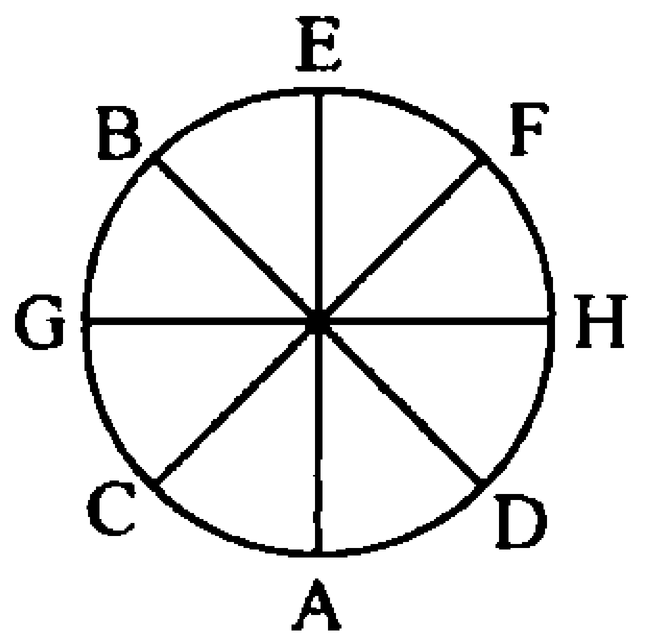
"El del ***"C"*** a la izquierda del ***"A"***, y frente al de ***"F"*** como se podra observar esto último define la doble opción del paso anterior , además es importante

considerar que todos los estudiantes miran hacia dentro del círculo a fin de determinar la izquierda y la derecha; en el gráfico **"B"** está a la derecha de **"E"** mientras que **"F"** se ubica a la izquierda de **"E"**.



* Ahora bien continuando con la lectura del enunciado tendremos :

"Frente al de **"B"** está el del **"D"** éste a su vez (se refiere a **"D"**) está a la izquierda de **"H"**, esto nos permite ubicar a **"H"** y hacer evidente la ubicación de **"G"** en la última casilla de nuestro esquema :



* Finalmente podremos afirmar que entre los estudiantes de las aulas **"G"** y **"A"** encuentra el alumno de **"C"**.

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Seis amigos se sientan a comer helados alrededor de una mesa.

* Julio está al lado de Carlos y al frente de Ana.

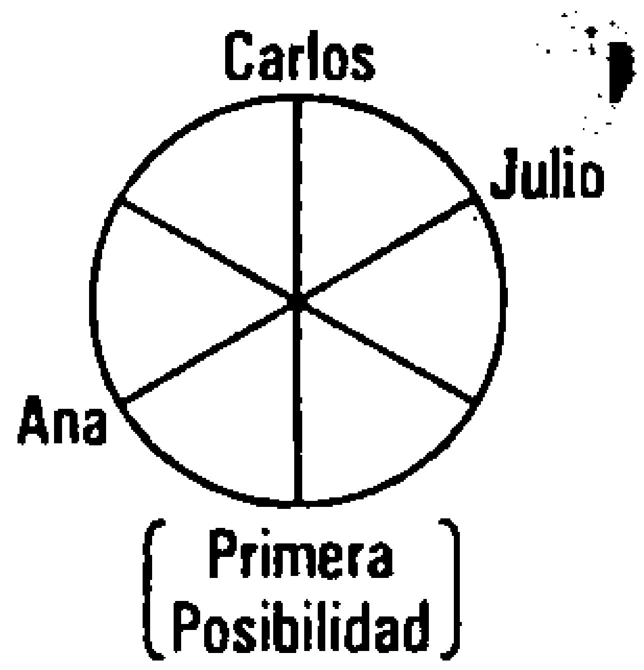
* David no se sienta nunca al lado de Ana y de Carlos.

Entonces siempre cierto es que :

A) Ana y Carlos se sientan juntos.
B) David está a la derecha de Julio.
C) David está a la izquierda de Julio.
D) Ana y Carlos están separados por un asiento.

RESOLUCIÓN :

* Primer dato :



* Al analizar las alternativas observamos que la que cumple en ambas posibilidades es la **"D"**. (No es necesario el segundo dato) .

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

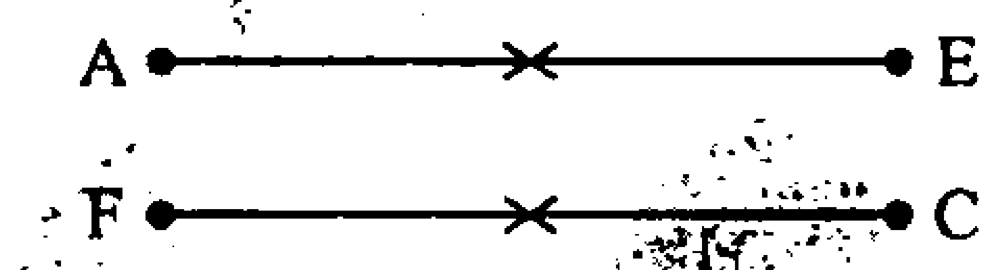
Ocho personas se sientan equidistantemente al rededor de una mesa circular . ***A*** está sentada frente de ***E*** y ***F*** al frente de ***C*** . El sujeto ***B*** está junto y a la derecha de ***C*** , mientras que ***G*** , junto y a la izquierda de ***F*** . La persona B no está junto a ***A*** , ni H junto a ***C*** . ¿Entre quienes está sentada ***D***?

A) Entre A y B ***B) Entre A y C*** ***C) Entre B y C***
D) Entre E y F ***E) Entre C y G***

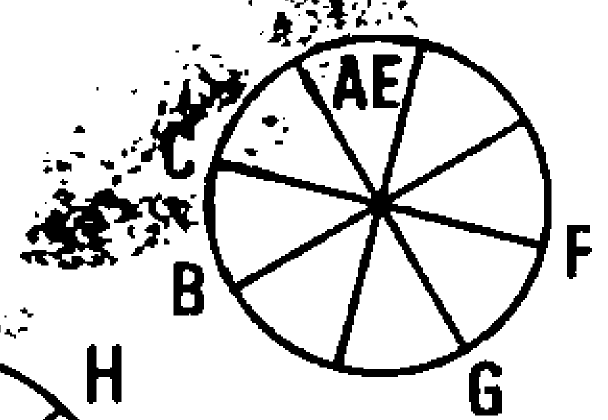
RESOLUCIÓN :

* ***A*** Frente a

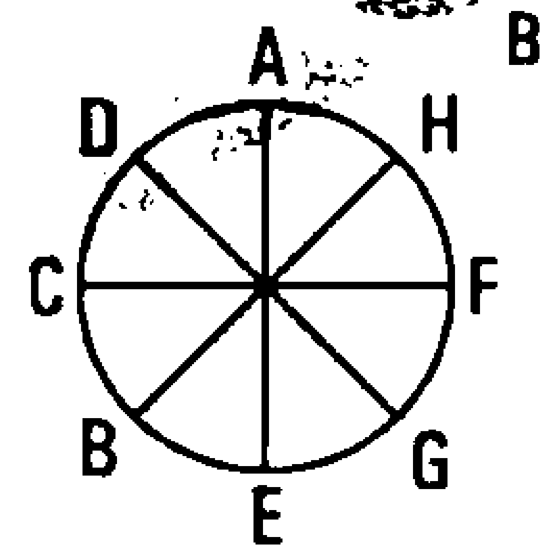
E y ***F*** frente a ***C*** .



* ***B*** junto a la derecha de ***C*** y ***G*** junto a la izquierda de ***F*** .



* ***B*** no está junto a ***A***



ni H junto a ***C*** , entonces a ***D*** sólo le queda el lugar entre ***A*** y ***C*** .

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Tres niñas y tres niños están sentados alrededor de una mesa circular distribuidos simétricamente .

Si sabemos que :

* ningún niño está sentado junto a otro niño .

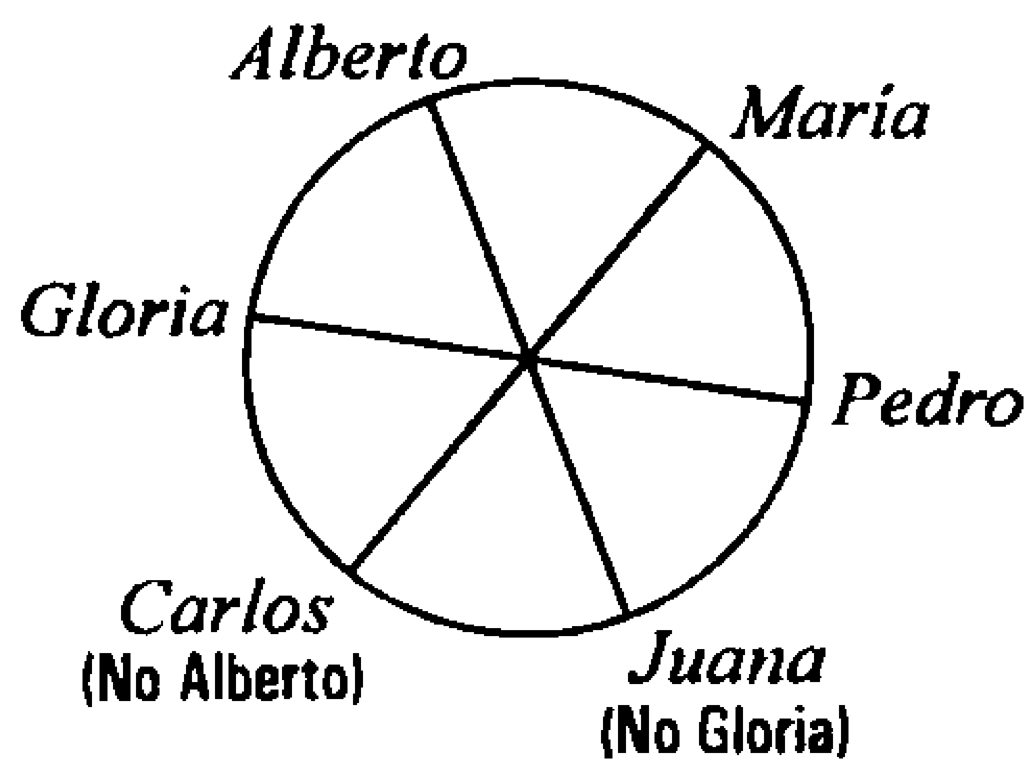
* Gloria no está sentada junto a Pedro, ni Alberto, junto a Juana .

* María está sentada junto a la derecha de Pedro .

¿Quién está sentada junto a la derecha de Carlos? y ¿quien está sentado junto a la izquierda de Gloria .

A)Juan y Alberto ***B)María y Alberto.*** ***C)Gloria y Alberto***
D) Juana y Pedro. ***E) Gloria y Pedro .***

RESOLUCIÓN :



RPTA: "A"

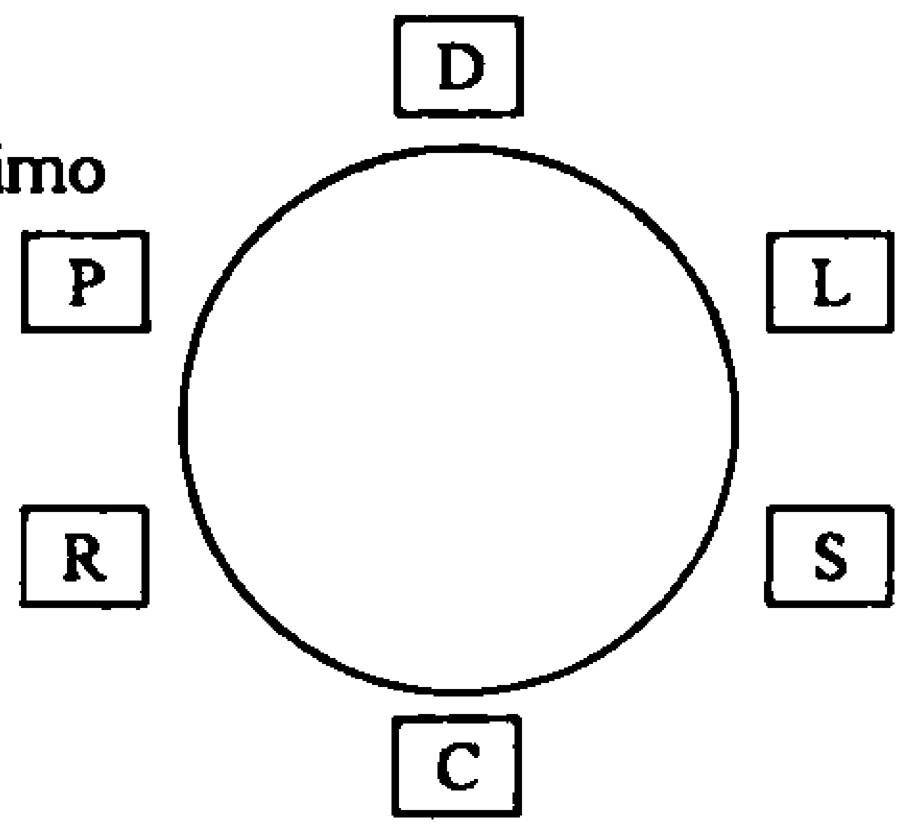
PROBLEMA 7 :

Seis primos juegan dominó alrededor de una mesa redonda . David no está sentado al lado de Coquito ni de Silvia . Piero no está al lado de Liz ni de Silvia . Coquito no está al lado de Piero ni de Liz . Regina está junto y a la izquierda de Coquito ¿Quién está sentado junto y a la derecha de Coquito?

A) Silvia B) David C) Liz D) Regina E) Piero

RESOLUCIÓN :

* Empezando por el último dato tendremos :



⇒ A la derecha de Coquito esta Silvia.

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

Cuatro hermanos : Araís , Xuarami , Andre y Milli , para hacer sus tareas se sientan alrededor de una mesa con *4* sillas igualmente separadas entre sí , Sabemos que :

* Xuarami se sienta a la derecha de Andre .

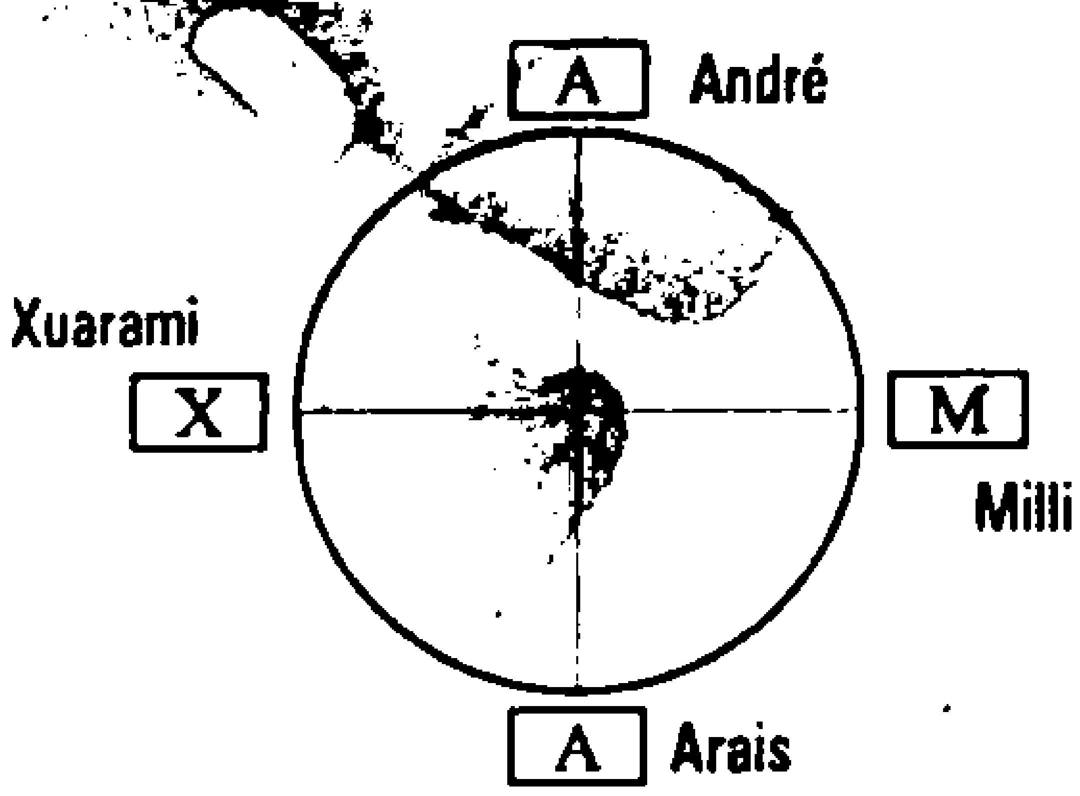
* Los hermanos cuyos nombres tienen la misma cantidad de letras no se sientan juntos .

¿Cual de ellos se sienta frente à Milli?

A) Andre B)Araís C)Xuarami D)Zamir E)Maura

RESOLUCIÓN :

* Como André y Araís , tiene en su escritura la misma cantidad de letras, entonces no estarán juntas , necesariamente frente a frente :



* Frente a Milli se sienta Xuamari .

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

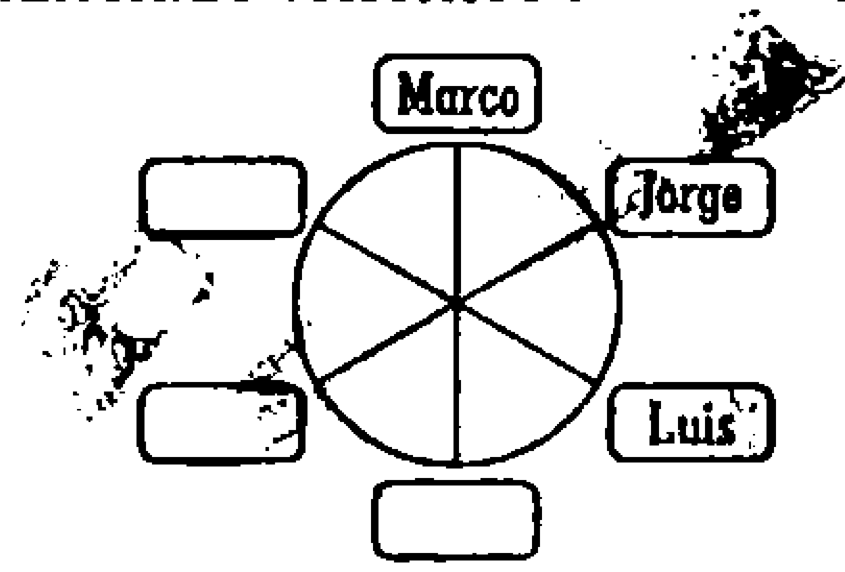
6 amigos juegan a la ronda , Omar no está ubicado al lado de Jorge ni de Luis , Pipo no está al lado de Victor ni de Luis , Jorge no está al lado de Victor ni de Pipo . Marco está junto a Jorge , a su derecha ¿Quién está junto y a la izquierda de Pipo?

A) Marco B) Luis C) Victor D) Pipo E) Omar

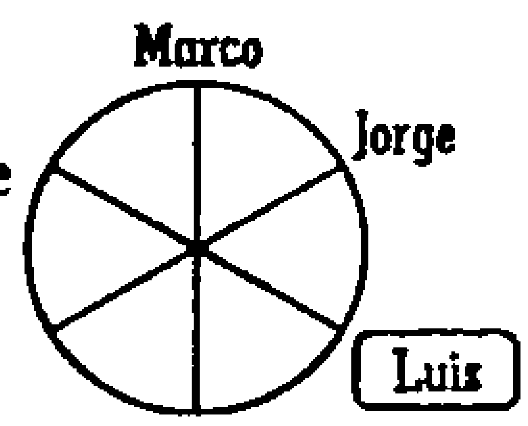
RESOLUCIÓN :

* Si damos una lectura global al enunciado podremos definir nuestro gráfico y además percatarnos que sólo hay una información directa a saber .

(1) "Marco está junto a Jorge a su derecha", la referencia es a la derecha de Jorge , luego de haber trazado el esquema como se muestra procederemos a ubicar quien está ubicado a la izquierda de Jorge (la figura sombreada representa está idea) . Para determinar esta ubicación iremos descartando , ya estando ubicados Jorge y Marco nos quedan cuatro amigos por evaluar : Luis Victor , Pipo y Omar ; pero del enunciado tenemos :



(2) "Omar no está al lado de Jorge ni de Luis" esto descarta a Omar , luego :

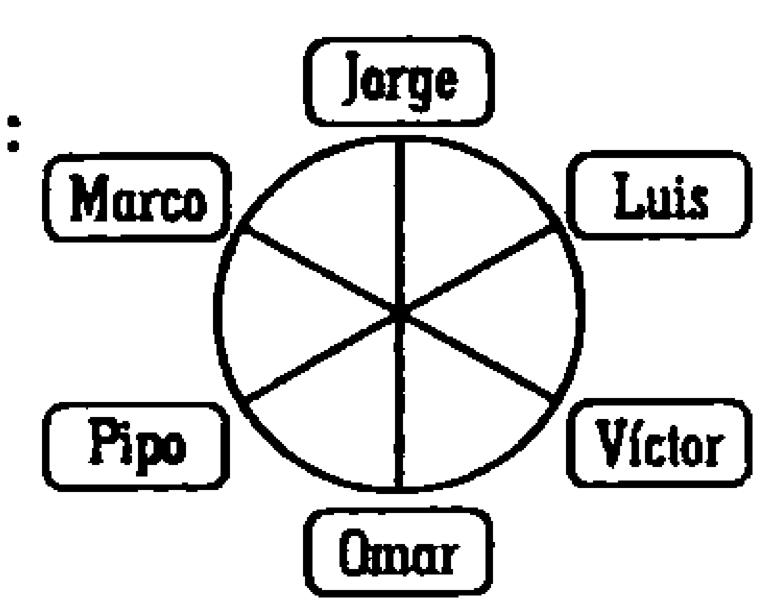


(3) "Jorge no está al lado de Víctor ni de Pipo" se descarta a Víctor y Pipo , es obvio que solo Luis puede estar a la izquierda de Jorge ; ahora determinemos quien esta a la izquierda de Luis , (en la figura sombreada), ya estando ubicado Marco, Jorge , Luis y del dato ***(3)*** "Pipo no está al lado de Victor ni al lado de Luis" deducimos que solo Omar o Víctor pueden estar ubicados a la izquierda de Luis, pero el dato ***(1)*** descarta a Omar , por tanto solo Víctor puede estar ubicado a la izquierda de Luis .

Ubiquemos a la persona a la izquierda de Víctor , pueden ser Omar ó Pipo , pero de la información ***(3)*** Pipo no está al lado de Víctor . Luego sólo puede ser Omar el que esta ubicado a la izquierda de Víctor; luego se deduce que Pipo irá a la sexta ubicación .

Finalmente la ubicación general será la que se muestra en el gráfico :

* Luego la respuesta será :



"A la izquierda de Pipo está sentado Marco"

RPTA: "A"

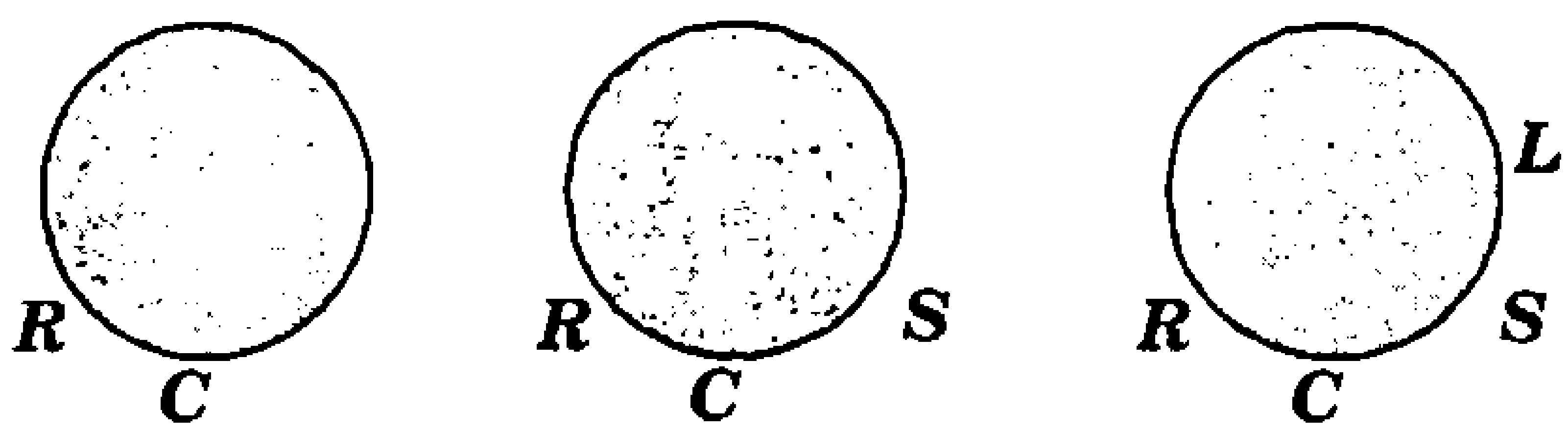
PROBLEMA 10 :

Seis primos juegan dominó alrededor de una mesa redonda . David no está sentado al lado de Coquito ni de Silvia. Piero no está al lado de Liz ni de Silvia . Coquito no está al lado de Piero ni de Liz . Regina está junto y a la izquierda de Coquito . ¿Quién está sentado junto y a la derecha de Liz?

A) Silvia B) David C) Coquito D) Regina E) Piero

RESOLUCIÓN :

* Primero ubicamos a Regina y a Coquito , Luego , del enunciado los que no están sentados al lado de Coquito son David , Piero y Liz , entonces:



* Los que no están sentados al lado de Silvia son Piero y David , luego :

* Piero no está al lado de Liz .

* Junto y a la derecha de Liz está David .

RPTA: "B"

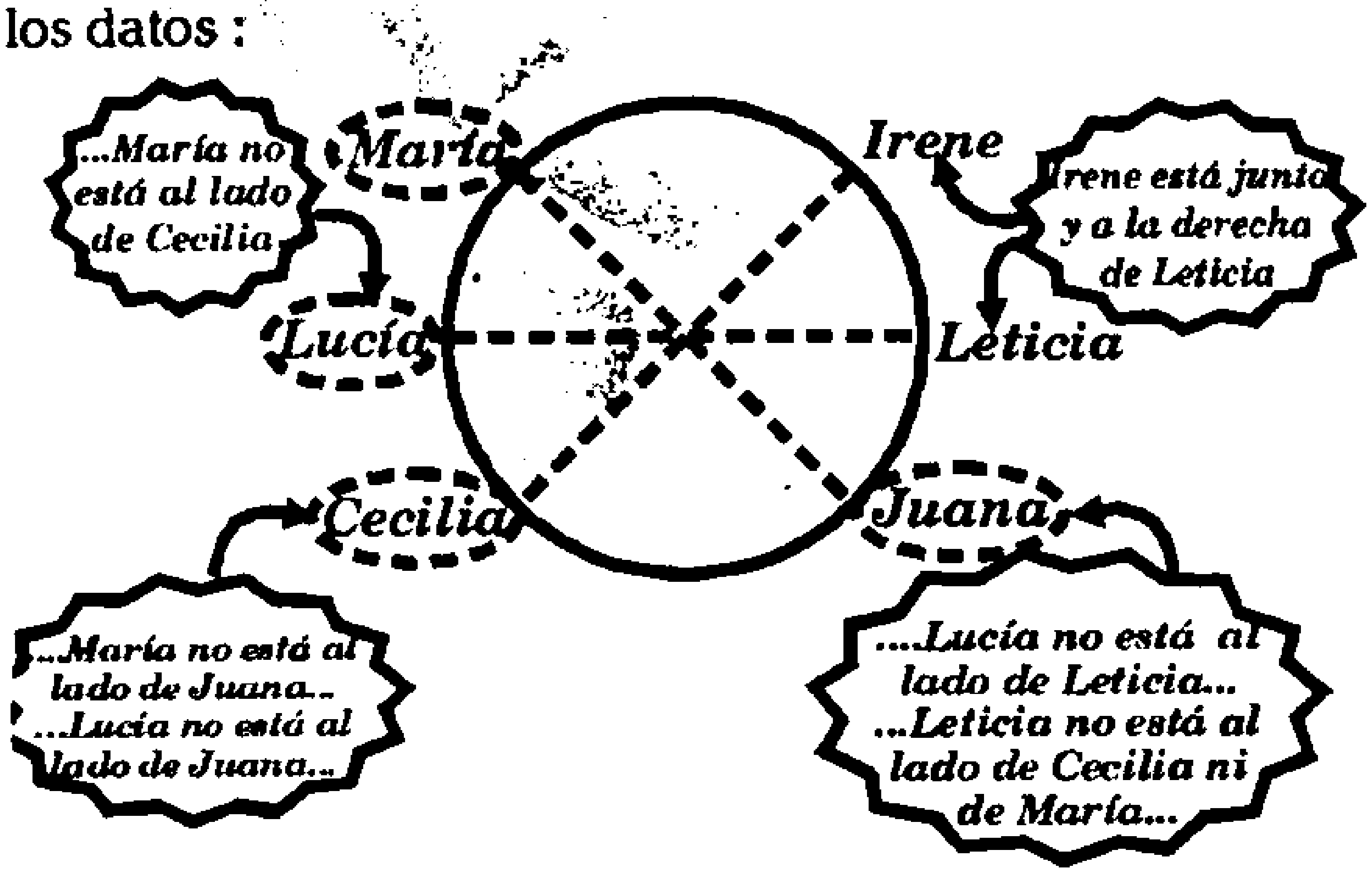
PROBLEMA 11 :

En una mesa circular hay seis asientos, simétricamente colocados , ante los cuales se sientan *6* amigas a estudiar. Si Lucía no está sentada al lado de Leticia ni de Juana; María no está al lado de Cecilia ni de Juana , Leticia no está al lado de Cecilia ni de María , Irene está junto y a la derecha de Leticia , ¿quién está sentada junto y a la izquierda de María?

A) Irene B) Leticia C) Cecilia D) Lucía E) Juana

RESOLUCIÓN :

* Ubicando convenientemente a las personas, según los datos :



* Luego , junto a la izquierda de María está Irene .

⇒ La respuesta es Irene

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

En un comedor ocho comensales se sientan alrededor de una mesa circular . las *8* personas son estudiantes de diversas especialidades : el de ingeniería está frente al de educación y entre los de economía y farmacia , el de periodismo está a la izquierda del de educación y frente al de economía . Frente al de farmacia está el de derecho , éste a su vez a la siniestra del de arquitectura.

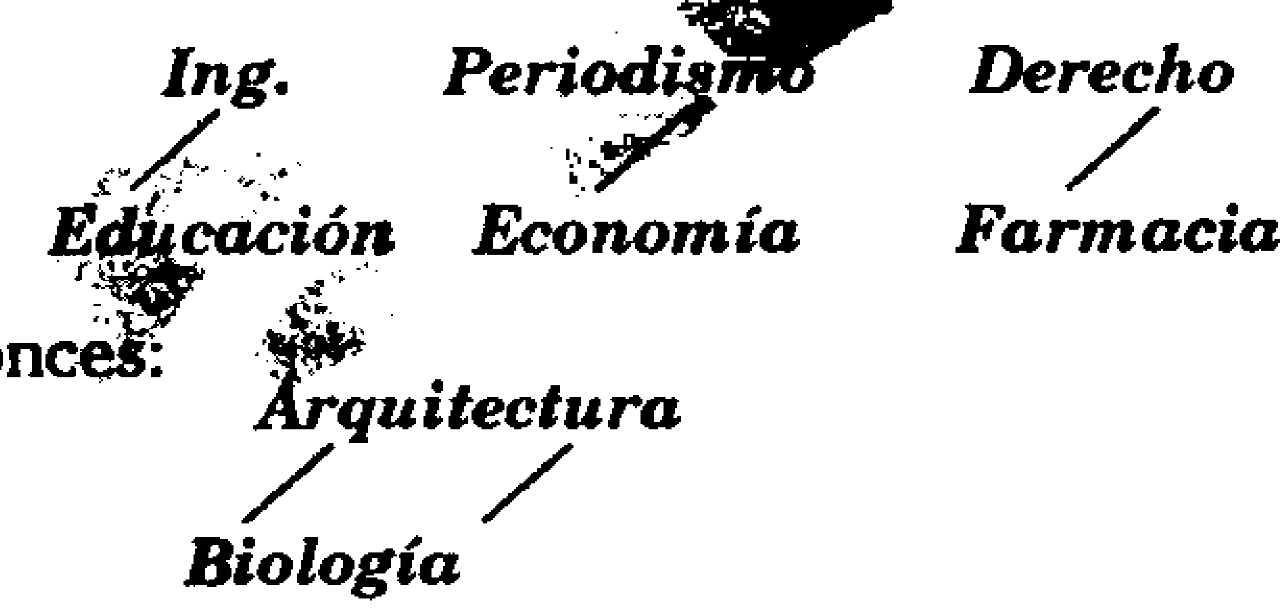
¿Cuál es la profesión del que está entre el de biología y educación .

A) periodismo B) farmacia C) derecho D) ingeniería E) economía.

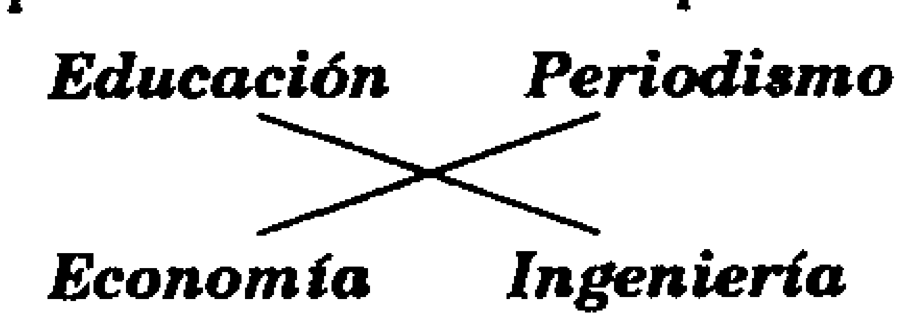
RESOLUCIÓN :

* Considerando los datos más con... (los que están frente a frente)

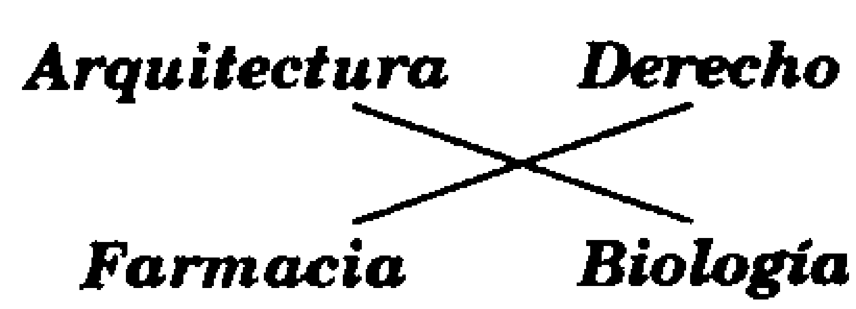
Entonces:



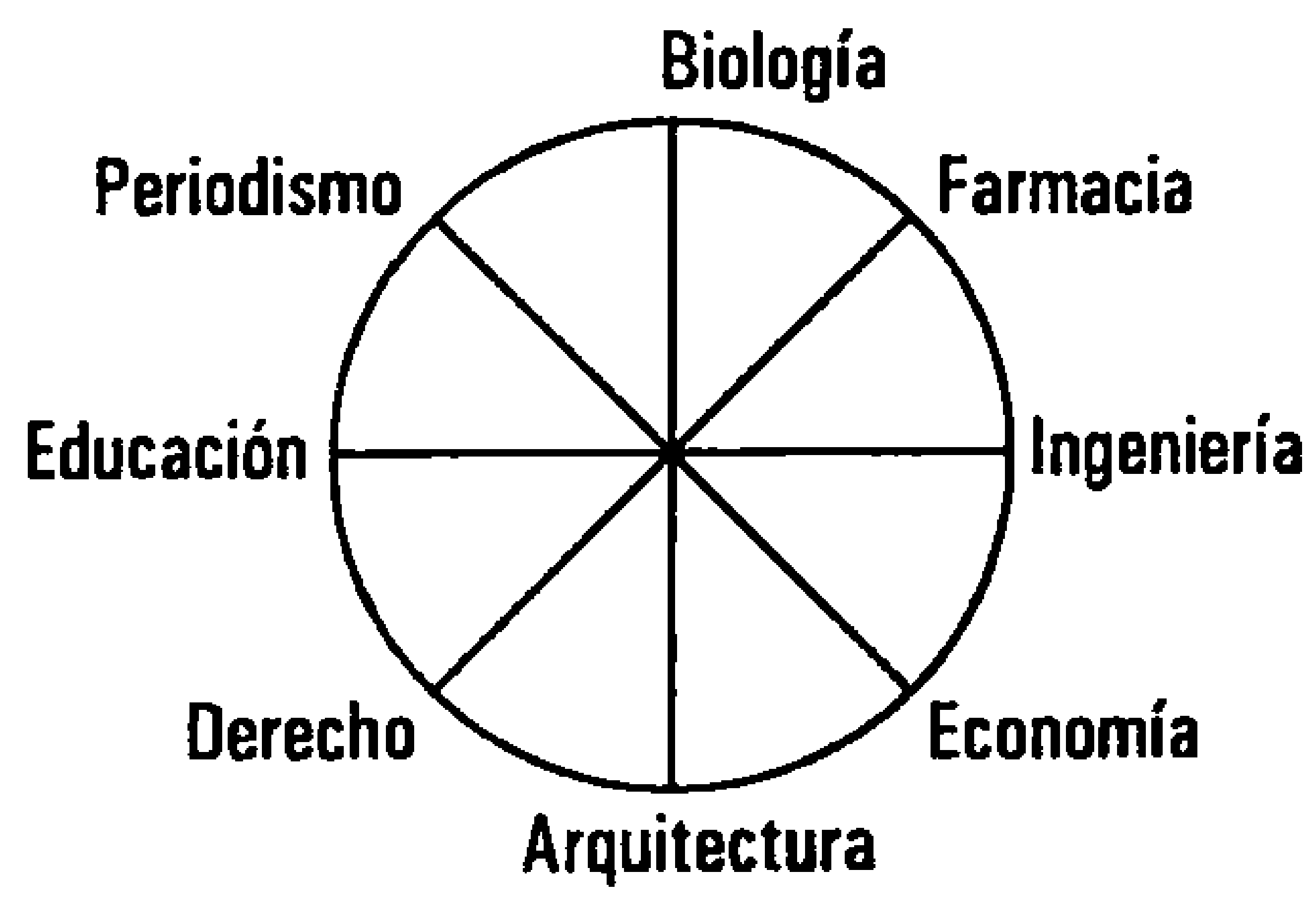
* El de periodismo está a la izquierda del de educación:



* El de derecho a la siniestra (izquierda) de arquitectura :



* Utilizando los que falta del ***1er***. dato resultará :



⇒ Entre biología y educación está el de periodismo.

RPTA: "A"

PROBLEMA 13 :

Arny invita a cenar a sus amigos : Betty , Coryna , Daniel , Ely y Felipe ; este último por razones de fuerza mayor no pudo asistir .

Se sientan alrededor de una misma mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente . Sí :

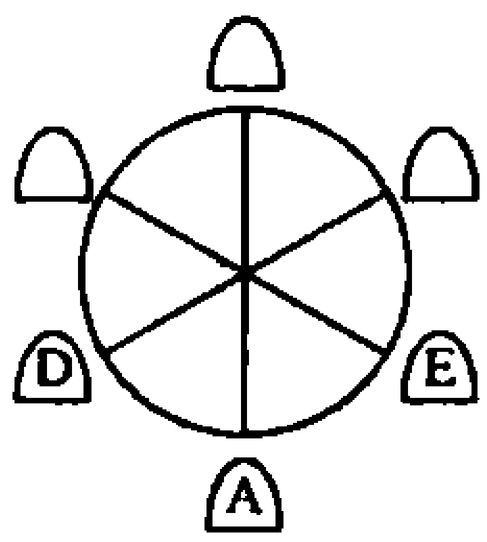
* Arny se sienta junto a Ely y Daniel
* Frente a Ely se sienta Betty .
* Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío.

¿Entre quiénes se sienta Ely?

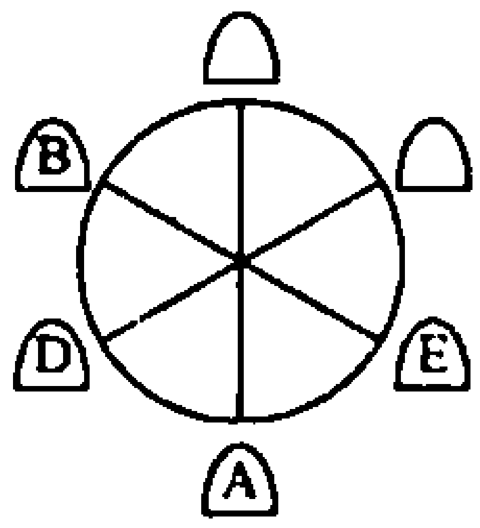
A) Betty y Arny *B) Arny y Coryna*
C) Arny y Felipe *D) Falta datos* *E) N.A.*

RESOLUCIÓN :

* "Arny se sienta junto a Ely y Daniel".

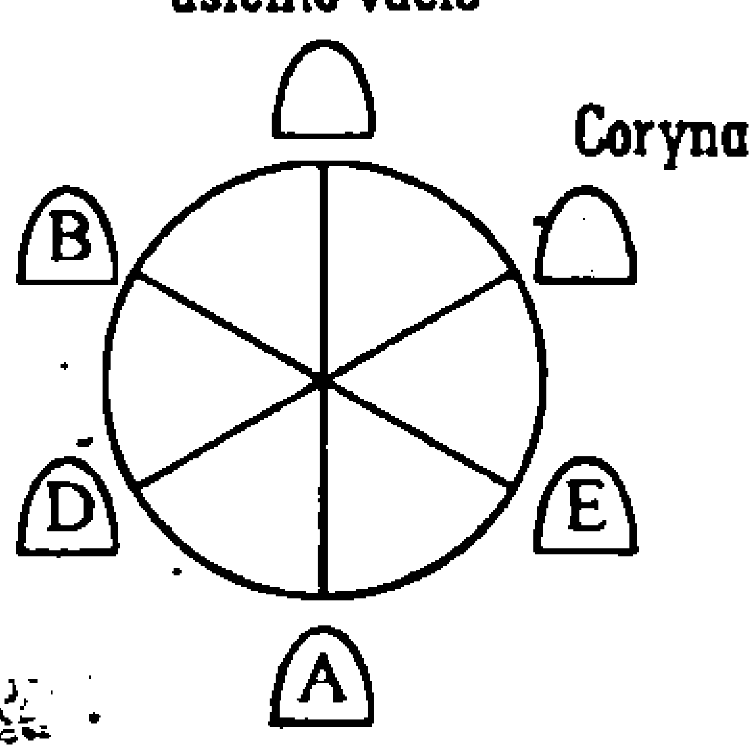


* "Frente Ely se sienta Betty"



* "Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío". Entonces , dicho asiento debe estar entre las dos mujeres ; luego :

"Ely se sienta entre Arny y Corina"



RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Ocho estudiantes de diversas aulas de una Academia, van al comedor , se sientan en una mesa circular guardando la misma distancia entre sí .

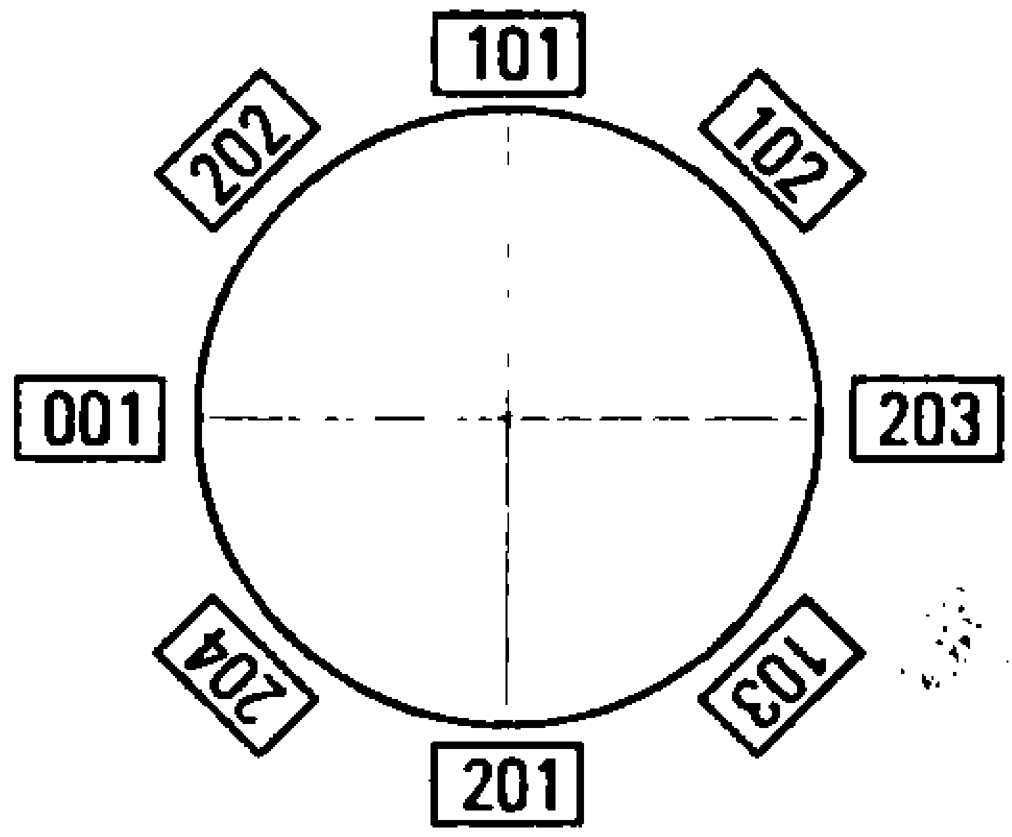
* El del *101* está frente al del *201* y es el único en medio del *102* y *202*.
* El del *204* está a la izquierda del de *201* y frente al del *102* .
* Frente al del *202* esta el del *103* , este a su vez esta a la izquierda del de *203* .

¿Cuál de ellos está entre los estudiantes del *001* y *201*?

A) 201 *B) 204* *C) 102* *D) 203* *E) 101*

RESOLUCIÓN :

* Fijando al *101* en cualquier posición al inicio , encontraremos lo siguiente :



⇒ Quien está entre el *001* y *201* será el de *204* .

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Ocho comensales se sientan en una mesa circular guardando distancias proporcionales . Las *8* personas son estudiantes de diferentes especialidades . El de ingeniería está frente al de Educación y entre los de Economía y Farmacia .

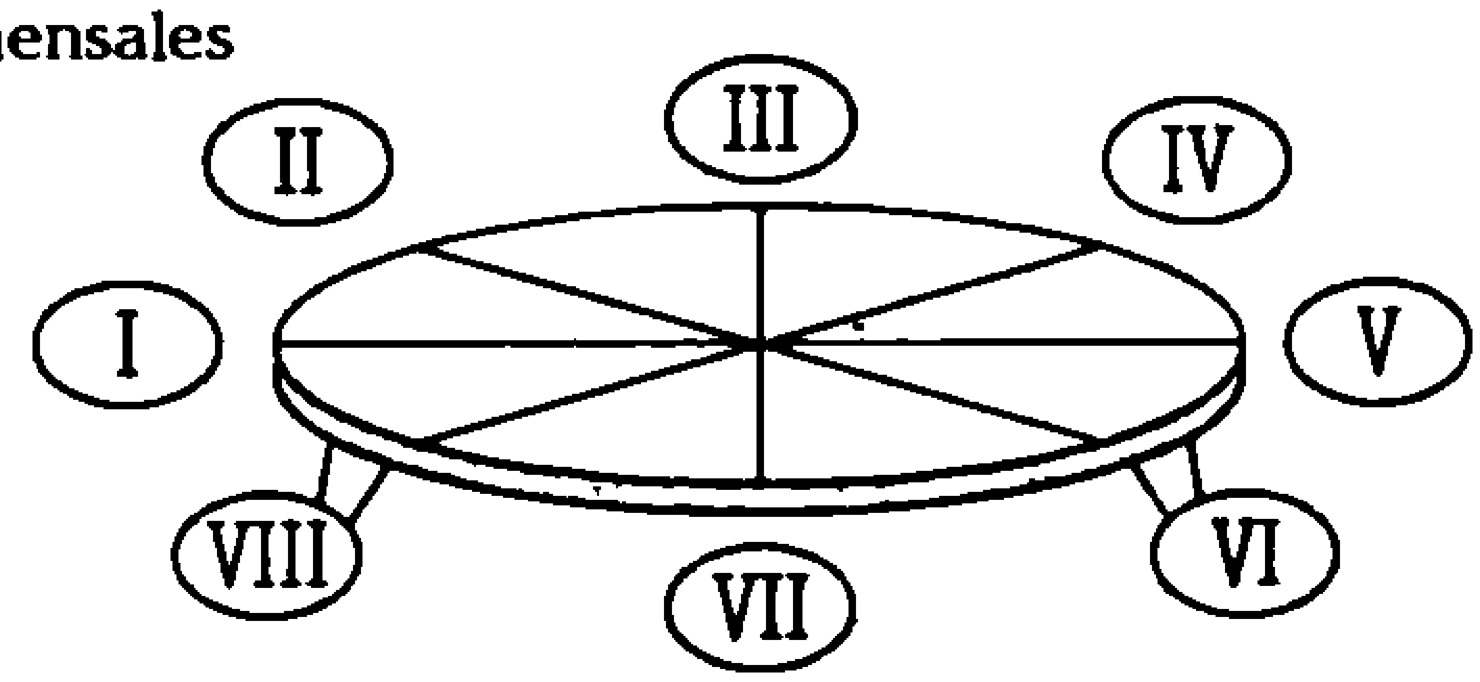
El de Periodismo está a la izquierda del de Educación y frente al de Economía .

Frente al de Farmacia está el de Derecho ; esté a su vez está a su siniestra del de Arquitectura . ¿Cuál de ellos está entre los estudiantes de Biología y Educación?

A) Derecho *B) Farmacia* *C) Ingeniería*
D) Economía *E) Periodismo*

RESOLUCIÓN :

* Grafiquemos la mesa circular con los *8* estudiantes comensales



"El de Ingeniería está frente al de Educación y entre los de Economía y farmacia".

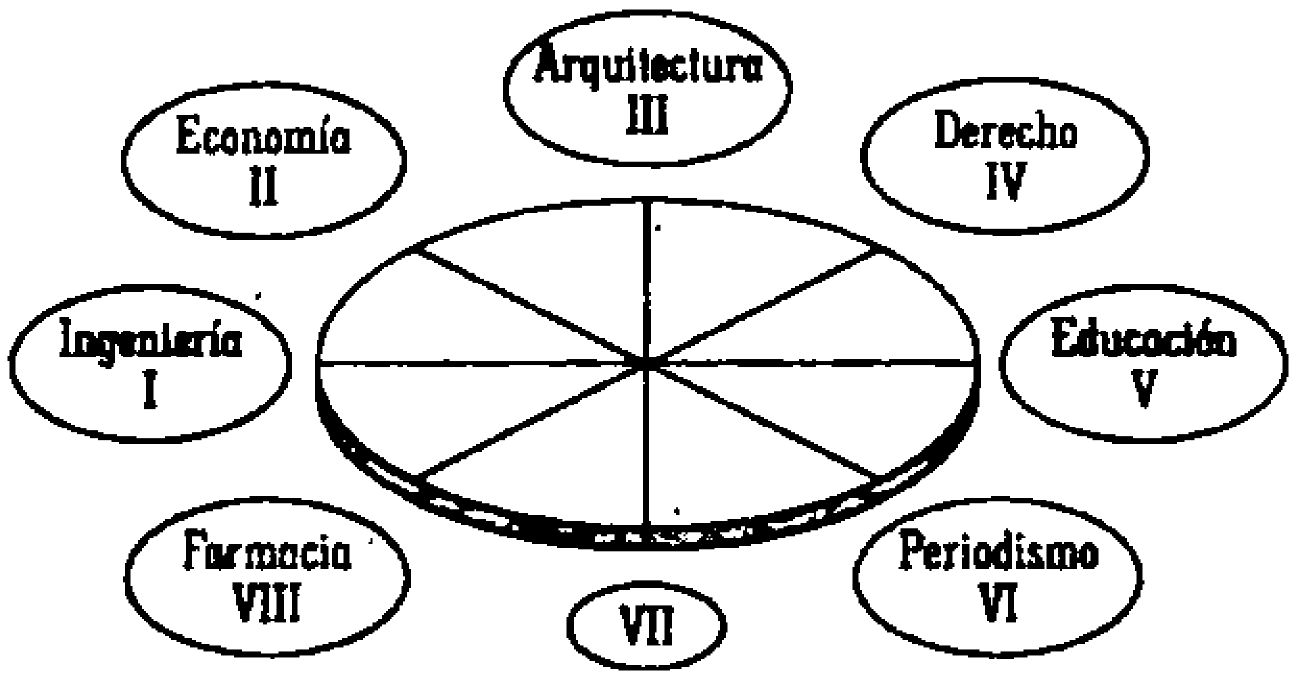
Si el de Ingeniería es el *I*: El de Educación es el *V* , para los que intermedian al de Ingeniería; hay dos posibilidades .

α) Economía *(II)* y Farmacia *(VIII)*

β) Economía *(VIII)* y Farmacia *(II)*

"El de periodismo está a la izquierda del de Educación y frente al de Economía"

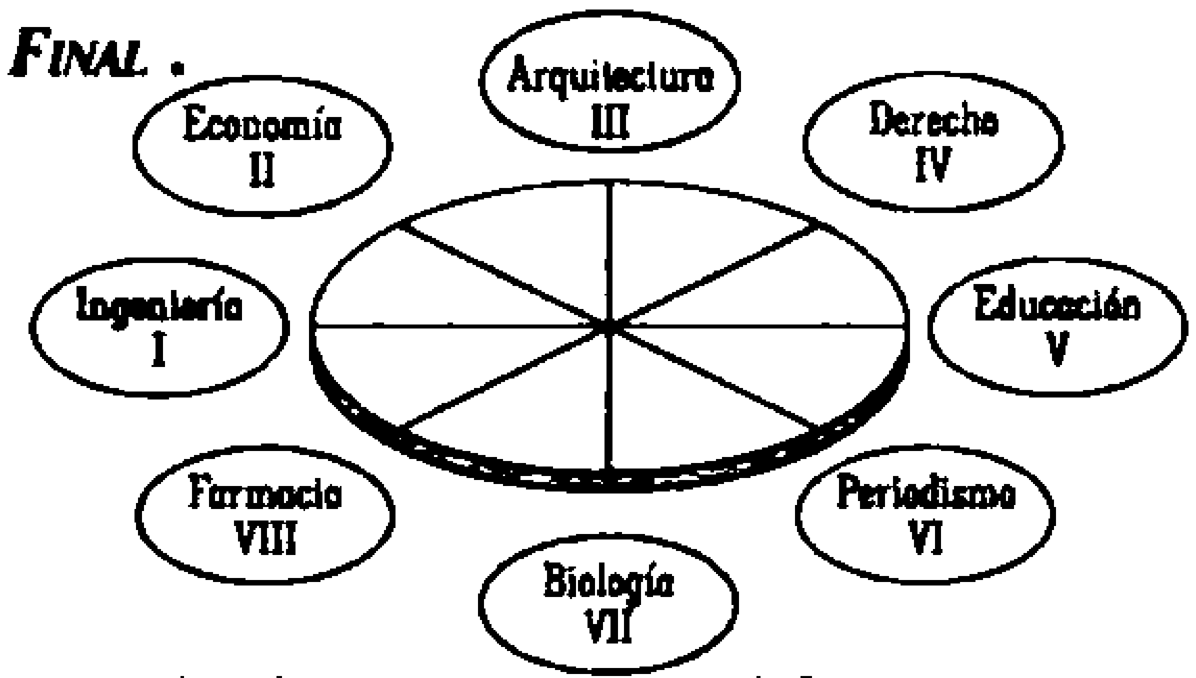
"El de Educación es el *(V)*. *A* su izquierda está el de Periodismo *(VI)* ; y el de Economía frente a este último. El gráfico quedará así :



* Frente al de Farmacia está el de Derecho y éste a su vez está a la siniestra del de Arquitectura .

El de Derecho *(IV)* es quien está frente al de Farmacia *(VIII)*; y a la izquierda (siniestra) el de Arquitectura *(III)* ; Quién está adelante del de Biología *(VII)*

GRÁFICO FINAL .



* Es el de Periodismo el que está flanqueando (entre dos) por los estudiantes de Biología *(VII)* y Educación *(V)* .

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

En una mesa circular hay seis asientos simétricamente colocados ante la cual se sientan *6* amigas a jugar monopolio . Además se sabe que :

* Lucia no está sentada al lado de Leticia ni de Juana.
* María no está al lado de Cecilia ni de Juana .
* Leticia nó está al lado de Cecilia ni de María.
* Irene esta junto y a la derecha de Leticia.

Entonces es cierto .

I) Irene está junto y a la derecha de María.

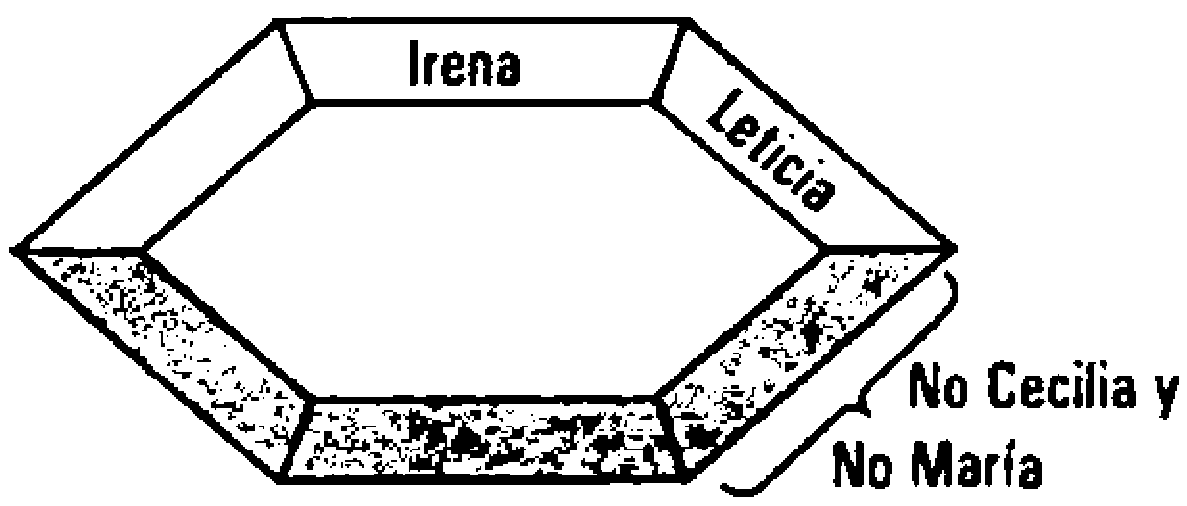
II) Lucia está frente a Leticia.

III) Juana está junto y a la izquierda de Cecilia.

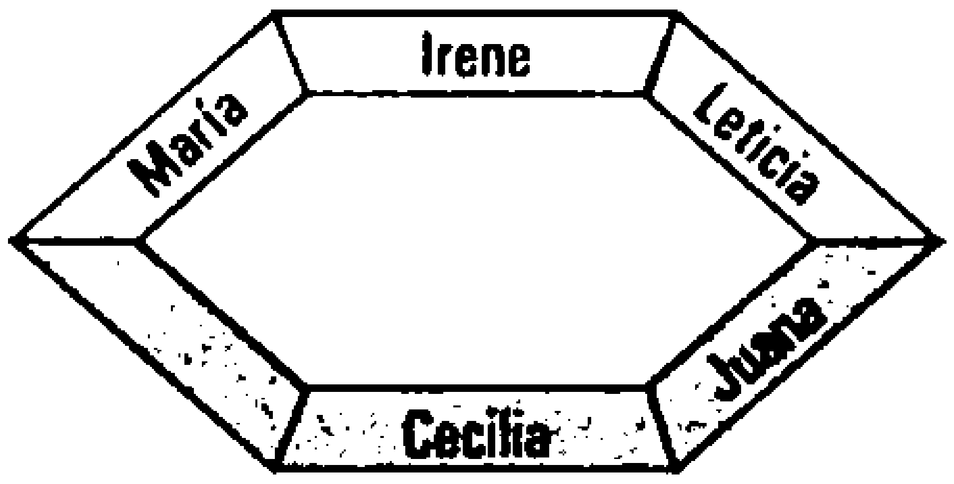
A) Solo I ***B) Sólo II*** ***C) I y III***
D) II y III ***E) Todos***

RESOLUCIÓN :

* Irene está junto y a la derecha de Leticia , Leticia no está al lado de Cecilia ni de María .



* María no está al lado de Cecilia ni de Juan :



Luego , en el asiento que falta está ubicada Lucía .

*Analizando las proposiciones dadas :

I) F ***II) V*** ***III) F***

RPTA: "B"

¡ RECUERDA !

* Empieza con los datos que puedas fijar fácilmente, es decir que generen menos posibilidades , éstos se retienen generalmente a posiciones frente a frente o una junto a otra (adyacentes).

EJEMPLO :

● Si me dicen ***A*** está frente a ***B*** , empiezo con este dato .

* Recuerda que las posiciones izquierda y derecha dependen del elemento de referencia.

* No te olvides que los elementos que están al lado. sólo se identifican como tales. si el texto lo especifica: ***«al lado de ... «. «adyacente a .... «. «junto a ... «. «a un asiento de ... «***

También debemos tener cuidado cuando nos dicen: está a un asiento, está a dos asientos, etc

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

ENUNCIADO :

En una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamentese sientan cinco amigos: Roger, Samuel, Tito, Vania y Violeta. Además se sabe que:

* *Tito se sienta junto a Roger y Violeta*
* *Vania se sienta frente a Tito*
* *Violeta y samuel no se sientan juntos*

01 ¿ Cuántos ordenamientos posibles hay?

A) Uno ***B) Dos*** ***C) Tres***
D) Cuatro ***E) Cinco***

02 ¿Quién se sienta frente al sitio vacío?

A) Roger ***B) Samuel*** ***C)Vania***
D) Tito ***E) Violeta***

03 ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) Violeta se sienta frente a Samuel.

II) Vania y Samuel se sientan juntos.

III) Roger se sienta a la derecha de Tito.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) Solo I y II E) Solo I y III

04 Todas las siguientes afirmaciones pueden ser verdaderas, excepto:

A) Vania está adyacente al sitio vacío.
B) Roger y Samuel se sientan juntos.
C) Violeta se sienta junto a Vania.
D) El sitio vacío se encuentra a la derecha de Samuel.
E) Roger se sienta a la derecha de Vania.

05 Es imposible que a la derecha de Roger se encuentre:

A) Tito B) Vania C) Violeta
D) Samuel E) El sitio vacío

ENUNCIADO :

Seis amigos están sentados alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simétricamente. Se cumple lo siguiente:

- *Daniel se sienta frente a Malena.* • *Erick no se sienta junto a Daniel*

ni a Alonso.

- *Daniel se sienta a la izquierda de Ximena.*
- *Alonso se sienta frente a Richi y junto a Malena.*

06 ¿Dónde se sienta Alonso?

A) Junto a Daniel.
B) Junto a Erick.
C) A la derecha de Richi.
D) Junto a Ximena.

07 Podemos afirmar con certeza que:

I) Erick se sienta junto a Alonso.

II) Malena se sienta junto a Erick.

III) Daniel se sienta al lado de Ximena.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) Solo III y I E) Solo II y III

08 Erick se sienta frente a:

A) Alonso B) Malena C) Ximena
D) Richi E) Daniel

09 Si Erick pudiera sentarse junto a Daniel y Alonso. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) Habrían *2* ordenamientos en total.

II) Daniel se sienta a la derecha de Erick.

III) Malena se sienta frente a Daniel.

A) I B) II C) I y II
D) Solo II y III E) N.A.

ENUNCIADO :

Alberto, Bernardo, Carlos y Diego fueron a una compañía de sus esposas. En el restaurante ocuparon una mesa redonda cuyas sillas estaban distribuidas simétricamente y se sentaron de forma que se cumplía lo siguiente:

- *Ningún esposo se sentó al lado de su mujer.*
- *Al frente de Alberto se ubicó Carlos.*
- *A la derecha de la mujer de Alberto se sentó Bernardo.*
- *No había dos hombres juntos .*

10 ¿Quién se sentó al lado de Alberto y Diego?

A) La esposa de Carlos
B) La esposa de Bernardo
C) Ninguno de los anteriores
D) "A" y "B"
E) "E" y "B"

11 ¿Cuántos ordenamientos hay?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 Frente a la esposa de Carlos se sienta.

A) La esposa de Diego.
B) La esposa de Alberto.
C) La esposa de Bernardo.
D) Diego.
E) Bernardo.

13 Para que se sepa la ubicación exacta de cada uno de ellos, se necesita saber.

I) Que la mujer de Alberto se sienta al lado de Carlos

II) Que Diego esta junto a la esposa de Carlos y la esposa de Bernardo.

A) Suficiente dato I y no el dato II.
B) Suficiente dato II y no el dato I.
C) Cualquiera de los datos.
D) Suficiente los anteriores.

ENUNCIADO :

Cinco primos: Ana, Brenda, Claudia, Diana y Elena se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos. Si se sabe que:

- *Ana se sienta junto a Brenda y frente a Claudia.*
- *Claudia no es menor que Brenda ni que Diana.*
- *La mayor se sienta junto y a la derecha de Ana.*

14 ¿Dónde se sienta Diana?

A) Adyacente a Eliana y Claudia.

B) Junto a Brenda.
C) A la derecha de Eliana.
D) Adyacente a Brenda y Claudia.
E) Al lado de Claudia.

(15) ¿Cuáles son posibles?

I) A la derecha de Ana esta Diana. ***II)*** A la izquierda de Ana esta Diana. ***III)*** Frente a Brenda está Diana.

IV) Frente a Eliana está Diana.

A) Sólo I, II y IV. ***B) Sólo I, III, IV.***
C) Sólo I, II y III. ***D) Todas.***
E) Ninguna.

(16) Es imposible que:

I) Ana esta frente a Diana.

II) Brenda esta frente a Claudia.

III) Eliana esta frente a Diana.

IV) Brenda esta frente a Diana.

A) Sólo I y IV. ***B) Sólo I y II.***
C) Sólo II y IV. ***D) Sólo II y III.***
E) Sólo III y IV.

(17) ¿Cuántos ordenamientos existe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(18) Eliana se sienta entre:

A) Ana y Claudia. ***B) Ana y Diana.***
C) Brenda y Diana. ***D) Todas.***
E) Ninguna.

ENUNCIADO :

En una mesa circular, con *8* asientos colocados simétricamente, se reúnen *7* amigos:

- *Ana se sienta frente a Brenda y junto a Carla.*
- *Daniel se sienta frente a Carla y a la izquierda de Brenda.*
- *Emilio no se sienta junto a Daniel ni a Ana.*
- *Fico y Gabriel se sientan juntos.*

(19) Entonces son verdaderas:

I) Brenda se sienta junto a Daniel.
II) Carla se sienta junto a Emilio.
III) Daniel se sienta junto a un lugar vacío.
IV) A la izquierda de Carla están Emilio y Brenda.
A) Sólo I y II. ***B) Sólo I y IV.*** ***C) Sólo I y III.***
D) Ninguna. ***E) Todas.***

(20) ¿Cuántos posibles ordenamientos hay?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(21) ¿Quiénes se sientan a la derecha de Carla?

A) Fico, Daniel y Brenda.
B) Emilio, Brenda y Daniel.
C) Gabriel, Fico y Daniel.
D) Gabriel, Fico y Brenda.
E) Ninguna.

(22) ¿Quién se sienta a dos asientos de Ana?

A) Fico. ***B) Gabriel.*** ***C) Emilio.***
D) Asiento vacío. ***E) No se puede determinar.***

(23) Gabriel se sienta:

A) Entre Ana y Emilio. ***B) Entre Daniel y Ana.***
C) Entre Fico y Daniel. ***D) Entre Ana y Fico.***
E) Frente a Emilio.

ENUNCIADO :

Cuatro amigos Juan, Luis, Pablo y Óscar se sientan alrededor de una mesa circular ubicándose simétricamente.

Se sabe que:

- *Los cuatro usan gorro de diferente color (azul, rojo, verde y blanco)*
- *Juan está frente al que usa gorro rojo.*
- *Pablo no se sienta junto a Juan*
- *El de gorro azul es vecino con Óscar y con el de gorro verde.*

(24) ¿Quién está frente a Luis y qué color de gorro usa?

A) Juan – blanco. ***B) Pablo – rojo.***
C) Pablo – verde. ***D) Juan – Ángel.***
E) Oscar – blanco.

(25) ¿Cuántos ordenamientos existe?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(26) ¿Quién usa gorro blanco?

A) Óscar. ***B) Pablo.*** ***C) Juan.***
D) Luis. ***E) Ninguno.***

(27) El que usa gorro azul al lado de quienes está sentado?

A) Pablo y Juan. ***B) Óscar y Pablo.***
C) Ninguna. ***D) Luis y Óscar.***
E) Óscar y Juan.

(28) Son verdaderos:

I) Pablo usa gorro rojo. ***II)*** Juan no usa gorro azul.

III) Luis no usa gorro blanco. ***IV)*** Óscar usa gorro verde.

A) Sólo II y IV. ***B) Sólo I y II.*** ***C) Sólo I y IV.***
D) Sólo III y IV. ***E) Sólo I y III.***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)D	4)C	5)E	6)D	7)E	8)C	9)D	10)D
11)B	12)B	13)E	14)E	15)D	16)B	17)B	18)A	19)B	20)D
21)C	22)E	23)B	24)E	25)B	26)A	27)D	28)E		

ORDEN DE INFORMACION
TEST DE DECISIONES
CAPITULO 015

OBJETIVOS :

* *Sistematizar , comparar y relacionar datos en forma metódica y ordenada .*
* *Desarrollar la capacidad de plantear soluciones ante un problema dado, recurriendo al análisis lógico matemático.*
* *Reconocer y desarrollar estrategias transductivas (creativas , ingeniosas, personales) de resolución de problemas .*
* *Potenciar la aptitud de discernir entre diversos caminos lógicos de solución ante un problema*

INTRODUCCIÓN :

El hombre, a través de la historia, ha ido descubriendo y ordenando diferentes tipos de información. Por ejemplo, cuando se fueron descubriendo los elementos químicos, distintos científicos, pretendieron ordenarlos a partir de características comunes: Reolands, Bobereiner, Mendeleiev y Moseley, fueron los principales.

En el presente capítulo, revisaremos problemas en los que será necesario leer y ordenar adecuadamente, la información en cuadros o tablas, a partir de características comunes, para poder darles solución.

Los problemas de orden de informacion requieren de la aplicación del razonamiento deductivo. Son entretenidos porque plantean retos y , además, porque constituyen un excelente medio para el desarrollo de la mente.

El desafío que proponen reside en formular conclusiones derivadas de la información disponible en cada enunciado para así dar con la solución. Ningún conocimiento previo es necesario, siendo así que las soluciones no dependen de la memoria, no son juegos de palabras ni proposiciones capciosas. Para resolverlos solo deberá pensar lógicamente.

A la hora de resolver los problemas, intenta adoptar un método sistemático, prueba, aprende y deduce de tus propios errores. Supon que todas y cada una de las alternativas propuestas conducen a la solución correcta y busca las contradicciones. Una vez que hayas descartado las suposiciones erróneas, la restante será la solución que buscabas. Trata de utilizar diagramas para la mayoría de los ejercicios con el objeto de ayudarte con tus conclusiones.

¿ Qué preguntas encontraremos en la parte de de juegos lógicos ?

Preguntas que requieren de la habilidad de pensar clara y deductivamente desde un grupo de reglas o restricciones . Esta sección pretende evaluar el manejo de detalles , las habilidades de deducción formal , la comprensión de cómo las reglas o normas limitan y ordenan el comportamiento , y la habilidad de manejar varios datos simultáneamente para solucionar problemas . Cada grupo de preguntas esta basado en un conjunto de condiciones . Podría ser útil la elaboración de un esquema .

* En este tipo de juegos debes elaborar una tabla en la que se relaciona los diversos tipos de datos, como por ejemplo: ***nombres, profesiones, colores, ciudad de nacimientos, etc***.; en algunos casos estas relaciones se determinan descartando el resto de posibilidades y en otros casos mediante afirmaciones en los datos.

ORDENAMIENTO
MEDIANTE CUADROS DE DOBLE ENTRADA

En este caso vamos a referirnos a problemas con una diversidad de datos , que pueden ser absueltos mediante la construcción de tablas de doble entrada , en la cual se relacionen y ubiquen dichos datos , usualmente en la 1^{ra}. entrada se escriben los nombres de los sujetos y en la 2^{da}. entrada las cualidades ; el proceso de solución se basa en reconocer los vínculos

entre dichos datos y la recomendación central consiste en tratar de obtener el mayor , número de deducciones , de cada información , a continuación se procede a marcar con "✗" o un "*No*" en cada casilla correspondiente a una imposibilidad definida y a colocar "✓" o un "*Sí*" en la casilla que corresponda a un dato confirmado . Además se debe verificar tanto en cada fila Horizontal y Vertical la existencia de *1* solo "*Sí*" , al menos que las condiciones del problema señalen características especiales.

RECOMENDACIONES :

• No olvides leer todo el texto antes de comenzar a construir tu esquema.

* Muchas veces las tablas quedarán completas, pero en algunos casos esto no será así, para estar seguro de esto hay que revisar los datos cuidadosamente.

* En la mayoría de casos hay que asociar varios datos para poder llegar a una conclusión.

* Recuerda que si tienes sólo datos en dos rubros (Ejemplo: nombres y ocupaciones). debes de usar el cuadro de doble entrada simple .

Veamos ejemplos:

EJEMPLO 1 :

Cuatro amigos , Gustavo , Alberto , César y Roberto, practican cada una un deporte diferente:

I)Gustavo quisiera jugar tenis en lugar de fútbol .

II) Alberto le pide prestadas las paletas de frontón a Roberto.

III) César nunca fue buen nadador .

¿Qué deporte practica César?

RESOLUCIÓN :

* Se construye un cuadro de doble entrada, donde se coloca los nombres y los deportes diferentes (de preferencia en la primera columna van los nombres):

Deportes / Nombres	Tenis	Fútbol	Frontón	Natación
Gustavo				
Alberto				
César				
Roberto				

* Luego se empieza a llenar el cuadro de acuerdo a la información dada en el problema .

* De la información *(I)* , se deduce que Gustavo práctica fútbol; entonces, entre Gustavo y fútbol escribimos "✓" o la palabra "*SI*". De *(II)*, es claro que Roberto practica frontón, entonces , entre Roberto y frontón "✓" o "*SI*". Luego , se tiene :

Deportes / Nombres	Tenis	Fútbol	Frontón	Natación
Gustavo	✗	✓	✗	✗
Alberto			✗	
César			✗	
Roberto	✗	✗	✓	✗

* De la información *(III)*, César no practica natación; por lo tanto , se deduce que Alberto practica natación y César práctica el tenis. Entonces, entre Alberto y natación, y entre César y tenis, escribimos "✓".

* Los demás espacios blancos de la tabla se llenan como consecuencia de los espacios ya marcados, resumidos en la siguiente regla : "Para cada par de variables, tanto en la horizontal como en la vertical, debe ir un solo "✓" o la palabra "*SI*"; y el resto de los espacios se completan con "*X*" o con la palabra "*NO*". Luego, se obtiene :

Deportes / Nombres	Tenis	Fútbol	Frontón	Natación
Gustavo	✗	✓	✗	✗
Alberto	✗	✗	✗	✓
César	✓	✗	✗	✗
Roberto	✗	✗	✓	✗

De la tabla se concluye :

* Gustavo practica fútbol .
* Alberto practica natación .
* César practica tenis .
* Roberto practica frontón.

EJEMPLO 2 :

Mily , Pili , Lenín y Ely terminaron sus estudios de Medicina , Ingeniería , Matemáticas y Derecho , se sabe que :

* *Mily no estudia Medicina.*
* *Pili hubiera estudiado Derecho si Lenín hubiera estudiado Ingeniería .*
* *Ely quiere empezar a estudiar Matemáticas.*
* *Lenín estudiaría Medicina si Pili no lo hiciera .*
* *Mily estudiaba derecho pero se trasladó a Matemáticas.*

¿Qué estudia Pili?

RESOLUCIÓN :

* De los 2 primeros enunciados :
* Lenín no estudia Medicina .
* Pili no estudia Derecho , Lenín no estudia Ingeniería.

	Medicina	Ingeniería	Matemáticas	Derecho
Mily	NO			
Pili				NO
Lenin		NO		
Ely				

De los siguientes enunciados :

* Ely quiere empezar a estudiar matemáticas .
* Lenín estudiaría Medicina si Pili no lo hiciera .
* Mily estudiaba Derecho pero se trasladó a Matemáticas .

Se tiene :

* Ely no estudia matemáticas .
* Lenín no estudia Medicina, Pili si estudia Medicina.
* Mily estudia Matemáticas :

	Medicina	Ingeniería	Matemáticas	Derecho
Mily	NO	NO	SI	NO
Pili	SI	NO	NO	NO
Lenin	NO	NO	NO	SI
Ely	NO	SI	NO	NO

⇒ Pili estudia Medicina .

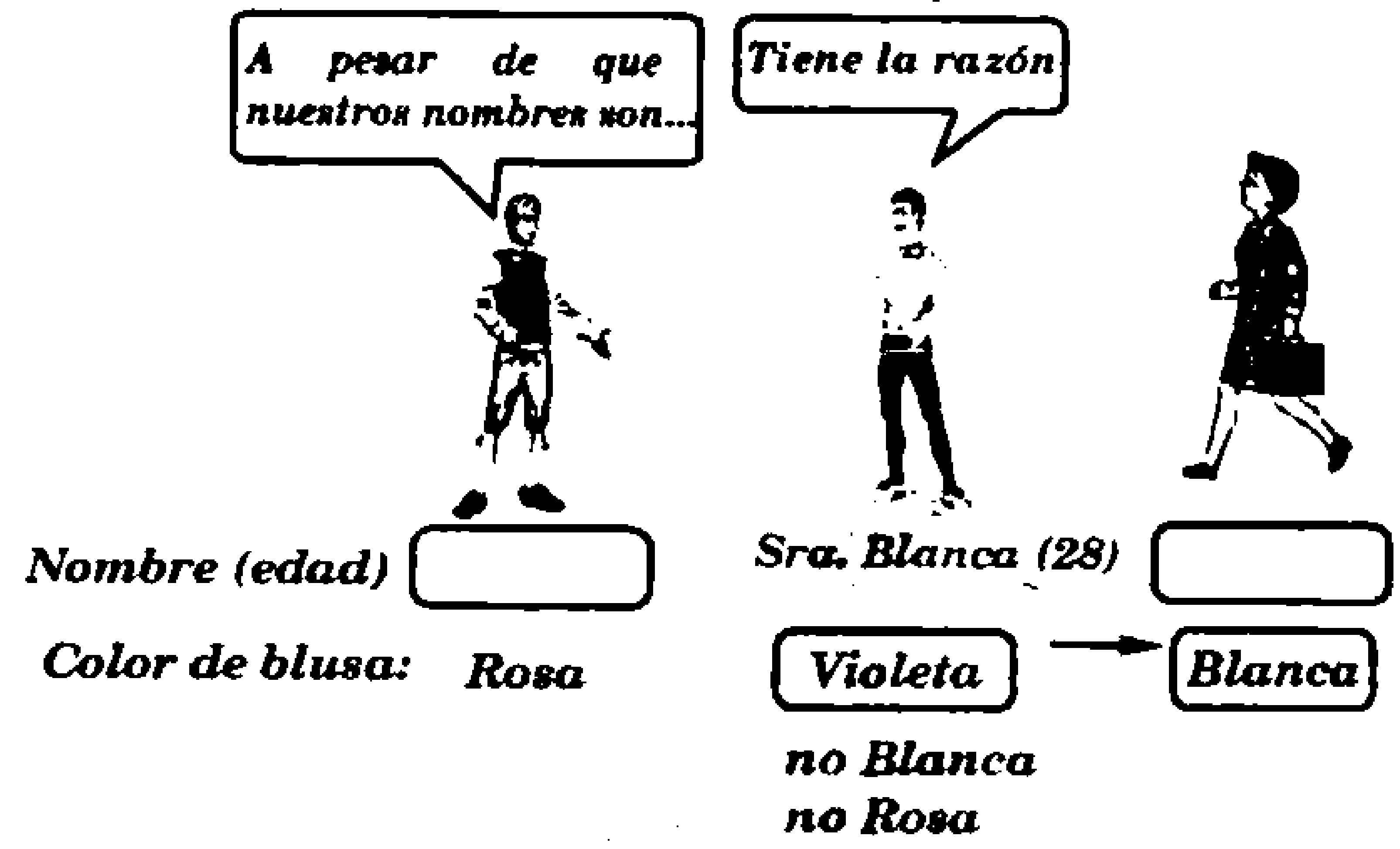
EJEMPLO 3 :

Las señoras Blanca, Rosa y Violeta tienen *28*; *30* y *32* años, respectivamente. Una de ellas llevaba puesta blusa blanca; otra, rosa y la otra, violeta; no necesariamente en ese orden. En un corto diálogo, la señora de blusa rosa dice: «A pesar de que nuestros nombres son los mismos que los colores de nuestras blusas, es curioso que ninguna de nosotras lleve puesta la blusa del color de nuestro nombre». La señora Blanca responde: «Tiene usted razón». ¿Cuáles son las edades de las señoras de blusa blanca, rosa y violeta, respectivamente?

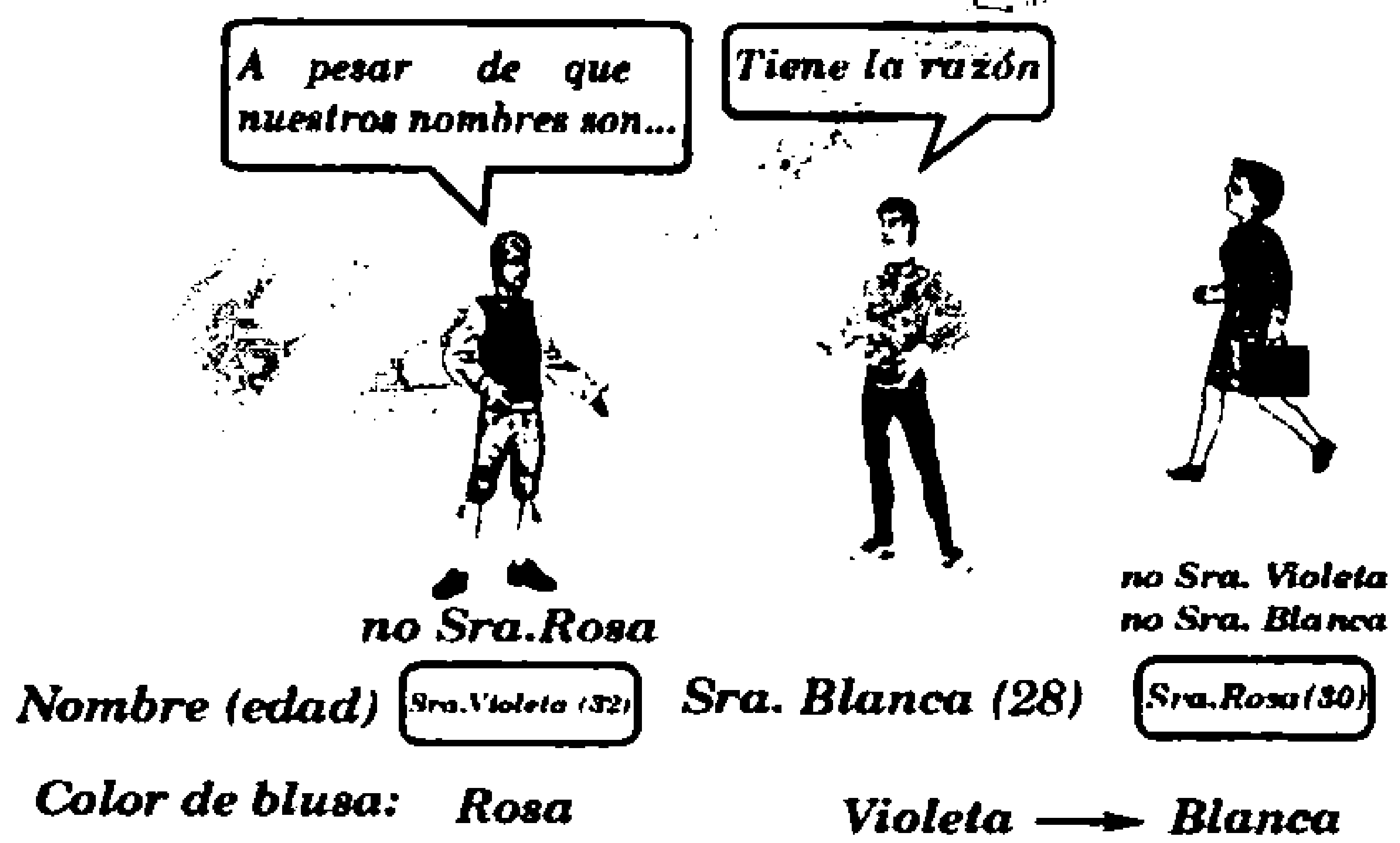
RESOLUCION :

En este tipo de problemas, se presenta un conjunto de personas, animales y objetos con sus respectivas categorías (características). La información brindada nos permite encontrar la relación correcta entre los sujetos y sus respectivas categorías.

Del enunciado se deduce que cada persona presenta tres características: nombre, edad y color de blusa.



Luego, tomando los datos que indican que cada nombre no coincide con el color de la blusa, deducimos:



Por lo tanto las edades de las señoras de blusa blanca, rosa y violeta son ***30***,***32*** y ***28*** años, respectivamente.

EJEMPLO 4 :

Se sabe que las profesiones de María , Elba , Angélica y Queta , son profesora, nutricionista, abogada y odontóloga , si se sabe que :

* María está casada con el hermano de la nutricionista.
* Elba y la odontóloga van a trabajar en la movilidad de la nutricionista .
* Las solteras de Angélica y la profesora son hijas únicas .
* Elba y Queta son amigas de la abogada , la cual está de novia .

¿Quién es la abogada y quién la odontóloga?

RESOLUCIÓN :

*... María está casada con el hermano del nutricionista.

⇒ Se deduce que María no es la nutricionista .

*... Elba y la odontóloga van a trabajar en la movilidad

de la nutricionista .

⇒Se deduce entonces que Elba no es odontóloga ni nutricionista .

*... Las solteras de Angélica y la profesora son hijas únicas ⇒Se deduce que Angélica no es profesora

*... Elba y Queta son amigas de la abogada la cual está de novia

⇒Se deduce que ni Elba ni Queta es la abogada .

	Prof.	*Nutric.*	*Abog.*	*Odont.*
María		NO		
Elba		NO	NO	NO
Angélica	NO			
Queta			NO	

* Finalmente como la abogada está de novia , entonces María que es casada no es abogada . De donde se deduce que es odontóloga .

	Prof.	*Nutric.*	*Abog.*	*Odont.*
María	x	NO	NO	
Elba		NO	NO	NO
Angélica	NO			x
Queta	x		NO	x

⇒ La abogada es Angélica y María la odontóloga.

EJEMPLO 5 :

De tres amigas que van de viaje se sabe que una es rubia; otra, morena y la otra, china. Sus nombres son Betty, Elsa y Sara, no necesariamente en ese orden. Además, cada una viaja a una país diferente de Europa: una viaja a Alemania; otra, a Francia, y la otra, a España. Si cada una dio la siguiente información:

La rubia: *"No voy a Francia ni a España".*

La morena; "Mi *nombre* no es *Elsa* ni *Sara*".

La china: "Ni *yo,* ni *Elsa vamos* a *Francia*". ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A)La china es Sara y se va a Francia.
B)La china es Betty y se va a España.
C)La morena es Betty y se va a España.
D)La rubia es Elsa y se va a Alemania.
E) La rubia es Sara y se va a España.

RESOLUCIÓN :

En este tipo de poblemas se presenta un conjunto de personas, animales y objetos con sus respectivas categorías (características). La información brindada nos permite encontrar la relación correcta entre los sujetos y sus respectivas categorías.

De los datos se tiene tres características de cada amiga:

Nombres: Betty, Elsa y Sara

Raza: rubia, morena y china

País: Alemania, Francia y España

Consideramos la siguiente tabla.

Nombre			
Raza			
País			

De lo dicho por la rubia: ***No voy a Francia ni a España,*** se completa lo siguiente:

Nombre			
Raza	*rubia*		
País	*Alemania*		

De lo dicho por la morena: ***Mi nombre no es Elsa ni Sara***

se deduce

Nombre		*Betty*	
Raza	*rubia*	*morena*	*china*
País	*Alemania*		

Finalmente, con lo dicho por la china se completa

Nombre	**Elsa**	**Betty**	**Sara**
Raza	**Rubia**	**Morena**	**China**
País	**Alemania**	**Francia**	**España**

Comparando lo obtenido en la tabla con las alternativas, es verdadera la afirmación planteada en *D*: La rubia es Elsa y se va a Alemania.

RPTA: "D"

JUEGOS LÓGICOS

Preguntas que requieren de la habilidad de pensar clara y lógicamente a partir de los datos dados en cada enunciado , la habilidad de comprender y ordenar un conjunto de datos , y de manejarlos simultáneamente en la solución de problemas . En muchas situaciones será necesario de utilizar gráficos .¿Cómo emprenderemos , la resolución de los problemas?

Si resumimos las habilidades que requerimos desarrollar para contestar las preguntas de orden de información , prácticamente obtendríamos las mismas habilidades en juegos lógicos; por lo tanto ,

es conveniente considerar ambas partes juntas. En otras palabras , enfocaremos nuestro trabajo en desarrollar las siguientes habilidades :

I) Razonar clara y minuciosamente a partir de un conjunto de datos .

II) Comprender y organizar la información recibida .

III) Manejar varios datos simultáneamente.

IMPLICACIONES

Las actividades que mostraremos a continuación te permitirán desarrollar habilidades para deducir información a partir de un conjunto de condiciones formuladas en los problemas. Por ello, es muy importante analizar dichas condiciones hasta su total comprensión , además :

* Cada vez que tengas un dato con implicaciones lógicas, debes colocar su equivalencia al lado .

* Trabaja de forma ordenada, de preferencia con ayuda de una tabla para reconocer tus ordenamientos.

* Lee detenidamente cada uno ,de los datos, reconoce tus conectores lógicos y subráyalos.

Los enunciados más usuales y sus respectivas representaciones, que veremos a continuación , se pueden clasificar en dos grandes grupos : los ***condicionales*** y ***los bicondicionales.***

ENUNCIADOS CONDICIONALES ($\Rightarrow$) :

Tienen dos partes: el antecedente (el supuesto o la condición), llamado también premisa, y el consecuente (la conclusión o lo que se deduce).

EJEMPLO 1 :

Interpreta, representa simbólicamente y expresa de diferentes formas el enunciado condicional, señalando el antecedente y el consecuente:

Si Lenin canta , entonces Karin baila.

RESOLUCIÓN

• El condicional quiere decir que cada vez que Lenin cante, con seguridad karin bailará, más no a la inversa ; es decir , no se asegura que cuando Karin baile Lenin cantará. Esto nos permite concluir que un enunciado condicional no es conmutativo.

• Se representa: $\boxed{L_{(canta)} \Rightarrow K_{(baila)}}$

• Por lo expuesto, el condicional puede tener otras formas de expresarse, pero siempre considerando el antecedente y el consecuente.

A) Karin baila si Lenin Canta.

Consecuente $\Leftarrow$ Antecedente

B) Lenin canta , implica que Karin baila.

Antecedente $\Rightarrow$ Consecuente

C) Lenin canta , por lo tanto Karin baila.

Antecedente $\Rightarrow$ Consecuente

D) Karin baila , puesto que Lenin canta.

Consecuente $\Leftarrow$ Antecedente

EJEMPLO 2 :

Sea el siguiente enunciado condicional:

Si Cory corre, entonces llega temprano.

$$\boxed{C_{(corre)} \Rightarrow C_{(temprano)}}$$

Deduce alguna conclusión, si es posible, a partir de las siguientes cuatro afirmaciones:

I) Cory corrió.

RESOLUCIÓN

• Del condicional, sabemos que si ***Cory*** corre, con seguridad llega temprano. Como se afirma que corrió, entonces podemos concluir que llegó temprano.

II) Cory llegó temprano.

RESOLUCIÓN

• No podemos llegar a una conclusión, ya que no se puede asegurar que corrió , pues pudo haber llegado temprano porque madrugó , utilizó transporte escolar, autobús, etc.

III) Cory no llegó temprano.

RESOLUCIÓN

• Si no llegó temprano, entonces podemos concluir que no corrió, ya que si hubiera corrido, forzosamente hubiera llegado temprano.

IV) Cory no corrió.

RESOLUCIÓN

• No podemos llegar a una conclusión, ya que si ***Cory*** no corrió, pudo haber llegado temprano por otro medio, o quizás no.

Por lo expuesto, a partir del condicional:

$$\boxed{C_{(corre)} \Rightarrow C_{(temprano)}}$$

y de las afirmaciones ***(I)*** y ***(III)*** y sus respectivas conclusiones obtenidas, deducimos que:

Si Cory no llega temprano, entonces no ha corrido.

$$\boxed{\cancel{C_{(temprano)}} \Rightarrow \cancel{C_{(corre)}}}$$

NOTA :

* Nótese que la primera persona necesita de la segunda para realizar una acción y no al revés (la segunda es totalmente independiente).

También debemos tener cuidado con los enunciados condicionales que tienen el antecedente negado. Así, por ejemplo, el enunciado:

Si Roger no estudia, entonces desaprobará el examen.

Antecedente ⇒ Consecuente

Es decir: $R_{(\cancel{estudia})} \Rightarrow R_{(\cancel{aprobará})}$

Aquí lo único que se asegura es que, cada vez que Raúl no estudia, entonces desaprobará el examen; pero no dice qué sucedería si estudiara: puede ser que apruebe o no el examen, o quizás que no dé el examen.

Presentamos una tabla con los enunciados condicionales más usuales y sus respectivas representaciones simbólicas:

ENUNCIADOS CONDICIONALES	REPRESENTACIÓN
Si Lenin Canta , entonces Karin baila.	$L_{(canta)} \Rightarrow K_{(baila)}$
Si Lenin Canta , entonces Karin no baila.	$L_{(canta)} \Rightarrow K_{(\cancel{baila})}$
Si Karin no baila , entonces Lenin Canta	$K_{(\cancel{baila})} \Rightarrow L_{(canta)}$
Si Karin no baila , entonces tampoco Lenin Canta.	$K_{(\cancel{baila})} \Rightarrow L_{(\cancel{canta})}$
Lenin canta si Karin baila.	$K_{(baila)} \Rightarrow L_{(canta)}$
Lenin no canta si Karin baila.	$K_{(baila)} \Rightarrow L_{(\cancel{canta})}$
Karin baila implica que Lenin cante.	$K_{(baila)} \Rightarrow L_{(canta)}$
Lenin canta, por lo tanto Karin baila.	$L_{(canta)} \Rightarrow K_{(baila)}$
Karin baila, puesto que Lenin canta	$L_{(canta)} \Rightarrow K_{(baila)}$
Para que Karin baile , Lenin ha de cantar.	$L_{(canta)} \Rightarrow K_{(baila)}$
Cuando Karin baila , Lenin canta.	$K_{(baila)} \Rightarrow L_{(canta)}$
Karin baila , puesto que Lenin no canta.	$L_{(\cancel{canta})} \Rightarrow K_{(baila)}$

Se debe resaltar la importancia del ***«si condicional»***, el cual indica la ***causa***, y del ***«entonces»***, que nos indica ***la consecuencia***

ENUNCIADOS BICONDICIONALES (⇔)

Estos enunciados también tienen dos partes, pero no hay un nombre específico para ellas, pues son recíprocas; es decir, se asegura que si el primer elemento se cumple, el segundo también debe cumplirse y viceversa.

Consideremos el siguiente enunciado bicondicional:

Mary es menor de edad, si y sólo si tiene menos, de 18 años

Primer elemento ⇔ Segundo elemento

Esto quiere decir que, si Mary es menor de edad, entonces ella tiene menos de *18* años, y si Mary tiene menos de *18* años, entonces es menor de edad.

NOTA :

Nótese que el bicondicional une a dos proposiciones, de tal manera que o bien cumplen las dos proposiciones o bien no cumple ninguna.

Presentamos una tabla con los enunciados bicondicionales más usuales y sus respectivas representaciones simbólicas:

ENUNCIADOS BICONDICIONALES	REPRESENTACIÓN
Lenin canta si y sólo si Karin baila.	$L_{(canta)} \Leftrightarrow K_{(baila)}$
Lenin no canta si y sólo si Karin baila.	$L_{(\cancel{canta})} \Leftrightarrow K_{(baila)}$
Lenin canta cuando , y sólo cuando Karin no baila.	$L_{(canta)} \Leftrightarrow K_{(\cancel{baila})}$

EJEMPLO :

Sean los siguientes enunciados bicondicionales:

* ***Olimpia visitará a su tía si y sólo si viaja a Ica.***

* ***Olimpia pasará buenas vacaciones si y sólo si visita a su tía.***

Deduce alguna conclusión a partir de las siguientes afirmaciones:

I) Olimpia visitó a su tía

RESOLUCIÓN :

• Nos ayudamos con el esquema:

$L_{(visita\ a\ su\ tía)} \Leftrightarrow L_{(viaja\ a\ Ica)} \Leftrightarrow L_{(buenas\ vacaciones)}$

Concluimos que Laura pasó buenas vacaciones.

II) Olimpia no visitó a su tía.

RESOLUCIÓN :

• Nos ayudamos con el esquema:

$L_{(visita\ a\ su\ tía)} \Leftrightarrow L_{(viaja\ a\ Ica)}$

$\Leftrightarrow L_{(buenas\ vacaciones)}$

Concluimos que *Olimpia* no tuvo buenas vacaciones.

OBSERVACIÓN :

Los juegos lógicos de ordenamientos por agrupación consistn e en formar grupos (subconjuntos) a partir de un listado de «objetos» (conjunto) a los cuales pertenecen personas, animales o cosas, y cuya selección deberá cumplir con determinadas condiciones o reglas que se presentan en el problema.

A continuación te presentamos una tabla con los enunciados más usados en este tipo de ordenamiento.

ENUNCIADO	REPRESENTACIÓN	COMENTARIO
Como máximo darán examen 6 alumnos.	$n \le 6$	Pueden dar examen 0 ; 1; 2; 3; 4 ; 5 ó 6 alumnos.
Como mínimo darán examen 6 alumnos.	$n \ge 6$	Pueden dar examen 6 o más de 6 alumnos.
Entre A y B, sólo uno estará en el examen.	$A \Leftrightarrow \not{B}$ ó $\not{A} \Leftrightarrow B$	Uno de los dos estará en el examen , pero no ambos.
A y B no pueden estar ambos a la vez, en el examen.	$A \ne B$	Podría ser que ninguno de los dos esté en el examen.
Si A está en el examen , entonces B también estará.	$A \Rightarrow B$	B necesita de la presencia de A para estar en el examen; en cada caso que A esté en el examen, B debe estar.
Si A está en el examen , entonces B no estará.	$A \Rightarrow \not{B}$	Es otra manera de decir que A y B no pueden estar ambos a la vez en el examen.
Si A no está en el examen, entonces B está.	$\not{A} \Rightarrow B$	Al menos uno de los dos debe estar en el examen. Luego, nada impide que los dos estén en el examen.
Si A no da el examen, entonces B tampoco lo dará.	$\not{A} \Rightarrow \not{B}$	Es otra manera de decir que en caso que B dé el examen, A también lo dará.
A da el examen implica que B da el examen.	$A \Rightarrow B$	Si A da el examen, entonces B también debe dar el examen.
A no da el examen implica que B sí lo da.	$\not{A} \Rightarrow B$	Es otra manera de decir que si B no da el examen , entonces A sí dará el examen.
A da el examen, por lo tanto B da el examen.	$A \Rightarrow B$	Es otra manera de decir que si A da el examen, entonces B también debe dar el examen.
A da el examen si B da el examen.	$B \Rightarrow A$	Aquí se indica que B necesita de la presencia de A para dar el examen.
A da el examen si B no da el examen	$\not{B} \Rightarrow A$	Al menos uno de los dos debe dar el examen.
A no da el examen si B da el examen.	$B \Rightarrow A$	Es otra manera de decir que A y B no pueden dar el examen, ambos a la vez.
A no da el examen si B no da el examen.	$\not{B} \Rightarrow \not{A}$	Es otra manera de decir que si A da el examen, entonces B también debe dar el examen.
A no dará el examen si y sólo si B da el examen.	$\not{A} \Leftrightarrow B$	Es otra manera de decir que, entre A y B, solo uno dará el examen.
A dará el examen si y sólo si B no da el examen.	$A \Leftrightarrow \not{B}$	Es otra manera de decir que, entre A y B, solo uno dará el examen.
A no dará el examen si y sólo si B no da el examen.	$\not{A} \Leftrightarrow \not{B}$	Si uno de ellos no da el examen, el otro tampoco puede darlo, es decir si A da el examen, B también lo dará, y viceversa.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Amelia , Blanca , Carolina y Diana tienen una profesión diferente cada una : Abogada , Contadora , Profesora y Pintora ; pero no necesariamente en ese orden ; además se sabe que :

* Amelia y la Abogada son muy amigas de Carolina .

* Diana es Contadora .

* La pintora es prima de Amelia .

¿Qué profesión tiene cada una?

RESOLUCIÓN:

* Primero construimos un cuadro con los nombres de las personas y sus profesiones .

	ABOGADA	CONTADORA	PROFESORA	PINTORA
AMELIA				
BLANCA				
CAROLINA				
DIANA				

PRIMER DATO :

Amelia y la Abogada son muy amigas de Carolina . Esto nos dice que tanto Amelia como Carolina no son Abogadas y podemos representarlo en el cuadro .

	ABOGADA	CONTADORA	PROFESORA	PINTORA
AMELIA	No			
BLANCA				
CAROLINA	No			
DIANA				

SEGUNDO DATO :

Diana es contadora . Esta vez utilizamos un visto bueno, indicando que Diana es contadora . Además esto implica que Diana no tiene las otras profesiones y que las otras personas no son contadoras , y podemos representarlo en el cuadro :

	ABOGADA	CONTADORA	PROFESORA	PINTORA
AMELIA	No	No		
BLANCA		No		
CAROLINA	No	No		
DIANA	No	Si	No	No

Observando el cuadro podemos

concluir que Blanca debe ser abogada , ya que no existe otra posibilidad . Además , si Blanca es abogada , ya no es pintora ni profesora. Todo esto queda representado de la siguiente manera :

	ABOGADA	CONTADORA	PROFESORA	PINTORA
AMELIA	No	No		
BLANCA	Si	No	No	No
CAROLINA	No	No		
DIANA	No	Si	No	No

TERCER DATO :

La pintora es prima de Amelia . Concluimos que Amelia no es pintora y por lo tanto la pintora debe ser Carolina. Siguiendo el mismo razonamiento , podemos deducir que Amelia es profesora .

	ABOGADA	CONTADORA	PROFESORA	PINTORA
AMELIA	No	No	Si	No
BLANCA	Si	No	No	No
CAROLINA	No	No	No	Si
DIANA	No	Si	No	No

* Con lo que finalmente se tendrá que : *Amelia es profesora , Blanca es abogada , Carolina es pintora y Diana es contadora .*

PROBLEMA 2 :

Beto, Luis y Joys son ingeniero, cantante y abogado, aunque no necesariamente en ese orden, además sabe que:

* Joys es mudo .
* Beto no es ingeniero, ni cantante

¿Qué profesión tiene cada uno?

RESOLUCIÓN:

En este juego, como la mayoría de datos son indirectos y niegan ciertas posibilidades, elaboraremos una tabla de doble entrada (cuadro de deséarte), donde ubicamos los nombres por un lado y las profesiones por otro:

	Ingeniero	Cantante	Abogado
Beto			
Luis			
Joys			

* Primer Dato:

Como José es mudo entonces no es cantante

	Ingeniero	Cantante	Abogado
Beto			
Luis			
Joys		NO	

Segundo Dato:

Como Beto no es ingeniero ni cantante, entonces será abogado; además ni Luis , ni Joys serán abogados.

	Ingeniero	Cantante	Abogado
Beto	NO	NO	SI
Luis			NO
Joys		NO	NO

* Luego completamos la tabla:

	Ingeniero	Cantante	Abogado
Beto	NO	NO	SI
Luis	NO	SI	NO
Joys	SI	NO	NO

Por lo tanto:

Beto es abogado
Luis es cantante
Joys es ingeniero

PROBLEMA 3 :

Tres amigas se encuentran en una fiesta y usan vestidos de colores enteros: azul, negro y blanco. Ellas calzan pares de zapatos de estos mismos tres colores, pero solamente Ana tiene vestido y zapatos del mismo color. Si ni el vestido, ni los zapatos de Julia son blancos y, además, Marisa está con zapatos azules, entonces es cierto que :

A) el vestido de Julia es azul y el de Ana es negro.

B) el vestido de Julia es blanco y sus zapatos son negros.

C) los zapatos de Julia son negros y los de Ana son blancos.

D) los zapatos de Ana son negros y el vestido de Marisa es blanco.

E) el vestido de Ana es negro y los zapatos de Marisa son azules.

RESOLUCIÓN :

En este tipo de problemas se presenta un conjunto de personas, animales y objetos con sus respectivas categorías (características). La información brindada nos permite encontrar la relación correcta entre los sujetos y sus categorías.

Del enunciado, se deduce que cada persona presenta tres características: nombre, color del vestido y color de zapatos.

* Nombres: Ana, Julia y Marisa.
* Colores de los vestidos y los zapatos: azul, negro y blanco.

Planteamos el siguiente esquema:

Nombre			
Color vestido			
Color zapatos			

* Del dato, Marisa tiene zapatos azules y Julia no tiene vestido ni zapatos de color blanco; se concluye que Julia tiene zapatos negros y Ana tiene zapatos blancos.

Nombre	*Marisa*	*Julia*	*Ana*
Color vestido			
Color zapatos	*azul*	*negro*	*blanco*

* Del dato, solo Ana tiene vestido y zapatos del mismo color, se concluye que Julia no tiene vestido negro y Marisa no tiene vestido azul.

Nombre	*Marisa*	*Julia*	*Ana*
Color vestido	*negro*	*azul*	*blanco*
Color zapatos	*azul*	*negro*	*blanco*

Comparamos las alternativas con las conclusiones obtenidas; es cierto lo correspondiente a la alternativa **C**.

Por lo tanto es cierto que los zapatos de Julia son negros y los de Ana son blancos.

RPTA : «C»

PROBLEMA 4 :

Tres amigas , Sandra , Blanca y Vanessa , escogieron un distrito diferente para vivir y se movilizan usando un medio de transporte distinto: Los distritos son : Lince , Jesús María y Rímac , y los medios de transporte bicicleta, moto y microbús .

I) Cuando Blanca tenga dinero se comprará una moto y se mudará al Rimac .

II) Desde que Vanessa vive en Jesús María ya no tiene bicicleta .

III) La que vive en Lince toma dos microbuses.

¿En qué distrito vive Sandra y en qué medio de transporte se moviliza?

RESOLUCIÓN :

* Para relacionar las *3* variables , construimos un cuadro de doble entrada , y en uno de los lados se coloca **2** de las variables .

	Lince	*Jesús María*	*Rímac*	*Bicicleta*	*Moto*	*Microbus*
Sandra						
Blanca						
Vanessa						

* De la información obtenida se tiene :

* De *(I)* , Blanca no se moviliza en moto ni vive en el Rimac.

* De *(II)* , Vanessa vive en Jesús María y no se moviliza en bicicleta . Luego , se tiene :

	Lince	*Jesús María*	*Rímac*	*Bicicleta*	*Moto*	*Microbus*
Sandra		✗				
Blanca		✗	✗		✗	
Vanessa	✗	✓	✗	✗		

* De *(I)* y *(II)* , y observando la tabla se decide que Blanca vive en Lince . También observamos que Sandra vive en el Rimac y así llenamos el primer cuadro .

	Lince	*Jesús María*	*Rímac*	*Bicicleta*	*Moto*	*Microbus*
Sandra	✗	✗	✓			
Blanca	✓	✗	✗		✗	
Vanessa	✗	✓	✗	✗		

* De otro lado, del dato *(III)*, se tiene que Blanca toma microbús , y como consecuencia de ello, se puede llenar el segundo cuadro .

	Lince	*Jesús María*	*Rímac*	*Bicicleta*	*Moto*	*Microbus*
Sandra	✗	✗	✓	✓	✗	✗
Blanca	✓	✗	✗	✗	✗	✓
Vanessa	✗	✓	✗	✗	✓	✗

Por lo tanto :

* Sandra vive en el Rimac y se moviliza en bicicleta.

* Blanca vive en Lince y se moviliza en microbús .

* Vanessa vive en Jesús María y se moviliza en moto.

PROBLEMA 5 :

María , Lucía e Irene viven en tres ciudades diferentes: Lima , Cuzco y Tacna , estudian una carrera distinta : Educación, Derecho y Arquitectura, no necesariamente en ese orden .

Se sabe que :

I) María no vive en Cuzco .

II) Lucía no vive en Tacna .

III) La que vive en Cuzco no estudia Derecho .

IV) Quien vive en Tacna estudia Arquitectura .

V) Lucía no estudia educación .

¿Dónde vive Irene y que estudia?

RESOLUCIÓN :

* De *I, II, III,V :*

	Lima	Cuzco	Tacna		Arquit.	Derec.	Educ.
María		No					
Lucia			No	⇒	No	Sí	No
Irene							

* Observamos que lucía no estudia Arquitectura , por que no vive en Tacna ; por lo tanto , estudia Derecho .

	Lima	Cuzco	Tacna		Arquit.	Derec.	Educ.
María	No	No	Sí		Sí	No	No
Lucia	Sí	No	No	⇒	No	Sí	No
Irene	No	Sí	No		No	No	No

* Observamos que Lucía no vive en Cuzco por que estudia Derecho ; por lo tanto , vive en Lima. Luego : Irene vive en el Cuzco y estudia Educación .

PROBLEMA 6 :

En una sala de conferencias se encuentra un ingeniero, un contador , un abogado y un médico. Los nombres aunque no necesariamente en el orden de las profesiones son : Pedro , Daniel , Juan y Luis. Si se sabe que :

I) Pedro y el contador no se llevan bien .

II) Juan se lleva muy bien con el médico .

III) Daniel es pariente del abogado y éste es amigo de Luis .

IV) El ingeniero es muy amigo de Luis y del médico.

¿Quién es el abogado?

A) Pedro *B) Juan* *C) Daniel*

RESOLUCIÓN :

Profesión / Nombres	Ingeniero	Contador	Abogado	Médico
Pedro				
Daniel				
Juan				
Luis				

* Como Pedro y el contador Luis no se llevan bien , y el abogado es amigo de Luis, entonces se deduce que Pedro no es abogado .

Profesión / Nombres	Ingeniero	Contador	Abogado	Médico
Pedro		✗	✗	
Daniel		✗	✗	
Juan		✗	✓	✗
Luis	✗	✓	✗	✗

⇒ Juan es abogado .

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

En una sala de conferencias se encuentran: un ingeniero , un contador , un abogado y un médico . Los nombres aunque no necesariamente en el orden de los profesionales son *P; D; J* y *L*. Si se sabe que:

* *P* y el contador no se llevan bien.
* *J* se lleva muy bien con el médico .
* *D* es pariente del abogado y este es amigo de *L*.
* El ingeniero , es muy amigo de *L* y del Médico.

¿Quien es el abogado?

A) P *B) J* *C) D* *D) J o D* *E) L*

RESOLUCIÓN:

	Ingen.	Contad.	Abogado	Médico
P		NO		
D		NO	NO	
J		NO		NO
L	NO	SI	NO	NO

* Como *P* y el contador *(L)* no se llevan bien , y el abogado es amigo de *L* , entonces se deduce que *P* no es abogado .

	Ingen.	Contad.	Abogado	Médico
P		NO	NO	
D		NO	NO	
J		NO	SI	NO
L	NO	SI	NO	NO

J es abogado .

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Las señoritas Rocío , Carmen , Juana y María , tienen los apellidos Alva , Barreto , Delgado , aunque no necesariamente en ese orden. Si se sabe que :

* *Rocío y Delgado fueron a la casa de Calvo que vive en Comas .*

* *Carmen , Alva y Barreto son secretarias de la PRE y la primera siempre llega tarde porque vive en Ancón .*

* *Alva , Calvo y María los viernes se van a jugar bingo.*

¿Cuál es el nombre de la señorita Alva?

A) María B) Juana C) Carmen
D) Rocío o María E) Rocío

RESOLUCIÓN :

apellidos / Nombres	Alva	Barreto	Calvo	Delgado
Rocío			✗	✗
Carmen	✗	✗		
Juana		✗		✗
María	✗		✗	

* Como Calvo vive en Comas y Carmen vive en Ancón , entonces se deduce que Carmen no se apellida Calvo .

apellidos / Nombres	Alva	Barreto	Calvo	Delgado
Rocío	✓	✗	✗	✗
Carmen	✗	✗	✗	✓
Juana	✗	✗	✓	✗
María	✗	✓	✗	✗

⇒ La señorita Alva tiene por nombre Rocío .

RPTA: "E"

PROBLEMA 9 :

Shazana , Benny y Foster son tres hermanos que tienen tres gatos. Estos tienen los nombres de sus dueños , aunque no necesariamente en ese orden . Si se sabe que :

* *Ningún gato tiene el nombre de su dueño .*

* *El gato de Shazana tiene el mismo nombre que el dueño de "Benny" .*

¿Quién es el dueño de "Shazana"? y ¿cómo se llama el gato de Shazana?

A) Shazana – "Benny" B) Foster –"Benny"
C) Shazana – "Foster" D) Benny – "Foster"
E) Foster – "Foster"

RESOLUCIÓN :

* De la segunda premisa se deduce que el gato

RPTA : "D"

PROBLEMA 10 :

Ana, Bertha , Carlos y Diana , tienen diferentes ocupaciones: periodista, médico, kinesiólogo y matemática y viven en las ciudades *M ; Y ; Z* y *W* . Se sabe que :

* *Carlos no vive en M ni en Y.*

* *Ana vive en W .*

* *Diana es kinesióloga .*

* *El periodista nunca a emigrado de Z .*

* *El médico vive en M .*

¿Qué profesión tiene Ana?

A) Abogada B) Médico C) Periodista
D) Kinesióloga E) Matemática

RESOLUCIÓN :

	period.	med.	kines.	mat.	M	Y	Z	W
Ana			✗		✗	✗	✗	✓
Bertha			✗				✗	✗
Carlos			✗		✗	✗	✓	✗
Diana	✗	✗	✓	✗			✗	✗

* Como el periodista nunca a emigrado de *Z* y Carlos vive en *Z* . entonces Carlos es el periodista .

* El médico vive en *M* , y como Ana vive en W, entonces Ana no es médico .

	period.	med.	kines.	mat.	M	Y	Z	W
Ana	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓
Bertha	✗	✓	✗	✗			✗	✗
Carlos	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Diana	✗	✗	✓	✗			✗	✗

⇒ Luego , Ana tiene la profesión de matemática .

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Antonio , Camilo y Pedro tienen dos ocupaciones cada uno : tornero , cestero , armero, pescador , flautista y guardián :

Se sabe que :

* *El tornero y el guardián fueron compañeros de clase en la escuela .*

* *El guardián y el pescador frecuentemente discutían de política con Antonio .*

* *El armero vendió al cestero una daga con empuñadura plateada .*

* *El tornero solía visitar en su taller al armero .*

* *Camilo practicaba fútbol con el pescador .*

* *Pedro concurrió con Camilo y el armero al cine.*

¿Qué ocupación tenía Camilo?

A)Guardián y cestero B)Flautista y armero
C)Pescador y tornero D)Flautista y guardián

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que Camilo no es pescador ni armero , tampoco: tornero y guardián , guardián y pescador, armero y cestero , tornero y armero a la vez :

	TORNERO	CESTERO	ARMERO	PESCADOR	FLAUTISTA	GUARDIAN
Antonio	x	x	✓	NO	✓	NO
Camilo	x	✓	NO	NO	x	✓
Pedro			NO	✓	x	x

de donde Camilo será Cestero y guardián.

RPTA: "A"

PROBLEMA 12 :

Se sabe que las profesiones de Judith, Elba, Rosa y Queta son : profesora, nutricionista, abogada y odontóloga, aunque no necesariamente en ese orden.

Si:

I) Judith está casada con el hermano de la nutricionista.

II) Elba y la odontóloga van a trabajar en la movilidad de la nutricionista.

III) Rosa y la profesora son solteras e hijas únicas.

IV) Elba y Queta son amigas de la abogada, la cual está de novia.

¿Quién es la abogada y quien es la odontóloga?

A) Rosa – Judith B) Rosa – Elba C) Judith – Queta D) Elba – Queta E) Queta – Rosa

RESOLUCIÓN :

Nombres \ profesión	Profesora	Nutricionista	Abogada	Odontóloga
Judith	✗	✗		
Elba	✓	✗	✗	✗
Rosa	✗			
Queta	✗		✗	

* Coma la abogada está de novia, entonces Judith, que es casada, no es abogada. De donde se deduce que es odontóloga.

Nombres \ profesión	Profesora	Nutricionista	Abogada	Odontóloga
Judith	✗	✗	✗	✓
Elba	✓	✗	✗	✗
Rosa	✗	✗	✓	✗
Queta	✗	✓	✗	✗

⇒ Por lo tanto, la abogada es Rosa y la odontóloga Judith.

RPTA: "A"

PROBLEMA 13 :

Durante una cena se ubican en una misma mesa, cuatro personas cuyas edades son : ***12 ; 24 ; 36*** y ***48*** años, de la conversación que establecen se puede deducir que :

I) La edad del menor más la de Luis igualan a la de Omar.

II) El mayor tiene el doble da la edad de Marco.

¿Cuánto suman las edades de Jorge y Omar?

A) 48 B) 72 C) 36 D) 60 E) 84

RESOLUCIÓN :

* Una primera lectura panorámica nos puede permitir establecer un cuadro de doble entrada, como el siguiente, veamos : Ahora de ***(I)*** se deduce que Luis no es el mayor ni el menor y Omar es por lo menos mayor que dos personas :

	12	24	36	48
Luis	NO			NO
Marco				
Jorge				
Omar	NO	NO		

* Es importante tratar de extraer el mayor número de deducciones de cada información, sigamos analizando; el segundo dato dice :

"el mayor tiene el doble de la edad de Marco"

No sabemos aún quien es el mayor, pero podemos deducir :

1) Marco tiene ***24***, que es una información directa y nos permite tachar ***12 ; 36*** y ***48*** respecto a Marco y a Luis y Jorge respecto a ***24***; veamos :

	12	24	36	48
Luis	NO	NO		NO
Marco	NO	SI	NO	NO
Jorge		NO		
Omar	NO	NO		

De este cuadro se puede continuar haciendo mas deducciones :

* Luis sólo puede tener ***36*** años.
* Sólo Jorge puede tener ***12*** años.
* Luego Omar sólo podrá tener ***48***.

	12	24	36	48
Luis	NO	NO	SI	NO
Marco	NO	SI	NO	NO
Jorge	SI	NO	NO	NO
Omar	NO	NO	NO	SI

Teniendo Jorge ***12*** años y Omar ***48***; la respuesta es:

"Suman 60 años"

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Andrés tiene seis libros en un estante: Razonamiento matemático, Lenguaje, Física, Química, Historia y Geografía. Se sabe lo siguiente:

- *El de Química está junto y a la izquierda del de Lenguaje.*
- *El de Física está a la derecha del de Química y a la izquierda del de Historia.*
- *El de Historia está junto y a la izquierda del de Geografía.*
- *El de Razonamiento matemático está a la izquierda del de Lenguaje.*

¿Qué libro ocupa el cuarto lugar si los contamos de izquierda a derecha?

A)Lenguaje **B) Física**
C) Química. **D) Historia.**
E) Geografía.

02 Un edificio de 5 pisos, en el que por cada piso hay dos departamentos, residen 8 amigos, que viven en departamentos diferentes. Se sabe lo siguiente:

- *Antonio vive a un piso de Gerardo y a dos pisos de Pablo, pero más abajo que Sergio y Enrique.*
- *Felipe vive más arriba que Pablo, pero en el mismo piso que Omar.*
- *Gerardo quiere mudarse porque su vecino de piso hace mucho ruido.*
- *Henry vive en el primer piso y para ir a la casa de Pablo debe subir 3 pisos.*
- *Gerardo no vive en el primer piso.*

¿Quiénes viven en el último piso?

A) Pablo y Sergio.
B) Felipe y Enrique.
C) Gerardo y Omar.
D) Enrique y Pablo.
E) Omar y Felipe.

03 Se tiene 5 ríos: *A, B*, C, *D* y *E*. cada uno de diferente longitud y caudal. Se sabe lo siguiente:

- *E no es de mayor longitud que A pero si menos caudaloso que este.*
- *D es de menor longitud que C, pero este no tiene más caudal que aquel.*
- *C no es de mayor longitud que B pero si más caudaloso que este.*
- *E es de mayor longitud que B, pero no tiene menor caudal que D.*

¿Cuál es el río de mayor longitud y cuál el de menor caudal?

A) A v B. **B) C v D.** **C) B v D.**
D) A v E. **E) B v E.**

04 Tres parejas de esposos van a almorzar y se ubican en una mesa circular de acuerdo a las siguiente disposición:

- A la derecha de la esposa de Alberto se sienta Hernán.
- *Milagros, que se ha sentado a la derecha de Doris, resulta estar frente a su propio esposo.*
- *Liz está al frente de la esposa de Hernán, la cual está sentada entre dos varones.*
- *El otro novio es Manuel.*

El esposo de Milagros es ......

A) Hernán **B) Alberto.**
C) Antonio. **D) Manuel.**
E) Mauricio.

05 Aldo, Beto, Ciro y Donato fueron a cenar en compañía de sus respectivas madres. En el restaurante se sentaron alrededor de una mesa circular con 8 asientos igualmente espaciados. Ninguna madre se sentó junto a su hijo, frente a Aldo se sentó Ciro, junto y a la derecha de la madre de Aldo se sentó Beto. ¿Quién está entre Aldo y Donato, si no hay dos mujeres sentadas juntas?

A) La madre de Ciro.
B) La madre de Beto.
C) La madre de Aldo.
D) Ciro. **E) Beto.**

06 Siete personas: Inés, Ivette, Ida, Ignacio, Ivonne, Iván e Isabel, se sentaron alrededor de una mesa circular con ocho asientos igualmente espaciados. Tres de las sillas son amarillas, dos son azules, una es blanca, otra ploma y otra violeta.

Se sabe lo siguiente:

- Las dos sillas que están junto a Ignacio son azules.
- *En las sillas amarillas solo se sentaron mujeres.*
- *Inés se sentó junto y a la izquierda de Iván.*
- *Isabel se sentó frente a la silla ploma, junto y a la derecha de Ivonne.*
- *Los varones se sentaron frente a frente.*
- *Inés se sentó junto a Ivette.*

¿De qué color es el asiento vacío?

A) Amarillo. **B) Azul.**
C) Blanco. **D) Plomo.**
E) Violeta.

07 Alberto, Pedro, Juan y Jorge postularán a la UNI, UNMSM, PUCP y URP. Ellos estudiarán Matemática, Arquitectura, Ingeniería y Economía. Se sabe lo siguiente:

- *Alberto no desea postular a la URP.*
- *El que desea estudiar en la UNI estudiará Arquitectura.*
- *El que postula a UNMSM no estudiará Matemática.*
- *Juan estudiará Matemática.*
- *El que pretende postular a URP quiere estudiar Ingeniería.*
- *Pedro no estudiará Ingeniería ni* Economía.

¿ Qué y dónde estudiará Alberto?

A) Arquitectura – UNI.
B) Ingeniería – URP.
C) Economía – PUCP.
D) Matemática – UNI.
E) Economía – UNMSM.

08 César, Julio y Miguel forman pareja con Rosa, Elena y Liliana, que tienen profesiones de enfermera, secretaria y profesora. Si se conoce lo siguiente:

- *Julio es cuñado de Rosa, que no*

es enfermera.

- *Miguel fue con la profesora al matrimonio de Elena.*
- *Hace dos años Liliana discutía con Julio y desde entonces es secretaria.*
- *César es soltero.*

¿Quién es la pareja de Julio y cuál es su profesión?

A) Elena – enfermera.
B) Elena – secretaria.
C) Liliana – secretaria.
D) Liliana – enfermera.
E) Rosa – profesora.

09 Tres amigos asisten a una reunión. A la salida, cada uno de ellos se llevó, por equivocación, el sombrero de otro amigo y el abrigo de otro distinto. Si Andrés se llevó el sombrero de la persona que se llevó el sombrero de Beatriz, ¿quién sé llevó el abrigo de César y quién se llevó el sombrero de Beatriz?

A) Beatriz – Andrés.
B) Andrés – César.
C) Andrés – Andrés.
D) Beatriz – César.
E) César – César.

10 En una reunión participan 5 personas. Se observó lo siguiente:

- *Tres personas hablaban portugués.*
- ***N*** *y* ***P*** *conversaban en inglés, pero al llegar Q debían conversar en español, único idioma común a los tres.*
- *El único idioma común a* ***M, N*** *y* ***R*** *era el francés.*
- *El único idioma común a* ***P*** *y* ***R*** *era el italiano.*
- *El idioma más hablado era el español.*
- *Una de las personas hablaba los* ***5*** *idiomas, otra* ***4*** *idiomas, otra* ***3*** *idiomas, otra* ***2*** *idiomas y otra hablaba un único idioma.*

¿Quién hablaba un solo idioma?

A) M B) N C) P D) Q E) R

11 Cuatro personas: Carlos, Felipe, Diego y Natalia, tienen cada uno, una nacionalidad diferente: mexicana, colombiana, uruguaya y peruana. Además, cada uno tiene un auto de diferente marca: ***W***, ***X***, ***Y*** y ***Z***, de diferente color: azul, blanco, celeste y rojo:

- *Felipe tiene el auto de marca Y.*
- El peruano tiene el auto de color blanco y marca ***X***.
- *El auto rojo es de marca W.*
- *Natalia es colombiana.*
- *Carlos tiene un auto de color celeste.*

La asociación correcta es:

A) Carlos – mexicano – auto blanco.
B) Felipe – auto blanco – marca Y.
C) Diego – peruano – marca X.
D) Natalia – auto rojo – marca Z.
E) Diego – mexicano – auto azul.

12 En una oficina, en varios momentos durante el día, un jefe le da a su secretaria una carta para ser mecanografíada, colocando cada nueva carta encima de las que haya en la casilla de trabajo pendiente. Tan pronto pueda, la secretaria saca la carta de encima y la mecanografía. Si hubo cinco cartas en total y el jefe las entregó en el orden ***1***; ***2***; ***3***; ***4*** y ***5***, ¿cuál de las siguientes no podría ser el orden en que la secretaria las mecanografió?

A) 1; 2; 3; 4 y 5. ***B) 3; 2; 4; 1; 5.***
C) 4; 5; 2; 3; 1. ***D) 2; 4; 3; 5; 1.***
E) 5; 4; 3; 2; 1.

13 El administrador de un evento planeó presentar cinco conferencias, los expositores disponibles son: ***M***, ***N***, ***O***, ***P***, ***Q*** y ***R***; cada expositor debe participar exactamente en tres de las conferencias. Además, se cumple las siguientes condiciones:

- *Sólo* ***O*** *y* ***P*** *participan en la primera conferencia.*
- ***R*** *y otras tres participan en la segunda conferencia.*
- *Solamente* ***N*** *participa en la tercera conferencia.*
- *Más personas participan en la cuarta que en la quinta conferencia.*

¿Cuál de las siguientes deben ser verdaderas?

A) N y Q participan en la segunda conferencia.
B) N y R participan en la quinta conferencia.
C) Exactamente cuatro personas participan en la cuarta conferencia.
D) Q no participa en la conferencia.
E) Exactamente cinco personas participan en la quinta conferencia.

14 Sobre las profesiones de tres parejas de esposos se sabe que:

- *Dos personas son médicos, dos son ingenieros, dos son profesores.*
- *Los esposos tienen profesiones diferentes.*
- *José Carlos es médico y la esposa de César Abraham es profesora.*
- *Toda pareja de esposos ha estudiado profesiones diferentes.*

¿Qué profesión tiene José Gabriel y cuál es la profesión de la esposa de José Carlos?

A) Ingeniero – médica.
B) Médico – profesora.
C) Profesor – médica.
D) Profesor – ingeniera.
E) Ingeniero – profesora.

15 Sobre los lugares de nacimiento de tres parejas de esposos, se sabe que:

- *Dos personas nacieron en Ica, dos nacieron en Lima y dos nacieron en Tacna.*
- *Los varones no son del mismo lugar.*
- *Luis es iqueño y la esposa de José es tacneña.*
- *No hay parejas de esposos del mismo lugar.*

¿Dónde nacieron Pedro y la esposa de Luis, respectivamente?

A) Tacna – Ica ***B) Lima – Ica***
C) Ica – Lima ***D) Lima – Tacna***
E) Tacna – Lima

16 Ricardo, Violeta y Efraín comen juntos y al finalizar la comida cada uno de ellos elige una opción entre refresco y postre:

- *Si Ricardo pide postre, entonces Violeta pide lo mismo que Efraín.*
- *Si Violeta pide postre, entonces Ricardo pide la opción que no pide Efraín.*
- *Si Efraín pide refresco, entonces Ricardo pide la misma opción que Violeta.*

¿Cuál de ellos siempre pide la misma opción después de la comida?

A) Ricardo ***B) Violeta*** ***C) Efraín***
D) Ninguno ***E) Todos***

17 En una pequeña empresa trabajan las siguientes personas: el Sr. Padilla, el Sr. Franco, la Sra. Garcia, la Srta. Gálvez, el Sr. Ventura y la Srta. Merino; los cargos que ocupan son gerente, subgerente, contador, taquígrafo, cajero y oficinista, aunque no necesariamente en ese orden. El subgerente es nieto del gerente, el contador es el yerno del taquígrafo. El Sr. Padilla tiene *23* años. La Srta. Gálvez es la hermanastra del cajero, el Sr. Ventura es vecino del gerente y el Sr. Franco es soltero. ¿Qué cargo ocupa el señor Ventura?

A) Contador. ***B) Taquígrafo.***
C) Subgerente. ***D) Gerente.***
E) Cajero.

18 En cinco casas vecinas de colores diferentes habitan cinco individuos de nacionalidades diferentes. Cada uno tiene un animal preferido, así también, sus costumbres de fumar y su bebida habitual:

- *El fumador de cigarrillos rubios vive en la casa contigua a aquella en que amaestra un mono.*
- *El fumador de cigarrillos negros vive al lado del propietario del gato.*
- *El fumador de pipa bebe zumo de naranja.*
- *El italiano no fuma*
- *El sueco vive al lado de la casa azul.*
- *El inglés vive en la casa roja.*
- *El perro pertenece al español.*
- *Se bebe café en la casa verde, que es contigua a la casa blanca y está a su derecha.*
- *El francés bebe té.*
- *El fumador de puros tiene una cotorra.*
- *Se fuman cigarrillos negros en la casa amarilla.*
- *Se bebe leche en la casa del centro.*
- *El sueco vive en la casa que se encuentra más a la izquierda.*

¿A quién pertenece la cebra?

A) Al francés. ***B) Al inglés.***
C) Al peruano. ***D) Al sueco.***
E) Al italiano.

19 Se reúnen *4* amigos, cada uno de ellos de distinta profesión (médico, dentista, ingeniero y profesor), cada uno de ellos de diferente nacionalidad (danés, francés, inglés y alemán) y cuando tienen sed toman diferentes marcas de gaseosa (Coca Cola, Inka Cola, Fanta y Pepsi). Si se conoce lo siguiente: José toma Coca Cola, el que toma Pepsi es inglés, el danés es profesor, Carlos no es médico, Guillermo es francés, el que toma Fanta es dentista. Manuel no es inglés y el alemán toma Inka Cola, determine las características de Manuel.

A) Inka Cola – inglés – profesor.
B) Coca Cola – alemán – profesor.
C) Fanta – francés – médico.
D) Coca Cola – danés – dentista.
E) Inka Cola – alemán – dentista.

20 Walter, Eduardo, Julio y Ricardo son cuatro políticos entre los que hay que elegir un jefe de gobierno. Las cualidades que se requieren para este cargo son: astucia, inteligencia y firmeza. Solamente uno, entre los cuatro, reúne todas las cualidades y debe ser, por tanto, el jefe de gobierno, a su vez se conoce:

- *Cada uno de los políticos posee, al menos, una de las cualidades requeridas.*
- *Solamente tres de los políticos son astutos, solamente dos son inteligentes y solamente uno es firme.*
- *Walter y Eduardo tienen igual grado de inteligencia (o de falta de ella, naturalmente)*
- *Eduardo y Julio son igualmente astutos (o incautos, para el caso).*
- *Julio y Ricardo no son ambos, astutos.*

¿ Quién debe ser el jefe de gobierno?

A) Walter ***B) Ricardo.***
C) Julio. ***D) Eduardo.***
E) Faltan datos.

21 Se tiene *19* fichas y dos jugadores, Antonio y Ricardo; cada jugador en su turno deberá retirar *1; 2 ó 3* fichas. Si al jugador que le corresponde la última ficha gana, ¿cuántas fichas deberá retirar el primer jugador para asegurar el triunfo?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3***
d) faltan datos
E) cualquier cantidad

22 Se tiene *7* fichas alineadas y con ellas juegan dos personas de acuerdo a las siguientes reglas:

* Cada jugador a su turno retira *1; 2 ó 3* fichas.

* El que retira la última ficha pierde.

¿Cuál es la estrategia a seguir por el primer jugador para asegurar la victoria?

A) *Retirar una ficha en el primer movimiento.*

B) *Retirar dos fichas en el primer movimiento.*

C) *Retirar tres fichas en el primer movimiento.*

D) *Retirar una o dos fichas en el primer movimiento.*

23 Dos jugadores *A* y *B* Y otras *2009* personas forman un círculo, de modo que *A* y *B* no quedan en posiciones consecutivas. *A* y *B* juegan por turnos alternadamente empezando por *A*. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Si *A* y *B* razonan adecuadamente, ¿quién gana?

A) ganaA ***B) ganaB***
C) no se puede determinar
D) cualquiera gana ***E) empate***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)E	3)A	4)D	5)A	6)B	7)E	8)A	9)D	10)D
11)C	12)C	13)E	14)B	15)E	16)A	17)B	18)[illegible]	19)E	20)C
21)B	22)B	23)B							

HABILIDAD OPERATIVA

CAPITULO 016

OBJETIVOS :

* *Plantear y resolver las operaciones básicas con fluidez y habilidad en la solución de situaciones complicadas y complejas.*

* *Orientar hacia el análisis en la parte operativa , con la intención de aplicar métodos practicos en la resolución de algunos problemas .*

* *Dominar métodos prácticos en las operaciones, para aplicados en la adición, sustracción, multiplicación, potenciación, etc*

INTRODUCCIÓN :

En el presente capítulo aplicaremos métodos que nos permitirán ahorrar tiempo en los cálculos, tiempo que en un cualquier tipo de examen resulta determinante como para no desperdiciarlo en cálculos u operaciones tediosas. Otro punto que dehemos tener en cuenta, es que aprenderemos las diferentes formas de cómo afrontar un ejercicio que aparentemente tiene una solución operativa, pero con un poco de habilidad en las operaciones se puede resolver de una forma más práctica y rápida.

La habilidad operativa es la capacidad para desarrollar estrategias de cálculo mental, y es un ejercicio que estimula la concentracioón, agilidad mental y una lectura rápida de los signos o símbolos que intervienen en una operación matemática.

A continuación revisaremos algunas de estas estratégias ,clasificadas según la operación matemática que interviene.

* Para ***sumar mentalmente*** , se emplea el valor posicional de los números(unidades, decenas, centenas,etc) y la propiedad asociativa.

EJEMPLOS:

a) 73+47 = 70+3+40+7 = 70+40+3+7 =110+10=120

b) 35+17 = 40+12=52

c) 139+46==170+15=185

* Para ***restar mentalmente*** , también se emplea el valor posicional; es decir, se restan unidades con unidades, decenas con decenas, etc.., y se suman los resultados.

EJEMPLOS:

a) 78 – 43= (70 – 40)+ (8 – 3)= 30+5=35

b) 196 – 32= 160+4=164

c) 115 – 89=30+(5 – 9) =30 – 4=26

* Para ***multiplicar mentalmente*** , un número de una cifra por otro número de más en una cifra, se emplea el valor posicional(unidades, decenas, centenas, etc) y la propiedad distributiva.

EJEMPLOS:

a) 5×98=5×(90+8) =5×90+5×8 =450+40=490

LA HABILIDAD OPERATIVA

La habilidad operativa es la manera en que un individuo utiliza sus facultades y habilidades innatas para realizar operaciones matemáticas, operaciones de orden lógico,etc., es lo que el humano utiliza en diferentes ámbitos y la manera en como se las arregla en determinado momento, eS cómo reacciona ante alguna situación. Por lo general suele confundirse con un reflejo, pero no es así.

Por otro lado, el razonamiento matemático funciona en cualquier ser humano y es innato, es decir, está genéticamente predispuesto en cada uno de nosotros cuando nacemos. Funciona y sirve para realizar operaciones matemáticas y operaciones de carácter cotidiano relacionados con números y símbolos.

En este acápite veremos métodos que nos permitirán ahorrar tiempo en los cálculos , tiempo que en el cualquier tipo de examen resulta determinante como para no desperdiciarlo en cálculos numéricos elementales . Otro aspecto importante , de este capítulo , es que nos enseña las diferentes formas como afrontar un ejercicio que aparentemente tienen una resolución operativa , pero que con un poco de ingenio y habilidad en las operaciones , se puede resolver de una forma más rápida.

A continuación, analizaremos algunos casos sobre el desarrollo abreviado de ciertas operaciones básicas.

I) MULTIPLICACIÓN POR 10 :

Para multiplicar un número por *10* , le agregamos un cero a la derecha del número. Así :

$$67\times10=670\ ;\ 237\times10=2370$$

II) MULTIPLICACIÓN POR 5:

* Observemos : $68\times5=¿?$

* Pero no olvides que : $5=\frac{10}{2}$

$$68\times\frac{10}{2}=\frac{680}{2}=340$$

* Podemos decir que para multiplicar un número por **5** , le agregamos un cero a la derecha del número y al resultado de este , se le divide entre **2** .

EJEMPLOS :

* $387\times5=387\times\frac{10}{2}=\frac{3870}{2}=1935$

* $39\times5=39\times\frac{10}{2}=\frac{390}{2}=195$

NOTAS :

Para multiplicar por *15* , sólo se le agrega su mitad, ya este resultado se le multiplica por diez.

* $18\times15=180+\frac{180}{2}=270$

* $23\times15=230+\frac{230}{2}=345$

Para multiplicar por ***25***, al número se le agrega dos ceros a su derecha, y el resultado se divide entre ***4***.

* $32\times25=\frac{3200}{4}=800$

* $43\times25=\frac{4300}{4}=1075$

III) DIVISIÓN ENTRE 5:

Veamos : $\frac{335}{5}=¿?$

No olvides que : $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$

De la misma manera : $335\times\frac{1}{5}=\frac{335\times2}{10}=\frac{670}{10}=67$

Podemos decir que para dividir un número entre *5*, al número se le multiplica por ***2*** y luego se le divide entre ***10*** . ¿Qué pasaría si la división no es exacta?

EJEMPLOS :

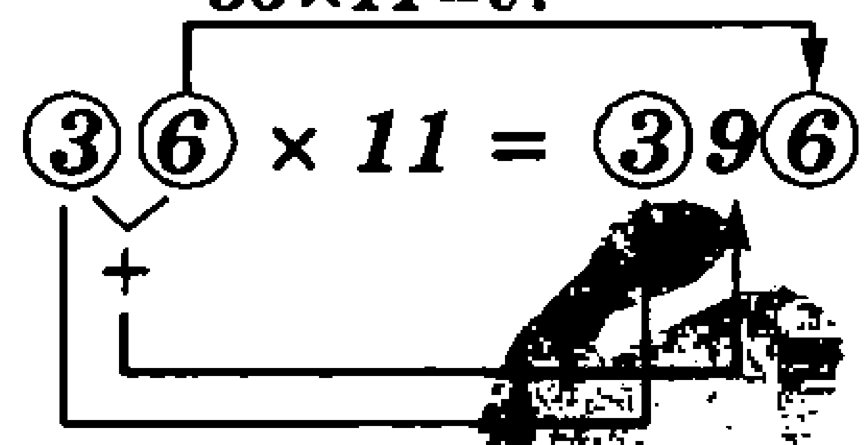
* $\frac{275}{5}=\frac{275\times2}{10}=\frac{550}{10}=55$

* $\frac{5319}{5}=\frac{5319\times2}{10}=\frac{10638}{10}=1063{,}8$

IV) MULTIPLICACIÓN POR 11 :

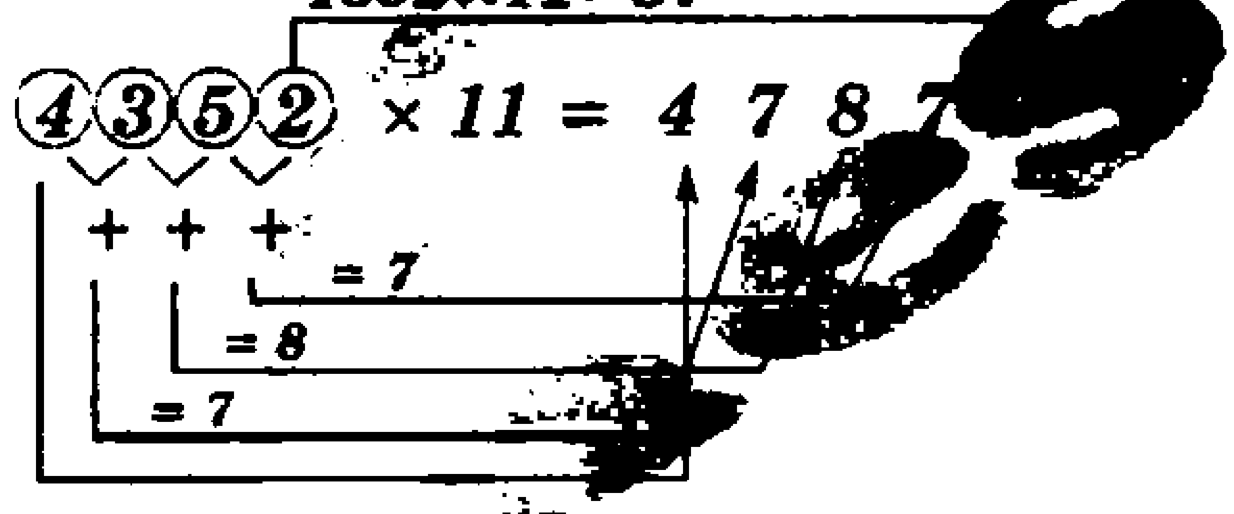
* Veamos un ejemplo :

$36\times11=¿?$



* Ahora otro ejemplo :

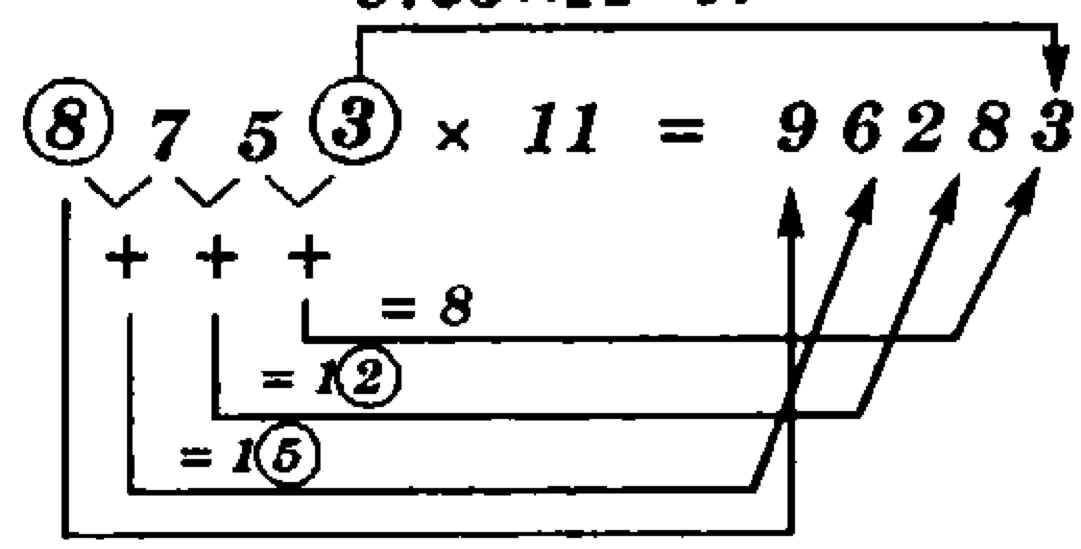
$4352\times11=¿?$



* Sigue el procedimiento indicado , pero si la suma parcial de dos dígitos resulta un número de dos cifras(ejemplo: *8+5=13*) , se coloca la cifra de las unidades y se "lleva" la otra cifra para sumar en el resultado del paso siguiente.

OTRO EJEMPLO :

$8753\times11=¿?$



V) MULTIPLICACIÓN POR 9 ; 99 ; 999 ;....:

* Observemos y deduzcamos el procedimiento :

* $23\times99=23\times(100-1)=2300-23=2277$

* $467\times999=467\times(1000-1)=467000-467=466533$

!CONCLUSIÓN ¡

Para multiplicar cualquier número natural *(N)* por otro número natural formado únicamente por cifras ***9***, al otro número debemos agregarle a su derecha tantos ***ceros*** como cifras nueve hay , y al número obtenido le restamos el mismo número *(N)*.

$$N\times\underbrace{999....99}_{"n"\ cifras}=\overline{N\underbrace{000....00}_{"n"\ cifras}}-N$$

EJEMPLOS :

* $37\times999=37000-37=369963$

* $10027\times99=1002700-10027=992673$

* $\overline{abc}\times 9999=\overline{abc0000}-\overline{abc}$

VI) CUADRADO DE UN NÚMERO QUE TERMINA EN 5 :

* Analizemos algunos casos :

$$15^2 = \textcircled{2}25 \longrightarrow 2 = \textcircled{1}\times 2$$

$$25^2 = \textcircled{6}25 \longrightarrow 6 = \textcircled{2}\times 3$$

$$35^2 = \textcircled{12}25 \longrightarrow 12 = \textcircled{3}\times 4$$

$$75^2 = 56\,25 \qquad 7\times 8$$

$$995^2 = 9900\,25 \qquad 99\times 100$$

Para efectuar mentalmente , el cuadrado de un número que termina en *5* , se elimina dicho *5* . el número que queda se multiplica con su consecutivo superior , y a dicho producto se le pone *25* al final.

EJEMPLO :

Efectuar mentalmente 85^2

RESOLUCIÓN :

* Al eliminar el *5* que queda *8*, luego se multiplica *8* por su consecutivo superior $8\times 9=72$.

* Para terminar , se pone *25* al final : *7225* .

* Es decir: $85^2=7225$.

VII) CUADRADO DE UN NÚMERO DE DOS CIFRAS:

* Se eleva al cuadrado la cifra de las unidades. Y se lleva si hay.

* Luego se efectúa el doble producto de las cifras del número y se suma lo que se llevaba; y se lleva si hay.

* Finalmente se eleva al cuadrado la cifra de las decenas del número y se suma lo que se lleva.

* Analizemos el siguiente caso :

al cuadrado

$$(31)^2 = 9\;6\;1$$

al cuadrado

El doble del producto así: 2(3×1)

EJEMPLO 1 :

* $(13)^2 = 169$ * $(22)^2 = 484$

Y, ¿cómo harías lo siguiente?:

$(34)^2=1156$ .... *¿Porqué?*

* Ahora , en cámara lenta :

$$(34)^2 = 11\,5\;6$$

$$= \textcircled{16}$$

$$2(3\times 4)=24$$

Para desarrollar mentalmente el cuadrado de un número de dos cifras , se eleva al cuadrado la cifra de las unidades. Luego se efectúa el doble producto de las cifras y se le agrega lo que se lleva del resultado anterior (si lo hubiera) . Finalmente , se eleva al cuadrado la cifra de las decenas y se le agrega lo que se lleva (si lo hubiera) .

EJEMPLO 2 :

Efectuar mentalmente 64^2.

RESOLUCIÓN :

* Se eleva al cuadrado la cifra de las unidades : $4^2=16$, escribo *6* y llevo *1* .

* Luego , el doble producto de las cifras: $2(6\times 4)=48$. más 1 que llevo . *49* ; escribo *9* y llevo *4* .

* Al final , se eleva al cuadrado la cifra de las decenas: $6^2=36$, más *4* que llevo , *4* .

* El resultado será : $64^2=4096$.

* Como recordarás , el proceso anterior se basa en el ***desarrollo del cuadrado de un binomio***, como los resultados de derecha a izquierda , así:

$$(\overline{ab})^2 = \overline{(a^2)(2ab)(b^2)}$$

VIII) CUADRADO DE UN NÚMERO FORMADO SÓLO POR CIFRAS UNO $(111......11)^2$

Este cuadrado se obtiene escribiendo los números naturales desde *1* hasta el número indicado por la cantidad de cifras del número dado, y luego regresando hasta *1* , así :

* $1^2 = 1$
* $11^2 = 1\,2\,1$
* $111^2 = 1\,2\,3\,2\,1$
* $1111^2 = 1\,2\,3\,4\,3\,2\,1$
* $11111^2 = 1\,2\,3\,4\,5\,4\,3\,2\,1$
* $111111^2 = 1\,2\,3\,4\,565\,4\,3\,2\,1$

IX) MULTIPLICACIÓN DE DIFERENCIA DE CUADRADOS :

Recuerda que la expresión $a^2 - b^2$ se llama diferencia de cuadrados, y que se puede expresar como el producto de una suma por una diferencia así :

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

EJEMPLO 1 :

desarrolar $28^2 - 27^2$ es muy sencillo, por diferecnia de cuadrados , así:

$$28^2 - 27^2 = (28 + 27)\cdot(28 - 27) = (55)(1) = 55$$

EJEMPLO 2 :

al desarrollar $28^2 - 26^2$, se obtiene

$$282 - 262 = (28 + 26)\ (28 - 26) = (54)(2) = 108$$

X) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DE DOS CIFRAS :

Multiplicar mentalmente 62×37.

RESOLUCIÓN :

* Se usará el siguiente método práctico :

* Primero se multiplican las cifras de las unidades , así:

```
6 2
  |     2×7 =14 ; escribo 4 y llevo 1
3 7
```

* Luego se multiplica en *ASPA* y se agrega lo que se lleva :

```
6   2
  X     6×7+2×3+1
3   7   42+6+1=49 escribo 9 y llevo 4.
```

* Finalmente se multiplica las cifras de las decenas, y se agrega lo que se lleva:

```
6  2
|       6×3+4
3  7    18+4=22, escribo 22
```

* Conclusión : $62 \times 37 = 2294$

* Observemos otro ejemplo y deduzcamos :

```
        1   2 ×
        4   1
        -------
            2
          1
      4   8
    -----------
    ④   9   ②
```

Es el producto de las cifras de las decenas . (4×1)

Es la suma de los productos en aspa . (1×1)+(4×2)

Es el producto de las cifras de las unidades . (1×2)

XI) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DE TRES CIFRAS :

Multiplicar mentalmente 438×356.

RESOLUCIÓN :

```
4 3 8
    |     8×6=48, escribo 8 y llevo 4
3 5 6

4 3 8
  X       3×6+8×5 + 4
3 5 6     18+40+4=62 ; escribo 2 y llevo 6.

4 3 8
  *       4×6 + 3×5 + 8×3 + 6
3 5 6      24 + 15 + 24 + 6 = 69;
          escribo 9 y llevo 6.

4 3 8
 X          4×5+3×3+6
3 5 6     20+9+6=35; escribo 5 y llevo 3.

4 3 8
|         4×3+3=15, escribo 15.
3 5 6
```

* Conclusión : $438 \times 356 = 15598$

XII) MÉTODO DEL COMPLEMENTO :

Usualmente se aplica cuando necesitemos multiplicar **2** números de la misma cantidad de cifras que esten próximos a potencias de *10(10;100;1000;.....)*, considerando lo que le falta a cada número para ser dichas potencias de *10* (esto lo que falta llamaremos los ***complementos***) .

EJEMPLO 1:

Multiplicar: 997×992

RESOLUCIÓN :

* Se escribe en la parte superior de cada número , su respectivo complemento :

$$\overbrace{997}^{3} \times \overbrace{992}^{8}$$

* Para el resultado se coloca la diferencia entre uno de los números y el complemento del otro número :

$$\overbrace{997}^{3} \times \overbrace{992}^{8} = \underbrace{(997 - 8)}_{\text{ó } 992-3}\ \underbrace{\square\square\square\square}_{}$$

ó 992 – 3

esto debe ser de 3 cifras , porque los #s lo son.

El número de *3* cifras que falta se obtiene

multiplicando los complementos *(3×8=24)*, pero si dicho producto no resulta de cifras se completa con ceros a su izquierda *(024)* ,así:

$$\overset{3}{\overbrace{997}}\times\overset{8}{\overbrace{992}}=\overline{989\quad\underbrace{\boxed{0}\boxed{2}\boxed{4}}_{\text{producto de complementos}}}\Rightarrow 997\times 992=989024$$

EJEMPLO 2 :

Multiplicar : 87612×99998

RESOLUCIÓN :

$$\overset{1388}{\overbrace{87612}}\times\overset{2}{\overbrace{99998}}=\overline{(87612-2)\ \underbrace{(...1388\times 2)}_{\text{debe ser de 5 cifras}}}$$

$$\Rightarrow 87612\times 99998=87610002776$$

EJEMPLO 3 :

Efectuar : 9007888×999998

RESOLUCIÓN :

* Para que ambos sean de la misma cantidad de cifras, hacemos el siguiente artificio (le aumentamos un cero y a la vez lo dividimos por *10*) :

$$(9007888\times 9999980)\div 10$$

* Entonces :

$$\left(\overset{992112}{\overbrace{9007888}}\times\overset{20}{\overbrace{9999980}}\right)\div 10=$$

$$=\overline{(9007888-20)(....992112\times 20)}\div 10$$

$$=(900786819842240)\div 10=900786819842$$

CIFRAS TERMINALES

A) CIFRA TERMINAL 0 ; 1; 5 y 6

Si un número termina en *0 ; 1; 5* ó *6*, al ser elevado a cualquier potencia natural, siempre termina en la misma cifra:

$$(...0)^n=.....0 \qquad (...1)^n=.....1$$

$$(...5)^n=.....5 \qquad (...6)^n=.....6$$

EJEMPLO :

Hallar la cifra terminal de :

$$E=(894671)^{49}+(286)^{200}-(6570)^{856}$$

RESOLUCIÓN :

* Usando la cifra terminal :

$$E=...1+....6-....0\ \Rightarrow E=....7$$

* Por lo tanto, el resultado termina en *7*.

B) CIFRA TERMINAL 4 :

La cifra terminal *4* a la potencia *IMPAR* termina en *4* . y a la potencia *PAR* termina en *6*. Veamos

$$4^1=4 \qquad 4^2=16$$

$$4^3=64 \qquad 4^4=255$$

$$\Rightarrow \boxed{4^{IMPAR}=....4}\ \text{y}\ \boxed{4^{PAR}=....6}$$

C) CIFRA TERMINAL 9 :

la cifra terminal *9* a la potencia *IMPAR* termina en *9*, y a la potencia *PAR* termina en *1*.

EJEMPLO :

$$9^1=9 \qquad 9^2=81$$

$$9^2=729 \qquad 9^4=6561$$

$$\Rightarrow \boxed{9^{IMPAR}=....9}\ \text{y}\ \boxed{9^{PAR}=....1}$$

OPERACIONES CON FRACCIONES

* $\underbrace{\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}}_{\text{fracciones homogeneas}}$ * $\frac{4}{7}-\frac{2}{5}=\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}=\underbrace{\frac{4\times 5-7\times 2}{7\times 5}}_{\text{metodo del aspa}}$

* $2+\frac{5}{3}=\frac{3\times 2+5}{3}$ * $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{4}}=\underbrace{\frac{2\times 4}{3\times 7}=\frac{8}{21}}_{\text{producto de medios y de extremos}}$

* $\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=\frac{2\times 3+7\times 1}{7\times 3}=\frac{6+7}{21}=\frac{13}{21}$

* $1+\frac{2}{7}=\frac{7\times 1+2}{7}=\frac{7+2}{7}=\frac{9}{7}$

* $2-\frac{x}{y}=\frac{2y-x}{y}$ * $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{4\times 2+2\times 5-3\times 1}{12}=\frac{15}{12}$

* $\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}=\frac{1\times 1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$ * $\frac{2}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{3}{5}}=\frac{2\times 5}{1\times 3}=\frac{10}{3}$

* $\frac{3}{8}\div\frac{2}{5}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{5}}=\frac{3\times 5}{8\times 2}=\frac{15}{16}$

* $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{c+a+b}{a\,b\,c}$

* $$\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1\times 3-2\times 1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{\frac{2\times 1+1}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{\frac{2\times 1+1}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2\times3+5\times2}{5\times3}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{16}{15}}=\frac{15}{64}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular : $2\times3\times4\times5\times6\times7$

Si : $3\times4\times5\times6\times7\times8=20160$

A) 1370 B) 4002 C) 3000 D) 6008 E) 5040

RESOLUCIÓN :

*Dividiendo miembro a miembro adecuadamente ,así:

$$\left.\begin{matrix}P=2\times3\times4\times5\times6\times7\\20160=3\times4\times5\times6\times7\times8\end{matrix}\right\}\div$$

$$\Rightarrow\frac{P}{20160}=\frac{2}{8}\quad\Rightarrow P=\frac{20160}{4}=5040$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

De cuantas cifras constará el resultado de : $4^3\times5^5$

A) 6 B) 36 C) 3 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

* como tenemos potencias de *2* y de *5* , trataremos de formar potencias de *10* , así :

$$4^3\times5^5=(2^2)^3\times5^5=2^6\times5^5=2\times2^5\times5^5$$
$$=2\times(2\times5)^5=2\times10^5=200000$$

* Luego $4^3\times5^5$ consta de *6* cifras .

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Calcular :

$$\sqrt{366\times463+251\times234+137\times366+234\times349}$$

A) 137 B) 401 C) 300 D) 600 E) 400

RESOLUCIÓN :

* Agrupando el primer y tercer término de la cantidad subradical(dado que tienen un factor común) , asi como los demás términos :

$$\sqrt{366\times(463+137)+234\times(251+349)}$$
$$=\sqrt{366\times600+234\times600}=\sqrt{600\times(366+234)}$$
$$=\sqrt{600\times600}=\sqrt{600^2}=600$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Calcular : $1234\times5678+8765\times5678$

E indicar la suma de cifras del resultado .

A) 17 B) 36 C) 39 D) 21 E) 13

RESOLUCIÓN :

* Factorizando el factor común :

$$5678\times(1234+8765)=5678\times9999=5678\times(10\,000-1)$$
$$=56780000-5678=56\,774322$$

* Piden : $5+6+7+4+3+2+2=36$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Simplificar: $\dfrac{2^{2003}+2^{2004}+2^{2005}}{2^{2001}+2^{2000}+2^{1999}}$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

RESOLUCIÓN :

*Factorizando "2^{1999}", en todos los términos :

$$\frac{2^{1999}\times2^4+2^{1999}\times2^5+2^{1999}\times2^6}{2^{1999}\times2^4+2^{1999}\times2^1+2^{1999}\times1}$$

$$=\frac{2^{1999}(2^4+2^5+2^6)}{2^{1999}(2^2+2^1+1)}=\frac{16+32+64}{4+2+1}=\frac{112}{7}=16$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Calcular : $20032003^2-20032002^2$

E indicar la suma de cifras del resultado.

A) 7 B) 11 C) 19 D) 17 E) 8

RESOLUCIÓN :

* La idea más práctica sería aplicar la diferencia de cuadrados : $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

* Entonces : $20032003^2-20032002^2=$

$$=(20032003+20032002)(20032003-20032002)$$
$$=(40064005)\times(1)=40064005$$

* La expresión pedida será :

$$4+0+0+6+4+0+0+5=19$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Se sabe que:

$$\overline{ESTUDIA}\times9999999=\overline{ESTUDIO8765432}$$

Calcular : $S=\dfrac{O+S+T+I+A}{D+I+O+S}$

RESOLUCIÓN :

* Para resolver éste problema observen lo siguiente:

$$8\overset{-1}{\curvearrowright}\times\;9=\boxed{7}2\longrightarrow\underbrace{7\;\;2}_{\text{Suman }9}$$

$17 \times 99 = \boxed{16}83 \longrightarrow 1\ 6\ 8\ 3$ (−1; Suman 9)

$486 \times 999 = \boxed{485}514 \longrightarrow 4\ 8\ 5\ 5\ 1\ 4$ (−1; Suman 9)

* Aplicando en el problema :

$\overline{ESTUDIA} \times 9999999 = \overline{ESTUDIO8765432}$ (Suman 9)

* Se deduce :

$E=1\ ;\ S=2\ ;\ T=3\ ;\ U=4\ ;\ D=5\ ;\ I=6\ ;\ O=7$

* Luego remplazando tenemos :

$\overline{123456A} \times 9999999 = \boxed{1234567}8765432$ (−1 ; +1)

* Entonces : $A=8$
* Piden :

$$S=\frac{O+S+T+I+A}{D+I+O+S}=\frac{7+2+3+6+8}{5+6+7+2}=\frac{26}{20}=1{,}3$$

PROBLEMA 8 :

Hallar la suma de las cifras del resultado de la siguiente serie :

$$\underbrace{88+988+9988+99988+\ldots\ldots}_{98\ sumandos}$$

RESOLUCIÓN :

* Acomodamos convenientemente a los sumados y luego a cada uno le sumamos *12* , para hacer más fácil la suma :

1°	8 8 +	(+12) →
2°	9 8 8	(+12) →
3°	9 9 8 8	(+12) →
4°	9 9 9 8 8	(+12) →
⋮	⋮	⋮
98°	9 9 9 ...... 9 9 8 8	(+12) →

1 0 0
1 0 0 0
1 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0
⋮
1 0 0 ....0 0 0 0
1 1 1 ....1 1 0 0

Notamos que cada sumando aumenta en una cifra , eso quiere decir que la suma final tendrá 100 cifras

* A la suma final le restamos la cantidad de doce *(12)* que hemos sumado ,para así hallar la suma verdadera:

$\overbrace{1\ 1\ 1\ \ldots\ldots\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0}^{100\ cifras}\ -$

$1\ 1\ 7\ 6 \longrightarrow (98\times12)$

$\underbrace{\boxed{1\ 1\ 1\ \ldots\ldots\ 1\ 0\ 9\ 9\ 2\ 4}}_{100\ cifras} \longrightarrow$ *Suma real*

* Se pide la Suma de cifras , la cual es :

$95(1)+0+9+9+2+4=119$

PROBLEMA 9 :

Se sabe que : $\underbrace{95^2+995^2+9995^2+\ldots}_{95\ sumandos} = \overline{\ldots.RE*MAT}$

Calcular : $M+A+R+T+E$

RESOLUCIÓN :

* Observen lo siguiente :

$95^2 = 9\boxed{5^2} = 90\boxed{25}$

$\times 10 \Rightarrow$ *Consecutivo del 9*

$995^2 = 99\boxed{5^2} = 9900\boxed{25}$

$\times 100 \Rightarrow$ *Consecutivo del 99*

$9995^2 = 999\boxed{5^2} = 999000\boxed{25}$

$\times 1000 \Rightarrow$ *Consecutivo del 999*

* Apliquemos esto en el problema:

$9\ 5^2 =$
$9\ 9\ 5^2 =$
$9\ 9\ 9\ 5^2 =$
$9\ 9\ 9\ 9\ 5^2 =$
$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 5^2 =$
$9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 5^2 =$
⋮

* Se obtiene :

9 0 2 5
9 9 0 0 5 +
9 9 9 0 0 0 5
9 9 9 9 0 0 0 0 5
9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 5
9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0 0 5
⋮

(95 sumandos)

.... RE*MAT

* Sumando *c/u* de las *6* últimas columnas se obtiene:

$R=9$; $E=0$; $*=1$; $M=3$; $A=7$ y $T=5$

* Se pide : $M+A+R+T+E=3++7+9+5+0=24$

PROBLEMA 10 :

Calcular : $2003^3-2002^3-3\times 2002\times 2003$

A) 0 B) 1 C) 2 D) –1 E) 2001

RESOLUCIÓN :

* Hagamos el siguiente artificio : $2003^3=(2002+1)^3$
* Pero previamente recordemos que :

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (2002+1)^3=2002^3+1^3+3\times 2002\times 1\times(2002+1)$$

$$\Rightarrow \quad 2003^3=2002^3+1+3\times 2002\times 2003$$

* Transponiendo términos adecuadamente se tendrá que : $2003^3-2002^3-3\times 2002\times 2003=1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

Calcular : $\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{3}{40}+\frac{4}{96}+\frac{5}{204}$

A) 1 B) $\frac{17}{15}$ C) $\frac{15}{34}$ D) $\frac{19}{21}$ E) $\frac{34}{19}$

RESOLUCIÓN :

* Tomemos en consideración lo siguiente :

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{a\times b} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{a\times b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

* Ahora dando una forma adecuada a cada una de las fracciones :

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{3}{5\times 8}+\frac{4}{8\times 12}+\frac{5}{12\times 17}$$

$$=\frac{3-2}{2\times 3}+\frac{5-3}{3\times 5}+\frac{8-5}{5\times 8}+\frac{12-8}{8\times 12}+\frac{17-12}{12\times 17}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{17}=\frac{17-2}{2\times 17}=\frac{15}{34}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

En que cifra términa el resultado de:

$$2001^{2003}+2005^{2004}+2006^{2005}$$

A) 7 B) 2 C) 6 D) 0 E) 3

RESOLUCIÓN :

*Como piden la cifra de unidades , únicamente consideramos la cifra de unidades de cada sumando:

$$\underbrace{1\times 1\times 1\times\ldots\times 1}_{\ldots 1^{2003}}+\underbrace{5\times 5\times\ldots\times 5}_{\ldots 5^{2004}}+\underbrace{6\times 6\times 6\times\ldots\times 6}_{\ldots 6^{2005}}$$

→ Siempre terminará en 6

→ Siempre términará en 5

→ Siempre términará en 1

* Luego : $\ldots.1+\ldots.5+\ldots.6=\ldots.2$

La cifra deseada

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Escriba en los recuadros en blancos números naturales menores que *8* , de manera que en cada fila y en cada columna los números sumen *26*. ¿Cuántas veces figurará en el *6*?

A) 4
B) 8
C) 5
D) 7
E) 6

5			
		6	
	6		
			7

RESOLUCIÓN :

* Empecemos por la cifra *5* presente , puesto que a esta le falta *21* para ser *26* , de donde el *21* se obtendría únicamente así :

$7+7+7=21$; lo demás ya se coloca fácilmente :

5	7	7	7
7	7	6	6
7	6	7	6
7	6	6	7

"Se aprecia que 6, figura 6 veces"

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

¿En qué cifra termina el resultado de la siguiente expresión?

$$R=(43^{44}+42^{43})\times 675^{42}-46^{41}-51^{40}$$

RESOLUCIÓN :

* Para empezar con la resolución , debemos tomer en cuenta lo siguiente :

$$\left.\begin{array}{l}(\#\,impar)^n=\#\,impar;(\#\,par)^n=\#\,par\\ \underbrace{(\overline{\ldots.5})^n=\overline{\ldots.5};(\overline{\ldots.6})^n=\overline{\ldots.6};(\overline{\ldots.1})^n=\overline{\ldots.1}}_{numero\ ciclicos}\end{array}\right\}n\ge 1$$

* Aplicando lo anterior en el problema , resulta :

$$R=(impar+par)\times\overline{\ldots.5}-\overline{\ldots.6}-\overline{\ldots.1}$$

$$\Rightarrow R=impar\times\overline{\ldots.5}-\overline{\ldots.7}=\overline{\ldots.8}$$

PROBLEMA 15 :

Determinar la cifra de unidades del resultado de:

$$L = 22222222^{4444444^{RUBIÑOS}}$$

RESOLUCIÓN :

* Veamos algunos casos más simples , pero analogos al problema :

$$2^1=2 \;;\; 2^5=32 \;;\; 2^9=512$$
$$2^2=4 \;;\; 2^6=64 \;;\; 2^{10}=1024$$
$$2^3=8 \;;\; 2^7=128 \;;\; 2^{11}=2048$$
$$2^4=16 \;;\; 2^8=256 \;;\; 2^{12}=4096$$

$$\Rightarrow 2^{\overset{\circ}{4}} = \overline{....6}$$

* Luego en el problema :

$$L = 22222222^{\overset{\circ}{4}} = \overline{....2}^{\overset{\circ}{4}} \Rightarrow L = \overline{....2}^{\overset{\circ}{4}} = \overline{....6}$$

PROBLEMA 16 :

Calcular "$A + B + C$", si:

A) 3
B) 4
C) 6
D) 8
E) 12

$$\begin{array}{r} \overline{AB5}+ \\ \overline{C3A} \\ \hline \overline{387} \end{array}$$

RESOLUCIÓN :

* De las columnas se deduce que :

$$5+A=7 \Rightarrow A=2 \quad B+3=8 \Rightarrow B=5$$

* Además $A + C = 3$ pero sabemos que:

$$A=2 \Rightarrow C=1 \Rightarrow A+B+C=8$$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Multiplicar por ***5*** los siguientes números.

A) 9 B) 49 C) 1649 D) 16 E) 327

02 Multiplicar por ***9*** los siguientes números.

A) 7 B) 89 C) 1729
D) 18 E) 624

03 Multiplicar por ***11*** los siguientes números.

A) 12 B) 437 C) 4235
D) 54 E) 986

04 Multiplicar por ***15*** los siguientes números.

A) 14 B) 432 C) 4342
D) 98 E) 1224

05 Multiplicar por ***25*** los siguientes números.

A) 13 B) 430 C) 5674
D) 68 E) 1650

06 Multiplicar por ***75*** los siguientes:

A) 18 B) 129 C) 2340
D) 35 E) 634

07 Multiplicar por ***125*** los siguientes:

A) 29 B) 87 C) 1630
D) 56 E) 735

08 Dividir entre ***5*** los siguientes:

A) 24 B) 132 C) 1344
D) 79 E) 348

09 Dividir entre ***15*** los siguientes números.

A) 75 B) 360 C) 1050
D) 120 E) 630

10 Hallar el cuadrado de los siguientes :

A) $(35)^2$ B) $(115)^2$ C) $(995)^2$
D) $(85)^2$ E) $(405)^2$

11 Hallar el cuadrado de los siguientes números de 2 cifras.

A) $(13)^2$ B) $(54)^2$ C) $(92)^2$
D) $(36)^2$ E) $(79)^2$

12 Hallar el cuadrado del siguiente número: $(3247)^2$

Usando la técnica anterior:

13 Efectuar :

A) 384×999 C) 75×175
B) 4371×99999 D) 125×325

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Completar mentalmente :

* 85^2 = ... * 115^2 = ...
* 95^2 = ... * 125^2 = ...
* 105^2 = ... * 135^2 = ...

02 * Efectuar mentalmente :

* 23^2 = ... * 42^2 = ...
* 28^2 = ... * 46^2 = ...
* 34^2 = ... * 51^2 = ...
* 37^2 = ... * 88^2 = ...

03 Efectuar mentalmente :

* 5^2 = ... * 65^2 = ...
* 15^2 = ... * 75^2 = ...
* 25^2 = ... * 85^2 = ...
* 35^2 = ... * 95^2 = ...
* 45^2 = ... * 105^2 = ...
* 55^2 = ... * 115^2 = ...

04 Efectuar mentalmente :

* 13^2 = ... * 24^2 = ...

* 14^2 = ...
* 16^2 = ...
* 17^2 = ...
* 18^2 = ...
* 19^2 = ...
* 27^2 = ...
* 33^2 = ...
* 38^2 = ...
* 46^2 = ...
* 58^2 = ...

05 Efectuar mentalmente : $E=\sqrt{12945-624}$

A) 1211 B) 1111 C) 112 D) 121 E) 111

06 Reducir: $E=\sqrt{176688-42367}$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 7 E) 6

07 Hallar $A+B$, si :

$A = 156^2-154^2$ $B = 298^2-297^2$

A) 350 B) 905 C) 450 D) 4 E) 600

08 Desarrollar mentalmente : $E=\sqrt{18358-6037}$

A) 1111 B) 111 C) 22 D) 222 E) 112

09 Reducir : $E=\sqrt{12757673-4121352}$

Responder la suma de las cifras del resultado.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

10 Responder la suma de las cifras del resultado :

$$E=\sqrt{10305050301-2040604020}$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

11 Determinar la suma de las cifras del resultado:

$$E = 222222^2-222220^2$$

A) 22 B) 10 C) 40 D) 48 E) 44

12 Hallar A/B, si :

$A = 102\ (98) + 4$ $B = 13\ (17) + 9$

A) 25 B) 50 C) 35 D) 40 E) 50

13 Reducir M/N, si :

$M = 504\ (496) + 16$ $N = 55\ (45) + 25$

A) 50 B) 200 C) 100 D) 25 E) 400

14 Determinar : $\dfrac{A-B}{10000}$, si :

$A = 310\ (290) + 100$ $B = 205\ (195) + 25$

A) 2 B) $\frac{45}{2}$ C) $\frac{81}{16}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{4}{9}$

15 Responder la suma de las cifras del resultado :

$$E = 555555^2-555551^2$$

A) 26 B) 28 C) 24 D) 22 E) 55

16 Encontrar la cifra terminal de :

$$E = 690^{281} + 3875^{33} + 3586^{78}$$

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

17 Determinar la cifra terminal de :

$$E = 3339^{55}-44444^{60}$$

A) 5 B) 3 C) 2 D) 4 E) 7

18 Hallar la cifra terminal de :

$$E = 8885^{39} + 1899^{44} - 774^{93}$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

19 Si $\overline{cbc}-\overline{b35}=\overline{1cc7}$, halle : $2b+3c$

A) 20 B) 24 C) 16 D) 26 E) 14

20 Si : $\overline{abc}+\overline{cba}=888$ $a-c=4$

Halle : abc

A) 32 B) 24 C) 48 D) 72 E) 64

21 $\overline{b53c}+\overline{a6b}+\overline{7ca}=\overline{61cb}$

Halle : $a-b+2c$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

22 Calcule $A\times B$, si $\overline{AAB}+\overline{BAA}=1473$

A) 20 B) 27 C) 24 D) 32 E) 40

23 Si $\overline{BNJHB}+\overline{JNIN}=\overline{HJH62}$

Hallar : $B+N+J+H$

A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

24 Si $\overline{PQR}+\overline{RQP}=666 \wedge R-P=2$

Halle : $P+Q+R$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

TAREA DOMICILIARIA

01 Si :

$$\underbrace{5^2+15^2+25^2+35^2+45^2+\dots}_{40\ sumandos}=\sqrt{\dots ma}$$

Hallar : $m+a+m+a$

A) 12 B) 7 C) 15 D) 10 E) 14

02 Si :

$$\underbrace{3+35+353+3535+\dots}_{20\ sumandos}=\sqrt{\dots EVA}$$

Hallar : $A+V+E$

A) 5 B) 3 C) 10 D) 8 E) 9

03 Si :

$$3,4205\times 10^{a}=\underbrace{0,000\dots0034205}_{(b+2)\ sumandos}$$

Calcular : $(5 + 3a)$

A) $3b+18$ B) $3b+10$ C) $3b+20$
D) $3b+12$ E) $3b+15$

04 Calcular el valor de "*E*" y dar como respuesta la suma de sus cifras :

$$E=\sqrt{425\times 375\times 160625+625\times 625}$$

A) 2 B) 6 C) 7 D) 11 E) 15

05 Hallar : $N + E + N + A$ en :

$$\left.\begin{array}{r} 2+\\ 28\\ 282\\ 2828\\ \vdots\\ \hline \ldots NENA \end{array}\right\} 28\ sumandos$$

A) 18 B) 17 C) 16 D) 19 E) 15

06 Hallar la suma total de todos los números de *20* cifras cuya suma de cifras sea 179 .
(Dar como respuesta la suma de sus cifras)

A) 169 B) 180 C) 170 D) 145 E) 165

07 ¿Cuántas cifras se deben mover como mínimo para formar una verdadera igualdad. $131-127 = 4$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Calcular :

$$\sqrt{\frac{252525}{161616}+\frac{\overbrace{393939\ldots39}^{40\ cifras}}{\underbrace{161616\ldots16}_{40\ cifras}}}$$

A) $\frac{25}{16}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 2 E) 4

09 Hallar : $S + U + K + Y$, si :

$$\left.\begin{array}{r} 9+\\ 99\\ 999\\ 9999\\ \vdots\\ \ldots 9999\\ \hline \ldots SUKY \end{array}\right\} 21\ sumandos$$

A) 17 B) 18 C) 19 D) 16 E) 20

10 ¿Cuántas cifras se deben mover como mínimo para formar una verdadera igualdad ?

$$62- 63 = 1$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Hallar la raíz cúbica de :

$3228 \times 4138 + 4138 \times 2761 + 5999 \times 2861 + 6999 \times 4001-5990\,000$

A) 1 200 B) 300 C) 400 D) 900 E) 1 000

12 Si: $\underbrace{4 + 44 + 444+\ldots}_{24\ sumandos}=\overline{\ldots PERU}$

Hallar : $P + E + R + U$

A) 10 B) 18 C) 16 D) 15 E) 17

13 Calcular :

$$\overline{CAM} + \overline{PE} + \overline{ON}$$

$$\overline{CAMPEON}\times 9999999=\ldots 4821568$$

A) 683 B) 681 C) 692 D) 694 E) 656

14 ¿En qué cifra termina el resultado de :

$$E=\left(23^7+12^5\right)\times 115^2-26^3-31^6$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

15 Calcular $(a + b)$, su sabe que :

$$\underbrace{\overline{a5}+\overline{b5}^2+\overline{a5}^3+\overline{b5}^4+\ldots}_{\overline{a67}\ sumandos}=\sqrt{\overline{\ldots ab}}$$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 7 E) 9

16 Calcular el producto de las cifras del resultado de efectuar :

$$E=\frac{37}{53}+\frac{3737}{5353}+\frac{373737}{535353}+\ldots(159\ sumandos)$$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

17 ¿Cual es la última cifra del producto ?

$$S=(1^3+1)(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\ldots(20^3+1)$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 6

18 Calcular el valor de "*N*" y dar como respuesta la suma de sus cifras en :

$$N=(\underbrace{999\ldots 9992}_{(n-3)\ cifras})\times(\underbrace{999\ldots 998}_{(n-3)\ cifras})$$

A) $9n+18$ B) $9n-20$ C) $9n+27$
D) $9n-39$ E) $9n+20$

19 Hallar la suma de las cifras de la suma total de :

$$\underbrace{2 + 92 + 992 + 9992+\ldots}_{92\ sumandos}$$

A) 101 B) 106 C) 103 D) 105 E) 102

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) *	2) *	3) *	4) *	5) E	6) B	7) B	8) B	9) D	10) B
11) E	12) A	13) *	14) C	15) B	16) A	17) D	18) B	19) A	20) B
21) C	22) A	23) E	24) E	25) A	1) E	2) B	3) C	4) C	5) C
6) A	7) B	8) D	9) B	10) A	11) C	12) B	13) A	14) B	15) D
16) E	17) A	18) D	19) C						

RAZONAMIENTO INDUCTIVO-DEDUCTIVO

CAPITULOS 17-18

OBJETIVOS :

* *Estimular la capacidad de observación del lector, que le permita llegar a conclusiones.*

Desarrollar la capacidad de análisis para enfrentar situaciones de índole diversa.

* *Formular definiciones y llegar a generalizaciones que se descubren a través del razonamiento, investigación o experiencias personales.*

* *Dotar al estudiante de herramientas metodológicas adecuadas para la resolución de problemas que exigen el uso de pensamiento creativo.*

* *Ejercitar la capacidad de observación para establecer relaciones que permitan llegar a la solución de un problema empleando el razonamiento inductivo.*

INTRODUCCIÓN :

Un objetivo de todas las asignaturas educativas es el desarrollo del pensamiento, siendo las matemáticas uno de los baluartes para este propósito brindando un gran aporte, una base para esta actividad es el razonamiento inductivo. El análisis prevalece en la primera etapa de la vida escolar del niño y va siendo sustituido por la vía deductiva posteriormente sin embargo hay una relación estrecha e ineludible entre ambas, todo análisis inductivo correcto tiene como propósito llegar a una deducción que tenga una validez general.

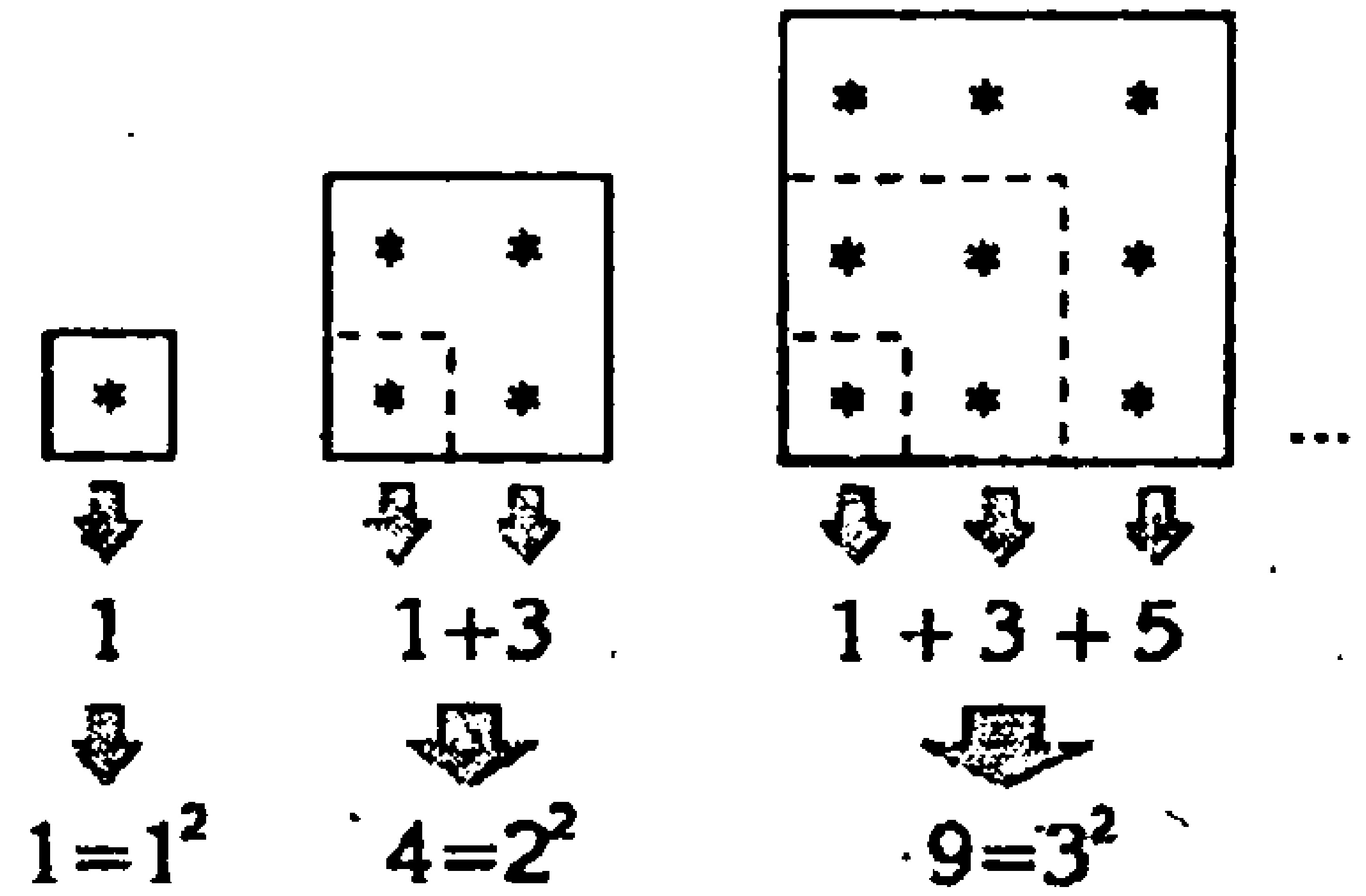
De la observación de situaciones particulares se elabora una hipótesis (razonamiento inductivo), y después se pasa a la comprobación de dicha hipótesis mediante una verificación lógica (razonamiento deductivo).

Por ejemplo, para establecer la siguiente fórmula

$$\underbrace{1+3+5+7\ldots}_{n\ sumandos}=n^2$$

Se partió por analizar para ciertos valores de n (inducción), hasta llegar a una ley final - Fórmula (deducción)

Observemos la cantidad de asteriscos :



Que nos permite generalizar :

$$\underbrace{1+3+5+7\ldots}_{n\ sumandos}=n^2$$

Día a día nos enfrentamos a situaciones en las cuales debemos razonar inductivamente para poder resolverlos, ahora para razonar inductivamente se requiere de observación e imaginación. Las ventajas obtenidas de potenciar este capítulo de razonamiento compensará con creces el tiempo que le dediquemos.

INDUCCION

La palabra inducción proviene del latín *Inductio(**"in"**:* en y *"**ducere**":* conducir), que es la acción y efecto de inducir. Es definido como un modo de razonar que consiste en sacar de los hechos particulares una conclusión general; así, la inducción desempeña un gran papel en las ciencias experimentales.

El ***Razonamiento inductivo*** es una modalidad del **razonamiento no deductivo** que consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares. Por ejemplo, de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole se establece una conclusión para todos los objetos o eventos de dicha naturaleza.

Premisas:

* He observado el cuervo número ***1*** y era de color negro.
* El cuervo número ***2*** también era negro.
* El cuervo número ***3*** también (y así sucesivamente hasta ***1000*** cuervos).

Conclusión:

* Por lo tanto, todos los cuervos son negros.

En este razonamiento se generaliza para todos los elementos de un conjunto la propiedad observada en un **número finito** de casos. Ahora bien, la verdad de las premisas (*1000* observaciones favorables) no convierte en verdadera la conclusión, ya que en cualquier momento podría aparecer una excepción. De ahí que la conclusión de un razonamiento inductivo sólo pueda considerarse probable y, de hecho, la información que obtenemos por medio de esta modalidad de razonamiento es siempre una información incierta y discutible. El razonamiento sólo es una síntesis incompleta de todas las premisas.

En un razonamiento inductivo válido, por tanto, es posible afirmar las premisas y, simultáneamente, negar la conclusión sin contradecirse. Acertar en la conclusión será una cuestión de probabilidades.

Dentro del razonamiento inductivo existen dos tipos de razonamiento inductivo:

Completo : se acerca a una razonamiento deductivo por que la conclusión no aporta más información que la ya dada por las premisas. Por ejemplo:

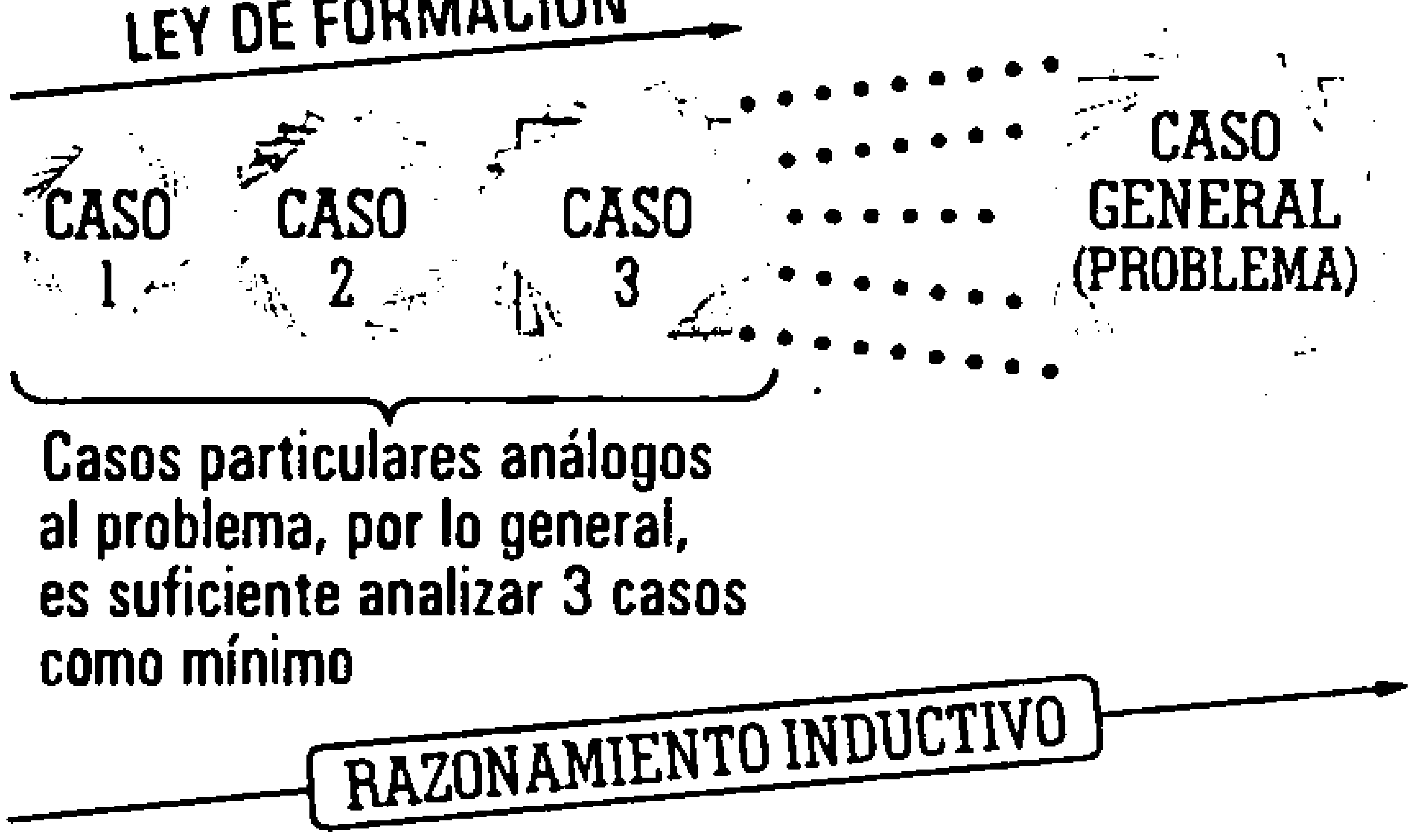
Bruno y Pia tienen cuatro hijos, María, Juan, Pedro, y Jorge. Maria es rubia. Juan es rubio, Pedro es rubio, Jorge es rubio, por lo tanto todos los hijos de Bruno y Pia son rubios.

Incompleto : la conclusión va más allá de los datos que dan las premisas. A mayor datos mayor probabilidad. La verdad de las premisas no garantiza la verdad de la conclusión. Ejemplo:

Maria es rubia. Juan es rubio, Pedro es rubio, Jorge es rubio, por lo que todas las pérsonas son rubias.

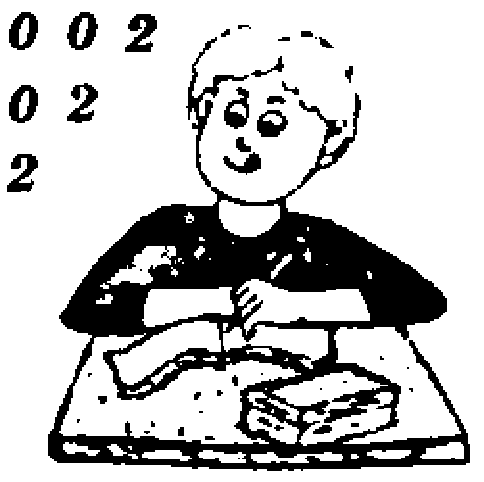
RAZONAMIENTO INDUCTIVO

El *razonamiento inductivo* consiste en el análisis de casos particulares, tratando de encontrar una ley de formación (que puede ser una secuencia) y de esa manera descubrir una formación recurrente, que lo aplicaremos a un caso general.



$33333333333333334^2=$

```
                  3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4 ×
                  3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 4
                1 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 6
              1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
            1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
          1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
        1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
      1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
    1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
   .                             .
  .                             .
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 6
```



¡Muy laborioso!

La abundancia y variedad de problemas que se han presentado hasta el momento, por lo general se han resuelto de manera directa, usando los datos y las relaciones que se dan en cada problema. En muchos casos la respuesta llega después de laboriosas y variadas operaciones, que son inevitables.

Pero hay también otros problemas donde la solución es todavía más laboriosa, por la cantidad de operaciones reiterativas que se deben hacer. En estos casos la matemática cuenta con una poderosa herramienta: la inducción, que consiste en observar casos iniciales, menores y particulares para luego de una "brillante adivinación" se pueda generalizar y presentar una "ley o fórmula" que sirva para los casos mayores. Hasta aquí es el alcance de la idea de inducción.

En realidad, la ***"inducción matemática"*** va mas allá y demuestra la "ley o fórmula" mediante rigurosos pasos y usando en algunos casos mucha álgebra.

EJEMPLO 1 :

Determinar la suma de cifras del resultado de :

$$(11111111)^2$$

A)8 ***B) 64*** ***C) 7*** ***D) 88*** ***E) 81***

RESOLUCIÓN :

*Elevar el número al cuadrado resulta muy operativo y tedioso, pero nos damos cuenta también que la base tienen cierta formación (la cifra *1* se repite), entonces analizamos casos más simples análogos a lo pedido :

Caso 1 $\rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow 1 = (1^2)$

Caso 2 $\rightarrow 11^2 = 121 \rightarrow 4 = (2^2)$

Caso 2 $\rightarrow 11^2 = 121 \rightarrow 9 = (3^2)$

Primeros cuadrados perfectos

*Entonces lo pedido será $8^2=64$, puesto que son *8* unos .

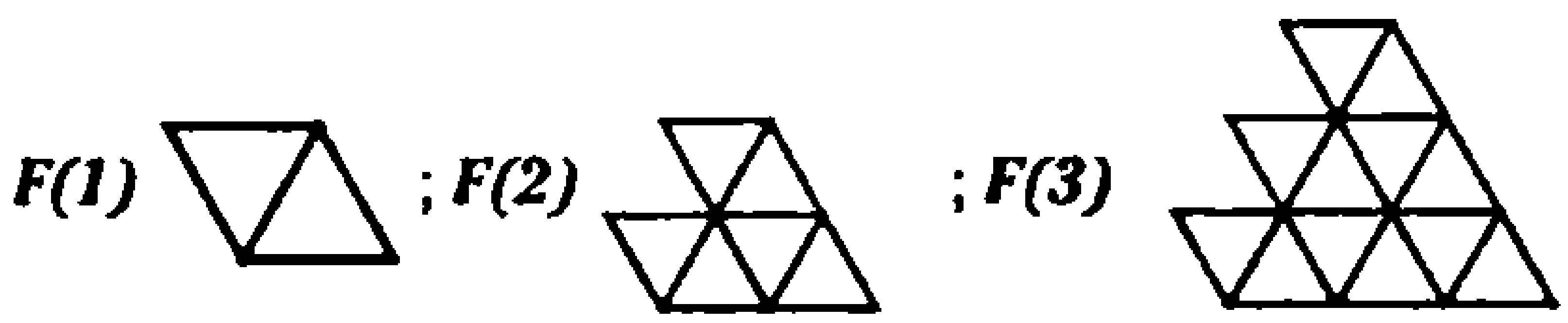
RPTA : "B"

POTENCIA CURIOSA

$1^2=1$
$11^2=121$
$111^2=12321$
$1111^2=1234321$
$11111^2=123454321$
$111111^2=12345654321$
$1111111^2=1234567654321$
$11111111^2=123456787654321$
$111111111^2=12345678987654321$

EJEMPLO 2 :

Contabilizar el número de triángulos simples de *F(50)*:



A) 9000 B) 725 C) 2550 D) 930 E) 6230

RESOLUCIÓN :

Según lo que se observa podemos formar una idea de como será el gráfico que corresponde a *F(50)* ; pero dibujar el gráfico y contar los triángulos que hay en él sería una tarea demasiado tediosa , entonces analicemos los casos presentes :

NÚMERO DE TRIÁNGULOS SIMPLES

$F(1) \longrightarrow 2 = (1) \times 2$

$F(2) \longrightarrow 6 = (2) \times 3$

$F(3) \longrightarrow 12 = (3) \times 4$

⋮

$\rightarrow F(50) \longrightarrow 50 = (50) \times 51 = 2550$

RPTA : "C"

EJEMPLO 3 :

Determinar el resultado de:

$5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5$

RESOLUCIÓN :

Observar :

1 "cinco": $5 = 5$
2 "cincos": $5 - 5 = 0$
3 "cincos": $5 - 5 + 5 = 5$
4 "cincos": $5 - 5 + 5 - 5 = 0$

Conclusión:

Cuando es un número par de "cincos" el resultado es cero *(0)* y cuando es un número impar de "cincos" el resultado es cinco *(5)*.

Luego :

$$\underbrace{5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5-5+5}_{15\ cincos}=5$$

EJEMPLO 4 :

Hallar el resultado de: $E = (1111111)^2$

RESOLUCIÓN :

Observar:

$1^2=1$

$11^2=$
```
   11×
   11
   --
   11
  11
  ---
  121
```

$111^2=$
```
   111×
   111
   ---
   111
  111
 111
 -----
 12321
```

$1111^2=$
```
    1111×
    1111
    ----
    1111
   1111
  1111
 1111
 -------
 1234321
```

Conclusión:

El resultado está formado por números consecutivos en orden ascendente, desde el *1* hasta la cantidad de "unos" y luego en orden descendente.

Luego: $(\underbrace{1111111}_{siete\ unos})^2 = 1234567654321$

EJEMPLO 5 :

Hallar el resultado de: $E = 333333333333334^2$

RESOLUCIÓN :

Observar:

$4^2=16$

$34^2=$
```
   34×
   34
   ---
  136
 102
 ----
 1156
```

$334^2=$
```
    334×
    334
   ----
   1336
  1002
 1002
 ------
 111556
```

$3334^2=$
```
     3334×
     3334
    -----
    13336
   10002
  10002
 10002
 --------
 11115556
```

Conclusión:

El resultado está formado por tantos "unos" como cifras tiene el número, seguido de tantos "cincos" como la cantidad de cifras menos *1*, terminando siempre en *6*.

Luego:

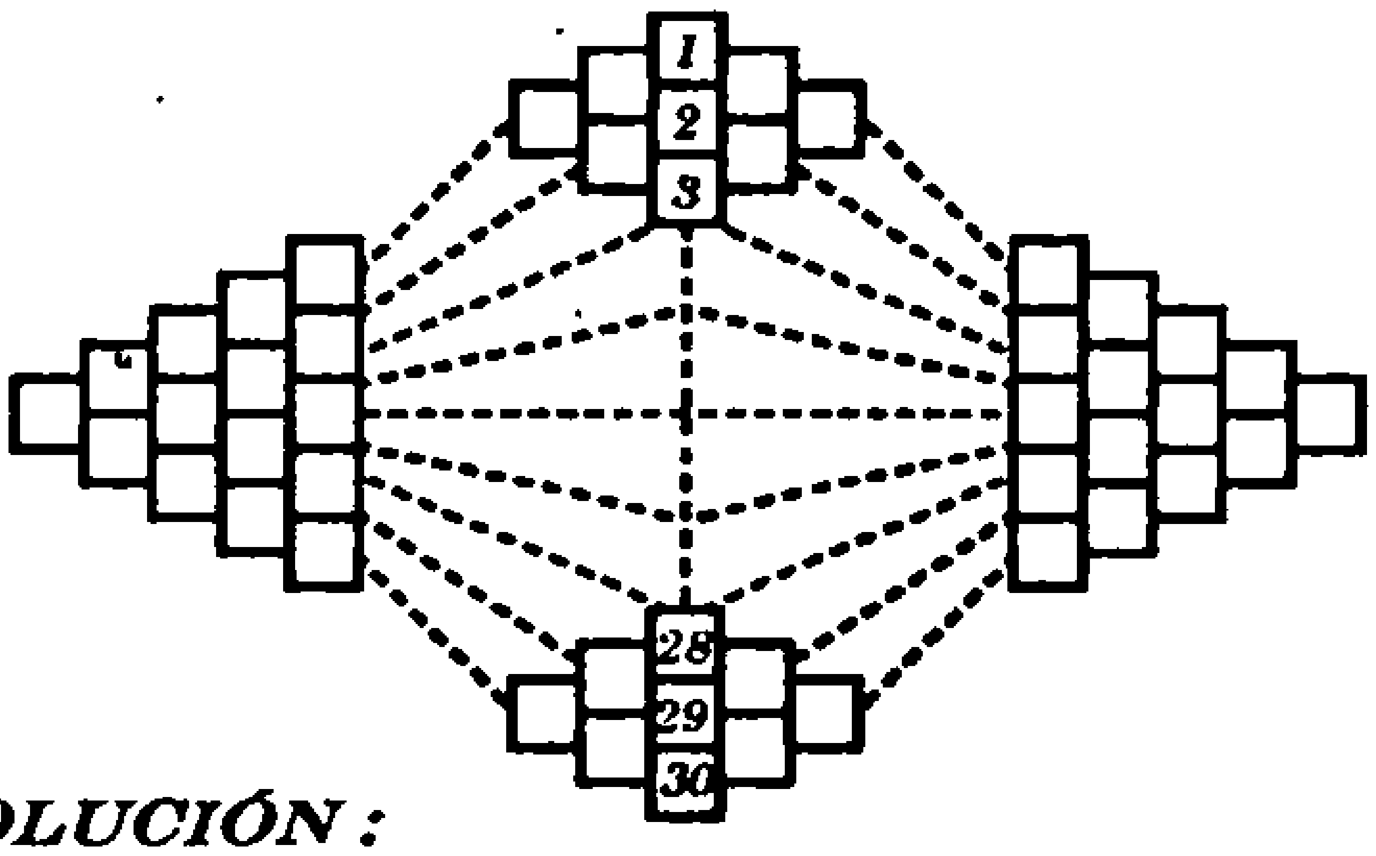
$$\underbrace{333333333333334}_{15\ Cifras}{}^2$$

$$= 111111111111111555555555555556$$

EJERCICIO 6 :

¿Cuántos ladrillos hay en total?

A) *300*
B) *410*
C) *720*
D) *800*
E) *900*

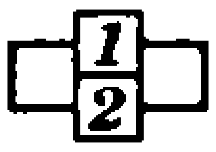


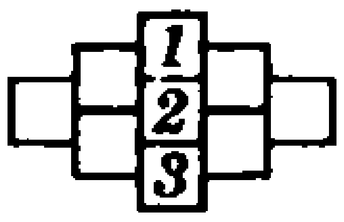
RESOLUCIÓN :

*Aparentemente lo pedido se resume al hecho de contar uno por uno , sin embargo resultará como Ud . ya se habrá dado cuenta demasiado laborioso , entonces para abreviar podemos poner en práctica procedimientos simples y entendibles como la de analizar casos particulares y encontrar una ley de formación :

números de ladrillos

Caso 1 → [1] → $1 = 1^2$

Caso 2 →  → $4 = 2^2$

Caso 3 →  → $9 = 3^2$

"Primeros cuadrados perfectos"

* Observamos que el valor de cada resultado es de la forma "n^2", donde "n" es la cantidad de ladrillos de la columna central , luego la expresión a calcular será: $30^2 = 900$ ***ladrillos***

RPTA : "E"

EJEMPLO 7 :

Calcular: $E = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... + n$

RESOLUCIÓN :

Un término $\Rightarrow \; 1 = \dfrac{1 \times 2}{2}$

2 términos $\Rightarrow \; 1 + 2 = 3 = \dfrac{2 \times 3}{2}$

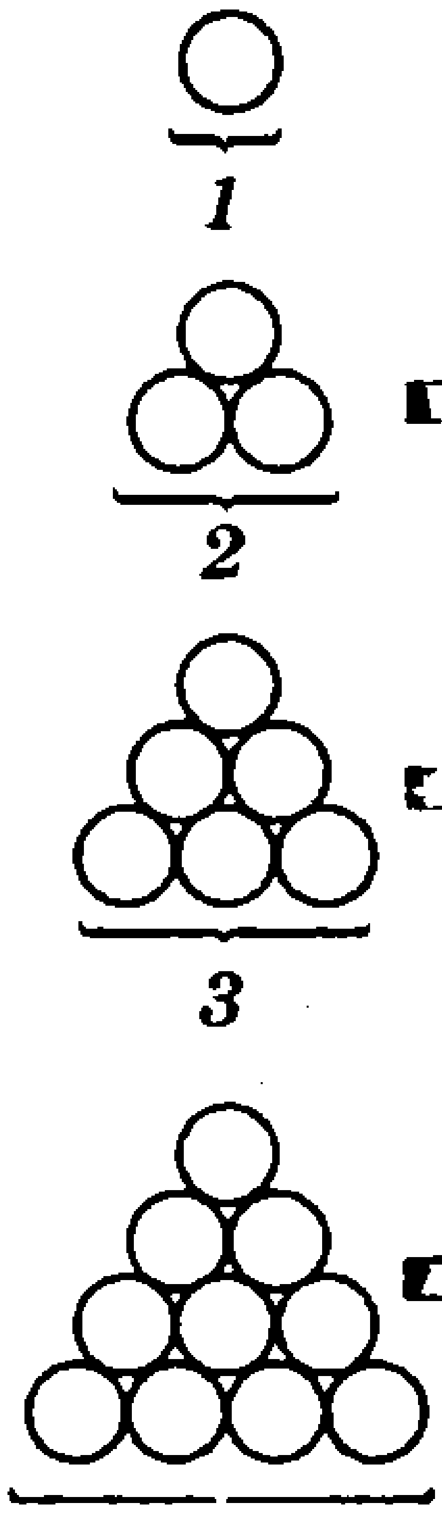
3 términos $\Rightarrow \; 1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3 \times 4}{2}$

Entonces para sumar los "n" elementos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

LOS NÚMEROS TRIANGULARES

N.° de esferas



1.° $\; 1 = \dfrac{1(2)}{2}$

2.° $\; 3 = \dfrac{2(3)}{2}$

3.° $\; 6 = \dfrac{3(4)}{2}$

4.° $\; 10 = \dfrac{4(5)}{2}$

⋮

Formula general : $\dfrac{n(n+1)}{2}$

EJERCICIO 8 :

Indicar la suma de las cifras del resultado al efectuar la expresión siguiente : $(\underbrace{666 .... 666}_{\text{"100 cifras"}})^2$

A) *8000* ***B)*** *100* ***C)*** *600* ***D)*** *9000* ***E)*** *900*

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES SUMA DE CIFRAS

$\underbrace{6^2}_{\text{"1 cifra"}} = 36 \qquad 9 = 9 \times (1)$

$\underbrace{66^2}_{\text{"2 cifras"}} = 43961 \qquad 18 = 9 \times (2)$

$\underbrace{666^2}_{\text{"3 cifras"}} = 443556 \qquad 27 = 9 \times (3)$

* Luego nos piden efectuar : $9 \times 100 = 900$

RPTA: "E"

EJEMPLO 9 :

Calcular: $P = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1)}_{\text{"n" elementos}}$

RESOLUCIÓN:

Un término $\Rightarrow \; 1 = 1^2$

2 términos $\Rightarrow \; 1 + 3 = 4 = 2^2$

3 términos $\Rightarrow \; 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

Entonces, para sumar los "n" primeros elementos:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

EJEMPLO 10 :

Calcular: $E = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2n}_{\text{"n" elementos}}$

RESOLUCIÓN :

Un término $\Rightarrow\ 2 = 2 \times 1$

2 términos $\Rightarrow\ 2 + 4 = 6 = 2 \times 3$

3 términos $\Rightarrow\ 2 + 4 + 6 = 12 = 3 \times 4$

Entonces, para sumar los **"n"** primeros elementos:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$$

EJEMPLO 11 :

Calcular: $E = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2}_{\text{"n" elementos}}$

RESOLUCIÓN :

Un término $\Rightarrow\ 1^2 = 1 = \dfrac{1(1+1)[2(1)+1]}{6}$

2 términos $\Rightarrow\ 1^2 + 2^2 = 5 = \dfrac{2(2+1)[2(2)+1]}{6}$

3 términos $\Rightarrow\ 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \dfrac{3(3+1)[2(3)+1]}{6}$

Entonces, para sumar los **"n"** primeros términos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 12 :

¿En qué cifra termina el resultado de calcular:

$E = 4^{23} + 5^{46}$?

RESOLUCIÓN :

* Primero analizamos la potencia del **4**:

Si la potencia es 1: 4^1 termina en cifra ***4 (4)***

Si la potencia es 2: 4^2 termina en cifra ***6 (16)***

Si la potencia es 3: 4^3 termina en cifra ***4 (64)***

Si la potencia es 4: 4^4 termina en cifra ***6 (256)***

En general:

Si la potencia es impar termina en **4** y si es par termina en **6**

En el problema se tiene 4^{23}, al ser la potencia impar debe terminar en **4**.

* Ahora analizamos la potencia del **5** :

Si la potencia es 1: 5^1 termina en cifra ***5 (5)***

Si la potencia es 2: 5^2 termina en cifra ***5 (25)***

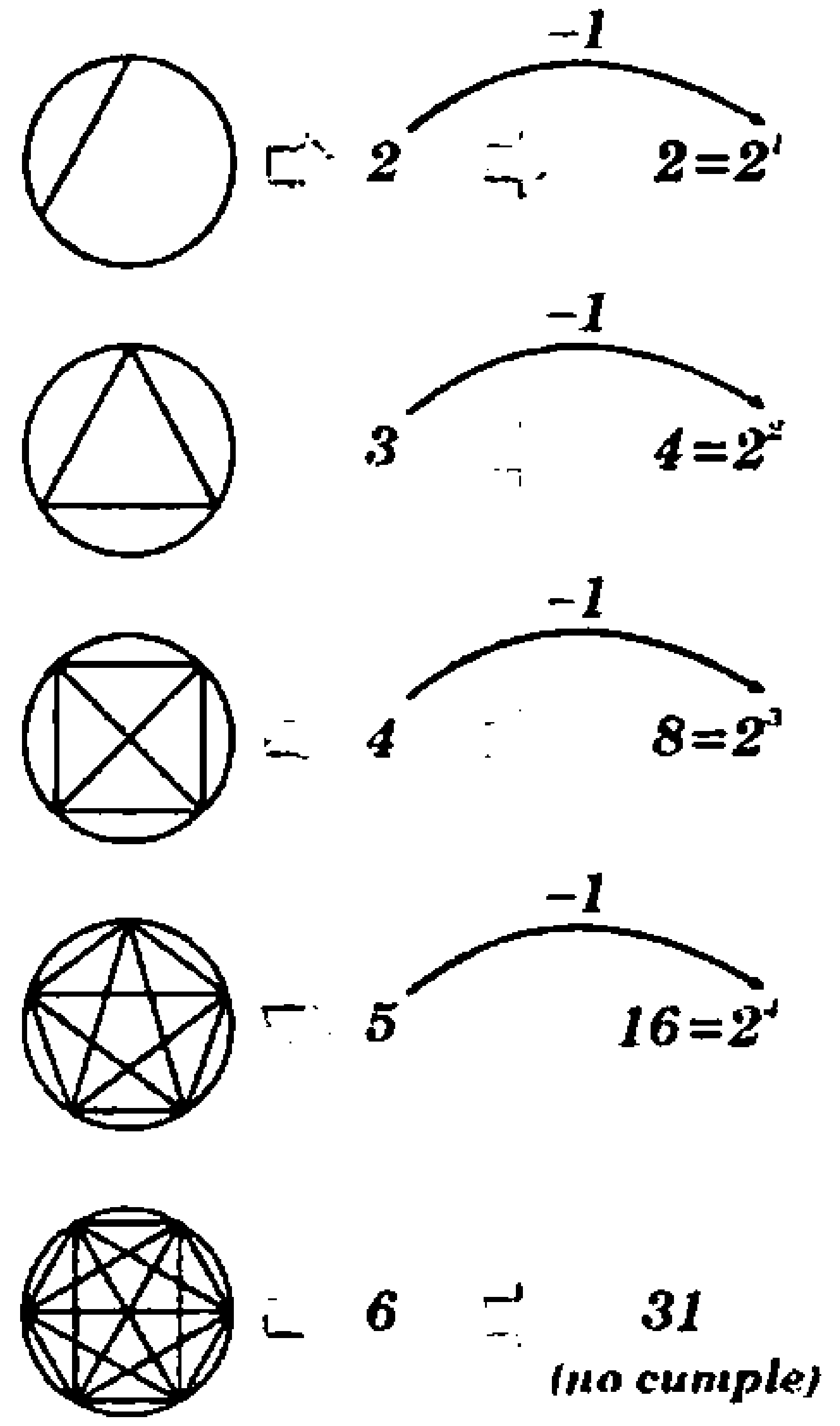
En general: Para cualquier potencia terminará en cifra ***5***

Por lo tanto: $E = 4^{23} + 5^{46} = ...4 + ...5 = ...9$ termina en cifra **9**.

FALSA INDUCCIÓN

EJEMPLO :

N.° de puntos *N.° de regiones simples*



DEDUCCION

Bueno amigo estudiante acompáñenos en esta hipotética situación : En nuestro viaje a la ciudad del Razonamiento nos detenemos a descansar en un pueblito muy pintoresco en cuya plaza principal hay una fuente que arroja agua cristalina. Estamos sentados a la sombra de un árbol cuando vemos a **2** personas acercarse a la Fuente y arrojar monedas en ella , una hora más tarde otras **4** personas se acercaron a la fuente y arrojaron monedas en ella ,una , hora después otras **6** personas hicieron lo mismo y así siguió ocurriendo durante **3** horas más , luego de lo cual tuvimos que partir .

¿Qué podemos pensar de este extraño comportamiento amigo estudiante?

Lo que hemos observado nos puede llevar o conducir (***INDUCIR***) a pensar que quizás todos los habitantes de dicho pueblo gustan de arrojar monedas a la fuente

El razonamiento empleado para llegar a esta coclusión se llama RAZONAMIENTO INDUCTIVO.

EL RAZONAMIENTO INDUCTIVO , es aquel proceso que a partir de la observación de experiencias con características similares (premisas particulares) podemos sacar una conclusión (premisa general) la cual es ***PROBABLE*** que sea cierta.

Veamos ahora lo siguiente :

$15^2 = 225$
$35^2 = 1225$
$75^2 = 5625$
$155^2 = 24025$
$205^2 = 42025$

* Se observan varios casos en los que números que terminan en *5* al ser elevados al cuadrado dan un resultado que termina en *25*. A partir de esto podemos llegar a la conclusión que todos los números que terminan en *5* al ser elevados al cuadrado tienen un resultado que termina en *25*.

$$(...5)^2 = ...25$$

Bien amigo estudiante , veamos ahora esta nueva situación: Nos encontramos en una conferencia conversando con Ángel. Los ponentes son : un abogado , un profesor y un médico . Entonces Ángel nos dice :

* De los tres ponentes , Bruno y Carlos beben whisky.
* El profesor es abstemio

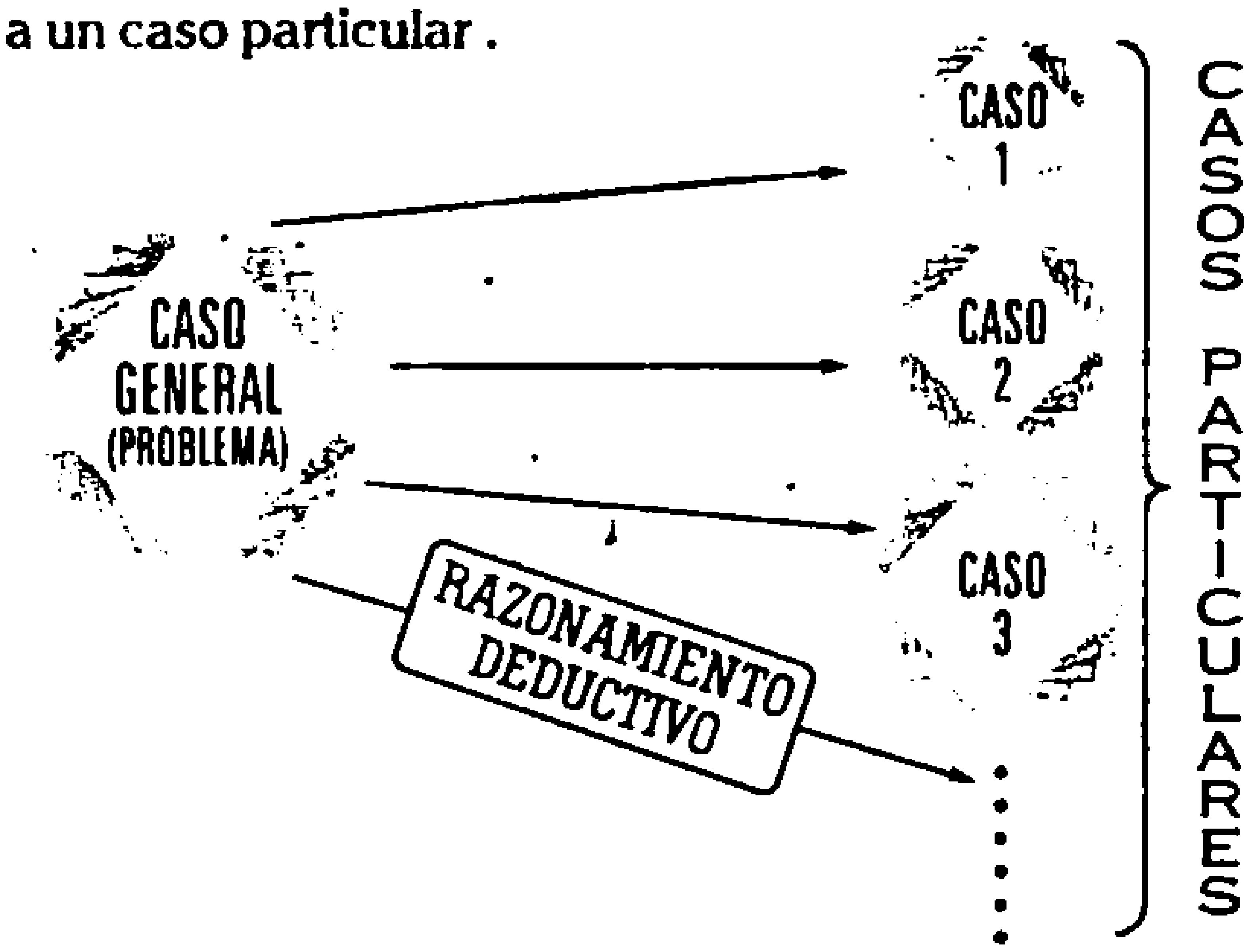
¿Que podemos concluir , amigo estudiante , acerca de estas dos informaciones?

Nuestra conclusión sería que el profesor no se llama ni Bruno ni Carlos.

El razonamiento empleado para llegar a esta conclusión se llama *RAZONAMIENTO DEDUCTIVO*.

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

El *RAZONAMIENTO DEDUCTIVO* , consiste en aplicar la ley de formación encontrada para casos generales, a un caso particular .



Es aquel proceso que a partir de una o más informaciones (premisas) se extrae una nueva información (conclusión) la cual es necesariamente cierta.

EJEMPLO 1 :

Calcular $(a + b)$ si :

$$\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + ... + \overline{7a} = \overline{bb6}$$

RESOLUCIÓN :

* Observando la primera cifra de cada número se deduce que son *7* sumandos.

$$\begin{array}{r} \overline{1a} + \\ \overline{2a} \\ \overline{3a} \\ \vdots \\ \overline{7a} \\ \hline \overline{bb6} \end{array}$$

* En el orden de las unidades :

$$\underbrace{a + a + a + ... + a}_{7\,veces} = ...6$$

$$7 \times a = ...6$$

* Se deduce que : $a=8$ $\;\; 7\times8=56$ *(pongo 6 llevo 5)*
* En el orden de docenas :

$$5 + 1 + 2 + 3 + ... + 7 = \overline{bb}$$

$$\Rightarrow 33 = \overline{bb} \Rightarrow b = 3$$

* Luego : $a + b = 8 + 3 = 11$

OBSERVACIÓN :

El Razonamiento Deductivo es una Aplicación de un experiencia general que se ha verificado que es verdadera , a una situación en particular.

EJEMPLO 2 :

Se sabe que : $1 + 2 + 3 \; ..... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Calcular : $1+2+3+..... +2006$

RESOLUCIÓN :

* Aplicaremos la fórmula para $n = 2006$:

$$1 + 2 + 3 + ...+ 2006 = \frac{2006 \times 2007}{2} = 2013021$$

OJO :

Es bueno que consideremos las siguientes sucesiones con sus respectivas leyes de formación :

SUCESIONES NOTABLES	LEY DE FORMACIÓN GENERAL
$\underbrace{1 ; 2 ; 3 ; ..... ; n}$ Primeros Naturales	n
$\underbrace{2 ; 4 ; 6 ; ..... ; 2n}$ Primeros Pares	$2n$
$\underbrace{1 ; 3 ; 5 ; ..... ; (2n-1)}$ Primeros Impares	$2n-1$
$\underbrace{1 ; 4 ; 9 ; ..... ; n^2}$ Primeros Cuadrados	n^2
$\underbrace{1 ; 8 ; 27 ; ..... ; n^3}$ Primeros Cubos	n^3
$\underbrace{2 ; 4 ; 8 ; 16 ; ..... ; 2^n}$ Primeras Potencias de 2	2^n
$1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ..... ; 2^{n-1}$	2^{n-1}
$1 ; 3 ; 7 ; 15 ; ..... ; 2^n - 1$	$2^n - 1$
$\underbrace{2 ; 6 ; 12 ; ..... ; n(n+1)}$ Primeros Productos Binarios	$n(n+1)$
¡Importante! $1 ; 3 ; 6 ; ....$ $\downarrow$ $\underbrace{\frac{1\times2}{2} \quad \frac{2\times3}{2} \quad \frac{3\times4}{2} \quad ..... \quad \frac{n(n+1)}{2}}$ Primeros Números Triangulares	$\frac{n(n+1)}{2}$

Cada término de una sucesión está íntimamente relacionado con el orden que ocupa , entonces , en muchas situaciones , se encontrará la ley de formación en base al número ordinal .

EJEMPLO 3 :

Indicar la ley de formación para la siguiente sucesión:

$$\underbrace{3 ; 7}_{+4} ; \underbrace{\;\; ; 11}_{+4} ; ....$$

Se trata de una progresión aritmética de razón 4.

MÉTODO PRÁCTICO :

Se multiplica a cada ordinal por la razón y se debe forzar a que resulte respectivo término en la sucesión, ya sea sumando o restándole una cantidad a deducir:

Ordinal :

	1°	2°	3°	.... n°
	×4 ↓	×4 ↓	×4 ↓	×4 ↓
Se deduce →	−1	−1	−1	−1
Término	3 ;	7 ;	11	$\underbrace{4n-1}$ *Ley de formación o enésimo*

Al multiplicar al ***1*** (primer ordinal) por ***4*** debemos forzarlo a que resulte ***3***, por eso es que le restamos ***1***.

EJEMPLO 4 :

Indicar la ley de formación en: ***6 ; 9 ; 14 ; 21 ; .....***

RESOLUCIÓN :

$$6 \; ; \; 9 \; ; \; 14 \; ; \; 21 \; ; \; ....$$

$$+3 \quad +5 \quad +7$$

$$+2 \quad +2$$

Se trata de una sucesión de 2do. orden ó cuadrática

MÉTODO PRÁCTICO :

Se eleva al Cuadrado cada ordinal y se debe forzar a que resulte su respectivo término en la sucesión .

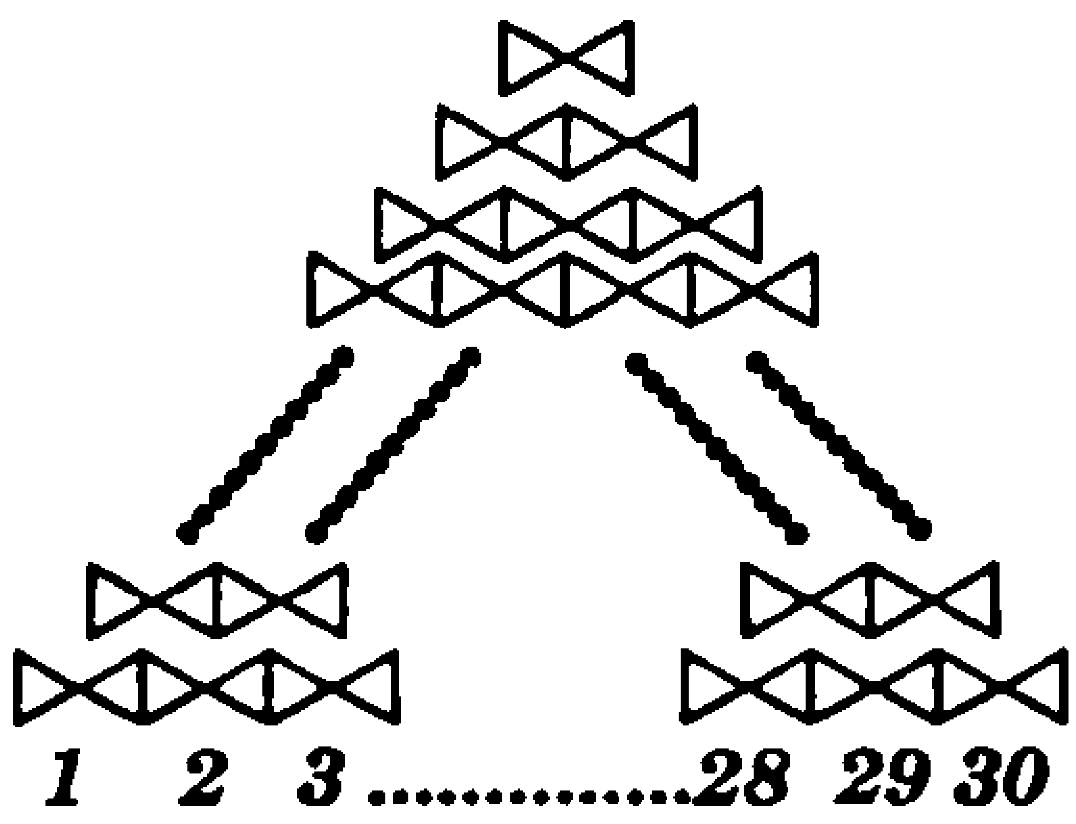
Ordinal :

	1°	2°	3°	.... n°
	$(\;)^2$ ↓	$(\;)^2$ ↓	$(\;)^2$ ↓	$(\;)^2$ ↓
Se deduce →	+5	+5	+5	+5
Término	6 ;	9 ;	14 ;........;	$\underbrace{n^2+5}$ *Ley de formación*

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

La Siguiente torre se ha construido con triángulos. ¿cuántos se han utilizado en total?



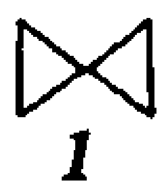
A)990 ***B)900*** ***C)930*** ***D)560*** ***E)630***

RESOLUCIÓN :

¿Qué hacemos para resolver el problema? la torre tiene demasiados niveles , realizar el conteo directo resultaría demasiado tedioso.

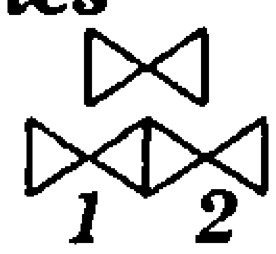
* Razonemos , si la torre tuviera menos niveles *(1 ó 2 ó 3* solamente) sería fácil contar cuantos triángulos hay . Entonces analicemos algunos casos particulares

Para 1 nivel



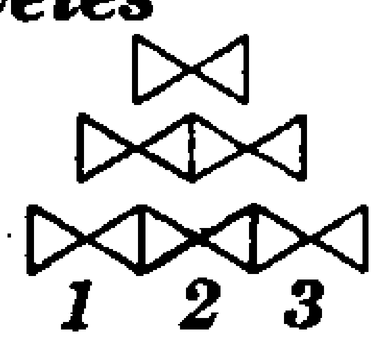
2 triángulos

Para 2 niveles



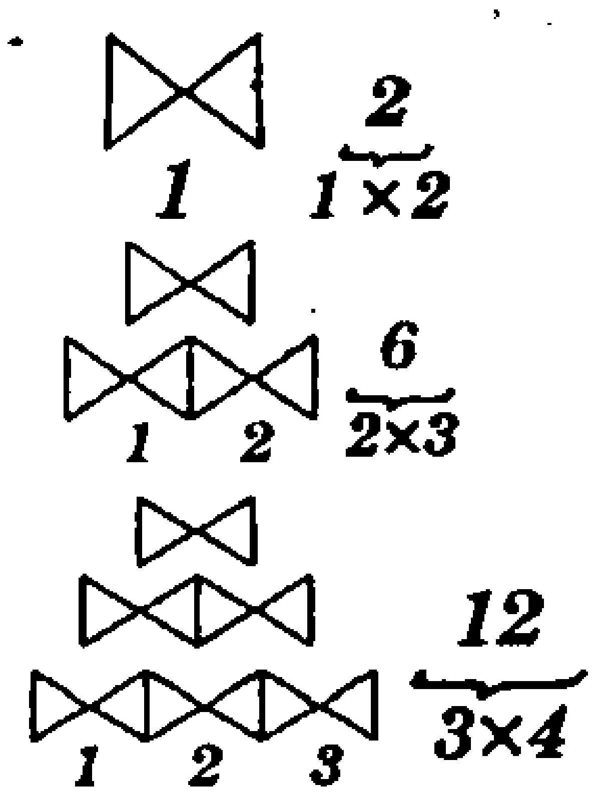
6 triángulos

Para 3 niveles

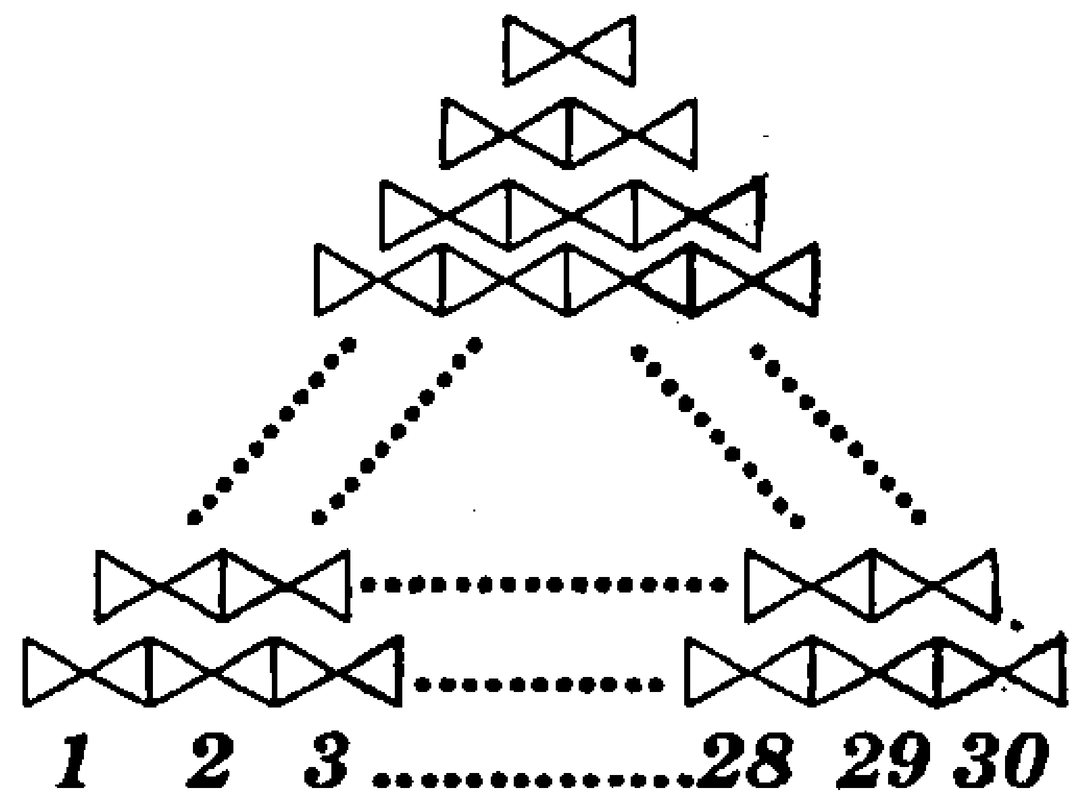


12 triángulos

* Observando los resultados obtenidos hagamos lo siguiente :



* Lo que se aprecia es que en cada caso analizado el número de triángulos es igual al producto de ***2*** números consecutivos , donde el primer factor es igual al mayor número que aparece la parte inferior de la torre. De acuerdo a esto podemos llegar a la conclusión de que para una torre con más niveles el número de triángulos debe tener la misma forma compruébelo analizando para ***4*** niveles ó ***5*** niveles . Por lo tanto para toda la figura será :

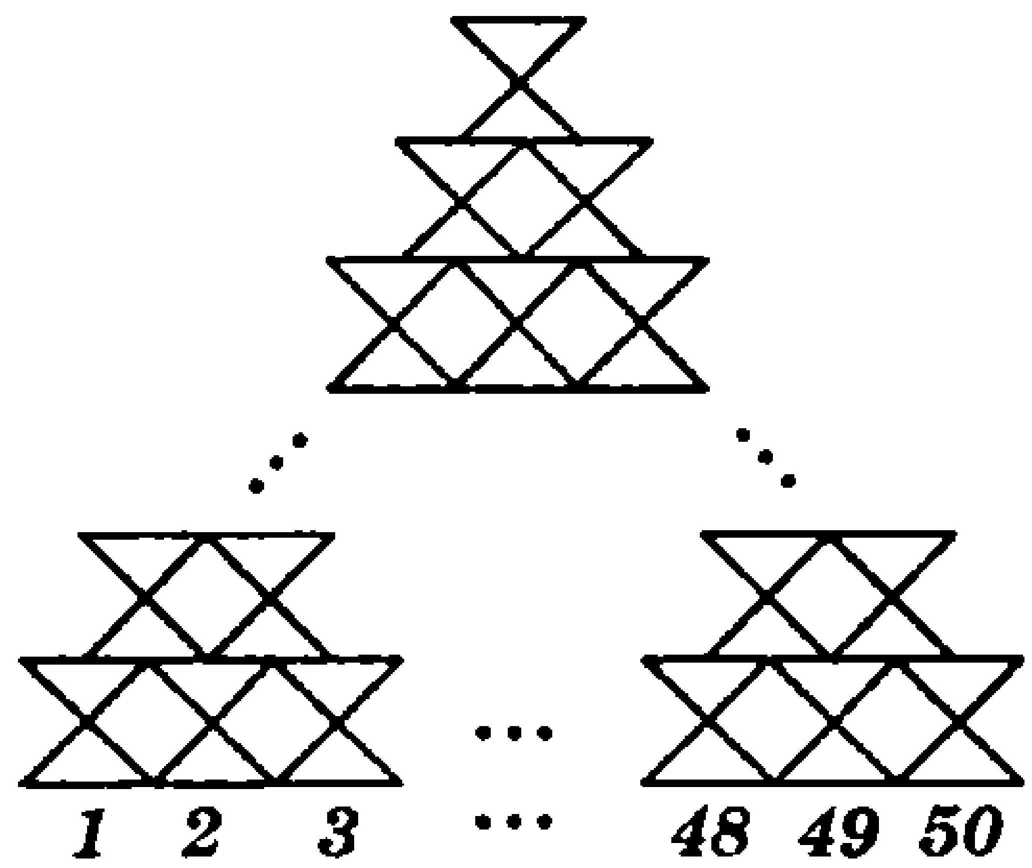


$30\times31 = 930$ triángulos

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

En el siguiente gráfico, ¿cuántos triángulos se cuentan en total?

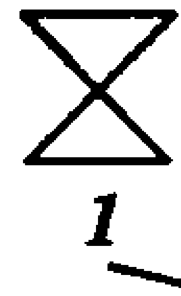


A) 2500 ***B) 5000*** ***C) 6250*** ***D) 3125*** ***E) 4900***

RESOLUCIÓN :

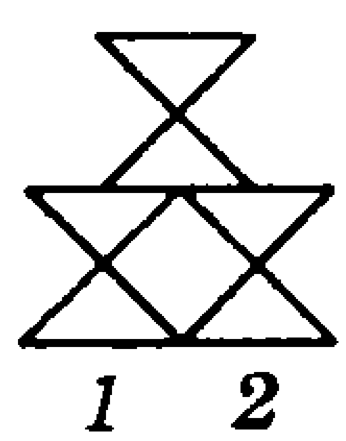
En el arreglo mostrado se puede notar una figura base que genera su construcción. A partir de ello, analizaremos los siguientes casos particulares:

Caso 1 :



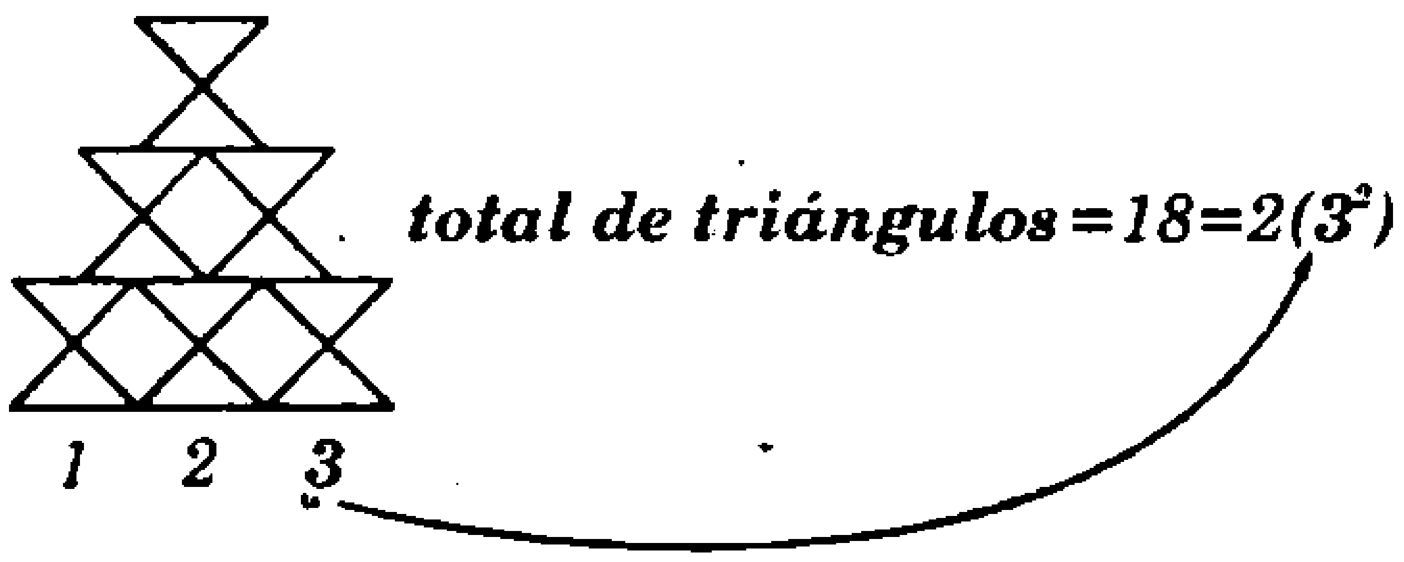
total de triángulos $=2=2(1^2)$

Caso 2 :



total de triángulos $=8=2(2^2)$

Caso 3 :



Luego, en el gráfico tenemos

$\Rightarrow$ Total de triángulos $=2(50^2)=5000$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular el valor de "*E*" y dar como respuesta la suma de sus cifras :

$$E=(\underbrace{333...334}_{101\,cifras})^2$$

A) 256 **B)** 600 **C)** 623 **D)** 607 **E)** 495

RESOLUCIÓN :

Elevar el número al cuadrado resulta muy operativo y tedioso pero nos damos cuenta también que la base tiene cierta formación (la cifra *3* se repite constantemente); entonces recurrimos a la inducción, analizando los casos simples, análogos al de la expresión "*E*".

$(34)^2=1156$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $=13 \Rightarrow 6(2)+1$

$(334)^2=111556$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $=19 \Rightarrow 6(3)+1$

$(3334)^2=11115556$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $=25 \Rightarrow 6(4)+1$

...

$(333...3334)^2=111...1155...556$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $=6(101)+1=607$

$\Rightarrow$ Suma de cifras $=607$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Según la siguiente distribución, ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra *"RUBIÑOS"*?

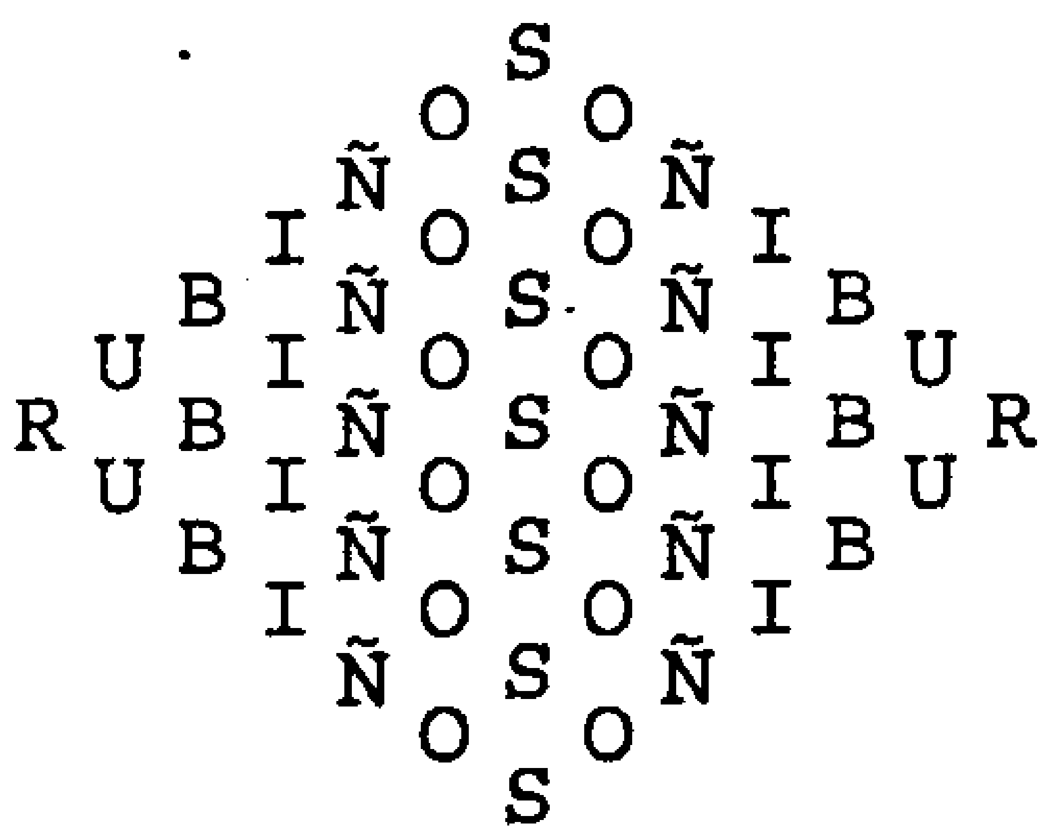
A) 64

B) 125

C) 625

D) 256

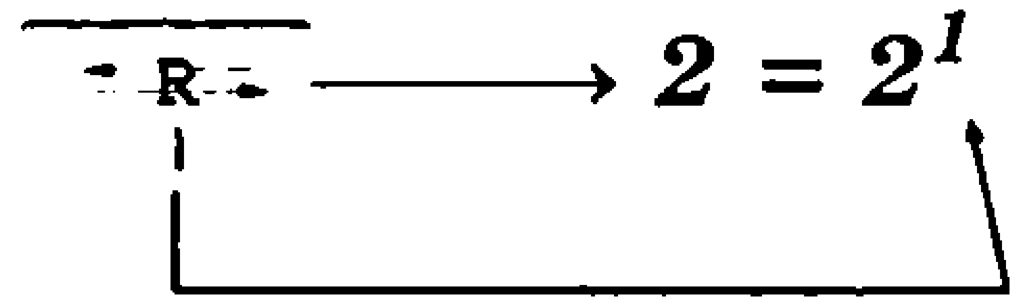
E) 128



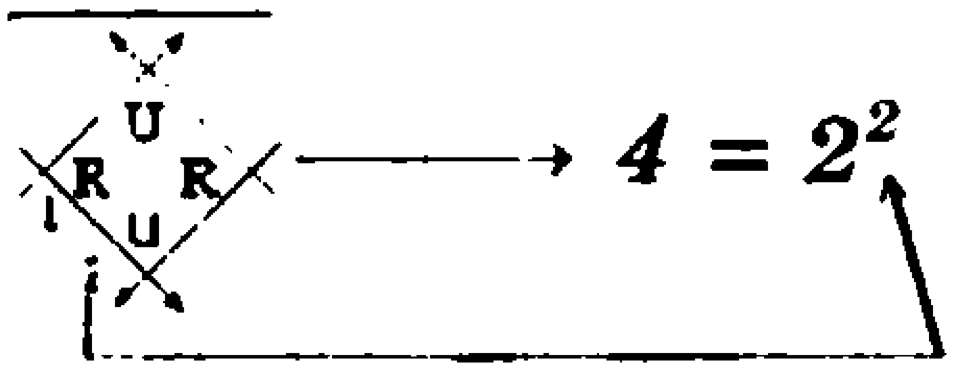
RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **NÚMERO DE MANERAS DIFERENTE DE LEER**

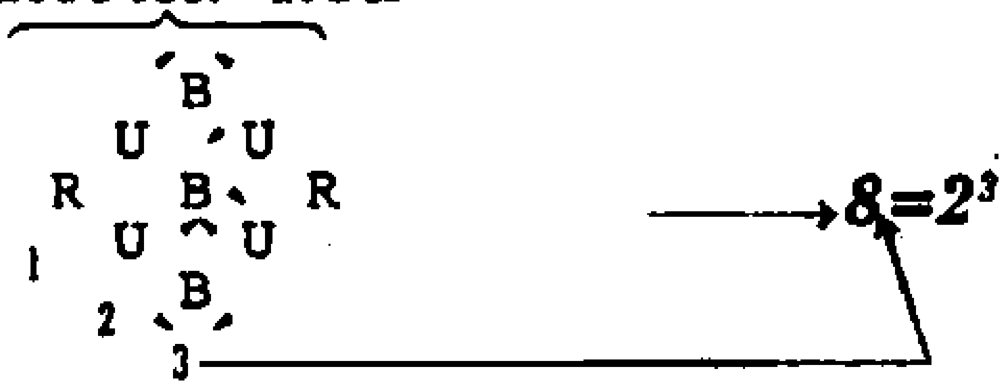
Se debe leer "R"



Se debe leer "RU"



Se debe leer "RUB"



* Luego como la palabra "*RUBIÑOS*", esta compuesta de *7* letras , entonces el número de maneras diferentes de leer "*RUBIÑOS*", será : $2^7=128$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

¿Cuántas palabras "*ALGEBRA*", se pueden leer en total , uniendo letras vecinas?

A
L L
G G G
E E E E
B B B B B
R R R R R R
A A A A A A A

A) 63

B) 64

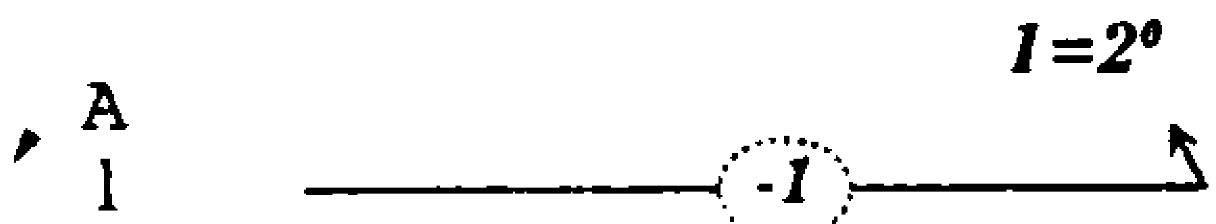
C) 127

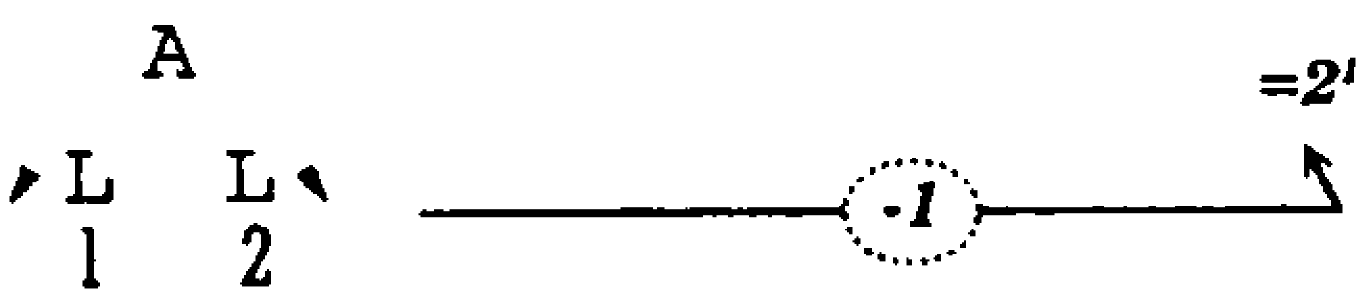
D) 128

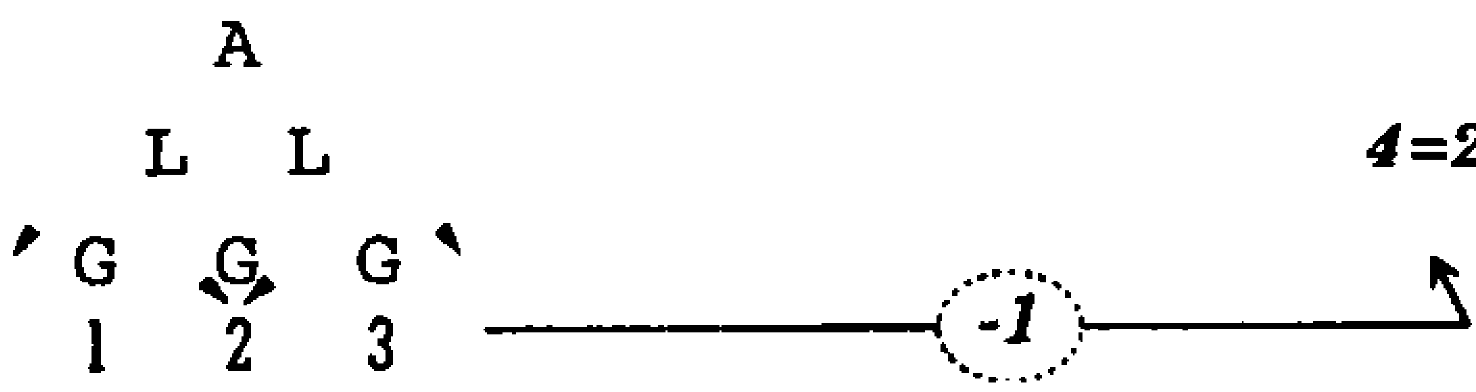
E) 255

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE PALABRAS**







* Como "*ALGEBRA*" tiene *7* letras , entonces la expresión pedida será :

$2^{7-1}=2^6=64$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra "*EXITOS*"?

E
E X E
E X I X E
E X I T I X E
E X I T O T I X E
E X I T O S O T I X E

A) 36 B) 49 C) 63 D) 64 E) 128

RESOLUCIÓN :

• Apliquemos la inducción:

• *1* fila: $E \to 1$ palabra $(E) = 2^1 - 1$

• *2* filas : E / E X E $\to 3$ palabras $(EX) = 2^2 - 1$

• *3* filas : E / E X E / E X I X E $\to 7$ palabras $(EXI) = 2^3 - 1$

$\Rightarrow$ para *6* filas (*EXITOS*) $\Rightarrow 2^6 - 1 = 63$

RPTA : "C"

OBSERVACIÓN :

Para poder deteminar de cuántas maneras podemos leer cierta palabra en arreglos de la forma:

Forma 1 :

C
A A
S S S
I I I I
N N N N N
O O O O O O

$$\text{N.° total de maneras} = 2^{N-1}$$

N: cantidad de letras que conforman la palabra.

En este caso, para la palabra *CASINO*,

$$N=6 \Rightarrow \text{N.° total de maneras} = 2^{6-1} = 32$$

Forma 2 :

C
A A A
S S S S S
I I I I I I I
N N N N N N N N N
O O O O O O O O O O O

$$\text{N.° total de maneras} = 3^{N-1}$$

N: cantidad de letras que conforman la palabra .

Para *CASINO*, $N=6$, entonces

$$\text{N.° total de maneras} = 3^{6-1} = 243$$

PROBLEMA 7 :

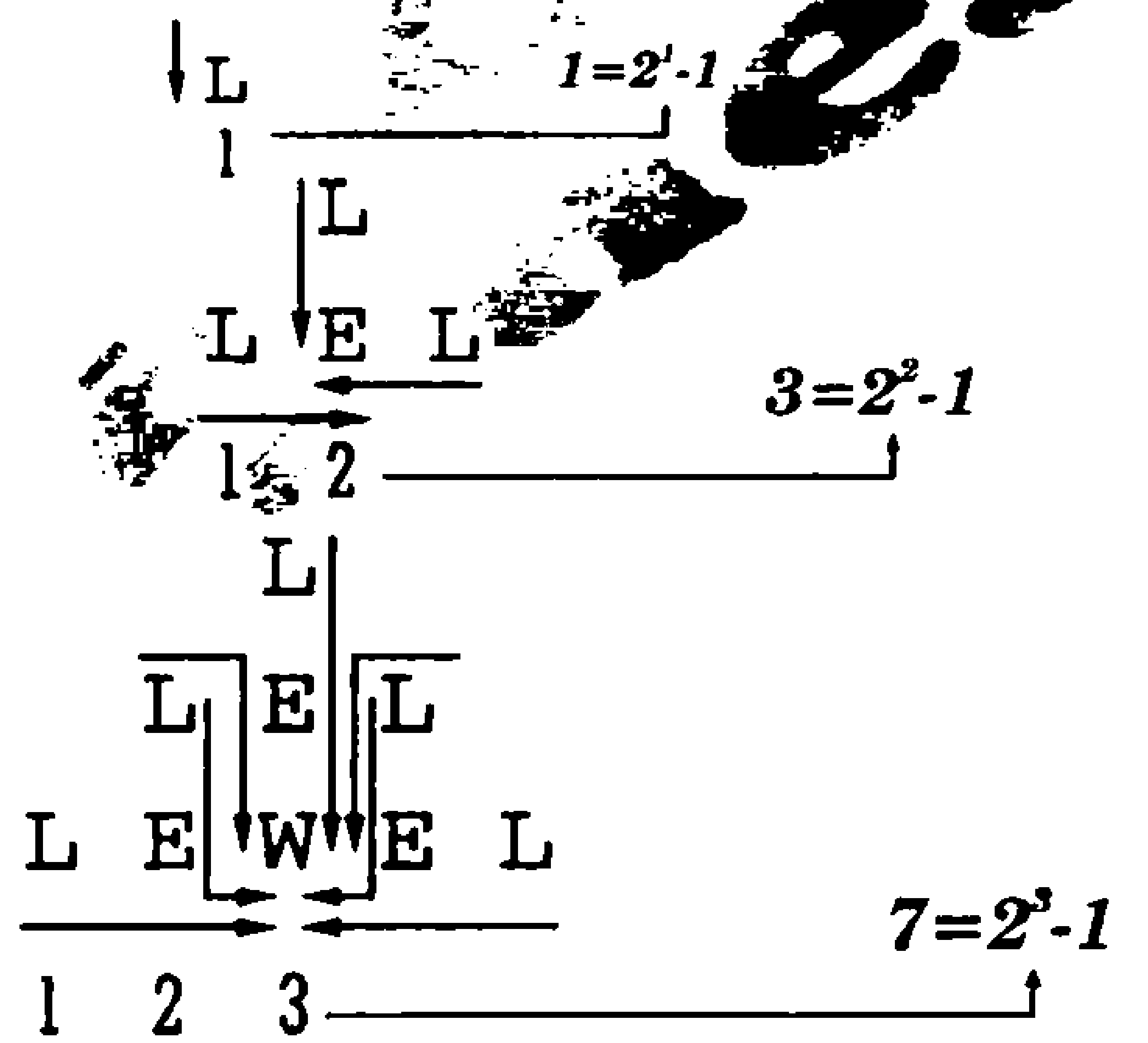
¿De cuántas maneras distintas se puede leer la palabra "*LEWIS*" en el siguiente arreglo?

L
L E L
L E W E L
L E W I W E L
L E W I S I W E L

A) 63
B) 31
C) 256
D) 128
E) 64

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE MANERAS



* Como "*LEWIS*", contiene *5* letras , luego lo pedido será : $2^5 - 1 = 31$

RPTA : "B"

MÉTODO ENUMERATIVO – ADITIVO

Veamos la resolución de problema anterior utilizaremos un método enumerativo (y a la vez aditivo) :

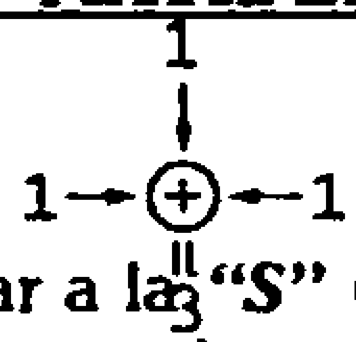
1
1 3 1
1 2 7 2 1
1 2 4 15 4 2 1
1 2 4 8 (31) 8 4 2 1

(31) → *Lo pedido*

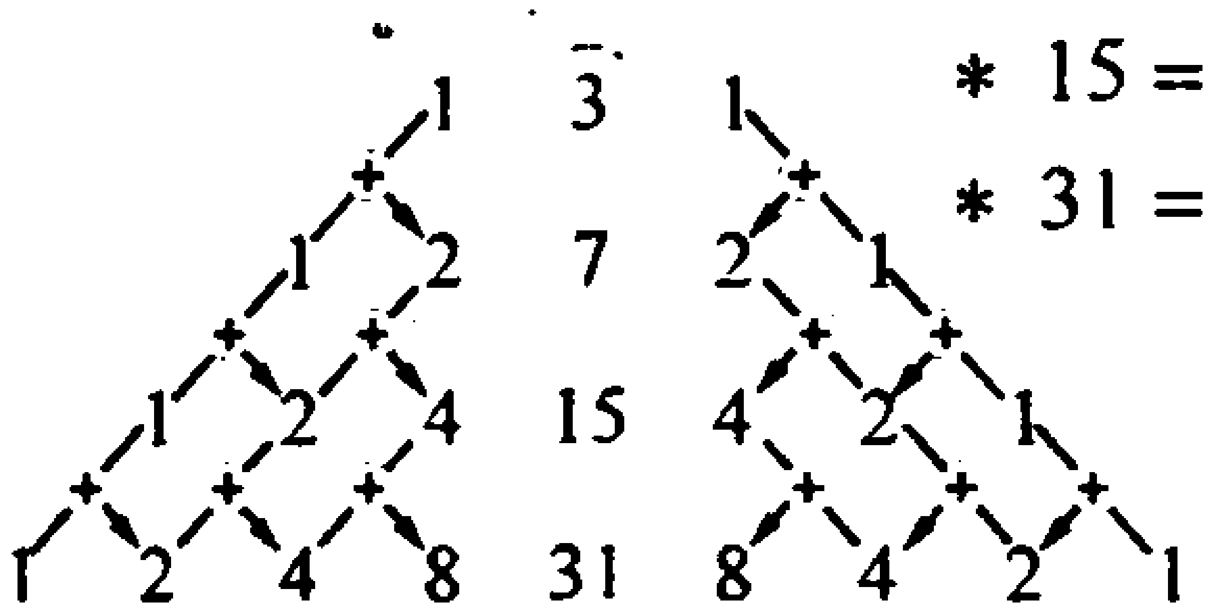
EXPLICACIÓN:

* Para leer cada una de las "*L*", hay *1* manera.

* Para llegar a la "*E*" superior hay *3* maneras (contando por simple inspección) , que se puede obtener sumando los *1* que estén sobre la "*E*".



* El objetivo es llegar a la "*S*" (con la intención de leer la palabra "*LEWIS*"), los pasos aditivos se muestra en :



* $7 = 2 + 3 + 2$
* $15 = 4 + 7 + 4$
* $31 = 8 + 15 + 8$

PROBLEMA 8 :

¿Cuántas palabras "*RAZONAS*" se pueden leer en total uniendo letras vecinas :

R R R R R R R
A A A A A A
R Z Z Z Z Z R
A O O O O A
R Z N N N Z R
A O A A O A
R Z N S N Z R
A O A A O A
R Z N N N Z R
A O O O O A
R Z Z Z Z Z R
A A A A A A
R R R R R R R

A) 256
B) 1024
C) 228
D) 252
E) 729

RESOLUCIÓN :

* Utilizaremos el método enumerativo que expresamos en el problema anterior

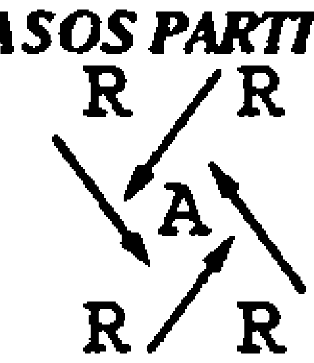
1 1 1 1 1 1 1
3 2 2 2 2 3
1 7 4 4 4 7 1
2 15 8 8 15 2
1 4 31 16 31 4 1
2 8 63 63 8 2
1 4 16 252 16 4 1
2 8 63 63 8 2
1 4 31 16 31 4 1
2 15 8 8 15 2
1 7 4 4 4 7 1
3 2 2 2 2 3
1 1 1 1 1 1 1

* La intención es llegar a la "*S*", partiendo de la "*R*", que se puede llegar de *252* maneras .

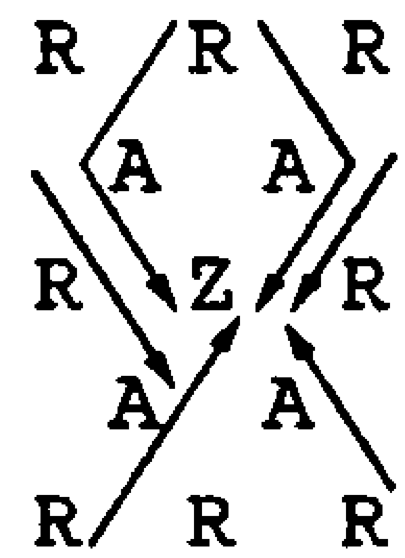
RPTA : "D"

SEGUNDO MÉTODO (POR INDUCCIÓN):

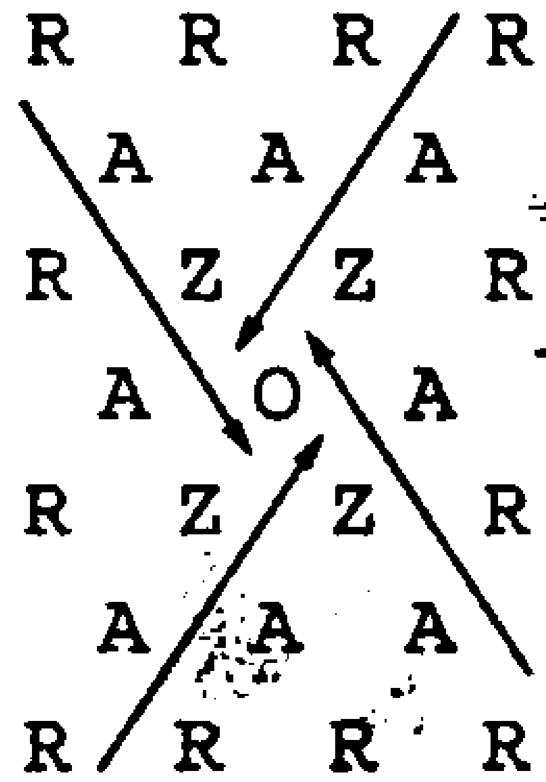
CASOS PARTICULARES | *NÚMERO DE PALABRAS*



$$4 = 4 \times 1 = 4(2^1 - 1)$$



$$12 = 4 \times 3 = 4(2^2 - 1)$$



$$28 = 4 \times 7 = 4(2^3 - 1)$$

* Luego la expresión pedida será :

$$4(2^6 - 1) = 4 \times 63 = 252$$

PROBLEMA 9 :

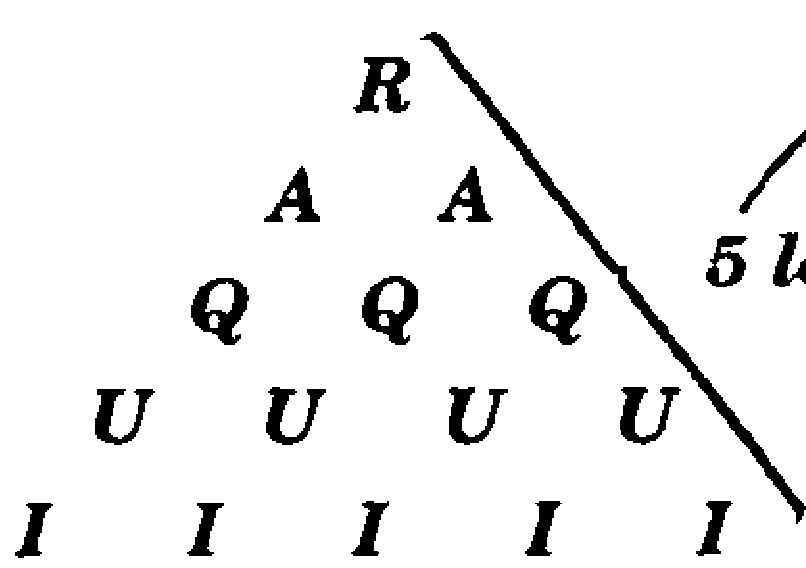
En el siguiente arreglo, ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra *RAQUI* , uniendo letras vecinas?

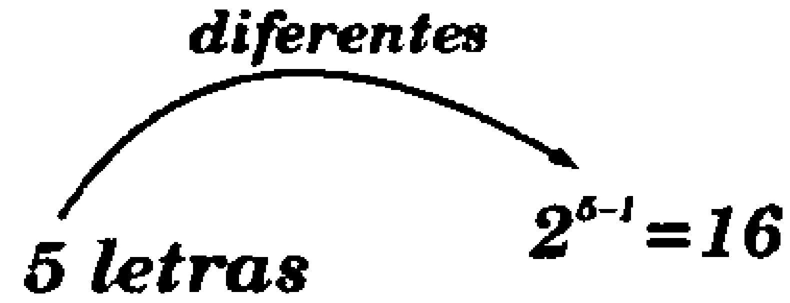
R R R
A A A A
Q Q Q Q Q
U U U U U U
I I I I I I I

A) 44 *B) 48* *C) 46* *D) 52* *E) 46*

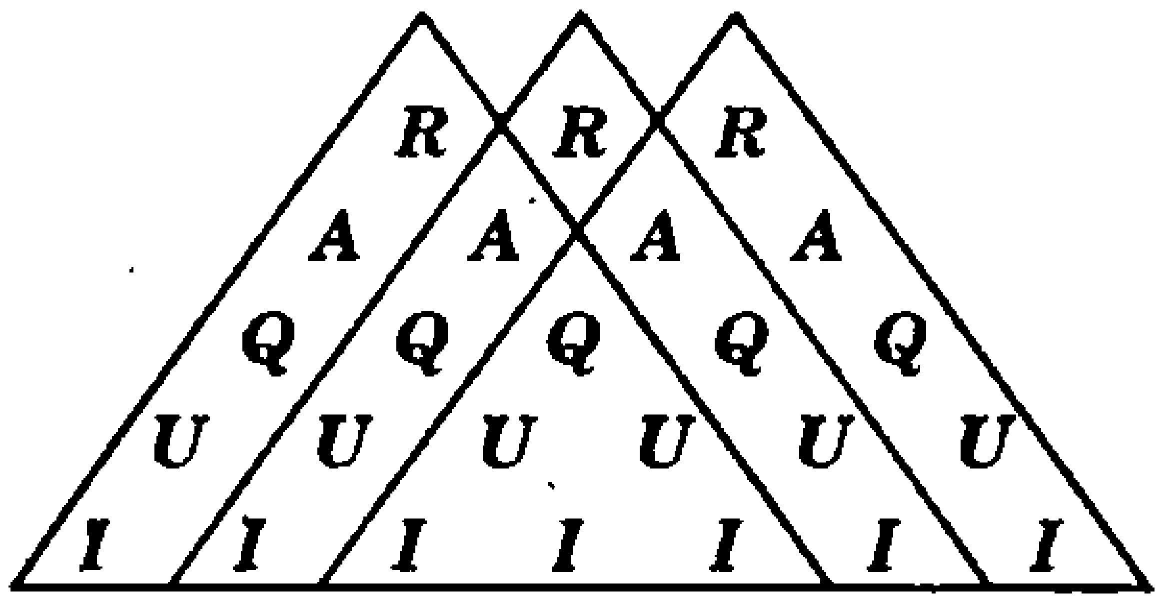
RESOLUCIÓN :

En el problema se puede identificar un arreglo triangular que se repite:





De donde, para el arreglo original, tendremos



⇒ Total de formas distintas=$3(16)=48$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra "***RECONOCER***", pudiendo repetir letras?

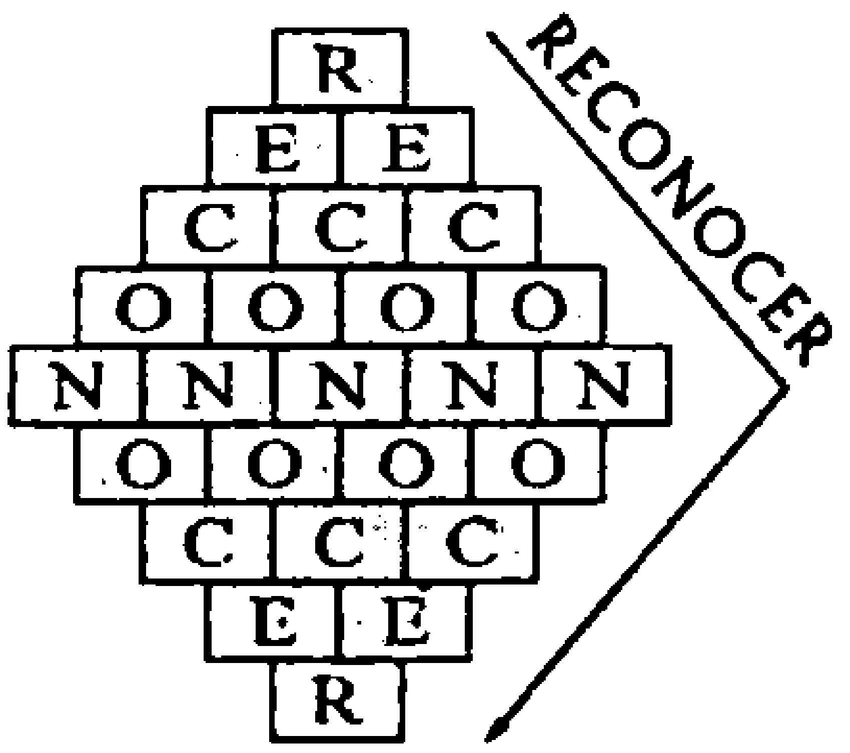
A) 35
B) 64
C) 128
D) 70
E) 256

R
E E
C C C
O O O O
N N N N N

RESOLUCIÓN :

* Como se puede repetir letras , entonces la figura equivalente será :

(Leer "***RECONOCER***", únicamente de arriba abajo).



* Utilizaremos el método enumerativo :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
5 10 10 5
15 20 15
35 35
70 → Lo pedido

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

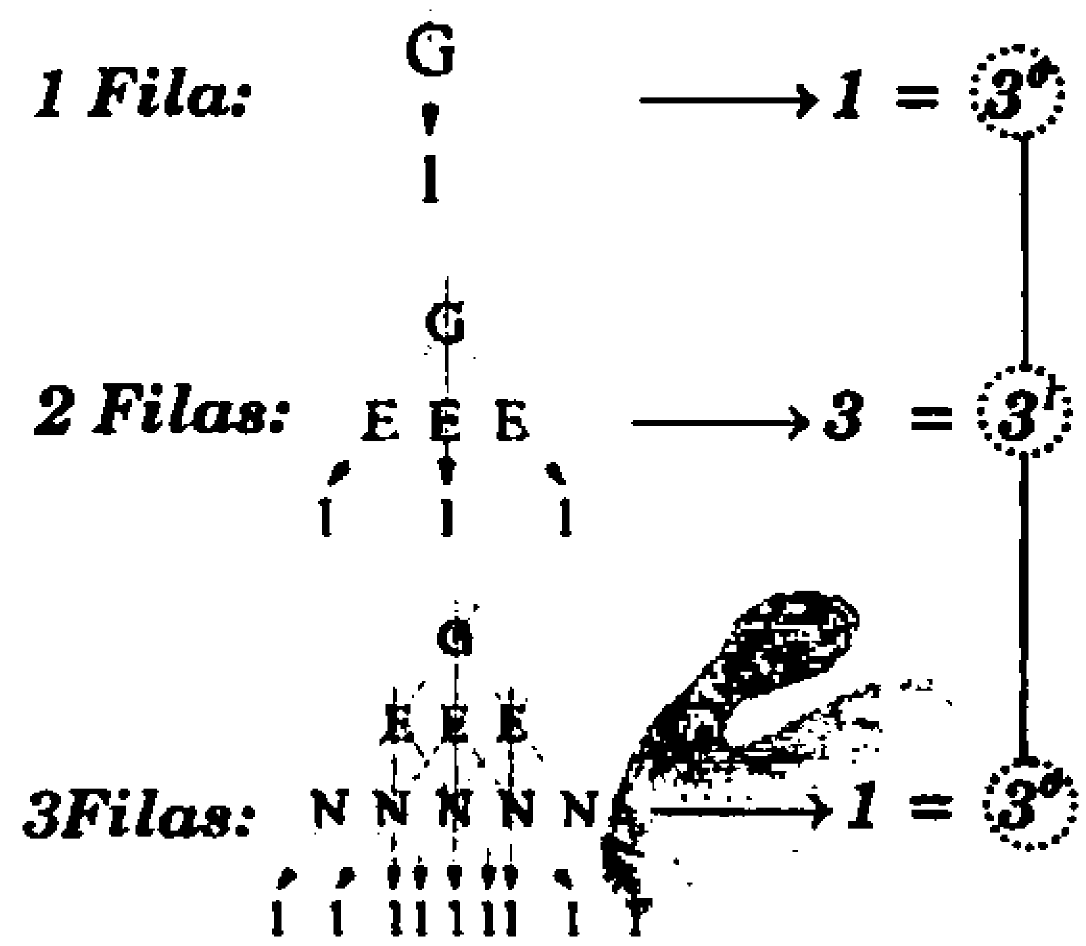
¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra : "***GENIAL***"?

A) 729
B) 243
C) 81
D) 36
E) 216

G
E E E
N N N N N
I I I I I I I
A A A A A A A A A
L L L L L L L L L L L

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE PALABRAS**



* Como la distribución consta de 6 filas , entonces el número de palabras "***GENIAL***" se podrá leer de :

$3^{6-1} = 3^5 = 243$ maneras

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

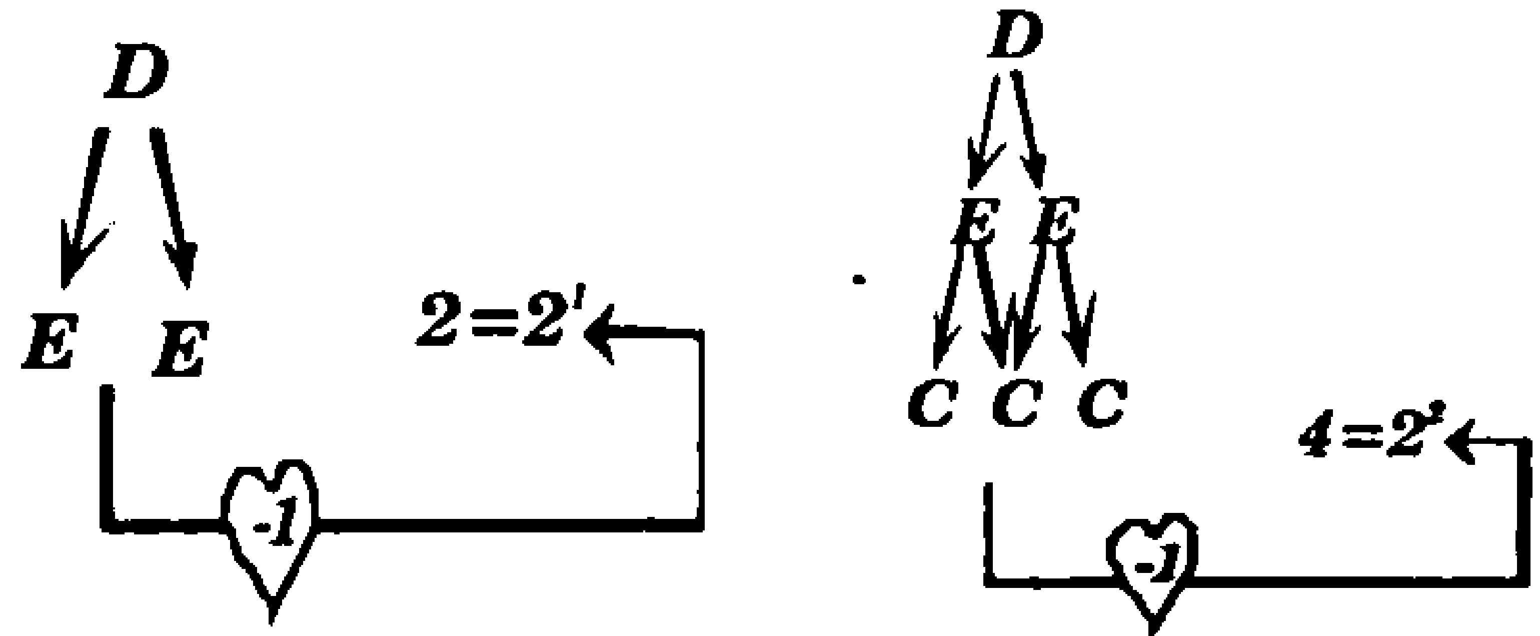
¿De cuántas formas distintas se puede leer "***DECENAS***" en el siguiente arreglo?

A) 128
B) 256
C) 255
D) 127
E) 64

D
E E
C C C
E E E E
N N N N
A A A A A
S S S S S S

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE FORMAS DE LEER**



* Luego para el problema pedido :

$\left(\begin{array}{l}\text{\# de formas de}\\ \text{leer DECENAS}\end{array}\right): \ 2^{7-1}=2^6=64$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "***REPASO***"?

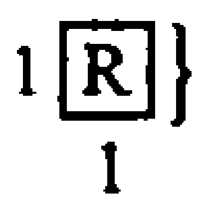
A) 36
B) 6
C) 256
D) 32
E) 64

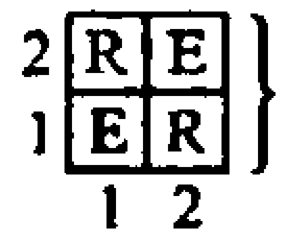
R	E	P	A	S	O
E	P	A	S	O	S
P	A	S	O	S	A
A	S	O	S	A	P
S	O	S	A	P	E
O	S	A	P	E	R

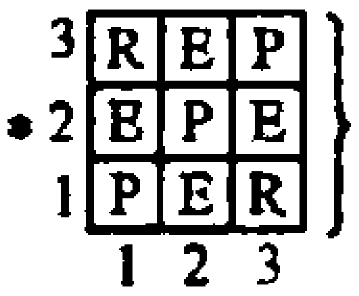
RESOLUCIÓN :

* Por inducción :

CASOS *PARTICULARES* # DE FOMAS *DE LEER*

*  $\longrightarrow 2 = 2^1$

*  $\longrightarrow 4 = 2^2$

*  $\longrightarrow 8 = 2^3$

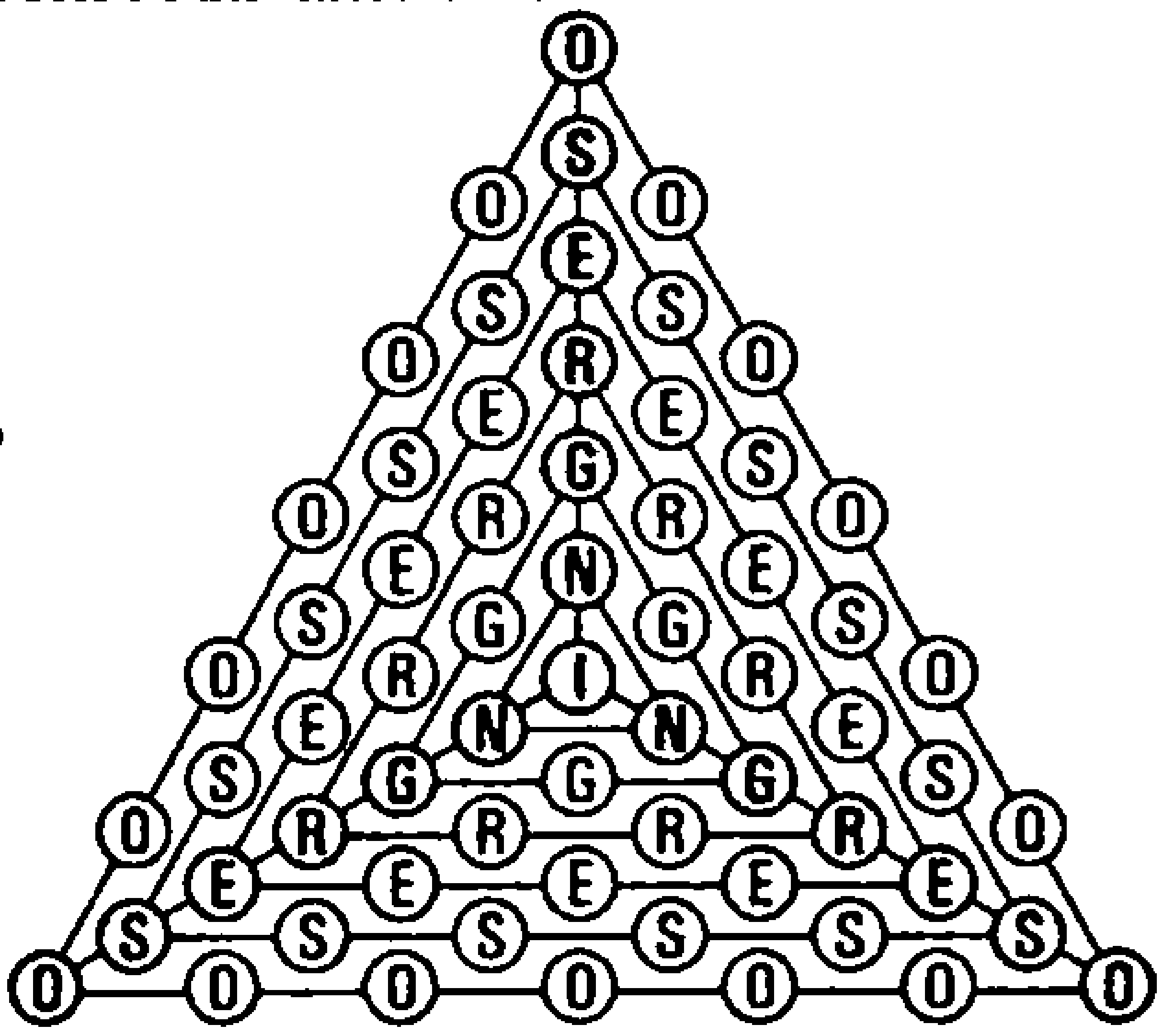
* Como la figura pedida es de 6×6 , entonces:

 # de formas de leer "Repaso" : $2^6 = 64$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Indicar la cantidad total de palabras ***"INGRESO"*** que se puede leer en el siguiente diagrama , uniendo las letras consecutivamente .

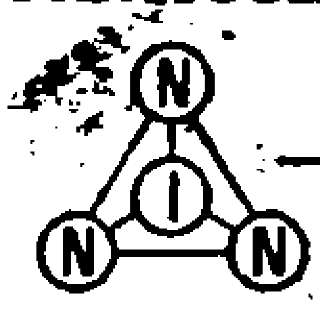


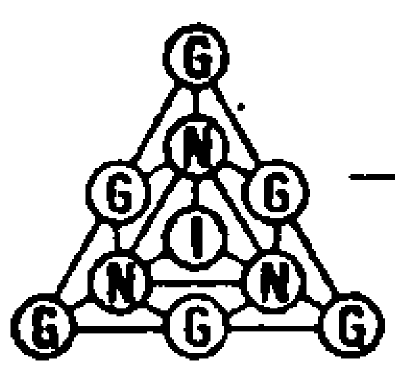
A) 354
B) 352
C) 189
D) 192
E) 63

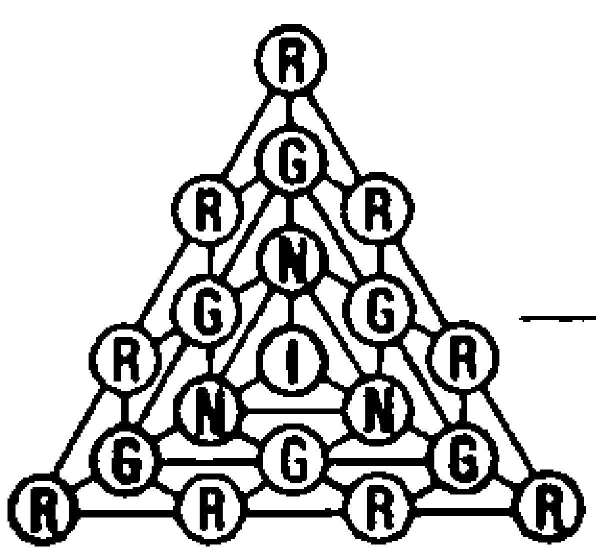
RESOLUCIÓN :

* Consideremos casos análogos al problema , pero más sencillos que él (por inducción) :

CASOS PARTICULARES # DE PALABRAS

 $\longrightarrow 3 = 3\times1 = 3(2^1 - 1)$

 $\longrightarrow 9 = 3\times3 = 3(2^2 - 1)$

 $\longrightarrow 21 = 3\times7 = 3(2^3 - 1)$

* Para el problema , el total de número de palabras ***"INGRESO"*** será : $3(2^6 - 1) = 189$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

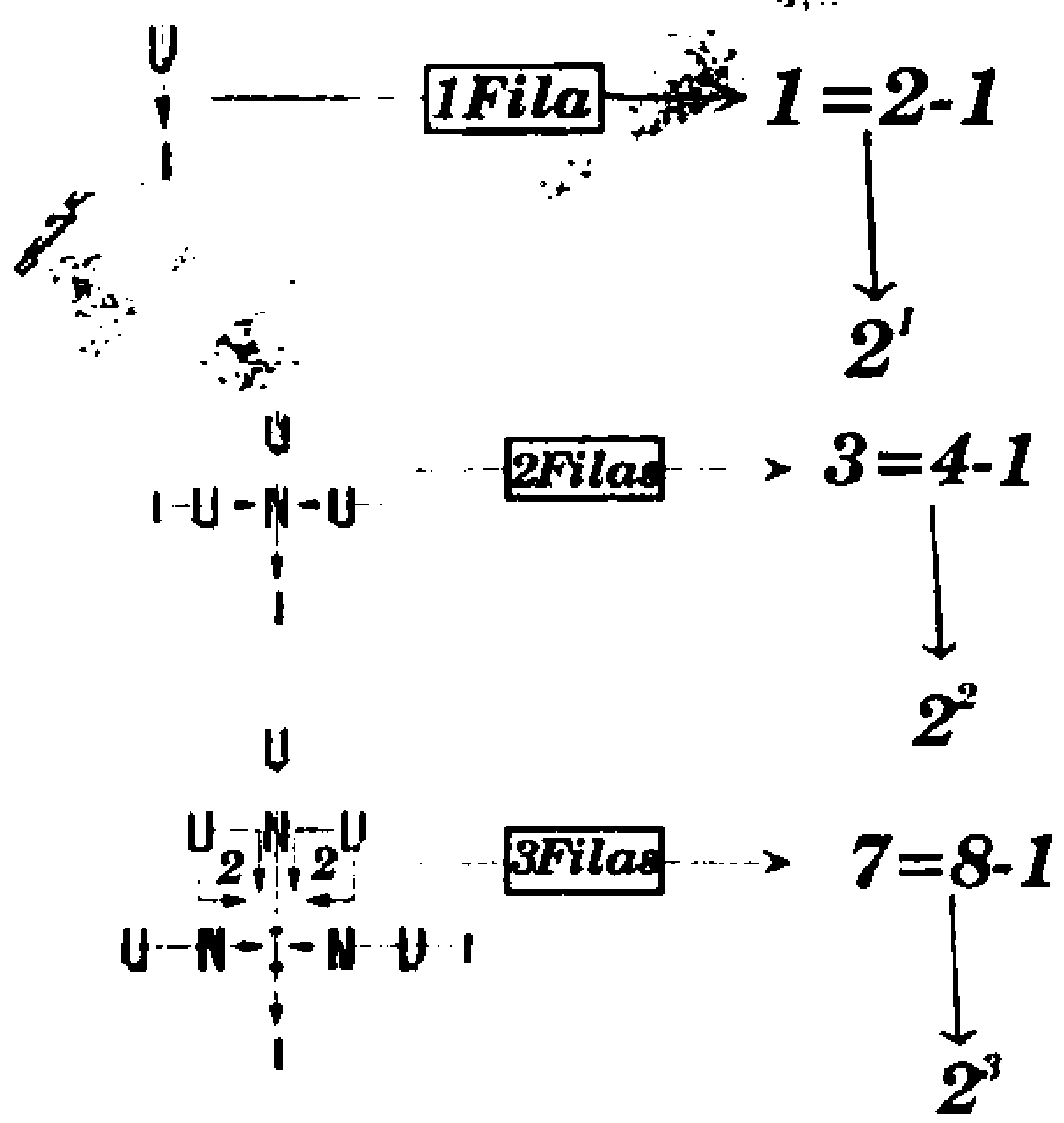
¿De cuántas formas diferentes se puede formar la palabra ***"UNIVERSIDAR"***, uniendo las letras en forma consecutiva ?

U
UNU
UNINU
UNIVINU
UNIVEVINU
UNIVEREVINU
UNIVERSREVINU
UNIVERSISREVINU
UNIVERSIDISREVINU
UNIVERSIDADISREVINU
UNIVERSIDARADISREVINU

A) 121
B) 1331
C) 1023
D) 2048
E) 2047

RESOLUCIÓN :

Casos Particulares Número de palabras



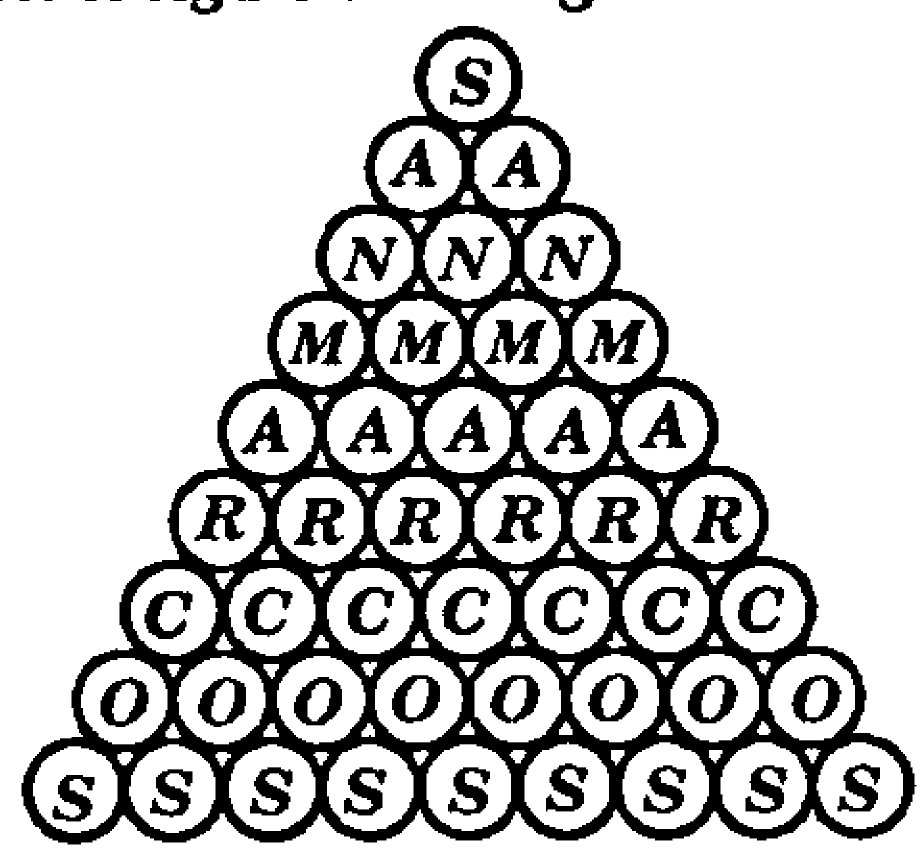
* Luego como ***"UNIVERSIDAR"***, consta de ***11*** letra (***11*** filas) , entonces lo que piden será :

$$2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

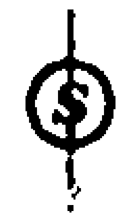
¿De cuántas formas distintas se puede leer ***"SAN MARCOS"*** en el siguiente arreglo?



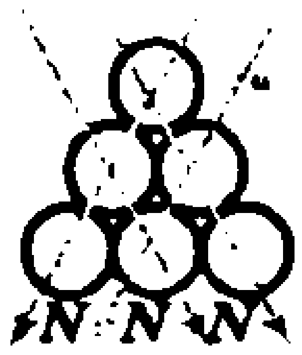
A) 512
B) 256
C) 201
D) 81
E) 729

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES	FORMAS DISTINTAS DE LEER



$1\ forma \Rightarrow 1 = 2^0 = 2^{1-1}$



$1 + 1 = 2\ formas \Rightarrow 2 = 2^1 = 2^{2-1}$

$1+1+1+1 = 4\ formas \Rightarrow 4 = 2^2 = 2^{3-1}$

*Luego piden : $2^{9-1} = 2^8 = 256$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Halle la suma de cifras del resultado al operar

$$M = \underbrace{(99...996)}_{50\ cifras}\underbrace{(99...998)}_{50\ cifras}$$

A) 455 B) 472 C) 427 D) 453 E) 440

RESOLUCIÓN :

Se observa que los factores de la expresión M están formados por cifras 9 con excepción de su última cifra, en cada caso. Entonces, los casos particulares a analizar son los siguientes:

Caso 1 : $M_1 = \underbrace{96}_{2\ cif} \times 98 = 9408 \Rightarrow S_{cif} = 21 = 9(2)+3$

Caso 2 :

$M_2 = \underbrace{996}_{3\ cif} \times 998 = 994008 \Rightarrow S_{cif} = 30 = 9(3)+3$

Caso 3 :

$M_3 = \underbrace{9996}_{4\ cif} \times 9998 = 99940008 \Rightarrow S_{cif} = 39 = 9(4)+3$

Luego

$$M = \underbrace{(99...996)}_{50\ cifras}\underbrace{(99...998)}_{50\ cifras} \Rightarrow S_{cifras} = 9(50)+3 = 453$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{97 \times 98 \times 99 \times 100 + 1}$$

A) 9070 B) 9007 C) 122 D) 9701 E) 156

RESOLUCIÓN :

Observando detenidamente el problema nos damos cuenta que tiene una particularidad (producto de cuatro números consecutivos), entonces aplicamos la inducción, analizando los casos más simples sin que se pierda la forma original del problema

$$\sqrt{①\times 2 \times 3 \times ④ + 1} = \sqrt{25}$$

$$= 5 = \underbrace{① \times ④}_{\text{Producto del menor con el mayor}} + 1$$

$$\sqrt{② \times 3 \times 4 \times ⑤ + 1} = \sqrt{121}$$

$$= 11 = \underbrace{② \times ⑤}_{\text{Producto del menor con el mayor}} + 1$$

$$\sqrt{③ \times 4 \times 5 \times ⑥ + 1} = \sqrt{361}$$

$$= 19 = \underbrace{③ \times ⑥}_{\text{Producto del menor con el mayor}} + 1$$

$$E = \sqrt{(97) \times 98 \times 99 \times (100) + 1}$$

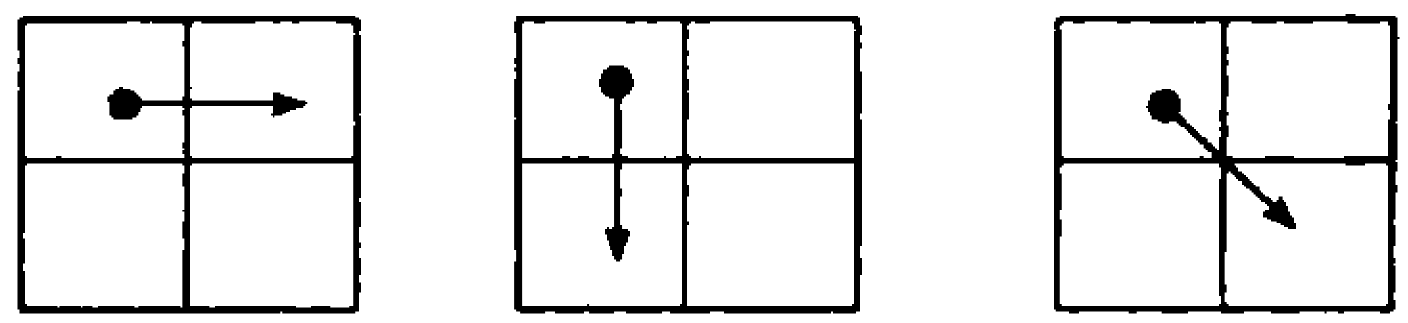
$$= \underbrace{(97) \times (100)}_{\text{Producto del menor con el mayor}} + 1 = 9700 + 1 = 9701$$

La respuesta es **9701.**

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Se tiene un tablero cuadrado de 4×4 subdivido en cuadros de 1×1. Se quiere ir del cuadrado superior izquierdo ai cuadrado inferior derecho. Los movimientos permitidos son:



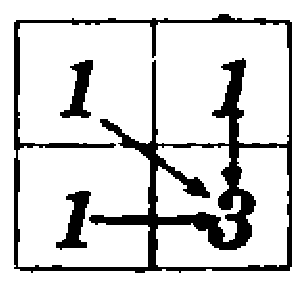
¿De cuántas maneras se puede hacer el recorrido?

A) 20 B) 25 C) 49 D) 56 E) 63

RESOLUCIÓN :

• Solo hay 1 manera de iniciar el recorrido desde el cuadro superior izquierdo: también hay 1 sola manera de dirigirse al cuadro inmediato derecho y 1 manera para ir al cuadro inmediato inferior.

• Sin embargo para llegar" el cuadro inmediato en diagonal, hay $1 + 1 + 1 = 3$ maneras como indica la figura :



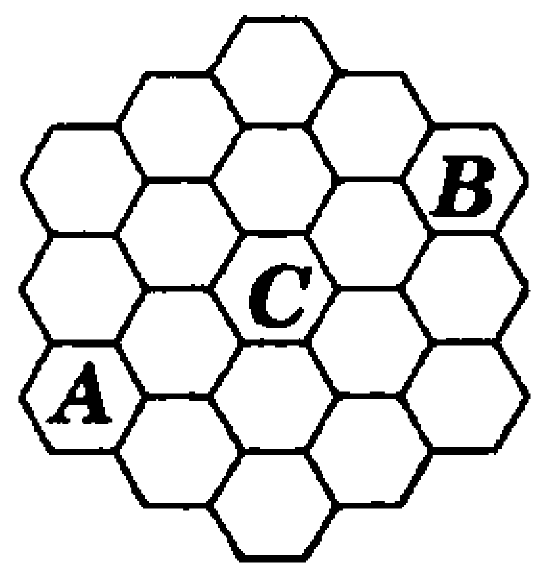
• Procediendo de manera similar obtendremos la respuesta :

1	1	1	1
1	3	5	7
1	5	13	25
1	7	25	63

RPTA : "E"

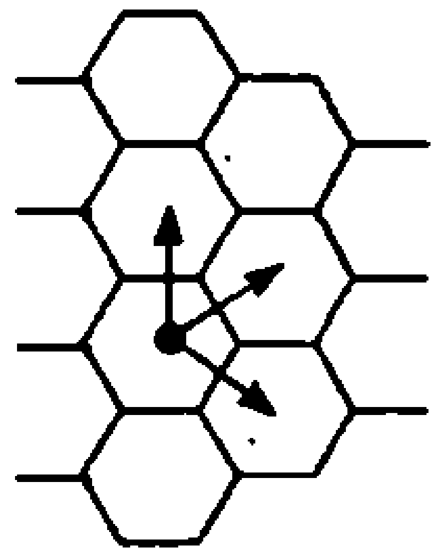
PROBLEMA 20:

En el tablero hay inicialmente una ficha en la casilla A.



En cada movida , la ficha puede hacer uno de los

siguientes movimientos:



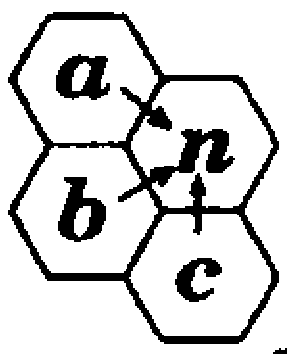
¿De cuántas maneras puede ir la ficha de *A* a *B* sin pasar por *C*?

A) 80 *B) 100* *C) 122* *D) 6* *E) 156*

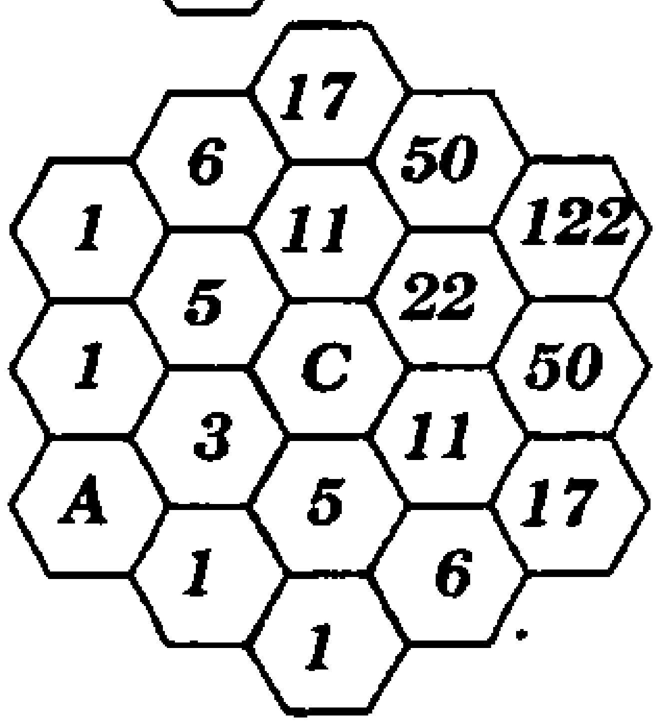
RESOLUCIÓN :

• En cada casilla del tablero figura el número de maneras en que la ficha puede llegar a ella con las condiciones dadas.

• Ten en cuenta que para llegar a la casilla señalada con las flechas , debemos sumar el número de maneras en que se puede llegar a ella desde las casillas vecinas con los movimientos permitidos.



$\Rightarrow n = a + b + c$



RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Hallar la suma de cifras del resultado de la siguiente expresión :

$$\underbrace{(999......999)^2}_{\text{«2006 cifras»}}$$

A) 4004
B) 18018
C) 12012
D) 808
E) 18054

RESOLUCIÓN :

* Observamos que la característica a variar es la cantidad de *"9"*, luego :

CASOS PARTICULARES ***SUMA DE CIFRAS***

- $\underbrace{9^2}_{1\ Cifra} = 81 \longrightarrow 9 = 9 \times (1)$
- $\underbrace{99^2}_{2\ Cifra} = 9801 \longrightarrow 18 = 9 \times (2)$
- $\underbrace{999^2}_{3\ Cifra} = 998001 \longrightarrow 27 = 9 \times (3)$

 # de cifras

$\Rightarrow$ La suma de cifras para la expresión pedida será :

$$9 \times \boxed{2006} = 18054$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

Calcular la suma de cifras del resultado de :

$$(\underbrace{888.......88}_{2003\ Cifras} - \underbrace{555.......55}_{2003\ Cifras})^2$$

A) 120018 *B) 4006* *C) 6009* *D) 18027* *E) 27027*

RESOLUCIÓN :

* Analicemos casos parecidos al problema, pero más simples :

CASOS PARTICULARES ***SUMA DE CIFRAS***

$(\underbrace{8}_{1\ cifra} - \underbrace{5}_{1\ cifra})^2 = 3^2 = 9 \qquad 27 = 9 \times (1)$

$(\underbrace{88}_{2\ cifras} - \underbrace{55}_{2\ cifras})^2 = 33^2 = 1089 \qquad 18 = 9 \times (2)$

$(\underbrace{888}_{3\ cifras} - \underbrace{555}_{3\ cifras})^2 = 333^2 = 110889 \qquad 27 = 9 \times (3)$

Número de cifras

* Luego para lo pedido, que está compuesto por *"2003* cifras" , *8* y *5* ; su suma de cifras será :

$$9 \times 2003 = 18027$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Calcular la suma de cifras del resultado de :

$$\sqrt{\underbrace{444\ ......\ 44}_{\text{"2000 Cifras"}} - \underbrace{888\ ......\ 888}_{\text{"1000 Cifras"}}}$$

A) 12000 *B) 6000* *C) 4000* *D) 3300* *E) 6666*

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES ***SUMA DE CIFRAS***

$\sqrt{\underbrace{44}_{2\ Cifras} - \underbrace{8}_{1\ Cifra}} = 6 \longrightarrow 6 = 6(1)$

$\sqrt{\underbrace{4444}_{4\ Cifras} - \underbrace{88}_{2\ Cifras}} = 66 \longrightarrow 12 = 6(2)$

$\sqrt{\underbrace{444444}_{6\ Cifras} - \underbrace{888}_{3\ Cifras}} = 666 \longrightarrow 18 = 6(3)$

* Luego para la expresión pedida , la suma de cifras será : *6(1000)=6000*

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Calcular la suma de cifras de: $R=81(123456789)^2$

A) 36 B) 49 C) 225 D) 81 E) 121

RESOLUCIÓN :

* Por inducción : *Suma de cifras*

$81(1)^2 = 81 \longrightarrow 9 = 9\times 1$

$81(12)^2 = 11664 \longrightarrow 18 = 9\times 2$

$81(123)^2 = 1225449 \longrightarrow 27 = 9\times 3$

* Luego piden : $9\times 9=81$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

Calcular:

$$\frac{1\times 2^2+1\times 2\times 3^2+1\times 2\times 3\times 4^2+...+1\times 2\times 3...29\times 30^2}{1\times 2\times 3...\times 31-2}$$

A) 31 B) 30 C) 33 D) 1 E) $\frac{1}{32}$

RESOLUCIÓN :

* Los casos parecidos , al problema serán :

$$\frac{1\times 2^2}{1\times 2\times 3-2}=\frac{4}{4}=1$$

$$\frac{1\times 2^2+1\times 2\times 3^2}{1\times 2\times 3\times 4-2}=\frac{22}{22}=1$$

$$\frac{1\times 2^2+1\times 2\times 3^2+1\times 2\times 3\times 4^2}{1\times 2\times 3\times 4\times 5-2}=\frac{118}{118}=1$$

* Luego lo pedido , será igual a *1*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

Calcular el valor de la fila *2006* en :

$$Fila\ 1 \Leftrightarrow \frac{3}{1\times 3}$$

$$Fila\ 2 \Leftrightarrow \frac{5}{1\times 3}+\frac{5}{3\times 5}$$

$$Fila\ 3 \Leftrightarrow \frac{7}{1\times 3}+\frac{7}{3\times 5}+\frac{7}{5\times 7}$$

$\vdots$

A) 1 B) 2001 C) 2003 D) 2006 E) 1001

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES :

$$\frac{1}{1\times 3}=1$$

$$\frac{5}{1\times 3}+\frac{5}{3\times 5}=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$\frac{7}{1\times 3}+\frac{7}{3\times 5}+\frac{7}{5\times 7}=\frac{7}{3}+\frac{7}{15}+\frac{1}{5}=\frac{45}{15}=3$$

Primeros Números Naturales

$\Rightarrow$ *Fila 2006* $\Leftrightarrow$ *2006*

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Si : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=K^2+n$

Calcular : "K"

A) 1 B) –1 C) $n-1$ D) n E) $n+1$

RESOLUCIÓN :

* Casos Particulares :

$$\sqrt{1\times 2\times 3\times 4+1}=5=2^2+1$$

$$\sqrt{2\times 3\times 4\times 5+1}=11=3^2+2$$

$$\sqrt{3\times 4\times 5\times 6+1}=19=4^2+3$$

$\vdots$

* En general :

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=k^2+n$$

* Se observa que : $K=n+1$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Calcular : $\sqrt{2000\times 2001\times 2002\times 2003+1}$

A) 800001 B) 80601 C) 4006001
D) 3480001 E) 2888001

RESOLUCIÓN :

* Casos particulares :

$$\sqrt{1\times 2\times 3\times 4+1}=5=1^2+4=1^2+3(1)+1$$

$\downarrow +3$

$$\sqrt{2\times 3\times 4\times 5+1}=11=2^2+7=2^2+3(2)+1$$

$\downarrow +3$

$$\sqrt{3\times 4\times 5\times 6+1}=19=3^2+10=3^2+3(3)+1$$

* Luego :

$$\sqrt{2000\times 2001\times 2002\times 2003+1}=2000^2+3(2000)+1$$
$$=4006001$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

Calcular la suma de las cifras del resultado de la siguiente operación : $\sqrt{40\times 41\times 42\times 43+1}$

A)9 *B)10* *C)11* *D)12* *E) 13*

RESOLUCIÓN :

* Apliquemos la inducción:

$\sqrt{\underline{1}\times 2\times 3\times \underline{4}+1}=5=\underline{1}\times\underline{4}+1 \Rightarrow \sqrt{\underline{2}\times 3\times 4\times \underline{5}+1}=11=\underline{2}\times\underline{5}+1$

$\sqrt{\underline{3}\times 4\times 5\times \underline{6}+1}=19=\underline{3}\times\underline{6}+1$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$\Rightarrow \sqrt{\underline{40}\times 41\times 42\times \underline{43}+1}=\underline{40}\times\underline{43}+1=1721$

* Se pide: $1+7+2+1=11$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30 :

Calcular :

$$\sqrt[2^{2006}]{(3\times 5\times 17\times 257\times \ldots .\ 2006\ factores)+1}$$

A) 2001 *B)1999* *C)2000* *D)1* *E) 2*

RESOLUCIÓN :

Casos particulares :

* Para 1 factor : $\sqrt[2^1]{3+1}=\sqrt{4}=$ ②

* Para 2 factores: $\sqrt[2^2]{3\times 5+1}=\sqrt[4]{16}=$ ②

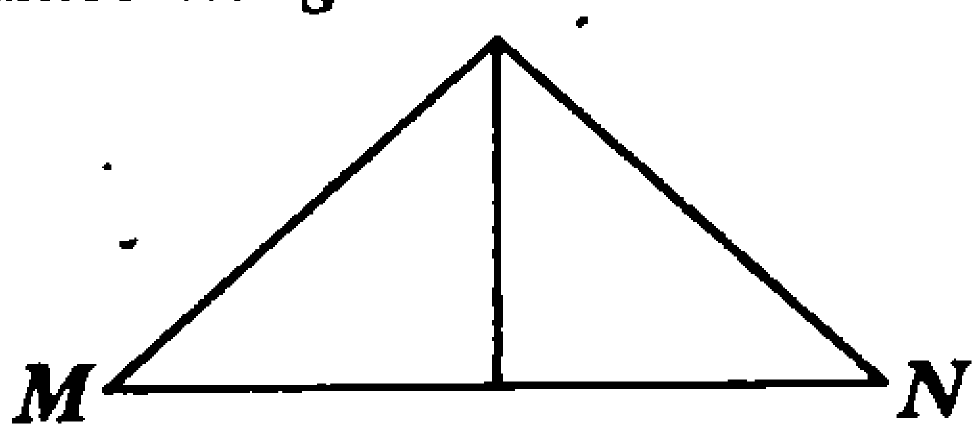
* Para 3 factores : $\sqrt[2^3]{3\times 5\times 17\times 1}=\sqrt[8]{256}=$ ②

*Como observamos , siempre el resultado es "2".

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

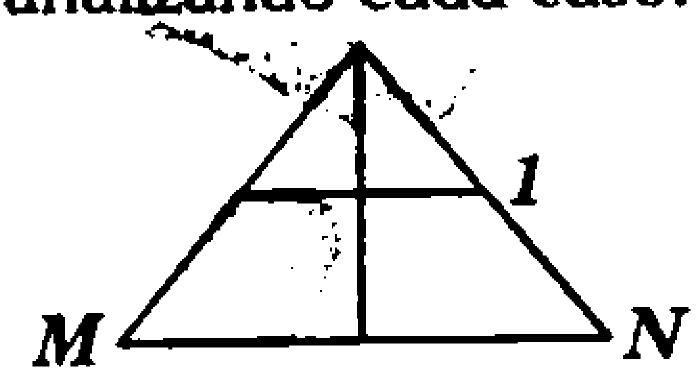
Si a la siguiente figura le trazas 50 rectas paralelas a $\overline{MN}$, ¿cuántos triángulos se contarán en total?



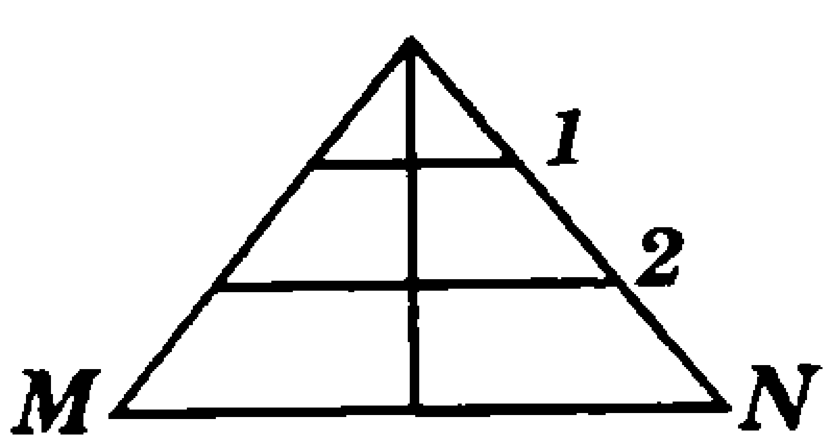
A) 2011 *B) 159* *C) 153* *D) 2006* *E) 1001*

RESOLUCIÓN :

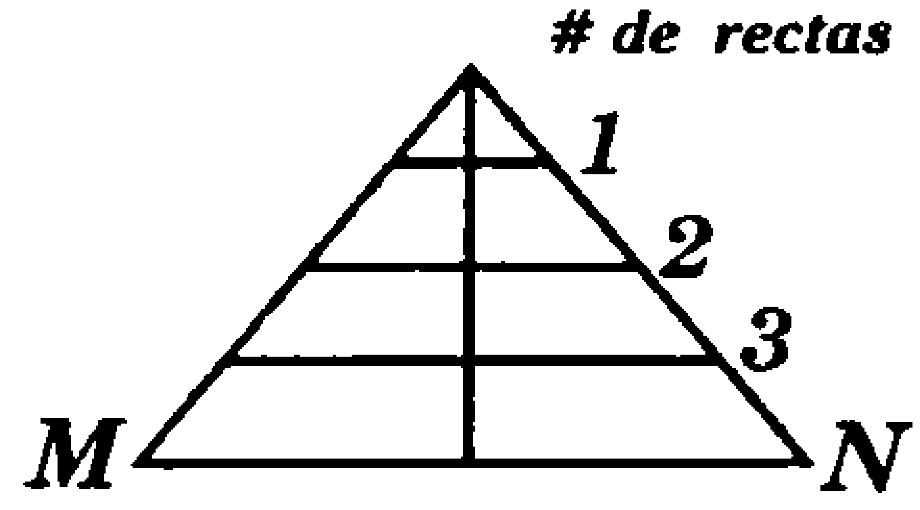
Aplicando lógica inductiva, iremos trazando rectas uno por uno y analizando cada caso:



$\Rightarrow$ # triángulos $=6=3\underbrace{(2)}_{\#\ de\ rectas\ trazadas\ +\ 1}$

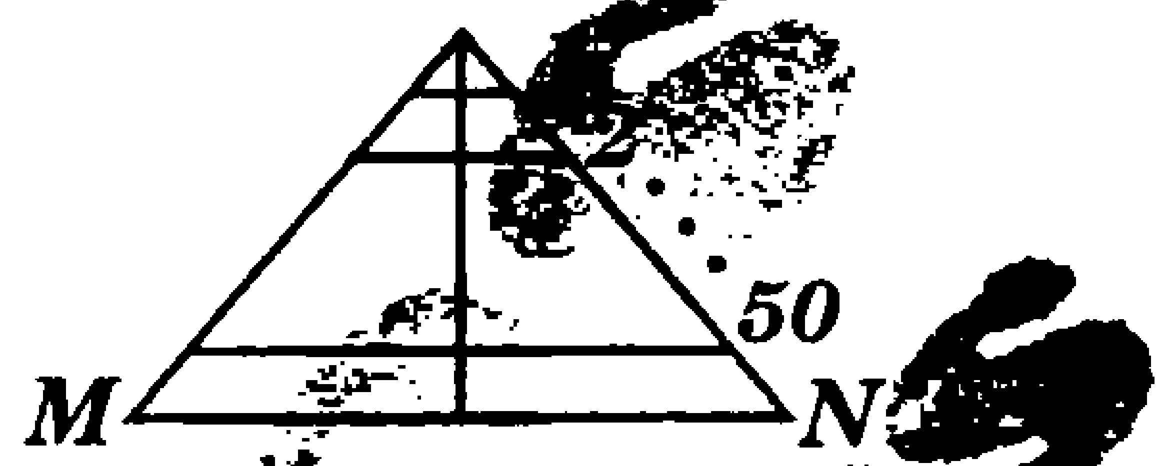


$\Rightarrow$ # triángulos $=9=3\underbrace{(3)}_{\#\ de\ rectas\ trazadas\ +\ 1}$



$\Rightarrow$ # triángulos $=12=3\underbrace{(4)}_{\#\ de\ rectas\ trazadas\ +\ 1}$

...



$\Rightarrow$ # triángulos $=3\underbrace{(51)}_{\#\ de\ rectas\ trazadas\ +\ 1}=153$

$\Rightarrow$ La respuesta es 153 triángulos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 32 :

Calcular : $\underbrace{1+2+4+8+16+\ldots}_{\text{"2006 términos"}}$

A) 2^{2007} *B) 2200 C)* $2^{2007}-1$ *D)* $2^{2006}-1$ *E)* $2^{2007}+1$

RESOLUCIÓN :

Casos particulares		Suma
$\underbrace{1}_{\text{"1 término"}}$	————	$1=2^1-1$
$\underbrace{1+2}_{\text{"2 términos"}}$	————	$3=2^2-1$
$\underbrace{1+2+4}_{\text{"3 términos"}}$	————	$7=2^3-1$

* De donde se deduce que lo pedido será : $2^{2006}-1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Hallar la suma de las cifras luego de sacar la raíz cuadrada de :

$$\underbrace{(1111\ldots 11)}_{2006\ cifras}-\underbrace{(222\ldots 2)}_{1003\ cifras}$$

A) 1009 *B) 2006* *C) 3009* *D) 4000* *E) 9000*

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES		SUMA DE CIFRAS
$\sqrt{11-2}=3$	⟶	$3=3(1)$
$\sqrt{1111-22}=33$	⟶	$6=3(2)$
$\sqrt{111111-222}=333$	⟶	$9=3(3)$

* Lo pedido será : $1003(3) = 3009$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Calcular : $\underbrace{2+6+18+54+.....}_{2007\ sumandos}$

A) $2^{2007}-1$ B) $2^{2006}+1$ C) $2^{3007}-1$ D) $3^{2007}-1$ E) $3^{2004}-1$

RESOLUCIÓN :

* Para 1 sumando $\rightarrow 2 = 2 = 3 - 1 = (3^1) - 1$
* Para 2 sumandos $\rightarrow 2 + 6 = 8 = 9 - 1 = (3^2) - 1$
* Para 3 sumandos $\rightarrow 2 + 6 + 18 = 26 = 27 - 1 = (3^3) - 1$

⋮

* Para 2007 sumandos $\rightarrow 3^{2007} - 1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 35 :

Calcular : $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{1}{n+1}$ C) $\frac{1}{n^2+1}$ D) $\frac{n}{n+2}$ E) $\frac{n}{n+1}$

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES :

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4}$$

* Luego :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 36 :

Calcular la suma de los números de la fila *30* en:

2 .... Fila 1

4 6 .... Fila 2

8 10 12 .... Fila 3

14 16 18 20 .... Fila 4

⋮

A) 99009 B) 27030 C) 16020
D) 8000 E) 16000

RESOLUCIÓN :

Fila (1) $\longrightarrow 2 = (1) \times 2$; $(\ )^2 + 1$

Fila (2) $\longrightarrow 4 + 6 = 10 = (2) \times 5$; $(\ )^2 + 1$

Fila (3) $\longrightarrow 8 + 10 + 12 = 30 = (3) \times 10$; $(\ )^2 + 1$

⋮

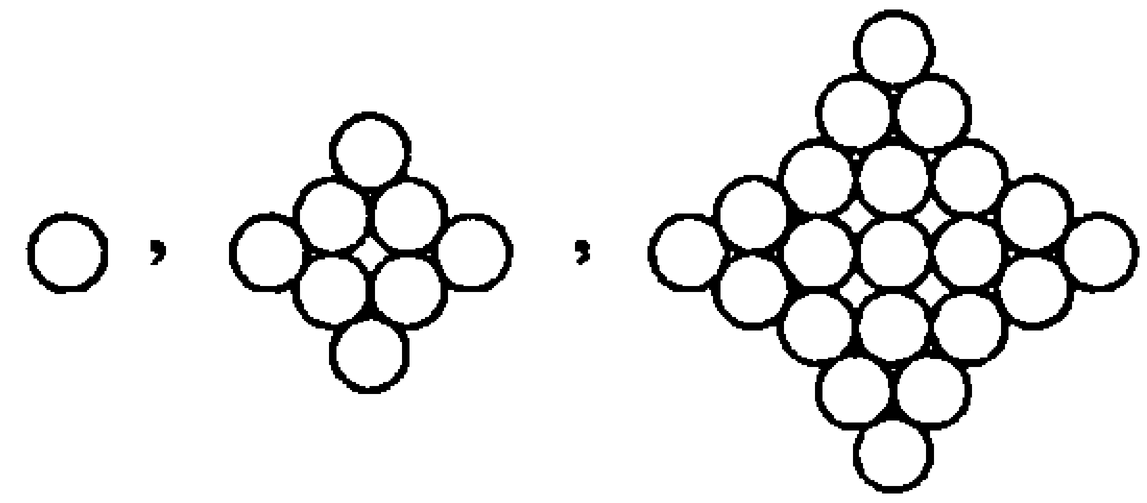
Fila (30) $\longrightarrow 30 \times 901 = 27030$

$\underbrace{30^2 + 1}_{\text{Se debe deducir}}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 37 :

¿Cuántas bolitas se contará en la figura *50*?



F(1) F(2) F(3)

A) 9200 B) 960 C) 800 D) 7400 E) 820

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE BOLITAS

F(1) $\longrightarrow 1 = 1 \times 1$ (×3-2)

F(2) $\longrightarrow 8 = 2 \times 4$ (×3-2) ; +3

F(3) $\longrightarrow 21 = 3 \times 7$ (×3-2) ; +3

$\Rightarrow$ Para F(50) $\longrightarrow 50 \times 148 = 7400$ (×3-2)

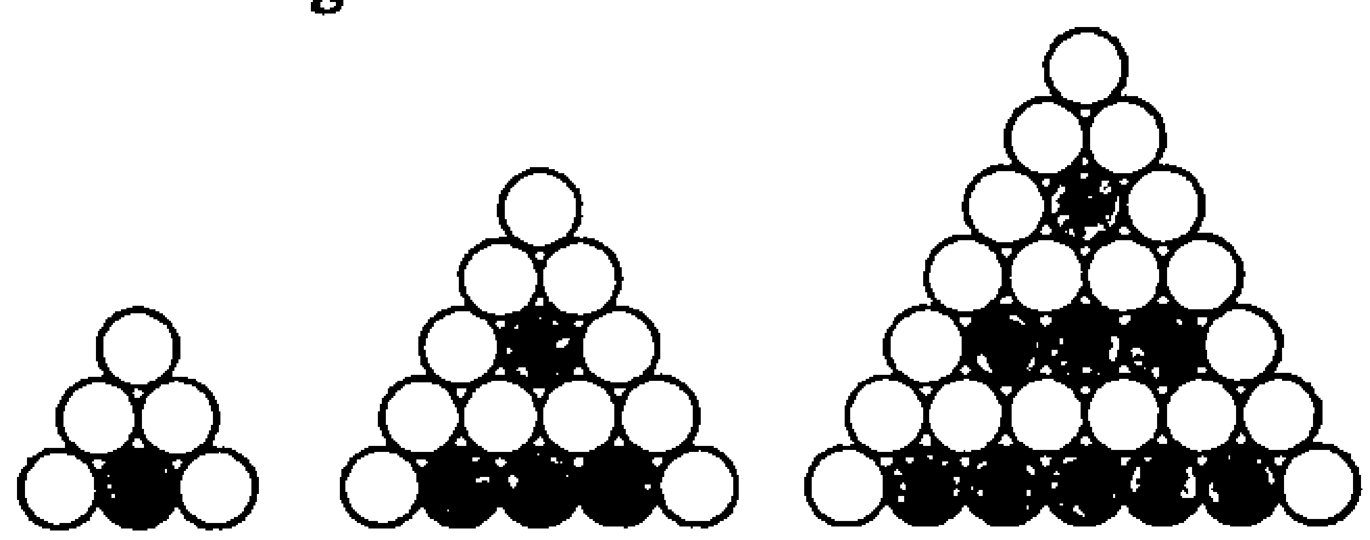
RPTA : "D"

OJO : La regla $\overset{\times 3\quad -2}{\frown}$ hay que deducirla (no es una adivinanza)

PROBLEMA 38 :

En la siguiente sucesión , determinar el número de círculos sin pintar , en la colección de círculos que ocupe el décimo lugar .

A)201
B)131
C)151
D)181
E)231



RESOLUCIÓN :

* De la secuencia gráfica :

GRÁFICA	PRIMERA	SEGUNDA	TERCERA
Total	$1+2+3$	$1+2+3+4+5$	$1+2+3+4+5+6+7$
Pintadas	$1=1^2$	$1+3=2^2$	$1+3+5=3^2$
Sin pintar	$\frac{3\times4}{2}-1^2$	$\frac{5\times6}{2}-2^2$	$\frac{7\times8}{2}-3^2$

* Piden los sin pintar para el décimo lugar :

$$1+2+3\ ....+21-10^2=\frac{21\times22}{2}-100=131$$

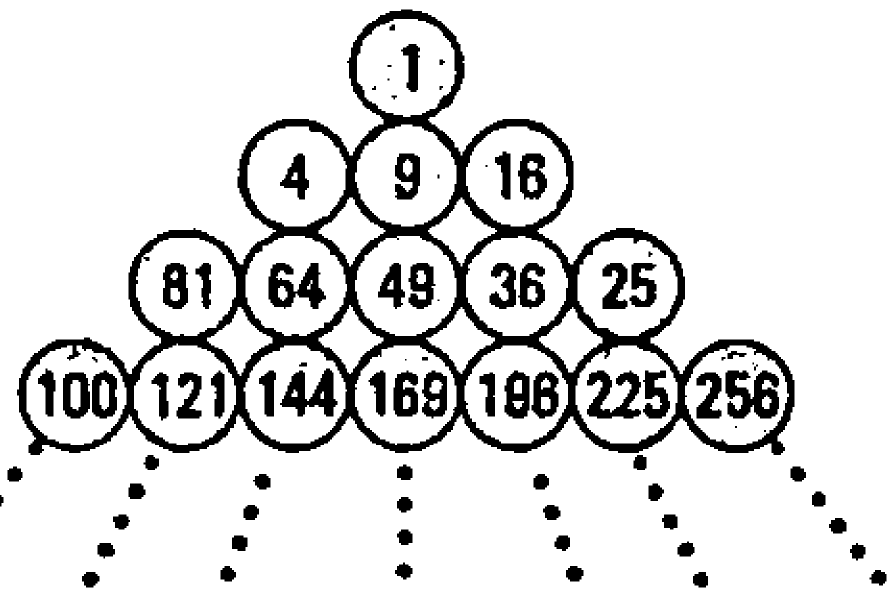
Se deduce por Inducción : $2(10)+1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 39 :

Indicar el valor de la raíz cuadrada del número ubicado en el círculo central de la fila *100* .

A) 9901
B) 9900
C) 1000
D) 5050
E) 9999



RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{\text{Término central}}$$

Fila 1 : $\sqrt{1}=1=1^2-0$ → $(\ )^2-0$

Fila 2 : $\sqrt{9}=3=2^2-1$ → $(\ )^2-1$

Fila 3 : $\sqrt{49}=7=3^2-2$ → $(\ )^2-2$

* Piden para :

Fila 100 $100^2-99=9901$ → $(\ )^2-99$

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Calcular la suma de todos los elementos de la matriz:

A) 254200
B) 247500
C) 328400
D) 328350
E) 284200

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 99 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 101 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & 103 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 99 & 191 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

* Por inducción :

CASOS PARTICULARES — **SUMA DE ELEMENTOS**

$$[1] \longrightarrow 1=1\times1^2$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&5\end{pmatrix} \longrightarrow 12=3\times2^2$$

$$\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{pmatrix} \longrightarrow 45=5\times3^2$$

* Se deduce que : $S_n=(2n-1)n^2$

* Piden para : $2n-1=99\Rightarrow n=50$

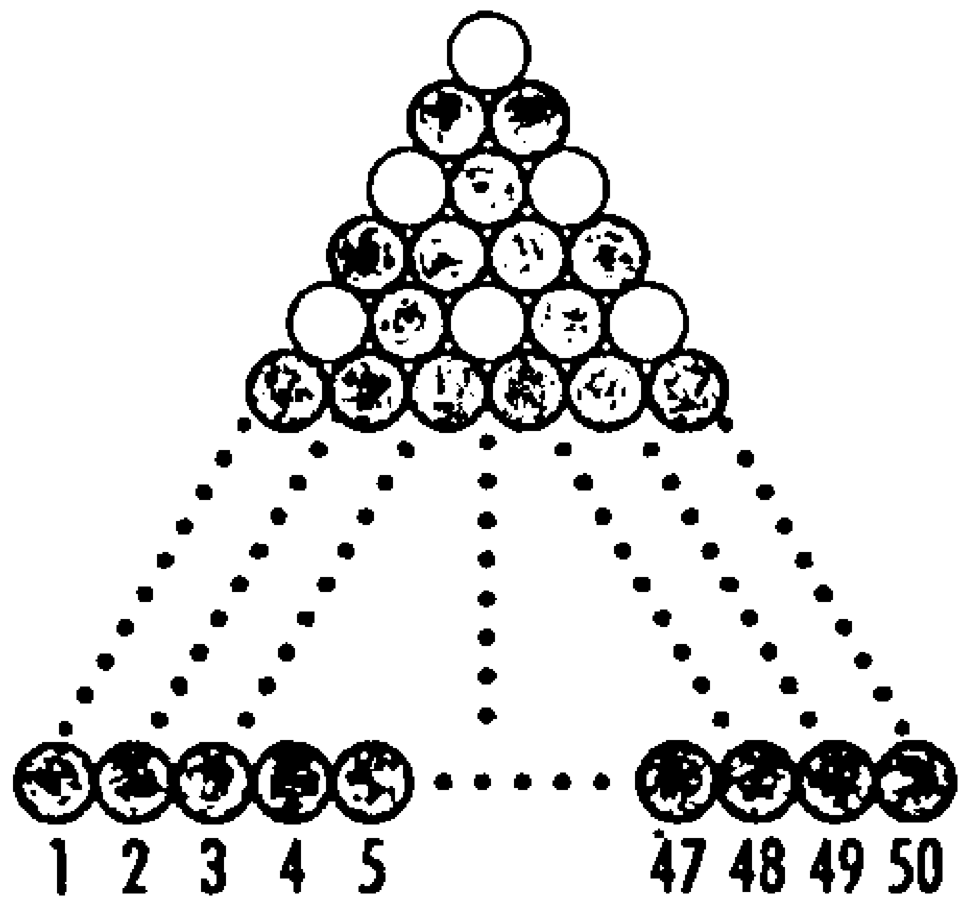
* La expresión a calcular será : $99\times50^2=247500$

RPTA : "B"

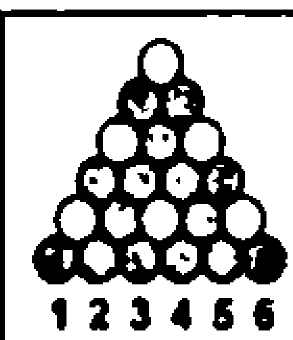
PROBLEMA 41 :

Calcular el número total de bolitas sombreadas en :

A) 900
B) 2500
C) 1275
D) 420
E) 950



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES			
Total de bolitas	$3=\frac{2\times3}{2}$	$10=\frac{4\times5}{2}$	$21=\frac{6\times7}{2}$
# de bolitas sin sombrear	$1=\frac{1\times2}{2}$	$3=\frac{2\times3}{2}$	$6=\frac{3\times4}{2}$
# de bolitas sombreadas	$\frac{2\times3}{2}-\frac{1\times2}{2}$	$\frac{4\times5}{2}-\frac{2\times3}{2}$	$\frac{6\times7}{2}-\frac{3\times4}{2}$

* Luego para lo pedido será :

$$\underbrace{\frac{50\times 51}{2}-\frac{25\times 26}{2}}_{\text{Mitad}}=950$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 42 :

Calcular la suma de todos los términos del siguiente arreglo :

A) 1000
B) 2000
C) 3000
D) 4000
E) 6400

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 20 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & \dots & 22 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 24 \\ & & & & & \\ 20 & 22 & 24 & 26 & \dots & 38 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES SUMA

Arreglo de :

$1\times 1 \Rightarrow [2] \qquad \Rightarrow 2 = 2\times 1 = 2\times 1^3$

$2\times 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 16 = 2\times 8 = 2\times 2^3$

$3\times 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow 54 = 2\times 27 = 2\times 3^3$

* Luego para el arreglo de 10×10 la suma será :

$2\times 10^3 = 2000$

RPTA : "B"

PROBLEMA 43 :

¿De cuántos lados constará la figura 200 7?.

A) 7002
B) 4004
C) 8027
D) 8008
E) 1608

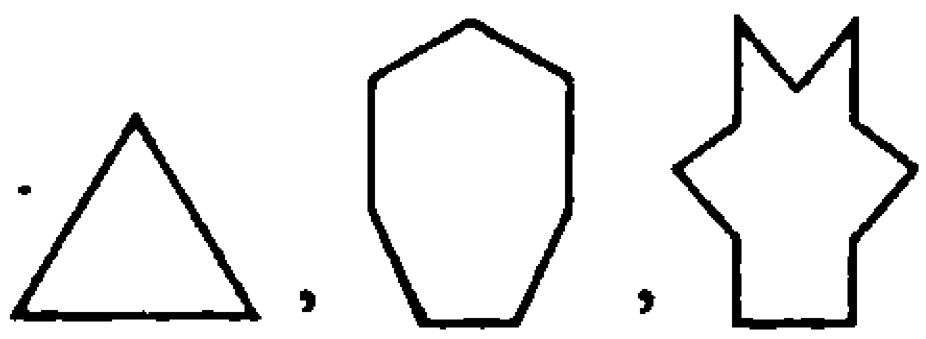


Fig. 1 , Fig. 2 , Fig. 3 , ...

RESOLUCIÓN :

* Considerando el ordinal y contando la cantidad de lados :

Ordinal : 1° 2° 3° .... 2007°

Se deduce: ×4 ↓ −1 ; ×4 ↓ −1 ; ×4 ↓ −1 ; ... ×4 ↓ −1

\# lados: 3 ⟶(×4) 7 ⟶(×4) 11 .... [Progresión Aritmética]

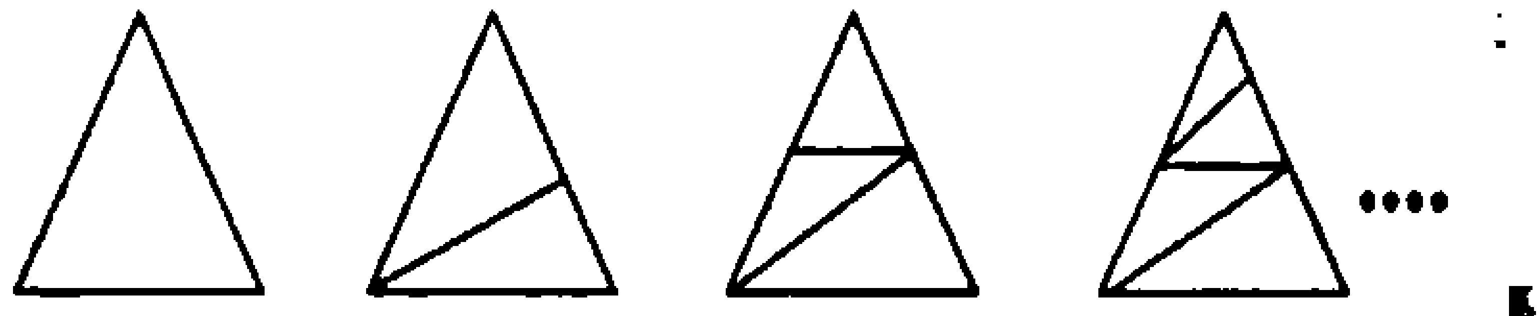
⇒ Número de lados de la *fig. 2007* , será :

$4(2007)-1 = 8027.$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44 :

¿Cuántos triángulos habrá en la figura F_{50}?



F_1 F_2 F_3 F_4 ....

A) 99 B) 101 C) 175 D) 2500 E) 1275

RESOLUCIÓN :

* Apliquemos la inducción:

- F_1: 1 triángulo $= 2(1)-1$
- F_2: 3 triángulos $= 2(2)-1$
- F_3: 5 triángulos $= 2(3)-1$
- F_4: 7 triángulos $= 2(4)-1$

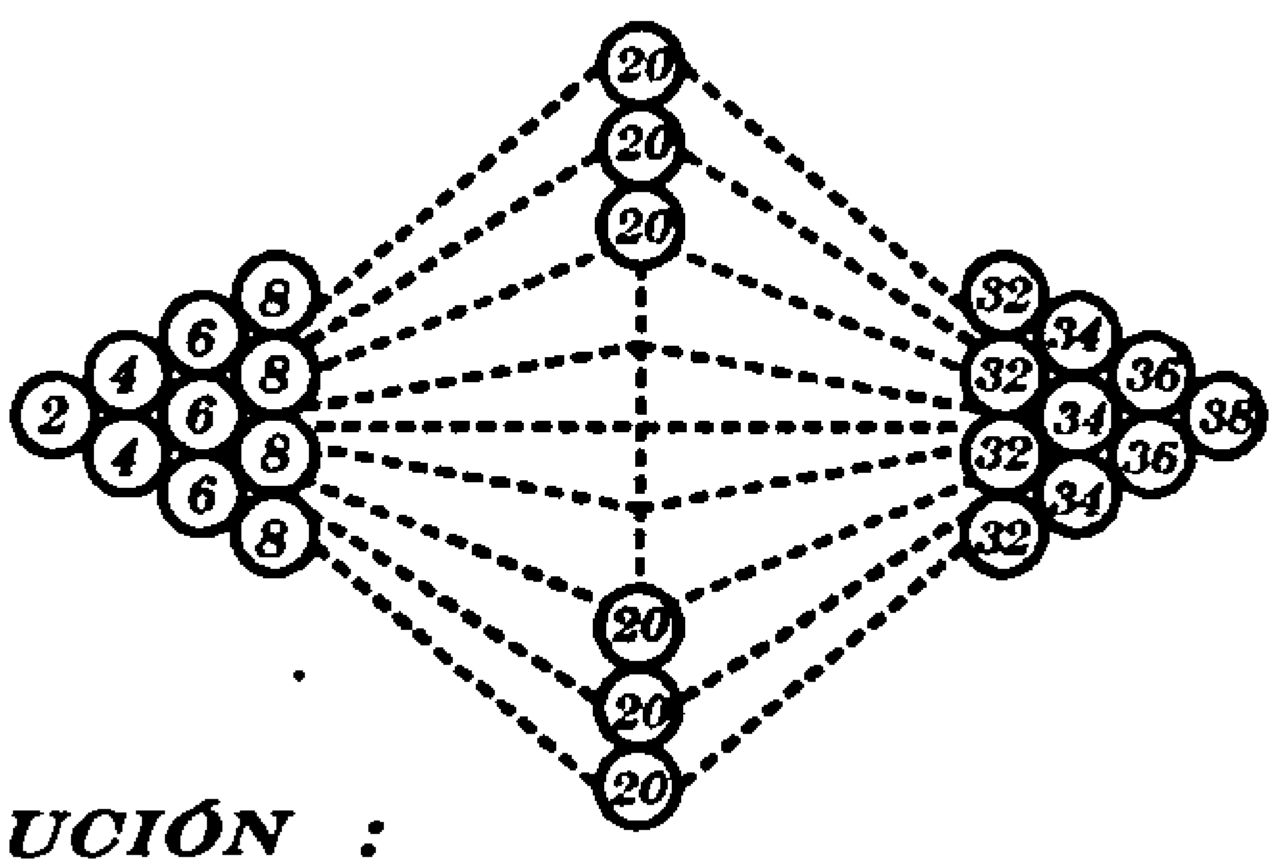
⇒ F50: $2(50)-1 = 99$ triángulos.

RPTA : "A"

PROBLEMA 45 :

Calcular la suma de todos los términos del siguiente arreglo .

A) 3 800
B) 2 000
C) 400
D) 8 000
E) 16 000



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES SUMA DE ELEMENTOS

Caso ⇒ (2) ⇒ $2 = 2\times 1 = 2\times (1^3)$

Caso ⇒ (2)(4)(4)(6) ⇒ $16 = 2\times 8 = 2\times (2^3)$

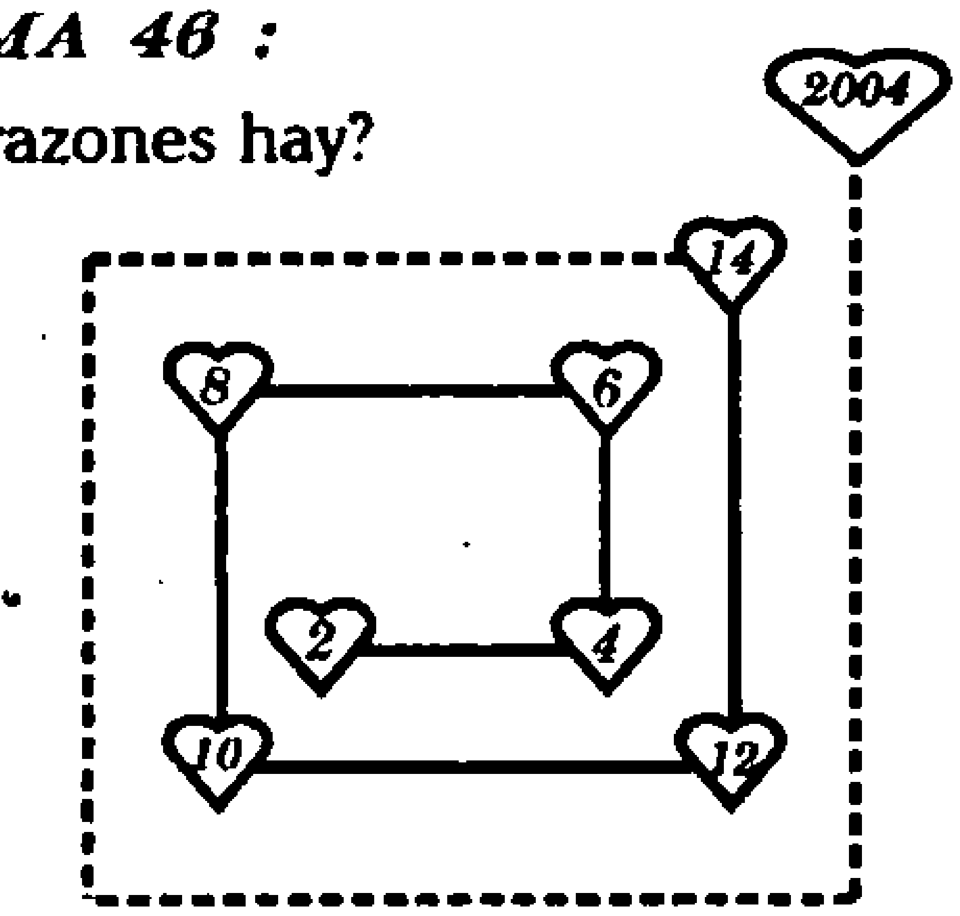
Caso ⇒ (2)(4)(6)(4)(6)(8)(6)(8)(10) ⇒ $54 = 2\times 27 = 2\times (3^3)$

* Nos piden el caso 10 (se deduce) , el cuál produce una suma de elementos a : $2\times (10^3) = 2000.$

RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :

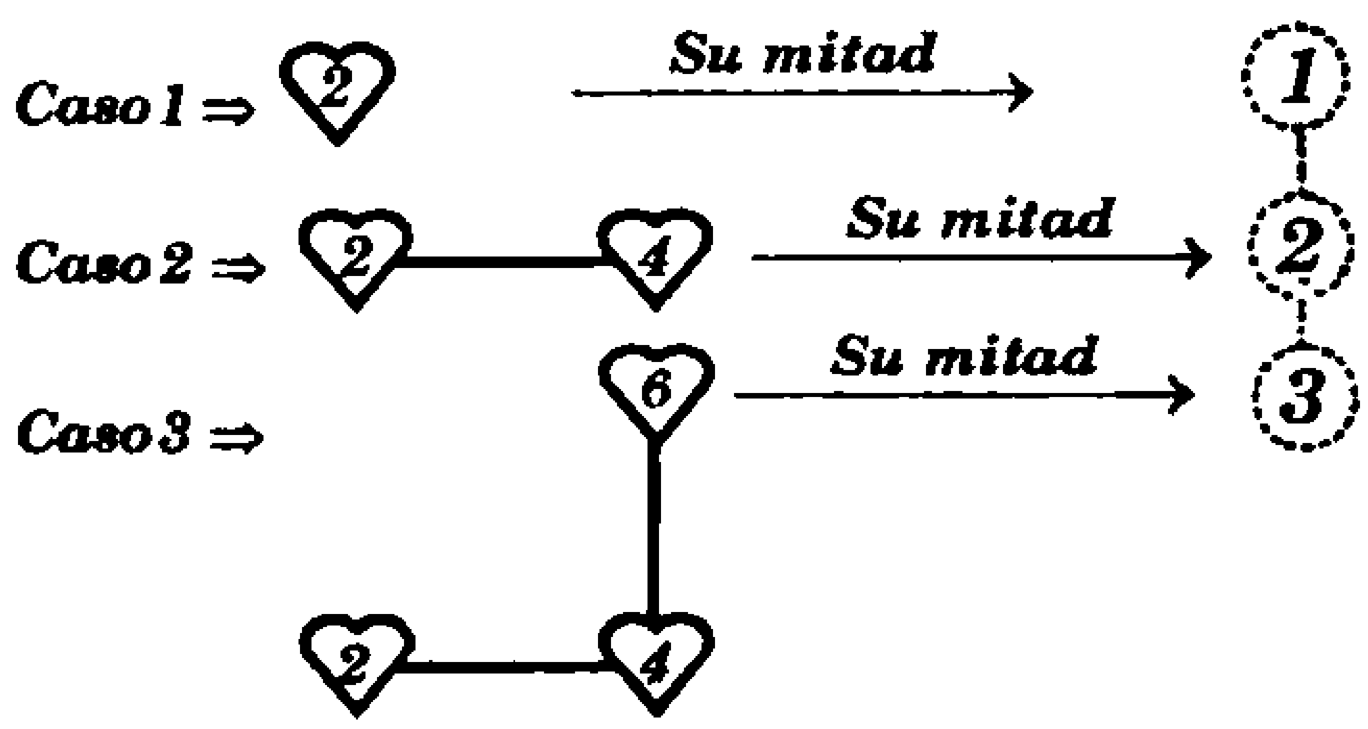
¿Cuántos corazones hay?



A) 2 004
B) 1 001
C) 1 006
D) 1 002
E) 4 008

RESOLUCIÓN :

NÚMEROS DE CORAZONES



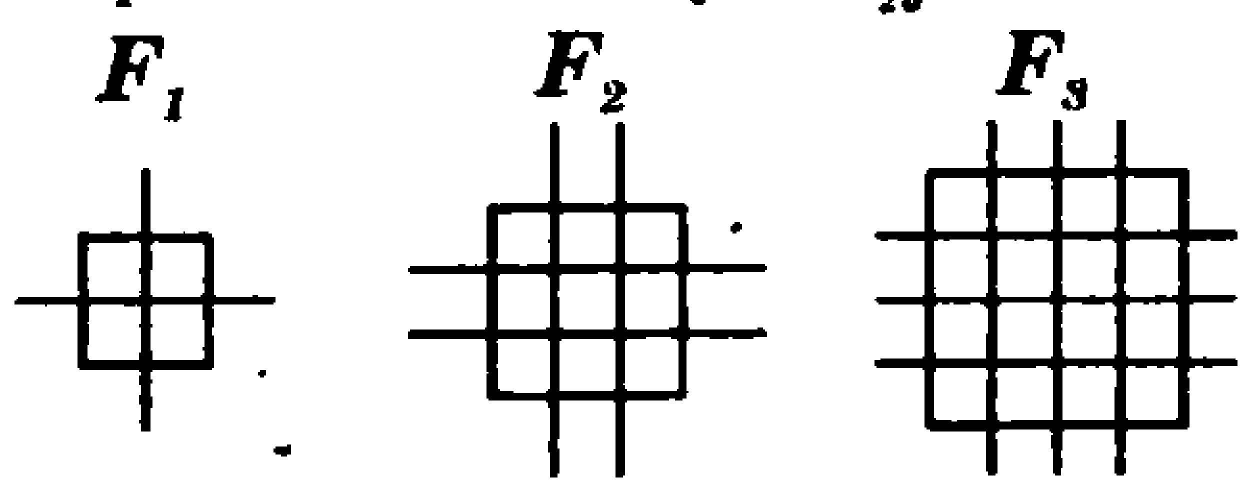
* Entonces se debe deducir que lo requerido será :

$2004 \div 2 = 1002$

RPTA: "D"

PROBLEMA 47 :

¿Cuántos puntos de corte hay en F_{20}?



A) 400 *B) 20* *C) 480* *D) 800* *E) 420*

RESOLUCIÓN :

Número de puntos de corte

Para $F_1 \Rightarrow 5 = (1) \times 5 = 1(1+4)$

Para $F_2 \Rightarrow 12 = (2) \times 6 = 2(2+4)$

Para $F_3 \Rightarrow 21 = (3) \times 7 = 3(3+4)$

* Luego , el número de puntos de corte para F_{20} será :

$20(20+4) = 480$

RPTA : "C"

PROBLEMA 48 :

Calcular : $\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dots+\dfrac{1}{2^{2000}}$

A) $2^{2000}-1$ *B)* $2^{2000}+1$ *C)* $1-2^{2000}$ *D)* $1-2^{-2000}$ *E)* 2^{-2000}

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES		*SUMA*
$\dfrac{1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$	⟶	$\dfrac{2^1-1}{2^1}$
$\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$	⟶	$\dfrac{2^2-1}{2^2}$
$\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{7}{8}$	⟶	$\dfrac{2^3-1}{2^3}$

* Luego la expresión a calcular estará dada por :

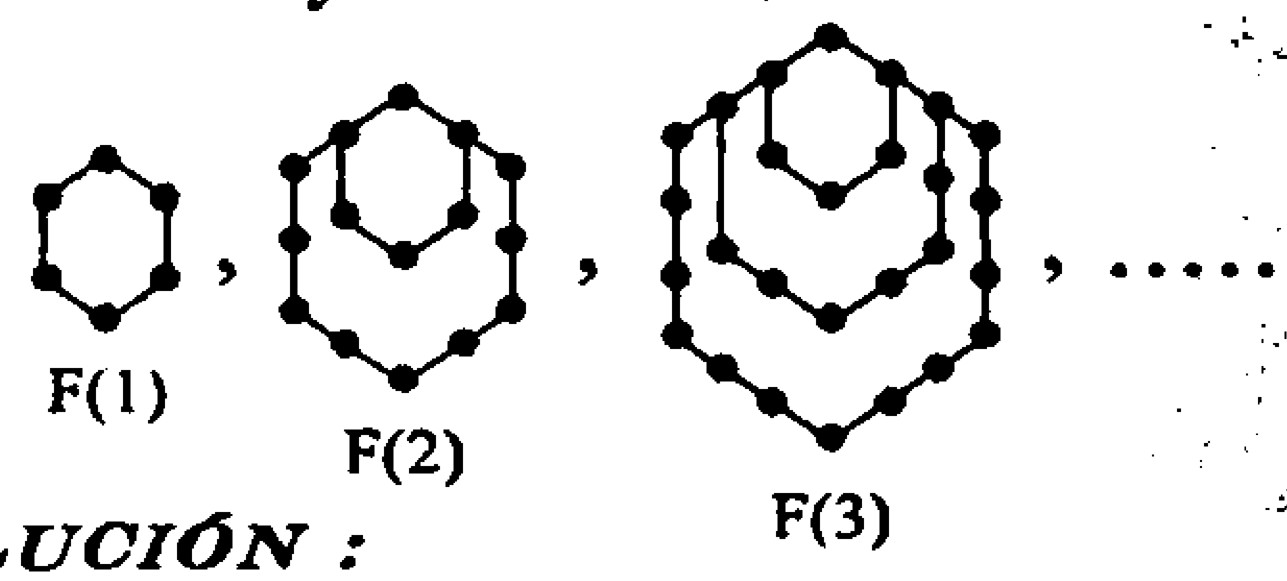
$$\frac{2^{2000}-1}{2^{2000}}=1-2^{-2000}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 49 :

¿Cuántas bolitas hay en total en $F(30)$?

A) 1420
B) 2400
C) 840
D) 1750
E) 900



RESOLUCIÓN :

*Contando las bolitas , para los casos más sencillos :

CASOS PARTICULARES *NÚMERO DE BOLITAS*

$F(1) \longrightarrow 6 = (2) \times 3$ ($\times 2 - 1$)

$F(2) \longrightarrow 15 = (3) \times 5$ ($\times 2 - 1$)

$F(3) \longrightarrow 28 = (4) \times 7$ ($\times 2 - 1$)

$F(30) \longrightarrow (30) \times 59 = 1750$ ($\times 2 - 1$)

Esta regla se tendrá que deducir

RPTA : "D"

PROBLEMA 50 :

Calcular la suma total de:

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
  ...
1  13 ............... 13  1
```

A)16 242 *B)17 361* *C)16421* *D)16 381* *E)16 383*

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES ***SUMA TOTAL***

1 → $1 \text{ fila} \rightarrow 1 = 2^1 - 1$

1
1 1 → $2 \text{ filas} \rightarrow 3 = 2^2 - 1$

1
1 1
1 2 1 → $3 \text{ filas} \rightarrow 7 = 2^3 - 1$

* Se deduce que en lo pedido hay *14* filas , por lo que la suma total será : $2^{14} - 1 = 16\ 383$

RPTA : "E"

PROBLEMA 51 :

¿Cuántos triángulos en total se cuentan en la figura *40*?

A) 300
B) 162
C) 762
D) 192
E) 112

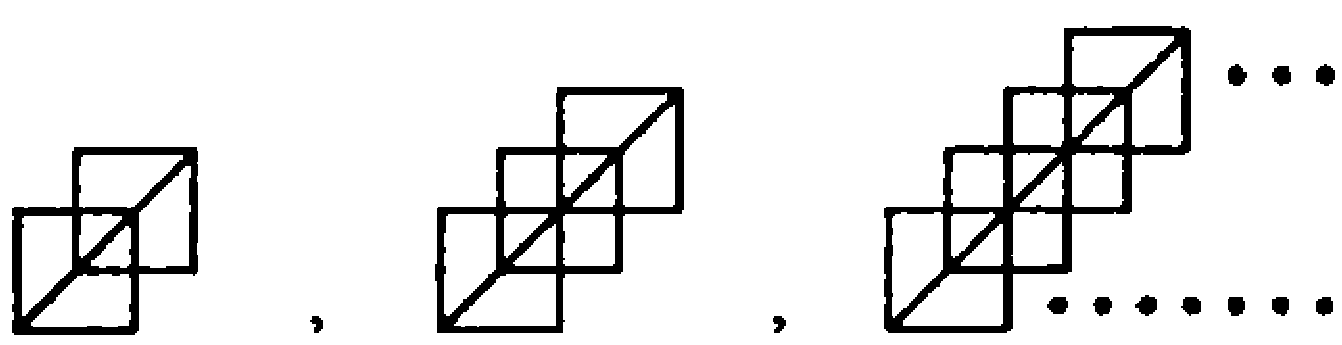


Fig. 1 , Fig. 2 , Fig. 3

RESOLUCIÓN :

* Contando la cantidad de triángulos por simple inspección de cada figura :

CASOS PARTICULARES ***# DE TRIÁNGULOS***

Fig. 1 ⟶ $6 = 4(1) + 2$
+4
Fig. 2 ⟶ $10 = 4(2)\ 2$
+4
Fig. 3 ⟶ $14 = 4(3) + 2$ ⟶ *Se deduce*
⋮
Fig. 40 ⟶ $4(40) + 2 = 162$

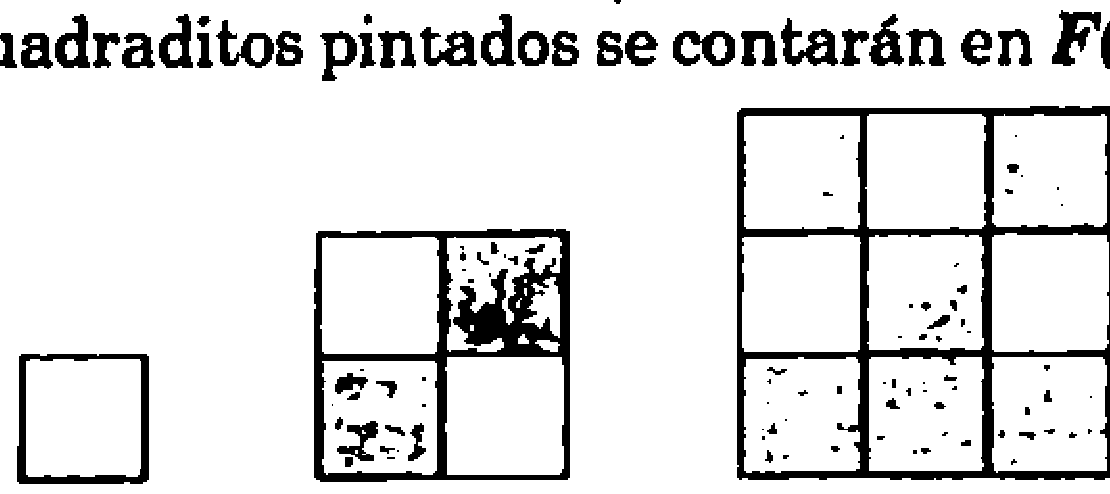
se descubre con ayuda de la razón aritmética

RPTA: "B"

PROBLEMA 52 :

¿Cuántos cuadraditos pintados se contarán en *F(25)*?

A) 400
B) 900
C) 600
D) 625
E) 490



F(1) F(2) F(3)

RESOLUCIÓN :

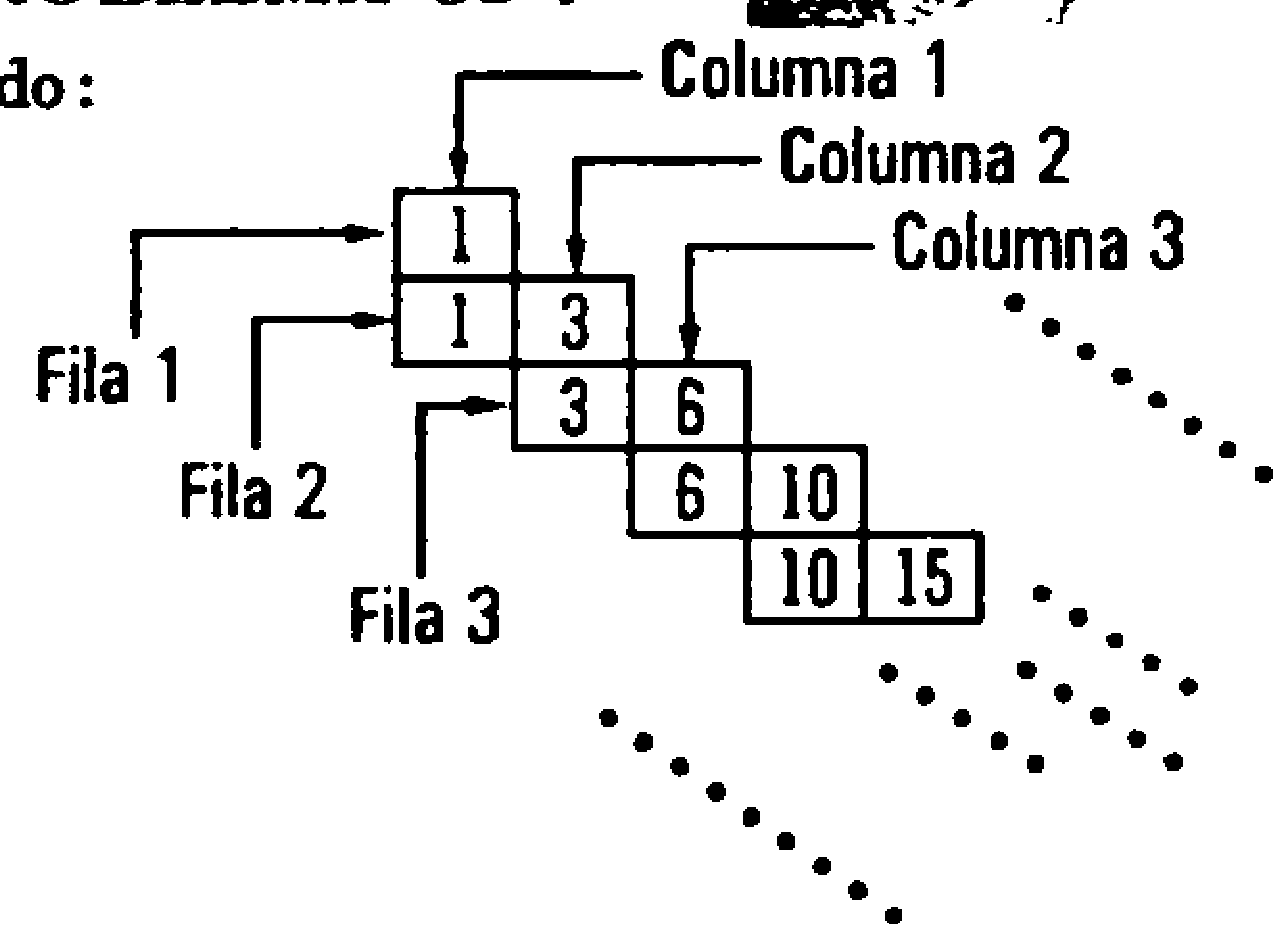
* Por inducción : ***F(1) ; F(2) ; F(3)***
* Para :
 # DE CUADRADITOS PINTADOS ↓ 0, 2, 6
↓ 1×0, 2×1, 3×2

*Luego para ***F(25)*** habrán $25 \times 24 = 600$ cuadraditos pintados .

RPTA : "C"

PROBLEMA 53 :

Dado :



Calcular la suma de los elementos de la "fila *2002*" y agregarle la suma de los elementos de la "columna *2003*".

A) 6001012 ***B) 4008004*** ***C) 8022016***
D) 4014012 ***E) 4000004***

RESOLUCIÓN :

* Analicemos casos particulares, para las filas :

Se ha formado la secuencia de los cuadrados (Ley de formación) .

Suma de elementos

Fila 1 ⟶	$1 = 1 = 1^2$	***Se ha formado la secuencia de los cuadrados (Ley de formación).***
Fila 2 ⟶	$1 + 3 = 4 = 2^2$	
Fila 3 ⟶	$3 + 6 = 9 = 3^2$	

* Luego la suma de los elementos de la "fila *2002*" será : $2002^2 = 4008004$

* Ahora consideramos , casos particulares para las columnas:

Suma de elementos

Columna 1 ⟶ $1 + 1 = 2 = (1) \times 2$
Columna 2 ⟶ $3 + 3 = 6 = (2) \times 3$
Columna 3 ⟶ $6 + 6 = 12 = (3) \times 4$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Columna 2003 ⟶ $2003 \times 2004 = 4014012$

* La expresión pedida será :

$$4008004 + 4014012 = 8022016$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 54 :

En qué cifras terminan las siguientes expresiones :

$F = (7+1)(7^2+1)(7^3+1)\ldots(7^{800}+1)+8$

$T = (3-1)(3^2-1)(3^3-1)\ldots(3^{400}-1)-7$

$D = (10+1)(10^2+3)(10^3+5)\ldots(10^{500}+999)-1$

A) 0 ; 5 y 0 B) 0 ; 0 y 5 C) 8 ; 3 y 4
D) 4 ; 0 y 8 E) 3 ; 3 y 4

RESOLUCIÓN :

$F = (7+1)(\ldots 0)\ldots + 8 = \ldots 8$ (Cero)

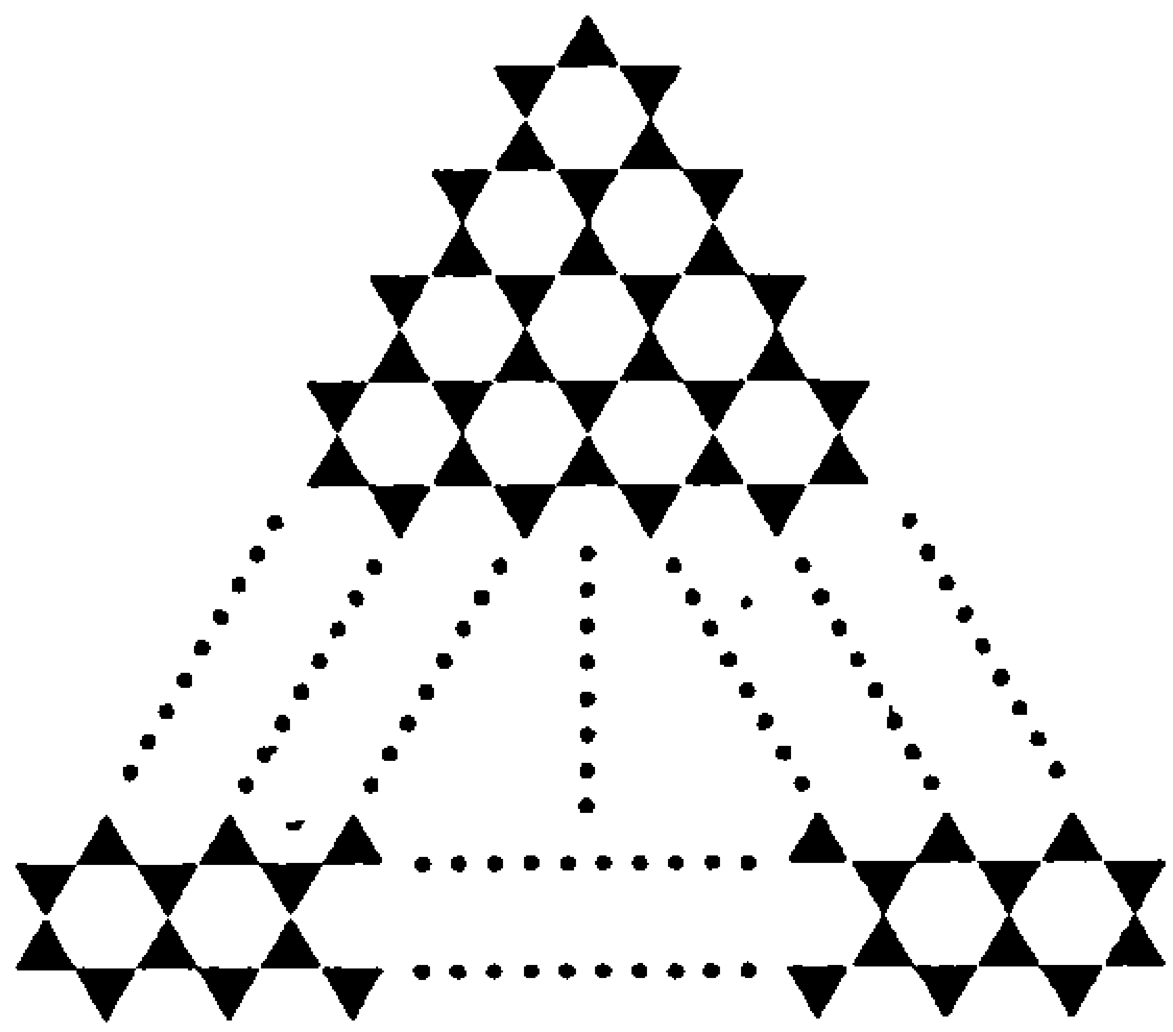
$T = (3-1)(3^2-1)(3^3-1)(\ldots 0)\ldots -7 = \ldots 3$ (Cero)

$D = (impar)(impar)(\ldots 5)\ldots -1 = \ldots 4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 55 :

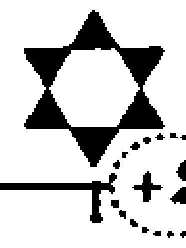
¿Cuántos triángulos totalmente sombreados hay en :

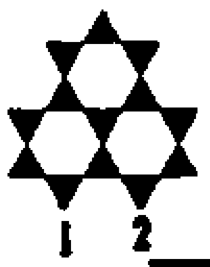


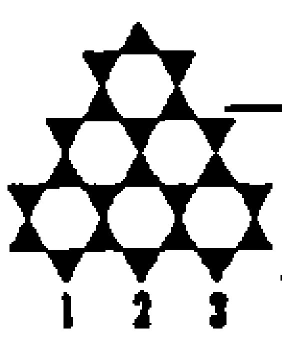
A) 1021 B) 900 C) 930 D) 450 E) 465

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE ∆S (CONTANDO POR SIMPLE INSPECCIÓN)


⟶ $6 = 9 - 3 = 3^2 - 3$ (+2)


⟶ $13 = 16 - 3 = 4^2 - 3$ (+2)


⟶ $22 = 25 - 3 = 5^2 - 3$ (+2)

* Luego para la figura dada, la expresión a calcular será : $(30+2)^2 - 3 = 32^2 - 3 = 1021$

RPTA : "A"

PROBLEMA 56 :

Hallar la suma de las cifras del resultado final de :

$$\underbrace{8 + 98 + 998 + 9998 + \ldots\ldots}_{45\ SUMANDOS}$$

A) 45 B) 44 C) 46 D) 47 E) 48

RESOLUCIÓN :

* Piden :

$10^1 - 2 + 10^2 - 2 + 10^3 - 2 + \cdots + 10^{45} - 2$

$\underbrace{(10^{45} + 10^{44} + 10^{43} + \cdots + 10^1) - 2 \times 45}$

$\underbrace{111 \cdots\cdots 110 - 90}_{46\ cifras}$

$= \underbrace{111 \cdots\cdots 111020}_{46\ cifras}$

* La expresión a calcular será :

$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots\cdots}_{43\ Sumandos} + 2 = 45$

RPTA : "A"

PROBLEMA 57 :

Calcular la suma de las *30* primeras filas en el triángulo numérico siguiente:

F_1 ⟶ 1
F_2 ⟶ 3 3
F_3 ⟶ 5 2 5
F_4 ⟶ 7 2 2 7
⋮ 9 2 2 2 9
⋮

A) 8001 B) 8341 C) 1221 D) 2671 E) 2809

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES :

$F_1 \to 1$

$F_1 + F_2 \to 1 + 6 = 1 + 6(1)$

$F_1 + F_2 + F_3 \to 1 + 6 + 12 = 1 + 6(1+2)$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$\to 1 + 6 + 12 + 18 = 1 + 6(1+2+3)$ (+1)

⋮

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{30} = 1 + 6\underbrace{(1+2+3+\ldots+29)}_{Número\ triangular}$$

$$\Rightarrow F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{20} = 1 + 6\left(\frac{29\times 30}{2}\right) = 2671$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 58 :

Si: $(2a+b)^{-c} = \frac{1}{5}$ entonces el valor de: $(b^2+4ab+4a^2)^{-c}$ es :

A) $\frac{1}{25}$ *B)* 125 *C)* $\frac{1}{125}$ *D)* 25 *E)* 5

RESOLUCIÓN :

* Elevando al cuadrado :

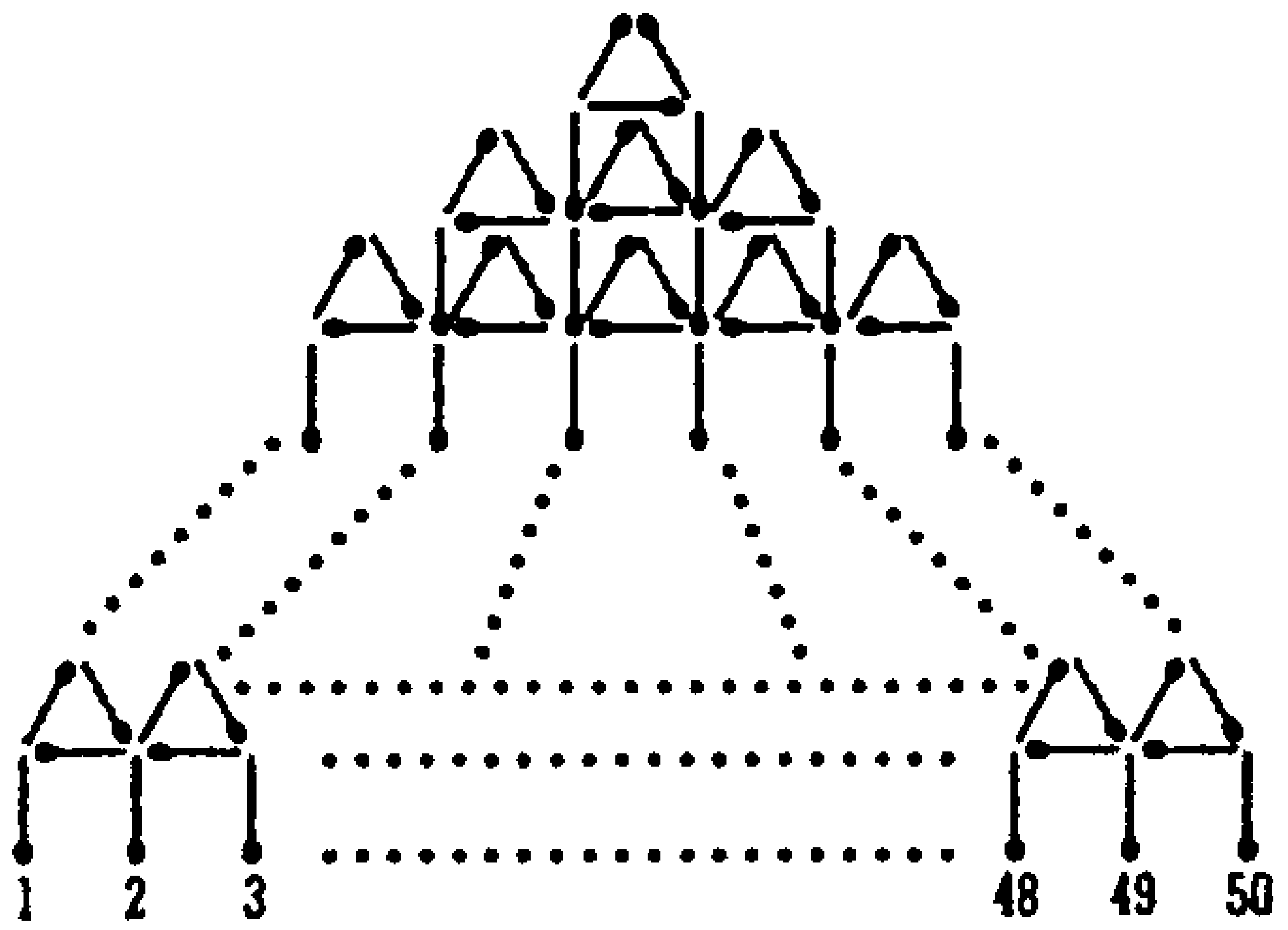
$$[(2a+b)^2]^{-c} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{(4a^2+4ab+b^2)^c} = \frac{1}{25} \rightarrow (b^2+4ab+4a^2)^c = 25$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 59 :

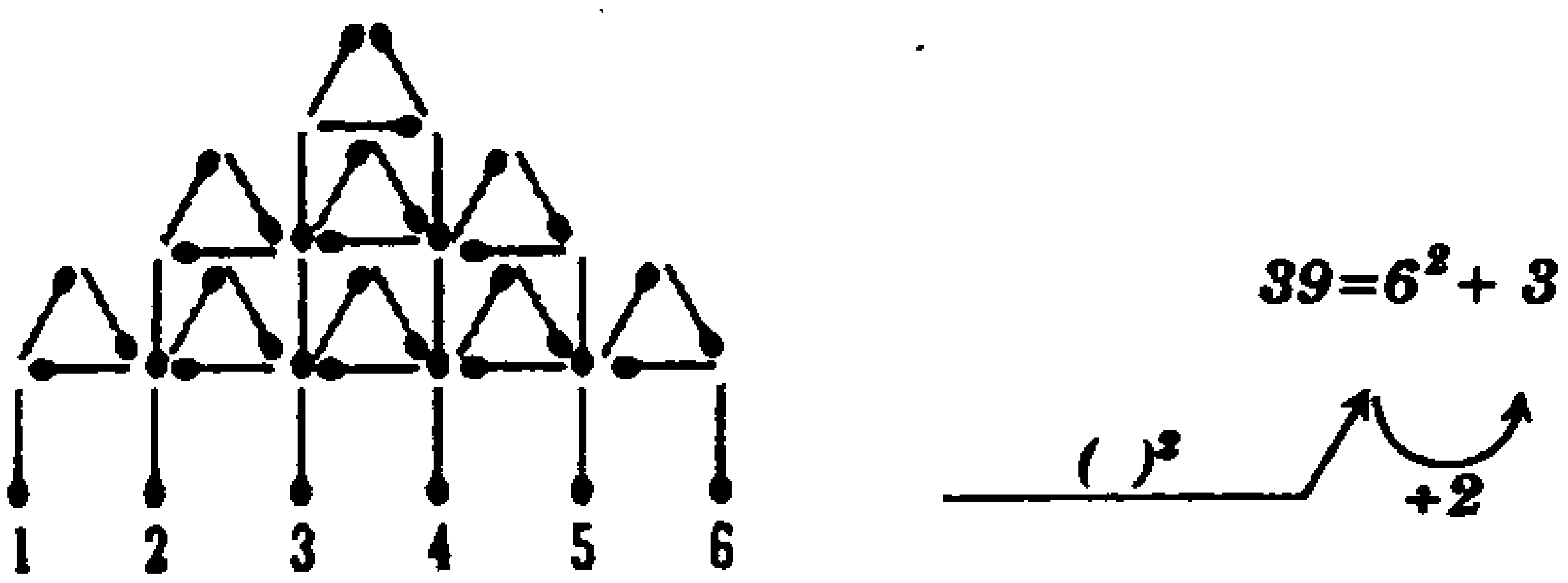
Calcular el número de palitos en el siguiente castillo:



A) 2500 *B)* 5000 *C)* 2525 *D)* 5050 *E)* 750

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **NÚMERO DE PALITOS**



* Luego el número de palitos para lo pedido, será:

$$50^2 + 25 = 2525$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 60 :

El número de cifras de un número positivo A es el doble del número de cifras del número positivo B y el cuádruple del número de cifras del número positivo C. Si D tiene de cifras $(d>4)$, entonces el número mínimo de cifras de $\frac{A^3\,D}{B^4\,C^4}$ es :

A) $d+6$ *B)* $d+3$ *C)* d *D)* $d-3$ *E)* $d-6$

RESOLUCIÓN :

\# cifras (A) = 4n ➡ $10^{12n-3} \le A^3 < 10^{12n}$

\# cifras (B) = 2n ➡ $10^{8n-4} \le B^4 \le 10^{8n}$

\# cifras (C) = n ➡ $10^{4n-4} \le C^4 \le 10^{4n}$

\# cifras (D) = d ➡ $10^{d-1} \le D < 10^d$

* Luego :

$$10^{12n+d-4} \le A^3\ D < 10^{12n+d}$$

$$10^{12n} > B^4\ C^4 \ge 10^{12n-8}$$

$$10^{d-4} \le \frac{A^3\,D}{B^4\,C^4} < 10^{d+8}$$

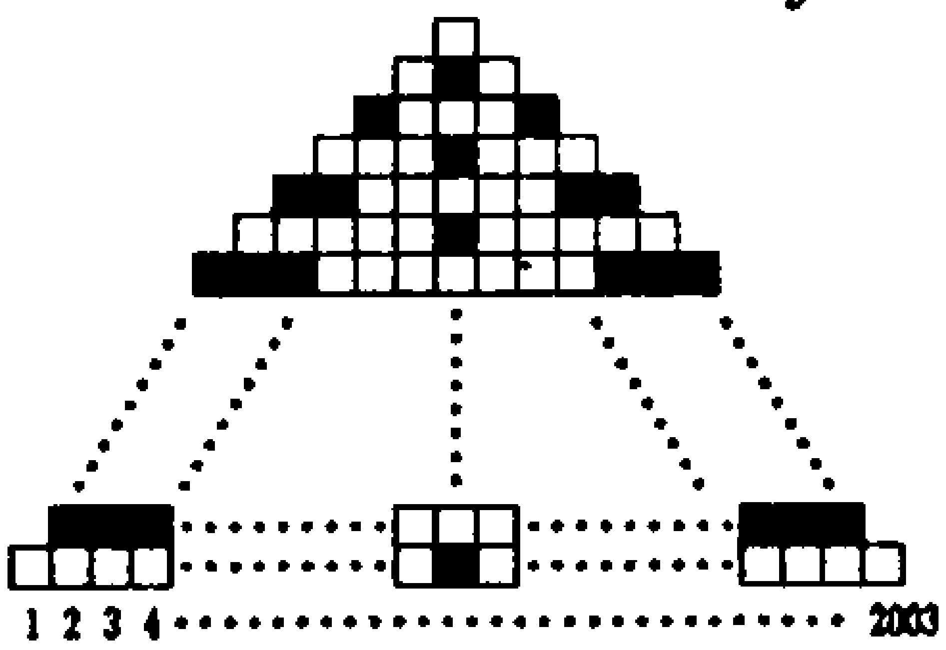
$\Rightarrow$ Menor # de cifras $= d-4+1 = d-3$

RPTA : "D"

PROBLEMA 61 :

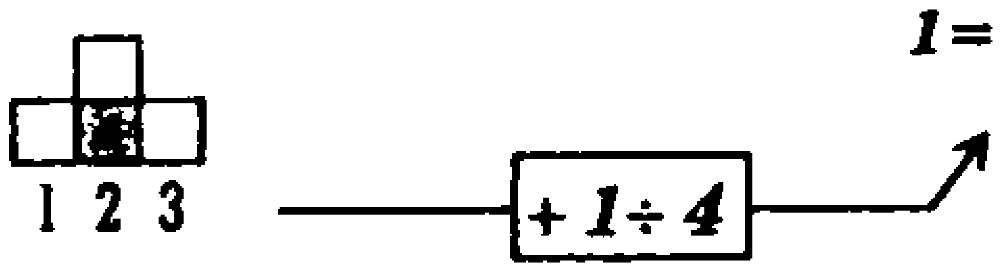
¿Cuántos cuadraditos sombreados hay en total?

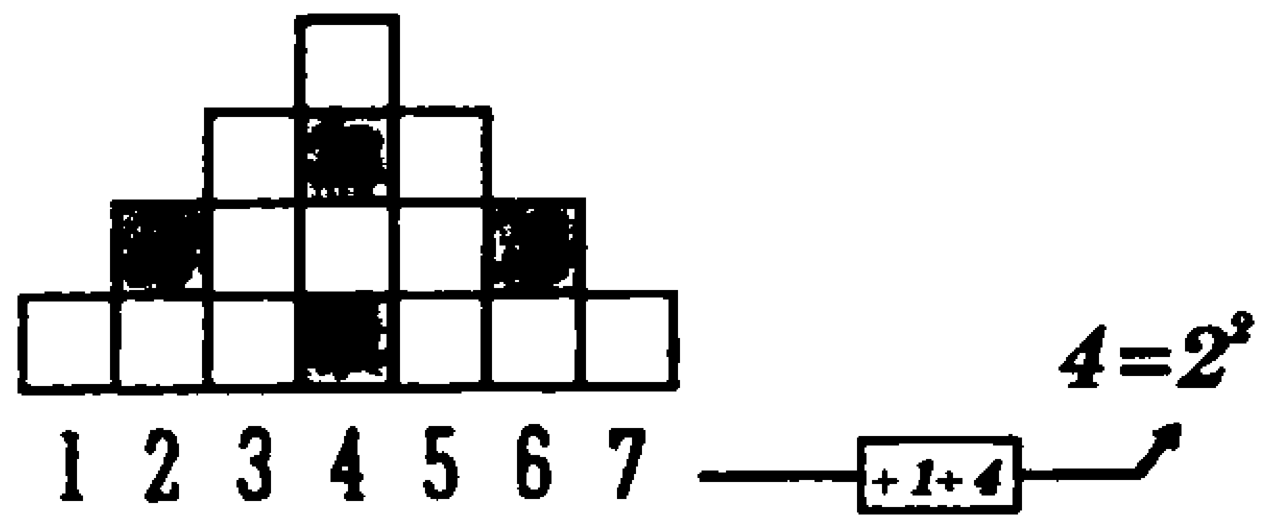
A) 20300
B) 40090
C) 1001
D) 8009
E) 251001

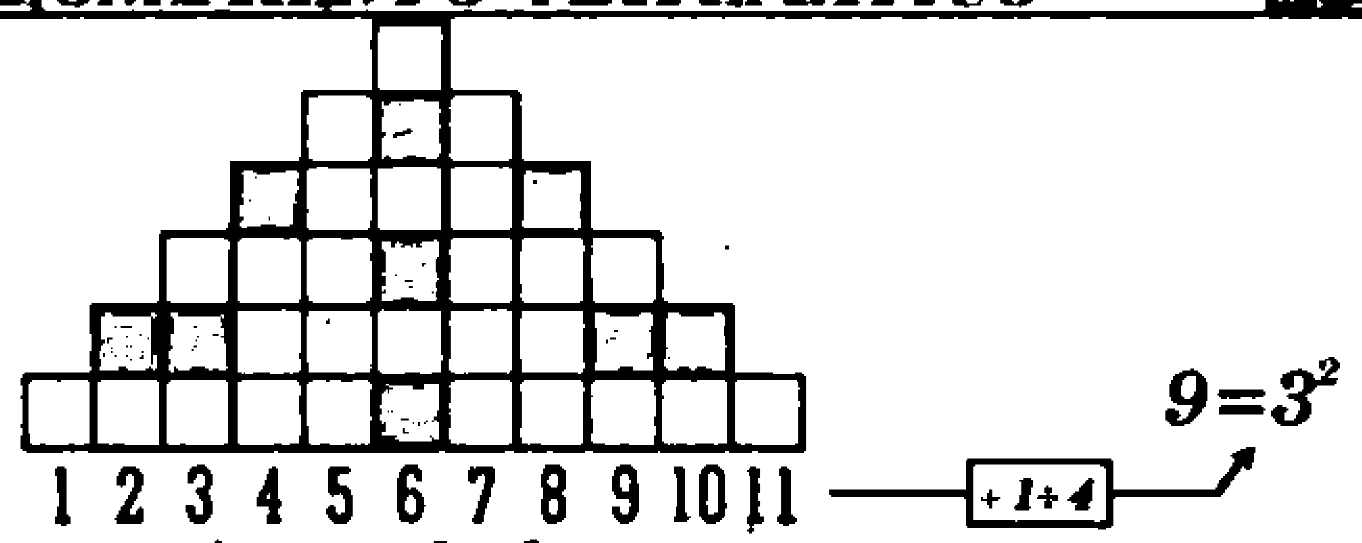


RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE CUADRADITOS SOMBREADOS**







* La expresión a calcular será :

$$\left(\frac{2003+1}{4}\right)^2 = 501^2 = 251001$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 62 :

Calcular la suma de los números ubicados en los casilleros sombreados de *Fig. 85.*

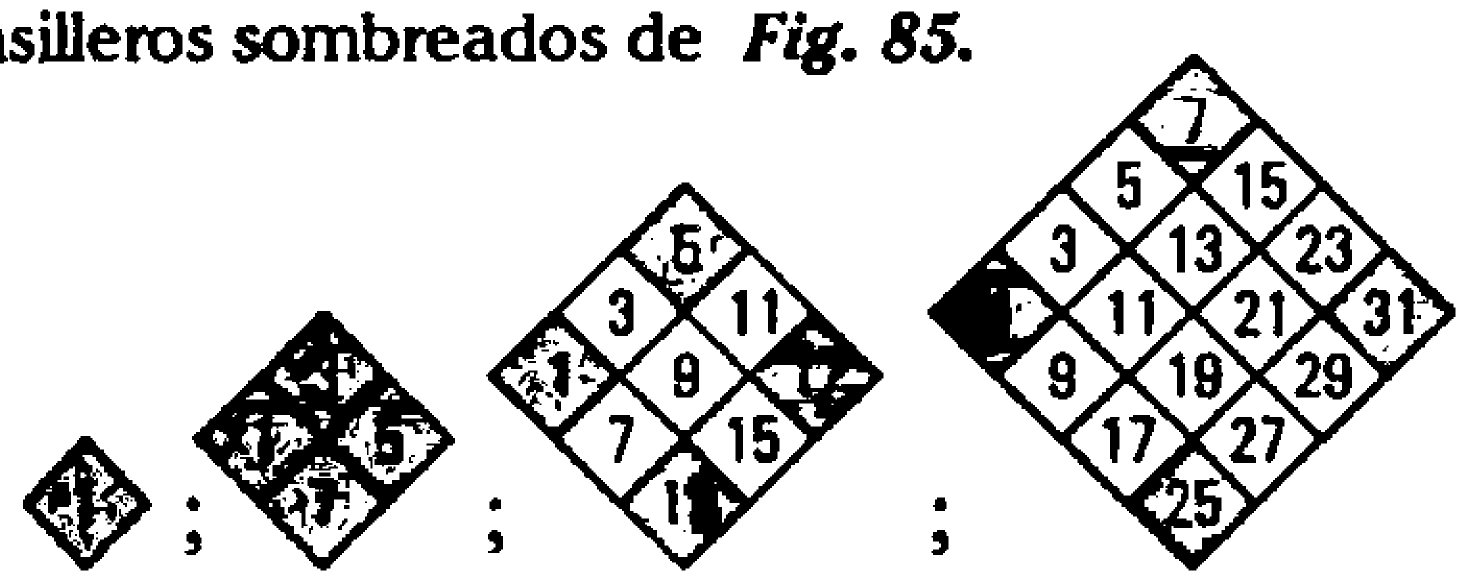


Fig. 1 ; *Fig. 2* ; *Fig. 3* ; *Fig. 4*

A) 7255 B) 82500 C) 28900 D) 85000 E) 170000

RESOLUCIÓN :

Fila 1 $\underbrace{1+1+1+1}_{\text{Un 1 por cada esquina}} = 4 = 4\times1 = 4\times1^2$

Fila 2 $1+3+5+7 = 16 = 4\times4 = 4\times2^2$

Fila 3 $1+5+17+13 = 36 = 4\times9 = 4\times3^2$

* Luego la expresión a calcular será :

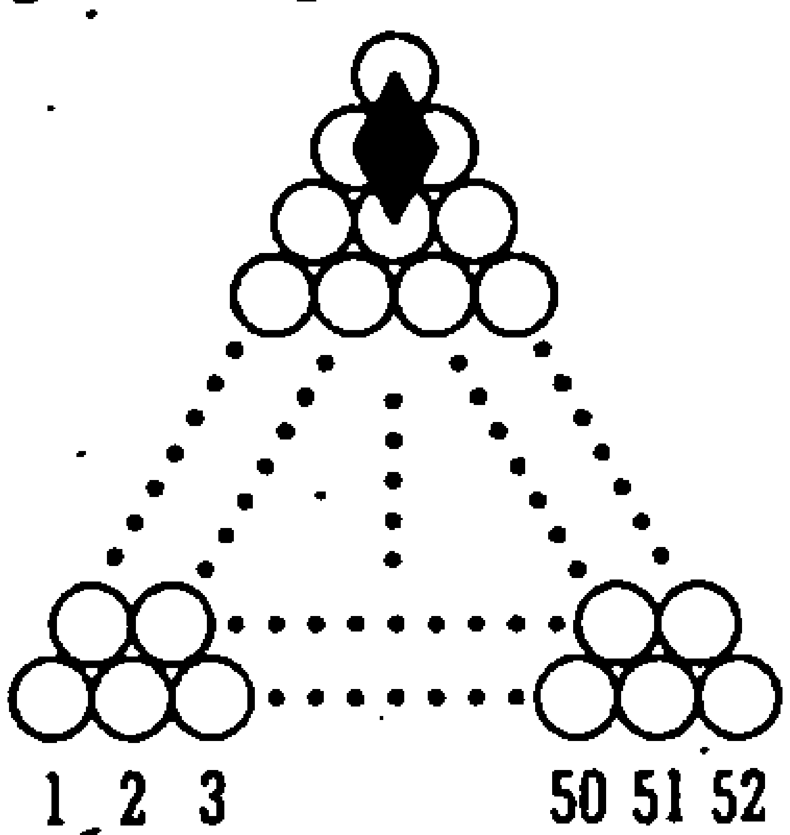
Fila 85... 4 $\times 85^2 = 4\times7225 = 28900$

RPTA : "C"

PROBLEMA 63 :

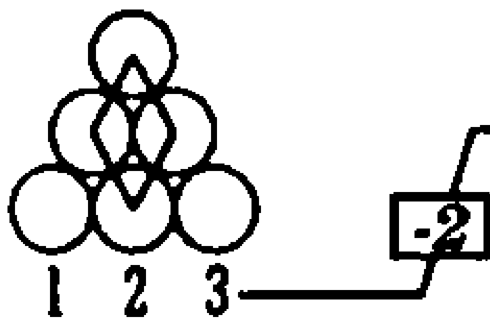
¿Cuántos rombos del tamaño indicado se pueden contar en la siguiente figura?

A) 1275
B) 2550
C) 5050
D) 2804
E) 2909

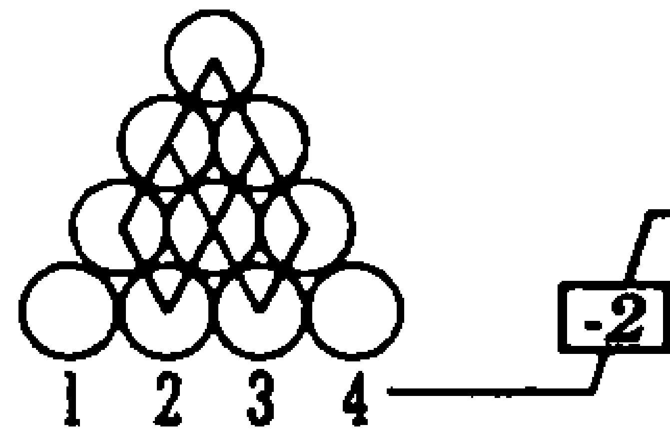


RESOLUCIÓN :

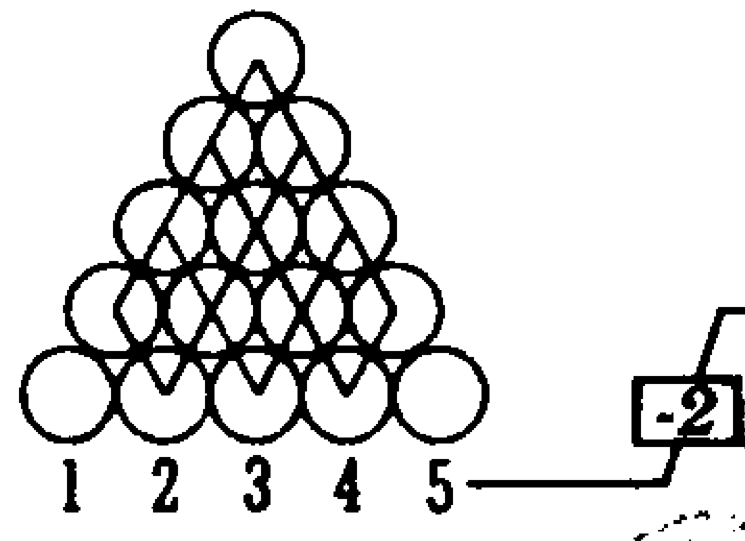
CASOS PARTICULARES   NÚMERO DE ROMBOS



$$1 = \frac{2}{2} = \frac{1\times2}{2}$$



$$3 = \frac{6}{2} = \frac{2\times3}{2}$$



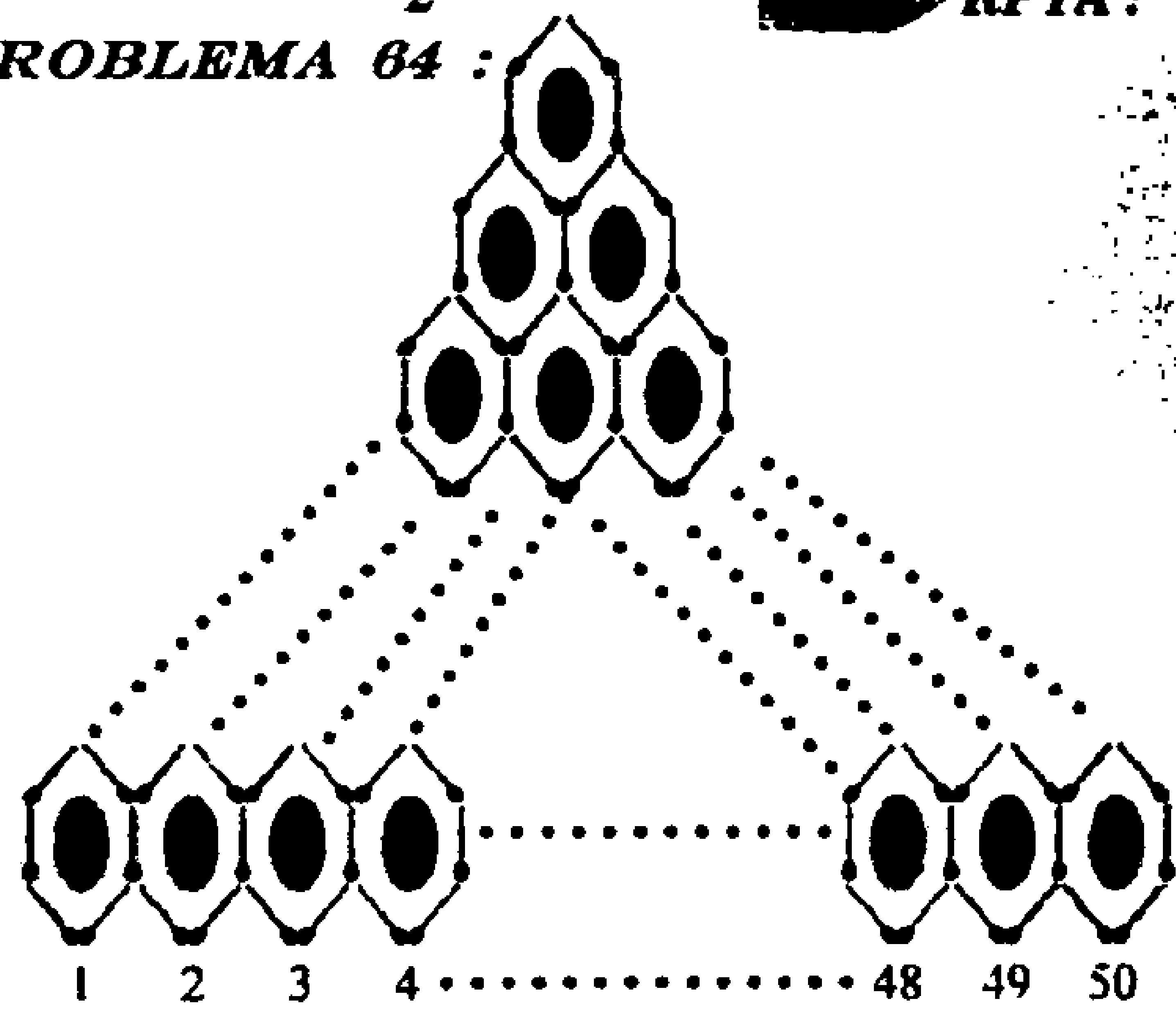
$$3 = \frac{12}{2} = \frac{3\times4}{2}$$

* Luego la expresión pedida será :

$$\boxed{52\text{-}2}\quad \frac{50\times51}{2} = 1275$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 64 :



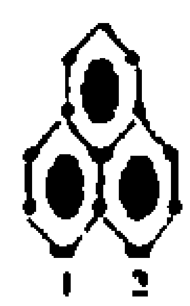
Calcular el número total de palitos empleados en la construcción del siguiente panal .

A) 3975 B) 1825 C) 2550 D) 5050 E) 2500

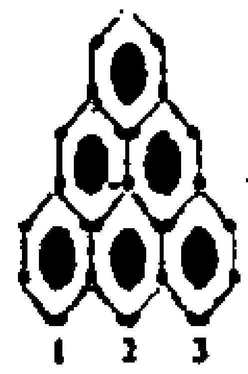
RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES   NÚMERO DE PALITOS

$\longrightarrow 6 = 3\times2 = 3(1+1)$



$\longrightarrow 15 = 3\times5 = 3(1+2+2)$



$\longrightarrow 27 = 3\times9 = 3(1+2+3+3)$

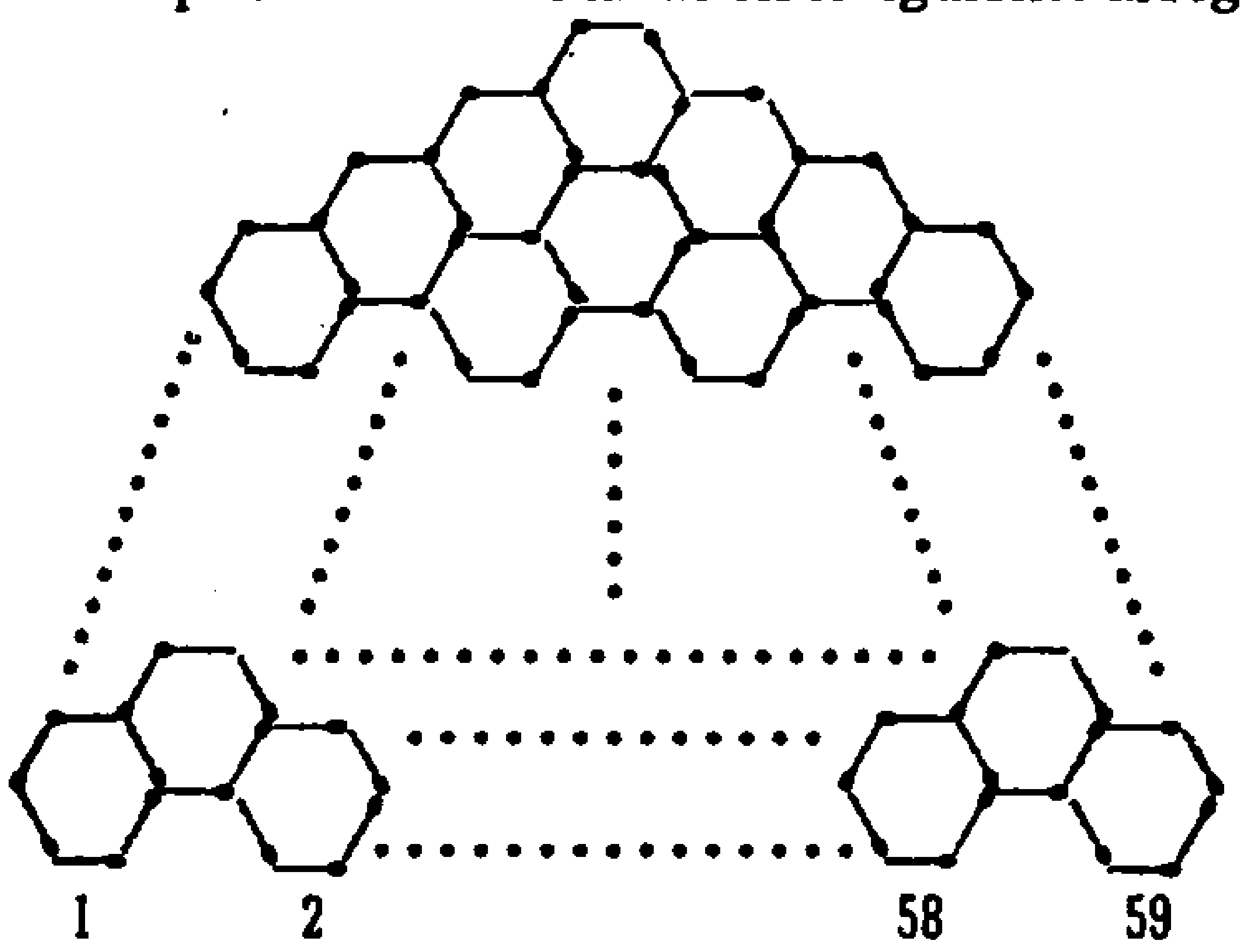
* Luego la expresión a calcular será :

$$3(1+2+3+.......+50+50) = 3\left[\left(\frac{50\times51}{2}\right)+50\right] = 3975$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 65 :

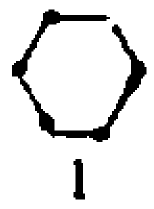
¿Cuántos palitos se ha utilizado en el siguiente arreglo?



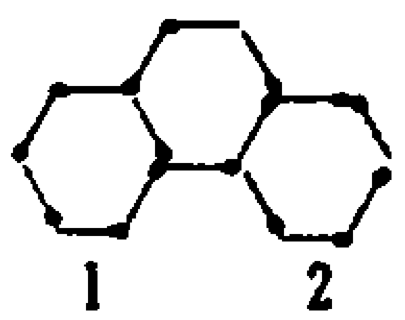
A)5555 B)5540 C)5545 D) 5547 E)5550

RESOLUCIÓN :

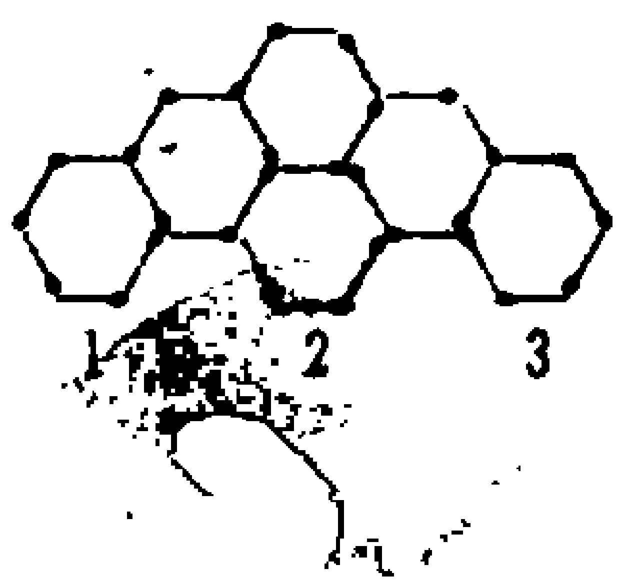
CASOS PARTICULARES **# DE PALITOS**



$6 = 1 + 2 + 3$; $\frac{1\times 2}{2}$; 1×2 ; $4(1)-1$



$16 = 3 + 6 + 7$; $\frac{2\times 3}{2}$; 2×3 ; $4(2)-1$



$29 = 6 + 12 + 11$; $\frac{3\times 4}{2}$; 3×4 ; $4(3)-1$

* Con lo que se deduce , que el número de palitos de la figura dada será : $\frac{59\times 60}{2} + 59\times 60 + 4(59) - 1 = 5545$

RPTA : "C"

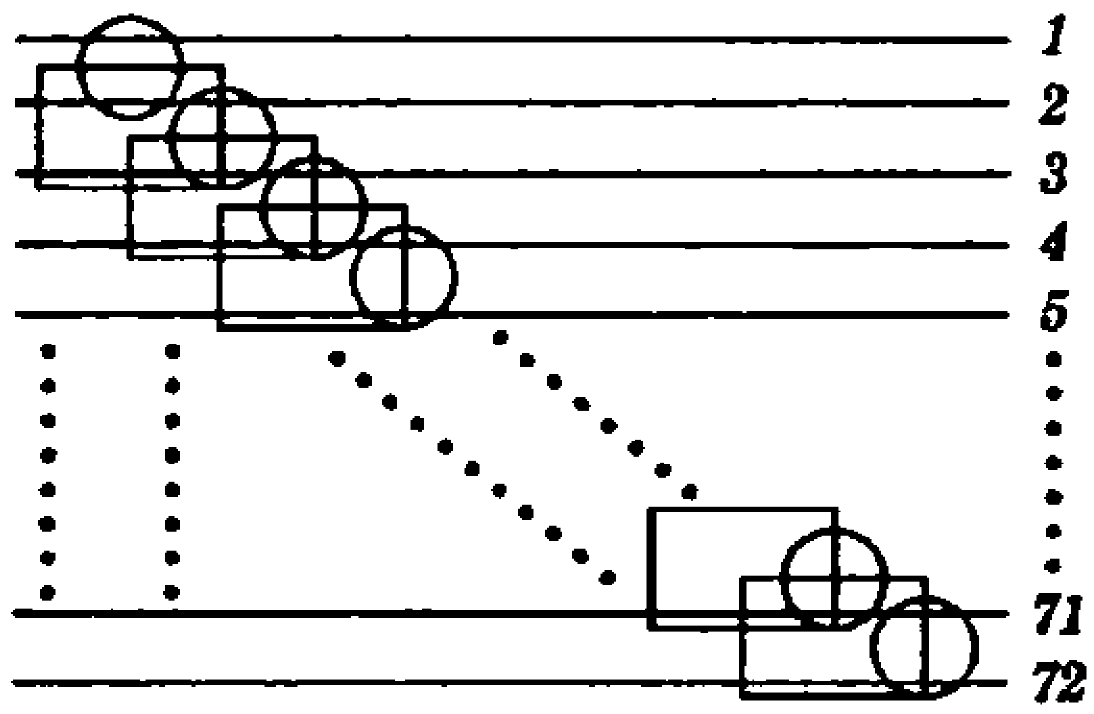
NOTA :

Más adelante , aprenderás a obtener el término enésimo de una sucesión cuadrática , pero por el momento , solamente nos queda alucinar con los números que sean conocidos , como por ejemplo : con los triangulares

$$\left(\left\{1;3;6;10;\ldots;\frac{n(n+1)}{2}\right\}\right)$$

PROBLEMA 66 :

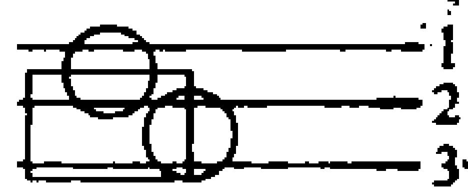
¿Cuántos puntos de intersección hay?



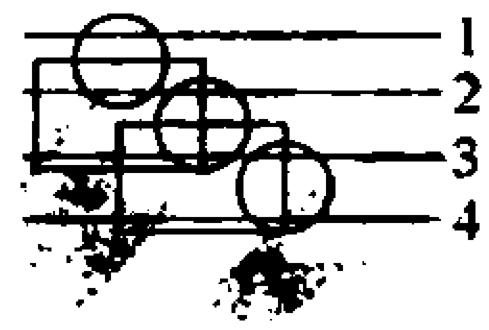
A) 720
B) 1440
C) 982
D) 780
E) 1024

RESOLUCIÓN :

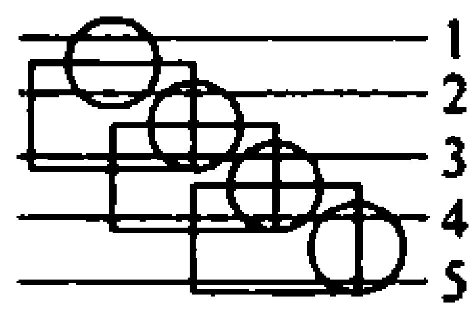
CASOS PARTICULARES **# DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN**



$16 = 14(1) + 2$



$30 = 14(2) + 2$



$44 = 14(3) + 2$

* Luego lo pedido será :

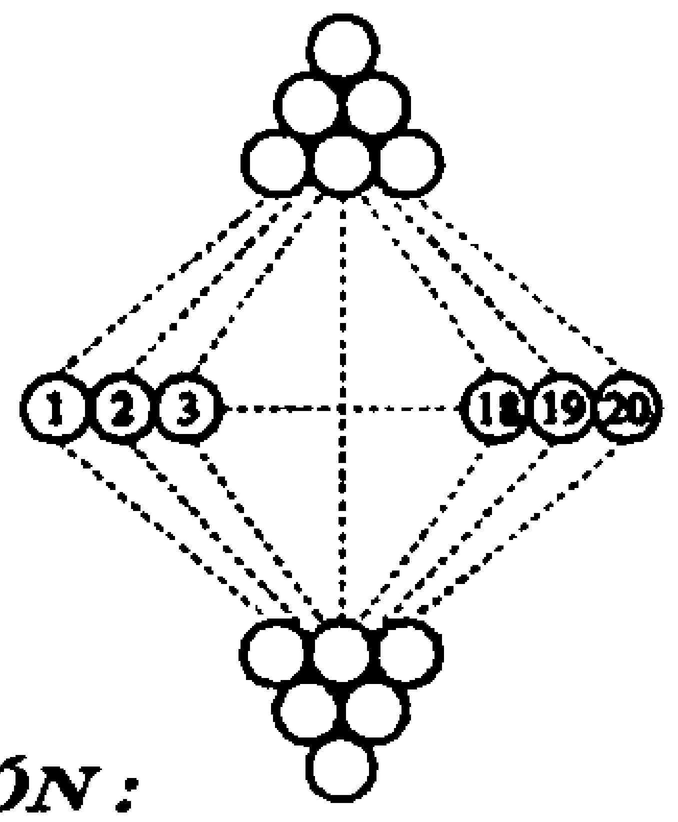
$14\,(70) + 2 = 982$; $72 - 2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 67 :

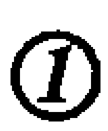
Calcular el número total de esferitas en :

A) 400
B) 200
C) 800
D) 210
E) 420

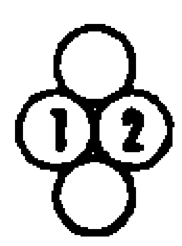


RESOLUCIÓN :

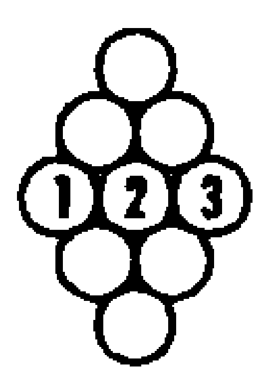
CASOS PARTICULARES **# DE ESFERITAS**



$\longrightarrow 1 = 1^2$



$\longrightarrow 4 = 2^2$



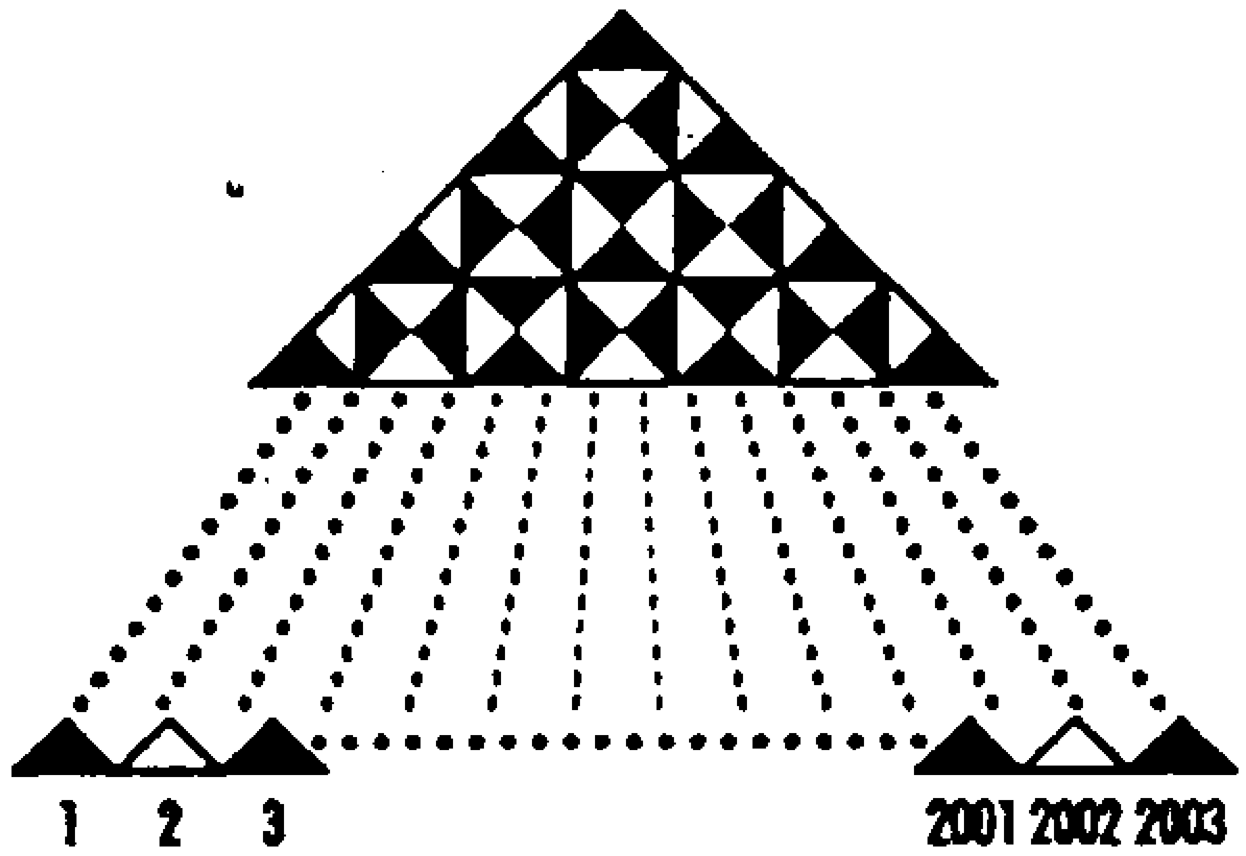
$\longrightarrow 9 = 3^2$

* Luego lo que nos piden será : $20^2 = 400$

RPTA : "A"

PROBLEMA 68 :

¿Cuántos triángulos totalmente sombreados hay en?

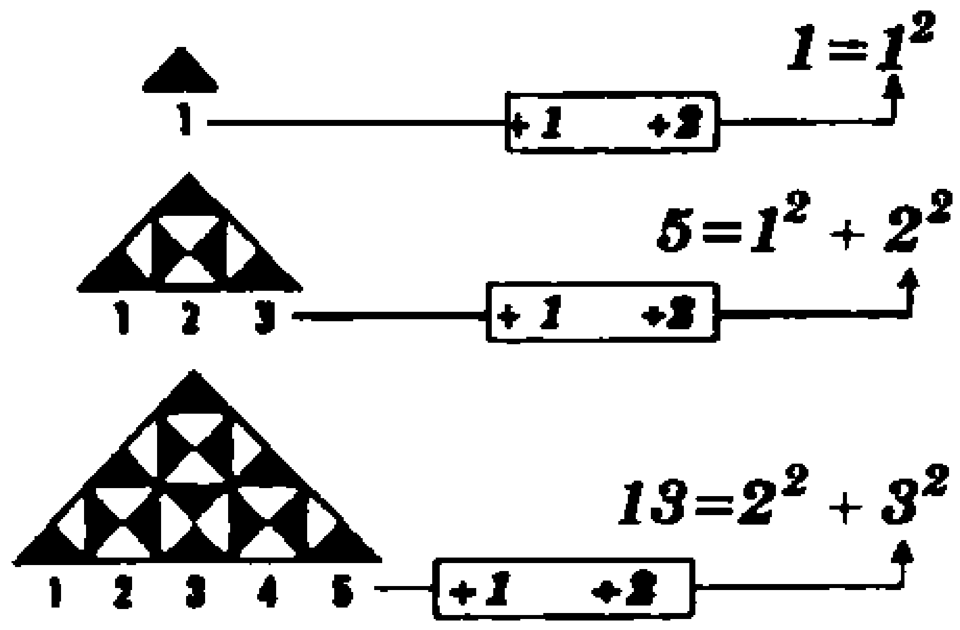


Indicar la suma de las cifras del resultado

A) 7 B) 4 C) 11 D) 13 E) 17

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE TRIÁNGULOS SOMBREADOS



* Luego piden : $1001^2 + 1002^2 = 2006005$

2003 ⟶ [+1 +2]

⇒ Suma de cifras : $2 + 0 + 0 + 6 + 0 + 0 + 5 = 13$

RPTA : "D"

PROBLEMA 69 :

Hallar $F(22)$, si :

$F(1)=1+2-3\times4$ $\quad F(2)=2-3\times4+5$

$F(3)=3\times4+5-6$ $\quad F(4)=4+5-6\times7$

A) 500 B) –500 C) 555 D) –555 E) 625

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que :

⟶ Múltiplo de 3 (Hay 3 signos)

$F(21)=21\times22+23-24$

$\Rightarrow F(22)=22+23-24\times25=-555$

RPTA : "D"

PROBLEMA 70 :

Si se cumple : $F(1)=2+1-1$ $\quad F(2)=6-3\times2$

$F(3)=12\times6+3$ $\quad F(4)=20+10+4$

$F(5)=30+15-5$

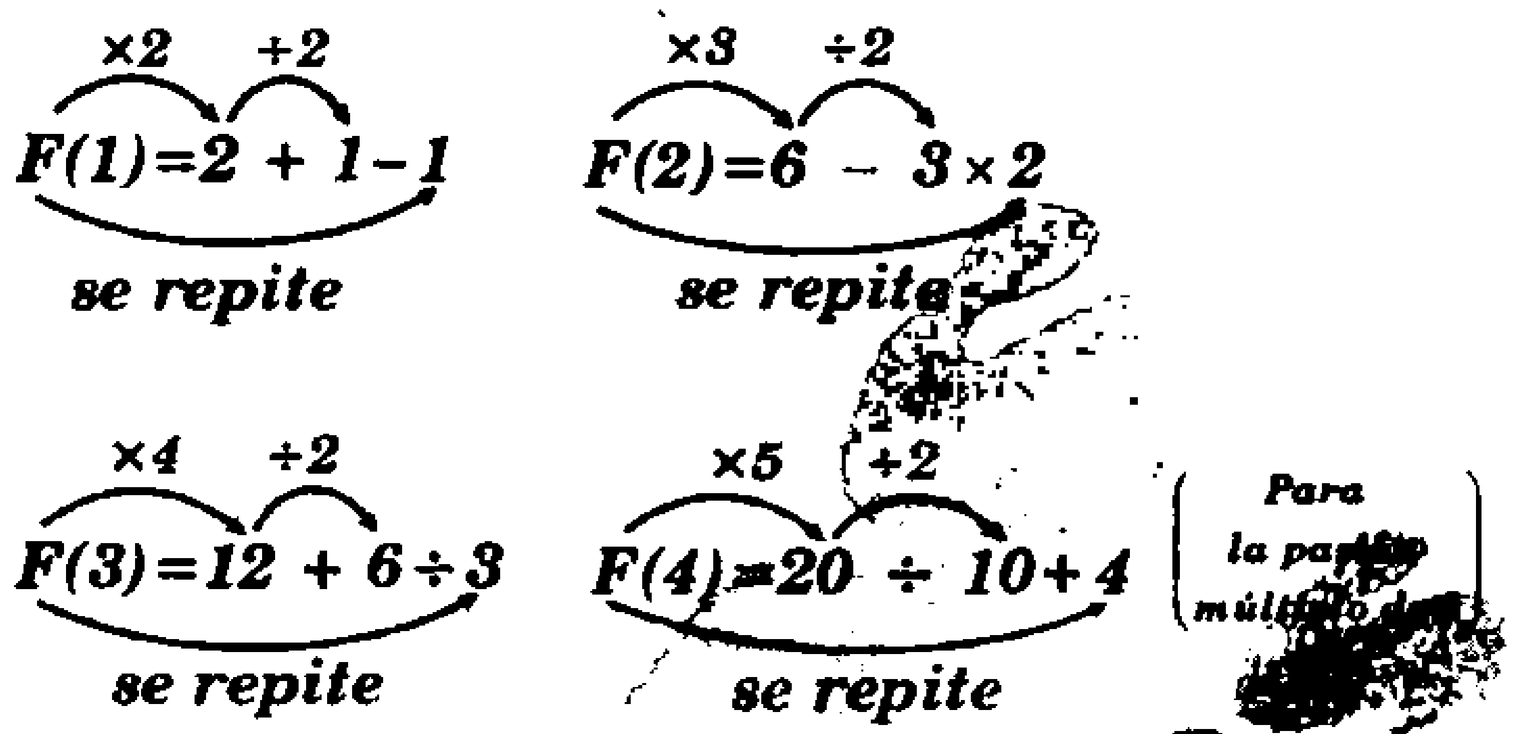
⋮

Calcular: $F(20)$

A) 422 B) 22 C) 204 D) 420 E) 2

RESOLUCIÓN :

*Analizando la ley de formación se tendrá :



* Luego :

$$F(20) = 420 \div 210 + 20 = 22 \quad (\times21,\ \div2)$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 71 :

Si : $F(x)=\dfrac{x}{x+1}$

Calcular : $\underbrace{F(\ldots\ldots F(F(F(x)))\ldots\ldots)}_{\text{«2002 Paréntesis»}}$

A) x B) $\dfrac{x}{2003x+1}$ C) $\dfrac{1}{2002x+1}$ D) 1 E) $\dfrac{x}{2002x+1}$

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES :

* Para 1 paréntesis : $F(x)=\dfrac{x}{x+1}$

* Para 2 paréntesis :

$$F(F(x))=\frac{F(x)}{F(x)+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}$$

* Para 3 paréntesis :

$$F(F(F(x)))=\frac{F(F(x))}{F(F(x))+1}=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}$$

* Luego la expresión a calcular será :

Para 2002 paréntesis : $\dfrac{x}{2002x+1}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 72 :

Calcular la suma de todos los elementos de la matriz:

A) 2542
B) 247500
C) 328400
D) 328350
E) 284200

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 99 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots & 101 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots & 103 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 99 & 101 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES — **SUMA DE ELEMENTOS**

$(1) \longrightarrow 1 = 1 \times 1^2$ (+1, +2)

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow 12 = 3 \times 2^2$ (+1, +2)

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow 45 = 5 \times 3^2$ (+1, +2)

* Luego para el problema , la suma estará dada por:

$$99 \times 50^2 = 247500$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 73 :

Si : $\boxed{2n} = 2\boxed{n}^{2002} - 1 \qquad \boxed{10,5} = 0$

Calcular : 2^{2002}

A) 2002 B) 0 C) –1 D) 1 E) 2001

RESOLUCIÓN :

* Dando valores adecuados a «n», para así hallar una ley de formación :

* Para :

$n = 0,5 \longrightarrow \boxed{2 \times 0,5} = 2\boxed{0,5}^{2002} - 1$

$\Rightarrow \boxed{1} = 2(0)^{2002} - 1 \quad \Rightarrow \boxed{1} = -1$

* Para :

$n = 1 \longrightarrow \boxed{2} = 2\ \boxed{1}^{2002} - 1$

$\Rightarrow \boxed{2} = 2(-1)^{2002} - 1 \Rightarrow \boxed{2} = 1$

* Para :

$n = 2 \longrightarrow \boxed{4} = 2\ \boxed{2}^{2002} - 1$

$\Rightarrow \boxed{4} = 2(-1)^{2002} - 1 \Rightarrow \boxed{4} = 1$

* Como observas , para :

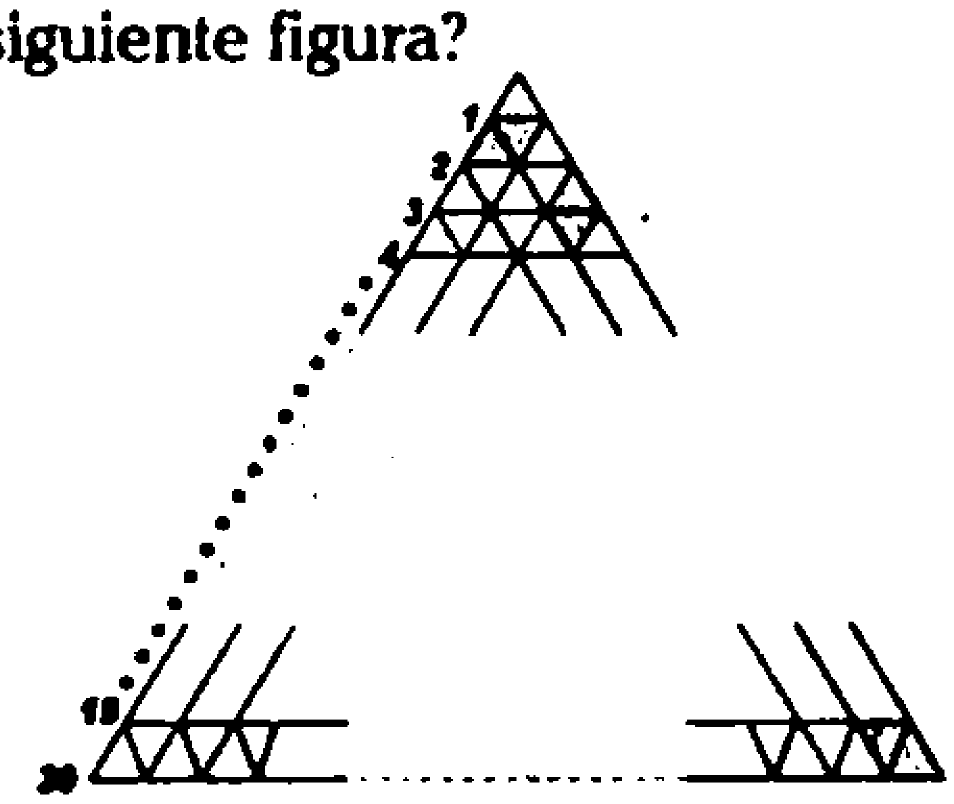
$\boxed{2} = 1 ; \boxed{4} = 1 ; \boxed{8} = 1 ; \ldots \boxed{2^n} = 1$

*Siempre resulta «1», entonces : $\boxed{2^{2002}} = 1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 74 :

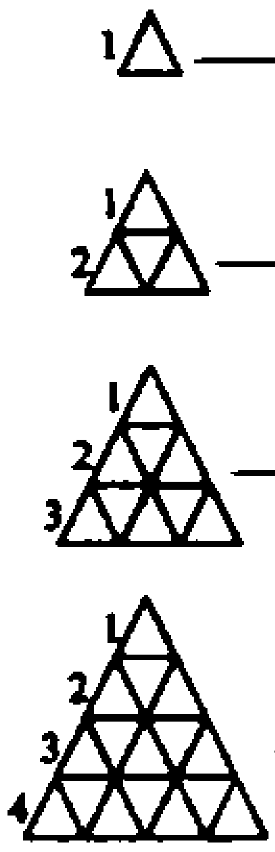
¿Cuantos rombitos de la forma y tamaño de ◊ hay en la siguiente figura?



A) 400
B) 420
C) 800
D) 570
E) 210

RESOLUCIÓN :

* Por inducción : ⇒ *Número de Rombos*



$\longrightarrow 0 = 3 \times 0 = 3 \times \left(\frac{0 \times ①}{2}\right)$

$\longrightarrow 3 = 3 \times 1 = 3 \times \left(\frac{1 \times ②}{2}\right)$

$\longrightarrow 9 = 3 \times 3 = 3 \times \left(\frac{2 \times ③}{2}\right)$

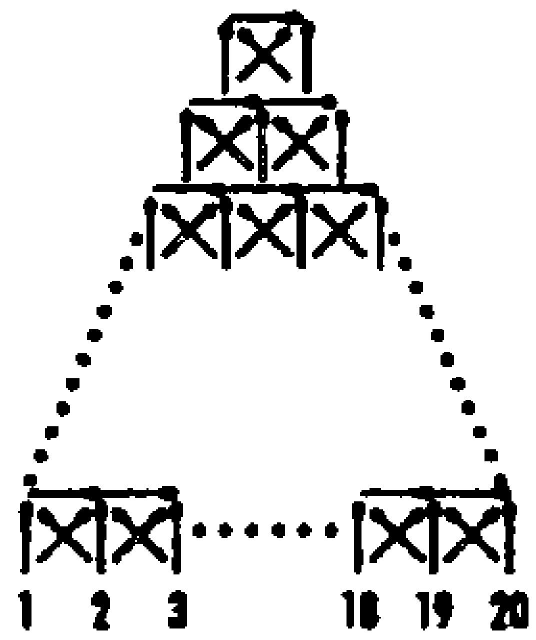
$\longrightarrow 18 = 3 \times 6 = 3 \times \left(\frac{3 \times ④}{2}\right)$

* Luego para el problema : $3 \times \left(\frac{19 \times 20}{2}\right) = 570$

RPTA : "D"

PROBLEMA 75 :

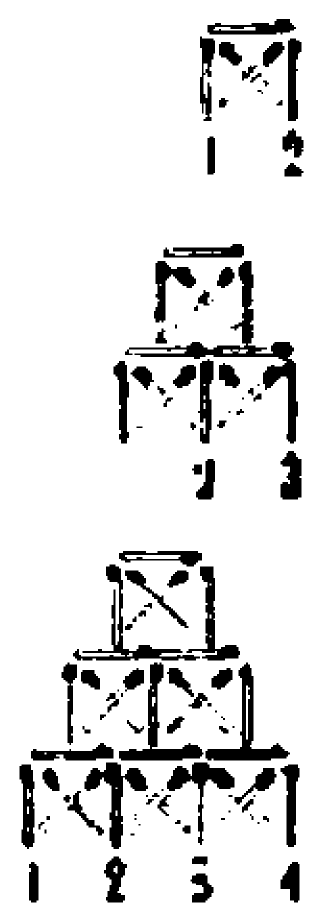
¿Cuántos palitos se cuentan en total en la figura?



A) 800
B) 779
C) 400
D) 120
E) 2020

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES — **# DE PALITOS**



$\longrightarrow 5 = 1 \times 5$ (×2 +3) (–1)

$\longrightarrow 14 = 2 \times 7$ (×2 +3) (–1) (+2)

$\longrightarrow 27 = 3 \times 9$ (×2 +3) (–1) (+2)

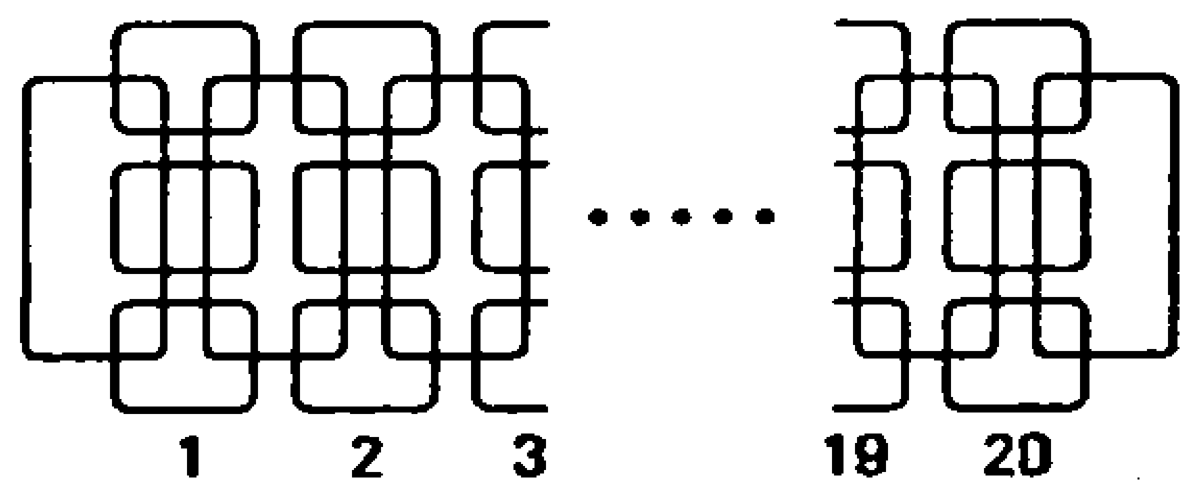
* Luego para lo pedido , el número de palitos será:

$$19 \times 41 = 779$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 76 :

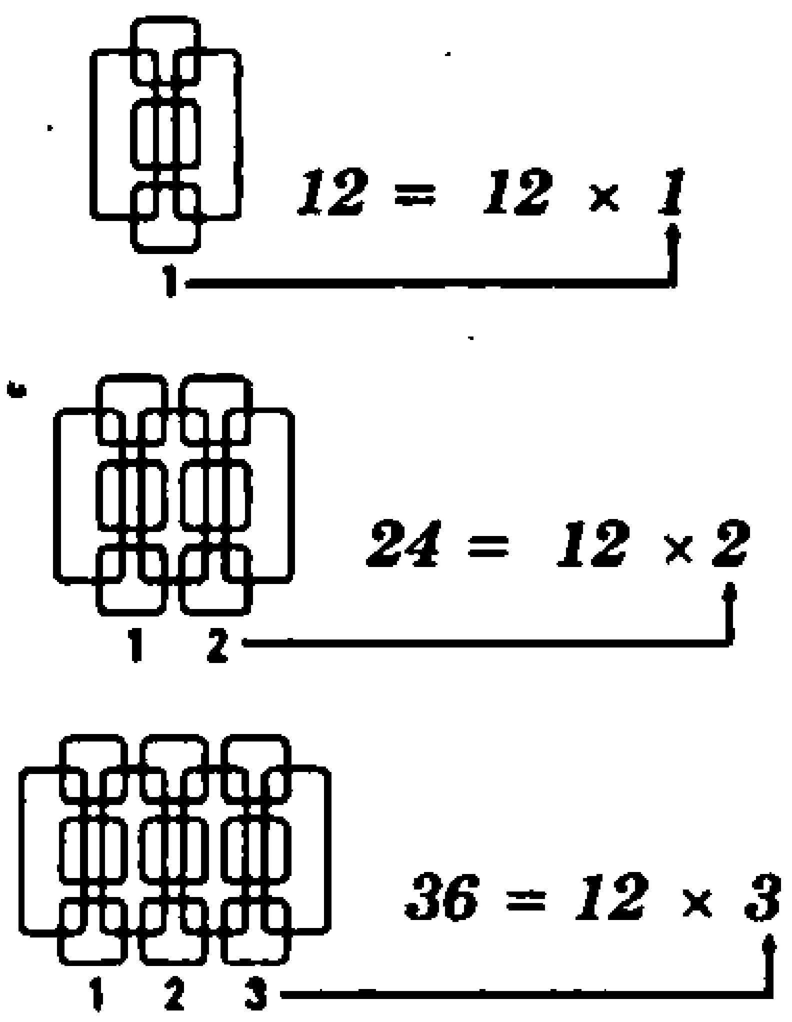
¿Cuántos puntos de corte hay?



A) 120 B) 240 C) 200 D) 60 E) 360

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # PUNTOS DE CORTE



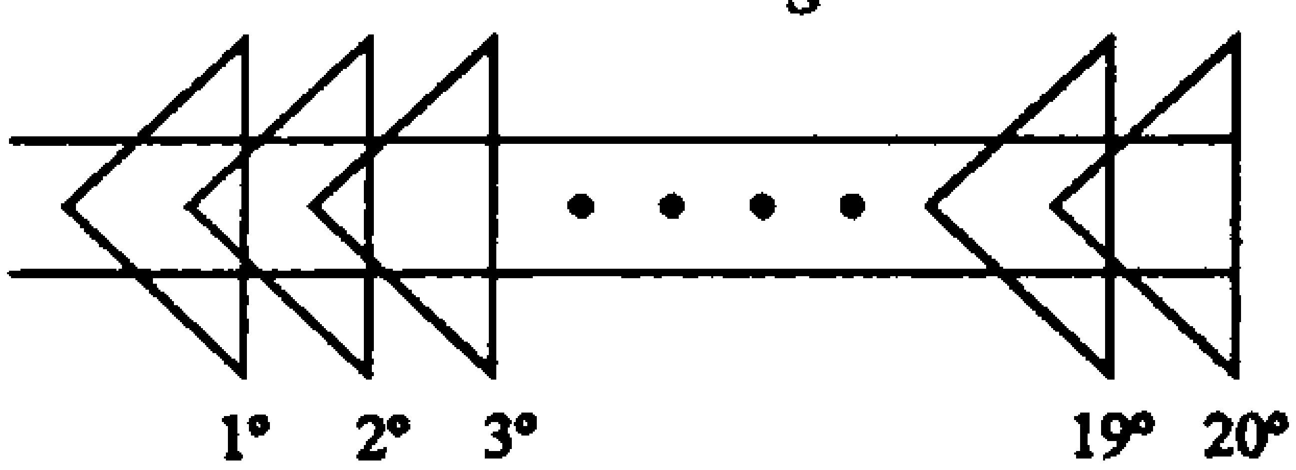
* Luego se pedirá : $12 \times 20 = 240$

RPTA : "B"

PROBLEMA 77 :

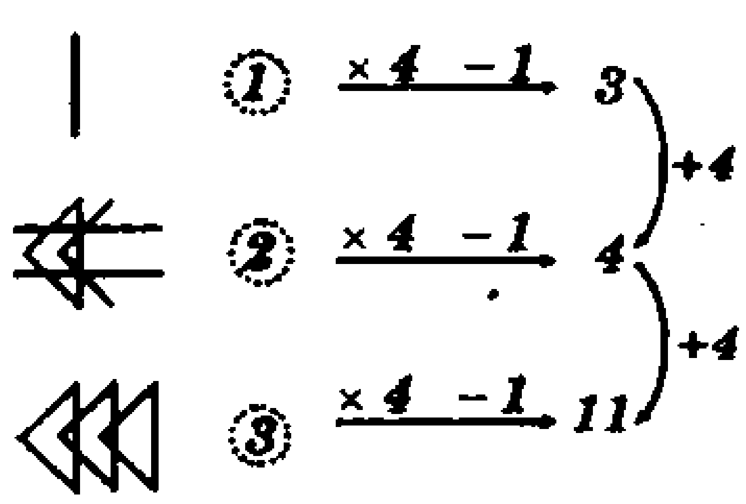
Hallar el máximo número de triángulos en :

A) 180
B) 81
C) 79
D) 78
E) 82



RESOLUCIÓN :

Por inducción: ***# DE TRIÁNGULOS***



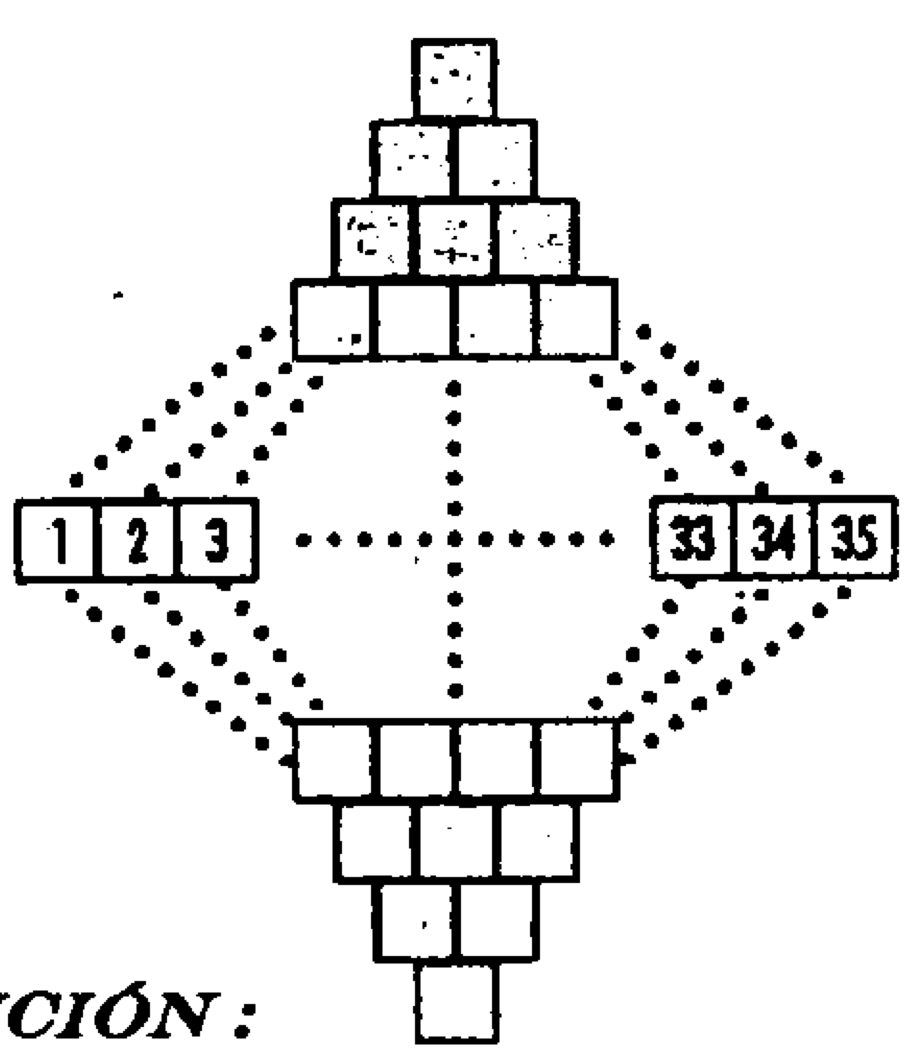
* Luego piden : $20 \times 4 - 1 = 79$

RPTA : "C"

PROBLEMA 78 :

¿Cuántos cuadraditos pequeños se puede contar en?

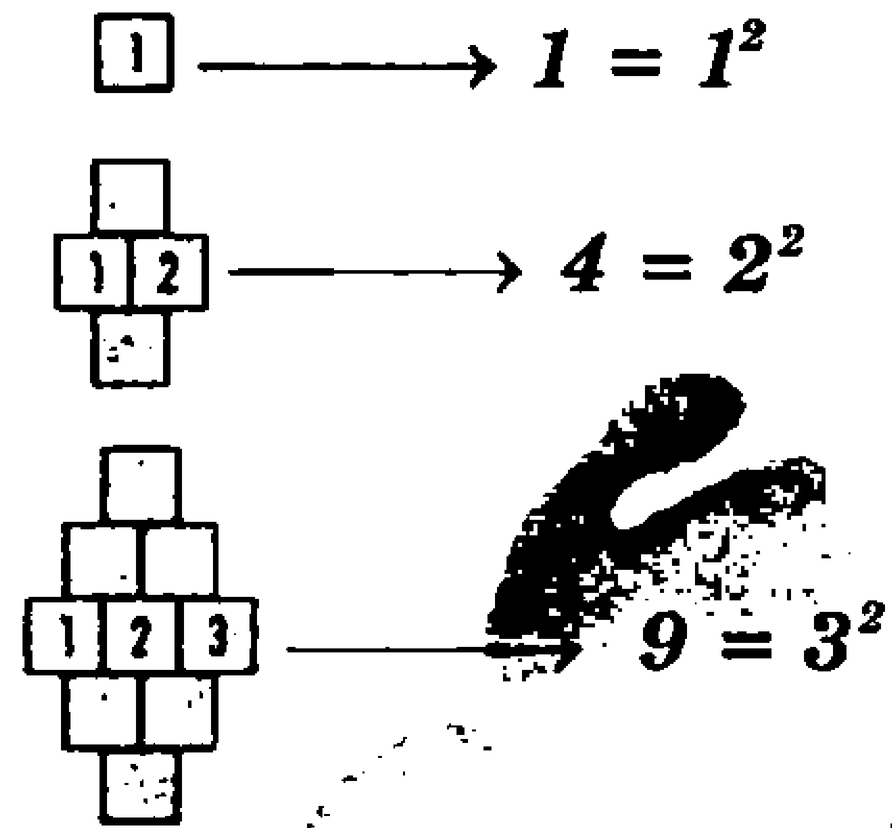
A) 1225
B) 3500
C) 1750
D) 1725
E) 355



RESOLUCIÓN :

* Aplicaremos situaciones particulares , conservando una forma análoga a la original , tendremos :

CASOS PARTICULARES # DE CUADRADITOS



$1 = 1^2$

$4 = 2^2$

$9 = 3^2$

* Luego para lo pedido , se tendrá que :

\# de cuadraditos pequeños : $35^2 = 1225$

RPTA : "A"

PROBLEMA 79 :

Calcular :

$$\frac{4\times 2^2+8\times 3^2+12\times 4^2+\ldots\ldots(2002\ sumandos)}{1\times 2+2\times 3+3\times 4\ldots\ldots(2002\ sumandos)}$$

A) 6011 B) 2002 C) 1 D) 8 E) 4004

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES :

Para *1* sumando : $\frac{4\times 2^2}{1\times 1}=8=1(3)+5$

+3

Para *2* sumandos : $\frac{4\times 2^2+8\times 3^2}{1\times 2+2\times 3}=11=2(3)+5$

+3

Para *3* sumandos : $\frac{4\times 2^2+8\times 3^2+12\times 4^2}{1\times 2+2\times 3+3\times 4}=14=3(3)+5$

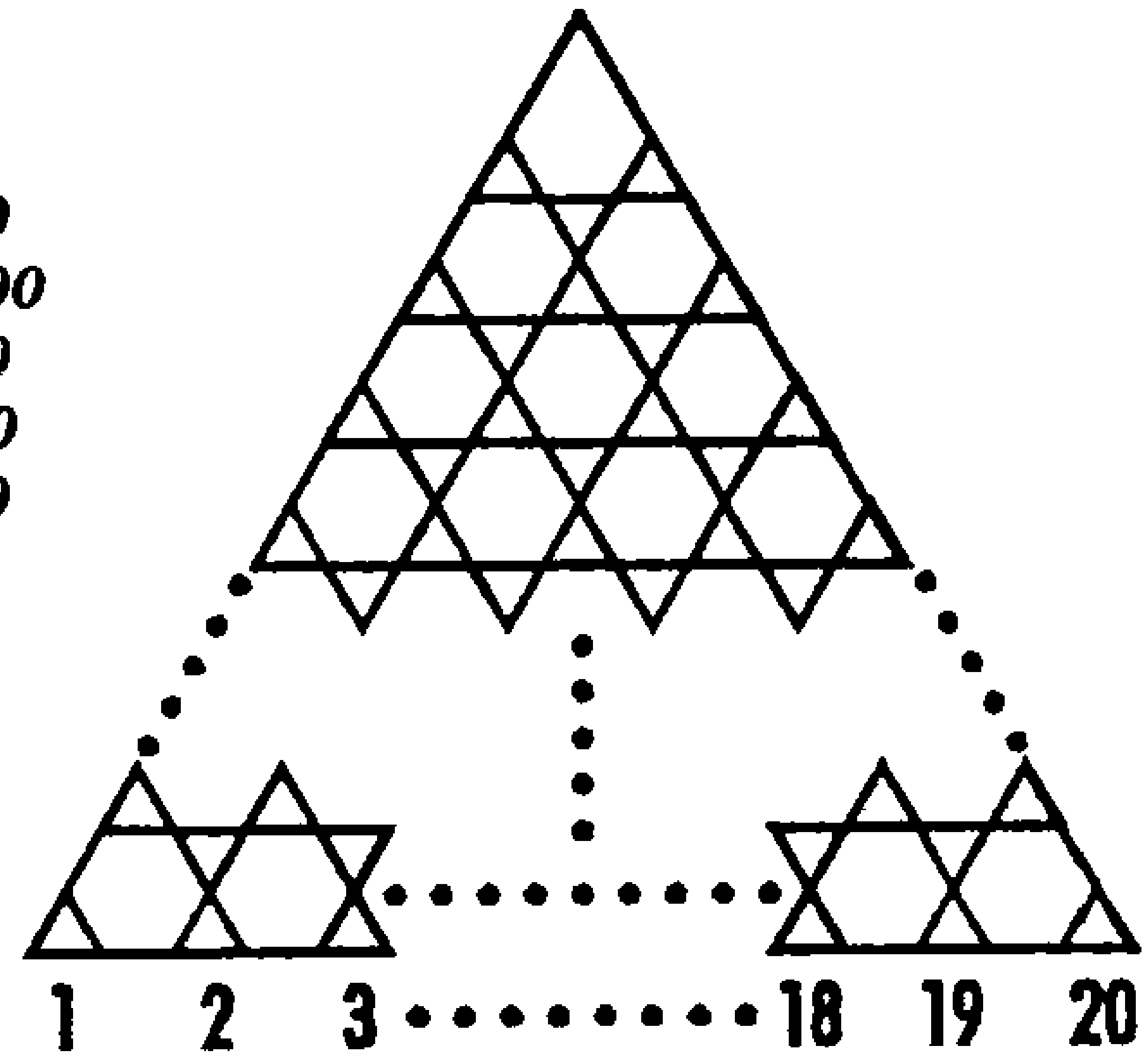
* Luego para *2002* sumandos , la expresión a calcular será : $2002(3)+5=6011$

RPTA : "A"

PROBLEMA 80 :

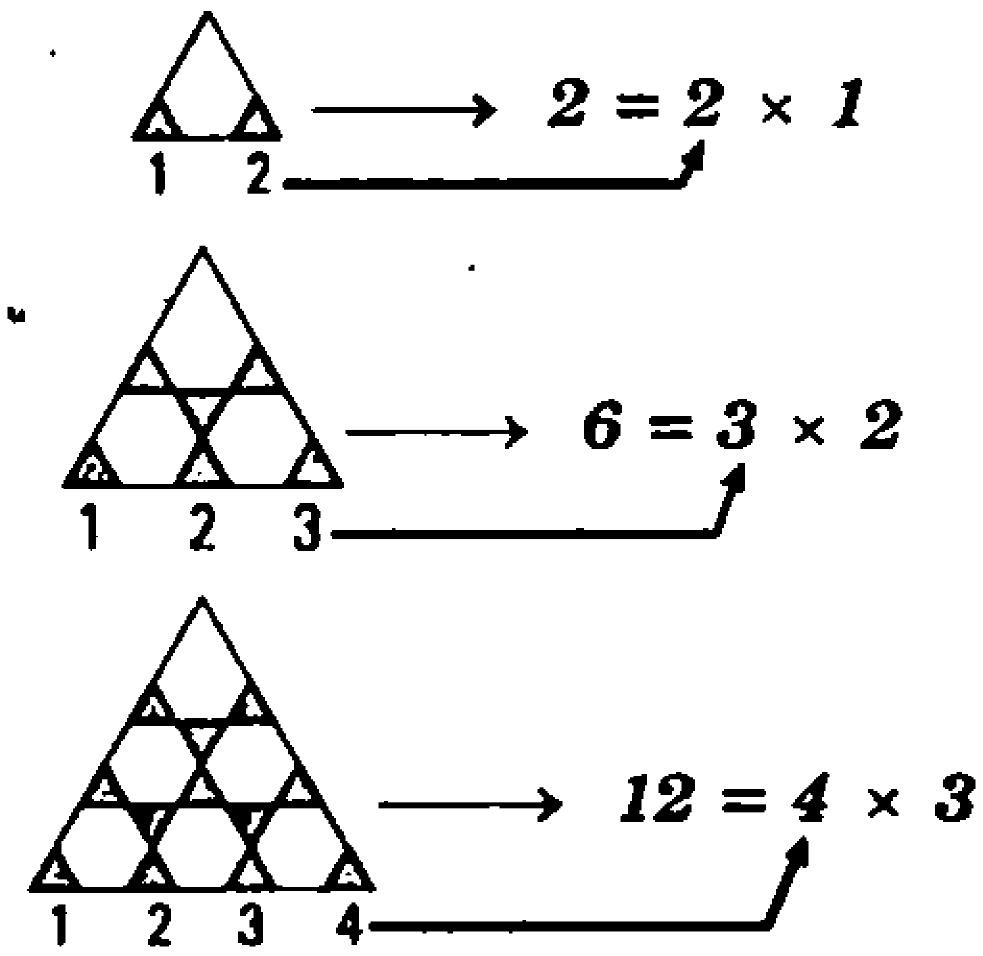
¿Cuántos triángulos totalmente sombreados hay en total?

A) 200
B) 8000
C) 400
D) 380
E) 210



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **TRIANG. SOMBREADOS**



$2 = 2 \times 1$

$6 = 3 \times 2$

$12 = 4 \times 3$

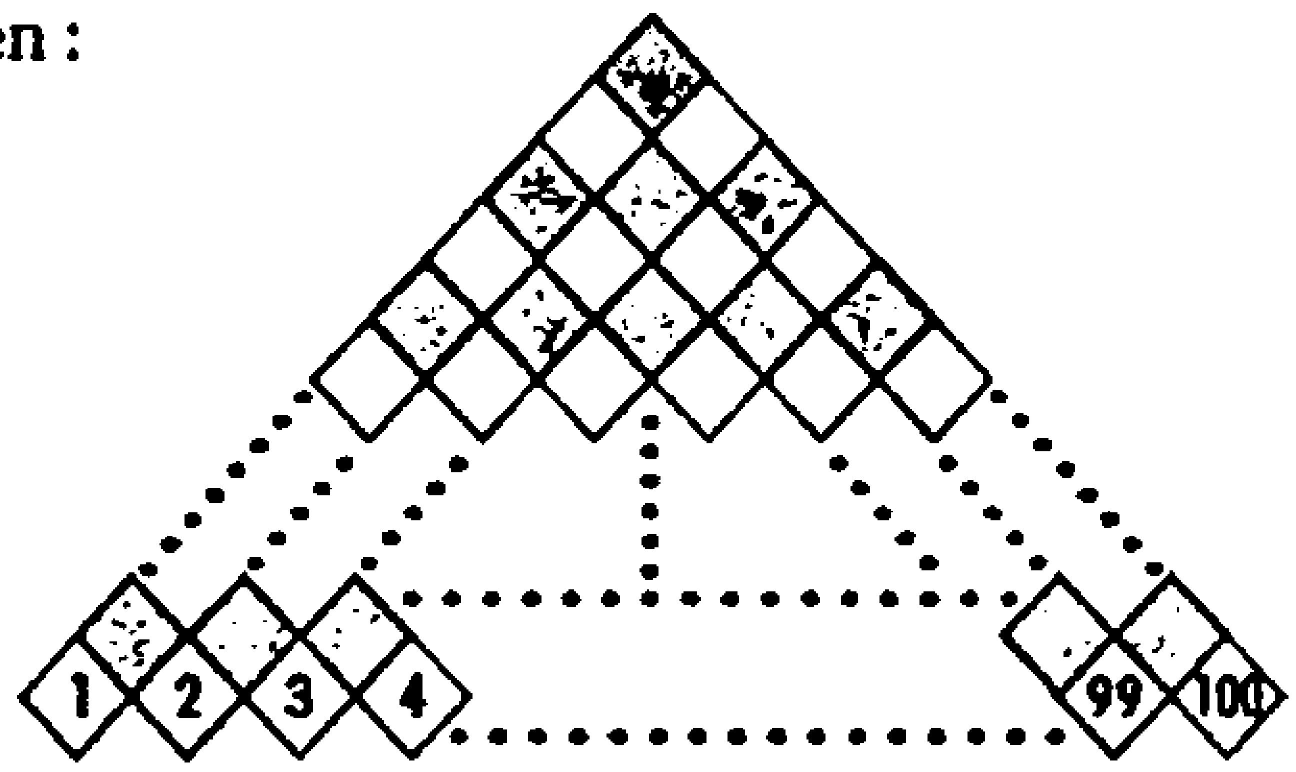
* Luego para el problema , lo pedido será :

$$20 \times 19 = 380$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 81 :

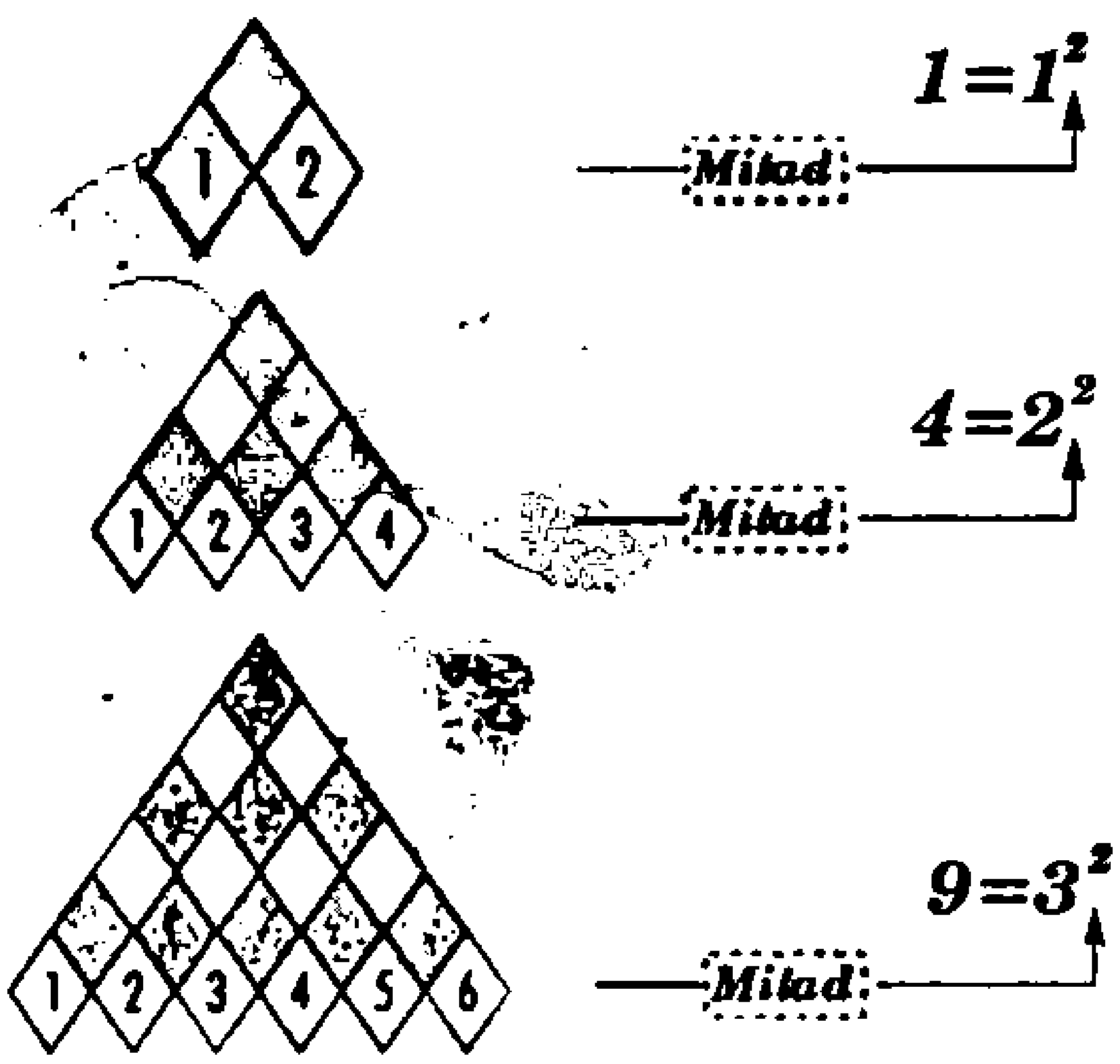
Calcular el número total de rombos sombreados que hay en :



A) 625 B) 10000 C) 2500 D) 5000 E) 5050

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE ROMBOS SOMBREADOS**



$1 = 1^2$ (Mitad)

$4 = 2^2$ (Mitad)

$9 = 3^2$ (Mitad)

* Luego para lo pedido : $50^2 = 2500$

RPTA : "C"

PROBLEMA 82 :

¿Cuántos apretones de manos se producirán al saludarse , *100* personas asistentes a una reunión?

A) 10000 B) 1000 C) 5005 D) 505 E) 4950

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# DE APRETONES**

Para 2 personas: $\longrightarrow 1 = \frac{1 \times 2}{2}$

Para 3 personas: $\longrightarrow 3 = \frac{2 \times 3}{2}$

Para 4 personas: $\longrightarrow 6 = \frac{3 \times 4}{2}$

(NÚMEROS TRIANGULARES)

* Luego para *100* personas el número de apretones de mano será :

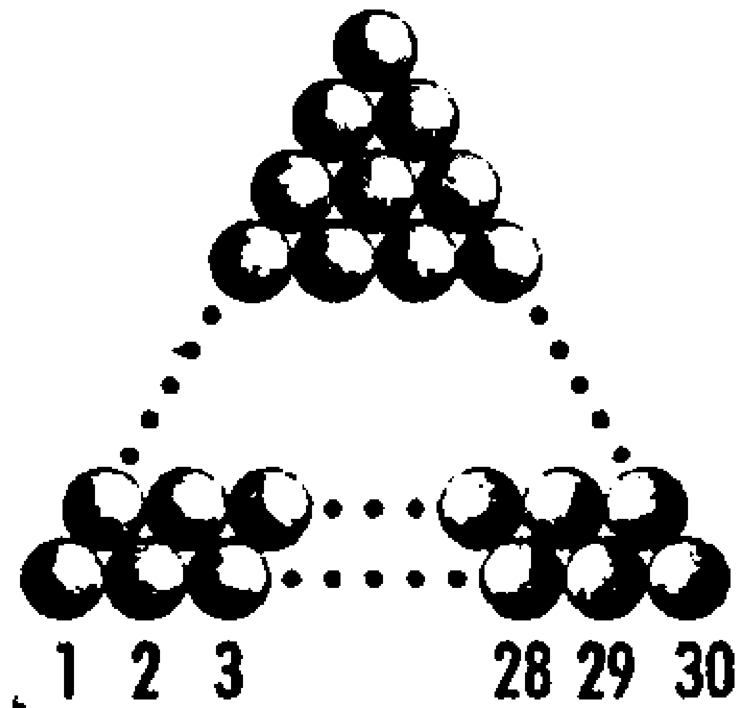
$$\frac{99 \times 100}{2} = 4950$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 84 :

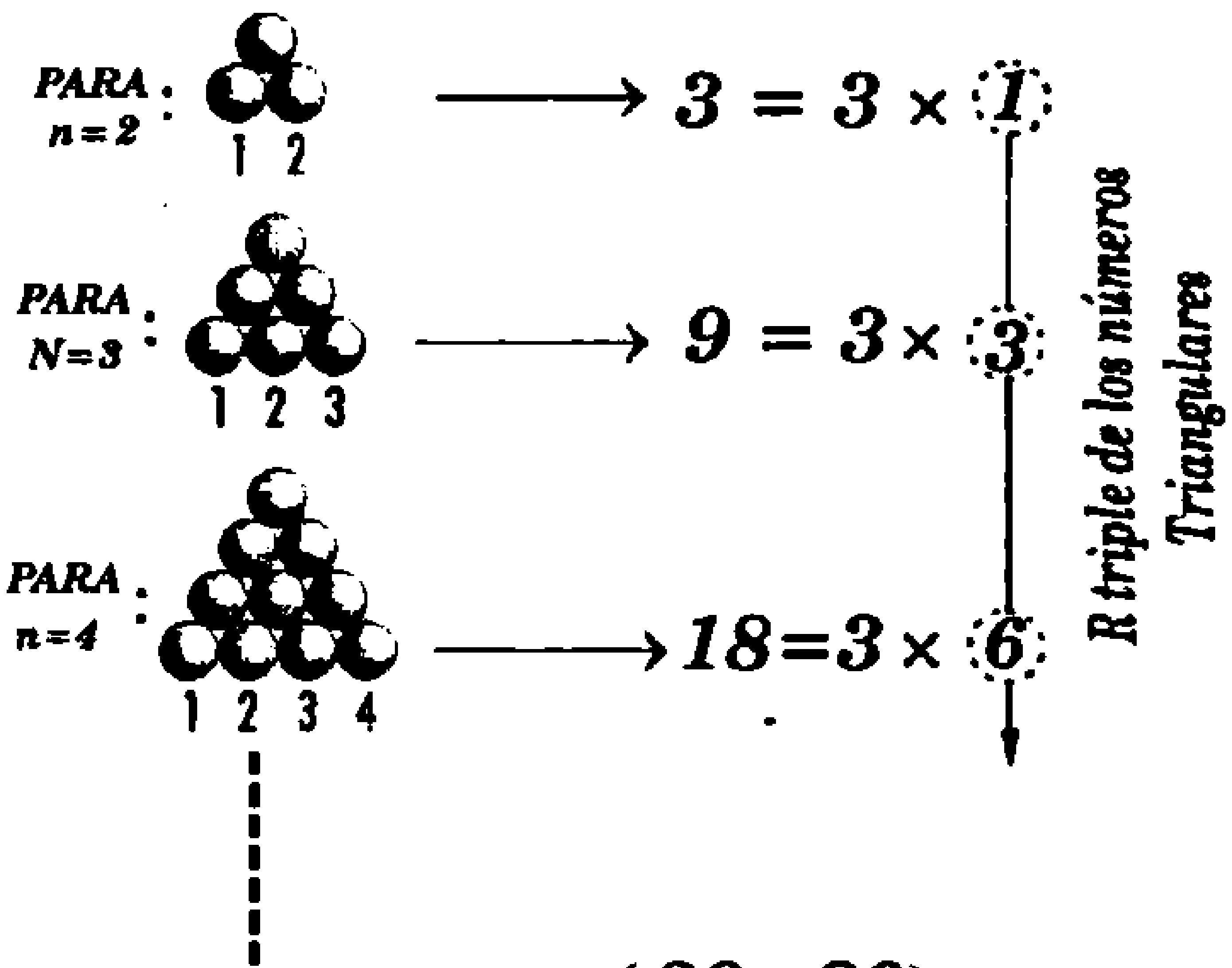
Hallar el total de puntos de contacto en :

A)290
B)870
C)420
D)1305
E)2875



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES **# PUNTOS DE CONTACTO**



PARA n=2 : $3 = 3 \times 1$

PARA N=3 : $9 = 3 \times 3$

PARA n=4 : $18 = 3 \times 6$

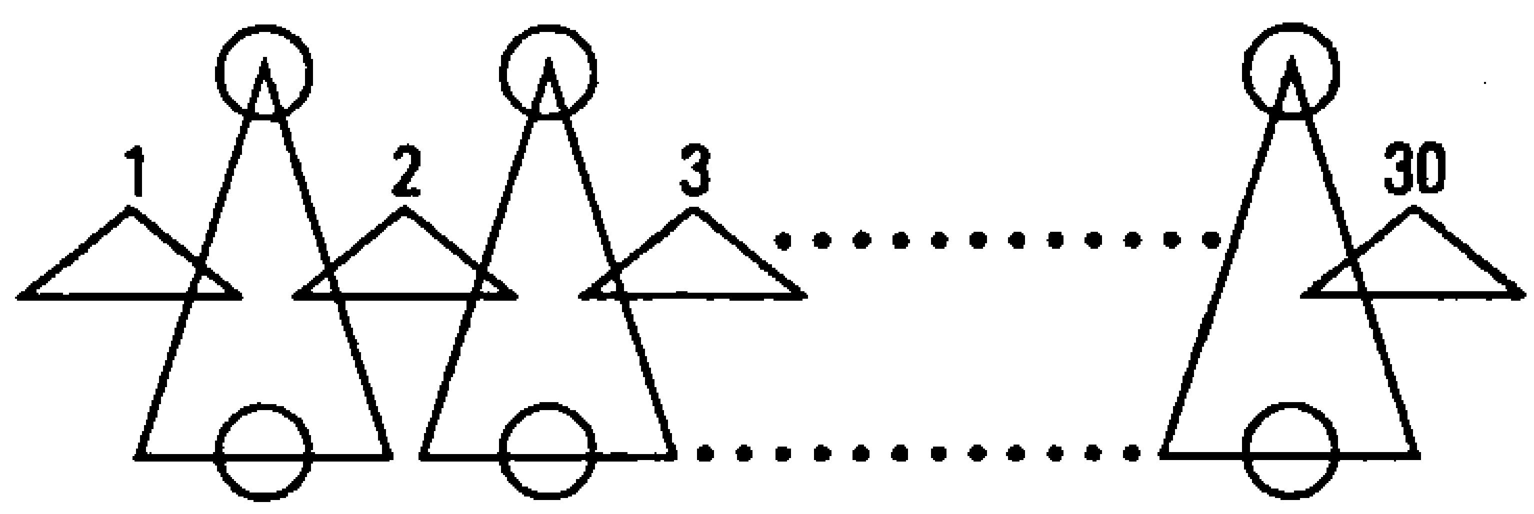
(R triple de los números Triangulares)

$$n = 30 \Rightarrow 3\left(\frac{29 \times 30}{2}\right) = 1305$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 83 :

¿Cuántos puntos de corte hay?

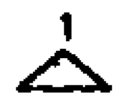


A) 240 B) 900 C) 232 D) 800 E) 80

RESOLUCIÓN :

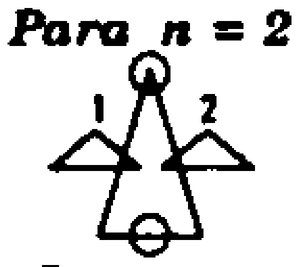
CASOS PARTICULARES # DE PUNTOS DE CORTE

Para n = 1 ⟶ $0 = 8 \times 0$



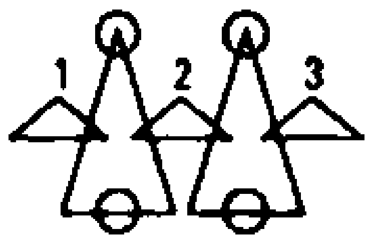
+8 $1 - 1$

Para n = 2 ⟶ $8 = 8 \times 1$



+8 $2 - 1$

Para n = 3 ⟶ $16 = 8 \times 2$



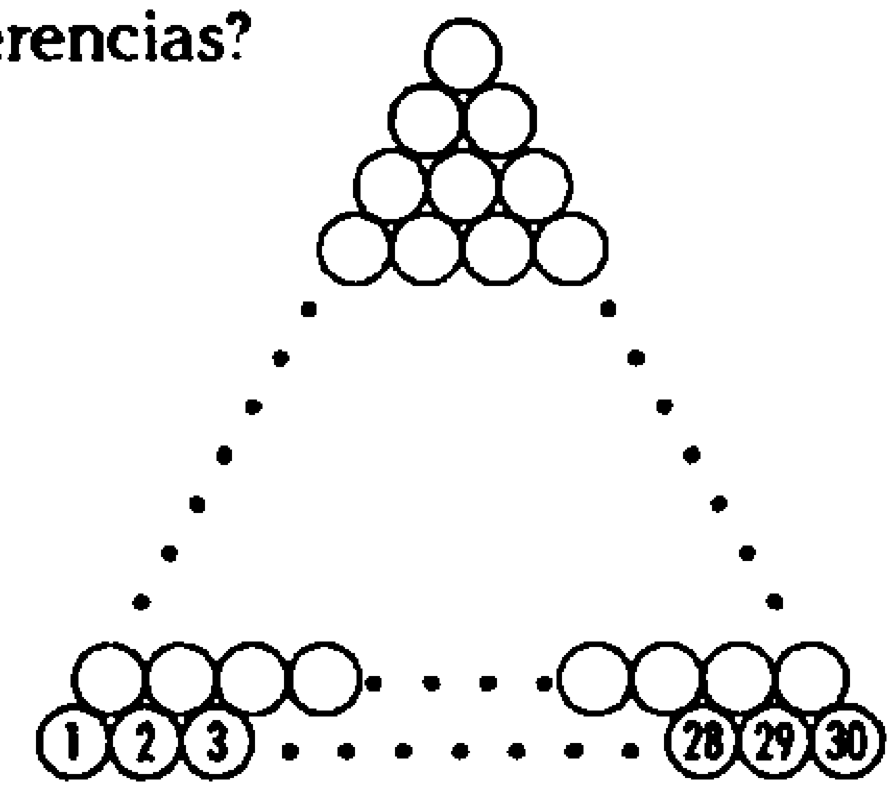
$3 - 1$

* Luego para lo pedido será : $8(30-1)=232$

RPTA : "C"

PROBLEMA 85 :

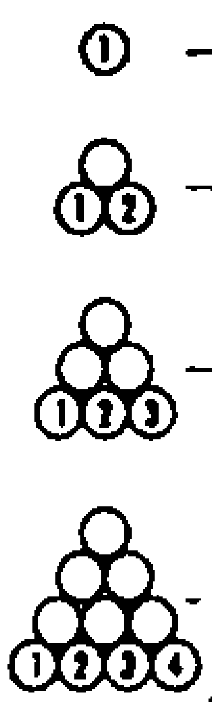
¿Cuántos puntos de contacto hay en la siguiente gráfica de circunferencias?



A) 1305
B) 1300
C) 1310
D) 1315
E) 1320

RESOLUCIÓN :

* Por inducción : *# de puntos de contacto*



① ⟶ $0 = 3 \times 0$

⟶ $3 = 3 \times 1$

⟶ $9 = 3 \times 3$

⟶ $18 = 3 \times 6 = 3 \times \frac{3 \times 4}{4}$

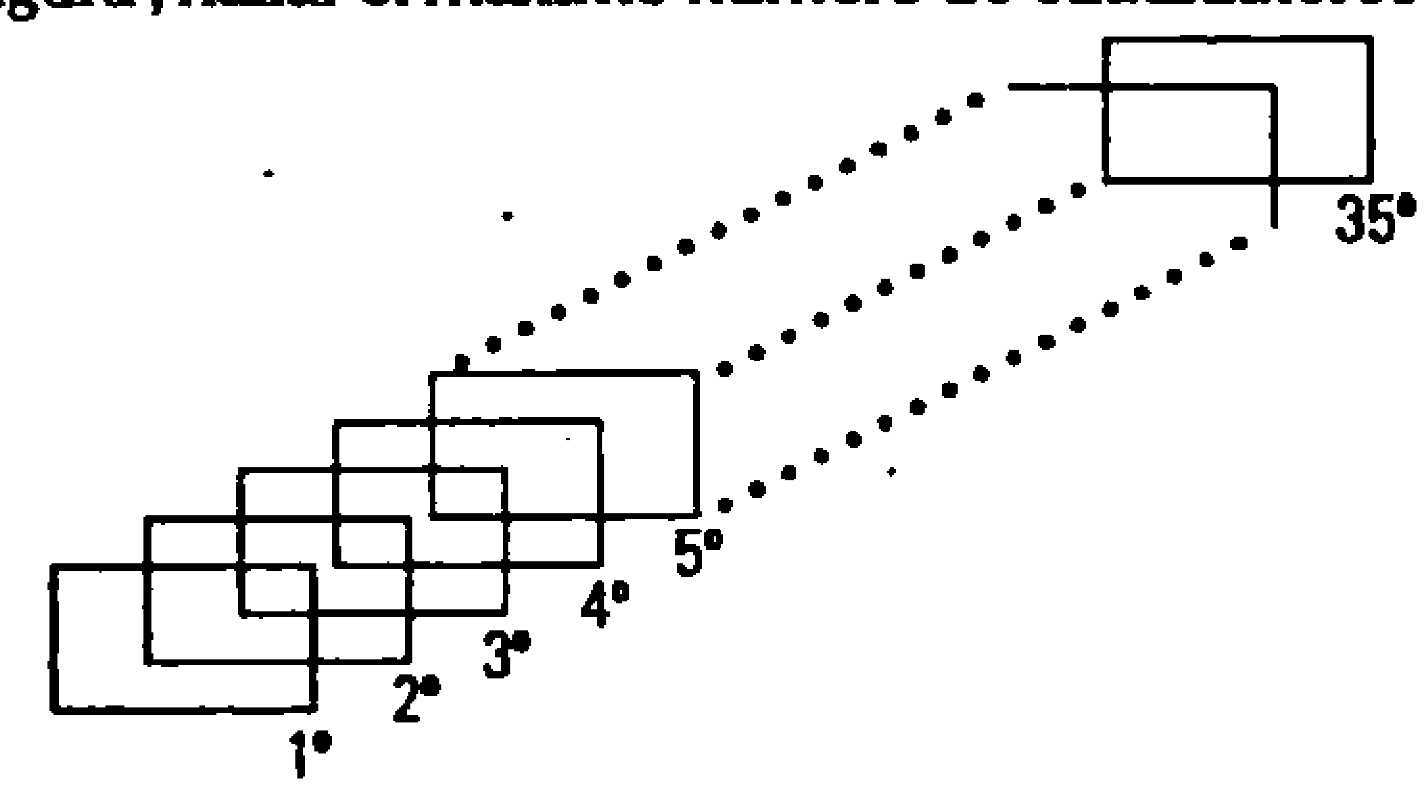
Triple de los valores de los números triangulares.

* Luego , lo que piden será : $3 \times \frac{29 \times 30}{2} = 1305$

CLAVE : "A"

PROBLEMA 86 :

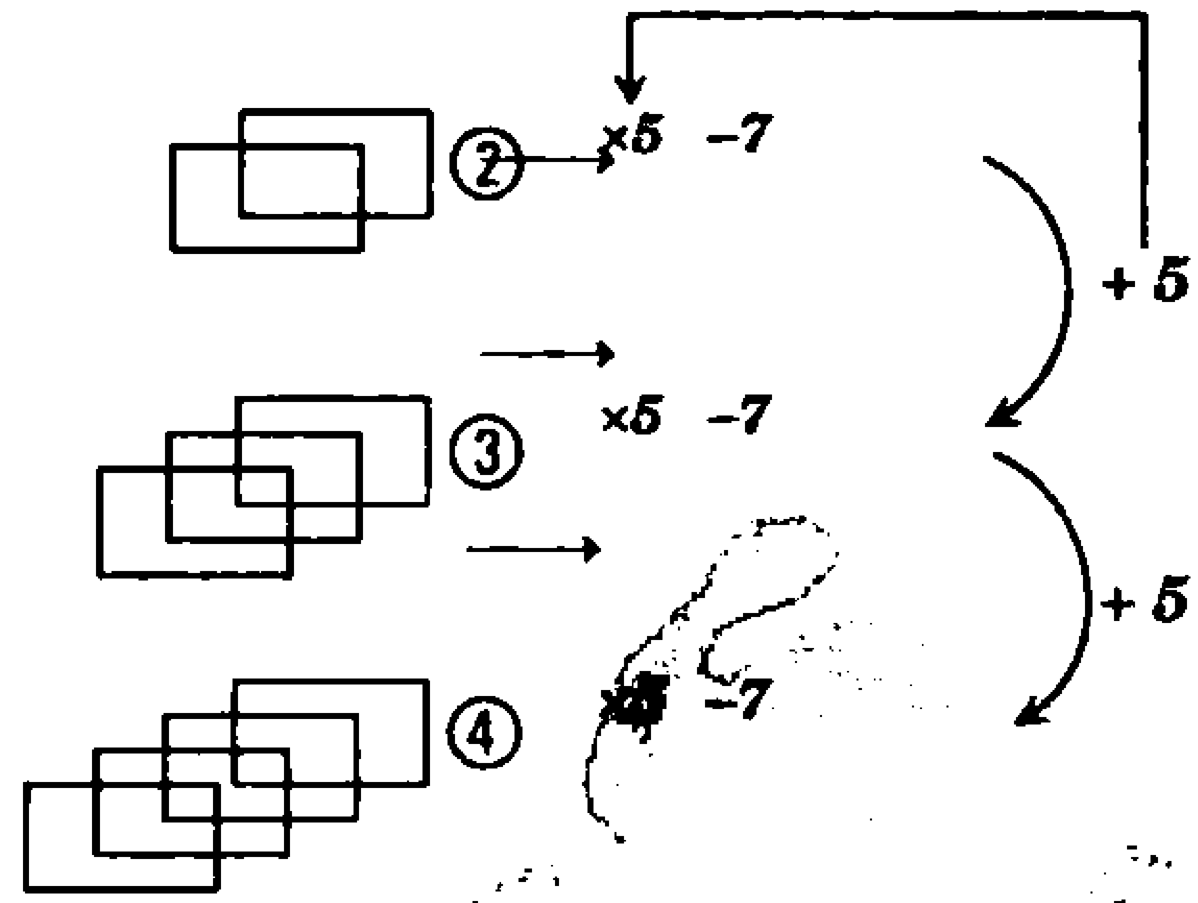
En la figura , hallar el máximo número de cuadriláteros



A) 92 B) 168 C) 350 D) 1225 E) 351

RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE CUADRILATEROS

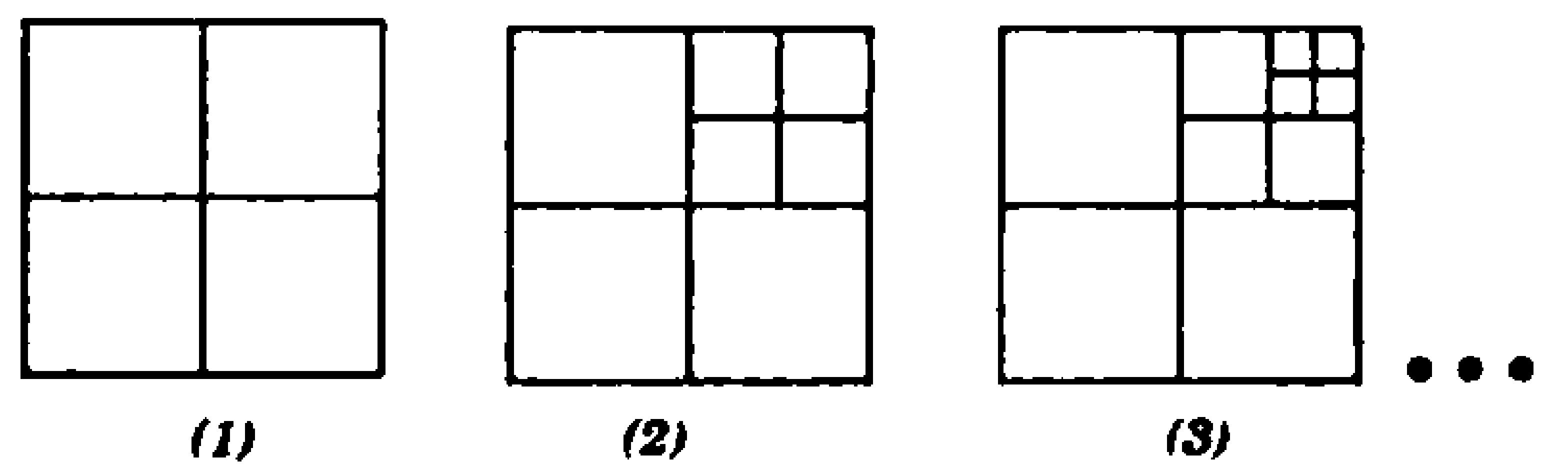


* Luego para el problema , el número de cuadriláteros será : $35 \times 5 - 7 = 168$

RPTA : "B"

PROBLEMA 88 :

¿Cuántos cuadrados se encontrarán en la posición número *20*?



A) 96 B) 144 C) 400 D) 399 E) 81

RESOLUCIÓN :

* Por inducción :

POSICIÓN # DE CUADRADOS

① $\xrightarrow{\times 4 \quad +1}$ 5 ⎫ +4

② $\xrightarrow{\times 4 \quad +1}$ 9 ⎫ +4

③ $\xrightarrow{\times 4 \quad +1}$ 13

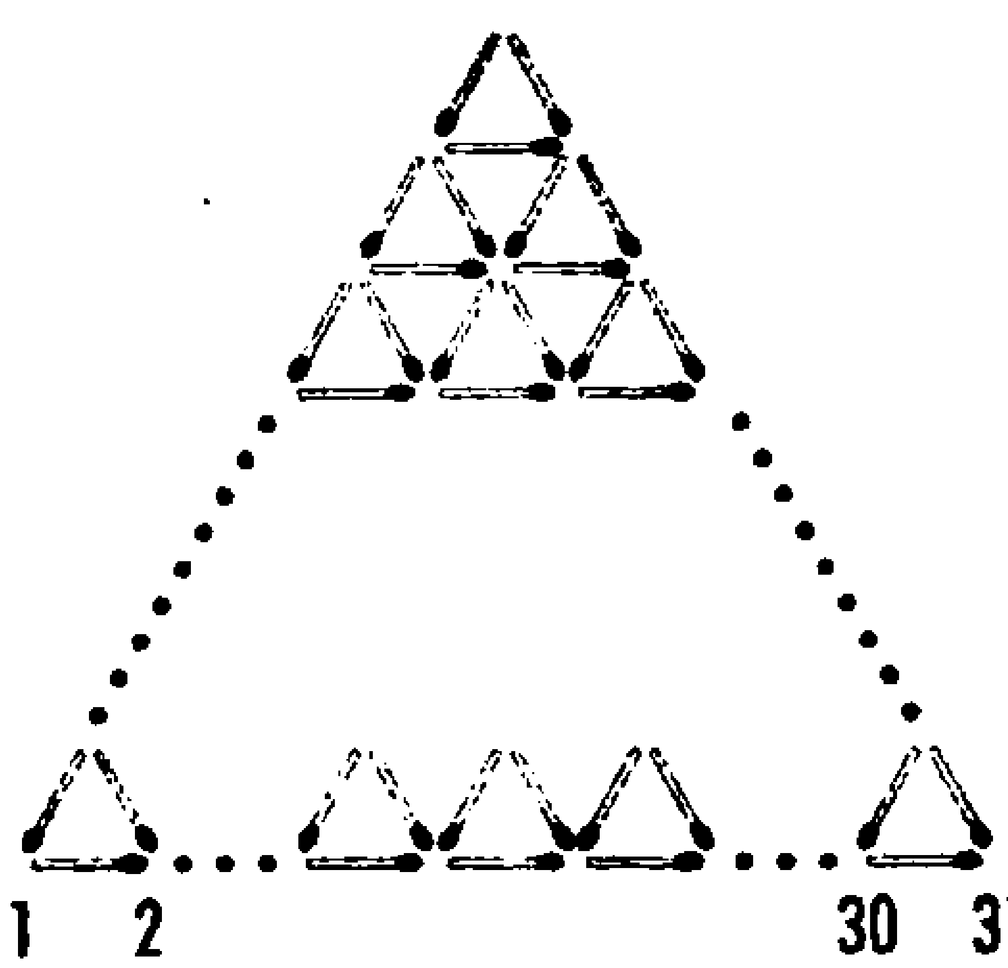
* Luego , piden : $20 \times 4 + 1 = 81$

RPTA : "E"

PROBLEMA 89 :

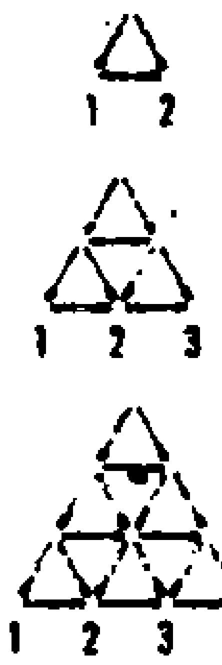
Calcular el número total de palitos usados en la construcción del castillo .

A) 1395
B) 1488
C) 1495
D) 1388
E) N.A.



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # DE PALITOS



$3=3\times 1=3\times\left(\frac{1\times 2}{2}\right)$

$9=3\times 3=3\times\left(\frac{2\times 3}{2}\right)$

$18=3\times 6=3\times\left(\frac{3\times 4}{2}\right)$

* Luego para lo pedido : # de palitos :

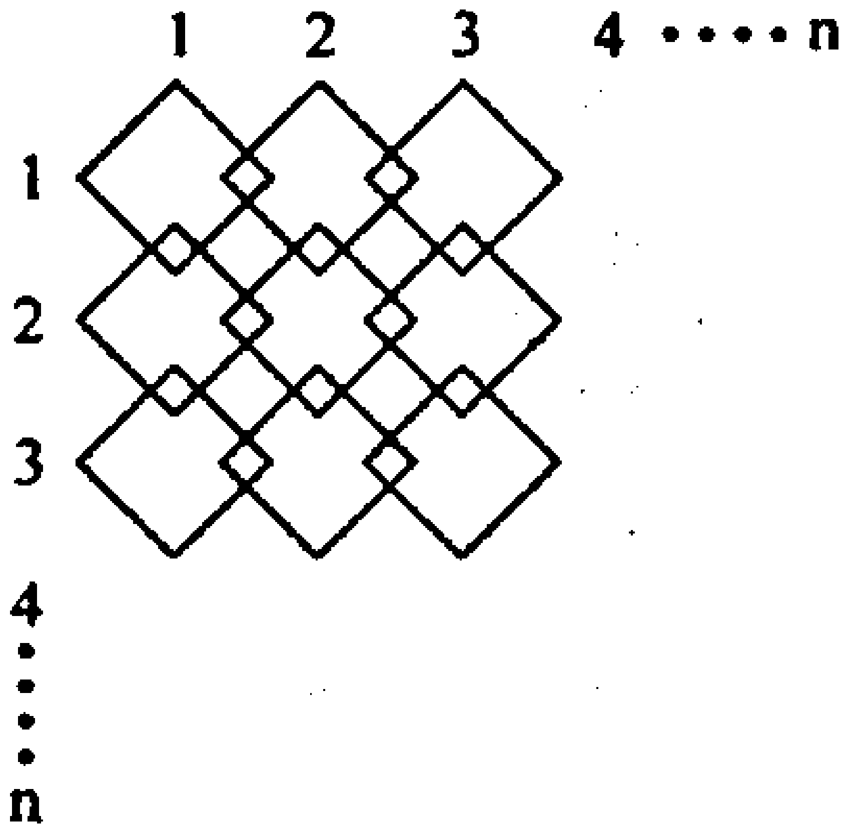
$$3\times\left(\frac{30\times 31}{2}\right)=1395$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 90 :

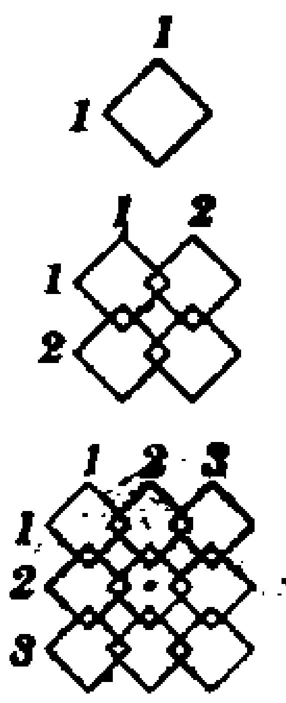
En la figura se muestran «n» filas y «n» columnas de rombos, si el número total de puntos de intersección es **288** , hallar **n** .

A) 10
B) 8
C) 9
D) 12
E) 11



RESOLUCIÓN :

CASOS PARTICULARES # PUNTOS DE INTERSECCIÓN



$\longrightarrow 0=8(0)=8\left(\frac{1\times 0}{2}\right)$

$\longrightarrow 8=8(1)=8\left(\frac{2\times 1}{2}\right)$

$\longrightarrow 24=8(3)=8\left(\frac{3\times 2}{2}\right)$

* Luego para «n» filas y «n» columnas , se tendrá que:

 # de puntos de intersección : $8\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)=288$

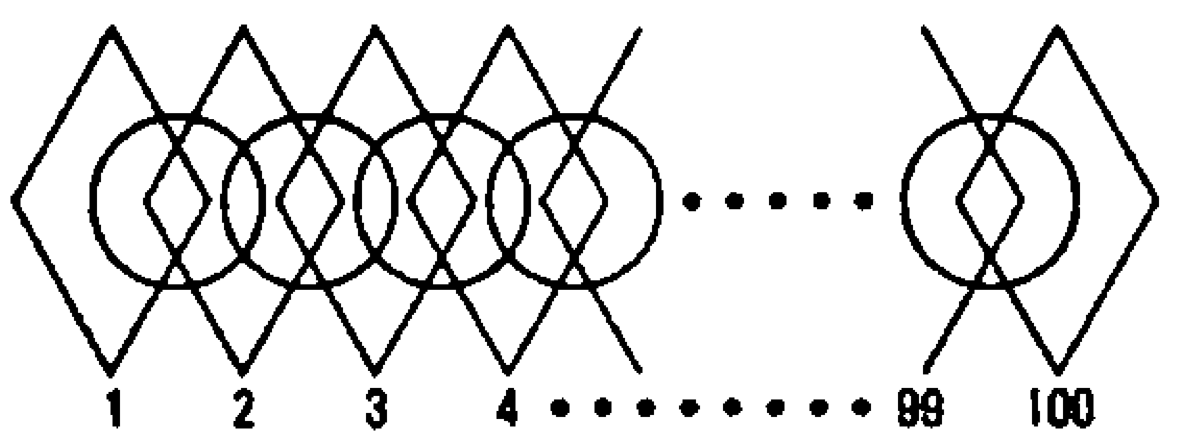
$\rightarrow n(n-1)=72$

$\rightarrow \underbrace{n(n-1)=9\times 8}_{n=9}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 91 :

Calcular el número total de puntos de corte en :



A) 640 **B)** 790 **C)** 810 **D)** 679 **E)** 981

RESOLUCIÓN :

Por Inducción :

# DE ROMBOS	# de O		# DE PUNTOS DE CORTE
1	1	$\xrightarrow{\times 8-6}$	2
2	2	$\xrightarrow{\times 8-6}$	10
3	3	$\xrightarrow{\times 8-6}$	18
⋮	⋮		⋮
99	99	$\xrightarrow{\times 8-6}$	$99\times 8-6$

(+8, +8)

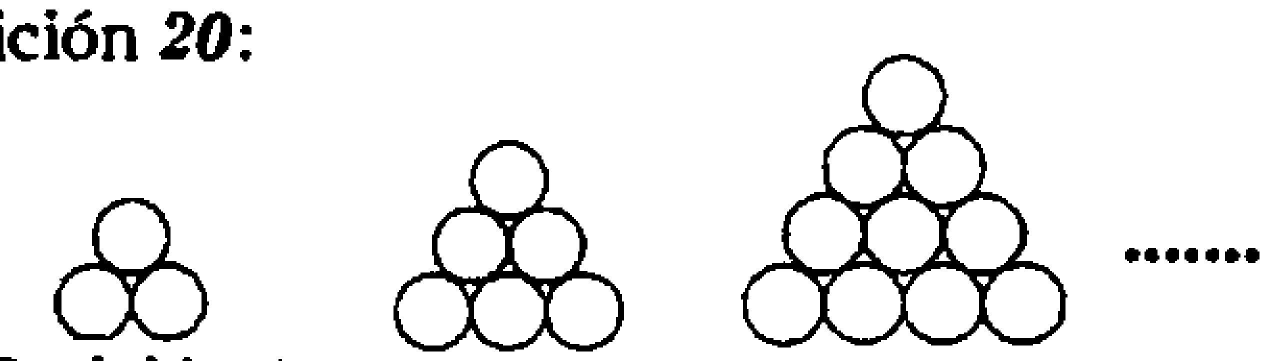
* Pero hay que agregar los puntos de corte que origina el rombo número **100** .

$\Rightarrow$ Total de Puntos de Corte : $99\times 8-6+4=790$

RPTA : "B"

PROBLEMA 92 :

Determine la cantidad de círculos no sombreados en la posición **20**:



Posición 1 *Posición 2* *Posición 3*

A) 211 **B)** 210 **C)** 201 **D)** 190 **E)** 189

RESOLUCIÓN :

• Cada triángulo posee **1** círculo en la **1ª** fila ,**2** circulos en la **2ª** fila , **3** en la **3ª**, etc. Luego , el total de círculo , de la posición **20** estará dado por:

$$1+2+3+...+21=\frac{21\times 22}{2}=231$$

• De este total hay que restar el número de círculos pintados en la posición **20:** **231-20=211**

RPTA : "A"

PROBLEMA 93 :

Hallar el valor de **"E"** y dar como respuesta la suma de las cifras del resultado:

$$E=\underbrace{444...44}_{10\ cifras}\times\underbrace{999...99}_{10\ cifras}$$

A) 72 **B)** 81 **C)** 90 **D)** 99 **E)** 108

RESOLUCIÓN :

* Analicemos algunos casos particulares:

$E_1=4\times 9=36\Rightarrow\sum cifras(E_1)=9=9(1)$

$E_2=44\times 99=4356\Rightarrow\sum cifras(E_2)=18=9(2)$

$E_3=444\times 999=443556\Rightarrow\sum cifras(E_3)=27=9(3)$

⋮

$\rightarrow$ *Se puede inducir que:*

$\sum cifras(E_{10})=9(10)=90$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Sabiendo que:

(1) $= 1(1+1) = 2$
(2) $= 2(2+1) = 6$
(3) $= 3(3+1) = 12$

hallar: (10)

A)110 B)111 C)112 D)114 E)115

02 Sabiendo que:

[1] $= 1^2+1 = 2$
[2] $= 2^2+2 = 6$
[3] $= 3^2+3 = 12$

hallar: [12]

A)144 B)156 C)150 D)158 E)160

03 Sabiendo que:

△1 $= 2^2\times 3 = 12$
△2 $= 3^2\times 4 = 36$
△3 $= 4^2\times 5 = 80$

hallar: △15

A) 4352 B) 4300 C) 256
D) 4353 E) 4800

04 Sabiendo que:

♡1 $= 2 + 1$
♡2 $= 3 + 4$
♡3 $= 4 + 9$

hallar: ♡10

A)111 B)110 C)121 D)132 E)140

05 Sabiendo que:

⌐1⌐ $= 1\times 2+4 = 6$
⌐2⌐ $= 2\times 3+9 = 15$
⌐3⌐ $= 3\times 4+16 = 28$

hallar: ⌐10⌐

A)231 B)230 C)240 D)250 E)249

06 Si: $\sqrt{1\times 2\times 3\times 4+1} = 5$

$\sqrt{2\times 3\times 4\times 5+1} = 11$

$\sqrt{3\times 4\times 5\times 6+1} = 19$

hallar: $\sqrt{10\times 11\times 12\times 13+1}$

A)131 B)132 C)140 D)141 E)142

07 Si: $15^2 = 225$

$25^2 = 625$

$35^2 = 1225$

$45^2 = 2025$

hallar: 85^2

A) 7680 B) 2040 C) 2025
D) 7200 E) 7225

08 Si:

◇1◇ $= 1\times 2+3$
◇2◇ $= 2+3\times 4$
◇3◇ $= 3\times 4+5$
◇4◇ $= 4+5\times 6$

hallar: ◇22◇ + ◇15◇

A)830 B)831 C)833 D)834 E)835

09 Sabiendo que:

Fila 1: $1\times 19 = 19$
Fila 2: $2\times 18 = 36$
Fila 3: $3\times 17 = 51$

hallar el resultado de la fila *12*.

A) 144 B) 90 C) 96 D) 120 E) 140

10 Hallar:

$$E = 1+2+3+4+5+ \dots +19+20$$

A) 210 B) 240 C) 250 D) 260 E) 280

11 Hallar:

$$E = 2+4+6+8+ \dots +46$$

A)552 B)460 C)550 D)558 E)560

12 Calcular:

$$E = 1+3+5+7+ \dots +35$$

A) 324 B) 330 C) 350 D) 378 E) 390

13 Calcular:

$$E = 1^2+2^2+3^2+4^2+ \dots +15^2$$

A) 1240 B) 1250 C) 1225
D) 1280 E) 1300

14 ¿En qué cifra termina el resultado de la operación?

$$E = 2\times 4\times 5^{12} + 6\times 8\times 4^{21}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

15 ¿En qué cifra termina el resultado de la operación?

$$4\times 6^{24} + 8\times 9^{12} - 2\times 10^{15}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Hallar el resultado en la fila *10*.

Fila 1 $3^2 = 9$
Fila 2 $33^2 = 1089$
Fila 3 $333^2 = 110889$
Fila 4 $3333^2 = 11108889$
⋮ ⋮
Fila 10

RPTA :....................................

17 Hallar el resultado en la fila *10*.

Fila 1 $6^2 = 36$
Fila 2 $66^2 = 4356$
Fila 3 $666^2 = 443556$
⋮ ⋮
Fila 10

RPTA :....................................

18 Hallar el resultado de:

$$\underbrace{777\dots 77}_{20\,cifras}\times\underbrace{999\dots 99}_{20\,cifras}$$

RPTA :....................................

19 Hallar la suma de las cifras del resultado de:

$$S = \underbrace{1010101\dots 101}_{199\,cifras}\times 35$$

A) 400 B) 800 C) 720
D) 960 E) 820

20 Hallar la suma de las cifras del resultado de:

$$N = (\underbrace{999\dots 999}_{50\,cifras})^2$$

A) 640 B) 560 C) 900
D) 450 E) 457

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Si se observa que:

[1] $= 2^2 - 3\times 1$
[2] $= 3^2 + 4\times 2$
[3] $= 4^2 - 5\times 3$
[4] $= 5^2 + 6\times 4$
⋮

Hallar: [15] + [10]

A) 241 B) 239 C) 240
D) 243 E) 242

02 Si se observa que:

$$① = 2$$

$$② = 2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$③ = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$④ = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\vdots$$

Hallar: ㊿ + (60)

A) 110 B) 111 C) 112 D) 113 E) 114

03 Si:

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$\vdots$$

Hallar: 1111111^2; y dar como respuesta la suma de las cifras del resultado.

A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 52

04 ¿En qué cifra termina el resultado de la siguiente suma?

$$3425^2 + 7436^2$$

A) 5 B) 6 C) 1 D) 3 E) 8

05 Calcular la suma de los términos de la fila *10*.

Fila 1	⇒	1
Fila 2	⇒	3 5
Fila 3	⇒	7 9 11
Fila 4	⇒	13 15 17 19
...		.. ..

A) 900 B) 1000 C) 800 D) 1050 E) 950

06 Hallar la suma de las cifras del resultado en la fila *20*.

Fila 1	$3^2 = 9$
Fila 2	$33^2 = 1089$
Fila 3	$333^2 = 110889$
Fila 4	$3333^2 = 11108889$
...	...
Fila 20	...

A) 180 B) 200 C) 190 D) 170 E) 210

07 ¿En qué cifra termina el resultado 4^{53}?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 6 E) 0

08 ¿Cuántas esferas habrá en la figura *20*?

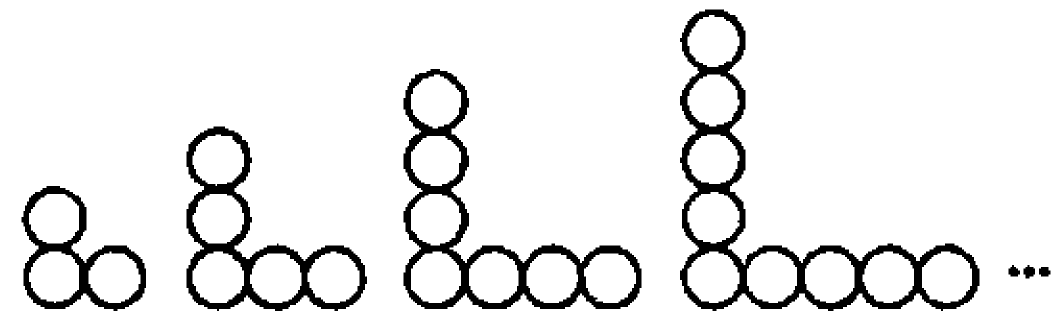


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

A) 20 B) 39 C) 41 D) 44 E) 42

09 ¿Cuántos cuadrados unitarios hay en la figura *30*?

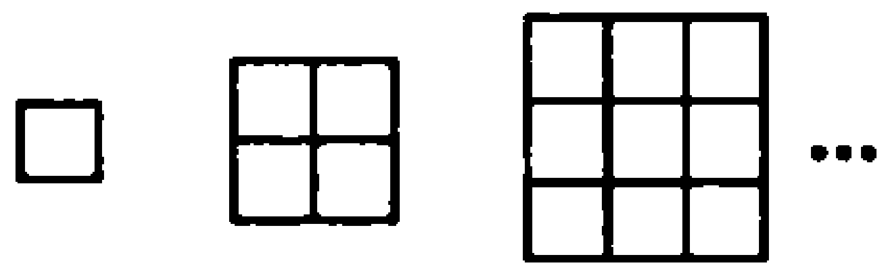


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 900 B) 800 C) 1000 D) 850 E) 950

10 ¿Cuántos palitos de fósforo se necesitan para formar la figura *20*?

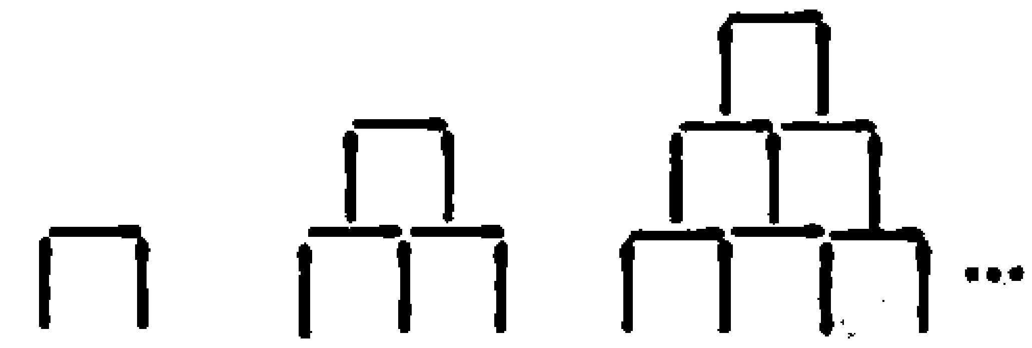


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 426 B) 440 C) 432 D) 400 E) 441

11 ¿Cuántas esferas hay en la figura *15*?

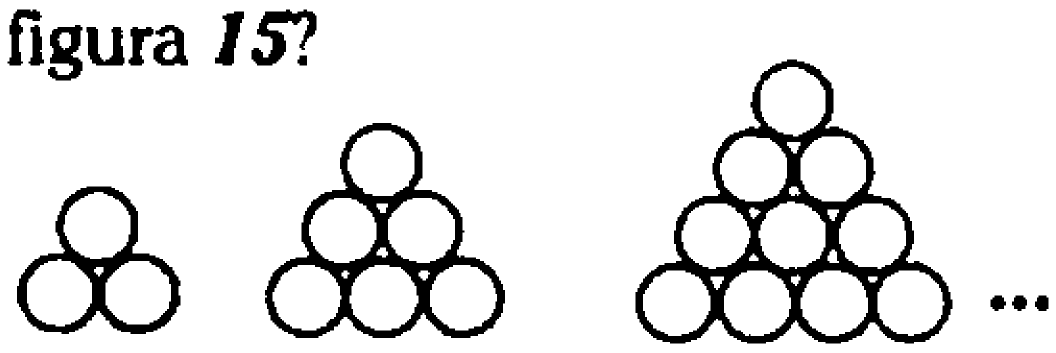
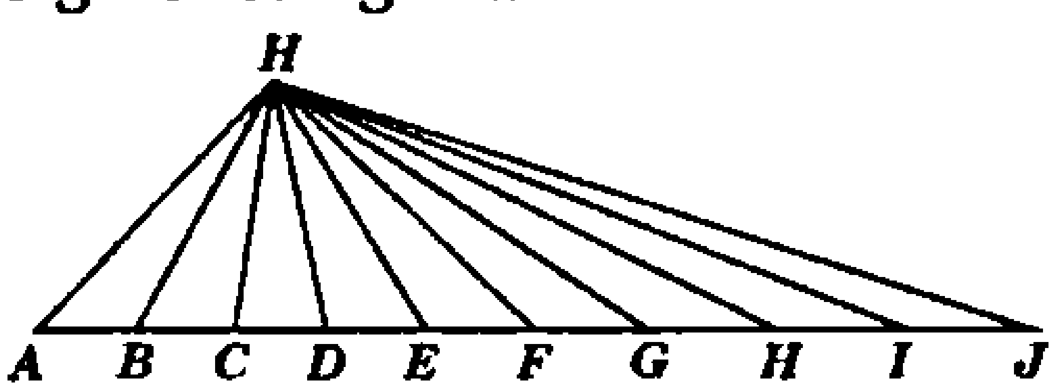


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 120 B) 124 C) 136 D) 145 E) 150

12 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 45 B) 55 C) 36 D) 42 E) 58

13 ¿Cuántos triángulos hay en la figura *17*?

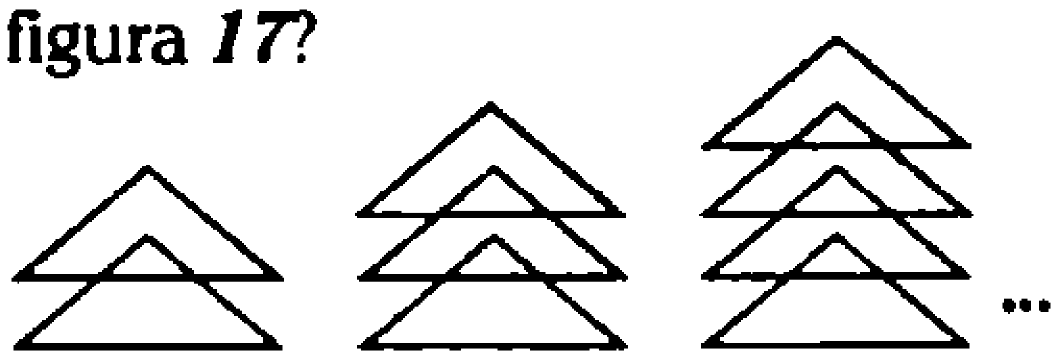
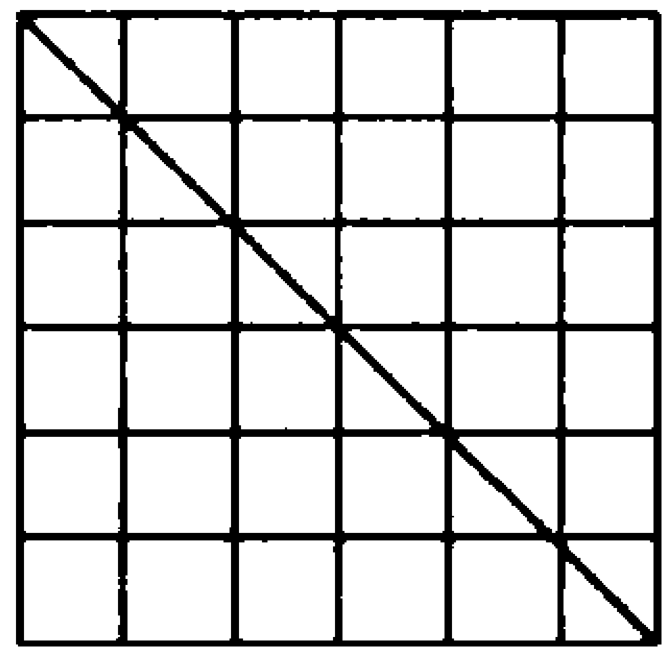


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 32 B) 35 C) 37 D) 40 E) 42

14 ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 30 B) 36 C) 38 D) 42 E) 45

ENUNCIADO:

En los arreglos literales que se proponen a continuación, ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra ***ÉXITO***?

15

```
        E
      X   X
    I   I   I
  T   T   T   T
O   O   O   O   O
```

A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 22

16

```
    E
  X   X
I   I   I
  T   T
    O
```

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

17

```
E   E   E   E
  X   X   X
I   I   I   I
  T   T   T
O   O   O   O
```

A) 54 B) 50 C) 36 D) 40 E) 48

18

```
        E
      X X X
     I I I I I
   T T T T T T T
O O O O O O O O O
```

A) 50 B) 64 C) 72 D) 78 E) 81

19 Halle el valor de

$$\frac{1\times2+2\times3+3\times4+...+28\times29+29\times30}{1\times29+2\times28+3\times27+...+28\times2+29\times1}$$

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ *C) 3 D) 2 E)* $\frac{4}{3}$

20 Calcule la suma de cifras del resultado al operar

$$S = \underbrace{899...999}_{30\,cifras} \times \underbrace{999...998}_{30\,cifras}$$

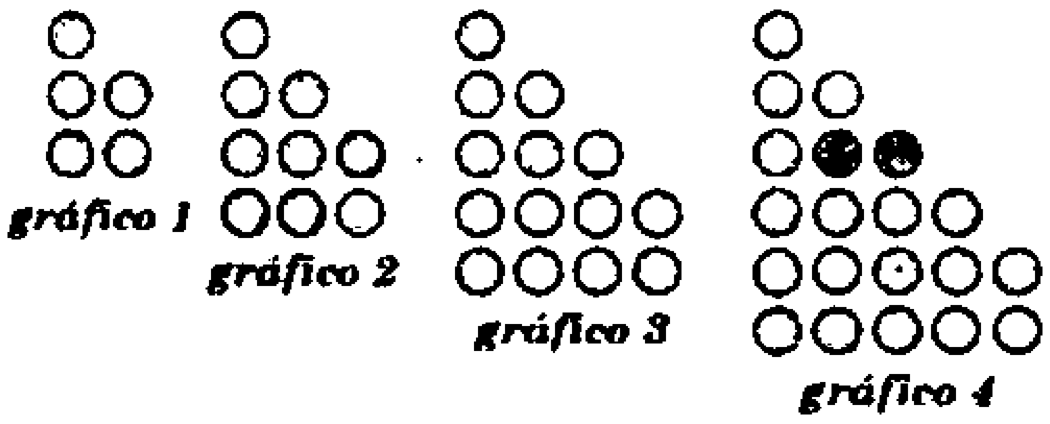
A) 271 B) 270 C) 540 D) 541 E) 269

21 En el campeonato nacional de

fútbol realizado el año pasado, participaron *14* equipos. Si jugaron todos contra todos, a una sola rueda, ¿cuántos partidos se disputaron en total?

A)105 B)140 C)70 D)196 E)91

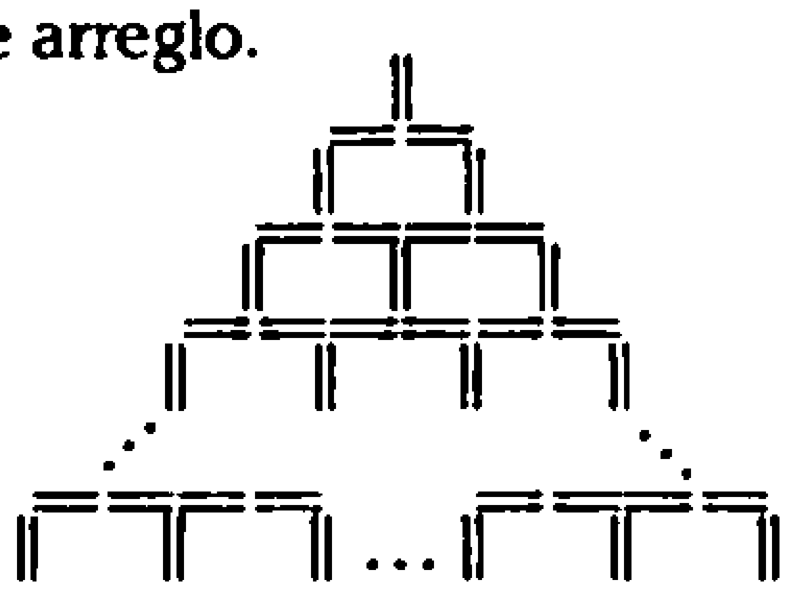
22 Calcule la cantidad de esferas del gráfico *39*.



A) 780 B) 840 C) 860
D) 819 E) 849

23 Halle el total de cerillas que se utilizaron en la construcción del siguiente arreglo.

A) 1220
B) 1180
C) 1058
D) 1218
E) 1829



24 ¿De cuántas maneras distintas se lee la palabra ***LEWIS*** en el arreglo mostrado?

L

L E L

L E W E L

L E W I W E L

L E W I S I W E L

A) 32
B) 29
C) 28
D) 31
E) 30

25 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra ***ARENA*** en el siguiente arreglo?

A	R	E	N	A	N	E	R	A
R	E	N	R	R	R	N	E	R
E	N	E	N	E	N	E	N	E
N	N	R	N	N	N	R	N	N
A	A	A	A	A	A	A	A	A
N	N	R	N	N	N	R	N	N
E	N	E	N	E	N	E	N	E
R	E	N	R	R	R	N	E	R
A	R	E	N	A	N	E	R	A

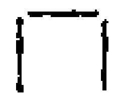
A) 128 B) 144 C) 148
D) 178 E) 132

26 ¿Cuántos puntos de corte se cuentan, como máximo, al intersecar *30* circunferencias?

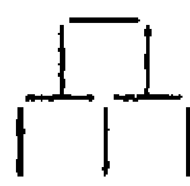
A)900 B)870 C)1200
D)1000 E)930

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

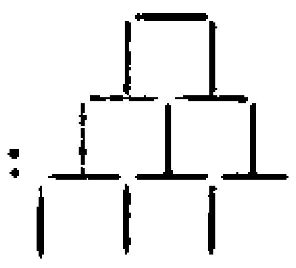
* P_1 ⇒ cant. de palitos en :



P_2 ⇒ cant. de palitos en :



P_3 ⇒ cant. de palitos en :



01 Calcular la cantidad de palitos en P_3

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

02 Calcular la cantidad de palitos en P_4

A) 19 B) 22 C) 24 D) 25 E) 26

03 Calcular la cantidad de palitos en P_5

A) 31 B) 33 C) 35 D) 38 E) 40

04 Calcular la cantidad de palitos en P_n

A) n^2 B) n^2-1 C) $n(n+1)$
D) $n(n+2)$ E) $n(n-1)$

Si se saludan dos personas hay un apreton de manos , Si se saludan tres personas hay tres apretones de manos . Si se saludan cuatro personas hay seis apretones manos.

05 Si se saludan cinco personas. ¿Cuántos apretones manos habrá?

A) 8 B) 10 C)12 D)14 E)16

06 Si se saludan seis personas . ¿Cuántos apretones manos hay?

A)12 B) 13 C) 14 D)15 E)16

07 Si se saludan "*n*" personas . ¿Cuántos apretones manos hay?

A) $(n-1)n$ B) $\frac{(n-1)(n)}{2}$ C) $\frac{n(1+n)}{2}$

D) $\frac{n^2}{2}$ E) $\frac{(n-1)^2}{2}$

ENUNCIADO :

* $P_1=(1+2+3)^2=36$

$P_2=(11+22+33)^2=4356$

$P_3=(111+222+333)^2=443556$

$P_4=(1111+2222+3333)^2=44435556$

08 ¿Cuál es la suma de las cifras en : P_4

A) 28 B) 32 C)35 D) 36 E) 38

09 ¿Cuál es la suma de cifras en : P_{18}

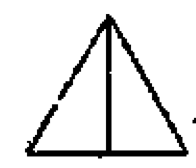
A) 90 B) 81 C) 72 D) 99 E) 63

10 ¿Cuál es la suma de cifras en "P_n"

A) 9n B) 6n C) 5n D) 18n E) 10n

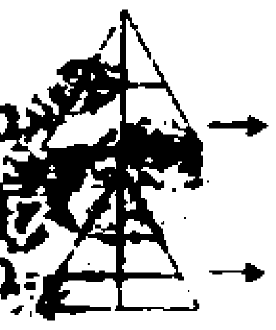
ENUNCIADO :

* P_1 ⇒ # triángulos en



P_2 ⇒ # triángulos en → 6

P_3 ⇒ # triángulos en → 9



11 Calcular : "P_5"

A) 12 B)10 C) 15 D) 18 E) 21

12 Calcular : P_7

A) 21 B) 18 C) 24 D) 27 E) 30

13 Calcular : P_n

A) 2n B) 3n C) 9n D) 6n E) 12n

ENUNCIADO :

* $M_1=[1]$ suma de elementos es ....

$M_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ suma de elementos es ....

$M_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ suma de elementos es ....

14 Calcular la suma de los elementos de : M_4

A) 32 B) 60 C) 64 D)72 E) 56

15 Calcular la suma de elementos de : M_{10}

A) 1000 B) 500 C) 100
D)180 E) 620

16 Calcular la suma de elementos de : M_n

A) n^2 B) $(n+1)^3$ C) n^a
D) n^2+n E) $n(n+2)$

ENUNCIADO :

* $P_1=(77+5)^2=6724$

⇒ suma de cifras ....

$P_2=(777+25)^2=643204$

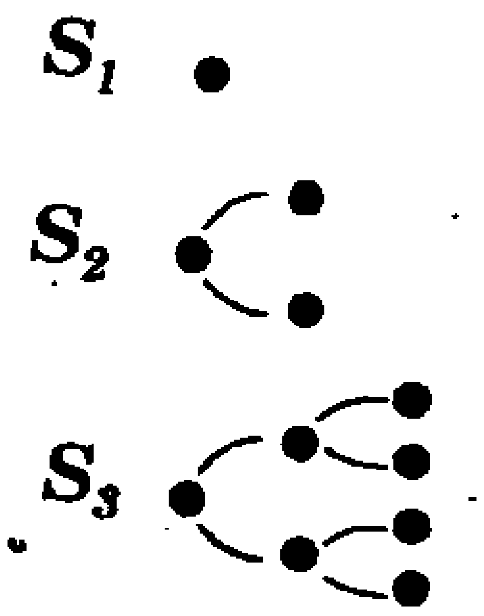
⇒ suma de cifras ....

$P_3=(7777+225)^2=64032004$

⇒ suma de cifras ....

17 Calcular la suma de cifras de

"P_n"



A) 12n
B) 19n
C) 19
D) 38
E) 41

18 ¿Cuántas bolitas habrá en "S_4"?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

19 ¿Cuántas bolitas habrá en "S_5"?

A) 31 B) 32 C) 27 D) 18 E) 41

20 ¿Cuántas bolitas habrá en "S_n"?

A) $3^n - 1$ B) $2n + 1$ C) $n^2 + 1$
D) $2^n - 1$ E) $n^2 - 1$

TAREA DOMICILIARIA

01 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "*MI*"?

M
M I M

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "*MIS*"?

M
M I M
M I S I M

A) 5 B) 7 C) 6 D) 8 E) 10

03 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "*MISA*"?

M
M I M
M I S I M
M I S A S I M

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

04 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "*MISANTROPO*"?

M
M I M
M I S I M
M I S A S I M
M I S A N A S I M
M I S A N T N A S I M
M I S A N T R T N A S I M
M I S A N T R O R T N A S I M
M I S A N T R O P O R T N A S I M
M I S A N T R O P O P O R T N A S I M

A) 1023 B) 1024 C) 511
D) 255 E) 2047

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular la suma de cifras del resultado de :

$$(99999999)^2$$

A) 81 B) 72 C) 83 D) 90 E) 104

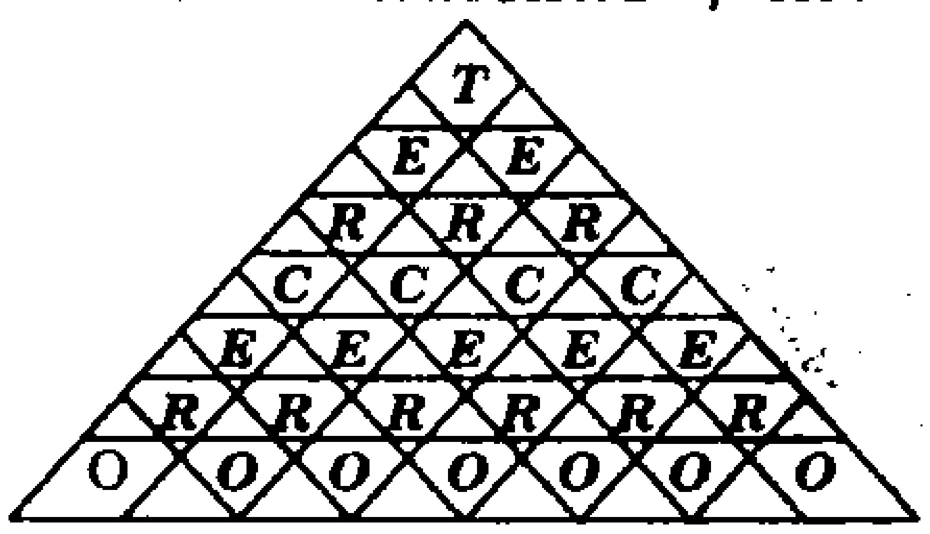
02 Calcular la suma de cifras del resultado de: $(\underbrace{666 .... 666}_{\text{20 Seis}})^2$

A) 120 B) 180 C) 420 D) 400 E) 204

03 Calcular la suma de cifras del resultado de: $(111111111)^2$

A) 72 B) 90 C) 9 D) 81 E) 102

04 De cuantas maneras se puede leer "*TERCERO*", en :



A) 32 B) 64 C) 128 D) 63 E) 125

05 Halle la suma de cifras del resultado de efectuar :

$$M = \underbrace{666 ... 666}_{\text{502 cifras}} \times 8$$

A) 1 500 B) 1 515 C) 825
D) 1 600 D) 1 425

06 Halle el número total de palabras "*CRÍTICA*"

A	C	I	T	I	R	C
C	A	C	I	T	I	R
I	C	A	C	I	T	I
T	I	C	A	C	I	T
I	T	I	C	A	C	I
R	I	T	I	C	A	C
C	R	I	T	I	C	A

A) 82 B) 94 C) 100
D) 128 E) 256

07 Halle la suma de todos los términos del siguiente arreglo numérico .

1	2	3	···	15
2	3	4	···	16
3	4	5	···	17
···	···	···	···	···
15	16	17	···	29

A) 3 375 B) 2 375 C) 3 575
D) 3 875 E) 1 375

08 Halle el número total de palabras "*UNO*".

F_1 ⟶ UNO
F_2 ⟶ UNO
F_3 ⟶ UNO
F_4 ⟶ UNO
⋮
F_{20} ⟶ UNO

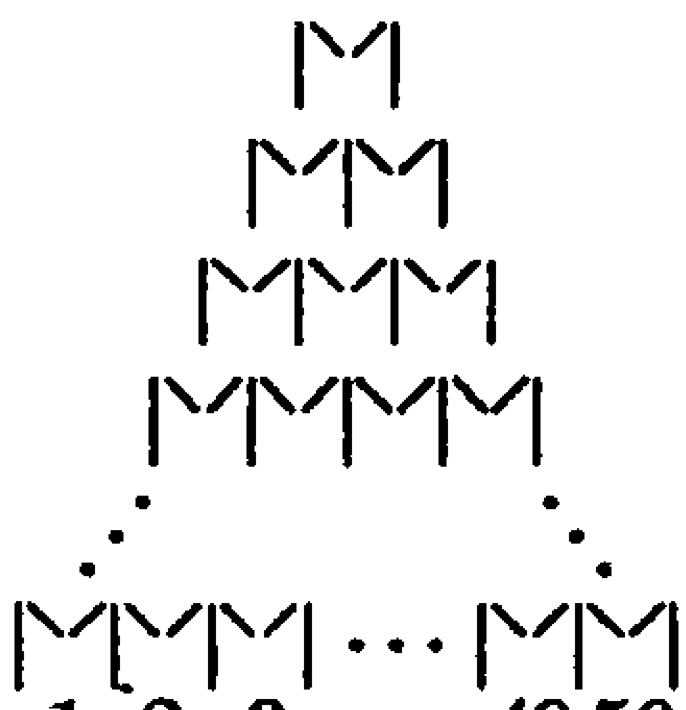
A) 62 B) 76 C) 84
D) 92 E) 104

09 Halle el total de palabras *TRES*.

1 ⟶ TRES
2 ⟶ TRES
3 ⟶ TRES
4 ⟶ TRES
⋮
9 ⟶ TRES
10 ⟶ TRES

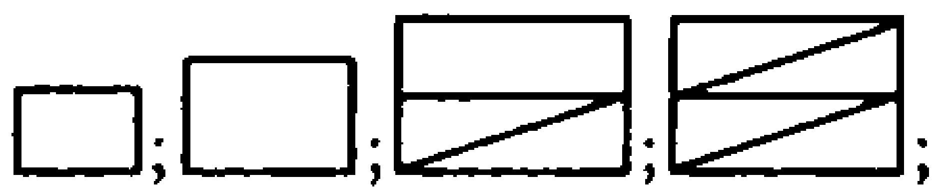
A) 72 B) 68 C) 32 D) 70 E) 63

10 Calcule el total de "palitos" en la siguiente figura :



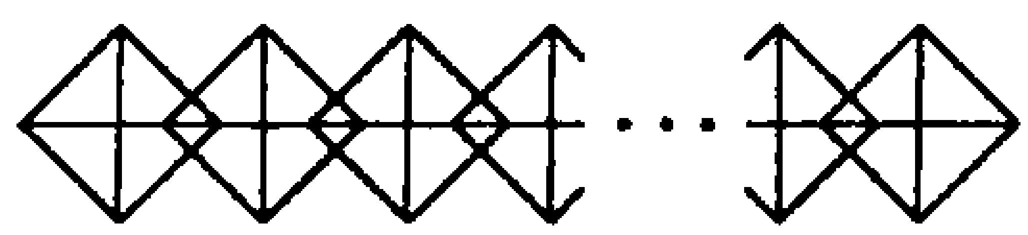
A) 1 825 B) 2 550 C) 3 875
D) 3 665 E) 1 225

11 ¿Cuántos cuadriláteros se puede contar en la figura *(100)* del siguiente arreglo?



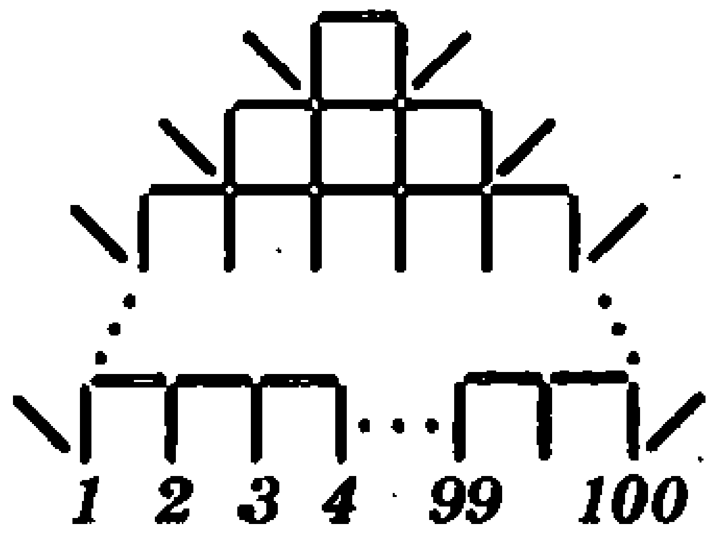
A) 4 350 B) 4 385 C) 4 951
D) 4 805 E) 4 881

12 Calcule el total de triángulos en:



A) 340 B) 344 C) 346
D) 348 E) 200

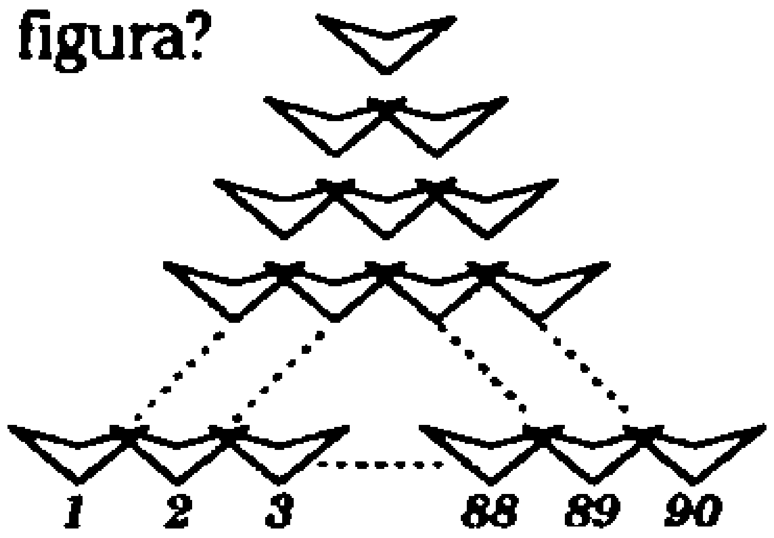
13 Halle el total de palitos :



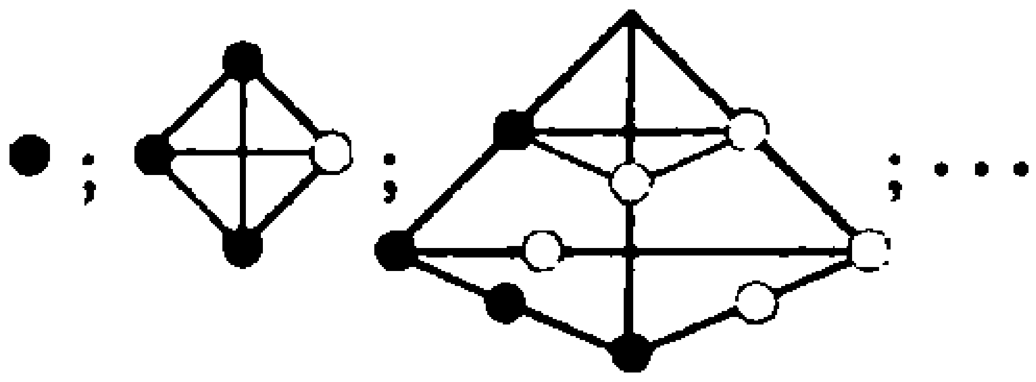
A) 5 000 *B) 5 150* *C) 2 080*
D) 9 050 *E) 8 000*

14 Cuántos cuadriláteros cóncavos se pueden contar en la siguiente figura?

A) 8 100
B) 3 900
C) 7 200
D) 3 000
E) 9 321

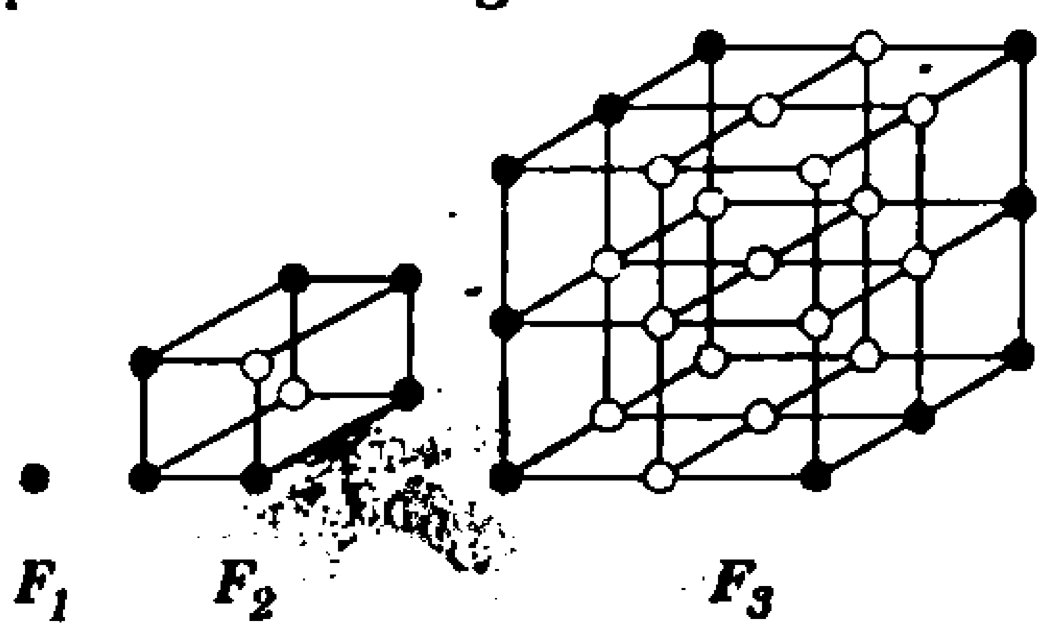


15 Hallar cuantas bolitas no están pintadas en la figura *20* .



A) 1 140 *B) 1 120* *C) 1 540*
D) 400 *E) 501*

16 Hallar cuántas bolitas no están pintadas en la figura *10* .



A) 1 963 *B) 1 962* *C) 900*
D) 1 000 *E) 962*

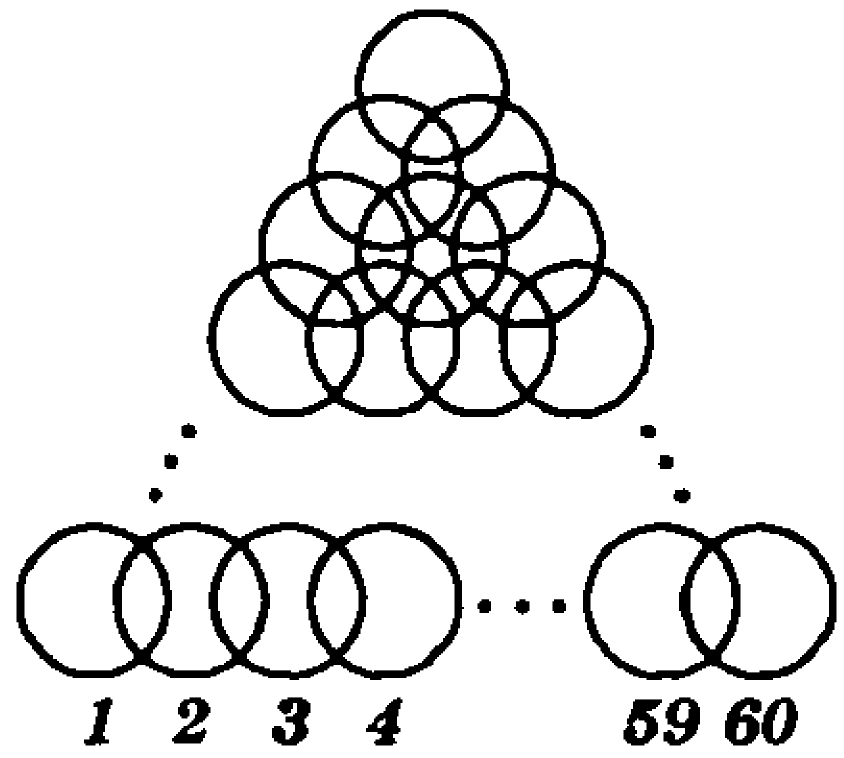
17 Dada la siguiente distribución numérica : ¿En qué columna aparecerá *2 003*?

P	Q	R	S	T
	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20

⋮

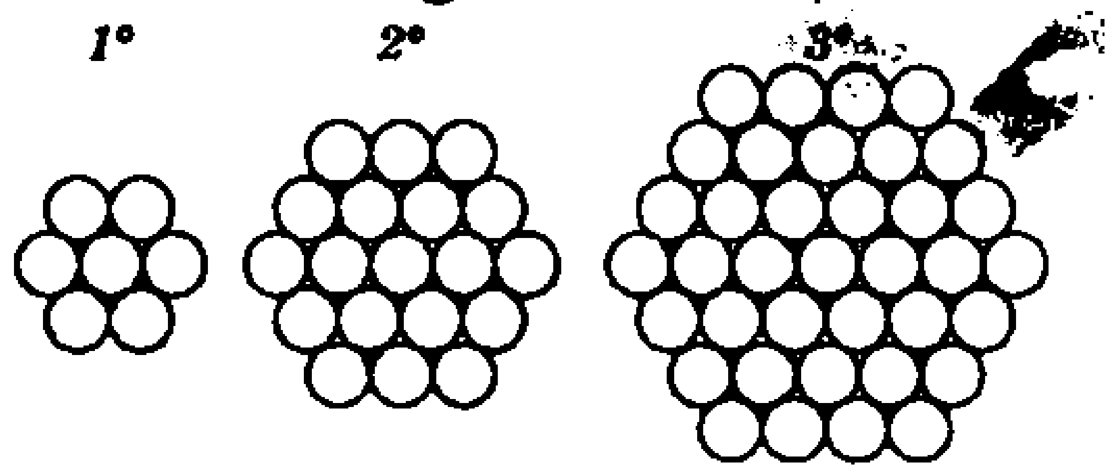
A) P *B) Q* *C) S* *D) R* *E) F*

18 En la figura halle la cantidad total de puntos de intersección :



A) 7 350 *B) 2 720* *C) 9 020*
D) 7 080 *E) 9 005*

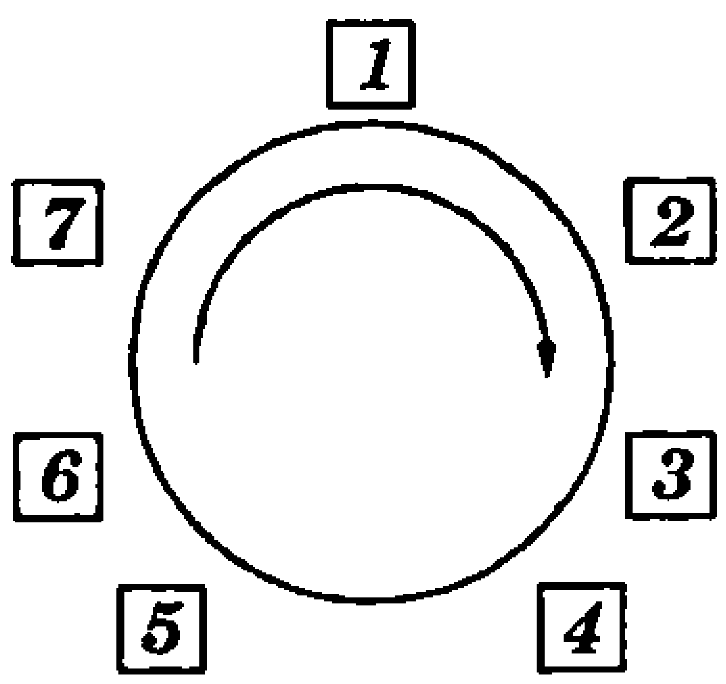
19 En cada una de las figuras mostradas , debes unir los centros de las circunferencias con los centros de sus vecinas . Haciendo esto , ¿cuántos triángulos simples (los más pequeños) se pueden contar en la figura *100*?



A) 60 000 *B) 57 420* *C) 23 400*
D) 30 000 *E) 17 200*

20 Un conejo salta en el sentido que indica la flecha . Si está en un casillero impar salta un tramo . Si esta en un casillero par salta *2* tramos . Si comienza en el casillero [7] . ¿En qué casillero se encuentra después de dar *9 995* saltos?

* Un tramo es la distancia entre un casillero y el siguiente .



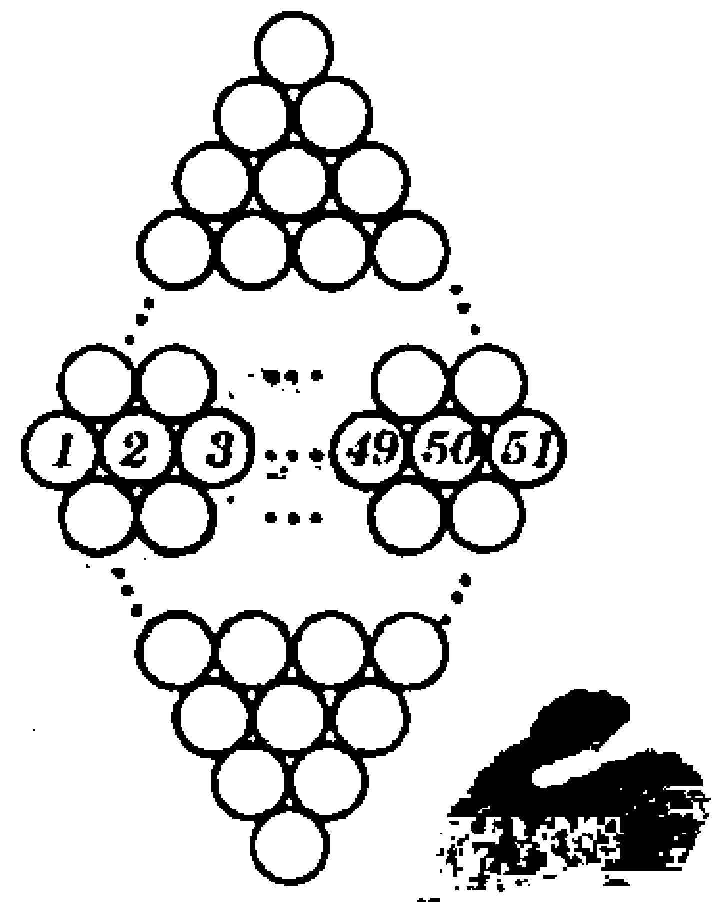
A) [1] *B)* [2] *C)* [4] *D)* [6] *E)* [7]

21 Calcule el valor de A.

$$A=\frac{1\times2+2\times3+3\times4+...+101\times102}{(1+2)+(2+3)+(3+4)+...+(101+102)}$$

A) 30 *B) 31* *C) 32*
D) 33 *E) 34*

22 ¿Cuántos puntos de contacto hay entre todas las circunferencias en el siguiente gráfico?



A) 7800 *B) 7700* *C) 7600*
D) 7500 *E) 7400*

23 Se escribe números pares formando cuadrados concéntricos con centro en *2*, tal como se muestra en el gráfico.

52	54	56	58	60
50	20	22	24	26
48	18	4	6	28
46	16	2	8	30
44	14	12	10	32
42	40	38	36	34

Determine el número mayor en el décima cuadrado.

A) 882 *B) 400* *C) 536*
D) 842 *E) 654*

24 ¿Cuántas palabras *ENUMERAR* se cuentan en total en el arreglo uniendo letras vecinas?

A
ARA
ARERA
AREMERA
AREMUMERA
AREMUNUMERA
AREMUNENUMERA

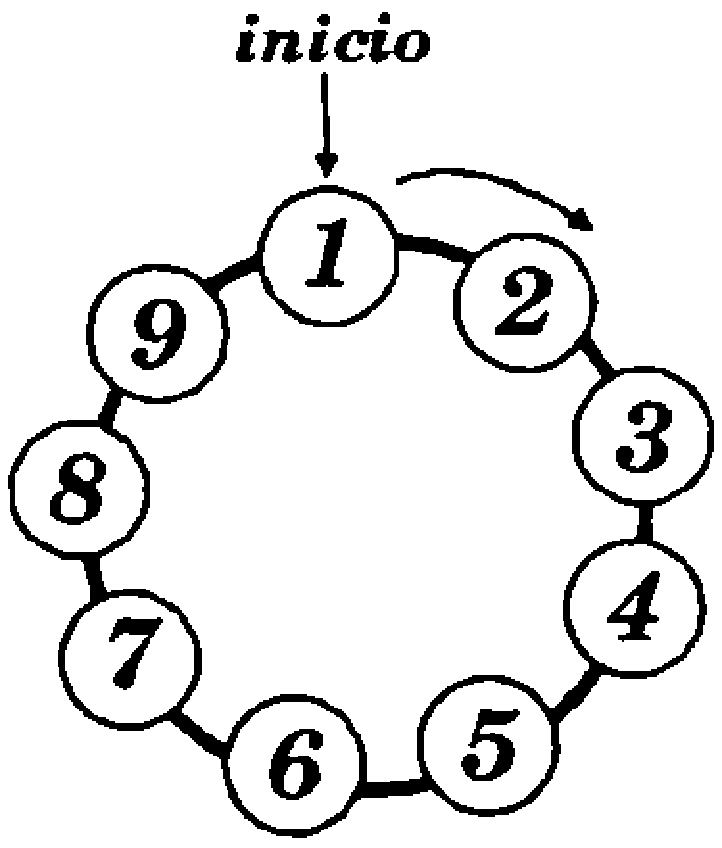
A) 256 *B) 255* *C) 257*
D) 128 *E) 127*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) D	2) C	3) C	4) D	5) B	6) D	7) B	8) D	9) A	10) A
11) C	12) A	13) B	14) C	15) A	16) C	17) C	18) D	19) A	20) D
1) D	2) B	3) D	4) A						

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) B	2) B	3) D	4) B	5) E	6) D	7) A	8) B	9) B	10) C
11) C	12) D	13) B	14) A	15) E	16) E	17) C	18) A	19) A	20) C
21) E	22) C	23) A	24) B						

REPASO PARCIAL
PROBLEMAS DE LA PRE SAN MARCOS
CAPITULO 018

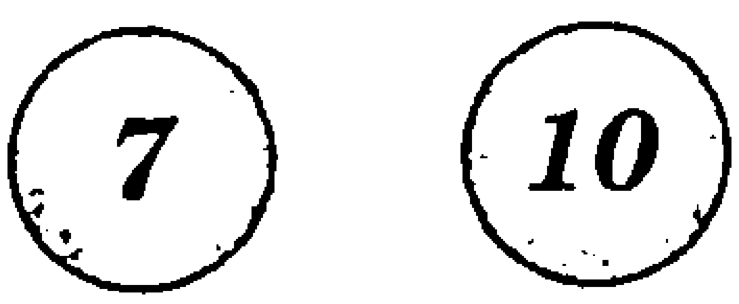
01 Sobre un tablero, como se muestra en la figura, se ha colocado sobre cada casilla una ficha circular numerada en ambas caras y cuya suma es *10*. Se voltea sucesivamente cada una de las fichas en el sentido que indica la flecha; después de voltear *39* fichas. ¿cuánto suman las caras visibles?



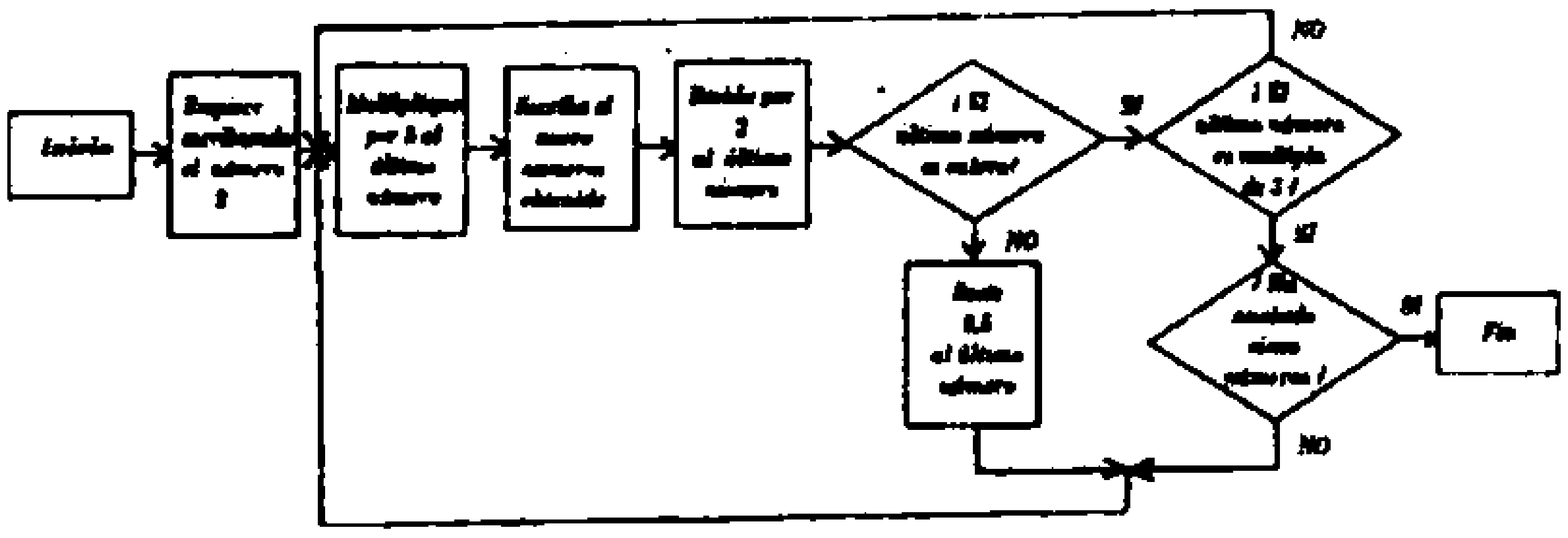
A) 74 *B) 64* ~~*C) 63*~~ *D) 60* *E) 69*

02 Se tienen dos discos circulares, en el reverso de cada uno se encuentra escrito otro número positivo. Al lanzar los dos discos al aire y sumar los dos números que se obtienen, entonces todos los posibles resultados que se pueden conseguir son: *11, 12, 16* y *17.* Hallar la diferencia positiva de los números que están escritos en la cara oculta de cada disco.

A) 4 ó 5
B) 3 ó 6
C) 2 ó 8
~~*D) 1 ó 7*~~
E) 3 ó 5

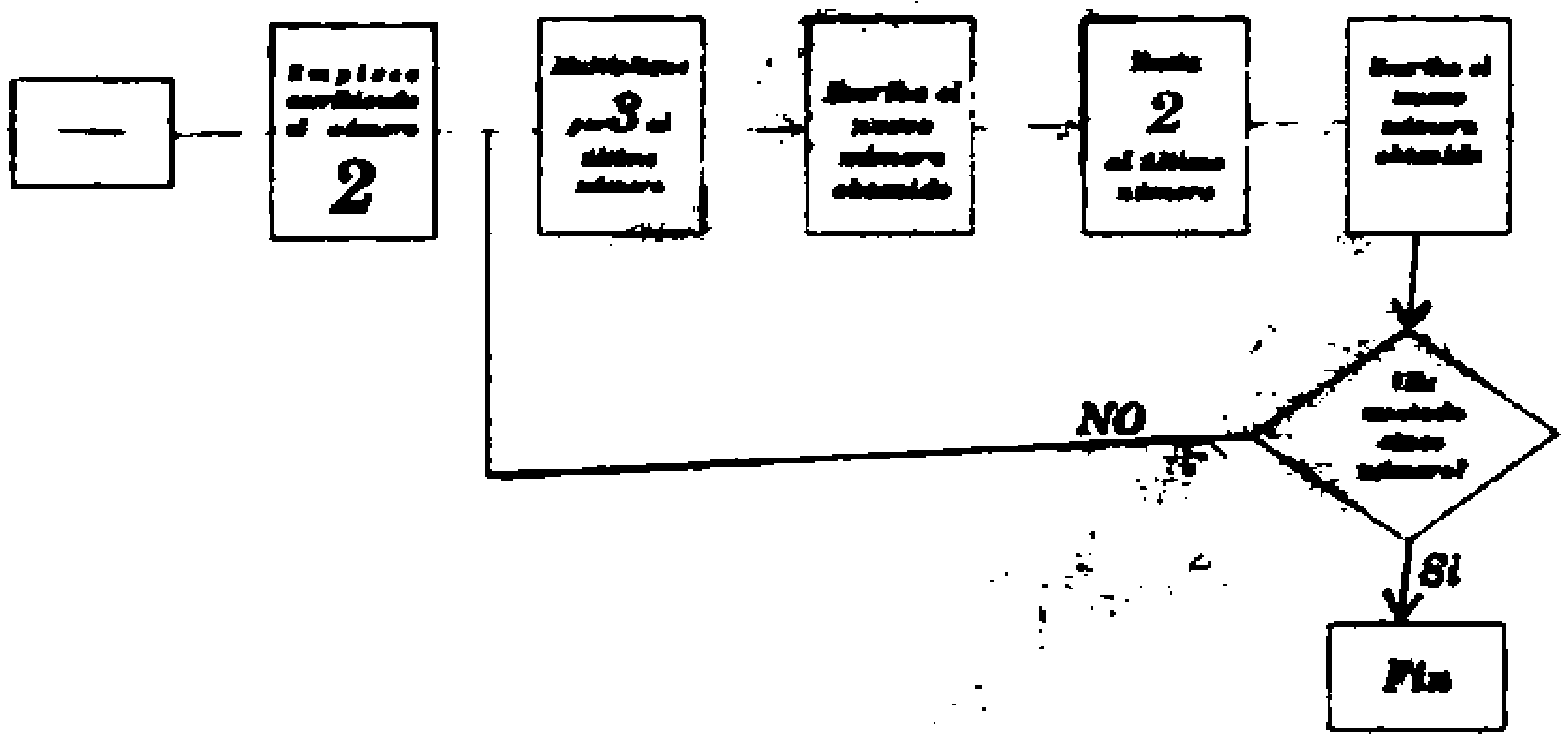


03 En el siguiente programa, ¿cuál es la suma de los cinco números escritos?



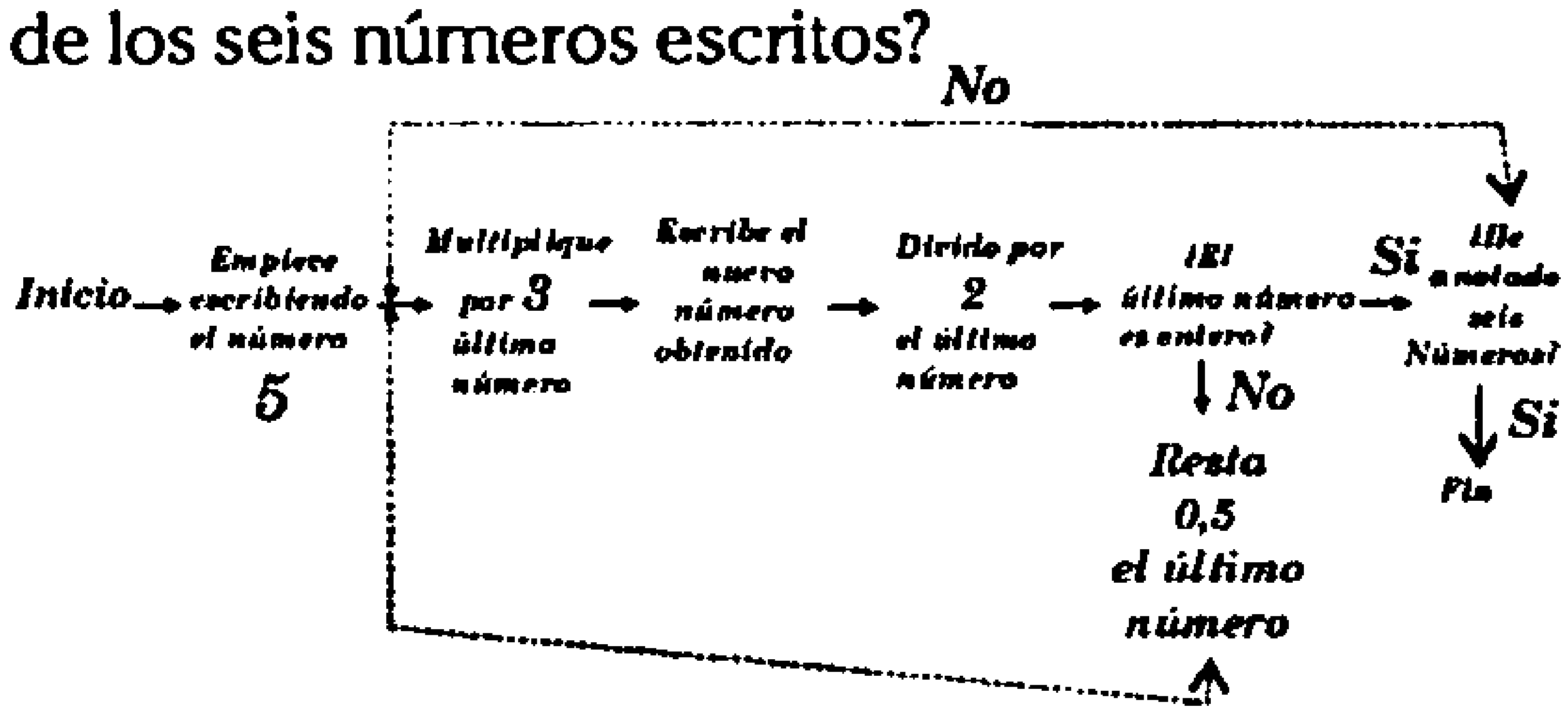
A) 245 ~~*B) 247*~~ *C) 249* *D) 248* *E) 246*

04 En el siguiente programa, ¿cuál es la suma de los cinco números escritos?



A) 35 *B) 34* *C) 36* *D) 33* *E) 37*

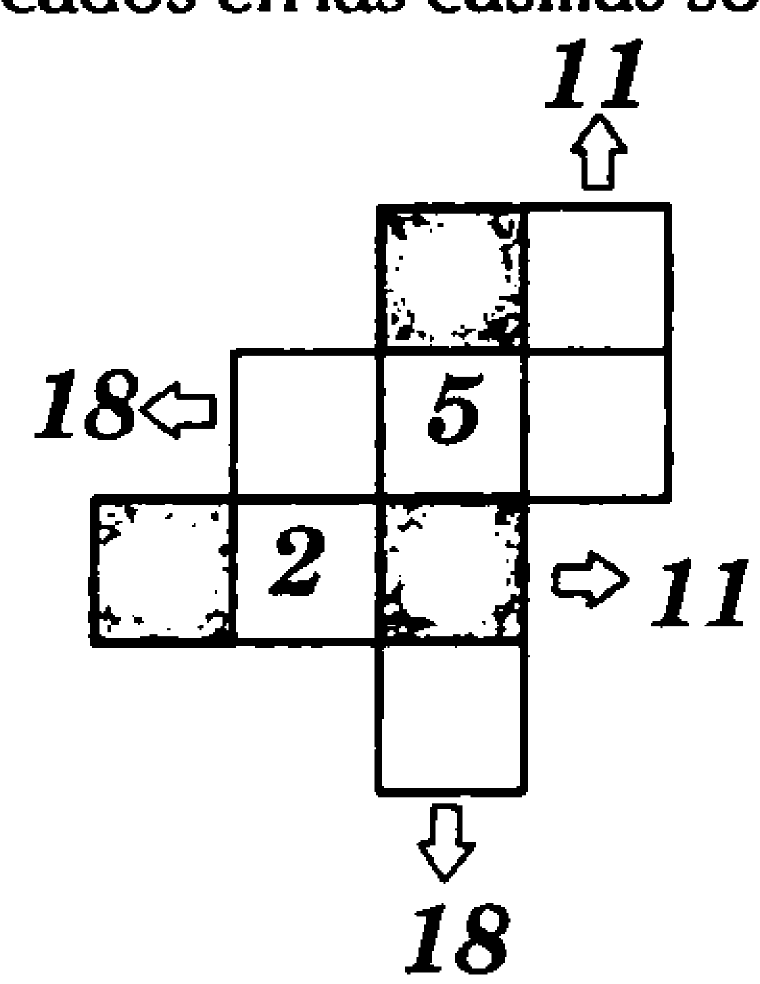
05 En él siguiente programa, ¿cuál es la suma de los seis números escritos?



A) 185 ~~*B) 182*~~ *C) 184* *D) 183* *E) 186*

06 En el gráfico móstrado, distribuya los números del *1* al *9* y sin repetir, de modo que la suma de los números ubicados en cada fila y columna, están señaladas por las flechas. Determine el mayor valor de la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.

A) 15
B) 17
C) 19
~~*D) 18*~~
E) 16



07 Si los elementos del siguiente cuadrado mágico son números naturales, hallar la suma de los números de una de las diagonales.

48		
53		23

A)117
B)116
C)115
D)113
~~E)114~~

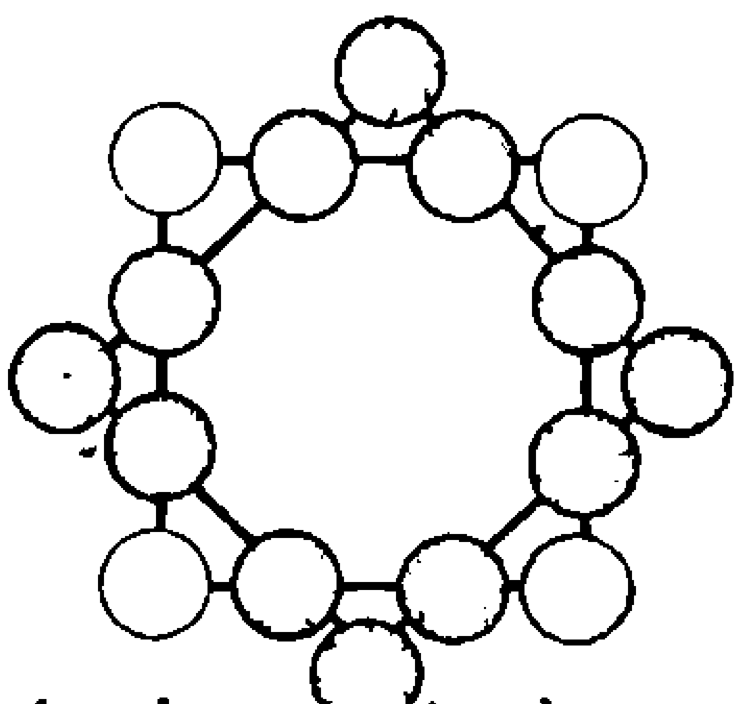
08 En la siguiente distribución, halle el valor de $R=A(10)+A(11)$.

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	...
$2+3$	1×2	$4+5$	3×4	$6+7$	5×6	...

A)117 B)116 ~~C)115~~ D)113 E)114

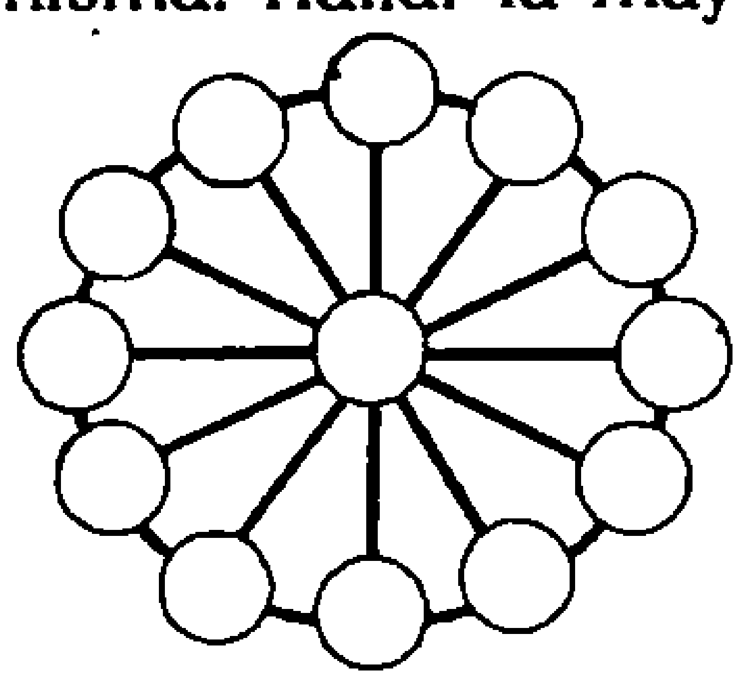
09 En el gráfico mostrado, distribuir en cada círculo los números del *1* al *16*, sin repetir; de modo que al sumar los números que hay en cualquiera de los lados de cada cuadrado y al sumar los números de lo vértices de cada cuadrado, se obtiene la misma suma. Hallar dicha suma.

~~A)34~~
B)36
C)32
D)24
E)38



10 En los círculos mostrados, colocar los *13* primeros enteros pares consecutivos mayores que *13*, sin repetir; de manera que la suma de ios números que están unidos por una línea recta sea siempre la misma. Hallar la mayor suma por línea.

A)68
~~B)78~~
C)80
D)88
E)90



11 Se distribuyen *9* tarjetas sobre una mesa, como se muestra en el gráfico. ¿Cuántas tarjetas se deben mover, como mínimo, para que la suma de los números de las tarjetas en cada fila, columna y diagonal sea la misma? Considere que las tarjetas sombreadas no deben moverse.

12	9	9
6	9	6
9	12	12

A)2
~~B)3~~
C)4
D)5
E)6

12 Distribuya los nueve primeros impares en las casillas del recuadro mostrado, de manera que se forme un cuadrado mágico de orden *3*. Halle la suma de los números ubicados en los casilleros sombreados.

A)36
~~B)45~~
C)54
D)60
E)25

13 Complete el siguiente recuadro con números enteros, de modo que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal sea la misma. Indique la diferencia positiva del número ubicado en la casilla sombreada y la constante mágica.

	36	
34		21

A)37
B)12
C)50
D)49
~~E)53~~

14 Distribuya los números naturales del *2* al *10*, sin repetir, de modo que la suma en cada fila, columna y diagonal del recuadro sea la misma. Halle en términos de *a* y *b* *la* suma de los números ubicados en los casilleros sombreados.

a	b	

~~*A)18+a – b*~~ *B)18* *C)18 - a - b*
D)9+2a - b *E)18+b –a*

15 Distribuya los *16* primeros múltiplos de *3* positivos en las casillas del recuadro mostrado, de modo que la suma en cada fila, columna y diagonal sea la misma. Dé como respuesta el valor de $a+b+c+d$.

			d
	b		
		c	
a			

A)144
B)108
C)96
~~*D)102*~~
E)120

16 Distribuya los números enteros del *–3* al *5*, sin repetir, de manera que se forme un cuadrado mágico de orden *3*. Halle la suma de los números ubicados en las esquinas disminuida en el valor de la constante mágica.

–1		
		–2

~~*A)1*~~
B)2
C)4
D)3
E)0

17 Distribuya los números del *1* al *25*, uno por casilla, de modo que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal sea la misma.

a				i
	b		h	
		c		
	g		d	
f				e

Halle el valor de M

$$M = \frac{a+b+c+d+e}{f+g+h+i}$$

A)1 *B)2* ~~*C)5/4*~~
D)3/2 *E)no se puede determinar*

18 Complete el siguiente recuadro de manera que se obtenga un cuadrado mágico multiplicativo de orden *3.*

	4	
2		8
a		b

Dé como respuesta el valor de ab.

A)8 *B)32* ~~*C)16*~~ *D)* $8\sqrt{2}$ *E)* $16\sqrt{2}$

19 En una cierta comunidad, los políticos siempre mienten y los no políticos siempre dicen la verdad. Un extranjero se encuentra con *3* nativos y pregunta al primero de ellos , si es político. Este responde a la pregunta; al preguntar al segundo informa que el primero negó ser político; pero el tercer nativo informa que el primero es realmente político. ¿De estos tres nativos, cuántos nativos son políticos?

A) Ninguno ~~*B)1*~~ *C)2* *D)3*

20 ¿Cuántos de los siguientes enunciados son falsos?

I) Exactamente uno de los enunciados de esta lista es falso.

II) Exactamente dos de los enunciados de esta lista son falsos.

III) Exactamente tres de los enunciados de esta lista son falsos.

IV) Exactamente cuatro de los enunciados de esta lista son falsos.

V) Exactamente cinco de los enunciados de esta lista son falsos.

VI) Exactamente seis de los enunciados de esta lista son falsos.

VII) Exactamente siete de los enunciados de esta lista son falsos.

VIII) Exactamente ocho de los enunciados de esta lista son falsos.

IX) Exactamente nueve de los enunciados de esta lista son falsos.

X) Exactamente diez de los enunciados de esta lista son falsos.

~~*A) 0*~~ *B) 7* *C) 6* *D) 8* *E) 10*

21 Cuatro amigas comentan:

* ***Bertha:*** Yo no tengo el polo de color azul.

* ***Sofía:*** Yo no tengo el polo de color rojo.

* ***María:*** Yo tengo el polo de color rojo.

* ***Rosa:*** Yo no tengo el polo de color verde.

Si se sabe que hay una dama con un polo de color azul, dos con polo de color rojo y una con el polo de color verde, además de las afirmaciones sólo dos son verdaderas, ¿quién lleva puesta el polo de color azul?

A) Bertha ***B) Sofía*** ***C) Bertha o Sofía***
D) María ~~***E)***~~ ***María o Rosa***

22 Dos amigos Luciano y Fabio tienen un comportamiento algo extraño: Uno de ellos miente los días lunes, miércoles y viernes, y los demás días dice la verdad; y el otro miente martes, Jueves y sábado y dice la verdad los otros días. Cierto día tienen la siguiente conversación:

* ***Luciano:*** Hoy es domingo.

* ***Fabio:*** Ayer fue domingo.

* ***Luciano:*** Es verano.

Podemos afirmar:

A) Es un domingo de verano ***B) Es un lunes de verano***
~~***C)***~~***Es lunes pero no es verano*** ***D) Es sábado***
E) Es domingo pero no es verano

23 Néstor, Victor, Raúl y Javier toman una ficha diferente cada uno (las fichas están numeradas del ***1*** al ***4***) y dicen:

* ***Néstor*** : «Yo tengo la ficha ***3***»

* ***Victor*** : «El número en mi ficha es el doble que en la de Javier»

* ***Raúl*** : «Néstor no tiene la ficha ***3***

* ***Javier*** : «Raúl tiene la ficha ***4***»

Si sólo uno de ellos miente. ¿cuánto suman los números de las fichas que tienen Víctor y Javier?

A)6 ***B)4*** ***C)5*** ~~***D)3***~~ ***E)7***

24 Cinco niños tienen ***2 ; 4 ; 6 ; 8*** y ***10*** caramelos respectivamente. Se sabe que cada una dijo:

* ***Abel*** : «Yo tengo ***6*** caramelos»

* ***Beto*** :«Yo tengo ***10*** caramelos»

* ***Carlos*** :«Beto tiene ***4*** caramelos»

* ***David*** :«Yo tengo ***8*** caramelos»

* ***Ernesto*** : «Yo tengo ***4*** caramelos»

Si solamente uno de ellos miente y los otros dicen la verdad, ¿cuántos caramelos tienen juntos Abel, Carlos y Ernesto?

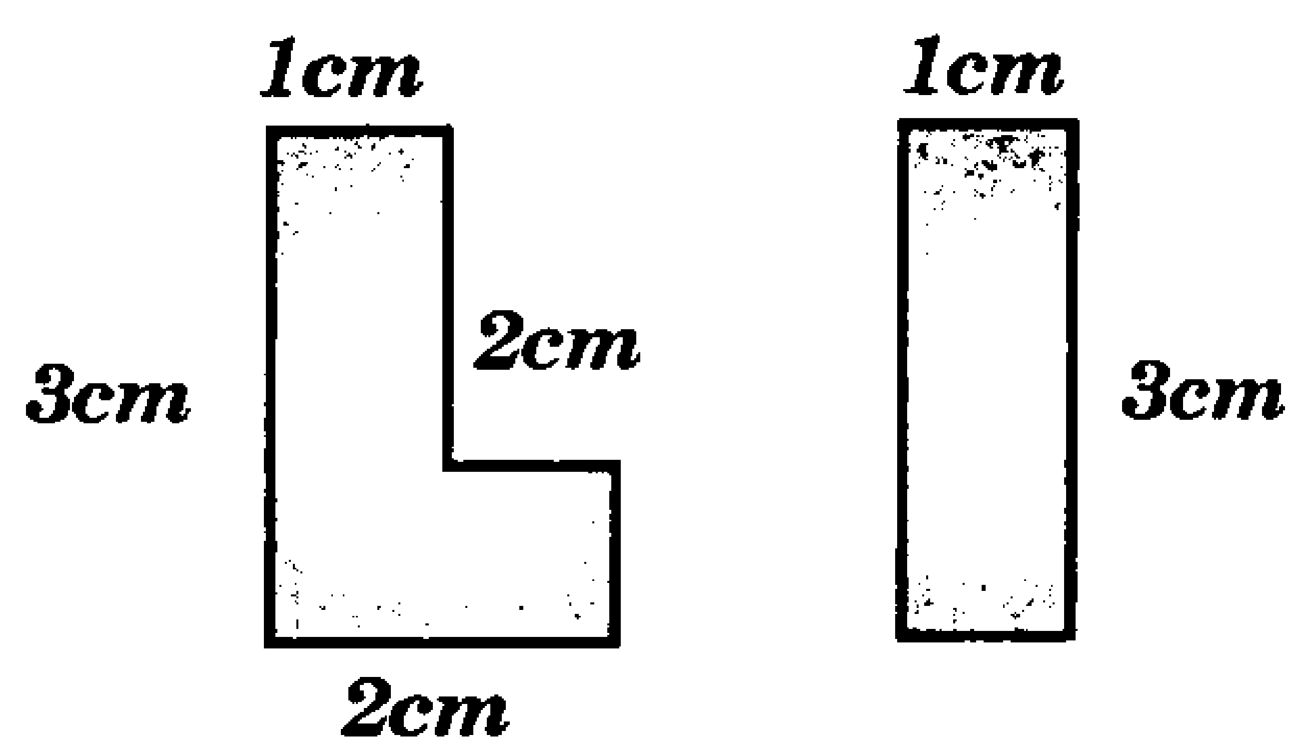
A) 18 ***B) 14*** ~~***C) 12***~~ ***D) 16*** ***E) 22***

25 Si por un Kilogramo de papas se obtienen ocho pequeñas o seis grandes, y el precio de un kilogramo es de ***S/. 2*** ó ***S/. 3***, halle el mínimo costo para obtener dos docenas de papas grandes y una docena de papas pequeñas.

A) S/. 9 ***B) S/. 10*** ***C) S/. 10,5***
~~***D)***~~ ***S/. 11*** ***E) S/. 12***

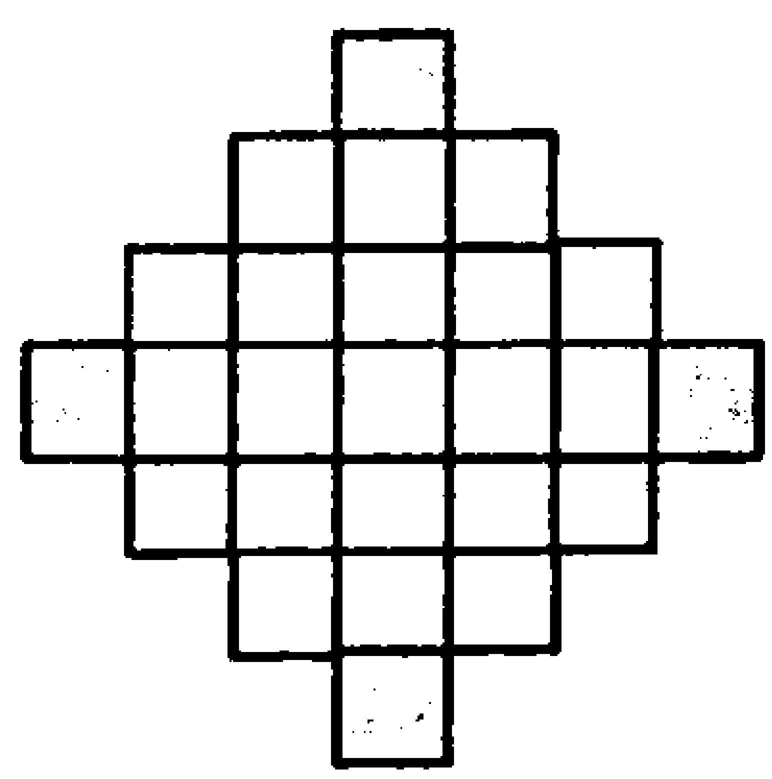
26 Daniel tiene suficientes fichas de plástico, de dos tipos, como se indica en la figura. Si con ellas desea formar un cuadrado, adosándolas convenientemente y usando la misma cantidad de fichas de cada tipo, ¿cuál es el perímetro del cuadrado más pequeño que puede construir?

~~***A)***~~ ***28 cm***
B) 64 cm
C) 36 cm
D) 40 cm
E) 24 cm



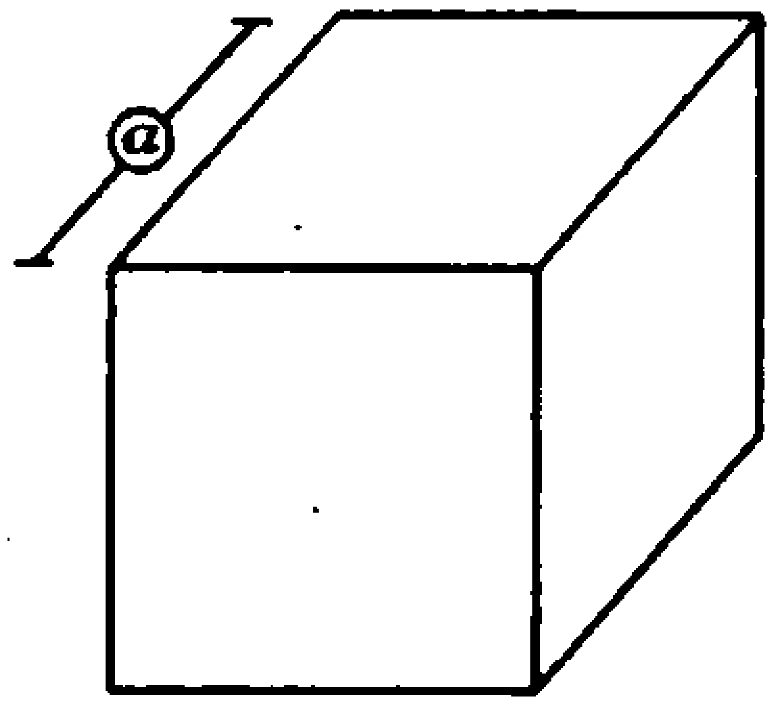
27 La figura está construida por ***25*** fichas cuadradas congruentes. ¿Cuál es el la cantidad máxima de fichas que se deben quitar para que el perímetro de la figura que resulte sea el mismo que el de la figura original? .

A) 12
B) 16
C) 15
D) 9
~~***E)***~~ ***18***



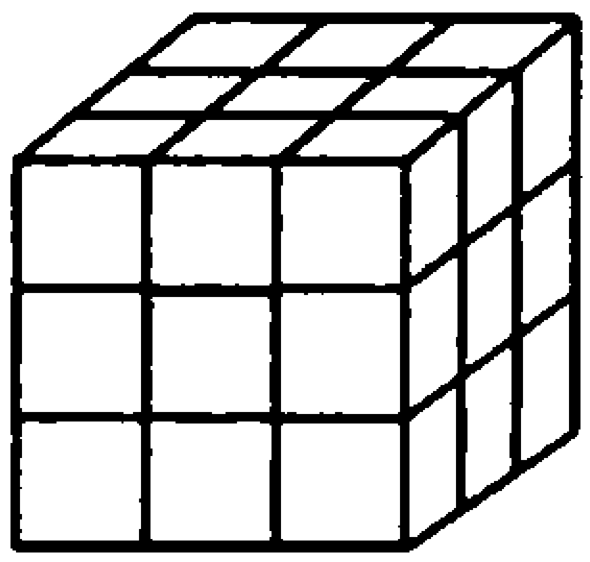
28 Un cubo de madera como se muestra en la figura es pintado totalmente, luego se corta en cubos de ***9 cm*** de arista cada uno. Si hay exactamente ***96*** cubos que tienen dos de sus caras pintadas, ¿cuántos cubos con una sola cara pintada hay?

A) 385
~~*B) 384*~~
C) 386
D) 388
E) 399



29 En la figura, se muestra un sólido formado por ***25*** cubitos iguales pegados entre sí. Si se sumerge completamente en un recipiente con pintura roja, luego de secar) y despegar, ¿cuántos cubitos tendrán tres caras pintadas de color rojo?

A) 13
B) 12
C) 16
~~*D) 14*~~
E) 15



30 Carlos posee muchos palitos de ***6*** a ***7 cm*** de longitud . Si Carlos desea hacer una fila de palitos de ***2 m*** de longitud, ¿cuál es el número mínimo de palitos que empleará?

~~*A) 29*~~ *B) 28* *C) 25* *D) 26* *E) 27*

31 Marina debe pagar una deuda de ***S/. 431*** y solo posee monedas de ***S/. 5***, ***S/. 2***, ***S/. 1*** y ***S/. 0,5***. Si utiliza los cuatro tipos de moneda, ¿cuántas monedas como mínimo tiene Marina?

A) 92 *B) 93* *C) 89* ~~*D) 90*~~ *E) 91*

32 Se tiene cinco cajas que contienen canicas. Cada caja contiene un número de canicas distinto de las otras cuatro. Si el número del contenido de cada caja es múltiplo de ***2*** o múltiplo de ***3***, pero no de ***6***, ¿cuál es el mínimo número de canicas que contienen las cinco cajas?

A) 11 ~~*B) 9*~~ *C) 13* *D) 15* *E) 7*

33 ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener una tira de papel de ***5 cm*** de ancho, para que plegada convenientemente se obtenga un cubo de ***5 cm*** de arista?

A) 30 cm ~~*B) 35 cm*~~ *C) 40 cm*
D) 45 cm *E) 37 cm*

34 En una hoja de papel cuadriculado cada cuadrito mide ***1 cm × 1 cm***. Se coloca una moneda de diámetro $\sqrt{2}$ ***cm*** sobre la hoja de papel cuadriculado. ¿Cuál es el mayor número de cuadritos que puede cubrir parcialmente la moneda?

A) 4 *B) 5* *C) 6* ~~*D) 7*~~ *E) 8*

35 Una empresa tiene ***k*** tiendas donde trabajan en total ***10 k*** empleados. En ninguna de las tiendas trabaja menos de ***k + 2*** empleados ni más de ***3(k+1)***. Si el mayor número de empleados que hay en cuatro tiendas es ***43***, halle el valor de ***k***.

A) 6 *B) 5* ~~*C) 7*~~ *D) 9* *E) 11*

36 Ricardo tiene ***9*** cuadraditos iguales de un centímetro de lado, con ellos quiere construir figuras planas que estén formadas por cuadraditos unidos por un lado completo. Si consigue construir una de tales figuras cuyo perímetro es máximo, ¿cuál es dicho perímetro?

A) 14 cm *B) 24 cm* *C) 22 cm* *D) 18cm* ~~*E) 20 cm*~~

37 Juan tiene cierta cantidad de fichas todas numeradas con números enteros positivos entre los cuales se encuentra una ficha con el número ***83*** y el promedio de todas las fichas es ***57***. Si la ficha con el número ***83*** es retirado, el promedio de los que quedan es ***55***, ¿cuál es el número máximo que puede tener una de las fichas?

A) 55 *B) 80* *C) 225* ~~*D) 703*~~ *E) 798*

38 ¿Cuál es la longitud mínima que debe tener una tira de papel de ***5 cm*** de ancho, para que plegada convenientemente y sin cortar, se obtenga un cubo de ***5 cm*** de arista? .

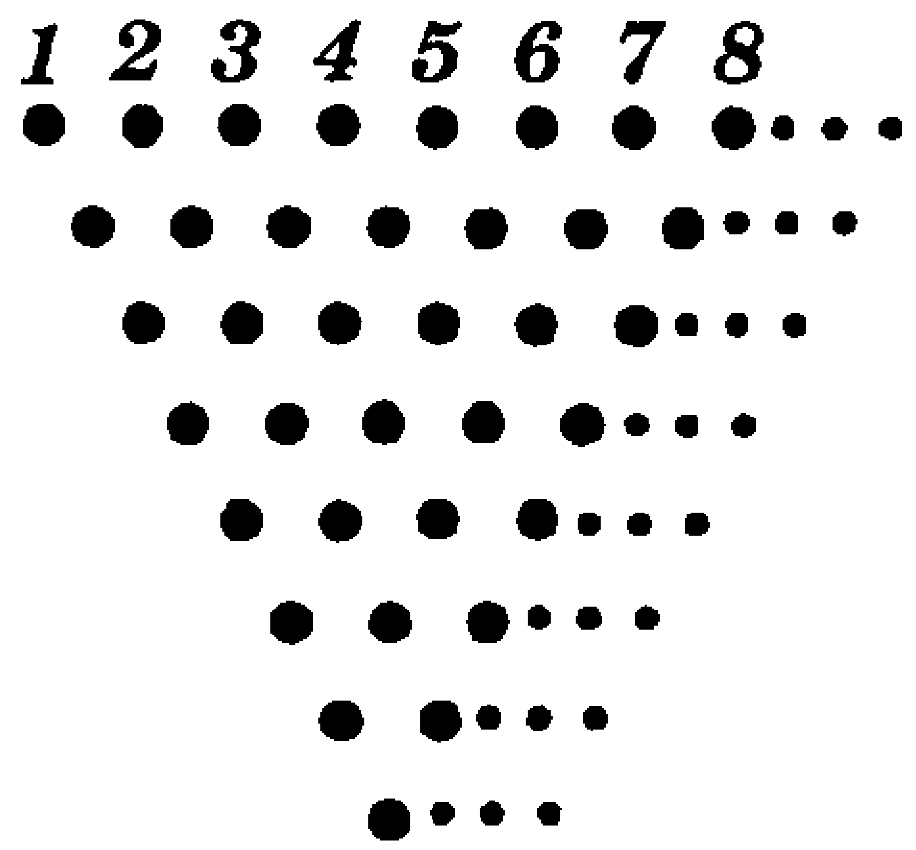
A) 30 cm ~~*B) 35 cm*~~ *C) 40 cm* *D) 45 cm* *E) 37 cm*

39 Un grupo de ***913*** personas va a elegir un presidente entre ***6*** candidatos para el puesto Si nadie votó en blanco ni viciado, ¿cuál es el menor número de votos que puede obtener uno de ellos para lograr ser presidente? .

A) 150 ~~*B) 153*~~ *C) 152* *D) 151* *E) 154*

40 La figura está formada por puntos tales que

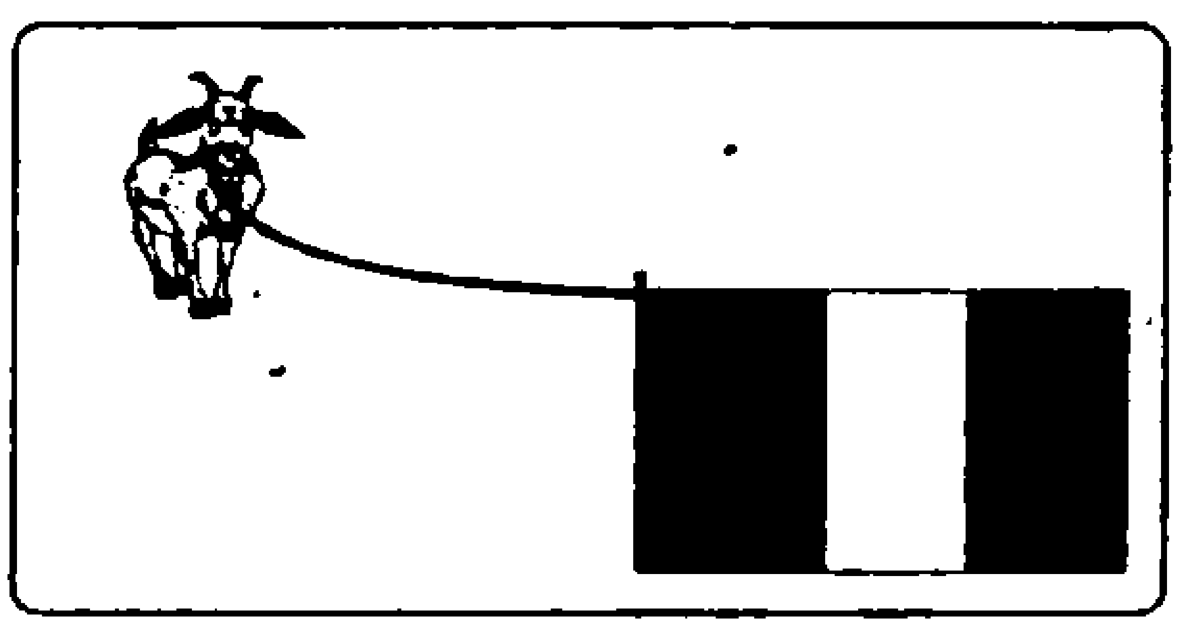
tres puntos contiguos son equidistantes, es decir son vértices de un triangulo equilátero. Solamente los puntos de la primera fila están numerados desde el ***1*** hasta el ***121***. Un virus se demora en desplazarse de un punto a otro contiguo, ***2*** segundos. Si el virus se encuentra en el punto con numeración ***1***, ¿cuál es el menor tiempo que se demora en recorrer por todos los puntos y finalizar en el punto con la numeración ***121***?



~~*A)4h 6min*~~ *B)5h 5min* *C)4h 4min*
D)4h 2mi *E)4h 5min*

PROBLEMA 41 :

Una cabra ubicada en un pastizal está atada mediante una cuerda de ***9 m*** en el vértice de un bloque de forma rectangular de ***6 m*** por ***4 m***. ¿Qué superficie máxima de pasto puede consumir la cabra?



A) $\frac{243\pi}{4}m^2$ ~~B) $\frac{252\pi}{4}m^2$~~ C) $\frac{277\pi}{4}m^2$ D) $\frac{264\pi}{4}m^2$ E) $\frac{267\pi}{4}m^2$

PROBLEMA 42 :

María Inés no recuerda el número de su ***DNI***, pero recuerda que las ***3*** últimas cifras es un cuadrado perfecto y es múltiplo de ***13***, menos ***3*** unidades. Hallar el mayor valor que puede tomar el producto de estas ***3*** últimas cifras.

A) 17 *B) 24* *C) 12* ~~*D) 18*~~ *E) 10*

PROBLEMA 43 :

Hallar el mayor valor entero que toma la siguiente expresión:

$$E = -3 + 5x - x^2$$

A) 1 *B) 2* ~~*C) 3*~~ *D) 5* *E) 7*

PROBLEMA 44 :

El triple del numero de soles que tiene Delia es igual ***50*** veces el número de soles que tiene Julia, disminuido en el quíntuplo del cuadrado de dinero de Julia. ¿Cuánto sumará el dinero de ambas, cuando Delia tenga lo máximo posible?

A) S/. 44 *B) S/. 125/3* ~~*C) S/. 140/3*~~
D) S/. 47 *E) S/. 48*

PROBLEMA 45 :

Si $x \in \mathbb{R}$, calcular la suma del máximo y mínimo valor de la expresión: $F = \frac{3x^2}{4x^4 + 4}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{7}$

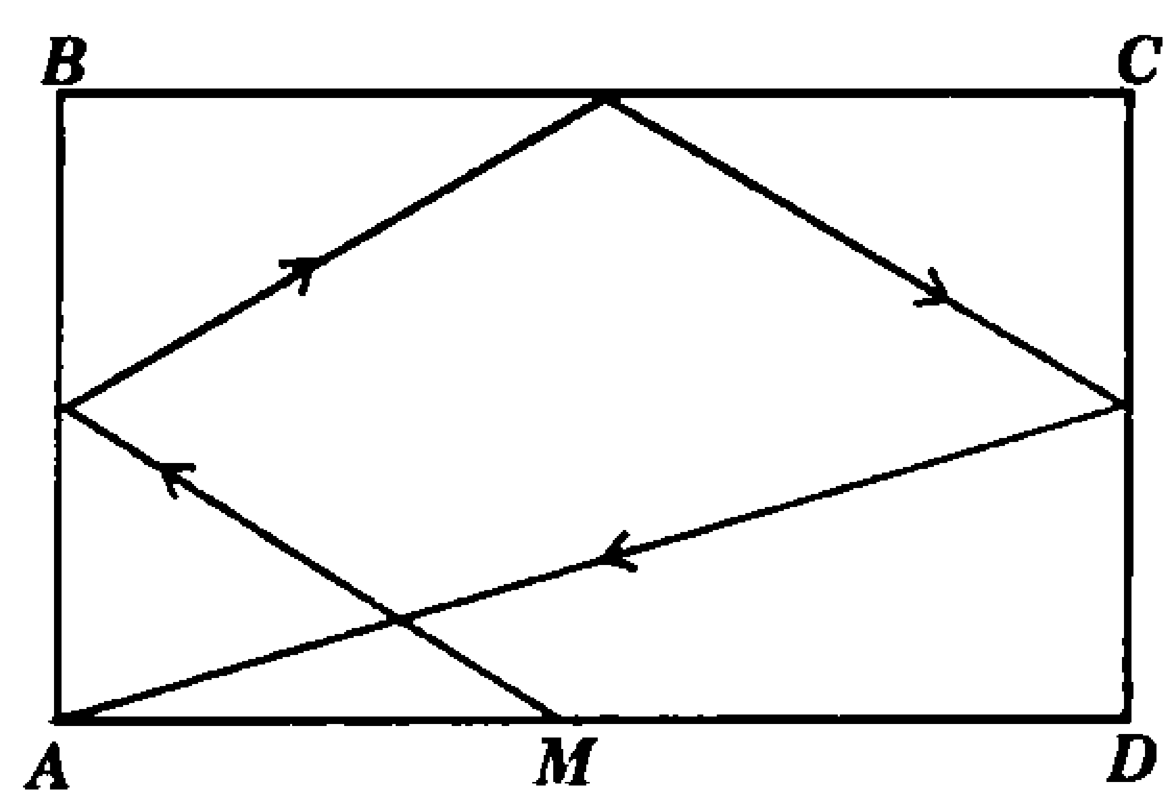
PROBLEMA 46 :

Si $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, determinar el menor valor de: $L = \frac{x^2 + 2x + 5}{2(x+1)}$

A) 1 B) $\frac{2}{5}$ C) 3 ~~D) 2~~ E) $\frac{5}{2}$

PROBLEMA 47 :

La figura muestra a un corredor que sale del punto ***M***, punto medio de $\overline{AD}$ lleva en sus manos cuatro banderas que debe colocar, de la forma siguiente: la primera debe inseltarla en el lado $\overline{AB}$ la segunda en el lado $\overline{BC}$, la tercera en el lado $\overline{CD}$ y la ultima debe colocarla en el vértice ***A***. Si ***ABCD*** es un rectángulo, ***AD = 90m*** y ***DC = 60m*** .¿cuál es la longitud mínima que recorre el corredor para que realice lo que se indica?



A) 270 m *B) 250m* ~~*C) 255 m*~~
D) 265 m *E) 275 m*

PROBLEMA 48 :

Permutar el orden de las fichas de la figura *1*, tal que quede como la figura *2*. Un movimiento consiste en trasladar una ficha a la casilla vacía contigua, o saltar por encima de otra ficha a la casilla vacía. ¿Cuál es el menor número posible de movimientos para conseguir el objetivo?

figura 1 *figura 2*

~~A)6~~ B)4 C)9 D)8 E)7

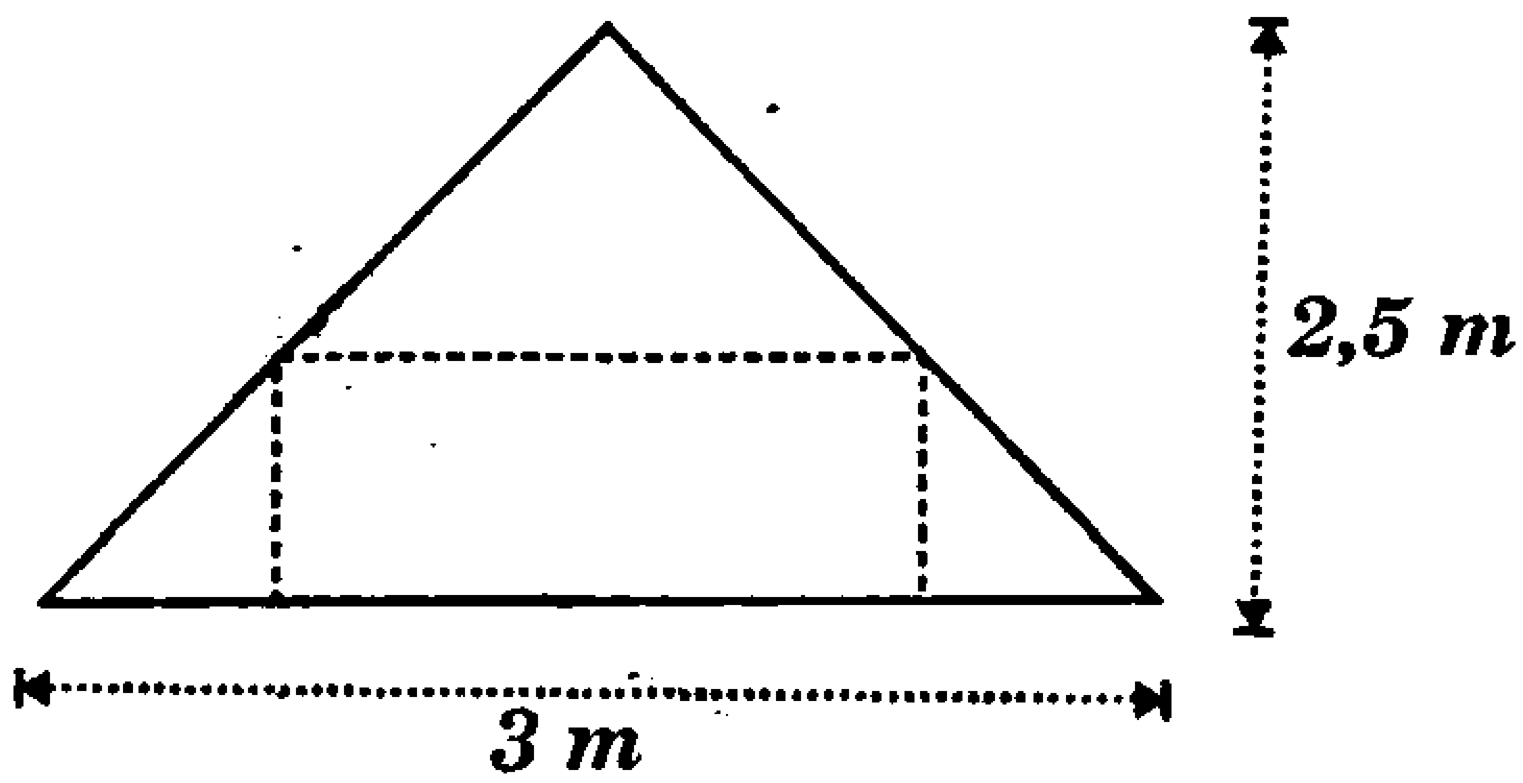
PROBLEMA 49 :

Un juego consiste en lanzar un dado *6* veces y sumar los puntos que se obtienen en cada lanzamiento. Mario no obtuvo más de *23* puntos y Ángel no obtuvo menos de *9* puntos. Determine la suma de la máxima con la mínima diferencia de puntaje por el que puede ganar uno de ellos al otro.

A) 17 B)43 E) 33 D) 16 ~~E) 32~~

PROBLEMA 50 :

Miguel tiene una lámina de hojalata que tiene la forma de un triángulo isósceles de la cual desea recortar una pieza rectangular como se indica en la figura. Determinar la altura del rectángulo si tiene la máxima área.



A) 1m B) 1,5 m ~~C) 1,25 m~~ D) 1,75 m E) 2m

PROBLEMA 51 :

Carlos al comprar un producto debe pagar *S/. 397* solo con monedas de *S/. 1; S/. 2* y *S/. 5.* Si debe utilizar los tres tipos de monedas, ¿cuántas monedas como mínimo debe emplear? .

A) 80 ~~B) 82~~ C) 79 D) 81 E) 83

PROBLEMA 52 :

En cada casilla, donde hay un número hay una casa o un árbol. Donde no hay número, no va ni casa ni árbol. En cada casilla donde hay una casa, el número indica cuántos árboles tiene a su alrededor, y en cada casilla donde hay un árbol, el número indica cuantas casas tiene a su alrededor. Los alrededores de una casilla son sus vecinas inmediatas, en horizontal, vertical y diagonal. ¿Cuántas casas y cuántos árboles hay en total, respectivamente?

1	3	1	
2	5	2	
	3	3	3
	3	2	

A) 6 y 6
B) 5 y 6
C) 5 y 5
D) 6 y 5
E) 7 y 6

PROBLEMA 53 :

Se tiene dos cajas de duraznos. En una caja sólo hay *30* duraznos de *20* gramos cada uno y en la otra caja sólo *30* duraznos de *50* gramos cada uno. Si un intercambio es un durazno de *20* gramos por uno de *50* gramos, ¿cuántos intercambios como mínimo se deben realizar para que, sin variar el número de duraznos en cada caja, ambas cajas tengan el mismo peso?

A) 10 B) 12 C) 14 ~~D) 15~~ E) 18

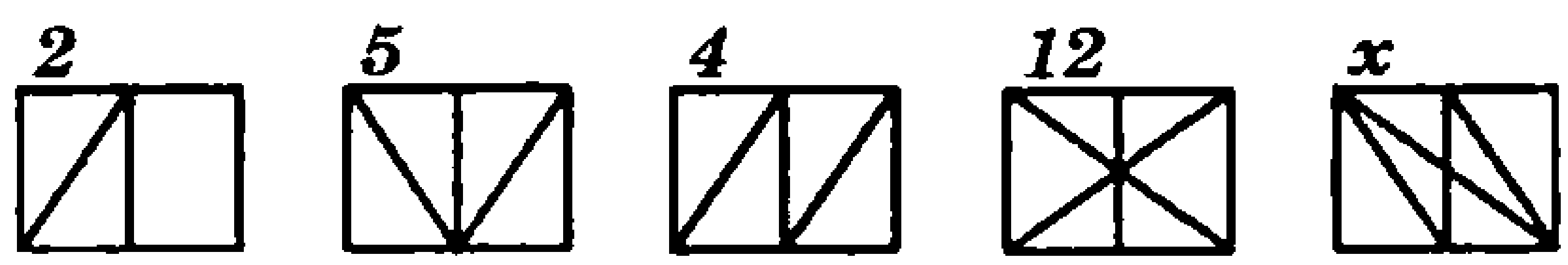
PROBLEMA 54 :

Un estudiante quiere repartir *4* litros de refresco exactamente, pero sólo cuenta con una jarra de *3* litros y otra de *5* litros. Si el refresco está en un barril de *8* litros, ¿cuántos trasvases tendrá que realizar, como mínimo, si el refresco no se desperdicia?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 7 E) 4

PROBLEMA 55 :

De las siguientes figuras, halle el valor de *x*.



A) 14 B) 10 C) 8 ~~D) 12~~ E) 16

PROBLEMA 56:

Se tienen *4* cajas, en una hay *9* dados rojos y *9* dados blancos, en otra caja hay *9* chapas rojas y *9* chapas blancas, en otra hay *9* botones rojos y *9* botones blancos, y en la última hay *9* tizas rojas y *9* tizas blancas. ¿Cuántos objetos se deben extraer

de cada caja al azar como mínimo, para tener la certeza de obtener un par de dados, un par de chapas, un par de botones y un par de tizas, todas del mismo color? .

A) 16 *B) 31* ~~*C)36*~~ *D)40* *E)44*

PROBLEMA 57 :

En la siguiente distribución, halle el valor de *x*.

A) 51
B) 14
~~*C) 22*~~
D) 20
E) 15

24	15	26	31
16	12	21	x
32	12	20	36

PROBLEMA 58 :

Una caja contiene: ***19*** canicas rojas, ***25*** blancas, ***17*** azules y ***12*** verdes. ¿Cuántas canicas como mínimo se debe extraer al azar para tener la certeza de obtener:

A) Tres canicas de tres colores diferentes,
B) siete canicas de un solo color,
C) una canica de cada color?

Dar como respuesta la suma de los tres resultados

~~*A) 132*~~ *B) 120* *C) 135* *D) 134* *E) 137*

PROBLEMA 59 :

Carlitos tiene ***20*** llaves parecidas de ***6*** candados distintos. Si a cada candado le corresponde solamente ***3*** llaves, ¿cuántas veces como mínimo tendrá que probar las llaves para determinar con certeza, cuales de ellas corresponden a su respectivo candado?

A) 54 *B) 55* ~~*C) 57*~~ *D) 58* *E) 56*

PROBLEMA 60 :

En una urna hay ***60*** fichas numeradas del ***90*** al ***149***. ¿Cuántas fichas como mínimo se debe extraer al azar para tener la certeza de haber extraído entre ellas una ficha numerada con un múltiplo de ***7***?

A) 50 *B) 51* *C) 49* ~~*D) 52*~~ *E) 53*

PROBLEMA 61 :

En una urna se tiene ***3*** fichas rojas. ***4*** zules y ***5*** blancas. ¿Cuántas fichas como mínimo se tiene que extraer al azar para tener la certeza de haber extraído entre ellas al menos una ficha blanca y una ficha roja?

A) 11 ~~*B)10*~~ *C) 9* *D) 8* *E) 4*

PROBLEMA 62 :

En una caja hay ***28*** fichas numeradas con los números naturales del ***101*** al ***128***.Si las fichas no están ordenadas, ¿cuántas fichas como mínimo se debe extraer al azar para tener la certeza de haber extraído una ficha numerada con un múltiplo de ***3***?

A)11 ~~*B)20*~~ *C)21* *D) 9* *E)19*

PROBLEMA 63 :

Un ánfora contenía ***16*** bolos designados con una letra ***(A, B, C, D)*** y un número ***(1, 2, 3, 4)*** de la siguiente manera:

A1, A2, A3, A4, B1, B2,..., D3, D4, los cuales llenan la cartilla siguiente:

	A	B	C	D
1	X		X	
2		X		
3				
4				X

donde el aspa significa que se han extraído los bolos ***A1, B2, C1*** y ***D4.*** El juego consiste en quien llena primero una hilera con cuatro aspas, horizontal, vertical o diagonal, gana. ¿Cuántos bolos como mínimo deben ser extraídos al azar para tener la certeza de ganar el juego?

A) 3 *B) 10* *C) 8* ~~*D)9*~~ *E) 7*

PROBLEMA 64 :

En una urna hay ***47*** fichas, de las cuales ***13*** fichas están numeradas con la cifra ***2 ; 9*** fichas con la cifra ***5, 10*** fichas con la cifra ***4*** y ***15*** fichas con la cifra ***7***. ¿Cuántas fichas se deben extraer al azar como mínimo para tener la certeza de obtener ***3*** fichas con distintas numeraciones y que sumen ***13***?

A) 33 *B) 39* ~~*C) 38*~~ *D) 37* *E) 40*

PROBLEMA 65 :

En una urna se tiene ***15*** bolos numerados del ***1*** al ***15*** sin repetir. Si ya se extrajeron los dos bolos de la figura, ¿cuántos bolos más como mínimo se deben extraer al azar para tener la certeza de obtener dos bolos, que reemplazados en los casilleros punteados, cumplan con la operación aritmética indicada?

$$\bigcirc + ③ - \bigcirc = ⑧$$

A)9 B)11 ~~C)10~~ D)8 E)7

PROBLEMA 66 :

Se tiene dos cajas con monedas: en la primera hay *3* monedas de *S/. 5* ; *4* de *S/.2* y *5* de *S/.1*; en la segunda hay *3* monedas de *S/.0,5* ; *4* de *S/.5* y *5* de *S/. 2*. De la primera caja se extrae al azar una cantidad mínima de monedas tal que entre ellas se obtiene con certeza una moneda de *S/.5* y luego son introducidas en la segunda caja. ¿Qué cantidad mínima de dinero debemos extraer al azar de la segunda caja para tener la certeza de haber extraído *2* monedas de *S/. 0,5*?

A) S/.54 ~~B) S/.49~~ C) S/. 44 D) S/. 48, 5 E) S/. 59

PROBLEMA 67 :

En una urna se tiene *18* bolos numerados del *1* al *18*. Si ya se extrajeron los dos bolos de la figura, ¿cuántos bolos más como mínimo se deben extraer, al azar para tener la certeza de obtener dos bolos, que reemplazados en los casilleros no sombreados, cumplan con la operación aritmética:

$$\bigcirc + (5) - \bigcirc = (13)$$

A) 9 B) 13 ~~C) 10~~ D) 11 E) 12

PROBLEMA 68 :

En una ánfora se tiene *13* fichas rojas, *9* fichas blancas, *8* fichas azules y *5* fichas verdes ¿Cuántas fichas se debe extraer, al azar, como mínimo, para tener con seguridad *9* fichas rojas, *8* fichas blancas, *7* fichas azules y *3* fichas verdes?

A) 31 B)35 ~~C) 34~~ D) 33 E)32

PROBLEMA 69 :

Un comerciante guarda los caramelos por vender en *4* cajas: en una coloca solo de fresa, en otra solo de limón y en las dos últimas de ambos sabores. Luego sella las cajas y las etiqueta según su contenido: fresa, limón o surtido. A la mañana siguiente, durante la venta de una de las cajas, su hijo le informa que intercambió las etiquetas de forma que ninguna corresponde con el contenido. ¿Cuántas cajas, como mínimo, deberá abrir y qué caja (o cajas) para conocer el contenido de cada una?

A) una caja, la que dice limón

B) una caja, la que dice fresa

~~*C) una caja, la que dice surtido*~~

D) dos cajas, la que dice fresa y la que dice surtido

E) dos cajas, las que dicen surtido

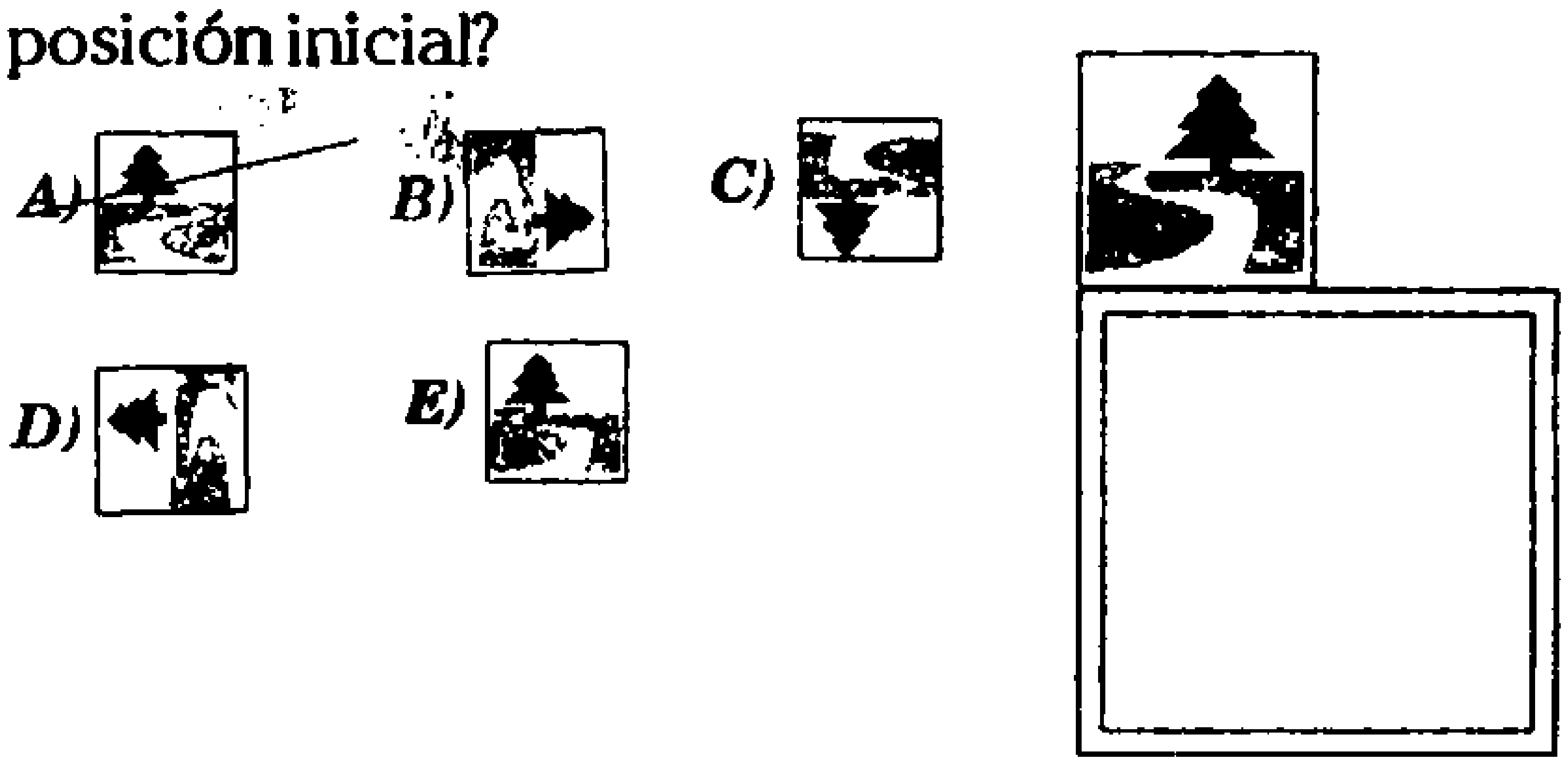
PROBLEMA 70 :

En un cajón hay *28* calcetines negros y *28* calcetines blancos. Todos los calcetines son del mismo material y de la misma medida. ¿Cuántos calcetines hay que tomar para asegurarse que haya al menos un par del mismo color?

A)4 ~~B) 3~~ C) 2 D)5 E)8

PROBLEMA 71 :

En la figura, se muestran dos cuadros con marcos cuadrados, cuyos lados están en la proporción de *1* a *4*. Si se hace girar el cuadro más pequeño, desplazándolo alrededor del cuadro más grande, siempre apoyado en un vértice, sin deslizar y en sentido horario, ¿cuál será la disposición del cuadro pequeño cuando alcance nuevamente su posición inicial?



PROBLEMA 72 :

Mateo decide observar lo que pasa durante el recorrido que realiza su ómnibus, desde el paradero inicial hasta el paradero final, nota que en cada paradero intermedio bajaban *2* pasajeros y subían tres. El ómnibus llegó al paradero final con una cierta cantidad de pasajeros y la recaudación de ese viaje fue de *S/.100*, además que la cantidad de paraderos intermedios fueron más de *3*. Si la tarifa única fue de *S/. 2* por pasajero, ¿cuántos pasajeros partieron del paradero inicial como máximo?

A) 50 B) 30 ~~C) 38~~ D) 36 E) 26

PROBLEMA 73 :

De la figura mostrada se sabe que:

En el casillero *M* está el número del casillero *P*, menos *2*.

En el casillero *Q* está el número del casillero *N*, menos *1*.

En el casillero *R* está el número del casillero *Q*,

más **2**.

En el casillero ***N*** está el número del casillero ***M***, más **3**.

Si el máximo número en los casilleros es **3**. ¿Cuál es el mínimo número en los casilleros?

M	N	P	Q	R

A) 3 ~~*B) 4*~~ *C) 2* *D) 1* *E) 5*

PROBLEMA 74 :

Se sabe que:

*María nació **5** años después de Jorge, pero **5** años antes que Miguel.

* Carol nació **2** años después de María.
* Paul nació después que María.

Entonces, siempre es verdad que:

A) Paul es el menor.

B) Miguel no es el menor.

D) Paul es mayor que Miguel.

C) Carol es mayor que Paul.

~~***E) Miguel es menor que Carol.***~~

PROBLEMA 75 :

En una carrera participaron tres parejas de esposos: Los Aguirre, los Alarcón y los Arango. Si se sabe que:

* Los esposos llegaron a la meta antes que sus respectivas esposas.

- La Sra. Arango, llegó antes que el Sr. Aguirre.
- El Sr. Alarcón no llegó primero y fue superado por una dama.
- La Sra. Aguirre llegó en quinto lugar, justo después de su esposo.

Si no hubo empates, ¿en qué lugar quedó el Sr. Arango y el Sr. Alarcón, respectivamente?

A) 1° y 2° *B) 3° y 4°* ~~*C) 1° y 3°*~~

D) 3° y 2° *E) 5° y 1°*

PROBLEMA 76 :

Ángela. Janeth, Carla, Sara y Carmen ingresan al cine y ocupan **5** butacas juntas. Ángela se sienta lo más lejos posible de Carmen. Janeth y Sara siempre se sientan juntas y se encuentran entre Ángela y Carmen. Indique lo correcto.

I) Carla siempre está en el lugar central.

II) Necesariamente Sara siempre está en el lugar central.

III) Carla puede estar entre Ángela y Sara.

A) solo I ~~*B) solo III*~~ *C) solo II*

D) I y II *E) I y III*

PROBLEMA 77 :

En cierto examen, Rosa obtuvo menos puntos que Diana, Elvira menos puntos que Carmen, Flor el mismo puntaje que Susana, Rosa más que Laura y Elvira el mismo puntaje que Diana. Si Flor obtuvo mayor puntaje respecto a Carmen, ¿quién obtuvo menos puntaje?

A) Carmen *B) Elvira* *C) Flor*

~~*D) Laura*~~ *E) Rosa*

PROBLEMA 78 :

Cinco amigos entran al cine y se acomodan en una butaca de **6** asientos de la siguiente manera:

* Raquel está sentada a la derecha de Carlos y adyacente a Benito y Vanessa.
* Paúl está sentado en el extremo izquierdo y separado de los demás por un asiento vacío. De izquierda a derecha, ¿quién ocupa el quinto asiento?

A) Paúl *B) Carlos* *C) Vanessa*

~~*D) Raquel*~~ *E) Benito*

PROBLEMA 79 :

Ángel, Boris, César y Diego se sientan alrededor de una mesa circular con **6** asientos distribuidos simétricamente. Se sabe lo siguiente:

* César está sentado frente a un asiento vacío.
* Entre Ángel y César hay un asiento vacío.
* Diego está junto y a la derecha de Boris, quien no está junto a César.

¿Quién está sentado al frente del asiento que está junto y a la izquierda de Boris?

A) Diego *B) César* *C) Ángel*

D) no se puede determinar ~~*E) el asiento está vacío*~~

PROBLEMA 80 :

Seis amigos se sientan a almorzar, alrededor de una mesa circular, en seis asientos simétricamente distribuidos. Se conoce lo siguiente:

* Beatriz está al lado de David y al frente de Ernesto.
* Manuel no se sienta al lado de David, quien está a la derecha de Felipe.
* Gerardo está sentado a dos asientos de Manuel.

¿Quién se sienta junto y a la izquierda de Felipe?

A) Beatriz *B) David* *C) Ernesto*

D) Gerardo ~~*E) Manuel*~~

PROBLEMA 81 :

Manuel,José y Horacio compraron entre los tres,6 camisas de distinto color (rojo,azul,blanco ,verde,amarillo,y guinda),y convinieron regalar cada uno dos camisas a sus respectivos padres. Manuel no regaló ni una camisa roja ni blanca. José regaló una camisa verde pero no regaló una camisa amarilla. Horacio no regaló una camisa guinda ni blanca. ¿Qué colores de camisa eligió Horacio para regalar a su padre, si Manuel eligió el color amarillo?

A)rojo - verde *B)verde - azul* *C)blanco - azul* ~~*D)rojo - azul*~~ *E)blanco - rojo*

PROBLEMA 82 :

Se reúnen cuatro amigos en la casa de Darío, cada uno de ellos de distinta profesión (profesor, ingeniero, médico y economista), y de distinta nacionalidad (español, cubano, argentino y mexicano). Se observa que Tomás, recién graduado en Medicina, y el español discuten con el profesor; Carlos, natal de Necaxa, es muy polémico e invita al ingeniero que se una al debate, pero este le responde: Me acercaré, pero le recuerdo al cubano que estamos en casa ajena. Todos se calmaron y salieron a cenar. Si Marco es el nombre del otro amigo, ¿cuál es su profesión y su nacionalidad?

A)profesor - cubano *B)economista - español* ~~*C)ingeniero - argentino*~~ *D)profesor - mexicano* *E)ingeniero - español*

PROBLEMA 83 :

2. Abel, Beto, Carlos, Dany, Enrique y Miguel tienen *S/. 23, S/. 29, S/. 31, S/. 37 , S/. 41,S/. 47* respectivamente y se sientan alrededor de una mesa circular con *6* asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:

* Abel se sienta junto y a la derecha de Beto y frente a Carlos.
* Dany no se sienta junto a Beto .
* Enrique no se sienta junto a Carlos.

¿Cuánto suman las cantidades de dinero que tienen quien se sienta junto y a la izquierda de Miguel y quien se sienta junto a la derecha de Enrique?

A) S/. 60 *B) S/. 52* ~~*C) S/. 68*~~ *D) S/. 66* *E) S/. 70*

PROBLEMA 84 :

Carlos, Dante, Antonio, Erick, Alberto y Flavio se ubican en *6* asientos contiguos en una fila de un teatro. Antonio está junto y a la izquierda de Alberto, Carlos a la derecha de Antonio, entre Flavio y Dante; Dante está junto y a la izquierda de Erick . ¿ Quién ocupa el tercer asiento si los contamos a partir de la ubicación de Antonio?

A) Carlos B) Erick C) Dante ~~*D) Flavio*~~ *E) Antonio*

PROBLEMA 85 :

Fanny, Clara, Mery y Gloria fueron a cenar a un restaurante en compañía de sus primogénitos y se sentaron simétricamente alrededor de una mesa circular. Se sabe que:

* Ninguna madre se sentó junto a su hijo.
* Junto y a la derecha del hijo de Fanny se sentó Clara.
* En frente de Fanny se sentó Mery .

¿Quién se sentó junto y a la izquierda de Gloria , si no había dos hijos juntos?

A) El hijo de Clara *B) El hijo de Fanny* ~~*C)*~~ *El hijo de Mery* *D) Fanny* *E) Clara*

PROBLEMA 86 :

En una mesa circular hay seis asientos simétricamente colocados en los cuales se sientan seis amigas a jugar monopolio. Además se sabe que :

* Lucía no está sentada al lado de Leticia ni de Juana.
* María no está al lado de Cecilia ni de Juana .
* Leticia no está al lado de Cecilia ni de María .
* Irene está junta y a la derecha de Leticia.

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) Irene está junta y a la derecha de María.
II) Lucía está frente a Leticia.
III) Juana está junta y a la izquierda de Cecilia.

A) Solo I *B) I y III* ~~*C) Solo II*~~ *D) Solo III* *E) I y II*

PROBLEMA 87 :

Manuel, Carlos y Juan cumplen años los días *17*; *20* y *29* en los meses de junio, agosto y diciembre, aunque no necesariamente en ese orden. Se conoce lo siguiente:

* El *20* de agosto y el *29* de junio ninguno de ellos cumple años.
* Carlos celebra su cumpleaños el *18* de diciembre con un día de diferencia.
* Juan nació en agosto.

¿Cuándo es el cumpleaños de Manuel?

A)17 de agosto *B)17 de diciembre* *C)29 de agosto* ~~*D)20 de junio*~~ *E)17 de junio*

PROBLEMA 88 :

Seis amigas se sientan alrededor de una mesa circular, en asientos simétricamente distribuidos; Mary, que está sentada a la derecha de Pilar, se encuentra frente a Nadia; Pilar está frente a la que está junto y a la derecha de Susi, que está frente a Rosa. ¿Quién está junto y a la derecha de Cielo?

A)Rosa ~~*B)Nadia*~~ *C)Pilar* *D)Mary* *E)Susi*

PROBLEMA 89 :

Cuatro amigos, Moisés, Henry, Marco y Toño, son ingeniero, médico, abogado y profesor; además, residen en Lima, Huancayo, Ica y Chimbote, no necesariamente en ese orden. Se sabe lo siguiente:

* Toño no vive en Huancayo ni en Ica.
* El médico reside en Lima.
* Marco no reside en Lima.
* Marco es ingeniero.
* Moisés vive en Chimbote.
* El abogado vive en Huancayo.

¿Cuál es la profesión del que vive en Chimbote?

A)profesor *B)ingeniero* *C)odontólogo*
D)médico *E)abogado*

PROBLEMA 90 :

Andrés , Beto y Carlos son tres profesionales, uno de ellos es médico otro es ingeniero y otro abogado; los tres tienen sus oficinas en el mismo edificio, cada uno en un piso diferente, sus secretarias son Martha, Julia, Ofelia. Se sabe lo siguiente:

* El abogado tiene su oficina en el primer piso.
* Julia almuerza todos los días con Carlos quien es su novio y no es su jefe.
* Todas las mañanas Martha sube a desayunar con la secretaria de Beto .
* Andrés, por una emergencia, hizo descender a su secretaria hasta la oficina del médico.

¿Quién es el médico y en que piso está su oficina?

A) Beto; segundo *B) Beto; primero*
C) Andrés; tercero *D) Carlos; primero*
E) Andrés; segundo

PROBLEMA 91 :

Alicia, Beatriz, Carmen, Diana, Edith y Fiorella se sientan alrededor de una mesa circular, simétricamente distribuidas. Se sabe lo siguiente:

* Alicia no se sienta frente a Beatriz.
* Diana se sienta frente a Edith.
* Carmen está junto y a la siniestra de Alicia.
* Beatriz no está junto a Edith.

¿Quién se encuentra junto y a la izquierda de Fiorella?

A)Edith *B)Diana* *C)Alicia*
D)Beatriz *E)Carmen*

PROBLEMA 92 :

Luchito, Betito, Julito y Carlitos tienen ***14, 16, 17*** y ***19*** monedas de ***S/. 5***. aunque no necesariamente en ese orden. Se sabé lo siguiente:

La suma de las cantidades de monedas que tienen Luchito y Betito, resulta un numero primo .

– La suma de las cantidades de monedas que tienen Betito, Julito y Carlitos , resulta un número par.

– La suma de las cantidades de monedas que tienen Betito y Julito, resulta un número impar.

¿ Cuánto dinero tienen Carlitos y Luchito juntos?

A) S/. 175 *B) S/. 150* *C) S/. 165*
D) S/. 180 *E) S/. 155*

PROBLEMA 93 :

José, Pedro, Roberto y Edwin son escritores de las diferentes secciones de un periódico, tales como deportes, economía espectáculos negocios y trabajan en diferentes periódicos: La República, El Comercio,Perú ***21*** y Correo no necesariamente en ese orden. Si se sabe lo siguiente:

* José no trabaja en correo ni en «El Comercio».
* El que escribe en la República, lo hace en economía.
* El que trabaja en Perú ***21***, no escribe espectáculos, escribe sobre negocios.
* Roberto prefiere escribir deportes, antes de escribir sobre negocios.
* El que trabaja en el comercio, escribe espectáculos.
* A Pedro le agrada escribir sobre economía.

¿Qué escribe y en qué periódico trabaja Edwin?

A) Espectáculos, Correo. *B) Negócios, El Comercio.*
C) Deportes, El Comercio.
D) Espectáculos, El Comercio. *E) Espectáculos, Perú 21 .*

PROBLEMA 94 :

Un entrenador cuenta con ocho jugadores Adán, Bruno, Carlos, Diego, Fidel, Gualdo , Humberto e Ismael, que forman un equipo de cuatro jugadores de acuerdo a las siguientes condiciones:

• Si Adán está en el equipo, entonces Humberto no lo está.

• Carlos e Ismael no pueden estar en el mismo equipo.

• Si Carlos está en el equipo, entonces Fidel también lo está.

• Si Adán esta en el equipo, entonces Bruno no lo está.

Si Ismael y Bruno se lesionan seriamente y no formaran parte del equipo, entonces es imposible que:

I) Gualdo forme parte del equipo.

II) Fidel no forme parte del equipo.

III) Humberto forme parte del equipo.

A) Solo I *B) Solo II* *C) Solo II*
D)Solo I y II *E) Solo II y III*

PROBLEMA 95 :

Fernando, Jorge, Luis y Raúl tienen un negocio diferente cada uno: calzados, textiles, computadoras y relojes, y sus edades son *30, 32, 45* y *50* años pero no necesariamente en ese orden. Se sabe que :

- Fernando tiene el negocio de calzados.
- El mayor tiene el negocio de textiles.
- La persona que tiene el negocio de computadoras es el menor.
- Jorge es mayor que Luis, pero es menor que Fernando.
- Raúl no es el menor.

Es verdad que:

I) Se conoce la edad de Jorge.

II) No se conoce la edad de Fernando.

III) Luis tiene *20* años menos que Raúl.

A) Solo I ***B) Solo II*** ***C) Solo III***
~~D) I y III~~ ***E) I y II***

PROBLEMA 96 :

Anahi, Berta, Carla y Daniel practican distintos deportes tales como voley, tenis, basket y pin pong, y viven en distintos distritos como San Isidro, Los Olivos, Surco y Miraflores. No necesariamente en ese orden. Si se sabe lo siguiente:

- Carla no vive en San Isidro ni en Los Olivos.
- La que juega tenis vive en Los Olivos.
- Anahi vive en Miranores.
- Daniela practica basket.
- La que juega voley nunca ha emigrado de Surco.

¿Qué deporte practica y en qué distrito vive Carla?

A) Voley, Miraflores. ***B) Basket, Surco.***
~~C)~~ Voley, Surco. ***D) Voley, San Isidro.***
E) Ping Pong, Miraflores.

PROBLEMA 97 :

Katy, Carlos y Malú estudian en universidades distintas: UNMSM, UNFV y UNAC. Ellos estudian Ingeniería, Periodismo y Turismo; pero Katy no estudia en UNMSM, Carlos no estudia en UNFV y el que está en UNFV estudia Periodismo. El que está en UNMSM no estudia Ingeniería y Carlos no estudia turismo. ¿Qué estudia Malú y en qué universidad?

A)Turismo en UNFV ***~~B)Turismo en UNMSM~~***
C)Periodismo en UNAC ***D)Ingeniería en UNMSM***
E)Periodismo en UNFV

PROBLEMA 98 :

Sobre las profesiones de *3* parejas de esposos, se sabe lo siguiente:

Dos personas son médicos, dos son ingenieros industriales y dos son profesores.

Carlos es médico y la esposa de César es profesora.

Toda pareja de esposos ha estudiado profesiones diferentes entre sí. ¿Qué profesión tiene Gabriel y cuál es la profesión de la esposa de Carlos, respectivamente, si los varones tienen profesiones diferentes?

A)ingeniero – ingenieria industrial
B)médico – profesor
C)profesor – médico
~~D)profesor – ingenieria industrial~~
E)ingeniero – profesor

PROBLEMA 99 :

Abel, Beto, César y Dino son mecánico, electricista, soldador y carpintero; además, llevan uniformes de los colores blanco, amarillo, rojo y azul, no necesariamente en el orden mencionado en todos los casos. El mecánico derrotó a Beto en el juego del sapo; César y el soldador juegan a menudo al bingo con aquellos que visten de rojo y azul; Abel y el carpintero tienen aprecio al hombre que viste de uniforme azul, el cual no es electricista, pues este usa uniforme blanco. ¿Qué oficio tiene César y de qué color es el uniforme de Abel?

~~A)electricista – amarillo~~ ***B)mecánico – azul***
C)carpintero – amarillo ***D)electricista – rojo***
E)soldador – blanco

PROBLEMA 100 :

Un grupo de monos está dividido en dos bandos; la octava parte de ellos al cuadrado se solaza en el bosque, mientras que los otros doce juegan en el campo, ¿Cuál es la mayor cantidad de monos que había antes de separarse?

~~A) 48~~ ***B)64*** ***C) 32*** ***D) 56*** ***E)40***

PBOBLEMA 101 :

Una sala rectangular tiene de largo *5m* más que de ancho. Si tuviera *5m* más de largo y *5m* más de ancho, su área se duplicaría. Halle el área de la sala.

~~A) 150 m^2~~ ***B) 126 m^2*** ***C)176 m^2***
D) 300 m^2 ***E) 204 m^2***

PBOBLEMA 102 :

Si se posaran *(n–1)* jilgueros en cada uno de los *n* postes, sobrarían *10* jilgueros ; pero si en cada poste se posaran *3* jilgueros más quedarían *2* postes vacíos. ¿Cuánto es la mitad del número de postes? .

A) 14 ***B)10*** ***C) 8*** ***D) 12*** ***~~E)7~~***

PROBLEMA 103 :

Un vendedor afirma que como hoy vendió cada caramelo a *10* céntimos más que ayer, vendió *10* caramelos menos que ayer. Además hoy vendió tantos caramelos como céntimos cobró por cada uno. Respecto a la recaudación de ayer, hoy se recaudo:

A) 10 céntimos más ***~~B)~~ S/.1 más*** ***C) 10 céntimos menos***
D) 20 céntimos más ***E) lo mismo que ayer***

PROBLEMA 104 :

En una familia, el hermano mayor dice: «El número de mis hermanos varones es el triple de mis hermanas, y la hermana menor dice: «Tengo *8* hermanos varones más que hermanas, ¿Cuántos hermanos entre varones y mujeres hay en dicha familia?

A) 9 ***B)10*** ***C)12*** ***~~D)13~~*** ***E) 14***

PROBLEMA 105 :

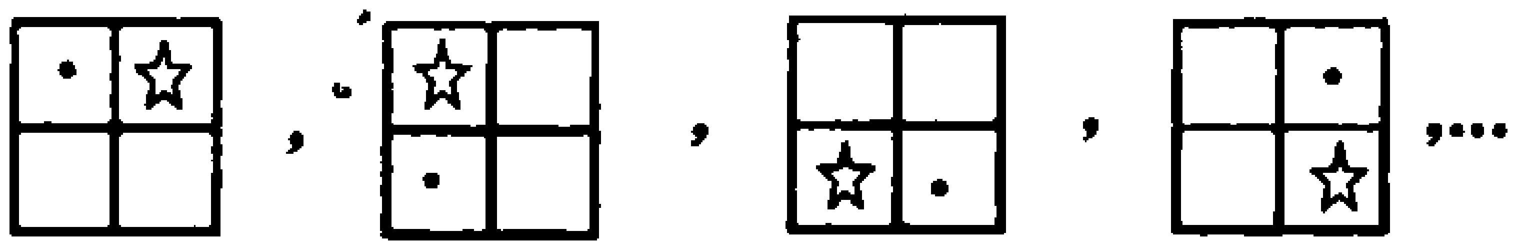
Lo que cobra y lo que gasta un empresario diariamente suma *S/. 8000*. Si lo que gasta y lo que cobra están en la relación de *3* a *5* respectivamente, ¿en cuánto tiene que disminuir el gasto para

que dicha relación sea de *1* a *2*?

A) S/. 125 *B) S/. 112* *C) S/. 525*
D) S/. 500 *E) S/. 312*

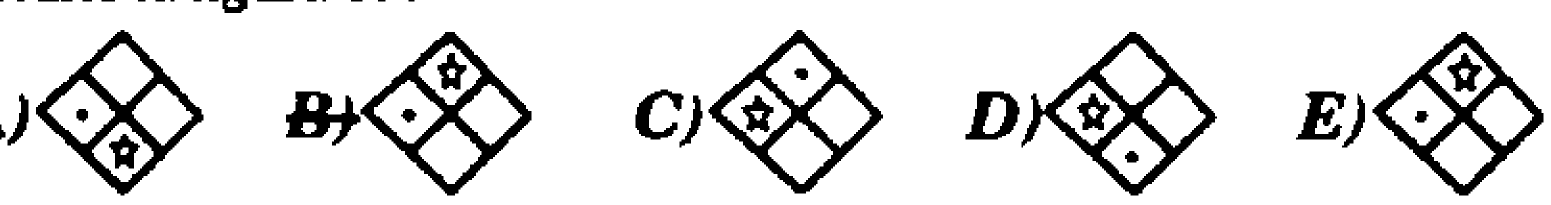
PROBLEMA 106 :

Dada la siguiente sucesión de figuras



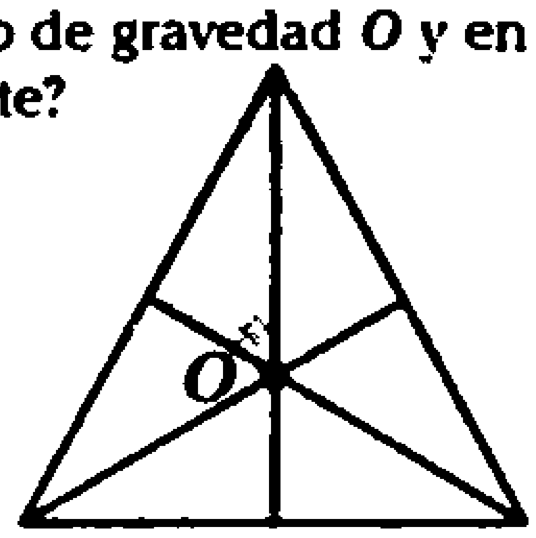
¿qué figura se obtiene al girar *135°* sobre su centro y en sentido horario la figura *67*?

A) B) C) D) E)

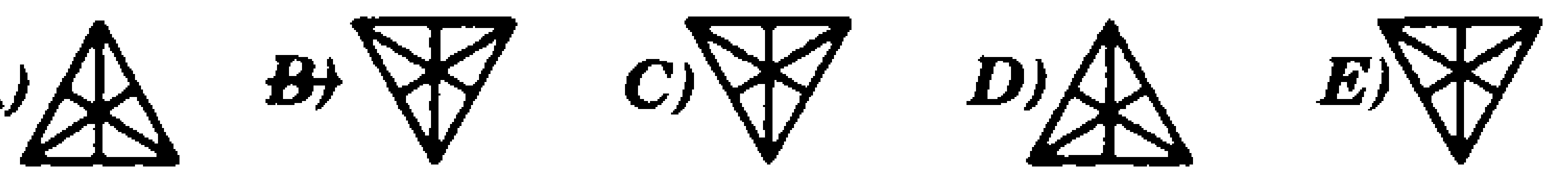


PROBLEMA 107 :

La figura mostrada es una lámina triangular equilátera. Si ésta rota *2580°* sobre su centro de gravedad *O* y en sentido horario, ¿cuál será la figura resultante?

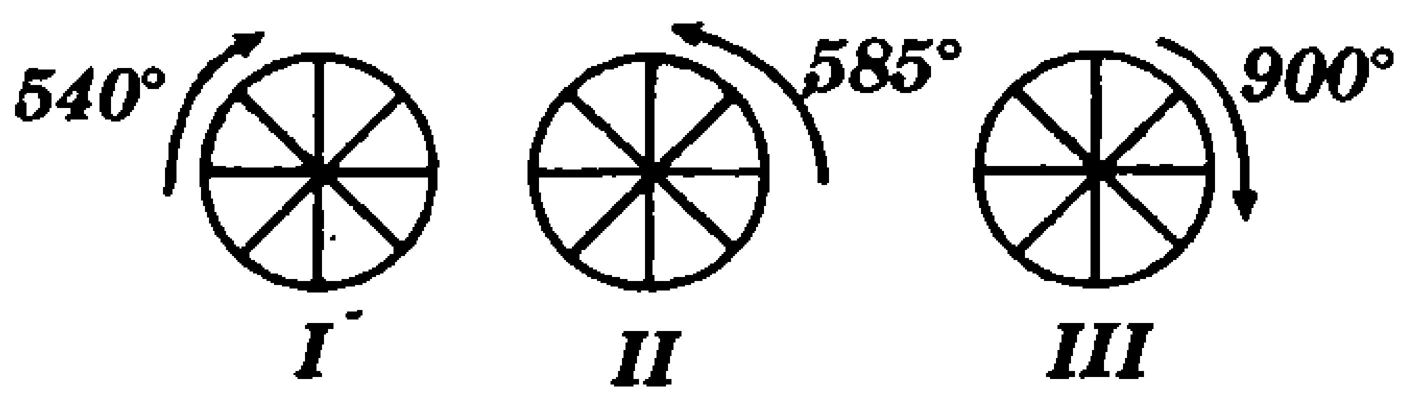


A) B) C) D) E)



PROBLEMA 108 :

Las figuras *I*, *II* y *III* han sido dibujadas sobre láminas transparentes en forma de círculos congruentes y giran como se indica, todas ellas con respecto a su centro. Si luego se traslada dos de ellas sobre la otra, ¿cuál es la figura resultante?



A) B) C) D) E)

PROBLEMA 109 :

Las figuras muestran a *2* triángulos equiláteros congruentes, con sus medianas trazadas y dibujados sobre láminas transparentes. Si la figura *(I)* rota *480°* en sentido horario y la figura *(II)* rota *840°* en sentido antihorario, ambas sobre su baricentro y luego las figuras resultantes se trasladan una sobre la otra, ¿cuál es la figura que se obtiene?

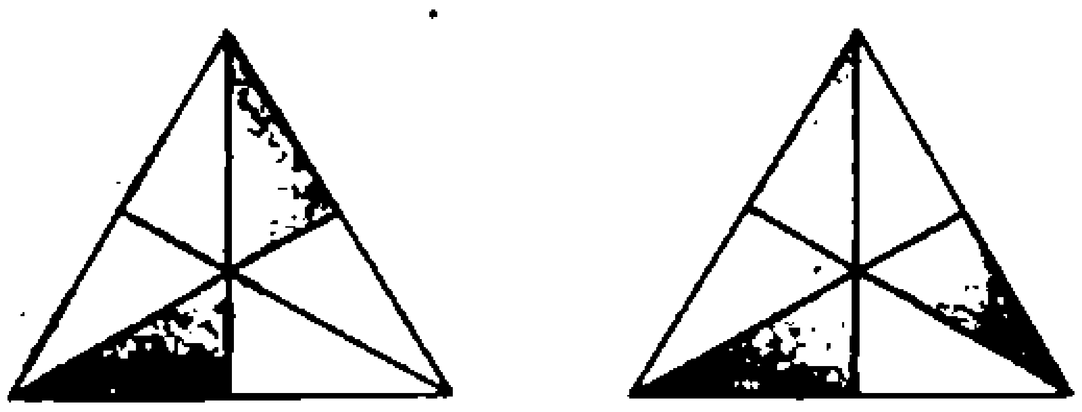
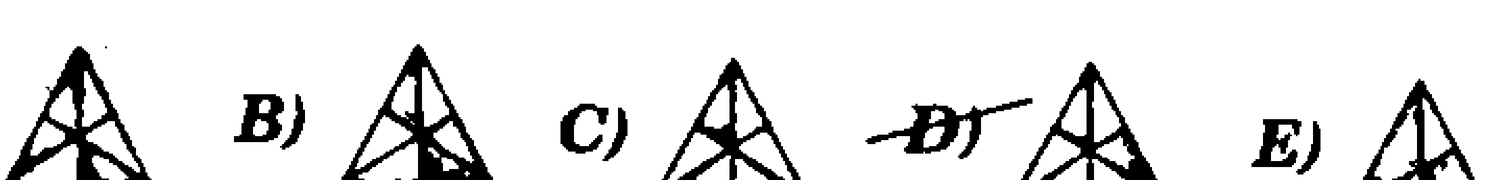


Fig.(I) *Fig.(II)*

A) B) C) D) E)



PROBLEMA 110 :

La siguiente sucesión de figuras está formada por láminas congruentes transparentes. Al trasladar la figura *801* sobre la figura *967*, ¿qué figura se obtiene?

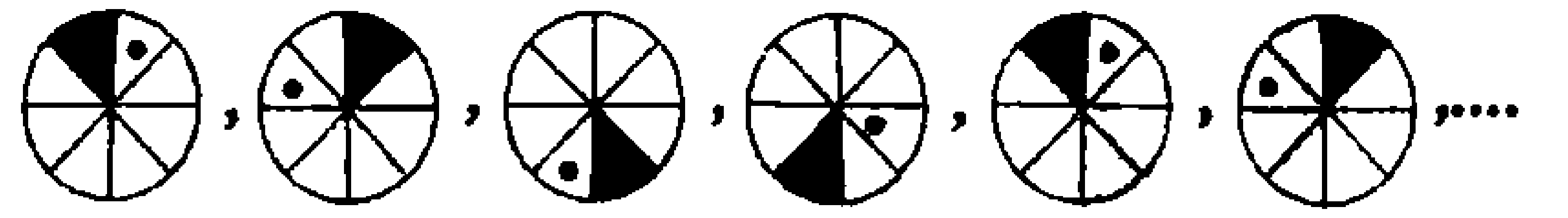
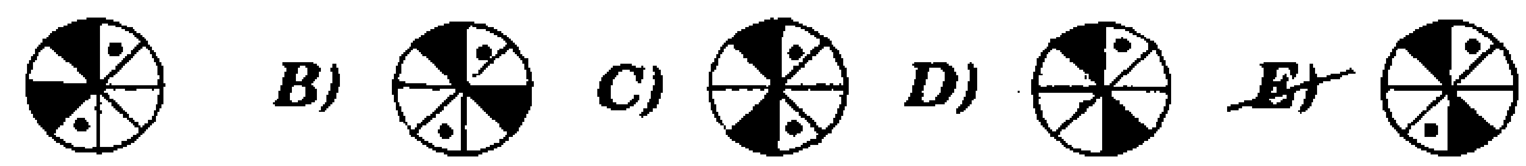


Fig.1 *Fig.2* *Fig.3* *Fig.4* *Fig.5* *Fig.6*

A) B) C) D) E)



PROBLEMA 111 :

El producto de dos números impares positivos consecutivos no es menor que *195*. Halle el menor valor que suman ambos números.

A) 15 *B) 18* *C) 26* *D) 28* *E) 32*

PROBLEMA 112 :

En la siguiente secuencia de figuras, halle la figura *30*.

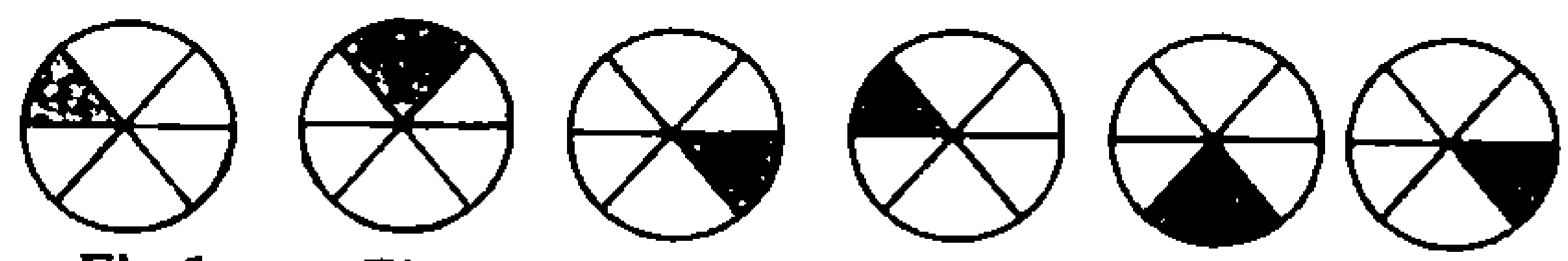
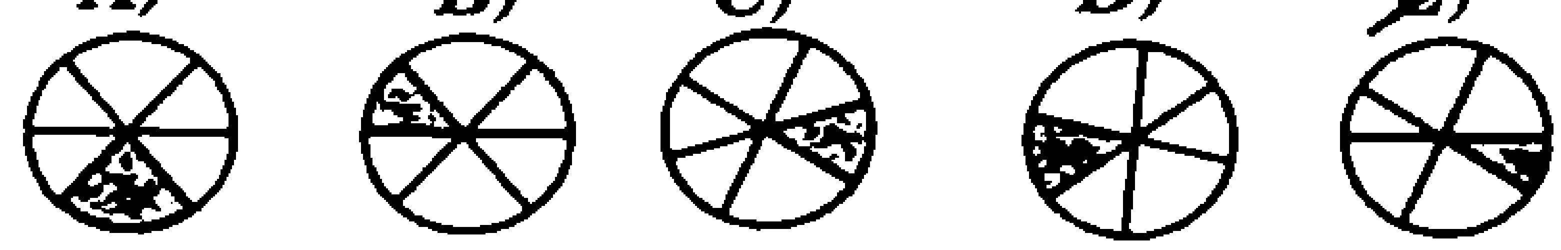


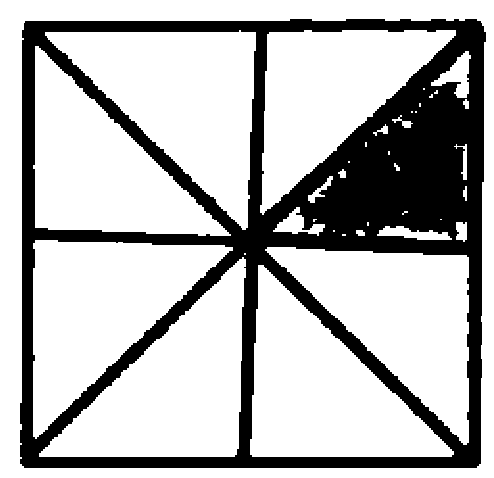
Fig.1 *Fig.2* *Fig.3* *Fig.4* *Fig.5* *Fig.6*

A) B) C) D) E)

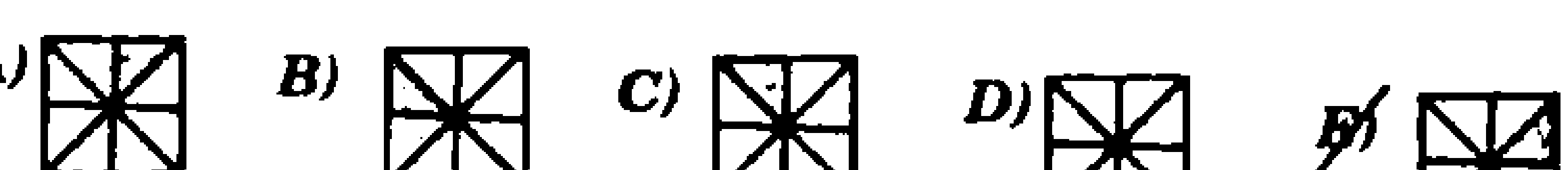


PROBLEMA 113 :

En la siguiente figura se muestra una lámpara cuadrada formada por *8* regiones congruentes. Si la lámina se hace girar en el mismo sentido y con respecto a su centro la primera vez *10°*; la segunda *20°*; la tercera *30°*; la cuarta *40°*; y así sucesivamente. ¿Cuál será la figura resultante después de girar por octava vez?



A) B) C) D) E)



PROBLEMA 114 :

En la secuencia:

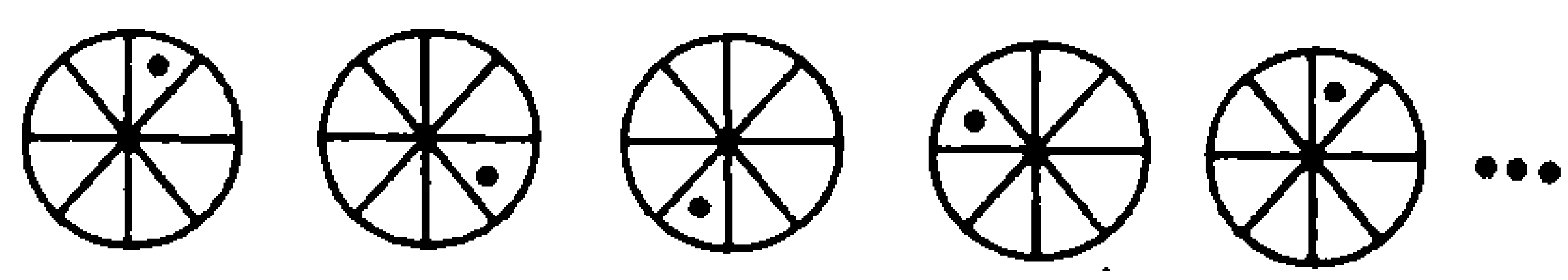
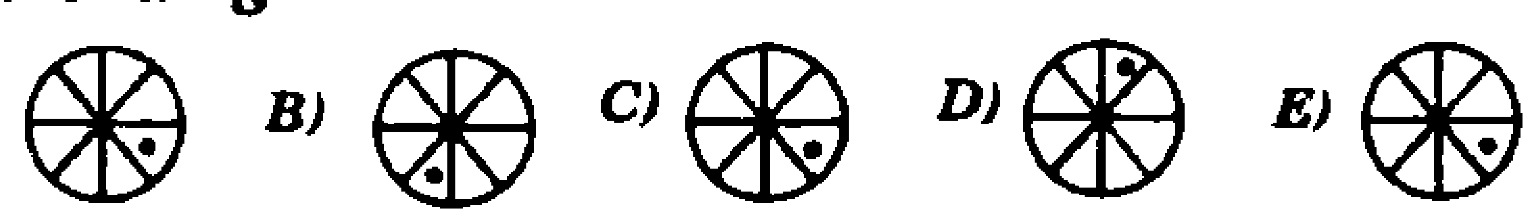


Fig.1 *Fig.2* *Fig.3* *Fig.4* *Fig.5*

Halle la *fig. 242*

A) B) C) D) E)



CRIPTO ARITMETICA
CAPITULO 019

OBJETIVOS :

* *Potenciar la aptitud del reconocimiento y manejo de las cuatro operaciones matemáticas elementales*
* *Abstraerse en la reconstrucción de operaciones.*

INTRODUCCIÓN :

La criptoaritmética es un arte que desempeñó un importante papel en el desenvolvimiento de la Historia . La criptoaritmética no es más que un juego. No se sabe en qué época se inventó ; pero los aficionados a las variedades comenzaron a interesarse por ellas en el Primer Congreso Internacional de Recreaciones Matemáticas que se reunió en Bruselas en ***1935***.

Cripto viene del griego ***"criptus"*** que quiere decir oculto , escondido.

La criptoaritmética consiste en reemplazar las cifras por letras en la transcripción de una operación de aritmética clásica , de una ecuación . El problema consiste en hallar las cifras que están "bajo las letras". Para complicar las cosas , en ciertos sitios se puede marcar simplemente el lugar de una cifra con un punto o un asterisco . En el caso extremo , sólo quedan asteriscos.

Es fácil ver que la criptoaritmética es un procedimiento de cifrar por sustitución y que la clave es una regla matemática.

Los enunciados criptoaritméticos son , a veces, seductores . Sus soluciones no presentan dificultades matemáticas ; pero en cambio exigen numerosísimas hipótesis y , en consecuencia , cálculos largos y trabajosos que implican grandes riesgos de confusión.

Por eso , se aconseja que se dediquen a este género de problemas sólo los lectores pacientes y minuciosos como ustedes , alumnos preuniversitarios.

El objetivo de la criptoaritmética es redescubrir las operaciones básicas de adición , sustracción , multiplicación , división , radicación y potenciación. En los problemas a tratar en este capítulo , se cumple que a letras iguales le corresponde cifras iguales y a letras diferentes , cifras diferentes . Cada letra , cada asterisco (*), representa una cifra.

Estos «Números» se relacionan con una operación matemática, y para descubrirlos debes seguir los precedimientos correctos, tomando en cuenta las propiedades que es necesario aplicar.

CRIPTO ARITMÉTICO

"Cripto" significa ***oculto***, y hace referencia a las operaciones matemáticas, donde las cifras (todas o algunas) se han "ocultado" por medio de una letra , un asterisco o cualquier símbolo.

Este tema permite revalorar las operaciones básicas como adición , sustracción , multiplicación y división.

CONSIDERACIONES GENERALES

* Cifras : $\{0 ; 1; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7; 8; 9\}$

* $\overline{abc}$ Se lee : "numeral $\overline{abc}$". Representa a un número de tres cifras.

* Un numeral no puede empezar en "***0***"

* Cada letra de un numeral dado representa una cifra.

* A letras o símbolos diferentes corresponden cifras o dígitos también diferentes.

* A letras o símbolos iguales corresponden cifras o dígitos iguales

* En el caso de guiones o asteriscos pueden tomar cualquier valor (igual o diferente a otro)

* Además ,la suma de dos dígitos como máximo es **18**, siempre y cuando los dígitos sean iguales ***(9 + 9)*** y ***17*** si es que los dígitos son diferentes ***(9 + 8)***.

EJEMPLOS :

$$1_3_5 ; **6**8$$

- La suma de dos cifras no puede ser mayor que ***18***
- Si $A \pm B \pm C = \overline{...B}$, entonces: $A \pm C = 10$
- Dado : $A + B + C = \overline{...B} \Rightarrow A + C = 10$

* Donde : $8 + 2 = 10$

$$\begin{array}{r} 38\ + \\ 43 \\ \underline{52} \\ 13③ \end{array}$$

¿Cuál será el valor de "*B*"

$$\begin{array}{r} \overline{A\,7}\,+ \\ \overline{6\,B} \\ \hline 2\,2 \\ 1\,3\,2 \end{array}$$

* Se concluye que: $7+B=10 \Rightarrow B=3$

* *PAR + PAR = PAR*	* *PAR × PAR = PAR*
* *PAR + IMPAR = IMPAR*	* *PAR × IMPAR = PAR*
* *IMPAR + IMPAR = PAR*	* *IMPAR × IMPAR = IMPAR*

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dado :

$$\begin{array}{r} \overline{A\,B\,C}\,+ \\ \overline{B\,C\,A} \\ \hline 7\,8\,9 \end{array}$$

Además : $C-A=1$

Calcular: "*A+B+C*"

A) 7 *B) 11* *C) 12* *D) 14* *E) 20*

RESOLUCIÓN :

* En la columna de unidades:

$$\begin{array}{r} \overline{4\,B\,5}\,+ \\ \overline{B\,5\,4} \\ \hline 7\,8\,9 \end{array}$$

* Observo : $C + A = 9 \Rightarrow C = 5$
* Además: $C + A = 9 \Rightarrow C = 5$
* Reemplazando , se ten dría:
* De lo que puedo hallar: $B = 3$
* Luego : $A+B+C=12$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Si :

$$\begin{array}{l|l} 3\triangle\diamondsuit & \triangle\,5 \\ \underline{-\,-} & 20 \\ \;\;-\,- & \end{array}$$

Además: $\diamondsuit = \triangle + 3$ ..Reconstruye la operación.

RESOLUCIÓN :

* ¿Qué pasaría sí: $\triangle=3$? Tendríamos :

$$\begin{array}{l|l} (33)\diamondsuit & 35 \\ \underline{-\,-} & 20 \\ \;\;-\,- & \end{array} \longrightarrow \text{No sería posible}$$

* ¿Qué pasaría si: $\triangle=2$?

Tendríamos : $\begin{array}{l|l} 32\diamondsuit & (25) \\ \underline{-\,-} & (2)0 \\ \;\;-\,- & \end{array}$ ⟶ ¡No sería posible!

* Pero sí : $\triangle=1$

Tendríamos : $\begin{array}{l|l} 31\diamondsuit & 15 \\ \underline{-\,-} & (2)0 \\ \;\;-\,- & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l|l} 31\diamondsuit & 15 \\ \underline{30} & 20 \\ \;\;1\,- & \end{array}$

* Además , Sí: $\triangle=1$ • $\diamondsuit=1+3=4$

$$\begin{array}{l|l} 314 & 15 \\ \underline{30} & 20 \\ \;\;14 & \end{array}$$ ⟶ Sería la operación.

PROBLEMA 3 :

Si:

$$\begin{array}{r} 1\,E\,D\,C\,B\,A\,\times \\ 3 \\ \hline E\,D\,C\,B\,A\,1 \end{array}$$

Calcular "*A +B + C + D + E*"

A) 26 *B) 24* *C) 23* *D) 20* *E) 18*

RESOLUCIÓN :

* Al observar la primera columna :

$$\begin{array}{r} 1\;E\;D\;C\;B\;A\,\times \\ 3 \\ \hline E\;D\;C\;B\;A\;1 \end{array}$$

* Debo buscar $3 \times$ ¿ *A* ? termine en *1*.
* ¿ Sencillo no? claro! $3\times 7 = ...1$
* Es decir : $A = 7$
* Quedaría así :

$$\begin{array}{r} 1\;E\;D\;C\;\overset{2}{B}\;7\,\times \\ 3 \\ \hline E\;D\;C\;B\;7\;1 \end{array}$$

* Ahora debo buscar $3\times$¿ 8?+2 termine en *7*.
* Pero muchas veces esta búsqueda demora , así que usaremos una regla práctica:

*Restaremos: "lo de abajo" – "lo que llevo" así : $7-2=5$

* Entonces lo que debo buscar es $3\times$ ¿*B*? termine en *5*. ¿más fácil no? claro! : $B = 5$
* Quedaría así :

$$\begin{array}{r} 1\;E\;D\;\overset{1}{C}\;\overset{2}{5}\;7\,\times \\ 3 \\ \hline E\;D\;C\;5\;7\;1 \end{array}$$

* En la tercera columna , aplico la regla práctica , Entonces: $5-1=4 \Rightarrow 3\times$ ¿*C* ? termine en *4*, Esdecir: $C = 8$
* Quedaría así :

$$\begin{array}{r} 1\;E\;\overset{2}{D}\;\overset{1}{8}\;\overset{2}{5}\;7\,\times \\ 3 \\ \hline E\;D\;8\;5\;7\;1 \end{array}$$

* En la cuarta columna, aplicando la regla práctica, tendríamos que : $D = 2$

* Quedaría así :

```
   2 1 2
1 E 2 8 5 7 ×
          3
-------------
E 2 8 5 7 1
```

* Observo que en la quinta columna no se esta llevando nada , es decir debo buscar directamente : $3\times$ *¿E?* termine en **2**.

* Esdecir : $E = 4$

* Reconstruyendo la operación

```
  1 2 1 2
1 4 2 8 5 7 ×
          3
-------------
4 2 8 5 7 1
```

* Me piden: $A+B+C+D+E=7+5+8+2+4=26$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Calcular la suma de todos los asteriscos , en :

A) 23
B) 19
C) 24
D) 26
E) 31

```
  * * 3 ×
    5 *
  -----
    8 * *
1 0 6 *
---------
* * * 0 2
```

RESOLUCIÓN :

```
    * * 3 ×
      5 *
    -----
    8 * 2
1 0 6 [*]
---------
* * * 0 2
```

Luego debemos buscar un número que multiplicado por 3 termine en cifra 2.

¡Muy bien es 4!

* Por lo tantó quedan:

```
    * * 3 ×
      5 4
    -----
    8 * 2
1 0 6 [*]
---------
* * * 0 2
```

5×3=15

*Por lo tanto este * debe ser 5.*

* O sea :

```
    * * 3 ×
      5 4
    -----
    8 * 2
1 0 6 [5]
---------
* * * 0 2
```

Ahora debemos buscar un Número que multiplicado Por 5, nos de 1065.

Fácil verdad :
1065÷5=213

* Y reconstruyendo tendremos :

```
   2 1 3 ×
     5 4
   -----
   8 5 2
1 0 6 5
---------
1 1 5 0 2
```

⇒ La suma de todos los asteriscos es ***26***.

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Calcular la suma de todos los asteriscos , en :

A) 23
B) 24
C) 25
D) 26
E) 29

```
4 * * |1 *
* 9     3 *
-----
– 6 *
  * *
  ---
  1 0
```

RESOLUCIÓN :

```
4 * * |1 (*)
* 9    (3) *
-----
– 6 *
  * *
  ---
  1 0
```

¿3 por cuánto , nos da un resultado que termine en 9?
RPTA: 3

* O sea :

```
(4 *) * |1 3
* 9       3 *
-----
– 6 *
  * *
  ---
  1 0
```

Debe ser 45 , ya que 45 – 39=6

* Luego :

```
4 5 * |1 3
* 9     3 *
-----
–(6 *)
 (5) *
  ---
  1 0
```

¿13 por cuánto , nos da un número de 2 cifras que comienza en 5?
RPTA : 4

Se deduce

* Entonces :

```
4 5 2 |1 3
3 9     3 4
-----
– 6 2
  5 2
  ---
  1 0
```

⇒a suma de todos los asteriscos es ***26*** .

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Si : $A - L = 8$

Hallar : $\overline{AL}+\overline{LA}$

A) 92 B) 91 C) 182 D) 100 E) 38

RESOLUCIÓN :

* A y L son cifras y sus valores son diferentes de cero, porque forman parte de un número de 2 cifras y además que son el inicio de : $\overline{AL}+\overline{LA}$

* Luego de : $A - L = 8$

Se deduce que : $A = 9$ y $L = 1$.

* Entonces lo que piden será : $91 + 19 = 100$

RPTA "D"

PROBLEMA 7 :

Si: $\overline{AN}+\overline{NA}=187;\ A > N$

Calcular: $A + N + A$

A) 25 B) 26 C) 22 D) 24 E) 28

RESOLUCIÓN :

* Por descomposición polinómica de :

$$\overline{AN}+\overline{NA}=187$$

$\Rightarrow 10A+N+10N+A=187$

$\Rightarrow 11\ (A+N)=187 \quad \Rightarrow A+N=17\ ;\ A>N$

$\Rightarrow A=9\ ;\ N=8$

* Luego : $A + N + A = 9 + 8 + 9 = 26$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Si:

$$\begin{array}{r} \overline{1CHAPE}\times \\ 3 \\ \hline \overline{CHAPE1} \end{array}$$

Calcular : $A + P + A + C + H + E$

A) 28 B) 33 C) 19 D) 34 E) 41

RESOLUCIÓN :

* Colocando en forma horizontal :

$\Rightarrow \overline{1CHAPE}\times 3=\overline{CHAPE1}$

$\Rightarrow (100000+\overline{CHAPE})\times 3=\overline{CHAPE0}+1$

$\Rightarrow 300000+3\,\overline{CHAPE}=\overline{CHAPE}\times 10+1$

$\Rightarrow 299999=10\,\overline{CHAPE}-3\,\overline{CHAPE}$

$\Rightarrow 299999=7\,\overline{CHAPE} \quad \Rightarrow \overline{CHAPE}=42857$

* De donde: $C=4\ ;\ P=5\ ;\ H=2\ ;\ E=7$ y $A = 8$

*Luego : $A + P + A + C + H + E = 34$

RPTA : "D"

PROBLEMA 10 :

Si : $\overline{PIA}\times 999=\ldots 876$ Hallar : $P+A+P+I$

A)8 B)3 C) 2 D) 7 E) 13

RESOLUCIÓN:

* Considerar que :

$$\overline{abc}\times 999=\overline{ab(c-1)(9-a)(9-b)(10-c)}$$

* De : $\overline{PIA}\times 999=\ldots 876$

$\Rightarrow \overline{\ldots(9-P)(9-I)(10-A)}=\ldots 876$

* Luego :

$9-P=8\ ;\ 9-I=7\ ;\ 10-A=6$

$\Rightarrow P=1\ ;\ I=2\ ;\ A=4$

$\Rightarrow P + A + P + I = 8$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Hallar la suma de cifras del producto en:

A) 21
B) 19
C) 12
D) 13
E) 15

```
  * * ×
  9 8
 -----
  * *  +
* * *
-------
* * * *
```

RESOLUCIÓN :

* Observando y analizando tenemos que :

$8\times ** = **$ # de 2 cifras

$9\times ** = ***$ # de 3 cifras

* La única posibilidad es que el multiplicando sea 12 , luego reconstruyendo la operación :

```
   1 2 ×
   9 8
  -----
   9 6 +
 1 0 8
 -------
 1 1 7 6
```

* Entonces la suma de cifras del producto será:

$1 + 1 + 7 + 6 = 15$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

Hallar la suma de cifras del divisor en:

A) 4
B) 2
C) 8
D) 3
E) 11

```
* * * * * * * | * *
* * *         |---------
-----           * * 8 * *
  * *
  * *
  -------
    * * *
    * * *
    -----
        8
```

RESOLUCIÓN :

* Si observamos minuciosamente la distribución de los asteriscos encontraremos que la segunda cifra del cociente es cero , además que :

$$* \times ** = *** \qquad 8 \times ** = **$$

* Llegamos a la misma situación que el problema anterior , entonces el divisor es igual *12*, y su suma de cifras es igual a *3*.

⇒ El divisor es igual a 12, y su suma de cifras es igual a *3*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Si : $\overline{UNI} \times 156 = \ldots 876$

Calcular la suma de las *3* últimas cifras del resultado de : $\overline{UNI} \times 468$

A) 12 *B) 16* *C) 13* *D) 9* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

* De : $\overline{UNI} \times 468 = \overline{UNI} \times 156 \times 3$

$= \ldots\ldots\ldots 876 \times 3$

$= \ldots\ldots\ldots 628$

⇒ Lo que piden será : $6+2+8=16$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Si: $\sqrt[M]{\overline{ANy}} = M$ Calcular: $M+y+N+y+N+A$

A) 22 *B) 13* *C) 19* *D) 28* *E) 41*

RESOLUCIÓN :

* Tendremos que : $\overline{ANy} = M^M$

* Tanteando adecuadamente , encontraremos que la única posibilidad que encaja será para $M=4$, donde:

$$\overline{ANy} = 4^4 \Rightarrow \overline{ANy} = 256 \Rightarrow A=2 \,;\, N=5 \,;\, y=6$$

* Luego : $M + y + N + y + N + A = 28$

RPTA: "D"

PROBLEMA 15 :

Sean : $\overline{AVE} \times E = 428$; $\overline{AVE} \times V = 214$; $\overline{AVE} \times A = 856$

Hallar : $\overline{EVA} \times \overline{AVE}$

A) 43972 *B) 45796* *C) 82376*

RESOLUCIÓN :

* Colocando en forma vertical lo que nos piden:

$$\begin{array}{rrrrrl} & & A & V & E & \times \\ & & E & V & A & \\ \hline & & 8 & 5 & 6 & + \Rightarrow \overline{AVE} \times A \\ & 2 & 1 & 4 & & \Rightarrow \overline{AVE} \times V \\ 4 & 2 & 8 & & & \Rightarrow \overline{AVE} \times E \\ \hline 4 & 5 & 7 & 9 & 6 & \end{array}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Si: $\overline{RAMO} \times 4 = \overline{OMAR}$

Calcular: $A+M+O+R$

A) 15 *B) 9* *C) 18* *D) 13* *E) 21*

RESOLUCIÓN :

* De :

$$\begin{array}{r} RAMO \times \\ 4 \\ \hline OMAR \end{array}$$

* En el Multiplicando : $4 \times R + \ldots = O \Rightarrow R = 1$ ó $R = 2$

* Pero en el producto :

$O \times 4 = \ldots R \Rightarrow R$ es par luego :

$R = 2$ y $O = 8$, además que : (ya que $A \neq R$)

$4 \times A + \ldots = M \Rightarrow A = 1 \ldots 4 \times M + 3 = \ldots 1 \Rightarrow M = 7$

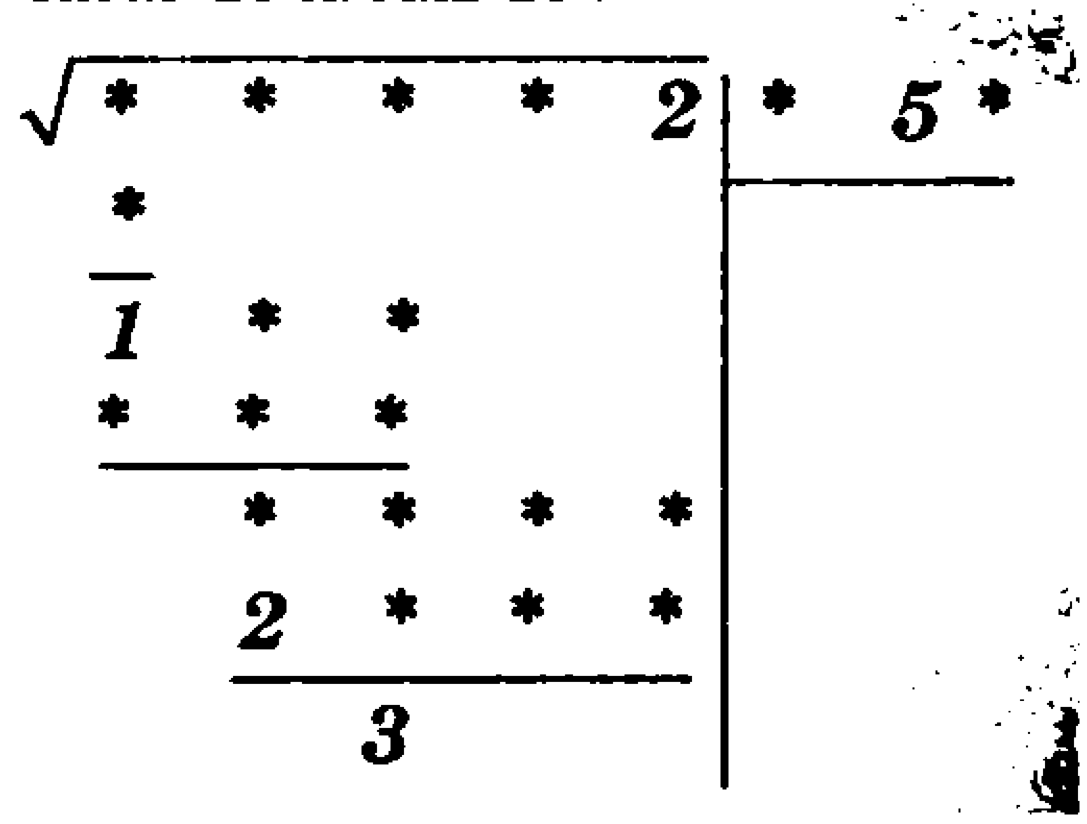
* Piden : $A+M+O+R = 1+7+8+2 = 18$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Hallar la suma de cifras de la raíz de :

A) 9
B) 10
C) 11
D) 13
E) 17

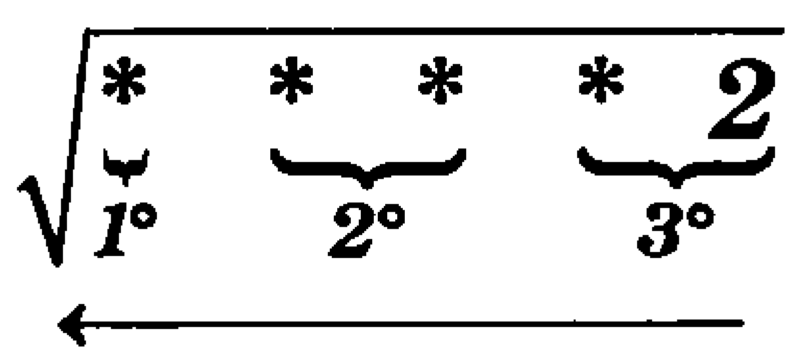


RESOLUCIÓN :

* Recordar como se extrae la raíz cuadrada:

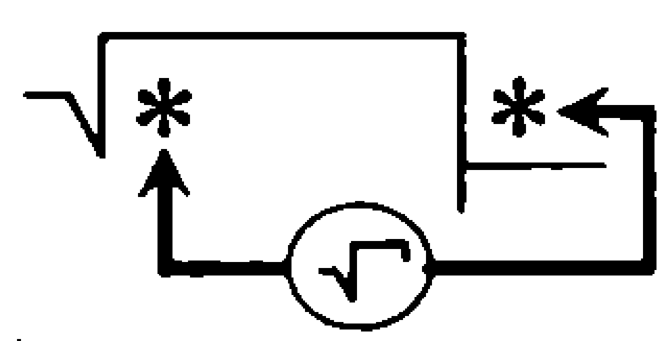
PRIMER PASO:

Se divide el número en grupos de *2* cifras empezando por la *DERECHA* :



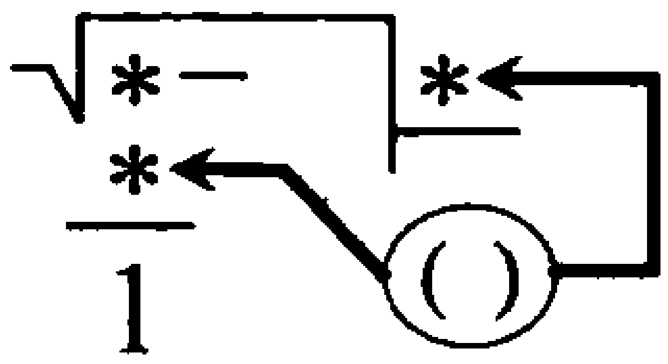
SEGUNDO PASO :

Se extrae la raíz cuadrada entera del primer grupo y ella será la *1^ra^*. cifra de la raíz :



TERCER PASO :

Se resta de 1^er^ grupo el cuadrado que es menor o igual que él (el más próximo) :



CUARTO PASO : Se baja el 2^{do} grupo y observa el mecanismo a seguir :

$$\sqrt{* * *}\ \Big|\ *\qquad \underbrace{(2\times *)\text{O}\times\text{O}}_{\text{Mecanismo ha formar}} \cong \underbrace{1 * *}$$

$$* \qquad \underbrace{1 * *}$$

O: Por tanteo se encuentra su valor y él va ha formar parte de la raíz .

* Luego en el problema :

$$\sqrt{* * *}\ \Big|\ *\ 5$$

$$\frac{*}{1 * *}\ \Big|\ \overline{(2\times *)\ 5}\times 5 \cong \overline{1**}$$

Se deduce que es 1.

* Entonces quedará :

$$\sqrt{* * *}\ \Big|\ 15$$

$$\underline{1}\ \Big|\ \underbrace{25\times 5}\cong 1 * *$$

$$1 * * -$$

$$1\ 2\ 5$$

QUINTO PASO : Se baja el tercer grupo y se procede como en los pasos anteriores.

$$\sqrt{* * * * 2}\ \Big|\ 15 \leftarrow \textit{Se coloca EL DOBLE}$$

$$\underline{1}\ \Big|\ 25\times 5$$

$$\underline{1 * *}\ \Big|\ 30\text{O}\times\text{O} = * * * 2$$

$$1\ 2\ 5$$

$$* * * 2$$

Se deduce POR TANTO

* Pero analizando tenemos que :

$$\sqrt{* * * * 2}\ \Big|\ 15\text{O}$$

$$\underline{1}\ \Big|\ 25\times 5$$

$$1 * *\ \Big|\ 30\text{O}\times\text{O}\cong 2 * * 9$$

Se deduce que es 7

$$\underline{1\,2\,5}$$

$$2 * * 2$$

$$\underline{2 * * 9}$$

$$3$$

* Luego la raíz será ***157***

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Indicar la suma de cifras del divisor en :

```
**7*******  | ****7*
******        **7**
*****7*
*******
 *7****
 *7****
 *******
 ****7**
  ******
  ******
  ..........
```

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que la primera cifra del divisor es ***1***, porque:

$$7\times\underbrace{* * * * 7 *}_{6\ cifras} = \underbrace{* 7 * * * *}_{6\ cifras}$$

* La 2^{da} y 4^{ta} cifra del cociente es mayor que ***7*** ya que:

$$\underbrace{*}_{\text{se deduce que es 8}}\times\underbrace{* * * * 7 *}_{6\ cifras} = \underbrace{10 * * * * *}_{7\ cifras}$$

* También se verifica que la 2^{da} cifra del divisor es ***2***, hasta el momento tenemos que :

```
**7*******  | 12**7*
******        *878*
1****7*
10**7**
  97****
  87****
  10*****
  10**7**
    ******
    ******
    ..........
```

* De : $7 \times 12\underbrace{*}_{\text{se deduce que es 5}}\ *7* = 87****$

* Además:

$8 \times 125\underbrace{*}_{\text{se deduce que es 4}}\ 7* = 10\underbrace{*}_{\text{se deduce que es 0}}\overbrace{*}^{\text{se deduce que es 3}}7**$

* Hasta el momento tendremos :

```
**7*******  | 12547*
******        *8781
1****7*
10037**
  979***
  878***
  101****
  10037**
    12547*
    12547*
    .........0
```

* De :

$8 \times 12547\underbrace{*}_{\text{se deduce que es 2}} = 10037\overbrace{*}^{\text{se deduce que es 8}}*$

* Piden : $1 + 2 + 5 + 4 + 7 + 3 = 22$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Si : $\overline{UNO} = (U+N+O)^3$

Calcular : U^{N^O}

A) 1 B) 9 C) 85 D) 5 E) 25

RESOLUCIÓN:

* Considerando los cubos perfectos de 3 cifras :

$\{5^3=125 ; 6^3=216 ; 7^3=343 ; 8^3=512 ; 9^3=729\}$

* De donde se deduce que el único que verifica la condición será el 512.

$\Rightarrow U=5 \ ; \ N=1$ y $O=2$

* Piden : $5^{1^2} = 5$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Hallar : $M+E+S$

Si:

$$\begin{array}{r} M\ M\ + \\ E\ E \\ S\ S \\ \hline M\ E\ S \end{array}$$

A) 9 B) 18 C) 17 D) 21 E) 13

RESOLUCIÓN :

* De las unidades : $M+E+S= \ldots S \Rightarrow M+E= \ldots 0$

* De las decenas :

$M+E+S+1 = \overline{ME} \Rightarrow M+E+S+1 = \overline{M0}$

* De donde se deduce que :

$M=1$; $E=9$ y $S=8$

*Luego lo pedido será : $M+E+S=1+9+8=18$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Si : $\overline{abc} \times a = 1068$; $\overline{abc} \times b = 1780$; $\overline{abc} \times c = 2136$

Hallar la suma de las cifras de $\overline{abc}^2$.

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

RESOLUCIÓN :

* De : $\overline{abc}^2 = \overline{abc} \times \overline{abc}$

* Colocando en forma vertical.

```
       a b c ×
       a b c
      2 1 3 6 +
     1 7 8 0      ⟶ c×abc
    1 0 6 8       ⟶ b×abc
    1 2 6 7 3 6   ⟶ a×abc
```

* Luego, la suma de cifras será : $1+2+6+7+3+6=25$

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

Hallar la suma de cifras del radicando en la siguiente operación incompleta :

```
√* * * * * *  | * * *
 *
 * * *
 * * 5
   * * * *
   * 1 * *
   - - - -
```

A) 19
B) 20
C) 24
D) 23
E) 22

RESOLUCIÓN :

$\underbrace{******}_{\text{Radicando}} = (***)^2 \geq 100000$

$*** \geq 326\ldots$

$*2 = * \longrightarrow$ será 3

Además :

```
√ * * * * * *  | 3 * *
  9            | 6 * × * = * * 5
  * * *        |   └ Será 5
  * * 5        |
    * * * *    | 7 0 * × * = * 1 * *
    * 1 * *    |       └ Será 3
    - - - -    |
```

* Reconstruyendo sería :

```
√1 2 4 6 0 9 | 3 5 3
  9
  3 4 6
  3 2 5
    2 1 0 9
    2 1 0 9
    - - - -
```

Piden : $1+2+4+6+0+9=22$

RPTA: "E"

PROBLEMA 23 :

Reconstruir :

```
    5 * 4 ×
      * 5
   2 * * *
 * 1 * 6
 * * 5 3 *
```

y dar como respuesta la suma de cifras del producto:

A) 17 B) 12 C) 9 D) 18 E) 25

RESOLUCIÓN :

* Con un primer análisis , se tendrá :

```
    5 □ 5 ×         2 [debe ser 5] 7 0 +
      □ 5           □ 1 □ 6
  2 □ 7 0 +         □ [debe ser 4] 5 3 0
□ 1 □ 6
□ □ 5 3 0
```

* Además que : [puede ser 9 ∨ 4] $\times \overline{5*4} = \overline{*1*6}$

* Probamos con **9** :

```
  5 [debe ser 7] 4 ×
              9 5
  2 [debe ser 8] 7 0 +
5 1 [debe ser 6] 6
5 4 5 3 0
```

* Como con el **9** encaja , ya no es necesario analizar con el **4** , piden : $5+4+5+3+0=17$

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 ¿Qué cifra corresponde al cuadro vacío?

```
  5 * 3 7 +
  8 3 4 6
1 3 □ 8 3
```

RPTA. :..

02 Complete los casilleros en blanco en:

```
 ▽ 4 7 +
 □ ▽ □
1 0 9 3
```

Y señale el valor de ▽ × □

RPTA. :..

03 Calcular el valor de $a + b + c + d - e$ en la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} \overline{35a2b}\ + \\ \overline{4c2d8} \\ \hline \overline{e9003} \end{array}$$

RPTA. :..

04 Calcular el valor de: $A + H + E$ en la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} \overline{AH}\ \times \\ A \\ \hline \overline{HEE} \end{array}$$

RPTA. :..

05 Hallar la suma de cifras que faltan en la siguiente operación : (cada (*) representa una cifra diferente).

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,7\times \\ * \\ \hline 6\,9\,1\,4 \end{array}$$

RPTA. :..................................

06 Si se tiene que:

$$\begin{array}{r} \overline{a\,3\,b}\; + \\ \overline{b\,8\,4} \\ \hline \overline{c\,a\,9} \end{array}$$

hallar: $a + b + c$

RPTA. :..................................

07 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{a\,6\,c}\times \\ 4 \\ \hline 1\,0\,6\,8 \end{array}$$

Hallar: $a + c$

RPTA. :..................................

08 Hallar: $(a + b) \times b$; si:

$$\overline{a5} + \overline{a3} = \overline{b1}$$

RPTA. :..................................

09 Hallar : (a – b) × a; si:

$$\overline{abc} \times 3 = \overline{b29}$$

RPTA. :..................................

10 Hallar: $\overline{ab} + \overline{ba}$ si:

$$\overline{aa} + \overline{bb} = 121$$

RPTA. :..................................

11 Si:

$$\begin{array}{r} \triangle\triangle\;\times \\ 7 \\ \hline \square\,\triangle\;1 \end{array}$$

Hallar: $\triangle + \square$

RPTA. :..................................

12 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{z\,4\,x}\;- \\ \overline{1\,y\,2} \\ \hline \overline{y\,x\,7} \end{array}$$

Hallar: $x + y + z$

RPTA. :..................................

13 Si: $\overline{A56} + \overline{BAB} = \overline{D194}$

Hallar: $A + B + D$

RPTA. :..................................

14 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{A\,4}\; + \\ \overline{5\,B} \\ \overline{A\,8} \\ \hline \overline{1\,B\,8} \end{array}$$

Hallar: "$A + B$"

RPTA. :..................................

15 Si: $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cac}$

Hallar: $\dfrac{b+c}{a}$

RPTA. :..................................

16 Si: $\overline{SAL} + \overline{MAS} = \overline{ALLA}$

Hallar: $L + L + A + M + A$

RPTA. :..................................

17 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{T\,O\,S}\; + \\ \overline{T\,O\,S} \\ \hline \overline{S\,A\,N\,A} \end{array}$$

Hallar: "$S + A + N + T + O$"

RPTA. :..................................

18 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{A\,5\,A}\; + \\ \overline{C\,8} \\ \overline{C\,B} \\ \hline \overline{B\,8\,7} \end{array}$$

Hallar: $A + B + C$

RPTA. :..................................

19 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{A\,B}\; + \\ \overline{B\,4} \\ \overline{5\,A} \\ \hline \overline{C\,6\,4} \end{array}$$

Hallar : $A + B + C$

RPTA. :..................................

20 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{A\,B\,A}\; + \\ \overline{A\,B} \\ B \\ \hline \overline{A\,7\,9} \end{array}$$

Hallar: $B^2 + 5$

RPTA. :..................................

21 Si: $m + n + p = 21$

Hallar: $\overline{mnp} + \overline{pmn} + \overline{npm}$

RPTA. :..................................

22 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{MM}\; + \\ \overline{I\,I} \\ \overline{L\,L} \\ \hline \overline{M\,I\,L} \end{array}$$

Hallar: $\dfrac{M^2 + L}{I}$

RPTA. :..................................

23 Reconstruir

```
 6 _ 4 _  | _ 4
 _ 8      |------
 ---      | 2 _ _
 1 9 _
 _ _ 2
 -----
 - - 2 4
     _ _
     ---
     - -
```

RPTA. :..................................

24 Si cada (*) representa una cifra. Hallar el dividendo en:

```
 * * * *  | 7
 * *      |------
 ---      | 2 * *
 - * 3
   * *
   ---
   - * 8
     * *
     ---
     - -
```

RPTA. :..................................

25 Hallar: $A + B + C + D + E$

$$\begin{array}{r} \overline{1EDCBA}\times \\ 3 \\ \hline \overline{1EDCBA1} \end{array}$$

RPTA. :..................................

26 Reconstruir:

$$\begin{array}{r} *\,4\,*\;\times \\ *\,7 \\ \hline 4\,5\,*\,2 \\ *\,*\,*\,0\;\; \\ \hline *\,*\,*\,*\,* \end{array}$$

RPTA. :..................................

27 Hallar la suma de cifras del producto.

```
multiplicando  →         * * * ×
multiplicador  →         a a a
                       ---------
             {         * * * 0
productos    {       2 * 4 *
parciales    {     * 9 * *
                 -------------
producto  →        * * * * * *
```

RPTA. :..................................

28 Si: $a + b + c + d = 23$

Hallar: $\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc}$

RPTA. :..................................

29 Hallar la suma del cociente más el divisor, si:

```
 7 □  | □
 □    |------
----  | □ □
 1 □
 □ 2
----
 - 3
```

RPTA. :..................................

30 Calcular el dividendo más el cociente en:

```
3 □ □ □  | □ □
□ 4      |--------
----     | 2 8 □
1 0 □
□ □ 6
------
- - 9 □
    □ 4
    ----
    - 8
```

RPTA. :..................................

31 Si: $\overline{mpq} \times a = 372$

$\overline{mpq} \times b = 868$

Hallar: $\overline{mpq} \times \overline{ab}$

RPTA. :..................................

32 Si: $\overline{abc} \times a = 1071$

$\overline{abc} \times b = 1785$

$\overline{abc} \times c = 2499$

Hallar "$\overline{abc}^2$" y dar como respuesta la suma de las cifras del resultado.

RPTA. :..................................

33 Si:

$$\begin{array}{r} \overline{ROMA} \times \\ 4 \\ \hline \overline{AMOR} \end{array}$$

Hallar: $O + M + A + R$

RPTA. :..................................

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si : $\overline{ABC} + \overline{BCA} + \overline{CAB} = 777$

Determinar : "$A+B+C$"

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 16 **E)** 17

02 Si :

$$\begin{array}{r} M\ N + \\ 4\ N \\ \hline A\ A\ M \end{array}$$

$N \neq 0$, Determinar : "$M+A+N+A$"

A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

03 Si :

$$\begin{array}{r} A\ B\ 5 + \\ C\ 8\ C \\ \hline B\ C\ 7 \end{array}$$

Determinar : "$A + B + C$"

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

04 Si : $\overline{a7c} + \overline{c6a} + \overline{5b9} = \overline{1c26}$

Determinar : "$a + b + c$".

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

05 Si : $\overline{AAB} + \overline{ABB} = \overline{1914}$

Determinar : "$A \times B$"

A) 14 **B)** 24 **C)** 18 **D)** 32 **E)** 12

06 Si:

$$\begin{array}{r} A\ 6\ B\ + \\ B\ 5\ 3\ C \\ 7\ C\ A \\ \hline 6\ 1\ C\ B \end{array}$$

Determinar: "$A + B + C$".

A) 12 B) 10 C) 11 D) 13 E) 14

07 Si

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ A\ + \\ 4\ 2\ B \\ 5\ C\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 4\ 8 \end{array}$$

Determinar: "$A+B+C$".

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 12 ó 21

08 Si:

$$\begin{array}{r} 4\ B\ + \\ 5\ A \\ \hline C\ 4 \\ E\ D\ 5 \\ \hline E\ F\ F\ 4 \end{array}$$

Determinar: "$A+B+C+D+E+F$"

A) 24 B) 23 C) 27 D) 25 E) 26

09 Si: $A^A=B$. Determinar: "$A+B$"

A) 6 B) 2 C) 5 D) 7 E) 9

10 Si: $A^A=\overline{BC}$ hallar "$A+B+C$"

A) 10 B) 12 C) 15 D) 14 E) 16

11 Si: $\sqrt[M]{\overline{BCD}}=M$.

Determinar: "$B+C+D+M$"

A) 15 B) 14 C) 16 D) 17 E) 18

12 Si: $\sqrt[D]{\overline{ABCD}}=D$.

Determinar: "$A+C+A+B+A+D+A$"

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

13 Si: $\sqrt[D]{\overline{ABCD}}=D$

Determinar: "$A+B$".

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

14 Si: $\overline{MNP}\times 99=.....365$

Determinar: "$M+N+P$"

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

15 Si: $\overline{PQR}\times 999=.....158$

Determinar: "$P+Q+R$"

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

16 Si: $\overline{AB}\times 101=.....43$. Determinar: "$A+B$".

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

17 Si: $\overline{ABC}\times 1001=.....564$.

Determinar: "$A+B+C$"

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

18 Si: $\overline{ABC2}\times 7=\overline{32CBA}$. Determinar: "$A+B+C$".

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

19 Si: $\overline{BURLA}\times 3=\overline{URLA3}$

Determinar: "$B+U+R+L+A$"

A) 19 B) 21 C) 23 D) 24 E) 25

20 Determinar: "$a+x+y$", si:

$$\begin{array}{r|l} a\ *\ a & 1\ 2 \\ \hline *\ * & \\ \hline 8 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

A) 16 B) 10 C) 12 D) 14 E) 11

21 Si: $\overline{TU6}=\sqrt{***TU6}$

Determinar: "$U+T$"

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

22 Si:

$$\begin{array}{r} P\ P\ + \\ U\ U \\ B\ B \\ \hline P\ U\ B \end{array}$$

Determinar: "$P+U+B$"

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

23 Determinar: la suma de cifras del producto:

$$\begin{array}{r} *\ *\ + \\ 9\ 8 \\ \hline *\ * \\ *\ *\ * \\ \hline *\ *\ *\ * \end{array}$$

A) 19
B) 12
C) 21
D) 13
E) 15

24 Si:

$\overline{CAR}\times C=856$ $\overline{CAR}\times A=214$ $\overline{CAR}\times R=428$

Determinar: "$\overline{CAR}^2$"

A) 80168 B) 81228 C) 88168 D) 89168 E) 87168

25 Si: $\overline{TEZ}=5\times T\times E\times Z$

Determinar: "$\overline{ET}^2$"

A) 5041 B) 3 600 C) 3061 D) 5184 E) 2 604

TAREA DOMICILIARIA

01 Si: $\overline{ABC}\times 9=....121$. Determinar : "A+B+C"

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

02 Si : $\overline{PAZ}\times 1001=....729$

Determinar : "$\dfrac{P+Z}{A}$".

A) 4 B) 6 C) 5 D) 8 E) 9

03 Si: $M^M=\overline{PMMNM}$ .Determinar : "P+M+N".

A) 11 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

04 Determinar la suma de cifras del dividendo.

```
* * * * * * *  |* *
* * *           * * 8 * *
- - - * *
      * *
      - * * *
        * * *
      - - 8
```

A) 29
B) 30
C) 31
D) 32
E) 24

05 Si: $\sqrt[*]{\overline{PERU}}=*$. El "*" representa un mismo número. Determinar : "P+E+R+U"

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el producto de las cifras representadas por asteriscos en :

$$\overline{****}\times 999=......4156$$

A) 1152 B) 1528 C) 7 D) 82 E) 120

02 Si : $\overline{SIN}+\overline{SIN}=\overline{NADA}$

Determinar : S+A+N+D

A) 13 B) 14 C) 17 D) 19 E) 10

03 Sabiendo que a letras iguales le corresponden cifras iguales y además : $\overline{NE}+\overline{EN}=\overline{SOS}$

Determinar : N+O+S+E

A) 17 B) 18 C) 9 D) 10 E) 14

04 Si :

```
 1CHARY ×
       3
 CHARY1
```

Determinar : 2C+H+A+R+Y

A) 16 B) 18 C) 30 D) 11 E) 43

05 Determinar la suma de las cifras del primer producto parcial , en :

```
   2 * * ×
     * 4
   * * *
 * 3 5
 3 * * 0
```

A) 14 B) 16 C) 13 D) 18 E) 10

06 Si :

```
   A
  AA
 AAA
 AAA
 ...
 * 404
```

Determinar : A^2+A+1

A) 16 B) 13 C) 43 D) 31 E) 73

07 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del cociente :

```
4 * * *  | 13
* *        * * *
- 1 * *
   9 *
   1 1
```

A) 10 B) 16 C) 7 D) 18 E) 9

08 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del cociente :

```
2 * * 6  | * 3
* 3        * * *
- 3 *
  7 *
  - 6 *
    * *
    - 1
```

A) 12 B) 13 C) 11 D) 10 E) 14

09 Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la raíz :

```
√5 * * 5  | * *
 * *
 - 7 * *
   * * *
   - - -
```

A) 8 B) 19 C) 10 D) 7 E) 12

(10) En la siguiente multiplicación, hallar la suma de las cifras del producto, si cada asterisco representa una cifra.

```
      7 * * ×
        2 *
    ---------
      * 6 * *
    * * * 8
    ---------
    * * 1 * 0
```

A) 10 *B) 7* *C) 8* *D) 18* *E) 12*

(11) Determinar la suma de cifras del producto, en:

```
          * 5 * ×
          * * 3
      -----------
        * * * *
      * * * *
    * * 4
    -------------
    1 * 4 * 6 1
```

A) 6 *B) 21* *C) 42* *D) 10* *E) 18*

(12) Sabiendo que las cifras de la raíz son pares. Determinar la suma de cifras de la raíz.

```
√ *         | *, *
  *         |______
  ---
  3 * *
  * * *
  -----
  _ * *
```

A) 8 *B) 11* *C) 9* *D) 10* *E) 14*

(13) Si : $\overline{UNO}=(U+N+$ [illegible]

Calcular : $U^{N^{O}}$

A) 1 *B) 9* *C) 8* *D) 5* *E) 25*

(14) Después de reconstruir la siguiente operación dar como respuesta la sma de las cifras de la raíz.

```
√ * * * 8 * *  | * * *
  9            |______
  -
  * * *
  * 2 *
  -------
  _ * * * *
    1 * * 4
    -------
    - 2 * 2
```

A) 2 *B) 8* *C) 7* *D) 10* *E) 11*

(15) Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la radicando.

```
√ * * * 5 *  | * * *
  *          |______
  -
  * * *
  2 * *
  -------
  - 1 * * *
    * * 0 9
    -------
    - 3 * 9
```

A) 14 *B) 15* *C) 26* *D) 37* *E) 8*

(16) Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la radicando.

```
√ 3 * * * [illegible]  | * * *
  * *                  |______
  -----
  - 7 * *
    * * *
    -------
      7 * * *
      * * * *
      -------
      - - - -
```

A) 11 *B) 12* *C) 7* *D) 8* *E) 10*

(17) Sabiendo que $\overline{SEIS}$ es divisible por **6**.

$$\overline{SEIS}+\overline{DE}+\overline{ENERO}=\overline{REYES}$$

Callcular : $\overline{REY}+\overline{DE}+\overline{REYES}$

A) 21110 *B) 210204* *C) 21608*
D) 90202 *E) 100008*

(18) Si : $\sqrt[4]{\overline{MARI}}=A+3$

Determinar : $M+A+R+I$

A) 5 *B) 6* *C) 11* *D) 8* *E) 7*

(19) Si : $\overline{LE}+\overline{LE}+\overline{LE}+\overline{LE}+\overline{LE}=\overline{OLE}$

Además, el cero y el uno no intervienen.

Determinar : $O+L+E+L+E$

A) 21 *B) 22* *C) 34* *D) 27* *E) 9*

(20) Si : $\overline{DIEZ}+\overline{TRES}=\overline{TRECE}$

Se sabe además que $\overline{DIEZ}$ es par y que $\overline{TRES}$ es impar.

Determinar : $S+I+E+T+E$

A) 29 *B) 11* *C) 24* *D) 23* *E) 26*

(21) Si : $\overline{DIA}+\overline{HORAS}=\overline{CITAS}$

Determinar : $S+A+R+I+T+A$

A) 12 *B) 10* *C) 27* *D) 14* *E) 15*

(22) Reconstruir la siguiente división y dar como

respuesta la suma de las cifras del cociente :

```
3 * * * * * 6 | * 3
* *             * * * 3 * *
-- * *
   * 4
   - * *
     * 8
     - * * *
       1 * *
       - 1 2
```

A) 12 B) 13 C) 11 D) 10 E) 14

23 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del cociente , si es el máximo posible :

```
* * 5 * * | * *
* * *       * * *
- - - * *
      6 0
      - 3
```

A) 12 B) 18 C) 11 D) 13 E) 14

24 Reconstruir la siguiente operación e indicar la suma de cifras del resultado .Cada asterisco representa un dígito cualquiera .

```
      * * * * ×
        * * 3
    * 8 4 * *
  1 * * * *
  * * * *
* * 5 1 2 9
```

A) 6 B) 21 C) 25 D) 10 E) 18

25 Sustituya los asteriscos por los números que hacen falta en las siguiente multiplicación :

```
  * * 2 * * ×
        * 3
  * 9 * 5 2
2 * * 6 *
* 0 * 5 * 2
```

Determinar la suma de los valores de los asteriscos .

A) 25 B) 37 C) 59 D) 28 E) 74

TAREA DOMICILIARIA

01 Sustituya los asteriscos por los números que hacen falta en las siguiente multiplicación :

```
  * * 2 * * ×
        * 3
  * 9 * 5 2
2 * * 6 *
* 0 * 5 * 2
```

Determinar la suma de cifras del producto.

A) 25 B) 37 [illegible] 59 D) 28 E) 74

02 Sustituya los a[illegible] por los números que hacen falta en las [illegible] multiplicación :

```
    * * 3 [illegible] ×
        * [illegible] 3
  3 * [illegible] *
* * [illegible] 3 3
* * * *
* * * * * *
```

Determinar la suma de cifras del producto.

A)5 B) 7 C) 19 D) 18 E) 17

03 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del cociente :

```
* * * * * * * * | * * *
* * * *           * 7 * * *
- - * * *
    * * *
    * * * *
      * * *
      - * * * *
        * * * *
        - - - -
```

A)32 B) 23 C) 11 D) 33 E) 24

04 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del cociente :

```
5 * * * * * * * * | * * *
* * *               * * * * * * *
- - * * * *
      * * *
    - - - 5 * *
          * * *
          * 5 * *
          * * * *
          - - - -
```

A)32 *B) 18* *C) 11* *D) 33* *E) 24*

05 En la siguiente multiplicación , todas las cifras desaparecidas son números primos . (cada asteriscos es una cifra). Determinar la suma de cifras del producto.

```
      * * * ×
        * *
    -------
    * * * *
  * * * * *
  ---------
  * * * * *
```

A)24 *B)1 6* *C)13* *D) 18* *E) 10*

06 Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la radicando .

```
√ * * * * * * * *  | * * * *
    *              |--------
  ---
  _ * * *
      * *
    -----
      * * * *
      * * * *
      -------
        * * * * *
        * * * 3 *
        ---------
        _ _ _ _ _
```

A) 11 *B) 12* *C) 7* *D) 19* *E) 10*

07 Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la raíz.

```
√ * * 0 * *  | * * *
  *          |------
  -
  _ * *
    6 9
    -----
    * * * 4
    2 * * *
    -------
    _ _ _ _
```

A) 11 *B) 13* *C) 12* *D)* *E) 10*

08 Reconstruir la siguiente operación y dar como respuesta la suma de las cifras de la radicando.

```
√ 4 * * * * 5  | * * *
  * *          |------
  ---
    * * *
    4 * *
    -----
    - 6 * * *
      * * * *
      -------
      _ _ _ _
```

A) 11 *B) 13* *C) 12* *D) 18* *E) 10*

09 En la siguiente multiplicación , hallar la suma de las cifras del producto , si cada asterisco representa una cifra .

```
        * * * * ×
          * * *
      ---------
      * * 6 * *
    2 * * * *
    * * * *
  -------------
    * * * 1 8 9
```

A) 10
B) 7
C) 8
D) 18
E) 30

10 Reconstruir la siguiente división y dar como respuesta la suma de las cifras del dividendo .

```
* * * * *  | 2 *
* 3        |------
---        1 * * *
_ * *
  * * *
  -----
  _ _ 3
      *
    ----
    * 2
```

A) 12
B) 18
C) 11
D) 13
E) 26

11 Determinar la suma de cifras del producto , en :

```
        * 5 * ×
        * * 3
      -------
      * * * *
    * * * *
  * * 4
  -----------
  1 * 4 * 6 1
```

A) 6 *B) 21* *C) 42* *D) 10* *E) 18*

12 Sabiendo que las cifras de la raíz son pares .Determinar la suma de cifras de la raíz .

```
√ *        | *, *
  *        |-----
  -
  3 * *
  * * *
  -----
  _ * *
```

A) 8 *B) 11* *C) 9* *D) 10* *E) 14*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) C	2) B	3) A	4) D	5) C	6) E	7) E	8) C	9) A	10) B
11) D	12) E	13) C	14) A	15) E	16) D	17) E	18) E	19) C	20) A
21) C	22) C	23) E	24) C	25) A	1) E	2) C	3) C	4) D	5) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) A	2) C	3) E	4) C	5) C	6) C	7) A	8) A	9) E	10) A
11) B	12) A	13) C	14) C	15) C	16) B	17) C	18) E	19) D	20) C
21) C	22) D	23) D	24) C	25) C	1) C	2) E	3) D	4) B	5) A
6) D	7) C	8) C	9) E	10) E					

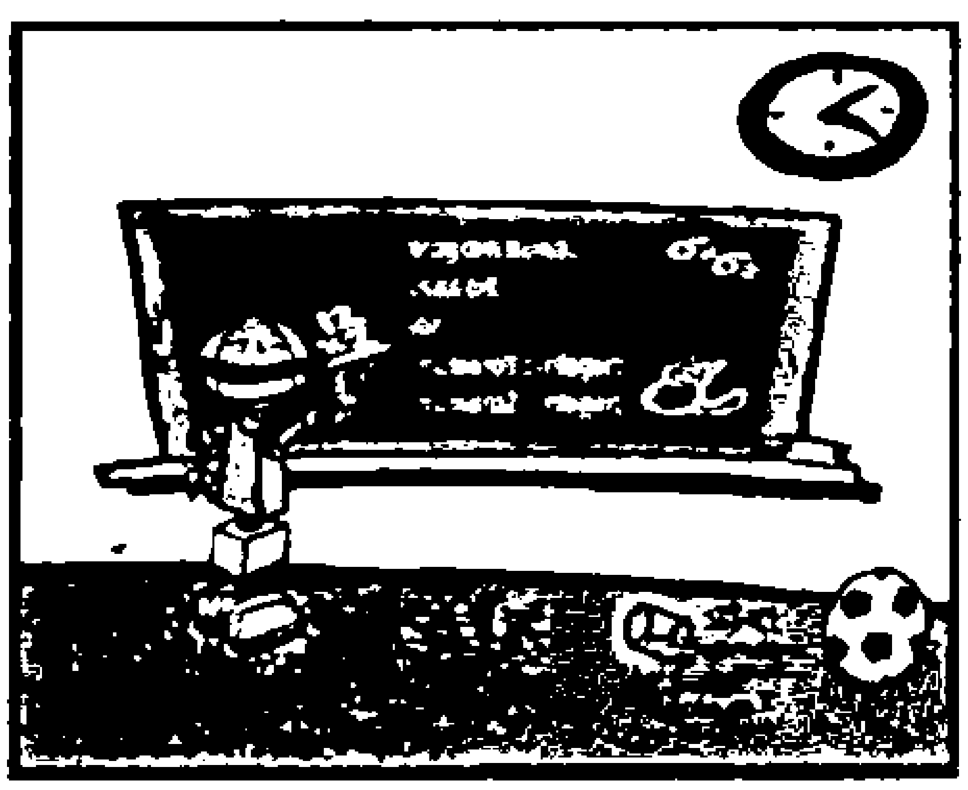
CUATRO OPERACIONES
PROBLEMAS RAZONADOS
CAPITULO 020

OBJETIVOS :

* *Potenciar la habilidad del alumno para aplicar las operaciones matemáticas elementales.*
* *Desarrollar la capacidad de comprensión de enunciados de problemas básicos , para su posterior simbolización .*
* *Relacionar e interpretar matemáticamente hechos cotidianos.*
* *Conocer métodos prácticos para enfrentar diversos problemas .*

INTRODUCCIÓN :

La capacidad de soslayar una dificultad , de seguir un camino indirecto cuando el directo no aparece, es lo que coloca al animal inteligente sobre el torpe , lo que coloca al hombre sobre encima de los animales más inteligentes y a los hombres de talento por encima de sus compañeros, los otros hombres.



La idea básica de este capítulo permite dar una noción amplia y nítida de los propios fundamentos que tienen lugar las cuatro operaciones fundamentales (adición , sustracción , multiplicación y división), además de otras operaciones que implican a las ya mencionadas.Es cierto que la mayoría de los problemas de este capítulo se pueden resolver por ecuaciones ; pero el objetivo fundamental de este capítulo es de que Ud. resuelva los problemas utilizando sólo las *4* operaciones fundamentales.A continuación , presentamos problemas resueltos, para que Ud. vea la idea de cómo resolver los problemas y luego hay una serie de problemas propuestos para que Ud. practique.

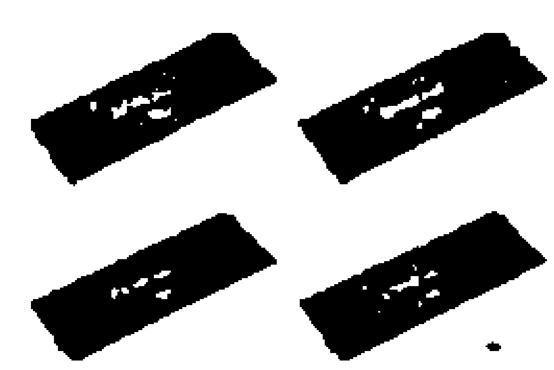
Los ejercicios dados a continuación muestran situaciones, a veces familiares, a veces imaginarias, pero relacionadas con el ***«Razonamiento Matemático»***, y a medida que los vayas resolviendo mejorará notoriamente tú capacidad para pre-suponer, hacer preguntas, deducir y emplear tú imaginación adecuadamente, haciendo que las piezas del rompecabezas mental encajen correctamente para darnos una visión de la respuesta.

EJEMPLO 1 :

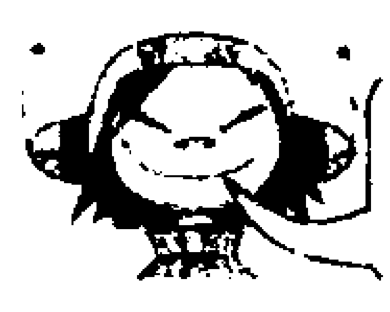
Lenin acude a la bodega «DEL CHINO» y compra ***3*** gaseosas y ***4*** chocolates. Si cada gaseosa vale ***2*** soles y cada chocolate ***1*** sol, ¿cuánto dinero tuvo que pagar?

RESOLUCIÓN:

Cada gaseosa le cuesta 2 soles. Si compra 3 gaseosas debe pagar: $3\times 2 = 6$ soles



Cada chocolate cuesta *1* sol. Si compra *4* chocolates debe pagar: $4\times 1 = 4$ soles



¡Lenin , me debes pagal ***6*** soles de las gaseosas y cuatlo soles de los chocolates. En total me debes: $6 + 4 = 10$ soles ... !

EJEMPLO 2 :

Bryan compra cinco televisores de ***14"*** a ***$120*** cada uno. Si uno de ellos estaba malogrado, ¿a cuánto debe vender cada uno de los restantes para recuperar su dinero?

RESOLUCIÓN:

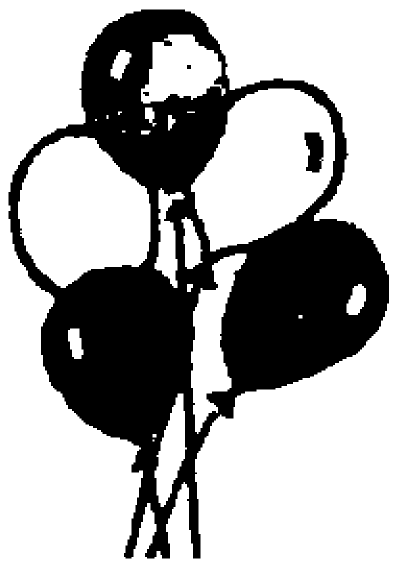
Costo total de los televisores: ***$120×5 = $600***

En la venta debe recuperar los ***$600*** pero para ello sólo dispone de cuatro televisores ya que uno de ellos está malogrado. Luego, cada televisor debe ser vendido a: ***$600 ÷4= $150***

EJEMPLO 3 :

Lila compra globos a ***4*** soles la docena. Si vende cada globo a un sol, ¿cuántos globos debe vender para ganar ***800*** soles?

RESOLUCIÓN:



* Por una docena de globos paga ***4*** soles
* Por una docena de globos recibe: ***1×12 = 12*** soles
* En una docena de globos gana: ***12 – 4 = 8*** soles
* Para ganar ***800*** soles necesita vender:

800 ÷8= 100 docenas de globos

⇒ 100 docenas equivale a: ***100×12= 1 200*** globos.

EJEMPLO 4 :

Un comerciante compra, en el mercado mayorista de Caquetá , ***500*** plátanos a ***40*** céntimos la mano. Si vende los plátanos a ***20*** céntimos cada uno, ¿cuánto dinero ganó , si ***100*** de los plátanos se malograron antes de ser vendidos?

RESOLUCIÓN:

Precio de compra:

500 plátanos equivalen ***500÷5=100*** manos de plátanos.

Ahora, si por una mano pagó ***40*** céntimos, por ***100*** manos debió pagar:

100×40 = 4000 céntimos <> ***40*** soles

Precio de venta:

Para la venta sólo dispone de ***400*** plátanos ya que 100 se malograron. Si cada plátano se vende a ***20*** céntimos, por ***400*** plátanos recibirá:

400×20 = 8 000 céntimos < > ***80*** soles

⇒ El comerciante ganó: ***80 - 40 = 40*** soles.

EJEMPLO 5 :

Brandy gana ***60*** soles al día y Lucy ***80*** soles. ¿Cuántos días deben transcurrir para que juntos hayan ganado ***1540*** soles?

RESOLUCIÓN:

cada día ganan juntos:
60 + 80 = 140 soles

Si en un día han ganado 140 soles, entonces para que hayan ganado 1540 soles deben haber transcurrido: 1540÷140=11días

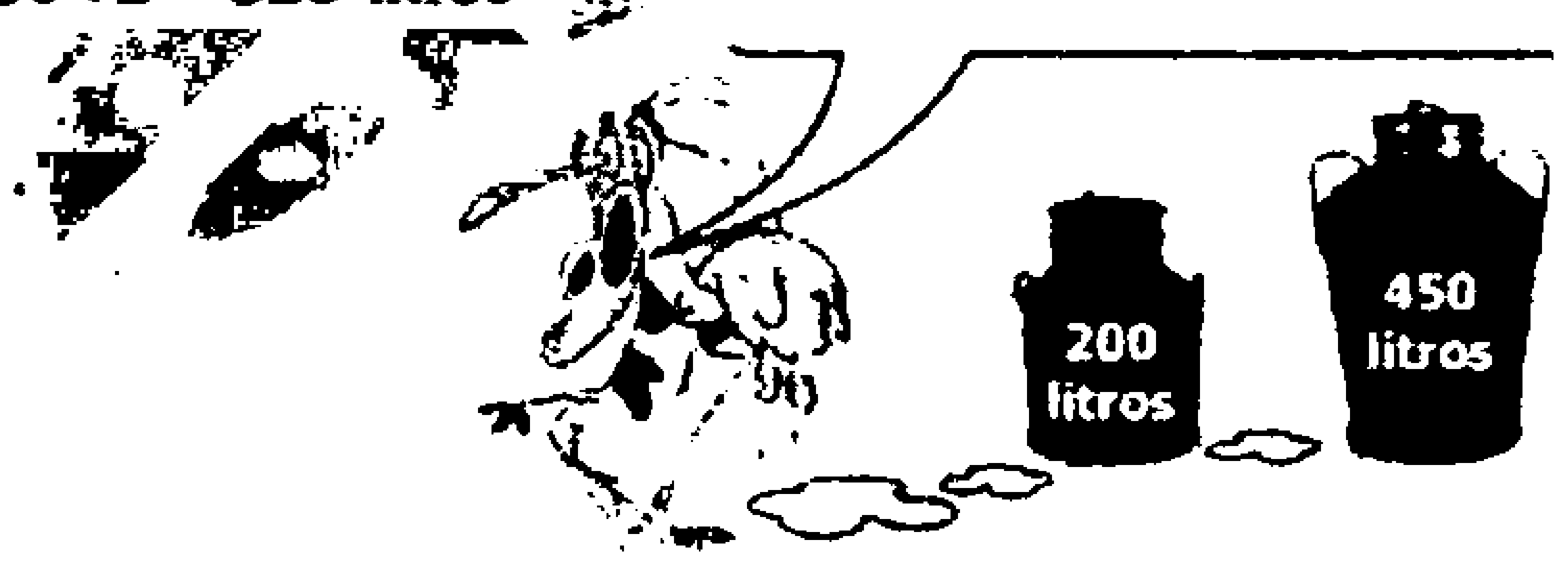
EJEMPLO 6 :

Un depósito contiene ***200*** litros de leche y otro, ***450***. ¿Cuántos litros debo pasar del segundo al primero para que, al final, tengan la misma cantidad de leche?

RESOLUCIÓN:

En total hay: ***200 + 450 = 650*** litros Si al final deben tener la misma cantidad de leche, cada envase tendrá:

650÷2= 325 litros



El segundo depósito tenía, al inicio, ***450*** litros y al final se quedará con ***325*** litros; por lo tanto, ha pasado:

450 - 325 = 125 litros al primero.

EJEMPLO 7 :

Tengo ***12*** monedas de ***5*** soles y algunas otras de ***2*** soles. ¿Cuántas monedas de ***2*** soles tengo, si el total de mi dinero asciende a ***78*** soles?

RESOLUCIÓN:

12 monedas de 5 soles: 12 x 5 = S/.60
En total tengo S/.78, entonces en monedas de 2 soles tengo:

78 - 60 = 18 soles

La cantidad de monedas de 2 soles será:

$\frac{18}{2}$ = 9 monedas

EJEMPLO 8 :

¿Entre cuántas personas se repartieron ***S/. 185***, si cada una recibió ***S/. 10*** y sobraron ***S/. 15***?

RESOLUCIÓN :

* Dinero a repartir : ***S/.185 - S/.15 = S/.170***

* Como cada úno recibe ***S/. 10***, entonces el número de personas es : ***170+10=17***

⇒ se repartió entre ***17*** personas

EJEMPLO 9 :

El costo de cada pasaje en un micro es de ***S/. 5*** y por cada pasajero que baja suben dos. Si al final se ha recaudado ***S/. 300***.

¿Con cuántos pasajeros partió al inicio , si al final llegó con ***50*** pasajeros?

RESOLUCIÓN :

$$\#\text{ de pasajeros : } \frac{S/.300}{S/.5} = 60$$

Se sabe que cada vez que baja una persona suben ***2***. Como al paradero final llegan ***50*** personas , esto quiere decir que bajaron ***60 - 50 = 10*** y subieron ***20***. De las ***60*** personas , ***20*** subieron en el camino ,

⇒ En el paradero inicial subieron :

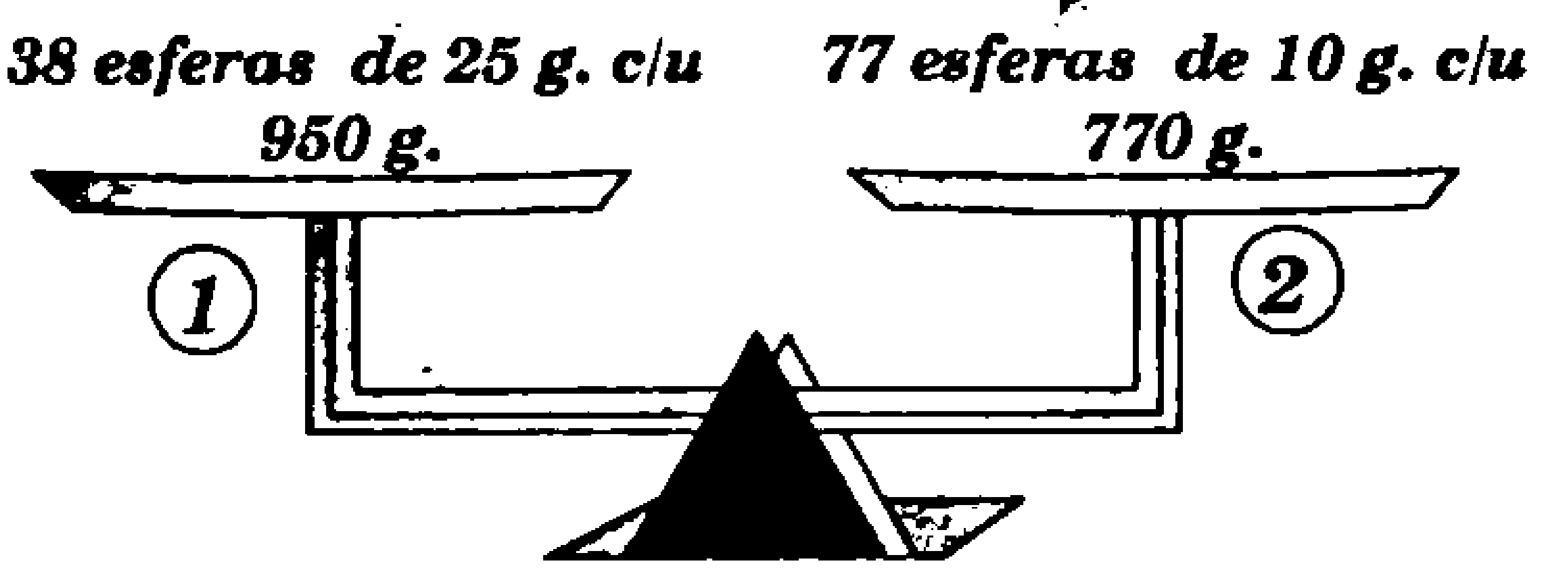
60 –20 = 40 pasajeros

EJEMPLO 10 :

En una balanza de ***2*** platillos se tiene ***38*** esferas que pesan ***25 g c/u*** y ***77*** esferas que pesan ***10 g c/u***. ¿Cuántas esferas se deben intercambiar para que se encuentren en equilibrio , sabiendo que de ambos platillos se saca la misma cantidad de esferas?

RESOLUCIÓN :

* Graficando tenemos :



* Peso que debe tener cada grupo : $\frac{950+770}{2} = 860\,g$

* Al platillo ② le falta : ***860 – 770 = 90 g***

* En un intercambio , este grupo gana : ***25– 10 = 15 g***

* Entonces el número de intercambios será : $\frac{90}{15} = 6$

⇒ Se han intercambiado ***6*** esferas.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

A través del tiempo , se ha llegado a la conclusión de que ciertos tipos de problemas pueden ser resueltos de varias formas ya sean Aritmética o Algebráicamente . Pero estas soluciones , en algunos casos , llegarían a ser muy extensas ; es por eso que se ve necesario el estudio de ciertos ***Métodos de Solución*** para simplificar la resolución de estos problemas que cumplen con ciertas características. Cabe destacar que estos métodos están formados sobre la base de las ***Cuatro Operaciones Fundamentales.***

Existe una cantidad indeterminada de problemas en la Matemática . Las características que presentan algunos de ellos , ya sea por sus datos o forma de solución , hacen que sea posible clasificarlos y tener un método determinado para resolverlos.En este capítulo analizaremos los siguientes métodos de solución : F El método de la falsa suposición (Simple y Doble). F El método de las operaciones inversas.F El método de las diferencias.F El método de las equivalencias (Regla de Conjunta).

FALSA

SUPOSICIÓN SIMPLE

Para que un problema pueda ser resuelto por el método de la Falsa Suposición debe tener las siguientes características :

♠ Deben existir ***2*** incógnitas.

♠ Que presente un valor numérico producido por la suma de las ***2*** incógnitas (número de elementos).

♠ Valor unitario de cada una de las incógnitas.

♠ Además que tenga otro valor numérico total producido por el número de elementos.Los problemas se resuelven realizando una falsa suposición a cualquiera de las dos incógnitas.

EJEMPLO 11 :

Se quiere embotellar ***111R*** de aceite en ***27*** botellas ; unas de ***5R*** y otras de ***3R*** .

¿Cuántas botellas más de ***5R*** hay que de ***3R*** ?

RESOLUCIÓN :

Asumimos que todas las botellas son de ***5R*** , entonces tendríamos : ***27 ×5= 135R*** ; pero por dato , el total de litros a embotellar es ***111R*** .

* Error Total ***(E.T.) ; 135 –111 = 24R***

* Error Unitario ***(E.U.) = 5 – 3 = 2R***

* *En 1 botella de* $3\ell \Rightarrow 2\ell$

$$? \Rightarrow 24\ell$$

$$? = \frac{24}{2} = 12 \text{ botellas de 3 litros}$$

* Como disponemos de ***27*** botellas , entonces hay ***15*** botellas de ***5R***

RPTA : 15 – 12 = 3 botellas más.

EJEMPLO 12 :

¿Cuántas monedas de ***S/.2*** debo entregar para pagar una deuda de ***S/.29***, si tengo ***10*** monedas de ***S/.5*** y ***S/.2***?

A) 3 ***B) 6*** ***C) 4*** ***D) 14*** ***E) 7***

RESOLUCIÓN :

* *Supuesto :* Si las ***10*** monedas fueran de ***S/.5*** tendría: ***10×5 = S/. 50***

* Pero mi deuda sólo es de ***S/. 29*** por lo que me sobraría: ***50 – 29 = 21*** soles

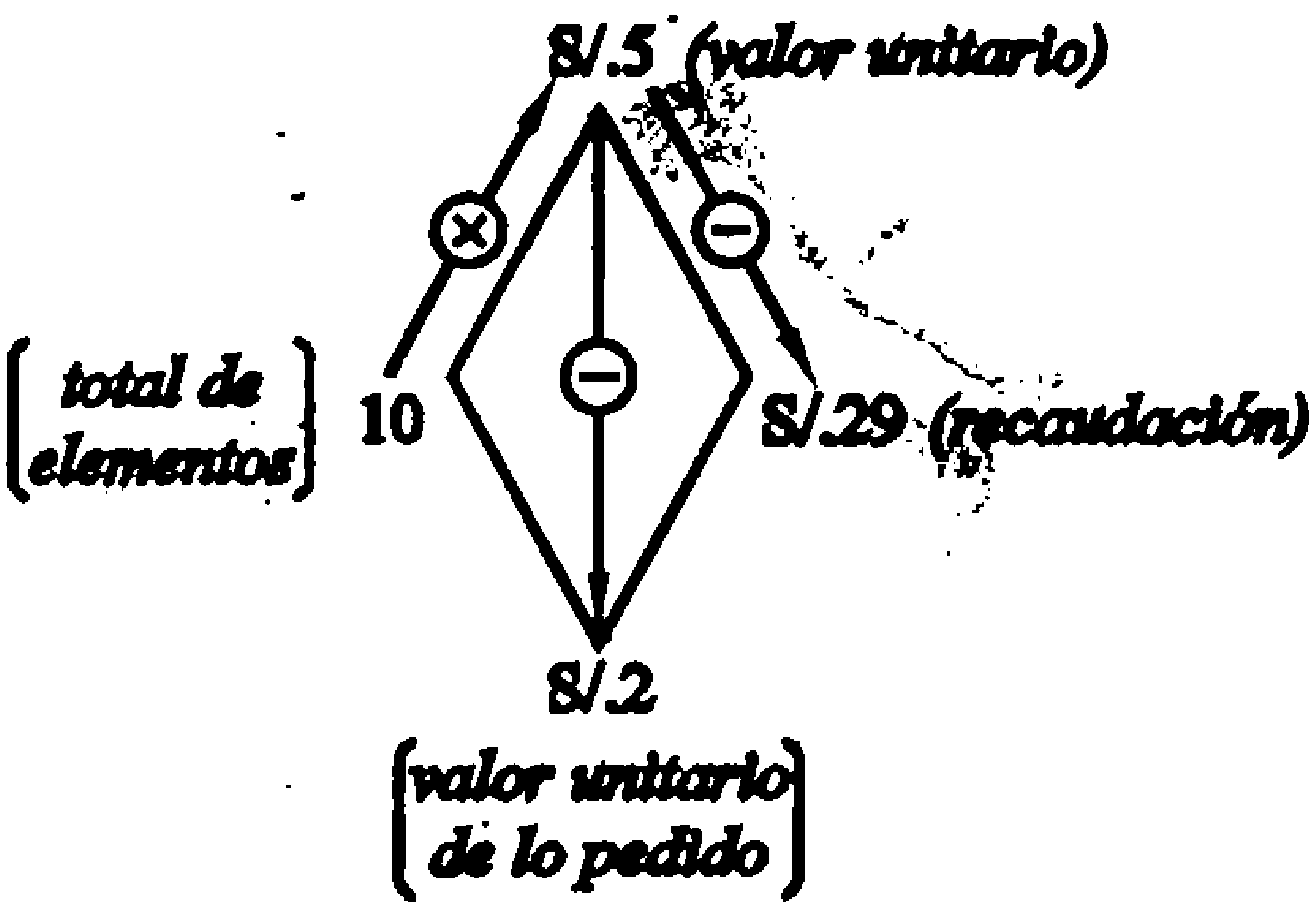
* Esto se debe a que hemos considerado que todas las monedas son de ***S/. 5*** y ninguna de ***S/.2*** .

* Al no considerar ***1*** moneda de ***S/.2*** aumento a lo que tengo en ***5 - 2=S/.3*** (error unitario), luego el número de monedas de ***S/.2*** que no considere será :

$$\text{NÚMERO DE MONEDAS DE S/.2} : \frac{\text{ERROR TOTAL}}{\text{ERROR UNITARIO}} = \frac{21}{3}$$

RPTA : "E"

Método Práctico (MÉTODO DEL ROMBO) :



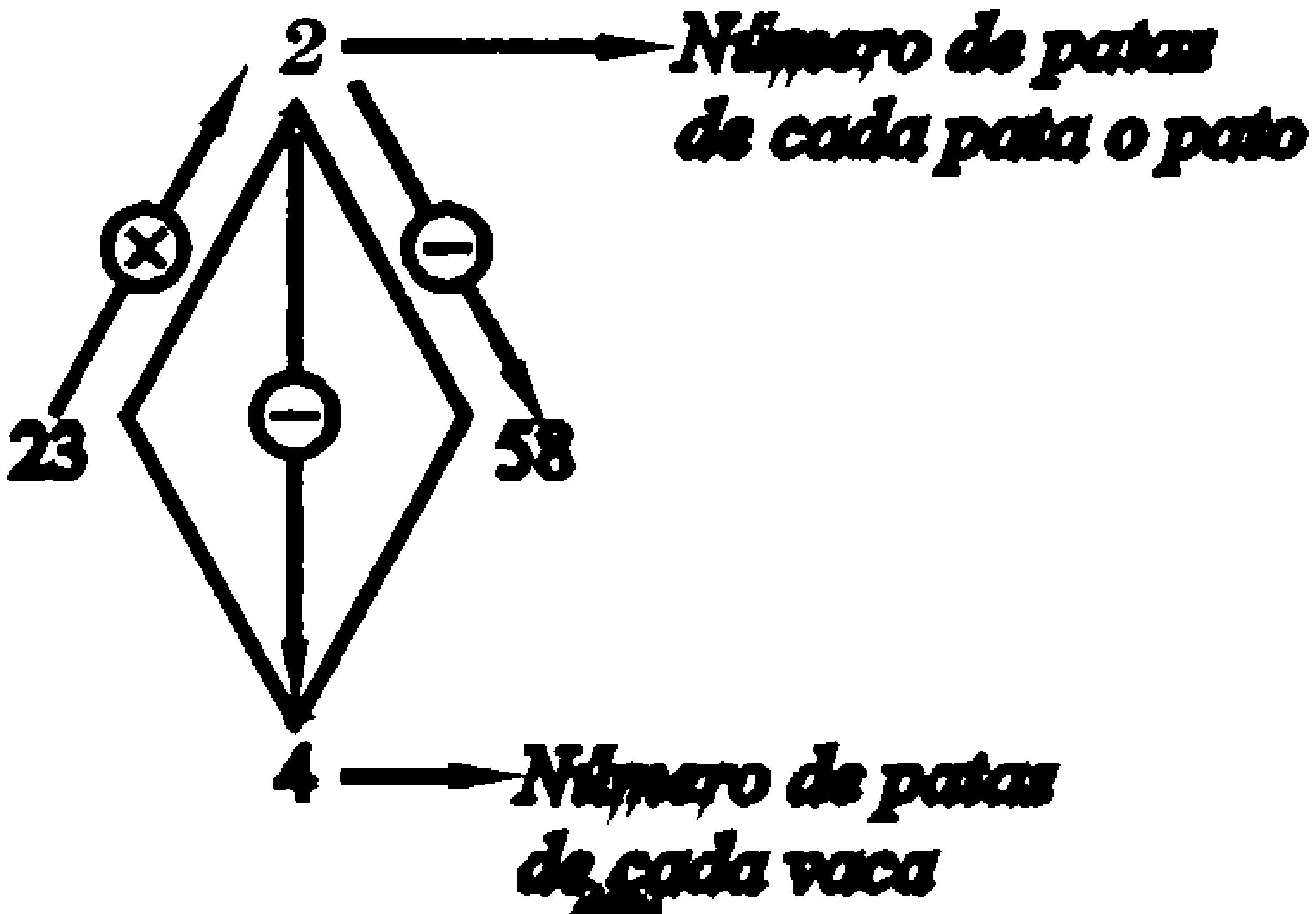
$$\text{NÚMERO DE MONEDAS DE S/.2} : \frac{10 \times 5 - 29}{5 - 2} = 7$$

EJEMPLO 13 :

En una granja se observa ***23*** cabezas y ***58*** patas, entre patos y patas y vacas ¿Cuántas son las vacas?

A) 3 ***B) 6*** ***C) 17*** ***D) 20*** ***E) 23***

RESOLUCIÓN :



Número de vacas : $\frac{23 \times 2 - 58}{2 - 4} = 6$

RPTA : "B"

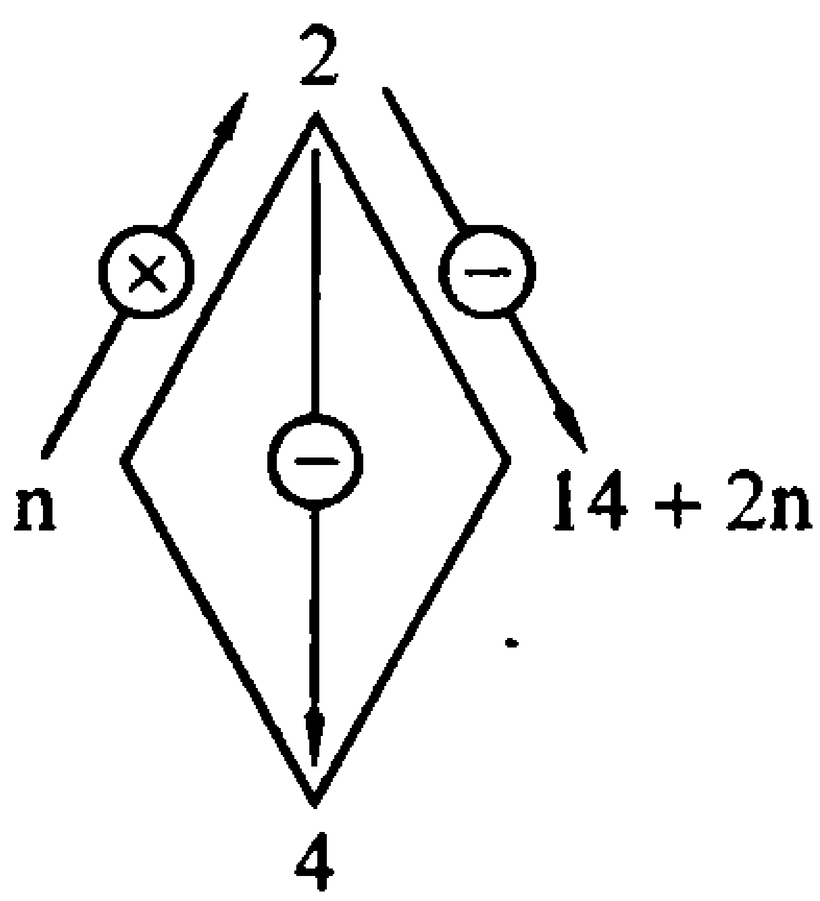
EJEMPLO 14 :

En un grupo de conejos y gallinas el número de patas es ***14*** más ***2*** veces el número de cabezas, entonces el número de conejos es:

A) 5 ***B) 6*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

RESOLUCIÓN :

* Número de animales : ***n***
* Número de patas : ***14 + 2n***



Número de conejos : $\frac{n \times 2 - (14 + 2n)}{2 - 4} = 7$

RPTA : "C"

FALSA SUPOSICIÓN DOBLE

Los problemas deben presentar las siguientes características :

* Debe tener ***2*** valores totales.
* Debe tener ***3*** incógnitas , donde ***2*** de ellas estén relacionadas.
* Cada incógnita debe tener su valor unitario.

EJEMPLO 15 :

A cierta función , asistieron ***23*** personas ; cada adulto

varón pagó **S/.30**, cada mujer **S/. 20** y cada niño **S/.10**. El número de mujeres asistentes fue el doble que el de niños ; además , se recaudó **S/.450**. ¿Cuántos adultos varones asistieron?

RESOLUCIÓN :

Supongamos que todas las personas pagan **S/.30.**

I) Falsa Suposición ***(F.S.): 23×S/.30=S/.690***

II) Error Total ***(E.T.)***: ***690 – 450 = S/. 240***

III) Error Unitario ***(E.U.)*** o Error Grupal

Real

S/.40 ← ***×S/.20*** 2 mujeres
S/.10 ← ***×S/.20*** 1 niño } ***3×S/.30=S/.90***

S/.50

→ ***90-50=S/.40*** ⟵ Error en cada grupo

IV) N° de grupos :

$$\frac{E.T.}{E.U.}=\frac{240}{40}=6$$ → ***Mujeres : 6×2=12*** ; ***Niños : 6×1=6***

Como asistieron ***23*** personas y tenemos ***12*** mujeres y ***6*** niños , entonces , asistieron ***5*** adultos varones.

OPERACIONES INVERSAS

Para que un problema pueda ser resuelto por el método de las operaciones inversas debe tener la siguientes características :

- Las operaciones deben ser una detrás de otra (consecutivas).
- Debemos tener como dato primordial , la cantidad final.
- El procedimiento para hallar la incógnita se inicia en el último dato (cantidad final) y de ahí se retrocede aplicando operaciones inversas a las dadas , hasta obtener la cantidad inicial.
- En este caso , escribiremos solamente lo que queda o lo que va quedando.

EJEMPLO 16 :

La edad de Magdalena se quintuplica , al resultado se le suma ***60***, para luego dividirlo entre ***10*** , al cociente se le extrae la raíz cuadrada para , finalmente , restarle ***4*** obteniendo ***2*** años. ¿Cuál es la edad de Magdalena?

RESOLUCIÓN :

Operaciones Directas

Edad → ×5 → +60 → ÷10 → √ → - 4 → **2**

2 → + 4 → ( )² → ×10 → - 60 → ÷5 → **Edad**

Operaciones Inversas

$$\Rightarrow \textit{Edad de Serafina}=\frac{(2+4)^2\times 10-60}{5}=60 \text{ años}$$

RESPUESTA :

La edad de Serafina es ***60*** años

EJEMPLO 17 :

Tres amigos juegan ***3*** apuestas entre sí con la condición de que el que pierde duplique el dinero de los demás , si cada uno pierde una apuesta y al final terminan con ***80*** soles cada uno ¿cuánto tenían inicialmente?

A) 130 ; 170 y 40 ***B) 130 ; 70 y 40*** ***C) 100 ; 90 y 50***
D) 130 ; 70 y 140 ***E) 140 ; 60 y 40***

RESOLUCIÓN :

Hagamos un esquema de lo que ocurre juego a juego :

	1ro	2do	3ro	Total de dinero
Pierde el 1ro	Pierde	Gana (×2)	Gana (×2)	
Pierde el 2do	Gana (×2)	Pierde	Gana (×2)	
Pierde el 3ro	Gana (×2)	Gana (×2)	Pierde	
AL FINAL	80	80	80	240

* Como los datos lo tenemos al final y la incógnita al inicio , utilizaremos un método regresivo , para ello realizaremos las operaciones contrarias a las ya indicadas, por ejemplo , si en la ida se multiplicó por ***2***, ahora en el regreso se divide entre ***2***. Además , recuerda que en todo momento , la suma total será ***240*** (porque, sí uno pierde los otros ganaran).

	1ro	2do	3ro	Suma Total
Pierde el 1ro	130	70	40	240
Pierde el 2do	20	140 (÷2)	80 (÷2)	240
Pierde el 3ro	40 (÷2)	40	160 (÷2)	240
AL FINAL	80 (÷2)	80 (÷2)	80	240

Entonces las cantidades iniciales son : ***130 ; 70*** y ***40***

RPTA : "B"

EJEMPLO 18 :

Tres jugadores ***A, B*** y ***C*** acuerdan que el que pierde la partida duplicará el dinero de los otros dos. Pierde una partida cada uno de ellos en orden alfabético, quedándose al final de las tres partidas cada uno con ***120*** soles. ¿Con cuánto dinero empezó ***A***?

A) S/.100   ***B) 90***   ***C) 195***   ***D) 81***   ***E) 72***

RESOLUCIÓN :

"Si al final de las tres partidas cada uno termino con ***20*** soles y como el último en perder fue ***C***, los que ganaron último fueron ***A*** y ***B***, y como el trato era duplicar el dinero; entonces antes de perder ***C; A*** y ***B*** tenían ***60*** soles cada uno y ***C*** tenía ***240*** soles». No olvidar que el monto total es de ***360*** soles.

A	B	C	Monto Total
120	120	120	360
60	60	240	360
			360
			360

Como el segundo en perder es ***B*** en orden contrario, entonces el dinero de ***A*** y ***C*** ya quedaron duplicados, lo que quiere decir que antes de perder ***B*** ; ***A*** y ***C*** tenían ***30*** y ***120*** soles respectivamente y ***B*** tenía ***210*** soles»

A	B	C
120	120	120
60	60	240
30	210	120

⟹ ***CANTIDADES FINALES***

⟹ ***CANTIDADES INICIALES***

"Como el dinero de ***B*** y ***C*** ya quedaron duplicado porque perdió ***A***, es porque antes de que suceda esto ***B*** y ***C*** tenían ***105*** y ***60*** soles respectivamente, y ***A*** tenía ***195*** soles"

RPTA : "C"

EJEMPLO 19 :

Tres amigos ***"A"***, ***"B"*** y ***"C"*** juegan ***3*** apuestas entre sí, con la condición de que el que pierde duplique el dinero de los demás. Si cada uno pierde una apuesta en el orden de presentación y al final terminan con ***S/. 48, S/. 56*** y ***S/. 28***, respectivamente. ¿Cuánto tenían inicialmente?

RESOLUCIÓN :

Amigos	Dinero al inicio						
A	72	?	12	×2 →	24	×2 →	= 48 +
B	40	×2 →	80	?	28	×2 →	= 56
C	20	×2 →	40	×2 →	80		? = 28
total	132		132		132		132

* La suma de dinero de los ***3*** amigos no varía ***(132)***, ya que el dinero entre ellos se intercambia.

* El signo de interrogación ***"?"*** nos quiere decir, que el jugador pierde y no sabemos cuánto le queda ahora.

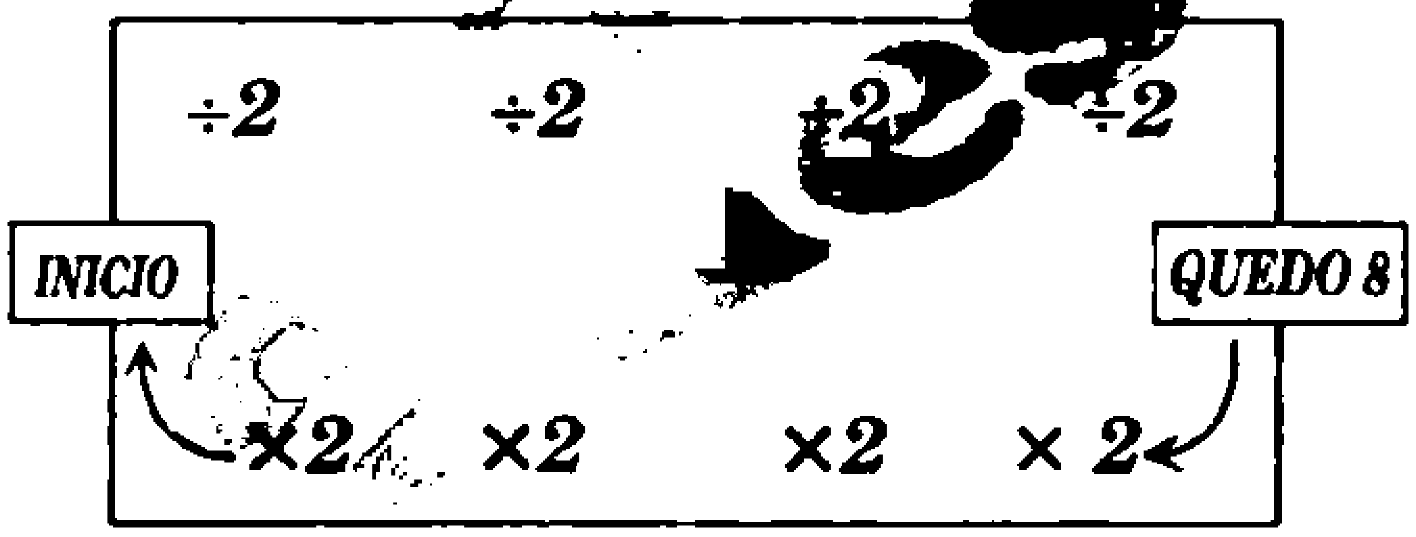
EJEMPLO 20 :

Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego y perdió la mitad de lo que le quedaba, repitió lo mismo por tercera y cuarta vez, hasta que le quedó sólo ***8*** soles. ¿Cuanto dinero perdió?

A)80   ***B)150***   ***C)64***   ***D)120***   ***E)128***

RESOLUCIÓN :

* Como en cada hora se pierde la mitad de lo que había en esa hora, luego va ha quedar la otra mitad en cada hora (es lo mismo que dividir cada momento entre ***2***).



Inicio: $8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$

$\Rightarrow$ Perdió : $\underbrace{128}_{Total} - \underbrace{8}_{Quedó} = 120$

RPTA : "D"

EJEMPLO 21 :

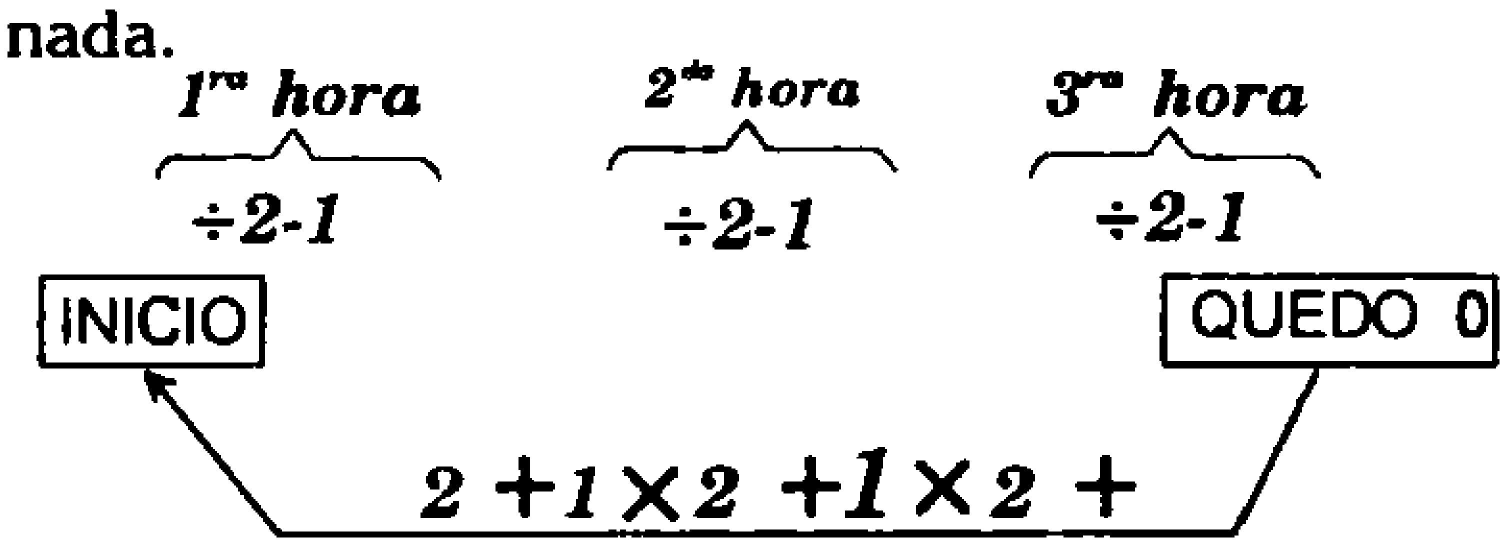
Un pozo de agua se vacea en ***3*** horas. Si en cada hora se va la mitad de lo que había en esa hora más un litro. ¿Cuántos litros tenía inicialmente?

A)10   ***B)12***   ***C)14***   ***D)16***   ***E)18***

RESOLUCIÓN :

* En cada hora quedará : $N - \left(\dfrac{N}{2} + 1\right) = \dfrac{N}{2} - 1$

* Que es lo mismo que dividir entre ***2*** y restar ***1*** en cada hora, además considerar que al final no quedo nada.



$\Rightarrow$ Inicio : $[[(0+1)\times 2+1]\times 2+1]\times 2 = 14$

RPTA : "C"

EJEMPLO 22 :

Roger compró cierta cantidad de caramelos ; ***1/3*** de ellos le regaló a Laura, los ***2/5*** del resto le regaló a

María y *1/4* de lo que quedaba le regaló a Silvia y quedándose únicamente con *3* caramelos. ¿Cuántos caramelos compró Roger?

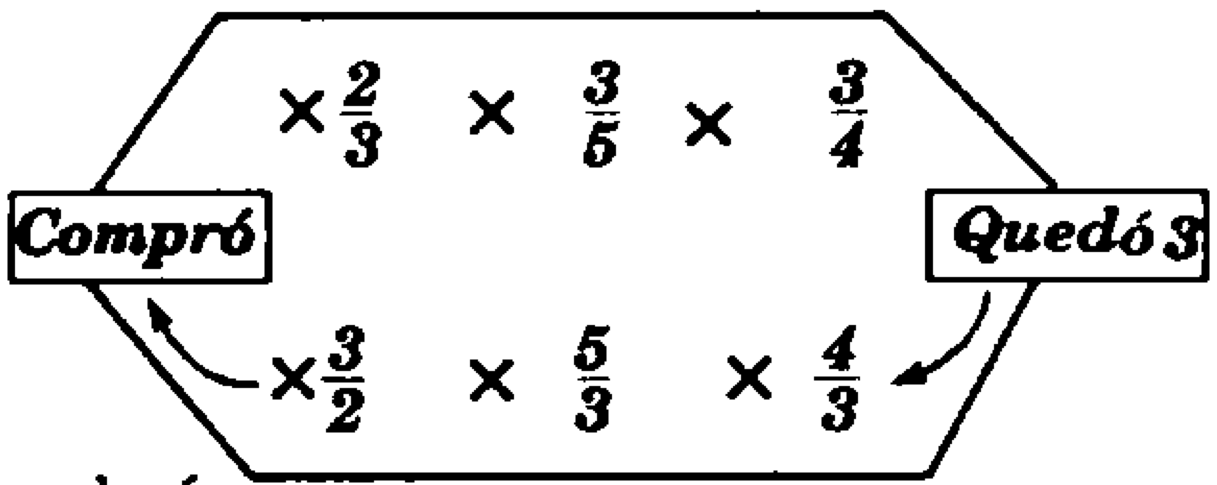
A)5 *B) 60* *C)20* *D)10* *E) 15*

RESOLUCIÓN :

* Si regalo $\frac{1}{3}$, quedará :

$N-\frac{N}{3}=\frac{2}{3}N$, es decir la cantidad quedó multiplicada por $\frac{2}{3}$ y la operación inversa será multiplicar por $\frac{3}{2}$

Regaló : $\underbrace{\frac{1}{3}}_{Laura}$ $\underbrace{\frac{2}{5}}_{María}$ $\underbrace{\frac{1}{4}}_{Silvia}$



* Quedará :

* Compró : $3\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{2}=10$

RPTA : "D"

DIFERENCIA TOTAL Y UNITARIA

Para poder aplicar este método, el problema debe tener las siguientes características :

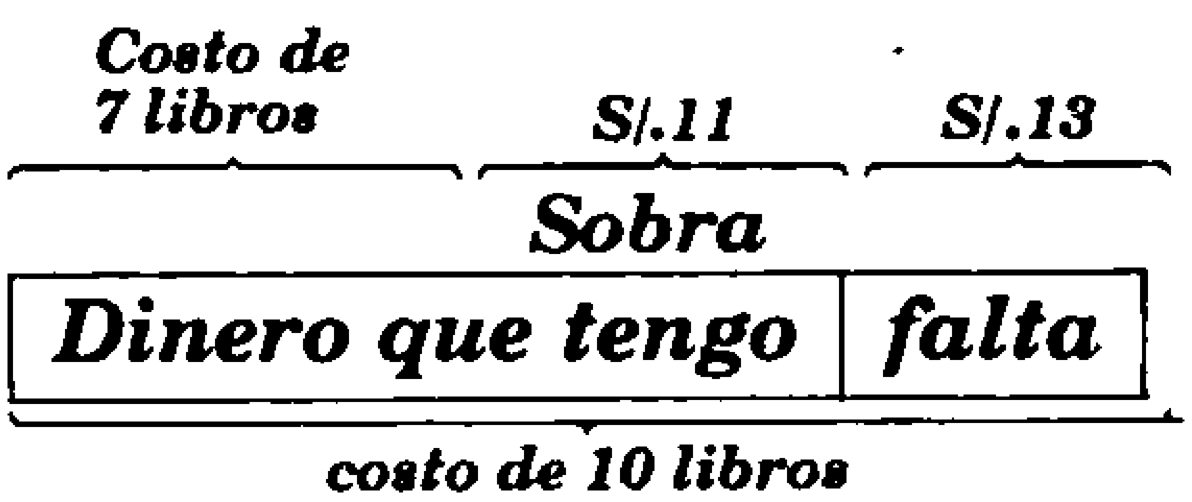
* Deben participar *2* cantidades excluyentes, una mayor que la otra ; que se comparan en *2* cantidades ; originándose en un caso ; un sobrante (o ganancia) y en otro ; un faltante (o pérdida). Los problemas se resuelven hallando dos diferencias: la unitaria y la total.

EJEMPLO 23 :

Compré *7* libros y me sobró *S/.11*, pero si quisiera comprar *10* libros me faltarían *S/.13*.
¿Cuál es el costo de cada libro?

RESOLUCIÓN :

* En este problema hay dos incógnitas : el costo de cada libro y el dinero que yo tengo.



* El gráfico nos quiere decir que si quisiera comprar *10 – 7 = 3* libros (diferencia total), tendría que gastar lo que me sobró y lo que me falta, es decir :

$$\Rightarrow \textit{Costo por libro}=\frac{24}{3}=S/.8$$

EJEMPLO 24 :

Compré *7* libros y me sobró *11* soles, pero si quisiera comprar *10* libros me faltaría *13* soles ¿Cuál es el costo de cada libro?

A) S/.7 *B) S/.8* *C) S/.5* *D) S/.11* *E) S/.12*

RESOLUCIÓN :

* En este problema hay *2* incógnitas. El costo de cada libro y el dinero que yo tengo.

* El gráfico nos quiere decir que si quisiera comprar *10 – 7=3* libros (Diferencia Total), tendría que gastar lo que me sobro y lo que me falta, es decir:

$$11+13=S/.\ 24$$

Costo por libro : $\frac{S/.24}{3}=S/.8$

RPTA : "B"

MÉTODO PRÁCTICO

Si las cantidades son del mismo tipo, se debe tomar en cuenta:

I) Lo que falta y lo que sobra se suman, las otras cantidades se restan y estos resultados se dividen.

II) Lo que falta y lo que sobra se resta, las otras *2* cantidades se restan y estos *2* resultados se dividen.

EJEMPLO 25 :

Lewis quiso dar limosna a un grupo de ancianos, si les daba *S/.5* a cada uno le faltaría *S/.30*, si les daba *S/.3* a cada uno les sobraría *S/.70* ¿con cuánto de dinero contaba esa persona?

A) S/.210 *B) 200* *C) 220* *D) 230* *E) 20*

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el método práctico :

$$\text{Número de ancianos}=\frac{\overset{Falta}{30}+\overset{Sobra}{70}}{5-3}=50$$

Dinero que contaba : $50\times5-30=220$

RPTA : "C"

EJEMPLO 26 :

Si a cada uno de mis sobrinos les doy *S/.3* me sobraría *S/.19*, pero si a cada uno les doy *S/.5* me sobraría *S/.5*

¿cuánto tengo?

A)S/. 7 *B)21* *C)12* *D)42* *E)40*

RESOLUCIÓN :

Número de sobrinos $= \dfrac{\overset{\text{Sobró}}{19} - \overset{\text{Sobró}}{5}}{5-3} = 7$

Dinero que tengo : $7 \times 3 + 19 = S/.\ 40$

RPTA : "E"

MÉTODO DE LA REGLA CONJUNTA

Este método tiene por objetivo reducir una cantidad a otra de diferente especie , por medio de equivalencias que interrelacionen la primera con la segunda , la segunda con la tercera y así sucesivamente. Se llama también regla conjunta porque reúnen en una sola operación varias relaciones dadas , la que da lugar a una relación compuesta.Se aplica , principalmente , a la determinación de la relación que existe entre dos medidas , pesas o monedas cualesquiera , por medio de la relación que éstas tienen con otras medidas , pesas o monedas intermediarias , y también a otras operaciones como la de descuentos sucesivos.

EJEMPLO 27 :

Hace algunos años , el cambio monetario era el siguiente: por ***8*** soles daban ***5*** cruzados , ***10*** cruzados por ***3*** pesos ; ***6*** pesos por ***4*** dólares. ¿Cuántos soles daban por ***2*** dólares?

RESOLUCIÓN :

* Se disponen los datos en columnas , teniendo en cuenta el orden "opuesto" (al otro lado de la equivalencia) para una misma característica , unidad ; etc. Así :

8 soles < > ***5*** cruzados

10 cruzados < > ***3*** pesos

6 pesos < > ***4*** dólares

2 dólares < > ***x*** soles

* Luego se multiplican los valores que hay en una u otra columna , verificando que las "unidades monetarias" se simplifiquen (cancelen) :

$(8\ \cancel{soles})\ (10\ \cancel{cruzados})\ (6\ \cancel{pesos})\ (2\ \cancel{dólares})$

$<>(5\ \cancel{cruzados})\ (3\ \cancel{pesos})\ (4\ \cancel{dólares})\ (x\ \cancel{soles})$

* Simplificando y efectuando : $x = 16$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Un cubo de ***1*** m de arista es cortado en cubitos de ***1*** mm de arista. Si con estos cubitos se forma una "torre" colocando uno encima de otro, ¿qué altura alcanzaría?

A) 100 m *B) 1 Km* *C) 10 Km*
D) 100 Km *E) 1000 Km*

RESOLUCIÓN :

*Dado que $1m = 1000mm$, de cada arista se pueden obtener ***1000*** cubitos: entonces en total se podrán obtener : $1000 \times \underbrace{1000 \times 1000 \text{milímetros}}$

$= 1000 \times \underbrace{1000 \text{ metros}}$

$= 1000 \text{ kilómetros}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 2 :

En un tablero de ajedrez hay que colocar dos caballos , uno blanco y uno negro. ¿De cuántas maneras pueden disponerse dichas piezas?

A)64 *B)128* *C)4032* *D)4086* *E)4096*

RESOLUCIÓN :

* El caballo blanco se puede colocar en cualquiera de las: $8 \times 8 = 64$ casillas del tablero de ajedrez; luego , el caballo negro puede ocupar cualquiera de las ***63*** casillas restantes.

* Por el principio de multiplicación , ambas piezas se podrán disponer de: $64 \times 63 = 4032$ maneras distintas.

RPTA: "C'

PROBLEMA 3 :

Tengo ***3*** cajas rojas con ***4*** cajas verdes cada una, además que en cada una de las verdes contiene ***5*** cajas amarillas con ***6*** cajas azules dentro de cada una ¿Cuántas cajas tengo en total?

A)18 *B)360* *C)361* *D)435* *E 432*

RESOLUCIÓN :

× 4 × 5 × 6

(Número de cajas) : $\overbrace{3}^{\text{ROJAS}} + \overbrace{3 \times 4}^{\text{VERDES}} + \overbrace{3 \times 4 \times 5}^{\text{AMARILLAS}} + \overbrace{3 \times 4 \times 5 \times 6}^{\text{AZULES}}$

⇒ Número de cajas : ***435***

RPTA: "D"

PROBLEMA 4 :

¿Cuántos cortes deben darse a una barra de acero de ***72 m*** , para obtener partes de ***3m.*** de longitud.

A)24 B)25 C)23 D)2 E)12

RESOLUCIÓN :

* Número de partes : $\frac{72}{3}=24$

* Número de cortes : $24-1=23$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

A un cierto número de personas se les iba dar *S/.35* a cada uno , pero uno de ellos renunció a su parte , por lo que a cada uno de los demás les tocó *S/.42* ¿cuántas personas iban a recibir *S/.35*?

A)4 B) C)5 D)8 E)6

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que a cada uno, a excepción del que renunció, recibió : $42-35=7$ soles demás (eso se debe a que se repartieron los *S/.35* de la persona que renunció? $\begin{pmatrix}\text{número de personas}\\ \text{que recibieron S/.7}\end{pmatrix}:\frac{35}{7}=5$

* Total de personas : $5+\underbrace{1}_{\text{la que renunció}}=6$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

A una reunión bailable asistieron *120* personas, si todos bailan a excepción de *26* mujeres ¿cuántas mujeres hay en total?

A)26 B)37 C)83 D)91 E)73

RESOLUCIÓN :

* Número de personas que bailan: $120-26=94$

* Como bailan en parejas , luego:

Número de mujeres que bailan : $\frac{94}{2}=47$

$\Rightarrow$Total de mujeres : $47+26=73$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

2 empleados trabajan juntos, el primero gana *S/.10* más por día que el segundo, si después de haber laborado el mismo número de días, el primero recibió *S/.270* y el segundo *S/.180* ¿Cuánto gana diariamente el segundo?

A)S/.10 B)S/.20 C)S/.30 D)S/.25 E)S/.20,5

RESOLUCIÓN :

* El primero recibió : $270-180=90$ soles más que el segundo, y como : *1* día < > *S/.10* demás .

$\Rightarrow$ número de días que laboraron : $\frac{90}{10}=9$

* Como el segundo gano *S/.180* en *9* días.

$\Rightarrow$En *1* día ganará :

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Con mi gratificación he comprado *25* libros, si cada uno me hubiera costado *S/.10* menos, hubiera adquirido *50* libros más , ¿Cuánto me costó cada libro?

RESOLUCIÓN :

* Si en *1* libro me rebajasen *S/.10*, entonces en *25* libros me hubiese ahorrado $25\times10=250$ soles, dinero con el cual me hubiera comprado *50* libros .

* Precio rebajado por libro : $\frac{S/.250}{50}=S/.5$

$\Rightarrow$Precio Real : $5+10=S/.15$

PROBLEMA 9 :

Una combi que hace servicio de Lima - Huacho , cobra *S/.3* como pasaje único y en el trayecto se observa que cada vez que baja *1* pasajero, suben *3*. Si llego a Huacho con *35* pasajeros y una recaudación de *S/.135* ¿Cuántos partieron de Lima?

A)15 B)18 C)5 D)9 E)9

RESOLUCIÓN :

* Total de Pasajeros : $\frac{S/.135}{3}=45$

$\begin{bmatrix}\text{Pasajeros}\\ \text{que bajaron}\end{bmatrix}\ \underbrace{45}_{\text{Total}}-\underbrace{35}_{\text{Llegaron}}=10$

TRIPLE

$\begin{bmatrix}\text{Pasajeros que}\\ \text{subieron en el}\\ \text{Trayecto}\end{bmatrix}\ 3\times10=30\begin{pmatrix}\text{Por 1 que}\\ \text{bajan suben 3}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$Pasajeros que partieron : $\underbrace{45}_{\text{total}}-\underbrace{30}_{\text{Subieron (trayecto)}}=15$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Compro *2* artículos por *S/.3* y los vendo a *7* por *S/.11* ¿cuántos artículos debo vender para ganar *S/. 24*?

A)336 B)172 C)340 D)312 E)328

RESOLUCIÓN :

2 artículos < > *S/. 3* $\Rightarrow$ *1* artículo me costó : $S/.\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ *7* artículos < > *S/.11* $\Rightarrow$ *1* artículo lo vendí : $S/.\frac{11}{7}$

* Luego al comprar , para luego vender :

1 artículo ganaré : $\frac{11}{7}-\frac{3}{2}=S/.\frac{1}{14}$

$\Rightarrow S/.\frac{1}{14}$ < > *1* artículo (Ganancia)

$\Rightarrow$ *S/. 1* < > *14* artículos

$\Rightarrow$ *S/. 24* < > $14\times24=336$ artículos

RPTA : "A"

PROBLEMA 11:

18 personas tienen que pagar en partes iguales un total de ***S/.5400***, como algunas no pueden hacerlo , cada persona restante debe poner ***S/.150*** más de lo que le corresponde pagar ¿Cuántas personas no pagaron?

A) 4 ***B) 6*** ***C) 8*** ***D) 10*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :

18 personas < > ***S/. 5400***

1 persona < > $\frac{S/.5400}{18} = S/.300$

* Pero algunas de ellas pagaron ***S/.150*** demás, es decir: ***300 + 150 = S/.450***

$\Rightarrow$ número de personas que pagaron : $\frac{S/.5400}{S/.450} = 12$

número de personas que no pagaron : $\underbrace{18}_{Total} - \underbrace{12}_{Pagaron} = 6$

RPTA: "B"

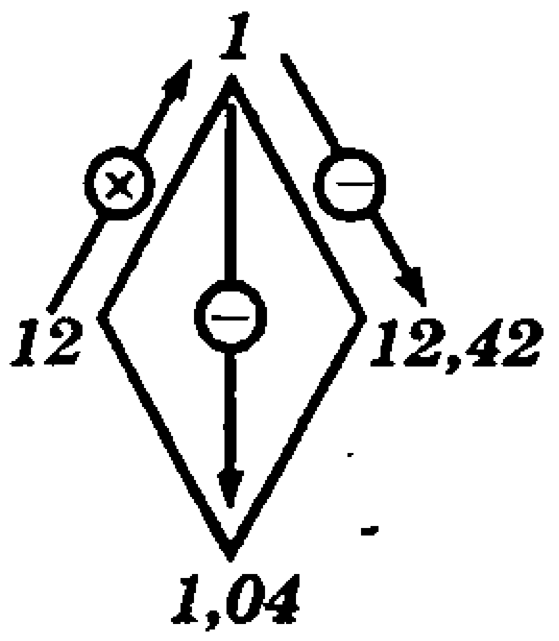
PROBLEMA 12 :

Un litro de leche pura pesa ***1,04 kg***. ¿qué cantidad de leche pura estará contenida en ***12*** litros de leche adulterada cuyo peso es ***12,42 kg***.?

A)1,5 ***B)10,5*** ***C)2*** ***D)3,5*** ***E)8,5***

RESOLUCIÓN :

* Considerar que : ***1*** litro de agua <> ***1 kg***.



* Cantidad de leche pura :

$$\frac{12 \times 1 - 12,42}{1 - 1,04} = 10,5$$

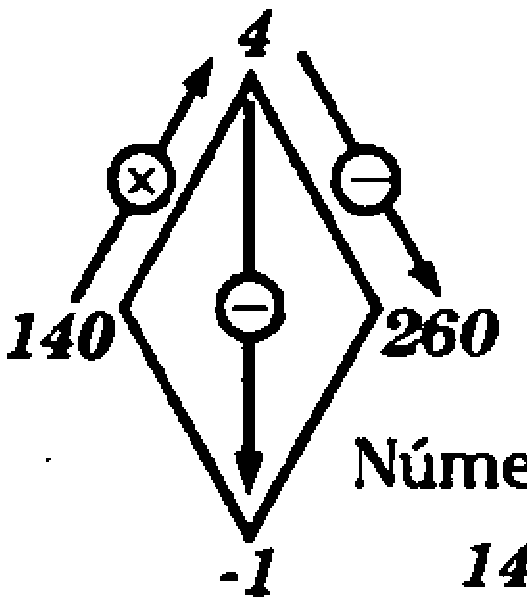
RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

En un simulacro de admisión, el número de preguntas es ***140***, la calificación es de ***4*** puntos por respuesta correcta y me descuentan ***1*** punto por cada incorrecta , si obtuve ***260*** puntos y respondí todas las preguntas ¿Cuántas no acerté?

A)40 ***B)60*** ***C)80*** ***D)160*** ***E) 2***

RESOLUCIÓN :



Número de Respuestas Incorrectas:

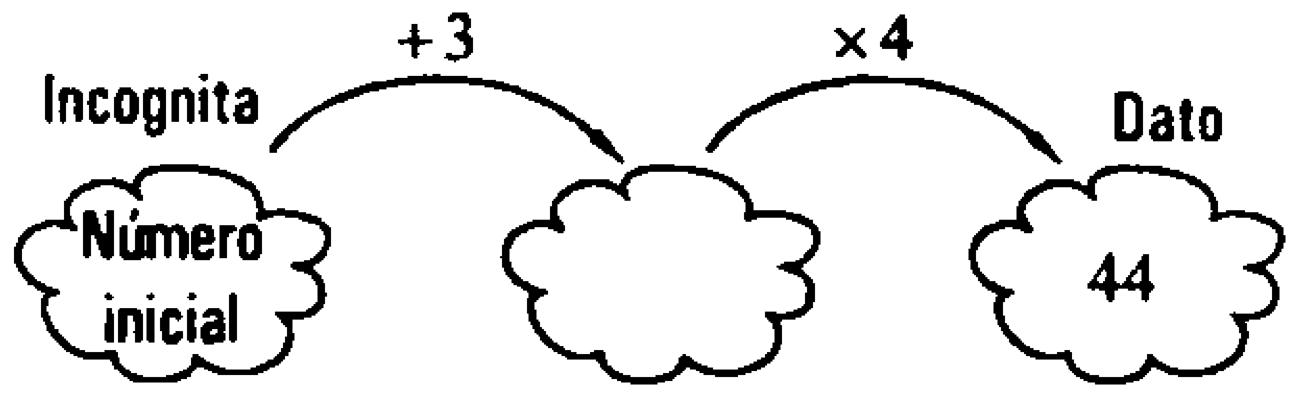
$$\frac{140 \times 4 - 260}{4 - (-1)} = 60$$

RPTA : "B"

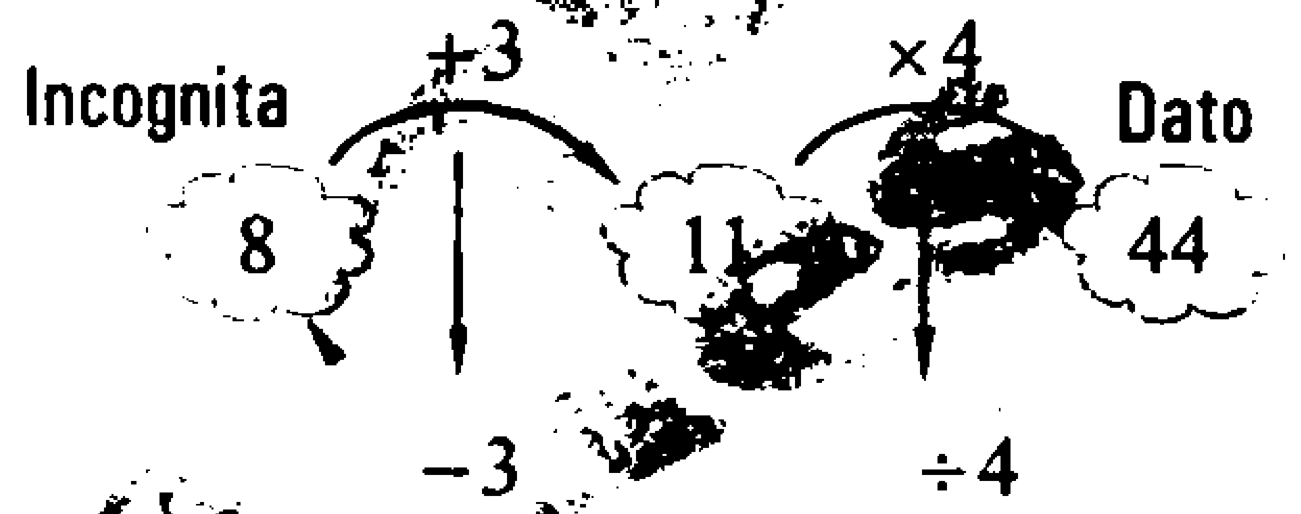
PROBLEMA 14 :

A un número se le suma ***3***, al resultado se multiplica por ***4*** y se obtiene ***44*** ¿cuál es dicho número?

RESOLUCIÓN :



* Es evidente que nuestro objetivo es regresar del resultado final (dato) al inicial (incógnita), para ello simplemente aplicamos las operaciones inversas a las dadas (operaciones directas), empezando del resultado final.



Incógnita: $(44 \div 4) - 3 = 8$

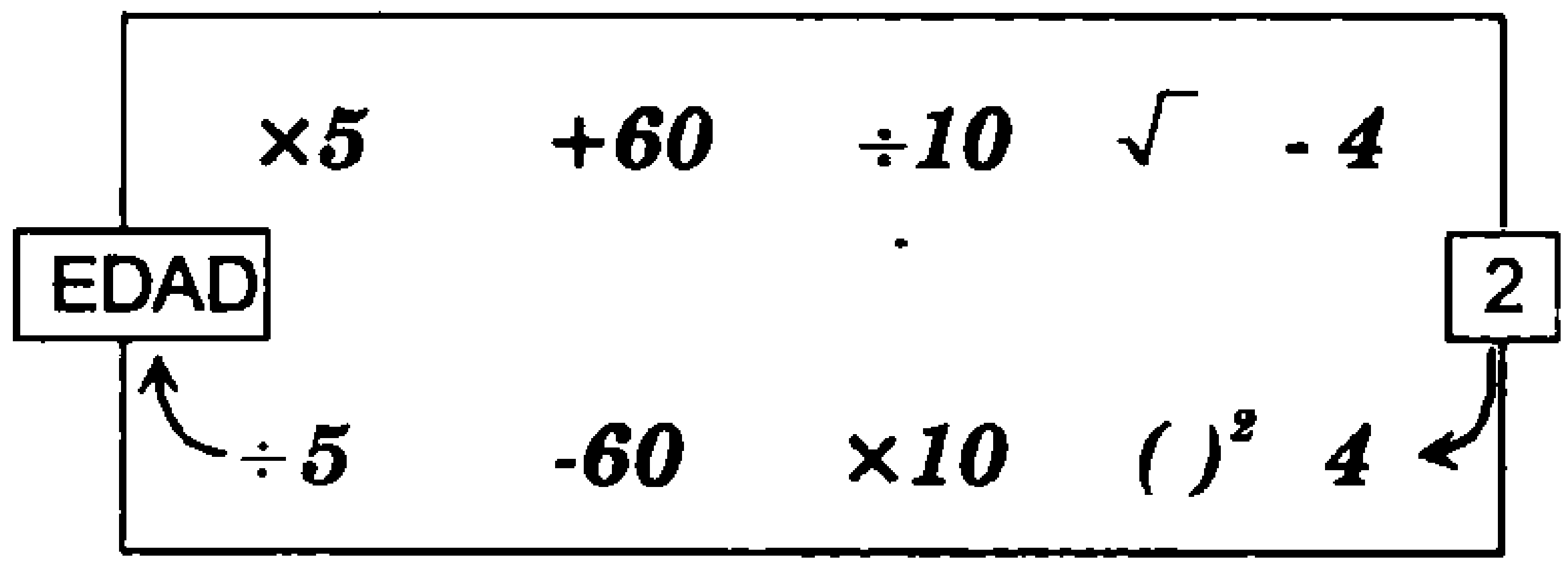
PROBLEMA 15 :

La edad de Lois se quintuplica, al resultado se le suma ***60***, para luego dividirlo entre ***10*** , al cociente se le extrae la raíz cuadrada, para finalmente restarle ***4***, obteniendo ***2*** años. ¿Cuál es la edad de Lois?

A)50 ***B)60*** ***C)300*** ***D)80*** ***E)6***

RESOLUCIÓN :

Operaciones Directas



Operaciones Inversas

* Edad de Lois : $\frac{(2+4)^2 \times 10 - 60}{5} = 60$ ***años***

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

3 amigos juegan ***3*** apuestas entre sí, con la condición de que el que pierde duplique el dinero de los demás, si cada uno pierde una apuesta y al final terminan con ***S/.48 , S/.56*** y ***S/.28*** ¿Cuánto tenían inicialmente?

A) 20 ; 40 y 72 ***B) 20 ; 40 y 62*** ***C) 80 ; 30 y 12***
D) 72 ; 40 y 20 ***E) 62 ; 45 y 25***

RESOLUCIÓN :

AMIGOS	PERDIO 1°	PERDIO 2°	PERDIO 3°	FINAL
1ro	Duplica al 2do y 3ro	×2 →	×2 →	48
2do	×2 →	Duplica al 1ro y 3ro	×2 →	56
3ro	×2 →	×2 →	Duplica al 1ro. y 2do	28
La suma de los tres no varía, ya que entre ellos se intercambian.				

Regresando de los datos finales, aplicando las operaciones inversas.

Después de Perder el 3ro	Antes de Perder el 3ro	Antes de Perder el 2do	Antes de Perder el 1ro
48 ÷2 →	24 ÷2 →	12	72
56 ÷2 →	28	80 ÷2 →	40
28	80 ÷2 →	40 ÷2 →	20
Suma Total 132	132	132	132

Tenían : ***72*** ; ***40*** y ***20***

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

Karin que tiene el hábito de lavarse la cabeza diariamente utiliza la misma cantidad de champú. Después de ***15*** días observa que ha consumido la cuarta parte del frasco. Veinte días más tarde observa que aún le quedan ***50*** centímetros cúbicos. ¿Cuántos centímetros cúbicos de champú consume diariamente en cada lavado de cabeza?

A)2 *B)4* *C)3* *D)5* *E)N.A.*

RESOLUCIÓN :

* Como : $\frac{1}{4}(frasco) < > 15\ días$

$frasco < > 60\ días$

* Se deduce que si ya se han consumido ***15+20=35*** días, entonces faltará ***60 - 35=25*** días en los cuales se deberá consumir ***50 cm³***.

$\Rightarrow 25\ días < > 50\ cm^3 \longrightarrow 1\ día < > 2\ cm^3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

Un auto debe recorrer ***10km.***, si lleva una llanta de repuesto y todas se utilizaron de modo alternado ¿Qué distancia recorrió cada llanta?

A)2km. *B)2,5* *C)8* *D)10* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

5 llantas < > ***4×10 km***. (recorrido total)

1 llanta < > ***8 km***.

RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Un zorro perseguido por un galgo le lleva ***50*** saltos de ventaja y da ***4*** saltos mientras el galgo sólo da ***3***; pero ***2*** saltos del galgo equivalen a ***3*** del zorro. ¿cuántos saltos dará el galgo para alcanzar al zorro?

A) 250 *B) 300* *C) 320* *D) 360* *E) 400*

RESOLUCIÓN:

Galgo Zorro (Homogenizando)

Equivalencia de Tiempo : 3G 4Z —×2→ 6G 8Z

Equivalencia de Longitud : 6G 9Z —×3→ 2G 3Z

(−) Ventaja : Z

*De la homogenización se deduce que cada ***6*** pasos que da el galgo, descuenta ***1*** paso al zorro; pero para alcanzarlo necesita descontarle ***"50Z"***, para ello necesita pasar: ***50Z ÷ Z = 50*** veces ***6*** pasos del galgo, es decir : ***50 (6G) = 300 G***

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

Dos secretarias tienen que escribir ***600*** cartas cada una. La primera escribe ***15*** cartas por hora y la segunda ***13*** cartas por hora. Cuando la primera haya terminado su tarea , ¿cuántas cartas le faltarán escribir a la segunda?

A)20 *B)80* *C)60* *D)40* *E)50*

RESOLUCIÓN :

* El tiempo que emplea la primera secretaria en escribir las ***600*** cartas será: ***600/15 = 40*** horas

* En este tiempo la segunda habrá escrito:

40×15 = 520 cartas,

* Luego le faltaran escribir: ***600 – 520 = 80*** cartas

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Cada día un empleado, para ir de su casa a su oficina, gasta ***S/.2*** y de regreso ***S/.4*** si ya gastó ***S/.92***. ¿Dónde se encuentra el empleado?

A) en la oficina ***B) en la casa***
C) a mitad de camino a la casa
D) a mitad de camino a la oficina

RESOLUCIÓN :

* En ir a venir a casa : Gasta: 6 soles

* Luego: $\begin{array}{r|l} 92 & 6 \\ \hline 32 & 15 \\ 2 & \end{array} \Rightarrow 92=6\times15+2$

* Luego está en la oficina

RPTA: "A"

PROBLEMA 22 :

Los gastos de ***15*** excursionistas ascienden a ***S/.375***, los cuales deben pagarlos por partes iguales. Pero en

el momento de cancelar la cuenta faltaron algunos de los viajeros, por lo que cada uno de los presentes tuvo que abonar ***S/.12,5*** más. ¿cuántos no estuvieron presentes al momento de cancelar la cuenta?

A) 6 *B) 5* *C) 4* *D) 3* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

* Lo que le correspondería pagar ***c/u*** de los ***15*** sería:

$$\frac{375}{15}=25$$

* Luego c/u de los que quedan pagarán:

$$25+12,5=37,5$$

* Siendo los pagantes : $\frac{375}{37,5}=10$

* Luego faltaron : $15-10=5$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Un comerciante compra libros a ***S/.50*** cada uno. Por cada docena le obsequian un libro, obteniendo en total ***780*** libros. Si decide regalar ***30*** libros. ¿A qué precio debe vender cada libro para ganar ***6000*** soles

A)S/. 54 *B)S/. 52* *C)S/. 56* *D)S/. 60* *E)S/. 70*

RESOLUCIÓN :

* Si ha obtenido ***780*** libros, entonces le han obsequiado: $780\div 13=60$ libros y ha pagado $720\times 50=36000$ soles.

Si regala ***30***, los que ha vendido son : $780-30=750$.

Pago *Ganancia*

c/l vende a : $\frac{36000+6000}{750}=S/.56$

RPTA: "C"

PROBLEMA 24 :

En un examen , un alumno gana dos puntos por cada respuesta correcta , pero pierde un punto por cada respuesta equivocada . Después de haber contestado ***40*** preguntas obtiene ***56*** puntos . La diferencia del número de preguntas correctamente respondidas con el número de preguntas equivocadas es :

A) 28 *B) 30* *C) 26* *D) 22* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

* El puntaje máximo que puede alcanzar el alumno al contestar correctamente las ***40*** preguntas es :

$(40)(2)=80$ puntos

Cada respuesta equivocada le ocasiona en total una pérdida de ***3*** puntos.

Como obtiene ***56*** puntos , significa que pierde $80-56=24$ puntos, lo cual equivale a $24\div 3=8$ respuestas equivocadas.

Esto quiere decir que contesta correctamente $40-8=32$ preguntas.

Luego , la diferencia del número de preguntas correctamente respondidas y el número de preguntas equivocadamente respondidas , es : $32-8=24$

RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

En la primera clase de ***R.M.*** asisten ***100*** estudiantes : ***40*** son mujeres, ***73*** viven en Comas y ***12*** son mujeres que no viven en Comas. ¿Cuántos hombres no viven en Comas?

A)14 *B)15* *C)16* *D)20* *E) 46*

RESOLUCIÓN :

Total de hombres: $100-40=60$

Número de personas que no viven en Comas. :

$$100-73=27$$

Número de hombres que no viven en Comas. : $27-12=15$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Un comerciante compra carteras al precio de ***75*** soles cada una y además le regalan ***4*** por cada ***19*** que compra, recibiendo en total ***391*** carteras. ¿Cuál fue la inversión del comerciante?

A) 2242 *B) 24522* *C) 24225*

RESOLUCIÓN :

* De cada $19+4=23$ carteras que se adquiere, sólo se paga ***19*** ; luego de ***391*** carteras que recibí:

Pagué por : $\frac{19}{23}(391)=323$ carteras

$\Rightarrow$ La inversión será : $323\times S/.75=S/.\ 24225$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

El aceite que contiene un tanque vale ***5600*** soles si se sacan ***40*** litros vale solamente ***2400*** soles. ¿Cuántos litros contenía el tanque?

A)60 *B)70* *C)80* *D)100* *E)140*

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que :

$S/.\ 5600-S/.\ 2400<>40$ litros

$S/.\ 3200<>40$ litros

$1S/.<>\frac{40}{3200}$ litros

$\Rightarrow S/.5600<>\frac{4}{320}\times 5600$ litros

$S/.\ 5600<>70$ litros

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Cuando se hizo la conducción de agua a un cierto pueblo, correspondía a cada habitantes ***60*** litros por día . Hoy ha aumentado el pueblo en ***40*** habitantes y corresponde a cada uno dos litros menos. Averiguar el número de habitantes que tiene actualmente el referido pueblo .

A)1200 B)1160 C)1300 D)1130 E)1480

RESOLUCIÓN :

* Esos ***40*** habitantes , ahora consumen $40\times(60-2)=2320$ litros, los cuales son la cantidad de agua que dejó de tomar la cantidad inicial de habitantes y como cada habitante dejo de consumir ***2*** litros,Entonces :

Número inicial de habitantes : $\frac{2320}{2}=1160$

Número de habitantes actualmente :

$$1160+40=1200$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Un ómnibus hace servicio de Lima a Trujillo y en uno de sus viajes recaudó ***528*** soles por la cobranza de adultos y ***108*** soles por los niños; sabiendo que para cualquier recorrido el pasaje adulto es de ***8*** soles y ***4*** soles el de niños .

Si cada vez que un adulto bajó subieron dos niños y cada vez que baja un niño subieron tres adultos y llegaron a Trujillo ***55*** adultos y ***11*** niños, ¿cuántos adultos y cuántos niños partieron de Lima?

A)18 – 5 B)17 – 6 C)20 – 8 D)22 – 5 E)16 – 6

RESOLUCIÓN :

	Total de:	Llegaron a Ica	Bajaron	Subieron en el Trayecto
Adultos	$\frac{528}{8}=66$	55	$66-55=11$	$3\times16=48$
Niños	$\frac{108}{4}=27$	11	$27-11=16$	$2\times11=22$

 # de adultos que partieron de Lima : ***(Total de Adultos)*** : ***(Subieron en el Trayecto)***

$: 66-48=18$

de niños que partieron de Lima : $27-22=5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31 :

Una guarnición de ***3000*** hombres tienen provisiones para ***70*** días, al terminar el día ***22***, salen ***600*** hombres. ¿Cuánto tiempo podrá durar las provisiones al resto de la guarnición?

A)48 B)50 C)56 D)58 E)60

RESOLUCIÓN :

* Suponiendo que cada persona se consume una ración por día .Total de raciones : $3000\times70=210000$

Consumo en los primeros ***22*** días : $3000\times22=66000$

Aún sobra : $210000-66000=144000$

y van a quedar : $3000-600=2400$ hombres,

* Luego la cantidad de días que podrá durar esas ***144000*** raciones restantes será : $\frac{144000}{2400}=60$

RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

Un comerciante compra ***60*** objetos por ***27000*** soles. Vende después tres docenas de ellos, ganando ***50*** soles por cada uno . Determinar el precio de venta de cada uno de los restantes, si se quiere obtener un beneficio total de ***9000*** soles.

A)550 B)450 C)750 D)800 E)500

RESOLUCIÓN :

* Costo de cada objeto: $\frac{S/.27000}{60}=S/.450$

* Al vender ***3*** docenas, ganando ***S/.50*** por cada uno, obtendrá : $36\times S/.\ 500=S/.\ 18000$

* Pero desea obtener : $27000+\underbrace{9000}_{Ganancia}=36000\ soles$

* Aún le falta ***36000-18000=S/.18000*** los cuales lo debe obtener por la venta de $60-36=24$ objetos a : $\frac{S/.18000}{24}=S/.750$ cada uno.

RPTA : "C"

PROBLEMA 33 :

José adquirió ***703*** naranjas a ***S/.20*** y a ***S/.15*** la docena pagando por todo ***S/.1020***. Se sabe que por cada tres docenas que compró le regalaron una naranja. ¿Cuántas docenas compró de menor precio?

A) 6 B)32 C)36 D)24 E)17

RESOLUCIÓN :

* Por cada ***3*** docenas***+1=37*** naranjas . Sólo paga por ***3*** docenas, entonces por ***703*** naranjas solo pagará por:

$$\frac{3\ docenas}{37}(703)=57\ docenas$$

Por las cuales pagó ***S/. 1020***, luego ; si todas las docenas costara ***S/.20*** cada una, se obtendrá ***57×20=S/.1140*** ó ***1140–1020=S/.120*** de más, ya que al no considerar las docenas de ***S/.15***, estamos considerando por cada docena ***20 –15=S/.5*** de más, entonces :

Número de docenas de ***S/. 15*** : $\frac{S/.120}{S/.5}=24$

PROBLEMA 34 :

Un ganadero vendió ***60*** cabezas de ganado entre vacas y terneros, recibiendo ***S/.216000*** . Pero como necesitaba ***S/.250000*** tuvo que hacer una venta complementaria a los mismos compradores. Y razona que si vende ***8*** vacas le sobran ***2000*** soles, pero si vende ***20*** terneros le faltarían ***S/.4000***. ¿Cuántas vacas y cuántos terneros vendió al principio?

A) *28* y *32* ***B)*** *18* y *42* ***C)*** *17* y *43*
D) *36* y *24* ***E)*** *36* y *44*

RESOLUCIÓN :

* Después de vender las ***60*** cabezas, necesitaba:

$$250000 - 216000 = S/.\ 34000$$

* Al vender ***8*** vacas obtiene:

$$S/.\ 34000 + S/.\ 2000 = S/.\ 36000$$

$\Rightarrow$ costo de cada vaca : $\dfrac{S/.36000}{8} = S/.4500$

* Al vender ***20*** terneros obtiene :

$$S/.34000 - 4000 = 30000$$

$\Rightarrow$ costo de cada ternera : $\dfrac{S/.30000}{20} = S/.1500$

Pero los ***60*** ganados costaron ***S/. 216000***

I) # de terneros : x

II) # de vacas : $60 - x$

$$\Rightarrow 4500\,x + 1500\,(60 - x) = 216000$$

$$\Rightarrow 45x + 900 - 15x = 2160$$

$$\Rightarrow x = 42$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

Antiguamente los habitantes de Lima empleaban para representar $\sqrt{9}$: rad $\times 9$ ó $R9$ ó R^29, para representar $\sqrt[3]{9}$ ellos empleaban: R^39 ó ***Cur9*** ó ***RC9*** y para representar $\sqrt{a+b}$ se empleaba ***RU*** a Pb (***RU***=raíz universal). Si en una de las escrituras antiguas se encontró el mensaje . $RU\ R^5\ 32\ P\ R^2\ 49$

¿Qué número representa dicho mensaje?

A)6 ***B)5*** ***C)9*** ***D)3*** ***E)14***

RESOLUCIÓN :

$$RU\,\underbrace{R^5 32}\,P\,\underbrace{R^2 49} = RU\sqrt[5]{32}P\sqrt{49}$$

$$= RU2P7$$

$$= \sqrt{2+7} = 3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 36 :

En un matrimonio masivo participaron ***272*** personas entre contrayentes y testigos (***2*** por cada matrimonio). Si entre los testigos habían ***64*** mujeres ¿cuántos hombres participaron en dicha ceremonia?

A)72 ***B)98*** ***C)68*** ***D)128*** ***E)140***

RESOLUCIÓN :

* Se debe observar, que por cada matrimonio participaron ***4*** personas (***2*** contrayentes y ***2*** testigos), entonces el número de matrimonios realizados es :

$\dfrac{272}{4} = 68$ matrimonios.

* Siendo , además el número de testigos : $68 \times 2 = 136$. De los cuales ***64*** son mujeres, entonces el número de testigos hombres sería : $136 - 64 = 72$

Y el número total de hombres que participaron en dicho evento es $72 + 68 = 140$

TESTIGOS (72) — *CONTRAYENTES* (68)

RPTA : "E"

PROBLEMA 37 :

En una balanza se tienen ***38*** esferas que pesan ***25 gr. c/u*** y ***77*** esferas que pesan ***10gr. c/u***. ¿Cuántas esferas se deben intercambiar para que se encuentren en equilibrio, sabiendo que de ambos lados se saca la misma cantidad de esferas?

RESOLUCIÓN :

* ***38*** esferas de ***25gr . c/u*** pesa $38 \times 25 = 950\ gr$.

* ***77*** esferas de ***10 gr. c/u*** pesa $77 \times 10 = 770\ gr$.

El peso total de los ***2*** grupos de esferas es:

$950 + 770 = 1720$ gramos

Luego de intercambiarse el mismo número de esferas cada grupo debe pesar: $\dfrac{1720}{2} = 860$ gramos

Al intercambiarse una esfera el ***2do*** grupo de esfera aumenta: $25 - 10 = 15$ gramos , entonces el número de esferas intercambiadas es: $\dfrac{860 - 770}{15} = 6$ esferas

PROBLEMA 38 :

Con ***3125*** soles se pueden hacer tantos grupos iguales con monedas de ***5*** soles como monedas tenga cada grupo, la suma de las cifras del número que representa el valor en soles de cada grupo es :

A)8 ***B)11*** ***C)7*** ***D)10*** ***E)13***

RESOLUCIÓN :

* Se tiene $\dfrac{3125}{5} = 625$ monedas de **S/. 5**

Si "***n***" es el número de monedas de cada grupo, entonces hay "***n***" grupos.

* Luego: $n \times n = 625 \Rightarrow n^2 = 625 \longrightarrow n = 25$

* Entonces el valor en soles de cada grupo es :

$$5\,(25) = 125$$

* se pide : $1 + 2 + 5 = 8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

Se tiene *48* fósforos divididos en tres grupos diferentes. Si del primer grupo paso al segundo tantos fósforos como hay en éste, luego del segundo paso al tercero tantos como hay en el tercero y de éste paso al primero tantos fósforos como hay ahora en el primero, resulta que habrá el mismo número de fósforos en cada grupo . ¿Cuántos fósforos había al principio en cada grupo?

A) 22,14,12 B) 16,16,16 C) 18,20,12
D) 24,8,16 E) 32,8,8

RESOLUCIÓN :

* Empezando por lo último :

	1ro.	2do.	3ero.
Quedó :	16	16	16

Regresando del *1ro* al *3ero*

8 16 24

Regresando del *3ero* al *2do*

8 28 12

Regresando del *2do* al *1ro*

22 14 12 (Inicio)

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Un trailer emplea *18* llantas para su des-plazamiento. Si el conductor quiere que tanto sus 18 llantas como sus dos llantas de repuesto se desgasten igualmente en una carretera de *2000km*. ¿Cuántos kilómetros recorrerá cada llanta?

A)1800 B)3000 C)2220 D)1920 E)2000

RESOLUCIÓN :

* El recorrido de todas las llantas de un trailer sin repuestos será de : $18 \times 200\ km. = 36000\ km$.

El cuál será dividido por *20* llantas, de donde se deduce que el recorrido de cada llanta es:

$$\frac{3600\ km.}{20\ Llantas} = 1800\ km/Llanta$$

RPTA : "A"

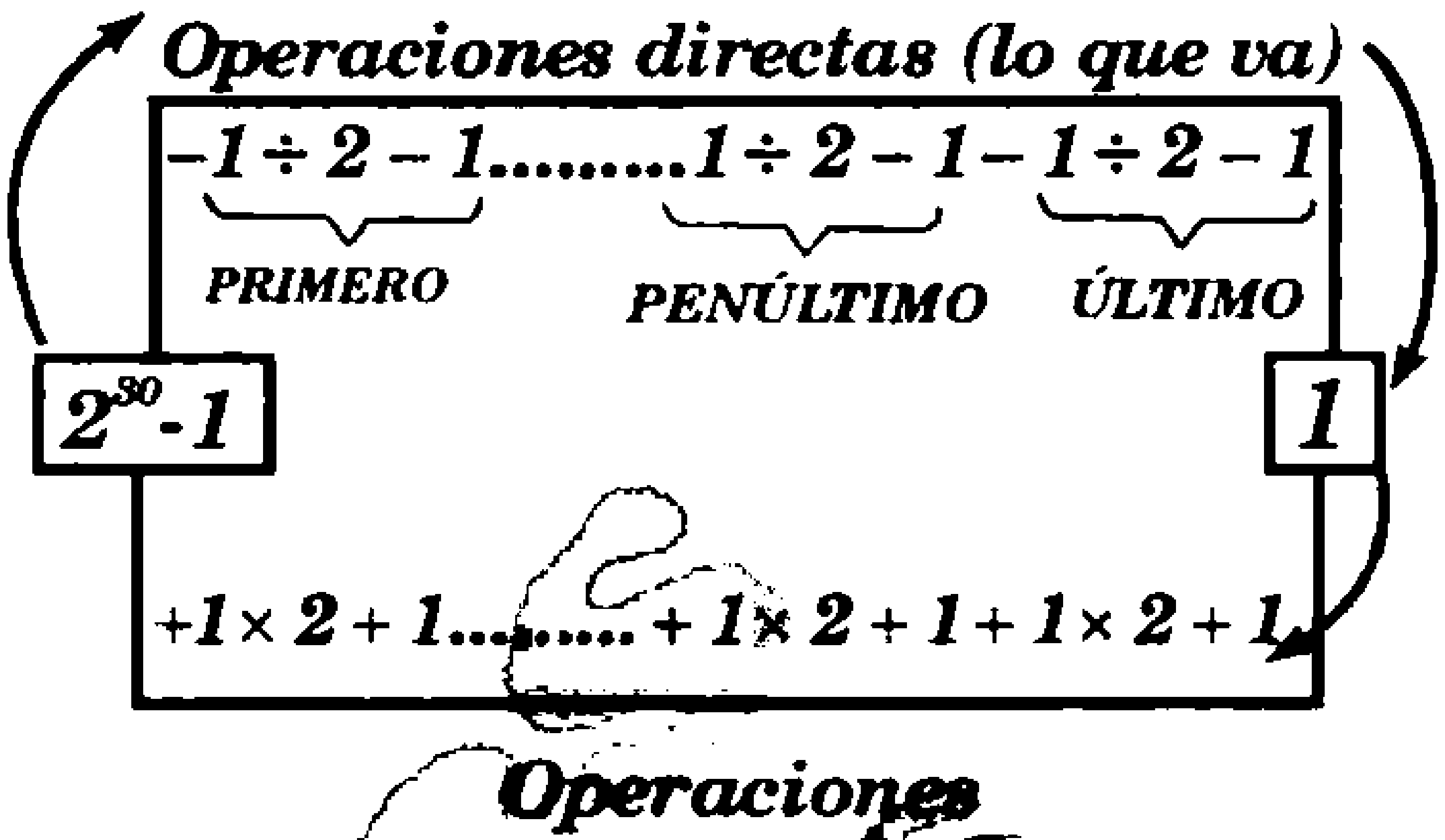
PROBLEMA 41 :

Al morir un padre , deja de herencia a sus hijos $2^{20} - 3$ soles. El mayor recibe *S/.1*, más la mitad del resto, más *S/.1*. De lo que resta, el *2do* . hijo recibe *S/.1*, más la mitad del resto, más *S/.1*; y así sucesivamente. Después de recibir su parte el último vástago, sólo quedó *S/.1*. ¿Cuántos hijos tuvo el difunto?

A)21 B)22 C)20 D)18 E)19

RESOLUCIÓN :

Aplicando el método del cangrejo, donde *«n»* es el número de hijos :



* El último recibió: $(1 + 1) \times 2 + 1 = 2^2 + 1$
* Los dos últimos recibieron:
  $(2^2 + 1 + 1) \times 2 + 1 = 2^3 + 2^2 + 1$
* Los "n" primeros recibirán:

$$\underbrace{2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1} + ... + 2^2}_{\text{Suma en progresión Geométrica}} + 1 = 2^{20} - 3$$

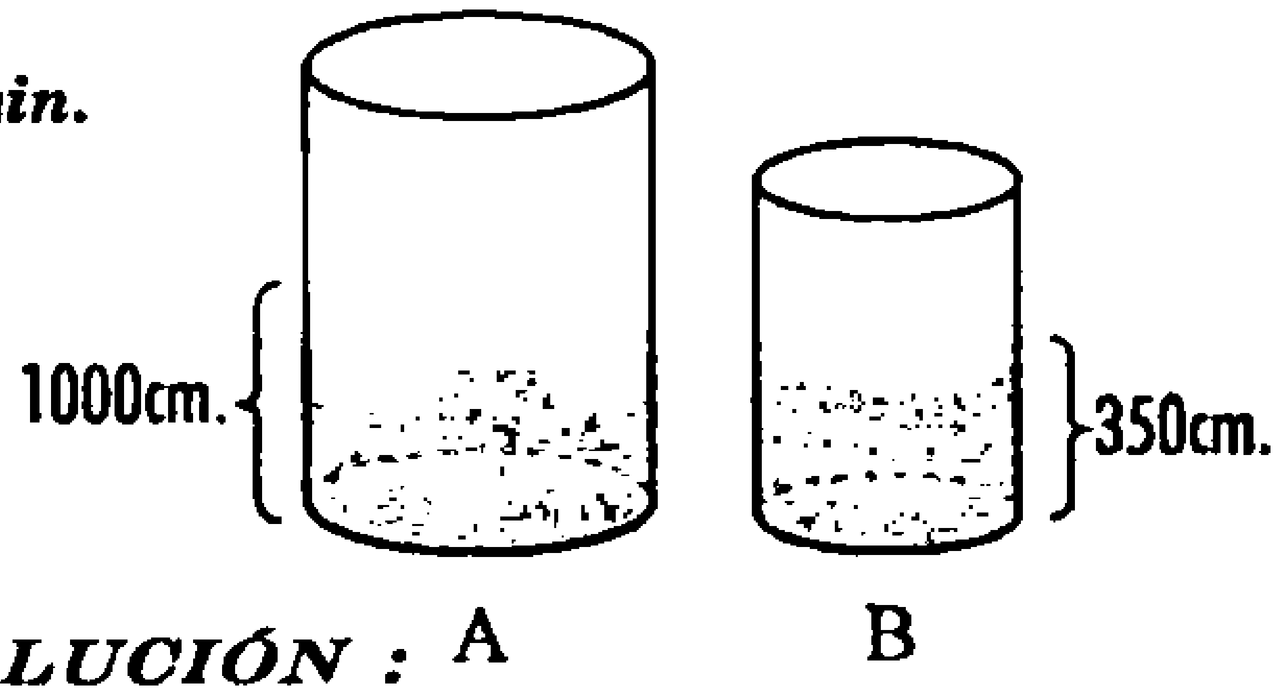
$$\frac{2^{n+2} - 2^2}{2 - 1} + 1 = 2^{20} - 3 \Rightarrow n = 18$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 42 :

A y *B* son recipientes cilíndricos que contienen agua, utilizando una bomba, se transfiere el agua desde *A* hacia *B* se nota que, en el recipiente *"A"*, la altura del agua disminuye *4cm* . por minuto y en *B* aumenta *9cm*. por minuto. ¿Después de cuánto tiempo, desde que se comenzó a utilizar la bomba, las alturas en *«A»* y *"B"* serán iguales.

A) 25 min.
B) 30
C) 35
D) 42
E) 50



RESOLUCIÓN :

* La diferencia entre el recipiente *A* y *B* es de *650cm* cuando estén a la misma altura, el recipiente A habrá bajado *4x* , el recipiente *B* habrá subido *9x*, por lo que:

$$4x + 9x = 650 \Rightarrow x = 50\ min.$$

RPTA: E

PROBLEMA 43 :

Una persona dispone de cierta cantidad de pollos, en cada venta vende la mitad de los que tiene más medio pollo. Si después de la décima venta le queda *(n – 1)* pollos. ¿Cuánto tenía al principió?

A) $n\times2^{10}-1$ B) $n\times2^{10}$ C) $2^{10}-2$
D) $2^{10}\times n+2$ E) $n\times3^{10}-1$

RESOLUCIÓN :

x : cantidad inicial .

1°) vende : $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow$ le queda : $x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

*2°)*vende: $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Rightarrow$ le queda : $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

* Luego se deduce que después de la décima venta le queda:

$$\frac{x}{2^{10}}-\frac{1}{2^{10}}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^8}-\ldots-\frac{1}{2}=n-1$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2^{10}}-\left(\frac{1+2^1+2^2+\ldots+2^9}{2^{10}}\right)=n-1$$

$$\Rightarrow x-(2^{10}-1)=2^{10}n-2^{10}\Rightarrow x=2^{10}n-1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 44 :

Un viajero llenó completamente el tanque de combustible de su camioneta en el ***km. 12***. Al arribar al grifo ubicado en el ***km. 552*** llenó nuevamente el tanque con ***18*** galones. En el ***km. 792***, decide "tanquear"nuevamente la camioneta. ¿Cuántos galones serán necesarios?

A) 12 galones B) 15 galones C) 10 galones
D) 8 galones E) 9 galones

RESOLUCIÓN :

* Entre los kilómetros ***12*** y ***552*** hay ***540 km***. en este tramo ha gastado ***18*** galones de gasolina, puesto que los ***18*** galones que echa en el ***km. 552***, reponen lo gastado en el tramo del ***km. 12*** al ***552***, entonces un galón alcanza para: $540\div18=30$ ***km.***

Del ***km. 552*** al ***792***, hay ***240 km***.; por consiguiente habrá gastado : $240\div30=8$ galones

Para llenar el tanque harán falta ***8*** galones.

RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

Un gato es perseguido por un perro . El gato le lleva ***90*** saltos de ventaja y da ***5*** saltos mientras que el perro da ***4*** y como ***7*** saltos del gato equivalen a ***5*** del perro. ¿Cuántos saltos dará el perro para alcanzar al gato?

A) 400 B) 500 C) 600 D) 750 E) 800

RESOLUCIÓN :

* El perro necesitará descontar al gato ***90*** saltos de gato :

$$\times5\begin{pmatrix}5SG & 4SP\\ 25SG & 20SP\end{pmatrix}\times5 \quad \Big| \quad \times4\begin{pmatrix}7SG & 5SP\\ 28SG & 20SP\end{pmatrix}$$

20SP	aventaja	3SG
x	aventaja	90SG

$$\Rightarrow x=\frac{20(90)}{3}=600SP$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 46 :

Una persona se dirige a una feria y observa en el camino que también se dirigen ***7*** carros, cada carro lleva ***7*** personas las cuales llevan ***7*** costales cada una, donde cada costal contiene ***7*** piezas arqueológicas para su venta, que será de ***7*** denarios. ¿Cuál será el valor total de las piezas arqueológicas?

A)441 B)343 C)2410 D)16807 E)49

RESOLUCIÓN :

- Sabemos que:
  1 pieza arqueológica → ***7*** denarios
- En un costal de ***7*** piezas:
  Precio total : $7(7)=7^2$ denarios
- Pero una persona tiene ***7*** costales:
  Precio total por persona : $7(7^2)=7^3$ denarios
- En un carro existen ***7*** personas:
  Precio total por carro : $7(7^3)=7^4$ denarios
- Como son ***7*** carros, luego el valor total será:
  $7(7^4)=7^5=16807$ denarios .

RPTA: "D"

PROBLEMA 47 :

Por un lote de botellas de champaña se pagó ***S/. Z***, pero solo se habría pagado ***S/. W*** si cada botella hubiera costado ***S/.T***, menos. ¿De cuántas botellas constaba el lote?

A) $Z-\frac{W}{T}$ B) $\frac{Z-W}{T}$ C) $\frac{Z+W}{T}$ D) $ZT-W$ E) $WT-Z$

RESOLUCIÓN :

• Si en vez de pagar ***S/. Z*** se hubiera pagado ***S/. W***, se habría ahorrado ***S/.(Z –W)***.

• Dicho ahorro se habría producido gracias a que en cada botella se hubiera ahorrado ***S/. T***

$$\Rightarrow \#\text{ botellas}=\frac{Z-W}{T}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 48 :

Una persona recorre en su auto una distancia de ***1200 Km***, de manera que va permutando sus llantas con

las dos de repuesto que lleva , para que todas sufran igual desgaste. ¿Qué distancia en promedio recorrió cada llanta?

A) 300 Km *B) 400 Km* *C) 900 Km*
D) 1500 Km *E) 800 Km*

RESOLUCIÓN :

• Supongamos que el auto no lleva llantas de repuesto ; entonces cuando el auto recorre ***1200 Km***, cada una de las ***4*** llantas también recorre ***1200 Km,***

$\Rightarrow$ desgaste total $= 1200 \times 4 = 4800$ ***Km*** de llantas

• Ahora bien, dicho desgaste se piensa repartir no entre ***4***, sino entre ***6*** llantas (contando las ***2*** de repuesto).

* Cada llanta se desgasta durante: $\frac{4800}{6} = 800$ ***km***

CRPTA: "E"

PROBLEMA 49 :

Una persona recibe una herencia de ***S/. 18000,*** de los cuales separa ***S/. 3000*** para gastos, y el resto lo invierte en acciones de la siguiente manera:

• ***S/. 5000*** en acciones del tipo ***"A"*** a ***S/. 10*** cada una.

• ***S/. 6000*** en acciones del tipo ***"B"*** a ***S/. 6*** cada una.

• Lo que queda en acciones tipo ***"C"*** a ***S/. 8*** cada una.

¿Qué precio en promedio pagó dicha persona por cada acción?

A)S/. 7,50 *B)S/.6,80* *C)S/.7,00*

RESOLUCIÓN:

• # acciones tipoA $= \frac{5000}{10} = 500$

• # acciones tipo B $= \frac{6000}{6} = 1000$

• # acciones tipo C $= \frac{4000}{8} = 500$

$\Rightarrow$ precio promedio por acción es igual a:

$$\frac{\text{Inversión}}{\text{N° acciones}} = \frac{15000}{500 + 1\,000 + 500} = S/.\ 7,50$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 50 :

Seis amigos intentan adivinar el número de canicas que hay en una caja. Ana dice que hay ***52*** canicas, Beatriz dice ***59*** , Carla dice ***62*** , Daniel ***65*** , Enrique ***49*** y Federico ***42***. Todos se equivocaron, algunos dijeron de más y otros menos, y sus errores fueron de ***1; 4; 6 ; 9 ; 11 y 12*** canicas, aunque no se sabe quién cometió cada error. ¿Cuántas canicas hay en la caja?

A) 50 *B) 51* *C) 52* *D) 53* *E) 54*

RESOLUCION :

* El mayor error cometido fue ***12***, así que debió ser de Daniel o de Federico.

* Si fuera de Federico , el número de canicas sería: $42 + 12 = 54$, pero en ese caso , Ana hubiera cometido un error de ***2*** canicas , que no coincide con ninguna de los errores cometidos.

* Luego, el error de ***12*** debió ser de Daniel.

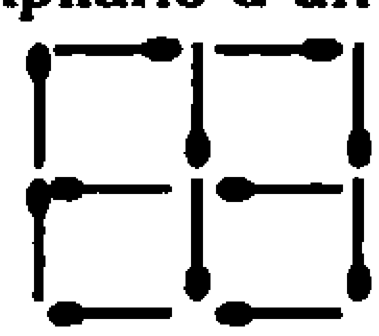
$\Rightarrow$ # canicas $= 65 - 12 = 53$

* No te será difícil averiguar quién cometió cada error.

RPTA : "D"

PROBLEMA 52 :

La figura muestra un cuadrado de ***2*** por ***2*** construido con ***12*** palitos de fósforo. ¿Cuántos palitos adicionales se requiere para ampliarlo a un cuadrado de ***10*** por ***10***?



A) 208 *B) 210* *C) 212* *D) 216* *E) 220*

RESOLUCION :

* Observa que el cuadrado de 2×2 palitos de fósforo de lado , está compuesto por ***3*** filas horizontales de ***2*** palitos cada una , y por ***3*** filas verticales de ***2*** palitos cada una.

* Análogamente un cuadrado de 10×10 estará compuesto por ***11*** filas horizontales de ***10*** palitos cada una , y por ***11*** filas verticales de ***10*** palitos cada una, es decir : $11 \times 10 + 11 \times 10 = 220$ palitos

$\Rightarrow$ Se requiere : $220 - 12 = 208$ palitos adicionales.

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

Dos misiles se desplazan en una misma linea , uno contra el otro. Uno viaja a ***2000*** kilómetros por hora , y el otro a ***1000*** kilómetros por hora. ¿A qué distancia se encuentran un minuto antes del impacto?

A)100 Km *B)50 Km* *C)80Km* *D)30 Km* *E)25 Km*

RESOLUCIÓN :

* Cada hora los misiles están: $2000 + 1\,000 = 3000$ ***Km*** más cerca :

$\Rightarrow$ ***en + 60' los separan 3000 Km***

$\Rightarrow$ ***en 1' los separán :*** $\frac{3000}{60} = 50$ ***Km***

RPTA : "B"

PROBLEMA 54 :

Dos amigos abordan un taxi que cobra ***S/. 12*** por el

viaje , pero uno de ellos bajará exactamente a la mitad del camino. ¿Cuánto deberá pagar cada uno?

A) S/. 6 y S/. 6 ***B) S/. 4 y S/. 8*** ***C) S/.3 y S/.9***
D) S/.2 y S/. 10 ***E) S/. 5 y S/. 7***

RESOLUCIÓN :

* Si todo el viaje cuesta ***S/.12*** , la mitad del viaje costará ***S/.6***, y debido a que la primera mitad viajan los dos amigos juntos , cada uno deberá aportar : $\frac{6}{2} = S/.3$

* El costo de la otra mitad del viaje ***(S/. 6)*** la deberá asumir por completo el segundo amigo.

⇒ Uno solo paga ***S/.3*** y el otro : ***3+6 =S/.9***

RPTA : "C"

PROBLEMA 55 :

Un número de ***5*** cifras cumple las siguientes propiedades:

• El producto de dos cifras consecutivas cualesquiera, es el mismo.

• La suma de sus cifras es ***29.***

¿Cuántos de dichos números hay?

A)1 ***B)2*** ***C)3*** ***D)4*** ***E)ninguno***

RESOLUCIÓN :

* Sea el número buscado: $N = \overline{abcde}$; podemos asumir que todas las cifras de ***N*** son significativas, dado que si una de ellas es cero , al menos otra cifra también deberá serlo y en ese caso ocurriría que: $a+b+c+d+e<29$.

* Del primer dato :

$$a\times b=b\times c=c\times d=d\times e \Rightarrow a=c=e \wedge b=d$$

* Del segundo dato :

$$a + b + c + d + e = 29$$

$$\Rightarrow a + b + a + b + a = 29 \Rightarrow \underbrace{2b}_{par} = \underbrace{29}_{impar} \ ...1$$

$$\Rightarrow \text{"}3a\text{" debe ser impar} \Rightarrow a \in \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

Probando cada posibilidad en ①:

$a = 1 \Rightarrow b = 13$ ×

$a = 3 \Rightarrow b = 10$ ×

$a = 5 \Rightarrow b = 7$ ✓ ⇒ $N = 57575$

$a = 7 \Rightarrow b = 4$ ✓ ⇒ $N = 74747$

$a = 9 \Rightarrow b = 1$ ✓ ⇒ $N = 91919$

⇒ ***"N"*** puede tomar ***3*** valores.

RPTA : "C"

PROBLEMA 56 :

¿Cuántos cubos de arista ***2*** caben completamente en una caja rectangular de dimensiones $7\times 5 \times 6$?

A)18 ***B)24*** ***C)12*** ***D)21*** ***E)20***

RESOLUCIÓN :

* Si la caja tiene ***7*** unidades de largo , ***5*** de ancho y ***6*** de altura , entonces entrarán ***3*** cubitos a lo largo , ***2*** a lo ancho y ***3*** a lo alto :

⇒ # cubitos $= 3\times 2\times 3 = 18$

RPTA : "A"

PROBLEMA 57 :

¿Cuántos triángulos con lados de longitud entera puede construirse si el lado mayor tiene longitud ***7***?

A)12 ***B)13*** ***C)14*** ***D)15*** ***E)16***

RESOLUCIÓN :

• Si el lado mayor mide ***7,*** el mayor de los lados restantes puede medir, por existencia de triángulos, ***7 ; 6 ; 5 ó 4 :***

2° lado	3er lado	#Δs
4	4	1
5	5 ó 4 ó 3	3
6	6 ó 5 ó 4 ó 3 ó [illegible]	5
7	7 ó 6 ó 5 ó [illegible] ó 2 ó 1	7

⇒ En total hay : ***1 + 3 + 5 + 7 = 16*** triángulos

RPTA : "E"

PROBLEMA 58 :

Un alumno del ***EXIT-UNI*** pensó en ***3*** dígitos distintos y escribió todos los números de ***3*** cifras diferentes que se pueden formar con ellos. Luego sumó todos los números que obtuvo y su resultado fue ***N***. Hallar la suma de las cifras de ***N***, sabiendo que la suma de los dígitos originales es ***14.***

A)11 ***B)12*** ***C)13*** ***D)14*** ***E)17***

RESOLUCIÓN :

• Sean los dígitos ***a , b*** y ***c;*** entonces ;los números que podemos formar son:

$$\overline{abc}\ ,\ \overline{acb}\ ,\ \overline{bac}\ ,\ \overline{bca}\ ,\ \overline{cab}\ y\ \overline{cba}.$$

• Por dato: $a + b + c = 14$

• Escribiendo verticalmente la suma pedida, observamos Que en cada columna de unidades , decenas y centenas , aparece ***2*** veces cada dígito , por lo que la suma debe ser en cada caso:

$$\begin{array}{r} 32\\ \overline{abc} \ +\\ \overline{acb}\\ \overline{bac}\\ \overline{bca}\\ \overline{cab}\\ \overline{cba}\\ \hline 3108 \end{array}$$

$2(a+b+c)=2\times 14 = 28 \Rightarrow N =3108$

$\Rightarrow \sum Cifras(N) = 3+1+0+8 = 12$

RPTA : "B"

PROBLEMA 59 :

¿Cuál es el número de cifras del producto $3^2\times 4^9 \times 5^{17}\times 7$?

A)18 B)19 C)20 D)21 E)22

RESOLUCIÓN :

* Agrupando convenientemente :

$P = 3^2 \times 7 \times (2^2)^9 \times 5^{17} = 9 \times 7 \times 2 \times 10^{17} = 126 \times 10^{17}$

$\Rightarrow P = 126\underbrace{00...00}_{17\ ceros}$

$\Rightarrow$ El producto tiene: $3 + 17 = 20$ cifras

RPTA : "C"

PROBLEMA 60 :

Si dos números suman *25*, ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar su producto?

A)100 B)144 C)154 D)156 E)156,25

RESOLUCIÓN :

• Si los números suman *25*, podemos llamar a uno: $(12,5+x)$ y al otro $(12,5-x)$; entonces su producto será:

$(12,5)^2-x^2$, expresión que tomará su máximo valor cuando se le reste lo menos posible, es decir, cuando x^2 sea mínimo, lo cual ocurre para $x=0$

$\Rightarrow$ Producto máximo $= (12,5)^2 - 0 = 156,25$

• Del argumento anterior se deduce la siguiente propiedad:"Si la suma de dos números es constante, su producto será máximo cuando estos sean iguales"

RPTA : "E"

PROBLEMA 61 :

Tres equipos de fútbol, Alianza, Boys y Cristal, juegan un torneo entre ellos. Después de tres partidos, en los cuales cada uno jugó contra los otros dos, tienen anotados, los siguientes goles a favor y goles en contra:

	GF	GC
Alianza	6	3
Boys	3	6
Cristal	4	4

¿Cuántos goles hubieron en el partido entre Alianza y Boys?

A)5 B)4 C)6 D)3 E)2

RESOLUCIÓN :

* De la tabla podemos observar que, entre Alianza y Boys han convertido: $6+3= 9$ goles, de los cuales, Cristal ha recibido *4* goles.

* Los $9 - 4= 5$ goles restantes, tienen que haberse convertido en el partido Alianza vs. Boys.

RPTA : "A"

PROBLEMA 62 :

En una reunión hay *15* mujeres y cierta cantidad de hombres. Cada mujer le regala a cada hombre que conoce, un caramelo. Luego cada hombre le regala a cada mujer que no conoce, un bombón. De esta manera se han repartido *240* golosinas. ¿Cuántos hombres hay?

A)12 B)14 C)10 D)15 E)16

RESOLUCIÓN :

* Cada hombre, o regala un bombón (a las desconocidas), o recibe un bombón (de las conocidas); entonces por cada hombre hay 15 golosinas.

$\Rightarrow \#\ hombres = \dfrac{240}{15} = 16$

RPTA : "E"

PROBLEMA 63 :

Dado un conjunto *G* que tiene como elementos al cero y los enteros pares, positivos y negativos, las cinco operaciones siguientes se efectúan entre cualquier par de elementos de *G*:

I) Suma *II)* Sustracción

III) Multiplicación *IV)* División

V) Hallar la media aritmética.

•Las operaciones que dan únicamente elementos de *G* son :

A)Todas B)I, II, III y IV C)I, II, III y V
D)I, II y III E) I, III y V

RESOLUCIÓN :

• Si sumamos, restamos o multiplicamos dos enteros pares, el resultado es par ; no sucede siempre lo mismo con la división ya que no es posible dividir por cero.

• La media aritmética de *2* y *8* por ejemplo es impar.

$\Rightarrow$ Solo *I, II* y *III* dan elementos de *G*.

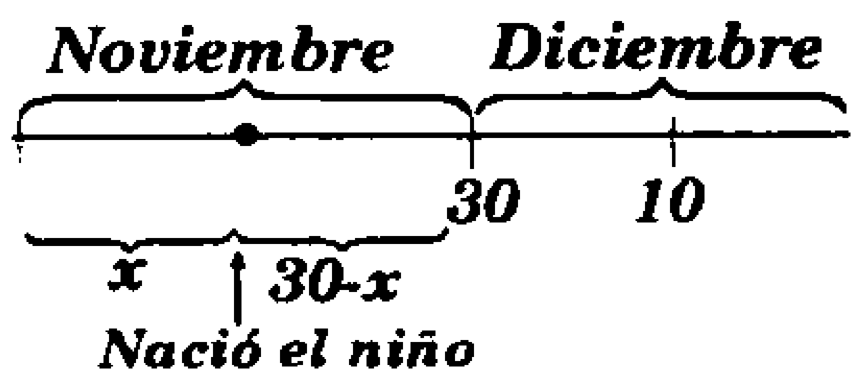
RPTA : "D"

PROBLEMA 64 :

Un niño nació en Noviembre y el *10* de Diciembre tiene una edad igual al número de días transcurridos desde el *1°* de Noviembre hasta el día de su nacimiento. ¿En qué dia nació el niño?

A)15 B)20 C)18 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :



• Desde el *1* de Noviembre hasta que nace. transcurren: x días.

• Su edad el *10* de diciembre es:

$$30 - x + 10 = 40 - x$$

• Por dato : $40 - x = x \Rightarrow x = 20$

RPTA : "B"

PROBLEMA 65 :

Las piezas de un rompecabezas rectangular son **9** cuadrados de lados **1; 4;7; 8;9; 10; 14; 15** y **18**. ¿Qué perímetro tiene el rompecabezas armado?

A)140 **B)**136 **C)**130 **D)**128 **E)**120

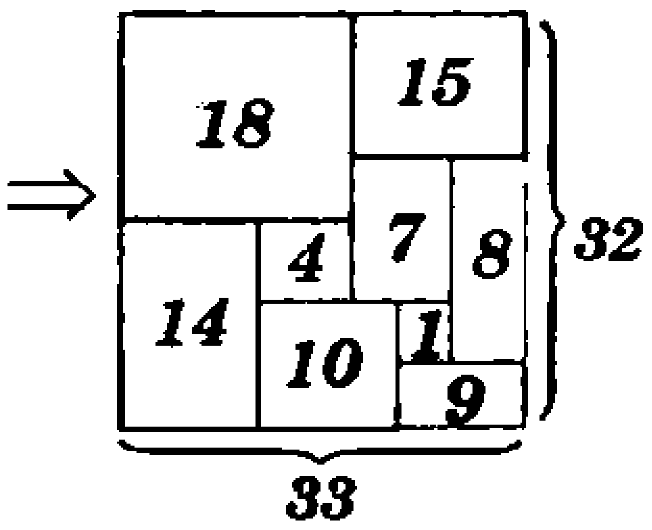
RESOLUCIÓN :

• La superficie del rectángulo es:

$1^2+4^2+7^2+8^2+9^2+10^2+14^2+15^2+18^2=1056=2^5\times3\times11$; como sus lados deben ser mayores que **18**, sus dimensiones son: 22×48 ó 32×33.

• Es imposible la primera opción , pues no se puede completar el ancho de **22**.

• El siguiente dibujo no está a escala:



$\Rightarrow$ Perímetro $= 2(33 + 32) = 130$

RPTA : "C"

PROBLEMA 66 :

Una tienda dispone de **5** tipos de queso. Si "**x**" gramos del queso más caro cuestan **S/. 6,50** y la misma cantidad del más barato cuesta **S/. 2,40**. ¿Cuál de las siguientes alternativas podría ser el precio que puede costar una mezcla con "**x**" gramos de cada uno de los **5** tipos de queso?

A)S/. 14 **B)**S/.15 **C)**S/. 20 **D)**S/. 28,50 **E)**S/.30

RESOLUCIÓN :

• Como por lo menos debe haber en la mezcla un tipo de queso del más caro y uno del más barato , podemos analizar los casos extremos:

• Precio mínimo : **1(S/.6,50) + 4(S/.2,40) = S/.16,10**

• Precio máximo : **4(S/.6,50) + 1(S/.2,40) = S/.28,40**

$\Rightarrow$ **S/.16,10 ≤ Precio ≥ S/.28,40**

RPTA : "C"

PROBLEMA 67 :

Se tienen **19** pesas distintas de **1g, 2g, 3g,...,19g.** Nueve son de acero , nueve son de bronce y una es de oro. Se sabe que el peso total de las pesas de acero es **90g** superior al peso total de las pesas de bronce. Hallar el peso de la pesa de oro.

A)9 g **B)**10 g **C)**11 g **D)**12 g **E)**13 g

RESOLUCIÓN :

• Sean "**x**"e"**y**" los pesos del total de pesas, de acero y bronce respectivamente y "**z**" el peso de la pesa de oro , en gramos:

$$x+y+z=1+2+3+.....+19=\frac{19\times20}{2}=190$$

* El menor peso posible de un conjunto de **9** pesas es :

$$1+2+3+......+9=\frac{9\times10}{2}=45\Rightarrow y\geq45.....(I)$$

• El mayor peso posible de un conjunto de **9** pesas es :

$$11+12+13+...+19=\left(\frac{11+19}{2}\right)\times9=135\Rightarrow x\leq135.....(II)$$

* Como: $x - y = 90$, está claro de **(I)** y **(II)** , que:

$$x=135 \wedge y=45 \Rightarrow z=190-135-45=10$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 68 :

Un grupo de **9** estudiantes compiten entre ellos cada semana formando **3** equipos de **3** estudiantes cada uno. Determinar el menor número de semanas que deben transcurrir para poder asegurar que hay dos estudiantes que participaron juntos por lo menos dos veces en un equipo.

A)2 **B)**3 **C)**4 **D)**5 **E)**6

RESOLUCIÓN :

* Un estudiante en particular , comparte cada semana un equipo con otros **2** ; luego de **4** semanas , habrá podido rompartir un equipo con , como máximo: $2\times4=8$ estudiantes diferentes. Por lo tanto , en la quinta semana , habrá alguno de los chicos con el que compartió equipo más de una vez.

RPTA : "D"

PROBLEMA 69 :

Al comparar los números 10^{-49} y 2×10^{-50} podemos afirmar que :

A) El primero excede al segundo en 8×10^{-1}

B) El primero excede al segundo en 2×10^{-1}

C) El primero excede al segundo en 8×10^{-50}

D) El primero excede al segundo en **5**.

E) El segundo es **5** veces el primero.

RESOLUCIÓN :

* Si escribimos el primer número como 10×10^{-50} , está claro que excede al segundo 2×10^{-50} en 8×10^{-50}

RPTA : "C"

PROBLEMA 70 :

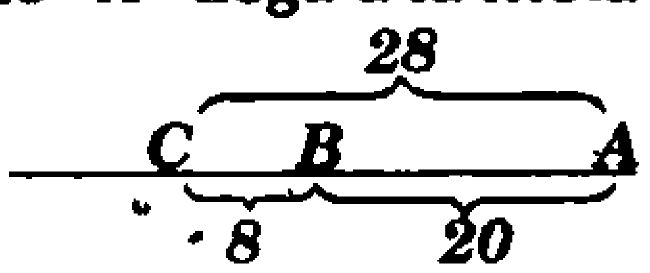
En una carrera de "**d**" metros , **A** , **B** y **C** corren a velocidades uniformes y ocurre que: **A** le gana a **B** por **20 m** , **B** le gana a **C** por **10** m y **A** le gana a **C** por

28m. Determinar : ***d***

A)80 m ***B)100 m*** ***C)120 m*** ***D)140 m*** ***E)90 m***

RESOLUCIÓN :

• Cuando ***"A"*** llega a la meta :



• Cuando ***"B"*** llega a la meta :

• De los gráficos podemos deducir que en sus últimos ***20 m*** de recorrido , ***B*** le sacó a ***C*** una ventaja de: ***10–8 =2m*** ; entonces, ¿en qué recorrido total ***B*** habrá logrado sacar una ventaja de ***10***m?

$$\begin{cases} 20\ m \Rightarrow 2\ m \\ d \Rightarrow 10\ m \end{cases}$$

$$\Rightarrow d=100\ m$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 71 :

Una persona recibe un préstamo de un banco y debe pagar los intereses según la siguiente fórmula: $I_n=1\,000-20n$, donde I_n representa el interés a pagar durante el enésimo mes. Si los intereses se pagan hasta que $I_n = 0$, hallar la suma de los intereses pagados.

A)24500 ***B)25500*** ***C)26500*** ***D)25000*** ***E)26000***

RESOLUCIÓN :

• El primer mes pagará:

$$I_1 = 1\,000 - 20(1) = S/.980$$

• El segundo mes pagará:

$$I_2 = 1000 - 20(2) = S/.960$$

• El tercer mes pagará:

$$I_3 = 1000 - 20(3) = S/.940$$

⋮

$\Rightarrow$ ***Suma de intereses***

$= 980 + 960 + 940 + ... + 40 + 20 =$

$$=\left(\frac{980+20}{2}\right)\times 49 = S/.24500$$

RPTA : "A"

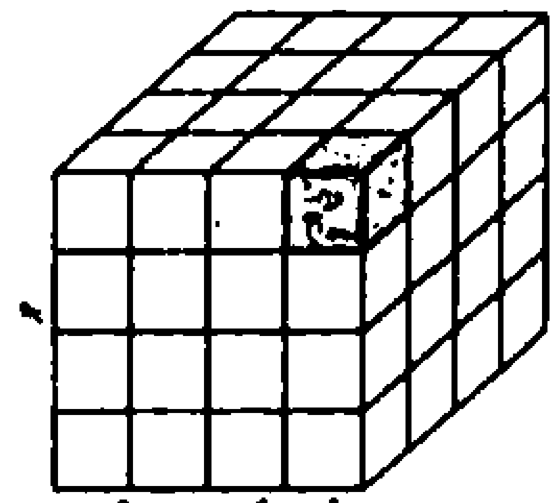
PROBLEMA 72 :

Un cubo de madera se pinta totalmente de rojo y luego se divide en ***64*** cubitos iguales. Si ***"x"*** de los cubitos quedan con tres de sus caras pintadas de rojo y ***"z"*** cubitos quedan totalmente sin pintar. calcular $(x + z)$

A)10 ***B)12*** ***C)14*** ***D)16*** ***E)18***

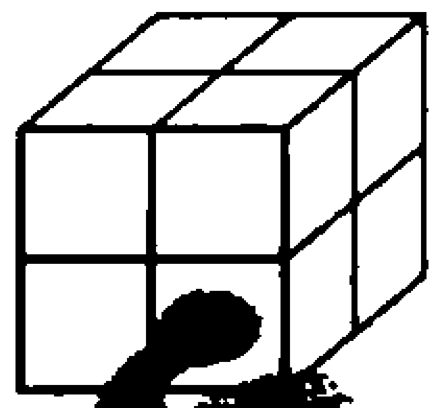
RESOLUCIÓN :

* Como $64 = 4^3$, cada arista se debe dividir en ***4:***



• Los cubitos de cada vértice presentan ***3*** caras pintadas. $\Rightarrow x = 8$

• Los cubitos sin pintar. forman un cubo interior como se muestra:



$$\Rightarrow z = 2^3 = 8$$

$$\rightarrow x + z = 16$$

RPTA : "A"

PROBLEMA [illegible] :

Un automóvil recorre $\frac{a}{6}$ pies en ***r*** segundos. Si mantienen su velocidad constante ,¿Cuántas yardas recorre en ***3*** minutos?

$A)\ \frac{a}{1080r}$ $B)\ \frac{30r}{a}$ $C)\ \frac{30a}{r}$ $D)\ \frac{10r}{a}$ $E)\ \frac{10a}{r}$

RESOLUCIÓN :

* Podemos plantear una regla de tres simple directa:

Distancia		***Tiempo***
$\frac{a}{b}$ ***pies***	$\Rightarrow$	***r segundos***
x	$\Rightarrow$	***3 minutos***

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{a}{b}\ \text{pies} \times 3\ \text{minutos}}{r\ \text{segundos}} \times \left(\frac{1\ \text{yarda}}{3\ \text{pies}}\right) \times \left(\frac{60\ \text{segundos}}{1\ \text{minuto}}\right)$$

$$= \frac{10a}{r}\ \text{yardas}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 74 :

A le da a ***B*** tantos soles como tiene ***B*** y a ***C*** tantos soles como tiene ***C***. De manera similar , luego ***B*** le da a ***A*** y ***C*** tantos soles como tienen entonces cada uno de ellos. ***C*** , análogamente , les da después a ***A*** y ***B*** tantos soles como tienen entonces cada uno de ellos. Si finalmente todos terminan con ***16*** soles. ¿Con cuántos soles empieza ***A***?

A) 24 ***B)26*** ***C)28*** ***D)30*** ***E)32***

RESOLUCIÓN :

* Al final cada uno terminó con ***S/. 16*** , pero en la última operación ***C*** le dio a ***A***. tantos soles como ***A*** tenía , es decir duplicó su dinero. Por lo tanto. antes de dicha operación ***A*** tenía ***S/. 8,*** y como lo mismo ocurrió con ***B,*** él también tenía ***S/. 8***. Entonces ***C*** ha repartido:

S/.8+S/.8= S/.16, y ya que se quedó con ***S/.16***, significa que antes de esa última operación tenía:

16 + 16 = S/.32. De manera análoga se puede calcular cuánto tenía cada uno antes de las otras dos operaciones , lo cual se resume en el siguiente cuadro:

	A	B	C
I	26	14	8
II	4	28	16
III	8	8	32
FIN	16	16	16

Al inicio ***A*** tenía ***S/. 26***.

RPTA : "B"

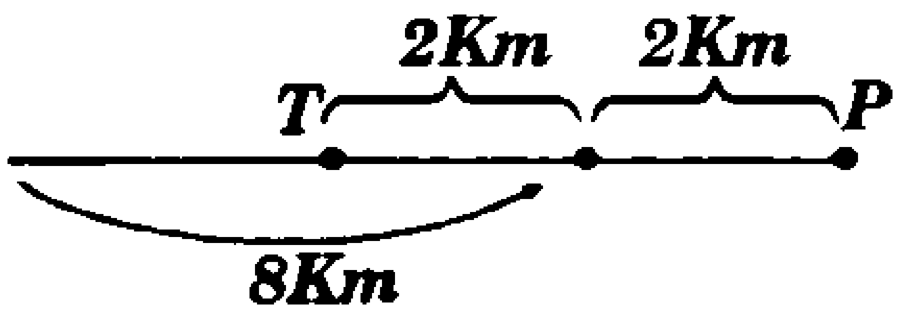
PROBLEMA 75 :

En una carrera de ***10 km***, "primero" vence a "segundo" por ***2 km***, y "primero" vence a "tercero" por ***4 km***. Si los corredores mantienen velocidades constantes durante toda la carrera , ¿Por cuántos kilómetros vence "segundo" a "tercero"?

A) 2 ***B)*** $2\frac{1}{4}$ ***C)*** $2\frac{1}{2}$ ***D)*** $2\frac{3}{4}$ ***E)*** 3

RESOLUCIÓN :

* Veamos lo que sucede cuando "primero" llega a la meta :



* Notamos que cuando "segundo" recorre ***8 Km*** le saca una ventaja de ***2 Km*** a "tercero", por lo cual podemos plantear que:

$$\begin{cases} 8Km \longrightarrow 2Km \\ 2Km \longrightarrow x \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}Km$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 76 :

Se recorta un cubo de ***3*** cm de arista en ***"n"*** cubos más pequeños , no todos del mismo tamaño . Si la arista de cada uno de los cubos mide un número entero de centímetros , entonces el valor de ***n*** es:

A)4 ***B)8*** ***C)12*** ***D)16*** ***E)20***

RESOLUCIÓN :

* Si la arista de los cubos más pequeños deben debe ser número entero menor que ***3***, solo podrá medir ***2*** ó ***1***. Solo puede haber un cubo de arista ***2*** , el cual hace un volumen de $(2)^3 = 8$ unidades cúbicas.

* Como el volumen total es $(3)^3 = 27$ unidades cúbicas, habrán: $27 - 8 = 19$ cubitos de arista 1.

$\Rightarrow n=1+19=20$

RPTA : "E"

PROBLEMA 77 :

Si en la fórmula : $C=\frac{en}{Rn+r}$, ***n*** se aumenta , mientras que ***e***, ***R*** y ***r*** permanecen constantes, entonces C:

A) disminuye
B) aumenta
C) permanece constante
D) aumenta y luego disminuye

RESOLUCIÓN :

* Dividamos ambos términos de la fracción dada entre ***n***:

$$C=\frac{\frac{en}{n}}{\frac{Rn}{n}+\frac{r}{n}} \Rightarrow C=\frac{e}{R+\frac{r}{n}}$$

•De la última expresión obtenida podemos deducir que si ***n*** aumenta , el denominador de ***C*** disminuirá, y por lo tanto el valor de ***C*** aumentará.

RPTA : "B"

PROBLEMA 78 :

Si la ganancia que se obtiene al vender en ***S***. soles un artículo que cuesta ***C*** soles , es $M=\frac{1}{n}C$, entonces la ganancia está dada por :

A) $M=\frac{1}{n-1}S$ ***B)*** $M=\frac{1}{n}S$ ***C)*** $M=\frac{n}{n+1}S$

D) $M=\frac{1}{n+1}S$ ***E)*** $M=\frac{n}{n-1}S$

RESOLUCIÓN :

* Como la ganancia es la diferencia entre el precio de venta y el precio de costo , tenemos que:

$$\frac{1}{n}C=S-C \Rightarrow C=\left(\frac{n}{n+1}\right)S$$

* Reemplazando :

$$M=\frac{1}{n}C=\frac{1}{\cancel{n}}\left(\frac{\cancel{n}}{n+1}\right)S=\frac{n}{n+1}S$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 79 :

Sea $D=a^2+b^2+c^2$, donde ***a*** y ***b*** son enteros consecutivos y $c = ab$. Entonces $\sqrt{D}$ es:

A) siempre un entero par.
B) siempre un entero impar.
C) siempre irracional.
D) a veces racional, a veces no.
E) a veces par, a veces impar.

RESOLUCIÓN :

$b = a+1;\ c= a(a + 1);$ reemplazando:

$$D=a^2+(a+1)^2+\left[a(a+1)^2\right] \Rightarrow D=\left(a^2+a+1\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=a^2+a+1=\underbrace{a(a+1)}_{2}+1=Impar$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 80 :

Dado el siguiente producto : $P = \underbrace{11...11}_{2004\ cifras} \times K$

Hallar la suma de cifras de *"K"*, siendo *"K"* el menor número entero positivo tal que *"P"* resulta un número de *2007* cifras.

A)19 B)18 C)17 D)16 E)20

RESOLUCIÓN :

* Si $K = 990$, *"P"* tendría *2006* cifras ; basta que *"K"* valga *991*, para que *"p"* tenga *2007* cifras.

$\Rightarrow 9+9+1=19$

RPTA: "A"

PROBLEMA 81 :

Supóngase que la población de mosquitos en el mundo es de *36 000 000 000* y que se puede empacar todos estos mosquitos en una caja cúbica sin desperdiciar espacio. Si el volumen promedio de un mosquito es de $6\ mm^3$, ¿Cuál sería la longitud de cada arista de la caja?

A)6m B)36 cm C)6 cm D)36m E) 6 km

RESOLUCIÓN :

• Como $1m = 1000\ mm$, entonces :

$1m^3 = 1000\ 000\ 000\ mm^3 = 10^9 mm^3$

• El volumen total de los mosquitos es:

$(36\times10^9)\times 6mm^3 = 216\times10^9 mm^3$

• Si la arista de la caja mide *"x"*, se deberá cumplir que: $x^3 = 216\times \underbrace{10^9\ mm^3}\rightarrow x^3 = 6^3 m^3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 82 :

¿Cuál es el mayor residuo posible cuando un número de *2* dígitos se divide por la suma de sus digitos?

A)13 B)14 C)15 D)16 E)17

RESOLUCIÓN :

* La mayor suma posible de *2* dígitos es *18*, por lo cual el residuo máximo buscado no puede exceder de *17*. Al dividirse *99* entre *18* , sin embargo el residuo es *9*. Si los dígitos , sumaran *17* los números serían *98* y *89*, pero ninguno de estos deja residuo *16* al dividirse entre *17*. Si la suma de los dígitos es *16* , los números serían *79* ; *89* y *97*, y al dividirse *79* entre *16* se obtiene *15*, que es el mayor residuo posible.

RPTA: "C"

PROBLEMA 83 :

Un ómnibus hace servicios de Lima a Huacho y en uno de los viajes recaudo *S/.528* por la cobranza de adultos y *S/.108* por los niños ; si para cualquier recorrido el pasaje adulto es *S/.8* y el de niños *S/.4.* Si cada vez que bajó *1* adulto subieron *2* niños y cada vez que bajó *1* niño subieron *3* adultos y llegaron a Huacho con *55* adultos y *11* niños. ¿Cuantos adultos subieron en Lima?

A)16 B)18 C)22 D)24 E)20

RESOLUCIÓN :

* Número de adultos que viajaron : $\frac{528}{8} = 66$

* Número de niños que viajaron : $\frac{108}{4} = 27$

* Como a Huacho llegaron *11* niños, luego en el camino bajaron : $27 - 11 = 16$ niños

* Ahora si bajaron *16* niños , entonces subieron en el camino : $16\times3=48$ adultos.

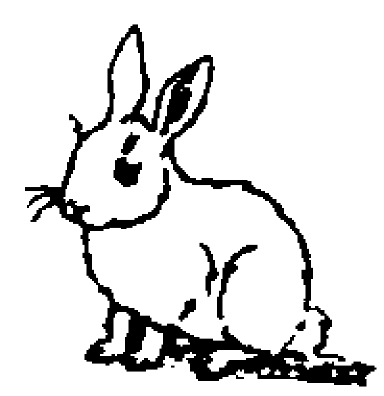
* Luego partieron de Lima : $66 - 48 = 18$ adultos.

RPTA: "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En un grupo de conejos y gallinas el número de patas excede en *14* al doble del número de cabezas. Los conejos son :

A) 5
B) 17
C) 10
D) 12
E) 14

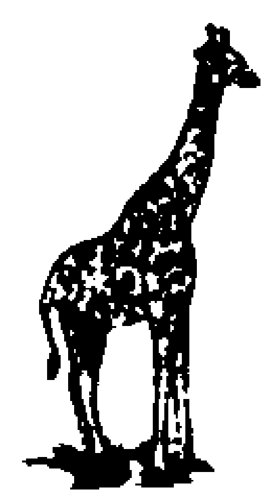
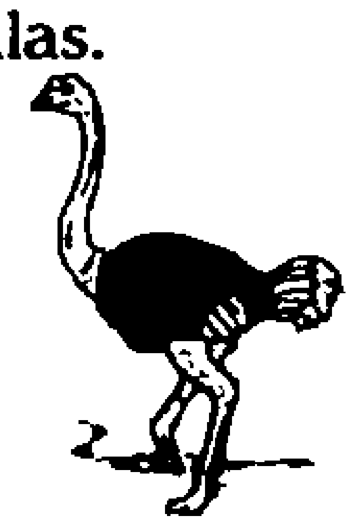


02 En un establo existen vacas y gallos, se hizo un conteo de animales encontrándose *92* cabezas y *284* patas. ¿Cuál es la diferencia entre el número de vacas y gallos?

A) 42 B) 10 C) 50
D) 8 E) 12

03 En un zoológico, entre todas las jirafas y avestruces se podían contar *30* ojos y *44* patas. Determinar el número de alas.

A) 8
B) 12
C) 7
D) 14
E) 16

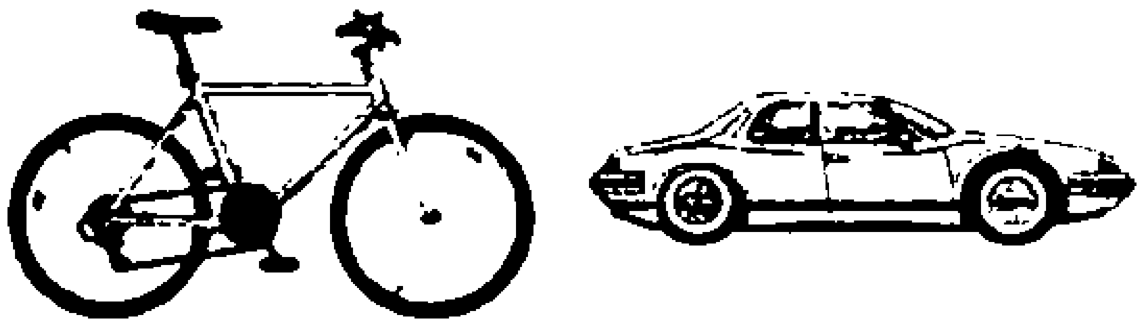
04 En un corral habitan cuyes y gallinas que en total son *44* cabezas y *134* patas. ¿Cuál es la diferencia entre el número de cuyes y gallinas existentes?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 2

05 En una granja donde existen conejos y palomas se cuentan ***115*** cabezas y ***370*** patas (extremidades). ¿Cuántas palomas hay en la granja?

A) 35 *B) 45* *C) 55*
D) 65 *E) 70*

06 En un taller encontramos ***42*** vehículos entre autos y bicicletas, contando ***144*** llantas. ¿Cuántas bicicletas encontramos?



A) 12 *B) 11* *C) 14*
D) 15 *E) N.A.*

07 Un profesor del curso de matemática le da a su hijo José ***3*** soles por cada problema bien resuelto y por cada problema mal resuelto el hijo tiene que dar al profesor ***1*** sol. Ha resuelto ***50*** problemas y obtuvo ***66*** soles. ¿Cuántos problemas bien resueltos ha respondido?

A) 29 *B) 28* *C) 22*
D) 21 *E) 32*

08 Se desea pagar una deuda de ***142*** soles con ***50*** monedas de ***5*** y ***2*** soles. ¿Cuántas monedas de ***5*** soles debo emplear?

A) 18 *B) 16* *C) 10*
D) 12 *E) 14*

09 Vicente ha sido contratado por el colegio Parroquial San Antonio de Huamanga por ***3*** años en la siguiente condición; por cada mes que trabajan le pagan ***300*** soles y por cada mes que no trabaja debe pagar ***320*** soles. ¿Cuántos meses ha trabajado si recibió ***2120*** soles?

A) 28 *B) 26* *C) 24*
D) 22 *E) 14*

10 Un ferrocarril conduce ***180*** pasajeros en vagones de primera y segunda clase. Los primeros pagan ***$ 2,5*** y los otros ***$ 2***. Si la recaudación total fue de ***$ 413.*** ¿Cuántos viajaron en primera categoría?

A) 72 *B) 74* *C) 106*
D) 96 *E) 100*

11 Se han comprado ***77*** latas de leche de dos capacidades distintas : ***8*** onzas y ***15*** onzas. Si el contenido total es de ***861*** onzas. ¿Cuántas latas de ***15*** onzas se compraron?

A) 30 *B) 35* *C) 40*
D) 42 *E) 50*

12 Jorge paga a Daniel ***300*** soles en billetes de ***20*** soles y ***10*** soles. Si Daniel al recibir el dinero cuenta ***23*** billetes. ¿Cuántos son de ***10*** soles?

A) 14 *B) 15* *C) 16*
D) 7 *E) 8*

13 En un examen por cada respuesta bien contestada, ganan un punto y por cada respuesta errada pierden un punto; si la nota de un alumno en ***30*** preguntas fue de ***14.*** ¿Cuántas contesto mal?

A) 8 *B) 7* *C) 6*
D) 9 *E) 10*

14 En un examen, Erick gana ***3*** puntos por respuesta correcta, pero pierde ***1*** punto por cada equivocación. Si después de haber contestado ***25*** preguntas obtiene ***47*** puntos. ¿Cuántas preguntas contesto mal?

A) 9 *B) 8* *C) 7*
D) 6 *E) 5*

15 En un examen de simulacro un alumno del colegio ***TRIPLE A*** gano ***4*** puntos por respuesta correcta, pero pierde un punto por cada equivocación. Si después de haber contestado ***50*** preguntas obtiene ***95*** puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?

A) 20 *B) 29* *C) 27*
D) 31 *E) N.A.*

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 A un número se le multiplica por ***3,*** se le resta ***6***, se multiplica por ***5***, se le divide por ***8***, se eleva al cuadrado, se le resta ***171*** obteniendo ***729.*** ¿Cuál es el número?

A) 12 *B) 24* *C) 36*
D) 18 *E) 20*

02 A un número se le extrae la raíz cuadrada después de agregarle ***1*** al resultado se multiplica por ***3*** y se obtiene ***12***. ¿Cuál es el número?

A) 24 *B) 7* *C) 10*
D) 17 *E) N.A.*

03 Si a la cantidad que tengo lo multiplico por ***5***, lo divido luego por ***15***, al cociente lo multiplico por ***4*** y añado ***32***, entonces tendré ***80*** soles. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 36 *B) 38* *C) 40*
D) 34 *E) 32*

04 Si a un número lo multiplico por ***8,*** luego lo divido por ***10*** y el cociente lo multiplico por ***3*** añadiendo enseguida ***36***, entonces obtendría ***180.*** ¿Cuál es el número inicial?

A) 40 *B) 60* *C) 58*
D) 45 *E) 52*

05 Un número se aumenta en *1*, el resultado se le multiplica por *2*, al resultado se le resta *3*, se multiplica por *4* al resultado y por último se divide entre *5* y se obtiene *12*. ¿Cuál es el número inicial?

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 14*

06 Julio dice : «si a la edad que tendré dentro de dos años lo multiplico por *3*, al producto le resto *2* y a la diferencia le extraigo la raíz cuadrada, al número así obtenido le agrego *1*, para finalmente extraerle la raíz cúbica, obtengo así *2* ». ¿Cuál es la edad de Julio?

A) 5 *B) 7* *C) 9*
D) 11 *E) N.A.*

07 A un cierto número se eleva al cuadrado, a este resultado se le resta *3*, a este nuevo resultado se multiplica por *7*, luego le agregamos *9*, finalmente extraemos la raíz cuadrada, obteniendo como resultado final *6*. Hallar dicho número.

A) 3 *B) 1/3* *C) 4*
D) 6 *E) 9*

08 Con un cierto número se realizo las siguientes operaciones : lo elevo al cubo, al resultado le agrego *9* y le extraigo la raíz cuadrada, al número así obtenido lo divido entre *3* para luego restarle *1* y por último al resultado lo elevo al cuadrado obteniendo como resultado final *16*. Hallar el número inicial.

A) 3 *B) 4* *C) 5*
D) 6 *E) 8*

09 Un pozo de agua se vacía en *2* horas si en cada hora se va la mitad de los que había en esa hora más *1* litro. ¿Cuántos litros tenia inicialmente?

A) 3 *B) 4* *C) 5*
D) 6 *E) N.A.*

10 Cada vez que una persona ingresa a una tienda, gasta la mitad de dinero que tiene más *S/. 5*. Si después de ingresar y salir tres veces, todavía tiene *S/. 10*. ¿Cuánto ha gastado en total?

A) S/. 100 *B) 140* *C) 150*
D) 60 *E) 180*

11 Un recipiente de agua está lleno, al abrirse el caño cada hora desagua la mitad de su contenido más *30* litros. Hallar la capacidad del recipiente si al cabo de *3* horas se desagua.

A) 420 litros *B) 280* *C) 360*
D) 350 *E) 385*

12 Un niño consumió una caja de chocolates en *4* días. En cada día consumía la mitad de los que tenía más *5* chocolates. ¿Cuántos consumió en total?

A) 80 *B) 90* *C) 160*
D) 70 *E) 60*

13 Una piscina ha estado desocupado durante *4* días, hasta que realmente ha quedado *10* galones de agua. En cada día se extraía la mitad más *2* galones de lo que había el día anterior. ¿Cuál es el volumen total de la piscina?

A) 10 *B) 12* *C) 8*
D) 20 *E) N.A.*

14 En una iglesia existe un santo que tiene la facultad de duplicar el dinero que lo llevan, pero por cada «milagro» que realiza le deben dejar *$ 200* como limosna. Una señora ingresó a esta iglesia y luego de recibir tres milagros y dejar su última limosna, se marcho con *$ 1800*. ¿Cuánto dinero llevaba la señora?

A) $ 360 *B) 400* *C) 480*
D) 200 *E) 320*

15 Tres personas : Alberto, Simón y César acuerdan que en cada partida de naipes el perdedor duplicará el dinero de los otros dos. Cada uno pierde una partida en el orden de sus nombres; si después de perder César cada uno se quedo con *16* soles. ¿Con cuánto empezó a jugar Alberto?

A) 20 soles *B) 14* *C) 26*
D) 18 *E) 32*

16 Un estudiante escribe cada día, la mitad de las hojas en blanco más *25* hojas; si al cabo de *3* días gastó todas las hojas. ¿Cuántas hojas tenía el cuaderno?

A) 250 *B) 350* *C) 300*
D) 450 *E) N.A.*

17 Miguel, Franklin y Percy; están jugando con la condición de que aquel que pierda tiene que duplicar el dinero de los otros dos. Si cada uno ha perdido una partida en el orden en que han sido nombrados, quedándose luego de haber perdido el último, con *200* soles cada uno. ¿Cuánto tenía inicialmente Miguel?

A) 325 *B) 275* *C) 175*
D) 100 *E) N.A.*

18 Cuatro jugadores *A; B; C* y *D* convienen que en cada partida, el perdedor doblará el dinero de los *3*. Ellos pierden cada uno una partida en el orden indicado por sus nombres, después de lo cual cada uno de ellos tiene *480* soles. ¿Cuánto tenía *«A»* al principio del juego?

A) 990 *B) 510* *C) 270*
D) 150 *E) N.A.*

19 Un recipiente de agua está lleno, al abrirse el caño cada hora desagua la tercera parte de su contenido más *12* litros. Hallar la capacidad del recipiente, si al cabo de *3* horas se desagua.

A) 792 litros *B) 468* *C) 460*
D) 560 *E) 630*

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #3

01 Si compro *9* cuadernos me sobran *S/. 7*; pero si compro *13* cuadernos me faltarían *S/. 41*. ¿De cuánto dinero dispongo?

A) S/. 105 *B) 197* *C) 149*
D) 115 *E) 101*

02 Si pago *S/. 12* a cada uno de mis empleados me faltan *S/. 340;* pero si sólo les pago *S/. 4*, me sobrarían *S/. 100*. ¿Cuántos empleados tengo?

A) 65 *B) 55* *C) 45*
D) 60 *E) 50*

03 Un padre va con sus hijos a un concierto y al querer comprar entradas de *65* soles observa que le falta para *4* de ellos y tiene que comprar entradas de *35* soles. Es así que entran todos y le sobra *10* soles. ¿Cuántos hijos lleva al concierto?

A) 6 *B) 7* *C) 8*
D) 9 *E) 10*

04 Si Carlos vende a *S/. 12* cada camisa ganará *S/. 20;* pero si vende a *S/. 11* cada una ganará sólo *S/. 14*. Hallar el número de camisas.

A) 5 *B) 6* *C) 7*
D) 8 *E) 9*

05 Hugo dice a sus compañeros : «si con el dinero que tengo comprará cuatro libros, me sobrarían *30* soles; pero si quisiera comprar doce, me faltarían *210* soles». ¿Cuánto cuesta cada libro?

A) 20 *B) 30* *C) 36*
D) 40 *E) N.A.*

06 Una persona quiere rifar una calculadora emitiendo cierto número de boletos. Se vende a *S/. 2* cada boleto perderá *S/. 30* y vendiendo en *S/. 3* cada boleto ganará *S/. 70*. ¿Cuánto vale la calculadora?

A) S/. 210 *B) 220* *C) 230*
D) 240 *E) 250*

07 Para ganar *S/. 2000* en el sorteo de una computadora, se imprimieron *640* boletos; sin embargo, sólo se vendieron *210* boletos, originándose una pérdida de *S/. 150*. Hallar el valor de la computadora

A) 1000 *B) 1500* *C) 2000*
D) 1200 *E) 3600*

08 Sara al comprar *20* manzanas le sobran *S/. 4,8*; pero al adquirir *24* manzanas; le faltarían *S/. 1,2*. ¿Cuánto cuesta cada manzana?

A) S/. 1,2 *B) 1,5* *C) 1,4*
D) 1,6 *E) N.A.*

09 Una persona quiere repartir cierto número de caramelos entre sus sobrinos. Si les da *11* caramelos a cada uno, le sobra *116*, y si les da *24* caramelos a cada uno le falta *27* caramelos. ¿Cuántos caramelos quiere repartir?

A) 237 *B) 273* *C) 723*
D) 372 *E) 327*

10 Si *2* veces «*A*» equivale a *3* veces «*B*»; *6* veces «*B*» equivale a *4* veces «*C*» y *5* veces «*C*» equivale a *15* veces «*D*». ¿Cuántas veces «*D*» equivale a «*A*»?

A) 2 *B) 3* *C) 4*
D) 1 *E) 5*

11 Si *7* naranjas equivale a *8* manzanas; *4* mandarinas equivale a *21* bananas y *3* bananas equivale a *2* melocotón y también que *2* manzanas equivale a *5* mandarina. ¿Cuántos melocotones darán por el mismo precio de una docena de naranjas?

A) 40 *B) 60* *C) 80*
D) 100 *E) 120*

12 El valor de *2* libros de Álgebra equivalen a *3* de Aritmética, además 5 libros de Aritmética equivalen a *4* de Razonamiento Verbal; si *6* libros de Razonamiento Verbal cuestan *S/. 100*. ¿Cuánto cuesta la docena de libros de Álgebra?

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) N.A.*

13 Sobre un estante se pueden colocar *15* libros de ciencias y *3* libros de letras ó *9* libros de letras y *5* libros de ciencias. ¿Cuántos libros de ciencias únicamente entran al estante?

A) 10 *B) 5* *C) 20*
D) 4 *E) 16*

14 En una feria venden *8* plátanos al mismo precio que *6* duraznos, *4* duraznos lo mismo que *10* nísperos; una docena de nísperos al mismo precio que *2* piñas. Si *10* piñas cuestan *S/. 320*. ¿Cuánto cuesta cada plátano?

A) S/. 8 *B) 5* *C) 10*
D) 12 *E) 16*

15 ¿Cuál será el sueldo mensual de un teniente, si el sueldo mensual de *2* capitanes equivale al de *3* tenientes; el de *3* capitanes al de *2* comandantes y el sueldo mensual den un comandante es de *$ 270*?

A) 441 *B) 832* *C) 882*
D) 64 *E) N.A.*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La suma de dos números es ***872*** y su diferencia ***328***. Hallar el mayor de los números.

A) 480 B) 600 C) 720 D) 640 E) 680

02 La suma de dos números excede a ***572*** en ***146***. Si la diferencia de los números es ***258***, hallar el número menor.

A) 180 B) 200 C) 220 D) 230 E) 240

03 Cuando María nació , Karina tenia ***12*** años. si actualmente la suma de sus edades es ***78*** años, ¿cuál es la edad de Karina?

A) 36 B) 45 C) 50 D) 42 E) 38

04 Si Alberto tiene ***S/.120*** más que César y su dinero es el cuádruplo del de César, ¿cuánto tienen entre ambos?

A) S/. 160 B) 180 C) 200 D) 240 E) 280

05 Un jovencito compra limones a ***9*** por ***2*** soles y los vende a ***10*** por ***3*** soles . Para ganar ***7*** soles, ¿cuántos limones debe vender?

A) 80 B) 60 C) 70 D) 90 E) 40

06 Entre Juan y Claudia tienen ***S/.76*** , si el cociente que se obtiene al dividir lo que tiene Juan y lo de Claudia es ***5*** y aun a Juan le sobra ***4*** , ¿cuánto tiene Claudia?

A) S/. 12 B) 14 C) 16 D) 10 E) 11

07 La diferencia de dos números es ***1612***. ¿Cuál será la nueva diferencia en los siguientes casos?

I) Si el minuendo disminuye en ***140*** unidades y el sustraendo aumenta en ***60*** unidades.

II) Si el minuendo aumenta en ***80*** unidades y el sustraendo aumenta en ***90*** unidades.

A) 1 412 ; 1 602 B)1 410 ; 1 622 C)1 002 ; 1 602
D)1 412 ; 1 612 E)1 422 ; 1 602

08 Nataly tiene ***S/. 90*** más que Lucia y su dinero es el es el cuádruple del de Lucia, ¿cuánto tiene Lucia?

A) S/. 20 B) 50 C) 60 D)40 E) 30

09 Un obrero y un capataz cobran por ***48*** días de trbajo ***S/.1200*** . Si el jornal del capataz es el cuádruple del obrero. ¿Cuánto cobrará el obrero por ***14*** días de trabajo?

A)S/110 B)120 C)70 D)100 E)60

10 Una maquina ***"A"*** puede etiquetar ***360*** latas de conservas en una hora y otra máquina ***"B"*** puede etiquetar ***140*** latas en media hora . Si las dos empezaron a trabajar juntos, ¿dentro de cuantas horas una habrá etiquetado ***480*** latas más que la obra?

A) 1 B) 4 C) 5 D) 8 E) 6

11 Dos móviles están separados ***1 800 m*** y parten al encuentro . Si sus velocidades son de ***30 m/s*** y ***50m/s***, ¿después de cuánto tiempo la nueva separación será de ***200 m***?

A) 20 s B) 30 C) 18 D) 32 E) 24

12 Un reloj de oro cuesta el séxtuplo de uno plata . Si por ***6*** relojes de oro y ***5*** de plata se pagó ***$984*** , ¿cuánto se pagará por ***1*** de oro y ***4*** de plata?

A) $ 180 B) 260 C)264 D) 240 E) 320

13 Un polo cuesta ***13*** soles más que un par de medias . Si se compraron ***4*** polos y ***6*** pares de medias y se pagó ***S/.82***, ¿cuánto cuesta un polo

A) S/. 3 B) 8 C) 7 D) 16 E) 18

14 El producto de dos números es ***240***. Si uno de los factores se duplica y el otro se triplica , ¿en cuánto aumenta el producto?

A)1 000 B)1 200 C)3 600 D)800 E)900

15 En cierto concurso salen premiados en un juego ***3*** hombres , ***4*** mujeres y ***7*** niños , recibiendo entre todos ellos ***S/.590*** . Si se sabe que una mujer recibe tanto dinero como ***4*** niños, y un hombre recibe como ***3*** mujeres, ¿cuánto recibirían un hombre , ***3*** mujeres y ***9*** niños en total?

A) S/. 480 B) 280 C) 360 D) 520 E) 330

16 En el producto de ***60*** por ***90***, se agrega ***60*** unidades al multiplicando. ¿Qué debe hacerse al multiplicador para que no se altera el producto?

A) aumentar 45 B) aumentar 25 C) disminuir 40
D) aumentar 60 E) disminuir 45

17 ¿Qué hora será cuando las horas que falten transcurrir sean la tercera parte de las ya trascurridas?

A)9 p.m. B)8 p.m. C)6 p.m. D)2 p.m. E) 4 p.m.

18 La suma de dos números es ***404*** y su respectiva diferencia es el menor cuadrado perfecto mayor que ***180*** . ¿cuál es el número menor ?

A)108 B)114 C)104 D)160 E)100

19 Juan piensa : "Si hubiera nacido en el último año bisiesto que pasó tendría en el ***2017*** la mitad de la edad que tengo". ¿Qué edad tengo?

A)30 años B)28 C)36 D)34 E)32

20 Calcular el menor número entero mayor que el menor número de cuatro cifras diferentes

A)1 102 B)1 024 C)1 026 D)1 023 E)1000

TAREA DOMICILIARIA

01 La suma de los tres términos de una sustracción es *1 440*. Si el sustraendo es la mitad del minuendo, ¿cuál es la diferencia?

A)120 B)720 C)400 D)360 E)480

02 José tiene *6* años más que Luis y hace *10* años la suma de sus edades era *32*. ¿Cuál es la edad de José?

A)23 años B)24 C)29 D)21 E)20

03 El cociente de dos números es *7* y su respectiva suma es *240*, ¿cuál es el número menor?

A) 30 B) 60 C) 50 D) 40 E) 90

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Un número es aumentado en *20*, el resultado es duplicado y finalmente el nuevo resultado es dividido entre *10*, obteniéndose *6*. ¿cuál era el número inicial?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

02 Multiplicar por *6* la edad de Sergio ; al resultado le añadimos *12* y dividimos el nuevo resultado entre *7* obteniendo finalmente *6*. ¿Cuál es la edad de Sergio?

A) 4 años B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

03 Multiplicamos un número por *4*, producto al que luego restamos *12*, dividiendo enseguida el resultado entre *3*, para volver a multiplicar por *6*, añadiendo luego *3* al resultado, dividiendo finalmente entre *3* resulta *89*. ¿Cuál es el número inicial?

A) 32 B) 34 C) 36 D) 39 E) 42

04 Cada vez que Juan apuesta pierde la mitad de su dinero. Si luego de jugar *3* veces seguidas, Juan se queda con *S/.20*. ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) 160 B) 180 C) 140 D) 120 E) 80

05 En el problema anterior, ¿cuánto dinero perdió Juan?

A) 160 B) 140 C)120 D) 80 E) 80

06 Un número se multiplica por, al resultado se le extrae la raíz cuadrada, al resultado se le suma *5* y por último se resta *11* obteniéndose cero. El número inicial era :

A)10 B)11 C)12 D)13 E)14

07 De un recipiente lleno de agua, se extraen *12lts*, luego se derrama la mitad de líquido, enseguida se agregan *11lts.* y finalmente se consume la mitad de los que sobraba. Si al final quedan *18lts*. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

A) 50lts B) 60 C) 62 D) 64 E) 72

* Juan sale de su casa con "*n*" soles: Primero gasta la mitad de su dinero en la compra de *10* chocolates, luego gasta la mitad del resto en *200* caramelos y finalmente gasta *S/. 8* en la compra de *40* chicles. Si retorna a su casa con *S./2* :

08 ¿Cuál es el valor de "*n*"?

A) S/. 48 B) 42 C) 40 D) 36 E) 32

09 ¿Cuánto costaría comprar *12* chocolates?

A) S/. 22 B) 12 C) 24 D) 18 E) 21

10 ¿Cuánto costaría comprar *50* caramelos y *10* chicles?

A) 4 soles B) 4,5 C) 5 D) 6 E) 8

11 ¿Cuánto dinero gastó?

A) S/.36 B) 40 C) 39 D) 37 E) 38

* Alberto, Juan y Segio deciden jugar a las cartas con la condición que el ganador recibirá la mitad del dinero que tengan en ese instante los otros *2*. Si luego de *3* partidas, en las que ganaron en el orden mencionando al inicio, terminan con *S/.40, S/.60* y *S/. 120* respectivamente.

12 ¿Cuánto dinero tenía Alberto al inicio?

A)40 soles B)60 C)90 D)100 E)120

13 ¿Quién ganó más dinero en el juego? ¿Cuánto?

A)Juan–S/.40 B)Sergio –S/.40 C)Alberto – S/.60 D) Sergio –S/.60 E) Juan – S/.20

14 ¿Quién perdió más dinero en el juego? ¿Cuánto?

A) Alberto –S/.60 B) Juan –S/.40 C) Juan–S/.60 D) Alberto –S/.40 E)Sergio –S/80

15 Si juegan *3* partidas más (ganan en el mismo orden), ¿con cuánto dinero termina Sergio?

A)S/.100 B)120 C)125 D)135 E)140

16 Cuando Matilde saca agua de un pozo, extrae la mitad del contenido y *10ℓ* más. Si después de *4* extracciones quedan aún *20ℓ*, ¿cuántos lts había inicialmente en el pozo?

A)310ℓ B)320 C)480 D)620 E)560

17 Según el problema anterior, ¿cuántos litros sacó Mafalda en la segunda extracción?

A)150lts B)160 C)170 D)120 E)130

* *A, B* y *C* juegan a los dados tal que el perdedor triplica el dinero a los otros dos. Si pierden en el orden mencionado y al final cada uno tiene *S/.27*

18 ¿Cuánto dinero tenía al inicio "*A*"?

A) 38 B) 55 C) 60 D) 63 E) 67

19 ¿Quién ganó más dinero?

A) A B) B C) C D) B ó C E) A ó C

20 Luego de las dos primeras partidas. ¿Cuánto dinero tenían entre "A" y "B"?

A) S/.72 B) 63 C) 50 D) 18 E) 16

TAREA DOMICILIARIA

01 En cada caso hallar la incógnita y completar los demás recuadros .

$\boxed{x}\times 5=\boxed{}+5=\boxed{}\div 4=\boxed{}+6=\sqrt{\boxed{}}=10$

A)2 B)8 C)10 D)12 E)14

02 $\boxed{x}\times 6=\boxed{}+3=\boxed{}+2=\sqrt{\boxed{}}=\boxed{}\times 7=\boxed{}-10=18$

A) 6 B) 10 C) 3 D) 9 E) 12

03 $\boxed{x}\times 6=\boxed{}+3=\boxed{}+2=\sqrt{\boxed{}}=\boxed{}\times 7=\boxed{}-10=18$

A) 64 B) 45 C) 42 D) 28 E) 3

* "A", "B" y "C" juegan a las cartas con la condición que el perdedor entregará la mitad de su dinero el cual será repartido en partes iguales entre los ganadores .

Si juegan tres partidas donde pierden en orden alfabético y luego de los cules terminan con *S/.400, S/.200 y S/.200* respectivamente

04 ¿Cuánto tenía 'A" al inicio del juego?

A)S/.450 B)500 C)525 D)475 E)375

05 ¿Cuánto dinero ganó o perdió "C"?

A) S/.25 B)60 C)75 D)100 E)80

06 ¿Quién ganó más dinero?

A) Sólo A B) Sólo B C) Sólo C D) A y C E) B y C

* En cada caso, determinar "x".

07 $\boxed{x}+12=\boxed{}\div 5=\boxed{}-2=\boxed{}\times 12=24$

A)12 B)14 C)10 D)15 E)20

08 $\boxed{x}\div 4=\boxed{}+6=\boxed{}\times 8=\boxed{}+1=\sqrt{\boxed{}}=9$

A)10 B)8 C) 36 D)14 E)22

09 $\boxed{x}+6=\boxed{}\times 7=\boxed{}-20=\boxed{}-1=\sqrt{\boxed{}}=\boxed{}\times 2=14$

A)1 B)6 C)5 D)8 E)2

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se tiene un número de *2* cifras cuya suma de cifras es igual a *15*. Se toma el número y se le suma el número invertido, al resultado se le suma el resultado invertido y asi sucesivamente hasta obtener un número capicúa por primera vez. ¿Cuántas sumas serán necesarias?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 8 E) 6

02 Por las "x" primeras llamadas telefónicas se paga "a" soles por cada una y por cada llamada adicional se paga "b" soles por cada una. Si hice "z" llamadas $(z > x)$, ¿cuánto debo pagar?

A) xa B) $xa + (z - y)$ C) $xa + bz$ D) $xa + (z - x)b$ E) zab

03 ¿Cuál es el número comprendido entre *200* y *300*, tal que, leído al revés, es el doble del número que sigue al original?

A) 297 B) 295 C) 237 D) 247 E) 252

04 En la Batalla de Pizza, donde se enfrentaron los pueblos de Mozzarella y Lasagna, participaron *16 202* combatientes en total. El ejército de Mozzarella tuvo *248* bajas y el de Lasagna *706*, quedando al final ambos con el mismo número de hombres. Calcular cuántos hombres tenía cada ejército al empezar. (Dar como respuesta la suma de sus cifras)

A)12 B)14 C)26 D) 38 E) 24

05 Se desea distribuir *S/. 1 800* entre cierto número de personas en partes iguales, pero como *4* de ellas renuncian a su parte, a cada una de las restantes ahora les toca *S/. 15* más. ¿Cuántas personas eran al comienzo?

A) 30 B) 18 C) 24 D) 36 E) 20

06 El lunes gasté la mitad de lo que tenía y *S/. 2* más; el martes la mitad de lo que me quedaba y *S/. 2* más ; el miércoles la mitad del nuevo resto y *S/. 2* más hasta que me quedé sin nada. ¿Cuánto tenía el lunes antes de empezar a gastar?

A) S/. 22 B) S/. 28 C) S/. 24 D) S/. 30 E) S/. 26

07 Un estante puede guardar *24* libros de Aptitud Matemática y *20* libros de Literatura o *36* libros de Aptitud Matemática y *15* de Literatura. ¿Cuántos libros de Aptitud Matemática puede contener el estante?

A) 60 B) 78 C) 72 D) 96 E) 80

08 Un cazador regresa de cacería y al ser preguntado por su esposa , le dice: "¡Me fue muy bien!, entre patos y conejos que he cazado hay *86* cabezas y *246* patas". ¿Cuántos animales de cada tipo cazó?

A) 35 conejos y 51 patos.
B) 43 conejos y 43 patos.
C) 50 conejos y 36 patos.
D) 37 conejos y 49 patos.
E) 36 conejos y 50 patos.

09 Los boletos de entrada para una sala cinematogrática cuestan *$ 4* para adultos y *$ 3* para estudiantes. Si en *3* días se vendieron *810* boletos y los ingresos totales fueron de *$ 2 853*, ¿cuántos boletos para estudiante fueron vendidos?

A) 210 *B) 390* *C) 380*
D) 410 *E) 387*

10 Se sabe que *2* libros de Aptitud Matemática equivalen a *5* libros de Aptitud Verbal, *7* libros de Aptitud Verbal equivalen a *8* libros de Álgebra, *11* libros de Álgebra equivalen a *7* libros de Geometría, *4* de Geometría equivalen a *22* de Trigonometría. ¿Cuántos libros de Aptitud Matemática equivalen a *10* de Trigonometría?

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 2* *E) 7*

11 Un comerciante compra cuadernos a *4* por *85* soles y luego los vende a *3* por *70* soles. Si ha obtenido una ganancia de *6 500* soles, ¿cuántos cuadernos vendió?

A) 3 000 *B) 3 120* *C) 3 210*
D) 3 100 *E) 3 102*

12 Un comerciante compra artículos a *3* por *S/. 35* y los vende a *5* por *S/. 70*. Si los *50* artículos que le quedan representa su ganancia, ¿cuántos artículos en total compró?

A) 300 *B) 250* *C) 350*
D) 400 *E) 450*

13 Tres hombres tienen cada uno un cierto número de soles al llegar a una feria. El primero compra vino a los otros dos, pagándoles tantos soles como ellos tienen. Después, el segundo compra garbanzos a los otros dos, pagando a cada uno tantos soles como ellos tienen. Por último, el tercero compra aceite a los otros dos, pagándole a cada uno tantos soles como ellos tienen. Terminados estos negocios se vuelven a su casa con *S/. 48* cada uno. ¿Con cuánto había llevado a la feria el primero de ellos?

A) S/. 24 *B) S/. 38* *C) S/. 42*
D) S/. 56 *E) S/. 78*

14 Un ómnibus sale de un punto *A* a otro punto *B* y en uno de sus viajes recaudó *S/. 460*. El precio único del pasaje es *S/. 5*. En cada paradero bajan *2* pasajeros pero suben *5* y el ómnibus llegó a *B* con *62* pasajeros ¿Cuántos pasajeros tenía el ómnibus al salir de *A*?

A) 15 *B) 25* *C) 28* *D) 17* *E) 14*

15 Un ómnibus interprovincial hace el servicio Lima – Barranca. En uno de sus viajes recaudó *S/. 330* por los pasajes adultos y *S/. 175* por los niños. Durante el trayecto se observó que por cada adulto que bajó subieron *3* niños y por cada niño que bajó subieron *2* adultos. Si el ómnibus llega a Barranca con *20* adultos y *26* niños, ¿con cuántos adultos y niños salió del paradero inicial (Lima), si el pasaje de un adulto es *S/. 11* y el de un niño es *S/. 5*?

A) 11 y *6* *B) 10* y *17* *C) 12* y *5*
D) 12 y *6* *E) 11* y *5*

16 Cierta cantidad de dinero que fluctúa entre *S/. 120* y *S/. 150* es repartida entre *6* personas, de tal manera que las cantidades que ellas reciben son todas diferentes, mayores o iguales a *10* y menores que *100*. Si las cantidades recibidas por cada una de las personas se pueden expresar usando cifras a, b y 0 (a y b diferentes a cero), calcular $a + b$.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

17 Un alumno efectuó una suma de varias cantidades positivas y negativas obteniendo como resultado *200*. Sin embargo una de las cantidades era realmente *–12,5* pero por error el alumno lo tomó como positivo. Entonces el resultado correcto de la suma total debió ser:

A) 212,5 *B) 175* *C) 182,5*
D) 187,5 *E) 225*

18 Un padre lleva a su hija de su casa a la universidad y de la universidad se va al trabajo, del trabajo regresa a su casa. Se sabe que la distancia de la casa a la universidad es *10 km*, de la universidad al trabajo es de *7 km*, y del trabajo a la casa *15 km*. Además el carro tiene un tanque de *2* galones y rinde *20 km* por galón. Si el tanque está lleno y hace el recorrido completo, ¿cuántos galones sobran para el día siguiente?

A) 2/5 galón *B) 1/8 galón*
C) 4/5 galón *D) 3/4 galón*
E) 5/1 galón

19 Una secretaria tipea cierta cantidad constante de cartas por hora. Después de haber tipeado *72* cartas, un virus informático borra *36* de éstas, motivo por el cual se demora *3* horas más en terminar todas las cartas. ¿Cuántas cartas tipea por hora y cuántas tipeó en total sabiendo que se demoró *15* horas?

A)12 y *144* *B)12* y *180* *C)12* y *120*
D)15 y *120* *E)15* y *180*

20 Un comerciante compra *40* jarrones a *S/. 70* cada uno. Después de haber vendido *12* con una ganancia de *S/. 20* por cada uno, se le rompieron *5*. ¿A qué precio vendió cada uno de los restantes si al final la ganancia global fue de *810* soles?

A) 120 *B) 115* *C) 112*
D) 124 *E) 110*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) B	2) D	3) B	4) C	5) E	6) A	7) A	8) E	9) [illegible]	10) D
11) A	12) D	13) D	14) B	15) E	16) E	17) C	18) C	19) D	20) B
1) D	2) C	3) A							

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) C	2) B	3) C	4) A	5) A	6) C	7) C	8) C	9) C	10) B
11) E	12) A	13) B	14) A	15) C	16) D	17) B	18) B	19) C	20) D
1) A	2) C	3) E	4) B	5) A	6) B	7) A	8) C	9) D	

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1) C	2) D	3) B	4) D	5) C	6) B	7) C	8) D	9) E	10) A
11) B	12) A	13) E	14) D	15) C	16) D	17) B	18) A	19) A	20) E

ECUACIONES ELEMENTALES

CAPITULO 021

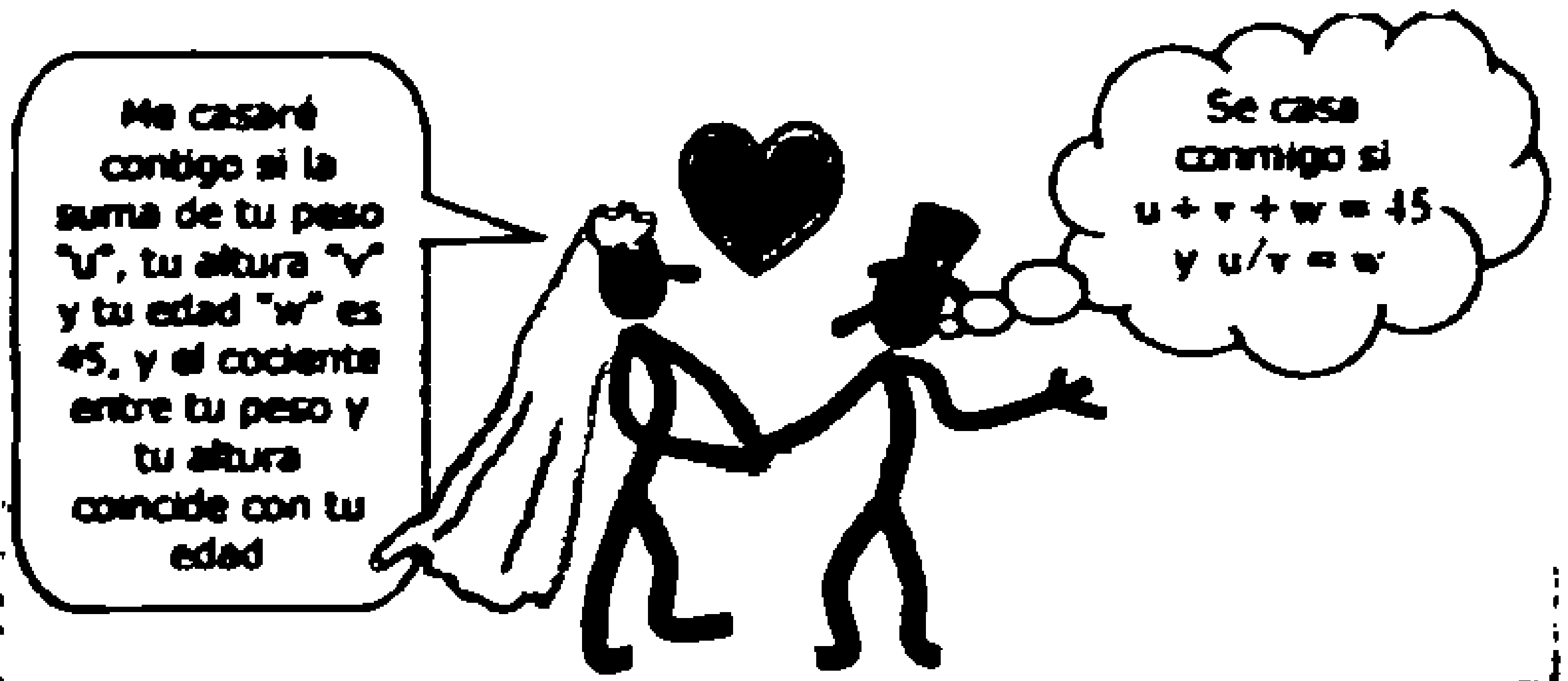
OBJETIVOS :

Proporcionar al alumno los principios elementales de ecuaciones matemáticas que se requieren para los cursos de cálculo .

**Comprender el concepto de ecuación como una igualdad en la que hay que hallar el valor de la incógnita que la hace verdadera.*

**Identificar la transposición de términos en una ecuación como método para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla.*

**Reconocer un sistema de ecuaciones como dos ecuaciones con dos incógnitas relacionadas entre sí.*



INTRODUCCIÓN :

La primera fase, que comprende el periodo de ***1700*** a. de C. a ***1700*** d. de C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (***300*** a. de C.), llamada ***álgebra geométrica***, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viéte ***(1540-1603)***, marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes ***(1596-1650)*** contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler ***(1707-1783)*** la define como la teoría de los «cálculos con cantidades de distintas clases» (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones). Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax+b=c$ han pasado más de ***3000*** años.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid ***1650*** a.C y el de Moscú ***1850*** a.C) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones. Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma : $x + ax = b$

$$x + ax + bx = 0$$

donde a , b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban ***aha*** o ***montón.***

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhid responde al problema siguiente:

«Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24».

En notación moderna, la ecuación sería :

$$x+ x/7= 24$$

La solución la obtenían por un método que hoy conocemos con el nombre de «método de la falsa posición» o «regula falsi». Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos obtendremos la solución exacta.

Supongamos que fuera ***7*** la solución, al sustituir en la x nos daría : $7 + 1/7\times 7 = 8$, y como nuestra solución es ***24*** , es decir , 8×3 , la solución es $24 = 3\times8$, ya que $3\times(7 + 1/7\times7) = 24$.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad), cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto el simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo ***600*** a. de C. a ***300*** d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado

elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

Entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación $5x=8$. En las tablas en base sexagesimal hallaban el recíproco de cinco que era ***12/60*** y en la tabla de multiplicar por ***8***, encontramos $8 \times 12/60=966/60$

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (***250*** d. C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era como hemos visto, mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos ***V*** o ***VI*** un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

«Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años.De todo esto, deduce su edad.»

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo ***III*** d. de C.) son los *Sulvasütras*, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. En éstos aparece el siguiente problema:

«Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado.»

Lo resolvían utilizando el método de la falsa posición, como los egipcios.

Posteriormente, Brahmagupta (siglo ***VII***) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura *ya*, y las operaciones con la primera sílaba de las palabras.

Dada la ecuación $ax + b = cx + d$, la solución vendrá dada dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes de los desconocidos. Estos métodos pasaron a los árabes que los extendieron por Europa. Al algebrista Abu-Kamil (siglo ***IX*** y ***X***) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición. Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen*, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura + longitud = ***7*** manos

longitud + anchura = 10 manos

Para resolverlo comienzan asignando el valor ***5*** a una *mano* y observaban que la solución podía ser: ***anchura= 20 , longitud =30***. Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$y + 4x = 28$$
$$y + x = 10$$

restando la segunda de la primera, se obtiene $3x= 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones donde alguna de ellas era cuadrática.

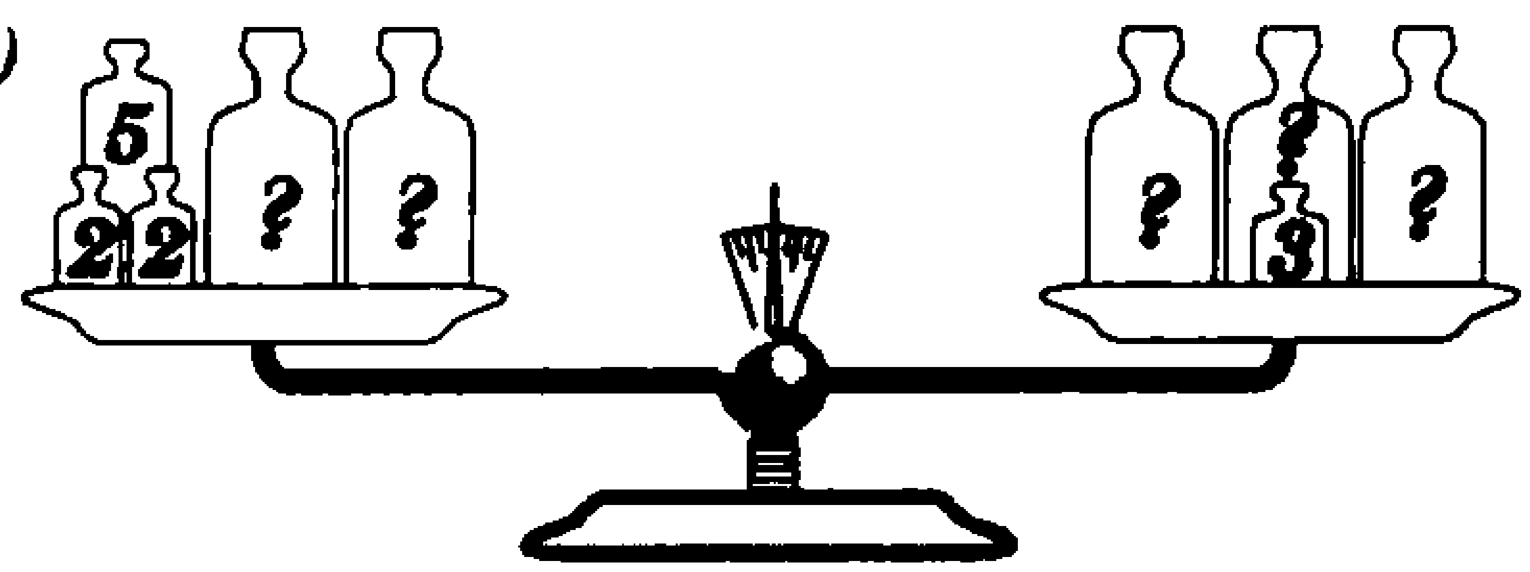
Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (***400*** a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de ***n*** ecuaciones con ***n*** incógnitas.

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos. Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos indios. No obstante, no llegan a obtener métodos generales de resolución, sino que resuelven tipos especiales de ecuaciones.

El libro ***El arte matemático***, de autor chino desconocido (siglo ***III*** a. de C.), contiene algunos problemas donde se resuelven ecuaciones. En ellos encontramos un esbozo del método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Uno de dichos problemas equivale a resolver un sistema de tres ecuaciones lineales por dicho método matricial.

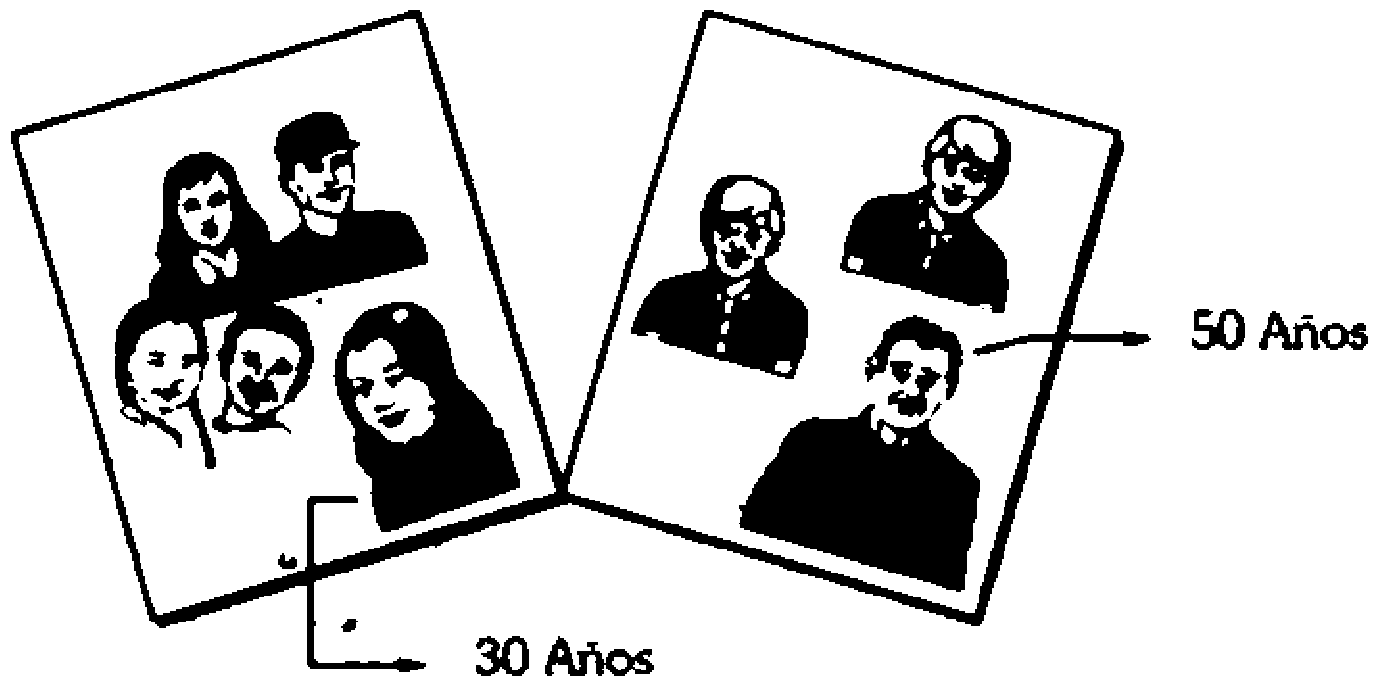
Observa los siguientes gráficos :

I)



Aquí, la balanza está en equilibrio.

II)



Aquí la suma de las edades de las personas de cada fotografía es igual. ¿Qué de común pueden tener estos gráficos? Pues, que en ambos casos existen datos (pesas o personas) cuyo valor es desconocido.

A este valor desconocido se le denomina *INCÓGNITA*. Pensando un poquito, podrás determinar los valores para cada caso; sin embargo,una manera sencilla de hacerlo, es interpretado ambas situaciones como ecuaciones, así :

* Para el primer caso tenemos :

observa que la incógnita es denotada con la letra "x" ⇒ $\underbrace{5+2+2+2x}_{\text{platillo izquierdo}} = \underbrace{3x+3}_{\text{platillo derecho}}$ ⇓ *equilibrio de la balanza*

* Luego :

$$5+4+2x=3x+3$$
$$\Rightarrow 9+2x=3x+3$$
$$\Rightarrow 6=3x-2x \Rightarrow x=6$$

* Para el segundo caso : $\underbrace{4x+30}_{\text{fotografía izquierda}} = \underbrace{2x+42}_{\text{fotografía derecha}}$
* Luego :

$$4x-2x=42-30$$
$$\Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

DEFINICIÓN DE IGUALDAD:

Es la relación o comparación que nos indica que dos cantidades numéricas o literales tiene el mismo valor.

CLASES DE IGUALDAD

Se distinguen dos clases de igualdades:

A) IDENTIDAD (IGUALDAD ABSOLUTA) :

Es aquella que se verifica siempre.

EJEMPLOS :

* $18+x=18+x$
* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

B) ECUACIÓN (IGUALDAD CONDICIONAL) :

Es aquella igualdad que sólo se verifica para valores particulares(numéricos) atribuidos a sus letras.

EJEMPLOS :

$$\underbrace{5x-2}_{1^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{8}_{2^{do}\text{ miembro}}$$

Incógnita $x=2$

$$6y+9=3$$

Incógnita $y=-1$

Podemos definir a las ecuaciones como una igualdad entre ***expresiones algebraicas*** (sucesión de términos constituidos de números y letras, cada término es separado del otro por un signo «+» ó «–»),en la que intervienen una o más letras, llamadas *incógnita* (cuyo valor hay que averiguar). Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los miembros de la ecuación: *primer miembro* el de la izquierda, *segundo miembro* el de la derecha.

Se denomina *solución* de una ecuación a un valor o conjunto de valores de la incógnita (x), para los cuales se verifica la igualdad. Una ecuación puede tener ninguna, una o varias soluciones.

POR EJEMPLO :

$5x-9=1$ es una ecuación con una incógnita con una solución, $x=2x^2+y^2+5=0$ es una ecuación con dos incógnitas sin solución , pues la suma de dos cuadrados es un número positivo, a partir del cual no se puede obtener 0 sumándole 5.

$2x+3y=15$ es una ecuación con dos incógnitas que tiene infinitas soluciones , algunas de las cuales son $x=0$; $y=5$; $x=3$, $y=3$; $x=30$, $y=-15$.

Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución. Así, la ecuación $3x-7=x+1$ es equivalente a $2x-8=0$ porque ambas tienen como solución única $x=4$.

¿ CÓMO RESOLVER UNA ECUACIÓN?

Para resolver una ecuación de primer grado con coeficientes enteros, se recomienda :

I) Reducir términos semejantes (si los hubiera en cada uno de los miembros de la ecuación)

II) Realizar la transposición de términos es decir al pasar los términos de su miembro a otro de la

ecuación, estos pasan efectuando la operación inversa.

⇒ *Lo que está «sumando» pasa «restando»*
(+) (−)

$x + 6 = 9 \Rightarrow x = 9 - 6 = 3$
(−)

⇒ *Lo que está «restando» pasa «sumando»*

$x - 8 = 6 \Rightarrow x = 6 + 8 = 14$
(+)

⇒ *Lo que está «multiplicando» pasa «dividiendo»*

$3 \cdot x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{3} = 8$
(÷)

⇒ *Lo que está «dividiendo» pasa «multiplicando»*

$\frac{x}{6} = 9 \Rightarrow x = 9 \times 6 = 54$
(×)

III) Reducir nuevamente términos en cada miembro y finalmente "despejar" la incógnita.

Resolver una ecuación es hallar su solución (soluciones), o podemos llegar a la conclusión que no tiene solución . Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya apariencia sea más sencilla. Para averiguar el valor de x debe despejarse la letra incógnita. Para ello nos valemos de una propiedad matemática (propiedad uniforme) que nos permite poner un mismo número en ambos miembros de la expresión algebraica, siempre y cuando se mantenga la igualdad.

$4x-7=1$ (tenemos esta ecuación)

$4x-7+7=1+7$ (Para que el -7 se anule le sumamos 7, por eso se dice que un numero que está restando «pasa» sumando).

$4x=1$

$4x \div 4=1 \div 4$ (Para anular el cuatro que está multiplicando dividimos ambos miembros por 4, por eso se dice que un numero que está multiplicando «pasa» dividiendo)

Tiene una única solución: $x = 2$.

Sin embargo, hay tipos de ecuaciones para cuya resolución se requieren técnicas especiales. Es el caso, por ejemplo, de las ecuaciones cuadráticas y bicuadradas

EJEMPLO 1 :

Resolver : $3(x - 7) + 5 = 2x + 4$

RESOLUCIÓN :

* Primero desaparecemos los paréntesis, multiplicando 3 por $(x - 7)$:

$$3(x-7) + 5 = 2x + 4$$

$$\rightarrow 3x - 21 + 5 = 2x + 4$$

* Transponiendo términos :

$$3x - 2x = 4 - 5 + 21 \Rightarrow x = 20$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $3x - 8 = 12$

RESOLUCIÓN :

$$3x = 12 + 8 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

EJEMPLO 3 :

Resolver : $3(x + 2) = 5x - 12$

RESOLUCIÓN :

$$3(x+2)=5x-12$$
$$\Rightarrow 3x+6=5x-12$$
$$\Rightarrow 3x-5x=-12-6$$
$$\Rightarrow -2x=-18 \Rightarrow x=\frac{-18}{-2} \Rightarrow x=9$$

EJEMPLO 4 :

Resolver : $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando todo por ***M.C.M. (2;3)=6***

$$\Rightarrow \frac{6x}{2}+\frac{6x}{3}=5$$
$$\Rightarrow 3x+2x=5 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$

TIPOS DE ECUACIONES

Las ecuaciones con una incógnita suelen tener un número finito de soluciones, mientras que en las ecuaciones con varias incógnitas encontramos infinitas soluciones, las que suelen ser estudiadas cuando forman sistemas de ecuaciones. Podemos encontrar distintos tipos de ecuaciones con una incógnita: *polinómica, racionales, exponenciales, trigonométricas*

Las ecuaciones polinómicas son de la forma :

$P_{(x)}=0$, donde $P_{(x)}$ es un polinomio en x, que al trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

$3x^3 - 5x^2+3x+2=0$ es una ecuación polinómica.

Las ecuaciones polinómicas de primer grado

$ax+b=0$, se llama ecuación lineal. $5x+7=3$ (es lineal).

$(x-5)^2+3=x^2-1$ (No hay que dejarse engañar por las apariencias , esta ecuación también es lineal. Al desarrollar y simplificar se obtiene : $-10x+29=0$).

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado que responden a la estructura : $ax^2+bx+c=0$, se las denomina cuadráticas. Son ecuaciones de este tipo: $x^2-5x+3=0$, ó $(x-2)^2+7x=5+x$. (En este caso , se despeja x de manera que al final queda una ecuación cuadrática , o sea, un polinomio de grado dos. Las ecuaciones radicales son aquellas en las que la incógnita está bajo un signo radical , como las ecuaciones racionales son ecuaciones en las que aparecen cocientes de polinomios. En las ecuaciones exponenciales la incógnita está en un exponente: $2^x=8$

En las ecuaciones logarítmicas (inversa de las de tipo exponencial) la incógnita se encuentra afectada por el logaritmo, acordarse que la solución debe estar de acuerdo con el dominio de la función logarítmica): $Log(x+1)=10$.

En las ecuaciones trigonométricas la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica; por ejemplo : $Sen\left(\pi/_4+x\right)-\cos x=0$

En este acápite nos interesa la siguiente clasificación:

Ecuaciones Compatibles

- ***Determinadas:*** *Número finito de soluciones .*

$$2x^2=4$$

- ***Indeterminadas:*** *Número infinito de soluciones .*

$$0x=0$$

INCOMPATIBLES :

«Absurdas» , no aceptan soluciones .

$$0x=3$$

ECUACIONES LINEALES

* Forma : $\boxed{ax+b=0}$; $a\neq 0$
* Solución única (por ser de 1er . grado)

$$\boxed{x=-\frac{b}{a}}\text{ (una raíz)}$$

* Discusión :

I) Si: $a=0$ y $b=0$

$$\Rightarrow x=\frac{0}{0}\text{.........(Indeterminada)}$$

II) Si: $a=0$ y $b\neq 0$

$$\Rightarrow x=\frac{b}{0}\text{..........(No existe)}$$

III) Si: $a\neq 0$ y $b=0$

$$\Rightarrow x=\frac{0}{a}=0$$

IV) Si : $a\neq 0$ y $b\neq 0$

$\Rightarrow x$ [illegible] ....(x es única)

ECUACIONES CUADRÁTICAS

* Forma : $ax^2+bc+c=0$; $a\neq 0$
* Cálculo de sus raíces :

I) Por aspa simple.

II) Por fórmula general.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* Donde : $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$ ... (Discriminante)

EJEMPLO:

Resolver : $x^2-7x+12=0$

RESOLUCIÓN:

* Primero identificamos los valores de ***a, b*** y ***c***:

$$\underbrace{1}_{=a}x^2\underbrace{-7}_{=b}x+\underbrace{12}_{=c}=0$$

* Así tenemos: $a=1$, $b=-7$; $c=12$; luego aplicamos la fórmula:

$$x_1,x_2=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(12)}}{2(1)}$$

* Entonces obtenemos: $x_1,x_2=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}$

* Luego : $x_1=\dfrac{7+\sqrt{1}}{2}$ ó $x_2=\dfrac{7-\sqrt{1}}{2}$

$$x_1=4 \quad ó \quad x_2=3$$

DISCUSIÓN:

* ***Caso I :*** $\Delta=0$

La ecuación presenta 2 raíces iguales , además :

$$x_1=x_2=\frac{b}{2a}\text{ .....(Tiene solución única)}$$

EJEMPLO :

$$x^2-2x+1=0\Rightarrow(x-1)^2=0\Rightarrow x=1$$

* *Caso II :* $\Delta \geq 0$

La ecuación presenta *2* raíces reales y diferentes (x_1 y x_2) ó *2* soluciones reales .

* *Caso III :* $\Delta < 0$

La ecuación admite *2* raíces imaginarias conjugadas

EJEMPLO :

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = i \quad ó \quad x = -i$$

PROPIEDADES :

Sea : $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$; donde x_1 y x_2 son sus raíces , se verifica :

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \text{ "Suma de raíces"}$$

$$\boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}} \text{ "Producto de raíces"}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN DE 2DO GRADO

x^2 - (suma de raíces) x + (producto de raíces) = 0

ó también : $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

ECUACIONES CÚBICAS

- Forma : $\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$; $a \neq 0$
- Raíces : x_1, x_2, x_3
- $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

SISTEMA DE ECUACIONES

Los Sistemas de ecuaciones son conjunto de ecuaciones cuyas soluciones comunes se pretende hallar. Para indicar que varias ecuaciones forman un sistema , se abarca el conjunto de todas ellas con una llave.

Las ecuaciones de un sistema suelen tener dos o más incógnitas , por lo que cada una de ellas puede tener infinitas soluciones . Se llama solución del sistema a una solución común a todas las ecuaciones que lo forman. Resolver un sistema de ecuaciones es hallar todas sus soluciones o concluir que no tiene solución. Si dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones o ambos carecen de solución , se dice que son equivalentes . Los sistemas de ecuaciones sin solución se llaman incompatibles y los que tienen solución, compatibles.

Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones $2x\text{-}5y=16$ y $4x + y=10$ se expresa así :

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \ ......(I) \\ 4x + y = 10 \ ....(II) \end{cases}$$

La solución de este sistema es $x = 3$, $y = -2$ porque es solución de ambas ecuaciones. Es, por tanto, un sistema compatible.

EL SISTEMA es incompatible, pues no tiene solución.Los sistemas de ecuaciones lineales son especialmente interesantes por las múltiples aplicaciones que tienen en diversas ciencias.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una ecuación con varias incógnitas es lineal si es de la forma $ax + by = c$, $ax + by + cz = d$,..., es decir, si las incógnitas aparecen sin exponentes (elevadas a *1*). Un sistema de ecuaciones lineales compatible, o bien tiene solución única (es determinado), o tiene infinitas soluciones (es indeterminado).Existen varios métodos elementales para resolver sistemas de ecuaciones: el método de sustitución, el método de igualación y el método de reducción. A continuación se aplican en la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN:

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra , la cual se transformará en una ecuación con una incógnita que se puede resolver. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra. Para resolver el sistema por el método de sustitución conviene despejar la *y* de la segunda ecuación:

$y = 10 - 4x$ (ahora se sustituye su valor en la primera).

$$2x - 5(10 - 4x) = 16$$

Se resuelve la ecuación resultante, pues sólo tiene una incógnita : $2x - 50 + 20x = 16$

$$\Rightarrow 22x = 66 \Rightarrow x = 3$$

Ahora el valor de x se sustituye en la expresión de y obtenida antes :

$$y = 10 - 4x = 10 - 4\times 3 = 10 - 12 = -2$$

Se ha obtenido así la solución $x = 3$, $y = -2$.

EL MÉTODO DE IGUALACIÓN:

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita. Para resolver por igualación el sistema anterior, se puede

despejar la x en ambas ecuaciones e igualar sus expresiones:

$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+y=10 \end{cases}$ (despejamos x en cada una de las expresiones para igualarlas y, de esa manera, poder hallar el valor de y)

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{16+5y}{2} \\ x=\dfrac{10-y}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16+5y}{2}=\frac{10-y}{4} \Rightarrow 4(16+5y)=2(10-y)$$

$\Rightarrow y=-2$

Por último, se sustituye el valor de y en alguna de las expresiones de x : $x=\dfrac{16+5(-2)}{2}=3$

Se ha obtenido la solución $x=3, y=-2$.

EL MÉTODO DE REDUCCIÓN :

consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

Para resolver por reducción el mismo sistema:

$$\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+y=10 \end{cases}$$

se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por 2 con el fin de que el coeficiente de la x sea el mismo en ambas ecuaciones :

$$4x-10y=32 \quad \text{y} \quad 4x+y=10$$

Ahora, restando miembro a miembro se obtiene la ecuación siguiente: $-11y=22 \Rightarrow y=-2$.

Y se sustituye en una de las ecuaciones iniciales:

$2x-5(-2)=16 \Rightarrow 2x+10=16 \Rightarrow 2x=6$

$\Rightarrow x=3$

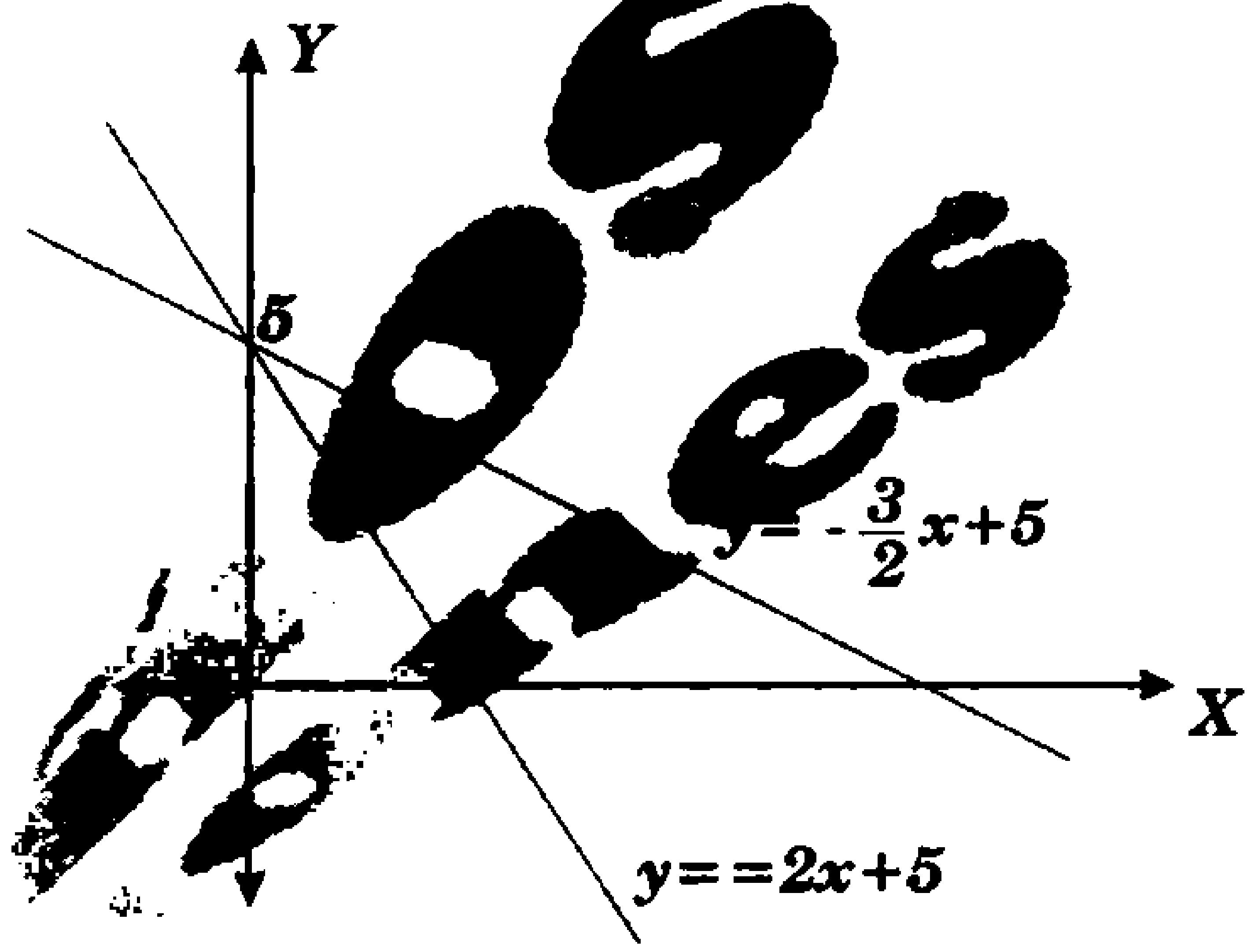
La solución es $x=3, y=-2$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en un par de rectas, si éstas se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema. Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible. Si las rectas son coincidentes (son la misma recta), el sistema es compatible indeterminado: sus soluciones son todos los puntos de la recta. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+5 \\ 2x+y=5 \Rightarrow y=-2x+5 \end{cases}$$

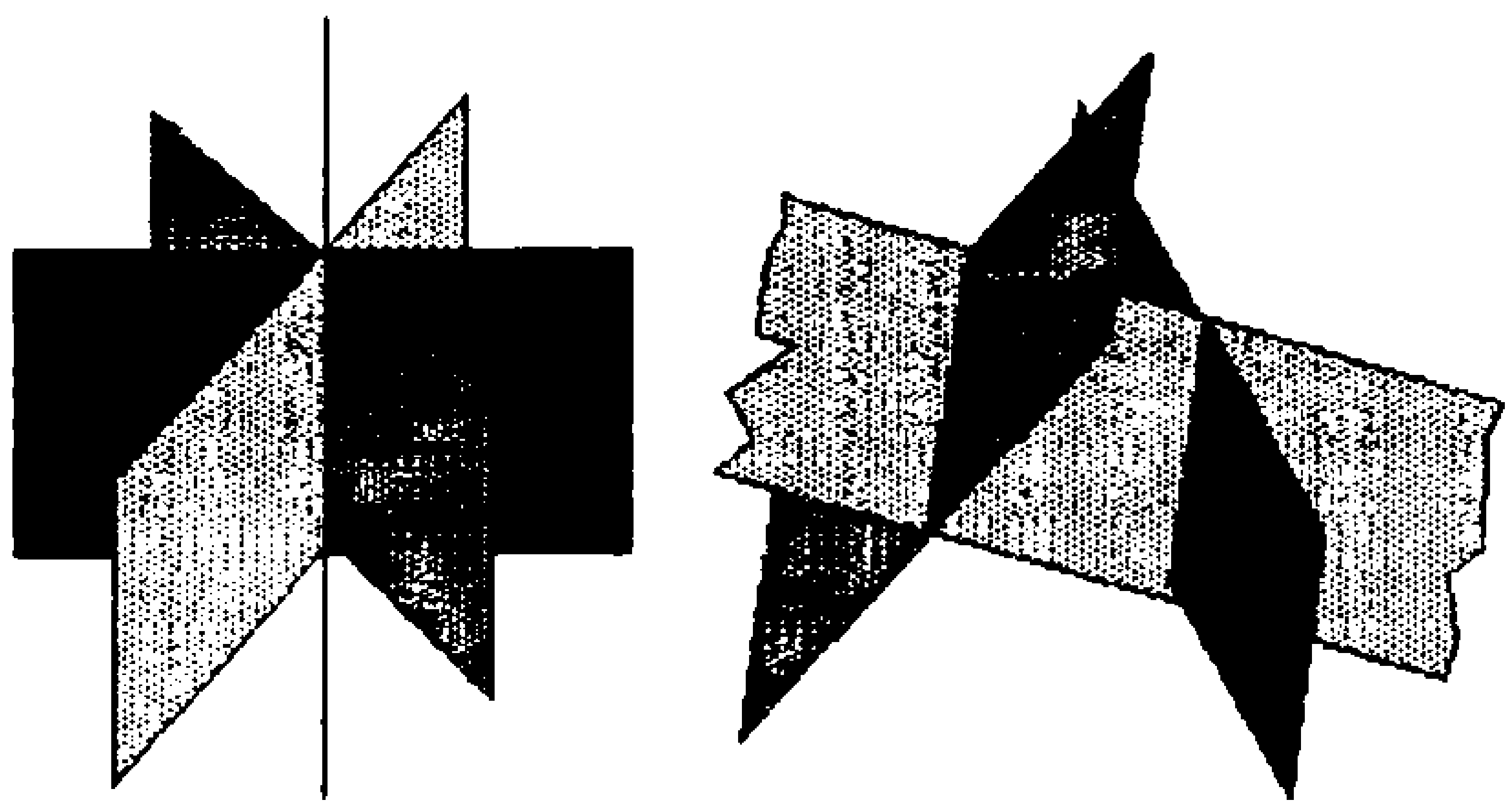
Se trazan ambas rectas y el punto donde se cortan es la solución del sistema.



El punto en que se cortan las rectas, *(0;5)*, es la solución del sistema : $x=0, y=5$.

Una ecuación lineal con tres incógnitas :

$ax+by+cz=d$, se representa generalmente mediante un plano en un sistema de $\mathbb{R}^3$. La representación de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas consiste en tres planos cuya posición relativa determina que el sistema sea compatible o incompatible. Si los tres planos se cortan en una recta, el sistema es compatible indeterminado, pues tiene infinitas soluciones. Si no se cortan (no existe ningún valor para x, y, z) el sistema es incompatible.



Si el sistema de ecuaciones con tres incógnitas puede ser representado por rectas en un espacio (por lo menos cuatro dimensiones), en ese caso si las tres se cortan en un punto el sistema es compatible determinado.

MÉTODO DE LOS DETERMINANTES

- Sea : $ax + by = c$

  $mx + ny = p$

* Las incógnitas se obtienen como :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

- Donde :

* Δx es determinante de «x»:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix} = cn - pb$$

* Δy es determinante de «y»:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix} = cn - pb$$

* Δs es determinante del sistema:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = an - mb$$

DISCUSIÓN :

I) Si : $\Delta s \neq 0$ (solución única), será sistema compatible determinado .

II) Si : $\Delta s = 0$ y $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, será un sistema incompatible. (absurdo).

III) Si : $\Delta s = 0 \wedge \Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, será un sistema compatible indeterminado .

EJEMPLO :

Resolver : $3x + 7y = 9$

$5x - 11y = 13$

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = -33 - 35 = -68$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -99 + 91 = -8$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 39 - 45 = -6$$

* Luego : $x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{-8}{-68} = \frac{2}{17}$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{-6}{-68} = \frac{3}{34}$$

OJO :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} n & p \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} m & p \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} m & n \\ x & y \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Resolver : $3x - 8 = 2x + 12$

A)10 B)12 C)20 D)40 E)0

RESOLUCIÓN :

$$3x - 8 = 2x + 12$$

I) Transponiendo términos: $3x - 2x = 12 + 8$

II) Reducción de T.S. : $x = 20$

Conjunto solución = C.S. = {20}

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Resolver : $(x + 3)^2 + 7 = (x + 6)(x + 4)$

A)1 B)2 C)-2 D)0 E) 4

RESOLUCIÓN :

*Primero desaparecemos los paréntesis, aplicando productos notables

$$(x+3)^2 + 7 = (x+6)(x+4)$$

* Se tiene: $x^2 + 6x + 9 + 7 = x^2 + 10x + 24$

* Trasponiendo y agrupando términos :

$$9 + 7 - 24 = x^2 + 10x - x^2 - 6x$$

* Reduciendo : $-8 = 4x$

* Luego: $-2 = x$

RPTA : "C"

OBSERVACIÓN :

Nota que se procura tener a la inógnita con la coeficiente positivo.

PROBLEMA 3 :

Resolver :

$$5(a - 2) + 3a = 2(3a + 4)$$

A)7 B)6 C)9 D)8 E)12

RESOLUCIÓN :

* Suprimir signos de colección :

$$\Rightarrow 5(a - 2) + 3a = 2(3a + 4)$$

* Reduzco términos semejantes :

$$\Rightarrow 5\underline{a} - 10 + 3\underline{a} = 6a + 8$$

* Transponer términos :

$$\Rightarrow 8a - 10 = 6a + 8$$
$$\Rightarrow 8a - 6a = 8 + 10$$

* Despejar la incógnita: $2a = 18 \Rightarrow a = \dfrac{18}{2}$

* Solución $\Rightarrow a = 9$ $\quad C.S. = \{9\}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Resolver : $x(x + 2) = (x - 2)(x - 4)$

A)1 B)2 C)3 D)-2 E) 0

RESOLUCIÓN :

$$x(x+2) = \underbrace{(x-2)(x-4)}_{\text{producto notable}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = x^2 - 6x + 8$$

$$\Rightarrow x^2 - x^2 + 6x + 2x = 8 \Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{8} = 1$$

* Solución : $x = 1 \Rightarrow C.S. = \{1\}$

RPTA :"A"

PROBLEMA 5 :

Resolver : $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2x}{5} = 2 + \dfrac{10x}{15}$

A)20 B)15 C)40 D)12 E)30

RESOLUCIÓN :

I) Se busca un denominador común, es decir se busca el ***M.C.M.*** de los denominadores.

* En la ecuación :

$$\frac{x}{(3)} + \frac{2x}{(5)} = 2 + \frac{10x}{(15)}$$

$\Rightarrow$ Extraemos el $M.C.M.(3, 5, 15) = 15$

II) El ***M.C.M.*** obtenido será el común denominador el cual se divide entre cada uno de los denominadores y cuyo resultado se multiplica por el numerador respectivo.

* En la ecuación :

$15 \div 3 = 5$ $\quad$ $15 \div 5 = 3$

$$\text{Común denominador} \leftarrow \frac{(5)x}{15} + \frac{3 \times 2x}{15} = \frac{15 \times 2}{15} + \frac{1 \times 10x}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{15} + \frac{6x}{15} = \frac{30}{15} + \frac{10x}{15}$$

III) Se anulan los denominadores multiplicando mentalmente toda la ecuación por el denominador común.

* En la ecuación; resultará :

$$\cancel{15}\frac{5x}{\cancel{15}} + \cancel{15}\frac{6x}{\cancel{15}} = \cancel{15}\frac{30}{\cancel{15}} + \cancel{15}\frac{10x}{\cancel{15}}$$

$$5x + 6x = 30 + 10x$$

IV) La ecuación queda simplificada, y se sigue resolviendo como una ecuación de coeficiente enteros.

* En la ecuación :

$5x + 6x = 30 + 10x$ $\quad$ * Se reducen términos

$\Rightarrow 11x = 30 + 10x$ $\quad$ * Se transpone términos

$\Rightarrow 11x - 10x = 30 \Rightarrow 1x = 30$

$\Rightarrow x = \dfrac{30}{1}$ $\quad$ * Se despeja la incógnita

$\Rightarrow x = 30$ $\quad$ * Solución de la ecuación

RPTA : "E"

NOTA :

Cuando un número negativo que está multiplicando a la incógnita pasa a dividir no cambia de signo.

EJEMPLO : $-8x = 16 \Rightarrow x = \dfrac{16}{-8} \Rightarrow x = -2$

PROBLEMA 6 :

Resolver : $\dfrac{5x-1}{5} = \dfrac{x-2}{3} - \dfrac{2x-3}{4}$

A)1 B)$\dfrac{2}{3}$ C)$\dfrac{17}{70}$ D)$\dfrac{1}{3}$ E)$\dfrac{4}{7}$

RESOLUCIÓN :

$$12(5x - 1) = 20(x - 2) - 15(2x - 3);\ M.C.M_{(5,3,4)} = 60$$

$$\Rightarrow 60x - 12 = 20x - 40 - 30x + 45$$

$$\Rightarrow 60x - 12 = -10x + 5$$

$$\Rightarrow 60x + 10x = 5 + 12 \Rightarrow 70x = 17$$

* Solución : $x = \dfrac{17}{70}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Resolver : $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{7} = x - 2$

A)1 B)2 C)6 D)4 E)1/2

RESOLUCIÓN :

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} = \frac{x}{1} - \frac{2}{1} \quad M.C.M_{(2,7)} = 14$$

$$\Rightarrow 7x + 2(x + 1) = 14x - 28$$

$$\Rightarrow 7x + 2x + 2 = 14x - 28 \Rightarrow 9x + 2 = 14x - 28$$

$$\Rightarrow 9x - 14x = -28 - 2 \Rightarrow -5x = -30 \Rightarrow x = \frac{-30}{-5}$$

* Solución : $x = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Resolver en «x» la siguiente ecuación de coeficientes literales.

$$a(x + a) - x = a(a + 1) + 1$$

A) a B) $-\frac{a-1}{a+1}$ C) $\frac{a+1}{a-1}$ D) 1 E) $\frac{1}{a}$

RESOLUCIÓN :

I) Efectuamos los productos indicados para suprimir los signos colección: $ax + a^2 - x = a^2 + a + 1$

II) Eliminamos los términos repetidos en ambos miembros : $ax + \cancel{a^2} - x = \cancel{a^2} + a + 1$

$$ax - x = a + 1$$

III) Se suman los términos semejantes (factorizando) $x(a - 1) = a + 1$

IV) Despejar la variable :

$x(a-1) = a+1$ — *pasa dividiendo*

$$\boxed{x = \frac{a+1}{a-1}} \quad \text{Donde: } a \neq 1$$

* El conjunto de solución : $\boxed{C.S. = \left\{\frac{a+1}{a-1}\right\}}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Hallar el conjunto solución en :

$$\frac{2x+a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{3ax+(a-b)^2}{ab}$$

A) $\{2a\}$ B) $\{2b\}$ C) $\{a\}$ D) $\{b\}$ E) $\{1\}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando ambos miembros por (ab) y efectuando operaciones

$$a(2x + a) + b(x - b) = 3ax + (a - b)^2$$

$$\Rightarrow 2ax + a^2 + bx - b^2 = 3ax + a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow -ax + bx = 2b^2 - 2ab$$

* Sacando factor común y despejando la variable $x(b - a) = 2b(b - a)$

$$\Rightarrow x = \frac{2b(b-a)}{b-a} \Rightarrow x = 2b \Rightarrow C.S. = \{2b\}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Resolver la siguiente ecuación de coeficientes fraccionarios.

$$\frac{5x-2}{3} = \frac{x-1}{2} + \frac{7x-1}{6}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\{5\}$ E) $x \in \mathbb{R}$

RESOLUCIÓN :

I) Calculamos el *M.C.M.* de los denominadores.

3	2	6	2
3	1	3	3
1	1	1	

$\Rightarrow M.C.M = 2 \times 3 = 6$

II) Se multiplica a toda la igualdad por dicho *M.C.M*

$$(6)\frac{5x-2}{3} = (6)\frac{x-1}{2} + (6)\frac{7x-1}{6}$$

III) Se simplifican con su respectivo denominador y se multiplica por su numerador.

$$2(5x - 2) = 3(x - 1) + 7x - 1$$

$$10x - 4 = 3x - 3 + 7x - 1$$

IV) Transponer términos; agrupando en un miembro todas las incógnitas y en el otro todas las cantidades conocidas.

$$10x - 3x - 7x = -3 - 1 + 4$$

V) Reducir términos semejantes : $0x = 0$

El conjunto solución : C.S = {Todos los reales}

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Resolver : $3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -2 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Eliminando paréntesis :

$$3x - 2x + 1 = 7x - 3 + 5x - x + 24$$

$$\Rightarrow x + 1 = 11x + 21 \Rightarrow -21 + 1 = 11x - x$$

$$\Rightarrow -20 = 10x \Rightarrow \frac{-20}{10} = x \Rightarrow -2 = x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Resolver : $\frac{x-2}{4} + \frac{x-4}{6} = \frac{x-6}{8} + \frac{x}{2}$

A) 0 B) -2 C) 2 D) 1 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando ambos miembros por *24* :

$6(x - 2) + 4(x - 4) = 3(x - 6) + 12x$; resultará :

$$\Rightarrow 10x - 28 = 15x - 18 \Rightarrow -28 + 18 = 15x - 10x$$

$$\Rightarrow -10 = 5x \Rightarrow \frac{-10}{5} = x \Rightarrow -2 = x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Resolver : $\frac{x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = 2$

A) a B) b C) 1 D) a + b E) b - a

RESOLUCIÓN :

Multiplicando ambos miembros por «ab» :

$$a(x+a)-b(x-b)=2ab$$

$$\Rightarrow ax+a^2-bx+b^2=2ab$$

* Colocando los términos adecuadamente :

$$b^2-2ab+a^2=bx-ax$$

$$\Rightarrow (b-a)^2=x(b-a)\Rightarrow \frac{(b-a)^2}{b-a}=x\Rightarrow b-a=x$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Resolver : $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=5$

A) 6 B) 1 C) 2 D) 0 E) No existe solución

RESOLUCIÓN :

* La ecuación puede escribirse :

$$\sqrt{x+3}=5+\sqrt{x-2}\ ;\ x-2\geq 0$$

* Elevando al cuadrado ambos miembros :

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(5+\sqrt{x-2})^2$$

$$\Rightarrow x+3=25+10\sqrt{x-2}+x-2$$

$$\Rightarrow -2=\sqrt{x-2}\ \ ......\ (absurdo)$$

Expresión absurda puesto que : $\sqrt{x-2}\geq 0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Resolver : $\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}-\sqrt{3x+2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Ordenando adecuadamente para luego elevar al cuadrado :

$$(\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2})^2=(\sqrt{3x}+\sqrt{2x+5})^2$$

$$\Rightarrow 2x+3+2\sqrt{2x+3}\times\sqrt{3x+2}+3x+2=$$

$$=3x+2\sqrt{3x}\times\sqrt{2x+5}+2x+5$$

$$\Rightarrow 5x+5+2\sqrt{(2x+3)\ (3x+2)}=5x+5+\sqrt{3x(2x+5)}$$

$$\Rightarrow (2x+3)\ (3x+2)=3x\ \ (2x+5)$$

$$\Rightarrow 6x^2+13x+6=6x^2+15x$$

$$\Rightarrow 6=2x\Rightarrow 3=x\ \ (verificar)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Resolver : $\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{x+5}{x^2-1}$

A) 1 B) 0 C) 0
D) -1 E) Ecuación incompatible .

RESOLUCIÓN :

* Considerar : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{b\ d}$

* Operando quedará : $\frac{x-1+3x+3}{x^2-1}=\frac{x+5}{x^2-1}$

* Eliminando «x^2-1», pero antes se verifica que : $x^2-1\neq 0$ ó $x^2\neq 1$, luego : $x\neq\pm 1$.

* Resultará : $4x+2=x+5$

$$x=1$$

* Pero , por lo anterior «x» debe ser diferente de 1, luego la ecuación solución se trata de una ecuación incompatible .

RPTA : "E"

PROBLEMA 17 :

Resolver : $9x^2-29x+22=0$

Indicar la solución entera .

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 11

RESOLUCIÓN :

$$9x^2-29x+22=0$$

$$\begin{matrix}9x & & -11\\ x & & -2\end{matrix}\ \Big\}\ \textit{Método de aspa simple.}$$

$$(9x-11)(x-2)=0$$

* Entonces : $9x-11=0$ ó $x-2=0$

$$x=\frac{11}{9}\ \text{ó}\ x=2\ ...\text{(Solución entera)}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Resolver : $\frac{\sqrt[a]{a+bx}+\sqrt[a]{a-bx}}{\sqrt[a]{a+bx}-\sqrt[a]{a-bx}}=\frac{\sqrt[a]{a}+\sqrt[a]{b}}{\sqrt[a]{a}-\sqrt[a]{b}}$

A) a+b B) a-b C) $\frac{a+b}{a-b}$ D) $\frac{a(a-b)}{b(a+b)}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

I) Recordando lo siguiente :

Si : $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$ *Razones y Proporciones*

* Aplicando lo anterior , resultará :

$$\frac{\sqrt[a]{a+bx}}{\sqrt[a]{a-bx}}=\frac{\sqrt[a]{a}}{\sqrt[a]{b}}$$

* Elevando a la «a» ambos miembros :

$$\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{a}{b}$$

* Aplicando razones y proporciones :

$$\frac{bx}{a}=\frac{a-b}{a+b}\Rightarrow x=\frac{a(a-b)}{b(a+b)}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Resolver : $9^x+3^{x+1}=810$

A) 3   B) 2   C) 0   D) 1   E) 4

RESOLUCIÓN :

$$(3^2)^x+3^x\times 3=810$$

$$(3^x)^2+3\times 3^x-810=0$$

$3^x \quad -27$

$3^x \quad 30$

* Entonces :

$3^x-27=0$ ó $3^x+30=0$

$\Rightarrow 3^x=27\Rightarrow \boxed{3^x=-30}$ (no)

$\Rightarrow 3^x=3^3\Rightarrow x=3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

Hallar : «$x+y+z$»

$$(x+1)(z+1)=8$$

$$(x+1)(y+1)=12$$

$$(y+1)(z+1)=6$$

Indicar el valor positivo .

A) 2   B) 6   C) 8   D) 10   E) 9

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando miembro a miembro las ecuaciones

$$(x+1)^2\,(z+1)^2\,(y+1)^2=8\times 12\times 6$$

$$\Rightarrow [(x+1)\,(z+1)\,(y+1)]^2=576$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x+1)\,(z+1)}_{8}\,(y+1)=24 \text{ ...... Piden solo positivos}$$

$$\Rightarrow y+1=3$$

$$y=2\Rightarrow x=3\ ;\ z=1$$

* Luego : $x+y+z=6$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Resolver : $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{2}$; $\frac{6}{x}-\frac{2}{y}=\frac{1}{3}$

Indicar el valor de «y»

RESOLUCIÓN :

* Despejando $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{y}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{y}\right)$$

$$\Rightarrow 3-\frac{18}{y}=\frac{5}{3}+\frac{10}{y}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{28}{y}\Rightarrow y=21$$

PROBLEMA 22 :

Resolver y dar «z» :

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{1}{x+y+z}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1   D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Considerar :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

* Se obtendrá :

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow\frac{x+y+z}{2(y+z+x)}=\frac{1}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow x+y+z=2\Rightarrow x+y=2-z$$

* Ahora : $\frac{z}{x+y}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{z}{2-z}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2z=2-z\Rightarrow z=\frac{2}{3}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Hallar el valor de «a» para que el sistema:

$$(a+1)x+3y=3a+3$$

$$(a+4)x+3ay=5$$

Admita solución :

A) $a=2$ B) $a=-2$ C) $a\neq 4$ D) $a\neq -1$ E) $a\neq\pm 2$

RESOLUCIÓN :

* Por teoría la condición necesaria será : $\Delta_s\neq 0$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 3 \\ a+4 & 3a \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Rightarrow (a+1)(3a)-(a+4)(3)\neq 0$$

$$\Rightarrow 3a^2+3a-3a-12\neq 0$$

$$\Rightarrow 3a^2\neq 12\Rightarrow a^2\neq 4\Rightarrow a\neq\pm 2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

Para que valor de «R» el sistema es incompatible :

$$(1+2R)\,x+5y=7$$

$$(2+R)\,x+4y=8$$

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

RESOLUCIÓN :

* Será incomparable , si $\Delta_s=0$

$$\begin{vmatrix} 1+2R & 5 \\ 2+R & 4 \end{vmatrix}=0$$

$$4+8R-(10+5R)=0\Rightarrow R=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Si Δ es el discriminante de la ecuación :

$bx^2+ax+c=0;\ b\neq 0$ tal que $\Delta>0$ entonces la diferencia entre las raíces mayor y menor de cada ecuación es :

A) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ B) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$ C) $\frac{\sqrt{\Delta}}{|c|}$ D) $\frac{\Delta}{|a|}$ E) $\frac{\Delta}{|a|}$

RESOLUCIÓN :

* Siendo : $bx^2+ax+c=0\ ;\ b\neq 0$

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \quad ó \quad x_2=\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2b}$$

* Ahora : $\underbrace{|x_1-x_2|}_{\text{Valor absoluto de } x_1-x_2}=\left|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2b}\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|b|}$

PROBLEMA 27 :

Para qué valor de λ el sistema siguiente:

$$\begin{cases}\lambda x+y=0\\ \lambda y+z=1\\ \lambda z+x=\lambda\end{cases}$$

Admite infinitas soluciones?

RESOLUCIÓN :

* Sumando las 3 ecuaciones:

$\lambda(x+y+z)+(x+y+z)=\lambda+1$

$\Rightarrow(\lambda+1)(x+y+z)=(\lambda+1)$

* Para que tenga infinitas soluciones independientes de los valores de x, y, z entonces : $\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1$

PROBLEMA 28 :

Calcular el valor de «x» que satisface la siguiente igualdad : $\sqrt[3]{7+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{x}}=2$

RESOLUCIÓN :

* Considerando : $\boxed{(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)}$

* Elevando al cubo:

$$(\sqrt[3]{7+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{x}})^3=2^3$$

$7+\sqrt{x}+7-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{7^2-\sqrt{x}^2}\ (\sqrt[3]{7-\sqrt{x}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{x}})=8$

$\Rightarrow 14+6\ \sqrt[3]{49-x}=8\Rightarrow 6\ \sqrt[3]{49-x}=-6$

$\Rightarrow\ 49-x=-1\Rightarrow x=50$

PROBLEMA 29 :

Calcular «xy» a partir de :

$$x+\sqrt{x+y}=32$$
$$y+\sqrt{x+y}=31$$

A) 60 B) 120 C) 240 D) 600 E) 32

RESOLUCIÓN :

* Sumando miembro a miembro :

$$x+y+2\sqrt{x+y}=63$$

* Haciendo : $\sqrt{x+y}=a\longrightarrow x+y=a^2$
* Donde $a\geq 0$.
* Reemplazando quedará :

$a^2+2a-63=0$

$\longrightarrow(a+9)(a-7)=0$

$\longrightarrow a=-9$ ó $a=7$ (pero $a\geq 0$)

* Luego : $a=7$
* Pero : $x+a=32\longrightarrow x=25$

$y+a=31\longrightarrow y=24$

* Finalmente : $xy=600$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Resolver :

$$\frac{x-24}{1977}+\frac{x-25}{1976}=\frac{x-1977}{24}+\frac{x-1976}{25}$$

A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Haciendo un artificio en ambos miembros (restando «-2») :

$$\frac{x-24}{1977}-1+\frac{x-25}{1976}-1=\frac{x-1977}{24}-1+\frac{x-1976}{25}-1$$

$$\frac{x-2001}{1977}+\frac{x-2001}{1976}=\frac{x-2001}{24}+\frac{x-2001}{25}$$

* Factorizando «x – 2001» :

$$(x-2001)\left(\frac{1}{1977}+\frac{1}{1976}-\frac{1}{24}-\frac{1}{25}\right)=0$$

$\longrightarrow x-2001=0$

$\longrightarrow x=2001$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Luego de resolver la inecuación irracional :

$\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+7}+2$, halle la suma de los dígitos de las raíces de la ecuación.

A) 5 B) 9 C) 11 D) 29 E) 10

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+7}+2$$

(elevando al cuadrado)

$\left(\sqrt{2x+6}\right)^2=\left(\sqrt{x+7}+2\right)^2$

$\Rightarrow 2x+6=x+7+4\sqrt{x+7}+4$

$\Rightarrow x-5=4\sqrt{x+7}$ ....(I)

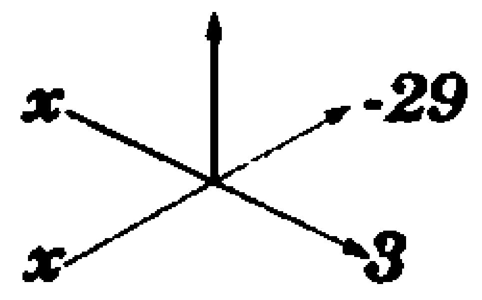
* Esta ecuación tiene solución si :

$x-5\geq 0 \rightarrow x\geq 5$........................(II)

* Luego , elevando al cuadrado en (I) :

$(x-5)^2=\left(4\sqrt{x+7}\right)^2$

$x^2-10x+25=16(x+7)$



$\Rightarrow (x-29)(x+3)=0$

$\Rightarrow x=29$ ó $x=-3$

* Como $x\geq 5$ de (II) entonces la única solución es $x=29$

* Por lo tanto , la suma de los dígitos de la raíces es $2+9=11$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

* Resolver la ecuación en cada caso :

01 $4x+1=21$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

02 $x-5=3x-25$

A)5 B)10 C)15 D)4 E)8

03 $5x=8x-15$

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

04 $9x+11=-10+12x$

A) −5 B)1 C)3
D)7 E)9

05 $21-6x=27-8x$

A)1 B)2 C)3
D)4 E)5

06 $8x-4+3x=7x+x+14$

A)6 B)8 C)5
D)3 E)5

07 $x-(2x+1)=8-(3x+3)$

A)1 B)3 C)6
D)5 E)2

08 $3x-2=7$

A)3 B)2 C)1
D)0 E) −1

09 $x+3(x-4)=4$

A)2 B)4 C)6
D) −3 E)2/3

10 $4x-3=5-2x$

A)3/4 B)1/2 C)4/3
D)2/3 E)3

11 $7x+(3x-5)=15$

A)3 B)1 C)0
D)2 E)4

12 $5x+(-3x+5)=13$

A) −3 B) −1 C) − [illegible]
D) −3 E) −4

13 $2x-(-2x+2)=22$

A)6 B)5 [illegible]
D)3 E)2

14 $x+1-3(x-1)=$ [illegible] $-x$

A)3 B)1/4 C)2
D) −1 E) −7

15 $2x+7-2(x-1)=3(x+3)$

A)4 B)0 C)1
D) −4 E)1/9

16 $\dfrac{2x-9}{3}=\dfrac{3x+4}{2}$

A) −2 B) −3 C)4
D) −6 E)3

17 $\dfrac{x+1}{2}=2$

A)0 B)3 C) −1
D)1 E)3/7

18 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{2x-1}{3}$

A)3/2 B)5/3 C)4/9
D)5 E)7

19 $\dfrac{2x+3}{3}=1-x$

A)0 B) −1 C)2/3
D)4/3 E)5/7

20 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{4}=x+\dfrac{1}{4}$

A)1 B)0 C) −1
D)4 E)7

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

Resolver en todos los casos :

01 $4x+8=-20$

A) −7 B) −3 C)0
D)4 E)5

02 $x+12=5$

A) −7 B)0 C)1
D) −1 E) −2

03 $2x-4=5-x$

A)[illegible] B)3 C)2
D)4 E)5

04 $2x+6$ [illegible] -2

A)2 B)[illegible] C)6
D)8 E)0

05 [illegible] $x-5=10$

A)[illegible] −1 B) −5 C)0

06 $4y-4=y-16$

A) −4 B)4 C)0
D)1 E)2

07 $3(x-1)-4=2(x-1)$

A)7 B)5 C) −5 D)0 E) 1

08 $16-4x+6x=12x+8$

A)5/4 B)4/5 C) −8/7 D)1 E) −1

09 $7x-6x-4=15x+3-6x$

A) −7/8 B)7/8 C) −8/7 D)1

10 $-2x+7x-3=3x-x+6$

A)1/3 B) −3 C)3
D)0 E)2

11 $7(x-2)+3=4(2x-6)-2$

A) −15 B)15 C)6
D)4 E)2

12 $x-2(x+1)=7-4x$

A)3 B) −3 C)1
D)4 E)5

13 $2x+4=4(x-6)$

A) −14 B)14 C)13
D)8 E)9

14 $3(5x+1)-2(6x+3)=2(x-1)$

A) – 1 B) 1 C) 3
D) 4 E) 5

(15) $2x + 8 - 3x = 4x + 15 - 2x$

A) – 7/3 B) 7/3 C) 3/7
D) 1 E) 1/2

(16) $5(2x - 4) = 2(3x + 4)$

A) – 7 B) 1/7 C) 7
D) 0 E) 77

(17) $3(x + 1) + 4(2x - 1) = 5(x + 5) - 2(x - 3)$

A) 4 B) 8 C) – 4 D) – 2 E) 0

(18) $2x - 8 = -6x - 4$

A) 2 B) 1/2 C) – 2 D) 0 E) 1

(19) $-3(x - 2) + 2(x - 1) = 4(x + 6)$

A) 4 B) – 4 C) 2 D) – 6 E) 6

(20) $(x - 3)^2 = (x + 4)(x - 6)$

A) 4/33 B) 33/4 C) – 33/4
D) 0 E) – 1

TAREA DOMICILIARIA

(01) Resolver: $3(x - 2) + 5 = x - 3$

A) 1 B) – 1 C) 0
D) 4 E) 2

(02) Resolver :

$2 + a - (3a + 7) = -11$

A) 3 B) – 3 C) – 6
D) 8 E) 1

(03) Resolver :

$(x - 3)(x + 5) = x(x + 3)$

A) 15 B) 8 C) – 15
D) – 8 E) 0

(04) Resolver:

$6x(7 - x) = 36 - 2x(3x - 15)$

A) 3 B) 2 C) 1
D) – 1 E) 0

(05) Resolver :

$10(y - 9) - 9(5 - 6y) = 2(4y - 1) + 5 + 10y$

A) – 3 B) 3 C) 1/3
D) 1/2 E) 1

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

Resolver en cada caso :

(01) $\dfrac{4x - 3}{7} = 3$

A) – 6 B) 3 C) 6
D) 5 E) 4

(02)

$5(x - 4) + 4(x - 3) = 3(x - 2)$

A) 7/3 B) 13 C) 9/3
D) 13/3 E) 5/3

(03) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{4} = 2$

A) 40 B) – 40 C) 4
D) –10 E) 10

(04) $\dfrac{x - 3}{2} + \dfrac{x + 2}{4} = 5$

A) 8 B) 16 C) – 8
D) – 16 E) 5

(05) $5(x - 1) = 8 + 4x$

A) 13/9 B) 9/13 C) 13
D) 15 E) 12

(06) Hallar el valor de «x» en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6} + \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{5}{3}$$

A) – 1/2 B) 1/4 C) – 1/4
D) 1 E) 0

(07) Resolver : $\dfrac{x}{6} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{5}{3}$

dar como respuesta $5x$.

A) 1/10 B) – 5/2 C) – 1/2
D) 2 E) 0

(08) Resolver la ecuación :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{5} = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{5}$$

A) {3} B) {1} C) {–1}
D) {0} E) {2}

(09) Hallar la raíz de la siguiente ecuación :

$$\frac{9 + x}{2} - \frac{8 - x}{3} = \frac{x + 1}{2} + x - 2$$

A) –5 B) 5 C) 2
D) 4 E) –1

(10) $\dfrac{x - 2}{3} - \dfrac{x - 3}{3} = \dfrac{x - 4}{5}$

A) 3/17 B) 17/3 C) – 17/3
D) 1 E) 0

(11) $\dfrac{x - 2}{3} - \dfrac{x - 3}{4} = \dfrac{x - 4}{5}$

A) 7/53 B) – 7/53 C) 53/7
D) 2 E) 4

(12) $\dfrac{9 + x}{2} - \dfrac{8 - x}{3} = \dfrac{x + 1}{2} + x - 2$

A) 5 B) – 5 C) 1
D) 0 E) 2

(13) $\dfrac{x - 2}{3} + 2 = \dfrac{x - 2}{5} + 6$

A) 4 B) 32 C) – 32
D) 8 E) 2

(14) $\dfrac{x + 3}{4} - \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{x}{6} + 1$

A) 5/6 B) – 3/5 C) 3/5
D) 1 E) 2

(15) $x + \dfrac{5x}{3} = 2(x + 1)$

A) 1/3 B) – 3 C) 3 D) 2 E) 8

TAREA DOMICILIARIA

Resolver en todos los casos :

(01) $(x + 2)^2 - 3 = (x - 5)^2 + 4$

A) 4 B) 6 C) 3
D) 5 E) 2

(02) Resolver :

$$\frac{3(x + 9)}{5} + \frac{x - 11}{10} = \frac{5(x + 2)}{3}$$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 3 E) 4

(03) $\dfrac{1}{2}(x - 1) - (x - 3) = \dfrac{1}{3}(x + 3)$

A) 5/9 B) – 9/5 C) 9/5
D) 1 E) 0

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) A	2) A	3) B	4) B	[illegible]	6) A	[illegible]	8) B	[illegible]	10) C
11) B	12) A	13) B	14) B	15) A	[illegible]	17) A	[illegible] A	19) B	[illegible]
[illegible]	2) A	3) C	4) A	[illegible]					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) C	2) D	3) B	4) A	[illegible]	6) A	[illegible]	8) B	9) B	10) C
11) A	12) A	13) B	14) C	15) C	1) C	2) A	[illegible] C		

ECUACIONES CUADRATICAS
CAPITULO 022

OBJETIVOS :

* *Conocer los mecanismos para resolver ecuaciones de segundo grado.*

* *En el nivel elemental, hacer notar que de las ecuaciones polinomiales, la más importante, es la ecuación cuadrática; por su conformación característica y sus propiedades inherentes , bastante usuales en todas las ramas de la matemática.*

INTRODUCCIÓN :

En el anterior capítulo estudiamos la ecuación de primer grado , la cual es una igualdad condicional entre dos expresiones algebraicas que queda satisfecha sólo para algunos valores asignados a sus letras (incógnitas). La búsqueda de estos valores se llama ***Resolución de una Ecuación***. Las expresiones de cada lado de la igualdad se llaman ***miembros de la ecuación***. Así por ejemplo:

$$\underbrace{3x+4}_{\text{Primer Miembro}} = \underbrace{2x-9}_{\text{Segundo Miembro}}$$

Al sustituir las variables de una ecuación por valores numéricos, puede resultar que la igualdad sea cierta o falsa. En el ejemplo anterior, si sustituimos $x=-13$; obtenemos en el primer miembro: $3(-13)+4=-35$ y en el segundo miembro: $2(-13)-9=-35$ entonces la igualdad es cierta; en cambio si sustituimos $x=2$, el primer miembro vale: $3(2)+4=10$ y el segundo miembro vale: $2(2)-9=-5$ entonces la igualdad entre los miembros es falsa. Resolver una ecuación es entonces encontrar los valores numéricos que al sustituirlos en el lugar de las variables hacen cierta la igualdad. Por ello debemos dejar la variable sola en un lado de la ecuación. A esto se le llama ***despejar la variable***. Ahora prepárate para estudiar las ecuaciones de ***2do*** grado.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Es aquella ecuación polinomial de una incógnita de la forma :

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$$

* Donde : ax^2 : término cuadrático

  bx : término lineal

  c : término independiente

EJEMPLO :

$$3x^2+5x-7=0$$

Toda ecuación de segundo grado o cuadrática tiene dos soluciones o raíces, a las que se le asigna los símbolos x_1 y x_2; respectivamente, de modo que el conjunto solución de toda ecuación de segundo grado es: $\{x_1\ ;\ x_2\}$

De la ecuación $ax^2+bx+c=0$ (forma estándar) se deducen otras formas de ecuaciones cuadráticas, así tenemos :

* Si $b=0$, tenemos la ecuación $ax^2+c=0$
* Si $c=0$, tenemos la ecuación $ax^2+bx=0$
* Si $b\neq 0$ y $c\neq 0$, tenemos la ecuación $ax^2+bx+c=0$

I) ECUACIONES DE LA FORMA : $ax^2+c=0$

Se resuelve despejando x^2 y se aplica la propiedad de la raíz cuadrada. Esto es :

$$\text{Si}:\ x^2=c\ ;\ \forall c\neq 0,\ \text{entonces}\ x=\pm\sqrt{c}$$

EJEMPLOS :

01 Resolver :

$$2x^2-18=0$$

> ***Cuidado !!, la ecuación $ax^2=c$, si c es negativo, no tiene solución en $\mathbb{R}$, así, de $x^2=-4$, $x=\pm\sqrt{-4}$ no es un número real.***

RESOLUCIÓN :

* Despejando :

$$2x^2=18\ \Rightarrow x^2=9\ \Rightarrow x=3$$

02 Resolver : $4x^2-100=0$

RESOLUCIÓN :

* Despejando :

$$4x^2=100\ \Rightarrow x^2=25\ \Rightarrow x=5$$

II) ECUACIONES DE LA FORMA: $ax^2+bx=0$

Para hallar las raíces, se factoriza y se aplica el principio del producto cero; esto es :

Si : $x(ax+b)=0$; entonces $x=0$ ó $ax+b=0$

EJEMPLO 1 :

Resolver : $6x^2 + 12x = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando : $6x(x+2) = 0$
* Igualamos cada factor a cero :

$$6x=0 \Rightarrow x=0$$

$$ó \; x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $5x^2 - 20x = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando : $5x(x-4) = 0$
* Igualamos cada factor a cero :

$$5x=0 \Rightarrow x=0$$

$$ó \; x-4=0 \Rightarrow x=4$$

III) RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE LA FORMA : $ax^2+bx+c=0$

A) POR EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN :

Factorizamos el trinomio por el método de aspa simple, quedando dos factores, los cuales igualamos a cero cada uno, resultando dos ecuaciones de primer grado que resueltas nos permiten obtener las dos raíces de la ecuación cuadrática inicial.

EJEMPLO 1 :

I) Resolver : $x^2 - 5x - 24 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando por ASPA SIMPLE $(x-8)(x+3)=0$

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

$x \quad -8$

$x \quad 3$

* Igualamos cada factor a cero :

$$x-8=0 \Rightarrow x=8$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $x^2 + 8x + 7 = 0$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$x \quad +7$

$x \quad 1$

* Factorizando por ASPA SIMPLE

$$(x+7)(x+1) = 0$$

* Igualamos cada factor a cero :

$$x+7=0 \Rightarrow x=-7$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

B) POR LA FÓRMULA GENERAL :

Si el trinomio, no es factorizable por el método del aspa simple , lo mejor es utilizar la fórmula general, teniendo mucho cuidado con los signos de los coeficientes ***a, b*** y ***c***.

$$\text{Formula General : } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* Donde :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ó \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

EJEMPLO :

Resolver : $x^2 - 7x + 2 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Identificando : $a=1$; $b=-7$; $c=2$
* Reemplazando en la fórmula general :

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-8}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$$

* Por lo tanto :

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{41}}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{7-\sqrt{41}}{2}$$

ESTUDIO ACERCA DE LA NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Dada la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c$, donde sus raíces se hallan mediante la siguiente fórmula general:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El binomio que figura bajo el radical se llama ***"discriminante"***. Este nos permitirá conocer la naturaleza de las raíces sin necesidad de resolver la ecuación, y se denotará mediante el símbolo "Δ". Es decir:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

EJEMPLO :

Hallar la discriminante en : $x^2 + 7x + 10 = 0$

RESOLUCIÓN :

* Identificando : $a=1$; $b=7$; $c=10$

* La discriminante será:

$$\Delta = 72 - 4\,(1)\,(10) \Rightarrow \Delta = 9$$

* Sabemos ya que la naturaleza de las raices viene dada por el valor discriminante. Según esto tenemos que :

I) $\Delta > 0 \Rightarrow$ Las raíces son reales y diferentes $x_1 \neq x_2$

II) $\Delta = 0 \Rightarrow$ Las raíces son reales e iguales $x_1 = x_2$

III) $\Delta < 0 \Rightarrow$ Las raíces son imaginarias y conjugadas.

EJEMPLOS :

¿Cuál es la naturaleza de las raíces en las siguientes ecuaciones?

I) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4(2)(-3) \Rightarrow \Delta = 49$

Las raíces son reales y diferentes por ser $\Delta > 0$

II) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \Rightarrow \Delta(-20)^2 - 4(4)(25) \Rightarrow \Delta = 0$

Las raíces son reales e iguales por ser $\Delta = 0$

III) $3x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(4) \Rightarrow \Delta = -47$

Las raíces son imaginarias y conjugadas por ser $\Delta < 0$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación :

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

A) SUMA DE RAÍCES :

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

EJEMPLO :

Hallar la suma de raíces de la siguiente ecuación :

$$2x^2 + 6x + 3 = 0$$

RESOLUCIÓN:

* Por propiedad :

$$x_1 + x_2 = -\frac{6}{2} \quad \Rightarrow x_1 + x_2 = -3$$

B) PRODUCTO DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$$

EJEMPLO :

Hallar el producto de raíces de la siguiente ecuación:

$$2x^2 + 11x + 16 = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$x_1 \times x_2 = \frac{16}{2} \quad \Rightarrow x_1 \times x_2 = 8$$

C) DIFERENCIA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}}$$

EJEMPLO :

Hallar la diferencia de raíces de la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(-5)^2 - 4(2)(3)}}{2} \quad \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(-5)^2 - 4(2)(3)}}{2} \quad \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

Sea *"S"* y *"P"* la suma y el producto de raíces respectivamente, la ecuación de segundo grado se reconstruirá de la siguiente manera :

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

EJEMPLO 1 :

Sea : $x_1 + x_2 = -4 \quad \wedge \quad x_1 \times x_2 = 6$

Reconstruir la ecuación cuadrática.

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow$ Por definición :

$$x^2 - (-4)x + (6) = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$$

EJEMPLO 2 :

Sea : $x_1 = 3$; $x_2 = -2$

Reconstruir la ecuación cuadrática.

RESOLUCIÓN:

$\Rightarrow \ x_1 + x_2 = 1 \quad \wedge \quad x_1 \times x_2 = -6$

* Por definición :

$$x^2 - (1)x + (-6) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON COEFICIENTES REALES

Sean las funciones : $y = f(x) = ax^2 + bx + c;\ \ a \neq 0$

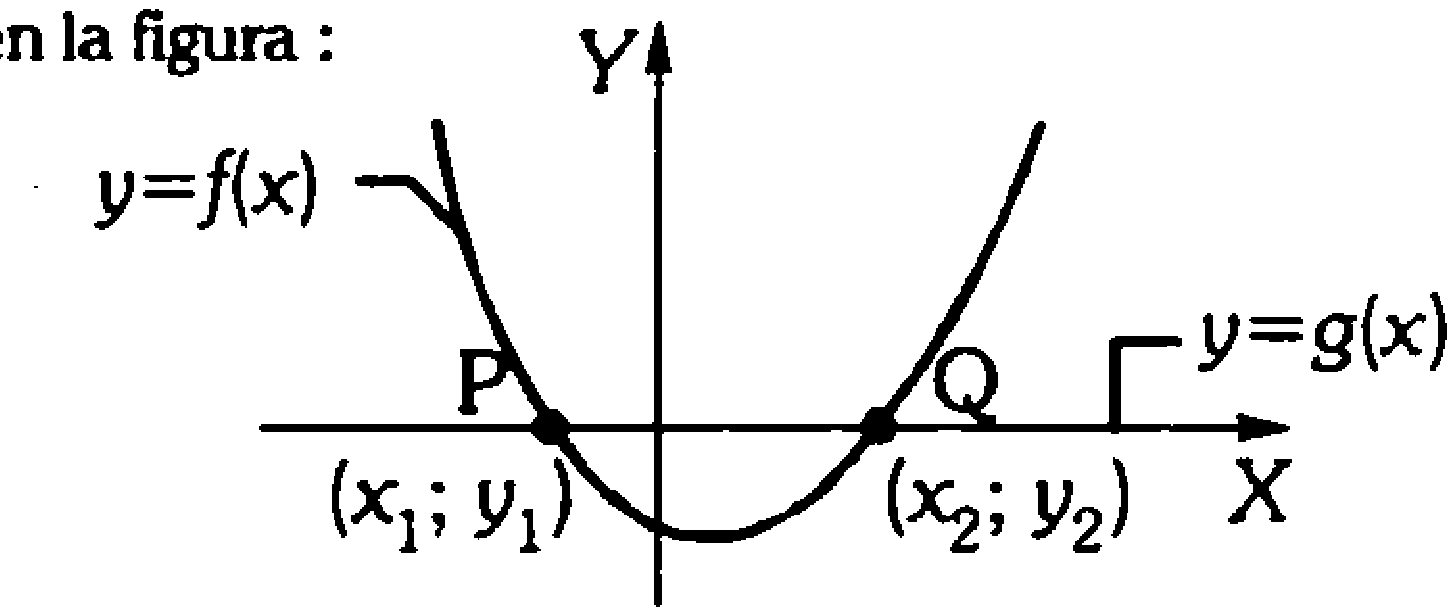
$$y = g(x) = 0$$

Si : $f(x) = g(x)$ ... (I)

Se obtiene la ecuación cuadrática :

$$ax^2 + bx + c = 0\ ;\quad a \neq 0$$

De la igualdad de funciones *(I)*, se deben calcular aquellos x (x_1 y x_2) para los cuales las ordenadas de ambas funciones ($y_1 \wedge y_2$) son las mismas; es decir, geométricamente, hallar los puntos de intersección de las gráficas de éstas funciones, como se muestra en la figura :



donde $y_1 = y_2 = 0$ y $x_1 \neq x_2$

Siendo las abcisas de los puntos de intersección $(x_1;\ 0)$ y $(x_2;\ 0)$ de las gráficas de f y g, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática :

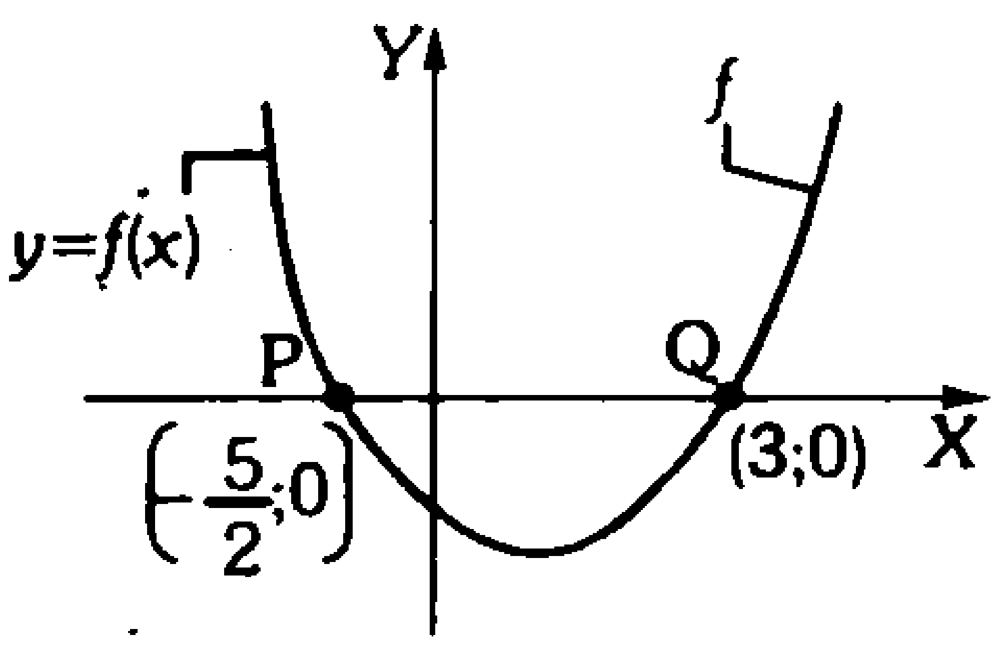
$$ax^2 + bx + c;\ \ a \neq 0$$

EJEMPLO :

Resolver gráficamente : $2x^2 - x - 15 = 0$

Esbozemos la gráfica de la función cuadrática.

$$y = f(x) = 2x^2 - x - 15$$



las abcisas de los puntos P y Q de intersección de la gráfica de f y el eje horizontal, nos representan las raíces o soluciones de la ecuación.

Observar que, para :

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow y = f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = f(3) = 0 \end{array}\right\}$$

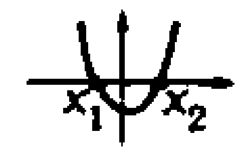
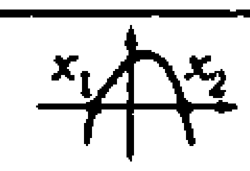
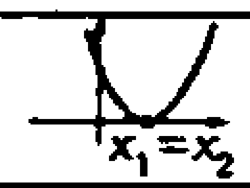
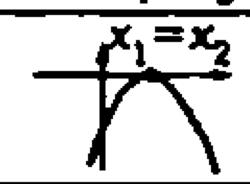
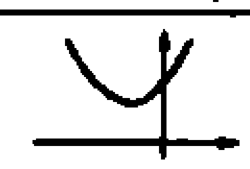
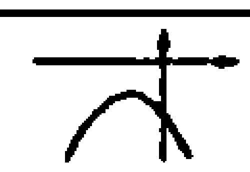
Se generan los puntos :

$$P = \left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$$

$$Q = (3;\ 0)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA DE COEFICIENTES REALES

En la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0\ ;a \neq 0.$ Sabemos que la naturaleza de sus raíces viene dada por el valor del discriminante Δ. Según esto, geométricamente, se obtienen gráficamente lo siguiente:

CARACT. DEL DISCRIMINANTE	COEFICIENTE PRINCIPAL	REPRESENTAC. GEOMÉTRICA	NATURALEZA DE LAS RAÍCES
$\Delta > 0$	$a > 0$		Las raíces son reales y diferentes $x_1 \neq x_2$
	$a < 0$		
$\Delta = 0$	$a > 0$		Las raíces son reales e iguales $x_1 = x_2$ o una raíz real doble
	$a < 0$		
$\Delta < 0$	$a > 0$		Las raíces son imaginarias y conjugadas
	$a < 0$		

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS

Calcule el mínimo valor de $x^2 - 4x + 10$ para maximizar o minimizar una expresión cuadrática la idea es completar cuadrados, es decir expresarlos de la forma $(a+b)^2 + c$

Entonces de la expresión

$$x^2 - 4x + 10$$

$$\underbrace{x^2 - 2(x)(2) + 2^2}_{(x-2)^2} + 6$$

teniendo en cuenta que $x^2 \geq 0;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

Entonces

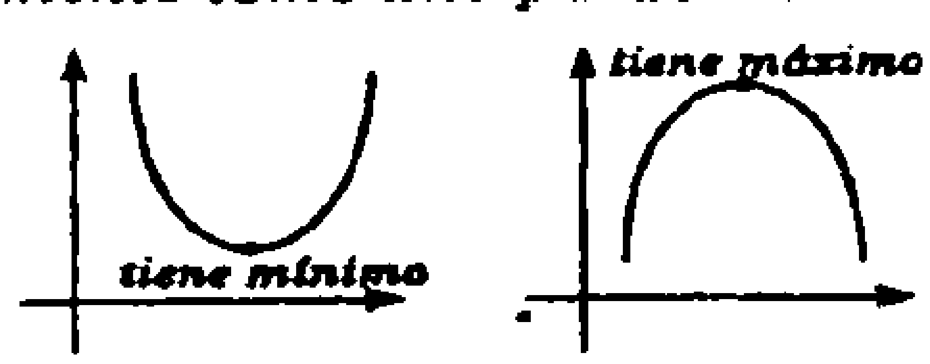
$$\underset{\text{mínimo}}{M} = \underbrace{(x-2)^2}_{\text{mínimo}} + 6$$

$$M_{\text{mínimo}} = 0 + 6 = 6$$

¿Cuál sería su máximo valor?

OBSERVACIÓN

Una expresión cuadrática se puede representar gráficamente como una parábola.



Es decir o tiene mínimo o tiene máximo

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver : $(x+1)(x-2)=4$

E indicar el conjunto solución

A) $\{1;-1\}$ B) $\{2;-2\}$ C) $\{3;-1\}$ D) $\{3;-2\}$

RESOLUCIÓN :

* Efectuando el producto y pasando el 4 al primer miembro.

$$x^2-x-2=4 \Rightarrow x^2-x-6=0$$

* Factorizando por Aspa Simple :

$$x^2-x-6=0$$

$x \quad -3$
$x \quad 2$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2)=0$$

* Igualando cada factor a cero :

$$x-3=0 \text{ ó } x+2=0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=3 \text{ y } x_2=-2$$

* Luego el conjunto solución, será : $C.S.=\{3;-2\}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Resolver : $\frac{x}{4}\left(\frac{x-6}{2}\right)=\frac{x(x-3)}{14}$

E indicar una raíz

A) 10 B) –1 C) 0 D) 2 E) "A" ó "C"

RESOLUCIÓN :

* Reducimos y pasamos todo al primer miembro :

$$\frac{x^2-6x}{8}=\frac{x^2-3x}{14}$$

$$\Rightarrow 7(x^2-6x)=4(x^2-3x)$$

$$\Rightarrow 7x^2-42x=4x^2-12x$$

$$\Rightarrow 3x^2-30x=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-10x=0 \Rightarrow x(x-10)=0$$

* Igualando cada factor a cero :

$$x_1=0 \text{ ó } \underbrace{x-10=0}_{x_2=10}$$

* Luego las raíces, serán : 0 ó 10.

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

La diferencia de las raíces de la ecuación :

$$x^2-3x+\frac{54}{25}=0$$

A) 3 B) 0 C) 0,6 D) 1,5 E) 2,2

RESOLUCIÓN :

* Operando, se obtendrá : $25x^2-75x+54=0$

$5x \quad -9$
$5x \quad -6$

* Entonces : $5x-9=0$ ó $5x-6=0$

$$\Rightarrow x_1=\frac{9}{5} \vee x_2=\frac{6}{5}$$

* Se pide : $x_1-x_2=\frac{9}{5}-\frac{6}{5}=\frac{3}{5}=0,6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

La ecuación : $x+\sqrt{x-2}=4$, tiene :

A) Dos raíces reales.
B) Una raíz real y una imaginaria.
C) Dos raíces imaginarias.
D) Una raíz real solamente.
E) Una raíz imaginaria solamente.

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación : $\sqrt{x-2}=4-x$

* Elevando al cuadrado :

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2=(4-x)^2 \Rightarrow x-2=16-8x+x^2$$

* Ordenando

$$x^2-9x+18=0 \qquad \Rightarrow (x-6)(x-3)=0$$

* Entonces : $x_1=6$ y $x_2=3$

* Verificando :

Para $x_1=6$: $\underbrace{6+\sqrt{6-2}=4}_{\text{absurdo}}$

Para $x_2=3$: $\underbrace{3+\sqrt{3-2}=4}_{\text{si cumple}}$

* Luego existe solo una raíz real

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

La ecuación : $x-\sqrt{4-x^2}=-1$; tiene

A) Dos raíces reales
B) Una raíz real y una imaginaria
C) Dos raíces imaginarias
D) Una raíz real solamente
E) Una raíz imaginaria solamente

RESOLUCIÓN :

* De la ecuación :

$$x+1=\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{\text{esto es positivo siempre}}$$

* Entonces : $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$ ....*(I)*

* Ahora elevamos al cuadrado:

$$(x+1)^2=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ x^2+2x+1=4-x^2$$

$$\Rightarrow\ 2x^2+2x-3=0$$

* Aplicando la fórmula : $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

* En este caso : $a=2,\ b=-2$ y $c=-3$

* Luego :

$$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{(-2)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}=1,3$$

$$x_2=\frac{-(2)-\sqrt{(-2)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}=\frac{-1-\sqrt{7}}{2}=-1,8$$

→ No cumple con (I)

RPTA:"D"

PROBLEMA 6 :

En la ecuación :

$$\frac{x(x-2a)}{\sqrt{bc}}+\frac{a-x}{\sqrt{c}}-\frac{a-x}{\sqrt{b}}=1-\frac{a^2}{\sqrt{bc}}$$

una de las raíces es :

A) $a+\sqrt{c}$ B) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ C) $a-\sqrt{b}$ D) $\sqrt{c}-\sqrt{b}$ E) $a-\sqrt{c}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo una transformación conveniente :

$$\frac{x^2-2ax}{\sqrt{bc}}+\frac{a^2}{\sqrt{bc}}=1+\frac{a-x}{\sqrt{b}}-\frac{a-x}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{(x-a)^2}{\sqrt{bc}}=\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{c}(x-a)+\sqrt{b}(x-a)}{\sqrt{bc}}$$

* De donde :

$$(x-a)^2+(\sqrt{c}-\sqrt{b})(x-a)-\sqrt{bc}=0$$

$(x-a)$ ⟶ $\sqrt{c}$

$(x-a)$ ⟶ $-\sqrt{b}$

* Luego :

I) $x-a+\sqrt{c}=0\ \Rightarrow x=a-\sqrt{c}$

II) $x-a-\sqrt{b}=0\Rightarrow x=a+\sqrt{b}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Si : $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ puede decirse, que :

A) $x=1$ B) $0<x<1$ C) $1<x<2$

D) x es infinitamente grande.

E) x es mayor que 2 pero no infinitamente grande.

RESOLUCIÓN :

* Elevando al cuadrado :

$$x^2=1+\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots\infty}}}}_{\text{Esto es la expresión original}}$$

$$\Rightarrow\ x^2=1+\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}_{x}$$

$$\Rightarrow x^2=1+x\ \Rightarrow x^2-x-1=0$$

* Aplicando la fórmula general :

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

* Pero como "x" es positivo, luego :

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,61$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8 :

Si la ecuación : $x^2+12x-3m=0$ tiene raíces iguales; el valor de "m" es :

A) -12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

RESOLUCIÓN :

* Si las raíces son iguales se cumple que:

$$\Delta=b^2-4ac=0$$

$$\Rightarrow 144-4(1)(-3m)=0\Rightarrow 144+12m=0$$

$$\Rightarrow 12m=-144\Rightarrow m=-12$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Calcular los valores de "m" que hacen que la ecuación: $2x^2-mx+(m+6)=0$; tenga raíces iguales:

A) 2 ó 3 B) 8 ó -6 C) 12 ó -4 D) 6 ó 2 E) 4 ó 12

RESOLUCIÓN :

* Las raíces de la ecuación serán iguales, si el discriminante

$$\Delta=b^2-4ac=0 \text{ ....} (I)$$

* De la ecuación : $\begin{cases}a=2\\ b=-m\\ c=m+6\end{cases}$

* Reemplazando en *(I)*:

$$(-m)^2-4(2)(m+6)=0\rightarrow m^2-8m-48=0$$

m ⟶ -12

m ⟶ $+4$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4)=0$$

$$\Rightarrow m-12=0\ \vee\ m+4=0$$

* Finalmente: $m=12\ \vee\ m=-4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Determinar la suma de los valores de "k" que hacen que la suma de las raíces de la ecuación:

$x^2+kx+2x-k^2+4=0$, sea igual al producto de las mismas.

A) 2 B) 21 C) 1 D) −1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Dando forma a la ecuación :

$$1x^2 + (k+2)x + (4-k^2) = 0$$

* Según el problema : $x_1 + x_2 = x_1 \times x_2$

* Pero por propiedad de suma y producto de raíces, se obtendrá :

$$\frac{-(k+2)}{1} = \frac{4-k^2}{1} \Rightarrow -k-2 = 4-k^2$$

$$\rightarrow \; k^2 - k - 6 = 0$$

$$\begin{matrix} k & & -3 \\ & \times & \\ k & & +2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (k-3)(k+2) = 0$$

* De donde : $k-3=0 \vee k+2=0$

$$k=3 \qquad k=-2$$

* Se pide : $3 + (-2) = 1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Si : p y q son las raíces de la ecuación :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

el valor de : $F = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{q^2}$ es :

A) $\dfrac{b^2-ac}{a}$ B) $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$ C) $\dfrac{b^2-4ac}{2ac}$

D) $c^2(b^2-2ac)$ E) $2ac-b$

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$p+q = \frac{-b}{a} \;;\; pq = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{q^2+p^2}{p^2\,q^2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{q^2+p^2+2pq-2pq}{p^2\,q^2} = \frac{(p+q)^2-2pq}{(pq)^2}$$

* Reemplazando :

$$F = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} \Rightarrow F = \frac{b^2-2ac}{c^2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

Determinar el valor de "p" en la ecuación: $x^2-6x+4+p=0$; sabiendo que la diferencia de sus raíces es 2.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) −1

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad : $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

* Dato del problema : $x_1 - x_2 = 2$

* Reemplazando datos :

$$2 = \frac{\sqrt{(-6)^2 - 4(1)(4+p)}}{1} \Rightarrow \sqrt{36-16-4p} = 2$$

* Elevando el cuadrado :

$$20 - 4p = 4 \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = 4$$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Resolver: $x^2 + 5x - 6 = 0$ é indicar su menor raíz:

A) 1 B) −6 C) 3 D) −2 E) −3

02 Luego de resolver: $x^2 + 3x = 28$ indicar su mayor raíz:

A) 4 B) 7 C) −7 D) −4 E) −3

03 Luego de resolver la ecuación: $5x - 2x^2 = 2$

Calcular el producto de sus raíces:

A) $3/2$ B) $5/2$ C) 1 D) 2 E) −2

04 Resolver la siguiente ecuación:

$4(x-4) + 4(x+1) = 5(x-1)(x-4)$ é indicar su raíz entera:

A) 5 B) 8 C) −8 D) −5 E) −13

05 Si: "a" y "b" representan a las raíces de la siguiente ecuación: $x^2+8=6x$; Hallar: "ab" $(a>b)$

A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 271

06 Calcular la suma de raíces reales en la siguiente ecuación: $3x^2 + x + 4 = 0$

A) 5 B) −3 C) $-1/3$ D) $-1/3$

07 Calcular el discriminante correspondiente a la siguiente ecuación: $7x^2 + 35x - 3 = 0$

A) 89 B) −89 C) 1309 D) −109 E) −106

08 Hallar el valor de "m" para el cual la ecuación sgte. tiene raíces iguales: $x^2 + 8x + m = 0$

A) 2 B) 16 C) −2 D) 8 E) 6

09 Calcular el valor de "p" para el cual la diferencia de raíces de la ecuación: $4x^2 + 8x + (p-1) = 0$; sea igual a cero.

A) 5 B) $3/2$ C) $1/2$ D) $1/5$ E) −5

10 Hallar la suma de raíces de la siguiente ecuación:

$3x + \frac{5}{x} = 6$

A) -2 B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

11 La ecuación: $2x^2 + 3x + 5 = 0$

Calcular: $(1 + x_1)(1 + x_2)$

A) 2 B) 1 C) -1 D) 3 E) $\frac{5}{2}$

12 Dada la ecuación: $5x^2 + 6x + 8 = 0$

Calcular: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

A) $-\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $-\frac{4}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $-\frac{6}{5}$

13 Dada la ecuación: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Calcular: $x_1^2 + x_2^2$

A) $-\frac{7}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{3}{2}$ E) 1

14 Formar una ecuación de 2do grado cuyas raíces son: $x_1 = -9$; $x_2 = 7$

A) $x^2 - 2x - 63 = 0$ B) $x^2 + 2x - 63 = 0$
C) $x^2 - 2x + 63 = 0$ D) $x^2 + 2x + 63 = 0$
E) $x^2 - 63 = 0$

15 Hallar "x" en: $(x + 5)^2 - (x + 6)(x + 4) = 2x - 17$

A) 13 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

16 Hallar la menor raíz de la ecuación cuadrática:

$$x^2 + 5 = 6x$$

A) -5 B) -4 C) -2 D) 1 E) 2

17 Hallar el producto de raíces de la siguiente ecuación cuadrática: $x(x - 3) = 2(x - 3)$

A) 3 B) 5 C) 6 D) -5 E) -6

18 Hallar una raíz de la siguiente ecuación:

$$(x - 4)^2 + 5(x - 3) = 11$$

A) -2 B) -5 C) 2 D) 3 E) 7

19 Hallar la suma de raíces de la siguiente ecuación cuadrática: $(2x + 1)^2 - 3(x + 3)(x + 2) + 8 = 9$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 15 E) -13

20 Si las raíces de la ecuación cuadrática:

$x^2 + 3x + 5 = 0$ son: x_1 y x_2

Hallar: $R = x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 5$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular "x" en : $x^2 + 1 = 2x$

A) -1 B) 1 C) 2 D) 0 E) -2

02 $(x + 1)(x - 1) = 3$

Indicar una de sus raíces

A) 2 B) 1 C) -8 D) 3 E) -1

03 $(x - 3)(x + 4) = x + 13$

Indicar una de sus raíces

A) 3 B) -5 C) 7 D) -4 E) -13

04 $2x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(x + 2) + 3$

Indicar una de sus raíces.

A) 1 B) -1 C) -2 D) 0 E) 2

05 $4x^2 + 3x - 2 = x^2 + 3(x + 6) + 7$

Indicar una de sus raíces.

A) -6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -3

06 $(x + 1)(x + 2) + (x + 2)(x + 3) = (x + 3)(x + 4) - 4$

Indicar una de sus raíces .

A) -2 B) -3 C) 0 D) 1 E) 2

07 $5x(x + 4) - (x + 3)(x + 2) = (x + 1)x - 6$

Indicar una de sus raíces.

A) 14 B) $14/3$ C) 3 D) 2 E) $3/4$

08 $x^2 + (x + 3)(x - 3) = -3(x + 3)$

Indicar una de sus raíces.

A) $-3/2$ B) $2/3$ C) $3/2$ D) $-2/3$ E) 3

09 $(x + 1)(x - 2) = 4$

Indicar la suma de sus raíces.

A) 5 B) 3 C) -2 D) 1 E) -1

10 $(x + 2)(x + 3) = 2(12 - x)$

Indicar la suma de sus raíces.

A) -7 B) 11 C) -9 D) 2 E) 7

11 $x^2 + 9x + 20 = 0$

Indicar el producto de sus raíces

A) -9 B) 9 C) 20 D) -20 E) 4

12 $-x^2 + 10x + 24 = 0$

Indicar la menor de sus raíces

A) 2 B) -2 C) 12 D) -12 E) 10

13 $x^2 + 3x + 1 = 0$

Indicar la menor de sus raíces.

A) $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

14 $5x^2 - 8x + 2 = 0$

Indicar la suma de sus raíces.

A) $\frac{8}{5}\sqrt{6}$ B) $\frac{8}{5}$ C) $\frac{8+\sqrt{6}}{5}$ D) $\frac{8-\sqrt{6}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{5}$

15) $10x^2+37ax-36a^2=0$

Hallar la suma de sus raíces.

A) $\frac{4a}{5}$ B) $-\frac{9a}{2}$ C) $-\frac{37a}{10}$ D) $\frac{2a}{9}$ E) $\frac{5a}{4}$

16) $a^2x^2+abx-2b^2=0$

Hallar la suma de sus raíces.

A) $\frac{b}{a}$ B) $-\frac{b}{a}$ C) $\frac{2b}{a}$ D) $-\frac{2b}{a}$ E) $\frac{a}{b}$

17) $x^2-11x+28=0$

Indicar la suma de raíces.

A) 7 B) 4 C) 11 D) -11 E) -7

18) $x^2-8x-20=0$

Indicar el producto de raíces.

A) 8 B) 20 C) -20 D) -8 E) 12

19) $-x^2+7x-10=0$

Indicar la menor de sus raíces.

A) 2 B) 5 C) -2 D) -5 E) -1

20) $8x^2+18x-5=0$

Indicar una de sus raíces.

A) 5/2 B) -1/4 C) 2/5 D) 4 E) -9/4

TAREA DOMICILIARIA

01) $(x+5)(x+3)=63$

Indicar la suma de sus raíces.

A) 8 B) -16 C) 16 D) 4 E) -8

02) $3x(x+2)+(x+1)(x-1)=(x-2)(x-3)-7$

Indicar una de sus raíces.

A) 11/3 B) 3/11 C) -11/3 D) 11 E) 3

03) $4x^2-(x-3)(x-2)=x-6$

Indicar una de sus raíces.

A) -4/3 B) 4/3 C) 3/4 D) -3/4 E) 3

04) $(x+3)(x-2)=36$

Indicar la suma de sus raíces.

A) -3 B) 2 C) -1 D) 1 E) -2

05) $(x-2)(x-3)=-2(x-30)$

Indicar la suma de sus raíces.

A) -3 B) -15 C) 5 D) 0 E) -3

06) $x^2+7x+4=0$

Indicar la mayor de sus raíces.

A) $-7-\sqrt{33}$ B) $\frac{-7-\sqrt{33}}{2}$ C) $\frac{-7+\sqrt{33}}{2}$ D) $-7+\sqrt{33}$ E) $\frac{-7+\sqrt{33}}{4}$

07) $x^2-10x+1=0$

Indicar la suma de raíces.

A) 10 B) $5+\sqrt{24}$ C) $5-\sqrt{24}$ D) 5 E) 7

08) $x^2-7x+3=0$

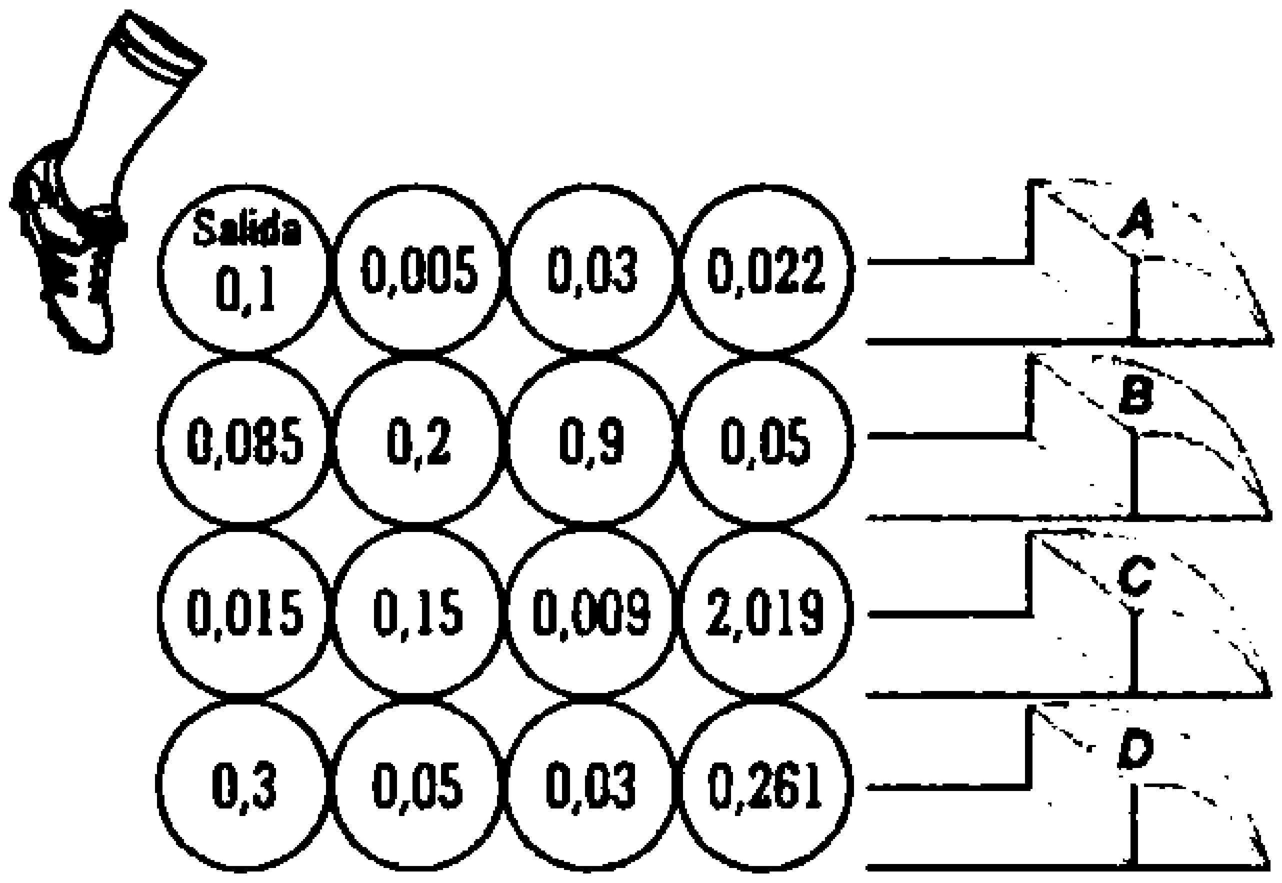
Indicar la menor solución.

A) $7+\sqrt{37}$ B) $\frac{7+\sqrt{37}}{2}$ C) $\frac{7-\sqrt{37}}{2}$ D) $7-\sqrt{37}$ E) $\frac{41-\sqrt{7}}{2}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) B	2) A	3) C	4) D	5) E	6) C	7) B	8) A	9) D	10) A
11) C	[illegible] C	13) D	14) B	15) C	16) B	17) C	[illegible]	19) A	[illegible]
[illegible]	02) C	03) C	04) C	05) B	06) C	[illegible]	08) C	[illegible]	10) A

RETO 1:

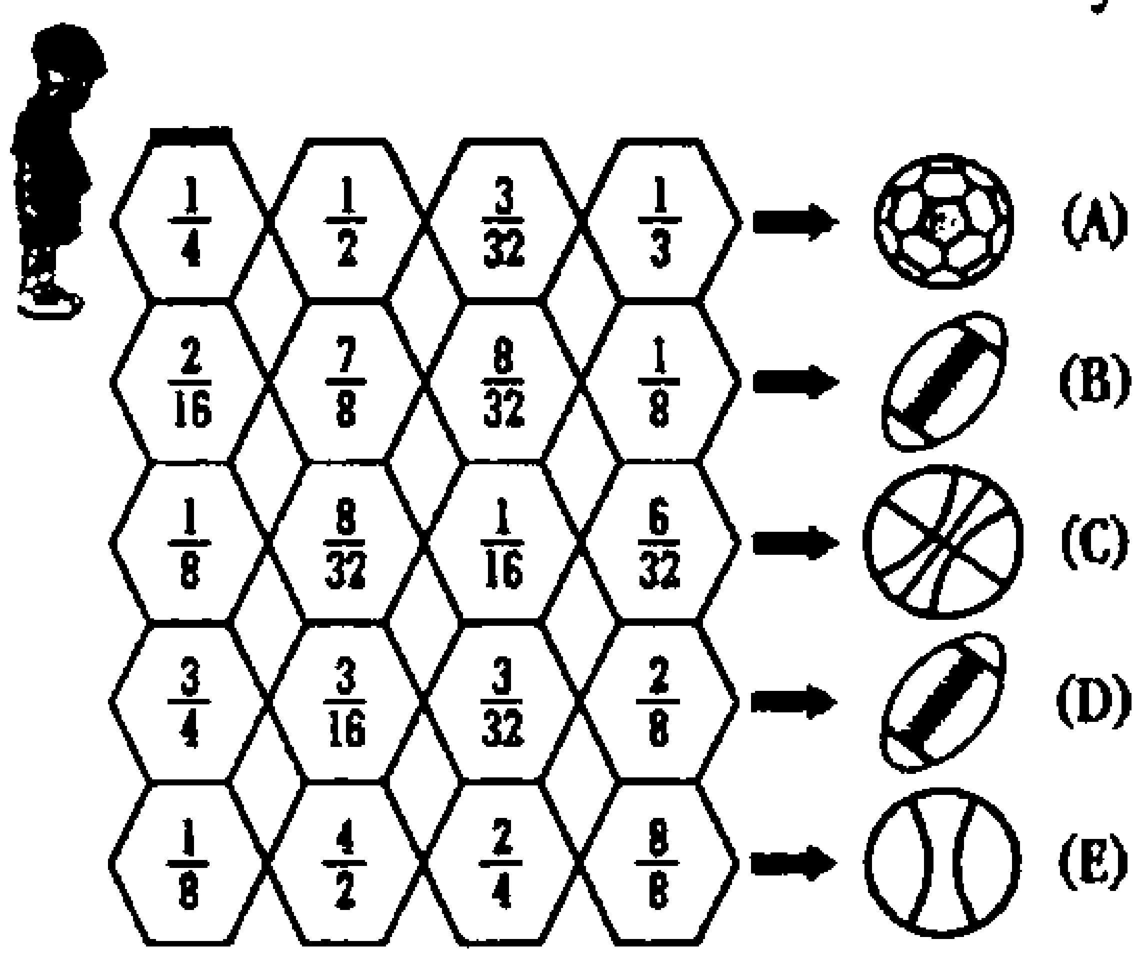
Carlos anotó un gol. Para averiguar en que portería, comienza en el círculo de salida y avanza sumando los números decimales hasta completar un entero. Sólo puedes avanzar de manera horizontal y vertical.



RETO 2:

¿Qué letra representa la portería en que anotó Carlos?

Para averiguar cuál es el balón de Luis, comienza en el hexágono de salida y avanza sumando las fracciones hasta completar exactamente un entero. Sólo puedes avanzar de manera horizontal y vertical.



¿Qué letra representa el balón de Luis?

SISTEMAS DE ECUACIONES

CAPITULO 023

OBJETIVO :

Conocer los diversos criterios y métodos para resolver sistemas lineales.

LAS ECUACIONES Y LOS ADIVINADORES

Cierto día un niño le pide propina a su padre y éste contesta que no tiene dinero. Ante esto, el hijo propone adivinar la cantidad de dinero que lleva su padre en el bolsillo, con la condición de que si adivina, el padre se compromete a darle la cuarta parte. Como el padre acepta, el hijo indica que realice las siguientes operaciones : Multiplique la cantidad por ***4***, sume ***20***, multiplique por ***3***, reste el doble de la cantidad inicial de dinero, reste ***40***, multiplique por ***10***, sume ***100*** y que diga el resultado. A este resultado resta ***300*** y divide ***100*** y ya esta adivinado.

EXPLICACIÓN :

Cantidad de dinero que tiene el padre	$= x$
Multiplique por 4	$= 4x$
Sume 20	$= 4x+20$
Multiplique por 3	$= 12x+60$
Reste el doble de la cantidad inicial (2x)	$= 10x+60$
Reste 40	$= 10x+20$
Multiplique por 10	$= 100x+200$
Sume 100	$= 100x+300$

Finalmente, al quitarle a este resultado ***300*** y luego dividirlo entre ***100***, se obtendrá x que es la cantidad de dinero que tenía el padre.

SISTEMA DE ECUACIONES

Se llama sistema de ecuaciones al conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, cuya solución es un grupo de valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

$$\textit{Así el sistema}\begin{cases} x+6y=27 \ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 7x-3y=9 \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{cases}$$

Forma un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, cuya solución se verifica simultáneamente para $x=3$, $y=4$.

COMPROBEMOS :

* En la ecuación ***(I)***, reemplazando : $3+6(4) = 27$

* En la ecuación ***(II)***, reemplazando : $7(3)-3(4)=9$

* Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar el valor de las incógnitas que satisfagan simultáneamente a sus ecuaciones o demostrar que tal sistema no tiene solución.

* A los valores de las incógnitas que satisfacen el sistema se les llama : Solución Común.

CONJUNTO SOLUCIÓN :

Es el conjunto de valores que toman las incógnitas para los cuales se verifica el sistema. Del sistema anterior, el conjunto solución es :

$$C.S.=\{(3;4)\}$$

PROCEDIMIENTO PARA HALLAR LA SOLUCIÓN COMÚN

Existen varios métodos para obtener la solución común, pero en este texto sólo vamos A RESALTAR el *MÉTODO DE REDUCCIÓN*, por ser el más práctico y sencillo.(antes de explicar el método de reducción es necesario tener en cuenta dos principios fundamentales en los SISTEMAS.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS

I) Al multiplicar o dividir a los dos miembros de una ecuación por una cantidad constante (diferente de cero), la ecuación que se obtiene es equivalente a la primera (por el teorema de equivalencia de ecuaciones).

EJEMPLO :

Sea la ecuación $2x-y=3$ ....***(I)***

(multiplicando a ambos miembros por ***2)***

$4x-2y=6$ ....***(II)***

$\Rightarrow$ Las dos ecuaciones siguientes son equivalentes:

$2x-y=3$ ....***(I)***

$4x-2y=6$ ....***(II)***

II) Dado un sistema de ecuaciones podemos

obtener otro equivalente a él, reemplazando una de sus ecuaciones por otra que resulta de sumar o restar miembro a miembro las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO :

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=14\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ x-y=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{array}\right\} \text{sistema}$$

* Si sumamos miembro a miembro ***(m.a.m.)*** ***(I)+(II)*** resulta una nueva ecuación donde el número de incógnitas se redujo a una sola.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=14\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ x-y\ =1\ \ldots\ldots\ldots\ldots(II) \end{array}\right\}(+)$$

$$(I)+(II):\ \overline{3x\ \ =15}\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

* Ahora nuestro nuevo sistema puede ser :

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=14\ldots\ldots\ldots\ldots(I) \\ 3x=15\ \ldots\ldots\ldots\ldots(III) \end{array}\right\} \text{Nuevo sistema}$$

I) MÉTODO DE REDUCCIÓN :

* Este método nos conduce a obtener la solución común en forma más rápida y práctica.

* Consiste en igualar los coeficientes de una de las incógnitas (la que nosotros escojamos) en las dos ecuaciones que tenemos, para que luego al sumar o restar ambas ecuaciones, se anule dicha incógnita y podemos quedamos con una ecuación en la que intervenga solamente la otra incógnita.

¿Cómo lograr igualar los coeficientes de la Incógnita Escogida?

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas empleando el método de eliminación por suma o resta :

a) Multiplíquense los dos miembros de una de las ecuaciones, ó de ambas, por número tales que resulten iguales los coeficientes de una misma incógnita.

b) Súmense las dos ecuaciones si dichos coeficientes son de signos contrarios, y réstense si son del mismo signo.

c) Resuélvase la ecuación que así resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita que contiene.

d) Sustitúyase este valor en una de las ecuaciones dadas y resuélvase ; se obtiene así la otra incógnita.

Es decir :

"El coeficiente que tiene la incógnita que vamos a anular en la primera ecuación va a multiplicar a todos los coeficientes de los términos de la segunda ecuación, a su vez, el coeficiente que tiene dicha incógnita en la segunda ecuación, va a hacer lo mismo con los de la PRIMERA".

¿Qué hacer con los Coeficientes Igualados?

Una vez lograda la igualdad de los coeficientes, si ellos tienen el mismo signo entonces restamos miembro a miembro ambas ecuaciones, pero si ellos tienen el signo diferente procedemos a sumar ambas ecuaciones.

EJEMPLO 1 :

Resolver el sistema :

$$5x+3y=13\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$
$$2x-3y=1\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

RESOLUCIÓN :

* Sumando *MIEMBRO A MIEMBRO*

$$\left.\begin{array}{l} 5x+3y=13\ \ldots\ldots\ldots(I) \\ 2x-3y=1\ \ldots\ldots\ldots(II) \end{array}\right\}(+)$$

$$\overline{\ \ 7x=14\ }\ \ldots\ldots\ldots(III)$$

* El sistema formado por ***(I)*** y ***(III)*** es equivalente al sistema formado por ***(I)*** y ***(II)***. Resolvemos ***(III)*** obtenemos :

$$7x=14 \Rightarrow x=2$$

* Si este valor lo reemplazamos en ***(I)*** podremos hallar el valor de «*y*».

$$\Rightarrow 5x+3y=13 \quad \Rightarrow 5(2)+3y=13$$
$$\Rightarrow 10+3y=13 \quad \Rightarrow y=1$$

$\Rightarrow$ La solución común es : $x=2$

$$y=1$$

OBSERVACIÓN :

El reemplazo de $x=2$ puede efectuarse en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, es decir : Si reemplazamos aquí $x=2$ en la ecuación ***(II)*** el valor de "y" que resulte será el mismo (es decir obtendremos $y=1$).

NOTA :

Al emplear el método de reducción transformamos el sistema dado en una ecuación con una sola incógnita, eliminando aquella cuyos coeficientes son numéricamente iguales pero de signos opuestos.

EJEMPLO 2 :

Resolver : $2x+y=7\ldots\ldots\ldots(I)$

$$6x-y=9\ldots\ldots\ldots(II)$$

RESOLUCIÓN :

* Sumando la ecuación ***(I)*** y ***(II)***

$$\Rightarrow 2x+y+6x-y=16$$
$$\Rightarrow 8x=16 \Rightarrow x=2$$

* Reemplazando "x" en ***(I)***

$$\Rightarrow 2(2)+y=7 \Rightarrow 4+y=7 \Rightarrow y=3$$
$$\Rightarrow \boxed{x=2\ ;\ y=3}$$

II) MÉTODO POR SUSTITUCIÓN:

Cuando nos referimos a este método, la idea es despejar una de las incógnitas de una ecuación y reemplazamos en la otra.

a) Despéjese una incógnita en una de las dos ecuaciones.

b) Sustitúyase la expresión que representa su valor en la otra ecuación.

c) Resuélvase la nueva ecuación, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.

d) Sustitúyase el valor así hallado en la expresión que representa el valor de la otra incógnita, y resuélvase la ecuación resultante

EJEMPLO 1 :

Resolver el sistema $\begin{cases} x+3y=6 \text{ ....(I)} \\ 5x-2y=13 \text{ ....(II)} \end{cases}$

RESOLUCIÓN :

• Despejamos cualquiera de las incógnitas , sea x en la ecuación *(I)* :

$$x+3y=6 \Rightarrow x=6-3y$$

• Este valor se reemplaza en la ecuación *(II)* :

$$5x-2y=13$$
$$\Rightarrow 5(6-3y)-2y=13$$
$$\Rightarrow 30-15y-2y=13$$

• Transponer términos, agrupando en un miembro todas las incógnitas y en el otro todas las cantidades conocidas.

$$-15y-2y=13-30$$
$$\Rightarrow -17y=-17 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

• Sustituimos : $y=1$; en cualquiera de las ecuaciones dadas.

• Ecuación *(I)*

$$x+3y=6$$
$$\Rightarrow x+3(1)=6$$
$$x=6-3 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver :

$x=-5y$ ....(I)

$3y+x=2$ ....(II)

RESOLUCIÓN :

• Sustituimos "x" por $(-5y)$ en la ecuación *(II)*

$$\Rightarrow 3y-5y=2 \Rightarrow -2y=2$$
$$\Rightarrow y=-1$$

• Reemplazando "y" en *(I)* :

$$\Rightarrow x=-5(-1) \Rightarrow x=5$$
$$\Rightarrow \boxed{x=5\ ;\ y=-1}$$

III) MÉTODO DE IGUALACIÓN :

Cuando nos referimos a este método, la idea es despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego igualarlas.

a) Despéjese, en cada ecuación, la incógnita que se requiere eliminar.

b) Iguálense las expresiones que representan el valor de la incógnita eliminada.

c) Resuélvase la ecuación que resulta, con lo cual se obtiene el valor de la incógnita no eliminada.

d) Sustitúyase el valor hallado en una de las expresiones que representa el valor de la otra incógnita, y resuélvase.

EJEMPLO :

Resolver :

$4x+y=14$ ....(I)

$x-3y=10$ ....(II)

RESOLUCIÓN :

• Despejando "x" de la ecuación *(I)* y *(II)*

$$\Rightarrow 4x=14-y \Rightarrow x=\frac{14-y}{4} \text{ ....}(\alpha)$$

• Además : $x=10+3y$..............(β)

• Como (α) es igual a (β)

$$\Rightarrow x=\frac{14-y}{4}=10+3y \quad \Rightarrow 14-y=40+12y$$
$$\Rightarrow 14-40=12y+y \qquad \Rightarrow 13y=-26 \Rightarrow y=-2$$

• Reemplazando "y" en *(II)*

$$\Rightarrow x-3(-2)=10 \Rightarrow x+6=10$$
$$\Rightarrow x=4$$
$$\Rightarrow \boxed{x=4\ ;\ y=-2}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Es aquel sistema que está formado por dos o más ecuaciones de primer grado.

Dado el sistema $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \text{ .... (I)} \\ a_2x+b_2y=c_2 \text{ .... (II)} \end{cases}$

• De donde :

I) El sistema es compatible determinado (solución única), si :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

EJEMPLO EXPLICATIVO :

Dado el sistema $\begin{cases} 7x+4y=13 \text{ ....(I)} \\ 5x-2y=19 \text{ ....(II)} \end{cases}$

* Observamos : $\dfrac{7}{5} \neq \dfrac{4}{-2}$

* Entonces el sistema tiene una «solución», resolviendo verifica que $x=3$, $y=-2$.

$$\boxed{\text{Su conjunto solución: C.S. : } \{(3;-2)\}}$$

El sistema compatible determinado también es llamado sistema de ecuaciones independientes, porque no se obtienen una ecuación de la otra.

II) El sistema es compatible indeterminado (soluciones infinitas), si :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

EJEMPLO APLICATIVO :

Dado el sistema $\begin{cases} 4x+2y=6 \text{ ....(I)} \\ 2x+y=3 \text{ ....(II)} \end{cases}$

* Observamos : $\dfrac{4}{2}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{6}{3}=2$

*Entonces el sistema tiene «infinitas soluciones» resolviendo verifica :

x	0	1	2	...
y	3	1	-1	...

$$\boxed{\text{Su conjunto solución : C.S.} = \{(0;3),(1;1)(2;-1)...\}}$$

El sistema compatible indeterminado también es llamado sistema de ecuaciones equivalentes, porque se obtiene una ecuación de la otra.

III) El sistema es incompatible (no tiene solución), si :

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}}$$

EJEMPLO APLICATIVO:

Dado el sistema $\begin{cases} 2x+3y=4 \text{ ....(I)} \\ 6x+9y=5 \text{ ....(II)} \end{cases}$

* Observamos : $\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{9}\neq\dfrac{4}{5}$

* Entonces el sistema «no tiene solución». La ecuación*(I)* multiplicado por *3*, se obtiene :

sistema $\begin{cases} 6x+9y=12 \text{ ....(I)} \\ 6x+9y=5 \text{ ....(II)} \end{cases}$

* Igualando la ecuación *(I)* y la ecuación *(II)* : $12=5$ es absurdo.

$$\boxed{\text{Su conjunto solución: C.S} = \{\phi\}}$$

SISTEMA DE PRIMER GRADO CON TRES O MÁS INCÓGNITAS

Para sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables, podemos usar el método de eliminación por sustitución o el método de eliminación por suma o resta (por adición o sustracción).

El método de eliminación por suma o resta es la técnica más breve y fácil de hallar soluciones. Además, lleva *la técnica de matrices* qué se estudia en esta sección.

Cualquier sistema de ecuaciones lineales con tres variables tiene una solución única, un número infinito de soluciones o no tiene solución.

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

En una de las tres ecuaciones podremos despejar una incógnita y sustituirla en las otras *2*; se obtiene de esta forma un sistema de *2* ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver. Las soluciones obtenidas se sustituyen en la expresión de la primera incógnita despejada, hallando así su valor.

EJEMPLO :

Resolver el sistema :

$$3x-4y-2z=2 \text{ ....(I)}$$
$$x+5y+3z=5 \text{ ....(II)}$$
$$2x+y-z=11 \text{ ....(III)}$$

RESOLUCIÓN :

* En la siguiente ecuación, despejamos «x» :

$$x=5-5y-3z$$

* Sustituimos el valor de esta incógnita en las otras dos ecuaciones :

$$3(5-5y-3z)-4y-2z=2 \Rightarrow -19y-11z=-13 \text{....}(\alpha)$$
$$2(5-5y-3z)+y-z=11 \Rightarrow -9y-7z=1 \text{.........}(\beta)$$

* Resolvemos este sistema de dos ecuaciones con *2* incógnitas :

$$\left.\begin{array}{l} \times(-9\alpha) \Rightarrow 171y+99z=117 \\ \times(19\beta) \Rightarrow -171y-133z=19 \end{array}\right\}+$$
$$-34z=136$$
$$\Rightarrow z=-4$$

$$\left.\begin{array}{l} \times(-7\alpha) \Rightarrow 133y+77z=91 \\ \times(11\beta) \Rightarrow -99y-77z=11 \end{array}\right\}+$$
$$34y=102$$
$$\Rightarrow y=3$$

* Sustituimos los valores de "y" $\wedge$ de "z" en la expresión de "x".

$$x = 5 - 5(3) - 3(-4) = 2$$

* La solución del sistema será :

$$\{x;y;z\} = \{2;3;-4\}$$

EJEMPLO 2 :

Resuelve el sistema :

$x + 2y + 3z = 9$ ....(I)

$4x + 5y + 6z = 24$ ....(II)

$3x + y - 2z = 4$ ....(III)

RESOLUCIÓN:

* Suma -4 veces la *(I)* a la *(II)* :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$-3y - 6z = -12$$
$$3x + y - 2z = 4$$

* Suma -3 veces la *(I)* a la *(III)* :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$-3y - 6z = -12$$
$$-5y - 11z = -23$$

* Multiplica por $-(1 \div 3)$ la *(II)* :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$y + 2z = 4$$
$$-5y - 11z = -23$$

* Multiplica por -1 la *(III)* :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$y + 2z = 4$$
$$5y + 11z = 23$$

* Suma -5 veces la *(II)* a la *(III)* :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$y + 2z = 4$$
$$z = 3$$

Las soluciones del último sistema son fáciles de hallar por sustitución. De la *(III)*, vemos que $z=3$. Al sustituir «z» con 3 en la *(II)*, $y + 2z = 4$, obtenemos $y=-2$. Por último, encontramos el valor de «x» al sustituir $y = -2$ y $z = 3$, en la *(I)*, $x + 2y + 3z = 9$ con lo cual $x=4$. Por tanto, hay una solución :

$$x = 4,\ y = -2,\ z = 3.$$

OBSERVACIÓN :

Si analizamos el método de solución, vemos que los símbolos usados para las variables *carecen de importancia*; debemos tomar en cuenta los coeficientes de las variables. Puesto que esto es verdadero, es posible simplificar el proceso. En particular, introducimos un esquema a fin de seguir los coeficientes en forma tal que no haya necesidad de escribir las variables.(todo este comentario lo estudiaremos en el curso de álgebra para más detalle)

✎NOTA :

1ª Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de adición, escójanse números tales que multiplicados por los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, den como producto el m.c.m. de dichos coeficientes.

2ª En el método de sustitución, despéjese la incógnita que tenga menor coeficiente.

3ª En la resolución de un sistema dado, puede usarse indistintamente uno cualquiera de los tres métodos estudiados, y cada uno tiene sus ventajas según los casos particulares.

Sin embargo, como los últimos procedimientos introducen, por lo general, expresiones fraccionarias, se usa con preferencia el método por adicción o sustracción, por ser el más sencillo.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver e sistema :

$5x + 2y = 4$ ....(I)

$8x + 5y = 1$ ....(II)

A) $x = 1$, $y = 2$ B) $x = 3$, $y = 4$ C) $x = 2$, $y = -3$ D) $x = -1$, $y = 0$

RESOLUCIÓN :

* Vamos a anular "y"
* Para eliminar "y" hacemos :

$$\left.\begin{aligned}(I)\ por\ 5 :\ 25x + 10y &= 20\\ (II)\ por\ 2 :\ 16x + 10y &= 2\end{aligned}\right\}(-)$$

Restando : $9x = 18$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

* Ahora reemplazando $x=2$ en *(II)* obtendremos :

$8x + 5y = 1$

$\Rightarrow 8(2) + 5y = 1 \Rightarrow 5y = -15$

$\Rightarrow \boxed{y = -3}$

RPTA : "C"

NOTA :

Como se observa del *PROBLEMA* hemos preparado las ecuaciones , es decir: multiplicamos ambos miembros de las dos ecuaciones por una cantidad

adecuada de modo que consigamos coeficientes, numéricamente iguales.

PROBLEMA 2 :

Resolver el sistema.

$5x + 2y = 4$................(I)
$8x + 5y = 1$................(II)

A) $x = 2$, $y = 1$ B) $x = -1$, $y = 0$ C) $x = 3$, $y = -5$ D) $x = 3$, $y = 5$ E) $x = 2$, $y = -3$

RESOLUCIÓN :

* Observa que se trata del mismo sistema del *PROBLEMA ANTERIOR* pero ahora supongamos que queremos anular «x» (entonces para ello, tenemos que lograr la igualdad de sus coeficientes).

* Para eliminar "x"

$$\left.\begin{array}{l}(I)\ por\ 8:\ 40x+16y=32\\(II)\ por\ 5:\ 40x+25y=5\end{array}\right\}(-)$$

* Restando : $-9y = 27$

$\Rightarrow y = \frac{27}{-9}$

$\Rightarrow \boxed{y = -3}$

* Reemplazando en (II) :

$8x + 5y = 1 \Rightarrow 8x + 5(-3) = 1$
$\Rightarrow 8x - 15 = 1 \Rightarrow 8x = 16$
$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Resolver el siguiente sistema :

$5x - 2y = 5$................(I)
$x + 8y = 43$................(II)

A) $x = -1$, $y = 3$ B) $x = 3$, $y = 5$ C) $x = 1$, $y = 3$ D) $x = -1$, $y = -3$

RESOLUCIÓN :

* Vamos a eliminar "y"

$$\left.\begin{array}{l}(I)\ por\ 4:\ 20x-8y=20\\(II)\ por\ 1:\ x+8y=43\end{array}\right\}(+)$$

Sumando : $21x = 63$

$\Rightarrow \boxed{x = 3}$

* Reemplazando en (II)

$x + 8y = 43$
↓
$\Rightarrow 3 + 8y = 43 \Rightarrow 8y = 40$
$\Rightarrow \boxed{y = 5}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Resolver el sistema :

$63x + 25y = 113$................(I)
$25x + 63y = 151$................(II)

A) $x = 1$, $y = 2$ B) $x = -1$, $y = 0$ C) $x = 2$, $y = 3$ D) $x = -2$, $y = 0$

RESOLUCIÓN :

Antes de eliminar una variable (incógnita) vamos a preparar las ecuaciones :

* Si sumamos (I) +(II) : $88x + 88y = 264$

* Dividiendo por 88 : $\boxed{x + y = 3}$............(α)

* Ahora si :
restamos (I) – (II): $38x - 38y = -38$

* Dividiendo por 38 : $\boxed{x - y = -1}$............(β)

* Es decir se ha obtenido un nuevo sistema (más sencillo) :

$x + y = 3$ ....(α)
$x - y = -1$ ....(β)
$2x = 2$
$\Rightarrow \boxed{x = 1}$

* Reemplazando en (α):

$x + y = 3$
↓
$\Rightarrow 1 + y = 3$
$\Rightarrow \boxed{y = 2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Resolver el sistema :

$2x - 3y = 5$ ....(I)
$3x + 3y = 45$................(II)

A) $x = 10; y = 5$ B) $x = 10; y = 3$
C) $x = 5; y = 10$ D) $x = 6; y = 8$

RESOLUCIÓN :

* Resolviendo el sistema :

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y=5\text{.............}(I)\\3x+3y=45\text{..........}(II)\end{array}\right\}+$$

$5x = 50$
$\Rightarrow \boxed{x = 10}$

* Reemplazando en la ecuación (II):

$3x + 3y = 45$
$\Rightarrow 3(10) + 3y = 45$
$\Rightarrow 3y = 15$
$\Rightarrow \boxed{y = 5}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

Al resolver :

$3x+5y=21$.............(I)

$7x+5y=29$.............(II)

Calcular x^y :

A)2 B)4 C)8 D)216

RESOLUCIÓN :

* Del sistema :

$\left.\begin{array}{l}3x+5y=21 \text{.............(I)}\\ \underline{7x+5y=29} \text{.............(II)}\end{array}\right\}-$

* Restando : (II)–(I)

$4x=8$

$\Rightarrow \boxed{x=2}$

* Luego reemplazando en la ecuación (I) :

$3x + 5y = 21$

$\Rightarrow 3(2)+5y=21 \Rightarrow 5y=15$

$\Rightarrow \boxed{y=3}$

* Nos piden : $x^y = 2^3 = 8$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Resolver el sistema :

$49x+28y=105$.............(I)

$28x+49y=126$.............(II)

Calcular x^y+y^x

A)3 B)5 C)6 D)7 E)9

RESOLUCIÓN :

* Del sistema dado vamos a transformarlo a un sistema más simple

$49x+28y=105$.............(I)

$\underline{28x+49y=126}$.............(II)

* Sumando : $77x + 77y = 231$

$\Rightarrow \boxed{x+y=3}$.............($\alpha$)

* A la vez :

$\left.\begin{array}{l}49x+28y=105 \text{.............(I)}\\ \underline{28x+49y=126} \text{.............(II)}\end{array}\right\}-$

* Restando : $21x - 21y = -21$

$\Rightarrow \boxed{x-y=-1}$.............($\beta$)

* Por lo tanto nuestro nuevo sistema es :

$x+y=3$.............(α)

$x-y=-1$.............(β)

* Resolviendo : $x=1$

$y=2$

* Nos piden :

$\Rightarrow x^y+y^x = 1^2+2^1 = 3$

RPTA :"A"

PROBLEMA 8 :

Resolver :

$x+3y=-1$.............(I)

$\dfrac{2x-y}{2}=6$.............(II)

Calcular y^x

A)10 B)32 C)8 D)–32 E)40

RESOLUCIÓN :

* Efectuando en el sistema :

$x+3y=-1$.............(I)

$2x-y=12$.............(II)

* Luego :

$\left.\begin{array}{l}\text{(I) Por 1 : } x+3y=-1\\ \text{(II) Por 3 : } \underline{6x-3y=36}\end{array}\right\}+$

$7x=35$

$\Rightarrow \boxed{x=5}$

* Reemplazando en (I) :

$x+3y=-1$

$\Rightarrow 5+3y=-1$

$\Rightarrow 3y=-6$

$\Rightarrow \boxed{y=-2}$

* Nos piden : $y^x=(-2)^5=-32$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Resolver :

$\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{17}{6}$.............(I)

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=3$.............(II)

A) $x=3;y=5$ B) $x=2;y=3$ C) $x=4;y=7$

RESOLUCIÓN :

* Del sistema :

$\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{17}{6}$.............(I)

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=3$.............(II)

* Efectuando :

$\left.\begin{array}{l}\text{(I) por 6 : } \dfrac{30}{x}+\dfrac{6}{y}=17\\ \text{(II) por 1 : } \dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=3\end{array}\right\}-$

$\dfrac{28}{x}=14$

$\Rightarrow \frac{28}{x} = 14 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

* Reemplazando en *(II)* :

$\frac{2}{2} + \frac{6}{y} = 3 \Rightarrow \frac{6}{y} = 3 - 1$

$\Rightarrow \frac{6}{y} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{y = 3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Resolver el sistema en «x» e «y»

$\frac{x}{a} + y = 2b$ ....(I)

$\frac{x}{b} - y = a - b$.................(II)

A) $x = a; y = ab$ B) $x=ab; y=b$ C) $x = 2a; y= 3b$

RESOLUCIÓN :

* Efectuando en el sistema :

$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{a} + y = 2b \text{ ....(I)} \\ \frac{x}{b} - y = a - b \text{.................(II)}\end{array}\right\} +$

$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = a + b$

$\Rightarrow \frac{bx + ax}{ab} = a + b$

$\Rightarrow x(\cancel{a+b}) = ab(\cancel{a+b})$

$\Rightarrow \boxed{x = ab}$

* Reemplazando en *(I)* :

$\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}} + y = 2b \Rightarrow b + y = 2b \Rightarrow \boxed{y = b}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

Resolver el sistema :

$\frac{x}{3} - y = \frac{y}{3} - 13$..............(I)

$2x + 18 = 3y$ ....(II)

A) $x = 7$, $y = 6$ B) $x = 3$, $y = 5$ C) $x = 2$, $y = 6$ D) $x = 9$, $y = 12$

RESOLUCIÓN :

* Observa que en este caso, antes de resolver el sistema, debemos «preparar el sistema», es decir, los términos semejantes deben estar reducidos a uno sólo; no deben aparecer signos de colección, no aparecer denominadores, como también en el 2do miembro sólo debe aparecer el término independiente.

I) Preparamos la ecuación *I*.

Para eliminar denominadores multiplicaremos por 3.

$3\left(\frac{x}{3} - y\right) = 3\left(\frac{y}{3} - 13\right)$

$\Rightarrow x - 3y = y - 39$

II) Transponemos términos :

$\boxed{x - 4y = -39}$.............(α)

III) Preparamos la ecuación *(II)* : Transponemos términos :

$2x + 18 = 3y$

$\boxed{2x - 3y = -18}$............(β)

IV) Nuestro nuevo sistema es :

$x - 4y = -39$..................(α)

$2x - 3y = -18$................(β)

V) Resolvemos este nuevo sistema aplicando el *MÉTODO DE REDUCCIÓN* :

$\left.\begin{array}{l}(\alpha) \text{ por } 2 : \ -\cancel{2x} + 8y = +78) \\ (\beta) \text{ por } 1 : + \cancel{2x} - 3y = -18\end{array}\right\} +$

Sumando : $5y = 60$

$\Rightarrow y = 12$

* Reemplazando en (α):

$x - 4y = -39 \Rightarrow x - 4(12) = -39$

$\Rightarrow x = 48 - 39 \Rightarrow x = 9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Resolver el sistema :

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

RESOLUCIÓN :

* Por dato tenemos :

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$

↙ así ↘
tenemos

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ $\qquad$ $\frac{y}{3} = \frac{z}{6}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{2y}{3}} \Rightarrow \frac{6y}{3} = z \Rightarrow \boxed{z = 2y}$

* Estos resultados los aplicamos en el otro dato.

$\underbrace{x^2}_{\downarrow} + \underbrace{y^2}_{\downarrow} + \underbrace{z^2}_{\downarrow} = 1$

$\Rightarrow \left[\frac{2y}{3}\right]^2 + y^2 + [2y]^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{4y^2}{9} + y^2 + 4y^2 = 1$

$\Rightarrow 49y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{7}$

* Así tenemos : $x = \pm\frac{2}{7}$; $z = \pm\frac{6}{7}$

* Luego la respuesta es : $x = \pm\frac{2}{7}$; $y = \pm\frac{3}{7}$; $z = \pm\frac{6}{7}$

PROBLEMA 13 :

Hallar "$x+y+z$", si "x", "y", "z" son soluciones positivas del sistema :

$$\begin{cases} x + y = 12 ....(I) \\ y + z = 8 ....(II) \\ xz = 21 ....(III) \end{cases}$$

A)10 B)12 C)13 D)15 E)20

RESOLUCIÓN :

* Multiplicamos *(I)* por z :

$(sumando\ con\ III) \Rightarrow \underbrace{xz} + yz = 12z$

$21 + yz = 12z \Rightarrow yz = 12z - 21 ....(\alpha)$

* Multiplicamos *(II)* por z :

$(ver\ \alpha) \Rightarrow \underbrace{yz} + z^2 = 8z$

$12z - 21 + z^2 = 8z$

* Así obtenemos una ecuación de segundo grado :

"Aplicando Aspa simple"
$$z^2 + 4z - 21 = 0$$
$$z \quad +7$$
$$z \quad -3$$

* Luego : $\underbrace{z_1 = -7}$; $z_2 = 3$

Esta solución es descartada, pues las soluciones son positivas.

* En (α) reemplazamos : $z_2 = 3$

$3y = 36 - 21 \Rightarrow y = 5$

* Reemplazando en *(I)* : $x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$

* Luego : $x + y + z = 15$

RPTA :"D"

PROBLEMA 14 :

Si : $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$; $x + y = 20$; $x > 10$

Entonces : $\frac{x}{y}$ es : ....

A)2 B)3 C)4 D)6 E)10

RESOLUCIÓN :

* Se tiene del dato : $\left[\sqrt{x} - \sqrt{y}\right]^2 = [2]^2$

$x - 2\sqrt{xy} + y = 4$

$\Rightarrow 20 - 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow xy = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{y}$

* Si : $y = 16 \Rightarrow x = \frac{64}{16} = 4$, descartado pues $x > 10$

* Si : $y = 4 \Rightarrow x = \frac{64}{4} = 16$

* Luego : $\frac{x}{y} = \frac{16}{4} = 4$

RPTA : "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

* Resolver en todos los casos :

01 $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$

A) $x = 2$, $y = 7$ B) $x = -2$, $y = -7$ C) $x = 7$, $y = 2$ D) $x = 1$, $y = 2$

02 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

A) $x = -1$, $y = 2$ B) $x = -2$, $y = -1$ C) $x = 3$, $y = -2$ D) $x = 1$, $y = 1$ E) $x = 2$, $y = 1$

03 $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ y - x = 3 \end{cases}$

A) $x = 4$, $y = 1$ B) $x = 1$, $y = 4$ C) $x = 5$, $y = 2$ D) $x = 2$, $y = 5$

04 $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

A) $x = 4$, $y = 7$ B) $x = 7$, $y = 4$ C) $x = -7$, $y = -3$ D) $x = 4$, $y = 4$ E) $x = 7$, $y = 3$

05 $\begin{cases} 7x - 15y = 1 \\ -x - 6y = 8 \end{cases}$

A) $x = -2$, $y = -1$ B) $x = -1$, $y = -2$ C) $x = 2$, $y = 2$ D) $x = 1$, $y = 2$ E) $x = 3$, $y = 2$

06 $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

A) $x = 5$, $y = 7$ B) $x = 7$, $y = -5$ C) $x = 2$, $y = -2$ D) $x = 5$, $y = -7$ E) $x = 3$, $y = 3$

07 $\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ -3x + 4y = -24 \end{cases}$

A) $x = 4$, $y = -3$ B) $x = 4$, $y = 3$ C) $x = -4$, $y = 3$ D) $x = 4$, $y = 5$ E) $x = 5$, $y = 3$

08 $\begin{cases} 7x - 4y = 5 \\ 9x + 8y = 13 \end{cases}$

A) $x = 1$, $y = 2$ B) $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ C) $x = 2$, $y = 1$ D) $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ E) $x = 2$, $y = 2$

09 $\begin{cases} 10x + 9y = 8 \\ 8x - 15y = -1 \end{cases}$

A) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ B) $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$ C) $x=2$, $y=3$ D) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$ E) $x=5$, $y=2$

(10) $\begin{cases} 30-(8-x)=2y+30 \\ 5x-29=x-(5-4y) \end{cases}$

A) $x=8$, $y=6$ B) $x=4$, $y=-2$ C) $x=3$, $y=-2$ D) $x=-2$, $y=3$ E) $x=5$, $y=2$

(11) Aplicar el método de sustitución :

$$\begin{cases} 32x-25y=13 \\ 16x+15y=1 \end{cases}$$

A) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{2}$ B) $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{4}$ C) $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{5}$ D) $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{1}{2}$

(12) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6}=\dfrac{x-y}{12} \\ \dfrac{2x}{3}=y+3 \end{cases}$

A) $x=2$, $y=-1$ B) $x=2$, $y=2$ C) $x=3$, $y=2$ D) $x=3$, $y=-1$ E) $x=3$, $y=1$

(13) $\begin{cases} (x-y)-(6x+8y)=-(10x+5y+3) \\ (x+y)-(9y-11x)=2y-2x \end{cases}$

A) $x=5$, $y=7$ B) $x=6$, $y=7$ C) $x=8$, $y=5$ D) $x=8$, $y=7$ E) $x=6$, $y=8$

(14) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x-y}{6}=\dfrac{5}{12} \end{cases}$

A) $x=\frac{5}{4}$, $y=\frac{1}{2}$ B) $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{2}$ C) $x=2$, $y=3$ D) $x=4$, $y=2$ E) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$

(15) $\begin{cases} \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=2m \\ mx-ny=m^3-mn^2 \end{cases}$

A) $x=mn$, $y=m$ B) $x=mn^2$, $y=m$ C) $x=n^2$, $y=mn$ D) $x=m^2$, $y=mn$ E) $x=m$, $y=mn$

(16) $\begin{cases} mx-ny=m^2+n^2 \\ nx+my=m^2+n^2 \end{cases}$

A) $x=m-n$, $y=2mn$ B) $x=2mn$, $y=m+n$ C) $x=m+n$, $y=m-n$ D) $x=m$, $y=n$ E) $x=m-n$, $y=m+n$

(17) $\begin{cases} x+y=a \\ ax-by=a(a+b)+b^2 \end{cases}$

A) $x=a+b$, $y=-b$ B) $x=a$, $y=a+b$ C) $x=ab$, $y=a$ D) $x=2a$, $y=b+1$ E) $x=a$, $y=b$

(18) Si el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} (2+2a)x-(2b-3)y=2 \\ (a+16)x+(4b-1)y=6 \end{cases}$$

Es indeterminado, halle el valor de $(a+b)$

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

(19) Que valor debe tener «m» para que el sistema sea imposible, en :

$$\begin{cases} (3+m)x+(2-m)y=15 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

A) 13 B) 12 C) 11 D) 10 E) 9

TAREA DOMICILIARIA

* Resolver los siguientes sistemas :

(01) $\begin{cases} 15x-y=40 \\ 19x+8y=236 \end{cases}$

A) $x=4$, $y=20$ B) $x=5$, $y=20$ C) $x=6$, $y=21$ D) $x=6$, $y=20$ E) $x=5$, $y=18$

(02) $\begin{cases} 3x-2y=-2 \\ 5x+8y=-60 \end{cases}$

A) $x=-4$, $y=-5$ B) $x=4$, $y=5$ C) $x=5$, $y=4$ D) $x=5$, $y=-4$ E) $x=-4$, $y=6$

(03) $\begin{cases} x=-\dfrac{3y+3}{4} \\ y=-\dfrac{1+5x}{4} \end{cases}$

A) $x=-9$, $y=11$ B) $x=-11$, $y=9$ C) $x=9$, $y=11$ D) $x=10$, $y=9$ E) $x=11$, $y=12$

(04) $\begin{cases} 2x+y=b+2 \\ bx-y=0 \end{cases}$

A) $x=a$, $y=b$ B) $x=a$, $y=1$ C) $x=2$, $y=b$ D) $x=1$, $y=b$

(05) Si el sistema : $\begin{cases} (a-8)x+ay=12 \\ 3x-5by=18 \end{cases}$

Es indeterminado, halle "b"

A) – 2,5 B) – 1,5 C) 2,5 D) 1,5 E) 1

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) C	2) E	3) B	4) C	5) A	6) B	7) A	8) B	9) D	10) B
11) C	12) D	13) A	14) B	15) D	16) C	17) A	18) D	19) B	20) [illegible]
01) A	02) A	03) A	04) D	05) B					

INECUACIONES

CAPITULO 024

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo ,el alumno estará en la capacidad de :

* *Aplicar las propiedades de una desigualdad en la resolución de inecuaciones.*
* *Conocer los métodos de resolución de las inecuaciones lineales.*
* *Resolver una inecuación cuadrática.*
* *Resolver una inecuación de grado superior.*

INTRODUCCION :

Las desigualdades son importantes ya que se aplican en diversas ramas de la ciencia y técnica , ya que en cualquier fenómeno natural o problema práctico en la vida real. las mediciones que se realizan no son exactas,sino que son aproximadas y desde ese punto de vista ya hablamos de desigualdades.

Es por eso que un estudiante debe comprender bien lo que es una desigualdad, sus propiedades y saber aplicar sus propiedades en los diversos problemas que se presentan en cualquier rama de las matemáticas.

Al igual que las desigualdades las inecuaciones son de suma importancia ya que se aplican en diferentes ramas de la ciencia es más un estudiante que desea seguir estudios superiores no debería estar ajeno a este tema por su importancia en cursos de matemática superior como cálculo diferencial e integral en donde se trabajan con funciones y para conocer el dominio y rango de una función hay que conocer los diferentes métodos de solución de una inecuación.

Además de ello con inecuaciones se puede calcular el máximo o mínimo de una función, tema central y de su suma importancia en las diversas ramas de la ciencia.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

A la unión del conjunto de todos los números racionales o irracionales se llama **Números reales.** Para tener una mejor idea de los números reales, veamos como están estructurados.

NUMEROS REALES (R)

NUMEROS RACIONALES (Q):

Entero (Z)
* Positivo $Z^+ \Rightarrow \{1;2;3;4;....\}$
* Cero (0)
* Negativo $Z^- \Rightarrow \{...-3;-2;-1\}$

Fraccionarios
* $f=\frac{m}{n};m;n\in Z \ \wedge \ n\neq 0$
* $\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{5};\frac{7}{\ldots}\right\}$

NUMEROS IRRACIONALES (I):

* Irracionales Algebraicos :

$$\{\sqrt{2};\ \sqrt{7};\ \sqrt[3]{2};.....;-\sqrt{5}\}$$

* Numeros Trascendentes :

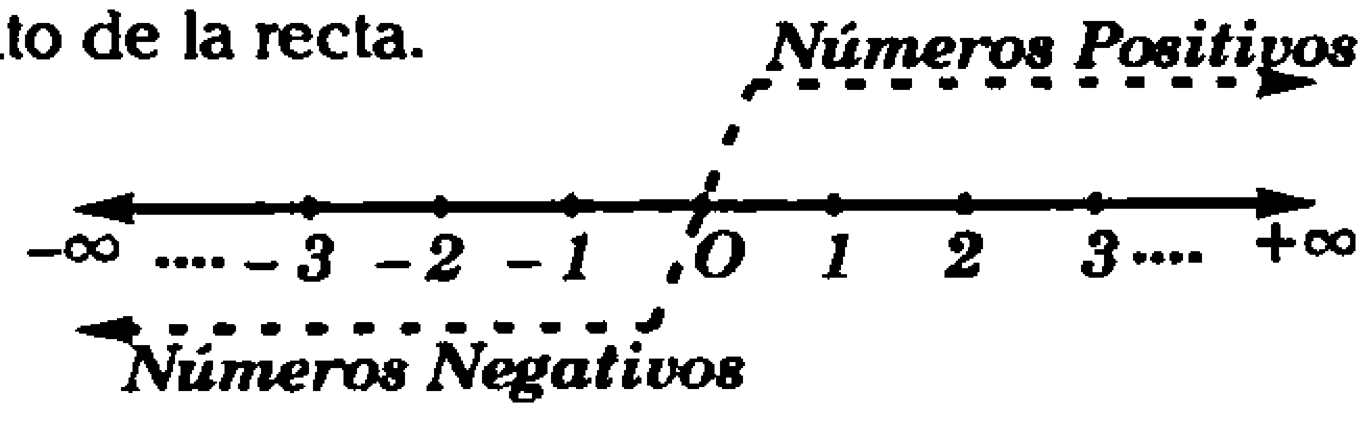
$\pi=3,141592.......$

$e=2,71828182.......$

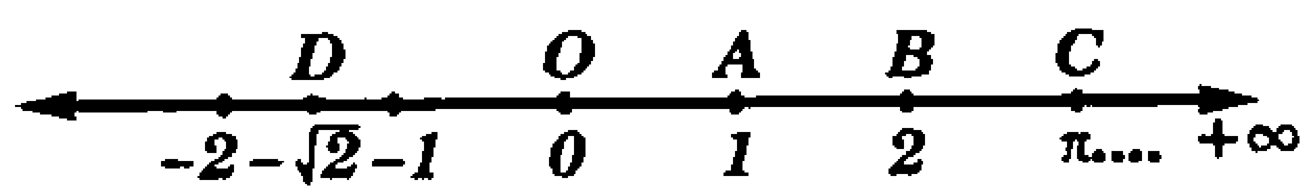
$c=0,5772......$ *(Constante de euler)*

RECTAS NUMÉRICAS REAL

Es aquella representación geométrica de los números reales en donde a cada punto de la recta le corresponde también un número real, así mismo a cada número real se le hace corresponder un único punto de la recta.



O: Origen de la recta numérica



* El número asociado al punto se le llama "coordenada del punto"
* $-\sqrt{2}$ es la coordenada de *D*
* *1* es la coordenada de *A*
* *0* es la coordenada de *O*
* *2* es la coordenada de *B*

* x es la coordenada de C

INTERVALOS

Se llama intervalo, al conjunto de números contenidos entre dos números fijos denominados extremos. En algunos casos los valores extremos también forman parte del intervalo

CLASES DE INTERVALOS

A) INTERVALO CERRADO :

Se considera a los extremos y a los números que están contenidos entre ellos.

* Símbolo : [ ]
* Gráficamente :

* Notación : $x \in [a;b]$
* Interpretación : $a \le x \le b$

B) INTERVALO ABIERTO :

No se considera a los extremos, sólo a los números que están contenidos entre ellos.

* Símbolo : < > ó] [
* Gráficamente :

* Notación : $x \in \langle a;b\rangle$
* Interpretación: $a < x < b$

OBSERVACIÓN :

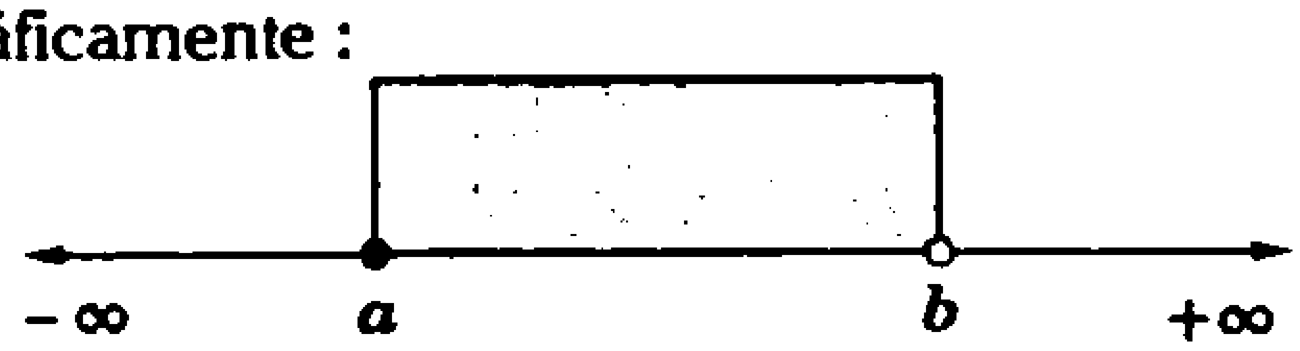
* $a > b$; se lee: "*a* es mayor que *b*"
* $a < b$; se lee: "*a* es menor que *b*"
* $a \geq b$; se lee: "*a* es mayor o igual que *b*"
* $a \leq b$; se lee: "*a* es menor o igual que *b*"

C) INTERVALO SEMIABIERTO :

Considera sólo a uno de los extremos y a los números contenidos entre ellos.

I) SEMIABIERTO POR LA DERECHA :

* Símbolo: [⟩ ó [[
* Gráficamente :



* Notación : $x \in [a;b\rangle$
* Interpretación : $a \le x < b$

II) SEMIABIERTO POR LA IZQUIERDA :

* Símbolo:]] ó ⟨]
* Gráficamente :

* Notación : $x \in \langle a;b]$
* Interpretación : $a < x \le b$

D) INTERVALOS INFINITOS :

a) Gráficamente (hacia la derecha)

* Notación : $x \in \langle a;+\infty\rangle$
* Interpretación : $a < x$

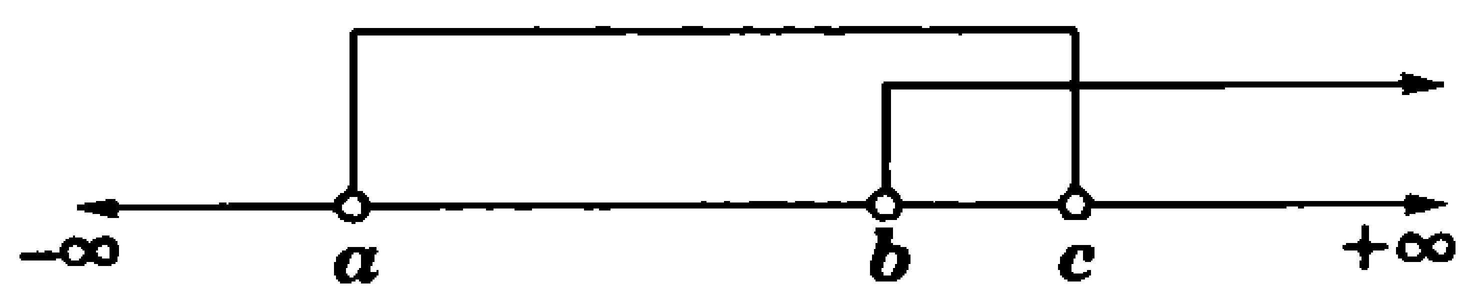
b) Gráficamente (hacia la izquierda)

* Notación : $x \in \langle -\infty;a]$
* Interpretación : $x \le a$

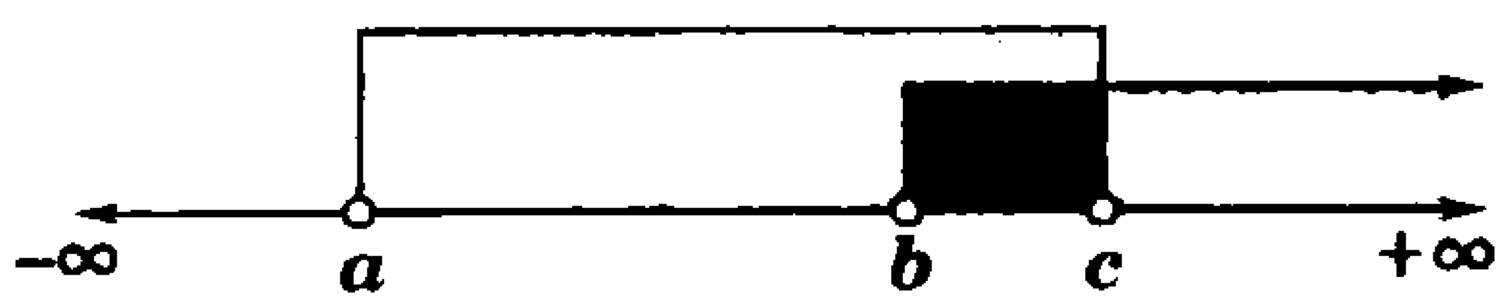
OPERACIONES CON INTERVALOS

A) UNIÓN :

* Su símbolo es "$\cup$"
* Sea : $a ; b ; c \in R$ con $a < b < c$
* Graficar : $a < x < c \cup x > b$
* En la recta numérica.



* Para representar la unión, sombreamos ambas gráficas.

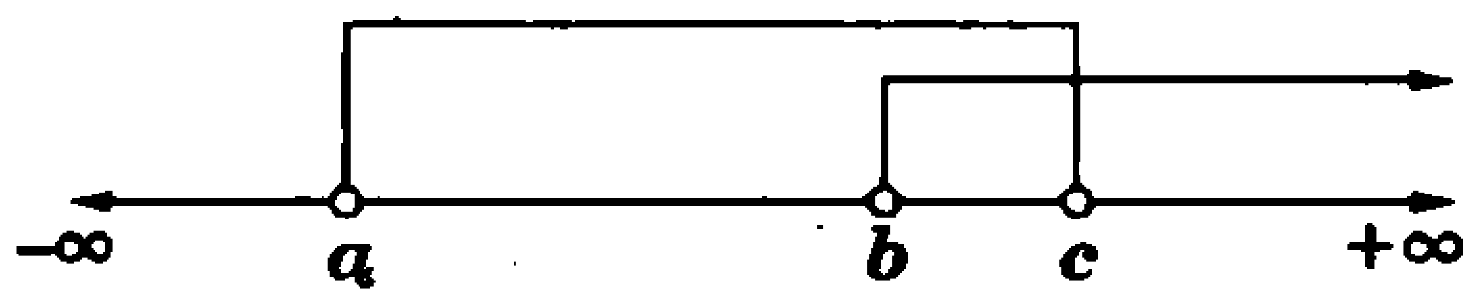


$\Rightarrow$ "$\cup$": $a < x < +\infty$

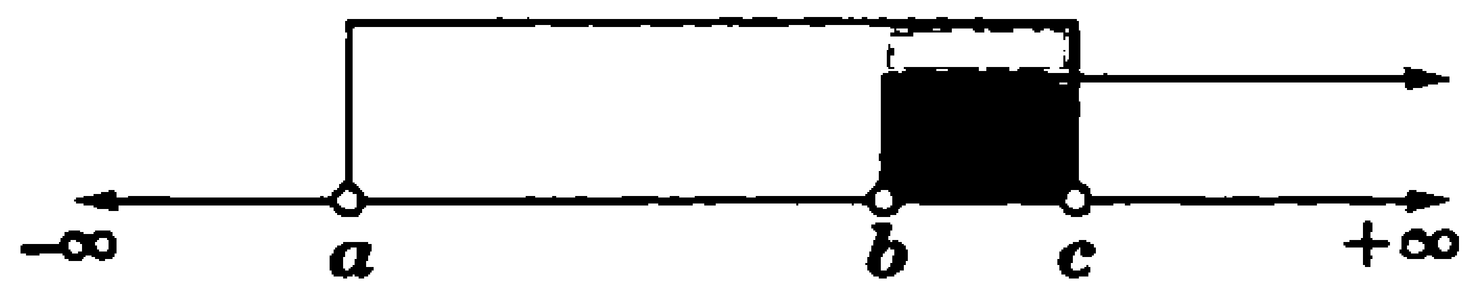
B) INTERSECCIÓN :

* Su símbolo es : "$\cap$"

* Sea : $a;b;c \in R$, si : $a< b <c$
* Graficar : $a<x<c \cap x>b$
* En la recta numérica :



* Para representar la intersección, sombreamos la parte común de ambas gráficas.



$\Rightarrow$ "$\cap$": $b<x<c$

EJEMPLO :

Dado los siguientes intervalos ;

$$A=\left\{x \in R / \frac{1}{2}<x<3\right\}$$

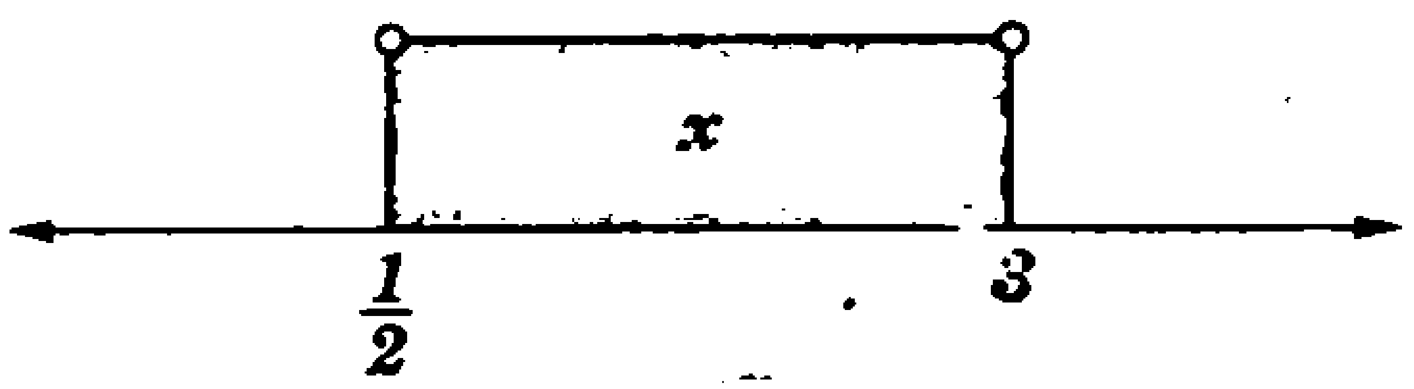
$$B=\{x \in R / 2<x \leq 16\}$$

Halle mediante un gráfico : $A \cup B$

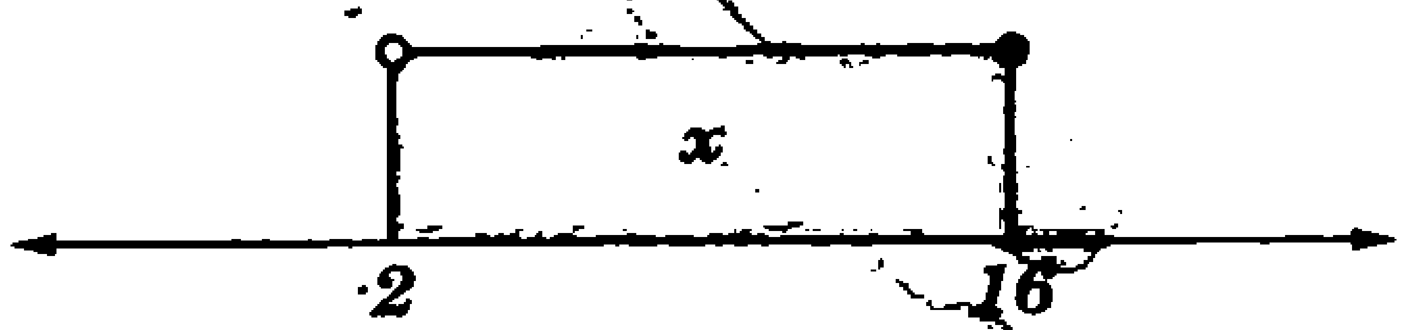
RESOLUCIÓN :

* Graficando cada uno de los intervalos

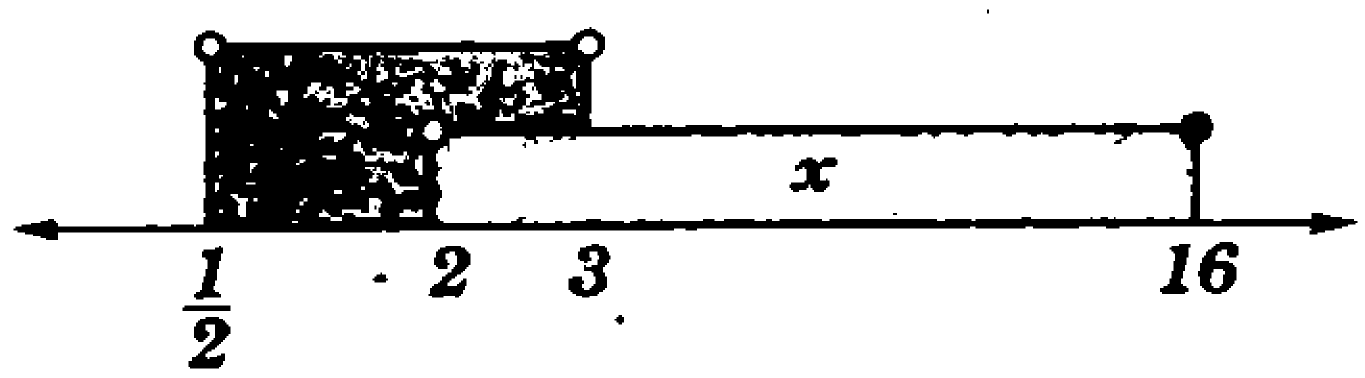
$$A=\left\{x \in R / \frac{1}{2}<x<3\right\}$$



$$B=\{x \in R / 2<x \leq 16\}$$



* Hallando : $A \cup B=\{x \in R / x \in A \vee x \in B\}$



$$\Rightarrow A \cup B=\left\{x \in R / \frac{1}{2}<x \leq 16\right\}$$

DESIGUALDADES

Debido a que el conjunto de los números reales es ordenado es posible establecer una relación de orden mediante los símbolos mayor $(>)$ o menor $(<)$.

Luego :

$x<y$, $x>y$, $x \leq y$, $x \geq y$ se llaman desigualdades.

* desigualdades estrictas $\begin{cases} x < y;\ x \text{ es menor que y} \\ x > y;\ x \text{ es mayor que y} \end{cases}$

* desigualdades no estrictas $\begin{cases} x \leq y;\ x \text{ es menor o igual que y} \\ \quad (x<y) \vee (x=y) \\ x \geq y;\ x \text{ es mayor o igual que y} \\ \quad (x>y) \vee (x=y) \end{cases}$

Sean $x, y \in R$, luego :

1	$x>0 \leftrightarrow x$ *es positivo*
2	$x<0 \leftrightarrow x$ *es negativo*
3	$x>y \leftrightarrow (x-y)$ *es positivo*
4	$x<y \leftrightarrow (x-y)$ *es negativo*

EJEMPLO :

* $2<5$ pues $2-5=-3<0$ y se lee 2 es menor que 5.

LEY DE TRICOTOMÍA

Para dos números $x; y \in R$ uno y sólo uno de los siguientes enunciados es verdadero.

$$x<y \text{ ó } x=y \text{ ó } x>y$$

DEFINICIÓN DE DESIGUALDAD :

Una desigualdad es la relación que existe entre dos expresiones que tienen diferente valor. Esta relación puede ser "***mayor***" o "***menor***", y se cumple sólo en el campo de los números reales.

COMPARACIÓN ENTRE DOS CANTIDADES REALES

* Si : $a,b \in R$

Se cumple :

a) Se dice que una cantidad "***a***" es mayor que otra cantidad "***b***", si la diferencia $(a-b)$ es una cantidad positiva, es decir : $a>b \Rightarrow a-b>0$

b) Se dice que una cantidad "***a***" es menor que otra cantidad "***b***". si la diferencia $(a-b)$ es una cantidad negativa, es decir : $a<b \Rightarrow a-b<0$

CLASES DE DESIGUALDAD

I) DESIGUALDAD ABSOLUTA :

Es aquella que conserva su sentido, para cualquier valor real de su variable.

* Así : $(x+2)^2>(x+3)(x+1)$
* Al resolver la expresión de la izquierda y la expresión de la derecha, tenemos : $x^2+4x+4>x^2+4x+3$

* Reduciendo términos :

$$x^2+4x+4>x^2+4x+3 \Rightarrow 4>3$$

* Se observa que la variable se reduce,lo cual implica que el sentido se conserva para todo valor de "x".

II) DESIGUALDAD RELATIVA :

(Llamada Inecuación)

Es aquella que conserva su sentido, sólo para cierto intervalo de valores reales de la variable.

* Así : $2x+1>x+2$
* Al resolver la inecuación tenemos :

$$2x-x>2-1 \Rightarrow x>1$$

* Se observa que el sentido de la desigualdad se conserva, sólo si la variable asume valores reales mayor que la unidad.

PRINCIPIOS DE LA DESIGUALDAD

I) Sea : $a;\ b;\ c \in R$

$$\text{Si}: a \geq b \Rightarrow a \pm c \geq b \pm c$$

* Si a ambos miembros de una desigualdad se le suma o se le resta una misma cantidad, el sentido de la desigualdad no se altera.

II) Sea : $a;\ b; \in R \wedge c \in R^+$

$$\text{Si}: a \geq b \Rightarrow ac \geq bc \qquad \text{Si}: a \geq b \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

III) Sea : $a;\ b \in R \ \wedge c \in R^-$

$$\text{Si}: a \geq b \Rightarrow ac \leq bc \qquad \text{Si}: a \geq b \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

* "Si a ambos miembros de una desigualdad se le multiplica por una cantidad negativa, el sentido de la desigualdad se invierte."

IV) Sea : $a;\ b;\ c \in R$

$$\text{Si}: a<b<c \Rightarrow a<b \wedge b<c$$

V) Sea : $a;\ b;\ c \in R-\{0\}$

$$\text{Si}: a<b<c \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$$

INECUACIÓN

Es aquella desigualdad que se verifica para un conjunto de valores particulares denominado *CONJUNTO SOLUCIÓN*, que admite la variable denominada incógnita.

EJEMPLOS :

* $5x-3>17$, se verifica sólo para $x>4$
* $\dfrac{x^2-1}{4}<2$, se verifica sólo para $-3<x<3$

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifica la inecuación. Por ejemplo, en la inecuación $3x+1>x+2$ una solución en forma particular es $x=4$, pues $3(4)+1>4+2$ es cierto.

* También en la inecuación $x+y\geq 5$, para $x=4$ e $y=1$ se verifica $4+1\geq 5$, es cierto, luego $(4;\ 1)$ es una solución.

CONJUNTO SOLUCIÓN :

Es aquel conjunto denotado por *C.S.* que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no tiene solución, entonces decimos que *C.S.* es el conjunto vacío.

RESOLVER UNA INECUACIÓN :

Significa hallar su conjunto solución. La resolución se realiza sólo empleando pasos equivalentes, por ejemplo, si queremos resolver la inecuación :

$3x+2>2x+7$, diremos :

$$3x+2>2x+7 \Leftrightarrow 3x+2+(-2)>2x+7+(-2)$$
$$\Leftrightarrow 3x>2x+5$$
$$\Leftrightarrow 3x+(-2x)>2x+5+(-2x)$$
$$\Leftrightarrow x>5$$

* Gráficamente :

Luego $C.S.=\{x \in R / x>5\}=\langle 5;+\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $-2x-3<1$

RESOLUCIÓN :

$$-2x<1+3 \quad \Rightarrow -2x<4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\div -2)$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{-2}>\frac{4}{-2} \Rightarrow x>-2 \quad \Rightarrow C.S.=\langle -2;\infty\rangle$$

INECUACIONES CON ENUNCIADO

Plantear una inecuación es interpretar (traducir) las palabras que tiene el enunciado de un problema (lenguaje escrito), en inecuaciones (lenguaje matemático).

Del lenguaje escrito al lenguaje matemático

EJEMPLOS :

I) $\underbrace{\text{La edad de Chary}}_{x}\ \underbrace{\text{aumentada}}_{+}\ \underbrace{\text{en 7}}_{7}\ \underbrace{\text{excede}}_{>}\ \underbrace{\text{a 18}}_{18}$

$\Rightarrow$ Lenguaje matemático : $x+7>18$

II) **La edad de Tina** (x) **disminuida** (−) **en 6** (6) **no excede** (≤) **a 9** (9)

⇒ Lenguaje matemático: $x - 6 \leq 9$

III) **Un número** (x) **aumentado** (+) **en sus cuatro quintos** ($\frac{4x}{5}$) **es menos** (<) **que 12** (12)

⇒ Lenguaje matemático : $x + \frac{4x}{5} < 12$

IV) **El triple** (3) **de un número** (x) **disminuido** (−) **en 7** (7) **es más que** (>) **13** (13)

⇒ Lenguaje matemático : $3x - 7 > 13$

NOTA :

A continuación se muestra un resumen y algo más de las desigualdades.

Desigualdad

Definición
- es: *la relación que existe entre cantidades que tienen diferente valor.*
- signos de relación:
  - > mayor que ...
  - < menor que ...
  - ≥ mayor o igual que ...
  - ≤ menor o igual que ...

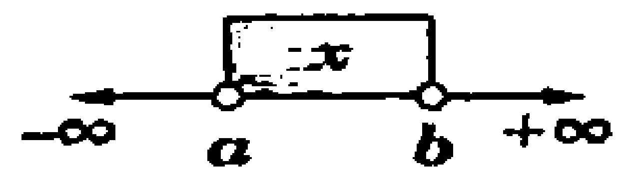
Observación
- un: número "a" es positivo ↔ $a > 0$
- un: número "a" es negativo ↔ $a < 0$
- también:
  - $a > b \leftrightarrow a - b > 0$
  - $a < b \leftrightarrow a - b < 0$

Clases (desigualdades)

- **Absolutas**
  - es: *aquella que se verifica para cualquier número real asignada a su variable.*
  - ejemplo: $x^2 + 4 > 0$ se verifica ∀ x ∈ ℝ; $x^2 + y^2 + 7 > 0$ se verifica ∀ x; y ∈ ℝ
- **Relativas o inecuaciones**
  - es: *aquella relación que se verifica sólo para determinados valores que se asignen a sus variables.*
  - ejemplo: $2x + 3 > 9$ se verifica sólo para $x > 2$

Clases de Intervalos

Abierto
- es: *aquel en el cual no se considera a sus extremos y se representa:* $\langle a; b \rangle$ ó $]a; b[$
- gráficamente:



- donde: $x \in \langle a; b \rangle$ ó $a < x < b$

Cerrado
- es: *aquel en el cual se considera a sus extremos y se representa:* $[a; b]$
- gráficamente:

- donde: $x \in [a; b]$ ó $a \leq x \leq b$

Semiabierto
- es: *aquel en el cual sólo se considera uno de sus extremos.*
- gráficamente:

- donde: $x \in [a; b\rangle$ ó $a \leq x < b$

- donde: $x \in \langle a; b]$ ó $a < x \leq b$

No acotados

- donde: $x \in \langle a; +\infty \rangle$ ó $x > a$

- donde: $x \in \langle -\infty; b]$ ó $x \leq b$

- donde: $x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$ ó $x \in \mathbb{R}$

TEOREMAS

Adición o Sustracción
- si $a < b \wedge c \in \mathbb{R} \rightarrow a \pm c < b \pm c$
- si $a < b \wedge c < d \rightarrow a + c < b + d$
- si $a > b \wedge c < d \rightarrow a - c > b - d$

Multiplicación
- si $a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$
- si $a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$
- si $(0 < a < b) \wedge (0 < c < d) \rightarrow ac < bd$

Potencia

par

$0 < a < b$
$\rightarrow a^{2n} < b^{2n}; n \in \mathbb{N}$

par

$a < b < 0$
$\rightarrow a^{2n} > b^{2n}; n \in \mathbb{N}$

impar

$a < b$
$\rightarrow a^{2n-1} > b^{2n-1}; n \in \mathbb{N}$

además

$a < x < b \wedge ab < 0$
$\rightarrow 0 \le x^2 < max(a^2; b^2)$

Inversa

si

$a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$

si

$a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0$

si

$a < b \wedge ab > 0$
$\rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una inecuación de segundo grado con una incógnita es aquella que puede reducirse a una de las siguientes formas :

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \ge 0 \qquad ax^2 + bx + c \le 0$$

* Donde : $a \neq 0$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$

Resolver una inecuación de segundo grado, es encontrar un conjunto de valores que hacen que la desigualdad se cumpla : Una de las estrategias más importantes para resolver una inecuación de segundo grado es el *Método de factorización (puntos críticos).*

MÉTODOS POR FACTORIZACIÓN :

Para resolver las inecuaciones de segundo grado se aplica el criterio de los puntos críticos, es decir :

I) Se factoriza un polinomio mediante un aspa simple.

II) Se hallan los puntos críticos, igualando cada factor a cero y se ubican en la recta numérica o eje lineal de coordenadas.

III) De derecha a izquierda se ubican los signos *(+)* y menos *(–)* en forma alternada en cada intervalo.

IV) Luego, si $P_{(x)} \ge 0$ se tomarán los intervalos *(+)* positivos y si $P_{(x)} \le 0$ se tomarán los intervalos *(–)* negativos.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $x^2 - 5x - 6 \ge 0$

RESOLUCIÓN :

* Se factoriza el trinomio por aspa simple :

$$x^2 - 5x - 6 > 0$$
$x \quad -6$
$x \quad 1$

* La multiplicación de los factores obtenidos reemplazan al trinomio en la inecuación :

$$(x - 6)(x + 1) \ge 0$$

* Hallamos los puntos críticos igualando a cero cada uno de los factores obtenidos.

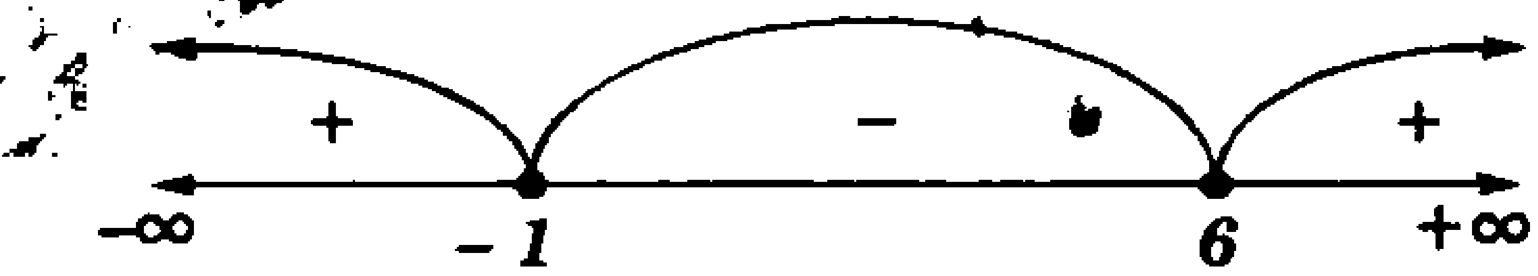
$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ $\qquad$ $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Puntos críticos : $\{-1; 6\}$ Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica (real)

$(x - 6)(x + 1) \ge 0$

Este símbolo indica que cada punto crítico es cerrado (•)

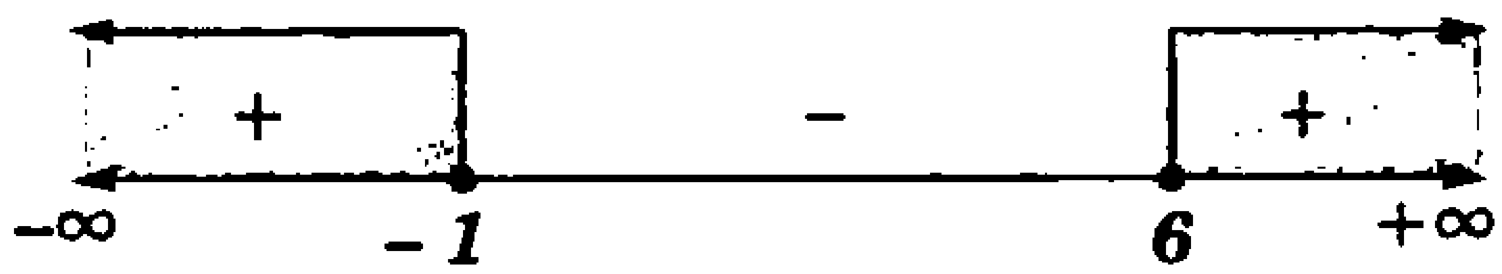
* Partiendo por la parte derecha de la recta numérica se asignan signos alternados a cada una de las divisiones de la recta real comenzando con el signo positivo *(+)*.



* El conjunto solución de la inecuación se define escogiendo la zona de acuerdo al sentido de la desigualdad.

$(x - 6)(x + 1) \ge 0$

El sentido de la desigualdad indica que el trinomio es mayor o igual que cero por lo tanto el conjunto solución son las zonas positivas



* El conjunto solución $C.S. = \langle -\infty; -1] \cup [6; +\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $x^2 - x - 6 \le 0$

RESOLUCIÓN :

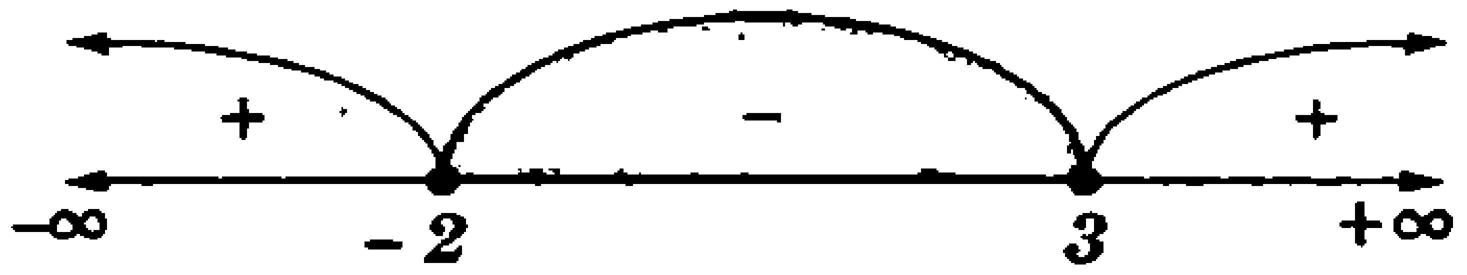
* Factorizar :

$$x^2 - x - 6 \le 0$$
$x \quad -3$
$x \quad 2$
$\Rightarrow (x - 3)(x + 2) \le 0$

* Puntos críticos $x - 3 = 0 \wedge x + 2 = 0$

$$P.C. = \{3; -2\}$$

* Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica y hacemos la distribución de signos.



* Como $P_{(x)} \leq 0$; tomamos el intervalo negativo. $x \in [-2,3]$

EJEMPLO 3 :

Resolver : $x^2 < 25$

RESOLUCIÓN :

* Pasamos 25 al miembro izquierdo : $x^2 - 25 < 0$
* Factorizamos $x^2 - 25$ por diferencia de cuadrados $x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$
* Luego : $(x+5)(x-5) < 0$
* Hallamos los puntos críticos igualando a cero cada uno de los factores obtenidos.

$$x+5=0 \qquad x-5=0$$
$$\Rightarrow x=-5 \qquad \Rightarrow x=5$$

Puntos críticos : $\{-5;5\}$

* Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica (Real).

$$(x+5)(x-5)<0$$

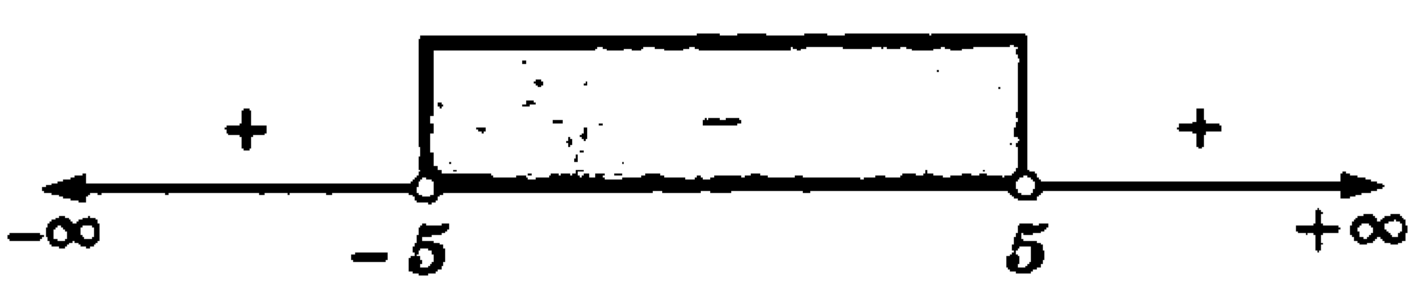
El sentido de la desigualdad indica que la expresión es menor que cero, por lo tanto el C.S. son las zonas negativas

* Asignamos signos alt adøs partiendo desde la derecha con el signo po. vo (+).

* El conjunto solución de la inecuación se define escogiendo la zona de acuerdo al sentido de la desigualdad.

$$(x+5)(x-5) < 0$$

El sentido de la desigualdad indica que la expresión es menor que cero, por lo tanto el C.S. son las zonas negativas



* El conjunto solución $C.S. = \langle -5;5 \rangle$

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (C.V.A)

Es aquel conjunto que garantiza la existencia del valor de las variables para que una expresión matemática esté bien definida. El *C.V.A.* se va a considerar respecto a $\mathbb{R}$, salvo que se indique lo contrario.

EJEMPLOS :

I) $P(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$, el *C.V.A.* está ado por todos aquellos valores reales para x, tal que $x-2 \neq 0$; es decir $C.V.A. = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$

II) $H(x) = \sqrt{3-x}$, el *C.V.A.* está dado por todos aquellos valores reales para x, tal que el radicando no es negativo, es decir $3 - x \geq 0$ de donde $C.V.A. = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} = \langle -\infty; 3]$

III) $M(x) = \sqrt[3]{x-7}$, el *C.V.A.* $= \mathbb{R}$, ya que una expresión irracional de índice impar está definida para cualquier valor real.

IV) $P(x) = 2^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$, entonces $C.V.A. = [0;\infty\rangle$

INECUACIONES RACIONALES

* Ahora resolvamos la inecuación fraccionaria

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0$$

* En forma general, multiplicando a ambos miembros por $Q^2(x)$ y tener en cuenta que $Q(x) \neq 0$, es decir

$$Q^2(x)\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) \gtrless 0 \quad \times\ Q^2(x)$$

$$Q(x) \times P(x) \gtrless 0 \quad \wedge \quad Q(x) \neq 0$$

* Como $P(x)$ son polinomios entonces una inecuación fraccionaria se puede resolver por el método de los puntos críticos como si fuera una inecuación polinomial, teniendo cuidado de la restricción $Q(x) \neq 0$

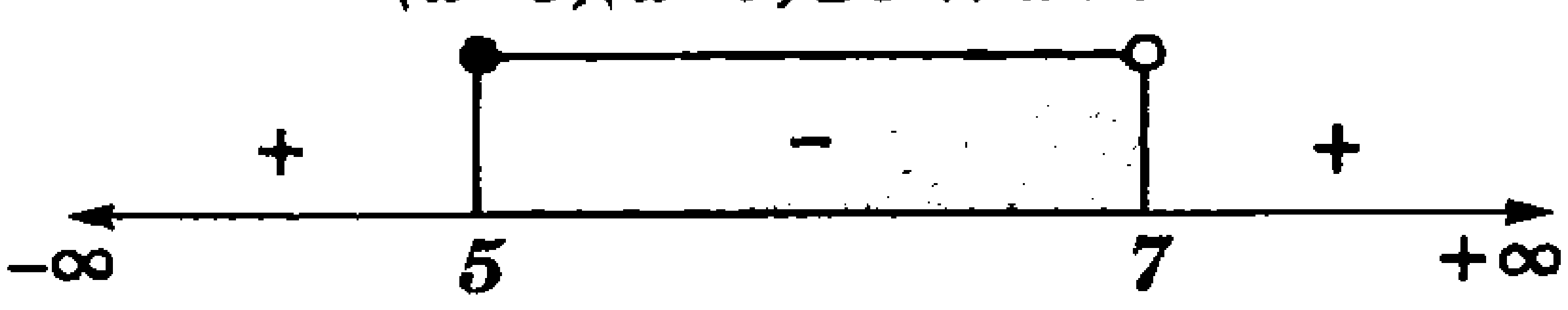
EJEMPLO :

Resuelva : $\dfrac{x-5}{x-7} \leq 0$

RESOLUCIÓN :

* Se debe tener en cuenta que $x \neq 7$, entonces la inecuación que queda, sería equivalente a

$$(x-5)(x-7) \leq 0 \ \wedge \ x \neq 7$$



$\Rightarrow C.S. = [5;7\rangle$

* Observe que $x=7$ no pertenece al conjunto solución.

INECUACIONES IRRACIONALES

Es aquella desigualdad en el cual en uno de sus miembros, aparece una expresión irracional.

EJEMPLO :

* $\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x-1}>3\sqrt{x}$
* $\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{x+4}\leq x+3$
* $\sqrt[6]{x+2\sqrt{2x-1}}>5+\sqrt{x-6}$

* Para resolverlos, debemos tener en cuenta el valor del índice de los radicales. apunta pero no dispares y no me desampares

A) Si los índices de los radicales son impares :

Para la resolución de este tipo de inecuaciones no se requiere hacer restricciones a la incógnita.

EJEMPLO :

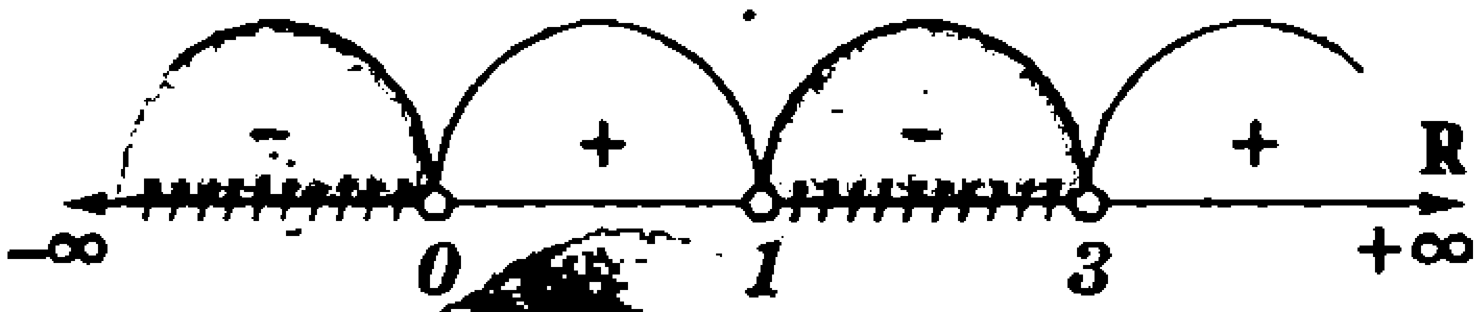
Resolver : $\sqrt[5]{x+\sqrt[3]{1-x^2}}<1$

RESOLUCIÓN :

* Elevando a la quinta, resulta : $x+\sqrt[3]{1-x^2}<1$
* Transponiendo : $\sqrt[3]{1-x^2}<1-x$
* Nuevamente elevando al cubo :

$$1-x^2<1-3x+3x^2-x^3 \Rightarrow x^3-4x^2+3x<0$$

* Factorizando : $x(x-1)(x-3)<0$



* Por lo tanto : $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]1;3[$

B) Si los índices de los radicales son pares :

Para la solución de estas inecuaciones, se debe seguir los siguientes pasos :

I) Halle e l ***C.V.A. de P(x)***

II) Transformar la inecuación en otra equivalente eliminando los radicales y de aquí obtendremos un conjunto solución parcial (S_p).

III) El conjunto solución de la inecuación se obtiene intersectando el conjunto solución parcial obtenido con el ***C.V.A.***, es decir.

$$C.S.=C.V.A.\cap S_p$$

* donde

C.S. ⇒ Conjunto solución de la inecuación.

C.V.A. ⇒ Conjunto de valores admisibles.

S_p ⇒ Conjunto solución parcial obtenido.

EJEMPLO 1:

Resuelva : $\sqrt{3x-6}\geq 3$

RESOLUCIÓN :

* Hallando el ***C.V.A.***

$$3x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$$
$$\Rightarrow C.V.A.=[2,\infty\rangle$$

* Ahora elevando al cuadrado $3x-6\geq 9 \Leftrightarrow x\geq 5$
* Intersectando $C.S.=[2;\infty\rangle\cap[5;\infty\rangle=[5;\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $\sqrt{4-x}<3$

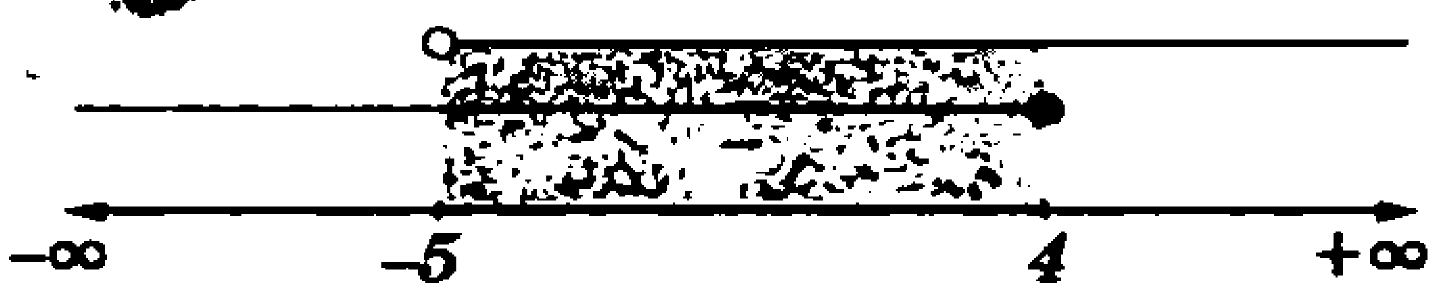
RESOLUCIÓN :

C.V.A.: $4-x\geq 0 \Leftrightarrow 4\geq x \Leftrightarrow x\leq 4$ ....(α)

* Luego : $\sqrt{4-x}<3$
* Elevando al cuadrado se tiene : $4-x<9$

$\Rightarrow -5<x \Leftrightarrow x>-5$ ....(β)

* Para encontrar el conjunto de valores reales que, satisfagan las condiciones (α) y (β), debemos intersectar dichas relaciones :



$\Rightarrow C.S.=\langle -5;4]$

TEOREMAS :

I) $\sqrt{a}<b \Leftrightarrow a\geq 0 \wedge b>0 \wedge a<b^2$

II) Si : $\sqrt{a}>b \Rightarrow \begin{cases} a\geq 0 \wedge b<0 \\ \vee \\ a\geq 0 \wedge b\geq 0 \wedge a>b^2 \end{cases}$

III) Si : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 0 \Rightarrow a=0 \wedge b=0$

EJEMPLO 3 :

Resuelva : $\sqrt{x+2}>x$

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema 2 :

$$\begin{cases} x+2\geq 0 \wedge x<0 \\ \vee \\ x+1\geq 0 \wedge x<0 \wedge x+2>x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \wedge x<0 \\ \vee \\ x\geq -2 \wedge x\geq 0 \wedge (x-2)(x+1)<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\leq x<0 \\ \vee \\ 0\leq x<2 \end{cases}$$

* Uniendo los dos casos tenemos que

$$C.S.=[-2;0\rangle \cup [0,2\rangle=[-2,2\rangle$$

EJEMPLO 4 :

Calcule $(x+y)$, si : $\sqrt{x-5}+\sqrt{y-3}\le 0$

RESOLUCIÓN :

* Por el teorema 3 : $x-5=0 \;\wedge\; y-3=0$
* De donde $x+y=8$

EJEMPLO 5 :

Resuelva : $\sqrt{x-2}>-7$

RESOLUCIÓN :

* En este problema, vemos que $\sqrt{x-2}$ siempre es positivo, de donde :

$$\boxed{\sqrt{x-2}}>-7$$
$$+$$
$$x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$$

* De donde $x\in[2;\infty\rangle$

INECUACIONES COMPUESTAS DE POTENCIAS MÚLTIPLES Y RADICALES SIMPLES

* Para resolver inecuaciones algebraicas del tipo :

$$A^{2n}\times \sqrt[2n+1]{B}\times C^{2n-1}\times \sqrt[2n]{D}\gtrless 0$$

* Se utiliza las siguientes propiedades :

I) $n\in Z^+;\; a^{2n}>0 \Rightarrow a\in R-\{0\}$

II) $n\in Z^+;\; \sqrt[2n]{a}>0 \Rightarrow a>0$

III) $n\in Z^+;\; a^{2n+1}>0 \Leftrightarrow a>0$

IV) $n\in Z^+;\; \sqrt[2n+1]{a}>0 \Leftrightarrow a>0$

EJEMPLO :

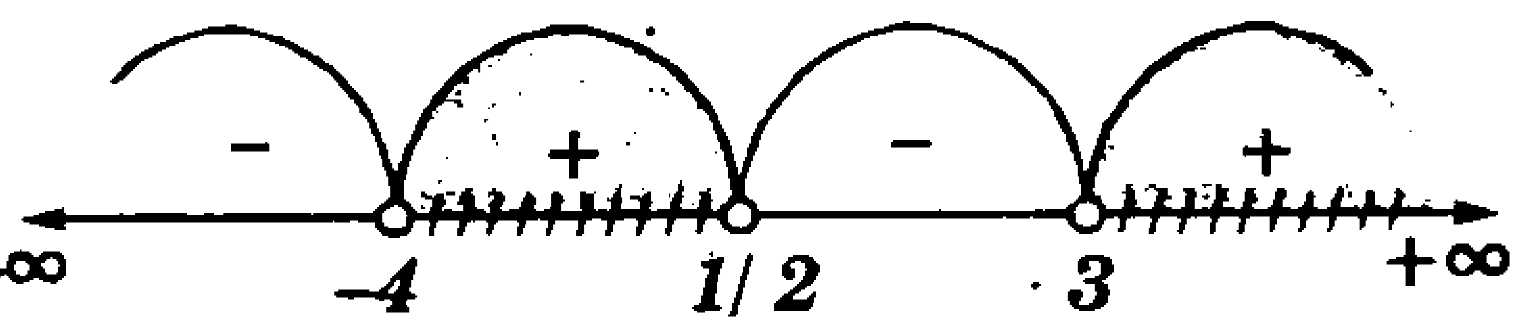
Resolver : $(x+4)^5\,(x-3)^7\,(2x-1)^9>0$

RESOLUCIÓN :

* Por la Propiedad ***(III)*** :

$$(x+4)\,(x-3)\,(2x-1)>0$$

* Aplicando puntos críticos :



* Luego : $x\in\,]-4\,;1/2[\,\cup\,]3\,;\infty[$

VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número real x y se denota por $|x|$ al número real no negativo que cumple:

$$|x|=\begin{cases} x;\; x\ge 0\\ -x;\; x<0\end{cases}$$

* También :

$$|x|=\begin{cases} x;\; x>0\\ 0;\; x=0\\ -x;\; x<0\end{cases}$$

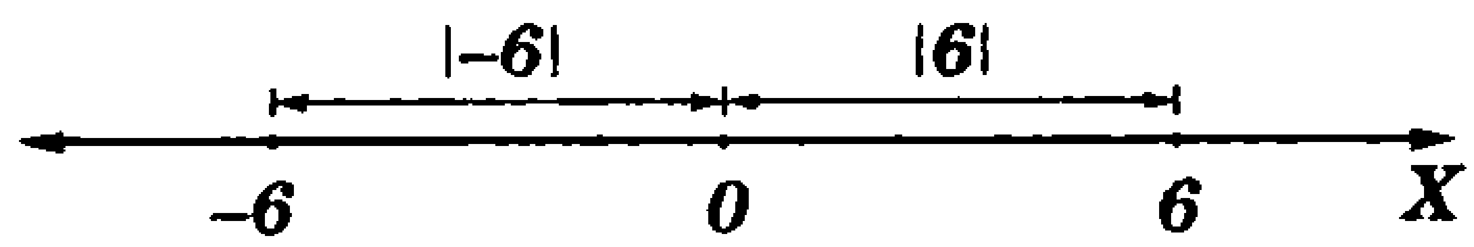
EJEMPLOS :

* $|3|=3$ ya que $3>0$
* $|-5|=-(-5)=5$ ya que $-5<0$
* $|x^2+1|=x^2+1$ ya que $x^2+1>0$
* $|0|=0$
* $|x-3|=\begin{cases} x-3 & \text{si } x-3>0\\ 0 & \text{si } x-3=0\\ -(x-3) & \text{si } x-3<0\end{cases}$
* $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1\ge 0\\ -(x^2-1) & \text{si } x^2-1<0\end{cases}$

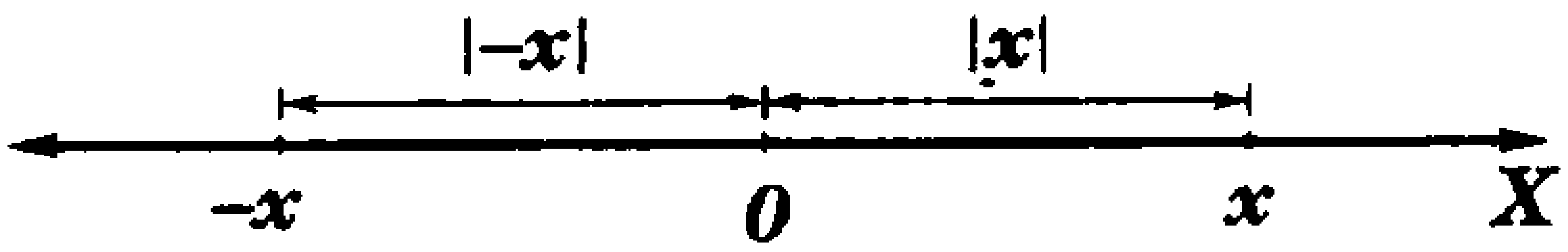
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La distancia de un número real a cero se le denomina valor absoluto y se le representa entre barras.

EJEMPLO :



* El valor absoluto de -6 es 6, ya que la distancia de -6 a 0 es 6 y se representa $|-6|=6$.
* También $|6|=6$
* En general :



PROPIEDADES :

1) $|x|\ge 0;\; \forall x\in R$

EJEMPLO :

$|x^2-2x|\ge 0;\; \forall\, x\in R$

2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

EJEMPLOS :

* $|x-2|=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
* $|2x-5|=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

3) $|xy|=|x||y|$

EJEMPLOS :

* $|2x|=|2|\,|x|$
* $|(x-2)(x-6)|=|x-2|\,|x-6|$

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\,;\,y\neq 0$

EJEMPLOS :

* $\left|\dfrac{x}{2}\right|=\dfrac{|x|}{|2|}$ * $\left|\dfrac{x-3}{x}\right|=\dfrac{|x-3|}{|x|}$

5) $|x^2|=|x|^2=x^2$

EJEMPLOS :

* $|(x-5)^2|=|x-5|^2=(x-5)^2$ * $|x^2|=x^2$
* $|(x-2)|^2=(x-2)^2$

6) $\sqrt{x^2}=|x|$

EJEMPLOS :

* $\sqrt{(x-5)^2}=|x-5|$ * $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$

7) $-|x|\leq x\leq |x|$

8) $|x|=|-x|$

EJEMPLOS :

* $|5|=|-5|$ * $|3|=|-3|$
* $|x-y|=|y-x|$ * $|x-2|=|2-x|$

9) $|x+y|\leq |x|+|y|$

DEMOSTRACIÓN:

$|x+y|^2=(x+y)^2$ .... propiedad 5

* Desarrollando : $|x+y|^2=x^2+y^2+2xy$
* Se sabe : $|x|^2=x^2$; $|y|^2=y^2$
* Reemplazando tenemos : $|x+y|^2=x^2+y^2+2xy$
* De otro lado :

$xy\leq |xy|$ .... propiedad 7

* Multiplicando por 2 : $2xy\leq 2|xy|$
* Ahora sumando a ambos miembros : $|x|^2+|y|^2$ tenemos :

$$\underbrace{|x|^2+|y|^2+2xy}_{I}\leq |x|^2+|x|^2+2\underbrace{|x||y|}_{|xy|}$$

$$\Rightarrow |x+y|^2\leq (|x|+|y|)^2$$

* De donde : $|x+y|\leq |x|+|y|$

NOTA :

De la desigualdad triangular se deduce que :

* $|x+y|=|x|+|y|$, si $xy\geq 0$
* $|x+y|<|x|+|y|$, si $xy<0$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMAS :

1) $|x|=a\Leftrightarrow a\geq 0\ \wedge\ (x=a\ \vee\ x=-a)$

2) $|x|=|a|\Leftrightarrow x=a\ \vee\ x=-a$

EJEMPLO 1 :

Resolver : $|x-5|=4$

RESOLUCIÓN :

* Identificamos la propiedad a utilizar :

Si : $b\geq 0$ $|x|=b\Rightarrow x=b\ \vee\ x=-b$

* Reemplazamos la propiedad en el ejercicio:

Si : $4>0$ $|x-5|=4\Rightarrow x-5=4\ \vee\ x-5=-4$

* Resolvemos cada ecuación :

$x-5=4\ \vee\ x-5=-4$

$x=9 \qquad x=1$

$\Rightarrow$ El conjunto solución : $C.S.=\{1;9\}$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $|3x-2|=|2x+3|$

RESOLUCIÓN :

* Identificamos la propiedad a utilizar :

$$|x|=|b|\Rightarrow x=b\ \vee\ x=-b$$

* Reemplazamos la propiedad en el ejercicio :

$|3x-2|=|2x+3|$

$\Rightarrow 3x-2=2x+3\ \vee\ 3x-2=-(2x+3)$

* Resolvemos cada ecuación :

$3x-2=2x+3\ \vee\ 3x-2=-(2x+3)$

$3x-2x=3+2\ \vee\ 3x-2=-2x-3$

$x=5\ \vee\ 3x+2x=-3+2$

$x=5\ \vee\ 5x=-1$

$x=5\ \vee\ x=-\dfrac{1}{5}$

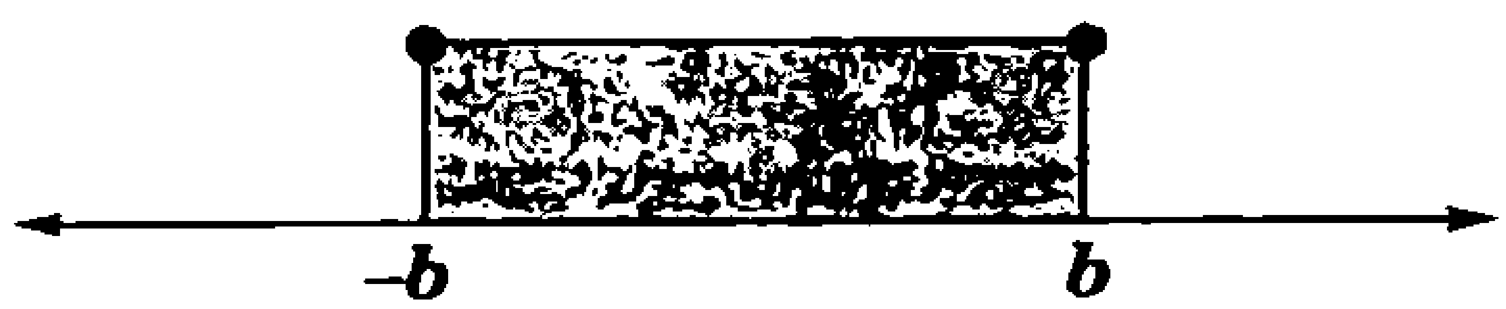
* El conjunto solución : $C.S.=\left\{-\dfrac{1}{5};5\right\}$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

TEOREMA :

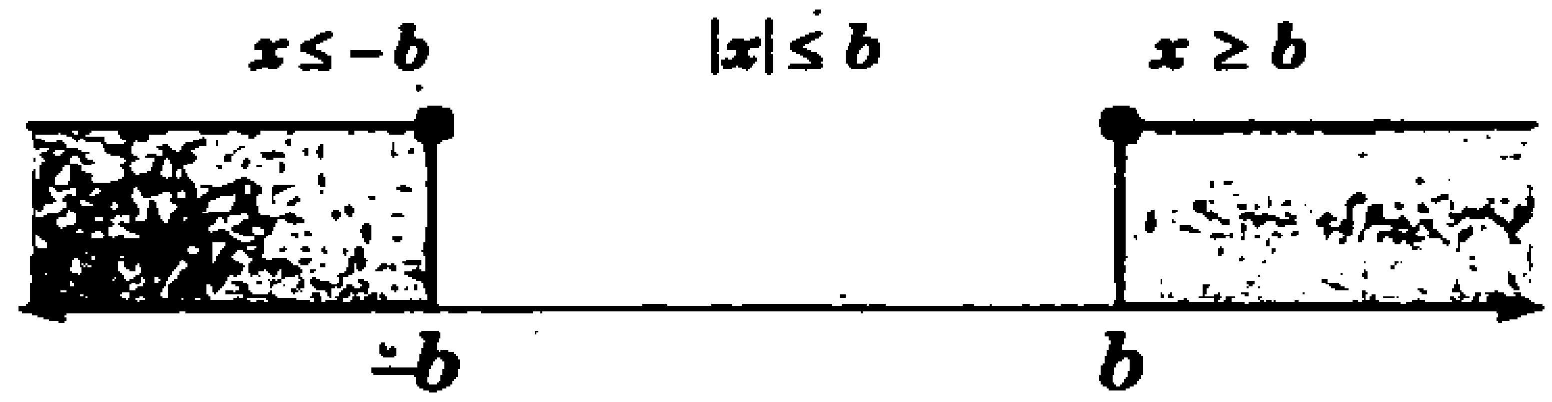
1) $|x|\leq b\ \Leftrightarrow\ b\geq 0\ \wedge\ (-b\leq x\leq b)$

Gráficamente : $|x|\leq b$



2) $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \vee x \leq -b$

Gráficamente :



3) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

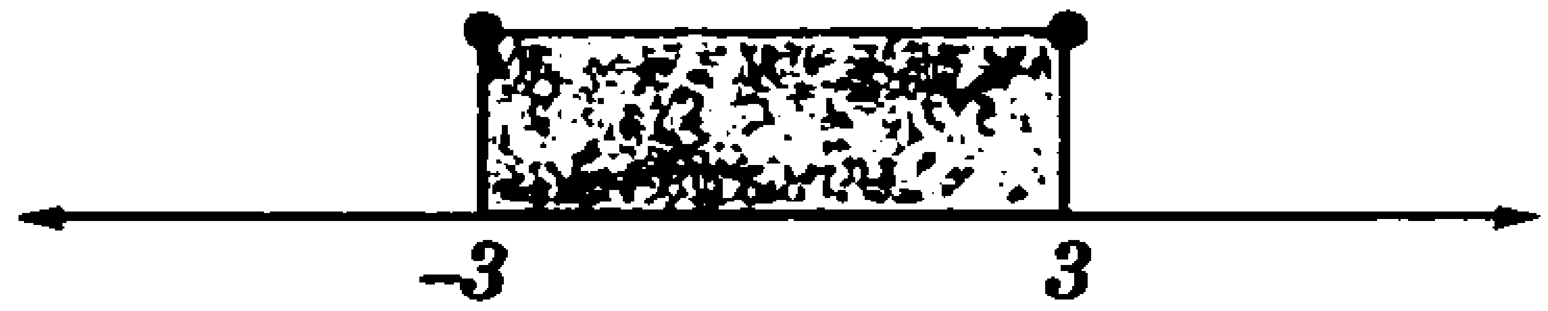
EJEMPLO 1 :

Resolver : $|x| \leq 3$

RESOLUCIÓN :

$$|x| \leq 3 \Leftrightarrow 3 > 0 \wedge (-3 \leq x \leq 3)$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$$

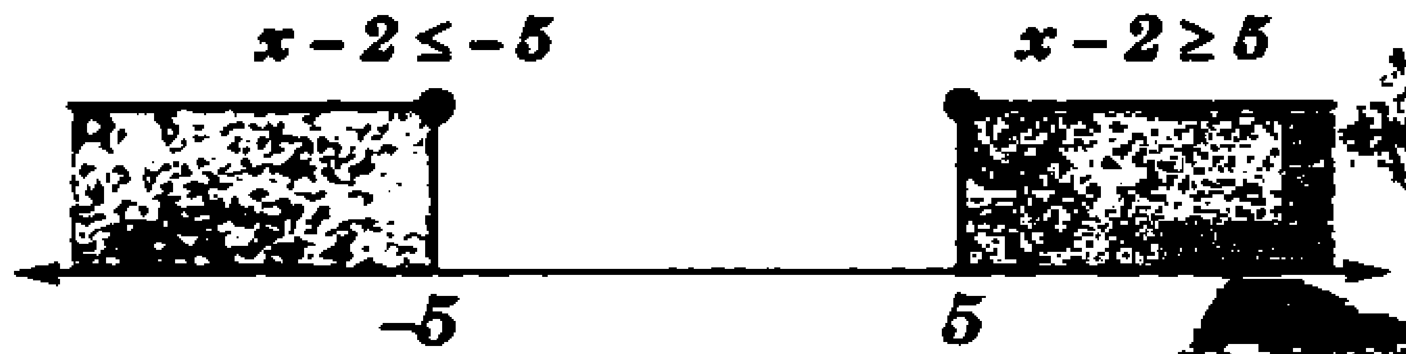


$$\Rightarrow C.S. = [-3;3]$$

EJEMPLO 2 :

Resolver : $|x-2| \geq 5$

RESOLUCIÓN :



$$\Rightarrow x-2 \leq -5 \vee x-2 \geq 5$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \quad \vee x \geq 7$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -3] \cup [7; \infty\rangle = C.S.$$

NOTA :

Si : $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge (-b < x < b)$

EJEMPLO 3 :

Resolver : $|x-3| < 5$

RESOLUCIÓN :

* Como : $5 > 0$; sólo consideramos : $-5 < x-3 < 5$
* Sumando 3 a toda la desigualdad :

$$-5+3 < x-3+8 < 5+8$$

$$\Rightarrow -2 < x < 8 \Rightarrow x \in \langle -2;8\rangle$$

PROBLEMAS RESUELTOS

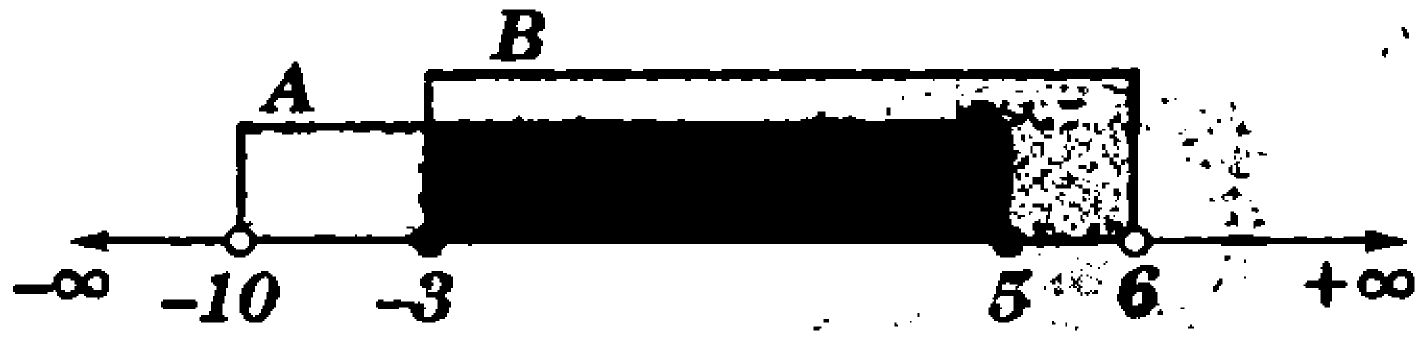
PROBLEMA 1 :

Si : $A = \langle -10;5]$, $B = [-3;6\rangle$

Determinar : $A \cap B \wedge A \cup B$

RESOLUCIÓN :

* Graficando los intervalos "A" y "B" en la recta numérica real.



* Se observa que :

$$A \cap B = [-3;5] \quad A \cup B = \langle -10;6\rangle$$

PROBLEMA 2 :

Resolver e indicar el menor valor entero que puede tomar "x".

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{x-3}{2} > 4$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

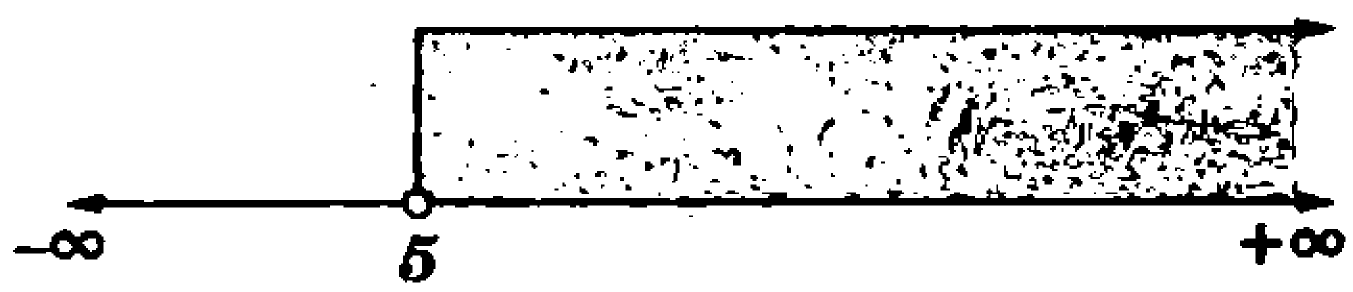
* Sacando ***M.C.M*** a las fracciones :

$$\frac{2(2x+1)+3(x-3)}{6} > 4 \Rightarrow \frac{4x-2+3x-9}{6} > 4$$

* Pasando a multiplicar el 6.

$$7x-11 > 24 \Rightarrow 7x > 35 \Rightarrow x > 5$$

* Luego el conjunto solución será :



* El menor valor entero que cumple es ***6***.

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Resolver la inecución y dar el menor entero que cumple :

$$\frac{x-1}{9} + \frac{x-2}{8} + \frac{x-7}{3} > 3$$

A) 11 *B) 13* *C) 8* *D) 12* *E) -1*

RESOLUCIÓN :

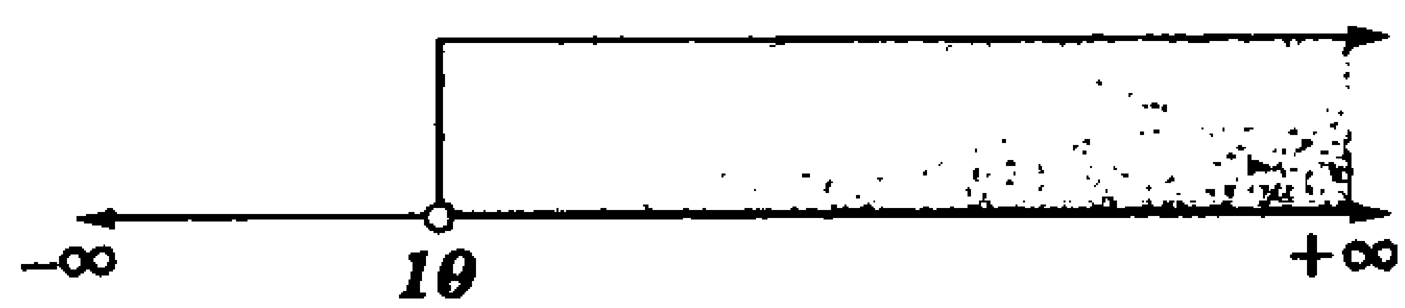
* Siendo el ***M.C.M.*** a las fracciones :

$$\frac{8(x-1)+9(x-2)+24(x-7)}{72} > 3$$

$$\Rightarrow \frac{8x-8+9x-18+24x-168}{72} > 3$$

$$\Rightarrow 41x - 194 > 216 \Rightarrow 41x > 216+194$$

$$\Rightarrow 41x > 410 \Rightarrow x > 10$$



* Luego el menor valor entero es ***11***.

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Resolver : $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$

A) $x\in\langle-\infty;7\rangle$ B) $x\in\langle-\infty;0]$ C) $x\in\langle-1;1\rangle$ D) $x\in\langle-2;7\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Sacando *M.C.M.* ambos lados :

$$\frac{2(3x-1)-5(x+1)}{10}<\frac{7-x}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{6x-2-5x-5}{10}<\frac{7-x}{7} \Rightarrow \frac{x-7}{10}<\frac{7-x}{7}$$

* Multiplicando en aspa : $7x-49<70-10x$
* Trasladando las "x" a un sólo lado : $17x<119$ $\Rightarrow x<7$

$\Rightarrow x\in\langle-\infty;7\rangle$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5:

Si : $(5x-1)\in\langle4;9\rangle$

¿a qué intervalo pertenece $\frac{1}{3x-2}$?

A) $\left\langle\frac{1}{2};1\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{1}{4};2\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{1}{4};1\right\rangle$ D) $\left\langle\frac{1}{4};2\right\rangle$

RESOLUCIÓN :

* Como : $(5x-1)\in\langle4;9\rangle \Leftrightarrow 4<5x-1<9$
* Sumando a toda la desigualdad :

$$4+1<5x-1+1<9+1$$

$$\Rightarrow 5<5x<10 \Rightarrow 1<x<2$$

* Multiplicando por 3 a toda desigualdad :

$3<3x<6 \Rightarrow 3-2<3x-2<6-2 \Rightarrow 1<3x-2<4$

* De donde al invertir se tiene :

$$1>\frac{1}{3x-2}>\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}<\frac{1}{3x-2}<1\Rightarrow\frac{1}{3x-2}\in\left\langle\frac{1}{4};1\right\rangle$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

La suma de los enteros que verifican simúltaneamente las inecuaciones :

$\frac{4x-5}{7}<x+3;\frac{3x+8}{4}>2x-5$ es :

A) -21 B) -36 C) -18 D) 18 E) 25

RESOLUCIÓN :

* Resolviendo la primera inecuación :

$$4x-5<7x+21 \Rightarrow x>-\frac{26}{3}$$

* Resolviendo la segunda inecuación :

$$3x+8>8x-20 \Rightarrow x<\frac{28}{5}$$

* Luego la solución del sistema será :

$$-\frac{26}{3}<x<\frac{28}{5} \Rightarrow -8,6<x<5,6$$

* Como $x\in Z$, $x=\{-8,-7,-6,..........5\}$
* Luego la suma de valores enteros será :

$-8-7-6=-21$..........(los demás se eliminan)

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

A un estudiante le dieron a vender una cierta cantidad de pollitos, de los que vendió *35* y le quedaron más de la mitad. Luego le devuelven *3*, y vende después *18* con lo que le restan menos de *22* pollitos. ¿Cuántos pollitos le dieron?

A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" la cantidad de pollitos :

$x-35>\frac{x}{2} \Rightarrow x>70$.................................(I)

* También :

$x-35+3-18<22 \Rightarrow x<72$....................(II)

* De (I) y (II): $70<x<72$

$\Rightarrow x=71$............(ya que "x" es entero)

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Un comerciante adquirió cierto número de artículos de los que vendió *70* y le quedaron más de la mitad; al día siguiente le devolvieron *6*, pero logró vender *36* después de lo cual le quedaron menos de *42*. ¿Cuántos artículos formaba el lote?

A) 140 B) 141 C) 139 D) 142

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" al número de artículos . Por dato se plantea:
* $x-70>\frac{x}{2} \Rightarrow x>140$.........................(I)
* $x-70+6-36<42 \Rightarrow x<142$ ....(II)
* De (I) y (II) : $140<x<142 \Rightarrow x=141$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Un carpintero hizo un cierto número de mesas. vende *49* y le quedan por vender más de la mitad. Hace después *9* mesas y vende *20*, quedándole menos de *41* mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho sabiendo que inicialmente fabricó un número par de mesas?

A) 107 B) 102 C) 100 D) 109 E) 103

RESOLUCIÓN :

* Sea la "x" cantidad de mesas que fabricó al principio.
* Del enunciado se plantea :

$$x-49>\frac{x}{2}\Rightarrow x>98 \quad ....(I)$$

$$x-49+9-20<41\Rightarrow x<101 \quad ....(II)$$

* De (I) y (II): $98<x<101$
* Como x es par (según dato) $\Rightarrow x=100$
* Pero la cantidad de mesas hechas es :

$$100 + 9 = 109$$

RPTA : "D"

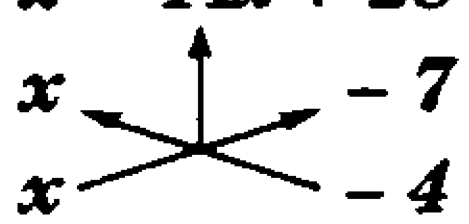
PROBLEMA 10 :

Resolver : $x^2-11x+28>0$

RESOLUCIÓN :

* Factorizando la inecuación por aspa simple.

$$x^2-11x+28>0$$

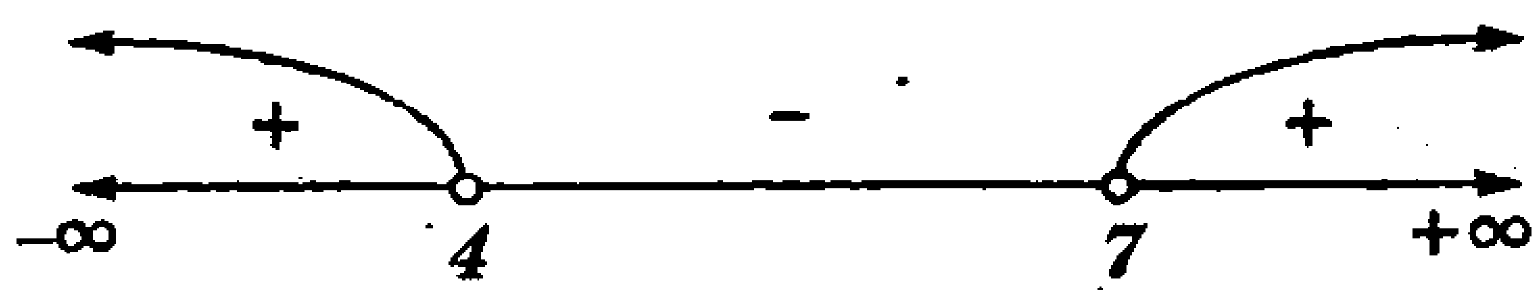


* Luego se tendra : $(x-4)(x+7)>0$
* Igualando a cero cada factor se obtendrá los puntos críticos.

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

$$x-7=0 \Rightarrow x=7$$

* Graficando los puntos en la recta numérica real.



* Luego el conjunto solución estará representado por las zonas positivas es decir : $x\in\langle-\infty;4\rangle\cup\langle7;+\infty\rangle$

PROBLEMA 11 :

Resolver : $x^2+2x-8<0$

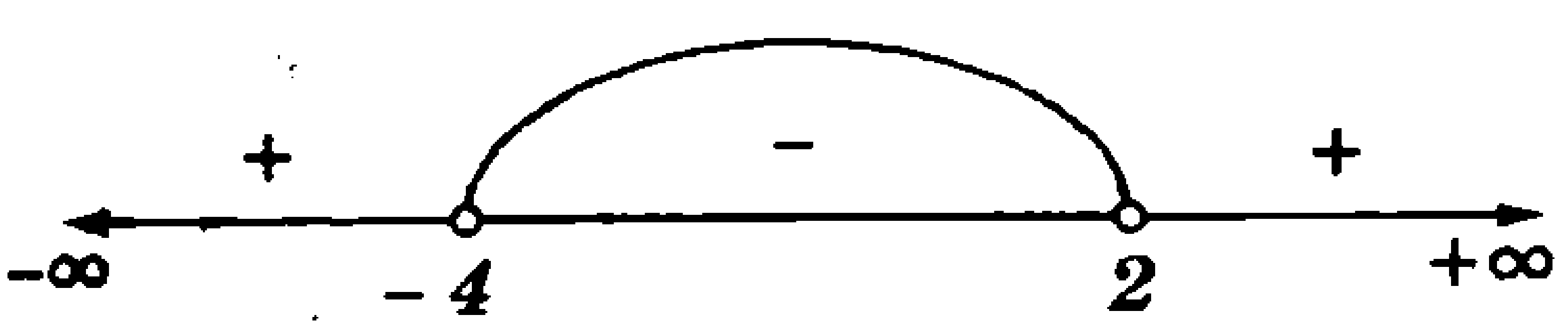
RESOLUCIÓN :

* Factorizando se obtiene : $(x+4)(x-2)<0$
* Determinando los puntos críticos

$$x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

* Graficando y aplicando la regla de los signos



* Luego el conjunto solución estará dado en la zona negativa, es decir : $x\in\langle-4;2\rangle$

PROBLEMA 12 :

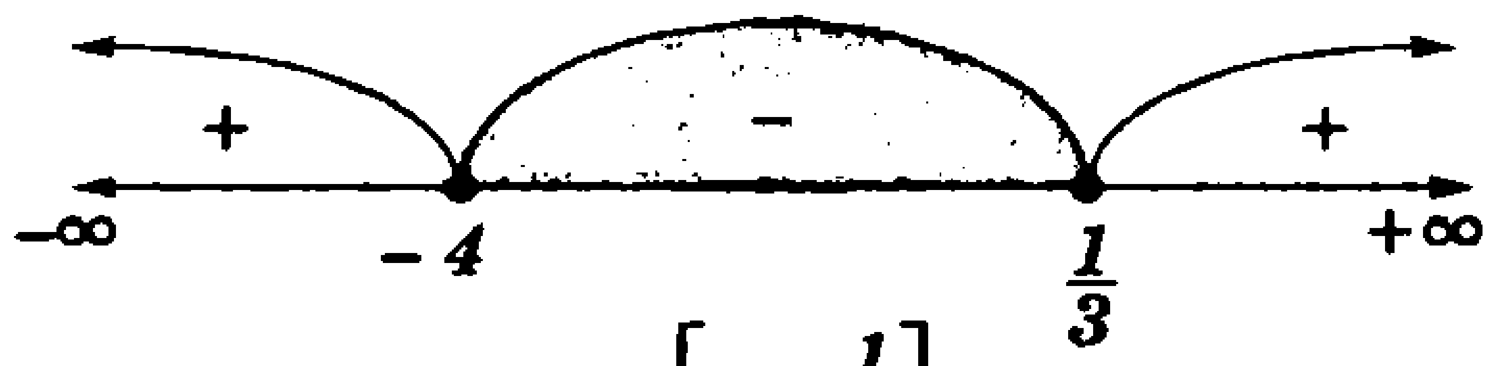
Resolver : $\frac{2}{5}(x+4)(3x-1)\le 0$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por $5/2$ se tendrá : $(x+4)(3x-1)\le 0$
* Luego usamos el criterio de los puntos críticos.

$$x+4=0\Rightarrow x=-4 \qquad 3x-1=0\Rightarrow x=1/3$$

* Como la desigualdad es ≤ 0



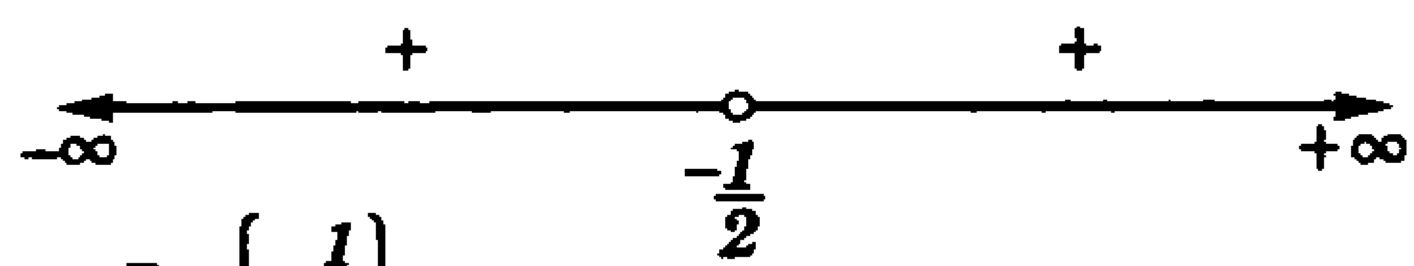
$$x\in\left[-4;\frac{1}{3}\right]$$

PROBLEMA 13 :

Resolver : $(2x+1)^2>0$

RESOLUCIÓN :

* El punto crítico es $-\frac{1}{2}$ no se considera como parte de la solución ya que es >0.



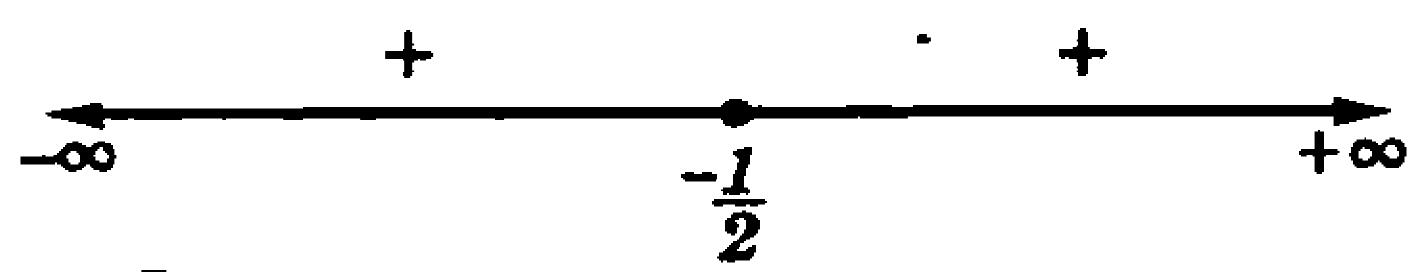
$\Rightarrow x\in R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

PROBLEMA 14 :

Resolver : $(2x+1)^2\ge 0$

RESOLUCIÓN :

*El punto crítico es $-1/2$ se considera como parte de la solución ya que es ≥ 0.



$\Rightarrow x\in R$

PROBLEMA 15 :

Resolver : $(2x+1)^2<0$

RESOLUCIÓN :

* Cualquier número real positivo o negativo al elevarlo al cuadrado da como resultado un número positivo, entonces ningún valor real verifica la desigualdad. $\Rightarrow x\in\phi$

PROBLEMA 16 :

Resolver : $(2x+1)^2\le 0$

RESOLUCIÓN :

* En este caso el intervalo es cerrado en consecuencia la desigualdad será posible sólo en el caso que la

base sea cero es decir cuando : $x=-\frac{1}{2}$

OBSERVACIÓN :

* Dado : $P_{(x)}=ax^2+bx+c \quad \{a,b,c\}\subset R$

Si tiene : Δ=discriminante $=b^2-4ac$

* Donde : $(\Delta<0)$ y $(a>0)$
* Entonces : $ax^2+bx+c>0$

PROBLEMA 17 :

Resolver : $x^2+x+1>0$

RESOLUCIÓN :

* Calculando el discriminante :

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=1^2-4(1)(1)=-3$$

* Entonces como $\Delta<0$, luego "x^2+x+1" siempre será positivo, para cualquier valor de "x".
* Cosa que la solución, será : $x\in R$.

PROBLEMA 18 :

Hallar el menor de los números "M" que cumple la siguiente condición :

$$\forall x\in R : 4x-x^2-12\le M$$

A) 0 B) –2 C) –8 D) 1 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Transponiendo los términos de manera adecuada:

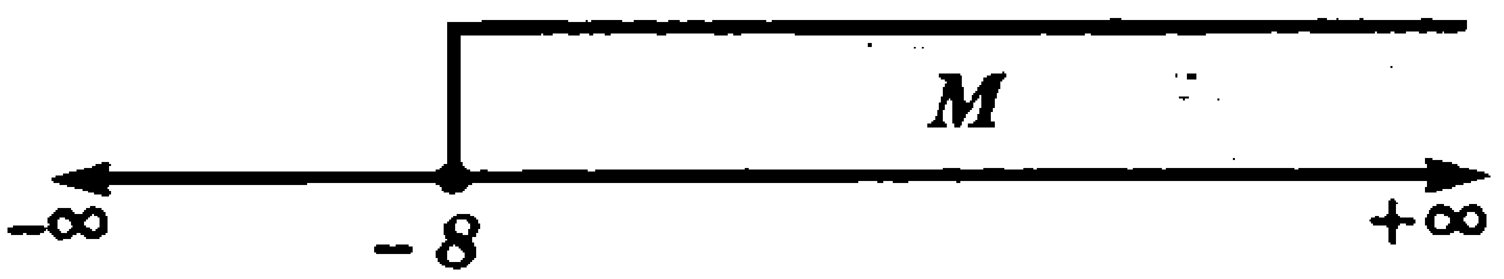
$$x^2-4x+12+M\ge 0$$

* Si se verifica el $\forall x\in R$ y además su primer coeficiente es positivo $(1>0)$; entonces el discriminante debe ser menor o igual a cero, luego tenemos : $\Delta=16-4(M+12)\le 0$

$\Rightarrow 16-48\le 4M$

$\Rightarrow -32\le 4M \Rightarrow 4M\ge -32 \Rightarrow M\ge -8$

* Graficando :



* Entonces el menor valor de "M" es -8.

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Señalar (V) o (F) :

I) $x^2>16 \Rightarrow C.S.: \langle 4;\infty\rangle$

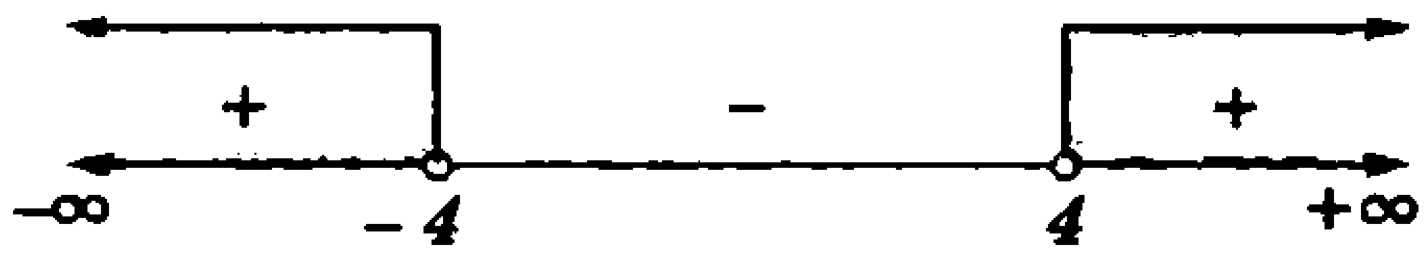
II) $x^2\le 4x \Rightarrow C.S.: \langle -\infty;4\rangle$

III) $(x-3)(x-5)<0 \Rightarrow C.S.: \langle 3;5\rangle$

A) VVV B) FFF C) VFF D) VVF E) FFV

RESOLUCIÓN :

I) $x^2>16 \Rightarrow x^2-16>0 \Rightarrow (x+4)(x-4)>0$



$\Rightarrow C.S.: \langle -\infty;-4\rangle \cup \langle 4;\infty\rangle$

II) $x^2\le 4x \Rightarrow x^2-4x\le 0 \Rightarrow x(x-4)\le 0$

$\Rightarrow C.S.: [0;4]$

III) $(x-3)(x-5)<0$

$\Rightarrow C.S.: \langle 3;5\rangle$

PROBLEMA 20 :

Resuelva : $\frac{5x-2}{x}-4<0$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que la expresión está bien definida si $x\ne 0$, es decir $C.V.A.=R-\{0\}$

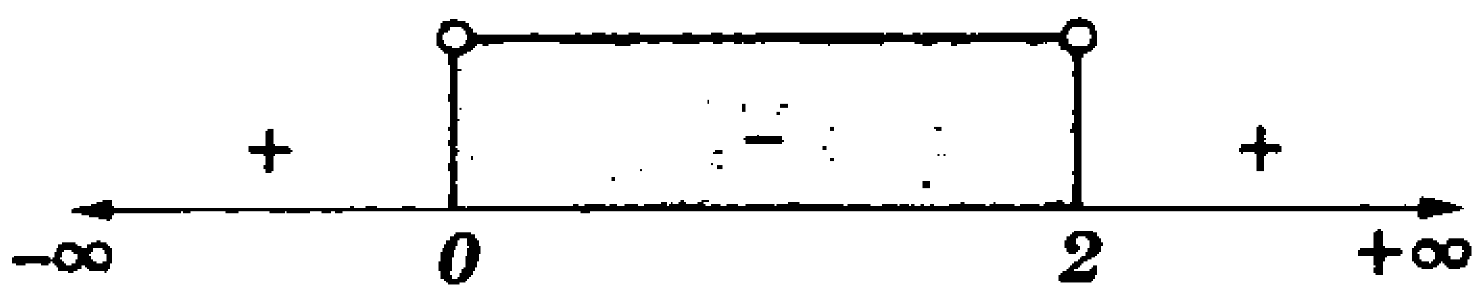
Operando $\frac{x-2}{x}<0 \ \wedge \ x\ne 0$

* Multiplicando ambos miembros por x^2

$$x^2\left(\frac{x-2}{x}\right)<0\times x^2$$

* Vemos que el sentido no cambia , ya que x^2 es positivo.

$$x(x-2)<0 \ \wedge \ x\ne 0$$



$C.S.=\langle 0;2\rangle$

* Observe que $x=0$, no está presente en el conjunto solución ya que $C.V.A.=R-\{0\}$

PROBLEMA 21 :

Resuelva : $\sqrt[4]{2x-8}>-5$

RESOLUCIÓN :

* Observe que la expresión irracional siempre es no negativa para $2x-8\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 4$
* De donde $C.S.=[4;\infty\rangle$

PROBLEMA 22 :

Resuelva : $\sqrt{5x-6}>x$

RESOLUCIÓN :

* Para que la expresión esté bien definida :

$$5x-6\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{6}{5}$$

* Ahora elevando al cuadrado

$$5x-6>x^2\ \Rightarrow\ x^2-5x+6<0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)<0$$

* De donde :

$$S_p=\langle 2;3\rangle$$

$$\Rightarrow C.S.=[\frac{6}{5};\infty\rangle\cap\langle 2;3\rangle=\langle 2;3\rangle$$

PROBLEMA 23 :

Resolver : $\sqrt{2x^2+x}\geq 1$

RESOLUCIÓN :

* C.V.A. : $2x^2+x\geq 0\Leftrightarrow x(2x+1)\geq 0$

* Del cual : $x\leq -\frac{1}{2}\ \vee\ x\geq 0$ ....(α)

* Luego : $\underbrace{\sqrt{2x^2+x}}_{(+)}\geq\underbrace{1}_{(+)}$

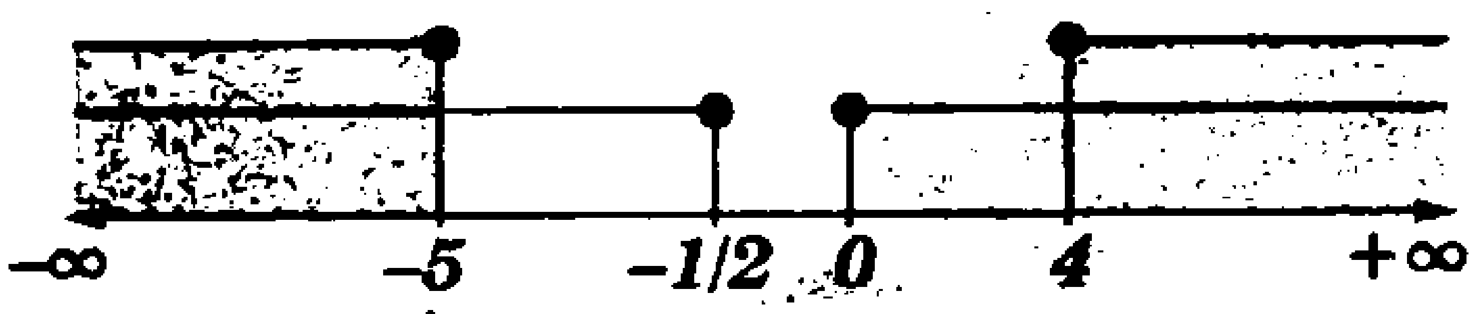
* Elevando al cuadrado, se tiene :

$$2x^2+x\geq 1$$

$$\Rightarrow 2x^2+x-1\geq 0\Rightarrow(2x-1)(x+1)\geq 0$$

* Del cual : $x\leq -1\ \vee\ x\geq 1/2$ ....(β)

* Intersectando : "α" y "β", resulta :



* Por lo tanto : $x\in\,]-\infty;-1]\cup[1/2;\infty[$

PROBLEMA 24 :

Resolver : $\sqrt{25-x^2}<4$

RESOLUCIÓN :

* C.V.A.: $25-x^2\geq 0\Leftrightarrow\ 25\geq x^2$

$\Rightarrow x^2\leq 25\Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$ .... (α)

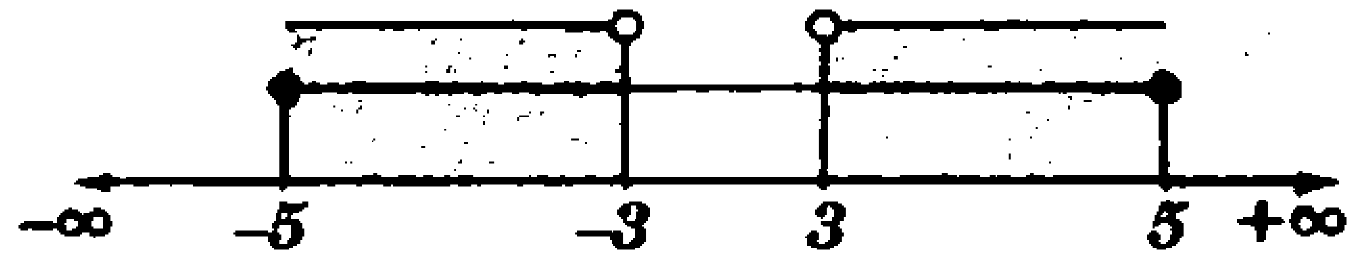
* Luego : $\sqrt{25-x^2}<4$

* Elevando al cuadrado : $25-x^2<16$

$\Rightarrow 9<x^2\ \Leftrightarrow\ x^2>9$

$\Rightarrow x<-3\ \vee\ x>3$ .... (β)

* Intersectando (α) y (β), se tiene :



* Finalmente : $x\in[-5;-3[\cup]3;5]$

PROBLEMA 25 :

Resolver : $\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x}<2$

RESOLUCIÓN :

* C.V.A.: $4x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1/4$ ....(α)

* Es decir, los valores de "x" son ***POSITIVOS.***

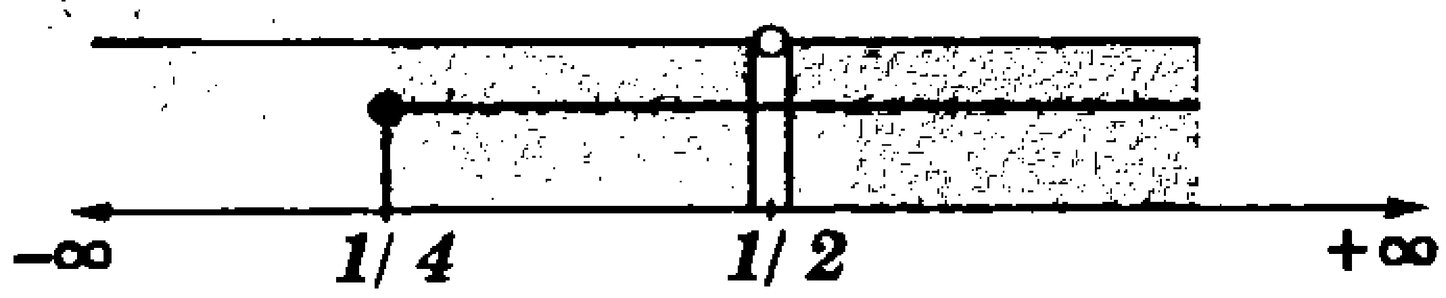
* Por esto : $\underbrace{\sqrt{4x-1}}_{(+)}<\underbrace{2x}_{(+)}$

* Al cuadrado : $4x-1<4x^2$

* Transponiendo : $\underbrace{4x^2-4x+1}_{TCP}>0\Rightarrow(2x-1)^2>0$

* Del cual : $x\in R-\{1/2\}$ ....(β)

* Intersectando (α) y (β):



* Por lo tanto : $x\in\left[\frac{1}{4};\infty\right[-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

PROBLEMA 26 :

Resolver : $|2x-1|=|x|$

A) $\frac{1}{3}$ *B)* 1 *C)* -1 *D)* 0 *E)* "A" ó "B"

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que : $2x-1=x\ \vee\ 2x-1=-x$

$$\Rightarrow x=1\ \vee\ x=\frac{1}{3}\ \ \Rightarrow C.S.=\left\{\frac{1}{3};1\right\}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 27 :

Resolver : $|2x-1|\leq\frac{x}{2}$

A) ϕ *B)* $\left\langle-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$ *C)* $\left[-2;\frac{1}{2}\right]$ *D)* $\left[\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right]$

RESOLUCIÓN :

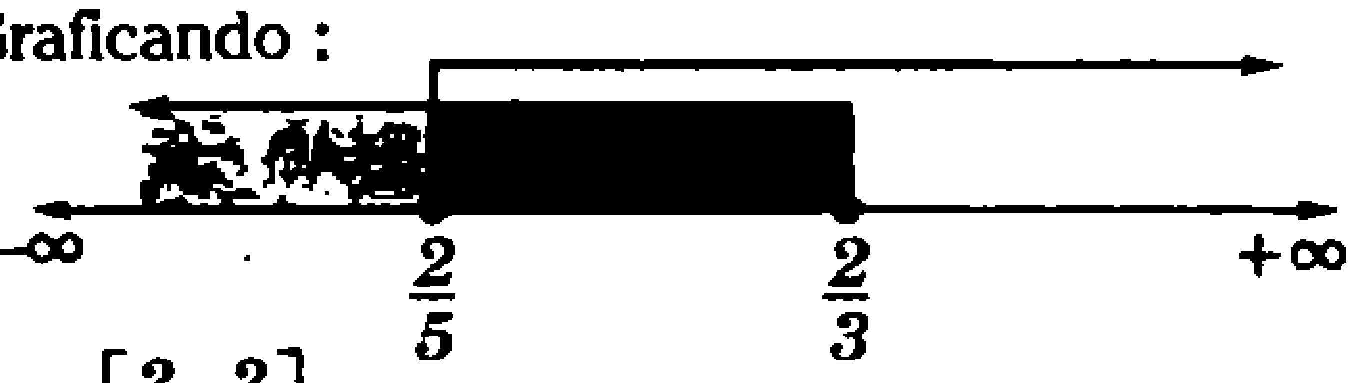
* Se tendrá que : $\underbrace{\frac{x}{2}\geq 0}_{II}\wedge\left(-\frac{x}{2}\leq 2x-1\leq\frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow\ x\geq 0\ \wedge\ (\underbrace{-x\leq 4x-2}_{I}\leq x)$

$\Rightarrow\ x\geq 0\ \wedge\ (\underbrace{-x\leq 4x-2}_{I}\wedge\underbrace{4x-2\leq x}_{II})$

$\Rightarrow\ \underbrace{x\geq 0\ \wedge\ x\geq\frac{2}{5}}_{intersectando}\wedge x\leq\frac{2}{3}\Rightarrow\ x\geq\frac{2}{5}\ \wedge\ x\leq\frac{2}{3}$

* Graficando :



$\Rightarrow x \in \left[\frac{2}{5};\frac{2}{3}\right]$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Resolver : $\frac{-1}{|2x-3|}<1$

A) $\langle -\infty;1\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$ B) $\langle -1;2]$ C) ϕ D) R

RESOLUCIÓN :

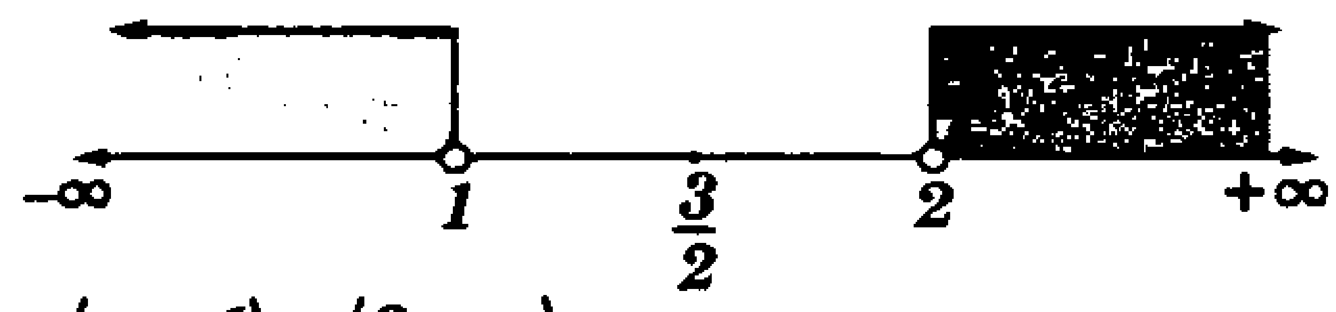
* Entonces tenemos :

$$|2x-3|>1 \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

$$2x-3>1 \vee 2x-3<-1$$

$$x>2 \vee x<1$$

* Uniendo :



$\Rightarrow x \in \langle -\infty;1\rangle \cup \langle 2;+\infty\rangle$

* Observe que $x=\frac{3}{2}$ no está en el conjunto solución.

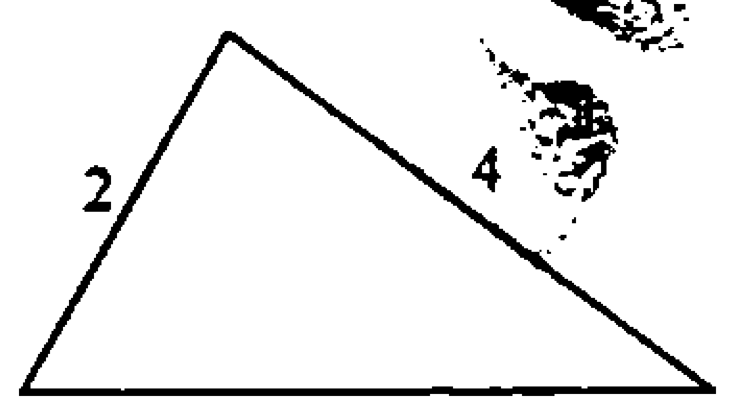
RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

De todos los triángulos , dos de cuyos lados miden *2 cm* y *4 cm*., halle los que tienen la propiedad de que su tercer lado tiene por longitud un número entero y señale Ud. a que es igual la suma de los perímetros de los triángulos hallados.

A) 28 cm B) 30 cm C) 24 cm D) 26 cm E) 25 cm

RESOLUCIÓN :



* Por la desigualdad entre los lados de un triángulo :

$$2+4>a>4-2 \Rightarrow 6>a>2$$

a puede ser : *5, 4* ó *3*

* Los perímetros son :

$$6+5=11 \;;\; 6+4=10;\; 6+3=9$$

* La suma del perímetro es : $11+10+9=30$

RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

Se dispone de un número de monedas de oro comprendido entre *197* y *205*. Esas monedas se reparten entre tres personas: *A, B* y *C*. *B* recibe *15* monedas más que *C* y *A* recibe el doble de lo que recibe *B* ¿Cuántas monedas recibe *C*, sabiendo que es impar?

A) 33 B) 35 C) 36 D) 39 E) 41

RESOLUCIÓN :

(1ro) Hagamos las siguientes designaciones:

\# de monedas que recibe $A : x$

\# de monedas que recibe $B : y$

\# de monedas que recibe $C : z$

• $197<x+y+z<205$ .... *(I)*

• $y-z=15$ .... *(II)*

• $x=2y$ .... *(III)*

(2do) Resolviendo el sistema obtenido:

• de *(II)*: $y=15+z$ .... *(IV)*

• de *(IV)* en *(III)*: $x=30+2z$........ *(V)*

• de *(IV)* y *V* en *(I)*:

$$197<30+2z+15+z+z<205$$

$$197<45+4z<205$$

$$38<z<40 \Rightarrow z=39$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

Si $(2x+5)/(-3)$ pertenece al intervalo $[5;8]$, entonces el intervalo al cual pertenece $(x+1)/(x+2)$ es :

A) $\langle 27/25 , 9/7]$ B) $[27/25 , 9/8]$
C) $\langle 27/25 , 9/8]$ D) $[27/23 , 9/8]$

RESOLUCIÓN :

* Como $\frac{2x+5}{-3} \in [5;8\rangle \Rightarrow 5 \leq \frac{2x+5}{-3}<8$

$-15 \geq 2x+5>-24$ (Restando 5)

$\Rightarrow -20 \geq 2x>-29$ (Dividiendo por 2)

$\Rightarrow -10 \geq x>-\frac{29}{2}$

* Piden : $\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+2)-1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$

* Como : $-10 \geq x>-\frac{29}{2}$

$\Rightarrow -8 \geq x+2>-\frac{25}{2}$ *(Sumando 2)*

$\Rightarrow -\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+2}<-\frac{2}{25}$ *(Invirtiendo)*

$\Rightarrow \frac{1}{8} \geq -\frac{1}{x+2}>\frac{2}{25}$ *(Multiplic. por –1)*

$\Rightarrow \frac{9}{8} \geq 1-\frac{1}{x+2}>\frac{27}{25}$ *(Sumando 1)*

$\Rightarrow \frac{27}{25}<\frac{x+1}{x+2} \leq \frac{9}{8}$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

Completa los siguientes cuadros :

I)

Inecuación		*Intervalo*
$x+5>0$	$x>-5$	$x\in\langle -5;+\infty\rangle$
$x-7\leq 12$		
$\dfrac{x-3}{4}<5$		
$-5x\geq 25$		

II)

Relación de orden	*Significado*	*Intervalo*
$-3\leq x\leq 5$	*x es cualquier número mayor o igual que –3 y menor o igual que 5*	$[-3;5\rangle$
$0\leq x\leq 12$		
		$\langle 3;5\rangle$
	x es cualquier número mayor que –2 y menor que 1	
$-2\leq x\leq 13$		
		$\langle 5;27]$
$-3<x$		

III)

Lenguaje Matemático	*Lenguaje escrito*
	El doble de un número disminuido en 7 excede a 27
$3x+5<8$	
	Un número disminuido en sus dos tercios no es más que 7

IV) Indicar la clase de desigualdad en la siguiente tabla.

	Desigualdad
$7<12$	
$-5<7$	
$x<2$	
$x\geq 3$	
$(x-3)(x+4)<(x+2)(x-1)$	
$3x-5\leq 5x+3$	
$(x-2)^2\geq 3x+5+x^2$	
$4x+12<2(2x+10)$	

V) Responder lo siguiente :

A) $[1;2]\cup[1;3]$ =.... ***B)*** $\langle 2;+\infty\rangle\cup\langle -1;2]$=..

C) $[3;7\rangle\cap\{4;5\}$ =.... ***D)*** $\langle -3;0]\cap[-1;1\rangle$=..

E) $\langle -\infty;5\rangle\cap\langle 5;+\infty\rangle$=.... ***F)*** $\langle -1;1\rangle\cap\langle 1;10]$ =...

G) $\mathbb{R}\cup\mathbb{N}$ =.... ***H)*** $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-$ =....

I) $\left(\langle -7;+\infty\rangle\cap\langle 7;+\infty\rangle\right)\cup\phi$=.... ***J)*** si : $x>0\Rightarrow x\in$ ....

K) Si : $x\leq 0\Rightarrow x\in$ ....

L) Si : $x>5\wedge x<5\Rightarrow x\in$ ....

M) Si : $2<x<4\wedge x\in\mathbb{N}\Rightarrow x=$.......

VI) Completar la siguiente tabla.

Desigualdad	A la Desigualdad se le...					
	Suma 7	Resta 12	Multiplica Por 3	Multiplica Por –5	Divide Entre 3	Divide Entre –4
$-7<12$	$0<19$ No Cambia					
$x\leq 2$						
$x>5$						
$-30>-100$						
$5x<31$						
$x\leq 7$						
$15x<3$						

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones :

01) $x-\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{4}$

A) $\left\langle \frac{3}{2};+\infty \right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;+\frac{3}{2} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{2}{3};+\infty \right\rangle$
D) $\left\langle -\infty;+\frac{2}{3} \right\rangle$ E) $\langle 3;+\infty \rangle$

02 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\le\frac{1}{6}$

A) $\langle 1;+\infty\rangle$ B) $[1;+\infty\rangle$ C) $\langle -\infty;1]$ D) $\langle -\infty;6]$ E) $\langle -\infty;-1]$

03 $\frac{5x-4}{3}-\frac{4x+3}{2}\le\frac{3}{2}$

A) $\langle -\infty;-13]$ B) $[-13;+\infty\rangle$ C) $[-24;+\infty\rangle$
D) $\langle -\infty;-12]$ E) $\langle -\infty;-14\rangle$

04 ¿Cuántas soluciones naturales admite?

$$\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}\le\frac{x}{4}-\frac{x+1}{3}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05 Hallar el mayor valor entero que cumple :

$$\frac{7x-6}{5}-\frac{4x-3}{2}\ge x$$

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 0

06 $\frac{5x-4}{4}+\frac{3x-2}{3}>x$

A) $\left\langle -\infty;\frac{4}{3}\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;\frac{3}{4}\right\rangle$ C) $\left\langle -\infty;-\frac{4}{3}\right\rangle$
D) $\left\langle \frac{4}{3};+\infty\right\rangle$ E) $\left\langle \frac{4}{3};5\right\rangle$

07 $-3(x+1)-4\le 5$

A) $x\le -4$ B) $x\ge +4$ C) $x\le +4$ D) $x\ge -4$ E) $x\ge 14$

08 $3(x-2)+5(x-4)\le 7(x-6)$

A) $x\in\langle -\infty;-16\rangle$ B) $x\in\langle -\infty;-26\rangle$ C) $x\in\langle -\infty;-16]$
D) $x\in\langle 16;+\infty\rangle$ E) $[16;+\infty\rangle$

09 $(x+1)^2-x<(x+3)(x+5)$

A) $x<-2$ B) $x<2$ C) $x>2$ D) $x>-2$ E) $x>21$

10 $(x-1)(x+1)+x(x+2)+4^3(x-2)^2+(x-3)(x-4)$

A) $x\in[1;+\infty[$ B) $x\in[-1;+\infty[$ C) $x\in]-\infty;-1]$
D) $x\in[-\infty;+2]$ E) $x\in]-\infty;1]$

11 $2x-x(x^2+3)<7-x^3$

A) $x>7$ B) $x<7$ C) $x<-7$ D) $x>-7$ E) $x>6$

* Calcular el menor valor Z (enteros) que se obtiene al resolver las siguientes inecuaciones :

12 $x(x-1)+2x<x(5+x)+7$

A) 1 B) -1 C) 2 D) 3 E) -2

13 $(x^2-6)(x^2+6)+3x\ge x^4+x+5$

A) 20 B) 19 C) 21 D) 22 E) 18

14 $x+(x^2+5)^2\le x^4+10x(x+2)$

A) 1 B) -1 C) 3 D) -2 E) 2

15 Hallar el menor valor entero que cumple :

$$\frac{3x+2}{6}-\frac{2x+1}{3}+\frac{x-1}{2}\ge 1$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

16 $\frac{x-3}{2}-\frac{x-4}{3}>\frac{x-5}{4}$

A) $x\in\langle -\infty;-13\rangle$ B) $x\in\langle -13;+\infty\rangle$ C) $x\in\langle 14;+\infty\rangle$
D) $x\in\langle 12;+\infty\rangle$ E) $x\in\langle -\infty;13\rangle$

17 Hallar el menor valor entero que cumple :

$$\frac{5x}{4}-3<\frac{3x}{2}-1$$

A) -8 B) -9 C) -10 D) -7 E) -6

18 $\frac{1}{6}\left[\frac{x}{5}-4\right]+\frac{1}{5}\left[\frac{x}{4}+3\right]\le\frac{1}{4}\left[\frac{x}{3}-2\right]+\frac{x}{30}$

A) $\langle -\infty;13\rangle$ B) $\langle -\infty;-23\rangle$ C) $\langle 13;+\infty\rangle$
D) $\langle -13;+\infty\rangle$ E) $\langle -\infty;13\rangle$

19 $\frac{1}{5}<4x+\frac{1}{3}\le\frac{1}{2}$

A) $\left\langle -\frac{1}{6};\frac{1}{24}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{6};\frac{1}{24}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{1}{6};\frac{1}{24}\right\rangle$
D) $\left\langle -\frac{1}{6};-\frac{1}{24}\right\rangle$ E) $\left\langle -6;\frac{1}{24}\right\rangle$

20 $(x+1)^3+(x+2)(x+3)\le(x+1)(x^2-x+1)+4x(x-3)-14$

A) $x\le -1$ B) $x\ge 10$ C) $x\le 12$ D) $x\ge -1$ E) $x\le -3$

TAREA DOMICILIARIA

01 $\frac{x}{15}-\frac{1}{4}<\frac{x}{3}-\frac{1}{12}$

A) $\left\langle \frac{5}{8};+\infty\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;-\frac{5}{8}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{5}{8};+\infty\right\rangle$
D) $\left\langle -\infty;-\frac{8}{5}\right\rangle$ E) $\left\langle -\frac{8}{5};+\infty\right\rangle$

02 $\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}\ge\frac{4x}{5}-\frac{1}{6}$

A) $\left\langle -\infty;\frac{10}{7}\right]$ B) $\left\langle -\infty;-\frac{7}{10}\right]$ C) $\left\langle -\infty;\frac{7}{10}\right]$
D) $\left\langle -\infty;-\frac{10}{7}\right]$ E) $\left\langle -\infty;-\frac{10}{3}\right\rangle$

03 $5-\frac{x}{6}\le\frac{13}{4}-\frac{x}{2}$

A) $\left\langle -\infty;\frac{4}{21}\right]$ B) $\left[\frac{4}{21};+\infty\right\rangle$ C) $\left\langle -\infty;-\frac{4}{21}\right]$
D) $\left\langle -\infty;\frac{21}{4}\right]$ E) $\left\langle -\infty;-\frac{21}{4}\right]$

04) $\frac{3x}{2}+2-\frac{x}{2}>\frac{4x}{3}+3-\frac{2x}{3}$

A) $\langle-\infty;3\rangle$ B) $\langle 4;+\infty\rangle$ C) $\langle 2;+\infty\rangle$ D) $\langle-\infty;-4\rangle$ E) $\langle 3;+\infty\rangle$

05) $1-\{2x-[3-(4x+5-6x)]-7\}>7x-\{6-[5x-(4+3x-2)]-x\}$

A) $\frac{2}{7}<x$ B) $x<\frac{2}{7}$ C) $x<\frac{7}{2}$ D) $x>\frac{7}{2}$ E) $x<\frac{14}{3}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01) Resolver : $x^2-70<51$

A) $\langle-11;11\rangle$ B) $\langle-\infty;-11\rangle\cup\langle 11;+\infty\rangle$ C) $[-11;11]$ D) $\langle-11;11]$ E) $[-11;11\rangle$

02) Resolver : $x^2+x-56\geq 0$

A) $\langle-\infty;-7]\cup[8;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;-8]\cup[7;+\infty\rangle$ C) $[-8;7]$ D) $\langle-\infty;-8\rangle\cup[7;+\infty\rangle$

03) Resolver : $x^2+x-12\geq 0$

A) $\langle-\infty;4]\cup[3;+\infty\rangle$ B) $[-4;3]$ C) $\langle-\infty;-4\rangle\cup[3;+\infty\rangle$ D) $\langle-\infty;4\rangle\cup\langle 3;+\infty\rangle$ E) $[-3;4]$

04) Resolver : $x^2-10x<-6$

A) $[-2;2]$ B) $\langle-\infty;-2\rangle\cup[2;+\infty\rangle$ C) $\langle-2;2[$ D) $\langle-2;2\rangle$ E) $\langle-\infty;-2]\cup[2;+\infty\rangle$

05) Resolver : $x^2+6x>7x+20$

A) $\langle-\infty;-5\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$ B) $\langle-4;5\rangle$ C) $\langle-5;4\rangle$ D) $\langle-\infty;-10\rangle\cup[2;+\infty\rangle$ E) $\langle-\infty;-4\rangle\cup\langle 5;+\infty\rangle$

06) Resolver : $x^2+7x<5x+35$

A) $\langle-\infty;-7\rangle\cup\langle 5;+\infty\rangle$ B) $\langle-5;7[$ C) $\langle-7;5\rangle$ D) $[-7;5]$ E) $\langle-7;5]$

07) Resolver : $9x^2\geq 25$

A) $\langle-5/3;5/3\rangle$ B) $[-5/3;5/3]$ C) $\langle-\infty;5/3]$ D) $\langle-\infty;-5/3\rangle\cup[5/3;+\infty\rangle$ E) $\langle-3/5;5/3]\rangle$

08) Resolver : $3x^2+7x-6\leq 0$

A) $\langle-\infty;-3]\cup[2/3;+\infty\rangle$ B) $\langle-3;2/3]$ C) $[-3;2/3\rangle$ D) $[-3;2/3]$ E) $\langle-3;2/3\rangle$

09) $5x^2-6x-17\leq 4x^2-7x+13$

A) $\langle-6;5]$ B) $[-5;6]$ C) $[-6;5\rangle$ D) $\langle-\infty;-6]\cup[-5;+\infty\rangle$ E) $[-6;5]$

10) ¿Cuantos valores enteros negativos verifica la inecuación?

$$(2x+5)^2\geq(5x+2)^2$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11) ¿Cuántos valores enteros positivos verifica la inecuación?

$$x^2-3x<10$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12) Resolver : $x^2+24x>17x$

A) $\langle-\infty;0\rangle\cup\langle 7;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;-7\rangle\cup\langle 0;+\infty\rangle$ C) $\langle-7;0\rangle$ D) $\langle 0;7\rangle$ E) $\langle-7;0]$

13) Resolver : $32+4x-x^2\geq 0$

A) $[-4;8]$ B) $\langle-4;8]$ C) $[-8;4]$ D) $\langle-8;4[$ E) $\langle-\infty;-4]\cup[8;+\infty\rangle$

14) Resolver : $-x^2+6x>-7$

A) $\langle-7;1\rangle$ B) $\langle-\infty;-7\rangle\cup\langle 1;+\infty[$ C) $\langle-1;7\rangle$ D) $\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle 7;+\infty\rangle$ E) $\langle-7;1]$

15) El número de bolitas en un arbolito de navidad disminuido en *12* y luego esta diferencia dividida entre *7*, resulta mayor que *3*, ¿cuál es el menor número de bolas que pueden haber en dicho arbolito?

A) 33 B) 34 C) 35 D) 27 E) 29

16) Si a la edad de Debora le aumentamos *3* años y luego lo multiplicamos por *5*, el resultado no es mayor que *75*. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener Debora?

A) 0 B) 14 C) 11 D) 12 E) 13

17) La quinta parte de diez, más el triple de la edad de Janeth es más que *29*. Indicar la menor edad que puede tener Janeth.

A) 11 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

18) La cantidad de pelotas que hay en mi casa es tal que, uno más el triple de dicho número es menor que *46*, y uno más su cuadruplo es más que *53*, ¿cuántas pelotas tengo en casa?

A) 10 B) 13 C) 11 D) 14 E) 12

19) El quintuplo del número de hermanos que tengo disminuido en *1* es menor que el cuadrado de *7*; y siete veces dicho número aumentado en *8* excede al cuadrado de *8*. ¿Cuántos hermanos tengo?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 11 E) 7

20) Un número natural es tal que, la cuarta parte del número natural anterior es menor que *10;* además, la cuarta parte del número natural siguiente es más que *10*. ¿Cuál será la octava parte de dicho número?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

21 Hace *8* años la octava parte de la edad de Aaron era menor que *1* y dentro de *10* años, la octava parte será mayor que *3*. ¿Cuándo nació, si esto ocurrió en *1990*?

A) 1975 B) 1978 C) 1981 D) 1982 E) 1984

22 Se sabe que el número de conejos que cria Juan es tal que el triple, disminuido en *5* es mayor que *33* y el cuádruple aumentado en *9* es menor que *65*. Calcule el número de conejos.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 10

23 Si a la edad de Johanita le disminuimos *5* años y luego lo multiplicamos por *7*, el resultado no excede a *49*. ¿Cuál es la mayor edad que puede tener Johana?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

24 La cuarta parte de doce, más el doble de la edad de Lorenita es menor o igual que *33*. Indicar la mayor edad que puede tener Lorenita.

A) 8 B) 15 C) 12 D) 9 E) 11

25 Mi abuelo fue un gran profesor de matemática, cuando le pregunto su edad me dice: "El doble de mi edad aumentado en uno es menor que *161*; mientras que el triple disminuido en *2* es más que *232*" ¿ Cuál será la edad de mi abuelo dentro de dos años?

A) 79 B) 82 C) 80 D) 85 E) 81

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver : $4x^2 \le 9$

A) $\langle -\infty;-3/2] \cup [3/2;+\infty\rangle$ B) $[-3/2;3/2]$ C) $\langle -3/2;3/2]$ D) $\langle -3/2;3/2\rangle$ E) $[-3/2;3/2\rangle$

02 Resolver : $2x^2-7x+6 \le 0$

A) $[3/2;2]$ B) $\langle -3/2;3/2\rangle$ C) $\langle 3/2;2]$ D) $[-3/2;2\rangle$ E) $[-2;3/2]$

03 $3x^2+5x \le 2x^2+4x+2$

A) $[-2;1]$ B) $[-2;2]$ C) $\langle -\infty;-2] \cup [1;+\infty\rangle$ D) $\langle -2;1\rangle$ E) $\langle -2;2]$

04 Resolver : $x^2-14x \le -10x$

A) $[0,4]$ B) $\langle 0;4\rangle$ C) $\{0;4\}$ D) $\{4\}$ E) $[0;4\rangle$

05 Resolver : $2-x-x^2 \ge 0$

A) $[-2,1]$ B) $[-2;2]$ C) $\langle -\infty;-2] \cup [1;+\infty\rangle$ D) $[-1;2]$ E) $\langle -2;2]$

06 $-x^2+4x > -21$

A) $[-7;3\rangle$ B) $\langle 3;7\rangle$ C) $\langle -3;7\rangle$ D) $\langle -3;7]$ E) $[-3;7\rangle$

07 $(x-2)^2-2x+5 < x-1$

A) $\langle -2;5]$ B) $\langle -2;5\rangle$ C) $\langle -\infty;2\rangle \cup \langle 5;+\infty\rangle$ D) $\langle 2;5\rangle$

08 Un número natural es tal que, la quinta parte del número anterior es menor que *5*, además; la quinta parte del número natural siguiente es más que 5. ¿Cuál será la quinta parte de dicho número?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

09 Hace *3* años la quinta parte de mi edad era menor que *5*; dentro de *4* años, la quinta parte de mi edad será mayor que *6*. Calcular la edad que tendré dentro de *6* años?

A) 32 B) 34 C) 27 D) 36 E) 33

10 El número de personas en una fiesta aumentada en *13* se vio disminuido al retirarse *2* personas y luego esta diferencia dividida entre *3* excede a *7*. ¿Cuál es el menor número de personas que puede haber en la fiesta?

A) 21 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

11 Resolver : $\dfrac{1}{x} < 0$

A) $\langle -\infty;0]$ B) $\langle -\infty;0\rangle$ C) $\mathbb{R}$ D) ϕ

12 Resolver : $\sqrt{x} \le 0$

A) $\mathbb{R}^-$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $\{0\}$ D) ϕ E) $\mathbb{R}^*$

13 Resolver : $-\sqrt{-x} > 0$

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{R}^+$ C) $\{0\}$ D) ϕ E) $\{1\}$

14 Resolver : $\sqrt{2005+x}+2006 \le 0$

A) ϕ B) $\mathbb{R}^-$ C) $\{2007\}$ D) $\{0\}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver : $x^2-2x-3<0$, Hallar el intervalo solución.

A) $x \in \langle 1;8\rangle$ B) $x \in \langle -1;3\rangle$ C) $x \in \langle -2;2\rangle$ D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \in \varnothing$

02 Resolver : $x^2 \ge 64$

A) $x \ge 8$ B) $x \le 8$ C) $x \ge 8 \vee x \le -8$ D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \in \varnothing$

03 Resolver : $x^2 \le 9x$

A) $x \le 9$ B) $x \ge 9$ C) $x \ge 0$ D) $0 \le x \le 9$ E) $x \in \mathbb{R}$

04 Resolver :

$3x^2-10x+3>0$ Indicando el intervalo no solución.

A) $x \in \left\langle \dfrac{1}{3};3\right\rangle$ B) $x \in \left[\dfrac{1}{3};3\right]$ C) $x \in \left\langle -\infty;\dfrac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3;+\infty\rangle$

D) $x \in \left\langle \frac{1}{3}; +\infty \right\rangle$ E) $x \in \langle -\infty; 3\rangle$

05 Resolver : $x^2 \le 121$

A) $x \le 11$ B) $x \le -11$ C) $x \ge 11$
D) $x \ge -11$ E) $-11 \le x \le 11$

06 Resolver : $(x-2)^2 \le 49$

A) $-7 \le x \le 7$ B) $-5 \le x \le 9$ C) $x \le 2$ D) $x \ge 2$ E) $x \in R$

07 Resolver : $(x+4)^2 \ge 1$

A) $x \ge -3$ B) $x \le -3$ C) $x \ge -3 \vee x \le -5$ D) $x \in R$ E) $x \in \varnothing$

08 Resolver : $x^2 - 2x + 4 > 0$

A) $x \in R$ B) $x \in \varnothing$ C) $x \in R - \{2\}$
D) $x \in R - \{-2\}$ E) $x \in \langle -\infty; 2]$

09 Resolver : $x^2 - 2x + 10 < 0$

A) $x \in R$ B) $x \in R - \{1\}$ C) $x \ge 1$ D) $x \in \varnothing$ E) $x \le 1$

10 Resolver : $x^2 - 6x + 9 \le 0$

A) $x \in R$ B) $x \in R - \{3\}$ C) $x = 3$ D) $x \in \varnothing$ E) $x \ge 1$

11 Resolver : $(x-2)(x+1)(x+3) > 0$

A) $x \in \langle -2; 1\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ B) $x \in \langle -1; 2\rangle$ C) $x \in \langle -3; 2\rangle$
D) $x \in \langle -3; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$ E) $x \in \langle -3; -2\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

12 Resolver : $(x^3-1)(x^3-x^2+2x-2)(x-2) < 0$ dar un intervalo solución.

A) $\langle -\infty; 2\rangle$ B) $\langle -\infty; 1\rangle$ C) $\langle 2; \infty\rangle$ D) $\langle 1; +\infty\rangle$ E) R

13 Resolver : $(x-2)(x^2-18) - 3x(2-x) \ge 0$

A) $-6 \le x < 2$ B) $-6 \le x \le 2 \cup x \ge 3$ C) $x \ge 4$
D) $-6 \le x \le 3$ E) R

14 Resolver : $x^4 - 16 \le 0$. Indicar su intervalo solución.

A) $x \in \langle -\infty; -2] \cup [2; +\infty\rangle$ B) $x \in [-2; 2]$
C) $x \in \langle -\infty; 1] \cup [4; +\infty\rangle$ D) $x \in \langle -\infty; 4]$
E) $x \in [4; +\infty\rangle$

15 Resolver : $x^4 - 8x^2 - 9 < 0$

A) $x \in \langle 8; 9\rangle$ B) $x \in \langle -\infty; 8\rangle \cup \langle 9; +\infty\rangle$ C) $x \in \langle -3; 3\rangle$
D) $x \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$ E) $x \in R$

16 Resolver :

$$(x^2-2x+4)(x+3)^2(x-7)^5(x+1)(x-2) \ge 0$$

Indicar su intervalo solución.

A) $x \in [-1;2] \cup [7;+\infty\rangle \cup \{-3\}$ B) $x \in [1;2] \cup [7;+\infty\rangle - \{-3\}$
C) $x \in R$ D) $x \in \varnothing$ E) $x \in [-1;7] \cup \{-3\}$

17 Resolver : $(x+5)^7(3-x)^8(5-x)^3(4-x)^2 \ge 0$ Indique la suma de todos los valores enteros que la verifica.

A) 5 B) -5 C) 0 D) 7 E) 3

18 Resolver : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \le 0$ Indicar su intervalo solución.

A) $x \in \langle -\infty; 1] \cup [2; 3]$ B) $x \in [1; 2] \cup [3; +\infty\rangle$ C) $x \in R$
D) $x \in \varnothing$ E) $x \in \{1; 2; 3\}$

19 Resolver : $(x^2-x)^2 - 14(x^2-x) + 24 \le 0$

A) $[-3; -1] \cup [4; +\infty\rangle$ B) $[-3; -1] \cup [2; 4]$
C) $\langle -\infty; -3] \cup [4; +\infty\rangle$ D) $[-1; 2] \cup [4; +\infty\rangle$
E) $x \in \varnothing$

20 Resolver : $(7-x)^4(5-x)^{13}(2-x)^{20}(-1+x)^{25} > 0$

Indique cuántos valores enteros la verifican.

A) 1 B) 2 C) 3 D) más de 3 E) 0

21 Indicar la suma de valores enteros negativos que verifican : $\dfrac{(x+5)(x-1)}{x+3} \ge 0$

A) -12 B) -9 C) -6 D) -8 E) -10

22 Resolver : $\dfrac{x+7}{x-5} \ge 0$

A) $x \ge -7$ B) $x \in \langle -\infty; -7] \cup \langle 5; +\infty\rangle$ C) $x \in \langle -7; 5\rangle$
D) $x \in [-7; 5\rangle$ E) $x \in \varnothing$

23 Resolver : $\dfrac{(x^2-36)(x^4+6)}{(x^2-25)} \le 0$

A) $x \in [-6; -5\rangle \cup \langle 5; 6]$ B) $x \in [-6; 1]$ C) $x \in R$
D) $x \in \varnothing$ E) $x \in [-5; 5\rangle$

24 Resolver : $\sqrt{x-3} < -5$

A) R B) $[3; +\infty\rangle$ C) $[5; +\infty\rangle$ D) $[-5; +\infty\rangle$ E) $\varnothing$

25 Resolver : $\sqrt{x-6} > 2$ Indicar el intervalo solución.

26 Resolver : $\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)(x-3)} \le 0$ Indicar el intervalo solución.

A) $x \in [-4; -1\rangle \cup [2; 3\rangle$ B) $x \in [-4; 4\rangle$
C) $x \in \langle -\infty; -4\rangle \cup [-1; 2\rangle$ D) $x \in R$ E) $x \in \varnothing$

27 Resolver : $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \ge 0$

A) $x \in \langle -\infty; -7\rangle \cup [2; 3] \cup \langle 6; +\infty\rangle$ B) $x \in [-7; 2] \cup [6; +\infty\rangle$
C) $x \in R$ D) $x \in \varnothing$ E) $x \in \langle -\infty; 3] \cup \langle 6; +\infty\rangle$

28 Resolver : $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-56} \ge 0$ Señalar un intervalo del conjunto solución.

A) $\langle -\infty; +8\rangle$ B) $[-2; 3\rangle$ C) $\langle 7; +\infty\rangle$ D) R E) $\varnothing$

29 Resolver : $\sqrt{x-6} < 2$ Indicar su intervalo solución.

A) $[6;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;10\rangle$ C) $\varnothing$ D) R E) $[6;10\rangle$

30 Resolver : $-\sqrt[4]{x-3}<\sqrt{5-x}$

A) $3\le x\le 5$ B) $x\le 5$ C) $x\ge 3$ D) R E) $\varnothing$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Encuentra el valor de cada expresión para :

$$x=-4;\ y=2;\ z=-3$$

A) $|x+3y|$ B) $|x|+3|y|$ C) $|x-3y|$ D) $|x|-3|y|$ E) $x|zy|$

02 Resolver la ecuación : $|x-4|=7$. Hallar la mayor solución.

A) 11 B) 2 C) 3 D) 22 E) 40

03 Resolver : $|3x+5|=9$ Hallar la mayor solución.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) 8 E) 9

04 Resolver : $|x-2|=10$ Hallar el número de soluciones.

A) 10 B) 12 C) 1 D) 2 E) 3

05 Resolver : $|x^2+1|=9$. Hallar una solución.

A) 1 B) 2 C) –3 D) 4 E) N.A.

06 Resolver : $|x|<7$. Hallar su intervalo solución.

A) $x\in\langle-7;7\rangle$ B) $x\in R$ C) $x\in\langle-\infty;-7\rangle\cup\langle 7;+\infty\rangle$
D) $x\in\varnothing$ E) $x\in R^+$

07 Resolver : $|x-5|<8$. Hallar el intervalo solución.

A) $x\in\langle-\infty;-3\rangle\cup\langle 13;+\infty\rangle$ B) $x\in\langle-3;13\rangle$ C) $x\in R$
D) $x\in\varnothing$ E) $x\in[-3;13]$

08 Resolver : $|2x-7|\le 9$. Indicar cuántos enteros "x" la verifican.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

09 Resolver : $|x|>4$. Si su intervalo solución es : $x\in\langle-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty\rangle$. Hallar : $(a+b)$

A) 8 B) 0 C) –4 D) 4 E) 12

10 Resolver : $|x+4|>2$

A) $x\in\langle-\infty;2\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$ B) $x\in\langle-\infty;-6\rangle\cup\langle-2;+\infty\rangle$ C) $x\in R$
D) $x\in\varnothing$ E) $x\in\langle-6;-2\rangle$

11 Resolver : $|2x+6|=2x+6$

A) $[-3;+\infty\rangle$ B) R C) $[-2;+\infty\rangle$ D) $[3;+\infty\rangle$ E) $[2;+\infty\rangle$

12 Resolver : $|2x+4|=|x-10|$

A) $\{2\}$ B) $\{-14\}$ C) $\{-14;-2\}$ D) $\{2;-14\}$ E) $\{14\}$

13 Resolver : $\frac{1}{|x-3|}>0$

A) R B) $R-\{3\}$ C) $R-\{-3\}$ D) $R-\{0\}$ E) $[-3;3]$

14 Resolver : $|x+6|\le 10x$

A) $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$ B) $\left[-\frac{11}{6};+\infty\right\rangle$ C) $\left[\frac{6}{11};+\infty\right\rangle$
D) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$ E) $[0;+\infty\rangle$

15 Resolver : $|2x+6|\ge -4$

A) $\varnothing$ B) R C) R^+ D) R^- E) $[0;+\infty\rangle$

16 Si : $|x^2+4|+3\ge x^2+1+|x-5|$ el menor valor positivo que satisface la inecuación es :

A) 0 B) –2 C) –1 D) 1 E) 2

17 Resolver la ecuación mostrada :

$$\sqrt{|x-1|+\frac{1}{4}\sqrt{|x-1|+\frac{17}{4}}}=4$$

e indica la suma de sus raíces.

A) 3 B) –1 C) 2 D) 6 E) 0

18 Determinar el conjunto solución de la inecuación:

$$|x-3|+|x-1|+|2x-1|<x-5$$

A) $\langle 5;+\infty\rangle$ B) $\langle-\infty;0\rangle$ C) $\langle 0;5\rangle$ D) R E) $\varnothing$

19 Resuelva : $|2x-6|-|x-2|\le|2x-4|-|x-3|$

A) $[3;+\infty\rangle$ B) $[2;+\infty\rangle$ C) $\left[\frac{5}{2};+\infty\right\rangle$ D) $\langle-\infty;5]$ E) $\langle-\infty;6]$

20 Resuelva : $2+|x|+x^2+|x|^3+....=8$ para : $|x|<1$

A) $\left\{\frac{6}{7}\right\}$ B) $\left\{-\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right\}$ C) $\left\{-\frac{6}{7};\frac{6}{7}\right\}$ D) $\varnothing$ E) R

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) A	2) C	3) B	4) A	5) *	6) D	7) A	8) C	9) D	10) A
11) D	12) B	13) C	14) E	15) D	16) E	17) D	18) C	19) A	20) A
01) C	02) D	03) C	04) *	05) C					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) A	2) B	3) A	4) D	5) C	6) C	7) D	8) D	9) E	10) A
11) D	12) B	13) A	14) C	15) B	16) D	17) C	18) D	19) B	20) E
21) A	22) B	23) C	24) B	25) E					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1) B	2) C	3) D	4) B	5) E	6) B	7) C	8) A	9) D	10) C
11) D	12) B	13) B	14) B	15) C	16) A	17) C	18) A	19) B	20) B
21) B	22) B	23) A	24) E	25) *	26) A	27) A	28) C	29) E	30) A
1) B	2) B	3) B	4) B	5) B					

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1) *	2) A	3) C	4) D	5) E	6) A	7) B	8) E	9) B	10) B
11) A	12) D	13) B	14) D	15) B	16) D	17) A	18) E	19) B	20) C
01) A	02) B	03) C	04) B	05) D					

PLANTEO DE ECUACIONES

CAPITULO 025

OBJETIVOS :

* *Desarrollar en el estudiante la capacidad interpretativa de situaciones contextualizadas a través de ejercicios y problemas con enunciados.*

* *Ejercitar la capacidad de abstracción para interpretar y trasformar los datos , de un problema , en un lenguaje matemático.*

* *Lograr una destreza al traducir el lenguaje literario (enunciado) al lenguaje matemático (ecuación). mediante el uso de símbolos. variables y operaciones matemáticas fundamentales.*

* *Elevar la capacidad creativa para modelar nuevos procedimientos o nuevos problemas que involucren la resolución de una ecuación.*

* *Relacionar matemáticamente hechos de nuestra rutina diaria .*

INTRODUCCIÓN :

La contextualización de problemas implica utilizar nuestro lenguaje para crear un tramado de palabras y frases que contengan relaciones matemáticas. El planteamiento de ecuaciones puede considerarse como un proceso inverso, donde el alumno debe interpretar el mensaje y encontrar las relaciones que se plantean en el problema para su posterior resolución.

Desde la época de los Vedas, los matemáticos de la India se interesaron en estas ecuaciones; el primer uso geométrico de estas se remota a los Shulba Sutras, los cuales fueron escritos entre los ***ss. VIII*** y ***VI*** a.C. Su estudio fue uno de los favoritos entre los matemáticos griegos de Alejandría, siendo Diofanto (entre los años ***200*** y ***290*** a.n.e.) el primer matemático helenístico que estudió estas ecuaciones. En su principal obra la *Arithmetica,* tratado de ***13*** libros donde plantea y resuelve ***150*** problemas de álgebra, se dedica casi exclusivamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas e investiga un método para encontrar las soluciones enteras. Por todo ello, a las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se les llama, también, *ecuaciones diofánticas,* y a la rama del análisis que se dedica a su estudio se conoce hoy en día como análisis diofántico.

Resolver una ecuación no es adivinar un resultado , es seguir un proceso lógico , basado fundamentalmente en las propiedades de las operaciones de adición, multiplicación , sustracción, división etc . Para hallar el valor de la incógnita o variable antes de resolver una ecuación cualquiera , nos interesa sobre manera saber formar dicha ecuación que no es otra cosa que traducir un enunciado abierto de su forma verbal a su forma simbólica .Los problemas matemáticos son más antiguos que la matemáticas , estos se encuentran enunciados en forma de rompecabezas o en lenguaje poético en los escritos más antiguos . En un papiro Egipcio que data del año ***2 200 A.C.*** pregunta : ***« Un ramo de flores y su séptima parte dan 19, ¿Qué tan grande es el ramo de flores? »***

En un escrito de la India ***(1150 A.C.)*** se tiene el siguiente problema: «De un ramo de flores de Loto , la tercera , la quinta y la sexta parte se ofrecieron a los Dioses Siva , Vishnu , y , aquel tiempo ,el Sol, respectivamente ; un cuarto del ramo original se le ofreció a Bhavani los seis lotos restantes se le dieron a un venerable preceptor. Diga rápidamente el número total de flores de Loto. Como puedes apreciar , la mayor parte (por no decir todos) de los problemas que encontramos en nuestros libros no son nuevos como puedes suponer, si no mas bien los mismos(los antiguos) pero actualizados a nuestra época. Desde el tiempo de los Griegos , los problemas han estimulado el desarrollo de las Matemáticas y han conducido a los matemáticos a inventar nuevos métodos y crear nuevos conceptos.

La resolución de problemas nunca fue un campo de dominio exclusivo de los Matemáticos . En todos los tiempos han sido un estimulo intelectual y de diversión para muchos profesionales de otros campos.

Los primeros matemáticos , quienes fueron los mesopotámicos , que inventaron un notable sistema de numeración y los métodos fundamentales del álgebra , considerada como el arte de resolver ecuaciones.Históricamente , se le acredita el desarrollo de la representación simbólica al matemático y hombre de leyes francés Francois Viéte ***(1540-1603)*** alrededor de ***1600*** , en su libro ***In Artem*** emplea vocales para representar las cantidades desconocidas y constantes para las conocidas . Unos años más tarde, el sabio y filósofo francés René Descartes ***(1596-1650)*** utiliza ***« x »*** e ***« y »***. como variables en la creación y desarrollo de la geometría analítica.

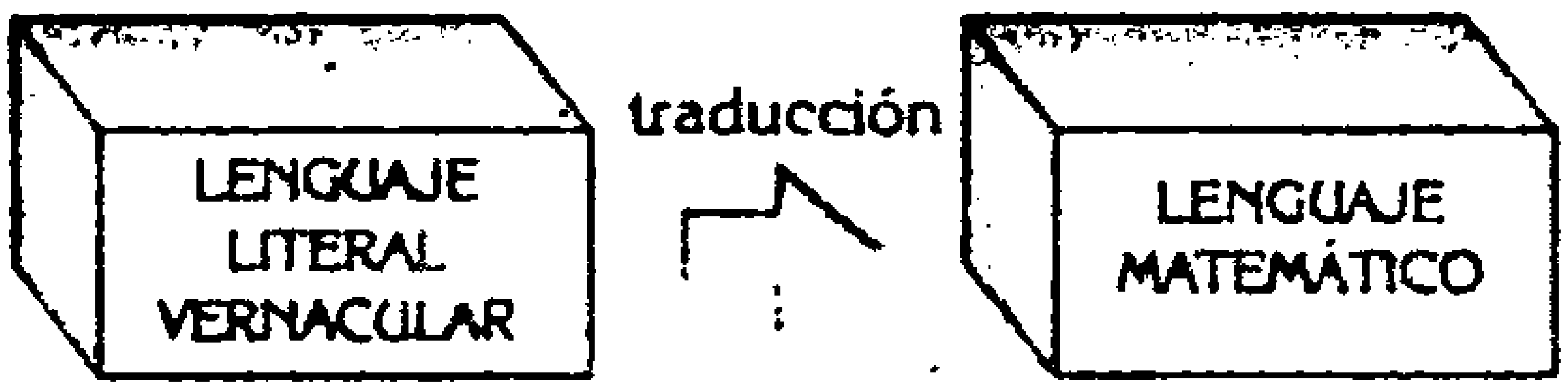
Plantear una ecuación es traducir el lenguaje , escrito (enunciado de un problema) a un lenguaje matemático o simbólico (ecuación). Para la correcta traducción de un enunciado a una ecuación , tenga algunas recomendaciones :

* Leer detenidamente el enunciado del problema hasta interpretar el tratado .
* Ubicar los datos y la pregunta claramente.
* Elegir las incognitas que se desea conocer.
* Plantear la ecuación relacionando los datos interpretados.
* Resolver la ecuación planteada. Veamos algunos ejemplos de traducción del lenguaje escrito al lenguaje matemático.

Problema en el l enguaje literal	*En el lenguaje algebraico*
Un comerciante tenía una cierta cantidad de dinero	x
En el primer día gastó S/.100.	$x-100$
Aumentó luego a lo que quedaba un tercio de éste	$x-100+\frac{1}{3}(x-100)=\frac{4}{3}(x-100)$
Al día siguiente volvió a gastar S/.100. en telas y chompas , con lo cual nuevamente tiene la cantidad que tuvo al inicio.	$\frac{4}{3}(x-100)-100=x$ $\frac{4x-700}{3}=x$
¿cual fue la capital inicial?	$x=700$
Tuvo inicialmente S/700.00	

Lenguaje escrito	*Lenguaje algebraico*
La suma de tres números consecutivos es 120.	$x+(x+1)+(x+2)=120$
El triple de un número , aumentado en 5	$3x+5$
Josy S/.40 más que Ray.	Josy: $x+40$; Ray: x
El triple de un número aumentado en 2.	$3(x+2)$

El objetivo de este capítulo es ayudarle a transformar un problema vernacular en una expresión algebraica (ecuación).



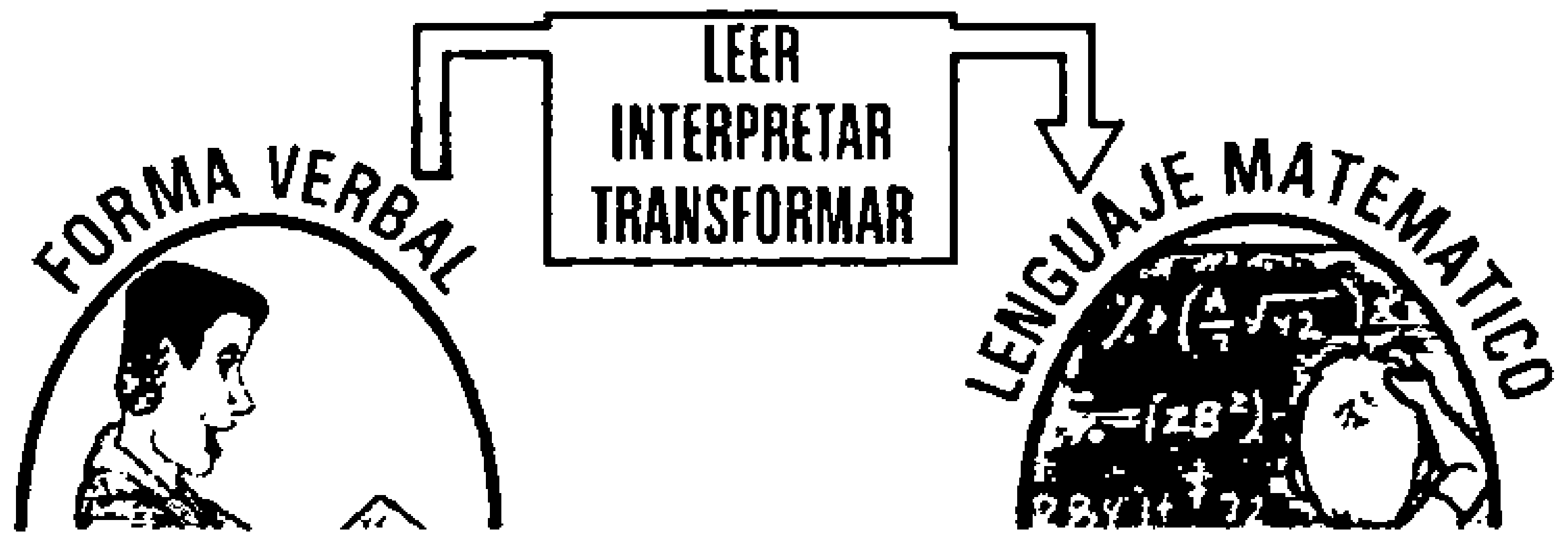
La parte más difícil al resolver un problema de aplicación suele ser su traducción en una ecuación.

Por tal motivo antes de resolver algunos problemas, practicaremos la traducción del problema a su representación algebraica.

PLANTEO DE ECUACIONES

Uno de los motivos más interesantes de las matemáticas, consiste en el arte de interpretar (traducir) un problema en el lenguaje literal (vernaculo) a un lenguaje matemático, con ayuda de símbolos, variables y operaciones fundamentales . Este motivo se denomina ***«Arte de plantear ecuaciones».***

* Leer cuidadosamente el texto del problema hasta comprender de que se trata .
* Ubicar los datos y la pregunta .
* Elegir la(s) variable(s) con las cuales se va ha trabajar.
* Relacionar los datos con las variables para plantear una o más ecuaciones que al resolver nos den la solución del problema.



Veamos a continuación algunos ejemplos de traducción parcial de un problema .

LENGUAJE CASTELLANO (ENUNCIADO)	*LENGUAJE MATEMÁTICO (SIMBOLOGÍA)*
Un número disminuido en 7	$x-7$
Mi edad es 2 veces tu edad	Tu : x Yo : $2x$ ....(2 veces)
Mi edad es 2 veces más que la tuya	Tu : x Yo : $x+2x=3x$ (dos veces más)
El triple de un número , aumentado en 5	$3x+5$
El triple , de un número aumentado en 5	$3(x+5)$
La suma de los 3 números consecutivos.	$x+(x+1)+(x+2)$ ó $(x-1)+x+(x+1)$
El exceso de A sobre B es 5 .	$A-B=5$
A es excedido por B en 5 .	$B-A=5$
La suma de dos números es 13.	$x+y=13$ ó x y $(13-x)$
A es a B como 3 es a 5	$\frac{A}{B}=\frac{3}{5}$ ó $A=3k$, $B=5k$
Por cada 3 varones hay 7 niñas.	Varones : $3k$ Niñas : $7k$
¿Qué parte de A es B?	$\frac{B}{A}$
¿Qué tanto por ciento de A es B?	$\frac{B}{A}\times 100$
7 menos 3 veces un número	$7-3x$
7 menos de 3 veces un número	$3x-7$
A es 9 más que B	$A-B=9$
La mitad de x es tanto como el quíntuple de y.	$\frac{x}{2}=5y$

Plantear una ecuación significa representar mediante igualdades las condiciones o relaciones que existen entre las incógnitas y los datos del problema .

Plantear una Ecuación

Lenguaje Común (enunciado) → ◆ Leer ◆ Interpretar ◆ Simbolizar → ◆ Lenguaje matemático (Ecuación) ◆ Resolución de la ecuación

ENUNCIADO ⇒ ***EXPRESION MATEMATICA***
(Forma Verbal) ***(Forma Simbólica)***

Enunciado	Expresión Matemática
_ *El triple de un número ó sus equivalentes.* *3 veces un número.* _ *2 veces más que un número.*	$3x$
El cuádruple de lo que tengo, disminuido en 5.	$4x - 5$
El cuádruple, de lo que tengo disminuido en 5.	$4(x - 5)$
La suma de dos números es 20.	*Si uno es x entonces el otro será :* $20 - x$
A es 2 veces B ó *A es el doble de B ó* *B es la mitad de A*	$A=2B$ ó $A=2x$ $B=x$
A es 2 veces más que B *A es 3 veces B* ***EN GENERAL :*** *n veces más* <> *n + 1 veces*	$A = B + 2B$ $A = 3B$
A excede a B en 3; o sus equivalentes: *A es mayor que B en 3; el exceso de A sobre B es 3; B es excedido por A en 3; la diferencia entre A y B es 3.*	$A - B = 3$ ó $A : x + 3$ $B : x$
A es a B como 2 es a 3; A es a 2 como B es a 3; la relación entre A y B es $\frac{2}{3}$*; por cada 2 de A hay 3 de B .*	$\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$ ó $\frac{A}{B} = \frac{2k}{3k}$
5 menos 3 veces un número.	$5 - 3x$
5 menos de 3 veces un número.	$3x - 5$
El producto de 3 números consecutivos	$x(x+1)(x+2)$ ó $(x-1)x(x+1)$
Un número impar	Sea «x» un entero cualquier , entonces 2x es par y (2x + 1) es un número impar
Tres impares consecutivos	La diferencia entre dos números impares consecutivos es 2. Sea (2x + 1) el impar más pequeño entonces , los números pedidos serán : (2x + 3) y (2x + 5)
La edad de Juan es el doble que la de Luis y la de ésta es el triple que la de Ricardo . Expresar cada una de estas edades en función de una de ellas	Sea la edad de Ricardo = x La de Luis será = 3x y la de Juan = 6x
Una fracción cuyo numerador es igual a cuatro veces el denominador menos 3 unidades.	Sea «x» el denominador, el numerador será : 4x - 3 y la fracción : $\frac{4x-3}{x}$

¡ RECUERDA !

(ENUNCIADO) ***(SÍMBOLOS)***

① La suma de tres números consecutivos es 72 . ⇨ $x+(x+1)+(x+2)=72$

② La edad de Lenin es dos veces la edad de Bryan . ⇨ *Lenin* **2x años** *Brayan* **x años**

③ La edad de José es dos veces más que la edad de Juan. ⇨ *José* **3x años** *Juan* **x años**

④ Yo tengo la mitad de lo que tu tienes y él tiene el triple de lo que tu tienes. ⇨ *YO* **x** *TU* **2x** *EL* **6x**

⑤ El triple de un número , aumentado en 10 . ⇨ *Sea x el número* $3x+10$

⑥ El triple, de un número aumentado en 10 . ⇨ *Sea x el número* $3(x+10)$

⑦ El exceso de A sobre B es 50 . ⇨ $A - B = 50$

⑧ En una reunión hay

tantos hombres como el doble del número de mujeres . ⇨ Hombres $\boxed{2x}$ Mujeres $\boxed{x}$

⑨ Ha comprado tantas camisas como soles cuesta cada una . ⇨ Compro : x camisas; c/u cuesta : S/. x

⑩ Any tiene **S/.50** más que Lela . ⇨ Any: S/. $(x + 50)$ Lela: S/. x

Ahora les toca a ustedes .

I) Traducir a lenguaje simbólico los siguientes enunciados :

ENUNCIADO VERBAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
01) El triple de un número, aumentado en siete veces el número	
02) A 36 le quitas "2x" y nos da la tercera parte de 12.	
03) El doble de su edad dentro de tres años es 20.	
04) La altura de un edificio más su cuarta parte es 250m.	
05) La edad de Rosa hace 5 años, menos su edad hace 12.	
06) Los $\frac{2}{3}$ del número de hojas de un libro, agregado en 18 nos da 58.	
07) 70 se fracciona en tres partes tal que cada uno es el doble de la anterior.	
08) 60 se divide en dos partes, tal que una es 12 más que la otra.	
09) 140 se descompone proporcionalmente a tres, cuatro y siete.	
10) Un número es 30 más que otro y su suma es 120.	

PLANTEO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

A continuación se indican algunas recomendaciones para resolver un problema :

- *Lea el problema con cuidado.*
- *De ser posible , haga un dibujo que le ayude a visualizar el problema.*
- *Determine la cantidad que se debe encontrar , elija una letra para representar a esta cantidad desconocida . Escriba con exactitud lo que representa (significa). Si hay más de una cantidad desconocida , represente todas las otras en términos de la primera.*
- *Escriba el problema como una ecuación.*
- *Despeje la incógnita de la ecuación*
- *Responda a la o las preguntas planteadas.*

!RECUERDA¡

- Leer bien el enunciado y entenderlo .
- Ubicar la incógnita y representarla .
- Traducir el enunciado del problema, parte por parte.
- Teniendo la ecuación planteada , resolverla .
- Comprobar el resultado .

Ahora debes conocer el equivalente matemático de frases muy comunes.

(+)

Sumar, agregar, aumentar el total,
Se ganan, dentro de «n» años
Una herencia se reparte ...
Un número se fracciona ...
Se descompone en 3 partes ...

(−)

Quitar, disminuir,
Descontar,
Perder,
Hace «n» años
El exceso de «10» sobre «6»

(×)

El producto de tres números ... los factores ...
Dos veces = el doble = $2x$
Tres veces = el triple = $3x$
Cuatro veces = el cuádruple = $4x$
⋮ ⋮ ⋮

«n» veces = «n» ple = nx

(÷)

El cociente de dos números ...

Dos números son entre sí

Dos números son como ...

Dos números están en la relación de ...

Dos números son proporcionales a ...

Un medio de ...= la mitad ... $= \frac{1}{2}x$

Un tercio de ...= la tercera parte ...$= \frac{1}{3}x$

Un cuarto de ...= la cuarta parte ...$= \frac{1}{4}x$

Un «n» avo ...= la «n» ésima parte ...$= \frac{x}{n}$

(=)

Es igual a; se obtiene; nos da; es tanto como; equivale; en la misma medida

NÚMEROS CONSECUTIVOS

EJEMPLO :

Simplemente consecutivos	Pares consecutivos	Impares consecutivos
+1 +1 +1	+2 +2 +2	+2 +2 +2
7 ; 8 ; 9 , ...	20 ; 22 ; 24 , ...	31 ; 33 ; 35 , ...

Forma general :

Forma General

- $x , x+1 , x+2 ...$ / $x-1 , x , x+1 ...$ } Simplemente consecutivos
- Pares consecutivos: $x , x+2 , x+4 ...$ / $x-2 , x , x+2 ...$ $(x \rightarrow par)$
- Impares consecutivos: $x , x+2 , x+4 ...$ / $x-2 , x , x+2 ...$ $(x \rightarrow impar)$

EJEMPLO :

La suma de tres números consecutivos es *33* . ¿Cuál es el mayor?

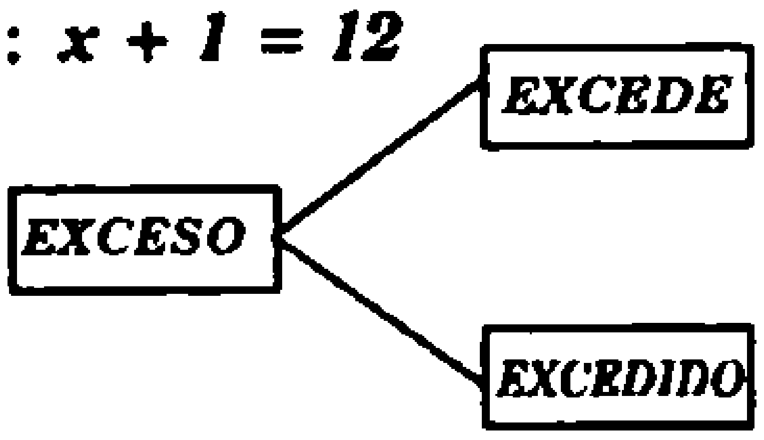
RESOLUCIÓN:

* Sean los consecutivos : $x-1 , x , (x+1)$ (Mayor)
* Su suma : $x-1 + x + x + 1 = 33$

$\Rightarrow 3x = 33$

$\Rightarrow x = 11$

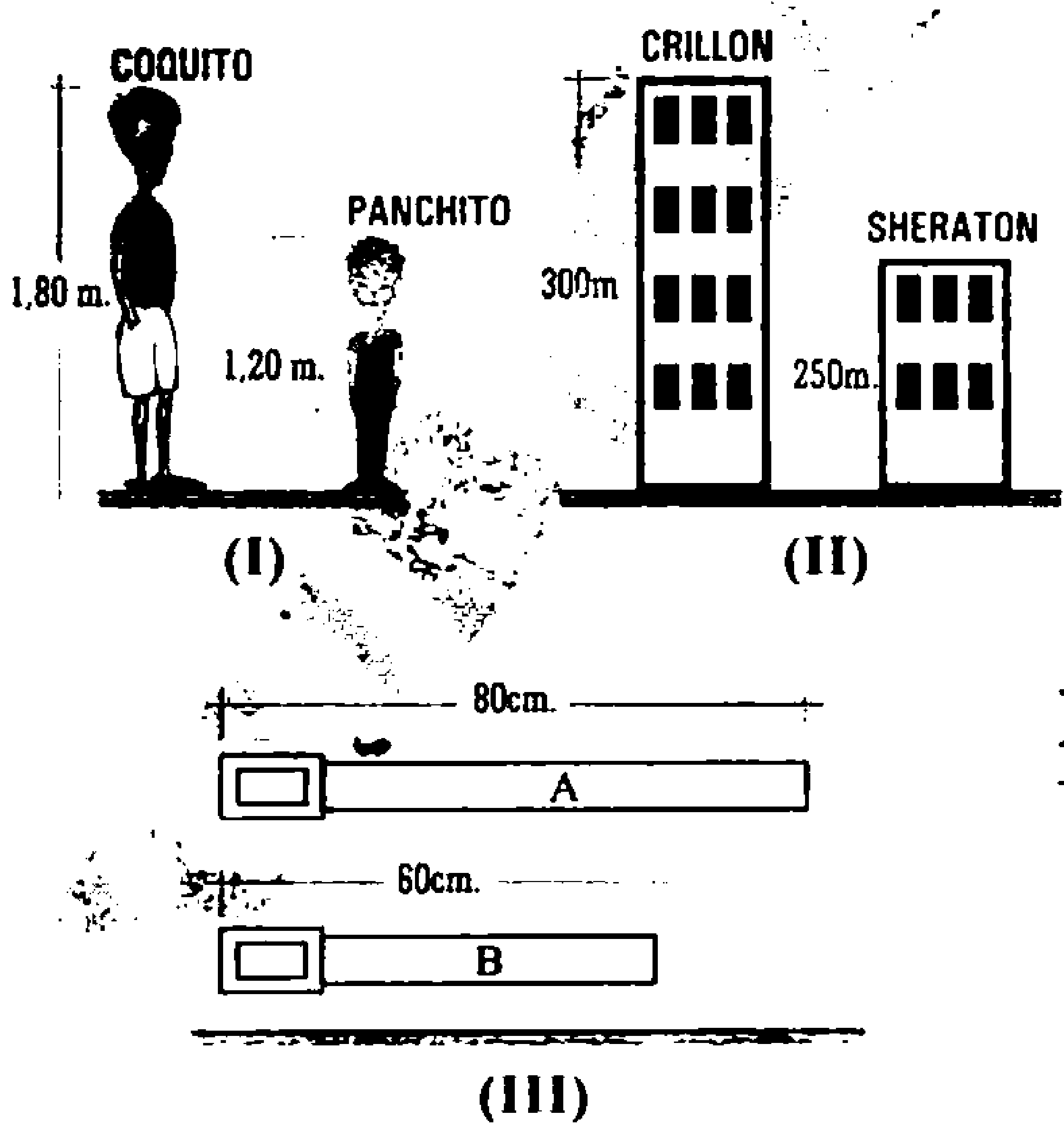
* El mayor es : $x + 1 = 12$



EXCESO : Es la cantidad adicional que un ente tiene respecto a otro. Es lo que sobrepasa, lo que supera, lo extra, lo además.

EXCEDE : Es la cantidad mayor.

EXCEDIDO : Es la cantidad menor.



¿Cuál es el exceso en I, II y III ?

¿Quién excede? ¿Quién es excedido?

• Para hablar de exceso siempre hay que comparar dos o más cantidades , el exceso se plantea de tres formas equivalentes.

Cantidad Mayor – Cantidad Menor = Exceso

Cantidad Mayor – Exceso = Cantidad Menor

Cantidad Menor + Exceso = Cantidad Mayor

EJEMPLO :

80 excede a *60* en *2x* . Hallar «x» :

RESOLUCIÓN:

$80 - 60 = 2x$

$\Rightarrow 20 = 2x \Rightarrow x = 10$

¡SIGAMOS REPASANDO!

ENUNCIADOS :

Siete sumado al doble de un número .

La suma del doble de un número más siete.

El doble de un número aumentado en siete .

Siete más el doble de un número.

REPRESENTACIÓN : $2x+7$

ENUNCIADOS :

Tres menos que el doble de un número.
El doble de un número , disminuido en tres .
La diferencia del doble de un número y tres .
Tres restado del doble de un número

REPRESENTACIÓN : $2x-3$

ENUNCIADOS	REPRESENTACIÓN
Dos números difieren en tres	x ; $x+3$
Un número es el quintuplo de otro	x ; $5x$
La suma de dos números es 18	x ; $18-x$
El triple de un número	x ; $3x$
Tres veces mayor	x ; $3x$
Tres veces más	x ; $4x$

ENUNCIADOS

Dos números proporcionales a **4** y **5**
Dos números en relación de **4** a **5**
Dos números son como **4** es a **5**
La relación de dos números es **4/5**
La razón de dos números es **4/5**

$A = 4x$; $B = 5x$ *REPRESENTACIÓN*

TAMBIÉN : $\frac{A}{B}=\frac{4}{5}$; $\frac{A}{4}=\frac{B}{5}$; $5A=4B$

ENUNCIADOS

A excede a B en 7.
B es excedido por A en 7.
El exceso de A sobre B es 7.
A es mayor que B en 7.
B es menor que A en 7.
La diferencia entre A y B es 7.

REPRESENTACIÓN

$A-B=7$; $A=x+7$; $B=x$

ENUNCIADOS

A es el triple de B.
A es tres veces B.
A es tres veces mayor que B.
A es dos veces más que B.
B es un tercio de A.

REPRESENTACIÓN

$A=3B$ ó $A=3x$ y $B=x$

Nota : «m» veces más <> «m+1» veces

ENUNCIADOS

* Un número múltiplo de 7. ⇒ $7x$, $7n$, $7k$
* Un número par (múltiplo de 2) ⇒ $2x$, $2n$, $2k$
* Tres números pares consecutivos.

⇒ $2x$, $2x+2$, $2x+4$ ó (los números pares aumentan o disminuyen de 2 en 2)

⇒ $2x$, $2x-2$, $2x-4$

* Dos pares que preceden a $2x$. ⇒ $2x-2$, $2x-4$
* Un número impar. ⇒ $2x+1$ ó $2x-1$
* Tres números impares consecutivos.

⇒ $2x+1$, $2x+3$, $2x+5$

(los números impares aumentan de 2 en 2) o también $2x-1$, $2x-3$, $2x-5$.

* Tres números consecutivos.

⇒ x , $x+1$, $x+2$ ó x , $x-1$, $x-2$

* El cuadrado de la suma de dos números A y B.
⇒ $(A+B)^2$
* La suma de los cuadrados de los números A y B
⇒ A^2+B^2
* El cubo de la suma de los números A y B
⇒ $(A+B)^3$
* La suma de los cubos de los números A y B
⇒ A^3+B^3
* La inversa de un número X ⇒ $1/X$
El recíproco de X ⇒ $1/X$
* La suma de las recíprocas de X e Y

$$\Rightarrow \frac{1}{X}+\frac{1}{Y}$$

* La suma de los inversos de las recíprocas de X e Y
⇒ $x+y$
* El doble de un número , más 7. ⇒ $2x+7$
* El doble , de un número más 7. ⇒ $2(x+7)$

ALGO QUE RECORDAR :

PALABRA	SIGNIFICADO
* Veces"	Producto
* De , del , de los	Producto
* Como...es a...	Proporción
en relación	Proporción
* Es , en , sea , tiene , tendrá , equivale tanto como	Igualdad
* Razón , relación	Cociente

NOTA :

En los problemas verbales la palabra ***«es»*** significa ***«es igual a»*** y se representa con un signo de «igualdad» *(=)*.

Los siguientes son problemas traducidos a ecuaciones.

* Ocho más el doble de un número es **14**

Ecuación : $2x+8=14$.

* Un número disminuído en **2** es **3** más que su doble.

Ecuación : $x-2=2x+3$.

* Tres veces un número , disminuído en **5** es cuatro veces el número aumentado en **2**

Ecuación : $3x-5=4x+2$.

* Tres veces la diferencia de un número y tres es cuatro menos que seis veces el número Ecuación :

$$3(x-3)=6x-4$$

EJERCICIOS

Escribir cada problema como una ecuación.

01 Un número es seis menos que el doble de otro , su suma es ***18***.

02 Un número es cinco veces otro , la suma es ***36***.

03 La suma de dos enteros consecutivos es ***47***.

04 Una quinta parte de la suma de un número y ***10*** es ***150***.

05 Un número es ***3*** más que seis veces otro , el producto es ***408***.

06 Un número aumentado en ***10%*** es ***22***

07 El costo de una video grabadora con un descuento del ***20%*** es de ***120*** dólares.

08 El costo de un auto más el impuesto del ***7%*** es ***13 600*** dólares.

09 María tiene ***6*** años más que Daniel . La suma de sus edades es ***48***.

10 El producto de un número y del mismo número más un ***5%*** es de ***120***.

11 Un tren recorre a ***8Km*** menos del doble que otro. La distancia total recorrida por ambos es de ***1000Km***.

12 Jaime gastó ***2/3*** de lo que no gastó , si tenía ***1000*** dólares.

13 María pierde un quinto de lo que no pierde , si al inicio tenía ***600*** soles.

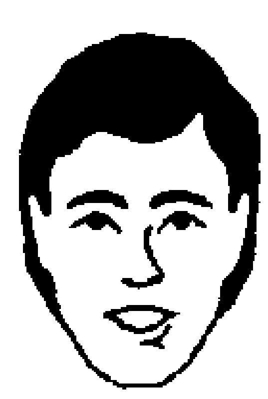
14 Si ***A*** es a ***2*** como ***B*** es a ***3*** , además ***A+B= 350***

15 Ricardo tiene tres veces más que Roberto, si Ricardo le da a Roberto ***60*** soles , ambos tendrían igual cantidad.

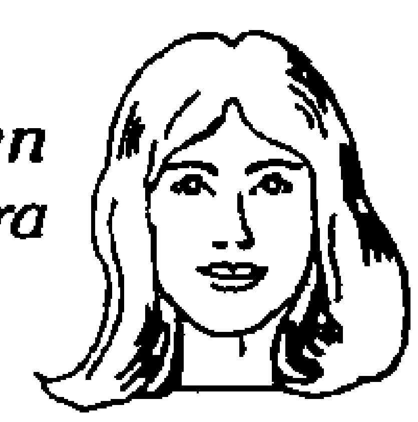
¿CÓMO ADIVINAR EL NÚMERO PENSADO POR ALGUIEN?

*Piensa un número, multiplícalo por **6**, súmale **7**, réstale el doble del número que pensaste y dime el resultado.*

¡Ah! ... entonces pensaste en el número 8



Si, fectivamente pensé en el número 8. ¿Cómo haces para hallar el número pensado?



¡Verás! ¡Es muy fácil!

Te enseñaré a hacerlo matemáticamente y nunca fallarás, para esto ordenamos el trabajo como sigue,

Datos referenciales dictados por el adivinador	Representación simbólica del adivinador
Piensa un número	x
Multiplícalo por 6	$6x$
Súmale 7 al resultado	$6x+7$
Réstale el doble del número pensado	$6x+7-2x$
Dime el resultado, RESPUESTA=39	$6x+7-2x=39$
El número que pensaste es 8.	$x=8$

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIO 1 :

Calcular dos números sabiendo que su suma es igual a *21* y que uno de ellos es igual al doble del otro.

RESOLUCIÓN :

* Sean los números : x y $2x$
* Luego : $x+2x=21 \Rightarrow 3x=21$
* Por lo tanto : $x=7$

$\Rightarrow$ Los números pedidos son *7* y *14.*

EJERCICIO 2 :

Calcular dos números sabiendo que su suma es *37* y que si se divide el mayor por el menor, el cociente vale *3* y el resto *5*.

RESOLUCIÓN :

* Sea « x » el número mayor, entonces el menor será: $37-x$; Ahora como : $D=dq+r$
* Luego : $x=3(37-x)+5$
* resolviendo : $x=29$
* Luego los números son : *29* y *8*

EJERCICIO 3 :

¿Qué edad tiene Chistian, si sabemos que al cuadruplicar y agregarle *44* obtendremos su séxtuplo disminuido en *4* años?

RESOLUCIÓN :

¿Que edad tiene Chistian?	x
Si sabemos que al cuadruplicar	$4x$
y agregarle	$4x+$
44 años	$4x+44$
obtendremos	$4x+44=$
su séxtuplo	$4x+44=6x$
disminuido	$4x+44=6x-$
en 4 años	$4x+44=6x-4$

* Despejando : $48=2x$

RPTA : $x=24$

EJERCICIO 4 :

Hallar la longitud de un puente si sabemos que el séxtuplo de dicha longitud disminuido en *300* metros es equivalente al triple de dicha longitud disminuido en *60* metros .

RESOLUCIÓN :

Hallar la longitud del puente	x
Si sabemos que el séxtuplo de ella	$6x$
disminuido	$6x-$
en 300 metros	$6x-300$
equivale a	$6x-300=$
al triple de dicha longitud	$6x-300=3x$
disminuido en 60 metros	$6x-300=3x-60$

* Despejando : $3x=240$

RPTA : $x=80$

EJERCICIO 5:

¿Cuál es el número que al aumentarle el doble de «$a+b$» nos da el quíntuplo de «$a-2b$» ?

RESOLUCIÓN :

Sea el número	x
que al aumentarle	$x+$
el doble de "a + b"	$x+2(a+b)$
nos da	$x+2(a+b)=$
el quíntuplo de "a − 2b"	$x+2(a+b)=5(a-2b)$

Despejando : **RPTA : $x=3a-12b$**

EJERCICIO 6 :

¿Cuanto tengo de dinero, si cuando me regalan *10000* soles poseo los *9/7* de lo que tenía inicialmente?

RESOLUCIÓN :

¿Cuánto tengo de dinero?	x
Si cuando me regalan 10000	$x+10000$
poseo	$x+10000=$
los 9/7 de lo que tenía inicial.	$x+10000=\frac{9x}{7}$

* Despejando : $10000=\frac{2x}{7}$

RPTA : $x=35000$

EJERCICIO 7 :

Compro cierto número de caramelos y reparto entre mis sobrinos del modo siguiente : A Luis la tercera parte del total , a Eduardo la quinta parte , a Gustavo los *2/15* del total y a Mónica los *10* restantes ¿Cuántos caramelos compré?

RESOLUCIÓN :

Compro cierto # de caramelos	$MCM(3;5;15) = 15x$
a Luis la tercera parte	Luis : $5x$
a Eduardo la quinta	Eduardo : $3x$
a Gustavo 2/15 del total	Gustavo : $2x$
a Mónica 10 restantes	Mónica : 10
¿Cuántos caramelos compré?	$5x + 3x + 2x + 10 = 15x$

* Despejando : $x = 2$

RPTA : $15x = 30$

EJERCICIO 8 :

Hallar el número de hojas de un libro si sabemos que si arrancamos *25* quedarán la mitad de hojas si el libro tuviera *50* hojas más.

RESOLUCIÓN :

El número de hojas del libro	x
si arrancamos 25 hojas	$x - 25$
quedaría	$x - 25 =$
la mitad de hojas	$x - 25 = 1/2$
si el libro tuviera 50 hojas más	$x - 25 = \frac{1}{2}(x + 50)$

$2x - 50 = x + 50$

RPTA : $x = 100$

EJERCICIO 9 :

Si ganara *\$.300*, tendría el triple de lo que me quedaría si hubiera perdido *\$.300* ¿Cuánto tengo?

RESOLUCIÓN :

Tengo : x

Si ganara *\$.300* tendría : $x + 300$

Si tendría *\$.300* me quedaría : $x - 300$

Tengo	x
Si ganara	$x + 300$
tendría	$x + 300 =$
el triple de lo que me quedaría si hubiera perdido	$x + 300 = 3(x - 300)$

Despejando :

RPTA : $x = 600$

EJERCICIO 10 :

Por un trabajo a Campos se le pagó *\$.10* más que a Salarrayán, a Grigoleto el doble de lo que recibió Salarrayán y a Salas el triple, de lo que recibió Salarrayán y Campos juntos. Si el pago total que se hizo fue *\$.540* ¿Cuánto recibió Grigoleto?

RESOLUCIÓN :

- Primero se representa a: Salarrayán

Salarrayán : x Campos : $x + 10$

Grigoleto : $2x$ Salas : $3(x + x + 10)$

- Luego la suma de todos debe ser igual a *\$.540*

$x + x + 10 + 2x + 3(x + x + 10) = 540$

$\Rightarrow 4x + 10 + 6x + 30 = 540 \Rightarrow 10x = 500$

$\Rightarrow x = 50$

RPTA : $2(50) = 100$

EJERCICIO 11:

Se sabe que en un campeonato, Benavente metió cinco goles más que Herrera . Los goles de Cuba excedió en dos a los de Benavente y fue excedido por un gol de Paredes, quien a su vez hizo la misma cantidad de goles que Castañeda. Si hubo un total de 53 goles ¿Cuántos goles metió Paredes?

RESOLUCIÓN :

- Los goles de Herrera son la incógnita principal, por lo tanto :

Herrera hizo	x
Benavente metió cinco goles más que Herrera	$x + 5$
Los goles de Cubas excedió en dos a los de Benavente	$x + 7$
y fue excedido por un gol de Paredes	$x + 8$
si hubiera 53 goles	Total de goles= 53

$x + x + 5 + x + 7 + x + 8 + x + 8 = 53$

$\Rightarrow 5x + 28 = 53$

$\Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = 5$

RPTA : $5 + 8 = 13$

EJERCICIO 13 :

Rybert tiene *160* soles en monedas de *2* y *5* soles. Sabiendo que en total tiene *50* monedas , Calcular el número de monedas de *5* soles.

RESOLUCIÓN :

N° de monedas de *5* soles = x

N° de monedas de *2* soles = *50 – x*

* luego : $5x + 2(50 - x) = 160$
* Resolviendo : $x = 20$

⇒ Existen *20* monedas de *5* soles

EJERCICIO 14 :

En una bolsa hay *230* pesetas en monedas de *5; 25* y *50* pesetas , sabiendo que el número de monedas de *25* es igual al doble de *50*, y que el número de monedas de *5* es igual al doble de *25* menos *2* . Calcular el número de monedas de cada clase.

RESOLUCIÓN :

	N°de monedas	Valor en pesetas
Monedas de 50	x	$50x$
Monedas de 25	$2x$	$50x$
Monedas de 5	$4x - 2$	$20x - 10$

* Luego : $50x + 50x + 20x - 10 = 230$
* Resolviendo : $x = 2$
* Por tanto hay *2* monedas de *50* , *4* de *25* y *6* pesetas de *5*

PLANTEO DE INECUACIONES

Al igual que el planteo de las ecuaciones , consiste en leer , interpretar , simbolizar y finalmente transformar el lenguaje literal al lenguaje matemático, que en este capítulo son las inecuaciones ; a continuación los párrafos más comunes del planteo de las desigualdades.

ENUNCIADO	DESIGUALDAD Y/O INECUACIÓN
Un número es menor que 7, pero es mayor que 3	$x < 7 \wedge x > 3$ $\Rightarrow 3 < x < 7$
Cierta cantidad no es mayor que 10	$x < 10 \vee x = 10$ $\Rightarrow x \leq 10$
El doble de mi edad es menor que tu edad disminuida en 7 años.	$2x < y - 7$
Un número esta comprendido entre 7 y 21	$7 < x < 21$
La suma de nuestras edades sobrepasa los 100 años	$x + y > 100$
Mi edad al cuadrado no es menor que 16, pero no alcanza los 144 años.	$x^2 \geq 16 \wedge x^2 < 144$ $\Rightarrow 16 \leq x^2 < 144$

NOTA :

Hay que tener en cuenta el sentido de las desigualdades, tratando siempre de transformar todos los datos en un solo sentido .

EJEMPLO 1 :

Hallar un número entero y positivo que sumado con *11* resulte mayor que el triple de él , disminuido en *7* y que sumado con *5* resulte menor que el doble de él, disminuido en *2* .

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

Sea «*x*» el número entero.

Primer Dato :

$x + 11 > 3x - 7$

$\Rightarrow 18 > 2x$

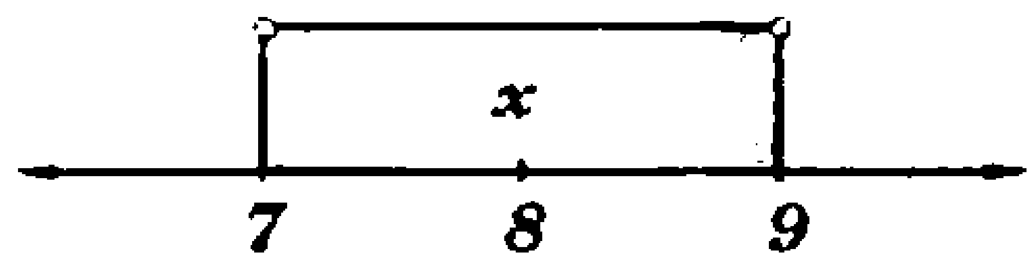
$\Rightarrow 9 > x$ .... *(I)*

Segundo Dato :

$x + 5 < 2x - 2$

$\Rightarrow 7 < x$ .... *(II)*

* De *(I)* y *(II)* : $7 < x < 9 \Rightarrow x \in \langle 7 ; 9 \rangle$



* Pero como «*x*» es entero ,
* Luego : $x = 8$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

Una persona fabrica un número determinado de sillas. Si duplica su producción y vende *60*, le quedan más de *24*. Luego fabrica *10* más y vende *28*. Tendrá entonces menos de *10* sillas . Señale cuántas sillas se fabricaron.

A) 43 *B) 45* *C) 88* *D) 53* *E) 96*

RESOLUCIÓN :

* Si *x* es el # de sillas producido:

$2x$ = el # duplicado, primeramente

$\Rightarrow 2x - 60 > 24$

$\Rightarrow x > 42$ .... *(I)*

* Luego :

$[(2x - 60) + 10] - 28 < 10$

$\Rightarrow x < 44$ .... *(II)*

* De *(I)* y *(II)*, considerando el único valor entero:

$$42 < x < 44 \Rightarrow x = 43$$

RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Un holgazán duerme normalmente todas las horas de cada día menos las que duerme ¿Cuántas horas permanece despierto diariamente?

A) 24   B) 6   C) ninguna   D) 12   E) absurdo

RESOLUCIÓN:

* Todas las horas : ***24***
* Horas que duerme : x
* Horas que permanece despierto :

TODAS – DUERME........(SE RAZONA)

Del enunciado : ***DUERME = TODAS – DUERME***

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$x = 24 - x$$

$\Rightarrow 2x = 24$

$\Rightarrow x = 12$ ***..........(DUERME)***

$\Rightarrow$ ***DESPIERTO*** $= 24 - 12 = 12$

RPTA : "D"

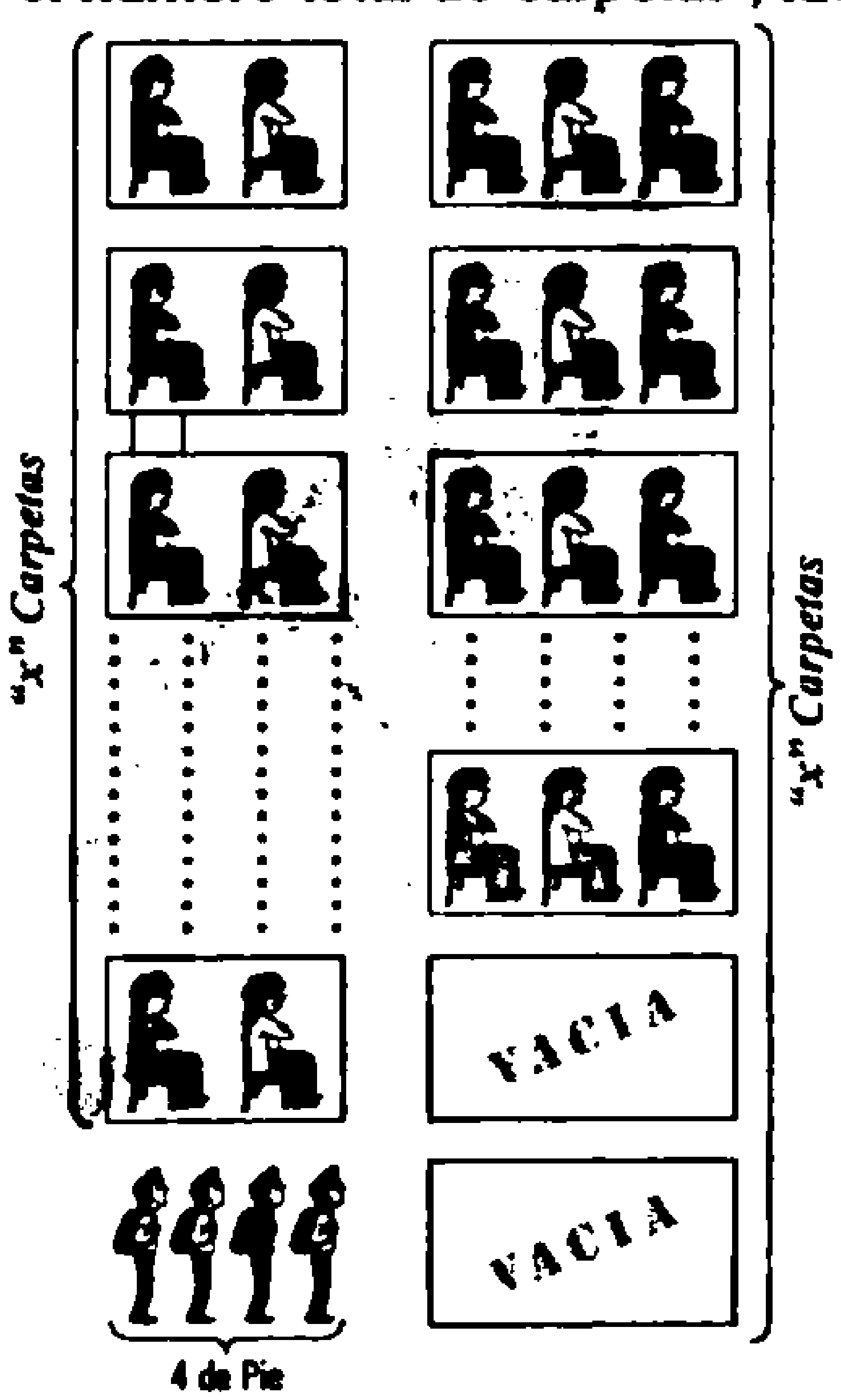
PROBLEMA 2 :

En un salón de clase , si los alumnos se sientan de ***2*** en ***2*** se quedarán de pie ***4*** alumnos . En cambio , si se sientan de ***3*** en ***3 ; 2*** carpetas quedarían vacías ¿cuántos son los alumnos?

A) 10   B) 24   C) 13   D) 8   E) 34

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el número total de carpetas , luego :



$\Rightarrow$ Total de Alumnos : $2x + 4 = 3(x-2)$

$\Rightarrow 2x + 4 = 3x - 6$

$\Rightarrow 10 = x$

* Luego el número total de alumnos será :

$$2(10)+4=24$$

RPTA : "B"

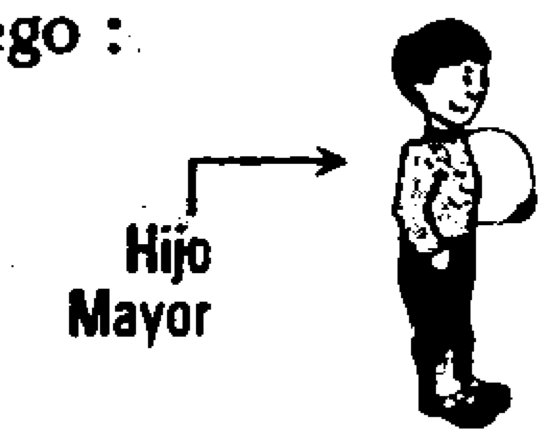
PROBLEMA 3 :

Averiguando el número de los miembros de una familia, el hijo mayor contesta : Tengo el doble de hermanos que de hermanas», pero la niña menor contesta : «mis hermanos son el triple que mis hermanas» Entonces el total de hijos (varones y mujeres) es :

A) 7   B) 10   C) 15   D) 13   E) 11

RESOLUCIÓN:

* Sea el número de hermanas del hijo mayor igual a «x», luego :

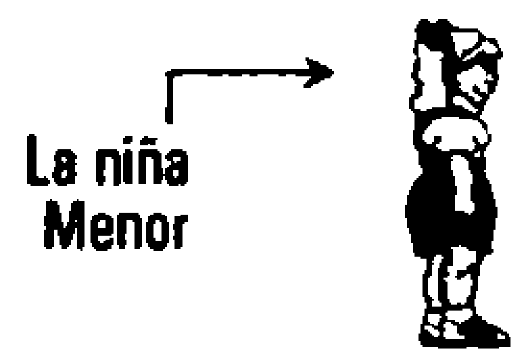


Hermanas : x
Hermanos : $2x$

* Entonces podemos deducir que :

Total de varones : $2x + 1$

Total de mujeres : x



Hermanos : $2x + 1$
Hermanas : $x - 1$

* Luego, de lo que dice la niña menor , plantearemos:

$$2x+1 = 3(x-1)$$
$$\Rightarrow 2x+1 = 3x - 3 \Rightarrow 4 = x$$

* Piden el total de hijos , que será : $2(4)+1+4=13$

RPTA : "D"

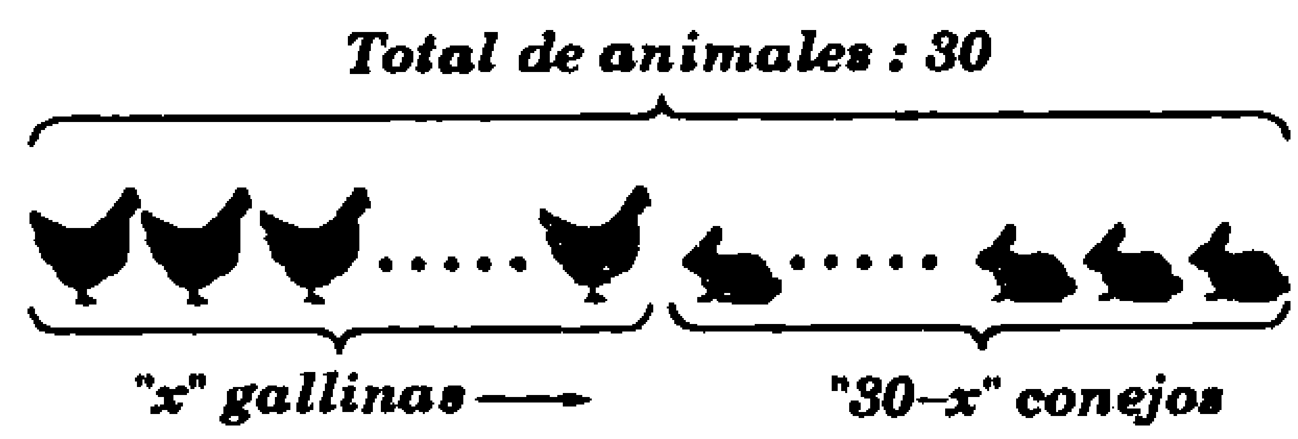
PROBLEMA 4 :

En una granja hay ***30*** animales, entre gallinas y conejos. Si se contó ***74*** patas en total . ¿Cuántas más son las gallinas respecto al número de conejos?

A) 7   B) 13   C) 16   D) 17   E) 12

RESOLUCIÓN :

* Total de animales : ***30***



* Sea el número de gallinas igual a «x» entonces como en total son **30** animales, el número de conejos será : $30-x$; luego, el número total de patas es **74** y sabemos que cada gallina tiene **2** patas y cada conejo tiene **4** patas, con lo que plantearemos:

$$2x + 4(30-x) = 74$$
$$\Rightarrow 2x + 120 - 4x = 74$$
$$\Rightarrow 46 = 2x \Rightarrow 23 = x$$

* Entonces hay **23** gallinas y **7** conejos .

Nos piden : $23-7 = 16$

RPTA : "C"

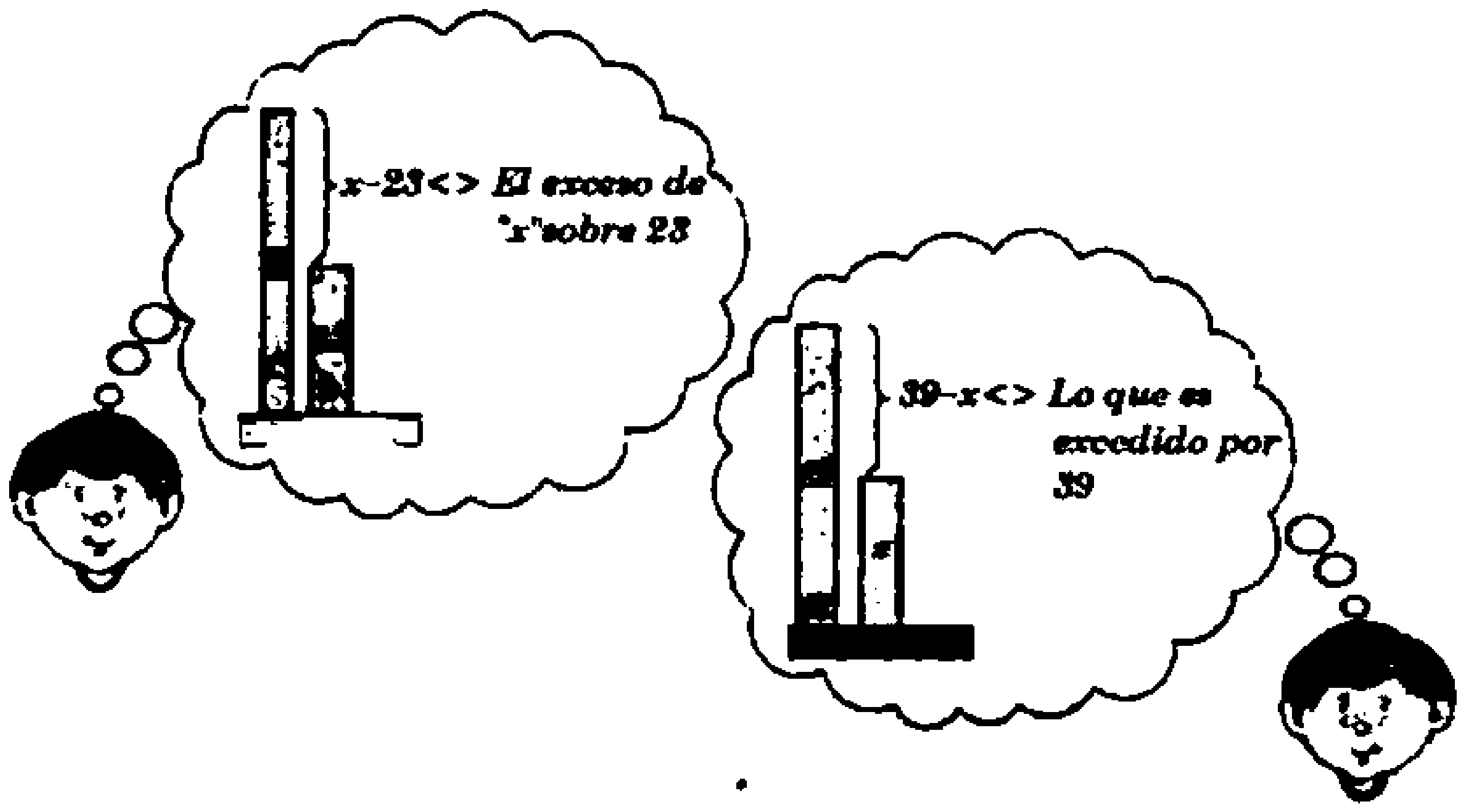
PROBLEMA 5 :

Hallar un número que excede a **23**, en tanto como es excedido por **39**.

A) 30 B) 31 C) 32 D) 29 E) 28

RESOLUCIÓN :

• Sea «x» el número , luego imaginemos lo siguiente:



• Del enunciado : «$x-23$» tanto como «$39-x$»

$$\Rightarrow x-23 = 39-x$$
$$\Rightarrow 2x = 62 \Rightarrow x = 31$$

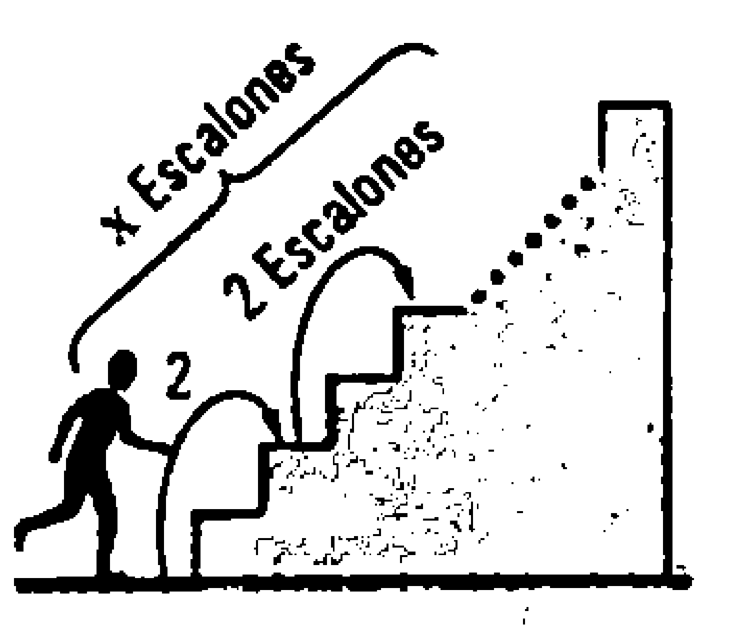
RPTA : "B"

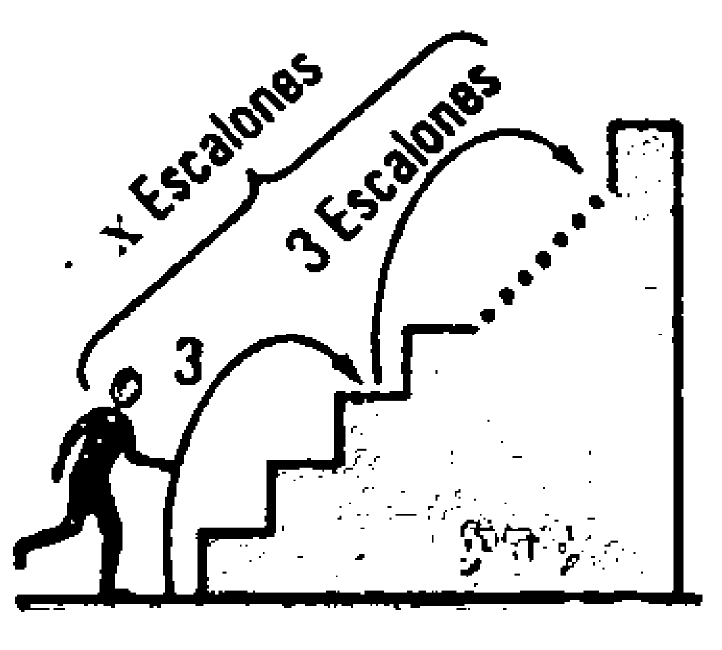
PROBLEMA 6 :

Si subo una escalera de **2** en **2**, doy **6** pasos más que subiendo de **3** en **3**. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

A) 24 B) 12 C) 36 D) 48 E) 6

RESOLUCIÓN :





* Número de pasos : $\dfrac{x}{2}$

* Número de pasos : $\dfrac{x}{3}$

* Según enunciado, los primeros son **6** pasos más que los del segundo caso; luego :

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$$

* Resolvemos : $x=36$ .... *(Total de escalones)*

RPTA : "C"

SEGUNDO MÉTODO :

Para que el número de escalones sea divisible por **2** y **3** a la vez , entonces debe ser múltiplo de **6** luego asumimos que el total de escalones sea «$6x$» ; al subirlos de **2** en **2**, doy «$3x$» pasos y al subirlos de **3** en **3** doy «$2x$» pasos; siendo los primeros **6** más que los segundos :

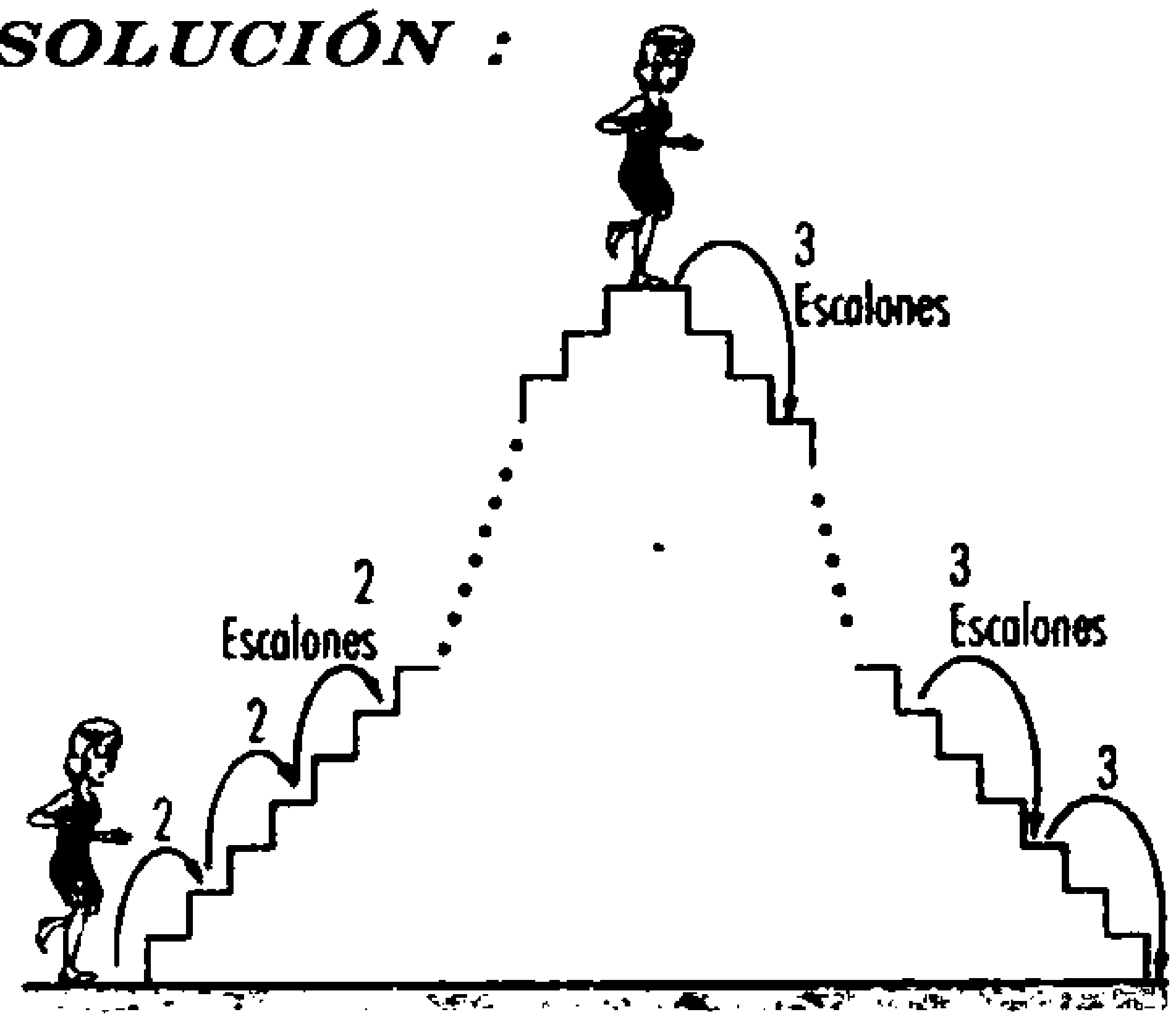
$$2x - x = 6$$
$$\Rightarrow x = 6$$
$$\Rightarrow \text{Total de escalones : } 6(6) = 36$$

PROBLEMA 7 :

Una persona sube una escalera de **2** en **2** gradas y desciende de **3** en **3** , dando un total de **150** pasos. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?

A) 240 B) 30 C) 60 D) 180 E) 200

RESOLUCIÓN :



* Como el número total de escalones, lo vamos ha dividir de **2** en **2** y de **3** en **3**; luego asumiremos que:

MCM (2,3)

* Número total de escalones : $6x$, cosa que al subirlos de **2** en **2**, dará «$3x$» pasos, y al bajarlos, dará «$2x$» pasos; y que según enunciado :

$$3x + 2x = 150 \Rightarrow x = 30$$

* Luego el total de escalones será :

$$6x = 6(30) = 180$$

RPTA : "D"

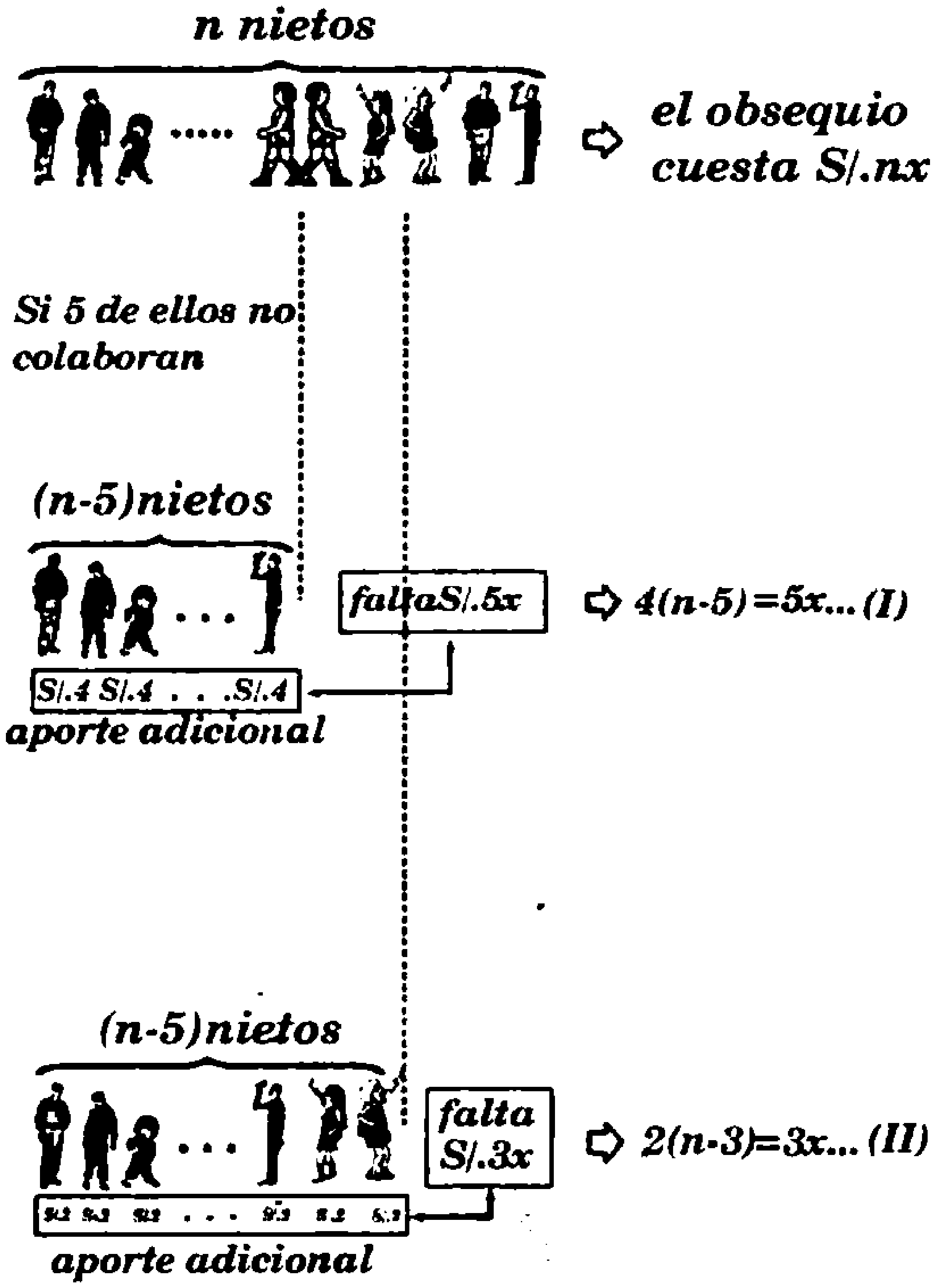
PROBLEMA 8 :

Los nietos de don Julio deciden comprarle un obsequio. Si no colaborasen cinco de ellos , a cada uno de los restantes le correspondería *S/.4* más y si no colaborasen tres , a cada uno de los otros le correspondería *S/.2* más. ¿Cuántos nietos tiene don Julio?

A) 13 *B) 15* *C) 16* *D) 14* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

Sea n el número total de nietos de Don Julio y sea x el aporte de cada nieto.



Dividimos *(I)÷(II)* :

$$\frac{4(n-5)}{2(n-3)}=\frac{5x}{3x} \Rightarrow n=15$$

RPTA : "B"

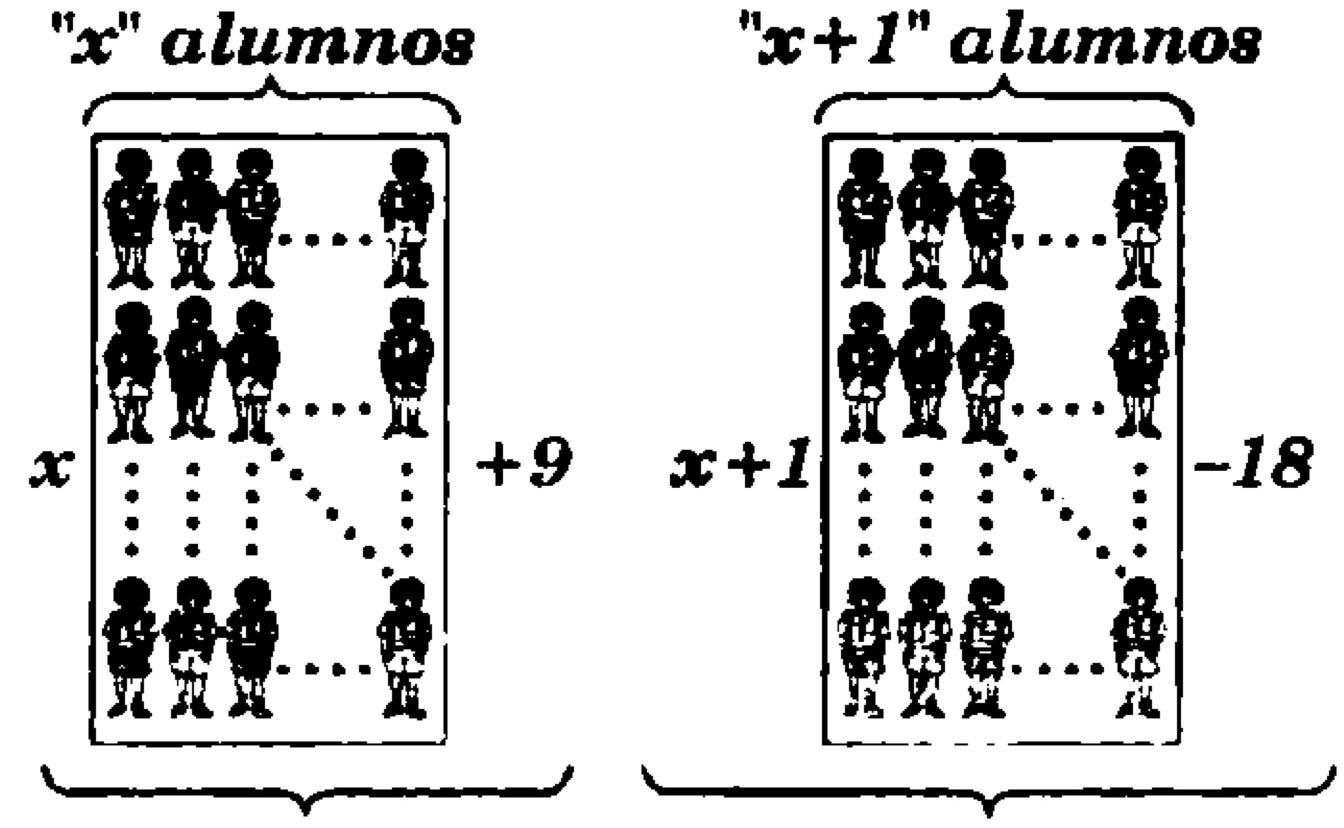
PROBLEMA 9 :

Con los alumnos de un aula se formó un cuadrado compacto y sobran *9* alumnos; para que se forme un cuadrado compacto sin que sobre ningún alumno tendría que haber *18* alumnos más como mínimo. ¿Cuántos alumnos hay en el aula?

A) 178 *B) 181* *C) 154* *D) 205* *E) 126*

RESOLUCIÓN :

* Consideremos que en cada lado del primero hay «x» alumnos, entonces en el lado del segundo habrá «$x+1$» alumnos así :



Total de alumnos : $x^2+9=(x+1)^2-18$ (Sobran ↲ ; faltarían ↲)

$\Rightarrow x^2+9=x^2+2x+1-18$

$\Rightarrow 26=2x \Rightarrow 13=x$

$\Rightarrow$ Total de alumnos : $13^2+9=178$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Una competencia se inició con una determinada cantidad de personas entre hombres y mujeres. Luego , *8* mujeres salieron de la competencia , quedando *2* hombres por cada mujer. Finalmente se retiraron *20* hombres y quedaron *3* mujeres por cada hombre. ¿Con cuántas personas se inició la competencia?

A) 40 *B) 44* *C) 50* *D) 48* *E) 52*

RESOLUCIÓN :

Del enunciado se tiene :

	al inicio	luego que se retiran 8 mujeres	luego que se retiran 20 hombres
#mujeres	M	$M-8$	$M-8$
#hombres	H	$2M-16$	$2M-16-20$

los hombres son el doble de las mujeres(dato) — *las mujeres son el triple de los hombre (dato)*

* Del cuadro tenemos : $M-8=3(2M-36)$

resolviendo : $M=20$ $H=2(20)-16=24$

Total de personas : $20+24=44$

RPTA : "B"

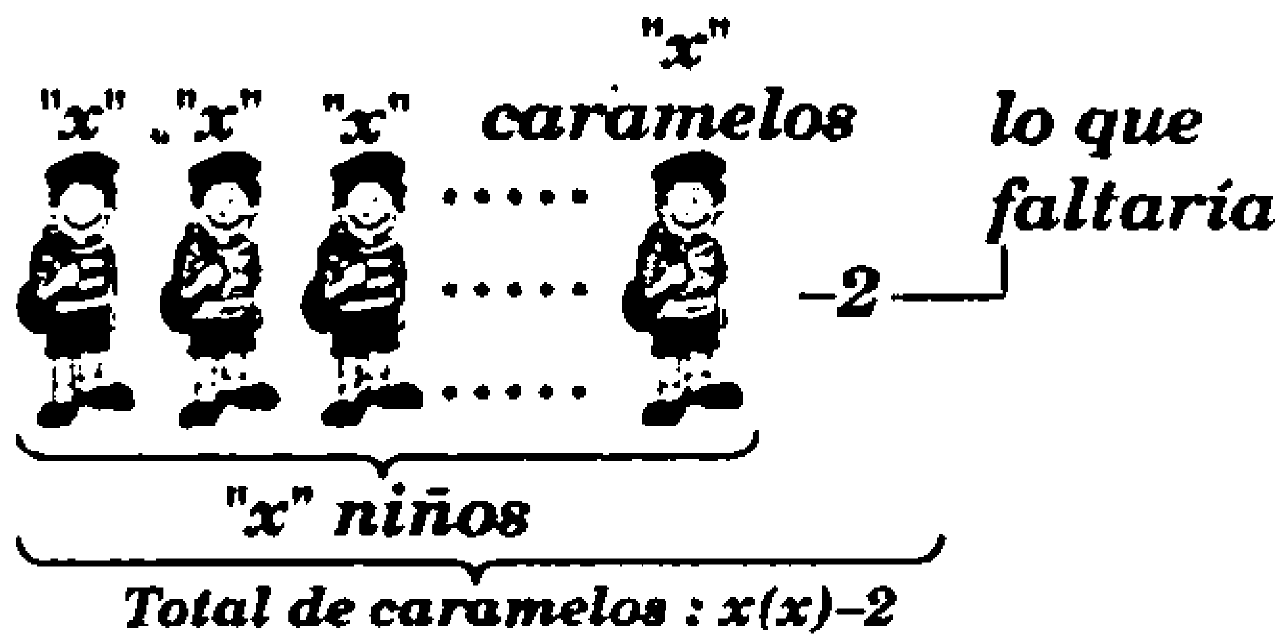
PROBLEMA 11 :

Si reparto tantos caramelos a cada niño , como niños hay, me faltan *2*, pero si doy un caramelo a cada niño me sobran *70* caramelos . ¿Cuántos niños hay?

A) 7 *B) 9* *C) 8* *D)12* *E) 6*

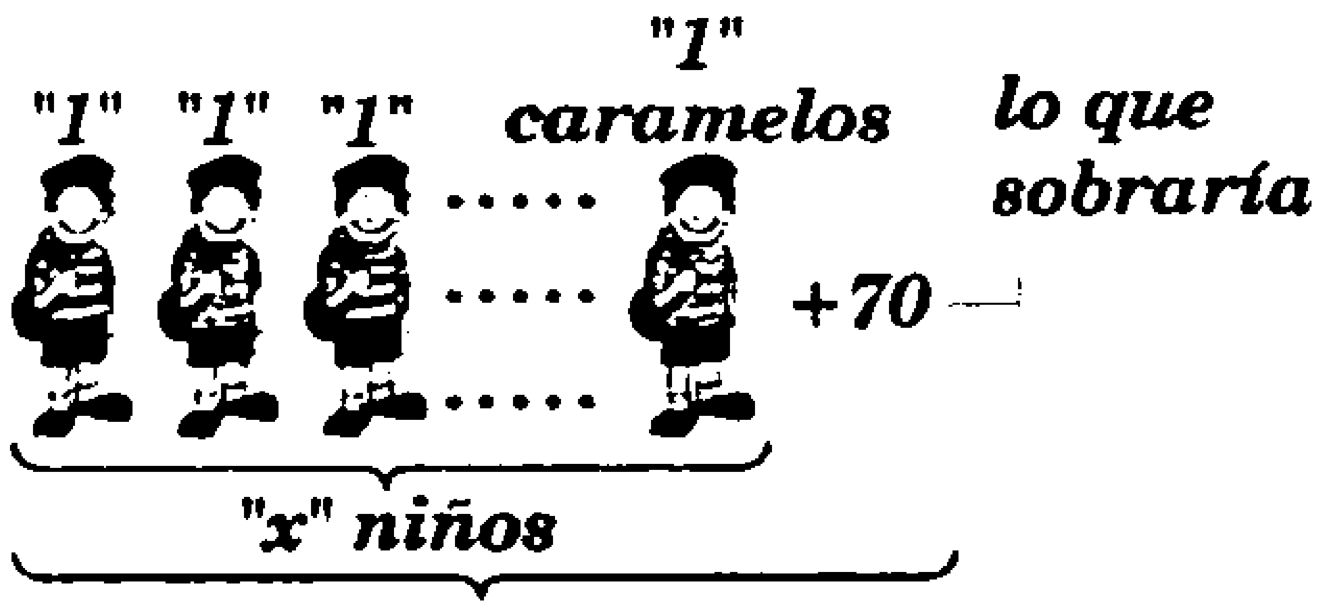
RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el número de niños que hay , si a cada niño le entrega tantos caramelos como niños hay . Es decir , «x» caramelos., faltaría *2* caramelos . Esto significa que los caramelos que se dispone no alcanzarían, es decir :



Total de caramelos : $x(x)-2$

* Pero , si se le entrega a cada niño *1* caramelo, sobraría *70* caramelos, es decir :



Total de caramelos : $x(1)+70$

* Considerando el total de caramelos, igualaremos :

$$x^2-2=x+70$$
$$\Rightarrow x^2-x=72$$
$$\Rightarrow x(x-1)=9\times 8 \Rightarrow x=9$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

Cierto número de gorriones están volando y se posarán en postes con travesaños. Cuando haya *6* gorriones en cada poste , quedarán *4* gorriones volando; pero cuando en cada poste haya *8* gorriones, quedarán *4* postes libres. ¿Cuántos postes hay?

A)16 ***B) 18*** ***C) 14*** ***D)20*** ***E) 22***

RESOLUCIÓN:

Sea , número de postes : x

* Si *6* gorriones se posan en cada poste , quedarán *4* gorriones volando.

$\Rightarrow$ Número de gorriones $= 6x+4$

* Si *8* gorriones se posan en cada poste , quedarán *4* postes libres.

$\Rightarrow$ Número de gorriones $= 8\underbrace{(x-4)}_{\#\text{ de postes ocupados}}$

Entonces $6x+4=8(x-4) \Rightarrow x=18$

Por lo tanto el número de postes : *18*

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Elena paga por *2* pollos y *5* pavos un total de *495* pesos. Si cada pavo cuesta *15* pesos más que un pollo ¿Cuántos pesos cuestan un pollo y un pavo juntos?

A) 120 ***B) 105*** ***C) 145*** ***D) 95*** ***E) 135***

RESOLUCIÓN :

	PRECIO UNITARIO (×)	CANTIDAD DE : (=)	GASTO TOTAL EN :
POLLOS	x	2	$2x$
PAVOS	$x+15$ (+15)	5	$5(x+15)$

(+) GASTO TOTAL = 495

$\Rightarrow$ ***GASTO TOTAL = 495***

$\Rightarrow 2x+5(x+15)=495$

$\Rightarrow 7x=420$

$\Rightarrow x=60$ (Precio *1* pollo)

$\Rightarrow 60+15=75$ (Precio 1 pavo) $\Rightarrow 60+75=135$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Lucas lanzó un dado veinticuatro veces y el puntaje total que obtuvo fue *98*. Si el puntaje que obtuvo en cada lanzamiento no es menor que *3* ni mayor que *5* y además en cuatro lanzamientos obtuvo el menor puntaje , ¿en cuántos lanzamientos obtuvo puntaje par?

A) 8 ***B) 12*** ***C) 16*** ***D) 14*** ***E) 6***

RESOLUCIÓN :

En el problema, Lucas

* Lanzó *24* veces un dado.
* Puntaje total : *98* puntos.
* En cada lanzamiento obtuvo *3* ó *4* ó *5* puntos.
* En cuatro lanzamientos obtuvo el menor puntaje, es decir , *3* puntos.

Sea x el número de veces que se obtuvo un puntaje par , es decir , *4* puntos.

$$\underbrace{3+3+3+3}_{4\text{ veces}}+\underbrace{4+4+...+4}_{x\text{ veces}}+\underbrace{5+5+5+...+5}_{(20+x)\text{ veces}}=98\text{ puntos}$$

$\Rightarrow 3(4)+4(x)+5(20-x)=98$

* Resolviendo obtenemos : $x=14$

En *14* lanzamientos se obtuvo puntaje par.

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Si hoy gasto lo mismo que ayer, mañana gastaría la mitad de hoy, entonces me quedaría sin dinero alguno; pero en cambio, si ayer hubiese gastado la mitad de lo que gasté, hoy tendría que gastar *$.30*

más de lo que gasté realmente ayer. ¿Cuánto tenía ayer?

A) $.7   B) 10   C) 8   D) 30   E) 15

RESOLUCIÓN :

* Sea lo que gastó ayer igual a $2x$
* De la primera parte : «Si hoy gasto lo mismo que ayer, mañana gastaría la mitad de hoy y me quedaría sin dinero» tenemos :

$$\overset{Ayer}{2x}\quad \overset{Hoy}{2x}\quad \overset{Mañana}{x}\quad \Rightarrow Total = 5x\ldots\ldots(I)$$

La suma $5x$ se acabaría.

Luego : «Si ayer hubiese gastado la mitad de lo que gasté , hoy tendría para gastar *30* soles más de lo que gasté realmente ayer», entonces :

$$\overset{Ayer}{x}\quad \overset{Hoy}{2x+30}\quad \Rightarrow Total = 3x + 30\ldots\ldots(II)$$

* Como el total es el mismo, igualamos *(I)* y *(II)* :

$$5x = 3x + 30$$
$$\Rightarrow x = 15$$

$\Rightarrow$ Ayer tenía : $2(15) = 30$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Mis camisas son de colores verde , azul y blanco . Si todas mis camisas son blancas , menos cuatro ; todas son azules , menos cuatro ; y todas son verdes, menos cuatro , ¿cuántas camisas tengo en total?

A) 16   B) 5   C) 6   D) 8   E) 10

RESOLUCIÓN :

* Sea x : Total de camisas
* Luego según datos :

Blancas : $x-4$
(+) Azules : $x-4$ (+) Sumando miembro a miembro
Verdes : $x-4$

$\rightarrow x = 3x - 12 \leftarrow$

$x = 6$ (Total)

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Un matrimonio dispone de una suma de dinero para ir al teatro con sus hijos. Si compra entradas de *S/.7* le faltaría *S/.17* y si adquiere entradas de *S/.4* le sobraría *S/.10* ¿Cuánto hijos tiene el matrimonio?

A) 3   B) 4   C) 7   D) 1   E) 9

RESOLUCIÓN :

* Si el número total de personas igual a x; si compra entradas de *7* soles le faltaría *17* soles; entonces el dinero que tiene no le alcanza por lo tanto :

$7x$ = (dinero que tiene) + 17.............*(I)*

* Si compra entradas de *4* soles, le sobrarían *15* soles, o sea :

(dinero que tiene) = $4x + 10$ ....*(II)*

* Reemplazamos : *(I)* en *(II)*.

$$7x = (4x + 10) + 17$$
$$\Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$$

* Entonces son *9* personas en total, incluidos el papá y la mamá.

$\Rightarrow$ El número de hijos es : $9 - 2 = 7$

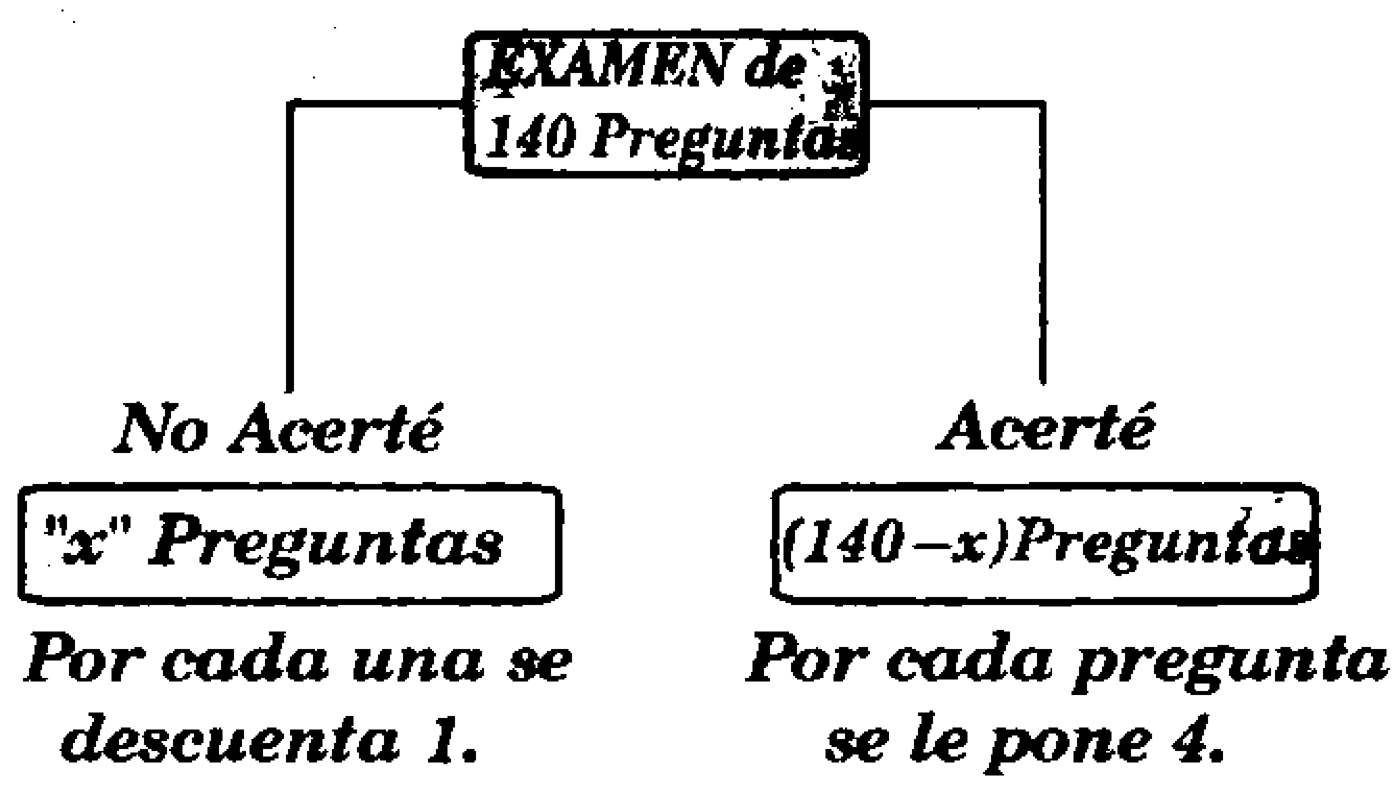
RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

En un simulacro de admisión , el número de preguntas es *140* , la calificación es de *4* puntos por respuesta correcta y me descuentan *1* punto por cada incorrecta , si obtuve *260* puntos y respondí todas las preguntas ¿Cuántas no acerté?

A) 40   B) 60   C) 80   D) 160   E) 2

RESOLUCIÓN :



* Se deduce que la nota final se obtendrá :

$$\begin{pmatrix}\text{Puntaje acumulado}\\ \text{por las buenas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Puntaje acumulado}\\ \text{por las malas}\end{pmatrix} = \begin{matrix}\text{Nota}\\ \text{Final}\end{matrix}$$

$$4(140 - x) - 1(x) = 260 \Rightarrow 560 - 4x - x = 260$$
$$\Rightarrow 300 = 5x \Rightarrow 60 = x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

En una iglesia asisten *399* personas entre hombres; mujeres y niños. Si el número de hombres es el quíntuplo del número de mujeres, y el de mujeres es el triple que el de los niños . ¿Cuántas mujeres hay?

A) 21   B) 63   C) 315   D) 84   E) 42

RESOLUCIÓN :

* Sea : Número de niños $= x$
* Entonces :

número de mujeres $= 3x$

número de hombres $= 5(3x) = 15x$

Por condición del problema :

N^o hombres + N^o mujeres + N^o niños = 399

$15x + 3x + x = 399$

$\Rightarrow 19x = 399$

* Donde : $x = 21$
* Luego : $3x = 3(21) = 63$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

En la ciudad se observa que existe *5* gatos por cada *2* ratones, pero un virus elimina *5* ratones por cada *2* gatos, si sobrevivieron *84* gatos y ningún ratón. ¿Cuántos ratones había inicialmente?

A) 100 *B) 40* *C) 50* *D) 22* *E) 60*

RESOLUCIÓN :

* Como la relación de números de gatos y ratones es de *5* a *2*, entonces :

Llamamos :

$5x$ = Nº de gatos que habían inicialmente.

$2x$ = Nº de ratones que había inicialmente.

* De acuerdo a la condición el problema, elaboramos el siguiente cuadro :

	Al inicio	Sobreviven	Mueren
Nº gatos	$5x$	84	$5x - 84$
Nº ratones	$2x$	0	$2x$

* Por dato, mueren *5* ratones por cada *2* gatos, es decir :

$$\frac{2x}{5x-84} = \frac{5}{2} \Rightarrow 4x = 25x - 84(5)$$

$$\Rightarrow 21x = 84(5) \Rightarrow x = \frac{85(5)}{21} \Rightarrow x = 20$$

$\Rightarrow$ Al inicio habrían $2(20) = 40$ ratones

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

En una familia se encuentran varios niños y niñas. Alguien les preguntó : «¿Cuántos son?» y la niña mayor responde que tiene tantos hermanos mo *2* veces el número de hermanas; pero el niño mayor dijo que tenía tantos hermanas como la mitad de el número de hermanos en total. ¿Cuántos niños son en total?

A) 5 *B) 4* *C) 7* *D) 9* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

* Sea el número de hermanas de la niña mayor igual a x.

Primero, la niña mayor dice que tiene tantos hermanos como *2* veces el número de hermanas o sea :

Niña Mayor

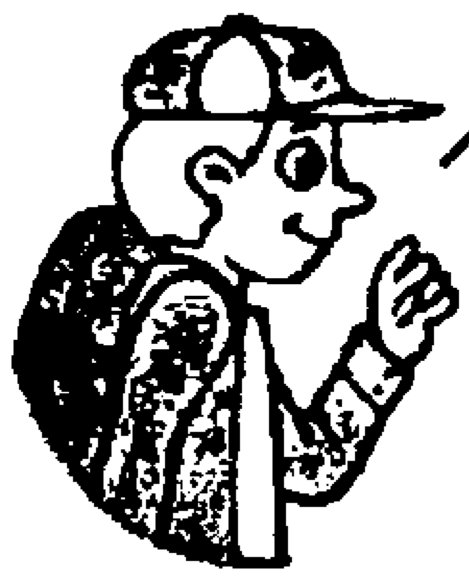
Hermanas	Hermanos
x	$2x$

* Entonces podemos deducir que :

Total de varones = $2x$

Total de mujeres = $x + 1$

* A partir de esto, podemos indicar :



Niño Mayor

Hermanas	Hermanos
$x + 1$	$3x+1$

* Luego, de lo que dice el niño mayor planteamos :

$$x + 1 = \frac{3x+1}{2}$$

Resolviendo : $x=1$

* Finalmente, el número total de niños, entre varones y mujeres es : $3x + 1 = 3(1) + 1 = 4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

María va al cine *3* días consecutivos de la semana; y lo hace al mes en tres semanas consecutivas. Si el primer día de un cierto mes es miércoles y la suma de las fechas, de los días que fue al cine en ese mes es *198*. ¿Qué día será la sexta vez que asistió al cine en dicho mes, si asiste siempre los mismos días?

A) Miércoles 22 *B) Lunes 20* *C) Viernes 23*
D) Jueves 23 *E) Martes 22*

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» la fecha del primer día que asiste al cine, luego :

Primera semana: x, $x + 1$, $x + 2$

Segunda semana: $x + 7$, $x + 8$, $x + 9$ (+)

Tercera semana: $x + 14$, $x + 15$, $x + 16$

$9x + 72 = 198$

$x = 14$

* Se pide que día cae $14 + 9 = 23$, sabiendo que :

+7 +7 +7 +1

1 → 8 → 15 → 22 → 23

Miércoles Miércoles Miércoles Miércoles Jueves

Rpta.

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

Pitita recibió **4** soles y tuvo entonces **4** veces lo que hubiera tenido si hubiera perdido **S/. 2** ¿Cuánto tenía al principio?

A) 6 *B) 8* *C) 4* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

* Tenía : x
* Recibió **S/.4** : $x + 4$ (Tuvo) — 4 veces
* Perdió **S/.2** : $x - 2$ (hubiera tenido)
* Luego : $x + 4 = 4(x-2)$

$\Rightarrow x + 4 = 4x - 8$

$\Rightarrow 8 + 4 = 4x - x$

$\Rightarrow 12 = 3x$

$\Rightarrow 4 = x$...... (Tenía)

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Si se forman filas de **8** niños sobran **4** pero faltarían **8** niños para formar **3** filas más de **7** niños. ¿Cuántos niños son?

A) 64 *B) 76* *C) 84* *D) 92* *E) 72*

RESOLUCIÓN :

* «x»: número de filas
* Luego analizando el total :

sobran — faltarán

$$\boxed{8x + 4} = \boxed{7(x + 3) - 8}$$

Total de niños — Total de niños

$\Rightarrow 8x + 4 = 7(x + 3) - 8$

* Resolviendo $x = 9$

Total de niños : $8(9) + 4 = 76$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25:

De los **S/.20** que tenía, gasté la tercera parte de lo que no gaste. ¿Cuánto gasté?

A) 10 *B) 15* *C) 5* *D) 20/3* *E) 6*

RESOLUCIÓN:

* Tercera Parte
* Tenía : **20**
* Gaste : x — Tercera parte
* No gaste : $3x$ → *Debe ser múltiplo de «3» para evitar fracciones*

TENÍA : 20

GASTÉ = x | NO GASTÉ = $3x$

* De la figura : *GASTÉ + NO GASTE = TENÍA*

$$x + 3x = 20$$

$\Rightarrow 4x = 20$

$\Rightarrow x = \dfrac{20}{4}$

$\Rightarrow x = 5$.... (GASTÉ)

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Hallar un número , donde la suma de su mitad , cuarta y octava parte , resulta dicho número disminuido en una unidad.

A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 16* *E) 14*

RESOLUCIÓN :

* Sea el número : x
* Su mitad : $\frac{x}{2}$

Su cuarta : $\frac{x}{4}$ — SUMA $= x - 1$...(Enunciado)

Su octava : $\frac{x}{8}$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = x - 1$$

(multiplicando por *MCM (2,4,8)=8*)

$$\Rightarrow \frac{8x}{2} + \frac{8x}{4} + \frac{8x}{8} = 8(x-1)$$

$\Rightarrow 4x + 2x + x = 8x - 8$

$\Rightarrow 7x = 8x - 8$

$\Rightarrow 8 = 8x - 7x$

$\Rightarrow 8 = x$ ....(Número Pedido)

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Si Karol tuviese **9** años menos, el tiempo que hubiera permanecido durmiendo sería la quinta parte del tiempo que hubiese permanecido despierto si es que tuviese **9** años más . Si en el transcurso de su vida duerme **8** horas diarias.

¿Cuántos años lleva durmiendo?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 21

RESOLUCIÓN :

LA TERCERA PARTE

	TIEMPO	DUERME	DESPIERTO
En 1 día	24 horas	8	
Edad actual	3 x	x	
Si tuviese 9 años menos	3x – 9	x – 3	
Si tuviese 9 años más	3x + 9	x + 3	2x + 6

* Según enunciado :

$$x-3=\frac{2x+6}{5}\Rightarrow 5x-15=2x+6\Rightarrow x=7$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

En una reunión hay **28** personas . si Bertha baila con **9** varones , Pocha con **10** , Lourdes con **11** y así sucesivamente hasta que Miriam , la última , baila con todos los caballeros ; ¿cuántos caballeros hay en la fiesta?

A) 10 B) 12 C) 18 D) 15 E) 20

RESOLUCIÓN :

* De los datos del problema se deduce que :

Señorita	Ordinal	Caballero
Bertha	1	9
Pócha	2	10
Lourdes	3	11
⋮	⋮	⋮
Mirian (la ultima)	n	n + 8

* Además :

(N° de señoritas) + (N° de caballeros) = 28

* Reemplazando :

$$n+n+8=28\Rightarrow 2n=20\Rightarrow n=10$$

* Por lo tanto , el total de caballeros es igual a, $n+8=18$

RPTA :"C"

PROBLEMA 29 :

En una reunión hay **40** personas , cuando se retiran **8** varones y **6** damas, la diferencia entre ellos y ellas es **10** ¿Cuántos varones quedaron?

A) 20 B) 14 C) 26 D) 18 E) 8

RESOLUCIÓN:

	VARONES	MUJERES
INICIO	V (–8)	M (–6)
DESPUÉS (QUEDARON)	V - 8	M - 6

$TOTAL = 40 \Rightarrow V + M = 40 \ldots (\alpha)$

$DIFERENCIA = 10$

$$(V-8)-(M-6)=10$$
$$\Rightarrow V-8-M+6=10$$
$$\Rightarrow V-M=12 \ldots (\beta)$$

* Luego : $(\alpha)+(\beta)$ para eliminar «M»

$$\begin{array}{r} V+M=40 \\ V-M=12 \\ \hline 2V=52 \end{array}\ (+)$$

$\underline{V=26}$ ....(Inicio)

⇒ Quedaron : $26-8=18$

RPTA : "D"

OTRO MÉTODO:

* Como la suma de varones y mujeres al inicio es **40**

	INICIO		DESPUÉS (QUEDARON)
VARONES :	x	(–8) →	x – 8
MUJERES :	40 – x	(–6) →	34 – x

(+) = 10 (DATO)

$$(x-8)-(34-x)=10$$
$$x=26$$

⇒ Después varones : $26-8=18$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Lo que cobra y gasta un profesor suman **600** y están en relación de **3** a **2**. ¿En cuánto tiene que disminuir el gasto para que dicha relación sea de **5** a **3**?

A) 16 B) 24 C) 32 D) 15 E) 20

RESOLUCIÓN :

COBRA = 3K Luego debe disminuir el gasto en «x»

GASTA : 2K $\Rightarrow \frac{COBRA}{5}=\frac{GASTA\ (DESPUÉS)}{3}$ (Enunciado al final)

(+) → 600=5K

$$120=K\Rightarrow \frac{3(120)}{5}=\frac{2(120)-x}{3}$$

$$\Rightarrow 3\times 360=5(240-x)$$

$$\Rightarrow 10\times 80=1200-5x$$

$$\Rightarrow 5x=1200-1080\Rightarrow 5x=120$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

En un banquete, habían sentados **8** invitados en cada mesa, luego se trajeron **4** mesas más y entonces se

sentaron **6** invitados en cada mesa. ¿Cuántos invitados habían?.

A) 32 *B) 64* *C) 36* *D) 21* *E) 96*

RESOLUCIÓN :

	NÚMERO DE MESAS (+)	# DE PERSONAS POR MESA (×)	TOTAL DE INVITADOS (NO VARIA)
INICIO	n	8	8n
DESPUÉS	n+4	6	6(n+4)

$\Rightarrow 8n=6(n+4) \Rightarrow 8n=6n+24 \Rightarrow 2n=24$

$\Rightarrow n=12 \Rightarrow$ Total de invitados : $8n=96$

RPTA : "E"

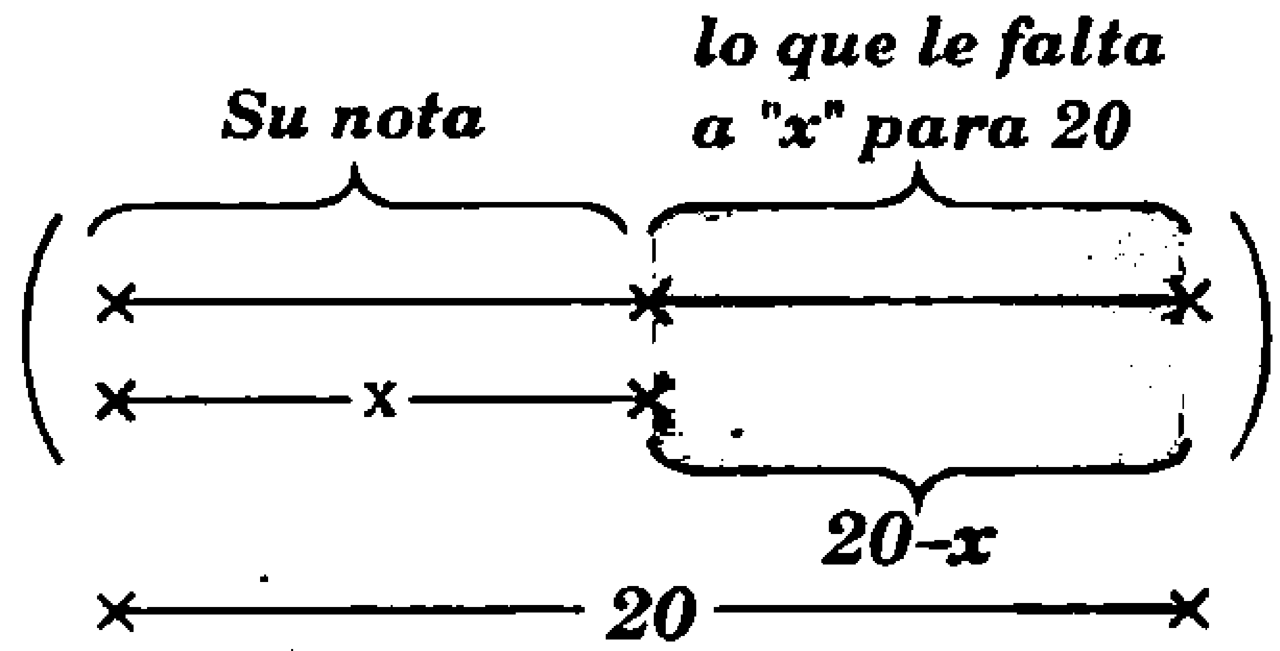
PROBLEMA 32 :

Preguntando a un alumno por su nota en un examen responde : si cuadruplico mi nota y resto **40** tendría lo que me hace falta para obtener **20**. ¿Qué nota tiene?

A) 12 *B) 14* *C) 17* *D) 16* *E) 15*

RESOLUCIÓN :

* Sea su nota : x
* Cuadruplica : $4x$
* Disminuir en **40** : $4x-40$
* Lo que le falta para **20** : $20-x$



$\Rightarrow 4x-40 = 20-x$ (según enunciado)

$\Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12$

RPTA : "A"

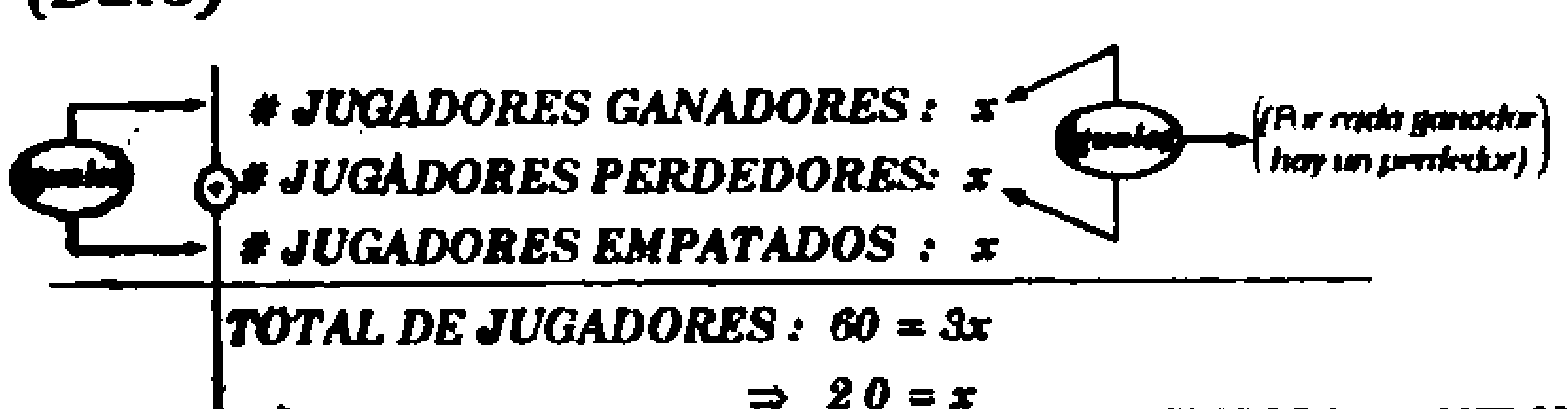
PROBLEMA 33 :

En un campeonato de ajedrez, donde intervienen **60** jugadores , compitiendo cada uno de ellos una sola vez , se observa que el número de ganadores era igual al número de empates ¿Cuántos jugadores perdieron?

A) 30 *B) 15* *C) 10* *D) 20* *E) 60*

RESOLUCIÓN:

(Dato)



RPTA : "D"

PROBLEMA 34 :

¿Cuál es el número cuyo cuádruplo sumando al mismo es igual al doble del número, más el triple del mismo?

A) 2 *B) 3* *C) ¼* *D) 0,5* *E) Todo valor*

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el número:

$\Rightarrow 4x+x=2x+3x$ (enunciado) $\Rightarrow 5x=5x$ (igualdad)

Como la expresión $5x=5x$ es una igualdad entonces se cumplirá para cualquier valor de «x»

RPTA : "E"

PROBLEMA 35 :

Un estante puede guardar **24** libros de **RM** y **20** libros de **RV** ó **36** de **RM** y **15** de **RV** ¿Cuántos libros de **RM** puede contener el estante?

A) 86 *B) 82* *C) 84* *D) 72* *E) 66*

RESOLUCIÓN:

* Las magnitudes son el ancho de :

* 1 libro(RM) = $a \Rightarrow$ (24 libros) $24a$(RM) $\Rightarrow$ (36 libros) $36a$(RM)
* 1 libro(RV) = $b \Rightarrow$ (20 libros) $20b$(RV) $\Rightarrow$ (15 libros) $15b$(RV)
* Estante $= x = 24a+20b = 36a+15b$

$20b-15b = 36a-24a$

$5b = 12a$

Pero lo que nos piden «x» en función de «a» (RM)

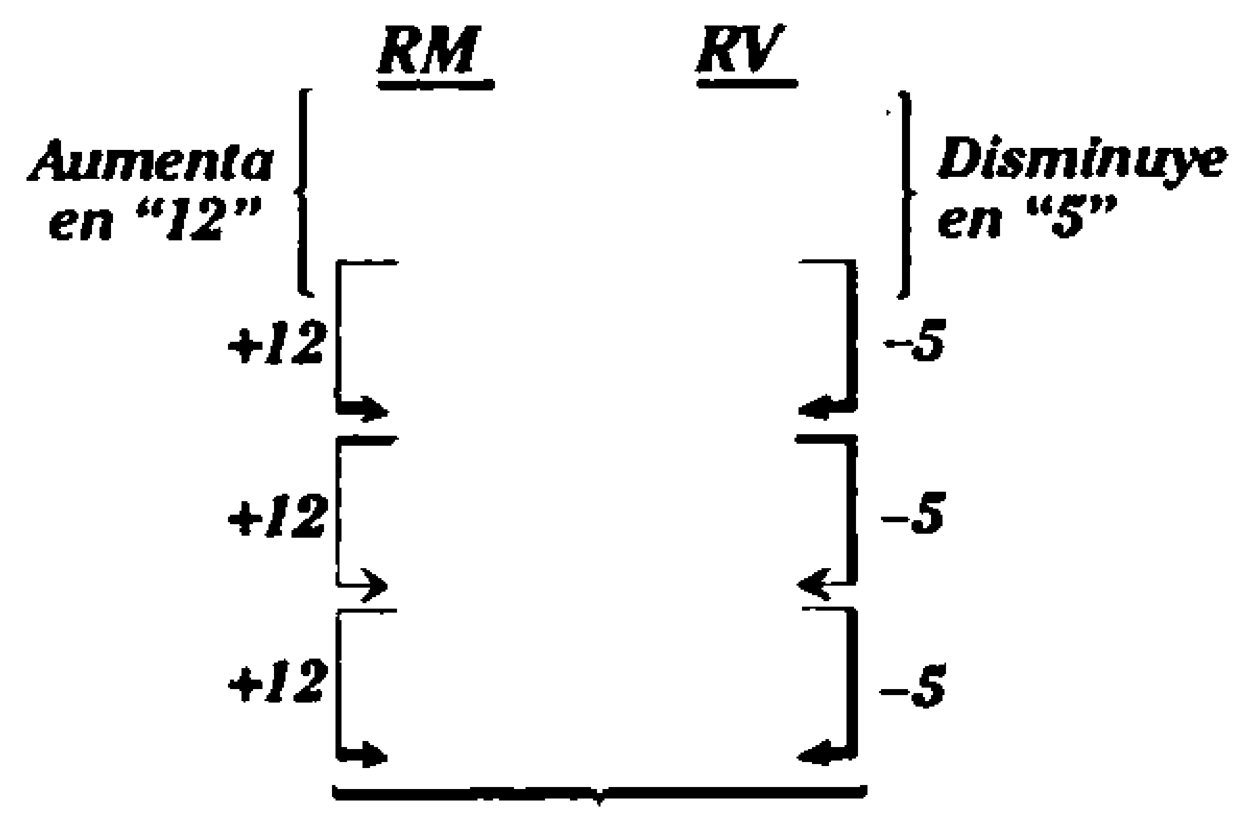
$\Rightarrow x = 24a + 20b = 24a + 4 \times 5b$

$\Rightarrow x = 24a + 4 \times 12a$

$\Rightarrow x = 72a$ (RM)

RPTA : "D"

OTRO MÉTODO:



Rpta : 72 (R.M) y (Ninguno de **RV**)

RPTA : "D"

PROBLEMA 36 :

A los habitantes de un pueblo le corresponde **60** litros de agua diarios , al aumentar la población en **44** habitantes, a cada uno le corresponde **2** litros menos ¿Cuántos habitantes tiene ahora el pueblo?

A) 1276 *B) 1320* *C) 1762* *D) 2310* *E) 1220*

RESOLUCIÓN :

	# DE HABITANTES	⊗ RACIÓN POR PERSONA	= TOTAL DE AGUA (NO CAMBIA)
INICIO	x	60	$60x$
	+44	−2	igual
DESPUÉS (AHORA)	$x+44$	58	$58(x+44)$

$\Rightarrow 60x = 58(x+44)$

$\Rightarrow x = 1276 \longrightarrow$ *Inicio*

* Ahora : $1276 + 44 = 1320$

RPTA : "B"

PROBLEMA 37 :

Tito gasta todos los días la mitad de lo que posee más *S/.10*, al cabo de *3* días ha gastado todo ¿cuánto tenía al inicio?

A) S/.100 *B) S/.120* *C) S/.80* *D) S/.140* *E) S/.90*

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» la cantidad inicial :

	GASTA	LE QUEDA
1^{er} día	$\frac{x}{2}+10$	$x-\left(\frac{x}{2}+10\right)=\frac{x}{2}-10$
2^{do} día	$\frac{\frac{x}{2}-10}{2}+10$	$\frac{\frac{x}{2}-10}{2}-10$
3^{er} día	$\frac{\frac{\frac{x}{2}-10}{2}-10}{2}+10$	$\frac{\frac{\frac{x}{2}-10}{2}-10}{2}-10$

• Pero como el tercer día gastó todo , luego :

$$\frac{\frac{\frac{x}{2}-10}{2}-10}{2}-10=0 \Rightarrow x = 140$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

En un año bisiesto se cuentan los días de la semana y se observa que hay más jueves y viernes que los demás días . ¿Qué día de la semana cae *28* de julio de ese año?

A) Miércoles *B) Jueves* *C) Viernes*
D) Martes *E) Lunes*

RESOLUCIÓN :

* Averiguando el número de semanas en un año bisiesto.

$$366 \;|\underline{7}$$

2 días 52 semanas

→ *2 últimos días deben ser jueves y viernes.*

* En el *31* de diciembre fue viernes , ahora recordar:

DIC.	NOV.	OCT.	SET.	AGO.	JULIO
31	30	31	30	31	31 30 29 28

* Del *31* de diciembre al *28* de Julio hay :

$$30+30+31+30+31+4=156=\overset{o}{7}+2$$

Días , por lo que caerá *2* días antes que viernes, o sea miércoles .

RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

En el mes de abril un estudiante sumó a los años que tiene todos los meses que ha vivido , obteniendo como resultado *232* . ¿En qué mes es su cumpleaños?

A) Abril *B) Marzo* *C) Octubre*
D) Mayo *E) Junio*

RESOLUCIÓN :

$$\text{Años} + \text{Meses} = 232$$

$$\Rightarrow x + 12x = 232$$

$$\Rightarrow x=\frac{232}{13}=17\frac{11}{13}\text{ años}=17\text{ años}\cdot\frac{11\times 12}{13}$$

$$=17\text{ años } 10\frac{2}{13}\text{ mes}$$

$$=17\text{ años } 11\text{ meses}$$

* Se deduce que le falta un mes para cumplir otro año, es decir en mayo.

RPTA : "D"

PROBLEMA 40 :

Un obrero gasta diariamente las dos terceras partes de su jornal para su mantenimiento y la quinta parte en otras atenciones. En un mes ha economizado *S/.50* habiendo dejado de trabajar dos días. ¿Cuál es el jornal del obrero?

A) 20 *B) 25* *C) 30* *D) 35* *E) 15*

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el jornal, luego ganó $28x$ ya que dejó de trabajar *2* días, pero gastó por *30* días y como el gasto diario es:

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{13x}{15}$$

* Entonces gastó en total $30\times\frac{13x}{15}=26x$

De donde se deduce que ha economizado:

$$28x-26x=50 \Rightarrow x = S/.\,25$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 41 :

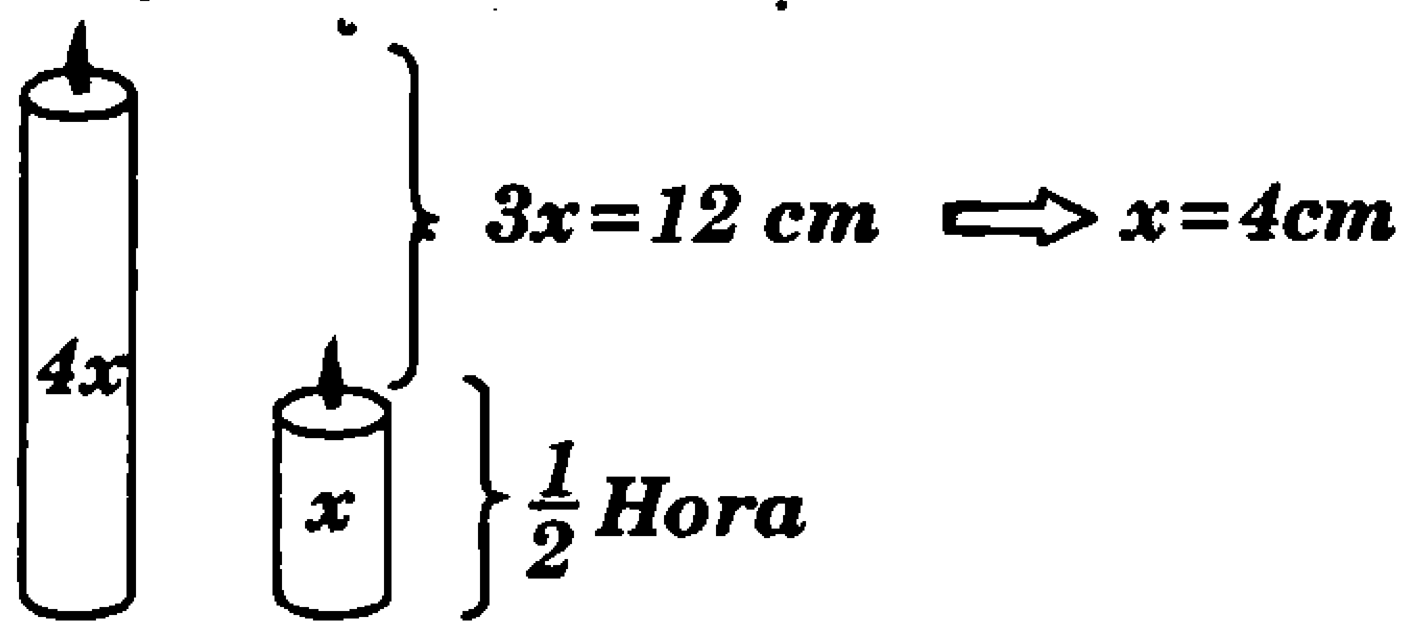
Dos cirios de igual calidad y diámetro difieren *12cm* . de longitud. Se encienden al mismo tiempo, y se observa que en un momento la longitud de uno es *4* veces la del otro y media hora después se terminó el

más pequeño. Si el mayor dura *5* horas , ¿cuál era la longitud del más pequeño?

A) 32 cm. B) 24 cm. C) 28 cm. D) 40 cm. E) 36 cm.

RESOLUCIÓN :

* La diferencia de *12 cm*. siempre se mantiene (ya que se prenden a la vez).



* Luego : $\frac{1}{2}$ ***hora <> 4cm.***

1 hora <> 8 cm.

5 horas <> 40 cm. (Longitud del más grande)

* La expresión a calcular será :

$$40-12=28\ cm \ldots\ldots \text{(Longitud del más pequeño)}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42 :

Dos negociantes en vinos, entran en una ciudad donde hay que pagar derechos de entradas. Uno de ellos lleva consigo *64* barriles de vino: el otro, *20* barriles. Como no tienen bastante dinero para pagar los derechos , el primero paga *5* barriles de vino y *S/.40* : el segundo *2* barriles de vino pero recibe de vuelto *S/.40* ¿Cuál es el precio de cada barril, teniendo en cuenta que los barriles entregados en calidad de pago , no abonan derechos?

A) S/.96 B) S/.108 C) S/.110 D) S/.130 E)S/.98

RESOLUCIÓN :

* Sea «*x*» el precio de cada barril, además que deben pagar los derechos en forma proporcional a la cantidad de barriles por los que se pagan , luego :

$$\frac{5x+40}{64-5}=\frac{2x-40}{20-2}\Rightarrow x=110$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Un grupo de monos está dividido en dos bandos : la octava parte de ellos al cuadrado se solaza en el bosque, mientras que los otros doce juegan en el campo. La mayor cantidad de monos que podemos tener es :

A) 56 B) 64 C) 32 D) 48 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Sea «*x*» el número total de monos, luego según el enunciado :

$$\Rightarrow\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$$

$$\Rightarrow x^2-64x+12\times 64=0$$

$$\Rightarrow (x-16)\ \ (x-48)=0$$

$$x=16 \ \text{ ó } \ x=48$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

De los *S/.60* que tenía; si no hubiera comprado un regalo que me costó *S/.16* tan sólo hubiera gastado los $\frac{2}{3}$ de lo que no hubiera gastado. ¿Cuánto gasté?

A) S/.20 B) S/.32 C) S/.40 D) S/.24 E) S/.36

RESOLUCIÓN :

Tenía : S/. 60

Gasté : S/. x

No gasté : S/.(60 – x)

• Si no hubiera comprado el regalo :

$$x=\frac{2}{3}(60-x)\Rightarrow 3x=120-2x$$

$$\Rightarrow 5x=120\Rightarrow x=S/.\ 24$$

• Pero realmente gasté *S/.16* , luego gasté en total:

24 + 16 = 40 soles .

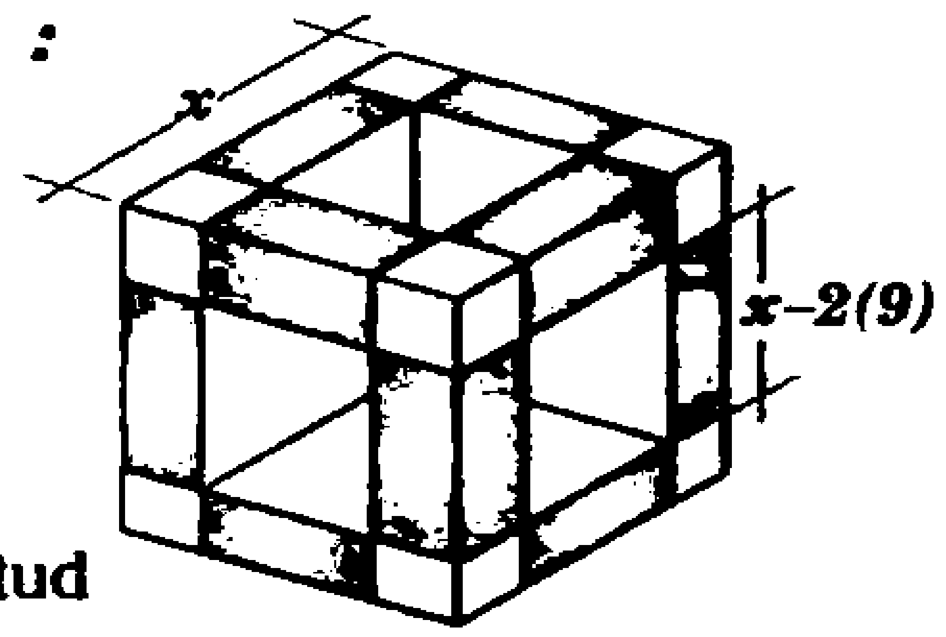
RPTA : "C"

PROBLEMA 45 :

Un cubo de madera de *x* centímetros de arista es pintado totalmente , luego se corta en cubos de *9 cm*. de arista cada uno . Si entonces hay exactamente *96* cubos que tienen dos de sus caras pintadas, la longitud *x* era de:

A) 108 B) 90 C) 80 D) 96 D) 100

RESOLUCIÓN :



En cada arista habrá :

$x-2(9)cm$. de longitud

En 12 aristas habrá : $12\ (x-2(9))cm$.

y esto es igual a : $9\ cm\times 96$ cubos .

* Luego tenemos la ecuación :

$$12\ (x-2(9))=9\times 96$$

$$\Rightarrow x-18=8\times 9\Rightarrow x=90$$

RPTA : "B"

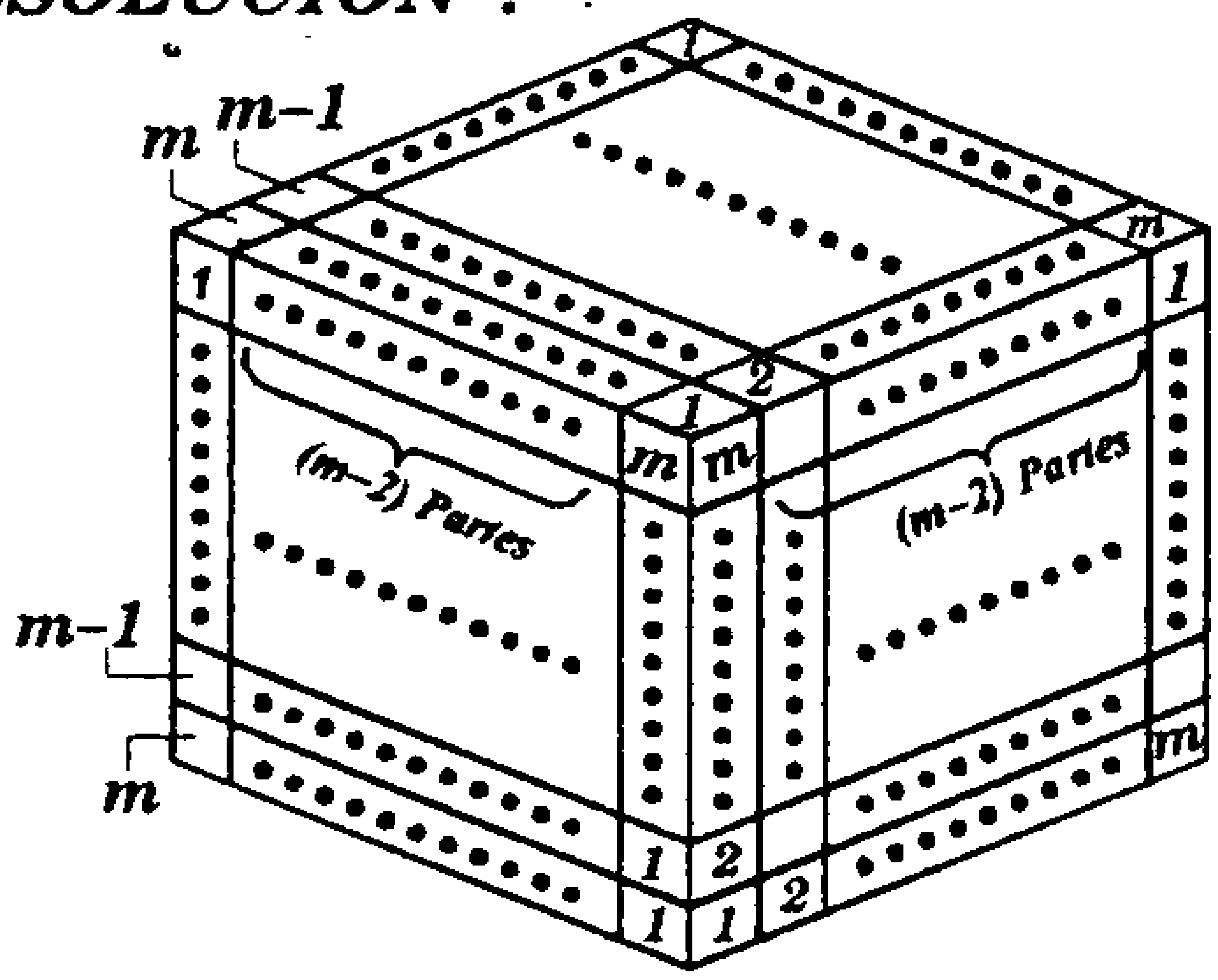
PROBLEMA 46 :

Un carpintero pintó la superficie de un cubo de madera, luego hizo marcas en cada arista del cubo ,

de tal manera que , ésta quedaba dividida en «*m*» partes iguales. Una vez seca la pintura serruchó el cubo por las marca y obtuvo ***488*** cubitos de al menos una cara pintada . Hallar «*m*» .

A) 6 ***B) 8*** ***C) 10*** ***D) 14*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :



* Observando y analizando la figura , se tendrá que:

$$\underbrace{\overbrace{\text{Sólo 1 cara pintada}}^{}+\text{Sólo 2 caras pintadas}+\text{Sólo 3 caras pintadas}}_{}\ \text{Cubitos con al menos una cara pintada} = 488$$

$$6(m-2)^2 + 12(m-2) + 8 = 488$$

$$6(m-2)^2 + 12(m-2) - 480 = 0$$

$$(m-2)^2 + 2(m-2) - 80 = 0$$

$$m-2 \quad +10 \Rightarrow m-2+8=0$$

$$m-2 \quad -8 \Rightarrow m-2-8=0$$

* Luego : $m = -8$ ó $m = 10$ (solución)

RPTA : "C"

PROBLEMA 47 :

En una sucesión de ***5*** números enteros consecutivos y positivos , la suma de los cuadrados de los ***3*** primeros es igual a la suma de los cuadrados de los ***2*** últimos.

Entonces el segundo término de la sucesión es :

A) 8 ***B) 9*** ***C) 10*** ***D) 11*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :

Sean : $x-2 ; x-1 ; x ; x+1 ; x+2$; los términos (enteros positivos) de la sucesión , luego :

* Suma de cuadrados de los ***3*** primeros :

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2$$

* Suma de cuadrados de los ***2*** últimos :

$$(x+1)^2 + (x+2)^2$$

* Por condición :

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$$

* Resolviendo : $x = 12$
* Piden : $x-1 = 11$

RPTA : "D"

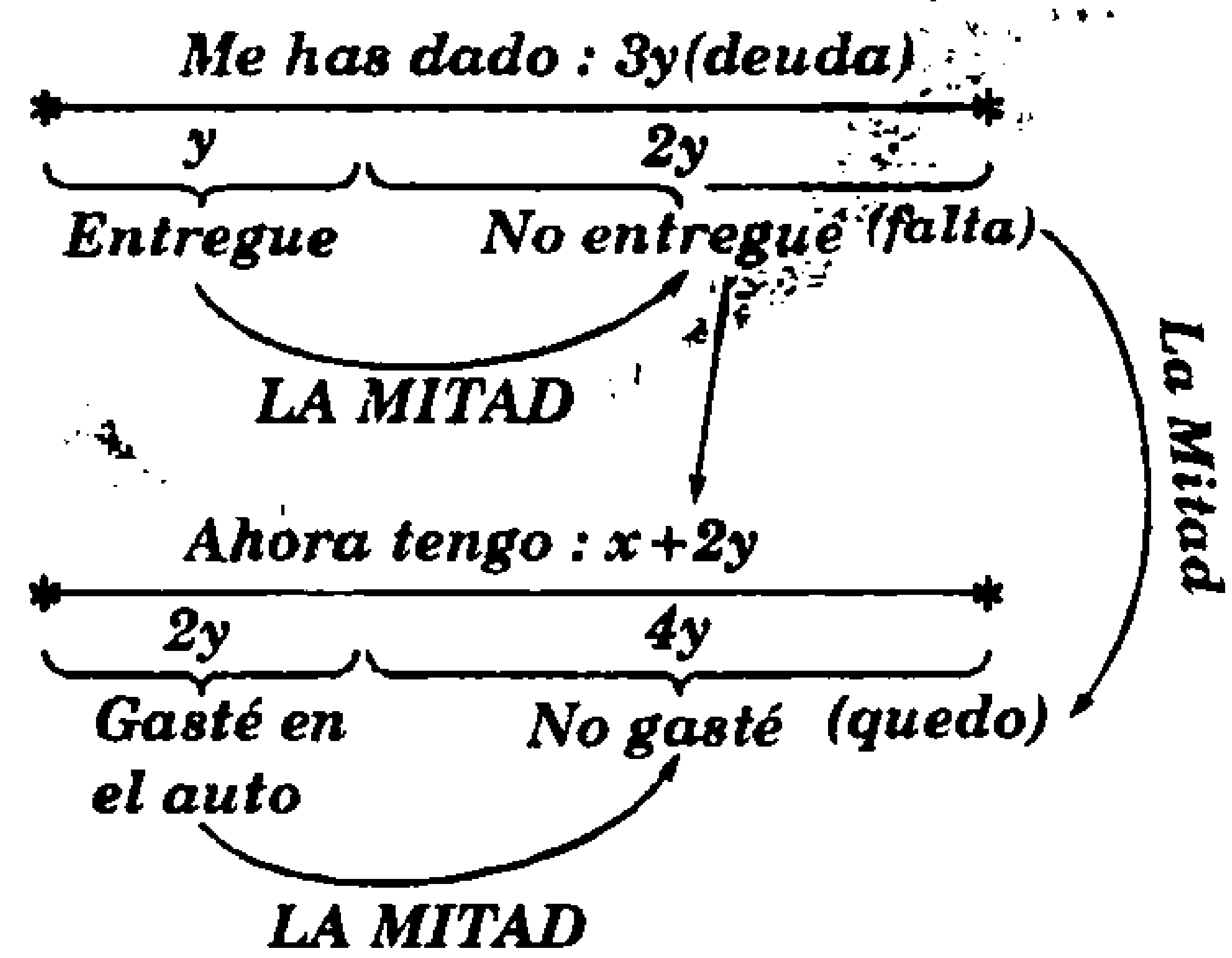
PROBLEMA 48 :

Del dinero que tú me has dado, para pagar lo que le debes a él, sólo le entregue la mitad de lo que no le entregué, compre un auto y gaste la mitad de lo que no gaste, pero luego me obligaste a completar tu deuda, por lo que tuve que dar la mitad de lo que me quedó ¿qué parte de lo que yo tuve al inicio representa el costo del auto?

A) $\frac{1}{2}$ ***B)*** $\frac{2}{3}$ ***C)*** $\frac{2}{5}$ ***D)*** $\frac{2}{3}$ ***E)*** $\frac{5}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Tuve al inicio : x ; me has dado : $3y$



* Del último gráfico :

$$2y + 4y = x + 2y \Rightarrow 4y = x$$

$$\Rightarrow \frac{auto}{yo\ tuve} = \frac{2y}{4y} = \frac{1}{2}$$

RPTA : "A"

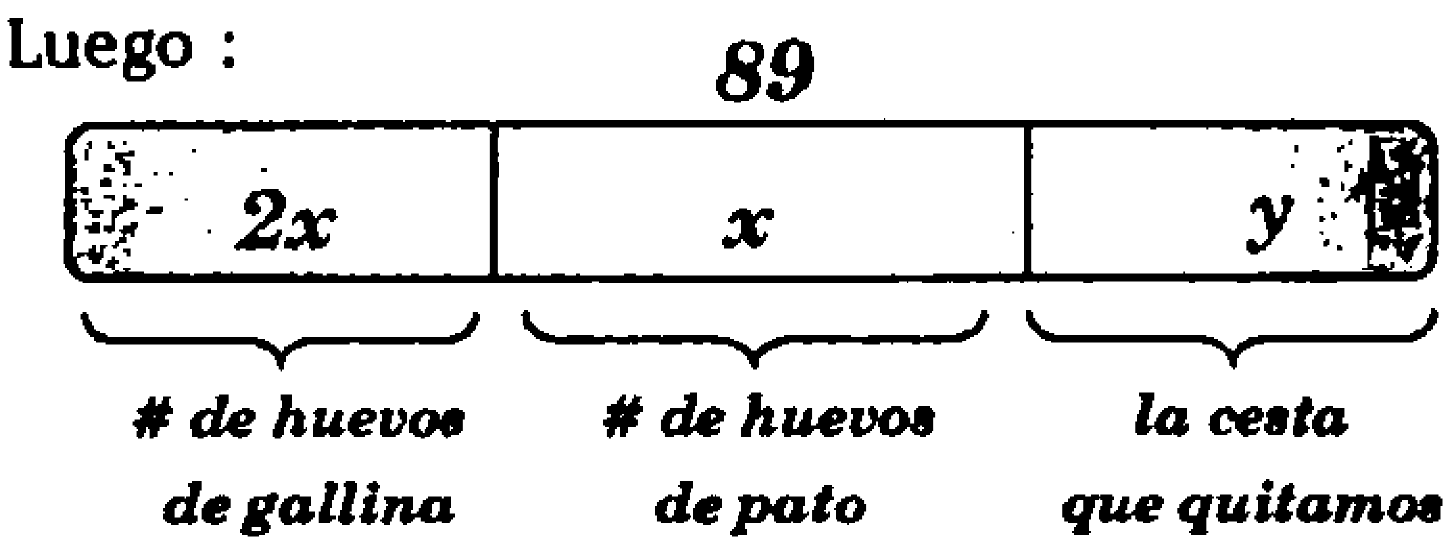
PROBLEMA 49 :

Se tienen ***6*** cestas con huevos; que contienen : ***5; 6; 12; 14; 23*** y ***29*** huevos respectivamente cada uno. Si quitamos una cesta , nos quedará el doble de huevos de gallina que de pato . ¿Qué cesta es?

A) 5 ***B) 6*** ***C) 12*** ***D) 23*** ***E) 29***

RESOLUCIÓN :

* Total : $5 + 6 + 12 + 14 + 23 + 29 = 89$
* Luego :



$$3x + y = 89 \Rightarrow x = 29 + \frac{2-y}{3}$$

$$\Rightarrow x = 29 - \frac{y-2}{3}$$ ("*x*" puede ser cualquier cesta ó la suma de algunas cestas presentes)

* Entonces :

y	5	14	23	29 → ÚNICA SOLUCIÓN
x	28	25	22	20

$\Rightarrow y = 29 \quad x = 6 + 14$ (6 + 14)

$\Rightarrow 2x = 5 + 12 + 23$

RPTA : "E"

PROBLEMA 50 :

Los ahorros de Pilí constan de:

$$(p + 1)\ ,\ (3p - 5)\ y\ (p + 3)$$

monedas de *5, 10* y *20* soles respectivamente. ¿A cuánto asciende sus ahorros? si al cambiarlo en monedas de *25* soles , el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de *5* soles .

A) S/.350 B) 700 C) 250 D) 400 E) 920

RESOLUCIÓN :

* Recuerda que si multiplicamos el número de monedas de una denominación por el valor en soles de cada moneda, nos resulta el monto en soles. Entonces. Pilí tiene :

	DE 5 SOLES	DE 10 SOLES	DE 20 SOLES
# monedas	$p + 1$	$3p - 5$	$p + 3$
Monto en soles	$5(p+1)$	$10(3p-5)$	$20(p+3)$

Total ahorrado $= 5(p+1)+10(3p-5)+20(p+3)$

Total ahorrado $= 55p + 15$ .... (I)

* Luego , al cambiar el total de sus ahorros en monedas de *25* soles , el número de monedas que obtiene, según el dato es $2(p+1)$.

* Entonces el total ahorrado $= 25\times2(p + 1)$

$= 50p+50$ .... (II)

* Pero se entiende que sólo se a cambiado el tipo de moneda mas no el total de lo ahorrado, lo que significa que debemos igualar (I) y (II) así :

$$55p + 15 = 50p + 50 \Rightarrow p = 7$$

* Reemplazamos : $p = 7$ en (II)

$\Rightarrow$ Total ahorrado $= 400$ soles .

RPTA : "D"

PROBLEMA 51 :

Con las alumnas de un salón de clase se puede conformar un número exacto de equipos diferentes de voley (*6* jugadores por equipo). Se sabe que en el salón hay *5* alumnas más que alumnos. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay?

A) 55;60 B) 30;25 C) 25;30 D) 40;45 E) 15;20

RESOLUCIÓN :

* El problema es reconocer quien será nuestra incógnita. Analizando bien, tanto el Nº de alumnos con el Nº de alumnas contiene el mismo número de equipos.

Luego. nuestra *INCOGNITA* será :

Nº de equipos $= x$

* Si por cada equipo de voley hay *6* jugadoras, es decir : Nº de *ALUMNAS* $= 6x$

Si por cada equipo de voley hay *5* jugadores entonces en x equipos habrán $5x$ jugadores, es decir:

Nº *ALUMNOS* $= 5x$

* Por dato :

Nº alumnas = Nº de Alumnas + 5

$\Rightarrow 6x = 5x + 5$

* De donde : $x = 5$

* Luego : Nº de Alumnos $= 5(5) = 25$

Nº de Alumnas $= 6(5) = 30$

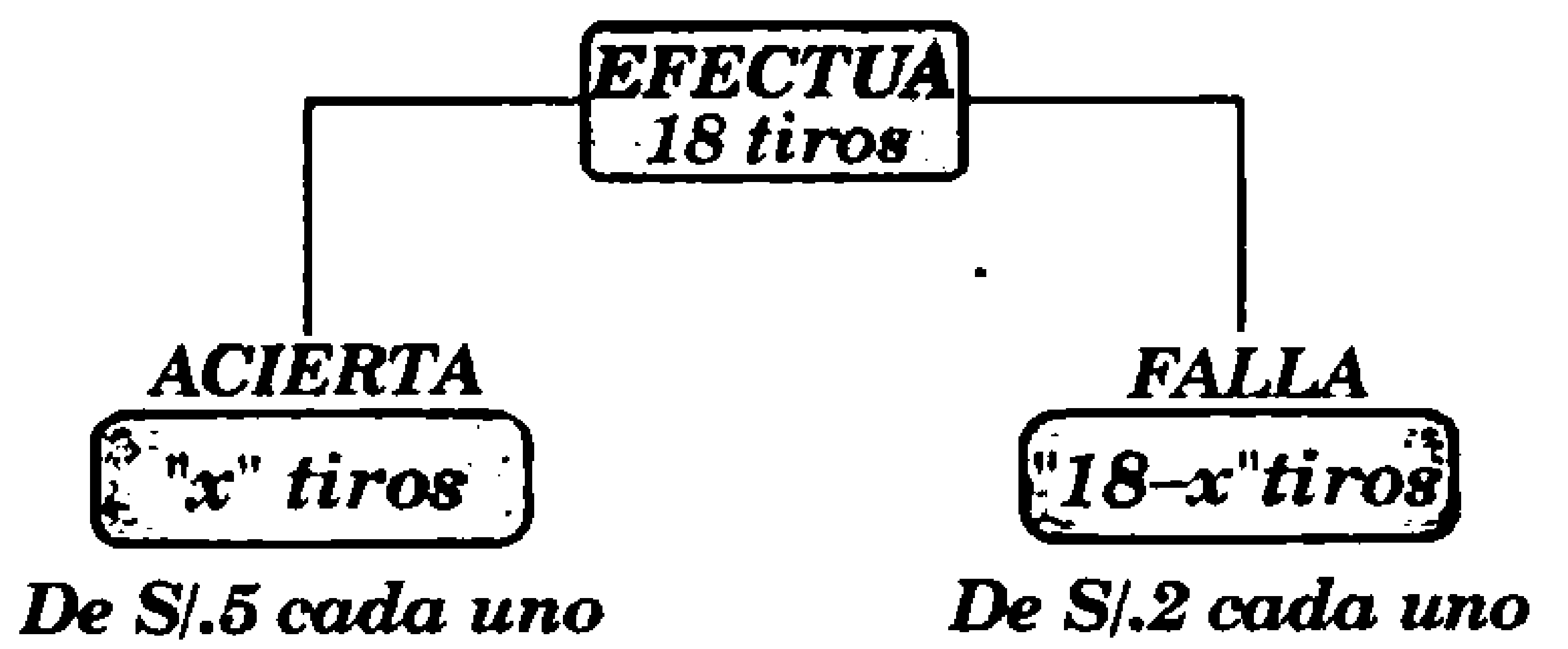
RPTA : "C"

PROBLEMA 52 :

Trinidad juega el «Tiro al Blanco», con la condición de que por cada tiro que acierte recibirá *S/.5* y pagará *S/.2* por cada uno de los que falle. Después de *18* tiros ha recibido *S/.55*. ¿Cuántos tiros acertó?

A) 5 B) 12 C) 13 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Como recibe al final *S/.55*, se deduce que lo que él gana por los aciertos es mayor de lo que él paga por los que falla; luego la diferencia es lo que recibe :

$5x - 2(18 - x) = 55$

$\Rightarrow 5x - 36 + 2x = 55 \Rightarrow 7x = 91 \Rightarrow x = 13$

RPTA : "C"

PROBLEMA 53 :

Se reparten *96* chocolates en partes iguales a un grupo de niños . Si hubiese *8* niños más, entonces a cada niño le tocaría *6* chocolates menos . ¿Cuántos niños son?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado, hay **2** casos que tomar en cuenta, un caso real («x» niños») y un caso supuesto («$x+8$» niños); en caso real cada niño recibirá : $\frac{96}{x}$ chocolates y en el otro caso : $\frac{96}{x+8}$ chocolates.

	REAL	SUPUESTO
Total de chocolates	96	96
Número de niños	x	$x+8$
Número de chocolates por niño	$\frac{96}{x}$	$\frac{96}{x+8}$

a cada niño, le correspondería 6 chocolates menos

$$\Rightarrow \frac{96}{x}-\frac{96}{x+8}=6$$

$$\Rightarrow \frac{96x+96\times 8-96x}{x(x+8)}=6$$

$$\Rightarrow 96\times 8=6x(x+8) \Rightarrow 16\times 8=x(x+8)$$

$\Rightarrow$ Por comparación : $x = 8$

RPTA : "B"

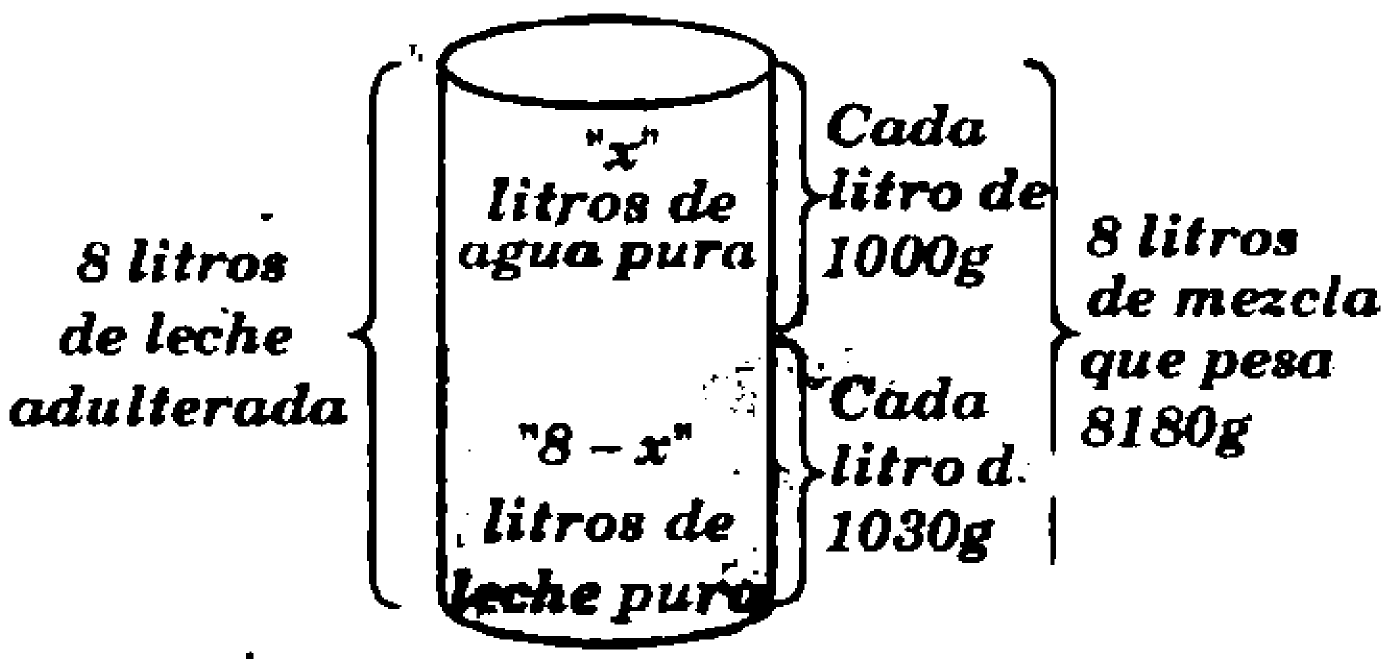
PROBLEMA 54 :

El peso de la leche pura es de **1,03 kg**. (el litro). Si la leche de un depósito que contiene **8** litros pesa **8180** gramos , la cantidad de agua que tiene es :

A) 2 litros **B) 5 litros** **C) 3 litros**
D) 6 litros **E) 4 litros**

RESOLUCIÓN :

* Debemos tomar en cuenta que **1** litro de agua pura, pesa **1kg** ó **1000g.** ; luego :



• Según esquema plantearemos :

$$\underbrace{1000\,x}_{\text{Peso total del agua}} + \underbrace{1030\,(8-x)}_{\text{Peso total de la leche}} = \underbrace{8180}_{\text{Peso total de la mezcla}}$$

$$\Rightarrow 1000\,x + 8240 - 1030\,x = 8180$$

$$\Rightarrow 60 = 30x \Rightarrow 2 = x$$

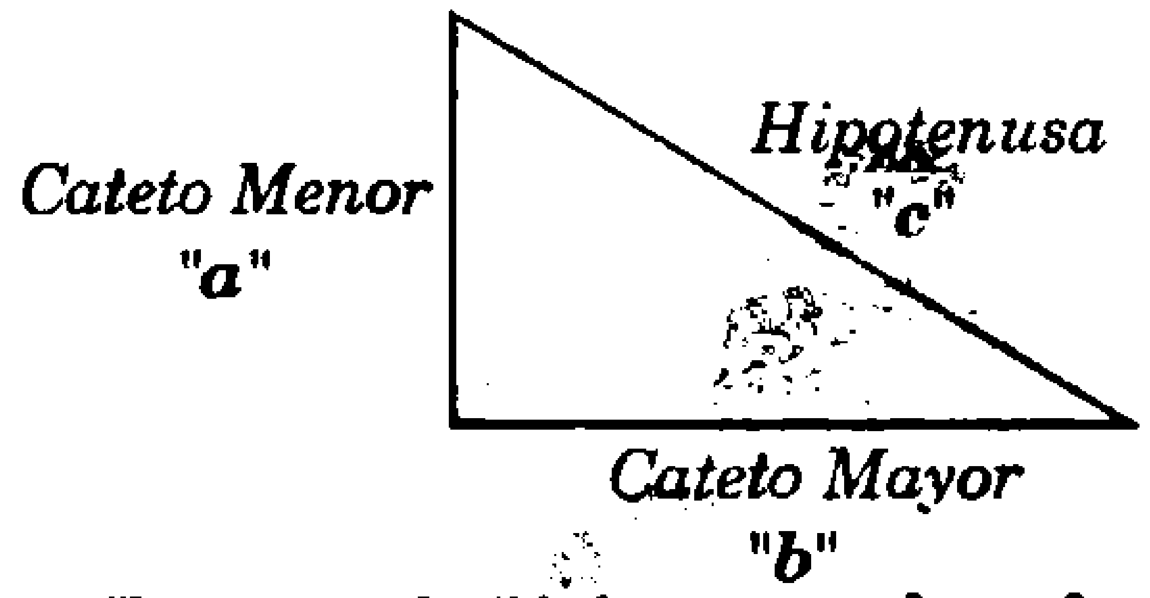
RPTA : "A"

PROBLEMA 55 :

En un triángulo rectángulo el triple del cateto menor excede en una unidad al cateto mayor pero le falta una unidad para ser igual a la hipotenusa ¿Cuál es la longitud del cateto mayor?

A) 35 **B) 25** **C) 37** **D) 12** **E) 24**

RESOLUCIÓN :



«Teorema de Pitágoras» $c^2 = a^2 + b^2$

Según el problema :

$$(\text{Cateto Menor})^2+(\text{Cateto Mayor})^2=(\text{Hipotenusa})^2$$

$$\Rightarrow x^2+(3x-1)^2=(3x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+9x^2-6x+1=9x^2+6x+1$$

$$\Rightarrow x^2=12x \Rightarrow x\times x=12x$$

$$\Rightarrow x = 12 \text{ (menor)}$$

$$\Rightarrow \text{mayor} = 3(12)-1 = 35$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 56 :

En un corral se observa **3** gallinas por cada **5** patos y **4** conejos por cada **3** patos. Si en total se cuentan **176** cabezas ¿Cuál es el número total de patas?

A) 412 **B) 484** **C) 512** **D) 521** **E)544**

RESOLUCIÓN :

\# de gallinas : $9x$ } $\frac{3}{5}$
\# de patos : $15x$ } $\frac{3}{4}$
\# de conejos : $20x$

TOTAL DE CABEZAS = $44x$ = 176

$x = 4$

$\Rightarrow$ # de PATOS debe ser $\overset{\circ}{5}$ y $\overset{\circ}{3}$ es decir : MCM(5,3) = $\overset{\circ}{15}$ = $15x$

$\Rightarrow$	#DE GALLINAS $9\times 4=36$	# DE PATOS $15\times 4=60$	#DE CONEJOS $20\times 4=80$
#DE PATAS	$36\times(2)=72$	$60\times(2)=120$	$80\times 4=320$

DONDE : ◯ $\Rightarrow$ # de patas de cada animal.

$\Rightarrow$ **TOTAL DE PATAS : 72 + 120 + 320 = 512**

RPTA : "C"

PROBLEMA 57 :

Un abuelo, el hijo y el nieto tienen juntos **100** años. El abuelo dice : «Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días y mi nieto tiene tantos meses como yo años» la edad del abuelo es :

A) 40 **B) 50** **C) 60** **D) 70** **E) 80**

RESOLUCIÓN :

• # de semanas = # de días
(HIJO) (NIETO)

1 semana = **7** días 1 día

7 veces

Cuando el hijo tenga una semana el nieto tendrá un día

• # de meses = # de años
(NIETO) (ABUELO)
1 mes *1* año = *12* meses
12 veces

(Cuando el nieto tenga un mes el abuelo tendrá un año)

7 veces *12 veces*

EDAD HIJO + EDAD NIETO + EDAD ABUELO = 100

$$7x + x + 12x = 100$$

$\Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow$ Edad (ABUELO) $= 12(5) = 60$ años

RPTA : "C"

PROBLEMA 58 :

Con *S/.16464* se han comprado latas de sardinas, en cierto número de cajones, cada uno de los cuales contiene un número de latas triple del número de cajones. Cada lata de sardinas, cuesta un número de soles doble del número de cajones. ¿Cuántas son las latas de sardinas?

A) 14 B) 438 C) 588 D) 42 E) 196

RESOLUCIÓN :

(# DE CAJONES) = x ; (# DE LATAS POR CAJÓN) = 3x

$$\underbrace{(\text{\# DE CAJONES})}_{x} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\text{\# DE LATAS}\\ \text{POR CAJON}\end{pmatrix}}_{3x} = \underbrace{\text{TOTAL DE LATAS}}_{=3x^2}$$

PRECIO POR LATA = 2x (DOBLE NÚMERO DE CAJONES)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{PRECIO POR}\\ \text{LATA}\end{pmatrix}}_{2x} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\text{TOTAL DE}\\ \text{LATAS}\end{pmatrix}}_{3x^2} = \underbrace{\begin{pmatrix}\text{COSTO}\\ \text{TOTAL}\end{pmatrix}}_{=6x^3}$$

Pero **EL COSTO TOTAL = 16464**

$\Rightarrow 6x^3 = 16464 \Rightarrow$ TOTAL DE LATAS

$\Rightarrow x^3 = 2744 \Rightarrow 3x^2 = 3(14)^2 = 588$

$\Rightarrow x = 14$

RPTA : "C"

PROBLEMA 59 :

La hierba crece en el prado con igual rapidez y espesura, se sabe que *60* vacas se la comerían en *25* días y *40* en *45* días ¿Cuántas vacas se comerían toda la hierba en *75* días?

A) 28 B) 35 C) 36 D) 40 E) 30

RESOLUCIÓN :

# DE VACAS	# DE DÍAS	# TOTAL DE HIERBA
60	25	I + 25C
40	5	I + 45C
x	75	I + 75C

I : Hierba inicial ; *C* : Crecimiento diario

Hierba consumida en *1* día por una vaca :

$$\underbrace{\frac{I+25C}{60\times 25} = \frac{I+45C}{40\times 45}}_{I=75C} = \frac{I+75C}{75x}$$

Reemplazando x = 30

RPTA : "E"

PROBLEMA 60 :

Ray no sabe si comprar *56* tajadores o por el mismo costo *8* lápices y *8* lapiceros . Si decidió comprar el mismo número de artículos de cada tipo . ¿Cuántos compró en total?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 18 E) 24

RESOLUCIÓN :

	TAJADOR	LÁPIZ	LAPICERO
COSTO DE C/U	x	y	z

* Sea «*n*», el número de artículos de cada tipo que se compró ,
* Luego según enunciado :

$$56x = 8y + 8z = n(x + y + z)$$

* Resolviendo : $n = 7$; pero se compró en total :

$$\Rightarrow 3n = 21 \text{ artículos}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 61 :

Un grupo de niños está formado de modo que hay tantos niños por columnas como filas.

Para formar con un niño más por columna y un niño más por fila, harían falta *13* niños.

¿Cuántos son los niños?

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

RESOLUCIÓN :

* Sea «*x*» el número de niños por fila como por columna, luego, el número de niños es x^2. Para que haya $(x+1)^2$ hacen falta *13* , entonces :

$(x+1)^2 - x^2 = 13$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 13$

$\Rightarrow 2x + 1 = 13 \Rightarrow x = 6$

* Piden : $6^2 = 36$

RPTA : "D"

PROBLEMA 62 :

Habiéndose concertado un match de ajedrez entre los equipos *A* y *B* , y no habiendo asistido todos los jugadores , el capitán del equipo *B* propuso que sus jugadores se midieran contra todos los del equipo *A*; el capitán del equipo *A* replicó que como sus jugadores eran superiores , cada uno se podía enfrentar contra *2* del equipo *B*. Contando al capitán de cada equipo , ¿Cuántos jugadores asistieron en total?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

• Cuando el capitán de *B* propone que sus jugadores se enfrenten contra todo el equipo *A*, nos están informando que los primeros tienen *1* jugador más (el capitán) :

$$\begin{cases} \#\,jugadores\ (A) = x \\ \#\,jugadores(B) = x + 1 \end{cases}$$

• Cuando el capitán de *A* propone que sus jugadores se enfrenten cada uno contra dos del equipo *B* , nos están informando que los primeros menos uno (su capitán), son la mitad de los otros :

$$x - 1 = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 3$$

⇒ En total hay : $3 + 4 = 7$ jugadores.

RPTA : "E"

PROBLEMA 63 :

Tres docenas de limones cuestan tantos soles como limones dan por *S/. 1600*, ¿Cuánto vale la docena de limones?

A) S/.80 B) S/.160 C) S/.180 D) S/.240 E) S/.280

RESOLUCIÓN :

* Precio de cada limón : x
* Según enunciado : $36x = \frac{1600}{x} \Rightarrow x = \frac{20}{3}$
* Entonces el costo de la docena de limones será :

$$12 \times \frac{20}{3} = S/.80$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 64 :

Juan da a Raúl tantas veces *5* centavos como soles tiene en su bolsillo , sabiendo que aún le quedan *S/.57*. ¿Cuánto tenía al encontrarse con Raúl?

A) S/.80 B) S/.60 C) S/.100 D) S/.90 E) S/.120

RESOLUCIÓN :

• Número de soles del bolsillo de Juan: x

• Juan da a Raúl : x veces *S/. 0,05*

• Le queda : *S/.57*

Luego : $x - x \times 0{,}05 = 57$

$$\Rightarrow x - \frac{x}{20} = 57 \Rightarrow x = 60$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 65 :

Si a un número de tres cifras que empiezan en *9*, se le suprime ésta cifra queda *1/21* del número. Dar la suma de las decenas y unidades del número.

A) 3 B) 7 C) 10 D) 9 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Sea el número : $\overline{ab}$

del enunciado tendríamos :

$$\overline{ab} = \frac{\overline{9ab}}{21} \Rightarrow 21\overline{ab} = \overline{9ab}$$

* Descomponiendo el segundo miembro :

$$21\overline{ab} = 900 + \overline{ab} \Rightarrow 20\overline{ab} = 900$$

* Simplificando tendríamos que : $\overline{ab} = 45$
* Nos piden : $a + b = 9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 66 :

Cementeria lleva huevos al mercado y vende la mitad de los que tenía más *1* huevo ; deja encargado la mitad de los que le quedaba más *1* huevo ; obsequia la mitad del nuevo resto más *1* huevo ; si después de esto no se quedó con ningún huevo ¿cuántos tenía al inicio?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 14 E) 21

RESOLUCIÓN :

(Primer Método) :

* Sea «x» el número de huevos al inicio; vende la mitad más *1* , entonces le queda :

$$\underbrace{\frac{x}{2} - 1}$$

Esto es la otra mitad menos 1

* Encarga la mitad , más *1*, luego le quedará (resto):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 1$$

* Obsequia la mitad más *1*, quedándole al final :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right) - 1\right] - 1 = 0 \quad \longleftarrow \text{Dato}$$

* Despejando : $x = 14$

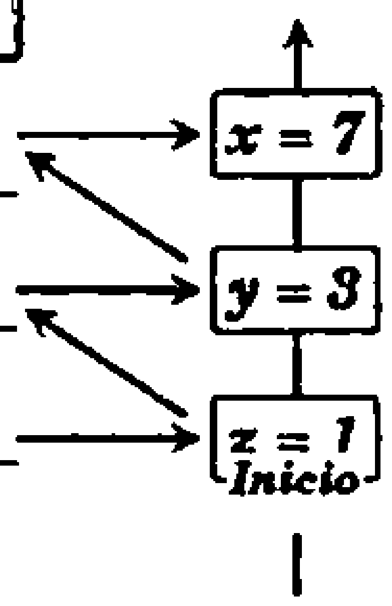
RPTA :"D"

Segundo Método :

Número de huevos al inicio : $2x$

* Como cada vez disminuye la mitad más *1*, luego le quedará la otra mitad pero menos *1*.

	VENDE, REGALA, OBSEQUIA	LE QUEDA (RESTO)
1ro.	$x + 1$	$x - 1 = 2y$
2do.	$y + 1$	$y - 1 = 2z$
3ro.	$z + 1$	$z - 1 = 0$

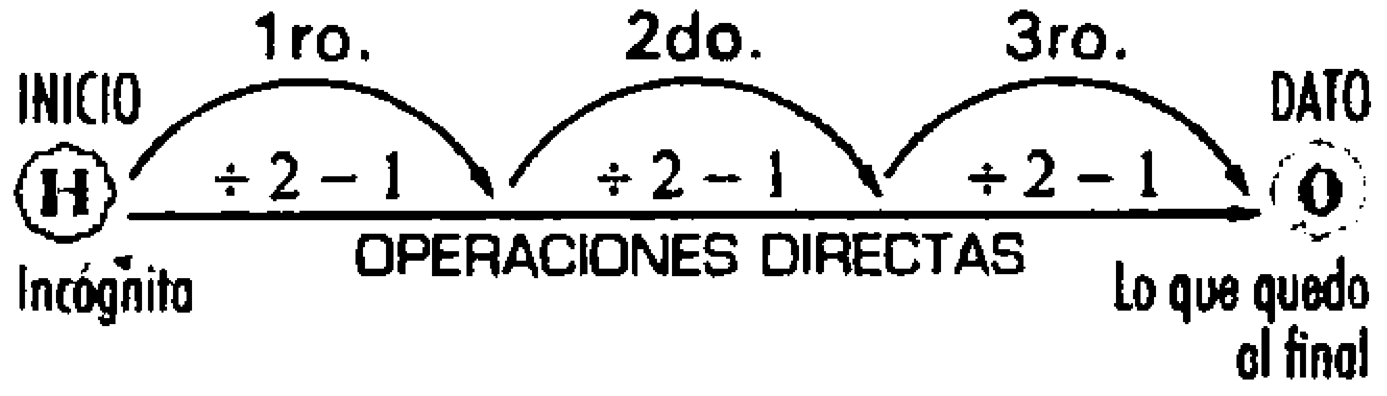


* Piden : $2(7) = 14$

RPTA :"D"

Tercer Método : (Cangrejo)

Como cada vez va quedando la otra mitad (que es lo mismo que dividirlo entre *2*), menos *1*; luego :



* Empecemos por lo último, aplicando las operaciones inversas a las dadas :

$$([(0+1)\times 2+1]\times 2+1)\times 2=H \Rightarrow 14=H$$

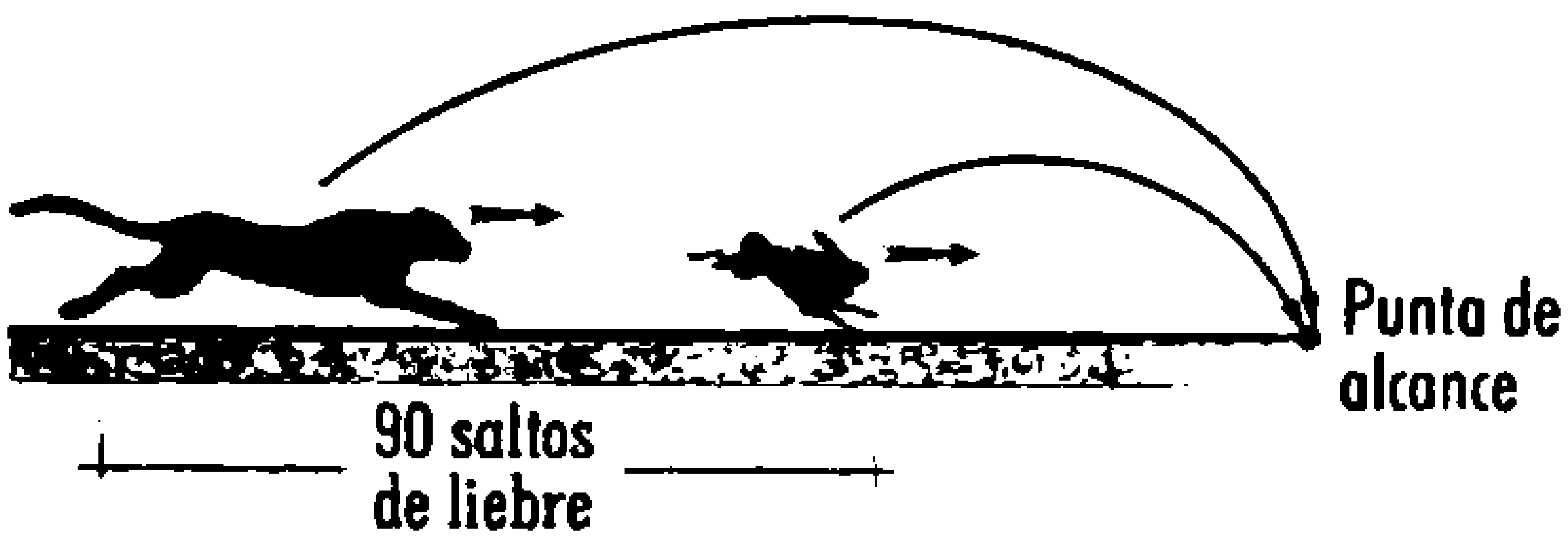
RPTA :"D"

PROBLEMA 67 :

Un galgo persigue a una liebre que lleva **90** saltos de adelanto , sabiendo que el galgo da **7** saltos , mientras la liebre da **6** y que **4** saltos de la liebre equivale a **3** del galgo . ¿Cuántos saltos dará el galgo para alcanzar a la liebre?

A) 129 B) 135 C) 189 D) 210 E) 600

RESOLUCIÓN :



• Para un mismo tiempo el galgo da **7** de sus saltos, mientras que la liebre da **6** . (Equivalencia de tiempo)

• Para un mismo espacio el galgo necesita dar **3** de sus saltos, mientras que la liebre **4** (equivalencia de espacio).

• Ahora como el galgo avanza en grupos de **7** y de **3**, nos conviene considerar cada $MCM(7,3)=21$ saltos de galgo, lo cual equivale a $4\times 7=28$ saltos de liebre, y la liebre en ese mismo tiempo dará $6\times 3=18$ de sus saltos, entonces en un intervalo de tiempo el galgo le descuenta: $28-18=10$. saltos de liebre , pero para alcanzarlo necesita descontarle **90** saltos de liebre , con lo que necesitará : $90\div 10=9$ intervalos de tiempo , durante los cuales el galgo dará : $9\times 21=189$ saltos de galgo .

RPTA: "C"

PROBLEMA 68 :

Dos empleados trabajan juntos, el primero gana **S/.10** más que el segundo por día ; si después de haber laborado el mismo número de días , el primero recibió **270** soles y el segundo **180** soles. ¿Cuánto gana diariamente el segundo?

A) S/.10 B) S/.20 C) S/.30 D) S/.25 E) S/.40

RESOLUCIÓN :

* Si el segundo gana «x» diariamente , luego el primero ganará : «$x+10$» , y como en total han ganado **S/.180** y **S/.270** , entonces el número de días que han trabajado será :

$$\frac{180}{x}=\frac{270}{x+10}\left(\begin{array}{c}\text{Según enunciado,}\\ \text{ambos trabajaron el}\\ \text{mismo número de días}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 180x+1800=270x$$

$$\Rightarrow 1800=90x \Rightarrow 20=x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 69 :

Un ganadero estaba indeciso entre comprar **156** gallinas o por el mismo precio comprar **13** vacas y **13** cerdos. Decide al fin comprar el mismo número de animales de cada clase. ¿Cuánto compró en total?

A) 24 B) 27 C) 36 D) 39 E) 45

RESOLUCIÓN :

* Sea : G : Costo de cada gallina

  V : Costo de cada vaca

  C : Costo de cada cerdo

  n : Número de animales de cada clase.

* Luego : $156\,G=13V+13C$ (Sacando treceava)

$$\Rightarrow 12G=V+C$$

* Ahora : $nG+nV+nC=156G$

$$\Rightarrow n(G+\underbrace{V+C}_{12G})=156G$$

$$n\times 13G=156\,G \Rightarrow n=12$$

* Entonces compró en total :

$$n+n+n=3n=3(12)=36$$

(n → Gallinas, n → Vacas, n → Cerdos)

RPTA : "C"

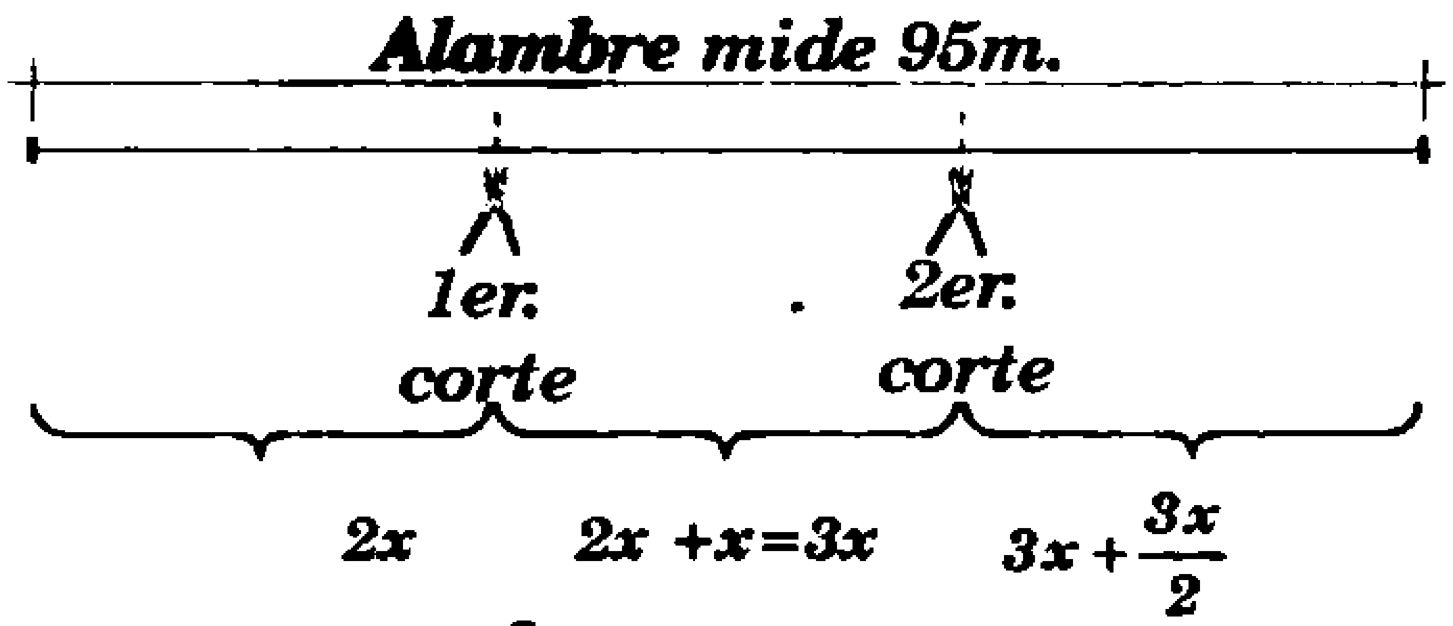
PROBLEMA 70 :

A un alambre de **95 mts** . de longitud se le han dado **2** cortes de manera que la longitud de cada trozo sea igual al anterior aumentado en su mitad . ¿Cuál es la longitud del trozo más largo?

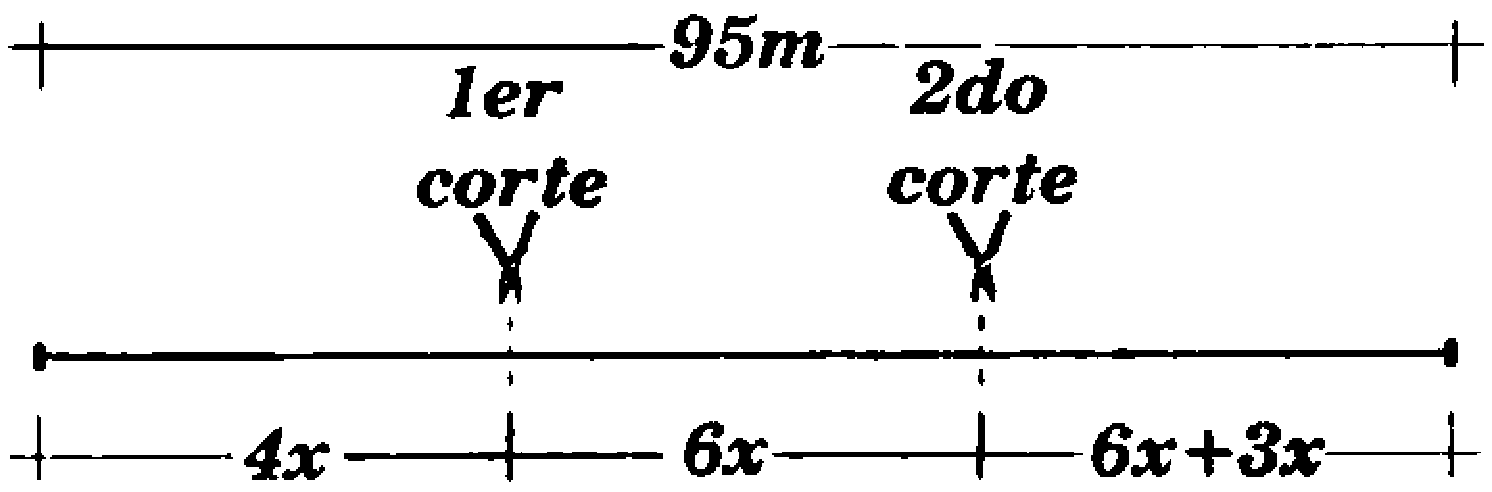
A) 25 B) 30 C) 45 D) 55 E) 40

RESOLUCIÓN :

• Primera suposición :



* Para evitar esos $\frac{3}{2}x$ (la fracción), multiplicaremos todo por **2** :



$\Rightarrow 4x + 6x + 9x = 95$

$\Rightarrow 19x = 95 \Rightarrow x = 5$

* Piden : $9x = 9(5) = 45m$

RPTA : "C"

PROBLEMA 71 :

Si Juan le da a Pedro ***10 mts*** . de ventaja para una carrera de ***100 mts*** ; y Pedro le da a Carlos una ventaja de ***20*** mts. para una carrera de ***180 mts***. ¿Cuántos metros de ventaja debe dar Juan a Carlos para una carrera de ***200 mts.***

A) 40 mts. ***B) 30 mts.*** ***C) 50 mts.***
D) 45 mts. ***E) 55 mts.***

RESOLUCIÓN :

* En la carrera entre Juan y Pedro :

Juan debe correr ***100*** metros mientras Pedro sólo debe correr sólo ***90*** metros. Luego los espacios recorridos están en relación.

$$\frac{J}{P}=\frac{100}{90} \text{.........................} (I)$$

* De la misma forma entre Pedro y Carlos :

$$\frac{P}{C}=\frac{180}{160} \text{.........................} (II)$$

* Multiplicando $(I)\times(II)$: $\frac{J}{P}\times\frac{P}{C}=\frac{100}{90}\times\frac{180}{160}$

* Luego : $\frac{J}{C}=\frac{200}{160}$ $\Rightarrow$ Juan le da a Carlos una ventaja de : $200 - 160 = 40\ m$.

RPTA : "A"

PROBLEMA 72 :

Un grupo de abejas , cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre , se poso sobre un jazmín , habiendo dejado muy atrás a ***8/9*** del enjambre ; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto , atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?

A) 70 ***B) 71*** ***C) 72*** ***D) 98*** ***E) 200***

RESOLUCIÓN :

* Total de abejas : x

Según enunciado : $x=\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8x}{9}+2$

Considerando : $x = 18k^2$

$$\Rightarrow 18k^2=\sqrt{\frac{18k^2}{2}}+\frac{8\times18k^2}{9}+2 \Rightarrow 2k^2 = 3k+2$$

$$\Rightarrow 2k^2-3k-2=0 \Rightarrow (2k+1)(k-2)=0 \Rightarrow k=2$$

$$\Rightarrow x = 18\times2^2 \Rightarrow x = 72$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 73 :

A ***10*** parejas de novios le va a entregar ***2*** panes por persona. En el momento de la entrega se observó que faltaban algunos panes, por lo que se ordenó traer tantos panes como la mitad de lo que hay , más un pan; para cumplir la entrega . ¿Cuántos panes se ordenó traer?

A) 11 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 15***

RESOLUCIÓN :

 # DE PANES QUE SE MANDO A TRAER : x ***...........(faltan)***

* Luego :

Quedaron : $40 - x$ ***...............(hay)***

$$\Rightarrow 40-x+\frac{40-x}{2}+1=40 \Rightarrow x=14$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 74 :

Un edificio tiene ***4*** pisos , el número de habitaciones de cada piso son números consecutivos crecientes y cada habitación del edificio tiene tantas ventanas como habitaciones hay en el respectivo piso. Si el número de ventanas del último piso y el número de habitaciones del primer piso suman ***69***. ¿Cuántas habitaciones hay en el último piso?

A) 8 ***B) 7*** ***C) 9*** ***D) 6*** ***E) 4***

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» el número de habitaciones del último piso del edificio :

PISO	# DE HABITACIONES	# VENTANAS/HAB	TOTAL DE VENTANAS
4°	x	x	x^2
3°	$x-1$	$x-1$	$(x-1)^2$
2°	$x-2$	$x-2$	$(x-2)^2$
1°	$x-3$	$x-3$	$(x-3)^2$

* Ahora sumamos el número de ventanas del último piso con el número de habitaciones del primer piso.

* Resolviendo : $x^2 + (x-3)=69$

* Factorizando: $x^2 + x - 72 = 0 \Rightarrow x+9=0 \vee x-8=0$

* De donde : $x+9=0 \Rightarrow x=-9$

$$x-8=0 \Rightarrow x=8$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 75 :

Un pasajero que lleva ***63Kg*** de equipaje paga ***S/. 198*** por exceso de equipaje , y otro que lleva ***38 Kg*** paga

S/. 48. ¿Cuál es el peso que puede , transportarse sin pagar ningún costo adicional?

A) 30 Kg *B) 25 Kg* *C) 33 Kg*
D) 35 Kg *E) 31 Kg*

RESOLUCIÓN :

• Si llamamos *"x"* al peso que puede llevarse sin costo adicional el primer pasajero pagó *S/.198* por los *(63–x)Kg* restantes, mientras que el segundo pagó *S/. 48* por los *(38 – x)Kg* restantes; como el pago debe ser proporcional al peso tenemos que:

$$\frac{63-x}{38-x}=\frac{198}{48}\Rightarrow\frac{(63x)-(38-x)}{38-x}=\frac{198-48}{48}$$

$$\Rightarrow\frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{38-x}=\frac{\overset{6}{\cancel{150}}}{48}\Rightarrow\ \frac{48}{6}=38-x\Rightarrow x=30$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 76 :

Un deportista apuesta a tirar al blanco con la condición de que por cada tiro que acierta recibirá *«a»* soles y pagará *«b»* por cada uno de los que falle. Después de *«n»* tiros ha recibido *«c»* soles ¿Cuántos tiros dio en el blanco?

A) $\frac{an+c}{a-b}$ B) $\frac{bn+c}{a-c}$ C) $\frac{bn+c}{a+b}$

RESOLUCIÓN :

• Sea *«x»* el número de tiros acertados. Entonces, el número de tiros errados será *«n – x»*.

• Como por cada tiro acertado recibirá *«a»* soles, por los *«x»* tiros acertados percibirá *«ax»* soles.

• Se sabe también que por cada tiro errado pagará *«b»* soles ; entonces por los *«n – x»* tiros errados tendrá que pagar *«b (n – x)»* soles.

• Luego , la cantidad final que recibe es :

$$c=ax-b(n-x)=ax-bn+bx$$

$$\Rightarrow c=(a+b)x-bn\Rightarrow x=\frac{c+bn}{a+b}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 77 :

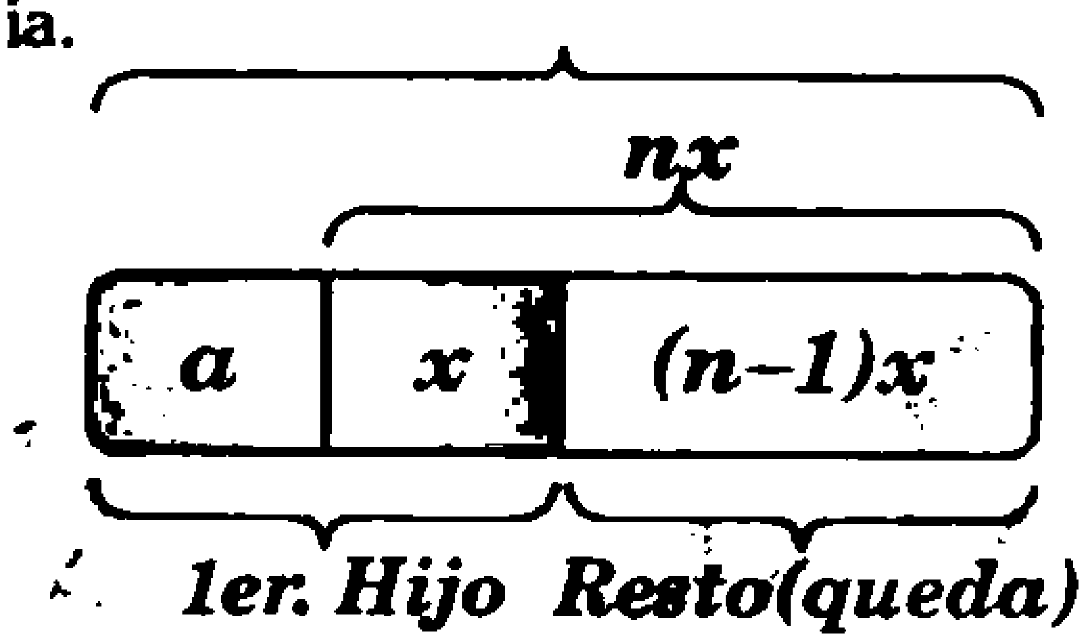
Un padre reparte una herencia entre sus hijos de la manera siguiente : Al primero le da una suma *«a»* y la enésima parte del resto , el segundo la suma *«2a»* y la enésima parte del resto , después de hacer el recuento, le da al tercero una suma *«3a»* y la enésima parte del resto, y así sucesivamente. Al final se encuentra que cada uno de ellos ha recibido la misma cantidad. ¿Cuál es el número de hijos?

A) n *B) n–1* *C) 2n–5* *D) 2n* *E) n² –1*

RESOLUCIÓN :

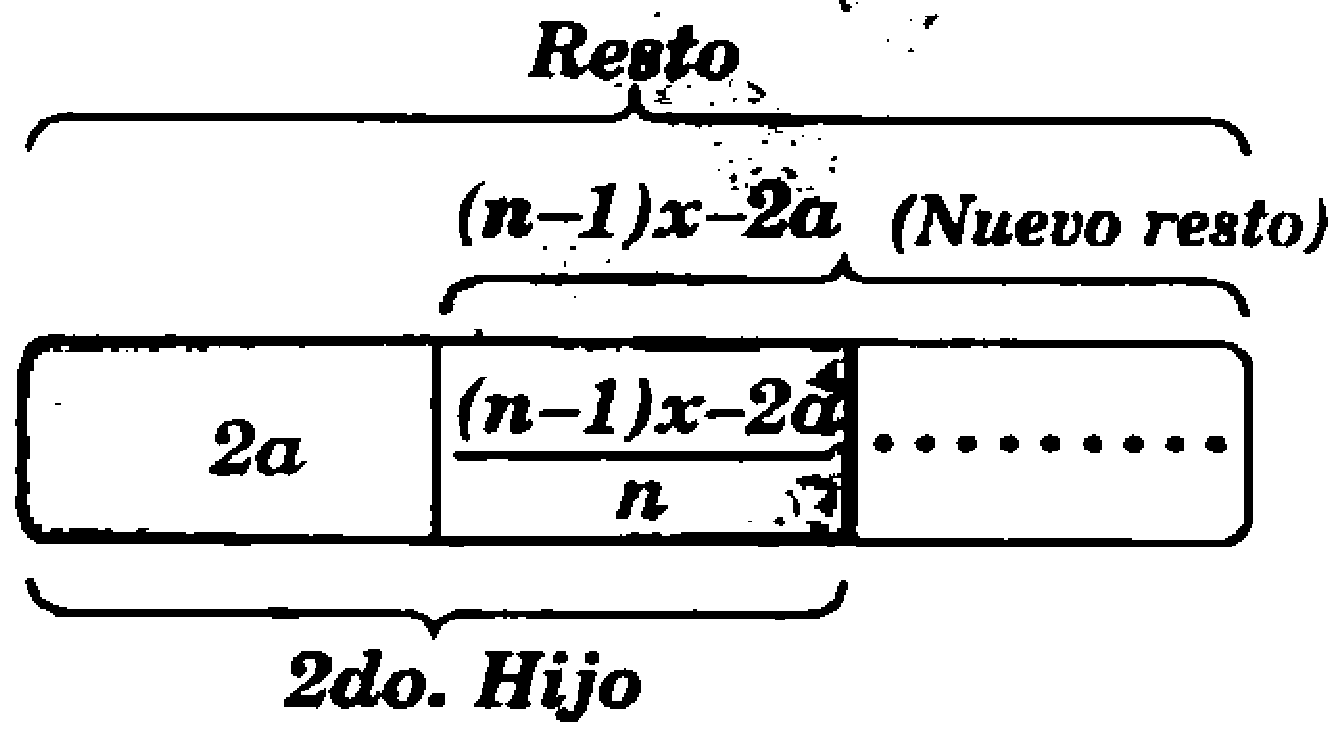
• «El primero le da *«a»* y la enésima parte del resto».

Herencia.



⇒ Herencia : $nx + a$

«Al segundo *«2a»* y la enésima parte del nuevo resto»



«y así sucesivamente con todos los hijos».

• «Al final todos reciben la misma cantidad de dinero».

$$\Rightarrow\text{Recibido por el 1ro.}=\text{Recibido por el 2do.}$$

$$a+x=2a+\frac{(n-1)x-2a}{n}$$

• Resolviendo : $x = na - 2a$

• Reemplazando :

Herencia : $n(na-2a) + a = a(n-1)^2$

• Pero al *1ro.* le tocó : $a + x = a + na - 2a = a(n-1)$, que es lo mismo que le tocó a todos , luego :

$$\#\text{ de hijos}=\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)}=n-1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 78 :

Se tiene una cierta cantidad de vasos cuyo costo total es de *8 400* soles . Si se vendiera, cada uno a *400* soles se obtendría cierta ganancia; pero si cada uno se vendiera a *380* se produciría cierta pérdida . ¿Cuánto se ganaría de venderse a *500* soles cada vaso?

A) 2000 *B) 2400* *C) 2600* *D) 2800* *E) 3000*

RESOLUCIÓN :

• Debemos considerar *«n»* vasos , que si vendiera a *S/.400* cada uno se obtendría:

$400n > 8400$ (Debido a que se va a ganar)

$\Rightarrow n > 21$ ....*(I)*

• Pero si se vendiera a *S/.380* se obtendría :

$380n < 840$ (Debido a que se va a perder)

$\Rightarrow n < 22,1$ ....*(I)*

• De *(I)* y *(II)* :

$$21 < n < 22{,}1 \ldots\ldots$$

→ 22 *(Ya que el número de vasos debe ser entero)*

• Luego, si vendemos cada uno de los *22* vasos a *S/.500* por unidad , se recaudaría :

$$22 \times S/.500 = S/.11000$$

$\Rightarrow$ Se ganaría : $11000 - 8400 = S/.2600$

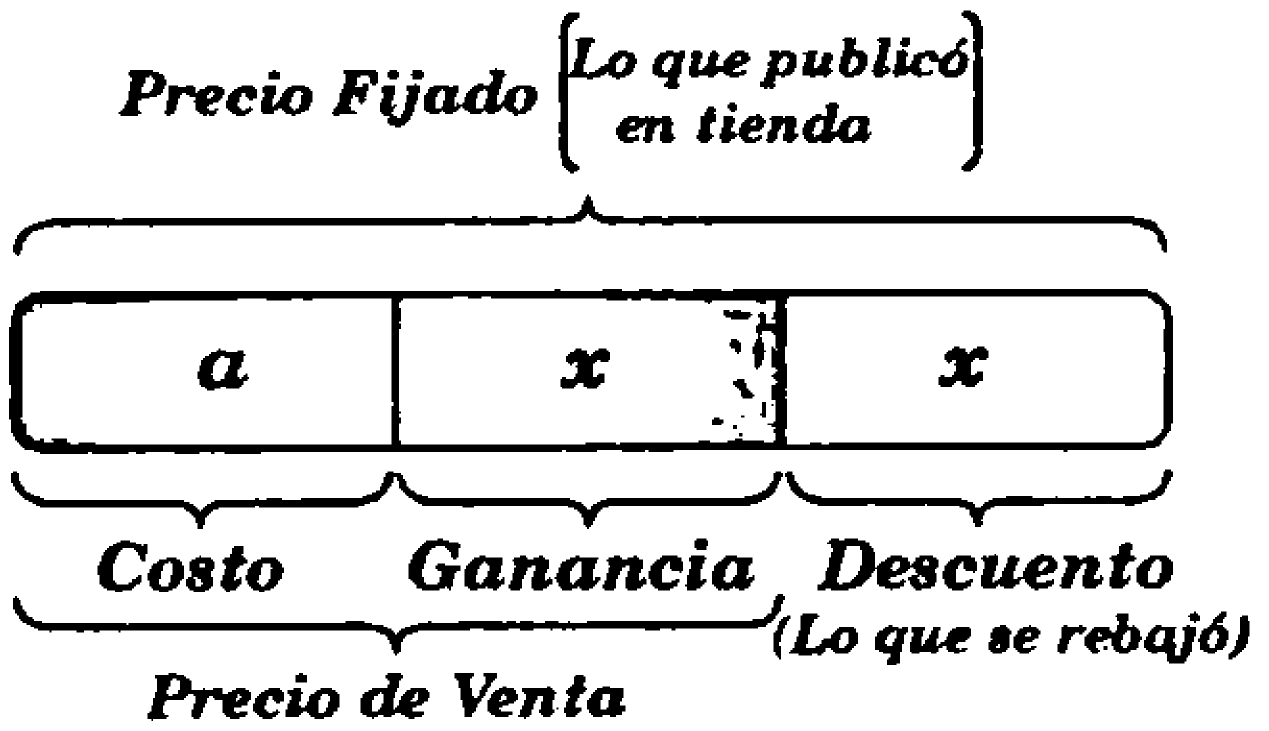
RPTA : "C"

PROBLEMA 79 :

Un libro cuesta *«a»* soles, el cual se vende ganando tanto como se rebajó al momento de vender . De no haber rebajado , se hubiera ganado *«b»* soles más de lo que costó. ¿Cuánto se rebajó?

A) $b/4$ *B)* $(a+b)/2$ *C)* $(b-a)/2$ *D)* $b/2$ *E)* $a/2$

RESOLUCIÓN :



* Del gráfico, si no se hubiera rebajado, entonces se hubiese ganado *2x*, que según el enunciado es *«b»* soles más de lo que costó, luego plantearemos.

$$2x = \underset{\text{Costo}}{a} + b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 80 :

En un cierto momento en una fiesta, el número de hombres que no bailan es al número de personas que están bailando como *1* es a *6* ; además al número de damas que no bailan es al número de hombres como *3* es a *2*. Encontrar el número de damas que están bailando, si el total de personas que asistieron a la fiesta es *455*.

A) 56 *B) 84* *C) 215* *D) 105* *E) 300*

RESOLUCIÓN :

* Debemos tomar en cuenta que :

Hombres que bailan = Damas que bailan

* Luego :

	BAILAN	NO BAILAN
Hombres	x	y
Damas	x	z

* Del *1er*. dato : $\frac{y}{2x} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 3y$

* Del *2do*. dato : $\frac{z}{x+y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2z = 12y \Rightarrow z = 6y$

* Del último dato :

$$x + x + y + z = 455 \Rightarrow 3y + 3y + y + 6y = 455$$

$$\Rightarrow y = 35$$

* Piden el número de damas que bailan:

$$x = 3y = 3(35) = 105$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 81 :

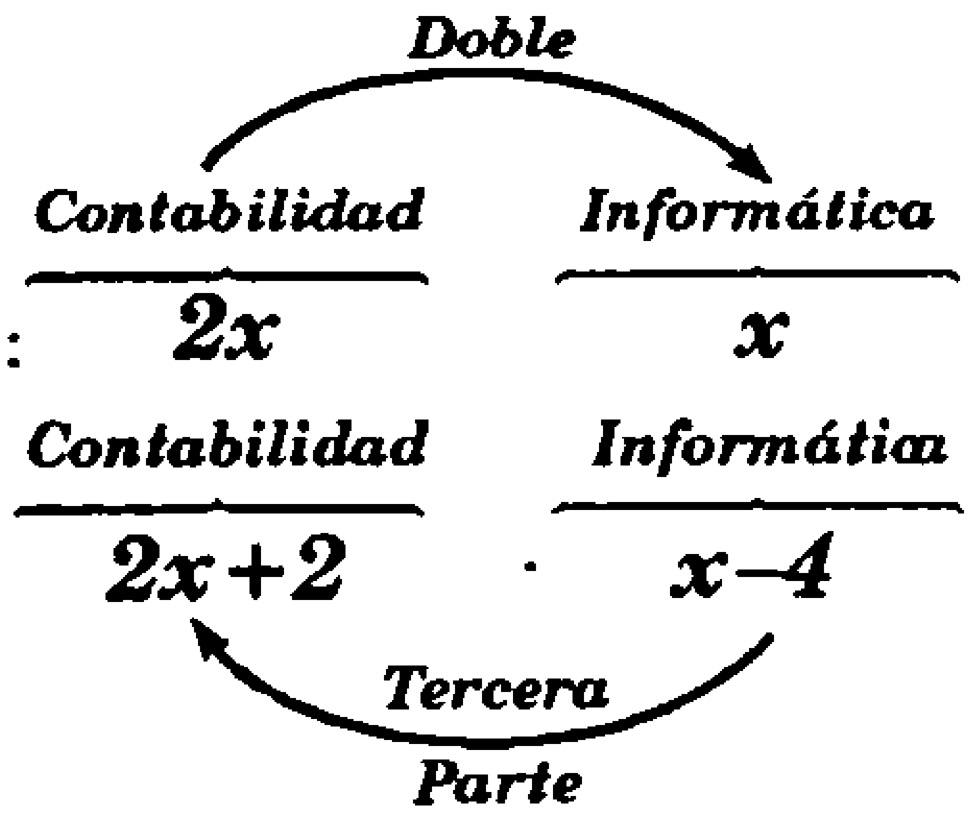
En dos oficinas , informática y contabilidad de un ministerio, había en el año *2006*, un cierto número de empleados . En *2007* se aumentaron *5* empleados a la oficina de informática y *6* a la de contabilidad , resultando esta con el doble número de funcionarios que los de informática . En *2008* se aumentaron *2* a contabilidad y cesaron a *4* empleados de informática, resultando este departamento con la tercera parte de funcionarios que contabilidad . ¿Cuántos empleados había en la oficina de informática en el año *2006*?

A) 8 *B) 9* *C) 10* *D) 7* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

* Consideremos que en *2007* :

* En *2008* :



$$\Rightarrow x - 4 = \frac{2x+2}{3} \Rightarrow x = 14$$

* Piden los de informática de *2006*, que serán :

$$x - 5 = 14 - 5 = 9$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 82 :

Una familia acordó preparar una pachamanca para el día del Trabajador, para ello se sacó un presupuesto, el cual se cubriría en partes iguales por los miembros de familia ; pero al realizar las compras se gastó *S/.240* por lo que cada miembro tenía que aportar *S/.6* más de lo previsto, entonces *3* de ellos acordaron no participar, por lo tanto los restantes tuvieron que aportar el doble de lo previsto, para cubrir el gasto.

¿De cuántas personas consta la familia?

A) 8   B) 15   C) 8 ó 15   D) 10 ó 16   E) 12 ó 18

RESOLUCIÓN:

de personas : x

Pago previsto por persona : y

* Cuando se gastó *S/.240*, entonces cada persona debía pagar :

$$\frac{240}{x} = y + 6 \quad .... (I)$$

* Pero al renunciar *3* de ellos, luego cada uno de los *(x-3)* restantes debió pagar :

$$\frac{240}{x-3} = 2y \quad .... (II)$$

* De *(I)* y *(II)* se tendrá :

$$\frac{240}{x-3} = 2\left(\frac{240}{x} - 6\right) \Rightarrow \frac{120}{x-3} = \frac{240}{x} - 6$$

$$\Rightarrow \frac{20}{x-3} = \frac{40}{x} - 1$$

* Resolviendo : $x = 8$ ó $x = 15$

RPTA : "C"

PROBLEMA 83 :

En un examen de «*n*» preguntas un estudiante contesta correctamente *15* de las primeras *20*. De las preguntas restantes contesta correctamente un tercio. Todas las preguntas tienen el mismo valor. Si la nota del estudiante es de *50%* de la nota máxima, ¿cuántos valores diferentes de «*n*» puede haber? (no disminuye el puntaje por respuesta incorrecta)

A) 1   B) 2   C) 3   D) 4   E) 5

RESOLUCIÓN :

* El puntaje resultante final será :

$$15k + \left(\frac{n-20}{3}\right)k = 50\%(nk)$$

(k: Puntaje por Pregunta Correcta)

$$\Rightarrow 15 + \frac{n-20}{3} = \frac{n}{2}$$

* Resolviendo : $n = 50$

* Entonces el número de valores que puede tomar «*n*» será *1*.

RPTA : "A"

PROBLEMA 84 :

Si te doy lo que a ti te falta para tener lo que yo tengo y tú me das todo lo que te pido, que es lo que me falta para tener el doble de lo que tienes; resulta que lo mío es a lo tuyo como *5* es a *4* . ¿En qué relación se encontraban lo que teníamos inicialmente?

A) 11/10 B) 11/7   C) 11/9   D) 11/3   E) 11/5

RESOLUCIÓN :

Inicialmente : Yo tengo : x

Tú tienes : y

* Si yo te doy : «$x - y$» (lo que te falta)

y tú me das : $2y - x$ (lo que te pido)

* Entonces resulta :

$$\frac{LO\ MIO}{TUYO} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x-(x-y)+2y-x}{y+(x-y)-(2y-x)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3y-x}{2x-2y} = \frac{5}{4}$$

* Despejando : $\frac{x}{y} = \frac{11}{7}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 85 :

Un escolar gastó cierta suma de dinero para comprar una cartera, un lapicero y un libro. Si la cartera, el lapicero y el libro costarán *5, 2* y *3* veces más caros respectivamente, la compra costaría *326* soles y sí, en comparación con el precio original, la cartera costará *2* veces más caro, el lapicero *4* veces más caro y el libro *2* veces más caro, por la misma compra el escolar pagaría *190* soles .

¿Cuánto vale la compra , si el precio de la cartera es el doble del precio del libro?

A) S/.130   B) S/.62   C) S/.36   D) S/.60   E) S/.92

RESOLUCIÓN :

	Cartera	Libro	Lapicero
Costo (Original)	$2x$	x	y

* Primera suposición :

$$2x + 5(2x) + y + 2y + \underbrace{x + 3x}_{Libro}$$

$$12x + 3y + 4x = 326$$

$$16x + 3y = 326 \quad ....(I)$$

* Segunda suposición :

$$2x + 2(2x) + y + 4y + x + 2x = 190$$

$$\Rightarrow 9x + 5y = 190 \quad .... (II)$$

* De *(I)* y *(II)* se obtiene : $x = 20$ $y = 2$

* Piden :

Costo total : $2x + x + y = 3x + y = 3(20) + 2 = 62$

RPTA : "B"

PROBLEMA 86 :

En un baile social al que asistieron *42* personas, se observó en un momento dado que el número de hombres que no bailan ni lo podía hacer era la tercera parte de los que si lo hacían ; el número de damas que no bailaban pero que podrían hacerlo

es el doble de los hombres de modo análogo y esta última cantidad inferior en **2** al de mujeres que no bailaban y no podían hacerlo. Calcule la diferencia entre el número de mujeres y varones.

A) 4 *B) 5* *C) 6* *D) 7* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

	BAILAN	NO BAILAN NI PUEDEN	NO BAILAN PERO SI PUEDEN
Hombres	$3x$	x	y
Mujeres	$3x$	$y+2$	$2y$

* Pero el total : $6x + x + y + 2 + y + 2y = 42$

$$7x + 4y = 40 \text{ (POR TANTEO)}$$

Será 4 (x) ; Será 3 (y)

* Piden : $(3x + y + 2 + 2y) - (3x + x + y)$

$$= 2y + 2 - x = 2(3) + 2 - 4 = 4$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 87 :

Un examen consta de **4** preguntas. La ***1ra***. vale **3** puntos, la ***2da***. vale **4**, la ***3ra***. vale **6** y la 4ta. vale **7** puntos. un alumno contesta bien dos preguntas, contesta regularmente una pregunta y deja de contestar la restante. Por pregunta bien contestada recibe el puntaje correspondiente , por la pregunta regularmente contestada recibe el puntaje correspondiente disminuido en **3** puntos. El alumno aprobó con nota par mayor que **10**, ¿Qué pregunta no contestó?

A) La 1ra. *B) La 2da.* *C) La 3ra.*
D) La 4ta. *E) No se puede determinar.*

RESOLUCIÓN :

* Debemos plantear :

$$3 + 4 + 6 + 7 - 3 - x > 10$$

(x: Puntaje de la que no contestó.)

$7 > x \Rightarrow$ Debe ser impar

* Se deduce que $x = 3$, entonces dejó de contestar la primera.

RPTA : "A"

PROBLEMA 88:

Considere los tres menores números naturales consecutivos de tres cifras, cuya suma es un cuadrado perfecto. La menor cifra del mayor de estos tres números es:

A) 1 *B) 0* *C) 4* *D) 2* *E) 3*

RESOLUCIÓN :

* Sean los naturales de **3** cifras :

$N-1$; N y $N+1$, su suma es :

$$3 \times N = K^2$$

$$3 \times 6^2 \longrightarrow \textit{Mínimo}$$

* Luego : $N + 1 = 109$

La menor cifra es cero .

RPTA : "B"

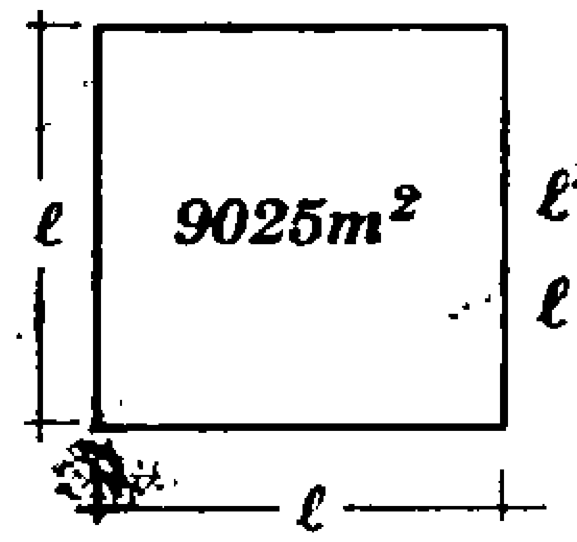
PROBLEMA 89 :

¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada , cuya área es de $9025\ m^2$, si las estacas se colocan cada **10 m**?

A) 38 *B) 35* *C) 34* *D) 30* *E) 36*

RESOLUCIÓN :

* Para calcular el número de estacas hay que calcular el perímetro del cuadrado :



$\ell^2 = 9025$

$\ell = 95$

* Luego , como las estacas se colocan cada **10m**. se tiene :

$$\# \text{ de estacas} = \frac{\text{Perímetro}}{\text{separación entre estaca y estaca}} = \frac{95 \times 4}{10} = 38$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 90 :

A una fiesta asistieron **56** personas entre damas y caballeros , en dicha reunión se observó que Anita bailó con **9** caballeros, Betty bailó con **10** caballeros, Carmen bailó con **11** caballeros y así sucesivamente hasta llegar a Zulema que es la última dama , quien bailó con todos los caballeros asistentes a la reunión. Según esto indicar qué proposiciones dadas a continuación son verdaderas :

I) Zulema bailo con **30** caballeros

II) Asistieron **24** mujeres

III) Asistieron **34** hombres

IV) El número de caballeros excede al número de mujeres en **8**.

A) Sólo IV *B) II y IV* *C) Sólo II*
D) I y IV *E) I y II*

RESOLUCIÓN :

* Como la ***1ra***. bailó con **9**, la ***2da***. con **10** y así sucesivamente la última dama con todos los caballeros, esto significa que la diferencia entre el número de varones y damas es :

$$9 - 1 = 10 - 2 = \ldots\ldots = V - D = 8$$

* Luego :

$$V + D = 56$$
$$V - D = 8$$
$$2V = 64$$

$V = 32$ (varones) y $D = 24$ (damas)

* Entonces : *I)F* *II)V* *III) F* *IV)V*

RPTA : "B"

PROBLEMA 91 :

Al multiplicar dos números reales positivos uno de los cuales es superior al otro en *16* unidades, un escolar erró disminuyendo en *3* la cifra de las decenas y en *5* la cifra de las unidades de dicho producto . Sin embargo realizó bien la comprobación para lo cual divide el producto obtenido por el menor de los factores obteniendo *41* en el cociente y *19* en el resto .

Hallar la suma de los factores.

A) 76 B) 60 C) 70 D) 78 E) 80

RESOLUCIÓN :

* Al disminuir *3* en las decenas de un número, es lo mismo que quitarle $3(10)=30$ al número, análogamente si disminuimos *5* a las unidades , será lo mismo que quitar $5(1)=5$ al número .

* En el problema, sean los factores «x» y «$(x+16)$», entonces el producto real será : $x(x+16)$ y el errado será : $x(x+16)-30-5=x(x+16)-35$

que al verificarlo se tendrá :

$$x^2+16x-35 \;\underline{|\, x \quad}$$
$$19 \qquad 41$$

* Por el algoritmo de la división se obtiene :

$$x^2+16x-35=41x+19$$
$$\Rightarrow x^2-25x-54=0$$
$$\Rightarrow (x-27)(x+2)=0 \Rightarrow x=27$$

* Piden la suma de factores .

$$x+x+16=2x+16=2(27)+16=70$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 92 :

Un camionero pidió *$596* por el traslado de $6m^3$. de mineral y otro , *$476* por $4m^3$. Resultando caros y desiguales los precios, se les aumentó igual para los dos, en el importe total y en la cantidad de piedra , siendo el número de soles aumentado igual al número de m^3 aumentados.

Aceptada esta condición resultó que dos camioneros cobraron la misma cantidad por m^3 transportado . ¿Cuánto cobró en total cada uno?

A) 200 ; 300 B) 400 ; 600 C) 600 ; 50
D) 600 ; 480 E) 400 ; 320

RESOLUCIÓN:

* Suponiendo que sea «x» lo que se aumento en el monto total y la cantidad de piedra , entonces los precios por «m^3» será .

$$\frac{(596+x)S/.}{(6+x)m^3} \text{ y } \frac{(476+x)S/.}{(4+x)m^3}$$

* Pero según enunciado, estos son iguales :

$$\frac{596+x}{6+x}=\frac{476+x}{4+x}=\frac{120}{2}=60$$

Aplicando propiedad de razones y proporciones.

$$\Rightarrow \frac{596+x}{6+x}=60$$

$$\Rightarrow 596+x=360+60x \Rightarrow 236=59x \Rightarrow x=4$$

* Piden los montos totales que serán :

$$596+4=600 \text{ y } 476+4=480$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 93 :

Al contar *n* bolas de colores , algunas rojas y el resto negras , se encontró que *49* de las primeras *50* contadas eran rojas. De ahí en adelante , *7* de cada *8* contadas eran rojas. Si en total el *90%* o más de las bolas contadas eran rojas , el valor máximo de *n* es:

A) 225 B) 210 C) 200 D) 180 E) 175

RESOLUCIÓN :

• # total de bolas $=n\begin{cases}50 \rightarrow \#\ rojas = 49\\ n-50 \rightarrow \#\ rojas=\frac{7}{8}(n-50)\end{cases}$

• # rojas $\geq \frac{90}{100}(n) \Rightarrow 49+\frac{7}{8}(n-50)\geq\frac{90}{100}n;$

resolviendo : $n \leq 210$

$\Rightarrow n_{máximo}=210$

RPTA : "E"

PROBLEMA 94 :

En un gallinero había cierto número de gallinas . Se duplicó el número y se vendieron *27* quedando menos de *54* . Después se triplico el número de gallinas que había al principio y se vendieron *78* quedando más de *39*. ¿Cuántas gallinas habían al principio?

A) 41 B) 42 C) 40 D) 38 E) 39

RESOLUCIÓN :

x : número de gallinas (inicio)

• $2x-27<54 \Rightarrow 2x<81 \Rightarrow x<40{,}5$ .... *(I)*

• $3x-78>39 \Rightarrow 3x>117 \Rightarrow x>39$ .... *(II)*

* De *(I)* y *(II)* : $x=40$

RPTA : "C"

PROBLEMA 95 :

Hallar el conjunto de números enteros tal que su duplo más cinco es mayor o igual que su mitad disminuida en *7* y que su tercio menos *7* es mayor o igual que su cuádruplo más *15*.

A) (–6,–7,–8) *B) (7)* *C)(6,7,8)* *D)* ϕ *E) (–7)*

RESOLUCIÓN :

* Sea x el número que cumple las condiciones :

$$2x+5 \geq \frac{x}{2}-7 \Rightarrow x \geq -8 \text{............ } (I)$$

$$\frac{x}{3}-7 \geq 4x+15 \Rightarrow x \leq -6 \text{............}(II)$$

* y como x es entero de *(I)* y *II)* : $x = \{-6, -7, -8\}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 96 :

En un tablero rectangular de "p". filas y "q" columnas están escritos todos los números enteros desde el *1* hasta el pq, en orden creciente. comenzando con el *1* en la casilla superior izquierda y terminando con pq , en la casilla inferior derecha. Se sabe que *95* está en la tercera fila , *987* está en la fila veintiuno y *1999* está en la última fila. Hallar : $p+q$.

A) 87 *B) 90* *C) 88* *D) 91* *E) 89*

RESOLUCIÓN :

* En la primera fila estarán los números de *1* a q; en la segunda fila los números de $(q+1)$a$(2q)$; en la tercera fila, los de $(2q+1)$ *a* $(3q) \Rightarrow 2q+1 \leq 95 \leq 3q$; resolviendo :

$$31,\widehat{6} \leq q \leq 47 \text{.................}(I)$$

* Análogamente para la fila *21:*

$20q+1 \leq 987 \leq 21q$; resolviendo :

$$\boxed{47 \leq q \leq 49,3} \text{............}(II)$$

• De Ⓘ y Ⓘⓘ : $q = 47$

• Para la última fila : $(p-1)q + 1 \leq 1999 < pq$

$$\Rightarrow 47(p-1)+1 \leq 1999 \wedge 1999 \leq 47p ;$$

* Resolviendo : $p = 43$

$$\Rightarrow p+q = 43+47 = 90$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 97 :

Dados *3* números enteros y consecutivos , la tercera parte del menor menos *10* es mayor que *14* , la cuarta parte del mayor más *10* es menor que *29*. Hallar la suma de las cifras del número menor.

A) 12 *B) 10* *C) 18* *D) 11* *E) 15*

RESOLUCIÓN :

Sean los números : $n-1$; n y $n+1$

* $\frac{1}{3}(n-1)-10 > 14 \Rightarrow n > 73$

* $\frac{1}{4}(n+1)+10 < 29 \Rightarrow n < 75$

* Luego : $n = 74$

* El menor es : $n-1 = 73$

* Suma de cifras = *7 + 3 = 10*

RPTA : "B"

PROBLEMA 98 :

Un matrimonio dispone de *32* soles para ir al cine con sus hijos . Si compra las entradas de *5* soles le faltaría dinero y si adquiere las de *4* soles le sobraría dinero. ¿Cuántos hijos tiene el matrimonio?

A) 5 hijos *B) 4 hijos* *C) 6 hijos*
D) 7 hijos *E) 8 hijos*

RESOLUCIÓN :

* sea x : número de personas

* Primero : $5x > 32$

$$x > 6,4 \text{ .... } (I)$$

* Luego : $4x < 32$

$$x < 8 \text{ ....}(II)$$

* De *(I)* y *(II)*: $x = 7$

⇒ Total de personas serán *7* y los hijos sólo: *7–2 = 5*

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

Representar los enunciados usando las variables necesarias

ENUNCIADO	*REPRESENTACIÓN*
01 Un número desconocido..................................	
02 El triple de un número..	
03 El doble más la quinta parte de un número..	
04 Una cantidad aumentada en *20*......................	
05 Un número disminuido en *60*.........................	
06 *60* disminuido en un número..........................	
07 Seis veces, el número de lápices......................	
08 Mi edad dentro de *5* años...............................	
09 La edad de Luis hace *13* años........................	
10 El exceso de *10* sobre *5*..................................	
11 Un número excede a otro en *8*........................	
12 *30* soles se reparten entre *3* hermanos............	

(13) "A" es excedido por "B" en 10..........................

(14) Mi edad y tu edad están en la relación de 2 a 3..........................

(15) Tres números son proporcionales a 3; 4 y 5 respectivamente..........................

(16) El triple de un número más el doble de su consecutivo..........................

(17) El óctuplo de tu edad..........................

(18) Nueve veces mi fortuna..........................

(19) El décuplo de mi edad..........................

(20) El triple de la cuarta parte del duplo de su mitad..........................

(21) La mitad del triple de un número, aumentado en "a"..........................

(22) *x* disminuido en 8..........................

(23) 8 disminuido en *x*..........................

(24) De 80 le restas la mitad del número..........................

(25) La enésima parte de un número..........................

(26) Cuatro veces la edad de Timoteo..........................

(27) El duplo de un número, aumentado en 13..........................

(28) El duplo de un número, disminuido en 13..........................

(29) El quíntuplo de un número disminuido en 6..........................

(30) La inversa de mi edad hace 8 años..........................

(31) El recíproco de la suma de las inversas de *a* y *b*..........................

(32) El cuadrado de un número disminuido en 2..........................

(33) La mitad de la altura de una torre más su cuarta parte..........................

(34) El exceso de a sobre *b*..........................

(35) El triple de tu edad más el doble de la mía..........................

(36) Los 3/5 de la diferencia de nuestras edades..........................

(37) a excede a *b* en 2..........................

(38) Un número aumentado en su duplo da 4..........................

(39) Al triple de tu dinero le descuento *a* y aún le queda *b*..........................

(40) *x* es excedida por *y* en 8..........................

(41) Al cuádruplo de un número, menos 3 equivale a su mitad..........................

(42) Un número aumentado en sus 3/4 es *a*..........................

(43) Un número disminuido en sus 7/10 es *b*..........................

(44) Tu edad es *n* veces mi edad ....

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

(01) ¿Cuál es el número, cuyo décuplo aumentado en 480 es equivalente a su duplo aumentado en 3280?

A)450 B)550 C)350 D)250 E)N.A.

(02) ¿Cuál es el número, cuyo triple aumentado en 450 es equivalente a su décuplo disminuido en 600?

A)150 B)160 C)180 D)320 E)N.A.

(03) ¿Cuál es el número, cuyo quíntuplo agregado en 150 unidades es equivalente a ocho veces dicho número?

A)30 B)52 C)55 D)50 E)N.A.

(04) La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Hallar el mayor número.

A)104 B)67 C)99 D)180 E)34

(05) Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en el 2do cesto?

A)185 *B)180* *C)190* *D)200* *E)254*

06 Dividir: ***454*** en tres partes sabiendo que la menor es ***15*** unidades menor que la del medio y ***70*** unidades menor que la mayor: Hallar la menor.

A)105 *B)115* *C)95* *D)123* *E)138*

07 Repartir ***310*** dólares entre tres personas de modo que la segunda reciba ***20*** menos que la primera y ***40*** más que la tercera; Hallar lo que le corresponde al segundo.

A)110 *B)130* *C)70* *D)90* *E)120*

08 La suma de las edades de tres personas es ***88*** años, la mayor tiene ***20*** años más que la menor y la del medio ***18*** años menos que la mayor. Hallar la edad del menor.

A)16 *B)18* *C)22* *D)24* *E)42*

09 Dividir ***642*** en dos partes tales que una excede a la otra en ***36***. Hallar uno de los números.

A)339 *B)330* *C)309* *D)306* *E)503*

10 La edad de ***A*** es el doble de la de ***B***; ambas edades suman ***36*** años; hallar la edad de "***B***".

A)12 *B)24* *C)18* *D)36* *E)14*

11 Repartir: ***180*** dólares entre ***A; B*** y ***C*** de modo que la parte de "***A***" sea la mitad de la de "***B***" y un tercio de la de "***C***". Hallar lo que le toca a "***B***"

A)30 *B)60* *C)40* *D)80* *E)120*

12 La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman ***40*** años. hallar ambas edades.

A)30, 40 *B)20, 10* *C)30, 10*
D)40, 10 *E)15, 25*

13 En un hotel de ***2*** pisos hay ***48*** habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero. ¿Cuántas habitaciones hay en el primer piso?

A)42 *B)18* *C)32* *D)36* *E)24*

14 Repartir: ***$ 300*** entre ***A; B*** y ***C*** de modo que la parte de "***B***" sea el doble que la de "***A***" y la de ***C*** el triple de la de "***A***".

Hallar la cantidad que le toca a "***A***".

A)40 *B)50* *C)100* *D)150* *E)105*

15 Repartir ***$133*** entre ***A; B*** y ***C*** de modo que la parte de "***A***" sea la mitad de la de "***B***" y la de ***C*** el doble de la de "***B***". Hallar lo que le corresponde a ***C***.

A)64 *B)86* *C)48* *D)56* *E)76*

16 El mayor de dos números es ***6*** veces el menor y ambos números suman ***147***. Hallar los números.

A) 137; 10 *B)123; 24* *C) 126; 21*
D) 117; 30 *E)100; 47*

17 Dividir el número ***850*** en tres partes de modo que la primera sea el cuarto de la segunda y el quinto de la tercera; hallar uno de los números.

A)340 *B)87* *C)86* *D)427* *E)345*

18 La edad de María es el triple de la de Rosa más quince años y ambas edades suman ***59*** años. Hallar la edad de Rosa

A)13 *B)48* *C)17* *D)15* *E)11*

19 Un grupo de soldados están divididos en dos guarniciones, la octava parte de ellos al cuadrado se encuentran trotando en la pista, mientras que los otros ***12*** juegan fúlbito. Hallar la mayor cantidad de soldados.

A)56 *B)64* *C)32* *D)48* *E)8*

20 Erik se dirige al mercado y compra la misma cantidad en dinero de plátanos, naranjas y manzanas, comprando un total de ***55*** frutas. El precio de una naranja excede en ***S/. 1*** al precio de un plátano, el precio de una manzana excede en ***S/. 1*** al precio de una naranja. Si el número de naranjas excede al número de manzanas en tantos plátanos como se pueden comprar con ***S/. 5***. Calcular el número de manzanas.

A)10 *B)20* *C)30* *D)40* *E)2*

21 Una estudiante se va de vacaciones por un cierto número de días, tiempo donde experimenta ***20*** mañanas o tardes con lluvia, ***10*** mañanas despejadas y ***12*** tardes despejadas. Además se sabe que cuando llovía en la mañana la tarde era despejada. Hallar el tiempo que duro las vacaciones de la estudiante.

A)26 *B)52* *C)20* *D)30* *E)32*

22 Sabiendo que ***25*** conejos se han comido en ***12*** días el pasto de una chacra de ***5*** m^2 y que ***27*** conejos se han comido en ***15*** días ***6*** m^2. Se quiere saber ¿cuántos conejos igualmente comelones se necesitan para hacer acabar en ***12*** días el pasto de una chacra de ***8*** m^2. Se sabe que el pasto en la chacra está a la misma altura y crece en forma uniforme?

A)90 *B)100* *C)120* *D)40* *E)198*

23 Un profesor tenía una determina cantidad de dinero, de su esfuerzo en tan digna labor. El primer mes gastó ***100*** soles y aumentó a lo que quedaba un tercio de este resto. El mes siguiente volvió a gastar ***100*** soles y aumentó la cantidad restante un tercio de ellas. El tercer mes gastó otra vez ***100*** soles y agregó la tercera parte de lo que quedaba. Si el dinero que al final le quedo es una vez más de lo que tenía al inicio. Hallar ¿Cuál fue su dinero inicial?

A)S/. 1 480 ***B)S/. 1 500*** ***C)S/. 1 400***
D)S/. 2 380 ***E)S/. 2 000***

24 Un alumno pide en una librería ***4*** lápices y ***"n"*** lapiceros. Si se sabe que el costo de los lápices cuesta una vez más el costo de los lapiceros. El vendedor se confunde el pedido y le entrega ***"n"*** lápices y ***4*** lapiceros, dicho error lo llevó a pagar la mitad más de lo que debió pagar. Hallar ***"n"***

A)12 ***B)18*** ***C)14*** ***D)16*** ***E)10***

25 El lechero matemático, resolvía la siguiente interrogante. Si tengo ***100*** recipiente de ***7*** litros y ***100*** recipientes de ***10*** litros. Hallar ¿Cuál es el máximo número de recipientes de ***7*** litros que debemos utilizar para obtener ***19*** litros en otro recipiente que tiene una capacidad de más de ***700*** litros?

A)91 ***B)93*** ***C)97*** ***D)98*** ***E)100***

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sabiendo que en un rebaño, el número de ovejas más bueyes es ***30***, el de bueyes más vacas es ***50***, el de vacas más cabras es ***70*** y el de vacas más ovejas es ***40***, podemos afirmar que el número de bueyes más cabras es:

A) 55 ***B) 50*** ***C) 60*** ***D) 45*** ***E) 65***

02 El perímetro de un campo rectangular es ***628 m***. El largo del campo excede al ancho en ***6 m***, ¿Cuál es el largo?

A) 180 ***B) 160*** ***C) 185***
D) 145 ***E) 154***

03 Tres números son tales que el segundo es seis unidades menor que tres veces el primero y el tercero es dos veces más que ***2/3*** del segundo. Si la suma de los tres números es ***172***, calcule el mayor de tales números.

A) 90 ***B) 94*** ***C) 102*** ***D)92*** ***E) 98***

04 Lo que ganan un ingeniero y su ayudante se factura en ***S/. 60*** y ***S/. 20*** por hora, respectivamente. Un cliente de éstos recibió una factura por ***S/. 580*** por determinado trabajo. Si el ayudante trabajó ***5*** horas menos que el ingeniero, ¿cuántas horas trabajó el ingeniero?

A) 10 ***B) 9,5*** ***C) 7,5*** ***D) 8,5*** ***E) 3,5***

05 Entre Lucho y Héctor tienen ***150*** canicas; si Lucho pierde ***36*** de ellas ante Héctor, el doble de las que le quedan equivalen al triple de las que ahora tiene Héctor. Dar como respuesta el producto de las cifras de la cantidad de canicas que tiene Héctor.

A) 8 ***B) 18*** ***C) 10*** ***D) 20*** ***E) 42***

06 Si la cantidad de días transcurridos en lo que va de un año normal excede en ***2*** a los ***3/8*** de los días que quedan por transcurrir, ¿qué fecha es?

A) 11 de abril ***B) 13 de abril*** ***C) 10 de abril***
D) 12 de abril ***E) 23 de abril***

07 Se compró ***"b"*** objetos a ***"b + 2"*** dólares cada uno, y sobró ***"3b – 1"*** dólares. Si cada objeto costará ***2*** dólares más me sobraría ***60*** dólares al comprar la misma cantidad de éstos. ¿Cuál es el precio de estos objetos?

A) 61 dólares ***B) 60 dólares*** ***C) 63 dólares***
D) 58 dólares ***E) 62 dólares***

08 Tomás, Julio y Javier tienen ***108*** duraznos. El último le dice al primero:

"Si yo te diera la cuarta parte de mi total, tendríamos las mismas cantidades".

interviene el primero: "Julio, si te doy la mitad de mi total, tendrías lo mismo que Javier". ¿Cuántos duraznos tiene Tomás?

A) 36 ***B) 44*** ***C) 25*** ***D) 12*** ***E) 24***

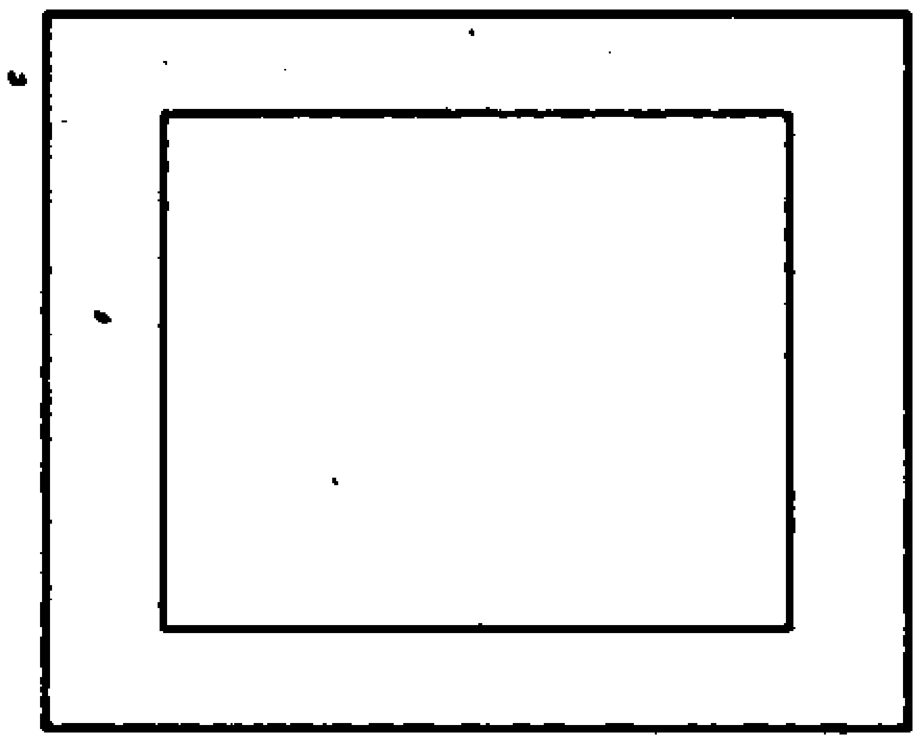
09 Dos números ***(A*** y ***B)*** están en relación de ***"m"*** a ***"n"***. Si se aumenta ***A*** en ***"n"*** unidades, ¿cuánto es lo que se debe aumentar a ***B*** para mantener a razón inicial?

A) m^2 B) $\frac{m}{n}$ C) m^3 D) $\frac{n^2}{m}$ E) $\frac{m^3}{n}$

10 En una granja se tiene pavos, gallinas y patos. Sin contar las gallinas tenemos ***5*** aves, sin contar los pavos tenemos ***7*** aves, sin contar los patos tenemos ***4*** aves. Luego el número de gallinas es:

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 5***

11 Se tiene una fotografía cuyo marco se muestra en la figura, sus dimensiones exteriores son ***12 cm*** y ***15 cm***. Si se quiere un marco de igual grosor, ¿cuál es éste cuando la parte ocupada por la fotografía sea de ***88 cm²***?



A) 1cm ***B) 2 cm*** ***C) 2,5 cm***
D) 3 cm ***E) 3,5 cm***

12 Un niño fue con ***36*** soles para comprar pelotas, pero al llegar a su destino se enteró que cada pelota costaba ***1*** sol menos de lo que creía, de donde dedujo que con el mismo dinero que llevaba podía comprar ***3*** más de lo que pensó. ¿Cuántas pelotas compró?

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 12*** ***E) 13***

13 A un anciano le preguntan la edad de su hijo y dice: "Tiene tantas semanas como mi nieto días". Le preguntan por la edad de su nieto, dice: "Tiene tantos meses, como yo años"; y al preguntársele su edad responde: "Los tres juntos, sumamos exactamente ***100*** años". Calcule la diferencia entre las edades del hijo y del nieto".

A) 60 ***B) 30*** ***C) 35*** ***D) 25*** ***E) 5***

14 En la venta de manzanas rebajé un sol por docena, esto significa que el cliente recibirá una manzana más por cada sol. ¿Cuánto costaba cada manzana?

A) $0,25$ ***B)*** $0,40$ ***C)*** $0,\widehat{3}$ ***D)*** $0,28$ ***E)*** $0,\widehat{2}$

15 Lorena gasta ***S/. 120*** en dos cremas y ***5*** esmaltes para uñas. Si ella comprara ***5*** cremas y ***10*** esmaltes similares a los primeros, el gasto sería de ***S/. 275***. Determine el costo de ***3*** esmaltes.

A) S/. 15 ***B) S/. 60*** ***C) S/. 24***
D) S/. 30 ***E) S/. 36***

16 Luchito tiene ***103*** soles y con ellos va a comprar plumones para pizarra. Los hay de dos tipos: unos de ***3*** soles y otros de ***8*** soles. ¿Cuál es la máxima cantidad de plumones que podrá comprar?

A) 32 ***B) 33*** ***C) 30*** ***D) 31*** ***E) 35***

17 En el matrimonio de Kerry se compraron ***2*** gaseosas por cada ***5*** cervezas. En plena reunión se consumieron ***6*** cervezas por cada gaseosa. Al final sobraron ***140*** gaseosas pero ninguna cerveza. ¿Cuántas cajas de cerveza se compraron al inicio? Considerar que cada caja trae ***12*** unidades?

A) 48 ***B) 52*** ***C) 40*** ***D) 45*** ***E) 50***

18 Cinco señoras, cada una acompañada de una hija, compraron diversos metros de tela en una tienda. Cada una de las ***10*** personas compró tantos metros de tela como soles pagó por cada metro. Además se observa que cada señora gastó ***405*** soles más que su respectiva hija. ¿Cuántos metros compró la señora que gastó menos?

A) 24 ***B) 25*** ***C) 21*** ***D) 27*** ***E) 22***

19 Si agrupara los discos que tengo en grupos de ***10*** unidades resultarían ***2*** grupos menos que si los ordenara en grupos de ***9*** unidades. ¿Cuántos discos debo comprar como mínimo para que el total resulte ser un número cuadrado perfecto?

A) 15 ***B) 18*** ***C) 20*** ***D) 16*** ***E) 21***

20 Se tiene un terreno de forma rectangular. Si tuviera ***5*** metros más en cada dimensión, su área se duplicaría. Pero si tuviera ***2*** metros menos en cada dimensión su área disminuiría en ***46 m²***. Calcule el área del terreno y dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 7 ***B) 6*** ***C) 9*** ***D) 8*** ***E) 10***

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dar los valores de verdad :

( ) $\sqrt{5} > \sqrt[3]{11}$ ( ) $\sqrt{7} \leq \sqrt[4]{49}$ ( ) $71 < 63$

A) VFV ***B) VVF*** ***C) FFF*** ***D) VVV*** ***E) VFF***

02 Dar los valores de verdad :

( ) $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ ( ) $\sqrt[3]{7} \geq \sqrt[3]{7}$ ( ) $\frac{3}{7} < \frac{3}{7}$

A) FFF ***B) VVV*** ***C) VVF***
D) VFF ***E) FFV***

03 Sea $M : M = a + \frac{4}{a}$. Indicar el menor valor de M si a es positivo .

A) 8 ***B) 4*** ***C) 0*** ***D) 3*** ***E) 7***

04 ¿Cuándo se cumple : $x^3 < x^2 < x$?

I) 0 < 1 < 1

II) $x > 1$

III) $-1 < x < 0$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) I y II E) II y III

05 Siendo : $a > b > 0$; son verdaderos :

I) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ *II)* $ab^2 < 0$ *III)* $a^2b > 0$

A)Solo I B)I y II C)I y III D)Solo III E)Solo II

06 Si : $a^2b^2c > 0$; se tiene :

I) $ab > 0$ *II)* $bc > 0$ *III)* $ac > 0$

¿Cuáles son verdaderas?

A) I B) I y III C) Todas
D) II E) III

07 Si a, b, c y d son números reales tales que $a<b<c<d$, entonces necesariamente

A) $d - b > c - a$ *B)* $d - b < c - a$
C) $d - c > b - a$ *D)* $d - b > d - c$

08 Entre los cazadores *A, B* y *C* reúnen más de *8* perros, *B* piensa en adquirir *8* perros más, con lo cual tendrá más perros que entre *A* y *C*. Se sabe que *B* tiene menos perros que *C* y los que este tiene no llegan a *5*. ¿Cuántos perros tiene *A, B* y *C* respectivamente?

A)4, 3 y 2 B)4, 2 y 3 C)2, 3 y 4
D)3, 2 y 4 E)3, 4 y 2

09 Una persona fabrica un número determinado de mesas, si se duplica su producción y vende *60*, le quedan más de *26*. Luego si baja su producción a la tercera parte y vende *5*, tendrá entonces menos de *10* mesas. Señale cuántas mesas se fabricaron.

A)41 B)44 C)46 D)38 E)36

10 Un escolar tenía una cantidad de sellos. Le regalaron un álbum para sellos. Si él pega *20* sellos en cada página, el álbum es insuficiente, pero si pega *23* sellos en cada página, por lo menos una página quedará vacía. Si al niño le regalan un álbum absolutamente igual, en cada página del cual estuvieran pegados *21* sellos, él tendría un total de *500* sellos. ¿Cuántas páginas tiene el álbum?

A)9 B)10 C)11 D)12 E)13

11 Cuando nací papá tenía más de *20* años, hace *10* años el doble de mi edad era mayor que la de él; si tengo menos de *33* años. ¿Qué edad tiene él?

A)53 B)52 C)51 D)50 E)49

12 Si a un número de *3* cifras múltiplo de *11*, se le resta *396* unidades se obtiene otro mayor que el mismo número invertido. Se pide el valor de la cifra de las decenas, sabiendo que la suma de sus cifras extremas es superior a *12*.

A)6 B)7 C)8 D)2 E)4

13 En un juego de «Damas», uno de los dos jugadores ha ganado más de la tercera parte de las fichas que se juegan, además el otro jugador tiene varias fichas más ganadas que el primero. Si todavía no terminan de jugar. ¿Cuántas fichas quedan en el juego?

A)3 B)4 C)5 D)2 E)6

14 Un carpintero hizo un cierto número de mesas; vende *49* y le quedan por vender más de la mitad. Hace después *9* mesas y vende *20* quedándole menos de *41* mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho sabiendo que inicialmente fabricó un número par de mesas?

A)107 B)102 C)100 D)109 E)103

15 Se tienen un cierto número de monedas ; si se hacen montones de a siete no se pueden completar *8* de aquellos; y si se hacen de a seis, se completan *9* y queda un sobrante ¿Cuál es el número de monedas?

A)77 B)66 C)55 D)44 E)33

16 Un propietario vendió un año la tercera parte de su casa, al año siguiente vendió la quinta parte de las que primeramente tenía y *5* más, y al año siguiente vendió la cuarta parte de las que primeramente tenía y *3* más. En el primer año vendió menos casas que en el tercero. ¿Cuántas casas tenía este propietario antes de vender ninguna?

A)36 B)37 C)39 D)47 E)27

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)C	4)D	5)A	6)D	7)A	8)E	9)D	10)C
11)B	12)A	13)B	14)C	15)D	16)D	17)E	18)C	19)D	20)B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) B	2) C	3) B	4) A	5) C	6) D	7) D	8) C	9) B	10) D
11) *	12) A	13) D	14) B	15) D	16) C				

PLANTEO DE ECUACIONES III

ECUACIONES DIOFANTICAS

CAPITULO 026

OBJETIVOS :

Al finalizar esta unidad , el lector estará en capacidad de :

• *Desarrollar la capacidad de abstracción para representar y relacionar simbólicamente los datos de un problema con las variables elegidas para la incógnita.*

• *Identificar cuando una ecuación indeterminada será una ecuación diofántica.*

•*Desarrollar habilidades en la resolución de ecuaciones, para los cuales la cantidad de variables supera el número de ecuaciones.*

• *Conocer los métodos de resolución de las ecuaciones diofánticas.*

•*Utilizar criterios de divisibilidad en la resolución de ecuaciones para cantidades enteras.*

•*Relacionar el curso de Álgebra con la Aritmética en la resolución de ecuaciones.*

INTRODUCCIÓN :

Las ecuaciones diofánticas fueron estudiadas de manera intensiva por los matemáticos indúes medievales, quienes fueron los primeros en buscar sistemáticamente métodos para la determinación de soluciones enteras. Estas tenían su aplicación en la Astronomía en la determinación de los periodos de los planetas. Aryabhata en su texto *Aryabhatiya* (año ***499***) dio la primera descripción explícita de la solución entera general de la ecuación diofántica lineal $ax+by=c$, llamó Kuttaka a dicho algoritmo de solución. Kuttaka, que significa *pulverise,* consistía en romper el problema convirtiéndolo en nuevos problemas en los cuales los coeficientes eran más y más pequeños con cada paso; el método es básicamente el uso de algoritmo de Euclides para encontrar el mayor factor común de a y b, pero también está relacionado con las fracciones continuas.

La teoría de las ecuaciones diofánticas ha llegado con el tiempo a contarse entre las más bellas y difíciles áreas de la Matemáticas. Un problema matemático muy famoso que se resuelve de ecuaciones diofánticas es el del ***mono y los cocos***. El enunciado de este problema es el siguiente:

Cinco hombres y un mono naúfragan en una isla desierta. Los hombres pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche, uno de ellos despierta y, desconfiado, decide separar su parte. Dividió los cocos en cinco montones, tomó su parte y, como sobraba un coco, se lo dio al mono. Poco después, un segundo náufrago se despierta y hace lo mismo. Al dividir los cocos en cinco montones volvió a sobrar un coco y también se lo dio al mono. Uno tras otro, el tercero, cuarto y quinto náufragos hacen lo mismo. Por la mañana, al día siguiente, dividieron los cocos en cinco montones sin que sobrara ninguno. ¿Cuántos se habían recolectado inicialmente?

Las ecuaciones diofánticas deben su nombre al famoso matemático griego Diofanto de Alejandría (año ***275*** aprox.), para muchos se le puede llamar el padre del Álgebra, sin embargo su obra más importante es la ***Arithmética***, que es un tratado originalmente en trece libros, de los que sólo han sobrevivido los seis primeros, los cuales constituían un tratado caracterizado por un alto grado de habilidad matemática y de ingenio puesto en juego.

La obra la Arithmética, no es una exposición sistemática de operaciones o funciones algebraicas, sino una colección de problemas concebidos en términos de ejemplos numéricos específicos. Se aleja de la tradición euclidiana del Álgebra geométrica y se aproxima más al Álgebra babilónica numérica, aunque se diferencia de esta última :

•*Por buscar soluciones exactas, positivas y racionales a ecuaciones determinadas e indeterminadas.*

•*Por ser sus números totalmente abstractos y no referirse a medidas concretas, como dimensiones de campos o unidades monetarias, lo cual era característico de la tradición matemática del cercano oriente.*

Una de las contribuciones importantes de Diofanto corresponde al campo de la notación.

Los historiadores de la matemática distinguen tradicionalmente tres etapas en el desarrollo del Álgebra: palabras, ***la etapa intermedia***, en el cual se utilizan algunas abreviaturas y la etapa final o simbólica. El álgebra de Diofanto se ubica de plano

en la segunda de estas categorías. Los signos utilizados en la arithmética no son, en realidad, símbolos algebraicos, como lo concebido actualmente, sino abreviaturas (por ejemplo, para cada potencia de la incógnita existía un signo especial).

He aquí la historia de su vida según se contaba en el siglo *V*.

La divina naturaleza le concedió el ser un muchacho durante una sexta parte de su vida y añadiendo a esto una doceava parte, el pobló con vellos sus mejillas; le iluminó con la luz del matrimonio después de una sétima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo, Pero !ay! infeliz niño nacido tarde; después de alcanzar la mitad de la medida de ia vida de su padre, el frío destino se lo llevó. Después de consolar sus penas con la ciencia de los números durante cuatro años más, finalizó su vida.

Al resolver esta ecuación se determina que Diofanto vivió ***84*** años y se casó a los ***33*** años.

ECUACIONES DIOFÁTICAS

Es una ecuación donde tanto los términos constantes (coeficientes), como las variables son números enteros; puede ser de una sola ecuación de dos, tres o más incógnitas, de primer, segundo o mayor grado.

Examinaremos particularmente la ecuación diofántica de dos variables: $ax+by=c$; en la cual la incógnita a hallar son x e y. que son enteros y que tienen infinidad de valores, pero para nuestra aplicación solo consideraremos los positivos.

EJEMPLO 1 :

$$2x+5y=59$$

$$\left.\begin{array}{cc} x & y \\ 27 & 1 \\ 22 & 3 \\ 17 & 5 \\ 12 & 7 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \text{soluciones} \qquad (x: -5,\ y: +2)$$

Una propiedad por considerar en el cálculo de las soluciones es que estas se relacionan con los coeficientes.

EJEMPLO 2 :

$$9x-2y=1$$

$$\left.\begin{array}{cc} x & y \\ 1 & 4 \\ 3 & 13 \\ 5 & 22 \\ 7 & 31 \\ \vdots & \vdots \end{array}\right\} \text{soluciones} \qquad (x: +2,\ y: +9)$$

¡IMPORTANTE !

Lo Que se debe buscar en una ecuación diofántica no es la determinación de todas las soluciones, sino solo una de ellas, pues a partir de esta se obtienen las demás.

DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN EN UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Para determinar una solución en una ecuación diofántica, tenemos tres criterios por usar según la situación.

CRITERIO DE LAS CIFRAS TERMINALES

Se usa cuando uno de los coeficientes termina en ***5***. Se recomienda multiplicar por ***2*** la ecuación original y analizar la última cifra de cada término.

EJEMPLO :

Se compra libros de ***S/.15*** y ***S/.13***, gastando exactamente ***S/.367***. ¿Cuál es el máximo número de libros que se pudo comprar?

RESOLUCIÓN :

Sea :
- número de libros de ***S/.15*** $= x$
- número de libros de ***S/.13*** $= y$

$$\Rightarrow 15x+13y=367 \quad (\times 2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{30}_{\dots 0}x+26y=\underbrace{734}_{\dots 4}$$

$\Rightarrow 26y = \dots 4$ (una solución es $y=4$)

Reemplazamos en la ecuación original :

$$15x+13y=367$$

$$\text{soluciones}\left\{\begin{array}{cc} x & y \\ 21 & 4 \\ 8 & 19 \end{array}\right. \qquad (x: -13,\ y: +15)$$

Luego, el número de libros comprados es igual a :

$$21 + 4 = 25 \quad u \quad 8 + 19 = 27$$

Por lo tanto, el máximo número de cuadernos comprados es *27*.

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD

Se usa cuando el término independiente es divisible por alguno de los coeficientes. En este caso, el valor de la otra variable será múltiplo también.

EJEMPLO :

Determinar el valor de $a+b$ si a e b son enteros, $26 < a < 34$ y, además, $9a + 7b = 329$.

RESOLUCIÓN :

Notamos que $329=\overset{o}{7}$, y aprovechamos ello en la ecuación

$$9a+\underbrace{7b}_{\overset{o}{7}}=\underbrace{329}_{\overset{o}{7}} \Rightarrow 9a=\overset{o}{7}\Rightarrow a=\overset{o}{7}$$

además, $26<a<34 \Rightarrow a=28$.

Reemplazamos en la ecuación original

$$\underset{\substack{\Downarrow\\28}}{9a}+\underset{\substack{\Downarrow\\11}}{7b}=329 \Rightarrow b=11\Rightarrow a+b=39$$

CRITERIO DE LA DIVISIÓN

Se usa cuando no se puede aplicar los criterios anteriores. Consiste en expresar todos los términos en función del menor de los coeficientes.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Sea n el número de maneras en que *10* dólares pueden ser cambiados en monedas de *10* y *25* centavos , usándose por lo menos una de cada denominación. Luego n es igual a :

A) 40 *B) 38* *C) 21* *D) 20* *E) 19*

RESOLUCIÓN :

• Si cambiamos *10* dólares en "x" monedas de *10* centavos e "y" monedas de *25* centavos se debe cumplir que :

$$\frac{10}{100}x+\frac{25}{100}y=10 \Rightarrow 2x+5y=200 \text{ ....(I)}$$

• Como $5y$ y 200 son $\overset{o}{5}$, entonces $2x$ debe ser $\overset{o}{5}$, de donde, $x=\overset{o}{5}$; en *(I)*, si $x = 100 \Rightarrow y = 0$, pero como el cambio debe contener al menos una moneda de cada tipo , el valor máximo de "x", será *95* :

$$2x + \underbrace{5y}_{} = \underbrace{200}_{}$$

$$\left.\begin{matrix} 5 \rightarrow 38 \\ 10 \rightarrow 36 \\ 15 \rightarrow 34 \\ \vdots \quad \vdots \\ 95 \rightarrow 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 19 \text{ combinaciones posibles}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Jorge multiplica la fecha del día de su nacimiento por *12* y el número del mes por *31*, luego suma estos dos productos obteniendo *170*. ¿Cuándo nació Jorge?

A) 9 abril *B) 8 febrero* *C) 9 febrero*
D) 8 abril *E) 10 febrero*

RESOLUCIÓN :

• Sea F: Fecha de nacimiento
M: Número del mes

• Según enunciado :

$$12F + 31M = 170 \text{......(ecuación entera)}$$

Analizando se deduce que «M» es par, en consecuencia : $M = 2 \Rightarrow F = 9$

• Entonces nació el *9* de febrero

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Manuel pagó una deuda de *S/.350* con billetes de *S/.10* , *S/.20* y *S/.50*. ¿Cuál fue la mínima cantidad de billetes que utilizó en el pago de su deuda?

A)9 *B)8* *C)10* *D)11* *E)7*

RESOLUCIÓN :

• Por dato , la deuda es *S/. 350*

$$\text{Asumimos}\begin{cases} \text{de } s/.10 \longrightarrow x \\ \text{de } s/.20 \longrightarrow y \\ \text{de } s/.50 \longrightarrow z \end{cases} \quad (\text{\# billetes})$$

• Entonces:

$$10x+20y+50z=350x+2y+5z=35$$

Nos piden la menor cantidad de billete; entonces , z es máximo, además, se ha empleado por lo menos un billete de cada denominación.

• Luego :

$$\underset{\substack{|\\1}}{x} + \underset{\substack{|\\2}}{2y} + \underset{\substack{|\\6\ (\text{máximo})}}{5z} = 35$$

⇒ Se empleó como mínimo *9* billetes

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Cada lápiz cuesta *S/.0,30* y cada lapicero , *S/.1,50.* Si se compra al menos uno de cada clase ¿cuál es el máximo número de lápices y lapiceros que se puede comprar con *S/.25,50?*

A) 81 *B) 85* *C) 80* *D) 82* *E) 83*

RESOLUCIÓN :

Sean : x el número de lápices
y el número de lapiceros

Entonces: $(0,3)x+(1,5)y=25,5$

$$3x+15y=225$$

$$\rightarrow x+5y=85$$

x	y	
80	1	→ *máxima cantidad de lápices y lapiceros*
75	2	
70	3	
64	4	
⋮	⋮	
5	16	

⇒ Cantidad máxima es *81*

RPTA: "A"

PROBLEMA 6:

Aracelly tiene *20* monedas en su cartera ; algunas son de *10* céntimos , otras de *20* céntimos y el resto de *50* céntimos. Si el total de dinero que ella tiene en su cartera es *S/.5* y tiene más monedas de *50* céntimos que de *10* céntimos , ¿cuántas monedas de *20* céntimos tiene?

A) 11 *B) 14* *C) 12* *D) 15* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

De los datos:

Aracelly tiene *S/.5* en un total de *20* monedas.

- Sea:

  N° monedas de *10* céntimos → a

  N° monedas de *20* céntimos → b

  N° monedas de *50* céntimos → c

- además , $a<c$ (condición del problema)

Nos piden la cantidad de monedas de *20* céntimos

N° monedas: $a+b+c=20$ ....(α)

Monto (S/.): $0,10a+0,20b+0,50c=5$...(β)

A la ecuación (β) la multiplicamos por *10* y le restamos la ecuación (α); entonces , tenemos.

$$b+\underbrace{4c}_{(\overset{\circ}{2})}=\underbrace{30}_{(\overset{\circ}{2})}\rightarrow a$$

b debe ser $(\overset{\circ}{2})$:

b	c	a	
2	7	→ 11	
6	6	→ 8	
10	5	→ 5	
14	4	→ 2	se cumple $a<c$

⇒ El número de monedas de *20* céntimos es *14*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Un cobrador de taxi debía dar de vuelto *7* soles con *50* céntimos pero para ello cuenta únicamente con monedas de *20* céntimos y de *50* céntimos. ¿De cuántas Formas distintas podrá dar vuelto?

A) 7 *B) 8* *C) 21* *D) 2* *E) 17*

RESOLUCIÓN :

Sea :

- número de monedas de *50* céntimos $=x$
- número de monedas de *20* céntimos $=y$

Como *7* soles con *50* céntimos $=750$ céntimos

$$\Rightarrow 50x+20y=750 \Rightarrow 5x+2y=75$$

Como $\frac{75}{5}=15$

$\Rightarrow$ una solución es $x=15 \wedge y=0$

Reemplazando y aplicando la propiedad tenemos:

$$5x+2y=75$$

soluciones (x disminuye de 2 en 2: -2; y aumenta de 5 en 5: $+5$):

x	y
15	0
13	5
11	10
9	15
7	20
5	25
3	30
1	35

Por lo tanto, el número de soluciones es igual a *8*. (número de formas de dar vuelto)

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

A Pedro le quieren vender **200** animales (pollos, patos y pavos) al precio de **1 200** soles. Si, además , se sabe que un pollo le costará **3** soles, un pato **5** soles , un pavo **8** soles y que le van a vender más patos que pollos. ¿Cuál es la suma de las cifras del máximo número de pollos que puede comprar Pedro?

A)5 B)8 C)11 D)14 E)17

RESOLUCIÓN :

Del enunciado tenemos lo siguiente

Animales	Pollos	Patos	Pavos	
Cantidad	x	y	z	=200
Costo por unidad	S/. 3	S/. 5	S/. 8	
Costo total	S/. 3x	S/. 5y	S/. 8z	=S/.1200

Luego: $\begin{cases} x+y+z=200 \text{ (multiplicamos por 8)} \\ 3x+5y+8z=1200 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x+8y+8z=1600 \\ 3x+5y+8z=1200 \end{cases} -$$

Restamos: $5x+3y=400$ (ecuación diofántica)

$50-50$ ... no cumple, pues $(y>x)$

$47-55$

$44-60$

$41-65$

⋮

Nos piden : $x_{max}=47$

⇒ La suma de cifras de x es **11.**

RPTA : "C"

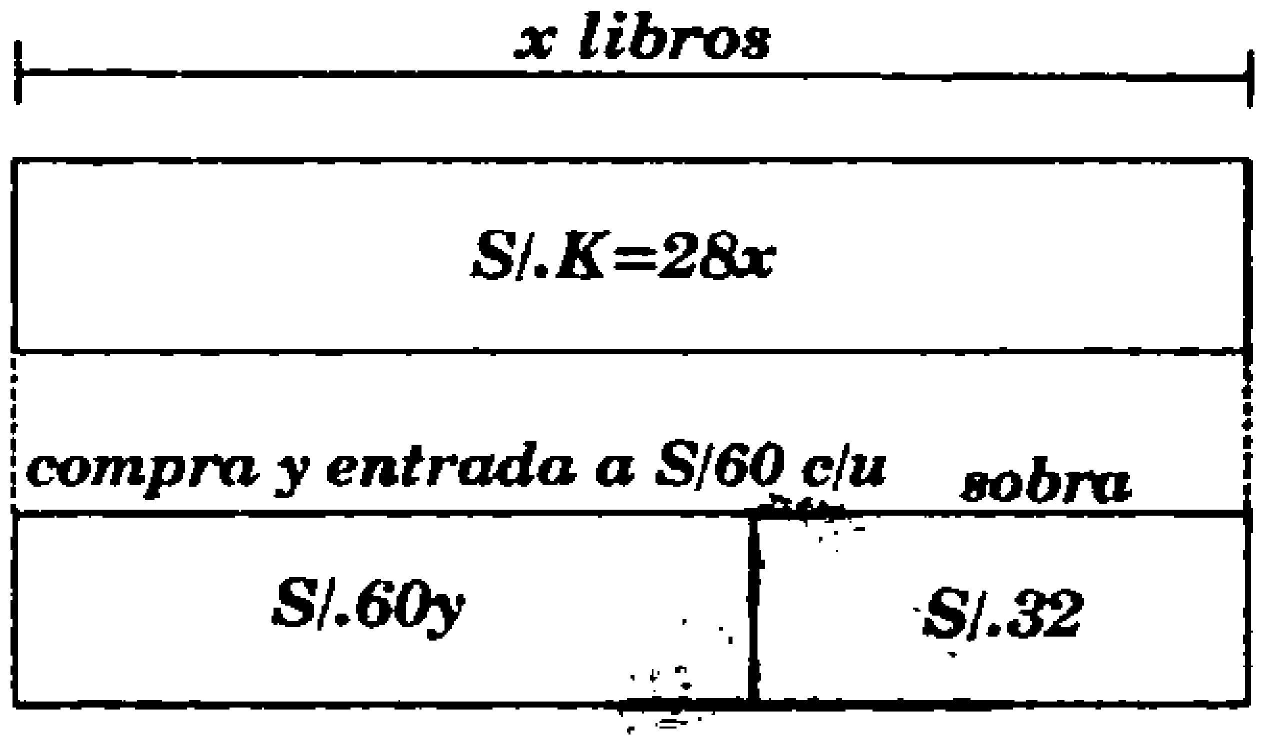
PROBLEMA 9 :

Raúl vendió algunos libros a **S/.28** cada uno y recibió **S/.K** por la venta siendo esta suma inferior a **S/.730.** Con el dinero recibido Raúl se compró cierta cantidad de boletos para un concierto y le sobró **S/.32.** Si cada boleto costó **S/.60,** ¿cuál es la suma de las cifras del número **K**?

A) 17 B) 8 C) 11 D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN 34 :

Sea x el número de libros vendidos a **S/.28** cada uno.

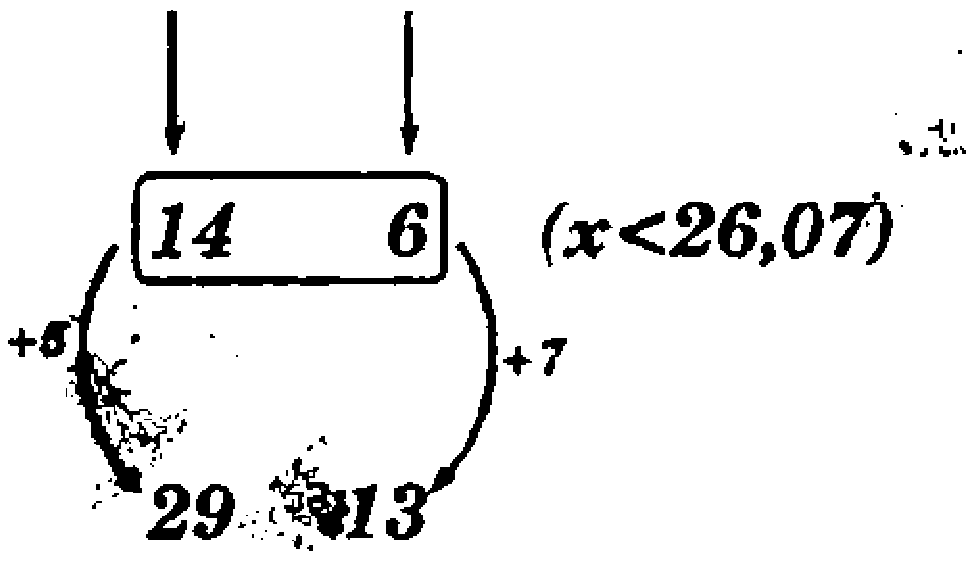


Del dato : $K<730 \Rightarrow 28x<730$

$\Rightarrow x<26{,}07$

* además $28x-60y=32$

$7x-15y=8$ (ecuación diofántica)



$K=28x=392$

Suma de cifras de $K=3+9+2=14$

RPTA : "D"

PROBLEMA 10 :

Lucy entra en una tienda y gasta exactamente la mitad de su dinero, y observa que le quedan tantos centavos como pesos tenía y tantos pesos como la mitad de los centavos que tenía. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente, sabiendo que la cantidad que tenía al inicio es lo mínimo posible?

A) 99 B) 88 pesos C) 99 pesos 98 centavos
D) 89 pesos 99 centavos E) 100 pesos

RESOLUCIÓN :

* Inicialmente tenía «x» pesos con «$2y$» centavos, que es equivalente a «$100x+2y$» centavos, luego le quedan: «x» centavos y «y» pesos ó su equivalente que es «$x+100y$» centavos . Pero como lo que gasta es la mitad , entonces lo que queda será la otra mitad de lo que tenía , con lo que debemos planear :

$$x+100y=\frac{100x+2y}{2} \Rightarrow 2x+200y=100x+2y$$

$$\Rightarrow 188y=98x \Rightarrow 99y=49x \Rightarrow \frac{y}{49}=\frac{x}{99}$$

* Lo mínimo que tenía será cuando: $x=99$ e $y=49$; entonces inicialmente tenía **99** pesos con $2(49)=98$ centavos :

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

La red ferroviaria de una ciudad tiene a la venta

boletos para viajar de una estación a otra. Cada boleto especifica la estación de origen y la de destino. Cuando se añadieron varias estaciones nuevas a la red se tuvo que imprimir *76* nuevas clases de boletos. ¿Cuántas estaciones nuevas se sumaron a la red?

A) 4 *B) 2* *C) 19* *D) 8* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

* Si al inicio había "n" estaciones, el número de clases de boletos era $n(n-1)$

Al añadirse "x" estaciones nuevas, el número de clases de boletos será $(n+x)(n+x-1)$

$$\Rightarrow (n+x)(n+x-1)-n(n-1)=76$$

$$\Rightarrow x(x+2n-1)=76$$

* Como : $x>1 \wedge x$ es divisor de 76, entonces ,

$x \in \{2; 4; 19; 38; 76\}$. El único valor coherente es: $x=4$, para el cual resulta $n=8$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Si por *S/.2* dieran *6* chirimoyas más de las que dan, la media docena costaría *45* céntimos menos . ¿Cuánto pagó por docena y media de chirimoyas?

A) S/.3,60 *B) S/.2* *C) S/.2,40* *D) S/.1,60* *E) S/.2,20*

RESOLUCIÓN :

$\left(\begin{array}{l}\text{Número de chirimoyas que}\\ \text{se adquiere por } S/.2\end{array}\right): x$

	NORMALMENTE	SUPOSICIÓN
Costo de cada chirimoya	$\frac{2}{x}$	$\frac{2}{x+6}$
Costo de Media docena	$\frac{12}{x}$	$\frac{12}{x+6}$

* Según enunciado : $\dfrac{12}{x}-\dfrac{12}{x+6}=0,45 \Rightarrow (soles)$

* Resolviendo : $x=10$

* Luego el costo de docena y media de chirimoyas será :

$$18\times\frac{2}{10}=S/.3,6$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Tres hermanas fueron a vender pollos vivos al mercado, una llevo *11* pollos, otra *12* y la tercera *10*. Hasta el mediodía, temiendo no vender todos los pollos , bajaron en *$2* el precio de cada pollo . Entrada la noche las tres regresaron con *$52* cada una . ¿Cuánto era el precio de cada pollo hasta el mediodía?

Los pollos se venden enteros .

A) $/3 *B) $/1* *C) $/6* *D) $/4* *E) $/5*

RESOLUCIÓN :

* Consideramos la que llevo *11* pollos, de los cuales vendió «x» pollos a «n» soles cada uno, hasta el mediodía y después los «$11-x$» restantes a «$n-2$» soles; obteniendo en total *$52* , con lo que tenemos que plantear :

$$xn+(11-x)(n-2)=52$$

$$xn+11n-22-xn+2x=52$$

$$\Rightarrow n=\frac{74-2x}{11}$$

Posibles valores :

I) $74-2x=66$ —— $n=6$ ✓

$\Rightarrow x=4$ (si cumple)

II) $74-2x=55$ —— $n=5$ ✗

$\Rightarrow x=9,5$ (no pueden haber *9,5* pollos)

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Un comerciante compró correctores , resaltadores y borradores de los siguientes precios :

- Cada corrector por *10* soles.
- Cada resaltador por *1* sol.
- *8* borradores por *1* sol.

Si en total compró *100* artículos y gastó *100* soles, ¿cuántos resaltadores compró?

A) 12 *B) 15* *C) 18* *D) 20* *E) 21*

RESOLUCIÓN :

* Si llamamos c, r y b a las cantidades compradas de correctores , resaltadores y borradores respectivamente , planteamos que :

$$\begin{cases}10c+r+\frac{1}{8}b=100 \text{ ......(I)}\\ c+r+b=100 \text{ ....(II)}\end{cases}$$

* (II) – (I) :

$$9c-\frac{7}{8}b=0 \Rightarrow 72c=7b \Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{7}{72};$$

* como solo son *100* artículos, deducimos que :

$$c=7 \wedge b=72$$

* En (II) : $7+r+72=100 \Rightarrow r=21$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Halle los valores de a y b en la siguiente ecuación $28a+44b=824$

RESOLUCIÓN :

En un primer paso dividimos toda la ecuación

(ambos miembros) entre *4*. ***(MCD: 28; 44; 824)***

$$\Rightarrow \frac{28a}{4} + \frac{44b}{4} = \frac{824}{4}$$

$$\Rightarrow 7a + 11b = 206 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

Luego en un segundo paso expresamos la ecuación en función del menor coeficiente *(7)* ⇒ módulo *7*

$$\Rightarrow \underbrace{7a} + \underbrace{11b} = \underbrace{206}$$

$$\overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7}+4)b = \overset{\circ}{7}+3$$

$$\overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 4b = \overset{\circ}{7}+3$$

sumando 7 ambos miembros .... $4b - 3 = \overset{\circ}{7} - \overset{\circ}{7} - \overset{\circ}{7} \Rightarrow 4b - 3 = \overset{\circ}{7}$

$$\Rightarrow 4b - 3 + 7 = \overset{\circ}{7} + 7$$

$$\Rightarrow 4b + 4 = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 4(b+1) = \overset{\circ}{7}$$

$$\Rightarrow b+1 = \overset{\circ}{7} \Rightarrow b \in \{6; 13; 20; 27; \ldots\ldots\}$$

Reemplazando en *(I)* :

• Si $b=6 \Rightarrow 7a + 11(6) = 206$

$$\Rightarrow a = 20$$

• Si $b=13 \Rightarrow 7a + 11(13) = 206$

$$\Rightarrow a = 9$$

Para $b=20; 27; \ldots$, no existen valores positivos de a.

PROBLEMA 16 :

Se poseen *28* palitos de fósforos repartidos en tres montoncitos. Si del primero se pasan al segundo tantos como hay en éste , si del primero se vuelven a pasar al segundo tantos como hay en el segundo , si del segundo se pasan al tercero tantos como hay en éste , resulta que en el segundo hay el doble que en el primero ¿Cuántos palitos tenía cada montoncito al inicio?

A) 16; 4; 8 *B) 12; 8; 8* *C) 14; 6; 4*
D) 14; 6; 8 *E) 16; 6; 6*

RESOLUCIÓN :

* Al inicio : (total *28*)

1er.	2do.	3ro.	Grupos
x	y	z	

$$\Rightarrow x + y + z = 28 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Del *1ro* . se pasan al segundo tantos como hay en éste, entonces quedarán:

$$x - y \ ; \ 2y \ ; \ z$$

* Del *1ro* . se vuelve a pasar al *2do*. tantos como hay en éste, entonces quedarán con:

$$x - 3y \ ; \ 4y \ ; \ z$$

* Del *2do*. se pasa al *3ro*., tantos como hay en éste, entonces resultará :

$$x - 3y \ ; \ \underbrace{4y - z} \ ; \ 2z$$

(*DOBLE* (Dato): $4y - z$ es el doble de $x - 3y$)

$$\Rightarrow 4y - z = 2x - 6y$$

$$z = 10y - 2x \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)*, se tendrá :

$$x + y + 10y - 2x = 28$$

$$\Rightarrow y = \frac{28 + x}{11}$$

* Tanteando adecuadamente, llegaremos a que:

$$y = 4 \ ; \ x = 16 \ ; \ z = 8$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

Sean x e y números de dos dígitos donde $y>x$. además $x+y$ menor que *100*, el producto de los números tiene *4* cifras y empieza con *1*. Si se borra el *1* lo que queda es $x+y$. ¿Cuánto vale x?

RESOLUCIÓN :

Analicemos el producto xy, que tiene la forma $\overline{1mnp}$

$$x \times y = \overline{1mnp} = 1000 + \overline{mnp} \ldots\ldots\ldots (I)$$

Borrar el uno del producto equivale a obtener el número $\overline{mnp}$, pero de *(I)* : $\overline{mnp} = x \times y - 1000$

Por dato : $\overline{mnp} = x \times y - 1000 = x + y$

Luego : $xy - x - y = 1000$

Sumando *1* a ambos miembros y factorizando

$$\underbrace{xy - x} - \underbrace{y + 1} = 1001$$

$$x(y-1) - (y-1) = 1001$$

$$(y-1)(x-1) = 77 \times 13$$

como

$x < y \quad \wedge \quad x + y < 100$

$y - 1 = 77 \quad \wedge \quad x - 1 = 13$

$y = 78 \qquad\qquad x = 14$

Por tanto : $x = 14$

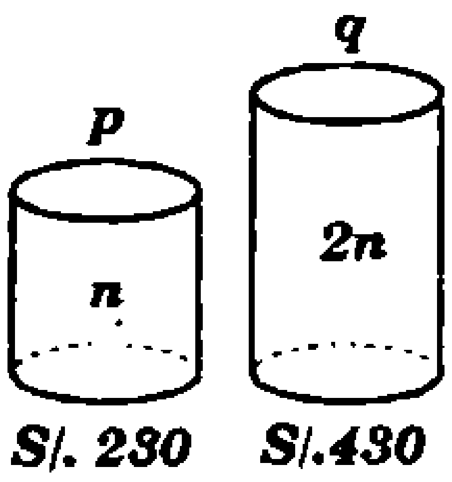
PROBLEMA 18 :

Se tiene *2* barriles *«p»* y *«q»* de mermelada tales que el volumen de *«p»* es la mitad del volumen de *«q»*. El precio de *«p»* es *S/.230* y el de *«q» S/.430*. ¿Cuál fue la mejor compra con *S/.1500*?

A) 3q *B) q + 4p* *C) 2p + 2q*
D) 6p *E) Ninguna*

RESOLUCIÓN :

* Para hacer la mejor compra se debe gastar lo menor posible y se debe obtener el mayor volumen.



$Vol = Volumen$

$Vol_{(q)} = 2Vol_{(p)}$

$Vol_{(q)} = 2n$ *litros*

$Vol_{(p)} = n$ *litros*

x : # de barriles de p

y : # de barriles de q, luego :

$$230x + 430y < 1\,500$$

$$23x + 43y < 150$$

* Luego las opciones :

p	q		
x	y	Gasto	# litros
0	3	1290	$0 + 6n = 6n$
2	2	1320	$2n + 4n = 6n$
4	1	1350	$4n + 2n = 6n$
6	0	1380	$6n + 0 = 6n$

* La mejor opción es cuando se gasta ***S/.1290*** (menor gasto). En todos los casos se compra el mismo volumen ***(6n)*** Compra = ***3q***

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

En una reunión de matemáticos, uno le dijo a otro: "Hay nueve menos de nosotros que el doble del producto de los dos dígitos de nuestra cantidad". ¿Cuántos matemáticos, como mínimo, deben agregarse a los ya reunidos para tener una cantidad que sea un cuadrado perfecto ?

A) 7 B) 5 C) 9 D) 8 E) 2

RESOLUCIÓN :

Sea $\overline{ab}$ el número de matemáticos, por la condición del problema tenemos:

$$\overline{ab} = 2ab - 9$$

$$\Leftrightarrow 10a + b = 2ab - 9$$

$$\Leftrightarrow 9 = b(2a - 1) - 10a$$

Cuando nos encontramos con este tipo de ecuaciones con dos variables, es conveniente sumar o restar a ambos lados de la ecuación cierto número de tal forma que en uno de los lados obtengamos una expresión factorizable, en este caso es conveniente sumar ***5***, de esta forma:

$$9 = b(2a - 1) - 10a$$

$$\Leftrightarrow 9 + 5 = b(2a - 1) - 10a + 5$$

$$\Leftrightarrow 14 = b(2a - 1) - 5(2a - 1)$$

$$\Leftrightarrow 14 = (b - 5)(2a - 1)$$

vemos que $(2a - 1)$ es un factor impar de ***14***, luego, puede ser ***1*** ó ***7***, si $(2a - 1) = 1$ entonces $b = 19$ que no es posible, en consecuencia, $2a - 1 = 7$ de donde $a = 4$ y $b = 7$.

Por lo tanto, el número de matemáticos es ***47*** y es necesario agregar ***2*** matemáticos como mínimo para llegar al siguiente cuadrado perfecto, que es ***2***

RPTA: "E"

PROBLEMA 20 :

Una compañía de aviación compra ***13*** avionetas por ***16,5*** millones de nuevos soles. Las avionetas que compra son del tipo *A* a un precio de ***1,1*** millones, del tipo *B* a un precio de ***1,3*** millones y del tipo *C* a ***1,8*** millones.

¿Cuántas avionetas compró de cada tipo?

A) 2,11,0 B) 3,7,3 C) 5,6,2 D) 7,4,2 E) 8,4,1

RESOLUCIÓN :

* Sea : ***a : # aviones del tipo A (1,1 millones c/u)***
b : # aviones del tipo B (1,3 millones c/u)
c : # aviones del tipo C (1,8 millones c/u)

• Como se compra al menos uno de cada tipo , entonces ***a, b*** y ***c*** son diferentes de cero .

• Si todos los aviones fueran del tipo *A* , se habría gastado $13 \times 1,1 = 14,3$ millones.

• Pero en realidad se gastó ***2,2*** millones más, esto se debe a que :

- Por cada avión del tipo *B* se gastó ***0,2*** millones más.

- Por cada avión del tipo *C* se gastó ***0,7*** millones más

$$0,2b + 0,7c = 2,2$$

$$2b + \overset{PAR}{7c} = 22 \Rightarrow a = 7,\ b = 4,\ c = 2$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$4 \quad 2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

En la caja de un cine se recaudó un total de ***100*** nuevos soles por el ingreso de ***100*** personas. Si el costo de las entradas es de ***3*** nuevos soles por cada adulto, ***2*** nuevos soles por cada joven y ***30*** céntimos de nuevo sol por cada niño, ¿cuál es el menor número de adultos que pudo haber ingresado al cine?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 8 E) 20

RESOLUCIÓN

Hallaremos todas las posibles cantidades de adultos, jóvenes y niños que resuelven el problema.

Sean ***a, j*** y ***n*** las cantidades de adultos, jóvenes y niños que entraron al cine, respectivamente. Según las condiciones del problema tenemos:

$$\begin{cases} a + j + n = 100 \\ 3a + 2j + 0,3n = 100 \end{cases}$$

en la segunda ecuación notamos que ***0, 3n*** es un

número entero, por lo tanto, n es múltiplo de *10*, sea $n = 10k$, con esto las dos ecuaciones las podemos reescribir así:

$$\begin{cases} a + j = 100 - 10k \\ 3a + 2j = 100 - 3k \end{cases}$$

resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = 17k - 100$$
$$j = 200 - 27k,$$

pero sabemos que a y j son cantidades de personas, luego deben ser no negativas, es decir:

$$17k - 100 \geq 0 \text{ y } 200 - 27k \geq 0.$$

De la primera desigualdad, como k es entero, obtenemos que $k \geq 6$, y de la segunda desigualdad obtenemos que $k \leq 7$, luego, los únicos posibles valores de k son *6* y *7*.

• Si $k = 6$ obtenemos la solución $(a; j; n) = (2; 38; 60)$

• Si $k = 7$ obtenemos la solución $(a; j; n) = (19; 11; 70)$.

De esta forma, los posibles valores de a (la cantidad de adultos) son *2* y *19*, entonces el mínimo es *2*.

RPTA: B

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Al multiplicarse por *37* al número de varones que hay en un aula y sumarle *16* veces más el número de mujeres se obtuvo *999*. ¿Cuántos alumnos hay en total en el aula?

A) 27   *B) 17*   *C) 37*   *D) 47*   *E) 57*

02 Se quiere cambiar *9,6* soles en monedas de *20* y *50* céntimos. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá hacer esto? Considere que se emplean monedas de los dos tipos.

A) 9   *B) 10*   *C) 11*   *D) 12*   *E) 13*

03 Carmen al comprar un libro que cuesta *S/.18* lo hace con monedas de *S/.3* (suponiendo que existen) y la cajera le da vuelto con monedas de *S/.5* ¿De cuántas maneras diferentes se pudo realizar el pago, si Carmen tiene en total *S/.297?*

A) 25   *B) 20*   *C) 19*   *D) 16*   *E) 18*

04 Doña Luisa tiene la costumbre de repartir cierto número de caramelos entre sus bisnietos, *16* a cada bisnieto y *11* a cada bisnieta, ayer compró una bolsa con *275* caramelos, ¿podrá efectuar el reparto, si su respuesta es afirmativa, cuántas bisnietas tiene?

A) 9   *B) 10*   *C) 13*   *D) 7*   *E) 5*

05 En un aula se observó lo siguiente que en una prueba cada uno de los varones obtuvo *11* de nota y cada una de las mujeres *14*, si en total se obtuvo *750* puntos, ¿cuántas mujeres hay en el aula, sabiendo que la quinta parte del total de alumnos le gusta razonamiento matemático?

A) 30   *B) 15*   *C) 19*   *D) 24*   *E) 42*

06 Se dispone de *S/.100* para comprar *36* productos de *S/.1; S/.4* y *S/.12* cada uno, comprándose por lo menos *3* artículos de cada precio. ¿Cuántos productos cuyo valor es *S/.4* compró?

A) 9   *C) 10*   *B) 3*   *D) 15*   *E) 18*

07 Las monedas de un nuevo sol tienen como diámetro *2,5 cm* y los de *10* céntimos, *2 cm*. Miguel ubica las monedas en una mesa en forma alternada uno a continuación de otro (tangentes) k monedas, formando una línea recta de y metros ($y \in \mathbb{Z}$). Halle la menor cantidad de monedas de un nuevo sol.

A) 10   *B) 18*   *C) 30*   *D) 44*   *E) 71*

08 En una reunión asisten caballeros ya sea con una dama o con dos niños. Lo que se consumió en la reunión alcanza para *40* adultos o *60* niños.

¿Cuál es la máxima cantidad de personas que pudieron asistir a la fiesta?

A) 46   *B) 19*   *C) 48*   *D) 18*   *E) 62*

09 Durante un conferencia sobre el estudio de la matemática, se realizaron grupos de trabajo no mixtos, a los varones se les reunió en grupos de *17*, sobrando uno, y a las mujeres en grupos de *13* sobrando *10*, con los que sobraron se forma otro grupo, si el total de asistentes a la reunión fue de *221*, ¿cuántos varones estuvieron presentes en la conferencia?

A) 141   *B) 120*   *C) 101*   *D) 119*   *E) 131*

10 Para cubrir un piso rectangular se utilizaron cierto número de losetas, si el piso fuese de mayor dimensión tal que en el ancho se hubiesen empleado *7* docenas de losetas más y en el largo *5* docenas más, entonces se hubiese utilizado *97* docenas de losetas más. ¿Cuántas docenas de losetas hay en el largo del piso?

A) 6   *B) 5*   *C) 4*   *D) 3*   *E) 11*

11 Con *S/.518,7* se compraron aves, entre pavos a *S/. 16,15* cada uno, gallinas a *S/.12,35* cada una, pollos a *S/.11,05* cada uno. ¿Cuántas aves en total se

compraron?

A) 34 *B) 36* *C) 38*
D) 40 *E) 42*

(12) Una persona tiene una cierta cantidad de dinero entre monedas de *S/.5* y monedas de *S/.2*. Si el número de monedas de cada valor se intercambiase, la cantidad inicial se incrementaría en *S/.12*. Halle la mínima cantidad de monedas posibles que se utilizaron, si se utilizó por lo menos uno de cada uno.

A) 4 *B) 9* *C) 5*
D) 6 *E) 2*

(13) Para los premios de un concurso infantil se necesitaba comprar juguetes de *2* precios distintos. Los precios eran de *5* soles y *6* soles pero debía comprarse la mayor cantidad posible de juguetes. ¿Cuántos niños serían premiados, si se debía gastar exactamente *107* soles? A cada niño solo se le da un premio.

A) 24 *B) 19* *C) 15*
D) 21 *E) 20*

(14) En una Olimpiada los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón que están alineados en filas y columnas. Si al inicio el profesor les hace la indicación que saluden a cada concursante que estén junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y el profesor observa que se dieron *157* apretones de manos, ¿cuántos concursantes hay en la competencia?

A) 50 *B) 65* *C) 130*
D) 32 *E) 95*

(15) Luego de gastar exactamente la mitad de su dinero, Maribel observa que tiene tantos centavos como pesos tenía al entrar a la tienda y tantos pesos como la mitad de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero (expresado en centavos) tendría finalmente si lograse ganar tantos centavos como pesos tiene y tantos pesos como centavos tiene, sabiendo que la cantidad inicial es la menor posible? (*1* peso < > *100 ctv*).

A) 4999 *B) 14948*
C) 16499 *D) 19486*
E) 1797

(16) Un obrero gana *S/.30* por hora y trabaja *8* horas diarias, de lunes a sábado. Los domingos y feriados gasta diariamente *S/.210* mientras que los restantes días, sus gastos diarios ascienden a *S/.170*. ¿Cuántos feriados como mínimo hubo durante *118* días, si en dicho tiempo, el obrero logró ahorrar *S/.1820*?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

(17) Del dinero que tú me has dado, para pagar lo que le debes a él, sólo le entregué la mitad de lo que no le entregué, compré un auto y gasté la mitad de lo que no gaste, pero luego me obligaste a completar tu deuda, por lo que tuve que dar la mitad de lo que me quedó ¿qué parte de lo que yo tuve al inicio representa el costo del auto?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{3}{2}$ *C)* $\frac{2}{5}$ *D)* $\frac{2}{3}$ *E)* $\frac{5}{7}$

(18) En una comarca ha llovido sin interrupción y con la misma intensidad, día y noche, durante *30* días. Al empezar el temporal tres aljibes para acumular el agua de lluvia tenían la misma altura de agua en todos ellos. Se sabe que el primer aljibe, de *60* m^2 de superficie ha servido para abastecer a *20* personas durante los *30* días de lluvia, quedando luego vacío, el segundo, de *15* m^2 ha abastecido a *6* personas durante los *20* primeros días de lluvia hasta que queda vacío. ¿a cuántas personas abastecerá el tercero, de *75* m^2, que se ha vaciado en *25* días si se sabe que todas las personas consideradas consumen el mismo número de litros de agua por día. No se debe tener en cuenta el agua que recoger los aljibes pasado el instante en que su nivel se hace cero.

A) 26 *B) 25* *C) 27* *D) 30* *E) 45*

(19) Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se poso sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a *8/9* del enjambre; sólo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas que cayó imprudentemente en la trampa de la florecilla, de dulce fragancia. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?.

A) 70 *B) 71* *C) 72* *D) 98* *E) 200*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) El número de soles que pagué por cada caramelo, más el número de caramelos que compré hace un total de *40*. Si en la compra gasté *S/. 400*, ¿cuánto cuestan *10* caramelos?

A) S/. 180 *B) S/. 192* *C) S/. 200*
D) S/. 210 *E) S/. 220*

(02) Un rectángulo de dimensiones enteras, en metros, aumenta su área al doble de la que es cuando, tanto el largo como el ancho, aumentan en *1 m*. Calcule el perímetro del nuevo rectángulo,

A) 12m *B) 10m* *C) 8m*
D) 14m *E) 16m*

(03) Se ha comprado cierto número de plumones por *S/. 100*. Si el precio por unidad hubiese sido *S/. 1* menos se tendrían *5* plumones más por el mismo dinero. ¿Cuántos plumones se compró?

A) 15 *B) 18* *C) 10* *D) 20* *E) 16*

(04) La longitud de un terreno rectangular es el doble del ancho. Si la longitud se aumentara en *40 m* y el ancho en *6 m*, el área se duplicaría. Calcule las dimensiones del terreno en metros.

A) 25 y *50* *B) 30* y *60* *C) 40* y *80*
D) 20 y *60* *E) 30* y *80*

(05) Un peluquero atiende a *100* clientes por semana y cobra *S/. 5* por corte. Por cada incremento semanal de *S/. 1* en la tarifa, el peluquero pierde *10* clientes. Calcule el precio máximo que debería fijar de modo que sus ingresos semanales no sean

menores que los que él obtiene por una tarifa de *S/. 5*.

A) S/. 8 *B) S/. 19* *C) S/. 9*
D) S/. 10 *E) S/. 12*

06 Con los alumnos de un aula se formó un cuadrado compacto y sobraron *9* alumnos. Para que se forme un cuadrado compacto sin que sobre ningún alumno tendrían que haber *18* alumnos más como mínimo. ¿Cuántos alumnos hay en el aula?

A)152 B)168 C)169 D)172 E)178

07 Roymer compró telas de *2* tipos por el valor de *360* soles cada tipo; del primer tipo adquirió *6 m* más que del segundo. Si por cada metro de la tela del primer tipo hubiera pagado el precio del segundo, su gasto total sería de *S/. 180* más, pero si por cada metro de la tela del segundo tipo hubiera pagado el precio del primer tipo, el gasto total sería *S/. 120* menos. ¿Cuántos metros compró de cada tipo?

A) 8 m y *14 m* *B) 10m* y *16m*
C) 11 m y *17 m* *D) 14 m* y *20 m*
E) 12 m y *18 m*

08 Aníbal y Angie compraron una cierta cantidad de artículos. Cada artículo de Aníbal le costó tantos soles como el número de artículos que compró Angie aumentado en *3*, y cada artículo de Angie le costó tantos soles como el número de artículos de Aníbal aumentado en *5*. Si se sabe que Aníbal gastó *S/. 13* más que Angie y que la cantidad de artículos que compró Aníbal es el menor número primo posible, determine cuántos artículos compraron entre los dos.

A) 15 B) 23 C) 16 D) 31 E) 7

09 Se arrojan tres dados y al número que salió en el primero se le multiplica por dos y se le suma cinco. Este resultado, se le multiplica por cinco, luego se le suma lo que salió en el segundo dado y a todo se le multiplica por *10*. Finalmente, se le suma lo que salió en el tercer dado y se obtiene *763*. ¿Cuánto salió en cada dado?

A) 2; 1 y *3* *B) 4; 2* y *5* *C) 6; 1* y *3*
D) 5; 1 y *3* *E) 4; 6* y *1*.

10 La suma de las *2* cifras que componen un número es igual a *5*. Si se invierte el orden de las cifras de dicho número y se le suma *9*, entonces se obtiene el número original. ¿Cuál es el número original aumentado en *11*?

A) 25 B) 34 C) 43 D) 52 E) 11

11 Mis padres siempre anhelaron tener una docena de hijos, aunque no pudieron llegar a dicha cantidad. La mitad de mis hermanos son físicos y la tercera parte de mis hermanas son matemáticas. Si mis hermanos físicos y mis hermanas matemáticas suman *4*, ¿cuántos hijos somos?

A) 7 B) 8 C) 6 D) 3 E) 11

12 He pagado una deuda de *S/. 190*, con billetes de *S/. 10* y *S/. 20*. ¿Cuántos billetes como máximo podré colocar?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

13 Se quiere comprar cuadernos de dos precios distintos de *S/. 7* y *S/. 6*, cada uno. Si se gastó en total *S/. 167*, ¿de cuántas formas distintas se pudo realizar la compra?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14 En una granja se ha vendido pollos a *S/. 11* cada uno y patos a *S/. 13* cada uno. Si se recaudó en total *S/. 181*, ¿cuántas aves se vendieron?

A) 10 B) 15 C) 18 D) 21 E) 14

15 Luis compra mochilas y polos a *S/. 21* y *S/. 15* cada uno, respectivamente. Si gasta un total de *S/. 396* comprando un número total de artículos, cuya suma de cifras es máxima, ¿cuántas mochilas compró?

A) 24 B) 28 C) 26 D) 22 E) 30

16 Se quiere comprar juguetes de dos precios diferentes: de *S/. 5* y de *S/. 6* cada uno. ¿De cuántas formas diferentes se puede comprar los juguetes, si se debe gastar exactamente *S/. 107*?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 9

17 Cecilia le da a su hija Juana como propina *S/. 5* cada viernes, *S/. 10* cada sábado y *S/. 15* cada domingo. ¿Cuál es la máxima cantidad que Juana recibirá durante un mes de *30* días?

A) S/. 150 *B) S/. 160* *C) S/. 135*
D) S/. 145 *E) S/. 120*

18 Se dispone de *S/. 100* para comprar *40* juguetes de *S/. 1*; *S/. 4* y *S/. 12*, respectivamente. Si se compró por lo menos uno de cada precio, ¿cuántos juguetes de *4* soles se compró?

A) 3 B) 9 C) 10 D) 28 E) 15

19 Para la implementación de una biblioteca se han adquirido libros por un valor de *S/. 717*; algunos libros costaron *S/. 21* cada uno, otros *S/. 91* y otros *S/. 39*. Si se adquirió la mayor cantidad de libros, ¿cuál fue dicha cantidad?

A) 15 B) 21 C) 24 D) 18 E) 19

20 Pedro le dice a Juan: "Adivina cuáles son los tres números de las fichas que tengo escondidas, si multiplicadas dan *36* y sumadas dan *13*".

Juan le dice a Pedro: "¿Puedes darme alguna otra ayuda?"

Pedro responde: "Si al número de habitantes de tu pueblo lo dividimos por uno de esos números, da resto *6*". Con esta información Juan logra calcular los tres números. ¿Cuáles son?

A) 9; 3 y *1* *B) 9; 2* y *2* *C) 6; 6* y *1*
D) 6; 3 y *2* *E) 6; 2* y *5*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)D	4)B	5)D	6)E	7)E	8)A	9)B	10)C
11)E	12)E	13)C	14)B	15)C	16)C	17)C	18)B	19)E	20)B

EDADES

CAPITULO 027

OBJETIVOS

** Reforzar la capacidad de interpretación y simbolización para resolver problemas con enunciado.*

** Conocer las diferentes formas de resolver los problemas sobre edades.*

**Aplicar correctamente métodos prácticos como los cuadros de doble entrada que involucran las edades de dos o más personas.*

INTRODUCCIÓN :

Aunque el tiempo es universal, ningún hombre viviente puede decir qué es. Es tan insondable como el espacio. Nadie puede explicar dónde empezó la corriente del tiempo ni adónde va.

Por otro lado, hay ciertas características del tiempo que pueden entenderse. Se puede medir la aparente velocidad de su paso. Además, va en una sola dirección. Como el tránsito en una calle de dirección única, el tiempo va incesantemente en esa sola dirección: adelante, siempre adelante. Sea cual sea su velocidad de marcha, nunca se puede hacer que el tiempo retroceda. Vivimos en un presente momentáneo. Sin embargo, este presente está en movimiento y corre continuamente hacia el pasado. Nada lo detiene.

EL PASADO

El pasado se ha ido, es historia y jamás puede repetirse. Todo esfuerzo por hacer volver el pasado es tan irrealizable como tratar de hacer que una cascada salte cuesta arriba o que una flecha vuele de regreso al arco que la disparó.

El pasado o se ha ganado o se ha perdido. Ya no se tiene ningún dominio sobre él.

EL FUTURO

El futuro es diferente. Siempre corre hacia nosotros.

Nuestros relojes de la actualidad son indicadores de tiempo. Sirven como reglas para medir el tiempo. Otros gigantescos indicadores de tiempo son: "la Tierra al girar sobre su eje, la Luna al dar vueltas alrededor de la Tierra, y el Sol", estos sirven para que el hombre, desde su punto de vista en la Tierra, pueda estar informado del tiempo con exactitud. Así, como una multitud de objetos con propósitos entrelazados, esos cuerpos celestes se mueven en sus ciclos perfectos y miden interminable e infaliblemente el movimiento unidireccional del tiempo.

*Una rotación completa de la Tierra sobre su eje mide un día de **24** horas. En este sentido, un día se compone del tiempo diurno y el tiempo nocturno, un total de **24** horas. Con todo, al período diurno mismo, que por lo general tiene un promedio de **12** horas, también se le llama día.*

HORA

*La división del día en **24** horas se remonta a Egipto. La división moderna de la hora en **60** minutos se originó de las matemáticas babilonias, un sistema sexagesimal (basado en el número **60**).*

SEMANA

La semana procedía de la tradición judeocristiana que disponía descansar del trabajo cada siete días. No está basada en fenómenos naturales. Los romanos dieron nombre a los días de la semana en honor del Sol, la Luna y varios planetas.

MES LUNAR

Un mes lunar es un mes determinado según la luna nueva. Hay cuatro fases de la Luna, que componen una lunación de ***29*** días, ***12*** horas y ***44*** minutos como promedio. Basta con ver la forma de la Luna para saber aproximadamente qué día del mes lunar es.

Estaciones.

Estas se deben a que la Tierra está inclinada a un ángulo de **23,5°** con relación al plano de su viaje alrededor del Sol. El resultado de esto es que primero el hemisferio sur y, luego, seis meses después, el hemisferio norte estén inclinados hacia el Sol, de modo que las estaciones se suceden unas a otras en orden.

Este cambio de las estaciones proporciona variedad y contraste y controla los tiempos de plantar y cosechar.

Cómo pasa más rápido el tiempo

Hay un dicho que afirma: "Quien espera desespera".

Es cierto que cuando vigilamos el tiempo, cuando lo tenemos muy presente, cuando esperamos que algo suceda, entonces parece que el tiempo pasa con demasiada lentitud. No obstante, si estamos ocupados,

si estamos interesados y absortos en lo que hacemos, entonces verdaderamente parece que «el tiempo pasa volando». Además, en el caso de las personas mayores el tiempo parece que pasa mucho más rápido que en el de los jovencitos. ¿A qué se debe esto?

Un año añadido a la vida de un niñito de un año de edad significa un aumento de **100%** en las experiencias de la vida. Un año añadido a la vida de una persona de **50** años de edad significa solo **2%** más. Para el niño, un año parece un tiempo muy largo. Para la persona mayor, si está ocupada y tiene buena salud, los años parecen irse volando cada vez más aprisa.

DIÁLOGO ILUSTRATIVO

ALAN : ¿Cuántos años tiene mi futuro suegro?

MILEYDI: "x" años.

ALAN: ¿Cuántos años tuvo hace ***3*** años?

MILEYDI : ***3*** años menos , o sea $x-3$;

ALAN : ¿Cuántos años tendrá dentro de ***3*** años?

MILEYDI: ***3*** años más , o sea $x+3$.

ALAN : ¿Cuántos años tendría si hubiese nacido ***20*** años antes?

MILEYDI : ***20*** años más , o sea $x+20$.

ALAN: ¿Cuál es la edad de tu perro?

MILEYDI : Nació ***40*** años después que mi padre?

ALAN: Quieres decir que es menor que tu padre en ***40*** años , es decir que tiene $x-40$

MILEYDI : Perdóname querido , recién me acuerdo que la edad de mi padre es ***6*** veces la edad de mi perro.

ALAN : Tendré que plantear :

$$x=6\overbrace{(x-40)}^{\text{Edad del perro}}\ \text{Edad del perro}$$

$$\Rightarrow 48=x \qquad \Rightarrow 48-40=8 \text{ años}$$

MILEYDI: ¿Dentro de cuántos años la edad de mi padre será el triple de la de mi perro?

ALAN: Para saber , hay que plantear una ecuación , ayudándonos de un cuadro , para ordenar y entender mejor los datos y lo que nos piden.

	Tiene	*Dentro de "n" años*
Padre	*48*	*48 + n*
Perro	*8*	*8 +n*

(+n de Tiene a Dentro de "n" años; Padre = Triple de Perro)

$$48+n=3(8+n)\Rightarrow 12=n$$

MILEYDI: Me sorprendes , pero tú no me has dicho ¿cuál es tu edad?

ALAN : ¡Averígualo!

MILEYDI: ¿De qué manera?

ALAN: Yo tengo el cuádruple de la edad que tu padre tenía , cuando yo tenía ***2*** años.

MILEYDI: Deberé Plantear :

$\Rightarrow$ tú tienes $4(10)=40$ años

ALAN: ¿Qué es el método del aspa?

MILEYDI: Te explico con el siguiente ejemplo :

"Yo tengo ***25*** años y tú tienes ***40*** años y hace ***4*** años teníamos ***21*** y ***36*** años"

	Hace 4 años	*Hoy*
Yo	*21*	*25=61*
Tú	*36*	*40=61*

La suma de las diagonales, resulta lo mismo, además:

$$\begin{array}{r} 36\,- \\ 21 \\ \hline 15 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40\,- \\ 25 \\ \hline 15 \end{array}$$

Como observas el tema de edades está relacionado netamente con el planteo de ecuaciones, pero debido a la gran variedad de problemas y métodos prácticos de resolución, lo hacemos en un acápite aparte. Es evidente que lo más importante en el tema es el tiempo (pasado, presente y futuro) y desde luego hay que saber interpretar las siguientes expresiones:

	PASADO	*PRESENTE*	*FUTURO*
YO	*Tenía Tuve*	*Tengo*	*Tendré Tenga*
TÚ	*Tenías Tuviste*	*Tienes*	*Tendrás Tengas*
EL	*Tenía Tuvo*	*Tiene*	*Tiene Tenga*

CUANDO INTERVIENE UN SUJETO

Para este tipo de situaciones se sugiere utilizar un cuadro, con el propósito de razonar ordenadamente.

¡Veamos ahora una observación muy importante! Asumiendo que las edades de tres personas en el pasado, presente y futuro son :

3 años   7 años

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Yo	22	25	32
Tú	27	30	37
Él	14	17	24

Se cumple :

La diferencia de edades de dos personas en el transcurso del tiempo es constante :

EJEMPLO :

$$\begin{array}{r} 27 - \\ 22 \\ \hline 5 \end{array} = \begin{array}{r} 30 - \\ 25 \\ \hline 5 \end{array} \Rightarrow \text{Se duduce}$$

• Se concluye que la suma en aspas (de valores ubicados simétricamente) es constante

EJEMPLO :

22 ↗ 25 = 52

27 ↘ 30 = 52

|| → *Se deduce*

NOTA:

A continuación, se señalan algunos términos que se presentan en los enunciados y que nos sirven para reconocer en qué tiempo se encuentra la información brindada.

PASADO 1	PASADO 2	PRESENTE	FUTURO
Tuve	Tenía	Tengo	Tenga
Tuvo	Tenías	Tiene	Tendré
Tuvistes		Tienes	Tendrás
			Tengas

RELACIÓN CON EL AÑO DE NACIMIENTO

Si la persona que cumplió años :

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad actual} = \text{Año actual}$$

Si la persona aún no cumple años :

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad actual} = \text{Año actual} - 1$$

−3   +3

• *Hace 3 años*   *Hoy*   *Dentro de 3 años*

Tenía: 13   *Tengo: 16*   *Tendré: 19*

+3   −3

CUANDO INTERVIENEN LAS EDADES DE 2 O MÁS SUJETOS

Cuando intervienen 2 ó más personas

Tiempos / Personas	Pasado	Presente	Futuro
Yo	tenía	tengo	tendré
Tu	tenías	tienes	tendrás
Él	tenía	tiene	tendrá
etc.	etc.	etc.	etc.

En estas situaciones se recomienda la utilización de cuadros para facilitar la ubicación de los datos en sus respectivos tiempos .

Hace 4 años   *Dentro de 7 años*

	PASADO	PRESENTE	FUTURO
Yo	1	5	12
Tú	4	8	15
El	6	10	17

* Luego del cuadro anterior obtenemos las siguientes conclusiones :

$$1+8=4+5 \text{ ó } 5+15=8+12$$

La suma en aspa de los valores simétricos resulta lo mismo.

OBSERVACIÓN :

Se aplicará el método del aspa , en caso de que al llenar el cuadro de edades con las condiciones del

problema , nos faltase otra condición final para plantear la ecuación necesaria.

EJEMPLO 1 :

Pili tiene ***48*** años , su edad es el doble de la edad que tenía Mili , cuando Pili tenía la edad que ahora tiene Mili ¿Qué edad tiene Mili?

A)24 años ***B)30*** ***C) 26*** ***D)40*** ***E)36***

RESOLUCIÓN :

	TENÍA	TIENE
Pili	CUANDO x DOBLE	48
Mili	24	x

24 → SE DEDUCE

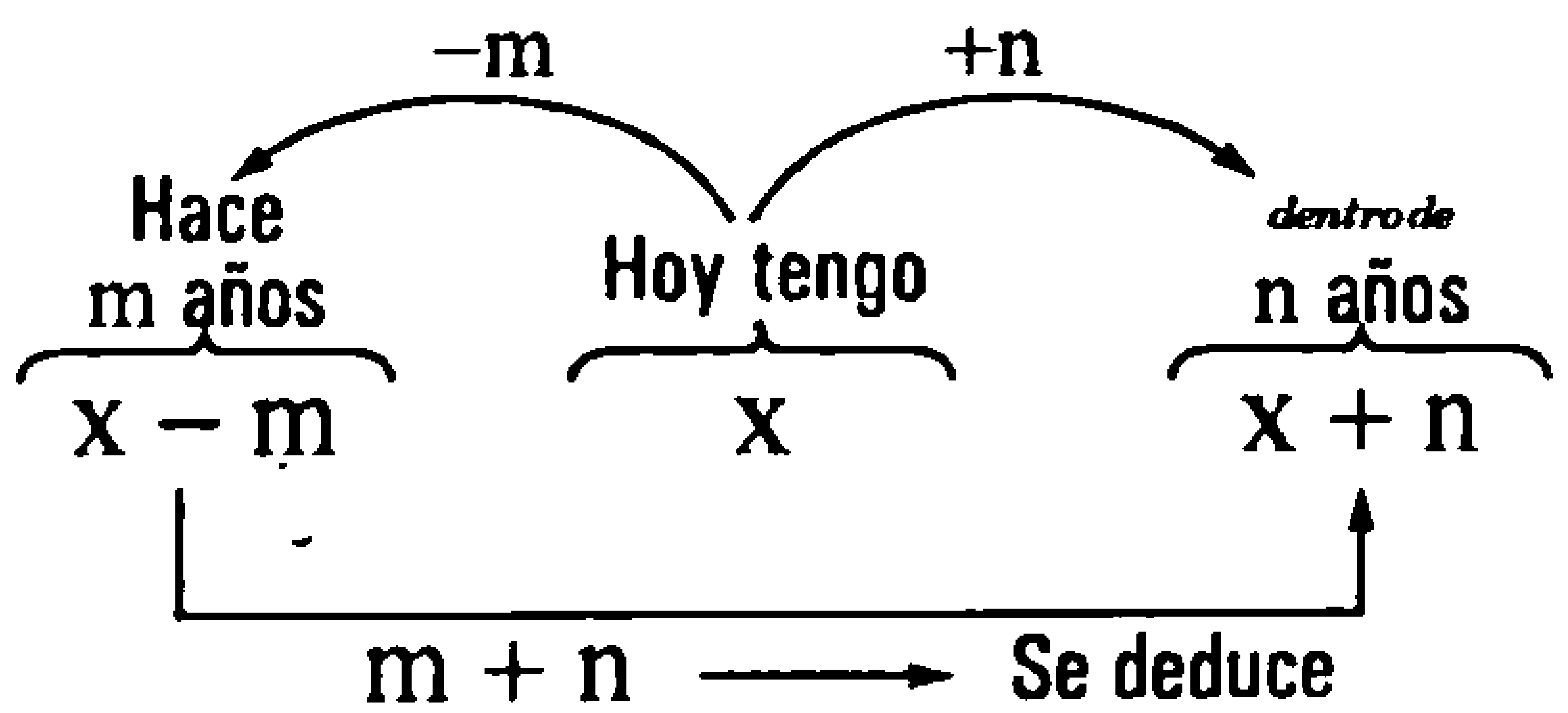
Ahora nos queda aplicar el método del aspa :

$$x + x = 24 + 48$$
$$\Rightarrow 2x = 72$$
$$\Rightarrow x = 36$$

* Generalmente, ***las sumas en aspa simétrica*** se utilizan cuando los datos de dos personas se presentan en distintos tiempos. Por ejemplo : *Yo tengo (presente) el doble de la edad que tú tenías (pasado)*

NOTAS :

* Sea "x" la edad actual de una persona, entonces dentro de "n" años tendrá "$x+n$" años y hace "m" años tenía "$x-m$" años.



* Cuando en un enunciado nos mencionan «hace...» o «dentro de...», se debe tomar como punto de referencia el tiempo de presente (hoy).

* Si una persona hubiera nacido n años después tendría n años menos .

* Si una persona hubiera nacido m años antes tendría m años más

* La edad que tenía ***A*** cuando ***B*** nació representa la diferencia de las edades entre ***A*** y ***B*** (***A*** es mayor que ***B***).

OBSERVACIONES IMPORTANTES :

$$* \ 40^2=1600 \Rightarrow \sqrt{1600}=40$$
$$* \ 41^2=1681 \Rightarrow \sqrt{1681}=41$$
$$* \ 42^2=1764 \Rightarrow \sqrt{1764}=42$$
$$* \ 43^2=1889 \Rightarrow \sqrt{1849}=43$$
$$* \ 44^2=1936 \Rightarrow \sqrt{1936}=44$$
$$* \ 45^2=2025 \Rightarrow \sqrt{2025}=45$$

PROBLEMAS SOBRE EDADES

En este Tipo de problemas , las cantidades que se calculan representan edades , tomando en cuenta los tiempos que se presentan (pasado , presente y futuro) y las personas que intervienen.

¿Qué pasaría si en un enunciado se indica dentro de «n» años o hace «m» años?

En estos casos, (en los cuadros correspondientes a los tiempos) en el cuadro correspondiente a pasado será preferible colocar hace ***«m»*** años y en el correspondiente a futuro colocar dentro de ***«n»*** años.

En mucho casos se pueden usar los términos ***«tengo», «tienes», «tenía», «tendré», «tendrás», etc.*** en lugar de ***«pasado», «presente»*** o ***«futuro».*** Esto deberá hacerse siempre y cuando el uso de éstos términos represente mejor el enunciado del problema.

EJEMPLO 2 :

Si hoy tengo ***30*** años , ¿que edad tenía hace ***5*** años y que edad tendré dentro de ***15*** años?

RESOLUCIÓN :

−5 (Presente → Pasado) , +15 (Presente → Futuro)

Pasado	Presente	Futuro
25	30	45

* Respuesta: ***25*** años y ***45*** años

EJEMPLO 3:

Dentro de ***15*** años tendré el triple de la edad que tenía hace ***11*** años.

RESOLUCIÓN :

−11 (Presente → Pasado) , +15 (Presente → Futuro)

Pasado	Presente	Futuro
x - 11	x	x + 15

* Sea x la edad actual del dato se tiene :

$$x+15=3(x-11) \Rightarrow x=24$$

$\Rightarrow$ Dentro de ***5*** años tendré ***24+5=29*** años

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En **1979** , un padre decía a su hijo: *"mi edad es el quíntuplo de tu edad , pero en el **2000** no será mas que el duplo"*. ¿En qué año nació el hijo y qué edad tendría el padre en el **2007**?

RESOLUCIÓN :

(21 de Pasado a Presente; 7 de Presente a Futuro)

	Pasado (1979)	Presente (2000)	Futuro (2007)
Padre	$x-21$	x	$x+7$
hijo	$y-21$	y	$y+7$

* Datos :

$$x-21=5(y-21)\ldots\ldots(I)$$

$$x=2y\ldots\ldots(II)$$

* De *(II)* en *(I)*:

$$2y-21=5y-21\times5 \Rightarrow y=28$$

* En *(II)*: $x=2(28)=56$
* El padre actualmente tiene **56** años , entonces dentro de **7** años tendrá **63** años.

PROBLEMA 2 :

La edad de una persona es **41** años y la de su hijo es **9**. Al cabo de cuántos años la edad del padre triplica la del hijo.

RESOLUCIÓN :

* Edad Padre = **41** ; edad Hijo = **9**

dentro de "x" años sus edades serán :

Edad Padre : $41+x$

Edad Hijo : $9+x$

* Luego : $41+x=3(9+x)$
* resolviendo : $x=7 \Rightarrow$ Debe transcurrir **7** años

PROBLEMA 3 :

Hace **10** años, la edad de Carlos era cuatro veces mayor que la de Pablo y , hoy día es solamente el doble. ¿Qué edad tiene Pablo?

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" la edad de Pablo y la edad de Carlos "$2x$"

y sus edades hace **10** años eran:

Edad de Pablo : $x-10$

Edad de Carlos : $2x-10$

* Luego : $2x-10=4(x-10)$
* Resolviendo : $x=15$

Osea que Pablo tiene **15** años.

PROBLEMA 4 :

Dentro de cuántos años las edades de **2** ; personas estarán en la relación de **6 a 5**, si sus edades actuales son 40 y 30 años respectivamente?

A) 35 B) 10 C) 15 D) 24 E) 20

RESOLUCIÓN :

* De los datos : (20 años)

Personas	Presente	Futuro
A	40	6(10)=60
B	30	5(10)=50

diferencia 10 años = diferencia 1(10) años

* Deben pasar **20** años .

RPTA :"E"

PROBLEMA 5 :

A Pepin se le pregunta por su edad , responde : "Si restas a la edad que tendré dentro de **10** años , la edad que tuve hace **10** años , obtendrás mi edad" ¿Cuántos años tiene Pepin?

A)5 años B)10 C)20 D)40 E)6

RESOLUCIÓN :

HACE 10 AÑOS	EDAD	DENTRO DE 10 AÑOS
$x-10$	x	$x+10$

* Según enunciado :

$$(x+10)-(x-10)=x$$

$$x+10-x+10=x \Rightarrow 20=x$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 6 :

Si al cuádruple de la edad que tendré dentro de **8** años, le restamos el doble de la edad que tenía hace **5** años , resultaría **19** años más el triple de mi edad ¿qué edad tengo?

A)18 años B)31 C)23 D)41 E)16

RESOLUCIÓN :

HACE 5 AÑOS	YO TENGO	DENTRO DE 8 AÑOS
$x-5$	x	$x+8$

* Según enunciado : $4(x+8)-2(x-5)=19+3x$

$$\Rightarrow 4x+32-2x+10=19+3x \Rightarrow 23=x$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 7 :

Yo nací en el año $\overline{19ab}$ y en *1980* tuve "*a+b*" años ¿en qué año tendré "a^2+b^2" años?

A)2052 *B)2038* *C)1999* *D)2000* *E)2006*

RESOLUCIÓN :

* Considerar :

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad Actual} = \text{Año Actual}$$

$\Rightarrow \overline{19ab} + a + b = 1980 \Rightarrow 1900 + \overline{ab} + a + b = 1980$

$\Rightarrow 10a + b + a + b = 80$

$\Rightarrow 11a + 2b = 80$ ....*(Tanteando)*

$\Rightarrow a = 6$ y $b = 7$

$\Rightarrow$ Nací en *1967* y cumpliré: $6^2+7^2=85$ años , en $1967 + 85 = 2052$

RPTA :"A"

PROBLEMA 8 :

Si al año en que tuve *20* años , le restamos el año en que cumplí *8* años , obtendrás la tercera parte de mi edad ¿Cuántos años tengo?

A)24 años *B)28* *C)20* *D)8* *E)36*

RESOLUCIÓN :

Año de Nacimiento	Año en que tuve 20	Año en que cumplí 8
N	$N+20$	$N+8$

* Según enunciado : $(N+20)-(N+8)=\dfrac{\text{mi edad}}{3}$

$$\Rightarrow 36 = \text{Mi edad}$$

RPTA:"E"

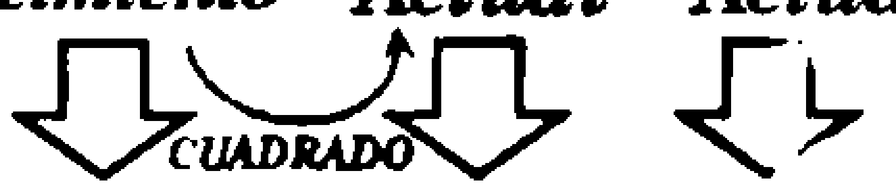
PROBLEMA 9 :

El año en que nació Scarly representa el cuadrado de su edad que tendrá en el *2070* ¿cuántos años tuvo en el *2030*?

A)10 *B)5* *C)25* *D)45* *E)16*

RESOLUCIÓN :

$$\text{Año de Nacimiento} + \text{Edad Actual} = \text{Año Actual}$$



$$E^2 + E = 2070$$

$$\Rightarrow E(E+1) = 45 \times 46$$

* Comparando : $E = 45$

$\Rightarrow$ Nació en el año $45^2=2025$

* Luego en el *2030* tuvo : $2030-2025=5$ años

RPTA:"B"

PROBLEMA 10 :

Sabiendo que tengo *44* años ¿Hace cuántos años tenía *4* años , más que *4* veces la edad que tenía cuando cumplí *4* años menos de la cuarta parte de mi edad actual?

A)6 *B)8* *C)12* *D)18* *E)4*

RESOLUCIÓN :

* Suponiendo que fue hace "*x*" años , luego en ese momento yo tenía :

$$44 - x = 4 + 4\left(\frac{44}{4} - 4\right) \Rightarrow 44 - x = 32 \Rightarrow 8 = x$$

RPTA:"B"

PROBLEMA 11 :

Si Rosy hubiera nacido *3* años antes , tendría el triple de la edad que tuviese si hubiese nacido *3* años después ¿Dentro de cuántos años tendrá **3** veces más de lo que tuvo hace *3* años?

A) 3 *B) 33* *C)6* *D)13* *E)7*

RESOLUCIÓN :

Edad actual ; x

* Si hubiera nacido 3 años antes , su edad sería *3* años más , es decir : $x + 3$

* Pero si hubiese nacido *3* años después , ahora tuviese *3* años menos , o sea : $x - 3$

* Según el enunciado :

$$x + 3 = 3(x-3) \Rightarrow x + 3 = 3x - 9$$
$$\Rightarrow 12 = 2x \Rightarrow 6 = x$$

* Dentro de "*y*" años cumpliré :

$6 + y = 3$ veces más $(x-3)$

$6 + y = 4(6-3) \Rightarrow y = 6$

RPTA"C"

PROBLEMA 12:

Dentro de *5* años , tu edad será a mi edad como *5* es a *4* y hace *5* años esa relación era como *3* es a *2* ¿cuántos años tengo?

A)5 años *B)15* *C)45* *D)20* *E)30*

RESOLUCIÓN :

	Hace 5 años	Hoy	Dentro de 5 años
Yo	$3k$	$3k+5$	$3k+10 \to 5$
Tú	$2k$	$2k+5$	$2k+10 \to 4$

$\Downarrow$ *Inicio*

* Según enunciado : $\dfrac{3k+10}{5} = \dfrac{2k+10}{4} \Rightarrow k=5$

* Luego , yo tengo : $3k + 5 = 3(5) + 5 = 20$

PTA: "D"

PROBLEMA 13:

Lucy tiene *30* años , su edad es el quíntuplo de la edad que tenía Any, cuando Lucy tenía la tercera parte de la edad actual de Any

¿Cuál es la edad actual de Any?

A)27 años *B)9* *C)18* *D)6* *E)30*

RESOLUCIÓN :

	TENIA	TIENE
Lucy	x	30
Any	6	$3x$

* *Método del aspa:*
$x+3x=6+30$
$x=9$
$\Rightarrow$ *Any tiene:*
$3(9)=27$ *años*

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

Yo tengo el doble de la edad que tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes , pero cuando tengas la edad que yo tengo , la suma de nuestras edades será *54* años. ¿Cuál es mi edad?

A)27 años *B)24* *C)39* *D)23* *E)36*

RESOLUCIÓN :

	Tenías, Tenía	Tengo Tienes	Tengas
Yo	y	$2x$	$54-2x$
Tú	x	y	$2x$

(suma: 54)

$I)\ y+y=x+2x \Rightarrow 2y=3x$

$II)\ 2x+2x=y+54-2x \Rightarrow 6x=y+54$

$\Rightarrow 4y=y+54 \Rightarrow y=18\ \ y\ x=12$

* Luego tengo : $2\,(12)=24$ años

RPTA:"B"

PROBLEMA 15 :

Un padre tiene *30* años y su hija *3*. ¿Dentro de cuántos años la edad de padre será el cuádruplo de la edad de su hija?

A)15 años *B) 3 años* *C) 5 años*
D) 6 años *E) 10 años*

RESOLUCIÓN :

	Hoy	Dentro de "n" años
Padre	30	$30+n$
Hija	3	$3+n$

CUADRUPLO

Según enunciado:
$30+n=4\,(3+n)$
$30+n=12+4n$
$6=n$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

Una familia consta de *11* personas y realizan una fiesta por cada cumpleaños. Estando todos reunidos en agosto del *2002* sumaron los años en que habían nacido y luego sumaron las edades de todos ellos, dando la suma total un resultado *22018*. ¿Cuántas fiestas faltan realizarse durante este año?

A)4 *B)7* *C)11* *D)8* *E)5*

RESOLUCIÓN :

Año actual : *2002*

* Suponiendo que todos ya cumplieron años , luego :

Año de Nacimieto	+	Edades	=	Año Actual
N_1	+	E_1	=	2002
N_2	+	E_2	=	2002
N_3	+	E_3	=	2002
⋮	⋮	⋮		
N_{11}	+	E_{11}	=	2002
A	+	B	=	22022

11 Sumandos

* Si todos ya hubiesen cumplido años , el resultado debió ser de *22022* , pero como el resultado real es de *22018*, quiere decir entonces que :

$22022-22018=4$ *Personas que aún no cumplen años todavía.*

$\Rightarrow$ Faltan *4* fiestas durante este año.

RPTA:"A"

PROBLEMA 17 :

En Junio de *1992* , *3* amigos: Carlos , Raúl y Mario suman sus edades a los años de su nacimiento , obtienen como respuesta *5 974*. Si Carlos nació en mayo y Raúl en octubre. ¿En qué mes nació Mario?

A) Abril *B) Marzo* *C) Julio* *D) Mayo* *E) Enero*

RESOLUCIÓN :

* Si los *3* ya hubieran cumplido años, la suma sería: $3\times1992=5976$, pero la suma es *5974*, eso quiere decir que $5976=5974=2$ personas todavía no cumplen años hasta junio , de donde uno de los que aún no cumple años es Mario , al observar las alternativas , concluiremos que Mario nació en Julio.

RPTA:"C"

PROBLEMA 18 :

Si mi edad es igual a la raíz cuadrada del año de mi nacimiento , ¿cuántos años cumpliré en el *2002*?

A) 52 *B) 64* *C) 66* *D) 71* *E) 80*

RESOLUCIÓN :

* Año de mi nacimiento : $\overline{19ab}$

Mi edad

* Datos : $x=\sqrt{\overline{19ab}}$ (x → *Mi edad*) $\Rightarrow x^2=\overline{19ab}$

* Luego : $1900 < x^2 < 2000$

$\Rightarrow 43,\ldots < x^2 < 44,\ldots$

* De donde : $x=44$

* Entonces nací en el año $44^2=1936$, luego en el *2002* cumpliré :

$2002-1936=66$ años

RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Cuando tu tenías *10* años yo tenia la mitad de la edad que tu tendrás cuando yo tenga el doble de la edad que tienes. Si nuestras edades suman *20* años. ¿Qué edad tengo?

A)12 ***B)14*** ***C)15*** ***D)10*** ***E)22***

RESOLUCIÓN:

	Tenía	Tengo	Tendré
YO	x	$(20-y)$	$2y$
TU	10	y	$2x$

* Del pasado y presente (sumando en aspa) :

$$x + y = 10 + (20 - y)$$
$$x = 30 - 2y \quad ....(I)$$

* El presente y futuro , sumando en aspa :

$$(20 - y) + 2x = y + 2y$$
$$x = 2y - 10 \quad ....(II)$$

* Igualando *(I)* y *(II)*: $30 - 2y = 2y - 10$

$$\Rightarrow 40 = 4y \Rightarrow 10 = y$$

Finalmente : Tengo = $20 - 10 = 10$ años

RPTA:"D"

PROBLEMA 20 :

Mi abuela me dice : «Que el *31* de diciembre del año en que sus *3* últimas cifras se obtenían al invertir las *3* últimas cifras del año de su nacimiento , su edad no pasaba de un siglo ¿Cuál será la edad de mi abuela en enero del *2000*? *(si es la mínima posible)*

A)96 ***B)98*** ***C)99*** ***D)100*** ***E)101***

RESOLUCIÓN :

Sabemos que :

Año actual– Año de Nacimiento = Edad actual

Según el enunciado :

$$\overbrace{\overline{19ab} - \overline{1ba9}}^{\text{Edad del la abuela}} \leq 100$$

* Se deduce que $b \neq 9$, luego $b = 8$.

$$\begin{array}{r} \overline{19a8} \\ -\ \overline{18a9} \\ \hline 99 \end{array}$$

* Para que la edad sea la mínima posible , $a = 9$.

* Luego el *31* de diciembre de *1998* tuvo *99* años , entonces la edad mínima en enero del *2000* será *100* años.

RPTA:"D"

PROBLEMA 21 :

Una persona nacida en el siglo *XX* tiene en *1998* tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento. Hallar su edad en el *2000*.

A)30 ***B)32*** ***C)34*** ***D)26*** ***E)20***

RESOLUCIÓN :

Año de Nacimiento+Edad Actual=Año Actual

$$\overline{19ab} + (1+9+a+b) = 1998$$

$\Rightarrow 11a + 2b = 88 \Rightarrow a = 8 \wedge b = 0$

$\Rightarrow$ En *1998* tendrán *18* años

* Luego en el *2000* cumplirá *20* años.

RPTA:"E"

PROBLEMA 22 :

Una ciudad fue fundada en el siglo *XX*. En el año en que se escribe con las mismas cifras del año de su fundación pero con las dos últimas cifras en orden inverso, celebraron tantos años como la suma de las dos últimas cifras del año de su creación. ¿Cuántos años celebraron en aquella fecha?

A) 15 ***B) 9*** ***C) 12*** ***D) 7*** ***E)17***

RESOLUCIÓN :

$$\overline{19ab} - \overline{19ba} = \overbrace{a + b}^{\text{Edad de la ciudad}} \Rightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = a + b$$

$$\Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow a = 5 \wedge b = 4$$

RPTA:"B"

PROBLEMA 23 :

Ana tiene *18* años , su edad es el triple de la edad que Diana tenía , cuando Ana tenía la mitad de la edad que tiene Diana. ¿Cuántos años tendrá Diana dentro de *20 años* ?

A)36 ***B)41*** ***C)32*** ***D)44*** ***E)52***

RESOLUCIÓN :

	Tenía	Tiene
Ana	x	18
Diana	6	$2x$

Por suma en aspa:
$x + 2x = 6 + 18$
$x = 8$

* Ahora Diana tiene $2(8) = 16$ ***años***

Luego dentro de *20* años tendrá : $16 + 20 = 36$ años

RPTA:"A"

PROBLEMA 24 :

La edad de María es la mitad de la edad de Miguel ; pero hace *20* años la edad de Miguel era el triple de la edad de María. ¿Qué edad tiene María?

A)20 ***B)80*** ***C)40*** ***D)60*** ***E)70***

RESOLUCIÓN :

	Hace 20 años	Hoy
María	$x - 20$	x
Miguel	$2x - 20$	$2x$

* Según enunciado :

$$2x-20=3(x-20)\Rightarrow x=40$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 25 :

Si la edad de un padre con la de su hijo suman *88* años y hace *12* años , la edad del padre era el triple de la edad que tenía el hijo. Calcular la edad del hijo hace 4 años.

A)12 *B)18* *C)28* *D)22* *E)24*

RESOLUCIÓN :

	Hace 12 años	Hoy
Padre	$3x$	$3x+12$
Hijo	x	$x+12$

(Hoy: suma = 88)

$$4x+24=88\Rightarrow x=16$$

* La edad del hijo será : $16+12=28$ años

Luego hace *4* años tuvo $28-4=24$ años

RPTA:"E"

PROBLEMA 26 :

Vlady le dice a Lenin : "Si hubieras nacido *2* años antes, tu edad sería respecto a la octava parte de la mía , como *"3"* es a *1*; pero si hubieras nacido *2* años después dicha relación sería como *1* es a *3*. Indicar la edad de Vlady.

A)8 años *B)24* *C)32* *D)16* *E)12*

RESOLUCIÓN :

* Sea *8L* la edad actual de Vlady , luego :

$$\frac{v+2}{L}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{v-2}{L}=\frac{1}{3}$$

(Restando ambas ecuaciones)

$$\frac{4}{L}=\frac{8}{3}\longrightarrow L=\frac{3}{2}$$

* Luego la edad de Vlady será : $8\left(\frac{3}{2}\right)=12$ *años*

RPTA: "E"

PROBLEMA 27 :

La suma de las edades del Papá y la mamá es *8* veces la suma de las edades de sus hijos , hace *3* años , la suma de las edades de los esposos era *10* veces la suma de las edades de sus hijos y, dentro de *7* años , la suma de las edades de los esposos será los $\frac{50}{9}$ de la suma de las edades de los hijos. ¿Cuántos hijos tienen?

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

RESOLUCIÓN :

* Sea *"n"* el número de hijos

* luego :

	Hace 3 años	Hoy	Dentro de 7 años
Suma de las edades de los esposos	$8S-2(3)$	$8S$	$8S+2(7)$
Suma de las edades de los "n" hijos	$S-3n$	S	$S+7n$

$$8s-6=10(s-3n) \qquad 8s+14=\frac{50}{9}(s+7n)$$

$$s=15n-3 \qquad s=\frac{175n-63}{11}$$

$$\Rightarrow 15n-3=\frac{175n-63}{11}$$

* Resolviendo $n=3$

RPTA:"C"

PROBLEMA 28 :

Dentro de *4* años la edad de Cuchito será un cuadrado perfecto , pero hace *3* años era el cuadrado perfecto anterior al inicial. ¿Cuál era su edad hace *6* años?

A) 4 años *B) 5 años* *C)6 años*
D)10 años *E)12 años*

RESOLUCIÓN :

Hace 3 años	Hoy	Dentro de 4 años
$x-3$	x	$x+4$
$(k-1)^2$		k^2

$$x+4=k^2$$
$$x-3=(k-1)^2$$

Resolviendo: $k=4; x=12$
$\Rightarrow$ Hace 6 años tuvo: $12-6=6$ años

PRTA: "C"

PROBLEMA 29 :

Nuestras edades suman *47* años ; sin embargo , cuando tenías *15* años yo tenía la edad que tendrás dentro de *2* años. ¿Qué edad tienes?

A)30 *B)20* *C)10* *D)15* *E)18*

RESOLUCIÓN :

	Pasado	Hoy	Futuro
Yo	$x+2$	$47-x$	
Tú	15	x	$x+2$

(Hoy: Suman 47)

Suma de aspa:
$x+2+x=47-x+15$
$3x=60$
$x=20$

RPTA:"B"

PROBLEMA 30 :

Cuando tengas mi edad , yo tendré lo que tú tendrás cuando yo tenga *35* años. Si cuando naciste yo tenía *10* años , ¿qué edad tengo?

A) 25 *B)15* *C)10* *D)35* *E)30*

RESOLUCIÓN :

	Cuando naciste	Tengo Tienes	Tengas Tendré	Tendrás
Yo	10	x	25	35
Tú	0		x	25

Se deduce: (por formas de edades)

* Por la suma en aspa :

$$25+25=x+35 \Rightarrow 15=x$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 31 :

Alex le dice a Betty. Cuando yo nací , tu tenías ***6*** años. Cuando César nació yo tenía la tercera parte de lo que tú tenías cuando yo nací , pero cuando nació David , César tenía el doble de lo que yo tenía cuando César nació , pero cuando David tenga un año menos de lo que yo tenía cuando David nació. ¿Qué edad tendrá César en ese momento?

A)11 B)17 C)9 D)5 E) 6

RESOLUCIÓN :

	Alex nació	César nació	David nació	David tenga
Alex (Yo)	0	2	x	
Betty (Tú)	6			
César		0	4	y
David			0	$x-1$

(TERCERA; DOBLE)

Suma en aspa :

I) $2+4=0+x$ *II)* $4+x-1=0+y$

$6=x$ $9=y$ **RPTA:"C"**

PROBLEMA 32 :

La edad de Javier es los ***3/2*** de la edad de Luis. Si Javier hubiera nacido , ***10*** años antes y Luis ***5*** años después, entonces la razón de ambas edades sería ***16/5*** de la razón que habría si Javier hubiera nacido 5 años después y Luis ***10*** años antes. ¿Qué edad tuvo uno de ellos , cuando nació el otro?

A)10 B)20 C)15 D)16 E)5

RESOLUCIÓN :

Edad de Javier : J

Edad de Luis : L

$$J=\frac{3L}{2}$$

$$\frac{J}{3}=\frac{L}{2}\begin{cases}J=3k\\L=2k\end{cases}$$

II) Según enunciado :

$$\frac{3k+10}{2k-5}=\frac{16}{5}\left(\frac{3k-5}{2k+10}\right)\Rightarrow k=10$$

* Piden la diferencia de edades: $3k-2k=k=10$

RPTA:"A"

PROBLEMA 33 :

Tú tienes la mitad menos ***5*** años de la edad que yo tendré cuando tú tengas lo que yo tenía cuando tú tenías la cuarta parte de la edad que yo tuviese , si tendría ***10*** años más de los que yo tendré ; pero si yo tuviese ***10*** años más de los que tendré y tú los que te he dicho que tienes , entonces entre ambos tendríamos ***110*** años. ¿Qué edad tengo?

A)50 B)65 C)55 D)56 E)54

RESOLUCIÓN :

	Tenía Tienes	Tengo Tienes	Tendré Tengas	Tuviese, 10 años más
Yo	y	z	$2x$	$2x+10$
Tú	$\frac{2x+10}{4}$	$x-5$	y	

I) Según enunciado :

$$2x+10+x-5=110 \Rightarrow x=35$$

II) La suma en aspa : $y+y=\frac{2x+10}{4}+2x$

Como $x=35 \Rightarrow y=45$

III) Suma en aspa : $z+y=x-5+2x$

* Reemplazando : $z=55$

RPTA:"C"

PROBLEMA 34 :

En el año ***2000*** un profesor sumó los años de nacimientos de ***25*** alumnos de un salón y luego las edades de todos los estudiantes , en seguida sumó ambos resultados y obtuvo ***49993*** ¿cuántos estudiantes todavía no cumplen años en dicho año?

A)3 B)17 C)13 D)2 E)7

RESOLUCIÓN :

* Sumando independientemente a cada uno :

$$\text{Año de nacimiento} + \text{Edad} = 2000 \text{ ó } 1999$$

2000 si cumplió años y ***1999*** si todavía no cumple , suponiendo que los ***25*** alumnos hubieran cumplido años, entonces la suma total sería :

$$25\left(\begin{matrix}\text{Años de}\\\text{nacimiento}\end{matrix}\right)+25\left(\begin{matrix}\text{Edades}\\\text{actuales}\end{matrix}\right)=25(2000)=50000$$

* Pero en realidad la suma total es ***49993*** , eso se debe a que : $50000-49993=7$

* No han cumplido años en el ***2000***

RPTA:"E"

PROBLEMA 35 :

En ***1918*** , la edad de un padre era ***9*** veces la edad de su hijo; en ***1923*** , la edad del padre fue el quíntuplo de la de su hijo. ¿Cuál fue la edad del padre en ***1940***?

A)66 B)72 C)67 D)70 E)57

RESOLUCIÓN :

+5 +17

	1918	1923	1940
Padre	$9x$	$9x+5$	$9x+22$
Hijo	x	$x+5$	

* Según enunciado :

$9x+5=5(x+5)$

$\Rightarrow 9x+5=5x+25 \Rightarrow x=5$

$\Rightarrow 9x+22=9(5)+22=67$

RPTA: "C"

PROBLEMA 36 :

Paulina tuvo su primer hijo a los ***21*** años , a los ***27*** años su tercer hijo ; a fines de ***1995*** la suma de edades de dichos hijos es ***32*** años. ¿En que año nació Paulina?

A)1945 B)1955 C) 1962
D)1964 E)1948

RESOLUCIÓN :

+6 +x

	Cuando nació el primero	Cuando nació el tercero	1995
Paulina	21	27	27 +x
1er hijo	0	6	6 +x
3er hijo		0	x

$6+2x=32$ (dato) $\Rightarrow x=13$

* Entonces Paulina en ***1995*** tuvo :

$27+13=40$ años ,

* Luego nació en : $1995-40=1955$

RPTA:"B"

PROBLEMA 37 :

La edad que tú tienes es la edad que yo tenía , cuando él tenía la octava parte de lo que tendré , y cuando tu tengas lo que yo tengo , el tendrá ***6*** años más de lo que yo tuve. Si lo que tuve es ***6*** años más de lo que él tiene y ***12*** años más de lo que tuviste. ¿Qué edad tengo?

A) 36 B)38 C)40 D)37 E)42

RESOLUCIÓN :

	TENÍA TUVISTE TUVE	TENES, TENGO	TENDRÉ TENGAS, TENDRÁ
Yo	x	z	$8y$
TÚ	$x-12$	x	z
ÉL	y	$x-6$	$x-6$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-18=y+x.......(\alpha) \\ 2x+6=9y............(\beta) \\ 2x=x-12+z.......(\theta) \end{array}\right\}$$ Resolviendo el Sistema: $z=36$

RPTA:"A"

PROBLEMA 38 :

Si ***3*** veces la edad de mi hermano es ***2*** veces mi edad , y hace ***3*** años ; ***3*** veces su edad era la mía. ¿Cuántos años tengo?

A)6 B)9 C)4 D)12 E)15

RESOLUCIÓN :

+3

	Hace 3 años	Hoy
Yo	$3x$	$3x+3$
Mi hermano	x	$x+3$

Según enunciado

$3(x+3)=2(3x+3)$

$\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow$ Tengo:

$3(1)+3=6$años

RPTA:"A"

PROBLEMA 39 :

Lenin el "Supersticioso" tendrá su primer hijo en el primer año que sea cuadrado perfecto , para que de esa manera su hijo muera en un año que también sea cuadrado perfecto ¿Cuántos años , vivirá el hijo de Lenin? (Siglo actual ***XXI***)

A)91 B)72 C)81 D)100 E)64

RESOLUCIÓN :

* Debemos encontrar números que elevados al cuadrado sean ***2000*** y algo más , por un tanteo adecuado tendremos :

$30^2=900 \quad 40^2=1600 \quad 50^2=2500$

Probemos con un intermedio entre ***40*** y ***50*** , que será: $45^2=2025 \Rightarrow$ "Lo deseado" y el siguiente cuadrado será : $46^2=2116$

* Luego , se deduce que el hijo de Lenin nacerá en el ***2025*** y morirá en el ***2116*** , entonces vivirá :

$2116-2025=91$ años

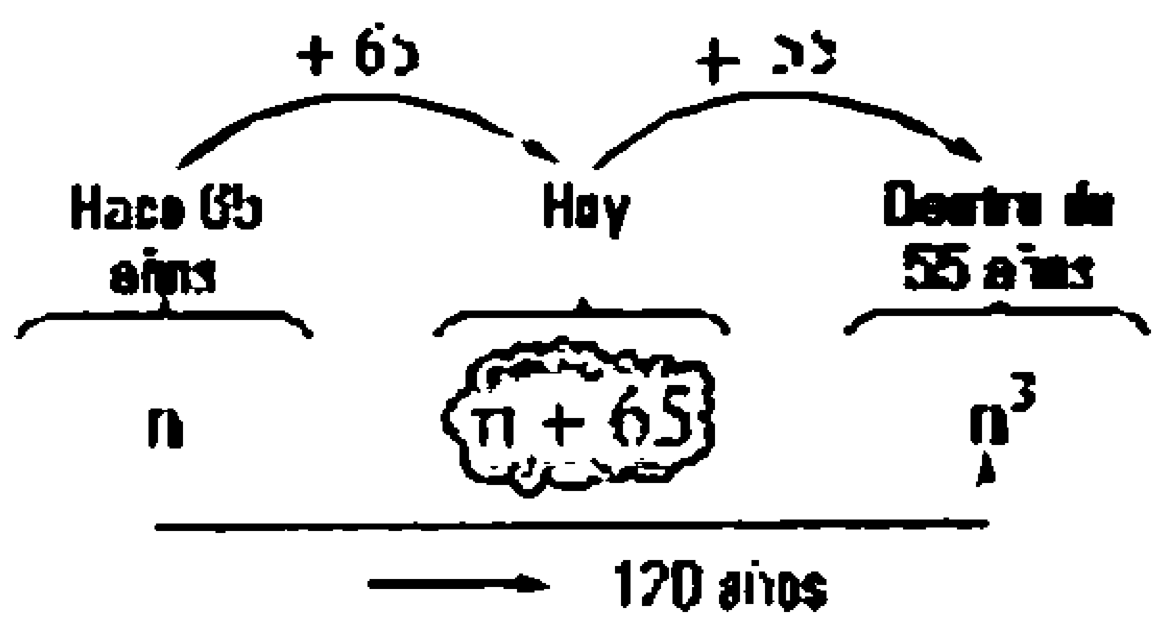
RPTA: "A"

PROBLEMA 40:

La edad de un elefante será dentro de ***55*** años , un cubo perfecto , hace ***65*** años , su edad era la raíz cúbica de ese cubo. Indicar la suma de cifras de la edad de dicho paquidermo.

A) 2 B) 13 C) 7 D) 6 E) 14

RESOLUCIÓN :



* Del esquema :

$$n+120=n^3 \Rightarrow n^3-n=120$$

$$n(n^2-1)=120$$

$$n(n+1)(n-1)=120$$

* Acomodando adecuadamente :

$$(n-1)\,n\times(n+1)=4\times5\times6$$

* Por comparación : $n=5$
* Entonces , la edad actual del elefante es :

$5+65=70$ años

* Piden : $7+0=7$

RPTA :"C"

PROBLEMA 41:

Yo tengo lo que él tenía , cuando yo tenía lo que tú tienes , si el tiene tantos años como tú y yo tenemos juntos ; luego el producto de las edades de lo que yo tenía y tú tenias es :

A)10 B)28 C)25 D)0 E)Faltan datos

RESOLUCIÓN :

	Tenía Tenias	Tiene Tengo Tienes
YO	y	x
TU		y
EL	x	$x+y$

Se deduce que es "o". (Aplicando la suma en aspa)

* Piden : $y\times0=0$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42:

Si al año en que cumpliré los *30* , le restas el año actual, obtendrás mi edad actual , la cual será :

A)20 años . B)15 C)25 D)30 E)60

RESOLUCIÓN :

* Sea el año en que nací : "N"
* Sea mi edad actual : "E" años

AÑO QUE NACÍ	AÑO ACTUAL	AÑO QUE CUMPLÍDOS
N	$N+E$	$N+30$

* Según enunciado :

$$(N+30)-(N+E)=E$$

$$\Rightarrow 30-E=E \Rightarrow E=15$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 43 :

Hace *10* años tenía la mitad de la edad que tendré dentro de *10* años. ¿Dentro de cuántos años tendré el triple de la edad que tenía hace *5* años?

A)47 B)45 C)50 D)29 E)33

RESOLUCIÓN :

	Hace 10 años	Actual	Dentro de 10 años
Edad	$x-10$	x	$x+10$

(−10, +10; La mitad)

$$x-10=\frac{x+10}{2} \Rightarrow x=30$$

Hace *5* años tenía : $30-5=25$

* Para tener el $3(25)=75$

Debe transcurrir $75-30=45$ años

RPTA: "B"

PROBLEMA 44:

¿Cuántos años tiene una persona , sabiendo que la raíz cuadrada de la edad que tenía hace *4* años más la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de *9* años suman *13*?

A)40 B)21 C)37 D)30 E)22

RESOLUCIÓN :

	Hace 4 años	Actual	Dentro de 9 años
Edad	$x-4$	x	$x+9$

* Según enunciado : $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+9}=13$
* Resolviendo : $x=40$

RPTA:"A"

PROBLEMA 45 :

Una persona tenía "x" años de edad hace "3" años. Su edad "3" años después de hoy será expresado por :

A)x + 3 B)x − 3 C)x − 6 D)6 − x E)x + 6

RESOLUCIÓN :

(+3, +3)

	Hace "3" años	hoy	"3" Después de hoy
Edad	x	$x+3$	$x+6$

RPTA:"E"

PROBLEMA 46 :

Cuando *A* nació , *B* tenía *6* años y cuando *C* nació , *A* tenía *9* años. Ahora la edades de los tres suman *30* años. ¿Cuántos años tiene el mayor?

A)16 B)19 C)17 D) 24 E)31

RESOLUCIÓN :

	Cuando Nació "A"	Cuando nació "C"	Ahora
A	0	9	$x-6$
B	6	15	x
C		0	$x-15$

(+) $=30$

$3x-21=30 \Rightarrow x=17$

RPTA: "C"

COMENTARIO :

El "*15*" se deduce ya que la diferencia de edades es constante $6-0=15-9$. Luego se deduce que el mayor es "*B*" y éste le lleva $15-9=6$ años a "*A*" y *15* años a "*C*"

PROBLEMA 47 :

Las edades de *3* jóvenes están en progresión aritmética creciente cuya suma es *39* , si la suma de sus cuadrados es *515* , la edad del menor es :

A)11 B) 13 C) 15 D) 17 E)19

RESOLUCIÓN :

* Sean las edades : $\overbrace{x-r,\ x,\ x,+r}^{\text{En progresión Aritmética}}$

* Según enunciado :

I) $x-r+x+x+r=39 \Rightarrow x=13$

II) $(13-r)^2+13^2+(13+r)^2=515$

$r=2 \Rightarrow$ Edad de menor : $13-2=11$ años

RPTA: "A"

PROBLEMA 48 :

La edad en años de un elefante es mayor en *31*, que el cuadrado del número "*k*" y menor en *2* que el cuadrado del número siguiente a "*k*" ¿Cuántos años tiene el elefante?

A)256 B) 287 C) 289 D) 301 E) 304

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{k^2}_{\text{Cuadrado de un número}} \xrightarrow{+31} \underbrace{(k^2+1)}_{\text{Edad Actual}} \xrightarrow{+2} \underbrace{k^2+31}_{\text{Cuadrado del número siguiente}}$$

$\Rightarrow k^2+31+2=(k+1)^2 \Rightarrow k=16$

* Edad del elefante : $16^2+31=287$

RPTA:"B"

PROBLEMA 49 :

La edad de Rulo dentro de cuatro años será un cuadrado perfecto. Hace *8* años su edad era la raíz de ese cuadrado perfecto. ¿Qué edad tendrá Rulo dentro de *10* años?

A)20 B)21 C)23 D)25 E)22

RESOLUCIÓN :

$\text{Hace 8 años} \xleftarrow{-8} \text{Actual} \xrightarrow{+4} \text{Dentro de 4 años}$

	Hace 8 años	Actual	Dentro de 4 años
Edad	$x-8$	x	$x+4$

Raíz cuadrada Cuadrado

* $x-8=\sqrt{x+4} \Rightarrow x=12$

* Dentro de *10* años tendrá : $12+10=22$

RPTA: "E"

PROBLEMA 50 :

La diferencia de los cuadrados de las edades de *2* personas es *37*. Hallar las edades que tuvieron, cuando la edad del mayor fue el doble de la del menor.

A)16 y 8 B)18 y 9 C)2 y 1 D)17 y 5 E)20 y 10

RESOLUCIÓN :

* Sean "*x*" e "*y*" las edades , luego : $x^2-y^2=37$

$$(x+y)(x-y)=37\times 1$$

* Entonces por comparación :

$$x+y=37$$
$$x-y=1$$
$$2x=38$$
$$x=19 \text{ e } y=18$$

* Luego hace "*n*" años , ocurrió que :

$$19-n=2(18-n) \Rightarrow n=17$$

* Sus edades fueron : *2* y *1* año.

RPTA: "C"

PROBLEMA 51:

Mily tiene *x* años , la raíz cuadrada del año en que su bisabuelo nació más la raíz cuadrada del año cuando murió , es igual a la edad cuando murió. ¿A qué edad murió el bisabuelo? (siglo actual: *XX*)

A)72 B)89 C)114 D)85 E)98

RESOLUCIÓN :

E: Edad cuando murió el bisabuelo

A: Año en que nació

$\Rightarrow$ El año en que murió será : $A+E$

* Según enunciado :

$$\sqrt{A}+\sqrt{A+E}=E \Rightarrow \sqrt{A+E}=E-\sqrt{A}$$

* Elevando al cuadrado: $A+E=E^2-2E\sqrt{A}+A$

* Despejando : $A=\left(\dfrac{E-1}{2}\right)^2$

* Consideremos que :

$$1900<\left(\frac{E-1}{2}\right)^2<2000 \Rightarrow 43,...<\frac{E-1}{2}<44,...$$

$$\Rightarrow 87,....< E<89,... \qquad \Rightarrow E=89$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 52 :

Hace "*n–s*" años la edad de *A* era "*n*" veces la edad de *B*. Dentro de "*n+s*" años solamente será "*s*" veces la edad de *B*. La edad que tenia *B* hace "*n–s*" años fue :

A) $\frac{2n(s+1)}{n-s}$ B) $\frac{2n(s-1)}{n-s}$ C) $\frac{2n(n+1)}{s-1}$

RESOLUCIÓN :

+(n–s) +(n–s)

	Hace (n–s) años	Hoy	Dentro de (n+s) años
A	nx	$nx+n-s$	$nx+2n$
B	x	$x+n-s$	$x+2n$

A=nB (Hace) A=sB (Dentro de)

* Según última condición :

$$A=sB \Rightarrow nx+2n=s(x+2n)$$

$$\Rightarrow nx+2n=sx+2ns \Rightarrow nx-sx=2ns-2n$$

$$\Rightarrow x(n-s)=2n(s-1) \Rightarrow x=\frac{2n(s-1)}{n-s}\ \left(\text{Lo que piden}\right)$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 53 :

Lo que se cuenta sucedió en *1932* tenía yo entonces tantos años como expresan las dos últimas cifras del año de mi nacimiento. al poner en conocimiento de mi abuelo esta coincidencia , me dejo impresionado al contestarme que con su edad ocurría lo mismo»

¿Cuántos años tenía el abuelo y cuántos años tenía el nieto en *1932*?

A) 16 y 66 años B) 7 y 90 años C) 19 y 93 años D) 15 y 50 años E) 18 y 92 años

RESOLUCIÓN :

* Considerar :

Año actual – Año de Nacimiento = Edad Actual

* Sean $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ las edades que tuvieron en ese entonces el nieto y el abuelo respectivamente.

* Según los datos de lo sucedido :

$$1932-\overline{19ab}=\overline{ab} \Rightarrow 32-\overline{ab}=\overline{ab}$$

* De donde : $\overline{ab}=16$

* Lo mismo sucedia con la edad del abuelo :

$$1932-\overline{18cd}=\overline{cd} \Rightarrow 132-\overline{cd}=\overline{cd} \Rightarrow \overline{cd}=66$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 54:

En *1920* , la edad de Alex era el doble de la edad de Rubén. en *1928* la edad que tenga Alex será el triple de la edad que tenía Rubén en *1912*. En qúé año nació Alex?

A) 1850 B) 1852 C) 1856 D) 1860 E) 1864

RESOLUCIÓN :

–8 +8

	1912	1920	1928
Alex	$2x-8$	$2x$	$2x+8$
Rubén	$x-8$	x	$x+8$

* Según enunciado :

$$2x+8=3(x-8) \Rightarrow x=32$$

* En *1920* Alex tenía $2(32)=64$ años ,

* Luego nació en : $1920-64=1856$

RPTA: "C"

PROBLEMA 55 :

Un hijo le dice a su padre : "La diferencia entre el cuadrado de mi edad y el cuadrado de la edad de mi hermano es *95*". El padre le contesta: "Es la misma diferencia de los cuadrados de mi edad y la de tu madre". ¿Qué edad tenía el padre cuando nació su hijo mayor?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

RESOLUCIÓN :

* Planteando directamente :

$$P^2-M^2=95 \qquad\qquad H_1^2-H_2^2=95$$

$$(P+M)(P-M)=95\times 1 \qquad\qquad (H_1+H_2)(H_1-H_2)=19\times 5$$

$$\begin{array}{r} H_1+H_2=19 \\ H_1-H_2=5 \\ \hline 2H_2=24 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} P+M=95 \\ P-M=1 \\ \hline 2P=96 \end{array}$$

$$H_1=12 \text{ y } H_2=7 \qquad\qquad P=48 \text{ y } M=47$$

* Piden la diferencia de las edades del padre y la del hijo mayor : $48-12=36$

RPTA:"C"

PROBLEMA 56 :

Es sabido que los gatos tiene siete vidas pero "Cuchita" gata techera pensó cierta noche : "hoy termina mi segunda vida y en todos mis años he hecho lo que otros hacen en sus siete vidas". Si el número de años que ella lleva vividos es igual a la cuarta parte del número de meses vividos , menos *6*. ¿Cuántos años dura la una de las vidas de Cuchita?

A) 1.5 B) 3 C) 4 D) 6 E) 4,5

RESOLUCIÓN :

* # de años por vida : x
* Edad en años de Cuchita : $2x$
* Edad en meses de Cuchita : $12(2x) = 24x$
* Según el enunciado :

$$2x=\frac{24x}{4}-6 \Rightarrow 6=6x-2x \Rightarrow x=1,5$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 57 :

Cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes, tú tenías la edad que él tenía cuando tu naciste. Si hoy tengo *35* años y él tiene el cuádruple de lo que tenía cuando naciste. ¿Qué edad tiene?

A)10 B)12 C)14 D)16 E)30

RESOLUCIÓN :

	Cuando Tú naciste	Yo tenía	Tienes Tengo Tiene
Yo		x	35
Tú	0	y	$2x-3y$
Él	y	$2y$	$4y$

Se Deduce

* Falta considerar: $x=\frac{3y}{2}$
* Además :

$$x+2x=y+35 \Rightarrow 3x=y+35 \Rightarrow 3\left(\frac{3y}{2}\right)=y+35$$

* Resolviendo : $y=10$
* Piden tu edad : $3y=3(10)=30$ *años*

RPTA:"E"

PROBLEMA 58 :

Cuando Andrés nació , César tenía el triple de la edad que tenía Luis , en ese entonces. Cuando nació Daniel , Andrés tenía el doble de lo que tenía Luis cuando nació Andrés. Cuando nació Edwin , Daniel tenía la edad que tenía César cuando nació Andrés y cuando Edwin tenga la edad que tenía Luis cuando nació Daniel , las edades que tengan en ese momento Luis y César sumarán *120* años. Cuántos años tenía Andrés cuando nació Edwin.

A)30 B)28 C)36 D)32 E)24

RESOLUCIÓN :

	Cuando Nació Andrés	Cuando Nació Daniel	Cuando Nació Edwin	Cuando Edwin Tenga
Andrés	0	$2x$	$5x$	
Luis	x	$3x$	$6x$	$9x$
César	$3x$	$5x$	$8x$	$11x$
Daniel		0	$3x$	
Edwin			0	$3x$

* Lo sombreado ha sido colocado utilizando mentalmente "el método del aspa".
* Según último dato : $9x+11x=120 \Rightarrow x=6$
* Piden : $5x=5(6)=30$ años

RPTA: "A"

PROBLEMA 59 :

Javier le dice a Lidia : la suma de nuestras edades es *46* años y tu edad es el triple de la edad que tenias cuando yo tenia el triple de la edad que tuviste cuando yo nací. Entonces Lidia tiene actualmente :

A) 12 años B) 34 años C) 48 año
D) 24 años E) 50 años

RESOLUCIÓN :

* Se observa que hay tres tiempos :

	Cuando yo nací Tuviste	Tenía Tienes	Hoy
Javier (yo)	0	$3y$	$46-3x$
Lidia (Tú)	y	x	$3x$

* Aplicando la suma en aspa :

$$0 + x = y + 3y \text{ ....} (\alpha)$$

$$3y + 3x = x + 46-3x \text{ ....} (\beta)$$

* (α) en (β) : $3y + 3(4y) = 46 - 2\,(4y)$

$$\Rightarrow y= 2 \;y\; x = 8$$

* Piden la edad de Lidia que será : $3x = 3(8) = 24$

RPTA: "D"

PROBLEMA 60:

La edad de Oscar y su esposa , es seis veces la suma de las edades de sus hijos , hace *2* años esta suma era diez veces la de sus hijos , y dentro de *6* años será , tres veces la de sus hijos, ¿Cuántos hijos tiene?

A)6 B)3 C)5 D)4 E)7

RESOLUCIÓN :

	Hace 2 años	Hoy	Dentro de 6 años
Oscar y su esposa	$6x-2(2)$	$6x$	$6x+6(2)$
Sus hijos	$x \quad 2n$	x	$x+6n$

$-2(n)$ $\quad -6(n)$ → *Hijos*

* Según condiciones :

$$6x-4=10(x-2n) \text{ ....} (I)$$

$$6x + 12=3(x + 6n) \text{ ....} (II)$$

* Resolviendo el sistema se obtiene : $n = 3$

RPTA:"B"

PROBLEMA 61 :

Elvira le dice a Paola: "Nuestras edades son proporcionales a los números *3* y *4* respectivamente. Además, yo tengo la edad que tú tenías cuando mi padre tenía la edad de tu padre. Ahora bien, cuando tu padre tenga la edad de mi padre, mi edad será la mitad de la edad que tú padre tenía hace *10* años y tu edad será la mitad de la edad que tenía mi padre hace *5* años". Hallar la suma de las edades de Elvira y Paola.

A)42 *B)35* *C)8* *D)71* *E)41*

RESOLUCIÓN :

	Tenías Tenía	(Tengo) Hoy	Tenga
Elvira (YO)	Se deduce que es 2x	3x	$\frac{y-10}{2}=4x$
Paola (TU)	3x	4x	$\frac{z-5}{2}=5x$
Padre de Elvira	y	z	
Padre de Paola		y	z

(I) (II) x años; + "x" años

* Se deduce que :

$z=y+x$ ....*(I)*

$\frac{y-10}{2}=4x$........................*(II)*

$\frac{z-5}{2}=5x$........................*(III)*

* Resolviendo el sistema se obtiene : $x = 5$
* Piden : $3x+4x=7x=7(5)=35$

RPTA:"B"

PROBLEMA 62 :

"A" le dice a *"B"*: "Cuando yo tenía tu edad, *"C"* tenía *10* años"; *"B"* contesta : "Cuando yo tenga tu edad, *"C"* tendrá *26* años" *"C"* interviene : "Si sumamos los años que ustedes me llevan de ventaja resultaría el doble de mi edad". ¿Cuál es la edad del menor?.

A) 16 años *B) 18 años* *C) 19 años*
D) 20 años *E) 22 años*

RESOLUCIÓN :

	Tenía	Hoy	Tenga
A	x	y	
B		x	y
C	10	z	26

Por suma en aspa

$x+z=10+y$.........*(I)*

$x+26=z+y$.........*(II)*

* Del último dato :

$\overbrace{y-x+z-x}^{\text{Suma de ventajas}}=2x$ ....*(III)*

* De *(I)*, *(II)* y *(III)* se obtiene :

$x = 18$ (menor); $y = 40$; $z = 32$

RPTA : "B"

PROBLEMA 63 :

Cuando entre los tres teníamos *180* años, tú tenías lo que yo tengo, yo lo que Carlos tiene y él la tercera parte de lo que tú tendrás, cuando entre los tres tengamos *300* años y yo tenga lo que tú tienes y Carlos lo que yo tengo, tú eres mayor que yo, y si yo tuviese lo que tengo, tuve y tendré, tendría *255* años. ¿Qué edad tengo ahora?

A)70 *B)85* *C)24* *D)75* *E)80*

RESOLUCIÓN :

Han pasado : $\frac{300-180}{3}=40$ *años*

	Suma de edades es 180	Presente	Suma de edades es 300
Yo	Tuve $y=x-20$	Tengo x	Tendré $x+20$
Tú	Tenías x	Tiene	Tendrás
Él (Carlos)	$x-40$	Tiene $y=x-20$	x

+20 años +20 años

* La suma de los *3*, en cada año aumenta en *3* años ; por lo cual se dedujo que del pasado a futuro pasaron *40* años.
* La "*y*", se dedujo aplicando el método del aspa :

$$y+y=x-40+x \Rightarrow y=x-20$$

* Según el último dato :

$$\overbrace{x+x-20+x+20}^{\text{ya tuviste}}=255$$

$x=85$ años (tengo)

RPTA: "B"

PROBLEMA 64 :

Una persona tiene en *1988*, tantos años como el producto de las 2 últimas cifras del año de su nacimiento. ¿Cuál es la suma de cifras de su edad?

A)4 *B)5* *C)6* *D)8* *E)9*

RESOLUCIÓN :

* Recordando que :

Año de Nacimiento	+	Edad Actual	=	Año de Actual

$\overline{19ab}+ab=1988$

$\Rightarrow 1900+\overline{ab}+ab=1988 \Rightarrow \overline{ab}+ab=88$

* Tanteando adecuadamente : $\overline{ab}=64$
* Su edad será : $6\times4 = 24$ años.
* Piden : $2 + 4 = 6$

RPTA: "C"

PROBLEMA 65:

Mi edad es tantas veces más que tú edad. Como el número de veces que contiene la inversa de mi edad a la inversa de tu edad. ¿Cuál es la razón geométrica de nuestra edades?

A)2 B)3 C)1,2 D)F.D. E)N.A.

RESOLUCIÓN :

* Si "A" es "N" veces más que "B" entonces :

$$A=(n+1)B \quad \Rightarrow n=\frac{A}{B}-1$$

* Luego en el problema :

Mi edad : x Tu edad : y

* Razón Geométrica : $\frac{x}{y}=k$
* Según enunciado :

$$\frac{x}{y}-1=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} \Rightarrow \frac{x}{y}-1=\frac{y}{x} \Rightarrow k-1=\frac{1}{k}$$

$$k-\frac{1}{k}=1 \Rightarrow k^2-k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 66:

Un individuo nació el 3 de abril de 1903 y otro el 7 de mayo de 1911. ¿En qué fecha la edad del 1ro. fue el triple que la del 2do.?

A) 19 de mayo de 1914
B) 23 de mayo de 1915
C) 22 de mayo de 1915
D) 24 de mayo de 1915
E) 25 de mayo de 1915

RESOLUCIÓN :

* La diferencia de las edades será : 8 años 1 mes 4 días
* Luego : $3x-x=8$ años 1 mes 4 días (x ↓ EDAD DEL 2do.)

$\Rightarrow x = 4$ años 17 días.

* Entonces lo que piden será : 7 de mayo de 1911 + 4 años 17 días = 24 de mayo de 1915

RPTA: "D"

PROBLEMA 67:

Yesenia le dice a Pedro: Mi edad hace muchos años era mayor que 20 pero menor que 30 , pero en dicho año mi edad se podía calcular de la siguiente manera : Suma los cuadrados de cada una de las dos primeras cifras de aquel año y réstale la suma de cada uno de los cuadrados de las dos últimas cifras de aquel año. ¿Cuántos años tengo en la actualidad (1994), sabiendo que es la mayor posible?

A)94 B)98 C)88 D)96 E)86

RESOLUCIÓN :

* Sea $\overline{19ab}$ el año mencionado inicialmente , luego la edad en dicho año será :

$$10<\underbrace{1^2+9^2-(a^2+b^2)}_{\text{Mi edad (hace muchos años)}}<30$$

$$\Rightarrow 6^2< a^2+b^2 > 52$$

$a^2 \to 2^2$, $b^2 \to 7^2$ (Valores que hacen la edad lo mayor posible.)

Valores que hacen la edad lo mayor posible.

* Luego en 1927 su edad será :

$1^2+9^2-(2^2+7^2)=29$ años

Entonces nació en : $1927-29 = 1898$

* La edad en 1994 estará dada por :

$1994-1898 = 96$ años.

RPTA:"D"

PROBLEMA 68 :

Un padre , su hija e hijo conversan :

* El padre dice : "Nuestras edades suman 100 años".
* El hijo dice : "Cuando yo tenía la edad que tiene mi hermana , nuestras edades sumaban 70 años".
* La hija dice : Cuando yo tenga los años que papá tenía cuando tu tenías los años que nos dijiste , nuestra edades sumarán 160 años".
* El padre dice : "Pero si yo tuviera los años que tenía, tengo y tendré , resultaría":

A)120 B)250 C)124 D)200 E)160

RESOLUCIÓN :

	Tenía (suma 70)	Tiene (suma 100)	Tenga (suma 160)
Padre	$x+20$	$x+30$	$x+50$
Hija	$x-10$	x	$x+20$
Hijo	x	$x+10$	$x+30$

$\frac{100-70}{3}=10$ años — Deben pasar 10 años

$\frac{160-70}{3}=20$ años — Deben pasar 20 años

* En el pasado: $x+20+x-10+x=70 \Rightarrow x=20$

* La expresión a calcular será :

$x+20+x+30+x+50=3x+100=3(20)+100=160$

RPTA: "E"

PROBLEMA 69 :

La edad de un padre supera en *5* a la suma de las edades de sus *3* hijos. Dentro de *10* años su edad será el doble que la del primero, dentro de *20* años su edad será el doble de la del segundo , y dentro de *30* años su edad será el doble que la del tercero ¿Cuál es la edad del hijo menor?

A)5 B)10 C)15 D)20 E) 25

RESOLUCIÓN :

* Sean las edades : *"p", "x", "y", y "z".*

* Luego : $p-5=x+y+z$

$$p+10=2(x+10)$$
$$p+20=2(y+20) \quad (+)$$
$$p+30=2(z+30)$$
$$\overline{3p+60=2(p-5+60)}$$
$$p=50;\ x=20\ ;\ y=15$$
$$z=10(\text{menor})$$

RPTA:"B"

PROBLEMA 70 :

A Deysi en el año *1989* se le preguntó por su edad y contestó : "tengo , en años , *"n"* veces el número que forman las *2* últimas cifras del año de mi nacimiento" indicar el único valor entero de *"n"*.

A)2 B)68 C)0 D)22 E)23

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$$\text{Año de Nacimiento} + \text{Edad Actual} = \text{Año Actual}$$
$$\overline{19ab} + n\overline{ab} = 1969$$
$$1900+\overline{ab}+n\overline{ab}=1969$$
$$\Rightarrow (n+1)\overline{ab}=69$$
$$(n+1)\ \overline{ab}=3\times 23$$
$$n+1=3 \quad n=2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 71:

Yo tengo tantos años como los que tú tenías , cuando yo tenía lo que tuviste cuando yo nací. Luego tu tienes:

A) La mitad de mi edad.

B) La cuarta parte de mi edad

C) Los $\frac{2}{3}$ de mi edad.

D) Los $\frac{3}{2}$ de mi edad.

RESOLUCIÓN :

	Tu Tuviste Yo Nací	Tenías Tenía	Tengo Tienes
YO	0	y	x
TÚ	y	x	E

E → Tu edad

* Por suma en aspa :

$0+x=y+y \qquad y+E=x+x$

$x=2y \qquad \Rightarrow E=3y$

* Luego se observa que :

$$\frac{\text{Tú Edad}}{3}=\frac{\text{Mi Edad}}{2} \Rightarrow \text{Tú Edad}=\frac{3}{2}(\text{Mi Edad})$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 72 :

Cuando Tú tengas la edad que yo tengo tendrás lo que él tenía cuando tenías la quinta parte de lo que tienes y yo, tenía la quinta parte de lo que él tiene , que es , *9* años más de los que yo tendré cuando tengas lo que ya te dije y él tenga lo que tú y yo tenemos. Luego tú tienes:

A)12 años B)17 C)21 D)27 E)15

RESOLUCIÓN :

	Tenía Tenías	Tengo Tienes Tiene	Tendré Tengas Tenga
YO	y	y + 4x	2y + 3x
TÚ	x	5x	y + 4x
ÉL	y + 4x	5y	y + 9x

* Lo sombreado se obtiene , aplicando el método del aspa, luego considerando el aspa presente se obtiene : $x+5y=y+4x+5x \Rightarrow 4y=8x \Rightarrow y=2x$

* lo que él tiene, que es *9* años más de los que yo tendré.

$$\Rightarrow 5y=2y+3x+9$$
$$\Rightarrow 5(2x)=2(2x)+3x+9$$
$$\Rightarrow x=3$$

* Piden : $5(3)=15$ años

RPTA : "E"

PROBLEMA 73 :

Dentro de algunos años mi edad será el cubo de la edad que tenía hace otros algunos años. ¿Cuál será la raíz cúbica de mi edad, si hace *19* años mi edad

era la raíz cuadrada de dicho cubo?

A) 2 B) 3 C) 4 D) A ó B E) No hay solución

RESOLUCIÓN :

* Ese cubo puede ser :

$3^3=27$ ó $4^3=64$; pero ese cubo también tiene raíz cuadrada, con lo que nos quedamos con **64**.

* Luego mi edad "x" hace **19** años era :

$$x-19=\sqrt{64} \quad x=27$$

* Piden : $\sqrt[3]{27}=8$

RPTA : "B"

PROBLEMA 74 :

Cuando yo tenía lo que te falta a tí actualmente para tener el doble de mi edad , tú tenías la mitad de la edad que yo tendré cuando tú tengas lo que me falta a mi actualmente para tener **70** años. Si la suma de nuestras edades actuales es **50**. Calcular la diferencia de nuestras edades dentro de **40** años.

A) 5 años B) 6 años C)8años
D)10 años E)12 años

RESOLUCIÓN :

	Tenía Tenías	Hoy	Tendré Tenías
YO	$2x-y$	x	$2x$
TÚ	x	y	$70-x$

Se dedujo por el método del aspa. Se dedujo por dato

* Según el aspa presente :

$$70-x=y+2x \;\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Además por enunciado :

$$x+y=50 \;\ldots\ldots\ldots(II)$$

* De *(I)* y *(II)*:

$$x=20 \quad y=30$$

* Piden la diferencia de las edades (que siempre es constante) : $30-20=10$

RPTA:"D"

PROBLEMA 75 :

La suma de las edades de Luis , Carlos y Mario es **18** años ; si se toma la edad de Mario tantas veces como la edad que Luis tiene y viceversa , y luego de sumarlo se agrega la edad de Luis tantas veces como años él tiene, se obtendrá **69**. Determinar la edad del que es mayor que el menor y es menor que el mayor.

A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN :

	Luis	Carlos	Mario
Edades	x	y	z

* 1er. dato : $x+y+z=18 \;\ldots\ldots\ldots(I)$
* 2do. dato : $xz+zx+x\times x=69$

$$x(2z+x)=69$$

Por comparación : $x(2z+x)=3\times 23$

$x=3$ $\quad 2z+3=23$
$z=10$

* Reemplazando en *(I)*, se obtiene : $y=5$
* Piden la edad intermedia , que se deduce que será : **5**

RPTA:"B"

PROBLEMA 76 :

Cuando yo tenía la cuarta parte de la edad que tienes , él tenía la sexta parte , y tu tenías **4** años menos de la edad que actualmente tiene él. Pero cuando yo tenga el doble de mi edad , él tendrá **2** años menos de mi edad de ese entonces. ¿Qué edad tuve yo cuando tu edad era el doble de lo que tenía él?

A) 14 años B) 20años C) 18 años
D) 12 años E) 10 años

RESOLUCIÓN :

	Tenías Tenía	Tiene Tienes	Tenga Tendrá
YO	$3x$	z	$2z$
TÚ	$y-4$	$12x$	
ÉL	$2x$	y	$2z-2$

(II) (I) DIFERENCIA DE EDADES ES 2

$$\Rightarrow 3x-2x=2 \Rightarrow x=2$$

* Por suma en aspa en *(I)* :

$$y-4+y=2x+12x$$
$$\Rightarrow 2y-4=14x \Rightarrow 2y=14(2)+4$$
$$\Rightarrow y=16$$

* Por suma en aspa en *(II)* :

$$3(2)+12(2)=16-4+z \Rightarrow 18=z$$

* Luego :

	Piden	Hoy
YO	E	18
Tú	2k	24
Él	k	16

Suma en aspa: $2k+16=k+24$
$k=8$

* Además : $E+24=2k+18$

$$\Rightarrow E+24=2(8)+18 \Rightarrow E=10$$

RPTA:"E"

PROBLEMA 78 :

En un aula se calculó el promedio de las edades de todos los alumnos incluyendo la del profesor , luego se evaluó el promedio de los años de nacimiento , luego se sacó el promedio de ambos promedios cuyo resultado es :

OBSERVACIÓN :

Considerar añoa ctual : *2002*

A)1000 B)1999 C)1001 D)2002 E)2001

RESOLUCIÓN :

$$\text{Promedio de las edades} : \frac{\sum_{k=1}^{n} EDAD}{n}$$

$$\text{Promedio de los años de nacimiento} : \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{AÑO DE NACIMIENTO}}{n}$$

Piden el promedio de ambos promedios :

$$\frac{\frac{\sum_{k=1}^{n} EDAD}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n} \text{AÑO DE NACIMIENTO}}{n}}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\text{EDAD} + \text{Año de nacimiento}\right)}{n}$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \text{AÑO ACTUAL}}{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} 2002}{2n} = \frac{2002}{2n} = 1001$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 79 :

Tito es viudo, tiene seis hijos , donde hay trillizos (los otros hijos tienen edades diferentes) el menor de todos tiene seis años , la suma de las edades de todos los miembros de esta familia es *90* años. ¿Cuál es la edad máxima que podría téner el padre?

A)44 B)48 C)46 D)52 E)64

RESOLUCIÓN :

* Para que la edad del padre sea máxima, los hijos deben tener la mínima cantidad de años , debido a que la suma de todos es *90* , entonces se tendrá :

$$\underset{\text{Un hijo menor}}{6} + \underbrace{7+7+7}_{\text{Trillizos}} + \underbrace{8+9}_{\text{Hijos mayores}} + \overbrace{E_{MAX}}^{\text{padre}} = 90$$

$$\Rightarrow E_{MÁX} = 46$$

RPTA:"C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 La edad de Sonia dentro de *6* años será de *30* años. ¿Qué edad tiene ahora?

A) 18 años B) 20 C) 24 D) 26 E) 23

02 Si la edad de Ronel hace *3* años fue de *18* . ¿Qué edad tiene?

A) 18 años B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

03 La edad que tuvo Nury hace *5* años fue de *12* años. ¿Qué edad tendrá dentro de *8* años?.

A) 25 años B) 14 C) 24 D) 40 E) 27

04 La edad de Vany dentro de *3* años será de *16* años. ¿Qué edad tuvo hace *4* años?

A) 9 años B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

05 Dentro de *10* años la edad de Paco será el triple de la que actualmente tiene. ¿Qué edad tiene?.

A) 5 años B) 6 C)9 D) 11 E) 12

06 Hace *8* años la edad de José fue la tercera parte de su edad actual. ¿Qué edad tiene ahora?

A) 6 años B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

07 La edad de Pepe dentro de *30* años será el quíntuple de la que tuvo hace *10* años. ¿Cuál es la edad actual?.

A) 10 años B) 15 C) 5 D) 20

08 Si hace *15* años tenía *7* años. ¿Qué edad tendré dentro de *15* años?.

A) 34 años B) 37 C) 22 D) 20 E) 28

09 Si dentro de *17* años tendré *40* años. ¿Qué edad tuve hace *5* años?

A) 18 años B) 17 C) 16 D) 15 E) 19

10 Si dentro de *8* años tendré el doble de la edad que tuve hace *9* años. ¿Qué edad tuve hace *5* años?

A) 24 años B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

11 Hace *8* años la edad de Danitza era la tercera parte de la edad que tendrá dentro de *2* años. ¿Qué edad tendrá dentro de *7* años?.

A) 13 años B) 15 C) 20 D) 22 E) 24

12 Walter nació *2* años antes de Marcela y hoy sus edades suman *28* años. ¿Cuántos años tiene Marcela?

A) 12 años B) 13 C 14 D) 15 E) 16

13 La edad de Raúl es el triple de la edad de Fidel, pero dentro de *15* años la edad de Fidel será la mitad de la edad de Raúl. ¿Cuántos años de diferencia hay entre sus edades?

A) 30 B) 10 C) 20 D) 5 E) 15

14 Elisa tiene el triple de la edad de Micky que tiene *6* años. Hace cuánto la edad de ella fue el cuádruple de la edad de él.

A) 1 años B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15 Mariel tiene *3* hijos, Naty de *14* años, Vany de *11* , Karina de *3* y Miguel de *2* años. Si ella tiene *39* años, dentro de cuántos años su edad será igual a la suma de las edades de sus hijos.

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

(16) Mi edad es *4* años menor que la edad que tú tenías, cuando yo tenía *8* años menos de la edad que tú tenías y cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán *82* años. ¿Qué edad tengo?

A) 22 *B) 24* *C) 26* *D) 28* *E) 32*

(17) En una reunión familiar al ver bailar a la abuelita dos de sus nietecitos reflexionaban: «y pensar que tu edad es la raíz cúbica de su edad». El padre terció en la conversación y le replicó al mayorcito : «y tu edad es la raíz cuadrada de esa misma edad». ¿Qué edad tiene la madre, sabiendo que es la mitad de la edad de la abuela?

A) 24 años *B) 36 años* *C) 28 años*
D) 18 años *E) 32 años*

(18) Mi edad actual es *4* años menos de lo que exactamente representa el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de lo que tienes hoy. Pero cuando tengas mi edad; la suma de nuestras edades será *37* años. ¿Qué edad tengo?

A) 11 *B) 8* *C) 12* *D) 14* *E) Absurdo*

(19) Elena le dice a Rosa: «Tu edad es el doble de la que tenías cuando yo tenía el doble de la que tuviste cuando yo cumplí *4* años». Si las edades actuales suman *32* años, ¿cuántos años tiene Elena?

A) 8 *B) 10* *C) 12* *D) 14* *E) 16*

(20) La edad que tú tienes es la edad que yo tenía cuando él tenía la octava parte de lo que tendré cuando tú tengas lo que yo tengo y él tendrá *6* años más de los que tuve. Si lo que tuve es *6* años más de lo que él tiene y *12* años más de lo que tuviste, ¿qué edad tengo?

A) 32 *B) 33* *C) 34* *D) 35* *E) 36*

(21) Cuando tú tengas lo que yo tengo, tendrás lo que él tenía, cuando tenías la tercera parte de lo que tienes y yo tenía la tercera parte de lo que él tiene, que es *5* años más de los que tendré, cuando tengas lo que ya te dije y él tenga lo que tú y yo tenemos. Entonces yo tenía :

A) 5 *B) 7* *C) 8* *D) 10* *E) 11*

(22) Alejandra es madre de Fabiola y Roberto es hijo de Elsa. Cuando nació Roberto, Elsa tenía el triple de la edad que tenía Alejandra y cuando nació Fabiola, Alejandra tenía la misma edad que tenía Elsa cuando nació Roberto. Cuando Fabiola tenga la mitad de la que tenía Roberto cuando nació Fabiola, las edades de Alejandra y Elsa sumarán *80* años. ¿Cuántos años tenía Alejandra cuando nació Fabiola?

A) 8 años *B) 16 años* *C) 24 años*
D) 12 años *E) 10 años*

(23). La edad de un padre supera en *5* a la suma de las edades de sus *3* hijos. Dentro de *10* años su edad será el doble que la del primero, dentro de *20* años su edad será el doble de la del segundo, y dentro de *30* años su edad será el doble que la del tercero. ¿cuál es la edad del hijo menor?

A) 5 *B) 10* *C) 15* *D) 20* *E) 25*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Mi hermano nació cuando yo tenía *6* años. Si ahora tengo *13* años , ¿qué edad tiene mi hermanito?

A)6 *B) 3* *C) 78* *D) 8* *E)9*

(02) Marcia tiene *8* años menos que Karla. ¿Cuántos tendrá Marcia dentro de *3* años si entre las *2* tienen *64* años?

A)39 *B)31* *C)32* *D)40* *E)52*

(03)Dentro de *3* años las edades de *3* hermanas sumarán *33* años. ¿Cuánto sumaban hace *3* años?

A)27 *B)15* *C)14* *D)21* *E)24*

(04) La edad de Juan es el doble de la edad de María. Si hace *15* años era el triple de la edad de María en ese entonces , ¿qué edad tiene María?

A)30 años *B)35 años* *C)40 años*
D)45 años *E)60 años*

(05) Al ser preguntada Jaqueline por su edad contestó: Si al triple de mi edad le quito *16* años tendría lo que me falta para tener *100* años. ¿Qué edad tendría dentro de *5* años?

A)29 *B)34* *C)32* *D)30* *E)33*

(06)El triple de tu edad , más *2* años , es mi edad ; pero si yo fuera *30* años más joven y tu *30* años mayor , nuestras edades serían iguales. ¿Qué edad tengo?

A)69 *B)79* *C)87* *D)67* *E)89*

(07) Hace *6* años la edad de un Tío es *8* veces la de su sobrino , pero dentro de *4* años será sólo el triple. ¿Cuánto sumarán las edades dentro de *5* años?

A)53 *B)64* *C)56* *D)48* *E)58*

(08) Dentro de *20* años , la edad de Pancho será a la de Omar como *4* es a *3*. ¿Cuál es la edad de Pancho, si hace *13* años la edad de Pancho era el quíntuple de la de Omar?

A)12 *B)16* *C)20* *D)24* *E)28*

(09) Jaime tiene *30* años , su edad es el séxtuplo de la edad que tenía Nancy cuando Jaime tenía la cuarta parte de la edad que tiene Nancy. ¿Qué edad tiene

Nancy?

A)26 *B)29* *C)30* *D)28* *E)27*

10 Si al año en que cumplí *18* años, le restamos el año en que cumpliré *30* años, resultaría mi edad actual, menos *52* años. ¿Qué edad tendré dentro de *8* años?

A)40 *B)26* *C)36* *D)32* *E)48*

11 La suma de las edades de Antonio y Beatriz cuando nació César, su primer hijo, era la mitad de su suma actual. Si actualmente César tiene *20* años. ¿Qué edad tenía César cuando las edades de los tres sumaban *70* años?

A)12 años *B)10 años* *C)15 años*
D)18 años *E)20 años*

12 La suma de las edades de Ada y Miriam es *48* años. Al acercarse Pedro, Ada le dice: «Cuando tu naciste yo tenía *4* años, pero cuando Miriam nació, tu tenías 2 años». Calcular la suma de los tres dentro de 10 años.

A)100 *B)101* *C)99* *D)97* *E)98*

13 Anibal le dice a Pericles: «Si tú me dieras *4* de tus canicas, entonces tendría el triple de las tuyas» a lo cual Pericles contesta: «Pero si tú me dieras *2* canicas entonces lo mío sería igual a lo tuyo». ¿Cuántas canicas tiene Pericles?

A)12 *B)10* *C)18* *D)20* *E)15*

14 Mi abuelo afirma lo siguiente : Mi abuelo nació el *4* de octubre de *1923* y mi abuela el *8* de octubre de *1933*. Si hoy *5* de octubre del *2001* es viernes. ¿Qué día nací, si es un día equidistante de los días en que nacieron mis abuelos?

A)Lunes *B)Martes* *C)Domingo*
D)Sábado *E)Jueves*

15 En *1988* un profesor sumó los años de nacimiento de *45* estudiantes y luego las edades de los estudiantes, enseguida sumó ambos resultados y obtuvo *89437.0* ¿Cuántos estudiantes ya cumplieron años en dicho año?

A)22 *B)23* *C)24* *D)26* *E)28*

16 Determinar la edad de César si en *1999* su edad será igual a la suma de las cifras del año de su nacimiento. (Cumpleaños el *1*ro. de enero. Año actual *2003*).

A)22 *B)27* *C)21* *D)22* *E)23*

17 ¿Qué hacías el *4* de julio de *1829*?. Uff no tengo ni idea, eso si sé que tenia tantos años como los que suman las cuatro cifras del año de mi nacimiento. ¿Qué edad tenía?

A)15 *B)13* *C)18* *D)14* *E)12*

18 «*A*» nació *6* años antes que «*B*». En *1970* la suma de sus edades era la cuarta parte de la suma de sus edades en *1985*. ¿En qué año la suma será el doble de la correspondiente a *1985*?

A)1995 *B)1998* *C)2000* *D)2005* *E)2010*

19 La edad de un niño será dentro de tres años un cuadrado perfecto ; hace tres años su edad era la raíz de ese cuadrado perfecto. ¿Qué edad tendrá dentro de *15* años?

A)16 *B)21* *C)19* *D)23* *E)42*

20 En *1984*, la edad de July coincidía con la mitad de la cantidad que expresan las *2* últimas cifras del año de su nacimiento. Calcular su edad en septiembre de éste año (1997) si nació bajo el signo Sagitario en este siglo

A)51 *B)37* *C)65* *D)40* *E)41*

TAREA DOMICILIARIA

01 Un padre tiene x años y su hijo y años, ¿dentro de cuántos años la edad del padre será *2* veces la edad del hijo?

A) $2x + y$ B) $2x - y$ C) $x - 2y$
D) $x + 2y$ E) $x + y$

02 Tú tienes *30* años actualmente, yo tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la quinta parte de lo que tú tienes. ¿Qué edad tengo?

A) 27 años *B) 13 años* *C)28 años*
D) 32 años *E) 25 años*

03 Cuando yo nací tú tenías la edad que yo tengo ahora. Cuando yo tenga el triple de la edad que tú tienes, nuestras edades sumarán *130* años. ¿Cuántos años tienes tú?

A) 20 *B) 7* *C) 13* *D) 24* *E)19*

04 Mi hijo es ahora tres veces más joven que yo. Pero hace cinco años era cuatro veces más joven. ¿Cuántos años tiene?

A)14 *B)15* *C)12* *D)16* *E)10*

05 Frida tuvo su primer hijo a los *20* años, su segundo hijo a los *25* años y *7* años después a su tercer hijo. Si en *1 996* la suma de las edades de los cuatro es *83* años, ¿en qué año nació Frida?

A) 1 978 *B)1 966* *C)1 950*
D)1 956 *E)1 954*

06 Una persona en el mes de Junio, resta a los meses que ha vivido los años que tiene y obtiene *455*. ¿En qué mes nació dicha persona?

A) Diciembre *B) Enero* *C) Febrero*
D) Marzo *E) Abril*

07 Pedro lleva en el sindicato el doble de años que Joaquín.Hace dos años llevaba el triple de años. ¿Cuántos años lleva cada uno en el sindicato?

A) 8 y 9 *B) 8 y 4* *C) 4 y 10*
D) 7 y 6 *E) 9 y 18*

08 Si en ***1 974*** María tuvo la cuarta parte de la edad de su madre , y en ***1 984*** la mitad, ¿qué edad tendrá cada una de ellas en ***1 994***?

A) 26 y 30 *B) 20 y 60* *C) 22 y 35*
D) 24 y 40 *E) 25 y 40*

09 En una lápida podía leerse esta inscripción : Aquí yace *J.* Isola , muerto en ***1 971***, vivió tantos años como la suma de las cifras del año de su nacimiento. ¿A qué edad murió?

A)1 950 *B)1 949* *C)1 953* *D)1 952* *E)1 956*

10 La edad de Juan es mayor que la de su hermano Antonio en ***5*** años ; Francisco tiene tantos años como los dos juntos y entre los tres suman en total ***70*** años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

A) 36 ; 14 ; 15 *B) 32 ; 18 ; 13* *C) 40 ; 15 ; 5*
D) 35 ; 20 ; 15 *E) 20 ; 15 ; 8*

11 Las sumas respectivas de las cifras que forman los años de nacimiento de Juan y Pedro son iguales. Sabiendo que sus edades empiezan por la misma cifra , ¿cuál es su diferencia de edad?

A) 7 *B) 6* *C) 4* *D)9* *E)5*

12 Dentro de dos años mi hijo será dos veces mayor que era hace dos años y mi hija será dentro de tres años tres veces mayor que era hace tres años. ¿Quién es mayor , el niño o la niña?

A) El niño por 2 años *B) La niña por 3 años*
C) El niño por 4 años *D) La niña por 2 años*
E) Son mellizos

13 ¿Qué edad tendrá Carlos en el año ***2000*** sabiendo que esa edad será igual a la suma de las cuatro cifras de su año de nacimiento?

A)1 980 *B)1 981* *C)1 898* *D)1 079* *E)1 914*

14 Una persona nacida en la segunda mitad del siglo ***XX***, tendrá ***"a"*** años en el año ***"a²"***. ¿Cuántos años tenía dicha persona en ***1 995***?

A)10 años *B)12 años* *C)15 años*
D)18 años *E)14 años*

15 El famoso cuadro Las meninas fue pintado por Velázquez en ***1 656***, a los ***57*** años de edad, después de vivir ***34*** años en Madrid , donde se había instalado a los ***4*** años de casado. ¿A qué edad se caso?

A) 20 *B) 42* *C) 18* *D) 35* *E)19*

16 Si se invierte las cifras de la edad del padre, se obtendrá la edad del hijo. Si el año pasado el padre tenía el doble de la edad que tenía el hijo. ¿Cuántos años tiene el padre y el hijo?

A) 73 años y 37 años *B) 72 años y 27 años*
C) 71 años y 17 años *D) 74 años y 47 años*
E) 63 años y 36 años

17 Pedro dice un día a Manolo : Mi edad es el triple de la que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes. Cuando tú tengas la edad que yo tengo , tendremos entre los dos ***77*** años. Calcule las edades de Pedro y Manolo.

A) 33 y 22 *B) 30 y 40* *C) 20 y 40*
D) 32 y 20 *E) 22 y 28*

18 Estando reunidos Ángel , Bruno y Carlos , se escucha la siguiente conversación

* Bruno: Mi edad es la misma que tuvo Ángel cuando Carlos nació.

* Ángel: Así es , y en ese entonces nuestras edades sumaban ***30*** años.

* Carlos: Mi edad actual es la misma que tuvo Bruno cuando yo nací.

¿Cuál será la edad que tendrá Ángel cuando Carlos tenga la edad que tiene Bruno?

A) 44 años *B)42 años* *C)33 años*
D)46 años *E)40 años*

19 A un niño de ***6*** años , que apenas sabía contar y formar números del ***1*** al ***100*** ; más no conocía las operaciones elementales ; se le proporcionó ***5*** cifras iguales con lo que pudo formar la edad de su hermano mayor , la edad de su abuelo y también la de su bisabuelo. ¿Qué edad tiene su abuelo?

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Le preguntan a un individuo por su edad y responde: "Mi edad más dos veces mi edad más ***3*** veces mi edad y así sucesivamente hasta tantas veces como la edad que tengo resulta ***210*** veces mi edad". Calcular la edad de dicho individuo.

A) 30 años *B) 20 años* *C) 26 años*
D) 13 años *E) 32 años*

02 Si al año que cumplí los ***12*** años le sumas el año en que cumplí los ***20*** años y a dicha suma le restas la suma del año que nací con el año actual, obtendrás ***6***. ¿ Qué edad tengo?

A) 26 años *B) 24 años* *C) 28 años*
D) 22 años *E) 20 años*

03 Una persona nació el ***3*** de abril de ***1903*** y otro el ***7*** de mayo de ***1911***. ¿En qué fecha (día, mes), la edad

del primero fue el triple de la edad del otro?

A) 10 mayo B) 24 mayo C) 11 junio D) 30 junio E) 27 junio

04 Adolfo tiene ***12*** años, Benito tanto como Adolfo y Daniel juntos, Carlos tanto como Adolfo y Benito juntos. Daniel tiene ***9*** años. ¿Cuál es la edad de Eduardo, sabiendo que si tuviera ***12*** años más, tendría tanto como los cuatro anteriores juntos?

A) 40 B) 50 C) 63 D) 72 E) 81

05 En una reunión familiar al ver bailar a la abuelita dos de sus nietecitos reflexionaban: "Y pensar que tu edad es la raíz cúbica de su edad", el padre terció en la conversación y le replicó al mayorcito: "Y tu edad es la raíz cuadrada de esa misma edad". ¿Qué edad tiene la madre sabiendo que es la mitad de la edad de la abuela?

A) 28 B) 32 C) 64 D) 48 E) 44

06 La suma de las edades de una pareja de esposos, cuando nació su primer hijo, era la tercera parte de la suma de sus edades actuales. Si ahora el hijo tiene ***35*** años, ¿qué edad tenía él, cuando las edades de los tres sumaban ***74*** años?

A) 10 B) 13 C) 21 D) 17 E) 23

07 Dentro de ***15*** años, la edad de Carlos será el doble de la edad de Luis; si hace ***6*** años, la edad de Carlos era el triple de la edad de Luis. Calcular la diferencia de las edades.

A) 42 B) 38 C) 36 D) 32 E) 28

08 Actualmente la diferencia de las edades de Roberto y Carlos es ***40*** años. Pero dentro de ***10*** años Roberto tendrá el triple de lo que tenga Carlos. ¿Qué edad tiene Roberto?

A) 60 B) 50 C) 40 D) 30 E) 20

09 En el mes de agosto una persona sumó a los años que tiene, los meses que ha vivido y obtuvo ***228***. ¿En qué mes nació dicha persona?

A) Abril B) Enero C) Marzo D) Mayo E) Febrero

10 La suma de las edades de dos hermanos es ***30*** años. Si dentro de ***10*** años la edad de uno será el doble de la edad que tuvo el otro hace ***10*** años, ¿cuál es la edad de cada hermano?

A) 10 y 24 B) 10 y 20 C) 20 y 30 D) 12 y 18 E) 15 y 15

11 Dentro de ***15*** años la edad de Rubén será el doble de la de Susana. Si hace ***6*** años la edad de Rubén era el triple de la de Susana. Calcular la suma de las edades actuales de ambos.

A) 90 años B) 92 años C) 94 años D) 96 años E) 78 años

12 La edad de Roxana sobrepasa en ***5*** años a la suma de las edades de sus tres hermanos. Dentro de ***10*** años, ella tendrá el doble de la edad del mayor, dentro de ***20*** años, tendrá el doble de la edad del segundo; y dentro de ***30*** años, tendrá el doble de la edad del tercero. Entonces la edad de Roxana es:

A) 50 años B) 32 años C) 33 años D) 35 años E) 36 años

13 Hace ***15*** años tu edad era ***1/3*** de mi edad, pero si contamos ***45*** años a partir de hoy sucederá que mi edad será los ***9/8*** de tu edad. ¿Hace cuántos años mi edad fue el doble de tu edad?

A) 15 años B) 18 años C) 11 años D) 12 años E) 10 años

14 ***A*** le dice a ***B***: Cuando yo tenía tu edad ***C*** tenía ***10*** años; ***B*** contesta: Cuando yo tenga tu edad, ***C*** tendrá ***26*** años. ***C*** interviene: Si sumamos los años que ustedes me llevan de ventaja resultará el doble de mi edad, ¿cuál es la edad del menor?

A) 16 años B) 18 años C) 19 años D) 20 años E) 22 años

15 Juan nació en $19\overline{ab}$ y tendrá $(a+b)$ años en ***1983***.

¿Qué edad tiene?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

16 Raúl nació en $\overline{19ab}$ y tendrá $\frac{\overline{ab}}{2}$ años en ***1969***. Calcular la suma de las cifras de su edad actual.

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

17 Peter le dice a Sally: Tengo ***4*** veces la edad que tú tenías, cuando yo tenía el doble de la edad que tú tienes. Cuando tengas las ***3/4*** partes de mi edad, nuestras edades sumarán ***75*** años, ¿qué edad tiene Peter?

A) 36 B) 32 C) 28 D) 30 E) 25

18 ¿ Qué edad tendré cuando tú tengas el triple de la edad que tuve, que es un cubo perfecto, cuando tuviste la mitad de los años que tengo, si tu edad era el cuadrado más próximo a mi edad de entonces, cuando ya no éramos unos adolescentes?

A) 49 B) 66 C) 83 D) 44 E) 72

19 Yo tengo la edad que tú tendrás cuando yo tenga cuatro veces la edad que tenías cuando yo tenía el doble de tu edad en ese momento. ¿Qué edad tengo si dentro de ***10*** años, la suma de nuestras edades será ***50*** años?

A) 16 B) 18 C) 12 D) 24 E) 20

20 Tú tienes la mitad menos ***5*** años de la edad que yo tendré cuando tú tengas lo que yo tenía cuando tú tenías la cuarta parte de la edad que yo tuviese, si tendría ***10*** años más de los que yo tendré. Pero si yo tuviese ***10*** años más de los que tendré y tú los que te he dicho que tienes, entonces entre ambos tendríamos ***110*** años. ¿Qué edad tengo?

A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 40

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) [illegible]	2) B	3) B	4) A	5) B	6) E	7) [illegible]	8) E	9) D	10) E
11) B	12) B	13) B	14) A	15) C	16) B	17) D	18) D	19) B	20) D
1) C	2) A	3) A	4) B	5) D	6) C	7) B	8) E	9) C	10) D
11) D	12) E	13) B	14) C	15) E	16) A	17) D	18) E		

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) E	2) A	3) B	4) C	5) B	6) B	7) A	8) B	9) B	10) B
11) D	12) A	13) C	14) B	15) B	16) E	17) A	18) E	19) B	20) C

MÓVILES

CAPÍTULO 028

OBJETIVOS :

• Comprender y aplicar convenientemente las leyes del movimiento rectilíneo uniforme en la resolución de problemas.

• Dominar métodos prácticos para la resolución de problemas sobre móviles , aplicando nociones y criterios de proporcionalidad.

• Ejercitar la capacidad de comprensión de enunciados y representarlos gráficamente.

INTRODUCCIÓN :

La mayoría de fenómenos naturales tales como el giro de la Tierra, la salida del Sol, el disparo de una bala, el lanzamiento de un cohete espacial, el ir de viaje en nuestras vacaciones, las competencias de carrera en los ***100*** metros planos, el deslizamiento de la punta de un lápiz a la hora de escribir, el parpadeo de los ojos de una persona están relacionados con el concepto de movimiento.

Una de las partes de la física que se encarga de estudiar los movimientos en sí mismo, sin considerar las causas que la producen es la ***«Cinemática»***.

Quizá en este momento te encuentres sentado, leyendo estas lineas , en el trabajo o en tu casa estudiando o tan solo revisando este texto.

Mueves tus manos , mueves tus ojos , te acomodas en el asiento; pero sigues en el mismo sitio. No te has desplazado a otro punto de la habitación o del lugar donde te encuentras pero ¿realmente no te has desplazado?

El planeta , en el que vivimos , gira constantemente alrededor de su eje y todo lo que está sobre él también se mueve. La Tierra se desplaza en el espacio alrededor del Sol y éste con todo su cortejo de planetas, se mueve junto con la Vía Láctea , desplazándose en el espacio infinito.

Podemos concluir, entonces que ningún cuerpo está realmente en reposo ; absolutamente todos están en movimiento éste fenómeno será tratado específicamente por la física , es la ciencia que estudia la materia , la energía, sus propiedades y los fenómenos y las leyes que las rigen o caracterizan. Una parte de ella , la mecánica se divide en: cinemática, dinámica y estática.

Pues bien, nos interesa para nuestro estudio la cinemática; del griego (Kynema movimiento); se le da este nombre a la rama de la mecánica que estudia, única y exclusivamente, el movimiento de los cuerpos, sin considerar las causas que lo originan. Tomaremos en cuenta tan sólo aquellas situaciones que involucran el movimiento con velocidad constante.

Veremos la importancia de comprender y manejar, correctamente las relaciones que existen entre las magnitudes que intervienen cuando un cuerpo está en movimiento. Todos sabemos, por ejemplo , que si el autobús viaja más rápido llegaremos a nuestro destino en menos tiempo o que si suelto un objeto , éste caerá y avanzará cada vez más rápido; realizaremos el estudio dentro de un marco teórico en el cual el arte de plantear ecuaciones será una herramienta importante a usar.

Para comprender mejor este tema es necesario tener presente los siguientes conceptos .

NOCIONES SOBRE CINEMÁTICA

La mayoría de fenómenos naturales consiste en movimientos, el estudio de los mismos constituye el objeto de la ***Mecánica,*** de modo que definiremos esta ciencia diciendo que es la parte de la física que trata del movimiento de los cuerpos.

Mecánica
- ***Cinemática***
- ***Dinámica***
  - ***Estática***
  - ***Cinética***

CINEMÁTICA :

Estudia el movimiento en sí mismo, prescindiendo de las causas que lo producen.

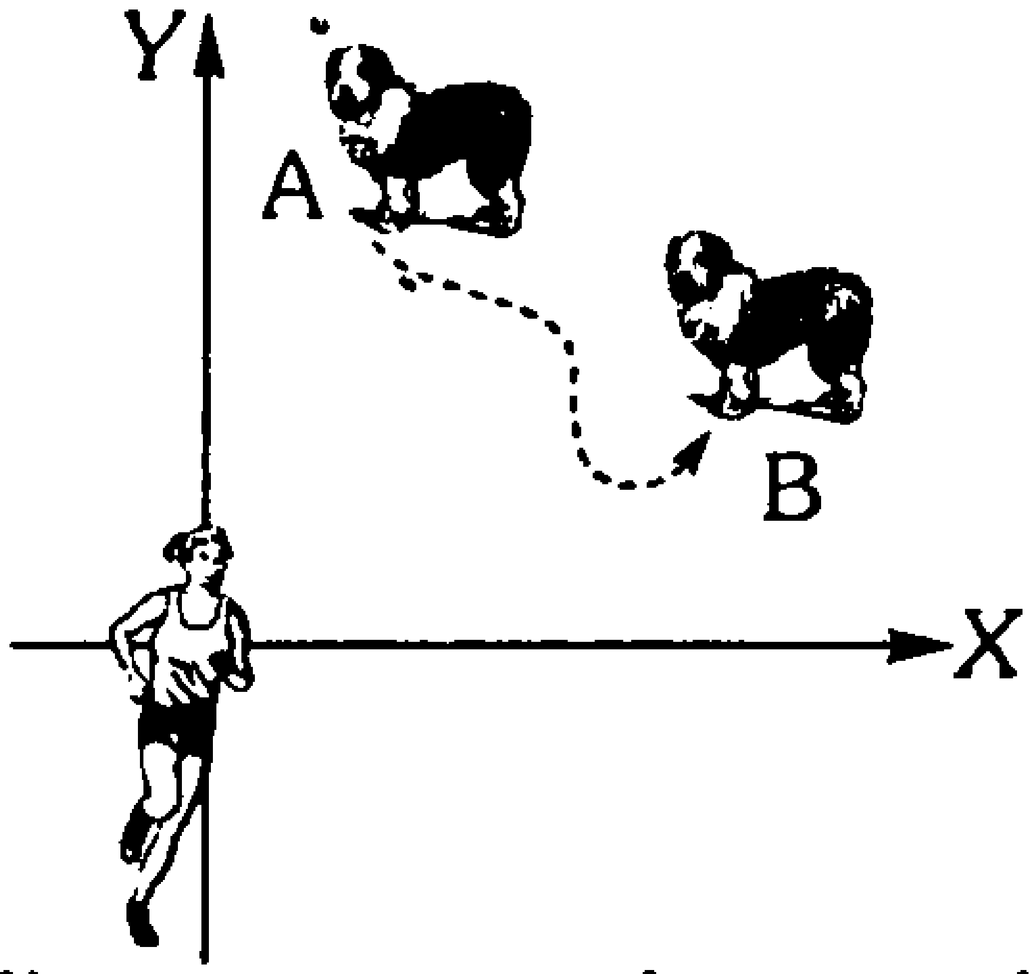
PARTÍCULA :

Cuando se estudie el movimiento de un cuerpo se le considerará a este como un punto, es decir como una partícula, siempre y cuando las dimensiones del cuerpo, las causas del movimiento (fuerza) actúen en un sólo punto del cuerpo.

SISTEMA DE REFERENCIA

Es el sistema desde el cual se está observando

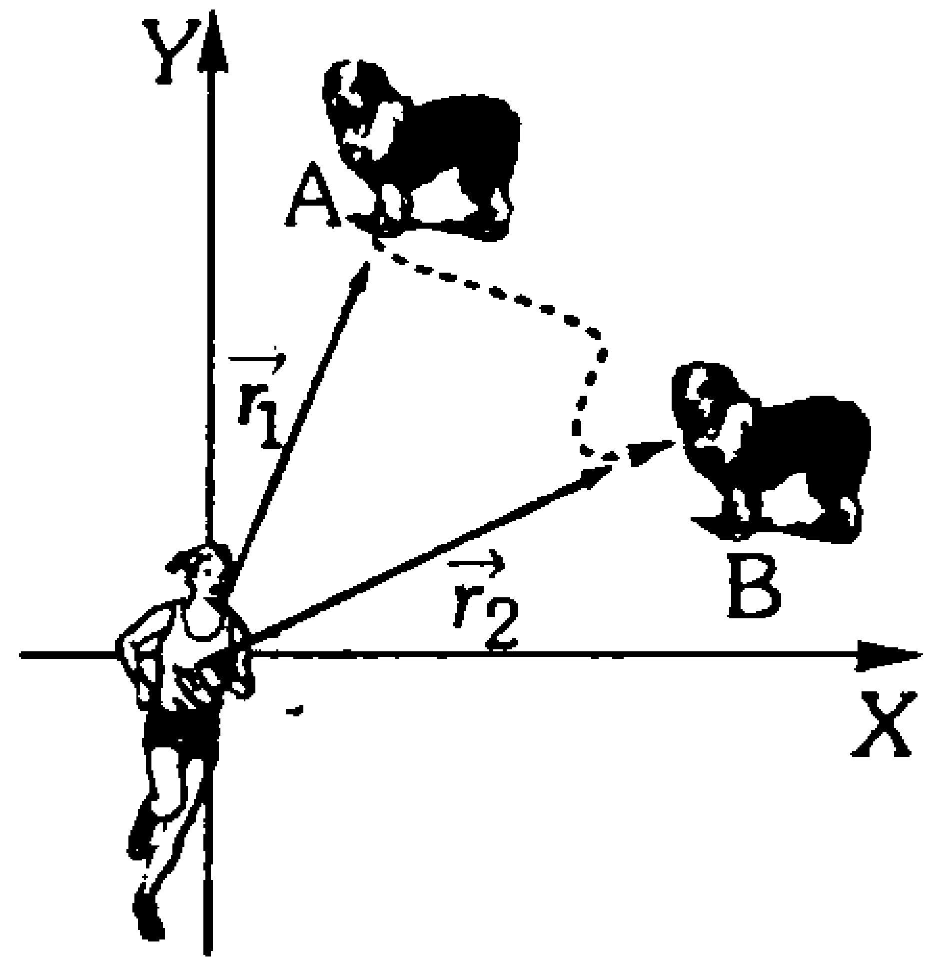
- La Partícula en movimiento



Una persona observa el desplazamiento de un perro

VECTOR POSICIÓN:

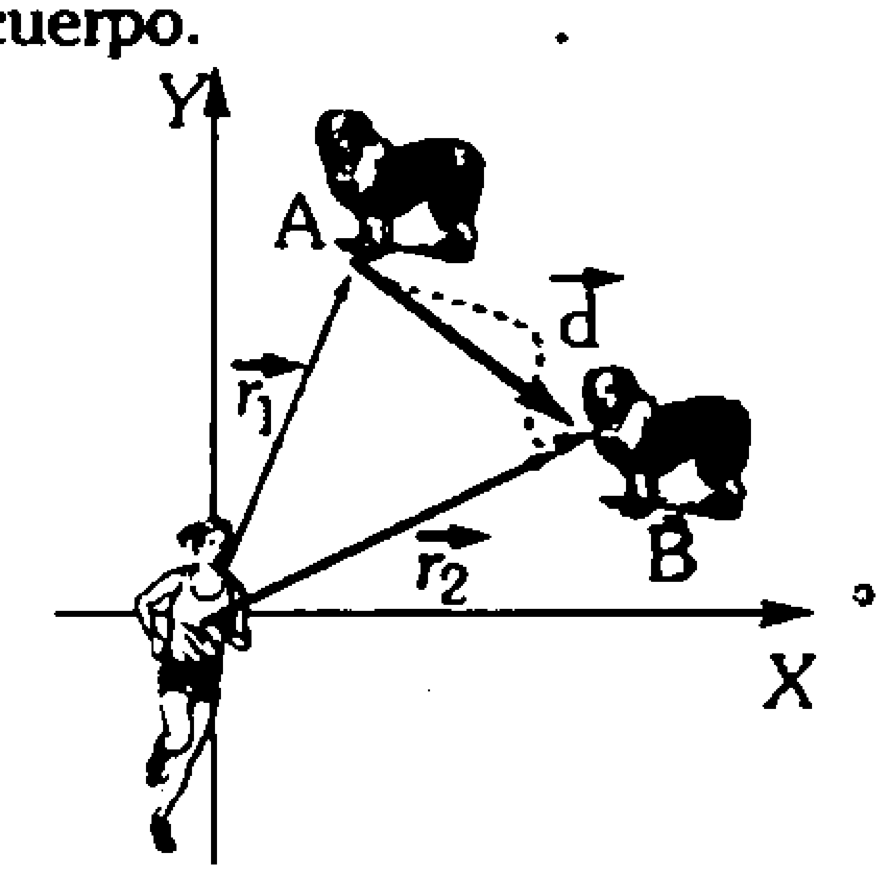
Determina la ubicación de un cuerpo a cada instante también llamado radio vector.



$\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ vector posición

DESPLAZAMIENTO:

Es un vector que indica el cambio de posición que experimenta un cuerpo.



Se observa que: $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{d} = \textit{desplazamiento}$$

DISTANCIA: (d)

Es el módulo o tamaño del vector desplazamiento.

$d = \left\| \vec{d} \right\|$ o también $d = \left\| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right\|$

MOVIMIENTO:

Una partícula se mueve respecto a un sistema de referencia, si su posición cambia respecto al sistema, a través del tiempo (también se conoce como Movimiento Mecánico).

REPOSO:

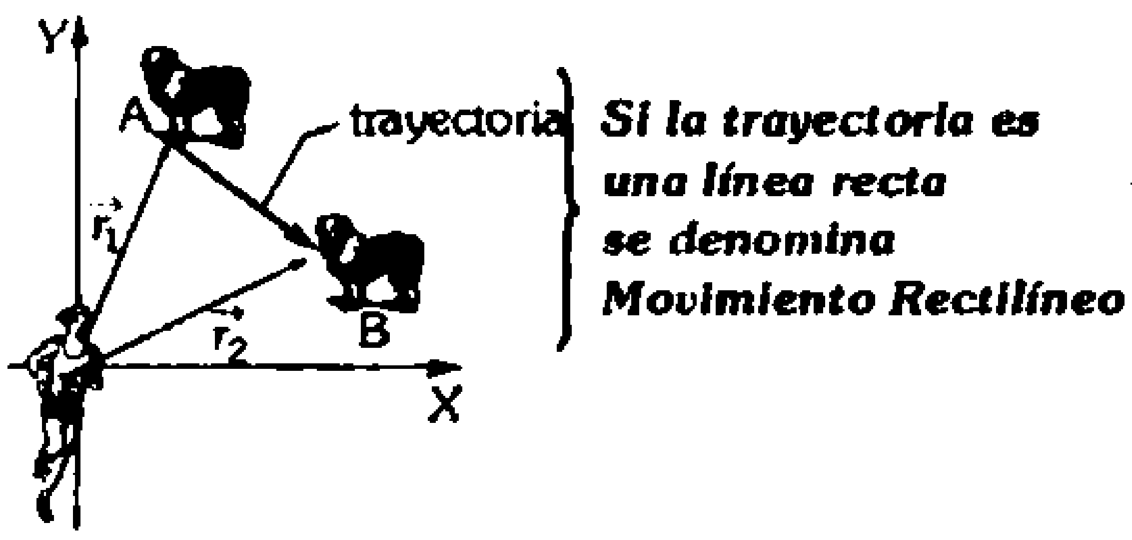
Una partícula está en reposo respecto a un sistema de referencia, si su posición no cambia, respecto al sistema.

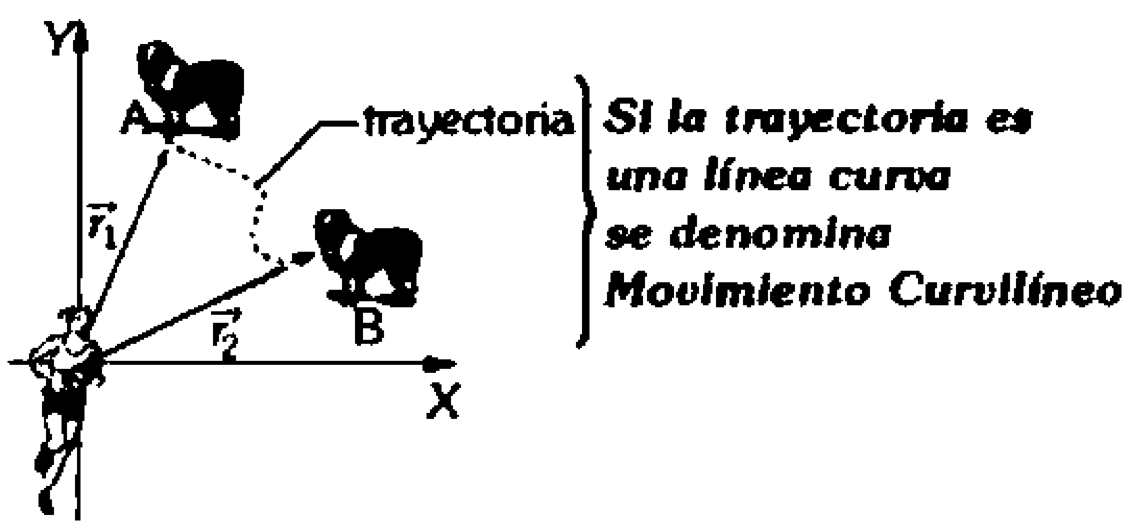
MOVIL :

Se llama así a todo cuerpo (partícula) en movimiento.

TRAYECTORIA ESPACIAL

Es aquella línea que describe un cuerpo en movimiento.





• ESPACIO RECORRIDO (e)

Es la longitud de la trayectoria espacial.

- Se puede observar que si la trayectoria es una *línea recta* coincide con el vector desplazamiento. En este caso:

$$d(\textit{distancia}) = e(\textit{espacio})$$

- *Si la trayectoria no es una línea recta* no coincide con el vector desplazamiento. En este caso:

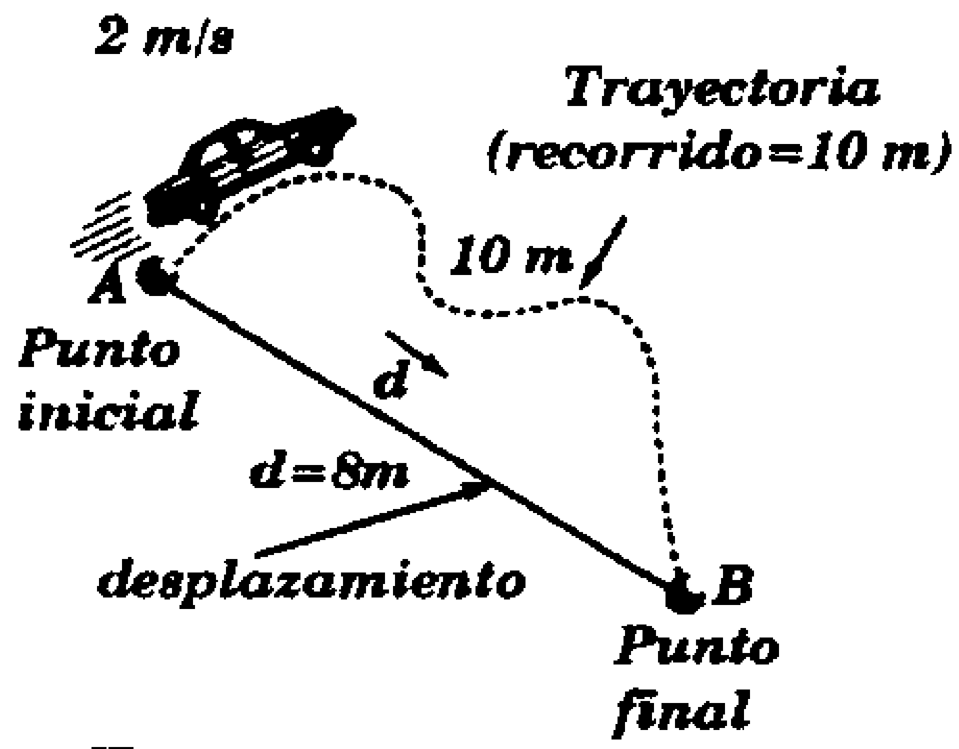
$$d(\textit{distancia}) \neq e(\textit{espacio})$$

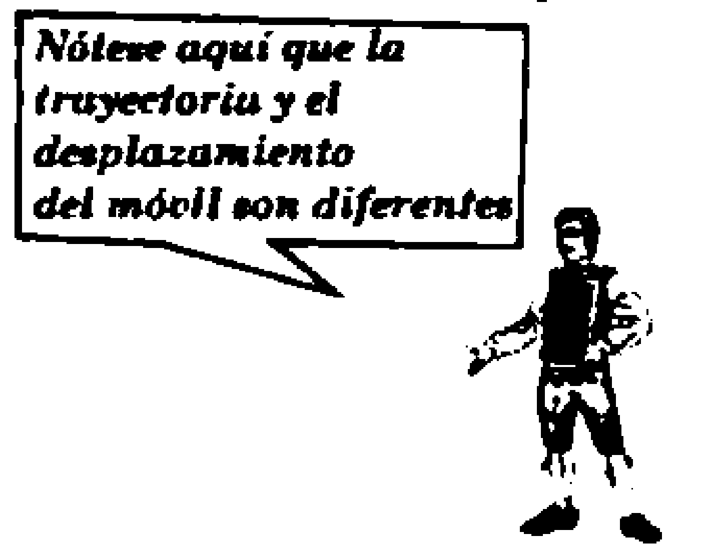
La trayectoria :es la línea recta o curva que describe el móvil en su movimiento.

El desplazamiento es la variación entre dos vectores posición ; aunque en términos más sencillos podemos decir, también, que es el vector que une el punto de partida con el punto de llegada.

El módulo de desplazamiento es denominado distancia ***(d)***.

Ahora, un cuerpo en movimiento , cambia constantemente de posición; entonces se puede llamar velocidad ($\vec{v}$) a aquella magnitud vectorial, cuyo módulo (v) nos indica la rapidez con que se mueve un cuerpo de un lugar a otro. Cuando la rapidez es constante, se considera al movimiento como uniforme. Por ejemplo, el automóvil de la figura recorre del punto ***A*** hacia ***B*** con una rapidez constante de **2 *m/s***.





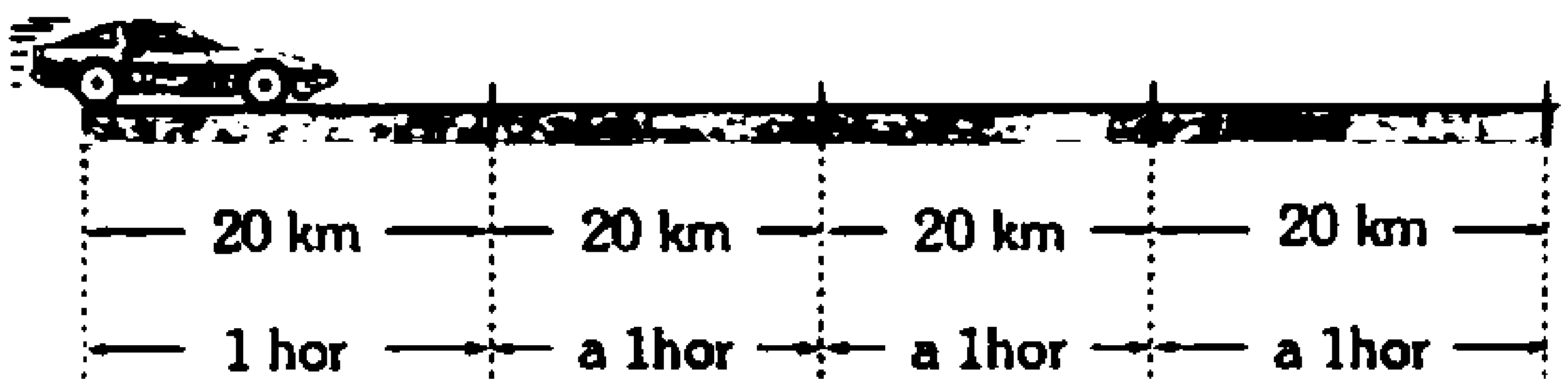
Que un móvil avance a una rapidez de **2 *m/s*** significa que el móvil recorre ***2*** metros en un segundo.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U.)

Es aquel movimiento que se realiza en una sóla dirección notándose que para intervalos de tiempos iguales los desplazamientos recorridos son iguales y que mantiene la misma velocidad durante el tiempo de observación.

EJEMPLO:

Un auto recorre una carretera a ***20 km/h.***



La siguiente tabla indica las distancias recorridas para varios tiempos.

MAGNITUDES	VALORES CORRESPONDIENTES						
distancia (km)	20	40	60	80	100	......	→
Tiempo (horas)	1	2	3	4	5	......	→

De la tabla se deduce lo siguiente:

$$\frac{d \rightarrow}{t \rightarrow} = \frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} \ldots = k$$

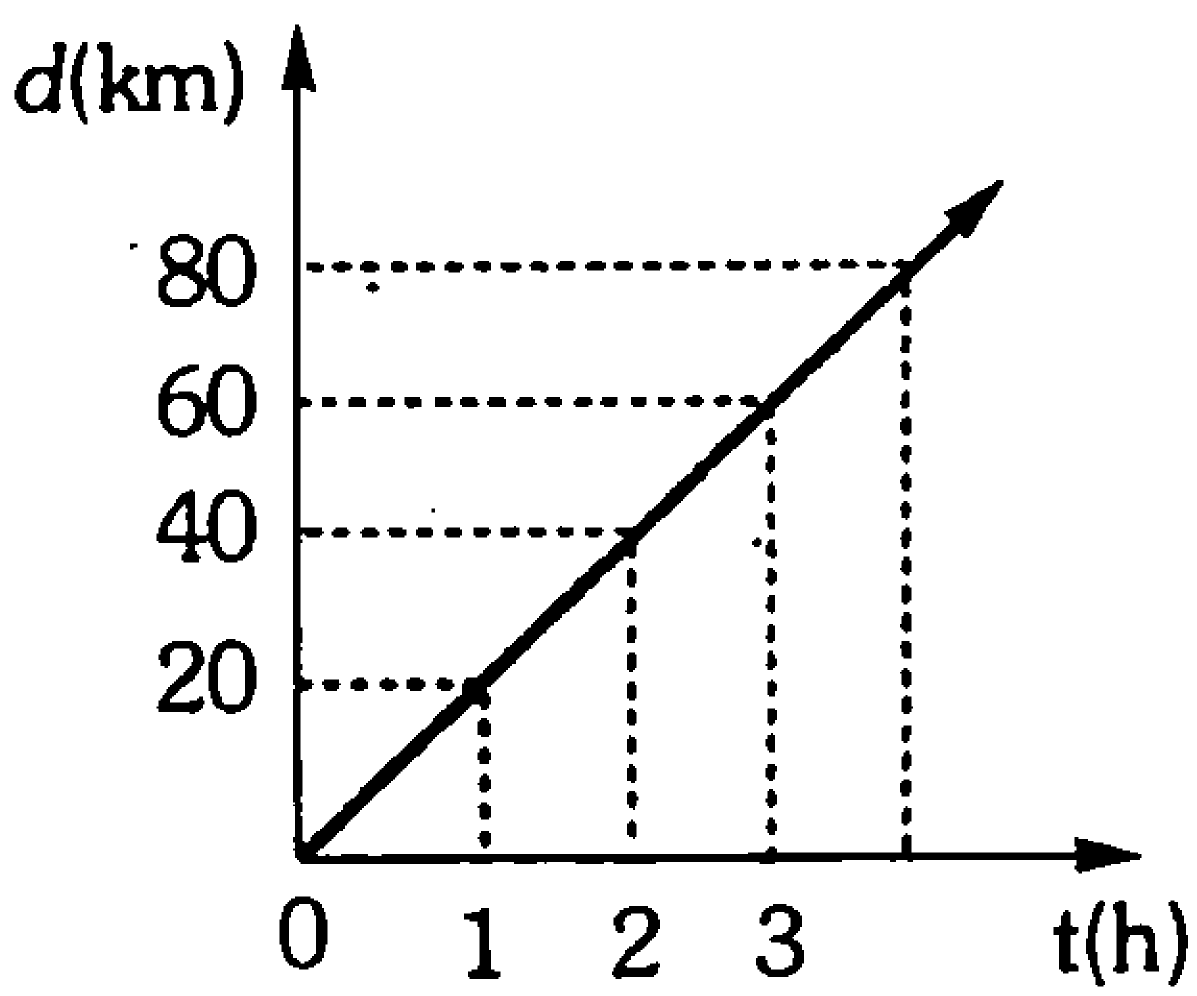
Donde la constante de proporcionalidad se denomina *velocidad*

Luego:

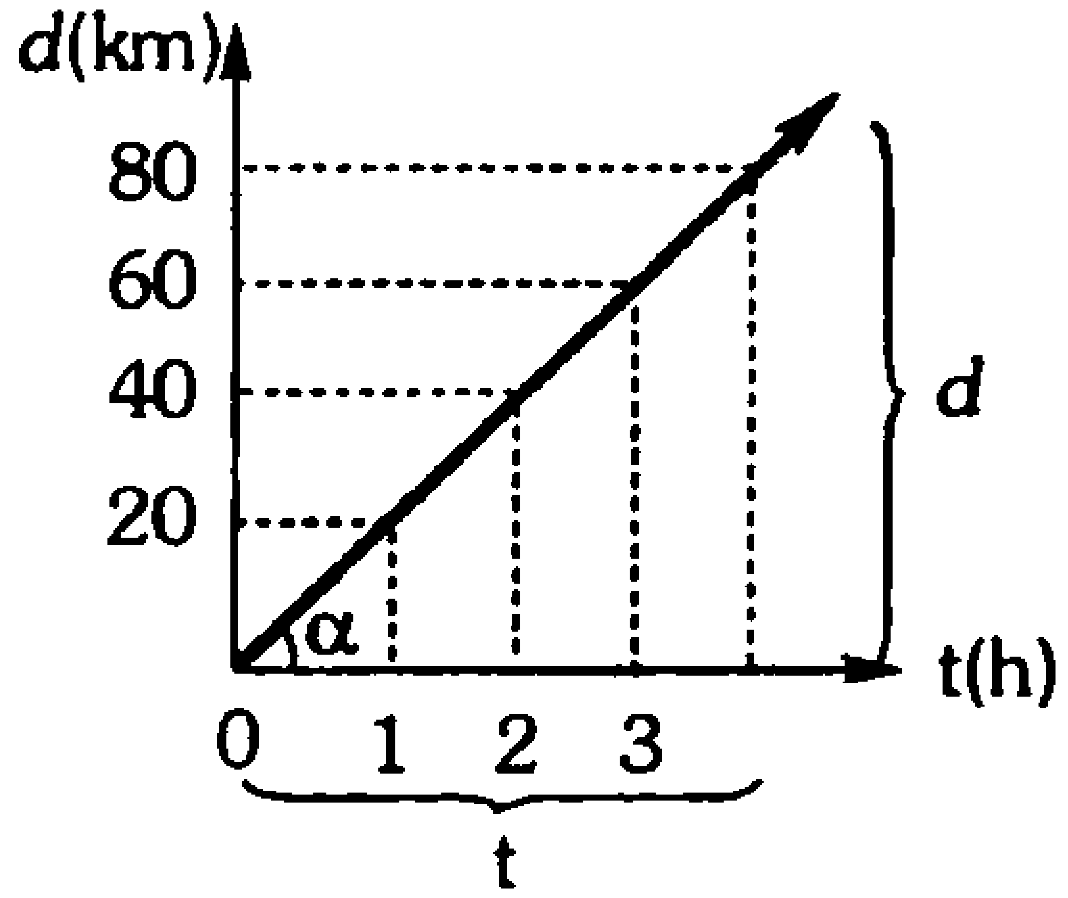
$$v = \frac{d}{t} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{distancia} \\ \leftarrow \text{tiempo} \end{array}$$

v ← rapidez

También puede representarse gráficamente en un diagrama ***d*** vs. ***t***.



De esta gráfica se puede observar lo siguiente:



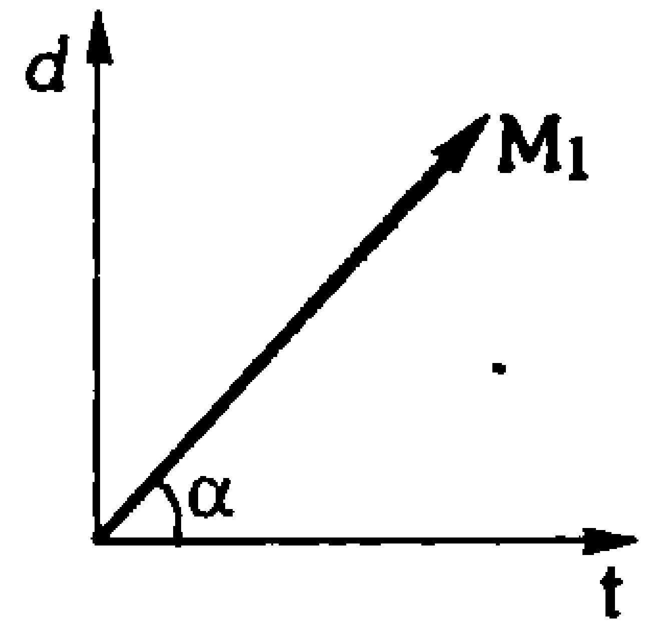
Se puede deducir $tg\,\alpha = \frac{d}{t}$...... esta relación también es la velocidad

VELOCIDAD $(\vec{v})$

Es una magnitud vectorial física, cuyo módulo indica cuál es el espacio recorrido por un móvil en cada unidad de tiempo. Es decir, mide la rapidez del cambio de posición de un cuerpo respecto a un sistema de referencia.

$$\textbf{velocidad} \quad \vec{v} = \frac{d}{t} = Tg\alpha = \frac{|\vec{d}|}{t} = \frac{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}{t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

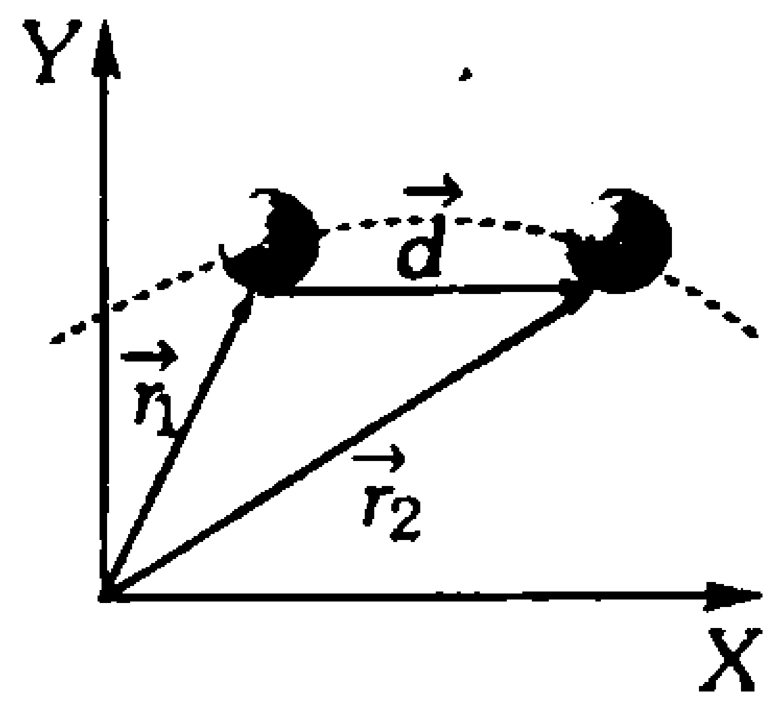
• En la siguiente gráfica se observa que la velocidad es la $tg\,\alpha$ (pendiente de la recta)



Velocidad = tg α

DISTANCIA(d):

Es una magnitud escalar, que se entiende como el módulo del vector desplazamiento (tamaño del vector). Para conocer su valor sólo es necesario conocer los vectores posición inicial y final.



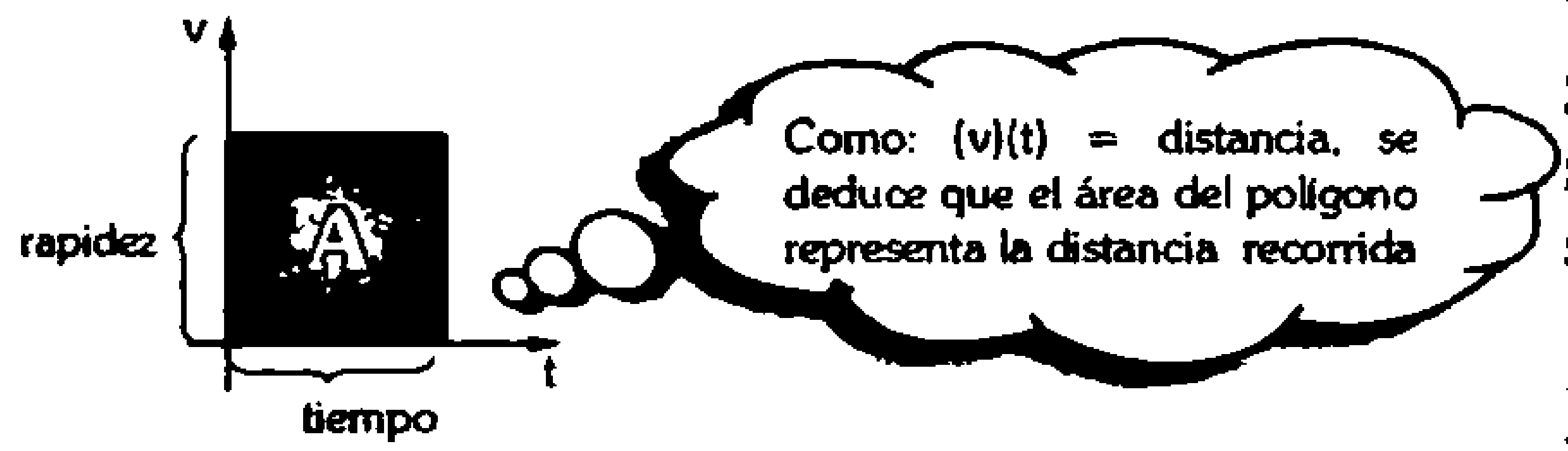
$\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$: *vectores posición*

$\vec{d}$: *vector desplazamiento*

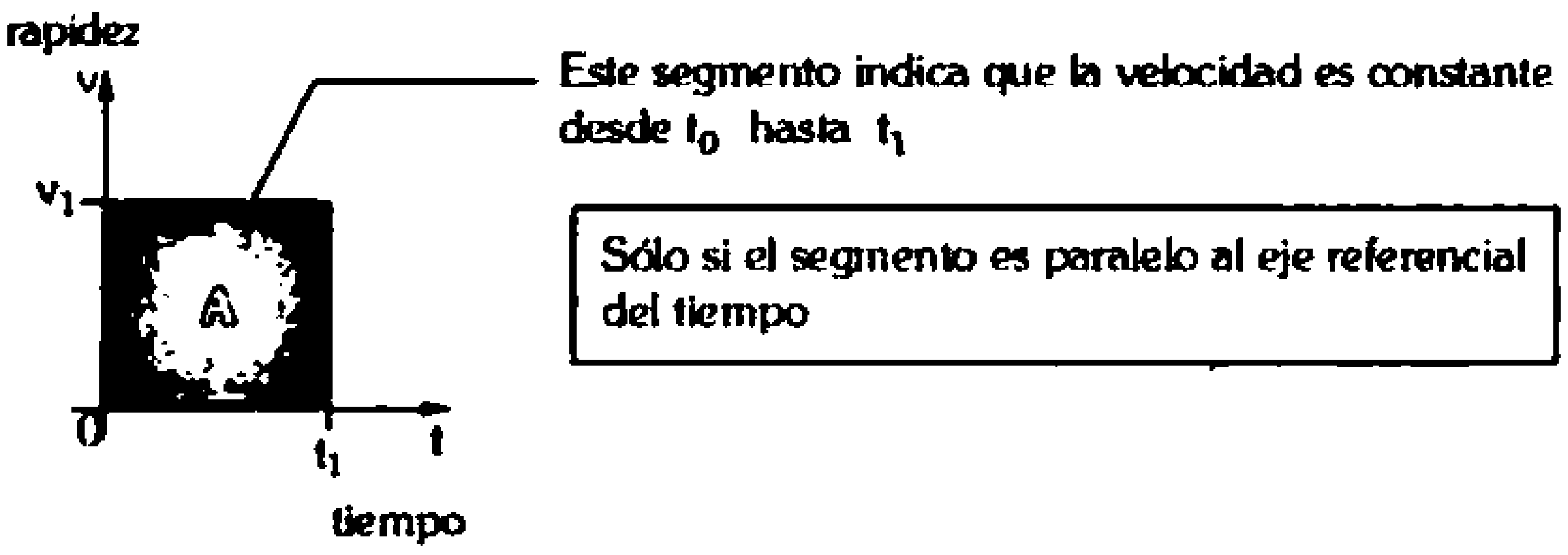
$distacia\ (d) = \left\|\vec{d}\right\| = v \cdot t = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = (t)(tg\,\alpha) = ...$

NOTA :

• Sobre un sistema referencial ***Velocidad*** vs ***Tiempo*** se puede observar

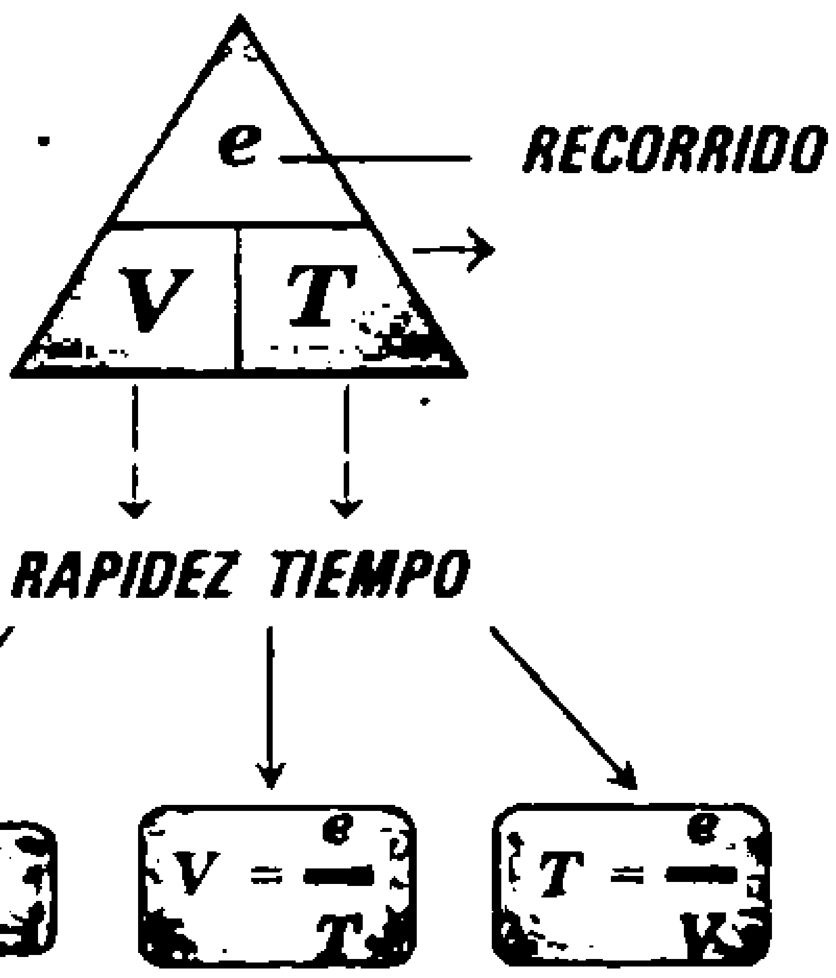


• Observamos del gráfico



MOVILES

Capítulo donde veremos la importancia de comprender y manejar las relaciones que existen entre las magnitudes que intervienen cuando un cuerpo está en movimiento , se denomina «cinemática» ; que además en esta ocasión tiene la finalidad de afianzar los conocimientos adquiridos, de manera práctica , en la vida diaria (todos sabemos , por ejemplo , que si el autobús viaja más rápido , llegaremos a nuestro destino en menos tiempo o que si suelto un objeto, éste caerá y avanzará cada vez más rápido , ..., etc.) Abordaremos , problemas de móviles enmarcados dentro del movimiento rectilíneo uniforme , donde la aceleración es igual a cero , por lo que es importante recordar :



PROBLEMAS SOBRE MÓVILES

Consideraciones previas :

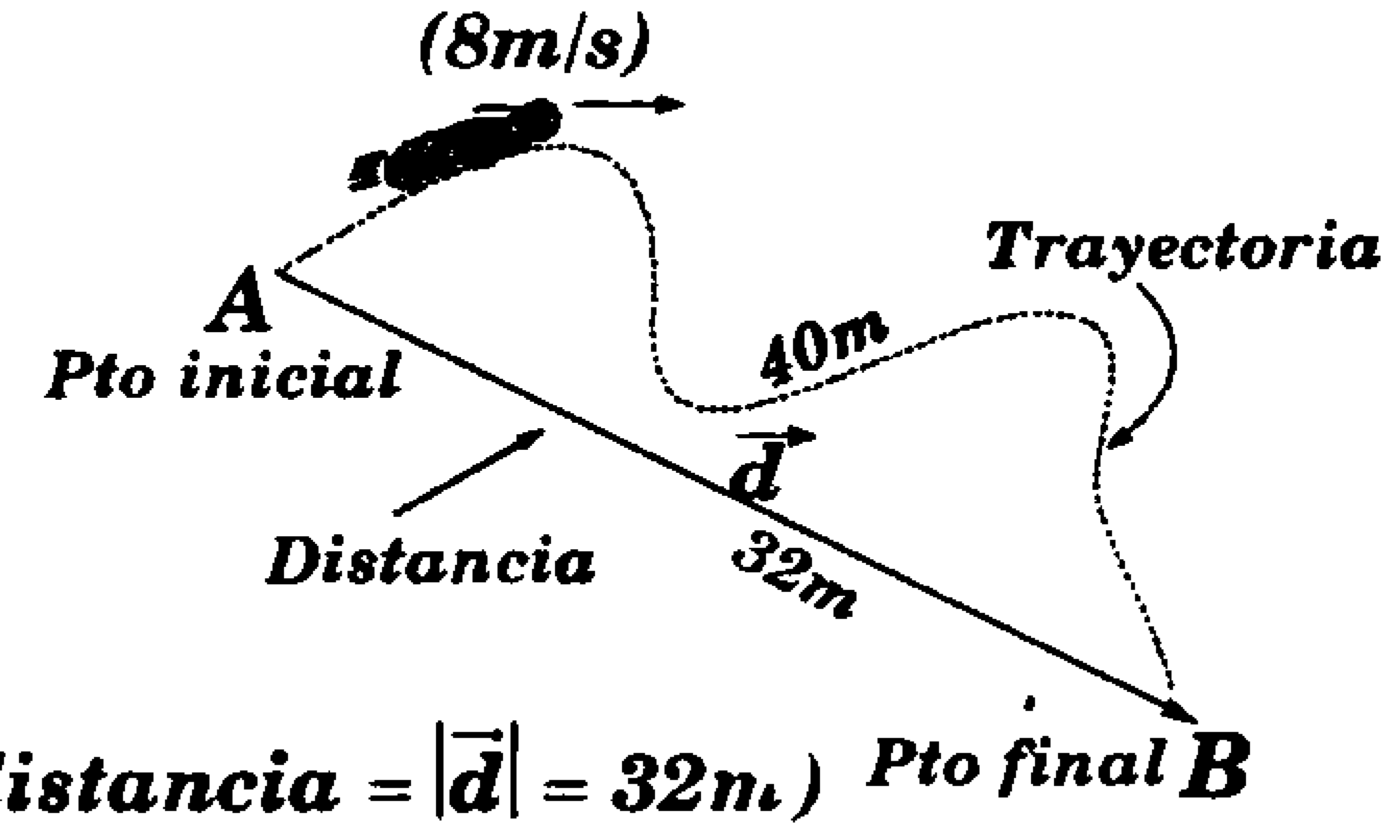
• Llamaremos velocidad $(\vec{V})$ a aquella magnitud vectorial cuyo módulo *(V)* nos indica la rapidez con que se mueve un cuerpo de un lugar a otro.

• Cuando la rapidez es constante , el movimiento es uniforme.

Si un móvil recorre una trayectoria cualquiera con la rapidez constante de ***8m/s*** significará que en cada segundo recorre ***8*** metros.

ILUSTRANDO :

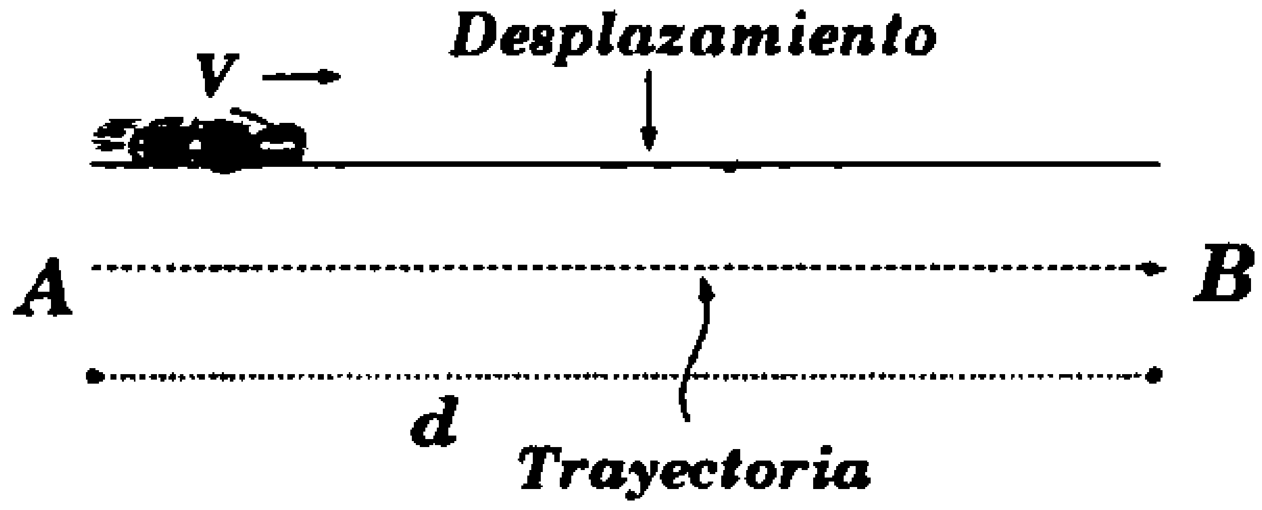
Un automóvil recorre desde el punto ***«A»*** hacia ***«B»*** con la rapidez constante ***(8 m/s)***.



$(distancia = |\vec{d}| = 32m)$

la trayectoria es distinto al desplazamiento.

Cuando el movimiento es en línea recta , el movimiento es rectilíneo y uniforme donde el desplazamiento y la trayectoria coinciden.

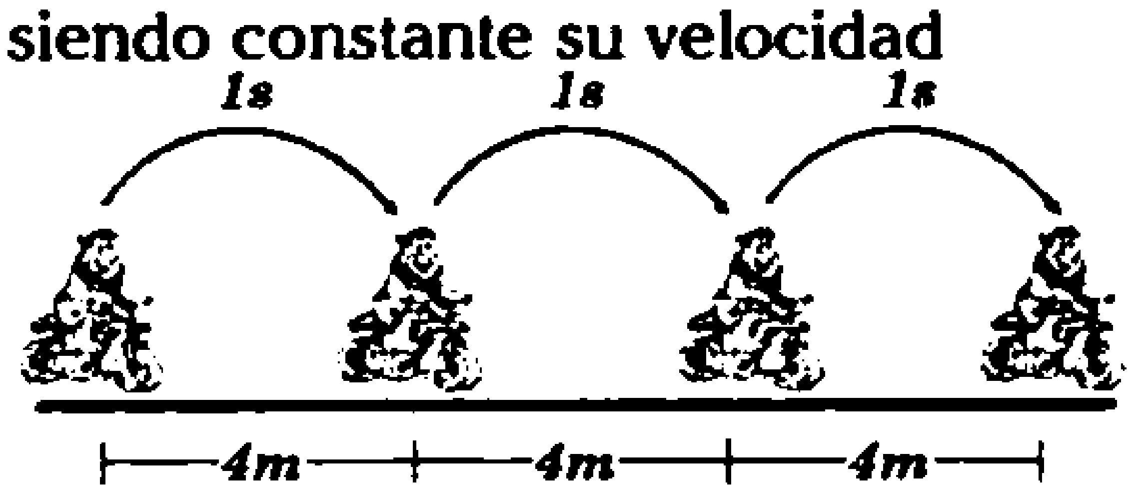


* Sabemos que : $\boxed{d = Vt}$

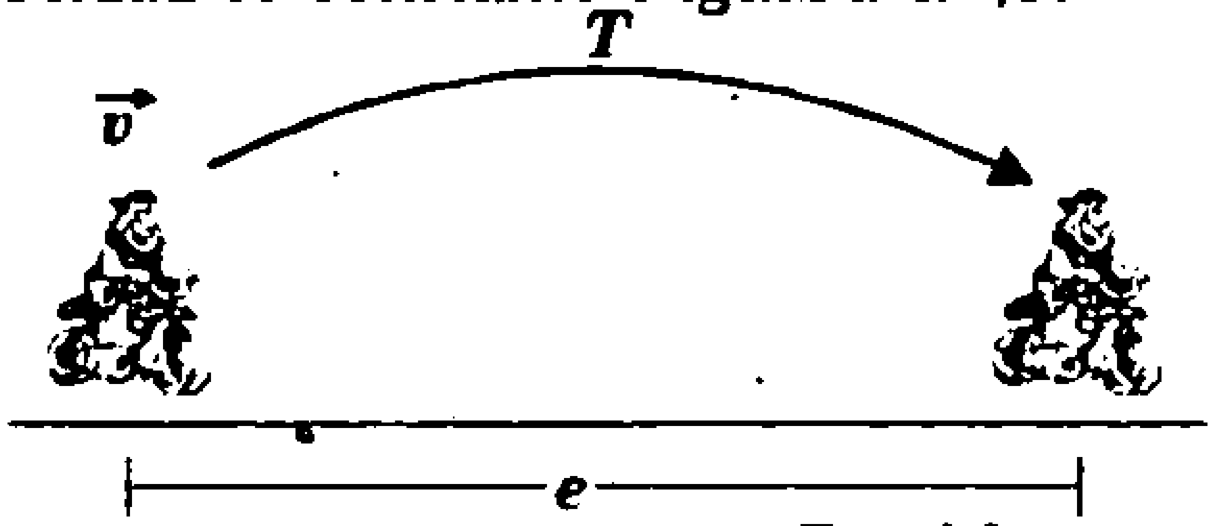
Donde : ***V : velocidad*** ***t : tiempo***

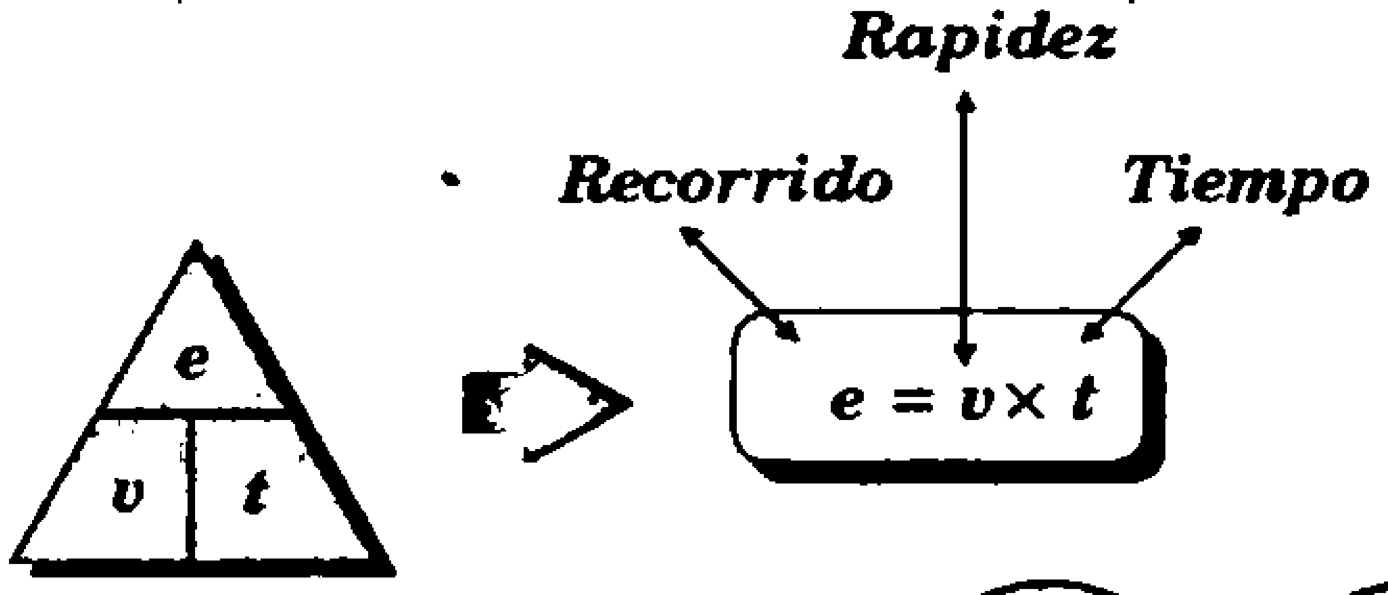
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Es aquel movimiento cuya trayectoria es rectilínea en la cual el móvil recorre espacios iguales en tiempo iguales; siendo constante su velocidad



De donde se observa que en cualquier tramo la velocidad es constante e igual a *4m/s*.





De donde : $v = \frac{e}{t}$; $t = \frac{e}{v}$

OJO :

Para convertir ***km/h*** a ***m/s*** se multiplica por ***5/18***

EJEMPLO :

$$54 km/h = 54 \times \frac{5}{18} m/s = 15 m/s$$

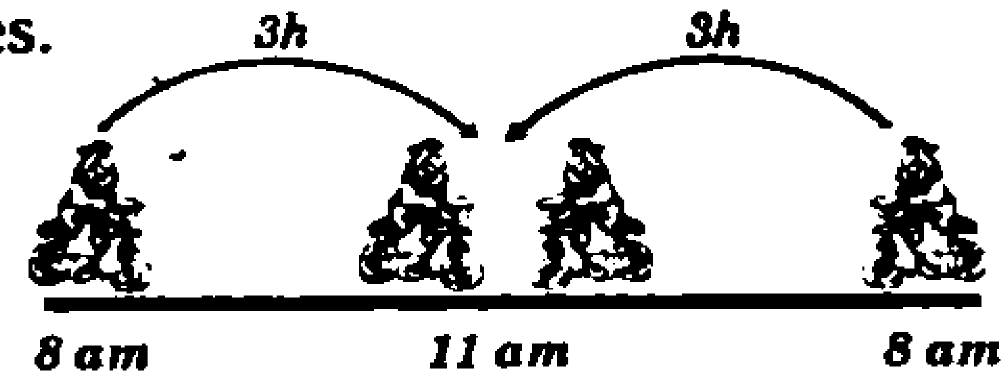
Para convertir ***m/s*** a ***km/h*** se multiplica por ***18/5***

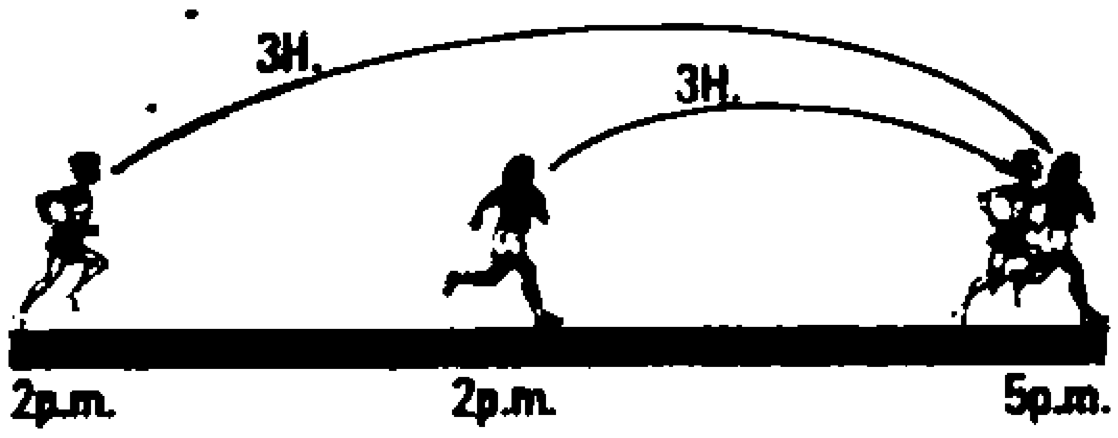
EJEMPLO :

$$20\ m/s = 20 \times \frac{18}{5}\ km/h = 72\ km/h$$

MOVIMIENTOS SIMULTÁNEOS

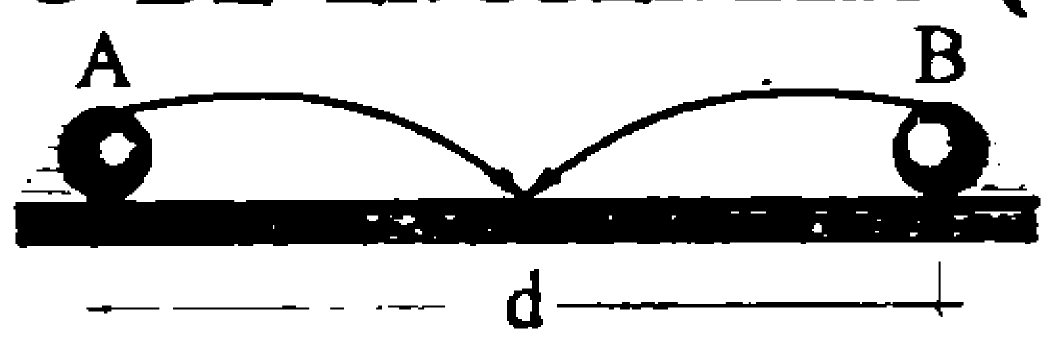
Son cuando dos o más móviles inician y terminan su movimiento al mismo tiempo ; es decir sus tiempos son iguales.





Los movimientos simultáneos pueden ser en :

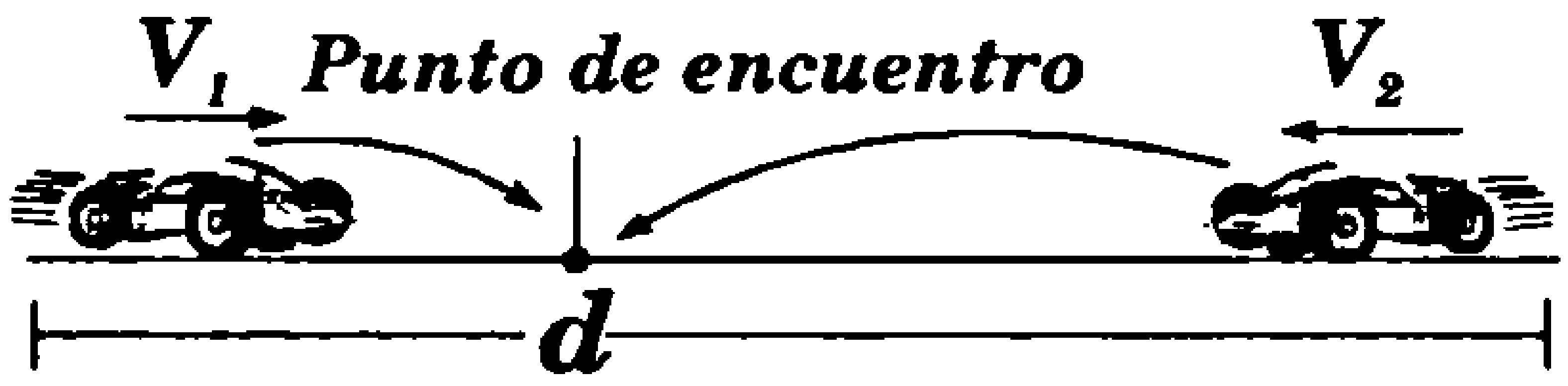
TIEMPO DE ENCUENTRO (t_E)



$$\Rightarrow t_E = \frac{d}{V_A + V_B}$$

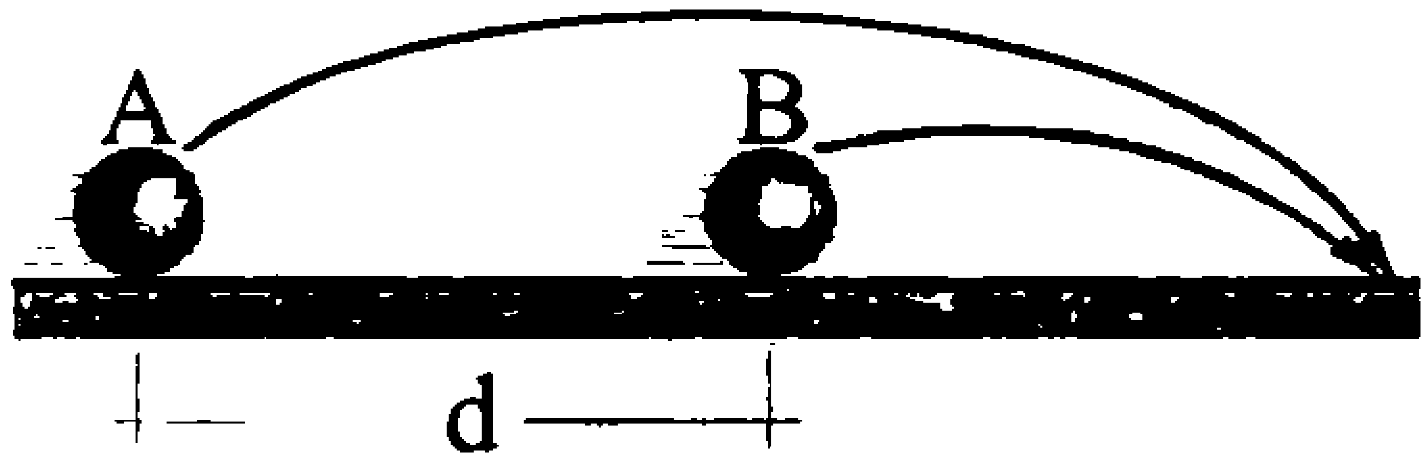
Suma de los recorridos de los móviles en simultáneo

* «*A*» y «*B*» parten en simultáneo.



$$t_E = \frac{d}{V_1 + V_2}$$

TIEMPO DE ALCANCE (t_A)

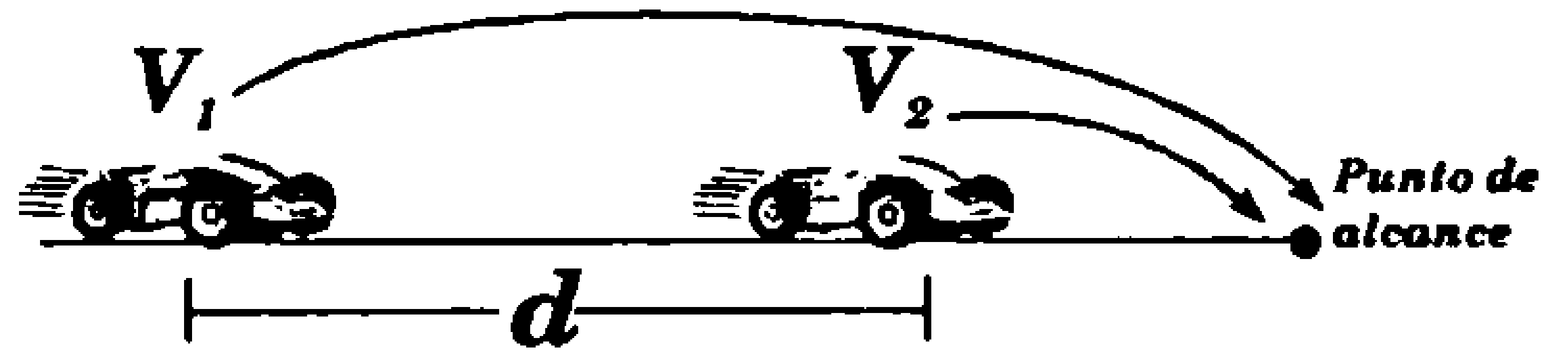


$$\Rightarrow t_A = \frac{d}{V_A - V_B}$$

Diferencia de recorridos de los móviles en simultáneo

Obs : $V_A > V_B$

* «*A*» y «*B*» parten en simultáneo.

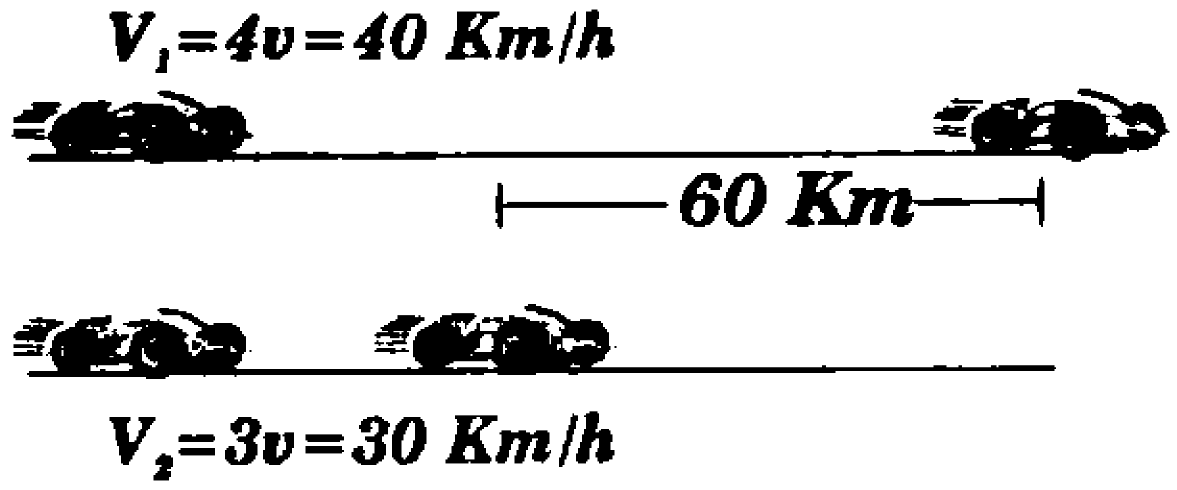


$$t_A = \frac{d}{V_1 - V_2}$$

EJEMPLO :

La rapidez de dos móviles son como ***3*** es a ***4***. ¿Dentro de cuánto tiempo estarán separados una distancia de ***60 km*** , si partieron juntos en el mismo sentido? . sabiendo , además , que la diferencia de sus rapideces es de ***10 km/h***.

RESOLUCIÓN :



* Además : $V_1 - V_2 = V = 10\ km/h$

* En un tiempo ***t*** :

$$60km = V_1 t - V_2 t \Rightarrow t = \frac{60km}{10km/h} = 6h$$

PROBLEMAS RESUELTOS

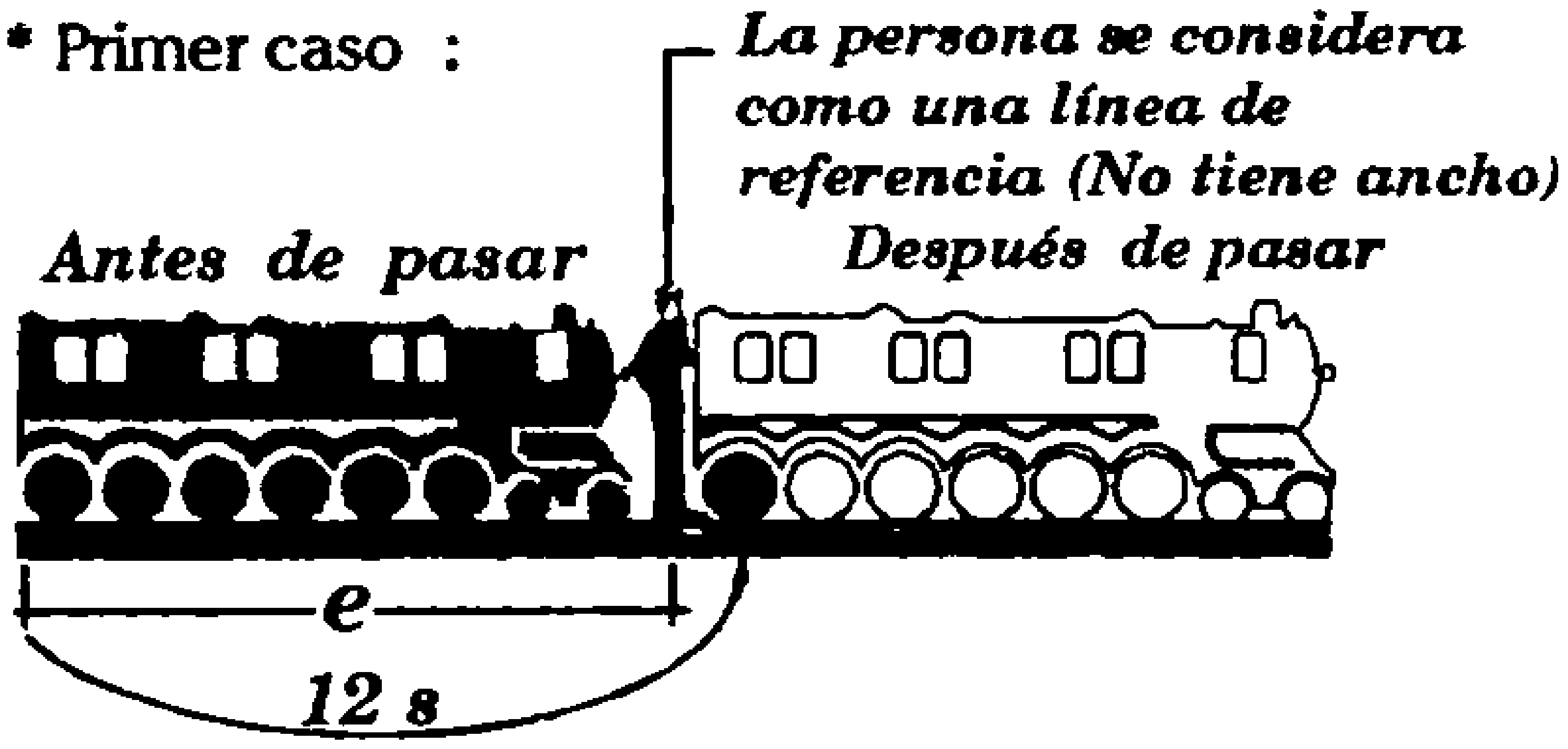
PROBLEMA 1 :

Un tren emplea *12* segundos en pasar delante de un observador y *46* segundos en recorrer una estación de *374m*. de longitud. Hallar la longitud del tren.

A)120 m. *B)108 m.* *C)132 m.*
D)124 m. *E)121 m.*

RESOLUCIÓN :

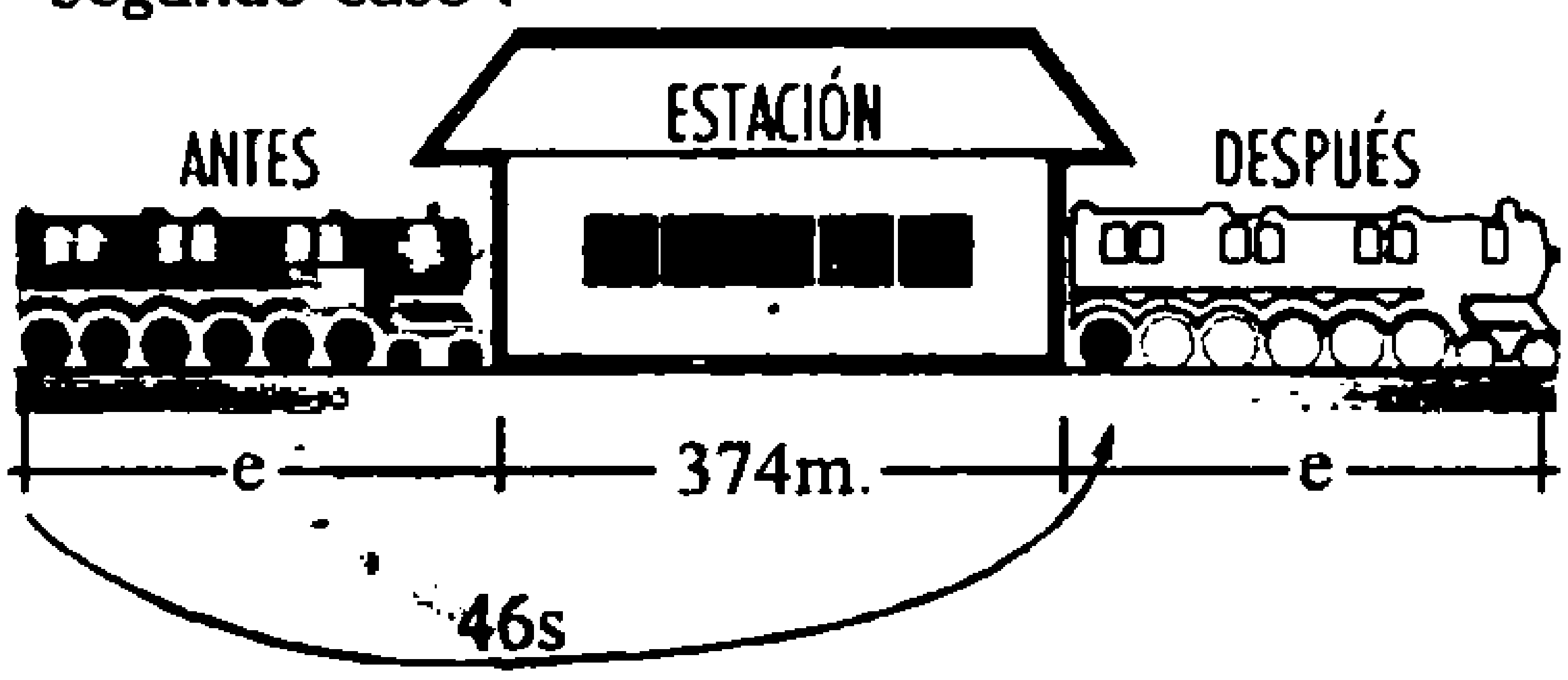
* Primer caso :



Al fijarse en el riel trasero (porque lo que recorre el tren, lo recorrerán con una de sus partes), te darás cuenta que para pasar al observador deberá recorrer su propia longitud.

$$\Rightarrow V_{TREN} = \frac{e}{12} \text{.........}(I)$$

* Segundo caso :



$$\Rightarrow V_{TREN} = \frac{e+374}{46} \text{.........}(II)$$

* De *(I)* y *(II)* :

$$\frac{e}{12} = \frac{e+374}{46} \Rightarrow 46e = 12e + 374 \times 12$$

$$\Rightarrow 34e = 374 \times 12 \Rightarrow e = \frac{374 \times 12}{34} = 11 \times 12 = 132m$$

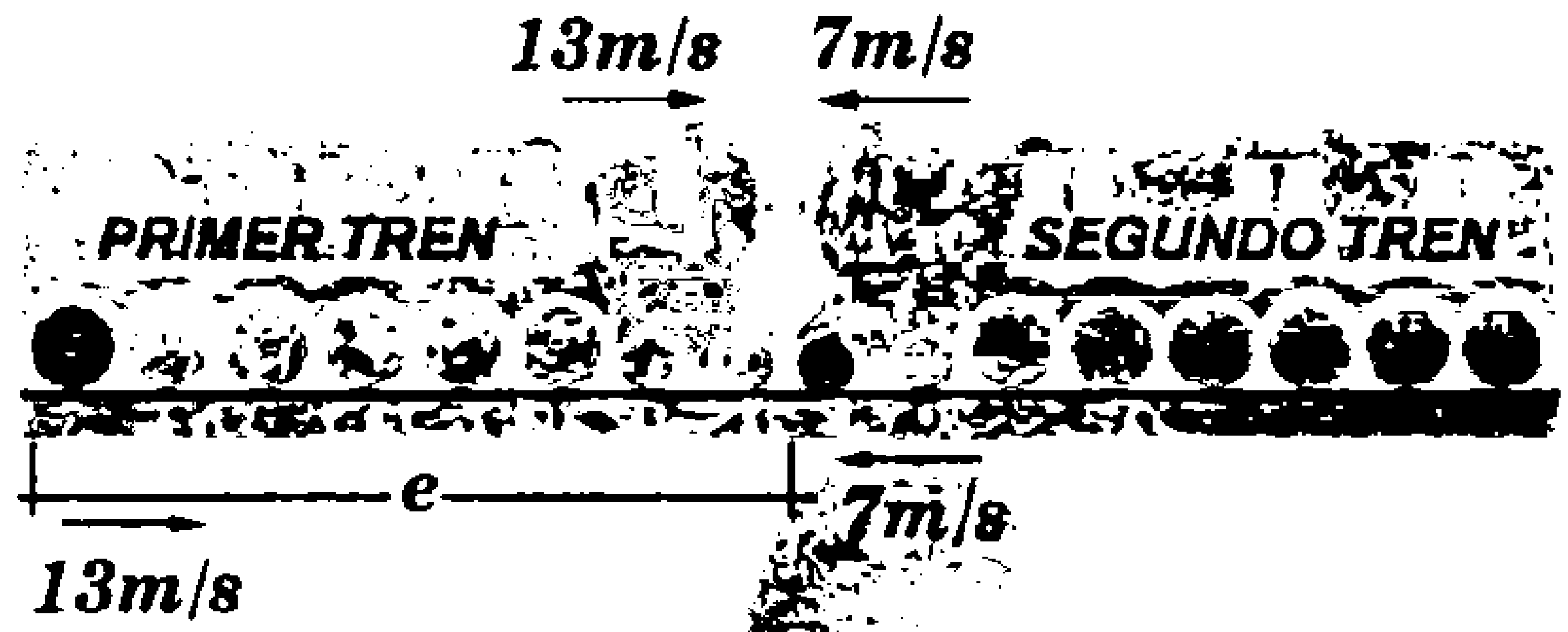
RPTA ::"C"

PROBLEMA 2 :

Dos trenes marchan en sentido contrario y sobre vías paralelas, con velocidades de *13*y*7m/s*. respectivamente, un pasajero en el segundo tren calculó que el primero demoró en pasar *9* segundos. ¿Cuál es la longitud de este último tren?

A)80m. *B)480m.* *C)100m.* *D)180m.* *E)120m.*

RESOLUCIÓN :



* La pregunta es equivalente a decir :

¿Después de cuánto tiempo se encuentran los puntos «A» y «B» , sabiendo que están separados «e» (longitud de primer tren)? luego utilizaremos el tiempo de encuentro:

$$t_{ENCUENTRO} = \frac{e}{V_1 + V_2} \Rightarrow 9 = \frac{e}{13+7} \Rightarrow 180 = e$$

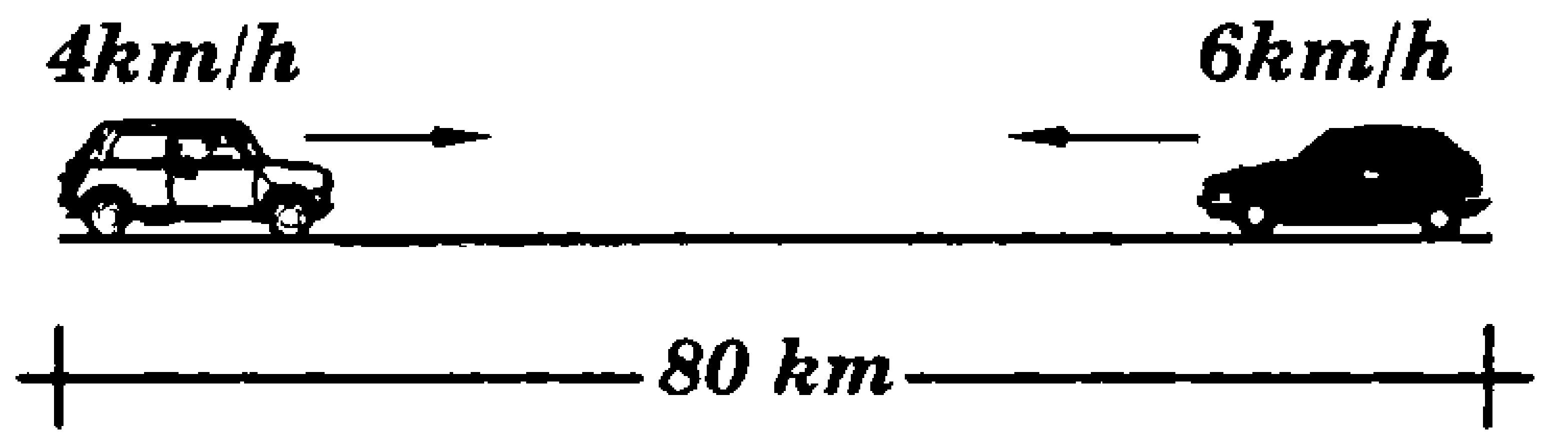
RPTA ::"D"

PROBLEMA 3 :

Dos automóviles separados por una distancia de *80 km*. se dirigen el uno hacia el otro con velocidades de *4 km/h* y *6km/h*. ¿Qué tiempo tardarán en encontrarse? (Parten al mismo tiempo).

A)6h *B)7h* *C)8h* *D)9h* *E)10h.*

RESOLUCIÓN :



Tiempo	*Espacio*
En 1h	*Se acercan* *4+6=10km.*
En "T"	*80 km*

*Por Regla de Tres : $80 = 10\,T$

$$\Rightarrow 8 = T$$

RPTA : "C"

MÉTODO PRÁCTICO :

$$T_e = \frac{e}{V_1 + V_2}$$

T_e: Tiempo de encuentro
e: Espacio de separación inicial
V_1, V_2: Velocidades

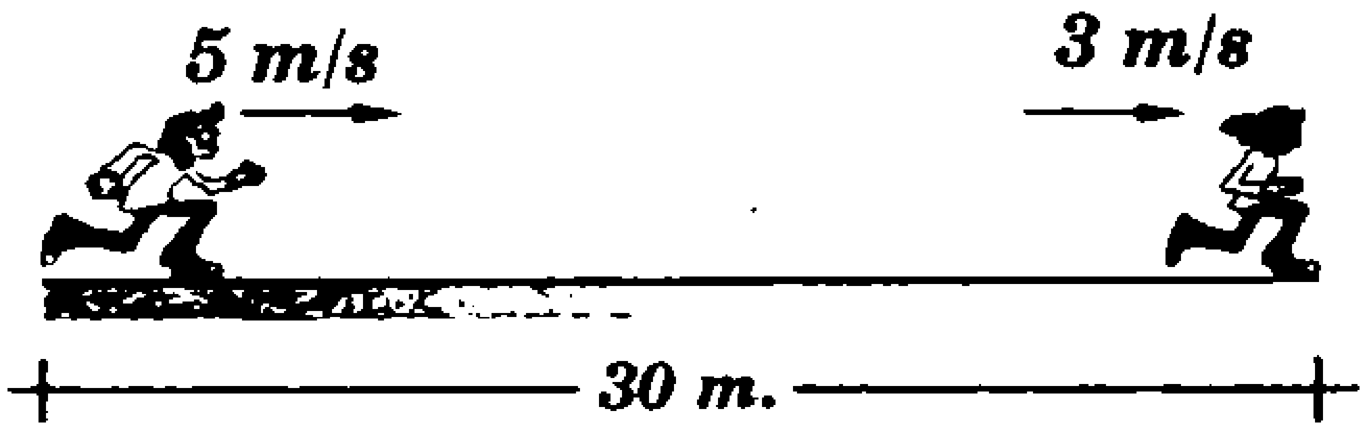
PROBLEMA 4 :

Un chico y una chica están separados *30* m , parten al mismo tiempo en el mismo sentido con velocidades de *5 m/s* y *3 m/s* respectivamente

¿En cuánto tiempo alcanza el chico a la chica?

A)6 s *B)8 s* *C)15 s* *D)10 s* *E)3,6 s*

RESOLUCIÓN :



Tiempo — *Ventaja*

En 1s — *Descuenta* — *5-3=2m*

En "T" — *30 cm*

$\Rightarrow 30 = 2t \quad \Rightarrow 15 = t$

RPTA : "C"

MÉTODO PRÁCTICO :

$$T_A = \frac{e}{V_1 - V_2}$$

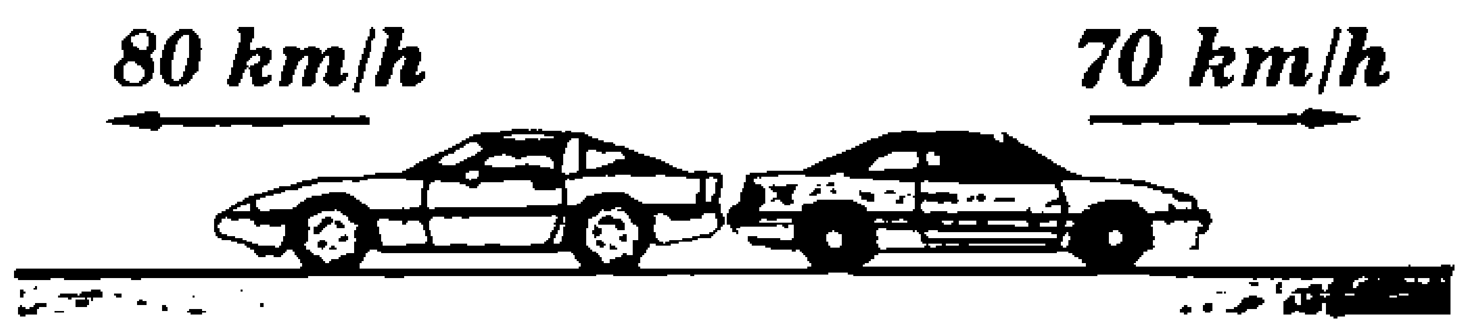
T_A: Tiempo de alcance
e: Espacio de separación
V_1 y V_2: Velocidades

PROBLEMA 5 :

Dos autos arrancan del mismo punto viajando en direcciones opuestas. La velocidad de uno es ***80 km/h*** y la del otro es ***70 km/h***. ¿En cuántas horas llegan a separarse ***375 km***?

A)2h ***B)2,5 h*** ***C)3h*** ***D)4,5 h*** ***E)4 h***

RESOLUCIÓN :



Tiempo — *Separación*

En 1h — *Se separan* — *70+80=150 km*

En "T" — *375 cm*

$375 = 150\,t \Rightarrow 2{,}5 = t$

RPTA : "B"

MÉTODO PRÁCTICO :

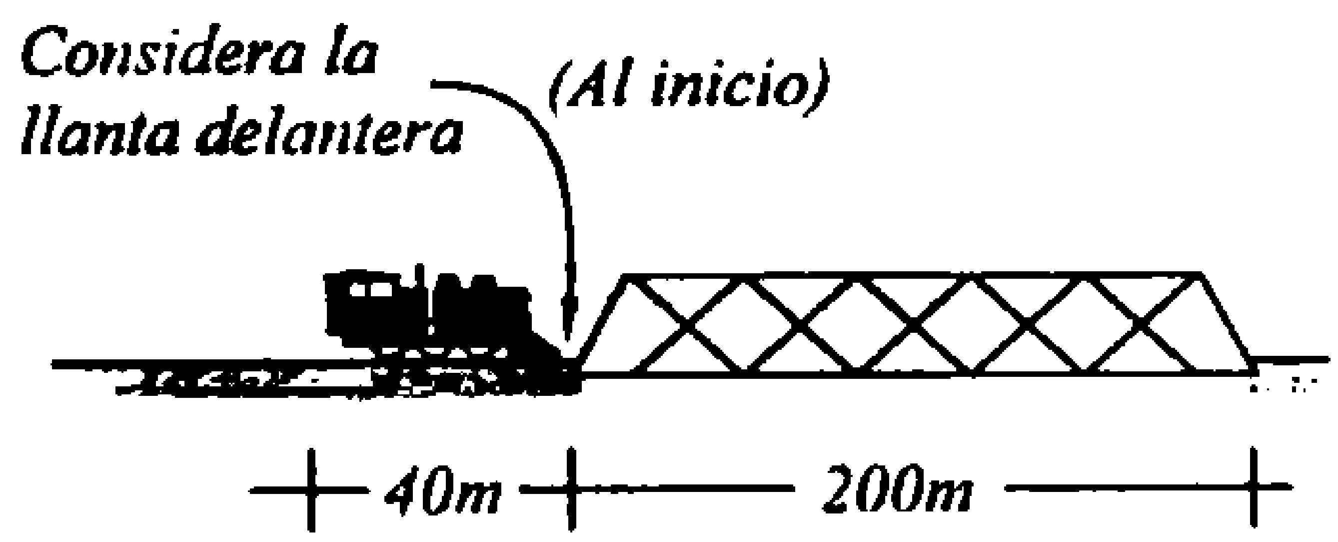
$$T_s = \frac{e}{V_1 + V_2}$$ T_s : Tiempo de separación

PROBLEMA 6 :

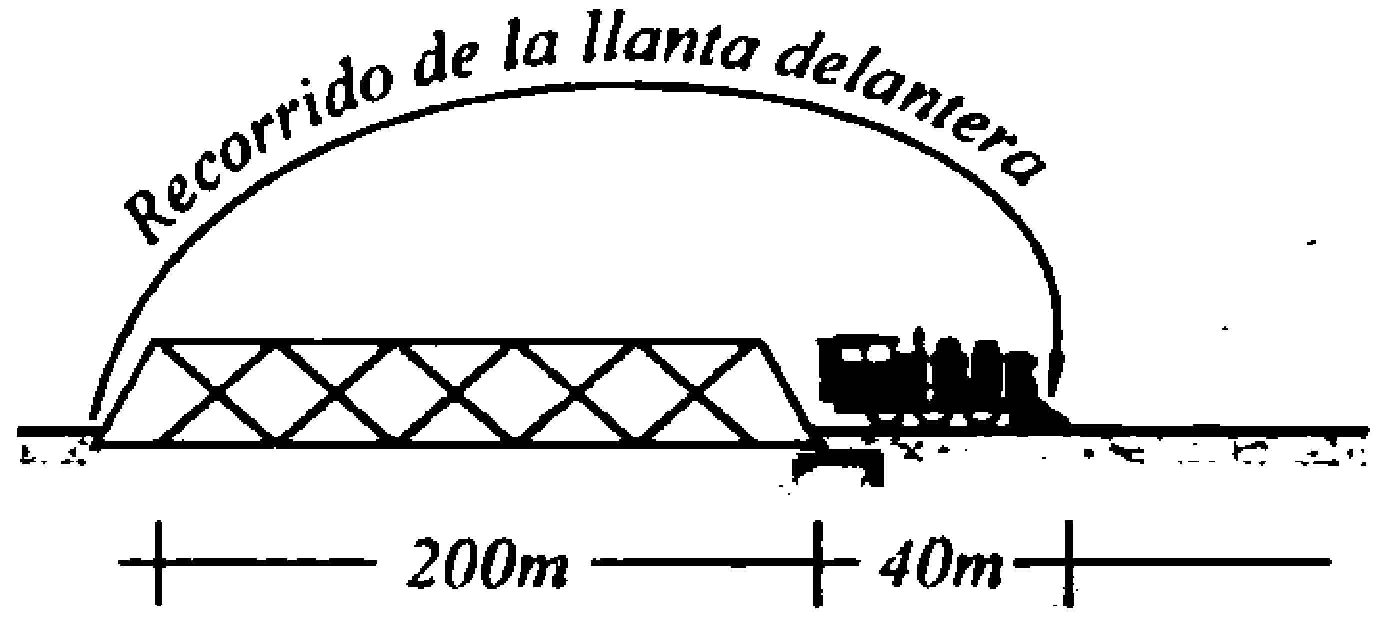
¿En qué tiempo cruzará un tren de ***40 m*** de longitud a un puente de ***200 m***. de largo , si el tren tiene una velocidad de ***30 m/s***?

A)7 s ***B)6 s*** ***C)8 s*** ***D)9s*** ***E)10 s***

RESOLUCIÓN :



* Después de cruzar :



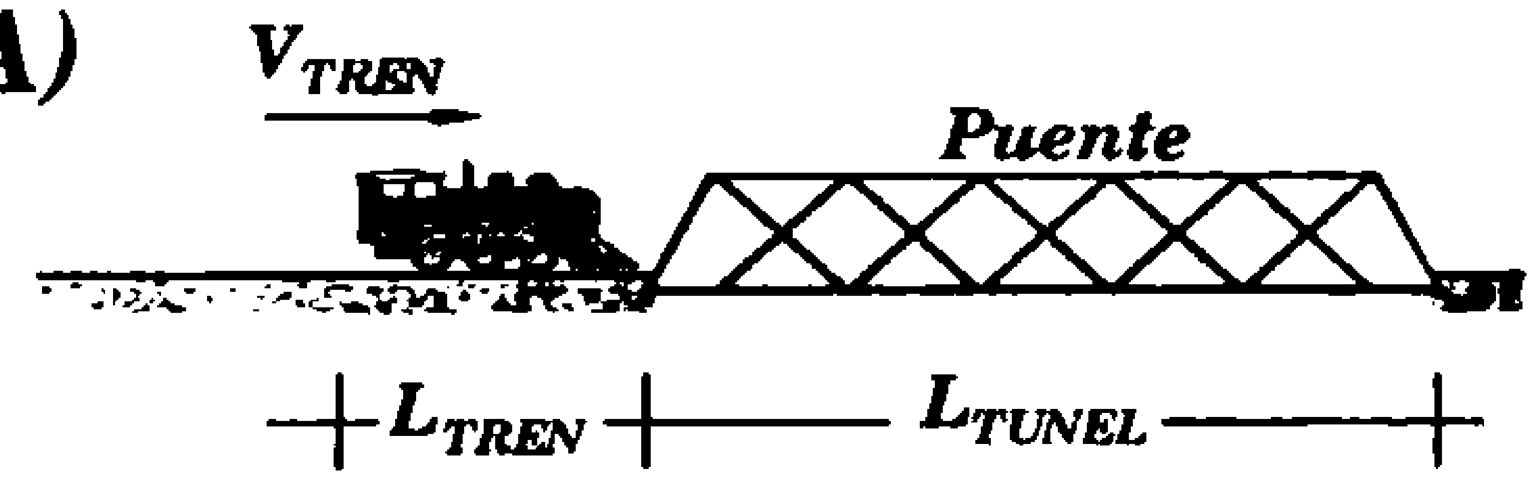
* Se deduce la llanta delantera a recorrido

$200 + 40 = 240\,m$. en : $T = \frac{240\,m}{30\,m/s} = 8\,s$

RPTA : "C"

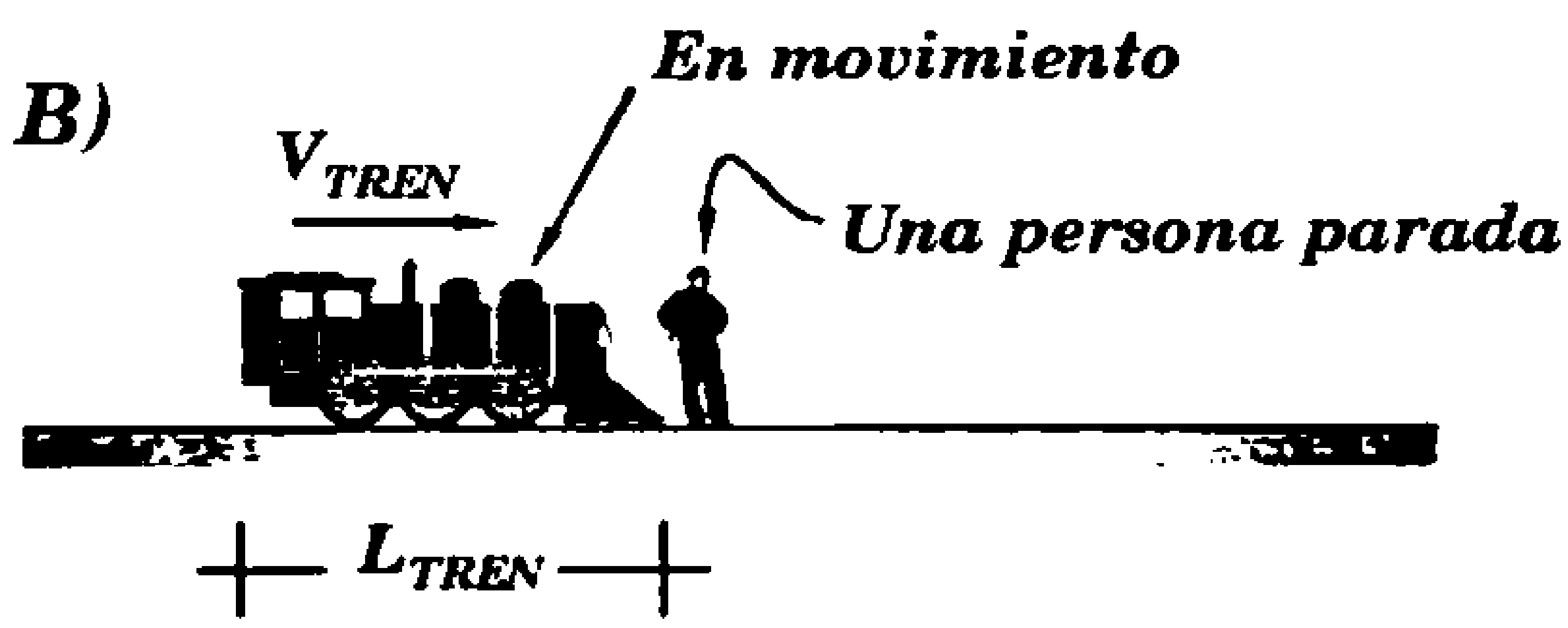
MÉTODOS PRÁCTICOS :

A)



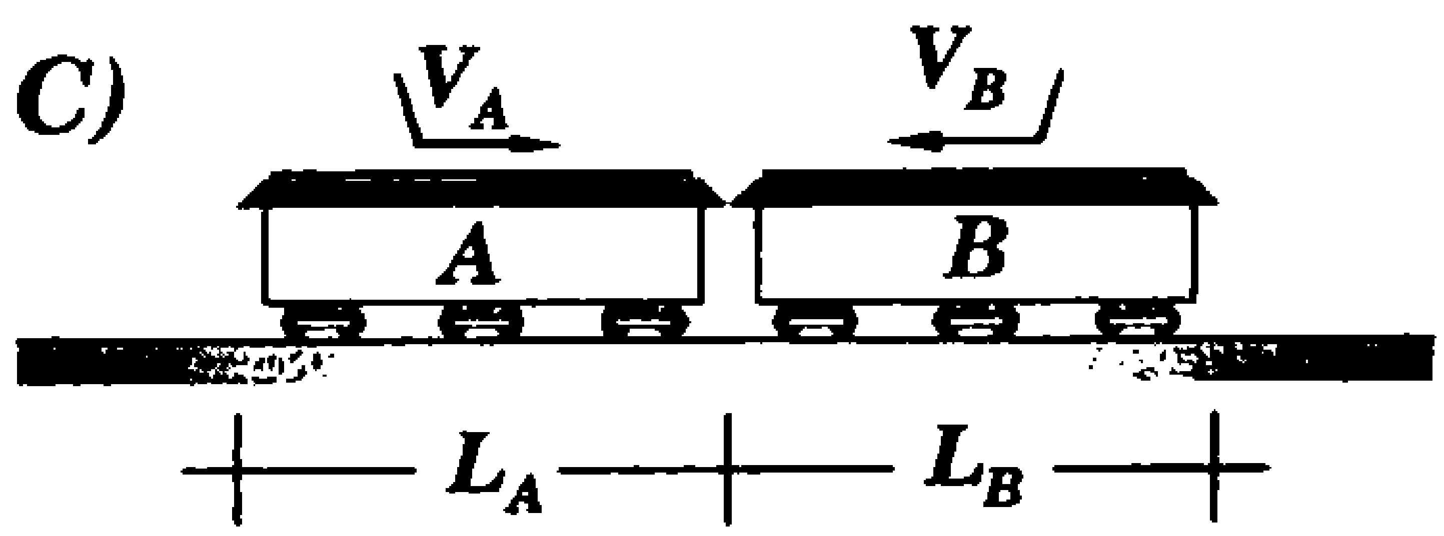
$$T_{CRUCE} = \frac{L_{TREN} + L_{TUNEL}}{V_{TREN}}$$

B)



$$T_{CRUCE} = \frac{L_{TREN}}{V_{TREN}}$$

C)



$$T_{CRUCE} = \frac{L_A + L_B}{V_A + V_B}$$

PROBLEMA 7 :

Dos móviles parten simultáneamente, uno al encuentro del otro , con velocidades de ***12 m/s*** y ***7 m/s*** desde el punto ***«A»*** y ***«B»*** respectivamente. Si el que salió de ***«A»*** recorrió luego de un cierto tiempo ***48 m***, ¿cuántos metros menos, recorrió entonces hasta ese instante el móvil que salió de ***«B»***?

A)42 m ***B)40 m*** ***C)38 m*** ***D)32 m*** ***E)20 m.***

RESOLUCIÓN :

* Como han utilizado el mismo tiempo , entonces los espacios recorridos serán proporcionales a sus velocidades.
$$\frac{48}{12}=\frac{x}{7}\Rightarrow 28=x$$

$\Rightarrow$ El que partió de «B» recorrió :

$48-28=20\ m.$ menos

RPTA : "E"

VELOCIDAD PROMEDIO (V_p)

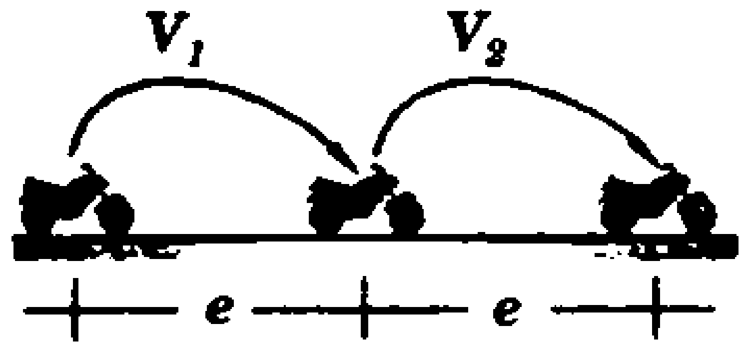
$$V_p=\frac{E_{Total}}{T_{Total}}$$

E_{TOTAL} : Espacio Total recorrido

T_{TOTAL} : Tiempo Total empleado

OBSERVACIÓN :

Para dos espacios iguales . En este caso basta conocer las velocidades .



$$V_p=\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$$

PROBLEMA 8 :

Para ir de un punto «A» a otro «B» , una persona camina a razón de ***8 km/h*** y para volver al punto de partida lo hace a razón de ***5 km/h***. Se desea saber el espacio total recorrida por la persona sabiendo que en el viaje de ida y vuelta ha empleado en total ***13 h***.

A)40 km. *B)36 km.* *C)80 km*
D)46 km. *E)38 km.*

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que los espacios de ida y vuelta son iguales, luego podemos reemplazar a las *2* velocidades por una única , llamada velocidad promedio.

$$V_p=\frac{2(8)(5)}{8+5}=\frac{80}{13}\Rightarrow e_{TOTAL}=V_p\times T_{TOTAL}$$

$$\Rightarrow e_{TOTAL}=\frac{80}{13}\times 13=80$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Viajando a ***30km/h*** , un piloto llega a su destino a las ***16*** horas ; viajando a ***50 km/h*** llegaría a las ***14*** horas ; si desea llegar a las ***15*** horas. ¿A qué velocidad debe ir?

A)37,5 km/h *B)40 km/h* *C)20 km/h*
D)35 km/h *E)47,5 km/h*

RESOLUCIÓN :

* Como se trata de recorrer espacios iguales, luego se deduce que para llegar a las ***15*** horas se debe utilizar una velocidad promedio

$$V_p=\frac{2(30)(50)}{30+50}=37,5$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Un camión circula a ***65 km/h***; tres kilómetros por detrás le sigue un auto a ***80 km/h***. Manteniendo cada uno su respectiva rapidez , se observa que si el auto no adelanta al camión es seguro que chocará contra él. ¿A qué distancia estará el auto del camión un minuto antes del posible choque?

A)100 m. *B)200 m* *C)250 m.* *D)300 m.* *E)150 m.*

RESOLUCIÓN :

* En el posible choque, la distancia entre ellos es nula (la ventaja es cero) , piden la distancia o ventaja *1* minuto antes de ese posible choque , para ello consideremos que en *1* hora , uno de ellos le sacará una ventaja de : ***80 – 65 = 15 km***. luego por regla de tres :

VENTAJA	TIEMPO
15km.=15000m.	1h=60min.
x	1 min.

$\Rightarrow 60x=15000\ m.\Rightarrow x=250\ m.$

RPTA :"C"

PROBLEMA 11 :

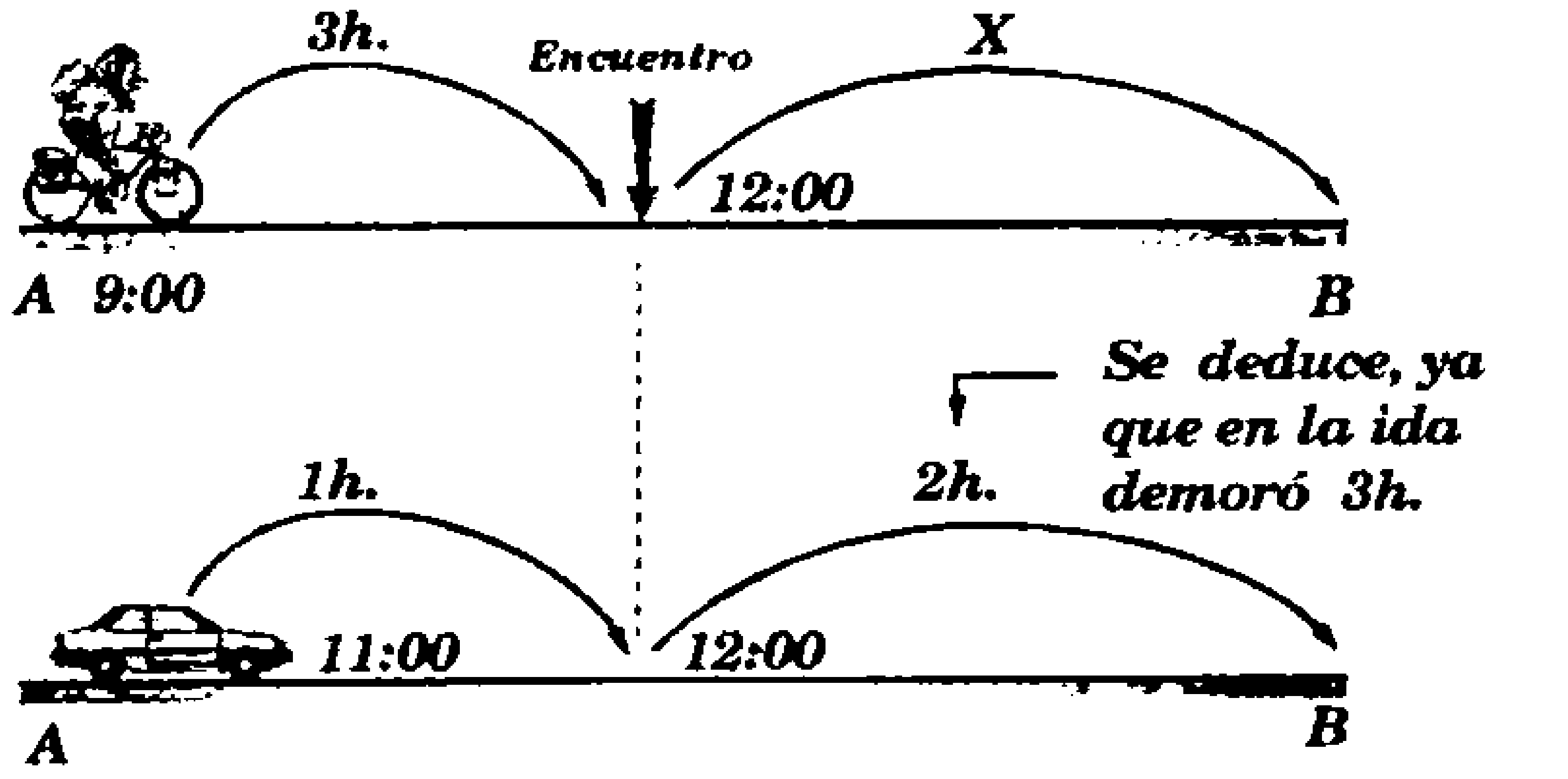
Un ciclista pasa a las ***9:00 h***, con rapidez constante , por la ciudad ***A*** y se dirige hacia ***B*** , Dos horas después por el mismo lugar pasó un auto con rapidez constante alcanzando al ciclista a las ***12*** del mediodía y luego de llegar a ***B*** y volver inmediatamente encontró al ciclista ***3*** horas después del primer encuentro. ¿A qué hora llegó el ciclista a la ciudad ***B*** , si el auto retornó a la ciudad ***A*** a las ***17h*** del mismo día?

A)18:00 *B)16:00* *C)06:00* *D)19:00* *E)14:00*

RESOLUCIÓN :

* Se detalla que el auto partió de «A» a las ***11:00 h*** , y regresó de «B» de nuevo a «A» a las ***17:00h*** demorando de ida y vuelta : ***17–11=6 h*** y solo en la ida ***3*** horas.

* Haciendo un esquema de lo ocurrido.



* Por *1h* que utiliza el auto, el ciclista utiliza *3h*, entonces en *2h* del auto, el ciclista utilizará *2(3h)=6* ; con lo que se deduce que el ciclista llegó a *B* a las: *12:00 + 6 h = 18:00 h*

RPTA :"A"

PROBLEMA 12 :

Una liebre y una tortuga parten simultáneamente en un mismo punto, la tortuga recorre en cada minuto *10 m* y la liebre *100 m*. Si ambos se dirigen a un mismo punto, además la liebre llega a la meta, regresa hasta la tortuga, luego va hasta la meta y así sucesivamente hasta que la tortuga llega a la meta. Si la tortuga recorrió *1km*. ¿Cuánto recorrió la liebre?

A)10 km. B)100 km. C)1000 km.
D)1 km. E)120 km.

RESOLUCIÓN :

* Para encontrar el espacio recorrido por la liebre, bastaría hallar el tiempo que estuvo en movimiento, y como la liebre y la tortuga empiezan sus movimientos a la vez y terminan juntos, entonces emplean el mismo tiempo.

$$e_{LIEBRE} = V_{LIEBRE} \times T_{TORTUGA}$$
$$= 100\ m/_{min} \times \frac{1\,km}{10\,m/_{min}} = 10\ km/$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Paola y Ana separadas una distancia de *2400 m*., parten al mismo tiempo al encuentro uno del otro ; justamente con Paola parte «Valor», perro fiel a ambas ; «Valor» al encontrar a Ana regresa nuevamente hacia Paola y así sucesivamente va de Paola a Ana y de Ana a Paola hasta que ellas se encuentran. Se desea saber el espacio total recorrido por «Valor», si se sabe que la velocidad de Paola es *373* m. por hora ; la de Ana *227 m*. por hora y la de «Valor» *393 m/h*.

A)1275 m B) 1472 m C)1572 m. D)1742 m E)1752 m

RESOLUCIÓN :

* El tiempo que estuvo en movimiento el perro, es el mismo que el que se demoraron Paola y Ana en encontrarse.

$$T_e = \frac{2400}{373 + 227} = 4$$

$$\Rightarrow e_{perro} = V_{perro} \times T_e = 393 \times 4 = 1572$$

RPTA : "C"

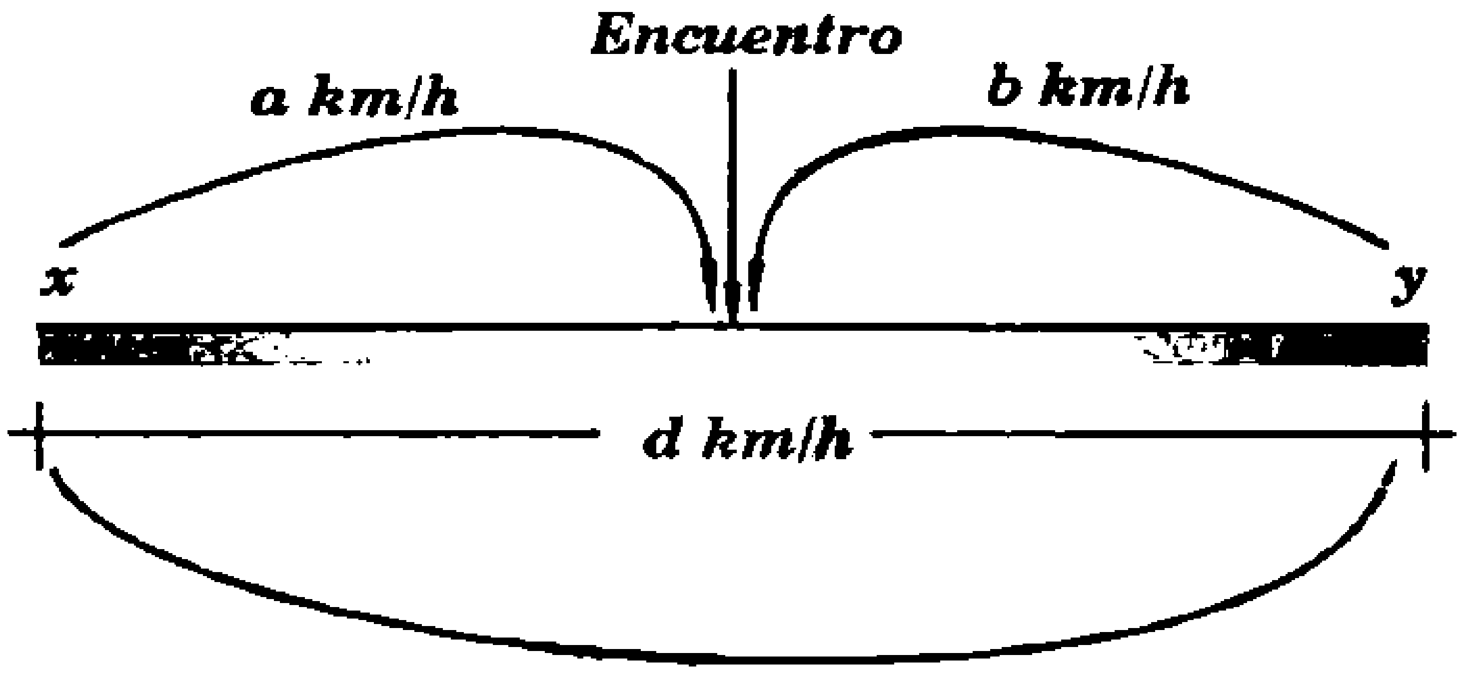
PROBLEMA 14 :

Dos amigos Ricky y Luis salen de una ciudad «x» rumbo a otra «y», cuya distancia es de «d» *km* con velocidades de «a» *km/h* y «b» *km/h (a >b)*. ¿Al cabo de qué tiempo el más lento se encontrará con el otro que regresa de «y»?

A) $\frac{2(d-1)}{a+b}$ *min.* B) $\frac{2(d-1)}{a-b}$ *min.* D) $\frac{2d}{a+b}$ *min.*

D) $\frac{120d}{a-b}$ *min.* E) $\frac{120d}{a+b}$ *min.*

RESOLUCIÓN :



*Del gráfico, se deduce que para encontrarse entre ambos recorrerán «2d» *km*.

$$\Rightarrow T_e = \frac{2d}{a+b}H = \frac{2d}{a+b} \times 60min = \frac{120d}{a+b}$$

RPTA : "E"

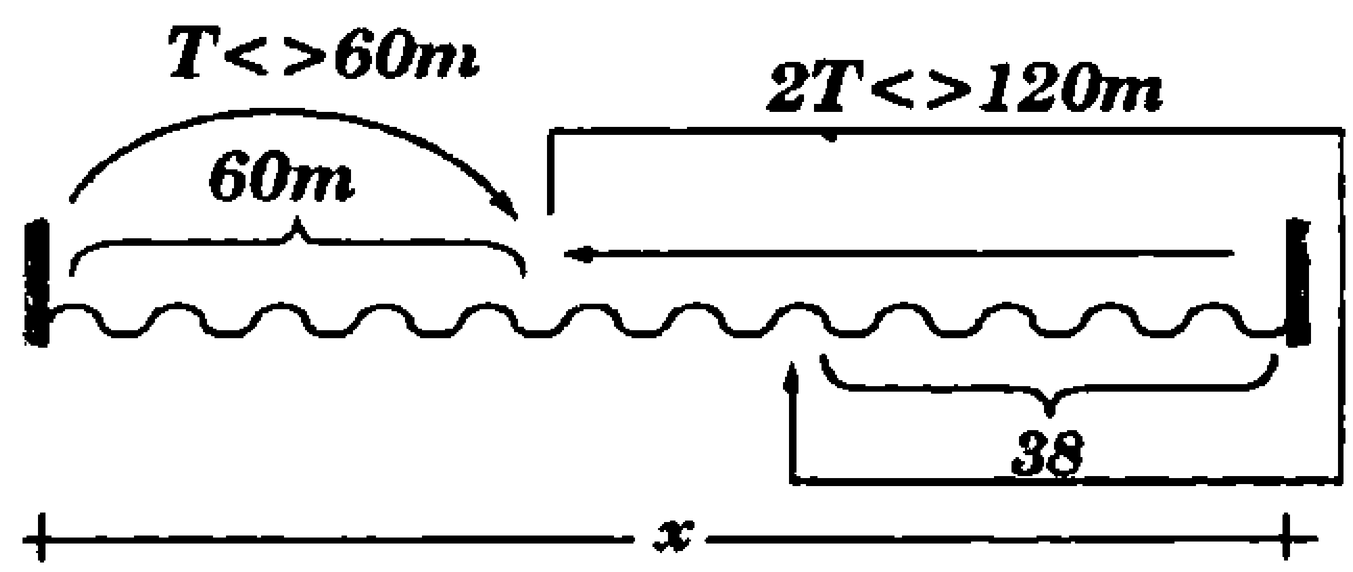
PROBLEMA 15 :

Juan y Pedro están en orillas opuestas de un lago y comienzan a remar al mismo tiempo. La velocidad de cada uno es constante, cuando se cruzan, están a *60* metros de la orilla izquierda. Continúan remando, llegan a la costa, se vuelven y reman nuevamente, esta vez se cruzan a *38* metros de la orilla derecha. ¿Qué ancho tiene el lago?

A)98 m. B)120 m C)139m. D)140 m. E)142 m.

Resolución :

* Para Juan :



Se planteará : $x = 60 + 120 - 38 = 142m$.

OJO :

Para encontrarse por segunda vez se demoró el doble de tiempo que para la primera.

RPTA :"E"

PROBLEMA 16 :

Dos nadadores parten al mismo tiempo del extremo de una piscina de *90 m* de longitud con velocidades de *3* y *2m/s*, respectivamente. Atraviesan la piscina varias veces durante *15* minutos ; suponiendo que no pierden tiempo al voltear, el número de veces que se han encontrado es:

A)25 B)24 C)20 D)30 E)19

RESOLUCIÓN :

* Según el problema anterior :

Número de encuentros	Tiempo
1	$\frac{2(90)}{3+2} = 36\,s$
x	15 min.

$$x = \frac{15\ min}{36\,s} = \frac{15 \times 60s}{36\,s} = 25$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

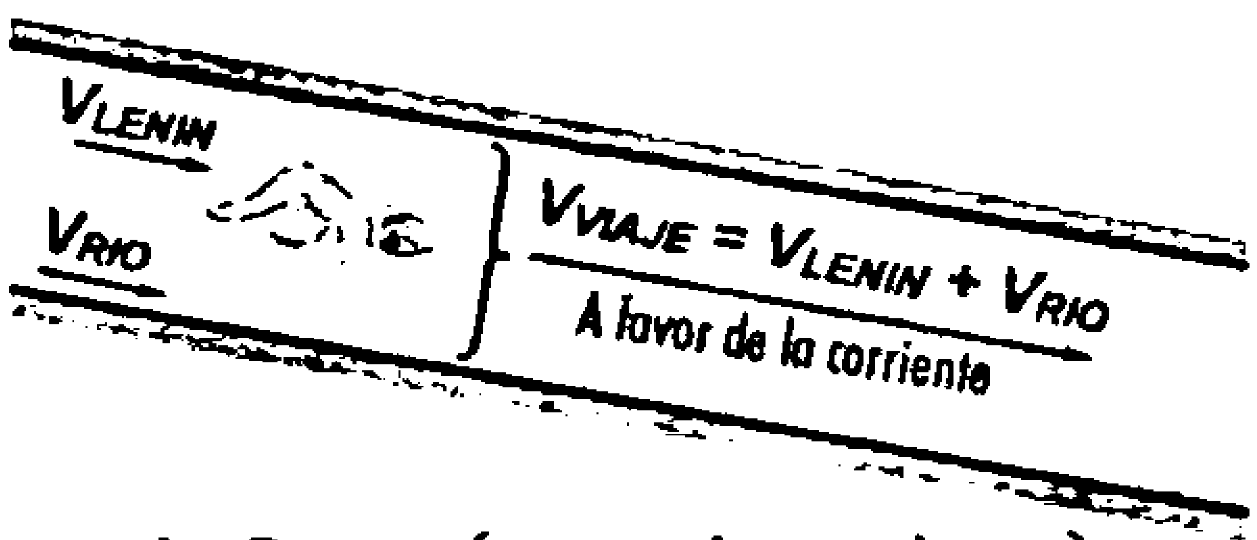
Lenin nada en un río a favor de la corriente a ***76 m/min.*** y cuando va en contra de la corriente a ***28 m/min***. ¿A qué velocidad nadaría en una piscina?

A)48 m/min. B)50 m/min. C)52 m/min.
D)54 m/min. E)56 m/min.

RESOLUCIÓN :

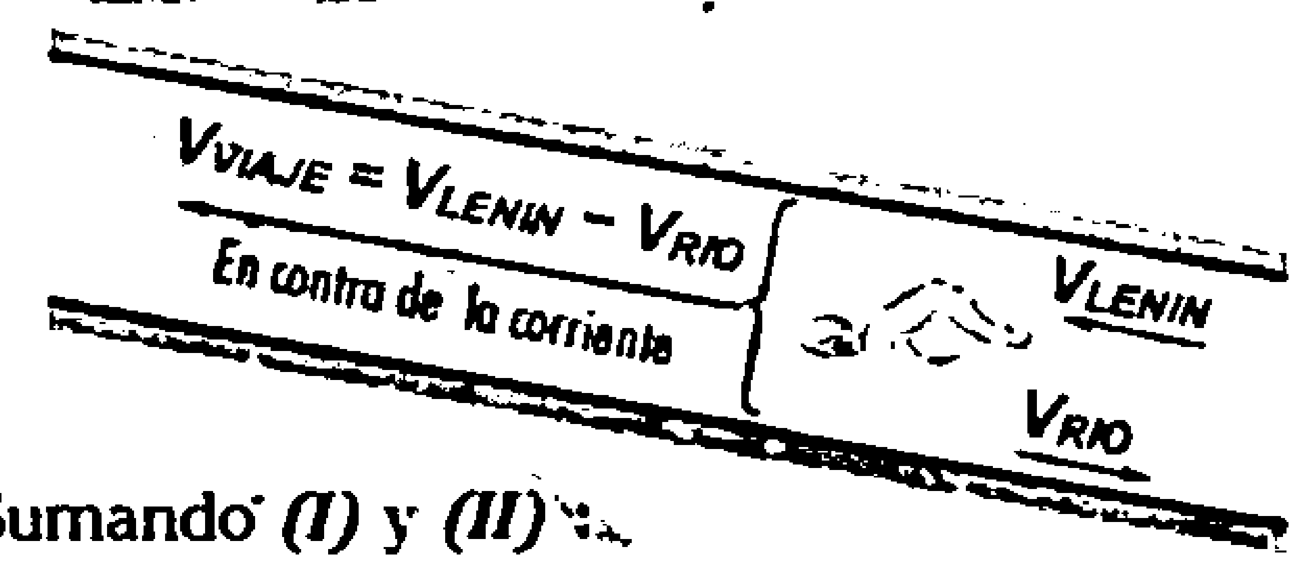
* Primer Caso : (a favor de la corriente)

$$V_{LENIN} + V_{RIO} = 76.........(I)$$



* Segundo Caso : (contra la corriente)

$$V_{LENIN} - V_{RIO} = 28.........(II)$$



* Sumando (I) y (II) :

$$V_{LENIN} = 52\ m/min.$$

* La velocidad que Lenin desarrollará en una piscina, será su propia velocidad , que será : ***52 m/min.***

RPTA :"C"

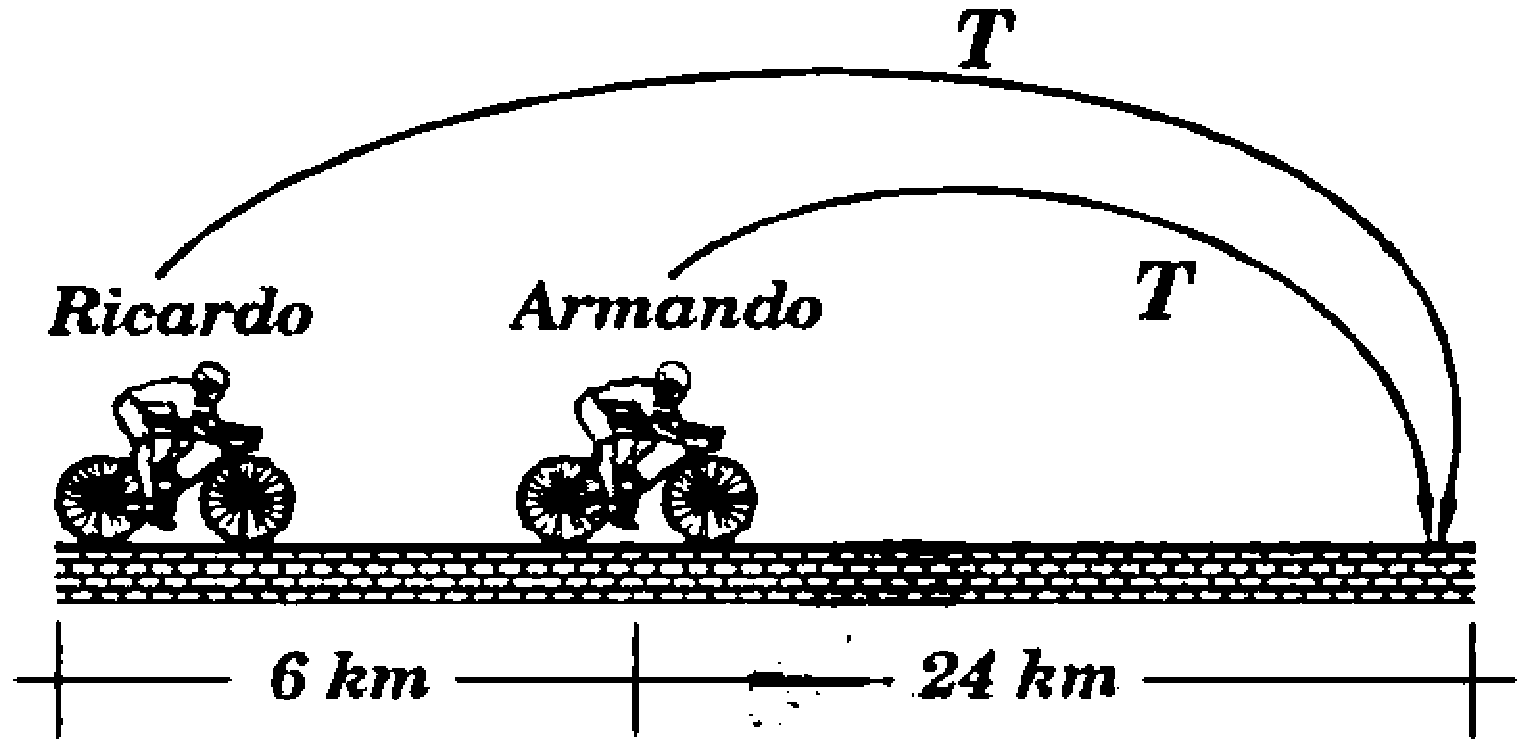
PROBLEMA 18 :

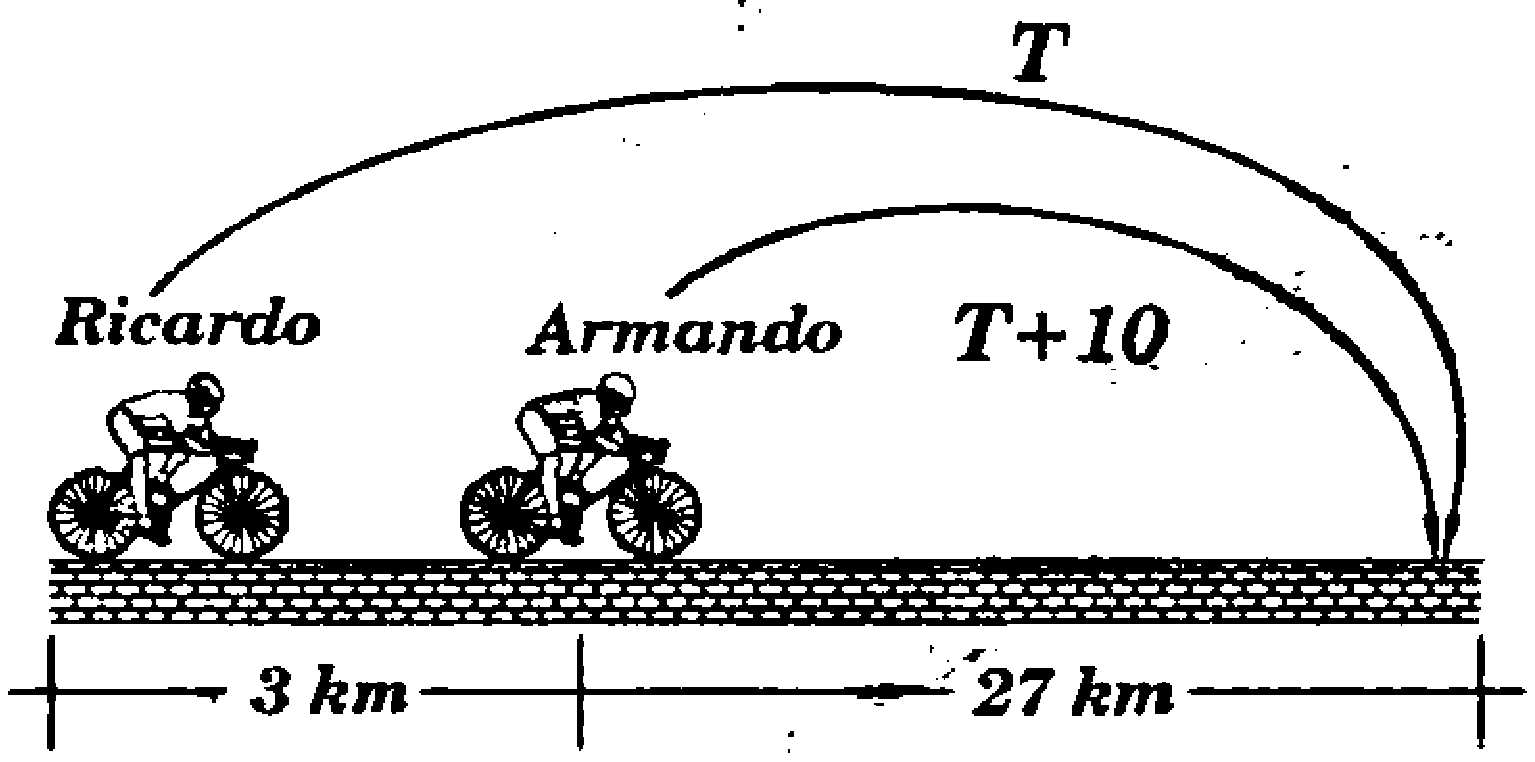
Dos ciclistas , Ricardo y armando , disputan una carrera cuyo recorrido es ***30 km***. Si Ricardo le da a Armando 6 km. de ventaja , llegan juntos a la meta , en cambio , si se le da ***3km***. de ventaja él le ganaría por ***10*** minutos. ¿Cuál es la velocidad de Armando?

A)0,1 B)0,2 C)0,3 D)3 E)2

RESOLUCIÓN :

* Graficando :





* De los gráficos se deduce que Armando , demoró ***10*** min. en recorrer :

6-3=3km , Luego : $V_{Armando} = \frac{3\,km}{10\,min} = 0,3$

RPTA : "C"

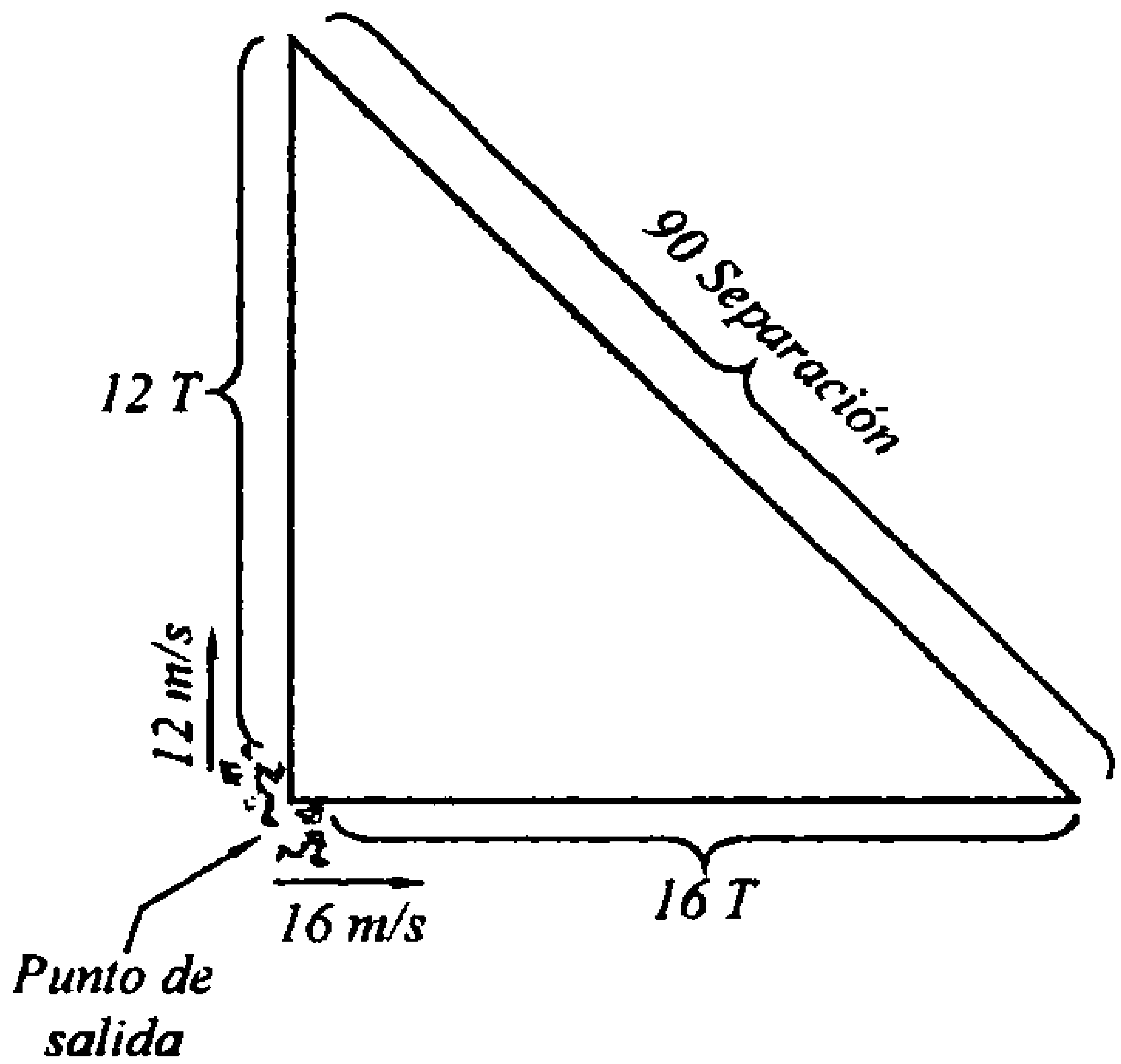
PROBLEMA 19 :

Normita y César discuten acaloradamente en una de las esquinas de la «Plaza de Armas». De pronto dan por terminada su relación partiendo en direcciones perpendiculares con velocidades de ***16*** y ***12 m/s*** respectivamente. ¿Después de qué tiempo estos personajes estarán a una distancia de ***90 m***. lamentando su decisión?

A)4 s B)5 s C)6 s D)4,5 s E)7 s

RESOLUCIÓN :

* Sea el tiempo «*T*» el necesario , entonces Normita avanzará ***16 T*** y César ***12 T*** :



* Del gráfico :

Aplicando Pitágoras :

$$(16t)^2 + (12t)^2 = 90^2$$

$$\Rightarrow t = 4{,}5 \text{ segundos}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

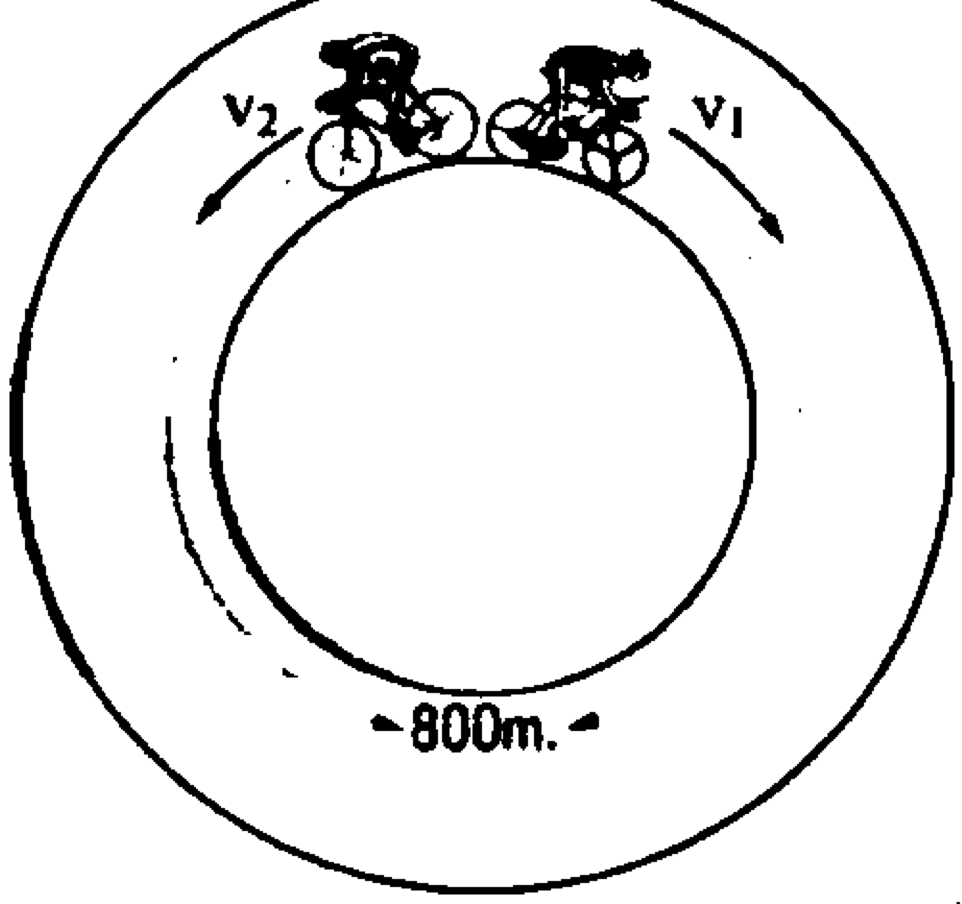
En un velódromo de ***800m***. de longitud ,. dos ciclistas se mueven en sentidos opuestos , se encuentran cada ***16*** segundos. Si van en el mismo sentido uno alcanzará al otro cada ***80*** segundos. Determinar la relación de la rapidez de dichos ciclistas.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN :

* ***Primer Caso :***

Como van en sentidos opuestos , luego van al encuentro.

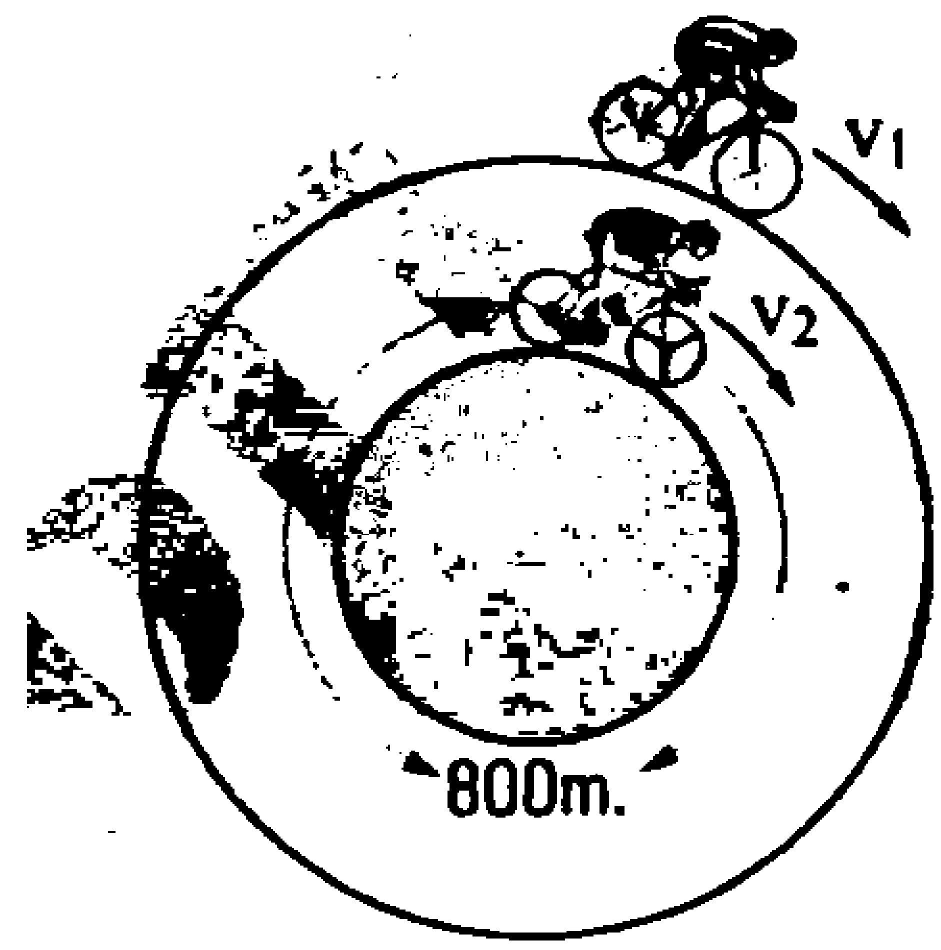


$$T_{ENCUENTRO} = \frac{e}{V_1 + V_2} \Rightarrow 16 = \frac{800}{V_1 + V_2}$$

* Despejando : $V_1 + V_2 = 50$......(I)

* ***Segundo caso***

Como van en el mismo sentido , luego uno se adelantará hasta de nuevo alcanzarlo al otro , entonces aplicaremos tiempo de alcance.



$$T_{ALCANCE} = \frac{e}{V_1 + V_2} \Rightarrow 80 = \frac{800}{V_1 + V_2}$$

* Despejando : $V_1 - V_2 = 10$ ...... (II)

* De (I) y de (II) : $V_1 = 30$ y $V_2 = 20$

$$Piden : \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

RPTA ::"A"

PROBLEMA 21 :

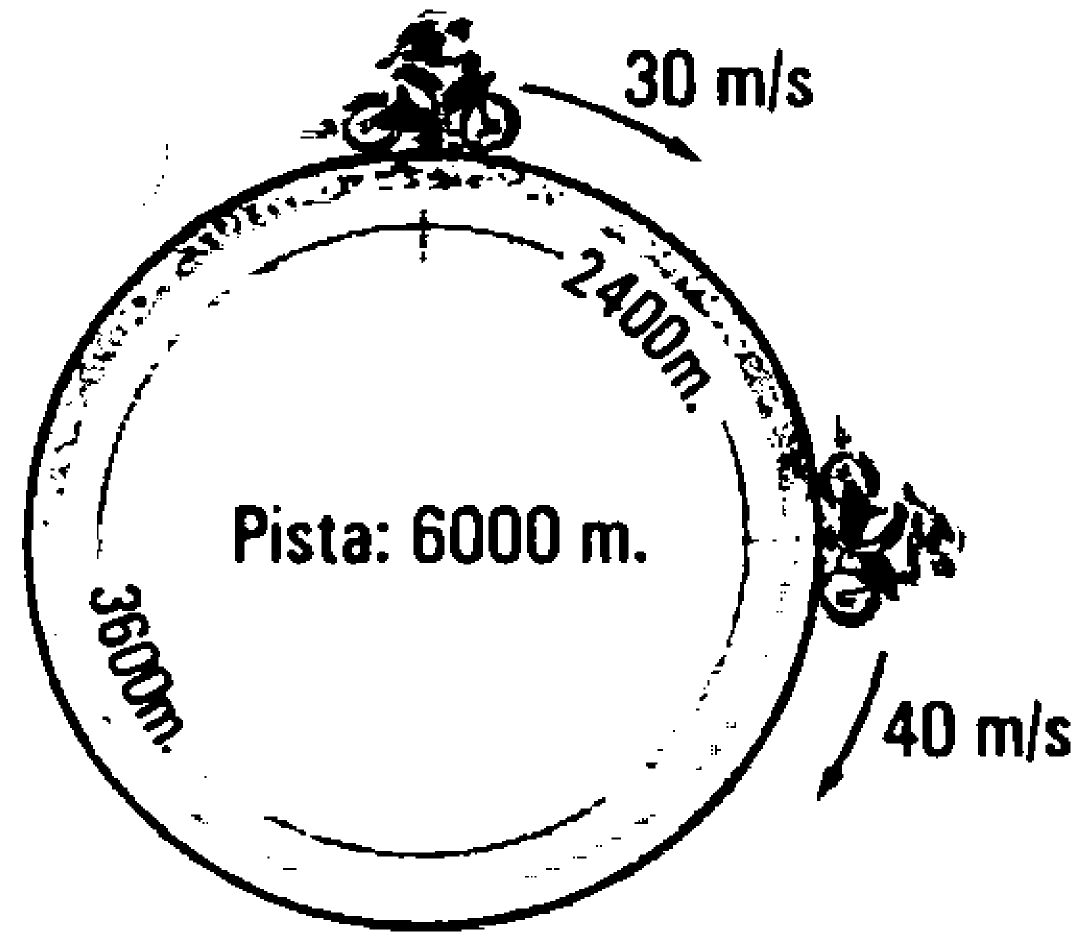
Dos motociclistas recorren en el mismo sentido una pista circular de ***6km***. a velocidad de ***40 m/s*** y ***30 m/s***, el primero parte con un minuto de adelanto. ¿Al cabo de qué tiempo de haber partido el más veloz , se encontraran en el mismo punto?

A) 12 min. B) 7 min. C) 8 min. D) 9 min. E) 10 min.

RESOLUCIÓN :

* En el primer minuto el primero se adelantará :

$$40\ m/s \times 1\ min. = 40\ m/s \times 60\ s = 2400\ m$$



* Para que se encuentren en el mismo punto , el más veloz de alcanzarle al más lento , es decir le debe descontar una distancia de :

$$6000 - 2400 = 3600m$$

y lo hará en el siguiente tiempo de alcance.

$$T_A = \frac{3600m.}{40m/s - 30m/s} = 360s = 6\,min.$$

* Piden a partir de la partida del más veloz , el cual será $1 + 6 = 7$ min.

(1 ← 1er. min.)

RPTA ::"B"

PROBLEMA 22 :

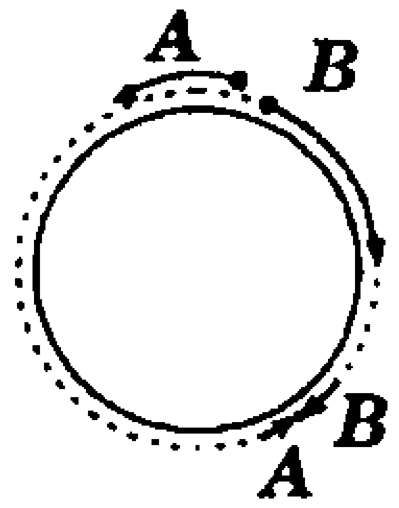
Dos personas ***A*** y ***B*** se encuentran en un mismo punto de una pista circular y parten dándose la espalda mutuamente desplazándose con rapidez constante. Luego de que ***A*** dio ***11*** vueltas y ***B*** dio ***7*** vueltas , vuelven a coincidir en el punto de partida por primera vez. ¿ Cuántas veces se han cruzado hasta ese entonces?

A) 11 B) 7 C) 4 D) 19 E) 17

RESOLUCION :

• Observa que para que se encuentren por primera vez , deben recorrer entre ambos ***1*** Vuelta :

* Entonces para que a partir de ese momento , se crucen por segunda vez , entre ambos deben recorrer otra vuelta más ; ya van *2* vueltas.



* Si proseguimos el razonamiento , ya que entre ambos han recorrido un total de $11+7 = 18$ vueltas, se encontrarán *18* veces ; pero como la última vez ya no se cruzan , solo serán: $18-1 = 17$ cruces.

RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

Laura y Luis se dirigen con velocidades constantes al encuentro uno del otro y hasta que lo consiguen Laura recorrió *180 km*. y Luis *120km*. Si quisieran encontrarse en el punto medio del camino que los separa Laura tendría que salir *2,5* horas después que haya salido Luis, ¿Cuál es la velocidad de Luis?

A)30km/h B)50km/h C)40km/h
D)80km/h E)20km/h

RESOLUCIÓN :

V_1: Velocidad de Laura
V_2: Velocidad de Luis

* **Primero :**

$$T_{Laura} = T_{luis}$$

$$\frac{180}{V_1} = \frac{120}{V_2} \begin{cases} V_1 = 3k \\ V_2 = 2k \end{cases}$$

* **Segundo** (Punto Medio):

$$T_{Laura} = T_{luis}$$

$$\frac{150}{2k} - \frac{150}{3k} = 2,5 \Rightarrow k = 10$$

$$V_2 = 20$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

Dos móviles parten simultáneamente de un punto de diferentes sentidos y a través de una circunferencia. Si uno puede dar la vuelta en *10 min*. y el otro en *15* min. ¿Cada qué tiempo se encontraron dichos móviles?

A)5 min. B)6 min. C)8 min. D)9 min. E)7 min.

RESOLUCIÓN :

* Como : *10* min < > *1* vuelta *15* min < > *1* vuelta

* Luego : *1* min < > $\frac{1}{10}$ vuelta *1* min< > $\frac{1}{15}$ vuelta

Juntos en *1* min< > $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{1}{6}$

1 min < > $\frac{1}{6}$ vuelta ⇒ *6* min< > *1* vuelta

* Entonces se encontraran cada *6* minutos

RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

Un microbús debía cubrir una cierta distancia en un determinado tiempo , pero como el conductor era novato, recorrió todo el trayecto con *1/5* menos de la velocidad normal y llegó con un retraso de *4* horas. ¿En cuántas horas debió llegar normalmente?

A)12 horas B)16 horas C) 18 horas
D)15 horas E)19 horas

RESOLUCIÓN :

	Velocidad	Tiempo
Inicio	V	$\frac{4}{5}$V
Después	T	T + 4

Como en ambos casos recorre el mismo espacio. Luego :

$$VT = \frac{4V}{5}(T+4)$$

$$\boxed{T = 16}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

En una carrera toman parte *3* caballos *A, B* y *C* que han de recorrer *1800 m*. El caballo *A* llega a la meta con una ventaja de *60* m sobre *B* y *8* segundos antes que *C* y *B* luego *2* segundos antes que *C*. ¿Cuánto tiempo tardó en la carrera el caballo *B*?

A)1min B)1min20s. C)2min30s
D)3min10s E)3min

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que «*B*» llegó $8-2=6s$ después que «*A*» y tiempo en el cual recorrió *60 m*, entonces la velocidad de «*B*» será:

$$\frac{60m}{6s} = 10m/s$$

* Luego el tiempo que tardó será:

$$\frac{1800}{10} = 180s = 3\,min$$

RPTA : "E"

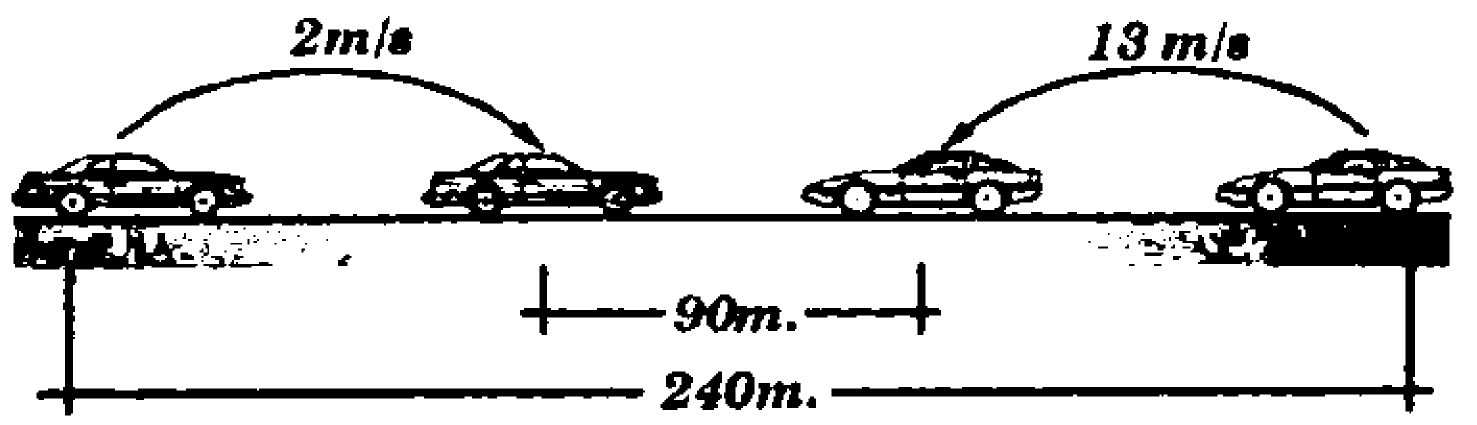
PROBLEMA 27 :

Dos autos distan *240m*. y van al encuentro con velocidades de *2m/s*. y *13 m/s*.

Después de que tiempo están separados *90m*. por primera vez.

A)15s. B)10 C)8 D)9 E)6

RESOLUCIÓN :



* Aplicaremos el tiempo de encuentro puesto que para estar separados **90**m. entre ambos deben recorrer. **240 – 90 = 150 m**. entonces :

$$T_{PEDIDO} = \frac{150}{2+13} = 10s$$

RPTA :"B"

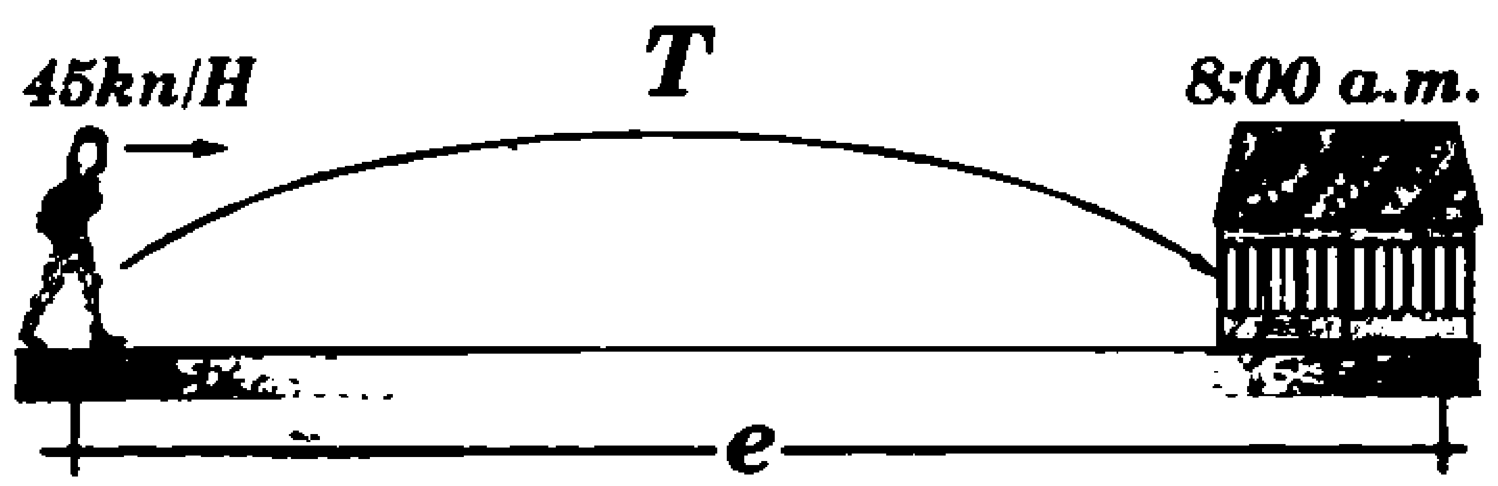
PROBLEMA 28 :

Un estudiante sale todos los días a la misma hora de su casa y llega a su centro de estudios a las **8:00** a.m. Un día se traslada al doble de rapidez de lo acostumbrado y llega a su centro de estudios a las **7:00** a.m. ¿A qué hora sale siempre de su casa y que distancia viaja si normalmente lleva una rapidez de **45 km./h.**?

A)6:00 a.m.* y *60 km. ***B)6:00 a.m.* y *90 km.***
C)6:30 a.m.* y *80 km. ***D)6:30 a.m.* y *90 km.***
E)5:30 a.m.* y *90 km.

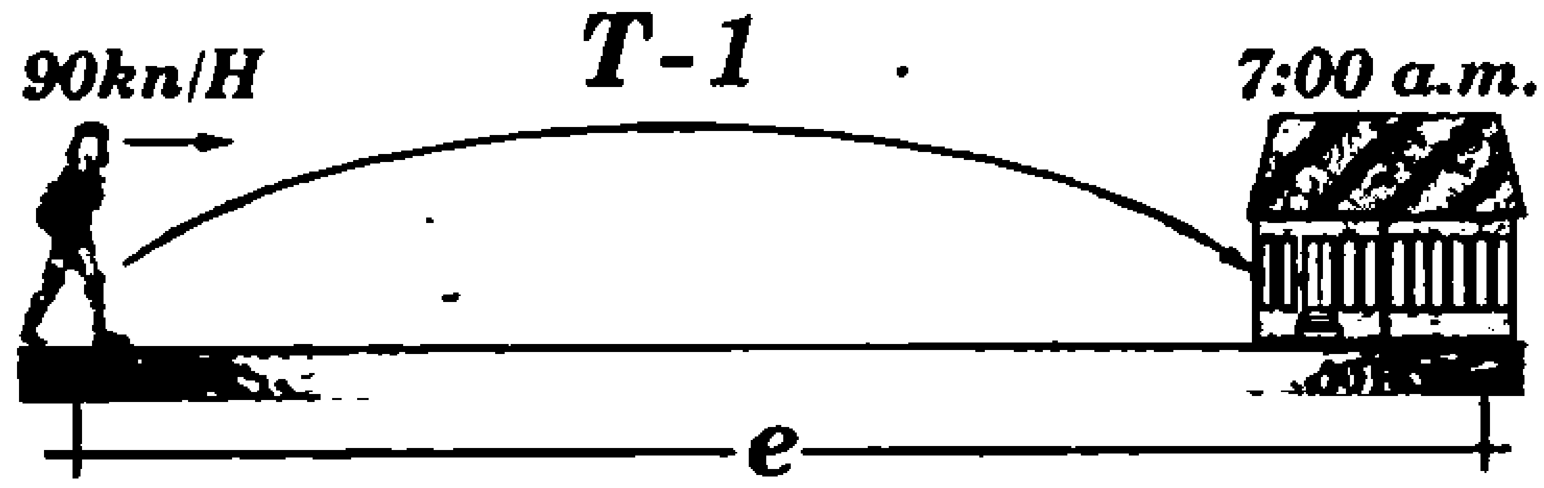
RESOLUCIÓN :

* **PRIMER CASO :**



$\Rightarrow$ $\boxed{e = 45T}$.............(I)

* **SEGUNDO CASO :**



$\Rightarrow$ $\boxed{e = 90(T-1)}$.............(II)

* De (I) y (II) :

$$45T = 90(T-1) \Rightarrow 45T = 90T - 90$$

$$\Rightarrow 90 = 45T \Rightarrow 2 = T$$

* Luego acostumbra salir a las :

8:00 a.m. – 2h. = 6:00 a.m.

y la distancia será : **45(2) = 90 km.**

RPTA :"B"

PROBLEMA 29 :

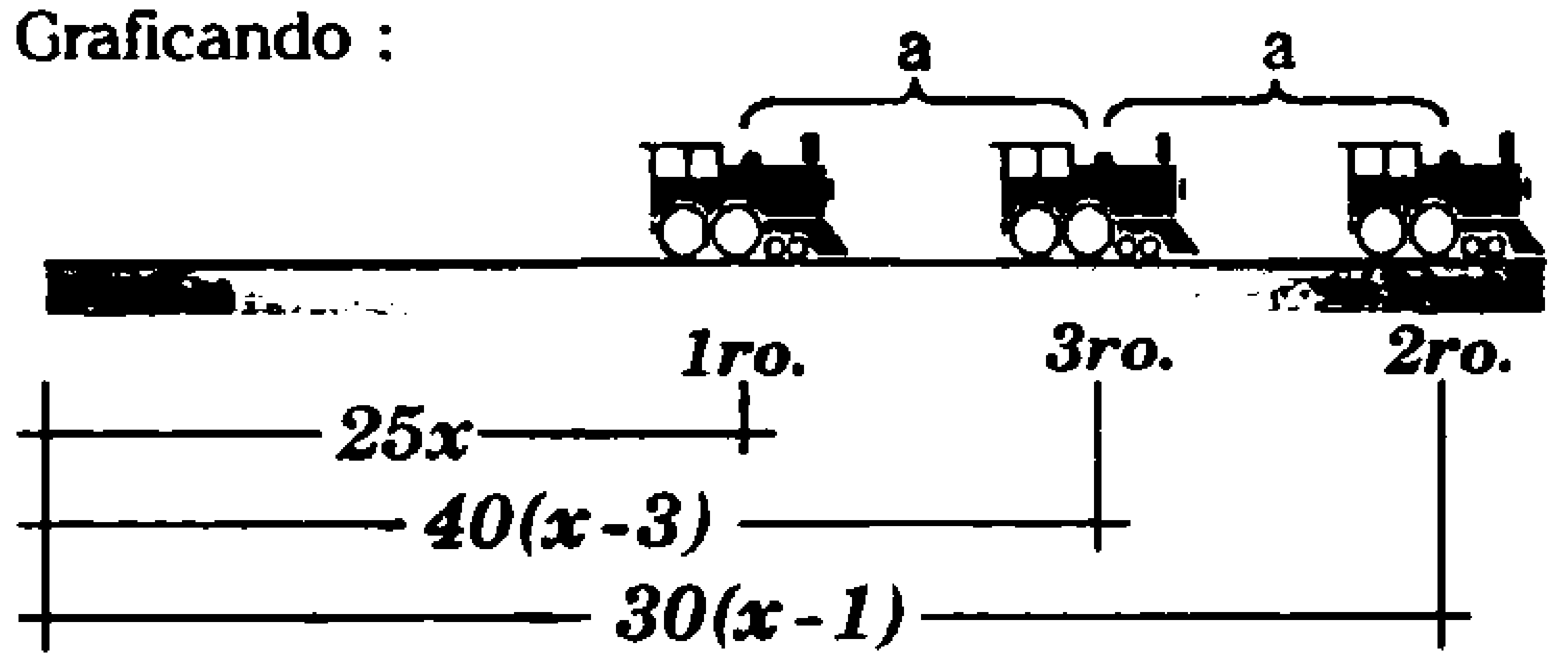
Tres trenes parten del mismo punto y siguen igual vía en la misma dirección y sentido, el primero parte a las **6:00 h.**, el segundo a las **07:00 h.** y el tercero a las **09:00 h.** siendo sus velocidades de **25,30 y 40km./h.** respectivamente. A qué hora el tercer tren estará en el punto medio de la distancia que separa al primero y al segundo.

A)22:00 h. ***B)16:00 h.*** ***C)14:24 h.***
D)12:40 h. ***E)14:40 h.***

RESOLUCIÓN :

1ro.	$t_1 = x$	$V_1 = 25$	$e_1 = 25x$
2do.	$t_2 = x - 1$	$V_2 = 30$	$e_2 = 30(x-1)$
3ro.	$t_3 = x - 3$	$V_3 = 40$	$e_3 = 40(x-3)$

* Graficando :



* Se observará :

$$30(x-1) - 40(x-3) = 40(x-3) - 25x$$

$$x = 8\frac{2}{5}H = 8H\,24\,min. = 14:24$$

* Piden : **6:00 + 8H. 24min. = 14:24**

RPTA :"C"

PROBLEMA 30 :

El sonido recorrer en el agua **1440 m/s** y en el aire **360 m/s**. Calcular la distancia a la que se encontraba un buque de la orilla , si un observador calculó que una explosión del buque demoró en llegar **7,5** segundos más por aire que por agua.

A)5040 m ***B)4320 m*** ***C) 5760 m***
D)3600 m ***E)2880 m.***

RESOLUCIÓN :

* En ambos casos se recorrió «e» , con una diferencia de tiempo de **7,5** segundos , luego :

$$\frac{e}{360} - \frac{e}{1440} = 7,5 \Rightarrow \frac{4e-e}{1440} = \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow e = 3600$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Un campesino va caminando de su casa a su chacra. Parte a medianoche y recorre **70 m** cada minuto. En cierto trecho de camino sube a la moto de un amigo que había partido del mismo lugar a las cero horas **20** minutos con la velocidad de **150 m.** por minuto. El campesino llega su destino **20** minutos antes que si hubiese continuado andando. Calcular la distancia entre la casa y la chacra.

A)5450 m. ***B)5250 m.*** ***C)4500 m.***
D)4250 m. ***E)6000 m.***

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que la diferencia de tiempo entre la moto y el campesino será *40* minutos , luego :

$$\frac{e}{70}-\frac{e}{150}=40 \Rightarrow e=5250$$

RPTA : "B"

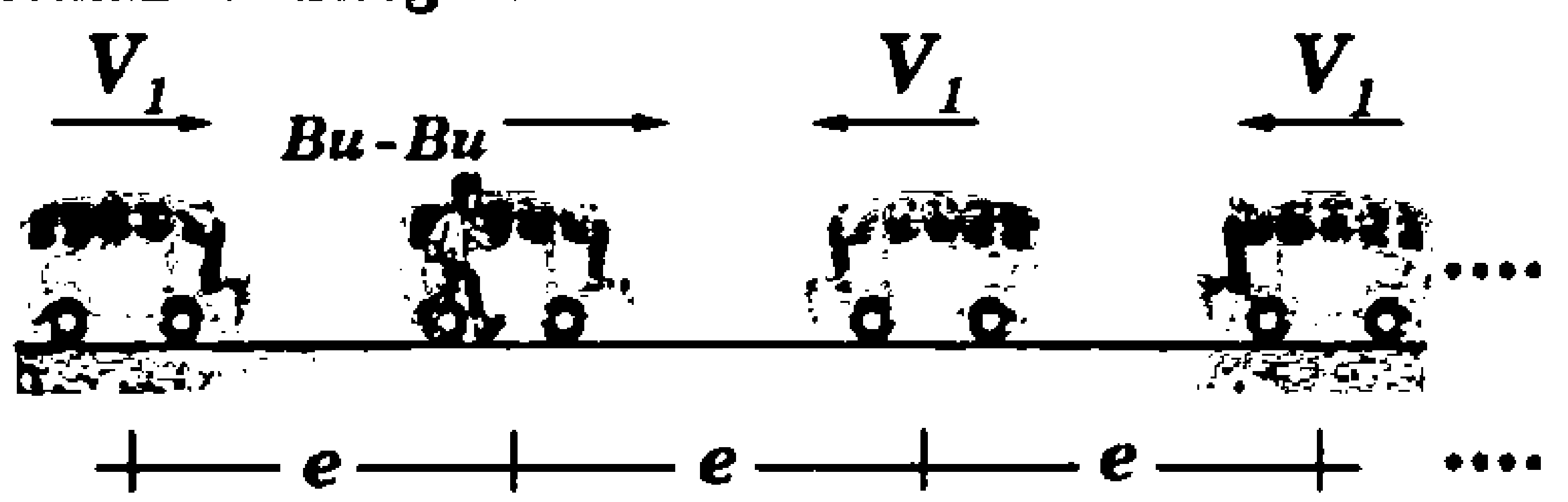
PROBLEMA 32 :

El amigo «*Bu–Bu*» recorre la Vía Expresa. En su camino se encuentra con un «Ikarus» cada *10* min. y es alcanzado por otro cada *15* min. ¿Cada qué tiempo salen los Ikarus de su paradero inicial?

A)12,5m. ***B)12*** ***C)13*** ***D)14*** ***E)11***

RESOLUCIÓN :

* Consideramos «*e*» la separación entre ómnibus y ómnibus. Luego :



* En «*A*» y «*Bu–Bu*», aplicaremos tiempo de alcance, que según dato es *15* min..

$$T_{ALCANCE}=\frac{e}{V_1-V}$$

$$15=\frac{e}{V_1-V}..........(I)$$

* En «*B*» y «*Bu–Bu*» , aplicaremos tiempo de encuentro, que según dato es *10 min.*

$$T_{ENCUENTRO}=\frac{e}{V_1-V}$$

$$10=\frac{e}{V_1-V}$$

* De *(I)* y *(II)* se obtiene : $e = 12\,V_1$

* Los Ikarus , salen cada que recorren «*e*», es decir en :

$$T_{PEDIDO}=\frac{e}{V_1}=\frac{12V_1}{V_1}=12$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 33 :

Un maratónista va corriendo por el Paseo de la República. A un paso se cruza con un «Ikarus» cada *12* minutos y es alcanzado por otro cada *18* minutos. ¿Cada cuánto tiempo (minutos) salen los «Ikarus» del paradero inicial?

A)13 ***B)13,1*** ***C)14,4*** ***D)14,6*** ***E)15***

RESOLUCIÓN :

* El tiempo pedido , esta dado por la media armónica de los tiempos (Método práctico), al igual que el problema anterior .

$$T_{pedido}=\frac{2(12)(18)}{12+18}=14,4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Diariamente Rocío sale de la academia a las *13h* y su papá la recoge puntualmente en la puerta de la academia para llevarla a casa. un día Rocio salió a las *12h. 40*min. y fue caminando al encuentro de su papá , éste la recogió en el camino y llegaron a casa *24* minutos antes que de costumbre ¿Cuánto tiempo estuvo caminando Rocío antes de ser recogida?

A)8 min. ***B)16 min.*** ***C)48 min.***
D)20 min. ***E)24 min.***

RESOLUCIÓN :

* El ahorro de *24* minutos es debido a que el papá evitó llegar hasta la academia. Este ahorro de *24 min.* significa que el papa habría tardado *12 min.* en ir del punto de encuentro hasta la academia, lo que implica que encontró a Rocio *12 min.* antes de las *13h*. o sea a las *12h. 48min*. Por tanto Rocio andó de *12h. 40min* hasta *12h. 48min*., es decir , durante *8* min.

RPTA : "A"

PROBLEMA 35 :

Una madre y su hija trabajan en la misma oficina. La hija de su casa a la oficina emplea *30min.* y la madre *40min*.. En cuántos minutos alcanzará la hija a su madre si esta sale 8min. antes.

A)18´ ***B)24´*** ***C)6´*** ***D)12´*** ***E)15´***

RESOLUCIÓN :

* Si sólo hay tiempo se supone un espacio.

$$e = MCM(30;40) = 120\ m.$$

$$V_{hija}=\frac{120}{30}4m/\,min.$$

$$V_{madre}=\frac{120}{40}3m/\,min.$$

* En *8* minutos la madre saca una ventaja de : $3(8) = 24$ m.

$$\text{Tiempo de alcance}:\frac{24}{4-3}=24\,min.$$

RPTA : "B"

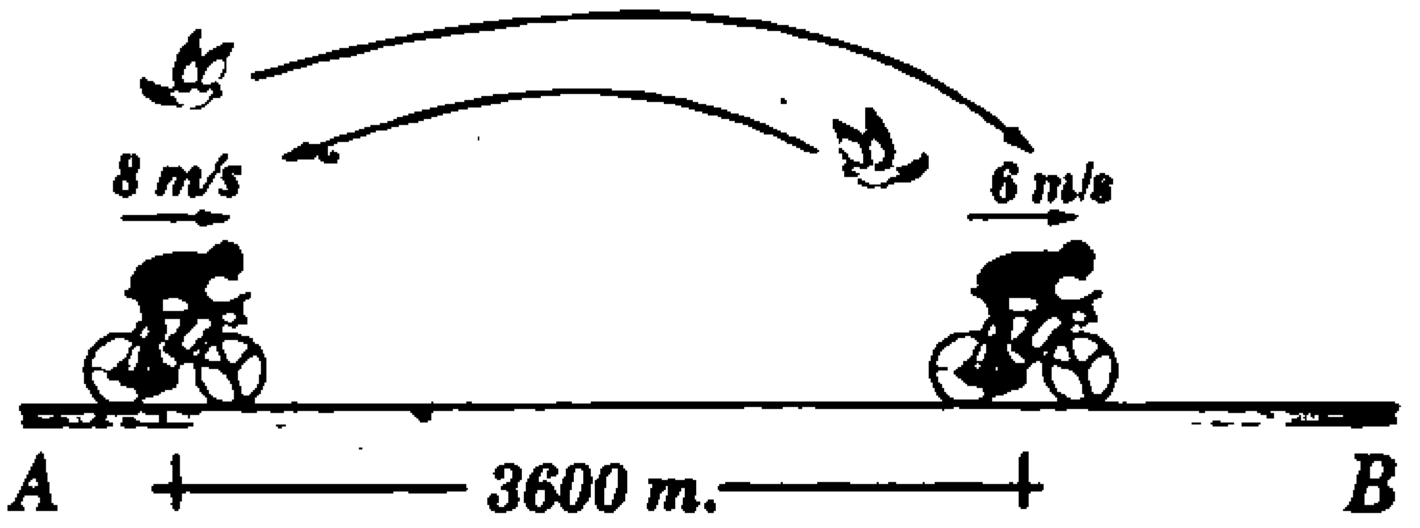
PROBLEMA 36 :

Dos ciclistas avanzan con velocidades de *6* y *8 m/s.* El primero parte de *A* hacia *B* y *10* minutos después sale el segundo de *A*, en ese instante una paloma pasa por *A*, volando a *20 m/s*. alcanzando al primero , dando la vuelta sin perder un instante , luego se encuentra con el segundo , la vuelta otra vez para alcanzar al primero , así sucesivamente. ¿Qué distancia ha recorrido la paloma cuando el segundo

alcanza al primero?

A)30000 m *B)32000 m* *C)34600 m*
D)35200 m *E)36000 m.*

RESOLUCIÓN :



(Le sacó una ventaja de 10 minutos)

* Para que el segundo alcance al primero deberá de pasar un tiempo de :

$$\frac{3600}{8-6}=1800\ seg.$$

* Este es el mismo tiempo que la paloma esta volando.

Distancia recorrida por la paloma	=	Velocidad de la paloma	×	Tiempo de Vuelo

$\Rightarrow$ Piden : $20\times1800=36000$

RPTA :"E"

PROBLEMA 37 :

En una ciudad *T* el tiempo es medido según la nueva hora, se sabe que *20* nuevas horas equivalen a *18* horas comunes. Además cada nueva hora se divide en *45* nuevos minutos y cada nuevo minuto se divide en *54* nuevos segundos. Si un reloj normal señala las *20* horas *15* minutos del día. ¿Cuál será el tiempo registrado en la ciudad *T*? indique la suma de los valores correspondientes a las nuevas hora , nuevos minutos y nuevos segundos.

A)68 *B)69* *C)70* *D)73* *E)71*

RESOLUCIÓN :

* Sean : *h* : Nuevas horas
m : Nuevos minutos
s : Nuevos segundos

* Tiempo según reloj normal :

$$20\text{ horas }15\text{ minutos}=20\frac{1}{4}\text{ horas}=20{,}25\text{ horas}$$

* Pero:

$$\frac{\text{Tiempo en "h"}}{20}=\frac{\text{Tiempo en horas normales}}{18}$$

$$\frac{x}{20}=\frac{20{,}25}{18}\Rightarrow x=22{,}5\ h.$$

$$x=22h.+0.5\,h.$$

* Transformando a nuevos minutos :

$$0{,}5\ h.=0{,}5\ h\times\frac{45\,m}{1\,h}=22{,}5\ m$$

$$\Rightarrow 0{,}5\ h=22\ m+0{,}5\ m$$

* Transformando a nuevos segundos:

$$0.5\ m=0.5m\times\frac{54\,s}{1\,m}=27\,s.$$

* Finalmente : $x=22h.\ 22m.\ 27\ s.$

* Piden : $22+22+27=71$

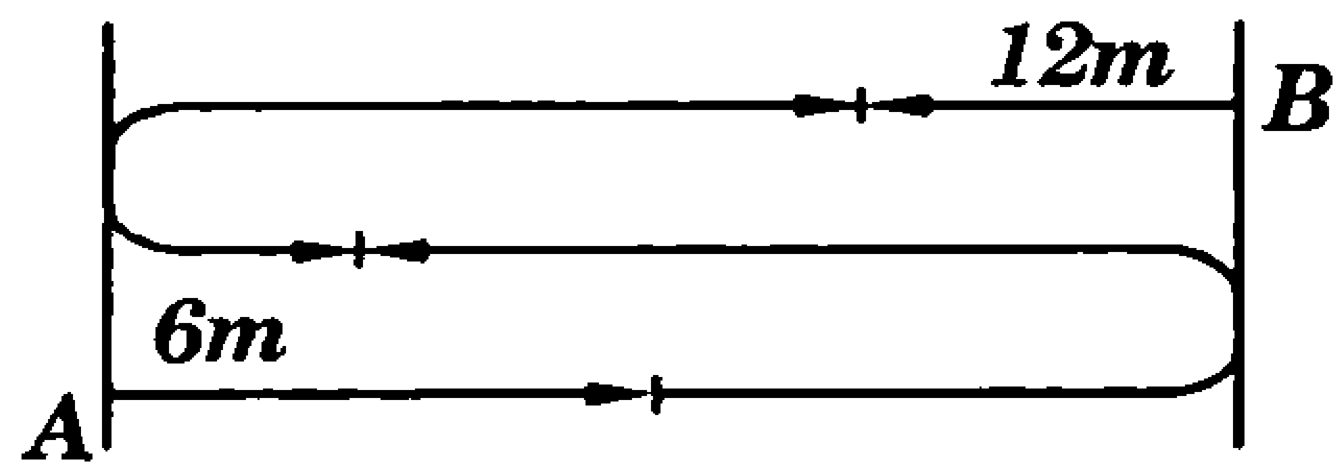
RPTA :"E"

PROBLEMA 38 :

Dos nadadores se lanzan simultáneamente de las orillas opuestas de un río y se cruzan a *12m* de la orilla más próxima. Tras llegar a sus destinos inmediatamente regresan cruzándose esta vez a *6* m de la otra orilla. En cada momento ellos nadan con rapidez uniforme. ¿Será posible , con estos datos , calcular el ancho del río?

A)20 m *B)30 m* *C)18 m* *D)26 m* *E)32 m*

RESOLUCIÓN :



Hasta el primer encuentro , entre ambos han cubierto un ancho del río. Hasta el segundo encuentro , entre ambos , han cubierto *3* anchos del río. El nadador *B* recorrió *12* m hasta el primer encuentro, entonces hasta el segundo encuentro habrá recorrido $12\times3=36$ m.

Por tanto el ancho del río es $36-6=30\ m$.

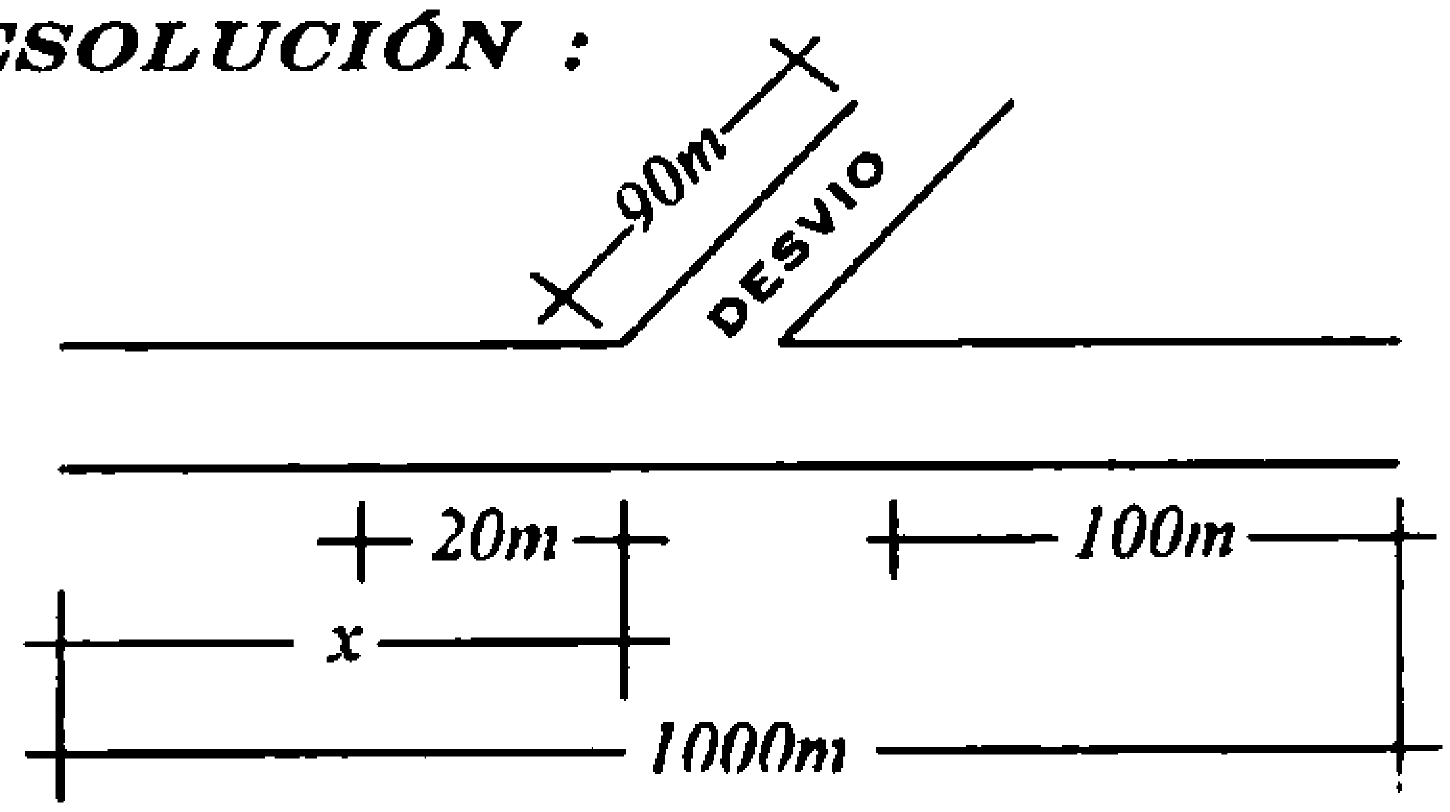
RPTA :"B"

PROBLEMA 39 :

En una competencia hípica de *1000 m*, el líder se desvía *90 m* por lo que tiene que retomar al mismo punto de desvío por el mismo camino, en el momento de desviarse llevaba *20 m* de ventaja al segundo y cuando lo vuelve a pasar está a *100 m.* de la meta llegando *2* minutos antes que éste. Hallar a qué distancia de la partida estaba el desvío.

A)150 m. *B)130 m.* *C)120 m.* *D)180 m.* *E)200 m.*

RESOLUCIÓN :



* Si tenemos tiempos iguales, la relación de sus espacios recorridos es constante.

$$\frac{T_1}{T_2}:\frac{x}{x-20}=\frac{1000-100+90+90}{1000-100}\Rightarrow x=120$$

RPTA : C

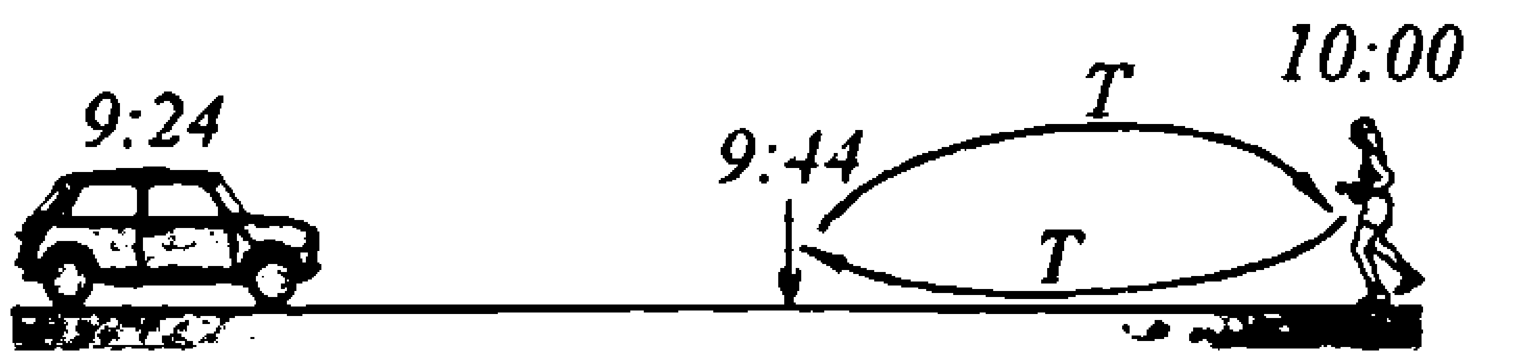
PROBLEMA 40 :

Luz sale todos los días de su trabajo a las ***10: 00*** horas y en ese mismo instante llega Javier y la recoge en su carro dirigiéndola al departamento de Luz. Un día Luz salió a las ***9:24*** horas y va al encuentro de Javier, quien la encuentra en el camino dirigiéndose a su departamento llegando ***32*** minutos antes que de costumbre.

¿Cuánto tiempo estuvo caminando Luz?

A)16 min ***B)32 min.*** ***C) 30 min***
D)24 min. ***E)20 min.***

RESOLUCIÓN :



* El gráfico nos muestra que el auto se ahorro ***2T=32*** min, ya que la persona había avanzado un trecho, entonces : ***T=16min,***

* pero acostumbraban encontrarse a las ***10:00*** se deduce que se encontraron a las :

$$10{:}00-16\text{min}=9{:}44,$$

y como Luz partió a las ***9:24***, entonces estuvo caminando : ***9:44 – 9:24 = 20*** minutos.

RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

En una pista circular de ***3000 m***, dos atletas parten juntos en sentido contrarios y se cruzan al cabo de ***20*** min. Después de ***5*** min. llega el más veloz al punto de partida: ¿Cuál es la velocidad del otro en m/min?

A)30 ***B)36*** ***C)24*** ***D)18*** ***E)16***

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que el más veloz recorrió ***3000 m***. en ***20 + 5=25*** min. Luego su velocidad será :

$$\frac{3000m}{25\,min}=120/\,min$$

* Pero el más rápido recorrió en ***5*** min. lo que otro recorrió en ***20*** min.

$$e_{veloz}=e_{otro}\Rightarrow 120\times5=V\times20\Rightarrow 30=V$$

RPTA : "A"

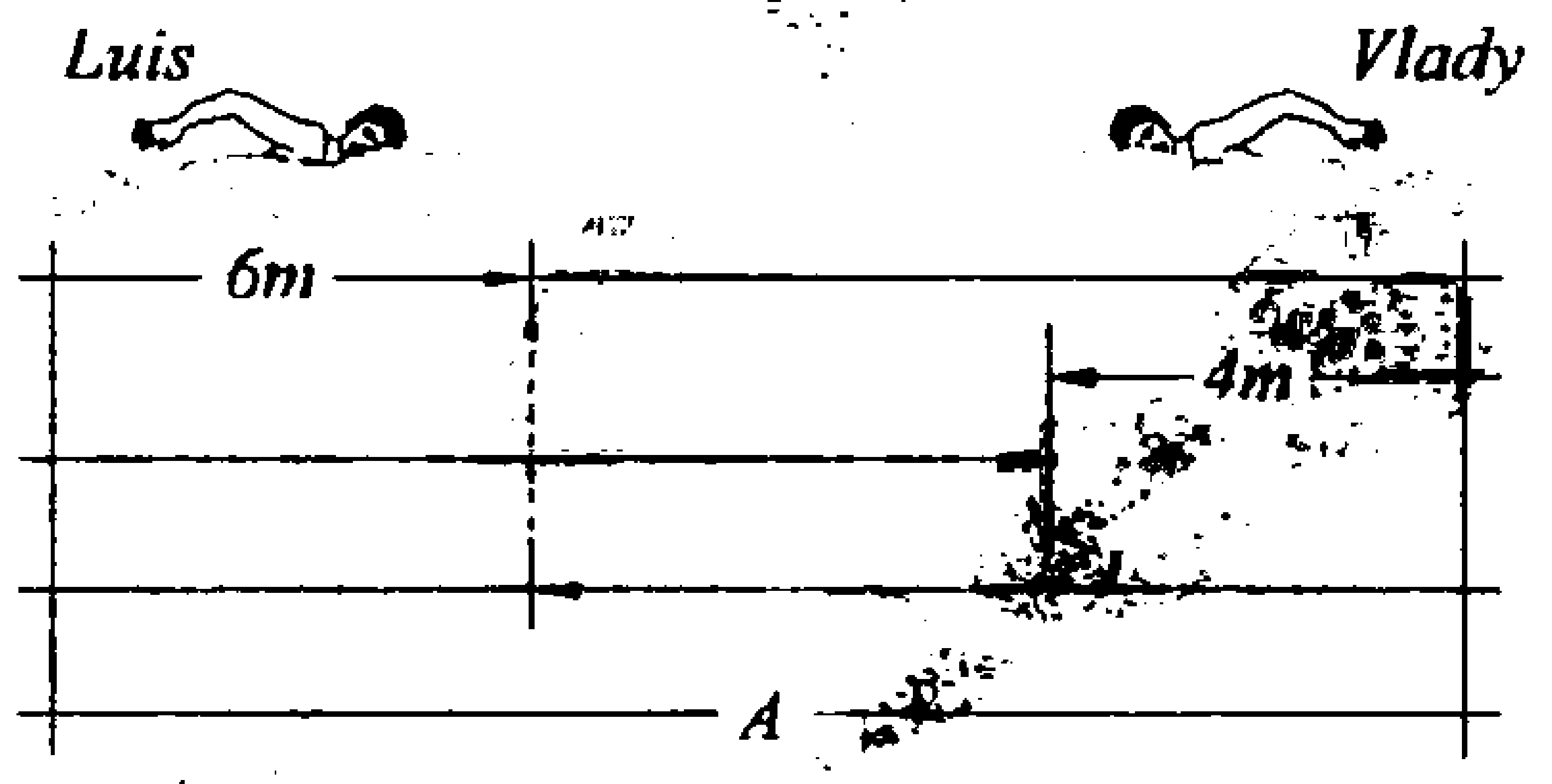
PROBLEMA 41 :

Luis y Vlady están en orillas opuestas de una piscina y comienzan a nadar al mismo tiempo, la velocidad de cada uno es constante. Cuando se cruzan por primera vez se encuentran a ***6*** metros de la orilla izquierda, continúan nadando, llegan a las orillas opuestas y vuelven, esta vez se cruzan a ***4*** metros de la orilla derecha. ¿Qué ancho tiene la piscina?

A)10 m ***B)12 m*** ***C)14 m*** ***D)15 m*** ***E)16 m***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



A : Ancho de la piscina.

* Cuando se produce el primer encuentro, entre los ***2*** han recorrido juntos un ancho de la piscina ***(A)***; y Luis ha recorrido ***6 m***.

* Cuando se produce el segundo encuentro, entre los 2 han recorrido juntos ***3*** anchos de la piscina ***(3A)***; y Luis ha recorrido ***18m***. Se deduce esto porque las velocidades son constantes.

El recorrido de Luis hasta el segundo encuentro es 18 m, que es lo mismo decir que recorrió ***(A+4)*** m ver el gráfico. Entonces.

$$A+4=18\Rightarrow A=14$$

RPTA : "C"

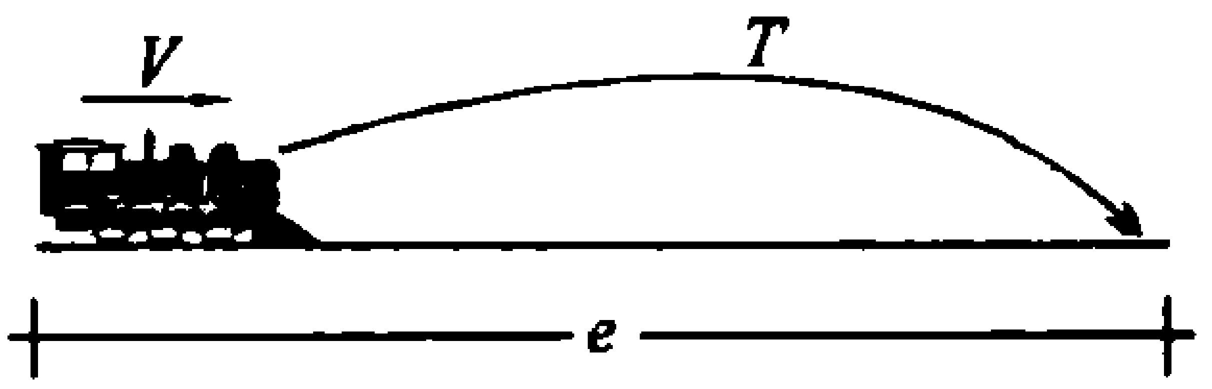
PROBLEMA 42 :

Un tren después de una hora de marcha se detiene 15¢ y vuelve a ponerse en movimiento con una velocidad igual a los ***2/3*** de la velocidad anterior llegando a su destino con un atraso de ***20¢***. Si la detención hubiera sido ***24*** m. más adelante el atraso hubiera sido de ***19¢*** ¿Cuál es la velocidad inicial del tren?

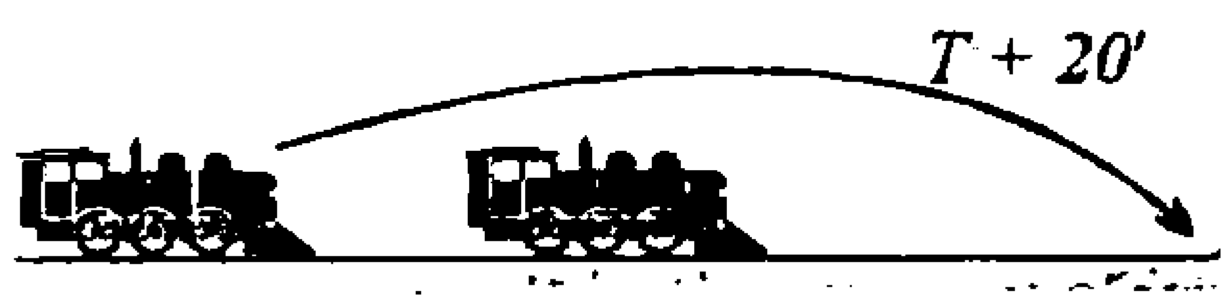
A)20 m/min ***B)24 m/min*** ***C)12,5 m/min***
D)10 m/min ***E)30 m/min***

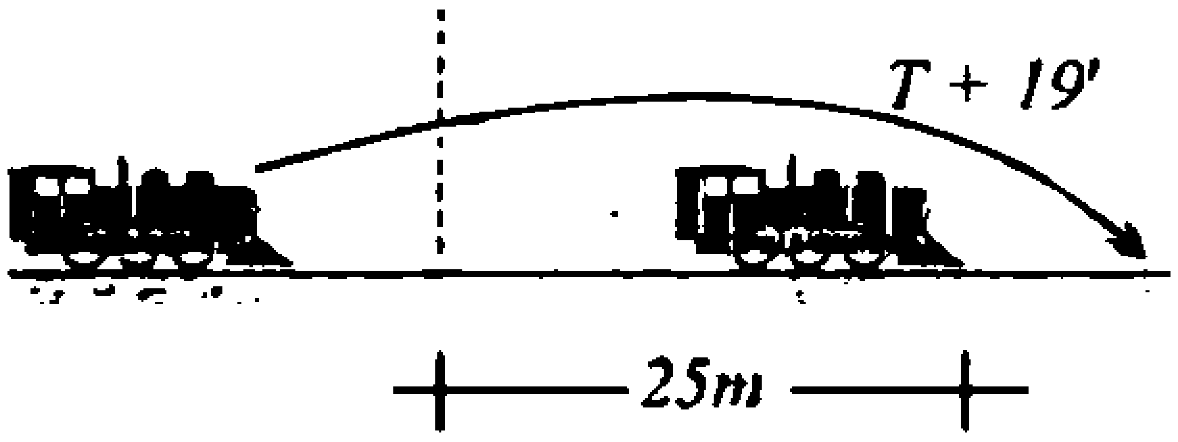
RESOLUCIÓN :

I)



II)



III) 

* De (II) y (III) se deduce que por cambiar de velocidad en 25 m. los tiempos se diferencian en 1 min. Luego :

$$\frac{\frac{25}{2v}}{3}=\frac{25}{v}=1\Rightarrow\frac{75}{2v}-\frac{25}{v}=1\Rightarrow v=12{,}5$$

RPTA : "C"

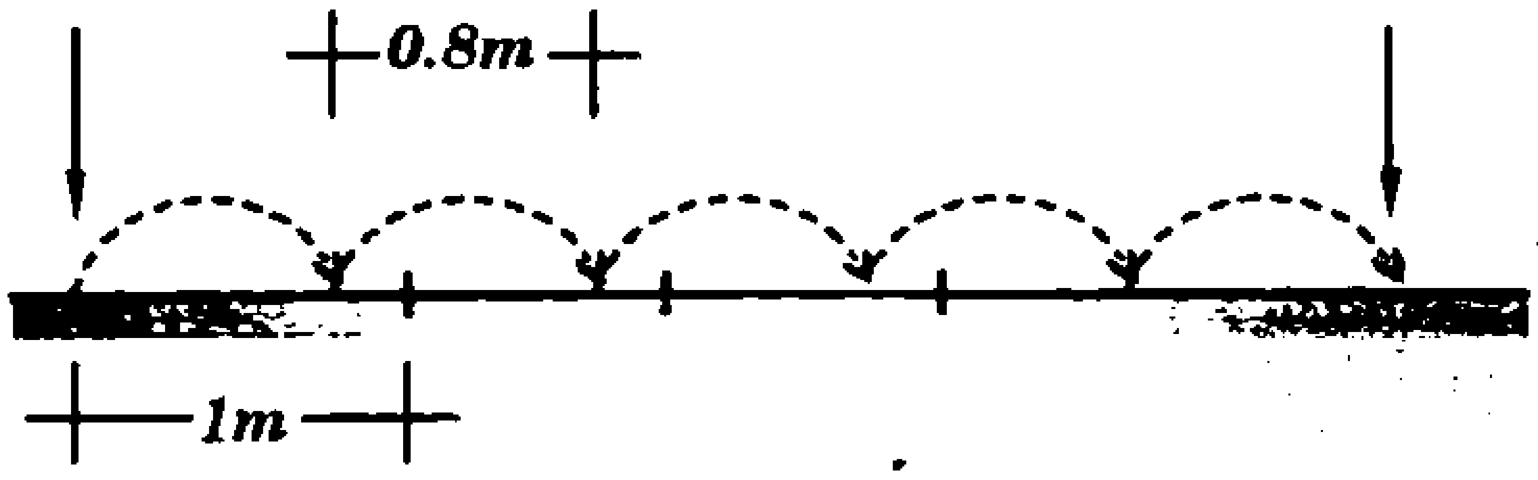
PROBLEMA 43 :

Una pista de desfile de **120 m.** de largo está marcada con rayas transversales , a la pista , cada metro. Si el paso de desfile es de **80 cm** de longitud con una velocidad de **3,2m/s** ; ¿cuánto tiempo transcurre hasta llegar a pisar la mitad más dos del total de rayas que de hecho pisará, teniendo en cuenta que se empezó a desfilar en la primera raya?

A)15,1 s B)18,2 s C)20 s D)21,2 s E)23,7 s

RESOLUCIÓN :

* Pisar una raya significa que coincide el punto final del paso con la raya.



* Como se muestra en el gráfico , esta situación se presenta cada 4 metros. Analíticamente se deduce que cada pisada de raya se produce en una longitud tal que sea el mínimo múltiplo común de **80** y **100 cm** ; esto es , cada **400 cm = 4 m.**

Por dato , se sabe que la pista mide **120 m.** En esa longitud se deben pisar : **120/4 = 30** rayas.

* La mitad más dos del total de rayas que de hecho pisará equivalen a : **30/ 2 + 2 =17** rayas

* Pero , se sabe que el desfile se inicia pisando la primera raya ; esto quiere decir que sólo debe pisar:

17 – 1 = 16 rayas más.

* Esas **16** rayas las pisará recorriendo una longitud de: **(16) (4) = 64 m**.

* Si el desfile se realiza a **3.2 m/s**, en recorrer los **64 m.** se deben emplear : $\frac{64}{3{,}2}=20\ segundos$

RPTA : "C"

PROBLEMA 44 :

Un ciclista calculó que si viaja a **10 km/hr.** llegará a su destino una hora después de mediodía , pero si la velocidad fuera de **15 km/hr.** llegaría una hora antes de mediodía. ¿A qué velocidad debe viajar para llegar exactamente a mediodía?

A)12,5 km/hr B)12 C) 11 D)14 E)16

RESOLUCIÓN :

* Es necesario una velocidad promedio :

$$V_{Prom.}=\frac{2\times10\times15}{10+15}=12$$

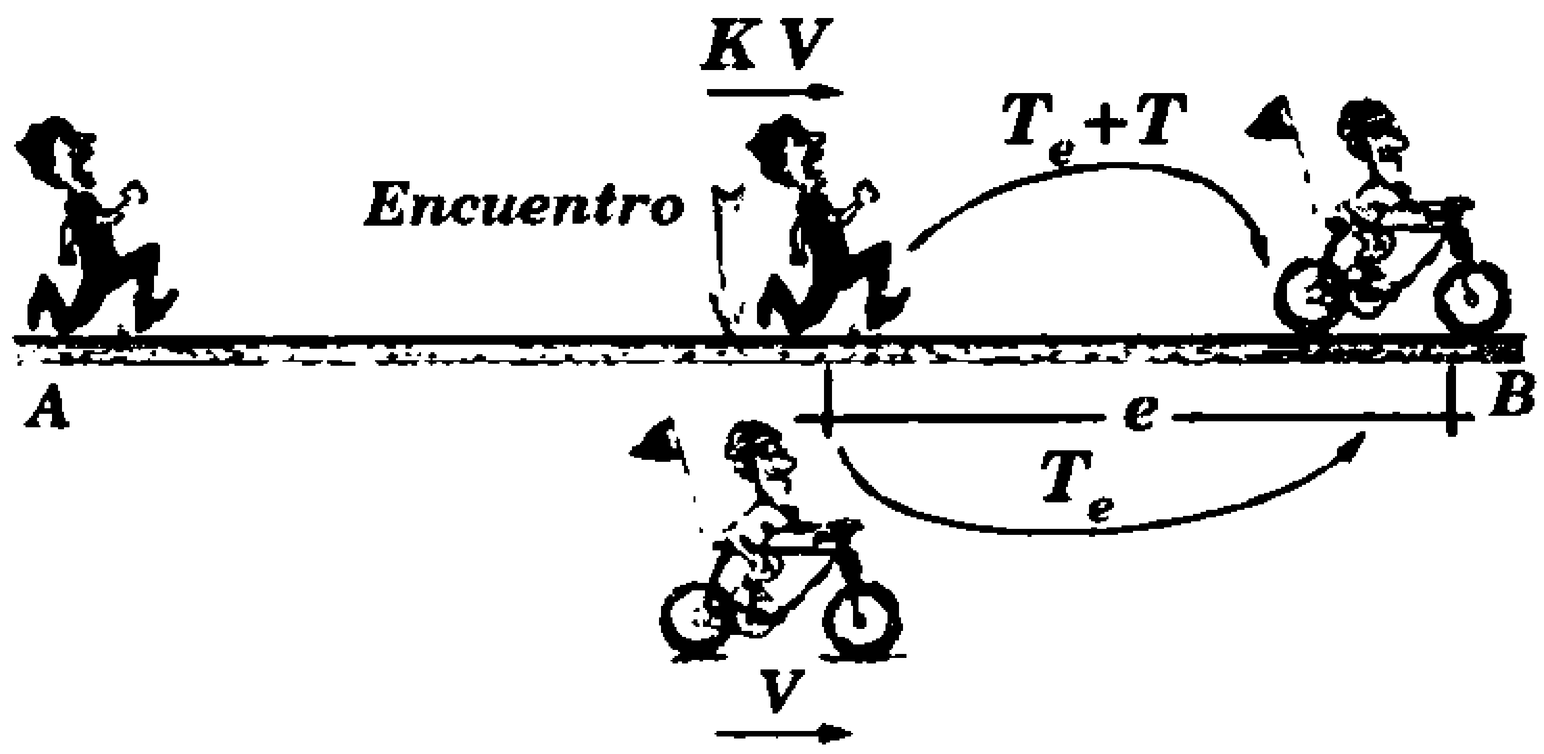
RPTA : "B"

PROBLEMA 45 :

De los puntos *A* y *B* parten al mismo tiempo al encuentro uno del otro , un transeúnte y un ciclista. Después de su encuentro , al transeúnte continúa su camino hacia *B*, mientras que el ciclista vuelve atrás y se dirige también hacia *B*. El transeúnte , que partió de *A*, llega a *B* «*t*» horas más tarde que el ciclista. ¿Cuánto tiempo pasó hasta el primer encuentro del transeúnte con el ciclista, si se sabe que la velocidad del transeúnte es k veces la del ciclista?

A)t/k B)(t – 1)/(k –1) C)(t+ 1)/(k + 1) D)t/(k – 1) E)kt/(1 – k)

RESOLUCIÓN :



* Como el ciclista en la ida como en la vuelta utiliza el mismo tiempo (tiempo de encuentro que piden), y además que :

transeúnte: $e=kv(T_e+T)$ Ciclista: $e=VT_e$

Reemplazando

* Se tiene :

$$kv\,(T_e+T)=VT_e$$

$$\Rightarrow kT_e+kT=T_e\Rightarrow kT=T_e-k\,T_e$$

$$\Rightarrow kT=T_e\,(1-K)$$

$$\Rightarrow T_e=\frac{kt}{1-k}$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 46 :

Una persona debe recorrer la distancia comprendida entre dos puntos *A* y *B*. Si diariamente recorre **50%** de los que le falta recorrer ese día , si al cabo de 6 días le faltaba recorrer **3 km.**; ¿Cuál es la distancia

entre A y B?

A)192 ***B)64*** ***C)182*** ***D)132*** ***E)96***

RESOLUCIÓN :

* Como en 1 día recorre el ***50%*** ó la mitad de lo que falta recorrer en ese día , entonces después de ese día le faltará la otra mitad , y si sea «x» la distancia de «A» a «B»,

* entonces luego del ***1er***. día le faltará : $\frac{x}{2}$

* Luego del ***2do***. día : $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)$ y luego de ***6*** días le faltará :

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)=3$$

$\Rightarrow x = 3\times 64 = 192\ m.$ *Dato*

RPTA :: "A"

PROBLEMA 47 :

Juanito escapó de su casa contigua a una carretera , dos horas después del escape su padre sale a la búsqueda , ***5*** horas después de salir el padre salió la madre al encuentro de los dos . Padre, madre e hijo caminan a razón de ***6, 6*** y ***4 km/h*** respectivamente; en el momento en que el padre alcanzó al hijo volvió con él hacia su casa caminando a razón de ***4 km/h***. ¿A qué distancia de su casa encontraron a la madre?

A)18 km. ***B)10 km.*** ***C)12 km.*** ***D)8 km.*** ***E)12,8 km.***

RESOLUCIÓN :

* En las dos primeras horas el hijo le saco una ventaja a su padre de :

$$4\ km/h\times 2h = 8\ km.$$

* Entonces demoró en alcanzarle :

$$\frac{8km}{6km/h-4m/k}=4h$$

* Donde el padre recorrió :

$$4\ h.\times 6\ km/k = 24\ km.$$

y en la hora siguiente (después de ***5*** h , de la partida del padre) , padre e hijo recorrieron ***4 km.*** y están a ***24 – 4=20*** km de la casa , además que en ese mismo instante sale la madre de la casa con una velocidad de ***6 km/h*** que se encontraran luego de :

$$\frac{20km}{6km/h+4km/h}=2h$$

Madre ← → *Padre e hijo*

* Donde la madre en esas ***2h***. se a alejado de la casa una distancia de :

$$6\ km/h\times 2\ h = 12\ km.$$

RPTA :: "C"

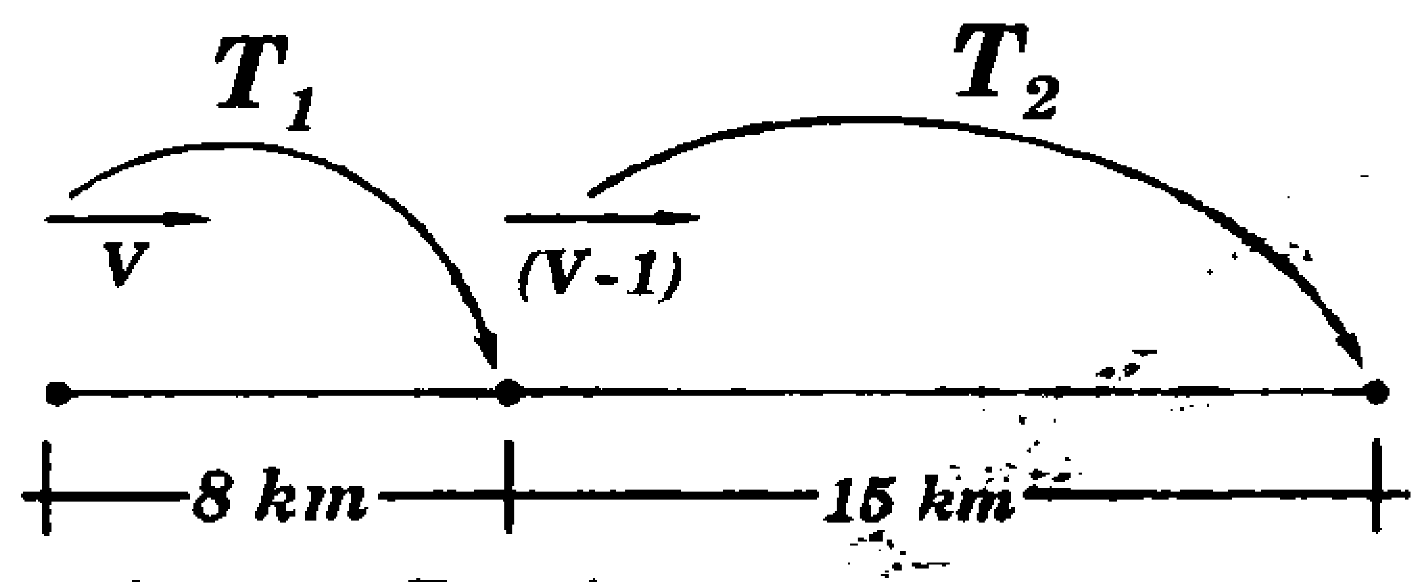
PROBLEMA 48 :

Un peatón recorre ***23*** km en ***7*** horas ; los ***8*** primeros con una velocidad superior en ***1km*** a la velocidad del resto del recorrido. Calcular la velocidad con que recorrió el primer trayecto.

A)2km/h ***B)3 km/h*** ***C) 4 km/h***
D)5 km/h ***E)6 km/h***

RESOLUCIÓN :

* Esbozando un gráfico con los datos del problema:



* Se sabe que : $T = e/v$

* Como emplea ***7*** horas en realizar todo el recorrido , se tiene :

$$\underbrace{\frac{8}{v}}_{t_1}+\underbrace{\frac{15}{v-1}}_{t_2}=7\Rightarrow v=4\,km/h$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 49 :

Si un recipiente que tiene $\overline{ab}$ litros de agua , se llena a caudal constante , al cabo de ***30*** minutos se obtiene $\overline{ba}$ litros y cumplidos los primeros ***60*** minutos se tiene $\overline{a0b}$ litros. Hallar el caudal en litros por hora.

A)51 l/h ***B)65 l/h*** ***C) 15 l/h*** ***D)90 l/h*** ***E)45 l/h***

RESOLUCIÓN :

* En la primera media hora llenó $\overline{ba}-\overline{ab}$ litros.

* En la segunda media hora llenó : $\overline{a0b}-\overline{ba}$ litros y como el caudal es constante:

$$\overline{ba}-\overline{ab}=\overline{a0b}-\overline{ba}$$

* Descomponiendo polinómicamente y efectuando:

$$b=6a\Rightarrow a=1\quad y\quad b=6$$

* En media hora llenó : ***61 – 16 = 45*** litros
En una hora llenará : ***90*** litros

RPTA : "D"

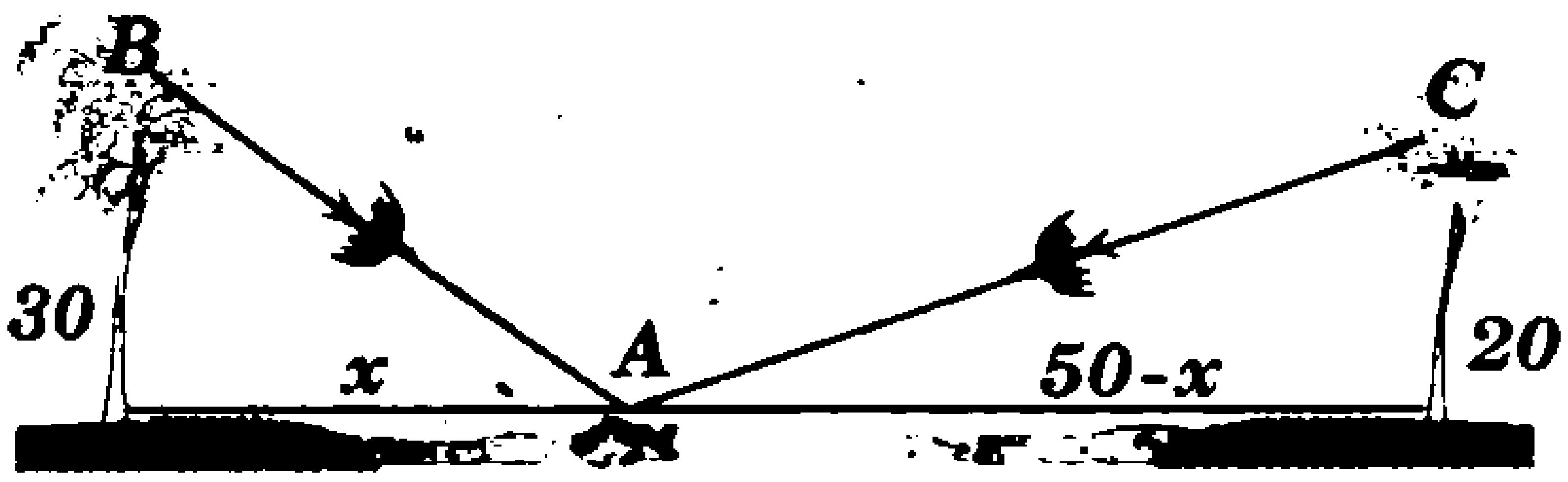
PROBLEMA 50 :

A ambas orillas de un río crecen dos palmeras , la una frente a la otra. La altura de una es de ***30*** metros , y la de la otra , de ***20***. la distancia entre sus troncos , ***50*** metros. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua , entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo.

¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

A)30 m B)25 m C) 20 m D)40 m E)15 m

RESOLUCIÓN :



* De la figura :

Por el teorema de Pitágoras :

$$AB^2 = 30^2 + x^2 \Rightarrow AC^2 = 20^2 + (50-x)^2$$

* Por datos : $AB = AC$

(ya que los dos pájaros cubren esta distancia en un mismo tiempo).

$$\Rightarrow 30^2 + x^2 = 20^2 + (50-x)^2 \Rightarrow x = 20$$

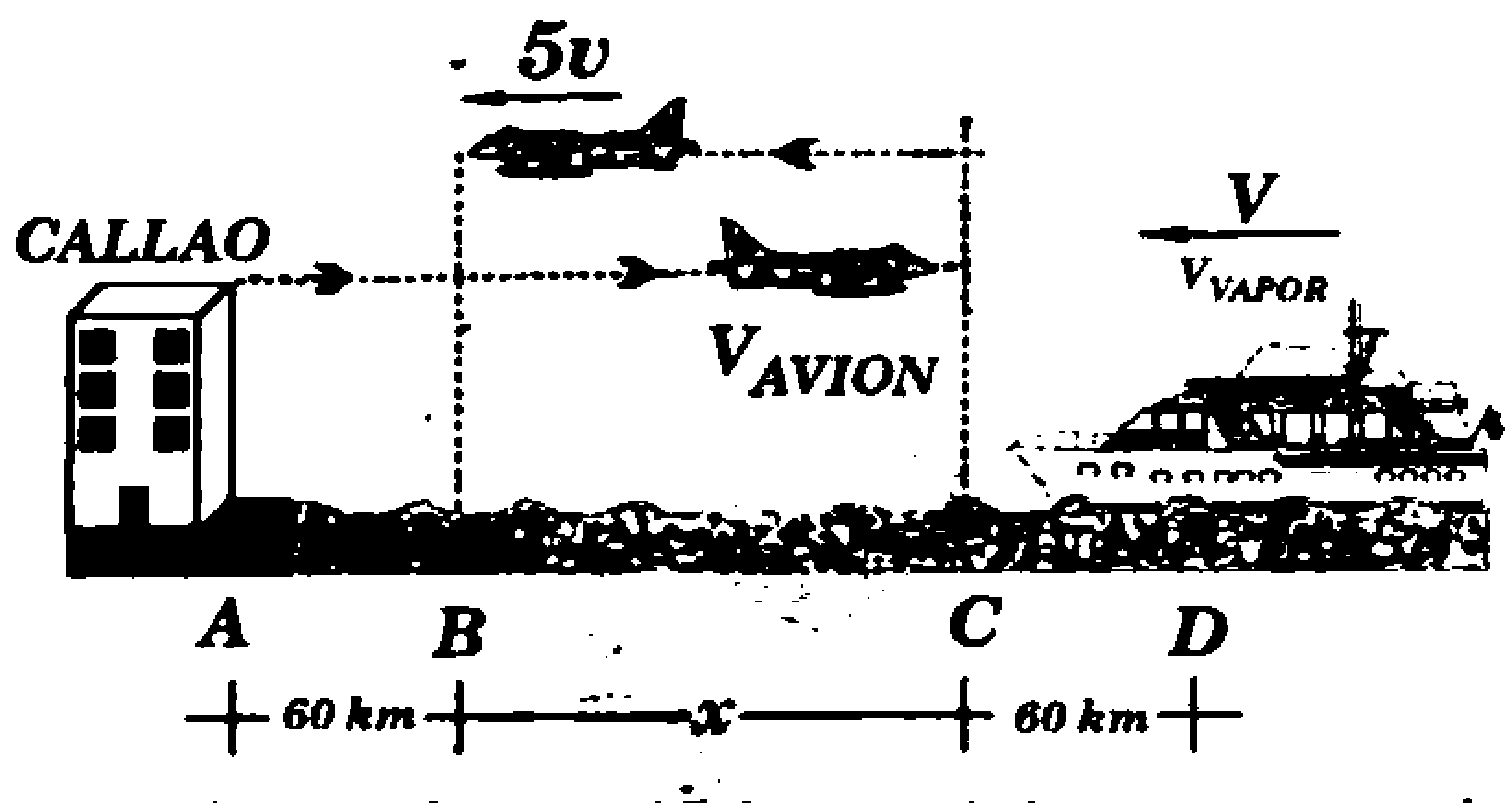
RPTA :"C"

PROBLEMA 51 :

Un avión provisto de un radio de ***60 km*** de alcance parte del Callao al encuentro de un vapor cuya velocidad es la quinta parte de la suya (avión). Cuando sus mensajes alcanzan al vapor responde éste que llegará al Callao dentro de ***15*** horas. El avión regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia al Callao por medio de su radio cinco horas después de su partida del Callao. Determinar la velocidad del avión.

A)72 km/h B)30 C)180 D)60 E)20

RESOLUCIÓN :



* Considerando las ***15*** horas del vapor y según gráfico, su espacio recorrido será:

$$15v = 60 + x + 60 \text{.....................} (I)$$

* Considerando las ***5*** horas del avión y según gráfico, su espacio recorrido será :

$$5(5v) = 60 + x + x \text{.....................} (II)$$

* Despejando «*x*» en *(I)*, para luego reemplazar en *(II)*, se tendrá: $25v = 60 + 2(15v - 120)$

Resolviendo : $v = 36$ ***km./h.***

* Piden la velocidad del avión :

$$5v = 5(36) = 180 \text{ km./h.}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 52 :

Dos ciclistas ***A*** y ***B*** avanzan con velocidades de ***27*** y ***18 km/h***. Después de ***5 h «A»*** se duerme. Si luego de ***5*** h se levanta. Hallar la distancia desde el inicio hasta que ***«A»*** alcanza a ***«B»***.

A)300 km B)310 km C)270 km
D)210 km E)N.A.

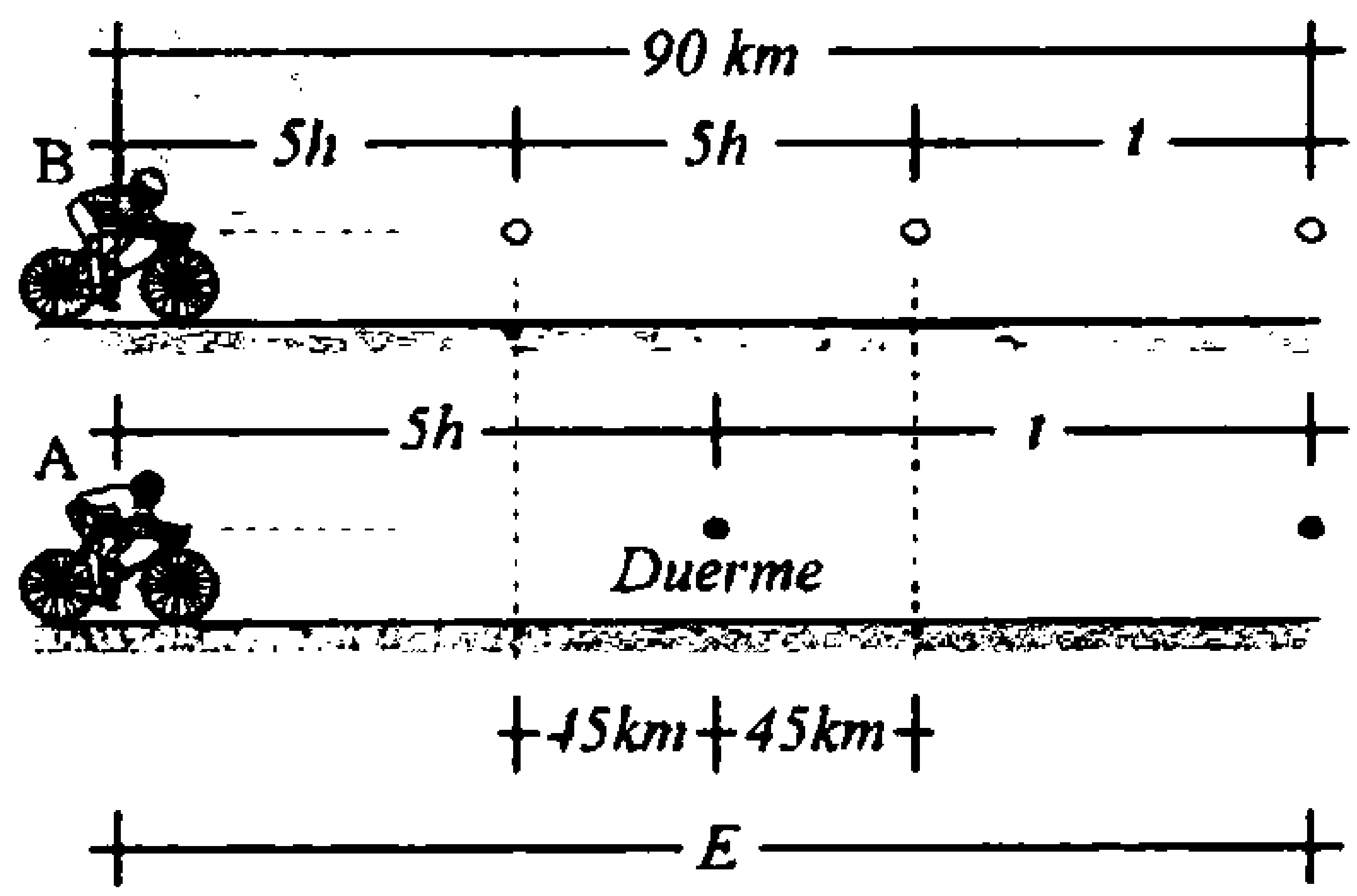
RESOLUCIÓN :

* En las primeras ***5h*** la separación será :

$$d = (27-18)\frac{km}{h}.5h = 90km$$

* Mientras que el primero *(A)* está durmiendo *(5h)*, el segundo *(B)* avanza :

$$e = 18\frac{km}{h}.5h = 90km$$



* Por lo tanto el segundo se ubica a ***45*** km delante del primero y este tardará en alcanzarlo:

$$t = \frac{45}{27-18} = 5h$$

* El segundo estuvo en movimiento durante : ***5+5+5=15h*** y se aleja del punto de partida :

$$E = 18\ (15) = 270\ km$$

RPTA : "C"

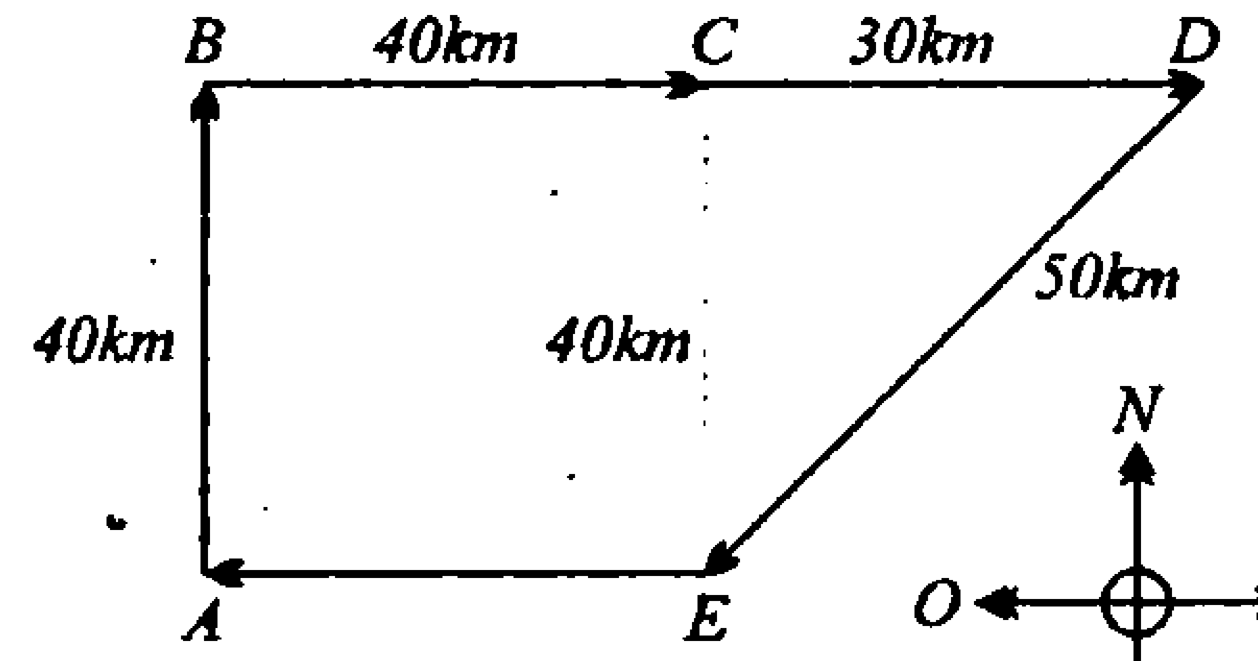
PROBLEMA 53 :

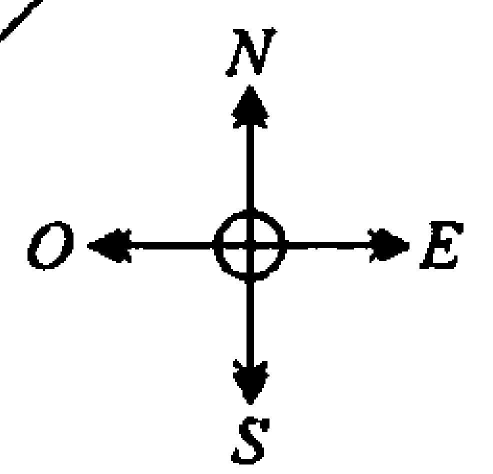
Un viajero sale de ***A*** y viaja ***40 km*** hacia el norte y llega al punto ***B***. Se dirige hacia el Este recorriendo ***40 km*** hacia el punto ***C***. De ahí sigue ***30 km*** al Este llegando al punto ***D***, luego se dirige en trayectoria recta hacia el punto ***E*** que está a ***40 km*** al Sur de ***C***, luego vuelve al punto ***A***. Averiguar cuál fue el recorrido total del viajero.

A)100 km B)200 C)120 D)150 E)250

RESOLUCIÓN :

* Del dibujo





DE = 50 Km **AE = 40 km**

⇒ (Recorrido total):

$R = AB + BC + CD + DE + EA$

$\Rightarrow R = 40 + 40 + 30 + 50 + 40$

$\Rightarrow R = 200\ km$

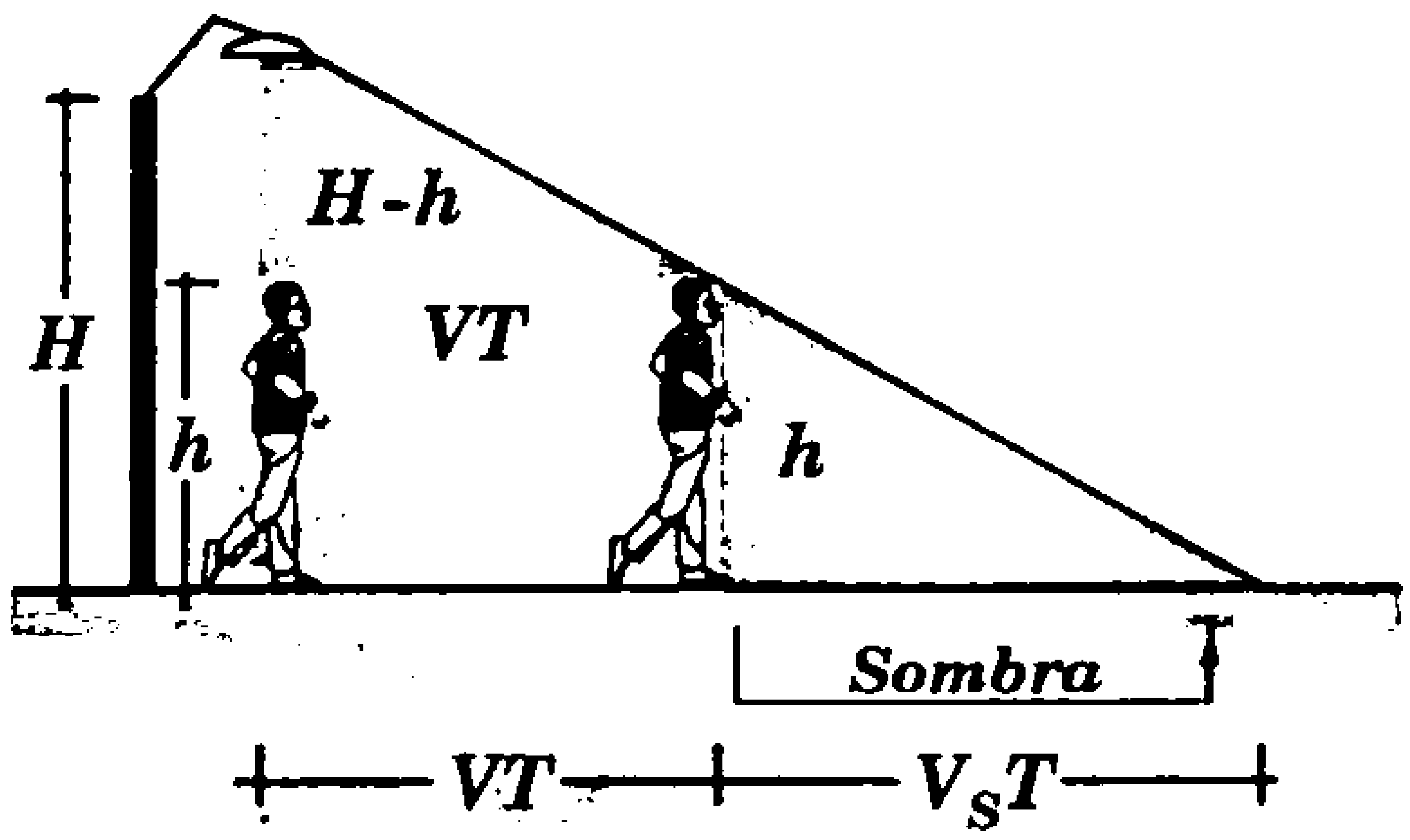
RPTA : "B"

PROBLEMA 54 :

Por debajo de un poste , cuyo foco está a una altura «*H*», pasa caminando un hombre , de estatura «*h*» con rapidez «*V*» si el hombre camina por un llano , ¿con qué velocidad crece la sombra del hombre , proyectada en el llano?

A) $\dfrac{Vh}{H+h}$ B) $\dfrac{VH}{Hv+h}$ C) $\dfrac{Vh}{(H+h)}$

RESOLUCIÓN :



«El tiempo que estuvo moviéndose el hombre, es también el tiempo que estuvo creciendo la sombra».

* Por semejanza en los triángulos sombreados :

$$\frac{VT}{H+h} = \frac{V_sT}{h} \quad \Rightarrow V_S = \frac{Vh}{H+h}$$

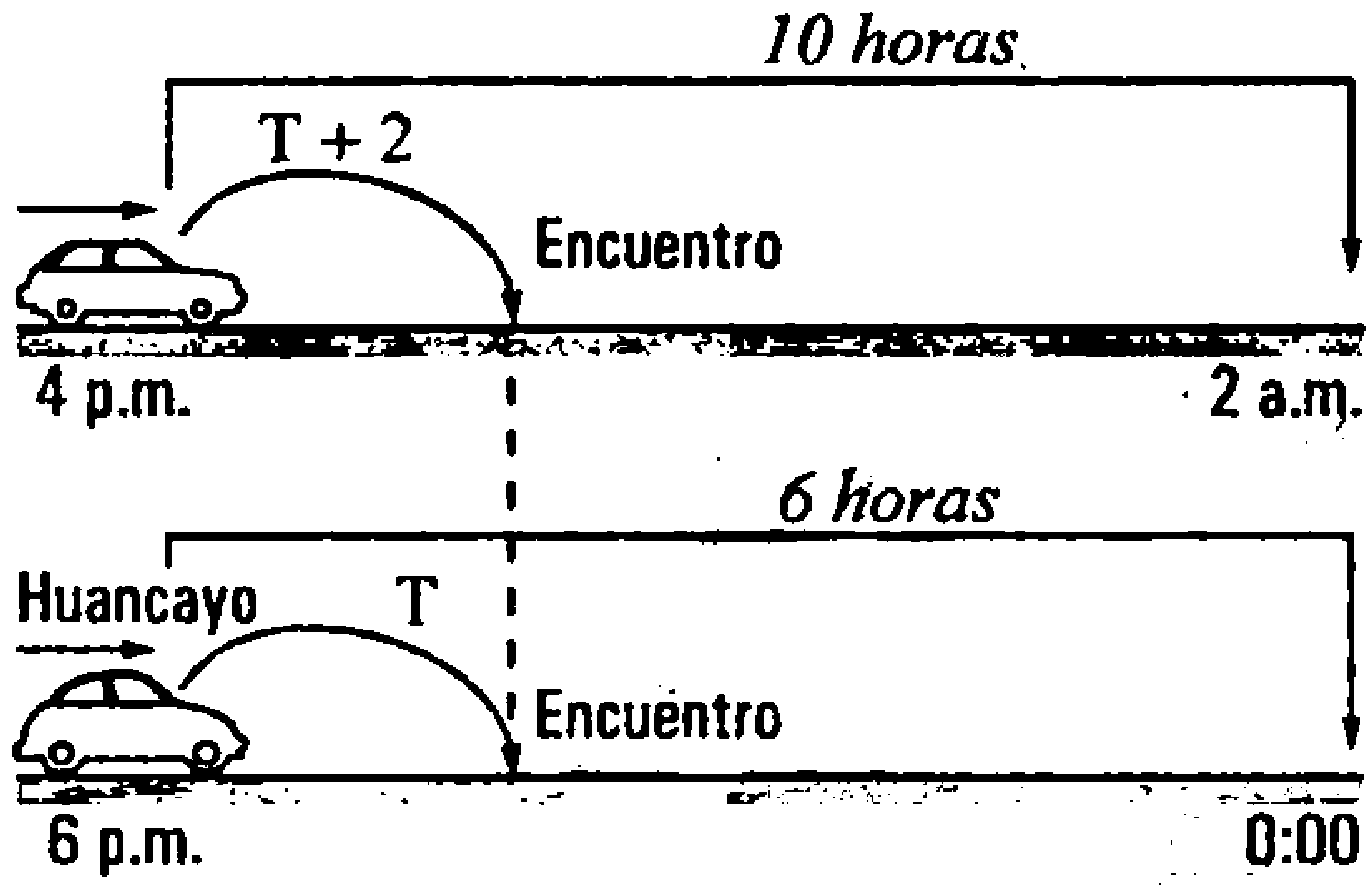
RPTA :"C"

PROBLEMA 55 :

Un auto sale de Huancayo a las **4 p.m.** y llega a Lima; al día siguiente , a las **2 a.m.** ; otro auto sale de la misma ciudad a las **6** p.m. y llega a las **0:00** horas. ¿A qué hora el segundo auto alcanzó al primero?

A) 8 pm. B) 9 pm. C) 10 pm.
D) 1 am. E) 2 am.

RESOLUCIÓN :



* Sabemos o se puede deducir que ha espacios iguales se puede plantear una proporción entre los tiempos :

$$\frac{10}{6} = \frac{T+2}{T} \Rightarrow = 3$$

* Hora del alcance : **6 pm. + 3H = 9 pm.**

RPTA :"B"

PROBLEMA 55 :

Una lancha va en **6** h de «*A*» a «*B*» río abajo y demora **30 h** en regresar de «*B*» hacia «*A*» río arriba. Una balsa que se deja llevar por el río de «*A*» a «*B*». ¿En cuánto tiempo llegaría?

A) 12 h B) 15 h C) 16 h D) 10 h E) 18 h

RESOLUCIÓN :

* Considerando como **MCM(6;30)=30** la distancia de «*A*» a «*B*» , luego :

* Río abajo : $V_{lancha} + V_{corr} = \dfrac{30k}{6}$

* Río arriba :

$$V_{lancha} - V_{Corr.} = \frac{30k}{30} \quad (+)$$

$$V_{lancha} = 3k$$

$$\Rightarrow V_{corr.} = 2k$$

* La balsa se moverá con la velocidad de la corriente:

$$\Rightarrow T_{balsa} = \frac{30k}{2k} = 15$$

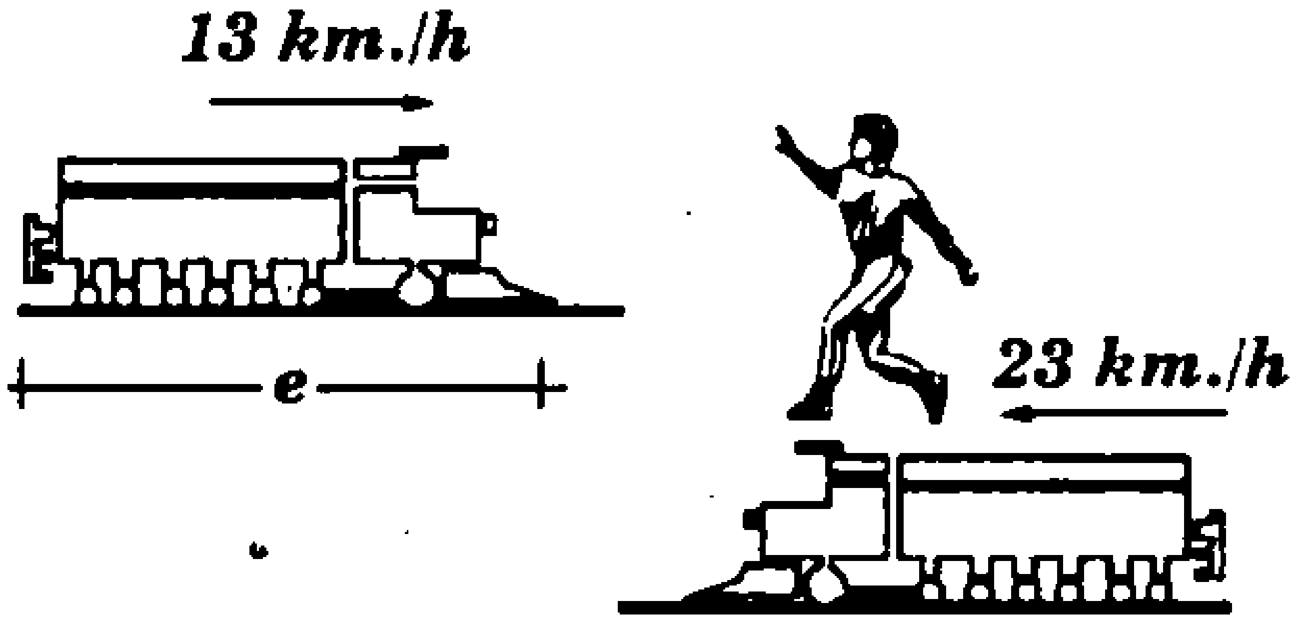
RPTA :"B"

PROBLEMA 56 :

Dos trenes marchan en sentido contrario y sobre vías paralelas con velocidades de **13** y **23 Km/h** respectivamente. Un pasajero ubicado en el segundo tren. Calculó que el primero demoró en pasarle **3** segundos ¿Cuál es la longitud de este último tren?

A) 30 m B) 40 m C) 100 m D) 100 m E) 20 m.

RESOLUCIÓN :



* El observador vio pasar el tren con velocidad de :

$$13 + 23 = 36\ Km/h \text{ ó } 10\ m/s$$

en un tiempo de **3** segundos.

* Luego la longitud del segundo tren será :

$$e = 10\ m/s \times 3s = 30\ m.$$

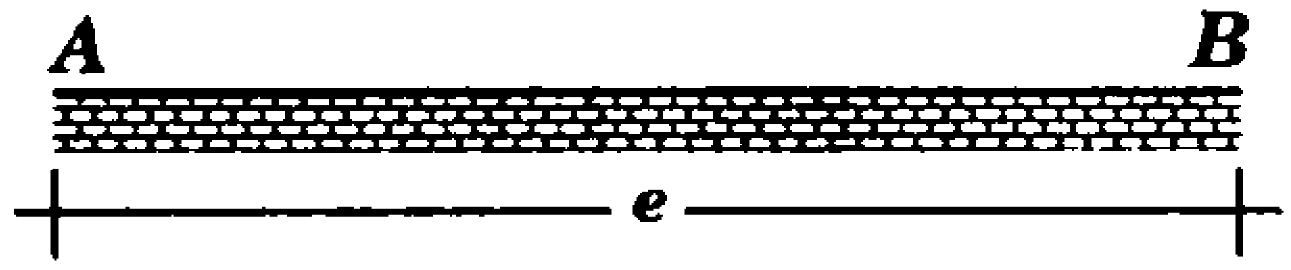
RPTA :"A"

PROBLEMA 57 :

Todas las mañanas a las **8** a.m. un tren parte de la ciudad **A** hacia la ciudad **B** y a la misma hora otro tren parte de **B** hacia **A**. El viaje de una ciudad a otra dura **10** días. ¿Con cuántos trenes se habrá cruzado el tren que salió de **B** el día de la inauguración del servicio, después de cubrir las **7/8** partes del recorrido?

A)9 **B)5** **C)8** **D)4** **E)6**

RESOLUCIÓN :



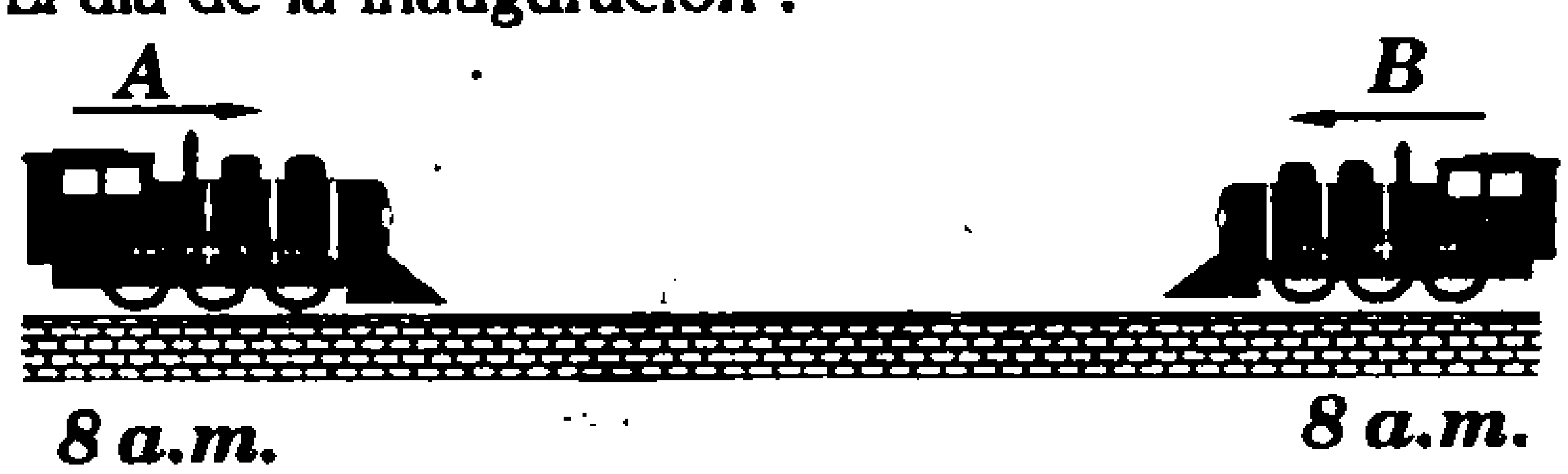
* Sea «e» el espacio que separa las **2** ciudades, luego de los datos :

 # día **espacio**

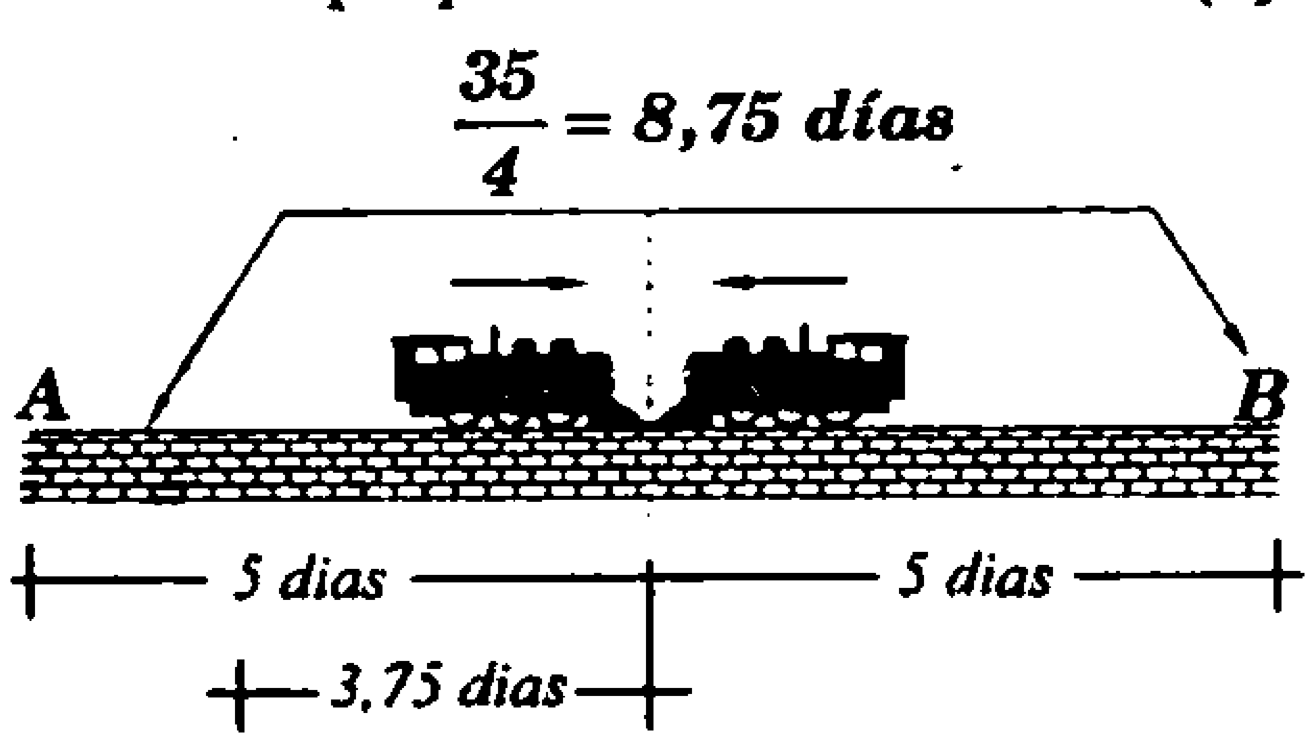
$10 \quad e$

$x \quad \frac{7}{8}e \Rightarrow x = \frac{35}{4}\ días$

El día de la inauguración :



Al final del 5^{to} día el 1^{er}. tren que partió de **B**, se cruza con el 1^{er}. tren que partió de **A** ....(1)



A partir del 6^{to} día el tren que partió de **B** (el día de la inauguración) se encuentra cada **1/2** día con un tren que partió de **A** sucesivamente es decir:

 # trenes **# día**

$1 \quad \frac{1}{2} \Rightarrow x = 7{,}5\ trenes$

$x \quad 3{,}75$

* Luego son **7** trenes, pero de **(1)** hay que agregarle **1** tren más.
* Entonces se cruza con **8** trenes.

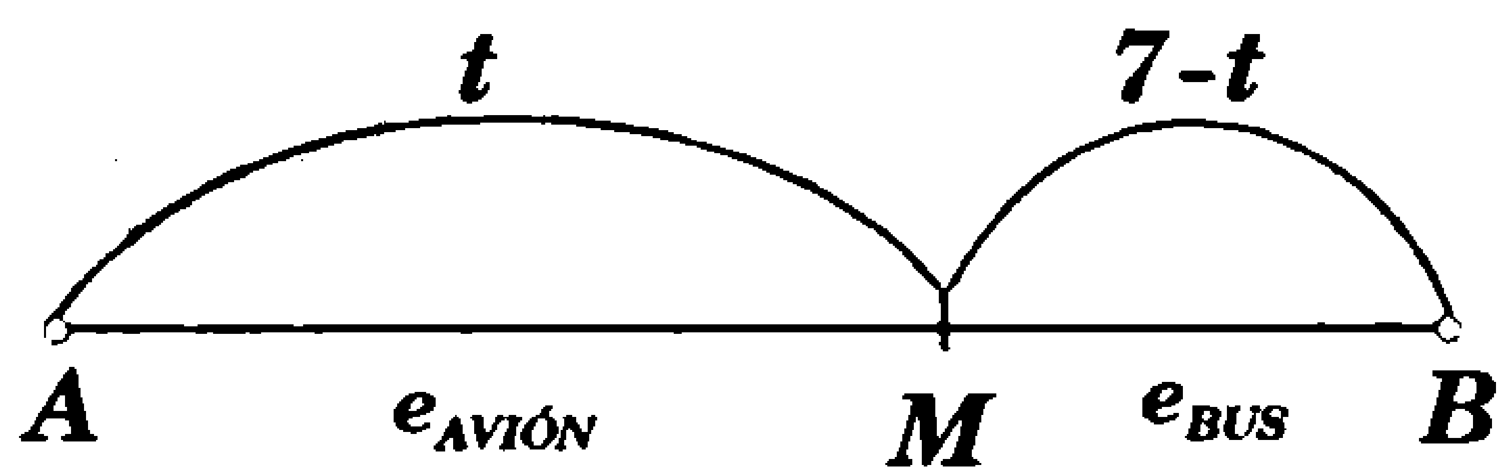
RPTA : "C"

PROBLEMA 58 :

Un viajero recorre **820** km en **7** horas, en autobús y en avión. En avión va a **200 km/h** y en autobús a **55 km/h**. ¿Cuál es la distancia que se recorrió en avión?

A)600km **B)500** **C)400** **D)300** **E)200**

RESOLUCIÓN :



$e_{ación} = V_{ación} \times t \Rightarrow e_{ación} = 200t$

$e_{bus} = V_{bus}(7 - t) \Rightarrow e_{bus} = 55(7 - t)$

* Dato : $e_{ación} + e_{bus} = 820$

$\Rightarrow 200t + 55(7 - t) = 820 \Rightarrow t = 3\ h$

$\Rightarrow e_{ación} = 200(3) \Rightarrow e_{ación} = 600\ km$

RPTA : "A"

PROBLEMA 59 :

La bajada de una montaña se hace ordina-riamente en los **4/5** del tiempo empleado en la subida. Una persona bajó desde la cúspide en **1** hora **56** minutos y subió a razón de **50** metros cada **5** minutos. Hallar la altura de la montaña.

A)1 160,20 m **B)1 160 m** **C)1 450 m**
D)1 420 m **E)2 320 m**

RESOLUCIÓN :

t_b = tiempo de bajada

t_s = tiempo de subida

* Luego, del enunciado :

* $$t_b = \frac{4}{5}t_s = \frac{5}{4}t_b ....(I)$$

* $t_b = 1h\ 56\ min = 116\ min ......(II)$

* Reemplazando **(II)** en **(I)** :

$$t_s = \frac{5}{4}(116\,min) = 145\,min ...(III)$$

* Además del enunciado :

$$V_{subida}=\frac{50}{5}m/min=10m/min$$

$$V_{subida}=\frac{\text{Altura de la montaña}}{\text{tiempo de subida}}$$

$$\text{Luego}: 10=\frac{\text{Altura de la montaña}}{145}$$

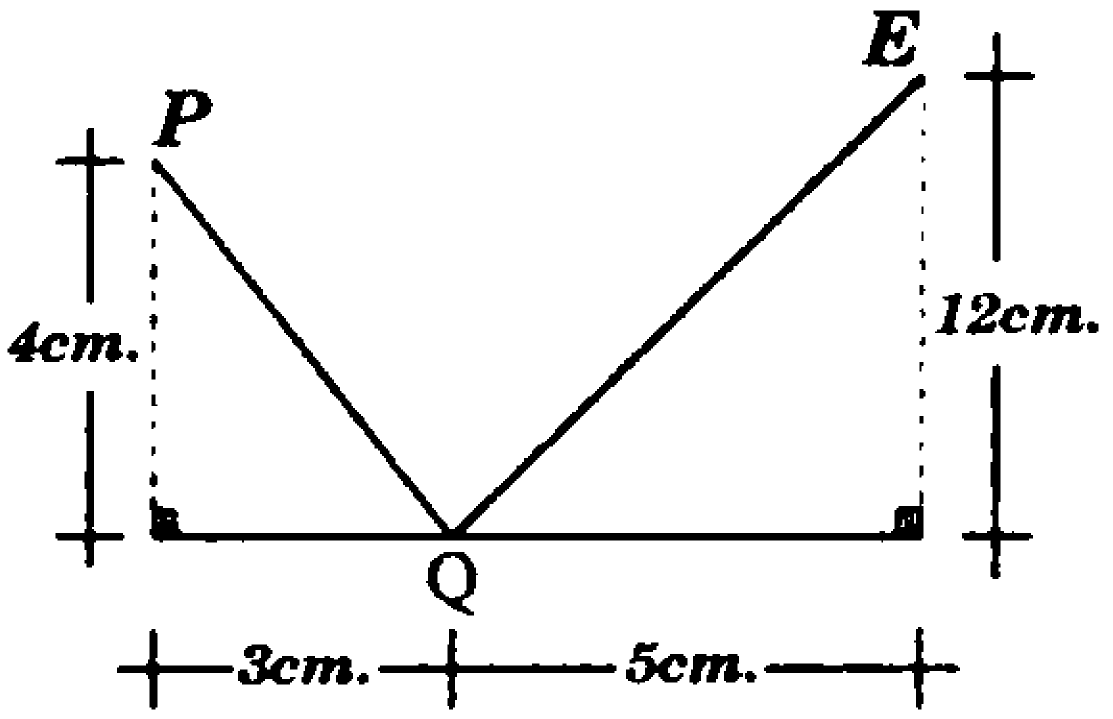
$\Rightarrow$ Altura de la montaña = ***1450 m***

RPTA : "C"

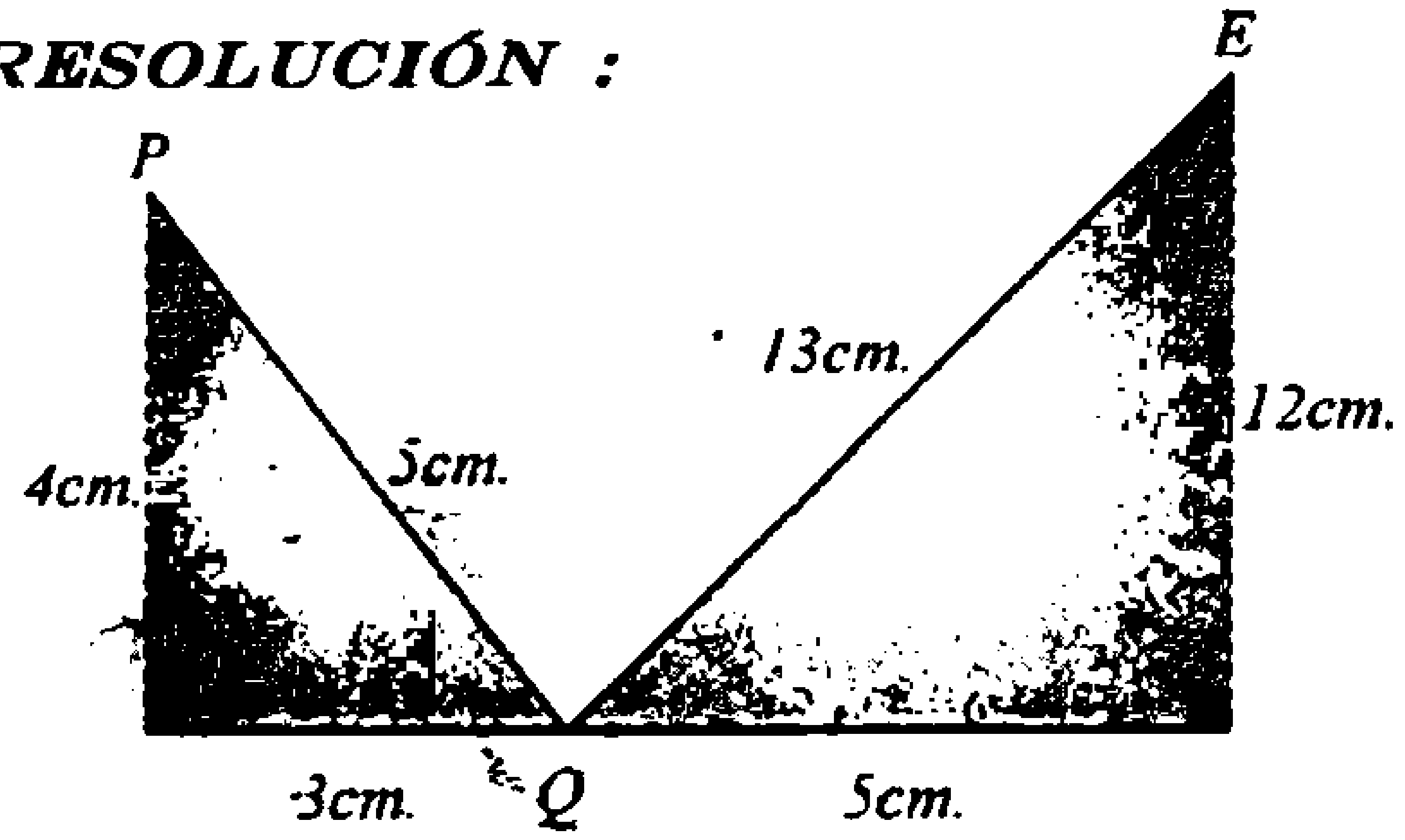
PROBLEMA 60 :

Una araña va de ***P*** a ***Q*** en línea recta a una velocidad de ***5 cm/s*** , recoge en ***Q*** un terrón de azúcar para llevarlo en línea recta a su escondite en ***E*** a velocidad constante, si en esta segunda etapa emplea un tiempo que es cinco veces el tiempo anterior. ¿Con qué velocidad en ***cm/s*** recorrió la distancia ***QE***?

A)17/5
B)12/5
C)13/5
D)14/5
E)11/5



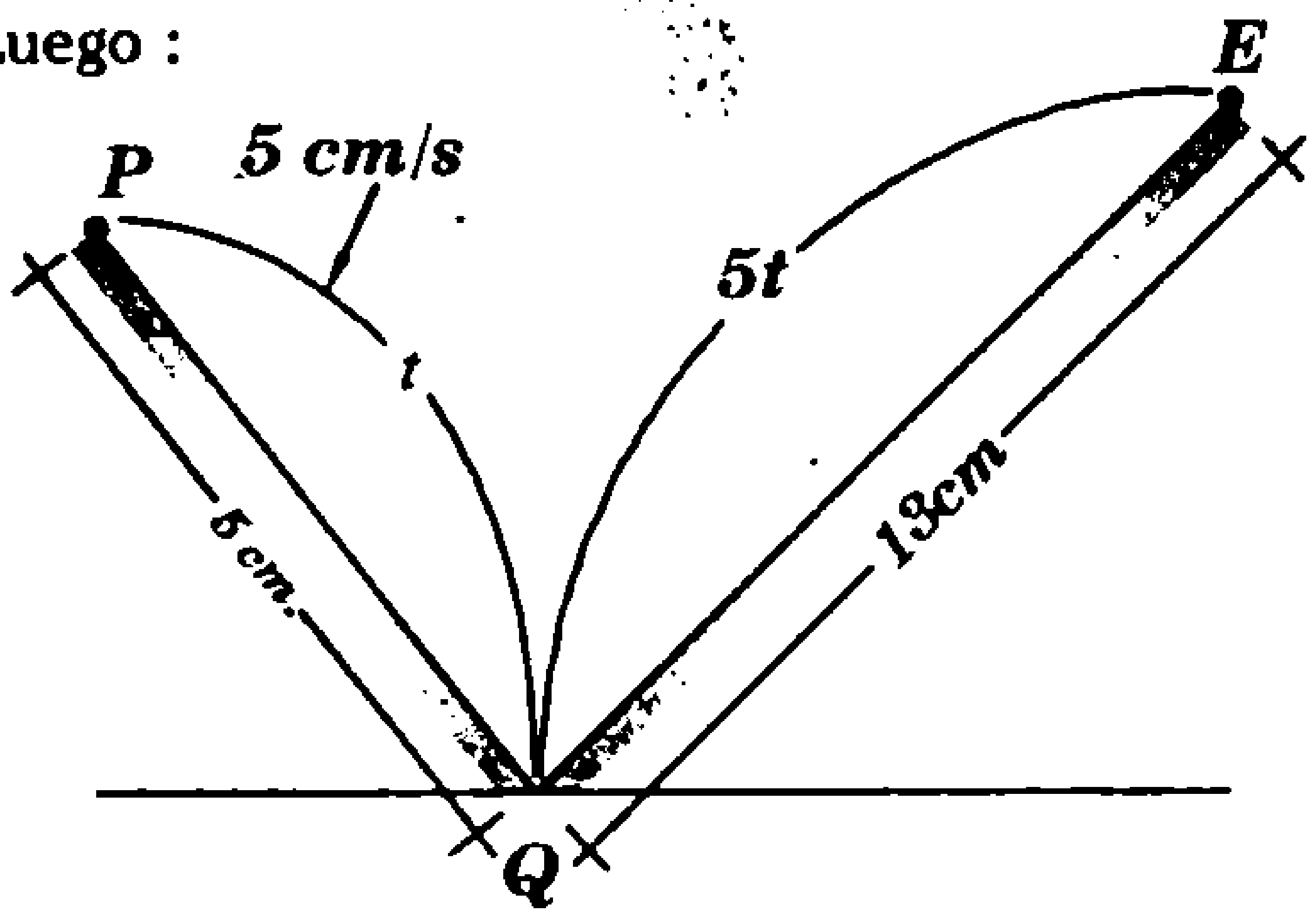
RESOLUCIÓN :



* Por Pitágoras , se deduce :

$$PQ=5\ cm \wedge QE=13\ cm$$

* Luego :



* ***En el Tramo PQ :***

$$d=V\times t\Rightarrow 5=5\times t\Rightarrow t=1\ seg$$

* ***En el Tramo QE :*** tiempo=***5t*** =***5*** seg

$$d=V\times t\Rightarrow 13=V\times 5\Rightarrow \frac{13}{5}m/s$$

RPTA : "C"

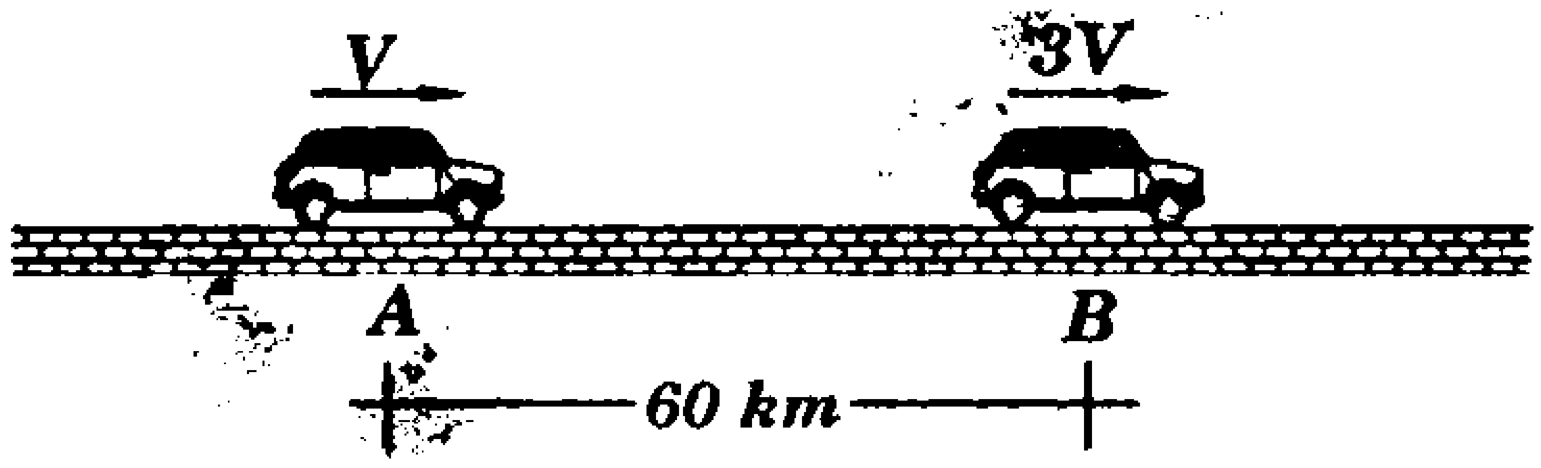
PROBLEMA 61 :

Dos móviles van en el mismo sentido , uno tiene ***3*** veces la velocidad del otro y se encuentran separados ***60 km***, y luego de ***2*** horas se triplica la distancia. Hallar la velocidad mayor.

A)30 km/h ***B)120 km/h*** ***C)75 km/h***
D)90 km/h ***E)45 km/h***

RESOLUCIÓN :

* Graficamos :



* Del enunciado se deduce que el móvil ***B*** es más veloz que ***A***.

* Si luego de ***2*** horas la distancia que separa los móviles es ***180 km*** , entonces en ***2*** horas el móvil ***B*** recorrió ***120 km*** más que ***A*** , luego :

$$3V-V=\frac{120}{2}\Rightarrow V=30$$

* El más veloz : $3V=90\frac{km}{h}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 62 :

La velocidad del sonido es ***1190 km/h***. equivalente a un mach. La velocidad de un avión de hélice equivale a ***0,52*** mach. Un jet supersónico equivale a ***2,2*** mach. Si se recorre ***1190 km***. Hallar el tiempo de ahorro si se utilizó el jet en vez del avión.

A)1,52 h ***B)1,68 h*** ***C)1,47 h*** ***D)1,73 h*** ***E)0,56 h***

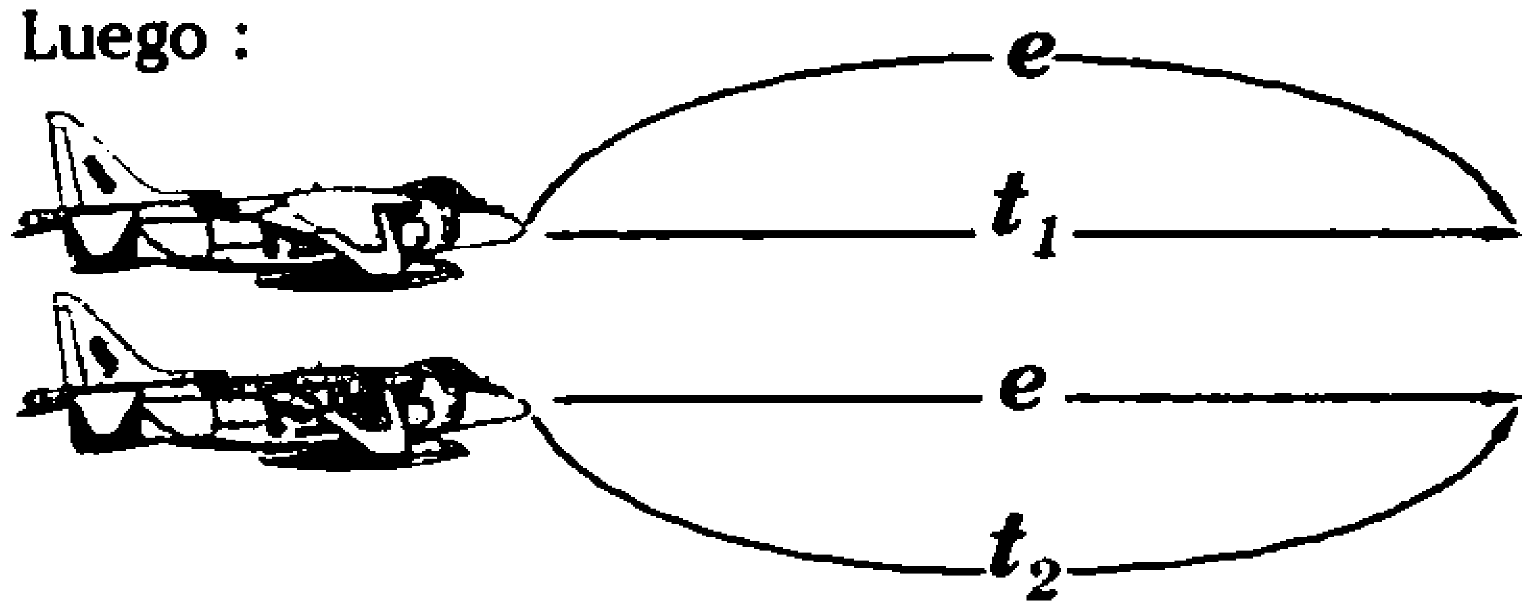
RESOLUCIÓN :

V_{son} = ***1190 km/h = 1 mach***

$V_{avión}$ = ***0,52 mach*** = $0,52\ V_{son}$

V_{jet} = ***2,20 mach*** = $2,20\ V_{son}$

* Luego :



e = 1190 km

Ahorro = $t_1 - t_2$

* Luego :

$$t_1 = \frac{e}{V_{avión}} = \frac{1190}{(0,52)(1190)} = \frac{1}{0,52}h$$

$$t_2 = \frac{e}{V_{jet}} = \frac{1190}{(2,20)(1190)} = \frac{1}{2,20}h$$

* Finalmente :

$$Ahorro = t_1 - t_2 = \frac{1}{0,52} - \frac{1}{2,20} = 1,47\ h$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 63 :

3 aviones de un mismo punto parten a las **8:00** a.m. el primero regresa a la base cada hora y cuarto, el segundo cada **3/4** de hora y el tercero cada **50 min**. ¿A qué hora se encontrarán por primera vez en la base?

A)17 h 30' **B)15 h 30'** **C)16 h30'**
D)17 h 20' **E) 18 h 20'**

RESOLUCIÓN :

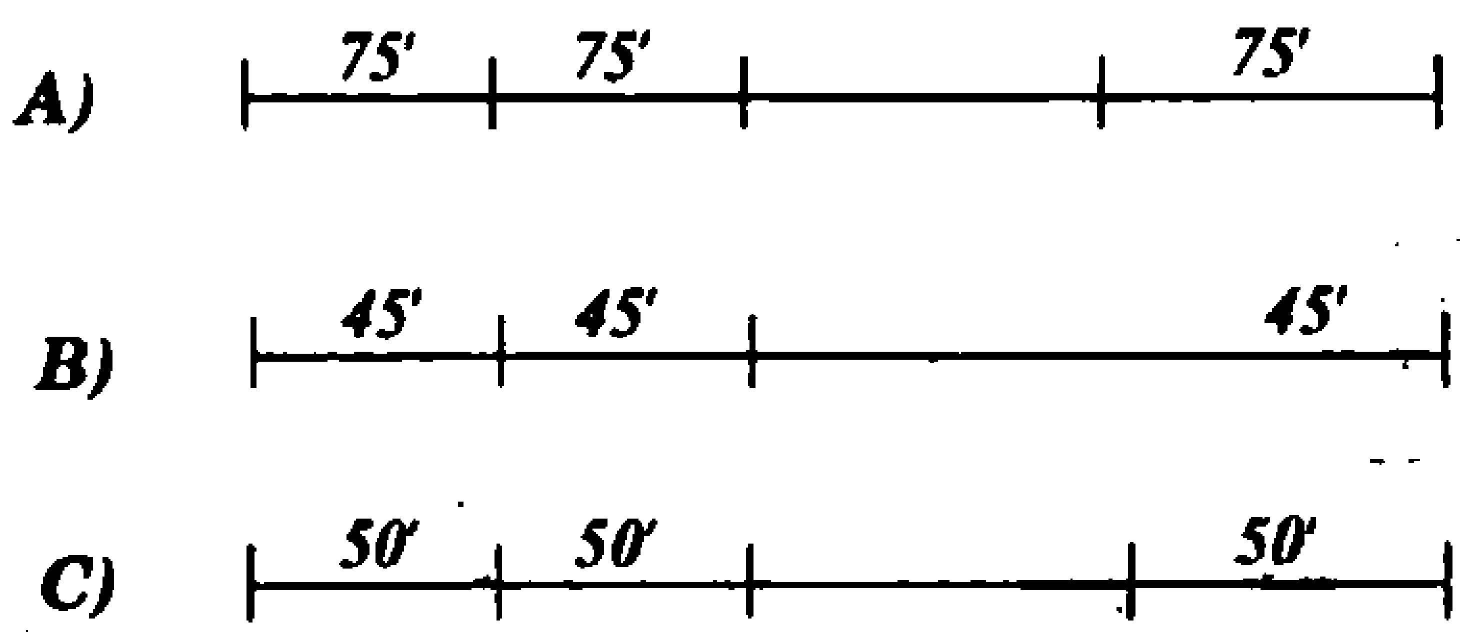
* Sean los aviones **A, B** y **C**, luego :

A regresa cada **75** min

B regresa cada **45** min

C regresa cada **50** min

8: 00 a.m.



Para que los **3** aviones se encuentren juntos en la base, debe transcurrir un tiempo que contenga a : **75; 45** y **50** es decir :

$$\overset{\circ}{\overline{M.C.M.(75,45.50)}} = \overset{\circ}{450} = 450K$$

Por 1^{ra} vez es cuando : $K = 1$

Tiempo a transcurrir = **450 min = 7h 30'**

Hora de encuentro :

8 a.m + 7h 30' = 15 h 30'p.m.

RPTA : "B"

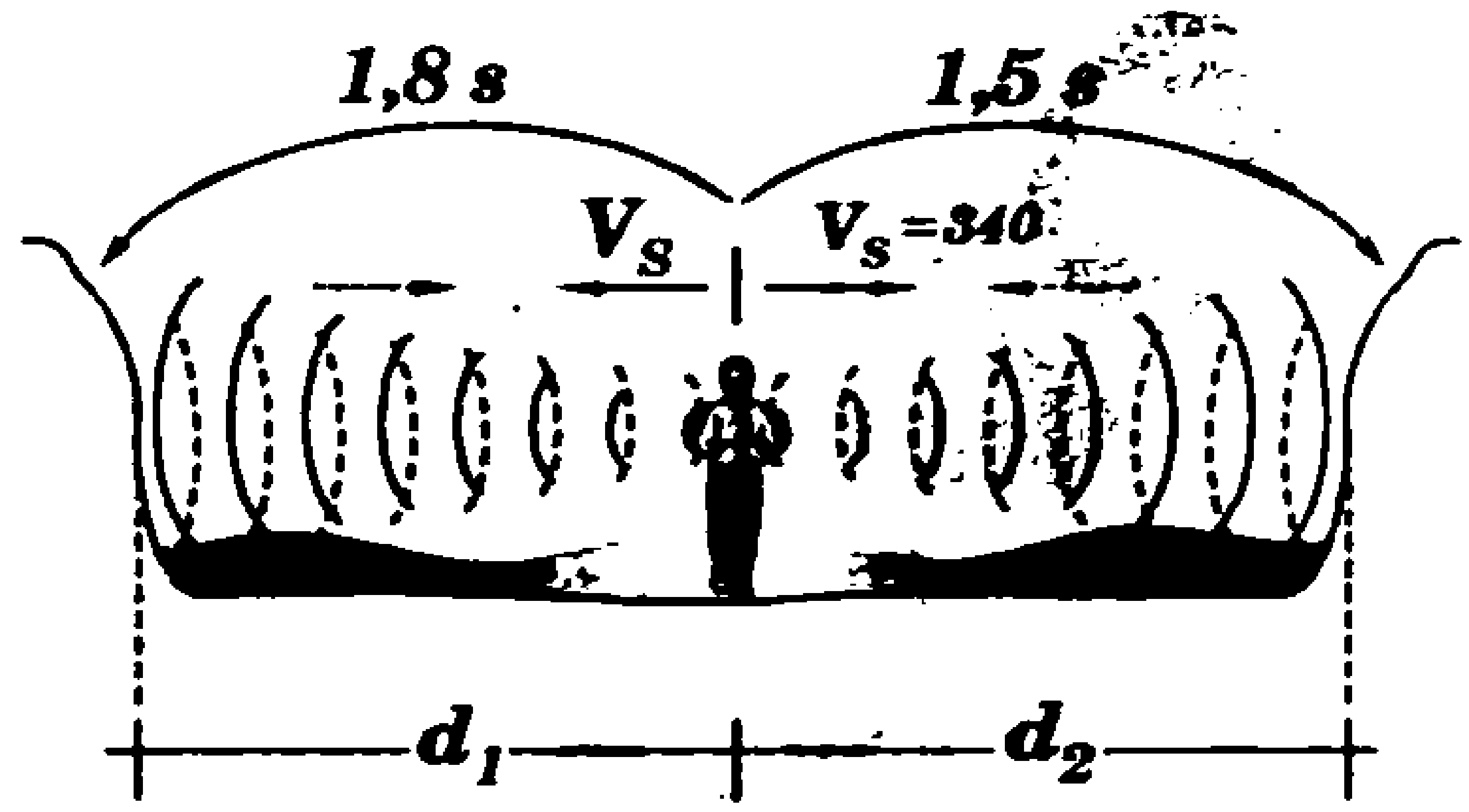
PROBLEMA 64 :

Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los **3** segundos y el siguiente a los **3,6** segundos. ¿Cuál es la separación entre las montañas?

NOTA : Considere velocidad del sonido en el aire igual a **340 m/s**

A)262 m **B)648 m** **C)972 m**
D) 1122 m **E)536 m**

RESOLUCIÓN :



* Los tiempos empleados en la ida serán la mitad de los tiempos en que se demora en recibir ecos.

* Calculando las distancias de la persona hacia las montañas.

d_1 = (340 m/s)× 1,8s = 612 m.

d_2 = (340 m/s)× 1,5s = 510 m.

* Luego la distancia entre las montañas será :

$d_1 + d_2$ = 612 + 510 = 1122 m.

RPTA : "D"

PROBLEMA 65 :

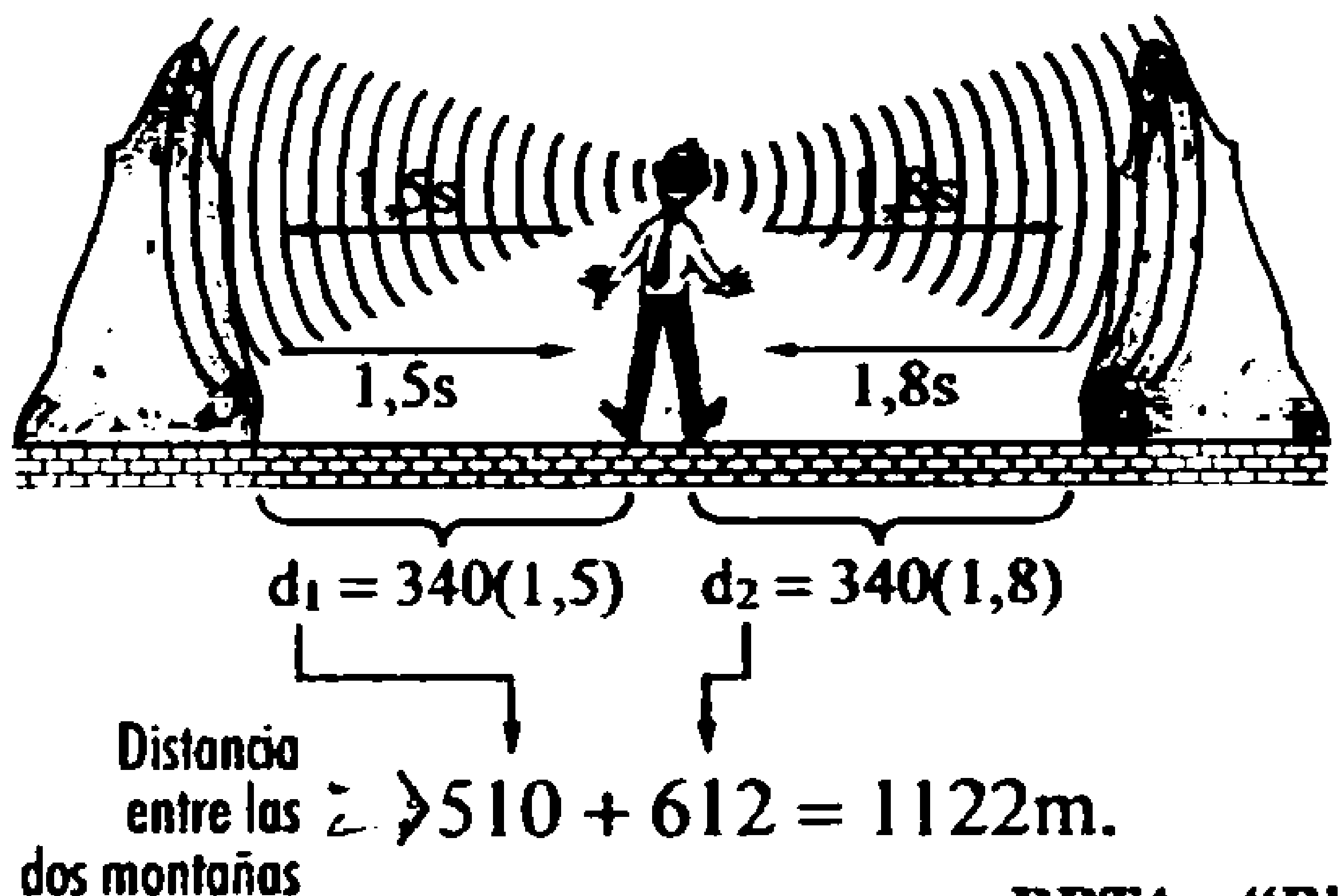
Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los **3** segundos y el siguiente a los **3,6** segundos. ¿Cuál es la separación entre las montañas?

Nota : Considere velocidad del sonido en el aire igual a **340 m/s.**

A)922m. **B)1122** **C)1120** **D)900** **E)420**

RESOLUCIÓN :

* El eco es un fenómeno físico que se produce cuando el sonido , en su propagación encuentra un obstáculo macizo y rebota en éste. Luego el sonido (grito) va y viene haciendo el viaje de ida y vuelta en el mismo tiempo, entonces :



RPTA :"B"

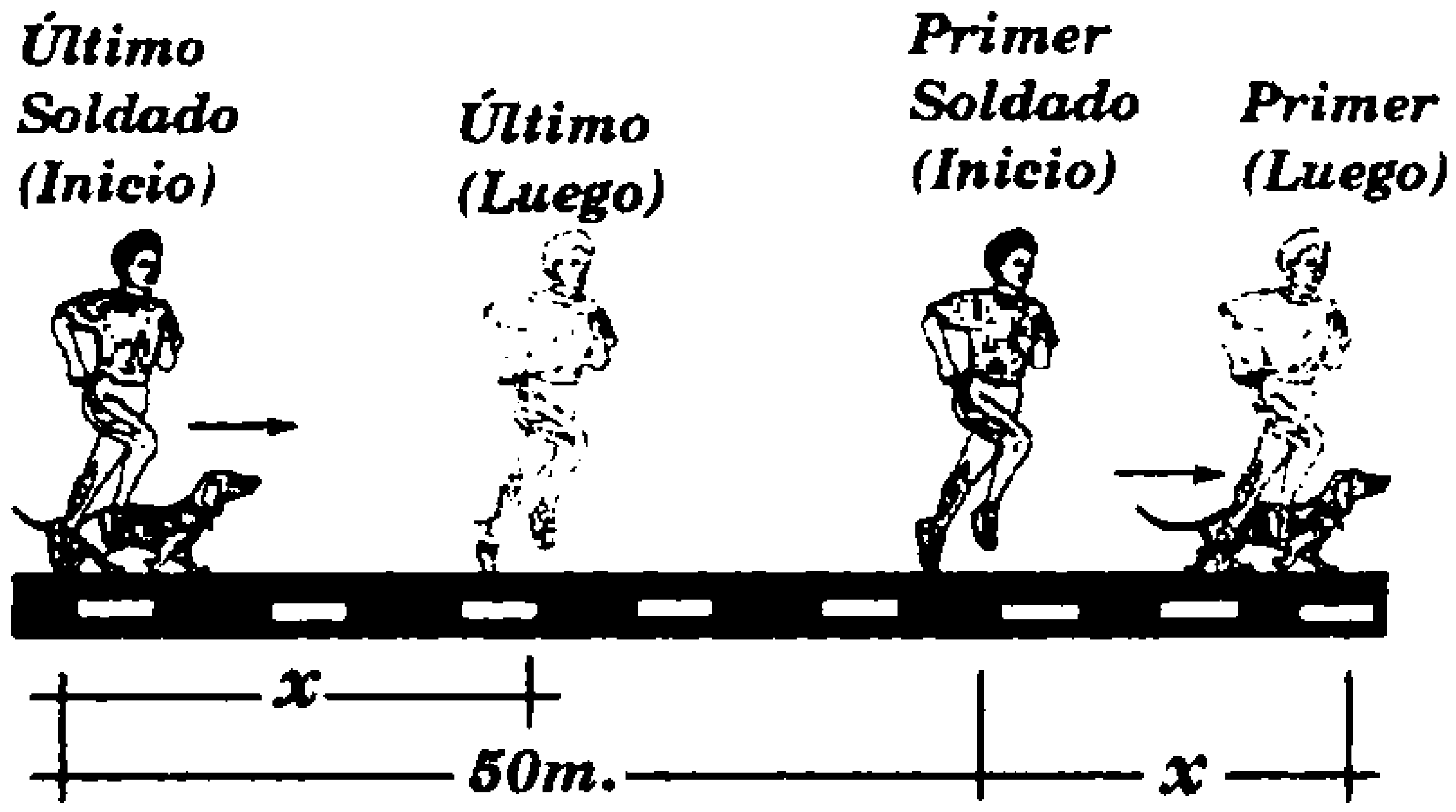
PROBLEMA 66 :

Un pelotón de soldados marchan en fila india a una velocidad constante. La longitud de la fila india es de *50m*. Un perro corre a una velocidad constante a lo largo de la fila, desde el último soldado al primero , después retorna al último soldado. Durante todo este tiempo, los soldados han avanzado *50m*. se pregunta. ¿cual es la distancia que el perro ha recorrido?

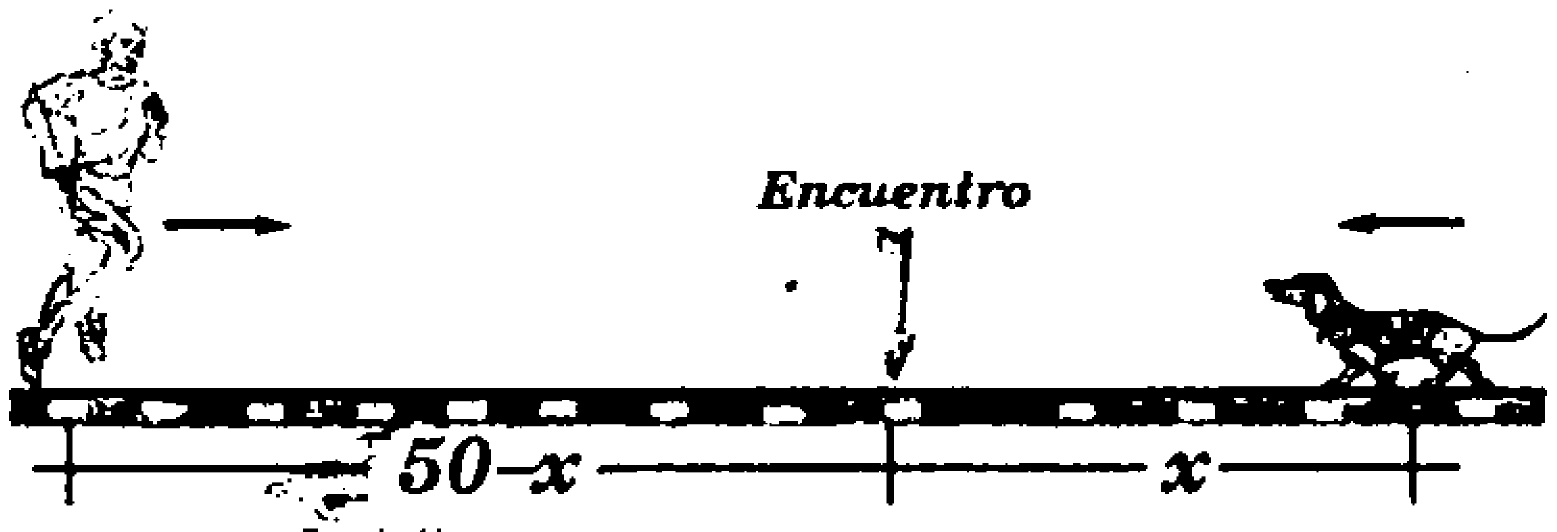
A) 50 B) 100 C) $50\sqrt{2}$ D) $50+\sqrt{2}$ E) $50(1+\sqrt{2})$

RESOLUSIÓN :

* Esquema cuando el perro alcanza al primer soldado :



* Esquema cuando el perro retorna al último soldado:



* Del primer esquema se deduce , que por cada «x» que avanza cada soldado, el perro avanza «$50+x$» y del segundo esquema se deduce que por cada « $50-x$» de cada soldado, el perro recorre «x» , ahora por regla de tres :

Recorrido de soldado **Recorrido de perro**

$$x \quad\quad 50+x$$
$$50-x \quad\quad x$$

$$\Rightarrow x^2 = 50^2 - x^2$$

Resolviendo : $x = 25\sqrt{2}$

* Piden la distancia total del perro , que será :

$$50 + 2x = 50 + 2(25\sqrt{2}) = 50(1+\sqrt{2})$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 67 :

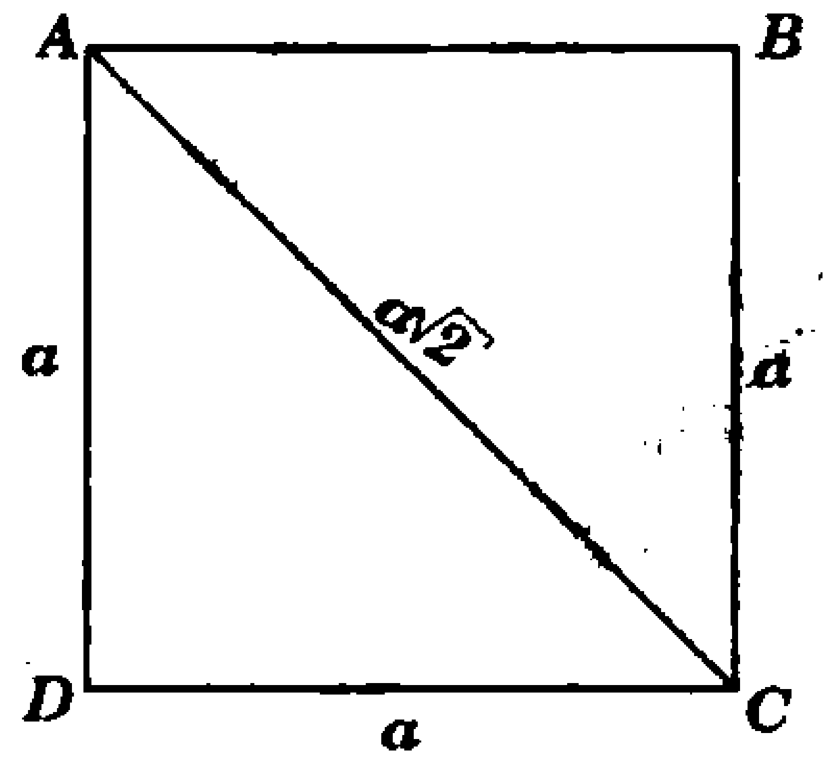
Un punto se mueve con una velocidad constante *V* recorriendo el perímetro *ABCD* de un cuadrado y otro punto tiene el mismo movimiento uniforme , recorriendo ida y vuelta sobre la diagonal *AC*. Si parten del mismo punto , ¿en cuántas vueltas volverán a encontrarse?

A) 15 B) 21 C) 79 D) No se encuentran E) 2560

RESOLUCIÓN :

* Sea «a» el lado del cuadrado ; entonces , por el teorema de Pitágoras se tiene :

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{2}$$



* Por teoria : $v = e/t \Rightarrow t = e/v$

Suponiendo que ambos puntos parten de *A* , se tiene que el tiempo empleado por cada punto en dar una vuelta completa es :

Punto «1» : $t = 4\,a/v = 4\,(a/v)$

Punto «2» : $t = 2a\sqrt{2}/v = 2\sqrt{2}(a/v)$

Para que vuelvan a encontrarse debe transcurrir un número entero de vueltas , tal que sea múltiplo de 4 y $2\sqrt{2}$; el cual no existe.

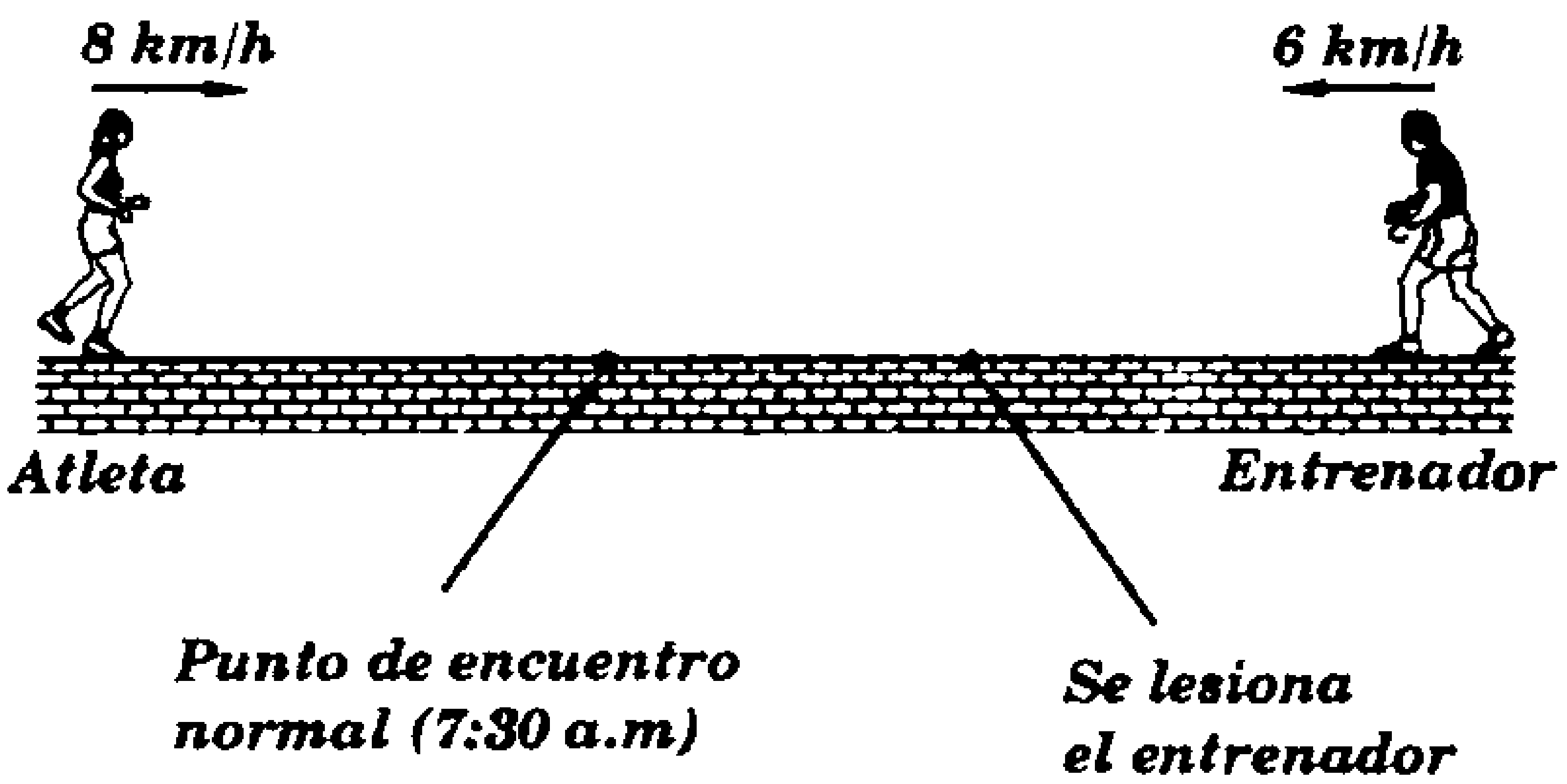
RPTA :"D"

PROBLEMA 68 :

Un atleta sale a correr de su casa al estadio con una velocidad de *8* km/h y se encuentra con su entrenador que viene del estadio con una velocidad de *6* km/h a las *7:30* a.m. todos los días. Cierto día su entrenador se lesionó y el atleta lo encontró a las *8:15*. ¿A qué hora se lesionó?

A) 6:00 a.m. B) 6:30 C) 7:15 D) 6:45 E) 7:00

RESOLUCIÓN :



* El atleta de *E* a *M* demora :

$8{:}15-7{:}30=45\,min=\frac{3}{4}h$

$\rightarrow EM=8\times\frac{3}{4}\rightarrow EM=6\,km$

* El entrenador de *M* a *E* demora :

$$\frac{6km}{6km/h}=1H$$

* Luego, se lesiona a las :

$$7\,h\,30-1\,h=6{:}30\,h$$

RPTA :"B"

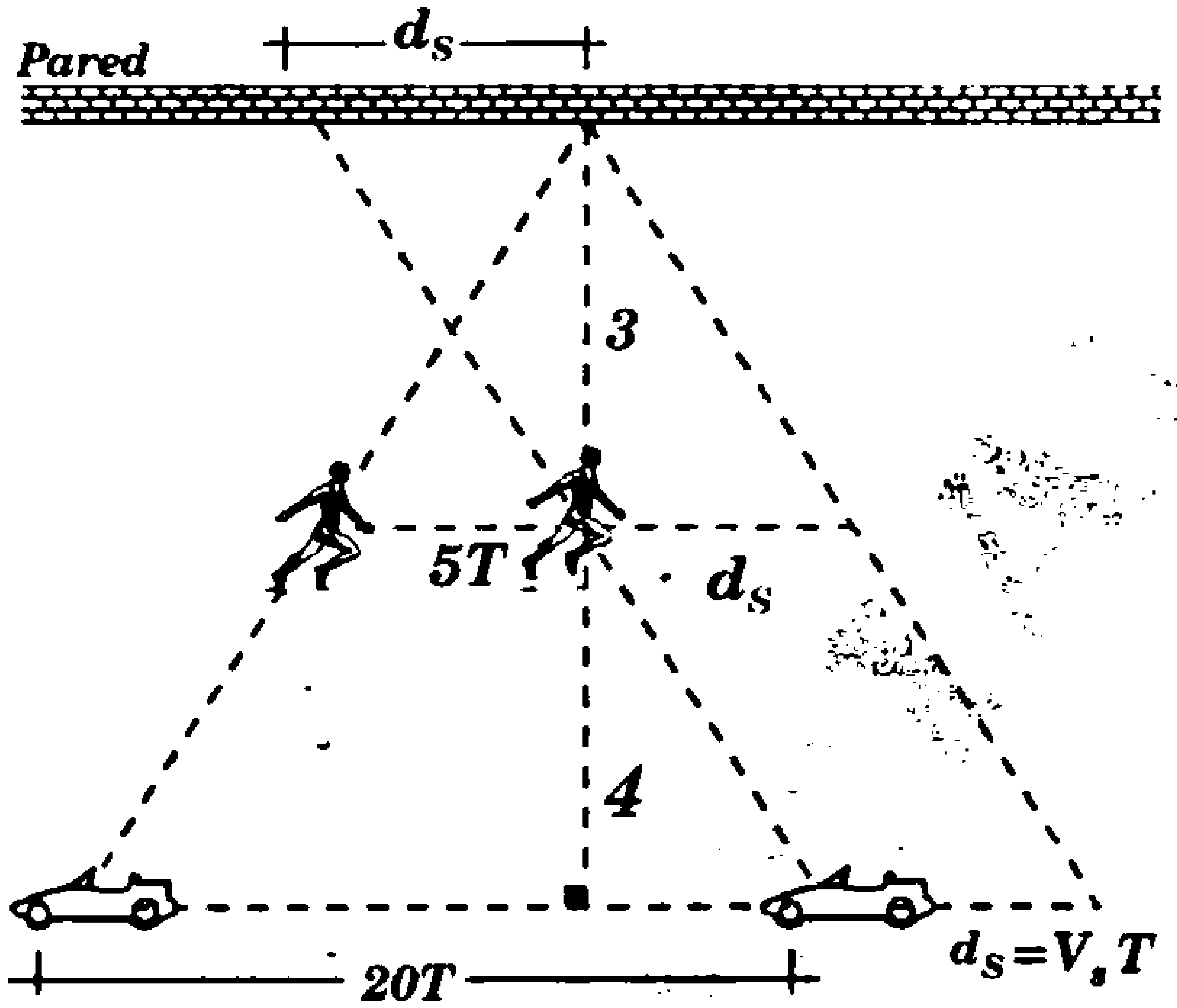
PROBLEMA 69 :

Paralelamente a una pared se mueven en el mismo sentido, un atleta con una velocidad de *5 m/s* y un auto, con faros encendidos , con una velocidad de *20 m/s*. Si el atleta dista del auto en *4m*. y en *3m*. de la pared. ¿Con qué velocidad se moverá la sombra del atleta proyectada en la pared?

A)5 m/s B)4 C)7,5 D)6,25 E)1

RESOLUCIÓN :

* Graficando adecuadamente:



* Aplicando semejanza de triángulos (Altura – Base):

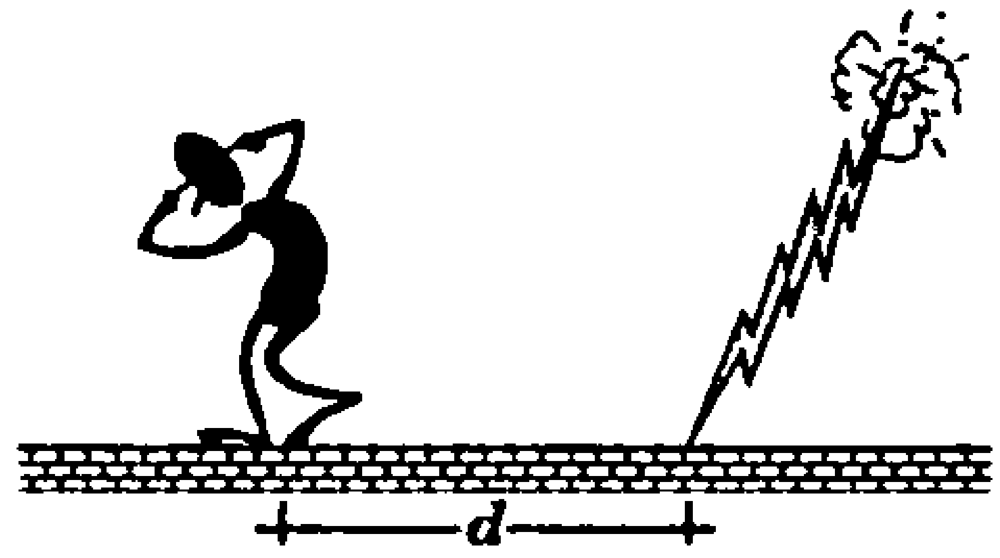
$$\frac{3}{5T+V_ST}=\frac{7}{20T+V_ST}\Rightarrow\frac{3}{5+V_S}=\frac{7}{20+V_S}$$

* Resolviendo : $V_s=6{,}25\begin{pmatrix}\text{Rapidez}\\ \text{de la}\\ \text{sombra}\end{pmatrix}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 70 :

Un hombre observa el relámpago y después de un tiempo «*t*» escucha el trueno , siendo «*c*» la rapidez de la luz y «*V*» la del sonido. ¿A qué distancia del hombre se produjo el rayo?



A) $tV(V-c)$ B) $t(c-B)/c$ C) $\frac{tcV}{c-V}$
D) $(V-c)/tV$ E) $t(V-C)/Vc$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado :

$$T_{TRUENO}-T_{RELAMPAGO}=T$$

$$\Rightarrow\frac{d}{V}-\frac{d}{c}=t\Rightarrow d=\frac{tcV}{c-V}$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 71 :

Dos móviles , con velocidades de *30* y *20 km./h* parten simultáneamente y de un mismo punto , por una misma vía ; pero con sentidos opuestos , al cabo de *12 h.* de marcha , ambos regresan en forma simultánea. Si al regresar el segundo triplica su velocidad , y el primero la duplica , ¿cuánto tiempo tendrá que esperar en el punto de partida a que llegue el primer móvil?

A)4 horas B)6 horas C)2 horas
D)3 horas E)5 horas

RESOLUCIÓN :

* Piden la diferencia de los tiempos en ir y regresar :

$$\left(12+\frac{12\times30km}{2\times30km}\right)-\left(12+\frac{12\times20km}{3\times20km}\right)=2H$$

RPTA ::"C"

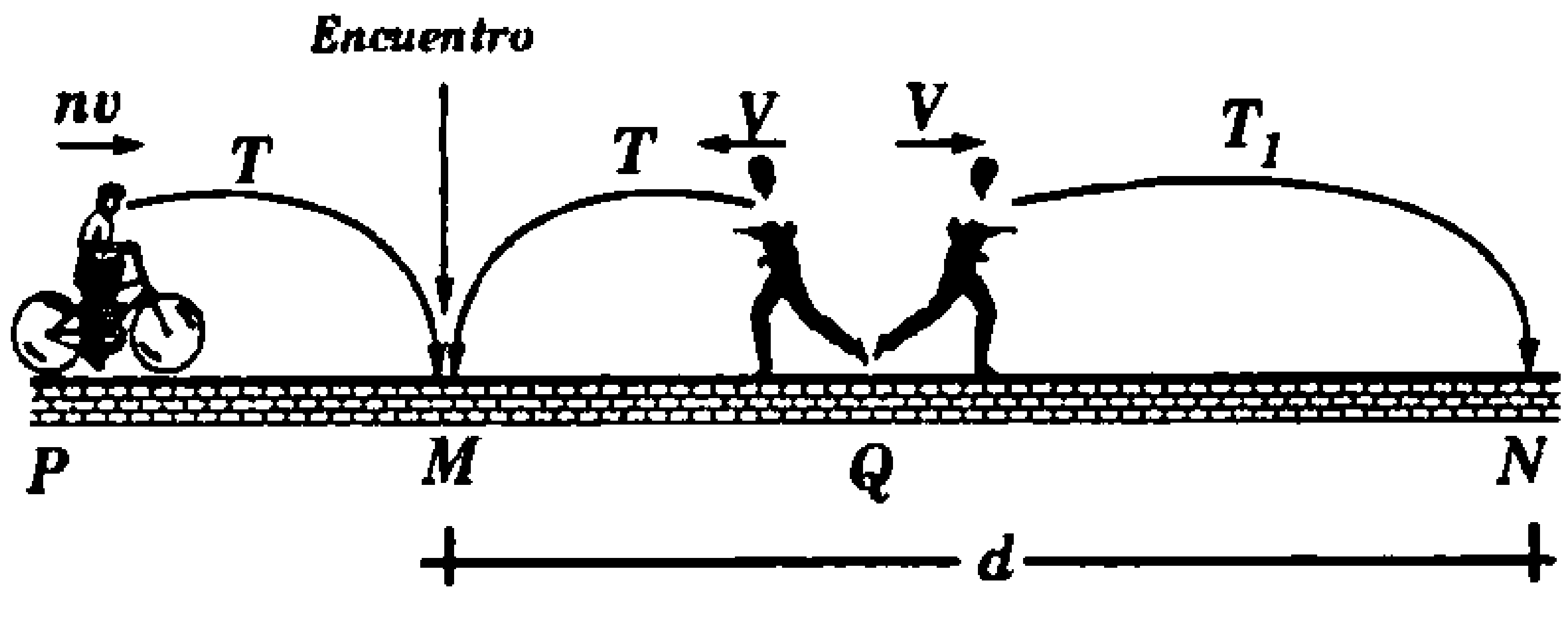
PROBLEMA 72 :

Un ciclista parte de «*P*» en dirección a «*Q*», al tiempo que *2* corredores parten de «*Q*» en sentidos opuestos el ciclista los encuentra a uno en «*M*» y al otro en «*N*».

Se pide calcular la distancia $\overline{PQ}$, sabiendo que los corredores marchan a la misma velocidad constante y que la velocidad del ciclista es «*n*» veces la de los corredores y que la distancia $\overline{MN}$ es «*d*» *km*.

A) $\frac{d(n+1)^2}{n}$ B) $\frac{d(n+1)^2}{2n}$ C) $\frac{d(n^2+1)}{2n}$

RESOLUCIÓN :



* La relación de velocidades :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{PM}+d}{d-\overline{MQ}}=n$$

* Aplicando proporciones tendremos :

$$\overline{PM}=\frac{d(n+1)}{2}$$

$$\overline{MQ}=\frac{d(n+1)}{2n}$$

$$\overline{PQ}=\frac{d(n^2+1)}{2n}$$

RPTA ::"C"

PROBLEMA 73 :

Dos atletas parten en el mismo instante uno al encuentro del otro , uno de ellos parte de un punto *A* y el otro de *B*. Si la rapidez del primero excede en ***10 km./hr.*** a la del segundo. Hallar la rapidez del primero, si la razón de los espacios recorridos por ambos atletas hasta su encuentro es de *7* a *5*.

A)28 km./h *B)35 km./h* *C)9 km./h* *D)72* *E)45*

RESOLUCIÓN :

D.P

VELOCIDAD	TIEMPO
x	7
$x-10$	5

$\Rightarrow 5x=7x-70$

$x=35$

RPTA ::"B"

PROBLEMA 74 :

«Jayo» sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a las *8:00* a.m. Un día salió atrasado *20* minutos , y duplica su rapidez , llegando aún así tarde *8* minutos. ¿Cuánto tiempo emplea normalmente en llegar a su centro de trabajo?

A)18 min. *B)24 min.* *C)12 min.* *D)36 min.* *E)16 min.*

RESOLUCIÓN :

* Como en ambos casos recorre el mismo espacio , luego : $V\times T=2V(T-20+8)$

$\Rightarrow T=2T-24\Rightarrow 24=T$

RPTA ::"B"

PROBLEMA 75 :

Un remero navega sobre un río hacia un objetivo que está a *72* km. del punto de partida y hace el viaje de ida y vuelta en *14* horas. Si el tiempo que demora en remar *4* km. a favor de la corriente es el mismo que se demora en remar *3 km*. contra la corriente. Hallar la rapidez del mismo.

A)10,5 km./h *B)7* *C)10* *D)12,5* *E)12*

RESOLUCIÓN :

$$T_{IDA}+T_{VUELTA}=14\text{..........}(\alpha)$$

$$\frac{72}{V_{FAVOR}}+\frac{72}{V_{CONTRA}}=14$$

$$\frac{4}{V_{FAVOR}}=\frac{3}{V_{CONTRA}}\text{........}(\beta)$$

* De (α) y (β):

$V_{FAVOR}=12\rightarrow V_{REMERO}+V_{RIO}=12$

$V_{CONTRA}=9\rightarrow V_{REMERO}-V_{RIO}=9$

$V_{REMERO}=10{,}5$

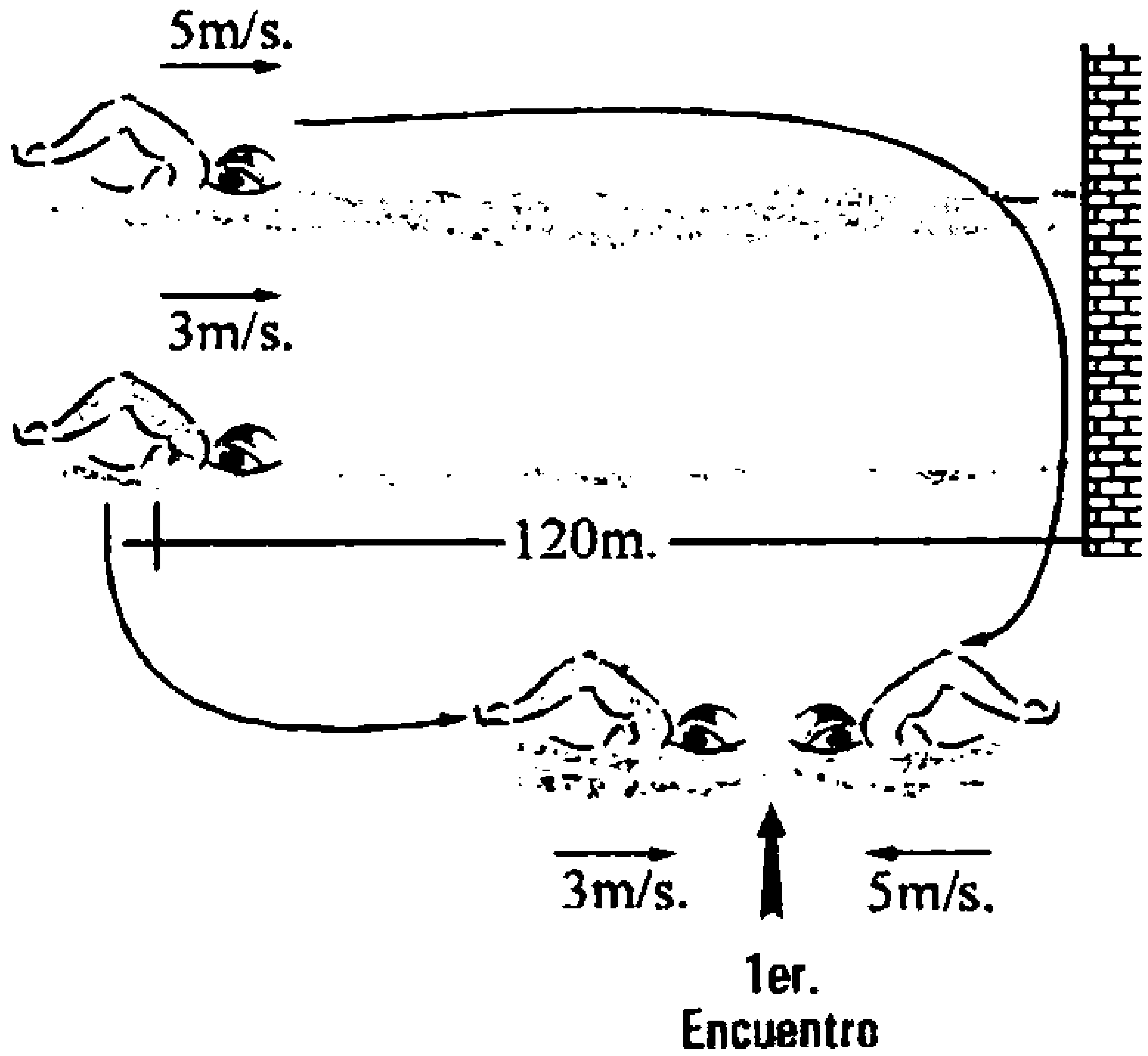
RPTA ::"A"

PROBLEMA 76 :

Dos nadadores parten al mismo tiempo del extremo de una piscina de ***120m.*** de longitud con velocidades de *5* y ***3m/s.*** respectivamente atraviesan la piscina varias veces durante *13* minutos , suponiendo que no pierden tiempo al voltear , el número de veces que se han encontrado es :

A)32 *B)14* *C)26* *D)28* *E)20*

RESOLUCIÓN :



* Se observa que para cada encuentro , entre ambos deben recorrer : ***120 + 120 = 240 m.***

Que lo hará en : $\frac{240m}{5+3}=30s\Rightarrow$ Tiempo de encuentro

* Luego en *13* min. se encontrarán :

$$\frac{13\,min}{30s}=\frac{10\times 60s}{30s}=26veces$$

(Debido a que cada *30* segundos equivale a *1* encuentro)

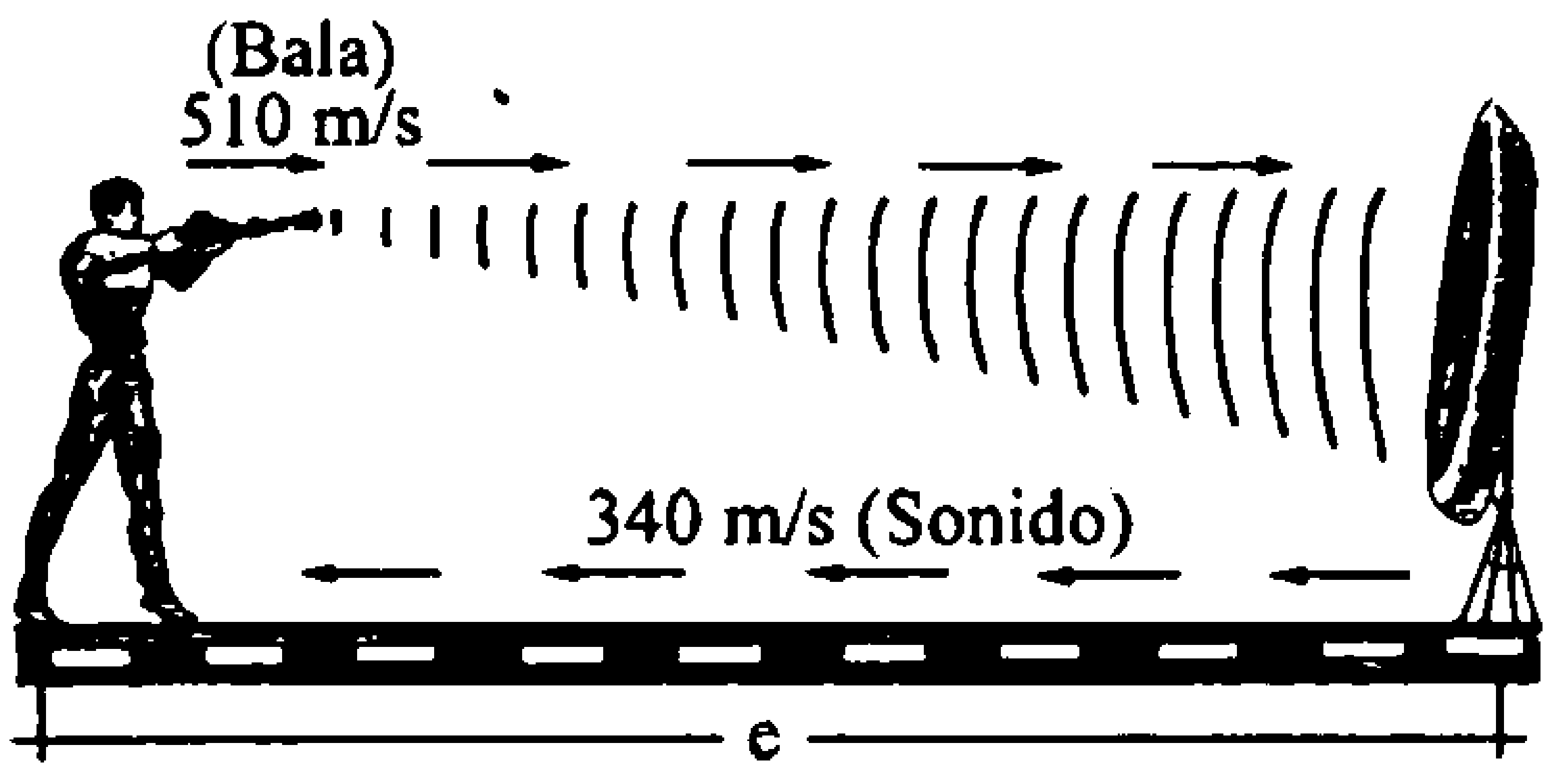
RPTA ::"C"

PROBLEMA 77 :

Un hombre dispara un rifle sobre un blanco. Dos segundos después de disparar oye el sonido de la bala al dar en el blanco, si la velocidad del sonido es *340 m/s* y la velocidad de la bala es *510 m/s*. ¿A qué distancia está el blanco?

A)425m. B)850m. C)408m. D)688m. E)1020m.

RESOLUCIÓN :



* Al disparar , la bala debe ir al blanco (empleando un tiempo T_{BALA}), impactar , produciendo el sonido y este sonido regresar hasta el hombre (empleando un tiempo T_{SONIDO}) el cual recién escuchará que la bala llegó al blanco (Tiempo Total), con lo que plantearemos :

$$T_{BALA}+T_{SONIDO}=T_{TOTAL}$$

$$\frac{e}{510}+\frac{e}{340}=2$$

* Resolviendo : $e = 408\ m$

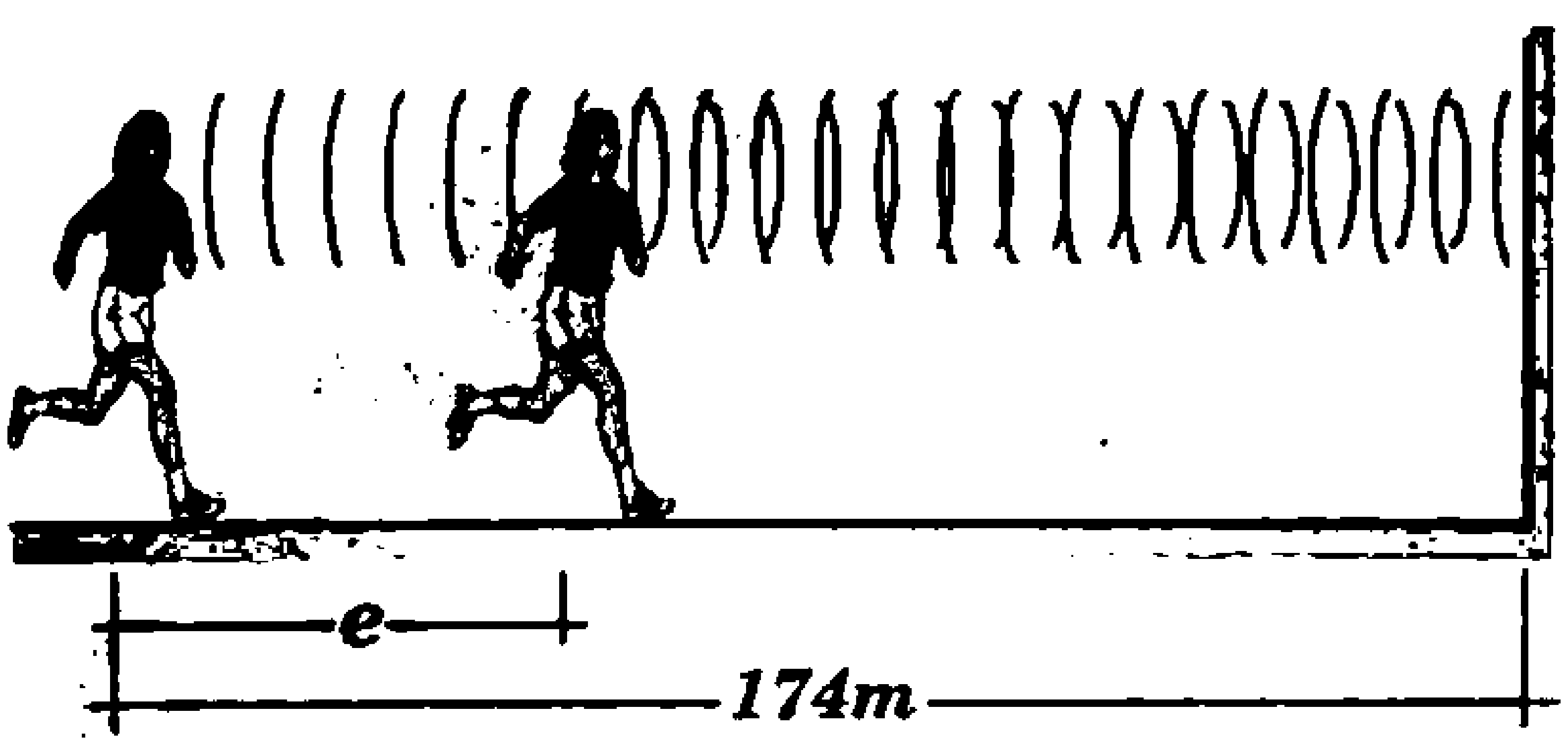
RPTA ::"C"

PROBLEMA 78 :

Con una velocidad de *8m/s*. un atleta se acerca frontalmente hacia una gran pared, si cuando el atleta está a *174 m*. de la pared , emite un grito. ¿Al cabo de qué tiempo el atleta escuchará el eco?. Considere que la velocidad del sonido en el aire es de *340 m/s*.

A)2s. B)3 C)1 D)1,5 E)2,5

RESOLUCIÓN :



* Al emitir el grito , el sonido empieza a propagarse y el hombre sigue corriendo , luego el movimiento será simultáneo , luego :

$$T_{ATLETA}=T_{SONIDO}$$

$$\frac{e}{8}=\frac{174+174-e}{340}$$

Despejando : $e = 8$

* Piden : $T_{ATLETA}=\frac{8}{8}=1s$

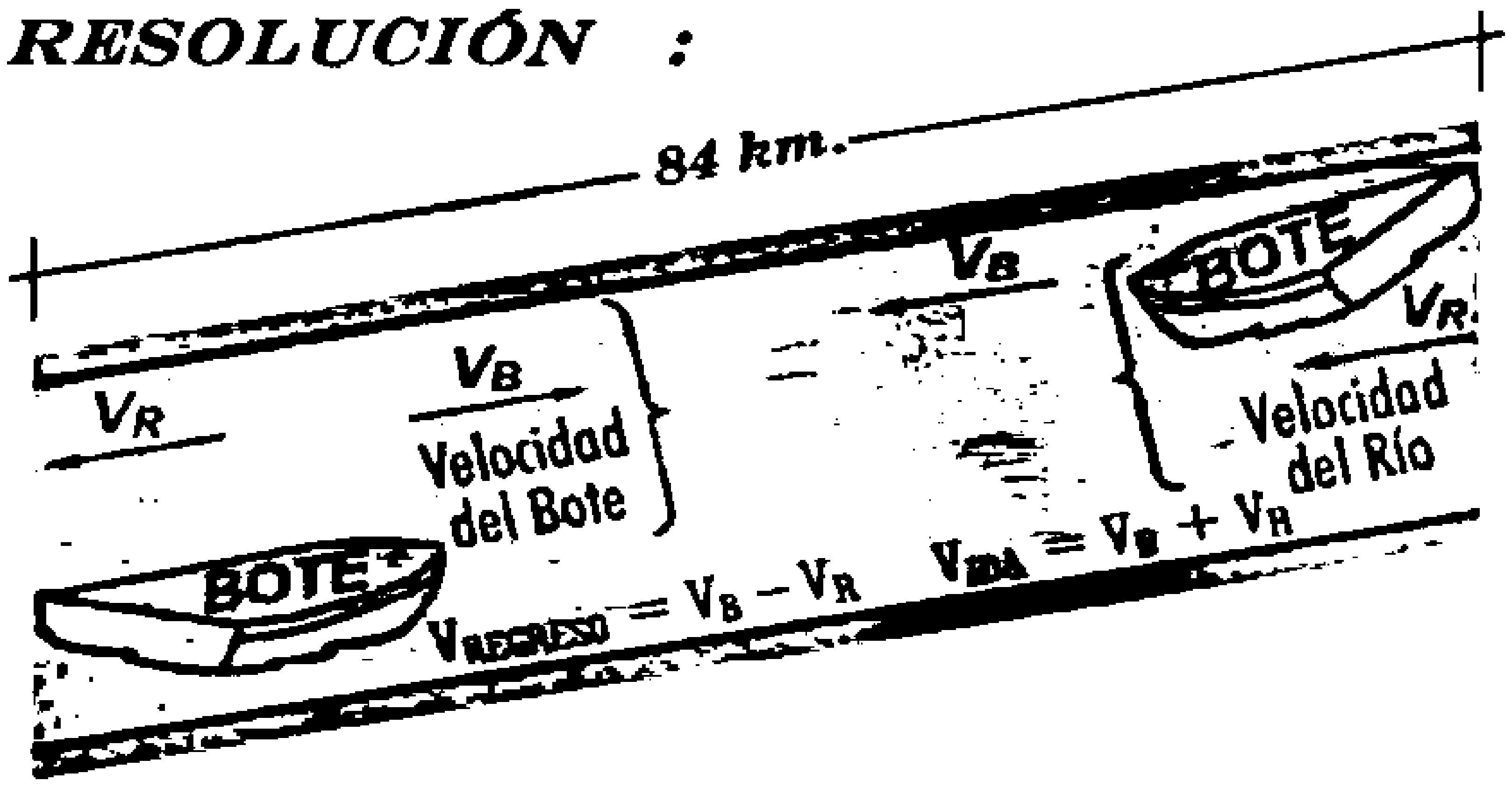
RPTA ::"C"

PROBLEMA 79 :

Un remero demora en total *14* horas en ir y regresar hasta un puerto que dista a *84 km*. Si el tiempo que emplea en recorrer *3 km*. a favor de la corriente es igual al que emplea en recorrer *2 km*. contra la corriente. ¿Cuál es la velocidad del remero en *km/h*.?

A)10,5 km/h. B)12,5 km./h. C)9 km./h. D)12 km./h. E)11km./h.

RESOLUCIÓN :



* Primer dato :

$$T_{IDA}+T_{REGRESO}=14$$

$$\frac{84}{V_{IDA}}+\frac{84}{V_{REGRESO}}=14 \ldots\ldots\ldots(I)$$

* segundo dato :

$$T_{(3km.a\ favor)}=T_{(2km.en\ control)}$$

$$\frac{3}{V_{IDA}}=\frac{2}{V_{REGRESO}} \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* De *(I)* y *(II)*, resolviendo se obtiene :

$$V_{IDA}=15 \rightarrow V_B+V_R=15$$

$$V_{REGRESO}=10 \rightarrow V_B-V_R=10$$

$$2V_B=25$$

$$V_B=12{,}5km./h.$$

* Entonces la velocidad del remero será :*12,5 km./h*.

RPTA ::"B"

PROBLEMA 80 :

Un bote va de un puerto *A* hacia otro *B*. Río abajo demora *9* horas y río arriba demora *12* horas. ¿Qué tiempo demora una balsa si se mueve a la velocidad de la corriente?

A)36 h. B)72 h. C)48 h. D)64 h. E)56 h.

RESOLUCIÓN :

* datos :

$$T_{(AB,\,RIO\,ABAJO)} = 9 \qquad T_{(AB,\,RIO\,ARRIBA)} = 12$$

$$\frac{e}{V_{BOTE}V_{RÍO}} = 9 \qquad \frac{e}{V_{BOTE}V_{RÍO}} = 12$$

Despejando :

$$V_{BOTE} + V_{RIO} = \frac{e}{9}$$

$$V_{BOTE} - V_{RIO} = \frac{e}{12} \quad (-)$$

$$2V_{RIO} = \frac{e}{36}$$

$$\Rightarrow 72 = \frac{e}{V_{RIO}}$$

Expresión pedida puesto que la balsa se moverá con la velocidad del río.

Tiempo que demora la balsa en recorrer AB.

RPTA :"B"

PROBLEMA 81 :

Tres ciclistas se desplazan alrededor de una pista circular, demorándose *12* , *15* y *18 min.* (en ese orden) en dar una vuelta. Al cabo de cuánto tiempo pasarán los *3* ciclistas juntos por la línea de partida.

A)2 h. *B)3* *C)4* *D)5* *E)1*

RESOLUCIÓN :

Para que haya coincidencia en la línea de partida, debe pasar un tiempo que sea múltiplo de *12; 15* y *18* y que sea el menor ;es decir el :

$$MCM(12,15,18) = 180 \text{ min.}$$

⇒ Se deduce o también :

$$\left.\begin{aligned} 12 &= 4\times 3 \\ 15 &= 3\times 5 \\ 18 &= 9\times 2 \end{aligned}\right\} MCM(12,15,18) = 4\times 9\times 5$$

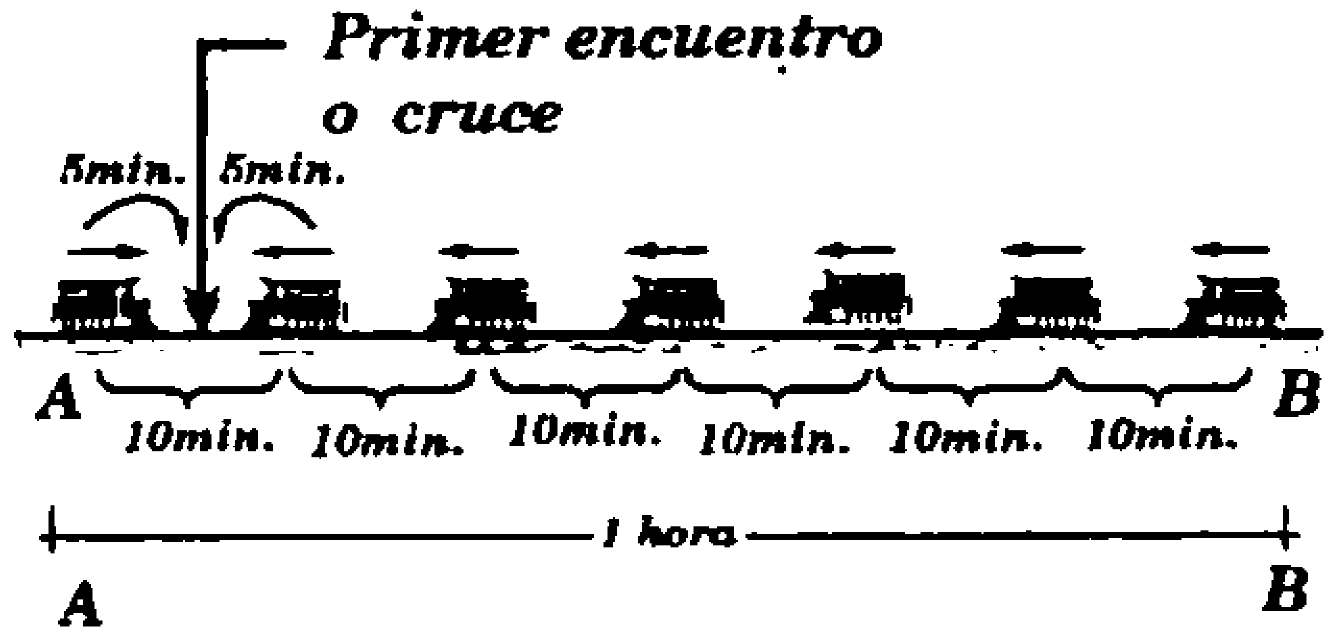
RPTA ::"B"

PROBLEMA 82 :

Por dos líneas paralelas un servicio de tranvías une los barrios *A* y *B*. Cada diez minutos exactamente un tranvía sale de *A* , llega a *B* y regresa inmediatamente. La duración del viaje desde *A* hasta *B* es una hora. ¿Con cuántos tranvías se cruzará un tranvía que sale de A hasta que llegue a *B* ?

A)22 *B)11* *C)13* *D)6* *E)3*

RESOLUCIÓN :



Según el gráfico , se deduce que el tren que sale de «*A*» se cruza cada 5 min. con un tren que viene de «*B*», Luego en *1H* se cruzará con :

El tren que está a punto de salir de «*B*» (con él no se cruza *B* , se encuentra)

$$\frac{1H}{5min} - 1 = \frac{60\,min}{5\,min} - 1 = 11 \text{ Trenes}$$

El tren que está a punto de salir de "B" (con él no se cruza , se encuentra)

RPTA ::"B"

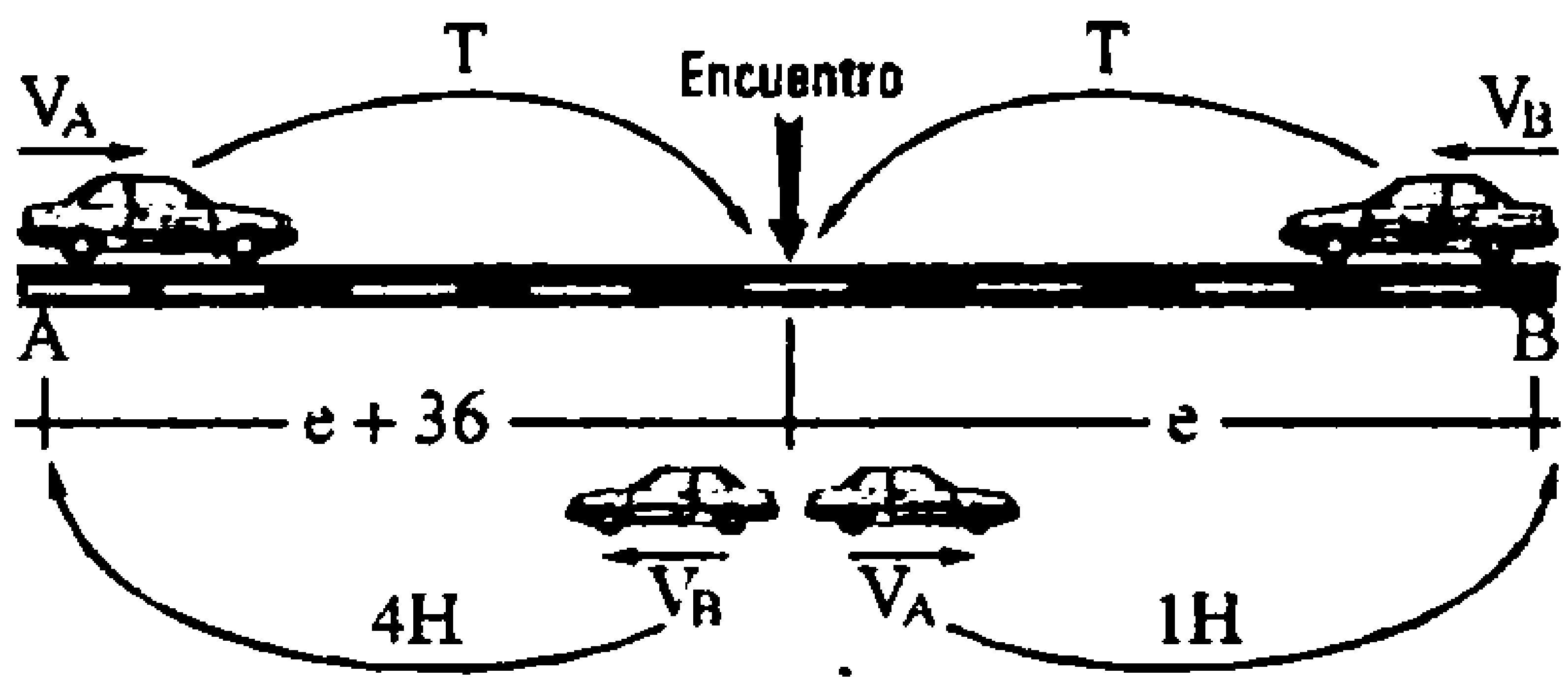
PROBLEMA 83 :

Dos coches parten al mismo tiempo , uno , de «*A*» en dirección a «*B*» y el otro de «*B*» con dirección a «*A*». Cuando se encontraron el primero había recorrido 36 km. más que el segundo , a partir de este momento (en que se encontraron) el primero tardó una hora en llegar a «*B*» y el segundo *4h* en llegar a «*A*». Calcular la distancia *AB*.

A)70 km. *B)90 km.* *C)124 km.*
D)108 km. *E)150 km.*

RESOLUCIÓN :

* Del primer dato :



* Primero :

$$V_AT = e + 36 \qquad (\div) \qquad \frac{V_A}{V_B} = \frac{e+36}{e} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$V_BT = e$$

* Luego :

$$V_B \times 4 = e + 36$$

$$V_A \times 1 = e \quad (\div)$$

$$\frac{V_A}{4V_B} = \frac{e}{e+36} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{4e}{e+36} \ \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Como *(I)* y *(II)* son iguales , se tendrá :

$$\frac{e+36}{e} = \frac{4e}{e+36}$$

* Resolviendo : $e = 36$

* Piden : $e + 36 + e = 36 + 36 + 36 = 108$ km.

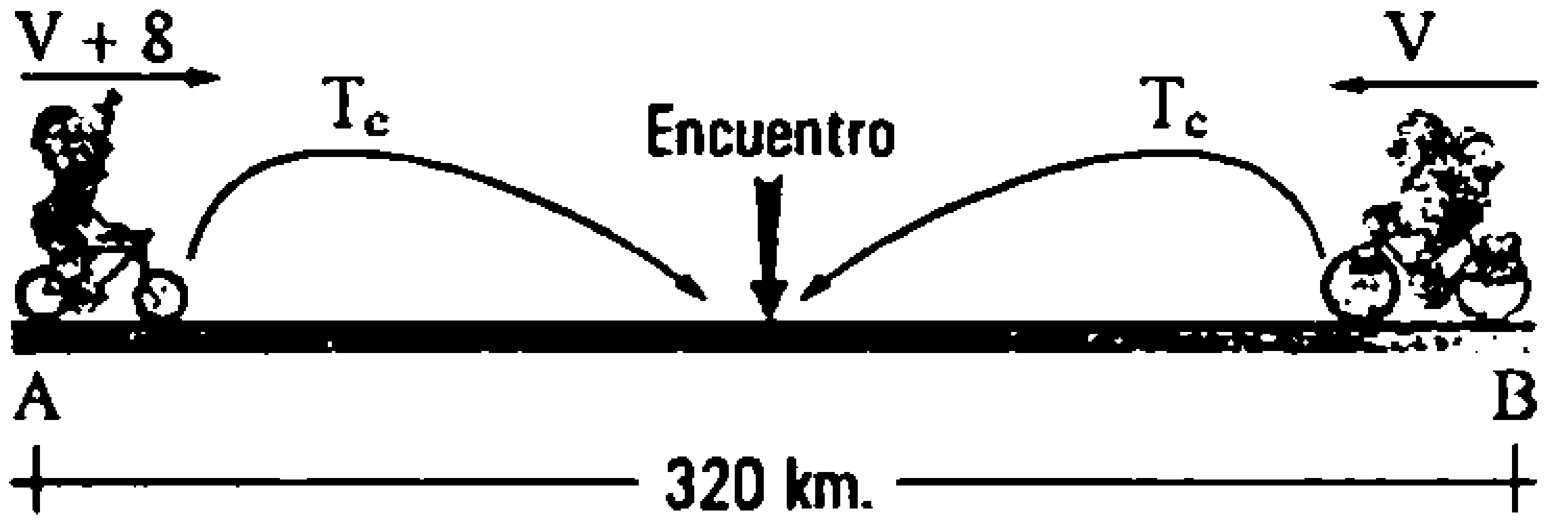
RPTA ::"D"

PROBLEMA 84 :

Dos ciclistas parten al mismo tiempo de dos puntos ***A*** y ***B*** distantes ***320 km.*** uno de ***A*** con dirección a ***B***, y el otro de ***B*** con dirección a ***A***; el primero recorrió ***8 km***. más por hora que el segundo y el número de horas que tardarían en encontrarse está representado por la mitad del número de kilómetros que el segundo recorrió en una hora. ¿cuál es la distancia recorrida por cada ciclista en el momento de encontrarse?

A)200 y 120 ***B)280 y 100*** ***C)180 y 140***
D)192 y 128 ***E)10 y 200***

RESOLUCIÓN :



* Según el enunciado :

$$T_e = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\#\,de\,km.\ qué\ recorrió\\ el\ 2do.\ en\,1h.\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{320}{v+8+v} = \frac{1}{2}(v)$$

$$\Rightarrow 640=(2v+8)v \Rightarrow 640=2(v+4)$$

$$\Rightarrow 320=v(v+4) \Rightarrow v=16$$

* El tiempo de encuentro será : $T_e = \frac{1}{2}(16) = 8h$

* Los espacios recorridos serán :

$(v+8)\times T_e = (16+8)\times 8 = 192km$ y

$v \times T_e = 16\times 8 = 128\ km.$

RPTA ::"D"

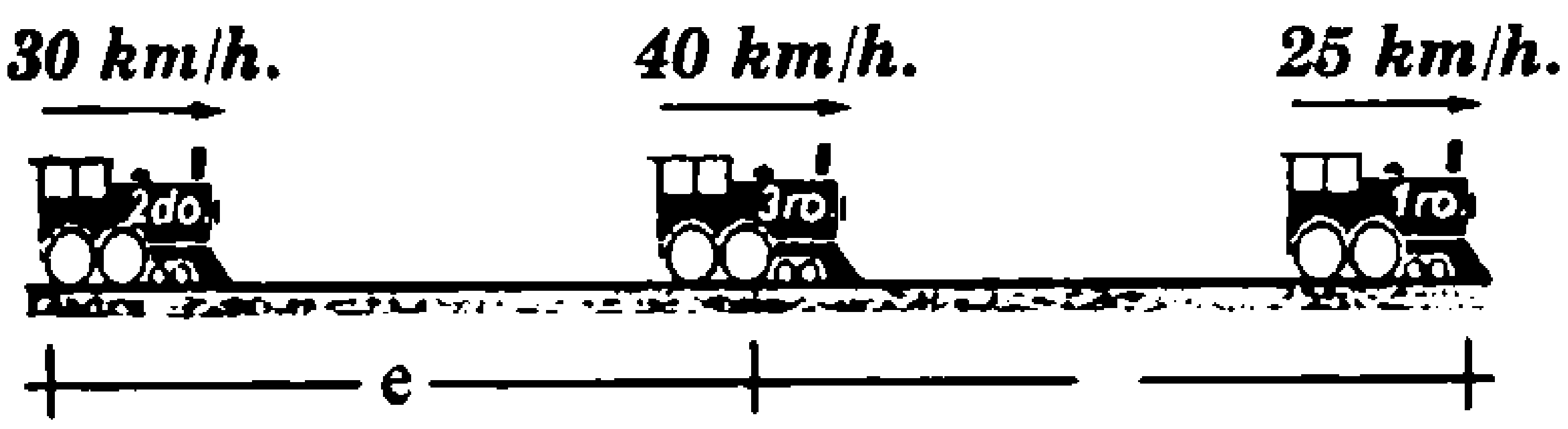
PROBLEMA 85 :

Tres trenes parten del mismo punto y siguen igual vía en la misma dirección , el primero parte a las ***06:00*** horas, el segundo a las ***07:00*** horas y el tercero a las ***9:00*** horas siendo sus velocidades de ***25;30*** y ***40km./h*** respectivamente. ¿A qué hora el tercer tren estará en el punto medio de la distancia que separa al primero y al segundo?

A) 22:00 hrs. ***B)16:00 hrs.*** ***C)14:24 hrs.***
D)19:30 hrs. ***E)N.A.***

RESOLUCIÓN :

* A partir de las ***6:00*** hrs. el ***1ro.*** empleará ***«T»*** horas , el ***2do. (T–1)*** horas y el ***3ro. (T–3)*** horas , para que al final queden :



* Se observa la diferencia de los recorridos del ***3ro***. con el ***2do***. debe ser igual a la diferencia de los recorridos del ***1ro***. y ***3ro***. (para que el ***3ro***. equidiste o esté en el punto medio del ***1ro***. y ***2do***)

* En consecuencia : $e_1 - e_3 = e_3 - e_2$

$$25T - 40(T-3) = 40(T-3) - 30(T-1)$$

* Resolviendo : ***T= 8,4 H.***

* La condición del problema se cumplirá a las :

$$6:00 + 8,4 = 14,4\ hrs.$$

RPTA ::"C"

PROBLEMA 86 :

Alvarito y Edysson realizan una carrera sobre una pista que tiene la forma de un octágono regular (partiendo ambos de un mismo vértice inicial). Cuando Alvarito retorna al punto inicial , Edysson está justo en el vértice anterior al punto inicial. Si hicieron una carrera sobre una pista que tiene la forma de un pentágono regular (de igual perímetro que el octágono) , cuando Alvarito llegue al punto inicial. ¿Qué parte del quinto habrá recorrido Edysson?

A)1/3 ***B)1/4*** ***C)3/5*** ***D)3/8*** ***E)2/3***

RESOLUCIÓN :

* Al recorrer el octógono, utilizaron el mismo tiempo , hasta que Alvarito recorrió ***8*** lados , mientras que Edysson recorrió ***7*** lados (relación de recorridos como ***8*** es a ***7***)

* Cuando recorran el pentágono , Alvarito recorre como 5 y Edysson ***(4+x)*** (donde ***x*** es la fracción de quinto lado), pero esa relación de recorridos debe ser de ***8*** a ***7*** (a tiempos iguales , la relación de espacios es constante), entonces:

$$\frac{5}{4+x} = \frac{8}{7} \Rightarrow 35 = 32 + 8x \Rightarrow x = \frac{3}{8}$$

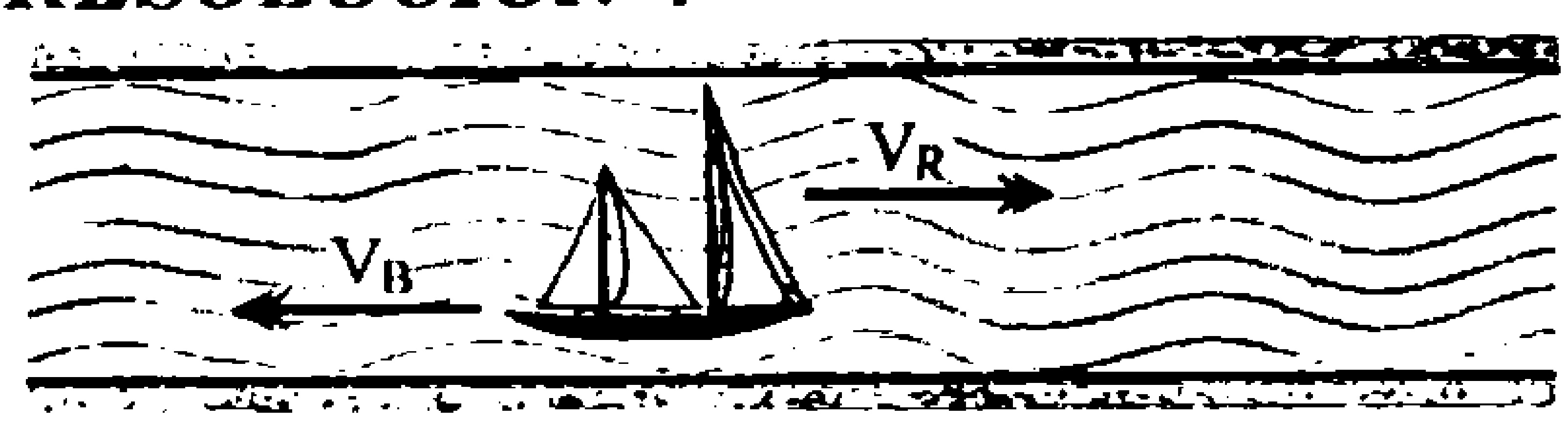
RPTA ::"D"

PROBLEMA 87 :

Un remero que rema a una velocidad constante , remonta un río que fluye a una velocidad también constante. Al pasar bajo un puente , pierde su sombrero , se da cuenta de la pérdida media hora más tarde, da entonces media vuelta y recupera su sombrero a ***1*** kilómetro más abajo que el puente ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

A) $\frac{1}{2}$ ***B)1*** ***C)2*** D) $\frac{3}{2}$ ***E)4***

RESOLUCIÓN :



* Se deduce que en una media hora, el remero se separa de su sombrero una distancia de :

Velocidad con que va el sombrero

$$(V_B + V_R) \times \frac{1}{2} + V_R \times \frac{1}{2} = \frac{V_B}{2}$$

* Entonces el tiempo de alcance será :

$$\frac{\frac{Ve}{2}}{\underbrace{V_B + V_R}_{Remero} - \underbrace{V_R}_{Sombrero}} = \frac{1}{2} hora$$

* Entonces el sombrero recorrió *1km*. hasta que fue recuperado en :

$$\frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H = 1H$$

* A una velocidad V_R (velocidad de la corriente),

* Entonces : $V_R = \frac{1km}{1H.} = 1Km.$

RPTA ::"B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Dos motocicletas parten de dos ciudades apartadas **500 Km** uno de los motociclistas viaja a **65 Km/h** y el otro a **60 Km/h**. ¿Cuántas horas transcurrirán hasta el momento en que se crucen?

A) 4 h B) 5 C) 7 . D) 8 E) N.A.

02 Un auto y un camión viajando en sentidos opuestos se cruzan a cierto momento. A partir de ese momento se irán distanciando, uno de ellos viajando a **75 Km/h**, y el otro a **50 Km/h**. ¿Cuántas horas pasarán antes de que se separen **375 Km**?

A) 3 h B) 5 h C) 7 h D) 8 h E) N.A.

03 Un tren parte de una estación y viaja a una velocidad de **100 Km/h** y otro tren parte de dos horas más tarde en el mismo sentido y a **110 Km/h**. ¿Cuánto tardará el segundo tren en alcanzar al primero?

A) 20 H B) 10 C) 5 D) 4 E) N.A.

04 Partiendo de una estación un tren viaja al norte a la velocidad de **110 Km/h** dos horas después, otro tren parte de la misma estación hacia el sur a **90 Km/h**. ¿Cuántas horas transcurrieron antes de que se encuentren separados por una distancia de **420 Km**?

A) 5 h B) 3 C) 7 D) 8 E) N.A.

05 Un tren salió de una estación a las 3 pm y viajó a **100 km/h** otro tren salió de la estación a las **4** pm y viajó en el mismo sentido a **125,Km/h.** ¿A qué hora alcanzó al primer tren?

A) 4 p.m. B) 8 C) 9 D) 10 E) N.A.

06 Percy se dirige de su casa a la playa manejando su auto a velocidad de **50 Km/h**. En su regreso su velocidad promedio fue de **40 Km/h**. El viaje total duro **9 H**. ¿Cuál era la distancia de la playa a su casa?

A) 200 Km B) 400 C) 300 D) 500 E) N.A.

07 Una lancha puede viajar a **20 Km/h** en aguas tranquilas. Si la corriente es de **4 Km/h**. ¿Qué tan rápido navega la lancha río arriba (contra la corriente)? ¿Qué tan rápido viaja a favor de la corriente?

A) 20, 30 Km/h B) 16, 24 C) 30, 50
D) 50, 20 E) N.A.

08 Dos autos distan **240 m** y van al encuentro con velocidades de **2 m/s** y **13 m/s**. Después de que tiempo están separados **90 m** por primera vez.

A) 15 S B) 10 C) 8 D) 9 E) 6

09 Dos móviles separados **700 m** parten al mismo tiempo al encuentro con velocidades de **24 m/s** y **26 m/s**. ¿Después de que tiempo se encontrarán?

A) 13 S B) 14 C) 15 D) 16 E) N.A.

10 Dos ciclistas parten de al mismo tiempo de un punto con velocidades de **9 m/s** y **16 m/s** al cabo de cuanto tiempo uno estará **280 m** delante del otro.

A) 50 S B) 40 C) 30 D) 20 E) N.A.

11 Una persona dispone de **10** horas para salir de paseo. Si la ida la hace en bicicleta a **15 km/h** y el regreso a pie a **5 km/h**, hallar el espacio total que recorrió dicha persona

A) 37,4 km B) 375 m C) 3 750 m
D) 75 km E) 75 m

12 Dos personas *A* y *B* separadas por una distancia de **3 600 m** salen a la misma hora y van al encuentro una de otra. El encuentro ocurre a los **2 000 m** de uno de los puntos de partida. Si con las mismas velocidades la persona que va más despacio hubiera salido **6** minutos antes que la otra, el encuentro hubiera ocurrido en el punto medio del camino. Dígase la velocidad de cada uno en

metros por minuto

A) 75 y 60 *B) 70 y 65* *C) 75 y 65*
D) 65 y 60 *E) 70 y 85*

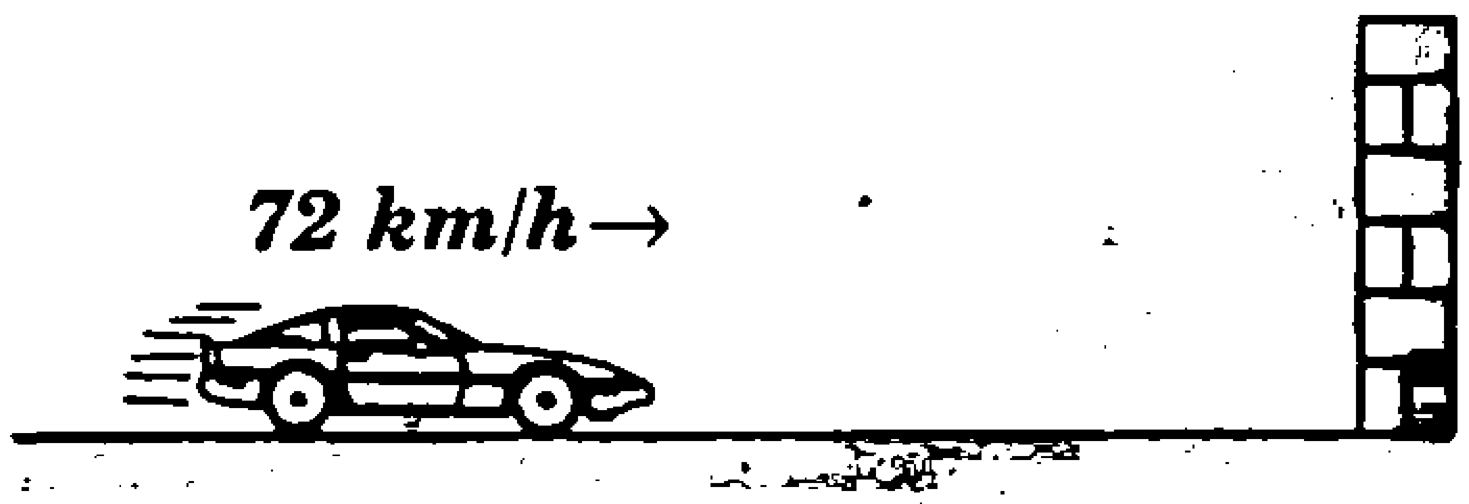
13 Tres trenes parten del mismo punto y siguen igual vía y en la misma dirección el primero parte a las ***06:00 h***, el segundo a las ***07:00 h*** y el tercero a las ***09:00 h*** siendo sus velocidades de ***25; 30*** y ***40 km/h*** respectivamente. ¿A qué hora el tercer tren estará en el punto medio de la distancia que separa el primero y el segundo?

A) 22 h *B) 16 h* *C) 14,4 h*
D) 19,5 h *E) 13,5 h*

14 Dos móviles con velocidades de ***30*** y ***20 km/h*** parten simultáneamente y de un mismo punto por una misma vía, pero con sentidos opuestos; al cabo de ***12 h*** de marcha, ambos regresan en forma simultánea. Si al regresar, el segundo triplica su velocidad y el primero lo duplica, ¿cuánto tiempo tendrá que esperar en el punto de partida a que llegue el primer móvil?

A) 4 horas *B) 6 horas* *C) 2 horas*
D) 3 horas *E) 5 horas*

15 En el instante mostrado, el conductor del auto toca el claxón, si escucha el eco luego de ***5*** segundos ¿A cuántos metros de la pared escucho el eco?



RPTA.: ....

16 Manolo y Miguel están separados por una distancia de ***2400 m*** parten al mismo tiempo al encuentro uno del otro, justamente con Manolo parte "belsebu", perro fiel a ambos "belsebu" al encontrar a Miguel regresa nuevamente inicia Manolo y así sucesivamente va de Manolo a Miguel y de Miguel a Manolo hasta que ella se encuentran. Se desea saber el espacio total recorrido por el perro si se sabe que la rapidez de Manolo es ***373 m/h*** la rapidez de Miguel ***227 m/h*** y la de "belsebu" ***393 m/h.***

RPTA.: ....

17 Un hombre parado sobre una escalera mecánica en funcionamiento "sube" en ***60*** segundos, pero si caminara sobre la escalera en movimiento emplearía ***20*** segundos ¿En cuánto tiempo, el hombre bajaría caminando sobre la escalera en movimiento emplearía ***20*** segundos. ¿En cuánto tiempo, el hombre bajaría caminando sobre la escalera en funcionamiento?

A)30 segundos *B)60 segundos* *C)70 segundos*
D)80 segundos *E)90 segundos*

18 La rapidez de un hombre es a la rapidez de un ciclista como ***1*** es a ***3***, en una carrera alrededor de un circuito en la que intervienen los dos, además un motociclista este último le saca ***6*** vueltas de ventaja al motociclista y ***12*** vueltas al hombre. ¿En qué relación se encuentran la rapidez del hombre y del motociclista?

A)1/3 *B)2/5* *C)3/7* *D)1/5* *E)1/3*

19 Dos nadadores parten simultáneamente de los extremos opuestos de una piscina, después de un minuto y medio se cruzan en el centro de la piscina. Si no pierden tiempo en voltear y mantienen sus rapidezes constantes. ¿Cuántos minutos después de la partida tocaron sus respectivos extremos por ***n***– ésima vez?

A)5n *B)7n* *C)6n* *D)4n* *E)3n*

20 Una hora después de la partida de un tren sufre un desperfecto por lo que se detuvo una hora, superado el desperfecto partió con una rapidez que es ***3/5*** de su rapidez anterior y llega a su destino con ***3*** horas de retraso, pero si el desperfecto hubiera quedado ***150 km*** más adelante habría llegado solamente con dos horas de retraso. Determine la longitud del recorrido del tren.

A)1200 km *B)2000 km* *C)1000 km*
D)6000 km *E)2500 km*

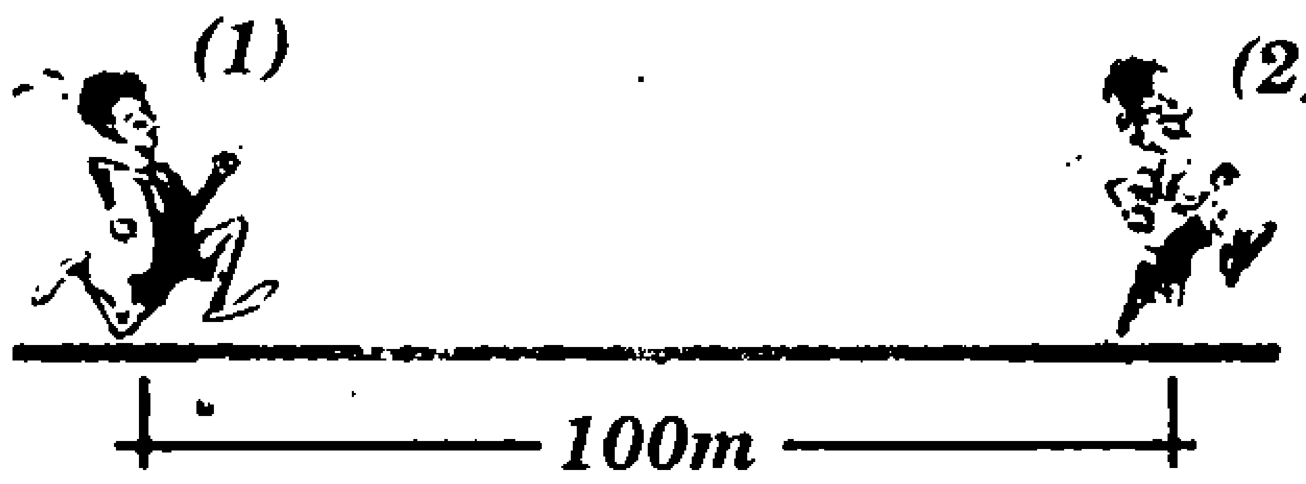
21 La distancia entre ***A*** y ***B*** es de ***1 km***. Una tortuga y una liebre parten simultáneamente desde ***A***. La tortuga a razón de un metro por minuto y la liebre a ***100*** metros por minuto, la liebre llega al punto ***B*** y regresa al punto ***A*** en busca de la tortuga luego de encontrarla regresa al punto ***B*** ¿Cuál es el espacio total recorrido por la liebre?

A)100 km *B)10 km* *C)100 km*
D)10000 km *E)10000000 km*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dos hombres separados ***100m.*** corren en la misma dirección con velocidades constantes de $V_1=6m/s$ y $V_2=4m/s$. ¿Al cabo de qué tiempo «***1***»

alcanza a «2».

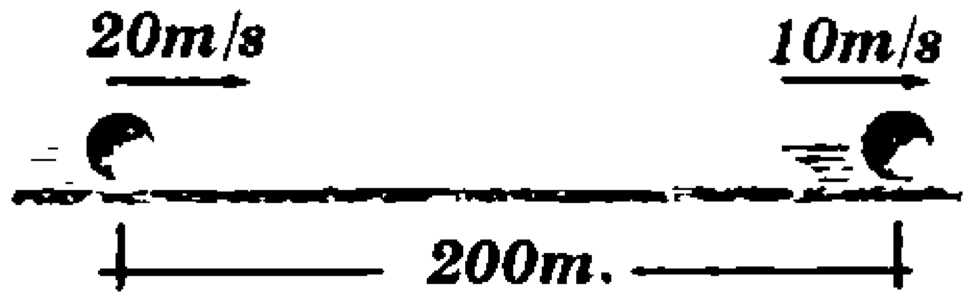


A)10s *B)20s* *C)30s* *D)40s* *E)30s*

(02) La separación inicial entre *2* automóviles es de *400*m. y viajan con velocidades opuestas de *3* y *7 m/s*. ¿En cuánto tiempo estarán separados *100m*. por primera vez?

A)60,2 s *B)22,5 s* *C)45 s* *D)71,4 s* *E)30 s*

(03) A partir del instante que se muestra. ¿Cuántos segundos debe transcurrir para que el cuerpo rezagado esté *100* metros delante del que va primero? (Los cuerpos experimentan *MRU* sobre vías paralelas).



A)20s *B)25s* *C)30s* *D)70s* *E)90s*

(04) Dos móviles están separados por *1200m*; avanzan en sentidos contrarios con velocidades constantes de *6m/s* y *8m/s*. ¿En qué tiempo mínimo estarán separados por *500m*?

A)40 s *B)50 s* *C)60 s* *D)70 s* *E)90 s*

(05) Una lancha y una canoa se encuentran en las orillas opuestas de un lago de *1200m* de ancho. Ambos parten en dirección a la orilla de enfrente con velocidades constantes de $V_s = 54 km/h$ y $V_C = 36 km/h$. ¿Cuál es el intervalo de tiempo que separa sus llegadas?

A)10 s *B)20 s* *C)30 s* *D)40 s* *E)50 s*

(06) Un tren pasa frente a un observador con una velocidad de *30m/s* e *9s*. ¿Cuál es la longitud del tren?

A)30 m *B)90 m* *C)135 m* *D)180 m* *E)270 m*

(07) Un tren de longitud «*L*» recorre un túnel de largo «*V*» en *40s* a razón de *10m/s*. ¿Qué tiempo tardará en pasarlo a *8 m/s*?

A)20 s *B)30 s* *C)40 s* *D)50 s* *E)80 s*

(08) Un tren demora en pasar frente a un hombre *8s*. y luego recorre íntegramente un túnel de *160m* de largo en *48s* con velocidad constante. ¿Cuánto mide el largo del tren?

A)30 m *B)32 m* *C)105 m* *D)25 m* *E)20 m*

(09) Un ciclista se desplaza con una velocidad constante de *12m/s* y durante el cruce de un túnel rectilíneo permanece *7s* completamente dentro de él. ¿Cuál es la longitud el túnel , si se sabe que la bicicleta presenta *2m* de largo?

A)82 m *B)80 m* *C)84 m* *D)86 m* *E)88 m*

(10) Un ciclista emite un sonido cuando se encuentra entre dos cerros. Si escucha el primer eco a los *2s* y el segundo *1s* después del primero , determine la distancia ente los cerros.

$$(V_{sonido} = 340 \ m/s)$$

A)510 m *B)340 m* *C)850 m* *D)680 m* *E)1 020 m*

(11) Un hombre está parado frente a una montaña de *1700* metros y toca una bocina ; ¿luego de qué tiempo escuchará el eco? $(V_{sonido} = 340 \ m/s)$

A)5 s *B)6 s* *C)7 s* *D)9 s* *E)10 s*

(12) Una persona emite un grito desde cierto lugar y otra persona lo escucha a los *2s* de emitido el grito. Determine la distancia que separa a las dos personas.

$$(V_{sonido} = 340 \ m/s)$$

A)340 m *B)170 m* *C)510 m* *D)680 m* *E)85 m*

(13) Un automóvil se dirige hacia una montaña; cuando se encuentra a una distancia «*d*», suena su claxón cuyo eco es percibido por el chofer *1* s más tarde. Determine «*d*», sabiendo que la velocidad constante del auto presenta un valor de *10 m/s*.

$$(V_{sonido\ en\ el\ aire} = 340 \ m/s)$$

A)180 m *B)170 m* *C)175 m* *D)320 m* *E)160 m*

(14) Dos móviles parten de un mismo punto en direcciones perpendiculares con velocidades de *3m/s* y *4m/s* (constantes). Hallar al cabo de qué tiempo estarán separados *925 m*.

A)160 s *B)130 s* *C)90 s* *D)185 s* *E)270 s*

(15) Desde un mismo lugar parten dos atletas dirigidos hacia el Norte y el Este con velocidades de *6* y *8m/s*. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el alejamiento entre ambos sea *90m*?

A)9 s *B)4 s* *C)15 s* *D)6 s* *E)2 s*

16 Dos ciudades *«A»* y *«B»* están separadas por una pista rectilínea de ***100km***. Desde *«A»*, un automovilista se dirige hacia *«B»* con ***20km/h*** y regresa con ***25km/h***. ¿Cuánto tiempo estuvo en la ciudad *«B»*, si salió a las ***8a.m.*** y regresó a las ***8p.m.***?

A)3 h ***B)4 h*** ***C)5 h*** ***D)6 h*** ***E)9 h***

17 Dos corredores están separados ***20km*** en línea recta. Parten al encuentro el uno del otro en el mismo instante con velocidades de ***5m/s*** y ***6m/s*** constantes respectivamente. ¡Qué distancia los separa después de ***½h*** (en ***km***)?

A)0,1 ***B)0,2*** ***C)0,3*** ***D)0,4*** ***E)0,5***

18 Un ingeniero trabaja en un yacimiento minero que se encuentra en las cercanías de la ciudad. Cada vez que llega el tren a la estación ferroviaria venía el coche de la empresa minera que conducía al ingeniero a su trabajo. Cierto día el ingeniero llegó a la estación ½ hora antes de lo habitual y sin esperar el coche fue a pie a dicho yacimiento, en el camino encontró al coche y subió llegando al yacimiento ***8*** minutos antes de lo normal. ¿Cuánto tiempo caminó el ingeniero antes de encontrar al coche?

A)26 min. ***B)22 min.*** ***C)20 min.*** ***D)14 min.*** ***E)24 min.***

19 Jorge y Enrique apostaron una carrera para atravesar una piscina partiendo de los extremos opuestos. Después de minuto y medio se cruzaron en la mitad de la piscina. Si no pierden tiempo al voltear y mantienen sus respectivas velocidades, ¿a cuántos minutos después del momento de partida se cruzan por segunda vez?

A)3 ***B)*** $4\frac{1}{2}$ ***C)6*** ***D)5*** ***E)1***

20 Un automóvil según aumente o disminuya la velocidad en ***20 km/h***, gana ***2*** horas o pierde ***3*** horas. ¿Qué distancia recorre el automóvil?

A)1200 km ***B)20 km*** ***C) 2000 km***
D)18 km ***E)24 km***

21 Una carreta que hace ***12 km*** por hora parte a las ***08:00*** horas , de una localidad ***A*** a otra ***B***. Un peatón que hace ***4 km*** por hora parte igualmente a las ***08:00*** horas de ***B*** y se dirige a ***A***, pero en el trayecto encuentra a la carreta que viene en sentido contrario, sube a ella y regresa a ***B*** , empleando una hora menos que la que hubiera empleado en regresar a pie desde el punto donde encontró la carreta. Se pide la distancia de ***A*** a ***B***.

A)18 km ***B)20 km*** ***C)24 km***
D)25 km ***E)30 km***

22 Un auto sale de ***A*** a las ***08:00h*** con dirección a ***B*** distante ***560 km*** a la que tiene previsto llegar a las ***16h***.Luego de almorzar de las ***13:00h*** a las ***14:00h***. Otro vehículo sale de ***C***, situado en la ruta anterior, a ***240 km*** de ***A*** a las ***10:00 h*** con dirección a ***B*** y con una velocidad de ***60 km/h***. ¿De qué hora a qué hora almorzará si lo hace en el mismo restaurant , sabiendo que ambos vehículos arriban a ***B*** en forma simultánea?

A)De 12:40 a 13:40 ***B)De 12:40 a 13:20***
C)De 12:30 a 13:20 ***D)De 12:20 a 13:40***

23 Un perrito parte de un punto *«A»* a otro punto *«B»* y simultáneamente dos peatones parten del punto *«B»* en sentidos opuestos. El perrito encuentra a uno de ellos en el punto *«M»* y al otro en el punto *«N»*; luego, se pide calcular la distancia que hay entre *«A»* y *«B»*, sabiendo que los dos peatones tienen la misma rapidez y que la rapidez del perrito es el cuádruplo de la de los peatones , sabiendo además que la distancia entre *«M»* y *«N»* es ***160***.

A)200 m ***B)300 m.*** ***C)400 m.***
D)350 m. ***E)150 m.***

24 Un peatón partió de *«A»* con dirección a *«B»* con una rapidez de ***6 km/h***; después de haber recorrido ***4 km*** fue alcanzado por un vehículo que salió de *«A»* ***30*** minutos más tarde y luego de recorrer ***8 km*** más, encuentra por segunda vez al vehículo que regresaba de *«B»* donde descansó ***15*** minutos. Calcule la distancia de *«A»* a *«B»*.

A)20 km ***B)21 km*** ***C) 19 km***
D)15 km ***E)25 km***

25 Una lancha patrullera provista de una radio de ***60 km*** de alcance parte de Matarani al encuentro de un barco cuya velocidad es la quinta parte de la suya; cuando sus mensajes alcanzan al barco éste responde que llegará a Matarani dentro de ***15*** horas , la lancha regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia a Matarani por medio de su radio ***5*** horas después de su partida. Hallar la velocidad del barco.

A)60 km/h ***B)35 km/h*** ***C)36 km/h***
D)72 km/h ***E)70 km/h***

26 Todos los días sale de Chiclayo a Lima un ómnibus con velocidad de ***100km/h***; éste se cruza diariamente a las ***12:00 h*** con un ómnibus que viene de Lima con velocidad de ***50km/h***, cierto día el ómnibus que sale de Chiclayo encuentra malogrado al otro a las ***14:00h***. ¿A qué hora se malogró el ómnibus que sale de Lima?

A)06:00 h *B)07:00 h* *C)08:00 h*
D)09:00 h *E)10:00 h*

27 Un hombre dispara su rifle sobre un blanco. Dos segundos después de disparar oye el sonido de la bala al dar en el blanco , si la velocidad del sonido es ***340 m/s*** y la velocidad de la bala es ***510 m/s***. ¿A qué distancia está el blanco?

A)425 m *B) 850 m* *C) 408 m*
D)688 m *E)1020 m*

28 De un punto *«X»* sale un móvil hacia un punto *«Y»* con una velocidad *«M+1»* veces la de otro móvil que parte simultáneamente de *«Y»* hacia *«X»* ¿A qué distancia de *«Y»* se encontrarán , si la distancia entre los puntos es *«D»*?

A)MD B) $\dfrac{D(M+1)}{(M+2)}$ C) $\dfrac{MD}{1-M}$ D) $\dfrac{MD}{M+1}$ E) $\dfrac{D}{M+2}$

29 Una piscina olímpica tiene *«L»* metros de largo, dos nadadores comienzan a nadar de bordes opuestos y se cruzan por primera vez a ***(3/5)L*** metros del primer borde. ¿A cuántos metros del segundo borde se encontraron por segunda vez?

A)5 L *B)2/5 L* *C)4/5 L* *D)1/5 L* *E)0*

30 Dos atletas *A* y *B* que están entrenando en una pista circular , parten al mismo tiempo en direcciones opuestas , desde ***2*** puntos que distan ***«x» m***. Si se sabe que la pista tiene ***400 m***. de perímetro y que el primer encuentro se produce a ***200 m*** del punto de partida de *A* y que el ***6to*** encuentro se produce después que han recorrido entre los dos ***2360*** m. Hallar *«x»*.

A)50 m *B)60 m* *C)70 m* *D)40 m* *E)80 m.*

31 *«B»* en sentidos opuestos. El perrito encuentra a uno de ellos en el punto *«M»* y al otro en el punto *«N»*; luego, se pide calcular la distancia que hay entre *«A»* y *«B»*, sabiendo que los dos peatones tienen la misma rapidez y que la rapidez del perrito es el cuádruplo de la de los peatones, sabiendo además que la distancia entre *«M»* y *«N»* es ***160***.

A)200 m *B)300 m.* *C)400 m.* *D)350 m.* *E)150 m.*

32 Un peatón partió de *«A»* con dirección a *«B»* con una rapidez de ***6 km/h***; después de haber recorrido ***4 km*** fue alcanzado por un vehículo que salió de *«A»* ***30*** minutos más tarde y luego de recorrer ***8 km*** más, encuentra por segunda vez al vehículo que regresaba de *«B»* donde descansó ***15*** minutos. Calcule la distancia de *«A»* a *«B»*.

A)20 km *B)21 km* *C)19 km* *D)15 km* *E)25 km*

33 Una lancha patrullera provista de una radio de ***60 km*** de alcance parte de Matarani al encuentro de un barco cuya velocidad es la quinta parte de la suya; cuando sus mensajes alcanzan al barco éste responde que llegará a Matarani dentro de ***15*** horas, la lancha regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia a Matarani por medio de su radio ***5*** horas después de su partida. Hallar la velocidad del barco.

A)60 km/h *B)35 km/h* *C)36 km/h*
D)72 km/h *E)70 km/h*

34 Todos los días sale de Chiclayo a Lima un ómnibus con velocidad de ***100 km/h***; éste se cruza diariamente a las ***12:00 h*** con un ómnibus que viene de Lima con velocidad de ***50 km/h***, cierto día el ómnibus que sale de Chiclayo encuentra malogrado al otro a las ***14:00 h***. ¿A qué hora se malogró el ómnibus que sale de Lima?

A)06:00 h *B)07:00 h* *C)08:00 h* *D)09:00 h* *E)10:00 h*

35 Un hombre dispara su rifle sobre un blanco. Dos segundos después de disparar oye el sonido de la bala al dar en el blanco, si la velocidad del sonido es ***340 m/s*** y la velocidad de la bala es ***510 m/s***. ¿A qué distancia está el blanco?

A)425 m *B) 850 m* *C) 408 m* *D)688 m* *E)1020 m*

36 Una piscina olímpica tiene *«L»* metros de largo, dos nadadores comienzan a nadar de bordes opuestos y se cruzan por primera vez a ***(3/5)*** L metros del primer borde. ¿A cuántos metros del segundo borde se encontraron por segunda vez?

A)5 L *B)2/5 L* *C)4/5 L* *D)1/5 L* *E)0*

37 Dos atletas *A* y *B* que están entrenando en una pista circular, parten al mismo tiempo en direcciones opuestas, desde ***2*** puntos que distan ***«x» m***. Si se sabe que la pista tiene ***400 m***. de perímetro y que el primer encuentro se produce a ***200 m*** del punto de partida de *A* y que el ***6to*** encuentro se produce después que han recorrido entre lo dos ***2360 m***. Hallar *«x»*.

A)50 m *B)60 m* *C)70 m* *D)40 m* *E)80 m.*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) E	2) E	3) C	4) B	5) D	6) E	7) D	8) B	9) A	10) C
11) E	12) D	13) C	14) D	15) A	16) A	17) B	18) A	19) B	20) A
21) C	22) B	23) B	24) B	25) C	26) C	27) C	28) E	29) C	30) D

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un ciclista va por una carretera, con velocidad constante y observa que el poste kilométrico indica $\overline{ab}$ *km*. Luego de una hora de recorrido observa $\overline{ba}$ *km* y una hora después se encuentra en el *km* $\overline{a0b}$. ¿Cuál es la velocidad del ciclista en *km/h*?

Dato: *0* = cero

A) 32 km/h B) 30 km/h C) 40 km/h D) 45 km/h E) 50 km/h

02 Un auto debe hacer un recorrido en *4* horas. Una hora después de la partida aumenta su rapidez en ***6 km/h***, llegando así una hora antes de lo previsto. Calcule el recorrido realizado.

A) 50 km B) 40 km C) 38 km D) 48 km E) 58 km

03 Un perrito parte de un punto *A* al otro punto *B* y simultáneamente dos peatones parten del punto *B* en sentidos opuestos. El perrito encuentra a uno de ellos en el punto *M* y al otro en el punto *N*. Calcule la distancia entre *A* y *B*, sabiendo que los peatones tienen la misma rapidez e igual a la cuarta parte de la rapidez del perrito, además la separación entre los puntos *M* y *N* es de ***160 m***.

A) 250 m B) 300 m C) 160 m D) 360 m E) 320 m

04 Un tren demora *13* minutos para pasar por delante de Pamela y ***25*** minutos en cruzar un puente de ***600*** metros. Calcular la longitud del tren.

A) 480m B) 680m C) 560m D) 1 300 m E) 650 m

05 Dos ciclistas recorren a rapidez constante el camino entre *A* y *B*. Los dos salen al mismo tiempo, uno sale de *A*, llega a *B* y de inmediato regresa a *A*. El otro, sale de *B*, llega a *A* y de inmediato regresa a *B*. Durante el viaje, se cruzan dos veces. La primera a ***9 km*** de *A* y una hora más tarde se cruzan por segunda vez a ***7 km*** de *B*. Determine la suma de la rapidez de cada uno de ellos.

A) 46 km/h B) 32 km/h C) 42 km/h D) 44 km/h E) 40 km/h

06 Una hora después de su partida, un tren se detuvo por un desperfecto mecánico, los técnicos lo repararon en *1/2* hora, pero de ahí en adelante, el tren continuó su viaje a la mitad de la rapidez normal y llegó a su destino con **2** horas de demora. Si el desperfecto hubiese ocurrido ***100 km*** más adelante, la demora hubiera sido de sólo una hora. Determine la distancia del recorrido total del tren.

Observación: La reparación dura siempre *1/2* hora y luego el resto del viaje se haría a la mitad de la rapidez normal.

A) 210 km B) 270 km C) 180 km D) 250 km E) 240 km

07 Cuatro autos *A*, *B*, *C* y *D* salen simultáneamente de un mismo punto de una pista circular. *A* y *B* van en una dirección, *C* y *D* en dirección contraria. Todos tienen distinta rapidez, pero constantes. A los *5* minutos de la partida, *A* cruza por primera vez a *C* y en el mismo instante *B* cruza por primera vez a *D*. A los *83* minutos de la partida, *A* y *B* se encuentran por primera vez. ¿Cuánto tiempo transcurre desde la partida hasta que *C* y *D* se encuentran por primera vez?

A) 83 min B) 166 min C) 80 min D) 24 min E) 42 min

08 En un velódromo de ***800 m*** de longitud, dos ciclistas que se mueven en sentidos opuestos, se encuentran cada *16* segundos. Si van en el mismo sentido uno alcanzará al otro cada ***80 s***, determine la relación de la rapidez de dichos ciclistas.

A) 3/2 B) 1/3 C) 1/2 D) 2/5 E) 4/3

09 Un auto viaja de *A* a *C* con rapidez constante de ***90*** kilómetros por hora. En el camino entre *A* y *C* pasa por *B*. Cuando son las *8* de la mañana ha recorrido *1/4* de la distancia entre *A* y *B* y cuando son las *10* de la mañana ya ha recorrido *3/4* del camino entre *B* y *C*. Calcule la distancia entre *A* y *C*.

A) 320 km B) 360 km C) 280 km D) 200 km E) 240 km

10 Un hombre rema ***60 km*** río abajo empleando el mismo tiempo que emplea en remar ***20 km*** río arriba. Calcular la velocidad del bote en aguas tranquilas, si la velocidad de la corriente es ***5 km/h***.

A) 10 km/h B) 20 km/h C) 30 km/h D) 40 km/h E) 50 km/h

11 Un barco se acerca al puerto mientras una lancha se aleja del mismo, de forma tal que sus trayectorias forman un ángulo agudo. Un pescador que está en un bote anclado en algún punto interior a ese ángulo observa que cuando la lancha está a distancia mínima ***(60 m)*** de su bote, el barco está alineado con ambos, y que cuando el barco está a distancia mínima de su bote ***(20*** metros***)*** entonces lancha, barco y bote vuelven a estar alineados. Calcular la razón entre las velocidades de la lancha y del barco.

A) 2:1 B) 3:2 C) 4:3 D) 3:1 E) 1:1

12 Todos los días sale del Cuzco hacia Arequipa un ómnibus a ***40 km/h***. Éste se cruza siempre a las ***11 :00 h***, con un ómnibus que va de Arequipa con una velocidad de ***35 km/h***. Cierto día el ómnibus que sale del Cuzco encuentra malogrado al otro a las ***12:45 h***. ¿A qué hora se malogró ese ómnibus?

A) 12:45h B)11:00h C)10:45h D) 10:00 h E) 09:00 h

13 Cuando caminaba a lo largo de la línea del ferrocarril observé que cada *12* minutos me alcanzaba

un tren y cada *4* minutos otro pasaba en dirección contraria. ¿Cada qué tiempo salían los trenes de las estaciones terminales?

A) 6 min B) 8 min C) 12 min D) 18 min E) 14 min

(13) En una carrera de *"h"* metros, cuando Sol cruza la meta, ella se encuentra exactamente *"d"* metros pòr delante de Wendy. En la siguiente carrera, Sol comienza *d* metros más atrás que Wendy, quien se encuentra en la raya de largada. Las dos corren esta segunda carrera, de *"h"* metros, con la misma rapidez constante que tuvieron en la primera carrera. ¿Cuántos metros delante de Wendy se encuentra Sol, cuando Sol termina la segunda carrera?

A) d^2/h ***B)*** $h-d$ ***C)*** $2d^2/h$ ***D)*** h ***E)*** $2h^2/d$

(15) Una persona ubicada entre dos montañas emite un grito y recibe el primer eco a los *3* segundos y el siguiente a *0,6* segundos después. Si la rapidez del sonido es *340 m/s*, la separación entre las montañas es:

A) 262 m B) 648 m C) 972 m D) 1 122 m E) 1 536 m

(16) La distancia entre dos pueblos *A* y *B* es de *60 km*. Juan e Inés caminan desde *A* hasta *B* a rapidez constante de *5 km/h*. Cada *10* minutos sale un tren de *A* a *B*, que viaja a rapidez constante de *80 km/h*. ¿Cuántos trenes que viajan de *A* a *B* ven pasar Juan e Inés durante su caminata si salen de *A* al mismo tiempo que sale un tren?

A) 72 B) 67 C) 68 D) 69 E) 70

(17) Dos trenes marchan en sentidos contrarios y sobre vías paralelas, con una rapidez de *13 m/s* y *7 m/s*, respectivamente. Un pasajero del segundo tren calculó que el primero demoró en pasar *9* segundos. ¿Cuál es la longitud del primer tren?

A) 180m B) 160m C) 200m D) 80 m E) 150 m

(18) Padre e hijo patinan a rapidez constante en una pista circular. De tanto en tanto, el padre pasa al hijo. En un momento dado, el hijo comienza a patinar en dirección opuesta y entonces los encuentros entre padre e hijo son cinco veces más frecuentes. Calcule la relación entre la rapidez del padre e hijo, respectivamente.

A) 3/2 B) 7/5 C) 4/3 D) 5/2 E) 8/3

(19) En un polígono regular de *"n"* vértices, numerados de *1* a *"n"*, hay tres personas: *A*, *B* y *C* paradas en el vértice *1*. En un momento dado, ellas comienzan a caminar a rapidez constante por los lados. *A* camina en el sentido de la numeración de los vértices (*1*; *2*; *3*; ...), *B* y *C* lo hacen en sentido contrario. *A* se cruza con *B* por primera vez en un vértice y con *C* dos vértices más adelante. Se sabe que *A* camina el doble de rápido que *B* y éste el doble de rápido que *C*. ¿Cuántos vértices tiene el polígono y en qué vértices ocurren los encuentros, respectivamente?

A) 15; 11; 13 B) 12; 9; 11 C) 11; 7; 9 D) 15; 9; 11 E) 12; 8; 10

(20) ¿Cuántas horas emplea un tren que viaja a una velocidad promedio de *40 km/h* entre *2* ciudades, para recorrer *"a"* kilómetros si hace *"n"* paradas de *"m"* minutos cada una?

A) $\dfrac{a+2mn}{60}$ ***B)*** $\dfrac{3a-2m}{60}$ ***C)*** $\dfrac{2a-3m}{60}$ ***D)*** $\dfrac{3a+2mn}{120}$ ***E)*** $\dfrac{3a+5mn}{60}$

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)D	3)B	4)E	5)E	6)D	7)A	8)A	9)E	10)A
11)D	12)E	13)A	14)A	15)D	16)E	17)A	18)B	19)A	20)[illegible]

RETO LOGICO 1 :

Tenes como únicos elementos *2* sogas y un encendedor. Se sabe que cada una de las sogas, una vez que la encendes en una punta, tarda UNA HORA exacta en quemarse.La forma de quemarse NO ES UNIFORME. Es decir que no se sabe cuanto puede tardar en quemarse ningún pedazo de ninguna de las sogas. (Por ejemplo una soga puede tardar *55* minutos en quemarse la mitad y *5* minutos en quemarse la otra mitad) Lo que se pide es que con solo estos tres elementos(*2* sogas y un encendedor, y haciendo lo que se quiera con ellos) se midan *45* MINUTOS.

RETO LOGICO 2 :

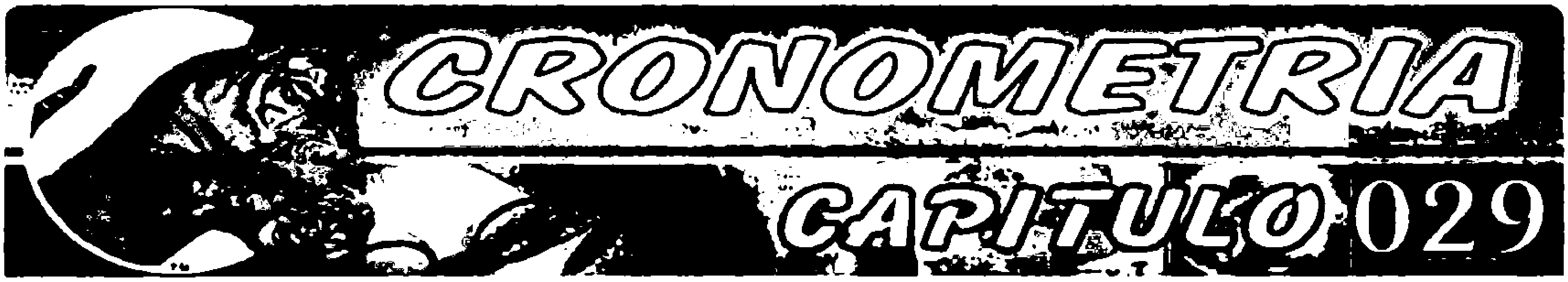
Un gusanito en equilibrio se desplaza sobre un elastico de un kilometro de largo. El gusano avanza a la velocidad de un centimetro por segundo. Despues del primer segundo, el elastico se alarga en un kilometro. Al segundo siguiente, el elastico se vuelve a alargar otro kilometro (ahora mide tres kilometros) y asi sucesivamente. ¿Llegara el gusano a la otra punta del elastico? La intuicion nos sugiere que no, pero es una idea equivocada! Podeis decirme cuanto tiempo tardara en llegar?».

RETO LOGICO 3 :

Hay en una region *10* tribus, cada una con *10* indios, cada tribu debe llevar al rey *10* sacos de oro por mes con *10* libras cada uno, hace tiempo una tribu esta robando parte del tributo dando en cada saco solo *10* libras por lo cual entregan *90* en lugar de *100*, el rey quiere saber quien es la tribu ladrona, el consejo de gobierno le da una oportunidad: que pese los sacos en una romana que funciona con una unica moneda, asi el rey solo podra hacer una lectura de peso con lo que debe saber cual es la tribu que esta robando.

RETO LOGICO 4 :

En el piso del patio hay dibujado un octógono regular. Emiliano escribe en los vértices los números del 1 al 8 en cualquier orden. Pone una piedra en el punto 1. Camina hacia el punto 2, habiendo recorrido (1/2) del camino se detiene y deja la segunda piedra. Desde allí camina hacia el punto 3, habiendo recorrido (1/3) del camino se detiene y deja la tercera piedra. Desde allí camina hacia el punto 4, habiendo recorrido (1/4) del camino se detiene y deja la cuarta piedra. Así sigue hasta que, después de dejar la séptima piedra, camina hacia el punto 8 y habiendo recorrido (1/8) del camino deja la octava piedra. La cantidad de piedras que quedan en el centro del octógono depende del orden en que escribió los números en los vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de piedras que pueden quedar en dicho centro?



OBJETIVOS :

** Modelar matemáticamente las diversas situaciones que tienen relación con la toma de tiempo. Lograr un dominio de propiedades, fórmulas y criterios en la resolución de problemas de cronometría.*

** Relacionar los recorridos de las agujas en ciertas unidades.*

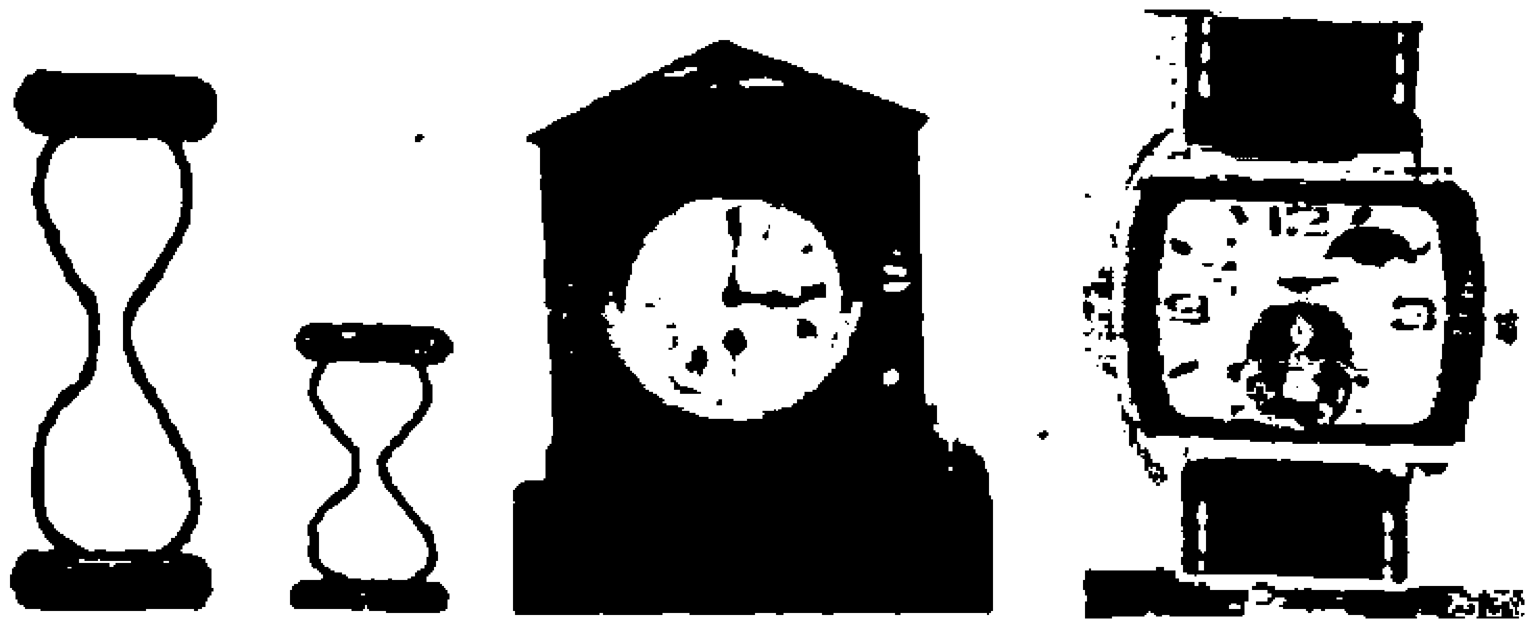
** Aplicar y resolver situaciones matemáticas que guardan relación con la medición del tiempo mediante relojes con agujas.*

** Adquirir destrezas en el manejo de los diversos esquemas para desarrollar los problemas de este tipo.*

** Estudiar la cronometría aplicandolas a situaciones de la vida cotidiana.*

INTRODUCCIÓN :

Hace miles de años, las personas no tenían la necesidad de controlar el tiempo para realizar sus quehaceres, vivían día a día y así un día cualquiera era muy parecido al otro. El tiempo no era muy importante. Cuando se tenía la necesidad de medir el tiempo, lo hacia por soles, lunas, inviernos o veranos. Actualmente si se quiere saber qué hora es, basta con consultar un reloj; si se quiere saber la fecha, basta con mirar un calendario. Un reloj mide el tiempo a lo largo del día y te permite saber cuando tienes que salir de casa para ir a estudiar o a realizar una actividad de tu interés. Entonces un reloj juega un papel muy importante en la planificación de las actividades que ha de realizar el hombre, por tanto determina a veces el éxito de la planificación y la disciplina.



EJEMPLO :

Lenin estaba muy cansado y se acostó a las ***10*** de la noche, con la intensión de dormir hasta las ***11*** de la mañana del día siguiente, para ello puso su despertador a las ***11*** horas, unos veinte minutos después de acostarse se durmió. ¿Cuánto pudo descansar antes que la alarma lo despertase?

RESOLUCIÓN :

En este inocente caso, quizá podamos responder haciendo un análisis apresurado y claro está guiándonos por la impresición de la información, diríamos que si puso el despertador para las ***11*** Y se durmió veinte minutos después de las ***10*** , entonces logró dormir un lapso de once horas con cuarenta minutos, pues habríamos supuesto que el reloj despertador podría distinguir entre ***11*** de la noche y once de la mañana, pero si este reloj se tratara de un reloj despertador con manecillas, el cual no distingue entre ***11*** de la mañana y once de la noche, el pobre Lenin sólo habría dormido hasta las once más cercana a las diez de la noche. Esto es hasta las once de la noche, es decir durmió un lapso de cuarenta minutos, de esta manera tendriamos dos diferentes respuestas.

EL AÑO y EL DÍA

La Tierra tiene dos movimientos principales . Uno es el movimiento de ***rotación*** sobre su eje , del que ya hemos hablado en la lección anterior . El otro es un movimiento de giro en torno al Sol ; por apariencia de este movimiento , se diría que el Sol va cambiando su posición relativa entre las estrellas , recorriendo anualmente el círculo celeste llamado ***eclíptica*** , que pasa por las constelaciones del ***Zodíaco.***

Año solar es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta o giro en torno del Sol.

Se llama ***día*** al tiempo que tarda la Tierra en dar una rotación sobre su eje.

En un año solar hay , muy aproximadamente , ***365*** días y un cuarto.

El día no resulta exactamente igual si para determinar que la Tierra ha dado una rotación completa tomamos como punto de referencia el Sol (día solar) o una estrella (día sidéreo). El primero es unos ***4*** minutos , más largo que el segundo.

Los principales ***múltiplos del año*** son :

Lustro o quinquenio	***5 años***
Década o decenio	***10 años***
Siglo	***100 años***
Evo o milenio	***1000 años***

* Los principales *submúltiplos del día* son :

La *hora* , que es *1/24* del día solar medio . (Ya que todos los días solares no son de idéntica duración , debemos considerar el promedio de estas duraciones) La hora se considera dividida en *60* minutos y el minuto dividido en *60* segundos :

Los días se agrupan en períodos de siete , llamados *semana* , donde les corresponden los nombres bien conocidos : lunes , martes , miércoles , jueves , viernes , sábado y domingo . Un tiempo de *14* horas *3* minutos *12* segundos se indica : 14^h 3^m 12^s o en otra forma convencional.

El día comienza en el momento de la medianoche. Así que las *12 h* de la noche son las *0* horas. El mediodía son las *12h* ; lo que corrientemente decimos las *3* de la tarde son las *15 h*. Del mismo modo , si nos dicen que un tren tiene su salida

a las *20 h 30* min es lo mismo que decir a las *8* y media de. tarde.

CALENDARIO

es el conjunto de reglas adoptado por cada pueblo para contar el tiempo . Estas reglas deben procurar que el año civil o legal discrepe lo menos ; posible del año natural . El calendario gregoriano es el que rige casi universalmente. Debe su nombre al Pontífice Gregorio *XIII* , que lo estableció en *1582*. Se rige por la siguiente fórmula : todo año tendrá *365* días , menos cuando el número formado por sus dos últimas cifras sea divisible por *4*, en cuyo caso tendrá *366* y se llamará *bisiesto*. Los años que terminan en dos ceros no se considerarán bisiestos (ejemplo : *1700*) a menos que el número de siglos sea divisible por *4* (ejemplos : *1600, 2000)*.

El año gregoriano tiene *12* meses de *30* ó *31* días, excepto febrero que tiene *28* (*29* en los años bisiestos), a saber : enero (*31*), febrero (*28* ó *29*), marzo (*31*), abril (*30*); mayo (*31*), junio (*30*), julio (*31*), agosto (*31*), septiembre (o setiembre) (*30*), octubre (*31*), noviembre *(30)* y diciembre *(31)*.

CALENDARIO	DISTRIBUCIÓN DEL AÑO	CORRECCIÓN O DESVIACIÓN
EGIPCIO	12 meses de 30 días + 5 días festivos.	Cada 1461 años se retrasa 1 año.
GRIEGO	12 meses de 29 días y 30 días	Cada 36 u 8 años se añade un mes
AZTECA	18 meses de 20 días + 5 días	Corrección discrecionadas
ISLÁMICO	12 meses de 29 días y 30 días	Ciclo de 30 años con 12 bisiestos
HEBREO	50 semanas y 3 ; 4 ó 5 días	Correción por criterios litúrgicos
CHINO	12 meses de 29 y 30 días	Años bisiestos de 13 meses

CÁLCULOS CON MEDIDAS DE TIEMPO

Una cantidad de tiempo puede darse como número complejo (con unidades de diversas órdenes),

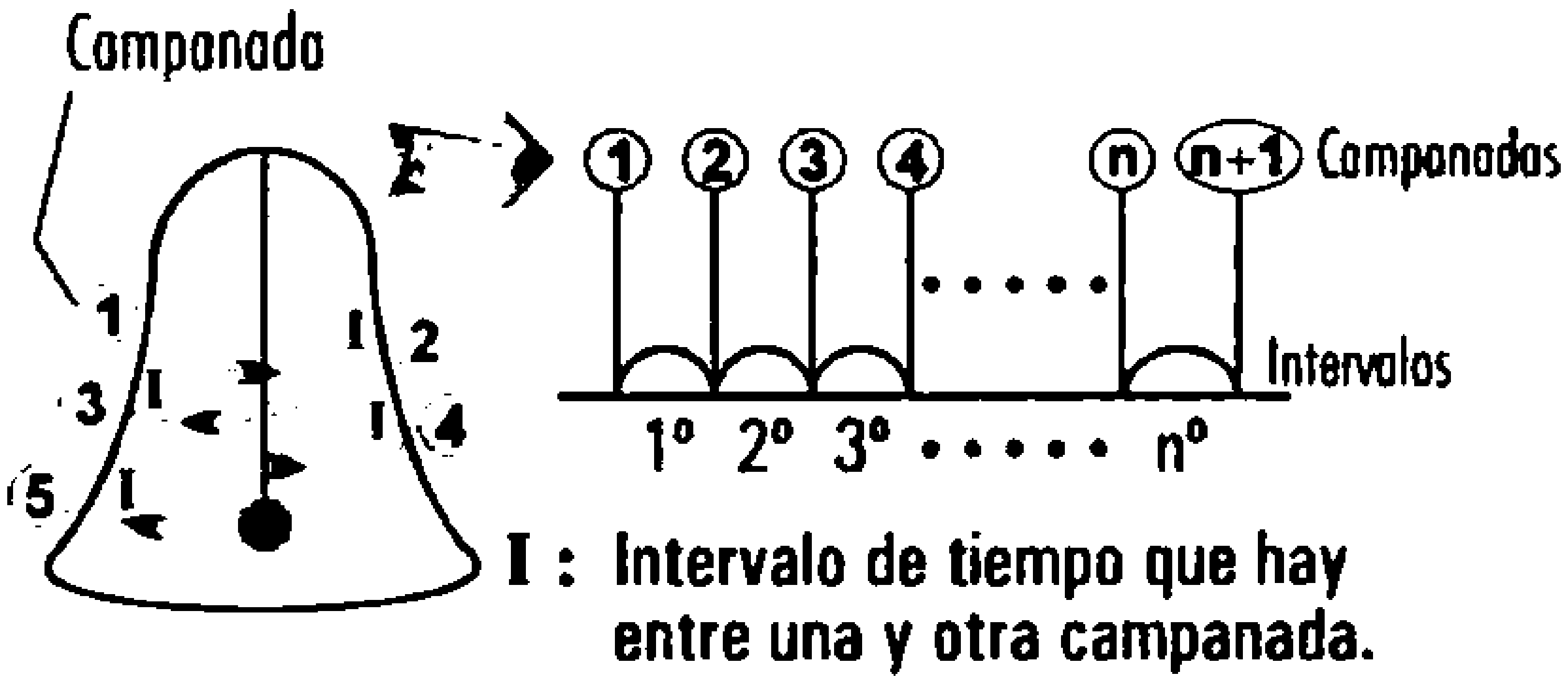
5 días *10h* *30 min*

o como incomplejo (unidades del mismo orden),

7830 min

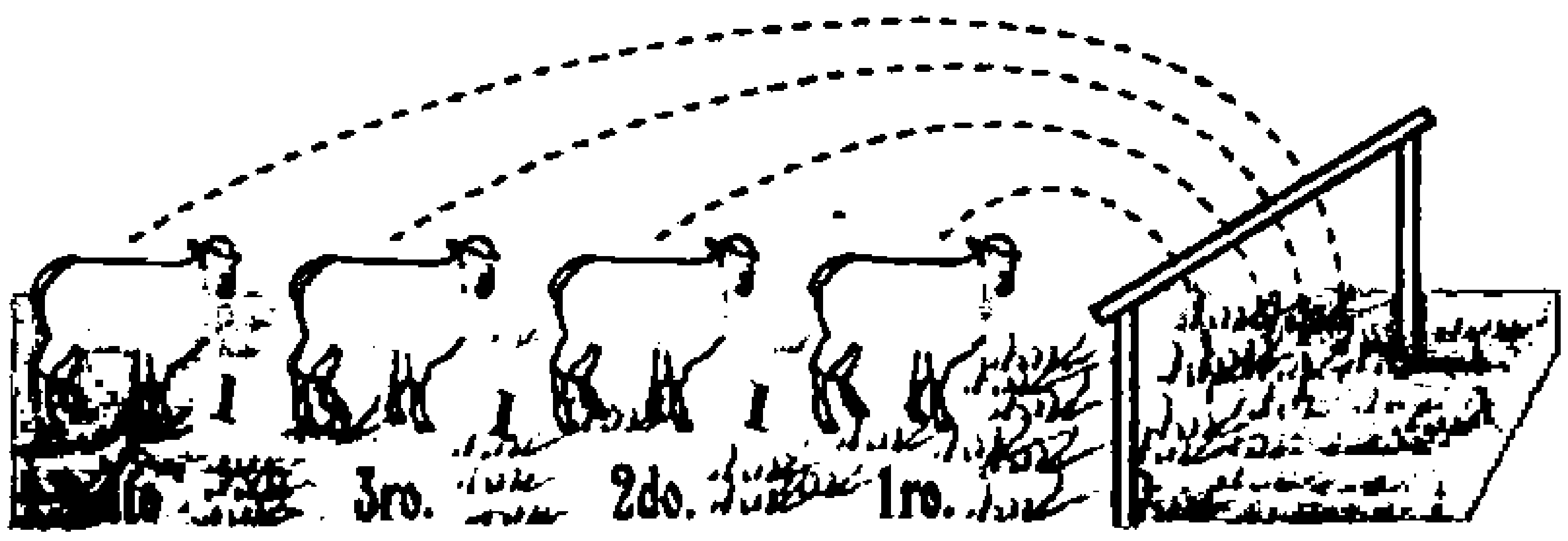
PROBLEMAS SOBRE CAMPANADAS Y AFINES

Cuando nos referimos a un evento que implica una acción , como campanadas , golpes , contactos seguidos a velocidad constante , debemos considerar que el tiempo transcurrido , es propiamente el de los periodos comprendidos entre contacto y contacto , y no la duración del contacto.



$$\text{Número de Intervalos} = \text{Número de Campanadas} - 1$$

$$\text{Número de Campanadas} = \text{Número de Intervalos} + 1$$



$$\#\text{Ovejas} = \text{intervalos} + 1$$

ó

$$\text{Número de Intervalos} = \text{Número de ovejas} - 1$$

NOTA :

la Regla de Tres se aplicará con el número de intervalos y el tiempo total (porque el tiempo se empieza a contabilizar a partir de la primera campanada, golpe, ..., etc.)

$$\#\text{ golpes} = \#\text{ intervalos} + 1$$

$$\begin{bmatrix}\text{Tiempo}\\ \text{total}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{Número de}\\ \text{Intervalos}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\text{Tiempo de}\\ \text{cada Intervalo}\end{bmatrix}$$

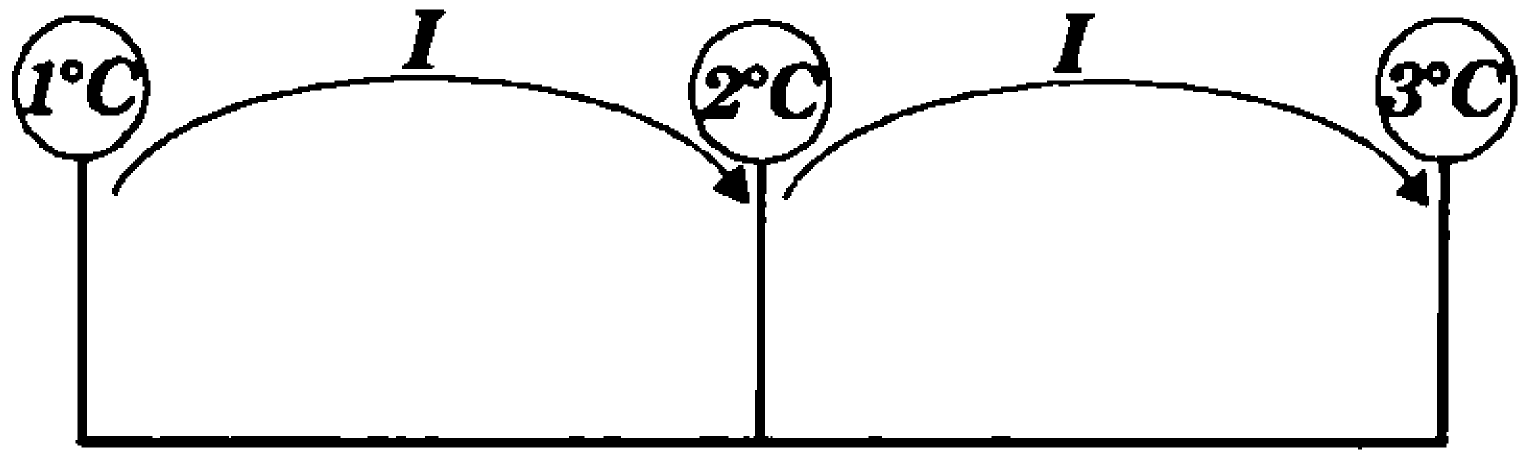
EJEMPLO :

En el campanario de una iglesia se hace oscilar el péndulo dando tres campanadas en seis segundos. ¿En cuántos segundos se dieron *7* campanadas?

RESOLUCIÓN :

1ER MÉTODO :

* Graficando tenemos :



* Se observa que en tres campanadas hay *2* intervalos de tiempo *(I)* :

$$2I=6\ seg \Rightarrow I=3\ seg$$

* Ahora en *7* campanadas habrá *6* intervalos de tiempo , entonces el tiempo pedido será :

$$6(3) = 18\ seg.$$

* Finamente se deduce :

$$\begin{pmatrix}\text{Número de intervalos}\\ \text{de tiempo (I)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Número de}\\ \text{campanadas}\end{pmatrix}-1$$

2° MÉTODO:

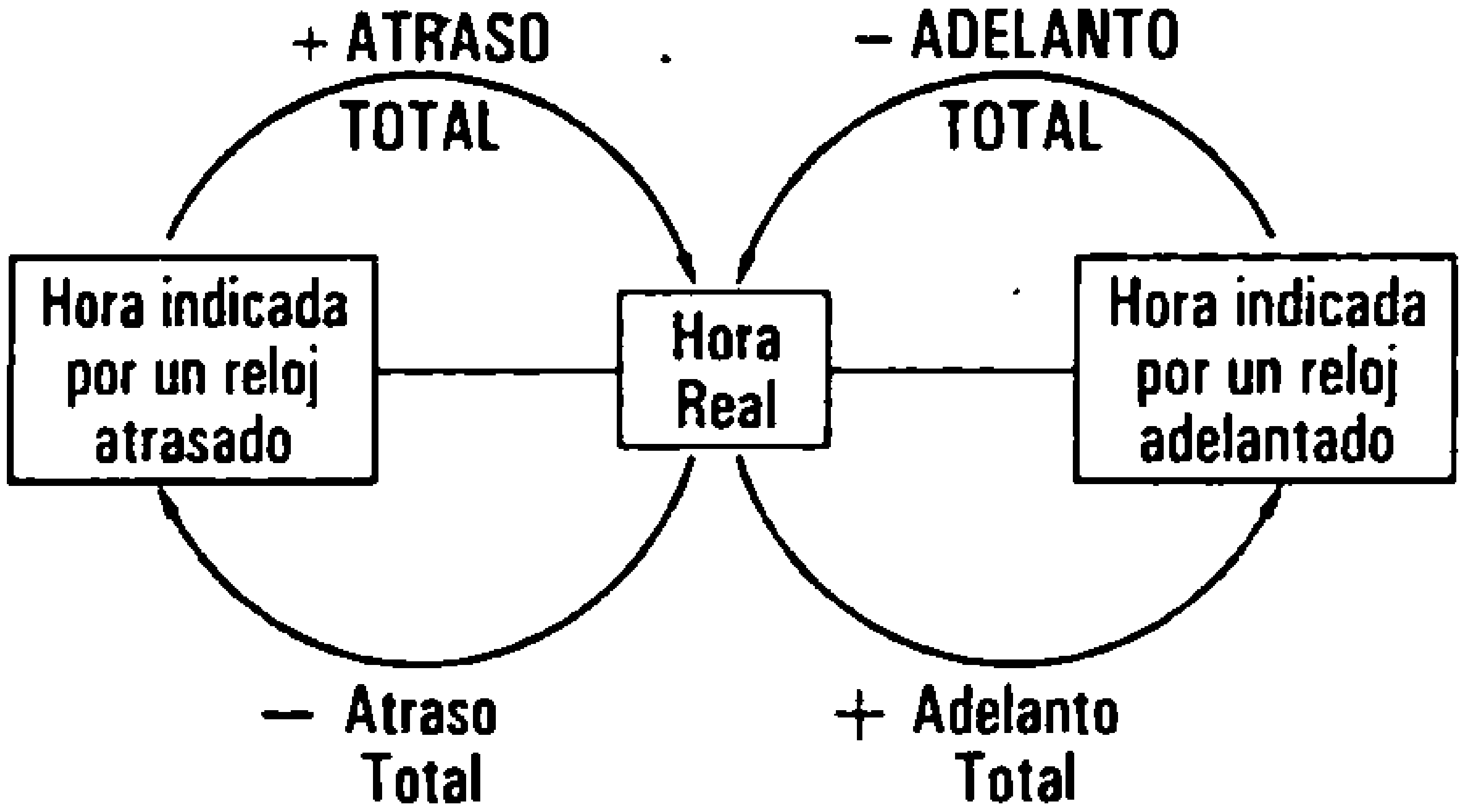
N°de campanadas	N°de intervalos	Tiempos
3	2	6 seg
7	6	x seg

(DP entre N°de intervalos y Tiempos)

$$2x=6(6)$$
$$\Rightarrow x=18seg$$

PROBLEMAS SOBRE ADELANTOS Y ATRASOS

Situaciones donde se encuentran relojes malogrados, debemos considerar :



HORA REAL = HORA ADELANTADA - ADELANTO

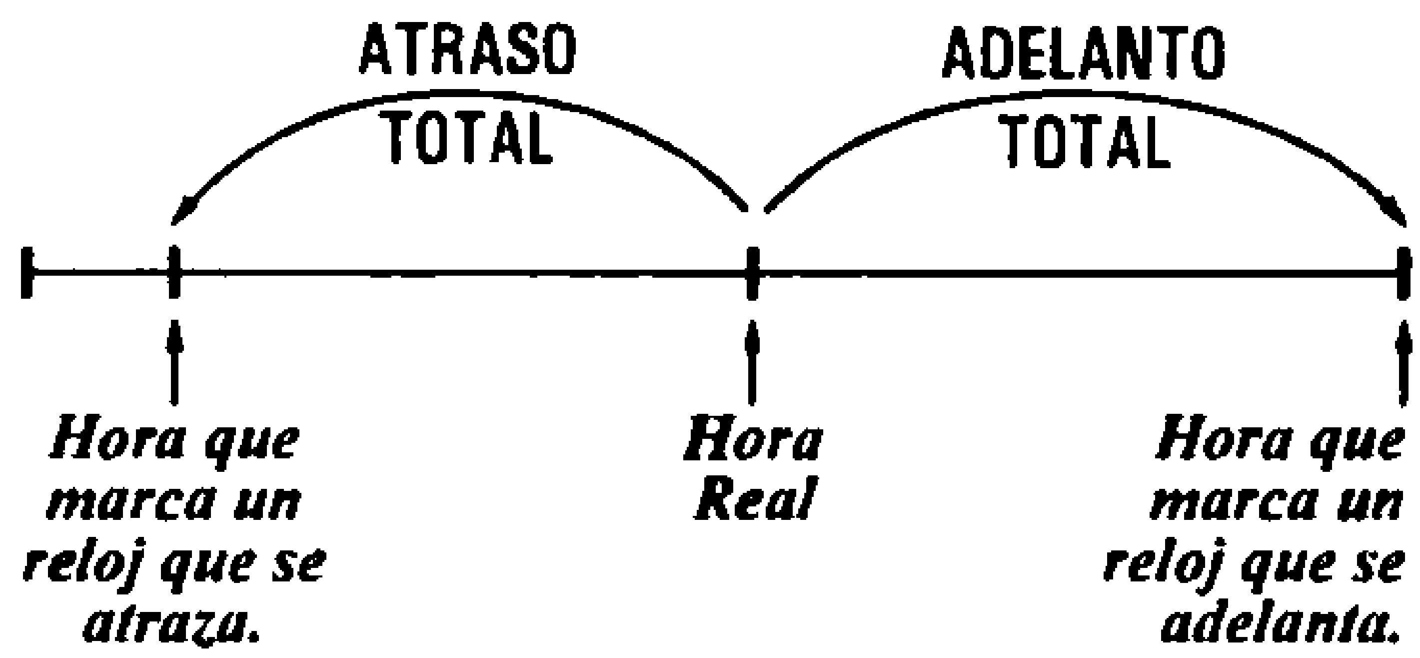
HORA REAL = HORA ATRASADA + ATRASO

HORA MARCADA

$$\text{HORA ATRAZADA} = \text{HORA REAL} - \text{ATRASO TOTAL}$$

$$\text{HORA ADELANTADA} = \text{HORA REAL} + \text{ADELANTO}$$

Surgen como consecuencia del funcionamiento de aquellos relojes defectuosos (malogrados) sufriendo adelantos o retrasos respecto de la hora señalada por un reloj de funcionamiento normal.



Para estos tipos de problemas debemos tener en cuenta las siguientes relaciones :

Hora marcada = Hora real + adelanto

Hora marcada = Hora real - atraso

EJEMPLO:

Un reloj se atrasa dos minutos por cada hora transcurrida. Si comienza a funcionar a las ***2 p. m.***, entonces, transcurridas ***39*** horas, sus agujas marcarán las ....

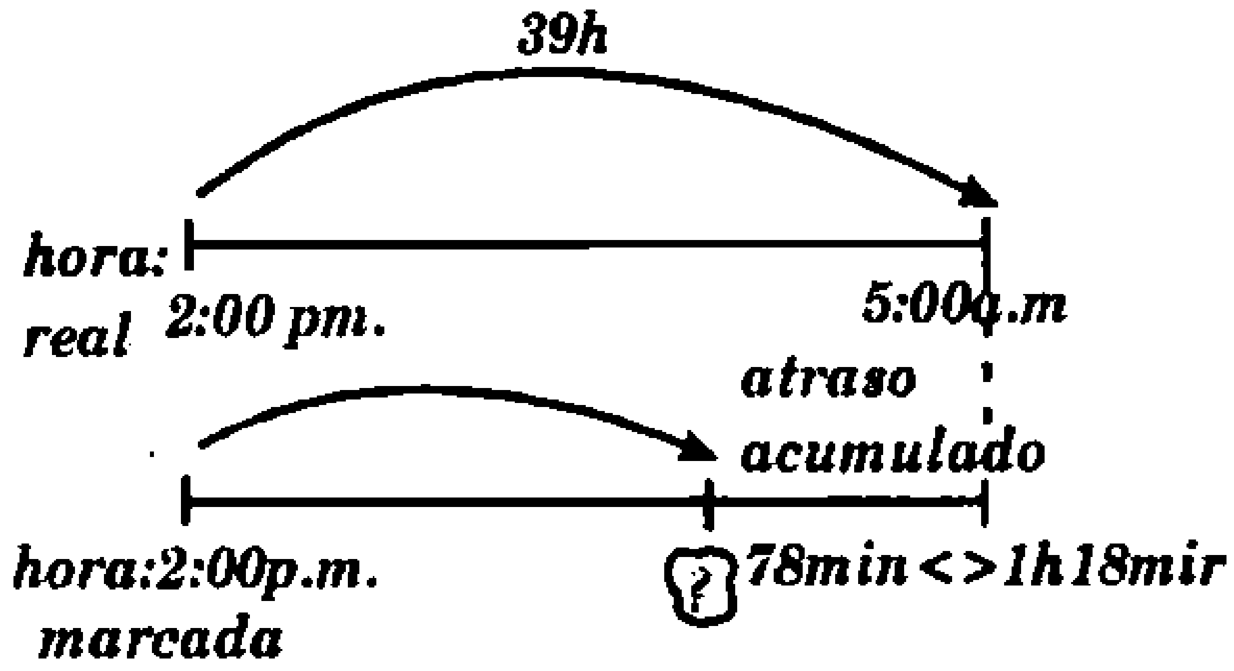
A)3:42 a.m. ***B)2:30 a.m.*** ***C)3:12 p.m.***
D)2:15 a.m. ***E)3:18 p.m.***

RESOLUCIÓN :

Por dato: el reloj se atrasa *2* minutos por cada hora.

Luego de ***39 h***

atraso acumulado:$2\times 39=78$ minutos



Hora marcada: ***5a.m.–(1h18 min.)=3:42 a.m.***

Respuesta :

Las agujas marcarán ***3:42 a.m.***

CUANDO SE QUIERE QUE UN RELOJ MALOGRADO , VUELVA HA MARCAR LA HORA EXACTA

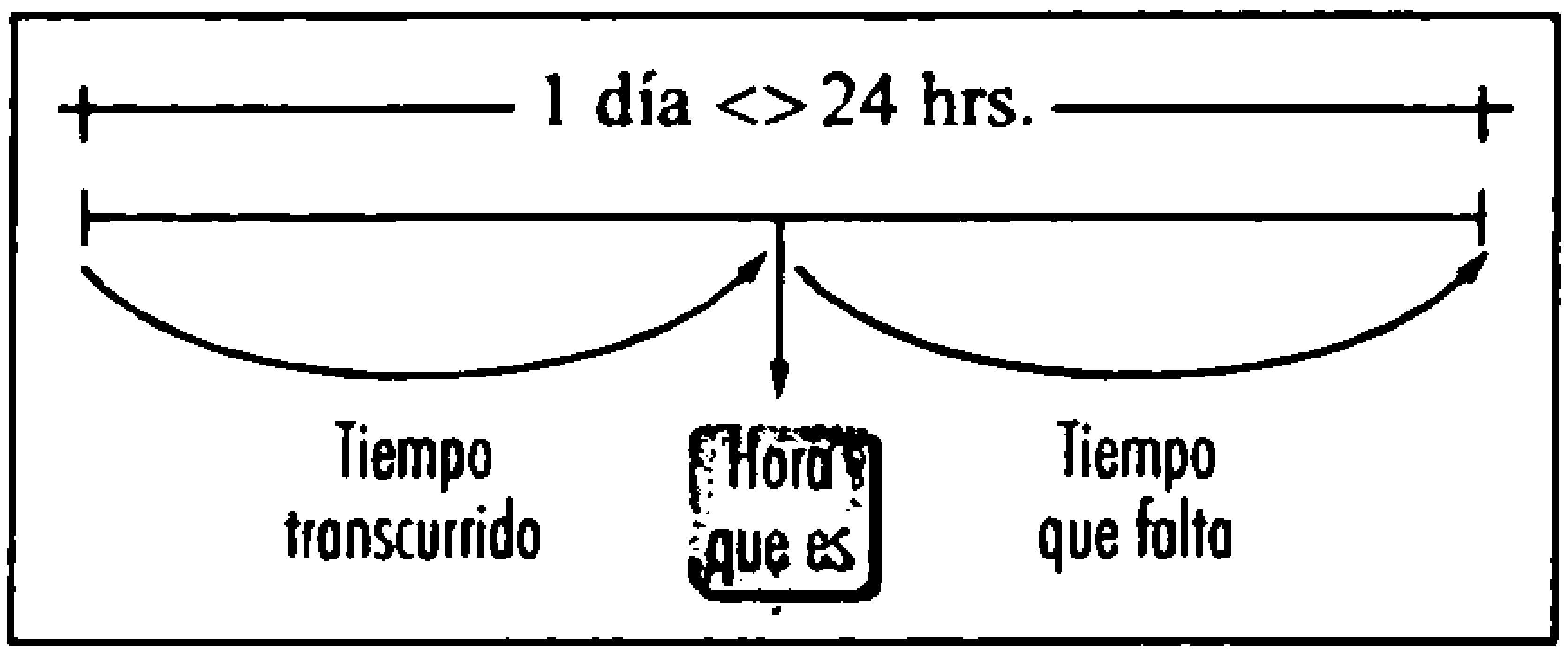
Para que un reloj vuelva a marcar la hora exacta sus manecillas deben estar en la misma posición.

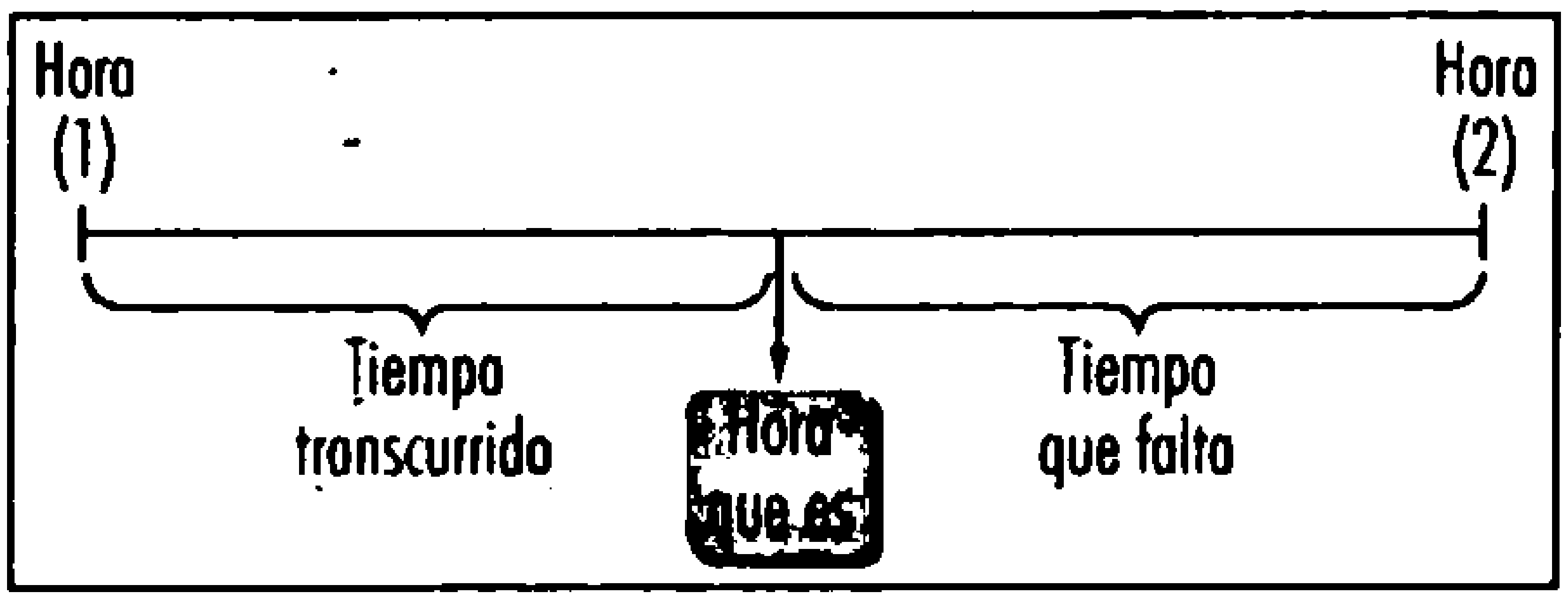
Para que esto ocurra el horario tendrá que dar una vuelta completa; por ello tendrían que transcurrir ***12*** horas de adelanto (o atraso) ó ***720*** minutos.

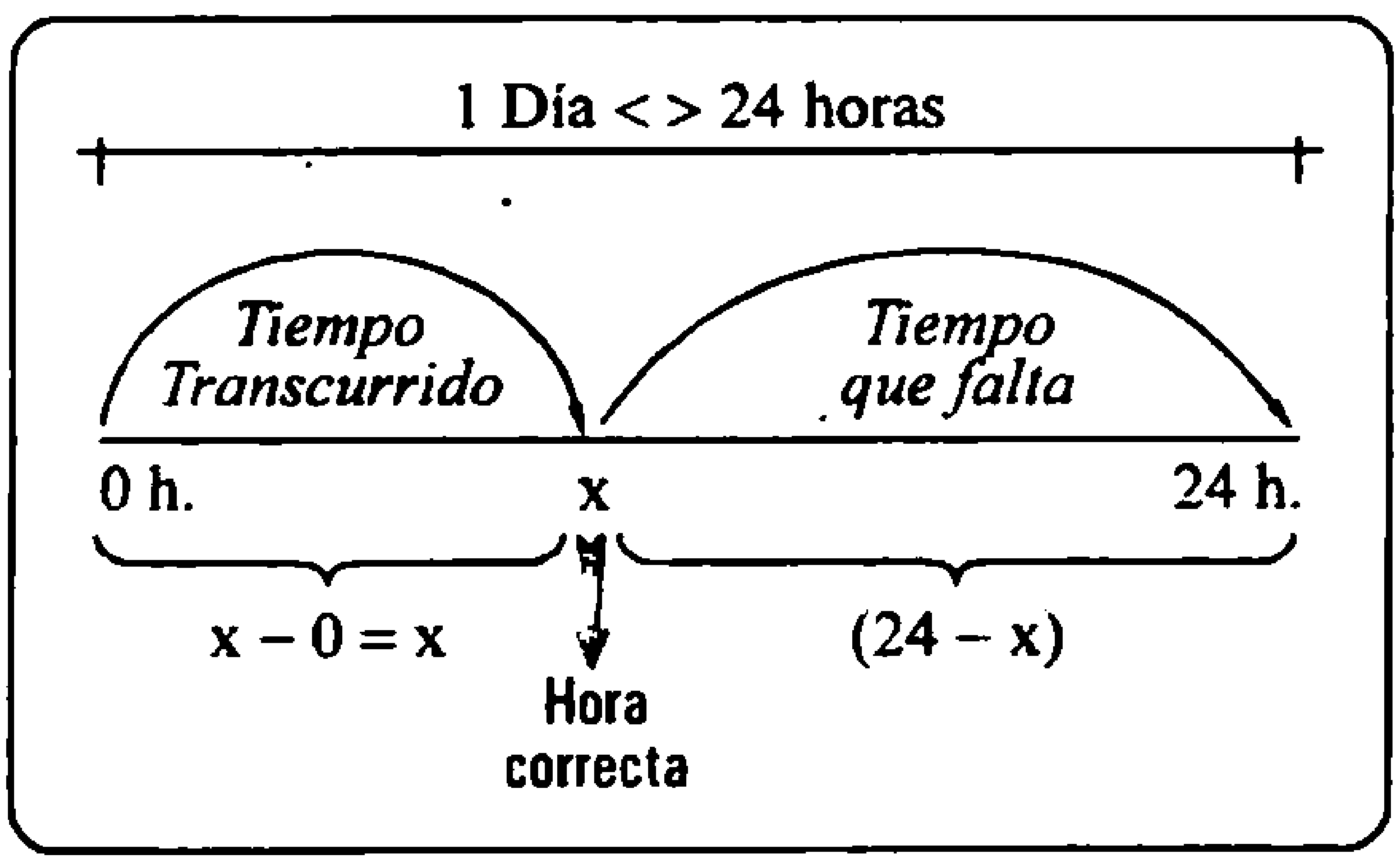
PROBLEMAS SOBRE TIEMPO TRANSCURRIDO Y QUE FALTA TRANSCURRIR

La referencia en éste caso es a problemas que en su enunciado establezcan una relación entre un intervalo de tiempo transcurrido y otro que falte por transcurrir ; de tal manera que ambos intervalos sumen un periodo conocido como son las ***24*** horas de un día , los ***7*** días de la semana , los ***30*** días del mes de Abril , los ***365*** días de un año ordinario , etc.

Para este tipo de problemas podemos emplear de manera práctica, los siguientes esquemas :



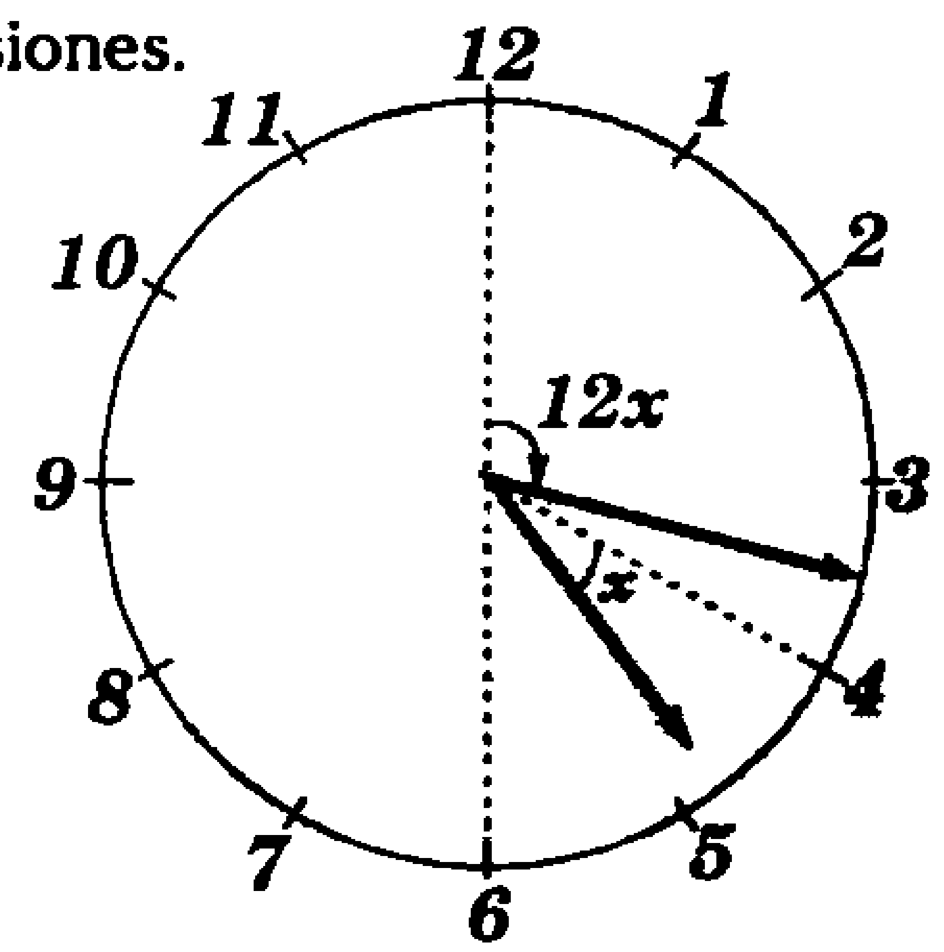




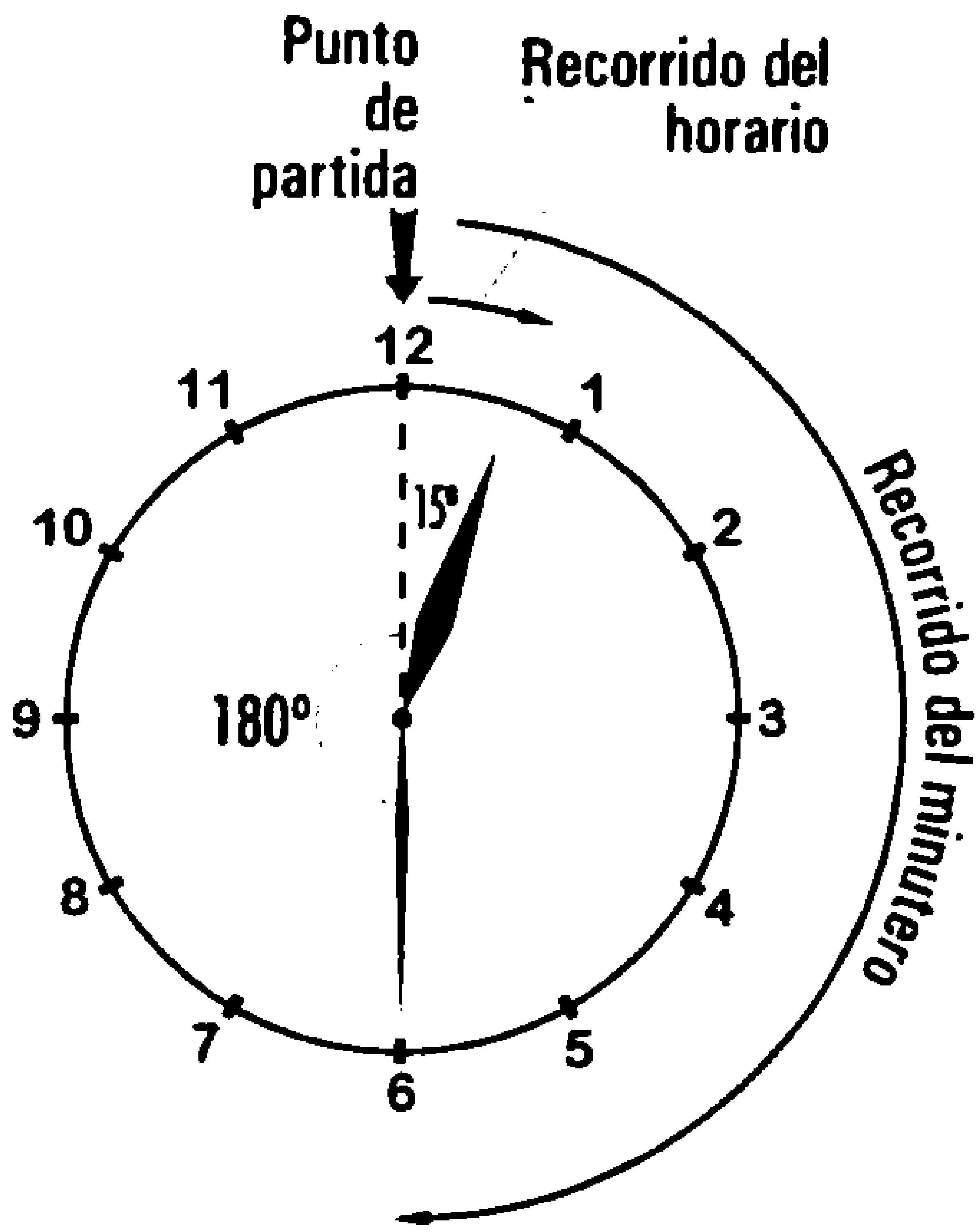
PROBLEMAS SOBRE ÁNGULO FORMADO ENTRE HORARIO Y MINUTERO

Tener presente lo siguiente :

* El reloj tiene ***60*** divisiones y cada una equivale a ***1*** minuto ó ***6°*** (grado sexagesimal).
* Cuando el horario avanza una división , el minutero avanza ***12*** divisiones.



RELACIÓN DEL RECORRIDO DEL HORARIO y MINUTERO



• Partiendo las agujas de las *12:00* a las *12:30*, el horario ha recorrido *15°*, mientras que el minutero *180°*, es decir el minutero avanzó :

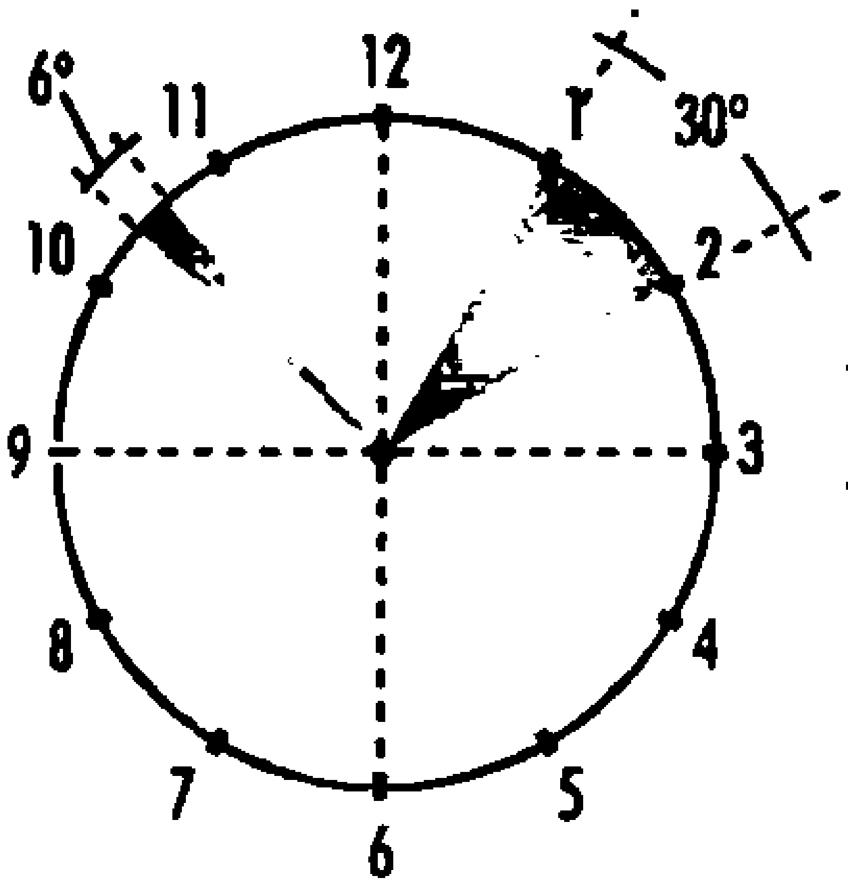
$$\frac{180^\circ}{15^\circ} = 12 \text{ veces lo que avanzó el horario}$$

EN GENERAL :

$$\boxed{m = 12H}$$

Donde : *m* : recorrido del minutero
H : recorrido del horario

OBSERVACIÓN :



1 División horaria <> 30°
1 División de minuto <> 6°

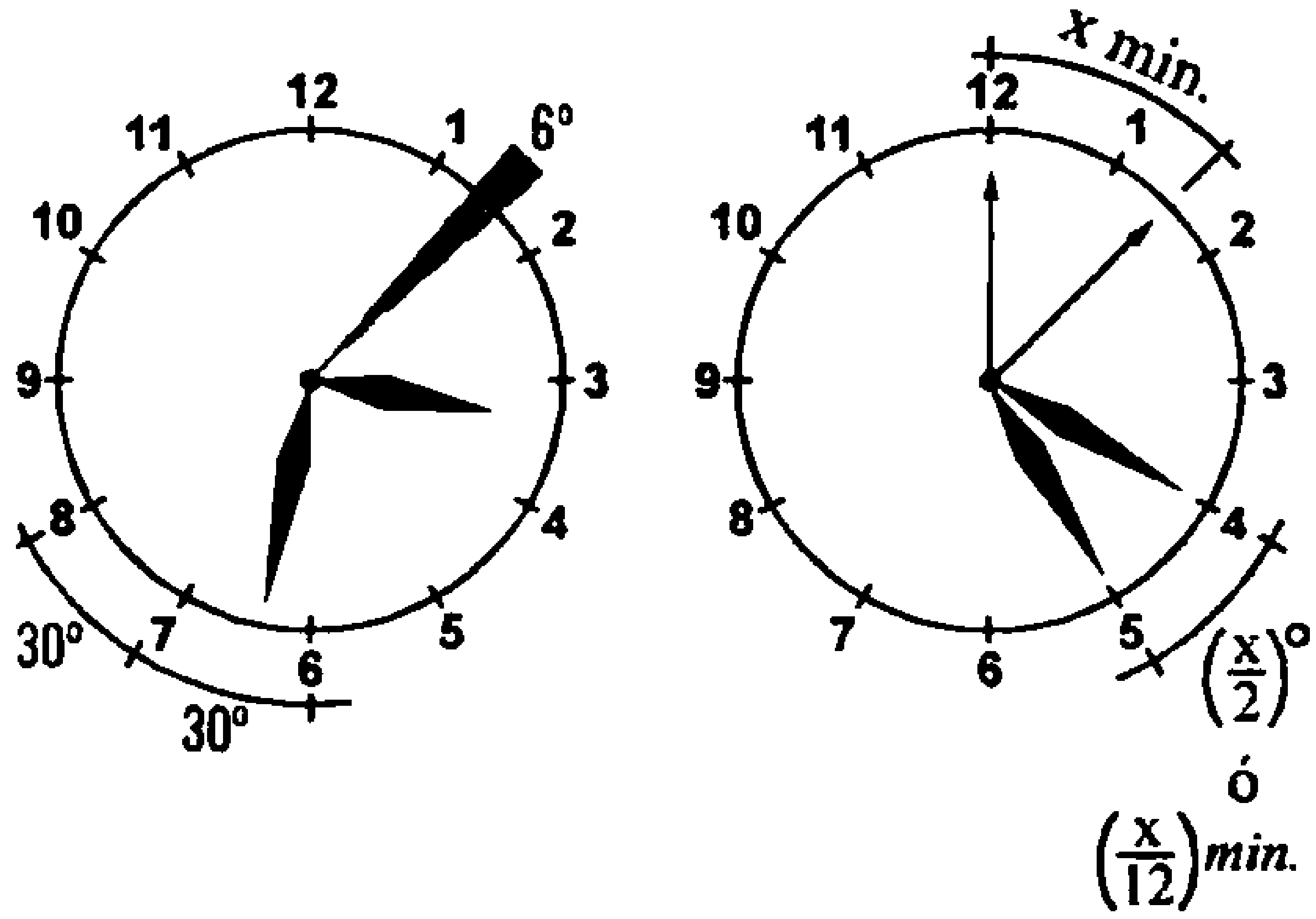
EJEMPLO :

Veamos cuantos grados sexagesimales recorren las agujas cuando transcurre un tiempo determinado en minutos (a partir de las *4* en punto) :

Tiempo que transcurre (en minutos)		Angulo que recorre el MINUTERO	Angulo que recorre el HORARIO
60'	→	360°	30°
30'	→	180°	15°
20'	→	120°	10°
10'	→	60°	5°
8'	→	48°	4°
3'	→	18°	$\frac{3^\circ}{2}$
1'	→	6°	$\frac{1^\circ}{2}$

m'	→	m_{DIV}	$\frac{m}{12}DIV$

ANGULOS ENTRE HORARIOS Y MINUTERO



1 División <> 1 minuto <> 6°

ANÁLISIS DEL RECORRIDO DE LAS AGUJAS

1)

RECORRIDO DEL MINUTERO (en minutos)	RECORRIDO DEL HORARIO (en grados)
60 min	30°
30 min	15°
15 min	$\frac{15^\circ}{2}$
⋮	⋮

2)

RECORRIDO DEL MINUTERO (en minutos)	RECORRIDO DEL MINUTERO (en diviciones)
60 min.	60 div.
12 min.	12 div.
⋮	⋮
1 min.	1div <> 6°
⋮	⋮

EN GENERAL :

Minutero		Horario
x min.	→	$\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$

Para minutero
"x" Divisiones <> "x" minutos

Recorrido de minutero	Recorrido de horario
Minutero	**Horario**
$"x"\ min$ →	$\left(\dfrac{x}{12}\right) min$
$"x"\ Div$ →	$\dfrac{x}{12}\ Div$

$\boxed{M = 12H}$ *M*: Recorrido de minutero

H: Recorrido de horario

grafique la pocisicion de las agujas y el recorriso

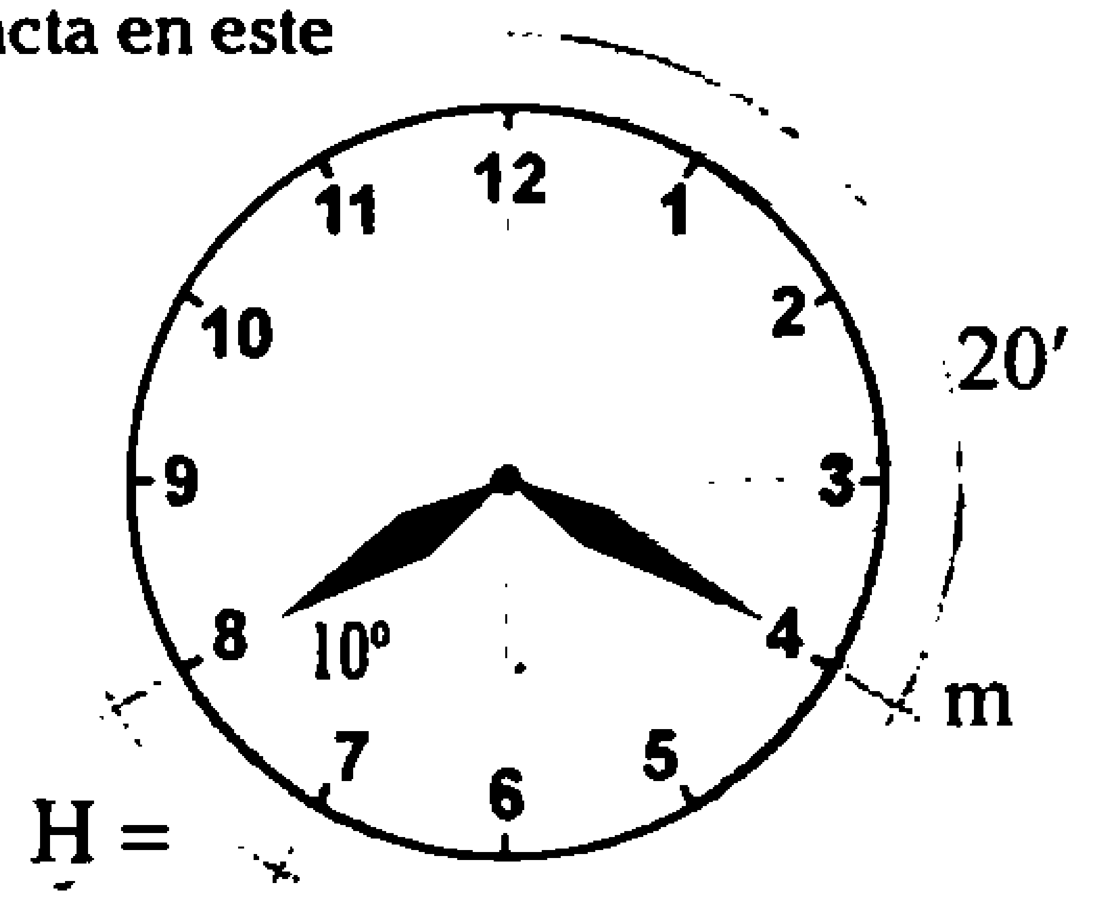
EJEMPLO :

Grafique la posición de las agujas y el recorrido hecho por el horario en los siguientes casos :

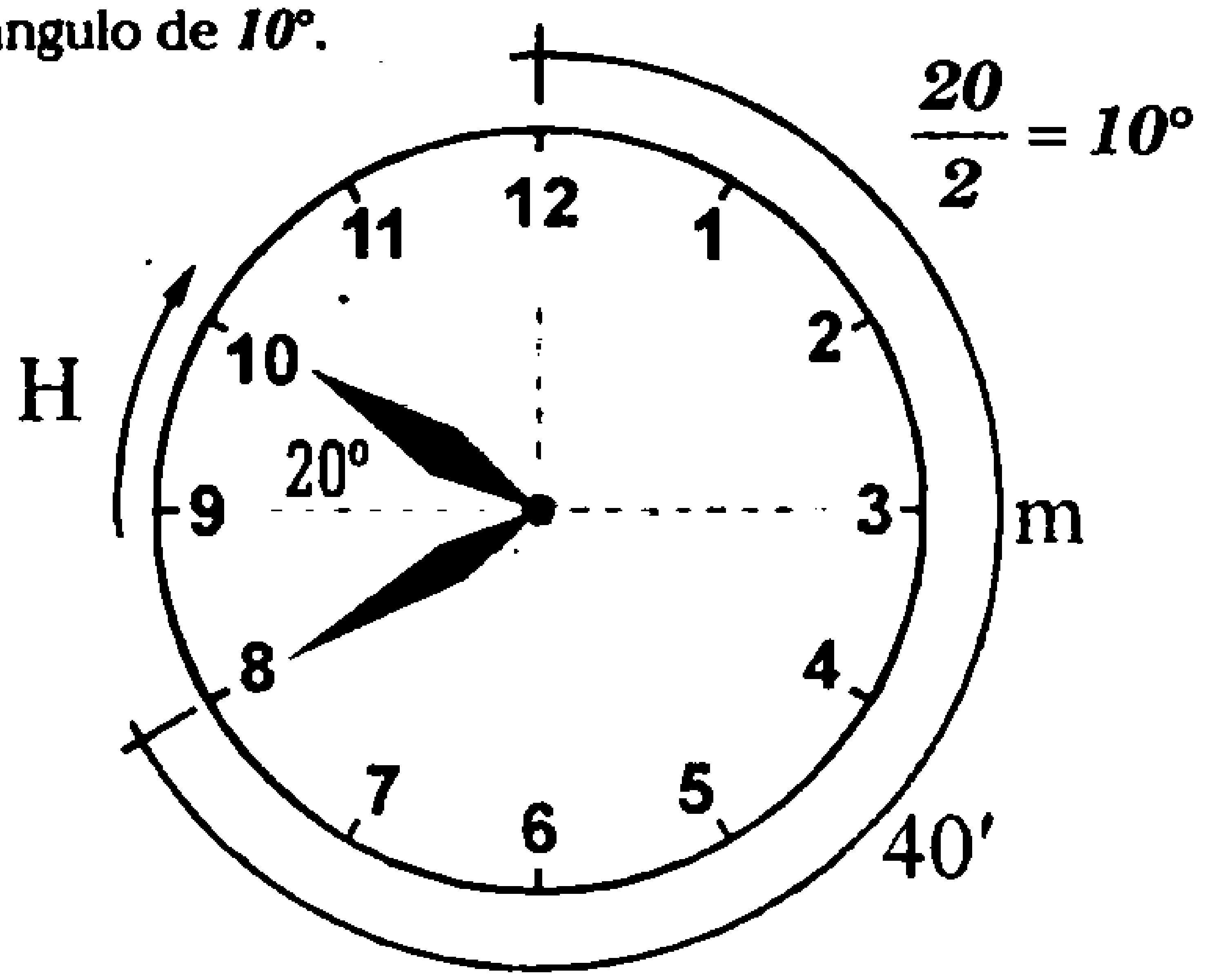
a) 7:20 *b) 9:40*

RESOLUCION :

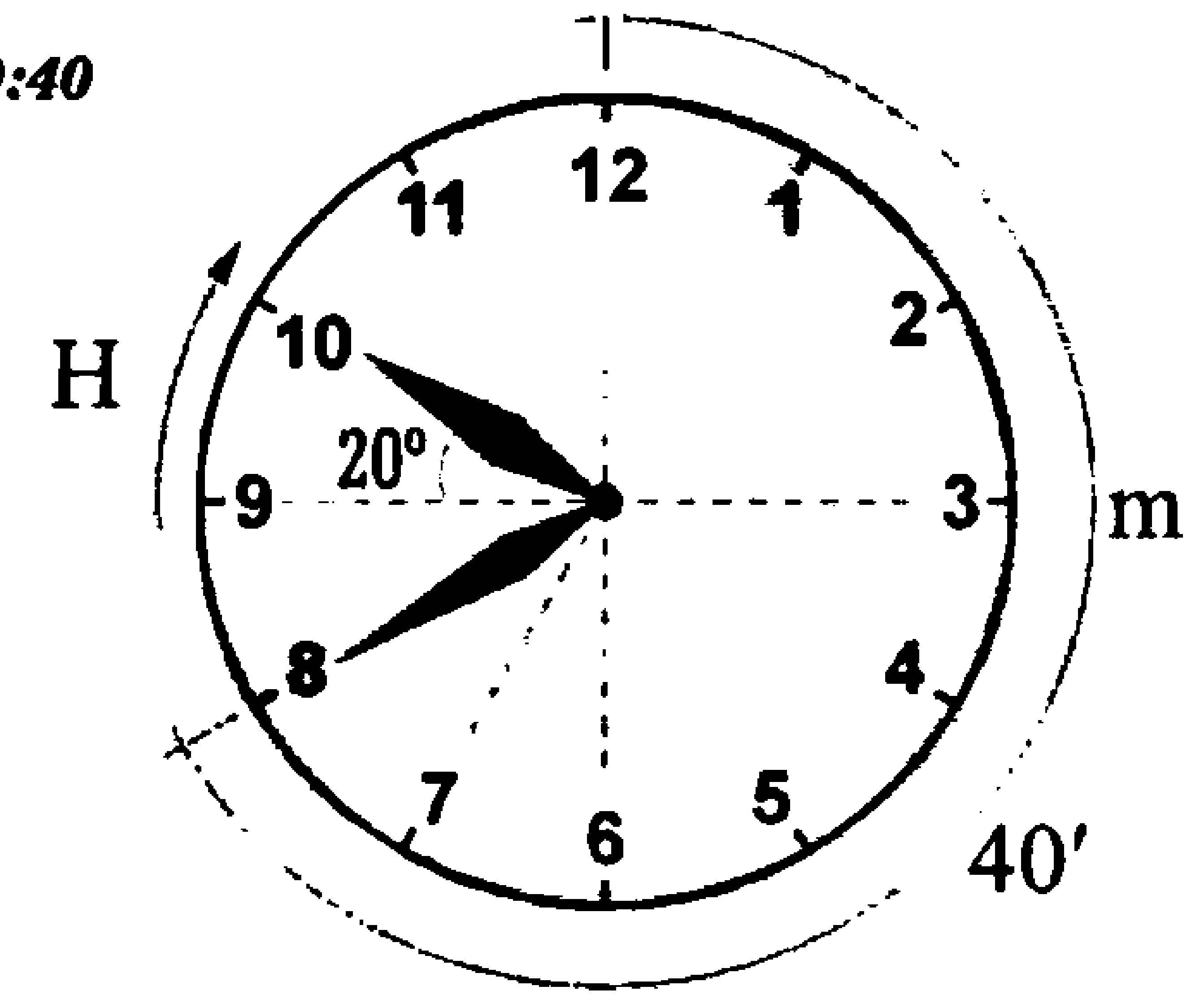
a) Para el análisis de los recorridos, se inicia desde la hora exacta en este



caso empezamos desde las ***7***. Se observa que desde esa hora hasta la hora indicada han transcurrido ***20*** minutos, entonces el minutero ha hecho un recorrido de ***20*** minutos, mientras que el horario habrá barrido un ángulo de ***10°***.



b) 9:40



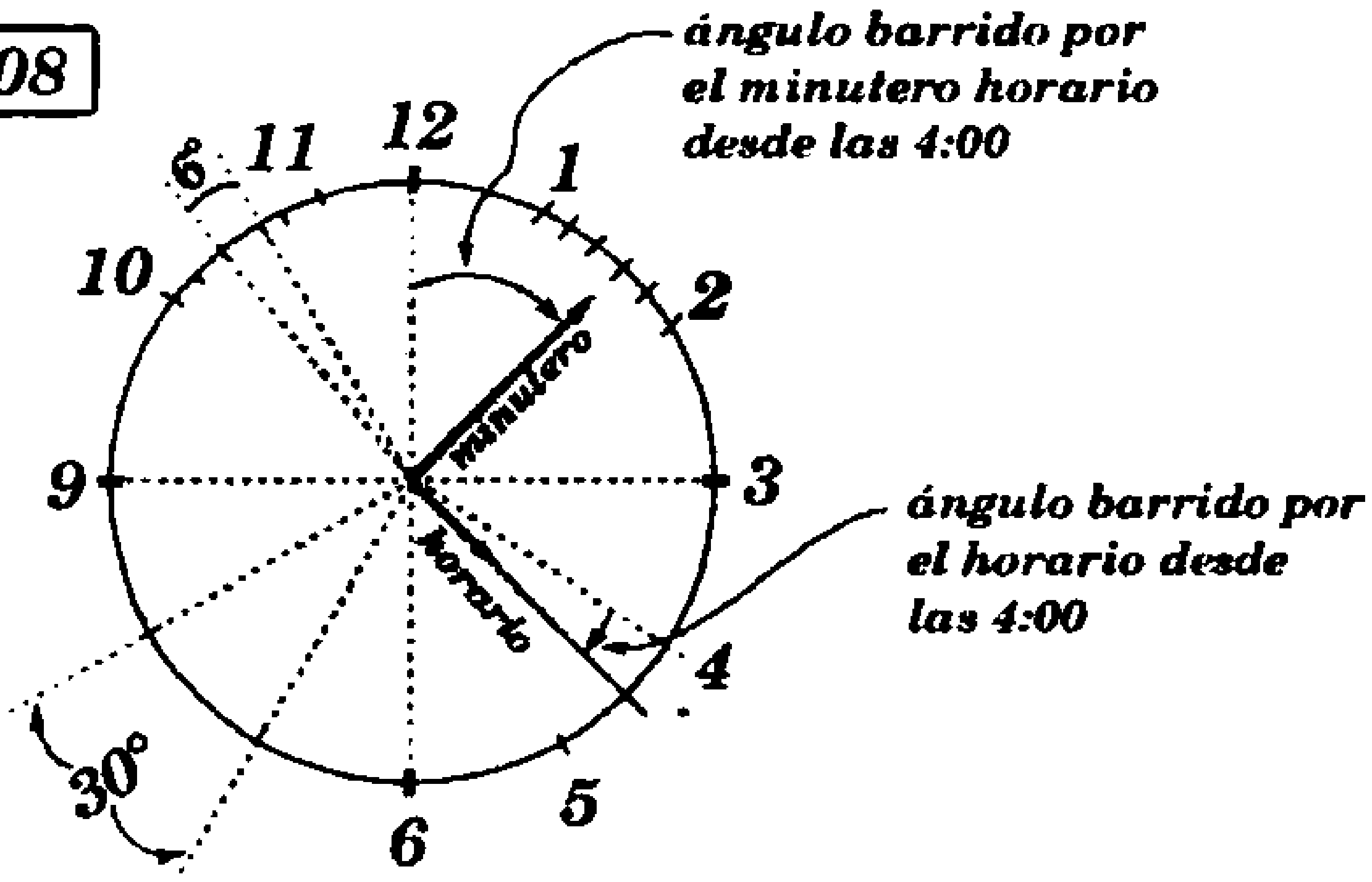
Se observa a partir de las ***9***, el minutero ha hecho un recorrido de ***40*** minutos y el horario ha barrido un ángulo de ***20°***.

OBSERVACIÓN :

Sabemos que :

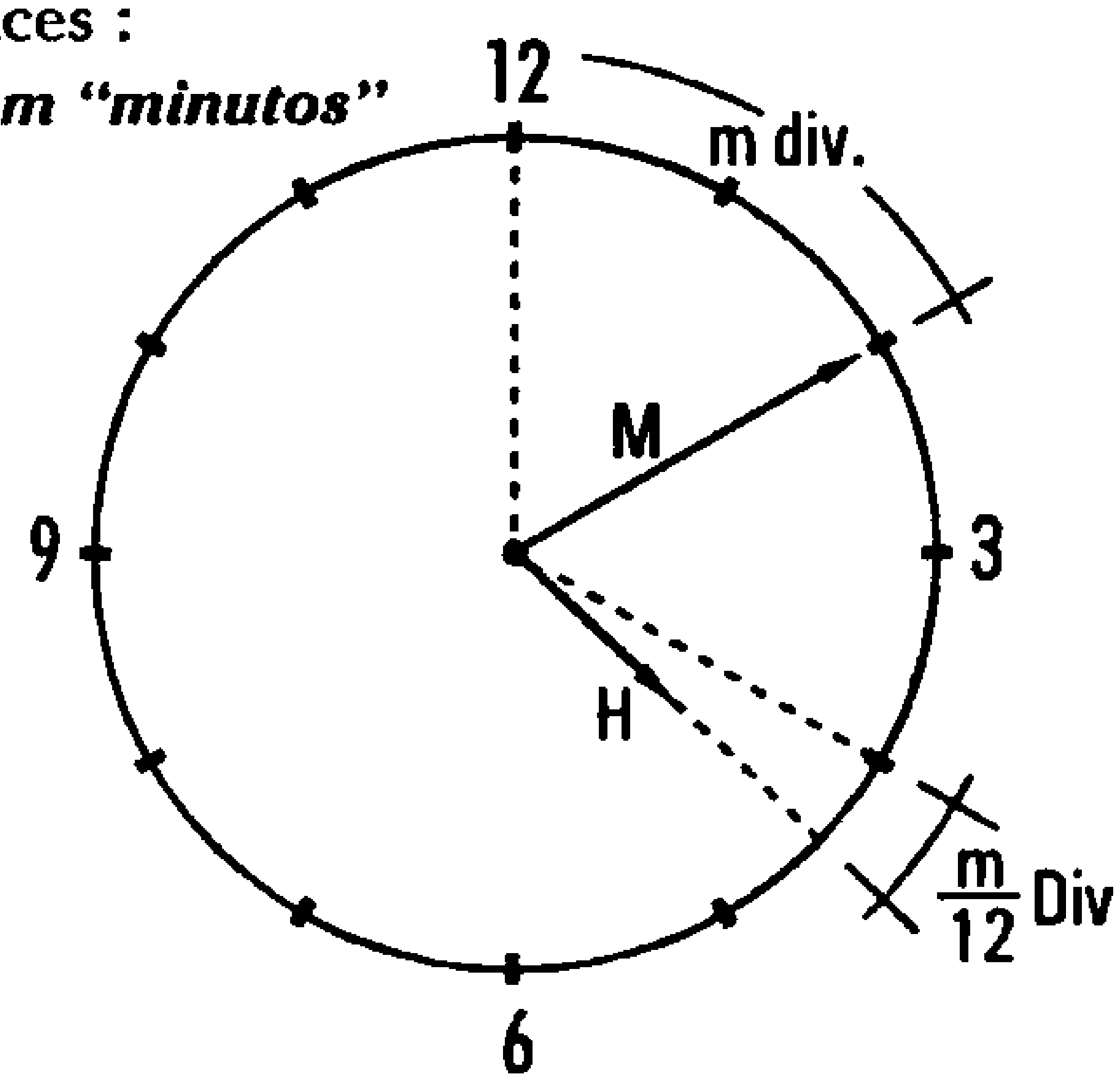
- la circunferencia de un reloj está dividido en ***12*** espacios separados por las marcas horarias.
- el espacio comprendido entre dos marcas horarias está dividido en ***5*** espacios que corresponden a los minutos.

$\boxed{4{:}08}$



• Se observa que son las ***4*** y algunos minutos más, entonces :

4 : m "minutos"



Ahora relacionemos el tiempo con el ángulo barrido por cada manecilla.

tiempo	desplazamiento del horario	desplazamiento del minutero
60min	30°	360°
2min	1°	12°
xmin	$(x/2)^\circ$	$(6x)^\circ$

(+30 ; ÷30 ; ÷30)

Note que el ángulo que avanza el horario es la mitad del tiempo en minutos ; y el ángulo que avanza el minutero es *6* veces el tiempo en minutos.

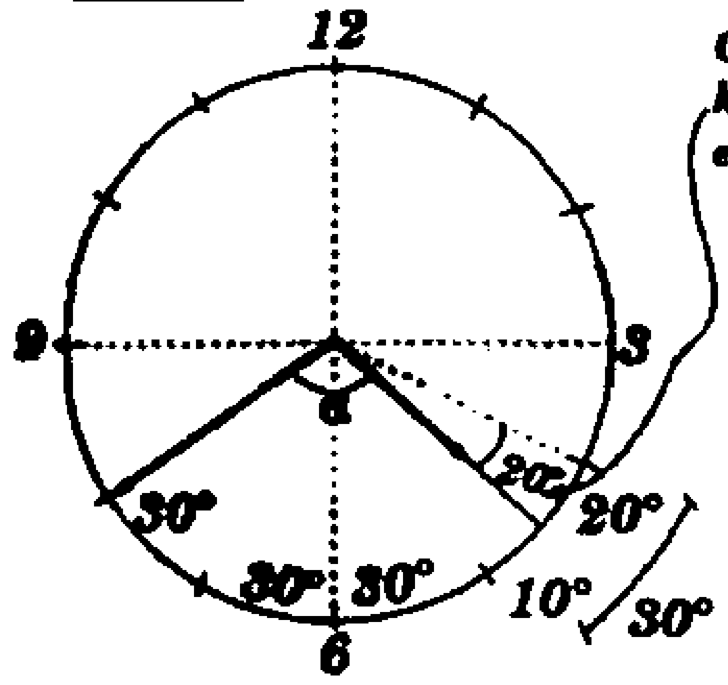
EIEMPLOS :

Calcule el menor ángulo que forman las manecillas de un reloj a las :

')4:40 *II)7:22* *III)11:13*

RESOLUCIÓN :

I) 4:40

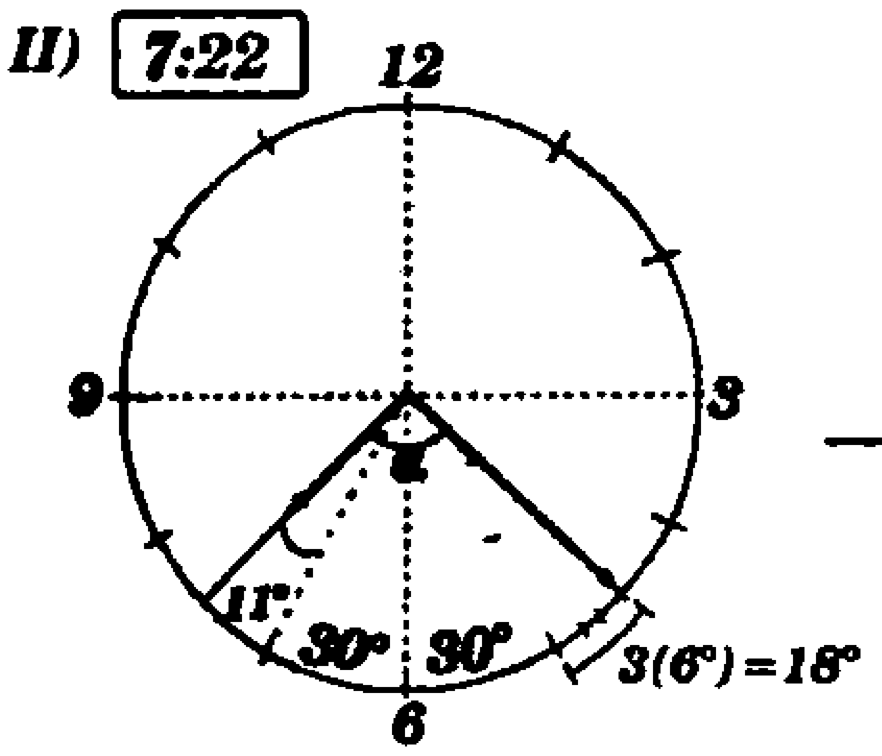


Como desde las 4:00 han pasado 40 min el horario avanzó

$\frac{40}{2} = 20^\circ$

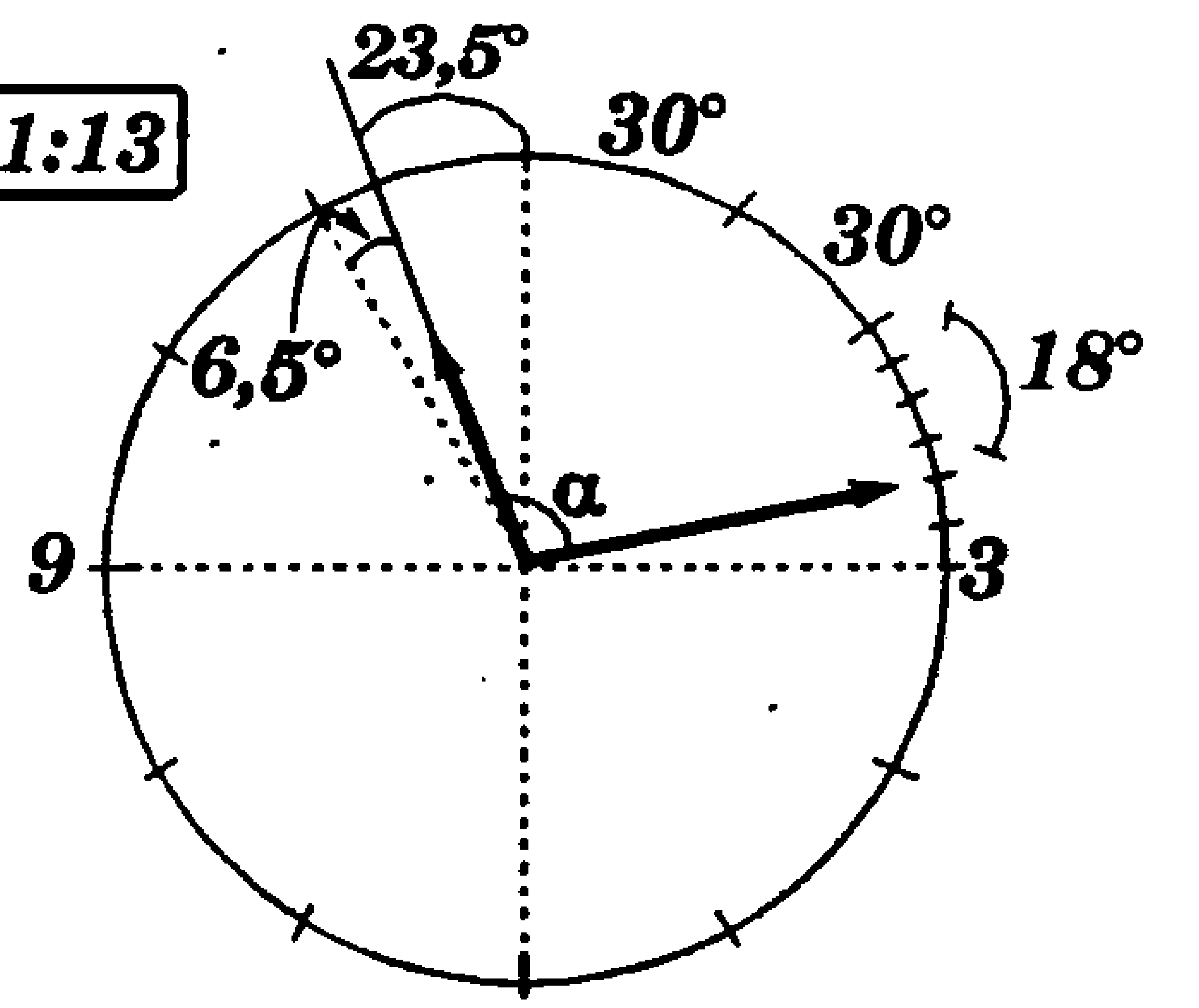
$\longrightarrow \alpha = 30^\circ+30^\circ+30^\circ+10^\circ = 100^\circ$

II) 7:22



$\longrightarrow \alpha = 11^\circ+30^\circ+30^\circ+18^\circ = 89^\circ$

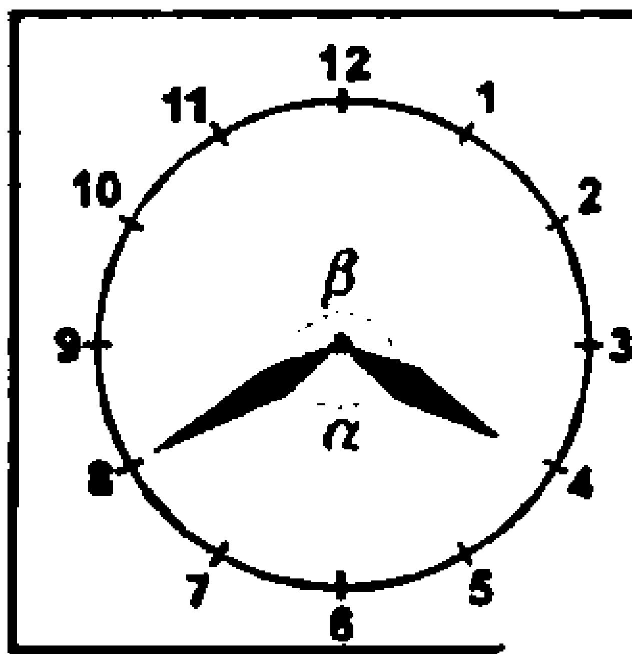
III) 11:13



$\Rightarrow \alpha = 23,5^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 18 = 101,5^\circ$

OBSERVACIONES :

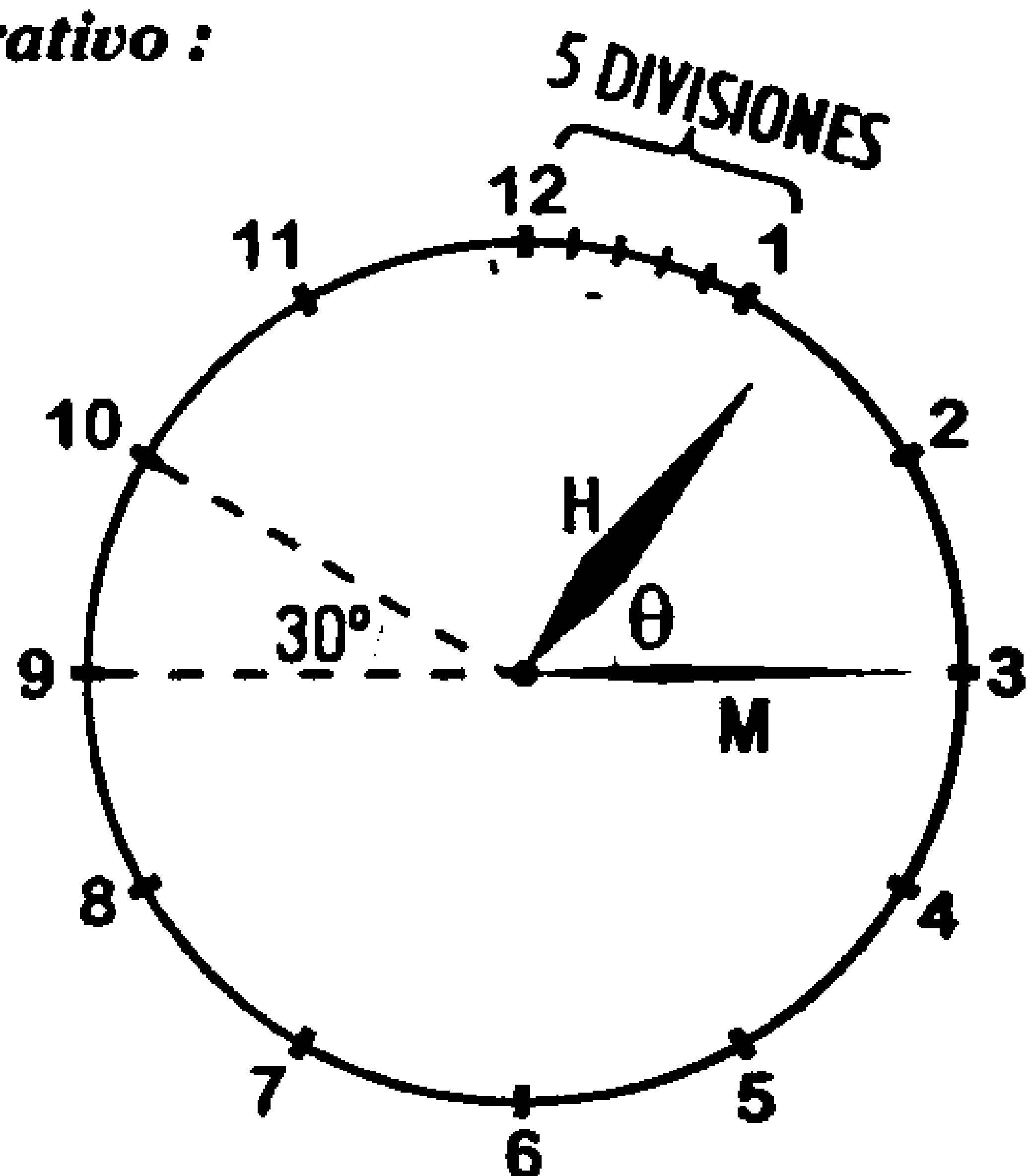
A una determinada hora, las Manecillasdeunre lojformandos ángulos:"α" y "β" (ver figura); convencionalmente el que se calcula es el menor ángulo (α). Pero si nos pidierancalcular elotro ángulo "β" bastará con recordar que : $\alpha+\beta = 360^\circ$.



Para calcular el ángulo que forman las manecillas de un reloj a una determinada hora o para calcular la hora conociendo el ángulo que forman las manecillas, debemos tomar como punto de partida la hora exacta mas próxima pero anterior a la hora indicada como dato

PROBLEMAS SOBRE ÁNGULO FORMADO ENTRE Y MINUTERO (FORMULA)

Ejemplo ilustrativo :



- La hora es : *1:15*
- *"H"* : Aguja horaria (Horario)

  H = 1 (hora de referencia)
- *"M"* : Aguja minutera (Minutero)

  M = 15
- "θ" : Ángulo formado por las agujas del reloj.

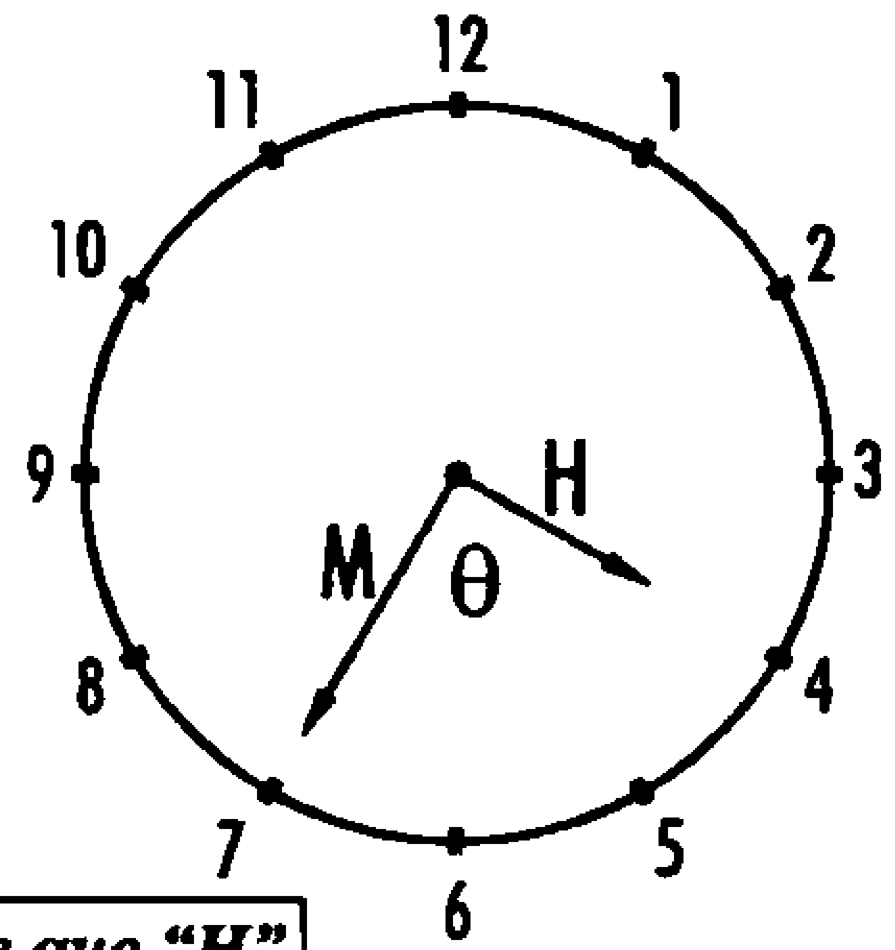
• El reloj tiene $12 \times 5 = 60$ divisiones que equivalen para el minutero 60 minutos ó a 360° (1 vuelta).

60 divisiones < > 60 *min* < > 360°

1 división = 1 min = 6° [PARA EL MINUTERO]

Cálculo de "θ"

1er caso : Cuando el minutero adelanta al horario :



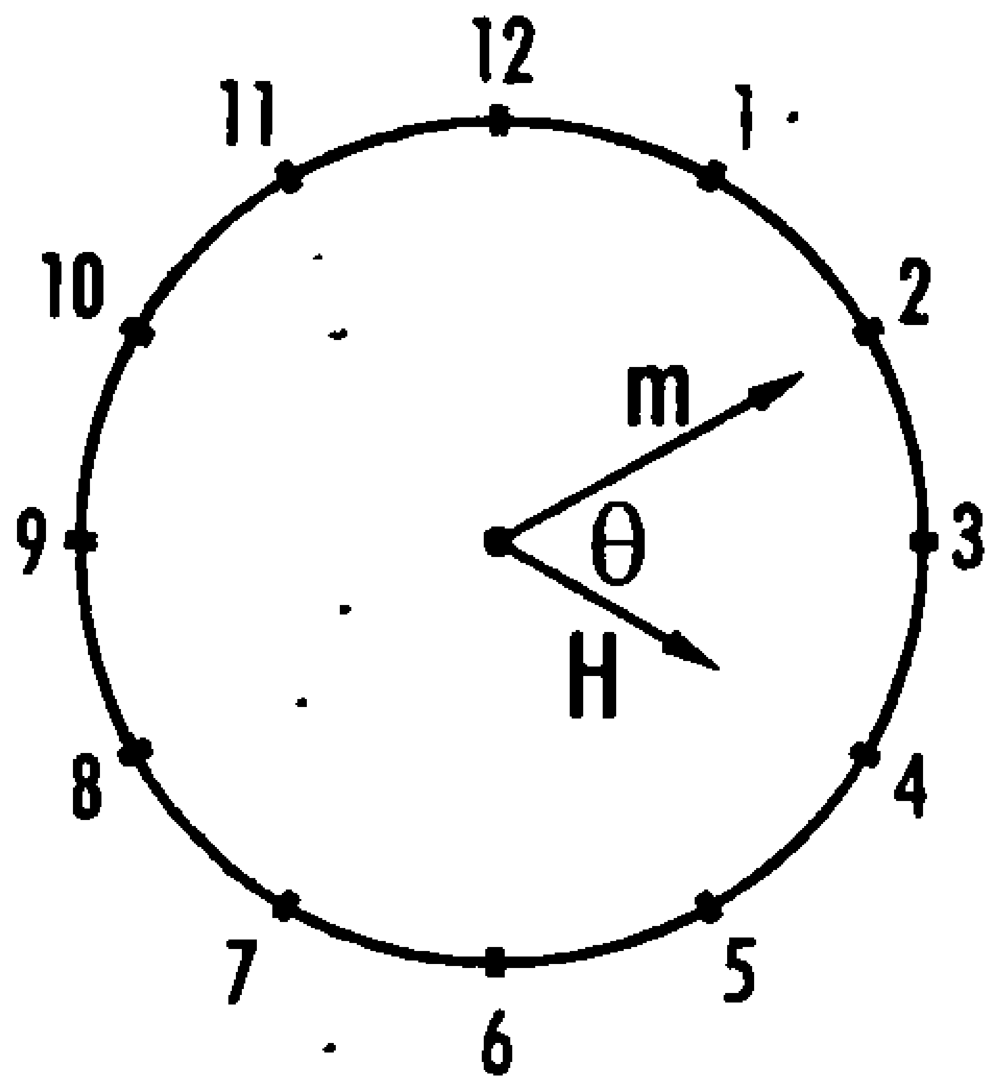
"M" antes que "H"

$$\theta = \frac{11}{2}m - 30H$$

la hora es : *3:35*

En el ejemplo : $H = 3$ y $m = 35$

2do caso : Cuando el horario adelanta al minutero



La hora es 4:30

"H" antes que "m"

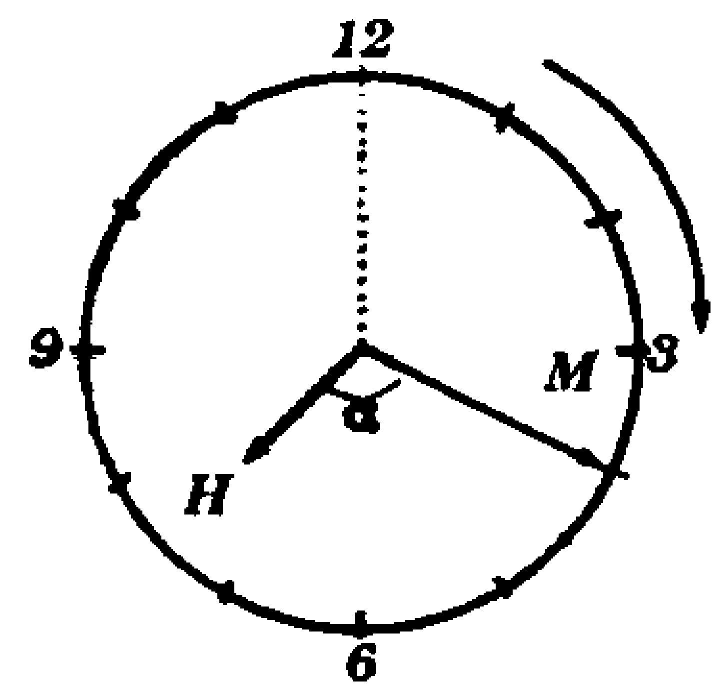
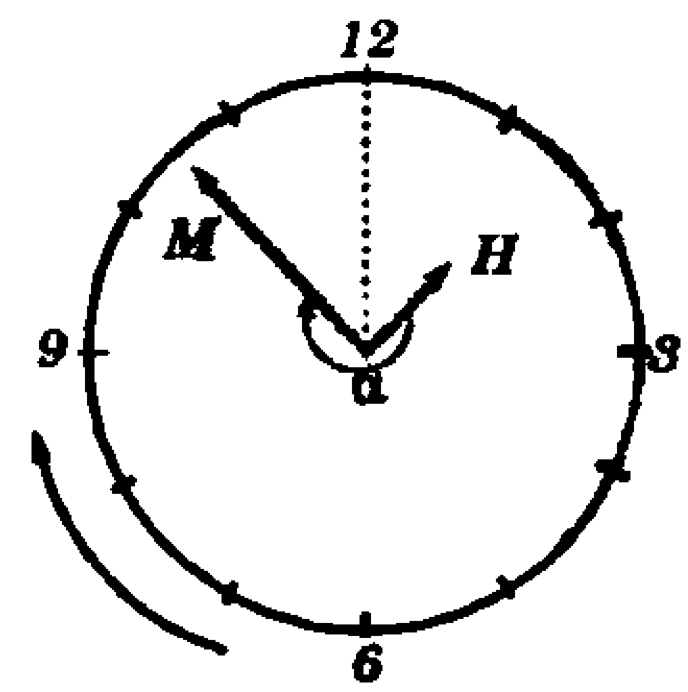
$$\theta = 30H - \frac{11}{2}m$$

En el ejemplo : $H = 4$ y $m = 10$

$$\Rightarrow \theta = 30(4) - \frac{11}{2}(10) = 65^\circ$$

¡ RESUMEN !

En general si son las $H: M$ el ángulo entre las manecillas se calcula así :

CASO I	CASO II
Cuando el horario al minutero	*Cuando el minutero adelanta al horario*
	
$\alpha = 30H - \frac{11}{2}M$	$\alpha = \frac{11}{2}M - 30H$

- Por convención : *12h = 0h* .
- El ángulo α nunca corta la marca de las *12* .
- En el caso *1* el horario adelanta al minutero porque está más cerca de la marca de las *12* .

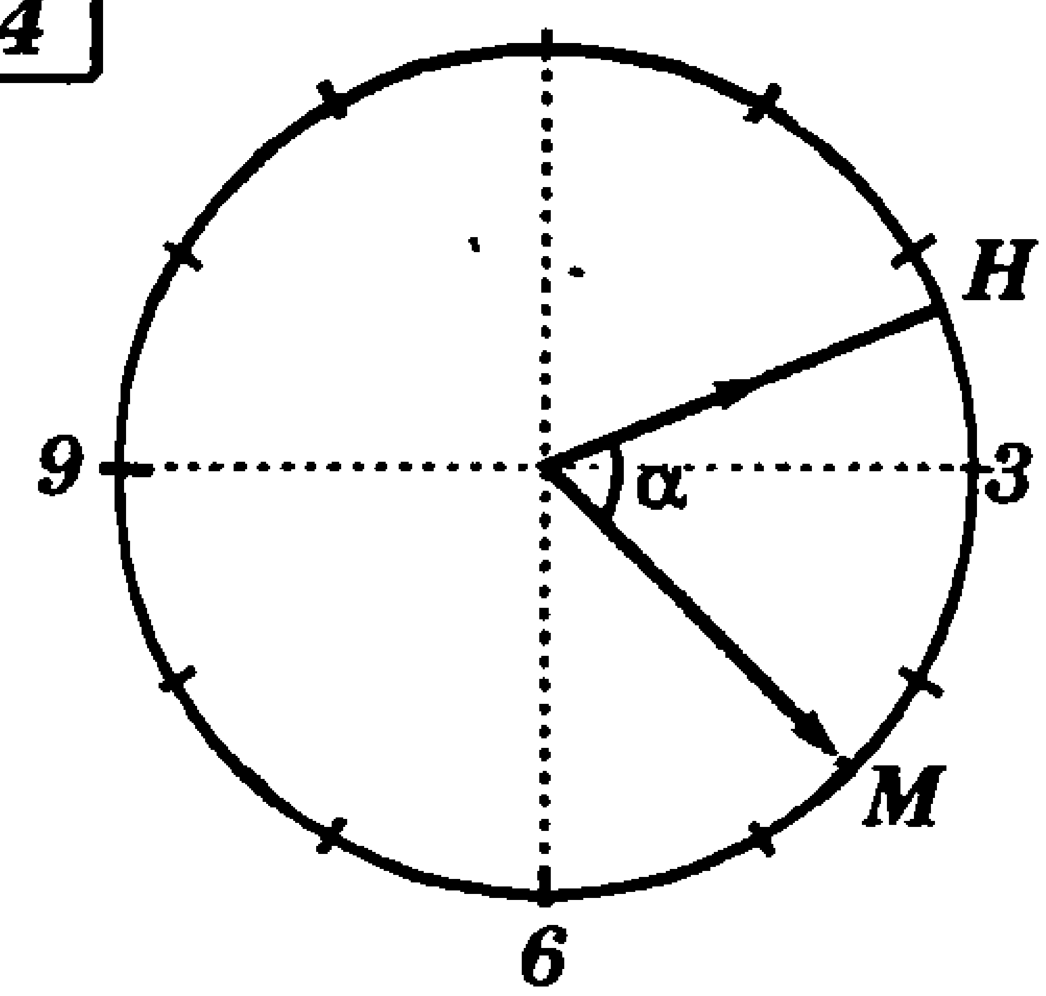
EJEMPLO :

Calcule el menor ángulo que forman las manecillas del reloj a las :

I)2:24am *II)12:54 pm* *III)21h 36 min*

RESOLUCIÓN :

I) **2:24**



El minutero adelanta

$H=2$; $M=24$

$$a = \frac{11}{2}(24) - 30\ (2) = 72^\circ$$

⟹ El menor ángulo es 72°

EJEMPLO :

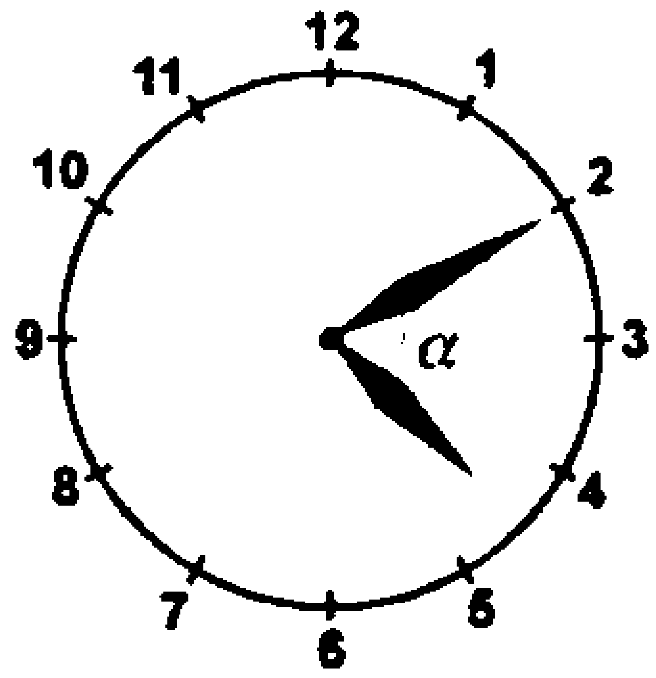
¿Qué ángulo forman el horario y el minutero a las *4:10*?

RESOLUCIÓN :

$H = 4 \quad m = 10$

$\Rightarrow \alpha = 30(4) - \frac{11}{2}(10)$

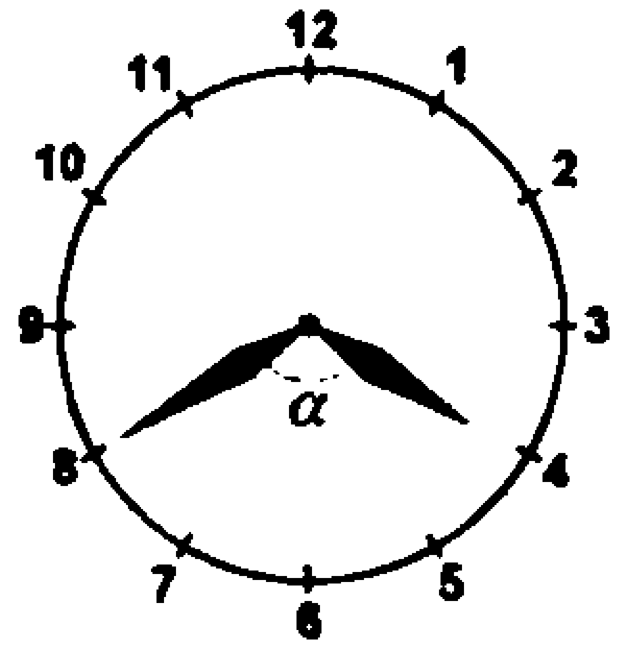
$\Rightarrow \alpha = 65°$



EJEMPLO :

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj, a las ***4:40***?

RESOLUCIÓN :



$H = 4 \quad m = 40$

$\Rightarrow \alpha = \frac{11}{2}(40) - 30(4)$

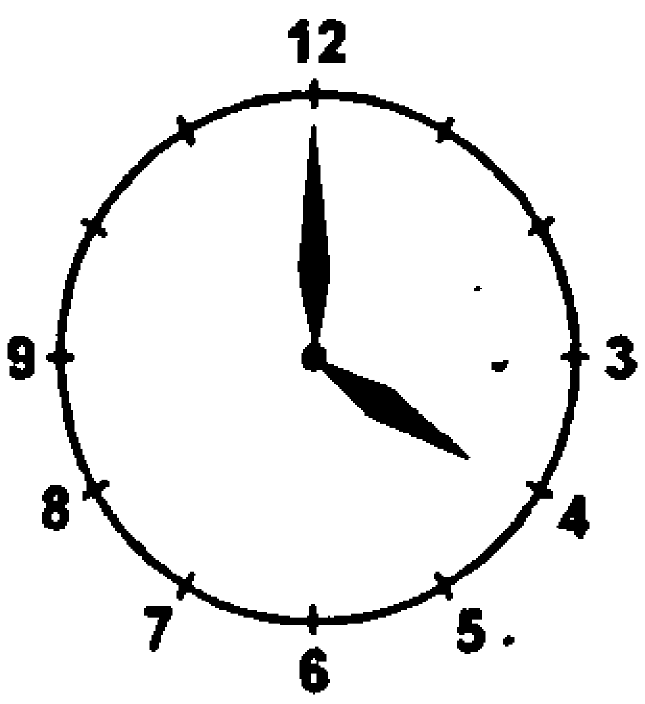
$\alpha = 100°$

OTRO MÉTODO :

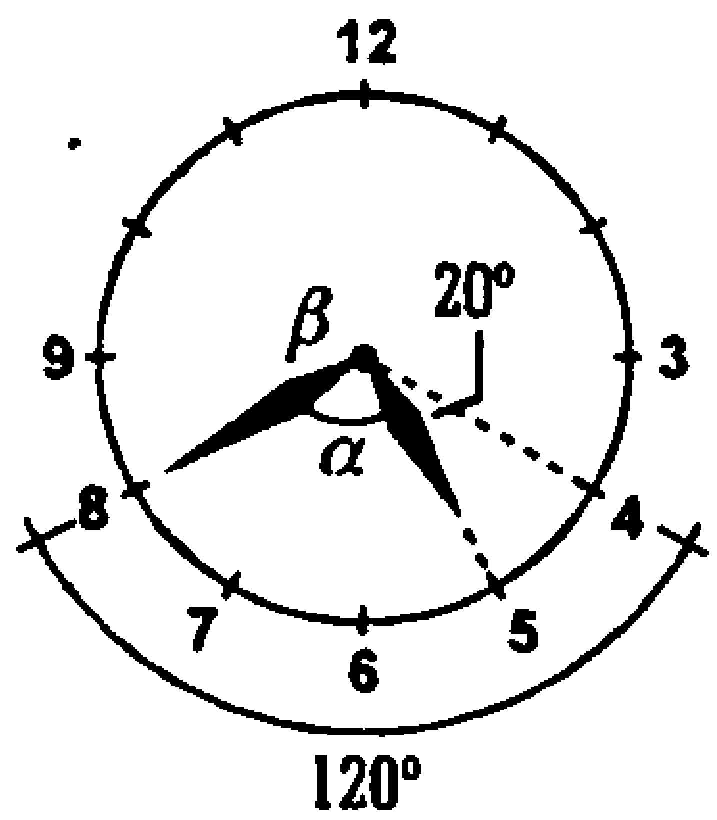
Desde las ***4:00*** hasta las ***4:40*** han transcurrido ***40 min***. Esto quiere decir que el minutero ha recorrido ***40 min***, entonces el horario ha recorrido $\frac{40}{2} = 20°$ (ver fig.)

Recuerda también que entre ***2*** marcas horarias hay ***30°***.

Tomamos como punto de partida las 4:00



4:40



* Del gráfico :

$\alpha + 20° = 120° \rightarrow \alpha = 100°$

PROBLEMAS SOBRE CALENDARIOS

Todos los calendarios están basados en los movimientos de los astros , principalmente el sol , la tierra y la luna.

A lo largo de la historia las diferentes civilizaciones han propuesto distintas soluciones al problema del cómputo , del tiempo , viéndose obligadas siempre a establecer mecanismos de corrección. Según el predominio de Uno u otro ciclo los calendarios se pueden clasificar en lunares , solares y lunisolares.

En los problemas a tratar debemos tener a consideración los años bisiestos , los cuales son todos aquellos cuyas dos últimas cifras dan un número múltiplo de ***4***.

$1932 \rightarrow 32 \rightarrow \overset{o}{4}$ ***si es bisiesto***

$1942 \rightarrow 42 \rightarrow \overset{o}{4}$ ***no es bisiesto***

Además en aquellos años que terminan en ***2*** ceros sólo será bisiesto si es que es múltiplo de ***400.***

EJEMPLO 1 :

1900 $\Rightarrow$ no fue bisiesto

Considerar el número de días que trae cada mes :

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
31	28 ó 29	31	30	31	30	31

AÑO NORMAL (28) — AÑO BISIESTO : (29) AÑO MULTIPLO DE 4.

AGOSTO	SETIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE
31	30	31	30	31

- Un día se vuelve a repetir cada una semana (***7*** días).

+7 +7 "7k" días

Lunes Lunes Lunes . . . . Lunes

1 8 15

Sumamos un múltiplo de 7 días

EJEMPLO 2 :

Si el ***1*** de enero de ***1942*** cae Jueves ¿Qué día caerá el ***1*** de mayo del mismo año?

RESOLUCIÓN :

Del ***1*** de Enero al ***1*** de Mayo habrán transcurrido ***120*** días ***120 días*** $= \dot{7} + 1$, eso quiere decir que caerá un día después que Jueves, o sea Viernes.

EJEMPLO 3 :

En un determinado mes existen ***5*** viernes, ***5*** sábados y ***5*** domingos, ¿Qué día será el ***26*** de dicho mes?

RESOLUCIÓN :

* Consideremos un calendario :

L	M	K	J	V	S	D
				(1)	*	*
*	*	*	*	(8)	*	*
*	*	*	*	(15)	*	*
*	*	*	*	(22)	*	*
*	(26)	*	*	*	*	*

Necesariamente debe saber 4 semanas

* Del esquema se deduce que se trata de un mes de ***31*** días y que el ***26*** caerá martes.

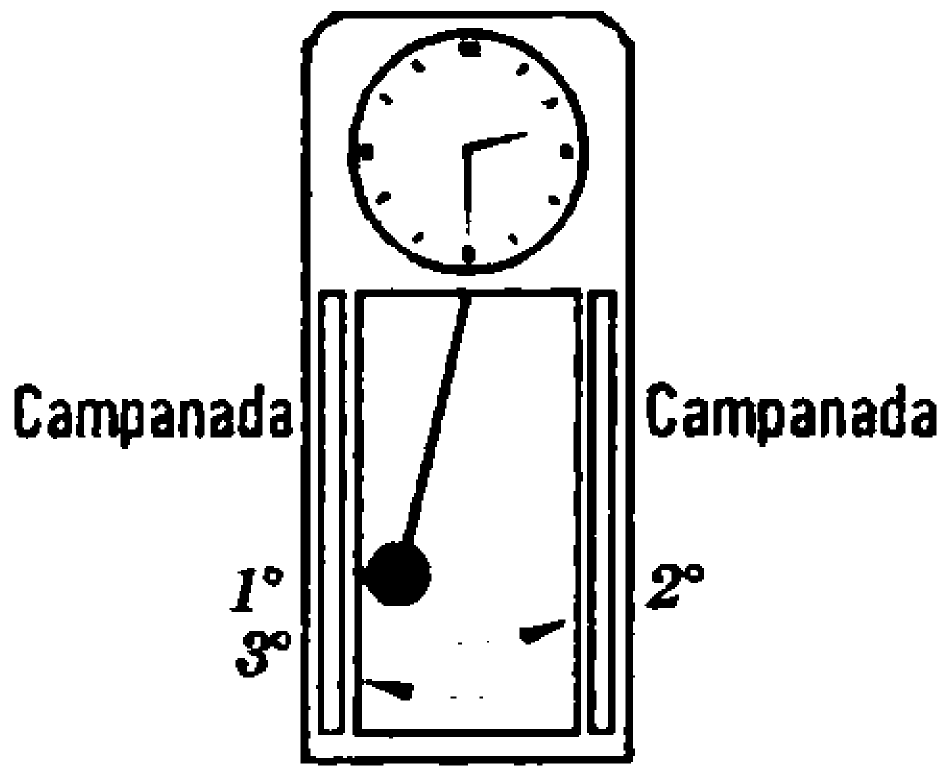
PROBLEMAS RESUELTOS

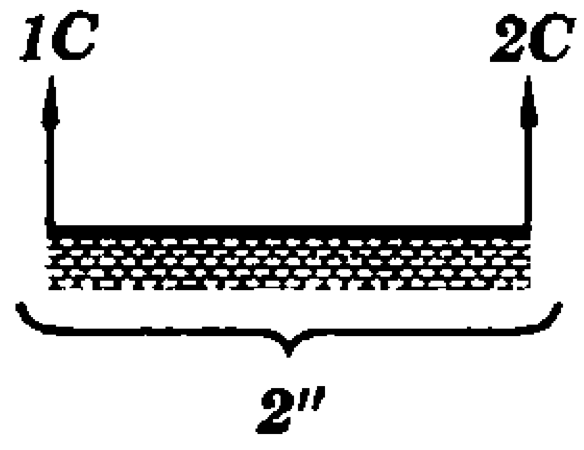
PROBLEMA 01 :

Un reloj da **2** campanadas en **2** segundos ¿En cuántos segundos dará **3** campanadas?

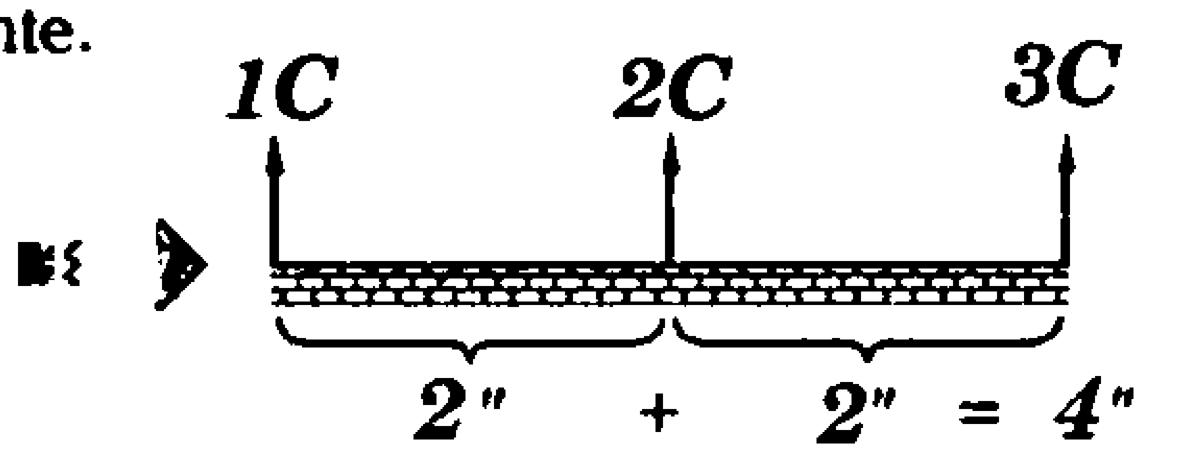
RESOLUCIÓN :

* Se debe considerar, que el tiempo se empieza a contabilizar a partir de la primera campanada :



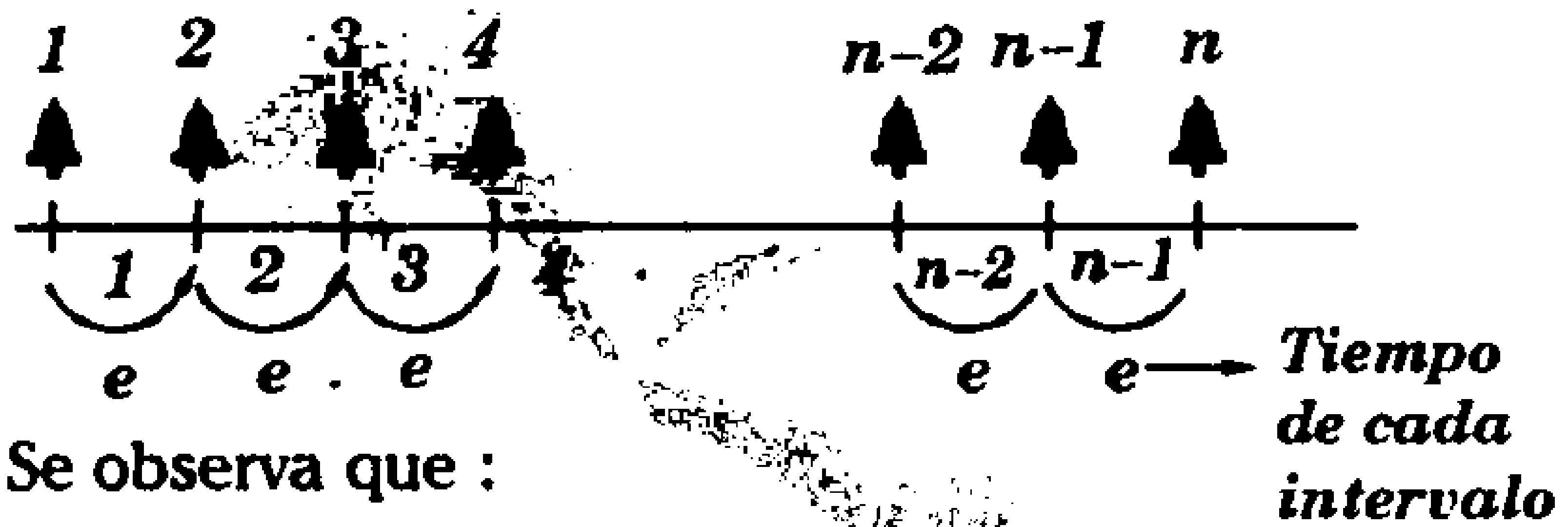


* Es decir lo que interesa es el intervalo de tiempo de una campanada a la siguiente, el cual debe ser constante.



!RECORDEMOS ¡

Número de campanadas

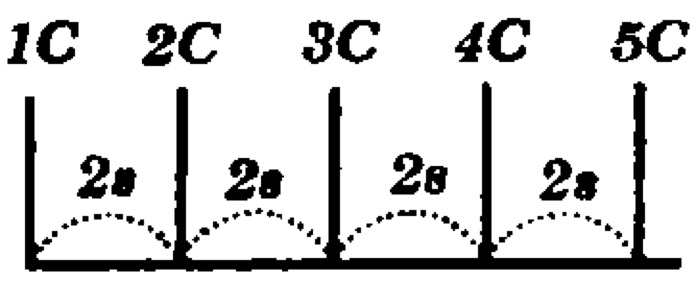


Se observa que :

| # CAMPANADAS = # INTERVALOS + 1 |

6 | # DE INTERVALOS = # DE CAMPANADAS – 1 |

EJEMPLO :



$$T = 4 \times 2 = 8s$$

$$\text{TIEMPO TOTAL} = \left(\#\ \text{DE INTERVALOS}\right) \times \left(\text{TIEMPO DE INTERVALO}\right)$$

PROBLEMA 02 :

Una alarma suena **5** veces por segundo, ¿cuántas veces sonará en **1** minuto?

A)300 *B)240* *C)301* *D)241* *E)299*

RESOLUCIÓN :

N : Número de veces que sonará

$N-1$: Número de intervalos

e : Intervalo entre sonada y sonada

◆ Luego para **5** sonadas habrán

$(5-1)=4$ intervalos $<>1\,s$

$$4e<>1s$$

$$e<>\frac{1s}{4}$$

Pero: $\text{Tiempo total} = \left[\#\ \text{de Intervalos}\right] \times \left[\text{Tiempo de cada Interalo}\right]$

$$1\,min = 60s = (N-1)\times\frac{1}{4}s \Rightarrow 241 = N$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Si un campanario tarda $\frac{15}{2}$ segundos en tocar **16** campanadas. Cuántas campanadas tocará en **2m** segundos?

A)4m *B)4m + 1* *C)m + 2* *D)m + 3* *E)m – 1*

RESOLUCIÓN:

# de intervalos	Tiempo
16 - 1	15/2
x - 1	2 m

$$(x-1)\frac{15}{2} = 15\times 2m \Rightarrow x = 4m+1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Un campanario toca **3** campanadas en **2s**. ¿Cuánto tiempo demora en tocar **9** campanadas?

A)7 seg. *B)8 seg.* *C)6seg.* *D)5 seg.* *E)9 seg.*

RESOLUCIÓN :

NÚMERO DE CAMPANADAS	NÚMERO DE INTERVALOS	TIEMPO TOTAL
3	3 – 1	2s
9	9 – 1	x

Aplicando una regla de tres. Se Tendrá:

$$2\times x = 8\times 2s$$

$$\Rightarrow x = 8s$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

"Las ovejas saltan periódicamente sobre una cerca", si **4** ovejas saltan en **4** minutos, ¿cuántas ovejas saltan en **1** hora?

A)45 B)16 C)36 D)240 E)46

RESOLUCIÓN :

Número de Ovejas	Número de Intervalos	Tiempo Total
4 $\xrightarrow{-1}$	3	4 min
x	$x-1$	60 min

* Por regla tres, se obtendra :

$$3\times 60 = 4(x-1)$$

$$\Rightarrow 45 = x-1 \Rightarrow 46 = x$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Tysson da $(m-1)$ golpes en $(m-2)^2$ segundos. ¿Cuántos segundos tardará en dar $(m+3)$ golpes?

A) m^2+4 **B)** m^2-4 **C)** m^2

RESOLUCIÓN :

NÚMERO DE GOLPES	NÚMERO DE INTERVALOS	TIEMPO TOTAL
$m-1 \xrightarrow{-1}$	$m-2$	$(m-2)^2$
$m+3$	$m+2$	x

$$x(m-2)=(m+2)(m-2)^2$$

$$x=(m+2)(m-2)$$

$$x=m^2-4$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Un boxeador demora "s" segundos en dar "G" golpes. ¿Cuánto tiempo demora en dar "G^2" golpes?

A) $(G+1)S$ **B)** S **C)** $(G-1)S$ **D)** S^2 **E)** SG

RESOLUCIÓN :

# de golpes	# de Intervalos	Tiempo
G	$G-1$	S
G^2	G^2-1	x

* Por Regla de Tres :

$$x=\frac{(G^2-1)S}{G-1}=\frac{(G+1)\cancel{(G-1)}S}{\cancel{G-1}}=(G+1)S$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

Un reloj señala la hora con igual número de campanadas. Para indicar las **6 a.m.** demoró **15** segundos. ¿Cuánto tiempo empleará para indicar las **8 a.m.**?

A)30 s B)21 s C)15 s D)24 s E)38 s

RESOLUCIÓN :

Hora señalada	Campanadas	Intervalos	Tiempo
6 a.m.	6	5	15 s
8 a.m	8	7	x

* Por regla de tres : $x=\dfrac{7\times 15\,s}{5}=21s$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

El campanario de una iglesia estuvo tocando durante **21** segundos si se escucharon tantas campanadas como **10** veces el tiempo que hay entre campanada y campanada. ¿Cuánto tiempo empleará este campanario para tocar **7** campanadas?

A)7 s B)9 s C)8 s D)6 s E)10 s

RESOLUCIÓN :

de campanadas $=10e$

Donde: e : Intervalo de tiempo entre campanada

de intervalos : $10e-1$

Pero :

$$\text{TIEMPO TOTAL}=\left[\begin{matrix}\text{\# DE}\\ \text{INETERVALO}\end{matrix}\right]\times\left[\begin{matrix}\text{TIEMPO DE}\\ \text{CADA INTERVALO}\end{matrix}\right]$$

$$21=(10e-1)e$$

$$\Rightarrow 10e^2-e-21=0$$

$$\Rightarrow (2e-3)(5e+7)=0 \Rightarrow e=\frac{3}{2}s$$

* Luego para **7** campanadas habrán :

6 intervalos $<>6e<>6\times\frac{3}{2}s=9s$

RPTA : "B

PROBLEMA 10 :

Un reloj da **4** campanadas en **6** segundos. ¿En cuántos segundos dará **8** campanadas?

A)6s B)12 s C)10 s D)12 s E)14 s

RESOLUCIÓN :

Campanas	Intervalos	Tiempo
4	3 $\longrightarrow$	15s
8	7 $\longrightarrow$	x

* Por regla de **3** simple directa : $x=\dfrac{7\times 6}{3}=14s$

RPTA : "E"

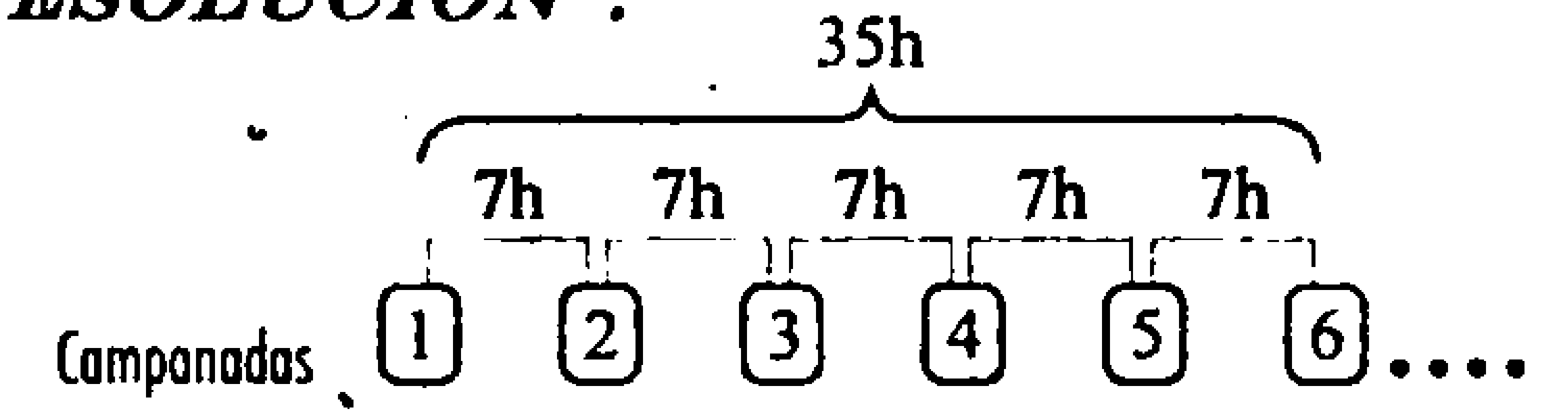
PROBLEMA 11 :

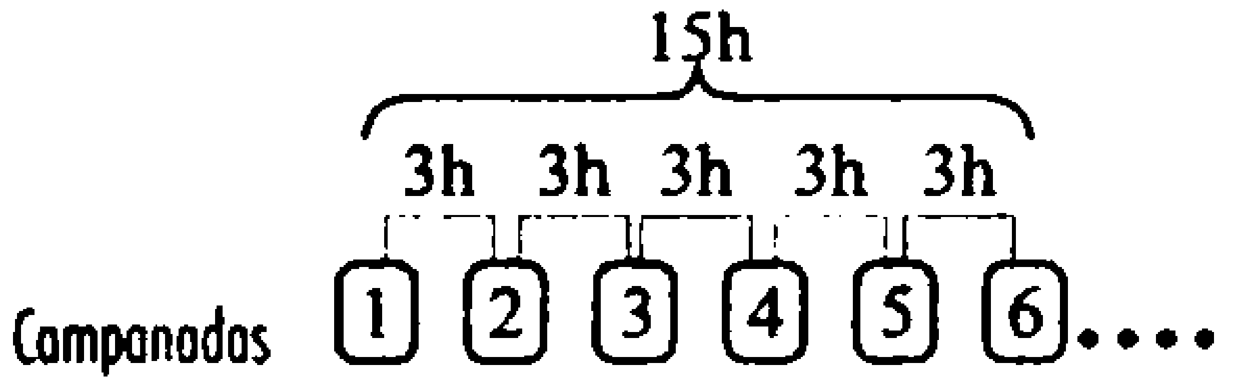
Dos campanas **A** y **B** empiezan tocando simultáneamente y cada una toca a intervalos

iguales, además *A* da *6* campanadas en *35* horas y *B* da *6* en *15* horas ¿Cuántas horas transcurren hasta que vuelven a tocar simultáneamente?

A)12 *B)21* *C)18* *D)36* *E)24*

RESOLUCIÓN :





* Para que vuelvan a tocar simultáneamente, es necesario encontrar un tiempo «*t*» en horas inmediatamente que contenga exactamente a *7h* y *3h*.

* Es decir : $t = MCM(7;3) = 21\ h$

RPTA : "B"

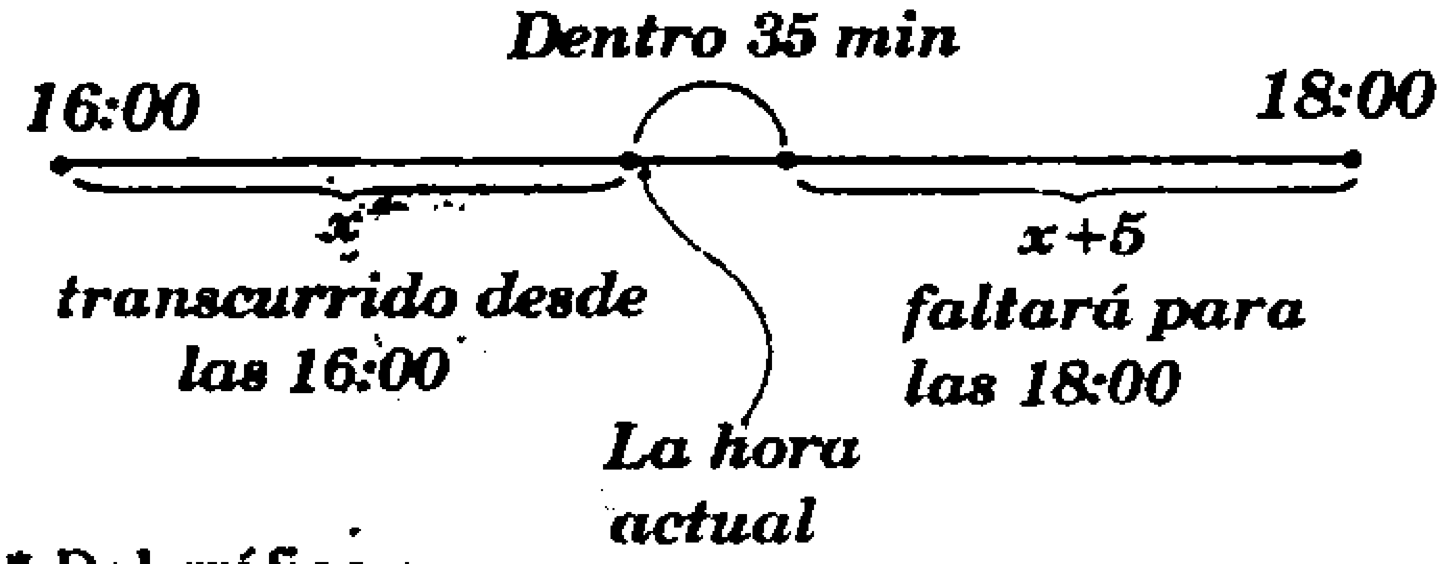
PROBLEMA 12 :

¿Qué hora es?, si dentro de *35* minutos faltarán para las *18h ; 5* minutos más que los minutos transcurridos desde las *16* horas .

RESOLUCIÓN :

* Desde las *16:00* hasta las *18:00* son *2h<>120min.*

* Veamos el gráfico :



* Del gráfico :

$$(x+35)+(x+5)=120 \Rightarrow x=40$$

* Luego la hora es : *16:00+x min.* ⇒ la hora *16:40*

Adelantos y atrasos

$$\boxed{Hora\cdot real = H.marcada - adelanto}$$

$$\boxed{Hora\ \ real = H.marcada + atraso}$$

PROBLEMA 13 :

Hace ya *45* horas que un reloj se adelanta *3* minutos cada *5* horas. ¿Qué hora señalará el reloj cuando sean en realidad las *8h 50 min*?

RESOLUCIÓN :

* Si en *5h* ⟶ se adelantó *3* min

en *45 h* ⟶ se adelantará *x* min.

* Por regla de tres simple :

$$x = \frac{45h \times 3\,min}{5h} = 27\,min$$

* El reloj estará adelantado *27* min.

* Pero : $\boxed{Hora\ marcada = H.real + adelanto}$

⇒ *H.* marcada = *8 h 50 min* + *27* min

= *8 h + 77 min = 9h : 17 min*

⇒ marcará *9h :17min*

PROBLEMA 14 :

Un reloj indica las horas con igual número de campanadas, las medias horas dando *4* campanadas e indica los cuartos de hora con *1* campanada. ¿Cuántas campanadas dará en un día entero?

A)200 *B)300* *C)1500*

RESOLUCIÓN :

◆ Las campanadas por las horas serán :

$$\overbrace{1+2+3+...+12}^{MAÑANA} + \overbrace{1+2+3+...+12}^{TARDE}$$

$$= \frac{12\times 13}{2} + \frac{12\times 13}{2} = 132$$

◆ Las campanadas de pa media horas serán : $24\times 4=144$

◆ Por los cuartos de hora, darán $24\times 1=24$ campanadas

◆ Total de campanadas : $132+144+24=300$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Un reloj anuncia las horas con un número de campanadas igual a las horas que está indicando, para anunciar los cuartos de hora da una campanada y para anunciar las medias horas da *2* campanadas, pero el reloj se malogro a las *1:00 a.m.* con lo cual deja de dar una campanada en todos los casos. ¿Cuantas campanadas a dado el reloj desde las *10 horas* hasta las *12 horas 15* minutos?

A)37 *B)32* *C)82* *D)36* *E)45*

RESOLUCIÓN :

	HORAS	# CAMPANADAS
BIEN	10:00	10
	10:15	1
	10:30	2
	10:45	1
MALOGRADO	11:00	10
	11:15	0
	11:30	1
	11:45	0
	12:00	11
	12:15	0

Total de campanas : 36

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Un reloj marca la hora exacta un día a las *6pm*, suponiendo que se adelanta *3 min.* cada *12* horas a partir de dicha hora , ¿cuánto tiempo pasará para que marque nuevamente la hora exacta?

RESOLUCIÓN :

* Para que el reloj vuelva a marcar la hora exacta tendría que adelantarse *12* horas , es decir , $12 \times 60 = 720$ *min.*
* Entonces :

Si en *12h* ⟶ se adelanta *3* min

en *x h* ⟶ se adelanta *720* min

* Por regla de tres simple :

$$x = \frac{12h \times 720\,min}{3\,min} = 2880 <> 120\ días$$

⇒ marcará nuevamente la hora exacta dentro de *120* días.

PROBLEMA 17 :

Un reloj se adelanta *36* minutos cada *2* horas y otro se atrasa *30* minutos cada *5* horas ¿Dentro de cuántos días volverán a marcar la misma hora?

A)12 B)1 C)30 D)$1\frac{1}{4}$ E)$2\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Se sincronizan ambos a *1* hora.

Adelanto : 36' <> 2H → 18' <> 1H

Atrazo : 30' <> 5H → 6' <> 1H

Alejamiento : 18' + 6' <> 1H

* Para que vuelvan a marcar la misma hora, deben alejarse *12*h ó ½ día, luego por regla de tres.

24' ⟶ 1H

½ Día ⟶ x

⟶ $x = 1\frac{1}{4}$ Día

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Un reloj se atrasa *3* minutos cada hora y al cabo de *6* horas, luego de sincronizarlo con la hora correcta marca las *8:17*. ¿Cuál será la hora correcta?

A)8:25 B)8:42 C)8:35 D)9:12 E)10:01

RESOLUCIÓN :

En 1 hora $\xrightarrow{se\ atrasa}$ 3 minutos

En 6 horas $\xrightarrow{se\ atrasará}$ x

* Por regla de *3* simple directa :

$$x = \frac{6 \times 3\,min}{1} = 18\,min\ (Atraso\ total)$$

⇒ Hora correcta (Real) = 8:17 + 18 = 8:35

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Hace ya *90* horas que un reloj se adelanta *2* minutos cada *5* horas ¿Qué hora señalará el reloj cuando sean en realidad las *6:18*?

A)6:54 B)7:02 C)9:30 D)9:32 E)7:18

RESOLUCIÓN :

Adelanta 2 min —— En 5 horas

x —— En 90 horas

$$x = \frac{2 \times 90}{5} = 36\,min$$

⇒ Hora adelantada = *6:18 + 36 min = 6:54*

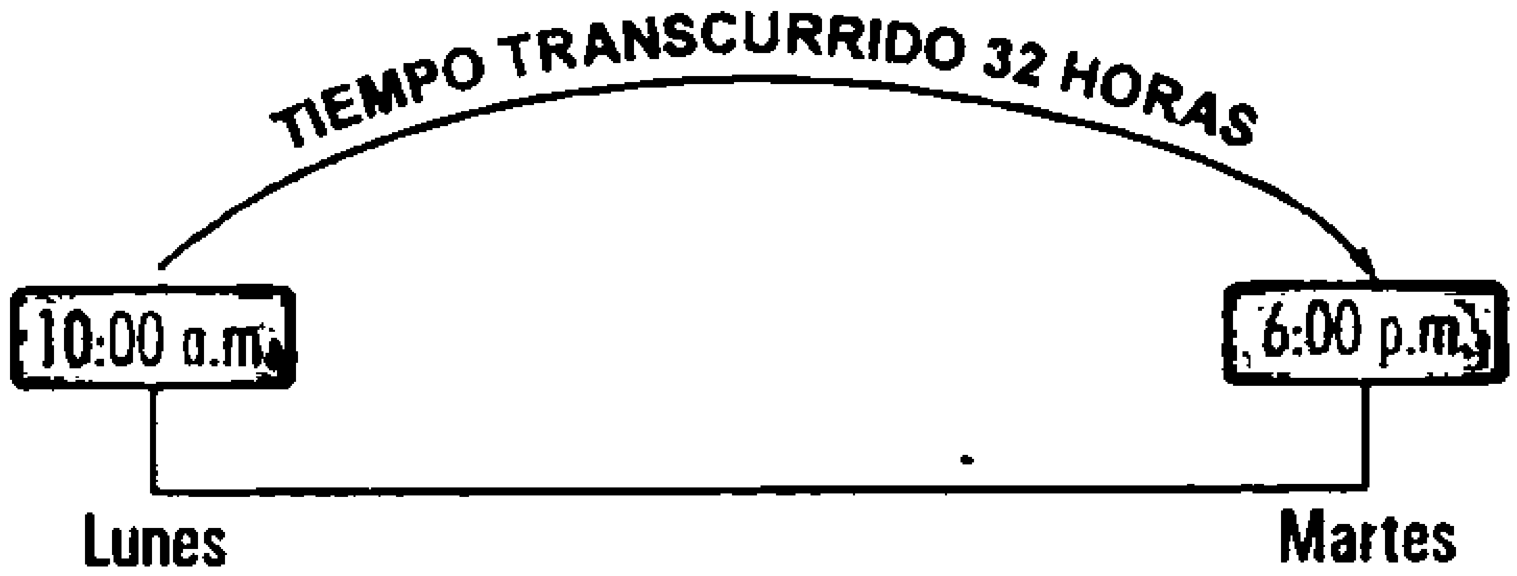
RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

A partir de las *10 am.* de hoy Lunes un reloj empieza a atrasarse por cada hora *3* minutos. ¿Qué hora estará marcando el día martes a las *6 pm.*?

A)3:26 pm B)4:24 C)5:06
D)3:56 E)4:21

RESOLUCIÓN :



* Se observa que ha transcurrido *32* horas, entonces en todo este tiempo se habrá atrasado *32×3=96* minutos, o *1* hora y *36* minutos. Por lo tanto la hora que estará marcando el reloj será :

6 pm – 1 H 36 min = 4:24 pm.

RPTA : "B"

NOTA :

Puedes utilizar la regla de tres, para tener el atraso total :

Atraso	Tiempo Trascurrido
3min	1H
x	32 min

➤ $x = 3\,min \times 32 = 96\,min$

* Luego : **Hora Marcada = Hora real - Atraso total**

⇒ Hora marcada : *6:00 pm – 96 min = 4:24*

PROBLEMA 21 :

Un reloj se adelanta *1 min* por hora si empieza correctamente a las *12* del mediodía del día jueves *16* de setiembre. ¿Cuándo volverá a señalar la hora correcta?

A)10 de octubre *B)16 de octubre*
C)30de setiembre *D)4 de octubre*

RESOLUCIÓN :

Para que vuelva ha marcar la hora correcta debe adelantarse *12H o* su equivalente que es :

$$12(60\ min) = 720\ min$$

* Luego :

Tiempo Transcurrido	Adelanto Total
1 H	1 min
x	720 min

$\Rightarrow\ x = 720H$ ($\frac{720H}{24} = 30\ días$)

$x = 30\ días$

* Luego la fecha pedida será : *16* de setiembre + *30* días = *16* de Octubre

RPTA : "B"

NOTA :

* Una cosa es que ambos relojes coincidan con la hora marcada, y otra que marquen ambos la hora correcta (que en algunos casos pueden coincidir).

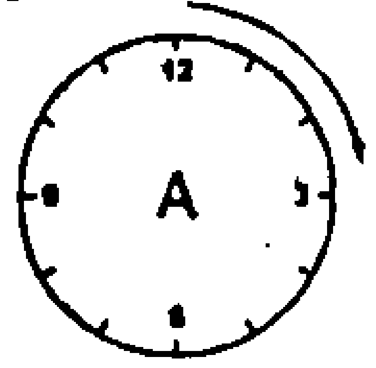
* Si uno hace girar en cualquier sentido las manecillas hasta que el horario complete una vuelta, retornando a la posición en que se encontraba verá que dicho reloj, continúa marcando la hora correcta.

PROBLEMA 22 :

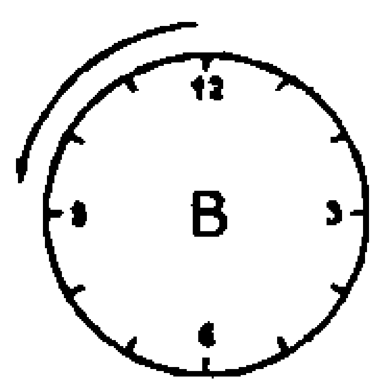
Un reloj adelanta *7 min* cada hora y otro se atrasa *13 min* cada hora ambos relojes se ponen a la hora a las *12* del día ¿Después de cuánto tiempo el primero estará alejado *30min* respecto al otro?

A)20 min *B)70 min* *C)90 min*
D)15 min *E)315 min*

RESOLUCIÓN :



Se adelanta : 7min. En 1h.



Se atrasa : 13min. En 1h.

◆ En *1* hora, se alejarán : *7 + 13 = 20 min,*

* Luego :

Tiempo Transcurrido	Alejamiento Total
1 Hora	20 min
x	30 min

$$\Rightarrow\ x = \frac{3}{2}\ Hora = 90\ min$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Un reloj se atrasa *3 min*, cada *2* horas y otro se adelanta *2 min* cada hora, si se malograron en el mismo instante. A partir de éste último momento ¿después de cuántos días volverán a marcar simultáneamente, la hora correcta?

A)20 *B)45* *C)120* *D)60* *E)95*

RESOLUCIÓN :

* Debemos encontrar un tiempo, en que ambos se distorsionen *12 H* o un múltiplo de *12 H*, pero primero hallemos por separado, el tiempo en que se adelantan o se atrasan *12 H* o *720 min?*

PRIMER RELOJ

Tiempo Transcurrido	Atraso total
2H	3min
T_1	720 min

Resolviendo: $T_1 = 20\ días$

EL OTRO RELOJ

Tiempo Transcurrido	Atraso total
1H	2min
T_2	720 min

Resolviendo: $T_2 = 15\ días$

* Luego marcará la hora correcta cada *20* días y el otro cada *15* días; por lo tanto para que ambos coincidan en marcar la hora correcta, deberá transcurrir un tiempo común que contenga exactamente a *20* y *15*, el cual será :

$$MCM\ (20\ ;15) = 60\ \text{días}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

En el instante de comenzar un año no bisiesto un reloj señala las *11* horas *40* minutos y *25* segundos. Se supone que va adelantado. Este reloj se retrasa el primer día del año *1* segundo, el segundo día *3* segundos, el tercer día *5* segundos y así sucesivamente. al comenzar un día del año, el reloj marca la hora en punto, ¿cuál es ese día?

A)23 de julio *B)24 de julio* *C)25 de julio*

D)26 de julio E)27 de julio

RESOLUCIÓN :

* El adelanto que se tiene equivale a :

$25 + (40 \times 60) + (60 \times 60 \times 11) = 42025\ seg$

* Del enunciado :

En el primer día se retrasa : $1\ seg = 2 \times 1 - 1$

En el segundo día se retrasa : $3\ seg = 2 \times 2 - 1$

En el tercer día se retrasa : $5\ seg = 2 \times 3 - 1$

⋮

En el *"n"* día se retrasa : $2 \times n - 1$

* Por condición :

$1 + 3 + 5 + ... (2 \times n - 1) = 42025$ .... (I)

donde *"n"* es el número de días.

* De (I) : $n^2 = 42025 \Rightarrow n = 205$ días

* El número de días por meses de un año no bisiesto es el siguiente :

$$\left.\begin{array}{r} Enero = 31\ días \\ Febrero = 28\ días \\ Marzo = 31\ días \\ Abril = 30\ días \\ Mayo = 31\ días \\ Junio = 30\ días \end{array}\right\} Total = 181\ días$$

* Como el adelanto lo compensa en *205* días, esto sucede a los $(205 - 181) = 24$ días del mes de Julio. De manera que al iniciar el *25* de Julio, marca la hora exacta.

PRTA : "C"

PROBLEMA 25 :

Un reloj se atrasa un cuarto de minuto durante el día, pero debido al cambio de temperatura, se adelanta un tercio de minuto durante la noche, al cabo de cuántos días habrá adelantado *2* minutos, sabiendo que hoy a atardecer marca la hora exacta.

A)10 B)12 C)20 D)24 E)30

RESOLUCIÓN :

* En *24* horas :

Se atrasa : $\frac{1}{4}(60) = 15\ s$

Se adelanta : $\frac{1}{3}(60) = 20\ s$

Luego :

* En *24* horas se adelanta : $20 - 15 = 5\ s$

* El adelanto neto : $2\ (60) - 20 = 100\ s$

* Pero : $En\ 1\ día \xrightarrow{se\ adelanta} 5s$

$x \longrightarrow 100s$

* Por regla de Tres : $x = 20$ días

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Siendo la *1:00 p.m.* empieza atrasarse un reloj *4* minutos cada hora. ¿Qué hora indicará cuando la hora correcta sea la *8:00 p.m.* del mismo día?

A)7:12 B)6:58 C)6:32 D)6:42 E)7:32

RESOLUCIÓN :

* El Reloj se adelantó durante :

$8{:}00 - 1{:}00 = 7$ horas, luego:

$Atrasa\ 4\ min \text{ —— } En\ 1h$

$x \text{ —— } 7\ h$

$$x = \frac{7 \times 4\ min}{1} = 28\ min$$

⇒ Hora atrasada : $7{:}00 - 28\ min = 6{:}32$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

Un reloj tiene *3* minutos de retraso y sigue retrasándose a razón de *3* segundos por minutos. ¿Cuántos minutos deben transcurrir para tener una hora de retraso?

A)120 B)1200 C)1400 D)1148 E)1140

RESOLUCIÓN :

* Para retrasarse *1* hora, falta retrasarse :

1 hora – *3* min = *57* min.

$En\ 1\ minuto \xrightarrow{retraso} 3s$

$x \longrightarrow 57\ min = 57 \times 60s$

$$\Rightarrow x = \frac{57 \times 60 \times 1\ min}{3} = 1140$$

RPTA : "E"

NOTA :

Un reloj con hora atrasada o adelantada, tendrá que atrasarse o adelantarse como mínimo *12 h*. (Tiempo en el cual las agujas del reloj demoran en ocupar la misma posición). Para marcar de nuevo la hora exacta.

POR EJEMPLO :

$$\overbrace{9{:}00\ am}^{Hora\ atrasada} = \overbrace{9{:}00\ pm}^{Hora\ Real} - \overbrace{12h}^{Atraso}$$

es decir un reloj atrasado *12 h*. y que marca las *9:00* a.m. deberá indicar las *9:00 p.m.*, sin embargo ningún reloj diferencia *"a.m."* con *"p.m."*.

PROBLEMA 28

Un reloj se adelanta *3* minutos cada *6* horas ¿Cada cuánto tiempo marcará la hora correcta?

A)1445 *B)1330* *C)1440* *D)100* *E)390*

RESOLUCIÓN :

3 min se adelanta $\xrightarrow{En}$ *6 h*

Deberá adelantarse 12 h $\longrightarrow$ *x*

$$\Rightarrow x=\frac{12h\times 6h}{3min}=\frac{12(60\,min)\times 6h}{3min}$$

$$x=1440\ h$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

En cada día un reloj se adelanta *2* minutos y otro se atrasa *3* minutos ¿Cada cuánto tiempo vuelven ha indicar la misma hora?

A)134 días *B)144* *C)154*

RESOLUCIÓN :

* En 1 día la diferencia o alejamiento de sus horas marcadas será de : *2 + 3 = 5 min.*, luego para que los *2* relojes vuelvan ha marcar la misma deben alejarse *12 h*.

ALEJAMIENTO	TIEMPO
5 min.	1 día
12 h.	x

$$\Rightarrow x=\frac{12H\times 1día}{5\,min}=\frac{12(60\,min)\times 1día}{5\,min}$$

$$\Rightarrow x=144\ días$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

Un reloj se retrasa *8* minutos cada *24* horas. Si éste marca la hora correcta *7 a.m.* el *2* de mayo ¿qué hora marcará a la *1 p.m.* del *7* de mayo?

A)11h. 18min. *B)12h. 8min.* *C)12h. 42min.*
D)12 h.28 min. *E)12 h. 18 min.*

RESOLUCIÓN :

* Del *2* de mayo a las *7 a.m.* al *7* de mayo a la *1 p.m.* hay *5* días *6* horas.

es decir : $5\frac{1}{4}$ *días*

* Como se retrasa *8 min* cada día :

8 min $\longrightarrow$ *1 día.*

x min $\longrightarrow$ $5\frac{1}{4}$ *días*

$$\Rightarrow x=\frac{8\times 5\frac{1}{4}}{1}=42\ \text{min de retraso.}$$

* Marcará : *1 p.m. – 42 min = 12 h 18 min*

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

Un reloj se adelanta *2* minutos cada *15* minutos. Si ahora marca las *5 h 20* minutos, hace *4* horas que se adelanta, la hora correcta sería :

A)4:48 *B)4:28* *C)4:30* *D)4:32* *E)4:52*

RESOLUCIÓN :

Hora correcta = hora marcada – adelanto

* Por dato conocemos que :

Hora marcada = *5 h 20 min*

* También conocemos que hace *4* horas que se adelanta, esto es; se adelanta desde hace *240* minutos.

* Calculamos el adelanto :

15 minutos $\xrightarrow{\text{se adelanta}}$ *2 min*

240 min $\xrightarrow{\text{se adelantará}}$ *x min*

$$\Rightarrow x=\frac{240\times 2}{15}=32$$

* Luego :

hora correcta = *5 h 20 min – 32 min*

= 4 h 48 min.

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 :

Se tiene un reloj que se atrasa *2* minutos cada hora y otro que se adelanta *3* minutos cada hora. Si se ponen a la hora los dos relojes en este instante, ¿Después de cuánto tiempo volverán a marcar la hora correcta simultáneamente?

A)30 días *B)48 días* *C)36 días*

RESOLUCIÓN :

* Para que el *1ro.* vuelva a marcar la hora correcta debe atrasarse *12 h.* ó *720 min.*, entonces por regla de tres :

Atraso	Tiempo
2 min	1H
720 min	x

x=360 H

• Análogamente para el *2do.*

Adelanto	Tiempo
3 min	1H
720 min	y

y=240 H

• Pero para que ambos marquen la hora correcta simultáneamente deben pasar :

MCM(360 , 240) = 720 H.

o lo que es equivalente a:

720 H ÷ 24 = 30 días

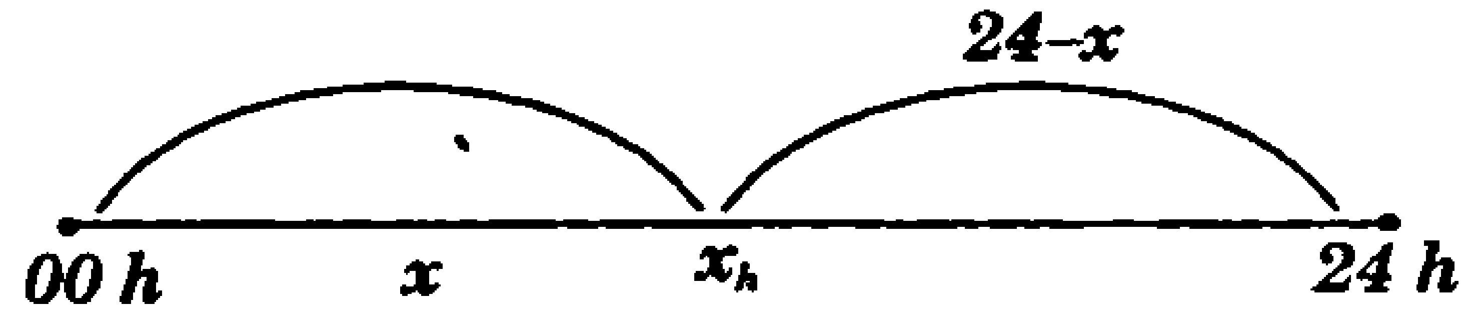
RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

¿Qué hora será dentro de $5\frac{1}{4}h$, sabiendo que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en *5h* por los que faltan transcurrir del día?

RESOLUCIÓN :

* Sea x la hora transcurrida :



* Por dato :

El tiempo transcurrido es excedido en *5h* al tiempo que falta transcurrir al día.

$$x+5=24-x \Rightarrow = \frac{19}{2}h <> 9h:30m.$$

* Dentro de : $5\frac{1}{4}h <> 5h:15m.$ Será

9h:30m+5h:15m=14:45m<>2:45pm

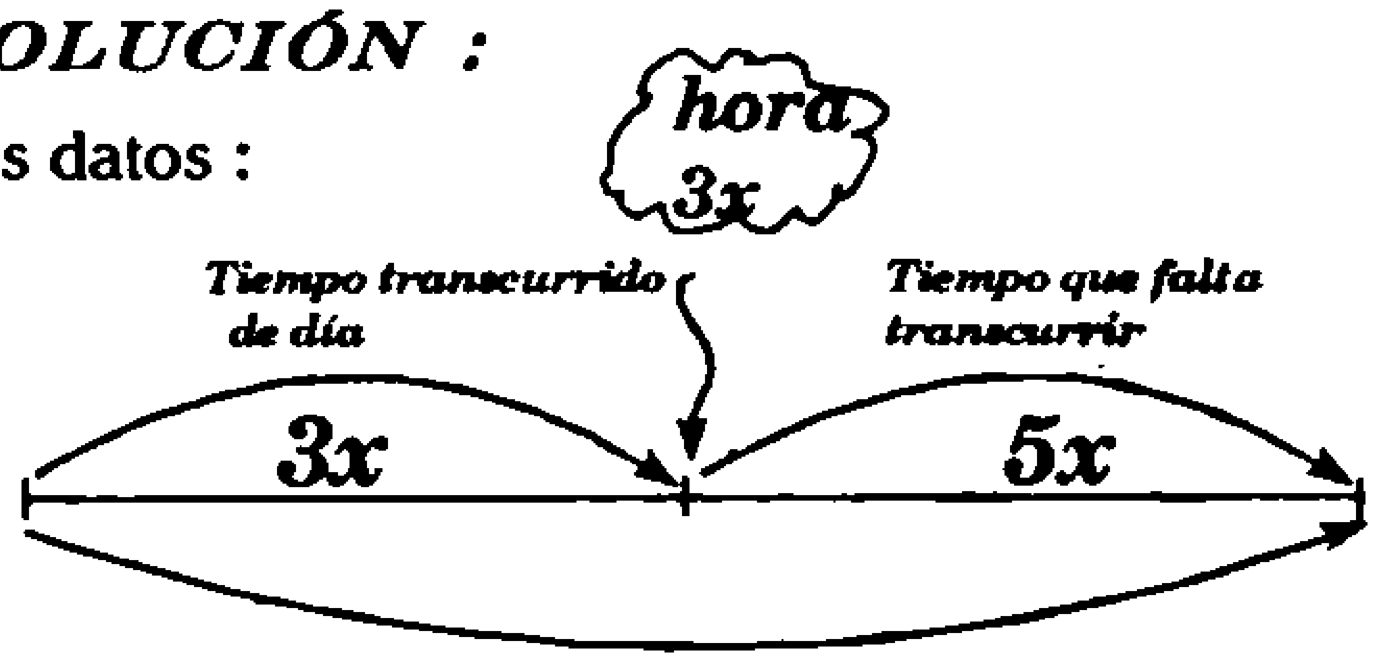
PROBLEMA 34 :

¿Qué hora es , si se sabe que el tiempo transcurrido del día es *3/5* de lo que falta transcurrir?

A) 10 a.m. *B) 9 a.m.* *C) 8 a.m.*

RESOLUCIÓN :

* De los datos :



1día =24horas

$24 = 8x \Rightarrow x = 3$

* La hora es : $3x = 9$ horas

RPTA :"B"

PROBLEMA35 :

¿Qué hora es?, si en este instante el tiempo que falta para acabar el día excede en *5* horas al tiempo transcurrido.

A)8:30 a.m. *B)9:30* *C)9:00* *D)19:00* *E)8:00*

RESOLUCIÓN :

* Según el gráfico anterior y enunciado se tendrá :

$$(24-x)-x=5$$

19 horas = $2x \Rightarrow x = 9{:}30$ *a.m.*

RPTA : "B"

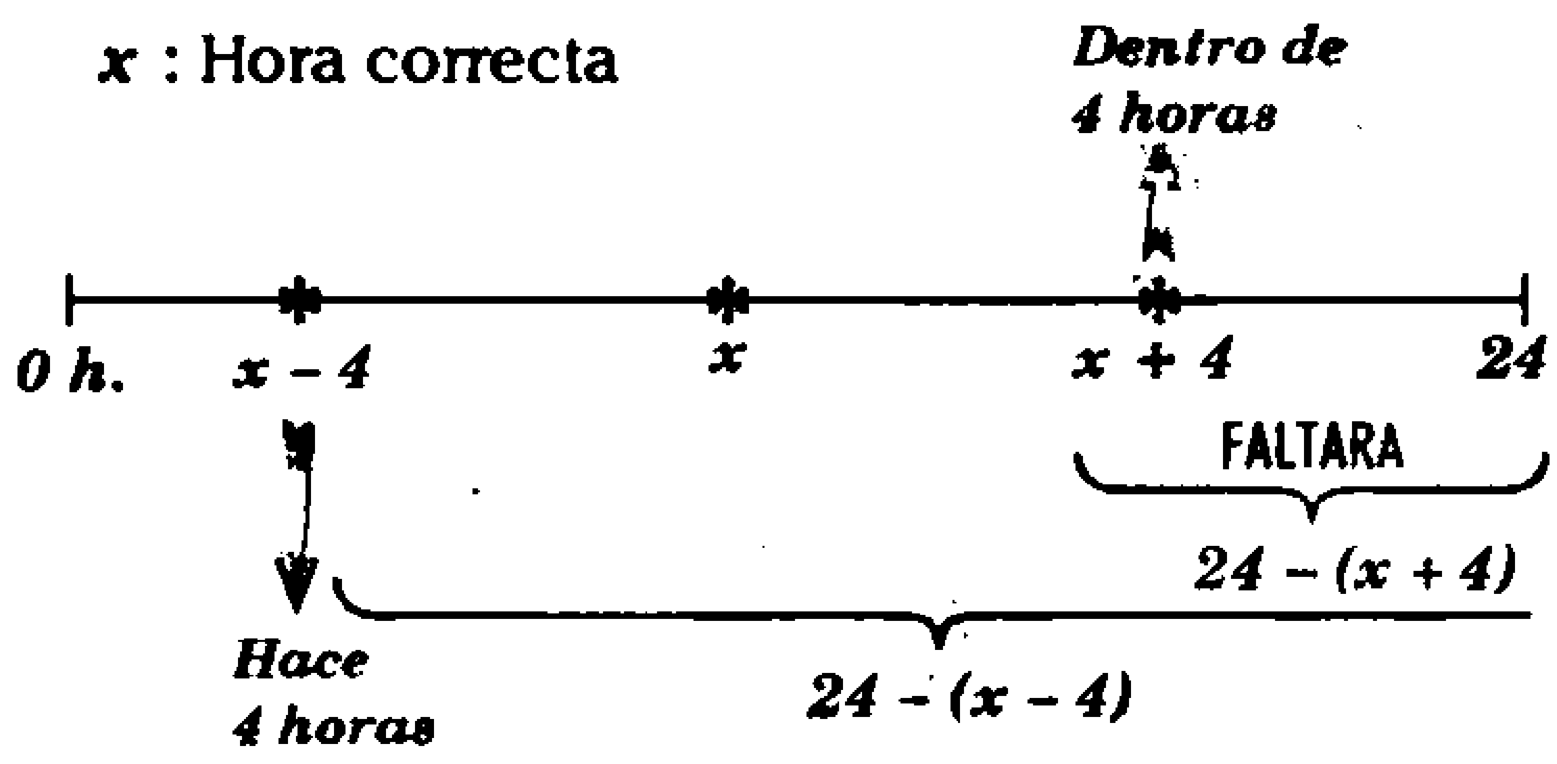
PROBLEMA 36 :

¿Qué hora es? si hace *4* horas faltaba para acabar el día, el triple del tiempo que faltará para acabar el día dentro de *4* horas?

A)16:00 h *B)17:00 h* *C)19:00 h*
D)18:00 h *E)21:00 h.*

RESOLUCIÓN :

x : Hora correcta



* Según enunciado :

$$24-(x-4)=3(24-(x+4))$$
$$\Rightarrow x = 16$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

Si fueran *3* horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día *5/7* de lo que faltaría si es que fuera *3* horas más temprano. ¿Qué hora es?

A)6:00 *B)5:00* *C)4:00* *D)5:10* *E)6:10*

RESOLUCIÓN :

Hora correcta : x

3 horas más tarde : $x+3$

3 horas más temprano : $x-3$

* Según enunciado :

$$24-(x+3)=\frac{5}{7}(24-(x-3))$$

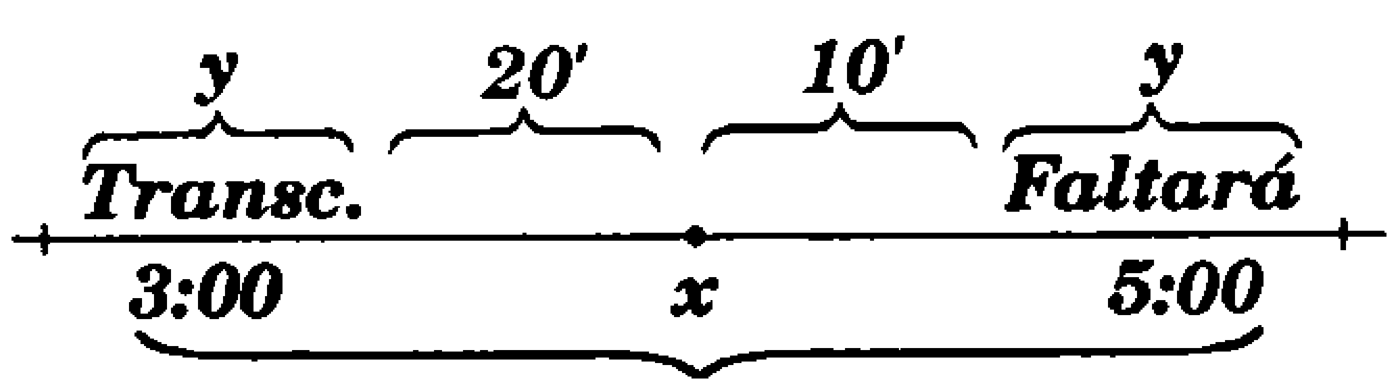
$$\Rightarrow x=6 \qquad \textbf{RPTA : "A"}$$

PROBLEMA 38 :

"Dentro de *10* minutos faltará para las *5:00*, los mismos minutos que transcurrieron desde las *3:00* hasta hace *20* minutos. ¿Qué hora será dentro de *1* hora?

A)4:05 *B)3:05* *C)5:05* *D)6:05* *E)4:45*

RESOLUCIÓN :



2H <> 120'

* Del gráfico : $y+20'+10'+y = 120'$

$$\Rightarrow \quad x = 3:00+45'+20'$$

$$\Rightarrow x = 4:05$$

♦ Dentro de 1 hora será : *4:05 + 1H = 5:05*

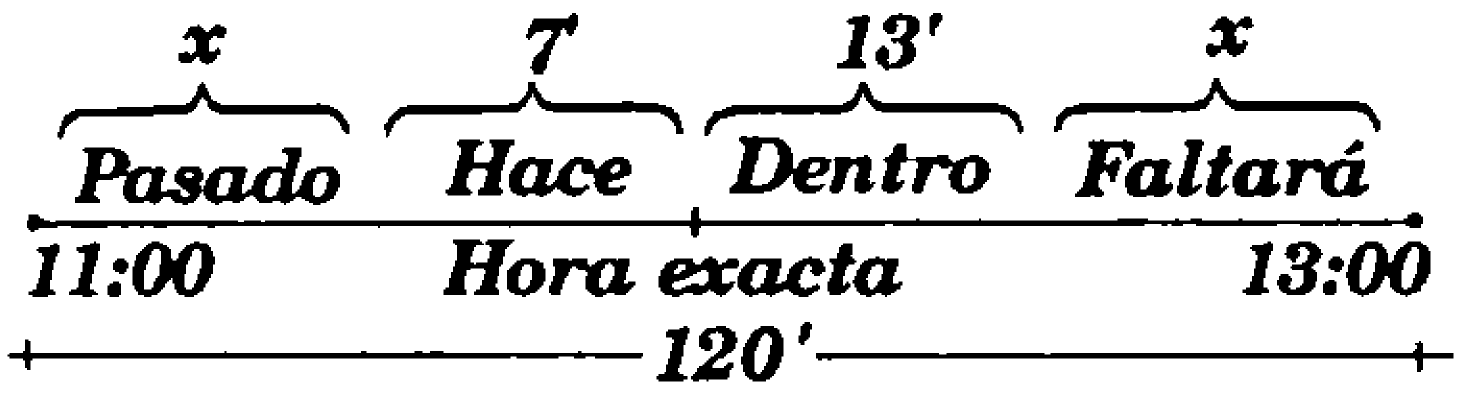
RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

¿Qué hora es? Pilar responde: Ya pasaron las *11* y falta poco para las doce. Además dentro de *13* minutos faltará para las *13* la misma cantidad de minutos que habían pasado desde las *11* hasta hace *7* minutos. ¿Qué quiso decir Pilar?

A)11h 20 ***B)11h 34*** ***C)11h 54***
D)11h 56 ***E)11h 57***

RESOLUCIÓN :



* Del gráfico : $x + 7 + 13 + x = 120$

$$\Rightarrow x = 50$$

♦ Entonces serán : ***11:57'***

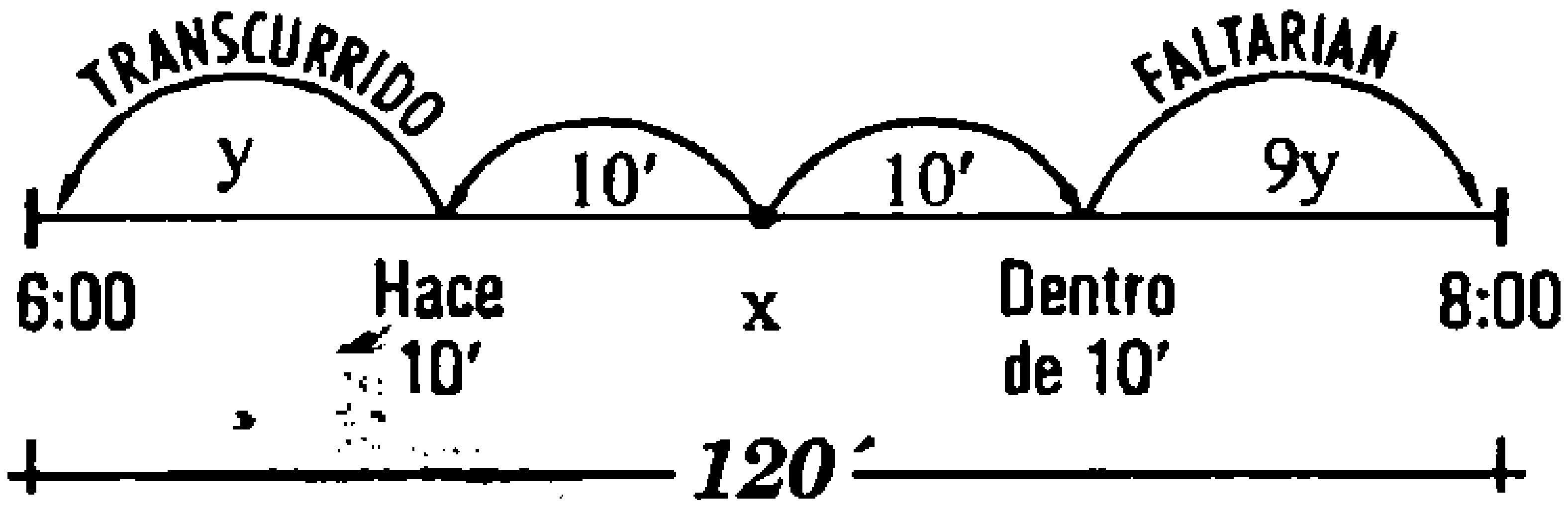
RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

Son más de las seis sin ser las ocho y hace diez minutos, los minutos que habían transcurrido desde las *6* eran iguales a *1/9* del tiempo que faltarían transcurrir hasta las ocho dentro de diez minutos ¿Qué hora es?

A)6 ***B)6:25*** ***C)6:20*** ***D)7*** ***E)8***

RESOLUCIÓN :



* Del gráfico :

$$y + 10' + 10' + 9y = 120'$$

$$\Rightarrow y = 10'$$

$$\Rightarrow x = 6:00 + y + 10' = 6:20$$

RPTA : "C"

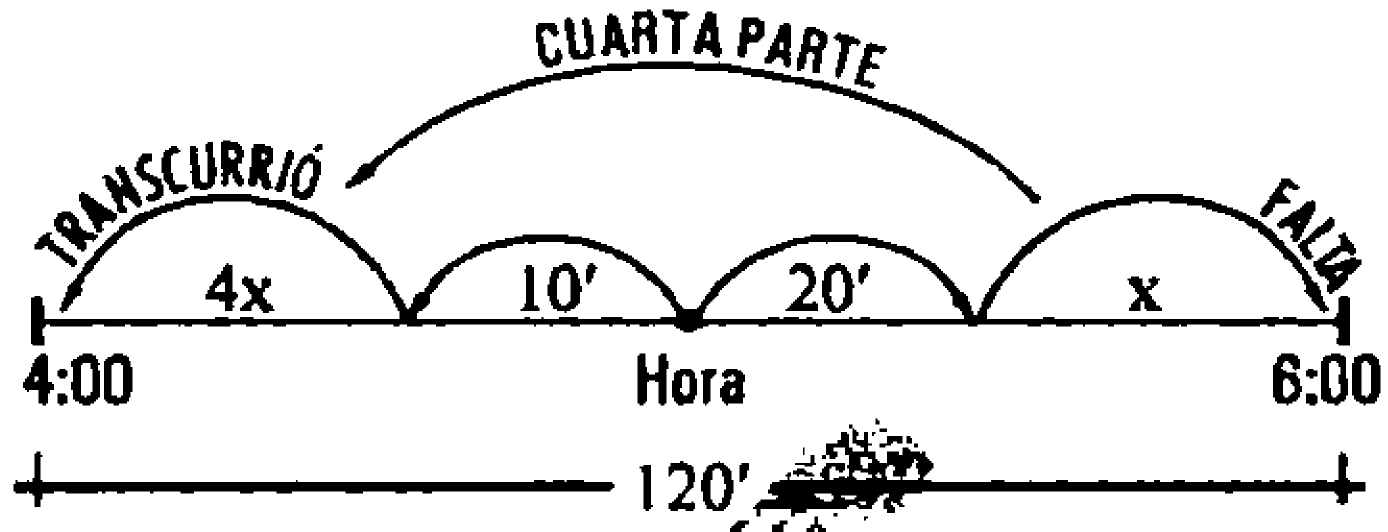
PROBLEMA 41 :

Son más de las *4* pero aún no son las *6*, ¿qué hora será cuando a partir de este momento transcurran tantos minutos como el triple del tiempo que transcurrió desde las *4* hasta hace *40* minutos? Si sabemos que el tiempo que falta transcurrir para las *6* dentro de *20* minutos, es la cuarta parte del tiempo que transcurrió desde las *4* hasta hace *10* minutos.

A)19:28' ***B)18:32'*** ***C)19:22'***
D)18:56' ***E)19:18'***

RESOLUCIÓN :

♦ Primero hallamos la hora en este momento.

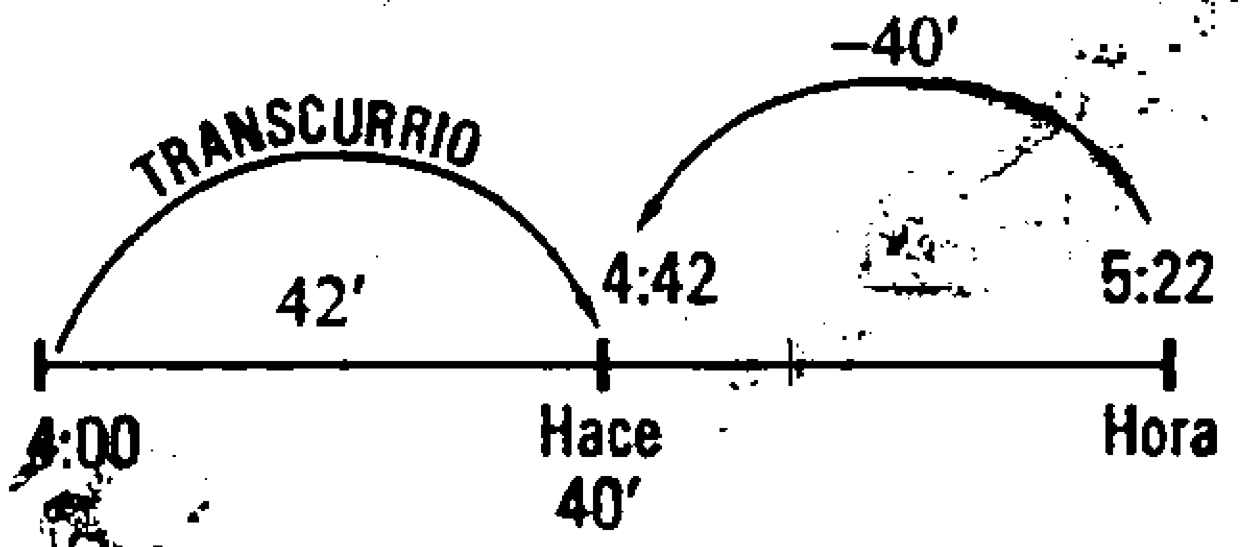


* Del gráfico : $4x + 10' + 20' + x = 120'$

$$\Rightarrow x = 18$$

⇒ La hora en este momento será :

$$4:00 + 4\,(18') + 10' = 5:22$$



♦ Cuando transcurran : $3\,(42') = 126'$

Será las : $5:22 + 126' = 5:22 + 2:06$

$$= 7:28 <> 19:28$$

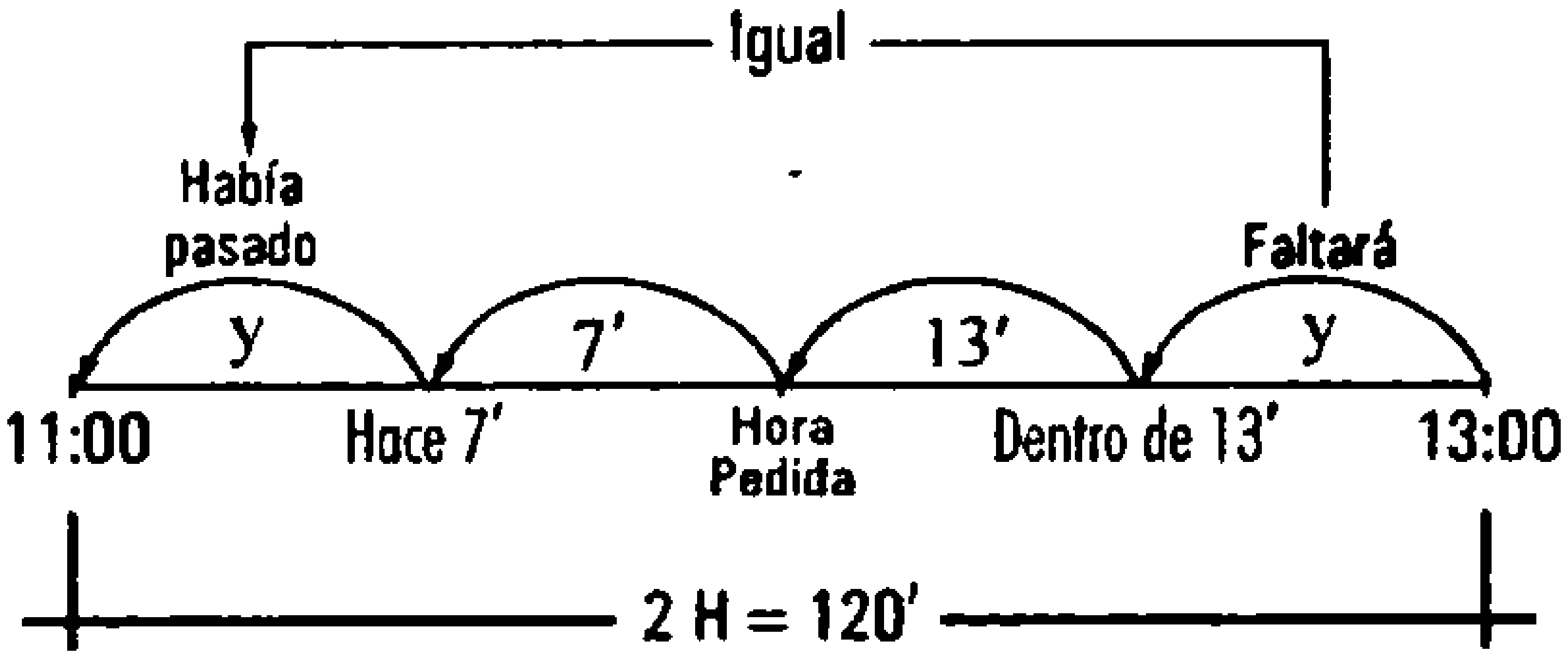
RPTA : "A"

PROBLEMA 42 :

Usted me pregunta ¿qué hora es? y yo amablemente le respondo: "son las once y falta poco para las doce además dentro de *13* minutos faltará para las *13* horas la misma cantidad de minutos que había pasado desde las once hasta hace *7* minutos pues bien esa es la hora. ¿Qué hora es?

A)11:53 ***B)11:55*** ***C)11:57*** ***D)11:47*** ***E)11:48***

RESOLUCIÓN :



* Del esquema :

$$y + 7' + 13' + y = 120'$$

$$\Rightarrow y = 50$$

♦ Entonces la hora pedida será :

$$x = 11:00 + y + 7' = 11:57$$

RPTA : "C"

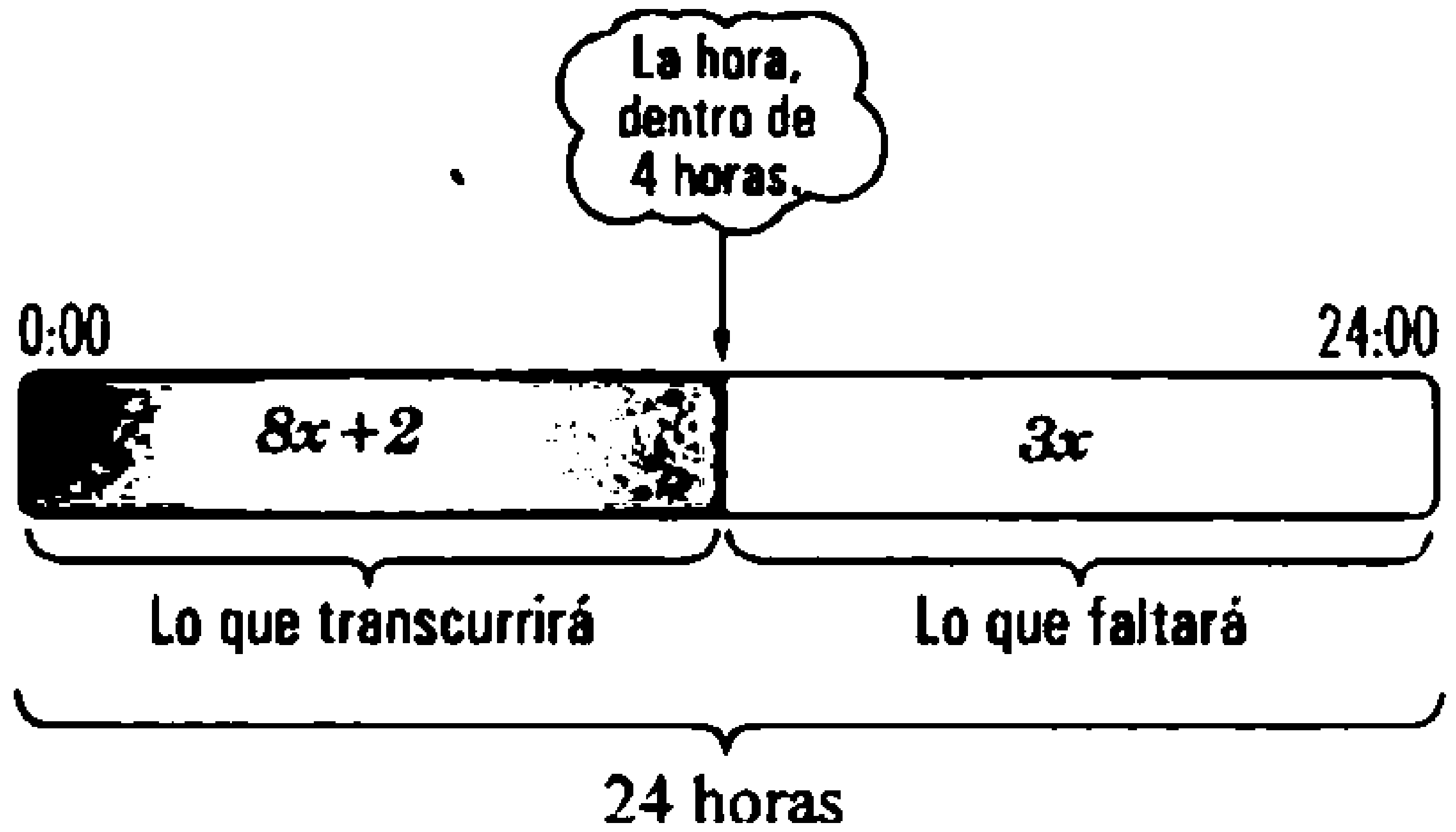
PROBLEMA 43 :

Dentro de *4h*. se verificará que el tiempo transcurrido del día será *8/3* de lo que falta por transcurrir, más

2 horas. ¿Qué hora será cuando transcurran a partir de estos momentos cierta cantidad de horas numéricamente igual a la décima parte del ángulo que forman las agujas actualmente (sexagesimales)?

A)9:00 pm. *B)2:00 pm.* *C)6:00 pm.*
D)8:00 pm. *E)10:00 pm.*

RESOLUCIÓN :



* Según gráfico :

$$\Rightarrow 8x + 2 + 3x = 24 \Rightarrow x = 2$$

♦ Luego dentro de 4 horas serán las $8(2) + 2 = 18$ horas, con lo que la hora exacta será las *14:00* horas o las ***2:00 pm.***, y el ángulo que forman las manecillas será :

$$\alpha = 30(2) - \frac{11}{2}(0) = 60°$$

cosa que de pasar $\frac{60}{10} = 6H$, serían las $2{:}00 + 6\,H = 8{:}00\ pm$.

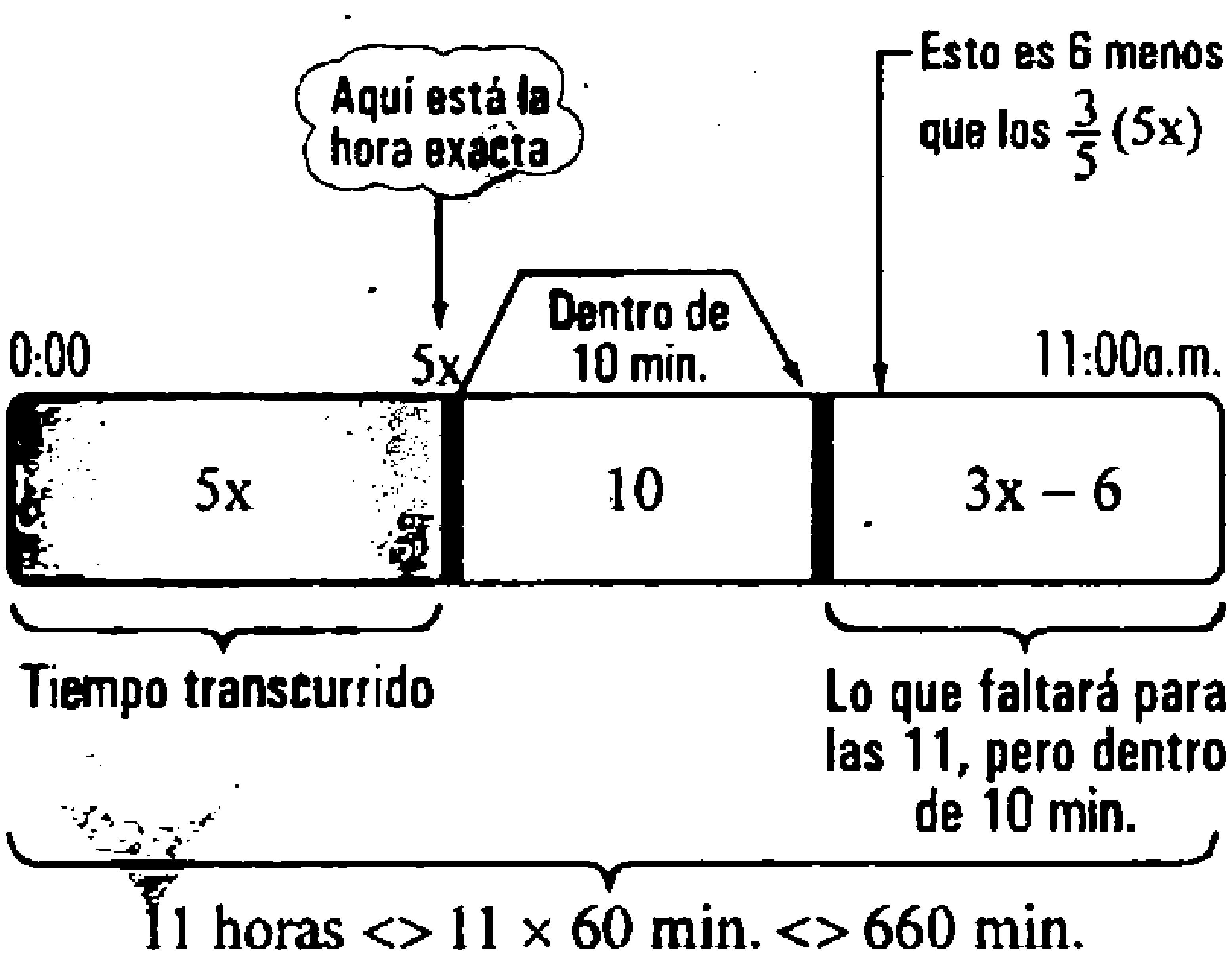
RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

El tiempo que faltará para las ***11 am.*** dentro de ***10*** minutos es excedido en ***6*** minutos por los ***3/5*** del tiempo transcurrido del día ¿Qué hora es?

A)10:05 am *B)6:50 am* *C)9:55*

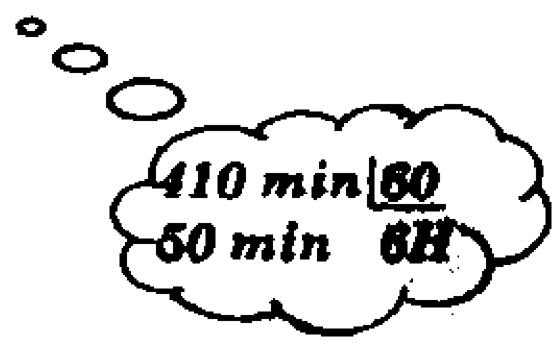
RESOLUCIÓN :



* Del gráfico : $5x + 10 + 3x - 6 = 660$

* Despejando : $x = 82\ min$

* Piden : $5x = 5(82) = 410\ min = 6H\ 50\ min$



♦ Luego la hora pedida será las : ***6 : 50 a.m.***

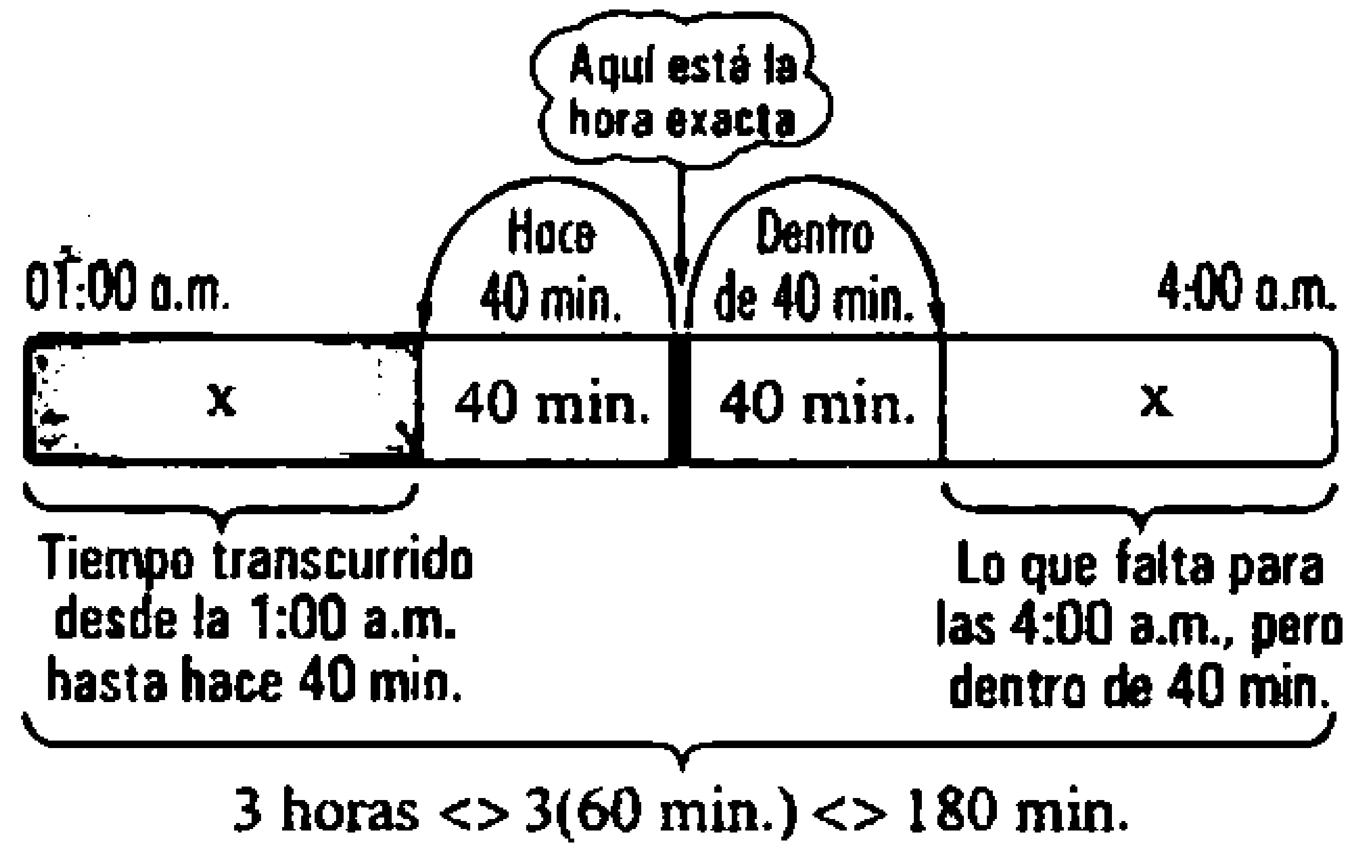
RPTA : "B"

PROBLEMA 45 :

Son más de las ***2*** sin ser las ***3*** de esta madrugada, pero dentro de ***40*** minutos faltarán para las ***4 a.m.*** el mismo tiempo que transcurrió desde la ***1*** hasta hace ***40*** minutos ¿Qué hora es?

A)2:20 a.m. *B)2:30 a.m.* *C)2:30 p.m.*
D)4:15 a.m. *E)6:12 a.m.*

RESOLUCIÓN :



* Del esquema, se obtiene :

$$x + 40 + 40 + x = 180$$

* Resolviendo : $x = 50\ min$

• Luego la hora pedida será :

$$1\ am + \underbrace{50\ min + 40\ min}_{1h.\ 30\ min.} = 2{:}30\ am$$

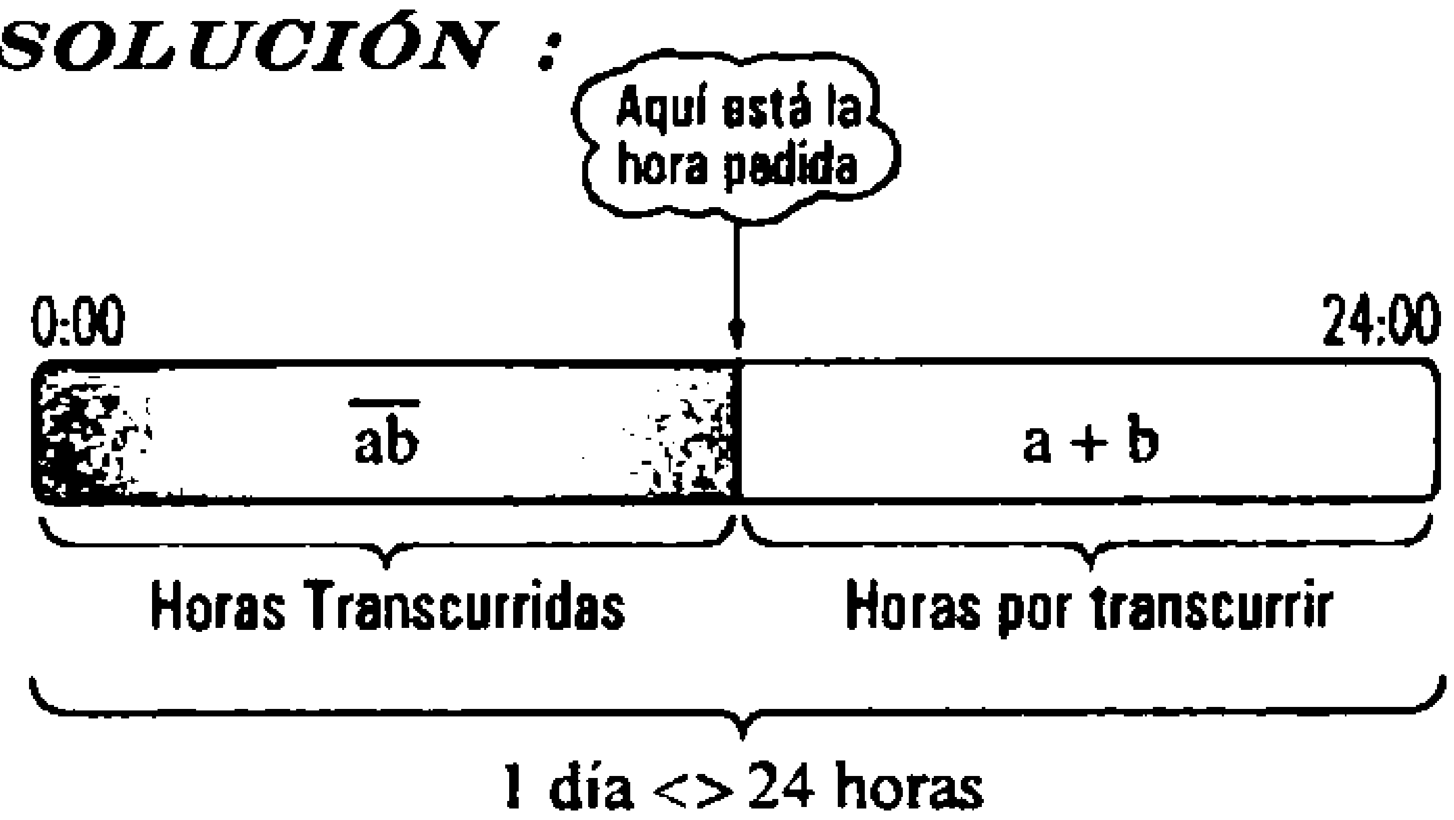
RPTA : "C"

PROBLEMA 46 :

Un alumno le dice a su amiga: cuando la suma de las cifras de las horas transcurridas sea igual a las horas por transcurrir te espero donde ya tú sabes. ¿A qué hora es la cita?

A)12 am *B)10 pm* *C)7 am* *D)9 pm* *E)11 pm*

RESOLUCIÓN :



❑ Del esquema :

$$\overline{ab}+a+b=24$$

$$\Rightarrow 10a+b+a+b=24 \Rightarrow 11a+2b=24$$

* Despejando : $a=\dfrac{2(12-b)}{11}$ ("a" es par y no mayor que 2)

Tanteando adecuadamente, concluiremos que :

$b=1$ y $a=2$

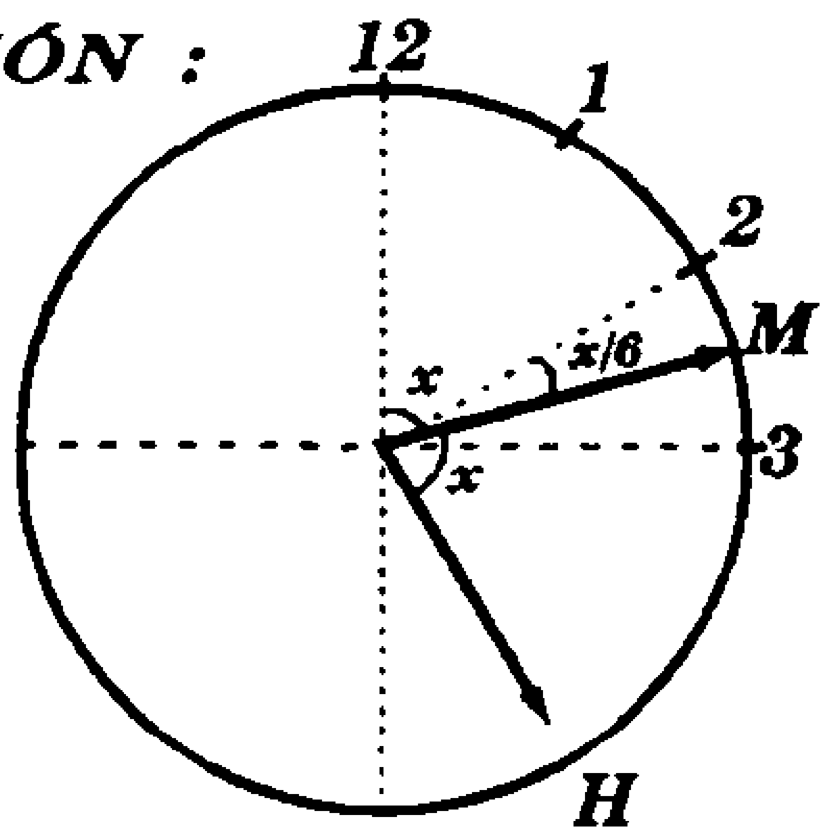
❑ Luego serán las *21* horas, es decir las *9:00 pm.*

RPTA : "D"

PROBLEMA 47 :

¿ A qué hora , inmediatamente después de las *2pm* ,el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a la marca de las *12*?

RESOLUCIÓN :



* Del gráfico observamos que el minutero avanza , un espacio de $2x$, entonces el horario habrá avanzado un espacio de $\dfrac{2x}{x}=\dfrac{x}{6}$ a partir de las *2*.

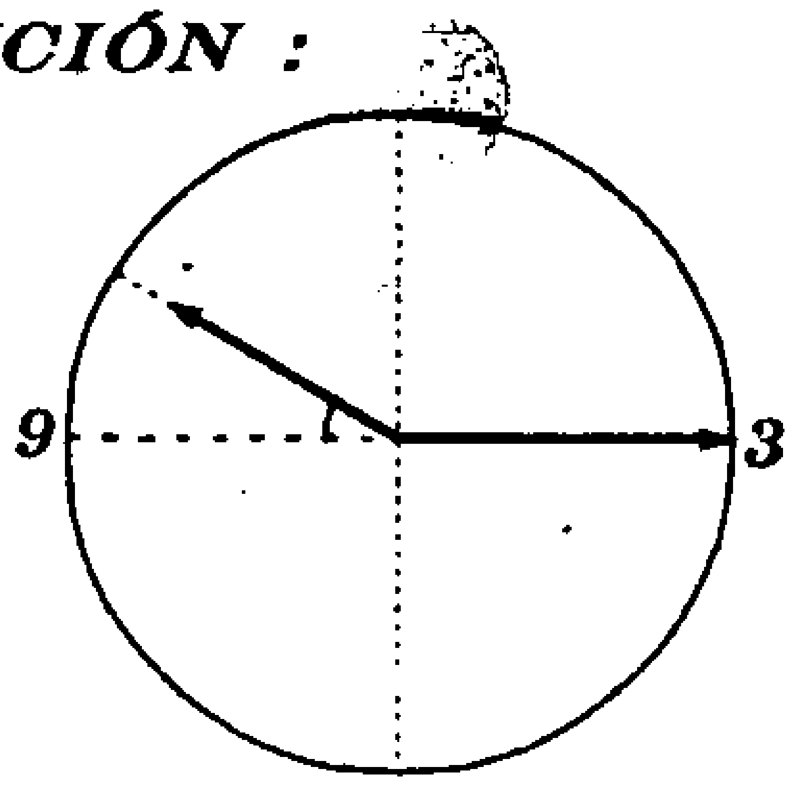
del gráfico: $x-\dfrac{x}{6}=10\,min \Rightarrow x=12\,min$

$\Rightarrow$ la hora marcada es **2h: 2x min <> 2h:24 min.**

PROBLEMA 48 :

¿Qué ángulo forman las dos agujas de un reloj (ángulo menor) a las *9h 15min.*

RESOLUCIÓN :



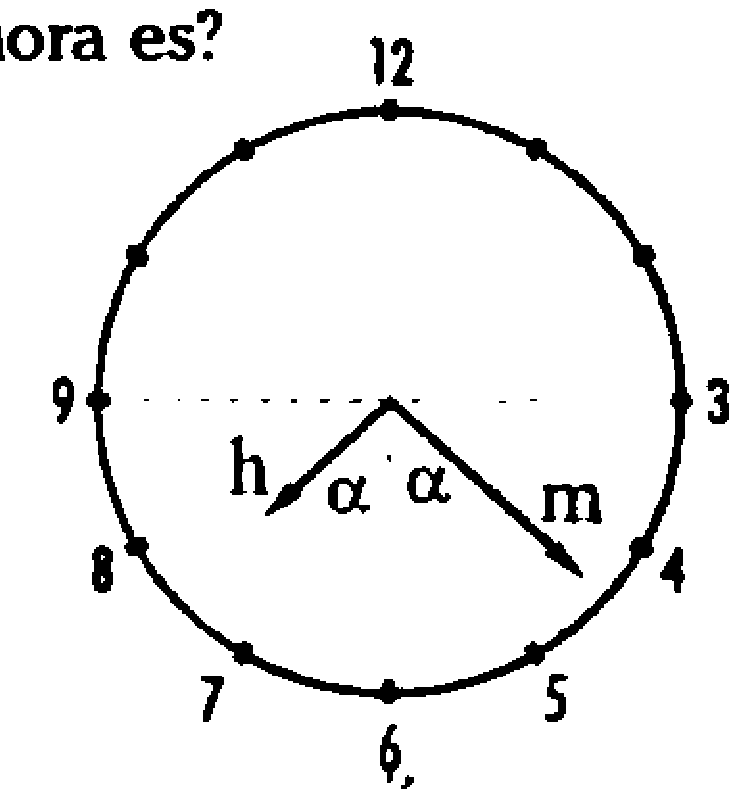
* Tengamos presente que la relación entre los recorridos de horario a minutero es como *1* a *12*. Como el minutero avanza *90°*, el horario habrá avanzado :

$$\left(\frac{90}{12}\right)^{\circ} <> 7°30'.$$

* Entonces , el menor ángulo que forma es : *180° – 7°30'* , es decir : *172°30'* .

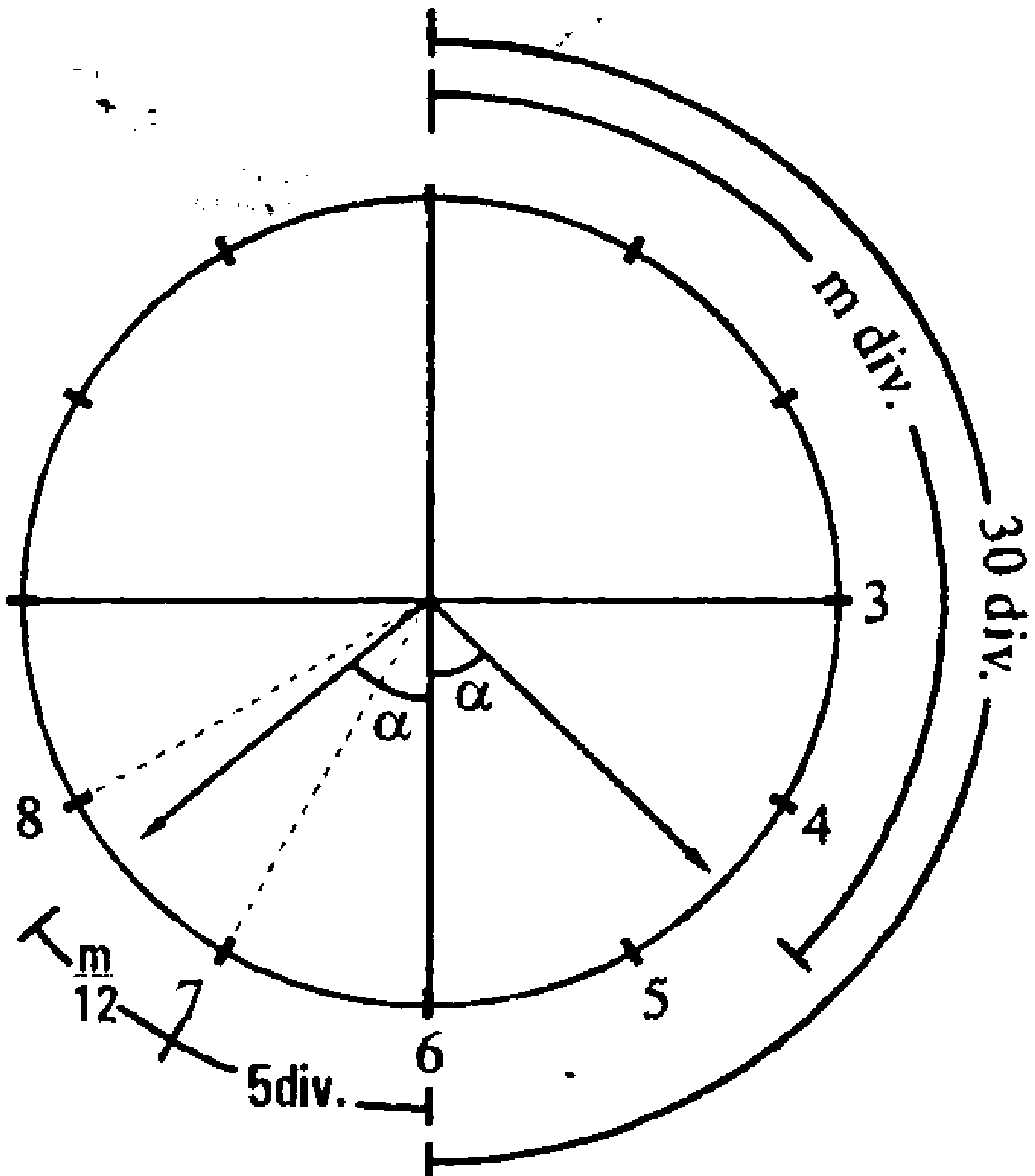
PROBLEMA 49 :

Según la figura ¿qué hora es?



A) 7 h 24 2/3
B) 7 h 23 1/13
C) 7 h 24 1/13
D) 7 h 24 3/13
E) 7 h 23 2/13

RESOLUCIÓN :



* Del esquema :

$$\alpha=30-m=\frac{m}{12}+5$$

$$\underbrace{m=23\frac{1}{13}DIV<>23\frac{1}{13}\ minutos}_{Para\ el\ minutero}$$

* Luego la hora será : $7h\,23\dfrac{1}{13}min$

RPTA : "B"

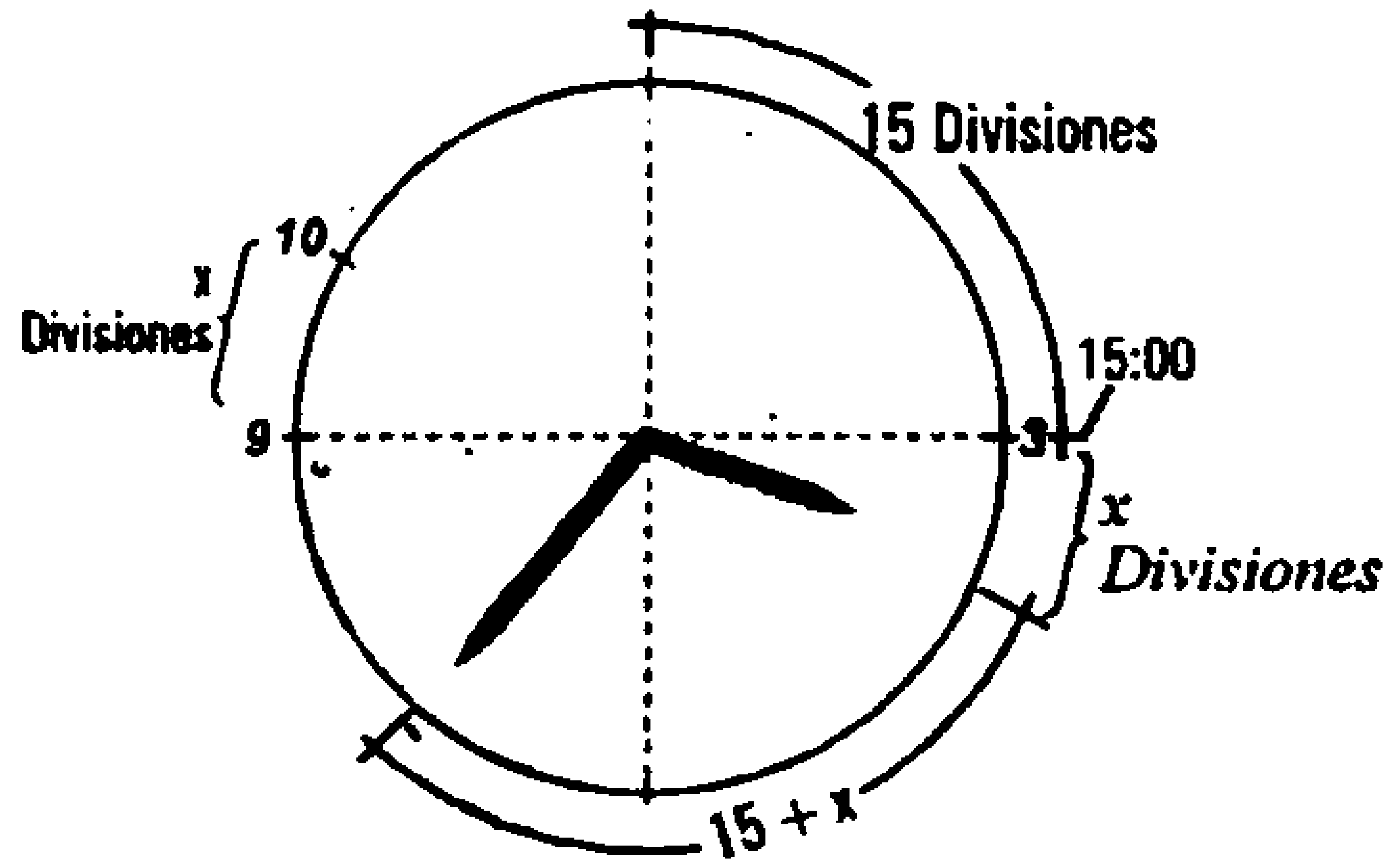
PROBLEMA 50 :

¿A qué hora inmediatamente después de las *15:00 h*. el minutero adelantará al horario, tanto como el horario adelanta a la marca de las *12*?

A)15:35 h. *B)15:36 h.* *C)15:37 h.*
D)15:18 h. *E)15:15 h.*

RESOLUCIÓN :

* Para el minutero *1div. = 1min.*



* Sabemos que : $M = 12H$

$\Rightarrow 30 + 2x = 12x$

$\Rightarrow x = 3$

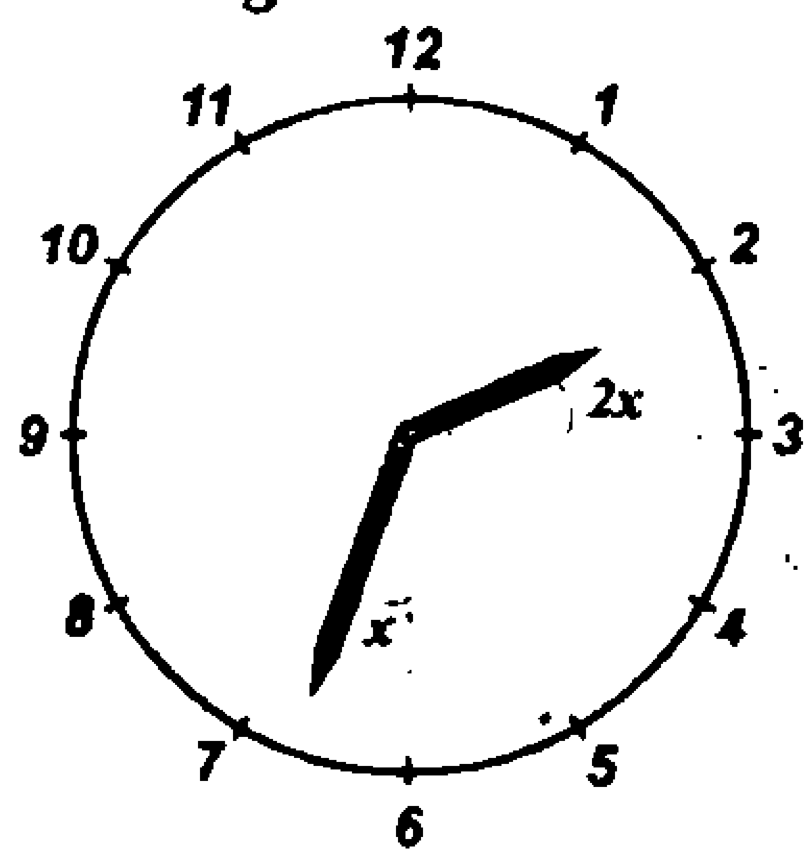
$\Rightarrow$ Serán las :

15 H. con $30+2x=30+2(3)=36$ divisiones ó *36* minutos.

RPTA : "B"

PROBLEMA 51 :

¿Qué hora es en la figura?



A)2h 33' 30" B)2h 31' 12" C)2h 30' 40" D)2h 31' 52" E)2h 31' 33"

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :

Recorrido del horario : $(5-2x)$ *div.*

Recorrido del minutero : $(30+x)$ *div.*

* Sabemos que : $M = 12H$

$\Rightarrow 30 + x = 12(5-2x)$

$\Rightarrow 30 + x = 60 - 24x \Rightarrow 25x = 30$

$\Rightarrow x = \frac{6}{5}$ *división ó* $\frac{6}{5}$ *min.* $\Rightarrow x = 1\frac{1}{5}$ *min.*

$\Rightarrow x = 1min + \frac{1}{5}(60s) \Rightarrow x = 1min + 12s = 1min.\ 12s$

* Entonces la hora será :

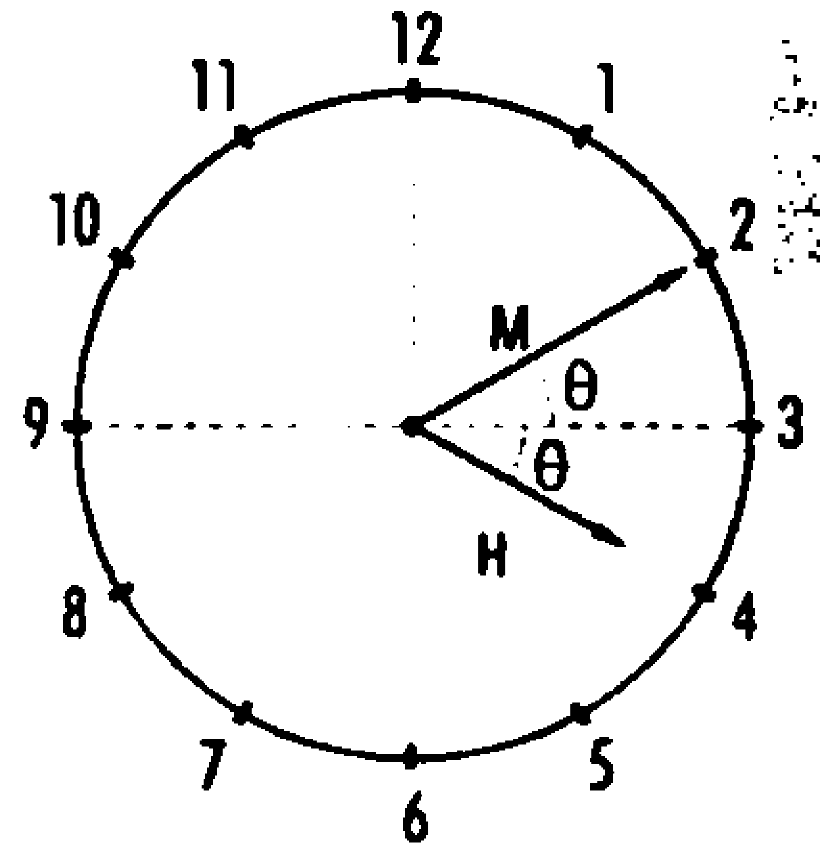
$2H + 30' + x = 2H + 30' + 1'\,12''$

$\Rightarrow x = 2H\,31'12''$

RPTA : "B"

PROBLEMA 52 :

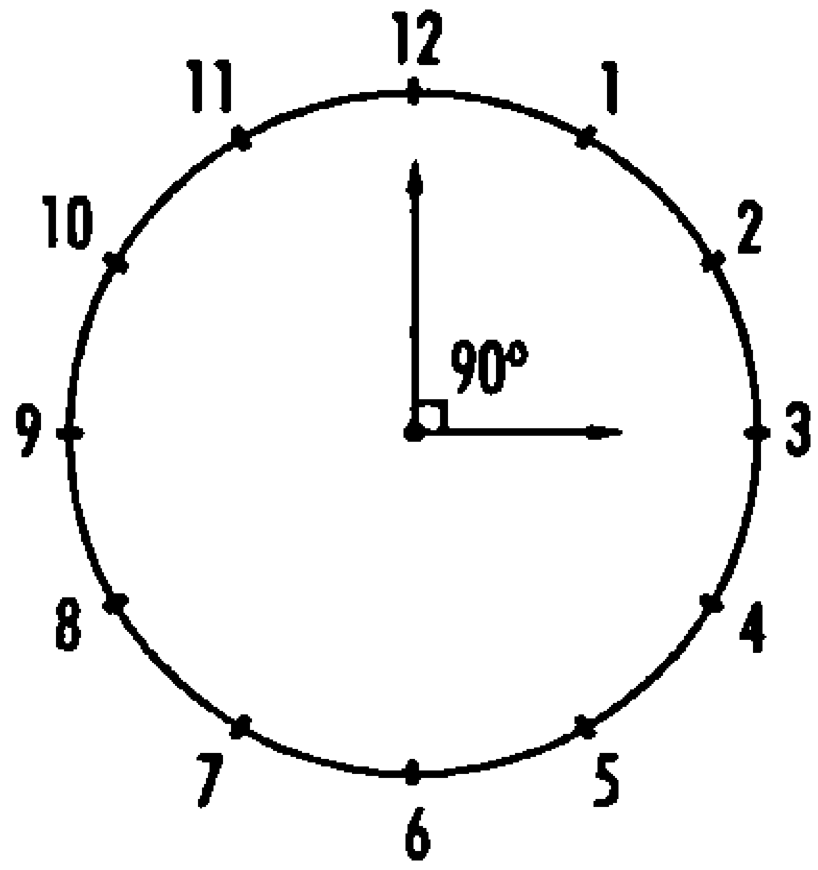
¿Qué hora es en el gráfico adjunto?



A) 3:30 B) 3:30'23" C) $3:11\frac{1}{3}min$ D) $3:13\frac{11}{13}min$ E) 3:15'12"

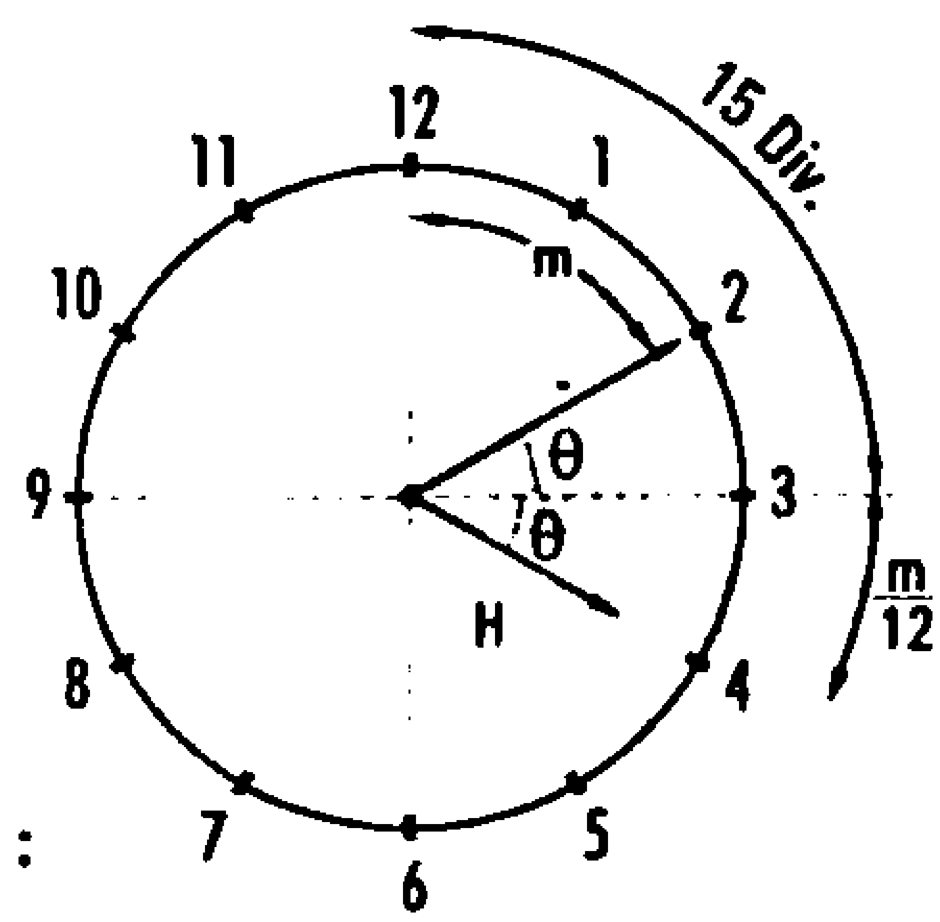
RESOLUCIÓN :

Posición Inicial



Posición Final

Sabemos que : $m = 12H$



$\Rightarrow$ de la figura :

$$\theta = 15 - m = \frac{m}{12} \Rightarrow m = 13\frac{11}{13}DIV.$$

♦ Como : *1 DIV <> 1 min,* luego

$m = 13\frac{11}{13}DIV <> 13\frac{11}{13}min.$

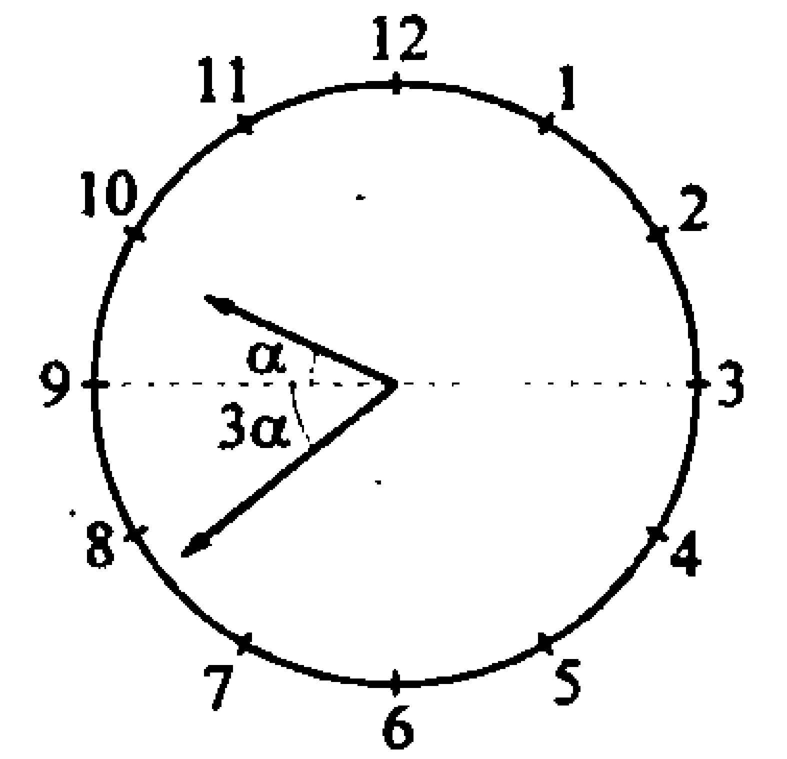
♦ Hora de referencia : *3:00*

$\Rightarrow$ *La hora será :* $3:13\frac{11}{13}min.$

RPTA : "D"

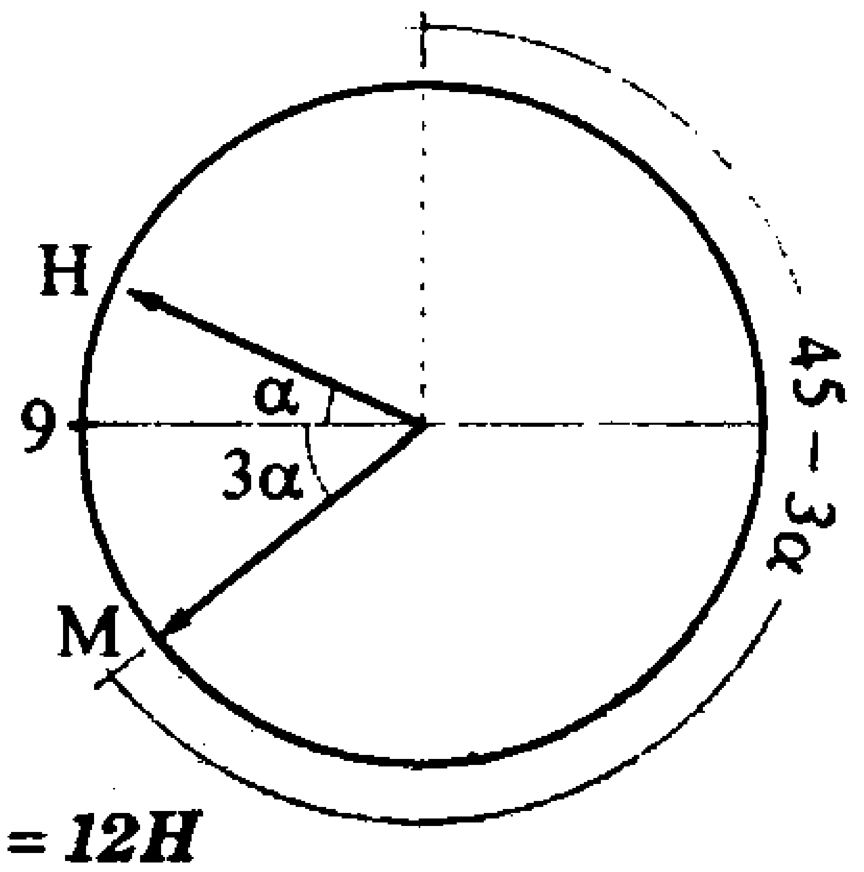
PROBLEMA 53 :

¿Qué hora será exactamente según el gráfico?



A)9:32 B)9:34 C)9:16 D)9:36 E)9:39

RESOLUCIÓN :



* Como :

$M = 12H$

$\Rightarrow 45 - 4\alpha = 12\alpha \Rightarrow \alpha = 3$

* Luego serán las **9** horas con :

$45 - 3\alpha = 45 - 9 = 36$

RPTA : "D"

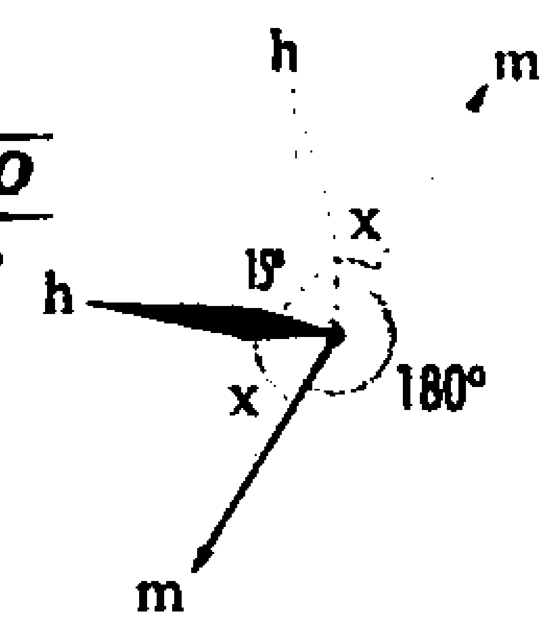
PROBLEMA 54 :

Al observar mi reloj veo que el minutero está antes que el horario formando «x^o». Luego de **30** minutos observo nuevamente mi reloj y veo que el minutero está delante del horario formado «x^o». Hallar x^o.

A)82,5° B)80,5° C)81,4° D)80,2° E)81,5°

RESOLUCIÓN :

TIEMPO	MINUTERO	HORARIO
60 min	360°	30°
30 min	180°	15°



♦ De la figura :

$x + 15^o + x = 180^o$

$\Rightarrow x = 82{,}5^o$

RPTA : "A"

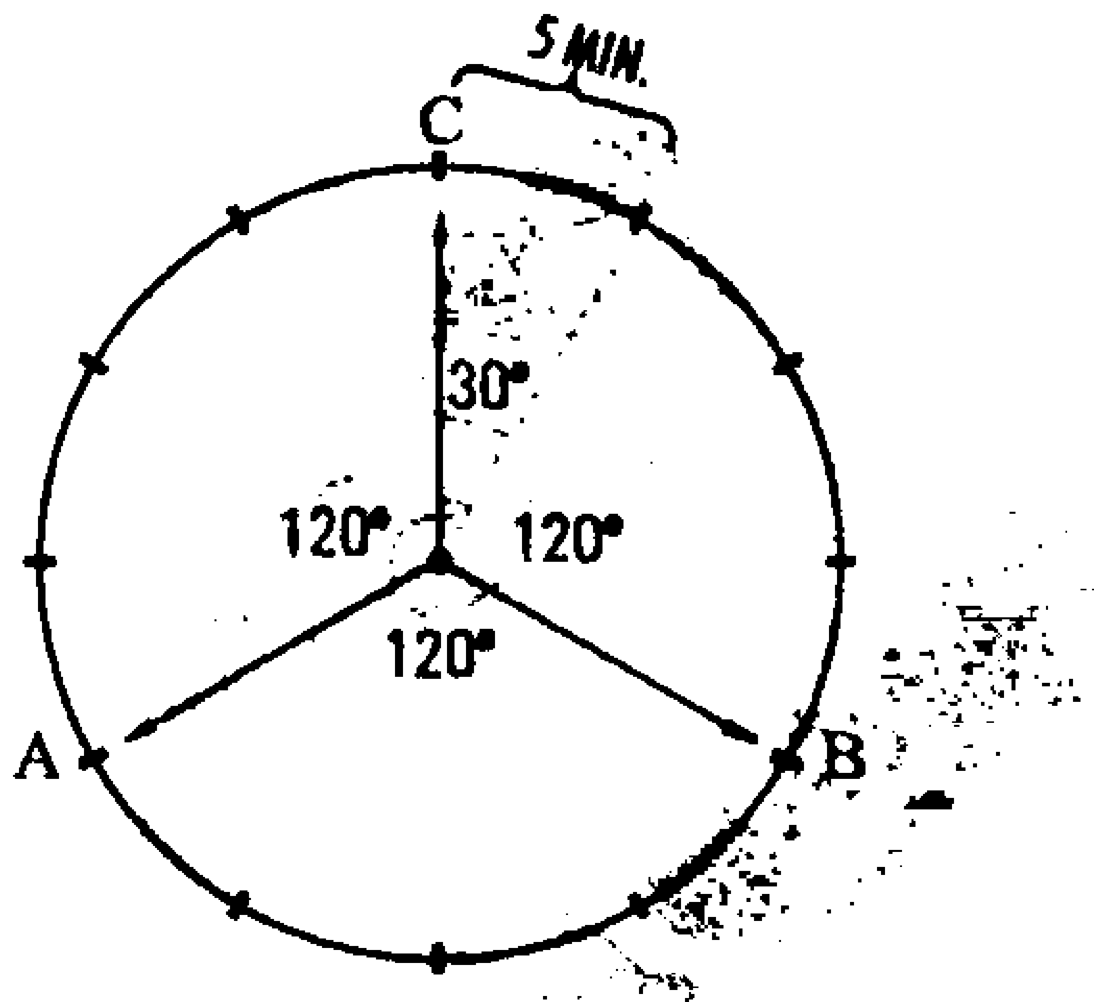
PROBLEMA 55 :

Dos relojes de **A, B** y **C** se sincronizaron simultáneamente al mediodía. Si el reloj de **A** se atrasa **5** minutos por hora, el de **B** se adelanta **5** minutos y el de **C** señala la hora correcta, ¿dentro de cuánto tiempo los minuteros de los **3** relojes equidistarán entre sí?

A)4 h B)3 h C)3,5 h D)2 h E)5 h

RESOLUCIÓN :

* Sea «x» cantidad de horas necesarias para que se cumpla la siguiente situación :



En cada hora el minutero «**B**» adelanta **5** min. al minutero «**C**» ó **30°**, luego :

Tiempo	Ángulo
1h	30°
x	120°

$\Rightarrow x = 4\,H$

RPTA : "A"

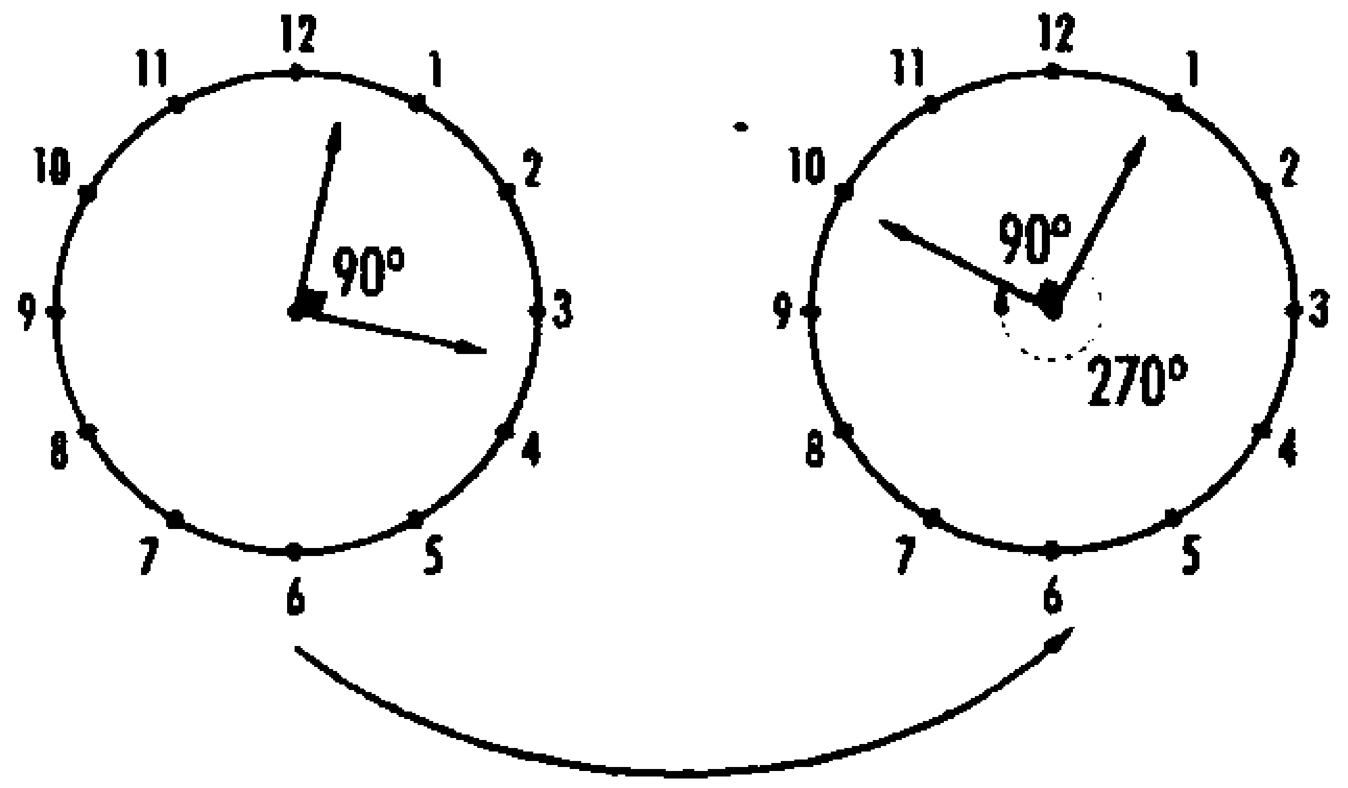
PROBLEMA 56 :

¿Cada cuanto tiempo las agujas de un reloj forman entre sí un ángulo de **90°**?

A) $32\frac{8}{11}$ min B) $34\frac{8}{11}$ C) $54\frac{9}{11}$

RESOLUCIÓN :

1ra. vez que $\theta = 90^o$ *2da*. vez que $\theta = 90^o$



Piden el tiempo que demora en pasar de la *1ra*. a la *2da*. posición.

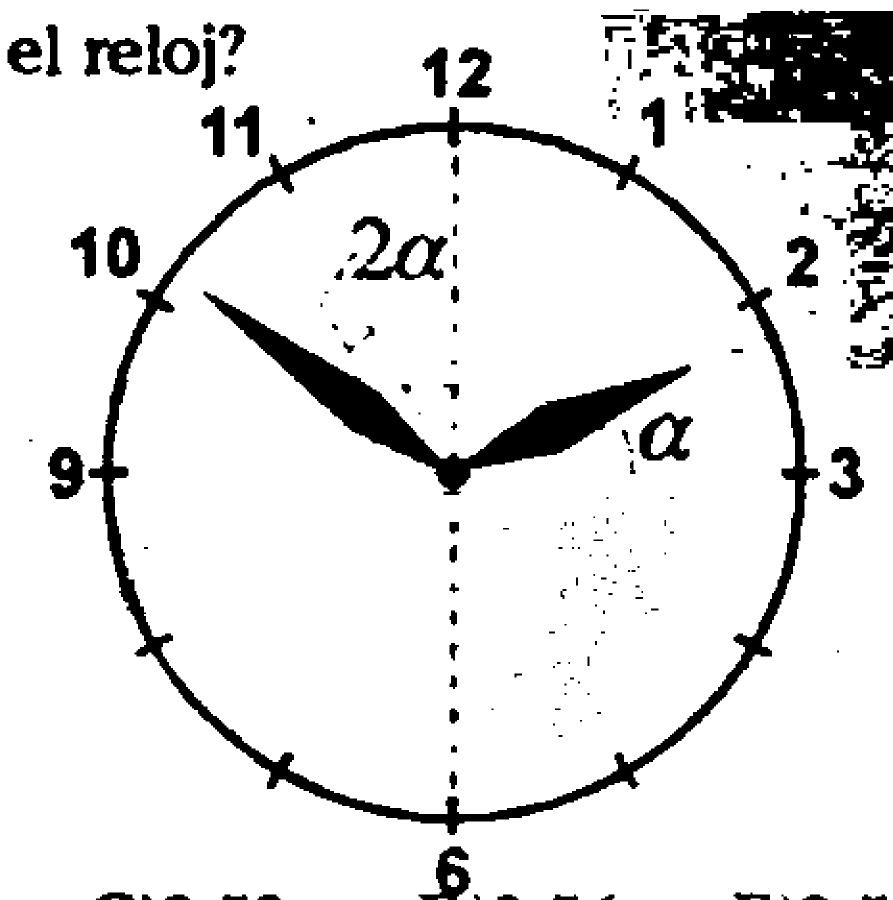
PRIMERA POSICIÓN	SEGUNDA POSICIÓN
$H = 12\ ;\ \theta = 90$	$H = 12\ ;\ \theta = 270$
$m = x$	$m = y$
$90 = \frac{11}{2}x - (30)12$	$270 = \frac{11y}{2} - 30(12)$

* Piden : $y - x = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}\,min$

RPTA : "A"

PROBLEMA 57 :

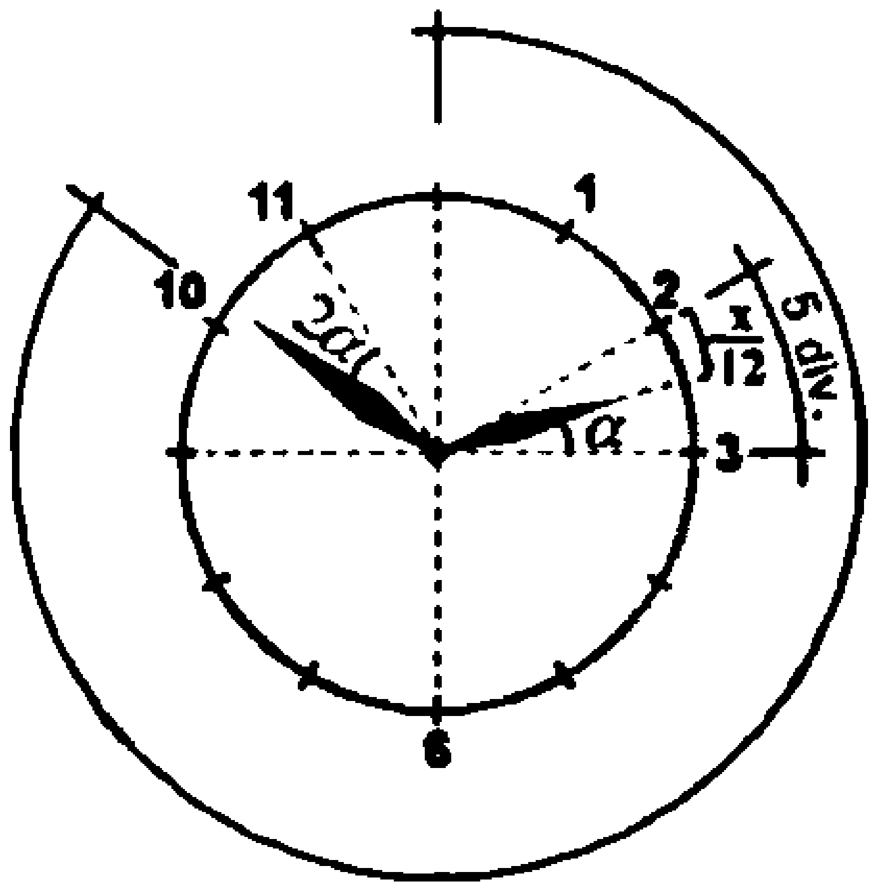
¿Qué hora indica el reloj?



A) [illegible] B)2:52 C)2:53 D)2:54 E)2:54' 30"

RESOLUCIÓN :

PRIMER MÉTODO :



x *div.* <> "x" *min* ⇒ para el minutero

$$\alpha = 5 - \frac{x}{12} \quad y \quad 2\alpha = 55\ div - x$$

$$2\left(5 - \frac{x}{12}\right) = 55 - x$$

* Despejando :

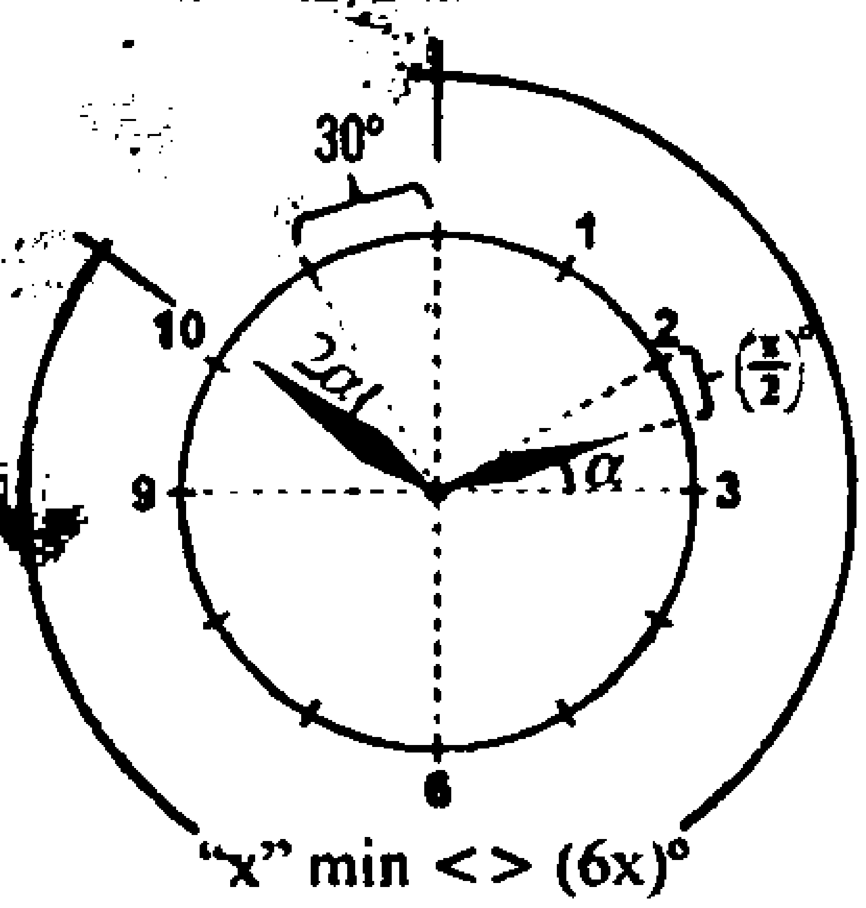
Se cumple sólo para el minutero 1 div <> 1 min.

$$\underbrace{x = 54\ div <> 54\ min}_{\text{Para el minutero}}$$

* Luego la hora será : **2:54**

RPTA : "D"

SEGUNDO MÉTODO :



"x" min <> $(6x)^\circ$

◆ Del gráfico : $\alpha = 30^\circ - \left(\frac{x}{2}\right)^\circ$ .... *(I)*

$(6x)^\circ + 2\alpha + 30^\circ = 360^\circ$ ..... *(II)*

◆ De *(I)* y *(II)* : $6x + 2\left(30 - \frac{x}{2}\right) = 330$

$\Rightarrow \quad 5x = 270 \Rightarrow \quad x = 54$

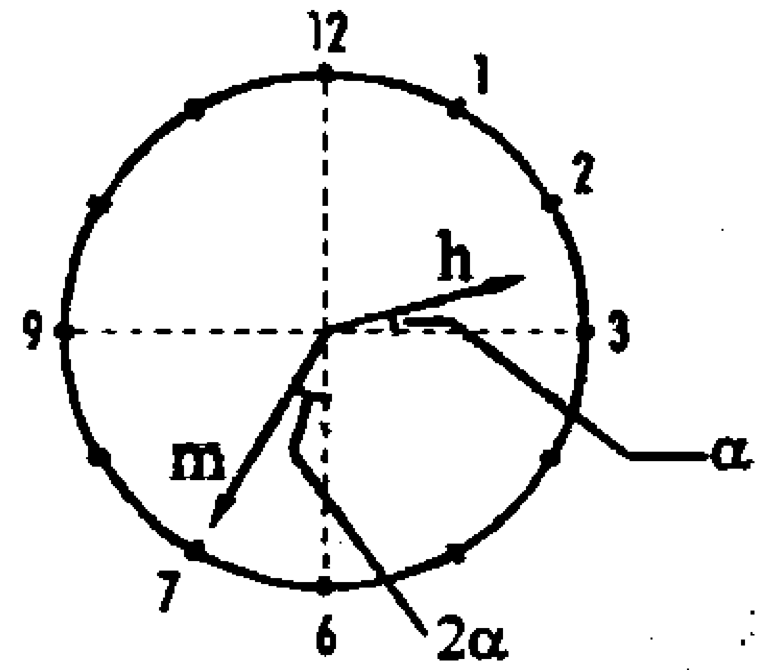
◆ Luego la hora será : **2:54**

RPTA : "D"

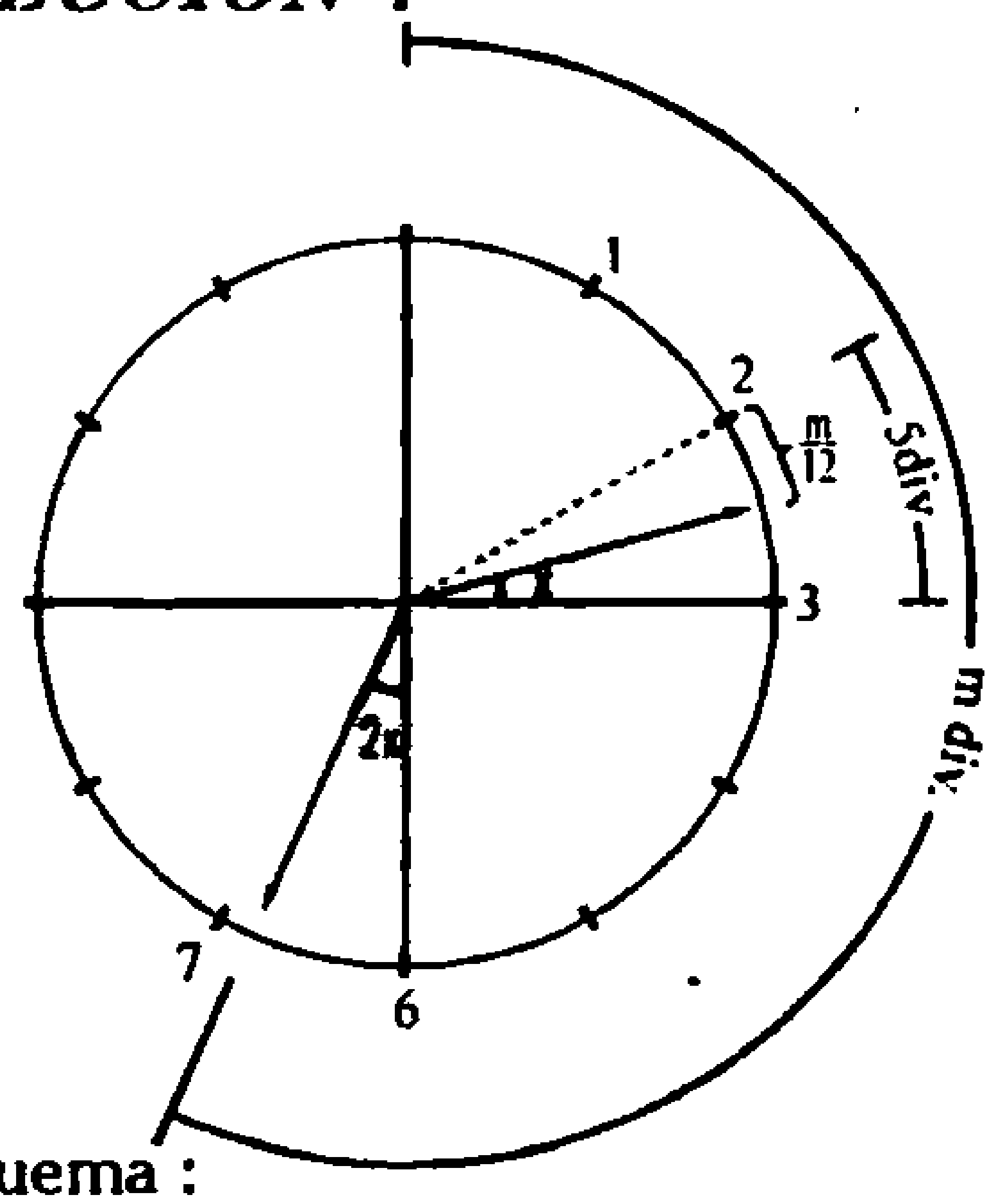
PROBLEMA 58 :

¿Qué hora indica el reloj de la figura?

A) $2\ h\ 34\ 2/7$
B) $2\ h\ 33\ 4/7$
C) $2\ h\ 34\ 3/7$
D) $2\ h\ 33\ 5/7$
E) $2\ h\ 32\ \frac{1}{7}$



RESOLUCIÓN :



* De esquema :

$$\alpha = 5 - \frac{m}{12} \quad y \quad 2\alpha = m - 30\ DIV$$

$$2\left(5 - \frac{m}{12}\right) = m - 30$$

$$m = 34\frac{2}{7}\ DIV$$

⇒ *La hora será:* $2h\ 34\frac{2}{7}$

RPTA : "A"

NOTA :

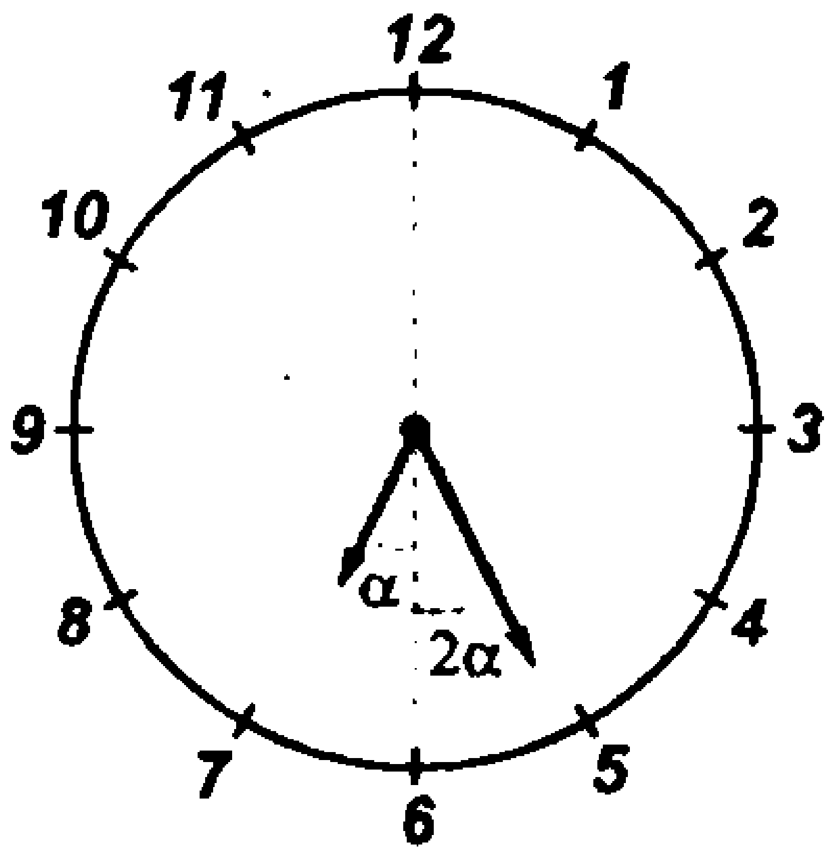
Durante una misma hora :

◆ Ángulos de *0º* y *180º* se forman *1* sola vez.

◆ Angulo de otra magnitud se forman *2* veces (por primera vez y segunda vez).

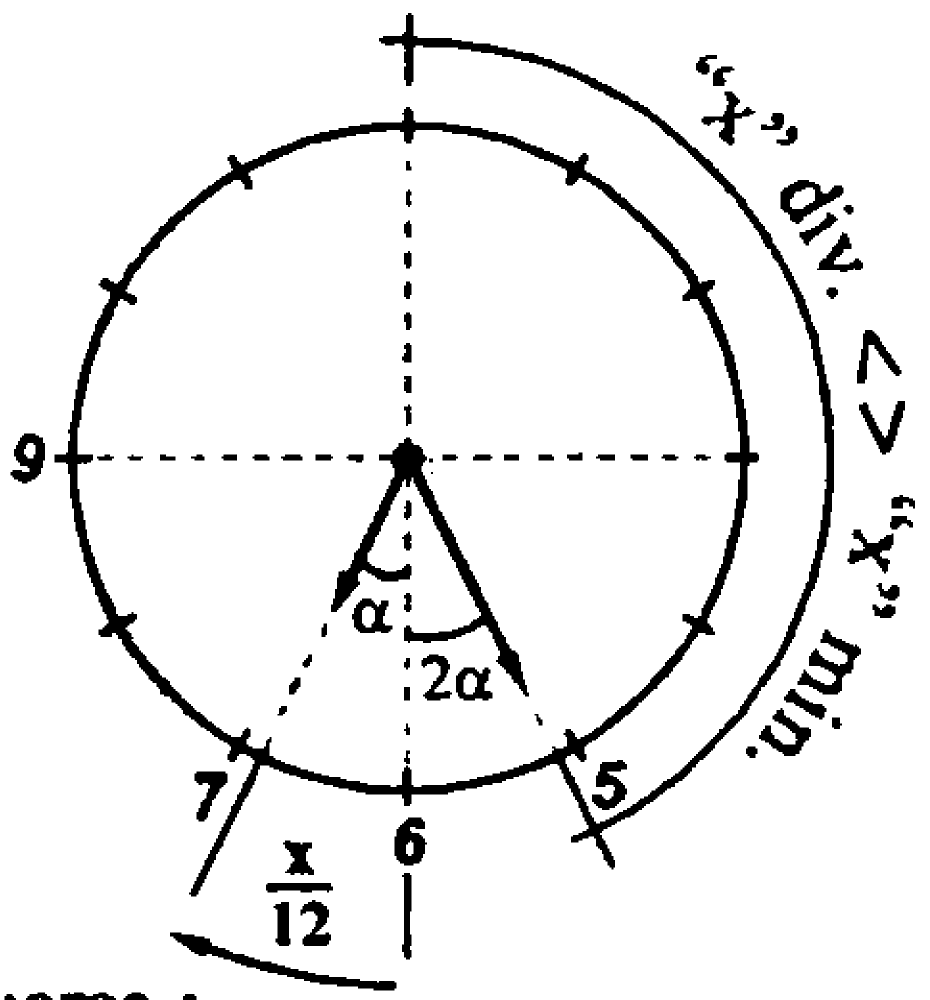
PROBLEMA 59 :

¿Qué hora es?



A) $6h.27\frac{3}{11}min$ B) $6h.26\frac{4}{11}min$ C) $6h.25\frac{5}{7}min$

RESOLUCIÓN :



Según esquema :

- $x = 30 - 2\alpha \wedge \alpha = \frac{x}{12}$

$x = 30 - 2\left(\frac{x}{12}\right)$

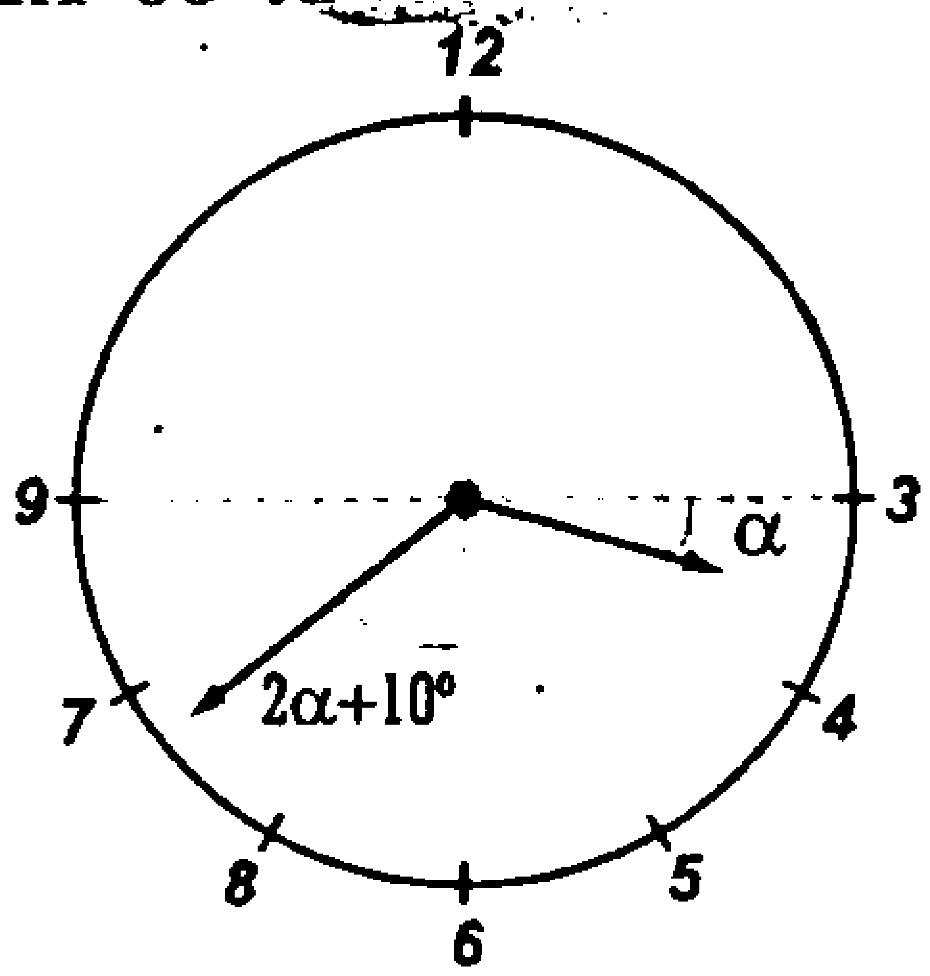
* Despejando: $x = \frac{180}{7} = 25\frac{5}{7}$

- La hora será : $6:25\ \frac{5}{7}$

RPTA : "C"

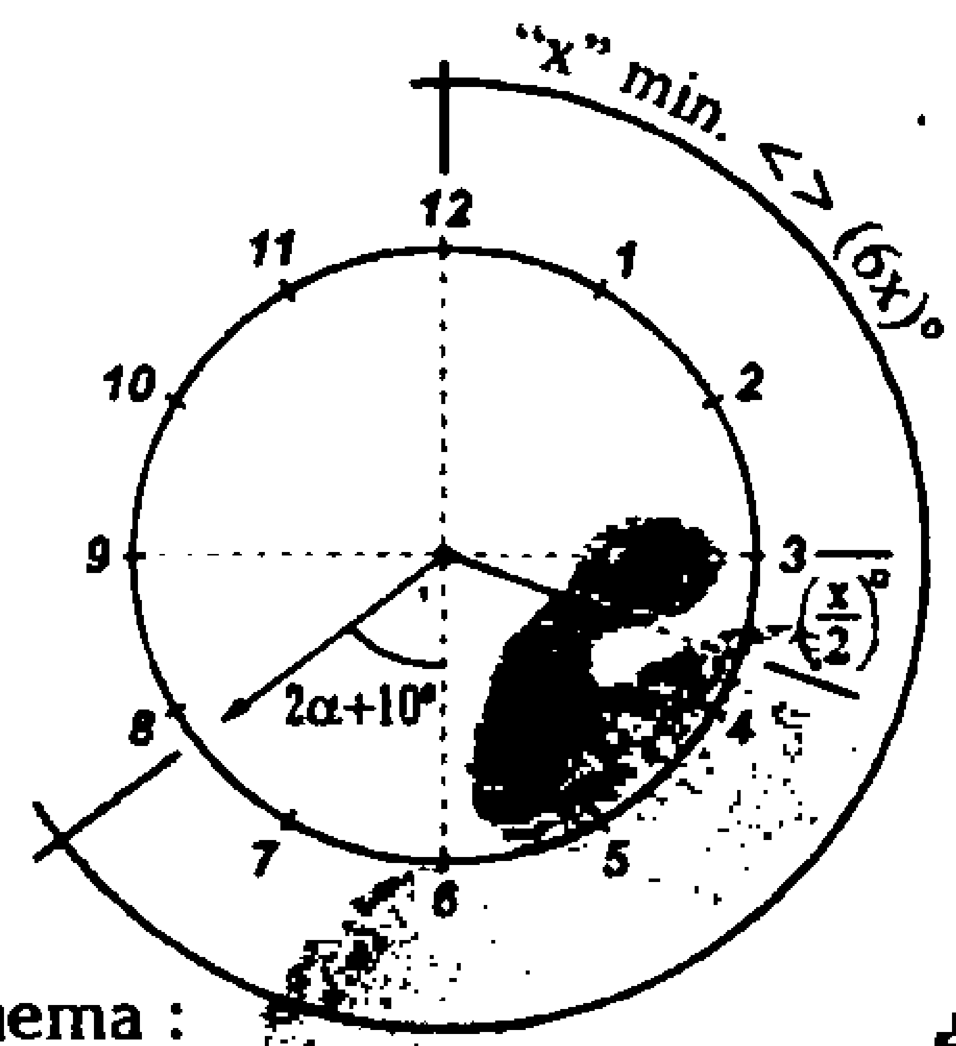
PROBLEMA 60 :

¿Qué hora indica el gráfico?



A) 3:36 B) $3:37\ \frac{7}{11}$ C) 3:38

RESOLUCIÓN :



* Del esquema :

- $\alpha = \left(\frac{x}{2}\right)^\circ \rightarrow 2\alpha = x^\circ$ .... (I)
- $2\alpha + 10 = (6x)^\circ - 180^\circ =$ .... (II)
- De (I) y (II) : $x^\circ + 190^\circ = 6x^\circ$

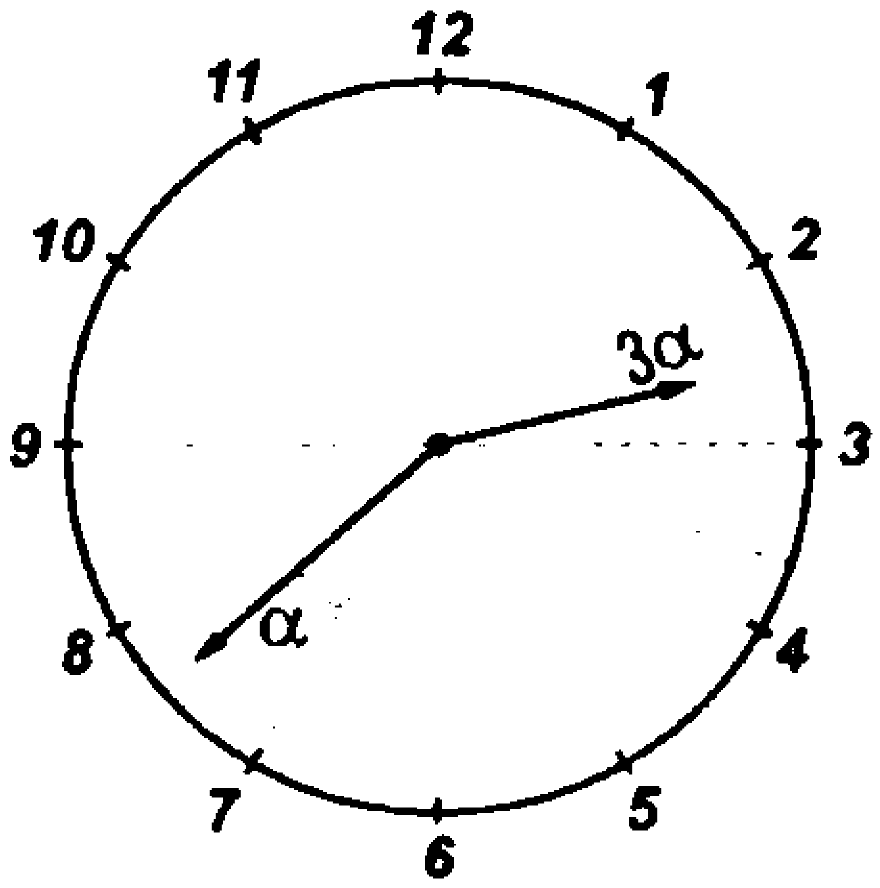
$\Rightarrow 190 = 5x \Rightarrow 38 = x$

- Luego la hora será : 3:38

RPTA : "C"

PROBLEMA 61 :

¿Qué hora indica el gráfico?



A) 2:36 B) 2:37 C) 2:38 D) 2:39 E) 2:36'30"

RESOLUCIÓN :

- Del esquema :

$3\alpha = \frac{x}{12} Div$

$\alpha = \frac{x}{36} Div$ .... (I) (para el horario)

$x = 35 + \alpha$ .... (II) (Para el minutero)

- De (I) y (II) : $x = 35 + \frac{x}{36}$

$\frac{35x}{36} = 35 \rightarrow x = 36$

- Luego la hora marcada será : 2:36

RPTA : "A"

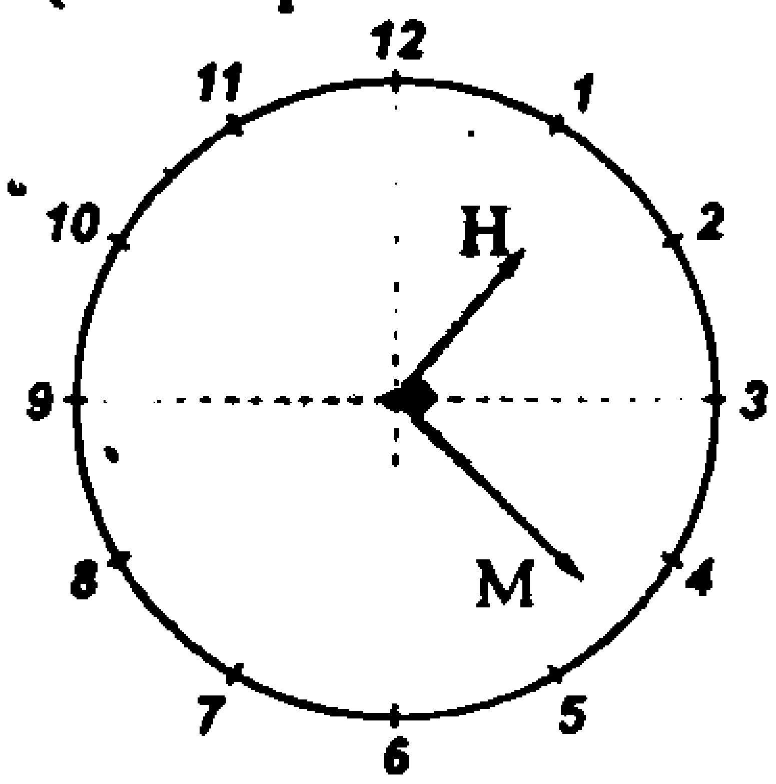
PROBLEMA 62 :

¿A qué hora entre la 1 y las 2 se forma un ángulo recto por primera vez?

A) $1h20\frac{3}{11}min$ *B)* $1h22\frac{8}{11}min$ *C)* $1h21\frac{9}{11}min$

RESOLUCIÓN :

* Primera vez (antes que el minutero pase sobre el horario).



○ Aplicando la fórmula ya dada :

$$\alpha = \frac{11}{2}m - 30H \Rightarrow 90 = \frac{11}{2}m - 30(1)$$

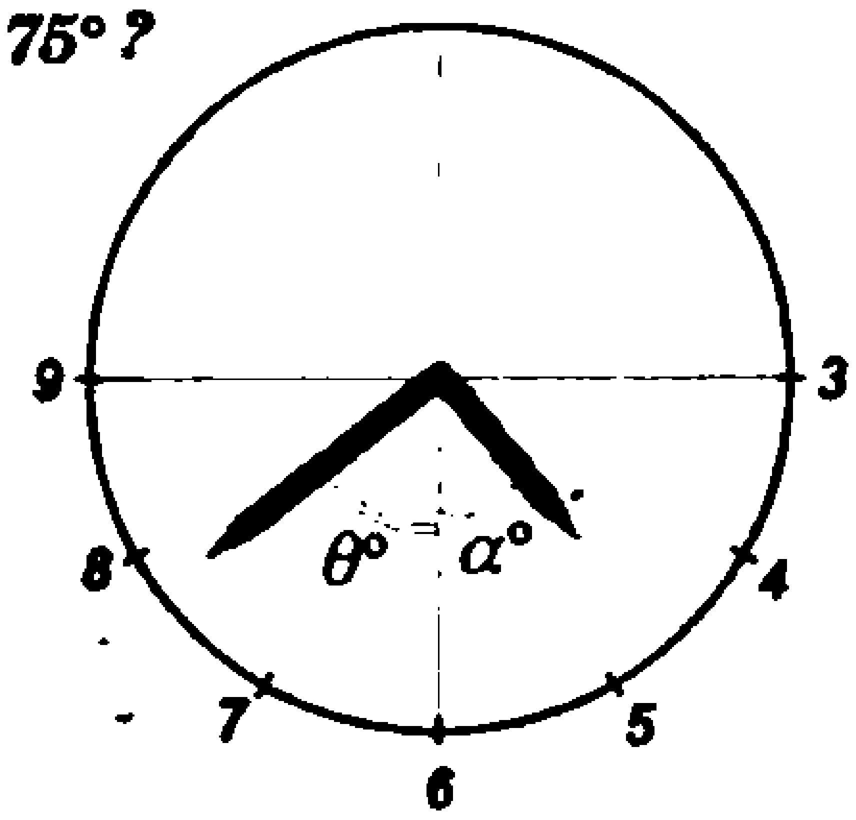
$$\Rightarrow m = \frac{240}{11} \qquad 240 \div 11 = 21,\ \text{residuo } 9$$

$$\Rightarrow m = 21\frac{9}{11}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 63 :

¿Qué hora marca el reloj de la figura, si $\theta° - \alpha° = 3{,}75°$?



A)4:35'35" *B)4:36'30"* *C)4:37'30"*
D)4:38'30" *E)4:39'30"*

RESOLUCIÓN :

Recorrido del horario : $(60 - \alpha)°$
Recorrido del minutero : $(180 + \theta)°$
Sabemos : $M = 12H$

$$180 + \theta = 12(60 - \alpha) \text{ .... (I)}$$

• Del dato : $\alpha° = \theta° - 3{,}75°$

• Reemplazando «α» en (I) :

$$180 + \theta = 12(60 - (\theta - 3{,}75))$$

$$\Rightarrow 180 + \theta = 720 - 12\theta + 45$$

$$\Rightarrow 13\theta = 585° \Rightarrow \theta = 45°$$

* Entonces el minutero recorrió :

$$180° + \theta = 180° + 45° = 225°$$

• Pero sabemos que para el minutero :

$$1' \text{ —— } 6°$$

$$x \text{ —— } 225°$$

• Por regla de tres : $6x = 225'$

$$x = 37'\,30"$$

• La hora será : *4:37'30"*

RPTA : "C"

PROBLEMA 64 :

Entre la *5:00* y *6:00 H* . ¿A qué hora por primera vez se forma un ángulo de *40°*?

A)5:10 *B)5:15* *C)5:16* *D)5:20* *E)5:14*

RESOLUCIÓN :

* La primera vez ocurrirá cuando el horario esté delante del minutero y la segunda vez a la inversa, luego aplicaremos :

$$\theta = 30H - \frac{11}{2}m \begin{cases} \theta = 40° \\ H = 5 \\ m = ¿? \end{cases}$$

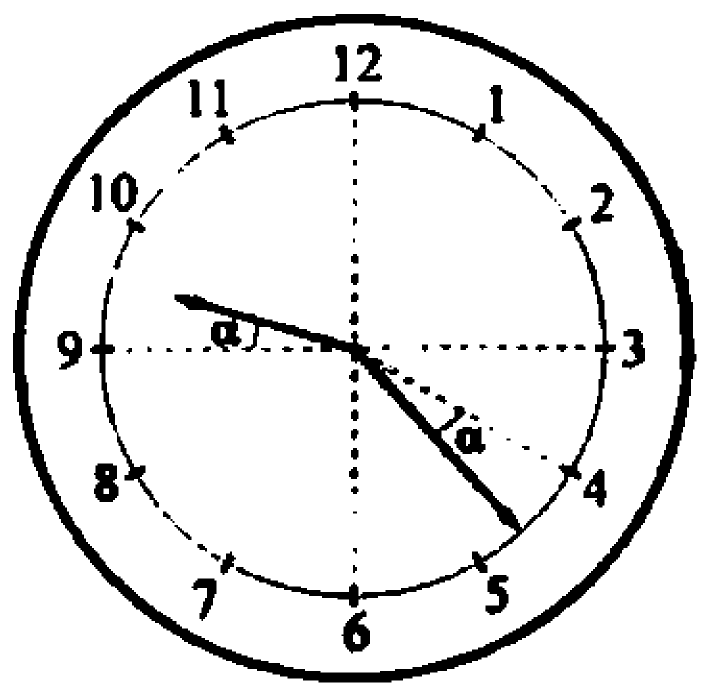
$$\Rightarrow 40 = 30(5) - \frac{11}{2}m \Rightarrow m = 20$$

* La hora será: *5:20*

RPTA : "D"

PROBLEMA 65 :

¿ Qué hora marca el reloj mostrado?



RESOLUCIÓN :

* Sabemos que : *M=12 H*

* Según gráfico :

$$20 + \alpha = 12\alpha \Rightarrow \alpha = 1\frac{9}{11}$$

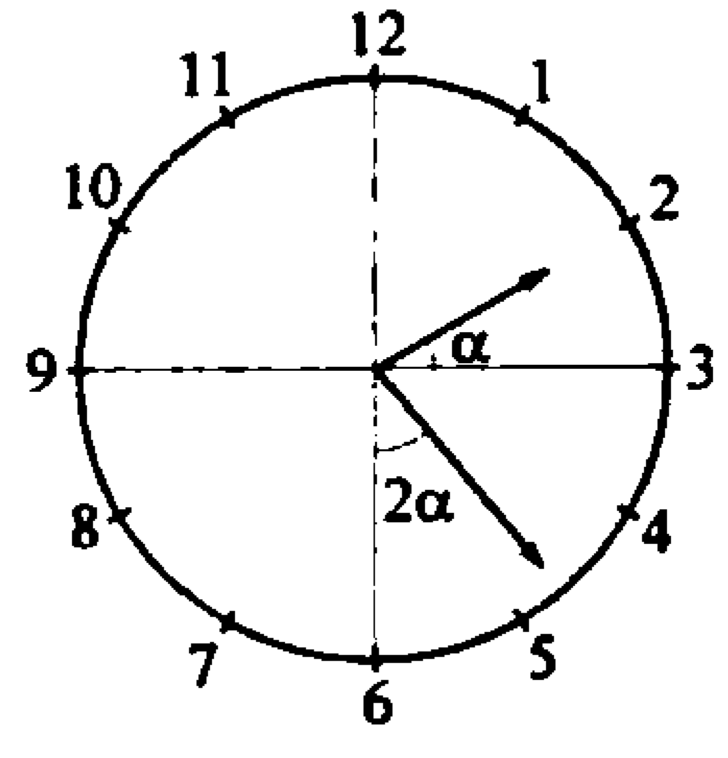
* Luego serán las *9* horas con :

$$20 + 1\frac{9}{11} = 21\frac{9}{11} \text{ minutos}$$

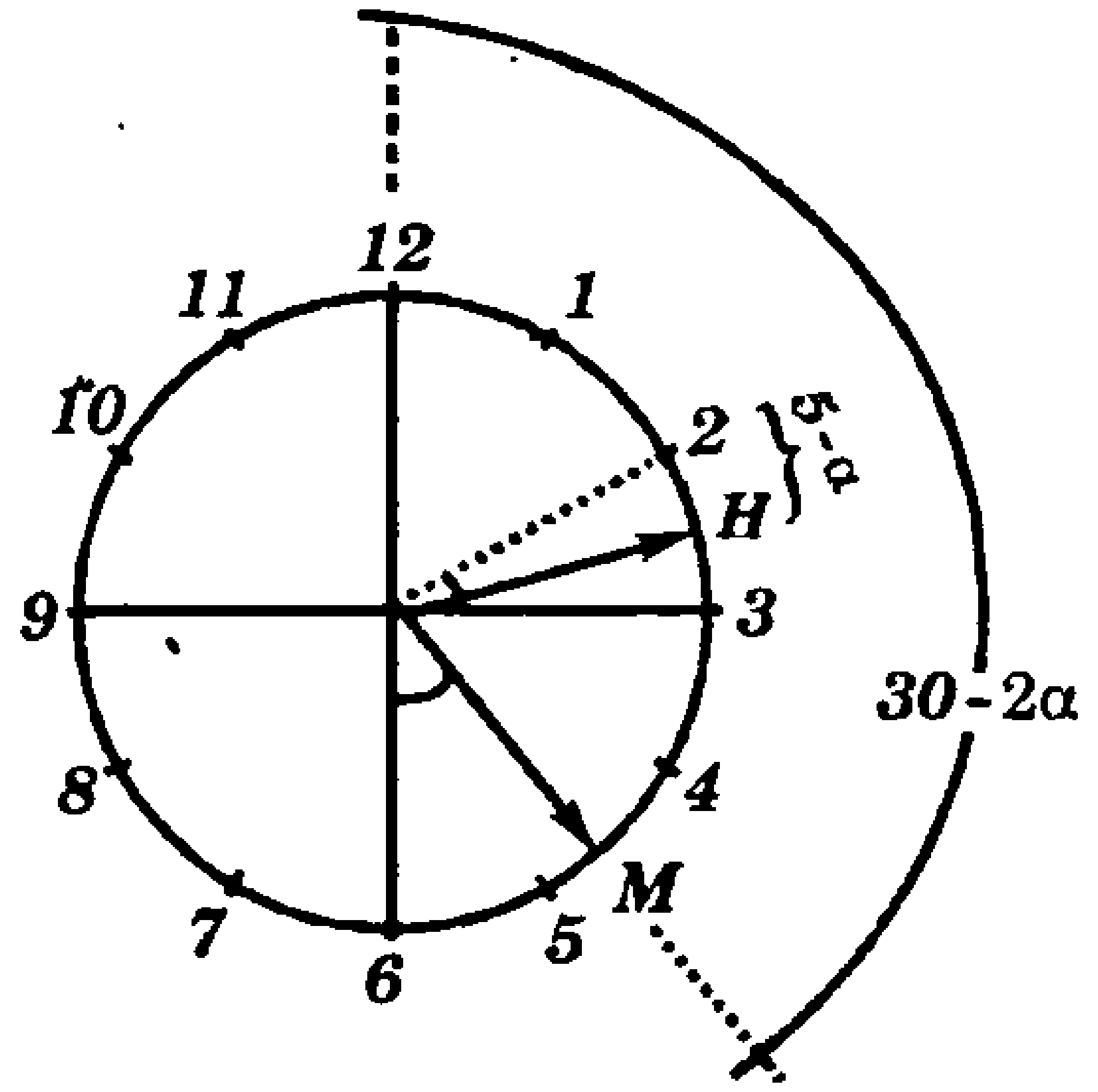
PROBLEMA 66 :

¿Qué hora será según el gráfico?

A) 2:16
B) 2:18
C) 2:32
D) 2:24
E) 2:08



RESOLUCIÓN :



- Sabemos :

$$M = 12H \Rightarrow 30 - 2\alpha = 12(5-\alpha) \Rightarrow \alpha = 3$$

- Luego serán las *2* horas con :

$30 - 2a = 30 - 6 = 24$ minutos

RPTA : "D"

PROBLEMA 67 :

Toledo salió de su casa por la mañana cuando su reloj de pared coincidía con el gráfico *I* y llegó por la noche del mismo día cuando su reloj coincidía con el gráfico *II*. ¿Qué tiempo estuvo fuera de casa?

Gráfico I

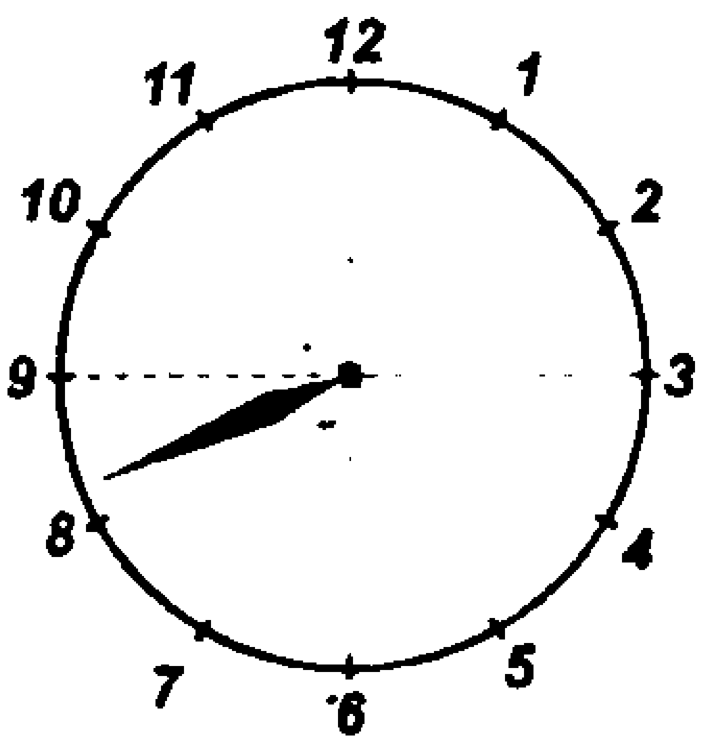
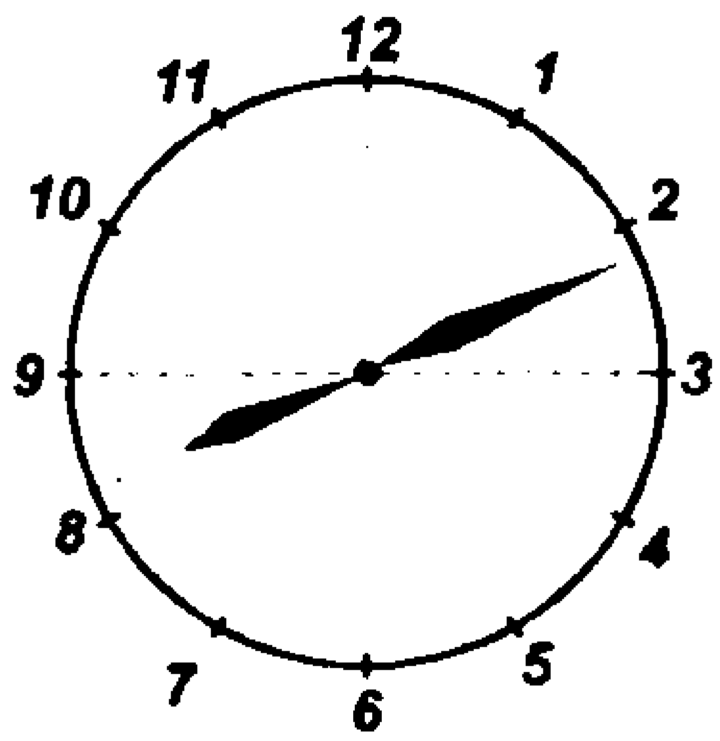


Gráfico II



A) $11h\ 27\dfrac{3}{11}min$ B) 11 h 30 min. C) 12 h.

RESOLUCIÓN :

- Para el reloj *(I)* :

$$M = 12H$$

$$\Rightarrow 40 + x = 12x \ (en\ divisiones)$$

$$\Rightarrow x = 3\frac{7}{11}div. = 3\frac{7}{11}min$$

Su hora será : $8\left(40 + 3\dfrac{7}{11}\right)' = 8:43\dfrac{7}{11}$

- Para el reloj *(II)* :

$$M = 12H \Rightarrow 10 + y = 12y \Rightarrow y = \frac{10}{11}$$

* Su hora será : $8:\left(10 + \dfrac{10}{11}\right)' = 8:10\dfrac{10}{11}$

- El tiempo que estuvo fuera de su casa será :

$$\overbrace{12 + 8:10\frac{10}{11}}^{De\ Noche} - 8:48\frac{7}{11} = 11H\ 27\frac{3}{11}$$

RPTA : "A"

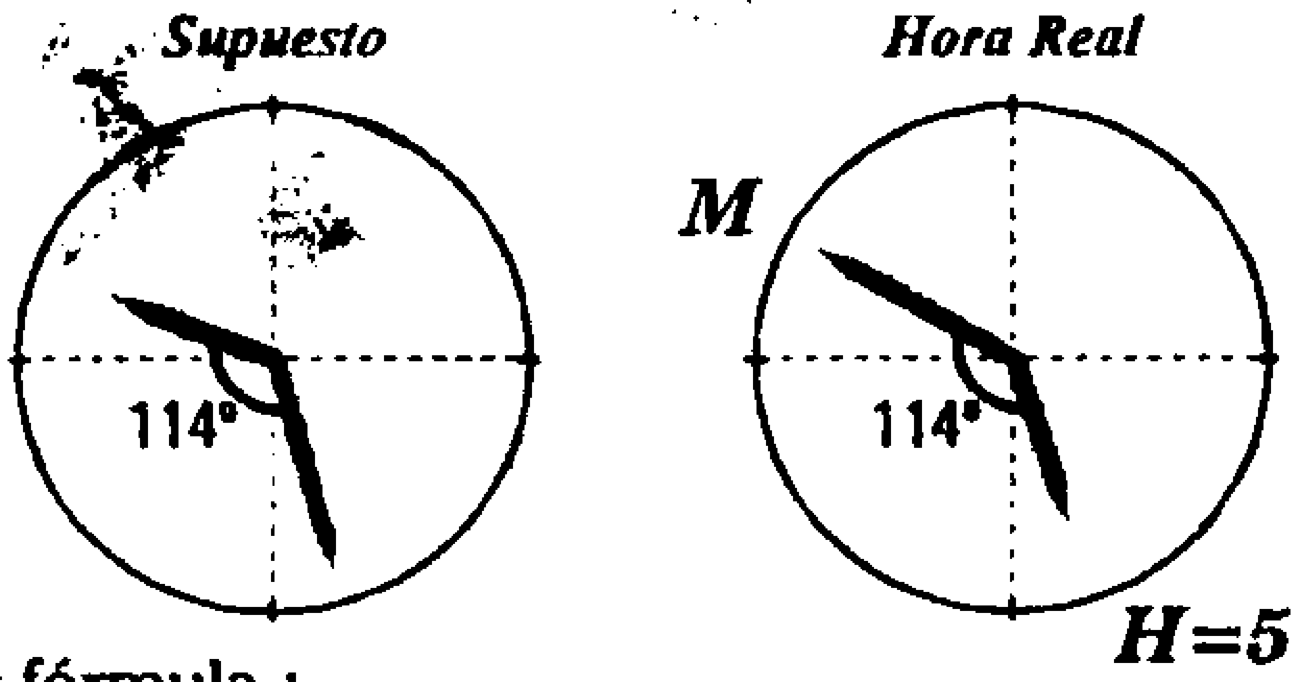
PROBLEMA 68 :

Se construye un reloj que tiene el horario más grande que el minutero, cuando Susy ve la hora dice «Son las *9:29*», si el ángulo que forman las manecillas es *114°*. ¿Qué hora es en realidad?

A) 4:52 B) 5:36 C) 5:52 D) 5:50 E) 5:48

RESOLUCIÓN :

SUPUESTO HORA REAL



* Por fórmula :

$$\alpha = \frac{11}{2}M - 30H$$

$$\Rightarrow 114 = \frac{11}{2}M - 30(5) \Rightarrow M = 48$$

- Entonces realmente será : *5:48'*

RPTA : "E"

PROBLEMA 69 :

En un reloj los minutos marcados son en valor numérico equivalentes al ángulo formado por el minutero y el horario, además son menos de las *4*. ¿Qué hora es?

A) 3:25 B) 3:20 C) 2:40 D) 2:35 E) 1:50

RESOLUCIÓN :

- Consideremos que $H=3$, luego según enunciado: $a = M$
- Según fórmula :

$$\alpha = \frac{11}{2}M - 30H \Rightarrow M = \frac{11}{2}M - 30(3)$$

* Resolviendo : $M = 20$

- Entonces la hora será : *3:20*

RPTA : "B"

PROBLEMA 70 :

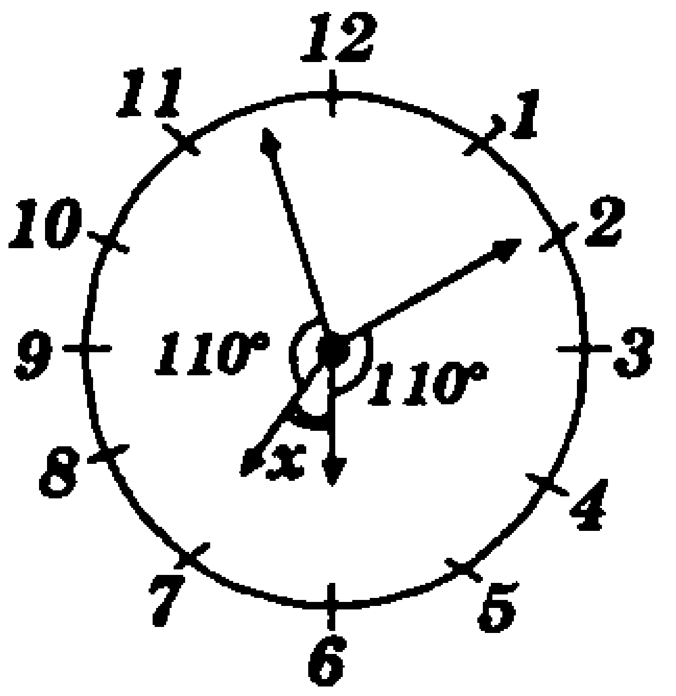
Mientras iba a cenar, poco después de las *6:00 p.m.*, un hombre observa que las agujas de su reloj de

pared forman un ángulo de **110°**. Al regresar antes de las **7:00** p.m., él notó que nuevamente las agujas formaban un ángulo de **110°**. El número de minutos que , estuvo afuera es :

A) $36\frac{2}{3}$ *B) 40* *C) 42,5* *D) 44* *E) 45*

RESOLUCIÓN :

* Si el horario recorre x , el minutero recorre $12x$:



$$110° + x + 110° = 12x$$
$$\Rightarrow x = 20°$$

$\Rightarrow$ El minutero recorre $12(20°) = 240° <> 40'$

RPTA: "B"

PROBLEMA 71 :

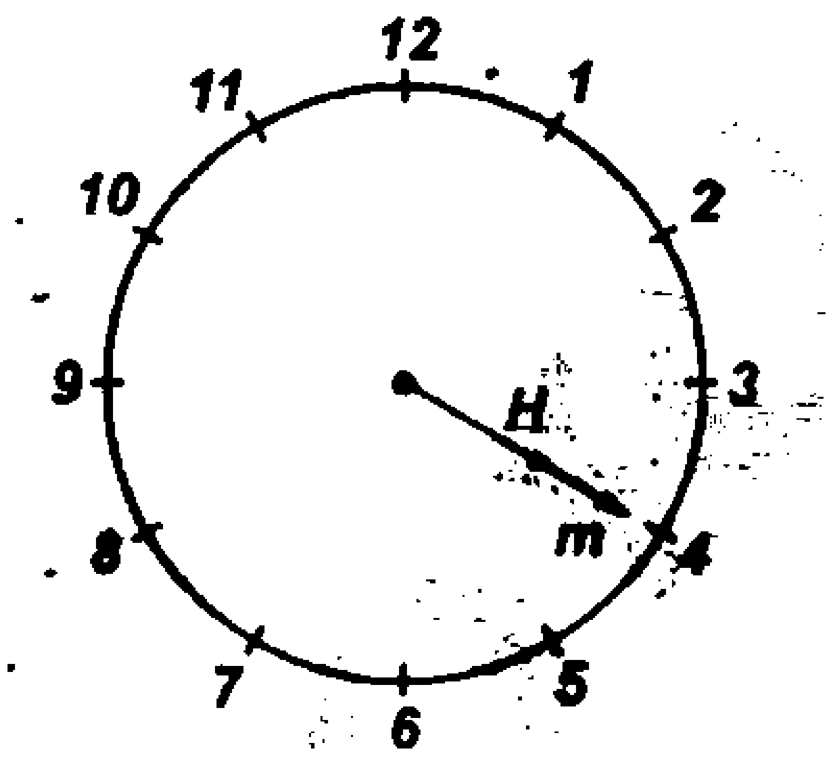
¿Cada cuánto tiempo las manecillas de un reloj se superponen?

RESOLUCIÓN :

* Cuando las manecillas se superponen $\alpha = 0°$. En la fórmula :

$$\alpha = \frac{11}{2}m - 30H$$

$$\Rightarrow m = \frac{60\ H}{11} \ .... (I)$$



Las superposiciones se darán cuando en (I); $H = 0, 1, 2, ..., 11$ y $m = 0$

Es decir; si :}

$1\ hr\ \{\ H = 1 \Rightarrow m = \frac{60}{11} \times 1$

$1\ hr\ \{\ H = 2 \Rightarrow m = \frac{60}{11} \times 2$

$1\ hr\ \{\ H = 3 \Rightarrow m = \frac{60}{11} \times 3$

$1\ hr\ \{\ H = 4 \Rightarrow m = \frac{60}{11} \times 4$

⋮

$1\ hr\ \{\ H = 12 \Rightarrow m = \frac{60}{11} \times 12$ ($1H\ \frac{60}{11}min$)

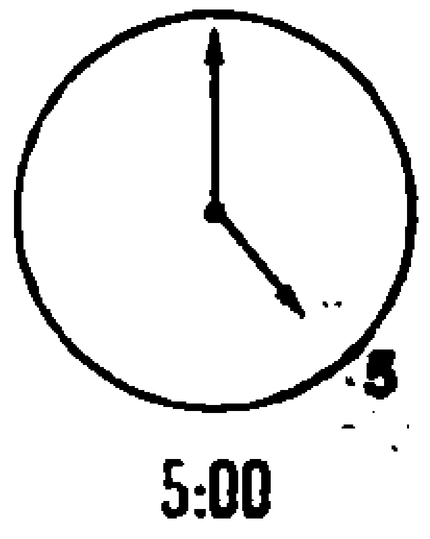
$\Rightarrow$ Se superponen cada **1** hr $5\frac{5}{11}\ min$

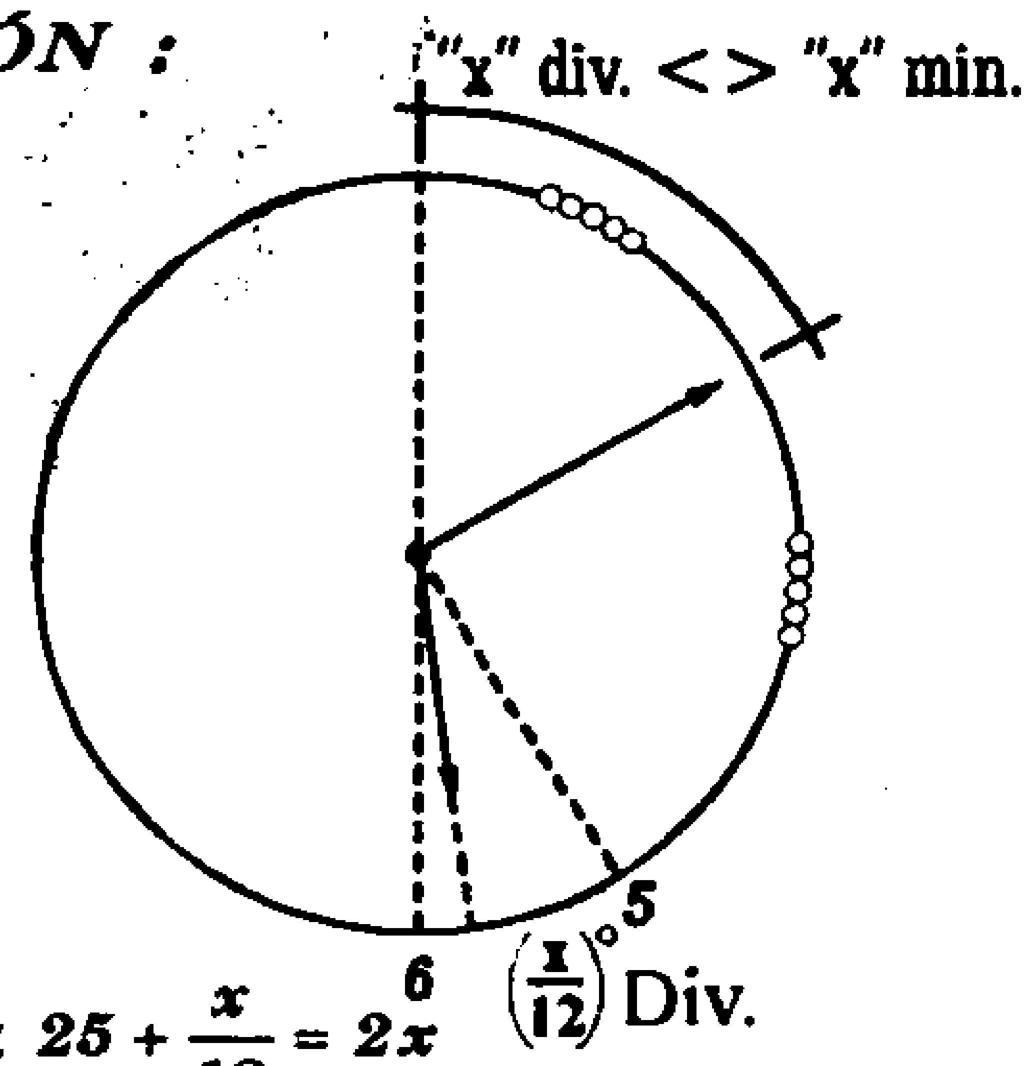
PROBLEMA 72 :

¿A qué hora después de las **5** el minutero equidista del horario y de las **12** por primera vez?

A)5:12 *B)* $5:13\frac{1}{23}$ *C)5:15*

RESOLUCIÓN :





♦ Del esquema : $25 + \frac{x}{12} = 2x$

Resolviendo : $x = 13\frac{1}{23}$

♦ Luego serán las $5:13\ \frac{1}{23}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 73 :

¿Cuántas veces durante el día se superponen las agujas de un reloj?

A)12 *B)24* *C)11* *D)22* *E)23*

RESOLUCIÓN :

* Las agujas se superponen cuando forman entre sí un ángulo de **0°**, luego aplicando la fórmula :

$$0 = \frac{11}{2}M - 30H$$

♦ La primera vez para $H = 0$ y $M = 0$, es decir a la **0:00 H.**

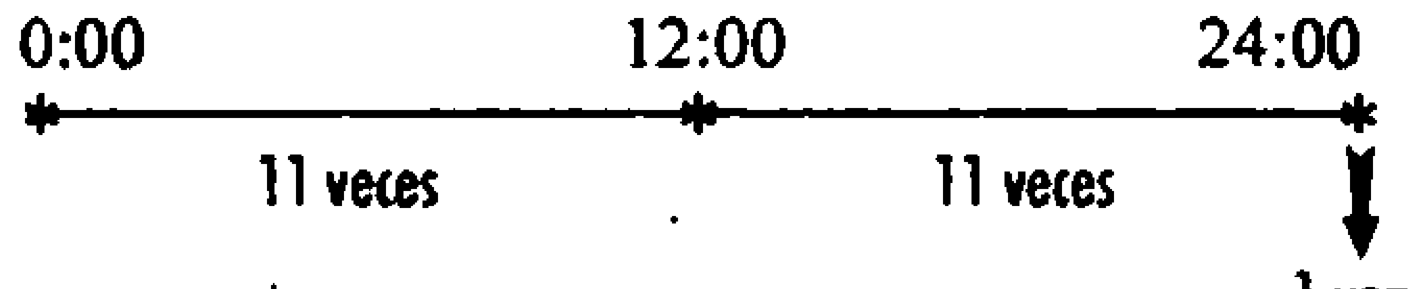
♦ La segunda vez para $H = 1$, entonces $m = \frac{60}{11}$, luego

se deduce que se superponen cada :

$$1 : \frac{60}{11}min\ - 0 : 00 = 1H + \frac{60\,min}{11}$$

$$= 1H + \frac{1H}{11} = \frac{12H}{11} <> 1\ vez$$

$$12H <> 11\ vece$$



⇒ Total de superposiciones : *23*

RPTA : "E"

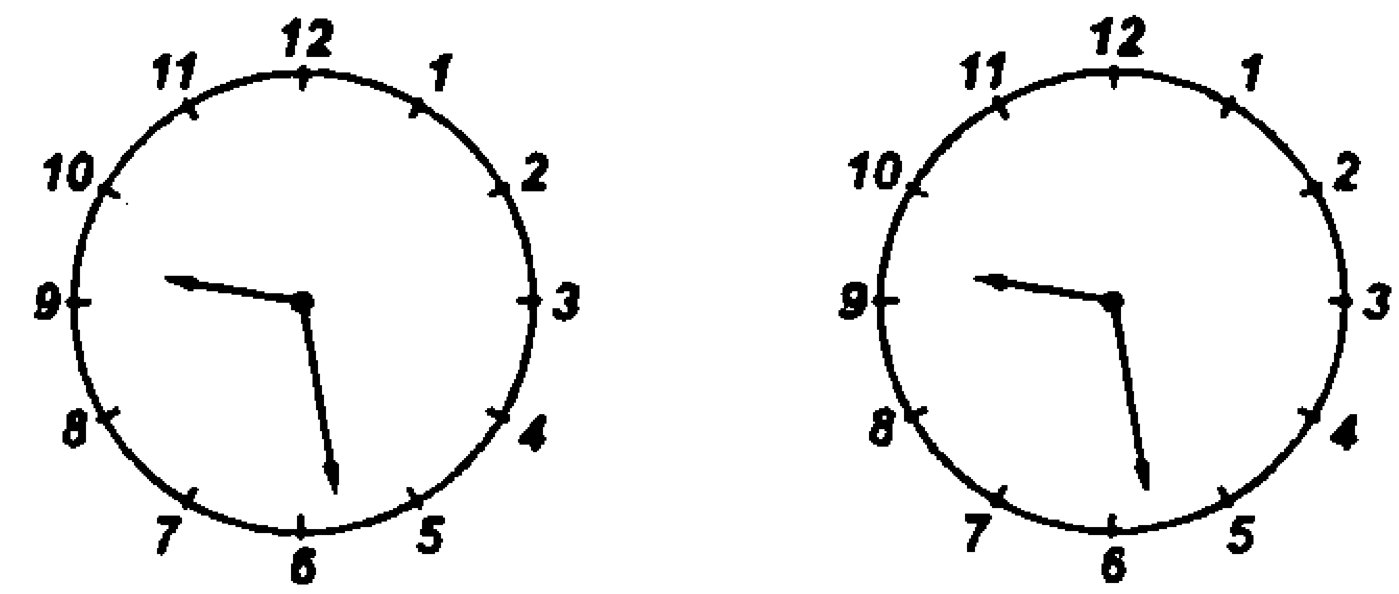
PROBLEMA 74 :

Se construye un reloj que tiene el horario más grande que el minutero, cuando una persona ve la hora anuncia: "Son las *9* y *29*" ¿Qué hora es en realidad?

A)5:45' *B)6:50'* *C)4:48'* *D)5:48'* *E)6:52'*

RESOLUCIÓN :

LO SOPUESTO	LO CORRECTO



9:27 ⟶ *Se observa que la hora real es más que la 5:45 y menos que 5:50, con lo que según alternativas será : 5:48*

RPTA : "D"

PROBLEMA 75 :

El *1* de Enero de cierto año fue martes. ¿Qué día fue el *24* de Enero de ese mismo año?

RESOLUCIÓN :

* De los datos se plantea lo siguiente :

	Martes	Miercoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Lunes
E	1	2	3	4	5	6	4
N	8	9	10	11	12	13	14
E R	15	16	17	18	19	20	21
O	22	23	24				

⇒ el *24* de Enero cayó Jueves.

OBSERVACIÓN :

Del cuadro se observa que los grupos de *7* días son de Martes a Lunes , y nos damos cuenta que de el *1* de enero al *24* de enero , hay *3* grupos de *7* días más *3* días , esto se consigue haciendo lo siguiente :

$$\begin{array}{r|l} 24 & 7 \\ \underline{21} & 3 \text{ grupos} \\ 3 & \end{array}$$

3 grupos ⟶ de Martes a Lunes

3 → *Ma Mi Jueves*

PROBLEMA 76 :

A una esfera de reloj se le divide en *1600* partes iguales, cada parte se denominará nuevo minuto, cada nueva hora estará constituida por *100* nuevos minutos ¿Qué hora indicará el nuevo reloj, cuando el antiguo indique la tres horas *48* minutos?

A)2:80 *B)2:45* *C)3:75* *D)4:75* *E)4:80*

RESOLUCIÓN :

* Por condición del problema :

100 «nuevos minutos» < > *1* «nueva hora»

1600 «nuevos minutos» < > *16* «nuevas horas»

* Para las *3* horas *48* minutos antiguos por «regla de tres simple directa», se tiene :

HORAS ANTIGUAS	NUEVAS HORAS
12	16
3	H

$$H = \frac{3 \times 16}{12} = 4 \text{ Nuevas horas}$$

MINUTOS ANTIGUAS	NUEVAS HORAS
60	100
48	H

$$m = \frac{(48)(100)}{60} = 80 \text{ "NUEVOS MINUTOS"}$$

* Luego, el nuevo reloj indicará : "*4* horas *80* minutos"

RPTA : "E"

PROBLEMA 77 :

Supongamos que en el planeta *«x»* el día dura *16* horas y cada hora tiene *45* minutos. ¿Qué hora será en un reloj de este planeta, cuando un reloj de la Tierra marque las *18:20 h*?

A)12 h 15' *B)12 h 05'* *C)12 h 00'*
D)11 h 10' *E)11 h 05'*

RESOLUCIÓN :

* El reloj de la tierra indicará la *18:20*

◆ *24* horas < > *16* horas "*x*"

⇒ *18* horas < > "*H*" horas "*x*"

* Por regla de tres : $H = \frac{18 \times 16}{24} = 12$

◆ *60 min* < > *45 min "x"*

20 min < > *"M" min "x"*

⇒ $M = 15$

* Luego la expresión pedida será : *12:15*

RPTA : "A"

PROBLEMA 78 :

Si el ayer de mañana es Sábado. ¿Qué día será el mañana del ayer de pasado mañana?

A)Lunes *B)Martes* *C)Miércoles*
D)Jueves *E)Viernes*

RESOLUCIÓN :

* Considerando :

Anteayer	*Ayer*	*Hoy*	*Mañana*	*Pasado Mañana*
-2	*-1*	*0*	*+1*	*+2*

* Dato :

Ayer (-1) *de mañana* (+1) <> *Sábado*

0 <> Hoy <> Sábado

* Luego :

El mañana (+1) *del ayer* (-1) *de pasado mañana* (+2)

+2 <> pasado mañana <> Lunes (*Se deduce*)

RPTA : "A"

PROBLEMA 79 :

Si el ayer del anteayer de mañana es lunes. ¿Qué día será el pasado mañana del mañana de anteayer?

A)Lunes *B)Martes* *C)Domingo*
D)Jueves *E)Viernes*

RESOLUCIÓN :

Ayer (-1) *del anteayer* (-2) *de mañana* (+1) <> *Lunes*

-2 <> Lunes

* Luego :

El pasado mañana (+2) *del mañana* (+1) *de anteayer* (-2)

+1

L	*M*	*K*	*Jueves*
-2	*-1*	*0*	*+1*

RPTA : "D"

PROBLEMA 80 :

En un año bisiesto, ¿cuántos días lunes y martes habrá como máximo?

A)51 y 52 *B)52 y 52* *C)52 y 53*
D)53 y 53 *E)53 y 52*

RESOLUCIÓN :

* Como en : *1* semana < > *7* días < > hay *1* lunes y *1* martes Luego hay que averiguar cuántos grupos de 7 días hay en *366* días, y lo hallaremos

366 días | *7 días*

2 días *52 semanas <> 52 Lunes y 52 Martes*

El resto, estos días deben ser Lunes y Martes, para que así sean la máxima cantidad de Lunes y Martes, entonces en un año bisiesto habrán *53* Lunes y *53* Martes.

RPTA : "D"

PROBLEMA 81 :

Si el Lunes es el Martes del Miércoles y el Jueves es el Viernes del Sábado. ¿ Qué día es el Domingo del Lunes?

A)Martes *B)Miércoles* *C)Jueves*
D)Viernes *E)Sábado*

RESOLUCIÓN :

* Según enunciado se tiene :

Lunes es el Martes del Miércoles
Jueves es el Viernes del Sábado
Sábado es el Domingo del Lunes.

RPTA : "E"

PROBLEMA 82 :

En un planeta el reloj marca con cada vuelta de su minutero tantos minutos como horas tiene el día. Un «terrícola» observa que cada día en ese planeta tiene tantos minutos como segundos tiene nuestra hora y el horario también da dos vueltas por día. ¿Qué ángulo formarán para nosotros las manecillas de dicho reloj cuando hayan transcurrido *3/4* del día más *1/2* hora?

A)6° *B)8°* *C)9°* *D)10°* *E)12°*

RESOLUCIÓN :

En ese planeta :

Número de horas al día : x

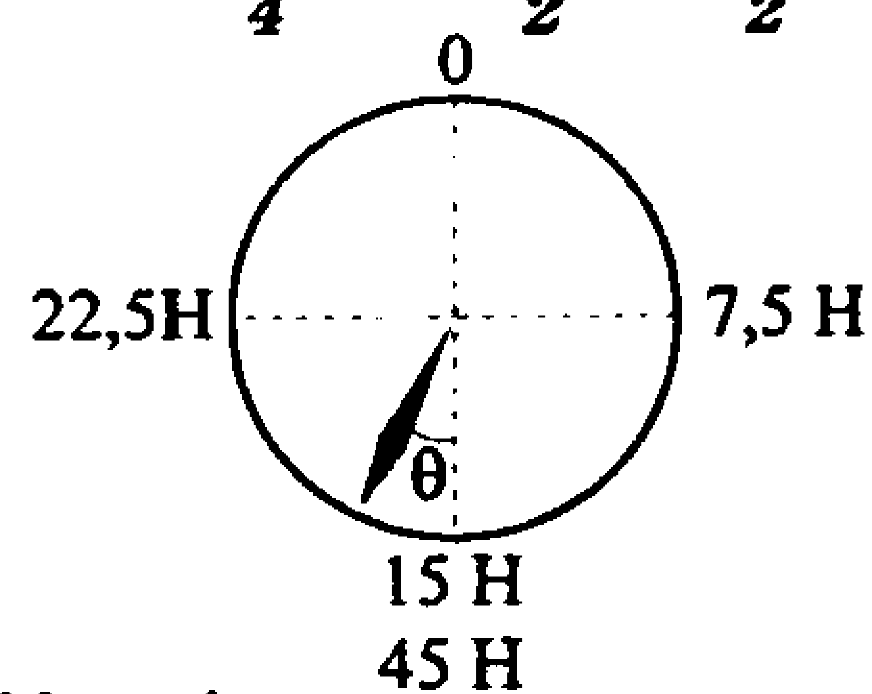
Número de minutos por hora : x

Número de minutos en un día : $x \times x = x^2$

Según enunciado : $x^2 = 3600$

$x = 60$

*Piden el ángulo en : $\frac{3}{4}(60)+\frac{1}{2}=45\frac{1}{2}$ *horas*



* Luego para el horario :

30 H	*360°*
$\frac{1}{2}$*H*	x

$x = 6°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 83 :

Julio sale de su oficina y al marcar su tarjeta de salida que son las ***6 h. 25 min. (p.m.).*** Al llegar a su casa ve que en el reloj son las ***8 h. 15 min. (p.m.).*** Luego se entera de que el reloj de su oficina estaba atrasado ***12*** minutos y su reloj estaba adelantado en ***10*** minutos ¿Cuánto tiempo demoró en hacer el recorrido de su oficina a su casa?

A)2h. 28min. ***B)1h. 28min.*** ***C)2h. 10min.***
D)28 min. ***E)1h. 32min.***

RESOLUCIÓN :

* Oficina : ***6h 25***min ***(p.m.);***
  Retraso ⇒ ***12***min.
* Hora real : ***6h 37min.***
  Casa : ***8h 15 min. (p.m.);***
  Adelantado ⇒ ***10 min.***
* Hora real : ***8h 5min.***
  ⇒ Demoró : ***1h. 28 min.***

RPTA : "B"

PROBLEMA 84 :

Según una leyenda hace mucho tiempo existía un pueblo que el día lo dividía en ***8*** horas y cada hora en ***80*** minutos. Si ellos indicaron que son las ***5*** horas con ***30*** minutos, ¿qué hora será realmente según un reloj actual?

A)4:30 pm ***B)4:20 am*** ***C)6:30 pm***
D)5:30 pm ***E)4:7'30"***

RESOLUCIÓN :

* Según ellos :

$80\ min <> 1H$
$10\ min <> \frac{1}{8}H$
$30\ min <> \frac{3}{8}H$

* Luego : $5H\ 30\ min <> 5H + \frac{3}{8}H = \frac{43}{8}H$

Actual	Antigüedad
24 H	8
x	$\frac{43}{8}$

Por regla de tres $x = \frac{129}{8} = 16\frac{1}{8}$

* Luego serán las :

$$16H + \frac{1H}{8} = 16H\ 7'30"\ \text{ó}\ 4:7'30"\ PM$$

RPTA:E

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Un reloj defectuoso se atrasa ***3*** minutos cada ***7*** horas que transcurren. ¿Cuánto se habrá atrasado en ***21*** horas?

A) 10 min ***B) 11*** ***C) 7*** ***D) 8*** ***E) 9***

02 Un reloj se encuentra malogrado y se adelanta 4 horas cada ***5*** días. ¿Cuánto se habrá adelantado en ***20*** días?

A) 13h ***B) 14*** ***C) 15*** ***D) 16*** ***E) 17***

03 Un reloj se atrasa ***2 min.*** cada ***3*** horas. ¿Cuánto se atrasará en ***18*** horas?

A) 10 ***B) 12*** ***C) 13*** ***D) 15*** ***E) 9***

04 Un reloj se adelanta ***1*** minuto cada ***3*** horas. ¿Cuántos minutos se habrán adelantado desde las ***2:00 a.m.*** hasta las ***8:00 a.m?.***

A) 2min ***B) 3*** ***C) 3/2*** ***D) 1*** ***E) 5/2***

05 En la casa de José hay un reloj que se adelanta ***5*** horas cada 4 días. ¿Cuánto se adelantará en ***20*** días?

A) 25 horas ***B) 20*** ***C) 15*** ***D) 12*** ***E) 10***

06 Fernando tiene un reloj que se adelanta ***3*** horas cada día. ¿Cuánto se adelanta en una semana?

A) 6 horas ***B) 8*** ***C) 12*** ***D) 18*** ***E) 21***

07 El reloj de Eucalipto se atrasa ***6*** horas cada ***2*** días. ¿Cuántas horas se atrasará en ***6*** días?

A) 20 horas ***B) 19*** ***C) 18*** ***D) 15*** ***E) 14***

08 Un reloj se atrasa ***7*** minutos cada ***3*** horas. ¿Cuánto se habrá atrasado en ***21*** horas?

A) 21 min ***B) 35*** ***C) 49*** ***D) 50*** ***E) 56***

09 El reloj de Toñito se atrasa ***6*** horas cada ***2*** días. ¿En cuántos días se atrasará ***9*** horas?

A) 4 días ***B) 3*** ***C) 2*** ***D) 5*** ***E) 6***

10 Cindy le comenta a lady que su reloj se atrasa ***5*** horas cada ***2*** días. ¿En cuántos días el reloj de Cindy se atrasará ***15*** horas?

A) 3 días ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 9***

11 Un reloj se adelanta ***1*** minuto cada ***3*** horas. ¿Cuántos minutos se adelantará desde las ***2:00 a.m.*** las ***11 a.m***.?

A) 3min ***B) 4*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 10***

12 Un reloj se adelanta ***2*** minutos cada 3 horas. ¿Cuántos minutos se adelantará desde las ***10:00 a.m.*** hasta las ***4:00 p.m***.?

A) 2 min ***B) 4*** ***C) 5*** ***D) 6*** ***E) 8***

13 Un despertador se atrasa ***1 min***. cada ***4*** horas si hace ***12*** horas está que se atrasa. ¿Qué hora será

realmente cuando marque las ***07:50 a.m.***?

A) 08:50 A.M. ***B) 08:53*** ***C) 07:53*** ***D) 07:47*** ***E) 08:47***

14 Un reloj se adelanta ***3*** minutos cada ***9*** horas y hace ***15*** horas está que funciona con este desperfecto. ¿Qué hora será realmente cuándo marque ***09:37 p.m.***?

A) 09:30 ***B) 09:32*** ***C) 09:42*** ***D) 09:40*** ***E) 09:37***

15 Hace ***36*** horas que un reloj está que se atrasa 6 minutos cada 8 horas. ¿Qué hora es en la realidad si está marcando las ***02:49 a.m.***?

A) 03:10 ***B) 03:16*** ***C) 02:22*** ***D) 02:40*** ***E) 02:32***

16 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las ***8:20***?

A) 120° ***B) 125°*** ***C) 130°*** ***D) 135°*** ***E) 140°***

17 ¿Cuál es el menor ángulo que forman las agujas de un reloj a las ***10:15***?

A) 142°30' ***B) 145°*** ***C) 145°30'*** ***D) 150°*** ***E) N.A.***

18 Entre las ***7*** y las ***8*** horas. ¿A qué hora exactamente el minutero y el horario forman un ángulo de ***10°*** por segunda vez?

A) 7:40 ***B) 7:20*** ***C) 7:10*** ***D) 7:35*** ***E) N.A.***

19 Entre las ***4*** y las ***5*** ¿A qué hora estarán superpuestas las agujas de un reloj?

A) 4:32 ***B) 4: 36 2/11*** ***C) 4:48 3/11*** ***D) 4:21 9/11*** ***E) 4: 48 9/11***

20 Después De las ***3*** ¿Cuál es la hora más próxima en que las agujas de un reloj forman un ángulo llano?

A) 3:49 ***B) 3: 49 7/11*** ***C) 3: 49 1/11*** ***D) 3:50*** ***E) 3: 49 2/11***

21 ¿A qué hora exactamente el min. Minutero y el horario forman un ángulo de ***20°*** entre las ***3*** y las ***4*** horas por primera vez?.

A) 3:15 ***B) 3:20*** ***C) 3:35*** ***D) 3:40*** ***E) N.A.***

22 Determine ¿A que hora exactamente las manecilla de un reloj se superponen entre las 1 y las ***2***?

A) 1: 08 5/11 ***B) 1:25 5/11*** ***C) 1:05 5/11*** ***D) 1:03 5/11*** ***E) N.A.***

23 Determine: ¿A qué hora exactamente las manecillas de un reloj se encuentran en prolongación entre las ***7*** y las 8?

A) 7: 05 5/11 ***B) 7:01 5/11*** ***C) 7:02 5/11*** ***D) 7: 00 5/11*** ***E) N.A.***

24 ¿Cuál es el menor ángulo que forman las manecillas de un reloj a las ***3:30h***?

A) 60° ***B) 30°*** ***C) 85°*** ***D) 75°*** ***E) N.A.***

25 ¿A qué hora entre las ***10*** y ***11*** estarán las agujas de un reloj en línea recta?

A) 10:00 ***B) 9:17*** ***C) 7:10*** ***D) 8:15 5/12*** ***E) 10:219/11***

26 ¿A qué hora entre las ***2*** y las ***3*** el horario y el minutero se superponen?

A) 2:10 10/11 ***D) 2:08 10/11*** ***B) 2:09 10/11*** ***E) N.A.*** ***C) 2:07 7/11***

27 ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las ***22:36?***

A) 112° ***B) 202°*** ***C) 92°*** ***D) 102°*** ***E) NA.***

28 ¿Que ángulo forman las manecillas de un reloj a las ***12:12***?

A) 33° ***B) 66°*** ***C) 12°*** ***D) 36°*** ***E) N.A.***

29 ¿Qué ángulo forman las manecillas de un reloj a las ***4:20***?

A) 20° ***B) 10°*** ***C) 30°*** ***D) 15°*** ***E) N.A.***

30 Desde las ***3:15h*** a las ***3:45h*** ¿Qué ángulo habrá girado el minutero

A) 60° ***B) 180°*** ***C) 20°*** ***D) 15°*** ***E) NA.***

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un reloj da ***6*** campanadas en ***8*** segundos. ¿Cuántas campanadas dará en ***24*** segundos?

A) 14 ***B)15*** ***C)16*** ***D) 17*** ***E) 18***

02 Un reloj da ***7*** campanadas en ***20*** segundos. ¿En cuántos segundos dará ***13*** campanadas?

A) 40 ***B) 45*** ***C)35*** ***D)30*** ***E) 32***

03 Un reloj toca tantas campanadas en cada hora como la hora marca en ese instante. ¿Cuántas

campanadas tocará en , *3* días?

a) 465 *B)463* *C)348* *D) 460* *E)468*

04 El *12* de Enero de *1960* fue Martes . ¿Qué día fue el *18*de Mayo de ese mismo año?

A) Martes *B) Jueves* *C) Lunes*
D) Viernes *E) Miércoles*

05 El *9* de Abril de *1996* fue Sábado. ¿Qué día fue el , *24* de Octubre de ese mismo año?

A) Martes *B) Miércoles* *C) Lunes*
D) Domingo *E) Sábado*

06 Si el *8* de Enero de *1926* fue Lunes ,entonces el *15* de Marzo de *1975* fue :

A) Lunes *B) Miercoles* *C) Jueves*
D)Martes *E) Viernes*

07 Royer nació en *1972* a las *06:00 h* , de un día tal que los días transcurridos eran *1/5* de los días que faltan transcurrir de ese año.
¿En qué día nació Royer , si el *1* de Enero de ese año fue Lunes?

A) Lunes *B) Miercoles* *C) Sábado*
D)Martes *E) Jueves*

08 Kike le dice a Flor : « Nos encontraremos en el lugar de siempre , cuando las horas transcurridas del día sean *3/5* de las horas que faltan transcurrir»
¿A qué hora fue el encuentro?

A) 08 : 00 *B) 09 : 00* *C) 10 : 00*
D)08 : 30 *E) 09 : 30*

09 Un reloj se atrasa *3* minutos cada *15* minutos : ¿Qué hora marcará , Cuando en realidad sean las *10:24h* , si hace *5* horas que viene funcionando con este desperfecto?

A)11:24 *B)10:28* *C)09:28* *D)09:25* *E)09:24*

10 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las *09 : 26 h*? (Dar como respuesta el ángulo menor)

A)127° *B)125°* *C)120°* *D)117°* *E)90°*

11 ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las *04:38 h*?

A)250° *B)88°* *C)88,5°* *D)271°* *E)90°*

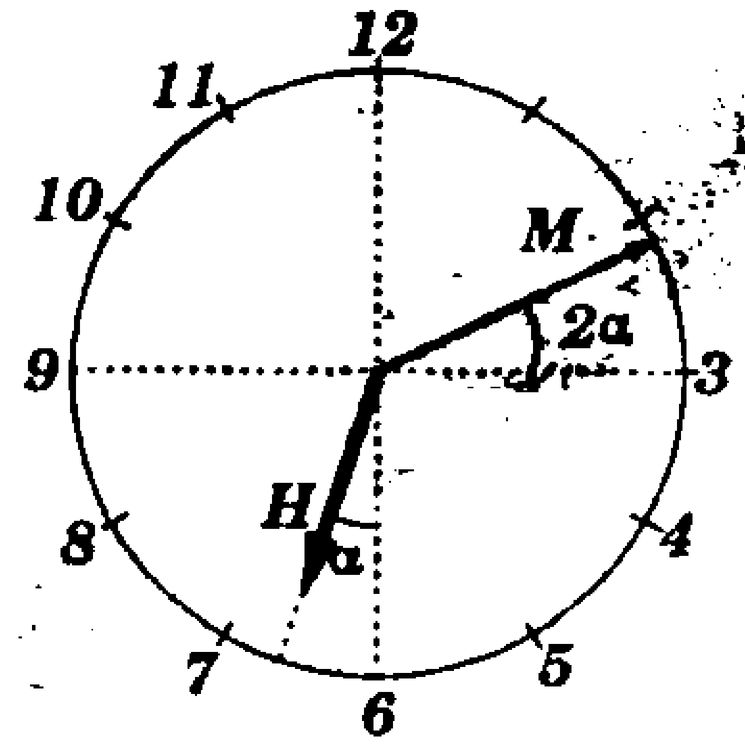
12 ¿A qué hora entre las *4* y las *5* , las agujas de un reloj forman un ángulo cuya medida es de *60°* por primera vez?

A)04h 10min *B)* $04h\ 13\frac{10}{11}min$ *C)* $04h\ 10\frac{10}{11}min$
D)04h 05min *E)* $04h\ 12\frac{9}{11}min$

13 ¿A qué hora entre las *2* y las *3*, las agujas de un reloj forman un ángulo cuya medida es de *130°* por segunda vez?

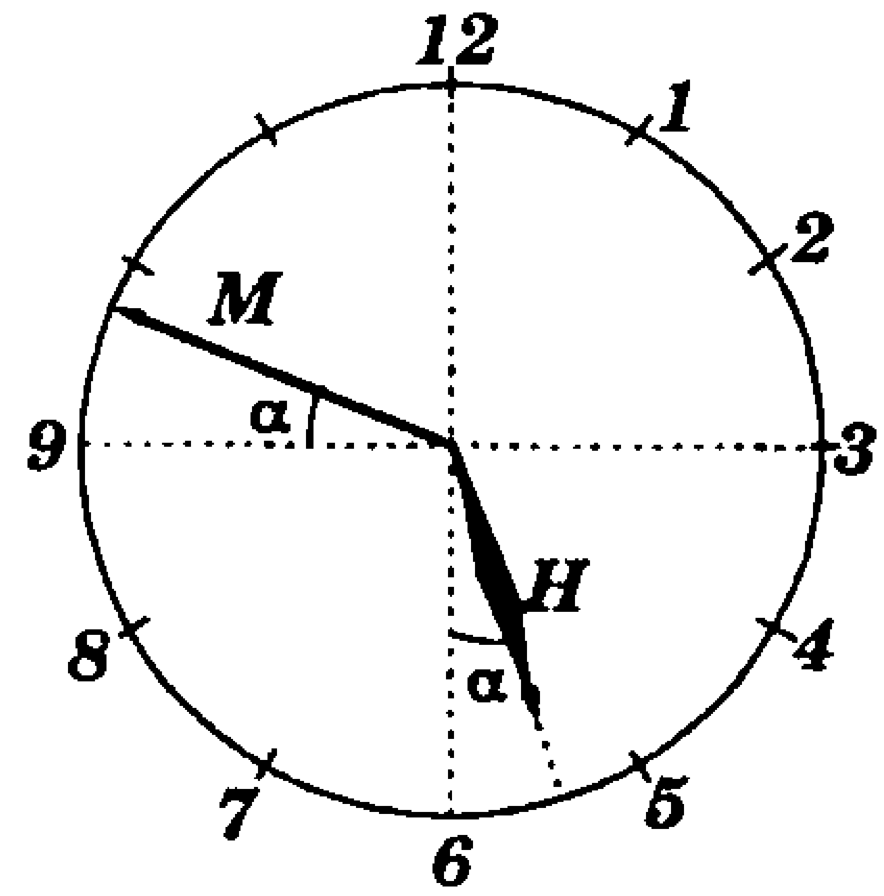
A) $02h\ 52\frac{8}{11}min$ *B)02h 50min*
C) $02h\ 49\frac{3}{11}min$ *D)02h 51min*

14 ¿Qué hora es en el gráfico mostrado?



A) $06h\ 11\frac{5}{7}min$ *B) 06h 11min* *C) 06h 10min*
D) $06h\ 12\frac{6}{7}min$ *E) 06h 13min*

15 ¿Qué hora marca el reloj de la figura?



A) 05h 43min *B)* $05h\ 46\frac{2}{13}min$ *C)* $05h\ 45\frac{3}{8}min$
D) $05h\ 42\frac{2}{11}min$ *E) 05h 47min*

16 ¿A qué hora inmediatamente después de las *2* , el horario adelanta a la marca de las *12* tanto como el minutero adelanta al horario?

A) 02:24 h *B)02:32 h* *C)02: 25h*
D)02:30 h *E)02: 28 h*

17 Si el *1*de Enero fue Lunes. ¿Qué día fue el *25* de Enero de ese mismo año?

A) Miércoles *B) Jueves* *C) Viernes*
D) Martes *E) Lunes*

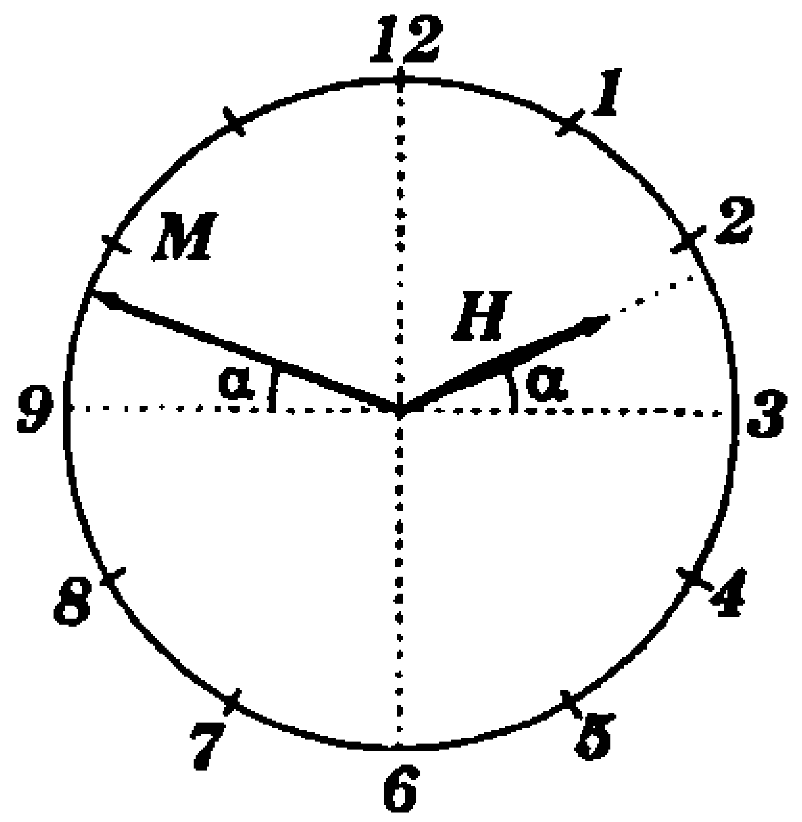
18 Dos relojes se sincronizan a la misma hora a partir de ese instante uno se adelanta *3* minutos por hora y el otro se atrasa *2* minutos también por hora. ¿Después de cuánto tiempo como mínimo volverán a marcar la misma hora?

A) 6 días ***B)4 días*** ***C) 12 días***
D) 8 días ***E)72 días***

19 Si el *12* de Octubre de *1964* fue Sábado , entonces el *25* de Diciembre de *1992* fue :

A) Sábado ***B) Domingo*** ***C) Miércoles***
D) Martes ***E) Viernes***

20 ¿Qué hora marca el reloj de la figura?



A) $2h\ 48\frac{1}{11}min$ B) $2h\ 49\frac{2}{13}min$ C) $2h\ 49\frac{1}{11}min$ D) $2h\ 48\frac{3}{11}min$

21 Un reloj se atrasa cada *15* minutos , *2* minutos. ¿Qué hora marcará dicho reloj cuando sean las *03:15h*, si hace *5* horas que viene funcionando con este desperfecto?

A) 02:50 h ***B) 02:55 h*** ***C) 02:35 h***
D) 02:45 h ***E) 02:40 h***

22 Un reloj de pared da *6* campanadas en *6* segundos. ¿Cuántas campanadas dará en *24* segundos?

A) 20 ***B) 21*** ***C) 19*** ***D) 18*** ***E) 22***

23 ¿A qué hora inmediatamente después de las *3* de la mañana , el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a la marca de las *12*?

A) 03:36 h ***B) 03:24 h*** ***C) 03:48 h***
D) 03:32 h ***E) 03:30 h***

24 ¿A qué hora entre las *3* y las *4* de la mañana las agujas de un reloj se oponen?

A) $3h\ 49\frac{1}{11}min$ B) $3h\ 47\frac{2}{11}min$ C) $3h\ 49\frac{3}{11}min$ D) $3h\ 48\frac{1}{13}min$

25 Si el *14* de Febrero de *1992* fue Sábado. ¿Qué día fue el *19* de Agosto de ese mismo año?

A) Miércoles ***B) Martes*** ***C) Jueves***
D) Viernes ***E) Sábado***

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿A qué hora entre las *4* y las *5* , las agujas de un reloj forman *90°* por primera vez?

A) $4h\ 6\frac{5}{11}min$ B) $4h\ 5\frac{7}{11}min$ C) $4h\ 6\frac{3}{11}min$ D) $4h\ 5\frac{3}{11}n$

02 Un reloj se adelanta *2* minutos cada *3h*. ¿A qué hora empezó a adelantarse , si a las *11*h *15*min de la noche marca las *11h 27min*?

A) 5 : 18 a.m. ***B) 5 : 17 a.m.*** ***C) 5 : 31 a.m.***
D) 5: 07 a.m. ***E) 5 : 15 a.m.***

03 ¿A qué hora después de las *4* , el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a las *12*?

A) 04 : 32h ***B) 04 : 34h*** ***C) 04 : 35h***
D) 04 : 48h ***E) 04 : 37h***

04 ¿Cuál es el menor ángulo que forman las agujas del reloj a las *6:30*?

A)0° ***B)15°*** ***C)10°*** ***D)20°*** ***E)18°***

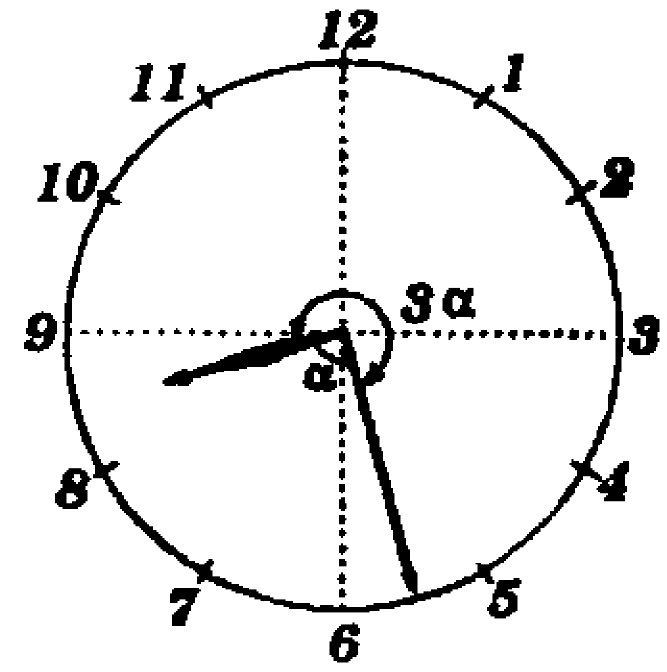
05 ¿Qué hora es? . Si hace « *x* » horas el tiempo transcurrido era la mitad de lo que faltaba para acabar el día y dentro de « *x* » horas pasará lo contrario?

A)08:00h ***B)12:00h*** ***C)20:00h***
D)10:00h ***E)15:00h***

06 ¿Qué hora es .... si hace *5* horas el tiempo que había transcurrido del día fue dos veces menos que el tiempo que restaría para acabar el día dentro de *7* horas?

A)8a.m. ***B) 8p.m.*** ***C) 10 a.m.*** ***D) 12 m.*** ***E)2p.m.***

07 Según el gráfico , ¿qué hora es?



A) $08:25\frac{3}{11}h$ B) $08:27\frac{2}{11}h$ C) $08:27h$ D) $08:27\frac{3}{11}h$

08 Un reloj se atrasa *3* minutos cada *20* minutos. Si luego de *9* horas está marcando las *7:43* cuando

en realidad son las $a:\overline{bc}$. Hallar : $a+b+c$

A)10 B)11 C)12 D)13 E)14

09 En una mañana de sol un árbol de $10\sqrt{3}m$ de altura , arroja una sombra de *10m* de longitud. ¿Qué hora es?

A) 10 : 20 h B) 10 : 00 h C) 09 : 50 h
D) 09 : 48 h E) 10 : 10 h

10 Dos relojes son sincronizados a las *8:00*am y a partir de ese instante uno comienza adelantarse a razón de *3* minutos cada hora y el otro a atrasarse a razón de *5* minutos cada hora.

¿Después de cuánto tiempo como mínimo ambos relojes volverán a marcar la misma hora *P*? y ¿Dentro de cúánto tiempo ambos relojes marcarán la hora correcta al mismo tiempo?

A)90hr–20días B)60hr–30días C)120hr–45días
D)84hr–20días E)90hr–30días

11 Los relojes de «A», «B» y «C» se sincronizaron a las *12:00* horas. Si el reloj del «A» se atrasa *3* minutos por hora , el de «B» se adelanta *3* minutos por hora y el de «C» marcha correctamente. ¿Dentro de cuánto tiempo los horarios de los *3* relojes equidistarán entre sí?

A) 48 horas B) 60horas C) 72 horas
D) 80horas E) 96horas

12 Cuando Andrea regresa a su casa , luego de salir con sus amigas , se da cuenta que su reloj pulsera marca las *14:20* horas. Al mirar su reloj de pared ve que éste se ha retrasado *10* minutos y su reloj de escritorio se ha adelantado *14* minutos. Andrea recuerda haber puesto en la hora exacta sus tres relojes .¿A qué hora los relojes descompuestos estarán tres horas distanciados?

A) 05 : 20 h B) 07 : 30 h C) 08 : 20 h
D) 09 : 2011 E) 08 : 45 h

13 Un reloj se atrasa *3* minutos cada *5* horas , si marcó la hora correcta por última vez a las *8:00 p.m* ; del día Lunes ¿En qué día y hora se encontrará con un atraso de *18* minutos?

A) Martes 6:00 a.m.
B) Martes 2:00 a.m.
C) Miércoles 2:00 p.m.
D) Martes 8:00 p.m.
E) Miércoles 2:00 a.m.

14 Hace ya *45* horas que un reloj se adelanta *3'* cada *5h*. ¿Qué hora senalará el reloj cuando sean en realidad las *8h 50'* ?

A) 9h 17 B) 8h 27 C) 9h 13'
D) 8h 17 E) 9h 27

15 Siendo las *17:20 h* un reloj marca *17:28.* Si dicho reloj se adelanta a razón de *40s* cada hora. ¿A qué hora el empezó a adelantarse?

A) 05: 30 B) 05 : 40 C) 05 : 20
D) 05 : 48 E)05: 10

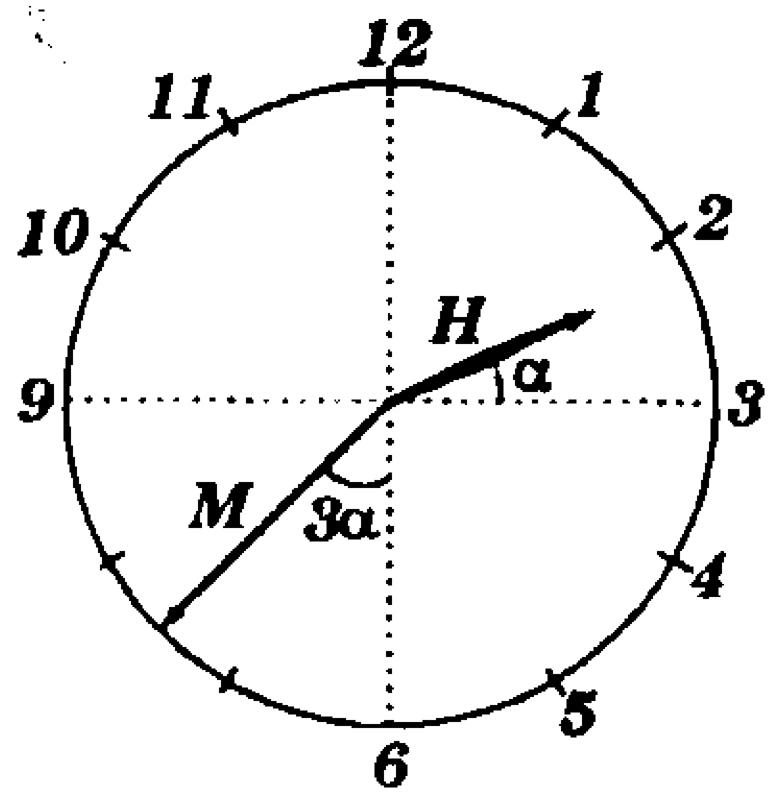
16 ¿Cada cuánto tiempo se adelanta un reloj *2min* para que cada *45* días vuelva a marcar la hora exacta?

A) 2 h B) 3 h C) 4 h D) 1 h E) 6 h

17 En un reloj el horario y el minutero (adelantado) forman un ángulo. Luego de *1h* con *4* minutos vuelvan a formar el mismo ángulo con el horario adelante. ¿De qué ángulo se trata?

A) 40° B)35° C)24° D)14° E)4°

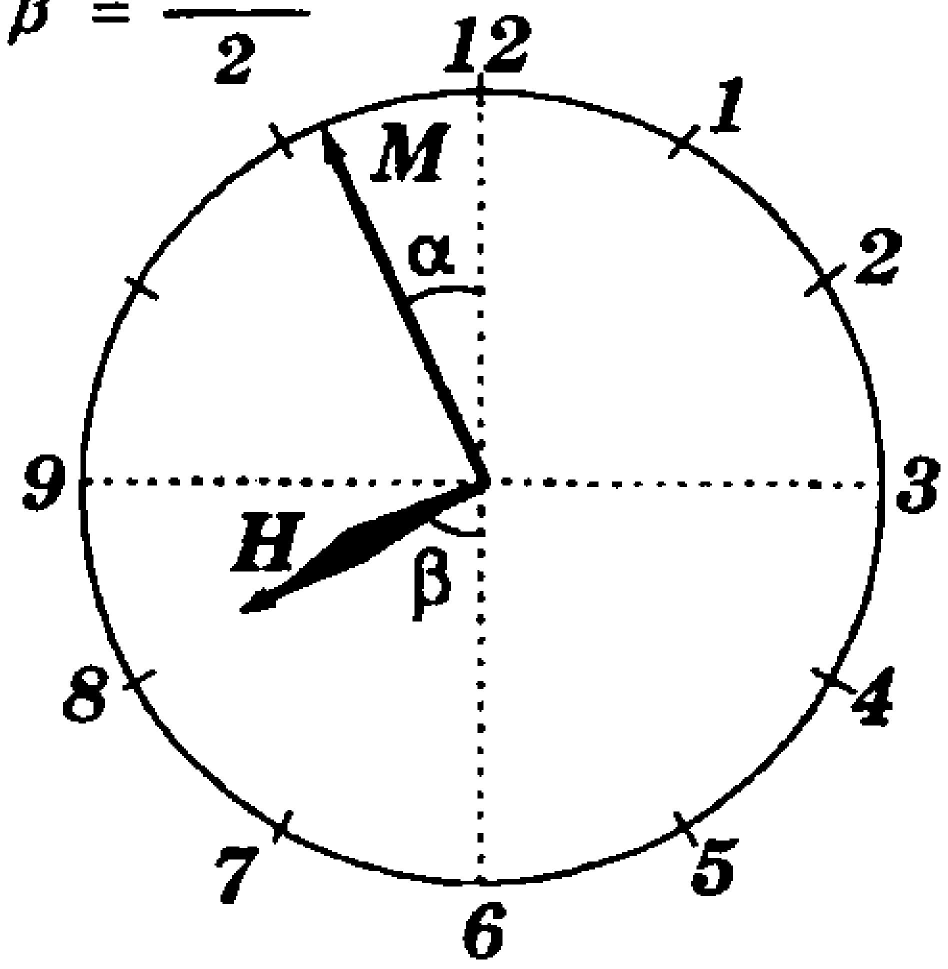
18 ¿Qué hora es en el siguiente gráfico?



A) 2:36 min B) 2:37 min C) 2:36,5 min
D) 2:38 min E) 2:35.5 min

19 ¿Qué hora es según el gráfico?

$$Si : \alpha - \beta = \frac{39°}{2}$$

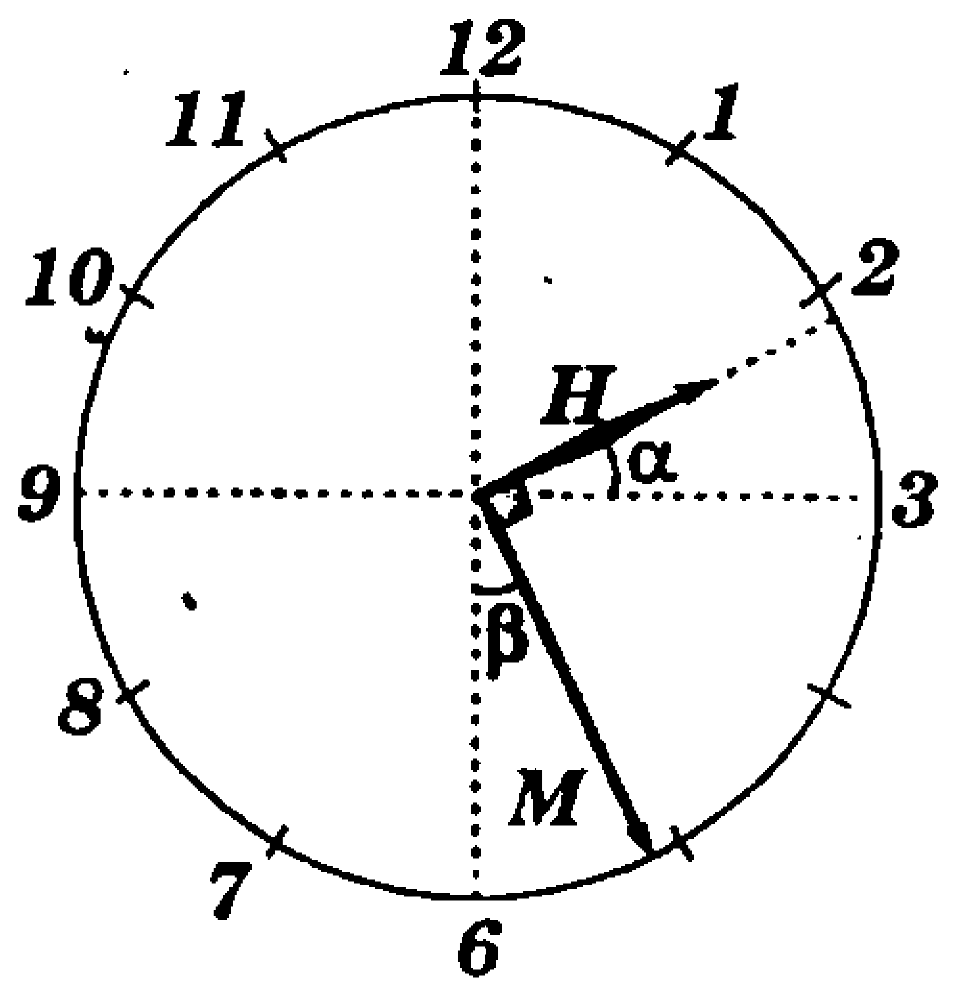


A) 7:56 min B) 7:53 min C) 7:57 min
D) 7:54 min E) 7:59 min

20 En un reloj , ¿cuántas posiciones distintas hay en donde coinciden las manecillas del minutero y el horario?

A)10 B)11 C)12 D)13 E)6

21 ¿Qué hora indica el reloj mostrado en la figura?



A) $2:27\frac{3}{11}$ min B) $2:23\frac{7}{11}$ min C) $2:27\frac{2}{11}$ min D) $2:21\frac{2}{7}$ min

22 Dos relojes de campanario se hallan distanciados ***4760m***. Si el primero está adelantado ***2s*** y el otro atrasado ***2s***.
¿A qué distancia del primer reloj debería colocarse una persona para escuchar las campanadas exactamente al mismo tiempo , si la rapidez del sonido es de ***340 m/s?***

A) 3160 m ***B) 4060 m*** ***C) 3050 m***
D) 3060 m ***E) 3062 m***

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un campanario tarda ***5*** segundos en tocar ***6*** campanadas. ¿Cuánto tardará en tocar ***10*** campanadas?

A) 12 seg ***B) 11 seg*** ***C)10 seg*** ***D) 9 seg*** ***E) 8 seg***

02 Un boxeador demora ***"n+1"*** segundos en dar ***"n^2"*** golpes. ¿Cuántos golpes podrá dar en un segundo?

A) n^2 ***B)*** n^2-1 ***C)*** $n+1$ ***D)*** $n-1$ ***E)*** n

03 Faltan transcurrir del día los ***3/5*** del tiempo que ha transcurrido. ¿Qué hora es?

A) 10 horas ***B) 12 horas*** ***C) 15 horas***
D) 16 horas ***E) 17 horas***

04 Para averiguar la hora en determinado momento del día, se suma la mitad del tiempo que falta para las diez de la mañana y los ***3/4*** del tiempo transcurrido desde las doce de la noche. Indíque la hora señalada.

A) 6h 40m ***B) 6h 20m*** ***C) 8h*** ***D) 5h 50 m*** ***E) 5h 30 m***

05 Un campanario tarda ***"a+1"*** segundos en tocar tantas campanadas como ***"a"*** veces el tiempo que demora entre campanada y campanada. Hallar el tiempo que demora entre campanada.

A) a seg ***B) 1/a seg*** ***C) (1/a+1) seg***
D)(a/a+1) seg ***E) (a+1/a) seg***

06 Cuando a Luis se le preguntó la hora, respondió: "El triple de las horas que han transcurrido es igual al séxtuplo de las que quedan por transcurrir". ¿Qué hora es?

A) 12 horas ***B)13 horas*** ***C)14 horas***
D)15 horas ***E) 16 horas***

07 Pasadas las ***3*** de la tarde. ¿Cuál es la hora más próxima en que las manecillas del reloj forman un ángulo que sea igual a ***1/5*** de su suplemento?

A)3h 11m ***B)3h 12m*** ***C)13h 15m***
D)3h 9m ***E)3h 5m***

08 ¿Qué hora será dentro de ***2*** horas ***30*** minutos, si se sabe que en estos momentos el tiempo transcurrido es excedido en ***7*** horas por lo que falta transcurrir del día?

A) 10:30 a.m. ***B) 11:00 a.m.*** ***C) 11:15 a.m.***
D) 11:30 a.m. ***E) 12:00 m.***

09 Un reloj se adelanta ***1*** minuto cada ***800*** segundos. Si ahora marca las ***2h 25m*** y hace ***10*** horas que se adelanta. ¿Cuál es la hora correcta?

A)1h 10m ***B)1h 15m*** ***C)1h 25m***
D)1h 30m ***E)1h 35m***

10 Hallar la medida del menor ángulo que forman las agujas de un reloj a las ***16h 40m***.

A)90° ***B)95°*** ***C)100°*** ***D)105°*** ***E)110°***

11 Hace ya ***30*** horas que un reloj se adelanta ***1*** minuto cada ***90*** minutos. ¿Qué hora señalará el reloj cuando sean realmente las ***7h 24m***?

A)7h 44m ***B)7h 5m*** ***C)7h 6m***
D)7h 10 m ***E)7h 12m***

12 Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las ***7*** de la mañana demora ***12*** segundos. ¿Cúánto demora para indicar las ***12*** horas del medio día?

A) 20 seg ***B) 21 seg*** ***C) 22 seg***
D) 23 seg ***E) 24 seg***

13 Son más de las seis sin ser las ocho de esta mañana y hace *40* minutos los minutos que habían transcurrido desde las seis eran iguales a *1/3* del tiempo que faltaría transcurrir hasta las ocho dentro de *40* minutos. ¿Qué hora es?

A) 6h 30m *B) 6h 40m* *C) 6h 45m*
D) 6h 50m *E) 6h 55m*

14 Un reloj se adelanta *90* segundos por cada *12* minutos que ftinciona. Si ahora marca las *4:20* y hace *8* horas que lleva malogrado, la hora correcta es:

A) 3:20 *B) 3:30* *C) 3:45* *D) 3:55* *E) 4:05*

15 ¿A qué hora entre las *3* y las *4*, las manecillas de un reloj están en línea recta?

A) $3h\ 49\frac{1}{11}m$ B) $3h\ 48\frac{3}{11}m$ C) $3h\ 48\frac{1}{11}m$

D) $3h\ 45\frac{1}{11}m$ E) $3h\ 40\frac{7}{11}m$

CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

01 Max le dice a Susan: "Nos encontraremos en el lugar de siempre, cuando las horas transcurridas del día sean *3/5* de las horas que faltan transcurrir". ¿A qué hora fue el encuentro?

A) 08:00 h *B) 09:00 h* *C) 10:00 h*
D) 08:30 h *E) 09:30 h*

02 ¿Qué hora es, si hace *4* horas faltaba, para acabar el día, el triple del tiempo que faltará para acabar el día dentro de *4* horas?

A) 16:00 h *B) 15:00 h* *C) 13:00 h*
D) 12:00 h *E) 10:00 h*

03 Elizabeth pregunta a José por la hora y éste responde: "Ha transcurrido del día *7,8* horas más de las que quedan por transcurrir", pero Claudio mira su reloj y responde: "Quedan *8,3* horas menos que las transcurridas". La diferencia entre el tiempo que marcan los dos relojes es de:

A) 20 min *B) 12 min* *C) 18 min*
D) 15 min *E) 7 min*

04 Roberto nació en *1972* a las *06:00 h*, de un día tal que los días transcurridos eran *1/5* de los días que faltan transcurrir de ese año. ¿En qué día nació Ricardo, si el *1* de enero de ese año fue lunes?

A) Lunes *B) Miércoles* *C) Sábado*
D) Martes *E) Jueves*

05 Un reloj se adelanta *2* minutos cada *15* minutos. Si esto ocurre desde hace *10* horas y dicho reloj marca en este instante las *05:42 h*, ¿cuál es la hora correcta?

A) 04:22 h *B) 04:36 h* *C) 05:12 h*
D) 04:58 h *E) 05:00 h*

06 Un reloj se atrasa *3* minutos cada *15* minutos. ¿Qué hora marcará, cuando en realidad sean las *10:24 h*, si hace *5* horas que viene funcionando con este desperfecto?

A) 11:24h *B) 10:28h* *C) 09:28h*
D) 09:25 h *E) 09:24 h*

07 Un reloj se adelanta un minuto por hora, si empieza correctamente a las *12* del mediodía del *3* de mayo. ¿Cuándo volverá a señalar la hora correcta?

A) 2 de junio *B) 4 de junio* *C) 6 de junio*
D) 8 de junio *E) 10 de junio*

08 Un reloj se atrasa *2* minutos cada hora. ¿Dentro de cuánto tiempo volverá a marcar la hora correcta?

A) 14 días *B) 15 días* *C) 10 días*
D) 15 horas *E) 14 horas*

09 ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj en cada caso? Dé como respuesta la suma de todos los ángulos (con un decimal)

I) 2 h 24 min *II) 18 h 16min*

III) 7 h 35 min *IV) 2 h 20 min 20 seg*

A) 233,3° *B) 306,5°* *C) 261 °*
D) 312° *E) 242,5°*

10 ¿A qué hora entre las *12* y la *1*, las manecillas (horario y minutero) de un reloj forman un ángulo recto por segunda vez?

A) $12h\left(49\frac{1}{11}\right)min$ B) $12h\left(48\frac{2}{11}\right)min$

C) $12h\left(57\frac{3}{11}\right)min$ D) $12h\left(49\frac{3}{11}\right)min$

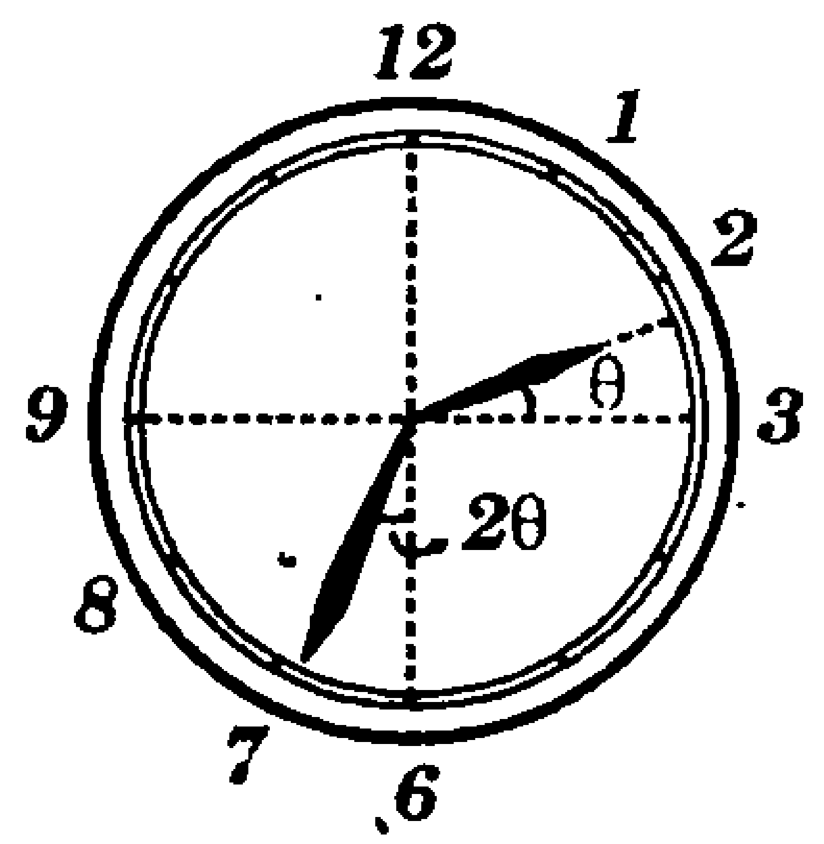
E) $12h\left(54\frac{6}{11}\right)min$

11 ¿Cuántos minutos después que un reloj indica que son las *21 :00 h* el minutero alcanza al horario?

A) $49min$ B) $53\frac{1}{11}min$ C) $47\frac{1}{11}min$

D) $49\frac{1}{11}min$ E) $9\frac{1}{11}min$

12 ¿Qué hora indica el reloj del gráfico?

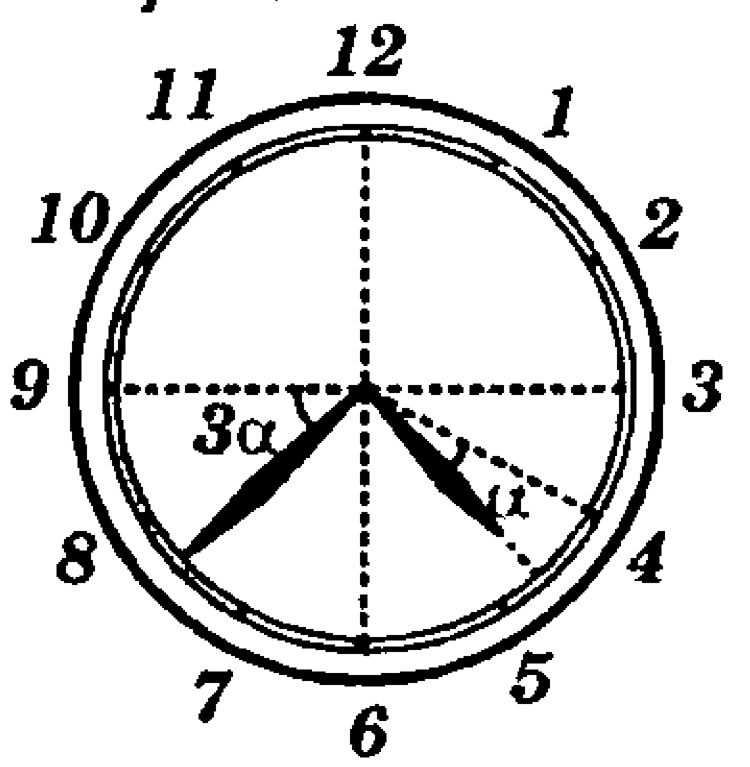


A) $2h\left(33\frac{4}{7}\right)min$ B) $2h\left(34\frac{2}{7}\right)min$

C) $2h\left(34\frac{3}{7}\right)min$ D) $2h\left(33\frac{5}{7}\right)min$

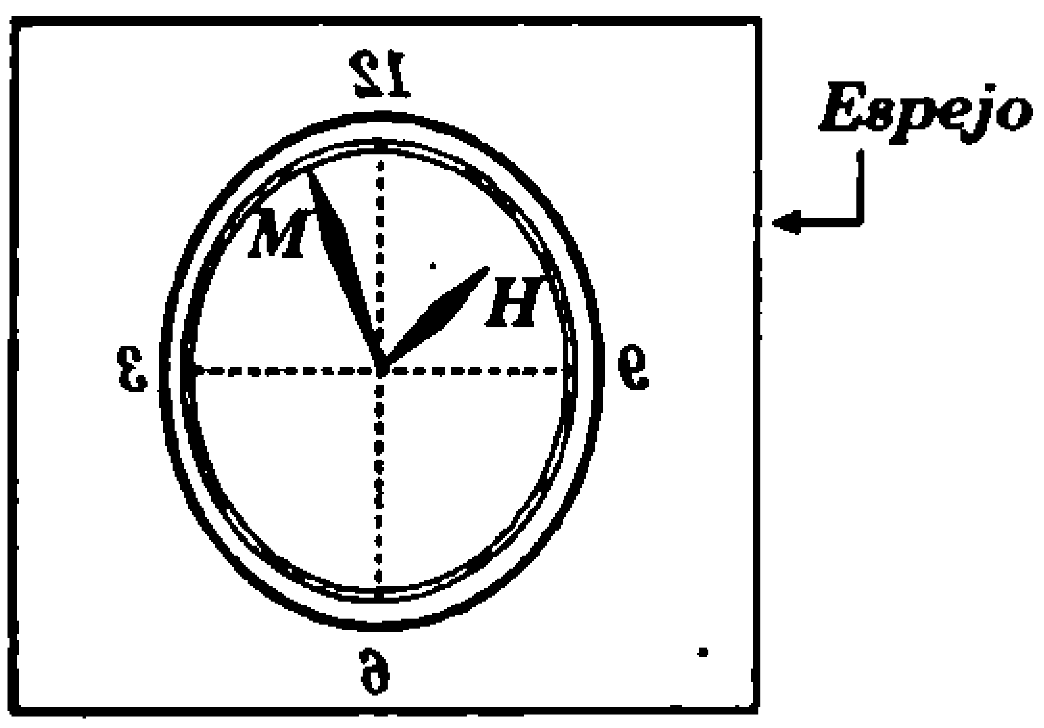
E) $2h\left(34\frac{6}{7}\right)min$

13 ¿Qué hora indica el reloj del gráfico adjunto?



A) 4 h 38 min
B) 4 h 37 min
C) 4 h 36 min 30 seg
D) 4 h 36 min
E) 4 h 37 min 20 seg

14 La figura muestra el reflejo de un reloj en un espejo.



Indique la hora que es, si el menor ángulo que se forma es $80°$.

A) $11{:}9\frac{1}{11}h$ B) $10{:}5\frac{2}{11}h$

C) $10{:}3\frac{7}{11}h$ D) $10{:}3\frac{6}{11}h$

E) $10{:}3\frac{5}{11}h$

15 Un reloj señala la hora con igual número de campanadas. Para indicar las *06:00 h* demoró *15* segundos. ¿ Cuánto tiempo empleará para indicar las *08:00 h*?

A) 19 s *B) 20 s* *C) 21 s*
D) 22 s *E) 25 s*

16 Un campanario toca *C* campanadas en *"S"* segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar $C^2 - 1$ campanadas?

A) $\frac{S(C^2-1)}{C-1}$ B) $\frac{S(C^2-2)}{C-1}$

C) $\frac{S(C^2-3)}{C-1}$ D) $\frac{S(C+2)}{C-1}$

E) $\frac{S(C^3-2)}{C-1}$

17 Un reloj indica la hora con igual número de campanadas. ¿Cuánto demora un reloj en indicar las *08:00 h*, si para indicar las *06:00 h* demora tantos segundos como la mitad de campanadas que dio en *38 s*?

A) 21 s *B) 14 s* *C) 12 s*
D) 28 s *E) 15 s*

18 El campanario de una iglesia estuvo tocando durante *40* segundos y se escucharon tantas campanadas como el triple de la raíz cúbica del tiempo que hay entre campanada y campanada. ¿Cuánto tiempo emplearía este campanario para tocar *8* campanadas, si el tiempo entre campanada y campanada se duplicara?

A) 56 s *B) 128 s* *C) 112 s*
D) 121 s *E) 110 s*

19 En una isla usan un extraño reloj que tiene sólo ocho marcas horarias y, en un día, el horario da dos vueltas completas. Además, una hora tiene sólo *40* minutos. Si con ese extraño reloj se indica que son las *17:16 h*, ¿qué hora es realmente?

A) 20 h 6 min *B) 18 h 15min*
C) 20 h 15 min *D) 15 h 20 min*
E) 19 h 20 min

20 Un reloj digital marca la hora y la fecha con diez dígitos, de la siguiente manera:

Hora		Minutos		Día		Mes		Año	
1	5	4	3	2	6	0	7	8	9

Esta hora y fecha es la última del año *1989* en que se utilizan los *10* dígitos una sola vez. ¿Cuál es la siguiente fecha en que ocurre esa misma circunstancia? Dé como respuesta la suma de los números colocados en los casilleros sombreados en la nueva fecha.

A) 27 B) 16 C) 15 D) 18 E) 20

21 En la tarde de un determinado día, un niño de un metro de estatura proyectó una sombra de *1,73 m*. En ese instante. ¿Cuál es el ángulo que forman las agujas del reloj?

A) 120° *B) 130°* *C) 140°*
D) 150° *E) 160°*

22 Silvia empieza un viaje cuando las manecillas de su reloj están superpuestas entre las diez y las once de la mañana, y llega a su destino, entre las cuatro y las cinco de la tarde, cuando las manecillas forman un ángulo llano. ¿Cuántas horas duró el viaje?

A) 7,5 *B) 7,2* *C) 7*
D) 6,8 *E) 6*

23 Si fueran *4* horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día *3/7* de lo que faltaría si es que fuera *4* horas más temprano. ¿Qué hora es?

A) 10 a.m. *B) 11 a.m.* *C) 12 am.*
D) 2 p.m. *E) 4 p.m.*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) C	2) A	3) E	4) E	5) C	6) A	[illegible]	8) C	9) B	10) B
11) D	12) A	13) D	14) C	15) A	16) D	17) B	18) A	19) B	20) A
21) C	22) E	23) C	24) B	25) A	26) A	27) C	28) B	29) B	30) B
31) B	32) B	33) B	34) B	35) B	36) B	37) B	39) B	39) B	40) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) E	2) B	3) D	4) B	5) B	6) A	7) D	8) D	9) B	10) B
11) D	12) A	13) B	14) A	15) C	16) A	17) B	18) E	19) A	20) C
21) C	22) A	23) D	24) B	25) B	26) B	27) B	28) B	29) B	30) B
31) B	32) B	33) B	34) B	35) B	36) B	37) B	38) B	39) B	40) B

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1) B	2) A	3) D	4) C	5) A	6) E	7) A	8) B	9) A	10) A
11) D	12) B	13) B	14) C	15) C	16) E	17) B	18) C	19) A	20) B

FRACCIONES

CAPÍTULO 030

OBJETIVOS :

* *Ampliar sus conocimientos en el estudio de los conjuntos numéricos.*

* *Representación numérica de la relación de las partes con el todo del objeto.*

* *Identificar e interpretar a las fracciones.*

* *Resolver adecuadamente los problemas relacionados con las fracciones .*

INTRODUCCIÓN

En la cuantificación de los objetos , nace la idea de cantidad y por ende su representación inicialmente y en forma sencilla se representaron los números naturales; ampliando este conjunto se estudio los números enteros. Cuando se empezó a comparar las cantidades por división, se obtenía resultados que no eran números enteros; por lo tanto se amplia el estudio de los conjuntos numéricos. dado por los números racionales.

En la vida diaria en cada momento se compara cantidades por división, como necesitamos los valores de estas comparaciones. las cuales nos permiten calcular dichas comparaciones y ahora con el uso de las computadoras sus cálculos son rápidos y con mayores capacidades para obtener resultados.

El origen de las fracciones comunes o quebradas es muy remota . Los babilónicos , egipcios y griegos han dejado pruebas de que conocían las fracciones. Cuando Juan de Luna tradujo al latín , en el siglo XII, la Aritmética de Al-Juarizmi , empleo la palabra "fractio" para traducir del árabe "al-kasr" que significa quebrar , romper . Este uso se generalizó junto con lá forma ruptus , que prefería Leonardo de Pisa .

En las numerosas inscripciones egipcias descifradas, se encuentran variadísimos problemas con números fraccionarios . Con su peculiar sistema de fracciones con la unidad como numerador , resolvían los problemas de la vida diaria , tales como la distribución del pan, las medidas de la tierra, la construcción de las pirámides , etc . Algunos de los problemas presentados en el papiro de Ahmes tienen todavía vigencia .

Lo que desarrollaremos en este capítulo es como representar y calcular la comparación por división de las cantidades.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

FRACCIONES DE NÚMEROS ENTEROS

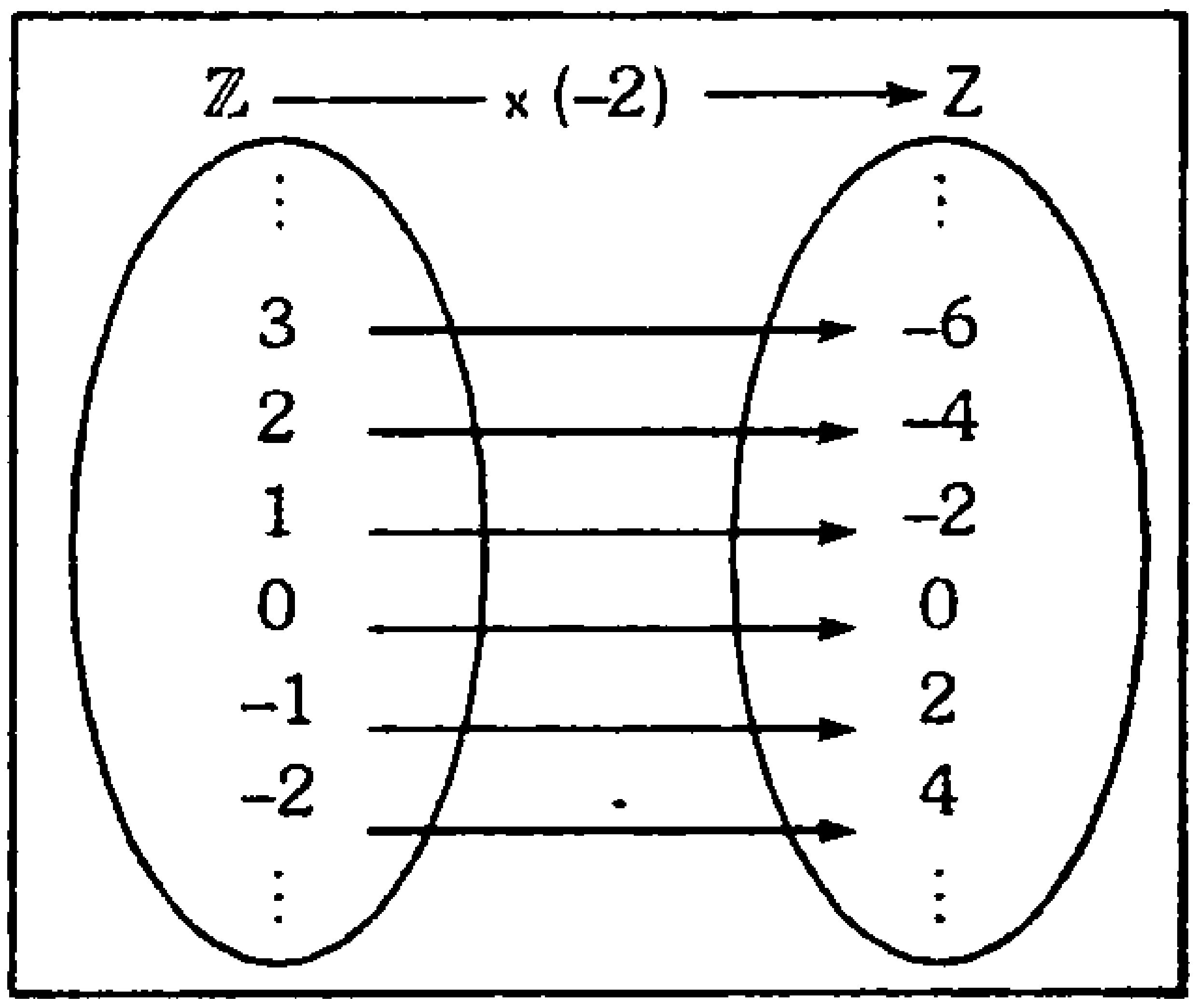
Consideremos el conjunto :

$$\mathbb{Z} = \{....; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; .....\}$$

y un número entero, por ejemplo *(–2)*.

La correspondencia de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ que a cada número entero le hace corresponder su producto por *(–2)* es una aplicación que simbolizamos por $\times(-2)$, (Fig. 1).

FIGURA 1



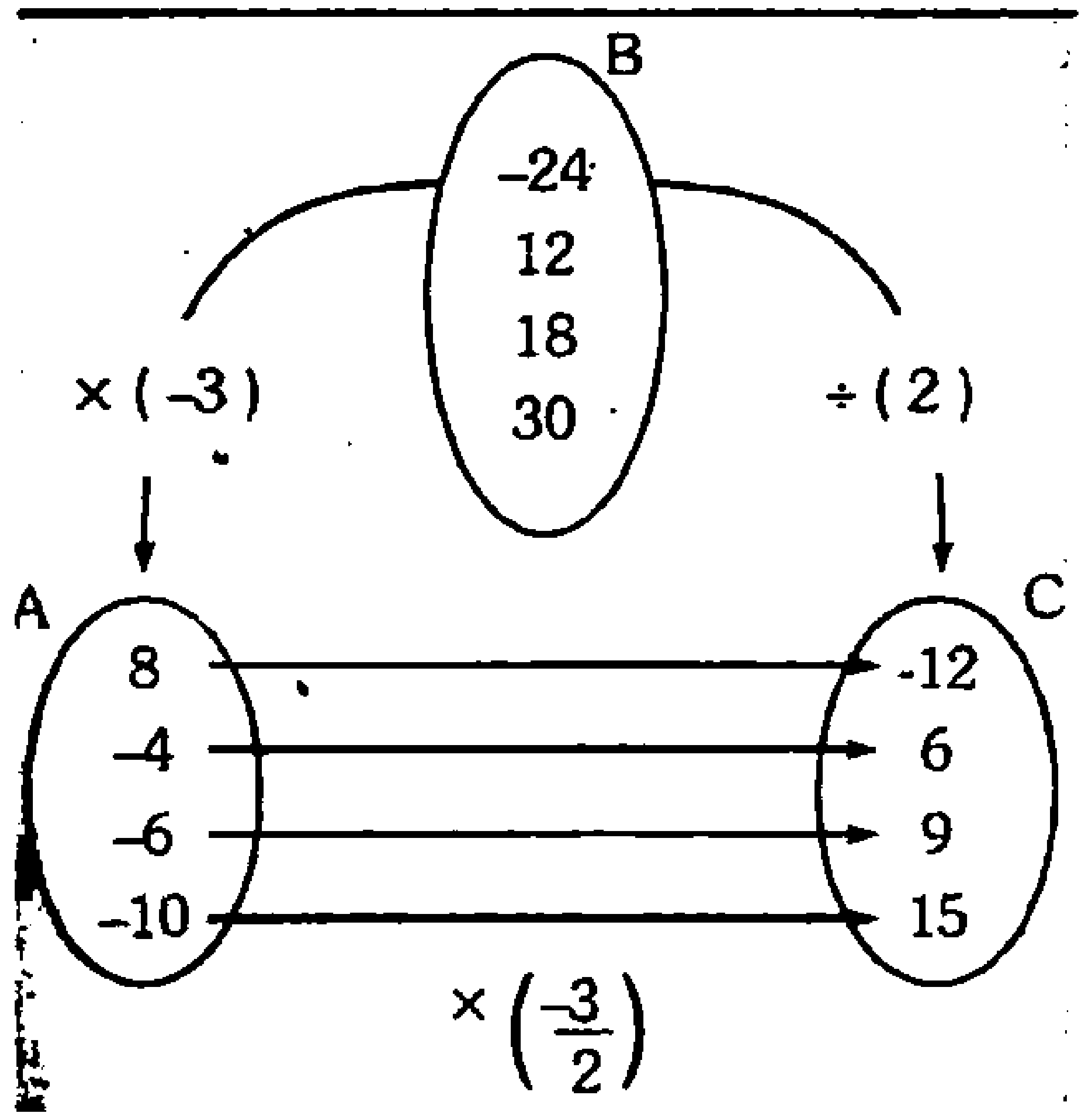
Las aplicaciones que, como la anterior, a un número entero le asocian otro mediante operaciones se llaman operadores sobre $\mathbb{Z}$.

La aplicación $\times(-2)$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es un operador sobre $\mathbb{Z}$.

* Consideremos el conjunto $A = \{8; -4; -6; -10\}$ si aplicamos a este conjunto $\times(-3)$ obtenemos el conjunto $B = \{-24; 12; 18; 30\}$ si al conjunto B le aplicamos el operador $\div(2)$ obtenemos el conjunto $C = \{-12; 6; 9; 15\}$

En resumen: hemos obtenido los elementos de C multiplicando los elementos de A por *(–3)* y dividiéndolos a continuación por *(2)*. *(Fig. 2)*.

FIGURA 2



La aplicación $\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ es un operador sobre A.

En general, los operadores de la forma en $\dfrac{a}{b}$ donde a y b son números enteros, con b distinto de cero, se llaman fracciones de números enteros. Así:

$$\frac{2}{-5};\ \frac{0}{7};\ \frac{-7}{20}.....$$

son fracciones de números enteros.

Si $\dfrac{a}{b}$ es una fracción, el número entero a se llama numerador y el número entero b se llama denominador.

FRACCIONES EQUIVALENTES

Fijate en los operadores $\dfrac{2}{-3}$ y $\dfrac{-2}{3}$ aplicados al número *15.*

$$\bullet\ \frac{2}{-3}(15) = -10 \qquad \bullet\ \frac{-2}{3}(15) = -10$$

Producen el mismo resultado.

Por esta razón las fracciones $\dfrac{2}{-3}$ y $\dfrac{-2}{3}$ son equivalentes.

Escribimos: $\dfrac{2}{-3} = \dfrac{-2}{3}$ observa que :

$$(2)(3) = (-2)(-3)$$

En general, dos fracciones de números enteros $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ son equivalentes si $ad = bc$.

- $\dfrac{8}{12} = \dfrac{4}{6}$ porque $8(6) = 4(12) = 48$
- $\dfrac{-5}{2} = \dfrac{10}{-4}$ porque $(-5)(-4) = 10(2) = 20$

NÚMEROS RACIONALES

Considera el conjunto de las fracciones de números enteros, al que llamamos F.

En el conjunto F consideramos la relación R definida por $\dfrac{a}{b} R \dfrac{c}{d}$ cuando $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

R es una relación de equivalencia ya que se verifican las propiedades reflexivas, simétrica y transitiva.

Al ser R una relación de equivalencia, determina sobre el conjunto F una clasificación. Una clase de equivalencia es, pues, el conjunto de las fracciones equivalentes a una dada; cada una de estas clases se llama número racional.

Así la clase de equivalencia:

$$\left\{\dots,\frac{-4}{-6},\frac{-2}{-3},\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\dots\right\}$$

es un número racional sin embargo, por comodidad, se suele tomar como representante del número racional una fracción irreductible.

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\dots,\frac{-4}{-6},\frac{-2}{-3},\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{9},\dots\right\}$$

Número Racional

$$\left[\frac{1}{3}\right] = \left\{\dots,\frac{-2}{-6},\frac{-1}{-3},\frac{1}{3},\frac{2}{6},\dots\right\}$$

Notación: $Q = \left\{\left[\dfrac{a}{b}\right] / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0\right\}$

NOTAS :

1) El conjunto Q es un conjunto de conjuntos, donde cada número racional es un conjunto.

2) La gráfica de cualquier número racional $\left[\dfrac{a}{b}\right]$ son punto que pertenecen a una recta que pasa por el

origen y cuya pendiente es $\frac{b}{a}$.

3) El conjunto $\mathbb{Z}$ coincide con el conjunto de clase $\left[\frac{n}{1}\right]$ con $n \in \mathbb{Z}$, luego $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

DENSIDAD DE UN COJUNTO

Un conjunto *A* es denso respecto a la relación de orden (<) si para dos elementos *a* y *b* de *A* ($a < b$) existe un elemento c de *A* tal que $a < c < b$.

NÚMERO RACIONAL

Está representado por la *división* indicada de dos números enteros, donde el divisor es diferente de cero.

SE DENOTA:

$$Q=\{\frac{a}{b} \,/\, a \in Z \wedge b \in Z \;-\{0\}\}$$

FRACCIÓN (DEFINICIÓN) :

Todos los números racionales que cumplen las siguientes condiciones, se denomina fracción.

Fracción: $\frac{a}{b}$	$a \to$ *Numerador* $b \to$ *Denominador*

Donde: a y $b \in \mathbb{Z}^+$; $a \neq \overset{\circ}{b}$

EJEMPLO :

¿Cuáles de las siguientes representan a una fracción? $\frac{2}{3};\frac{-8}{5};\frac{\pi}{4};\frac{0}{3};\frac{7}{5};\frac{6}{-4};\frac{4}{3};\frac{8}{2}$

De la definición : $\frac{2}{3};\frac{7}{5};\frac{4}{3}$

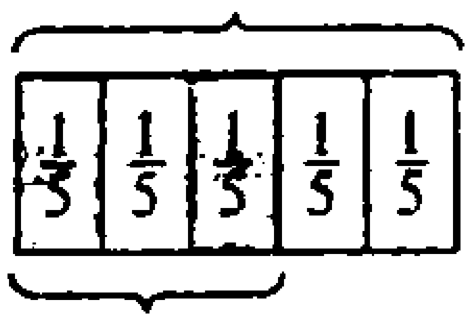
FRACCIÓN

Relación entre una parte de un total y el respectivo total (todo), donde :

Todo : Número de partes en que se divide la unidad (total)

Parte : Número de partes que se consideran.

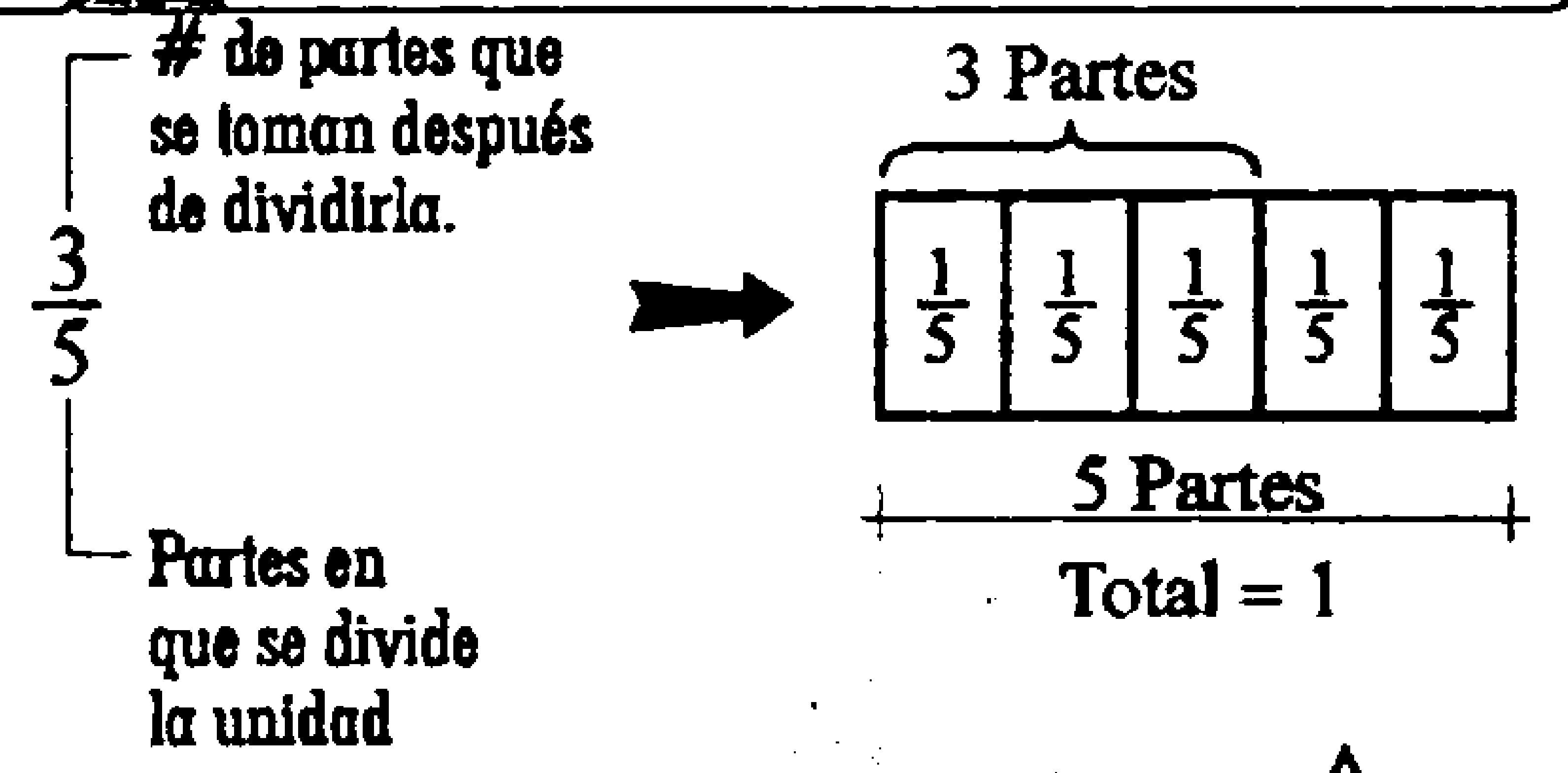
1 < > TOTAL < > 5 PARTES IGUALES



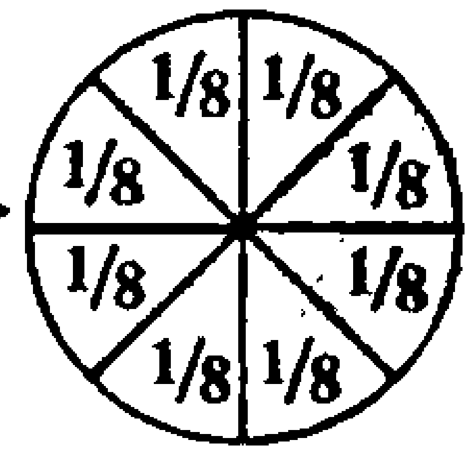
♦ *Lo sombreado representa los*

$\frac{3}{5}$ $3 \to$ *PARTE*, $5 \to$ *TODO*

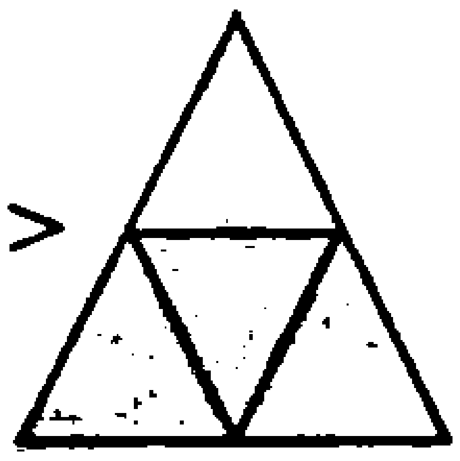
[(La UNIDAD ha sido dividido en 5 partes de las cuales de considera 3)]



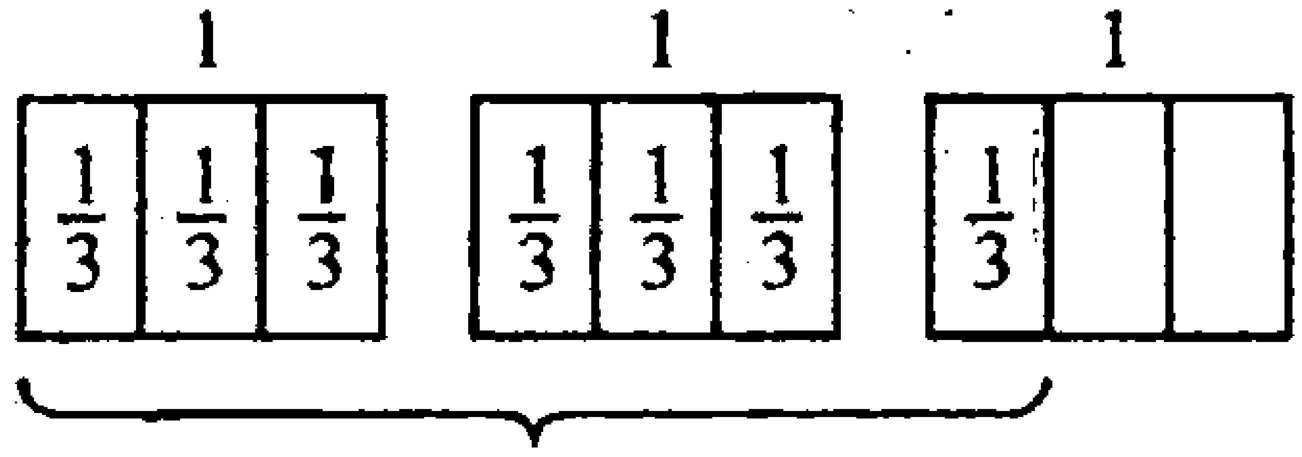
• $\frac{5}{8}$ < >



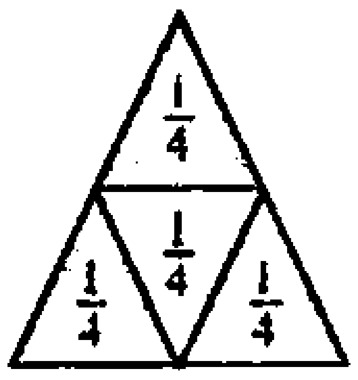
• $\frac{1}{4}$ < >



• $\frac{7}{3}$ < >



$$\frac{7}{3} <> 2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$$



$\frac{3}{4}$ / *NO SOMBREADO (Blanco)* / $\frac{1}{4}$ $\to$ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$

EN GENERAL :

$FRACCIÓN = \frac{N}{D}$ $N \to$ NUMERADOR, $D \to$ DENOMINADOR ó $FRACCIÓN = \frac{PARTE}{TODO}$ PARTE ← es, son, ... ; TODO ← de, del, ...

NOTA :

*En los problemas reconoceremos la **«parte»**, porque va antecedido por la palabra **«es»** o sus sinónimos y el **«todo»** de la palabra **«de»**, **«del, ... etc.***

EJEMPLO 1 :

¿Qué fracción de *18* es *12*?

RESOLUCIÓN :

$\frac{ES \to}{DE \to}\ \frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ (No siempre la menor cantidad va arriba)

RELACIÓN PARTE - TODO

Es la comparación de una parte respecto a un todo mediante una fracción así :

$$f=\frac{parte}{todo}$$

parte ← *Es, son, representa...*
todo ← *De , del , respecto......*

EJEMPLO 1 :

¿Qué fracción de **15** es **10**?

$$\Rightarrow f=\frac{parte}{todo}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

EJEMPLO 2 :

Lenín tenía **S/.50** y sólo gastó **S/.20**

a) ¿Qué parte del total gastó?

$$\Rightarrow f=\frac{Gasto}{todo}=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$$

b) Lo que no gastó ¿qué fracción representa del total?

$$\Rightarrow f=\frac{No\ gastó}{Total}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

c) Lo que gastó ¿que parte representa de lo que no gastó?:

$$\Rightarrow f=\frac{Gastó}{No\ Gastó}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

EJEMPLO 3 :

En una reunión hay **30** damas y **50** caballeros. ¿Qué parte de los reunidos son hombres?

$$\Rightarrow f=\frac{hombres}{Total}=\frac{50}{30+50}=\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$$

OBSERVACIONES :

Las palabras "de", "del", "de los" .... etc. En la parte operativa significan multiplicación.

EJEMPLO 4 :

¿Calcular los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{2}$ de **6** ?

RESOLUCIÓN :

$\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{2}$ de $6=\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}\times 6=10$ (Se simplifica si es posible antes de multiplicar)

NOTA:

con respecto a un total (unidad). Se aumentará (ganará) o se disminuirá (perdiera) según los siguientes cuadros, nos quedará o resultará.

con respecto a un total (unidad). Se aumentará (ganará) o se disminuirá (perdida) según los siguientes cuadros, nos quedará o resultará.

QUITO Ó PIERDO	ME QUEDA
MITAD → $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ 2 - 1
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$ <> $\frac{2}{3}$ menos
$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$ <> $\frac{5}{7}$ menos

AUMENTO Ó GANO	RESULTA
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$ 2 + 1
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$ <> $\frac{2}{3}$ más
$\frac{5}{7}$	$\frac{12}{7}$ <> $\frac{5}{7}$ más

♦ $\frac{2}{5}más=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ ♦ $\frac{5}{13}menos=1-\frac{5}{13}=\frac{8}{13}$

SACO PIERDO	QUEDA
$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$\frac{3}{8}$	$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$
$-\frac{1}{5}$ ⟶	$\frac{4}{5}$

AGREGO O GANO	TENGO
$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
$\frac{3}{8}$	$1+\frac{3}{8}=\frac{11}{8}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{11}{9}$
$+\frac{1}{5}$ ⟶	$\frac{6}{5}$

Si pierdo o saco	Luego queda
1/5	1 – 1/5 = 4/5
2/7	1 – 2/7 = 5/7
4/9	1 – 4/9 = 5/9

Si gano, o aumento	Luego resulta
3/4	1 + 3/4 = 7/4
1/8	1 + 1/8 = 9/8
2/7	1 + 2/7 = 9/7

EJEMPLO 5 :

De los **40** soles que tengo, pierdo en un juego los $\frac{3}{8}$ de los que tengo.

¿Cuánto me sobró?

RESOLUCIÓN :

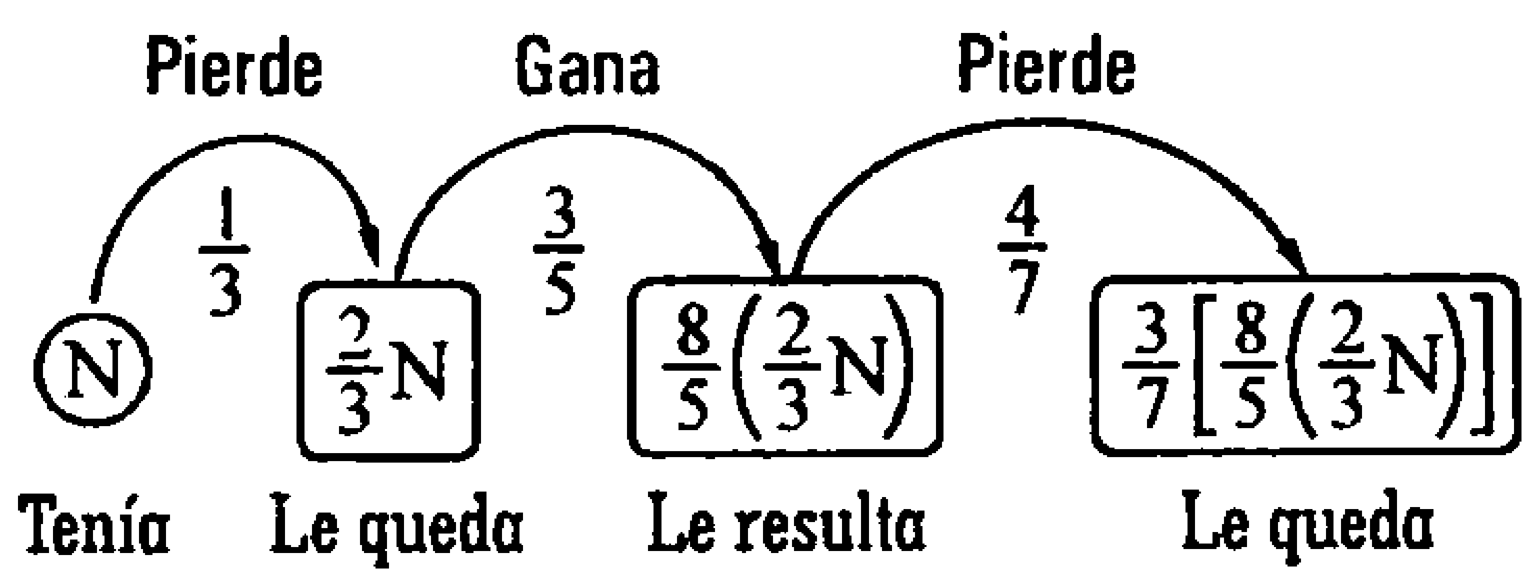
* Si pierdo $\frac{3}{8}(40)=15$

Me queda : $\frac{5}{8}(40)=25soles$

EJEMPLO 6 :

Un jugador pierde en su primer juego $\frac{1}{3}$ de su dinero, vuelve a jugar y gana los **3/5** de lo que le quedaba y en una terca apuesta pierda los **4/7** del resto. si al final se quedó con **S/.70** ¿ Cuánto tenis al inicio ?

RESOLUCIÓN :



* Entonces :

$$\frac{3}{7}\times\frac{8}{5}\times\frac{2}{3}N=70\ \Rightarrow\ N=32$$

(70: Dato)

⇒ Tenia al inicio : ***N* = 32** soles

EJEMPLO 7 :

De los ***S/.20*** que tengo, pierdo en un juego los ***2/5*** de lo que tengo ¿cuánto me quedó?

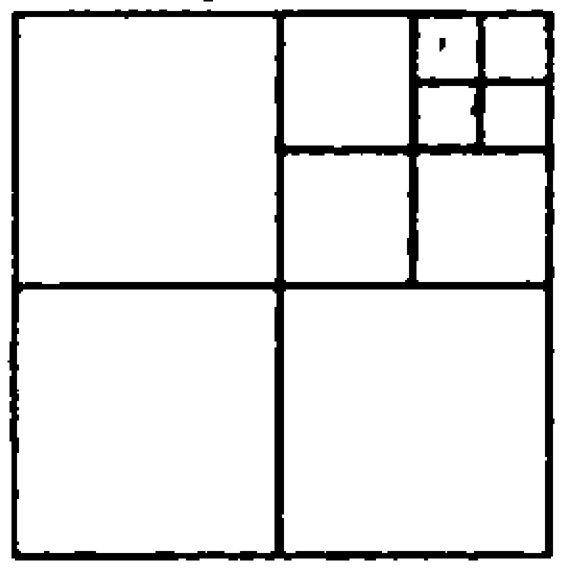
RESOLUCIÓN :

* Si pierdo los $\frac{2}{5}$ de ***20***, entonces me quedará los $\frac{3}{5}$ de ***20*** :

$$\frac{3}{5}\times 20 = 12\ S/.$$

FRACCIÓN DE FRACCIÓN

Es la aplicación de una fracción sobre otra fracción



La parte sombreada es :

Los $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$, es decir :

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$$

NOTA :

De; Del; De los ; ...... < > multiplicación

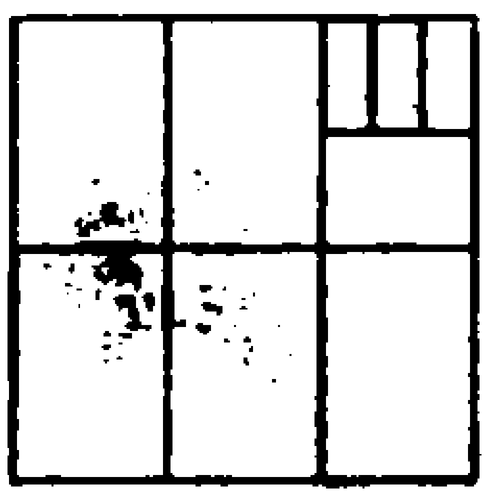
EJEMPLOS 8 :

Calcular los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{5}{4}$ de los $\frac{3}{5}$, de ***30*** .

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}(30)=15$$

EJEMPLO 9 :

La región sombreada que parte representa del total



$$\Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

1) FRACCIÓN PROPIA :

Si el numerador es menor que el denominador.

$$\boxed{f=\frac{a}{b}\text{ es propia si "}a<b\text{"}}\Rightarrow\frac{a}{b}<1$$

EJEMPLO :

$$\frac{2}{5}\ ;\ \frac{7}{8}\ ;\ \frac{4}{9}$$

2) FRACCIÓN IMPROPIA :

Si el numerador es mayor que el denominador.

$$\boxed{f=\frac{a}{b}\text{ es impropia si "}a>b\text{"}}\Rightarrow\frac{a}{b}>1$$

EJEMPLO :

$$\frac{4}{3}\ ;\ \frac{12}{7}\ ;\ \frac{9}{4}$$

OBSERVACIÓN :

- ***Fracción Impropia < > Número Mixto***

$$\boxed{\frac{17}{5}}\Rightarrow \begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline (2) & 3 \end{array}\Rightarrow\boxed{3\frac{2}{5}}$$

* $1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

- Inversamente :

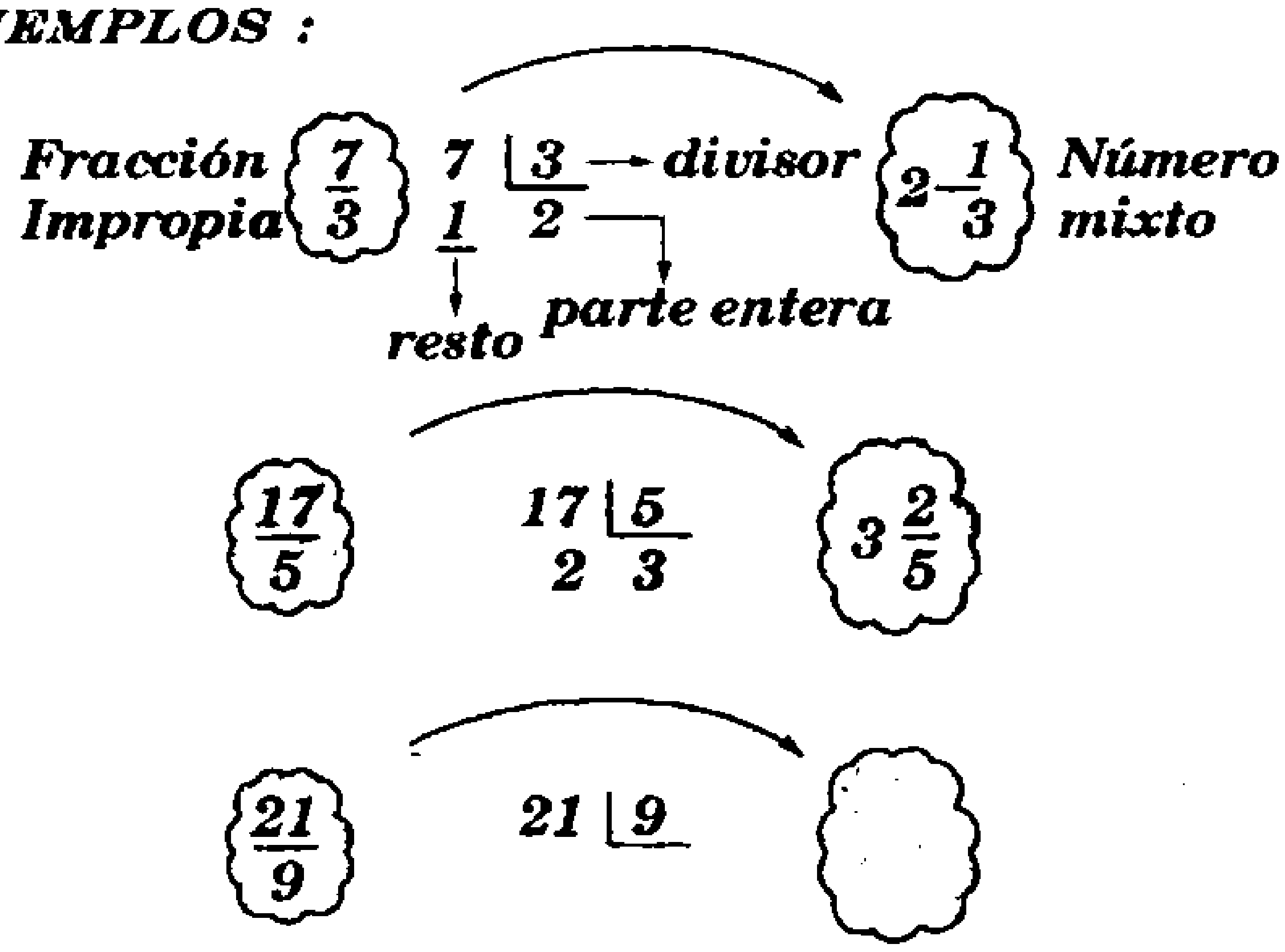
$$\boxed{3\frac{2}{5}}=\frac{3(5)+2}{5}=\boxed{\frac{17}{5}}$$

- $$\boxed{4+\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}}$$

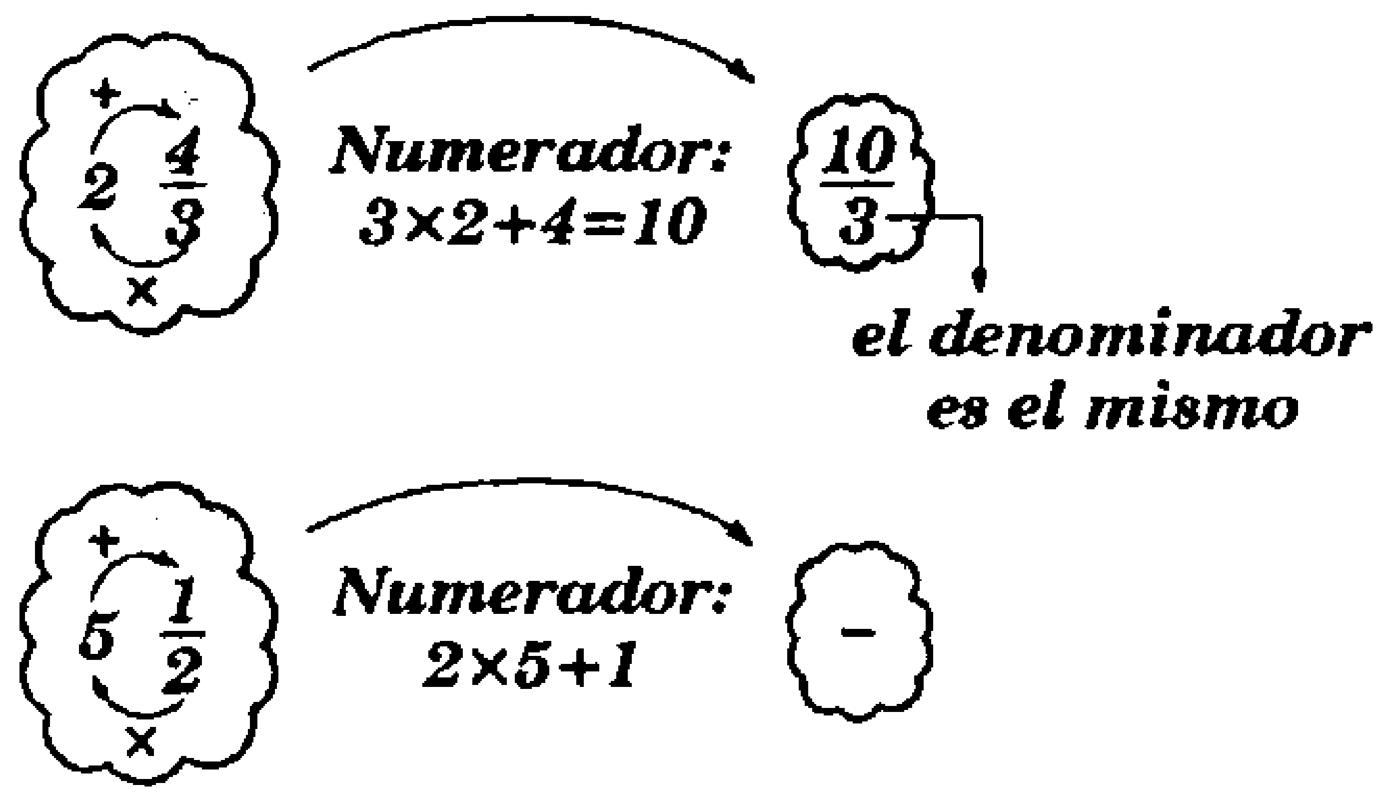
NUMERO MIXTO:

Proviene de una fracción impropia y está formado por una parte entera y una fraccionaria.

EJEMPLOS :



* Para pasar de un número mixto a fracción.



3) FRACCIÓN IRREDUCTIBLE :

Cuando el numerador y denominador son ***PESI*** (primos entre si), es decir no tienen factores comunes que se puedan simplificar :

$f = \frac{a}{b}$ *es irreductible si "a" y "b" son PESI*

EJEMPLOS :

$$\frac{3}{5}\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{12}{35}$$

4) FRACCIÓN REDUCTIBLE :

Cuando el numerador y denominador tienen factores comunes que se pueden simplificar :

EJEMPLOS :

$$\frac{30}{20}\ ;\ \frac{12}{18}\ ;\ \frac{48}{80}$$

5) FRACCIONES HOMOGÉNEAS :

Cuando tienen el mismo denominador.

EJEMPLOS :

$$\frac{4}{5}\ ;\ \frac{12}{5}\ ;\ \frac{7}{5}\ \text{y}\ \frac{2}{5}$$

6) FRACCIONES HETEROGÉNEAS :

Cuando tienen diferente denominador.

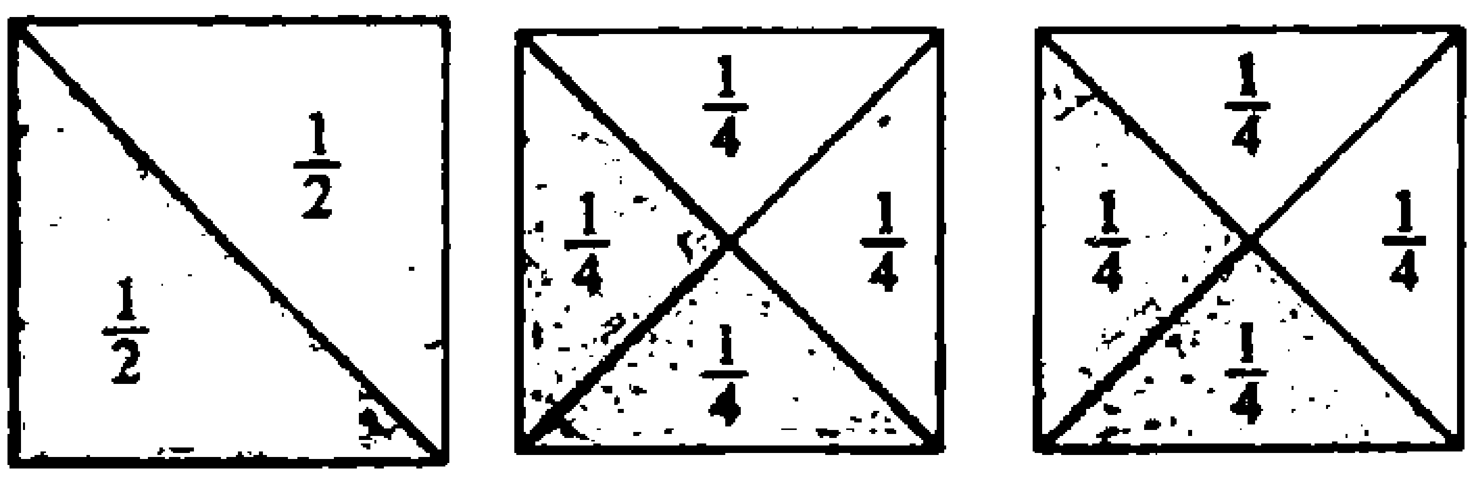
EJEMPLOS :

$$\frac{5}{7}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{5}\ \text{y}\ \frac{3}{8}$$

7) FRACCIONES EQUIVALENTES

Cuando con términos diferentes expresan la misma porción.

Gráficamente :



Se nota : $\frac{1}{2} <> \frac{2}{4} <> \frac{4}{8}$

EJEMPLO :

$$\boxed{\frac{3}{5}} = \underbrace{\frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \frac{15}{25} = \ldots}_{\text{Fracciones equivalentes (reducibles)}}$$

Fracción canónica irreductible

EN GENERAL :

$$\boxed{Si\ f = \frac{a}{b} \Rightarrow f = \frac{ak}{bk} \quad \therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}}$$

Donde : $\frac{a}{b}$ = Fracción irreductible

k = Constante entera positiva

EJEMPLO :

Hallar una fracción equivalente a $\frac{3}{4}$ tal que la suma de sus términos sea 63.

RESOLUCIÓN :

Por dato : $f = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{3k}{4k}$

Pero : $3k + 4k = 63 \Rightarrow k = 9$

Luego : $f = \frac{3(9)}{4(9)} = \frac{27}{36}$

FRACCIÓN DECIMAL :

(Denominador = 10^n, donde "n" es natural)

$$\frac{3}{100}, \frac{7}{1000}, $$

FRACCIÓN ORDINARIA :

(Denominador $\neq 10^n$)

$$\frac{7}{23}, \frac{11}{1237}$$

TRANSFORMACIÓN DE FRACCIONES HETEROGÉNEAS EN HOMOGÉNEAS

Multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por los denominadores de las otras fracciones.

EJEMPLO :

* Transformar en fracciones homogéneas : $\frac{5}{2}; \frac{4}{3}$ y $\frac{1}{5}$

* $\frac{5}{2} \times \frac{3 \times 5}{3 \times 5} = \frac{75}{30}$

* $\frac{4}{3} \times \frac{2 \times 5}{2 \times 5} = \frac{40}{30}$ ¡MCM (2;3;5)=30!

* $\frac{1}{5} \times \frac{2 \times 3}{2 \times 3} = \frac{6}{30}$

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Convertimos las fracciones en homogéneas comparamos sus numeradores.

EJEMPLOS :

(completa los espacios)

A) $\frac{4}{5}; \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{28}{35} \boxed{>} \frac{15}{35}$

B) $\frac{3}{4}; \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\quad}{12} \boxed{\quad} \frac{\quad}{12}$

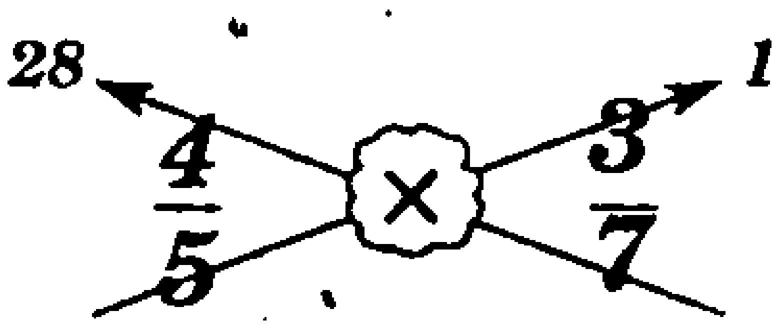
C) $-\frac{9}{5}; -\frac{7}{15} \Rightarrow -\frac{27}{15} \boxed{<} -\frac{7}{15}$

D) $-\frac{10}{3};-\frac{4}{5}\Rightarrow-\frac{}{15}\square-\frac{}{15}$

NOTA :

También para comparar fracciones puedes usar el ***"método de aspa"***.

EJEMPLO :



$$28>15$$

$$\rightarrow\frac{4}{5}>\frac{3}{7}$$

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NÚMERICA

Para representar los números racionales en la recta numérica se hará por medio de su respectiva fracción. Así, para una fracción de denominador ***"n"***, se dividirá cada unidad en ***"n"*** partes iguales.

EJEMPLOS :

- Fracciones con denominador ***2*** :

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2$

$$-\frac{4}{2}\ \ -\frac{3}{2}\ \ -\frac{2}{2}\ \ -\frac{1}{2}\ \ \frac{0}{2}\ \ +\frac{1}{2}\ \ +\frac{2}{2}\ \ +\frac{3}{2}\ \ +\frac{4}{2}$$

- Fracciones con denominador ***3*** :

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2$

$$-\frac{6}{3}\ -\frac{5}{3}\ -\frac{4}{3}\ -\frac{3}{3}\ -\frac{2}{3}\ -\frac{1}{3}\ \ \frac{0}{3}\ +\frac{1}{3}\ +\frac{2}{3}\ +\frac{3}{3}\ +\frac{4}{3}\ +\frac{5}{3}\ +\frac{6}{3}$$

Ahora completa :

- Fracciones con denominador ***4*** :

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2$

$$\frac{0}{4}$$

ADICIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

I) DE IGUAL DENOMINADOR :

Al efectuar la ***SUMA*** o ***ADICIÓN*** de dos o más fracciones de igual denominador , se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador .

EJEMPLO :

$$\frac{1}{10}+\frac{6}{10}=\frac{1+6}{10}\Rightarrow\frac{1}{10}+\frac{6}{10}=\frac{7}{10}$$

II) DE DIFERENTE DENOMINADOR :

Para efectuar la ***SUMA*** o ***ADICIÓN*** de fracciones de diferente denominador , buscamos transformar las fracciones a otras equivalentes , de tal forma que todas tengan ahora el mismo denominador .

Para esto consideremos los siguientes casos.

MÉTODO DEL MÍNIMO COMUN MULTIPLO (M.C.M)

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{5}{9}$$

* Hallamos el m.c.m. de los denominadores y lo escribimos como ***DENOMINADOR*** del resultado.

$$\begin{array}{c|l} 5-6-9 & 2 \\ 5-3-9 & 3 \\ 5-1-3 & 3 \\ 5-1-1 & 5 \\ 1-1-1 & \end{array}\Rightarrow m.c.m=2\times3\times3\times5=90$$

* Entonces : $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{5}{9}=\frac{\square}{90}$

* Dividimos el m.c.m. por cada denominador :

$(90\div5)\times2=36$
$(90\div6)\times1=15$
$(90\div9)\times5=50$

} ***El resultado lo multiplicamos por el respectivo numerador.***

* Luego : $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{5}{9}=\frac{36+15+50}{90}=\frac{101}{90}$

REGLA DE PRODUCTOS CRUZADOS

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

EJEMPLO :

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{7}=\frac{7+15}{35}=\frac{22}{35}$$

SUSTRACCIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Efectuar la ***SUSTRACCIÓN*** de números racionales equivale a efectuar la ***ADICIÓN*** de uno de ellos con el ***OPUESTO*** del otro .

EJEMPLO :

Efectuar : $\frac{2}{5}-\frac{3}{11}$

* Esta sustracción la Regla de los productos cruzados

$$\frac{2}{5}+\frac{-3}{5}$$

* Ahora aplicamos la Regla de los productos cruzados

$$\frac{2}{5}+\frac{-3}{11}=\frac{22+(-15)}{55}\rightarrow\frac{2}{5}+\frac{-3}{11}=\frac{22-15}{55}$$

$$\rightarrow\frac{2}{5}-\frac{3}{11}=\frac{7}{55}$$

MULTIPLICACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Para multiplicar fracciones escribimos como numerador y denominador el producto de los numeradores y denominadores respectivamente.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

EJEMPLO 1 :

* $\frac{3}{7}\times\frac{5}{4}=\frac{3\times5}{7\times4}=\frac{15}{28}$

EJEMPLO 2 :

Si podemos simplificar cualquiera de los numeradores con un denominador , lo hacemos previamente :

* $\frac{3}{4}\times\frac{12}{7}=\frac{3\times3}{1\times7}=\frac{9}{7}$

* $\frac{3}{5}\times\frac{20}{13}\times\frac{10}{9}=\frac{1\times4\times10}{1\times13\times3}=\frac{40}{39}$

EJEMPLO 3 :

Si multiplicamos un número entero por una fracción; se agrega .

* $-3\times\frac{2}{11}=\frac{-3}{1}\times\frac{2}{11}=\frac{-3\times2}{1\times11}=\frac{-6}{11}=-\frac{6}{11}$

EJEMPLO 4 :

Cuando tengamos una fracción de fracción , se multiplicará como cualquiera de las aplicaciones anteriores :

I) Hallar los $\frac{3}{5}$ de $\frac{8}{11}$

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{3}{5}\times\frac{8}{11}=\frac{3\times8}{5\times11}=\frac{24}{55}$

II) Hallar los $\frac{2}{9}$ de $1\frac{1}{7}$

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{2}{9}\times1\frac{1}{7}=\frac{2}{9}\times\frac{8}{7}=\frac{16}{63}$

III) Hallar los $\frac{4}{5}$ de 31

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{4}{5}\times31=\frac{4}{5}\times\frac{31}{1}=\frac{124}{5}=24\frac{4}{5}$

Observemos que en cada uno de estos casos la palabra "de" equivale a multiplicar

EJEMPLO 5 :

Hallar los $\frac{4}{7}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{9}$

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{4}{7}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{4\times2\times1}{7\times3\times9}=\frac{8}{189}$

EJEMPLO 6 :

Si multiplicamos un número mixto por una fracción:

* $2\frac{1}{4}\times\frac{4}{19}=\frac{9}{\not4_1}\times\frac{\not4^1}{19}=\frac{9}{19}$

* $1\frac{1}{7}\times1\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{8}{7}\times\frac{\not6^3}{5}\times\frac{3}{\not2_1}=\frac{8\times3\times3}{7\times5}=\frac{72}{35}=2\frac{2}{35}$

EJEMPLO 7 :

Hallar los $\frac{2}{7}$ de $\frac{1}{6}$ de $\frac{2}{3}$ de 21

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{\not2^1}{\not7_1}\times\frac{1}{\not6_3}\times\frac{2}{\not3_1}\times\frac{\not{21}^{\not3\,1}}{1}=\frac{2}{3}$

EJEMPLO 8 :

Hallar los $\frac{3}{10}$ de $\frac{4}{3}$ de $1\frac{1}{8}$

RESOLUCIÓN :

$\Rightarrow \frac{\not3^1}{10}\times\frac{\not4^1}{\not3_1}\times\frac{9}{\not8_2}=\frac{9}{10\times2}=\frac{9}{20}$

DIVISIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

Dividir una fracción $\frac{a}{b}$ por otra ***NO NULA*** $\frac{c}{d}$ equivale a multiplicar la primera fracción $\frac{a}{b}$ por la inversa de la segunda $\frac{c}{d}$.

* Es decir : $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$

EJEMPLO 9 :

$$\frac{36}{5}\div\frac{9}{8}=\frac{36}{5}\times\frac{8}{9}=\frac{36\times8}{5\times9}=\frac{32}{5}$$

EJEMPLO 10 :

Para dividir un número entero, que tiene como denominador a la unidad , se procede de manera similar .

$$15\div\frac{2}{3}=\frac{15}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{45}{2}$$

* Recordemos que un número entero tiene como denominador a la unidad .

EJEMPLO 11 :

Para dividir un número mixto entre una fracción , se

transforma dicho número mixto a una fracción simple.

$$3\frac{1}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{13}{4}\div\frac{3}{7}=\frac{13}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{91}{12}$$

OBSERVACIÓN :

Otra forma de presentar una división de fracciones es la siguiente :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\ \text{donde}\begin{cases}\text{"}a\text{"}\wedge\text{"}d\text{" se llaman términos extremos}\\ \text{"}b\text{"}\wedge\text{"}c\text{" se llaman términos medios}\end{cases}$$

* Para obtener el mismo resultado , operamos así :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\text{Producto de terminos extremos}}{\text{Producto de términos medios}}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

EJEMPLO :

Efectuar *2/5* entre *3/7*

1º MÉTODO :

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\times\frac{7}{3}=\frac{2\times 7}{5\times 3}=\frac{14}{15}$$

2º MÉTODO :

$$\frac{2}{5}\div\frac{3}{7}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}}=\frac{2\times 7}{5\times 3}=\frac{14}{15}$$

POTENCIACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONARIOS

La potencia de una fracción es el resultado de multiplicar *"n"* veces una misma fracción.

Así :

$$\underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}}_{\text{"n" veces } \frac{a}{b}}=\text{Potencia "n" ésima}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=P$$

EJEMPLO :

* $\left(\frac{2}{7}\right)^{3}=\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{2\times 2\times 2}{7\times 7\times 7}=\frac{2^3}{7^3}=\frac{8}{343}$

* $\left(\frac{-2}{3}\right)^{4}=\frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{3\times 3\times 3\times 3}=\frac{+16}{81}$

PROPIEDADES	*EJEMPLOS*
* $\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$
* $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right]^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\times n}$	$\left[\left(\frac{5}{9}\right)^{2}\right]^{3}=\left(\frac{5}{9}\right)^{2\times 3}=\left(\frac{5}{9}\right)^{6}$
* $\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)^{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\times\left(\frac{c}{d}\right)^{n}$	$\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}\right)^{2}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{2}$
* $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{m}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$\frac{\left(\frac{5}{11}\right)^{6}}{\left(\frac{5}{11}\right)^{4}}=\left(\frac{5}{11}\right)^{6-4}=\left(\frac{5}{11}\right)^{2}$

RADICACIÓN EN NÚMEROS FRACCIONADOS

Hemos estudiado que dada la siguiente expresión:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=P$$

* La operación que permite el cálculo de la base «$\frac{a}{b}$» dados *"P"* y *"n"*, se llama radicación .

Es decir :

$$\boxed{\sqrt[n]{P}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=P}$$

* Donde :

P: radicando

n: índice ($n\geq 2$)

$\frac{a}{b}$: Raíz

$\sqrt{\ }$: operador radical

EJEMPLO :

* $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{3}{5}$ porque $\left(\frac{3}{5}\right)^{3}=\frac{27}{125}$

SIGNO DE RADICACIÓN EN $\mathbb{Q}$

$\sqrt[impar]{\frac{+a}{b}}=\frac{+c}{d}$	*Ejemplo :* $\sqrt[3]{\frac{+8}{27}}=\frac{+2}{3}$
$\sqrt[impar]{\frac{-a}{b}}=\frac{-c}{d}$	*Ejemplo :* $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}=\frac{-1}{2}$
$\sqrt[par]{\frac{+a}{b}}=\frac{+c}{d}$	*Ejemplo :* $\sqrt{\frac{+9}{25}}=\frac{+3}{5}$
$\sqrt[par]{\frac{-a}{b}}=\nexists\ en\ \mathbb{Q}$	

PROPIEDADES :

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Ejemplo :	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}$
$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$	Ejemplo :	$\sqrt[2]{\left(\frac{2}{5}\right)^4}=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4}{2}}=\left(\frac{2}{5}\right)^2$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$	Ejemplo :	$\sqrt[7]{\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}}=\sqrt[7]{\frac{1}{8}}\times\sqrt[7]{\frac{3}{5}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\frac{a}{b}}}}=\sqrt[mnp]{\frac{a}{b}}$	Ejemplo :	$\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\frac{2}{9}}}}=\sqrt[2\cdot 5\cdot 4]{\frac{2}{9}}=\sqrt[40]{\frac{2}{9}}$

NÚMEROS DECIMALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción.

* $\frac{137}{8}=17,125$ * $\frac{113}{11}=10,2727...$ * $\frac{11}{12}=0,91666...$

Todo número decimal presenta dos partes:

$$\overbrace{713}^{\text{Parte entera}},\underbrace{1875}_{\text{Parte decimal}}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES:

Para esto trabajaremos con la fracción propia e irreductible: $F=\frac{A}{B}$

1)DECIMAL EXACTO :

F genera un decimal exacto si y solamente si *B* admite como únicos divisores primos $\overset{\circ}{2}$ y/o $\overset{\circ}{5}$.

EJEMPLOS:

* $\frac{13}{25}=0,52$ * $\frac{7}{8}=0,875$ * $\frac{17}{40}=0,425$

2) DECIMAL INEXACTO:

F genera un decimal inexacto periódico puro si *B* no admite como divisores primos ni a $\overset{\circ}{2}$ ni a $\overset{\circ}{5}$.

EJEMPLOS:

* $\frac{2}{3}=0,666...=0,\widehat{6}$ * $\frac{7}{11}=0,6363...=0,\widehat{63}$

DECIMAL PERIÓDICO MIXTO :

F genera un decimal inexacto periódico mixto si *B* admite como divisores primos a $\overset{\circ}{2}$ y/o $\overset{\circ}{5}$ y otro más.

EJEMPLOS:

* $\frac{8}{15}=0,5333...=0,5\widehat{3}$ * $\frac{15}{22}=0,68181...=0,6\widehat{81}$

GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

A) DECIMAL EXACTO :

Numerador : se coloca la parte decimal.
Denominador : se coloca la unidad seguida de cifras decimales tiene el número dado

* $0,23=\frac{23}{100}$ * $0,7=\frac{7}{10}$ * $1,274=\frac{1274}{1000}$

B) DECIMAL PERIÓDICO PURO

* $0.373737...=0,\widehat{37}=\frac{37}{99}$ — Numerador : se coloca lo que se repite. Denominador : se coloca tantos nueves como cifras tiene el número que se repite.

* $0,777...=0,\widehat{7}=\frac{7}{9}$ * $1,\widehat{2}=1+\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$

C) DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

<u>Numerador</u> : se coloca la parte decimal y se le quita la parte que no se repite.
<u>Denominador</u> : se coloca tantos nueves como cifras tiene el periodo (lo que se repite) seguida de tantos ceros como el número de cifras no periódicas.

* $0,1292929...=0,1\widehat{29}=\frac{129-1}{990}=\frac{128}{990}$
* $0,27333...=0,27\widehat{3}=\frac{273-27}{900}=\frac{246}{900}$
* $1,222...=1,\widehat{2}=\frac{12-1}{9}=\frac{11}{9}$

EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

$0,23_{6}$	Número *exaval* exacto
$0,2121..._{(4)}$	Número *tetraval* periódico puro
$0,23131..._{(5)}$	Número *pentaval* periódico mixto

DESCOMPOSICIÓN DE UN DECIMAL

* $0,23=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ (Base 10)
* $0,333...=0,\widehat{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+...=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
* $0,22..._{(3)}=0,\widehat{2}_{(3)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+...=\frac{2}{2}=1$
* $0,\widehat{32}_{(5)}=\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{3}{5^5}+...=\frac{32_{(5)}}{44_{(5)}}=\frac{3\times5+2}{4\times5+4}=\frac{17}{24}$
* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...\infty=0,11......_{(2)}=0,\widehat{1}_{(2)}=\frac{1}{2-1}=1$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Gasté los ***2/7*** de lo que no gasté y aún me queda ***S/.45*** más de lo que gasté ¿cuánto tenía?

A) S/.27 ***B) 72*** ***C) 81*** ***D) 108*** ***E) 180***

RESOLUCIÓN :

* Se tendrá que por cada ***7*** que no gasto (Aún queda), gasto ***2***, y tenía ***9***; de donde se deduce que por cada ***9*** que tenía, aún me queda ***7 – 2 = 5*** más de lo que gasté, luego por una simple regla de tres:

Tenía — ***Aún me queda - Gasté***

$9 \rightarrow 5$

$x \rightarrow S/.45$

$\Rightarrow 5x = 9 \times S/.45 \qquad x = S/.81$

RPTA : "C"

OTRO MÉTODO :

No Gasté o aún me queda	→ Gasté	→ Tenía	→ Queda - Gasté
$7x$	$2x$	$9x$	$5x = 45$, $x = 9$

* Piden : $9x = 9(9) = 81$

PROBLEMA 2 :

Se reparte caramelos entre ***4*** niños; al primero le tocó ***1/4*** del total; al segundo ***1/8*** ; al tercero ***1/12*** y al cuarto le tocó ***6*** caramelos más que a los otros ***3*** juntos. ¿Cuántos caramelos le tocó al segundo?

A) 42 ***B) 39*** ***C) 9*** ***D) 56*** ***E) 36***

RESOLUCIÓN :

* Asumiremos por conveniencia (para evitar las fracciones), que la cantidad a repartir sea como : ***MCM (4 ; 8 ; 12)x*** o sea ***24x***, luego se repartió del siguiente modo:

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto (6 más que los 3 juntos)
$6x$	$3x$	$2x$	$6 + 11x$

* Pero la suma de las partes, da el total, entonces :

$$6x + 3x + 2x + 6 + 11x = 24x$$

$$\Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow 3 = x$$

* Piden : $3x = 3\,(3) = 9$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Una Editorial tiene para la venta un cierto número de libros, vende primero las ***3/5*** partes y después le hacen un pedido de los ***7/8*** de lo que le queda pero antes de servir este pedido se le inutilizan ***240*** libros, por lo tanto al enviar todos los libros útiles que le quedan, sólo se cubre los ***4/5*** de la cantidad pedida. ¿Qué cantidad de libros se vendieron?

A) 1760 ***B) 2500*** ***C) 1200*** ***D) 4800*** ***E) 7200***

RESOLUCIÓN :

* Sea "***x***" la cantidad de libros que tiene, del enunciado, primero vende los ***3/5 x***, luego le queda ***2/5 x***, a continuación se le malogran ***240*** libros, quedándole : ***2/5x – 240*** ;

* lo cual equivale a los ***4/5*** del pedido efectuado el cual es los ***7/8*** de lo que le quedó, luego de la primera venta es decir los ***3/5*** de ***x***, todo lo anterior, se reduce a:

$$\frac{2}{5}x - 240 = \frac{4}{5}\left(\frac{7}{8}\left(\frac{2}{5}x\right)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x - \frac{7}{25}x = 240 \Rightarrow x = 2000$$

* Como se inutilizaron ***240*** libros, entonces se vendieron: ***2000 – 240 = 1760***

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

¿Qué fracción de $\frac{2}{3}$ le falta a $\frac{5}{9}$ para que sea igual a los $\frac{3}{5}$ menos de los $\frac{3}{4}$ más de la tercera parte de $\frac{10}{3}$?

A) $\frac{1}{3}$ ***B)*** $\frac{1}{2}$ ***C)*** $\frac{2}{5}$ ***D)*** $\frac{3}{7}$ ***E)*** $\frac{2}{9}$

RESOLUCIÓN :

* Sea "***F***" la fracción pedida, luego :

$$\text{"}F\text{" de } \frac{2}{3} + \frac{5}{9} = \underbrace{\left(1 - \frac{3}{5}\right)}_{\frac{3}{5}\text{menos}} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{4}\right)}_{\frac{3}{4}\text{más}} \times \frac{1}{3} \times \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2F}{3} + \frac{5}{9} = \underbrace{\frac{2}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{10}{3}}_{\text{Simplificando}}$$

$$\Rightarrow \frac{2F}{3} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{2F}{3} = \frac{2}{9} \Rightarrow F = \frac{1}{3}$$

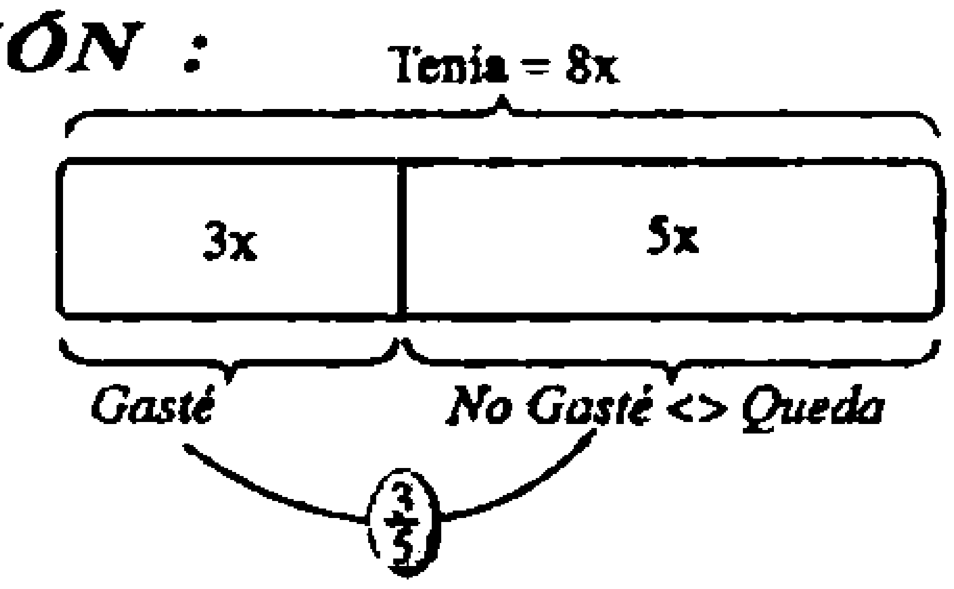
RPTA :"A"

PROBLEMA 5 :

Gasté los ***3/5*** de lo que no gasté y aún me quedan ***S/.60*** más de lo que gasté. ¿Cuánto tenía? (en soles)

A) 150 ***B) 190*** ***C) 200*** ***D) 250*** ***E) 240***

RESOLUCIÓN :



Además :

Me quedan = 60 + ***NO GASTÉ***

$$5x = 60 + 3x$$
$$x = 30$$

$\Rightarrow$ Tenía : $8x = 240$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

¿Cuántos tercios hay en $\frac{5}{2}$

A) 7 *B)* $\frac{2}{15}$ *C) 7,5* *D) 2,5* *E)* $\frac{6}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Es lo equivalente a deducir : ¿Cuántas veces está contenido $\frac{1}{3}$ en $\frac{5}{2}$, es decir :

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{15}{2} = 7,5$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

¿En cuántos ***96*** avos es menor $\frac{1}{3}$ que $\frac{1}{2}$?

A) 24 *B) 16* *C) 48* *D) 12* *E) 28*

RESOLUCIÓN :

* "$\frac{1}{3}$" es menor que "$\frac{1}{2}$" en : $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, pero esta diferencia será igual a "x" ***96*** avos, luego plantearemos :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{x}{96} \Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{x}{96} \Rightarrow 16 = x$$

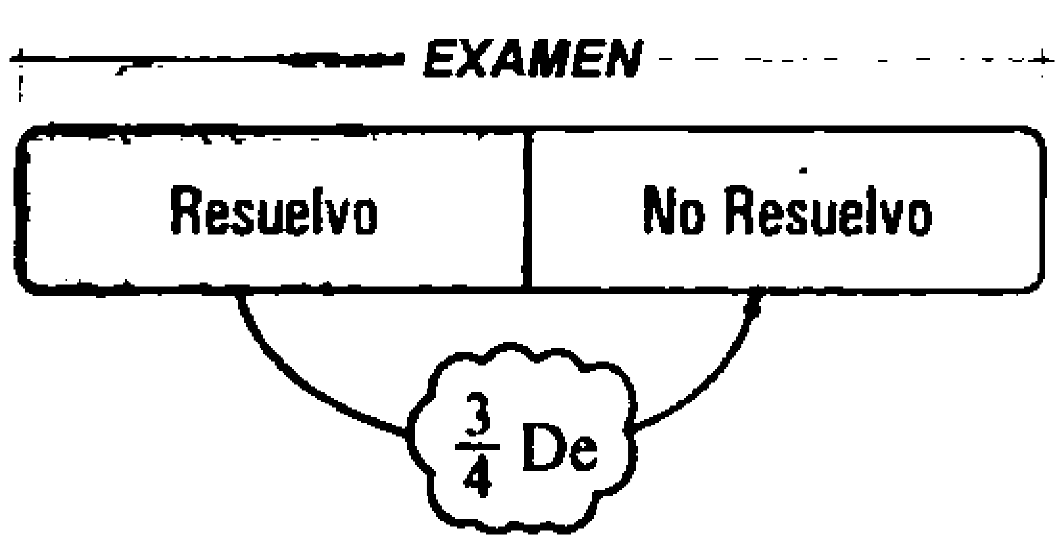
RPTA :"B"

PROBLEMA 8 :

Si resuelvo los $\frac{3}{4}$ de lo que no resuelvo del examen. ¿Qué fracción del examen no resolví?

A) $\frac{2}{5}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{4}{7}$ *E)* $\frac{3}{7}$

RESOLUCIÓN :



OBSERVACIÓN :

A quien lo dividiremos en ***4*** partes, será a lo que no resuelto (puesto que le sacaremos $\frac{3}{4}$),entonces convenientemente que sea como ***4***, luego lo que resuelvo será como : $3 + 4 = 7$;

traduciendo de la siguiente manera : "Por cada ***7*** del examen, no resuelvo ***4***".

* Piden : $\frac{\textit{No resolví}}{\textit{Examen}} = \frac{4}{7}$

RPTA :"D"

PROBLEMA 9 :

Pitoniso tenía ***S/.40*** y sólo gastó ***S/.10***.

I) ¿Qué fracción de lo que tenía gastó?

II) ¿Qué parte de lo que no gastó, gastó?

III) ¿Qué fracción es lo que no gastó, de lo que tenía?

RESOLUCIÓN :

$I)\ \frac{ES \longrightarrow}{DE \longrightarrow}\ \frac{GASTÓ}{TENÍA} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$II)\ \frac{GASTÓ}{NO\ GASTÓ} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$III)\ \frac{NO\ GASTÓ}{TENÍA} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

PROBLEMA 10 :

Una bola de ping-pong cae desde una altura de ***108 cm***. sobre una mesa de mármol. Cada vez que toca a la mesa, rebota y se eleva a una altura igual a la tercera parte de la altura desde la cual cayó.

¿A qué altura se elevará la bola después de haber tocado a la mesa por tercera vez?

A) 5 cm *B) 4* *C) 3* *D) 9* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

* Llamemos ***108 cm*** = h

1^{er}. rebote se eleva : $\frac{1}{3}h$

2^{do}. rebote se eleva : $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{9}h$

3^{er}. rebote se eleva : $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}h\right)=\frac{1}{27}h$

* Luego , se eleva finalmente : $\frac{1}{27}(108) = 4\,cm$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

De un reservorio se sacan ***8000*** litros, si habían los ***2/3*** y quedan ***2/5*** . ¿Cuántos litros se necesitan para terminar de llenarla?

A) 12000 *B) 15000* *C) 80000*
D) 72000 *E) 48000*

RESOLUCIÓN :

* Como al reservorio lo dividiremos en *3* partes y también en *5* partes (puesto que lo sacaremos *2/3* y *3/5*), luegó asumiremos que el reservorio sea como *MCM(3;5)=15x*, con lo que habían como :

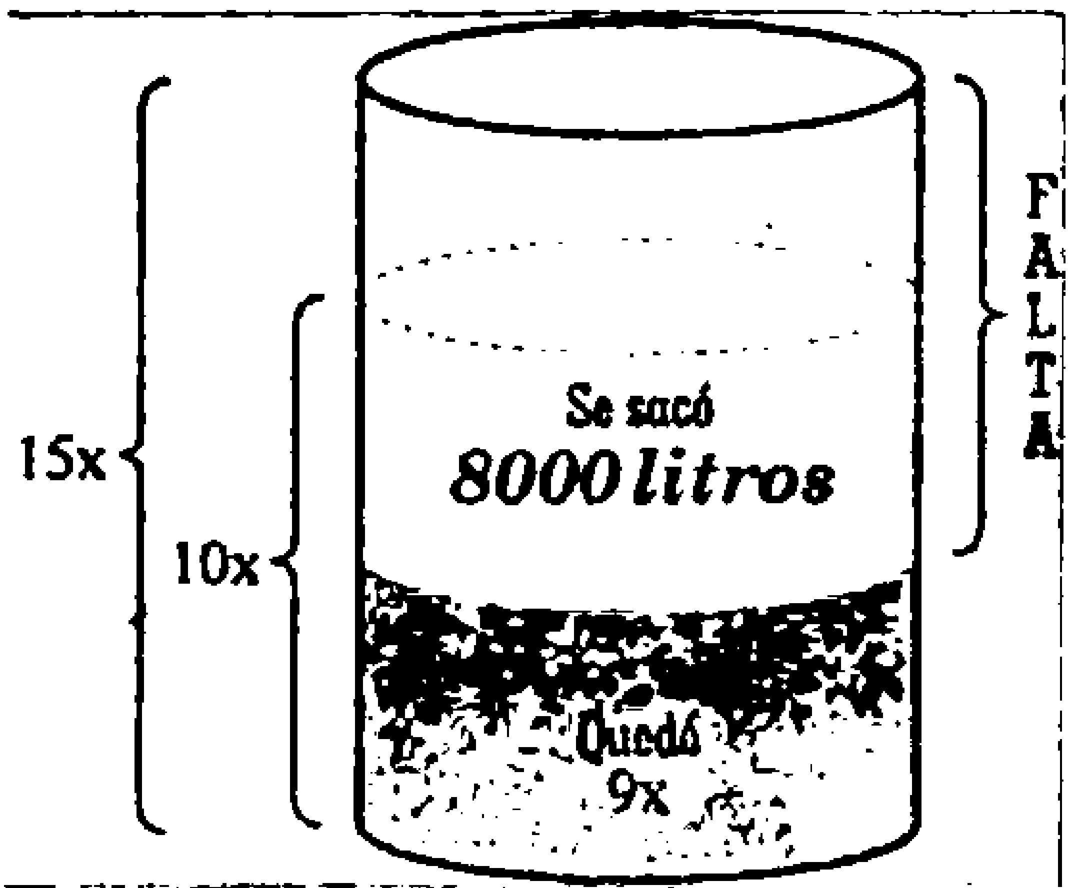
$$\frac{2}{3}(15x)=10x$$

y quedó $\frac{3}{5}(15x)=9x$ (entonces faltará *6x* para llenarlo), de donde se deduce que se sacó : $10x-9x=x$, que según dato esto es *8000*, es decir $x=8000$. Piden lo que se necesita para terminar de llenarla, que es :

$$15x-9x=6x=6(8000)=48000$$

RPTA :"E"

* Esquemáticamente será :



PROBLEMA 12 :

Dos tercios de los profesores de un colegio son mujeres, *12* de los profesores varones son solteros, mientras que los *3/5* de los mismos son casados. ¿Cuál es el número de docentes?

A) 80 *B) 90* *C) 60* *D)70* *E) 50*

RESOLUCIÓN :

Total : x { Mujeres : $\frac{2x}{3}$; Varones : $\frac{x}{3}$ { Casados $\frac{3}{5}\left(\frac{x}{3}\right)$ } }

$$\Rightarrow \text{Solteros}: \frac{2}{5}\left(\frac{x}{3}\right)=12(\text{dato})$$

$$x=90$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 13 :

En la mitad de un terreno se siembra camote, en la tercera parte del resto se siembra papa y en las *2/7* partes de lo que queda se siembra maíz. ¿Qué fracción del terreno no sembrada con papa, quedó sin sembrar?

A) $\frac{2}{21}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{5}{14}$ E) $\frac{10}{21}$

RESOLUCIÓN :

* Como el terreno tiene mitad, tercera y séptima parte, es porque el terreno es múltiplo de : $2\times 3\times 7=42$, luego el total será como *42*.

Entonces :

Camote : $\frac{1}{2}(42)=21$ Queda : *21*

Papa : $\frac{1}{3}(21)=7$ Queda : *14*

Maíz : $\frac{2}{7}(14)=4$ Queda : *10*

* El terreno no sembrado con papa es :

$$42-7=35$$

* Nos piden : $\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

RPTA : "C"

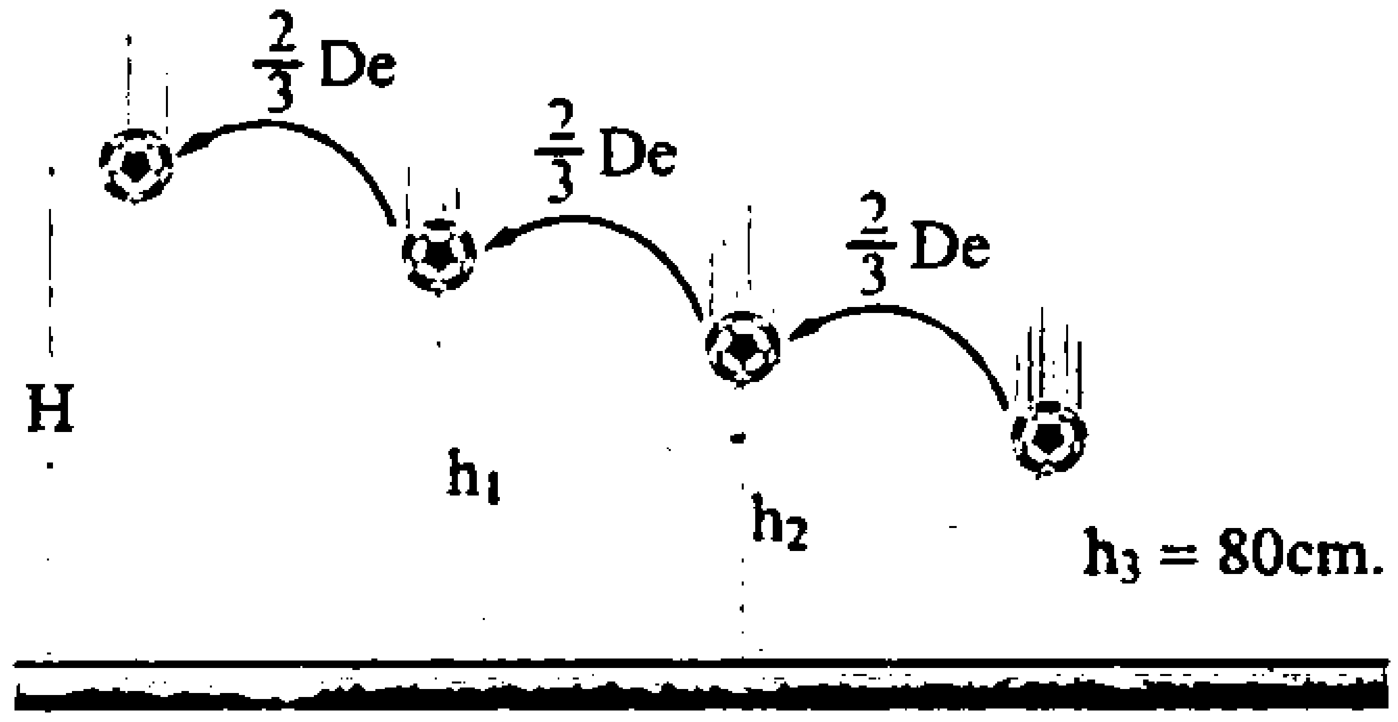
PROBLEMA 14 :

Al dejar caer al suelo una pelota cada vez que rebota se eleva a una altura igual a los *2/3* de la altura anterior.

Si después de *3* rebotes alcanza una altura de *80* cm de ¿qué altura cayó inicialmente?

A) 350 cm *B) 270 cm* *C) 400 cm*
D) 150 cm *E) 200 cm*

RESOLUCIÓN :



*Del esquema :

$$80=\frac{2}{3}\text{ de }\frac{2}{3}\text{ de }\frac{2}{3}\text{ de "H"}$$

$$\Rightarrow 80=\frac{8h}{27}\Rightarrow 270=H$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Hallar : $a+b$. $\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=0,969696...$

A) 5 *B) 8* *C) 6* *D) 7* *E) 9*

RESOLUCIÓN :

$$\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=0,9\widehat{6}\Rightarrow \frac{3a+11b}{33}=\frac{96}{99}$$

$\Rightarrow \underset{7}{3a} + \underset{1}{11b} = 32$ (Ecuación entera con 2 incógnitas)

TANTEANDO $\Rightarrow$ $a = 7$; $b = 1$; $a + b = 8$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Teresa tiene *S/.180*, pierde y gana alternadamente $\frac{1}{2};\frac{4}{5};\frac{4}{9}$ de lo que le iba quedando. ¿Al final con cuánto se quedó?

A) S/. 90 B) S/. 80 C) S/. 120
D) S/. 82 E) S/. 81

RESOLUCIÓN :

Pierde →	**Le queda**
$\frac{1}{2}(180)$	$\frac{1}{2}(180)$
Gana →	**Le resulta**
$\frac{4}{5}\left[\frac{1}{2}(180)\right]$	$\frac{9}{5}\left[\frac{1}{2}(180)\right]$
Pierde →	**Le Quedó**
$\frac{4}{9}\left\{\frac{9}{5}\left[\frac{1}{2}(180)\right]\right\}$	$\frac{5}{9}\times\frac{9}{5}\times\frac{1}{2}\times 180 = 90$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

Si a la cuarta parte de los $\frac{2}{5}$ de un número, se le agrega los $\frac{2}{5}$ de sus $\frac{3}{8}$ y se resta los $\frac{3}{8}$ de su quinta parte, se obtiene *21*. ¿Cuál es el número?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 120

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" el número :

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\times\frac{2x}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3x}{8}-\frac{3}{8}\times\frac{x}{5}=21$$

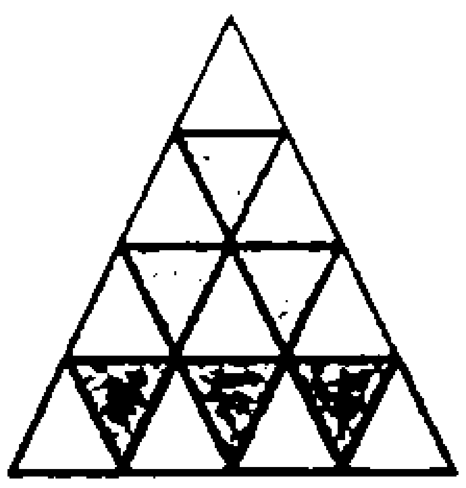
$$\Rightarrow \frac{2x}{20}+\frac{6x}{40}-\frac{3x}{40}=21 \Rightarrow \frac{4x+6x-3x}{40}=21$$

$$\Rightarrow 7x = 21\times 40 \Rightarrow x = 120$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

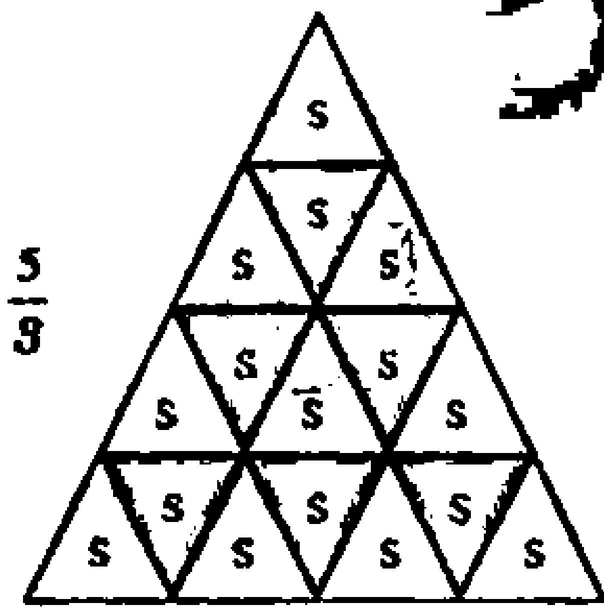
En la figura (triángulo equilátero) ¿Qué fracción de lo sombreado es lo no sombreado?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

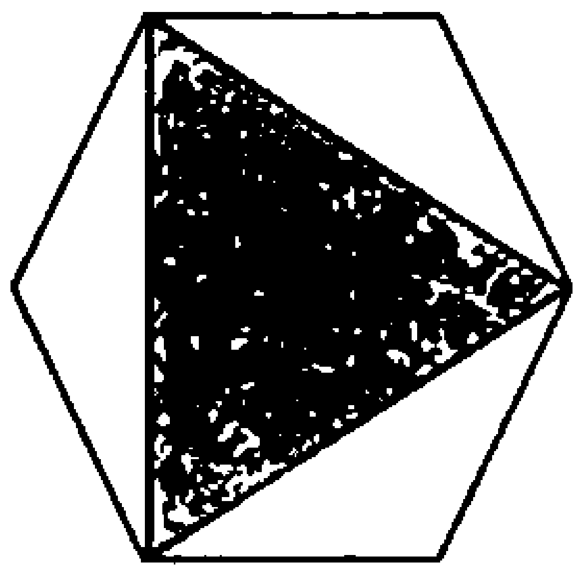
$$\frac{\text{ES} \longrightarrow \text{NO SOMBREADO}}{\text{DE} \longrightarrow \text{SOMBREADO}} = \frac{10S}{6S} = \frac{5}{3}$$



RPTA : "B"

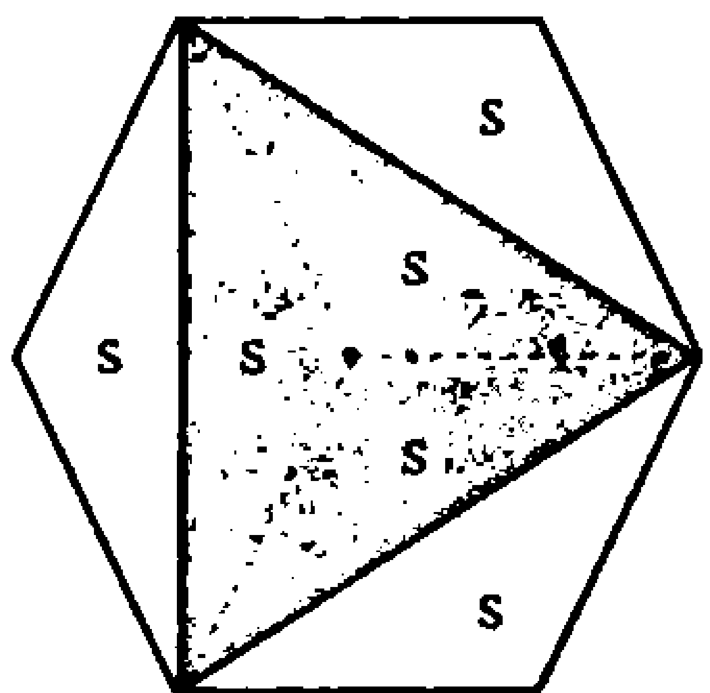
PROBLEMA 19 :

Del siguiente hexágono regular ¿Qué parte representa la región sombreada?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{7}{9}$

RESOLUCIÓN :



* Lo pedido será :

$$\frac{\text{SOMBREADO}}{\text{TOTAL}} = \frac{3S}{6S} = \frac{1}{2}(mitad)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Considerando solo la región cuadrada *ABCD* ¿Qué fracción de la región no sombreada, representa la región sombreada?

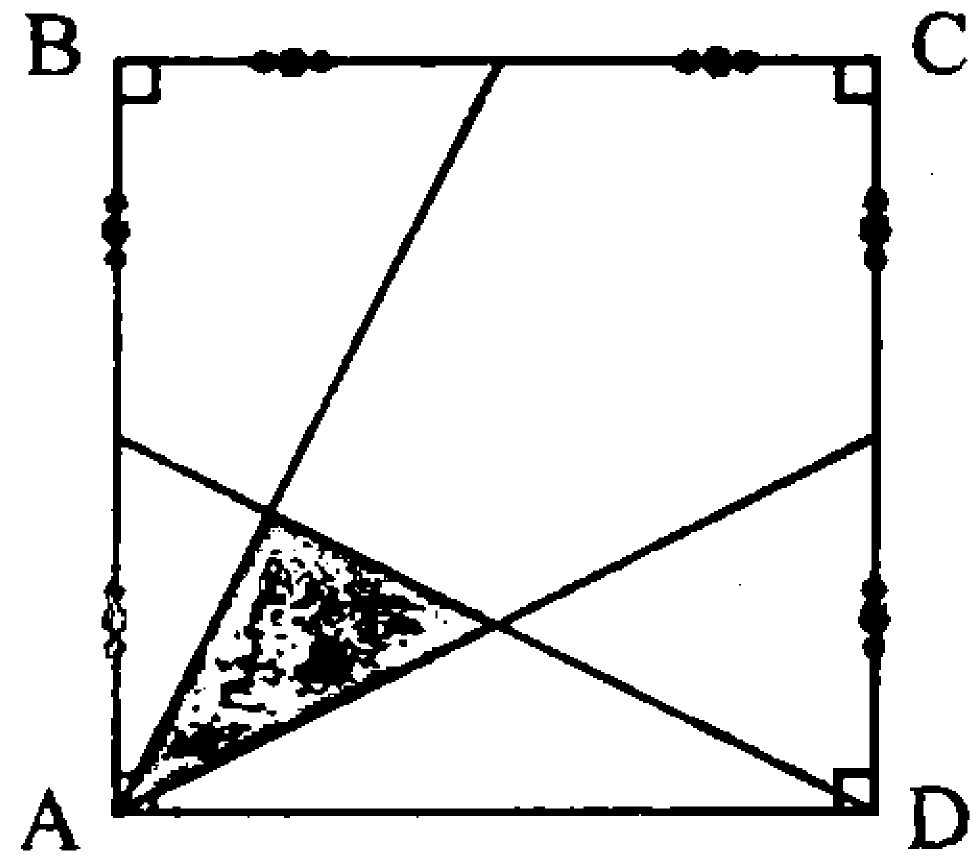
A) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{3}{37}$

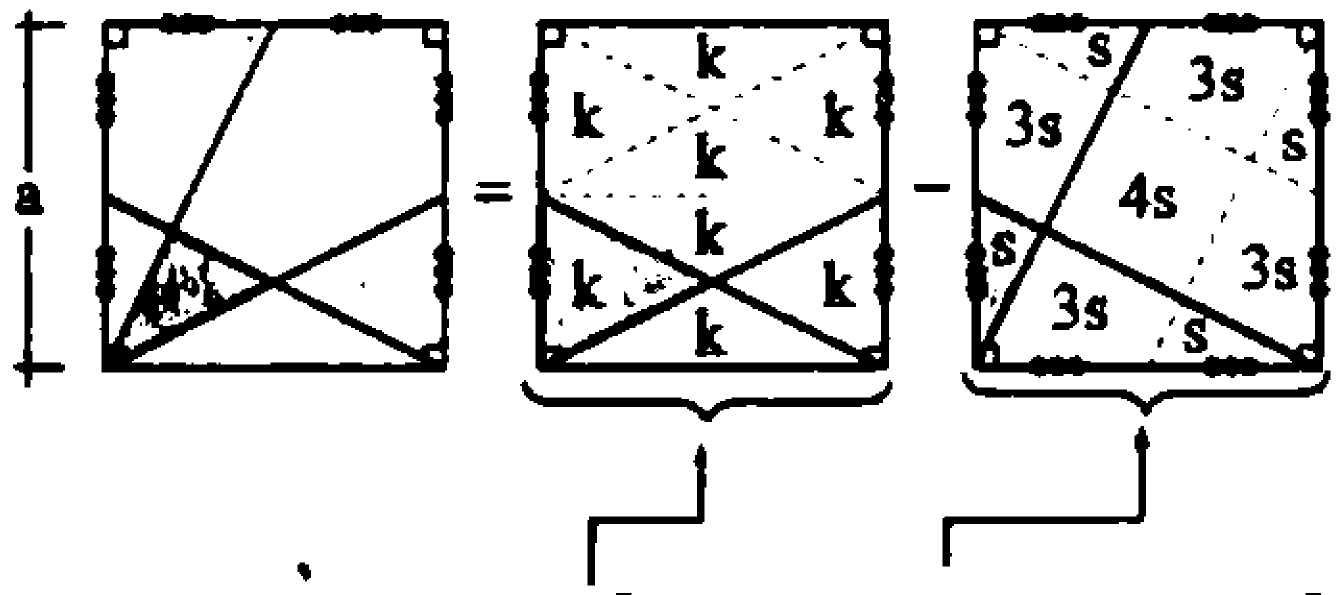
D) $\frac{5}{32}$

E) $\frac{7}{40}$



RESOLUCIÓN :

* Se observa que :



$$S_{SOMBREADO} = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{20} = \frac{3a^2}{40}$$

$$\Rightarrow S_{SOMBREADO} = a^2 - \frac{3a^2}{40} = \frac{37a^2}{40}$$

$$\text{*piden : } \frac{\text{sombreado}}{\text{no sombreado}} = \frac{\frac{3a^2}{40}}{\frac{37a^2}{40}} = \frac{3}{37}$$

RPTA :"C"

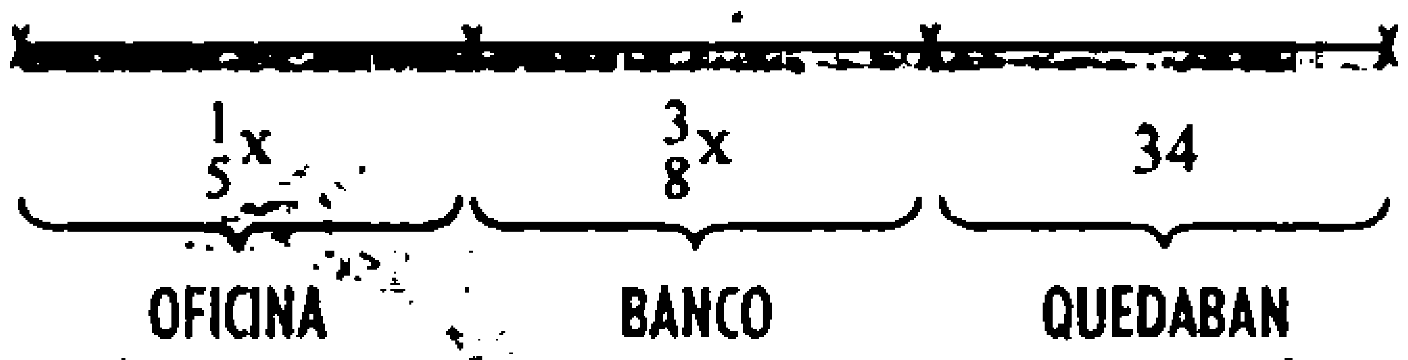
PROBLEMA 21 :

Un cartero dejó $\frac{1}{5}$ de las cartas que lleva en una oficina, los $3/8$ en un Banco, si aún le quedaban 34 cartas por distribuir ¿cuántas cartas tenía para distribuir?

A) 60 *B) 80* *C) 70* *D) 120* *E) 90*

RESOLUCIÓN :

TENÍA = "X" CARTAS (TODO)



* Es evidente que la "suma de las partes es igual al todo".

$$\Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{3x}{8} + 34 = x \Rightarrow 34 = x - \frac{x}{5} - \frac{3x}{8}$$

$$\Rightarrow 34 = \frac{40x - 8x - 15x}{40} \Rightarrow 34 \times 40 = 17x$$

$$\Rightarrow 80 = x$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Si los $11/20$ del volumen de un depósito están ocupados por cierta sustancia, para llenar el depósito se necesita *S/. 540.*

¿Cuánto cuesta $5/3$ de litro de dicha sustancia, sabiendo que la capacidad del depósito es de 400 litros?

A) S/.3 *B) S/.4* *C) S/.5*
D) S/.6 *E) S/.4,5*

RESOLUCIÓN :

$$\frac{9}{20}(400) = 180 \text{ litros} \Leftrightarrow S/.540$$

$$\Rightarrow 1 \text{ litro} \Leftrightarrow \frac{S/.540}{180} = S/.3$$

$$\frac{11}{20}(400)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Si se quita 4 al denominador de una frac-ción cuyo numerador es 3, la fracción aumenta en una unidad ¿Cuál es la fracción?.

A) $\frac{3}{4}$ *B)* $\frac{3}{7}$ *C)* $\frac{3}{5}$ *D)* $\frac{3}{8}$ *E)* $\frac{3}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Sea la fracción : $\frac{3}{x}$

* Luego $\frac{3}{x-4} = \frac{3}{x} + 1$

* Resolviendo : $x=6 \Rightarrow$ La fracción : $\frac{3}{6}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 :

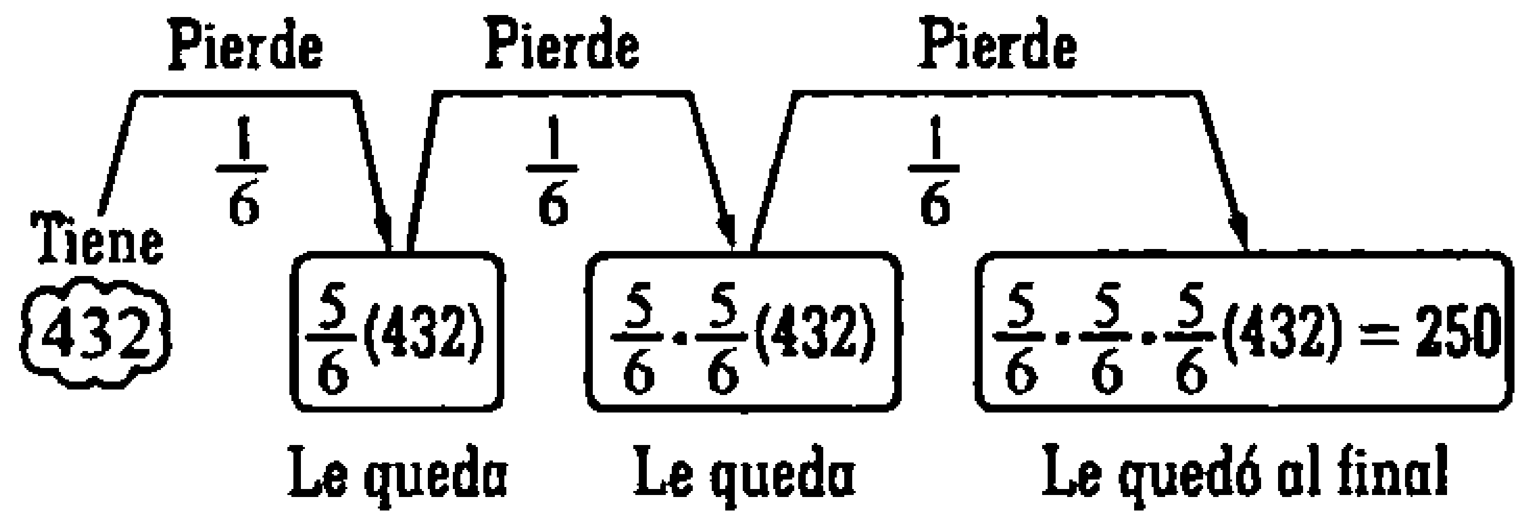
Un jugador tiene *S/.432* y en tres juegos sucesivos apuesta en cada uno ½ de lo que tiene y pierde $1/3$ de lo que apostó. ¿Cuánto perdió en total?

A) S/.181 *B) S/.186* *C) S/.182*
D) S/.1000 *E) S/.196*

RESOLUCIÓN :

♦ En cada juego pierde :

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ de lo que tiene en cada juego, entonces cada momento le quedará los $\frac{5}{6}$ de lo que tiene en ese momento :



* Perdió en total = Tiene - Le quedó al final
$= 432 - 250 = 182$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

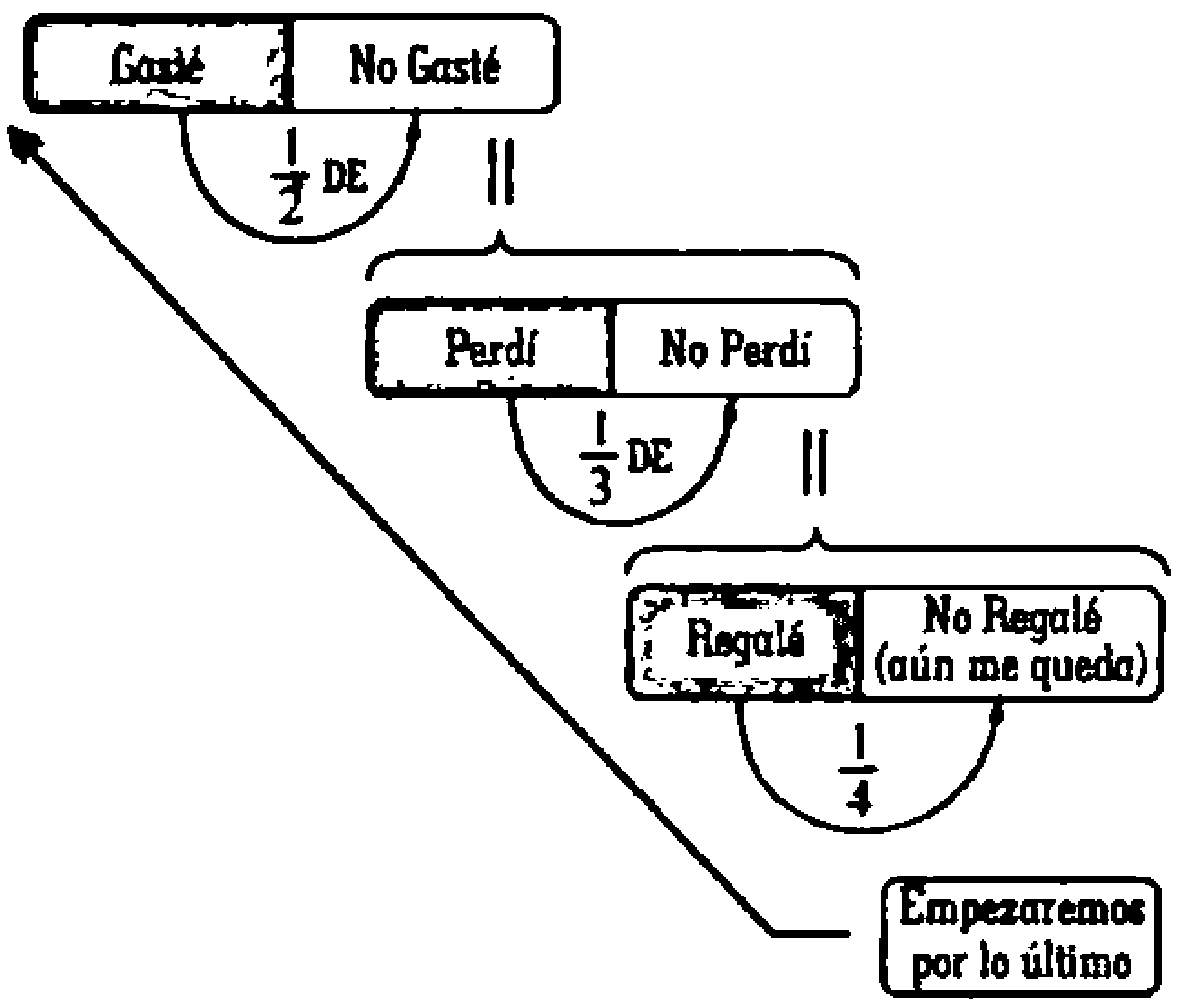
Del dinero que tenía gasté $\frac{1}{2}$ de lo que no gasté; luego perdí $\frac{1}{3}$ de lo que no perdí, en seguida regale

$\frac{1}{4}$ de lo que no regalé. ¿Qué parte del total aún me queda?

A) $\frac{1}{8}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{3}$ *D)* $\frac{2}{5}$ *E)* $\frac{2}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo un esquema de lo ocurrido :



Si :

No regalé *: 4x* ⇒ Regalé *: x* ⇒ No perdí *: 5x*

NOTA :

Como lo que no perdí, que es *5x*, no tiene tercia, convenientemente multiplicaremos por *3*, a todo lo ya supuesto ;

* Entonces :

No regalé *: 12x* ⇒ Regalé *: 3x* ⇒ No perdí *: 5x*

⇒ Perdí *: 5x* ⇒ No gasté *: 20x* ⇒ Gasté *: 10x*

⇒ Tenía *: 30x*

$$\text{Piden}: \frac{\textit{Aún me queda}}{\textit{Total}} = \frac{12x}{30x} = \frac{2}{5}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

Manuel compra la mitad de un rollo de alambre menos *12* metros, Diego compra un tercio del mismo rollo más *4* metros, con lo cual recibe *8* metros menos que Manuel. ¿Cuántos metros compra Manuel?

A) 52 *B) 60* *C) 72* *D) 44* *E) 50*

RESOLUCIÓN :

* Sea *6 L* : Longitud del rollo

* Manuel compra: $\frac{6L}{2} - 12 = 3L - 12$

* Diego compra : $\frac{6L}{3} + 4 = 2L + 4$

* Del enunciado : $3L - 12 - (2L + 4) = 8$

$$\Rightarrow L = 24$$

Manuel compra : $3(24) - 12 = 60$

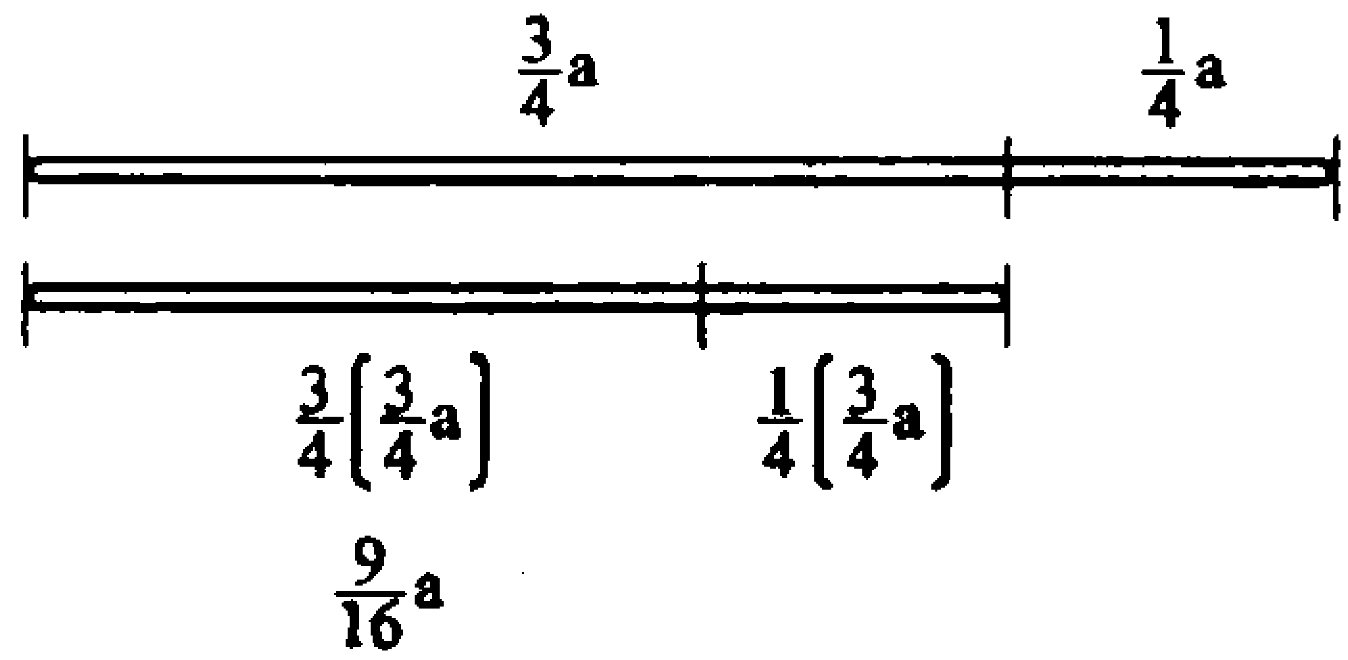
RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Una varilla de *a* cm. de longitud se corta en *2* partes. La parte menor mide ¼ del total, luego con la parte mayor se repite el procedimiento ¿Cuánto mide el pedazo más largo?

A) $\frac{3a}{8}$ *B)* $\frac{3a}{4}$ *C)* $\frac{3a}{16}$ *D)* $\frac{a}{4}$ *E)* $\frac{9a}{16}$

RESOLUCIÓN :



El pedazo más largo mide $\frac{9}{16}a$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 :

Se tiene dos números consecutivos cuya suma es igual a la cuarta parte del primero, más los cinco tercios del segundo. El consecutivo de la suma de los números es :

A) 18 *B) 17* *C) 19* *D) 20* *E) 21*

RESOLUCIÓN :

* Sean los números consecutivos :

(n) y *(n + 1)*. Según dato planteamos :

$$n + (n+1) = \frac{n}{4} + \frac{5}{3}(n+1) \Rightarrow n = 8$$

* Nos piden : $(n + (n + 1)) + 1 = 18$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Un jugador después de haber perdido consecutivamente los *4/5* de su dinero, *2/7* del resto y *4/11* del nuevo resto, gana *420* dólares y de ésta manera la pérdida queda reducida a *1/5* del dinero original. ¿Cuál es la fortuna?

A) 700 *B) 600* *C) 605* *D) 701* *E) 729*

RESOLUCIÓN :

*Sea :"C"el dinero original. Después de haber perdido por *3^era^* vez le queda :

$$\frac{7}{11} \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{5} \times C = \frac{1}{11}C$$

* Como según el problema gana *429* dólares en el juego ; tendrá hasta el momento :

$$\frac{1}{11}C + 429$$

* Luego por condición del problema :

$$\frac{1}{11}C+429=C-\frac{1}{5}C \Rightarrow 49=\frac{4}{5}C-\frac{1}{11}C$$

$$\Rightarrow 429=\frac{39}{55}\times C \Rightarrow C=605$$

RPTA: "C"

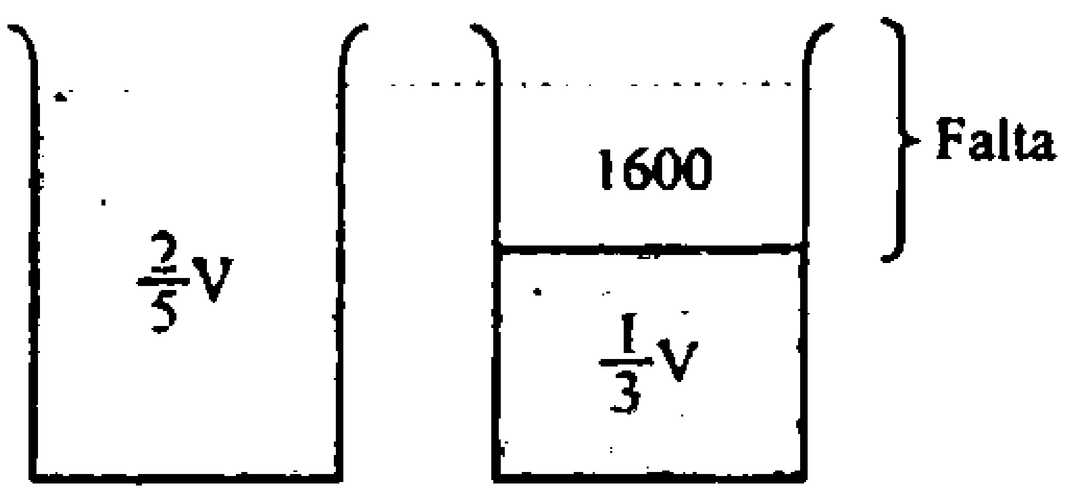
PROBLEMA 30 :

Después de sacar de un tanque ***1600*** litros de agua, el nivel de la misma descendió de $\frac{2}{5}$ a $\frac{1}{3}$ ¿cuántos litros habrá que añadir para llenar el tanque?

A)3200 B) 480 C)24000 D)16000 E)12000

RESOLUCIÓN :

Sea ***"V"*** el volumen del tanque:



$$\frac{2}{5}V-\frac{1}{3}V=1600 \Rightarrow \left(\frac{6-5}{15}\right)V=1600$$

* Efectuando: $V=24000$

* Está lleno : $\frac{1}{3}(24000)=8000$

* Falta llenar : $24\,000-8000=16000$

RPTA :"D"

PROBLEMA 31 :

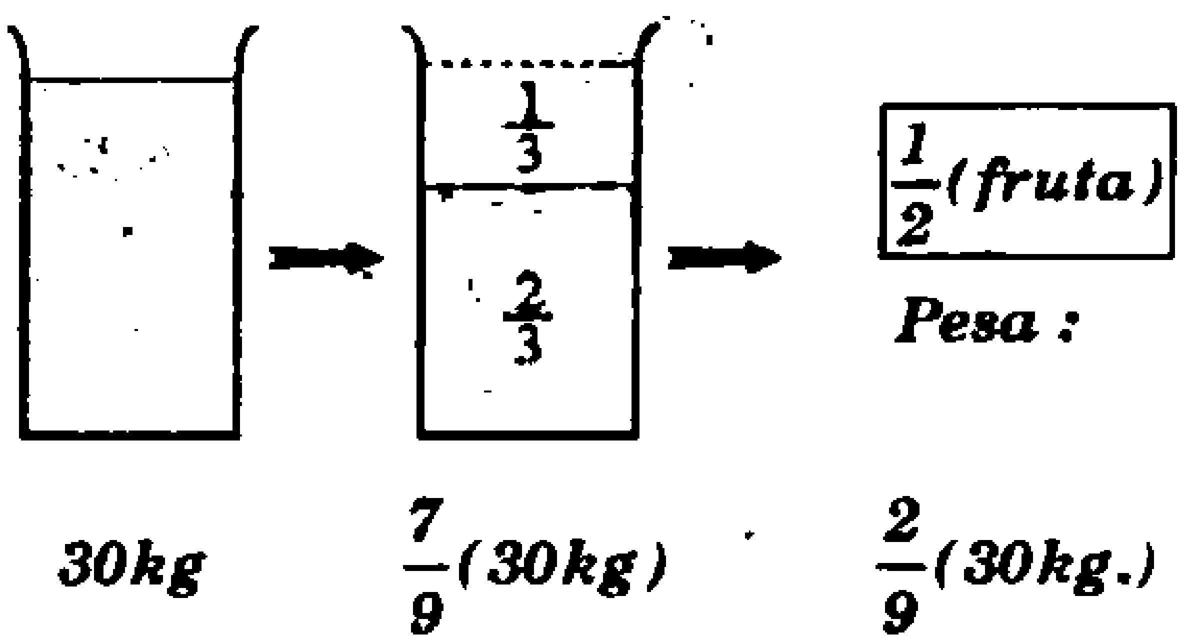
En una carreta llena de frútas pesa ***30 Kg.***, cuando contiene los $\frac{2}{3}$ de su capacidad pesa los $\frac{7}{9}$ del peso anterior ¿cuánto pesa la carreta vacía?

A)8 Kg. B)12 Kg. C)10 Kg. D)9 Kg. E)15 Kg.

RESOLUCIÓN :

Peso de fruta + Peso de carreta = ***3000***

Graficando :



* Se deduce : $\frac{1}{3}(\text{Peso de fruta})=\frac{2}{9}(30kg.)$

* Peso de la fruta = ***20 kg***.

*Entonces : Peso de la carreta = ***30 – 20 = 10kg.***

RPTA : "C"

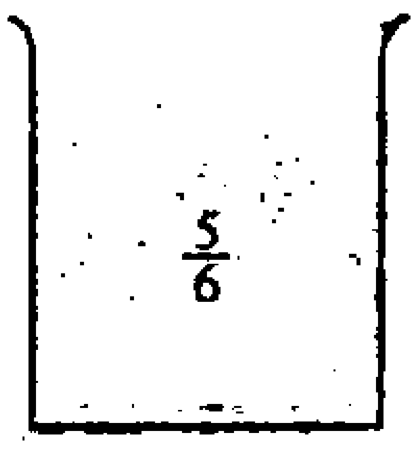
PROBLEMA 32 :

Un cilindro se encuentra lleno hasta sus ***5/6*** se consumen ***3/8*** del líquido. Hallar la capacidad de la parte vacía del cilindro.

A) 23/48 B) 25/48 C) 5/16 D) 11/24 E) 13/48

RESOLUCIÓN :

Inicialmente :



* Se consumen $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{6}$, Luego :

* Queda los $\frac{5}{8}$ de $\frac{5}{6}=\frac{5}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{48}$

* Luego la parte vacía del cilindro es : $1-\frac{25}{48}=\frac{23}{48}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

Un comerciante ahorró ***S/. 54 000*** durante ***5*** años, sabiendo que el segundo año ahorró ***2/9*** más sobre lo que había ahorrado el primer año, que el tercer año ahorró ***S/. 12 885***, que el cuarto año ahorró ***1/11*** menos que lo que había ahorrado el segundo año y que el quinto año ahorró lo que el segundo más ***S/.115.*** Determinar lo que ahorró el primer año.

A) 12 885 B) 13 000 C) 9 000
D) 8 900 E) 9 900

RESOLUCIÓN :

* Tabulando los datos se tiene :

AÑO	AHORRO
1°	x
2°	$x+2x/9=11x/9$
3°	12 885
4°	$11x/9-(1/11)(11x/9)=10x/9$
5°	$11x/9+115$

* Como en total ahorró ***54 000*** soles, se tiene :

$$x+\frac{11x}{9}+12885+\frac{10x}{9}+\left(\frac{11x}{9}+115\right)=54000$$

$$\Rightarrow \frac{41x}{9}=41000 \Rightarrow \quad x=9000 \text{ soles}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Una librería tiene para la venta un cierto número de libros. Vende primero las ***3/5*** partes y después le hacen un pedido de los ***7/8*** de lo que le queda, pero antes de servir este pedido se le inutilizan ***240*** libros y por lo tanto, enviando todos los libros útiles que le

quedan, sólo cubre los *4/5* de la cantidad pedida. ¿Qué cantidad de libros se vendieron?

A) 2000 *B) 3000* *C) 1760*
D) 3520 *E) 2240*

RESOLUCIÓN :

Sea "*x*" el número de libros que la librería tiene para la venta.

OPERACIÓN	ENTREGA	QUEDA
1^{era} Venta	$3x/5$	$x-3x/5=2x/5$
Se malogran 240		$2x/5-240$
2^{da} Venta	$2x/5-240$	0

Por condición, la última entrega sólo cubre los *4/5* del pedido. Este pedido comprendía los *7/8* de los que le quedaba luego de la primera venta, es decir :

$$\frac{2x}{5}-240=\frac{4}{5}\left[\frac{7}{8}\left(\frac{2x}{5}\right)\right]\Rightarrow 3x=6000\Rightarrow x=2000$$

Considerando que se malograron *240* libros, se vendieron *2000 – 240 = 1760*

RPTA :"C"

PROBLEMA 35 :

3 hermanos se reparten una herencia, pero antes que se lea el testamento se reparten de la siguiente forma: La octava parte al primero, la sexta parte al segundo y el resto al tercero, después que se lee el testamento el primero le da al tercero *2/3* de lo que tiene y el tercero le da al segundo las ¾ partes de lo que ha recibido hasta ahora. ¿Qué fracción le toca al segundo?

A) 72/96 *B) 71/96* *C) 73/96*
D) 61/96 *E) 17/96*

RESOLUCIÓN :

Herencia $= t$

1^{ro} recibe $=\frac{t}{8}$ · 2^{do} recibe $=\frac{t}{6}$

3^{ro} recibe $=t-\left(\frac{t}{8}+\frac{t}{6}\right)=\frac{17}{24}t$

* Luego, de leerse el testamento :

♦ El 1^{ro} da al 3^{ero} : $\frac{2}{3}\left(\frac{t}{8}\right)=\frac{t}{12}$

$\Rightarrow$ El 3^{ro} tiene ahora : $\frac{17t}{24}+\frac{t}{12}=\frac{19t}{24}$

♦ El 3^{ro} da al 2^{do} $=\frac{3}{4}\left(\frac{19t}{24}\right)=\frac{57t}{96}$

$\Rightarrow$ El 2^{do} tiene ahora : $\frac{t}{6}+\frac{57t}{96}=\frac{73t}{96}$

RPTA :"C"

PROBLEMA 36 :

Tengo un vaso lleno de alcohol; bebo la sexta parte; luego bebo 1/4 de lo que queda.

¿Qué fracción de lo que queda debo volver a beber para que aún sobren los *3/8* del vaso?

A) 2/3 *B) 2/5* *C) 1/6* *D) 1/3* *E) 1/5*

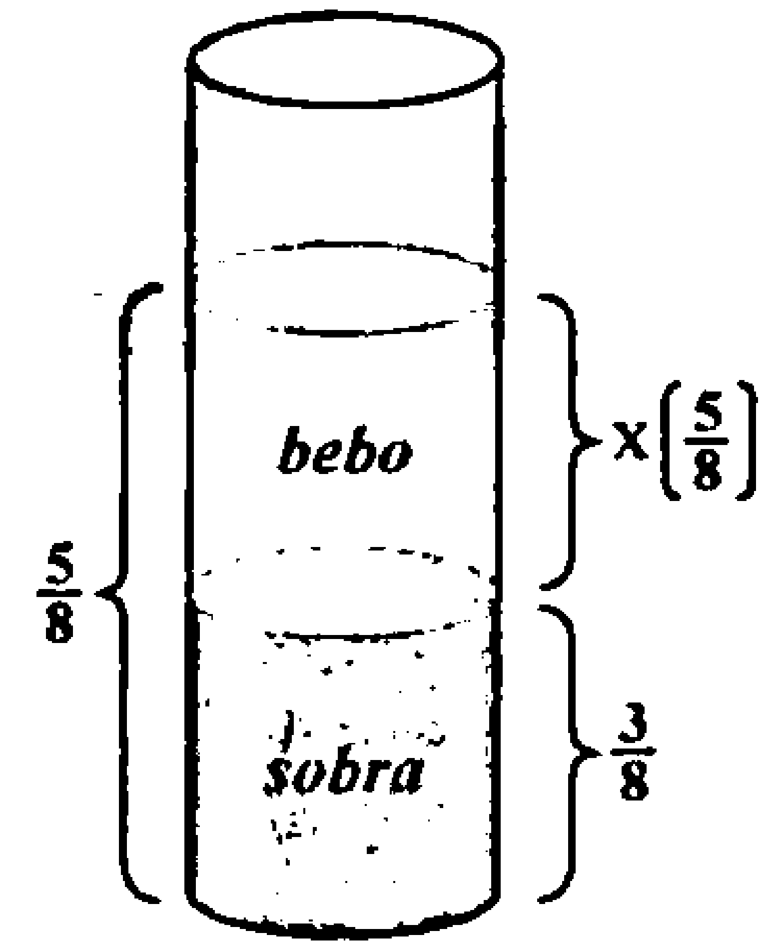
RESOLUCIÓN :

♦ Bebo $\frac{1}{6}\longrightarrow\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{5}$

♦ Bebo $\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)\longrightarrow$ queda

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{8}$$

♦ Graficando : Fracción ⟶ x



* Luego :

$$x\left(\frac{5}{8}\right)+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}\Rightarrow x\left(\frac{5}{8}\right)=\frac{2}{8}\Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 37 :

En un barco habían *180* personas, ocurre un naufragio y de los sobrevivientes : $\frac{3}{5}$ fuman, $\frac{2}{7}$ son abogados y $\frac{2}{3}$ son casados, el número de personas que murieron en el accidente es :

A) 60 *B) 65* *C) 70* *D) 75* *E) 80*

RESOLUCIÓN :

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Sobrevivientes : }S\\ \textit{Murierón : }M\end{array}\right\}S+M=180$$

Con los sobrevivientes :

♦ *Fuman :* $\frac{3}{5}(S)\Rightarrow S=\overset{o}{5}$ *(Múltiplo de 5)*

♦ *Abogados :* $\frac{2}{7}(S)\Rightarrow S=\overset{o}{7}$ *(Múltiplo de 7)*

♦ *Casados :* $\frac{2}{3}(S)\Rightarrow S=\overset{o}{3}$ *(Múltiplo de 3)*

* *Luego :* $\overline{S=MCM(5;7;3)}=\overset{o}{\overline{105k}}$ *(Multiplo de 5,7 y de 3 a la vez)*

* Pero : $S + M = 180$

* Entonces : $\underbrace{105\,k}_{1(\text{único valor})} + M = 180$

$105(1) + M = 180 \Rightarrow M = 75$

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

Calcular : $E = \dfrac{13 + \frac{17}{19} + 23 + \frac{19}{17} + 43 + \frac{41}{47}}{23 + \frac{41}{47} + 43 + \frac{17}{19} + 13 + \frac{19}{17}}$

A)2 B)51 C)1/3 D)1 E)7

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$13\frac{17}{19} = 13 + \frac{17}{19}$ *(Análogamente, los demás)*

$$\Rightarrow E = \frac{13 + \frac{17}{9} + 23 + \frac{19}{17} + 43 + \frac{41}{47}}{23 + \frac{41}{47} + 43 + \frac{17}{19} + 13 + \frac{19}{17}}$$

* Agrupando adecuadamente :

$$E = \frac{13 + 23 + 43 + \frac{17}{19} + \frac{19}{17} + \frac{41}{47}}{13 + 23 + 43 + \frac{17}{19} + \frac{19}{17} + \frac{41}{47}} = 1$$ *(ya que son iguales)*

RPTA : "D"

PROBLEMA 39 :

Hallar el valor de *"P"* al simplificar :

$$M = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ldots\ldots\left(1 + \frac{1}{999}\right)$$

A) 1 B) 1000 C) 500 D) 999 E) 1201

RESOLUCIÓN :

* Sabemos :

$1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ (Análogamente en todos los factores)

$$\Rightarrow M = \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5}\ldots\ldots\frac{999}{998}\cdot\frac{1000}{999} = \frac{1000}{2} = 500$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

Calcular la fracción equivalente a :

$$(\sqrt{2,333\ldots} + \sqrt{0,58333\ldots})^2$$

A) 2 1/2 B) 21/8 C) 21/4 D) 21/16 E) 7/3

RESOLUCIÓN :

$$\left(\sqrt{2,\widehat{3}} + \sqrt{0,48\widehat{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{2 + \frac{3}{9}} + \sqrt{\frac{853 - 58}{900}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{7}{3}} + \sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{7}{3}} + \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{7}{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 41 :

La fracción decimal equivalente a

$\left(\sqrt{0,91666\ldots} + \sqrt{3,666\ldots}\right)^2$ es :

A) 7,52 B) 8,25 C) 8,77 D) 8,97 E) 8,18

RESOLUCIÓN :

* Transformando las fracciones decimales en fracciones ordinarias :

$$0,91666\ldots = 0,91\widehat{6} = \frac{919 - 91}{900} = \frac{11}{12}$$

$$3,666\ldots = 3,\widehat{6} = 3 + 6/9 = 11/3$$

* En la expresión dada :

$E = (\sqrt{11/12} + \sqrt{11/3})^2$

$\Rightarrow E = (\sqrt{11/12})^2 + 2\sqrt{11/12}\sqrt{11/3} + (\sqrt{11/3})^2$

$\Rightarrow E = 11/12 + 2\sqrt{121/36} + 11/3$

$\Rightarrow E = 11/12 + 2(11/6) + 11/3 = 33/4 = 8,25$

RPTA: "B"

PROBLEMA 42 :

Restar una unidad a la fracción :

$$\frac{\overbrace{777\ldots77}^{\text{"n cifras"}}\overbrace{888\ldots8}^{\text{"n cifras"}}}{\underbrace{666\ldots66}_{\text{"n cifras"}}\underbrace{555\ldots5}_{\text{"n cifras"}}}$$ y luego simplificar el resultado.

A) $\dfrac{10^n + 3}{10^n + 1}$ B) $\dfrac{10^n + 2}{10^n - 1}$ C) $\dfrac{10^n + 3}{6 \times 10^n + 5}$

RESOLUCIÓN :

* Por descomposición polinómica por bloques :

$$\frac{\overbrace{777\ldots\ldots7}^{n\text{ cifras}} \times 10^n + \overbrace{888\ldots\ldots8}^{n\text{ cifras}}}{\underbrace{666\ldots\ldots6}_{n\text{ cifras}} \times 10^n + \underbrace{555\ldots\ldots5}_{n\text{ cifras}}} - \underbrace{1}_{\text{Según enunciado}} \quad \frac{\overbrace{1111\ldots\ldots11}^{n\text{ cifras}}(7 \times 10^n + 8)}{\underbrace{1111\ldots\ldots11}_{n\text{ cifras}}(6 \times 10^n + 5)} - 1$$

$$= \frac{7 \times 10^n + 8 - 6 \times 10^n - 5}{6 \times 10^n + 5} = \frac{10^n + 3}{6 \times 10^n + 5}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Una persona recibe viáticos por *4* días. El primer día gastó la quinta parte; el segundo día gastó $\frac{1}{8}$ del resto; el tercer día los $\frac{5}{3}$ del primer día; el cuarto día el doble del segundo día y aún le quedó *S/.15* ¿Cuál fue la cantidad entregada?

A) S/.50 B) S/.75 C) S/.150 D) S/.45 E) S/.90

RESOLUCIÓN :

* Sea *"x"* la cantidad recibida :

DIA	GASTA	QUEDA
1°	$x/5$	$x - x/5 = 4x/5$
2°	$\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4x}{5}\right) = \frac{x}{10}$	$\frac{4x}{5} - \frac{x}{10} = \frac{7x}{10}$
3°	$\frac{5x}{3}$	$\frac{7x}{10} - \frac{x}{3} = \frac{11x}{30}$
4°	$2\left(\frac{x}{10}\right) = \frac{x}{5}$	$\frac{11x}{30} - \frac{x}{5} = \frac{x}{6}$

* Como al final del 4^{to} día aún le quedó *15* soles se tiene:

$$\frac{x}{6} = 15 \Rightarrow \qquad x = 90$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 44 :

Dos agricultores *A* y *B* tienen respectivamente *9* y *5* hectáreas de terreno que desean sembrar. Cuando ya habían sembrado *2/7* de cada propiedad, contratan a un peón; y a partir de entonces cada agricultor trabajó en la mitad de lo que faltaba. ¿Cuánto debe aportar cada agricultor para pagar al peón, si en total deben pagarle *140* soles?

A) 120 ; 20 *B) 110 ; 30* *C) 100 ; 40*
D) 90 ; 50 *E) 70 ; 70*

RESOLUCIÓN :

(1°) Según los datos, al momento de contratar al peón falta por sembrar.

$$A : \frac{5}{7}(9) \text{ hectáreas}$$

$$B : \frac{5}{7}(5) \text{ hectáreas}$$

(2°) El peón hace la mitad de cada saldo :

$$De\ (A): \frac{1}{2}\left[\frac{5}{7}(9)\right] = \frac{5}{14}(9)HA$$

$$De\ (B): \frac{1}{2}\left[\frac{5}{7}(5)\right] = \frac{5}{14}(5)HA$$

Total : $= \frac{5}{14}(14)\ HA$

$= 5\ HA$

(3°) Por cada *HA*, el peón cobró $\frac{140}{5} = 28\frac{soles}{HA}$

Aporte de *A* : $28\frac{soles}{HA} \times \left(\frac{5}{14} \times 9\right) = 90\ soles$

Aporte de *B* : $28\frac{soles}{HA} \times \left(\frac{5}{14} \times 5\right) = 50\ soles$

RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

En un salón de la academia sólo asisten a un examen los $\frac{2}{3}$ de los alumnos, y de estos aprueban los $\frac{3}{7}$; si los desaprobados son *24*. ¿Cuántos alumnos hay en dicha aula?

A) 24 *B) 23* *C) 36* *D) 63* *E) 96*

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" el número de alumnos.
* Asisten al examen : $\frac{2}{3}x$
* Aprueban: $\frac{3}{7}\left(\frac{2x}{3}\right)$, Luego
* Desaprueban : $\frac{4}{7}\left(\frac{2x}{3}\right) = 24.....(Dato)$

$$\Rightarrow x = 63$$

RPTA : "D"

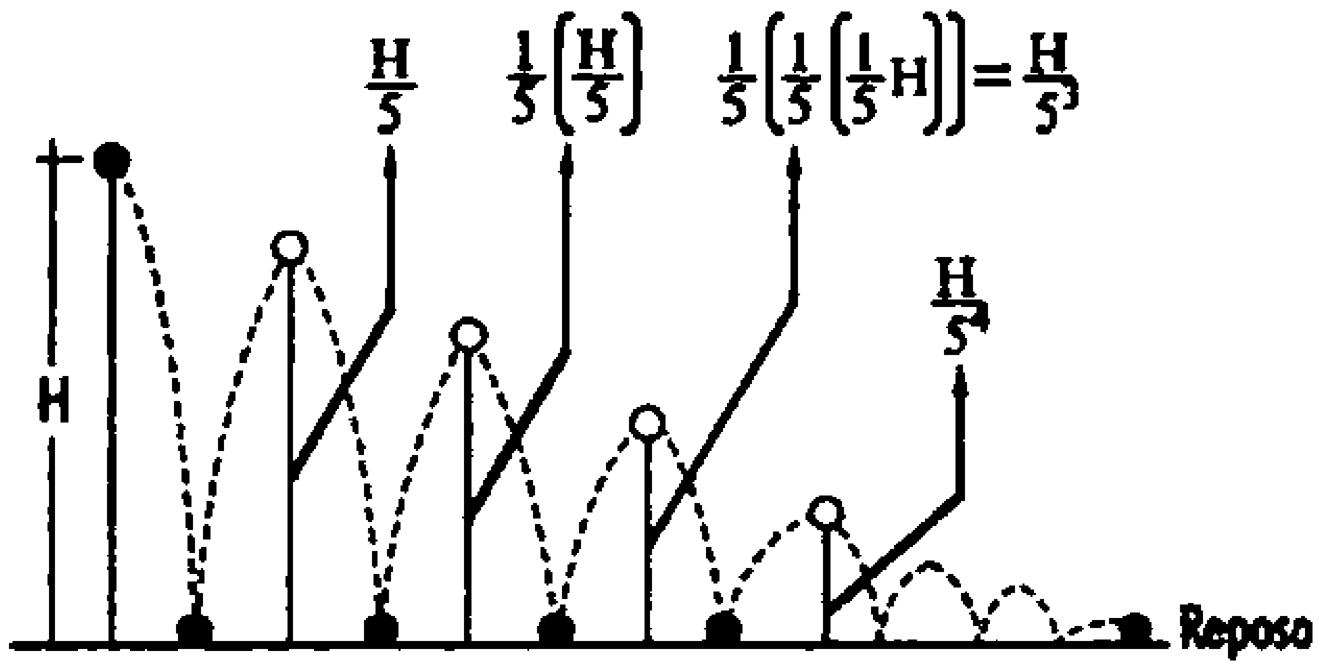
PROBLEMA 46 :

Una pelota en cada rebote se eleva *1/5* de la altura de la cual cayó, si se deja caer de una altura de *24 m*, entonces la longitud de la trayectoria descrita por la pelota hasta quedar en reposo es :

A) 56 *B) 24* *C)12* *D) 82* *E) 36*

RESOLUCIÓN :

* Sea "*H*" la altura de donde cae; luego :



* Del gráfico se observa que el recorrido total será :

$$H + 2\left[\frac{H}{5} + \frac{H}{5^2} + \frac{H}{5^3} + ...\infty\right]$$

$$= H + 2H\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ...\infty\right]$$

Suma limite : $\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

$H + 2H \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}H$, Pero $H = 24$, luego

* Recorrido total : $\frac{3}{2}(24) = 36$

RPTA : "E"

PROBLEMA 47 :

Calcular :

$$S = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + ...\infty$$

A)1 *B) 3/4* *C) 1/4*

RESOLUCIÓN :

* Observamos que : $S=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+....$

* Proviene de : $S=0,\hat{1}_{(5)}=\frac{1}{4}$

* *OTRO MÉTODO:* (Suma límite)

Donde : $\boxed{S_\infty=\frac{a_1}{1-r}}$

a_1 : primer tèrmino

r : razón geométrica decreciente.

S_∞ : Suma límite

* Luego en el problema :

$$a_1=\frac{1}{5} \qquad r=\frac{1}{5}$$

$$S_\infty=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 48 :

$$S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+.....+\frac{1}{n(n+2)}$$

A) $\frac{n}{n+1}$ B) $\frac{n}{n+2}$ C) $\frac{n+1}{2(n+2)}$

RESOLUCIÓN :

* En este tipo de sumas, se descompone cada fracción en una diferencia de fracciones parciales, para que así se eliminen entre si algunos de sus términos, pero para poder hacerlo, se verifica que cada numerador sea igual a la diferencia de los factores de cada denominador, en caso contrario se multiplica ambos miembros por esa diferencia necesaria.

⇒ Multiplicando por $3-1=2$ a toda la expresión:

$$2s=\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+......+\frac{2}{n(n+2)}$$

$$\Rightarrow 2s=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+....+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow 2s=1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+......+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow 2s=1-\frac{1}{n+2}\Rightarrow 2s=\frac{n+1}{n+2}\Rightarrow S=\frac{n+1}{2(n+2)}$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 49 :

Lucrecio muere dejando en su testamento una herencia de *S/. 84 000* a un hermano que se halla en el extranjero y del cual no ha tenido noticias desde hace mucho tiempo. El testamento contiene la siguiente cláusula: Si mi hermano tiene una hija, dejo para ella los *2/3* de la herencia y *1/3* para el padre: pero si tiene un hijo a éste le tocará *1/3* de la herencia y los *2/3* para el padre. Sucede que el hermano de Francisco tiene un hijo y una hija.

¿Cómo debe hacerse la repartición? Indicar cuánto le corresponde al padre.

A) 12000 *B) 48000* *C) 24000*
D) 36000 *E) 72000*

RESOLUCIÓN :

* Según la intención del testador, la hija debe tener el duplo que el padre y éste el duplo que el hijo, por eso cuando él reciba *1* sol el padre recibirá *2* soles y la hija *4* soles, es decir en total *S/.7,00* por lo tanto:

* Al hijo le corresponde :

$$\frac{84000}{7}=12\,000 \text{ soles}$$

* A la hija le corresponde :

$12\,000\times2=24\,000$ soles

* Al padre le corresponde :

$12\,000\times4=48\,000$ soles

RPTA :"B"

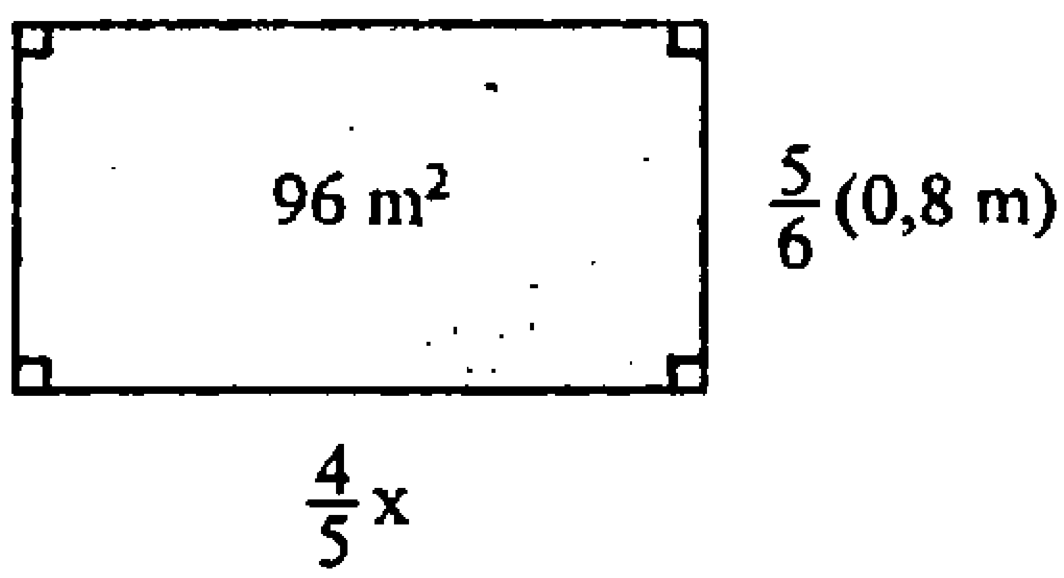
PROBLEMA 50 :

Cierta tela después de lavada se encoge *1/5* de su longitud y *1/6* de su ancho. ¿Cuántos metros deben comprarse para que después de lavada se disponga de *96 m²*, sabiendo que el ancho original es *80 cm*.

A) 160 m *B) 200 m* *C) 180 m*

RESOLUCIÓN :

* Después de lavarla se tendrá :



Como : Largo × ancho = área

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x\times\frac{5}{6}(0,8)=96\Rightarrow x=180\,m$$

RPTA: "C"

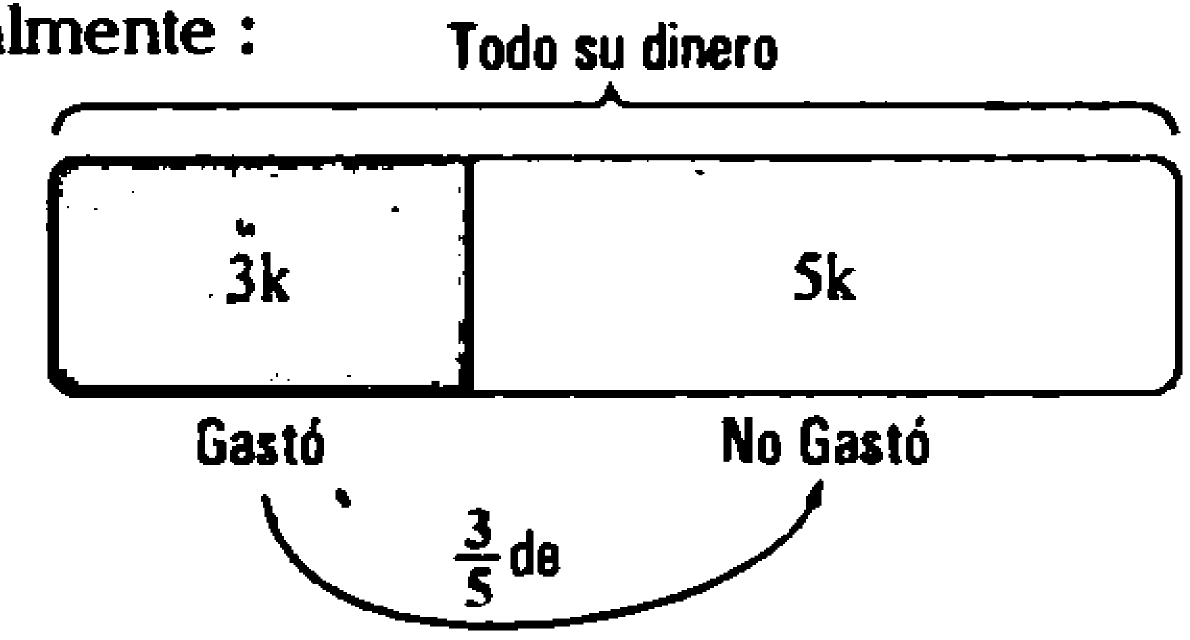
PROBLEMA 51 :

Juan gastó los *3/5* de lo que no gastó comprando cierta cantidad de artículos que cuestan *S/.20* cada uno. Si hubiera gastado los *5/3* de lo que no hubiera gastado, tendría *S/.40* menos de lo que tiene. ¿Qué fracción representa el número de artículos que podría comprar gastando todo su dinero con respecto al número de soles que le queda?

A) $\frac{2}{5}$ *B)* $\frac{2}{25}$ *C)* $\frac{1}{7}$ *D)* $\frac{1}{2}$ *E)* $\frac{7}{25}$

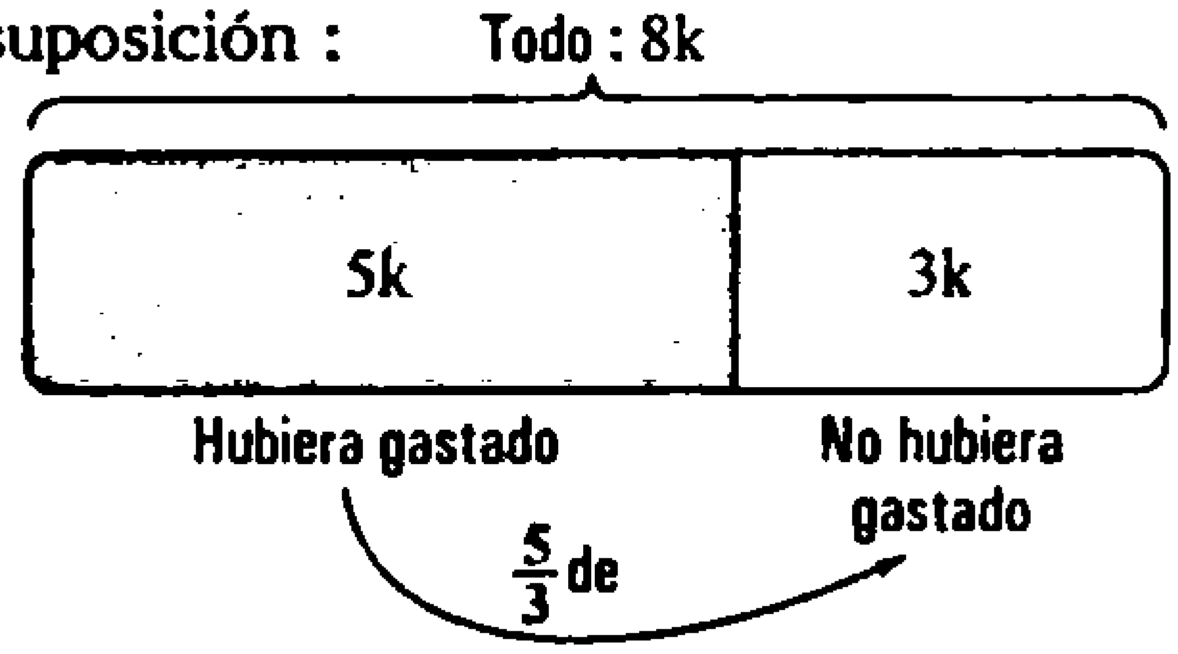
RESOLUCIÓN :

♦ Realmente :



⇒ Todo su dinero será : ***8k***

♦ La suposición :



♦ Según enunciado :

$$\overbrace{\underbrace{5k}_{\text{No gastó}} - \underbrace{3k}_{\text{No hubiera gastado}}}^{\text{Tendrá S/.40 menos}} = 40 \longrightarrow k = 20$$

♦ Piden : $\dfrac{\text{\# de artículos de S/.20 con todo su dinero}}{\text{Lo que queda}} = \dfrac{\frac{8k}{20}}{\frac{5k}{1}} = \dfrac{2}{25}$

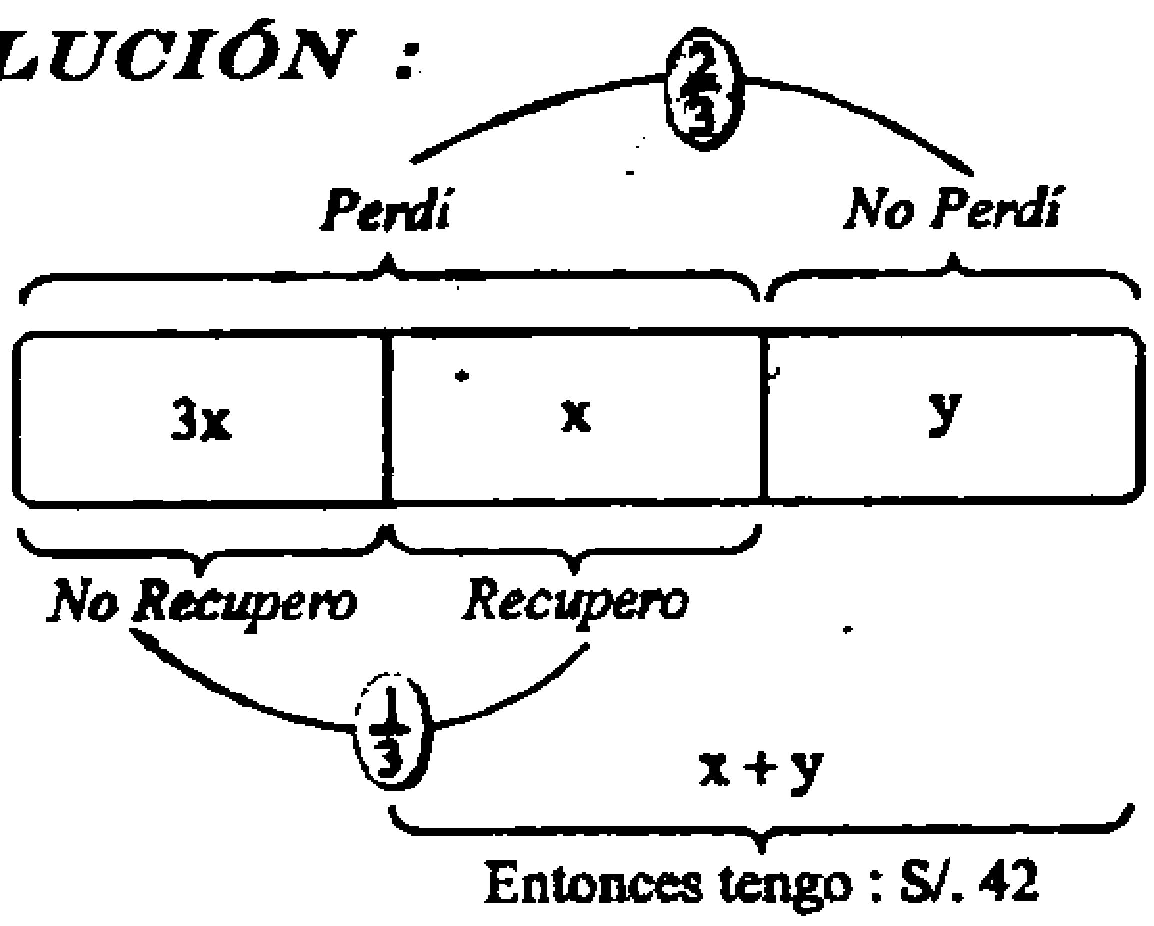
RPTA :"B"

PROBLEMA 52 :

Sabiendo que perdí ***2/3*** de lo que no perdí, luego recupero ***1/3*** de lo que no recupero y tengo entonces ***42*** soles. ¿Cuánto me quedaría luego de perder ***1/6*** de lo que no logré recuperar?

A) 36 soles *B) 39 soles* *C) 42 soles*
D) 48 soles *E) 8/91*

RESOLUCIÓN :



* Del esquema : $3x + x = \frac{2}{3}y$ *.....(I)*

$x + y = 42$ *.....(II)*

* Resolviendo : $x = 6$

♦ Si pierdo $\frac{1}{6}(3x) = S/.3$, luego me quedará :

$$42 - 3 = S/.39$$

RPTA : "B"

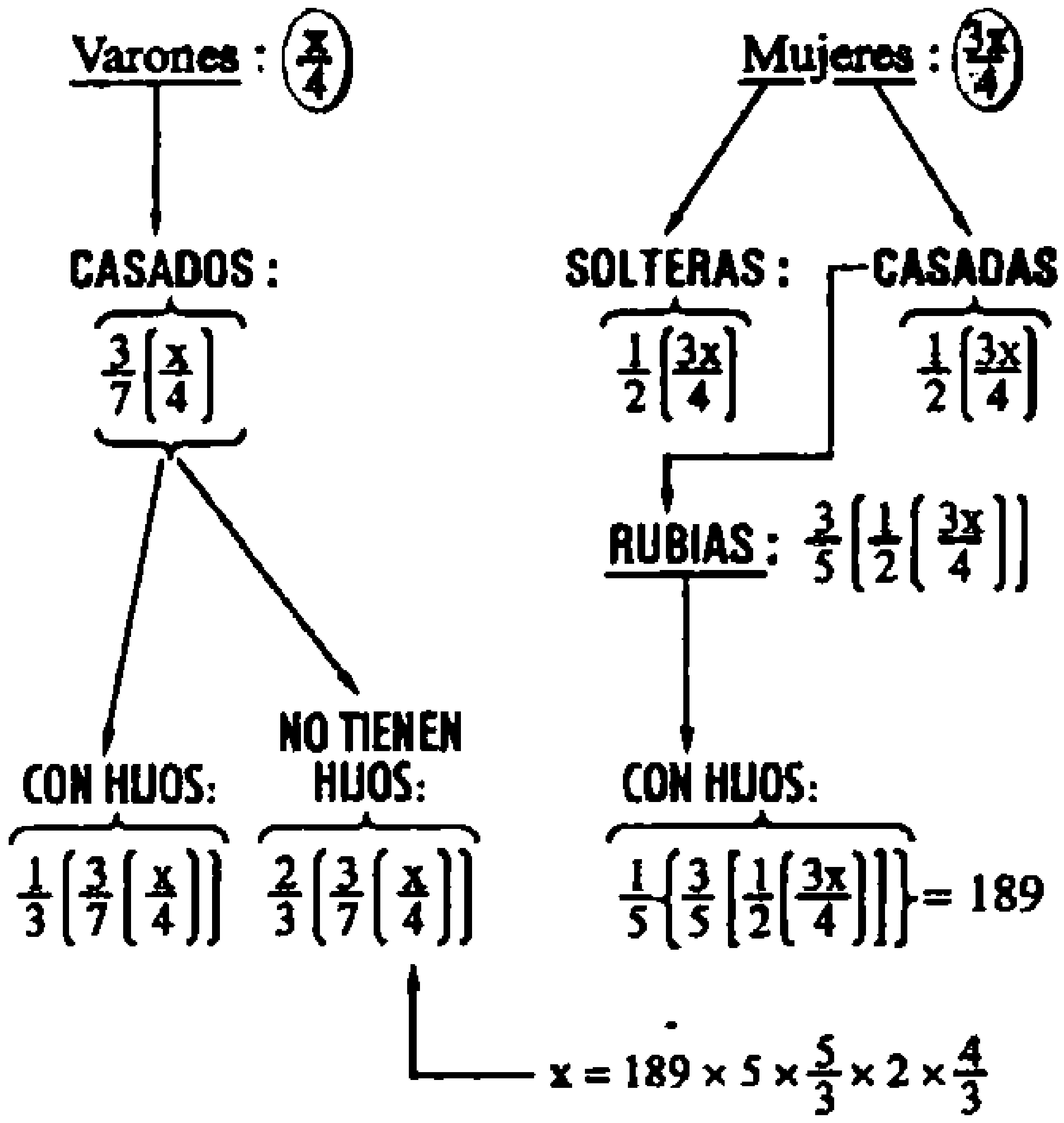
PROBLEMA 53 :

En una oficina ¼ de los trabajadores son hombres, ½ de las mujeres son solteras, ***3/5*** de las casadas son rubias, ***3/7*** de los hombres son casados y sólo ***1/3*** de éstos tienen hijos. Si además se sabe que ***1/5*** de las rubias casadas tienen hijos y que éstas son ***189***. ¿Cuántos son los hombres casados que no tienen hijos?

A) 200 *B) 150* *C) 300* *D) 180* *E) 400*

RESOLUCIÓN :

♦ Total de personas : x



*Luego la expresión a calcular será :

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{4}\left(189 \times 5 \times \frac{5}{3} \times 2 \times \frac{4}{3}\right) = 300$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 54 :

En una fiesta el mozo observa que con los ***12/35*** del volumen de una botella de licor llena las ¾ partes de una copa. En el bar sólo hay ***7*** botellas y él debe repartir ***35*** copas llenas. ¿Cuántas botellas le faltan para cumplir con su labor?

A) 4 *B) 6* *C) 9* *D) 8* *E) 7*

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado se plantea :

$$\frac{12}{35} \text{ botella} <> \frac{3}{4} \text{ copa}$$

16 botellas < > ***35*** copas

♦ Como debe repartir **35** copas ó **16** botellas, y sólo tiene **7** botellas, entonces le faltan $16-7=9$ botellas.

RPTA :"C"

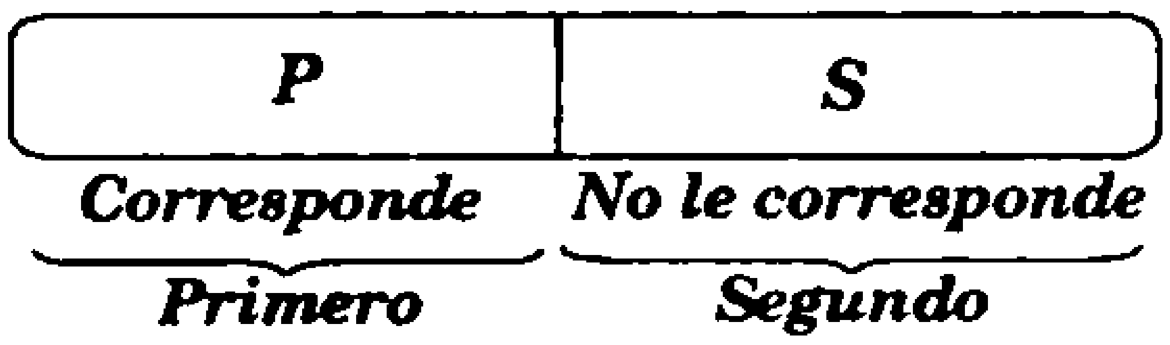
PROBLEMA 55 :

Se reparte una cantidad de dinero entre **2** personas, al primero le corresponde **1/3** de lo que no le corresponde, más la tercera parte de la diferencia entre lo que recibe el segundo y el primero. ¿Qué parte del total tiene el primero?

A) 1/2 B) 1/3 C) 3/4 D) 2/3 E) 1/4

RESOLUCIÓN :

Cantidad total : $T = P+S$



* Según enunciado : $P = \frac{S}{3} + \frac{S-P}{3}$

$\Rightarrow \boxed{2P = S}$

* Ahora piden : $\frac{P}{T} = \frac{P}{P+S} = \frac{P}{P+2P} = \frac{P}{3P} = \frac{1}{3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 56 :

El número de alumnos de un aula es menor que **240** y mayor que **100**, se observa que los **2/7** del total usan anteojos y los **5/13** son alumnos de ciencia. ¿Cuál es la suma de los alumnos que usan anteojos con los de la especialidad de ciencias?

A)160 B)120 C)122 D)148 E)142

RESOLUCIÓN :

* Sea *"N"* la cantidad total de alumnos, ésta debe ser múltipló de **13** y **7** ya que los $\frac{2}{7}N$ y los $\frac{5}{13}N$ son números enteros, entonces será múltiplo de $7\times13 = 91$, es decir : $N = 91K$, K : entero

♦ Pero : $100 < N < 240$

$\Rightarrow 100 < 91K < 240$

$\Rightarrow K = 2$ y $N = 182$

♦ La expresión a calcular es :

$$\frac{2}{7}(182) + \frac{5}{13}(182) = 122$$

RPTA : "C"

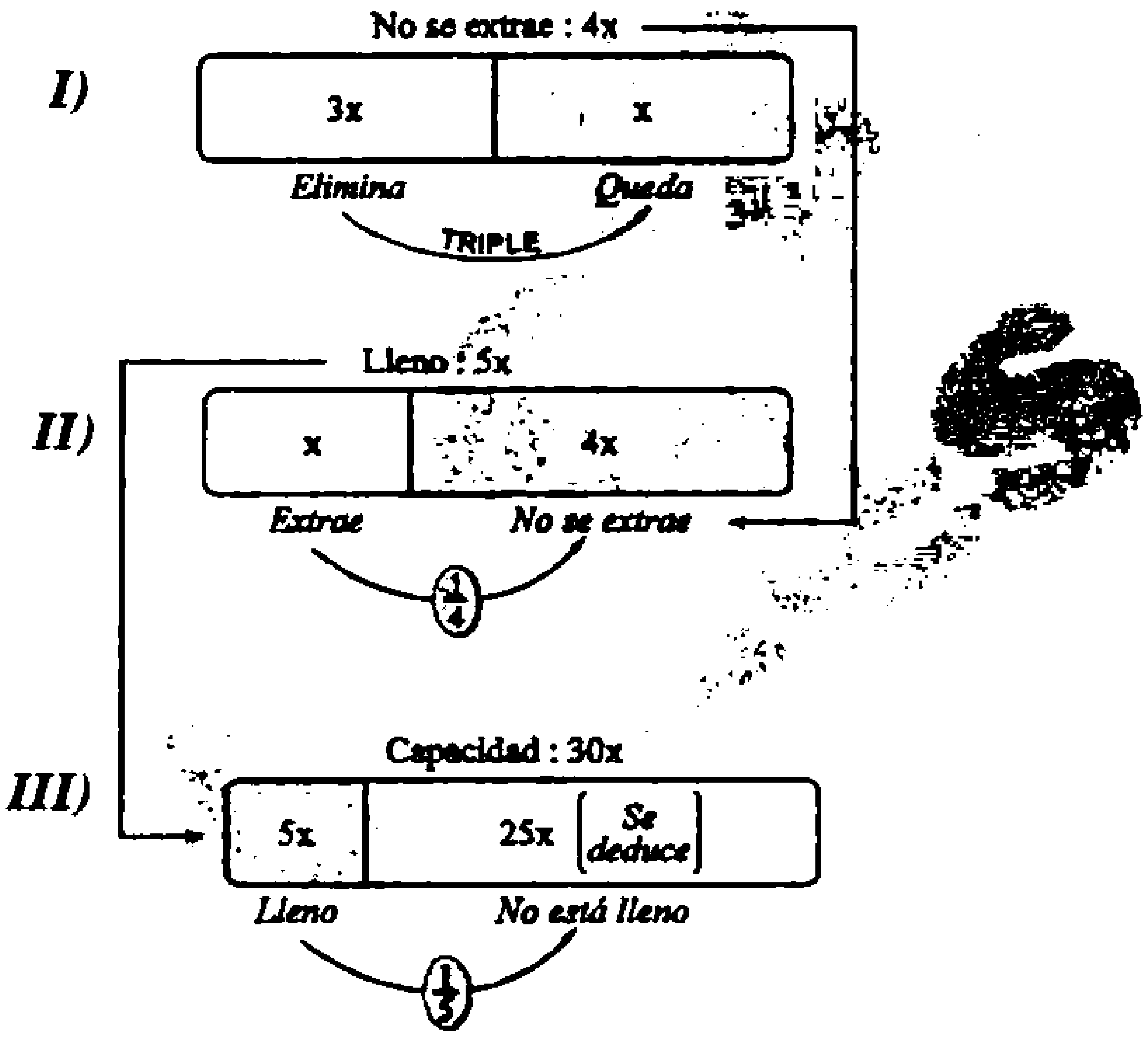
PROBLEMA 57 :

Se tiene un recipiente, en el cual se observa que está lleno **1/5** de lo que no está lleno; luego se extrae **1/4** de lo que no se extrae, finalmente se elimina cierta cantidad que es tanto como el triple de lo que queda. ¿Qué parte de la capacidad del recipiente se retira en total?

A) 1/15 B) 3/25 C) 4/15 D) 4/25 E) 2/15

RESOLUCIÓN :

Se trata de empezar por lo último :



* Como al final quedo *"x"* y al inicio estuvo lleno $5x$, luego se retiro : $5x - x = 4x$

$$Piden : \frac{RETIRA}{CAPACIDAD} = \frac{4x}{30x} = \frac{2}{15}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 58 :

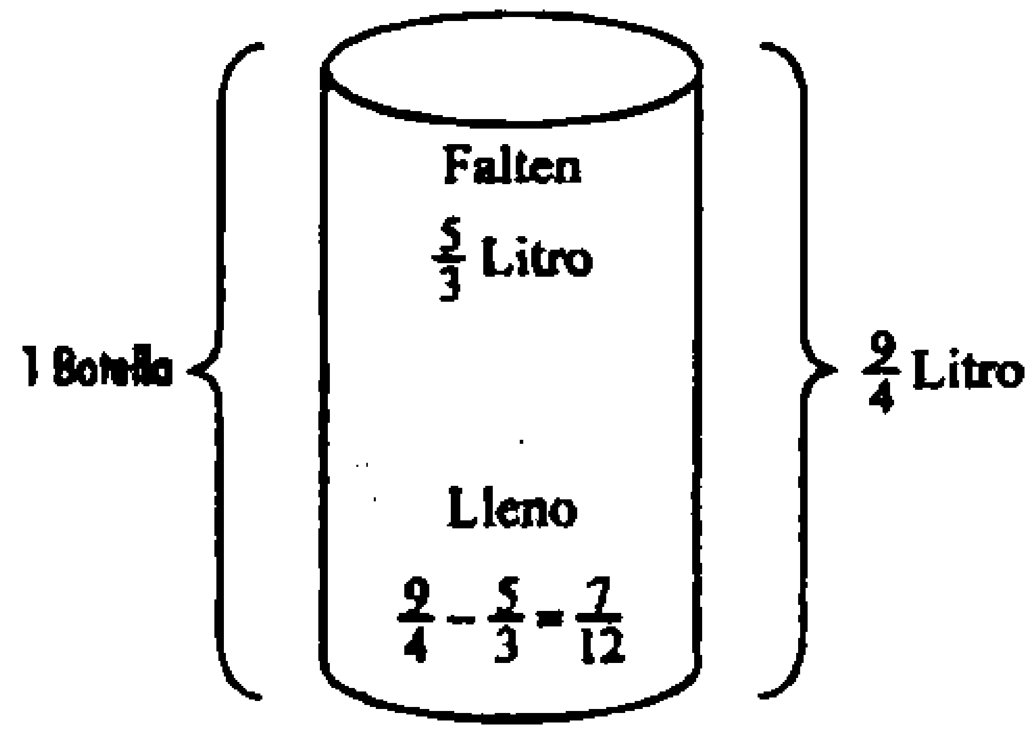
Con **5/8** de litro se pueden llenar los **5/8** de una botella. Cuando falten **5/3** litros para llenar la botella, ¿qué parte de la botella estará llena?

A) 7/9 B) 9/17 C) 5/37 D) 7/27 E) 6/17

RESOLUCIÓN :

$$\frac{5}{8}LITRO <> \frac{5}{18}BOTELLA$$

$$\boxed{\frac{9}{4}LITRO <> 1BOTELLA}$$



* La expresión a calcular será :

$$\frac{LLENA}{BOTELLA} = \frac{\frac{7}{12}LITRO}{\frac{9}{4}LITRO} = \frac{7}{27}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 59 :

Los $\frac{4}{7}$ menos de los $\frac{3}{4}$ más de $(a + b)$ es equivalente a :

A) Los 2/3 más de $(a + b)$
B) Los 3/4 menos de $(a + b)$
C) 1/4 menos de $(a + b)$
D) 1/3 más de $(a + b)$
E) Los 5/7 menos de $(a + b)$

RESOLUCIÓN :

$\frac{4}{7}$ menos de los $\frac{3}{4}$ más de $(a + b)$

$$\overbrace{\left(1-\frac{4}{7}\right)} \times \overbrace{\left(1+\frac{3}{4}\right)} \times (a+b)$$

$$=\frac{3}{7}\times\frac{7}{4}(a+b)=\frac{3}{4}(a+b) <> \frac{1}{4}\begin{bmatrix}MENOS\ DE\\(a+b)\end{bmatrix}$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 60 :

Si transcurrió los 3/5 de lo que falta transcurrir de un día, ¿qué parte de lo que ya transcurrió representa el exceso de lo que falta transcurrir sobre lo ya transcurrido?

A) 2/3 B) 1/3 C) 2/5 D) 3/5 E) 2/7

RESOLUCIÓN :

* Transcurrió $=\frac{3}{5}(Falta)$
* Si lo que falta es "$5k$", entonces lo que transcurrió será "$3k$" , luego piden :

$$\frac{FALTA-TRANSCURRIÓ}{TRANCURRIÓ}=\frac{5k-3k}{3k}=\frac{2}{3}$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 61 :

He gastado los 5/8 de mi dinero, si en lugar de gastar los 5/8 hubiera gastado los 2/5 de mi dinero, tendría ahora S/.72 más de lo que tengo ¿Cuánto no gasté?

A) S/.80 B) 120 C) 200 D) 96 E) 36

RESOLUCIÓN :

* Sea mi dinero: $40x \Rightarrow$ múltiplo de 5 y 8

	REAL	SUPOSICIÓN
GASTO	$\frac{5}{8}(40x)=25x$	$\frac{2}{5}(40x)16x$
NO GASTO	$15x$	$24x$ (tendría)

S/.72 más

$\Rightarrow 24x = 72 + 15x$

$\Rightarrow x = 8$

* No gasté : $15(8) =$ S/.120

RPTA :"B"

PROBLEMA 62 :

Una persona compra naranjas, la mitad del total a 5 por 6 soles y la otra mitad restante a 6 por 7 soles. Vende los 3/5 del número a 3 por 5 soles y los demás a 4 por 7 soles. Se desea saber cuántas naranjas habrá vendido cuando gane 930 soles.

A) 540 B) 3200 C) 1800
D) 1860 E) 3400

RESOLUCIÓN :

* Sea "x" el número de naranjas necesarias, además que :

$$\begin{bmatrix}OBTENIDO\\EN\ LA\ VENTA\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}COSTO\\TOTAL\end{bmatrix}=GANANCIA$$

$$\left(\frac{3x}{5}\times\frac{S/.5}{3}+\frac{2x}{5}\times\frac{S/.7}{4}\right)-\left(\frac{x}{2}\times\frac{S/.6}{5}+\frac{x}{2}\times\frac{S/.7}{6}\right)=S/.930$$

PRECIOS UNITARIOS

RPTA :"C"

PROBLEMA 63 :

¿Cuál es la última cifra del periodo de $\frac{1}{3^{19}}$?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN :

$\frac{1}{3^9}=0,\widehat{......x} \longrightarrow$ última cifra

$\Rightarrow \frac{1}{3^9}=\frac{\overline{......x}}{999...9}$ pero $\begin{cases}3^4=81\\(3^4)^n=.....1\end{cases}$

$\Rightarrow 999......9=(3^4)^4.3^3.\overline{......x}$

$\Rightarrow 999......9=......1\times 2\times\overline{......x}$

$\Rightarrow x=7$

RPTA : "D"

PROBLEMA 64 :

En una batalla resultaron muertos la vigésima parte del número de hombres de un ejército, y heridos la doceava parte del mismo número más 60. Los que quedaron ilesos representan la mitad de los que entraron en acción, más 820. ¿De cuántos hombres se componía el ejército?

A) 4200 B) 3000 C) 2400 D) 2800 E) 4000

RESOLUCIÓN :

*Sea "x" el total de soldados, luego se debe plantear:

$$x-\left(\frac{x}{20}+\frac{x}{12}+60\right)=\frac{x}{2}+820$$

$\Rightarrow x = 2400$

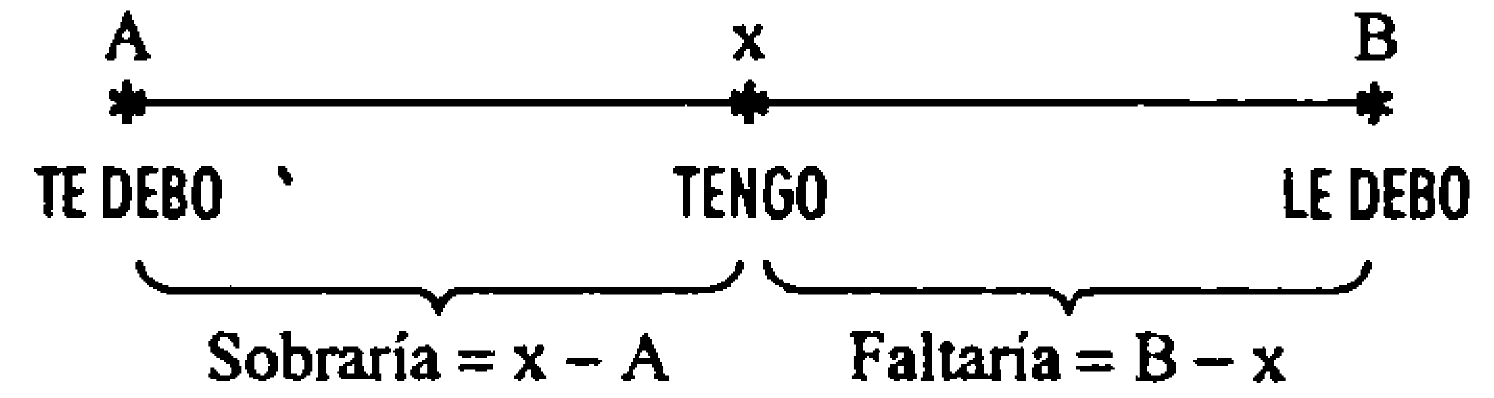
RPTA : "C"

PROBLEMA 65 :

Si te pago lo que te debo, me sobraría tanto como me faltaría, si quisiera pagarle a él, lo que le debo, ¿qué fracción del total de mi deuda es lo que yo tengo?

A) 1/3 B) 2/3 C) 1/2 D) 1/4 E) Faltan datos

RESOLUCIÓN :



* Según enunciado : $x - A = B - x$

$$\Rightarrow 2x = A + B$$

* Piden : $\frac{x}{A+B} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 66 :

Hallar una fracción equivalente a $0,\widehat{2}$ cuyo numerador esta comprendido entre *15* y *35* y su denominador entre *50* y *75*.

A) $\frac{16}{72}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{8}{27}$ E) $\frac{10}{45}$

RESOLUCIÓN :

* Como : $0,\widehat{2} = \frac{2}{9}$

* La fracción equivalente será : $F = \frac{2k}{9k}$

* Pero según condiciones :

$15 < 2K < 35$ y $50 < 9K < 75$

$7,5 < K < 17,5$ $\quad 5,\widehat{5} < K < 8,3$

$\Rightarrow K \in \{8;9;10;......;17\}$ y $K \in \{6;7;8\}$

♦ Sin embargo "*K*" debe cumplir ambas condiciones a la vez, luego :

$K = 8 \Rightarrow$ único valor que verifica ambos intervalos.

♦ Entonces : $F = \frac{2 \times 8}{9 \times 8} = \frac{16}{72}$

RPTA :"A"

PROBLEMA 67 :

Sean *x, y, z* números naturales, donde :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16} = 1,4375$$

¿Cuántas temas solución *(x, y, z)* se obtienen, en las cuales $z = 3$?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\frac{8x + 4y + z}{\cancelto{1}{16}} = \frac{14375}{\cancelto{625}{10000}}$$

$$\Rightarrow 8x + 4y + z = \frac{14375}{625} = 23$$

(condición) 3

* Luego : $8x + 4y = 20$

$\underbrace{2x}_{Par} + y = \underbrace{5}_{impar}$

$\Rightarrow$ "*y*" es impar, entonces :

$y = 1 \longrightarrow x = 2$

$y = 3 \longrightarrow x = 1$

* En consecuencia hay dos temas que cumplen con la condición inicial :

$$(2 ; 1 ; 3) \text{ y } (1 ; 3 ; 3)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 68 :

¿Qué fracción es los $\frac{3}{7}$ más de $\frac{2}{5}$; de lo que falta a los menos de , para ser igual a ?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{21}{20}$ D) $\frac{20}{21}$ E) $\frac{5}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Piden : *Es* $\longrightarrow \frac{3}{7}$ *más de* $\frac{2}{5}$

De $\longrightarrow \underbrace{2\frac{1}{5} - \frac{2}{5} \text{ menos de } \frac{7}{3}}_{\text{Lo que falta}}$

$$= \frac{\left(1 + \frac{3}{7}\right) \times \frac{2}{5}}{\frac{11}{5} - \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{7}{3}} = \frac{\frac{10}{7} \times \frac{2}{5}}{\frac{11}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{7}{3}} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{7}$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 69 :

Un comerciante compra sandías a *3* por *10* soles, e igual número a *5* por *20* soles. Para no ganar ni perder , las debe vender a:

A) 8 por 30 soles B) 3 por 11 soles
C) 5 por 18 soles D) 11 por 40 soles

RESOLUCIÓN

• Si el comerciante compra sandías a *3* por *S/. 10* , entonces cada una le cuesta $S/.\left(\frac{10}{3}\right)$; en el segundocaso cada una le cuesta $\frac{20}{5} = S/.4$

• Si compra *2* sandías (*1* de cada tipo). le costaran: $\frac{10}{3} + 4 = S/.\left(\frac{22}{3}\right)$ entonces *1* sandía le. cuesta: $S/.\left(\frac{11}{3}\right)$

$\Rightarrow$ Para no ganar ni perder debe venderlas a *3* por *S/. 11*

RPTA : "B"

PROBLEMA 70 :

Siete panes pesan lo mismo que cuatro bizcochos. Cinco empanadas pesan lo misa que seis bizcochos. Si p, b y e son los pesos , en gramos , de un pan , un bizcocho y una empanada , respectivamente, entonces :

A) $p < e < b$ B) $e < p < b$ C) $e < b < P$
D) $p < b < e$ E) $b < p < e$

RESOLUCIÓN :

- $7p = 4b \Rightarrow \dfrac{p}{b} = \dfrac{4\times5}{7\times5} = \dfrac{20}{35}$
- $5e = 6b \Rightarrow \dfrac{e}{b} = \dfrac{5\times6}{5\times5} = \dfrac{30}{25}$

$\Rightarrow 20 < 25 < 30$

$\Rightarrow p < b < e$

RPTA : "D"

PROBLEMA 71 :

Si : $\dfrac{a}{11} + \dfrac{b}{9} = 0,\overline{(a+1)\ (a+b)}$

Calcular : "a" ; si $a \neq 0$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Hay que descomponer polinómicamente :

$$\frac{9a+11b}{99} = \frac{\overline{(a+1)(a+b)}}{99}$$

Hay que descomponer polinómicamente

$\Rightarrow\ 9a + 11b = 10(a+1) + a + b$

$9a + 11b = 10a + 10 + a + b$

$10b = 2a + 10$

$5b = a + 5$

$b = \dfrac{a+5}{5}$

* Por simple tanteo : $a = 5 \ \Rightarrow\ b = 2$

RPTA :"E"

PROBLEMA 72 :

Si la fracción : $\dfrac{18}{247}$, origina un número decimal inexacto periódico puro. ¿Cuál es la última cifra del período?

A) 4 B) 6 C) 3 D) 7 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Suponiendo que "n" es la última cifra pedida, luego :

$$\frac{18}{247} = 0,\overline{abc....n}$$

$$\frac{18}{247} = \frac{\overline{abc....n}}{999....9}$$

$\Rightarrow \underbrace{18 \times 999....9}_{...............2} = \underbrace{247 \times \overline{abc....n}}_{....7\times.........n}$

* Se deduce que : $n = 6$

RPTA :"B"

PROBLEMA 73 :

Cuando a la expresión "E" se le multiplica por f, queda entonces aumentado en sus $7/45$. ¿Qué parte de f representa la fracción por la que se debe multiplicar a "E" de tal forma que quede disminuida en sus $3/5$?

$$E = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{\vdots}}}}$$

A) 5/22 B) 3/11 C) 7/11 D) 3/7 E) 9/26

RESOLUCIÓN :

- Del primer dato, se tendrá :

$E \times f = E + \dfrac{7E}{45}$

$Ef = \dfrac{52}{45}E \longrightarrow f = \dfrac{52}{45}$

- Luego, sea "x" la parte de "f", entonces :

$(x\ de\ f)E = E - \dfrac{3}{5}E \Rightarrow x \times \dfrac{52}{45}E = \dfrac{2}{5}E$

$\Rightarrow x = \dfrac{9}{26}$

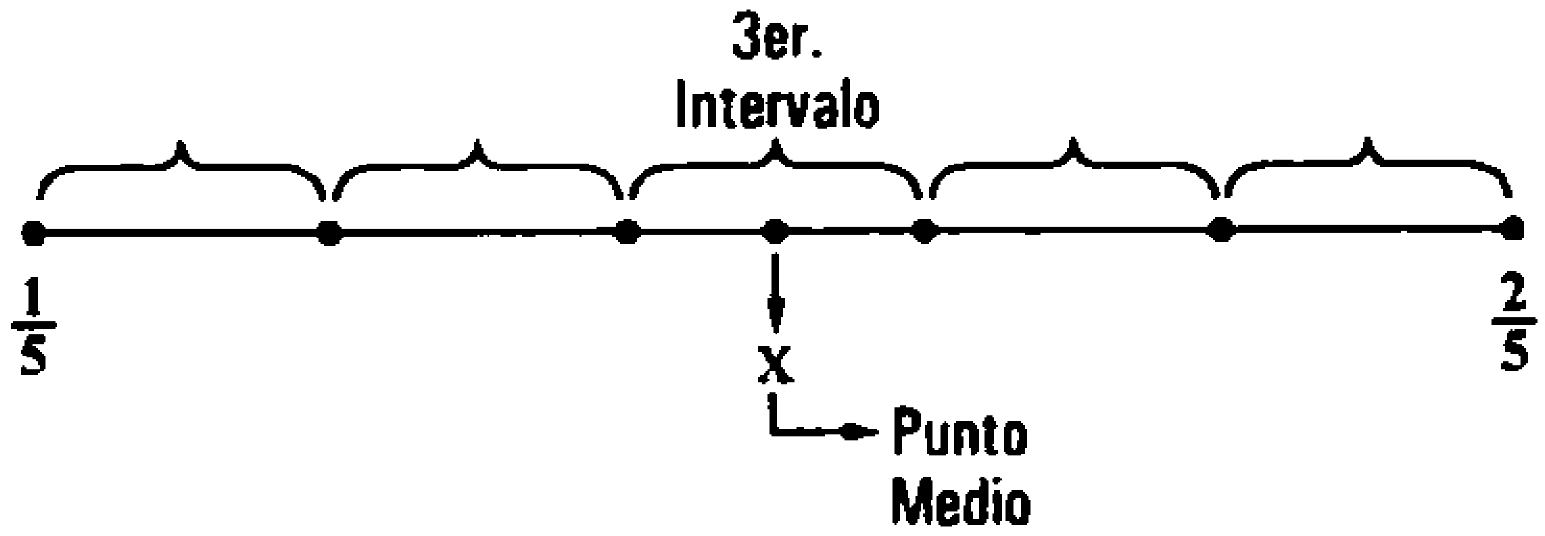
RPTA :"E"

PROBLEMA 74 :

El intervalo $\left[\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{5}\right]$ se divide en 5 partes iguales y "x" se encuentra en el punto medio del tercer intervalo.Si "x" es una fracción irreductible. Hallar la suma de sus términos.

A)7 B)13 C)8 D)11 E)14

RESOLUCIÓN :



$\Rightarrow x = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{2} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{1}} = \dfrac{3}{10}$

* Piden : $3+10=13$

RPTA :"B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

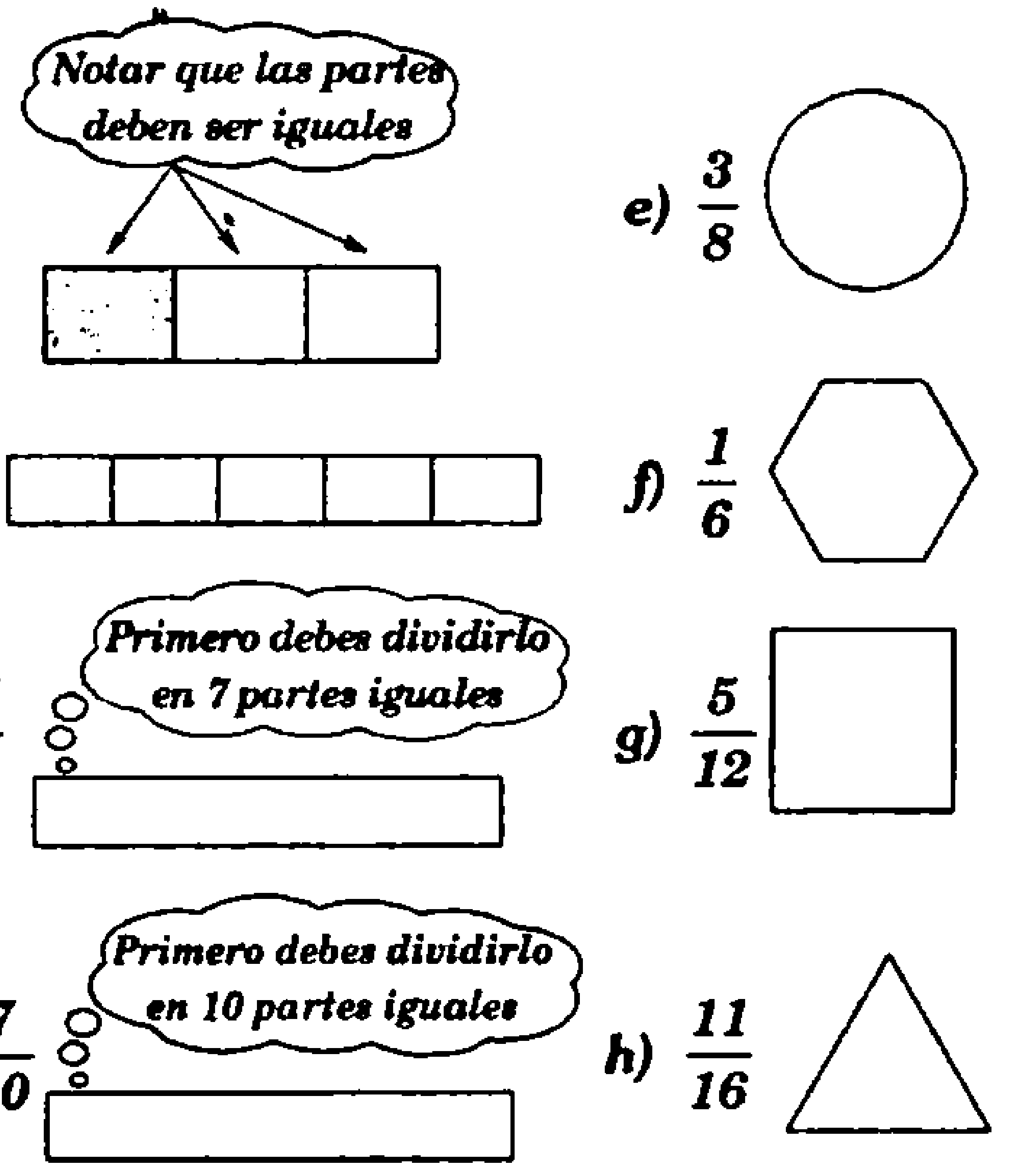
01 Representa gráficamente las siguientes fracciones:

a) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{3}{8}$

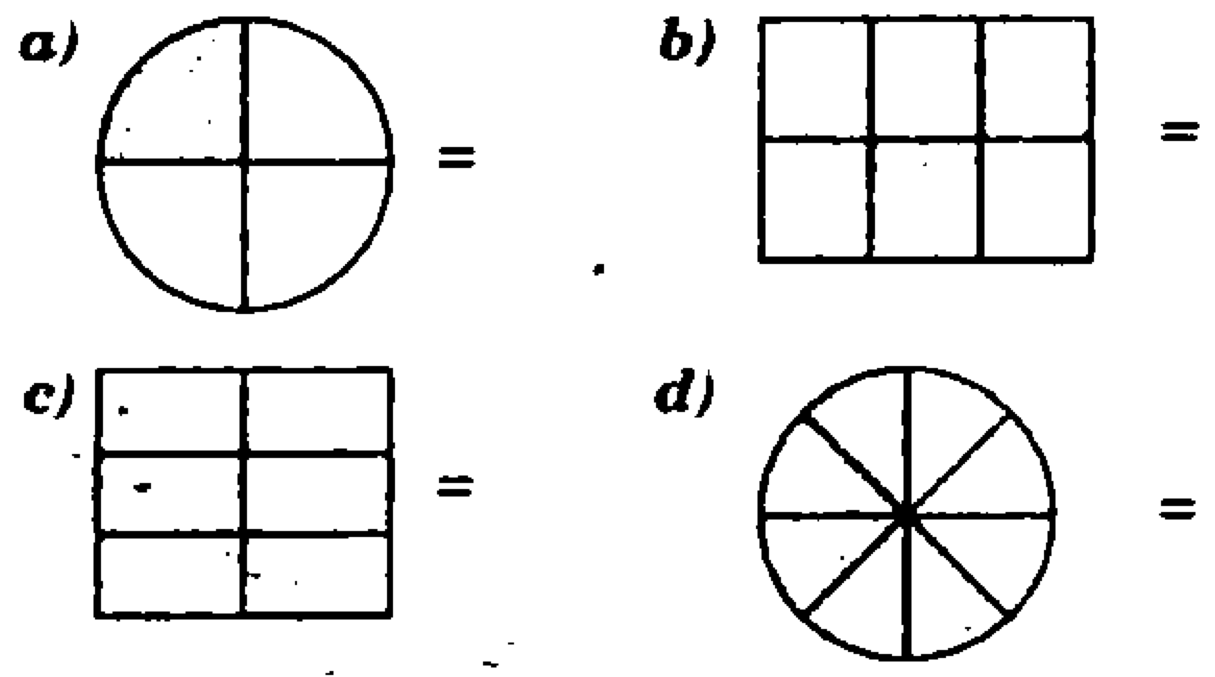
b) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{5}{7}$ g) $\frac{5}{12}$

d) $\frac{7}{10}$ h) $\frac{11}{16}$



02 Expresa como fracción la parte sombreada :



03 Completa los espacios , para obtener fracciones equivalentes :

A) $\frac{3}{7}=\frac{\ }{14}$ B) $\frac{20}{15}=\frac{\ }{3}$ C) $-\frac{13}{15}=-\frac{65}{\ }$

D) $-\frac{24}{20}=-\frac{6}{\ }$ E) $\frac{\ }{21}=\frac{4}{3}$ F) $-\frac{2}{\ }=-\frac{12}{18}$

04 Simplifica hasta obtener fracciones irreductibles

A) $\frac{14}{21}=$ B) $\frac{12}{24}=$ C) $\frac{25}{45}=$

05 Simplificar :

* $\frac{9\times8}{18\times6}=$
* $\frac{8\times9\times49\times33}{21\times28\times11\times6}=$
* $\frac{2\times6}{6\times8}=$
* $\frac{3\times2\times5}{6\times4\times10}=$
* $\frac{10\times7}{7\times5}=$
* $\frac{5\times20\times18}{3\times6\times10}=$
* $\frac{2\times6}{14\times8}=$
* $\frac{2\times3\times5\times6\times7}{4\times12\times10\times18\times14}=$

06 Simplificar cada fracción hasta que sea irreductible.

* $\frac{54}{96}=$ * $\frac{72}{324}=$ * $\frac{114}{288}=$
* $\frac{72}{144}=$ * $\frac{98}{105}=$ * $\frac{121}{143}=$
* $\frac{343}{539}=$ * $\frac{594}{648}=$ * $\frac{28}{36}=$
* $\frac{30}{120}=$ * $\frac{140}{800}=$ * $\frac{54}{108}=$
* $\frac{32}{110}=$ * $\frac{99}{165}=$ * $\frac{24}{100}=$
* $\frac{168}{264}=$ * $\frac{162}{189}=$ * $\frac{84}{126}=$

07 Convertir las siguientes fracciones a número mixto.

A) $\frac{19}{7}=$ D) $\frac{32}{5}=$ G) $\frac{29}{4}=$

B) $\frac{20}{3}=$ E) $\frac{41}{6}=$ H) $\frac{39}{7}=$

C) $\frac{9}{4}=$ F) $\frac{15}{8}=$ I) $\frac{30}{7}=$

08 Transformar los siguientes grupos de fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas

A) $-\frac{3}{5},\frac{4}{3}$ I) $-\frac{7}{6},-\frac{4}{5},\frac{11}{6}$

B) $\frac{3}{4},\frac{7}{2}$ J) $-\frac{3}{8},\frac{1}{5},-\frac{2}{5}$

C) $\frac{5}{7},\frac{4}{5}$ K) $\frac{1}{10},-\frac{3}{4},-\frac{7}{4}$

D) $-\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{2}{3}$ L) $-\frac{5}{12},\frac{3}{2},-\frac{5}{3}$

E) $\frac{4}{3},\frac{3}{7}$ M) $\frac{2}{10},-\frac{1}{13}$

F) $\frac{8}{9},-\frac{5}{2}$ N) $-\frac{4}{5},\frac{3}{14},-\frac{7}{2}$

G) $\frac{4}{3},-\frac{5}{11}$ O) $\frac{3}{8},\frac{2}{15},-\frac{1}{3}$

09 Convertir los siguientes números mixtos a fracción.

A) $3\frac{1}{4}=$ B) $5\frac{2}{7}=$ C) $8\frac{2}{3}=$ D) $9\frac{4}{5}=$

10 ¿Cuántas fracciones homogéneas hay en cada grupo de fracciones?

A) $-\frac{6}{7},\frac{9}{7}$ y $\frac{8}{15}$ B) $\frac{10}{7},\frac{-9}{11}$ y $\frac{-12}{11}$

C) $3\frac{2}{3},-\frac{5}{3}$ y $\frac{17}{3}$ D) $\frac{8}{13},5\frac{15}{13}$ y $\frac{-30}{13}$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Efectuar $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

02 Efectuar : $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{6}{5}$

A) $\frac{9}{5}$ B) 1 C) $\frac{12}{5}$ D) $\frac{11}{5}$ E) $\frac{9}{10}$

03 Efectuar: $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{3}{16}$

A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

04 Efectuar : $\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{3}{8}$

A) $\frac{31}{120}$ B) $\frac{47}{60}$ C) $\frac{31}{60}$ D) $\frac{13}{10}$ E) $\frac{91}{120}$

05 Efectuar : $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

A) $\frac{29}{10}$ B) $\frac{21}{30}$ C) $\frac{19}{15}$ B) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{29}{30}$

06 Efectuar : $\frac{3}{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}$

A) $\frac{29}{15}$ B) $\frac{21}{30}$ C) $\frac{29}{10}$ D) $\frac{29}{6}$ E) $\frac{29}{30}$

07 Efectuar : $\frac{\frac{2}{7}}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{10}{7}$

A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{8}{27}$ C) $\frac{6}{49}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{4}{17}$

08 Efectuar :

$$2+\frac{2}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}-\frac{8}{5}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{7}$ C) 2 D) 4 E) $\frac{5}{2}$

09 Efectuar : $1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{13}{10}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{17}{5}$ E) $\frac{21}{5}$

10 ¿Que parte de **50** es **15**?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{3}{25}$ E) $\frac{1}{10}$

11 Julián estudia los **3/8** del día . ¿Cuántas horas estudia Julián?

A) 12 B) 9 C) 6 D) 4 E) 8

12 ¿Cuánto le falta a **3/5** para ser igual a **11/15**?

A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{7}{15}$ E) 2/15

13 ¿Cuanto le sobra a **9/4** con respecto a **3/8**?

A) $\frac{13}{8}$ B) $\frac{15}{8}$ C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{7}{16}$

14 Si los **7/12** de un terreno valen **S/.28 000**, ¿cuál es el valor de todo el terreno?

A) S/.48 00 B) 56 000 C) 50 000
D) 36 000 E) 48 000

15 Un niño tenía **S/.48** y gasta los **5/12**. ¿ cuánto le queda?

A) S/.20 B) 24 C) 28 D) 32 E) 16

16 Carlos me debe los **4/5** de **160** soles y me paga los **5/8** de **160** soles, ¿cuanto me debe todavía?

A) S/.14 B) 25 C) 30 D) 32 E) 28

17 Si los **3/4** de un número es **45**, ¿cuánto equivale el doble menos la mitad del mismo número?

A) 100 B) 90 C) 60 D) 120 E) 80

18 A las **8** de la mañana, ¿que fracción del día falta transcurrir?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

19 Calcular el número cuyos **4/5** es **24**.

A) 28 B) 15 B) 20 D) 30 E) 60

20 Calcular "$a+b$" si :

"A" es $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de *60*. "B" es $\frac{1}{5}$ de los $\frac{5}{4}$ de *20*.

A) 42 *B) 38* *C) 37* *D) 40* *E) 36*

21 Simplificar $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$

A) $4\frac{1}{3}$ B) $2\frac{1}{2}$ C) 1 D) $1\frac{3}{5}$ E) 2

22 Disminuir *1 200* en sus *5/8* , se obtiene :

A) 600 *B) 120* *C) 450* *D) 800* *E) 750*

23 Señalar la mayor fracción :

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{8}{19}$

24 Pedro pesa ***16 kg*** más ***5/9*** de su peso total. ¿Cuánto pesa?

A) 24 kg *B) 36* *C) 10* *D) 15* *E) 20*

25 Calcular los ***3/5*** de los ***7/8*** de los ***20/21*** de ***40***.

A) 40 *B) 30* *C) 10* *D)15* *E) 20*

26 Hallar la fraccion generatriz de ***3,04***.

A) $\frac{3}{100}$ B) $\frac{76}{125}$ B) $\frac{76}{25}$ D) $\frac{38}{125}$ E) $\frac{19}{125}$

27 Hallar la fraccion generatriz equivalente a:

$$0{,}25+1{,}2111\dot{1}\ldots$$

A) $\frac{237}{100}$ B) $\frac{253}{360}$ C) $\frac{263}{180}$ D) $\frac{263}{900}$ E) n.a

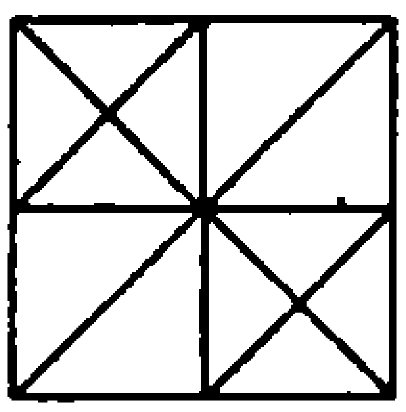
28 Luego de aumentar ***91*** en sus ***5/13*** obtenemos:

A) 35 *B) 105* *C) 126* *D) 136* *E)146*

29 Hallar : $\sqrt{0{,}16}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{25}$ E) $\frac{3}{4}$

30 ¿Qué fracción de la figura es la parte no sombreada?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

31 Ordenar de mayor a menor: $\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{7}{9}$,

A) $\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{7}{9}$ B) $\frac{7}{9},\frac{5}{6},\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{3},\frac{7}{9},\frac{5}{6}$

D) $\frac{5}{6},\frac{2}{3},\frac{7}{9}$ E) $\frac{5}{6},\frac{7}{9},\frac{2}{3}$

32 Indicar la suma de cifras de numerador de la fraccion irreductible equivalente a :

$$\frac{2400}{6080}$$

A)6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

33 En el problema anterior ¿ cuál es la diferencia de los términos de las fracción irreductible ?

A) 21 *B) 22* *C)25* *D) 23* *E) 24*

34 Indicar verdadero *(V)* ó falso *(F)* según corresponda :

$\frac{24}{80}=\frac{3}{20}$ ....( )

$\frac{64}{100}=\frac{16}{25}$ ....( )

$\frac{2}{92}=\frac{6}{276}$ ....( )

A) FVV *B) VVF* *C) VVV* *D) FFV* *E) FFF*

35 ¿En cuántos veinticincoavos es mayor ***0,356*** que ***0,076***?

A)112 *B) 110* *C)100* *D)76* *E) 121*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dos personas poseen ***80*** soles, la mitad de lo que tiene la primera persona equivale a un tercio de lo que tiene la segunda. ¿Cuánto tiene la primera persona?

A) 30 *B) 32* *C) 35* *D) 36* *E) 38*

02 La suma de dos números consecutivos es igual a la cuarta parte del primero más los ***5/3*** del segundo. Hallar el producto de los números.

A) 72 *B) 90* *C)132* *D)156* *E) 210*

03 La tercera y cuarta parte de una canasta de frutas son naranjas y manzanas respectivamente. Hallar el número total de frutas que contiene la canasta si entre naranjas y manzanas hay ***21*** frutas.

A) 30 *B)33* *C)35* *D)36* *E)42*

04 ¿Cuánto le falta a la mitad de los ***4/3*** de ***6/5*** para ser igual a la tercer parte de los ***3/5*** de los ***2/7*** del doble de ***35***?

A) 3 B) 3,2 C) 3,4 D) 3,6 E) 4

05 De los **40** soles que tenía Luis gastó **2/3** de lo que no gastó. ¿Cuánto más habría gastado si su gasto hubiera sido **5/3** de lo que no gastó?

A) 7 soles B) 8 soles C) 9 soles
D) 10 soles E) 11 soles

06 Halle $E=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{20}\right)$

A) 10 B) $10,\hat{3}$ C) 10,5 D) $10,\hat{6}$ E) $11,\hat{1}$

07 ¿Qué parte de **1/9** de **14/13** de **5/8** es **7/5** de **3/4** de **6/13** de **5/18** de **1/2**?

A) 3/5 B) 9/10 C) 8/5 D) 9/16 E) 4/9

08 Una carreta pesa **11 Kg** más de los **6/11** de su peso total. ¿Cuánto pesa la carreta?

A) 25 Kg B) 24,8 Kg C) 24,5 Kg
D) 24,2 Kg E) 24 Kg

09 La tercera parte del valor de **A** es igual a los **5/7** menos del valor de **B**. ¿Qué fracción representa el valor de **B** respecto del valor de **A**?

A) 5/4 B) 6/5 C) 7/6 D) 8/7 E) 9/8

10 Los **3/5** de **2/9** del triple de **A** es igual a los **2/15** de A^2. Hallar el valor de **A**.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

11 Si a un número de tres cifras que empieza en **7**, se le suprime ésta cifra, queda **1/26** del número. ¿Cuál es la suma de las cifras del número?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

12 Los **3/4** de un muro están pintados de azul, los **6/7** del resto de blanco y lo que queda que mide **1 m** de rojo. ¿Cuál es la longitud del muro?

A) 26 m B) 28 m C) 24 m D) 22 m E) 20 m

13 Un moribundo reparte su fortuna entre sus tres hijos, al primero le da **2/3** del total, al segundo **1/4** del resto, al tercero **2/5** del nuevo resto, si el último recibió **800**. ¿Cuál era la fortuna del moribundo?

A) 7 500 B) 8 000 C) 8 500 D) 8 600 E) 9 600

14 Después de sacar de un tanque **320** litros de agua, el nivel de la misma descendió de **2/3** a **3/5**. ¿Cuántos litros habrá que añadir para llenar el tanque?

A) 1 600 B) 1 920 C) 2 880 D) 3 200 E) 3 840

15 Un estante lleno de libros cuesta **360** soles, además, los **3/4** del precio del estante vacío equivale a un tercio de los **9/8** del precio total de los libros sin estante. ¿Cuánto menos se pagaría por el estante con la mitad de libros?

A) S/.100 B) S/.120 C) S/.125 D) S/.150 E) S/.160

16 ¿Cuál es la fracción que dividida por los **5/4** de su inversa resulta los **3/7** de los **2/5** de **42/25**?

A) 2/5 B) 3/5 C) 3/4 D) 2/3 E) 3/7

17 En una oficina **2/3** de los trabajadores son mujeres, **1/4** de ellas son casadas y **4/5** de ellas tienen hijos. Si los **2/3** de los hombres son casados y **1/2** de ellos tienen hijos. ¿Qué fracción de los trabajadores no tienen hijos?

A) 11/34 B) 11/45 C) 34/45 D) 34/35 E) 1/35

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La mitad de **N** más **10** es igual al triple del exceso de $\dfrac{8}{1-\dfrac{1}{3}}$ sobre $5\dfrac{2}{3}$. Calcule **N**.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

02 Calcule el número de fracciones propias e irreductibles cuyo denominador sea **240** y que sea mayor a **2/9**.

A) 42 B) 54 C) 53 D) 162 E) 137

03 Si a los **2/5** de una cantidad se le quita los **2/3** de los **3/7** de la misma cantidad, se obtiene los **2/9** de los **4/5** de **909**. Calcular la cantidad original.

A) 1042 B) 1212 C) 1312
D) 1412 E) 1414

04 ¿En cuántos quinceavos es excedido **4/5** por **4/3**?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

05 Un empleado gana **S/. 600** mensuales, logra ahorrar los **2/5** de su sueldo; el mes pasado incrementó sus gastos en la tercera parte, cuyo incremento se mantendrá hasta finalizar el año. ¿Qué parte de su sueldo es su nuevo ahorro?

A) 1/5 B) 3/5 C) 1/3 D) 2/3 E) 1/6

06 Si te pago lo que te debo, me sobraría tanto como me faltaría si quisiera pagarle a él, lo que le debo. ¿Qué fracción del total de mi deuda es lo que tengo?

A) 1/2 B) 2/3 C) 4/5 D) 5/3 E) 3/2

07 Se reparte una cierta cantidad de dinero entre cierto número de personas. La primera recibe *S/. 100* y *1/12* del resto, la segunda recibe *S/. 200* y *1/12* del resto, la tercera *S/. 300* y *1/12* del resto y así sucesivamente. De esta manera todas ellas han recibido lo mismo y se ha repartido la cantidad íntegra. Calcule el número de personas.

A) 12 *B) 10* *C) 11* *D) 16* *E) 18*

08 Juan compra una cierta cantidad de naranjas para vender, pero se da cuenta que hay naranjas grandes y pequeñas, el grupo de las grandes las vende ganando *2/5* de su respectivo precio de costo y el grupo de las pequeñas las vende con una pérdida de *1/3* de su respectivo precio de costo. Si en la venta total no ganó ni perdió, ¿qué parte del total son las naranjas grandes?

A) 5/11 *B) 6/11* *C) 3/10* *D) 7/10* *E) 5/12*

09 Se reparte una herencia entre "*n*" hijos. El mayor recibió la mitad del segundo, y éste los *2/3* del tercero, y éste los *3/4* del cuarto, y éste recibió los *4/5* del quinto, y así sucesivamente. Si el sexto hijo recibió *S/. 42*. Calcule la suma del número de hijos beneficiados y el número en soles que recibió el menor, si la herencia es de *S/. 315*.

A) 84 *B) 72* *C) 96* *D) 92* *E) 78*

10 Determine la cifra de las unidades del desarrollo decimal al efectuar la siguiente suma:

$$\frac{13}{37}+\frac{5}{11}+\frac{1}{7}+\frac{9}{37}.$$

A) 0 *B) 3* *C) 7* *D) 1* *E) 4*

11 Si se cumple que: $\frac{N}{37}=0,\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+1)(a)}$

Calcule $a+N$.

A) 12 *B) 14* *C) 10* *D) 8* *E) 7*

12 Un depósito contiene *60* litros de agua. Se extrae *20* litros y se reemplaza por alcohol puro, luego se extrae *15* litros de la mezcla y se reemplaza por alcohol puro; finalmente se extrae *10* litros de la nueva mezcla y se reemplaza por alcohol puro. ¿ Qué fracción de la mezcla final es agua?

A) 3/10 *B) 7/12* *C) 5/12* *D) 7/10* *E) 4/10*

13 Enrique le pregunta la edad a su amigo y éste responde: Mi edad es *a/b* de *190*, tal que *a/b* es la menor fracción, mayor que *5/12* y que al sumarle "*n*" veces el denominador al numerador y "*n*" veces el numerador al denominador se obtiene como resultado *2*. ¿Cuál es la edad del amigo de Enrique?

A) 40 *B) 60* *C) 80* *D) 70* *E) 19*

14 Dos pelotas se dejan caer simultáneamente desde alturas diferentes. La primera en cada rebote se eleva *1/4* de la altura desde la cual cae y la segunda en cada rebote se eleva *1/6* de la altura desde la cual cae. Si luego del tercer rebote la primera se eleva una altura que es el triple de la altura que se eleva la segunda, calcule en que relación se encuentran las alturas desde las que cayeron inicialmente.

A) 9/6 *B) 3/5* *C) 8/9* *D) 5/7* *E) 5/6*

15 Tres reglas de *1* metro de longitud están graduadas uniformemente de la siguiente manera, la primera cada *4/5* de *mm*; la segunda cada *18/35* de *mm* y la tercera cada *42/55 mm*. Si se las hace coincidir en toda su extensión, ¿cuántas veces coincidirán los trazos de las reglas?

A) 10 *B) 19* *C) 21* *D) 18* *E) 20*

16 Un depósito contiene *64* litros de vino y *16* litros de agua, se extrae *20* litros de la mezcla y se reemplaza con agua; luego se extrae *20* litros de la nueva mezcla y son reemplazados por agua y finalmente se vuelve a extraer *20* litros de mezcla, pero esta vez son reemplazados por vino. ¿Cuál es la diferencia entre los volúmenes finales de vino y agua?

A) 16 L *B) 14 L* *C) 20 L* *D) 10 L* *E) 12 L*

17 Un depósito lleno hasta sus dos terceras partes de su capacidad contiene *240* litros de vino puro, el resto se llena con agua. Se extrae la mitad de su contenido completándolo con vino puro.

¿ Cuál es la relación de agua y vino en el depósito luego de éstas operaciones?

A) 17/5 *B) 15/13* *C) 5/7* *D) 1/5* *E) 11/7*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) C	2) D	3) A	4) E	5) E	6) C	7) C	8) C	9) D	10) B
11) B	12) E	13) B	14) E	15) C	16) E	17) B	18) D	19) D	20) C
21) D	22) C	23) B	24) B	25) E	26) C	27) C	28) C	29) B	30) B
31) E	32) A	33) D	34) A	35) A					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1) B	2) A	3) D	4) B	5) C	6) C	7) B	8) D	9) C	10) A
11) C	12) B	13) B	14) B	15) B	16) B	17) C			

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1) D	2) C	3) E	4) D	5) A	6) A	7) C	8) A	9) B	10) A
11) A	12) B	13) C	14) C	15) E	16) B	17) D	18) E	19) A	20) E

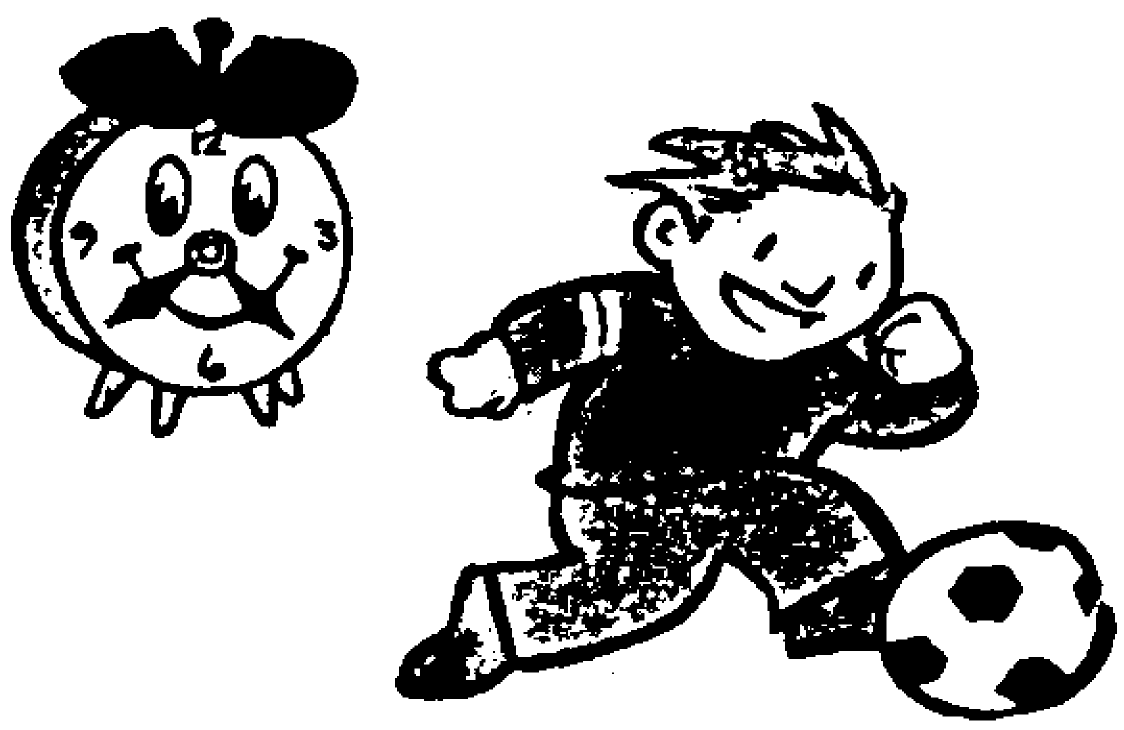
REDUCCION A LA UNIDAD-MEZCLAS
CAPITULO 031

OBJETIVOS :

* Aprender a resolver problemas que involucren reducción a la unidad de manera práctica .
* Conocer las aplicaciones de las fracciones en las mezclas .

INTRODUCCIÓN :

Lenin hizo ***320*** patadas en tan sólo ***10*** minutos ¡Lo máximo!



Entonces : ¿Cuántas patadas hizo en ***1*** minuto? .... ¡Correcto!

¡Y como lo determinamos!

¡FACILITO!

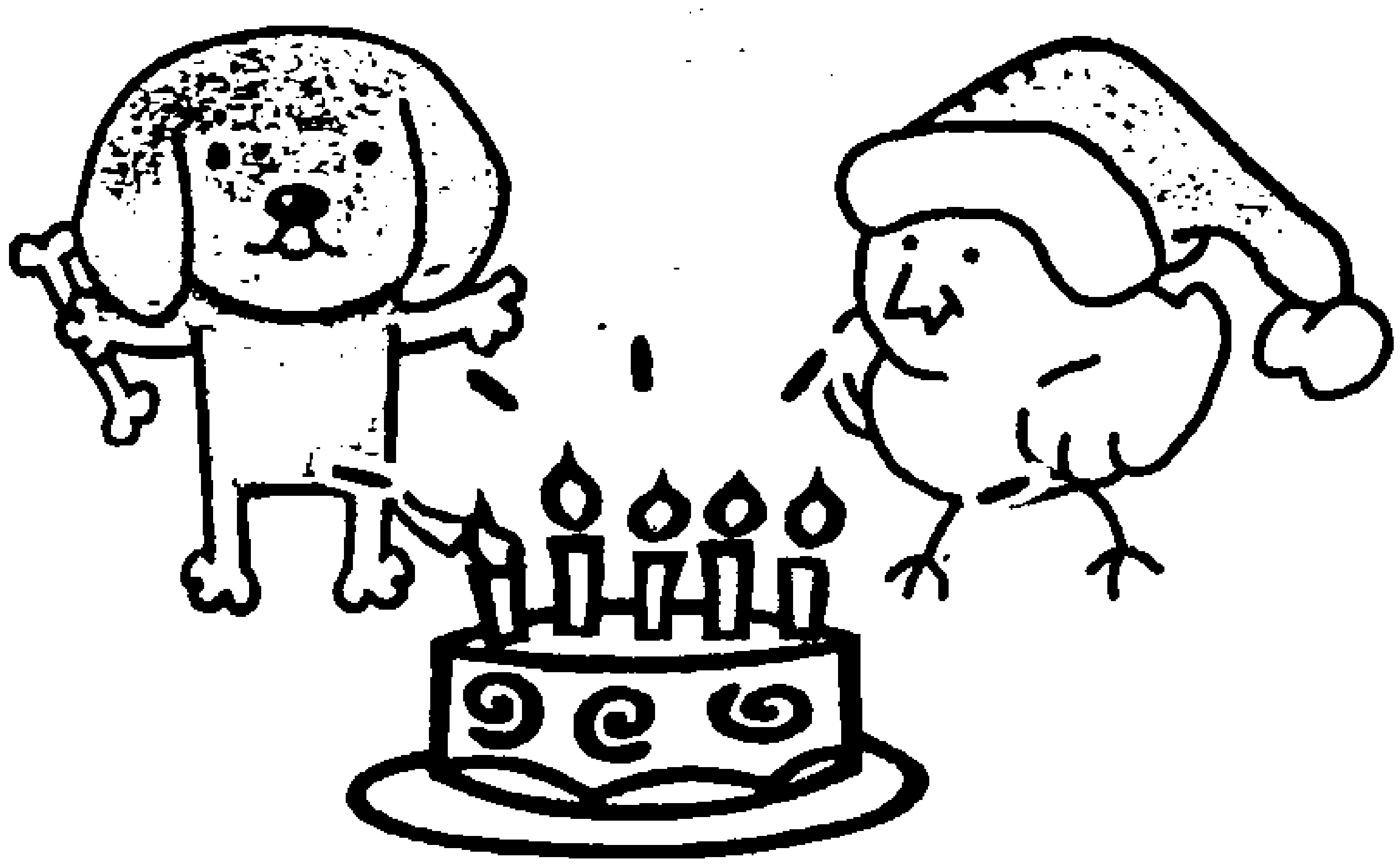
$$\frac{320 \ patadas}{10 \ minutos} = 32\frac{patadas}{minuto}$$

ó ***32*** patadas en ***1*** minuto

¿Qué hicimos? ***Hemos reducido a la unidad.***

VEAMOS CON OTRO EJEMPLO :

Glotillo termina ***1*** torta en ***20*** minutos y Gordillo termina ***1*** torta (la misma) en ***30*** minutos.



Si ambos comen simultáneamente la torta.

¿Cuánto consumirán en ***1*** minuto?

OBSERVA

Glotillo : $\frac{1 \ torta}{20 \ min} = \frac{1}{20}$ torta en 1 min.

Gordillo : $\frac{1 \ torta}{30 \ min} = \frac{1}{30}$ torta en 1 min.

JUNTOS : $\frac{1}{20}$ torta $+ \frac{1}{30}$ torta $= \frac{5}{60}$ en 1 min.

$= \frac{1}{12}$ en 1 min.

Ahora :

¿Qué tiempo tardarán en consumir toda la torta juntos?

ANALIZAMOS JUNTOS :

Si, $\frac{1}{20}$ torta se consume en ***1*** min. toda la torta se consumirá en .... ***20***.................. minutos.

Si, $\frac{1}{30}$ torta se consume en ***1*** min. toda la torta se consumirá en .... minutos.

¡SE INVIERTE!

¡Entonces profe, solo se invierte!

.... muy bien

Esto quiere decir que Glotillo y Gordillo tardan en consumir en .... minutos.

¡NO VEZ ES FACIL!

REDUCCIÓN A LA UNIDAD

Es aquel procedimiento que consiste en homogenizar lo hecho por cada elemento en una unidad de tiempo.

En estos tipos de problemas se caracterizan porque se tratará de homogenizar lo hecho por cada objeto (caños, grifos) 6 personajes ya sea en ***"un día"***, ***1*** minuto, ...etc.

POR EJEMPLO :

Si nos dicen que : "Max hace toda una obra en ***5*** días", entonces debemos considerar que en ***1*** día hará ***1/5*** de la obra.

* Si Saida hace una obra en *5* días, entonces en un día hará *1/5* de la obra.

* Si un caño llena un tanque en *4* horas entonces, en una hora llenará *1/4* del tanque.

EJEMPLO 1 :

Vlady hace una obra en *60* días y Lenín lo hace en *40* días. Si trabajaran juntos. ¿En qué tiempo harían dicha obra?

RESOLUCIÓN :

* Vlady en *1* día hace $\frac{1}{60}$ de la obra.

* Lenin en *1* día hace $\frac{1}{40}$ de la obra.

* Juntos en *1* día harán $\frac{1}{60}+\frac{1}{40}=\frac{1}{24}$ de la obra.

• Todo lo hacen en : *24* horas.

EJEMPLO 2 :

Un caño *"A"* llena un tanque en *2* horas y otro *"B"* lo vacía en *6* horas. Funcionando juntos, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?

RESOLUCIÓN :

* se restan ya que *"A"* llena y *"B"* quita

• *"A"* en *1* hora llena : $\frac{1}{2}$ *tanque* (+)

• *"B"* en *1* hora vacía : $\frac{1}{6}$ *tanque* (−)

Se restan ya que "A" llena y "B" quita

• Juntos en *1* hora llena : $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ del tanque

* Todo lo llenan en : *3* horas

EJEMPLO 3 :

Ana y Mari pueden hacer una obra en *4* días; Ana trabajando sola lo haría en *6* horas en que tiempo hará Mari trabajando sola.

A) Toda la obra B) Los $\frac{3}{4}$ de obra.

RESOLUCIÓN :

• Ana y Mari en *1* día hacen : $\frac{1}{4}$ obra

• Ana en *1* día hace : $\frac{1}{6}$ obra.

• Mari lo haría la obra en *"x"* días.

* Entonces : *1* día hace : $\frac{1}{x}$ de la obra.

* Luego : Juntas en *1* día :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$$

* De donde $x = 12$ días, luego :

A) Toda la obra lo hace en *12* días.

B) Los $\frac{3}{4}$ de la obra lo hará en : $\frac{3}{4}(12)=9$ días.

EJEMPLO 4 :

Ana hace un trabajo en *15* días y Any lo hace en *30* días.

¿En cuántos días harán dicho trabajo juntos?

A) 15 días B) 10 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

* En *1* día juntos harán la suma de lo hecho por cada uno en *1* día.

♦ *Ana en 1 día hará :* $\frac{1}{15}$ *(trabajo)*

♦ *Anyen 1 día hará :* $\frac{1}{30}$ *(trabajo)*

En 1 día juntos harán la suma de lo hecho por cada una en 1 día ⊕

⇒ *Juntos en 1 día harán :* $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$ *(trabajo)*

$$1\ día <> \left(\frac{2+1}{30}\right) trabajo$$

$$1\ día <> \frac{TRABAJO}{10}$$

$$10\ días <> trabajo$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 5 :

Un caño "*A*" llena un tanque en *2* horas y otro caño "*B*" lo desaloja en *6* horas. Funcionando juntos.

¿En qué tiempo se llenará el tanque?

A) 5 horas B) 4 C) 3 D) 6 E) 9

RESOLUCIÓN :

♦ *"A" en 1 hora llenará :* $\frac{1}{2}$ *(tanque)*

♦ *"B" en 1 hora llenará :* $\frac{1}{6}$ *(tanque)*

Se resta ya que "A" va llenado y "B" quitando (lo contrario a "A" ⊖

⇒ *Juntos en 1 día llenarán :* $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$ *(tanque)*

$$1\ hora <> \left(\frac{3-1}{6}\right)$$

$$1\ hora <> \frac{1}{3}\ tanque$$

$$\Rightarrow 3\ horas <> 1\ tanque$$

RPTA :"C"

EJEMPLO 6 :

Un grifo puede llenar un tanque en *6* horas y un desagüe lo vacía en *8* horas. Si ambos se abren a la vez, ¿en qué tiempo se llenará el tanque?

A) 12 h B) 15 h C) 24 h D) 18 h E) 30 h

RESOLUCIÓN :

* Juntos en *1* hora, llenarán :

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}\ tanque <> 1H \Rightarrow 1\ Tanque <> 24H.$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 14 :

"*A*" puede hacer una obra en *20* días y "*B*" la podría hacer en *60* días. Si *A* y *B* trabajan juntos, ¿en cuántos días la podrían terminar?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 9

RESOLUCIÓN :

Juntos en *1* día :

$$\underset{\text{Lo hecho por "A"}}{\boxed{\frac{1}{20}}}+\underset{\text{Lo hecho por "B"}}{\boxed{\frac{1}{60}}}=\frac{3+1}{60}=\frac{1}{15}\,obra <> 1\,día$$

$$\Rightarrow 1\ obra = 15\ días.$$

RPTA: "C"

EJEMPLO 7 :

Un depósito puede llenarse por un tubo en *2h* y por otro en *3h* y vaciarse por uno de desagüe en *4h*.

El depósito se llenará con *3* tubos abiertos en :

A) 12/7 h B) 6 h C) 11/7 h D) 7 h E) 2 h

RESOLUCIÓN :

* Juntos en *1* hora , llenarán :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{6+4-3}{12}=\frac{7}{12}\,DEPÓSITO <> 1H$$

$$\Rightarrow 1\ DEPÓSITO <> \frac{7}{12}H$$

RPTA : "A"

EJEMPLO 8 :

Un muchacho que camina sobre una escalera detenida se demora en llegar arriba *90* segundos. Cuando está abajo sobre la escalera en movimiento se demora en llegar arriba *60 s*. ¿Qué tiempo demorará en llegar arriba si camina sobre la escalera en movimiento?

A) 16 s B) 26 s C) 36 s D) 46 s E) 56 s

RESOLUCIÓN :

* Ambos en *1* segundo, avanzarán :

(con la rapidez del muchacho y de la escalera)

$$\frac{1}{90}+\frac{1}{60}=\frac{2+3}{180}=\frac{5}{180}=\frac{1}{36}$$

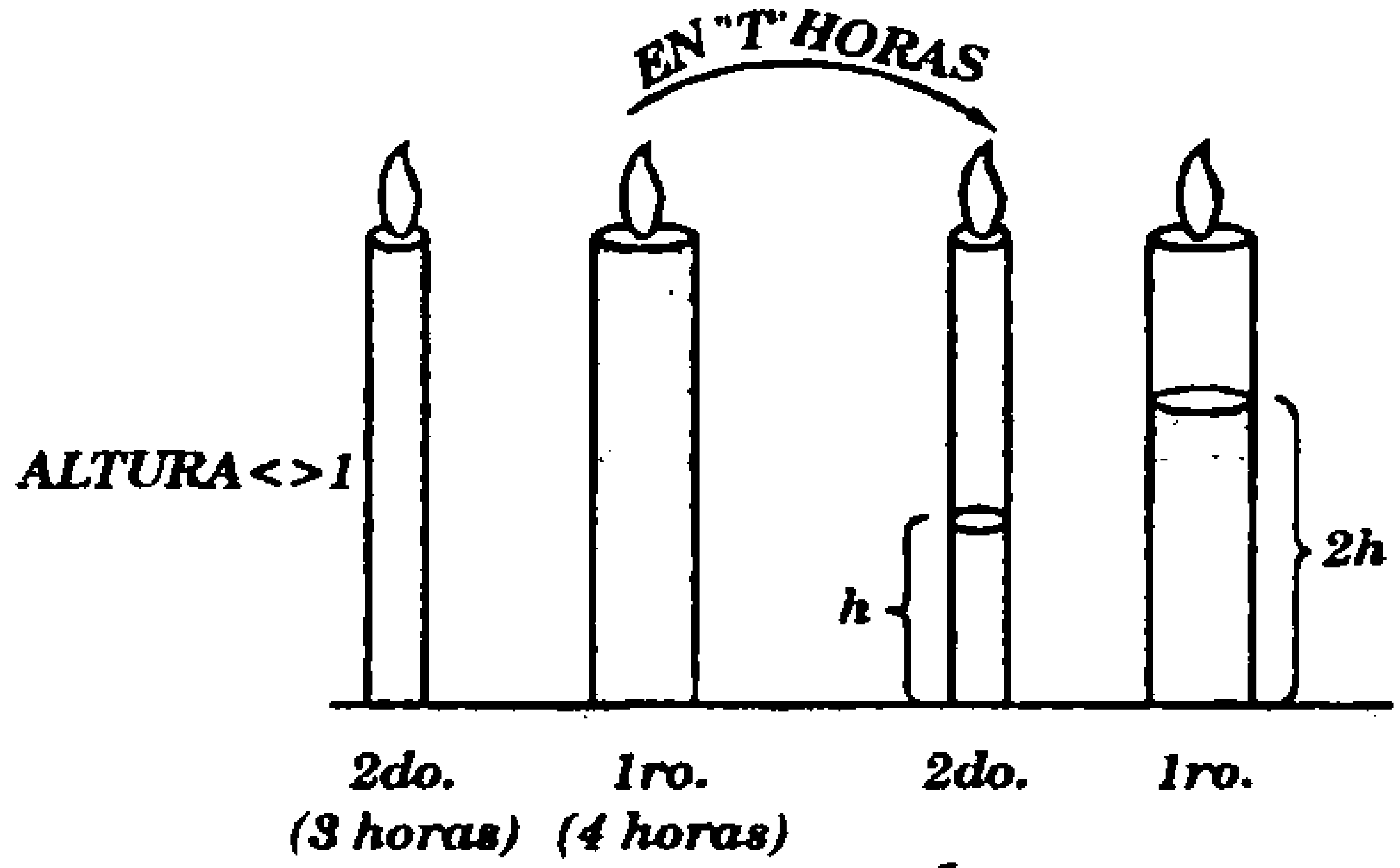
$$RECORRIDO <> 1s \Rightarrow 1\ RECORRIDO <> 36\ s$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 9 :

Dos cirios de igual altura se encienden simultáneamente el primero se consume en *4 H* y el segundo en *3 H* ¿Cuántas horas después de haber encendido los cirios la altura del primer es el doble de la del segundo?

RESOLUCIÓN :



- El 1^{ro} en *1* hora se consume : $\frac{1}{4}$
- El 2^{do} en *1* hora se consume : $\frac{1}{3}$
- El 1^{ro} en "*T*" horas se consumió : $\frac{T}{4}$
- El 2^{do} en "*T*" horas se consumió : $\frac{T}{3}$

* Luego :

(lo que quedó del 1^{ro}) = *2* (lo que quedó del 2^{do}).

$$1-\frac{T}{4}=2\left(1-\frac{T}{3}\right)\Rightarrow T=2,4$$

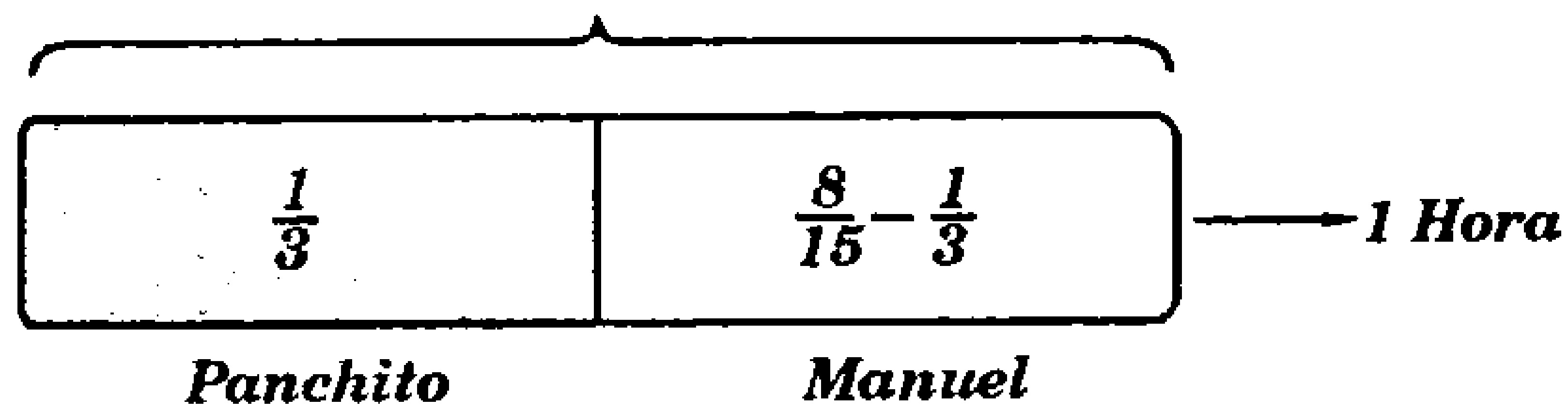
EJEMPLO 10 :

Panchito puede hacer una obra en *3* horas, pero si se junta con Manuel lo haría en *15/8* hora. ¿En cuántas horas lo hará Manuel sólo?

RESOLUCIÓN :

- Panchito en *1* hora hará : $\frac{1}{3}$ obra
- Juntos : $\frac{15}{8}$ *HORA <> 1 OBRA*

$$1\ Hora <> \frac{8}{15}\ obra\ \ (juntos)$$



$$\frac{8-5}{15}=\frac{1}{5}\ OBRA <> 1\ H \Rightarrow 1\ OBRA <> 5\ H$$

MEZCLAS (FRACCIONES)

Consiste en determinar la variación de proporción de cada uno de los componentes de una mezcla, respecto del total.

En estos problemas generalmente se debe considera que parte (fracción) representa lo que se saca de una mezcla, ya que de esta manera se determinará que cantidad sale o queda de cada una de las componentes de la respectiva mezcla.

POR EJEMPLO :

A) Si tenemos una mezcla de **50** litros de agua con **30** litros de vino, y se extrae los $\frac{3}{10}$ de dicha mezcla. Luego tenemos :

Extrae $\frac{3}{10}$*(mezcla)*

agua que (sale)	Agua que (queda)
$\frac{3}{10}(50)=15$	$\frac{7}{10}(50)=35$
Vino vale (sale)	**Vino que (queda)**
$\frac{3}{10}(30)=9$	$\frac{7}{10}(30)=21$

B) Si tenemos una mezcla de **180** litros, donde **80** litros son de ácido y el resto agua, si se saca **81** litros de dicha mezcla. ¿Cuánto sale de cada sustancia?

RESOLUCIÓN :

Primero : Nos preguntamos ¿Qué fracción de los **180** litros son los **81** litros que sacamos?

(Es la fracción que saldrá de cada sustancia)

$\Rightarrow$ ***Tendremos*** : $\frac{81}{180}=\frac{9}{20}$ *(la fracción que saldrá de cada sustancia)*

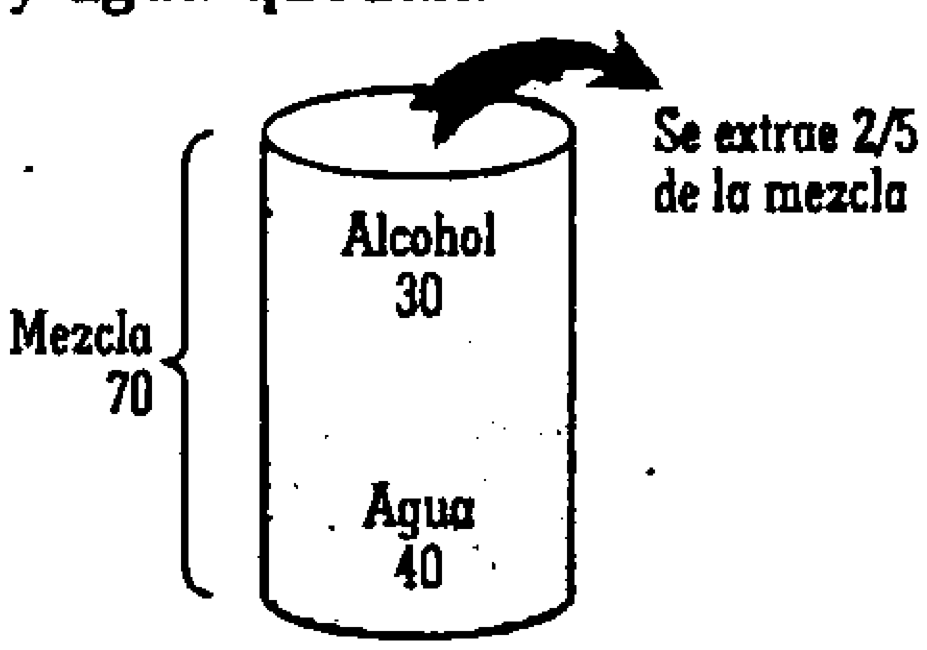
Ácido que (sale) : $\frac{9}{20}(80)=36$ ***litros***

Agua que (sale) : $\frac{9}{20}(100)=45$ ***litros***

$\underbrace{180-80=100}$

EJEMPLO 11 :

Un recipiente contiene **30** litros de alcohol y **40** litros de agua. Si se extrae $\frac{2}{5}$ de la mezcla. ¿Cuántos litros de alcohol y agua quedan?



RESOLUCIÓN :

A) Alcohol : Se extrae : $\frac{2}{5}(30)=12$

Queda : $\frac{3}{5}(30)=18$

b) Agua : Se extrae : $\frac{2}{5}(40)=6$

Queda : $\frac{3}{5}(40)=24$

EJEMPLO 12 :

Un recipiente esta lleno con **48** litros de vino y **32** litros de agua. Si se extrae **50** litros de la mezcla. ¿Cuántos litros de vino hay en la mezcla final?

RESOLUCIÓN :

* Si se extrae **50** litros de la mezcla total que es **80** litros; entonces se tiene que :

Cantidad extraída en fracción es : $\frac{50}{80}=\frac{5}{8}$

* Luego, con el vino :

* Si se extrae : $\frac{5}{8}(48)$

* Queda : $\frac{5}{8}(48)=30$ ***litros***

EJEMPLO 13 :

Un recipiente contiene **60** litros de vino. Se extrae $\frac{1}{3}$ de la mezcla y se reemplaza por agua; luego se extrae $\frac{2}{5}$ de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Qué cantidad de agua hay en la mezcla final?.

RESOLUCIÓN :

La cantidad de vino que se extrae, viene a ser igual a la cantidad de agua que se va reemplazando, por lo tanto el total de mezcla no varía (es constante).

EN RESUMEN :

Si la mezcla extraída es reemplazada por agua, entonces se trabaja con el vino que va quedando (método práctico), porque el agua aumenta y disminuye y el vino solo disminuye.

1^{ra} ***Operación*** $\begin{cases} \textit{Se extrae}: \frac{1}{3}(60)=20 \\ \textit{Queda}: \frac{2}{3}(60)=40 \end{cases}$

2^{da} ***Operación*** $\begin{cases} \textit{Se extrae}: \frac{2}{5}(40)=16 \\ \textit{Queda}: \frac{2}{5}(40)=24 \end{cases}$

$\Downarrow$ *final*

* Es decir: Vino que queda = **24** litros

$\Rightarrow$ Cantidad de agua = **60 – 24** = **36** litros vino extraído

También : Cant. agua = $\underbrace{20+16}_{\text{vino extraído}}=36$

EJEMPLO 14 :

En un depósito se colocan ***4*** litros de lejía y ***6*** litros de agua. Se consume ***1/4*** de la mezcla y se reemplaza con agua. ¿Cuántos litros de agua hay en la mezcla final?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 6,5

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que darnos cuenta que el vino sólo ha disminuido en ***1/4*** , pero el agua a disminuido y aumentado a la vez, además que la cantidad total no cambia, ya que lo sacado se reemplaza con agua, por eso es que trabajaremos con el vino :

Vino (inicio)	*Vino (consume)*	*Vino (quedó)*
4	$\frac{1}{4}(4)=1$	$\frac{3}{4}(4)=3$

y como el total es : ***6 + 4 = 10*** litros

$\Rightarrow$ al final quedará ***10 – 3 = 7*** litros de agua

RPTA :"B"

EJEMPLO 15 :

En una casa trabajan ***3*** mayordomos: Yuri, Jaime y Angelo. El patrón sale de viaje por ***3*** días. La primera noche Yuri tomó ***1/5*** del vino de una botella y completó con agua.

La segunda noche Angelo tomó ***1/4*** del contenido y completo con agua.

El tercer día Jaime tomó ***1/3*** del contenido y completó con agua. Si la botella tenía ***960*** mililitros de vino. ¿Cuántos mililitros de vino queda en la botella?

A) 220 B) 380 C) 322 D) 384 E) 402

RESOLUCIÓN :

* Se considerará sólo el vino (por lo expuesto en el problema anterior).

	YURI	*ANGELO*	*JAIME*
VINO / TOMÓ	$\frac{1}{5}(960)$	$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}(960)\right]$	$\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{4}{5}(960)\right]\right\}$
VINO / QUEDÓ	$\left[\frac{1}{5}(960)\right]$	$\frac{3}{4}\left[\frac{4}{5}(960)\right]$	$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}(960)=384ml$

* Vino quedó al final ***384 ml.***

RPTA :"D"

EJEMPLO 16 :

De un depósito de ***64*** litros de vino y ***16*** litros de agua se extraen ***20*** litros de la mezcla y se reemplaza con agua y nuevamente se sacan ***20*** litros de la mezcla y se reemplaza con agua y nuevamente se sacan ***20*** litros de la nueva mezcla y son reemplazados por agua.

A) 30 y 34 B) 70 y 10 C) 27 y 53 D) 50 y 30 E) 40 y 40

RESOLUCIÓN :

Primero : Hallaremos ¿qué fracción del total es lo que se va extrayendo?

$$\text{RPTA : } \frac{20}{80}=\frac{1}{4}$$

Extrae: 20; 64 + 16 (total); (cada momento se extrae la cuarta parte)

* Luego se considerará solo el vino

	VINO (EXTRAE)	*VINO (EXTRAE)*	*VINO (EXTRAE)*
Vino (inicial)	$\frac{1}{4}(64)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}(64)\right)$	$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}(64)\right)\right)$
	VINO (QUEDA)	*VINO (QUEDA)*	
	$\frac{3}{4}(64)$	$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}(64)\right)$	$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}(64)=27$ Litros de vino

$\Rightarrow$ Agua (final) = Total – Vino(Final)

53 litros = ***80 – 27***

RPTA : "C"

EJEMPLO 17 :

Un depósito contiene ***75*** litros de leche pura, luego se extrae ***1/3*** de su contenido y se reemplaza por agua, enseguida se extrae ***1/5*** de la mezcla y también se reemplaza por agua y por último se extrae ***1/4*** de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua, ¿Qué relación de leche pura y agua quedan en el depósito?

RESOLUCIÓN :

* Al igual que el problema anterior

$$\text{leche que queda : } 75\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=30$$

* Agua que Queda : ***75 – 30 = 45***

* Piden : $\frac{Leche}{Agua}=\frac{30}{45}=\frac{2}{3}$

EJEMPLO 18 :

Un depósito está lleno de agua, se saca la mitad y se llena de vino. La operación se realiza dos veces más. Hallar la relación del agua y vino final.

RESOLUCIÓN :

SE EXTRAE	AGUA QUE QUEDA	VINO AGREGADO
Inicio	1	0
$\frac{1}{2}(agua)$	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}(mezcla)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$	$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}(mezcla)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$	$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

* La expresión a calcular será :

$$\frac{Agua}{Vino}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{1}{7}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dos grifos *A* y *B* llenan juntos un tanque en *30* horas. Si el grifo *B* fuese de desagüe se tardarían en llenar el tanque *60* horas. ¿En cuánto tiempo llenará la llave *B* el tanque, estando éste vacío?

A) 100h *B) 110h* *C) 120h* *D) 80h* *E) 90h*

RESOLUCIÓN :

* Sean *"A"* y *"B"* el número de horas que se demoran por separado en llenar el tanque *"A"* y *"B"* respectivamente.

I) Juntos en *1 h* siendo grifos, llenarán :

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{30}\left[\begin{matrix}Ambos\\Llenan\end{matrix}\right]$$

II) Si *"B"* fuera desagüe, llenaran en *1H* :

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1}{60}\left[\begin{matrix}Uno\ llena\ y\\otro\ \ quita\end{matrix}\right]$$

Resolviendo : $B = 120$

RPTA :"C"

PROBLEMA 2 :

1/3 de una obra la puedo hacer en *3* días y mi ayudante puede hacer *1/2* de la obra en *6* días. Si trabajamos juntos, ¿en qué tiempo haremos la obra?

A) $5\frac{4}{7}d$ B) $5\frac{3}{7}d$ C) $5\frac{1}{7}d$

RESOLUCIÓN :

$$YO:3DIAS <> \frac{1}{3}OBRA$$

$$1\,DIA <> \frac{1}{9}OBRA$$

MI AYUDANTE :

$$\Rightarrow 6\ DIAS <> \frac{1}{2}OBRA$$

$$\Rightarrow 1\ DÍA <> \frac{1}{12}OBRA$$

JUNTOS EN 1 H :

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{4+3}{36}=\frac{7}{36}OBRA <> 1\ DIA$$

$$1\ OBRA <> \frac{36}{7}=5\frac{1}{7}DIA$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 3:

1/5 de un Tanque lo puede llenar un grifo en *2* horas y *1/3* del tanque lo puede vaciar un desagüe en *4 h*. Si ambos se abren a la vez, ¿en qué tiempo se llenará la mitad del tanque?

A) 30h *B) 60h* *C) 120h* *D) 45h* *E) 15h*

RESOLUCIÓN :

I) Para el CAÑO :

$$2\ HORAS <> \frac{1}{5}TANQUE$$

$$1HORA <> \frac{1}{10}TANQUE$$

II) Para el DESAGÜE :

$$4\ HORAS <> \frac{1}{3}TANQUE$$

$$1HORA <> \frac{1}{12}TANQUE$$

III) Juntos en *1* Hora :

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{6-5}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{60}TANQUE <> 1\ HORA$$

$$\Rightarrow 1\ TANQUE <> 60\ HORAS$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}TANQUE <> 30\ HORAS$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 4 :

Dos manantiales juntos pueden llenar agua a un depósito en *2* horas, *24* minutos. Si el segundo, llena el depósito en *2* horas menos que el primero. Entonces, ¿en cuántas horas llenará el depósito el primer manantial?

A) 9 *B) 8* *C) 7* *D) 6* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

El manantial *"A"* : todo en *T* horas.

El manantial *"B"* : todo en *(T – 2)* horas.

A y *B* juntos.

Todo en *2h 24* min $<>\left(2\times\frac{24}{60}\right)horas=\frac{12}{5}h$

$$\underbrace{A}_{\frac{1}{T}}+\underbrace{B}_{\frac{1}{T-1}}=\underbrace{A\ y\ B}_{\frac{5}{12}}\Rightarrow\frac{2(T-1)}{T(T=2)}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow 24(T-1)=5\times T(T-2)$$

$$\Rightarrow 6\times4\times(T-1)=5(T)(T-2)\Rightarrow T=6 \text{ horas}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Un estanque puede vaciarse por medio de dos llaves: *"A"* y *"B"*; la primera colocada en el fondo y la segunda a media altura. La llave *"A"* desaloja todo

el estanque en *6* horas y *"B"* desaloja su parte en *2* horas. Si estando lleno el tanque se abren las dos llaves. ¿En cuánto tiempo se vaciará todo el estanque?

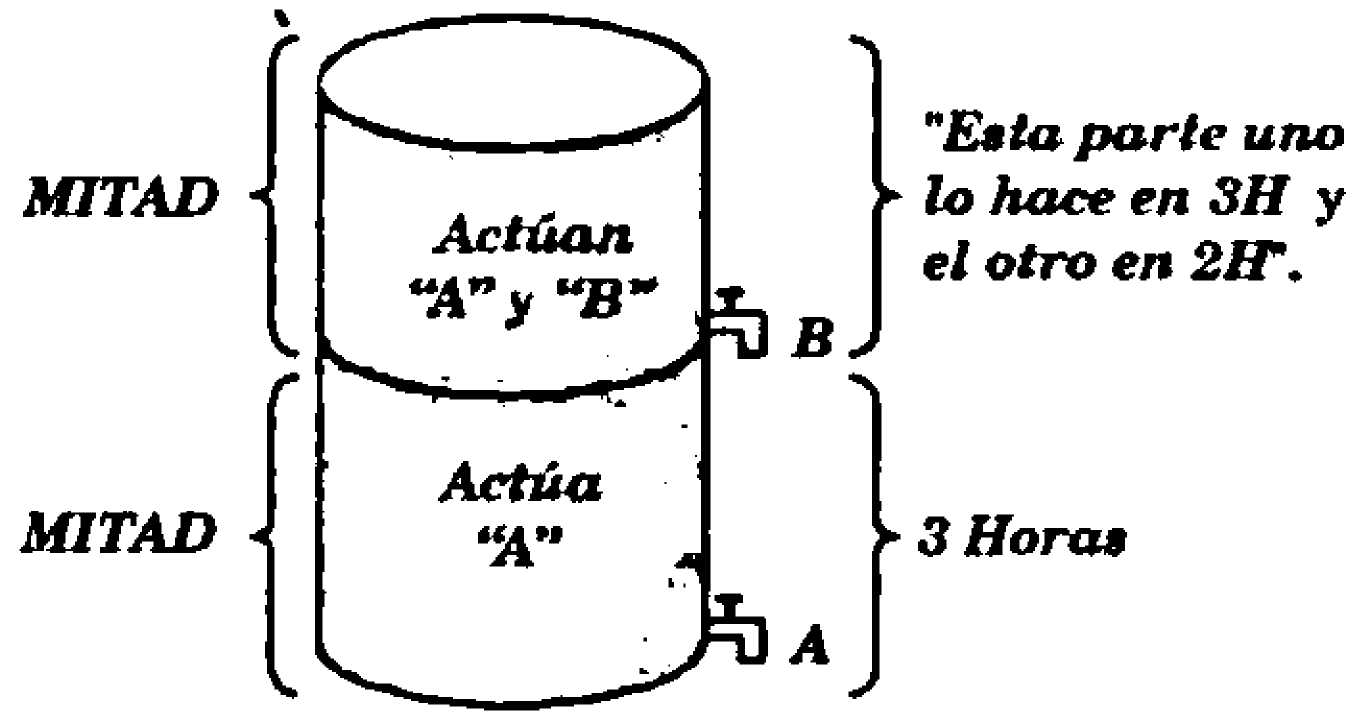
A) 4 *B) 4,2* *C) 4,4* *D) 4,8* *E) 5,2*

RESOLUCIÓN :

* Como *"A"* : *1* estanque <> *6* horas

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ estanque} <> 3 \text{ horas}$$

♦ Considerando :



♦ En *1* hora vaciarán :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\,Estanque\right) <> 1h.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,Estanque <> \frac{6}{5}\,h$$

♦ Todo el estanque se vaciará en :

$$3+\frac{6}{5}=4,2 \text{ Horas}$$

RPTA :"B"

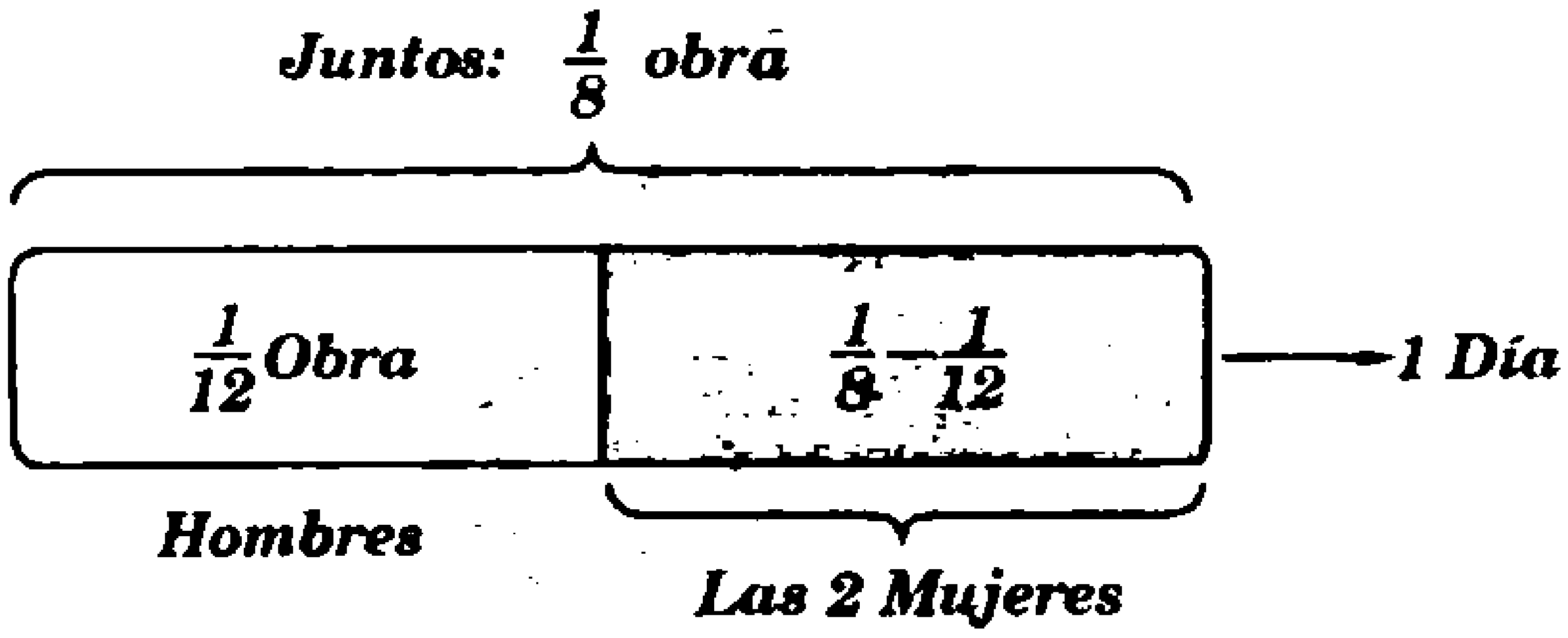
PROBLEMA 6 :

Un hombre puede hacer una obra en *12* días, si le ayudan dos mujeres acabarían en *8* días. Si trabajan sólo las *2* mujeres durante *6* días, ¿qué parte de la obra harán?

A) 1/3 *B) 1/2* *C) 1/4* *D) 1/6* *E) 1/8*

RESOLUCIÓN :

* Consideremos todo en *1* día :



$$\frac{3-2}{24}=\frac{1}{24}\text{OBRA} <> 24 \text{ DIAS}$$

$\Rightarrow$ *1* OBRA <> *24* Días

* Luego, por regla de tres :

24 días — *1* Obra
6 días — x $\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Tres tuberías *A*, *B* y *C* funcionando juntas pueden llenar la mitad de un tanque en *4* horas. Si funcionando sólo *A* y *B* pueden llenar todo el estanque en *10* horas y si funcionan *B* y *C* lo llenan en *15* horas, ¿en cuántas horas llenará la tercera parte del tanque la tubería *B* si funciona sola?

A) 8 h *B) 9 h* *C) 6 h* *D) 7 h* *E) 10 h*

RESOLUCIÓN :

$\frac{1}{2}$ *Obra <> 4 horas*

Obra <> 8 Horas

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{15}$$

* Resolviendo : $B=24$ horas

$\Rightarrow$ *1* Obra < > *24* horas

* Pero piden la tercera parte, luego dividimos ambos miembros por *3* :

$$\frac{1}{3}Obra <> \frac{24}{3}Horas = 8Horas$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 8 :

A, *B* y *C* hacen una obra en *12; 8* y *6* días respectivamente. Empiezan la obra los *3* y al finalizar el segundo día se retira *A* y lo que falta lo hacen *B* y *C* ¿En qué tiempo se hará toda la obra?

A) $\frac{22}{7}d$ *B)* $\frac{23}{9}d$ *C)* $\frac{20}{7}$ *D)* $\frac{23}{7}d$ *E)* $\frac{22}{9}d$

RESOLUCIÓN :

EN 1 DÍA :

A, *B* y *C* harán : $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$ *Obra*

B y *C* harán: $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$ *Obra*

* En los *2* primeros días se realizó :

$2\times\frac{3}{8}Obra=\frac{3}{4}Obra$, entonces faltan $\frac{1}{4}$ Obra y lo deben hacer *"B"* y *"C"*, luego planteamos :

$$\frac{7}{24}\,Obra \text{ — } 1 \text{ día}$$

$$\frac{1}{4}\,Obra \text{ — } x$$

* Por regla de tres : $\Rightarrow x=\frac{6}{7}$ *días*

* Pero piden el tiempo total : $2+\frac{6}{7}=\frac{20}{7}$ *días*

RPTA :"C"

PROBLEMA 9 :

Un recipiente de *720* litros de capacidad está vacío y cerrado el desagüe que posee. ¿En cuánto tiempo se llenará si abrimos al mismo tiempo el desagüe que desocupa *24* litros en *3 min*. y otras dos llaves que llenarán la primera *72 L*. en *12 min*. y la otra *36 L*. en *9 min*.?

***A)* 5 h *B)* 6 h *C)* 7 h *D)* 8 h *E)* 9 h**

RESOLUCIÓN :

$$1\,min <> \frac{72}{12}+\frac{36}{9}-\frac{24}{3}=2\ litros$$

* Luego : *1 min* — *2 litros*

x — *720 litros*

$x = 360$ min. < > *6* horas

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Se tiene dos velas de diferente longitud y calidad. La más larga dura *7* horas y la otra dura *10* horas. Después de estar prendidas durante *4* horas las dos velas tienen la misma longitud. A partir de ese instante, ¿qué tiempo debe transcurrir para que LA longitud de la vela más corta sea el doble de la otra?

***A)* 3H *B)* 2 *C)* 1 *D)* 1,5 *E)* 3,5**

RESOLUCIÓN :

* Luego de *4* horas, a una le faltaría *3H* y a la otra *6H*, además que a partir de ese momento ambas tienen la misma altura; consideremos que ésta sea como *1*, entonces en *1H*, la *1ra*. se consumirá *1/3* y la otra *1/6* , y en "*T*" horas se consumirán *T/3* y *T/6* y respectivamente, quedando una con $\left(1-\frac{T}{3}\right)$ y la otra con $\left(1-\frac{T}{6}\right)$, pero según enunciado una debe ser el doble de la otra, en consecuencia :

$$1-\frac{T}{6}=2\left(1-\frac{T}{3}\right)$$

* Resolviendo : $T = 2$

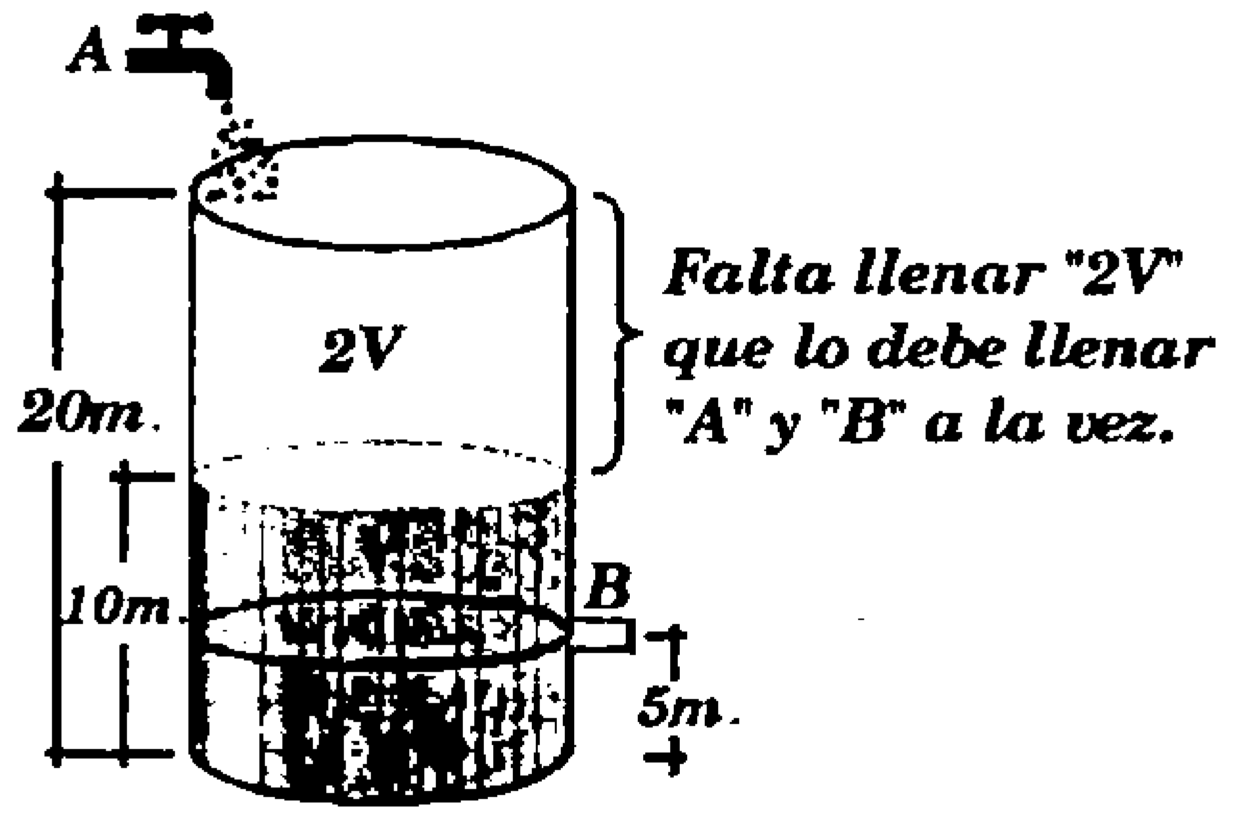
RPTA "B"

PROBLEMA 11 :

Un tanque de *20m*. de altura está lleno de agua hasta la mitad. Si en éste momento se abre la llave "*A*" llenaría lo que resta en *8* horas y si se abre solamente la llave "*B*", que está a una altura de *5* metros, vaciaría el agua sobre él en *5* horas. Si se abre simultáneamente las dos llaves, ¿en cuántas horas se llenará todo el tanque, si apenas se llena se cierra la lleve "*B*"?

***A)* 20h. *B)* 30h. *C)* 40h. *D)* 45h. *E)* 35h.**

RESOLUCIÓN :



• Como "*B*" vaciaría "*V*" en *5h*. entonces "*2V*" lo vaciaría en *10h*, y como "*A*" llenaría "*2V*" en *8h*, luego juntos en *1* hora llenarían.

$$\underbrace{\frac{1}{8}}_{A}-\underbrace{\frac{1}{10}}_{B}=\frac{1}{40}\ de\ 2V$$

• Como : $\frac{1}{40}(2V) <> 1h. \Rightarrow 2V <> 40h.$

RPTA : "C"

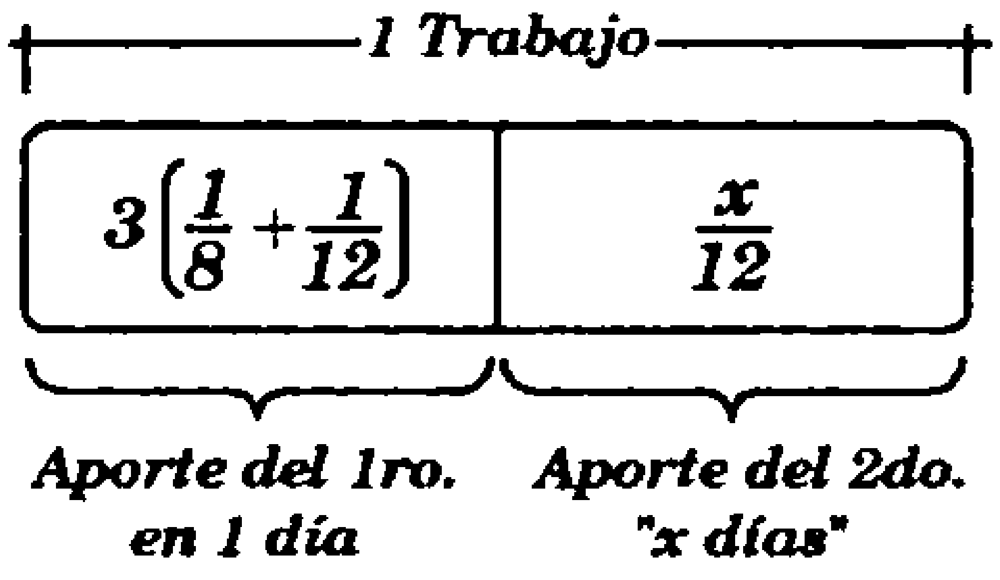
PROBLEMA 12 :

Luci hace un trabajo en *8* días y Norma hace el mismo trabajo en *12* días, después de trabajar juntas durante *3* días se retira Luci. ¿En qué tiempo terminará Norma la parte que falta?

***A)* 4,5 días *B)* 5 días *C)* 5,5 días**
***D)* 6 días *E)* 6,5 días**

RESOLUCIÓN :

* En *1* día Luci hará $\frac{1}{8}$ del trabajo, mientras que Norma $\frac{1}{12}$, juntas en *1* día harán $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ y en *3* días: $3\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)$; el resto lo hará Norma en "*x*" días, qué tendrá que hacer $\frac{x}{12}$ del trabajo, para completar el trabajo.



♦ Del esquema : $3\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)+\frac{x}{12}=1$

* Despejando : $x=\frac{9}{2}=4,5$ días.

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Dos obreros pueden cavar una zanja en *20* días ; pero trabajando por separado uno tardaría *9* días más que

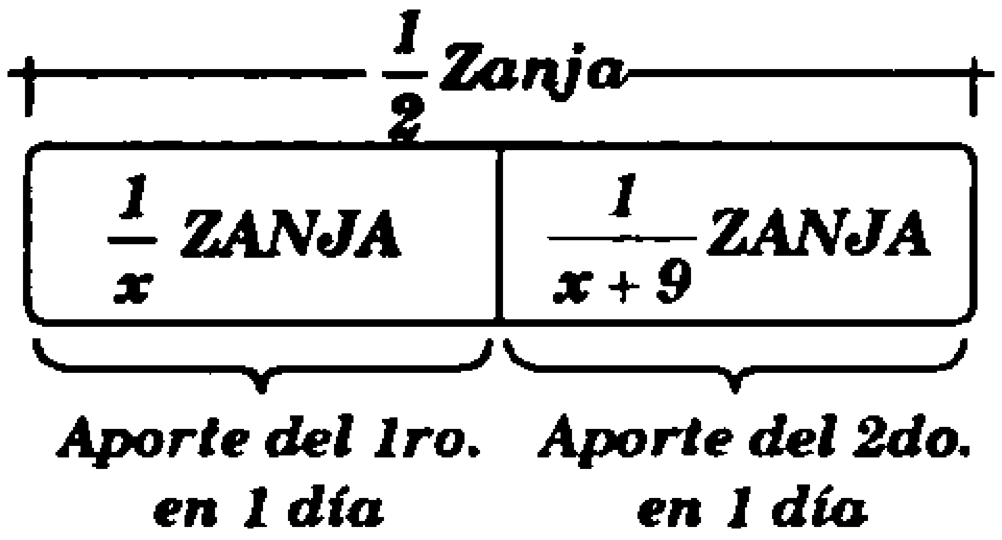
el otro. ¿Qué tiempo tardaría este otro?

A) 45 días B) 27 días C) 24 días D) 36 días E) 32 días

RESOLUCIÓN :

TODA LA OBRA		EN UN DIA HACEN
♦ 1er obrero	⇒ x días	$\Rightarrow \frac{1}{x}$ de la zanja
♦ 2do obrero	⇒ $(9+x)$ días	$\Rightarrow \frac{1}{x+9}$ de la zanja
♦ Juntos	⇒ 20 días	$\Rightarrow \frac{1}{20}$ de la zanja

Juntos en día :



* Luego :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{x+9+x}{x(x+9)}=\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 20(2x+9)=x(x+9) \Rightarrow 40x+180 = x^2+9x$$

$$0=x^2-31x-180$$

$$x \qquad -36$$

$$x \qquad +5$$

$$\Rightarrow x-36=0 \quad ó \quad x+5=0$$

$$x=36 \quad ó \quad x=-5$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 14 :

Un tanque puede ser llenado por la cañería *"A"* en *6 h* y vaceado por otra cañería *"B"* en *8 h*. se abren ambas cañerías durante *2 h*, luego se cierra *"B"* y *"A"* continúa abierta por *3 h*; al final de las cuales se reabre *"B"*. Desde la reapertura de *B*, qué tiempo demora el tanque en llenarse?

A) 7 h B) 6 h C) 9 h D) 10 h E) 12 h

RESOLUCIÓN :

* La expresión a plantear será :

$$2\underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)}_{A\,y\,B}+3\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{A}+T\underbrace{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)}_{A\,y\,B}=1 \Rightarrow T=10$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Tres grifos *A, B* y *C* pueden llenar un estanque en *40 h, 72 h* y *64 h* respectivamente. Estando vacío el reservorio, se abren los grifos *A, B* y *C* con intervalos de *2 h*. ¿En cuántas horas podrán llenar todo el estanque?

A) 1 B) 12 C) 20 D) 32 E) 36

RESOLUCIÓN :

A funciona *"T"* horas

$\Rightarrow$ ***llena :*** $\frac{T}{40}$ ***del total*** *(en 1 hora)*

B funciona *(T – 2)* horas

$\Rightarrow$ ***llena :*** $\frac{T-2}{72}$ ***del total*** *(en 1 hora)*

C funciona *(T – 4)* horas

$\Rightarrow$ ***llena :*** $\frac{T-4}{64}$ ***del total*** *(en 1 hora)*

Como el todo es la unidad (total) :

$$\frac{T}{40}+\frac{T-2}{72}+\frac{T-4}{64}=1 \Rightarrow T=20$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Un caño llena un tanque en cierto tiempo y un desagüe lo vacía en la mitad del tiempo. si el tanque estuviera lleno en sus *2/3* partes y se abriera simultáneamente caño y desagüe, se vaciaría en *8h*. ¿En cuánto tiempo lo llenaría si el caño trabajara solo?

A) 8h B) 6h C) 12h D) 9h E) 11h

RESOLUCIÓN :

I) Como estuvo lleno $\frac{2}{3}$, planteamos :

$$\frac{2}{3}\text{Tanque} <> 8\ H\ (\text{Juntos})$$

$$\frac{1}{12}\text{Tanque} <> 1\ H$$

II)	TODO	EN 1 HORA
Caño :	"2T" Horas	$\frac{1}{2T}$ OBRA
Desagüe :	T	$\frac{1}{T}$

♦ Juntos en *1* hora, se vaciará :

$$\frac{1}{T}-\frac{1}{2T}=\frac{1}{12} \Rightarrow T=6$$

$$\text{Piden: } 2T = 12$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

A y *B* pueden hacer una obra en *10* días. Si después de *8* días de trabajar juntos se retira *A* y *B* termina lo que falta de la obra en *7* días, ¿en cuántos días puede hacer toda la obra *A* solo?

A) 8 d B) 6 d C) 14 d D) 12 d E) 18 d

RESOLUCIÓN :

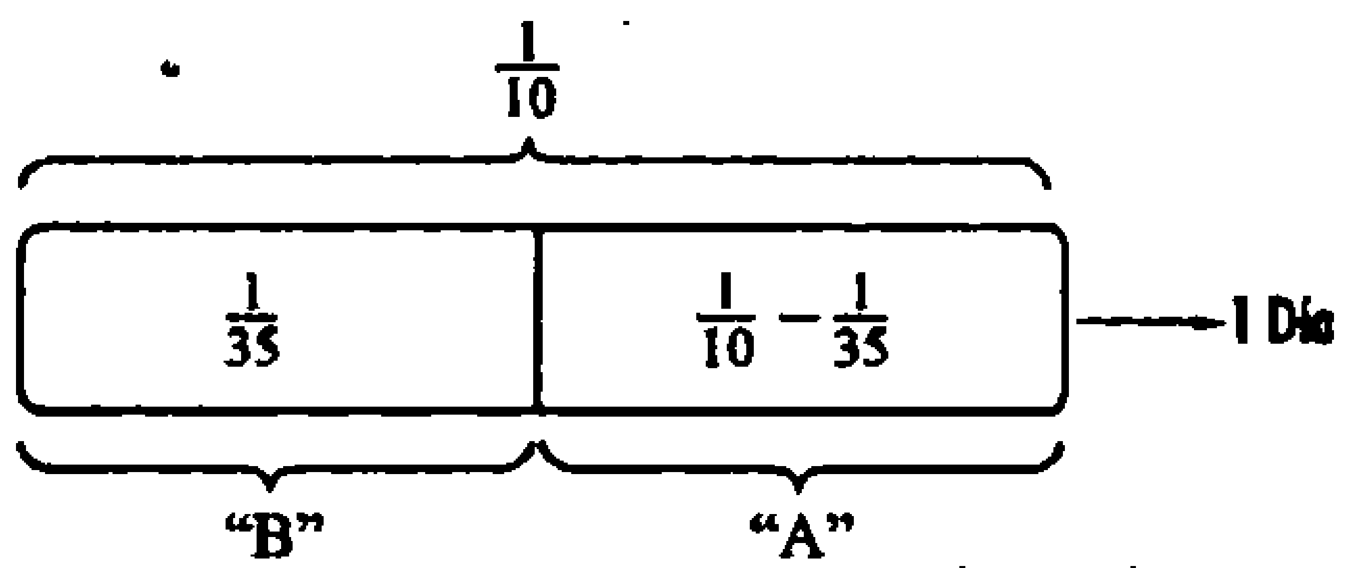
* Juntos : $\quad 1\ \text{día} <> \frac{1}{10}\ \text{obra}$

$$\Rightarrow \quad 8\ \text{días} <> \frac{8}{10}\ \text{obra}$$

Faltan : $\frac{2}{10}Obra <> 7\,días\left(\frac{Para}{"B"}\right)$

$$\frac{1}{35}Obra <> 1\,día$$

* Ahora "A" en *1* día :



$$\frac{7-2}{70}=\frac{1}{14}OBRA <> 1\,DÍA\left(\frac{Para}{"B"}\right)$$

1 OBRA <>14 DÍAS

RPTA :"C"

PROBLEMA 18 :

A y *B* pueden hacer una obra en *20* días, *B* y *C* pueden hacer la misma obra en *15* días, *A* y *C* lo pueden hacer en *12* días ¿En qué tiempo harán la obra juntos?

A) 5 d B) 6 d C) 10 d D) 8 d E) Menos de 5 d.

RESOLUCIÓN :

TODA LA OBRA EN 1 DÍA

* Para "A" : $"A"\ días \Rightarrow \frac{1}{A}obra$
* Para "B" : $"B" \Rightarrow \frac{1}{B}$
* Para "C" : $"C" \Rightarrow \frac{1}{C}$
* Para "A" y "B" : $20 \Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}$
* Para "B" y "C" : $15 \Rightarrow \frac{1}{B}+\frac{1}{C}$
* Para "A" y "C" : $12 \Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{C}$
* Luego planteamos :

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{20}Obra$$
$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{15}$$
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=\frac{1}{12}$$
$$2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=\frac{3+4+5}{60}$$

$$\left[\begin{matrix}LOS\ 3\\ JUNTOS\ EN\\ 1\ DÍA\end{matrix}\right]=\frac{1}{10}OBRA$$

10 Días <>1 OBRA

RPTA :"C"

PROBLEMA 19 :

Dos operarios *A* y *B* se comprometieron a realizar un trabajo en *40* horas. Al empezar la novena hora de trabajo se retira *A*, y *B* lo continúa, terminándolo en *12* horas más de lo estipulado en el compromiso. Si en lugar de *B*, *A* lo hubiese continuado solo, ¿cuántas horas adicionales de lo estipulado en el compromiso habría empleado?

A) 85 horas 20 minutos B)117 horas 20 minutos C)117 horas 40 minutos D)117 horas 15 minutos E) 85 horas 40 minutos.

RESOLUCIÓN :

* Como "A" y "B" pueden realizar el trabajo en *40* horas y solamente han trabajado juntos *8* horas, falta por realizar : $1-8/40=4/5$ de la obra.

* Luego que "A" se retira, "B" realiza los *4/5* de la obra en : $(40+12)-8=44$ horas.

El "*avance*" de "B" es : $(4/5)\div 44=1/55$ partes de obra/hora, entonces las primeras *8* horas "B" ha participado con *8/55* partes de la obra y "A" con $8/40-8/55=3/55$ partes de la obra.

El avance de "A" es por tanto :

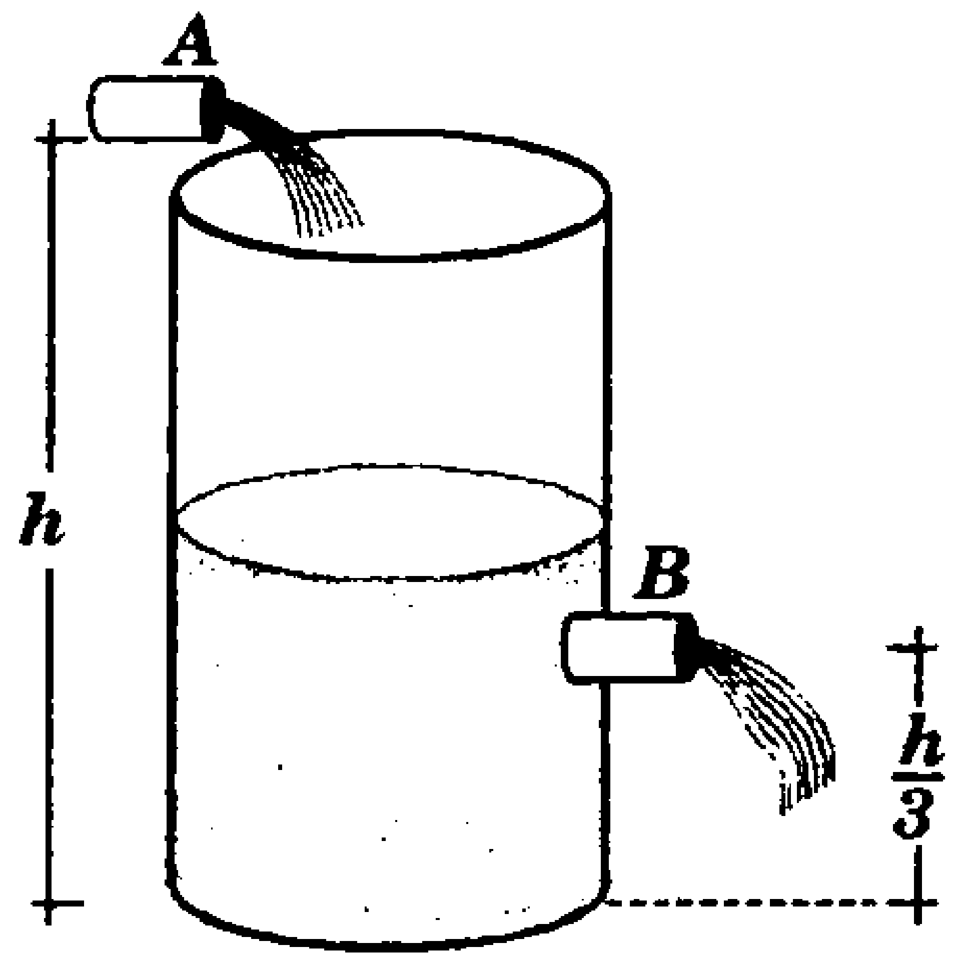
$(3/55)/8=3/440$ partes de obra/hora. Para los *4/5* de obra que falta realizar, "A" emplearía: $(4/5)\div(3/440)=117\ 1/3$ horas. Luego, el tiempo adicional sería:

$$117\frac{1}{3}=(40-8)=85\frac{1}{3}=85hrs.\ 20\ min.$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 20 :

El caño de suministro *A* de la figura mostrada llena el tanque en *12* horas, estando cerrado el caño de desfogue *B*. El caño *B* quita la parte que le corresponde en *10* horas, estando cerrado *A*. Estando, vacío el tanque se abre los *2* caños a la vez. ¿En qué tiempo se llenará el tanque?



A) 40 h B) 36 h C) 44 h D) 46 h E) 42 h

RESOLUCIÓN :

* Si el caño *A* llena todo el tanque en *12* horas, entonces la tercera parte lo hará en *4* horas y el resto que es las *2/3* partes en *8* horas. Como *B* solo quita la parte que le corresponde en *10* horas, entonces las *2/3* partes se llenará en :

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$$

* Por lo tanto la *2/3* partes del tanque lo harán en *40* horas. Luego, el tiempo para llenar el recipiente será: *4 + 40 = 44* horas

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Dos obreros pueden realizar un trabajo en *15* días. Si uno de ellos se demora *16* días más que el otro trabajando solo, ¿en que tiempo haría la obra el otro solo?

A) 40 d B) 35 d C) 16 d D) 24 d E) 18 d

RESOLUCIÓN :

	TODO	EN 1 DÍA
1^{ro} :	"x" días	$\frac{1}{x}$ trabajo
1^{do} :	"x+16" días	$\frac{1}{x+16}$
* Juntos :	15 días	$\frac{1}{15}$

* Luego : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+16}=\frac{1}{15}$
* Resolviendo : $x = 24$ días

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Un caño vierte "*x*" *L* en "*y*" horas y un desagüe arroja "*w*" L en "*z*" horas. Estando vacío un depósito y actuando los dos juntos lo llenan en "*T*" horas. Calcular la capacidad del depósito.

A) $T\left(\frac{xyz-w}{xy}\right)$ B) $T\left(\frac{xz-yw}{yz}\right)$ C) $T\left(\frac{xy-zw}{yz}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Caño : "y" horas <> "x" L

1 hora <> $\frac{x}{y}L$

* Desagüe "z" horas <> "w" L

1 hora <> $\frac{w}{z}L$

* Juntos : 1 HORA <> $\frac{x}{y}-\frac{w}{z}$

* Luego : T HORAS <> $\underbrace{T\left(\frac{xz-yw}{yz}\right)}_{\text{Capacidad del depósito}}$

RPTA :"B"

PROBLEMA 23 :

Un caño llena la *p*-ésima parte de un tanque en "*n*" horas, un desagüe desocupa la *q*-ésima parte del mismo tanque en "*m*" horas.

¿Cuánto se demora en llenar el tanque si se abren ambos dispositivos en forma simultánea?

A) (mnpq)/(mq + np) B) (mnpq)/(mq − np)
C) (mnqp)/(np − mq) D) (np − mq)/(mnpq)

RESOLUCIÓN :

* Caño : n horas <> $\frac{1}{p}$ Tanque

$\Rightarrow$ 1 hora <> $\frac{1}{np}$ Tanque

* Desagüe : m horas <> $\frac{1}{q}$ Tanque

$\Rightarrow$ 1 hora <> $\frac{1}{mq}$ Tanque

* Juntos : $\left(\frac{1}{np}-\frac{1}{mq}\right)$ Tanque <> 1 Horas.

$\Rightarrow$ 1 tanque <> $\frac{mnpq}{mq-np}$ Horas

RPTA :"B"

PROBLEMA 24 :

Una cisterna es llenada separadamente por una cañería "*A*" en *40* minutos y por una cañería "*B*" en *20* minutos. Sabiendo que existe una cañería "*C*" que actúa como desagüe, hállese en que tiempo lo vacía esta cañería si la cisterna se ha llenado en *38* minutos de la siguiente manera: Después que "*A*" llenó la cuarta parte, se abre "*C*" y actuando éstas llenan hasta la mitad, para luego abrir "*B*" y culminar así los *3* el llenado de dicha cisterna.

A) 25 min. B) 40 C) 20
D) 80 E) 120

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{Sólo "A"}\\ \text{en 10 min.}}}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{\substack{\text{"A" y "C"}\\ \text{en T min.}}}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{"A","B" y "C"}\\ \text{en 20 −T}}}=1\ (\text{total})$$

* Luego :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{T}{40}-\frac{T}{x}=\frac{1}{4}\\ \frac{28-T}{40}-\frac{28-T}{x}+\frac{28-T}{20}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\ \text{Resolviendo}\ x=80$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

Un caño *A* puede llenar un reservorio en *8* horas, otro *B* en *6* horas, un tercero *C* en *12* horas, mientras que un desagüe *D* vaciaría todo el contenido sólo

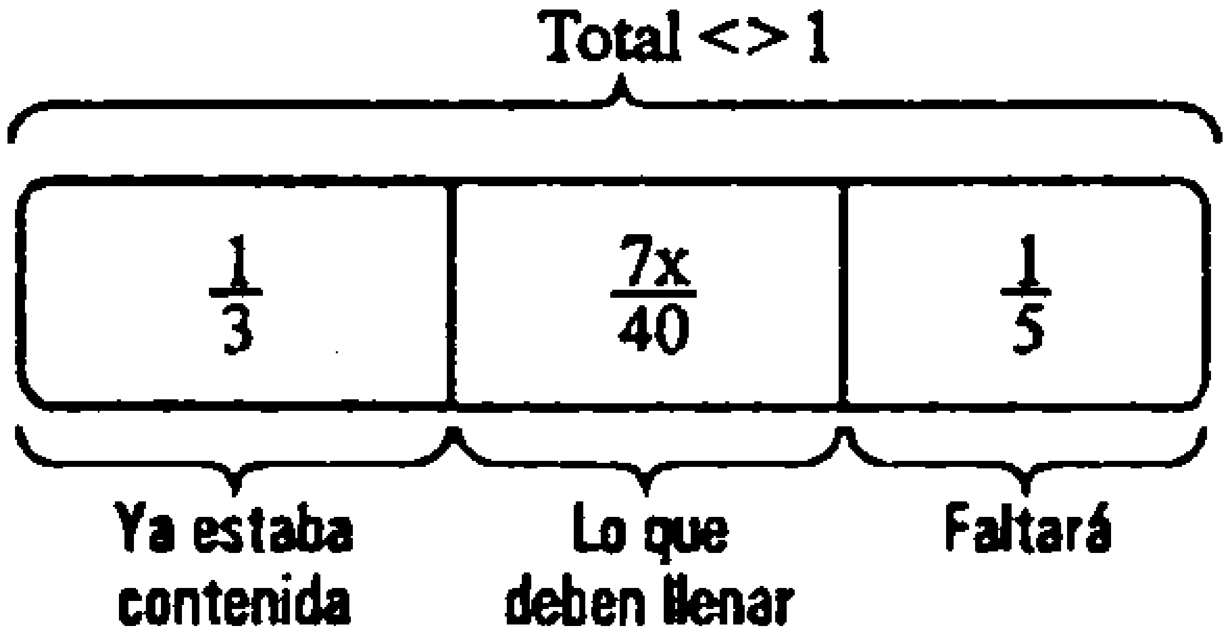
en *5* horas. Si a las *10:00 h.* cuando se abren simultáneamente los caños y el desagüe, ya estaba contenida la tercera parte del reservorio. ¿A qué hora faltará llenar exactamente la quinta parte del reservorio?

A) 11:20 h. *B) 11:30 h.* *C) 11:40 h.*
D) 12:20 h. *E) 12:40 h.*

RESOLUCIÓN :

En *1* hora juntos llenarán : $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{5}=\frac{7}{40}$

* Sea "*x*" el tiempo necesario, luego :



$$\Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{7\times}{40}+\frac{1}{5}=1$$

$$x = 2 \text{ horas } 40 \text{ min.}$$

* Lo que piden será : *10:00 + 2:40 = 12:40*

RPTA : "E"

PROBLEMA 26 :

"*A*"; "*B*" y "*C*" pueden hacer una obra en *4* días; *A* y *B* trabajando juntos pueden hacerla en *12* días; *B* y *C* trabajando juntos en $4\frac{1}{2}$ días. ¿En qué tiempo lo haría "*A*" trabajando sólo?

A) 28 días *B) 36 días* *C) 30 días*
D) 32 días *E) 24 días*

RESOLUCIÓN :

TODA LA OBRA	EN 1 DÍA HACEN
A; B y C ⇒ 4 días ⇒	$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{4}$ ....(I)
A y B ⇒ 12 días ⇒	$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{12}$ ......(II)
B y C ⇒ $4\frac{1}{2}$ días ⇒	$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{2}{9}$ ....(III)

* De *(I)* y *(III)*, (restando) :

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{36} \longrightarrow A = 36 \text{ días}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 27 :

A y *B* puede hacer una obra en *20* días; *B* y *C* pueden hacer la misma obra en *15* días y *A* y *C* lo pueden hacer en *12* días. ¿En cuánto tiempo harán la obra *A; B* y *C* juntos?

A)5 *B)10* *C)14* *D)16* *E)15*

RESOLUCIÓN :

* En *1* día harán :

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{15} \quad \oplus \text{ SUMANDO MIEMBRO A MIEMBRO}$$
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{C}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{2}{A}+\frac{2}{B}+\frac{2}{C}=\frac{3+4+5}{60}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)=\frac{12}{60}$$

$\Rightarrow \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{10}$ de la obra, en *1* día, luego los *3* juntos lo harán en *10* días.

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Dos clases de vinos están mezclados en tres recipientes. En el primero en la razón *1:1,* en el segundo en la razón *1:2,* en el tercero en la razón de *1:3;* si se saca el mismo volumen de todos los recipientes para formar *39 lts*. de la primera calidad. ¿Cuántos litros se extrae?

A) 24 *B) 36* *C) 72* *D) 18* *E) 92*

RESOLUCIÓN :

* Sea : "*x*" el número de litros a extraer de cada recipiente. Además se sabe que cada litro del primer recipiente contiene ½ de vino de primera calidad; en el segundo *1/3* de la primera calidad y el tercero ¼ de la primera calidad.

Entonces :
$$39 = x\left(\frac{1}{2}\right)+x\left(\frac{1}{3}\right)+x\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 39=\frac{13x}{12} \quad \Rightarrow x = 36$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 29 :

Fanny puede hacer una obra en *8* días y Lewis la misma obra en *12* días, Lewis empieza la obra y *2* días más tarde se incorpora Fanny, terminando junto la obra. ¿En qué tiempo se terminó la parte que falta?

A) 4 días *B) 5 día* *C) 3 días* *D) 6 días* *E) 8 días*

RESOLUCIÓN :

* Fanny y Lewis, juntos la parte de la obra que hacen en *1* día :
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{5}{24} \text{ Obra}$$

* Lewis que empieza la obra sólo durante *2* días; entonces en *2* días hizo :

$2(1/12) = 1/6$ de la obra.

* Es en ese momento en que se incorpora Fanny, terminando juntos la obra.

* Lewis y Fanny juntos la parte que falta :

$$1\text{ día} \Rightarrow \frac{5}{24}\text{ de la obra}$$

$$x \Rightarrow \frac{5}{6}\text{ de la obra}$$

$$\Rightarrow x = 4\text{ día}$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 30 :

La compañía "El Rodillo" se compromete a construir una carretera y dispone de *3* máquinas y debe ocupar una sola de ellas. En este trabajo con solo la máquina *A* puede construir la carretera en *6* días, con sólo la *B* en ocho días, con sólo la *C* en *12* días. Después de *2* días de trabajo la máquina *A* se malogra y es sustituida por la *B* y al cabo de *2* días es reemplazada por *C*. ¿Cuántos días emplea ésta para completar el trabajo?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :

* En *1* día de trabajo :

A hace $\frac{1}{6}$ de la carretera

B hace $\frac{1}{8}$ de la carretera

C hace $\frac{1}{12}$ de la carretera

* Nota : *M.C.M. (6, 8, 12) = 48*

Se asume longitud de la carretera es *48 km*.

Del enunciado :

* En *2* días de trabajo "A" hace :

$$2\left(\frac{1}{6}(48)\right) = 16\ km.$$

* En *2* días de trabajo "B" hace :

$$2\left(\frac{1}{8}(48)\right) = 12\ km.$$

* Falta hacer : $48 - 16 - 12 = 20\ km$. el cual debe ser hecho por "C". Además en *1* día de trabajo "C" hace:

$$\frac{1}{12}(48) = 4\ km.$$

* Por lo tanto acabará la obra en :

$$\frac{20}{4} = 5\ días$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

"A" trabaja *3* veces más rápido que "B". Cierto día *A* y *B* trabajan juntos durante *4* horas. Luego *B* abandona y *A* termina el resto de la obra en *2* horas. ¿Cuántas horas emplearía *B* trabajando sólo toda la obra?

A)33 B) $\frac{22}{3}$ C) $\frac{22}{5}$ D)11 E)22

RESOLUCIÓN :

* Si en una hora "B" hace x metros, entonces "A" hará $3x$; y los dos juntos harán $4x$ de la obra. Ahora en *4* horas harán $16x$ de la obra y como *A* termina el resto de la obra en *2* horas, en ese tiempo había hecho como $6x$ de la obra. Luego en total han hecho como: $(16x + 6x) = 22x$ de la obra, lo cual equivale a *22* horas, trabajando *B* solo.

RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

A y *B* pueden hacer una obra en *20* días; *A* y *C* pueden hacer la misma obra en *18* días. *A, B* y *C* pueden hacerla en *12* días; ¿En cuántos días "A" hace sólo toda la obra?

A) 20 B) 30 C) 35 D) 45 E) 50

RESOLUCIÓN :

◆ *A, B* y *C* en un día hacen $\frac{1}{12}$ de obra

◆ *A* y *C* en un día hacen $\frac{1}{18}$ de obra

◆ *A* y *B* en un día hacen $\frac{1}{20}$ de obra

◆ De donde "C" en un día hace :

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30}\ obra.$$

◆ A en un día hará :

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{30} = \frac{1}{45}\ obra <> 1día$$

$$\Rightarrow 1\ obra <> 45días$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 33 :

José puede pintar un muro de color rojo en ocho horas, mientras que Christian, podría pintar el mismo muro de color negro en doce horas.

Empiezan a pintar juntos por un extremo diferente, al encontrarse ¿qué parte del muro estará pintado de color negro?

A) 1/5 B) 2/5 C) 1/4 D) 2/3 E) 3/4

RESOLUCIÓN :

◆ Juntos en *1* hora harán :

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{24}\ muro <> 1\ hora$$

$$\Rightarrow 1\ muro <> \frac{24}{5}\ hora.$$

♦ Christian en 1 hora pinto $\frac{1}{12}$ muro , y como demoraron $\frac{24}{5}$ hora, entonces lo pintado de negro será :

$$\frac{24}{5}\times\frac{1}{12}\ muro=\frac{2}{5}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 34 :

Alfredo en "a" días puede hacer los m/n de una obra, pero Carlos en n días puede hacer los m/a de la misma obra. Si trabajan juntos. ¿Cuántos días demorarán para hacer toda la obra?

A) 2 m/an *B) an/2m* *C) an/m*

RESOLUCIÓN :

* Para Alfredo :

$$a\ días <> \frac{m}{n}Obra$$

$$\Rightarrow 1\ día <> \frac{m}{an}Obra$$

* Para Carlos :

$$n\ días <> \frac{m}{a}Obra$$

$$\Rightarrow 1\ día <> \frac{m}{na}Obra$$

* Juntos en 1 día :

$$\frac{m}{an}+\frac{m}{na}=\frac{2m}{an}\ Obra <> 1 día$$

$$\Rightarrow 1\ día <> \frac{an}{2m}\ Obra$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 35 :

Un obrero A demora en hacer la mitad de una obra tanto como otro obrero B se demora en hacer los $5/6$ de la misma obra. ¿Cuánto se demora A en hacer toda la obra, si entre los dos tardarían 15 días?

A) 18 d *B) 27 d* *C) 36 d* *D) 40 d* *E) 54 d*

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{2}Obra <> T\ días \longrightarrow T\ días <> \frac{5}{6}Obra$$

$$\frac{1}{2T}Obra <> 1\ día \qquad 1\ día <> \frac{5}{6\ T}\ obra$$

♦ Juntos en 1 día : $\frac{1}{2T}+\frac{5}{6T}=\frac{1}{15}\Rightarrow T=20$

Piden : $2\ T = 2\ (20) = 40$ días

RPTA :"D"

PROBLEMA 36 :

Un caño "A" llena un estanque en 16 horas; un caño "B" en 12 horas y el desagüe lo desaloja en 24 horas. Hallar en que tiempo se llena el estanque a partir del momento en que se abre la llave "A", si estando vacío el estanque se abren las llaves A, B y C sucesivamente en intervalos de 2 horas.

A) 9 *B) 10* *C) 9,6* *D) 5* *E) 7,2*

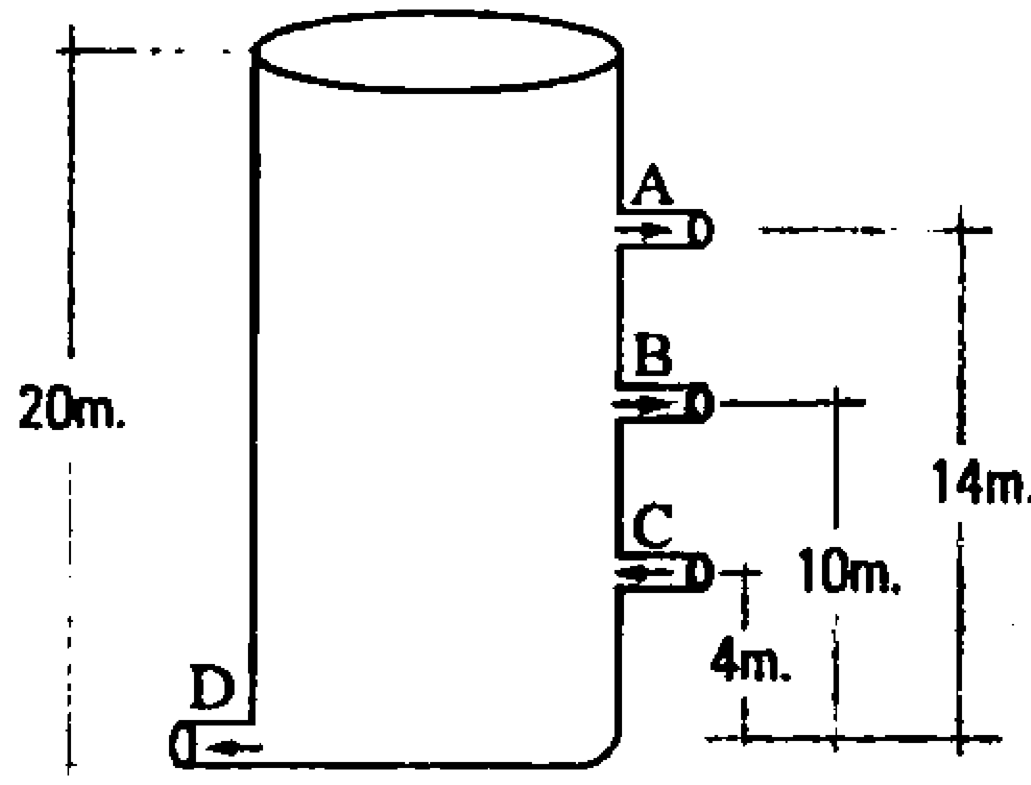
RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{\frac{T}{16}}_{\text{Lo llenado por "A"}}+\underbrace{\frac{T-2}{12}}_{\text{Lo llenado por "B"}}-\underbrace{\frac{T-4}{24}}_{\text{Lo vaceado po "C"}}=1(1\ \text{Estanque})$$

RPTA : "C"

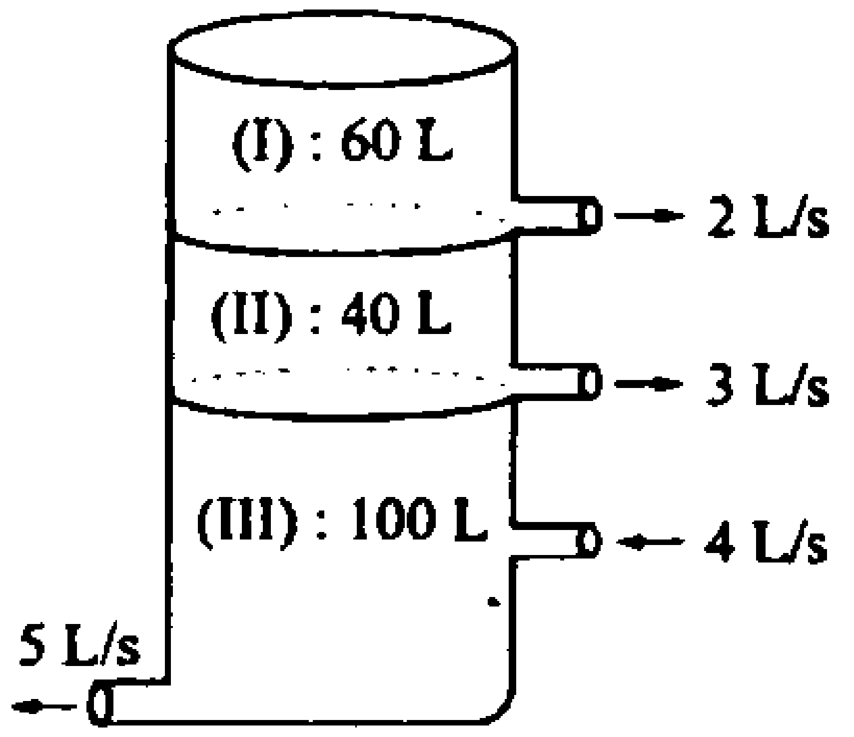
PROBLEMA 37 :

El tanque mostrado en la figura contiene $200L$ de agua. Por las tuberías de desfogue A, B y D circulan un caudal de 2, 3 y $5\ L/s$. mientras que por la de suministro C ingresa agua a razón de 4 litros por segundo. Si el nivel inicial de agua es $20m$. ¿En qué tiempo quedará vacío el tanque?



A) 100s. *B) 90s.* *C) 120s.* *D) 50s.* *E) 150s.*

RESOLUCIÓN :



♦ *(I)* se vaciará en : $\frac{60}{2+3+5-4}=10s.$

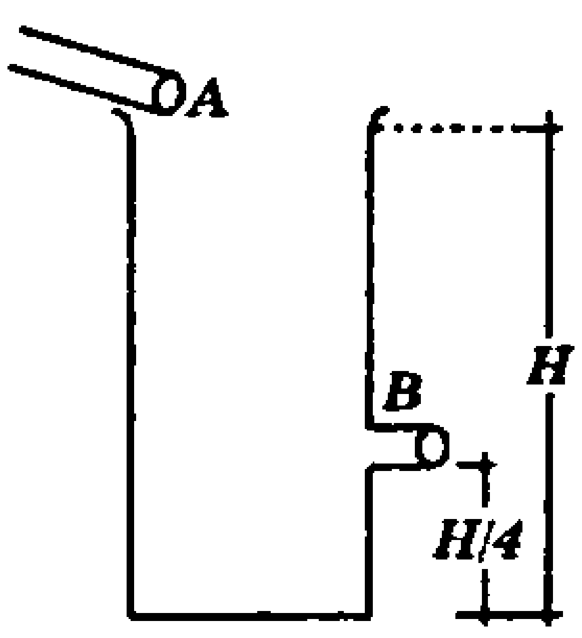
♦ *(II)* se vaciará en : $\frac{40}{5+3-4}=10s.$

♦ *(III)* se vaciará en : $\frac{100}{5-4}=100s.$

♦ En total se vaciará en : $120\ s.$

RPTA :"C"

PROBLEMA 38 :



El caño *A* llena el recipiente mostrado en *20* horas estando cerrado *B*. El desagüe *B* saca la parte que le corresponde en *30* horas estando cerrado el caño *A*. Si se abren los dos caños a la vez. ¿En qué tiempo se llenará el recipiente?

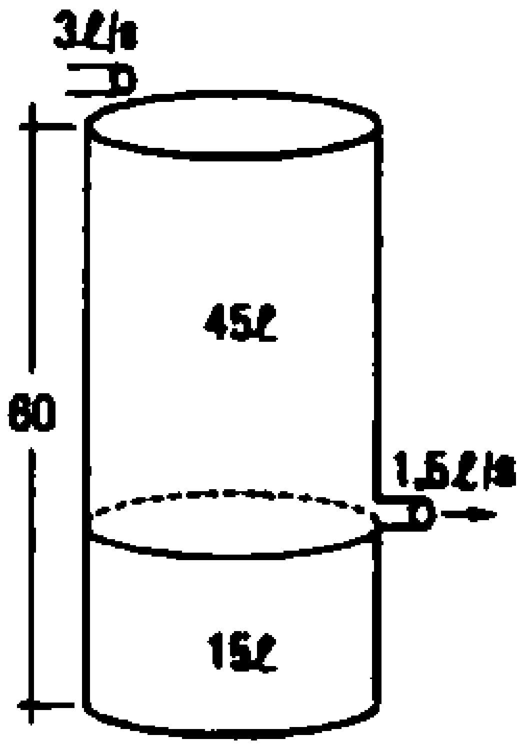
A) 30h. *B) 20h.* *C) 35 h.* *D) 28h.* *E) 25h.*

RESOLUCIÓN :

♦ Considerando que la capacidad del recipiente, sea como : *MCM(20;30) = 60.*

♦ Entonces *"A"* se demoró *20h*. en llenar *60 L*, luego en *1h*. llenará *: 20/60 =1/3*

♦ A *"B"* le corresponde : $\frac{3}{4}(60L) = 45L$ que lo vació en *30h*., luego en *1h*. vaciará :



Se llenará en : $\frac{45}{3-1,5} = 30h$

Se llenará en : $\frac{15}{3} = 5h.$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 :

A cierto número de personas se les encargó un trabajo que hubieran tardado *24* horas en realizarlo si todas hubieran empezado al mismo tiempo; pero, en vez de hacerlo así comenzaron a intervalos iguales y luego continuaron trabajando hasta que el trabajo quedó terminado. Si el pago fue proporcional al trabajo hecho por cada persona, y la primera persona que llegó recibió once veces lo que recibió la última. Calcular el tiempo en realizar el trabajo.

A) 42 horas *B) 43* *C) 44* *D) 45* *E) 46*

RESOLUCIÓN :

Sea *"n"* el número de personas, luego :

$$\overbrace{\frac{T}{24n} + \frac{T-r}{24n} + \frac{T-2r}{24n} + \dots + \frac{U}{24n}}^{"n"\ términos} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T+U}{2}\right) \times n = 24n$$

$$T + U = 48 \text{ ....} (I)$$

* Además que :

$$\underset{11k}{\frac{T}{24n}} = \underset{k}{\frac{U}{24n}} \Rightarrow T = 11\,U \text{ ....} (II)$$

* *(II)* en *(I)* : $U = 4$; $T = 44$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40 :

Para cierta construcción un obrero empieza a preparar concreto el día primero de abril, trabajando *2* días seguidos y descansando el tercero. Un segundo operario empieza a trabajar el día *15* del mismo mes y año trabajando todos los días sin excepción. El primero prepara por día de trabajo *2* m^3 y el segundo *1,8* m^3. ¿Cuántos días de trabajo necesita el segundo para preparar el mismo volumen que el primer operario?

A) 39 *B) 40* *C) 38* *D) 41* *E) 32*

RESOLUCIÓN :

* El primero cada *3* días hace $2 \times 2m^3 = 4m^3$ y del *1°* al *14* de abril ha hecho $5 \times 4m^3 = 20m^3$.

* El segundo cada tres días hace $3 \times 1,8m^3 = 5,4m^3$ y necesita descontar $20m^3$, lo cual lo debe hacer en:

$$3\ días \xrightarrow{descuento} 5,4 - 4$$
$$x \longrightarrow 10 - 1,8$$

Lo hecho por el segundo en el día 15.

$$x = \frac{3(10-1,8)}{1,4}$$

x= 39 días (a partir del *16* de abril)

* Lo que piden será : $39 + 1 = 40$

RPTA :"B"

PROBLEMA 41 :

Un albañil y su ayudante pueden hacer una obra en *24* días, después de haber trabajado juntos durante *12* días, se retira el ayudante y el albañil termina lo que falta de la obra en *20* días. ¿En cuántos días puede hacer toda la obra el ayudante trabajando solo?

A) 50 días *B) 60 días* *C) 40 días*
D) 70 días *E) 45 días*

RESOLUCIÓN :

* En *22* días habrán hecho $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ obra, por lo que falta la otra mitad, la cual el albañil lo hizo en *20* días, entonces toda la obra la hará en *40* días y en *1* día hizo $\frac{1}{40}$ de obra, luego consideremos que sea *"T"* el tiempo pedido, luego se planteará :

$$\frac{1}{40} + \frac{1}{T} = \frac{1}{24}\left[\begin{matrix}LO\ HECHO\ POR\\ AMBOS\ EN\ 1\ DÍA\end{matrix}\right] \Rightarrow T = 60$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 42 :

Tres grifos proveen de agua a un estanque. Estando vacío el estanque; el primero y el segundo funcionando juntos lo llenan en *6* horas; el segundo y el tercero lo harían en *3* horas, el primero y el tercero

lo llenarían juntos en *4* horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el estanque si sólo funciona la tercera llave, estando el depósito inicialmente vacío?

A) 3 horas *B) 3 h 38 min.* *C) 4 horas*
D) 4 h 40 min. *E) 4 h. 48 min.*

RESOLUCIÓN :

* Sea *"P"*, *"S"* y *"T"* el número de horas que demoran por separado en llenar el estanque, luego en *1* hora:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p}+\frac{1}{S}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{S}+\frac{1}{T}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{p}+\frac{1}{T}=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Resolviendo :} \\ T=4h \quad 48\,min. \end{array}$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 43 :

Una obra puede ser hecha por *A* y *B* en 6 días, por *B* y *C* en *8* días y por *A* y *C* en *12* días. La obra es empezada por los *3* juntos y cuando ya han hecho los *3/4* partes de la obra, *"A"* se retira, *B* y *C* continúan hasta que hayan hecho la mitad de lo que quedaba, entonces se retira *B*, terminando *"C"* lo que falta de la obra. ¿En cuántos días se hizo toda la obra?

A) 7 *B) 8* *C) 9* *D) 10* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

♦ Considerando :

$$Obra = MCM(6\,;8\,;12) = 24k$$

♦ Luego en *1* día :

I) A y B *Harán :* $\frac{24k}{6}=4k$

II) B y C *Harán :* $\frac{24k}{8}=3k$ (+)

III) A y C *Harán :* $\frac{24k}{12}=2k$

De donde se deduce que en *1* día.

IV) *A*, *B* y *C* harán : $\frac{9k}{2}$

V) Sólo *"C"* : $\frac{k}{2}$

♦ Para hacer $\frac{3}{4}(24k)=18k$, los *3* juntos demorarán:

$$\frac{18k}{\frac{9k}{2}}=4\,días$$

♦ Falta $24k-18k = 6k$, de los cuales *B* y *C* demoraran en hacer $6k\div 2 = 3k$ en $\frac{3k}{3k}=1\,día$ ..

♦ Queda por hacer *3k*, en el cual *"C"* terminará en :

$$\frac{3k}{\frac{k}{2}}=6\,días$$

⇒ Total de días : $4+1+6=11$

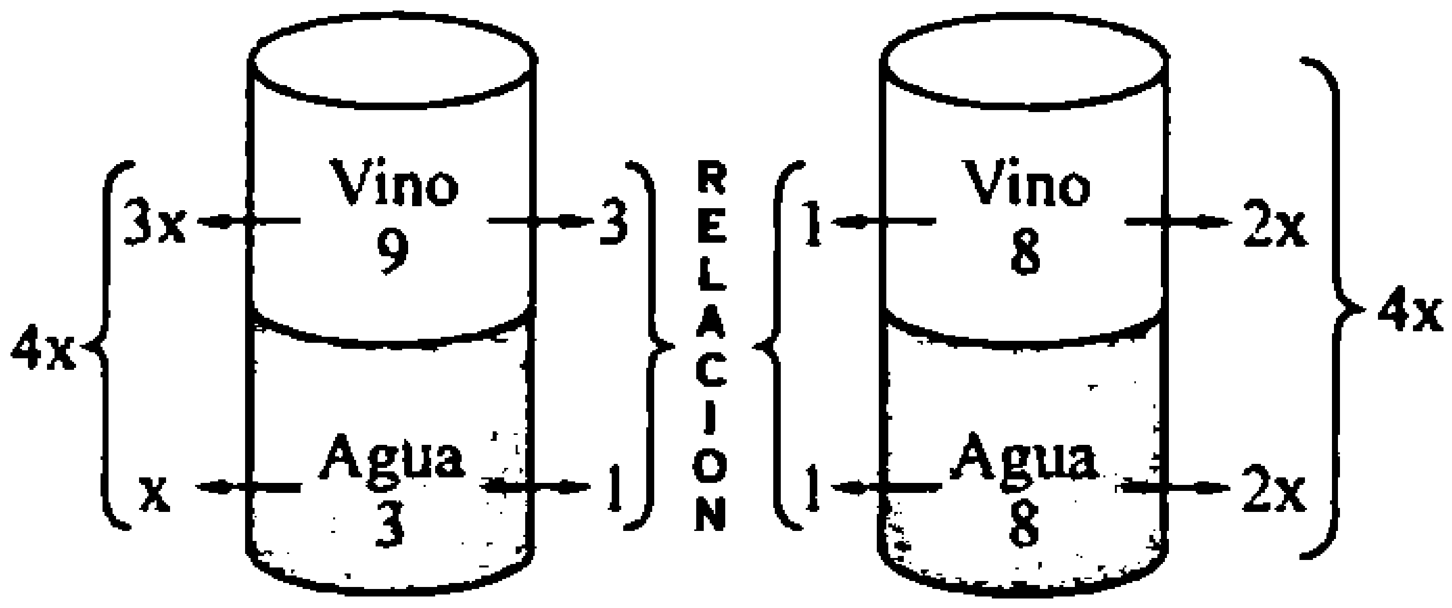
RPTA : "E"

PROBLEMA 44 :

Luis tiene *2* recipientes con *12* y *16 L* de mezcla de vino y H_2O. Si el primero contiene *9 L* de vino puro y el segundo *8 L* de vino puro, ¿cuántos litros de mezcla se deben intercambiar para que ambas mezclas resultantes tengan la misma cantidad de agua?

A) 7 *B) 8* *C) 8,5* *D) 10* *E) 9*

RESOLUCIÓN :



* Según el esquema se debe intercambiar *"4x"*, luego :

$$\text{Agua primero} = \text{Agua segundo}$$
$$3-x+2x = 8-2x+x$$
$$\Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow 4x = 10$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

Un tonel de *24* litros de capacidad es llenado con *14* litros de vino y el restante con agua. Se extrae *8* litros de la mezcla y se reemplaza por agua; luego se extrae *6* litros de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Cuál es la diferencia entre el agua y el vino en la mezcla final?

A) 8 *B) 6* *C) 10* *D) 12* *E) 9*

RESOLUCIÓN :

* Como se reemplaza con agua, entonces se trabaja con el vino.

$$\textit{FRACCIONES EXTRAÍDAS}\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \frac{8}{24}=\frac{1}{3} \\ \bullet\ \frac{6}{24}=\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

* Primero se extrae : $\frac{1}{3} \Rightarrow queda : \frac{2}{3}$

* Luego se extrae: $\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow queda : \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)$

Luego : $Vino\ final = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)(14)=7\ litros$

$$Agua\ final = 24-7=17\ litros$$

$$\Rightarrow \quad Agua - Vino = 17-7=10\ litros$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 46 :

Un depósito contiene **4** litros de vino, **8** litros de agua y **6** litros de ron. Se extrae **6** litros de la mezcla y se reemplaza por agua; luego se extraen **9** litros de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua; finalmente se extraen **3** litros de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. Al final ¿Cuál es la diferencia entre los contenidos de ron y vino?

A) 4/7 **B)** 5/9 **C)** 3/7 **D)** 2/5 **E)** 3/8

RESOLUCIÓN :

1ra operación

Fracción extraída : $\frac{6}{18}$

Fracción que queda : $\frac{12}{18}$

2da operación

Fracción extraída : $\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)$

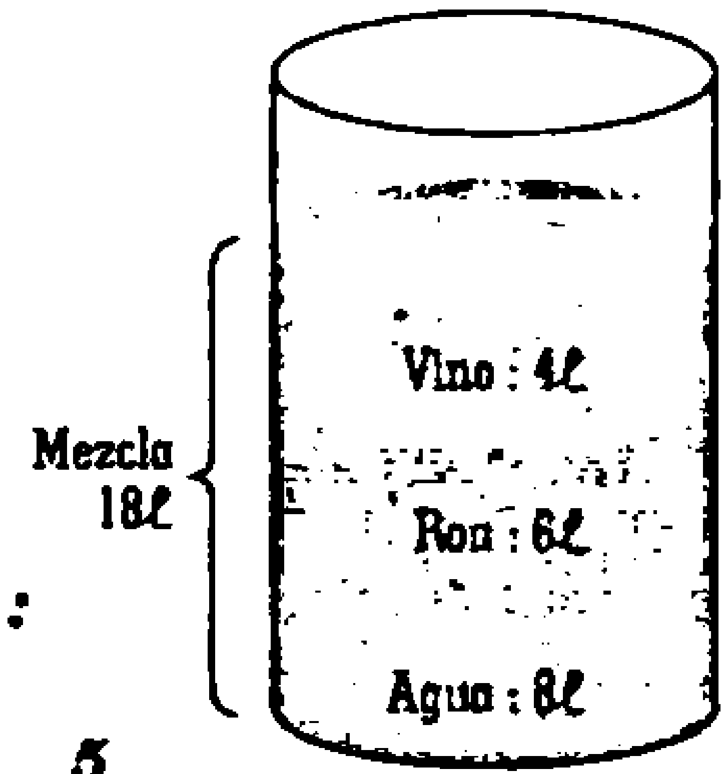
Fracción que queda : $\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)$

3da operación

Fracción extraída : $\frac{3}{18}\left[\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)\right]$

Fracción que queda : $\frac{15}{18}\left[\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)\right]$

* Finalmente :



Vino que queda :

$$\frac{15}{18}\left[\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)\right](6)=\frac{5}{3}\ litros$$

Ron que queda :

$$\frac{15}{18}\left[\frac{9}{18}\left(\frac{12}{18}\right)\right](4)=\left(\frac{10}{9}\right)\ litros$$

* Piden : $\frac{5}{3}-\frac{10}{9}=\frac{15-10}{9}=\left(\frac{5}{9}\right)litros$

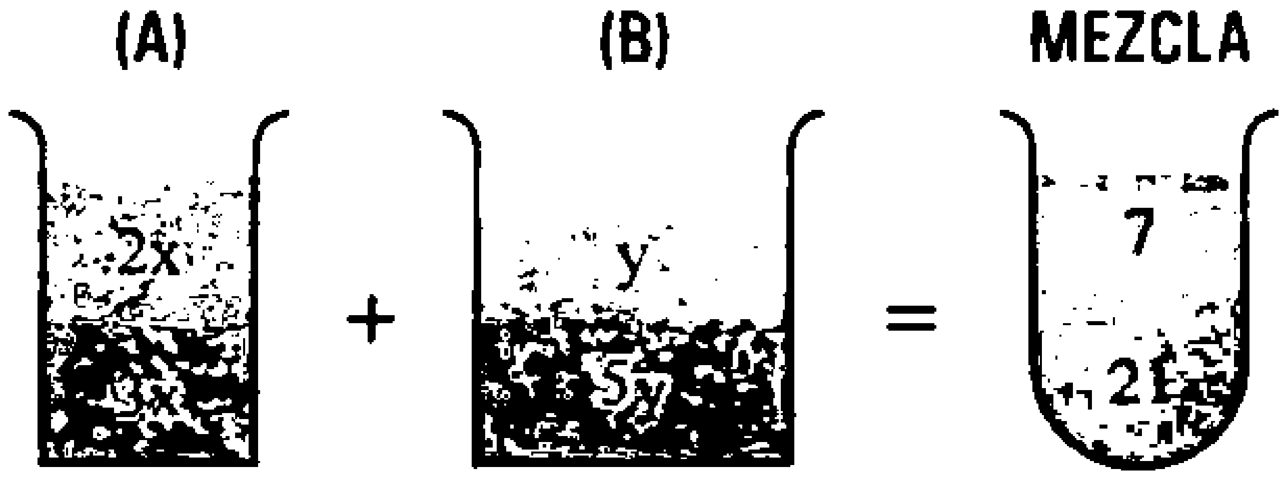
RPTA :"B"

PROBLEMA 48 :

Dos clases de vino se han mezclado en los depósitos **A** y **B**. En el depósito **A** la mezcla será en la proporción de **2** a **3** respectivamente y en el depósito **B** la proporción de la mezcla es de **1** a **5**. ¿Qué cantidad de vino debe extraerse de cada depósito para formar otra mezcla que contenga **7** litros de la pri-mera clase y **21** litros de la otra clase?

A)12 y 16 **B)**10 y 18 **C)**18 y 10
D)13 y 15 **E)**15 y 13

RESOLUCIÓN :



* Luego :

$$2x+y=7 \longrightarrow 10x+5y=35$$
$$3x+5y=21 \longrightarrow 3x+5y=21$$
$$7x=14$$

$$x=2 \longrightarrow y=3$$

* Del depósito **A** se extrae $5x=10$

* Del depósito **B** se extrae $6y=18$

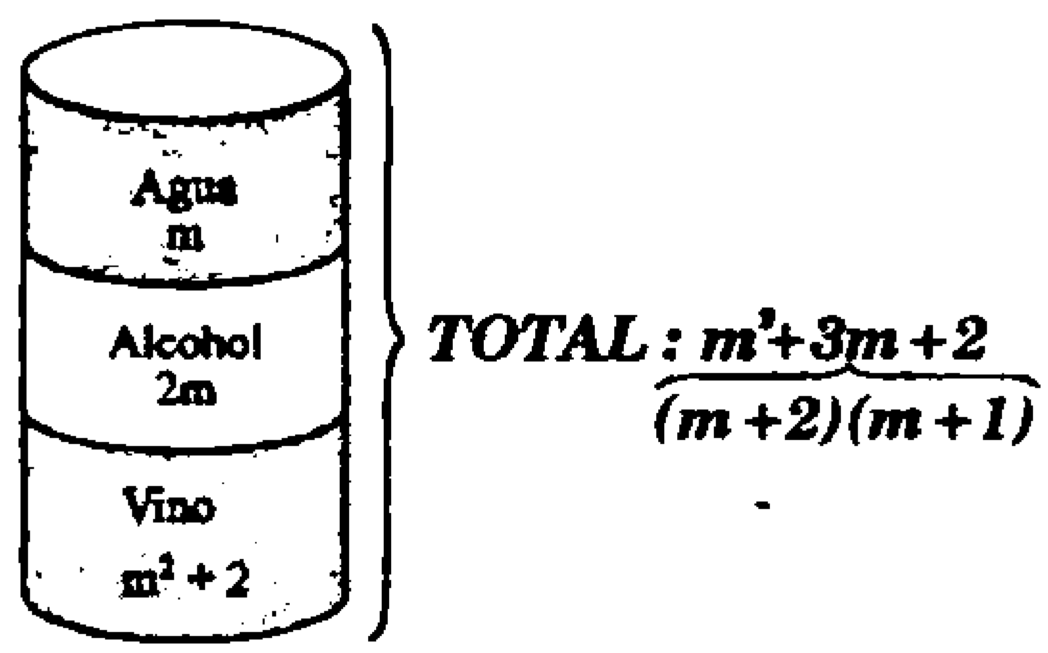
RPTA :"B"

PROBLEMA 49 :

En tonel se mezclan **"m"** litros de agua **"2m"** litros de alcohol y **"m^2+2"** litros de vino. Si se extraen **"m+1"** litros de esta mezcla ¿qué cantidad de alcohol se extrajo?

A) m + 2 **B)** m/m + 2 **C)** 2m/m + 2
D)1/m + 2 **E)** m + 1/m + 2

RESOLUCIÓN :



* Se compara lo que se extrae con respecto al total y esa es la fracción que sale de cada componente.

$$\underbrace{\frac{m+1}{(m+2)(m+1)}(2m)}_{\text{Alcohol pedido}}=\frac{2m}{m+2}$$

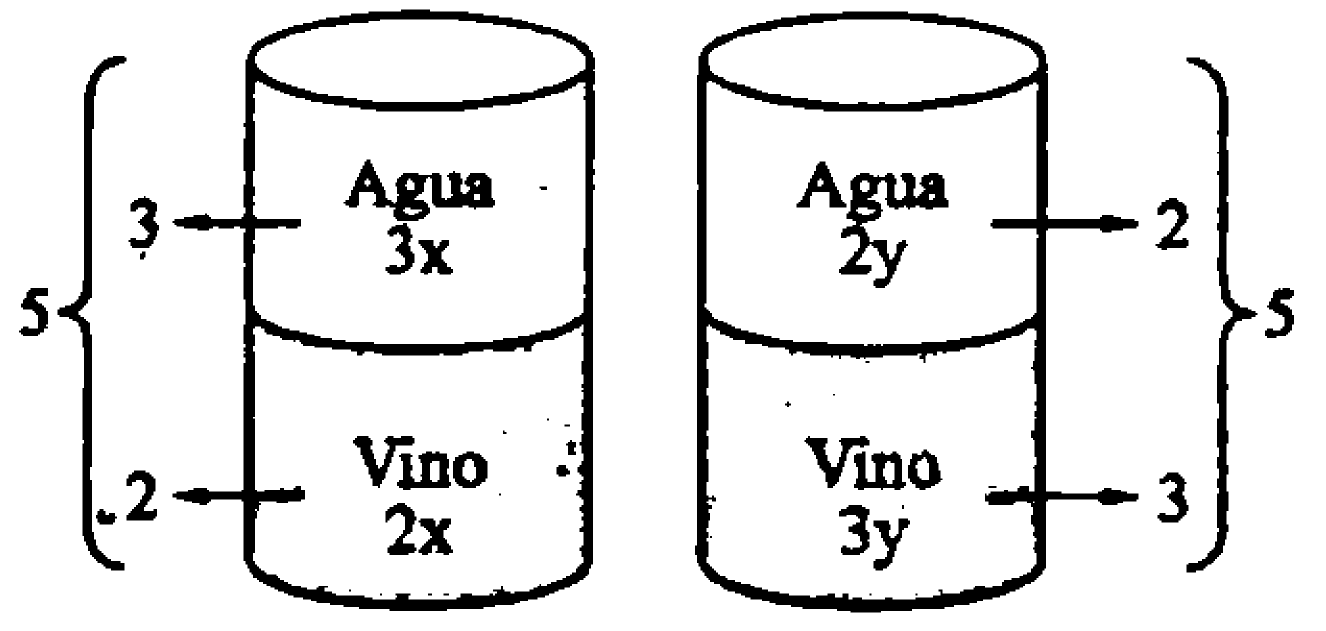
RPTA : "C"

PROBLEMA 50 :

Se tiene dos recipientes llenos que contienen agua y vino. En el primero la relación es de **3** a **2** y en el segundo de **2** a **3** respectivamente. Se intercambian **5 L** y en el primero la relación cambia de **4** a **3**.
Si la suma de las capacidades de ambos recipientes es **90 L**, calcular la nueva relación en el segundo recipiente.

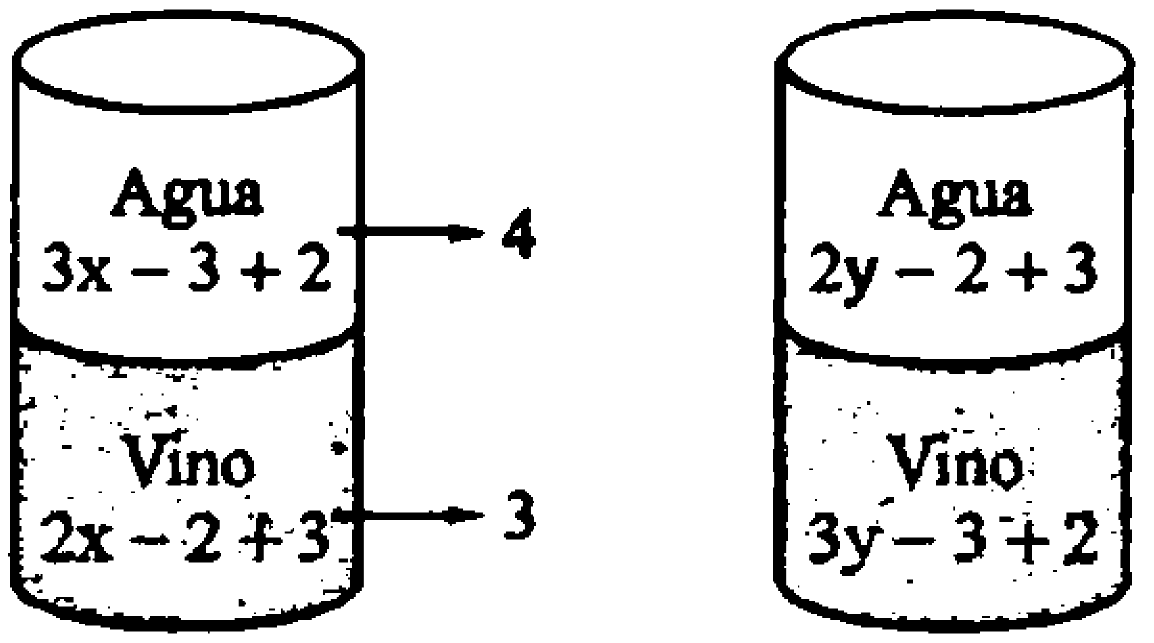
A) 23 a 32 **B)** 24 a 31 **C)** 30 a 25
D) 14 a 41 **E)** 20 a 35

RESOLUCIÓN :



$$5x + 5y = 90 \ldots\ldots \quad (I)$$

* Al intercambiar **5** litros, Quedarán así :



$$\frac{3x-1}{2x+1}=\frac{4}{3} \qquad \text{Piden : } \frac{2y+1}{3y-1}=\frac{23}{32}$$

$\underbrace{x=7 \longrightarrow y=11}_{\text{Reemplazando en(I)}}$

RPTA :"A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En ***1 min***. un caño llenó ***1/20*** de un depósito. ¿En qué tiempo llenará todo el depósito?

A) 20' B) 15' C) 10' D) 12' E) 8'

02 Eduardo pintó ***1/4*** de casa en un día. ¿En qué tiempo pintará toda la casa?

A) 10 días B) 8 C) 5 D) 4 E) 2

03 Un albañil construye ***1/15*** de un edificio en un día ¿En qué tiempo construirá todo un edificio?

A) 10 días B) 15 C) 20 D) 5 E) 30

04 En ***1*** minuto un caño lleno ***1/30*** de un depósito. ¿En qué tiempo llenará todo el depósito?

A) 20 min B) 10 C) 15 D) 30 E) 40

05 Eduardo pinto ***1/8*** de una casa en un día. ¿En qué tiempo pintará toda la casa?.

A) 10 días B) 20 C) 15 D) 8 E) 7

06 Un caño llena un estanque en ***4*** horas y el desagüe lo vacía en ***6*** horas. ¿En qué tiempo se llenará el estanque si se abren ambos conductos a la vez?.

A) 3h B) 6 C) 12 D) 8 E) 10

07 José demora ***10*** segundos en tomarse un vaso de agua. ¿Qué parte tomó en un segundo?

A) 1/2 B) 1/20 C) 1/10
D) 1/100 E) 1/8

08 Una señora demora ***20 min,*** en lustrar el piso de su sala. ¿Qué parte lustró en ***1min***?

A) 1/12 B) 1/20 C) 1/40
D) 1/10 E) 1/4

09 Un caño llena un depósito en ***7 min***. ¿Qué parte del depósito llena en ***1 min***?.

A) 1/7 B) 1/14 C) 1/77
D) 1/2 E) 1/11

10 Un obrero demora ***8*** días en abrir una zanja. ¿Qué parte de la zanja abrió en ***2*** días?

A) 1/4 B) 1/8 C) 1/16
D) 1/120 E) 1/2

11 Un recipiente contiene ***12*** litros de alcohol ***18*** litros de vino y ***30*** litros de agua. Si Leonel extrae ***1/3*** de la mezcla, entonces:

I) Extrae 20 L de la mezcla.
II) Quedan 40 L de la mezcla
III) Extrae 4 L de alcohol.
IV) Extrae 6 L de vino.
V) Extrae 10 L de agua.

¿Cuántas de las proposiciones son verdaderas?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 Mauricio prepara una mezcla alcohólica de ***10cc*** de alcohol con ***20 cc*** de agua. Si luego extrae ***1/5*** de esta mezcla, ¿Cuántos cc de alcohol se extraen?

A) 6 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

13 Diana realiza una mezcla de ***6*** litros de agua y ***15*** litros de zumo de naranja. Si luego extrae ***1/3*** de esta mezcla, ¿Cuántos litros más de zumo de naranja que de agua extrae?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14 Se llena un recipiente de ***20*** litros con ***8*** litros de vino y el resto con agua. Si se utiliza una cuarta parte de la mezcla, ¿Cuál es el exceso del número de litros de agua que queda sobre el número de litros de vino que se utiliza?

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 7*

15 El profesor de Química prepara una mezcla de *16cc* de *HCL* con *20cc* de H_2O. Si extrae una cuarta parte de esta mezcla y lo reemplaza con agua. ¿Cuántos cc más de H_2O que de *HCL* quedan?

A) 10 *B) 12* *C) 3* *D) 13* *E) 15*

16 Un depósito de *60* litros de capacidad contiene *10* litros de aceite, *20* litros de alcohol y el resto de agua. Si se extrae *2/5* de la mezcla, podemos afirmar:

I) Quedan 36 L de la mezcla.

II) Se extraen 12 L de alcohol.

III) Quedan 18 L de agua.

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III*
D) I y III *E) Todas*

17 Giovanni llena un recipiente de *45* litros de capacidad con *30* litros de leche y el resto con agua. Si extrae una tercera parte de esta mezcla y luego la quinta parte del resto, entonces:

I) Extrae 21 L de la mezcla.

II) Quedan 16 L de leche.

III) Quedan 8 L de agua.

IV) Quedan 20 L de la mezcla

V) Extrae 14 L de leche

¿Cuántas de las proposiciones son verdaderas?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

18 Daniel tiene una jarra que contiene *12* litros de limonada. Si extrae los *2/3*, luego *1/4* del resto. ¿Cuántos litros de limonada quedan?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

19 Un barril contiene *10* litros de vino, *20* litros de alcohol y *30* litros de agua. Se extrae la tercera parte de la mezcla, luego un cuarto del resto y por último un quinto del nuevo resto. ¿Cuántos litros más de agua que de vinó quedan?

A) 12 *B) 4* *C) 10* *D) 6* *E) 8*

20 Un depósito contiene *20* litros de vino, del cuál se extrae un quinto de su contenido y se reemplaza totalmente por agua, enseguida se extrae la cuarta parte de la mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Cuántos litros de vino quedan en el depósito?

A) 10 *B) 12* *C) 8* *D) 15* *E) 16*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un albañil puede levantar un pared en *8* días, ¿qué parte habrá hecho en un día?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) n.a

02 En el problema anterior ¿qué parte habrá hecho en tres días?

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $8\frac{1}{3}$ D) $\frac{3}{8}$ E) n.a

03 Si Jorge demora una hora en pintar *1/5* de su casa, ¿en cuánto tiempo pintará su casa?

A) 5 horas *B) 10* *C) 6* *D) 4* *E) n.a*

04 Si en un día tres obreros han hecho *3/7* de una obra, ¿cuántos días se nesecitarán para hacer toda la obra?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{6}{7}$ E) 4/3

05 Luego de una hora ya pinté *1/4* de una pared. ¿Dentro de cuántas horas terminaré lo que me falta?

A) 1 hora *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

06 Josué hizo *3/5* de una obra en *6* días. ¿Qué parte de la obra hizo en un día?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{1}{10}$

07 Victor puede hacer una obra en cinco días . ¿Que parte de la obra puede hacer en *4* días?

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

08 Si cuatro hombres en *10* días hacen *3/8* de una obra . Los cuatro hombres en un día hacen:

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{3}{80}$ C) $\frac{15}{8}$ D) $\frac{30}{8}$ E) $\frac{1}{8}$

09 Un caño llena un recipiente en tres horas y un desague lo vacía en *12* horas. Estando abierto el desague, ¿en cuánto tiempo llenará el caño al tanque?

A) 8 h. *B) 4* *C) 5* *D) 7* *E) 3*

10 Si "*A*" y "*B*" pueden hacer una obra en *4* días. "*A*" trabajando sólo , lo haria en *6* días. ¿En qué tiempo podrá hacer toda la obra "*B*" solo?

A) 10 h. *B) 12* *C) 11* *D)14* *E)9*

11 Una pared puede ser pintada por un experto pintor en solo *6* minutos ; su ayudante demora el doble . si trabajan juntos ¿cuánto demorarán?

A) 12 min *B)10* *C) 4* *D) 3* *E) 2*

12 Luis hace una obra en *12* días , y Julio su hermano , hace la misma obra en *9* días . Si unieron fuerzas , ¿en cuánto tiempo hacen la obra?

A) 5 dias B) $5\frac{1}{7}$ C) $5\frac{1}{4}$ D) $5\frac{2}{3}$ *E) 6*

13 Un caño llena un reservorio de agua en *20* minutos ; otro caño lo puede llenar en *30* minutos . Si abrimos ambos caños, ¿en cuánto tiempo se llenaría el reservorio?.

A) 14 min *B) 13* *C) 12* *D) 11* *E)10*

14 Imanol hace un trabajo en tres días ; Josué hace el mismo trabajo en cuatro días. Si trabajan juntos, ¿cuántos días demorarán?

A)1 *B) 2* C) $1\frac{2}{5}$ D) $1\frac{5}{7}$ E) $1\frac{2}{7}$

15 Un caño llena un balde en *8* minutos , otro caño llena el mismo balde en *12* minutos. ¿Cuánto demora en llenarse si abro los dos caños?

A) 4 min. B) $4\frac{4}{5}$ C) $4\frac{2}{5}$ D) $3\frac{4}{5}$ E) $4\frac{1}{3}$

16 Anibal hace una obra de cinco días , Beto hace la misma obra en *6* días y Carlos la hace en cuatro días . Si trabajan los tres juntos, ¿cuántos días demoran en hacer la obra?

A) 1 *B) 2* C) $\frac{37}{60}$ D) $\frac{23}{60}$ E) $1\frac{23}{37}$

17 En el problema anterior ¿cuánto demoraran en hacer toda la obra Beto y Carlos juntos ?

A) 10 *B) 2* C) $\frac{5}{12}$ D) $2\frac{2}{5}$ E) $2\frac{1}{5}$

18 Un caño *"A"* llena un tanque en una hora, otro caño *"B"* llena el mismo tanque en *45* minutos . Estando abierto ambos caños . ¿En qué tiempo se llenará el tanque?

A) $\frac{7}{180}$ *min.* *B) 30* *C)15* D) $25\frac{5}{7}$ *E) N.A*

19 En el problema anterior , juntos ¿qué parte del tanque llenan en un minuto?

A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{12}{7}$ C) $\frac{7}{180}$ *D) 25* E) $\frac{1}{46}$

20 Jaime puede hacer un trabajo en seis días y Angel en *18* días . primero Angel trabaja sólo durante dos días , y luego Jaime se une a él , hasta terminar el trabajo. ¿en cuánto tiempo se hizo todo el trabajo?

A) 2 días *B) 4* *C) 6* *D) 8* *E)10*

TAREA DOMICILIARIA

01 Un caño llena un balde en *30* segundos , otro en *40* segundos y un tercero en *12* segundos , juntos, ¿En cuánto tiempo llenan el balde?

A) 7 B) $7\frac{2}{7}$ *C) 119/17* *D) 7* *E) 6*

02 Si *"A"* hace una obra en cuatro horas y *"B"* hace la misma obra en *12* horas, ¿cuál de los siguientes enunciados es falso?

I) En una hora *"A"* hace un *1/4* de la obra.
II) En dos horas *"B"* hace *1/6* de la obra.
III) En tres horas *"A"* y *"B"* juntos hacen *11/12* de la obra.

A) sólo I *B) sólo II* *C) sólo III*
D) I y III *E) II y III*

03 Escribe verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda. Si *"A"* hace un trabajo en cinco horas y *"B"* en *8* horas .

I) En *1* hora *"A"* hace *1/5* del trabajo
II) En *1* hora *"B"* hace *1/6* del trabajo
III) En *2* horas *"B"* hace *1/4* del trabajo.

A) VVV *B) VFF* *C) VVF* *D) FFF* *E) VFV*

04 Luis hace un trabajo en siete horas y Carlos hace el mismo trabajo en *8* horas . Si trabajan juntos, ¿qué fracción del trabajo hacen en *3* horas?

A) $\frac{15}{16}$ B) $\frac{15}{28}$ C) $\frac{15}{56}$ D) $\frac{45}{56}$ E) $\frac{5}{56}$

05 Un obrero *"A"* puede cabar una zanja de tres metros de largo y *2* metros de profundidad en *3* días. Otro obrero *"B"* puedde cabar una zanja del mismo tamaño en seis días . Si trabajaran juntos , ¿en cuánto tiempo cabarían ambas zanjas

A) 1 *B)2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Pedro puede hacer un trabajo en *5* días y Juan en *8* días. ¿En cuántos días podrán hacer el trabajo los dos juntos?

A) $2\frac{1}{2}$ *días* *B) 3* C) $3\frac{1}{13}$ *D) 4* E) $5\frac{1}{4}$

02 *A* puede hacer un trabajo en *12* días, y *B* hace el mismo trabajo en *60* días, después de trabajar juntos durante *2* días se retira *A*. ¿En qué tiempo terminará *B* la parte que le falta?

A) 25 días ***B) 14 días*** ***C) 36 días***
D) 48 días ***E) 50 días***

03 Dos obreros pueden realizar un trabajo en *15* horas. Si uno de ellos se demora *16* horas más que el otro, ¿qué tiempo demora el otro trabajando solo?

A) 40 h ***B) 35 h*** ***C) 16 h*** ***D) 24 h*** ***E) 18 h***

04 Dos obreros pueden cavar una zanja en *20* días, pero trabajando por separado uno tardaría *9* días más que el otro. ¿Qué tiempo tardaría este otro?

A) 45 días ***B) 24 días*** ***C) 27 días***
D) 36 días ***E) 32 días***

05 José es *3* veces tan rápido como Juan. Si ambos se demoran *6* horas para hacer una obra, ¿cuántas horas habría demorado José trabajando solo?

A)6 h ***B)7 h*** ***C)8 h*** ***D)9 h*** ***E)15 h***

06 Un albañil y su ayudante pueden hacer una obra en *24* días, después de haber trabajado juntos durante *12* días, se retira el ayudante y el albañil termina lo que falta de la obra en *20* días. ¿En cuántos días puede hacer toda la obra el ayudante trabajando solo?

A) 50 días ***B) 70 días*** ***C) 40 días***
D) 60 días ***E) 45 días***

07 Una cañería llena una piscina en *4* horas y otra la puede dejar vacía en *6* horas. ¿En qué tiempo puede llenarse la piscina si la cañería de desagüe se abre *3* horas después?

A) 11 h ***B) 12 h*** ***C) 6 h*** ***D) 10 h*** ***E) 13 h***

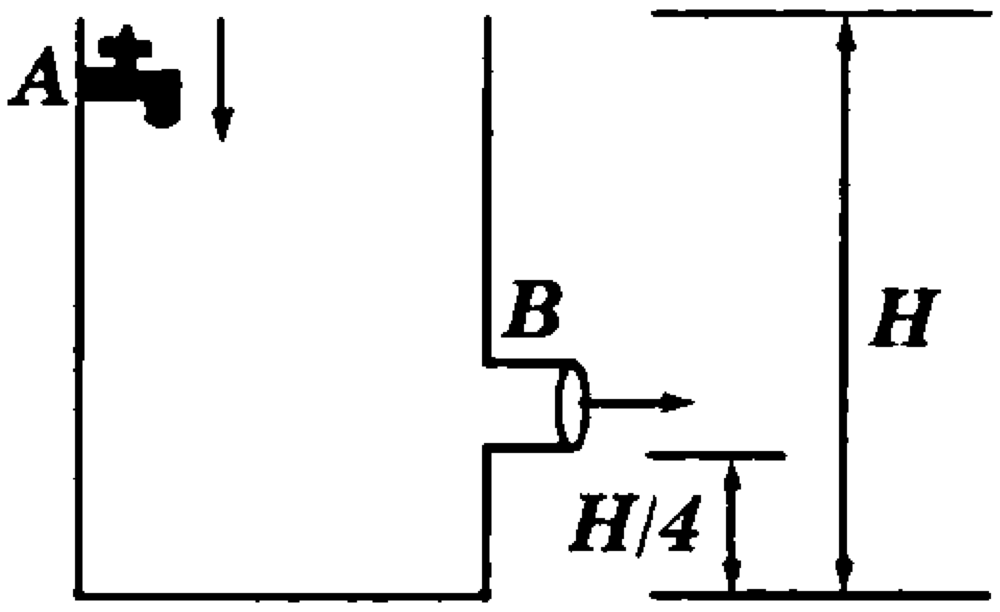
08 Un obrero puede hacer un trabajo en *7* días y otro en *14* días. Si el primero trabaja solo durante un día y luego trabajan juntos hasta terminar la obra, ¿cuánto tiempo han tardado en hacer toda la obra?

A) 2 días ***B) 7 días*** ***C) 5 días***
D) 3 días ***E) 4 días***

09 Walter y Martín pueden terminar una obra en *12* días. Después de haber trabajado juntos *4* días, Walter cae enfermo y Martín acaba la obra en *40* días. Si Walter hubiera trabajado solo, ¿en cuántos días hubiera hecho la obra?

A) 24 días ***B) 15 días*** ***C) 40 días***
D) 30 días ***E) 16 días***

10 El caño *A* llena el recipiente mostrado en *20* horas estando cerrado *B*. El desagüe *B* saca la parte que le corresponde en *30* horas estando cerrado el caño *A*. Si se abren los dos caños a la vez, ¿en qué tiempo se llenará el recipiente?



A) 30 h ***B) 20 h*** ***C) 35 h*** ***D) 28 h*** ***E) 25 h***

11 Una tubería *A* puede llenar un estanque en *6* horas y otra tubería *B* de desagüe la puede vaciar en *8* horas, estando vacío el estanque se hace funcionar *A* durante dos horas y luego se abre la otra tubería *B* funcionando así las dos. ¿Qué tiempo total emplearon para llenar el estanque?

A) 18 horas ***B) 21*** ***C) 15*** ***D)*** $12\frac{2}{3}$ ***E)*** $15\frac{1}{3}$

12 Un caño *A* llena un recipiente en *5* horas, un caño *B* lo llena en *8* horas, mientras que el desagüe *C* lo vacía en *6* horas. Si se abren los tres a la vez estando el recipiente lleno hasta la *1/3* parte, ¿en cuánto tiempo termina de llenarse?

A) $6\frac{6}{19}h$ ***B)*** $4\frac{4}{19}h$ ***C)*** $\frac{17}{120}h$ ***D) 3 h*** ***E) 10 h***

13 José hace la mitad de una obra en *6* días y Carlos hace la tercera parte de la obra en *4* días. ¿En qué tiempo harán juntos la obra?

A) 8 días ***B) 6 días*** ***C) 12 días***
D) 3 días ***E) 5 días***

14 Un cilindro tiene un caño de llenado, el cual puede llenar en *20* minutos y otro caño de vaciado, el cual puede vaciar totalmente en *36* minutos. Estando vacío el cilindro, se abre el caño de llenado y *4* minutos más tarde, el caño de vaciado. ¿En cuántos minutos se habrá llenado totalmente el cilindro?

A) 40 min ***B) 32 min*** ***C) 38 min***
D) 35 min ***E) 39 min***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) C	2) D	3) A	4) E	5) C	6) E	7) E	8) B	9) [illegible]	10) B
11) C	12) B	13) C	14) D	15) B	16) E	17) D	18) D	19) C	20) C
1) C	2) C	3) E	4) D	5) D					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) C	2) D	3) D	4) D	5) C	6) D	7) C	8) C	9) B	10) C
11) A	12) E	13) B	14) A	15) C	16) A	17) E	18) C	19) C	20) C

TANTO POR CIENTO

CAPITULO 032

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

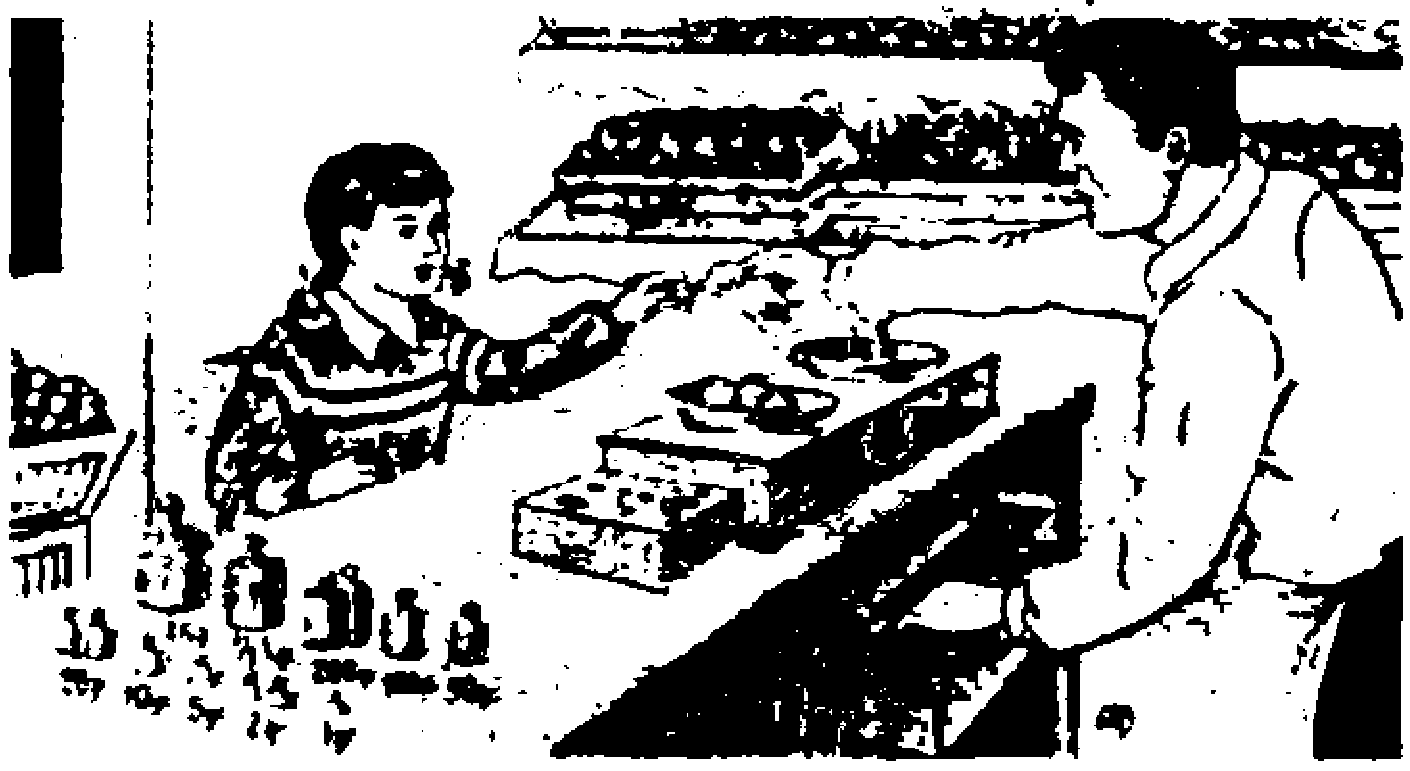
* *Relacionar una parte respecto a un total.*
* *Determinar el tanto por ciento de una cantidad. respecto a otra.*
* *Operar con porcentajes.*
* *Calcular aumento o descuentos sucesivos de una cantidad en referencia.*
* *Reconocer los elementos que intervienen en las operaciones comerciales.*

INTRODUCCIÓN :

Alguien le robó la mayor parte del cerebro y Ud. probablemente no lo sabía. Bueno, no significa exactamente que le hayan quitado el cerebro, pero han decidido que Ud. no lo usa. Se trata del viejo mito, escuchado una y otra vez, que dice que la gente usa sólo el diez por ciento del cerebro*(10%)*. Mientras que para aquellos que repiten ese mito esto probablemente sea verdad, los demás felizmente usamos todo el cerebro.

Ese remanido supuesto del diez por ciento aparece todo el tiempo. El año pasado, los avisos publicitarios de la revista nacional para la U.S. Satellite Broadcasting mostraban el dibujo de un cerebro. Debajo figuraba la leyenda: "Ud. sólo usa el ***11*** por ciento de su potencial". Bien, estuvieron más cerca que el mito del diez por ciento, pero todavía les faltó un ***89***. En julio de ***1998***, la cadena de televisión ***ABC*** emitió unos spots promocionales del programa *The Secret Lives of Men* ("Las vidas secretas de los hombres"), para la temporada de otoño. El spot consistía en una propaganda en la que se podía leer, "Los hombres sólo usan el diez por ciento del cerebro" ocupando toda la pantalla.

Una de las razones por las cuales este mito ha permanecido, es que ha sido adoptado por videntes y otros integrantes del mundo paranormal para explicar los poderes parapsíquicos. En más de una ocasión he escuchado a videntes que le dicen a la audiencia "Solamente usamos el ***10*** por ciento de la mente. Si los científicos no saben lo que hacemos con el ***90*** por ciento restante, ¡entonces debemos estar usándolo para los poderes parapsíquicos!" En *Reason To Believe: A Practical Guide to Psychic Phenomena* (Razón para creer: guía práctica para los fenómenos parapsíquicos), el autor Michael Clark menciona a un hombre llamado Craig Karges. Karges cobra un montón de dinero por su programa *Intuitive Edge* (Al filo de la intuición), el cual está diseñado para desarrollar habilidades parapsíquicas naturales. Clark cita a Karges diciendo: "Normalmente utilizamos sólo del ***10*** al ***20*** por ciento de la mente. Piense cuán diferente sería su vida si Ud. pudiera usar ese otro ***80 ó 90*** por ciento, que conocemos con el nombre de mente subconsciente".



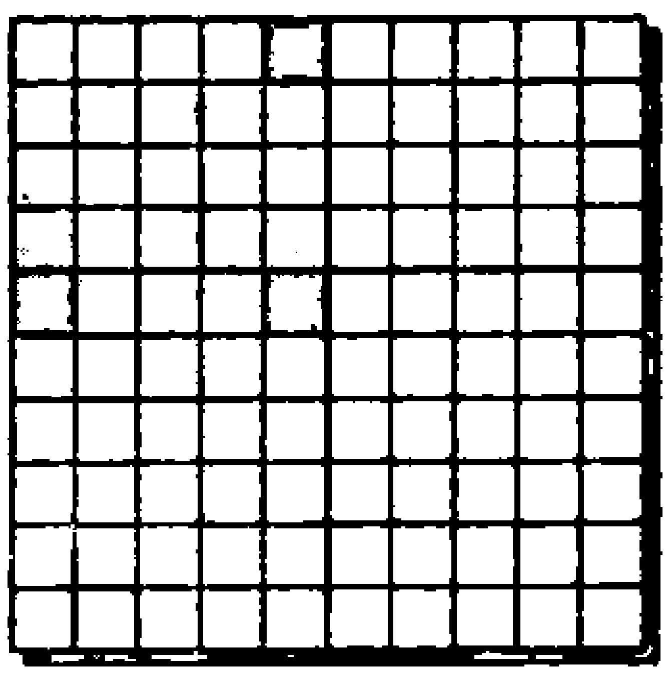
Muchas veces las tiendas comerciales te ofrecen dos rebajas sucesivas en el momento de efectuar la compra ***20% + 20%*** de descuento.

No te has preguntado ¿Porque no se hace un solo descuento del ***40%*** en lugar de los dos descuentos mencionados?. Piensa ahora:

¿Sabes lo que significa dos descuentos sucesivos del ***50%*** y ***50%***?. Aprende atentamente la clase y te darás cuenta que no te llevarás el artículo totalmente gratis.

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

Si una cantidad se divide en ***100*** partes iguales, cada parte representa $\frac{1}{100}$ del total, que se puede representar por ***1%***, al que denominaríamos "uno por ciento".



Así por ejemplo: El cuadrado grande ha sido dividido en ***100*** partes iguales, donde la parte sombreada es:

$\frac{25}{100} = 25 \times \frac{1}{100} = 25\%$ Y la parte no sombreada es:

$$\frac{75}{100} = 75 \times \frac{1}{100} = 75\%$$

* El Tanto por Ciento nos indica una relación entre una parte y una unidad considerada como *100* (es decir, dividida en *100* partes iguales) y de estas tomar tantas partes como se requiere.

* Es decir:

$$\overbrace{\underbrace{\frac{1}{100}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{100}\ \ldots\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{100}}_{100\ \text{partes iguales}}}^{\text{Unidad}}$$

Considerando

- Una parte : $\left(\frac{1}{100}\right)$
- *10* partes : $10\left(\frac{1}{100}\right)$
- *200* partes : $200\left(\frac{1}{100}\right)$

Tomar una parte de *100* ,es tomar una parte por cada cien, es decir :

El uno por ciento $\frac{1}{100} = 1\%$

Ahora veamos el tanto por cuanto :

$$\overbrace{\underbrace{①\ ②\ ③}_{\text{TANTO}}\ ④\ ⑤}^{\text{CUANTO (un Todo)}}$$

Podemos decir que:

* Hay *3* bolas pintadas por cada *5*

* *3* por cada *5* < > $\frac{3}{5}$ (3 → TANTO; 5 → CUANTO)

* "El *3* por *5*"< > $\frac{3}{5}$ *(Convención Matemática)*

REGLA DEL TANTO POR CIENTO (%)

Caso particular del tanto por cuanto, siendo este último *100*, es decir un tanto por cada *100* .

$$\overbrace{\underbrace{①②③④}_{\text{TANTO}}\ \ldots\ (98)\ (99)\ (100)}^{\text{CIENTO} <> 100}$$

* *3* por ciento < > *3%* (*Convención*)

* $3\% = \frac{3}{100}$

EN GENERAL : $a\% = \frac{a}{100}$

- $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ ....(la mitad)
- $50\%(18) = 9$
- $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$............ (la cuarta parte)
- $25\%\ x = \frac{x}{4}$
- $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ ....(la quinta parte)
- $20\%\ (35) = 7$
- $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
- $12{,}5\% = \frac{12{,}5}{100} = \frac{1}{8}$
- $100\% = \frac{100}{100} = 1$ ....(Total)
- $100\%\ (23) = 23$
- 30% de $70 = \frac{30}{100} \times 70 = 21$ $\left(\begin{matrix}\text{2 ceros se}\\ \text{elimina con \%}\end{matrix}\right)$

RELACIÓN PARTE - TODO

$$\text{FRACCIÓN} = \frac{\text{PARTE}}{\text{TODO}} \times 100\ \%$$

PARTE → Es, son, representa,....

TODO → De, del recpecto de,....

EJEMPLO :

¿Qué porcentaje de *6* es *3*?

$$\frac{ES}{DE} \times 100\%\ \text{Regla Práctica}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{6} \times 100\% = 50\%$$

OPERACIONES ENTRE PORCENTAJES DE UN MISMO NÚMERO

Los porcentajes se pueden sumar o restar si son referidos a una misma cantidad.

EJEMPLOS :

* Si una cantidad aumenta en su *18%* tendremos ahora el *100% +18% = 118%* de la cantidad.

* Si una cantidad disminuye en su *21%* nos quedará el *100% – 21% = 79%* de la cantidad.

* Si en una reunión el *42%* del total son mujeres, entonces el porcentaje de hombres será *:*

100% – 42% = 58% del total.

NOTA *:* Toda la Cantidad representa el *100%* de si mismo.

$$N = 100\%\ N$$

- $N - 20\%\ N = 80\%\ N$ < > *el 20%* menos

• *N + 20% N = 120% N < > el 20%* más

* Cuando nos dicen que se disminuye o se aumenta a un total en términos de porcentajes , debemos considerar que ese total es el ***100%*** de sí mismo .

PIERDO Ó QUITO	ME QUEDA
30%	100% – 30%
40	60%
90%	10%

GANO Ó AUMENTO	TENDRÉ EL :
30%	100% + 30%
40%	140%
200%	300%

• *30% más <> 100% + 30% = 130%*

• *30% menos <> 100% – 30% = 70%*

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Se entiende por descuentos sucesivos aquellos descuentos que se van efectuando uno a continuación de otro, considerando como el nuevo 100% a la cantidad que va quedando.

EJEMPLO ILUSTRATIVO 1 :

¿A qué descuento único equivale los descuentos sucesivos del *10%* y *20%*?

A) 30% *B) 20%* *C) 32%* *D) 28%* *E) 2%*

RESOLUCIÓN :

1er) método

–10% x *–20%(90% x)*

CANTIDAD INICIAL *x* → *90% x* → *80% (90% x)*

100% x → *72% x*

DESCUENTO ÚNICO
DE 100% –72% = 28%

RPTA : "D"

2do) Método (Suposición Adecuada)

Consiste en suponer que la cantidad es como ***100%*** (Total).

–10%(100) *–20%(90)*

INICIO *100* →(*–10*) *90* →(*–18*) *72*

DESCUENTO ÚNICO

100 – 72 = 28

RPTA : 28%

3er) Método (Fórmula) :

$$D_U = \left[D_1 + D_2 - \frac{D_1 \times D_2}{100}\right]\%$$

$$A_U = \left[A_1 + A_2 + \frac{A_1 \times A_2}{100}\right]\%$$

D_U : Descuento Único .

A_U : Aumento Único .

D_1, D_2 : Descuentos Sucesivos .

A_1, A_2 : Aumentos Sucesivos .

* Luego en el problema :

$$D_U = \left[10 + 20 - \frac{10 \times 20}{100}\right] = 28\%$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO 2 :

Tres descuentos sucesivos del *20%*, *50%* y *10%* equivale a un descuento único de :

A) 80% *B) 80%* *C) 62%* *D) 64%* *E) 72%*

RESOLUCIÓN :

–20% *–50%(80)* *–10%(40)*

INICIO *100* →(*–20*) *80* →(*–40*) *40* →(*–4*) *36*

$D_U = 64$

RPTA : "D"

* ***Por fórmula :***

(Tomando primero *2* descuentos y luego el otro)

20%, *50%*, *10%*

$$\left[20 + 50 - \frac{20 \times 50}{100}\right]\% = 60\%$$

* Luego : $D_U = \left[60 + 10 - \dfrac{60 \times 10}{100}\right]\% = 64\%$

EJEMPLO 3 :

¿A qué aumento único equivale los aumentos sucesivos del *10%* y *20%* .

A) 30% *B) 28%* *C) 32%* *D) 40%* *E) 20%*

RESOLUCIÓN :

* Por fórmula :

$$A_U=\left[10+20+\frac{10\times 20}{100}\right]\%=32\%$$

RPTA :"C"

VARIACIÓN PORCENTUAL

EJEMPLO 1 :

Si "R" disminuye en 10% ¿En qué porcentaje disminuirá "R^2"?

A) 10% B) 100% C) 81% D) 19% E) 90%

RESOLUCIÓN :

* (Por suposición adecuada) :

Asumimos que el valor inicial de "R" es 10, para que así "R^2" inicial sea :

$10^2 = 100$ (Como 100%)

	"R"	"R²"
Inicio :	10	→ 100
	−1 (−10% (10))	Se deduce que ha disminuido en 19
Después :	9	→ $9^2=81$

* Luego como $100 <> 100\%$, entonces 19 será el 19%.

RPTA : "D"

EJEMPLO 2 :

¿En qué porcentaje aumenta el área de un cuadrado, cuando su lado aumenta en 20%?

A) 20% B) 21% C) 44% D) 56% E) 80%

RESOLUCIÓN :

LADO	ÁREA=(LADO)
10	$10^2=100$
+2 (+ 20% (10))	Aumenta en 44%
12 →	$12^2=144$

RPTA : "C"

NOTA : ¡importante!

Lo que aumenta o disminuye en una expresión, son las variables y no las constantes, por lo que despreciaremos estas últimas en variaciones porcentuales.

EJEMPLO 3 :

Si el largo de un rectángulo aumenta en 20% y el ancho disminuye en 20%, entonces el área del rectángulo varía en $160\ m^2$, ¿cuál era el área inicial?

A) $200\ m^2$ B) $400\ m^2$ C) $2000\ m^2$

D) $4000\ m^2$ E) $1600\ m^2$

RESOLUCIÓN :

LARGO	×	ANCHO	=	ÁREA
$10x$		$10x$		$100x^2$
$+2x$ (+20%)		$-2x$ (−20%)		Varía en : $4x^2$
$12x$	×	$8x$	=	$96x^2$

* Luego, según enunciado : $4x^2 = 160$

$x^2 = 40$

⇒ Área Inicial : $100x^2 = 100\ (40) = 4000$

RPTA : "D"

EJEMPLO 4 :

Si el área de un círculo aumentó en 300% ¿por cuánto se multiplicó su radio?

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 4 D) $\sqrt{2}$ E) 3

RESOLUCIÓN :

π : se desprecia por ser constante

Área = πR^2	Radio = $\sqrt{Área}$
100 →	10
+300 (= +300% (100))	Se deduce que ha sido multiplicado por "2"
400 →	$\sqrt{400}=20$

RPTA : "B"

EJEMPLO 4 :

Cuando el lado de un cuadrado se incrementa en 30%, resulta que el área aumenta en $621m^2$. calcular el lado inicial del cuadrado.

A) 10 m B) 12 m C) 25 m D) 30 m E) 20 m

RESOLUCIÓN :

LADO	ÁREA=(LADO)²
$10\ x$ →	$100x^2$
$+3x$ (= +30% (10x))	Aumenta en : (Dato) $69x^2=621$, $x=3$
$13\ x$ →	$169x^2$

⇒ Lado Inicial : $10(3)= 30$

RPTA : "D"

EJEMPLO 6 :

En la siguiente expresión : $E=\dfrac{x\times y^2\times\sqrt{z}}{w\times p}$

si «z» disminuye en 10% «y» aumenta en 40% y «p» disminuye en 30%, ¿en qué porcentaje varía «E»?

A) Aumentó en 190% B) Disminuyó en 190%

C) Aumentó en 152% D) Aumentó en 135%

E) Disminuyó en 98%

RESOLUCIÓN :

* Como «x» y «w» no varían, lo despreciamos, luego:

$$E_{INICIO} <> \frac{y^2\sqrt{z}}{p} <> 100\% \frac{y^2\sqrt{z}}{p}$$

* Después : *QUEDARÁN :*

$z - 19\%z = 81\%z = \frac{81z}{100} \quad \wedge \quad y + 40\%y = 140\%y = \frac{7y}{5}$

$p - 30\%p = 70\%p = \frac{7p}{10}$

$$E_{Después} <> 100\% \frac{\left(\frac{7}{5}y\right)^2 \sqrt{\frac{81z}{100}}}{\frac{7p}{10}} <> 252\% \frac{y^2\sqrt{z}}{p}$$

⇒ Variación de «E» : $252\% - 100\% = 152\%$

RPTA : "C"

EJEMPLO 7 :

Un comerciante disminuye sus precios en un ***10%*** con lo que logra aumentar la cantidad vendida en un ***10%***. Sus ingresos ¿aumentan o disminuyen? ¿en cuanto?

A) Aumenta en 2% ***B) No aumenta ni disminuye***
C) Disminuye en 2% ***D) Aumenta en 1%***

RESOLUCIÓN :

* Consideremos :

(PRECIO POR ARTÍCULO)	(CANTIDAD DE ARTÍCULOS)	INGRESO EN SOLES
10	10	100
-1) - 10%	+1) +10%	) Disminuye en 1
9 ×	11 =	99

RPTA : "D"

APLICACIONES COMERCIALES

EJEMPLO EXPLICATIVO :

Un comerciante compró un pantalón en ***S/.50*** y fijá para su venta un precio de ***S/.80***. Sin embargo lo vende en ***S/.70*** debido a que hizo una rebaja de ***S/.10***. Aparentemente está ganando ***S/.20***, pero esta operación le generó gastos por un valor de ***S/.5*** por lo cual realmente está ganando ***S/.15***.

Identificando : **SE CUMPLE :**

Precio de Costo (PC) = S/. 50
Precio de Venta (PV) = S/. 70
Precio Fijado (PF) = S/. 80
Ganancia Bruta (GB) = S/. 20
Descuento o Rebaja (D) = S/. 10
Gastos (G) = S/. 5
Ganancia Neta (GN) = S/. 15

$PV = PC + GB$

$GB = GN + G$

$PF = PV + D$

Para las transacciones comerciales los términos que se utilizan son los siguientes :

P_V → ***Precio de venta***
P_C → ***Precio de costo***
G → ***Ganancia***
p → ***Pérdida***
P_F → ***Precio fijado o Precio de lista (PL)***
D → ***descuento.***

* Donde :

• ***Precio de costo (P_C) :***

Es lo que el comerciante invierte en la adquisición de una mercadería , para luego venderla.

• ***Precio de venta (P_V) :***

Es lo que el cliente paga al comerciante por la compra de la mercadería.

• ***Precio fijado (P_f) :***

Es el valor que pide el comerciante por la mercadería que ofrece.

• ***Ganancia (G) :***

Es la diferencia que se obtiene cuando el precio de venta es mayor que el costo.

• ***Pérdida (p) :***

Es la diferencia que resulta cuando la mercadería se vende a un precio menor del costo.

• ***Descuento (D)***

Es la rebaja que obtiene el cliente al comprar la mercadería a un precio menor que al precio fijado.

EN GENERAL :

* *Si hay ganancia :* $P_V = P_C + G$
* *Si hay pérdida :* $P_V = P_C - p$

Generalmente la ganancias o pérdidas se representan como un tanto por ciento del precio de costo.

Si hay descuentos : $P_V = P_f - D$

Generalmente el descuento se representa como un tanto por ciento del precio fijado.

* Sea :

G_B : Ganancia Bruta
G_N : Ganancia Neta

Se cumple : $P_V = P_C + G_B$

Donde : $G_B = G_N + Gastos$

OBSERVACIONES :

I) En los casos en que hay pérdida se cumple que :

$$P_V = P_C - \text{Pérdida}$$

II) Generalmente las ganancias o pérdidas se representan como un tanto por ciento del precio de

costo .

III) Generalmente las rebajas o aumentos se presentan como un tanto por ciento del precio fijado

EJEMPLO 1 :

Se vende un artículo en ***S/.80*** ganando el ***25%***. ¿Cuál fue el precio de costo?

A) S/.100 B) S/.80 C) S/.64 D) S/. 60 E) S/.50

RESOLUCIÓN :

$$P_V = P_G + G$$

$$\Rightarrow 80 = P_C + 25\% P_C$$

$$\Rightarrow 80 = 125\%\ P_C 8 \Rightarrow 0 = \frac{125}{100} P_C$$

$$\Rightarrow 64 = P_C$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

¿Cuál fue el precio fijado de un artículo que se vendió en ***S/.180*** habiéndose hecho un descuento del ***20%***?

A) S/.200 B) S/.225 C) S/.250 D) S/.300 E) S/.400

RESOLUCIÓN :

$$P_V = P_F - D$$

$$\Rightarrow 180 = P_F - 20\% P_F \Rightarrow 180 = 80\%\ P_F$$

$$\Rightarrow 180 = \frac{80}{100} P_F \Rightarrow 225 = P_F$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 3 :

Un vendedor vende ***2*** autos a ***S/.6000*** cada uno, ganando en el primero el ***20%*** y en el segundo pierde el ***20%*** del precio de compra. ¿Gana o pierde y cuánto?

A) Gana S/.1000 B) Pierde S/.1000 C) Gana S/.5000
D) Pierde S/.500 E) No gana ni pierde

RESOLUCIÓN :

I) PARA EL 1RO.

$P_V = P_C$ + Ganancia

$6000 = x + 20\%\ x$

$\Rightarrow 5000 = x$

II) PARA EL 2DO

$P_V = P_C$ – Pérdida

$6000 = y - 20\%\ y$

$\Rightarrow 7500 = y$

* Luego :

Costo Total : ***5000 + 7500 = 12500***

Venta Total : ***6000 + 6000 = 12000***

* Se deduce que ha existido una pérdida de :

$$12500 - 12000 = 500$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 4 :

Se vende un televisor por ***S/.6000*** ganando el ***20%*** del precio de venta más el ***20%*** del precio de costo . Hallar el precio de costo del televisor .

A) S/.1500 B) S/.2000 C) S/.3000
D) S/.4000 E) S/.4500

RESOLUCIÓN :

$P_V = P_C$ + Ganancia

$$\Rightarrow 6000 = P_C + 20\%\ (6000) + 20\%\ P_C$$

$$\Rightarrow 6000 = 120\%\ P_C + 1200$$

$$\Rightarrow 4800 = \frac{120}{100} P_C \Rightarrow 4000 = P_C$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 5 :

Se vende un artículo en ***150*** soles con una ganancia del ***25%*** sobre el costo. Si se ganó tanto como se descontó. ¿Cuál fue el precio fijado para la venta al público?

A) S/.130 B) S/.238 C) S/.150 D) S/.180 E) S/.243

RESOLUCIÓN :

$$P_V = P_C + G \qquad P_F = P_V + D$$

Dato : Ganó = Descontó = ***25%*** costo

$150 = P_C + 25\%\ P_C$

$\Rightarrow 150 = 125\%\ P_C$

$\Rightarrow 120 = P_C$

$P_F = 150 + 25\%\ P_C$***(Dato)***

$\Rightarrow P_F = 150 + 25\%\ (120)$

$\Rightarrow P_F = 180$

RPTA : "D"

MEZCLAS PORCENTUALES

Cuando nos vamos a la farmacia por alcohol, encontraremos alcohol al ***75%***, alcohol de ***75º*** ó alcohol concentrado al ***75%,*** todas estas expresiones indican que el contenido de cada frasco esta compuesto por :

I) 75% de alcohol puro

II) 25% de agua, donde :

$$\text{Concentración} = \frac{\text{Alcohol Puro}}{\text{Total}} \times 100\%$$

EJEMPLO 1 :

¿Cuántos litros de agua contendrá una mezcla alcohólica de ***160 L*** al ***40%***?

A) 64 L B) 96 L C) 100 L D) 40 L E) 120 L

RESOLUCIÓN :

* Como el ***40% (160)*** es alcohol , entonces el ***60% (160) = 96 L*** será de agua .

RPTA : "B"

EJEMPLO 2 :

Si ***40L*** de una solución contiene ***15L*** de alcohol, ¿cuántos litros de agua se deben agregar para obtener

una solución al *25%*?

A) 8L *B) 10L* *C) 14L* *D) 16L* *E) 20L*

RESOLUCIÓN :

* Debemos agregar «*x*» *L* de agua :

40 L { *Alcohol* —— *Final*: 15 → 25% ; *Agua*: 25 + x —— 75% } *Por Regla de tres simple*

$$15 \times 75\% = (25 + x) \times 25\%$$

$$\Rightarrow 15 \times 3 = 25 + x \Rightarrow 20 = x$$

RPTA : "E"

EJEMPLO 3 :

Se tiene un recipiente de *80L* al *40%*. Se desea obtener una mezcla al *60%*. ¿Cuánto de alcohol puro se le debe agregar?

A) 30 L *B) 40 L* *C) 10 L*
D) 50 L *E) 90 L*

RESOLUCIÓN :

* Debemos agregar «*x*» *L* de Alcohol puro

Inicio 80 { *Alcohol*: 40% (80) ⟶ 32+x —— 60% (3) ; *Agua*: 60% (80) ⟶ 48 —— 40% (2) }

* Por el método del aspa : (regla de tres)

$$(32 + x) \times 2 = 48 \times 3$$

$$\Rightarrow 32 + x = 72 \Rightarrow x = 40$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 4 :

Se tiene una mezcla de agua y vinagre al *20%* de vinagre. Si se añade *2* litros de vinagre, la solución queda al *40%*. ¿Cuántos litros tenía la mezcla original?

A) 8L *B) 4,6 L* *C) 6L* *D) 2L* *E) 10L*

RESOLUCIÓN :

Mezcla Original 100x { *Vinagre*: 20x + 2 —— 40% (3) ; *Agua*: 80x —— 60% (2) }

* Luego : $40x + 4 = 240x$

$$\Rightarrow 2 = 100x$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 5 :

En *40 L* de H_2O hay *1* gramo de azúcar. Si queremos que la mezcla guarde la relación de *0,01* gramos de azúcar por cada *4 L*, ¿cuántos litros de H_2O se deben agregar?

RESOLUCIÓN :

Agua ——— Final (La relación)
40 + x ——— *4*
Azúcar
1 ——— $0{,}01 = \frac{1}{100}$

* Luego : $\frac{1}{100}(40 + x) = 4 \Rightarrow x = 360$

EJEMPLO 6 :

Si un libro de alcohol al *30%* pesa *940 g*. ¿cuánto pesará un litro de alcohol al *50%*?

A) 0,9 kg. *B) 0,74 kg.* *C) 0,8 kg.*

RESOLUCIÓN :

* Debemos saber que :

1 litro de agua pesa *1kg* .

* Es decir : *100% (1L de H_2O) < > 1 kg.*

⇒ *70% (1L de H_2O) < > 700 g*

50% (1L de H_2O) < > 500 g

* Luego :

ALCOHOL PURO		PESO=TOTAL - Peso del agua
3	30% ⟶	940g − 700g = 240g
5	50% ⟶	x − 500g

$$\Rightarrow 3x - 1500 = 1200 \left(\begin{array}{c}\text{Hemos aplicado} \\ \text{Regla de Tres}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = 900\ g \Rightarrow x = 0{,}9\ kg.$$

RPTA : "A"

¿QUÉ ES UNA MEZCLA?

Es la reunión de dos o más sustancias (ingredientes) en cantidades arbitrarias conservando cada una de ellas su propia naturaleza.

¿EN QUÉ CONSISTE LA REGLA DE MEZCLA?

La regla de mezcla se origina por el deseo de los comerciantes en determinar el precio de venta de una unidad de medida de la mezcla. Para ello se vale de algunos procedimientos aritméticos, lo cual en su conjunto constituye la «Regla de Mezcla».

EJEMPLO INDUCTIVO :

Un comerciante hace el siguiente pedido a un distribuidor mayorista de café.

CAFÉ	CANTIDAD EN KG.	PRECIO UNITARIO
Extra (E)	50	S/. 7
Superior (S)	20	S/. 5
Corriente (C)	15	S/. 4

Para venderlo a sus clientes el comerciantes mezcla los tres tipos de café.

¿A cómo debe vender el *Kg* . la mezcla para ganar el *20%*

RESOLUCIÓN :

Para determinar dicho precio de venta el comerciante procede del siguiente modo :

1ro) determinar el costo de su inversión.

Cantidades : *(Kg.)* **50** **20** **15**

Precios Unitarios S/.	7	5	4
Costos Parciales S/.	350	100	60

Costo total = $350 + 100 + 60 = S/. 510$

Peso total = $50 + 20 + 15 = 85\ kg.$

2do) Calcular el costo por unidad de medida *(Kg.)* de la mezcla a este costo por *Kg* . se le denomina precio medio (P_m) ya que es un precio que no genera ganancia ni ocasiona pérdida .

$$\begin{pmatrix}\text{costo por 1Kg.}\\ \text{de mezcla}\end{pmatrix} = P_m = \frac{S/.510}{85} = S/.6$$

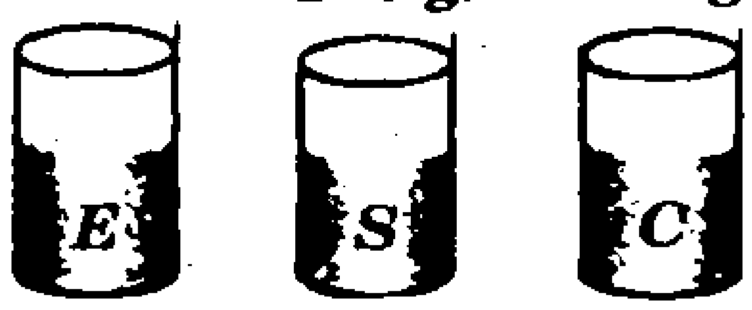
Se observa también que :

Además : $S/.\ 4 < S/.\ 6 < S/.\ 7$

$$\begin{pmatrix}\text{MENOR}\\ \text{PRECIO}\end{pmatrix} < P_m < \begin{pmatrix}\text{MAYOR}\\ \text{PRECIO}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{(\text{Costo total})}{(\text{Peso total})}$$

Cantidades : **50 kg.** **20 kg.** **15 kg.**



Precios Unitarios (S/.)	7	5	4
Precios Medios (S/.)	6	6	6
SUCEDE QUE :	PIERDE	GANA	GANA

En Total :

S/.1 por kg.		S/.1 por Kg.		S/.2 por kg.
S/. 50	=	S/. 20	+	S/. 30
S/. 50	=	S/. 50		

Si comparamos los precios unitarios con el precio medio se observa que :

La pérdida y ganancia es aparente ya que al final se compensan.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

3ro) Sobre el precio medio el comerciante determina el precio de venta :

Precio de Venta = $S/.\ 6 + 20\%\ (S/.6) = S/.\ 7.20$

Concluyendo que :

$$\frac{\text{Precio}}{\text{Venta}} = \frac{\text{Precio}}{\text{medio}} + \text{Ganancia}$$

En general para una mezcla de k sustancias tendremos :

Sustancias :

Cantidades : C_1 C_2 C_3 ... C_k

Precio Unit : P_1 P_2 P_3 ... P_k

Se cumple que :

$$I)\ \frac{\text{PRECIO}}{\text{MEDIO}} = \frac{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + \ldots + C_kP_k}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_k}$$

Mejor aún : $\dfrac{\text{PRECIO}}{\text{MEDIO}} = \dfrac{\text{Costo Total}}{\text{Peso Total}}$

$$II)\ \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{menor}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{medio}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{mayor}\end{pmatrix}$$

$$III)\ \begin{pmatrix}\text{Ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$IV)\ \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{Venta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Precio}\\ \text{medio}\end{pmatrix} + \text{Ganancia}$$

EJEMPLO 7 :

Carlos mezcla **40** litros de alcohol de **S/.6** el litro, con **60** litros de alcohol de **S/.11** el litro . ¿Cuál será el precio promedio de la mezcla?

A) S/. 8 B) S/. 9 C) S/. 8,5 D) S/. 9,5 E) S/. 10

RESOLUCIÓN :

$$\text{Precio medio} = \frac{40(6) + 60(11)}{40 + 60} = 9$$

RPTA : "B"

* En general para ***k*** tipos de alcohol :

Tipo :

Volumen : V_1 V_2 V_3 .... V_k

Grado : G_1 G_2 G_3 .... G_k

$$\begin{pmatrix}\text{Grado}\\ \text{medio}\end{pmatrix} = \frac{V_1G_1 + V_2G_2 + V_3G_3 + \ldots\ldots + V_kG_k}{V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots + V_k}$$

MEZCLA ALCOHÓLICA INVERSA

Datos : G_x = grado del alcohol *x*

G_y = grado del alcohol *y*

G_m = grado de la mezcla ó grado medio

$$G_y < G_m < G_x$$

Incógnita :

Volúmenes : $\longrightarrow$ (x,y)

NOTA :

Una mezcla inversa se caracteriza por que se conocen el grado medio y los grados parciales, pero no las cantidades, cuando se utiliza agua, ésta se considera como grado cero.

Regla De Mezcla Inversa : Trata de calcular las proporciones en que intervienen los ingredientes, conocidos los precios unitarios y precio medio.

Datos : P_x = precio unitario x

P_y = precio unitario y

P_m = precio medio

$$P_y < P_m < P_x$$

Incógnitas :

Ingredientes : x , y

RESOLUCIÓN :

I) Al vender (x) unidades se pierde $(P_x - P_m)x$

II) Al vender (y) unidades se gana $(P_m - P_y)y$

Pero como en la mezcla no se gana ni se pierde, entonces :

$$(P_x - P_m)x = (P_m - P_y)\,y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{P_m - P_y}{P_x - P_m}$$

como regla práctica :

$x:\ P_x \searrow\ \ \nearrow P_m - P_y$

P_m — **MÉTODO DEL ASPA**

$y:\ P_y \nearrow\ \ \searrow P_x - P_m$

EJEMPLO 8 :

Fernando tiene ***100*** litros de una mezcla que contiene vino de ***S/.4*** y ***S/.8*** el litro. Si el precio medio de la mezcla es ***S/.6,60***. ¿Cuántos litros de vino más barato hay en la mezcla?

A) 40 ***B) 35*** ***C) 45*** ***D) 55*** ***E) 30***

RESOLUCIÓN :

		CANTIDADES
8	2,6	13k
4	1,4	7k
		20k = 100
		k = 5

$\Rightarrow$ Número de litros del más barato : ***7(5)= 35***

RPTA : "B"

ALEACIÓN

Es la mezcla de dos o más metales mediante el proceso de fundición. En las aleaciones por convencionalismo los metales se clasifican en :

A) Finos – Oro, plata, platino

B) Ordinarios – Cobre, hierro, zinc

La pureza de una aleación se determina mediante la relación entre el peso del metal fino empleado y el peso total de la aleación a dicha relación se le conoce como la ley de la aleación.

Ejemplo Ilustrativo :

EJEMPLO 1 :

Se tiene una aleación de ***36g*** de plata pura con ***12g*** de zinc, ¿cuál es la ley ó relación entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación?

A) 0,720 ***B) 0,750*** ***C) 0,891***

D) 0,9 ***E) 0,870***

RESOLUCIÓN :

	Plata	Zinc	Total
Peso :	36g	12g	48

$$\Rightarrow Ley = \frac{Peso\ plata}{Peso\ total} = \frac{36}{48} = 0{,}750$$

RPTA : "B"

OBSERVACIÓN :

A la relación del peso del metal ordinario con el peso total se le conoce como la liga de la aleación :

$$\bullet\ Liga = \frac{Peso\ zinc}{Peso\ total} = \frac{12}{48} = 0{,}250$$

Se deduce que :

• Ley + Liga = ***0,750 + 0,250 = 1***

EN GENERAL :

Para una aleación :

Peso metal fino	Peso metal ordinario

I) $$Ley = \frac{Peso\ metal\ fino}{peso\ total}$$

II) $$Liga = \frac{Peso\ metal\ ordinario}{peso\ total}$$

Ley de la aleación

III) $$0 \le \left(\begin{matrix}Ley\ de\ la\\ aleación\end{matrix}\right) \le 1$$

EJEMPLO 2 :

Se tiene una sortija de oro en la cual se han utilizado para su confección : ***9 g*** de oro puro y ***3g*** de cobre. ¿Cuál es la ley de la sortija?

Oro	Cobre	
9g	3g	Total 12 g

$$\Rightarrow Ley = \frac{9}{12} = 0,750$$

OBSERVACIÓN :

Comercialmente la ley del oro se expresa en quilates y para ello convencionalmente se establece que si la aleación contiene sólo oro puro, es de ***24*** quilates.

• Una sortija de ***14*** quilates significa que el peso total se divide en ***24*** partes iguales y ***14*** de ellos son de oro puro.

• En el caso del ejemplo vamos a determinar su ley en quilates.

ORO	COBRE	TOTAL
9 g	3g	12 g
18	6	24 partes (×2)

Ley = ***18*** quilates

$Ley = \frac{9}{12} = \frac{18}{24} =$ de donde se obtiene :

$$Ley = \frac{(Peso\ metal\ fino)}{(Peso\ total)} = \frac{N^{\circ}\ de\ kilates}{24}$$

ALEACIÓN DIRECTA :

Peso total de cada lingote : $P_1 ; P_2 ; P_3 ; \ ...... \ P_n$

Incógnita : ***L***= Ley de aleación resultante:

$$L = \frac{L_1P_1 + L_2P_2 + L_3P_3 + ... + L_nP_n}{P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n}$$

ALEACIÓN INVERSA :

Datos :

L_x = ley del lingote x

L_y = ley del lingote y

L_R = ley del lingote resultante

incógnitas :

pesos de los lingotes ***x, y***

RESOLUCIÓN :

$x : L_x \qquad L_R - L_y$

$y : L_y \qquad L_x - L_R$

$$\frac{x}{y} = \frac{L_R - L_y}{L_x - L_R}$$

EJEMPLO 3 :

Una barra de oro de ***14*** quilates pesa ***42g*** ¿qué peso de oro puro se le debe añadir para obtener una ley de ***18*** quilates?

A) 28g ***B) 42*** ***C) 14*** ***D) 22*** ***E) 26***

RESOLUCIÓN :

14	6	3k = 42 (Dato)
24	4	2k

$\Rightarrow K = 14$

* Pero piden : ***2k = 28 g***

RPTA : "A"

APLICACIONES :

01 Un litro de leche pura pesa ***1030*** gramos. Si se han comprado ***161,4*** litros de leche y estos pesan ***165,420 kg***, determinar ¿Cuántos litros de agua contiene esta leche?

A)25 litros ***B)26*** ***C)27,4*** ***D)30*** ***E)45***

02 Se mezcla dos tipos de harina ***A*** y ***B***. Dan como peso total ***180*** gramos que ***1 kg*** de ***A*** cuesta ***S/. 5*** y ***1 kg*** de ***B*** cuesta ***S/. 8*** y el precio medio de la mezcla cuesta ***S/. 6.*** Calcule las cantidades que intervienen de cada harina.

RPTA :...

03 Qué cantidades de café de ***S/. 50*** el kilogramo y el ***S/. 40*** el kilogramo harán falta para formar una mezcla de ***30 kg*** de café que se puede vender a ***S/. 42*** el ***kg*** sin ganar ni perder?

RPTA :...

04 En una corona se tiene ***42g.*** de oro puro y ***30 g*** de cobre. ¿Cuantos Kilates tiene la corona?

RPTA :...

05 Se funden ***16 g*** de plata con ***24 g*** de zinc. Determine la ley y la liga de la aleación

RPTA :...

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Una empresa consume *40%* de su materia prima disponible, lo que le queda excede en *57Kg*. a lo gastado. ¿Cuántos kilogramos de materia prima disponible tenía la empresa?

A) 228 B) 342 C) 570 D) 285 E) 171

RESOLUCIÓN :

* Sea *100%* la materia prima disponible.
* Si consume el *40%*

lo que le queda es *60%*

* Según dato : *60% <> 40% + 57*
* De donde : *20% <> 57*

Si el *20%* es *57* el *100%* es $57 \times 5 = 285\ Kg$.

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Del total de conferencistas, el *60%* son mujeres. De ellas el *30%* disertan por primera vez ; mientras que de los varones, el *50%* lo hace por primera vez . El porcentaje de los conferencistas que disertan por primera vez es :

A) 38% B) 42% C) 30% D) 45% E) 35%

RESOLUCIÓN :

* Del total *(100%)* : $\begin{cases} Mujeres : 60\% \\ Varones : 40\% \end{cases}$
* Mujeres que disertan por primera vez será :

30% de 60% = 18% (total)

* Varones que disertan por primera vez será :

50% de 40% = 20% (total)

⇒ Total que disertan por primera vez:

18% + 20% = 38% (Total)

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En una sala de emergencia registramos el *40%* de personas enfermas por afección bronquial , y el *60%* de personas enfermas por accidente. De los que padecen afección bronquial el *10%* están graves y de los accidentados el *5%* están graves. ¿Qué porcentaje de personas están en la condición de graves?

A) 15% B) 12% C) 17% D) 7% E) 10%

RESOLUCIÓN :

* Sea *«T»* el número total de personas en la sala de emergencia de las cuales :
* Luego se tiene que :

de personas accidentadas = *60% T*

de personas con afección bronquial = *40% T*

* Número de personas que están en la condición de graves = *5%(60% T)+10%(40% T)=7%T*

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Si el *80%* del *50%* de *«M»* es el *30%* de *«N»*, ¿qué porcentaje de *(2M+7N)* es *(M+N)*?

A) 14,5% B) 20,5% C) 19,5% D) 20% E) 18%

RESOLUCIÓN :

$$80\% \times 50\% \times M = 30\%\, N \Rightarrow \frac{M}{3} = \frac{N}{4} \begin{cases} M = 3k \\ N = 4k \end{cases}$$

* Piden :

$$\frac{M+N}{2M+7N} \times 100\% = \frac{7k}{6k+28k} \times 100\% = 20{,}5\%$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

En una compañía trabajan *250* personas donde el *80%* son hombres. ¿Cuántas mujeres deben contratarse para que el *60%* del personal sean mujeres?

A) 200 B) 250 C) 120 D) 240 E) 350

RESOLUCIÓN :

Inicio 250 $\begin{cases} \text{Hombres} \\ 80\%\,(250) \longrightarrow 200 \text{ — } \overset{2}{\cancel{40\%}} \\ \text{Mujeres} \\ 20\%\,(250) \longrightarrow 50 + x \text{ — } \underset{3}{\cancel{60\%}} \end{cases}$

⇒ *600=100 + 2x*

⇒ *250=x*

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

He jugado *450* partidas de solitario con una tasa de éxito del *80%* ¿Cuál es el mínimo número de partidas adicionales que debo jugar para elevar mi tasa de éxito a *90%*?

A) 10 B) 45 C) 50 D) 250 E) 450

RESOLUCIÓN :

* Si de las *450* partidas la tasa de éxito es del 80% entonces las partidas perdidas es el *20%* de *450* o sea : *20% (450) = 90*

Si queremos elevar la tasa de éxito al *90%*, las partidas adicionales las deberá ganar, es decir el número de partidas perdidas no se va a incrementar, por lo cual del nuevo total las partidas deberá ser el *10%*, sea *x* las partidas adicionales plantearemos :

$$90 = 10\%\,(450 + x) \Rightarrow x = 450$$

RPTA : "E"

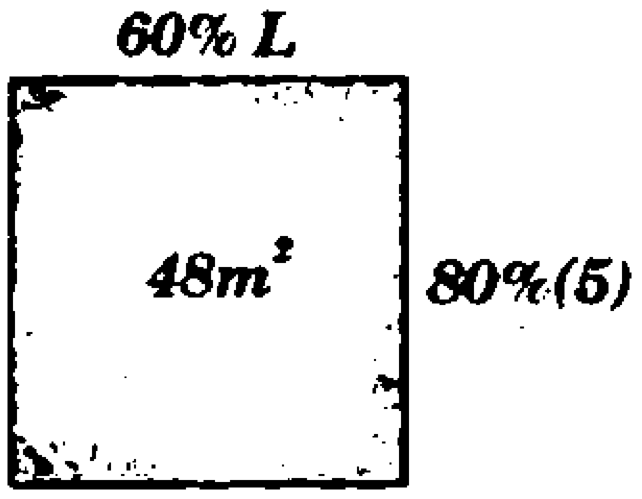
PROBLEMA 7 :

Una tela al lavarla se encoge el ***20%*** de su ancho y el ***40%*** de su largo si la tela tiene ***5m***. de ancho . ¿Qué longitud debe comprarse si se necesitan ***48m²*** de tela después de lavarla?

A) 30 m. ***B) 25 m.*** ***C) 20 m.*** ***D) 18 m.*** ***E) 24 m.***

RESOLUCIÓN :

* Después de lavada quedará como se muestra :



$$60\%\,L \times 80\%(5) = 48$$

$$\Rightarrow \frac{60}{100}L \times \frac{80}{100}(5) = 48$$

$$\Rightarrow L = 20m.$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Antonio tiene un auto que vale ***US$ 10000,*** el cual lo vende a Juan con una ganancia del ***10%***. Luego de un mes Juan revende el auto a Antonio con una pérdida del ***10 %*** . Entonces :

A) Antonio gana US$ 900

B) Antonio gana US$ 1 000

C) Antonio gana US$ 1 100

D) Antonio gana US$ 2 100

E) Juan pierde US$ 1 000

RESOLUCIÓN :

• A Juan el auto le cuesta : $\frac{110}{100}$ ($1000)=$11000 ;

y cuando revende el auto a Antonio, lo hace perdiendo : $\frac{10}{100}$ ($11000)=$1100

• Finalmente, esos ***$1100*** que ***pierde*** Juan, representa la ganancia de Antonio.

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Un profesor del ***MARTE_UNI*** compra una caja con tizas que acaban de sufrir un aumento en su precio del ***5%***. Si no hubieran aumentado. podría haber comprado por la misma suma de dinero , ***3*** tizas más. ¿Cuántas tizas compró?

A) 57 ***B) 60*** ***C) 63*** ***D) 69*** ***E) 72***

RESOLUCIÓN :

* Llamemos ***"p"*** al precio de cada tiza antes del aumento, y ***"x"*** al número de tizas que compró el profesor :

$$\Rightarrow \textit{Dinero Invertido} = \frac{105}{100}px = p(x+3)$$

$$\Rightarrow x = 60$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

El precio de un artículo se aumenta en ***p%*** . Después el nuevo precio se disminuye en ***p%***. Si el último precio era de ***S/.1,*** entonces el precio original era:

A) $\frac{1-p^2}{200}$ B) $\frac{\sqrt{1-p^2}}{200}$ C) 1 D) $1-\frac{p^2}{10^4-p^2}$ E) $\frac{10^4}{10^4-p^2}$

RESOLUCIÓN

• Sea ***"x"*** el precio original del artículo.

• Luego del aumento valdrá $\left(\frac{100+p}{100}\right)x$

• Luego de la disminución valdrá : $\left(\frac{100-p}{100}\right)\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)x\right]$

• *Por dato* $\frac{(100-p)(100+p)}{100^2} \times x = 1$

$$\Rightarrow x = \frac{100^2}{100^2-p^2} = \frac{10^4}{10^4-p^2}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Si gastara el ***30%*** del dinero que tengo y ganara el ***28%*** de lo que me quedaría perdería ***156*** soles. ¿Cuánto tengo?

A) S/.1450 ***B) S/.1400*** ***C) S/.1750***
D) S/.1500 ***E) S/.1550***

RESOLUCIÓN :

Tengo → $x = 100\%\,x$; −30% → QUEDARÍA: $70\%\,x$; +28% (70% x) → TENDRÍA: $128\%(70\%\,x)$

* Luego perdería : $100\%x - 128\%(70\%)x = 156$

$$\Rightarrow x - \frac{128}{100} \times \frac{70}{100}x = 156 \Rightarrow \frac{104x}{1000} = 156$$

$$\Rightarrow x = 1500$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Un boxeador debe retirarse cuando tenga un ***90%*** de triunfo . Si hasta el momento ha peleado ***100*** veces y ha obtenido ***85*** victorias, ¿cuántas peleas como mínimo debe realizar para poder retirarse?

A) 50 ***B) 35*** ***C) 48*** ***D) 52*** ***E) 30***

RESOLUCIÓN :

Número de peleas adicionales : x ⟶ ***Deben ser victorias***

Inicio 100 { ***Victorias*** $85 + x$ —— ~~90%~~ 9 ; ***Derrotas*** 15 —— ~~10%~~ 1 }

* Luego por regla de Tres : $85 + x = 135$

$$\Rightarrow x = 50$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

En una reunión se sabe que el ***30%*** del número de hombres es igual al ***40%*** del número de mujeres. ¿Qué porcentaje del total son hombres?

A) 62%   B) 53,5%   C) 57,1%   D) 82,5%   E) 42%

RESOLUCIÓN :

* Dato : $30\%H = 40\%M$

$$3H = 4M$$

$$\frac{H}{4} = \frac{M}{3} \begin{cases} H = 4k \\ M = 3k \end{cases}$$

* Piden :

$$\text{SON DEL } \frac{Hombres}{Total} \times 100\% = \frac{4k}{4k + 3k} \times 100\%$$

$$= \frac{400}{7}\% = 57,1\%$$

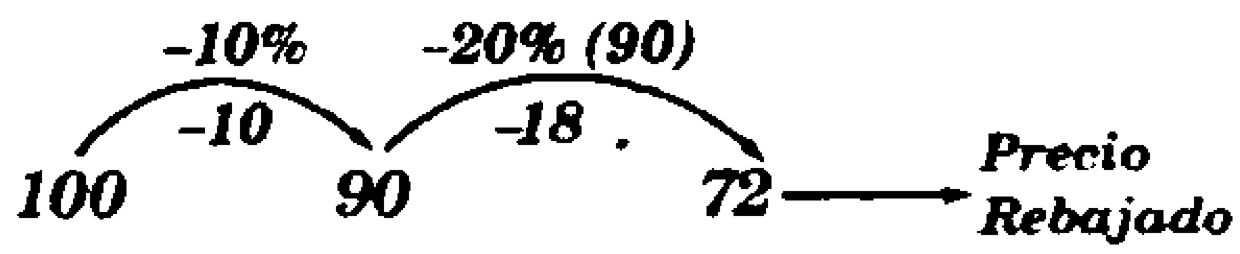
RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Se rebaja el precio de un artículo en ***10%*** y ***20%*** sucesivamente. ¿En que tanto por ciento debe incrementarse el precio rebajado para que el nuevo precio sea ***8%*** más que el precio original?

A) 84%   B) 50%   C) 63%   D) 59%   E) 75%

RESOLUCIÓN :



• Pero deseo un precio de :

$$100 + 8\%(100) = 108$$

• Por lo que a ***72*** le debo incrementar $108 - 72 = 36$, pero en porcentaje será :

$$\frac{36}{72} \times 100\% = 50\%$$

RPTA : "B"

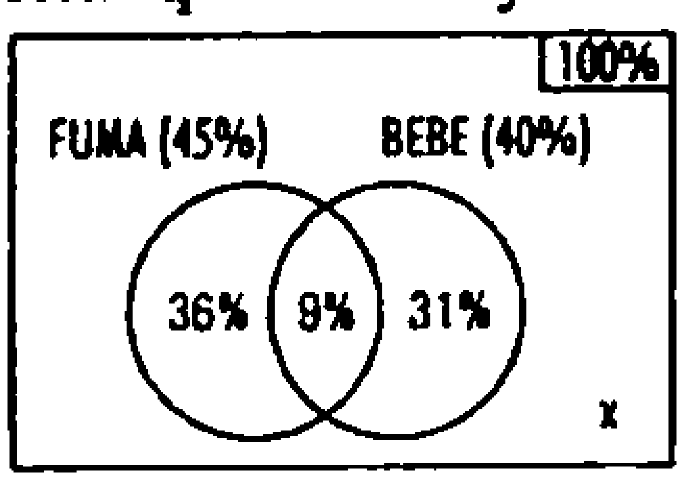
PROBLEMA 15 :

En una ciudad el ***45%*** de la población fuma, el ***40%*** bebe. Si el ***20%*** de los que fuman también beben. ¿qué % de la población no fuma ni bebe?

A) 5%   B) 15%   C) 30%   D) 35%   E) 24%

RESOLUCIÓN :

• # de personas que fuman y beben : $20\%(45\%) = 9\%$



* Del diagrama :

$$36\% + 9\% + 31\% + x = 100\%$$

$$\Rightarrow x = 24\%$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 16 :

En un colegio, el ***40%*** de los alumnos son varones. A una excursión han ido el ***20%*** de los varones y el ***30%*** de las mujeres. ¿Qué porcentaje del total de alumnos salió de excursión?

A) 30%   B) 26%   C) 38%   D) 45%   E) N.A.

RESOLUCIÓN :

TOTAL	VARONES	MUJERES
100%	40%	60%

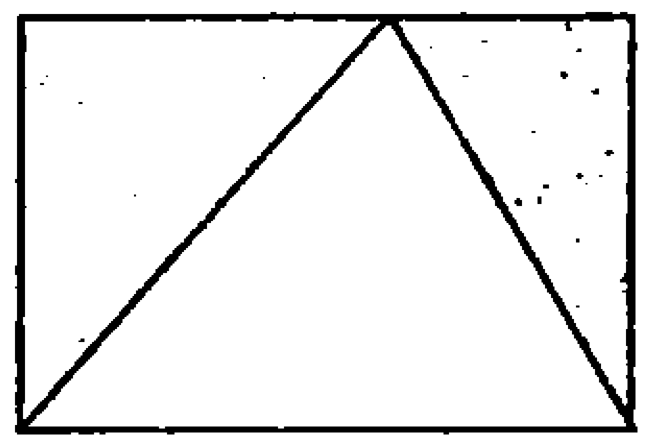
* De Paseo : $\underbrace{20\%(40\%)}_{8\%} + \underbrace{30\%(60\%)}_{18\%} = 26\%$

RPTA :"B"

PROBLEMA 17 :

¿Qué porcentaje de la región sombreada es la región no sombreada?

A) 50%
B) 100%
C) 40%
D) 30%
E) 60%

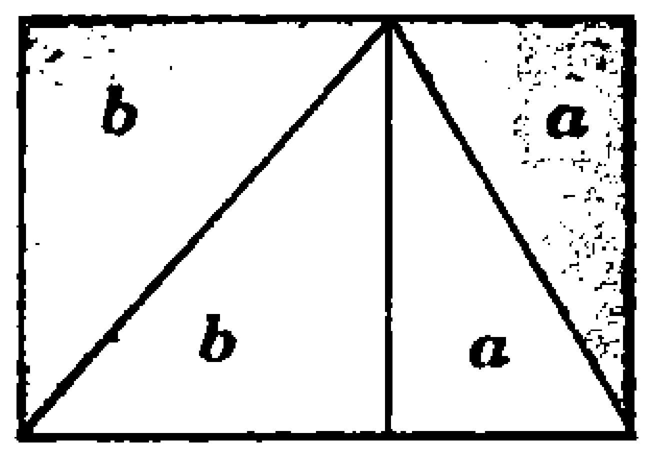


RESOLUCIÓN:

* Piden:

$$\frac{\text{No Sombreado}}{\text{Sombreado}} \times 100\%$$

$$\frac{a+b}{a+b} \times 100\% = 100\%$$

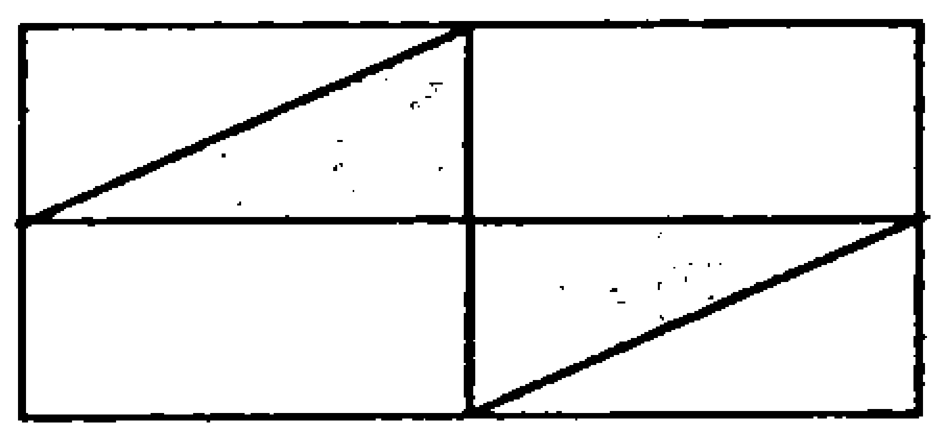


RPTA :"B"

PROBLEMA 18 :

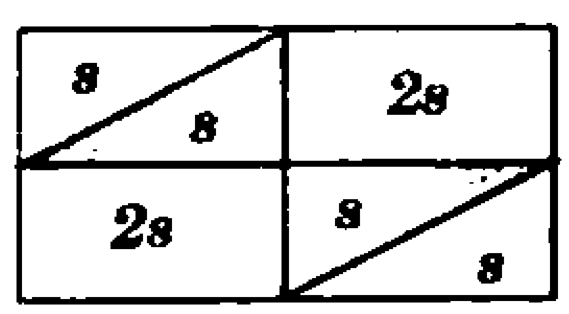
En la figura mostrada. ¿Qué porcentaje del área total representa el área sombreada?

A) 50%
B) 10%
C) 15%
D) 20%
E) 25%



RESOLUCIÓN :

* Piden:



$$\frac{Sombrero}{Total} \times 100\%$$

$$\Rightarrow \frac{2S}{8S} \times 100\% = 25\%$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 19 :

Si el ancho de un rectángulo se aumenta en **25%**, para que su área no varíe el ancho debe disminuir en:

A) 10% B) 20% C) 25% D) 30% E) 50%

RESOLUCIÓN :

$$\frac{LARGO}{100} \times \frac{ANCHO}{100} = \frac{ÁREA}{1000}$$

+25% (+25)   −x% (−x)

$$125 \times (100-x) = 1000$$

$$\Rightarrow 100 - x = 80$$

$$\Rightarrow 20 = x$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 20 :

Un micro tiene **70** pasajeros, de los cuales el **70%** están sentados, de las mujeres el **80%** y únicamente **10%** de los hombres. ¿Cuántos hombres viajan en el micro?

A) 10 B) 15 C) 12 D) 22 E) N.A.

RESOLUCIÓN :

TOTAL	HOMBRES	MUJERES
70	x	70 − x

Sentados (*Según enunciado*):

$$70\%(70) = 10\%x + 80\%(70 - x)$$

$$\Rightarrow 4900 = 10x + 5600 - 80x$$

$$\Rightarrow 70x = 700 \Rightarrow x = 10$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 21 :

Se tiene una mezcla alcohólica de **240L**, donde el volumen de agua representa el **60%** del volumen de alcohol puro. ¿Cuántos litros de alcohol puro se debe echar a la mezcla para obtener una mezcla alcohólica de **80º**?

A) 210 L B) 180 L C) 150 L D) 270 L E) 300 L

RESOLUCIÓN :

60%

$$Agua + Alcohol = 240$$

$$60x \quad 100x$$

$$160x = 240$$

$$x = \frac{3}{2}$$

* Luego :

ALCOHOL: $100\left(\frac{3}{2}\right) \longrightarrow 150 + y$ —— ~~80º~~ 4

AGUA

$60\left(\frac{3}{2}\right) \longrightarrow 90$ —— ~~20º~~ 1

$$\Rightarrow 150 + y = 360$$

$$\Rightarrow y = 210$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 22 :

Una tela al lavarla se encoge el **20%** de su ancho y el **40%** de su largo . si la tela tiene **5m** de ancho , ¿qué longitud debe comprarse si se necesitan **48 m²** de tela después de lavarla?

A) 35 m B) 20 m C) 23 m D) 32 m E) 16 m

RESOLUCIÓN :

Largo × Ancho = Área

Inicio : x 5

− 40%   −1 −20% (5)

Después de que se encoge : $60\%x \times 4 = 48$

$$x = 20$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 23 :

Si la base de un triángulo se incrementa en un **30%** y su altura se disminuye en un **20%**, ¿cómo varía el área?

A) −10% B) + 4% C) − 4% D) − 2% E) + 2%

RESOLUCIÓN :

* Área del Triángulo : $\frac{B \times H}{2}$ ⟶ *se desprecia* (el 2)

$\Rightarrow$ *Base × Altura = Área*

10   10   100

+3 (+30%)   −2 (−20%)   Aumenta en 4

$$13 \times 8 = 104$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 24 :

En una Universidad Particular , el Dpto . de Servicio social decide rebajar las pensiones de enseñanza a los estudiantes de menores recursos económicos en un **20%** y aumentar un **30%** al resto . Si el monto total de las pensiones queda disminuido en un **10%** con esta política. ¿Qué porcentaje de la pensión total representa la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

A) 50% B) 82% C) 79% D) 80% E) 85%

RESOLUCIÓN :

Sean:

x = monto total de las pensiones de los estudiantes de menores recursos.

y = monto total de las pensiones del resto de estudiantes.

* Según el enunciado:

$$80\%\,x + 130\%\,y = 90\%(x + y)$$

$$\Rightarrow x = 4y$$

* La relación pedida es :

$$\frac{x}{x+y}\times 100\% = \frac{4y}{5y}\times 100\% = 80\%$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25 :

Se compran ***15*** cuadernos con una rebaja del ***20%*** del precio de lista , por esta compra le reglan ***5*** cuadernos . Si todos los cuadernos se venden a ***S/.24*** , a un precio unitario que es el ***20%*** más que el precio de lista. Hallar la relación entre la ganancia total y la venta total.

A) 1/4 B) 1/2 C) 3/5 D) 3/4 E) 2/5

RESOLUCIÓN :

Precio de lista unitario = P_L

Precio de compra unitario = P_C

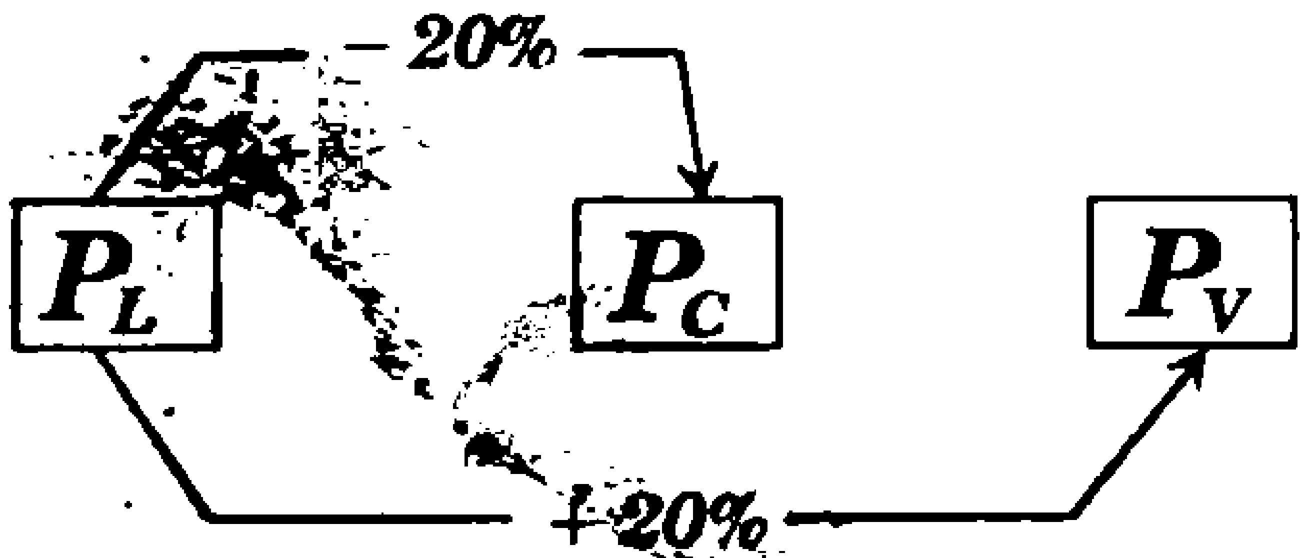
Precio de venta unitario = P_V

Precio de compra total = P_{CT}

Precio de venta total = P_{VT}

Ganancia total = G_T

* Se sabe : $G_T = P_{VT} - P_{CT}$



* Luego: $P_V = \frac{24}{20} = S/.1,20$

• $120\%\ P_L = P_V \Rightarrow 120\%\ P_L = S/.1,20$

$$P_L = \frac{1,20}{120\ \%} \Rightarrow P_L = S/.1,00$$

• $80\%\,P_L = P_C \Rightarrow 80\%(1,00) = P_C$

$$\frac{4}{5}(1,00) = P_C \Rightarrow 80\%(1,00) = S/.0,80$$

• $P_{CT} = 0,80 \times 15 = S/.12$

• $G_T = 24 - 12 = S/.12$

• Se sabe $P_{VT} = S/.24$

* Finalmente : $\frac{G_T}{P_{VT}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Un padre reparte entre sus ***2*** hijos una propiedad de ***S/.11250.*** Si el mayor hubiese recibido ***20%*** menos y el menor ***30%*** menos , ambos recibirían lo mismo. ¿Cuánto dinero recibió el hermano mayor?

A) 6000 B) 6500 C) 4750 D) 5250 E) 5000

RESOLUCIÓN :

* Sea A lo que recibe el mayor y B lo que recibe el menor, luego : $A + B = 11250$

* Del enunciado :

$$80\%\,A = 70\%\,B \Rightarrow 8A = 7B$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{A}{A+B} = \frac{7}{7+8}$$

* De : $\frac{A}{11250} = \frac{7}{15}$

* Resolviendo : $A = 5250$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Determinar cuánto pesa ***1*** litro de una mezcla que contiene ***70%*** de agua y ***30%*** de alcohol . Si el litro de agua pesa ***1Kg*** y el litro de una mezcla de ***75%*** de alcohol y ***25%*** de agua pesa ***960 g*** .

A) 1024 g B) 984 g C) 849 g
D) 1214 g E) 924 g

RESOLUCIÓN :

1 ℓ de agua (H_2O) pesan ***1000 g***

1 ℓ de mezcla ***(1ra)*** pesa ***960 g***

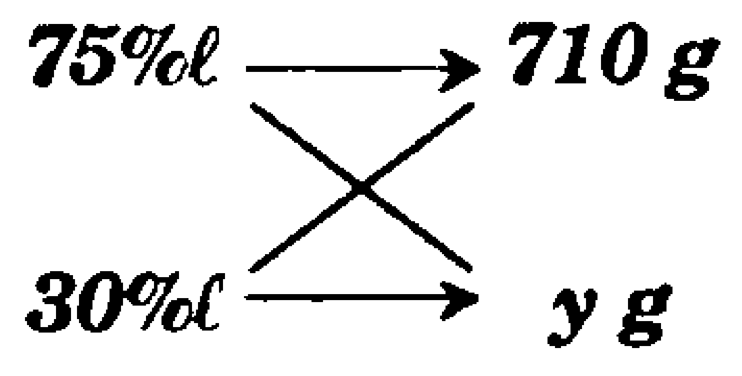
$H_2O : 25\%\ \ 1000 = 250\ g$

$OH\ : 75\%\ \ell$ pesan $= 960 - 250 = 710\ g$

1 ℓ de mezcla ***(2da)*** pesan xg

$$\left.\begin{array}{l} H_2O : 70\%\ \ 1000 = 700\ g \\ OH\ : 30\%\ \ell\ pesan = \frac{y\ g}{x\ g} \end{array}\right\}+$$

* Luego:



$$\Rightarrow y = \frac{30\%710}{75\%} = 284g$$

* Peso pedido : $x = 700 + y = 984\ g$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

En una fiesta el número de hombres era el doble del número de mujeres, luego se retiran el ***35%*** de los hombres , pero llegan enseguida ***90*** mujeres, resultando tantos hombres como mujeres . ¿Cuántas mujeres habían inicialmente?

A) 150 B) 200 C) 250 D) 300 E) 350

RESOLUCIÓN :

	NÚMERO DE HOMBRES	NÚMERO DE MUJERES
AL INICIO	$2x$	x

*Después : $65\%\,(2x) = x + 90$

$\Rightarrow x = 300$

RPTA :"D"

PROBLEMA 29 :

En la ***UNMSM*** el ***30%*** de los alumnos son mujeres . Si el ***20%*** de mujeres y el ***30%*** de los hombres salen de paseo. ¿qué porcentaje de los alumnos de la ***UNMSM*** fue al paseo?

A) 25% B) 27% C) 29% D) 31% E) 33%

RESOLUCIÓN :

* Total : $100x$

	MUJERES	VARONES
TOTAL	$30x$	$70x$
DE PASEO	$20\%\,(30x)$	$30\%\,(70x)$

* Piden : $6x + 21x = 27$

ES ⟶ / DE ⟶ $\dfrac{27x}{100x} \times 100\% = 27\%$

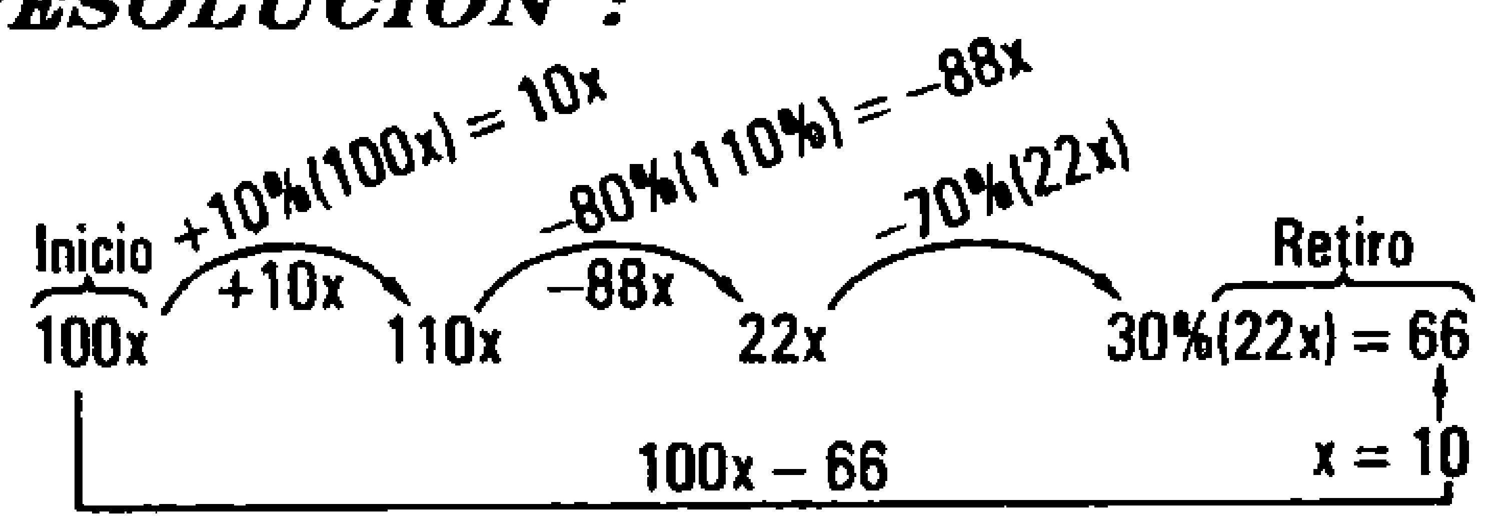
RPTA :"B"

PROBLEMA 30 :

Una persona apostó todo su dinero ganando el ***10%***, luego apostó lo que tenía perdiendo el ***80%*** y por última vez apuesta todo el dinero que le queda perdiendo el ***70%*** con lo cual se retiró únicamente con ***S/. 66***. Calcular cuánto dinero perdió.

A) 880 B) 1034 C) 834 D) 934 E) 960

RESOLUCIÓN :



* Perdió : ***100 (10) − 66 = 934***

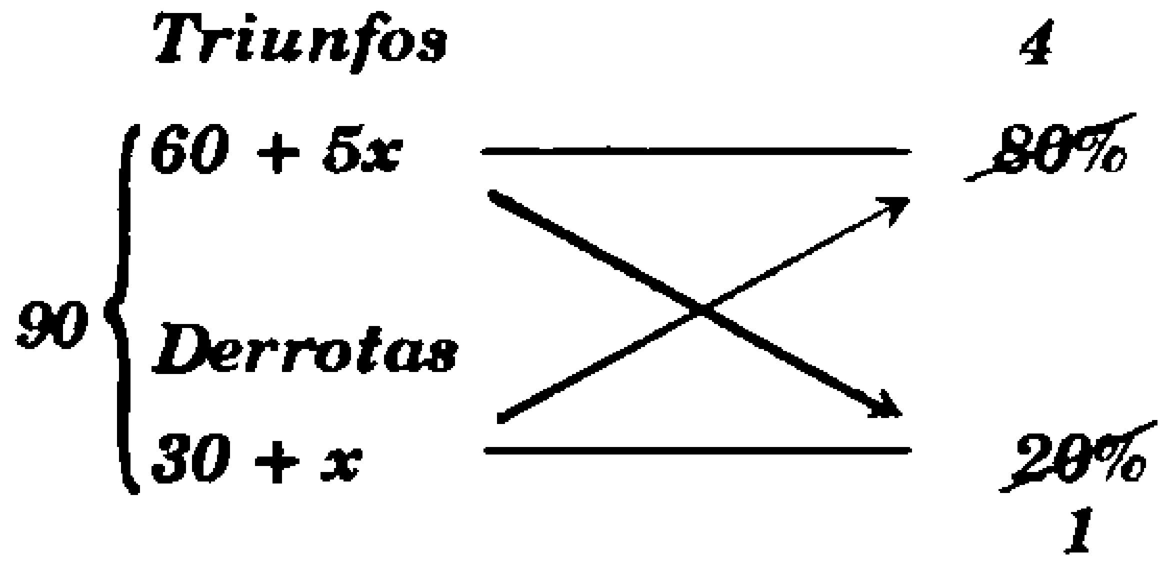
RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Un futbolista decide retirarse cuando tenga un ***80%*** de triunfos en su carrera , si ha jugado ***90*** partidos obteniendo ***60*** triunfos . ¿Cuál es el número de partidos adicionales necesarios para que el futbolista se pueda retirar , si en ellos pierde uno de cada seis?

A) 630 B) 360 C) 120 D) 240 E) 340

RESOLUCIÓN :



* ***POR REGLA DE TRES :*** $60 + 5x = 120 + 4x$

$\Rightarrow x = 60$

Número de partidos adicionales (*Como perdió 1 de cada 6, luego ganó 5*) : $6x = 360$

RPTA :"B"

PROBLEMA 32 :

Sandro vende un televisor ganando el ***20%*** del precio de venta; de esta ganancia entrega el ***20%*** a Carlos por su colaboración en el negocio y de lo restante utilizó el ***10%*** para pagar el transporte del televisor hasta el domicilio de su nuevo dueño , obteniendo como ganancia neta ***144*** soles. ¿Cuánto le costó a Sandro dicho televisor?

A) 600 B) 700 C) 480 D) 900 E) 800

RESOLUCIÓN :

Precio de Venta : ***100x***

Ganancia Bruta : ***20x***

Precio de Costo : ***80x***

* Luego :

$$\underbrace{20\%\,(20x)}_{a\ Carlos} + \underbrace{10\%(\underbrace{80\%(20x)}_{Restante})}_{Transporte} + \underbrace{144}_{Ganancia\ Neta} = 20x$$

$\Rightarrow x = 10$

$\Rightarrow$ Precio de costo : ***80 (10) = 800***

RPTA : "E"

PROBLEMA 33 :

En una tienda se exhiben videograbadoras. Un comprador obtiene una con descuento del ***20%***, luego la vende con una ganancia del ***15%***. El nuevo

comprador la vuelve a vender ganando *10%* de lo que le costo. Si finalmente fue vendida con una pérdida de *30%* del costo final, ¿en qué porcentaje varía el costo inicial?

A) 29,16 % *B) 29,26 %* *C) 29 %*
D) 39,1 % *E) 28,2 %*

RESOLUCIÓN :

* Costo Inicial : *100%*

$$\underbrace{100\% - \overbrace{100\% \times 80\% \times 115\% \times 110\% \times 70\%}^{\text{PRECIO AL FINAL}}}_{\text{VARIACIÓN PORCENTUAL}}$$

$$= 100\%\left(1 - \frac{80}{100}\times\frac{115}{100}\times\frac{110}{100}\times\frac{70}{100}\right)$$

$$= 29{,}16\%$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

En una feria escolar se venden cuadernos a *S/.4* cada uno con un descuento del *5%* , pero si las ventas superan a *S/.40*, el descuento sería del *20%*, aunque para ventas no inferiores a *S/.90* el descuento sería del *25%*. Juan en su primera compra obtuvo un descuento del *20%*, pero si hubiera comprado todos los cuadernos a la vez, el descuento sería *25%* y habría ahorrado *S/.12*. ¿Cuántos cuadernos compró en total?

A) 80 *B) 40* *C) 41* *D) 52* *E) 60*

RESOLUCIÓN :

* Número de cuadernos : x
* Costo sin descuento : $4x$

$$\overbrace{80\%\,(4x)}^{\text{Costo Real}} - \overbrace{75\%\,(4x)}^{\text{Costo supuesto}} = \overset{\text{Ahorra}}{12}$$

$80\%(4x)$ ↓ Descuento del 20%; $75\%(4x)$ ↓ Descuento del 25%

$$\Rightarrow x = 60$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 35 :

Un comerciante tiene *3* televisores de *20* pulgadas de distintas marcas, vende *2* de ellos en *S/.1080* cada uno , ganando en uno de ellos el *15* por *75* y perdiendo en el otro el *20* por *70* . Si el tercer televisor le costo *S/.630*, ¿qué tanto por ciento debe ganar en este último para que en el total de la venta no se gane ni se pierda?

A) 26% *B) 60%* *C) 40%* *D) 45%* *E) 50%*

RESOLUCIÓN :

	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO
Precio de Costo	x	y	630
Precio de Venta	1080	1080	630 + n% 630

* Primero : $x + \frac{15x}{75} = 1080 \Rightarrow x = 900$

* Segundo : $y - \frac{20y}{70} = 1080 \Rightarrow y = 1512$

* Según enunciado : *Venta Total = Costo Total*

$$1080 + 1080 + 630 + n\%\,630 = x + y + 630$$

$$\Rightarrow 2160 + n\%\,630 = 900 + 1512$$

$$\Rightarrow n = 40$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 36 :

Un comerciante importaba cierta cantidad de artículos y los vendía en *S/.80* cada uno cuando el dólar costaba *S/.1,5* ganando el *20%* . Ahora tiene que pagar *S/.2,4* por dólar y el precio de fábrica ha aumentado en *60%*. Determinar a qué precio deberá vender cada artículo, si además desea ganar el *50%*

A) S/.256 *B) S/.576* *C) S/.216*
D) S/.225 *E) S/.210*

RESOLUCIÓN :

Costo Inicial : x (en soles)

- $x + 20\%x = 80 \Rightarrow x = \frac{200}{3}$
- y como S/.1,5 < > 1 dólar

  S/. 1 < > $\frac{2}{3}$ dólar

$\Rightarrow$ Costo en dólares : $\frac{200}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{400}{9}$

* Nuevo Precio en dólares : $160\%\left(\frac{400}{9}\right) = \frac{640}{9}$

* Nuevo Precio en soles : $\frac{640}{9}\times S/.2{,}4$

* Precio a vender : $150\%\times\frac{640}{9}\times 2{,}4$

: *S/. 256*

RPTA :"A"

PROBLEMA 37 :

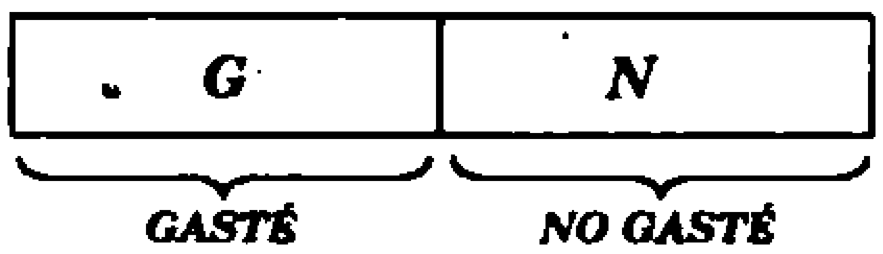
Luego de realizar ciertas compras el Sr. Pérez razonaba: si gastara el *50%* de lo que no gasté, gastaría en total el *300%* de lo que gasté, de esta manera no habría gastado *S/.800* menos de lo que realmente

no gasté. ¿Cuánto tenía en total al principio?

A) S/.4000 *B) S/.3000* *C) S/.3500*
D) S/.2000 *E) S/.2800*

RESOLUCIÓN :

Tenía : *G + N*



- Gastará = *50% N*
- Gasto total = *300% G*

$\overbrace{G + 50\% N} = 300\% G$

$N = 4$ .... *(I)*

- No habría gastado = *N – 800*

$\overbrace{\text{Tenía} - \text{Gasto Total}} = N - 800$

$G + N - 300\% G = N - 800$ .... *(II)*

* De *(I)* y *(II)*: *G = 400* *N = 1600*

⇒ Tenía : *400 + 1600 = 2000*

RPTA :"D"

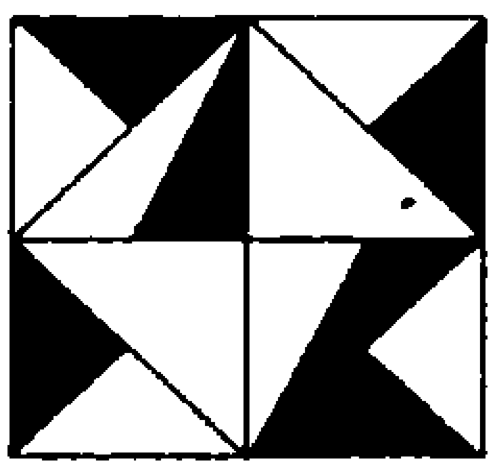
PROBLEMA 38 :

¿Qué tanto por ciento representa la región sombreada respecto de la región no sombreada?

OBSERVACIÓN :

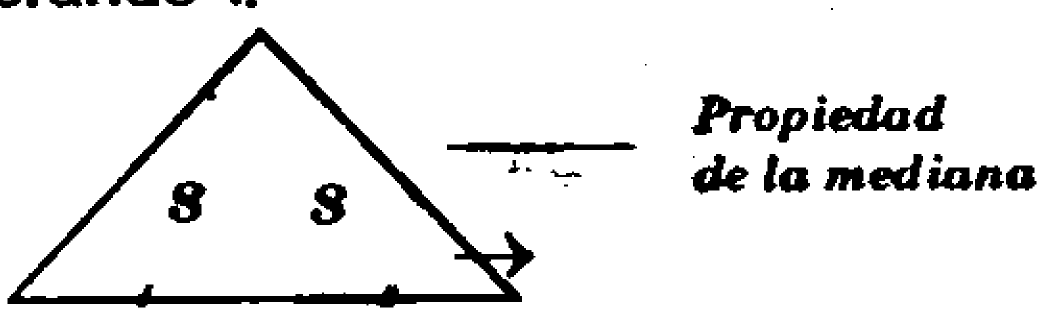
Todas las divisiones son simétricas

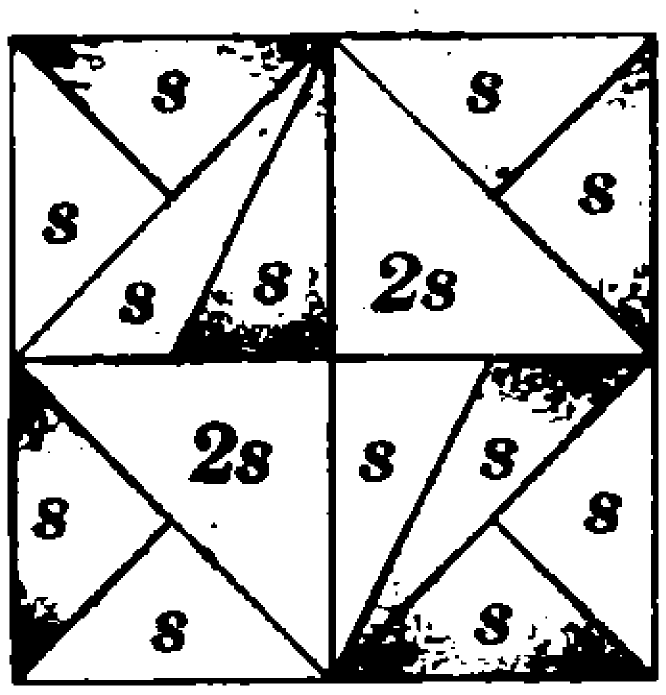
A) 20%
B) 50%
C) 75%
D) 40%
E) 60%



RESOLUCIÓN :

* Considerando :





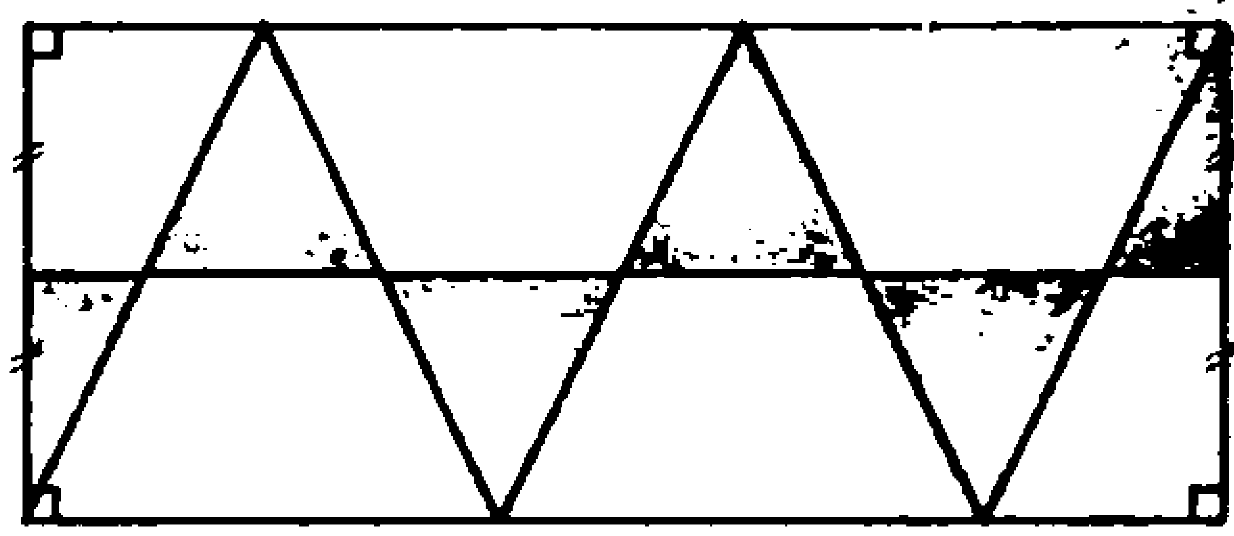
$\frac{\text{Sombreado}}{\text{No sombreado}} \times 100\% = \frac{6S}{10S} \times 100\%$ (ES ⟶ Sombreado; DS ⟶ No sombreado)

$= 60\%$

RPTA :"E"

PROBLEMA 39 :

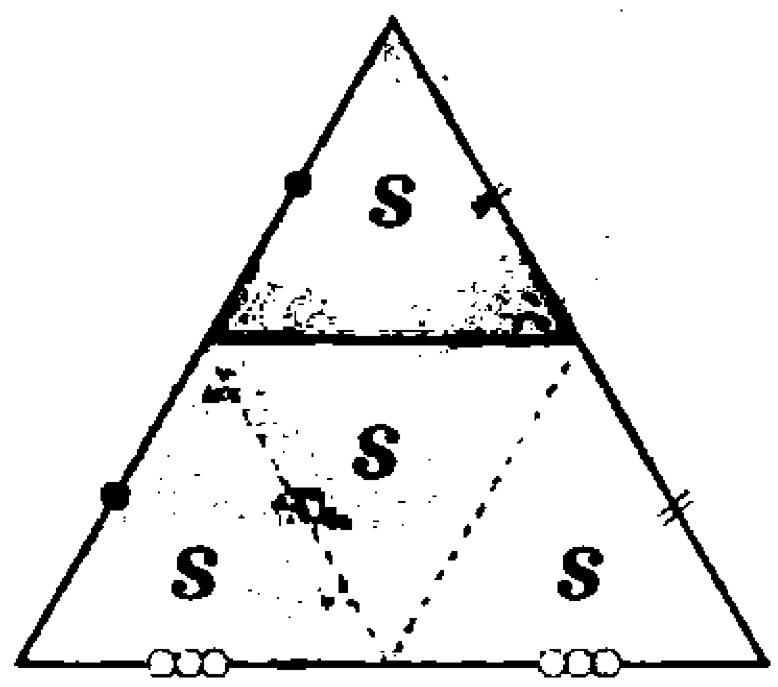
¿Qué porcentaje del área total representa el área de la región sombreada?



A) 50% *B) 20%* *C) 10%* *D) 30%* *E) 25%*

RESOLUCIÓN :

* Considerar la relación en áreas dada por la base media.



⇒ está sombreado el :

$\frac{S}{4S} \times 100\% = 25\%$

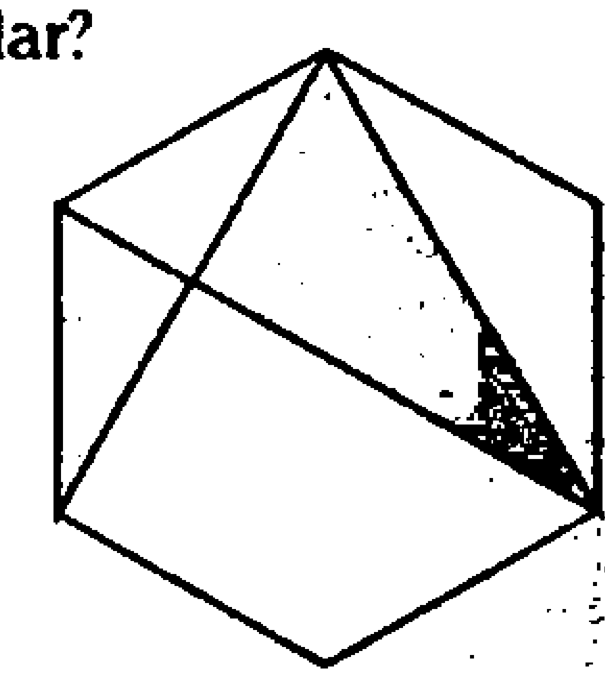
* En la figura dada, está dividido en triángulos sombreados su *25%*.

RPTA : "E"

PROBLEMA 40 :

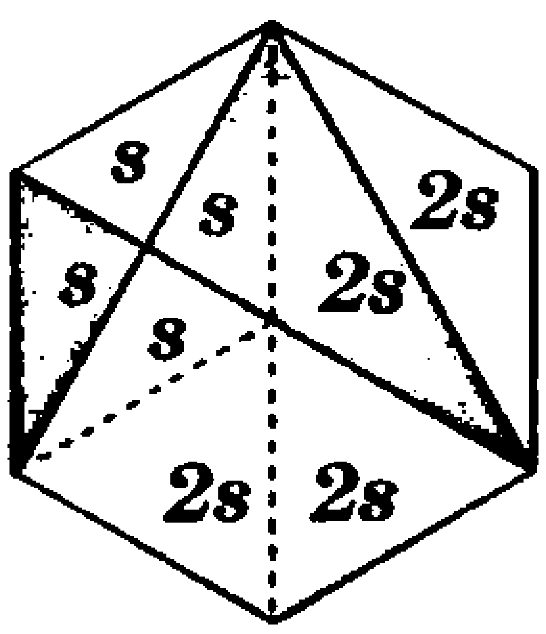
¿Qué tanto por ciento representa la parte sombreada del hexágono regular?

A) 25%
B) 37%
C) 33,$\hat{3}$%
D) 30%
E) 31,2%



RESOLUCIÓN :

* Trazando líneas auxiliares para dividir en regiones con áreas equivalentes :



Luego me piden:

$\frac{4S}{12S} \times 100\% = 33,\hat{3}\%$

RPTA :"C"

PROBLEMA 41 :

En la figura ¿qué porcentaje del área del hexágono regular representa la parte sombreada?

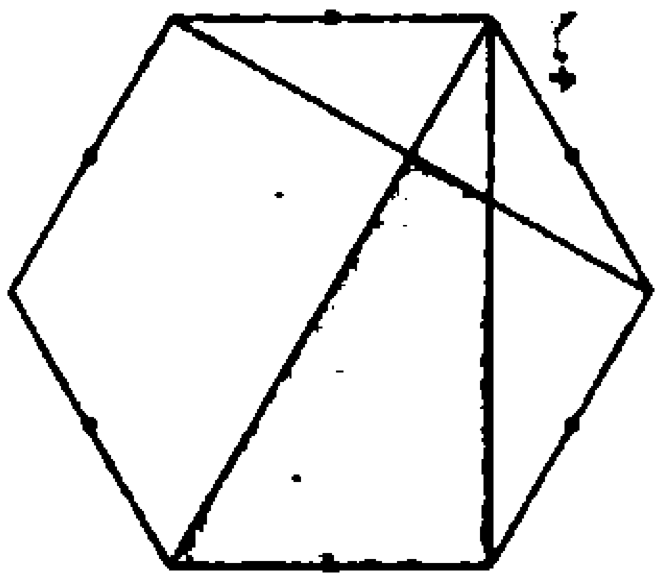
A) $30\frac{5}{9}\%$

B) $28\frac{1}{3}\%$

C) 33%

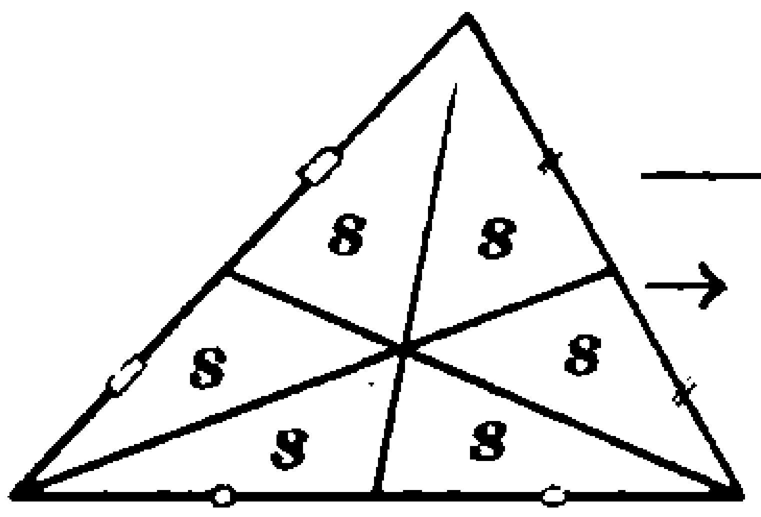
D) 28%

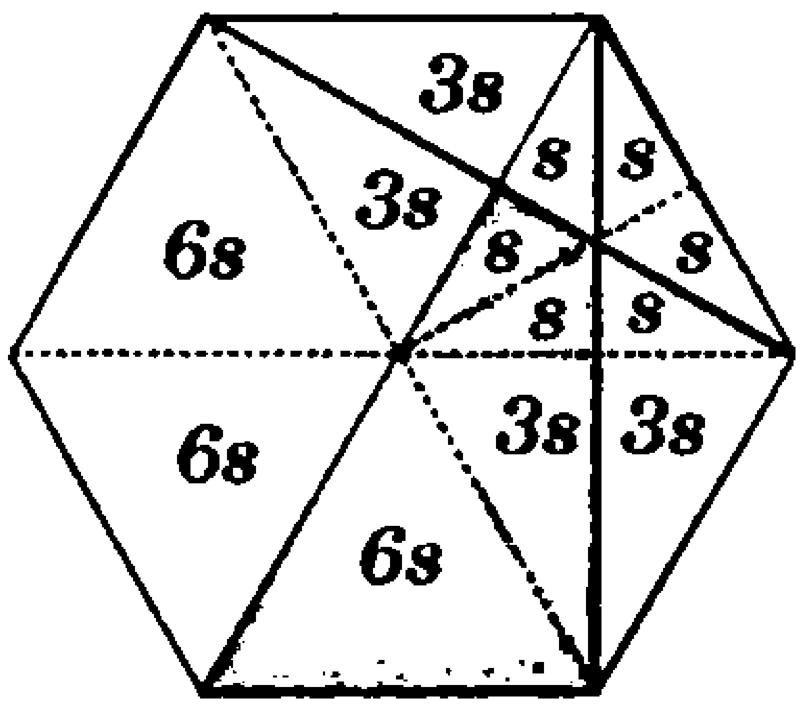
E) 25%



RESOLUCIÓN :

* Considerando:





* Piden : $\left.\dfrac{11s}{36s}\right| \times 100\% = 30\dfrac{5}{9}\%$

RPTA : "A"

PROBLEMA 42 :

En la figura mostrada *ABCD* es un cuadrado; «*P*», «*Q*», «*R*» y «*S*» son puntos medios . ¿Qué porcentaje del área del cuadrado *ABCD* son las áreas de las regiones sombreadas?

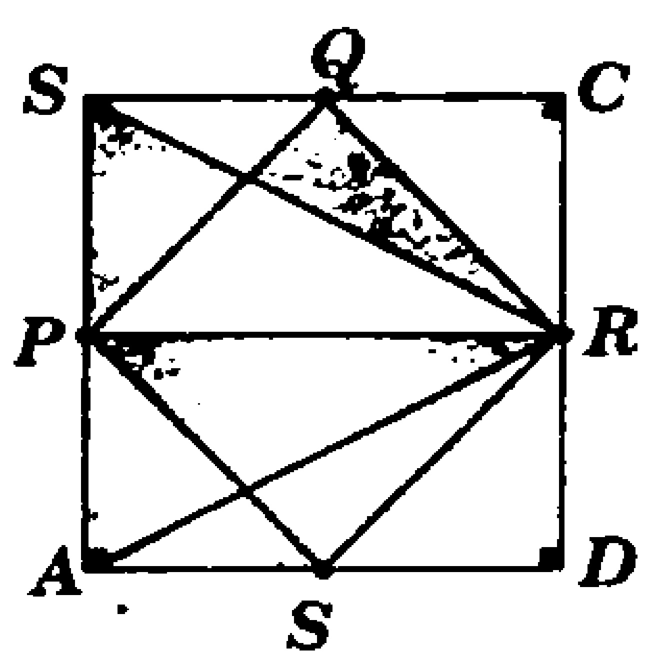
A) 38%

B) 40%

C) 37,5%

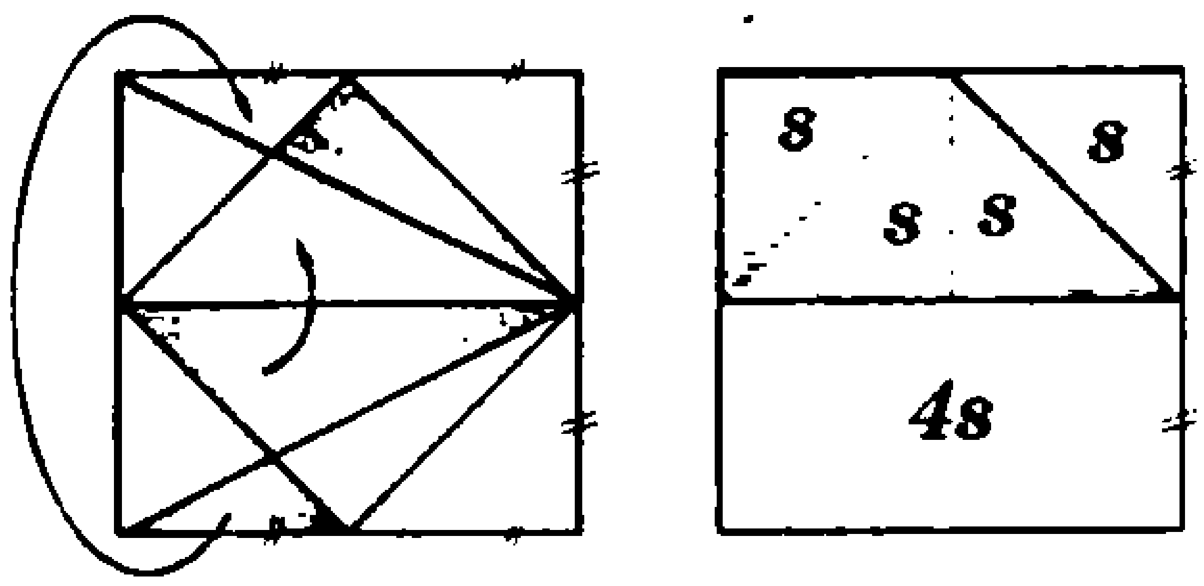
D) 55%

E) 35,7%



RESOLUCIÓN :

* Trasladando adecuadamente :



* La expresión a calcular : $\left.\dfrac{3s}{8s}\right| \times 100\% = 37{,}5\%$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Una familia de *10* personas dispone de *S/.3000* para vivir durante un año, a los *4* meses llegan *2* sobrinos y a la mitad del año el costo de vida se incrementa en un *20%* . ¿Qué cantidad de dinero tiene que pedir prestado el jefe de familia para poder sobrevivir en ese año?

A) S/.840 B) S/.740 C) S/.650

D) S/.760 E) S/.870

RESOLUCIÓN :

* Para *10* personas:

1 año < > *S/. 3000*

12 meses < > *S/. 3000*

1 mes < > *S/. 250*

10 personas < > *S/. 250*

1 personas < > *S/. 25*/mes

4×10×S/.25	2×12×S/.25	6×12×120%(25)
4 MESES	2 MESES	6 MESES

1 año < > 1000 + 600 + 2160 = 3760

$\Rightarrow$ Debe pedir prestado : *3760 – 3000 = S/. 760*

RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

Se vende un televisor por *S/.6000* ganando el *20%* del precio de venta más el *60%* del precio de costo . Hallar el precio de costo del televisor.

A) S/.1500 B) S/.2000 C) S/.3000

D) S/.4000 E) S/.4500

RESOLUCIÓN :

$P_{VENTA} = 6000$

Ganancia = $20\%\,(6000) + 60\%\,P_{COSTO}$

Considerando:

$P_{VENTA} = P_{COSTO} + GANANCIA$

$6000 = P_{COSTO} + 20\%\,(6000) + 60\%\,P_{COSTO}$

$\Rightarrow 4800 = 160\%\,P_{COSTO}$

$\Rightarrow 3000 = P_{COSTO}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

A un obrero se le aumenta el sueldo de la siguiente forma :

12% sobre el *20%* de su sueldo

15% sobre el *40%* siguiente

20% sobre los *S/. 2000* restantes

¿Cuál será su nuevo salario?

A) S/.5800 *B) S/.5820* *C) S/.5810*
D) S/.5790 *E) S/.5780*

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que : *S/. 200 = 40%* sueldo
S/. 5000 = Sueldo

* El nuevo salario será:

$$5000\ +$$
$$12\%(20\%(5000)) \longrightarrow 120$$
$$15\%(40\%(5000)) \longrightarrow 300$$
$$20\%(2000) \longrightarrow 400$$
$$\overline{S/.\ 5820}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 46 :

En la Academia entre los que dominan *R.M* el *80%* son hombres y el resto mujeres . Después del último examen se observó el número de hombres que dominan *R.M.* aumentó en *20* y el de mujeres en *80*, representado el nuevo número de hombres el *60%* de los que dominan *R.M.* ¿Cuántos estudiantes en general dominan *R.M.*?

A) 300 *B) 350* *C) 400* *D) 250* *E) N.A.*

RESOLUCIÓN :

* Total que dominan *RM* : *100 x* (Inicio)

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
INICIO	80x	20x	100x
DESPUÉS	80x + 20	20x + 80	100x + 100

(60%)

* Luego : $80x + 20 = 60\%\ (100x + 100)$

$$\Rightarrow 80x + 20 = 60x + 60$$
$$\Rightarrow x = 2$$

La expresión pedida será : $100\ (2) + 100 = 300$

RPTA : "A"

PROBLEMA 47 :

Si el área de la superficie de una masa esférica disminuye en un *19%* . ¿En qué tanto por ciento disminuirá su volumen?

A) 19% *B) 72.9%* *C) 27,1%*
D) 20% *E) 26,1%*

RESOLUCIÓN :

Area *Radio* *Volumen (esfera)*

$$100 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 10 \xrightarrow{(\ )^3} 100$$
$$-19\quad -19\% \qquad\qquad -271$$
$$81 \xrightarrow{\sqrt{\ }} 9 \xrightarrow{(\ )^3} 729$$

La expresión a calcular será : $\dfrac{271}{1000} \times 100\% = 27,1\%$

RPTA : "C"

PROBLEMA 48 :

Se ha diseñado un envase cilíndrico , el cual resultó muy largo. Se ha decidido reducir el largo en *36%* sin variar el volumen. ¿En qué porcentaje se debe aumentar el radio de la base?

A) 20% *B) 25%* *C) 50%* *D) 24%* *E) 30%*

RESOLUCIÓN :

Volumen de un cilindro : $(\pi R^2)H$ (π: Constante, se desprecia)

Largo	×	(Radio)^2	=	Volumen
100		100^2		1000000
– 36% –				
64	×	$(100 + x)^2$	=	1000000

$$100 + x = \frac{1000}{8} \Rightarrow x = 25$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 49 :

Luis compró un lote de artículos cuyo precio de lista era *S/.3000* con una rebaja del *25%* del precio de compra , luego vendió todos los artículos de la siguiente forma : vendió el *20%* ganando *5* soles por artículo , vendió el *30%* perdiendo *2* soles por artículo y finalmente vendió lo restante ganando *4* soles por artículo . Si como producto final de esta venta Luis ganó *S/.720*. ¿A qué precio compró cada artículo?

A) S/.10 *B) S/.8,5* *C) S/.9*
D) S/.12 *E) S/.7,5*

RESOLUCIÓN :

Sea «*n*» el número de artículos comprados. Luego:

# Artículos	Ganancia (+) o Pérdida (–)
1ra) Venta : $20\%\,n$	$+ 5\,(20\%\,n)$
2da) Venta : $30\%\,n$	$- 2\,(30\%\,n)$
3ra) Venta : $50\%\,n$	$+ 4\,(50\%\,n)$

En conclusión , se ganó :

$$5(20\%\,n) + 4(50\%\,n) - 2(30\%\,n) = 720$$
$$\Rightarrow 240\%\,n = 720 \Rightarrow n = 300$$

Se compraron **300** artículos

Además por los **300** artículos se pagó:

$P_{compra\ (lote)} = 75\%\ 3000 = S/.\ 2250$

* ***Luego, cada artículo se compró a:***

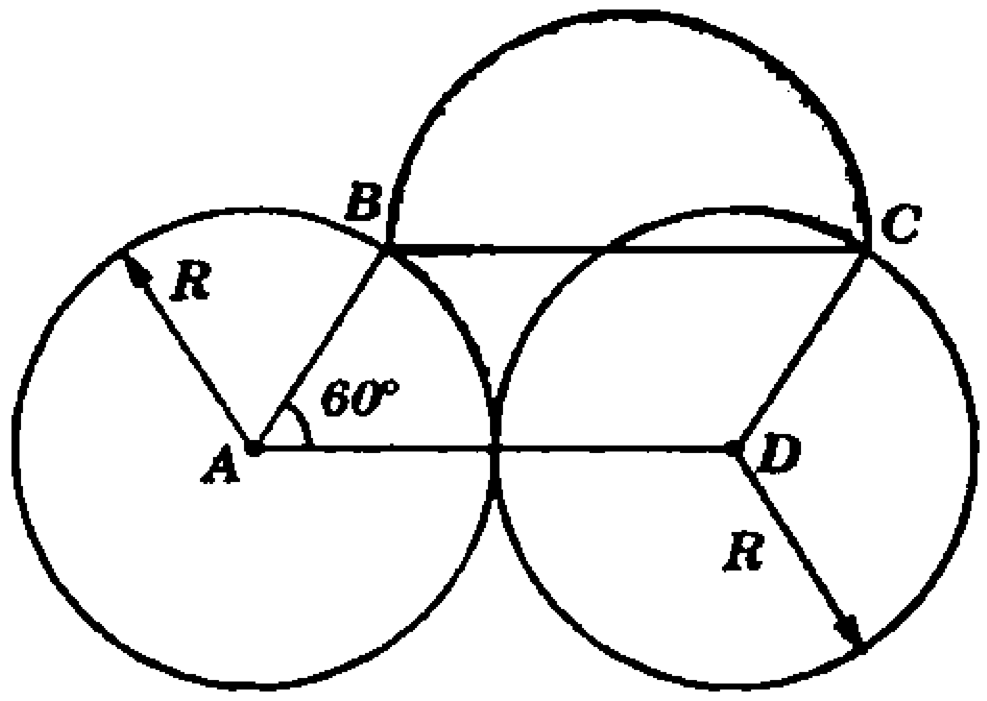
$$\frac{2250}{300} = S/.7,5$$

RPTA : "E"

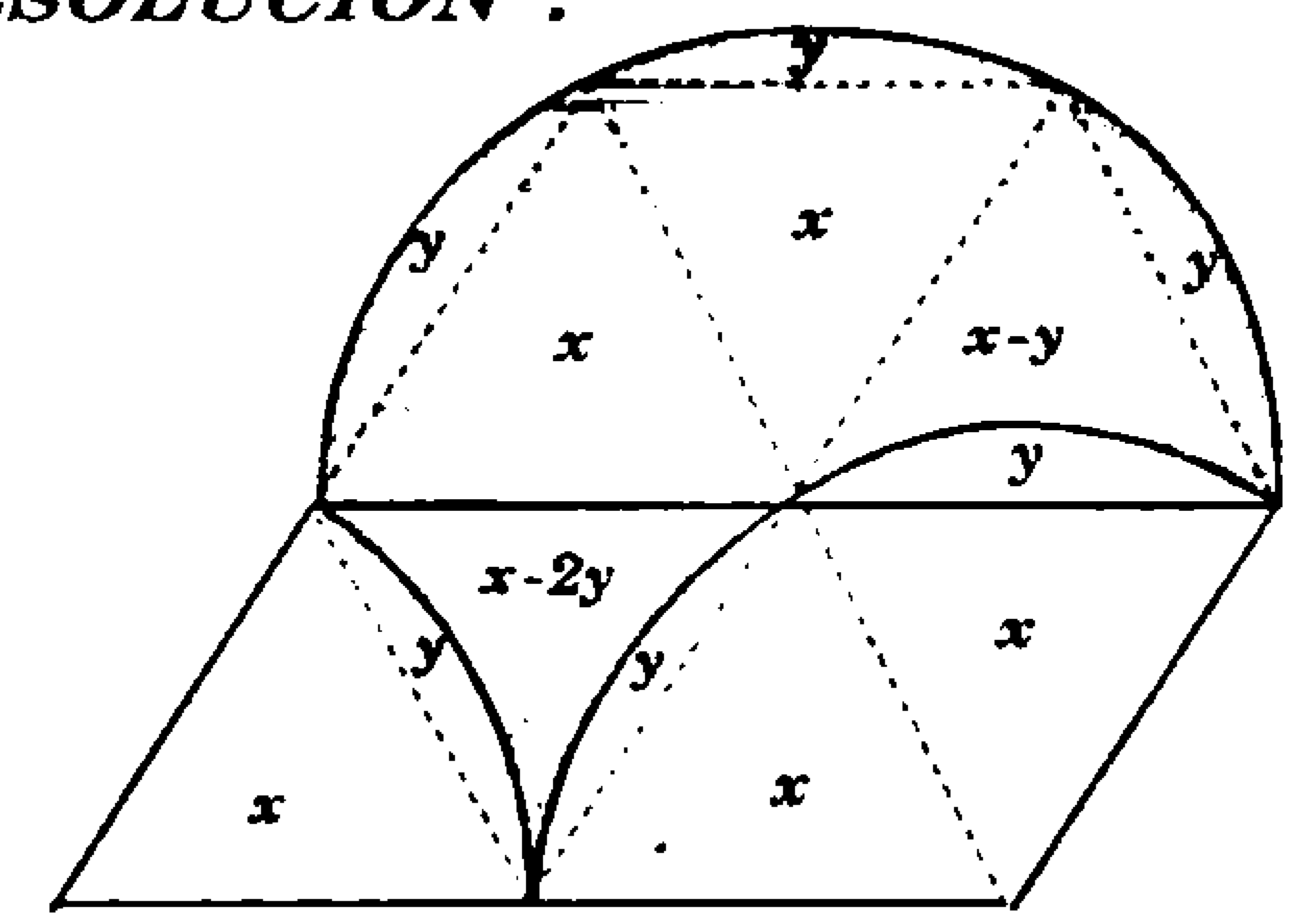
PROBLEMA 50 :

¿Qué porcentaje del paralelogramo ***ABCD*** representa la región sombreada?

A) 80%
B) 17,17%
C) 92,8%
D) 100%
E) 99,97%



RESOLUCIÓN :



* Piden:

$$\frac{sombreado}{paralelogramo} \times 100\% = \frac{4x+3y-3y}{4x+2y-2y} \times 100\%$$
$$= 100\%$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 51 :

Si: $F_n(x) <>$ «*n*» descuentos sucesivos del $x\%$. ¿A qué descuento único equivale el $F_n(90)$?

A) 100% *B) 90%* *C)* $(100 - 10^n)\%$
D) $(100 - 10^{n-2})\%$ *E)* $(100 - 100^{2-n})\%$

RESOLUCIÓN :

* El descuento equivalente será :

$$100\% - \underbrace{10\% \times 10\% \times \ldots\ldots \times 10\%}_{n\ veces} \times 100\%$$

$$= (100 - (10^{-1})^n \cdot 10^2)\ \% = (100 - 10^{2-n})\%$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 52 :

A Mágaly a comprar una blusa, deberían haberle hecho un descuento del **20%**, mientras que a Carmen al comprar un pantalón deberían haberle hecho un descuento del **10%** . El vendedor se equivoca y hace el descuento al revés , por lo que Magaly para **S/.2** más y Carmen **S/.5** menos. ¿Cuál es la diferencia entre lo que pagaron Carmen y Magaly?

A) S/.20 B) S/.22 C) S/.25 D) S/.29 E) S/.30

RESOLUCIÓN:

	PRECIO REAL	CON DESCUENTO REAL	CON DESCUENTO EQUIVOCADO
Blusa	$10x$	$8x$	$9x$
Pantalón	$10y$	$9y$	$8y$

Magaly pagó: $9x - 8x = 2$ de más

$\Rightarrow x = 2$

Carmen pagó: $9x - 8y = 5$ menos

$\Rightarrow y = 5$

* Piden : $8y - 9x = 8(5) - 9(2) = 22$

RPTA : "B"

PROBLEMA 53 :

Un comerciante compra **15** piezas de tela de **30 m** . cada una a **S/.257,6** el metro y quiere sacar un beneficio total del **25%** del precio de compra . Ha vendido ya **270 m**. a **S/.230** el metro. ¿A cómo ha de vender el metro de la que queda para obtener el beneficio que se ha propuesto?

A) S/.350 *B) S/.380* *C) S/.400*
D) S/.420 *E) S/.460*

RESOLUCIÓN :

Total en metros : $15 \times 30 = 450m$

Precio de compra : $450 \times 257,6$

Se desea obtener : $125\% \times 450 \times 257,6$

* Luego :

$$270 \times 230 + (450 - 270)x = 125\% \times 450 \times 257,6$$
$$\Rightarrow 62100 + 180x = 144900$$
$$\Rightarrow x = 460$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 54 :

Una piedra pómez es introducida en agua ; al sacarla y pesarla se observó que el peso aumentó en el **36%** . Si se saca la mitad del agua ¿En qué porcentaje disminuirá el peso de la piedra húmeda?

A) 7,1% B) 13,2 C) 7 D) 13 E) 8

RESOLUCIÓN :

La expresión a calcular será : $\frac{18\%}{136\%} \times 100\% = 13,2\%$

RPTA : : "B"

PROBLEMA 55 :

Al tostar café se pierde **20%** del peso . Un tendero vende café tostado a **46** soles el **kg** . ganando el **15%** sobre el precio de costo. ¿A qué precio ha comprado el café sin tostar?

A) S/.40 B) 22 C) 30 D) 32 E) 38

RESOLUCIÓN :

* Peso inicial: **100 k**

Venta total será :

$$80k \times 46 = 115\% \, (100kx)$$

$$\Rightarrow x = 32$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 56 :

Dos amigos agasajan a Pirulo con una cena , cubriendo uno el **40%** y el otro **60%** del gasto total . Pirulo en agradecimiento, cierto día los premió con una fuente de cebiche para los dos. ¿Qué tanto por ciento de la fuente le correspondió al primero?

A) 40% B) 50% C) 20% D) 60% E) 10%

RESOLUCIÓN :

* Cada uno consumió : $\frac{100\%}{3}$

* Por lo que aportaron en proporción A :

$$40\% - \frac{100\%}{3} = \frac{20\%}{3} \quad y \quad 60\% - \frac{100\%}{3} = \frac{80\%}{3}$$

$$\frac{\frac{20\%}{3}}{\frac{80\%}{3}} = \frac{1}{4} \text{ <> de } 1 \text{ a } 4$$

* Al primero le correspondió:

$$\frac{1}{1+4} \times 100\% = 20\%$$

RPTA : "C"

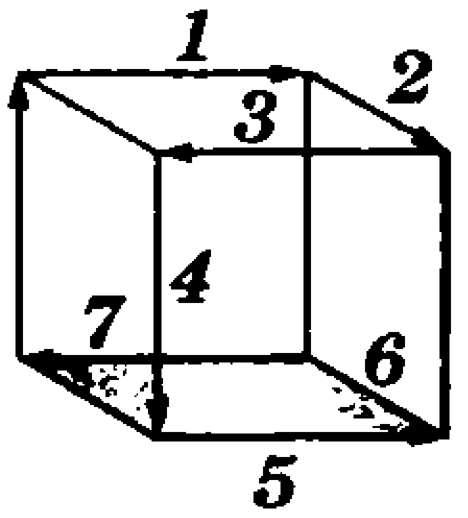
PROBLEMA 57 :

Una hormiga avanza sólo por las aristas de un cubo de madera de manera que recorre el mayor número de estas (sin repetir ninguna arista) hasta llegar nuevamente al vértice del cual partió. Si en cada arista hay **300** miligramos de azúcar y cuando ella inicia su recorrido come a su paso el **1%; 2%; 3%; 4%; ...** del contenido en cada arista ¿Qué cantidad de azúcar come en total?

A) 210 mg. B) 212 mg. C) 214 mg.

D) 108 mg. E) 216 mg.

RESOLUCIÓN :



* Lo máximo que debe recorrer son **8** aristas.

* El azúcar que consume será:

$$1\%(300) + 2\%(300) + 3\%(300) + ... + 8\%(300)$$

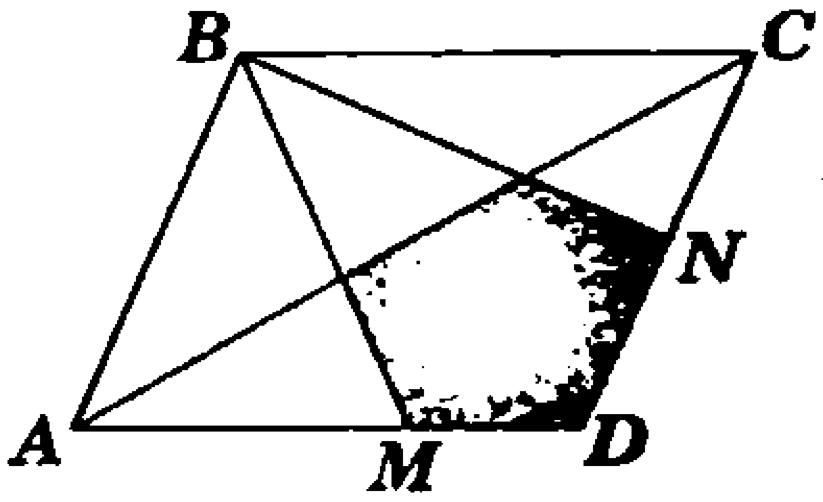
$$= 3(1+2+3+...+8) = 3 \times \frac{8 \times 9}{2} = 108 \, grs.$$

RPTA : "D"

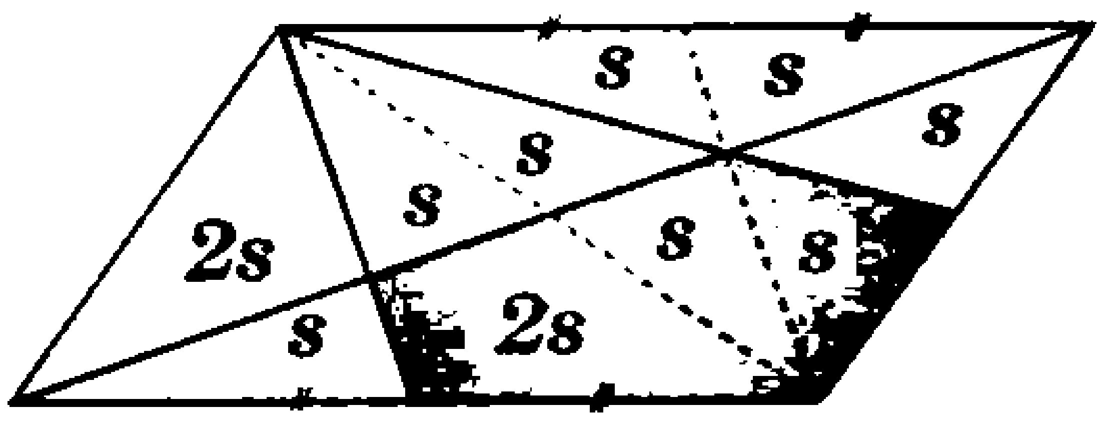
PROBLEMA 58 :

En la figura **ABCD** es un paralelogramo, **M** y **N** son puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, ¿qué porcentaje representa el área sombreada de la no sombreada?

A) 42%
B) 45%
C) 50%
D) 38%
E) 55%



RESOLUCIÓN :



* Piden :

$$\frac{\text{SOMBREADA}}{\text{NO SOMBREADA}} \times 100\%$$

$$\Rightarrow \frac{4S}{8S} \times 100\% = 50\%$$

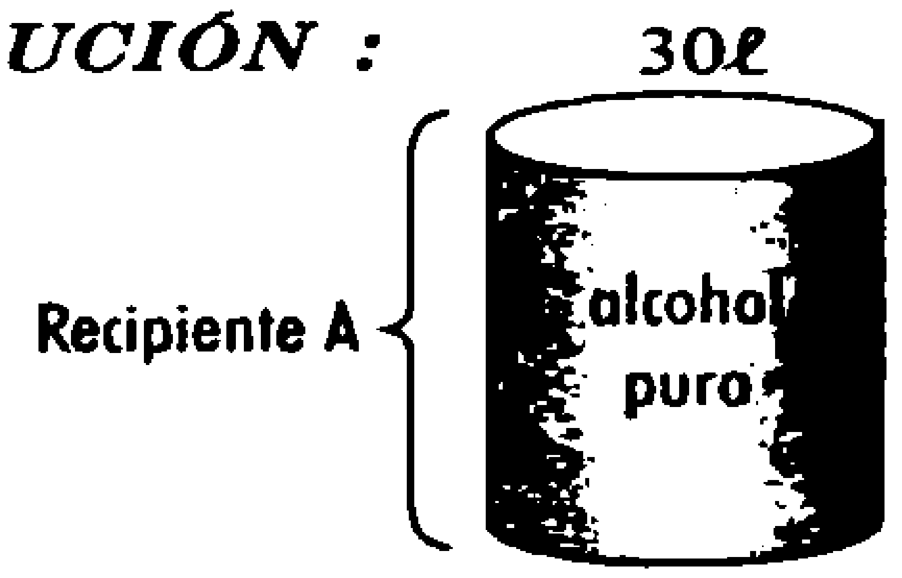
RPTA : "C"

PROBLEMA 59 :

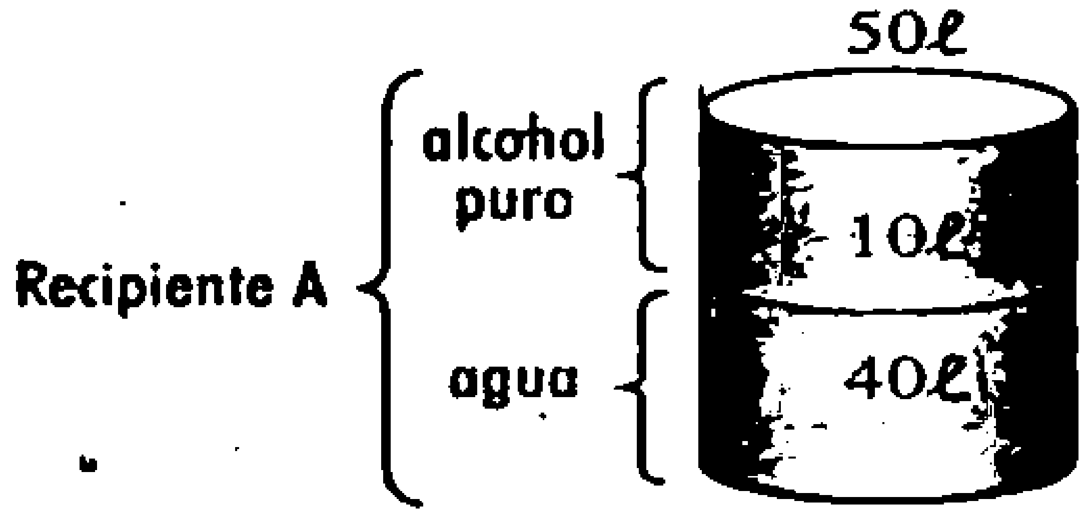
Se tienen dos recipientes **A** y **B**. El recipiente **A** contiene **30R** de alcohol puro mientras que **B** contiene **10R** de alcohol puro y **40R** de agua. Determinar la pureza alcohólica (concentración) de cada mezcla.

A) 10% y 20% B) 100% y 20% C) 30% y 100%
D) 15% y 22% E) 32% y 86%

RESOLUCIÓN :



Pureza alcohólica = ***100%***



Pureza Alcohólica $= \dfrac{10}{50} \times 100\% = 20\%$

RPTA :"B"

OBSERVACIÓN:

La pureza alcohólica comercialmente se expresa como el grado de mezcla para ello :

$$(\%) <> (^\circ)$$

Luego del ejemplo :

$$\begin{pmatrix}\textit{Pureza}\\ \textit{alcohólica en A}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textit{Grado de}\\ \textit{mezcla de A}\end{pmatrix} = 100^\circ$$

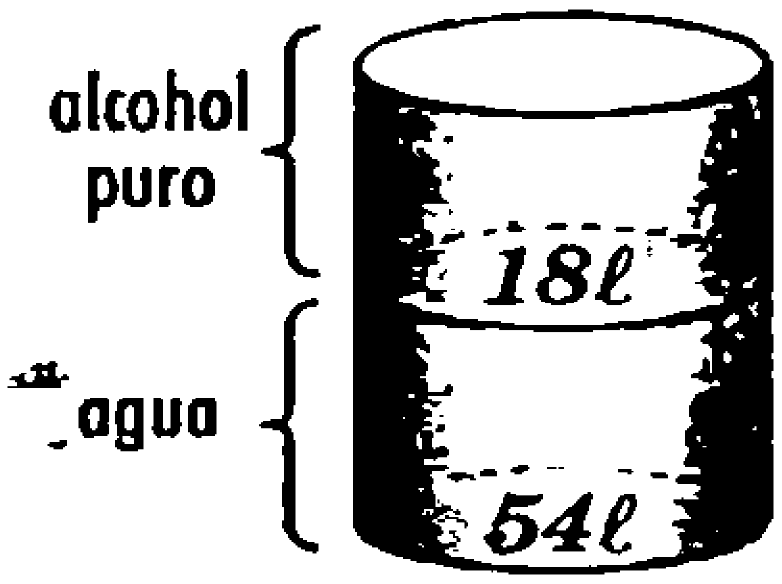
$$\begin{pmatrix}\textit{Pureza}\\ \textit{alcohólica en B}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textit{Grado de}\\ \textit{mezcla de B}\end{pmatrix} = 20^\circ$$

PROBLEMA 60 :

Hallar el grado de una mezcla de ***18L*** de alcohol puro y ***54L*** de agua .

A) 32° B) 20° C) 30° D) 40° E) 25°

RESOLUCIÓN :



TOTAL ***72ℓ***

$$\underbrace{\textit{Grado de la mezcla}}_{G} = \underbrace{\frac{18}{72} \times 100^\circ}_{25^\circ}$$

RPTA : "E"

EN GENERAL :

$$\textit{Grado de la mezcla} = \frac{\textit{Volumen del alcohol puro}}{\textit{Volumen total}} = \times 100^\circ$$

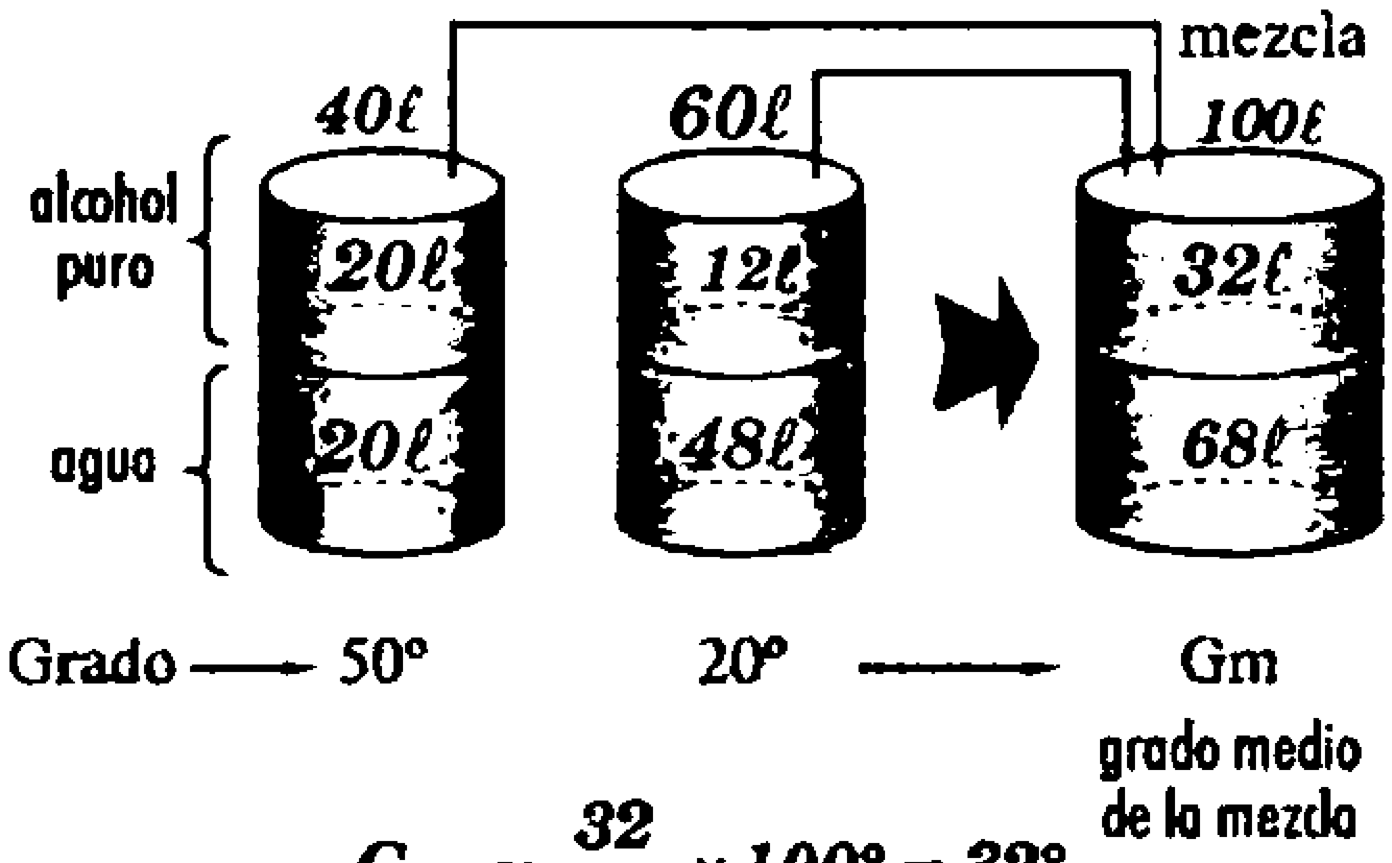
PROBLEMA 61 :

Se mezclan ***40ℓ*** de alcohol de ***50°*** con ***60ℓ*** de alcohol de ***20°***.

Determinar el grado de la mezcla resultante .

A) 18° B) 16° C) 32° D) 28° E) 19°

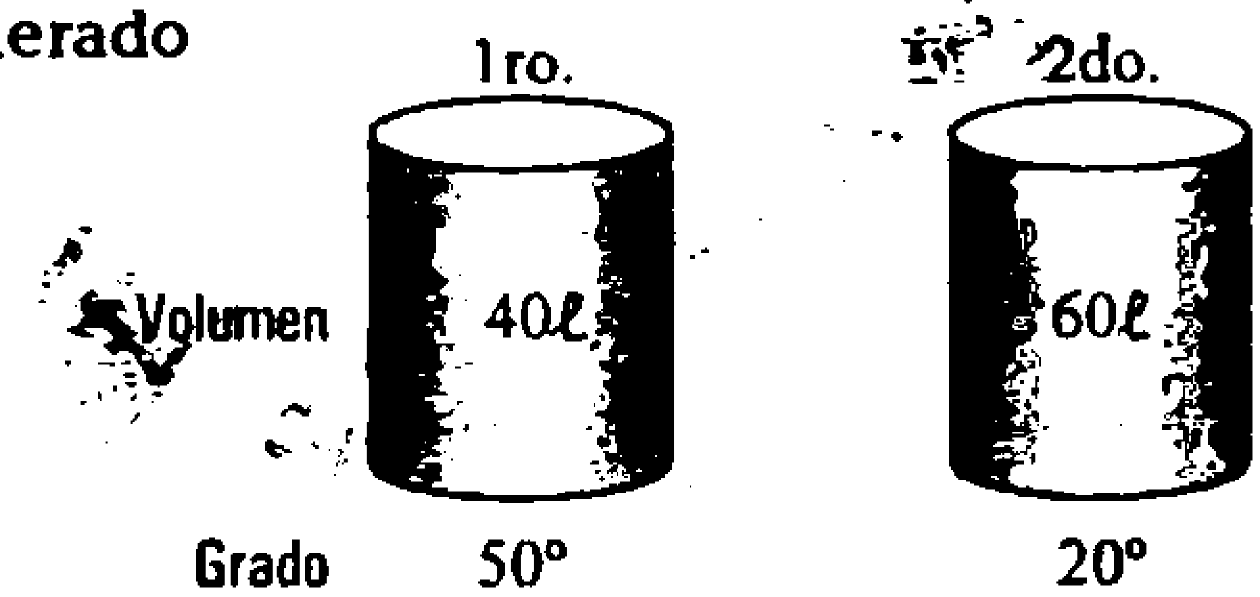
RESOLUCIÓN :



$$G_m = \frac{32}{100} \times 100^\circ = 32^\circ$$

RPTA :"C"

* De otro modo sería, procediendo de manera análoga que para el cálculo del promedio ponderado



$$\textit{Grado medio} = \frac{40(50^\circ) + 60(20^\circ)}{40 + 60} = 32^\circ$$

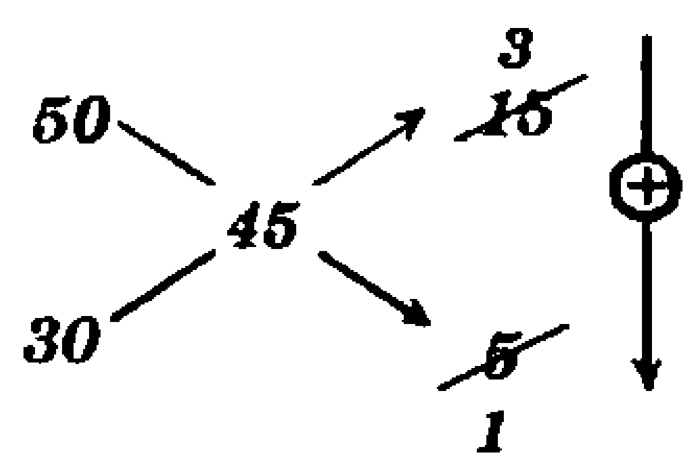
PROBLEMA 62 :

Un químico tiene una mezcla al ***30%*** de alcohol y otra al ***50%*** de alcohol. ¿Cuántos litros de cada mezcla se necesitan para preparar un total de ***400*** litros al ***45%*** de alcohol?

A) 250 y 150 B) 200 y 200 C) 50 y 350
D) 100 y 300 E) 120 y 280

RESOLUCIÓN :

RELACIÓN



$$4k = 400$$

$$k = 100$$

* Las expresiones pedidas son: ***100*** y ***300***

RPTA : "D"

PROBLEMA 63 :

Un depósito contiene ***20*** litros de vino al ***60%*** ¿Cuántos litros de agua deben agregarse para que la pureza sea del ***50%***?

A) 8 B) 4 C) 12 D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN :

RELACIÓN

Vino : 60% ↘ 50% ↗ 50% → 5

Agua : 0% ↗ 50% ↘ 10% ⟶ 1

* Luego : $\frac{x}{20}=\frac{1}{5}\Rightarrow x=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 64 :

Un recipiente A contiene una mezcla de alcohol y agua al 60% y otro recipiente B contiene la misma mezcla al 40% si las cantidades son 20 litros y 80 litros respectivamente. Ambas mezclas se mezclan en un recipiente C, ¿Qué concentración tendrá la nueva mezcla?

A) 48% B) 50% C) 44% D) 36% E) 25%

RESOLUCIÓN :

Aplicando grado medio:

$$\text{Nueva Concentración}=\frac{20(60\%)+80(40\%)}{20+80}$$
$$=44\%$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 65 :

Se mezclan 3 litros de un ácido al 30% con 9 litros al 70% y al resultado se le agrega un diluyente hasta obtener una concentración al 50%. ¿cuántos litros de diluyente se empleó?

A) 3L B) 2L C) 2,5L D) 4L E) 2,4L

RESOLUCIÓN :

* El diluyente se considera como grado «0», luego:

$$50\ \%=\frac{3(30\%)+9(70\%)+x\ (0)}{3+9+x}$$
$$\Rightarrow 50(12+x)=90+630\Rightarrow x=2,4$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 66 :

¿Cuántos litros de agua se debe agregar a 90 litros de vino, cuyo precio por litro es 20 soles, si se desea obtener un vino cuyo precio medio sea 15 soles?

A) 20L B) 30L C) 25L D) 15L E) 40L

RESOLUCIÓN :

	PRECIO	CANTIDAD	
Vino :	20	15	3k = 90
Agua :	0	5	k = 30

RPTA : :"B"

PROBLEMA 67 :

Se tiene 2 mezclas alcohólicas al 60% y 80% , de la primera se toma 25% y se mezcla con 20% del otro, obteniéndose alcohol al 65% . ¿Cuál será la pureza del alcohol que resulta al mezclar los contenidos restantes?

A) 35% B) 66,1% C) 62,7% D) 50% E) 60%

RESOLUCIÓN :

* La primera combinación:

60% ↘ 65% ↗ 15%<>3 ⟶ 25% (1ra.)

80% ↗ 65% ↘ 5%<>1 ⟶ 20% (2da.)

* Al combinar lo restante :

60% ↘ x ↗ 80%-x<>9 ⟵ 75% (1ra.)

80% ↗ x ↘ x-60%<>4 ⟵ 80% (2da.)

* Luego : $\frac{80\%-x}{x-60\%}=\frac{9}{4}\Rightarrow x=66,1\%$

RPTA :"B"

PROBLEMA 68 :

Se han mezclado 180 Kg . de una sustancia de S/.24 el kilogramo con otra cuyo peso representa el 25% del peso total y se ha obtenido como precio medio S/.22,80 . ¿Cuál es el precio por kilogramo de esta última sustancia?

A) S/.19,20 B) S/.18,50 C) S/.17,75

RESOLUCIÓN :

Aplicando precio medio :

$$22,8=\frac{75\%(24)+25\%x}{75\%\ +\ 25\%}\Rightarrow x=19,2$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 69 :

Una cierta cantidad de azúcar que cuesta S/.120 el kilo se mezcla con 100 kilos de azúcar de S/.180 el kilo, si el precio medio (P_m) de la mezcla es S/.142,5. Hallar dicha cantidad.

A) 133 B) 166 C) 166 ²/₃ D) 160 E) 100

RESOLUCIÓN :

CANTIDADES PRECIOS

x: 120 ↘ 142,5 ↗ P_m 37,5 : 5

100: 180 ↗ 142,5 ↘ 22,5 : 3

* Luego se cumple : $\frac{x}{100}=\frac{5}{3}\Rightarrow x=\frac{500}{3}=166\frac{2}{3}$

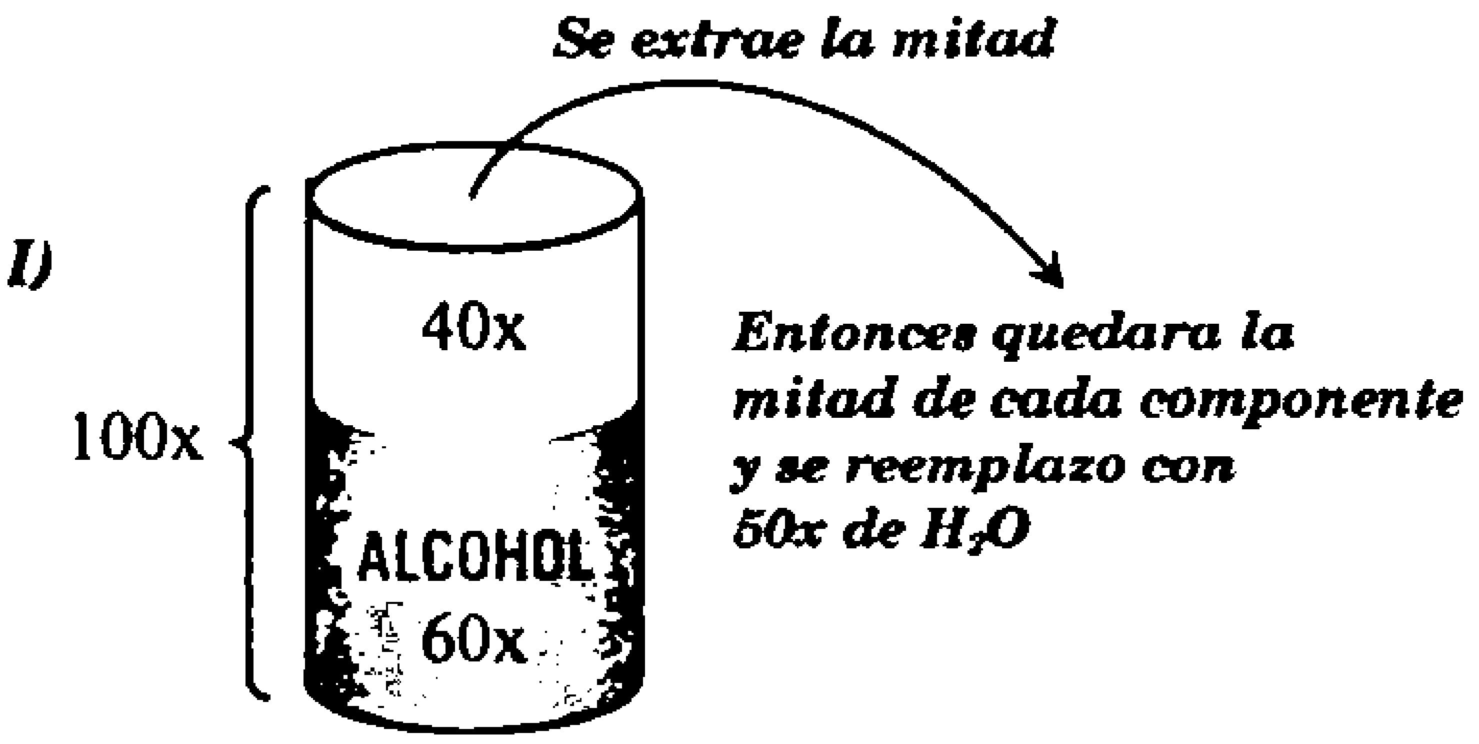
RPTA :"C"

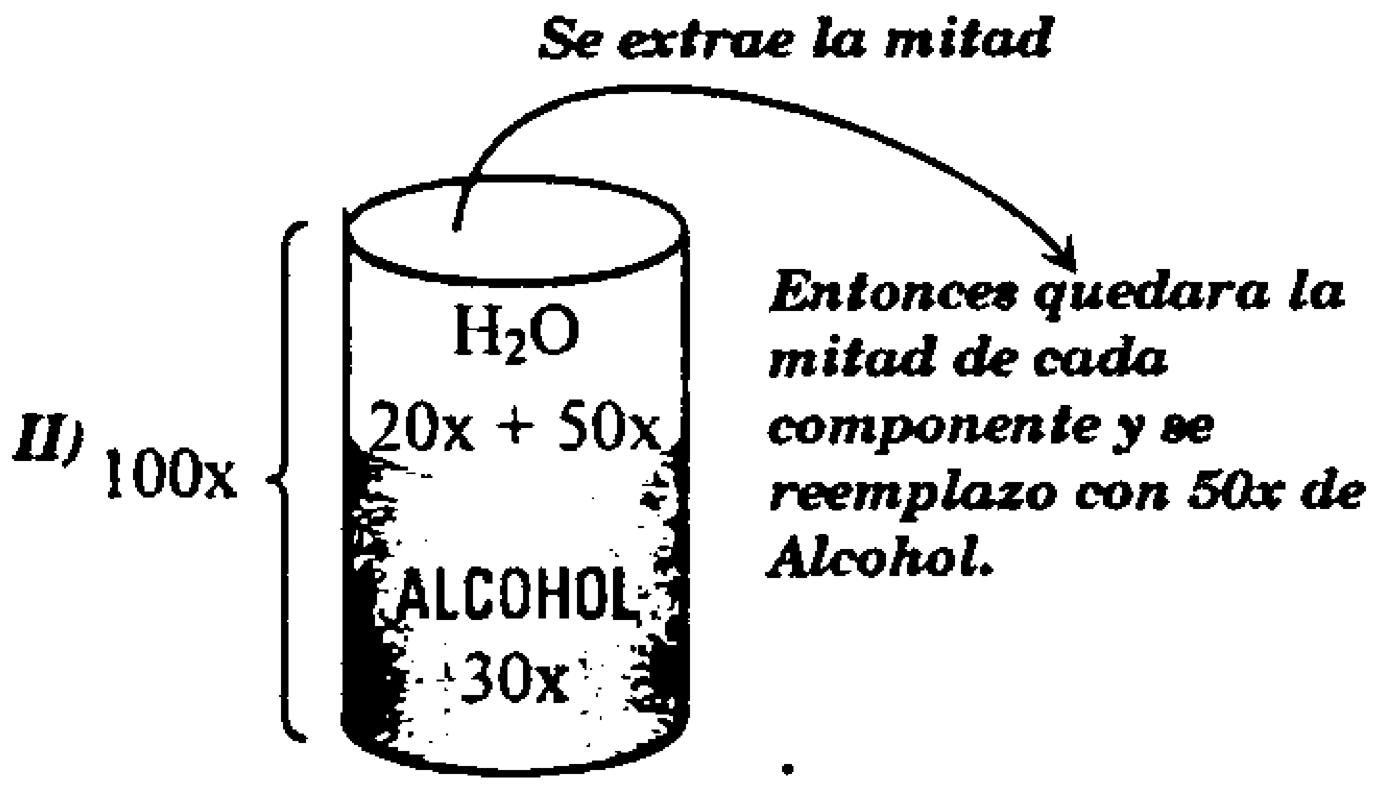
PROBLEMA 70 :

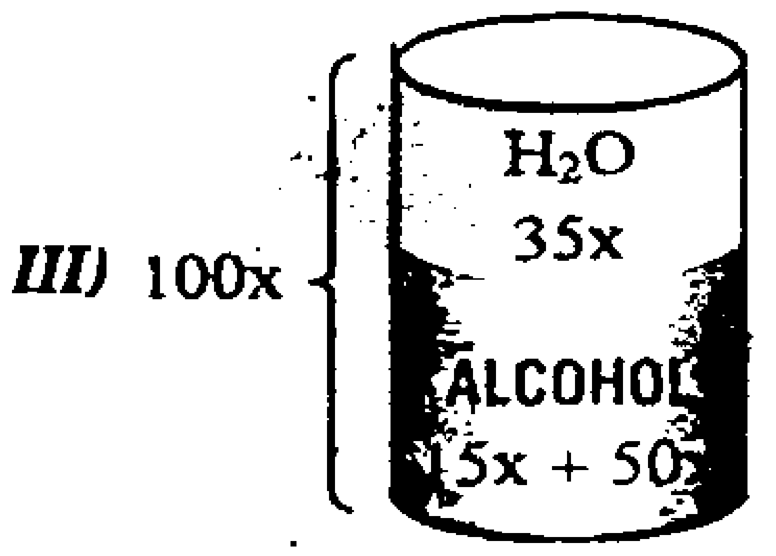
Un recipiente está lleno de una mezcla de alcohol y H_2O al **60%**. Si se extrae la mitad de la mezcla y se reemplaza por H_2O, luego se extrae la mitad de la nueva mezcla y se reemplaza por alcohol, ¿Cuál es la concentración de la nueva mezcla?

A) 45% B) 60% C) 95% D) 70% E) 65%

RESOLUCIÓN :







Concentración

$$\frac{65x}{100x}\times 100\% = 65\%$$

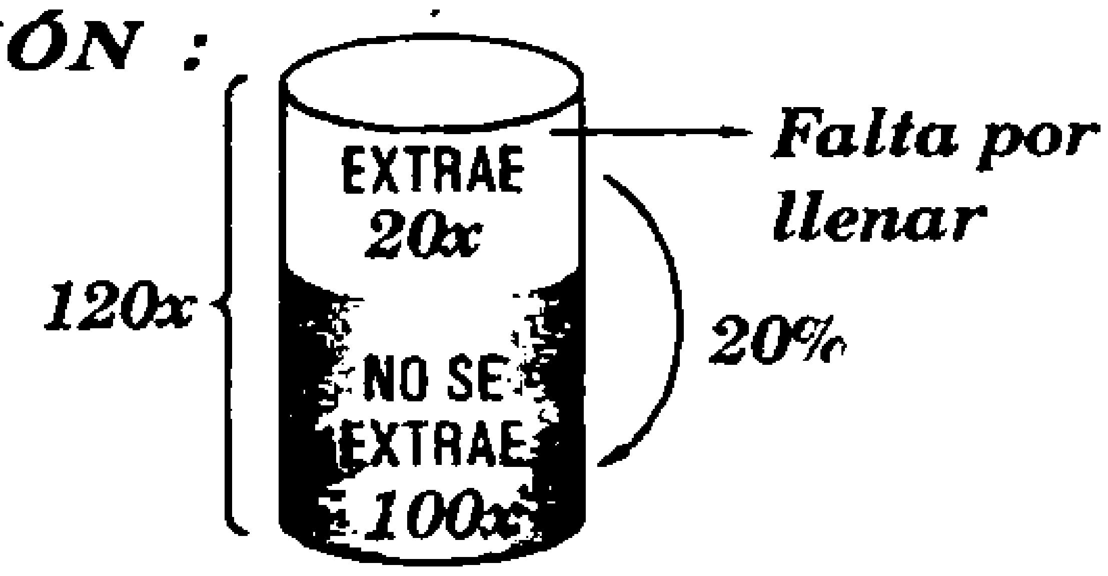
RPTA : "E"

PROBLEMA 71 :

De un recipiente lleno de vino se extrae el **20%** de lo que no se extrae. ¿Qué tanto por ciento estará lleno el recipiente si sé llena no completamente con el **40%** de lo que faltaba por llenar?

A) 80% B) 90% C) 85% D) 70% E) 75%

RESOLUCIÓN :



* Si se llena con el **40% (20x)=8x** entonces estará lleno: **100x + 8x = 108x**

Es decir el : $\frac{108x}{120x}\times 100\% = 90\%$

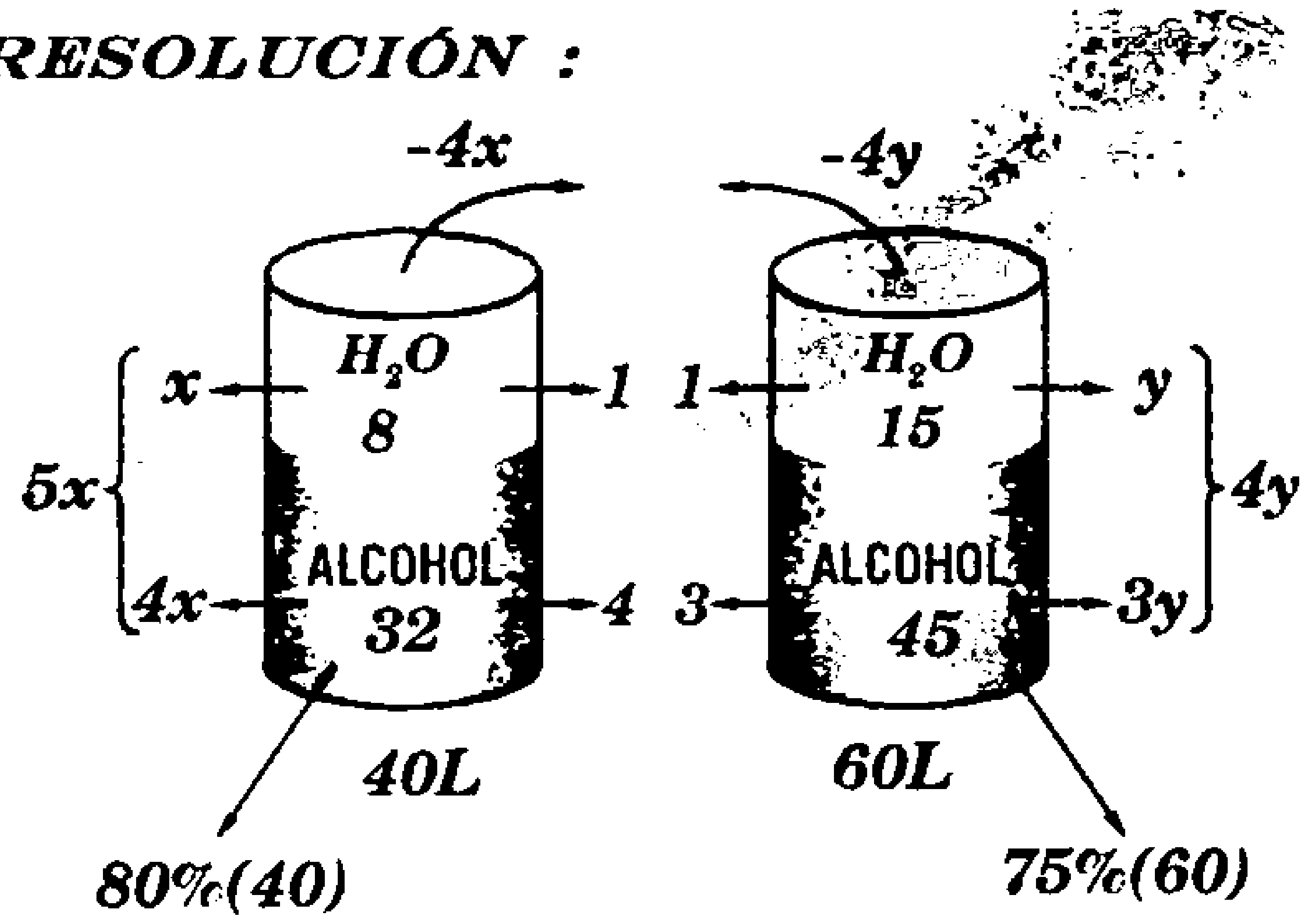
RPTA : "B"

PROBLEMA 72 :

Se tiene **2** mezclas alcohólicas, una de **40 L** al **80%** de alcohol y otra de **60 L** al **75%** de alcohol . ¿Cuántos litros se deben intercambiar para que ambas mezclas tengan el mismo porcentaje?

A) 6 L B) 18 L C) 24 L D) 35 L E) 40 L

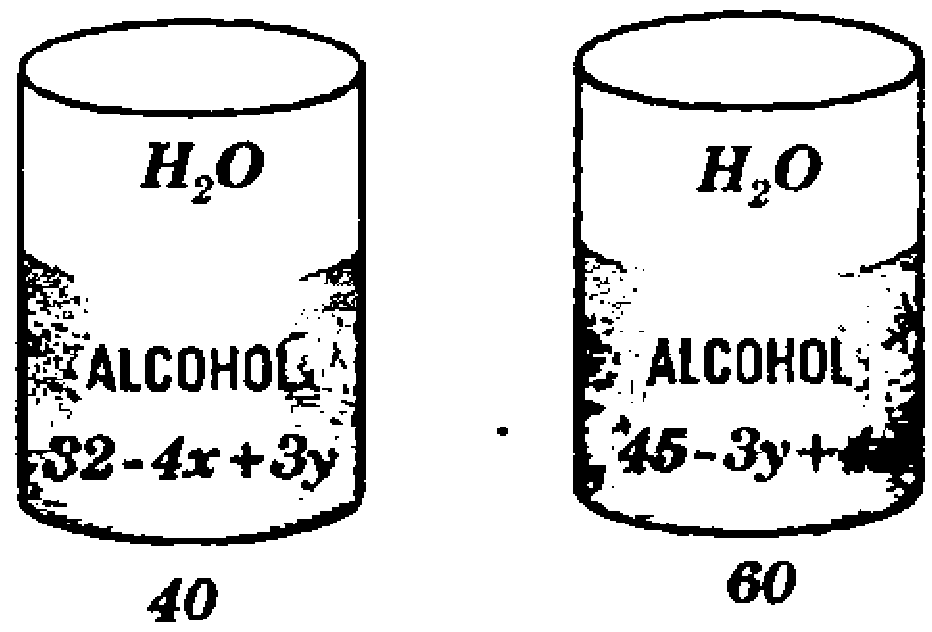
RESOLUCIÓN :



* Como, se va ha intercambiar, entonces:

$$5x = 4y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

* Luego quedarán:



Según enunciado :

Porcentaje : $\frac{32-4x+3y}{40}=\frac{45-3y+4x}{60}$

$$96-12x+9y=90-6y+8x$$

$$\Rightarrow 6 = 20x - 15y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

* De *(I)* y *(II)* : $y = 6$
* Se intercambió : $4y = 24$

RPTA : "C"

MÉTODO PRÁCTICO :

Se debe intercambiar : $\frac{AB}{A+B}$

Es decir: $\frac{40\times 60}{40+60}=24$ *litros* para tener la misma concentración .

PROBLEMA 73 :

Se mezcla pisco de 60^o, 48^o y 42^o en cantidades iguales. Si a esta mezcla se le agregan **91** litros de agua se obtiene pisco de 36^o que se vende a **S/.3** la botella de medio litro. Determinar el ingreso total por la venta del vino.

A) S/.1850 B) S/.1900 C) S/.1950
D) S/.1150 E) S/.2000

RESOLUCIÓN :

* Aplicando gradò medio :

$$36=\frac{x\ (60)+x(48)+x(42)+91(0)}{x+x+x+91}\Rightarrow x=78$$

* Total de litros a vender : $3x+91=325$
* Según dato :

$$\frac{1}{2}\ litro <> S/.3$$
$$1\ \ litro <> S/.6$$
$$\Rightarrow 325\ \ litros <> S/.6\times 325=S/.1950$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 74 :

Se tienen **3** grupos de obreros: «A», «B» y «C». Cada obrero de «B» es **20%** más eficiente que cada obrero de «A» y cada obrero de «C» es **50%** más eficiente que cada obrero de «B». Si se forma un grupo con **8** obreros de «A», **4** obreros de «B» y **4** obreros de «C», se haría los **3/8** de una obre en **27** días., Para acabar el resto de la obra se forma otro grupo de obreros de «A», «B» y «C» en la proporción de **3**, **2** y **1** respectivamente, acabando así en los **5/9** del tiempo que si hubiese continuado el grupo inicial. ¿Cuántos obreros conformaban el último grupo?

A) 25 B) 20 C) 30 D) 18 E) 36

RESOLUCIÓN :

* Consideremos que cada día:

I) **1** obrero «A» hace como **5** (tiene **20%** exacto)

$\Rightarrow$ **1** obrero «B» hará como $120\%(5)=6$

1 obrero «C» hará como $150\%(6)=9$

II) En 1 día **8** obreros «A», **4** «B» y **4** «C», harán como:

$8(5)+4(6)+4(9)=100$

$\Rightarrow$ en **27** días hicieron:

$$27(100)=\frac{3}{8}\ obra$$

$\Rightarrow$ Obra = **7200**

III) El resto de la obra será:

$\frac{5}{8}(7200)=4500$, lo cual lo harán en $\frac{5}{9}$ de

$\frac{4500}{100}=\frac{5}{9}\times 45=25$ días.

* Pero los grupos son como : $3k$; $2k$ y $k \Rightarrow$ En **1** día harán: $3k(5)+2k(6)+k(9)=36k$, luego

En **25** días harán el resto que es:

$$25\ (36\ k)=4500\ \Rightarrow\ k=5$$

* Piden el grupo final :

$$3k+2k+k=6k=6(5)=30$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 75 :

En cierto poblado africano viven **800** mujeres, de ellas, el **3%** se adorna con un solo arete , del otro **97%** la mitad usa dos pendientes y la otra mitad ninguno . ¿Cuántos pendientes llevan en total estas mujeres?

A) 800 B) 600 C) 750 D) 850 E) 650

RESOLUCIÓN :

* Si de esa mitad del **97%** prestara un arete con la otra mitad de ese **97%**, todas quedarían con **1** arete, luego el total de mujeres será igual al total de aretes.

RPTA: "A"

PROBLEMA 76 :

En un examen de admisión de **200** preguntas. **30%** son de **RM; 20%** de **RV** y el **50%** de letras. Una alumna contestó todo el examen de la siguiente manera: El **50%** de las preguntas de **RM** las contestó bien; se equivocó en el **40%** de las preguntas de **RV** y contestó bien el **40%** de las preguntas de letras . Si por cada res-puesta correcta se gana **4** puntos y por cada errónea se pierde **1**. ¿Qué porcentaje del puntaje total obtenido corresponde al puntaje obtenido por haber contestado las preguntas de **RM**?

A) 20% B) $33,\hat{3}\%$ C) 40% D) 50% E) N.A.

RESOLUCIÓN :

	Total de preguntas	Contesto bien	Se equivocó
RM	30%(200)= 60	50%(60)= 30	30
RV	20%(200)= 40	60%(40) =24	16
LETRAS	100	40%(100)= 40	60
TOTAL	200	94	106

Puntaje de **RM** $=4\times 94-1\times 106=270$

Puntaje de **RM** $=4\times 30-1\times 30=90$

$$PIDEN:\ \frac{90}{270}\times 100\%=33,\hat{3}\%$$

RPTA"B"

PROBLEMA 77 :

En cierto poblado africano viven **800** mujeres, de ellas, **3%** se adorna con un solo arete , del otro **97%**

la mitad usa dos pendientes y la otra mitad ninguno. ¿Cuántos pendientes en total llevan estas mujeres?

A) 800 *B) 600* *C) 750* *D) 850* *E) 650*

RESOLUCIÓN :

de pendientes:

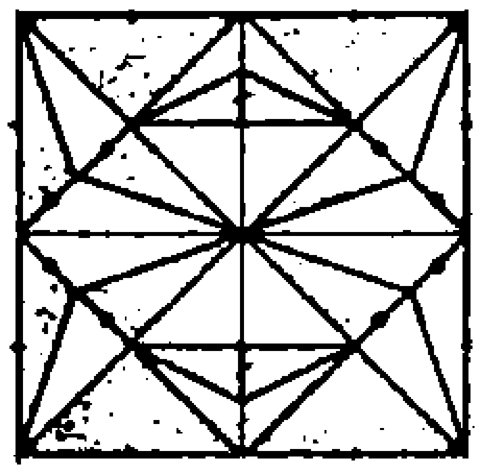
$$1\times 3\%(800)+2\times\frac{1}{2}\times 97\%(800)=100\%(800)=800$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 78 :

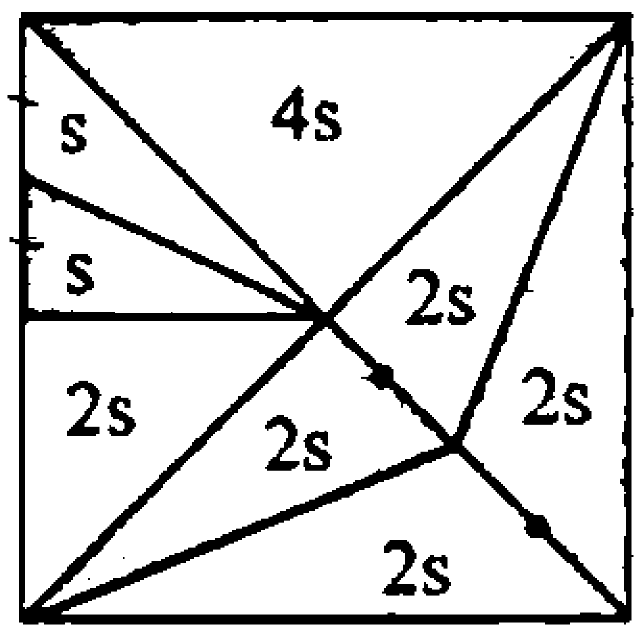
¿Qué tanto porciento de la figura no está sombreada?

A) 75%
B) 65%
C) 71,73
D) 43,75%
E) 32%



RESOLUCIÓN:

* Considerando la cuarta parte de la figura :



* Piden:

$$\frac{No\ sombrero}{Figura}\times 100\%=\frac{4(7S)}{4(16S)}\times 100\%$$

$$=43,75\%$$

RPTA"D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

* Reducir (dar respuesta en %)

01 $30\%M+45\%M+\frac{M}{2}$

A)125%M *B)100%M* *C)115%M* *D)80%M* *E) 90%M*

02 $12\%M-41\%M+M$

A) 60%M *B) 70%M* *C) 71%M* *D)91%M* *E) 76%M*

03 $\frac{M}{5}+\frac{3M}{2}-70\%M$

A) 150%M *B)130%M* *C)116%M* *D)142%M* *E)156% M*

04 $\frac{M}{5}+70\%M-\frac{M}{4}$

A) 65%M *B)76%M* *C) 80%M* *D) 90%M* *E)72%M*

05 $60\%\ M+2M-1,5M$

A) 90%M *B) 75%M* *C) 80%M* *D) 92%M* *E) 110%M*

* Simplificar :

06 El *20%* de *40*

A) 10 *B) 5* *C) 8* *D) 12* *E) 15*

07 El *30%* menos de *80*

A) 50 *B) 56* *C)64* *D)32* *E) 48*

08 El *20 %* más de *90* .

A) 102 *B) 105* *C) 104* *D) 108* *E) 112*

09 El *10%* del *20%* del *30%* de *600*.

A) 3,2 *B) 3,6* *C) 36* *D) 18* *E) 1,8*

10 El *20 %* más de *x*

A) $\frac{4x}{5}$ B) $\frac{x}{5}$ C) $\frac{6x}{5}$ D) $\frac{3x}{5}$ E) $\frac{7x}{5}$

11 Si el $(x+1)\%$ de $(x+21)$ es $\frac{x-3}{2}$ hallar «*x*»

A) 15 *B) 18* *C)19* *D) 21* *E) 24*

12 Si el *40 %* de *N* es *142* , hallar el *20 %* de *2N*

A) 71 *B) 142* *C) 92* *D) 68* *E) 76*

13 ¿Que % de *2 400* es el triple de la mitad de *400*?

A) 20 % *B) 25 %* *C) 30%* *D) 35 %* *E) 40*

14 Si el *30 %* de la tercera parte de una cantidad es *1 200*. Hallar dicha cantidad.

A)9 000 *B) 10 000* *C) 12 000* *D) 15 000* *E) 8 000*

15 Tengo el *80 %* de lo que tenía ayer que era *400* soles más, ¿cuánto tengo hoy?

A)S/.12 000 *B)1 5000* *C)1 600* *D)1 800* *E) 2 000*

16 El *20 %* de lo que tengo excede al *30%* de lo que tienes en dos pesos. Si ambos tenemos el total de 30 pesos, ¿cuánto más que tú tengo?.

A) 12 pesos *B) 14* *C) 10* *D) 11* *E) 13*

17 El *20 %* del *40 %* de *"M"* es igual al *40%* del *50%* de *200*. Hallar *"M"*.

A)500 *B) 750* *C)1 000* *D)250* *E) 400*

18 Si el *x %* de "*x*" es $\frac{x}{5}$. hallar «*x*» .

A) 10 *B) 12* *C)15* *D) 20* *E) 50*

19 Si el x % de x $\frac{x-8}{2}$ .determinar x.

A) 30 *B) 40* *C) 24* *D) 16* *E) 38*

* El *20 %* de "A" es igual al *25 %* de "B". Además: $A+B=90$.

20 ¿Cuánto vale "A"?

A) 40 *B) 45* *C) 50* *D) 60* *E) 100*

21 ¿Cuál es el *10%* del *30%* de "B"

A) 24 *B) 12* *C) 2,4* *D) 1,2* *E) 0,24*

22 Si el *60 %* de x es igual al *20%* de $(x+200)$. Hallar «x» .

A) 50 *B) 150* *C) 100* *D) 200* *E) 300*

* Tengo *S/300* y gasto el *20%* en gaseosas, el *40%* del resto en chocolates y el *20%* del nuevo resto en caramelos

23 ¿Cuánto gasté en gaseosas?

A) s/ 40 *B) 30* *C) 60* *D) 90* *E) 120*

24 ¿Cuánto gasté en chocolates?

A) s/ 72 *B) 90* *C) 96* *D) 108* *E) 102*

25 ¿Cuánto dinero me sobró?

A) s/.112,8 *B) 116,4* *C) 113,12*
D) 118,6 *E) 115,2*

* Si el *10 %* de "x" es igual al *40%* de "y".

26 Hallar el $(x+y)$% de $1/y$.

A) $\frac{1}{1}$ *B)* $\frac{1}{20}$ *C)* $\frac{1}{50}$ *D)* $\frac{1}{75}$ *E) faltan datos*

27 ¿Que % del cuádruple de la mitad del *60%* de un número es el *30%* del *20%* de los *2/5* del número?

A) 1% *B) 2%* *C) 10%* *D) 50%* *E) 75%*

28 El *20%* del *30%* es "k" es igual al *50%* de "M". ¿Qué % de $(3k+2M)$ es $(2k+M)$? aproximadamente.

A) 55,5% *B) 65,4%* *C) 61,8 %*
D) 60,6% *E) 57,2%*

29 En una fiesta juvenil , el *60 %* de los asistentes son hombres y el resto son mujeres ; luego llegan *20* muchachos cada uno con *2* chicas y de esta manera cada uno queda con su pareja , ¿cuántos hombres había inicialmente?

A) 60 *B) 10* *C) 120* *D) 80* *E) 90*

30 Según el problema anterior, ¿cuántas mujeres menos que hombres habían al inicio de la fiesta?

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 60*

TAREA DOMICILIARIA

01 Se tiene *30% a =50% b 60% b=40% c*

¿Qué tanto por ciento de $a+b+c$ es $a+c$?

A) 36% *B) 38%* *C) 42%* *D) 54%* *E) 76%*

02 Gasté el *30%* de lo que no gasté. Si el *20%* de lo que gasté es *72* soles, ¿cuánto tenía?

A) S/.1 200 *B) S/. 560* *C) S/.1 500*
D) S/.1 560 *E) S/.720*

03 De los alumnos de una de las aulas de la «PRE», el *40%* son mujeres. Si el número de mujeres aumenta en *30%* y el de los hombres en *20%*, ¿en qué porcentaje aumentó el total de alumnos?

A) 10% *B) 12%* *C) 18%* *D) 20%* *E) 24%*

04 Si mi dinero es la cuarta parte de tu dinero, y a la vez tu dinero es el *80%* del dinero de aquél, ¿en qué porcentaje debe aumentar mi dinero para que sea el *60%* del dinero de aquél?

A) 100% *B) 200%* *C) 140%* *D) 160%* *E) 300%*

05 En una fiesta de jóvenes *60%* de los asistentes son hombres y el resto mujeres. Luego llegan *40* muchachos cada uno con dos chicas y de esta manera todos están en pareja. ¿Cuántas mujeres habían inicialmente?

A) 20 *B) 40* *C) 80* *D) 120* *E) 60*

06 Actualmente, el número de hombres en una academia es un *50%* más que el número de mujeres. Si el próximo año el total de alumnos debe aumentar en *20%* , ¿cuál debe ser el porcentaje de variación del número de mujeres para que sea un *25%* menor que el porcentaje de variación del número de hombres?

A) 3% *B) 5%* *C) 7%* *D) 9%* *E) 30%*

07 Un artículo que costó *600* soles se vendió haciendo un descuento del *20%* y aún así se ganó el *20%* . Halle el precio fijo.

A) 400 *B) 700* *C) 800* *D) 900* *E) 750*

08 Un vendedor recarga el precio de sus artículos en el *25%* de su valor. ¿Cuál es el máximo descuento

que se puede hacer sin ganar ni perder?

A) 20%   B) 25%   C) 24%   D) 28%   E) 30%

09 Dos blusas son vendidas en **30** soles ***c/u***, en la primera se gana **20%** y en la segunda se pierde el **20%** . Entonces se puede afirmar que

A) no se gana ni se pierde   B) se gana S/.2.5
C) se pierde S/.2.5   D) se pierde S/.4
E) se pierde S/.3.8

10 He vendido un objeto ganando el **25%** y con este dinero compro otro objeto y lo vendo en ***S/. 166,5*** perdiendo el **10%**. ¿Cuánto me costó el primer objeto?

A)S/.186   B)S/.184   C) S/.176   D)S/.148   E)S/.100

11 A **80** litros de alcohol al **60%** se le adiciona **40** litros de agua. ¿Cuántos litros de alcohol puro debo agregar a esta nueva mezcla para obtener la concentración inicial?

A) 30 litros   B) 40 litros   C) 60 litros
D) 50 litros   E) 80 litros

12 La base de un triángulo disminuje en **20%**. ¿En qué tanto por ciento debe aumentar su altura para que su área no varíe?

A)10%   B)20%   C)25%   D)40%   E)80%

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 En una reunión el **20%** de los hombres y el **25%** de las mujeres son peruanos. Si el número de mujeres representa el **40%** del total de personas, ¿qué tanto por ciento de las personas en dicha reunión no son peruanas?

A) 78%   B) 88%   C) 22%   D) 68%   E) 12%

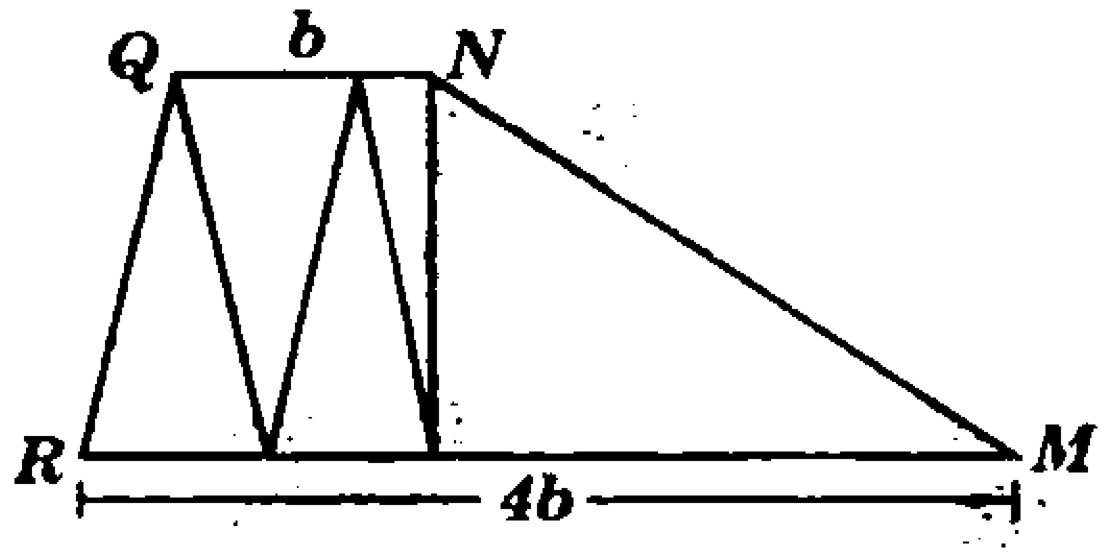
02 En una reunión, si los hombres sacaran a bailar a todas las mujeres, quedarían sin bailar el **10%** de los hombres. Si la cantidad de hombres disminuyen en **19%** y las mujeres aumentan en **10%**, y nuevamente sacan los hombres a bailar a las mujeres, ¿qué tanto por ciento de las mujeres que habían al principio se quedarían sin bailar?

A) 10%   B) 20%   C) 24%   D) 28%   E) 30%

03 Gasté el **20%** de lo que no gasté, luego de lo que me quedaba perdí el **25%** de lo que no perdí y finalmente, del resto, regalé el $33,\hat{3}\%$ de lo que no regalé. ¿Qué tanto por ciento de lo que tenía al inicio es lo que me queda al final?

A) 20%   B) 30%   C) 40%   D) 50%   E) 60%

04 En el trapecio mostrado, ¿qué tanto por ciento del área total es el área de la región sombreada?



A) 80%   B) 75%   C) 70%   D)90%   E) 85%

05 Una persona vende su caballo ganando el **30%** y con este dinero compra otro y lo vuelve a vender, esta vez en ***S/. 3 822***, perdiendo el **30%**. ¿Cuánto costó el primer caballo?

A)S/. 2 940   B)S/. 3 600   C)S/. 3 800
D)S/. 4 200   E)S/. 4 000

06 En un supermercado para determinar el precio de lista de los artículos, se multiplican los costos por un cierto factor "***k***", de tal manera, que pueden descontar **20%** más **20%** y aún ganar el **80%** del costo. Calcular el factor "***k***".

A) 2,8125   B) 3,8125   C) 3,125
D) 2,75   E) 2,175

07 Si la base de un rectángulo aumenta sucesivamente en **20%** y **20%** ; y su altura disminuye en **20%** y **20%** sucesivamente, ¿en qué tanto por ciento varía su área?

A) 7,84%   B) 6,88%   C) 5,84%
D) 8,74%   E) No varía

08 Con el mismo alambre con que se construyó un hexágono regular, se construye un triángulo equilátero. ¿En qué tanto por ciento varía el área de la región encerrada por el alambre?

A) Aumenta en $33,\hat{3}\%$ B) Disminuye en 20%
C) Disminuye en $66,\hat{6}\%$ D) Disminuye en 50%
E) Disminuye en $33,\hat{3}\%$

09 El queso pierde al secarse la séptima parte de su peso. Un comerciante ha comprado queso fresco, lo deja secar y vende el kilo de queso seco a ***S/. 35*** ganando el **25%** de su respectivo precio de compra. ¿Cuál es el precio de un kilo de queso fresco?

A) S/. 24   B) S/. 25   C) S/. 26
D) S/. 27   E) S/. 28

(10) El *20%* de $(x + y)$ es igual al *40%* de $(2x - y)$. ¿Qué tanto por ciento más representa $(12x + 15y)$ respecto de $(12y - 3x)$?

A) 100% B) 200% C) 300%
D) 150% E) 400%

(11) Si A aumenta en *10%*, B aumenta en *20%* y C disminuye en *36%*, ¿en qué tanto por ciento varía M?

$$M = \frac{3\pi R^2 \sqrt{C}}{A^2 (AB^2)^{-1}}$$

A) 5% B) $4,\widehat{27}$% C) 7% D) 8% E) $4,\widehat{72}$%

(12) En un determinado instante de la fiesta hay *8* mujeres sentadas y "x" hombres sentados. Si las parejas que bailan son tantas como los hombres sentados, calcular el porcentaje que representan las mujeres respecto de los hombres, si se sabe que en la siguiente pieza musical todas las mujeres bailan, quedando *4* hombres sentados.

A) $\frac{250}{3}$% B) $\frac{100}{3}$% C) $\frac{200}{3}$% D) 120% E) $\frac{100}{7}$%

(13) Una rueda con llanta de caucho tiene un diámetro exterior de *25* pulgadas. Cuando el radio disminuye en un cuarto de pulgada, entonces el número de revoluciones que la rueda dará en una milla sufre una variación porcentual del:

A) 2,04% B) 2,05% C) 2,06%
D) 2,07% E) 2,08%

(14) Los *2/5* de una mercadería se vende con un *6%* de pérdida, la mitad del resto con *2%* de ganancia. ¿Cuánto se debe ganar en la venta del resto para ganar el *9%* sobre el total de la mercadería?

A) 42% B) 36% C) 30%
D) 50% E) 100%

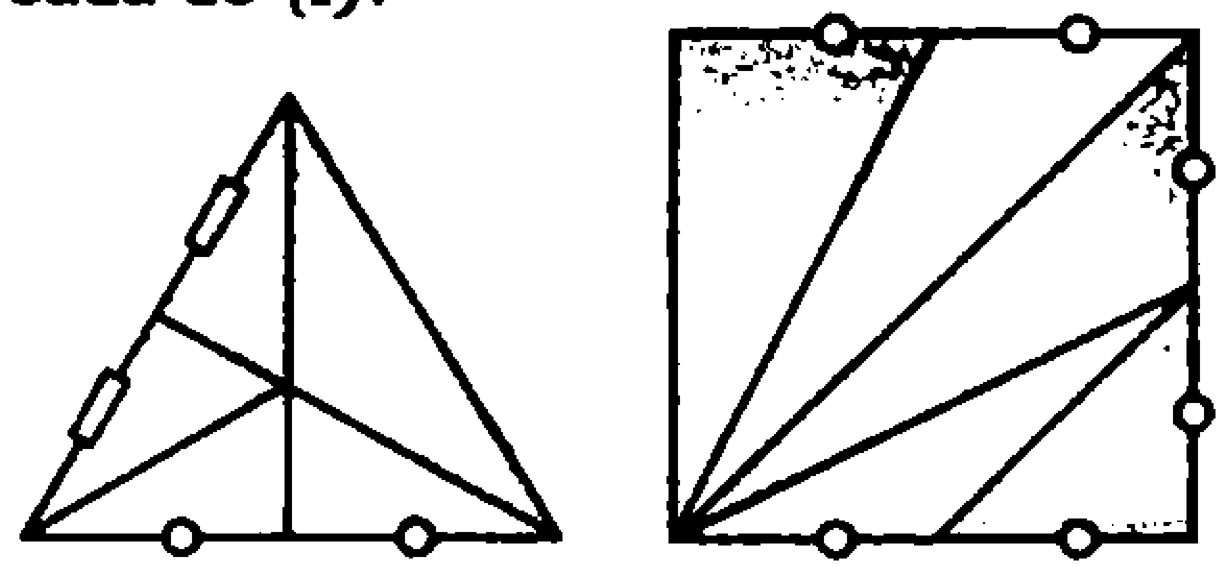
(15) En una universidad particular, el departamento de servicio social decide rebajar las pensiones de enseñanza a los estudiantes de menores recursos en un *20%* y aumentar un *30%* al resto. Si el monto total de las pensiones queda disminuido en un *10%* con esta política, ¿qué tanto por ciento de la pensión total representaba la pensión pagada por los estudiantes de menores recursos económicos?

A) 80% B) $71,\hat{1}$ % C) 68% D) 32% E) 20%

(16) Si el área total de un tetraedro regular disminuye en *36%*, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

A) 50% B) 63% C) 48,8%
D) 45% E) 57%

(17) Las figuras *(I)* y *(II)* muestran un triángulo y un cuadrado, respectivamente. Si el área del cuadrado del lado *8 cm* es los *16/3* del área del triángulo. Calcular qué porcentaje de la región sombreada de *(II)* representa la región no sombreada de *(I)*.



(I) (II)

A) 1000% B) 15% C) 3000%
D) 10% E) 50%

(18) Una secretaria quiere comprar un equipo de sonido valorizado en *S/. 950*. El vendedor le comunica que se le hará *3* descuentos sucesivos del *10%* ; *20%* y *25%*. Como su sueldo no le alcanzaba en ese momento solicitó un aumento a su jefe, el cual le fue otorgado. Se le hizo *3* aumentos sucesivos a su sueldo del *10%* ; *20%* y *25%*, pero aún así le faltó *S/. 18* para comprar el equipo de sonido. ¿Cuál era el sueldo de la secretaria antes del aumento?

A) S/. 300 B) S/. 350 C) S/. 380
D) S/. 400 E) S/. 450

(19) Un objeto costaba *S/. 80 000* soles, y lo he adquirido ahorrando la suma de *S/. 29 600* después de que me hicieron *2* descuentos sucesivos, uno de ellos del *30%* y el otro que no lo recuerdo. ¿Cuál fue este segundo descuento?

A) 10% B) 20% C) 30% D) 40% E) 50%

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) A	2) C	3) *	4) A	5) E	6) C	7) B	8) D	9) B	10) C
11) C	12) B	13) B	14) C	15) C	16) B	17) A	18) D	19) B	20) C
21) D	22) C	23) C	24) C	25) E	26) B	27) B	28) B	29) A	30) B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) A	2) B	3) D	4) A	5) D	6) A	7) A	8) E	9) A	10) B
11) E	12) A	13) A	14) B	15) A	16) C	17) D	18) A	19) A	20) B

OPERADORES MATEMATICOS

CAPITULO 33A

OBJETIVOS :

* Conocer las diferentes formas de definición de una operación màtemática.

* Comprender el concepto de Operación Matemática, desde un punto de vista práctico.

* Afianzar la capacidad para reconocer y manejar nuevas estructuras simbólicas formadas con las operaciones básicas.

* Conocer las diferentes formas de definición de una operación matemática.

* Analizar y reconocer el manejo adecuado de nuevas estructuras simbólicas relacionadas con las operaciones matemáticas.

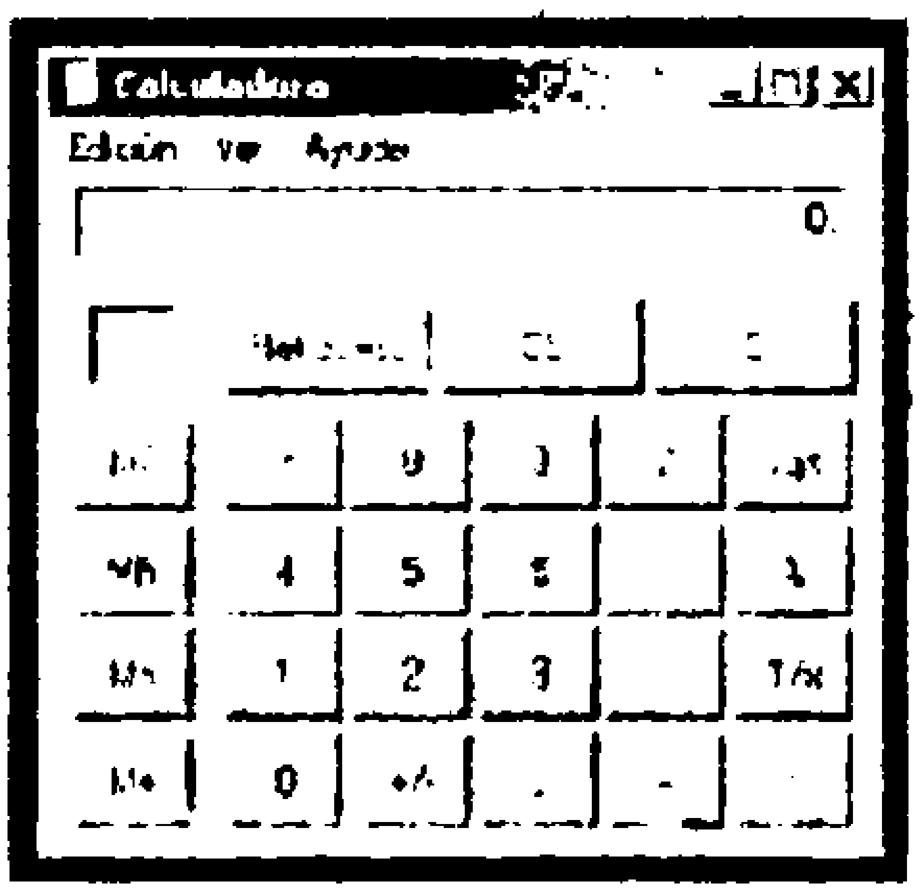
* Conocer las formas prácticas y artificios de resolución de situaciones que impliquen operaciones matemáticas diversas.

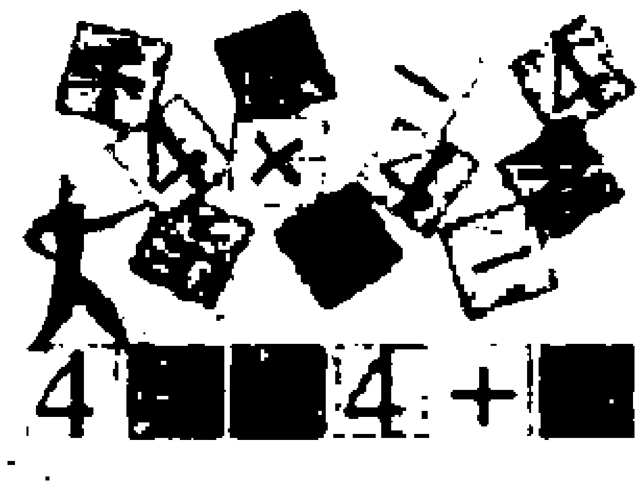
INTRODUCCIÓN :

En este capítulo se basa la importancia de la aplicación que tiene una operación matemática sobre los procesos y reglamentos, que permite medir la capacidad para captar relaciones u operaciones nuevas, que estamos muy poco acostumbrados; también permite analizar la definición y el modo de aplicación de nuevas operaciones matemáticas que contienen ciertas condiciones en las cuales han sido definidas.

Para todo esto debemos entender que es una operación matemática y que es un operador matemático; donde podemos entenderlo como si fuera una máquina que transforma la materia prima en un producto; teniendo en cuenta que la maquina viene a ser el operador matemático; la materia prima es la operación inicial que nos dan para hallar el resultado siendo este el producto terminado de dicha operación.

Este es un capítulo que no presenta mucha dificultad al estudiante, pero si le es de gran aplicación ya que le permite medir su capacidad para captar relaciones u operaciones nuevas, a las que se supone no está acostumbrado; le permite analizar nuevas operaciones matemáticas, su definición y su modo de cómo aplicarlas bajo sus condiciones y restricciones , en las cuales a sido definida. Para tal afecto , debemos saber lo que es un operador matemático y una operación matemática .





EJEMPLO :

Definamos $\binom{n}{k}$ como :

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots 3\times 2\times 1}$$

Donde :

$n \in R\ ;\ k \in N\ ;$ Además:

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots\ldots \times n$

Se pide :

I) Únicamente con *2* cifras *2* , formar el *3* .

II) Únicamente con *3* cifras *2* , formar el *7* .

RESOLUCIÓN :

I) $\binom{-2}{2}=\frac{(-2)(-3)}{2\times 1}=3 \Rightarrow \binom{-2}{2}=3$

II) $\binom{-2}{\binom{-2}{2}!}=\binom{-2}{3!}=\binom{-2}{6}=\frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=7 \Rightarrow \binom{-2}{\binom{-2}{2}!}$

OPERACIÓN MATEMÁTICA

Proceso que consiste en la transformación de una o más cantidades en otra llamada resultado , bajo ciertas reglas o condiciones en la cual se define la operación. Toda operación matemática presenta una ***REGLA DE DEFINICIÓN*** y un símbolo que le identifica llamado ***OPERADOR MATEMÁTICO***. Como ejemplos de operaciones matemáticas tenemos: la adición , la sustracción , la multiplicación , ...; etc.

EJEMPLO :

a) $\underbrace{3 + 8}_{\text{Operandos}} = 11$ ← Resultado b) $\underbrace{12 \times 3}_{\text{Operandos}} = 36$ ← Resultado

OPERADOR MATEMÁTICO

El operador matemático es el símbolo que representa e identifica a una operación matemática.

OPERADOR	OPERACIÓN
+	*adición*
−	*sustracción*
×	*multiplicación*
÷	*división.*

Estos operadores son universalmente definidos, pues en cualquier parte del mundo, la persona que tenga conocimientos de ella realizará las mismas operaciones llegando a un mismo resultado, por eso se dice que la matemática es única.

Basándose en éstas operaciones podemos definir nuevos operadores arbitrarios, asociando una o más operaciones conocidas universalmente .Te presentamos algunos de ellos:

$*, \#, \Delta, \nabla, \sum, \Phi, \Psi, \oplus, \otimes, \S, \ldots,$ etc.

Estos símbolos y cualquier otro, en sí mismo no nos indican ninguna operación concreta, pero con ello podemos efectuar diferentes operaciones estableciendo antes, para cada uno de ellos, condiciones previas que llamamos "***reglas de definición***" o "***leyes de formación***". La operación matemática representado por un operador arbitrario es el procedimiento que aplicado a una ó más cantidades producen un resultado, el cual se obtiene después de utilizar reglas previamente definidas.

EJEMPLO :

$3 \times 7 = 21$

- Operación: 3×7
- Resultado: 21
- Operador Conocido: $\times$

$a \Delta b = a + b$ — $a+b$: Regla de definición; Δ: Operador

$m * n = m^2 - n^2$ — $m^2 - n^2$: Regla como operar; $*$: Operador

Cuando un operador actúa una sola vez en una determinada operación lo llamamos *OPERADOR SIMPLE*.

OBSERVACIÓN :

Un operador es un símbolo que representa a un proceso de transformación de una o más cantidades en otra cantidad llamada resultado ; bajo ciertas reglas arbitrarias como operar , que se definen en cada problema .

EJEMPLO 1 :

Si: $a * b = 3b - 2a^2$

- a: 1ra. Componente
- b: 2da. Componente
- $3b - 2a^2$: Regla como operar
- $*$: Operador matemático

Calcular : $5 * 23$

RESOLUCIÓN :

* El proceso de transformación será :

$$a * b = 3b - 2a^2$$
$$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$$
$$5 * 23 = 3(23) - 2(5)^2$$

$\Rightarrow 5 * 23 = 19 \longrightarrow$ Resultado

EJEMPLO 2 :

Se define en $\mathbb{R}$: $a * b = \underbrace{a^2 + b^2}_{\text{Regla de definición}}$

Entonces podemos calcular :

$2 * 5 = 2^2 + 5^2 = 29 \qquad 7 * (-3) = 7^2 + (-3)^2 = 58$

En primer lugar hemos identificado a los elementos que vamos a operar ($a = 2$; $b = 5$), luego hemos reemplazado en la regla de definición y finalmente se han realizado sus operaciones establecidas .

EJEMPLO 3 :

Se define : $\textcircled{x} = \dfrac{x+1}{x-1}$ Calcular : $\textcircled{3}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando directamente la regla como operar dada, remplazando la variable x por 3 :

$$\textcircled{3} = \frac{3+1}{3-1} \Rightarrow \textcircled{3} = 2$$

OPERADOR CON UNA CANTIDAD

EJEMPLO :

RELACIÓN : $\boxed{a} = 4a$ — Operador: $\boxed{\ }$; Cantidad: a

En muchos casos es bueno encontrar o identificar la regla como operar, la que en este caso es :

El cuádruple de la cantidad que está dentro del operador.

Según la regla anterior completar :

$\boxed{3}=4(3)=12$; $\boxed{\boxed{6}}=$

$\boxed{-2}=$; $\boxed{\boxed{\boxed{-1}}}=$

$\boxed{1/2}=$; $\boxed{\boxed{\boxed{2}}\cdots}=$ (10 operadores)

OPERADOR CON MÁS DE UNA CANTIDAD

EJEMPLO 1 :

$$a * b = a^2 + b^3$$

(Operador: $*$; Cantidades: a, b)

RELACIÓN :

El cuadrado de la primera cantidad es añadido al cubo de la segunda cantidad .

Según la regla anterior completar :

- $3 * 2 = 3^2 + 2^3 = 17$
- $1 * 5 =$
- $3 * 0 =$
- $2 * -2 =$
- $-3 * -3 =$
- $(2 * 3) =$
- $(1 * 1) * (3 * 0) =$
- $(-1 * -1) * (-2 * -2) =$
- $(0 * 0) * (3 * 0) =$
- $(4 * 0) * (-2 * 1) =$

EJERCICIO 1 :

Si : $A \# B = A^B - B^A$; Calcular : $4 \# (3 \# 2)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) -1

RESOLUCIÓN :

Característicamente cada problema presenta un modelo definido , por lo que se sugiere que el estudiante prioritariamente identifique este modelo, el cual debe ser asumido como una ley en lo que respecta al ejercicio ; en este caso el modelo será :

$$A \# B = A^B - B^A$$

* Luego como segundo paso se sugiere analizar el modelo con la finalidad de determinar si es posible, simplificar , transformar , factorizar , o reducir el planteamiento , a menudo el problema fundamental consiste en tratar adecuadamente a esta ley . En este caso, como es evidente , el modelo no requiere mayor análisis , en razón de que no es reducible ; dicho esto procedemos a sustituir los valores numéricos de acuerdo al modelo indicado , veamos:

$$A \# B = A^B - B^A$$

* De : $4 \# (3 \# 2)$
* Tomamos : $3 \# 2 = 3^2 - 2^3$
* Luego : $4 \# (9-8)$
* Entonces : $4 \# 1 = 4^1 - 1^4$
* Ahora : $4 \# (3 \# 2)$ Es igual : $4-1=3$

RPTA : "C"

EJERCICIO 2 :

Definimos la operación : $\underset{B}{\oint} A = A^2 - 2B$

Calcular : $\underset{1}{\oint}\left[\underset{2}{\oint}\left(\underset{3}{\oint} 4\right)\right]$

A) 2417 B) 9216 C) 0 D) 684 E) 3220

RESOLUCIÓN :

* Nótese que en este caso la operación definida presenta como operador a un triángulo que circunscribe a dos números, mientras que en el ejercicio se representan tres triángulos , pues bien empezaremos resolviendo de adentro hacia afuera :

$$\underset{1}{\oint}\left[\underset{2}{\oint}\left(\underset{3}{\oint} 4\right)\right] \leftarrow$$

* *Tenemos el OPERADOR INTERNO:* $\underset{3}{\oint} 4 = 4^2 - 2\times 3 = 10$

*Luego tendremos :

$$\underset{2}{\oint}\left(\underset{3}{\oint} 4\right) = \underset{2}{\oint} 10 = 10^2 - 2\times 2 = 96$$

* Entonces :

$$\underset{1}{\oint}\left[\underset{2}{\oint}\left(\underset{3}{\oint} 4\right)\right] = \underset{1}{\oint} 96 = 96^2 - 2\times 1 = 9216$$

RPTA : "B"

OBSERVACIÓN :

En muchas , situaciones , es mejor tratar de hallar la regla como operar , para así hacer más

rápido los cálculos :

EJEMPLOS :

I) $a^2 * 3b = b - a$ (Aquí la regla como operar, será: La resta entre la tercera parte de la 2da. componente y la raíz cuadrada de la 1ra.)

$\div 3$; $\sqrt{\ }$

$\Rightarrow 64 * 24 = 8 - 8 = 0$

$\div 3$; $\sqrt{\ }$

II) $\boxed{x-1} = x^2$ (Aquí la regla será : Sumarle 1 a lo que está dentro del operador para luego elevarle al cuadrado)

$+1 \quad (\ )^2$

«En estos casos, siempre se tratará de hallar «x» de la parte interna del operador, para luego hacer lo necesario para hacerla igual a lo que está en la parte derecha»

$\boxed{5} = 36$

$+1 \quad (\ )^2$

III) $\triangle(x+3) = 7x - 1$

$-3 \quad \times 7 \quad -1$

NOTA :

Por cada vez que aplicamos la regla , se elimina *1* operador , cosa que si queremos eliminar *3* operadores , tendremos que aplicar *3* veces la regla.

EJEMPLO :

Si : $\boxed{x+7} = x$

-7

Entonces : $\boxed{\boxed{32}} = \boxed{32-7} = 32 - 7 - 7 = 18$

$-7 \quad -7$

EJERCICIO 3 :

Si : $\triangle(n^2 - 3) = 5n$

Calcular : $\triangle(\triangle(1) - 4)$

A) 2 *B) 1* *C) 20* *D) 15* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

* Hallando la regla como operar :

$\triangle(n^2 - 3) = 5$

* Luego :

$+3 \quad \sqrt{\ } \quad \times 5$

$\triangle(\triangle(1) - 4) = \triangle(10 - 4) = \triangle(6) = 15$

$+3 \quad \sqrt{\ } \quad \times 5$

RPTA : "D"

EJERCICIO 4 :

Si : $\triangle(B) = (B+1)^2$

Hallar "x" en : $\triangle(\triangle(\triangle(x))) = 100$

A) $\sqrt{2}$ *B)* $\sqrt{2}-1$ *C)* 2 *D)* $\sqrt{2}+1$ *E)* $\sqrt{\%}$

RESOLUCIÓN :

* Hallamos la regla para operar inversamente (resultado hacia la parte interna del operador) :

$(B+1)^2 = \triangle(B)$

$\sqrt{\ } \quad -1$

* Luego :

$100 = \triangle(\triangle(\triangle(x))) \Rightarrow 9 = \triangle(\triangle(x))$

$\sqrt{\ } \quad -1 \qquad \sqrt{\ } \quad -1$

$2 = \triangle(x) \longrightarrow \sqrt{2} - 1 = x$

$\sqrt{\ } \quad -1$

RPTA : "B"

EJERCICIO 5 :

Si : $\boxed{a-2} = a + 2$ .Calcular :

$\boxed{\boxed{\cdots \boxed{a - 500} \cdots}}$

250 Operadores

A) a B) – 500 C) 500 D) a+500 E) 500a

RESOLUCIÓN :

* Hallando la regla como operar :

$$\boxed{a-2} = a+2 \text{ ó } \boxed{\boxed{a-2}} = a+2$$

+2 +2 +4

* Esta regla nos indica , que para eliminar *1* operador, debo sumar *4* a su parte interna, luego en lo que nos piden, debemos sumar "*250* veces el *4* , a "*a – 500*", que es la parte interna , entonces la expresión a calcular será :

$$a-500+\underbrace{4+4+4+\ldots\ldots+4}_{250\ sumandos}$$

$= a-500 + 250(4) = a - 500 + 1000 = a + 500$

RPTA : "D"

EJERCICIO 6 :

Si $a \star b = a - b + 2(b \star a)$, calcula $12 \star 3$.

A) 6 B) 66 C) 21 D) 4 E) 3

RESOLUCIÓN :

• Siempre que en la definición se presente el operador arbitrario, se procede de la siguiente manera:

$a \star b = a - b + 2(\underline{b \star a})$ .... (I)

$\underline{b \star a} = b - a + 2(a \star b)$ .... (II)

• Reemplazamos (II) en (I) y resolvemos :

$a \star b = a - b + 2[b - a + 2(a \star b)]$

$\Rightarrow a \star b = a - b + 2b - 2a + 4(a \star b)$

$\Rightarrow 3(a \star b) = a - b \Rightarrow a \star b = \dfrac{a-b}{3}$ ⇐ DEFINICIÓN

Luego, $12 \star 3 = \dfrac{12-3}{3} = 3$

RPTA : "E"

EJERCICIO 7 :

Sabemos que se cumple : $\sqrt{a} * b^2 = 2(\sqrt{b} * a^2) - ab$

Calcular : $\dfrac{\sqrt[4]{3} * 6}{1 * 2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $\sqrt{a} = x \longrightarrow a = x^2 \longrightarrow a^2 = x^4$

$b^2 = y \longrightarrow b = \sqrt{y} \longrightarrow \sqrt{b} = \sqrt[4]{y}$

*Reemplazando en la Regla dada :

$x * y = 2\ (\sqrt[4]{y} * x^4) - x^2\sqrt{y}$ .... (I)

$\Rightarrow \sqrt[4]{y} * x^4 = 2\ (\sqrt[4]{x^4} * \sqrt[4]{y}^4) - \sqrt[4]{y}^2\ \sqrt{x^4}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{y} * x^4 = 2\ (x * y) - \sqrt{y}\ x^2$ .... (II)

* luego (II) en (I) :

$(x * y) = 2(2\ (x * y) - \sqrt{y}x^2) - x^2\sqrt{y}$

$(x * y) = 4(x * y) - 2\ \sqrt{y}\ x^2 - x^2\sqrt{y}$

$\Rightarrow \boxed{x * y = x^2\sqrt{y}}$

* Luego : $\dfrac{\sqrt[4]{3} * 6}{1 * 2} = \dfrac{\sqrt[4]{3}^2 \times \sqrt{6}}{1^2 \times \sqrt{2}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

RPTA : "C"

EJERCICIO 8 :

Si : $\boxed{n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ calcular "x" si: $\boxed{\boxed{\boxed{2x+1}}} = 21$

A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 1/4 E) 1/8

RESOLUCIÓN :

* Analizando la regla como operar , tenemos que $\dfrac{n(n+1)}{2}$; es una multiplicación de dos números consecutivos , sobre *2* ; entonces al *21* , hay que darle esa forma , quedando así :

$21 = \dfrac{42}{2} = \dfrac{6 \times 7}{2}$; pero $\boxed{n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (Igual) y de

$\boxed{\boxed{\boxed{2x+1}}} = \dfrac{6 \times 7}{2} \Rightarrow \boxed{\boxed{2x+1}} = 6$ (Igual)

* Haciendo lo mismo que lo anterior, es decir :

* entonces : $6 = \dfrac{12}{2} = \dfrac{3 \times 4}{2}$

$\boxed{\boxed{2x+1}} = \dfrac{3 \times 4}{2} \Rightarrow \boxed{2x+1} = 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{2 \times 3}{2}$ (Igual)

$\Rightarrow \boxed{2x+1} = \dfrac{2 \times 3}{2} \Rightarrow 2x + 1 = 2 \quad x = \dfrac{1}{2}$ (Igual)

RPTA : "B"

EJERCICIO 9 :

Calcular : $A = \sqrt{7 \heartsuit \sqrt{7 \heartsuit \sqrt{7 \heartsuit \ldots\ldots \infty}}}$

Si : $a \heartsuit b = a - 6b^2$

A) 7 B) 0 C) 1 D) – 1 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Debemos eliminar el "∞" (infinito) ; por lo general se separa un elemento de dichos infinitos elementos, entonces :

$A^2 = 7 \heartsuit \underbrace{\sqrt{7 \heartsuit \sqrt{7 \heartsuit \sqrt{7 \heartsuit \ldots \infty}}}}_{\text{Será igual a : "A"}} \Rightarrow A^2 = 7 \heartsuit A$

*Ahora aplicamos la regla como operar dada , en el miembro derecho :

$$A^2=7-6A^2 \Rightarrow 7A^2=7 \Rightarrow A^2=1 \Rightarrow A=1$$

RPTA : "C"

EJERCICIO 10 :

Sabiendo que :

$$Q(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, \text{ si } x \text{ es par}\\[2mm] \dfrac{x+2}{3}, \text{ si } x \text{ es impar}\end{cases}$$

Calcula : $R=\left[\dfrac{Q(...Q(Q(Q(1)))...)}{Q(...Q(Q(Q(2)))...)}\right]^{-1}$

A) 1   B) 1/2   C) 2   D) 1/4   E) 1/8

RESOLUCIÓN :

• Por definición :

$$\underset{\text{IMPAR}}{Q(1)}=\frac{1+2}{3}=1 \qquad \underset{\text{PAR}}{Q(2)}=\frac{2+2}{2}=2$$

$$R=\left[\frac{1}{2}\right]^{-1}=2$$

El valor de R es 2.

RPTA : "C"

EJERCICIO 11 :

$\boxed{\boxed{\boxed{x}}}=64x-63$ Calcular : $\boxed{-2}$

A) – 2   B) 8   C) – 10   D) -11   E) 11

RESOLUCIÓN :

* Considerando :

$\boxed{x}=ax+b$; $a \wedge b$: constantes

$\Rightarrow \boxed{\boxed{x}}=\boxed{ax+b}=a(ax+b)+b$

$\Rightarrow \boxed{\boxed{\boxed{x}}}=\boxed{a(ax+b)}+b=a[a(ax+b)+b]+b$

$\Rightarrow \boxed{\boxed{\boxed{x}}}=a^3x+a^2b+ab+b=64x-63$

* Igualando coeficientes :

$a^3=64$; $a^2b+ab+b=-63$

$\Rightarrow a=4 \quad \Rightarrow b=-3$

* Luego : $\boxed{x}=4x-3 \quad \boxed{-2}=4(-2)-3=-11$

RPTA : "D"

EJERCICIO 12 :

Si $\langle\langle\langle n+1\rangle\rangle\rangle=n-4$, calcula $\langle n-3\rangle$

RESOLUCIÓN :

• Como se observa, $\langle\langle\ \rangle\rangle$ tiene una definición de primer grado: $n-4$; entonces consideramos la definición $\langle\ \rangle$ de primer grado es decir:

$1\ Op.\ \langle x\rangle=ax+b$ .... *(I)*

$2\ Op.\ \langle\langle x\rangle\rangle=a(\langle x\rangle)+b=a^2x+ab+b$

$3\ Op.\ \langle\langle\langle x\rangle\rangle\rangle=a^3x+a^2b+ab+b$

$\langle\langle\langle n+1\rangle\rangle\rangle=\underbrace{a^3(n+1)+a^2b+ab+b}_{\text{POR DEFINICIÓN}}=\underbrace{n-4}_{\text{POR DATO DEL EJERCICIO}}$

• Analizamos la última igualdad :

$$a^3n+a^3+a^2b+ab+b=1^3n-4$$

Por analogía : $a=1 \quad \wedge \quad b=-\dfrac{5}{3}$

• Reemplazamos a y b en *(I)* :

$$\langle x\rangle=1x-\frac{5}{3} \Leftarrow \text{DEFINICIÓN}$$

Luego : $\langle n-3\rangle=1(n-3)-\dfrac{5}{3}=n-\dfrac{14}{3}$

EJERCICIO 13 :

Dados los números reales a y b, se define :

$$a*b=\begin{cases}\sqrt{ab}\ ;\ \text{si } a\ge 0 \text{ y } b\ge 0\\[2mm] \dfrac{a}{b}\ ;\ \text{si } a<0 \text{ ó } b<0\end{cases}$$

Si : $0<x<1$

Hallar : $[(1-x)^2*y^4]*(x-1)$

A) y (1– x)   B) – x²   C) x – 1   D) xy   E) – y²

RESOLUCIÓN :

* De la condición : $0<x<1$

Se obtiene : $x-1<0$ y $1-x>0$

* Piden : $[(1-x)^2*y^4]*(x-1)$

* Aplicando la primera definición :

$$[\sqrt{(1-x)^2y^4}\,]*(x-1)=[(1-x)y^2]*(x-1)$$

* Aplicando la segunda definición :

$\dfrac{(1-x)y^2}{x-1}$; puesto que $(1-x)\,y^2>0$ $\dfrac{-(x-1)y^2}{x-1}=-y^2$

RPTA : "E"

OPERACIONES MEDIANTE TABLAS DE DOBLE ENTRADA

En este caso , no se nos indica qué operación vamos a realizar , por el contrario , nos indican los elementos que han sido operados y los resultados de dichas operaciones a través de UNA TABLA DE DOBLE ENTRADA .

Operador Matemático → *

Fila de entrada → a b c d

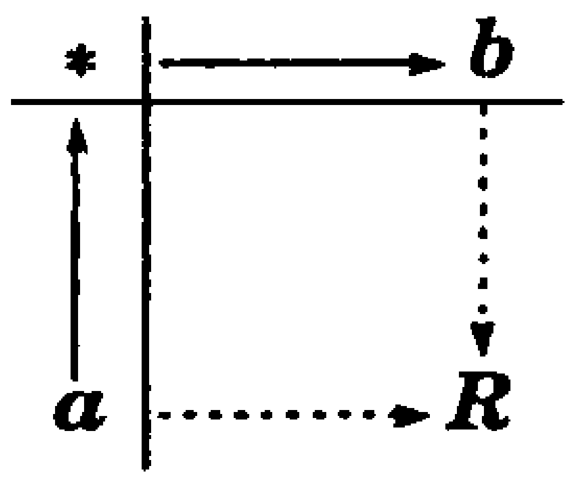
*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	d	c	d	a

Columna de entrada: a, b, c, d

Cuerpo de la tabla (son los resultados)

Elementos que han participado en la operación

Se opera así :



$\Rightarrow \quad a * b = R$

EJEMPLO 1 :

En el conjunto $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ se define la operación (*) mediante la siguiente tabla :

*	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	1	3	2
3	1	3	2	4
4	3	2	4	1

Calcular : $3 * 2$

RESOLUCIÓN :

*En primer lugar ubicamos el primer elemento de la pregunta *(3)* en la columna de entrada y al segundo elemento de la pregunta *(2)* en la fila de entrada, el resultado de la operación lo encontramos en la intersección de la fila y la columna correspondiente al primero y al segundo elemento respectivamente. Veamos :

2do. elemento de la pregunta

1er. elemento de la pregunta

*	1	2	3	4
1	2	4	1	3
2	4	1	3	2
3	1	3	2	4
4	3	2	4	1

Luego : $\Rightarrow 3 * 2 = 3$

EJEMPLO 2 :

En el conjunto $A=\{1;2;3;4\}$

*	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

Hallar : $E=\dfrac{(1 * 2) * (2 * 4)}{(3 * 3) * (4 * 1)}$

RESOLUCIÓN :

De la tabla : $E = \dfrac{3*2}{2*1} = \dfrac{1}{3}$

EJEMPLO 3 :

Sobre el conjunto $A=\{1;2;3;4\}$ se define la operación $\oplus$ mediante la tabla adjunta :

$\oplus$	4	3	2	1
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

Determine "x". si se cumple que:

$(3\oplus 4)\oplus(x\oplus 4)=\left[1\oplus(2\oplus 2)\right]\oplus 3$

A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* De la operación matemática :

$\oplus$	4	3	2	1
1	1	4	3	2
2	2	1	4	3
3	3	2	1	4
4	4	3	2	1

* Ubicando los valores :

$\underbrace{(3\oplus 4)}_{3}\oplus(x\oplus 4)=[1\oplus\underbrace{(2\oplus 2)}_{4}]\oplus 3$

$3\oplus(x\oplus 4)= \underbrace{1\oplus 4}_{}$

$3\oplus(x\oplus 4)= \underbrace{1 \quad \oplus \quad 3}_{}$

$3 \quad \oplus(x\oplus 4)= \quad 4$

$\Rightarrow \quad x\oplus 4=1$

$\Rightarrow x=1$

RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si: $a * b = 3a + b$, calcula $3 * 5$.

A) 12 B) 14 C) 20 D) 18 E) 0

RESOLUCIÓN :

Recuerda que una operación matemática es un proceso que consiste en la transformación de una o más cantidades en una cantidad llamada resultado, pero bajo ciertas reglas que definen la operación.

i) De la condición, vemos que en $a*b=3a+b$; $a=3$ y $b=5$

ii) Reemplazamos las letras por su valor numérico :

$3*5=3(3)+5$

iii) Operamos en el segundo miembro de la igualdad: $3*5=14$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Sí : $m\Delta n=(m+n)(m-n)$, Calcular : $19\Delta 9$.

A) 300 B) 190 C) 180 D) 420 E) 280

RESOLUCIÓN :

i) Observamos que $m=19 \wedge n=9$.

ii) Reemplazamos valores :

$m\Delta n=(m+n)(m-n) \Rightarrow 19\Delta 9 \doteq (19+9)(19-9)$

iii) Operamos en el segundo miembro :

$19\Delta 9=(28)(10)=280$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Si: $a\square b=a^b+b^a$; Calcular : $E=1\square(3\square 2)$

A) 0 B) 21 C) 4 D) 18 E) 17

RESOLUCIÓN :

* Desarrollando primero el paréntesis :

$3 \square 2 = 32 + 23 = 9 + 8 = 17$

(3 → a, 2 → b)

* Finalmente :

$E=1 \square 17 = 1^{17}+17^{1}=18$

(1 → a, 17 → b)

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Definimos $n \star m = 2m - n$.

Calcula: $E=(6 \star 4) \star (4 \star 8)$

A) 12 B) 16 C) 22 D) 18 E) 0

RESOLUCIÓN :

• Identificamos el operador matemático arbitrario y su definición : $\underbrace{n \star m}_{\text{OPERADOR}} = \underbrace{2m-n}_{\text{DEFINICIÓN}}$

• Resolvemos por separado aplicando la definición:

$6 \star 4 = 2(4) - 6 = 2$

$4 \star 8 = 2(8) - 4 = 12$

• La expresión $E = (6 \star 4) \star (4 \star 8)$ se reduce a

$E = 2 \star 12 = 2(12) - 2 = 22$

El valor de E es 22.

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Si : $b*a=22+a-\sqrt{a}$

Calcular : $(...(((1*2)*3)*4)*.....)*2025$

A) 0 B) 2001 C) 2002 D) 2024 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Analizando la regla como operar , se aprecia que el resultado únicamente depende de la "a" (2do. componente) ; la "b" no interviene , entonces convenientemente haremos :

$b * a = 22 + a - \sqrt{a}$

$\overbrace{(...(((1*2)*3)*4)...)}^{b}*2025 = 22 + 2025 - \sqrt{2025}$

$= 2047 - 45 = 2002$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Si : $\lfloor a^a \rfloor \overline{b^b|} = a^b + b^a$

Calcular : $\lfloor 4 \rfloor \overline{0{,}25|}$

A) 0 B) 1 C) 4,25 D) 2,75 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Por ecuaciones :

$a^a = 4 \longrightarrow a^a = 2^2 \longrightarrow a=2$

$b^b = 0{,}25 \longrightarrow b^b = (-2)^{-2} \longrightarrow b=-2$

* Luego piden :

$\lfloor 2^2 \rfloor \overline{(-2)^{(-2)}|} = \underbrace{2^{-2}+(-2)^2}_{\text{Según la regla dada}} = 4{,}25$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Definimos la siguiente operación :

$$\sqrt[3]{x} \phi \sqrt{y} = y^2 + x^3$$

Determinar : $2 \phi 3$

A) 593 B) 13 C) 31 D) 512 E) 433

RESOLUCIÓN :

*Si evaluamos el modelo mostrado notaremos que las variables son cantidades subradicales, es decir que para resolver el planteamiento mostrado es necesario que previamente le demos la forma que presenta el modelo , es decir, con radicales , veamos:

* Previamente : $\sqrt[3]{x} = 2 \rightarrow x = 8$

* También : $\sqrt{y} = 3 \rightarrow y = 9$

* Luego : $\sqrt[3]{x} \phi \sqrt{y} = y^2 + x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} \phi \sqrt{9} = 9^2 + 8^3$

* Entonces : $2 \phi 3 = 81 + 512 \Rightarrow 2 \phi 3 = 593$

RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Una curiosa máquina tiene las teclas *A* y *B*, y una pantalla. Cuando en la pantalla aparece el número *x* y se presiona la tecla *A*, el número *x* de la pantalla es sustituido por $2x + 1$; y se presiona la tecla *B*, el número *x* de la pantalla es sustituido por $3x - 1$. Si en la pantalla está el número *5*, el mayor número de dos cifras que se puede obtener si presionamos las teclas *A* o *B* en forma secuencial es

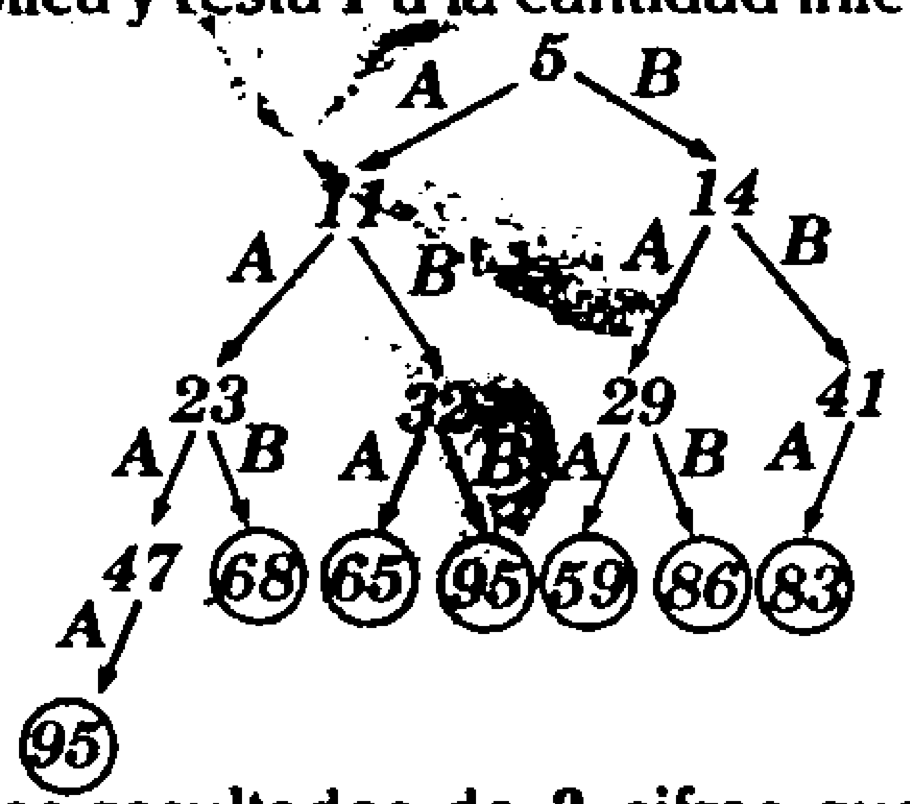
A)86 D)95 B)93 C)92 E)90

RESOLUCIÓN :

De los datos:

Tecla *A*: duplica y suma *1* a la cantidad inicial.

Tecla *B*: triplica y resta *1* a la cantidad inicial. Al inicio



Se señala los resultados de *2* cifras que se podría obtener en la pantalla, de ellos, el mayor resultado de *2* cifras es *95*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Se define : $2a^2 \Delta \sqrt{b} = \dfrac{a+b}{a-b}$; $a \neq b$

Calcular : $18 \Delta 2$

A) 1 B) 2 C) -7 D) 4 E) 7

RESOLUCIÓN :

$$2a^2 \Delta \sqrt{b} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$18 \Delta 2 = 2 \times 3^2 \Delta \sqrt{4} = \frac{3+4}{3-4} = \frac{7}{-1}$$

$\Rightarrow 18 \Delta 2 = -7$

* En este caso primero hemos transformado la pregunta de acuerdo a la definición . Luego hemos identificado los elementos a operar *(a = 3 ; b = 4)*, para finalmente reemplazar en la regla de definición y operar .

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Si : $2a^b * 3b^a = \sqrt{a^2 + b^2}$

Calcular : $128 * 243$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Dando la forma de la regla de definición , entonces:

$$128 * 243 = \underbrace{2(4)^3}_{a=4} * \underbrace{3(3)^4}_{b=3} = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$\Rightarrow 128 * 243 = \sqrt{25} = 5$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Si: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Halle el mayor número que satisface la ecuación :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 3
E) 2

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a la ecuación :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

*Aplicamos la definición :

$$x - 6 + (4x - 2) = x^2 - 2 \quad \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

* Factorizando : $(x-3)(x-2) = 0$

* Por lo tanto : $x = 3$ ó $x = 2$

$\Rightarrow$ El mayor número que satisface la ecuación es *3* .

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Si: $\boxed{m}=m^2+3m$ y $a\rfloor b=(a-b)^2$; determine el valor de :

$$E=\boxed{\boxed{2}\rfloor 2}$$

A) 4 280 B) 4 288 C) 4 289
D) 4 292 E) 4 296

RESOLUCIÓN :

El operador: $\boxed{m}=m^2+3m$, determinar el valor de : $\boxed{2}=2^2+3(2)=10$

*Así,

$$E=\boxed{\boxed{2}\rfloor 2}=\boxed{10\rfloor 2}$$

*El operador: $a\rfloor b=(a-b)^2$,determina el valor de : $10\rfloor 2=(10-2)^2=64$,Así:

$$E=\boxed{10\rfloor 2}=\boxed{64}=64^2+3(64)=4288$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Si : $\boxed{z}=2\,ⓩ+3$ y $ⓩ=1-2z$

determine el valor de "t" en la siguiente ecuación:

$$\boxed{t}+\boxed{-2}=-2$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 2 D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Usamos las definiciones $\boxed{z}=2\,ⓩ+3$ y $ⓩ=1-2z$; expresamos:

$$\boxed{Z}=2(1-2z)+3=5-4z$$

* Resolviendo la ecuación dada:

$$(5-4t)+(5-4\times(-2))=-2\Rightarrow t=5$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Si $a>0$, $\triangle_{a}=2a+1$

Si $a<0$, $\triangle_{a}=3a+8$

determine el valor de :

$$Q=\frac{\triangle_{\triangle_{-2}}+\triangle_{3}}{\triangle_{-4}+\triangle_{\triangle_{5}}}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{12}{19}$ C) $\frac{11}{15}$ D) $\frac{11}{13}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Entonces :

$$\triangle_{\triangle_{-2}}=\triangle_{3(-2)+8}=\triangle_{2}=2(2)+1=5$$

$$\Rightarrow \triangle_{3}=2(3)+1=7$$

$$\Rightarrow \triangle_{-4}=3(-4)+8=-4$$

$$\Rightarrow \triangle_{\triangle_{5}}=\triangle_{2(5)+1}=\triangle_{11}=2(11)+1=23$$

* Reemplazando : $Q=\frac{5+7}{-4+23}=\frac{12}{19}$

PROBLEMA 16 :

Definido el operador:

$$\boxed{a\;\;{}_{b}}=a(b-a)+b(a-b)$$

determine el menor valor del producto xy, si:

$$\boxed{\boxed{4\;\;{}_{3}}\;\;{}_{x}}=-16\quad ;\quad \boxed{y\;\;\boxed{2\;\;{}_{1}}}=-4$$

A) -15 B) -9 C) -5 D) 3 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Analizando la regla de definición del operador, tenemos:

$$\boxed{a\;\;{}_{b}}=a(b-a)+b(a-b)$$
$$=a^2+2ab-b^2$$
$$=-(a-b)^2$$

* Así tenemos : $\boxed{a\;\;{}_{b}}=-(a-b)^2$

*En el problema, aplicando la regla de definición

$$-(4-3)^2=-1$$

$$\boxed{\boxed{4\;\;{}_{3}}\;\;{}_{x}}=\left(\boxed{4\;\;{}_{3}}-x\right)^2=(-1-x)^2=-16$$
$$=-(1+x)^2=-16$$

Donde : $1+x=4\ \vee\ 1+x=-4$

Entonces, $x=3\ \vee\ x=-5$

$-(2-1)=-1$

$$\boxed{y\ \boxed{\begin{matrix}2 & \\ & 1\end{matrix}}}=\left(y-\boxed{\begin{matrix}2 & \\ & 1\end{matrix}}\right)^2=-(y-(-1))^2=-4$$

$$=-(y+1)^2=-4$$

*donde, $y+1=2 \vee y+1=-2$

*entonces, $y=1 \vee y=-3$

*Luego xy será $3; -5; 15; -9$.

$\Rightarrow$ El mínimo valor de xy será -9.

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Si : $x * y = x^y - y^x$, halla el valor de : $(3*1)*2$

A) 1 *B) 0* *C) 2* *D) -1* *E) 4*

RESOLUCIÓN:

- Aplicamos la ley de formación
- Resolvemos el primer operador (paréntesis)
- Resolvemos operaciones.
- Resolvemos el segundo operador.

El valor de $(3*1)*2$

$$I \longrightarrow (3*2)*2$$
$$II \longrightarrow 3^1-1^3$$
$$III \longrightarrow 3-1$$
$$IV \longrightarrow 2*2=2^2-2^2=0$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Si: $A \circ B=2AB$, si: $A>B$ y $A \circ B=3A-B$, si: $A \le B$

Calcular el valor de $(6\circ 3)\circ(4\circ 5)$.

A) 306 *B) 200* *C) 300* *D) 402* *E) 504*

RESOLUCIÓN :

i) Aplicamos la ley de formación primero en $(6\circ 3)$ y $(4\circ 5)$

ii) Resolvemos teniendo que en el primer paréntesis $6>3$ y en el segundo paréntesis $4<5$, entonces :

iii) Calculamos el último teniendo en cuenta que $36>7$.

$$I \longrightarrow \underset{1°}{(6\circ 3)} \underset{2°}{\circ} \underset{3°}{(4\circ 5)}$$
$$II \longrightarrow (2\times 6\times 3)\circ(3\times 4-5)$$
$$36\circ 7$$
$$III \longrightarrow 2(36)(7)=504$$

El valor de la expresión $(6\circ 3)\circ(4\circ 5)$ es 504.

RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

Si: $a \bullet b=\dfrac{a-b}{2}$ para $a>b$ y $a\bullet b=\dfrac{a+b}{4}$ para $a\le b$

Calcular el valor de : $(6\bullet 10)\bullet(10\bullet 2)$

A) 2 *B) 1* *C) 0* *D) 3* *E) 5*

RESOLUCIÓN:

I) Aplicamos la ley de formación primero en los paréntesis.

II) En el primer paréntesis observamos que $6<10$ y en el segundo paréntesis, observamos que $10>2$.

III) Con los resultados obtenidos obtenemos los términos del último operador y observamos que $4=4$.

$$I \longrightarrow \underset{1°}{(6\bullet 10)} \underset{2°}{\bullet} \underset{3°}{(10\bullet 2)}$$
$$II \longrightarrow \left(\frac{6+10}{4}\right)\bullet\left(\frac{10-2}{2}\right)$$
$$\frac{16}{4} \bullet \frac{8}{2}$$
$$III \longrightarrow 4 \bullet 4$$
$$\frac{4+4}{4}=\frac{8}{4}=2$$

El valor de la expresión $(6\bullet 10)\bullet(10\bullet 2)$ es 2.

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

Si: $\triangle\!\!\!\!\!\;x=\dfrac{x+5}{2}$ y $\textcircled{x}=2x-1$.

Calcula $\triangle\!\!\!\!\!\;\textcircled{4}-\textcircled{\triangle\!\!\!\!\!\;5}$.

A) 1 *B) -1* *C) 0* *D) -3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

I) Observamos que $\bigcirc$ está dentro de $\triangle$, entonces hallamos primero $\textcircled{4}=2(4)-1=7$

ii) Reemplazamos en x $\triangle\!\!\!\!\!\;7=\dfrac{7+5}{2}=6$

$\triangle\!\!\!\!\!\;5$ está dentro de $\bigcirc$, hallamos primero

$$\triangle\!\!\!\!\!\;5 \longrightarrow \triangle\!\!\!\!\!\;5=\frac{5+5}{2}=5 \;;\; \textcircled{5}=2(5)-1=9$$

iii) Reemplazamos valores en:

$$\triangle\!\!\!\!\!\;\textcircled{4}-\textcircled{\triangle\!\!\!\!\!\;5} \longrightarrow 6-9=-3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Si : $a\square b=3a-2b$, cuando $b>a$

$a\square b=4b-a$, cuando $a>b$

$a\square b = 5a - 2b, cuando \quad a = b$

Determine el valor : $W = \dfrac{72E}{13}$

Donde : $E = \dfrac{(5\square 2)(-3\square 2)}{(6\square 6)(2\square 1)}$

A) –8 B) –6 C) 4 D) 12 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado : $a\square b = \begin{cases} 3a - 2b \ ; \ b>a \\ 4b - a \ ; \ a>b \\ 5a - 2b \ ; \ a=b \end{cases}$

* de donde : $5\square 2 = 4(2) - 5 = 3$

$-3\square 2 = 3(-3) - 2(2) = -13$

$6\square 6 = 5(6) - 2(6) = 18$

$2\square 1 = 4(1) - 2 = 2$

* reemplazando en E :

$$E = \frac{3\times(-13)}{18\times 2} = \frac{-39}{36}$$

* entonces nos piden :

$$w = \frac{72E}{13} = \frac{72(-39/36)}{13} \Rightarrow w = -6$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Si $m\triangle n = nm\square(m-n)$ y $x\square y = 3y - x$

Determine el valor de: $w - z$, sabiendo que $5\triangle z = -9$ y $w\triangle(-2) = 26$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Sabiendo que :

$x\square y = 3y - x$.............(I)

$m\triangle n = nm\square(m-n)$....(II)

* Entonces , reemplazando (I) en (II) tenemos:

$$m\triangle n = 3(m-n) - nm$$

* Luego :

$\underbrace{5\triangle z} = -9$

$3(5-z) - 5z = -9 \Rightarrow z = 3$

* Del dato : $w\triangle(-2) = 26$

$3(w-(-2)) - w(-2) = 26 \Rightarrow w = 4$

* En consecuencia : $w - z = 1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 24 :

Si se define los operadores:

$$\overline{a}\rfloor\underline{b} = 2a + b \ \ \text{y} \ \ a\lceil\overline{b} = 2b - a$$

determine el valor de m en:

$$\underline{\overline{4}\rfloor 3} \ \lceil\overline{2\lceil\overline{m}} = 5$$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Nos piden : m

$$\underline{\overline{4}\rfloor 3} \ \lceil\overline{2\lceil\overline{m}} = 5$$

* Aplicando las reglas como operar :

$\underline{2(4)+3}\lceil\overline{2m-2} = 5$

$2(2m-2) - (11) = 5 \Rightarrow m = 5$

* Entonces , el valor de m es : 5

RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

Si se cumple que $\underline{a}\rfloor = \dfrac{1}{a}, a \neq 0$, determine

$$\left.\underline{\underline{\underline{2}}}\rfloor\rfloor\rfloor \ddots \rfloor\right\} \text{Se aplicó mil veces el operador}$$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 2 C) 2^2 D) 2^{1000} E) 2^{1001}

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $\underline{a}\rfloor = \dfrac{1}{a}; a \neq 0$

* Luego aplicando el operador al número 2 se tiene:

* 1 operador : $\underline{2}\rfloor = \dfrac{1}{2}$
* 2 operador : $\underline{\underline{2}}\rfloor\rfloor = \underline{\dfrac{1}{2}}\rfloor = 2$
* 3 operador : $\underline{\underline{\underline{2}}}\rfloor\rfloor\rfloor = \underline{2}\rfloor = \dfrac{1}{2}$
* 4 operador: $\underline{\underline{\underline{\underline{2}}}}\rfloor\rfloor\rfloor\rfloor = \underline{\dfrac{1}{2}}\rfloor = 2$

* Observamos que el número impar de aplicación del operador siempre es $1/2$ y que el número par de aplicación del operador siempre es 2. Luego como 1000 es un número par , la respuesta es 2.

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{\underline{2}}}\rfloor\rfloor\rfloor\ddots\rfloor}_{1000 \text{ operadores}} = 2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Si : $t\times u = 2u - t$, determinar el valor de Z en la siguiente igualdad :

• $\dfrac{(4\times 3)\times(1\times 2)}{Z\times(3\times 2)}=8$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $t\times u=2u-t$

* Piden determinar Z , Si : $\dfrac{(4\times 3)\times(1\times 2)}{Z\times(3\times 2)}=8$

* Aplicando el dato a :

$$\frac{[2(3)-4]\times[2(2)-1]}{Z\times[2(2)-3]}=8$$

$$\Rightarrow \frac{2\times 3}{Z\times 1}=8\Rightarrow\frac{2(3)-2}{2(1)-Z}\Rightarrow 4=8(2-Z)$$

* Resolviendo : $Z=\frac{3}{2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 27 :

Se sabe que : $\triangle x = 4x-1$; $\boxed{m}=1-2m$

Si se verifica que : $\triangle 2 - \boxed{u}=20$; $\triangle u=\boxed{w}$

Determinar el valor de "w".

A) -13 B) -7 C) 7 D) 13 E) 21

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado : $\triangle x=4x-1$; $\triangle 2=4(2)-1=7$

* Además : $\boxed{u}=1-2u$

* En el dato : $\triangle 2-\boxed{u}=20$

$$7-(1-2u)=20\ \Rightarrow u=7$$

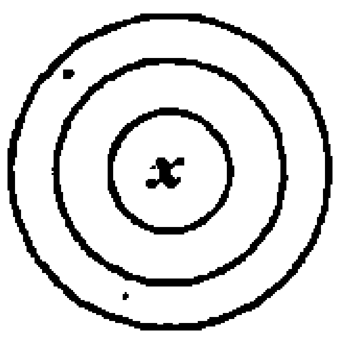
* Luego : $\triangle u=\boxed{w}\longrightarrow 4(u)-1=1-2w$

$$4(7)-1=1-2w\Rightarrow w=-13$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

Si se define: $\textcircled{p}=2p+1$; calcular la suma de las cifras de x^3, sabiendo que :



$= 55$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Hagamos un cambio de variable: $\textcircled{\textcircled{x}}=a$; entonces tendríamos :

$$\textcircled{a}=55\Rightarrow 2a+1=55\Rightarrow a=27$$
$$\Rightarrow\textcircled{\textcircled{x}}=27$$

• Un nuevo cambio de la variable:

$\textcircled{x}=b$; entonces:

$\textcircled{b}=27\Rightarrow 2b+1=27\Rightarrow b=13\Rightarrow\textcircled{x}=13$

• Finalmente: $\Rightarrow 2x+1=13\ \Rightarrow x=6$

$$\Rightarrow x^3=216\Rightarrow 2+1+6=9$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 29:

Se define las siguientes operaciones en N.

$$\textcircled{x}=x^3+1$$

$$\textcircled{\triangle x}=x(x(x-3)+3)$$

Hallar $\overset{②}{\triangle 3}$ y como resultado determine la suma de sus cifras.

(Donde $\overset{\circ}{\triangle}$ significa la operación potenciación)

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Del dato del problema : $\textcircled{x}=x^3+1$ $\quad (\ )^3+1$

* entonces :

$$\textcircled{\triangle x}=x(x(x-3)+3)\Rightarrow \overset{3}{\triangle x}+1=x^3-3x^2+3x$$

$$\Rightarrow \overset{3}{\triangle x}=\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{(x-1)^3}\Rightarrow \triangle x=x-1$$

* Entonces : $\overset{②}{\triangle 3}=2^9=512$

* Se piden la suma de cifras de $512 : 5+1+2=8$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30:

Si: $F(n+1)=F(n)+\frac{1}{2}$ y $F(1)=1$; entonces al resolver $F(x)=x-15$ siendo «x» un entero , el valor de «x» es:

A) 15 B) 16 C) 24 D) 30 E) 31

RESOLUCIÓN :

* Se pide x , que es entero en : $F_{(x)}=x-15$.

* Dato : $F_{(n+1)}=F_{(n)}+\frac{1}{2}$ y $F_{(1)}=1$

* Analizamos para : $F_{(1)}=1=\frac{2}{2}$

$$F_{(2)}=F_{(1)}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$F_{(3)}=F_{(2)}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$$

$$F_{(4)}=F_{(3)}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

* Luego, por inducción : $F_{(x)}=\dfrac{x+1}{2}$
* Pero $F_{(x)}=\dfrac{x+1}{2}=x-15$

$$\frac{x+1}{2}=x-15 \Rightarrow x=31$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 31:

Se define para $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\textcircled{n}=\frac{n(n-1)}{2}$$

Determine el valor de $a+b$. $(a \in \mathbb{N})$, si:

$$\textcircled{4a^2+\frac{75}{a}}=6555;\quad \textcircled{\textcircled{b}}=105$$

A) 9 B) 11 C) 12 D) 15 E) 18

RESOLUCIÓN :

$$\textcircled{n}=\frac{n(n-1)}{2}$$

Usaremos la regla de definición de «afuera hacia adentro» , como indica la flecha.

* Piden el valor de $a+b$, que cumple :

$$\textcircled{4a^2+\frac{75}{a}}=6555=\frac{115\times 114}{2}$$

$$\Rightarrow 4a^2+\frac{75}{a}=115;\ a \in N$$

Se deduce : a divide exactamente a $75 \Rightarrow a=5$

Cumple la igualdad.

$$\textcircled{\textcircled{b}}=105=\frac{15\times 14}{2}\rightarrow \textcircled{b}=15=\frac{6\times 5}{2}\rightarrow b=6$$

$$\Rightarrow a+b=11$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

Si se cumple que $t\nabla u=\dfrac{t-u}{t+u} \wedge t\Delta u=\dfrac{2t}{3u}$

determinar el valor de "m" en:

$$(4\nabla 2)\,\Delta\, m=\frac{2}{27}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Leyes propuestas:

$$t\nabla u=\frac{t-u}{t+u} \ \wedge\ t\Delta u=\frac{2t}{3u} \text{ en}$$

$$(4\nabla 2)\Delta m=\frac{2}{27} \Rightarrow \left(\frac{4-2}{4+2}\right)\Delta m=\frac{2}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\Delta m=\frac{2}{27} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{3m}=\frac{2}{27} \Rightarrow m=3$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 33 :

Para $a, b \in Z^+$ se define la operación:

$$a\Delta b=a^{b+1}.\ \text{Si } x, w \in Z^+ \wedge\ x\Delta w=16$$

¿Cuál es el valor o valores que podrá tener w?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1 y 3 E) 2 y 3

RESOLUCIÓN :

* De la dado : $a\,\Delta\, b=a^{b+1};\ a;\ b \in Z^+$

$x\,\Delta w=16;\ x;\ w \in Z^+ \Rightarrow x^{w+1}=16$

* Entonces :
- $x^{w+1}=2^4 \Rightarrow w=3$
- $x^{w+1}=4^2 \Rightarrow w=1$
- $x^{w+1}=16^1 \Rightarrow w=0$ (no es solución dado que $0 \notin Z^+$)

* Entonces los valores de w son 1 y 3.

RPTA : "D"

PROBLEMA 34 :

Si: $u\,\theta\, z=\dfrac{uz}{u+z}$, determinar el valor de $\dfrac{24W}{5}$, donde:

$W=[3\theta 2]\theta[5\theta(-2)]$

A) –9 B) –8 C) 7 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :

* La ley propuesta es: $u\theta z=\dfrac{uz}{u+z}$

$$W=[3\theta 2]\theta[5\theta(-2)]$$

$$\Rightarrow 3\theta 2=\frac{3(2)}{3+2}=\frac{6}{5}\ ;\ 5\theta(-2)=\frac{5(-2)}{5+(-2)}=\frac{-10}{3}$$

* Luego reemplazando los resultados en: W

$$W=\frac{6}{5}\theta\left(\frac{-10}{3}\right)=\frac{\frac{6}{5}\left(\frac{-10}{3}\right)}{\frac{6}{5}+\left(\frac{-10}{3}\right)} \Rightarrow W=\frac{15}{8}$$

* Como se requiere: $\dfrac{24W}{5}=\dfrac{24}{5}\left(\dfrac{15}{18}\right)=9$

RPTA : "E"

PROBLEMA 35 :

Se definen los siguientes operadores

$$\underline{a|}=2a+2 \ \wedge\ \underline{|b}=b-1$$

Determine el valor de "x" en $\dfrac{\underline{\underline{|\underline{5+x|}|}}}{\underline{\underline{|\underline{x+2|}|}}}\ \dfrac{28}{19}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Recordemos las leyes:

$$a\rfloor = 2a+2;\quad \lfloor b = b-1$$

* Piden: x

$$\frac{\lfloor\lfloor 5+x\rfloor\rfloor}{\lfloor\lfloor x+2\rfloor\rfloor}=\frac{28}{19}$$

* Operamos según las reglas de la definición:

$$\frac{\lfloor 4+2x+2\rfloor}{\lfloor x-1+6\rfloor}=\frac{2x+5\rfloor}{\lfloor 2x+12}=\frac{4x+12}{2x+11}=\frac{28}{19}\Rightarrow x=4$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Si x e y representan elementos arbitrarios del conjunto : $A=\{0;\ 1;\ a;\ e;i;\ o;\ u\}$ definimos la operación ,como sigue :

$$x * y=\begin{cases}1; & x=y \ldots\ldots\ldots\ldots (I)\\ 0; & x\neq y\wedge(y=0\ \vee\ y=1)\ldots\ldots (II)\\ y; & x\neq y\wedge y \text{ es vocal}\ldots\ldots (III)\end{cases}$$

Determine : $\{[[(a*a)*0]*e]*o\}*\{[(i*u)*1]*o\}$

A) a B) e C) i D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Se pide :

$$M=\{[[(\underbrace{a*a}_{I})*0]*e]*o\}*\{[(\underbrace{i*u}_{III})*1]*o\}$$

$$M=\{[[1*0]*e]*o\}*\{[(u*1)]*o\}$$

$$M=\{[\underbrace{0*e}_{III}]*o\}*\{\underbrace{0*o}_{III}\}$$

$$M=\{\underbrace{e*o}_{III}\}*o$$

$$M=\underbrace{o*o}_{I}=1$$

* Entonces la respuesta es 1.

RPTA : "E"

PROBLEMA 37 :

Conviniendo en que $(a;\ b)$, $(c;\ d)$ representan elementos arbitrarios de R^2, definimos las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como sigue:

$$(a;\ b)\oplus(c;\ d)=(a+c;\ d-b)$$

$$\lambda\odot(a;b)=(\lambda b;\ \lambda a),\ \lambda\in R$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I) Existe un $(a;\ b)$ satisfaciendo la igualdad

$$(a;\ b)\oplus(0;\ 0)=(a;\ b)$$

II) Existe un $(a;\ b)$ satisfaciendo la igualdad

$$1\odot(a;\ b)=(a;\ b)$$

III) $2\odot[(1;\ 2)\oplus(3;4)]=(4;\ 8)$

A) VVF B) VFV C) FVV D) VVV E) FFF

RESOLUCIÓN :

* Se desea hallar el valor de verdad de las proposiciones :

I) VERDADERO:

$\exists(a;\ b)$ que satisface : $(a;\ b)\oplus(0;\ 0)=(a;\ b)$

Esto es verdadero, por ejemplo

$$(2;\ 0)\oplus(0;\ 0)=(2+0;\ 0-0)=(2;\ 0)$$

II) VERDADERO:

$\$(a;\ b)$ que satisface $1\odot(a;\ b)=(a;\ b)$

Esto es verdadero ya que cumple cuando $a=b$, por ejemplo : $1\odot(2;\ 2)=(1\times 2;\ 1\times 2)=(2;\ 2)$

III) VERDADERO:

$$2\odot[(1;\ 2)\oplus(3;\ 4)]=(4;\ 8)$$

$$2\odot[(1+3;\ 4-2)]=2\odot(4;\ 2)=(2\times 2;\ 2\times 4)=(4;8)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

Se define $\boxed{x-3}=x+6$.

Calcula el valor de $M=\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{20}}}}$

RESOLUCIÓN :

• Buscamos que la definición tenga una relación con la expresión que está dentro del operador:

$$\boxed{x-3}=x-\overbrace{3+9}^{+6}$$

Es decir: $\boxed{a}=a+9 \Leftarrow$ *DEFINICIÓN*

• Calculemos el valor de M :

$$M=\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{20}}}}+\boxed{\boxed{\boxed{20+9}}}=\boxed{\boxed{\boxed{29}}}\Leftarrow 20+9(1)$$

$$M=\boxed{\boxed{\boxed{29}}}=\boxed{\boxed{29+9}}=\boxed{\boxed{38}}\Leftarrow 20+9(2)$$

Observa que los resultados parciales van aumentando de 9 en 9. Como son 4 operadores, se tiene :

$$M=\boxed{\boxed{\boxed{\boxed{20}}}}=20+9(4)$$

CANTIDAD DE OPERADORES

El valor de M es 56.

PROBLEMA 39 :

Definimos la operación $\triangle x = (x)(x+1)$

Además: $\triangle\triangle(x+2) = 156.$

Calcula: $E = \triangle(x^2-5)$

A) 12 B) 6 C) 7 D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

• De la definición :

$$\triangle x = (x)(x+1)$$

$+1$, -1 — **2 FACTORES CONSECUTIVOS**

Podemos operar "de adentro hacia afuera" o "de afuera hacia adentro".

• Luego, en nuestro caso :

$$\triangle\triangle(x+2) = 156 = (12)(12+1)$$

2 FACTORES CONSECUTIVOS

$$\triangle(x+2) = 12 = (3)(3+1)$$

$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$ — **2 FACTORES CONSECUTIVOS**

• $E = \triangle(1^2-5) = \triangle(-4) = (-4)(-4+1) = 12$

2 FACTORES CONSECUTIVOS

El valor de E es 12.

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Se define $\bigcirc(n-2) = (n-1)^2$, cuando $n < 2$.

Calcula el valor de x en $\bigcirc\bigcirc\bigcirc(x-1) = 100$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) 1/2

RESOLUCIÓN :

• De la definición : $\bigcirc(n-2) = (n-1)^2$

La expresión que está dentro del operador es la raíz cuadrada de la definición, menos 1. Es decir:

$$\sqrt{(n-1)^2} - 1 = n - 2$$

• Luego : $\sqrt{(10)^2} - 1 = 9$

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc(x-1) = 100 = (10)^2$$

FORMA DE LA DEFINICIÓN

$\sqrt{(3)^2} - 1 = 2$

$$\bigcirc\bigcirc(x-1) = 9 = (3)^2$$

FORMA DE LA DEFINICIÓN

$\sqrt{(\sqrt{2})^2} - 1$

$$\bigcirc(x-1) = 2 = (\sqrt{2})^2$$

FORMA DE LA DEFINICIÓN

• Calculamos el valor de x :

$$x - 1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

El valor de x es $\sqrt{2}$.

RPTA : "C"

PROBLEMA 41 :

Se define $\bigcirc(a+2) = a - 7$

Calcula el valor de $E = (\ldots(((100)))\ldots)$

20 OPERADORES

A) –20 B) –10 C) –80 D) 0 E) –2

RESOLUCIÓN :

• Buscamos que la definición tenga una relación con la expresión que está dentro del operador:

$$\bigcirc(a+2) = a + \overbrace{2 - 9}^{-7}$$

Es decir : $\bigcirc x = x - 9 \Leftarrow$ ***DEFINICIÓN***

• Calculamos el valor de E.

$$E = (\ldots(((100)))\ldots) = 100 - 9(20)$$

20 OPERADORES — **CANTIDAD DE OPERADORES**

El valor de E es $100 - 180 = -80$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42 :

Sea $a \otimes b = \begin{cases} ab + a, \text{ si } a > b \\ ab + b, \text{ si } a \le b \end{cases}$

Calcula la suma de raíces de $(4 \otimes 2) \otimes 12 = x^2 - x$

A) 4 B) 6 C) 1 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN :

• Aplicamos la definición :

$$\underline{(4 \otimes 2)} \otimes 12 = x^2 - x$$

$$\underline{4 \times 2 + 4} \otimes 12 = x^2 - x$$

$$\underline{12 \otimes 12} = x^2 - x$$

$$12 \times 12 + 12 = x^2 - x \Rightarrow 156 = x^2 - x$$

• Hallamos las raíces de la ecuación de segundo grado aplicando el método del asa simple :

$$x^2 - x - 156 = 0$$

$$x \quad +12 \Rightarrow x = -12$$
$$x \quad -13 \Rightarrow x = 13$$

La suma de raíces es $13 - 12 = 1$.

RPTA: "C"

PROBLEMA 43 :

Si $f(x^2 + 1) = x + 2$, y además $x > 0$, calcula x en :

$$f(f(x)) = f(...f(f(f(f(5)+1)+1)+1)+1...)$$

A)4 *B)6* *C)8* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

• De la definición, observamos :

$f(x^2 + 1) = x + 2$ → $\sqrt{x^2 + 1 - 1} + 2$ "SALE"

$f(x^2 + 1) = x + 2$ → $(x + 2 - 2)^2 + 1$ "INGRESA"

• Luego :

$$f(5) = \sqrt{5 - 1} + 2 = 4 \ ....(I)$$

• Deducimos que si a $f(5) = 4$ le sumamos 1, entonces $f(f(5) + 1) = f(5)$.

Luego :

$$f(f(x)) = \underline{f(...f(f(f(f(5)+1)+1)+1)+1...)}$$

$$f(f(x)) = \quad 4$$

• Ahora : $f(f(x)) = 4$ → $(4 - 2)^2 + 1$ ▶ $f(x) = 5$ → $(5 - 2)^2 + 1$

El valor de x es 10.

RPTA: "D"

PROBLEMA 44 :

Se define $\boxed{x} = 2(x + 1)$.

Calcula : $A = \boxed{\ldots \boxed{\boxed{\boxed{1} + 3} + 1} - 5 \ \ldots}$ (25 OPERADORES)

A)1000 *B)6000* *C)1205* *D) 2500*

RESOLUCIÓN :

• De la definición, deducimos:

1 Op. $\boxed{1} = 2(1 + 1) = 4 = (2(1))^2$

2 Op. $\boxed{\boxed{1} + 3} = \boxed{7} = 2(7 + 1) = 16 = (2(2))^2$

3 Op. $\boxed{\boxed{\boxed{1} + 3} + 1} = \boxed{17} = 36 = (2(3))^2$

⋮

25 Op. $\boxed{\ldots \boxed{\boxed{\boxed{1} + 3} + 1} - 5 \ \ldots} = (2(25))^2$

El valor de A es $2\ 500$.

RPTA: "D"

PROBLEMA 45 :

Se define la operación $(*)$, tal que $(b(*)a)^2 = a(a(*)b);\ a(*)b > 0$. Halle $R = 54(*)2$

A)4 *B)6* *C)8* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN:

* Dada la relación $(b(*)a)^2 = a(a(*)b);\ a(*)b > 0$

Por analogía $(a(*)b)^2 = b(b(*)a)$

Elevando al cuadrado y reemplazando convenientemente, tenemos

$$(a(*)b)^4 = b^2 . \underline{(b(*)a)^2}$$

$$(a(*)b)^4 = b^2 . a(a(*)b)$$

$$\Rightarrow (a(*)b)^3 = b^2 . a$$

Obtenemos la siguiente regla de definición $a(*)b = \sqrt[3]{ab^2}$

Finalmente $R = 54(*)2 = \sqrt[3]{54 \times 2^2} = 6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 46 :

Se define $\forall x \in R;\ \mu_a(x) = \begin{cases} 0; x < a \\ 1; x \geq a \end{cases}$ y para $n \in Z$; $ⓝ = \sum_{k=0}^{n} 2^k$ Halle, para $x \geq 4$ el valor de

$$M = \frac{4}{3} ⓞ\left(\mu_a(x)\right)$$

A)4/3 *B)3* *C)4* *D)15* *E)20*

RESOLUCIÓN :

Realizaremos las operaciones según las reglas de definición dadas:

$$\mu_a(x)=\begin{cases}0\,;x<a\\1;\,x\geq a\end{cases}\Rightarrow \text{para } x\geq 4;\mu_4(x)=1$$

$$ⓝ=\sum_{k=0}^{n}2^k \Rightarrow ① = \sum_{k=0}^{1}2^k=2^0+2^1=3$$

Luego, para $x\geq 4$

$$M=\frac{4}{3}\,\circledcirc\!\!\left(\mu_4(x)\right)=\frac{4}{3}①=\frac{4}{3}③=\frac{4}{3}\left(\sum_{k=0}^{3}2^k\right)$$

Finalmente

$$M=\frac{4}{3}\left(2^0+2^1+2^2+2^3\right)=\frac{4}{3}(15)=20$$

El valor de M es 20.

RPTA: "E"

PROBLEMA 47 :

Se define la operación $ⓧ=\dfrac{2\,\boxed{x+3}+1}{2}$

Además, se tiene como dato $⑦=5$, calcule el valorde (73).

A)–6 B)–5 C)–4 D)–3 E)–2

RESOLUCIÓN :

Una operación matemática es un proceso que consiste en la transformación de una o más cantidades en una cantidad llamada resultado, pero bajo ciertas reglas que definen la operación.

Dada la relación $ⓧ=\dfrac{2\,\boxed{x+3}+1}{2}$

al desdoblar la expresión fraccionaria resulta

$$ⓧ=\boxed{x+3}+\frac{1}{2}$$

y obtenemos $\boxed{x+3}-ⓧ=-\dfrac{1}{2}$

Luego, realizamos las siguientes evaluaciones y las sumamos.

$$(10)-⑦=-\frac{1}{2}\quad+$$
$$(13)-(10)=-\frac{1}{2}$$
$$(16)-(13)=-\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$(73)-(70)=-\frac{1}{2}$$

se realizaron $\dfrac{70-7}{3}+1=22$ operaciones

$$(73)-⑦=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 22$$

Finalmente, reemplazamos $⑦=5$ (dato) y obtenemos $(73)-5=-11$; $(73)=-6$

El valor de (73) es -6.

RPTA: "A"

PROBLEMA 48 :

Considere la operación $\otimes$, definida por:

$$a\otimes(2b+1)=\frac{a}{2}+b\ \ ;\ \forall a;b\in R$$

además, se define la potencia por derecha de a, según la operación $\otimes$, como:

$$a_D^n=\underbrace{a\otimes(a\otimes(a\otimes...(a\otimes a))...)}_{n\ factores}$$

Halle $Q=2_D^3\otimes 3_D^2$

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{9}{8}$ C) $\frac{11}{8}$ D) $\frac{13}{8}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN:

Dada la segunda regla de definición :

$$a_D^n=\underbrace{a\otimes(a\otimes(a\otimes...(a\otimes a))...)}_{n\ factores}$$

obtenemos $2_D^3=2\otimes(2\otimes 2);3_D^2=3\otimes 3.......(I)$

Dada la primera regla de definición

$$a\otimes(2b+1)=\frac{a}{2}+b\ ;\forall a,b\in R$$

agrupamos convenientemente y describimos las operaciones que se realizan.

$$a\otimes\overbrace{(2b+1)}^{-1}=\frac{a+2b}{2}$$

Reemplazamos en (I) :

$$2_D^3=2\otimes\underbrace{(2\otimes 2)}_{\frac{2+1}{2}};$$

$$2_D^3=2\otimes\overbrace{\frac{3}{2}}^{-1}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

$$3_D^2=3\otimes\overbrace{3}^{-1}=\frac{3+2}{2}=\frac{5}{2}$$

Finalmente :

$Q = 2_D^3 \otimes 3_D^2$

$$= \frac{5}{4} \otimes \frac{5}{2} = \frac{\frac{5}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{8}$$

(−1)

El valor de Q es $\frac{11}{8}$.

RPTA: "C"

PROBLEMA 49 :

Si : $\bigcirc\!\!\!\!\big(a^2 * \sqrt[3]{b}\big) = a + b$ $\bigcirc\!\!\!\!\big(n+1\big) = 3n$

Calcular : $4 * 4$

A) 16 B) 66 C) 21 D) 24 E) 23

RESOLUCIÓN :

* Hallemos la regla de "O", para así eliminarlo del "*":

$\bigcirc\!\!\!\!\big(n + 1\big) = 3n$ (−1, ×3)

*Luego de : $\bigcirc\!\!\!\!\big(a^2 * \sqrt[3]{b}\big) = a + b$ (−1, ×3)

$\Rightarrow ((a^2 * \sqrt[3]{b}) - 1) \times 3 = a + b$

* Despejando :

$$a^2 * \sqrt[3]{b} = \frac{a+b}{3} + 1$$

($\sqrt{\ }$, $(\ )^3$)

$$\Rightarrow 4 * 4 = \frac{2+64}{3} + 1 = 23$$

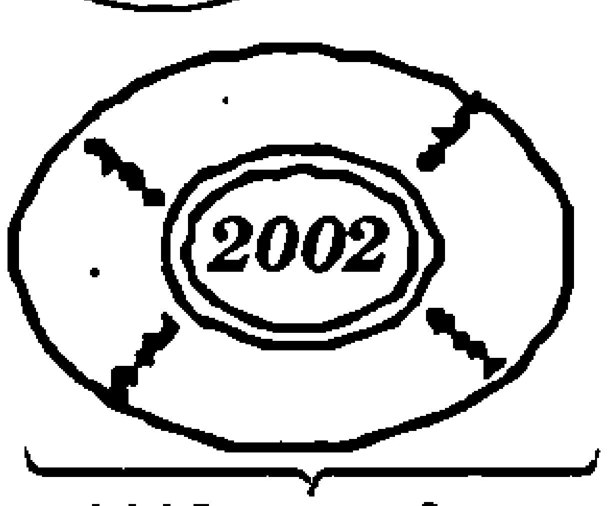
RPTA : "E"

PROBLEMA 50 :

Sabiendo que : $\bigcirc\!\!\!\!\big(\boxed{x+5}\big) = x - 3$ y que :

$\boxed{x-1} = x - 5$

Calcular :



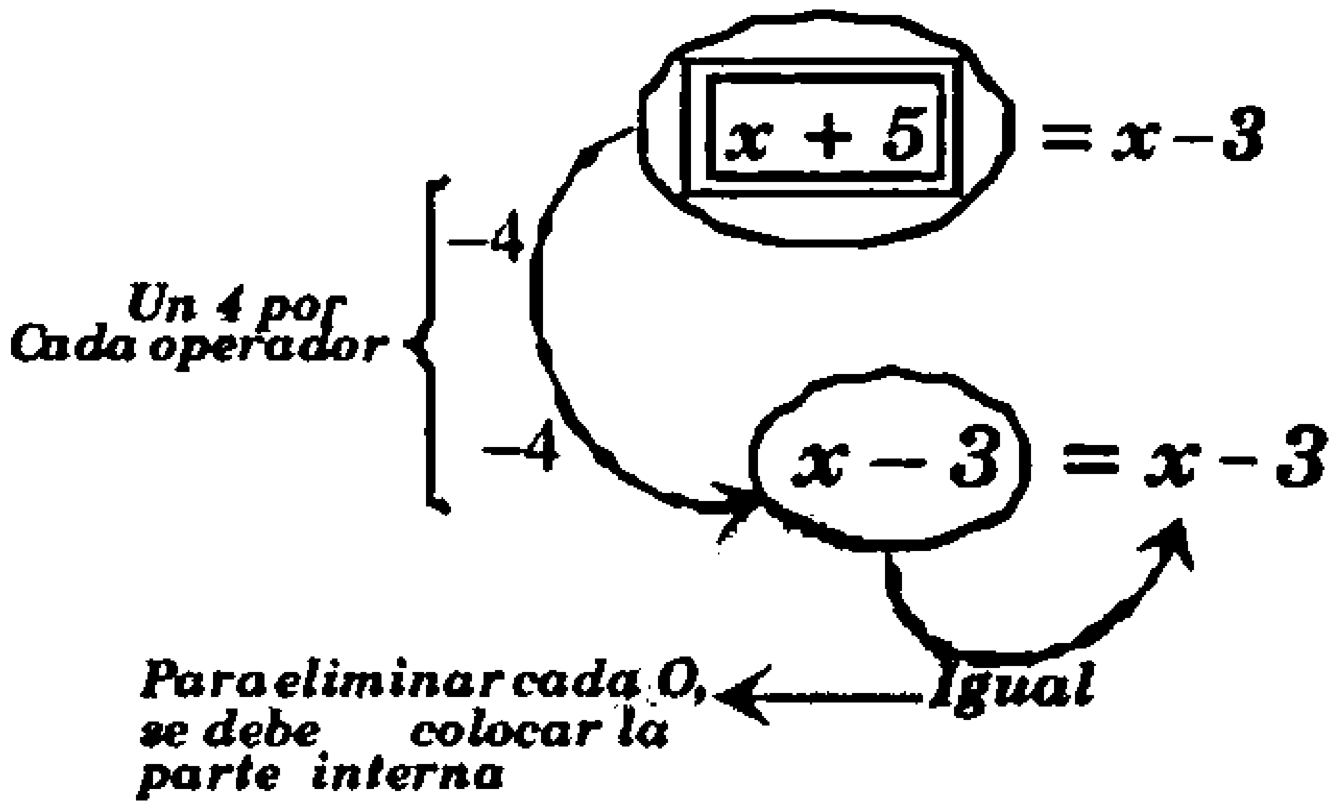
2003 operadores

A) 1 B) 2004 C) 0 D) 2003 E) 2002

RESOLUCIÓN :

* Primero : $\boxed{x-1} = x - 5$ (−4)

* Luego en :



* Entonces para eliminar **2003** operadores, debemos poner cada vez **2002**, es decir al final siempre se obtendrá **2002** .

RPTA : "E"

PROBLEMA 51 :

Si : $a^{a*b} = b^{(b-a)}$

Calcular : $(2003 * 2002) \times (2002 * 2003)$

A) 111 B) 11 C) 1 D) −1 E) − 2001

RESOLUCIÓN :

* Primero :

$2003^{2003*2002} = 2002^{(2002-2003)} \Rightarrow 2003^{2003*2002} = 2002^{-1} \ldots (I)$

* Luego :

$2002^{2002*2003} = 2003^{2003-2002} \Rightarrow 2002^{2002*2003} = 2003 \ldots (II)$

* Colocando *(I)* en *(II)*, reemplazando en **2003** :

$$(2002^{2002*2003})^{2003*2002} = 2002^{-1}$$

$$\Rightarrow 2002^{(2002*2003)\times(2003*2002)} = 2002^{-1}$$

$$\Rightarrow (2002 * 2003) \times (2003 * 2002) = -1$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 52 :

Dado : $m * n = 2n^2 - 3m$

Calcular : $E = \sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \ldots\ldots \infty}}}$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 6 E) 12

RESOLUCIÓN :

$$E^2 = \sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \ldots \infty}}}^{\,2}$$

$$\Rightarrow E^2 = 3 * \underbrace{\sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \ldots \infty}}}}_{\text{"E"}}$$

$E^2 = 3 * E \Rightarrow E^2 = 2E^2 - 3\,(3) \longrightarrow$ *Según la regla como operar*

$\Rightarrow E = 3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 53 :

Si: $a * b * c = b(c * b * a)^2$

Calcular : $(0 * 1 * 2)^{(3 * 4 * 5)^{(6 * 7 * \cdots}}$ (2001 PARÉNTESIS)

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 0 D) 1 E) 0,25

RESOLUCIÓN :

* Como : $a*b*c = b(c*b*a)^2$ .... (I)

$\Rightarrow c*b*a = b(a*b*c)^2$ .... (II)

* Reemplazando (II) en (I) :

$a*b*c=b\ (b(a*b*c)^2)^2$

$\Rightarrow a*b*c=b^3\ (a*b*c)^4 \Rightarrow a*b*c=\frac{1}{b}$

* Luego : $0*1*2=\frac{1}{1}=1$

* Luego la expresión a calcular será : $1^{(3*4*5)^{\cdots}}=1$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular : $3 \otimes 2$, si $a \otimes b = a + b$

A) 6 B) 1 C) 5 D) 4 E) 0

02 Si: $m \# n = 4m - 7n$, Calcular : $2 \# 4$

A) 39 B) –36 C) 36 D) –20 E) 4

03 Si: $s \# t = s^2 - t^2$ entonces $7 \#(3 \# 2)$ es :

A) 24 B) 30 C) 20 D) 22 E) 40

04 Si: $a \nabla b = a^2 - b^2$; Calcular : $E = (3 \nabla 2) \nabla (2 \nabla 1)$

A) 25 B) 9 C) 16 D) 15 E) 80

05 Si: $x \oplus y = x^2 - xy + y^2$, entonces el valor de $(4 \oplus 5) \div (2 \oplus 3)$ es:

A) 3 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

06 Si: $x \blacklozenge y = x - y$, entonces el valor de $[(6 \blacklozenge 2) \blacklozenge (3 \blacklozenge 2)] \blacklozenge 2$ es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

07 Si: $m * n = \frac{m+n}{2}$ el valor de:

$$2 * [(3 * 5) * (2 * 2)]^2$$

A) 6,5 B) 11 C) 8 D) 5,5 E) 6

08 Si: $a \lfloor b \rfloor c = \frac{ac}{b}$, entonces $7 \lfloor 16 \rfloor 8 \lfloor 2 \rfloor 8$ es:

A) 14 B) 12 C) 10 D) 16 E) 0

09 Si: $p * q = p\sqrt[3]{q}$; Calcular : $\frac{1}{5} * \frac{25}{4}(5 * 64)$

A) 5 B) 4 C) 1 D) 0 E) 3

10 Si: $P \spadesuit Q = \sqrt{P} + \sqrt{Q}$; Calcular : $16 \spadesuit 100$

A) 16 B) 14 C) 12 D) 2 E) 0

11 Si: $m * n = 2m^2 - 3n$; calcular : x en: $5 * x = 20$

A) 12 B) 8 C) 9 D) 10 E) 5

12 Si: $a \psi b = a - b$; calcula : $7 \psi (3 \psi 2)$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 1 E) 0

13 Si define : $x \# y = (x - y)^2$; calcular : $(3 \# 2)$

A) 4 B) 2 C) 1 D) 5 E) 10

14 Sabiendo que ⬠x $= 3 + 3x$, halla el valor de:

⬠1 + ⬠3

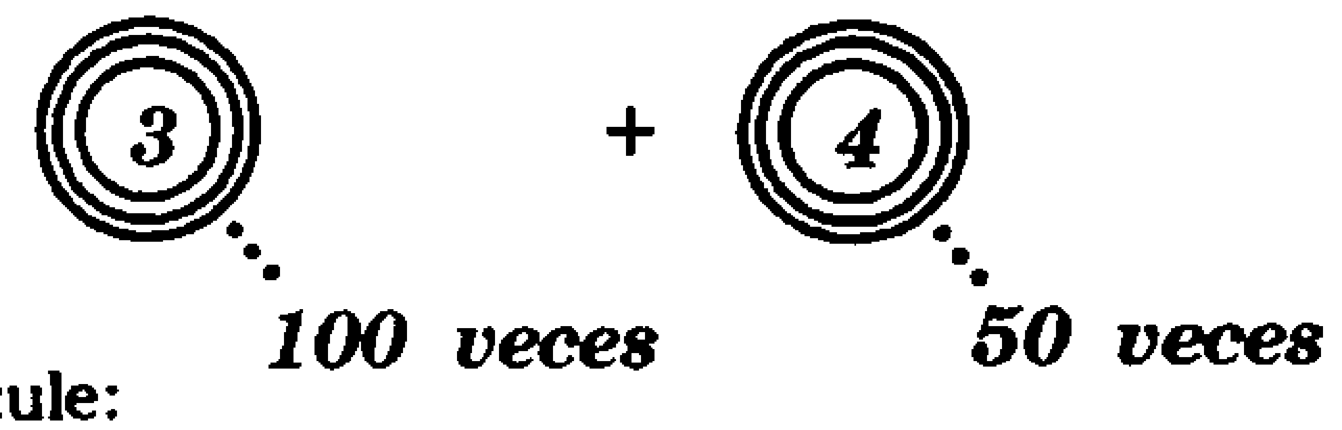
A) 4 B) 9 C) 18 D) 12 E) 2

15 Si: $a \square b = 2a^2 - 2b^2$, calcula : $4 \square 5$

A) 20 B) 18 C) 32 D) –18 E) 0

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Se cumple que: ◎$(x+3)$ $= x + 15$



Calcule:

A) 606 D) 609 C) 610 B) 607 E) 600

02 Si:

@	2	4	6	8
2	6	8	10	12
4	18	20	22	24
6	38	40	42	44
8	66	68	70	72

calcule «x»: $(x @ x) @ 1 = 5 @ 12$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 15

03 Si:

$$\textcircled{c-1} = 2c+1$$

$$\textcircled{\boxed{c+1}} = 8c+9$$

Calcule: $T = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \ldots\ldots + \boxed{10}$

A) 200 B) 210 C) 220 D) 110 E) 100

04 Si: $\boxed{\begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array}} = a^2 - 2b - 2$

Calcule:

$$M = \underbrace{\boxed{\begin{array}{c} 128 \\ \hline 127 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 126 \\ \hline 125 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 124 \\ \hline 123 \end{array}}}_{64 \text{ operadores}}$$

A) 2^{20} B) 2^{32} C) 2^{64} D) 1 E) 0

05 Se define:

$$\textcircled{x} = \frac{x^2+1}{2}$$

$$\textcircled{x * y} = (x+y)^{(x-y)}$$

además: $\textcircled{x} * \textcircled{y} = \sqrt{31}$

Calcular: $x^2 + y^2$.

A) 6 B) 8 C) 4 D) 3 E) 2

06 Si: $\boxed{x-2} = x-1$

$$\triangle\boxed{x+2} = 2x+3$$

$$\textcircled{\boxed{\triangle x}} = \triangle x + \boxed{x}$$

Calcule:

$$\triangle\textcircled{6}$$

A) 10 B) 13 C) 7 D) 21 E) 17

07 Si : $\textcircled{x} = \begin{cases} x-1; \text{si } "x" \text{ es primo} \\ x-2; \text{si } "x" \text{ es otro número} \end{cases}$

además: $\boxed{\textcircled{x}} = 4x+2$

Calcule: $\boxed{8} + \boxed{4}$

A) 40 B) 48 C) 64 D) 46 E) 50

08 Se define: $\boxed{x^2} = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$

Además: $\boxed{\boxed{\boxed{\sqrt{n}}}} = 2$

Calcule: $n + 5$.

A) 4 B) 9 C) 13 D) 25 E) 2

09 Se define en R: $\boxed{m} = m(m+24); m > 0$

$$\boxed{\triangle x} = 4x - 40$$

Calcule: $\triangle 23$

A) -2 B) 2 C) 3 D) -26 E) 26

10 Se define:

$$\textcircled{x^2-1} = x^2+1$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \ldots + \textcircled{100}$$

A) 5100 B) 5250 C) 5160 D) 5 140 E) 5 205

11 Se conoce que:

$$23 \uparrow 20 = 13$$
$$18 \uparrow (-10) = 23$$
$$0 \uparrow (-66) = 33$$

Calcular: $(1{,}5 \uparrow 3)^{2{,}5} + (n \uparrow 2n)^{3n+1}$

A) 1 B) 0 C) 2 D) -1 E) -2

12 Si: $\triangle(x+7) = \triangle x + \triangle 7$

Además: $\triangle 1 = 5$

Calcule: $\triangle 15 - 2\,\triangle 7$

A) 13 B) 8 C) 10 D) 11 E) 5

13 Se define: $\triangle(x^5 - x) = \dfrac{3x^5 + 2x + 12}{x+6}$

Calcule: $\triangle 6$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 10 E) 13

14 Se define: $Q(2x+1)-Q(x)-x=0$

Calcule: $\dfrac{Q(15)-Q(1)}{Q(7)-Q(3)}$

A) 10/7 B) 11/3 C) 31/3 D) 7/8 E) 15/7

15 Se define:

$$\Diamond\,(m+3)\,\Diamond = (m+1)^2 + 6(m+3) - 3$$

Además: $\Diamond\Diamond\Diamond\,(m-1)\,\Diamond\Diamond\Diamond = 676$ (rombo triple)

Calcular: m^2+1.

A) 24 B) 5 C) 9 D) 16 E) 25

16 Se define:

$$F(x)=\begin{cases}3;\text{si } x=1\\ 2;\text{si } x=2\\ F(x-1)-F(x-2);\text{si } x>2\end{cases}$$

Calcule: $F(72)$

A) 1 B) 5 C) 2 D) 3 E) 4

17 Si:

$$P^n(x) = Q(x) + n$$
$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

Calcule: $Z=\dfrac{P^{-2}(2)+P^{-3}(1)}{P^{-2}(1)+P^{-3}(2)}$

A) 3/4 B) 4/5 C) 1 D) -1 E) 6

18 Se define: $a*b = 2(b*a) + a - b$

Calcular el valor de $12*3$.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2

19 Dada: $a\#b = b^a$

Calcular $\sqrt[x]{x}$ en: $6^{-6^{x}}\#x = 6$

A) $\sqrt{2}$ B) 36 C) 1/6 D) 6 E) 6,6

20 Sea F una función definida en el conjunto de los números enteros que cumple:

$F[F(x)] = F(x+2) - 3$ además:

$F(1) = 4$; $F(4) = 3$ Calcule $F(5)$.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

21 Si: $\boxed{x} = x^2 - 1$

$\boxed{\bigcirc\!\!\!\!\!\;x} = x(x+2)$; $\bigcirc\!\!\!\!\!\;x \geq 0$

Calcule el valor de: $E = 3\;④ - 2\;⑥$

A) 0 B) -1 C) 1 D) 2 E) -2

22 Si: $\boxed{(x+2)(x+3)} = (x+1)(x+4)$

Calcule: $\boxed{\boxed{\ldots\boxed{\boxed{\boxed{1}+2}+3}+\ldots}+20}$

A) 210 B) 190 C) 180 D) 170 E) 160

23 Si: $\bigcirc\!(a+2) = \dfrac{a(a-1)}{2}$

Halle el valor de x en $\circledcirc\!(2x+1) = 325$; $x>0$ (triple círculo)

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

24 En el conjunto $A=\{1; 2; 3; 4\}$ se define la operación $*$ de acuerdo a la siguiente tabla

*	1	2	3	4
1	4	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	1
4	3	4	1	2

Calcule x en la siguiente ecuación:

$$1*(((3*2)*x)*4) = (1*2)^{(4*3)}$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

25 Si: $\Delta(x^2+4) = x^3$; $x\in\mathbb{R}$

Calcule $\Delta(-4)$.

A) -4 B) -8 C) 8 D) -2 E) 4

26 Se sabe que $\sqrt[3]{a}\#b^2 = 3(\sqrt[3]{b}\#a^2) - ab$.

Halle: $E = (\sqrt[3]{4}\#2)^2$.

A) 16 B) 4 C) 8 D) 20 E) 32

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)B	3)B	4)E	5)A	6)E	7)C	8)B	9)B	10)B
11)B	12)E	13)B	14)B	15)B	16)A	17)C	18)B	19)D	20)C
21)C	22)D	23)D	24)D	25)B	26)C				

OPERACION BINARIA (TABLAS)

CAPITULO 33B

OBJETIVOS :

* Comprender el fundamento de las operaciones Matemáticas.
* Conocer y aplicar el concepto de las leyes de composición interna.
* Aplicar y saber reconocer cada una de las propiedades de la composición interna.

INTRODUCCIÓN :

El concepto de operación interna o ley de composición interna es uno de los más remotos de la Matemática y se remonta a los antiguos egipcios y babilónicos, quienes ya poseían métodos para calcular sumas y multiplicaciones de números naturales positivos y de números racionales positivos a pesar de no contar con el sistema de numeración decimal.

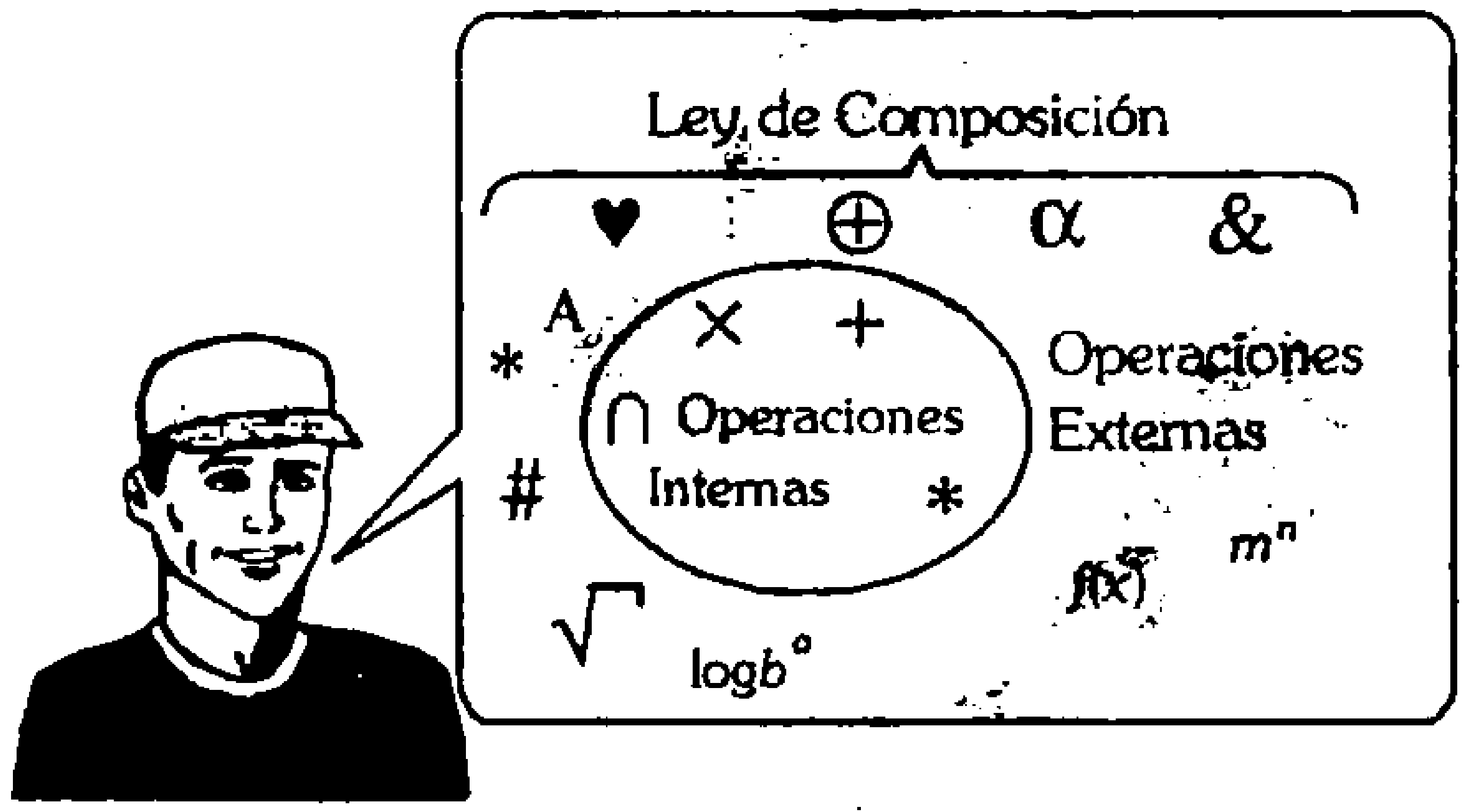
El estudio de los conjuntos y las operaciones internas que se definen en estos, tiene como punto de partida al conjunto de los números naturales y la operación de adición, pues se identifican las propiedades de clausura, conmutativa, asociativa y la existencia del elemento neutro o identidad en dicho conjunto.

Sin embargo, al paso del tiempo, los matemáticos se dieron cuenta de que lo importante no eran las tablas de sumar o multiplicar de ciertos «números», sino el conjunto y su operación binaria definida en él. Esto, junto con ciertas propiedades que satisfacían dichos conceptos, dio lugar al concepto fundamental llamado grupo.

En la primera parte del presente capítulo ya aprendimos lo que era una operación matemática, pero si se define un conjunto y una operación matemática en dicho conjunto, mediante una tabla podemos plantar un ejercicio de operaciones matemáticas en la cual no aparezca la regla de definición en forma explícita, sino de manera implícita, mediante una tabla de doble entrada.

LEY DE COMPOSICIÓN

En términos simples, una ley de composición se genera cuando definimos una aplicación u operación con respecto a un determinado conjunto.



Así tenemos:

LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA

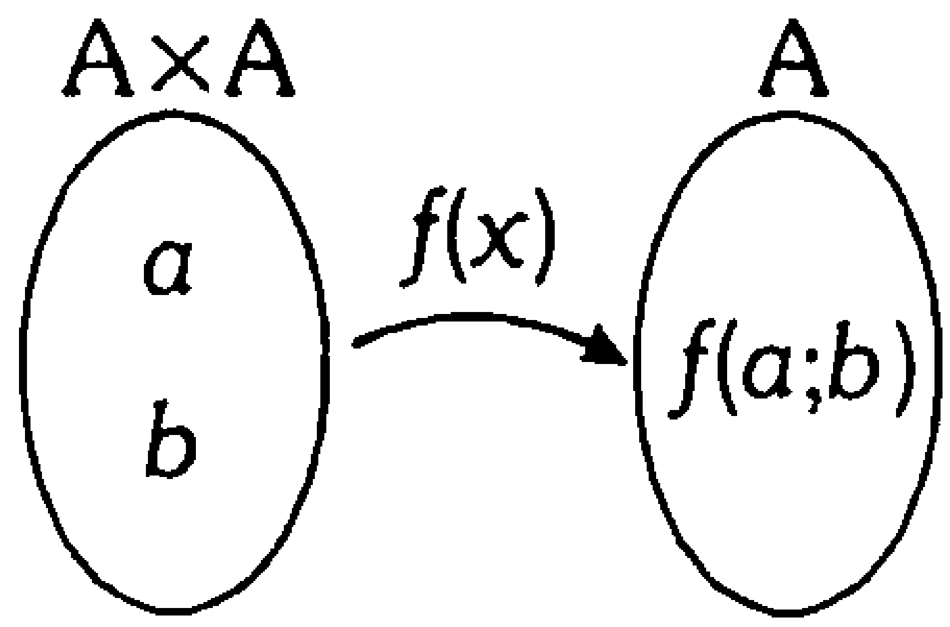
Dado el conjunto $A = \{a; b; c; d; ...\}$ y la operación simbolizada por "*", se dice que la operación (*) es una ley de composición interna en A si cumple las siguientes condiciones :

$$\begin{array}{ll} \text{Si :} & a*b=d \\ \Rightarrow & a\in A \\ & b\in A \\ & d\in A \end{array}$$

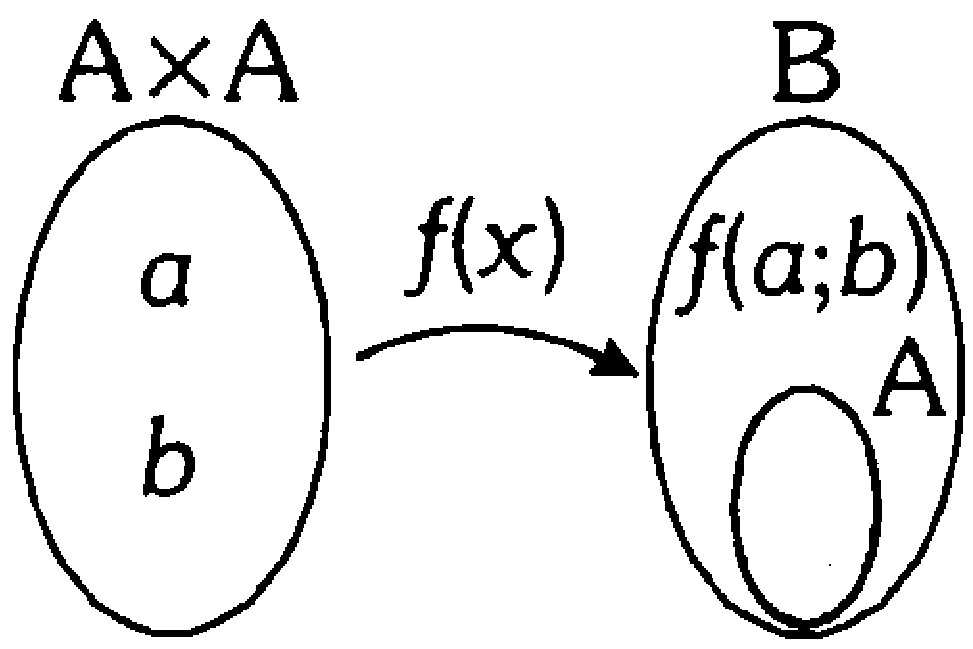
* Si $d \notin A$ entonces estaremos ante una ley de composición externa.

Usando un lenguaje conjuntista tenemos que:

* *Composición Interna*

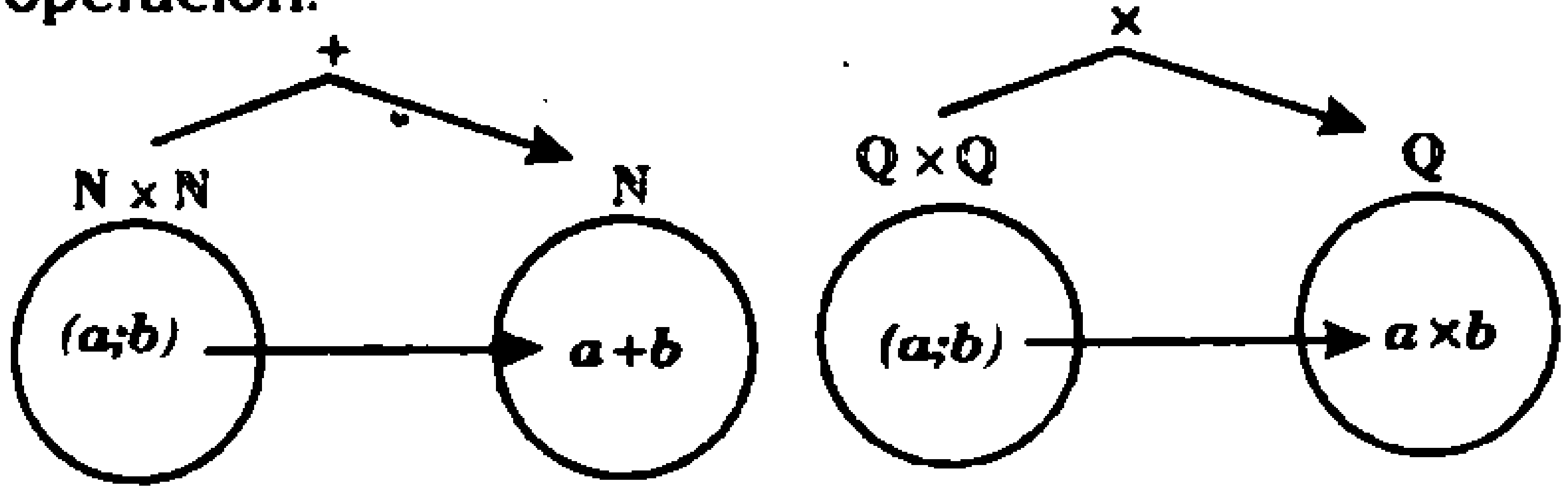


* *Composición Externa :*



OPERAR :

Operar es hacer corresponder dos elementos de un conjunto numérico con otro elemento del mismo conjunto al que llamamos el resultado de la operación.



En los diagramas mostrados, a cada par ordenado de elementos de N se le asigna un único elemento en N, es decir, a cada elemento $N(a;b) \in N \times N$ le corresponde un único elemento $(a+b) \in N \times N$. Una función con esta característica recibe el nombre de operación binaria interna.

DEFINICIÓN :

Sea A un conjunto no vacío, llamamos operación binaria * definida en A, a toda aplicación de $A \times A$ en A tal qué a todo par ordenado de $A \times A$ le corresponde su compuesto que pertenece siempre a A.

Notación: $* : A \times A \to A$

$$(a;b) \mapsto a * b$$

Así, por ejemplo:

$$+ : N \times N \to N$$
$$(a;b) \mapsto a + b$$

Donde + : operador

$(a + b)$ se lee «a más b»

NOTA:

En todo conjunto diferente del vacío, se definen operaciones binarias llamadas también leyes de composición interna o aplicaciones binarias. Estas aplicaciones hacen corresponder a todo par ordenado en el conjunto, un compuesto que pertenece al mismo conjunto. Por ejemplo:

$(N ; +)$ Designa al conjunto de los números naturales con la operación binaria de adición definida en N.

EJEMPLO 1 :

Si definimos la adición en el conjunto de números naturales (N), tenemos:

$$7 + 4 = 11$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$N + N = N$$

Por lo tanto se dice que la adición es una composición interna en los Naturales.

EJEMPLO 2 :

Consideremos el conjunto $E = \{a; b; c\}$ definamos la operación * en E como:

$$* : E \times E \to E$$
$$(x;y) \mapsto x * y = x$$

* Es una operación binaria ya que para todo par ordenado $(x;y) \in E \times E$ le hace corresponder su compuesto $x * y \in x$ que es su primer componente x.

OBSERVACIÓN :

$$- : A \times A \to A$$
$$(a;b) \mapsto a - b$$

La operación de sustracción (–) en N no es una operación binaria interna , ya que que el compuesto $a - b$ no siempre es un elemento de N.

OPERACION BINARIA

(TABLAS DE DOBLE ENTRADA)

A una ley de composición interna se le llama Operación Binaria, la cual puede tener una presentación algebráica o una presentación tabular (pitagórica).

PRESENTACIÓN ALGEBRÁICA :

$$\boxed{a * b = a + 2b}$$

$$\Rightarrow 1 * 2 = 1 + 2(2) = 5$$
$$1 * 3 = 1 + 2(3) = 7$$
$$2 * 1 = 2 + 2(1) = 4$$
$$2 * 2 = 2 + 2(2) = 6$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

PRESENTACIÓN TABULAR :

*	1	2	3	4
1	3	5	7	9
2	4	6	8	10
3	5	7	9	11
4	6	8	10	12

En estos casos , no se nos indica que operación vamos a realizar , por el contrario , nos indica los elementos que han sido operados y colocados en una tabla de doble entrada .

Operador — Fila de entrada

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Columna de entrada — 1ras. Componentes — 2das. Componentes — Cuerpo de la tabla (son los resultados de las operaciones)

* En la tabla dada , calcular : $2 * 3$

*	3
2	2

$\Rightarrow 2 * 3 = 2$

OJO No siempre : $2 * 3 = 3 * 2$

(solo cuando la operación es conmutativa) .

PROPIEDA DES DE LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS

I) OPERACIÓN CONMUTATIVA :

$$\forall a \wedge b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$

Presentación Algebraica	Presentación Tabular
"El orden de los operandos no altera el resultado final" $a*b = b*a$	(tabla abajo) La matriz es simétrica con respecto a su diagonal principal

*	1	2	3	4
1	3	1	4	2
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	2	4	1	3

EJEMPLO :

Se define en Q : $a*b = a+b+ab$

Para saber si cumple o no como la conmutatividad calculamos "$b * a$"

$$b*a = b+a+ba$$

Comparemos los segundos miembros

"$a + b + ab$" y "$b + a + ba$"

El resultado es el mismo . Por lo tanto la operación " * " es conmutativa .

EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA :

EJEMPLO :

Se define la operación * en: $A=\{m;n;p;q\}$

*	m	n	p	q
m	p	q	m	n
n	q	m	n	p
p	m	n	p	q
q	n	p	q	m

¿La operación (*) es conmutativa?

Para determinar si la operación mostrada a través de una tabla de doble entrada es o no conmutativa existe un criterio práctico denominado "*Criterio de la diagonal*" consiste en :

CRITERIO DE LA DIAGONAL :

1) Verificar que los elementos tanto de la fila como de la columna de entrada tengan el mismo orden .

2) Trazar la diagonal a partir del operador .

3) Verificar que los elementos de ambos lados de la diagonal mantengan su distribución simétrica (*como si un lado fuera el reflejo del otro*)

4) Si se da la distribución simétrica , la operación será conmutativa. Si en al menos un caso la simetría no se da , la operación no será conmutativa . Veamos:

Mantiene el mismo orden

*	m	n	p	q
m	p	q	m	n
n	q	m	n	p
p	m	n	p	q
q	n	p	q	m

Se observa una distribución simétrica.

Por lo tanto , la operación "*" es *conmutativa* .

II) ELEMENTO NEUTRO (e) :

$$\exists!\, e \in A / \forall a \in A \Rightarrow a * e = e * a = a$$

e : Elemento neutro para la operación "*" .

Sea "*e*" un elemento del conjunto "*A*" tal que al operador con un segundo elemento también el conjunto "*A*", tanto a la derecha como a la izquierda, no altera el valor de este segundo elemento . Si este elemento "*e*"existe entonces se llamará elemento neutro.

Presentación Algebraica	Presentación Tabular
"Dada una operación conmutativa, existe un único elemento (e) llamado neutro que operando con cualquier otro valor del conjunto nunca lo altera" $a*e=e*a=a$	$\begin{array}{c\|cccc} * & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow e = ...$ $\Rightarrow ...*3=3$ $...*4=4$

OBSERVACIÓN :

Se debe de tener en cuenta que si una operación matemática tiene elemento neutro, éste es único .

* ***La adición en los reales:***

$5+\boxed{0}=5$ — elemento neutro aditivo

* ***La multiplicación en los reales:***

$8\times\boxed{1}=8$ — elemento neutro multiplicativo

EJEMPLO 1 :

Se define en Z : $a*b=a+b+2$

¿Cuál es , si tiene , el elemento neutro *(e)*?

RESOLUCIÓN :

Procedemos a calcular si tiene elemento neutro *(e)*

* Por definición :

$\underbrace{e*a}=a$ $\qquad$ $\underbrace{a*e}=a$

$\rightarrow e+a+2=a$ $\qquad$ $\rightarrow a+e+2=a$

$\Rightarrow e=-2$ $\qquad$ $\Rightarrow e=-2$

EJEMPLO 2 :

Calcular el elemento neutro en :

$$\boxed{(a;b)}\boxed{(c;d)}=(ad+bc;bd)$$

RESOLUCIÓN :

* Por teoría : $a*e=a$

$\Rightarrow \boxed{(a;b)}\boxed{(e_1;e_2)}=(a;b)$

$\Rightarrow \overbrace{(ae_2+be_1;be_2)}=(a;b)$

* Igualando componentes :

$ae_2+be_1=a \quad ; \quad be_2=b$

$\qquad\qquad e_2=1$

$\rightarrow a(1)+be_1=a \Rightarrow be_1=0 \Rightarrow e_1=0$

* Luego : $e=(e1;e2)\Rightarrow e=(0;1)$

EN UNA TABLA DE DOBLE ENTRADA :

CRITERIO DE INTERSECCIÓN :

1) Ubicar en el cuerpo de la tabla una columna igual a la columna de entrada y una fila igual a la fila de entrada .

2) La intersección de la columna y la fila mencionadas nos dará el elemento neutro *(e)* .

EJEMPLO :

¿Tiene elemento neutro *(e)* la siguiente tabla?

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

RESOLUCIÓN :

*	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

$\Rightarrow \boxed{e=3}$

III) ELEMENTO INVERSO (a^{-1}) :

$$\boxed{\exists e\in A ; \forall a\in A ; \exists a^{-1}\in A \Rightarrow a*a^{-1}=a^{-1}*a=e}$$

e : Elemento neutro

a^{-1} : Elemento inverso de a . $\left(a^{-1}\neq\dfrac{1}{a}\right)$

Es una operación con elemento neutro , tenemos un elemento "a" $\in A$, tal que al ser operado tanto a la derecha como a la izquierda de "a" da como resultado el elemento neutro de la operación .

Presentación Algebraica	Presentación Tabular
"Dada una operación conmutativa, cualquier operando con su simétrico da siempre como resultado el elemento neutro de dicha operación" $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$	$\begin{array}{c\|cccc} * & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow e = ...$ Entonces : $1^{-1}=...$ $\quad 3^{-1}=...$ $2^{-1}=...$ $\quad 4^{-1}=...$

La adición en los reales:

$a' = -a$ = elemento opuesto

$\Rightarrow 8 + \boxed{-8} = 0$

└ *elemento opuesto de* 8

La multiplicación en los reales:

$a' = a^{-1}$: elemento inverso

$\Rightarrow 6 \times \boxed{\frac{1}{6}} = 1$

└ {*elemento inverso de* 6; *elemento recíproco de* 6}

EJEMPLO 1 :

Se define en $\mathbb{R}$: $a \# b = a + b - 4$

a^{-1} : Elemento inverso de "*a*". Calcular: 5^{-1}

RESOLUCIÓN :

* Hallamos "*e*" : $\underbrace{a \# e} = a$

$\Rightarrow a + e - 4 = a \Rightarrow e = 4$

* Aplicamos definición de inverso :

$\underbrace{a \# a^{-1}} = e$

$\Rightarrow a + a^{-1} - 4 = 4 \Rightarrow a^{-1} = 8 - a$

* Luego : $5^{-1} = 8 - 5 = 3$

EN TABLAS EN DOBLE ENTRADA :

EJEMPLO :

De acuerdo a la operación mostrada en la siguiente tabla definida en :

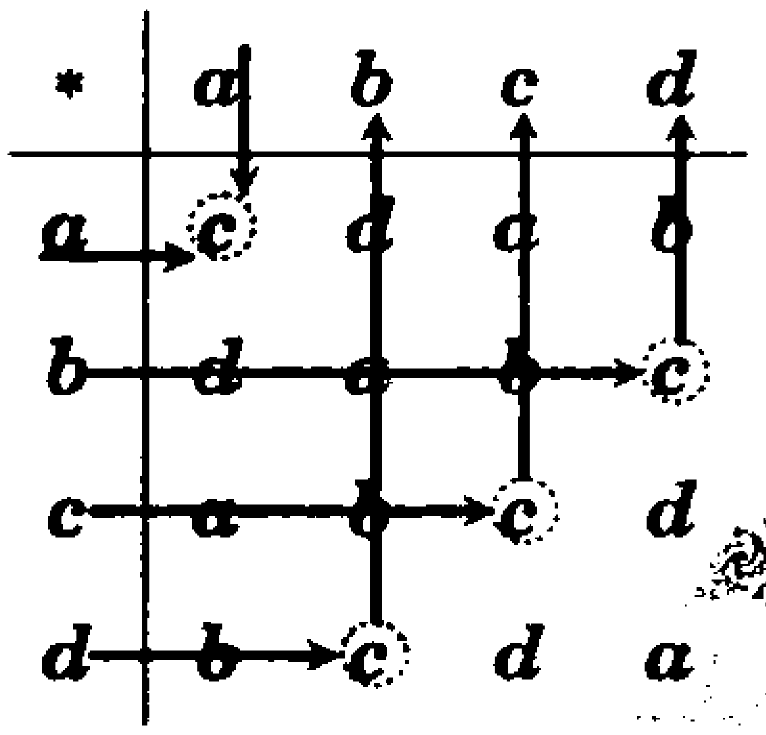
$A=\{a ; b ; c ; d\}$

*	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

Calcular : a^{-1} ; b^{-1} ; c^{-1} y d^{-1}

RESOLUCIÓN :

* Primero identifiquemos el elemento neutro , para luego ubicar a todos iguales a él , después se utilizará un recorrido tipo una *"ELE VOLTEADA"* partiendo el elemento cuyo inverso se pide (al elemento se ubica en la columna de entrada) , cambiando de dirección en el momento que encontramos a uno igual al elemento neutro , siguiendo hasta la fila de entrada , donde se ubica el inverso pedido .



$e = c$

$a^{-1} = a$

$b^{-1} = d$

$c^{-1} = c$

$d^{-1} = b$

IV) PROPIEDAD ASOCIATIVA :

Cuando se efectúa con más de dos elementos que pertenecen al conjunto de partida y se agrupa de diferentes maneras el resultado no cambia.

Una operación será asociativa si :

$$\boxed{\forall a, b, c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)}$$

Presentación Algebraica	Presentación Tabular
"Dada una operación conmutativa, si operamos 3 o más operandos agrupándolos de 2 en 2 en cualquier orden, el resultado final es el mismo" $\boxed{(a*b)*c = a*(b*c)}$	<table><tr><th>*</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr></table> La matriz tiene diagonales secundarias semejantes Nota : En caso contrario deberá comprobarse el resultado de cada terna independientemente.

EJEMPLOS :

1) La adición es asociativa dado que :

$$(7+5)+3=7+(5+3)$$

2) Dado :

*	0	1	2	3
0	2	3	0	1
1	2	3	0	1
2	0	1	1	1
3	3	2	1	0

* Planteamos un ejemplo en particular :

$$0 * \underbrace{(1 * 2)} \qquad \underbrace{(0 * 1)} * 2$$

$$\underbrace{0 * 0}_{2} \neq \underbrace{3 * 2}_{1}$$

como se aprecia la operación no es conmutativa.

V) CLAUSURA O CERRADURA :

Una operación será cerrada si :

$$\boxed{\forall a \wedge b \in A \Rightarrow a * b \in A}$$

Si los elementos del conjunto de llegada (cuerpo),

pertenecen al conjunto de partida , en caso contrario será abierta .

Presentación Algebraica	Presentación Tabular
Dado el Conjunto: $A=\{a;b;c;d\}$ y la operación $a*b=d$ Si: $a;b\in A \Rightarrow d\in A$	En el conjunto: A {1; 2; 3; 4} Se define: * | 1 2 3 4 1 | 2 3 1 4 2 | 3 1 2 3 3 | 4 2 3 1 4 | 1 4 4 2 Los elementos de la tabla pertenecen al conjunto A.

EJEMPLO 1 :

*	a	b	c	d
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

Esta operación es cerrada, porque todos los elementos del cuerpo pertenecen al conjunto "*A*"

EJEMPLO 2 :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	e
c	c	d	a	b
d	e	a	b	c

Esta operación no es cerrada (será abierta) porque el elemento "*e*" no pertenece al conjunto "*A*"

EJEMPLO 3 :

La adición en $\mathbb{N}$, es cerrada dado que :

"La adición de 2 números naturales da como resultado otro número natural"

OTRAS PROPIEDADES

I) DISTRIBUTIVA:

Se define para dos operaciones y un conjunto de elementos:

$$a*(b\#c)=(a*b)(a*c)$$
$$(b\#c)*a=(b*a)(c*a)$$

Se dice que la operación (*) es distributiva con respecto a la operación (#)

II) ELEMENTO REGULAR:

Se define para una operación y un conjunto:

Si: $a*b=a*c \Rightarrow b=c$
$\therefore a=$elemento regular

Si todos los elementos de un conjunto son regulares en cierta operación, entonces la operación cumple la propiedad de **SIMPLIFICACIÓN**.

III) ELEMENTOS PERMUTABLES:

Se defina para una operación no conmutativa y para algún elemento de un conjunto dado:

$$\exists\ a,b\in A / a*b=b*a$$

IV) IDEMPOTENCIA:

Se define para una operación y un conjunto.

$$\forall\ a\in A \Rightarrow a*a=a$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

De acuerdo a :

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	2	1

#	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

Calcular : $A=\dfrac{(1*3)\#(2*2)}{(3\#3)-(2\#1)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo a la tabla se obtendrá :

$$A=\frac{(1*3)\#(2*2)}{(3\#3).(2\#1)}=\frac{3\#3}{3-2}\Rightarrow A=\frac{3}{1}=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Si :

#	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	3	0	2
2	2	0	3	1
3	3	3	1	0

Resolver : $(3\#x)\#(2\#0)=(3\#3)\#0$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Trabajando con la tabla :

$(3\#x)\#(2\#0)=(3\#3)\#0$

$\Rightarrow (3\#x)\#2=0\#0 \Rightarrow (3\#x)\#2=0$

* Se deduce que : $(3\#x)=1 \Rightarrow x=2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Si :

*	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	4	3	1
2	2	4	3	1
3	3	4	2	1
4	4	1	4	1

calcular el valor de:

$$\frac{(2*1)+(4*3)}{(2*3)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

I) Determinamos por separado :

$(2*1)=2 \quad (4*3)=4 \quad (2*3)=3$

II) Reemplazamos los valores en la expresión dada y operamos $\frac{2+4}{3}=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Calcula el valor de x en : $(b*d)*(d*x)=c$, si:

A) b
B) a
C) d
D) c
E) e

*	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

RESOLUCIÓN :

I) Observando la tabla vemos que :

$(b*d)*(d*x)=c \Rightarrow b*(d*x)=c$

* Además : $b*a=c$

II) Luego si $(d*x)=a$, entonces ; $x=a$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Dada la siguiente tabla :

*	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	5
2	1	2	3	5	0
3	2	3	5	0	1
4	3	5	0	1	2
5	5	0	1	2	3

Determinar "x" en :

$$((x*x)*1)*(3*5)=(1*4)*(3*2)$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) – 2 E) 5

RESOLUCIÓN :

*Cada momento se debe observar la tabla :

$((x*x)*1)*\underbrace{(3*5)}=\underbrace{(1*4)}*\underbrace{(3*2)}$

$((x*x)*1)* \quad 1 \quad) \quad \underbrace{3 \quad * \quad 3}$

$((x*x)*1)* \quad 1 \quad = 5$

$\underline{((x*x)*1)}* \quad 1 \quad = \underline{5}*1$

Transformando de modo que el 1 sea 2da. componente (mirar tabla)

$\Rightarrow (x*x)*1 = 5$

$\underline{(x*x)}*1=\underline{5}*1$

$\Rightarrow x*x=5 \longrightarrow x*x=$

$\Rightarrow x=3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Se define * en : $A=\{m;n;p;q;r\}$ mediante la siguiente tabla :

*	m	n	p	q	r
m	p	q	m	n	r
n	q	p	n	r	m
p	m	n	p	q	r
q	n	r	q	p	m
r	r	m	r	m	p

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados es verdadero?

I) $[m*(x*q)]*p=p$ sí $x=m$

II) Se cumple la propiedad conmutativa

III) Se cumple la propiedad de clausura

IV) El elemento neutro es m

A) FVVF B) VVVF C) VVFF
D) FFVV E) VVVV

RESOLUCIÓN :

I) Observando la tabla :

Sí : $x=m$, se tendrá :

$[m*\underbrace{(m*q)}]*p \qquad \underbrace{[m \ * \ n]}*p$

$q*p=q$

Luego "I" es falso .

II) Trazando la diagonal que pasa por el operador , se observa la simetría (criterio de la diagonal) , luego, si es conmutativa .

III) Se observa que todos los elementos que participan en la tabla , pertenecen al conjunto "A", luego se cumple la cerradura .

IV)

*	m	n	p	q	r
m			m		
n			n		
p	m	n	p	q	r
q			q		
r			r		

$\Rightarrow e = p$

* Luego la respuesta será : *FVVF*

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

En : $A=\{-1;0;1;-2\}$

*	−2	−1	0	1
−2	−1	0	1	−2
−1	0	1	−2	−1
0	1	−2	−1	0
1	−2	−1	0	1

Si: $(x^{-1} * 1)^{-1} * (-2 * 0)^{-1} = (-1)^{-1}$ entonces "x" es:

A) 0 B) 1 C) −1
D) − 2 E) No se puede determinar

RESOLUCIÓN :

* Extrayendo el elemento neutro , para luego hallar el inverso de cada elemento , se tendrá :

$$e=1 \Rightarrow (-2)^{-1}=0 \quad \wedge \quad 0^{-1}=-2$$
$$\Rightarrow (-1)^{-1}=-1 \qquad \Rightarrow 1^{-1}=1$$

* Luego en : $(x-1 * 1)-1 * \underbrace{(-2 * 0)-1}_{1} = \underbrace{(-1)^{-1}}_{-1}$

* Entonces : $(x^{-1} * 1)^{-1} * \underbrace{(1)^{-1}}=-1$

$$\Rightarrow (x^{-1} * 1)^{-1} * 1 = -1$$

* Dando una forma adecuada a "-1" de la derecha (mirando tabla) :

Si : $x^{-1}=a \Rightarrow x=a^{-1}$

$$(x^{-1} * 1)^{-1} * 1 = -1 * 1$$
$$(x^{-1} * 1)^{-1} = -1$$

Si: $x^{-1}=a$? $x=a^{-1}$

$$x^{-1} * 1 = (-1)^{-1}$$
$$x^{-1} * 1 = -1$$
$$x^{-1} * 1 = -1 * 1$$

$$\Rightarrow x^{-1}=-1 \Rightarrow x=(-1)^{-1} \Rightarrow x=-1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Si :

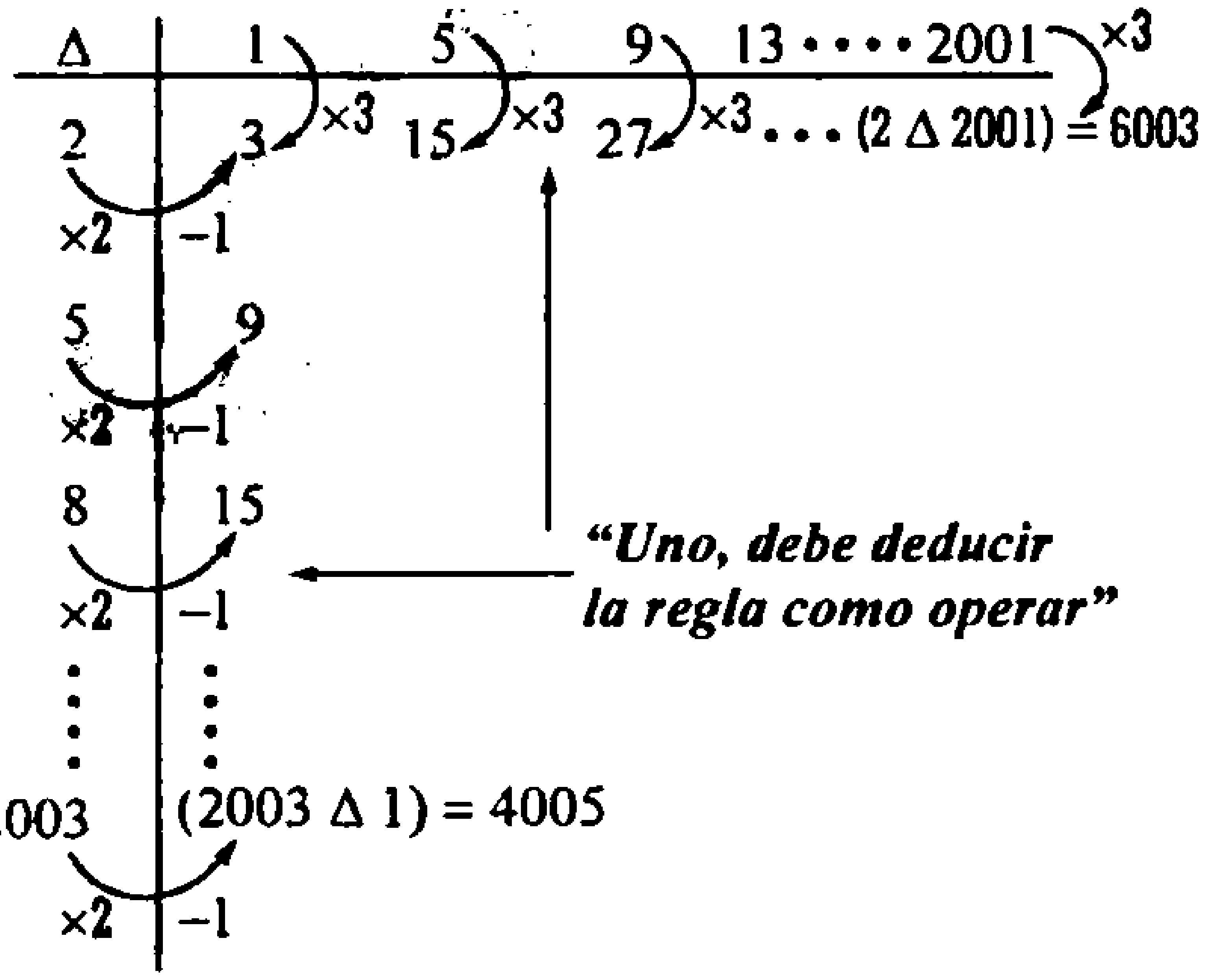
Δ	1	5	9	13
2	3	15	27	39
5	9	21	33	45
8	15	27	39	51
11	21	33	45	57

Calcule : $E=(2003\Delta 1)-(2\Delta 2001)$

A) 2002 B) −2002 C) −2000 D) −1998 E) 2000

RESOLUCIÓN :

* Como el *98* y *201*, no se encuentran en la tabla, entonces se debe encontrar la regla como se a operado , para ello extraemos algunos referentes a la tabla :



Piden : $E=4005-6003=-1998$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Si : $\boxed{a \mid b} * \boxed{c \mid d} = \boxed{ad+bc \mid bd}$

Calcular : $\boxed{1 \mid 2} * \boxed{1 \mid 3} * \boxed{1 \mid 6}$

A) $\boxed{1 \mid 0}$ B) $\boxed{27 \mid 45}$ C) $\boxed{36 \mid 36}$

D) $\boxed{2 \mid 1}$ E) $\boxed{3 \mid 11}$

RESOLUCIÓN :

* Se puede verificar que la operación es conmutativa, entonces no importa el orden en que operemos :

$$\underbrace{\boxed{1 \mid 2} * \boxed{1 \mid 3}} * \boxed{1 \mid 6}$$
$$\underbrace{\boxed{1\times 3+2\times 1 \mid 2\times 3}} * \boxed{1 \mid 6}$$
$$\underbrace{\boxed{5 \mid 6} * \boxed{1 \mid 6}}$$
$$\boxed{5\times 6+6+1 \mid 6\times 6} = \boxed{36 \mid 36}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En la operación del problema anterior, calcular su elemento identidad o elemento neutro.

A) [1|0] B) [0|0] C) [0|1] D) [2|1] E) [1|1]

RESOLUCIÓN :

* Por teoría sabemos que :

$a * e = a$ (e: Elemento neutro)

* Luego plantearemos :

$[a|b] * [e_1|e_2] = [a|b]$

$[ae_2 + be_1 | be_2] = [a|b]$

* igualando las componentes respectivas:

$be_2 = b \longrightarrow e_2 = 1$

$ae_2 + be_1 = a \longrightarrow a(1) + be_1 = a \Rightarrow e_1 = 0$

* Entonces el elemento identidad será :

$[e_1|e_2] = [0|1]$

RPTA: "C"

PROBLEMA 11 :

Considerando los dos últimos problemas calcular :

$[2|3]^{-1} \Longleftrightarrow$ Inverso de $[2|3]$

A) [3|2] B) [−2|−3] C) [−3|−2]

D) [1|3] E) $[-\frac{2}{9}|\frac{1}{3}]$

RESOLUCIÓN :

* Por teoría sabemos que : $a * a - 1 = e$

* Luego plantearemos :

$[2|3] * [2|3]^{-1} = [0|1]$ (Elemento neutro)

$[2|3] * [x|y] = [0|1]$

$[2y + 3x | 3y] = [0|1]$

$\Rightarrow 3y = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{3}$

$2y + 3x = 0 \longrightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3x = 0 \quad x = -\frac{2}{9}$

* Entonces el inverso de [2|3], será :

$[2|3]^{1} = [x|y] = [-\frac{2}{9}|\frac{1}{3}]$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

Se define el operador * en el conjunto :

$A = \{a ; b ; c ; d ; e\}$ mediante la tabla :

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	c	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	e

Halle : $(...(((a*c)*a)*c)*...*a)*(b*c)$

A) a B) b C) c D) d E) e

RESOLUCIÓN :

* Por inducción :

1er. caso : $c*(b*c) = c*d = a$

2do. caso : $((a * c) * a)*(b * c)$

$\Rightarrow (c * a) * d$

$\Rightarrow c * d = a$

3er . caso: $((((a * c) * a) * c)*a) * (b * c)$

$((c * c)*a) * d$

$\Rightarrow (c * a) * d$

$\Rightarrow c * d = a$

*Siempre resulta "a"

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Se define * en el conjunto : $A = \{a ; b ; c ; d ; e\}$ mediante la tabla siguiente :

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Dadas las ecuaciones : $x * y = b \quad y * z = a \quad x * z = d$

Determine : $(x * z) * y$

A) a B) b C) c D) d E) e

RESOLUCIÓN :

Observando detalladamente la tabla, se tendrá :

$x * y = b$	$y * z = a$	$x * z = c$
$A * b = b$	$a * a = a$	$a * d = d$
$b * a = b$	$b * e = a$	$b * c = d$
$c * e = b$	$c * d = a$	$c * b = d$
$d * d = b$	$d * c = a$	$d * a = d$
$e * c = b$	$e * b = a$	$e * e = d$

* Observamos que la única terna que cumple con las condiciones es : $x=c \quad y=e \quad z=b$

* Luego piden : $(x * z) * y = \underbrace{(c * b)} * e$

$= d * e = c$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Si «*» es una operación definida sobre el conjunto $A=\{0 ; 1 ; 2\}$ tal que su elemento neutro es 2.

El único inverso de 1 es 0 y el único inverso de 0 es 1. Además $\forall x \in A - \{2\}$ se cumple $x * x \neq x$. Hallar el valor de :

$$S=(1*1)*(0*0)$$

A) 2 B) 1 C) 0 D) F.D. E) N.A.

RESOLUCIÓN :

* Como : $e = 2$ ....(neutro)

$$\Rightarrow 1 * 0 = 2 \ ; \ 1 * 2 = 1 \ \text{ y } \ \overbrace{2 * 1 = 1}^{\text{Por conmutatividad}}$$

$$0 * 1 = 2 \ ; \ 0 * 2 = 0 \ \text{ y } \ 2 * 0 = 0$$

*Además : $2 * 2 = 2$

* Construyendo la tabla :

*	0	1	2
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

Debido a que : $x * x \neq x$ y además que el inverso es único

* Piden : $s=\underbrace{(1 + 1)} * \underbrace{(0 * 0)}$

$\Rightarrow s = \ 0 \ * \ 1 = 2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Dado : $(a;b)*(c;d)=(a+d;c+b)$

Calcular : $(1;2)^{-1}$

A) $(2 ; 1)$ B) $(-1 ; -2)$ C) $(-2 ; -1)$

D) $\left(\frac{1}{3};1\right)$ E) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)$

RESOLUCIÓN :

I) Cálculo del elemento neutro:

$$\underbrace{(1 ; 2) * (e_1 ; e_2)}=(1 ; 2)$$

$$\Rightarrow (1+e_2 \ ; \ e_1+2)=(1;2)$$

* Donde : $1+e_2= 1 \Rightarrow e_2=0 \quad e_1+2= 2 \Rightarrow e_1=0$

II) Cálculo del elemento inverso :

$$(1 ; 2) \ * \ \underbrace{(1 ; 2)^{-1}} = (0 ; 0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1 ; 2) \ * \ (x ; y)} = (0 ; 0)$$

$$\Rightarrow (1 + y \ ; \ 2 + x) = (0 ; 0)$$

$$\Rightarrow y=-1 \quad x=-2 \Rightarrow (1;2)-1=(-2;-1)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Dado : $1^{-1} = 1 ; 4^{-1} = 4 \ ; 2^{-1} = 3 ; 3^{-1} = 2$

Además que el elemento neutro toma su máximo en esta operación cerrada .

Calcular : $A=[(3*2)^{-1} * (4 * 1^{-1})]^{-1}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) "A" ó "B"

RESOLUCIÓN :

* Reconstruyendo la tabla : (Considerar el criterio de la *ele volteada*)

*	1	2	3	4
1	4			
2			4	
3		4		
4				4

Neutro máximo

* Luego por el criterio del elemento neutro y la conmutatividad se tendrá :

*	1	2	3	4
1	4			1
2			4	2
3		4		3
4	1	2	3	4

Igual

Igual

* Piden :

$$A = [\underbrace{(3 * 2)^{-1}} * (4 * 1^{-1})]^{-1}$$

$$\Rightarrow A = [\ 4^{-1} \ * \ \underbrace{(4 * 1)}]^{-1}$$

$$\Rightarrow A = [\underbrace{4 \ * \ 1}]^{-1}$$

$$\Rightarrow A = [\ 1 \ ]^{-1} = 1$$ **RPTA : "A"**

PROBLEMA 17 :

En el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) se define el operador * por : $a*b=min\{a-b;b-a\}$

Sobre este operador * se afirma :

I) Es asociativo si :

$$a*(b*c)=(a*b)*c;\forall a;b;c\in\mathbb{Z}$$

II) Es conmutativo si : $a*b=b*a;\forall a,b\in\mathbb{Z}$

III) $(-1)*(1*3)=-1$

Indique cuál o cuáles de las afirmaciones son verdaderas.

A) Sólo II *B) Sólo III* *C) II y III*
D) I y II *E) I y III*

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que la regla como operar es el mínimo valor de la diferencia :

I) No es ***asociativa*** , dado que :

$$2*\underbrace{(3*5)}\quad\underbrace{(2*3)}*5$$

$$\underline{2*(-2)}\quad\underline{(-1)*5}$$

$$-1=-1$$

II) Si es ***conmutativa*** , dado que :

$$min\{a-b;b-a\}=min\{b-a;a-b\}\Rightarrow a*b=b*a$$

III) $(-1)*\underbrace{(1*3)}=-1$

$$\underbrace{(-1)*-2}-1=-1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

Se dispone de la siguiente información :

A B	$A\oplus B$	$A\odot B$
0 0	0	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	1

De acuerdo a la lógica de información brindada , determinar *MNPQ* en el cuadro adjunto .

A B C	$(A\oplus B)\odot C$
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	M
1 0 1	N
1 1 0	P
1 1 1	Q

A) 1001 *B) 0110* *C) 1100* *D) 0011* *E) 1101*

RESOLUCIÓN :

* Analizando la información brindada en la tabla inicial , observamos que :

- $A\oplus B$ es *1* , cuando *A* y *B* son diferentes
- $A\oplus B$ es *0* , cuando *A* y *B* son iguales
- $A\odot B$ es *1* , cuando *A* y *B* son iguales
- $A\odot B$ es *0* , cuando *A* y *B* son diferentes

* Luego completamos la tabla , con la información anterior :

A	B	C	$A\oplus B$	$\odot$ C
0	0	0	0	1 0
0	0	1	0	0 1
0	1	0	1	0 0
0	1	1	1	1 1
1	0	0	1	$M\rightarrow$ 0 0
1	0	1	1	$N\rightarrow$ 1 1
1	1	0	0	$P\rightarrow$ 1 0
1	1	1	0	$Q\rightarrow$ 0 1

* Por lo tanto : ***MNPQ = 0110***

RPTA : "B"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

Se define en:

$A=\{0,1,2,3\}$

La operación:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Utilizando la tabla, resolver y calcular desde la pregunta *1* hasta la *11*.

01 $(0*2)+(1*1)+(3*0)+(2*1)$

RPTA.: ....

02 $E=(1*3)*(2*0)$

RPTA : ....

03 $D=\dfrac{(1*3)*(0*2)}{(1*2)*0}$

RPTA : ....

04 • $x*2=3$

RPTA : ....

• $1*x=0$

RPTA : ....

05 • $(x*3)*1=2$

RPTA : ....

• $2*(x*0)=3$

RPTA : ....

06 • $(2*x)*1=0$

RPTA : ....

• $0*(3*x)=2$

RPTA : ....

07 • $(x*1)*(3*2)=1$

RPTA : ....

• $(2*1)*x=3$

RPTA : ....

08 • $(3*x)*2=1*0$

RPTA : ....

• $(0*1)*x=2*3$

RPTA : ....

09 $(3*x)*(2*0)=(3*3)*0$

RPTA : ....

10 $(1*2)*x=(2*0)*3$

RPTA : ....

11 $[(2*0)*3]^{(1*0)}$

RPTA : ....

12 ¿Cuál o cuáles de las siguientes operaciones son conmutativas?

I) $a\square b=a+b-20$

II) $m\Delta n=\dfrac{m}{n}-2m$

III) $x\bigcirc y=x^3+y^2-xy$

IV) $x\Delta y=\dfrac{xy}{3}+10$

RPTA : ....

13 ¿Cuál o cuáles de las siguientes operaciones son conmutativas?

(I)

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

(II)

Δ	1	2	3
1	2	1	3
2	2	3	1
3	1	2	3

(III)

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

RPTA : ....

14 Hallar el elemento neutro en:

θ	3	8	9
3	3	9	8
8	8	3	9
9	9	8	3

RPTA : ....

15 Hallar el elemento neutro en:

□	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

RPTA : ....

Se define la operación; en: $A=\{a,b,c,d\}$

#	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Utilizando la tabla , resolver y calcular las siguientes preguntas:

16 $R=\dfrac{(a\#b)\#a}{(d\#b)\#c}$

RPTA : ....

17 $F=(a\#b)\ \#\ (c\#d)$

RPTA : ....

18 $(a\#b)\ \#\ x=b\#c$

RPTA : ....

19 $(a\#x)\ \#\ (b\#c)=(d\#a)\ \#\ b$

RPTA : ....

20 $(x\#b)\ \#\ c=(d\#a)\ \#a$

RPTA : ....

21 Dada la tabla :

*	A	M	O	R
A	M	O	R	A
M	R	A	M	O
O	A	M	O	R
R	O	R	A	M

Calcular : $N=\dfrac{(A*M)}{(M*O)*R}$

RPTA :..........

22 Según la tabla :

□	1	3	5
1	5	3	1
3	3	1	5
5	5	1	3

Calcular

$M=\dfrac{(3\square 5)\quad(1\square 3)}{(1\square 1)}$

RPTA : ....

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dada la siguiente tabla :

*	0	1	2	3
0	2	3	0	1
1	3	0	1	2
2	0	1	2	3
3	1	2	3	0

Resolver : $3*x=(1*2)*3$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

02 Dada la siguiente tabla :

#	0	1	3	5
0	1	3	5	0
1	3	5	0	1
3	5	0	1	3
5	0	1	3	5

I) Tiene elemento neutro

II) La operación es conmutativa

III) El inverso de "3" es "0"

es(son) verdadera(s) :

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) I y II*
D) I y III *E) Todas*

03 Dada la siguiente tabla :

Δ	3	5	7	9
3	7	9	3	5
5	9	3	5	7
7	3	5	7	9
9	5	7	9	3

donde a^{-1} es el elemento inverso de dicha operación, calcular:

$$E=(3\Delta 7^{-1})\Delta(5^{-1}\Delta 3^{-1})$$

A) 3 *B) 5* *C) 7* *D) 9* *E) A y B*

04 En $A=\{1;2;3;4\}$, se define la operación :

$\oplus$	1	2	3	4
1	1	4	2	6
2	4	0	6	1
3	2	6	3	4
4	6	1	4	3

donde a^{-1} es el elemento inverso de dicha operación. Indicar verdadero o falso en los siguientes enunciados :

( ) $(1\oplus 3)\oplus 4\in A$

( ) La operación es conmutativa

( ) $(6^{-1}\oplus 3^{-1})\in A$

( ) Se cumple la propiedad de clausura

A) VFFV *B) VFVF* *C) FVFV*
D) FFVV *E) VVFV*

05 Dada la siguiente tabla :

$\otimes$	0	2	4	6
0	2	4	6	0
2	4	6	0	2
4	6	0	2	4
6	0	2	4	6

I) La operación es conmutativa

II) Tiene elemento neutro

III) El inverso de "0" es "4"

es(son) verdadera(s) :

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) I y II*
D) I y III *E) Todas*

06 En $A=\{0;3;6;9\}$ se define la operación :

▲	0	3	6	9
0	6	9	3	0
3	9	3	0	6
6	3	0	6	9
9	0	6	9	3

Indicar verdadero o falso en los siguientes enunciados:

( ) $(6▲3)▲0\notin A$

( ) La operación es conmutativa

( ) $(9▲0)▲(3▲6)=0$

( ) Se cumple la propiedad de clausura

A) VFFV *B) VFVF* *C) FVFV*
D) FFVV *E) VVFF*

07 Se define: $a*b=2a+b;\ \ a\#b=a+b^2$

Calcular la suma de valores de "x" que satisfacen :

$$x\#(x*1)=1\#3$$

A) -2 *B) -1* *C) 1* *D) 2* *E) 3*

08 Se define : $a\Delta b=a^2-b^2+a+b$

I) $a\Delta a=2a$ *II)* $a\Delta b=b\Delta a$

III) $(a-1)\Delta a=0$

es(son) verdadera(s) :

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III*
D) I y III *E) Todas*

09 Se define la siguiente operación :

$$a\#b=a^2-b^2+2ab$$

¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

( ) $a\#0=0\#a=a$

( ) # es conmutativa

( ) $x\#(-x)=0$

( ) $(1\#2)\#3=1\#(2\#3)$

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

10 En $A=\{-2;-1;0;1\}$ se define la operación * mediante :

*	-2	-1	0	1
-2	-1	0	1	-2
-1	0	1	-2	-1
0	1	-2	-1	0
1	-2	-1	0	1

Calcular el valor de "x" en :

$$(x^{-1}*1)^{-1}*(-2*0)^{-1}=(-1)^{-1}$$

A) -2 *B) -1* *C) Cero*
D) 1 *E) No se puede determinar*

11) Se define la operación # mediante :

$$a \# b = 2a + 2b + 3ab$$

¿Cuántas de las siguientes expresiones son falsas?

( ) # es conmutativa
( ) # es asociativa
( ) Cero es el elemento neutro
( ) $a \# (-a) = 3a^2$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

12) En el conjunto de los números reales definimos la operación * : $a * b = a + b + 2ab$

Indicar verdadero o falso en :

( ) $a * b = b * a$
( ) $(a * b) * c = a * (b * c)$
( ) El cero es elemento neutro

A) VVF B) VFF C) VVV
D) FFF E) FVV

13) Se define en el conjunto de los números reales la operación: $a \# b = a + b + 3ab$. Sabiendo que el elemento neutro es cero, hallar la forma del inverso y que número no tendrá inverso

A) $\frac{-a}{1+3a}; -\frac{1}{3}$ B) $\frac{a}{1+3a}; -\frac{1}{3}$ C) $\frac{a}{1-3a}; -\frac{1}{3}$
D) $\frac{a}{1-3a}; \frac{1}{3}$ E) $\frac{a}{1+3a}; \frac{1}{3}$

14) Sea la operación (#), definida en los reales que:

$$a \# b = \frac{a+b}{a-b}$$

Calcular el valor de "x", si: $x \# 2 = 2x \# 3$

A) 0 B) 5 C) 2 D) 6 E) 3

15) En el conjunto : $A = \{1; 2; 3; 4\}$ se define la operación ▲ mediante la tabla

▲	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Indicar si es verdadero o falso :

( ) La operación ▲ es cerrada
( ) La operación ▲ es conmutativa
( ) El 1 es el elemento identidad

A) VVF B) VFV C) VVV
D) FVV E) FFF

16) Si: $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ es una operación definida por: $a * b = 2a + 2b + ab$

resolver la ecuación: $[x * (2 * 1)] + [1 * 2] = 14$

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -1

17) Dada la operación binaria:

$$a \# b = a + b + ab$$

calcular el elemento neutro :

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) -1 E) -2

18) Dadas las siguientes tablas:

Δ	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	a	b	c	d	e

▲	a	b	c	d	e
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

hallar "x" :

$$(a \Delta c) \blacktriangle (d \Delta x) = (c \blacktriangle d) \Delta e$$

A) a B) b C) c D) d E) e

19) Consideremos la operación * definida en el conjunto: $A = \{1; 2; 3; 4\}$, mediante la siguiente tabla:

*	1	2	3	4
2	4	1	2	3
4	2	3	4	1
1	3	4	1	2
3	1	2	3	4

I) ¿Es cerrada la operación?
II) ¿La operación dada es conmutativa?
III) Hallar, si es que existe, el elemento neutro

A) Sí; no; no existe B) Sí; no; 3 C) Sí; sí; 3
D) Sí; sí; 2 E) Faltan datos

20) En $A = \{1; 2; 3; 4\}$ se define la operación # mediante la tabla:

#	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Calcular "x", si :

$$[(2^{-1} \# 3)^{-1} \# x] \# [(4^{-1} \# 2) \# 3]^{-1} = 1$$

A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 1 ó 2

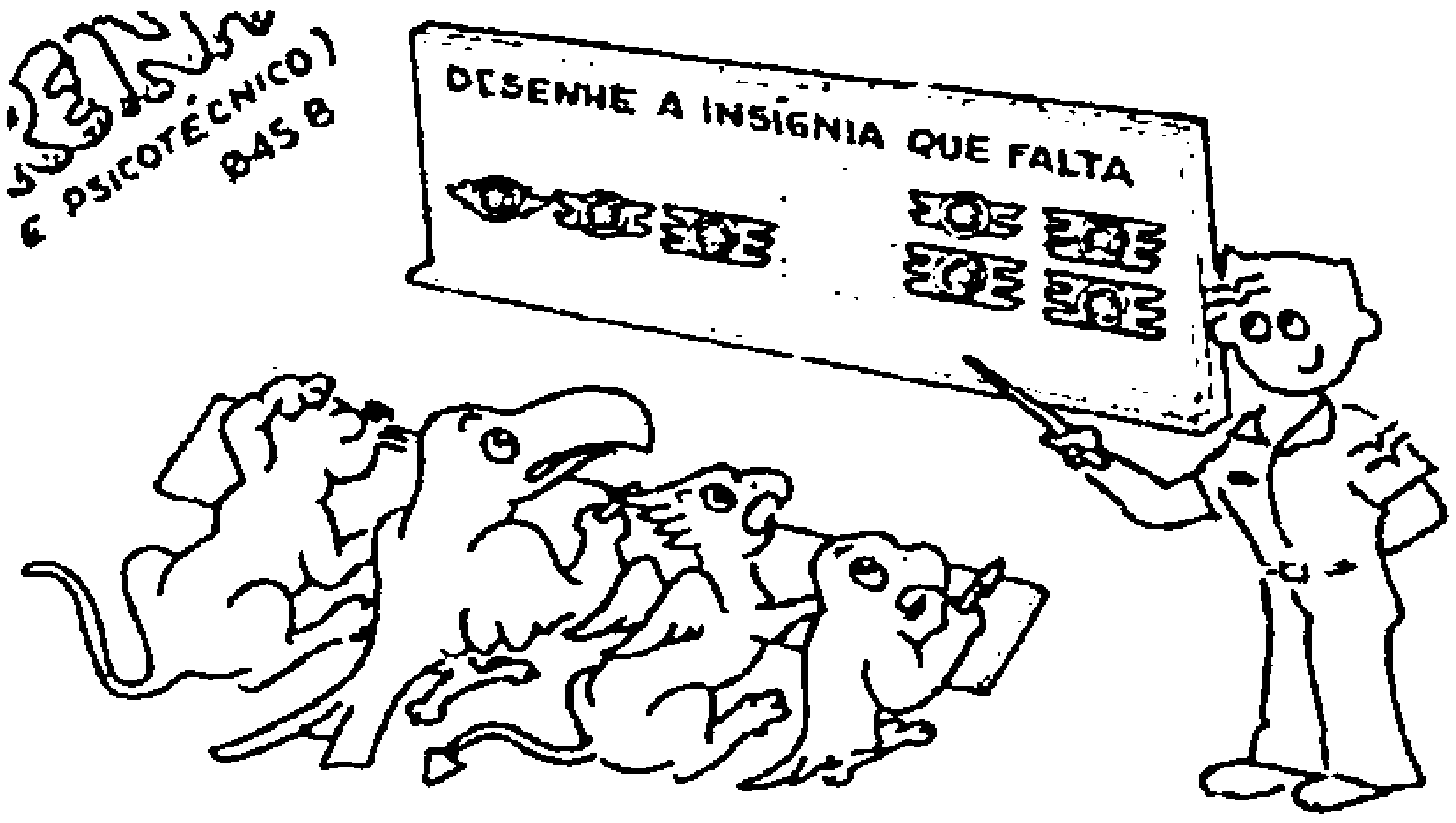
CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)E	3)D	4)E	5)E	6)C	7)B	8)D	9)A	10)B
11)B	12)A	13)A	14)A	15)C	16)E	17)C	18)C	19)C	20)C

PSICOTECNICO NUMERICO LITERAL
CAPITULO 034

OBJETIVOS :

* *Conocer las nociones básicas de la psicotecnia , así como su importancia .*
* *Identificar la relación existente entre los términos de una secuencia.*
* *Desarrollar la aptitud de intuición para completar una secuencia ordenada.*



INTRODUCCIÓN :

Si tratáramos de encontrar un tema que en «*Razonamiento Matemático*» se pueda considerar como inconsistente es probable que algunos coincidan con Psicotécnico ; ideado inicialmente como una forma de poder entender , o reconocer algunos parámetros relativos al nivel de inteligencia. Esta inconsistencia de la cual algunos insisten , se debe a que no tienen claro las reglas básicas de las secuencias ,.ya sea numéricas , literales y gráficas. que a continuación pasaremos a detallar :

Los ejercicios de razonamiento permiten medir la habilidad de las personas para analizar procesos Lógicos , en los cuales se aplica una determinada ley o se desea completar una secuencia. La capacidad para razonar en forma abstracta se logra a traves de experiencias adquiridas después de desarrollar muchos ejercicios que facilitan manipular signos y símbolos poco convencionales. Cuando razonamos estamos desarrollando un proceso lógico que consiste, esencialmente , en la capacidad de relacionar de un modo consecuente y ordenado las diversas premisas para obtener una conclusión. La deducción , la analogía y el silogismo (2 premisas y una conclusión) son tipos o formas de razonamiento, las cuales enlazan dos o más juicios para definir algo nuevo.

PSICOTÉCNICO

Es el arte de medir la capacidad y grado de eficiencia en el uso de la capacidad mental en el empleo de los conocimientos con los que un individuo debe resolver problemas de caracter lógico .

Estos tipo de tests , miden capacidades tales como la rapidez al hacer una tarea de forma precisa y la resistencia al desgaste , ya que nos obliga a realizar tareas rutinarias pero que requieren de un gran nivel de atención y concentración con la dificultad añadida de la limitación temporal . Es importante estar relajados y concentrados mientras la realizamos un examen de este tipo .

SECUENCIAS NUMÉRICAS

Consiste en la presentación de un conjunto de números que muestran un orden con sentido lógico; ahora éstas pueden presentar un criterio operativo como las llamadas progresiones o responder a un principio conceptual como puede ser una sucesión de números primos . Bueno, independientemente del sentido en que se presenten , también es importante considerar la forma en que se muestran ya que pueden plantearse en forma directa o dos secuencias cuyos términos se alternen sucesivamente.

La primera impresión consiste en establecer diferencias entre los términos, consecutivos de la sucesión principal , hasta obtener una «Línea» donde las diferencias sean constantes o iguales .

EJEMPLO :

En : ***5 ; 12 ; 19 ;*** ......¿Qué sigue?

RESOLUCIÓN :

* Escribiendo las diferencias debajo de la sucesión :

$$5 \; ; \; 12 \; ; \; 19 \; ; \; \ldots\ldots$$

$$+7 \quad +7 \quad +7 \longrightarrow \textit{Se deduce}$$

⇒ lo que se sigue será : ***19+7=26***

OBSERVACIÓN :

Para deducir que o quién , sigue , es necesario que

la razón de ser (o diferencia constante), se debe de repetir como mínimo 2 veces en la sucesión dada .

EJEMPLO INCONSISTENTE :

Dado : *2 ; 3; ...... ¿Qué continua?*

RESOLUCIÓN :

$$2 \; ; \; 3 \; ; \; \ldots\ldots$$
$$+1$$

Rpta : No se puede determinar el que continua , porque falta información .

TIPOS DE SECUENCIAS

I) SECUENCIAS ARITMÉTICAS :

Cuando la diferencia entre *2* términos consecutivos de la secuencia es constante también se las denomina ***«Progresión Aritmética»*** y a la diferencia común que estos presentan , se le conoce como ***Razón Aritmética*** .

EJEMPLO 1 :

Dado : *12; 16; 20; x ; ....* ¿Cuál es el valor de *«x»*?

RESOLUCIÓN :

* Colocando las diferencias entre término y término, así :

$$12 \; ; \; 16 \; ; \; 20 \; ; \; x \longrightarrow 20+4=24$$
$$+4 \quad +4 \quad +4$$

* Luego el valor de x , será : $x=24$

EJEMPLO 2 :

En : *7 ;15 ; 25 ; 37 ; x ; ......* ¿Cuál es el valor de x?

RESOLUCIÓN :

* Analizando las diferencias término a término :

$$7 \; ; \; 15 \; ; \; 25 \; ; \; 37 \; ; \; x \; ; \ldots\ldots$$
$$+8 \quad +10 \quad +12 \quad \ldots\ldots$$
$$+3 \quad +2 \quad \ldots\ldots$$

«Aquí , la diferencia constante solo se puede apreciar, cuando hacemos aparecer la segundas diferencias»

* Ahora efectuamos la reconstrucción en base a la progresión aritmética (***De abajo hacia arriba***):

$$7 \; ; \; 15 \; ; \; 25 \; ; \; 37 \; ; \; x$$
$$+8 \quad +10 \quad +12 \quad +14$$
$$+2 \quad +2 \quad +2$$

$$\Rightarrow x = 37 + 14 = 51$$

II) SECUENCIAS GEOMÉTRICAS :

Cuando cada término se obtiene multiplicando al que le precede por un valor constante , se le conoce también como ***Progresión Geométrica*** .

EJEMPLO 1 :

Dado : *3;12;48;x;......* ¿Cuál es el valor de *«x»*?

RESOLUCIÓN :

* Analizando los cocientes entre dos términos consecutivos se obtendrá :

$$3 \; ; \; 12 \; ; \; 48 \; ; \; x$$
$$\times 4 \quad \times 4 \quad \times 4 \longleftarrow \textit{Se deduce}$$

$$\Rightarrow x = 48 \times 4 = 192$$

EJEMPLO 2 :

Dado: *2;10;100;2000;.......* ¿Cuál es el valor de *«x»*?

RESOLUCIÓN :

* Analizando los cocientes entre dos términos consecutivos se obtendrá :

$$2 \; ; \; 10 \; ; \; 100 \; ; 2000$$
$$\times 5 \quad \times 10 \quad \times 20 \longleftarrow$$
$$\times 2 \quad \times 2 \quad \ldots\ldots$$

* Ahora efectuamos la reconstrucción en base a la progresión geométrica (***De abajo hacia arriba***):

$$1 \; ; \; 10 \; ; \; 100 \; ; 2000 \; ; \; x$$
$$\times 8 \quad \times 10 \quad \times 20 \quad \times 40$$
$$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$$

$$\Rightarrow x = 2000 \times 40 = 80000$$

III) SECUENCIAS COMBINADAS:

Son aquellas secuencias donde la razón se obtendrá por una combinación de operaciones , o por una intercalación de *2* o más secuencias , recordando que la razón de ser , se debe repetir *2* veces como mínimo .

EJEMPLO 1 :

Calcular en número que sigue en :

$$4 ; 5 ; 10 ; 12 \; ; 24 \; ; 27 ; x$$

RESOLUCIÓN :

* Analizando la relación en particular entre dos términos consecutivos , se obtiene :

$$4\ ;\ 5\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 24\ ;\ 27\ ;\ x$$

$$+1\quad \times 2\quad +2\quad \times 2\quad +3$$

* Se deduce que : $x=27\times 2=54$

EJEMPLO 2 :

Calcular en número que sigue en :

$$1;3;6;11;20;x$$

RESOLUCIÓN :

* Deduciendo las relaciones , se obtendrá :

$$1\ ;\ 3\ ;\ 6\ ;\ 11\ ;\ 20\ ;\ 37\ ......$$

$$+2\quad +3\quad +5\quad +9\quad +17$$

$$+1\quad +2\quad +4\quad +8$$

$$\times 2\quad \times 2\quad \times 2$$

Se Reconstruye de abajo hacia arriba

*De donde se obtiene que lo pedido será : $x=37$

IV) SECUENCIAS ALTERNADAS O INTERCALADAS :

(Con dos ó más secuencias en una sola)

EJEMPLO :

¿Cuál es el producto de los dos términos siguientes en la sucesión?

$$1;8;5;4;9;0;13;......$$

RESOLUCIÓN :

* Se observa que hay dos sucesiones intercaladas :

La *1ra:* $1\ ;\ 5\ ;\ 9\ ;\ 13\ ;\ a \longrightarrow a=17$ (+4, +4, +4, +4)

La *2da:* $8\ ;\ 4\ ;\ 0\ ;\ b \longrightarrow b=4$ (−4, −4, −4)

* Luego el producto de los *2* últimos términos es:

$$a\times b=17\times(-4)=-68$$

V) SECUENCIAS ESPECIALES :

Las secuencias numéricas pueden ser operacionales, tal es el caso de las progresiones o las secuencias por reconstrucción ; sin embargo hay otros casos que responden más a un criterio conceptual como puede ser: ***"Cuadrados Perfectos"***, ***"Primeros Cubos"***, ***"Números Primos"***. ***"Números Triangulares"*** , ***"Sucesión de Fibonacci"*** , ... etc .

EJEMPLO :

¿Qué continua? : $1;8;27;......$

RESOLUCIÓN :

$$1\ ;\ 8\ ;\ 27\ ;\ ......$$

$$1^3\quad 2^3\quad 3^3 \longrightarrow$$ *Se trata de los Primeros cubos Perfectos*

* Se trata de los primeros cubos perfectos .

$\Rightarrow$ Seguirá : $4^3=64$

VII) SUCESIONES LITERALES :

Son aquellas sucesiones cuyos términos son letras (no se considera la ***"CH"*** ni la ***"LL"***)

EJEMPLOS :

$M\ ;\ O\ ;\ R\ ;\ U\ ;\ X\ ;\ ......$ (MÑ, PQ, ST, VW)

$A\ ;\ C\ ;\ F\ ;\ J\ ;\ Ñ\ ;\ ......$ (B, DE, GHI, KLMN)

TEOREMA DE LA CORRESPONDENCIA ORDINARIA

«Toda sucesión literal se puede trasformar en una sucesión numérica por correspondencia unívoca»

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T
13	14	15	16	17	18	19	20	21

U	V	W	X	Y	Z
22	23	24	25	26	27

OBSERVACIÓN :

Casi todas las secuencias literales se resuelven haciendo corresponder a cada letra suposición , pero también en algunos casos aplicaremos los siguientes *2* criterios adicionales:

* *Considerar a cada letra como la inicial de una palabra, que integra un conjunto de palabras universalmente conocidas, como por ejemplo las*

iniciales de los meses (E ; F ; M ; A ;......)

* *Considerar todas las letras , para formar una palabra , como por ejemplo :*

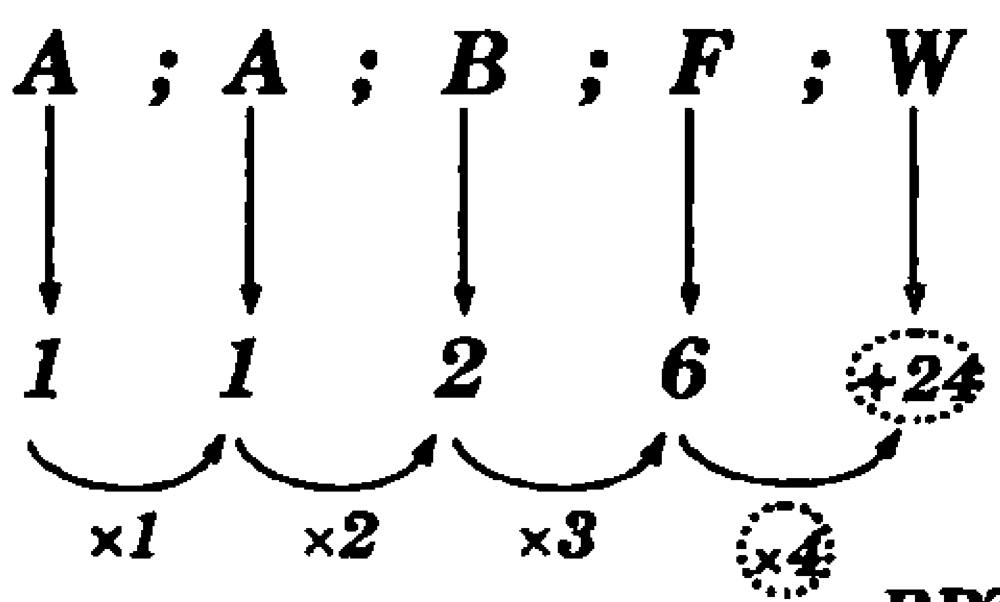
$\Rightarrow$ **O C I N C E T O C I S P** (leída de derecha a izquierda)
P S I C O T E C N I C O

EJEMPLO :

Qué letra continua en la sucesión: ***A ; A ; B ; F ;......***

RESOLUCIÓN :

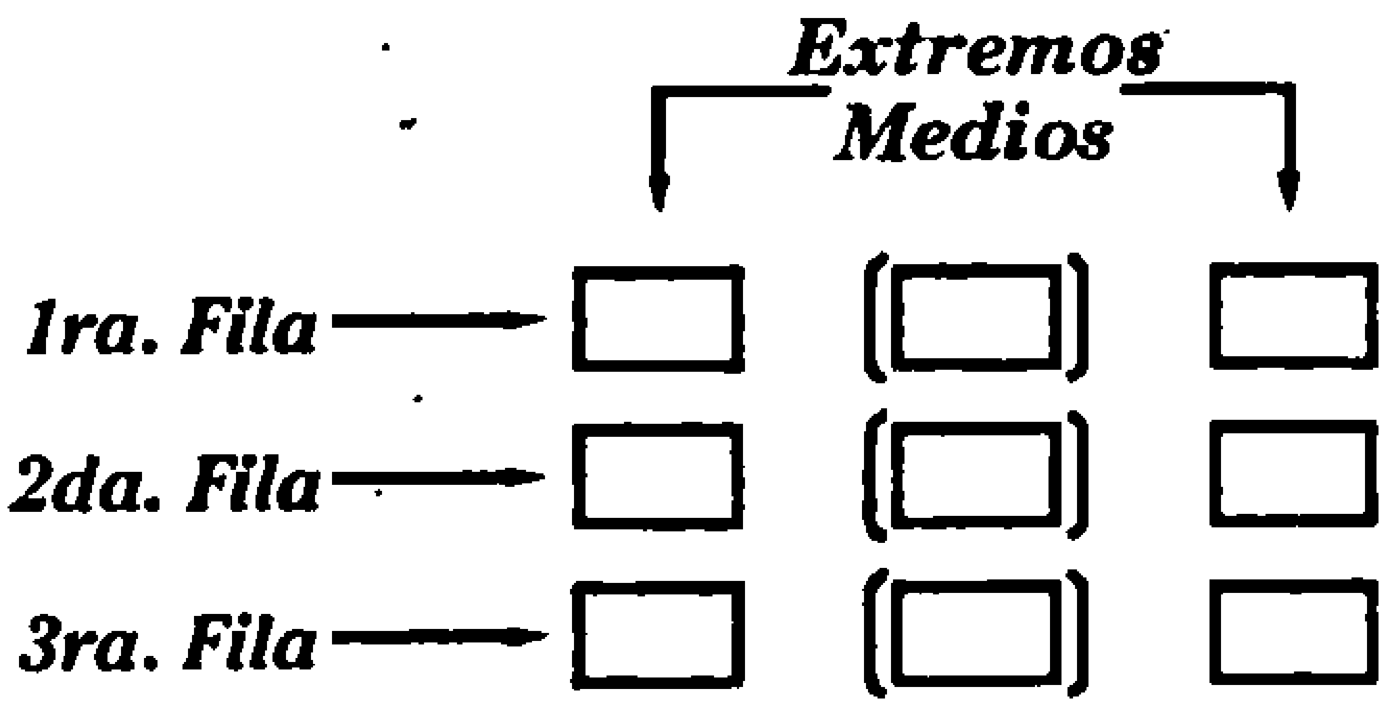
* Por el teorema de Correspondencia Ordinal la sucesión se trasforma en :



RPTA : "W"

ANALOGÍAS NUMÉRICAS

La analogía numérica es un grupo de números distribuidos en tres ó más filas tales que cada fila esta formado por tres elementos , dos extremos y un medio . Los medios están encerrados entre paréntesis y uno de ellos al menos es la incógnita . Todos los elementos de dos filas por lo menos se conocen entre sí como también los extremos de las filas con la incógnita . Las operaciones entre los extremos debe ser como resultados a sus respectivos medios.



Estructura : Presentamos acontinuación una estructura general de las analogías numéricas de *3* filas. Donde los rectángulos sombreados son los datos numérico conocidos y el rectángulo no sombreado es la incógnita .

EJEMPLO :

Determinar el valor de «*x*» en la siguiente analogía :

1 (7) 3
3 (9) 2
0 (x) 5

RESOLUCIÓN :

* Iniciamos a buscar relaciones operacionales en los extremos tal que nos den como resultado los medios . Obtenemos la siguiente relación operacional entre ellos mismos :

1ra. fila : $2(1+3)-1=7$
2da. fila : $2(3+2)-1=9$

* Ahora , aplicamos esta relación operacional para la fila de la incógnita , tenemos :

3ra. fila : $2(0+5)-1=x \Rightarrow x=9$

OBSERVACIÓN :

Esta relación operativa es , como una adivinanza , que al lo más puede estar compuesta de *3* operaciones simples .

EJEMPLO :

Completar : *12 (15) 8*
3 (6) 17
13 (....) 5

A) 12 B) 11 C) 9 D) 15 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Despues de analizar detalladamente, se obtendrá :

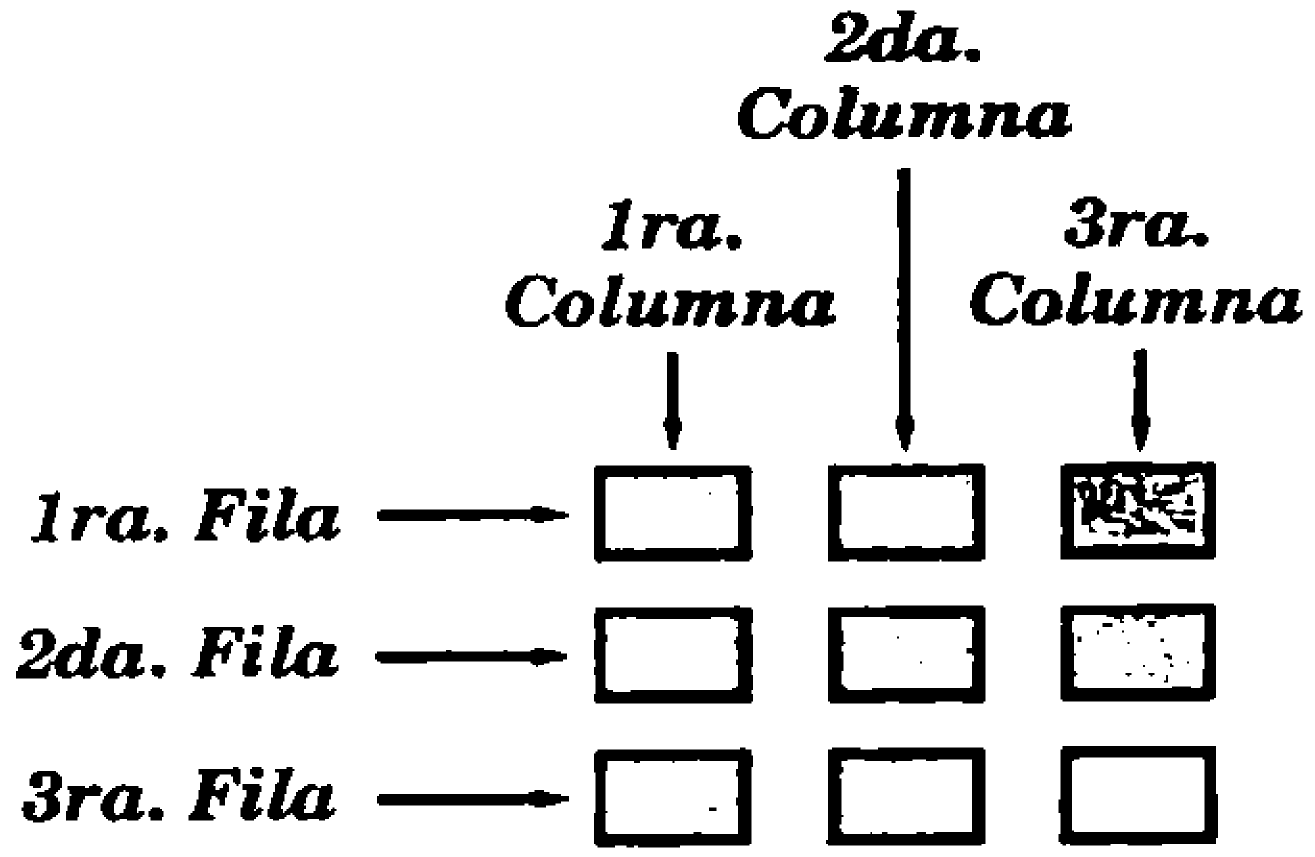
1ra. fila : $12\times 8=96 \Rightarrow 9+6=15$
2da. fila : $3\times 17=51 \Rightarrow 5+1=6$
3ra. fila : $13\times 5=65 \Rightarrow 6+5=11$

RPTA : "B"

DISTRIBUCIONES NUMERICAS

Una distribución numérica es un grupo formado de por lo menos de nueve números distribuidos en tres ó más filas tales que tienen el mismo número de elementos y éstas filas pueden ser formados por dos o más elementos . Por lo menos un elemento de una fila es la incógnita .

Estructura: Presentamos a continuación una estructura general de las distribuciones numéricas de *3* filas por *3* columnas . De donde los rectángulos sombreados son los datos numéricos conocidos y el rectángulo no sombreado es la incógnita .



EJEMPLO :

Determinar el valor de "x" en la siguiente distribución:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ 101 & 3 & x \end{matrix}$$

A) 1 B) 4 C) 8 D) 10 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que buscar relaciones operacionales entre las dos primeras filas ó entre las dos primeras columnas . Obtenemos la siguiente relación operacional entre las columnas :

1ra. columna $2\times6-2=10$

2da. columna $3\times5-2=13$

* La que hemos encontrado , es una buena relación, aplicamos ésta relación para la tercera columna .

Tenemos :

3ra. columna $4\times2-2=x \Rightarrow x=6$

Hemos obtenido la solución .

RPTA : "E"

OBSERVACIÓN :

No existe un criterio general para resolver distribuciones numéricas , como en las analogías numéricas . Las relaciones operacionales entre los elementos de una distribución numérica se pueden presentar de diversas formas. Estas podrían ser relaciones entre los elementos de las filas , de las columnas y de otro tipo. Para tener éxito en la solución de problemas con distribuciones numéricas se debe buscar relaciones operacionales adecuadas y lógicas entre los elementos de las filas ó de las columnas ó de otra naturaleza .

EJEMPLO :

Completar :

$$\begin{matrix} 12 & 8 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & 3 \\ 13 & ? & 2 & 15 \end{matrix}$$

A) 17 9 C) 5 D) 12 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Se debe deducir que la suma de los dos elementos de la izquierda de cada fila es igual al producto de los dos elemento de dicha fila , es decir :

1ra. fila: $12+8=5\times4$

2da. fila: $9+9=6\times3$

3ra. fila: $13+¿=2\times15 \Rightarrow ¿=17$

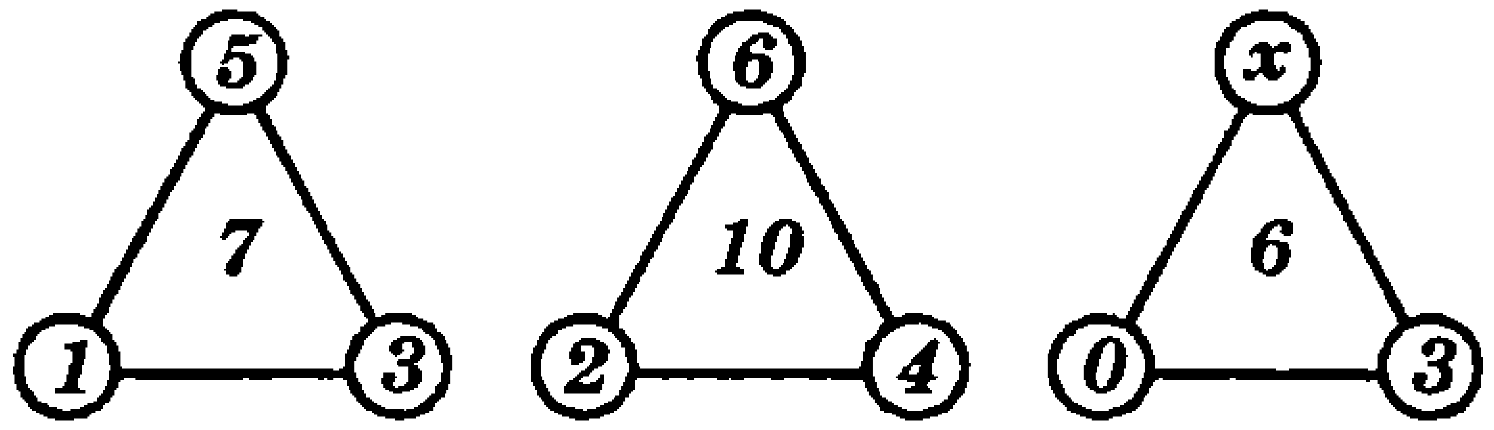
RPTA : "A"

DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS (CON GRÁFICAS)

Una distribución gráfica numérica es un grupo de números distribuidos en una o más figuras tal que al menos un elemento es la incógnita . Existe una relación operacional entre los elementos del grupo y estas pueden ser independientes de las formas de las figuras o pueden depender de ellas .

EJEMPLO 1 :

Determinar el valor de "x" en la siguiente distribución:



RESOLUCIÓN :

* Buscamos relaciones operacionales entre los elementos de las dos figuras . Obtenemos la siguiente relación entre los elementos de las figuras :

1 ra. figura: $(1+3+5)-2=7$

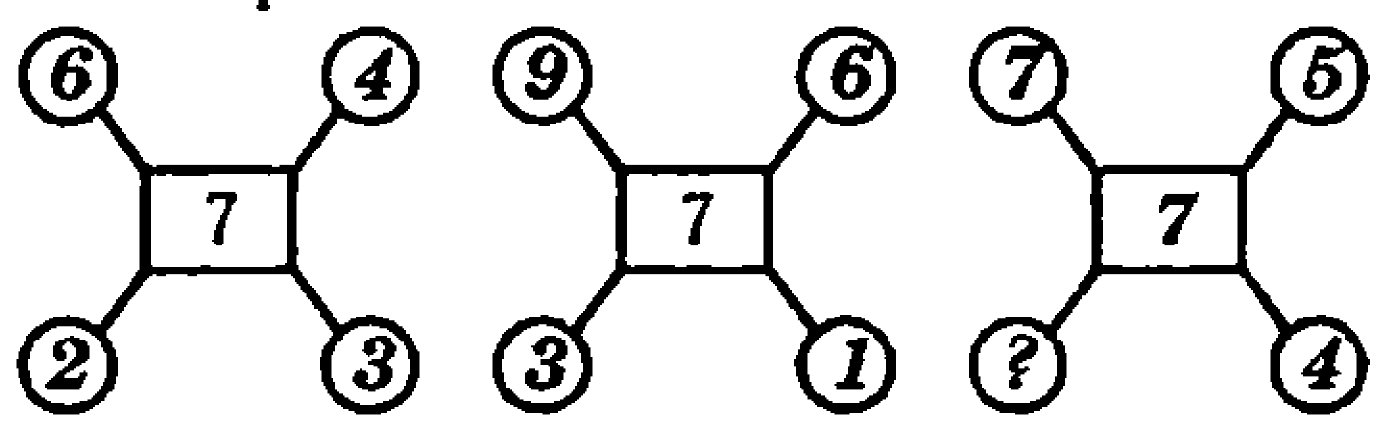
2 da. figura: $(2+4+6)-2=10$

* Esta la que hemos encontrado es una buena relación, aplicamos a la tercera figura y tenemos :

3ra. figura: $(0+3+x)-2=6 \Rightarrow x=5$

EJEMPLO 2 :

El número que falta es :



A) 12 B) 8 C) 6 D) 3 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Se debe deducir que :

1ra. fig: $(7+4)-(6+3)=2$

2da. fig: $(7+6)-(9+1)=3$

3ra. fig: $(7+5)-(7+4)=1$

RPTA : "E"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dada la siguiente secuencia: *10 ; 18 ; 29 ; 45 ; 68 ; ....*

el número que sigue es :

A) 96 B) 100 C) 91 D) 98 E) 89

RESOLUCIÓN :

* En este caso la sucesión numérica es ascendente.

10 ; 18 ; 29 ; 45 ; 68 ; x

(I)....... +8 +11 +16 +13 y

(II).......... +3 +5 +7 +9

* De *(I)*, las razones como vemos no son constantes, pero tampoco está muy claro como varían por tanto procedemos a hallar la razón de las razones .

* En *(II)*, al hacer lo último se ve más claramente como varían las razones en números impares consecutivos .

* Luego ,

* De *(II)*: $y=23+9=32$

* De *(I)*: $x=68+y=68+32 \rightarrow x=100$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Qué número continua en la secuencia :

+36 ; -24 ; -18 ; -16 ; -15 ; -11 ; ...

A) 12 B) 8 C) -12 D) 1 E) -1

RESOLUCIÓN :

* Hallamos la razón :

-36 ; -24 ; -18 ; -16 ; -15 ; -11 ; x

(I).... +12 +6 +2 +1 +4 y

(II)......... -6 -4 -1 +3 z

+2 +3 +4

* De *(II)* : $z=3+5=8$

* De *(I)* : $y=4+z=4+8=12 \Rightarrow x=12-1=11$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Qué número sigue : *0 ; 6 ; 24 ; 60 ; 120 ; ....*

A) 121 B) 210 C) 216 D) 215 E) 125

RESOLUCIÓN :

0 ; 6 ; 24 ; 60 ; 120 ; x

+6 +18 +36 +60 y

+12 +18 +24 z

+6 +6 +6 → Se deduce

$\Rightarrow z=24+6=30 \; ; \; y=60+30=90$

$\Rightarrow x=120+90=210$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Qué sigue : *89 ; 65 ; 45 ; 29 ; 17 ; ......*

A) 7 B) 11 C) 8 D) 16 E) 9

RESOLUCIÓN :

89 ; 65 ; 45 ; 29 ; 17 ; x

-24 -20 -16 -12 y

+4 +4 +4 +4 → Se deduce

$\Rightarrow y=-12+4=-8 \quad x=17-8=9$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Determinar el término que sigue en siguiente la secuencia : *6 ; 14 ; 14 ; 14 ; 32 ; 96 ; ....*

A) 100 B) 244 C) 212 D) 180 E) 150

RESOLUCIÓN :

6 ; 14 ; 14 ; 14 ; 32 ; 96 ; x

+8 0 0 +18 +64 y

-8 0 +18 +46 z

Aumenta de 10 en 10. → 8 +18 +28 38

* De *(II)*: $x=46+38=84$

* De *(I)*: $y=64+z=64+84=148$

* Finalmente : $x=96+y=96+148=244$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

4 ; 9 ; 28 ; 113 ; ? . La incógnita es :

A) 452 B) 656 C) 566 D) 465 E) 665

RESOLUCIÓN :

4 ; 9 ; 28 ; 113 , 566

×2 ×3 ×4 ×5

+1 +1 +1 +1

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Determinar el número que continúa :

2; 3; 6; 15; 42; 123; 366;?

A) 395 B) 435 C) 565 D) 985 E) 1095

RESOLUCIÓN :

2 ; 3 ; 6 ; 15 ; 42 ; 123 ; 366 ; (1095)

+1 +3 +9 +27 +81 +243 +729

×3 ×3 ×3 ×3 ×3 ×3

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Indicar la alternativa que continúa la siguiente serie numérica : *5; 8; 20; 68; 260; 1028; 4100*

A) 4998 B) 12066 C) 8433 D) 20492 E)16388

RESOLUCIÓN :

5 8 20 68 268 1028 4100

2^0+4 2^2+4 2^4+4 2^6+4 2^8+4 $2^{10}+4$ $2^{12}+4$ $2^{14}+4=16388$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

Indicar la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente secuencia :

4; 12; 24; 40; 60; 84; 112; 144;...

A) 168 B) 172 C) 180 D) 192 E) 204

RESOLUCIÓN :

4 ; 12 ; 24 ; 40 ; 60 ; 84 ; 112 ; 144 ; [180]

8 12 16 20 24 28 32 36

+4 +4 +4 +4 +4 +4 +4

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Indique la alternativa que continúa correctamente la siguiente secuencia : *6; 15; 36; 93; 258*

A) 373 B) 489 C) 621 D) 747 E) 1005

RESOLUCIÓN :

6 ; 15 ; 36 ; 93 ; 258 ; ... 747

9 21 57 165 489

+12 +36 +108 +324

×3 ×3 ×3

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

De la siguiente sucesión :

22 ; 34 ; 56 ; 710 ; 11x ; yz ;....

se deduce que el valor de $x+y-z$ es :

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

RESOLUCIÓN :

* La ley de formación es dada por : p^{q-1} donde p es primo y q es el primo siguiente, es decir la sucesión se expresa como :

$$2^{3-1}\ 3^{5-1}\ 5^{7-1}\ 7^{11-1}\ 11^{13-1}\ 13^{17-1}\ ....$$

* luego :

$$x=12\ ;\ y=13\ ;\ z=16$$

* por tanto $x+y-z=12+13-16=\boxed{9}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

¿Qué triada no concuerda con la forma de construcción de las otras?

A) 2 – 4 – 8 B) 3 – 9 – 27 C) 4 – 16 – 64
D) 5 – 25 –125 E) 6 – 36 – 216

RESOLUCIÓN :

* En cada tríada , el tercero resulta de multiplicar a los dos primeros . No concuerda la alternativa *"E"*

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

Señale la alternativa que continúa coherentemente la siguiente secuencia numérica :

5 ;10 ;25 ;60 ;125 ; ....

A) 220 B) 230 C) 130 D) 210 E) 200

RESOLUCIÓN :

* De la sucesión :

5 ; 10 ; 25 ; 60 ; 125 ; (230)

+5 +15 +35 +65 (+105)

+10 +20 +30 (+40)

+10 +10 (+10)

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Determinar el número que debe ocupar el casillero *UNI* .

2	3	5	8	13	21		UNI

A) 55 B) 58 C) 65 D) 74 E) 85

RESOLUCIÓN :

2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; (55)

Criterio : A partir del tercer término , cada número corresponde a la suma de los *2* términos inmediatamente anteriores a él .

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

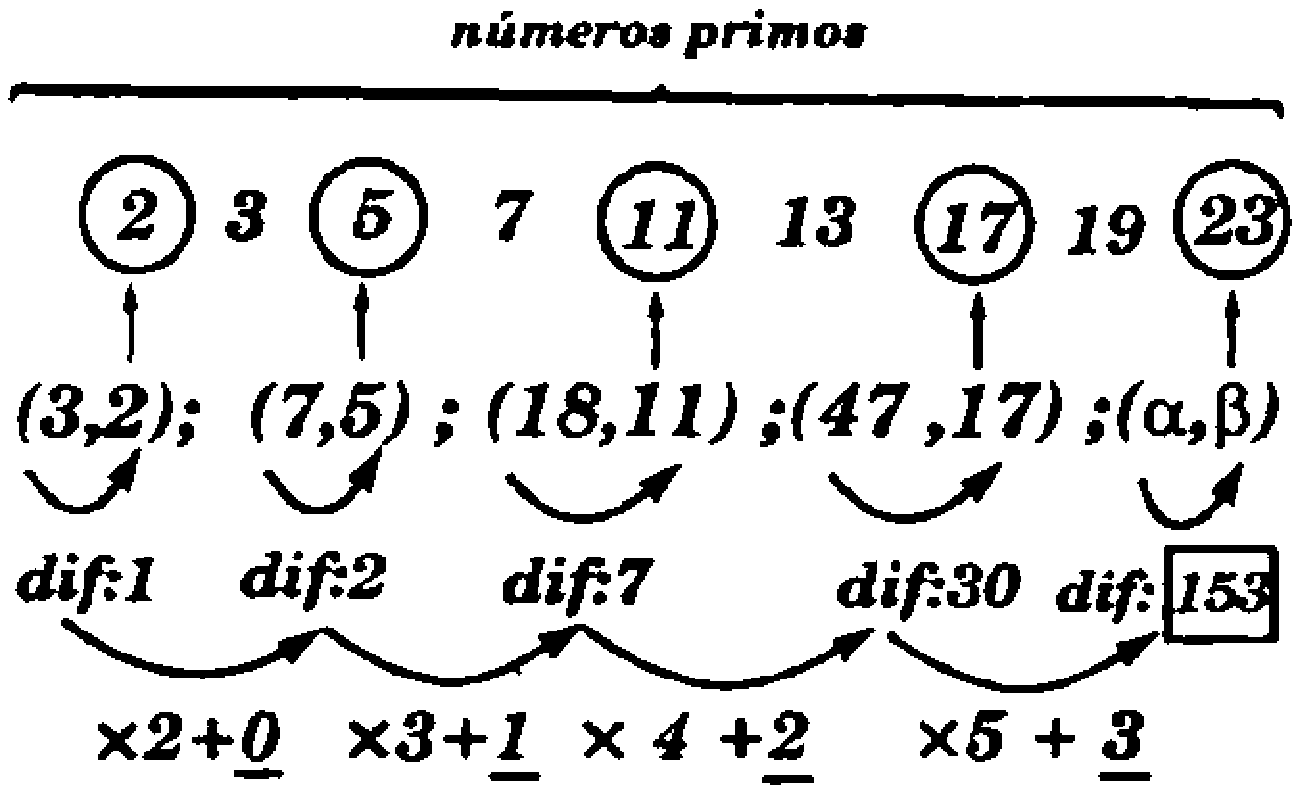
En la sucesión mostrada, determine la suma de los dígitos de α y β.

$$(3;2);\ (7;5);\ (18;11);\ (47;17);\ (\alpha;\beta)$$

A) 11 B) 15 C) 17 D) 19 E) 23

RESOLUCIÓN:

En este tipo de problemas, los números están ordenados bajo un Criterio lógico que se basa en sucesiones notables, Como por ejemplo, números naturales, números pares, números primos, etc.



De lo mostrado se tiene $\alpha-\beta=153 \rightarrow \alpha=176$
$\downarrow$
23

La suma de los dígitos de α y β es $2+3+1+7+6=19$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16 :

El término que sigue en la sucesión

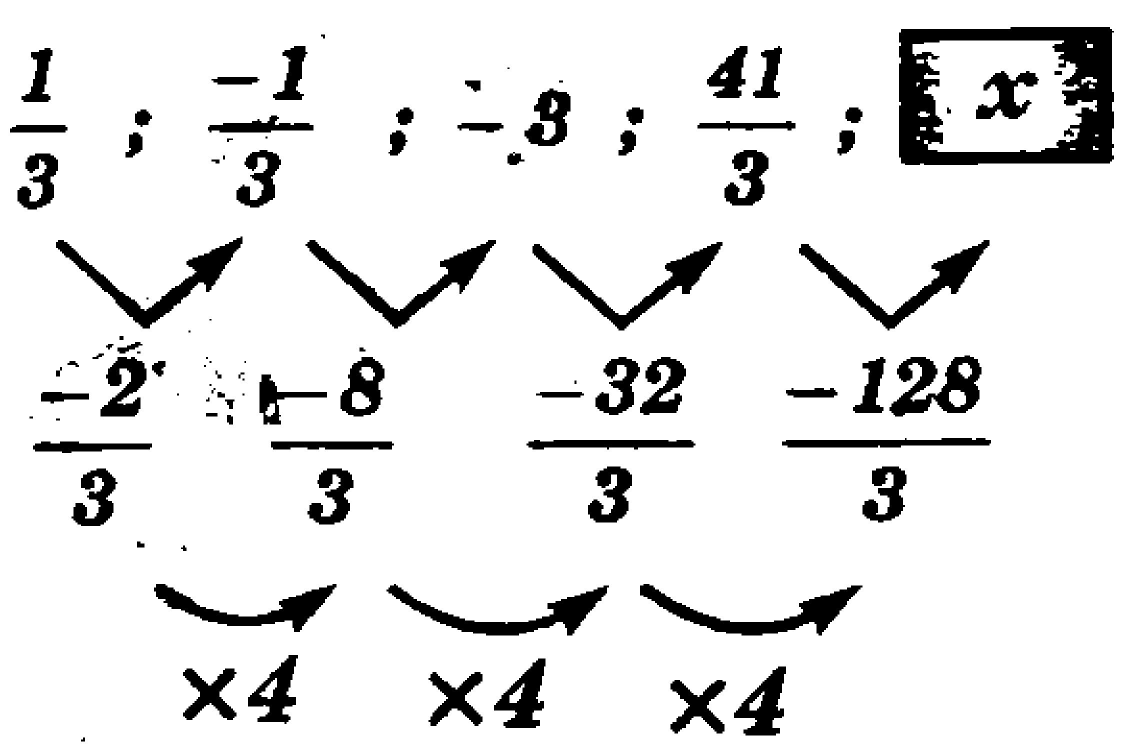
$$\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-3;-\frac{41}{4};.....$$

A) $-\frac{169}{3}$ B) $-\frac{162}{3}$ C) $-\frac{166}{3}$ D) $-\frac{148}{3}$ E) $-\frac{142}{3}$

RESOLUCIÓN:

Se pide el término que sigue: x

Hallamos la diferencia de dos términos consecutivos en la sucesión.



$$\Rightarrow x=-\frac{41}{3}-\frac{128}{3} \Rightarrow x=-\frac{169}{3}$$

EL término que Sigue en a sucesion es $x=-\frac{169}{3}$

RPTA: "A"

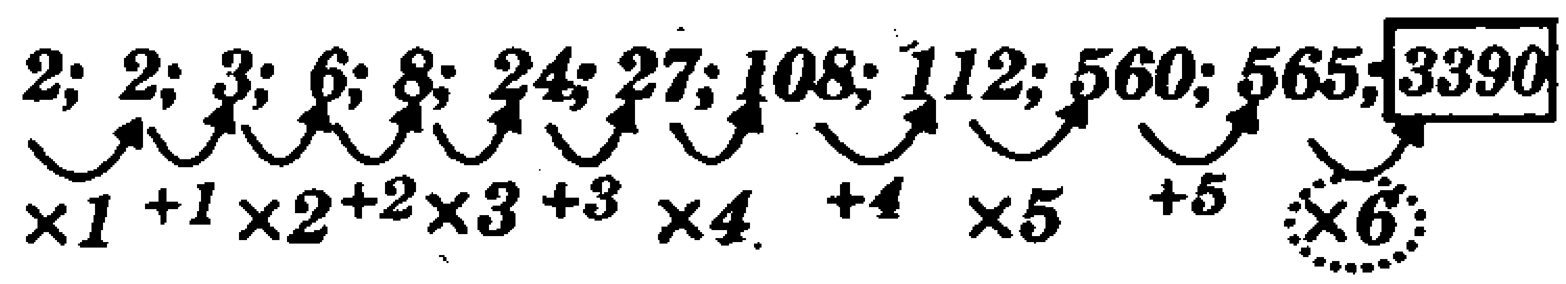
PROBLEMA 17 :

Indique la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente secuencia numérica:

2 ; 2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 24 ; 27 ; 108 ; 112 ; 560 ; 565 ; ...

A) 640 B)870 C) 2120
D) 3 390 E) 6 789

RESOLUCIÓN :



Se observa una sucesión creciente cuyos términos resultan de adiciones y multiplicaciones por números consecutivos en forma alternada.

* El número que sigue adecuadamente es *3390*

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

¿Qué alternativa está en discordancia con las demás?

A)491322 B)891726 C) 191029
D)831114 E)751217

RESOLUCIÓN :

*Se pide la alternativa que está en discordancia con los demás.

* Se observa que el número presentado en cada alternativa puede ser descompuesto en la sucesión de cuatro números: Los dos primeros son de una cifra y los dos últimos son de dos cifras.

	I	II	III	IV
A	4	9	13	22
B	8	9	17	26
C	1	9	10	29
D	8	3	11	14
E	7	5	12	17

(suman) — $10 + 9 = 19$ *(no cumple)*

* En este caso el número que aparece en la columna *III* es la suma de los ubicados en *I* y *II* y el número que se ubica en la columna *IV* es la suma de los ubicados en *II* y *III*.

*Entonces el número que no guarda relación con los demás es *191 029*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

¿Qué término continúa en la siguiente sucesión?

$$1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 29 ; \square$$

A) 121 B) 123 C) 124 D) 125 E) 126

RESOLUCIÓN :

• Hasta el cuarto término se cumple que : $t_n = n$, pero luego : $t_5 = 5 + 24$

• Entonces : $t_n = n + \bigcirc$, pero ese "$\bigcirc$" que se debe adicionar , debe ser nulo para $n \in \{1; 2; 3; 4\}$

$\Rightarrow t_n = n+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, de manera que :

$$t_5 = 5+4\times3\times2\times1 = 5+24 = 29$$

• Si no se confirmaba el t_5 , debíamos probar con:

$$t_n = n+k(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

• En nuestro caso: $k = 1$

$$\Rightarrow t_6 = 6+5\times4\times3\times2=126$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

¿Qué término continúa en la siguiente sucesión?

$$1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 25 ; \square$$

A) 49 B) 64 C) 81 D) 100 E) 121

RESOLUCIÓN :

• Hasta el cuarto término se cumple que:

$t_n=1$, pero luego: $t_5=1+24$

• Entonces : $t_n = n + \bigcirc$, pero ese "algo" que se debe adicionar , debe ser nulo para $n \in \{1;2;3;4\}$

$\Rightarrow t_n = 1+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, de manera que :

$$t_5 = 1+4\times3\times2\times1 = 1+24 = 25$$

$$\Rightarrow t_6 = 1+5\times4\times3\times2 = 121$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

¿Qué letra completa coherentemente la siguiente sucesión?

D , A , D , I , S , R , E , V , I , N , $\square$

A) S B) T C) C D) A E) U

RESOLUCIÓN :

* Las letras leídas al revés forman una palabra: ***"UNIVERSIDAD"***

RPTA : "E"

PROBLEMA 22 :

¿Qué letra completa coherentemente la siguiente sucesión? *M , V , T, M , J , S , U , N ,* $\square$

A) T B) M C) P D) R E) K

RESOLUCIÓN :

• La sucesión literal representa las iniciales de los planetas de nuestro sistema solar.

Mercurio, Venus, Tierra, Marte,...

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

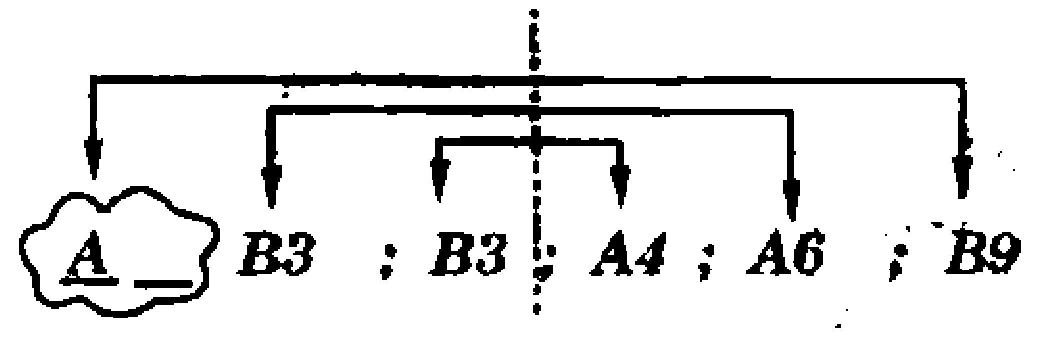
Se tiene la siguiente sucesión: ¿ ; *B3 ; B3 ; A4 ; A6; B9*

Indique el primer término de dicha sucesión.

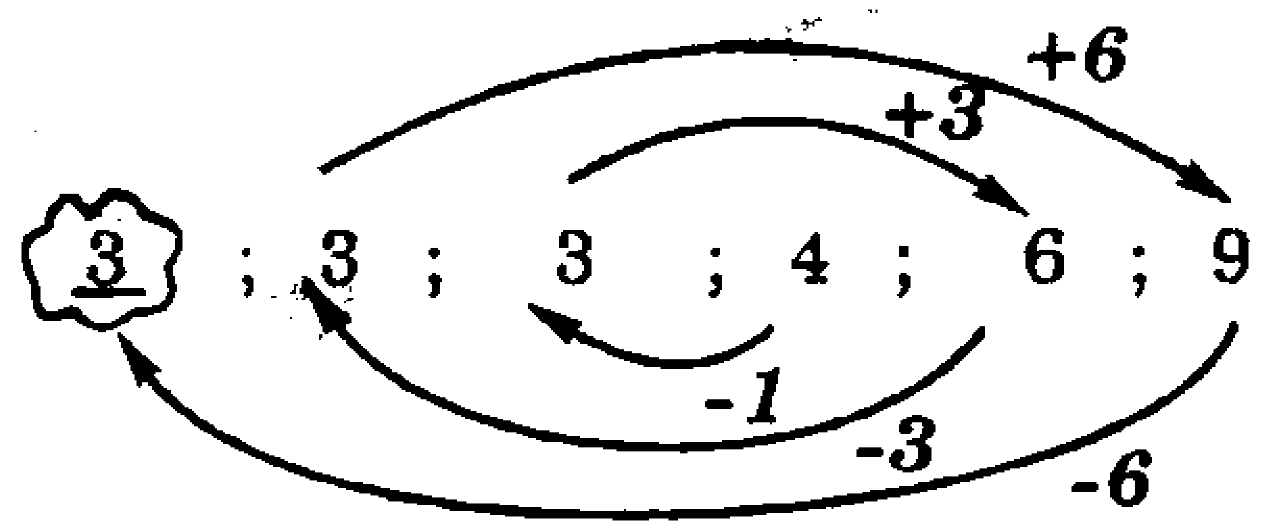
A)A2 B)B2 C)A3 D)B6 E)A9

RESOLUCIÓN:

Se pide: Primer término de la sucesión



Hallamos la relación entre los números



El primer término de la sucesión es *A3*

RPTA: "C"

PROBLEMA 24 :

Determinar el número que falta.

43	(49)	25
32	(25)	41
33	(?)	24

A) 16 B) 36 C) 21 D) 35 E) 20

RESOLUCIÓN :

* En cada fila el número del paréntesis se obtiene multiplicando , la suma de sus cifras de cada número de los extremos , así :

$$(49)=(4+3)\times(2+5) \quad (25)=(3+2)\times(4+1)$$

$$(?)=(3+3)\times(2+3)=36$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

¿El número que falta será?

1	2	2	1
6	4	1	1
5	?	3	2

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) 1

RESOLUCIÓN :

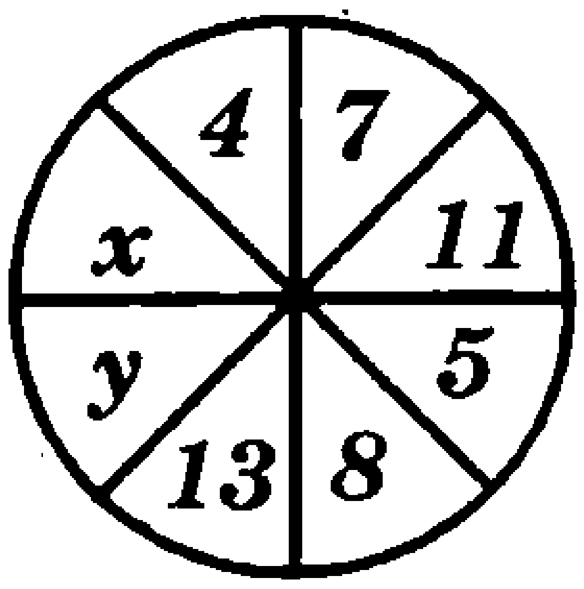
* En cada fila el 2° término es la semisuma de los tres restantes de la misma . Así:

$$2=\frac{1+2+1}{2} \quad 4=\frac{6+1+1}{2} \quad ?=\frac{5+3+2}{2}=5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Determine el valor de $x + y$



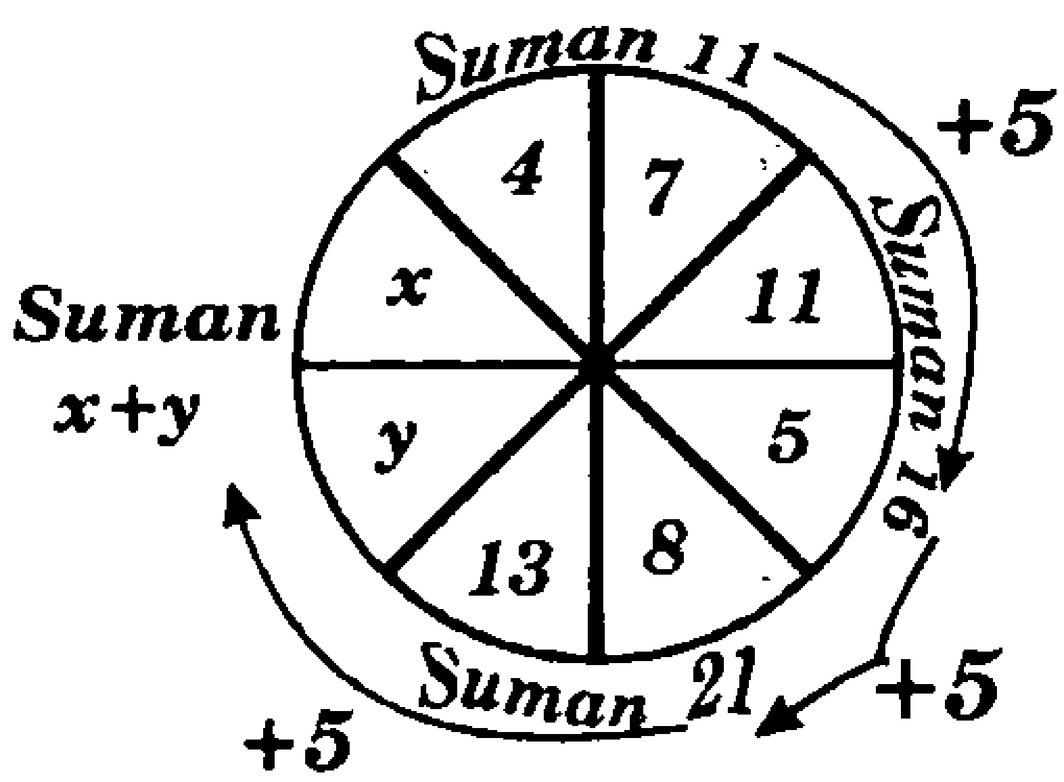
A) 17 B) 18 C) 20 D) 24 E) 26

RESOLUCIÓN :

*Se pide determinar el valor de $x + y$

* En este tipo de problemas, debemos hallar un único patrón de formación de consistencia lógica, que verifique con cada uno (o en grupos) de los datos brindados, y aplicar lo obtenido para hallar el valor que completa adecuadamente la distribución.

*Analizando lo dado :

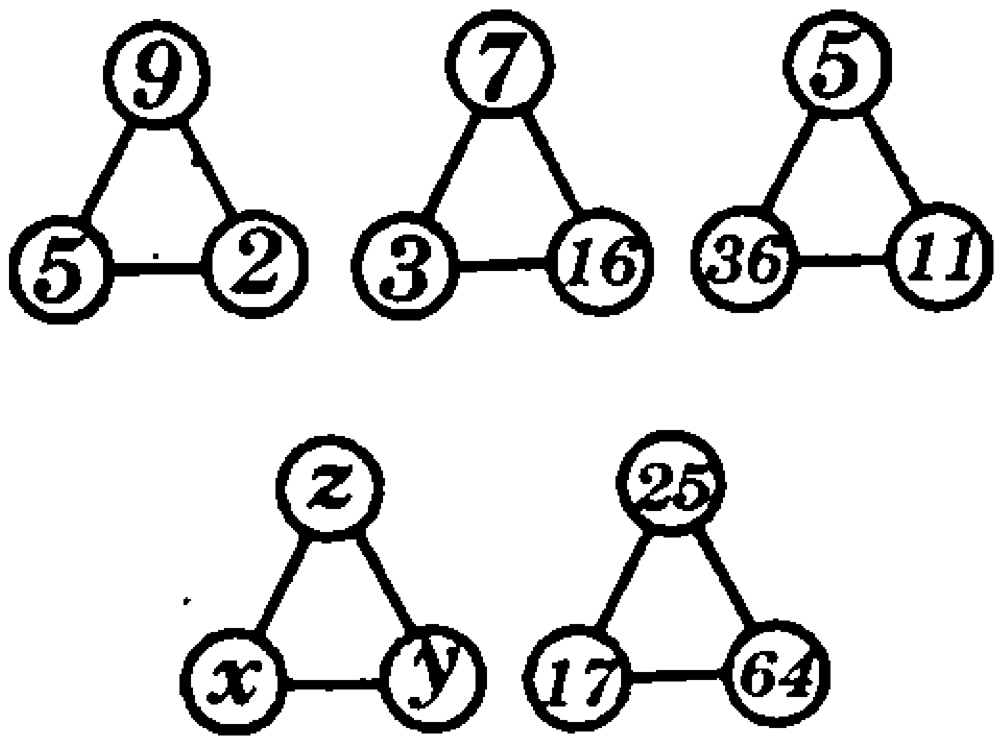


*Del gráfico se deduce que : $x+y=21+5=26$

RPTA : "E"

PROBLEMA 27 :

Considere las siguientes distribuciones:



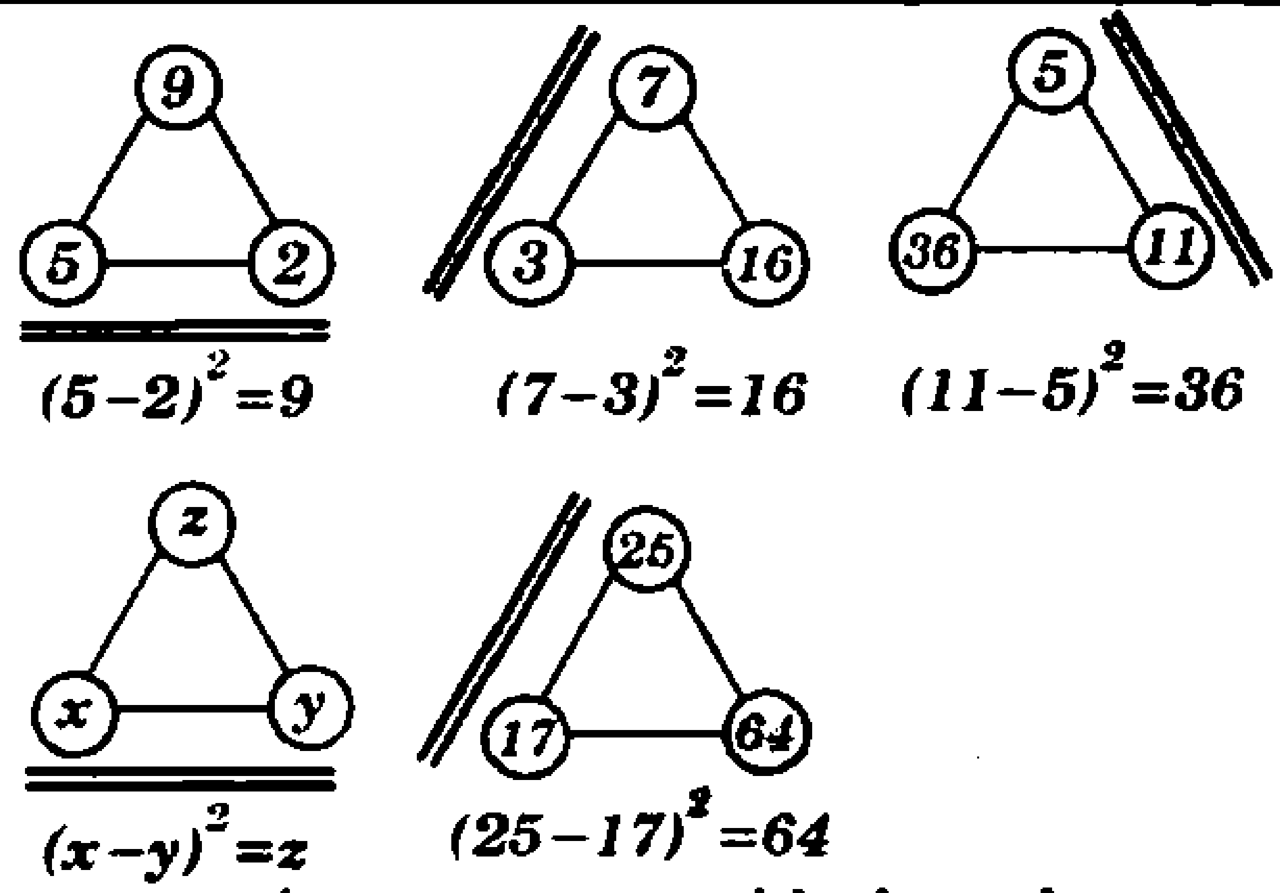
Halle: $E = z - x - 3y$

A) 17 B) 20 C) 27 D) 30 E) 38

RESOLUCIÓN:

*Se pide : $E = z - x - 3y$

* Se deduce que en cada distribución uno de los números es resultado de ciertas operaciones entre los otros dos números.



* Tomamos números en sentido horario :

$5;\ 7;\ 11;\ x;\ 25 \Rightarrow x = 17$ (+2, +4, +6, +8)

$2;\ 3;\ 5;\ y;\ 17 \Rightarrow y = 9$ (+1, +2, +4, +8)

Como $(x - y)^2 = z \Rightarrow z = 8^2 = 64$

*Finalmente lo pedido :

$$E = 64 - 17 - 3(9) = 20$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28 :

Escriba la letra que falta :

E H K
H L O
L P ?

A) O B) Q C) R D) U E) X

RESOLUCIÓN :

* Saltar **2; 3** y **4** letras en cada fila respectivamente:

E (FG) H (IJ) K
H (IJK) L (MNÑ) O
L (MNÑO) P (QRST) U=?

RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

Escribe las letras que faltan :

A) P y Q
B) K y L
C) P y R
D) H y K
E) P y M

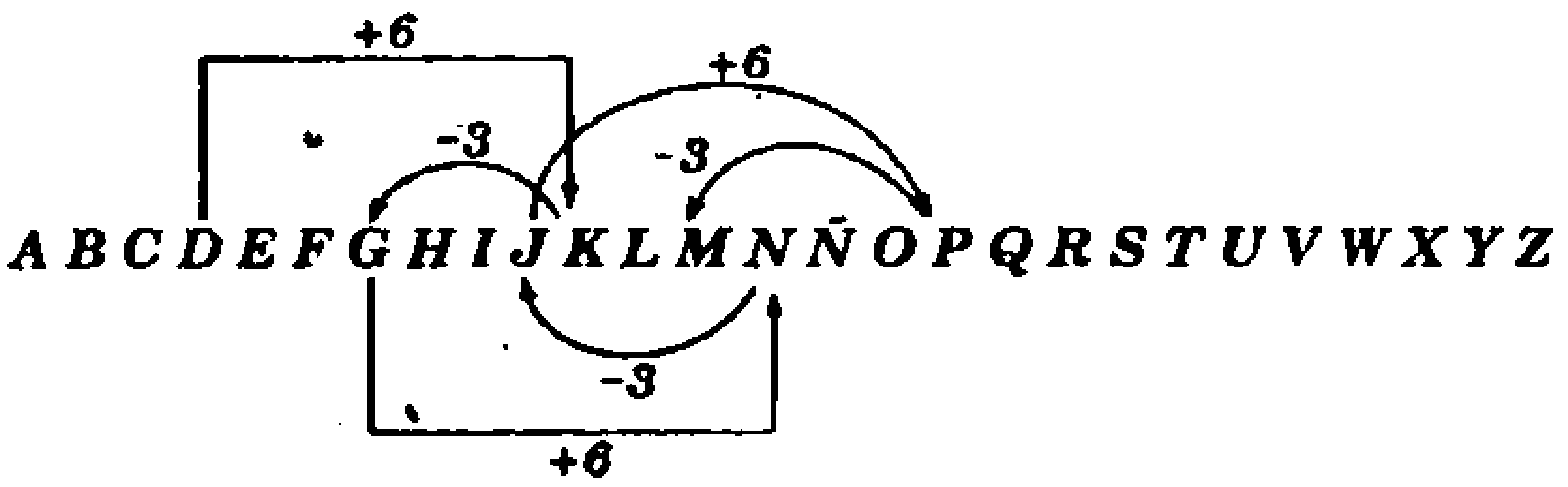
D K G
G N J
J ? ?

RESOLUCIÓN :

* Las letras de la **2da** . columna aumentan en **6** espacios a partir de las letras de la **1ra** . columna y las letras de la **3ra** . columna resultan de disminuir en **3** espacios a partir de las letras de la **2da**. columna,

así:

D	K	G
G	N	J
J	(P)	(M)
	?	



RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

¿Qué palabra falta en la analogía literal?

RIFLE (RISA) RASO

CABOS ( ) AMEN

A)MECA B)MESA C)CANES D)CAEM E)CENA

RESOLUCIÓN :

* No debemos relacionar ios significados de las palabras . Este tipo de ejercicios , trata de medir su habilidad con las letras . La palabra que falta en la segunda fila y que está dentro del paréntesis , debe tener cuatro letras, igual que su homóloga : ***RISA*** , que ocupa la misma posición . Sus letras deben ser aquellas que pertenecen a las palabras extremas (***CABOS*** y ***AMEN***) y que estén ocupando la misma ubicación que las letras de ***RISA*** , que han sido extraídas de los términos laterales (***RIFLE*** y ***RASO***).

RIFLE (RISA) RASO

CABOS (CAEM) AMEN

¿ Entendió verdad ? El resultado es ***CAEM*** , siglas del Centro de Altos Estudios Militares

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Señale la alternativa que contiene el valor de "*x*", teniendo en cuenta el siguiente cuadro :

3	6	9
15	210	225
11	*x*	121

A) 119 B) 111 C) 115 D) 110 E) 117

RESOLUCIÓN :

3 +	6 =	9
15 +	210 =	225
11 +	*x* =	121

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

Determinar el número que falta :

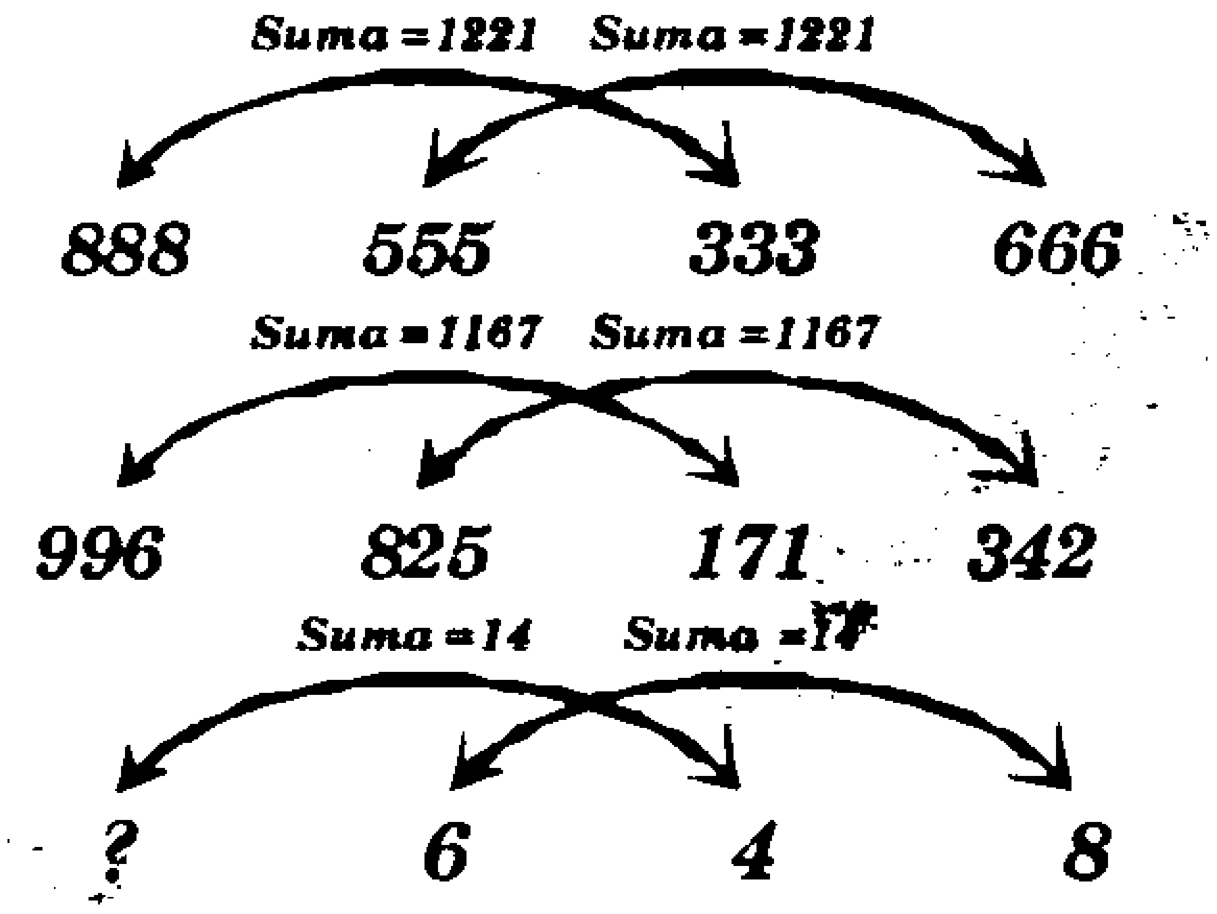
888 555 333 666

996 825 171 342

? 6 4 8

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :



?=10

RPTA : "E"

PROBLEMA 33 :

Determinar el número que falta :

3(9)3
2(4)2
5(7)2
3 ( ) 4

A) 12 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

RESOLUCIÓN :

* La regla que se debe encontrar : ***SUMA DE CIFRAS***

$3^3=27 \longrightarrow 2+7=9 \quad 2^2=4 \longrightarrow 4$

$5^2=25 \longrightarrow 2+5=7 \quad 3^4=81 \longrightarrow 8+1=9$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Completa la tabla siguiente :

916	458	17
524	262	10
392	196	

A) 15 B) 16 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN :

÷2 ; Suma de cifras

916	458	17	17 = 4 + 5 + 8
524	262	10	10 = 2 + 6 + 2
392	196	¿	?=1+ 9+6 =16?

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 :

Indique la alternativa que completa el cuadro siguiente.

1/4	1/2	1/8	1/24	3
2/3	1/2	1/3	2/3	1/2
6	x	48	y	6

A) 6 ; 8   B) 6 ; 6   C) 5 ; 8   D) 7 ; 9   E) 8 ; 8

RESOLUCIÓN :

* Del cuadro tenemos :

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=3$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

$$6\times x=48=y\times 6$$

$x \to 8$, $y \to 8$

RPTA : "E"

PROBLEMA 36 :

Los números consignados en los tres cuadros, cumplen una misma relación . identifique dicha relación y determine el valor de $A + B$.

2		18
	22	
12		7

8		20
	18	
17		11

A		12
	B	
8		9

A) 9   B) 10   C) 11   D) 12   E) 14

RESOLUCIÓN :

2		18
	22	
13		7

$2+22+7=13+18$

8		20
	18	
17		11

$8+18+11=17+20$

A		12
	B	
8		9

$A+B+9=8+12 \Rightarrow A+B=11$

RPTA : "C"

PROBLEMA 37 :

Los números consignados en los tres cuadros cumplen una misma relación .

Determine: $x+y+z$

3	1	10
8	7	7

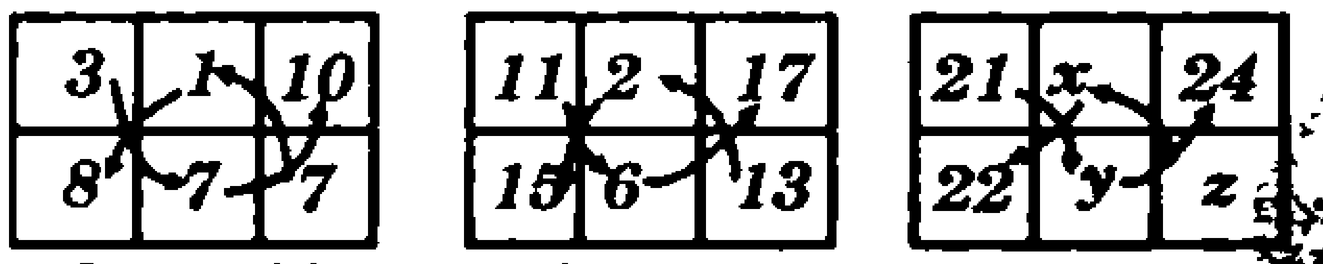
11	2	17
15	6	13

21	x	24
22	y	z

A) 16   B) 18   C) 20   D) 24   E) 25

RESOLUCIÓN :

* Analizando detalladamente se obtendrá :



$3+7=10$ $11+6=17$ $21+y=24 \Rightarrow y=3$

$7+1=8$ $13+2=15$ $z+x=22$

$x+y+z=22+3=25$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Una sucesión es un ____________ de (números, letras, figuras); tales que cada uno ocupa un lugar establecido de modo que se puede distinguir el primero, el segundo, el tercero y así sucesivamente.

02 Relacione correctamente:

A) Sucesión Gráfica ( ) Factor
B) Sucesión Aritmética ( ) Factor y Sumando
c) Sucesión Geométrica ( ) Letras
d) Sucesión Combinada ( ) Figuras
e) Sucesión Literal ( ) Sumando

03 Hallar el término que sigue en cada sucesión numérica.

- 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; ....
- 6 ; 10 ; 14 ; 18, ...
- 1 ; 3 ; 6 ; 18 ; ....
- 1 ; 2 ; 6 ; 12 ; ....

04 Hallar el término que sigue en cada sucesión literal.

- B ; D ; F ; H ; ....
- B ; E ; H ; K, ...
- C ; E ; H ; L ; ....
- D ; C ; S ; O, ...

05 Hallar los números que siguen:

- 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 13 ; ....
- 2 ; 7 ; 13 ; 21 ; 32 ; ....

A) 18 y 45   B) 19 y 46   C) 17 y 46
D) 18 y 46   E) 18 y 47

06 Hallar los números que siguen:

- 2 ; 6 ; 12 ; 36 ; 72 ; ....
- 54 ; 18 ; 36 ; 12 ; 24 ....

A) 144 y 12   B) 216 y 8   C) 144 y 2
D) 144 y 8   E) 216 y 12

07 ¿Cuál sigue?

1 ; 3 ; 8 ; 18 ; 31 ; 57 ; ....

A) 70 B) 85 C) 86 D) 109 E) 87

08 Hallar el valor de "x" e "y" en: *2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 8 ; 7 ; 16 ;12 ; x ; y*

A) 32 y 17 B) 30 y 18 C) 32 y 18
D) 18 y 19 E) 32 y 19

09 Hallar las letras que siguen:

C ; F ; H ; K ; M ; ....
C ; E ; I ; Ñ ; ....

A) P y V B) O y V C) P y W
D) O y V E) P y V

10 Hallar las letras que siguen:

L ; M ; M ; J ; ....
T ; S ; N ; D ; ....

A) S y V B) Q y V C) V y Q
D) D y Q E) S y Q

11 ¿Cuál sigue?

Z ; V ; S ; O ; M ; ....

A) N B) K C) H D) I E) J

12 Hallar el par de letras que sigue en:

CF ; FH ; KL ; NN ; RQ ; ....

A) US B) UR C) SR
D) ST E) UT

13 Hallar el par que sigue en:

(1,a) ; (1,c) ; (2,e) ; (6,h) ; ....

A) (18,h) B) (24,h) C) (24,h)
D) C y E E) (24, l)

14 ¿Cuál sigue?

1 ; 3 ; 7 ; 19 ; 33 ; ....

A) 74 B) 75 C) 76 D) 77 E) 78

15 Hallar el valor de "x" e "y" en: *3 ; 2 ; 9 ; 4 ; 27 ; 8 ; 81 ; x ; y*

A) 81 y 18 B) 243 y 22 C) 162 y 22
D) 243 y 20 E) 162 y 20

16 Hallar las letras que siguen:

• B ; D ; H ; J ; N ; ....
• B ; E ; J ; P ; ....

A) Q y X B) X y P C) P y X
D) P y Y E) Q y Y

17 Hallar las letras que siguen:

• E ; F ; M ; A ; ....
• U ; T ; C ; S ; ....

A) N y M B) T y M C) M y N
D) M y O E) T y N

18 ¿Qué letra sigue?

Z ; W ; S ; P ; M ; ....

A) J B) I C) L D) K E) H

19 Hallar el par de letras que sigue:

(B,C) ; (E, E) ; (J, I) ; (P,Ñ) ; ....

A) (X, W) B) (Y, W) C) (Z, V)
D) (X, V) E) (Y, V)

20 Hallar el par de elementos que sigue en:

(1, a) ; (4, d) ; (12, h) ; (24, k) ; ...

A) (18, H) B) (24, H) C) (24, L)
D) (24, Ñ) E) (18, L)

21 Qué término continua:

2; 6; 18; 54; ...

A)203 B)408 C)108 D)84 E)162

22 Hallar el término que continua: *1; 1; 3; 15; 105; ...*

A)905 B)109 C)945 D)545 E)645

23 Qué término sigue en:

8; 10; 13; 17; 22; ...

A)28 B)27 C)32 D)30 E)40

24 Qué letra sigue:

D; O; S; C; ...

A)Q B)C C)U D)T E)S

25 Hallar las dos letras que continua:

C ; A ; D ; B ; E ; C ; ..... ; ......

A)E y C B)G y E C)F y D
D)A y C E)F y I

26 Hallar el número que continúa en:

7 ; 10 ; 17 ; 30 ; 51 ; ...

A)73 B)82 C)83 D)77 E)94

27 Hallar los dos números que continúan y dar como respuesta la suma de dichos números.

5 ; 4 ; 12 ; 8 ; 19 ; 16 ; ..., ...

A)58 B)60 C)54 D)48 E)56

28 Hallar *x*.

1; 2; 8; 8; 64; 32; x

A)520 B)512 C)464 D)428 E)412

29 ¿Qué número sigue en?

2; 4; 12; 48; ...

A)120 B)96 C)144 D)240 E)248

30 Hallar el sexto número pentagonal.

A)78 B)64 C)72 D)70 E)91

PRÁCTICA DE EJERCICIOS N°2

01 Una analogía numérica entre 2 números es una ________ que existe entre ellos mediante ____________ siguiendo una secuencia lógica que va a permitir obtener un resultado.

02 El criterio para resolver las analogías no es único.

(V) (F)

03 Hallar "*x*" en:

6	*(24)*	*4*
8	*(56)*	*7*
9	*(x)*	*11*

A) 20 B) 21 C) 99 D) 100 E) 98

04 ¿Qué número falta?

4	*5*	*20*
7	*6*	*42*
9	*8*	*( )*

A) 70 B) 72 C) 17 D) 32 E) 18

05 Hallar "*x*" en:

5	*(70)*	*7*
7	*(42)*	*3*
9	*(x)*	*4*

A) 36 B) 13 C) 72 D) 14 E) 74

06 Hallar "*x*" en:

8	(24)	9
6	(8)	4
10	(x)	6

A) 60 B) 20 C) 16 D) 24 E) 18

07 Hallar "*x*" en:

43	(23)	79
124	(19)	516
849	(x)	723

A) 30 B) 33 C) 36
D) 42 E) 126

08 Hallar "*x*" en:

4	(144)	3
5	(400)	4
6	(x)	3

A) 322 B) 324 C) 8 D) 9 E) 364

09 ¿Qué número falta?

2	9	7	19
4	8	9	21
3	5	6	( )

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

10 ¿Qué número falta?

2	3	3	9
8	3	4	( )
4	5	7	27

A) 26 B) 28 C) 30 D) 15 E) 20

11 ¿Qué número falta?

9	6	8	4
3	8	12	7
27	48	( )	28

A) 20 B) 22 C) 24 D) 94 E) 96

12 ¿Qué número falta?

6	7	8	5
7	9	11	4
39	( )	85	17

A) 60 B) 16 C) 66 D) 63 E) 18

13 Si: $7 \blacktriangle 9 = 65$

$8 \blacktriangle 7 = 58$

Hallar: $4 \blacktriangle 9$

A) 59 B) 13 C) 95 D) 19 E) 58

14 Si: $13 \triangle 25 = 83$

$47 \triangle 32 = 97$

Hallar: $36 \triangle 23$

A) 59 B) 13 C) 95 D) 19 E) 58

15 Si: $53 \blacktriangle 24 = 26$

$32 \blacktriangle 42 = 14$

$47 \blacktriangle 26 = 38$

Calcular: $73 \blacktriangle 48$

A) 121 B) 25 C) 34 D) 68 E) 136

16 Se llama *DISTRIBUCIONES NUMÉRICAS*, a la __________ de números en __________ tales que guarden relaciones __________ para obtener un valor llamado __________ de la *DISTRIBUCIÓN.*

17 Las *DISTRIBUCIONES* son como las *ANALOGÍAS* pero los números están dispuestos en figuras.

(V) (F)

– En las distribuciones los gráficos pueden ser de cualquier forman.

(V) (F)

– Se necesita un mínimo de 2 *DISTRIBUCIONES* para hallar el valor incógnita en la 3[ERA] *DISTRIBICUÓN*.

(V) (F)

18 Hallar «*x*» en:

3	6
12	9

6	x
24	18

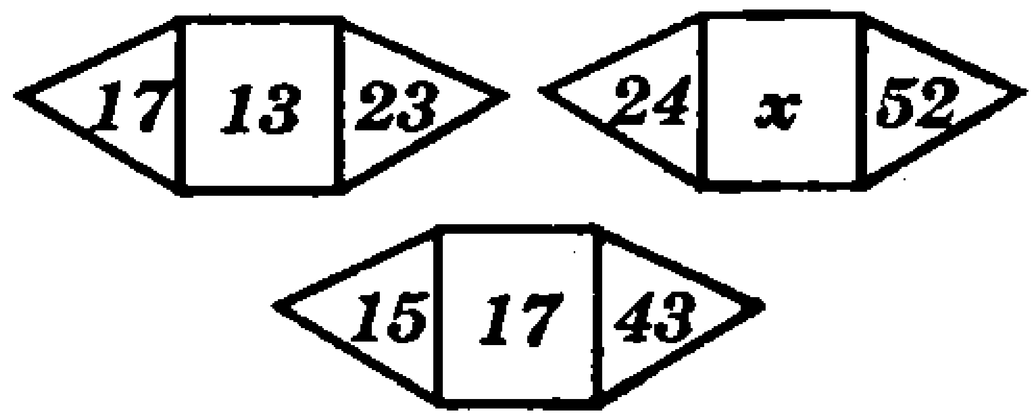
A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 14

19 Hallar «*x*» en:

19	25	24
7	8	x
12	17	13

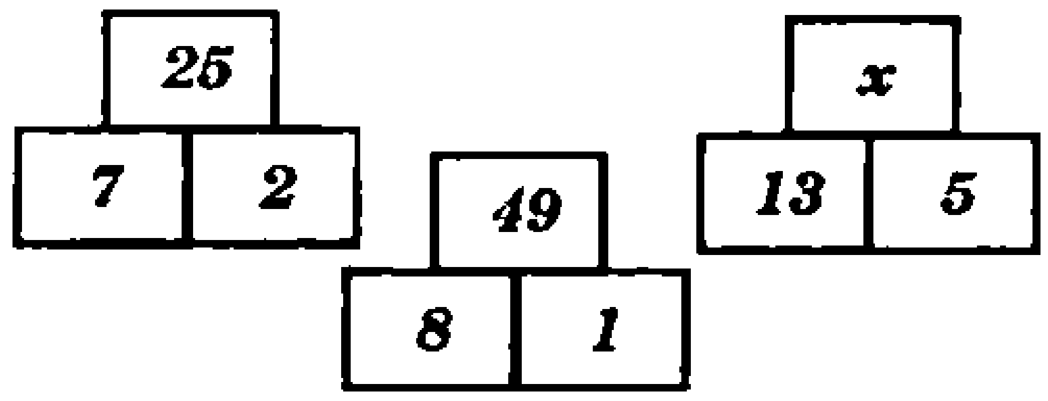
A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

20 Hallar «*x*» en:



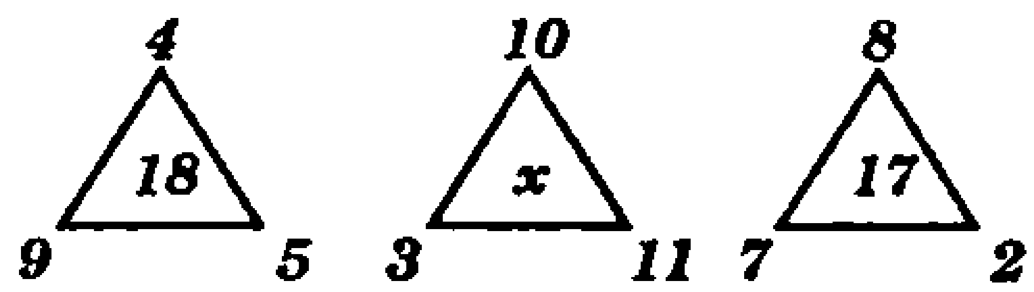
A) 21 B) 20 C) 19 D) 18 E) 17

21 Hallar en «*x*»



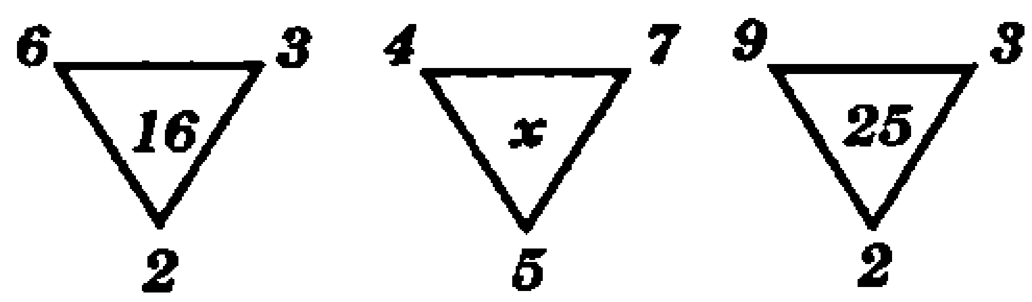
A) 65 B) 18 C) 64 D) 36 E) 81

22 Hallar «*x*» en:



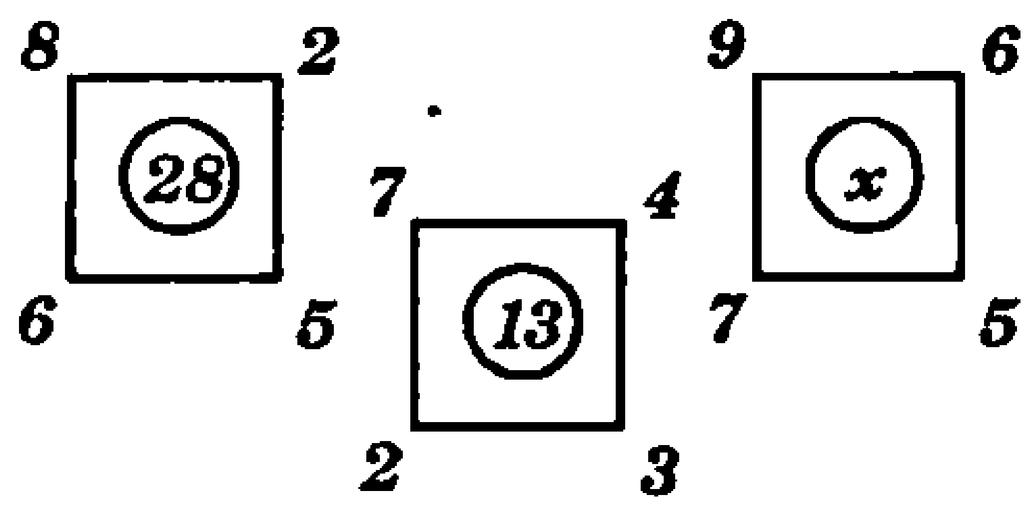
A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

23 Hallar «*x*» en:



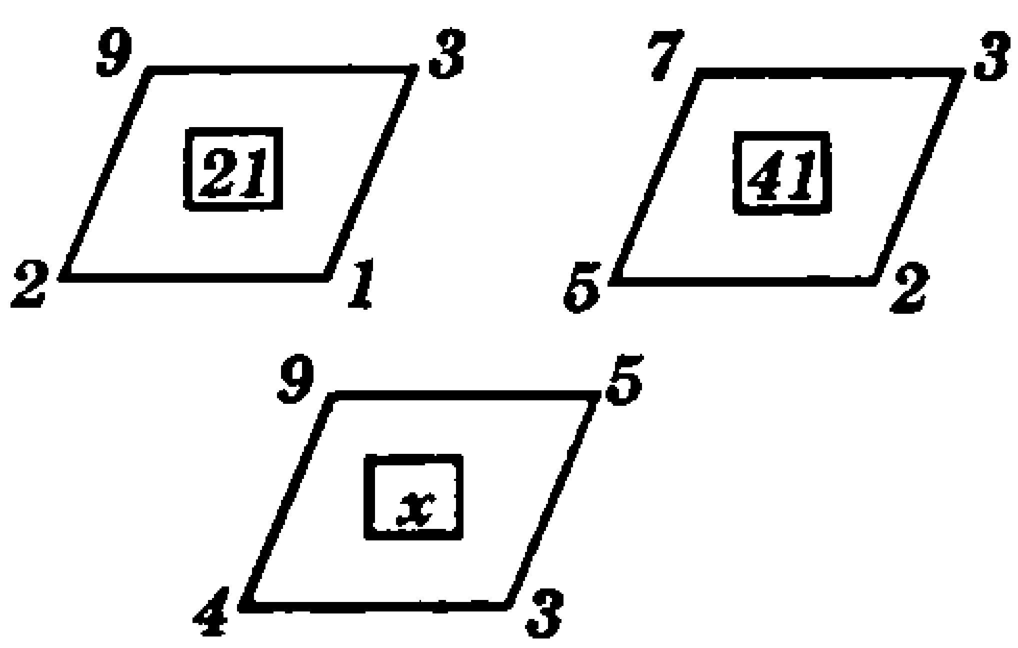
A) 49 B) 64 C) 23 D) 24 E) 33

24



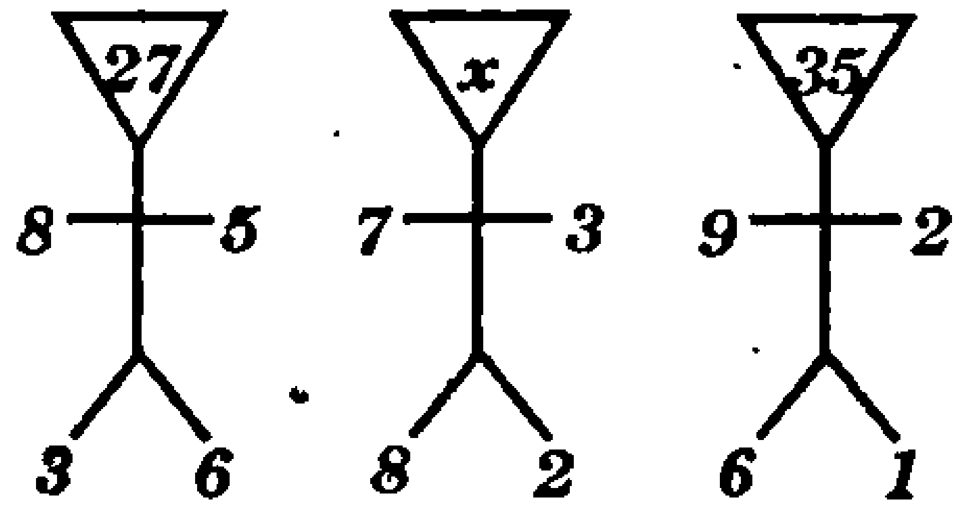
A) 12 B) 23 C) 3 D) 4 E) 87

25 Hallar «*x*» en:



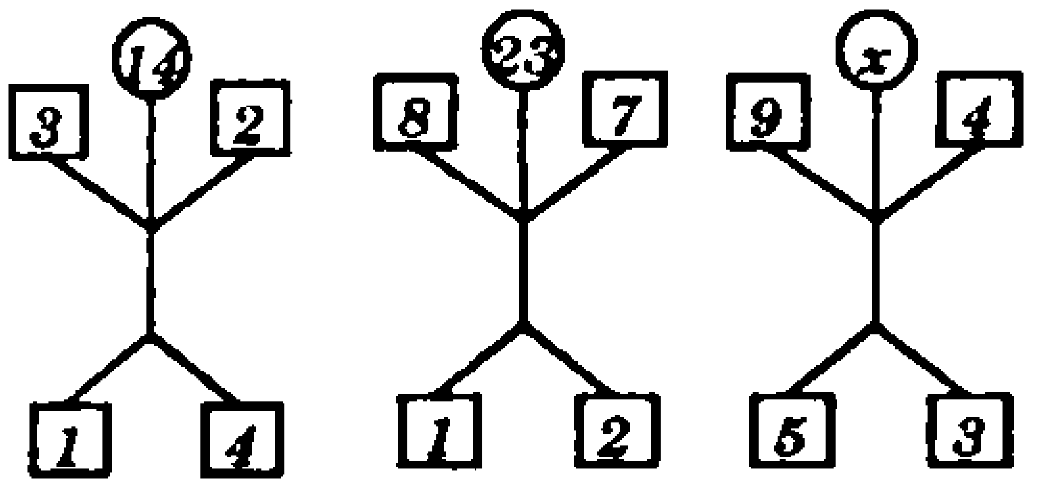
A) 51 B) 61 C) 47
D) 7 E) 57

26 Hallar «x»



A) 31 B) 34 C) 37 D) 40 E) 43

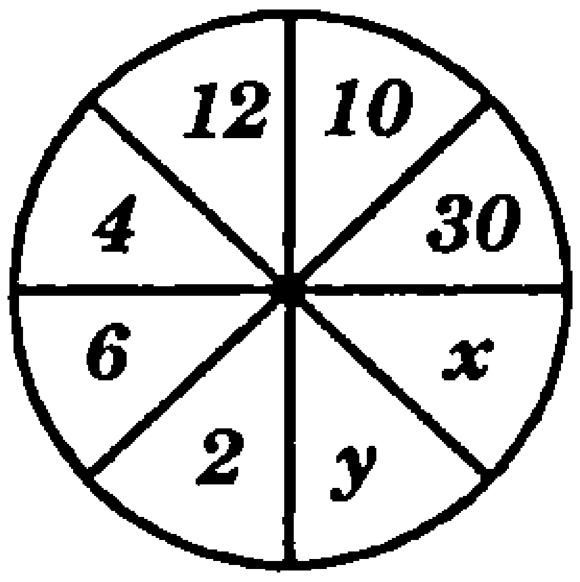
27 Hallar «x» en:



A) 17 B) 27 C) 37 D) 47 E) 57

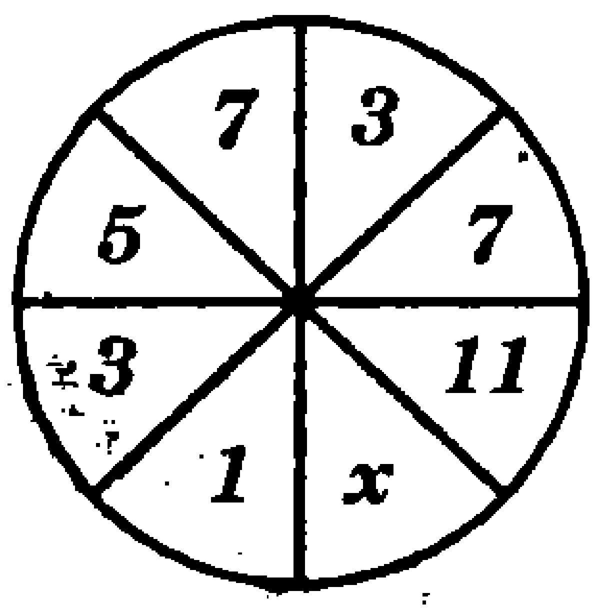
28 Hallar «x + y» en:

A) 111
B) 112
C) 113
D) 114
E) 115

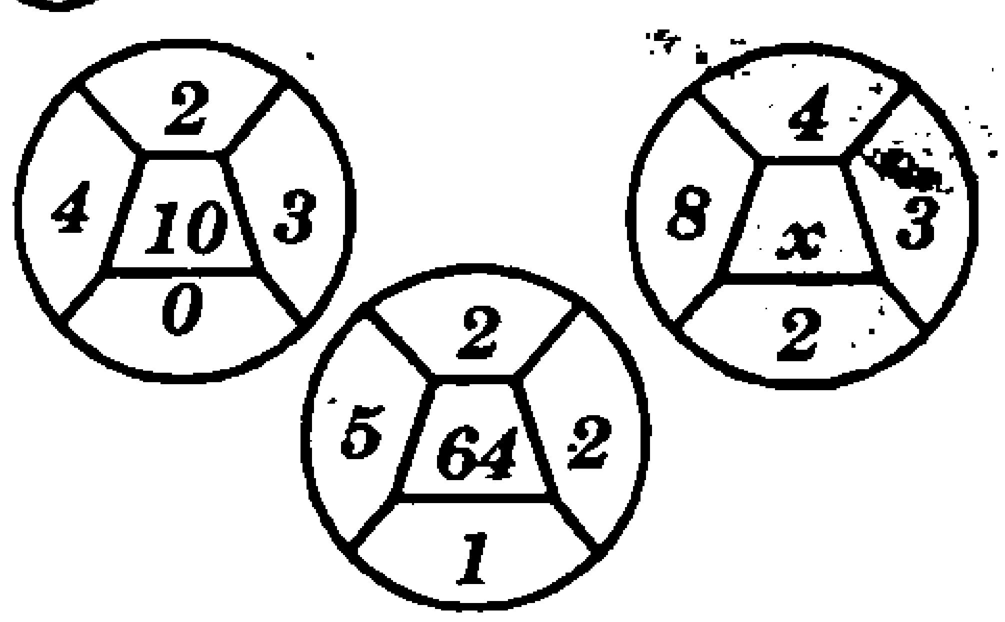


29 Hallar «x» en:

A) 13
B) 15
C) 17
D) 19
E) 21



30 Hallar «x» en:



A) 256 B) 64 C) 49 D) 81 E) 121

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

En cada una de las siguientes secuencias , determinar el número o letra que sigue .

01 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ....

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

02 2 ; 4 ; 8 ; 16 ;........................

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 36

03 5 ; 12 ; 19 ; 26 ;........................

A) 33 B) 36 C) 35 D) 31 E) 29

04 4 ; 6; 12; 14; 28 ; 30 ;...

A) 32 B) 36 C) 60 D) 48 E) 29

05 1 ; 3 ; 6 ; 18 ; 21 ;....................

A) 51 B) 60 C) 24 D) 61 E) 63

06 D ; F ; H ; J ; ....

A) K B) L C) M D) N E) Ñ

07 A ; D ; G ; J ; ....

A) M B) N C) Ñ D) L E) P

08 L ; M ; M ; J ; ....

A) P B) Q C) R D) V E) S

09 Q ; N ;J ; F ; ....

A) AB) C C) B D) D E) E

10 A ; B ; D ; G ; K ;..................

A) N B) Ñ C) O D) P E) Q

11 Qué alternativa completa coherentemente la sucesión mostrada? 2; 10; 12; 16; 17; 18; 19; ....

A) 20 B) 22 C) 25
D) 100 E) 200

12 Determine el número que continúa la siguiente sucesión. 285714 ; 428 571 ; 571428; 714285; ....

A) 571 428 B) 857124 C) 714285
D) 857142 E) 851

13 ¿Qué número continúa en la siguiente sucesión? 7; 6; 3; 9; 5; 1; 6; ....

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

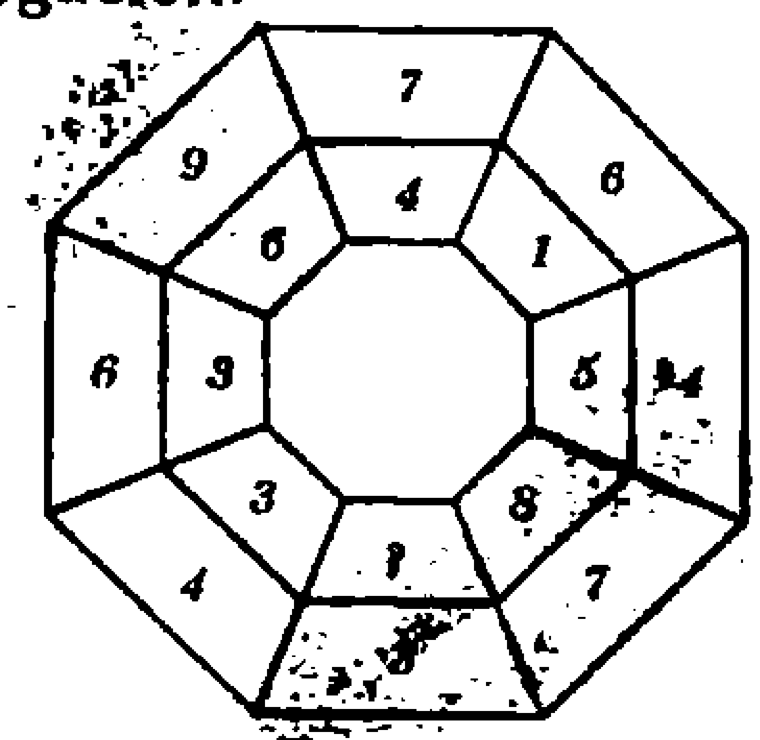
14 Indique la alternativa que continúa en la siguiente sucesión.

$$\frac{5}{2};\frac{5}{3};\frac{17}{12};\frac{13}{10};.......$$

A) $\frac{29}{22}$ B) $\frac{31}{24}$ C) $\frac{33}{26}$
D) $\frac{35}{28}$ E) $\frac{37}{30}$

15 ¿Qué número debe reemplazar al signo de interrogación?

A) 8
B) 9
C) 6
D) 2
E) 5



16 ¿Qué número completa coherentemente la secuencia mostrada?

1135; 1150; 1205; 1220; ...

A) 1235 B) 1255 C) 1275
D) 1245 E) 1265

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el valor de "x" en la siguiente analogía:

4	(11)	2
1	(7)	3
3	(9)	2
0	(x)	5

A) 1 B) 3 C) 9 D) 8 E) 6

02 Calcular el valor de "x" en la siguiente analogía:

12	(4)	25
23	(1)	51
14	(12)	89
35	(x)	67

A)5 B)18 C)10 D)13 E)8

03 Determinar el valor de "w" en la siguiente distribución:

6	2	3	4
3	6	5	2
16	10	13	w

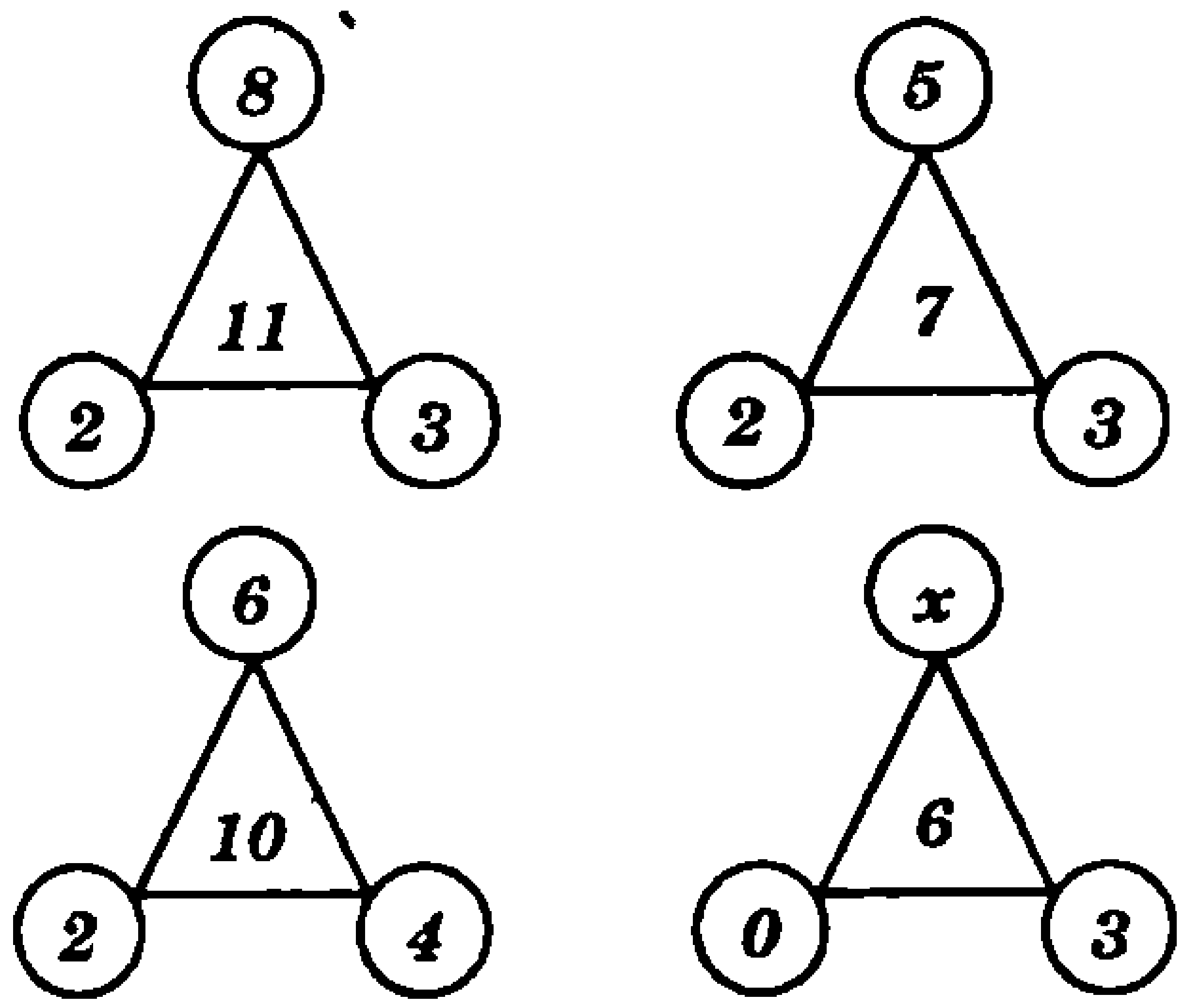
A) 1 B) 4 C) 8 D) 10 E) 6

04 Calcular el valor de "*x*" que toma en la siguiente distribución:

1	2	0	1
2	1	3	*x*
4	7	12	17

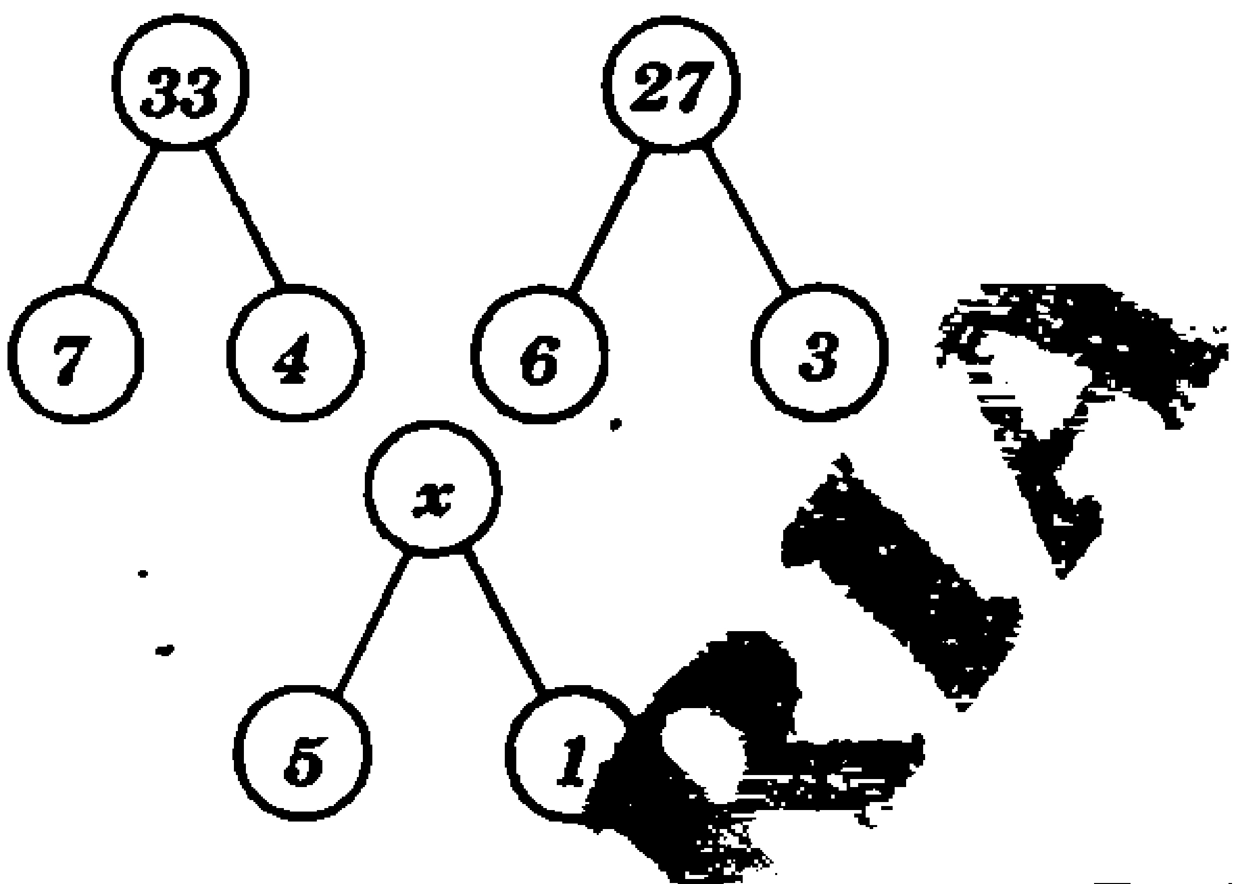
A) 0 B) 1 C) 3 D) 210 E) 6

05 Determinar el valor de "*x*" en la siguiente distribución:



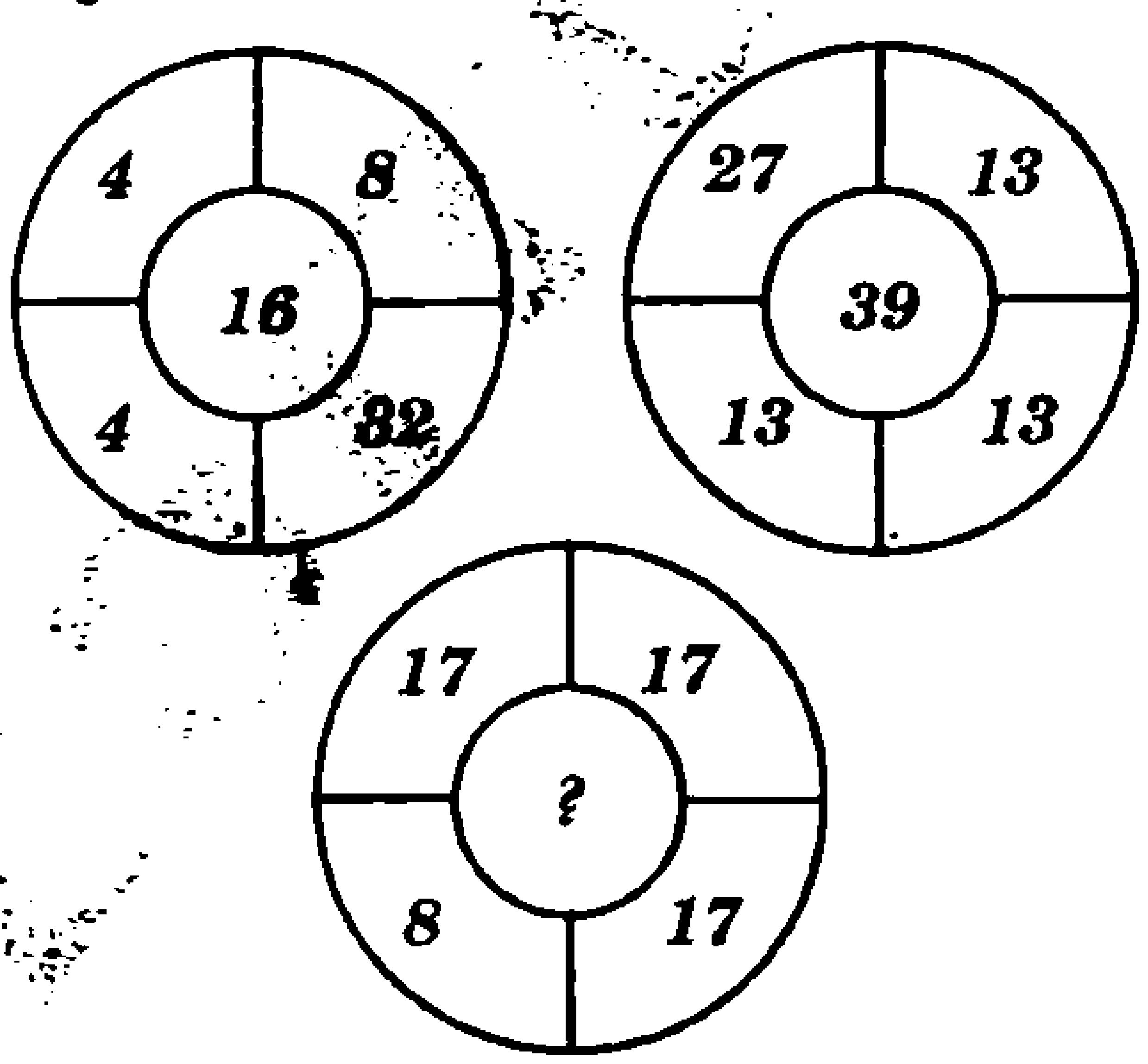
A) 3 B) 5 C) 9 D) 11 E) 15

06 Calcular el valor de "*x*" de la siguiente figura mostrada:



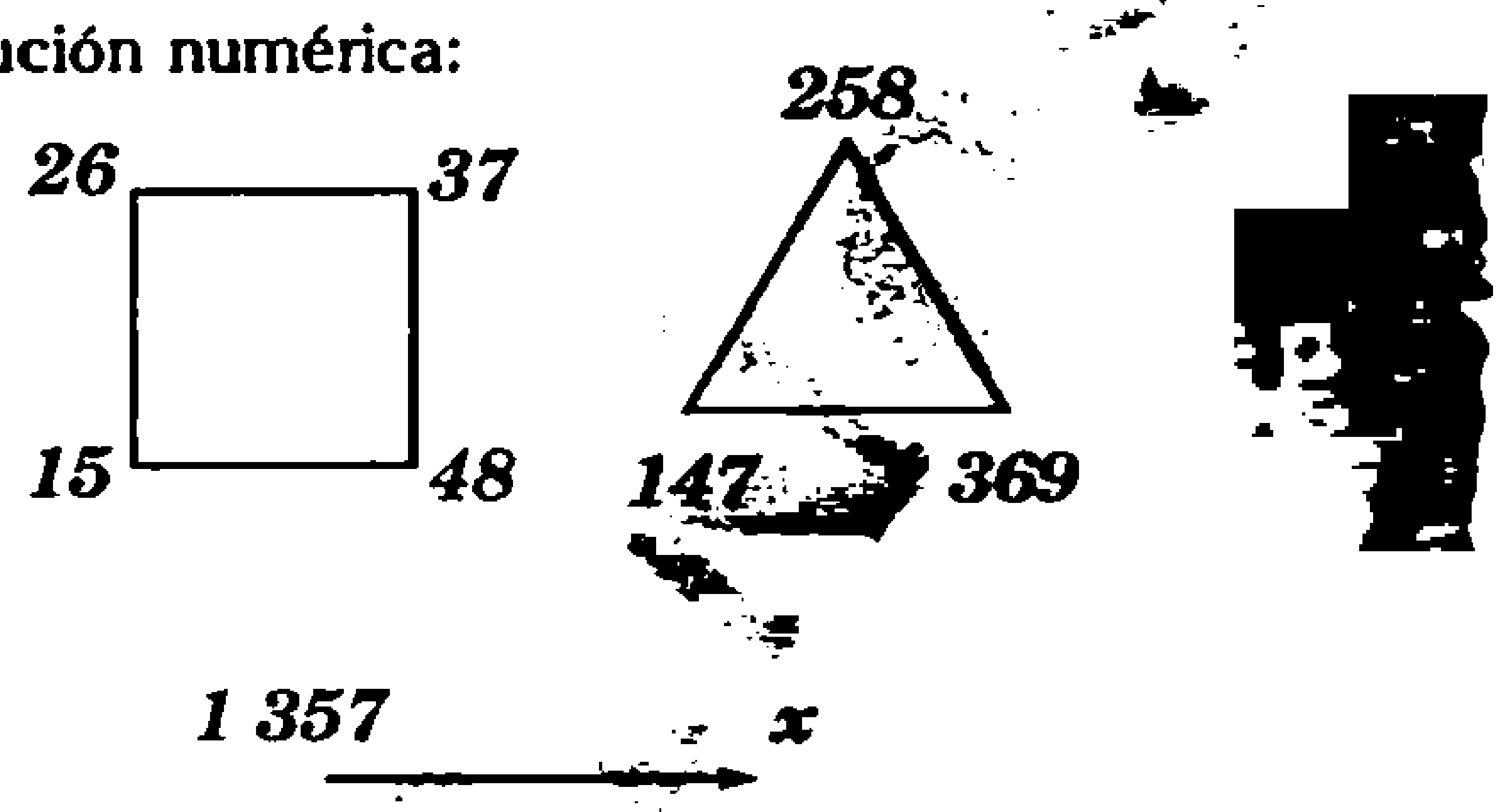
A) 12 B) 9 C) 24 D) 40 E) 19

07 ¿ Qué número falta?



A) 8 B) 16 C) 17 D) 34 E) 51

08 Calcular el valor de "*x*" en la siguiente distribución numérica:



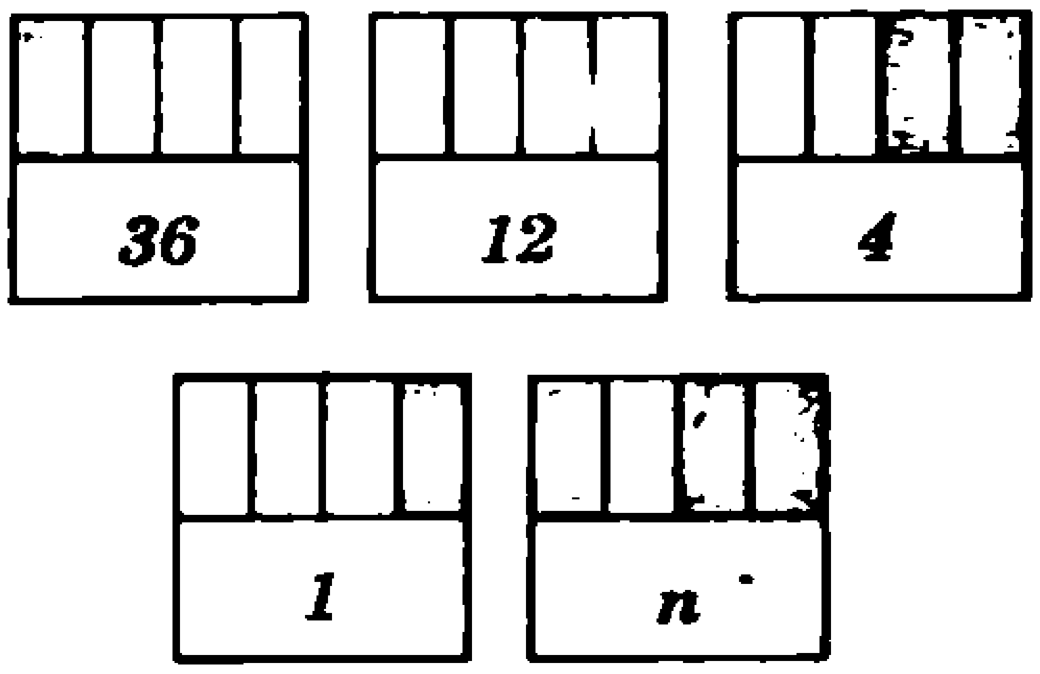
A) 3 845 B) 2 460 C) 1 359 D) 2 468 E) 3 579

09 Indique el número que continúa en:

2 8 5 6 7 1 9
2 9 5 6 8 1 9
3 0 5 6 9 1 9
3 1 5 7 0 1 9

A) 3 167 019 B) 3 257 219 C) 3 158 119
D) 3 258 119 E) 3 257 119

10 ¿Qué valor le corresponde a "*n*" en la siguiente secuencia gráfica?



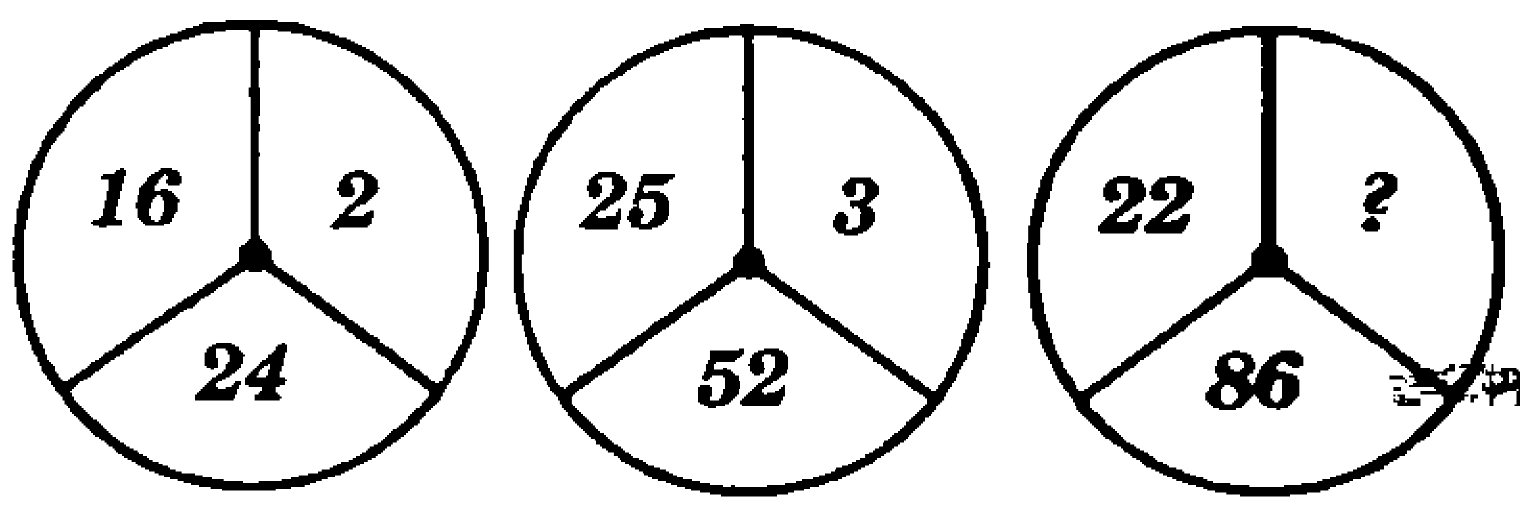
A) 35 B) 31 C) 32 D) 37 E) 38

11 ¿Qué número completa el esquema mostrado?

0	1	2	3
1	2	3	4
1	2	9	?

A) 36 B) 12 C) 81 D) 64 E) 56

12 ¿Qué número falta?



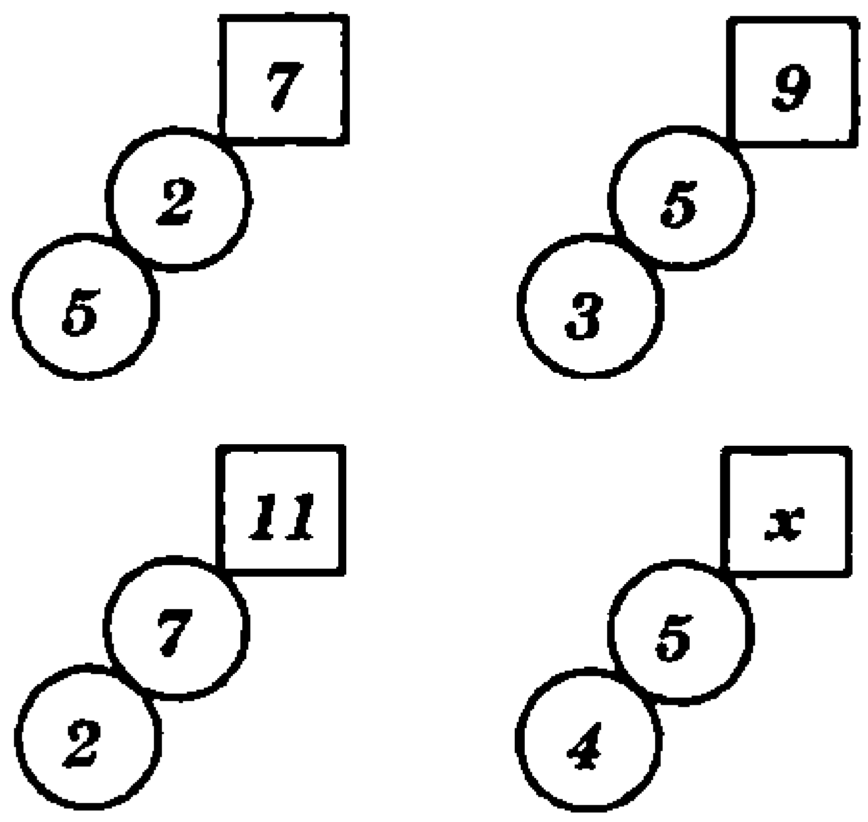
A) 5 B) 6 C) 8 D) 4 E) 7

13 En la siguiente distribución numérica, calcular el valor de: $x - y + z$.

1	x	4	7
8	16	32	y
0	64	z	192

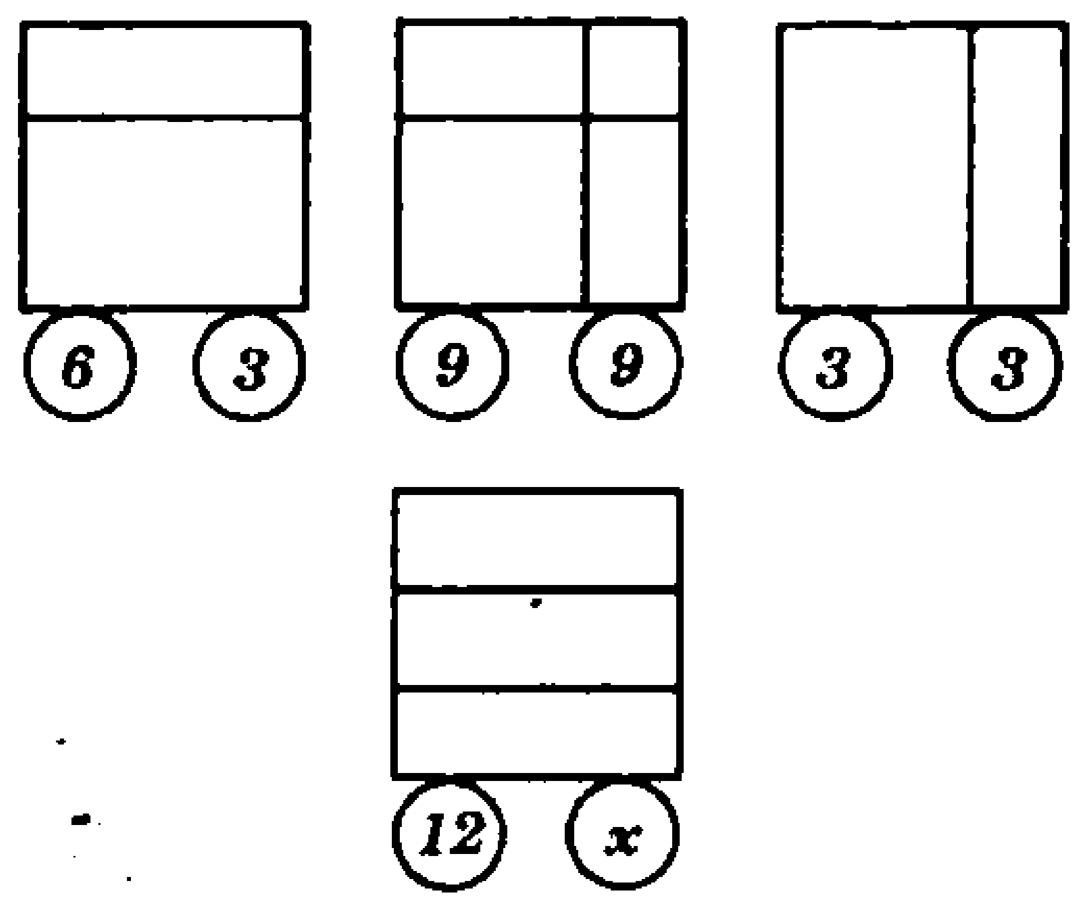
A) 64 B) 66 C) 68 D) 70 E) 72

14 Calcular el valor de "x" que completa la relación de números.



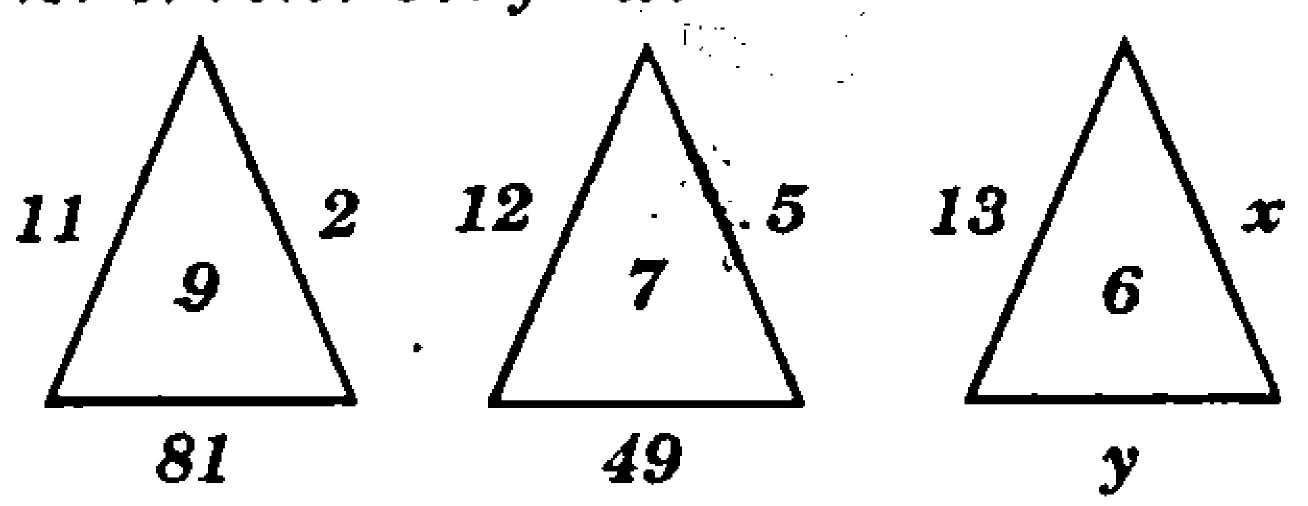
A) 13 B) 7 C) 15 D) 10 E) 9

15 Calcular el valor de "x" en la figura mostrada:



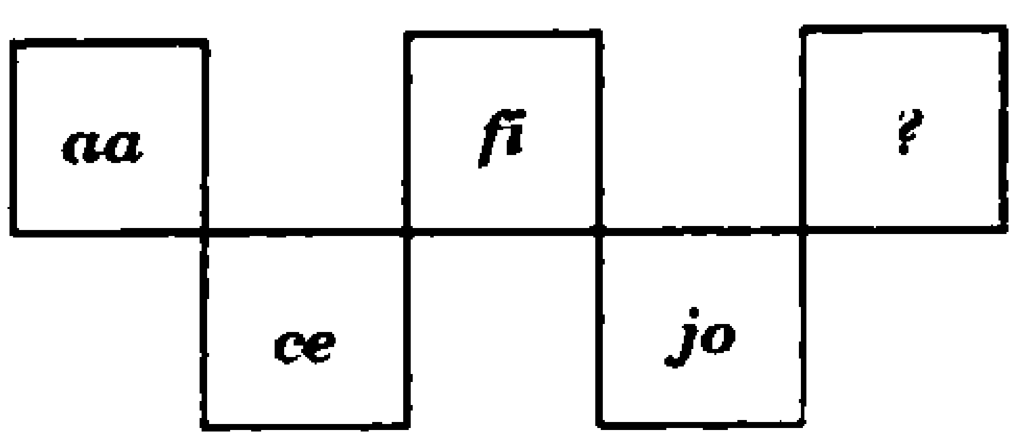
A) 18 B) 21 C) 9 D) 6 E) 15

16 En la siguiente distribución numérica, calcular el valor de: $y - x$.



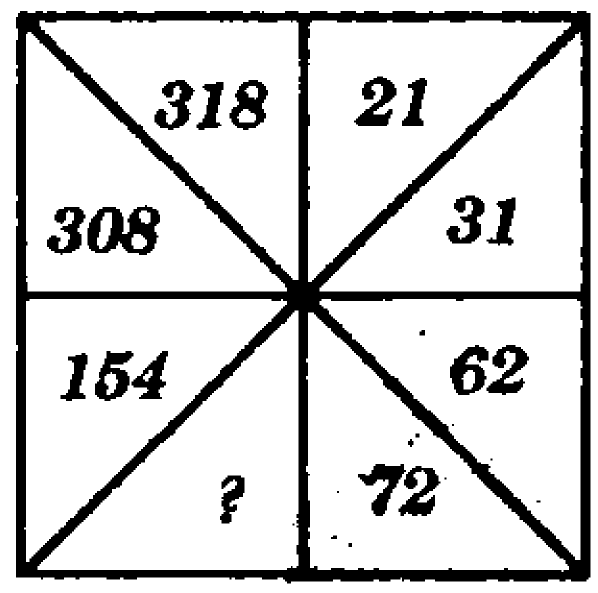
A) 28 B) 29 C) 30 D) 27 E) 26

17 Elija la alternativa que complete la siguiente distribución:



A) ov B) ñv C) ou D) ps E) ñu

18 Calcualar el número que complete la figura mostrada:



A) 66 B) 124 C) 98 D) 142 E) 144

19 Determinar el valor de $x+y$ en la distribución siguiente:

2	1	3	5	x
6	2	4	y	3
38	3	23	24	11

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

20 De la siguiente distribución triangular, calcular el valor de: $x+y$.

1

3 4

5 7 7

7 12 14 10

a b c d e

11 m x n y 16

A) 82 B) 83 C) 86 D) 85 E) 84

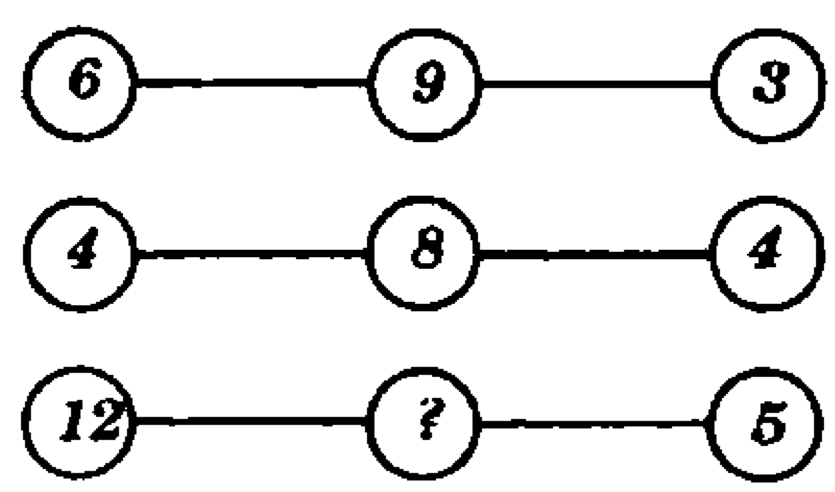
TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular el valor de "x" en:

4	5	9
9	9	36
16	x	25

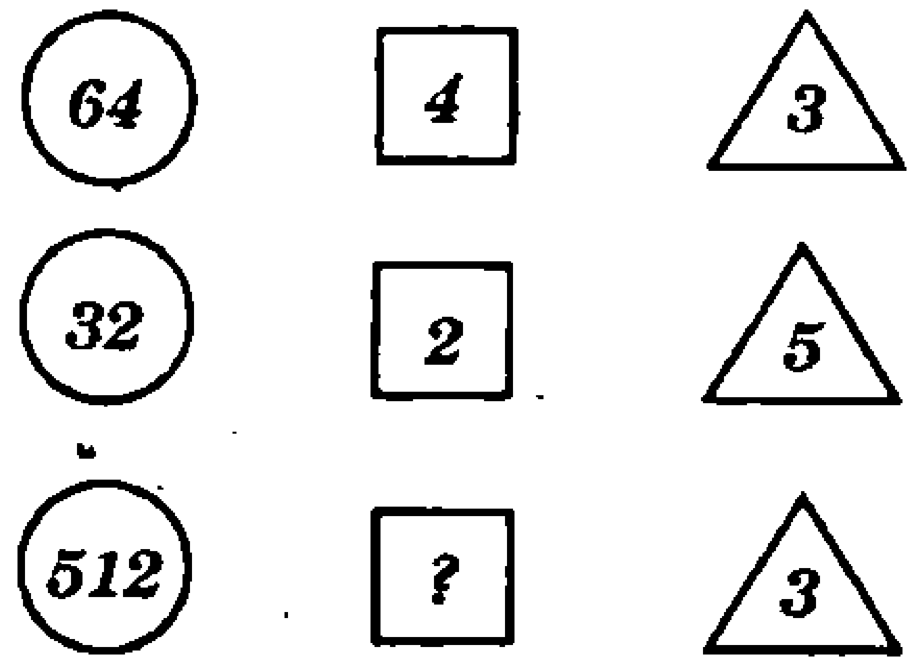
A) 9 B) 12 C) 13 D) 15 E) 18

02 Determinar el valor de ? en la distribución siguiente :



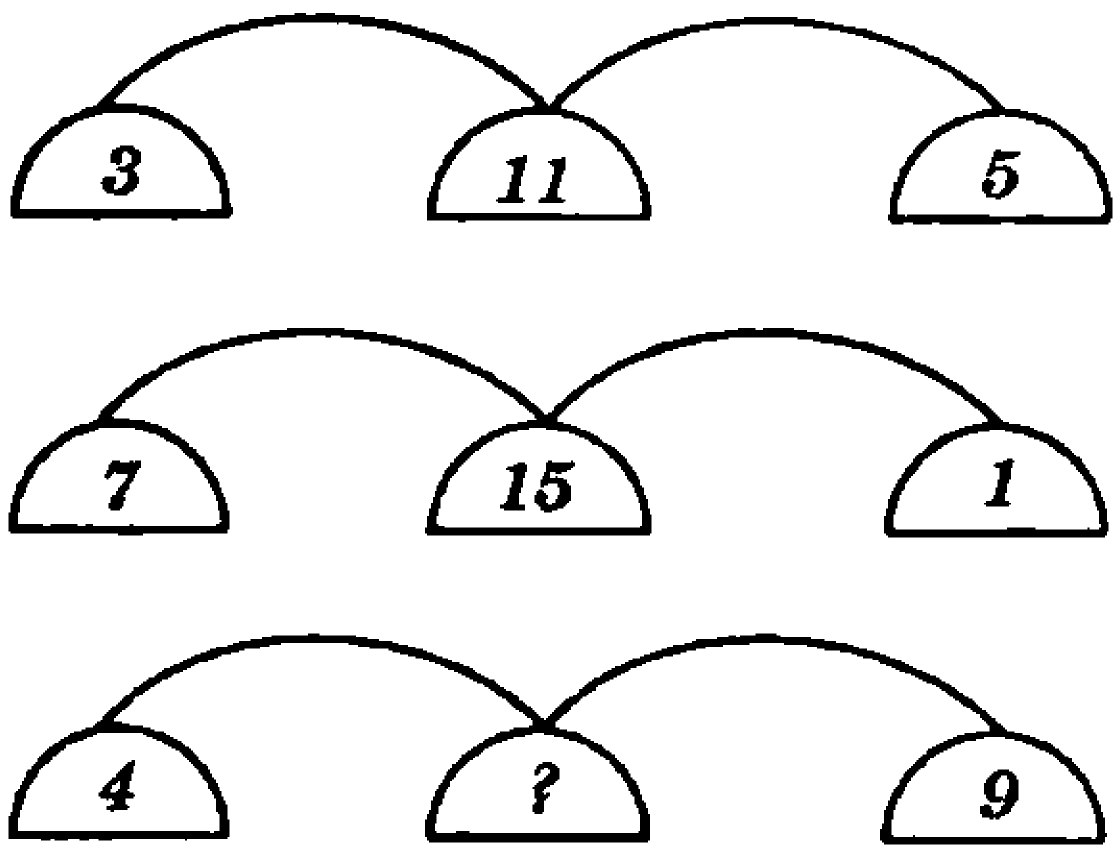
A) 1 B) 5 C) 30 D) 7 E) 91

03



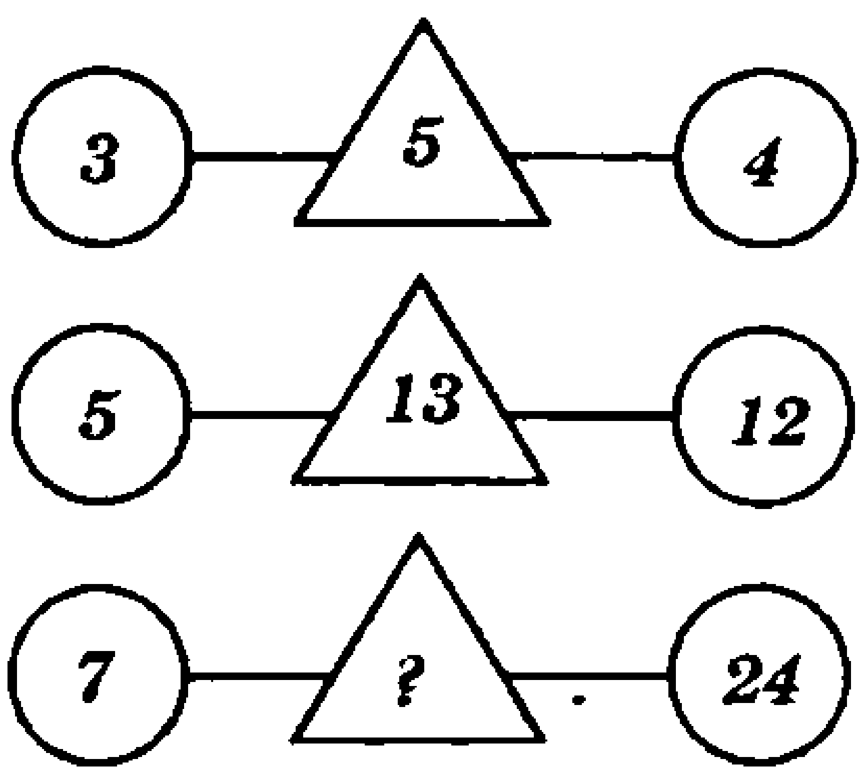
A) 1 B) 2 C) 7 D) 8 E) 4

04



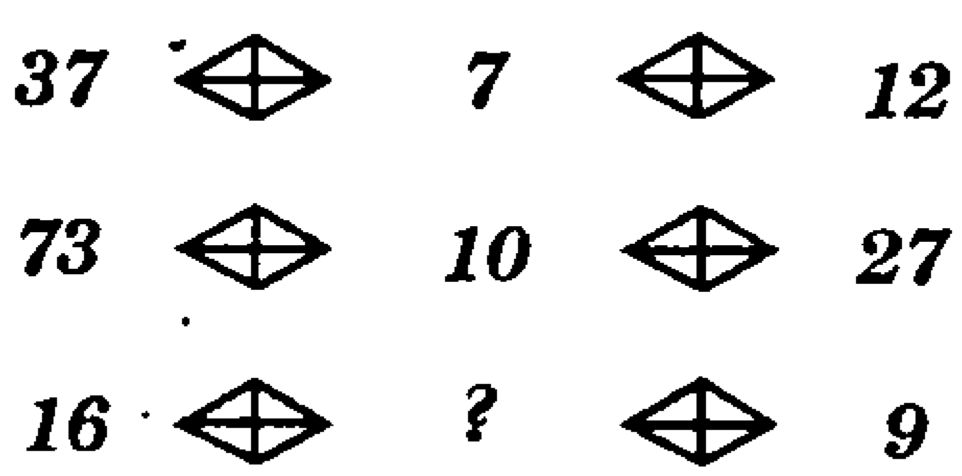
A) 13 B) 17 C) 21 D) 12 E) 22

05



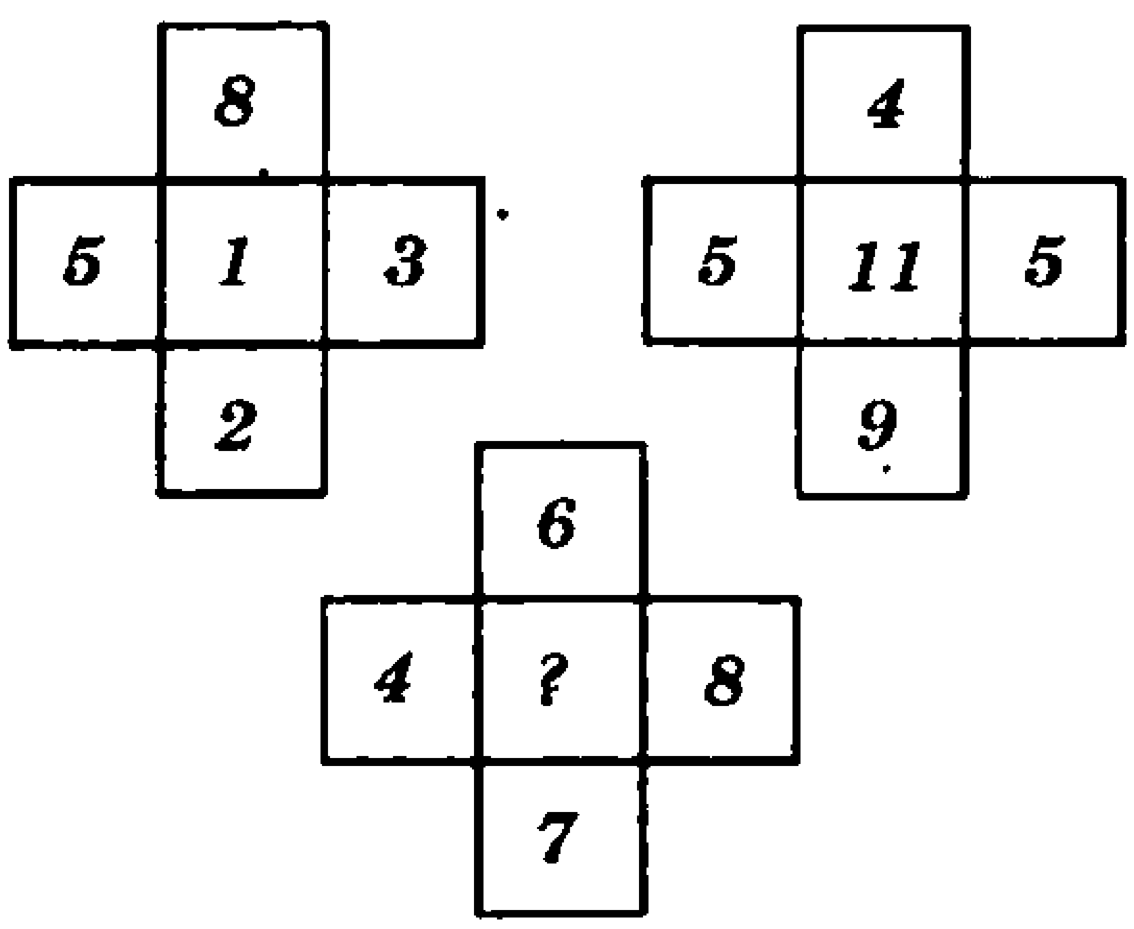
A) 17 B) 16 C) 101 D) 25 E)38

06



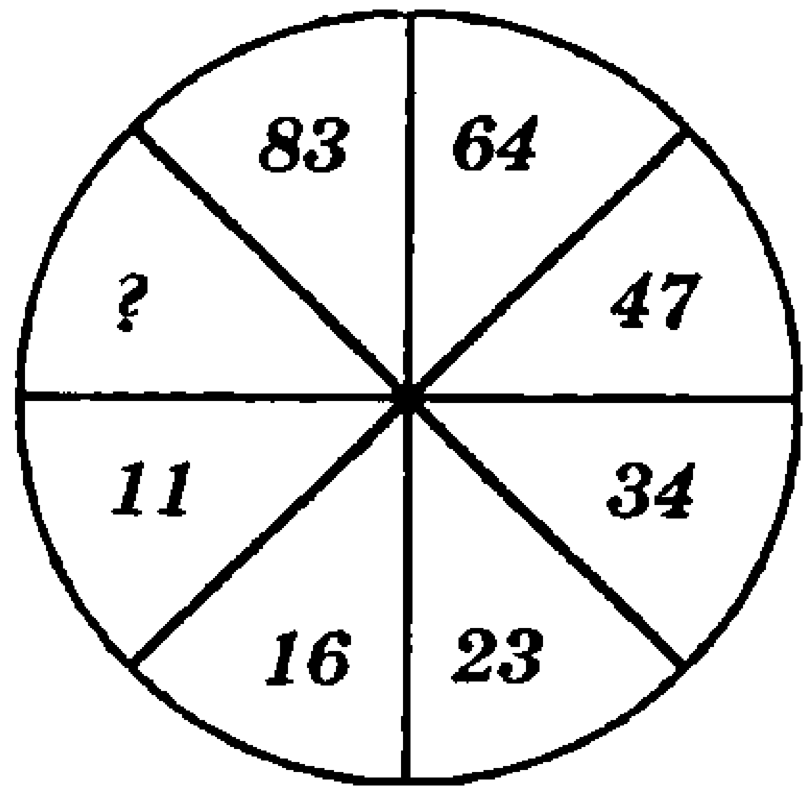
A) 1 B) 5 C) 8 D) 7 E)12

07



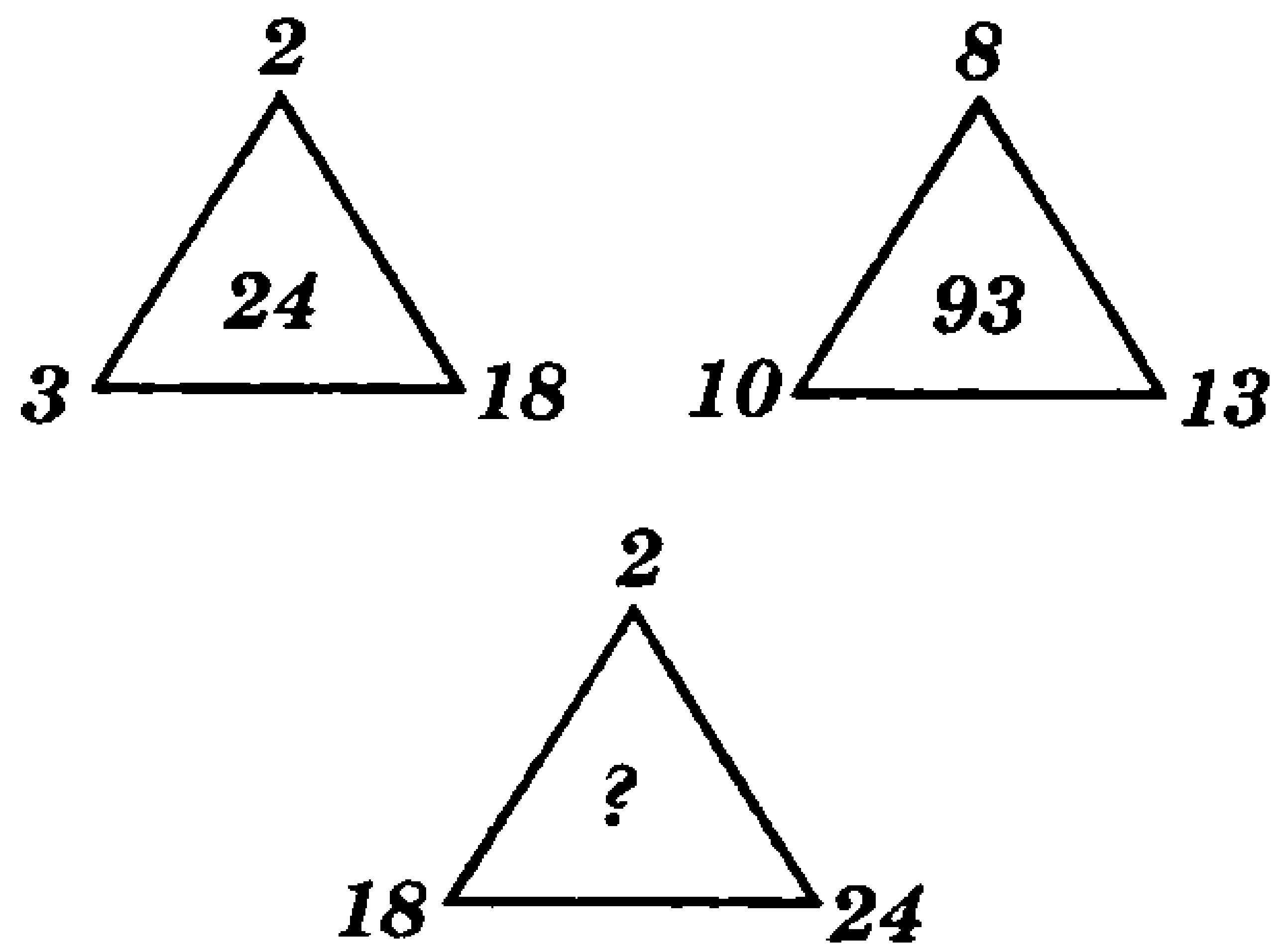
A) 8 B) 9 C) 101 D) 10 E) 12

08 El número que falta es:



A) 140 B) 109 C) 106 D) 110 E) 135

09 Determinar el número que falta



A) 60 B) 36 C) 117 D) 79 E) 46

10 Determinar el número que falta

7	9	6	11
7	10	9	8
7	8	11	14
7	11	4	?

A) 0 B) 14 C) 5 D) 8 E) 6

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)C	5)E	6)B	7)A	8)D	9)C	10)C
11)E	12)A	13)D	14)E	15)A	16)A				

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)A	3)E	4)A	5)E	6)C	7)D	8)C	9)E	10)B
11)D	12)D	13)B	14)B	15)D	16)B	17)E	18)E	19)C	20)E
1)A	2)C	3)D	4)B	5)D	6)B	7)D	8)C	9)A	10)C

PSICOTECNICO GRAFICO

CAPITULO 035

OBJETIVOS :

* Verificar en la práctica la importancia de los test psicotécnicos.
* Potenciar la capacidad de abstracción del estudiante.
* Ampliar nuestra perspectiva de figuras en el plano.

INTRODUCCIÓN :

No existen en el mundo dos personas que sean psicológicamente idénticas. La personalidad, el carácter; el temperamento o el modo de ser de alguien es siempre difícil de definir y es que en la personalidad se compone de múltiples factores que, en ocasiones, ni nosotros mismos conocemos.

Una manera de evaluar nuestra personalidad y la manera como nos enfrentamos al mundo es mediante diferentes tipos de test, por ejemplo.

Los test proyectivos, permiten realizar un estudio muy completo de las características personales más íntimas de la persona. A través de ellos se puede evaluar cuál es nuestra manera de enfrentamos al mundo externo, nuestras debilidades y fortalezas, cómo nos comunicamos con los demás, así como facetas más intimas de nosotros mismos y que a simple vista no suelen ser observables, pues evitamos que así sea.

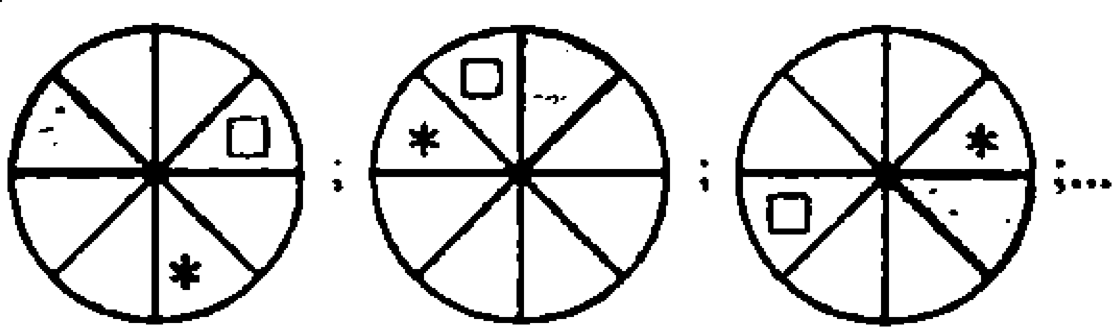
Existen otros tipos de test, los test de patologías, de capacidades, *PSICOTÉCNICO*, etc.

SECUENCIAS GRAFICAS

Secuencias cuyos términos son figuras, donde las razón la obtendremos ya sea por , giros , cantidad de partes , superposiciones , adición de figuras , ... etc.

EJEMPLO 1 :

¿Qué figura continua?



RESOLUCIÓN :

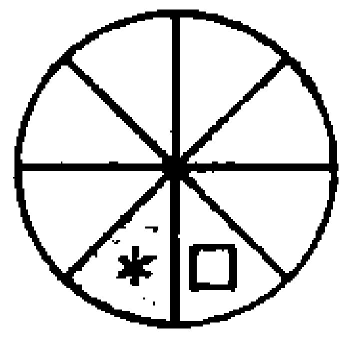
En este tipo de problemas, se debe encontrar un patrón de ordenamiento que verifique una secuencia lógica que se presenta de figura a figura de forma total o parcial (según los elementos que la figura dispone) .

✦ Observamos que la primera parte sombreada gira de *2* en *2* posiciones en sentido horario .

✦ El cuadradito gira de *2* en *2* posiciones en sentido antihorario .

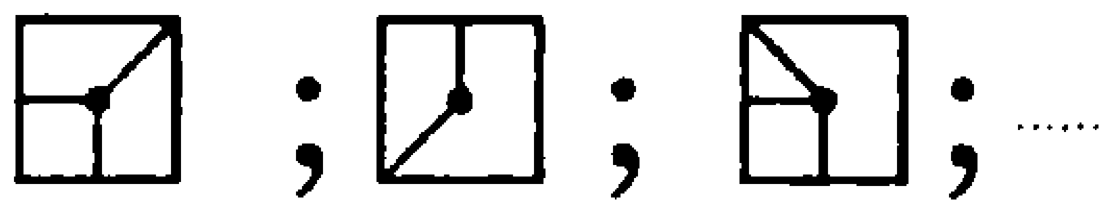
✦ El "*" gira de *3* en *3* posiciones en sentido horario.

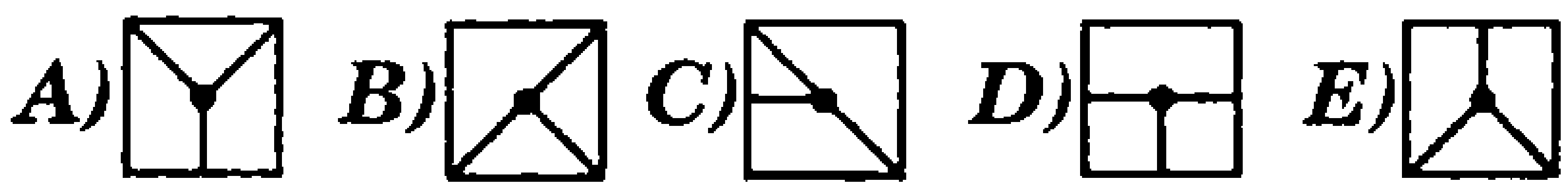
* Luego continúa :



EJEMPLO 2 :

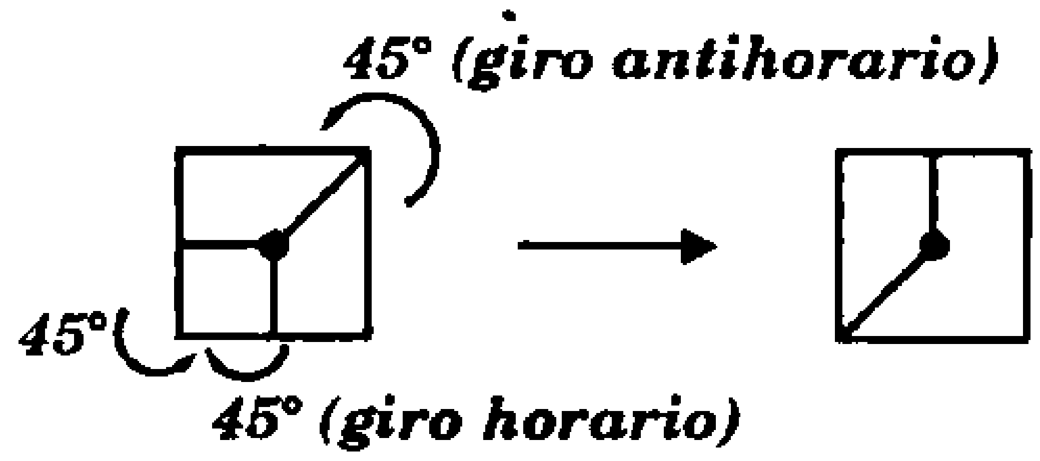
Determine la figura siguiente en :



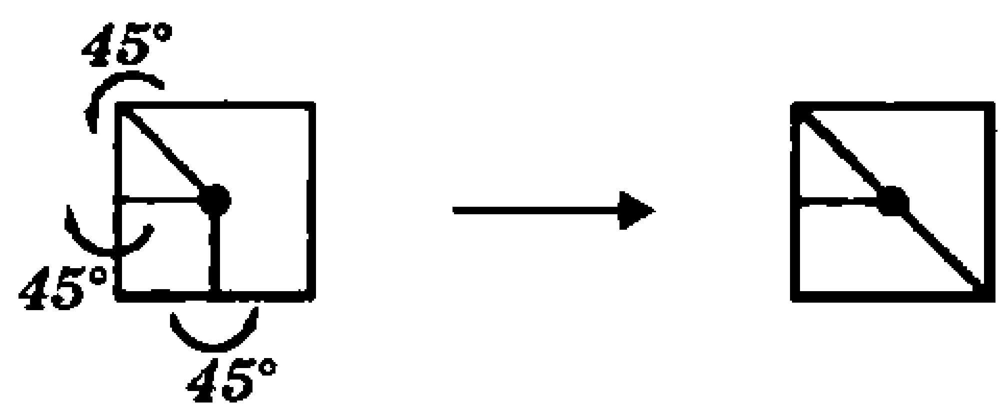


RESOLUCIÓN :

* Tenemos que encontrar una relación coherente de cambio de posición (generalmente por medio de giros). De donde hallaremos que :



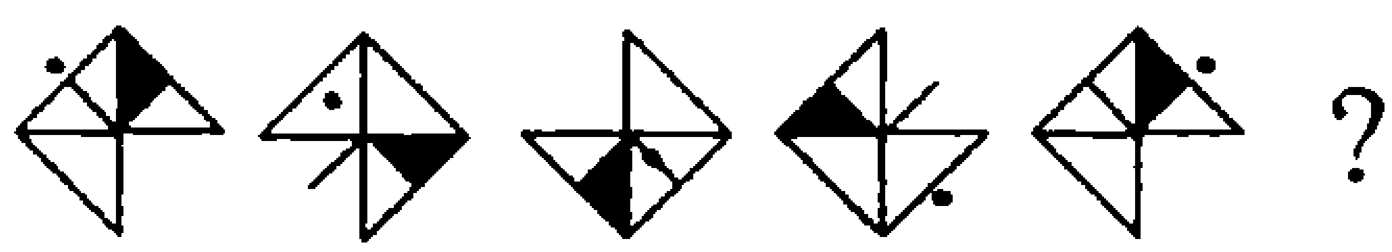
* Luego :

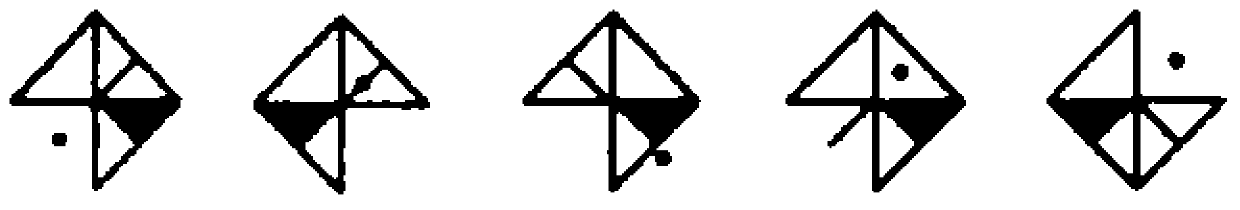


RPTA : "C"

EJEMPLO 3 :

Indicar la alternativa que continua adecuadamente a la siguiente secuencia gráfica :





(A) (B) (C) (D) (E)

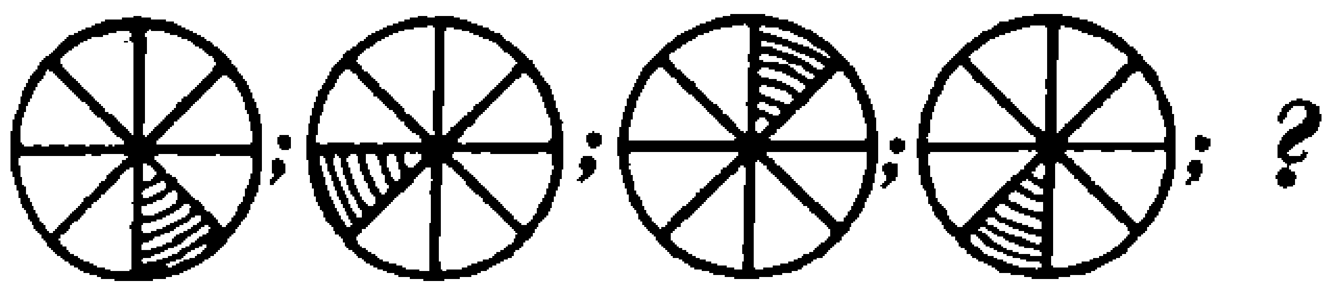
RESOLUCIÓN :

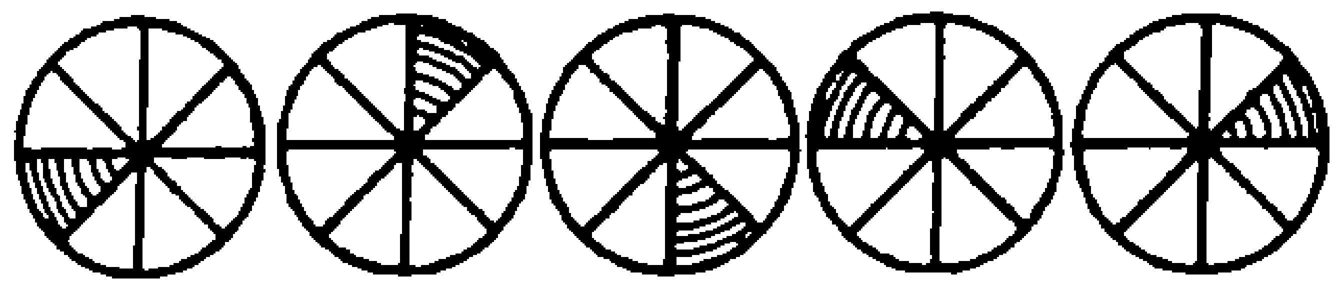
* El polígono integro gira cada vez *90°* en sentido horario , observándose también que el segmento que inicialmente estaba en el interior , sale , luego ingresa y así sucesivamente .

RPTA : "D"

EJEMPLO 4 :

Indique la figura que continúa la secuencia que se muestra:

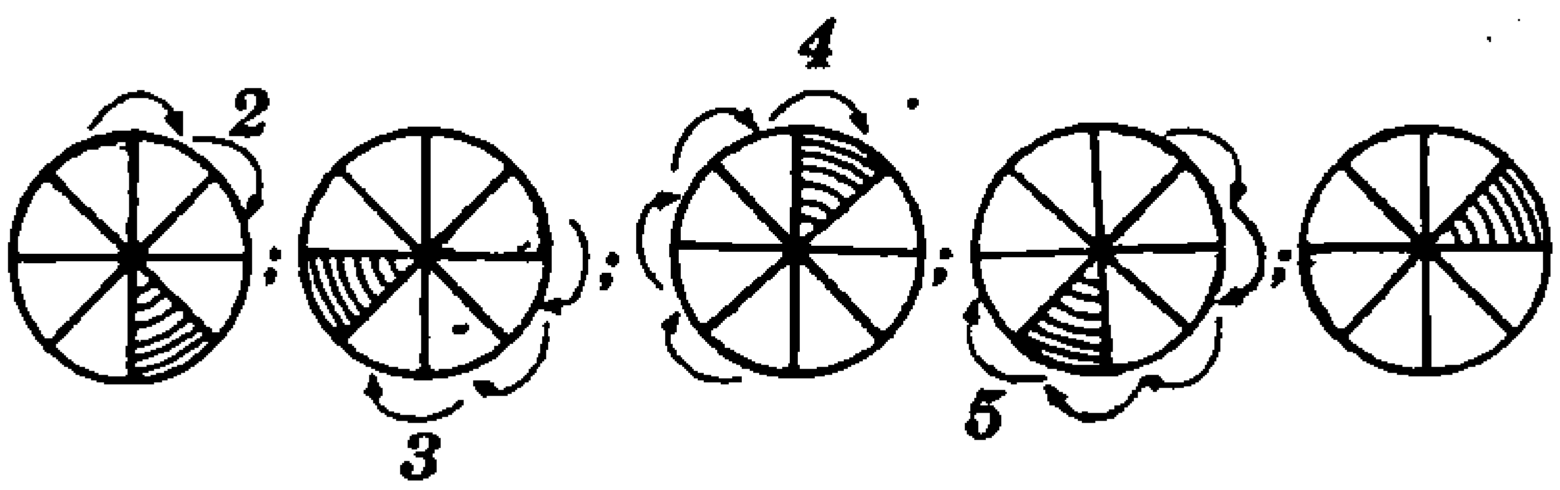




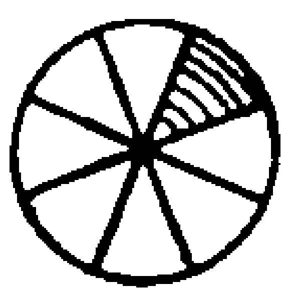
A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

En la secuencia gráfica, se observa que la región sombreada avanza en sentido horario según los números *2; 3; 4; ...* (naturales consecutivos). Además, la región tramada está ubicada simétricamente opuesta a la región sombreada.



El gráfico que continúa es



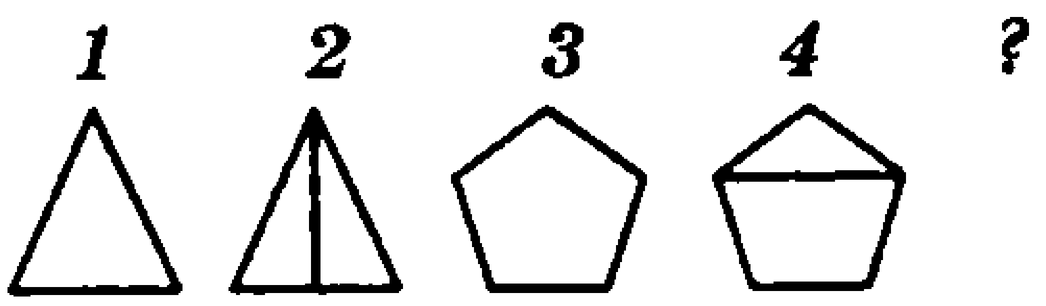
RPTA: "E"

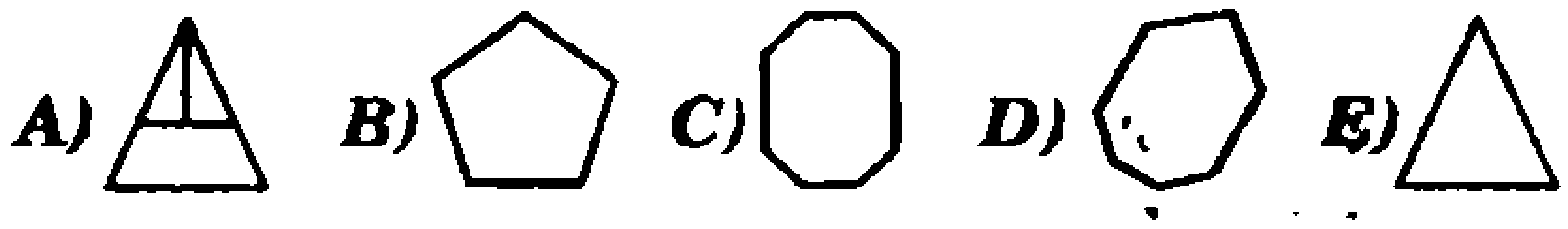
MÁS EJEMPLOS :

En cada ejercicio , las figuras de la izquierda son parecidas , hay una que también se parece a ellas . Se tiene que encontrar la relación existente y la figura que completa la secuencia .

EJEMPLO 5 :

¿Qué figura continua?





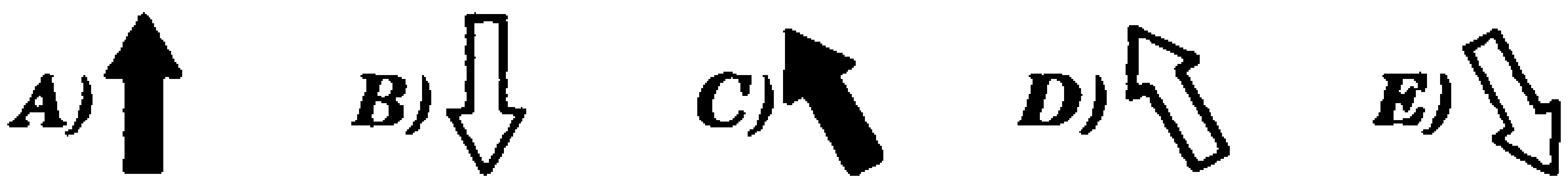
RESOLUCIÓN :

* Si usted observa ; las figuras cada vez aumenta en una línea y en forma continúa . La figura compuesta debe tener *7* líneas . Es decir será la alternativa de que es un heptágono .

RPTA : "D"

EJEMPLO 6 :

¿Qué figura continua?



RESOLUCIÓN :

* En forma alternada ; son negras y blancas, además van aumentando su tamaño . Entonces la figura *A* y *C* , se escoge la alternativa *A* ; pues las posiciones vertical *(|)* y diagonal *(/)* se van combinando .

RPTA : "A"

EJEMPLO 7 :

¿Qué figura continua?

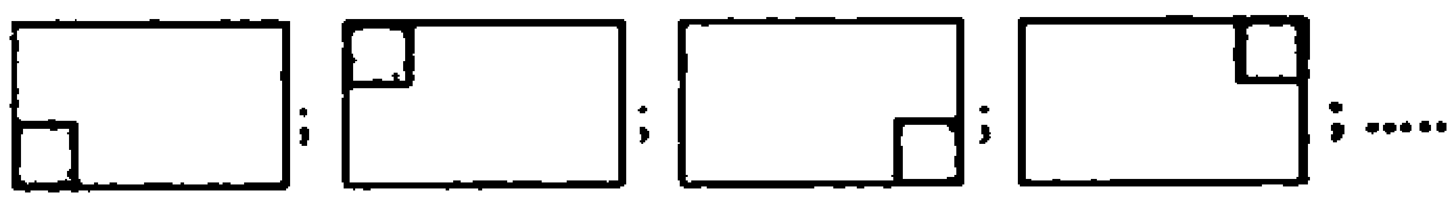
RESOLUCIÓN :

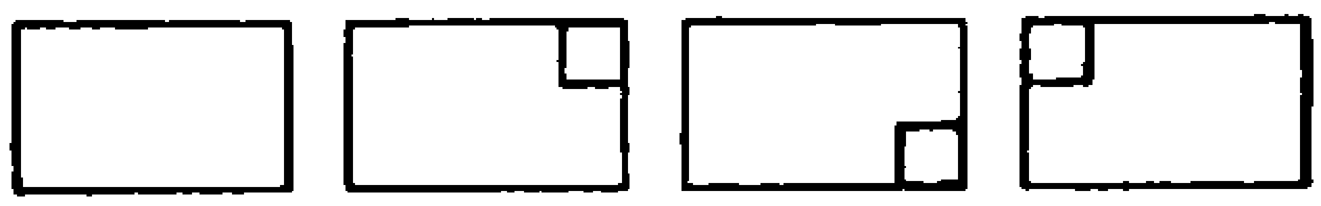
* Todas las figuras problemas tienen que sus líneas componentes son rectas y quebradas . De las alternativas , solo la figura *E* cumple ; las demás tienen líneas curvas.

RPTA : "E"

EJEMPLO 8 :

¿Qué figura sigue en la secuencia?





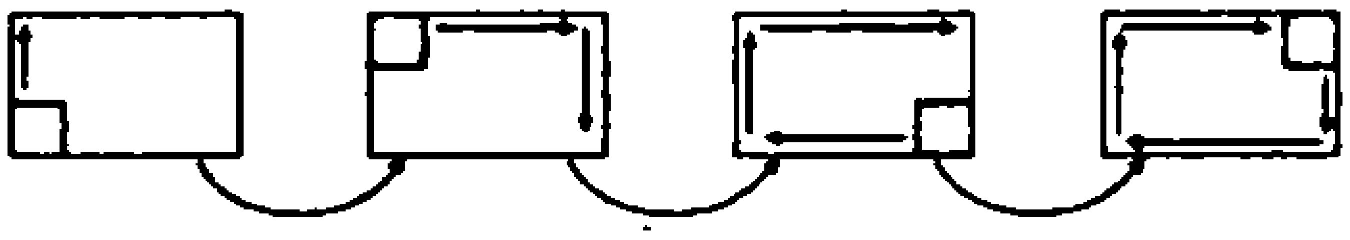
A) B) C) D)

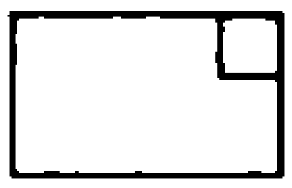
RESOLUCIÓN :

* Si observas las figuras con cuidado, notarás que la figura pequeña que está dentro del rectángulo se mueve en sentido horario (↻).

* Como habrás podido observar, de la primera a la segunda posición realiza sólo un movimiento, de la segunda a la tercera posición realiza dos movimientos y de la tercera a la cuarta posición

realiza tres movimientos. Por lo tanto, de la cuarta a la quinta posición realizará cuatro movimientos. Sigue la figura *B* .



B) 

RPTA : "B"

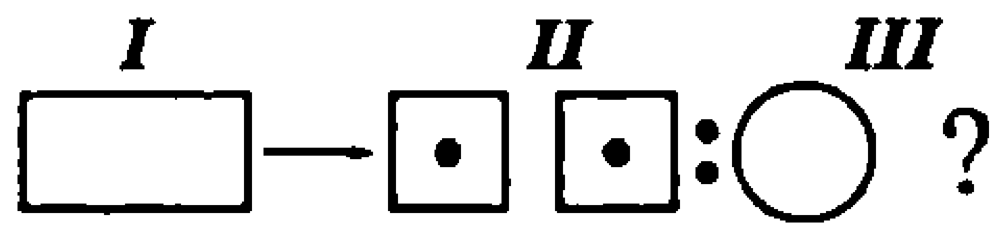
ANALOGIAS DE FIGURAS

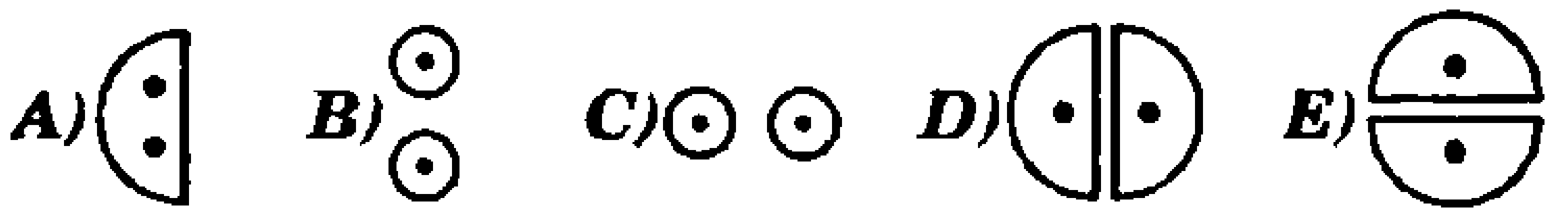
En los siguientes ejercicios , los símbolos de las columnas *I* y *II* tienen entre sí , una relación . Seleccione el símbolo de la derecha que tiene que tiene la misma relación con el símbolo de la columna *III* . La siguiente lista te ayudará a descubrir los rasgos comunes y variaciones que suelen encontrarse en las cuestiones de analogías de símbolos:

Rasgos Comunes	Variaciones del Rasgo Común
Líneas que dividen una figura.	Divisiones iguales o desiguales.
Líneas que forman ángulos.	Ángulos agudos, obtusos o rectos.
Dirección de líneas.	Vertical, horizontal u oblicua señalando hacia arriba o hacia abajo.
Tipo de línea.	Continua o discontinua Curva o recta Todas iguales, alguna diferente o todas diferentes.
Número de líneas	2; 3; 4; etc. Mismo número o diferentes en cada figura.
Relación entre las líneas.	Intersección o sin intersección. Paralelas o no.
Relaciones de las líneas con las figuras.	Líneas en el interior o exterior de las figuras. Líneas que tocan o no tocan a las figuras.
Formas cerradas.	Formadas por líneas rectas o curvas.
Figuras abiertas.	El extremo abierto está arriba, abajo, a la izquierda o a la derecha.
Dirección de la figura.	Mismas o diferentes formas.
Sombreado de la figura.	Sombreado total o parcial. Sombreados con líneas horizontales, verticales o inclinadas.
Tamaño de la figura.	Grande o pequeña. Mismo o diferente tamaño.
Relaciones entre las figuras.	Se tocan, separadas, solapadas o compartiendo un área común.
Figuras dentro de figuras.	Mismas o diferentes figuras. Figuras concéntricas o no concéntricas.

EJEMPLO 9 :

Completar la siguiente analogía :





RESOLUCIÓN :

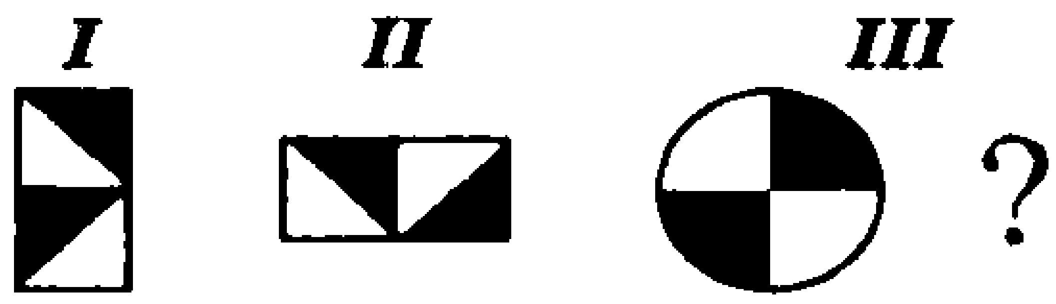
* A la figura *I* le hacemos un corte en la parte central; designando un punto en cada región resultante, Esa es la figura *II*.

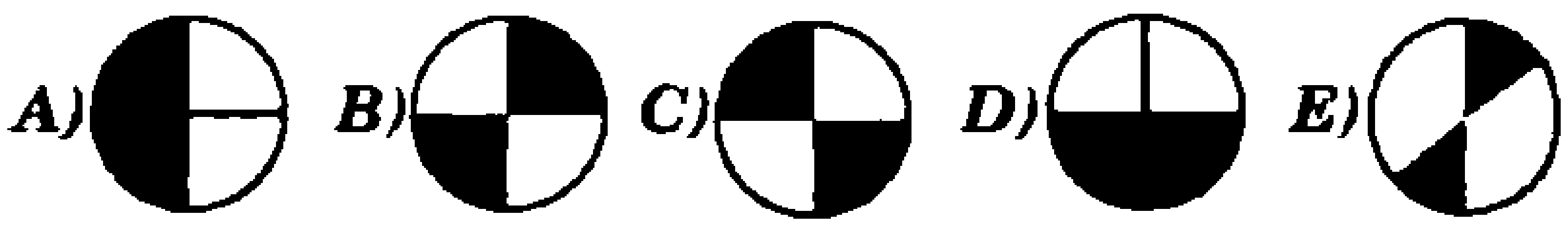
* La alternativa *D* : resulta de hacer lo mismo con la figura *III* .

RPTA : "D"

EJEMPLO 10 :

Completar la siguiente analogía :





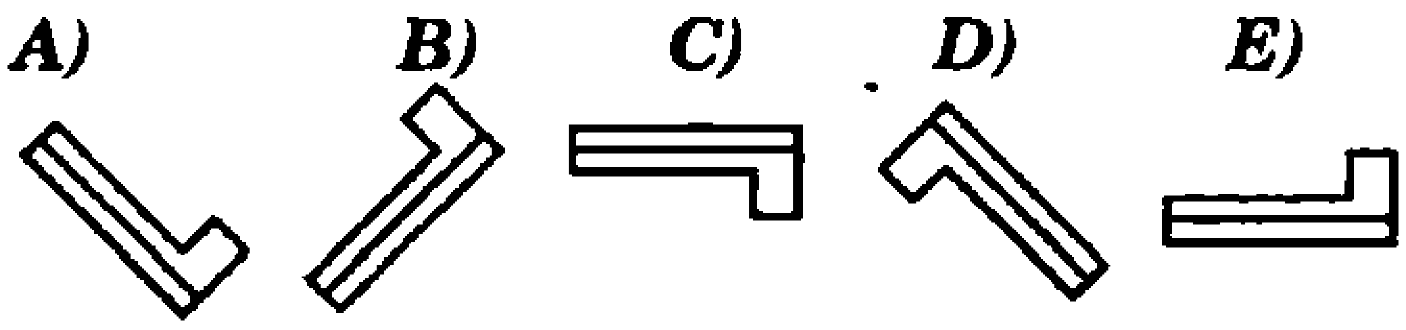
RESOLUCIÓN :

* La primera figura gira *90°* en sentido horario y aparece la segunda figura. Al girar las regiones sombreadas de la tercera : aparece la figura *C* .

RPTA : "C"

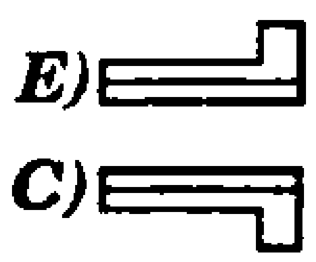
EJEMPLO 11 :

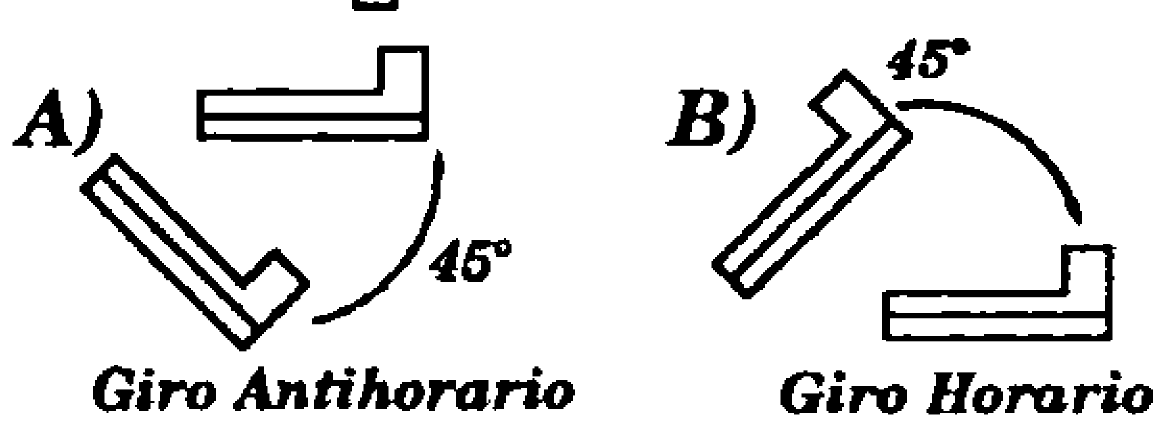
Señale la figura que no tiene relación con las demás.



RESOLUCIÓN :

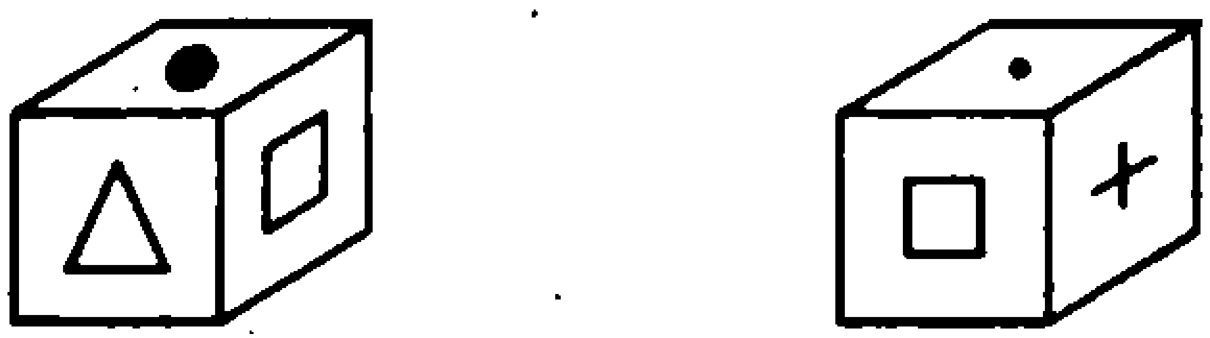
* ¡Pero si todos son iguales! Así como usted muchos estudiantes pueden pensar lo mismo . Y las figuras realmente tienen la misma forma y tamaño. Sin embargo: al girar las figuras en sentido horario (↷) o antihorario (↶) ; todas podrían tomar la posición de:

a excepción de : 

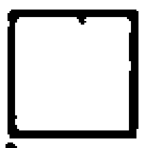
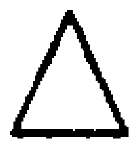


EJEMPLO 12 :

En la figura se muestra dos posiciones del mismo cubo .



¿Cuál símbolo se opone al círculo?

A) El cuadrado  ***B) El triángulo*** 

C) El punto ***D) El más (+)***

E) El símbolo no mostrado en la figura.

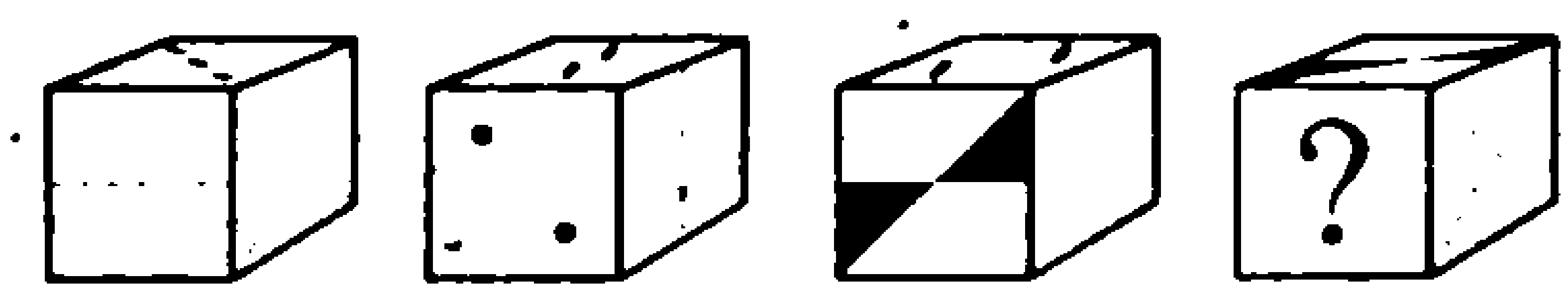
RESOLUCIÓN :

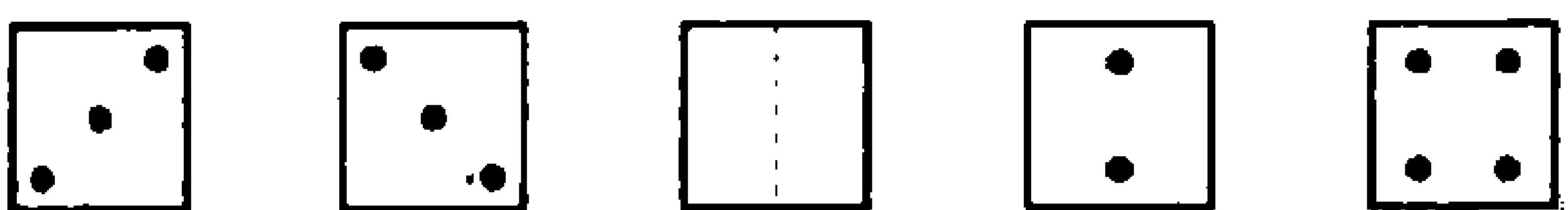
* Un cubo tiene ***6*** caras iguales . Por eso se llama hexaedro regular . Tenemos como figura referencial al cuadrado, ya que se repite en sus posiciones. A su alrededor en cada una de sus esquinas, se encuentran las otras cuatros figuras mostradas ***(D ; •; * y +)*** ; significando que frente a el , está el símbolo no mostrado en las figuras . Si en la figura ***I***, tomamos como base el triángulo "levantamos" el cubo ; de tal modo que "escondemos" al círculo y tengamos como figura frontal el cuadrado "aparece" la figura ***II*** de modo que frente al círculo ***(I)*** se encuentra el más ***(+)*** .

RPTA : "D"

EJEMPLO 13 :

Se muestra un dado en diferentes posiciones ¿Qué cara corresponde a la del signo de interrogación?

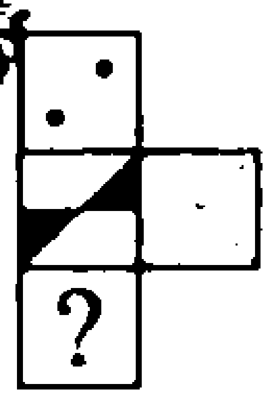




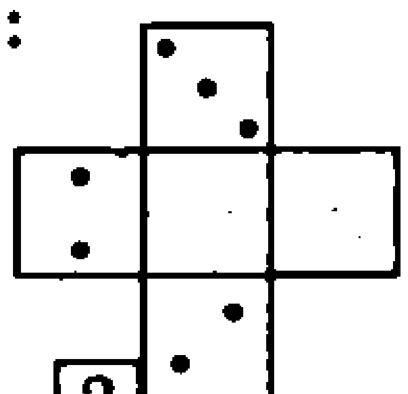
(A) ***(B)*** ***(C)*** ***(D)*** ***(E)***

RESOLUCIÓN :

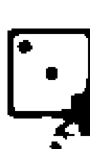
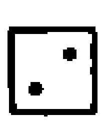
* De los dos últimos se forma :

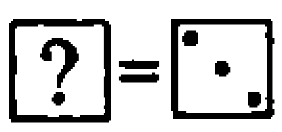


* De los dos primeros se forma :



Se observa que :

 es opuesto a  es opuesto a

De ambas observaciones : 

RPTA : "B"

ROTACIÓN y TRASLACIÓN DE FIGURAS

Tema orientado a desarrollar la habilidad de imaginar los movimientos de figuras en el plano .

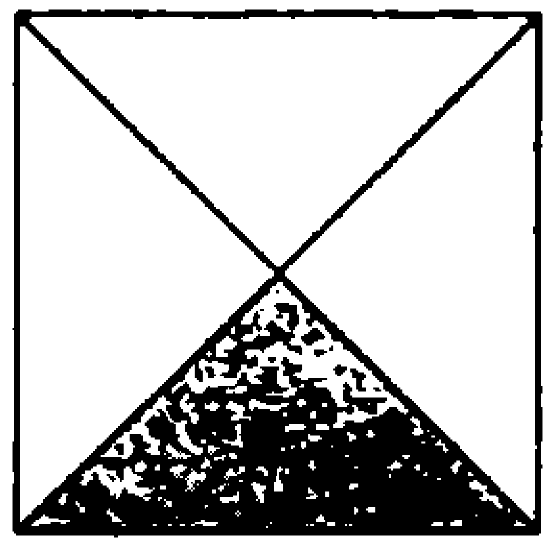
ROTACIÓN DE FIGURAS

Se refiere al movimiento de una figura alrededor de un eje fijo. Consiste en fijar un punto cualquiera en el plano y tomar otro punto en la figura, haciéndolo rotar a éste un ángulo determinado alrededor del otro.

EJEMPLO 1 :

* Si se tiene la siguiente figura :

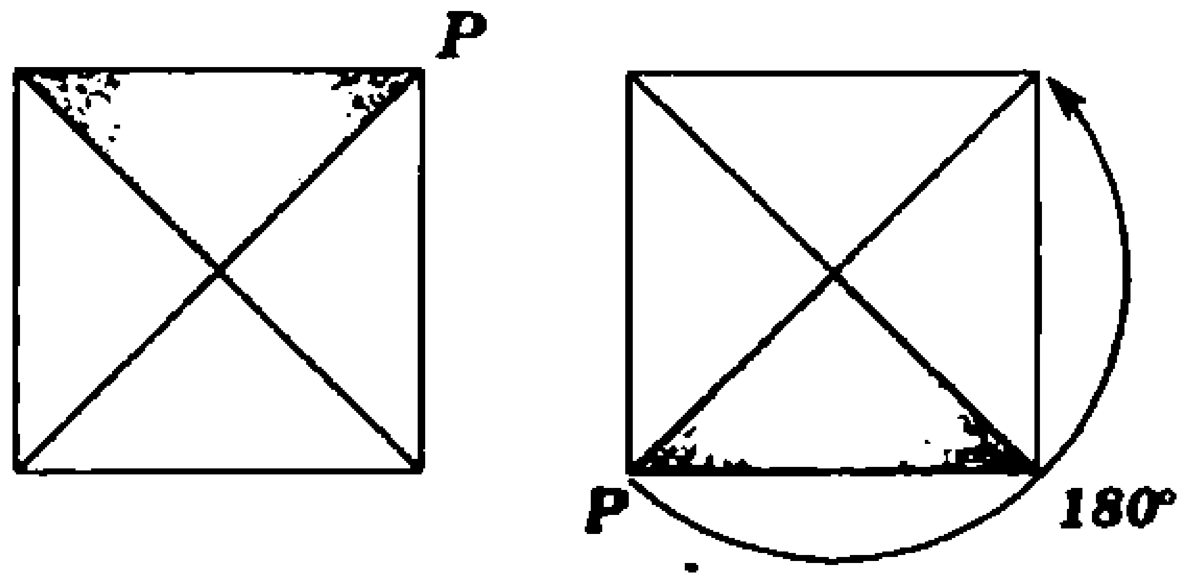
Se quiere girar esta figura ***180º*** sobre su centro en sentido antihorario . Para esto se toma un punto en uno de los extremos ; por ejemplo ***P***. El punto ***P*** debe aparecer en la figura rotada en el otro extremo, esto es :



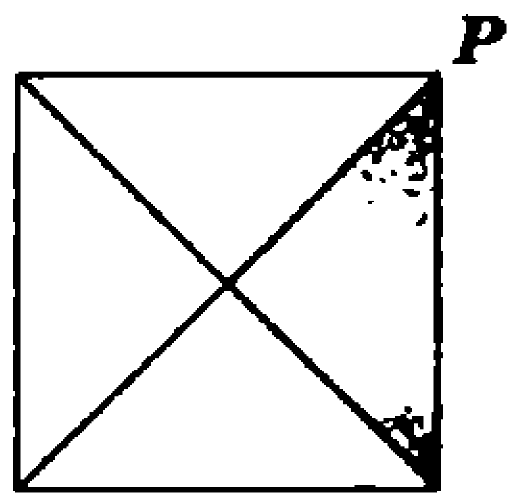
P

* Luego de la rotación de ***P*** , la figura sombreada debe estar a la derecha de ***P*** .

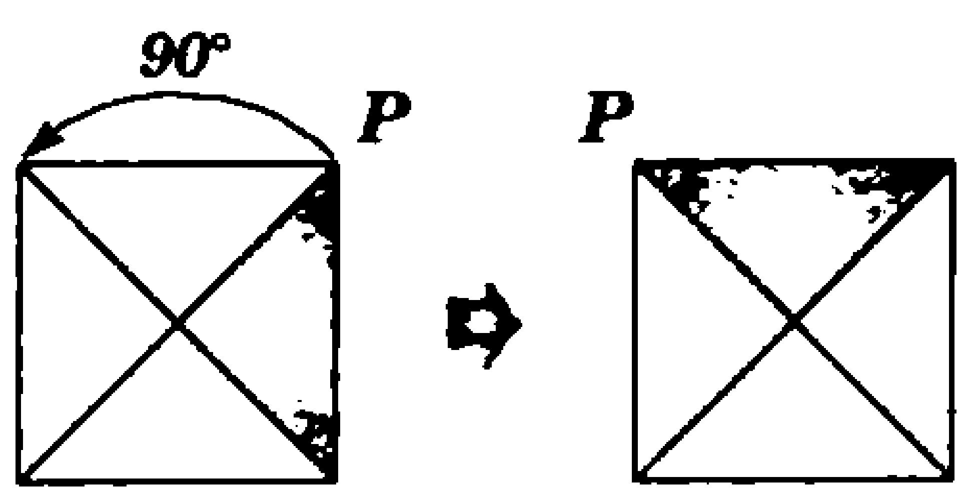
Se obtiene :



* Así mismo , se quiere rotar la siguiente figura ***90º*** en el sentido antihorario .



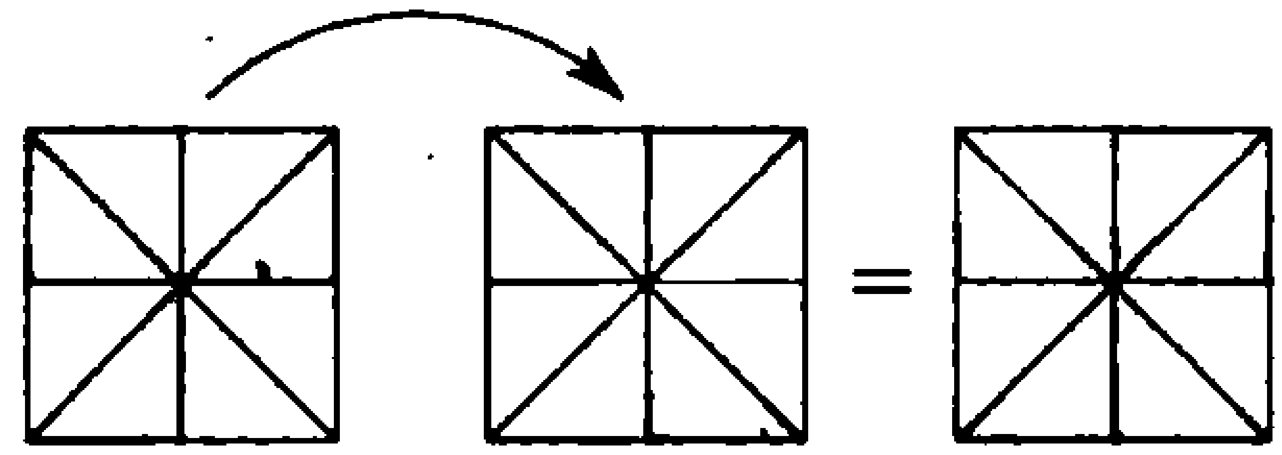
* Para eso , se toma nuevamente el punto ***P*** de referencia , el cual rota alrededor de su centro ***90º***, y luego de la rotación de éste ,la parte sombreada debe estar a la izquierda de ***P*** .



TRASLACIÓN DE FIGURAS

Es el movimiento de una figura de un lugar a otro , tal como está .

Al trasladar una figura sobre otra, la figura resultante será la unión de dichas figuras.



EJEMPLO 2 :

Si la figura ***1*** rota ***90°*** sobre su centro en sentido horario , y luego se traslada sobre la figura ***2*** , ¿qué figura resulta de esta unión?

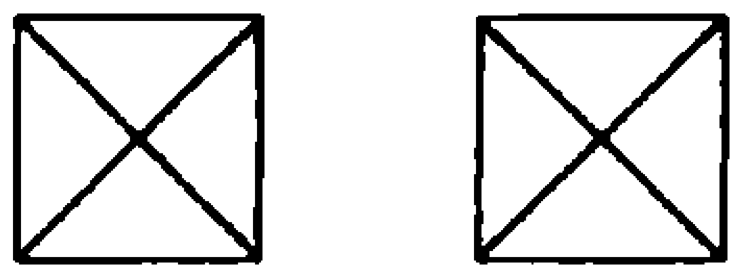
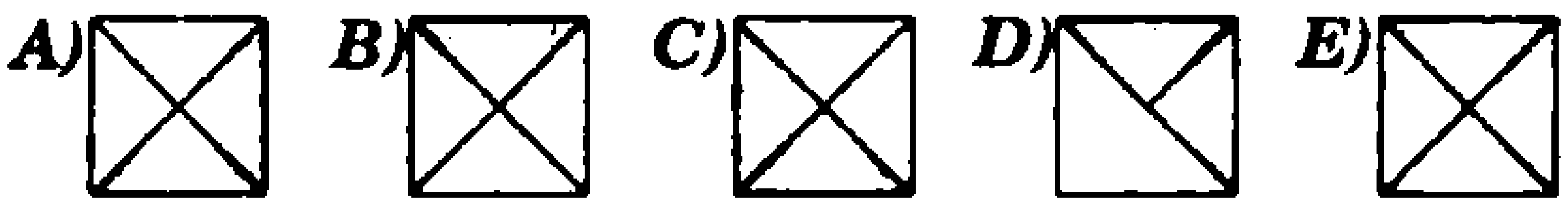
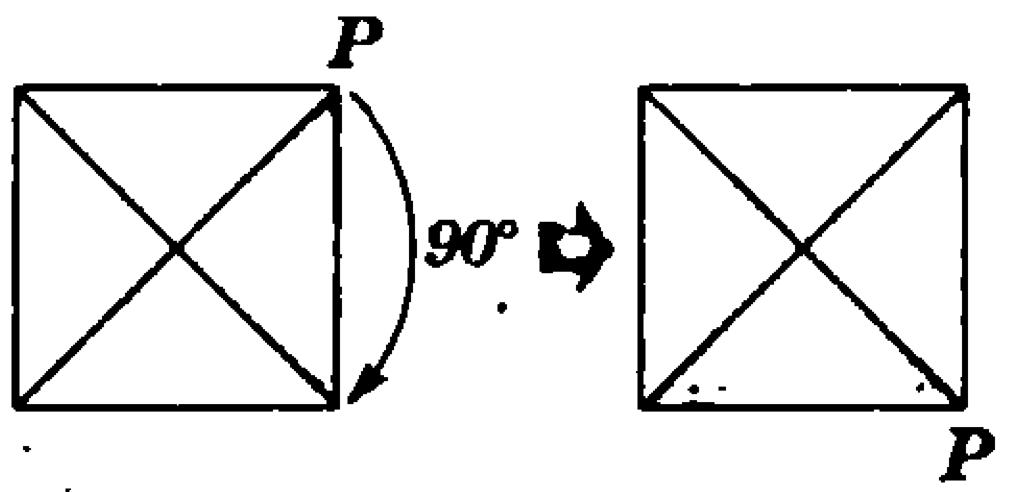


Fig. 1 ***Fig. 2***

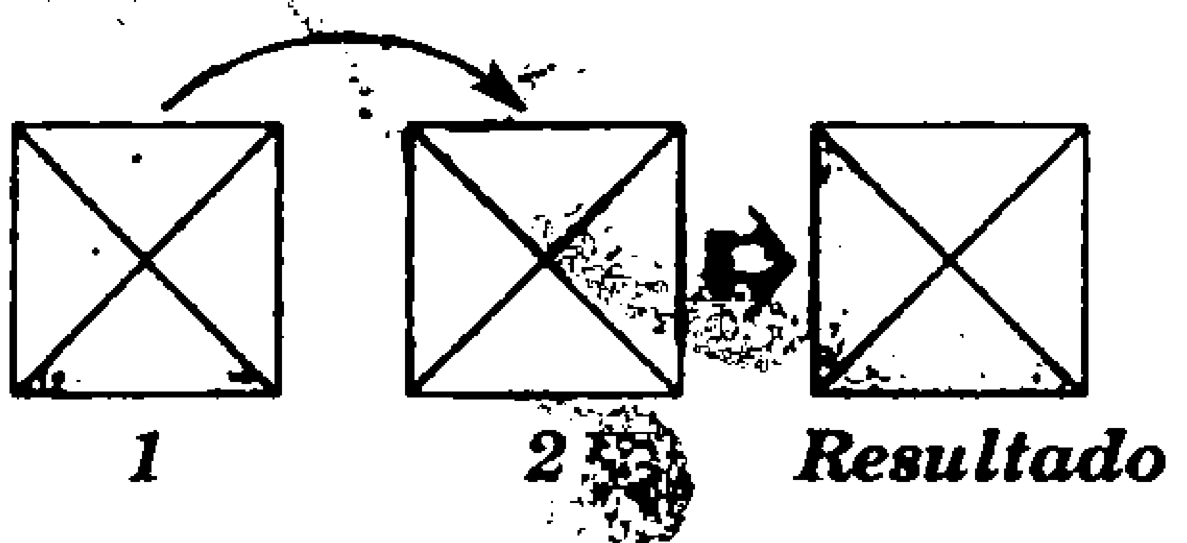


RESOLUCIÓN :

* Se rota la figura ***1*** en sentido horario ***90°*** :



* Luego , se traslada la figura ***1*** sobre la figura ***2*** , y se obtiene :



RPTA : "C"

EJEMPLO 3 :

La figura ***1*** rota ***990°*** en sentido antihorario con respecto a su centro . ¿Cuál es la figura resultante?

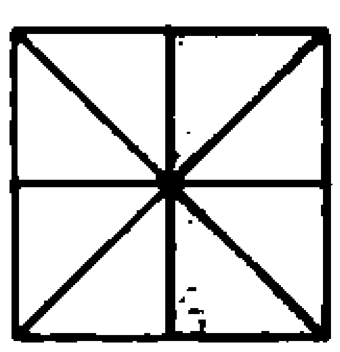
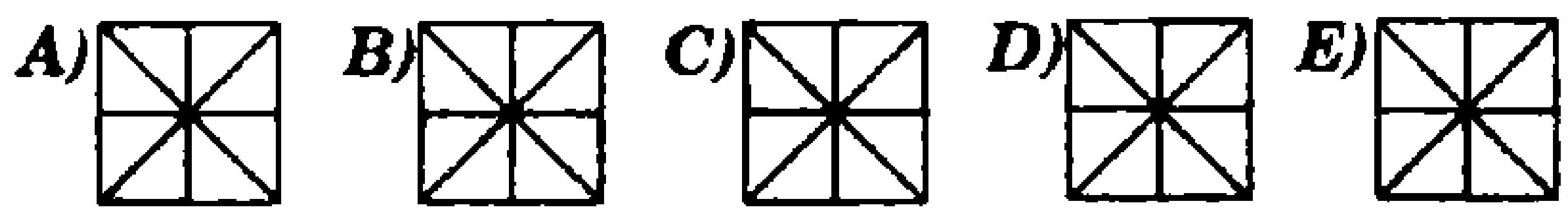


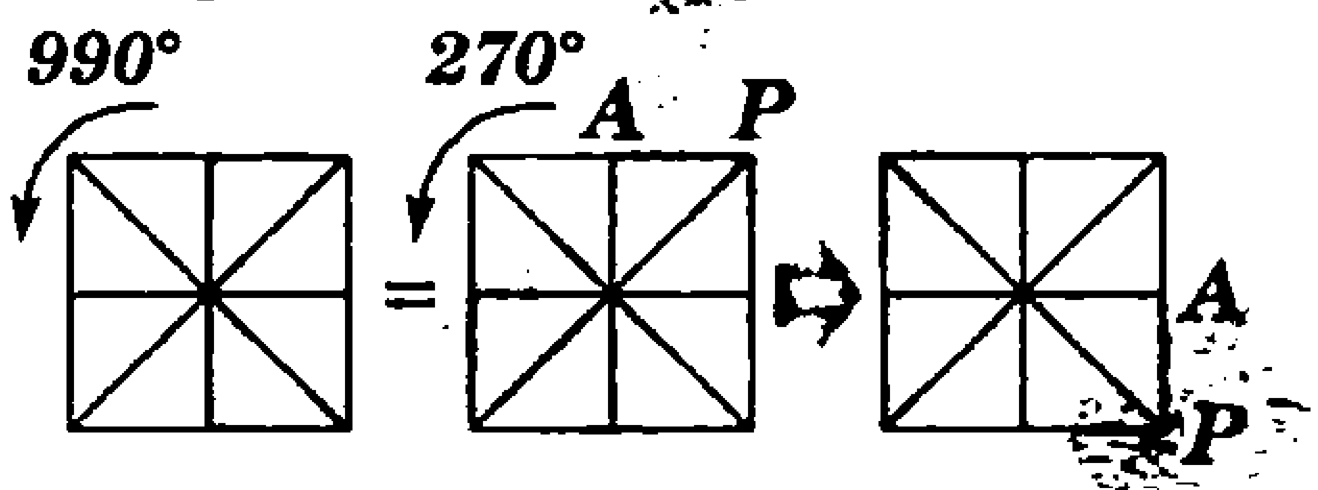
Fig. 1



RESOLUCIÓN :

* Se observa que : ***990°=2(360°)+270°.***

* Si la figura gira sobre su centro ***360°***, vuelve a su posición original ; entonces :



RPTA : "B"

EJEMPLO 4 :

Si la figura ***(I)*** rota ***120°*** en sentido horario , y la figura ***(II) 240°*** en sentido antihorario , y luego ambas se trasladan sobre la figura ***(III)***, ¿qué figura resulta?

(Triángulos equiláteros)

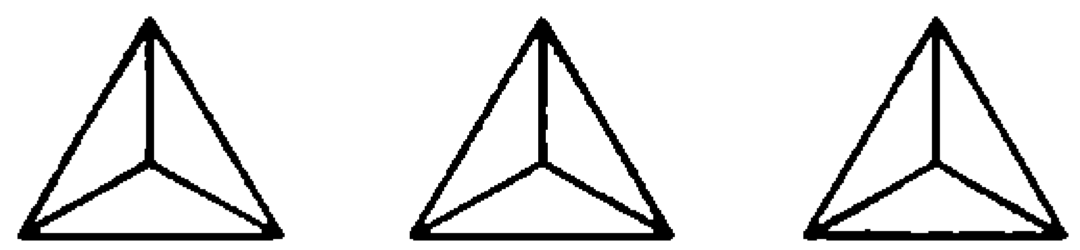
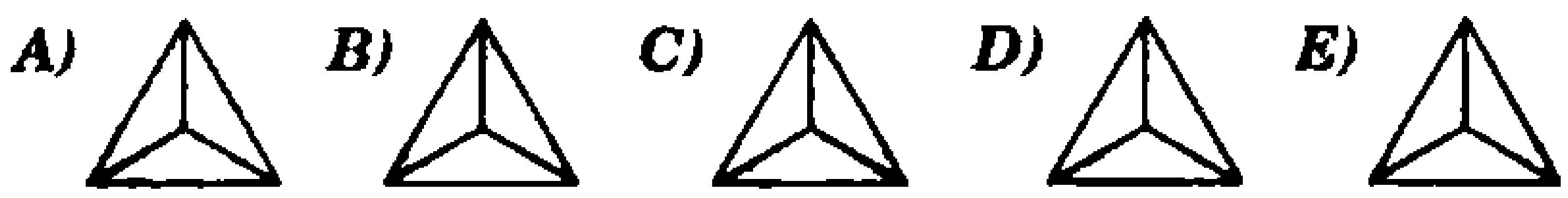
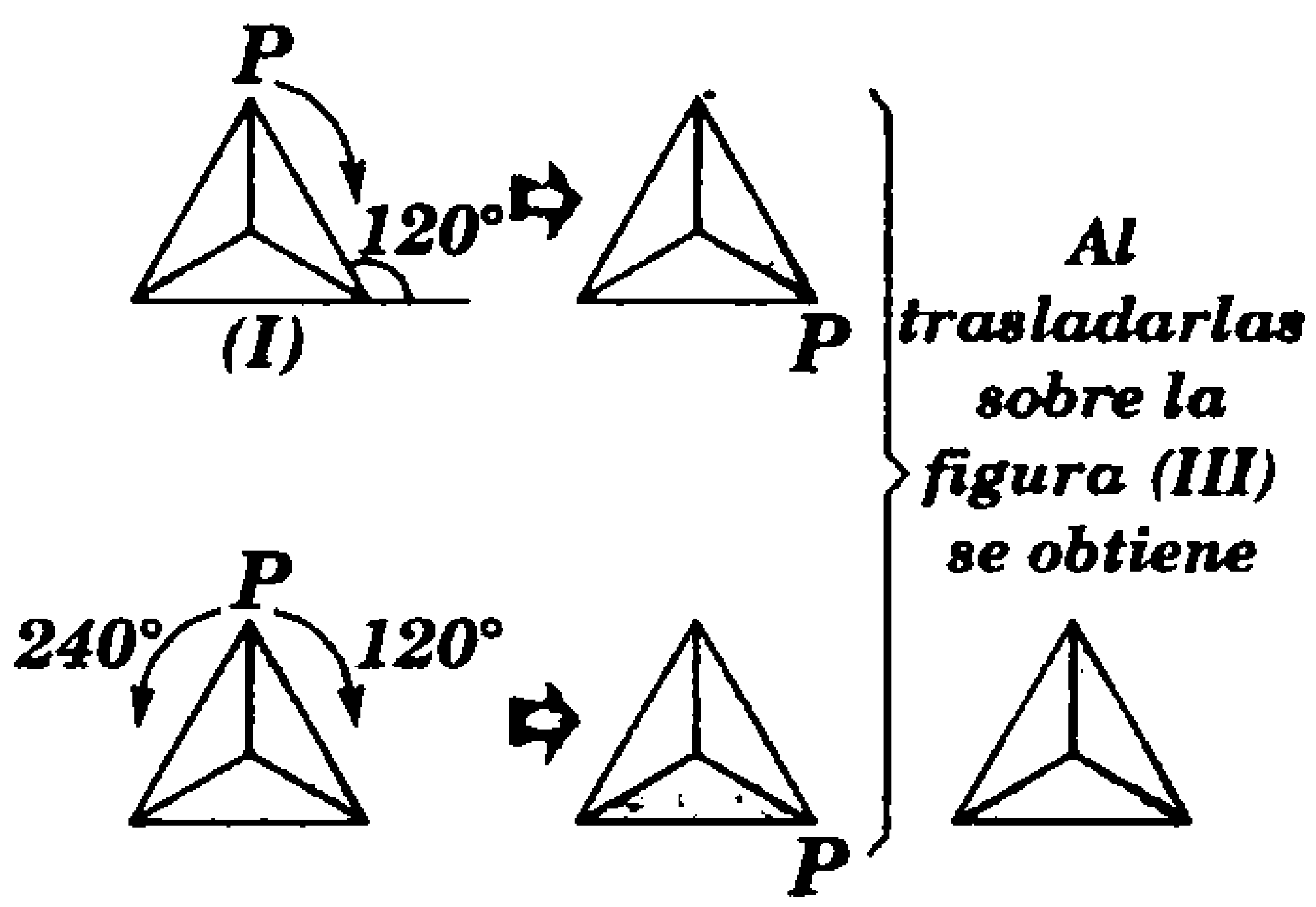


Fig. (I) ***Fig. (II)*** ***Fig. (III)***



RESOLUCIÓN :

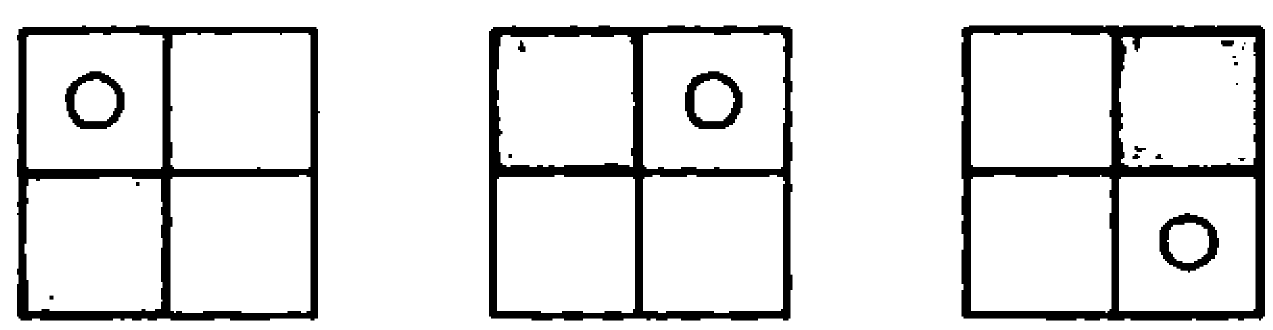
* (Girar ***240°*** en sentido antihorario es lo mismo que girar ***120°*** en sentido horario) :

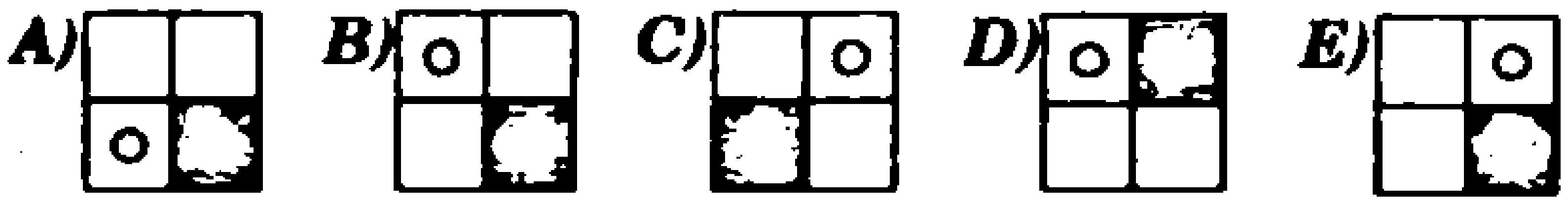


RPTA : "C"

EJEMPLO 5 :

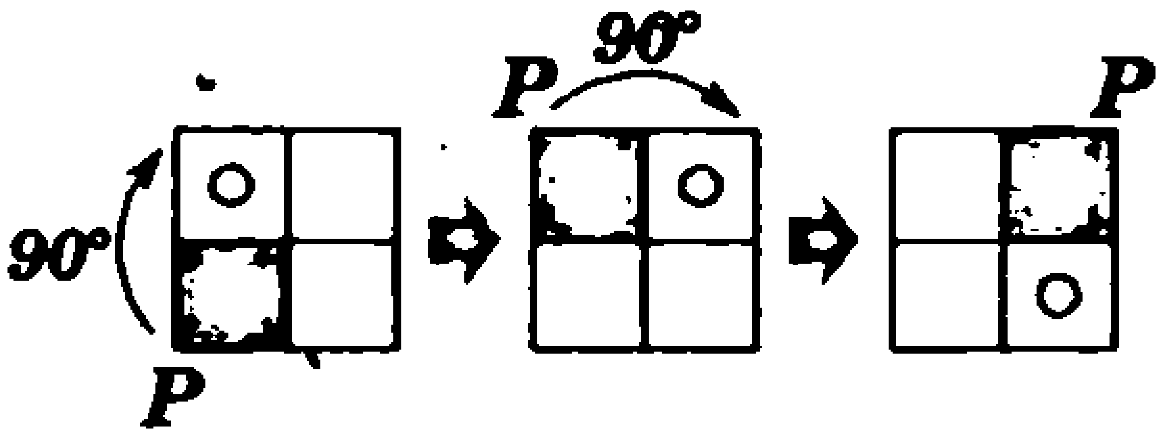
Señale la figura que continúa :



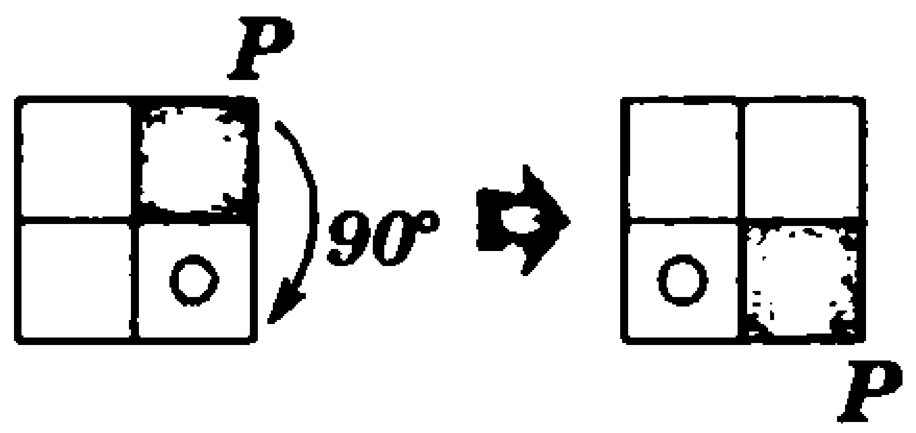


RESOLUCIÓN :

* Se observa que el punto ***P*** gira ***90°*** en sentido horario en las figuras anteriores :



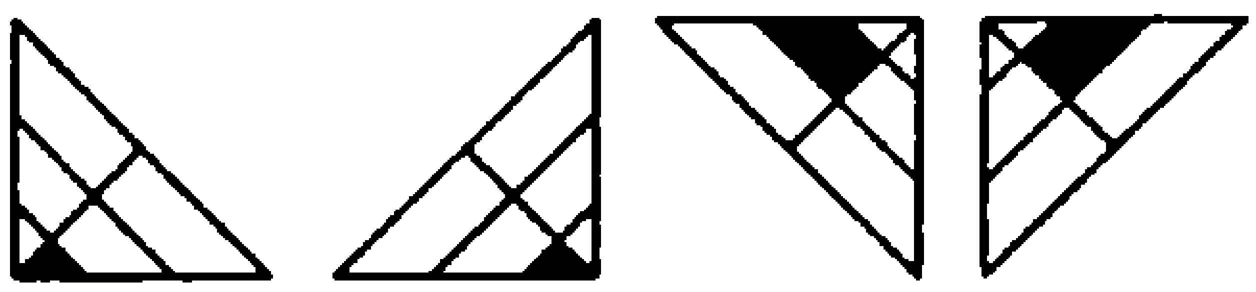
* Por lo tanto, la siguiente figura también debe rotar ***90°*** en sentido horario :

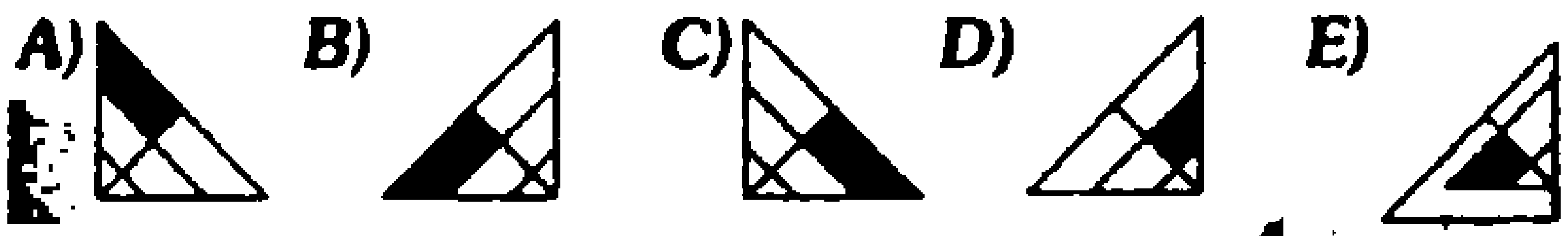


RPTA : "A"

EJEMPLO 6 :

Indicar la figura que sigue :

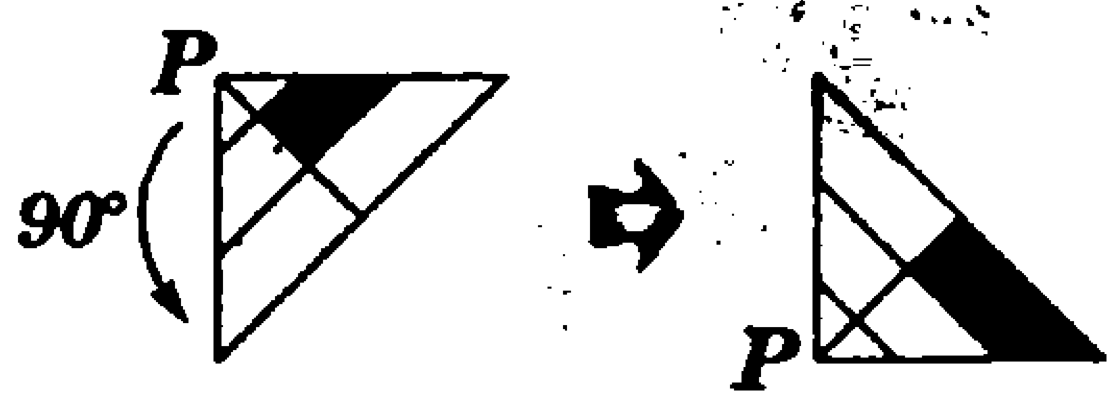




RESOLUCIÓN :

* Se observa que los triángulos están girando ***90°*** en sentido antihorario y que la "sombra" se traslada alternadamente hacia la hipotenusa.

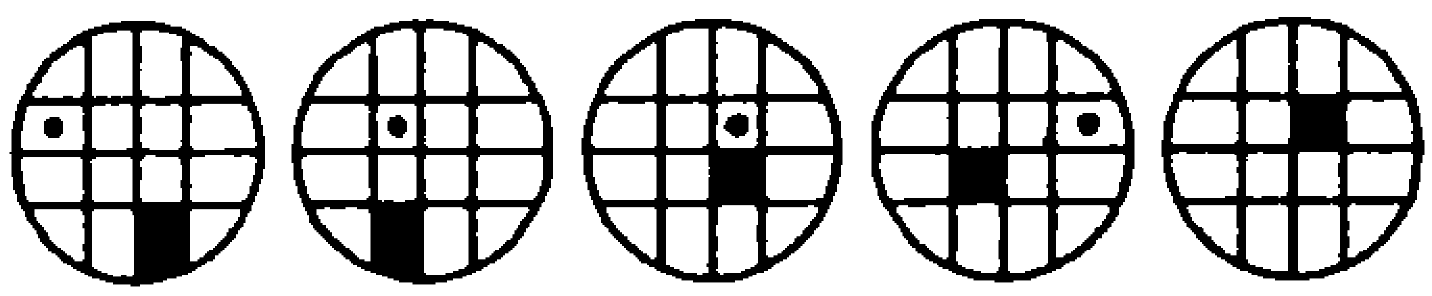
* Entonces la figura que sigue será :

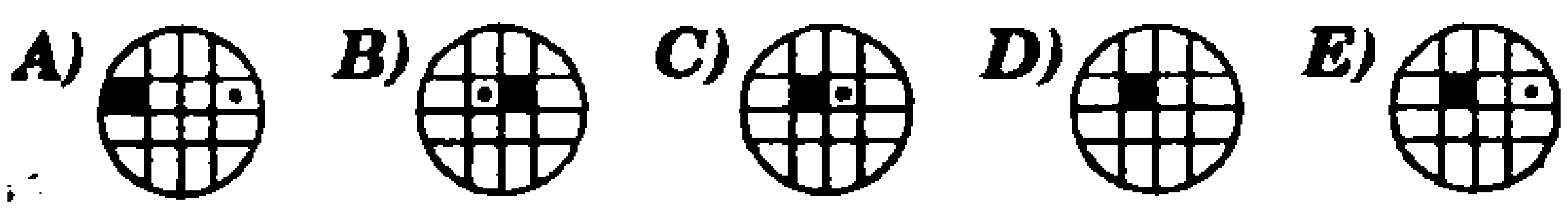


RPTA : "C"

EJEMPLO 7 :

¿Qué figura continua?

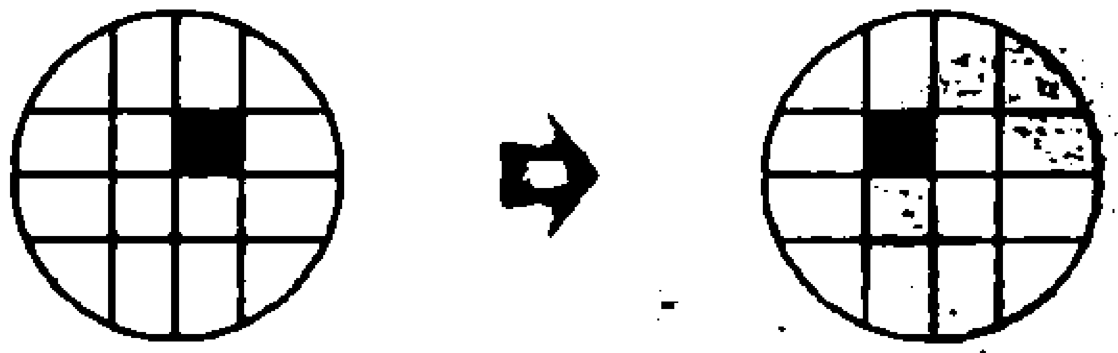




RESOLUCIÓN :

* Se observa que el "punto" se traslada horizontalmente de izquierda a derecha y viceversa. Y las "sombra" se traslada alternadamente hacia arriba .

* Entonces la figura que continúa será :



RPTA : "D"

EJEMPLO 8 :

Determinar el ángulo de giro de la figura ***1*** en sentido horario para que resulte la figura ***2*** .

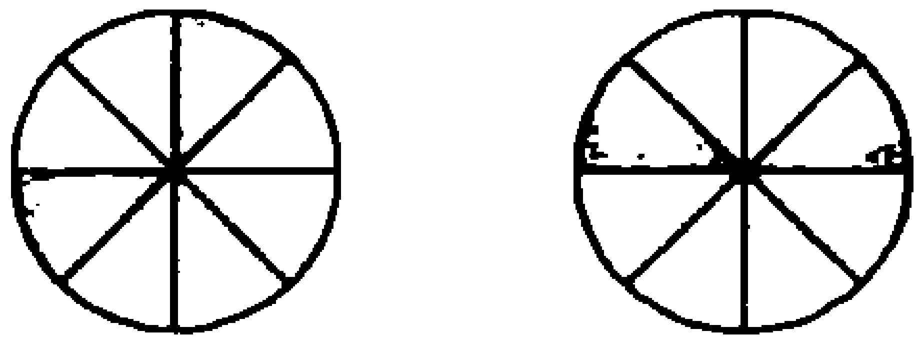


Fig. 1 ***Fig. 2***

A) 90° ***B) 40°*** ***C) 60°*** ***D) 45°*** ***E) 120°***

RESOLUCIÓN :

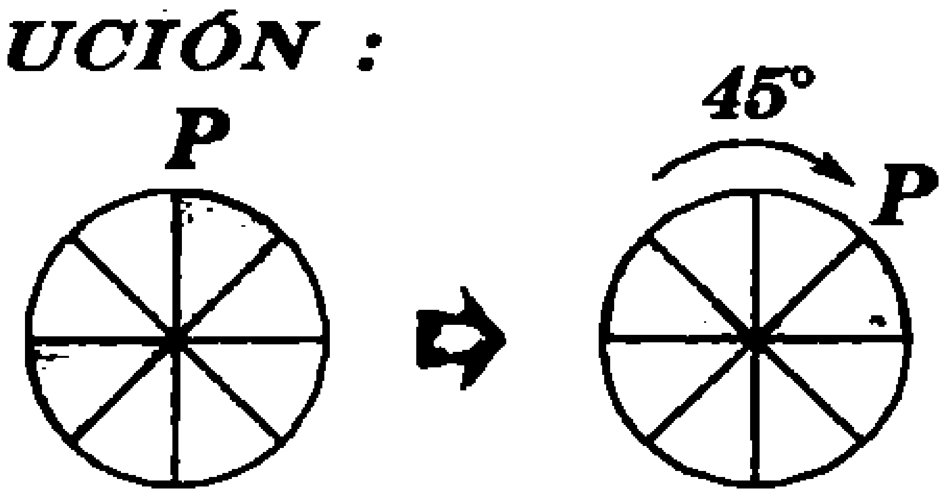
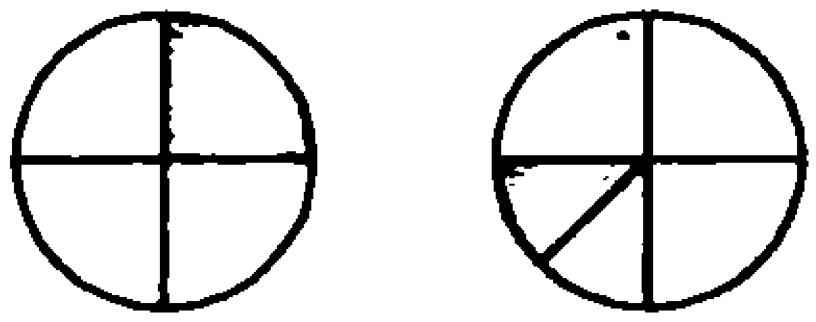


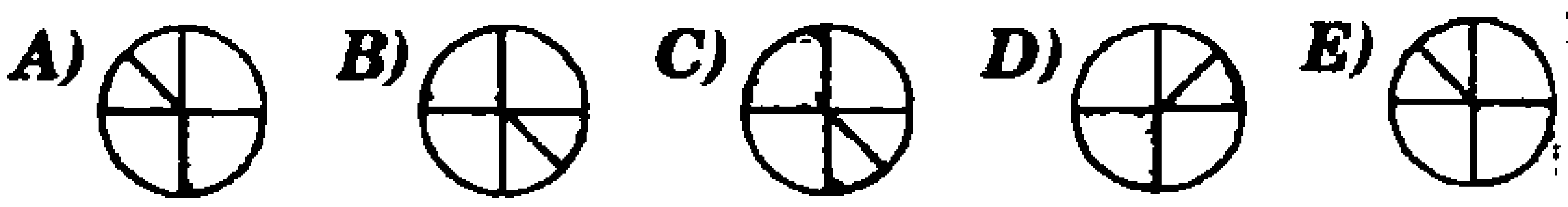
Fig. 1 ***Fig. 2***

RPTA : "D"

EJEMPLO 9 :

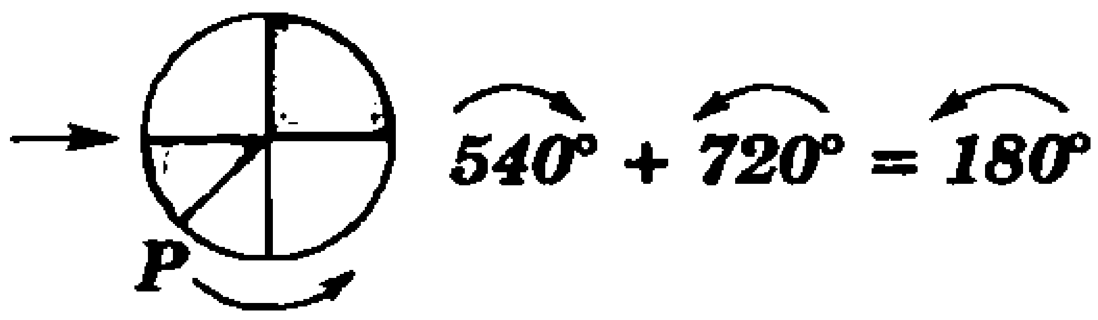
Si una de las figuras se traslada sobre la otra, y luego la figura resultante gira ***540°*** en sentido horario y , posteriormente , ***720°*** en sentido antihorario , ¿cuál es la posición final de dicha figura?



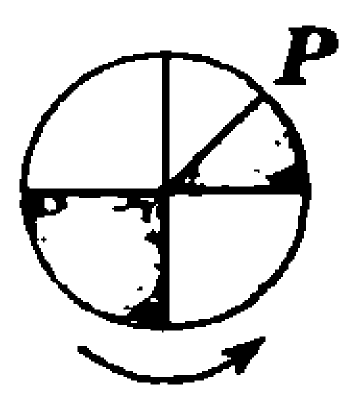


RESOLUCIÓN :

* Luego de la traslación :



* Al girar ***180°*** en sentido antihorario , se obtiene:

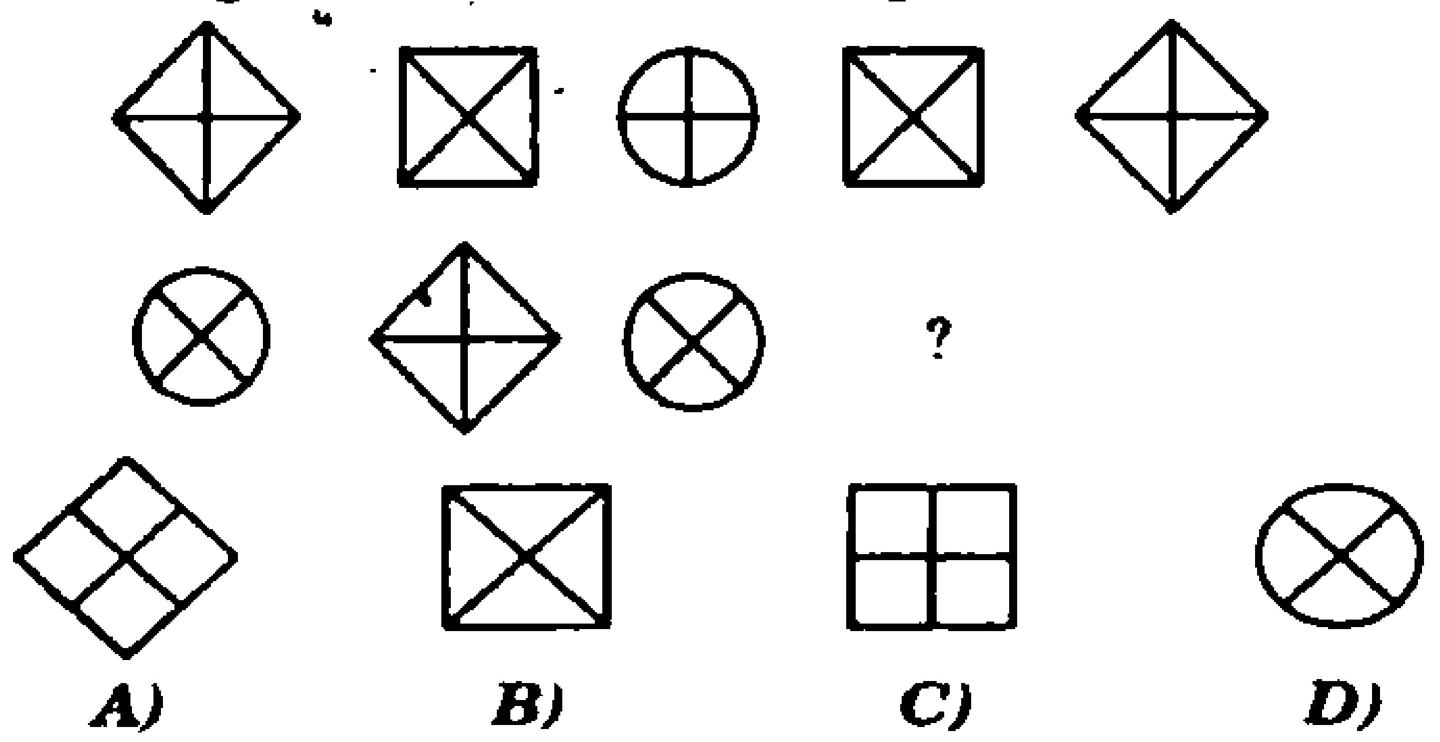


RPTA : "D"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

¿Qué figura continúa en la siguiente serie?



RESOLUCIÓN :

* En la *1°* fila se observa que hay un rombo, un cuadrado y un círculo y dentro de ellos una cruz, un aspa y una cruz respectivamente.

* En la *2°* fila observamos que también están el cuadrado, el rombo y el círculo y dentro de ellos un aspa, una cruz y un aspa .

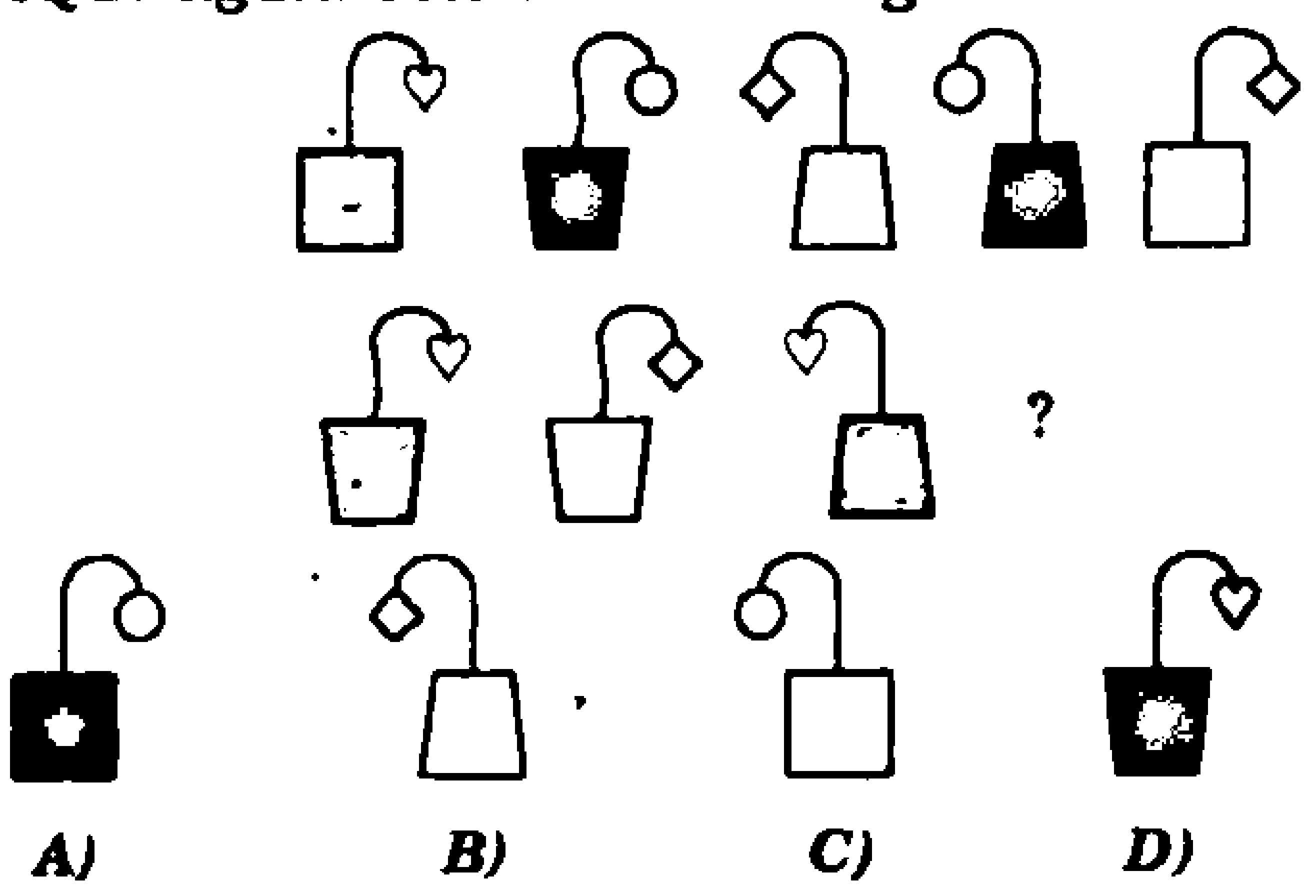
* En la *3°* fila están : el rombo y el círculo (falta el cuadrado) dentro de ellos una cruz y un aspa, falta una cruz.

* Escogemos la figura *C* , el cuadrado con la cruz.

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

¿Qué figura continúa en la siguiente serie?



RESOLUCIÓN :

* En la *1°* fila se observa que hay tres macetas de tres formas y tres colores diferentes. Además, lo tres tallos y las tres flores son diferentes.

* En la *2°* fila observamos que también se cumplen las mismas condiciones .

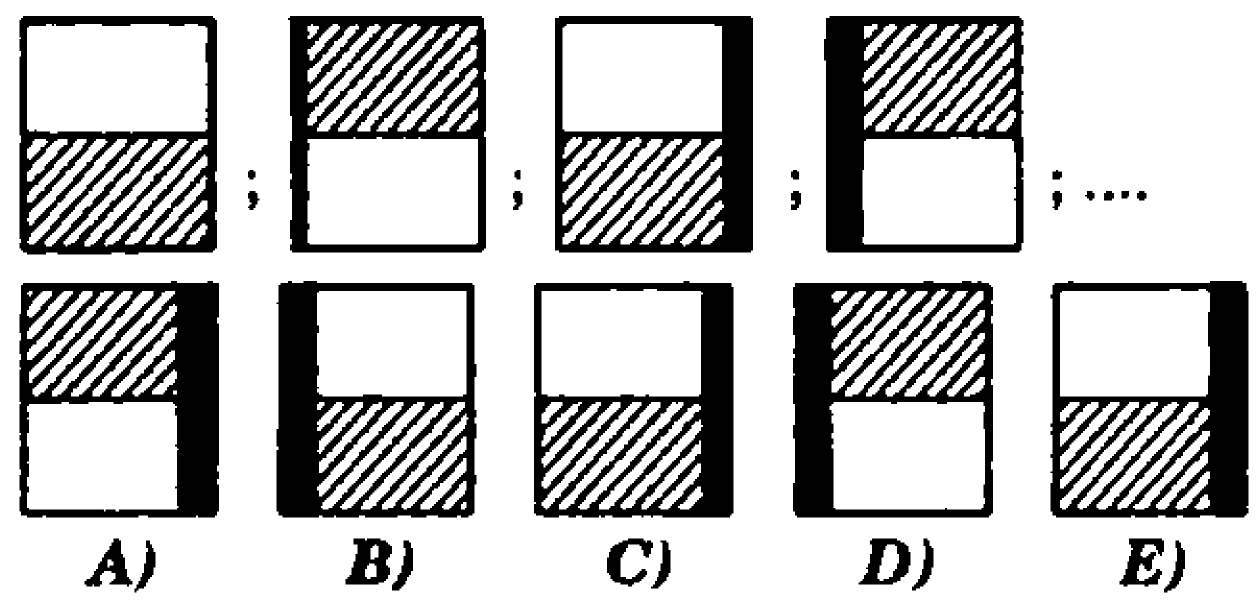
* En la *3°* fila las figuras deben cumplir las mismas propiedades, para ello observamos qué maceta, tallo y flor falta y escogemos entre las posibilidades dadas.

Entre las opciones escogemos la figura *A* .

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

¿Qué figura continua ?



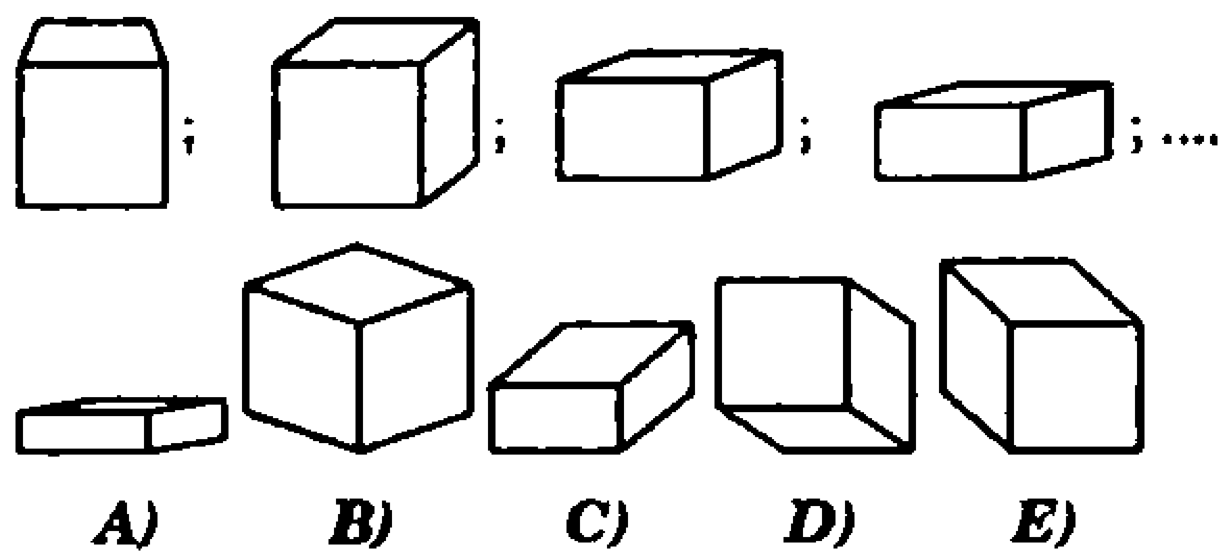
RESOLUCIÓN :

* La columna pintada se alterna de derecha a izquierda, a la vez que se va ensanchando. Asimismo, la zona sombreada cambia en cada figura : de arriba, hacia abajo sucesivamente; luego la figura que sigue según este orden de cambios es la *E*.

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

¿Qué figura continua ?



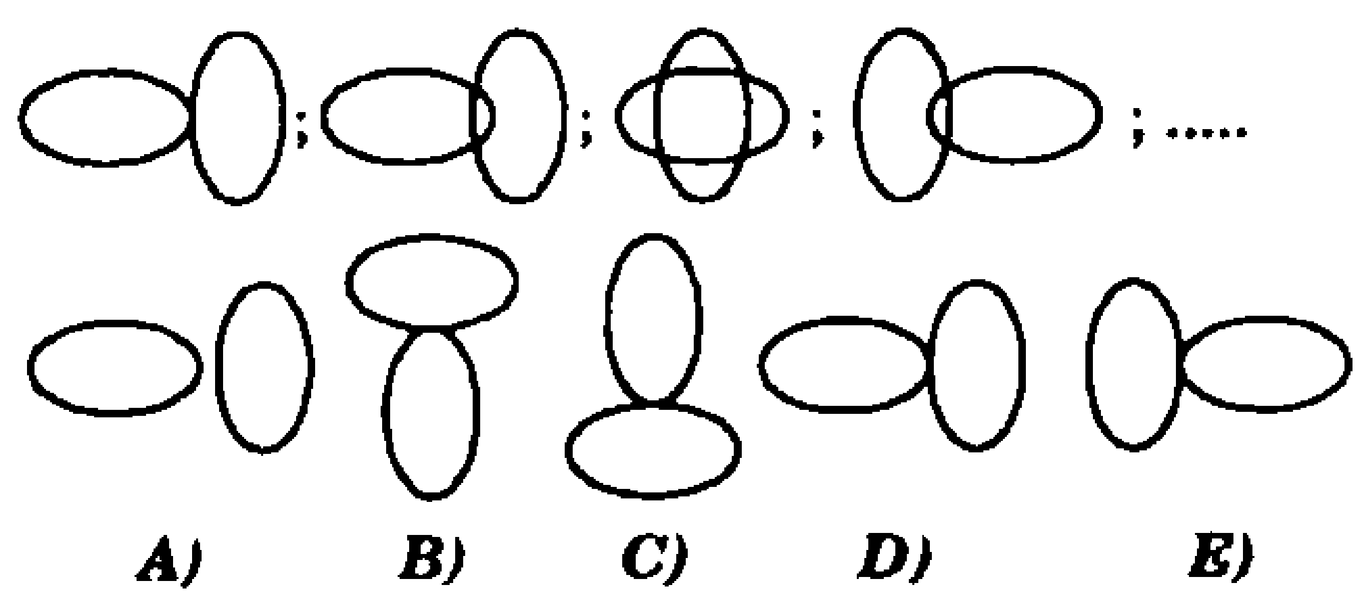
RESOLUCIÓN :

* El cubo se aprecia en perspectiva, orientándose la observación hacia la derecha, a la vez que en cada figura, el cubo disminuye en altura . Luego la figura que sigue es la *A*.

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

¿Qué figura continua ?



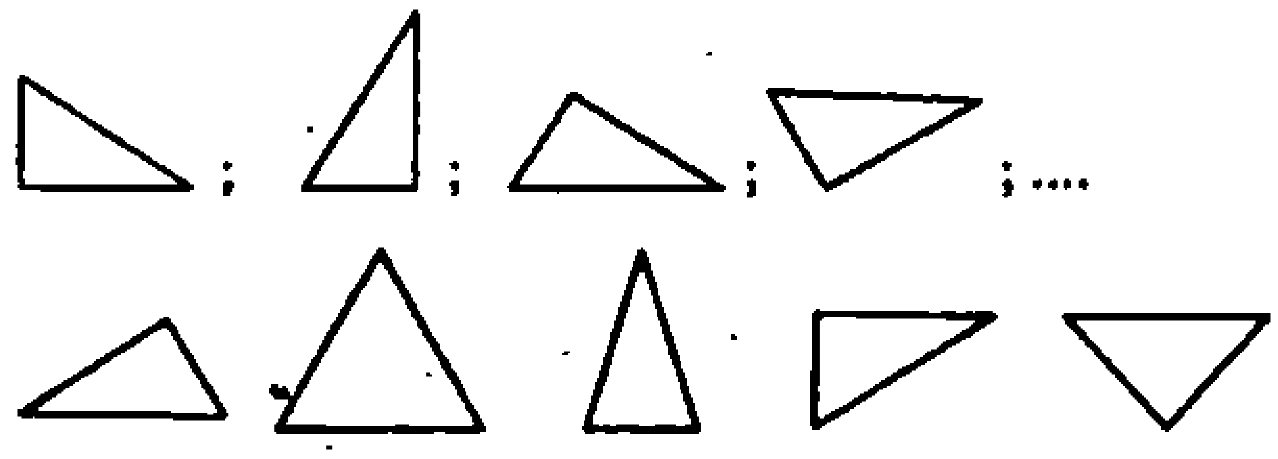
RESOLUCIÓN :

* El óvalo de la izquierda, en cada figura, se va desplazando hacia la derecha, hasta cruzar completamente al otro, que mantiene su posición vertical. La figura que sigue es la *E*.

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

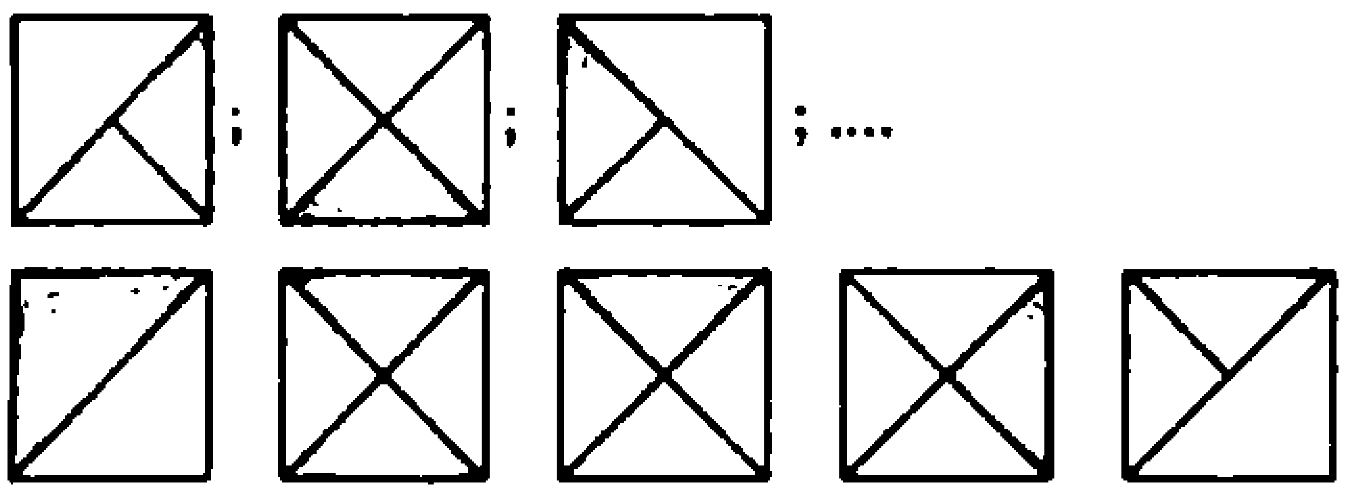
RESOLUCIÓN :

* En la sucesión dada el triángulo (que tiene forma de escuadra) no cambia, ni de forma, ni de dimensiones , aunque sí , de orientación , aunque sin seguir un orden especial . Luego la única alternativa que mantiene la forma es la ***D***.

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

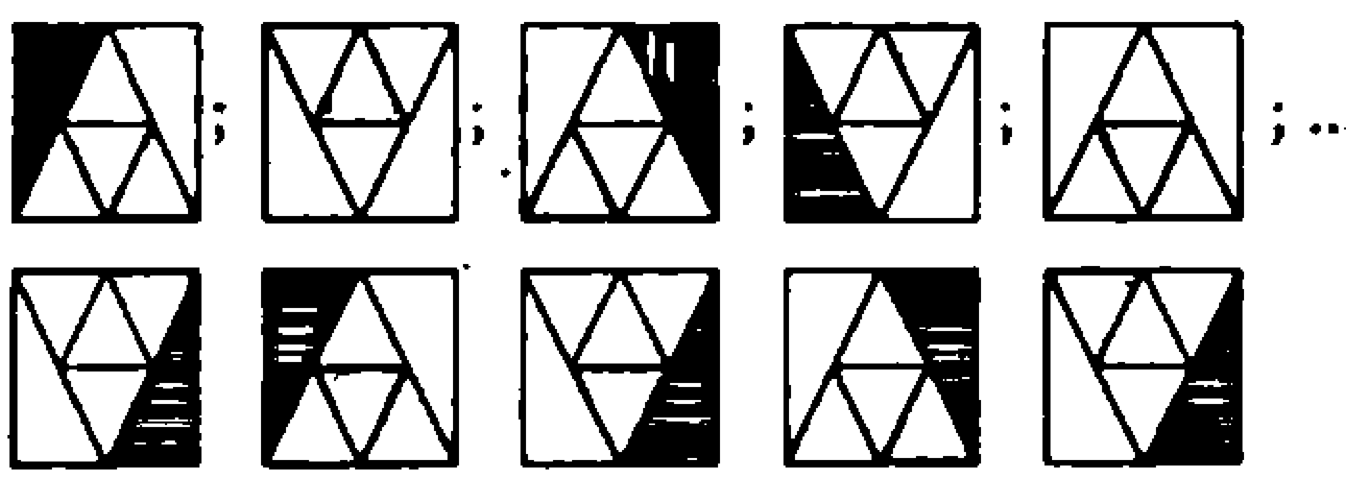
RESOLUCIÓN :

* En cada figura se pinta, siguiendo un giro en sentido horario, cada uno de los cuatro triángulos que se forman al trazar las diagonales del cuadrado, la figura que sigue debe tener, según esto, pintado el triángulo superior , es decir la figura ***C*** .

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

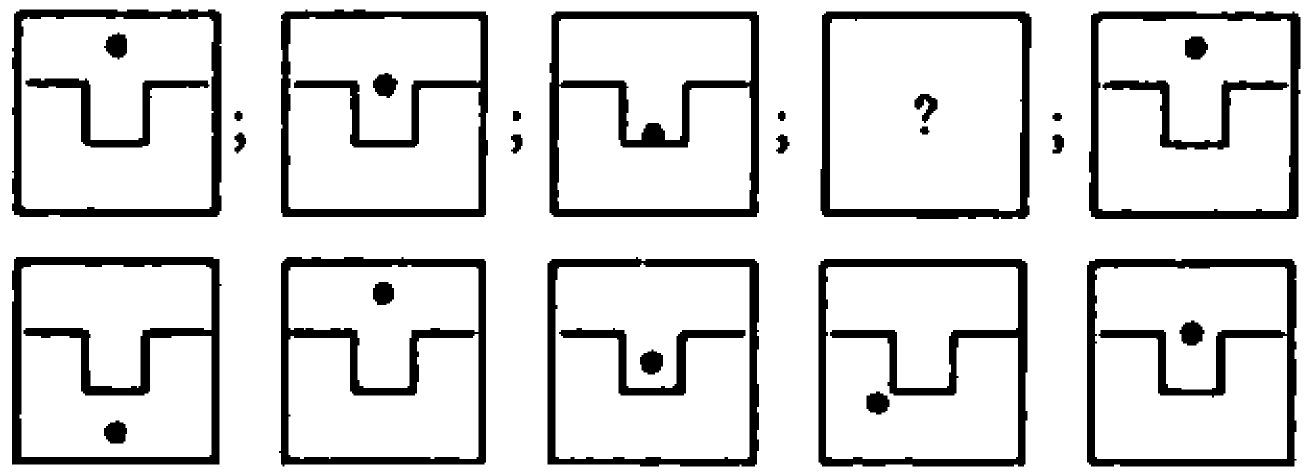
RESOLUCIÓN :

* En cada figura el triángulo mayor se alterna primero hacia arriba y luego hacia abajo. Observando el triángulo pintado de negro , éste en los triángulos orientados hacia arriba se alternan así : hacia la derecha, hacia la izquierda y al centro. Finalmente en los triángulos orientados hacia abajo, el triángulo pintado se alterna primero en el centro , luego hacia la derecha y finalmente le corresponderá estar en la izquierda . El símbolo que presenta estas características es ***E***.

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

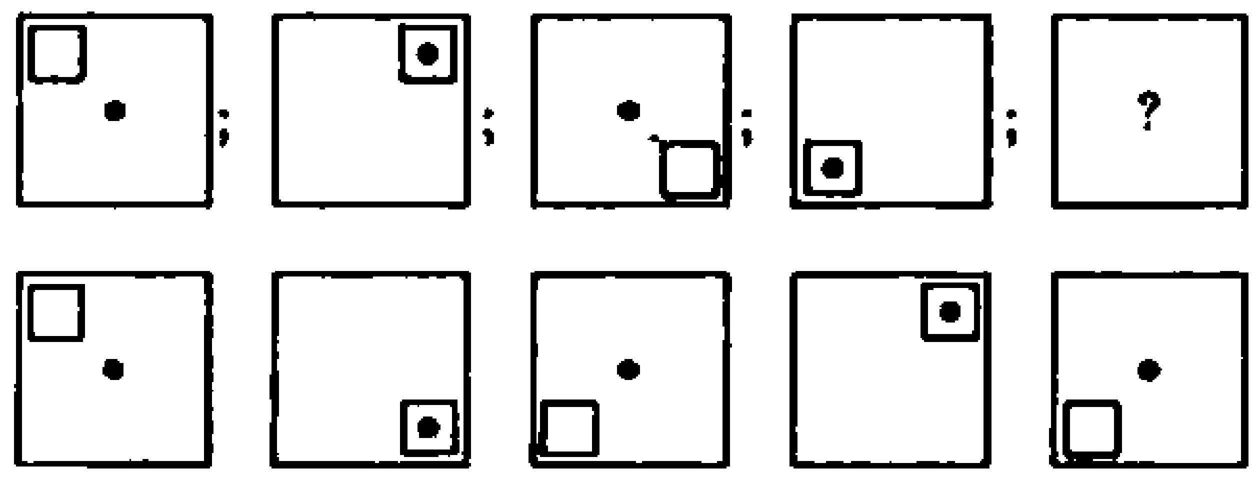
RESOLUCIÓN :

* El pequeño círculo desciende y asciende hasta su posición original. La 4ᵃ figura debera ser como se muestra (igual a la 2ᵈᵃ).

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

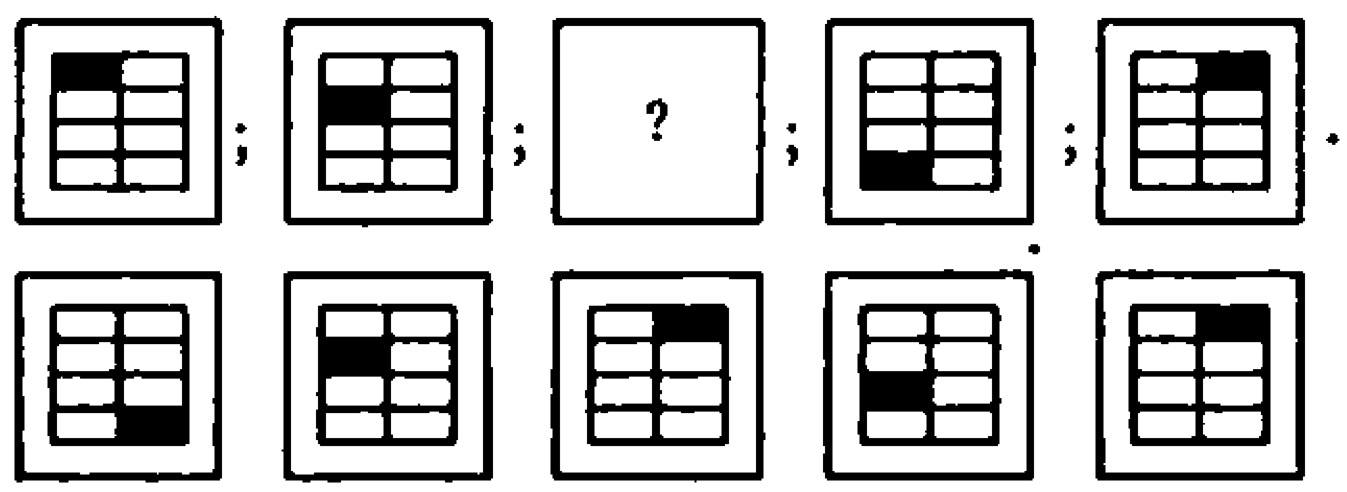
RESOLUCIÓN :

* El punto aparece alternadamente en el centro o dentro del cuadrito que recorre las esquinas en sentido horario . La figura faltante es :

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

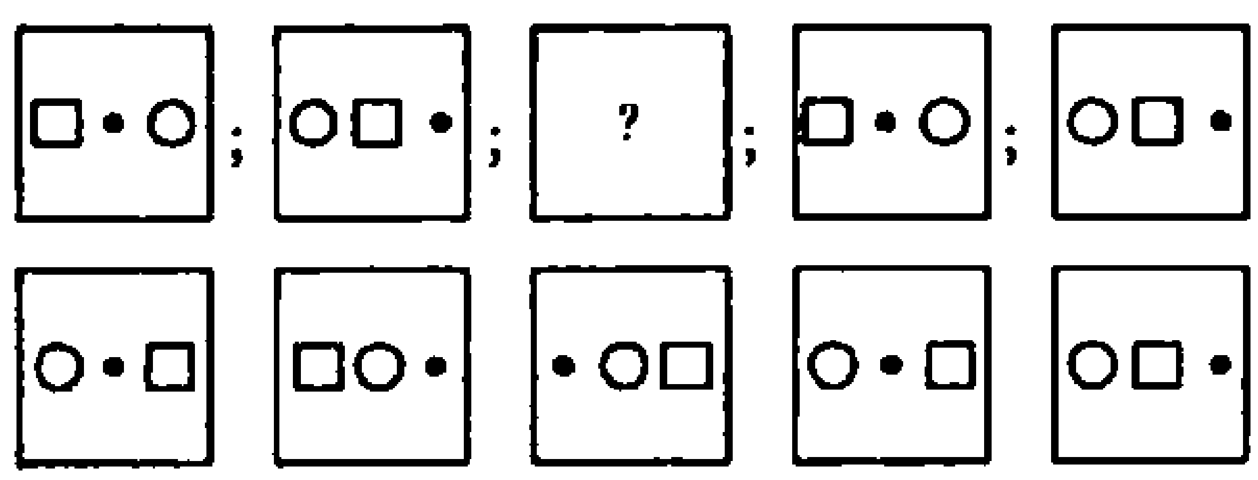
RESOLUCIÓN :

* El pequeño rectángulo pintado va recorriendo de arriba hacia abajo las partes de la figura principal. La 3ʳᵃ figura debe ser :

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

¿Qué figura continua ?



A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

* El cuadrado, el punto y el círculo aparecen en un orden secuencial de izquierda a derecha . En la figura faltante, el punto debe iniciar la secuencia . Luego la

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Indicar la alternativa que continúa la siguiente serie gráfica :

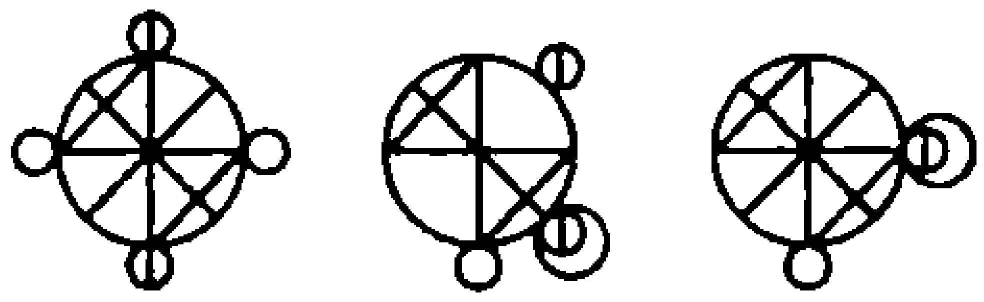
RESOLUCIÓN :

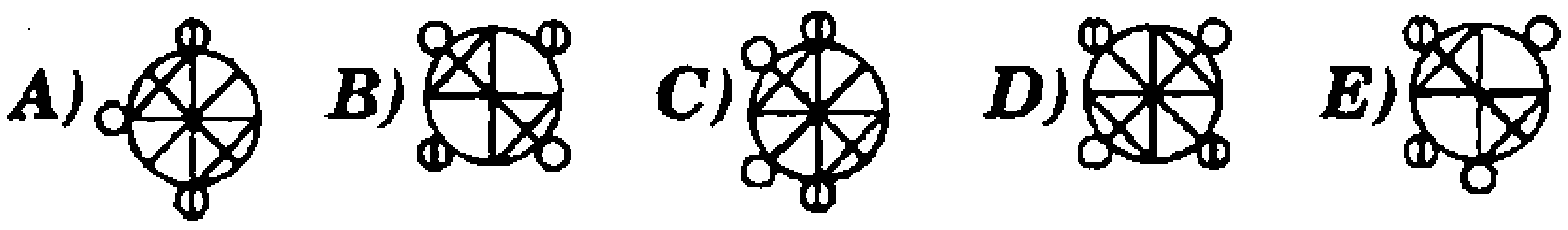
* Se observa que la región sombreada se desplaza una posición hacia abajo y la región rayada se desplaza una posición hacia arriba , con la observación que cuando la región sombreada o rayada llegan a la parte superior o inferior se sombrean o rayan ambos .

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

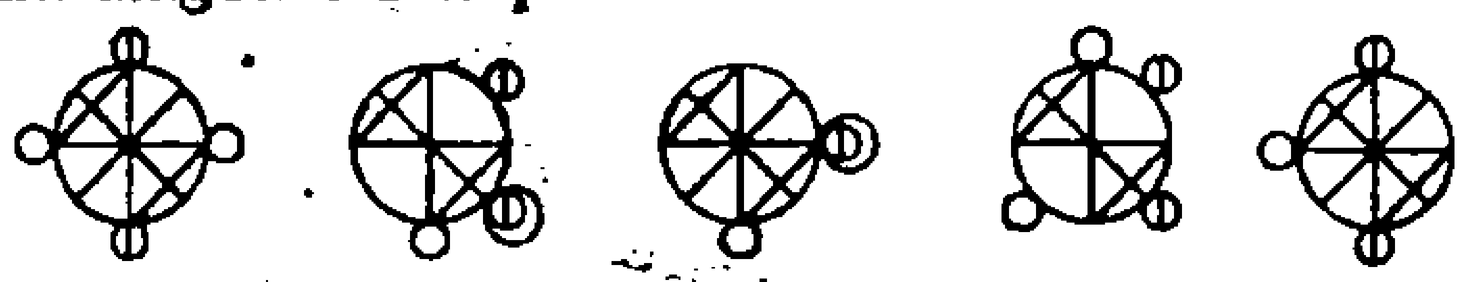
Indicar la alternativa que continúa coherentemente la siguiente secuencia gráfica :





RESOLUCIÓN :

* La diagonal está presente .



SI NO SI NO SI

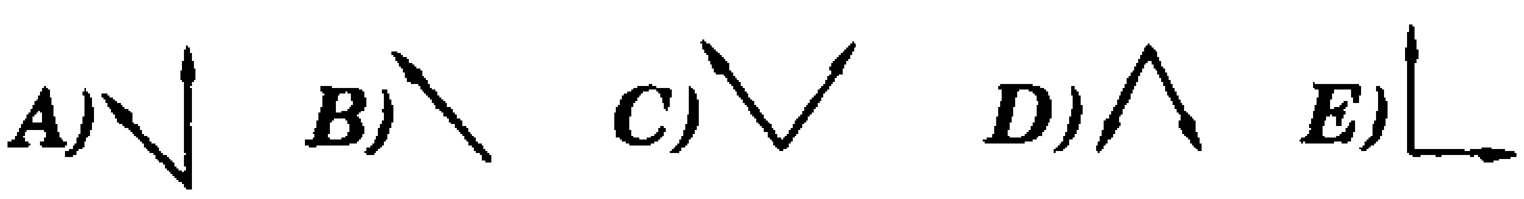
⇒ las bolitas (⊕) tienen giro contrario de 45°.

⇒ las bolitas (○) tienen giro contrario , uno viaja de ***90°*** en ***90°*** (sentido horario) y de ***45°*** en ***45°*** (sentido antihorario) .

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Indicar la alternativa que continua coherentemente la siguiente secuencia gráfica .



RESOLUCIÓN :

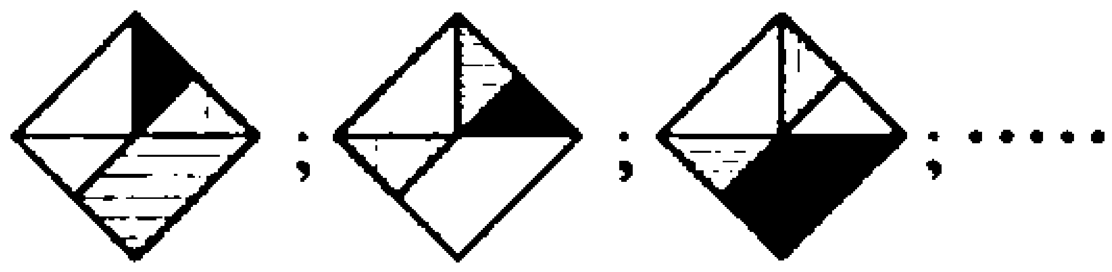
* Por el giro de las agujas, ambas en sentido antihorario , una viaja de ***90°*** en ***90°*** y otra de ***45°*** en ***45°***.

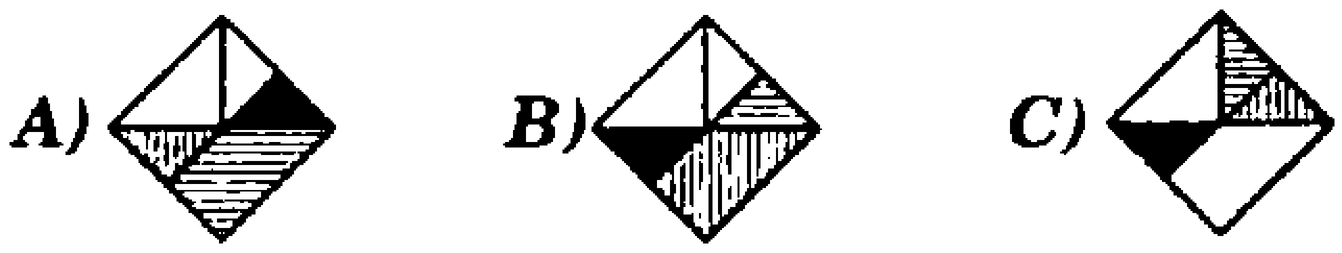
* luego , la siguiente será :

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

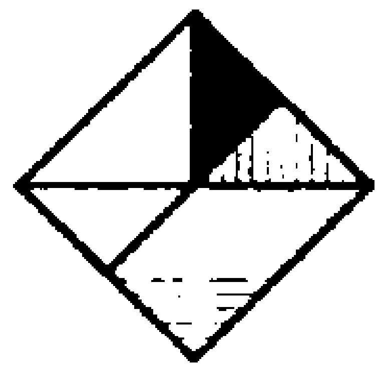
Indicar la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente secuencia gráfica :





RESOLUCIÓN :

* En la figura principal :

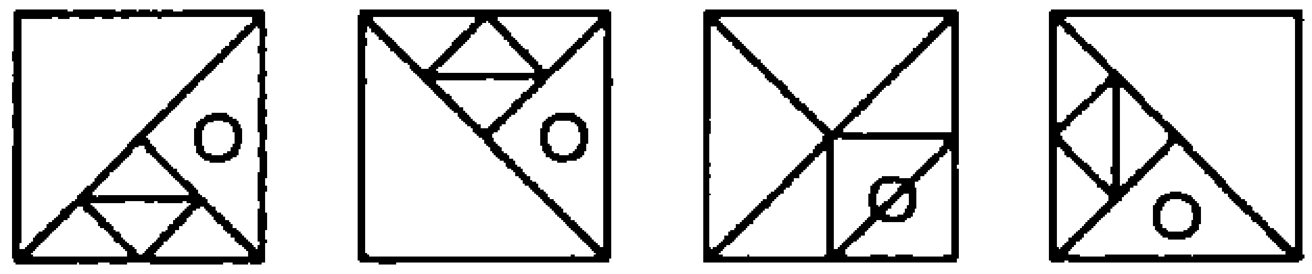


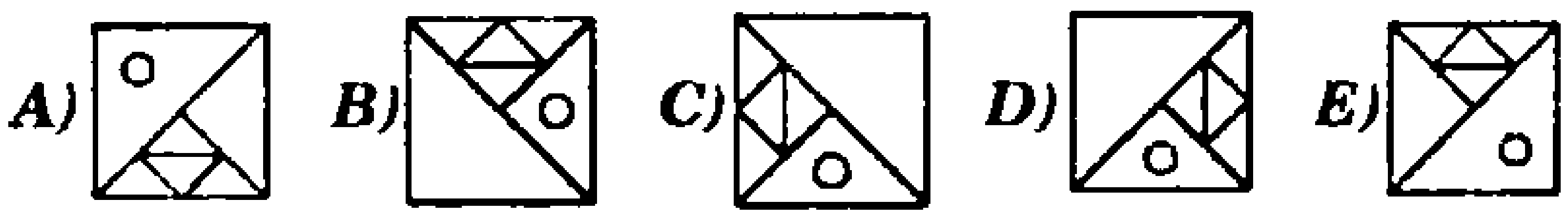
* Se distinguen ***3*** tipos de sombreado que giran secuencialmente en sentido horario .

RPTA : "B"

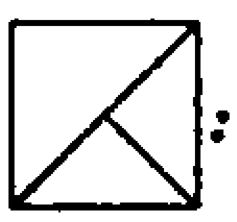
PROBLEMA 17 :

Indicar la alternativa que continua adecuadamente la siguiente serie gráfica :

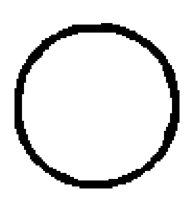




RESOLUCIÓN :

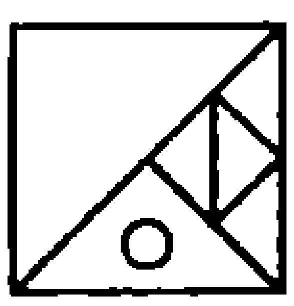


: Gira ***90°*** en sentido antihorario



: Se desplaza una región en sentido horario dentro de las ***3*** regiones simples del cuadrado

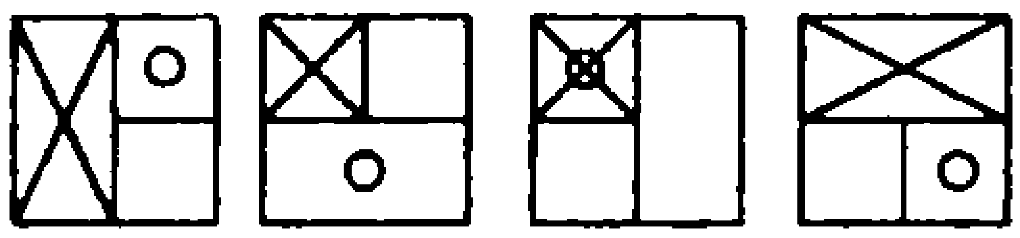
* Por lo tanto , se deduce que la figura que sigue es :

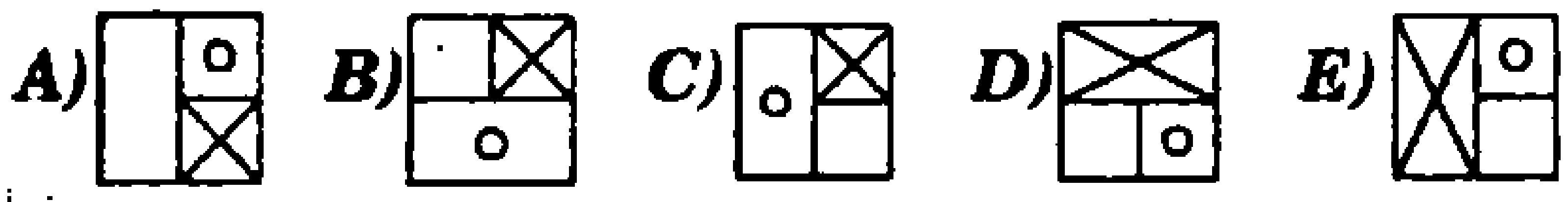


RPTA : "D"

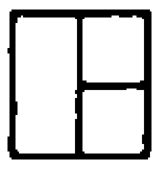
PROBLEMA 18 :

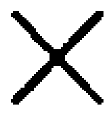
Indicar la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente serie gráfica :

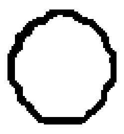




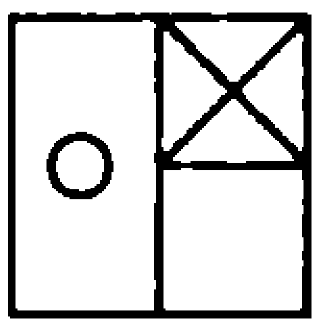
RESOLUCIÓN :

 : Esta figura gira *90°* en sentido antihorario.

 : Esta figura se desplaza (interiormente) una posición cada vez en sentido horario.

 : Esta figura se desplaza una posición cada vez en sentido antihorario.

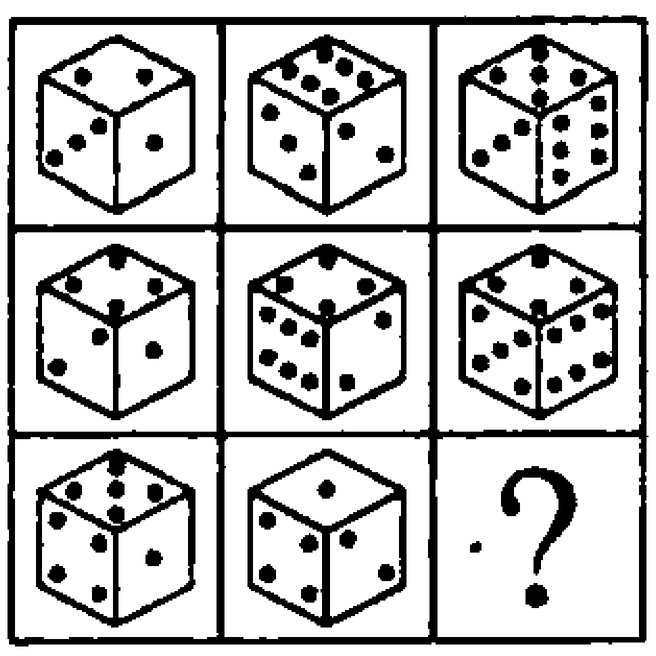
* Por lo tanto se deduce que la figura que continua es:

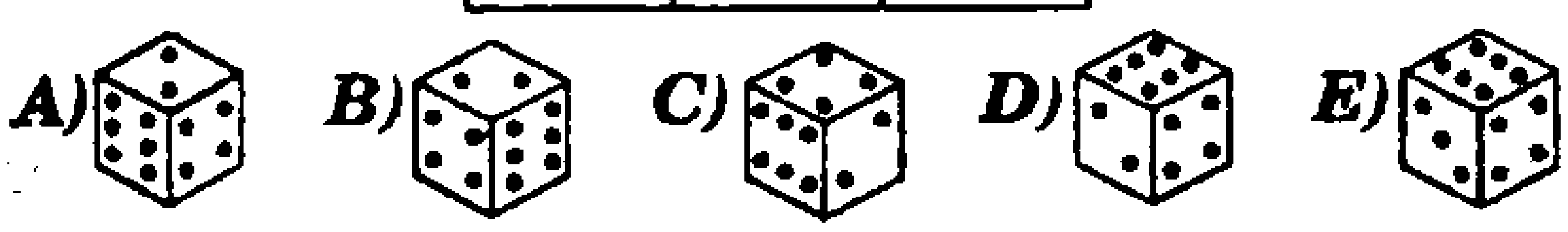


RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Indicar la figura que falta :





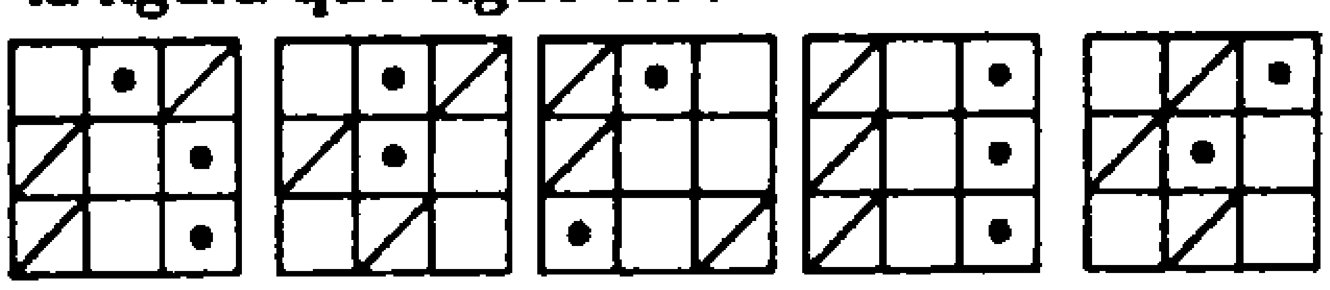
RESOLUCIÓN :

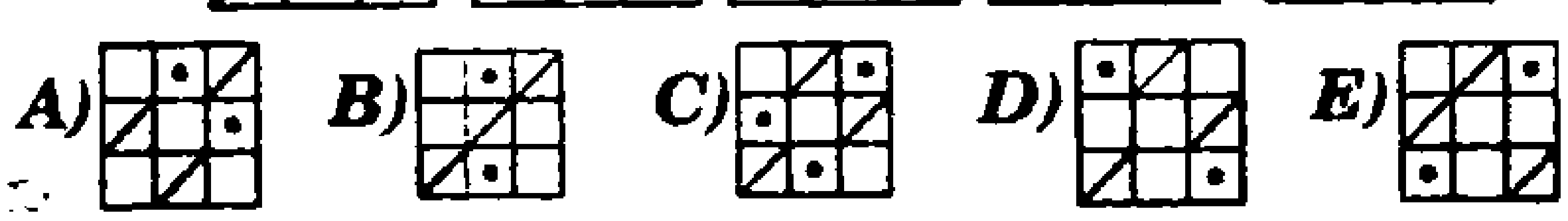
* En la fila ① el giro es hacia abajo en torno a la cara de los *3* puntos
* En la fila ② el giro es hacia la derecha en torno a la cara de los *4* puntos
* En la fila ③ el giro es hacia arriba en torno a la cara de los *4* puntos

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

Indicar la figura que sigue en :





RESOLUCIÓN :

* Cada cuadrado se analiza por filas :

1ra fila : La posición de la diagonal se repite *2* veces y la posición del punto se repite *3* veces.

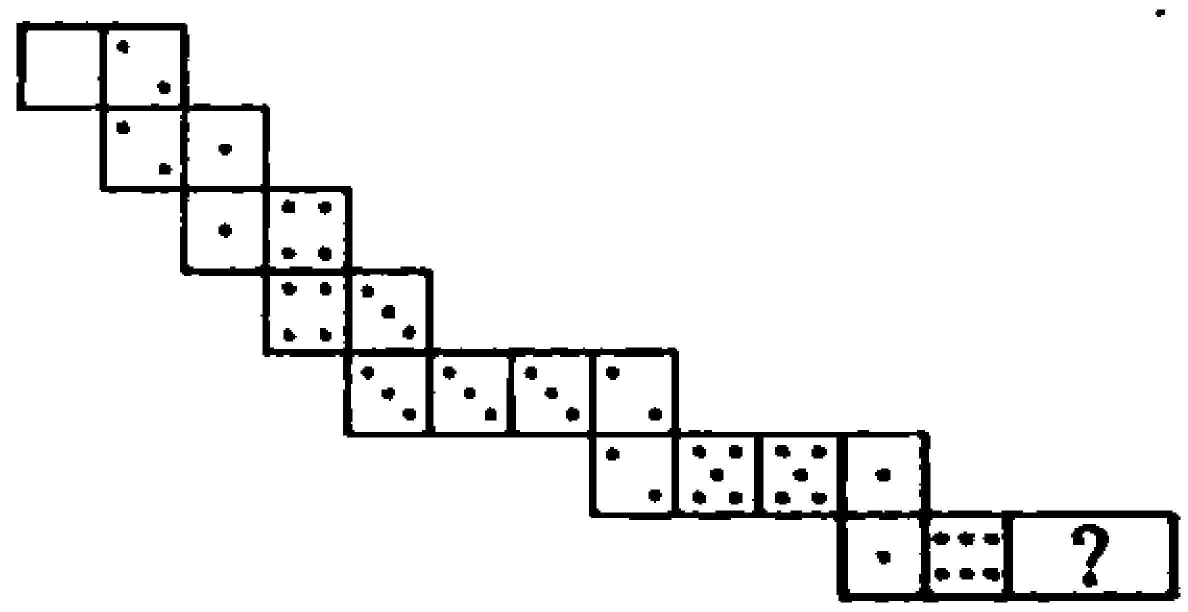
2da fila: La posición de la diagonal se mantiene constante. El punto se desplaza de casillero en casillero hacia la izquierda.

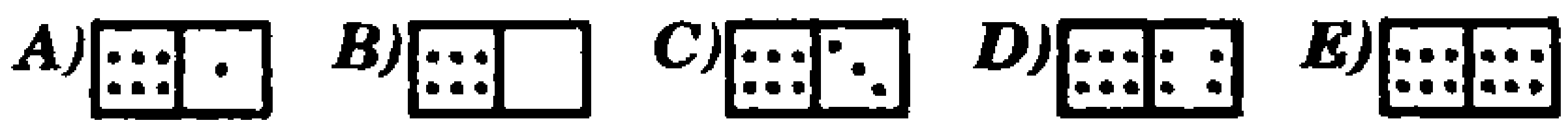
3ra fila : La diagonal y el punto se desplazan de casillero en casillero pero en sentidos opuestos .

RPTA : "E"

PROBLEMA 21 :

¿Qué ficha continuará?

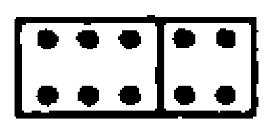




RESOLUCIÓN :

* Al observar la cantidad de puntos de cada horizontal, tendremos :

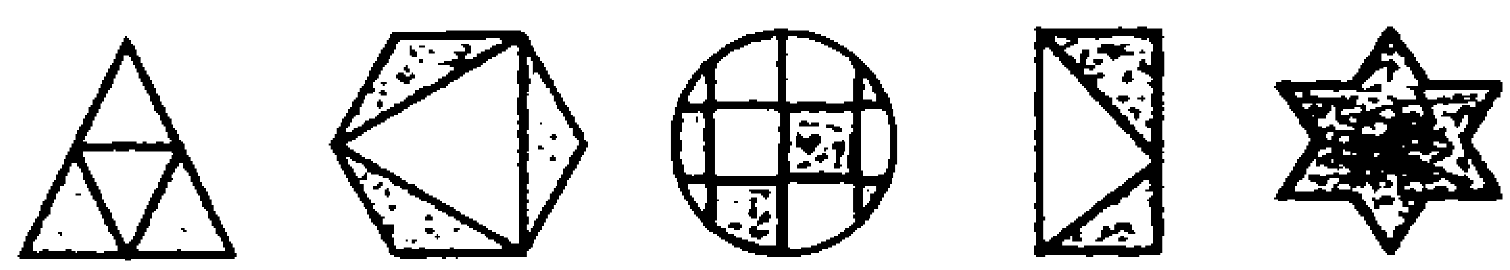
$$\underbrace{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;}_{\text{Secuencia de los números primos}} \longrightarrow \underbrace{7+x}_{17\ (\text{se Deduce})}$$

Falta : 

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Señale la figura que sigue :



(A) (B) (C) (D) (E)

RESOLUCIÓN :

* Considerando que parte de cada figura está sombreada .

$$0\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \ldots\ldots$$

$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$

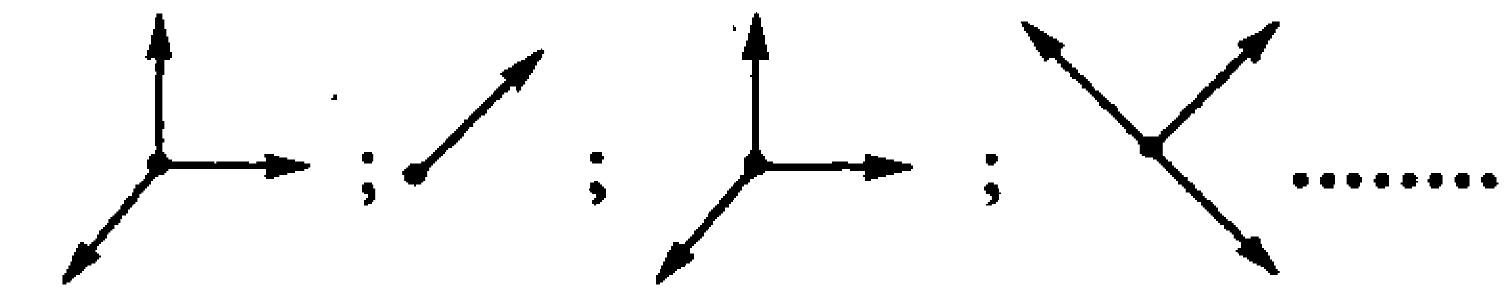
$$\frac{0}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{2}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{4}{4}=1\ (\text{TOTAL})$$

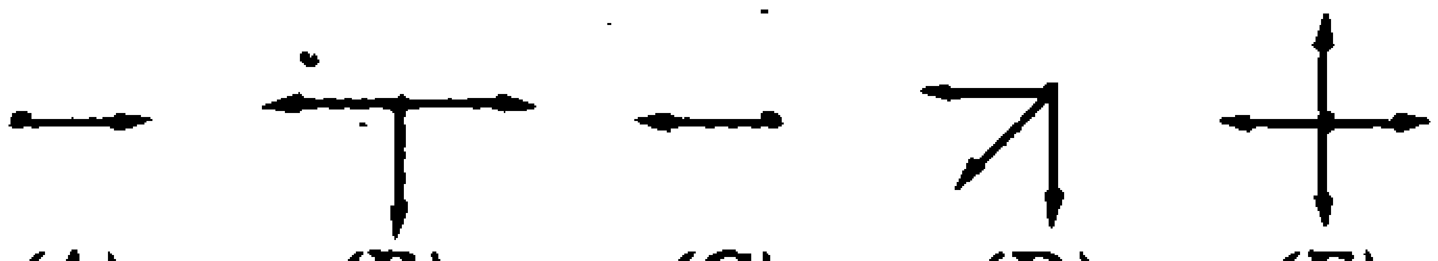
* Debemos buscar una figura que esté sombreada totalmente .

RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

¿Qué figura sigue?

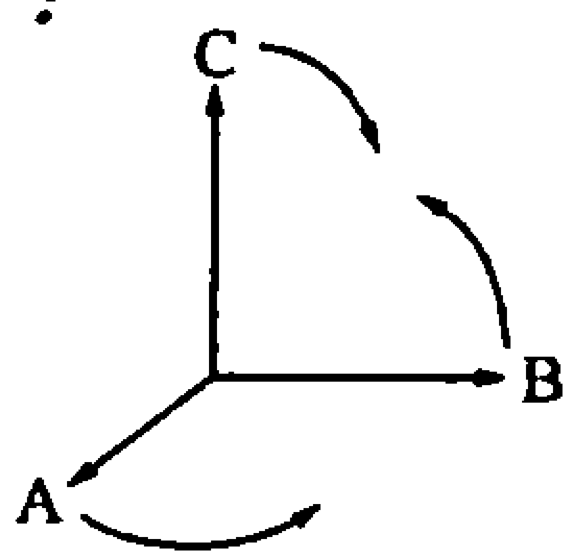




(A) (B) (C) (D) (E)

RESOLUCIÓN :

* "A" gira *180°*

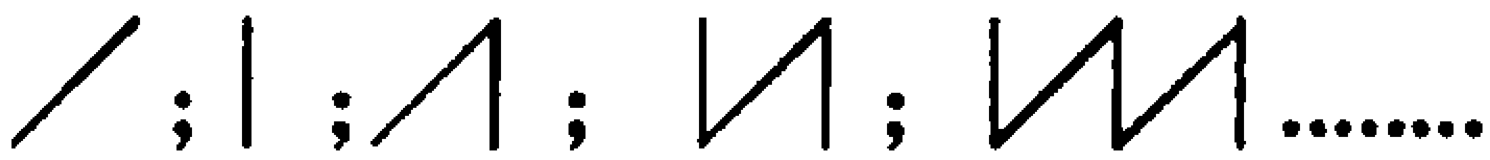


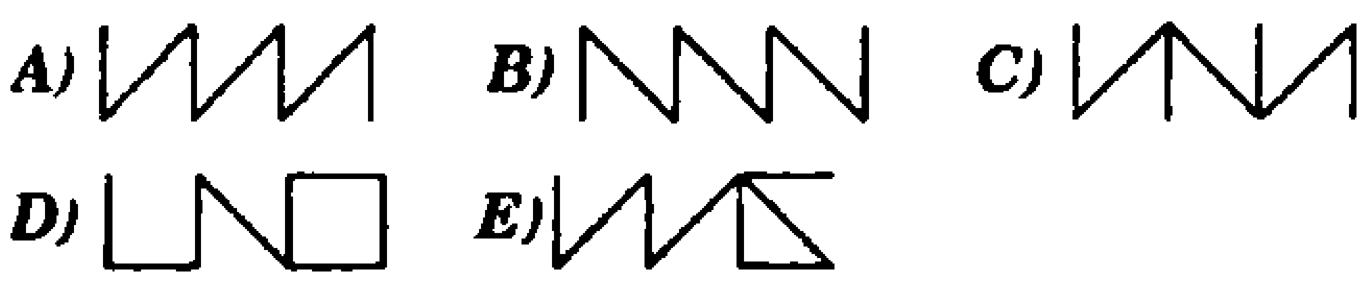
* *"B"* gira *45°* en sentido antihorario
* *"C"* gira *45°* en sentido horario .

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

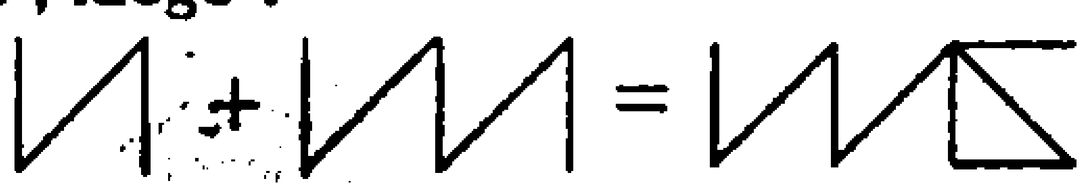
¿Qué figura continúa?





RESOLUCIÓN :

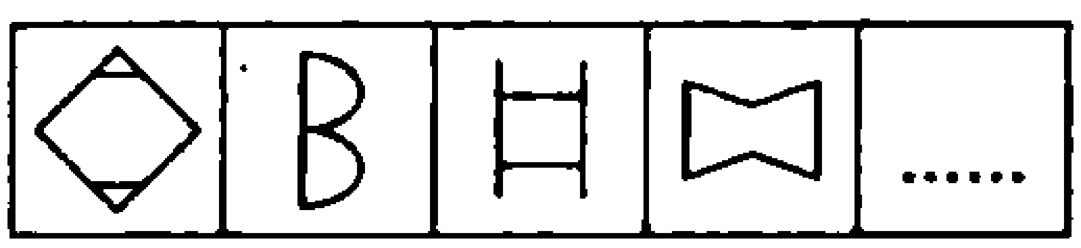
*Al unir dos figuras consecutivas , se obtiene la que sigue , luego :

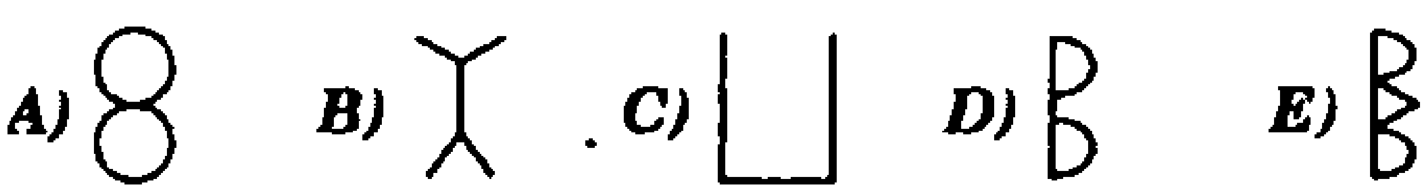


RPTA : "E"

PROBLEMA 25 :

¿Qué figura ocupa el lugar de orden *6* en la siguiente sucesión?





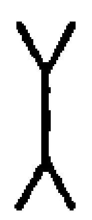
RESOLUCIÓN :

Considerando la mitad de cada figura se tendrá :

A ; D ; H ; M ; ...... ; ...

1 4 8 13 19 26

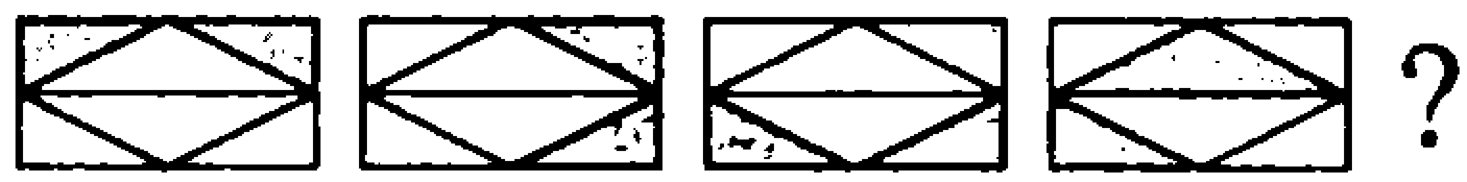
+3 +4 +5 +6 +7

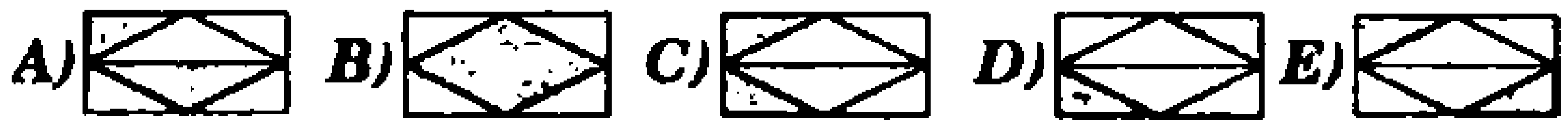
* La figura que piden será : 

RPTA : "B"

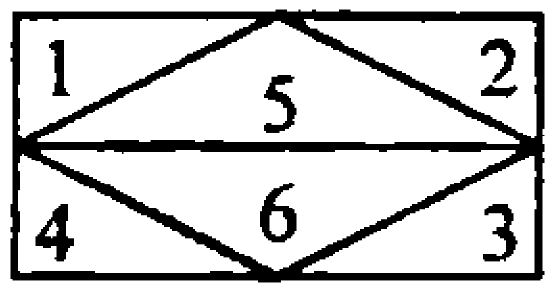
PROBLEMA 26 :

Indique la figura que continua, sabiendo que :

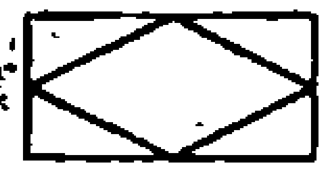




RESOLUCIÓN :



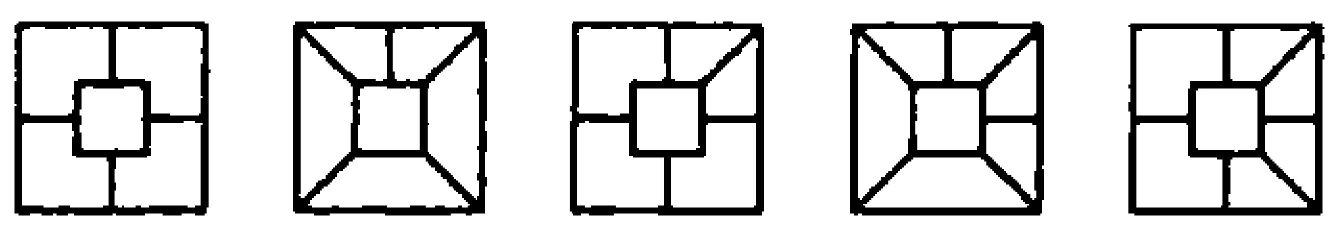
* Consideremos lo sombreado:

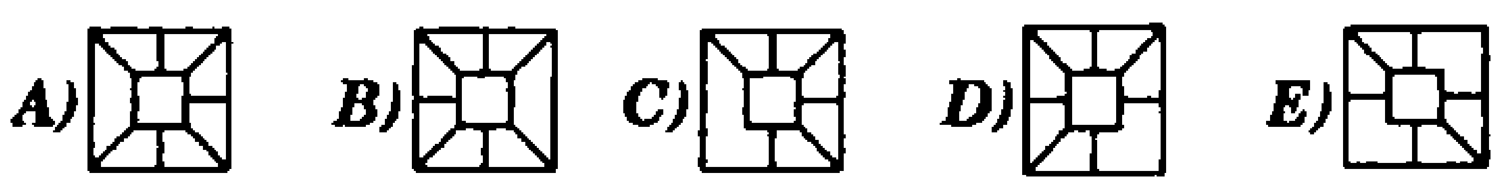
12 , 23 , 34 , 45 , 56 (Se deduce) → 

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Indique la alternativa que continúa la siguiente secuencia gráfica .





RESOLUCIÓN :

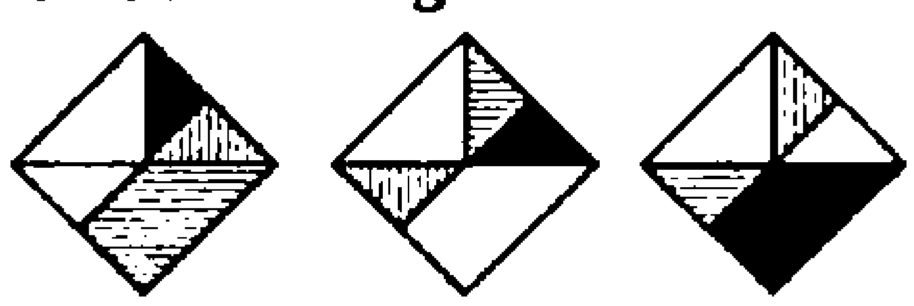
* Viendo las figuras de manera alternada . De la primera a la tercera aparece una línea y de la tercera a la quinta aparece otra línea .

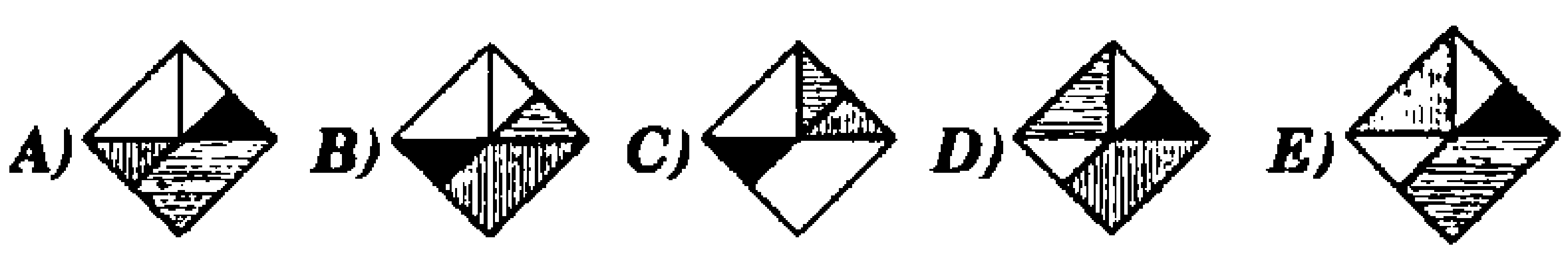
* Análogamente , de la segunda a la cuarta y de la cuarta a la sexta , que es la figura que sigue :

RPTA : "A"

PROBLEMA 28 :

Indicar la alternativa que continua adecuadamente la siguiente secuencia gráfica :





RESOLUCIÓN :

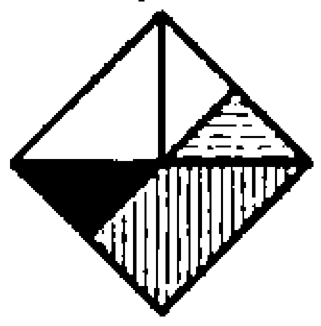
* La figura principal está dividida en cinco regiones simples , de las cuales tres están marcadas, una de ellas ***sombreada*** , otra con ***rayas verticales*** y otro con ***rayas horizontales*** .

La marca ***sombreada*** gira de una en una región , en sentido horario.

El *rayado vertical* gira de *2* en *2* regiones , en sentido horario.

El *rayado horizontal* gira de *3* en *3* regiones , en sentido horario .

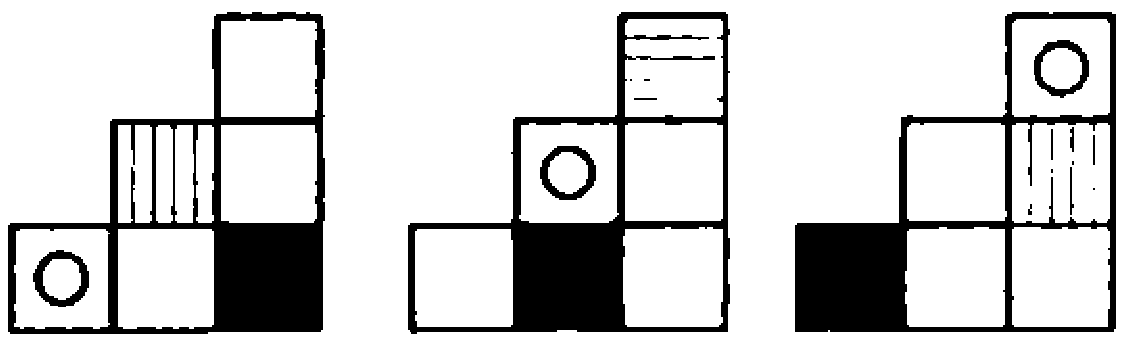
Entonces la figura que continua es :

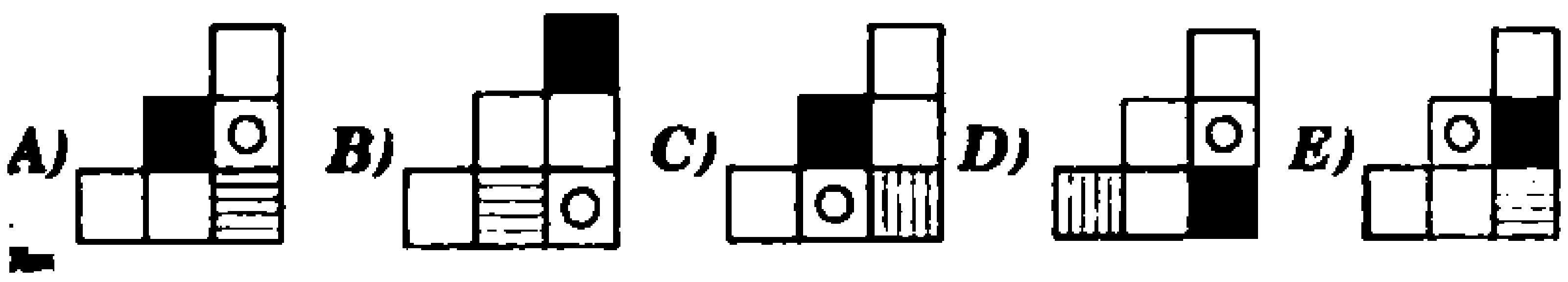


RPTA : "B"

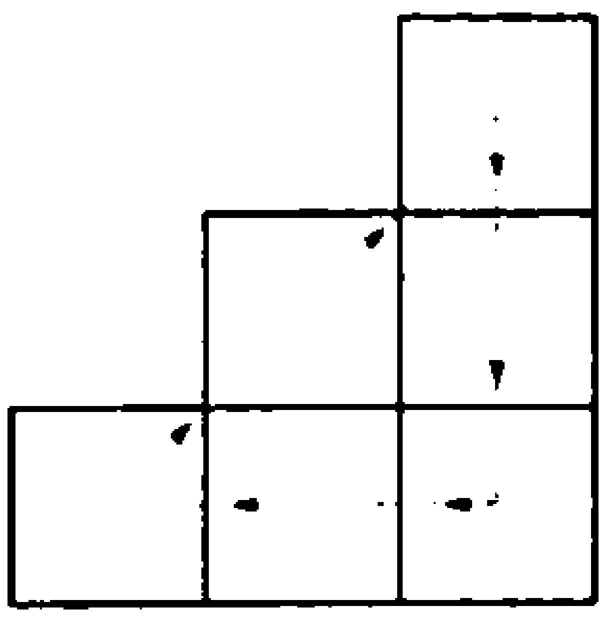
PROBLEMA 29 :

Indicar la alternativa que continúa coherentemente la siguiente secuència gráfica :





RESOLUCIÓN :



* Las figuras dentro de cada cuadrado giran una posición como indican las flechas . Además las líneas verticales y horizontales se alternan en cada avance.

RPTA : "A"

PROBLEMA 30 :

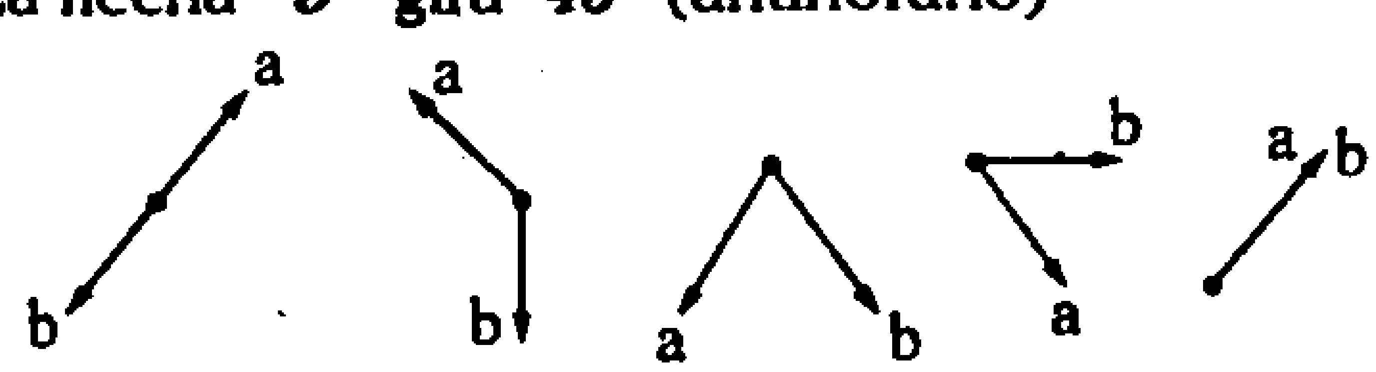
Indicar la alternativa que continua coherentemente la siguiente secuencia gráfica .

RESOLUCIÓN :

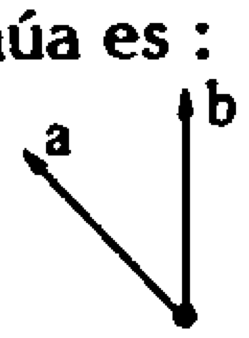
* Diferenciando cada una de las flechas vemos:

La flecha *"a"* gira *90°* (antihorario)

La flecha *"b"* gira *45°* (antihorario)



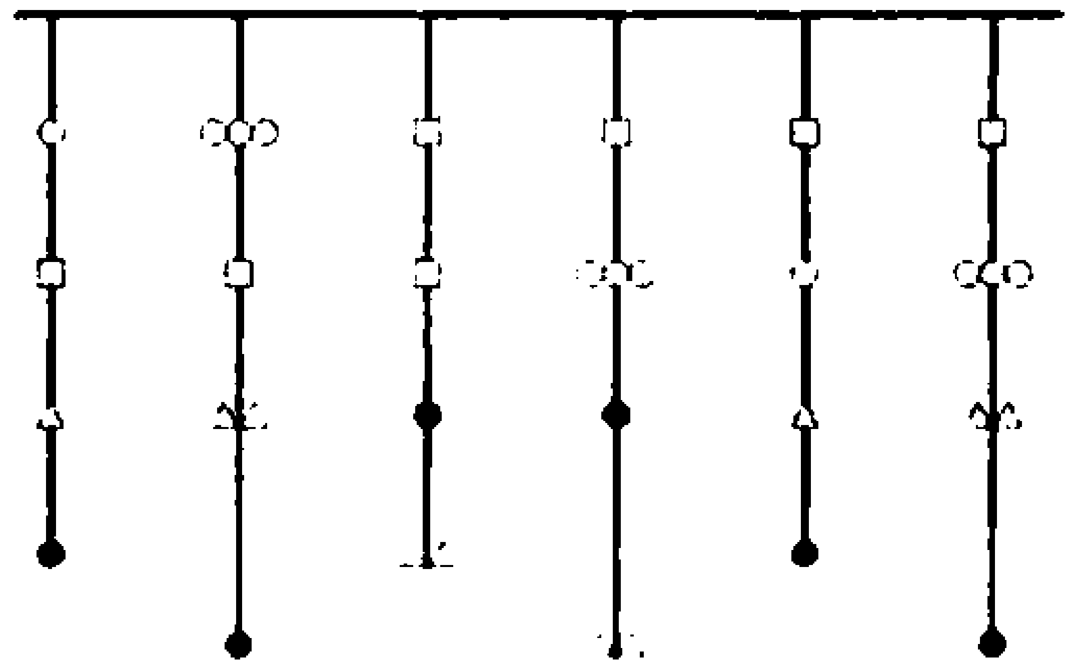
* La figura que continúa es :

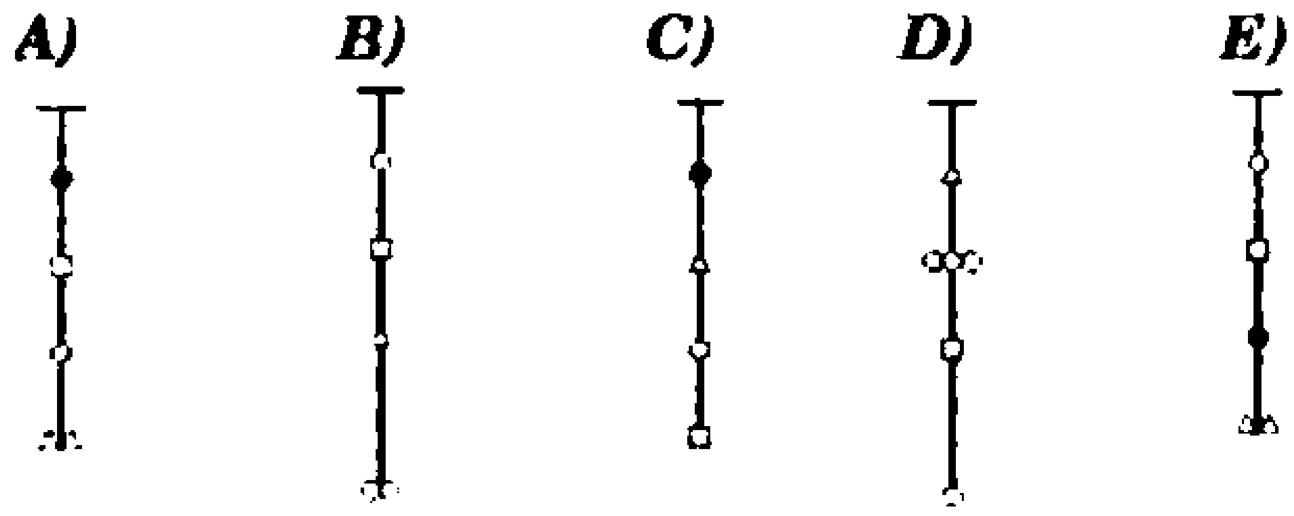


RPTA : "A"

PROBLEMA 31 :

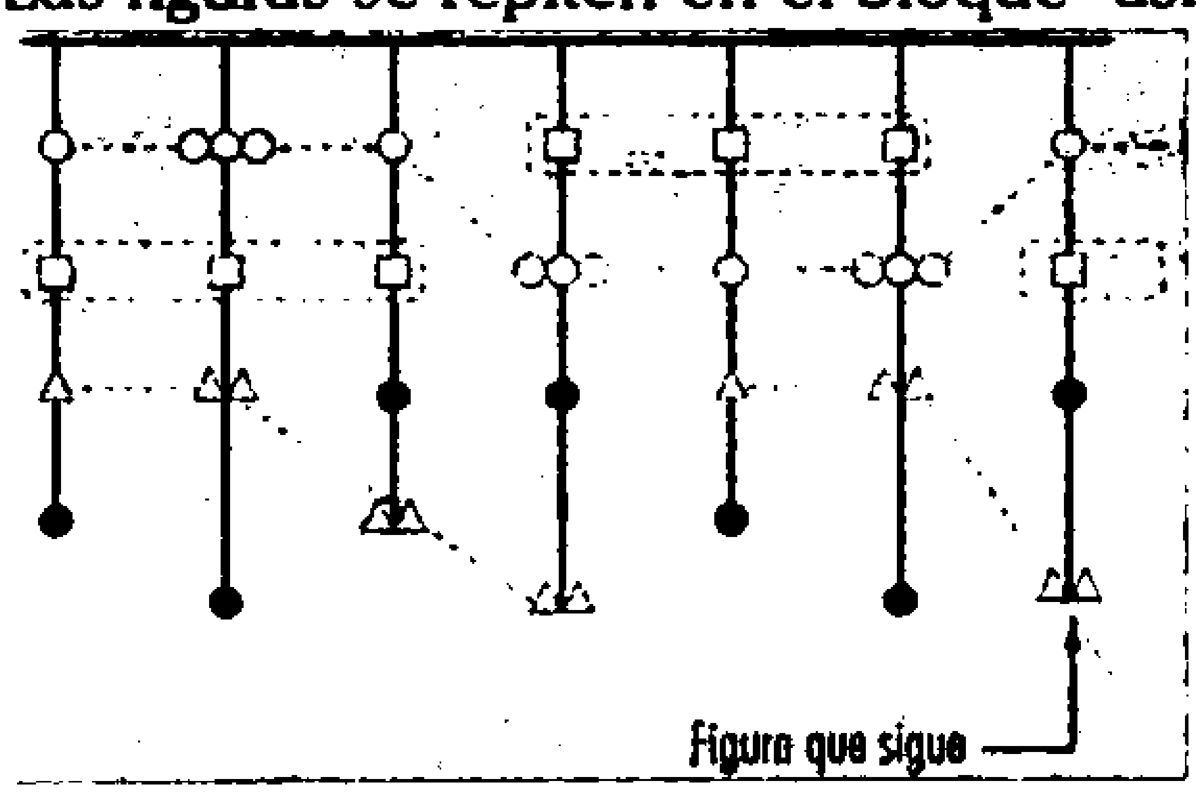
Indique la alternativa que continua correctamente las tres siguientes series gráficas :





RESOLUCIÓN :

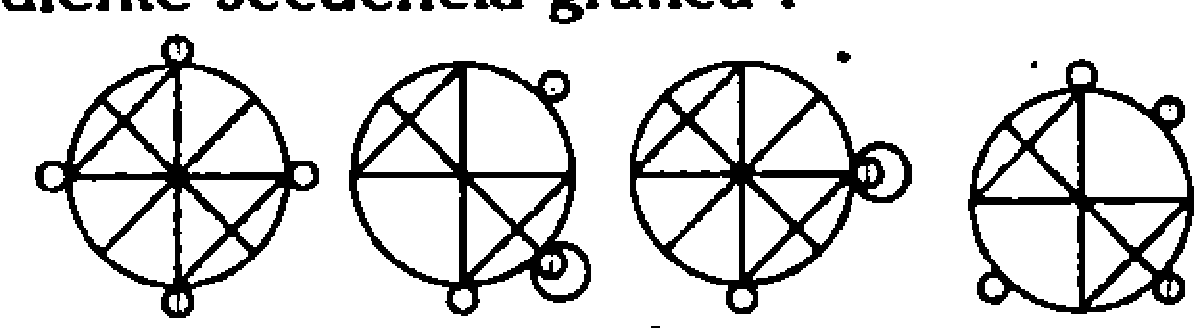
* Las figuras se repiten en el bloque así :

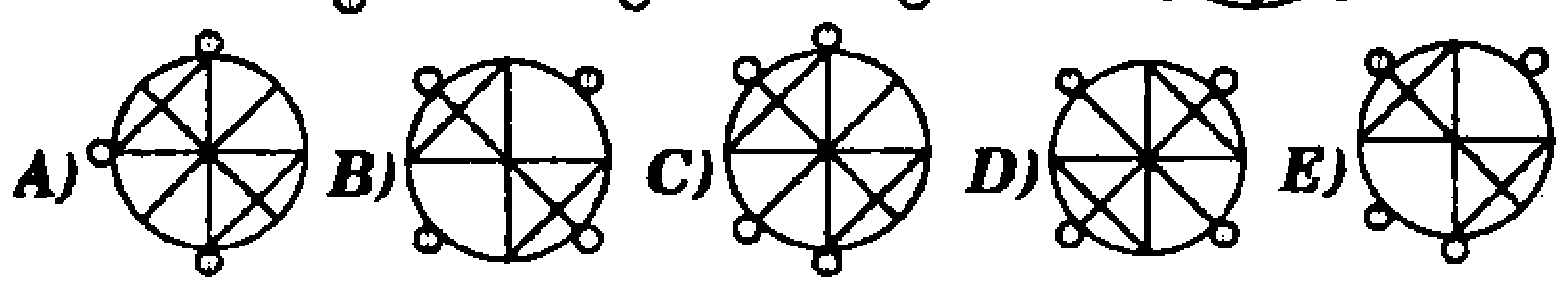


RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

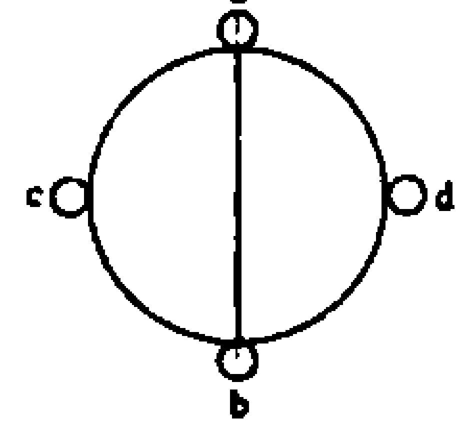
Indicar la alternativa que continúa coherentemente la siguiente secuencia gráfica :





RESOLUCIÓN :

*Analizando el movimiento de cada elemento asignado con letras , observamos :



– *"a"* gira *45°* (horario) – *"b"* gira *45°* (antihorario)

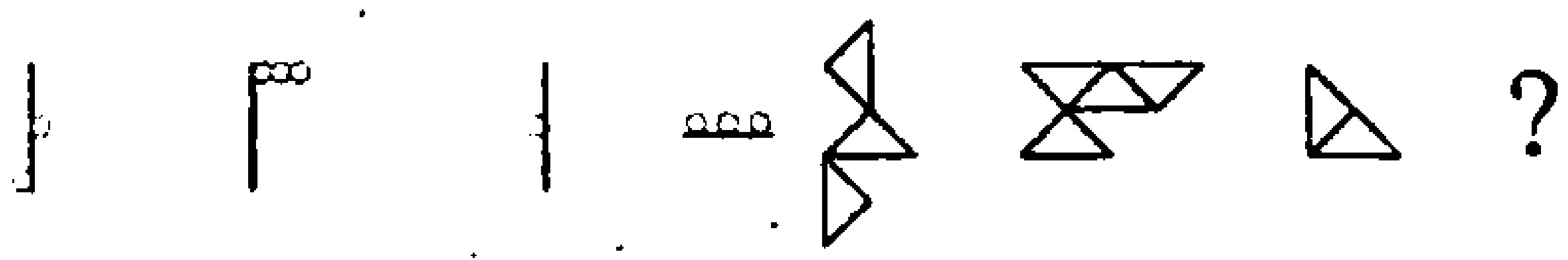
– *"c"* gira *90°* (antihorario) – *"d"* gira *45°* (horario)

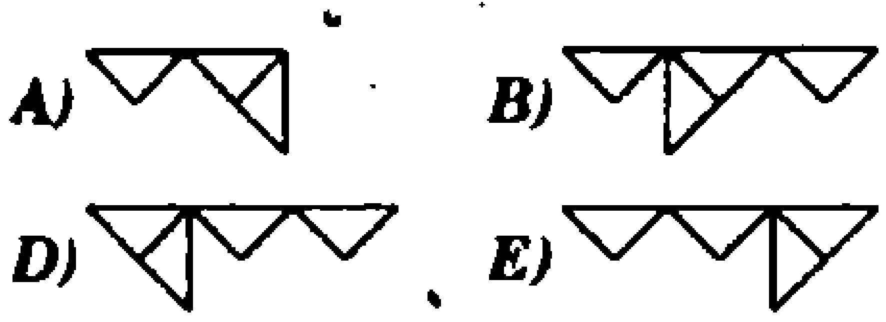
Además en cada figura falta un diámetro alternadamente .

RPTA : "A"

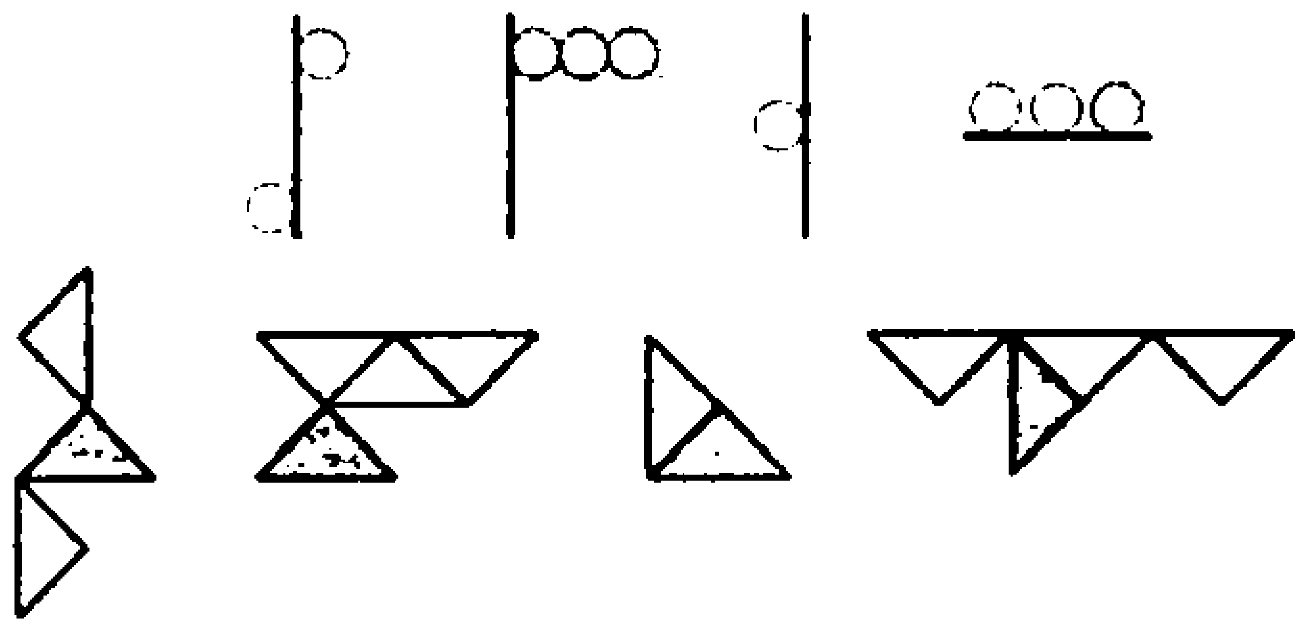
PROBLEMA 33 :

Siguiendo la secuencia superior, completar la secuencia inferior :





RESOLUCIÓN :

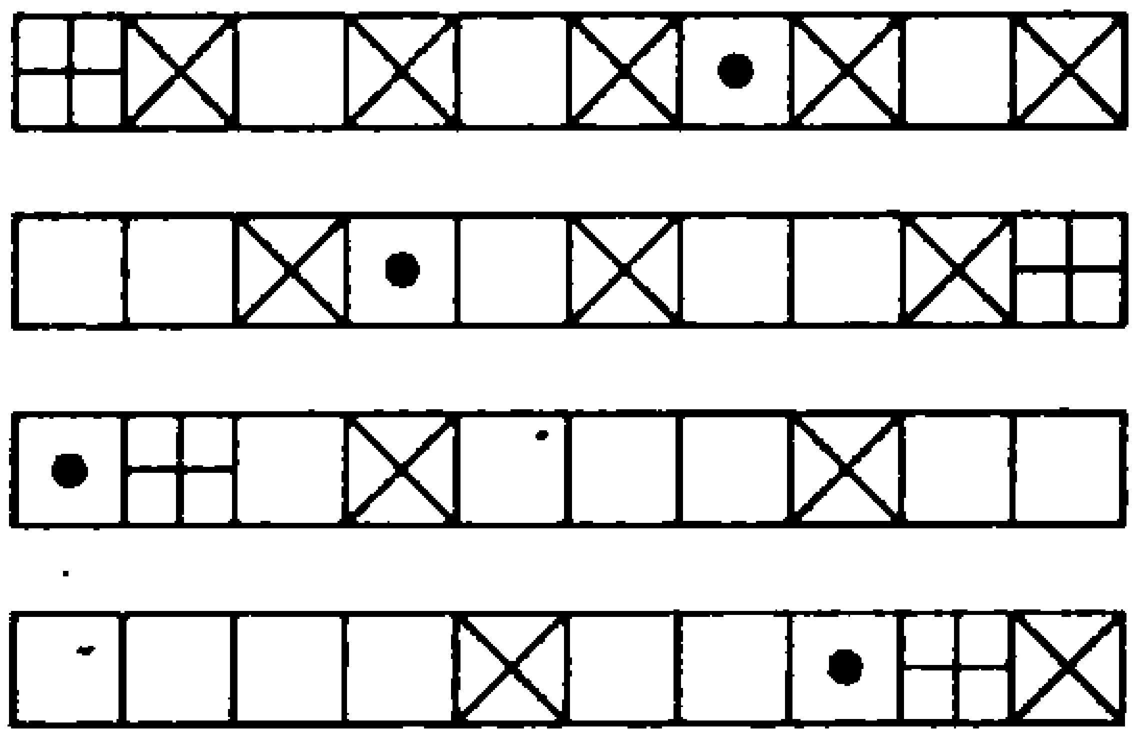


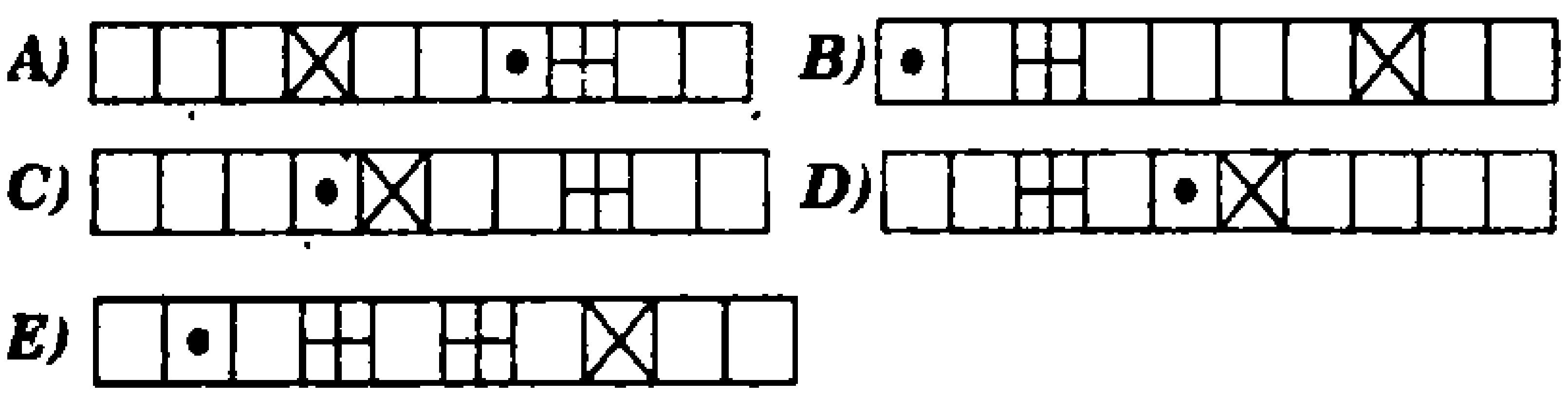
* El triángulo sombreado representa el palito en la misma posición y los otros a las bolitas .
* Del *3er*. al *4to*. caso el palito giró *90°* (horario) .

RPTA : "B"

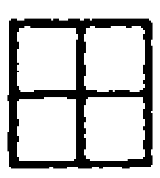
PROBLEMA 34 :

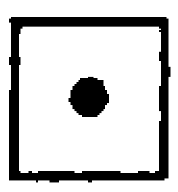
¿Qué figura continúa?





RESOLUCIÓN :

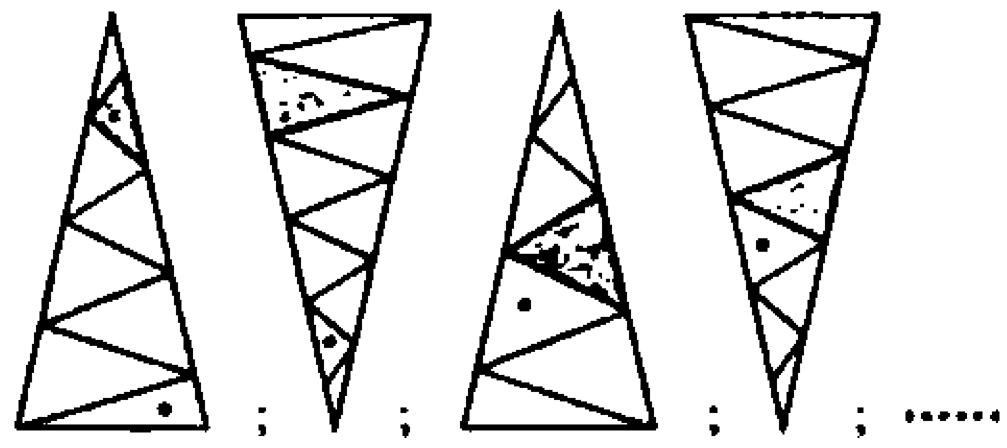
*  se desplaza *9* casillas a la derecha luego *8* casilla a la izquierda , sucesivamente disminuyendo una casilla en cada caso :

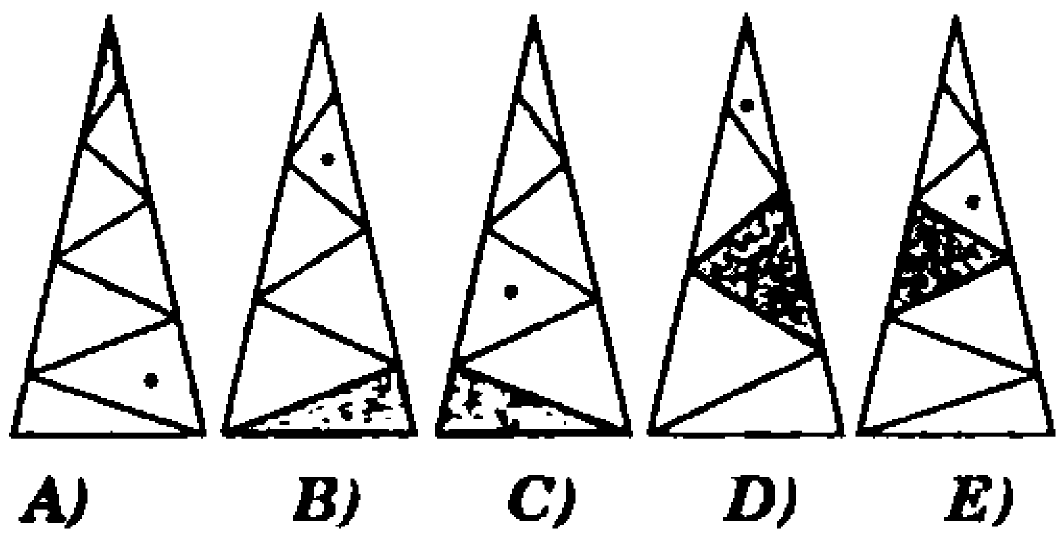
*  se desplaza de *3* en *3* hacia la izquierda , en forma sucesiva .

RPTA : "D"

PROBLEMA 35 :

¿Qué figura continua?





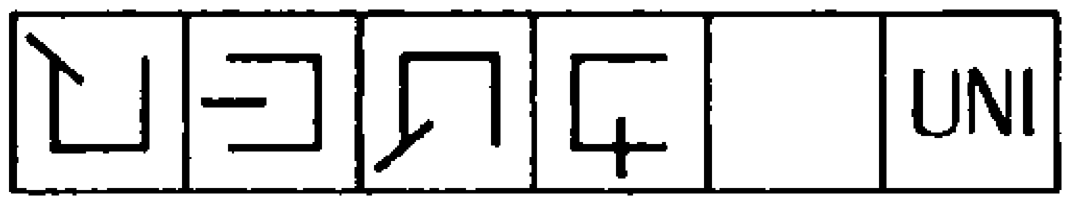
RESOLUCIÓN :

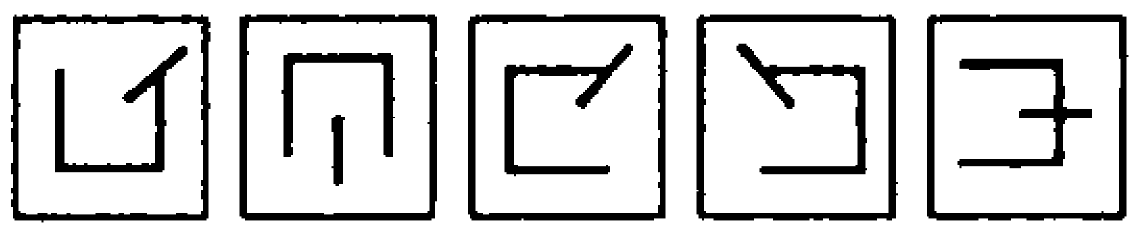
* La región sombreada desciende una posición.
* El punto asciende una posición .

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Indique la figura que debe ocupar *"UNI"*

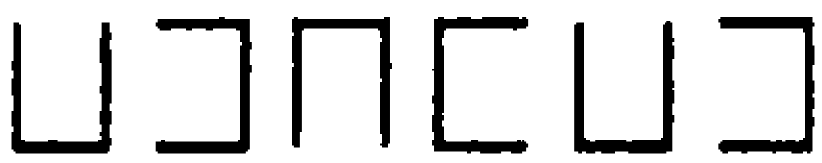




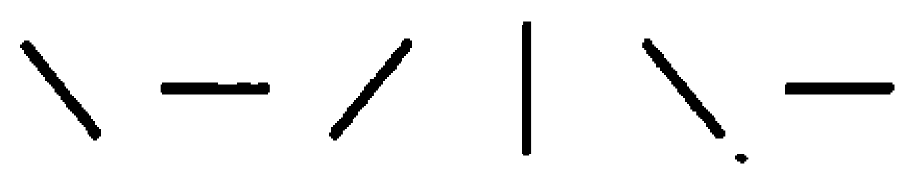
(A) (B) (C) (D) (E)

RESOLUCIÓN :

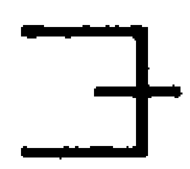
* Analizando por separado cada casillero

1° 

gira *90°* en sentido antihorario .

2° 

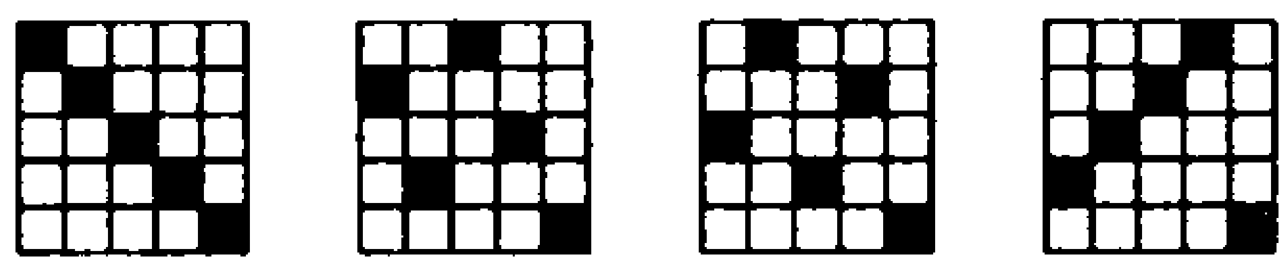
gira *45°* en sentido antihorario .

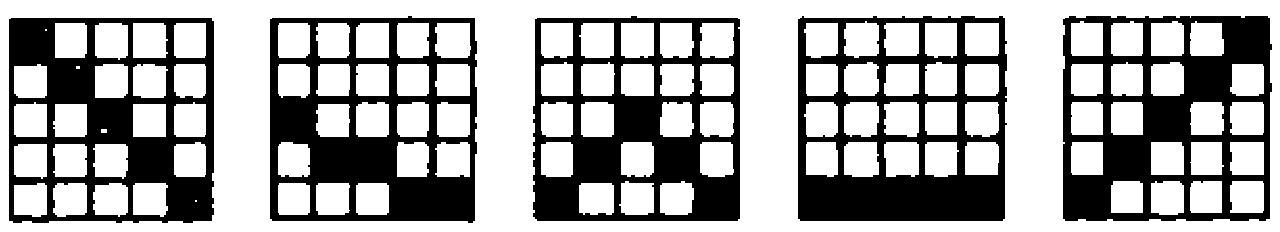
* La figura que ocupa el casillero *UNI* es : 

RPTA : "E"

PROBLEMA 37 :

Indique la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente secuencia gráfica .





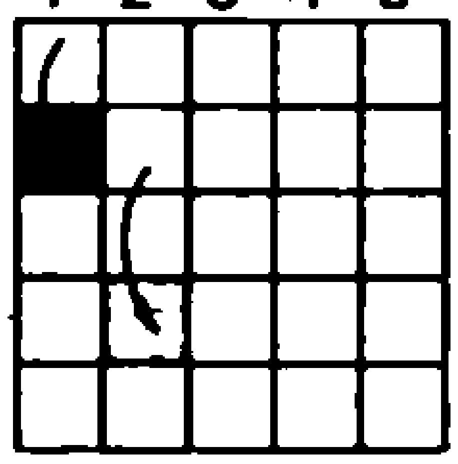
(A) (B) (C) (D) (E)

RESOLUCIÓN :

* Cada cuadrado sombreado desciende sobre su misma columna : el *1ro* desciende un casillero ; el

2do dos casilleros ; el 3ro tres casilleros ; el 4to cuatro casilleros y el 5to cinco casilleros.

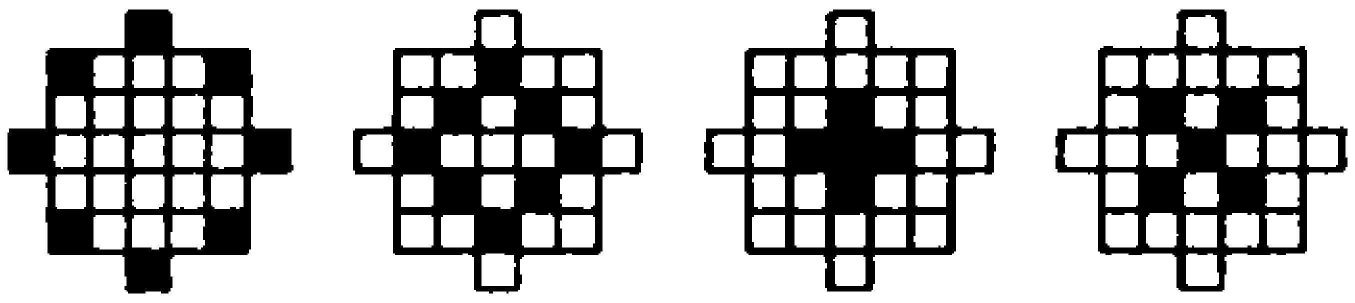
1° 2° 3° 4° 5°



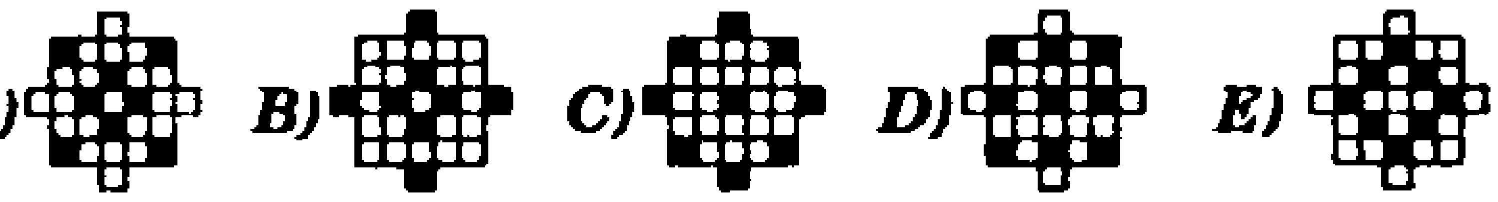
RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

Indique la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente secuencia gráfica :



A) B) C) D) E)



RESOLUCIÓN :

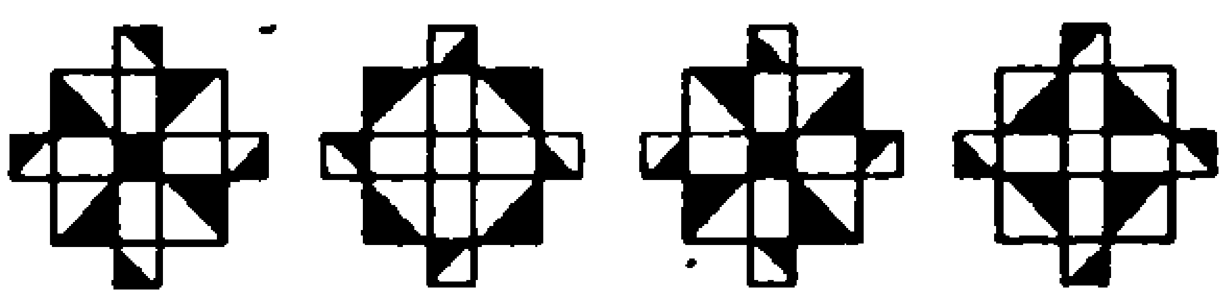
* Las *4* regiones sombreadas de las esquinas del cuadrado convergen hacia el centro sobre las diagonales , hasta la tercera figura y luego retoman por el mismo camino.

* Las *4* regiones sombreadas en el exterior del cuadrado principal también convergen hacia el centro a lo largo de la horizontal y de la vertical hasta la cuarta figura y luego retoman por el mismo camino.

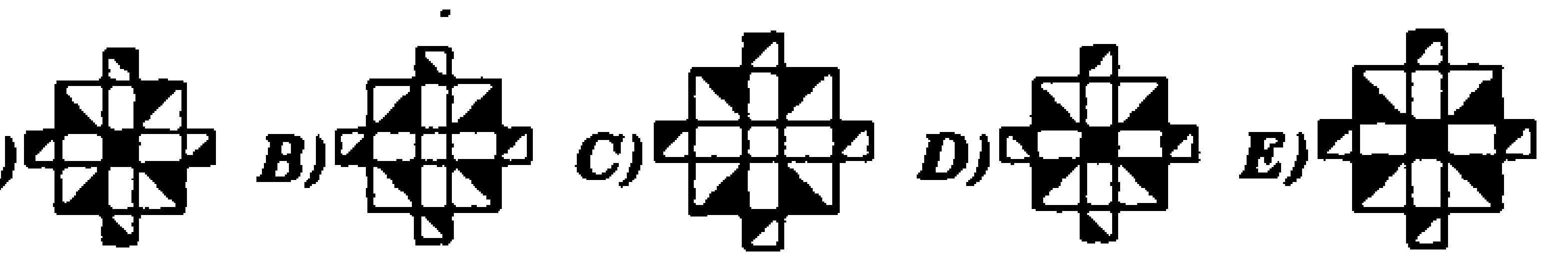
RPTA : "A"

PROBLEMA 39 :

Indique la alternativa que continúa adecuadamente la siguiente serie de figuras :

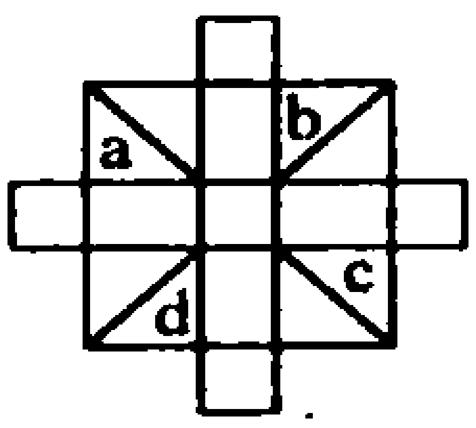


A) B) C) D) E)



RESOLUCIÓN :

* En el gráfico mostrado :

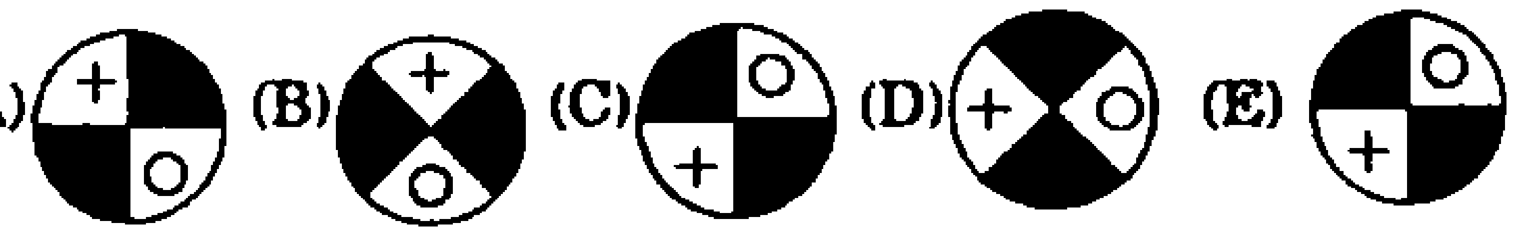


* Las regiones a signadas son las letras *a, b, c* y *d* están girando *90°* en sentido horario en su mismo recuadro . Como nos piden la quinta figura , entonces deberán girar *4* veces *90°*, es decir *360°*, lo que significaría que vuelve a su posición original repitiéndose la primera figura .

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :



A) 1 *B) 3* *C) 4* *D) 2* *E) 5*

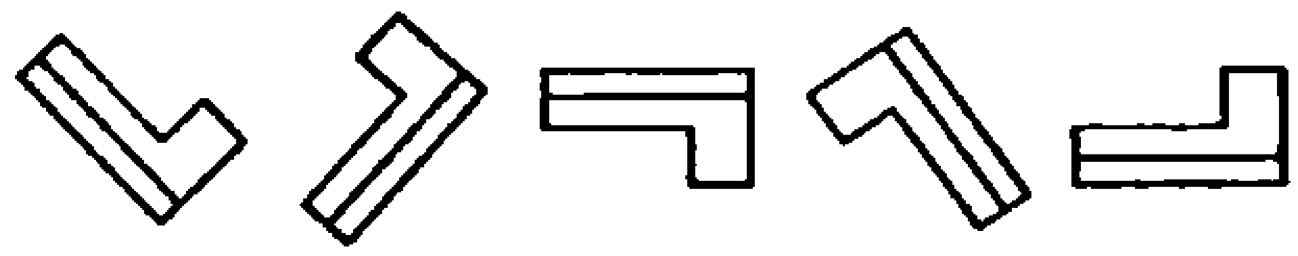
RESOLUCIÓN :

* Obsérvese que las parejas *(1* y *3)* y *(2* y *4)* pueden superponerse con giros de *90°*, pero la *5* no puede superponerse porque la cruz y el círculo interior quedaría en posiciones diferentes.

RPTA : "E"

PROBLEMA 41 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :



1 2 3 4 5

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 1* *E) 5*

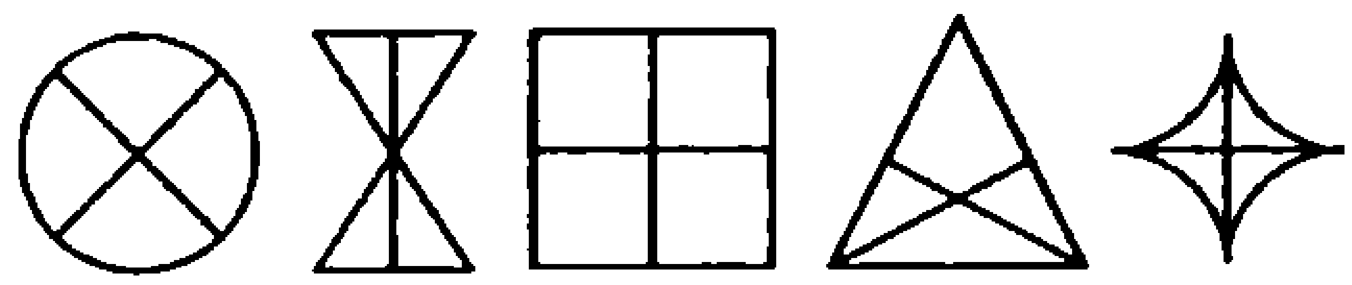
RESOLUCIÓN :

* Si superponemos cada figura en otra girándolas en el punto del papel casi todas coinciden excepto la *"3"*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 42 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :



1 2 3 4 5

A) 1 *B) 3* *C) 4* *D) 2* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

* Todos los demás dibujos pueden invertirse sin que esto cambie su figura .

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

1 2 3 4 5

A) 2 *B) 4* *C) 1* *D) 5* *E) 3*

RESOLUCIÓN :

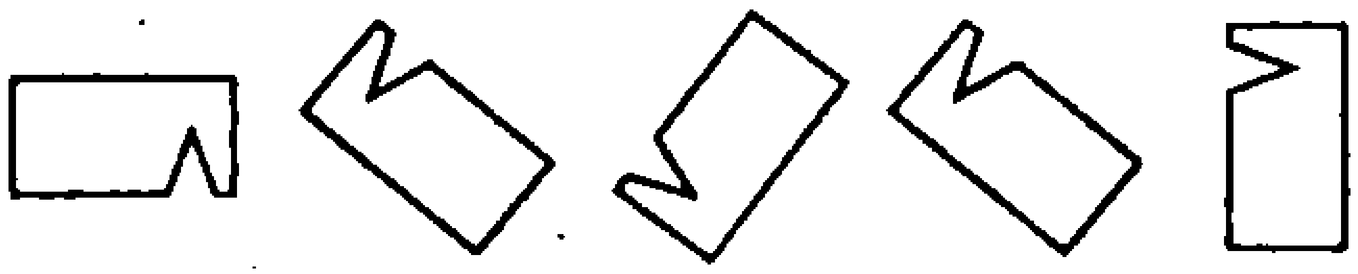
* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas excepto la figura *4* .

RPTA : "B"

PROBLEMA 44 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 5
B) 2
C) 3
D) 4
E) 1



1 2 3 4 5

RESOLUCIÓN :

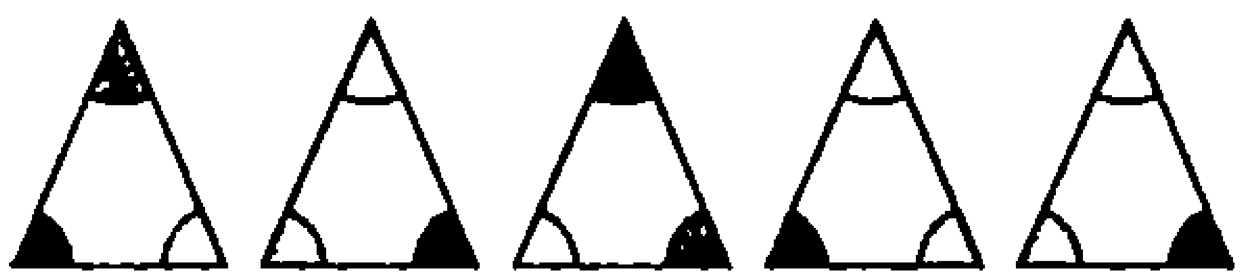
* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas excepto la figura *5* .

RPTA : "A"

PROBLEMA 45 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



1 2 3 4 5

RESOLUCIÓN :

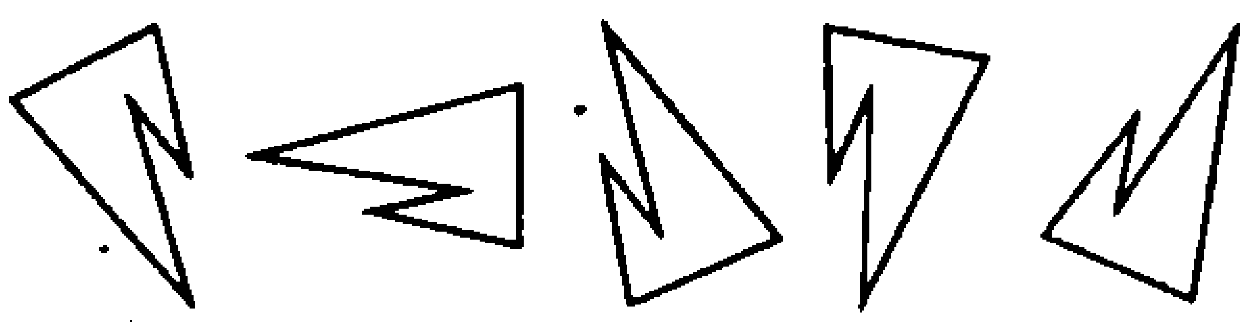
* Los sectores negros , blanco y rayado giran en sentido antihorario , en la figura *(4)* los sectores blanco y rayado están en diferente posición .

RPTA : "D"

PROBLEMA 46 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 1
B) 2
C) 5
D) 3
E) 4



1 2 3 4 5

RESOLUCIÓN :

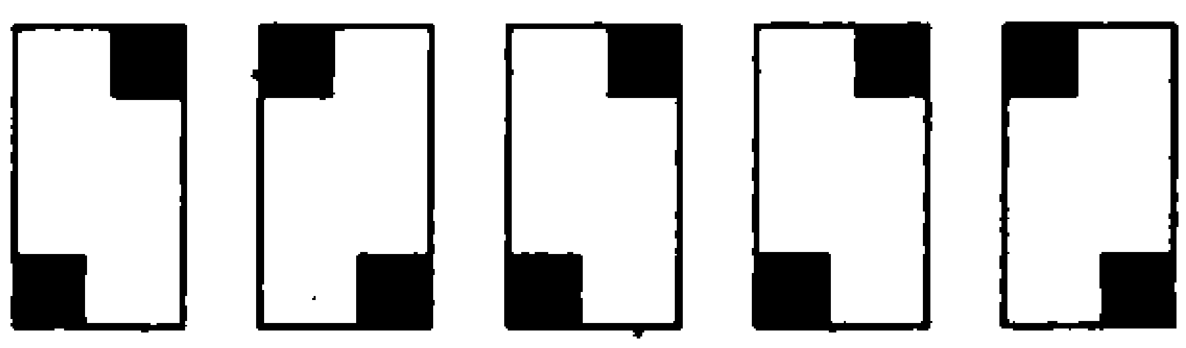
* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas excepto la figura *(4)* .

RPTA : "E"

PROBLEMA 47 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 1
B) 3
C) 2
D) 4
E) 5



1 2 3 4 5

RESOLUCIÓN :

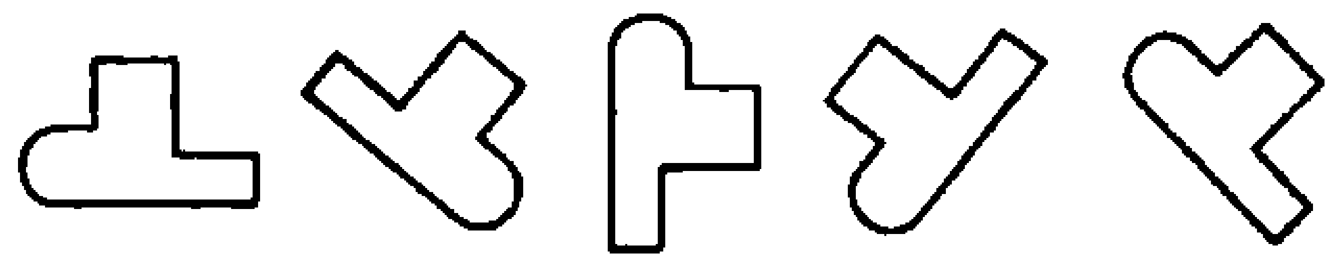
* (*1* y *4*) forman una pareja y lo mismo ocurre con (*2* y *5*) . En cada pareja los rectángulos negro y rayado intercambian su posición . Pero la fig . *(3)* tiene el sombreado en diferente posición .

RPTA : "B"

PROBLEMA 48 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



1 2 3 4 5

RESOLUCIÓN :

* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas, excepto la figura *(2)* .

RPTA : "B"

PROBLEMA 49 :

Señale la figura que no tiene relación con las demás:

A) 4
B) 2
C) 5
D) 1
E) N.A.

1 2 3 4

RESOLUCIÓN :

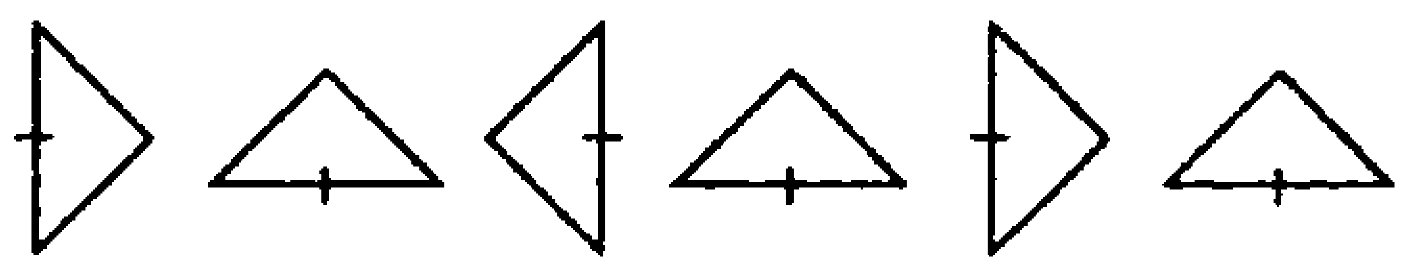
* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas en el plano del papel , excepto la figura *(4)*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 50 :

Determine cuál de las seis figuras no está en relación con las cinco restantes.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 5



1 2 3 4 5 6

RESOLUCIÓN :

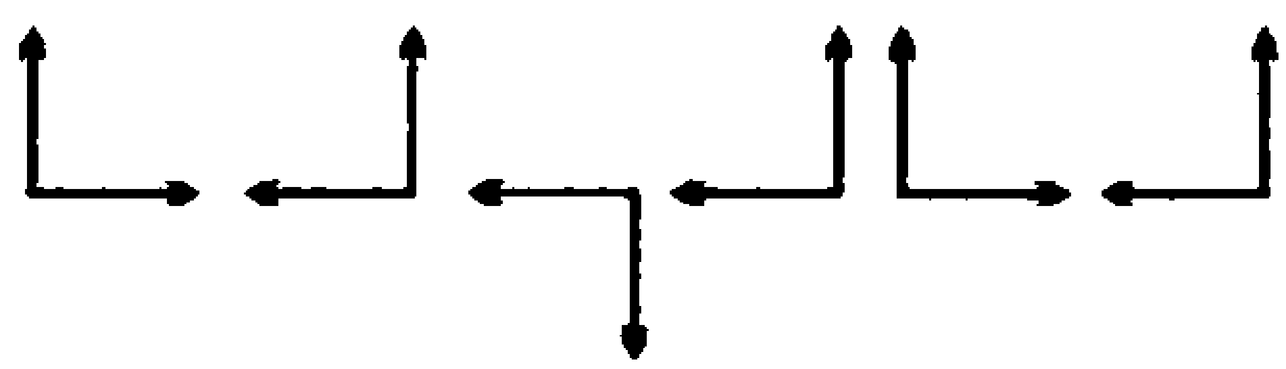
* El dibujo gira *90°* cada vez en sentido antihorario , excepto la fig . *(4)* que gira en el sentido horario .

RPTA : "C"

PROBLEMA 51 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :

A) 6
B) 5
C) 4
D) 1
E) 3



1 2 3 4 5 6

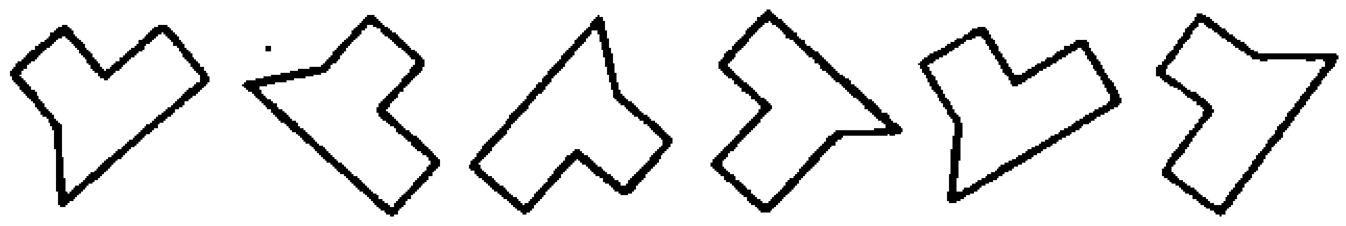
RESOLUCIÓN :

* La figura gira *90°* cada vez en sentido antihorari o, excepto la fig . *(4)* que lo hace en sentido horario.

RPTA : "C"

PROBLEMA 52 :

Determine cuál de las cinco figuras no está en relación con las demás :



1 2 3 4 5 6

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

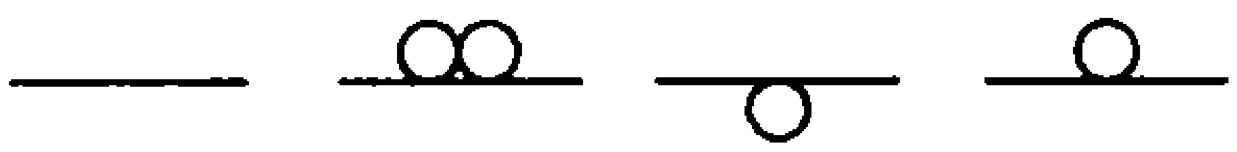
RESOLUCIÓN :

* Todas las demás figuras pueden superponerse girándolas excepto la figura *(6)* .

RPTA : "E"

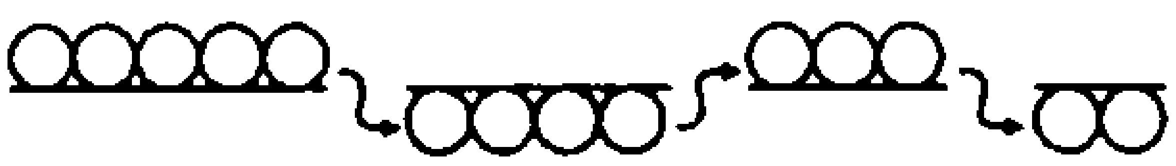
PROBLEMA 53 :

¿Cuál de las figuras completa la serie?



A) **B)** **C)** **D)**

RESOLUCIÓN :

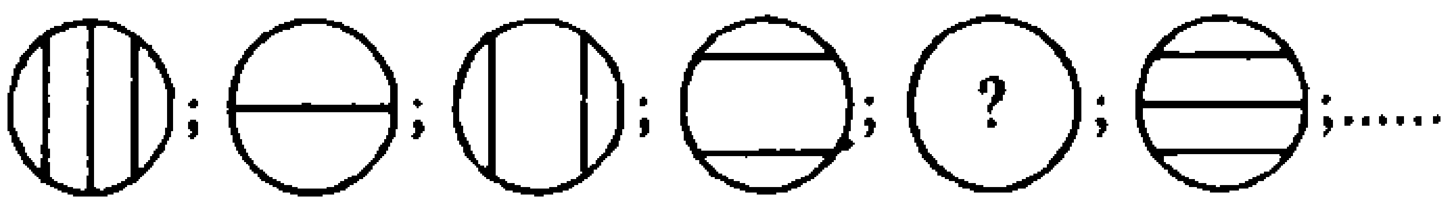


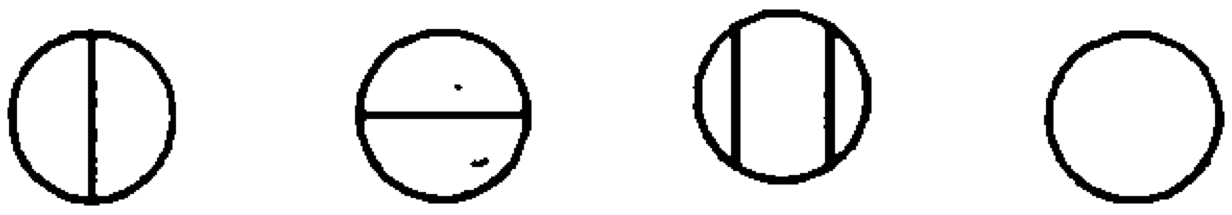
* Observando la serie vemos que de la primera figura a la segunda , gira ***180°*** y pierde una bolita. Lo mismo sucede en las figuras siguientes. Entonces la figura que sigue en la serie es la ***D***.

RPTA : "D"

PROBLEMA 54 :

¿Qué figura falta en la serie?





A) **B)** **C)** **D)**

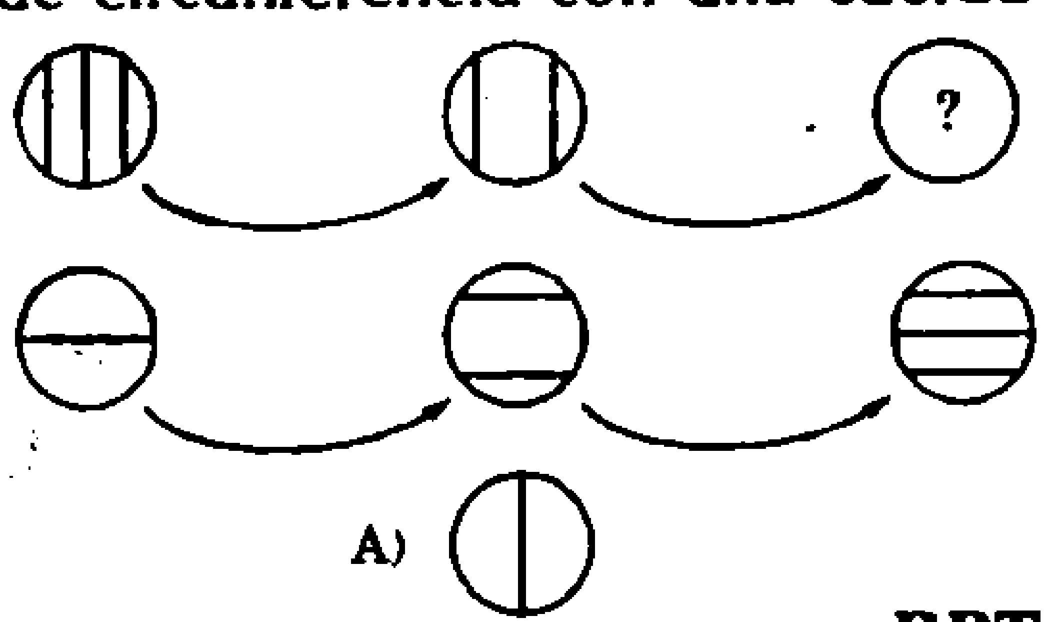
RESOLUCIÓN :

* En este caso , apreciamos que las figuras pertenecen a dos series que se intercalan entre sí.

* Las figuras de posición impar tienen las cuerdas verticales y disminuyen de una en una.

* Las figuras de posición par tienen las cuerdas horizontales y aumentan de una en una.

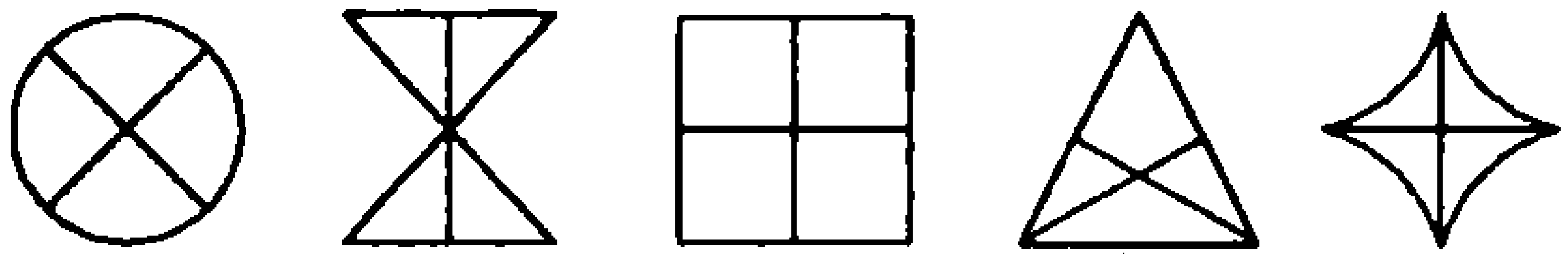
* La figura que falta es de posición impar, por lo tanto corresponde circunferencia con una cuerda vertical, figura ***A*** .



RPTA : "A"

PROBLEMA 55 :

¿Cuál de las siguientes figuras no guarda la misma relación con las demás?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

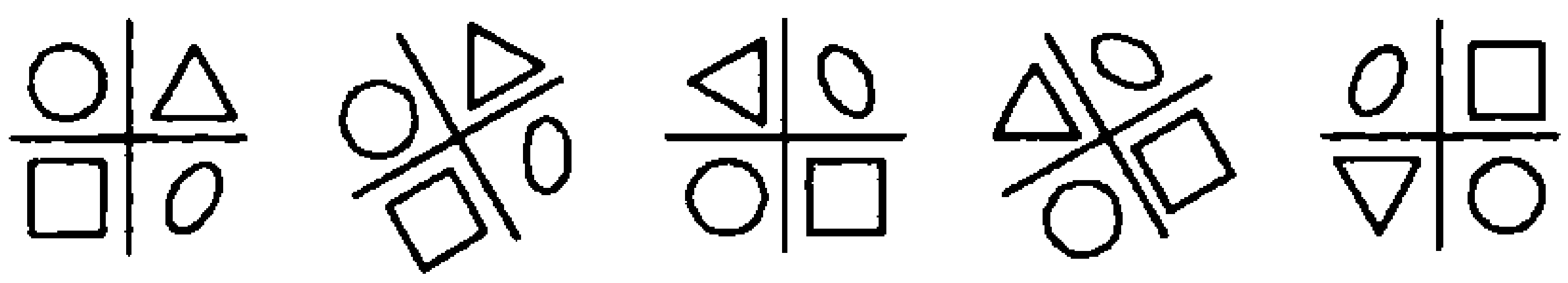
RESOLUCIÓN :

* La figura que debe excluirse en la ***D*** porque el rasgo común de ***A ; B ; C*** y ***E*** es la simetría. Todas las figuras pueden dividirse por una línea vertical u horizontal que determinan dos partes iguales, excepto la ***D*** .

RPTA : "D"

PROBLEMA 56 :

¿Cuál de las siguientes figuras no guarda la misma relación con las demás?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

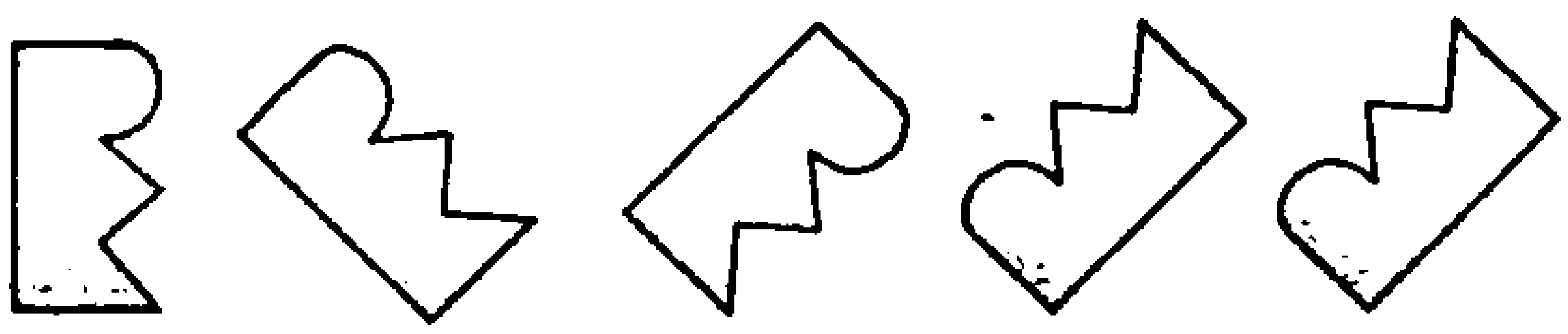
RESOLUCIÓN :

* Se observa que todos los símbolos giran en sentido antihorario , ***45°*** y además, van cambiando de color (negro a blanco), pero la figura ***C*** no cumple con el cambio de color.

RPTA : "C"

PROBLEMA 57 :

¿Cuál de las siguientes figuras no guarda la misma relación con las demás?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

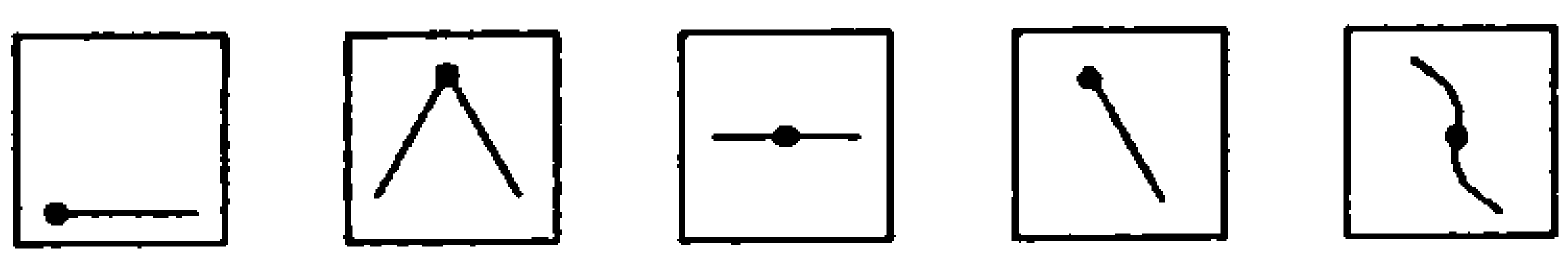
RESOLUCIÓN :

* Cualquiera de las figuras, excepto una, puede formarse a partir del giro de las demás, por ejemplo si giramos la ***A***, se forma la ***C*** y si giramos la ***C*** , se forma la ***D*** , la que no puede obtenerse de este modo es la ***B*** .

RPTA : "B"

PROBLEMA 58 :

¿Cuál de las figuras no guarda relación con las demás?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

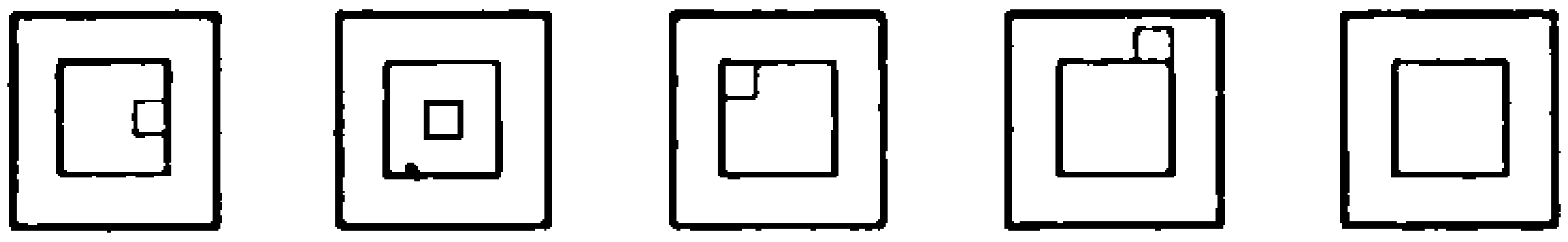
RESOLUCIÓN :

* Se excluye la *E*, porque las demás están formadas por segmentos rectos.

RPTA : "E"

PROBLEMA 59 :

¿cuál de las figuras no guarda relación con las demás?



A) B) C) D) E)

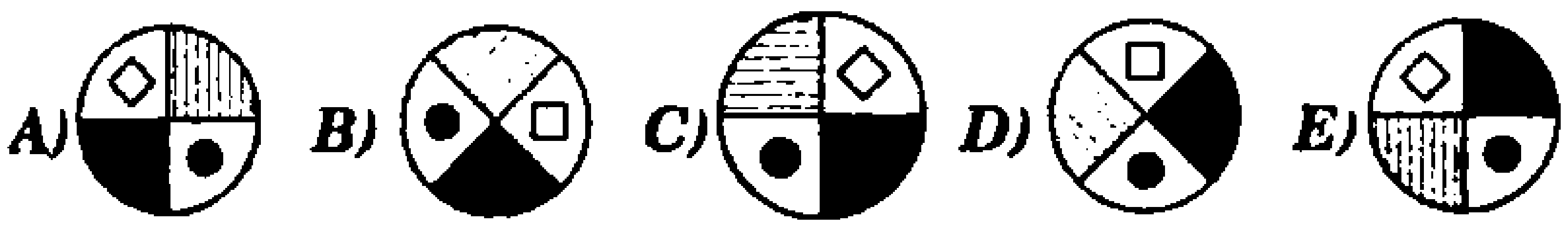
RESOLUCIÓN :

* En cada figura hay dos cuadrados : uno grande y otro pequeño, excepto en la *E*.

RPTA : "E"

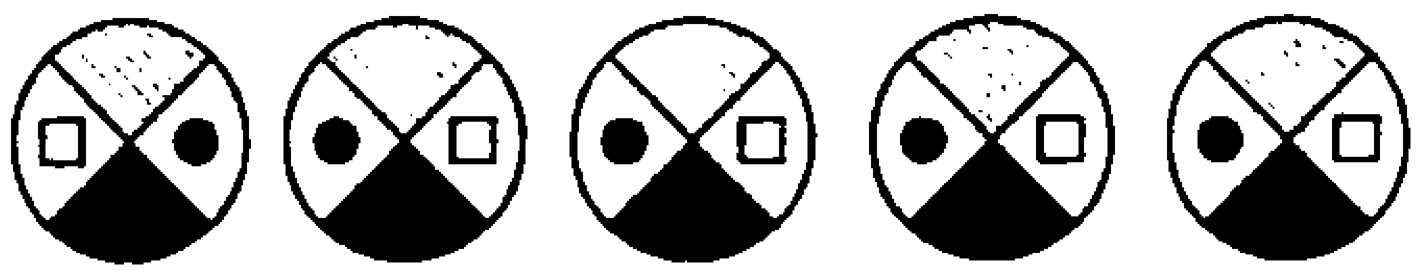
PROBLEMA 60 :

De las cinco figuras que se presentan a continuación, una es distinta de las otras cuatro . Indique cual es :



RESOLUCIÓN :

* Si ubicamos todas las figuras con la región negra hacia abajo , se observa que el círculo está siempre a la izquierda y el cuadrilátero a la derecha de dicha región , excepto la alternativa *"A"* .

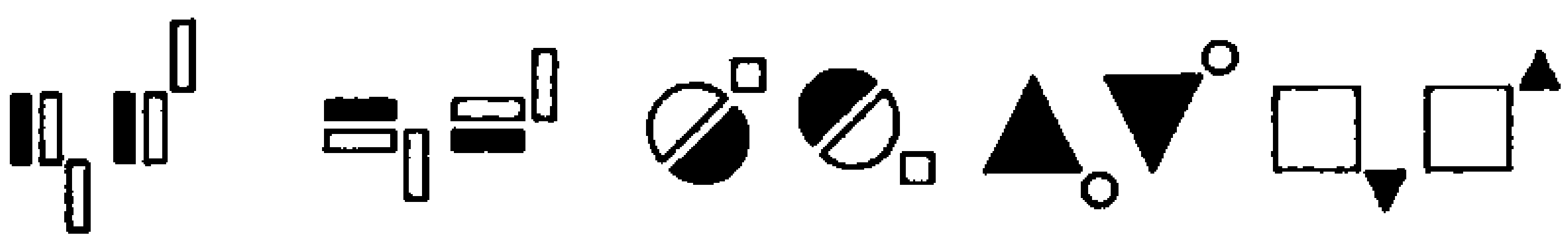


A B C D E

RPTA : "A"

PROBLEMA 61 :

Identifique la figura que no sigue la misma ley de formación de las demás.



(A) (B) (C) (D) (E)

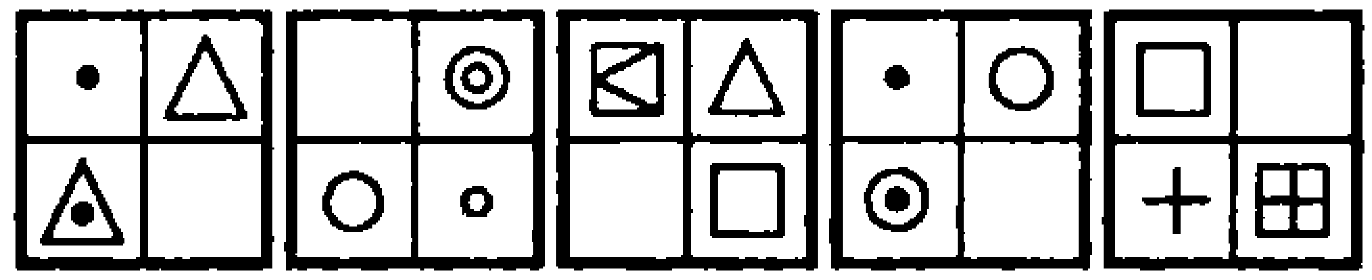
RESOLUCIÓN :

* Se observa como criterio la formación que en cada alternativa , para obtener la segunda figura, a la primera se le gira *180º* en forma vertical (de abajo hacia arriba) excepto en la alternativa *"C"*

RPTA : "C"

PROBLEMA 62 :

Indique la alternativa que no tiene relación con las demás .



(A) (B) (C) (D) (E)

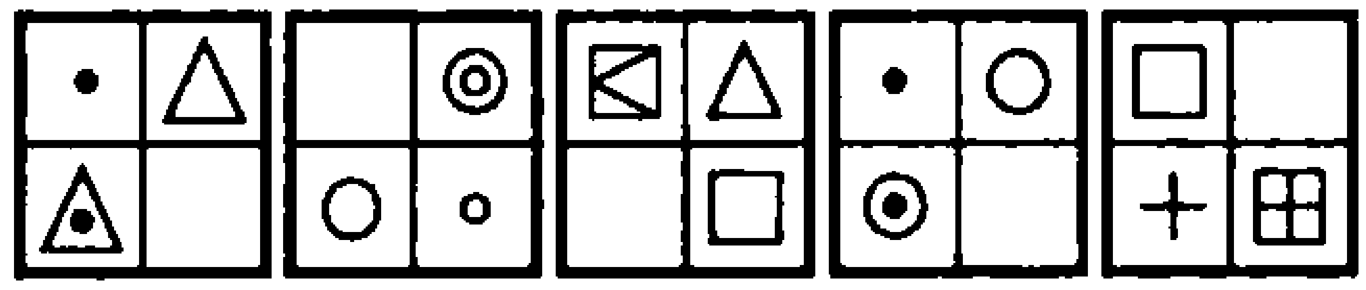
RESOLUCIÓN :

*Al superponer dos de ellas, se forma la tercera figura.

RPTA : "C"

PROBLEMA 63 :

Indique la alternativa que no tiene relación con las demás .



(A) (B) (C) (D) (E)

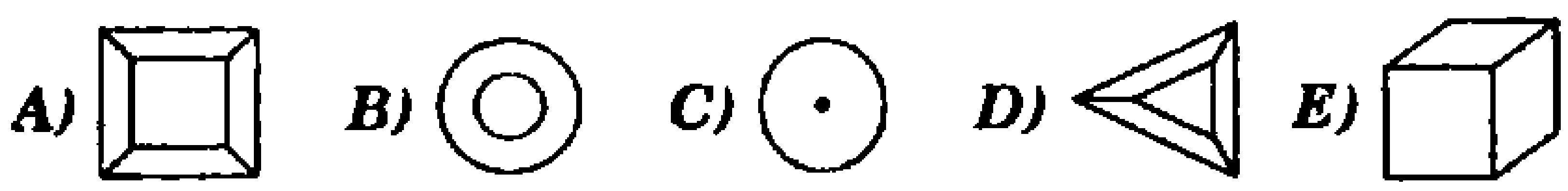
RESOLUCIÓN :

*Al superponer dos de ellas, se forma la tercera figura.

RPTA : "C"

PROBLEMA 64 :

Desde las siguientes figuras , identifique aquella tomada de un ángulo distinto al resto .



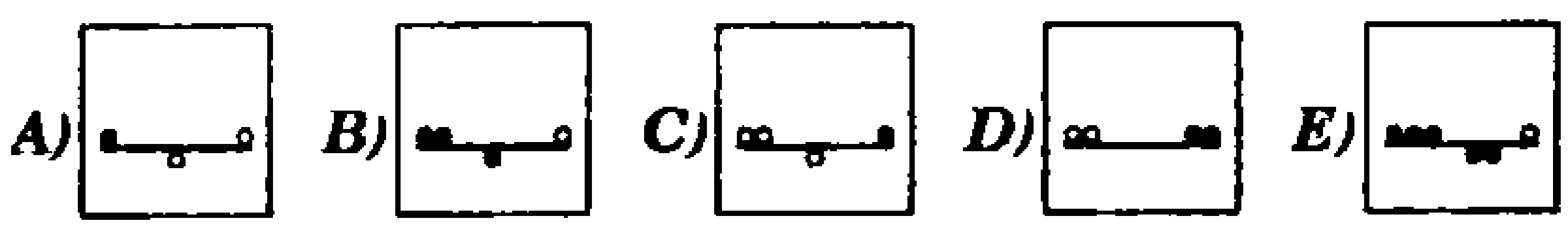
RESOLUCIÓN :

* Las figuras de cada una de las cuatro primeras alternativas representan la vista superior de diversos sólidos , lo que no sucede con la alternativa *E* .

RPTA : "E"

PROBLEMA 65 :

Indique la alternativa que no tiene relación con las demás :



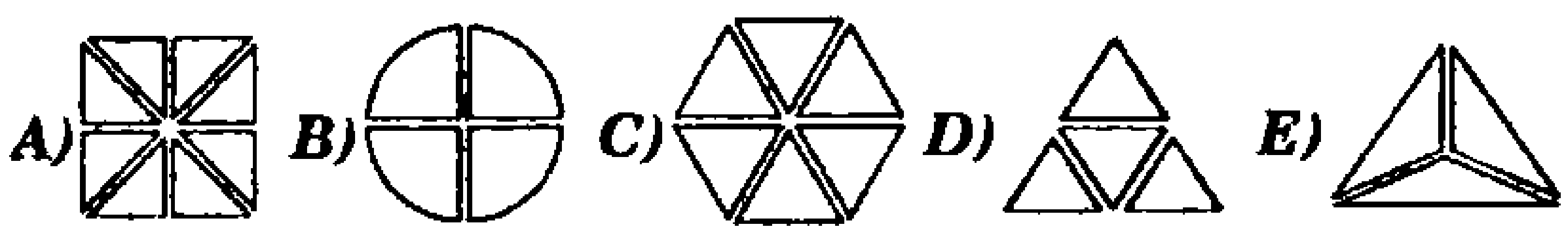
RESOLUCIÓN :

* En cada alternativa (excepto en la primera) , se observa que retirando una bolita negra y una blanca (una de cada extremo) , lo que queda es igual a la que aparece en la parte inferior de la línea .

RPTA : "A"

PROBLEMA 66 :

Selecciones la figura que no tiene la misma característica de las demás :



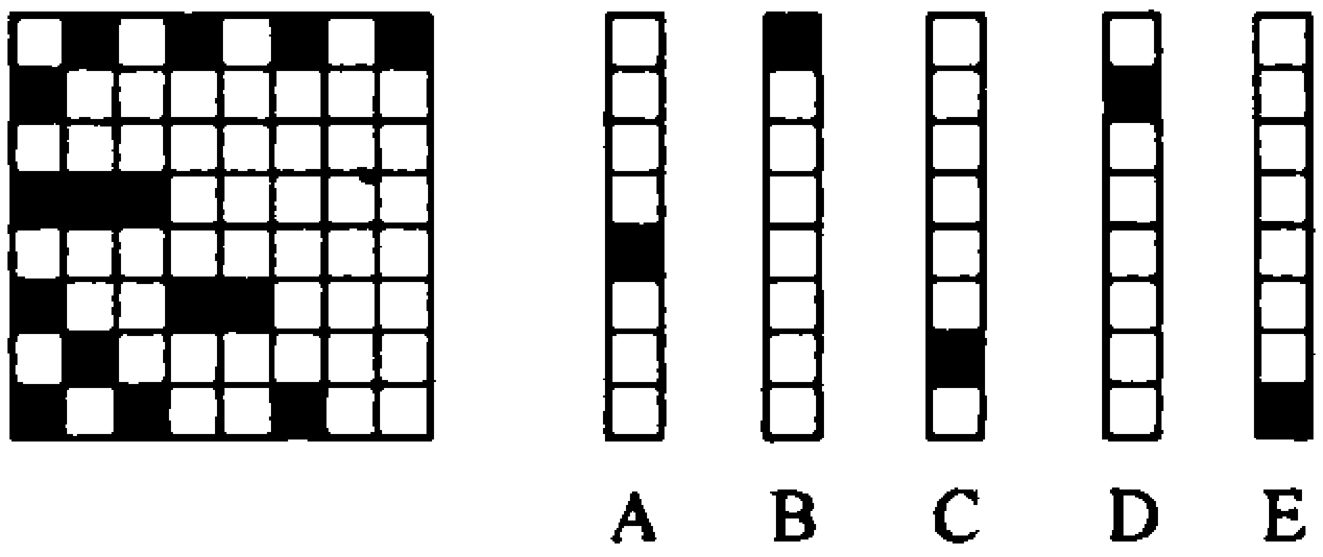
RESOLUCIÓN :

* La característica de todas , a excepción de la *B*, es que están formadas por triángulos .

RPTA : "B"

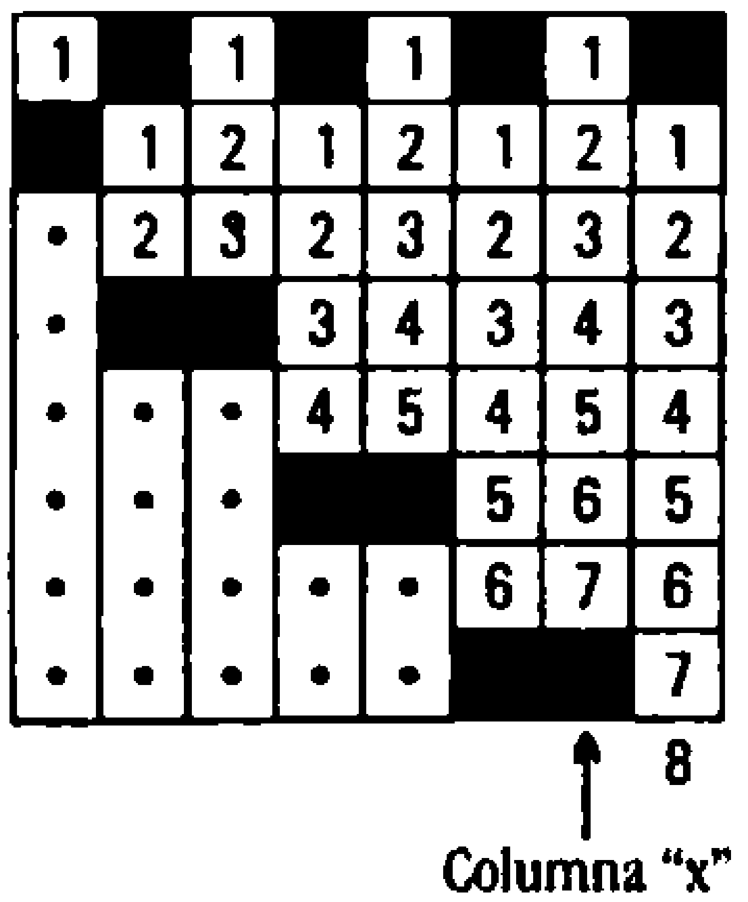
PROBLEMA 67 :

Identifique la columna "*x*" dentro de las alternativas propuestas .



RESOLUCIÓN :

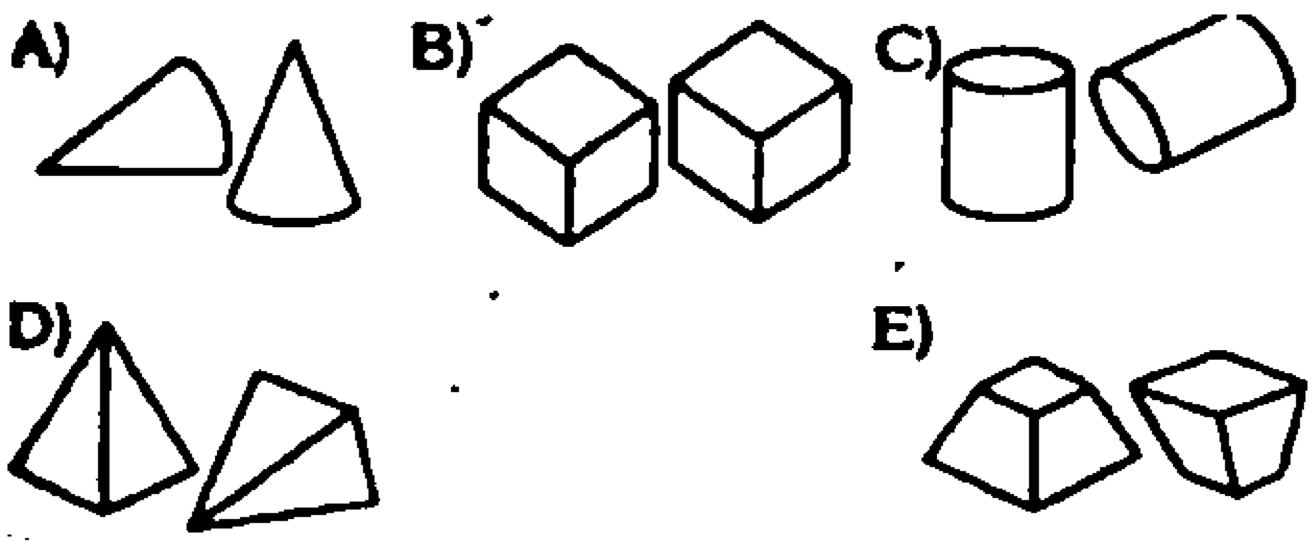
* Enumerando los primeros casilleros blancos en cada columna , de arriba hacia abajo :



RPTA : "E"

PROBLEMA 68 :

Observe los siguientes sólidos e identifique la alternativa que no tiene la misma relación .



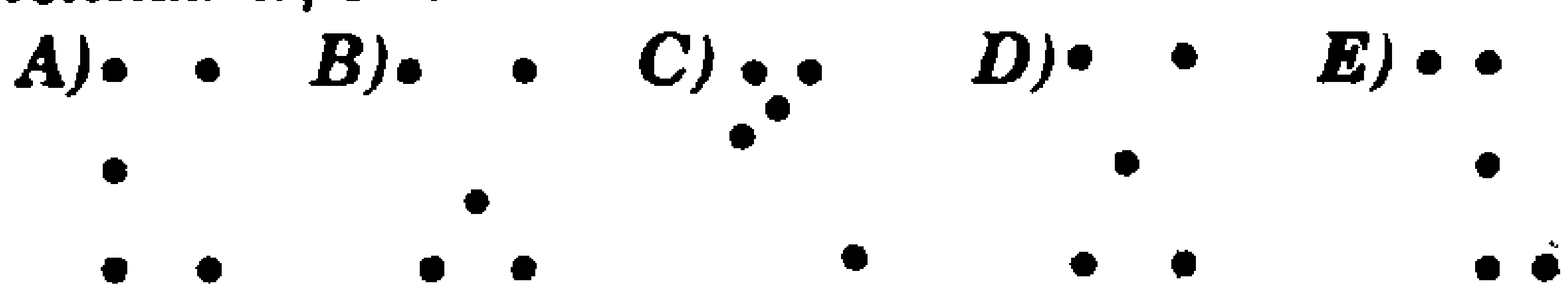
RESOLUCIÓN :

* Los sólidos se recuestan sobre una cara lateral . Por lo tanto la que no guarda relación es la alternativa *E* , debido a que el sólido se recuesta sobre su base menor .

RPTA : "E"

PROBLEMA 69 :

Seleccione la figura que no tiene la misma ley formativa , en :



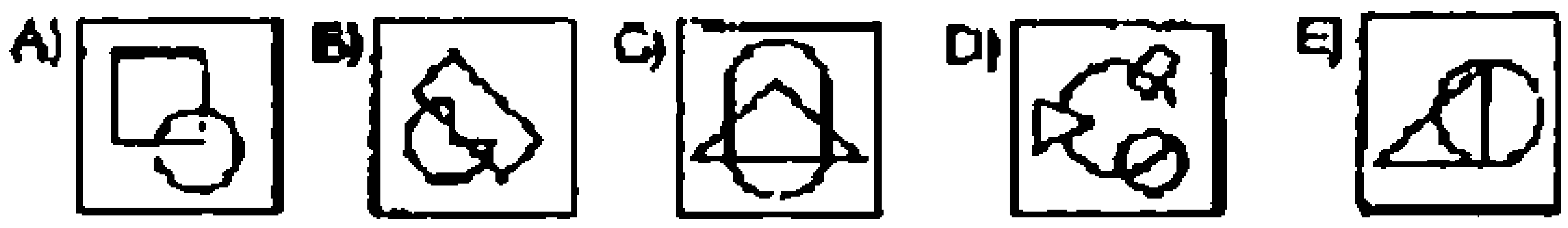
RESOLUCIÓN :

* Se forman dos filas de *3* puntos en cada fila , lo cual no ocurre en la alternativa *A* .

RPTA : "A"

PROBLEMA 70 :

Indique la alternativa que no guarda relación con las demás .



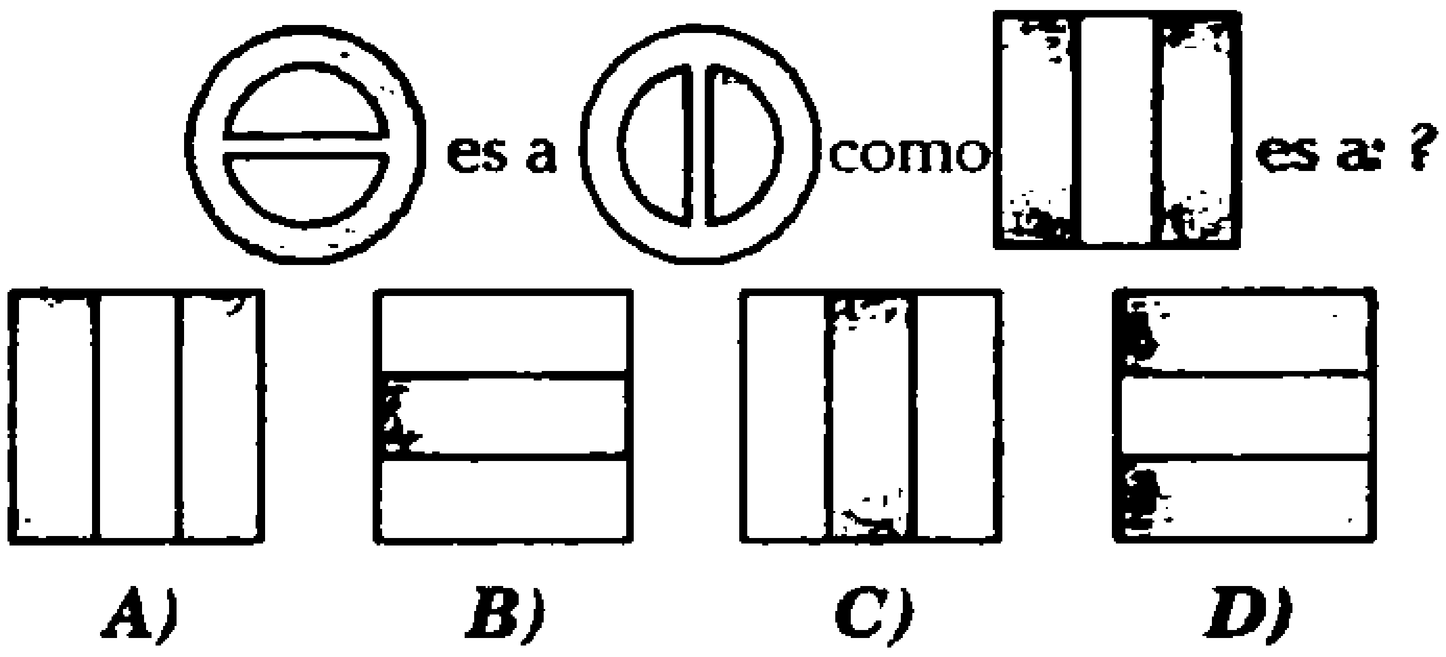
RESOLUCIÓN :

* En todas las alternativas , a excepción de la alternativa *B* , la intersección de figuras es una sola región . En la alternativa *B* se generan *2* regiones .

RPTA : "B"

PROBLEMA 71 :

¿Qué figura debe de ir en lugar del interrogante?

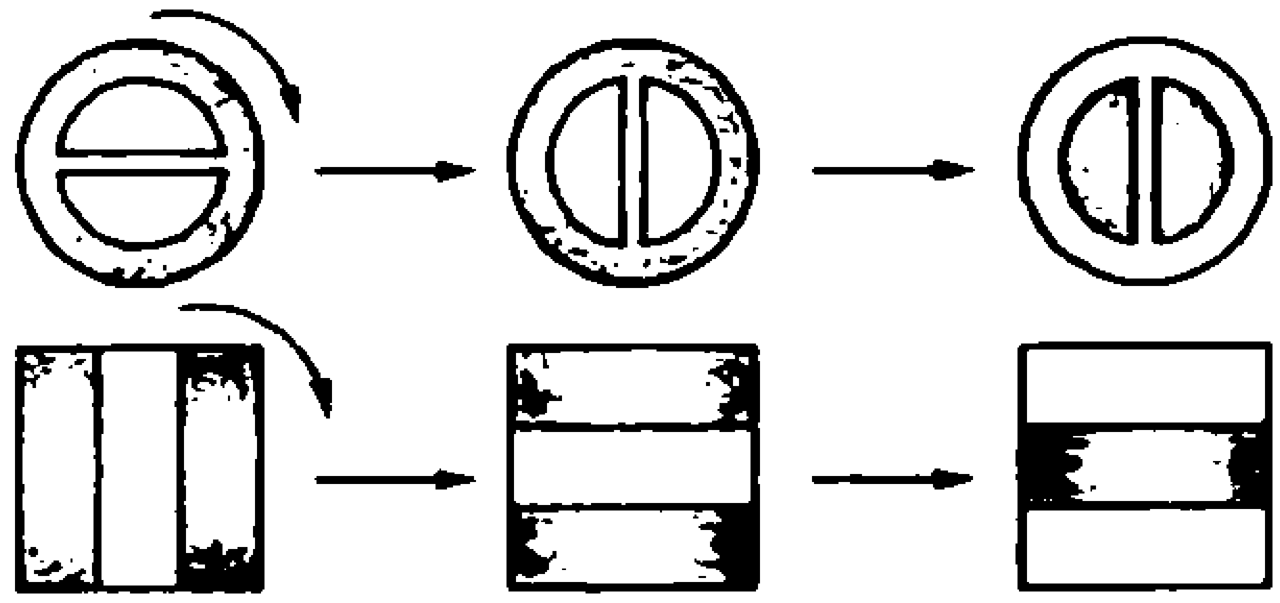


RESOLUCIÓN :

* Observamos la relación entre la primera y segunda figura . La segunda figura ha rotado *90°*.

* Además, la segunda figura tiene invertida la parte sombreada . La parte que en la primera figura es blanca en la segunda es sombreada y viceversa.

* Entonces el cuadrado debe rotar *90°* hasta tener las franjas horizontales y, además, las franjas sombreadas deben ser blancas y la franja blanca sombreada.

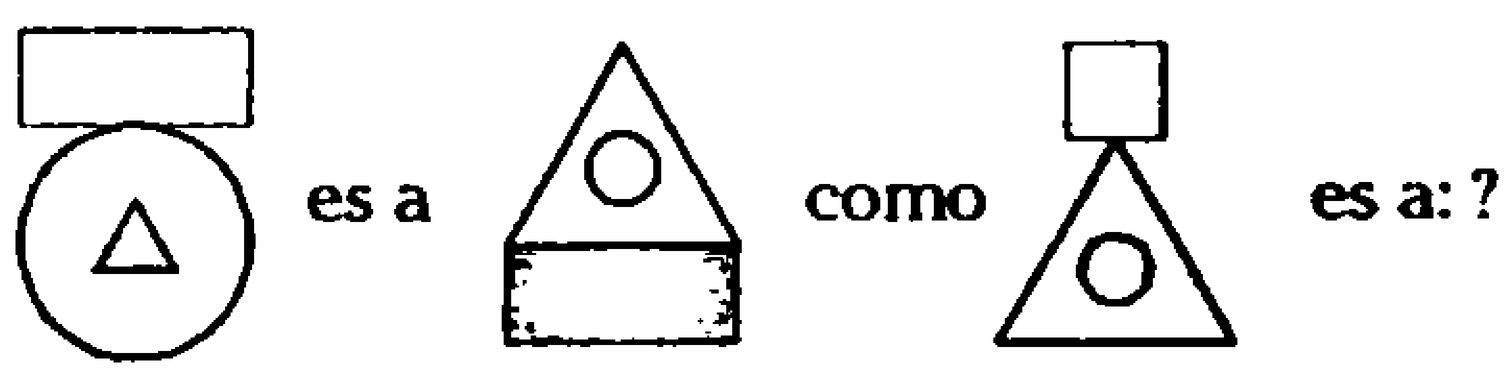


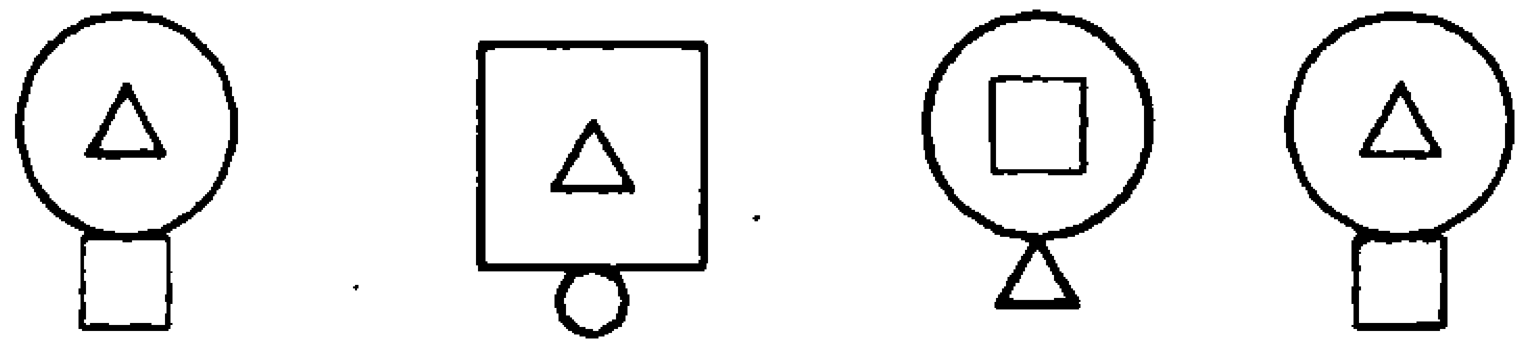
La figura que corresponde es la *B* .

RPTA : "B"

PROBLEMA 72 :

¿Cuál es la figura que corresponde?





A) B) C) D)

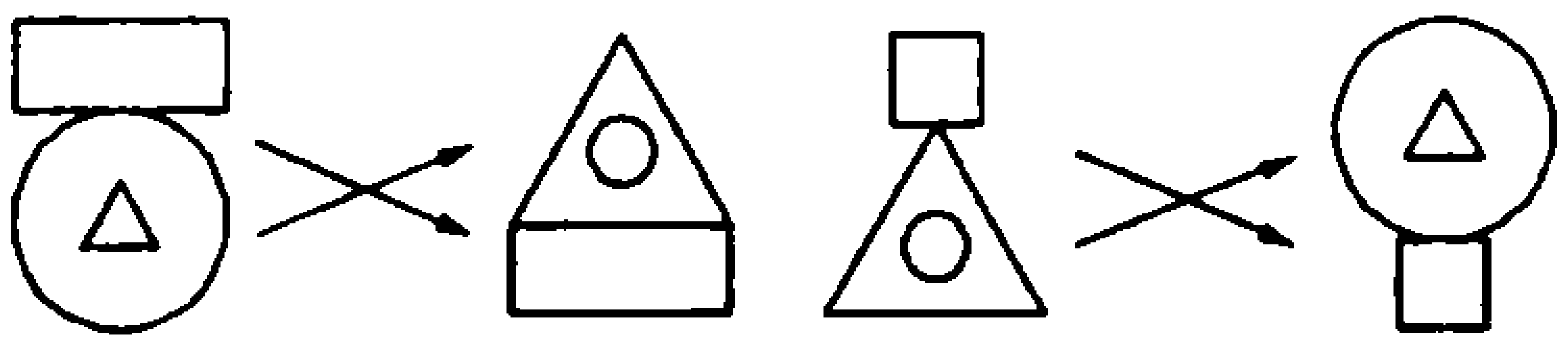
RESOLUCIÓN :

* Observando la relación en la primera figura vemos que el círculo tiene un triángulo interior sombreado y arriba del círculo hay un rectángulo blanco.

* En la segunda figura, el rectángulo blanco sobre la figura exterior pasa abajo sombreado, el triángulo sale y tiene dentro un círculo blanco.

* En la tercera figura observamos un triángulo blanco y en su interior un círculo sombreado (es el inverso de la primera figura) y arriba tiene un cuadrado.

* La cuarta figura debe tener un círculo blanco con un triángulo blanco en su interior. Además, el cuadrado blanco de arriba pasa sombreado abajo.

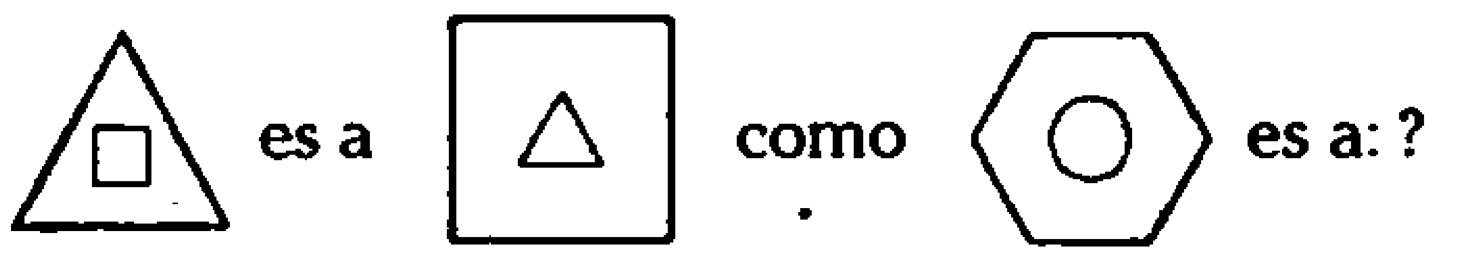


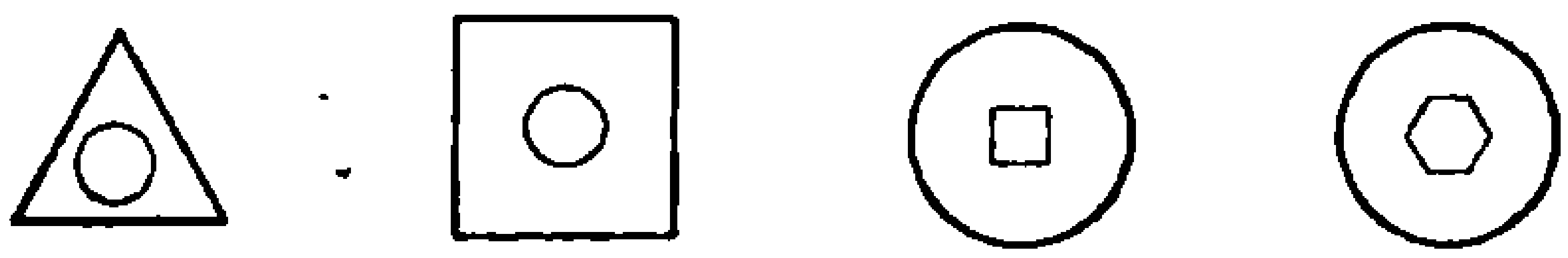
La figura que corresponde es la *D*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 73 :

¿Qué figura corresponde?





A) B) C) D)

RESOLUCIÓN :

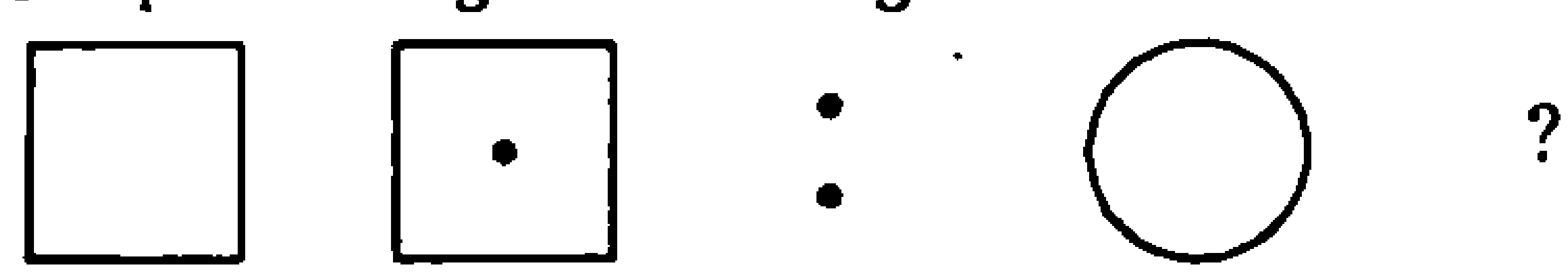
* Buscamos la relación entre las dos primeras figuras y vemos que en la primera el cuadrado está dentro del triángulo y luego es al revés.

* Si el hexágono contiene al círculo, la figura análoga debe ser que el círculo contenga al hexágono : *D*

RPTA : "D"

PROBLEMA 74 :

Completar la siguiente analogía :



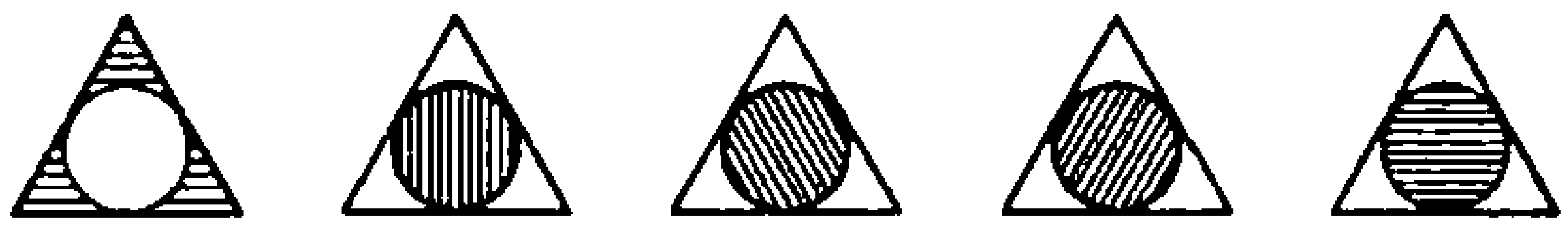
A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

* La respuesta correcta es la *E* , porque el círculo con un punto se relaciona con el círculo vacío de la misma forma que el cuadrado con un punto se relaciona con el cuadrado vacío .

RPTA : "E"

PROBLEMA 75 :



A) B) C) D) E)

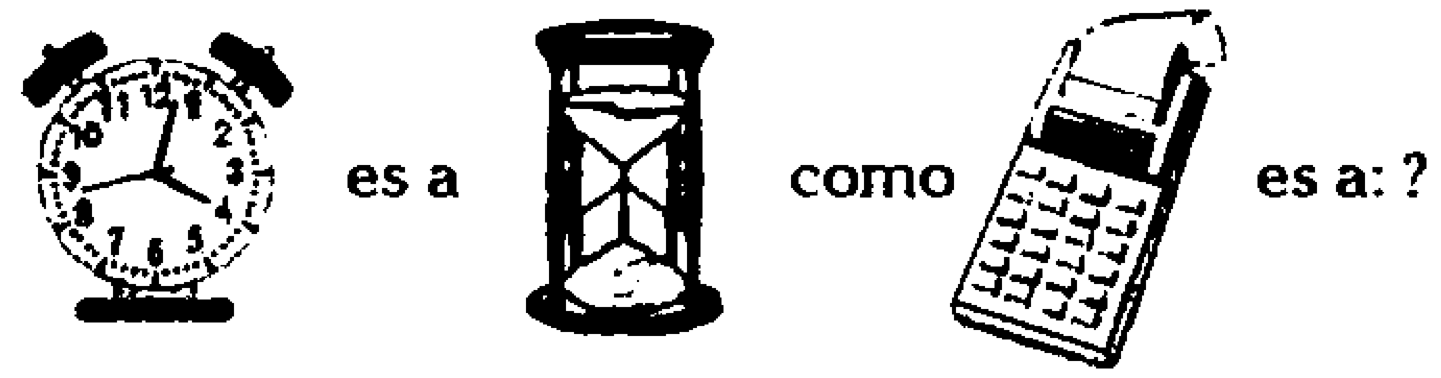
RESOLUCIÓN :

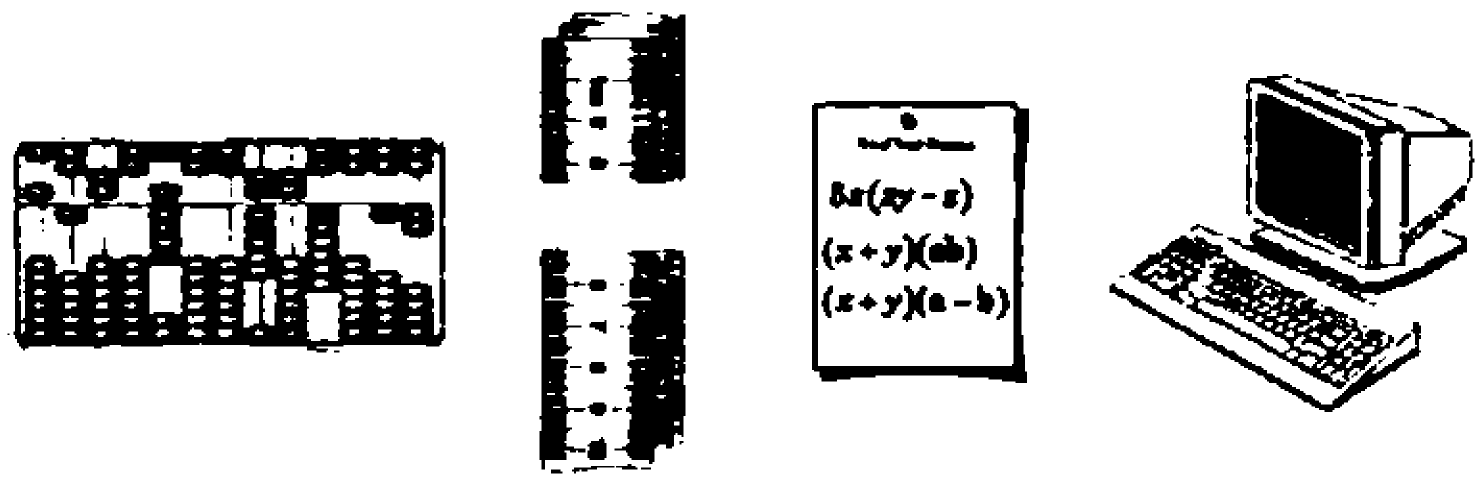
* Observa que la figura *3* tiene el círculo en blanco, como la figura *2* , pero las líneas del triángulo están en diferente dirección.

* La figura que falta tendrá el círculo con rayas verticales y el triángulo en blanco . Figura *B*

RPTA : "B"

PROBLEMA 76 :





A) B) C) D)

RESOLUCIÓN :

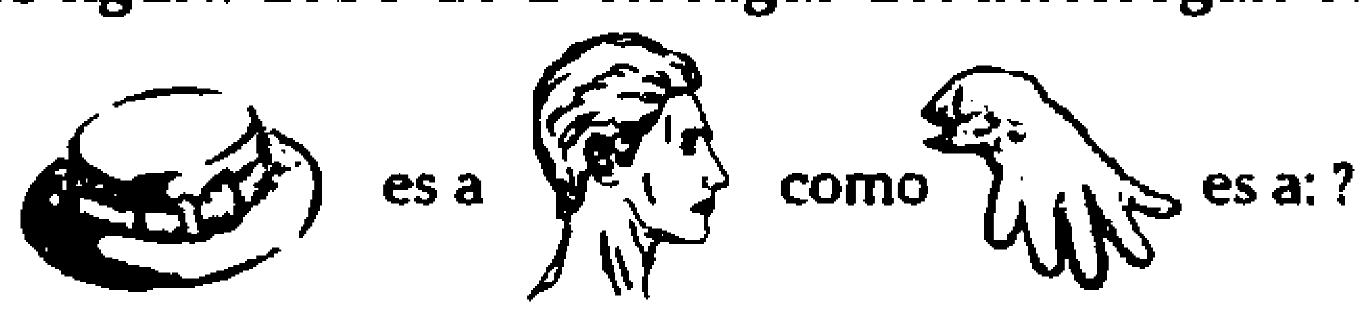
* Las primeras figuras son instrumentos de medida de tiempo. El primero es moderno; el segundo, antiguo.

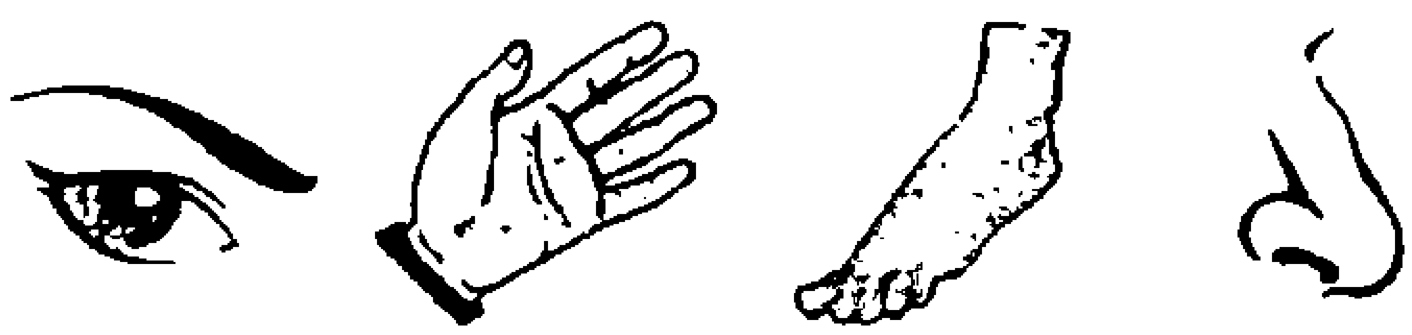
* A la calculadora (instrumento moderno para calcular), le corresponde el ábaco (instrumento antiguo).

RPTA : "A"

PROBLEMA 77 :

¿Qué figura debe de ir en lugar del interrogante?





A) B) C) D)

RESOLUCIÓN :

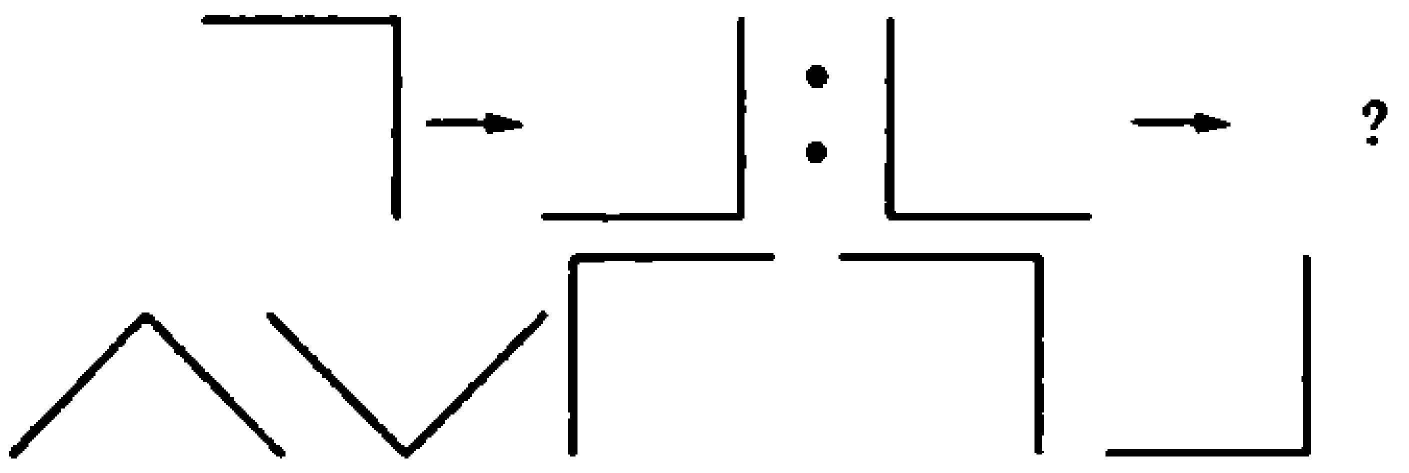
* Expresamos lo que vemos en la analogía de las figuras: "El sombrero le corresponde a la cabeza como el guante le corresponde a ..."

*Sabemos que el sombrero es para poner en la cabeza y el guante es para poner en la mano. La respuesta es la mano, alternativa *B*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 78 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

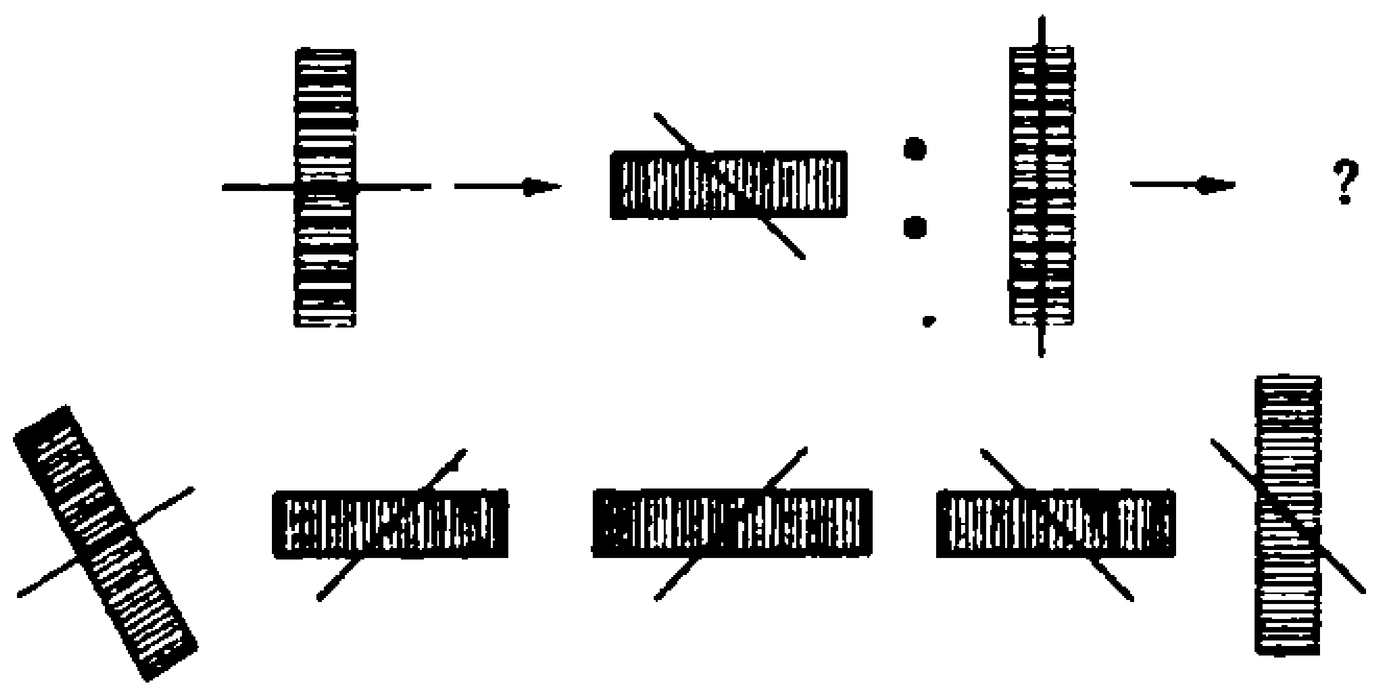
RESOLUCIÓN :

* En la primera pareja de símbolos, se ve que el primero gira *90°* en sentido horario , para formar el otro símbolo. Entonces, en la segunda pareja, ocurrirá lo mismo , luego de un giro de *90°* se debe formar la figura *C* .

RPTA : "C"

PROBLEMA 79 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

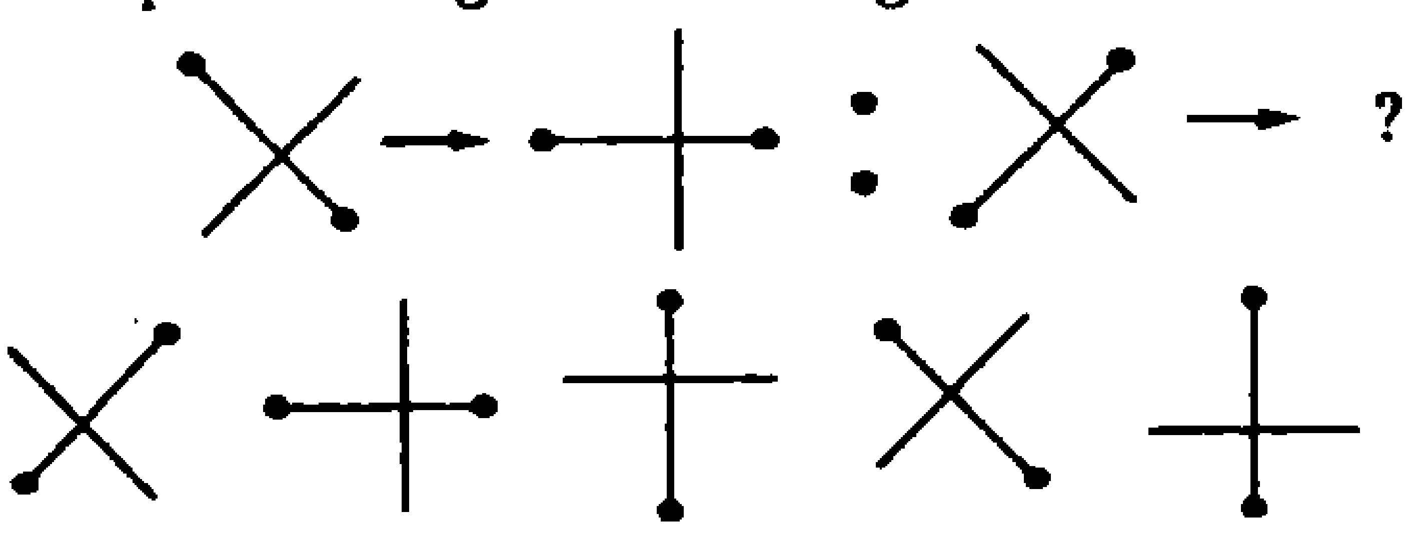
RESOLUCIÓN :

* El primer símbolo , gira *90°* y la recta que lo cruza gira solamente *45°* (en sentido horario). En la segunda pareja, el tercer símbolo gira *90°* y la línea vertical , gira *45°* formándose la figura *B*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 80 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

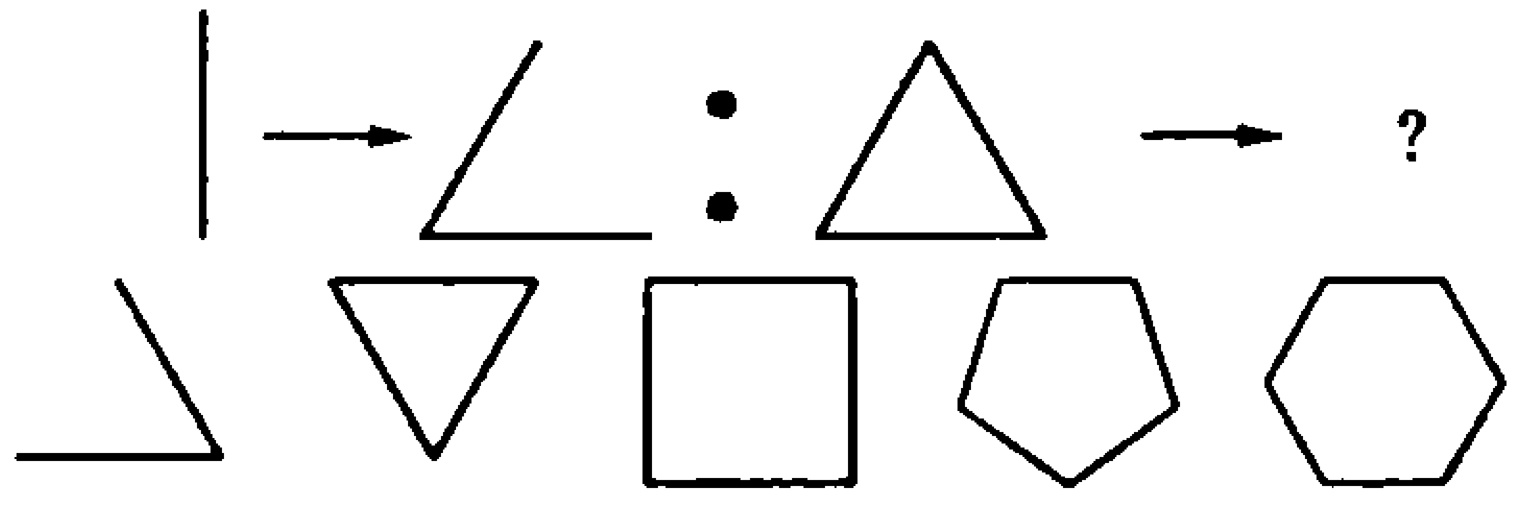
RESOLUCIÓN :

* La primera figura gira *45°* en sentido antihorario, para formar la segunda. Asimismo, la tercera debe girar *45°* en el mismo sentido, para formar la cuarta, que será la figura *C*.

RPTA : "C"

PROBLEMA 81 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

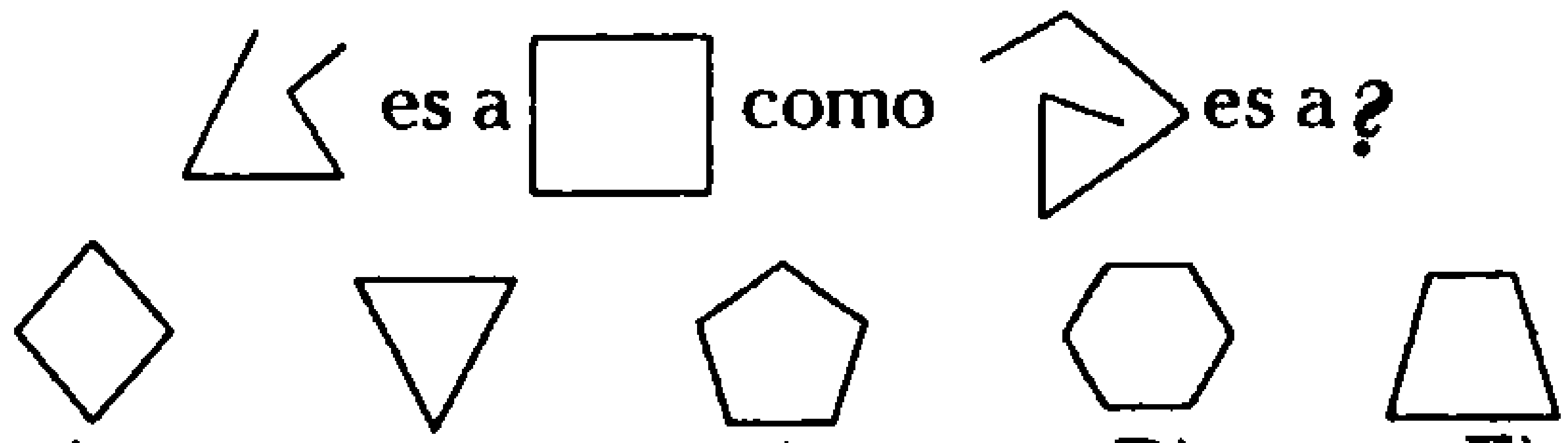
RESOLUCIÓN :

* Cada figura presenta un lado más que la anterior, así, debe aparecer como cuarta figura , una que tenga *4* lados , sin importar la forma, entonces dicha figura es la *C* .

RPTA : "C"

PROBLEMA 82 :

Complete la siguiente analogía:



A) B) C) D) E)

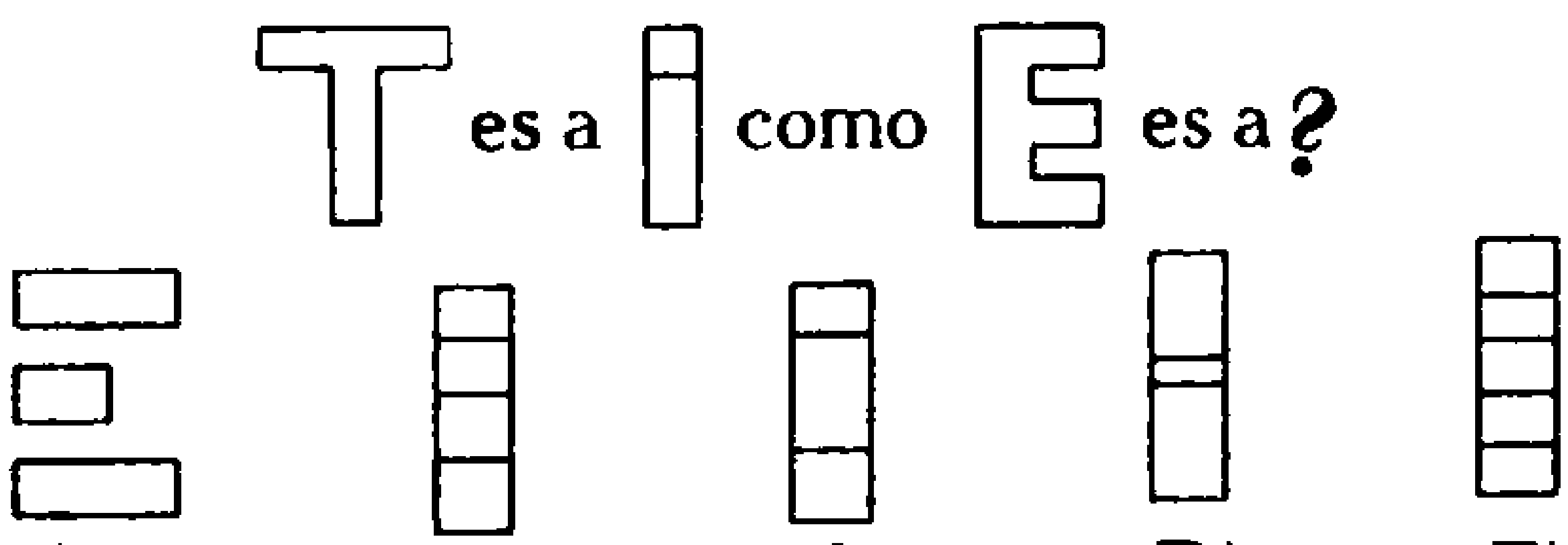
RESOLUCIÓN :

* Las dos figuras del par base están compuestas por *4* líneas ; debemos entonces buscar una alternativa que esté compuesta , al igual que la figura de la pregunta , por *5* líneas.

RPTA : "C"

PROBLEMA 83 :

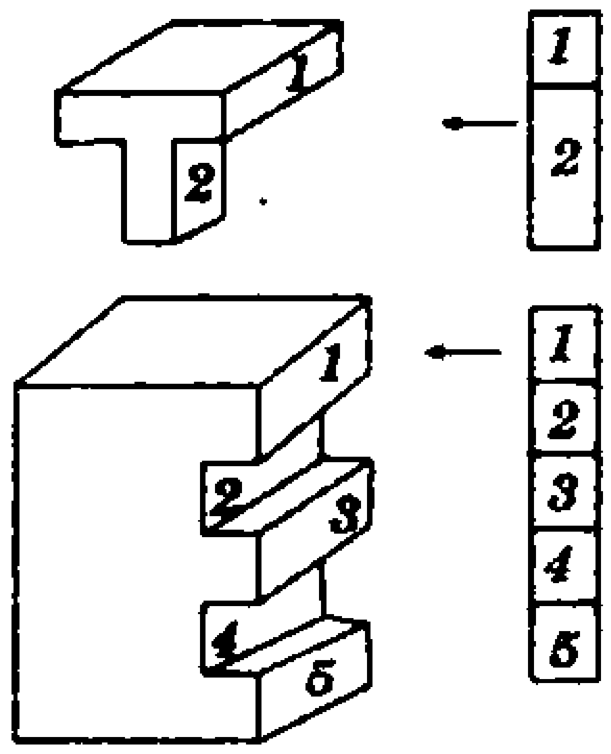
Complete la siguiente analogía:



A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

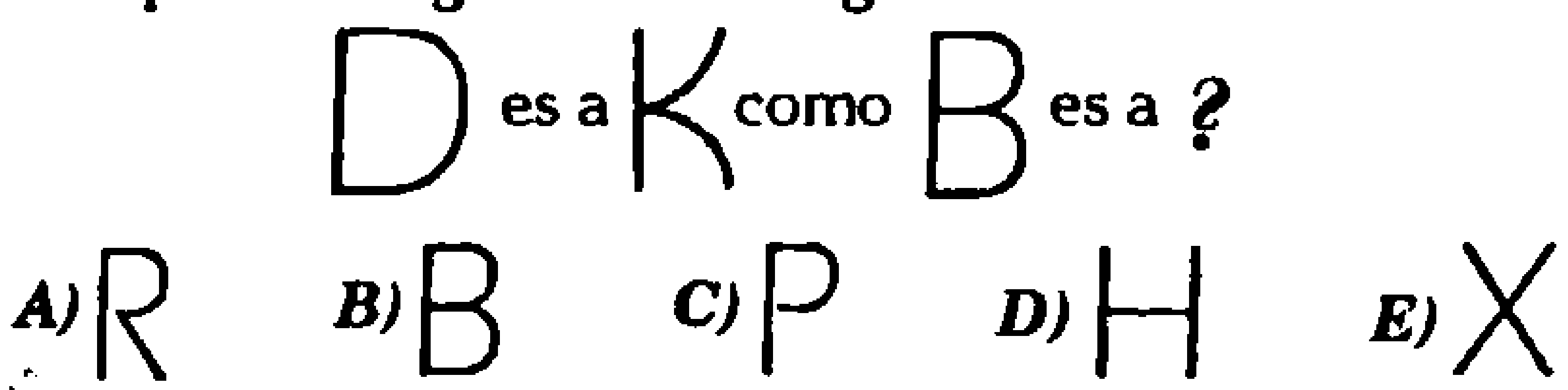
* En el par básico se muestra una letra *"T"* tridimensional vista de frente y de perfil :



RPTA : "E"

PROBLEMA 84 :

Complete la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

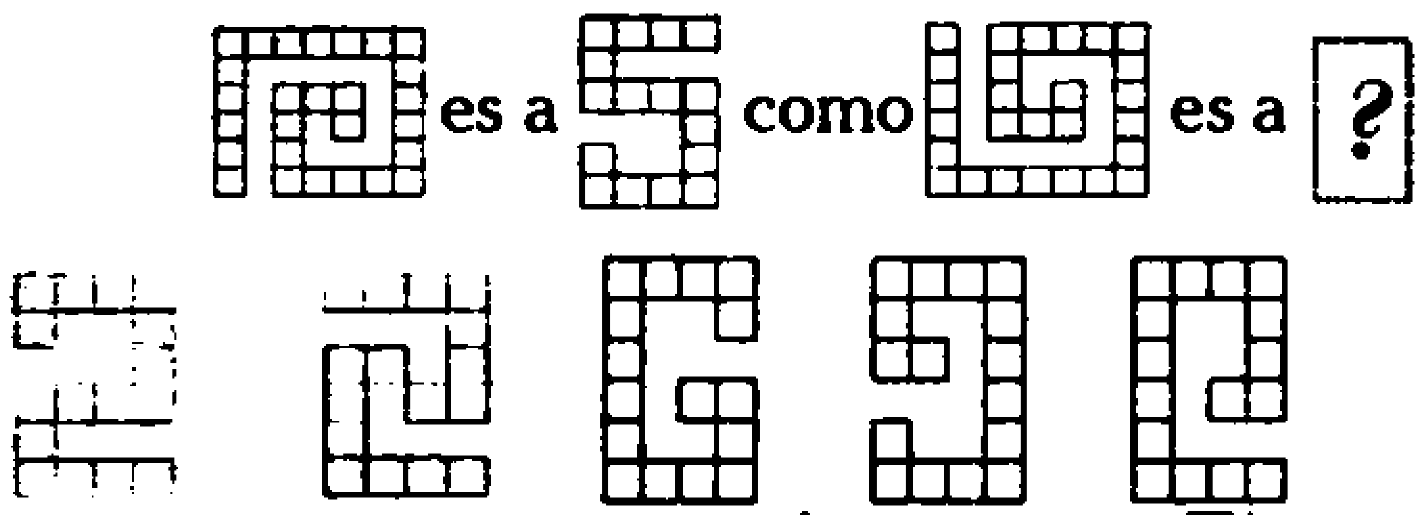
RESOLUCIÓN :

* La primera figura del par básico se parte por la mitad y luego se invierten dichas mitades.

RPTA : "B"

PROBLEMA 85 :

Complete la siguiente analogía:



A) B) C) D) E)

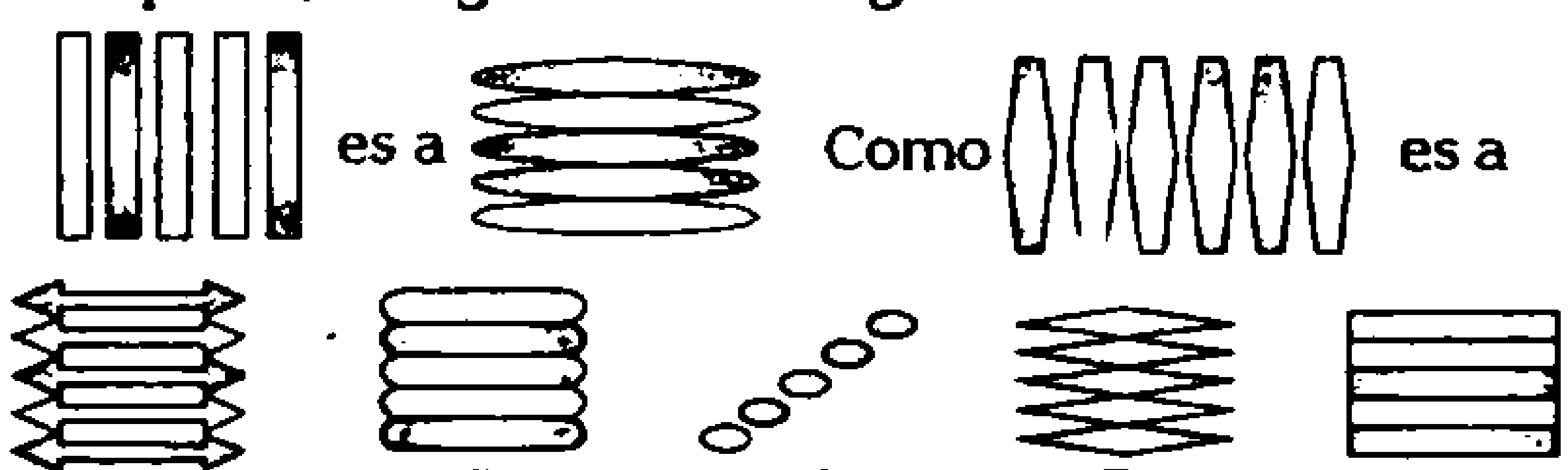
RESOLUCIÓN :

* Cada figura del par básico se invierte verticalmente.

RPTA : "A"

PROBLEMA 86 :

Completar la siguiente analogía:



A) B) C) D) E)

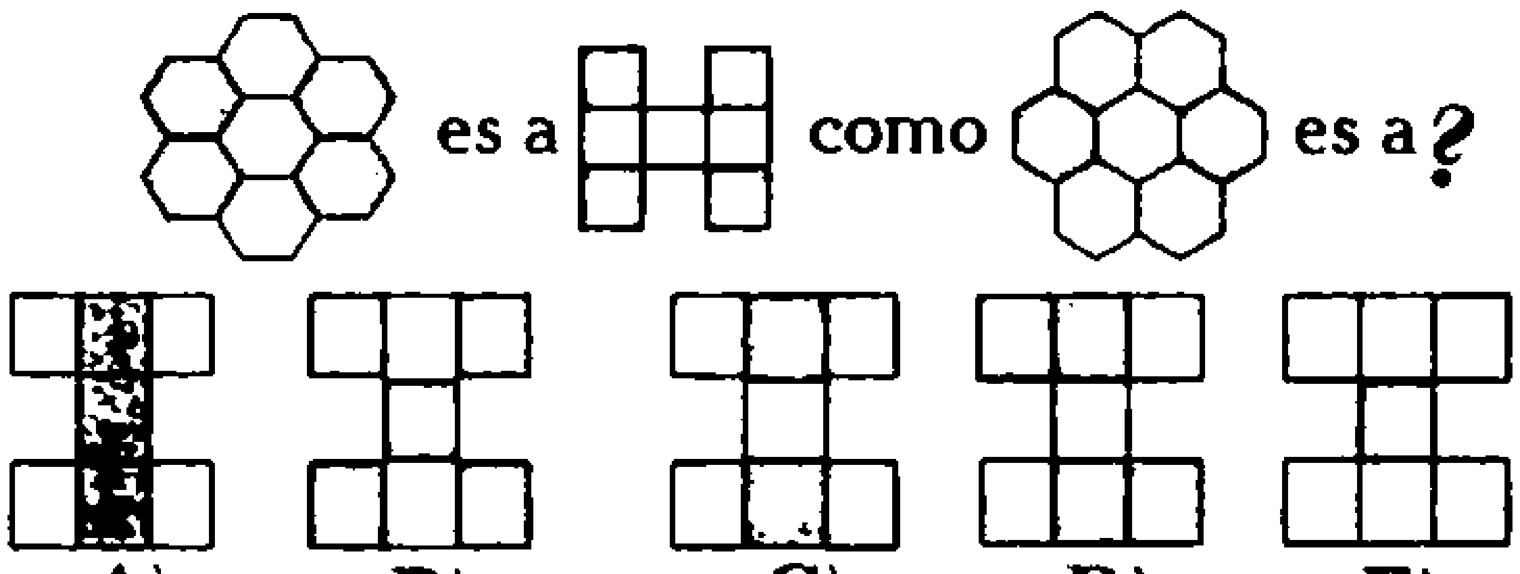
RESOLUCIÓN :

* El par básico muestra que la figura debe rotar *90°* en sentido horario , cambiando a continuación la forma e invirtiéndose el sombreado.

RPTA : "D"

PROBLEMA 87 :

Completar la siguiente analogía :



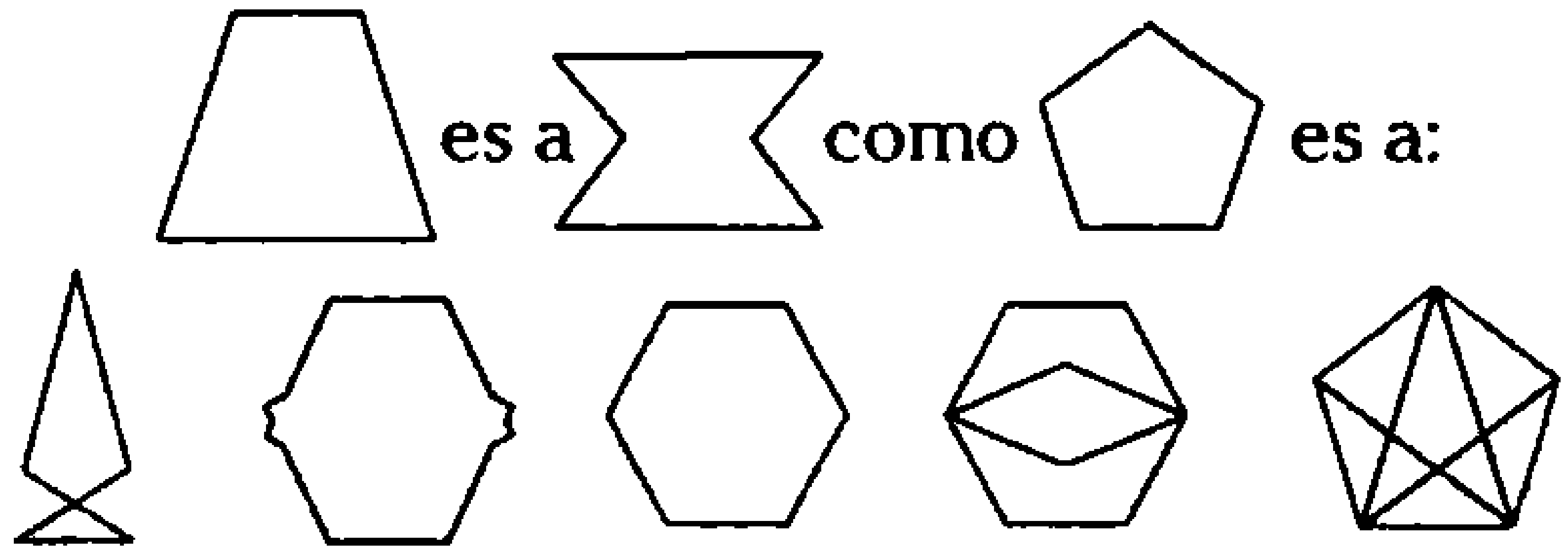
A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

* La analogía indica que la figura debe ser girada *90°* y el sombreado debe ser cambiado a excepción de la parte central.

RPTA : "C"

PROBLEMA 88 :



A) B) C) D) E)

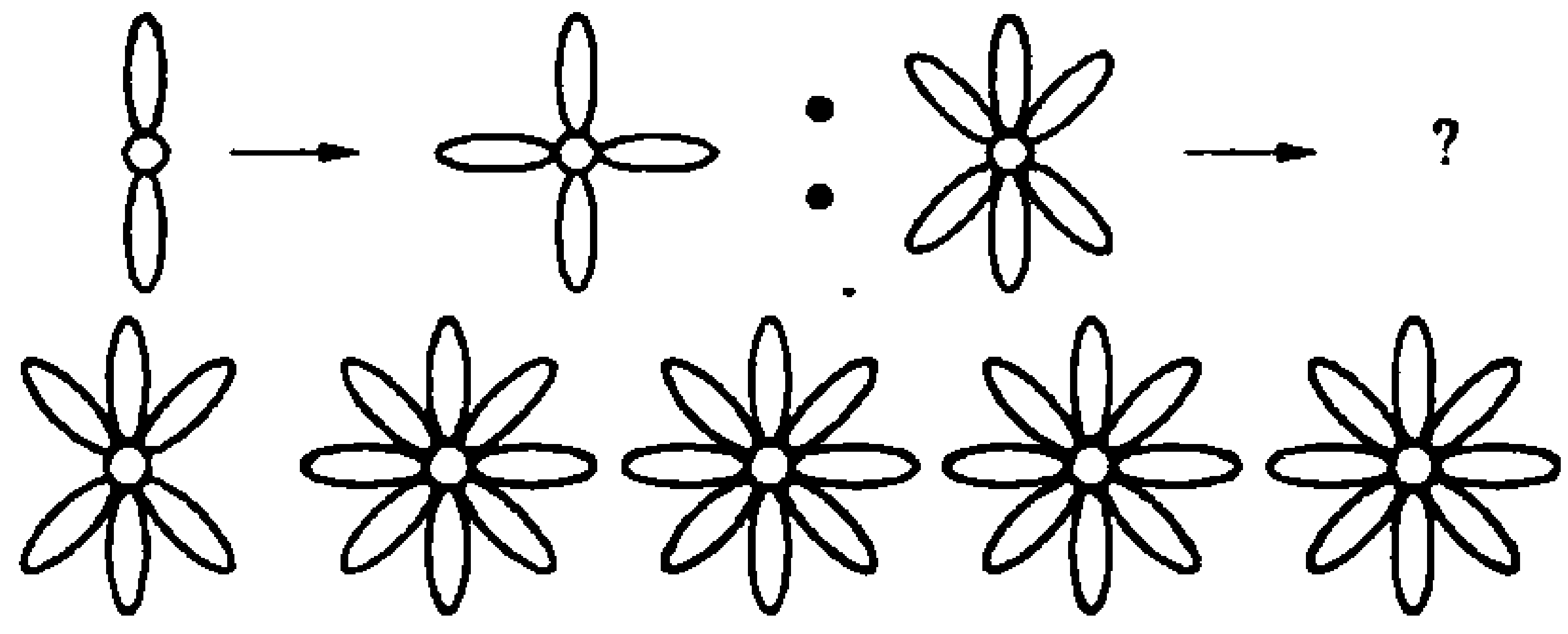
RESOLUCIÓN :

* El par básico muestra que la figura se fusiona con su imagen simétrica horizontal superior, desapareciendo las lineas internas.

RPTA : "B"

PROBLEMA 89 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

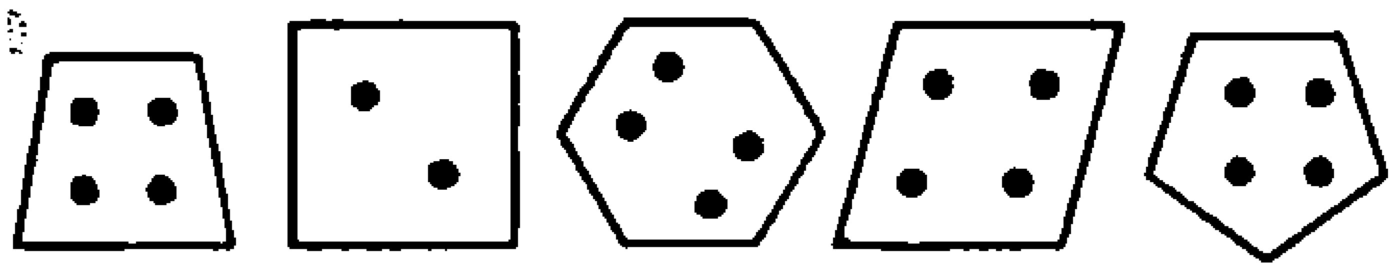
RESOLUCIÓN :

* Cada figura presenta un par de lados más que la anterior , así, debe aparecer como cuarta figura una que tenga *8* lados , la cual deberá tener los colores alternados , es decir la punta central deberá ser blanca y el círculo central igualmente negro ; entonces dicha figura es la *E*.

RPTA : "E"

PROBLEMA 90 :

Completar la siguiente analogía :



A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

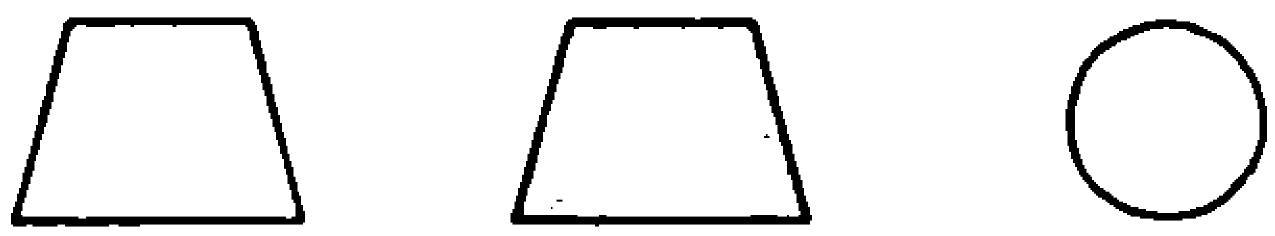
* Cada figura presenta un lado y una bola más que la anterior , así, debe aparecer como cuarta figura. una que tenga *4* lados y *4* bolas las cuales deberán estar próximas a los vértices. Entonces dicha figura es la *D* .

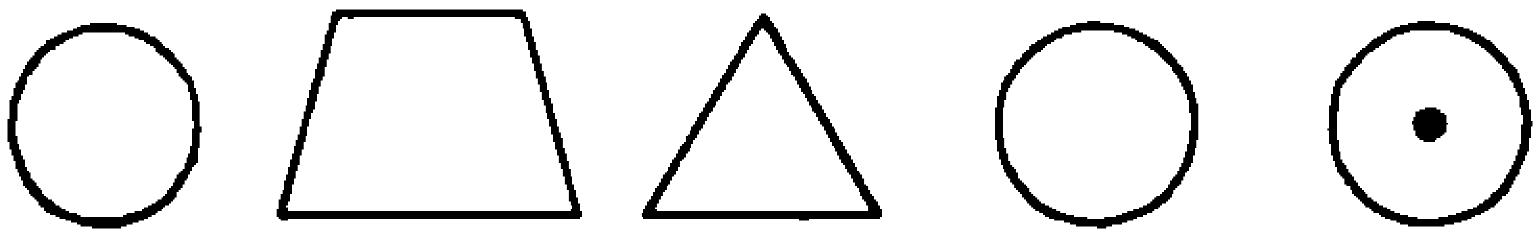
RPTA : "D"

PROBLEMA 91 :

1 es a *2* , como *3* es a : ......

1 2 3





A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

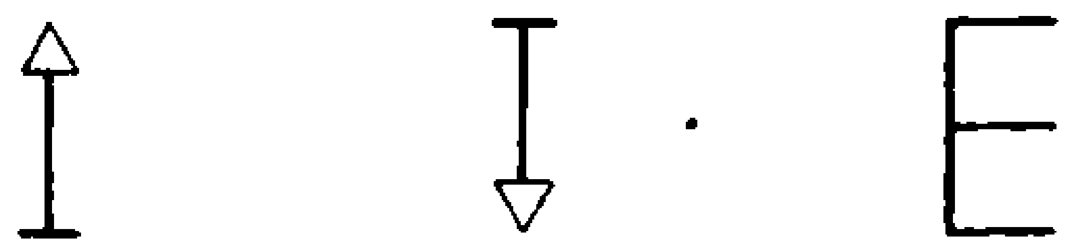
* La *2^da^* figura es idéntica a la *1^ra^* sólo que está sombreada , luego la figura que corresponde a *3* es un círculo sombreado, es decir la *A*.

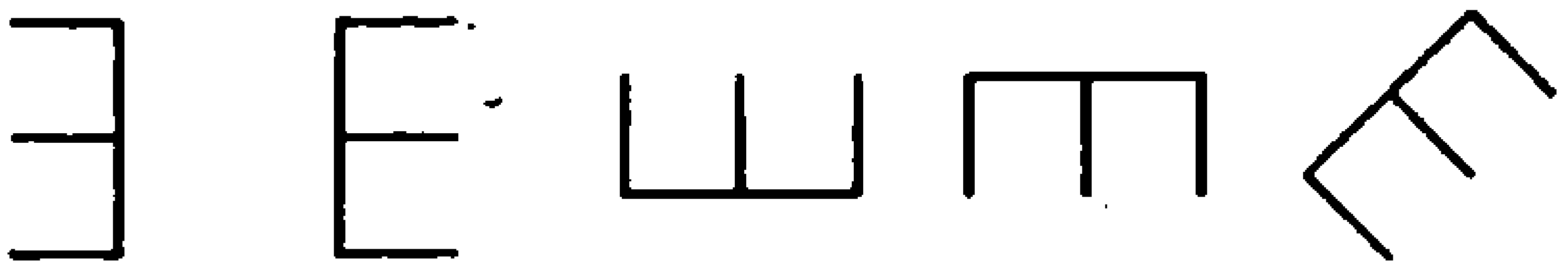
RPTA : "A"

PROBLEMA 92 :

1 es a *2* , como *3* es a : ......

1 2 3





A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

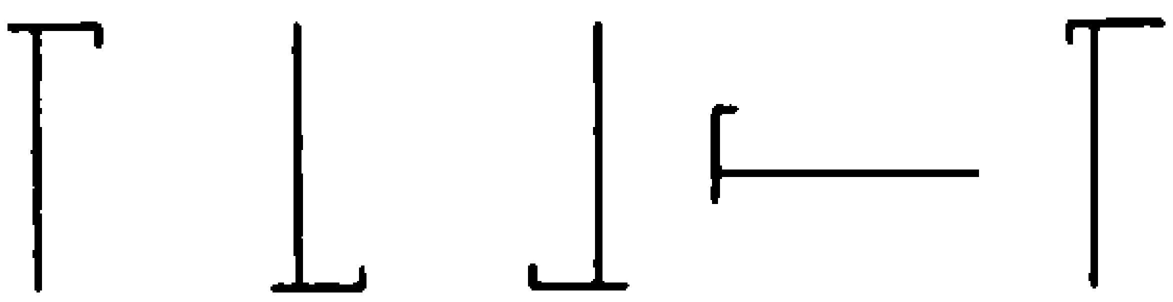
* La *2^da^* figura es igual a la *1^ra^*, pero invertida; luego debemos buscar la inversa de la *3ra* que es la *B*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 93 :

1 es a *2* , como *3* es a : ......

1 2 3



A) B) C) D) E)

RESOLUCIÓN :

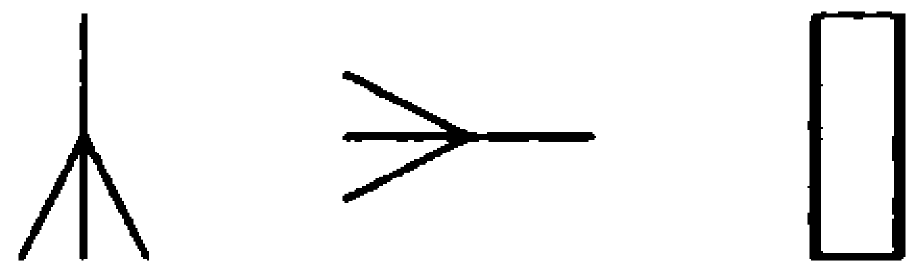
* La *2^da^* figura es idéntica a la *1^ra^* respecto a un eje vertical , igualmente, la simétrica a la *3^ra^* es la *E*.

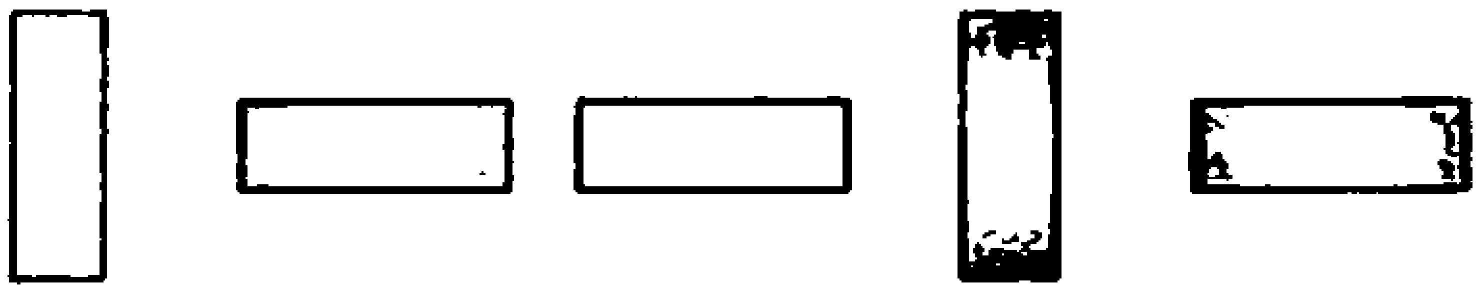
RPTA : "E"

PROBLEMA 94 :

1 es a *2* , como *3* es a : ......

1 2 3





A) B) C) D) E)

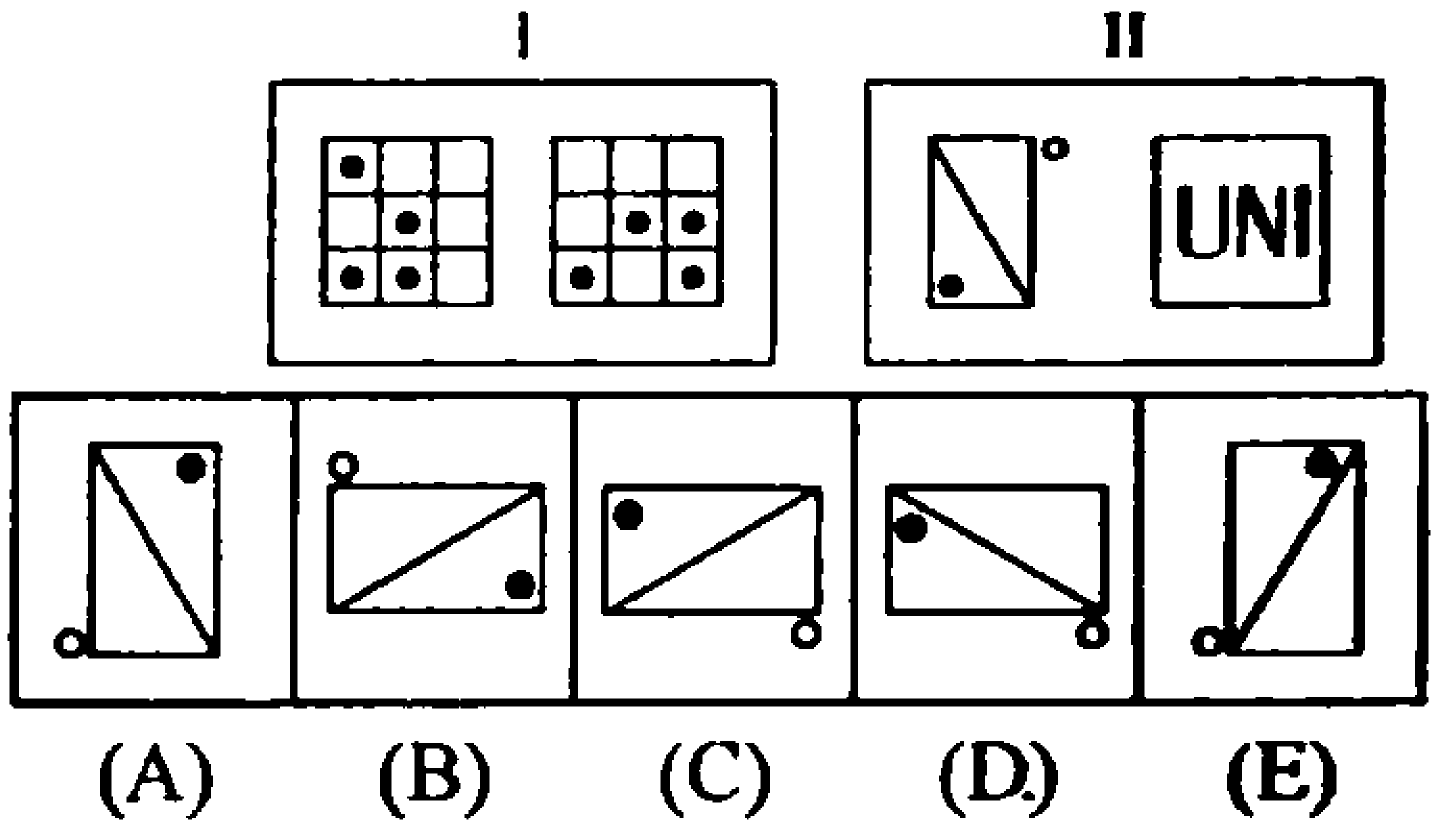
RESOLUCIÓN :

* La *2da* es igual a la *1ra*, girada *90º* hacia la derecha. Entonces al girar así la *3ra* se obtiene *C*.

RPTA : "C"

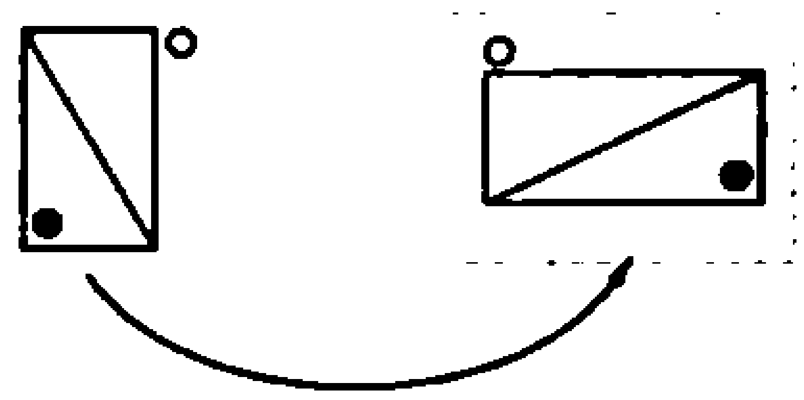
PROBLEMA 96 :

En los cuadros *I* y *II* las figuras cumplen una misma relación , identifique la alternativa que debe ocupar el casillero *UNI*.



RESOLUCIÓN :

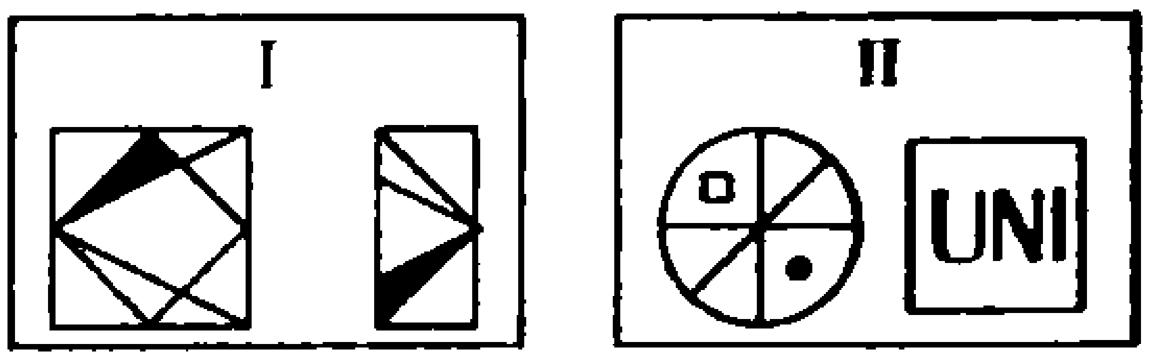
* En *(I)* : La primera figura gira en sentido antihorario
* En *(II)*: La primera figura gira en sentido antihorario

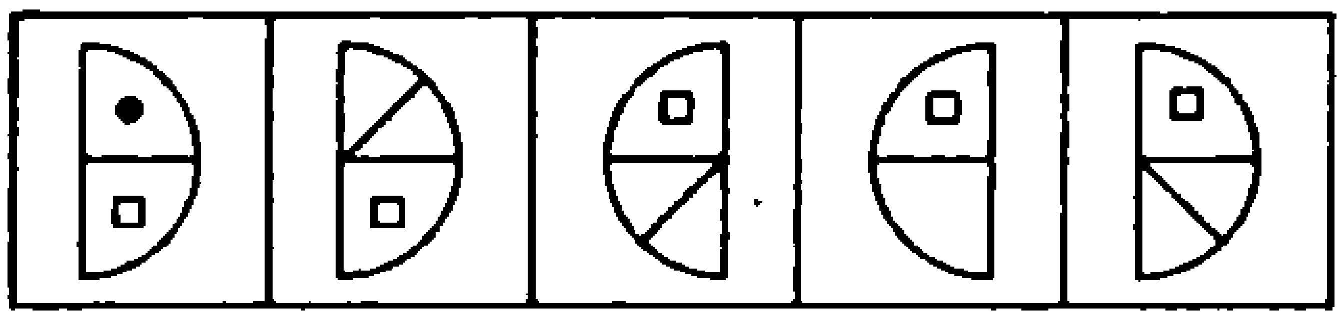


RPTA : "B"

PROBLEMA 97 :

En ambos cuadros *(I* y *II)* las figuras cumplen una misma relación, identifique dicha relación e indique la alternativa que debe ocupar el casillero *UNI*

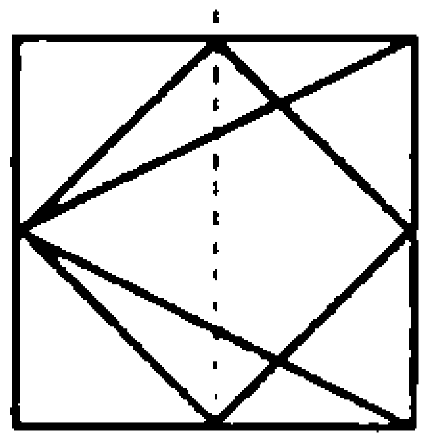




(A) (B) (C) (D) (E)

RESOLUCIÓN :

* En *(I)* : Se divide la *1ra* figura en dos partes :
La parte *A* gira *180°* para obtener la *2da.* figura . Análogamente se realizará en *(I)*

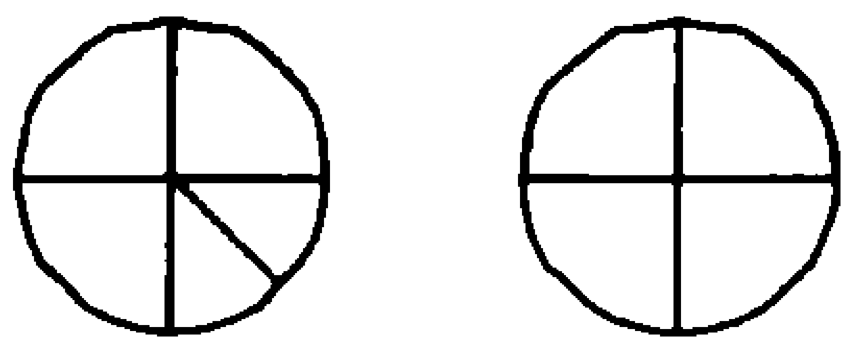


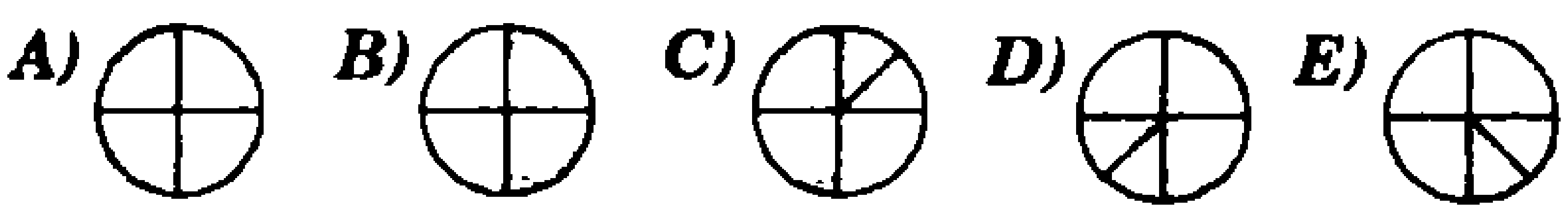
Ⓐ B

RPTA : "B"

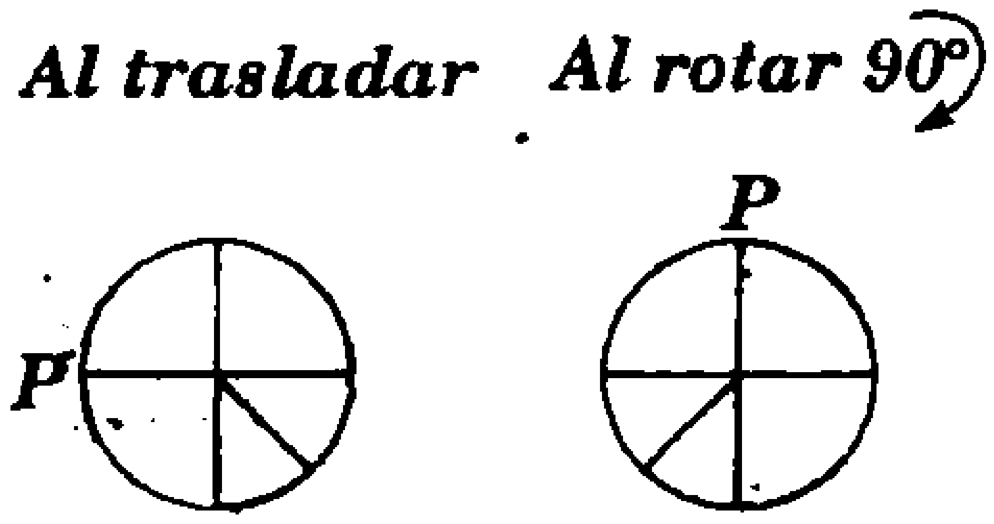
PROBLEMA 98 :

Si una de las figuras se traslada sobre la otra, y luego a la figura resultante se le rota *90°*, en sentido horario, se obtiene :





RESOLUCIÓN :



RPTA : "D"

PROBLEMA 99 :

Si la figura *(I)* rota *90°* en sentido horario , la figura *(II)* rota *90°* en sentido antihorario , y la figura *(III)* rota *180°* en sentido horario . Luego se trasladan dos de ellas sobre la otra , y a la figura resultante se rota *270°* en sentido antihorario . Entonces se obtendrá :

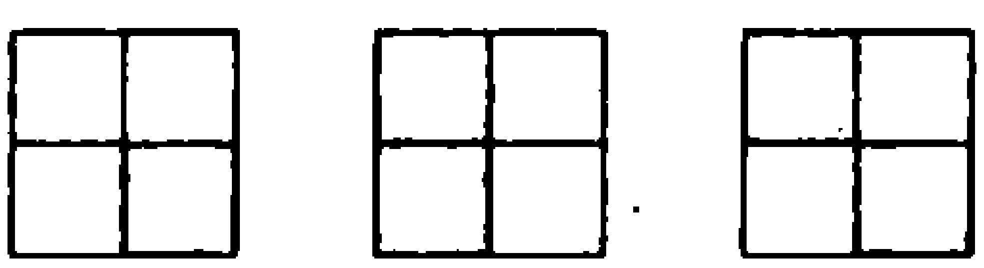
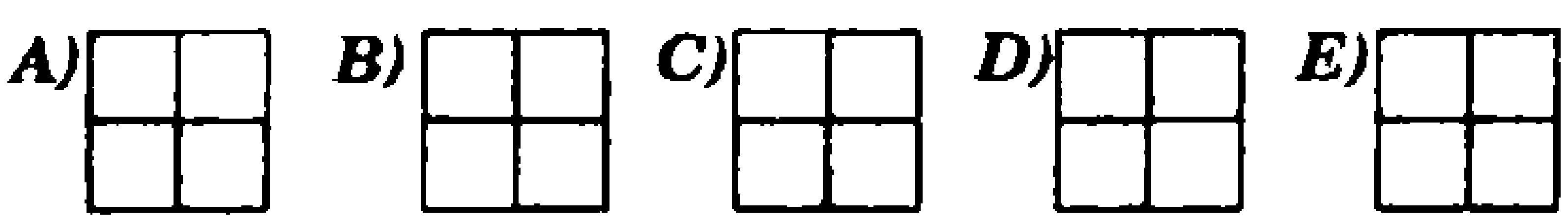
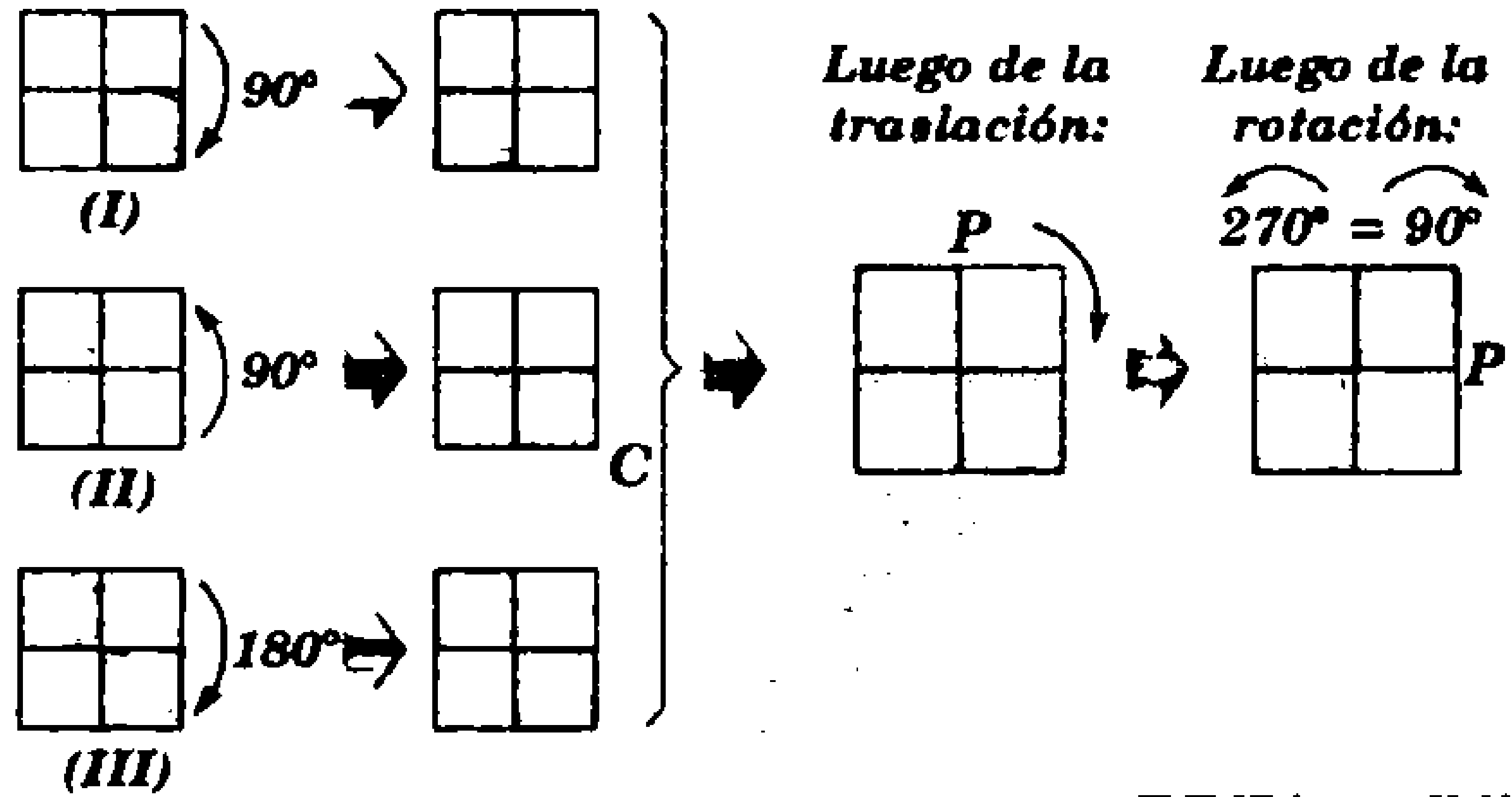


Fig. (I) *Fig. (II)* *Fig. (III)*



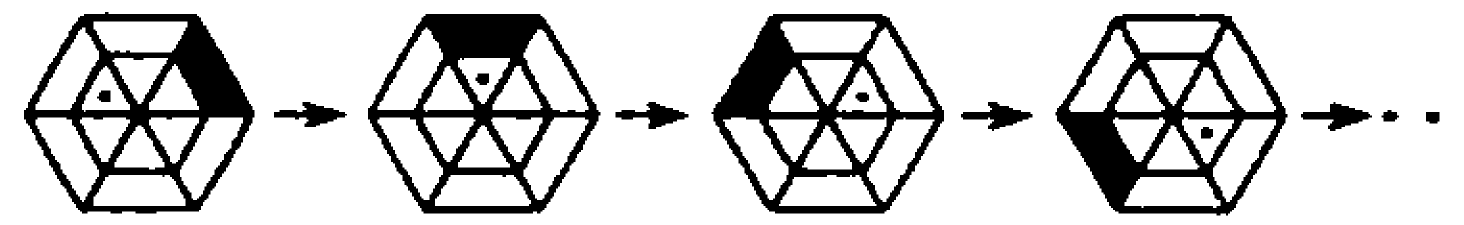
RESOLUCIÓN :



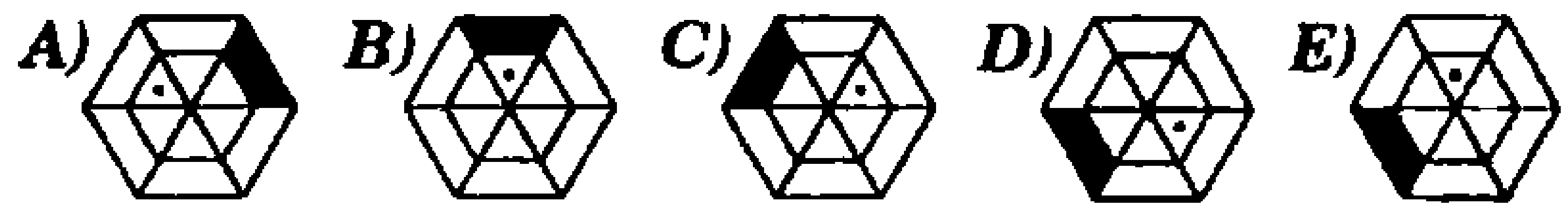
RPTA : "D"

PROBLEMA 100 :

Se define la traslación como sigue :

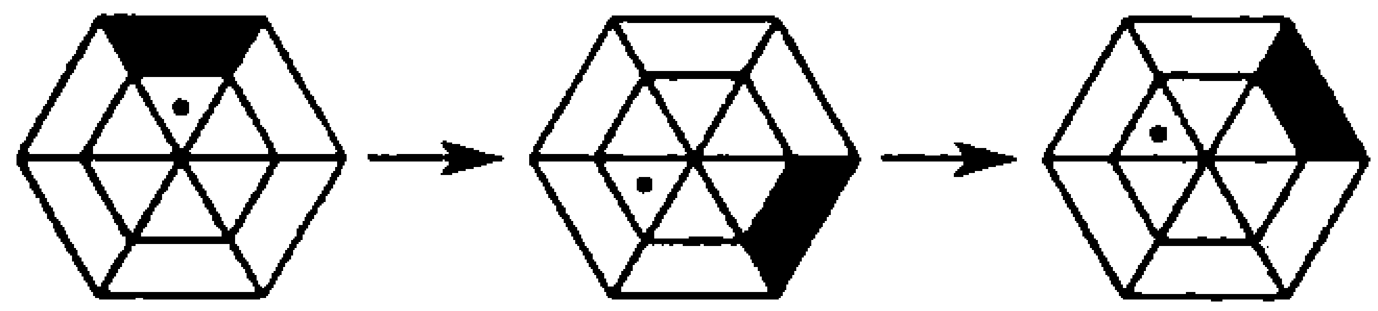


¿Cómo será la figura al realizarse la traslación *N° 62*?



RESOLUCIÓN :

* Se observa que el "punto" gira en sentido horario , y la "sombra" en sentido antihorario . Luego , las figuras siguientes serán :

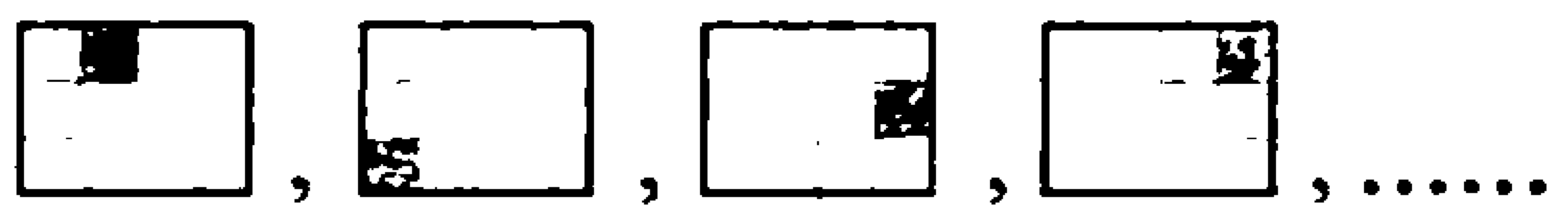


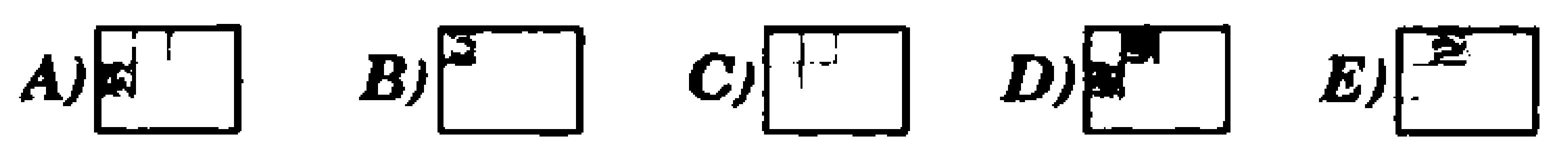
* De donde se concluye que las figuras de las traslaciones: ***0 ; 6 ; 12 ; 18 ...*** son iguales. Entonces, la figura ***"0"*** es igual a la figura ***"60"***. *Por lo tanto la figura ***"62"*** será igual que la figura ***"2"***.

RPTA : "C"

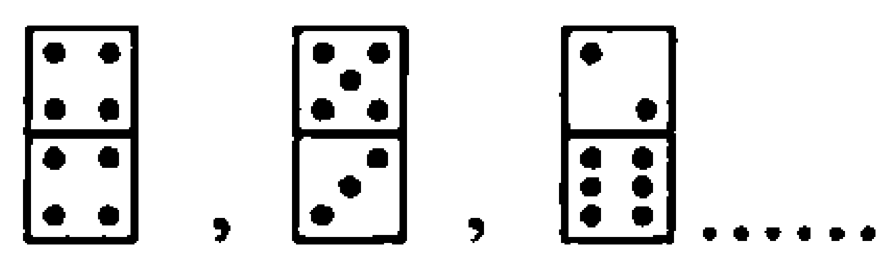
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

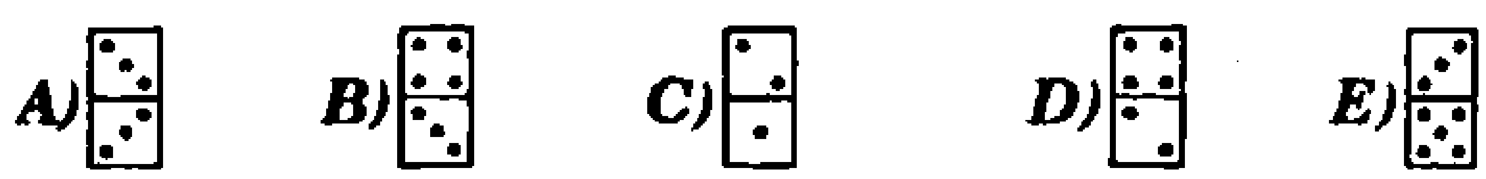
01 ¿Qué figura continúa?



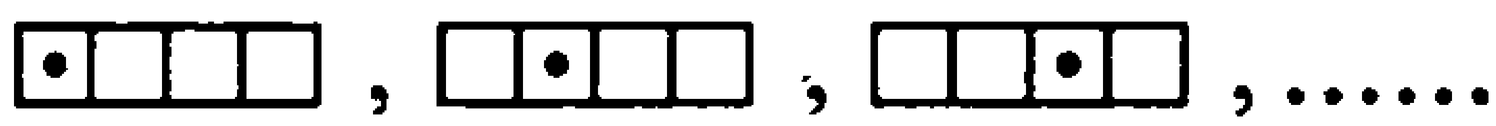


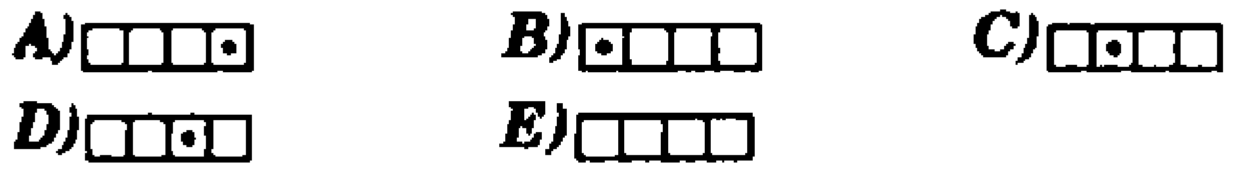
02 ¿Qué figura sigue?





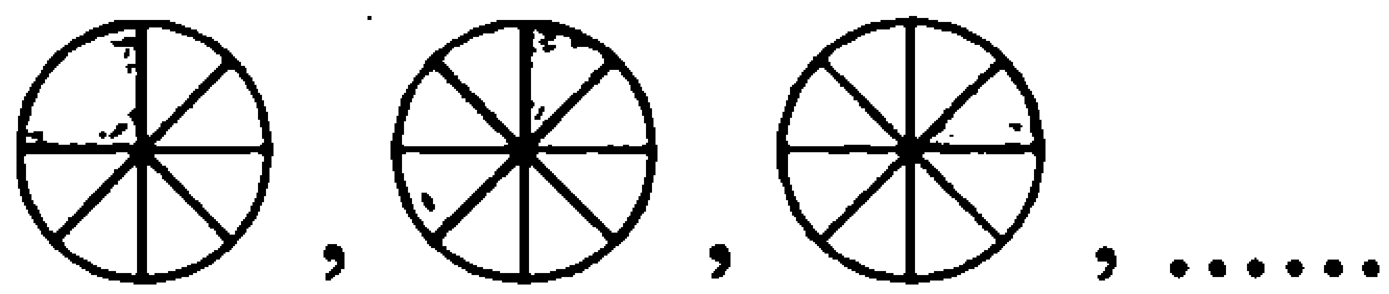
03 ¿Qué figura sigue?

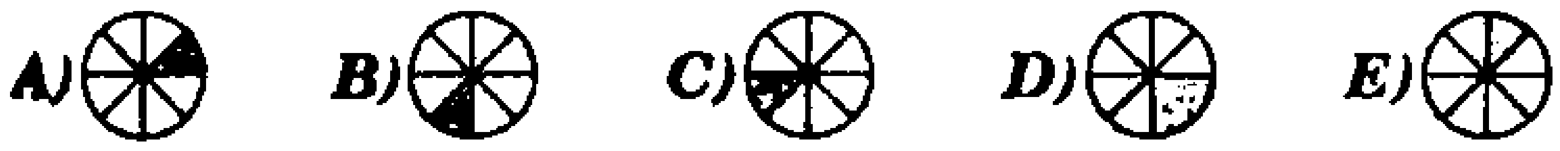




A) B) C) D) E)

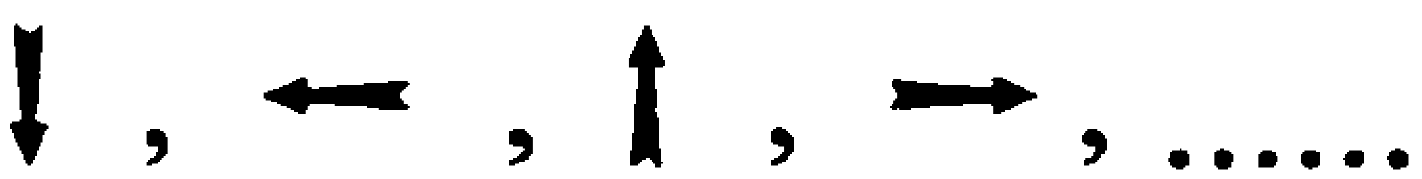
04 ¿Qué figura continúa?

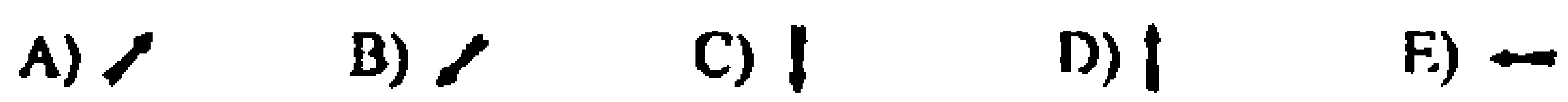




A) B) C) D) E)

05 ¿Qué figura continúa?





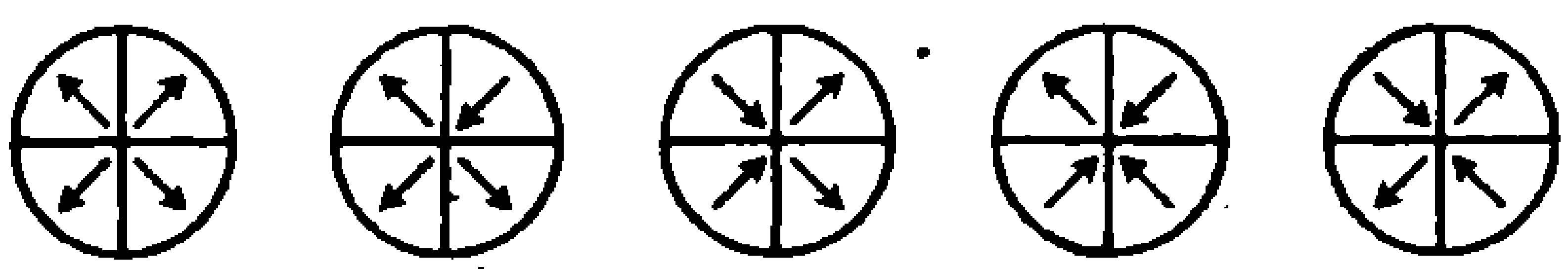
A) B) C) D) E)

06

es a ... como ... es a

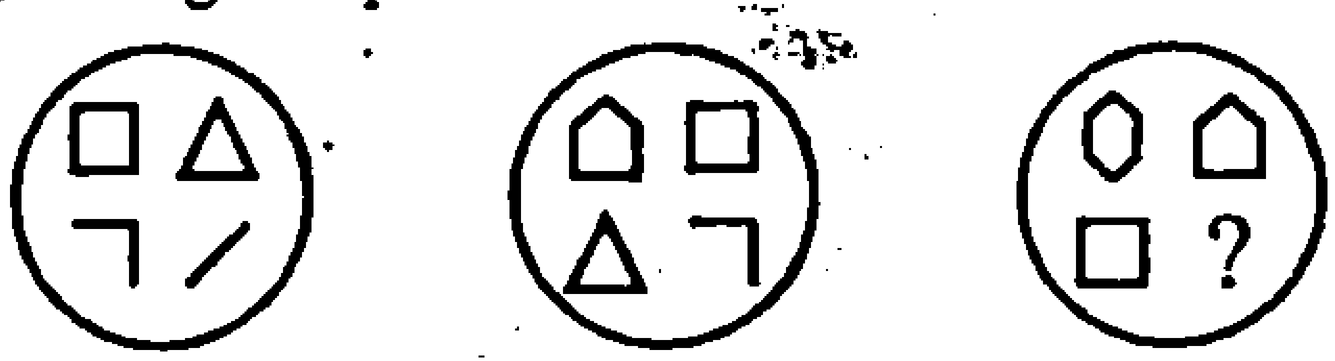
A) B) C) D) E)

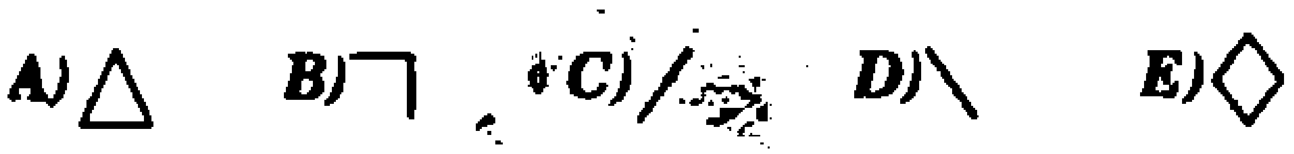
07 ¿Cuál de los siguientes gráficos no concuerda con el grupo?



(A) (B) (C) (D) (E)

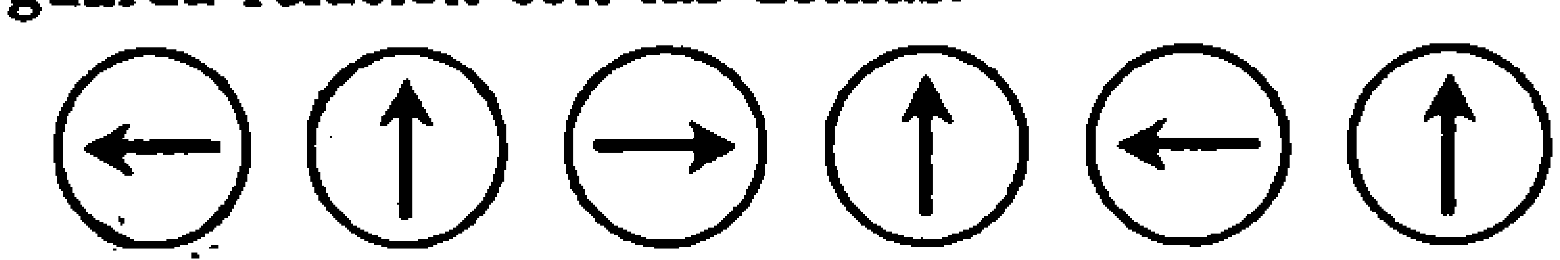
08 La figura que falta es :





A) B) C) D) E)

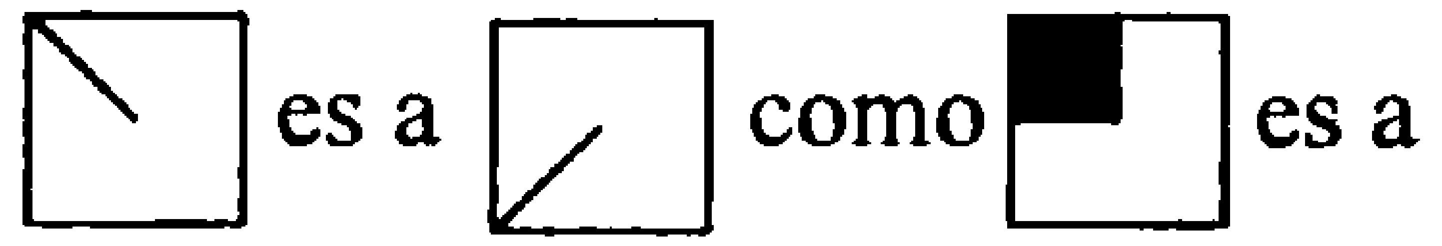
09 He aquí una serie de figuras enumeradas correlativamente del *1* al *6* . Descubre la figura que no guarda relación con las demás.



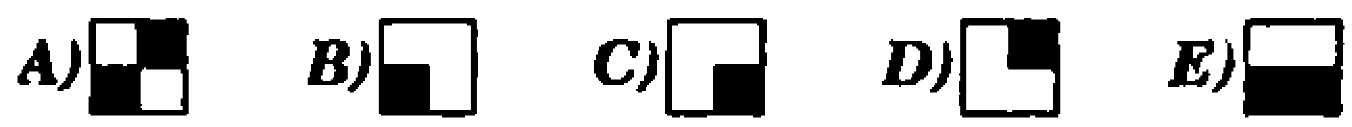
1 2 3 4 5 6

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 1*

10

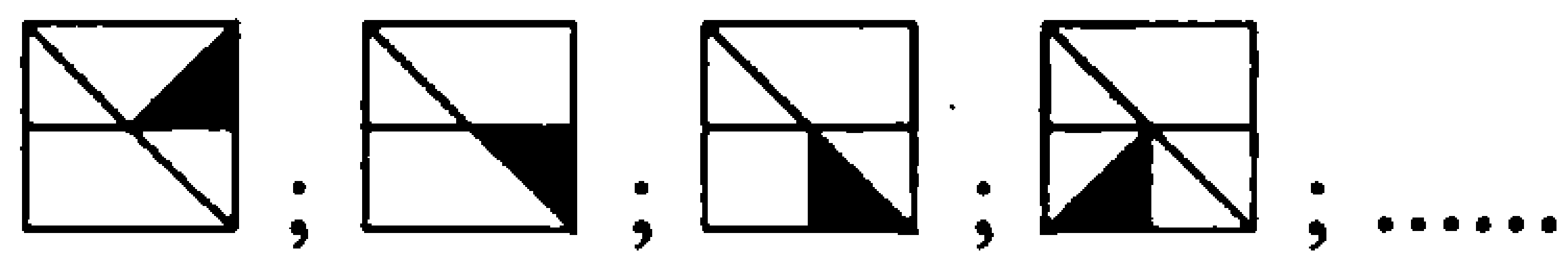


es a ... como ... es a



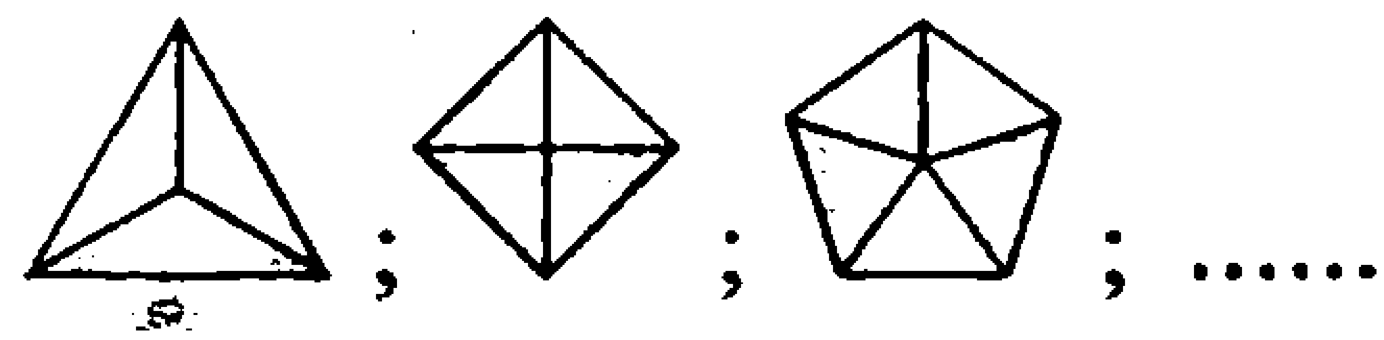
A) B) C) D) E)

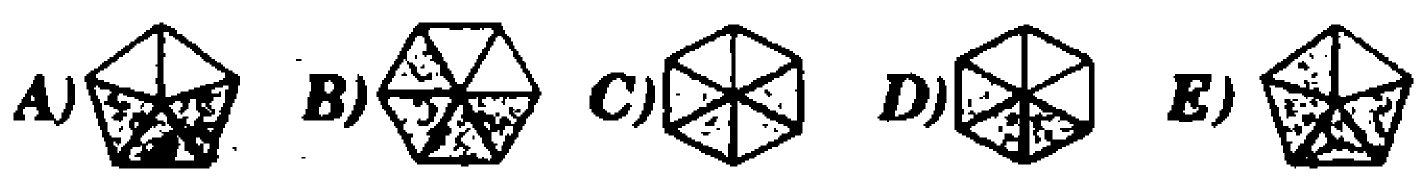
11 ¿Qué figura continúa?



A) B) C) D) E)

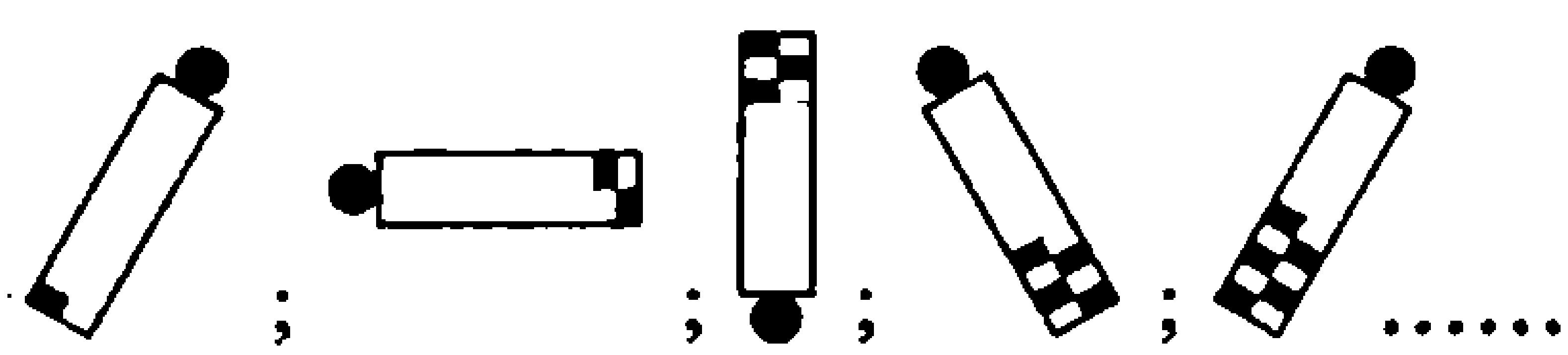
12 ¿Qué figura continúa?

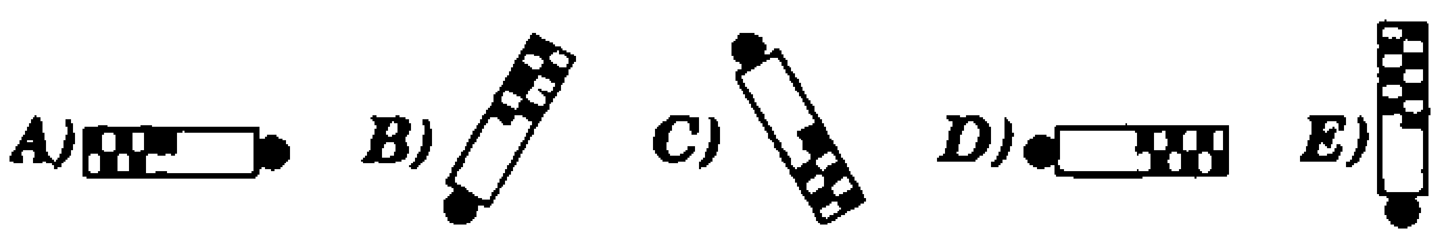




A) B) C) D) E)

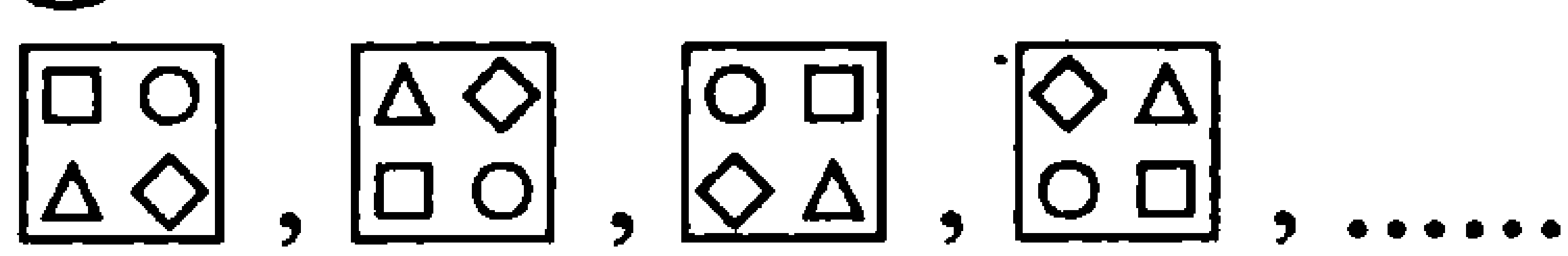
13 ¿Qué figura continúa?

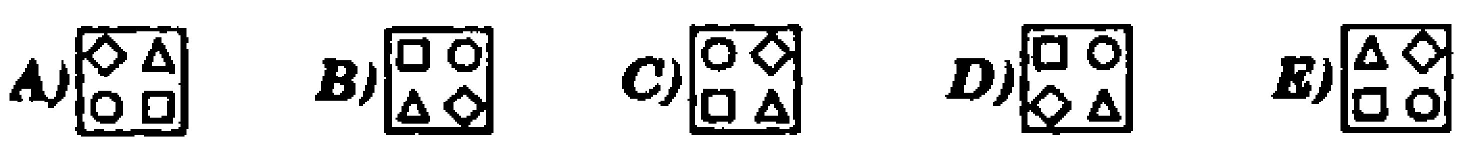




A) B) C) D) E)

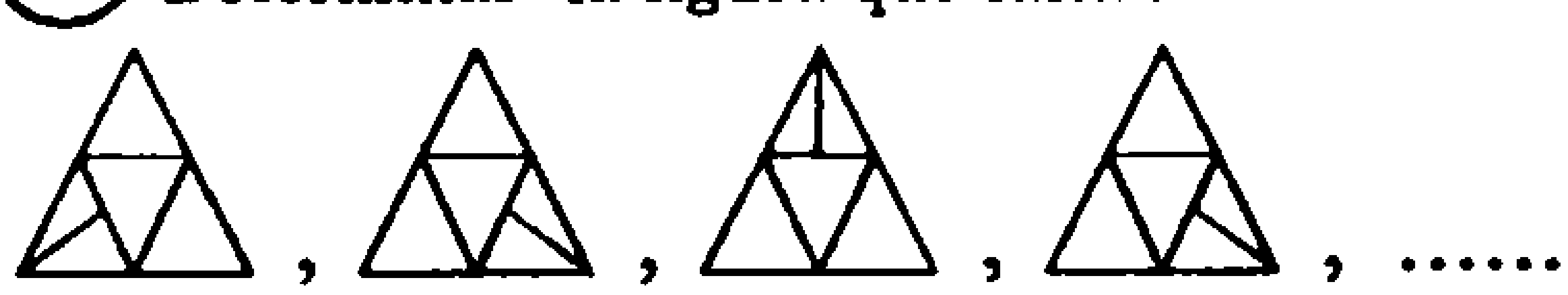
14 Determinar la figura que falta :

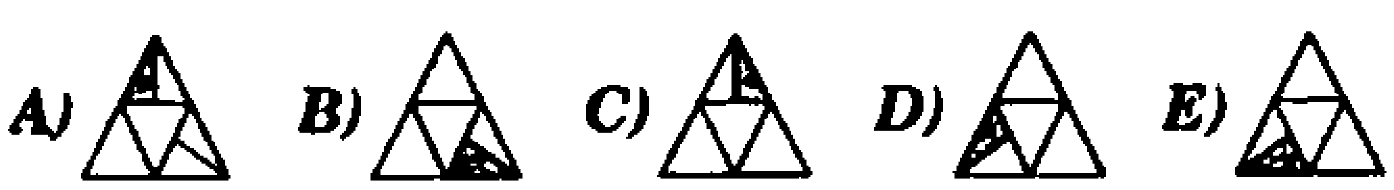




A) B) C) D) E)

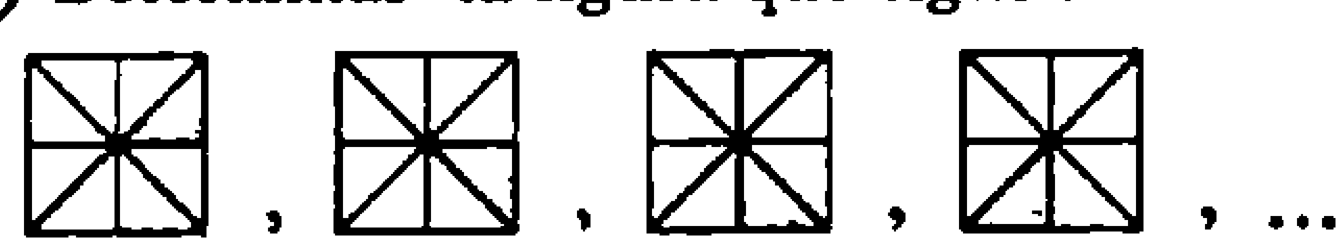
15 Determinar la figura que falta :

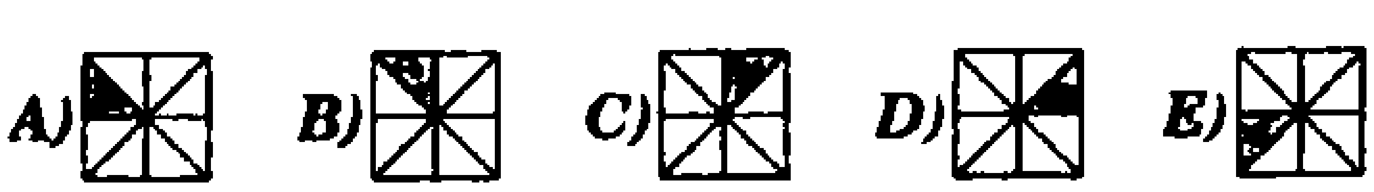




A) B) C) D) E)

16 Determinar la figura que sigue :

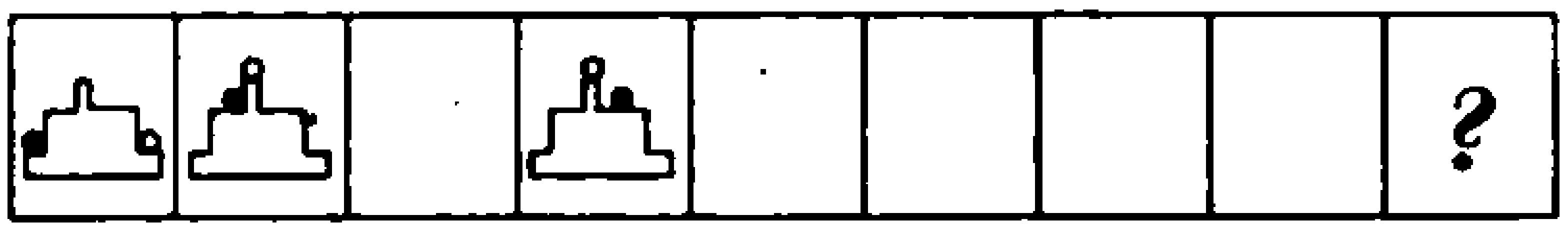


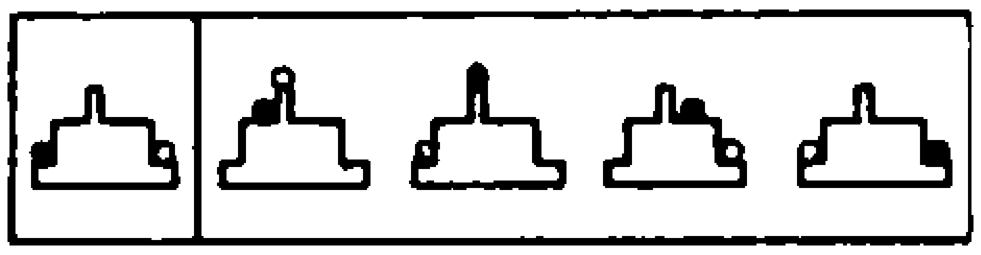


A) B) C) D) E)

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

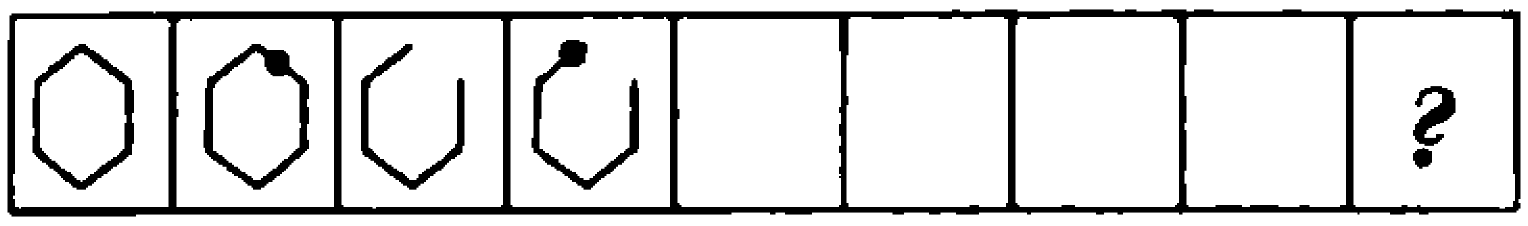
01 ¿ Qué corresponde en **?** ?

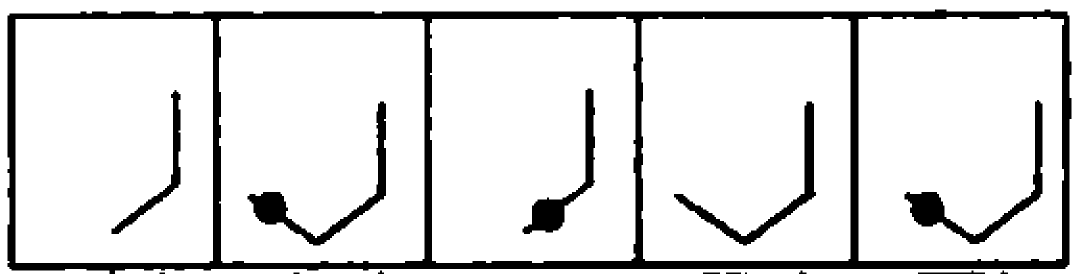




A) B) C) D) E)

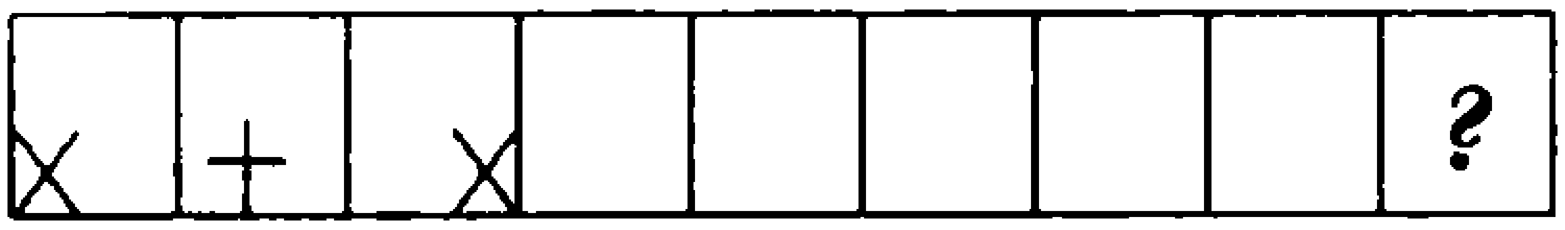
02 ¿ Qué corresponde en **?** ?

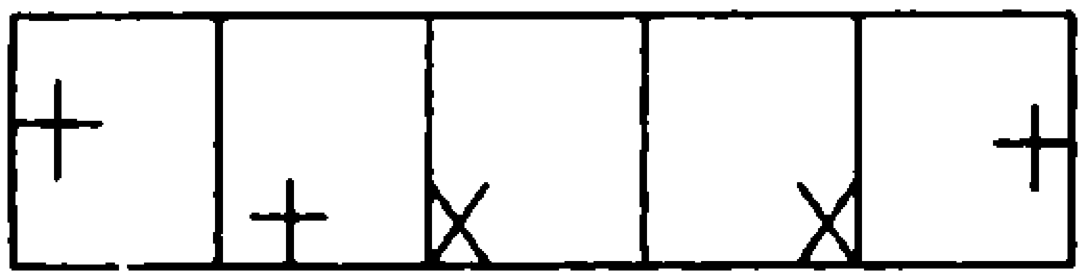




A) B) C) D) E)

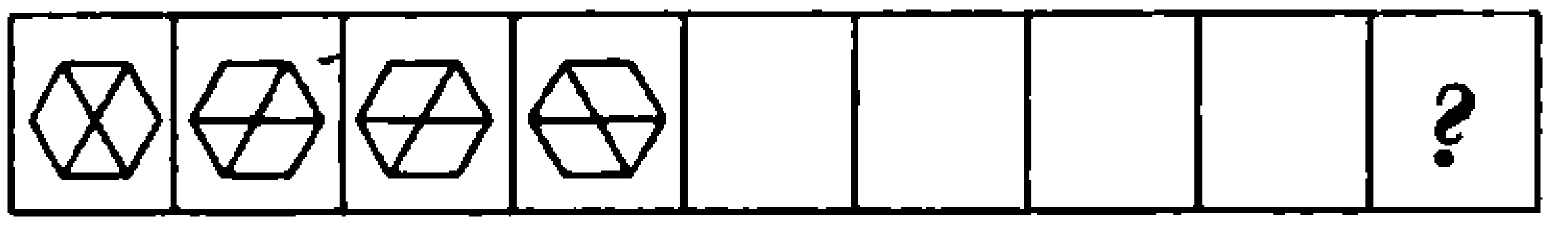
03 ¿ Qué corresponde en **?** ?

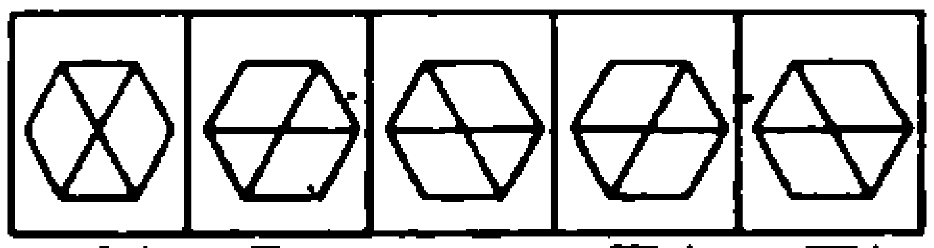




A) B) C) D) E)

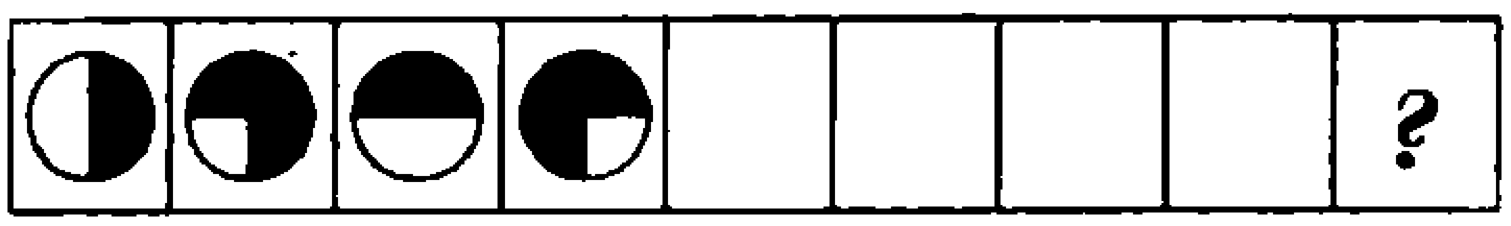
04 ¿ Qué corresponde en **?**

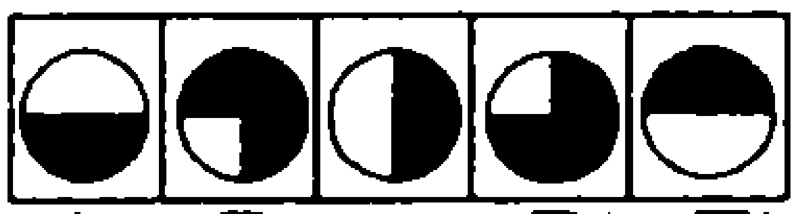




A) B) C) D) E)

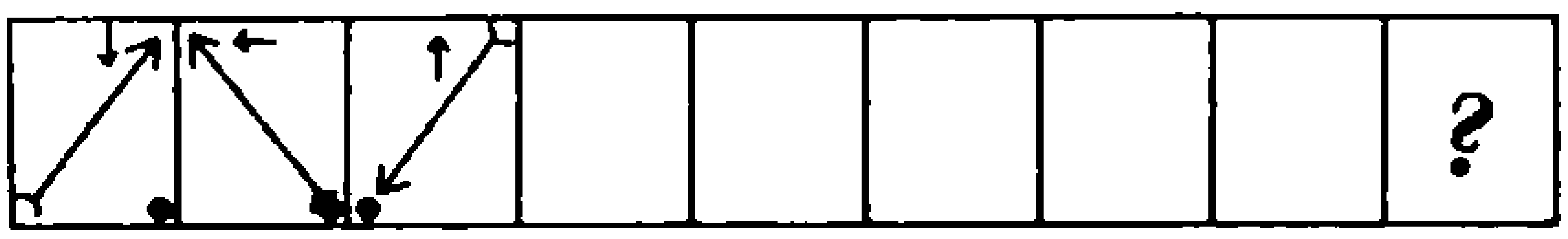
05 ¿ Qué corresponde en **?** ?

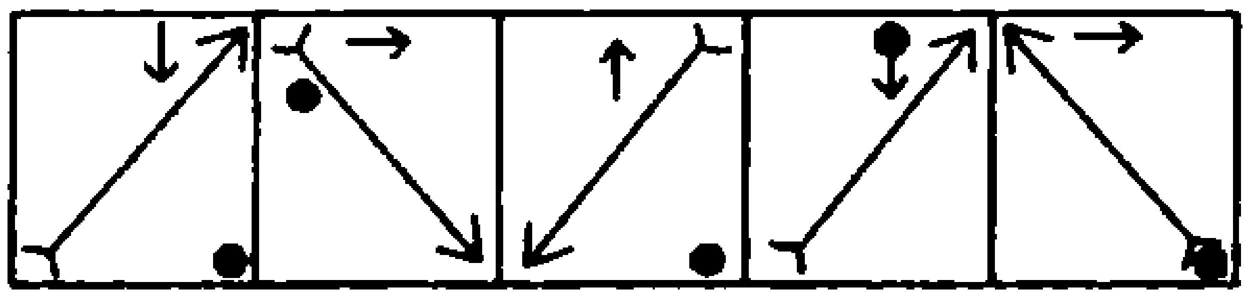




A) B) C) D) E)

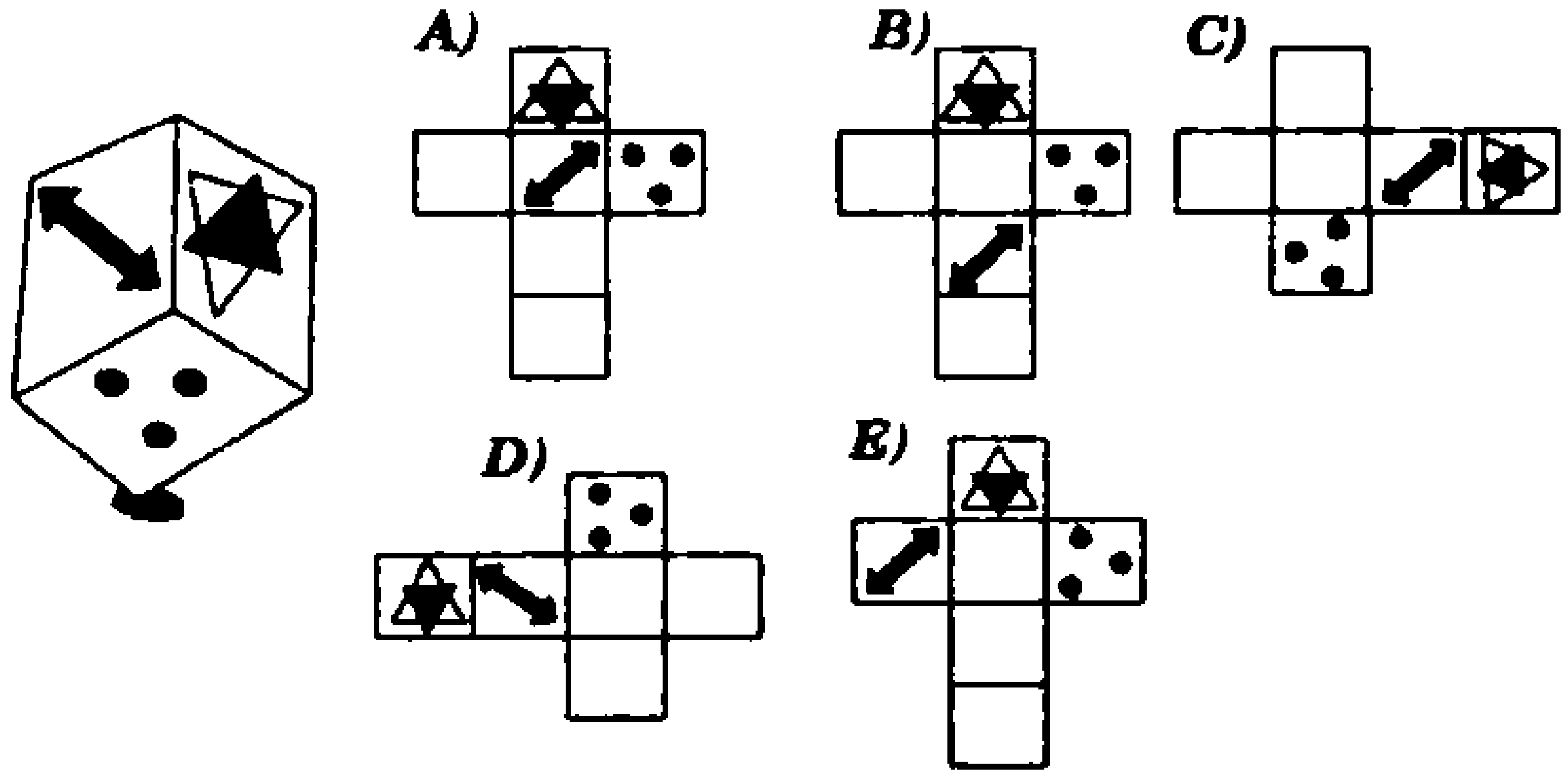
06 ¿ Qué corresponde en **?** ?



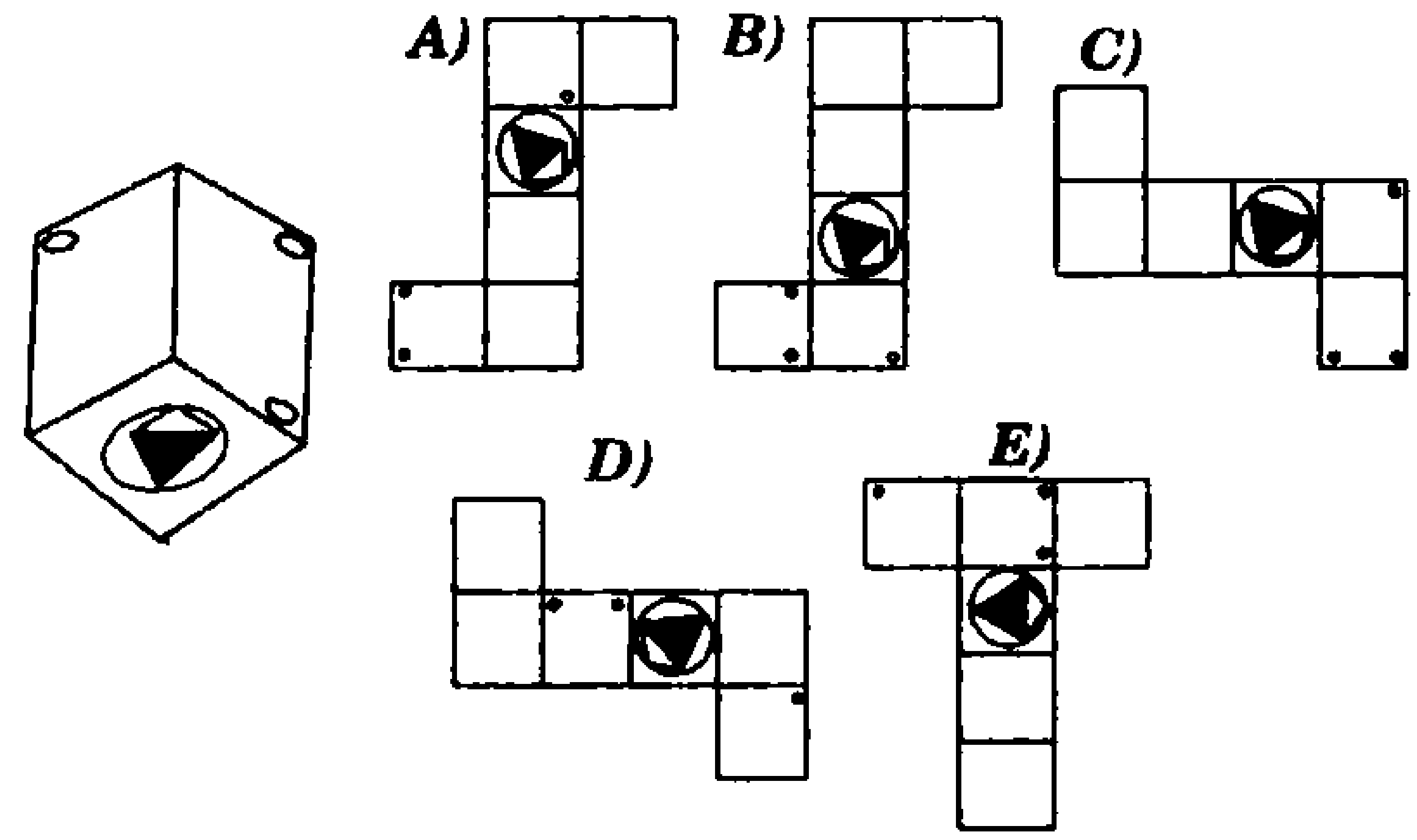


A) B) C) D) E)

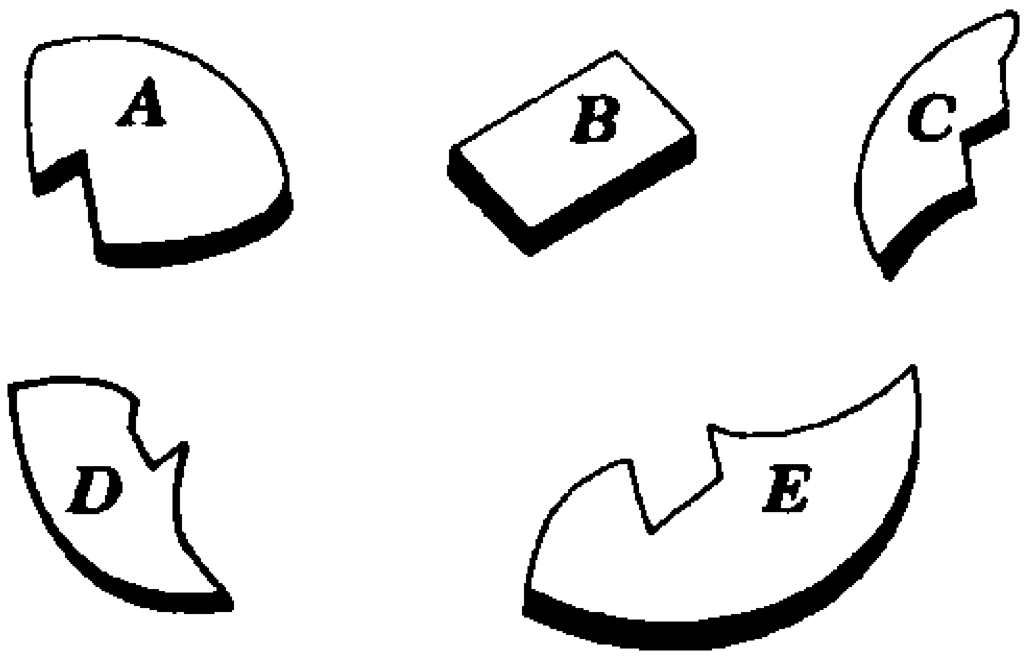
07 ¿Que alternativa representa al cubo desplegado?



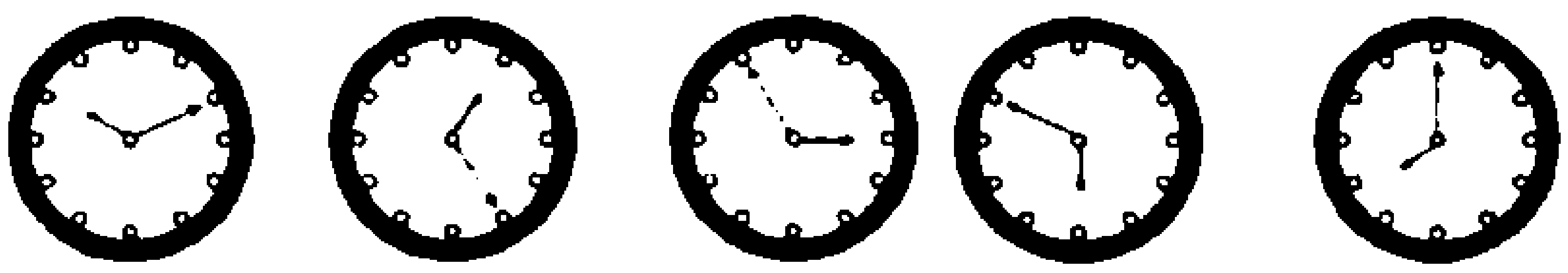
08 ¿Que alternativa representa al cubo desplegado?



09 Con cuatro de las siguientes piezas se puede formar un círculo. Indique la alternativa correspondiente a la pieza sobrante.

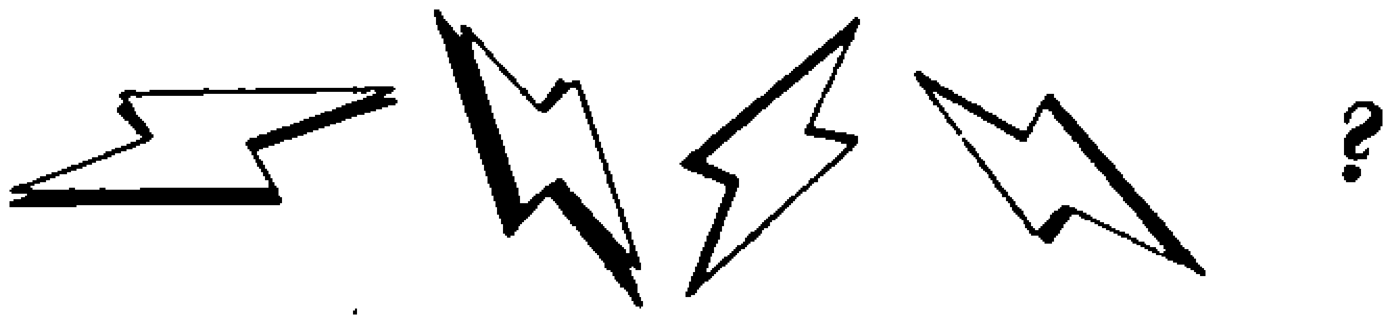


10 ¿Qué figura es distinta a las otras cuatro?



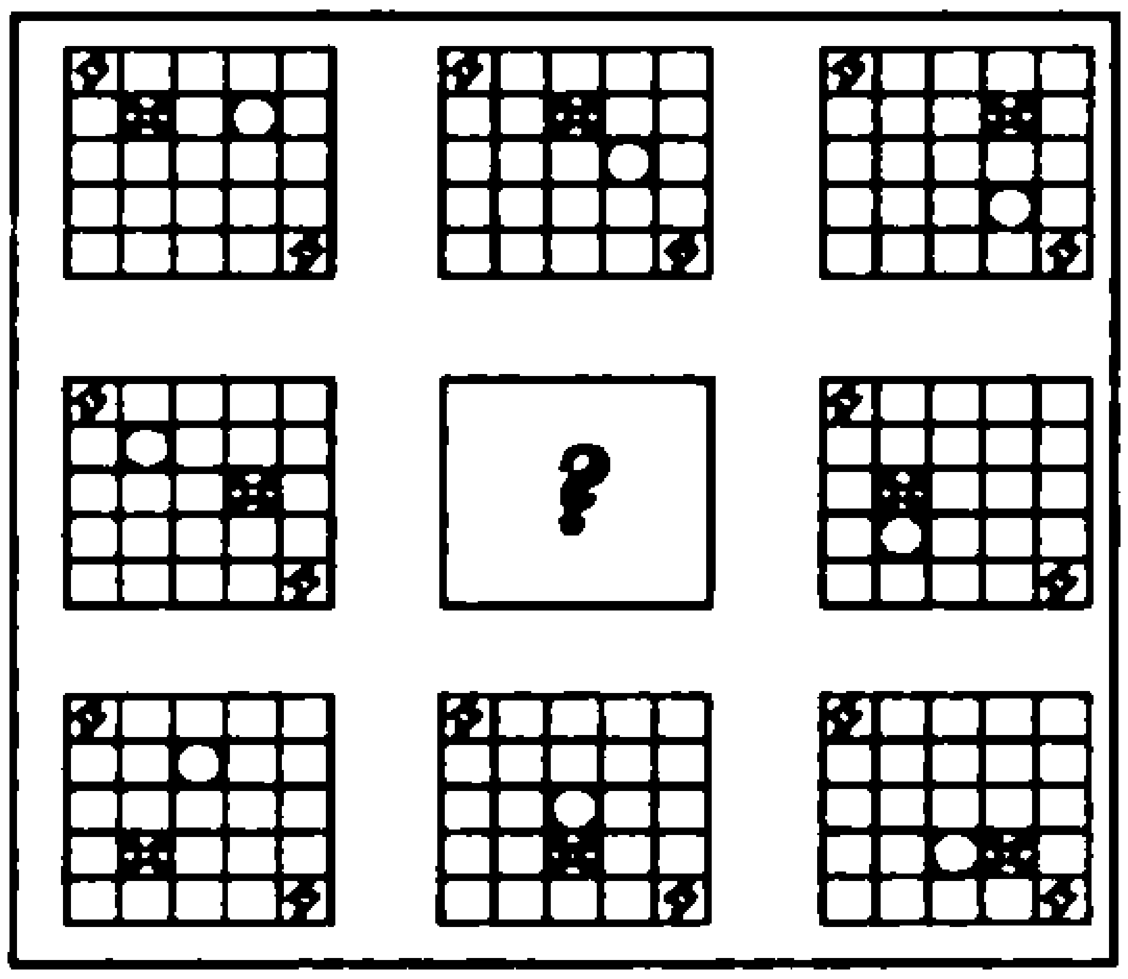
A) B) C) D) E)

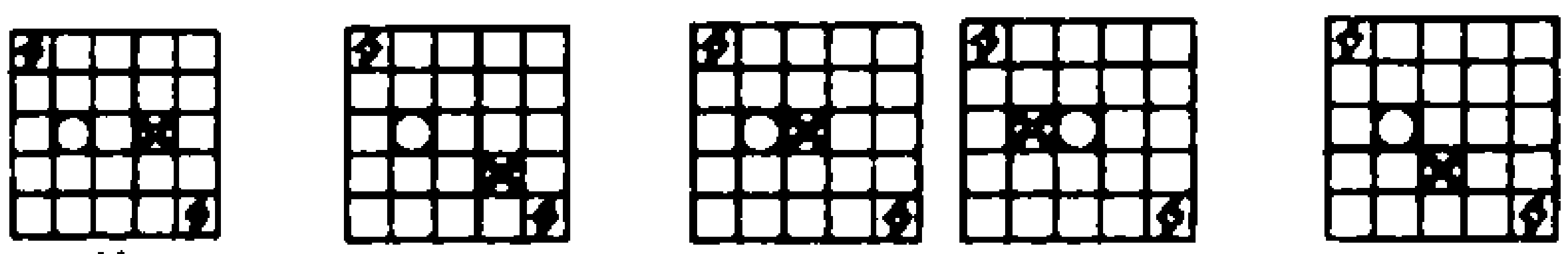
11 ¿Qué alternativa debe reemplazar el signo de interrogación?



A) B) C) D) E)

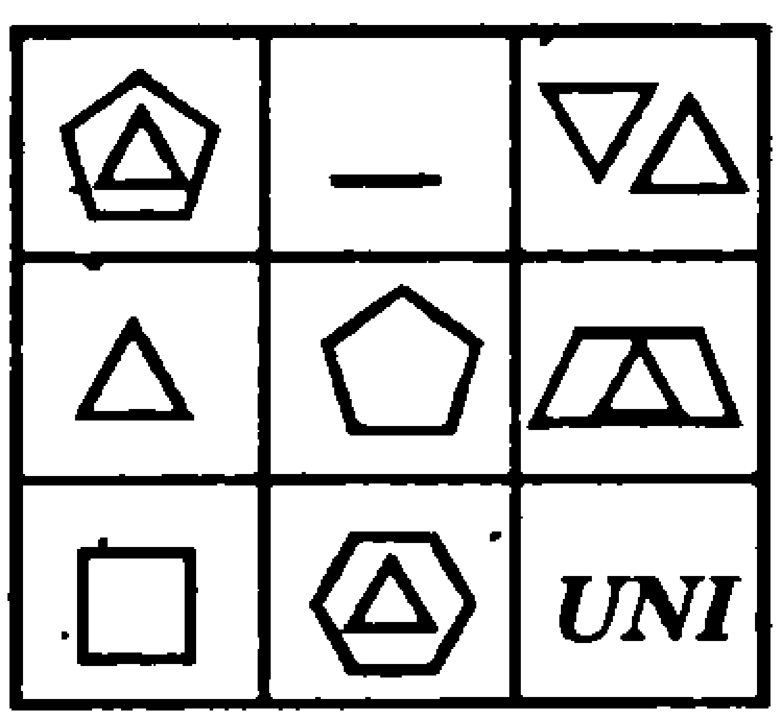
12 ¿Cuál es la loseta que falta en el panel?





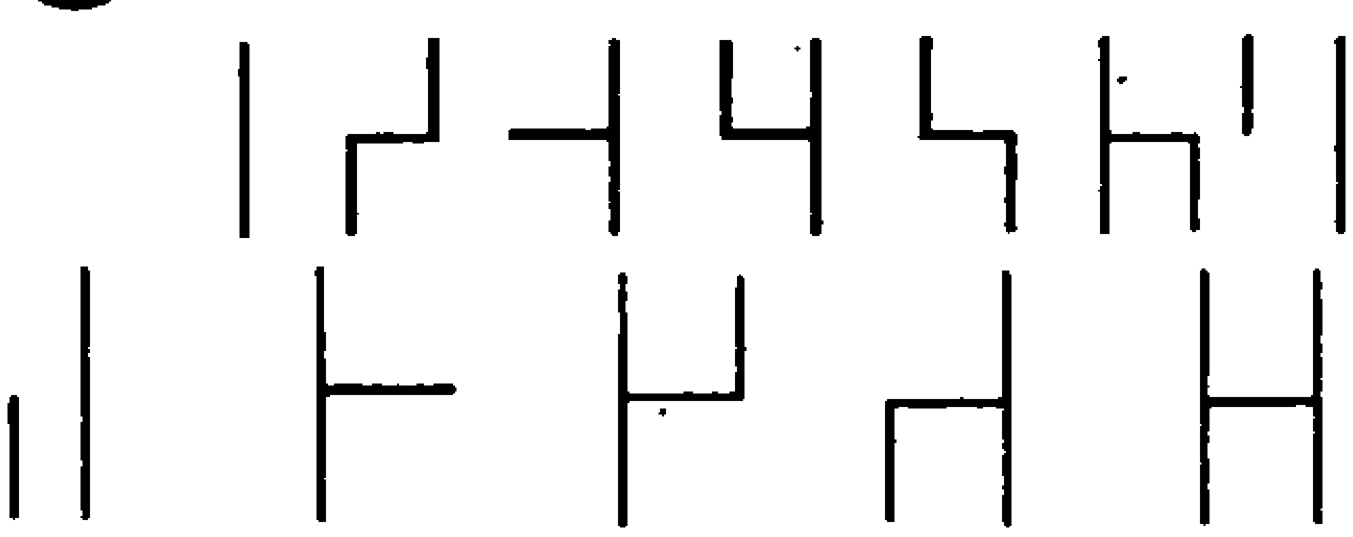
A) B) C) D) E)

13 Indique la figura que debe ocupar el casillero *UNI*



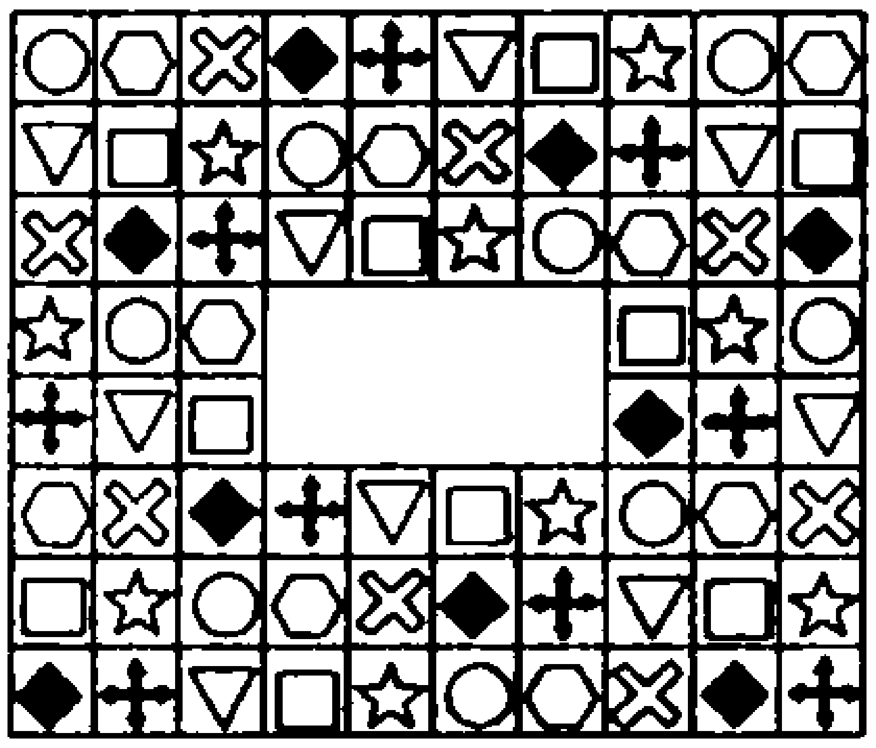
A) B) C) D) E)

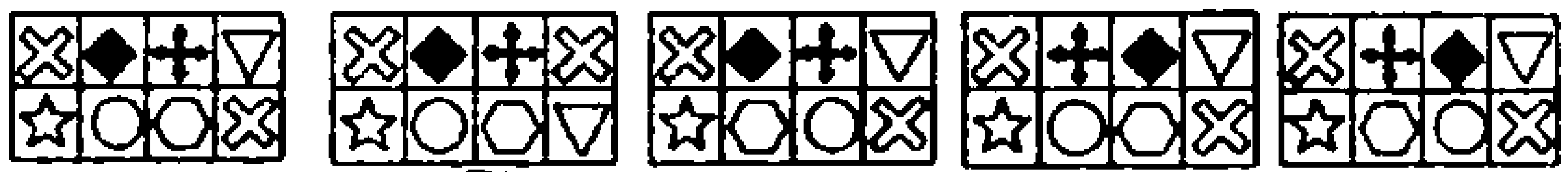
14 ¿Qué figura continúa correctamente la figura?



A) B) C) D) E)

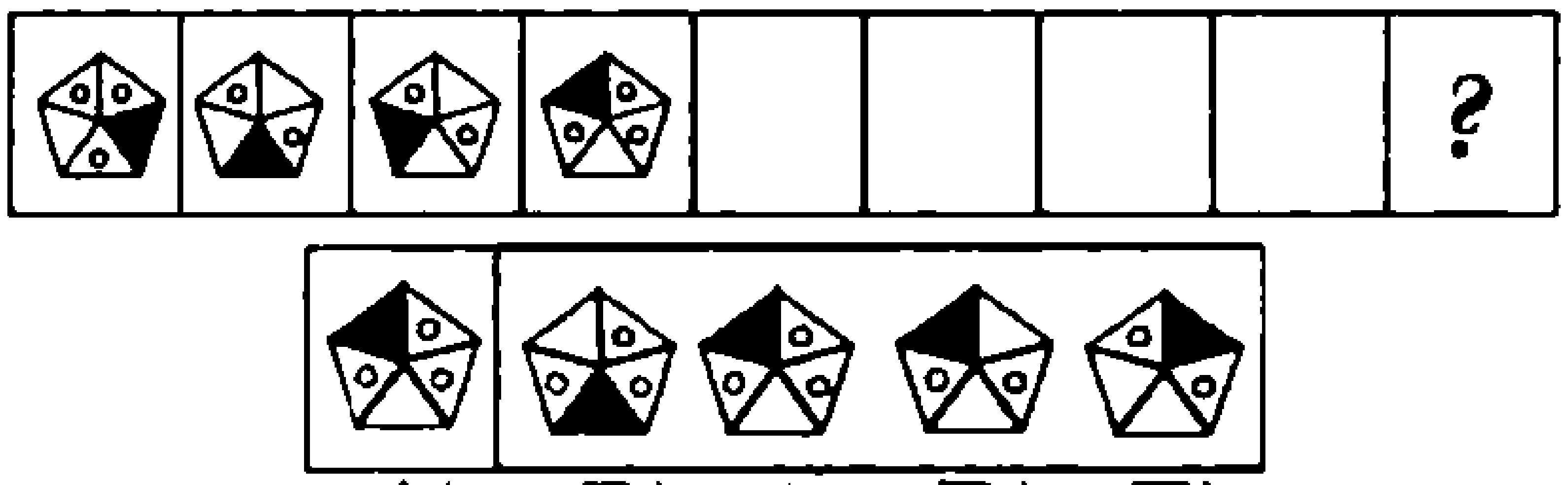
15 ¿Cuál es panel que encaja en el hueco?





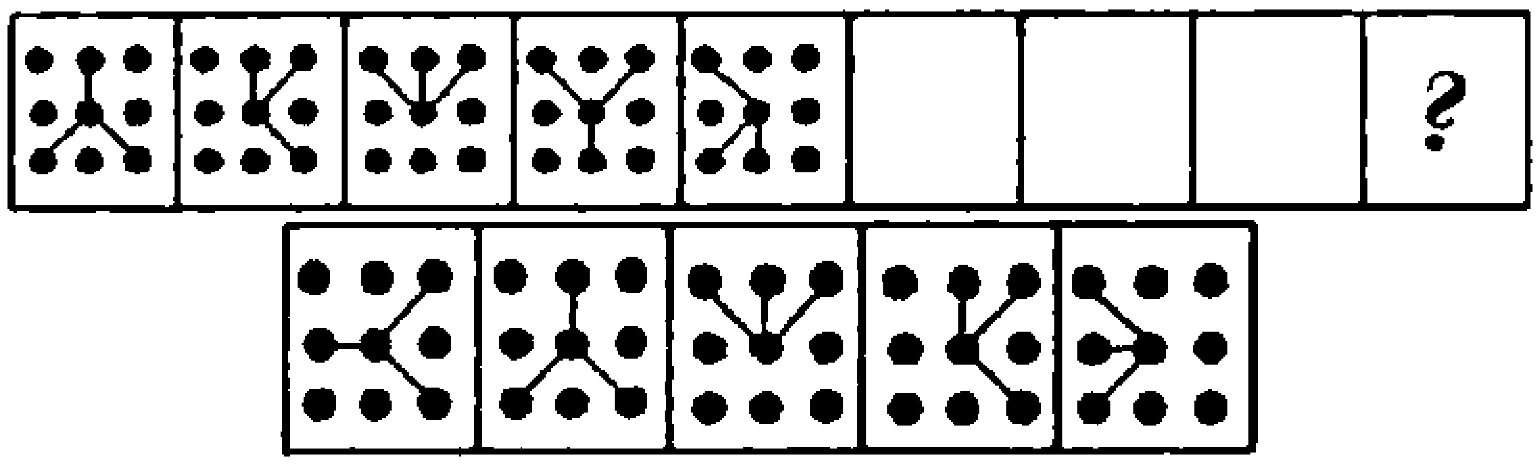
A) B) C) D) E)

16 ¿ Qué corresponde en ? ?



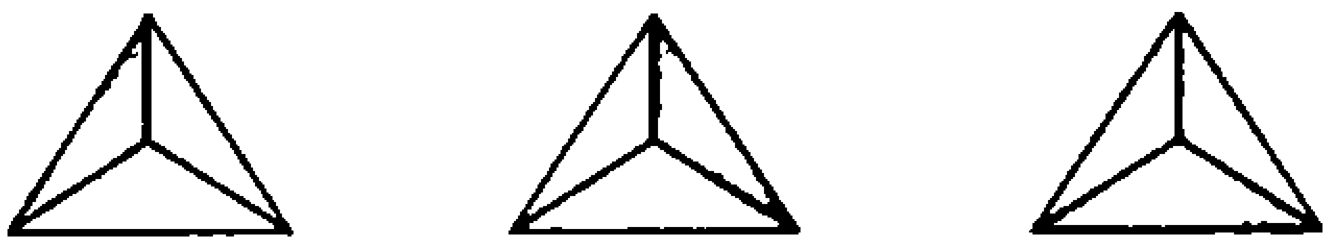
A) B) C) D) E)

17 ¿ Qué corresponde en ? ?



A) B) C) D) E)

18 Si la figura *(I)* rota *120°* en sentido horario y la figura *(II)* *240°* en sentido antihorario y luego ambas se trasladan sobre la figura *(III)* ¿Qué figura resulta?

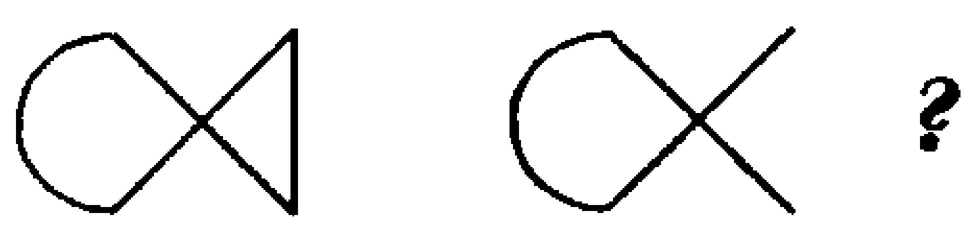


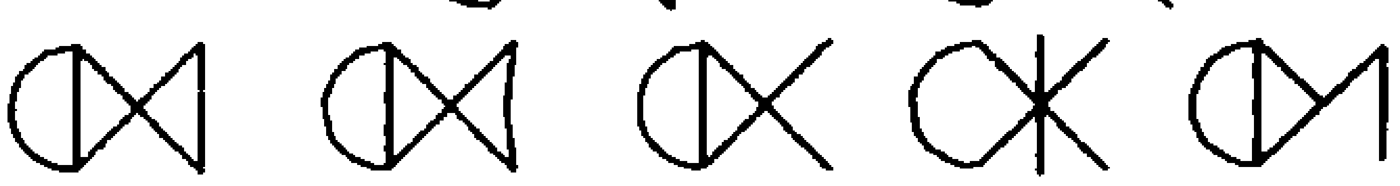
(I) (II) (III)

Triángulos Equiláteros .

A) B) C) D) E)

19 ¿Que figura continúa correctamente la siguiente secuencia?





A) B) C) D) E)

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)A	3)C	4)D	5)C	6)A	7)D	8)D	9)D	10)C
11)E	12)C	13)B	14)E	15)A	16)A	17)C	18)C	19)C	

OBJETIVOS :

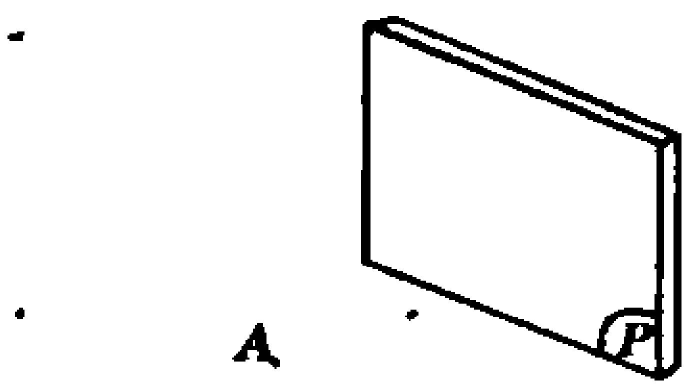
* *Potenciar la capacidad de abstracción del estudiante.*
* *Ampliar nuestra perspectiva de figuras en el espacio.*

INTRODUCCION :

El mundo que nos rodea es tridimensional, todos los objetos que percibimos tienen tres dimensiones, por ejemplo una hoja de papel, por más delgada que sea tiene largo, ancho y espesor (este último muy pequeño al compararse con las otras dos dimensiones). De la misma manera, un hilo, por más "fino" que sea siempre tendrá sus tres dimensiones, donde el largo será la dimensión más evidente en comparación con las otras dos dimensiones. Es por ello que nuestro sentido de la vista está acostumbrado a estas tres dimensiones y cuando hacemos la representación de un cuerpo de tres dimensiones (un cubo por ejemplo) en el plano que tiene sólo *2* dimensiones, se pierde la dimensión de la profundidad. Esa tercera dimensión se compensa de alguna manera dándole a la figura cierta perspectiva, que haga "parecer" a la figura plana como de tres dimensiones. Además contamos también con un instrumento personal: la IMAGINACIÓN, desarrollada más en unos que en otros, que nos ayuda a visualizar mejor un cuerpo tridimensional que está representado sólo con dos dimensiones ya sea en una pizarra o en una hoja de papel.

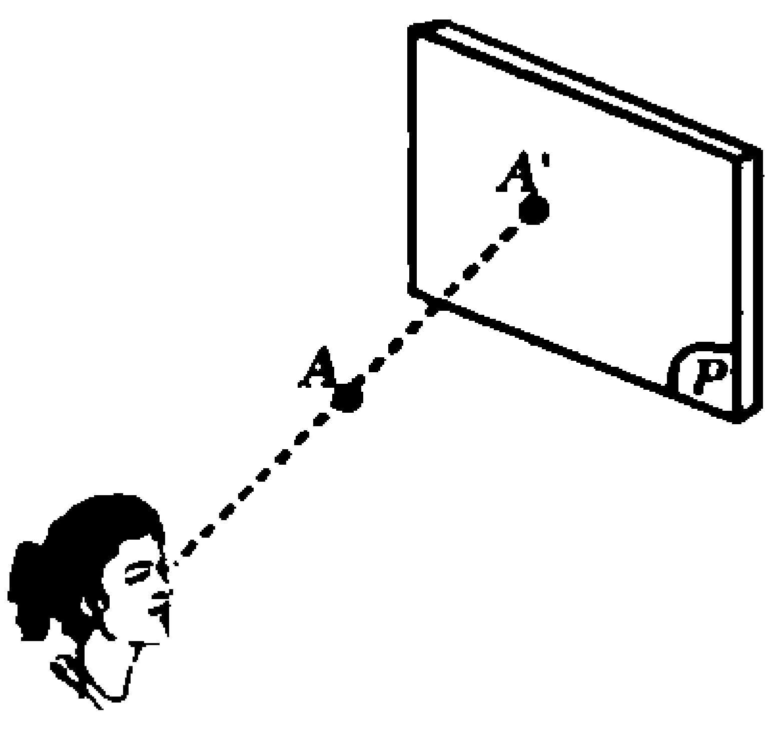
PROYECCIÓN DE UN PUNTO

Imaginemos un punto en el espacio y un plano cualquiera como se muestra en el gráfico.



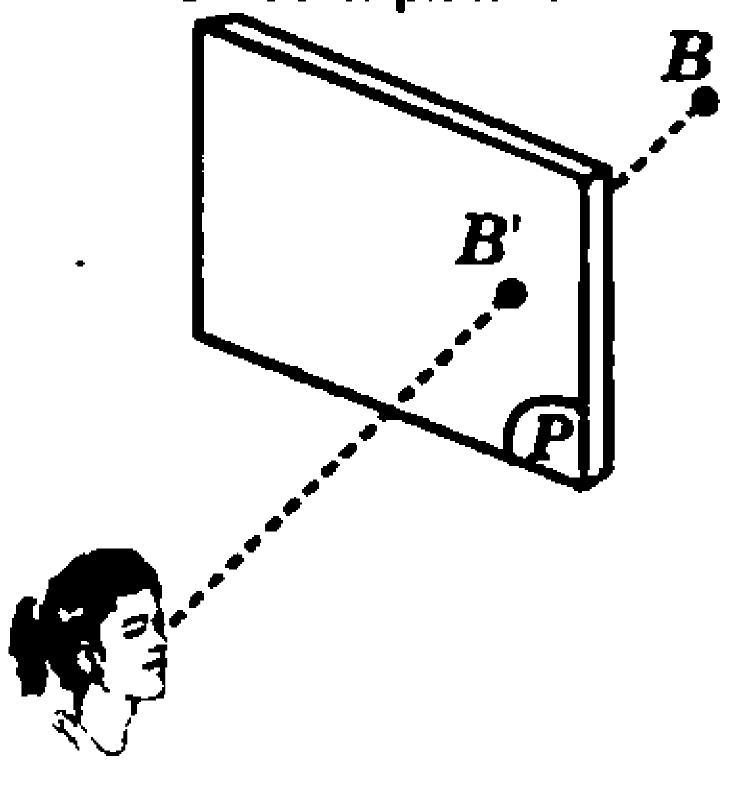
Si un observador se ubica delante del punto *A*

A' : proyección del punto *A* sobre el plano *P*.



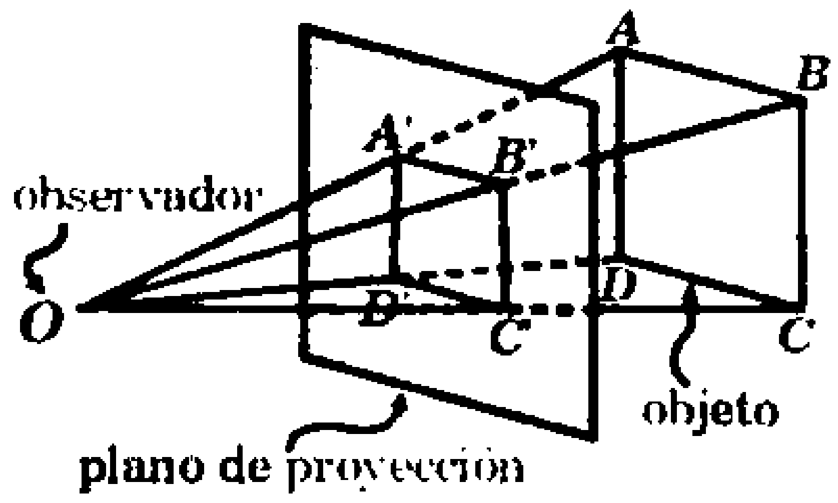
Si el plano de proyección se encuentra entre el observador y el punto.

B' : proyección del punto *B* sobre el plano *P*.

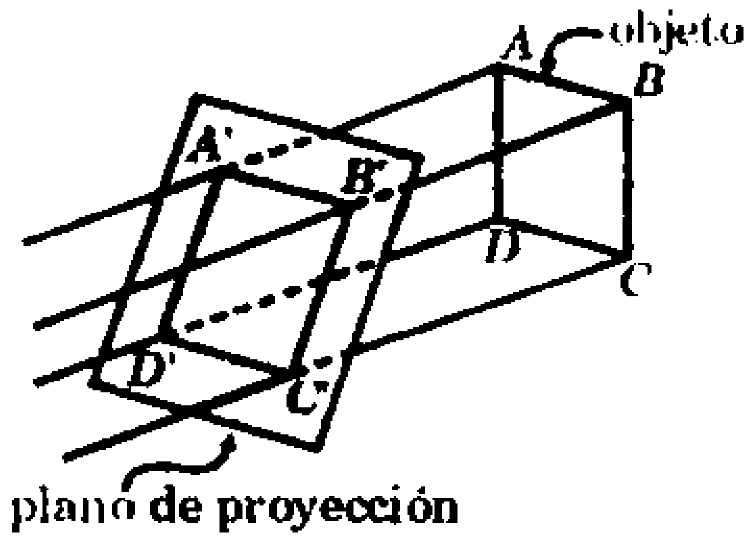


TIPOS DE PROYECCIÓN

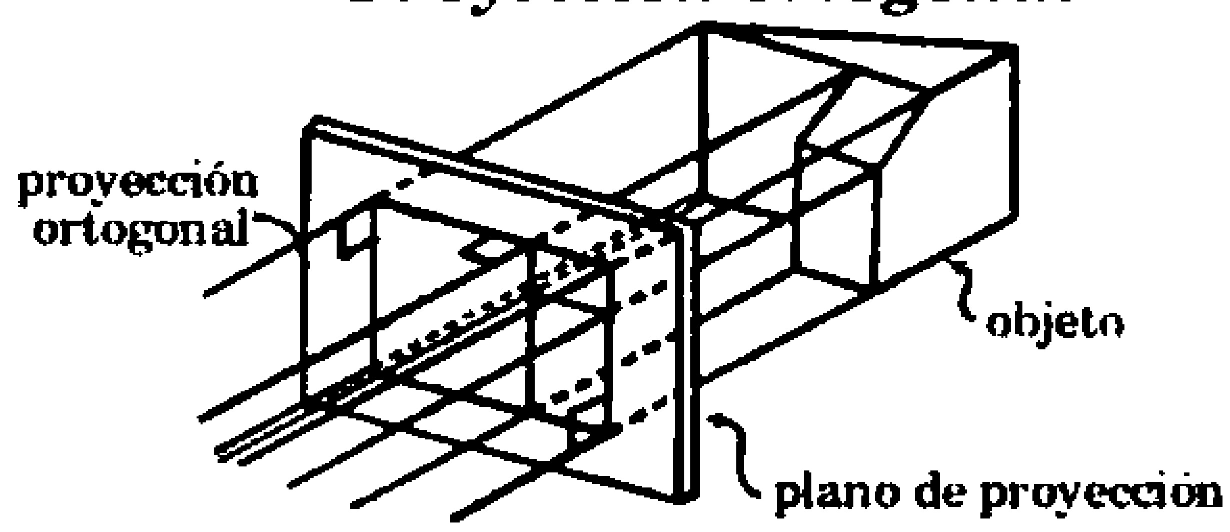
Proyección cónica



Proyección cilíndrica

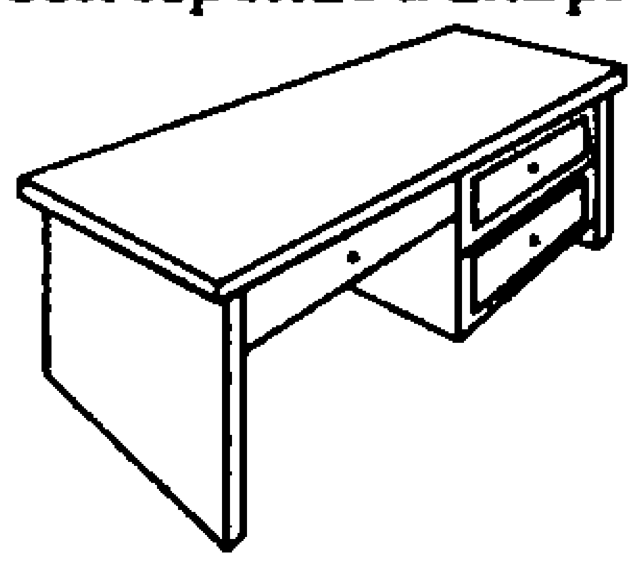


Proyección ortogonal



OBSERVACIONES :

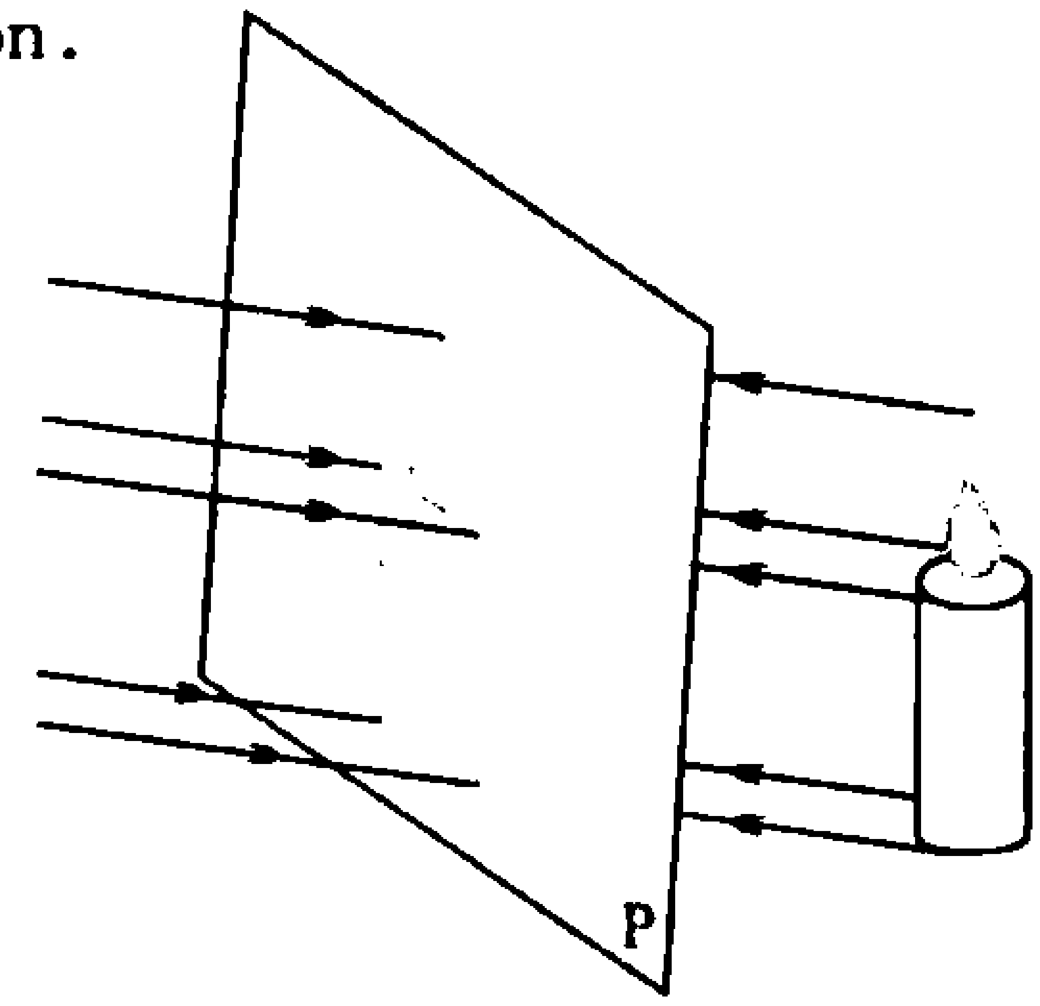
* La perspectiva corresponde a una proyección cónica.



* Las proyecciones que realizaremos en lo sucesivo serán proyecciones ortogonales (perpendiculares al plano).

PROYECCIÓN ORTOGONAL :

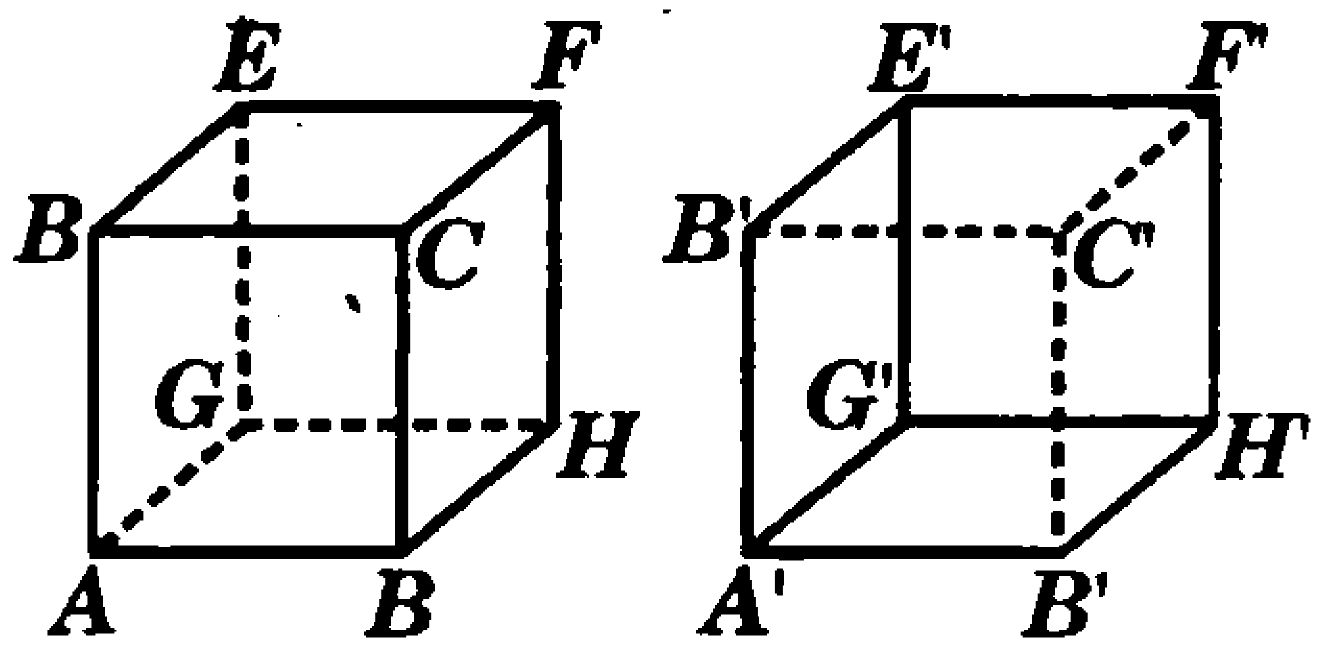
Se da cuando las rectas visuales (proyectantes) inciden perpendicularmente en el plano de proyección.



VISIBILIDADES :

En el trazado de proyecciones de un sólido, es importante indicar las líneas visibles y las no visibles (invisibles u ocultas).

En los dos cubos mostrados, el primero indica que *C* es visible y *G* invisible; en el otro, es todo lo contrario.

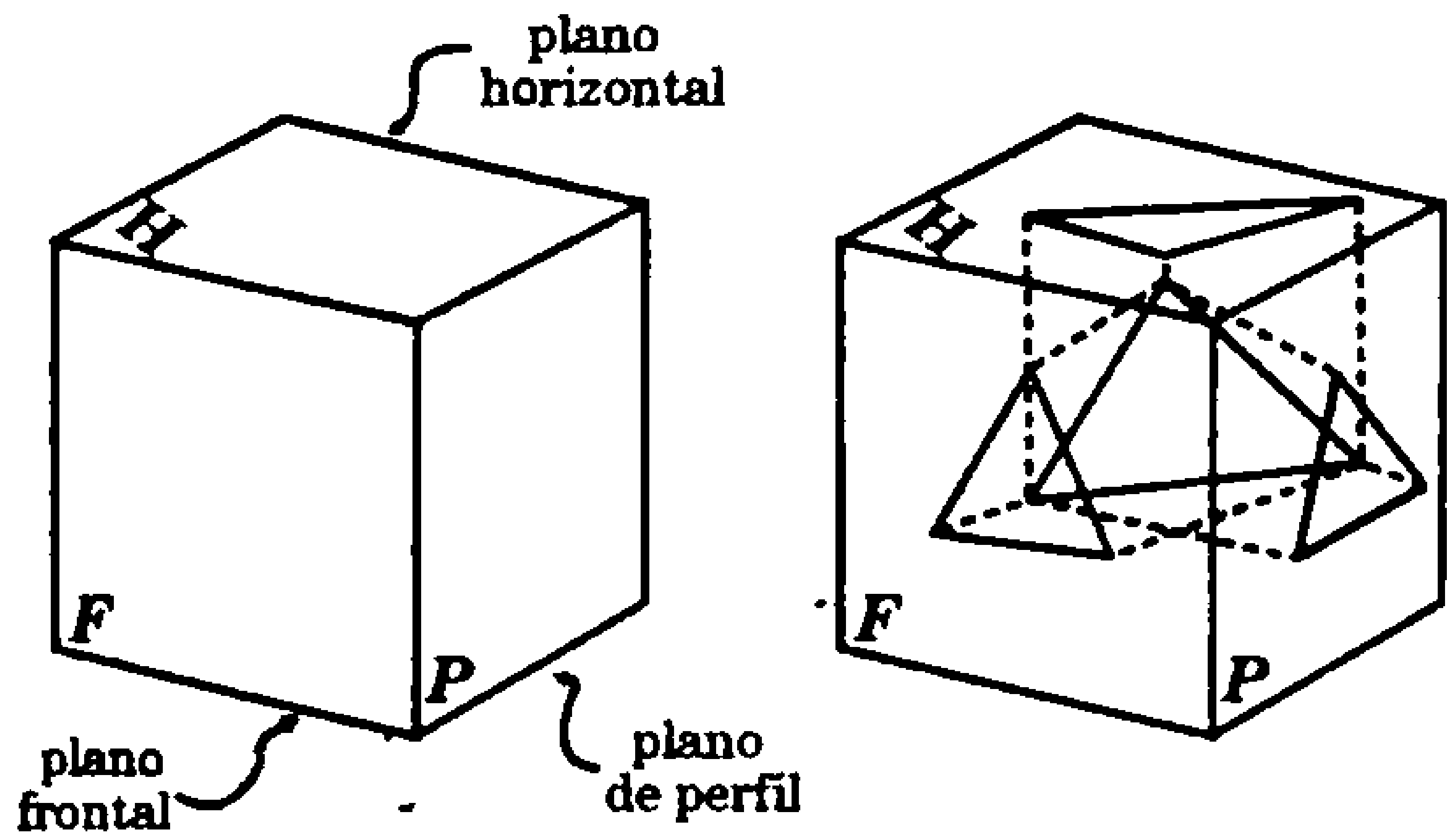


LÍNEA VISIBLE : ______________________

LÍNEA INVISIBLE : -

De acuerdo con las normas del dibujo técnico, las ***líneas visibles*** se trazan con líneas continuas y las ***líneas no visibles*** con líneas discontinuas.

PRINCIPALES PLANOS DE PROYECCIÓN



Existen tres posiciones claramente definidas que se conocen como los planos principales de proyección:

• ***PLANO HORIZONTAL DE PROYECCIÓN :***

Se determina cuando el observador está "encima" del objeto.

• ***PLANO FRONTAL DE PROYECCIÓN :***

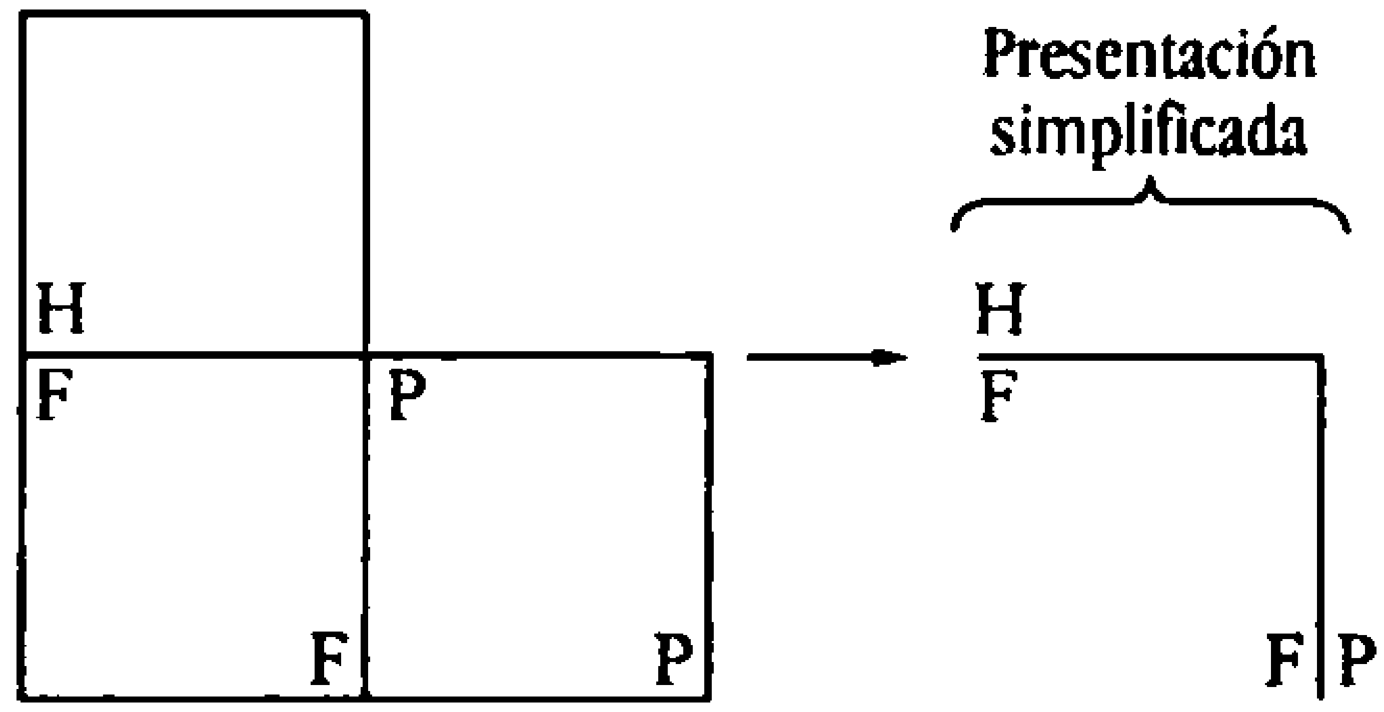
Se determina cuando el observador está "al frente" del objeto.

• ***PLANO DE PERFIL DE PROYECCIÓN:***

Es perpendicular a los dos anteriores y se determina cuando el observador está ubicado a "un lado" del objeto.

DEPURADO :

Cuando los planos de proyección están contenidos en un solo plano , es lo que denominamos "*DEPURADO*" (Se obtiene girando *90°* a "***H***" y "***P***", quedando al nivel de "***F***").



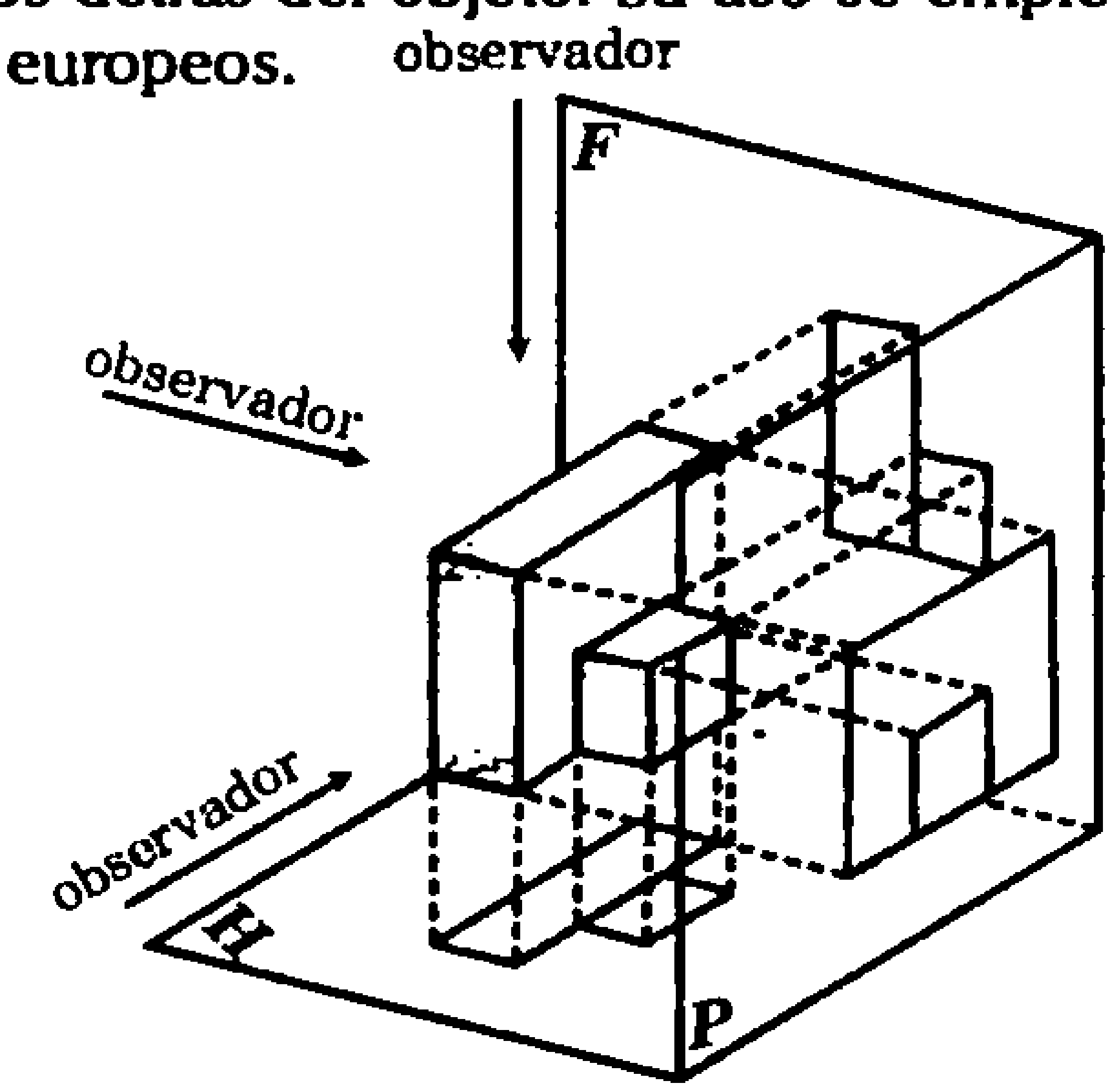
PROYECCIONES EN EL PRIMER Y TERCER CUADRANTE

Los planos principales de proyección pueden ubicarse entre el observador y el objeto o también detrás del objeto. Variando la posición de los planos principales de proyección, se tendrían diferentes casos, con proyecciones que podrían diferir unas de otras.

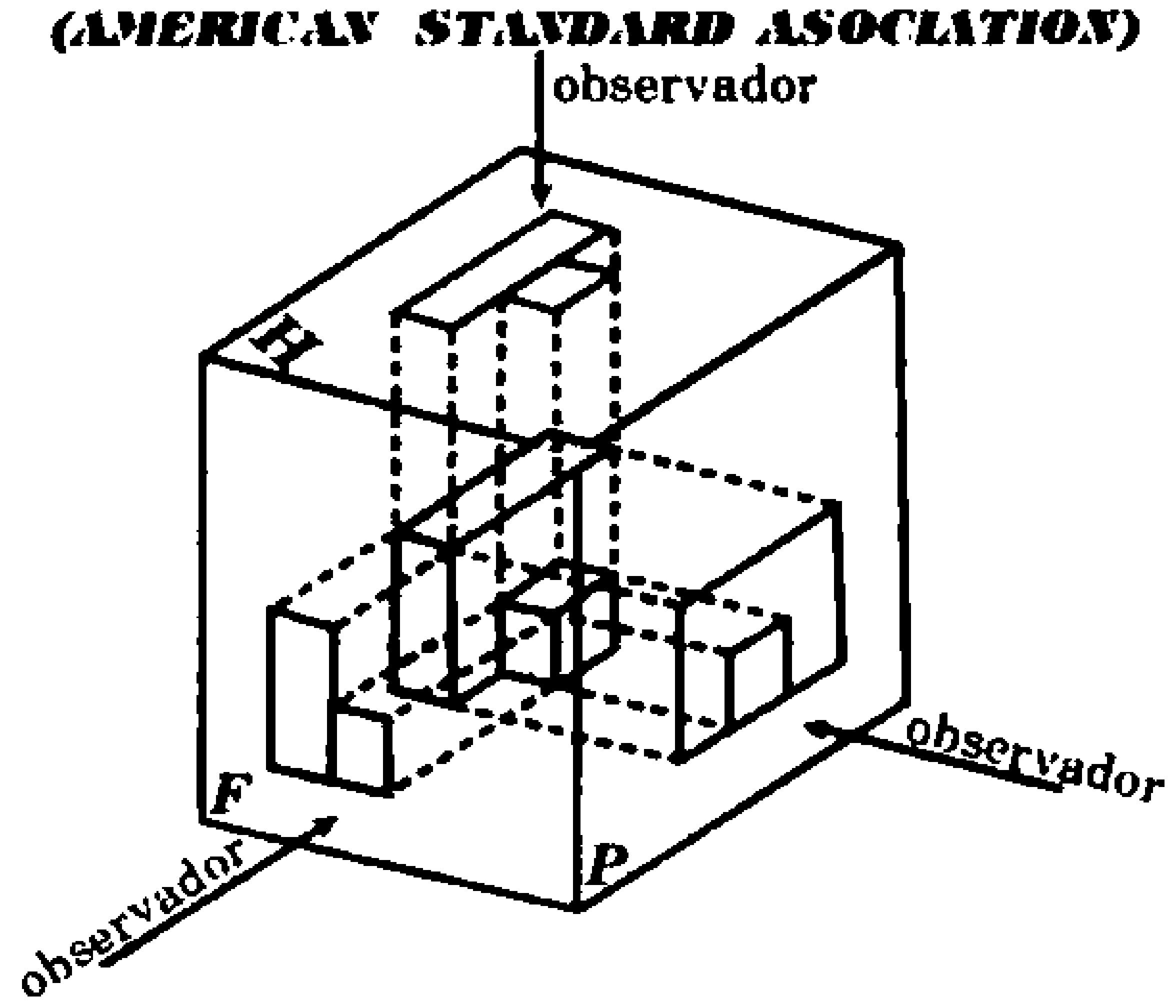
Veamos los dos casos más usados actualmente.

PROYECCIÓN EN EL PRIMER CUADRANTE O PROYECCIÓN DIN (DEUTSCHE INDUSTRIE NORMEN)

En este sistema, los planos de proyección están situados detrás del objeto. Su uso se emplea en los países europeos.



PROYECCIÓN EN EL TERCER CUADRANTE O PROYECCIÓN ASA (AMERICAN STANDARD ASOCIATION)

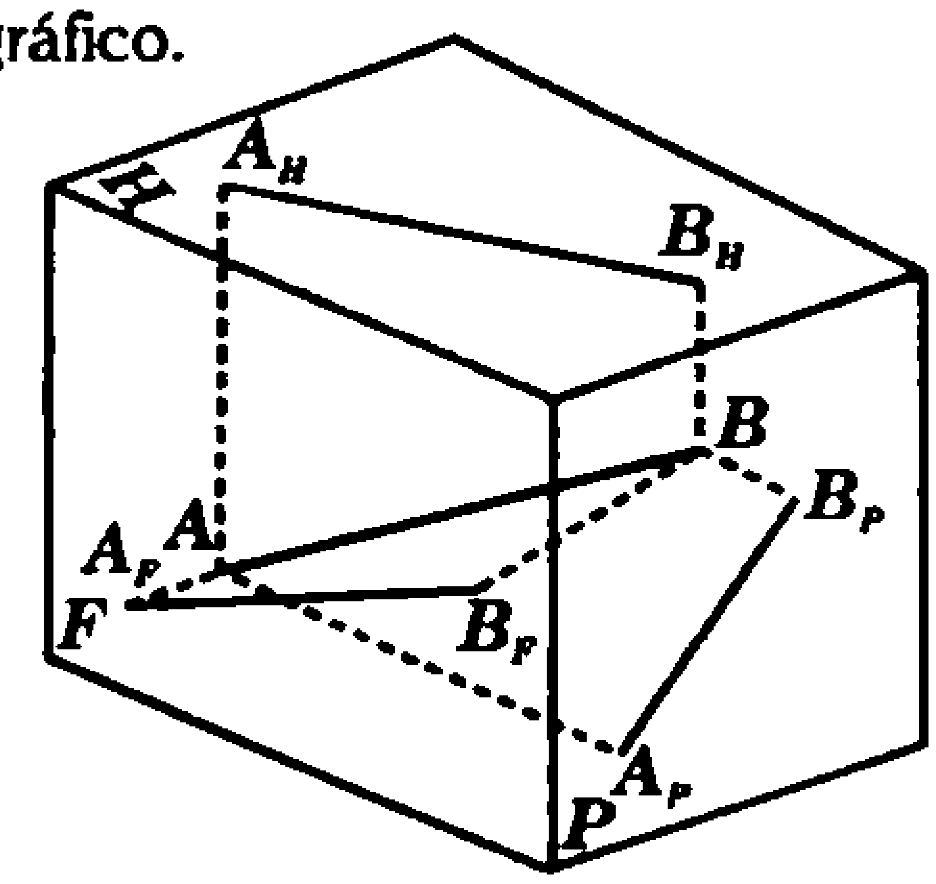


Los planos de proyección en este sistema están entre el observador y el objeto. Este método de proyección es empleado en los países de Norteámerica.

Observe que en las proyecciones *DIN* y *ASA*, además de la diferencia en la posición de los planos de proyección, pueden existir diferencias en las vistas obtenidas

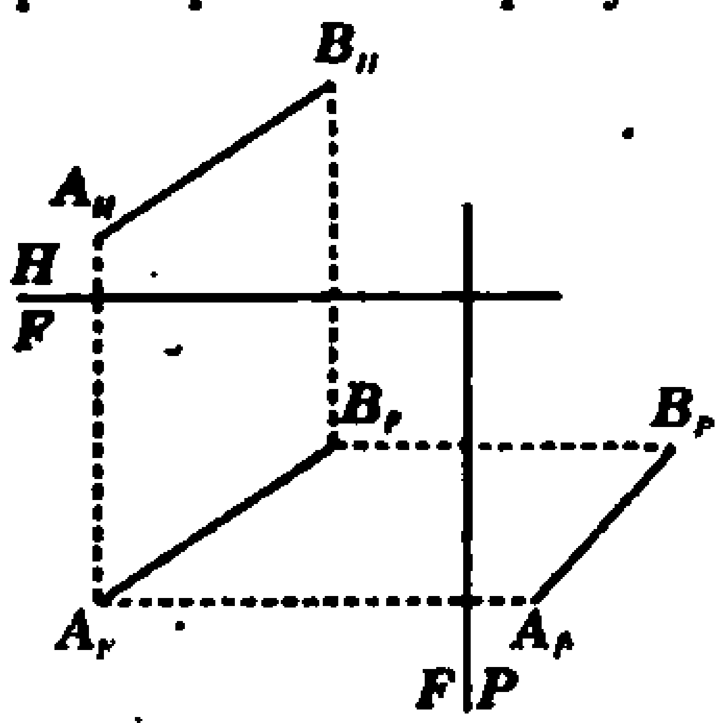
PROYECCIONES DE UNA RECTA

En el dibujo técnico, una recta está definida por dos puntos contenidos en ella. Por ejemplo, la recta *AB* del gráfico.



DEPURADO DE LA RECTA AB

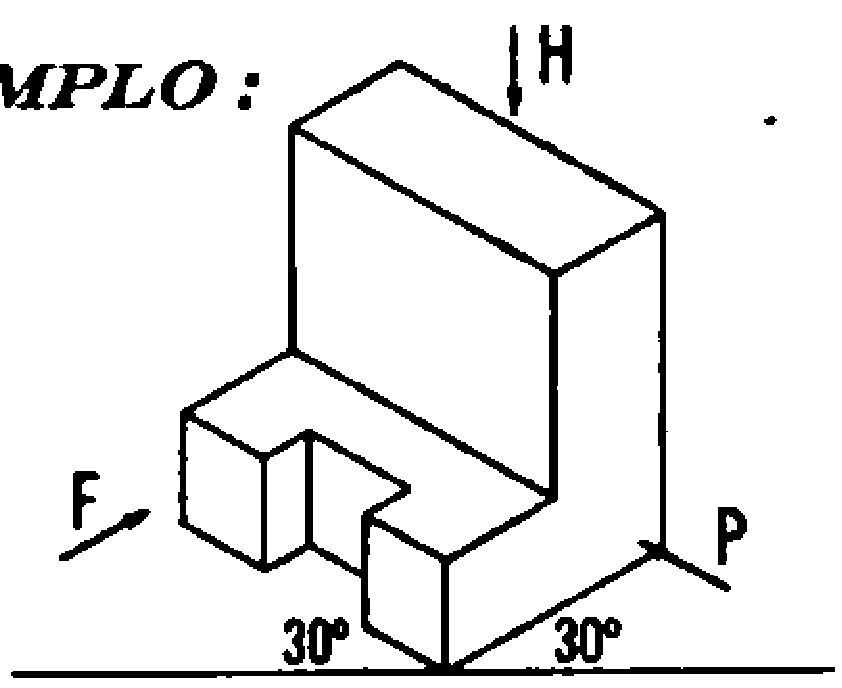
(Vistas de la recta *AB* en los principales planos de proyección)



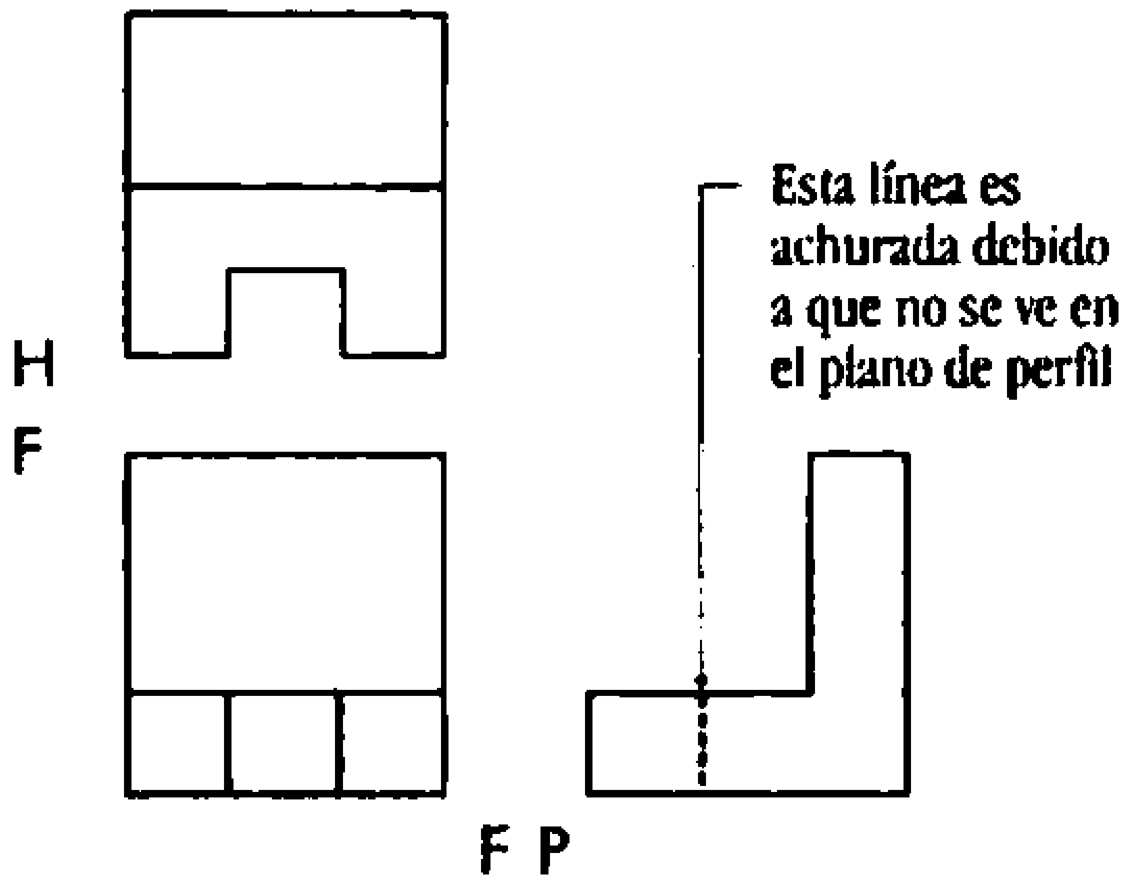
DIBUJO ISOMÉTRICO DE UN SÓLIDO O PERSPECTIVA

Es la manera como el dibujante representa un objeto. Nosotros utilizaremos la isometría de *30°*.

EJEMPLO :



En este caso el depurado será :

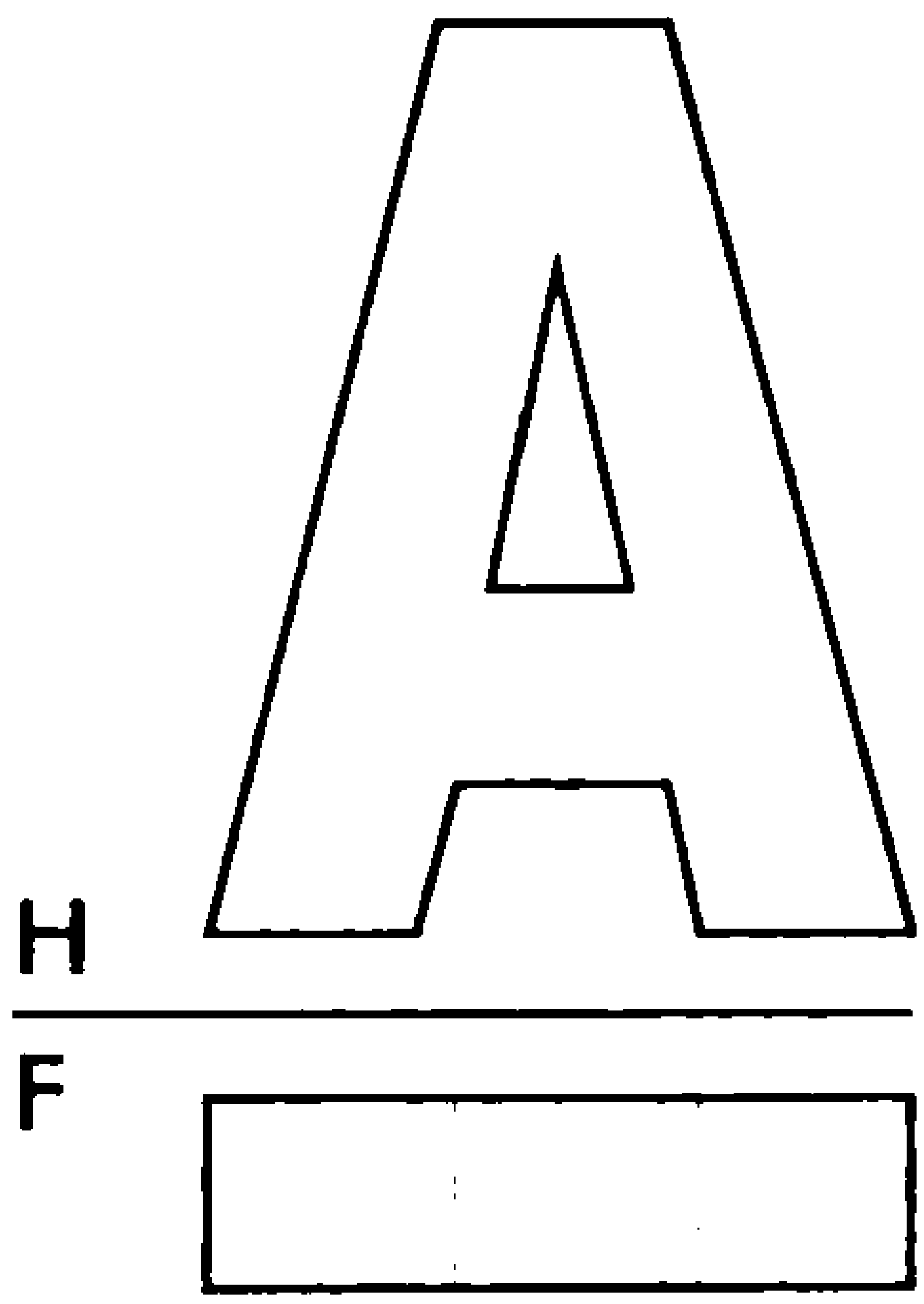


NOTA :

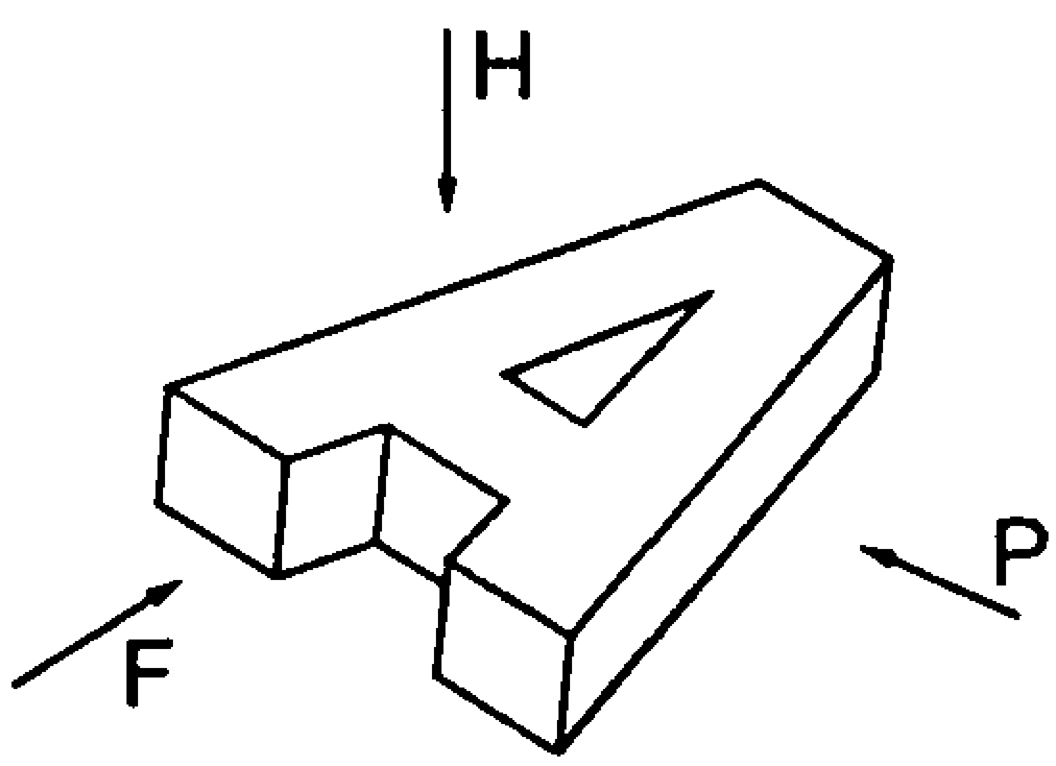
El objetivo de este capítulo, es que dado las proyecciones principales de un sólido, construir su dibujo isométrico, o dados *2* vistas o proyecciones, determinar la tercera proyección.

EJEMPLO 1 :

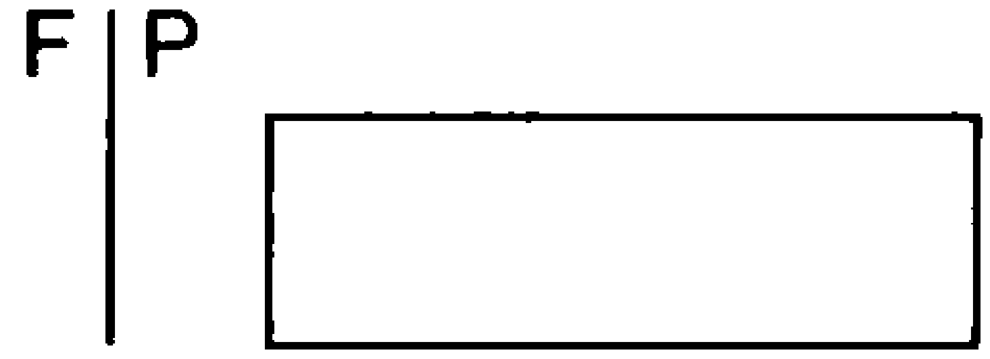
Dadas las proyecciones *H* y *F* del sólido mostrado, determinar el dibujo isométrico y la proyección *P*.



RESOLUCIÓN :

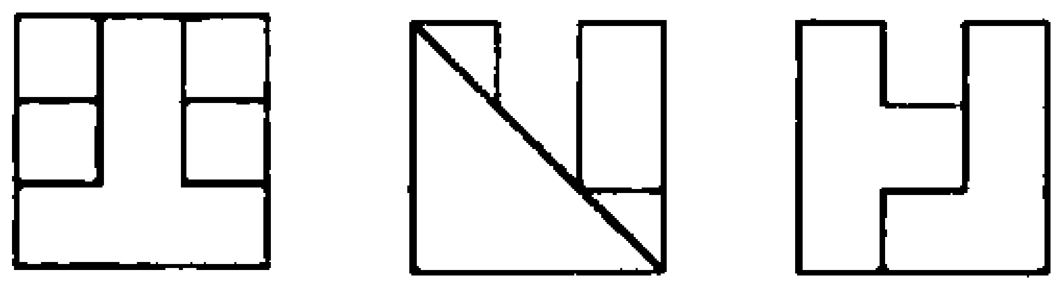


* La proyección *"P"*, será :

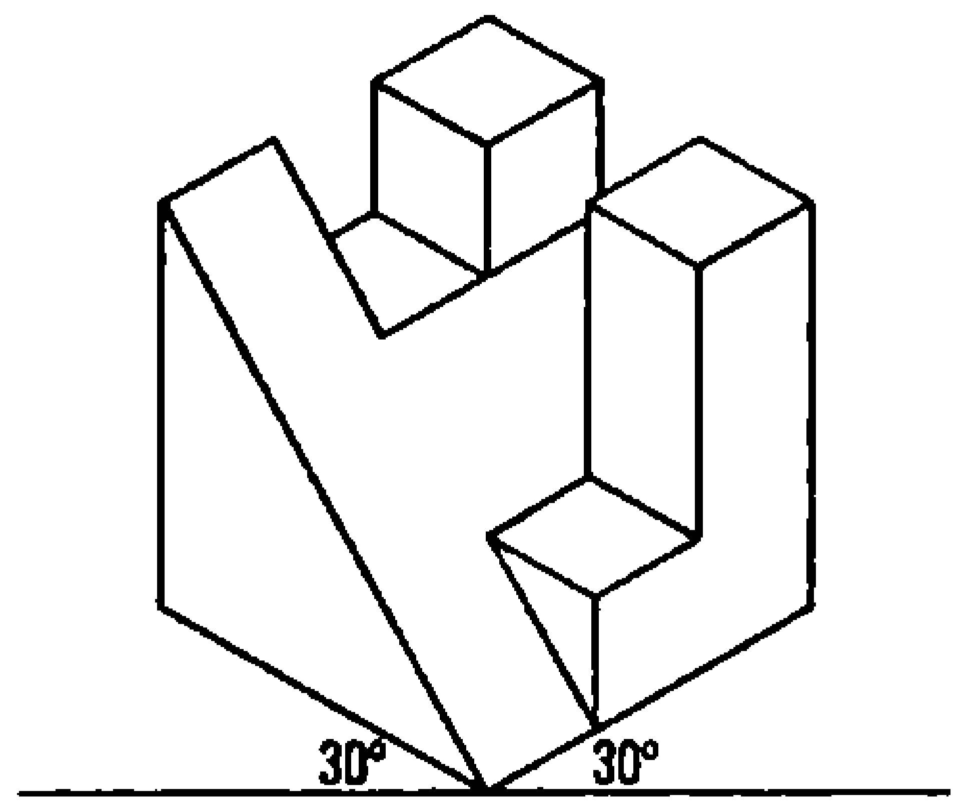


EJEMPLO 2 :

Determinar la perspectiva de :



RESOLUCIÓN :



PERCEPCIÓN ESPACIAL

Son muchos los casos en los que hay que emplear esta *"PERCEPCIÓN ESPACIAL"*

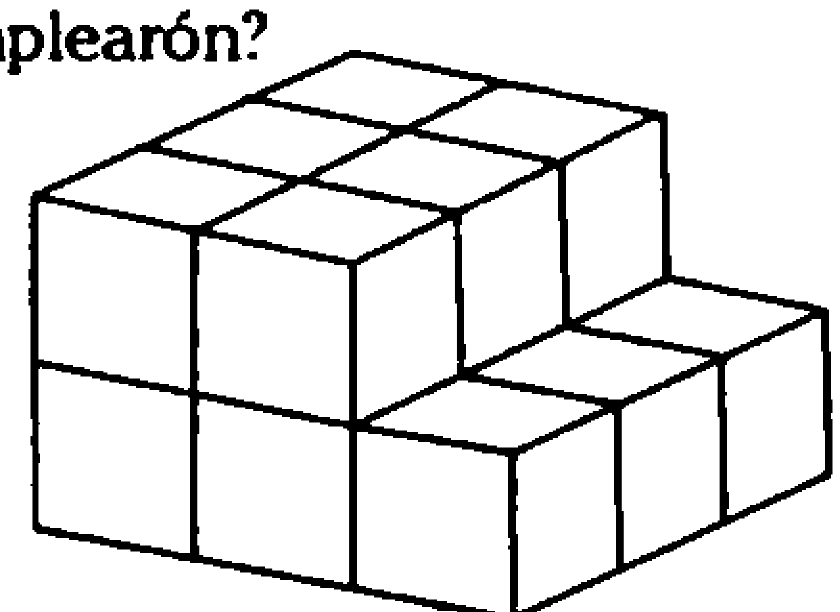
Analizamos tres casos:

I) Contar cubos
II) Contar caras
III)Cubos desplegados

CONTAR CUBOS

EJEMPLO 1 :

Con varios cubos iguales, se ha hecho la siguiente edificacion; hallar ¿Cuántos cubos se emplearón?



RESOLUCIÓN:

Se cuenta primeros los "pisos" que tiene la edificación

y luego por simple inspección visual, y en algunos casos ayudados de la IMAGINACIÓN, se

van contando los cubos comenzando desde el piso superior.

- En la figura: hay *2* pisos.
- En el piso superior: *6* cubos
- En el piso inferior: *9* cubos

⇒ Total: ***6+9=15***

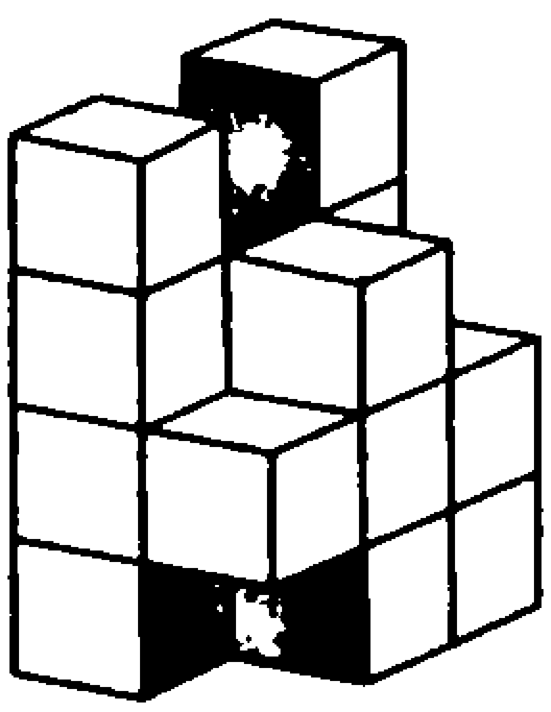
RPTA:15

**** OBSERVACIÓN :***

La parte de atrás de la edificación, (que no se ve) se supone que es compacta y está llena de cubos. En general, esta consideración se debe hacer en todas las edificaciones similares de cubos.

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos cubos se emplearon en la siguiente construcción?



RESOLUCIÓN:

Cuarto piso : 2

Tercer piso : 4

Segundo Piso : 6

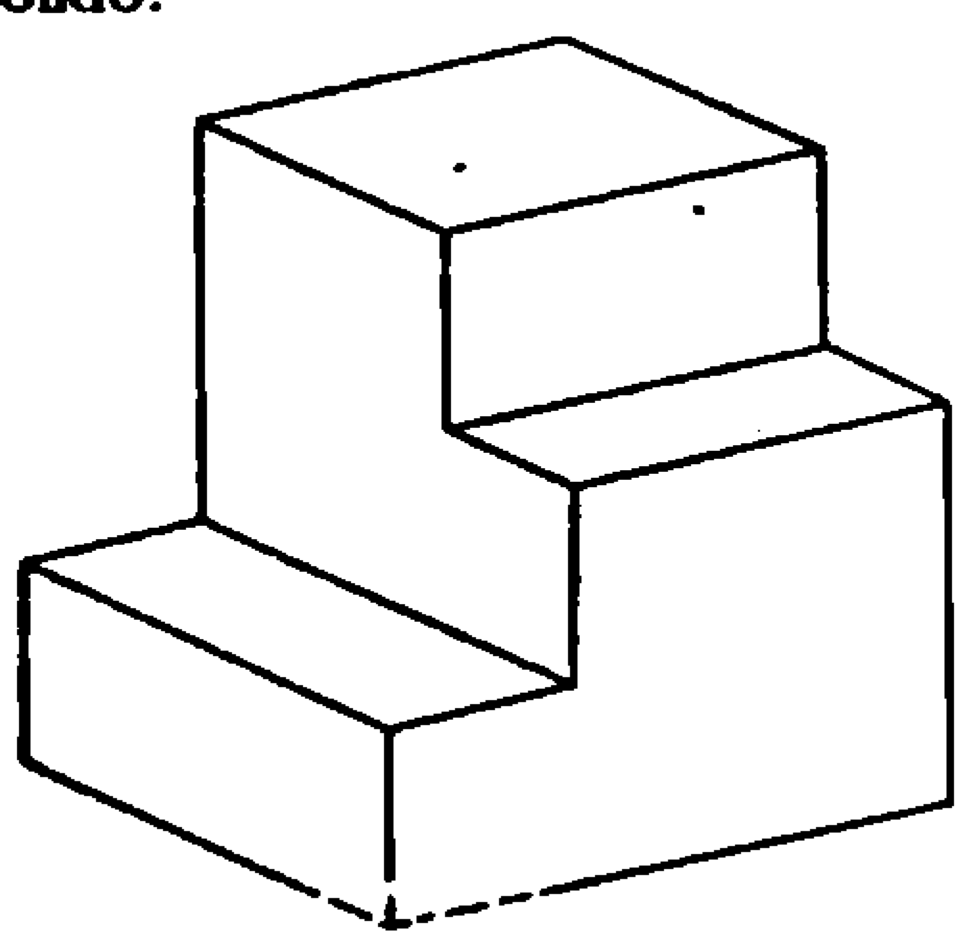
Primer piso : 5

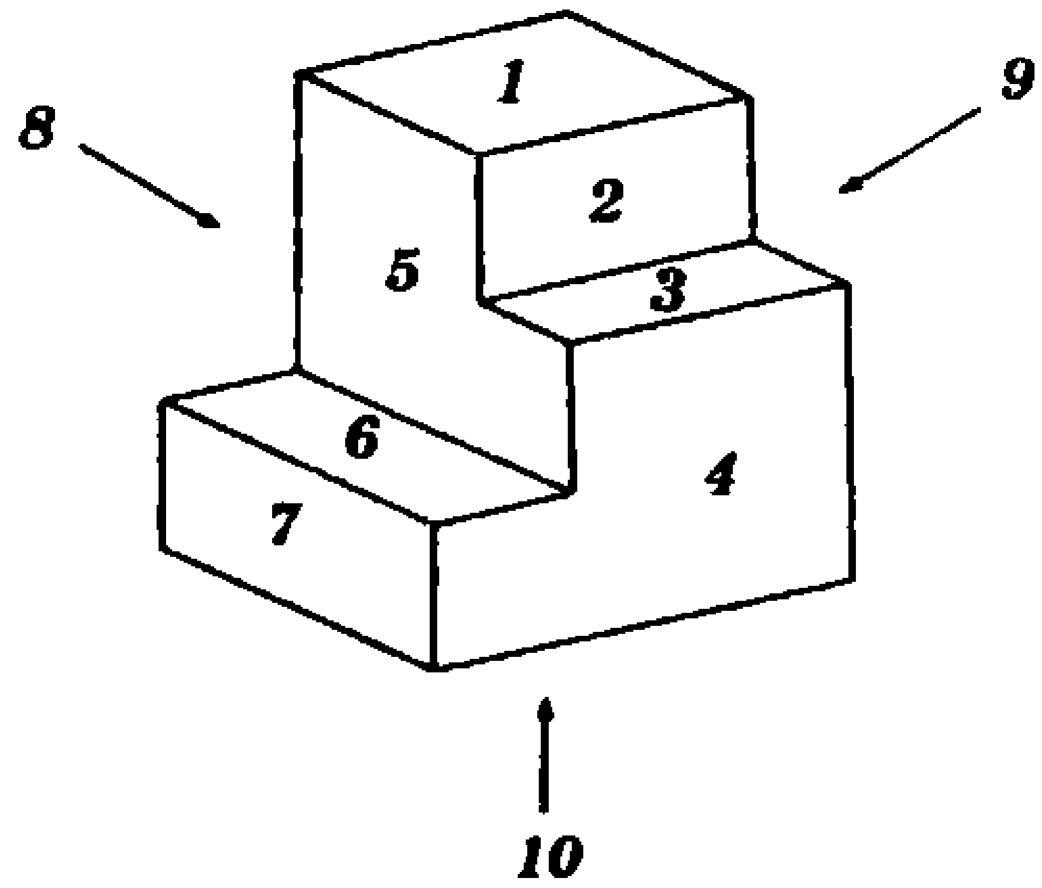
Total : 17 cubos

CONTAR CARAS

EJEMPLO 1 :

¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?

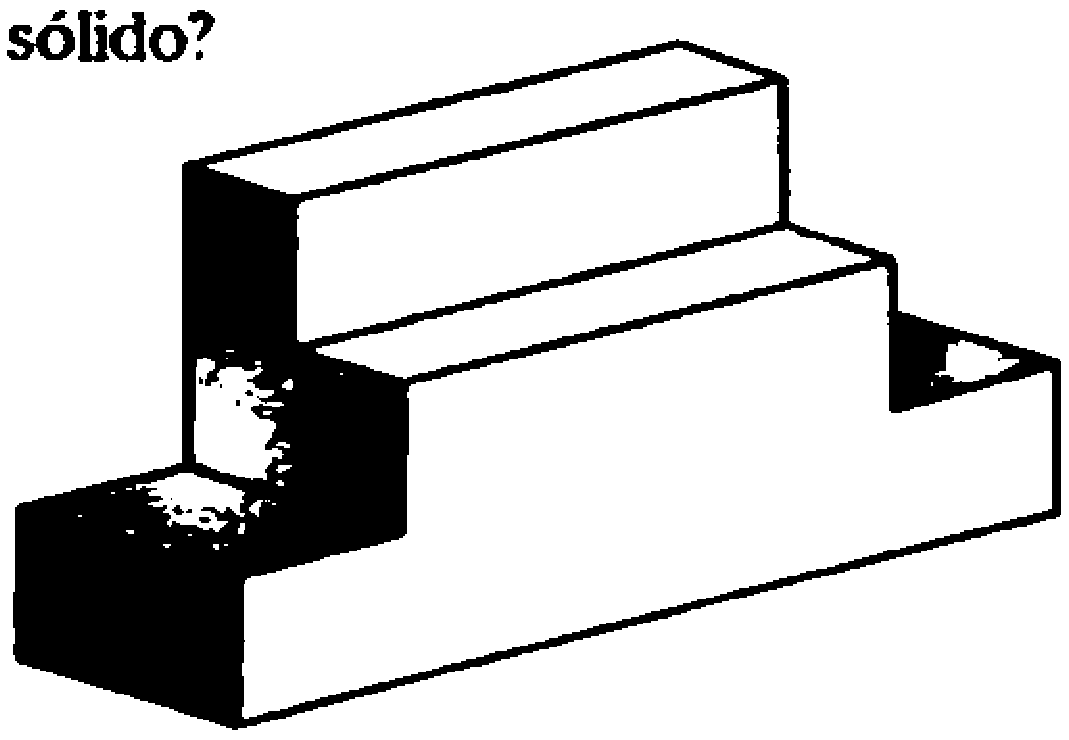




RPTA: 10 CARAS

EJEMPLO 2 :

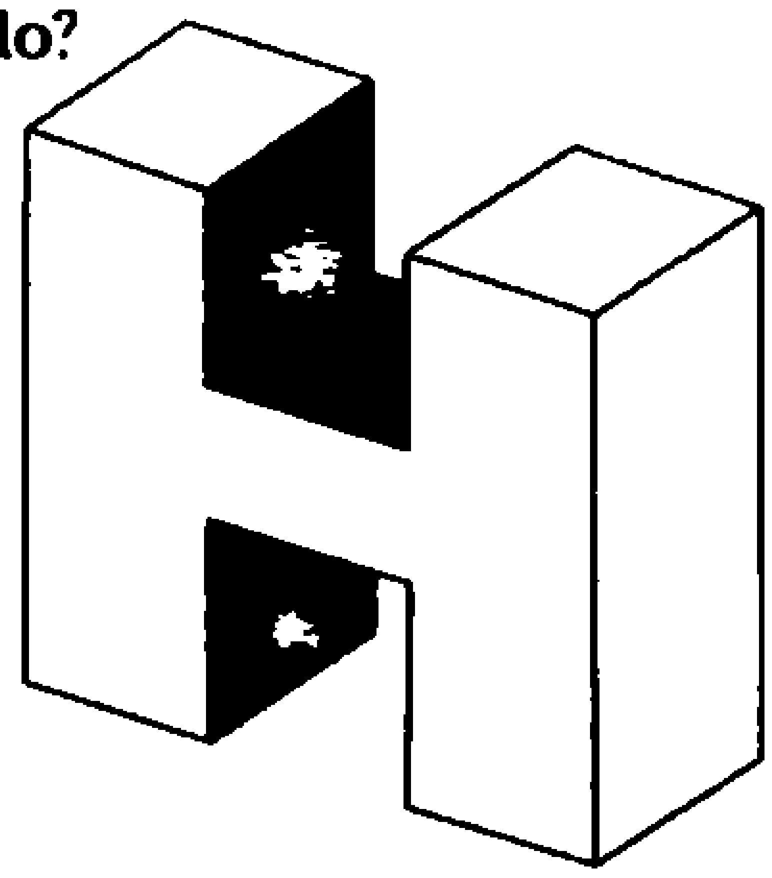
¿Cuántas caras tiene la siguiente sólido?



RPTA: ________

EJEMPLO 3 :

¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



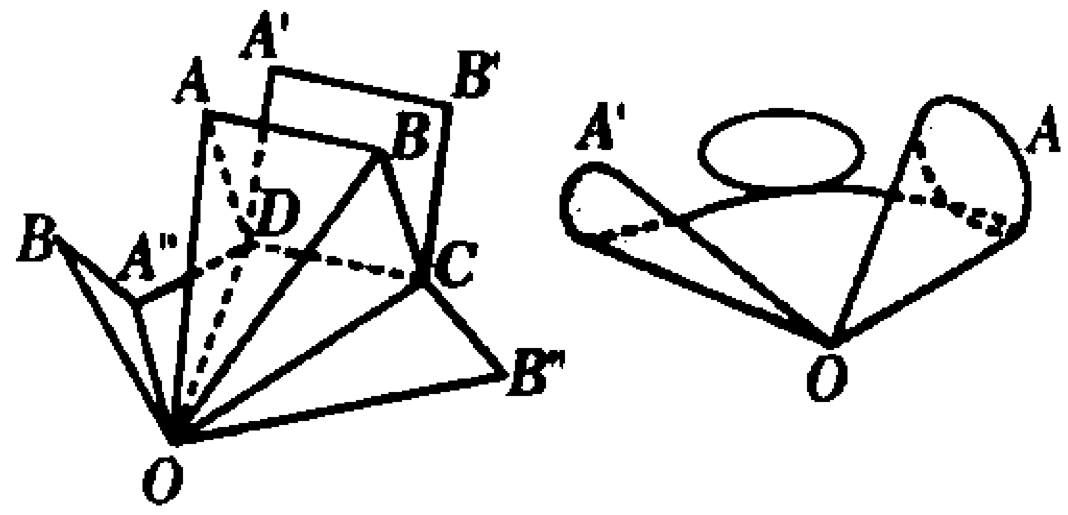
RPTA: ________

DESARROLLO DE SÓLIDOS

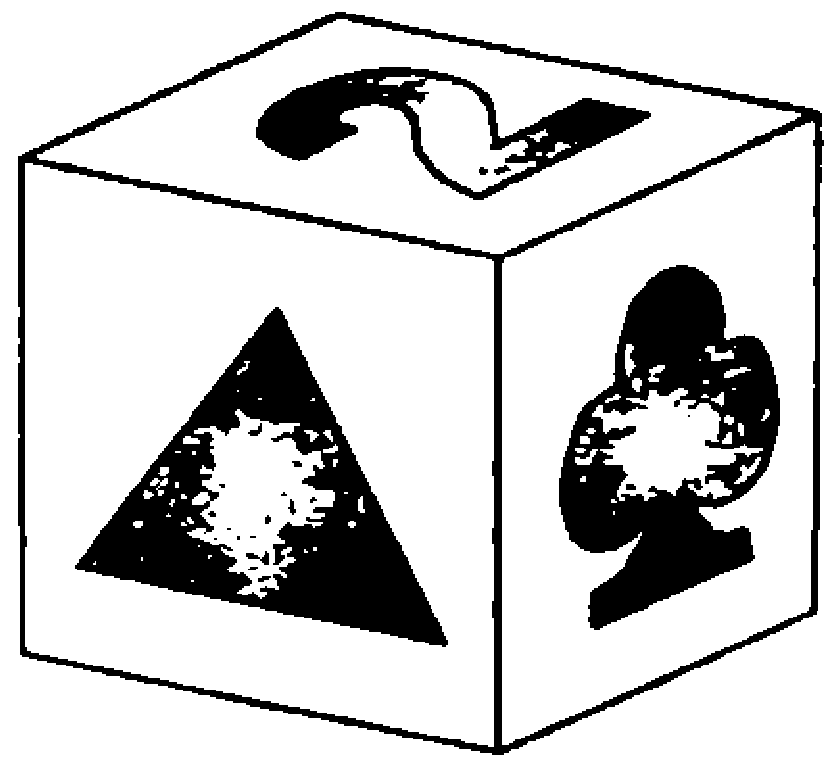
El desarrollo de un sólido es una operación por medio de la cual se desdobla su superficie lateral hasta que se encuentre extendido sobre un plano.

Por ejemplo, en el desarrollo de una pirámide, como muestra el gráfico, los desdoblamientos de las caras se hacen teniendo como bisagras determinadas aristas del prisma; de este modo, el desarrollo estará compuesto por triángulos y como base un cuadrilátero.

Un cono puede ser desarrollado considerándolo como una pirámide de un número infinito de caras laterales.

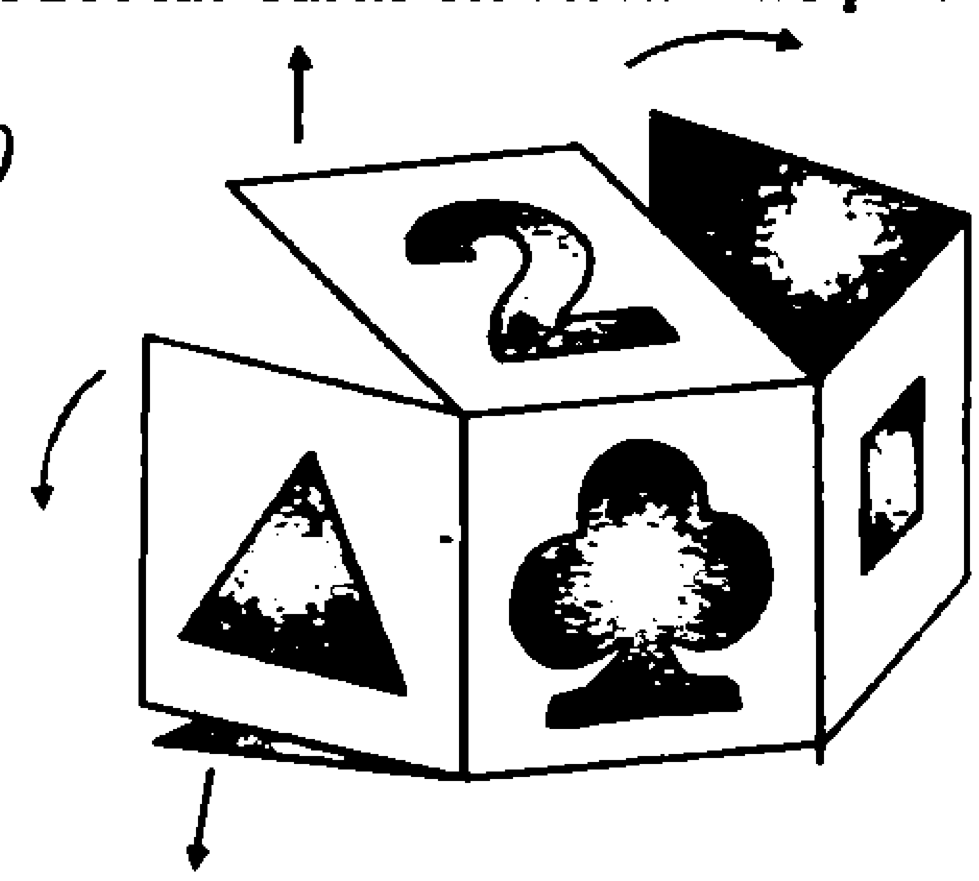


CUBOS DESPLEGADOS



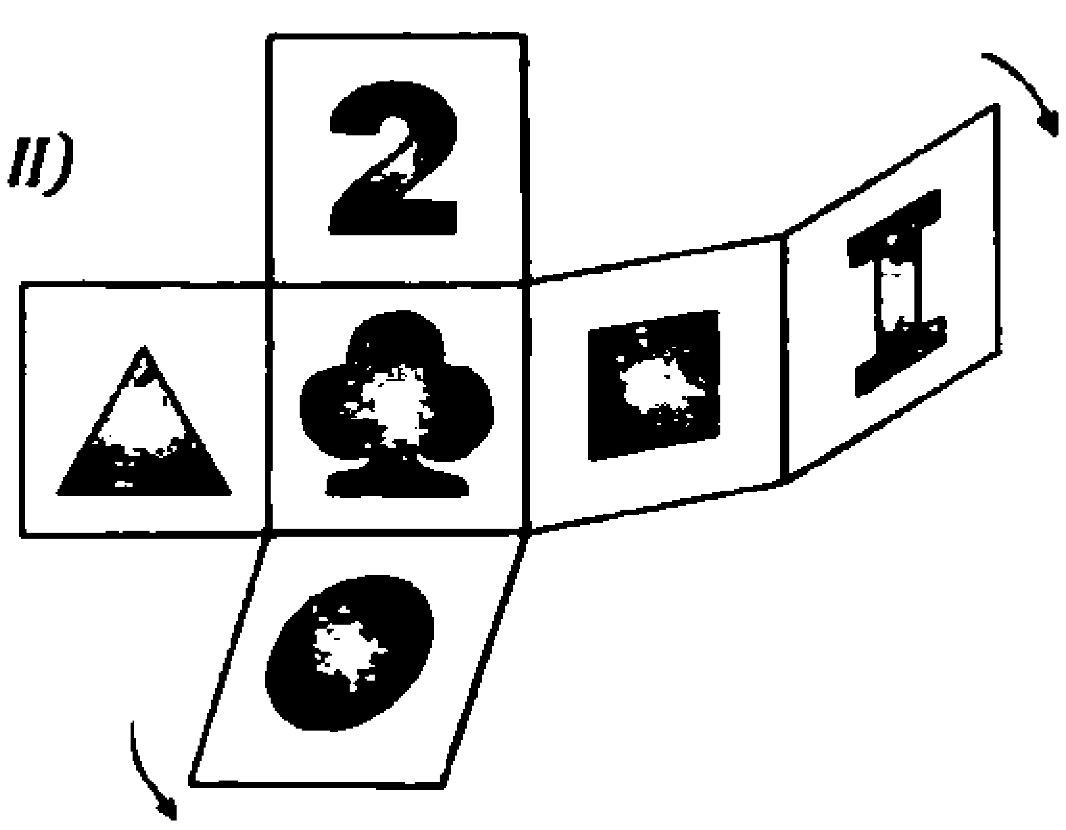
La figura adjunto representa en cubo que muestra sólo tres caras y se va a desplegar para mostrar todos las caras en un mismo plano.

I)



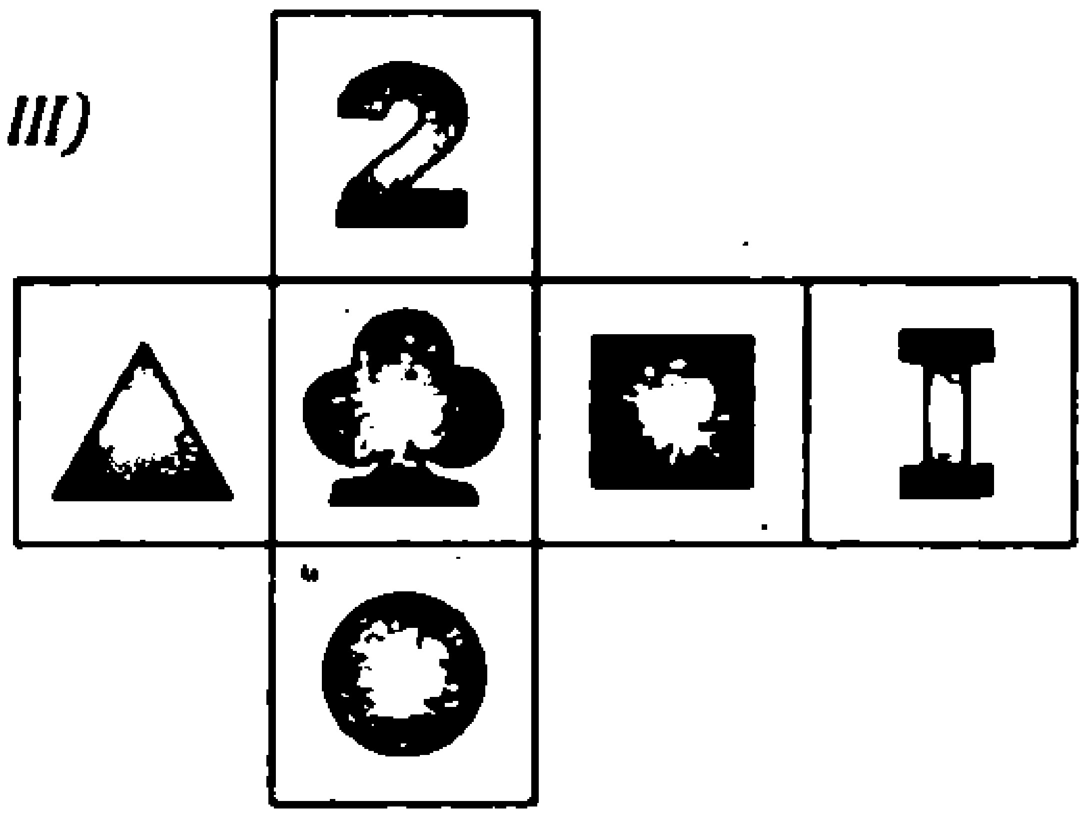
Comienza el despligue de las caras y van apareciendo las caras ocultas

II)



Ya se observan seis caras y el cubo está casi desplegado

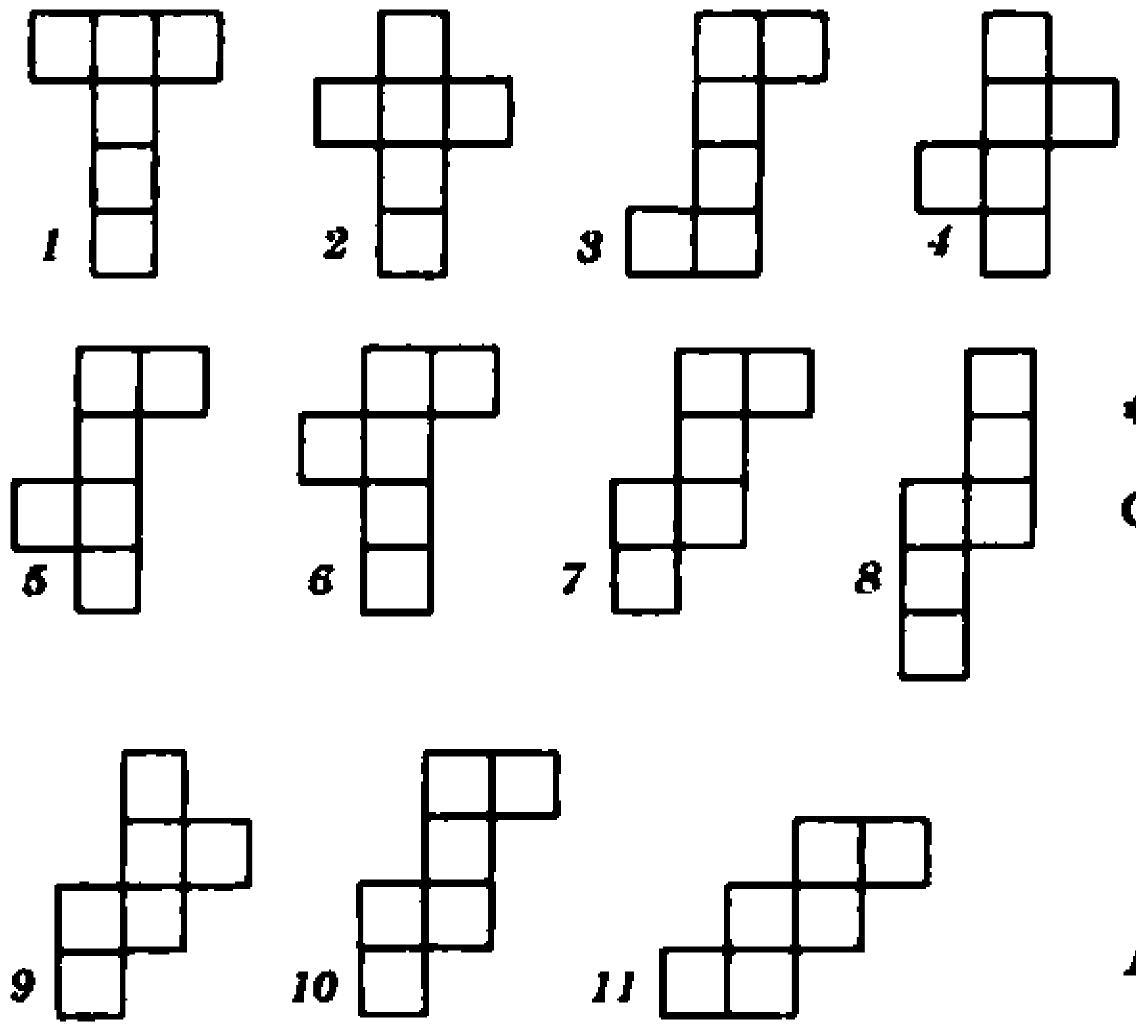
III)



El cubo ya muestra las seis caras en un solo plano.

OBSERVACIONES :

1) Al deplegar un cubo, puede quedar de *11* maneras distintas mostrando sus seis caras. Cada figura se llama: *HEXOMINO*.

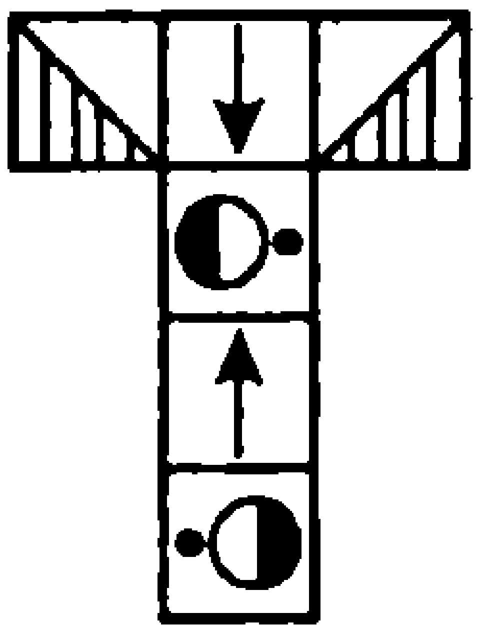


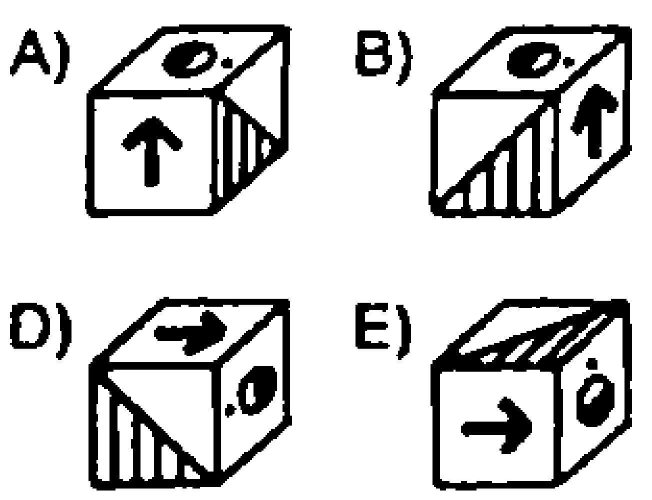
2) Se necesita por lo menos tres vistas de un mismo cubo, desde posiciones diferentes, para observar las caras y la posición de las figuras.

3) Los problemas que se presentan a continuación presentarán una sola posición donde se observarán tres caras. Las demás caras se deben considerar en blanco y en el despliegue se usarán los hexonimos *1;2* y*3*.

EJEMPLO 1 :

Del siguiente desarrollo de un hexaedro regular, seleccione la alternativa correspondiente.

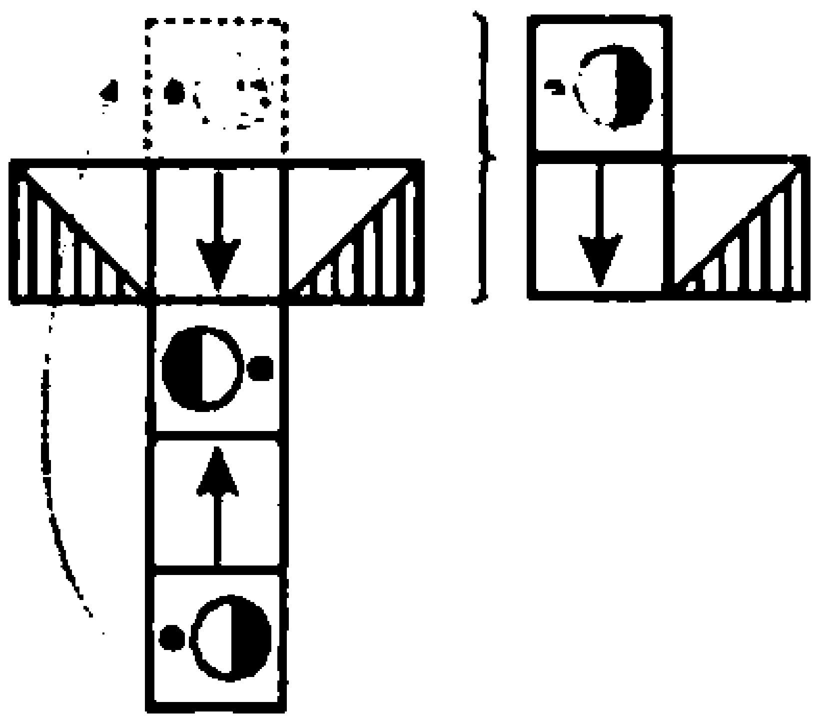




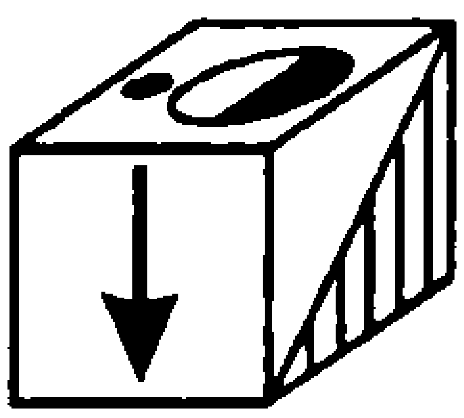
RESOLUCIÓN :

*Se pide indicar el sólido que se forma a partir del desarrollo dado a continuación.

Desarrollo del sólido :



* Luego de armar el sólido desarrollado:



MÉTODO PRÁCTICO :

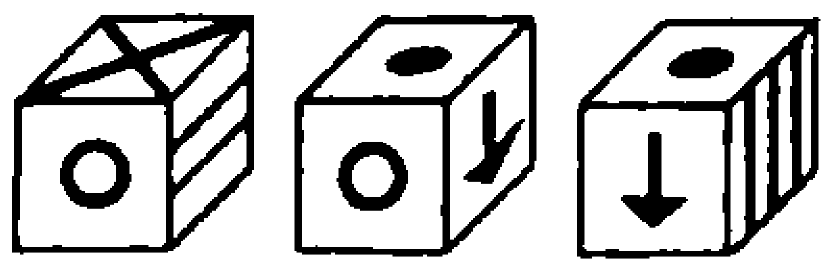
Se puede ir descartando alternativa por alternativa según se observe una contradicción con el desarrollo del sólido.

RPTA : "B"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

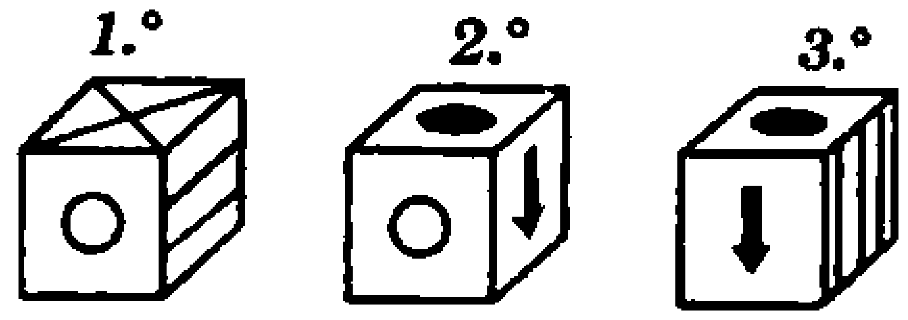
Se muestra un cubo en diferentes posiciones:



Indique la alternativa que corresponde al mismo cubo en otra posición.

RESOLUCIÓN:

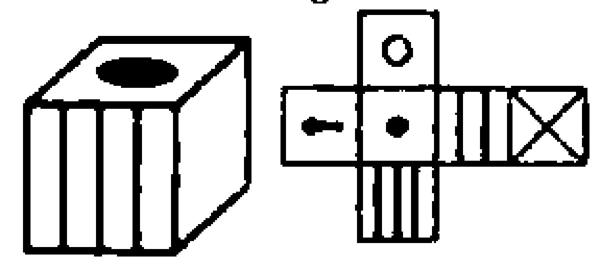
* Observando las posiciones diferentes de un mismo cubo :



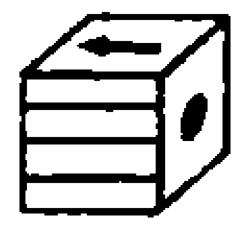
* El tercer sólido se gira *90°* sobre una cara inferior de derecha a izquierda.

desgloce del cubo:

En esta cara se encuentra la ↓



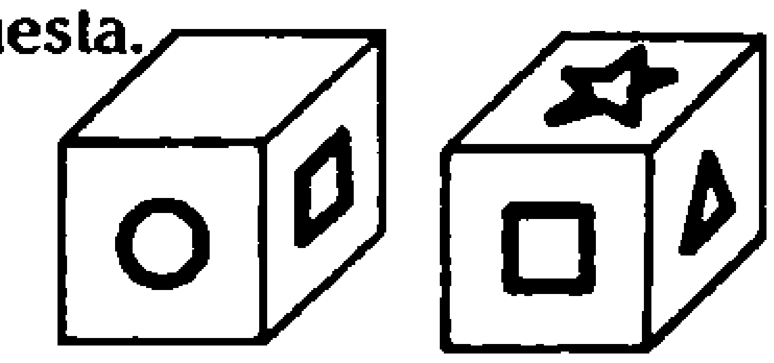
* Luego , este mismo sólido se gira *90°* sobre su cara posterior en sentido horario y se obtiene:



RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

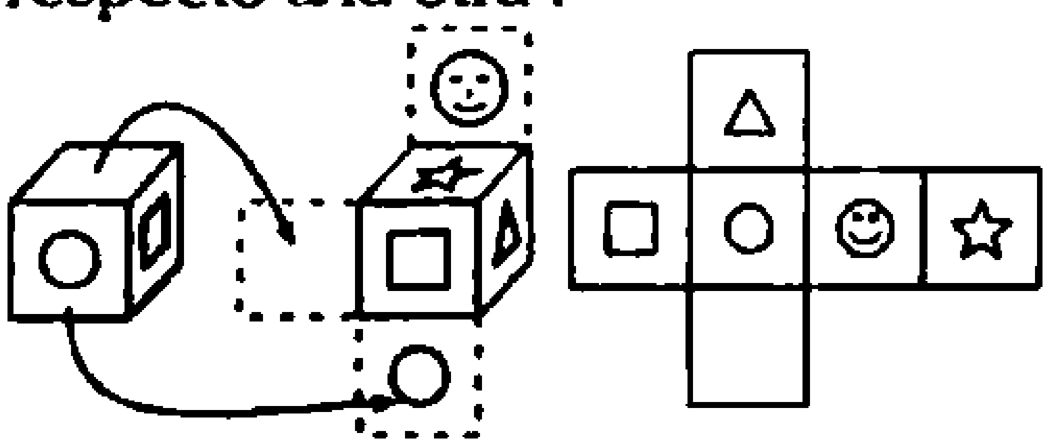
La figura muestra dos vistas de un cubo. Si en una de las caras no visibles tiene dibujada una carita feliz , indique el símbolo en la cara opuesta.



A)Sin símbolo B) El cuadrado C) El triángulo D) La estrella E)La circunferencia

RESOLUCIÓN:

Se aprecia 2 vistas de un mismo cubo , trasladando una con respecto a la otra :

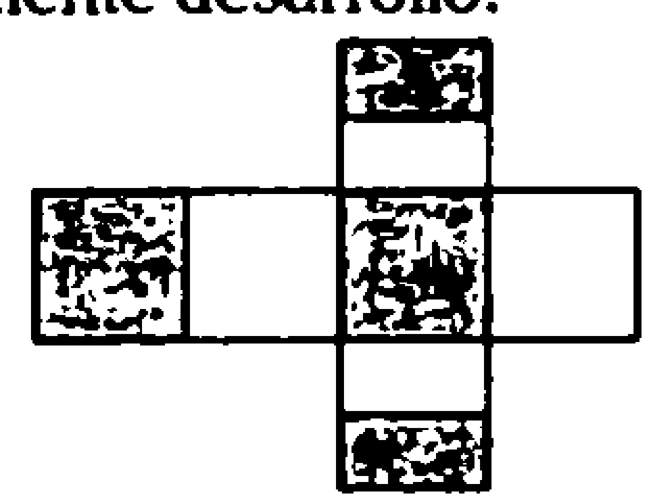


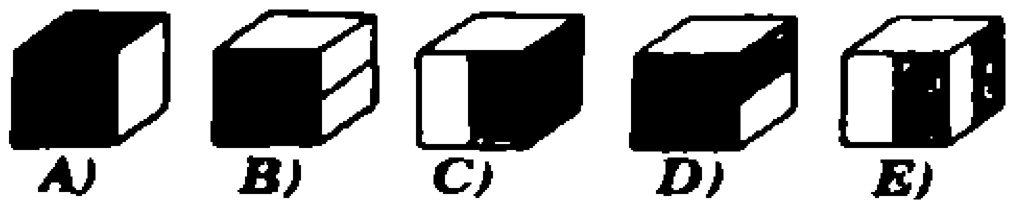
Según el desarrollo del sólido, la figura que se le opone a la carita feliz es el cuadrado.

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Indique el cubo que corresponde al siguiente desarrollo:



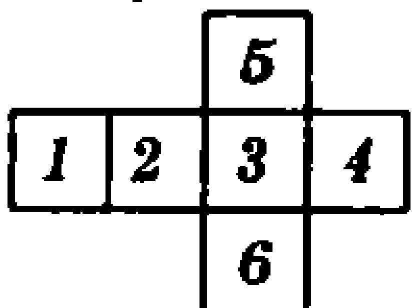


A) B) C) D) E)

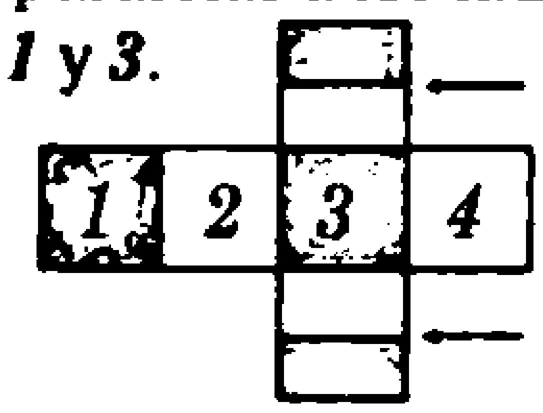
RESOLUCIÓN:

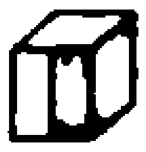
* Analizando el cubo desplegado se debe considerar lo siguiente :

• las caras ***1*** y ***3*** ; ***2*** y ***4*** ; ***5*** y ***6*** son opuestas (Por esto se descartan las alternativas ***A*** y ***E***).



*Luego las líneas que dividen a las casillas ***5*** y ***6*** quedan en forma perpendicular a las casillas ***2*** y ***4*** (por esto se descartan las alternativas ***B*** y ***D***). Estas líneas quedan paralelas a los lados de las casillas ***1*** y ***3***.

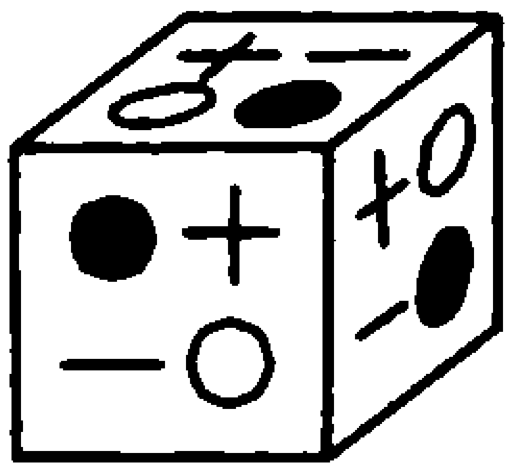


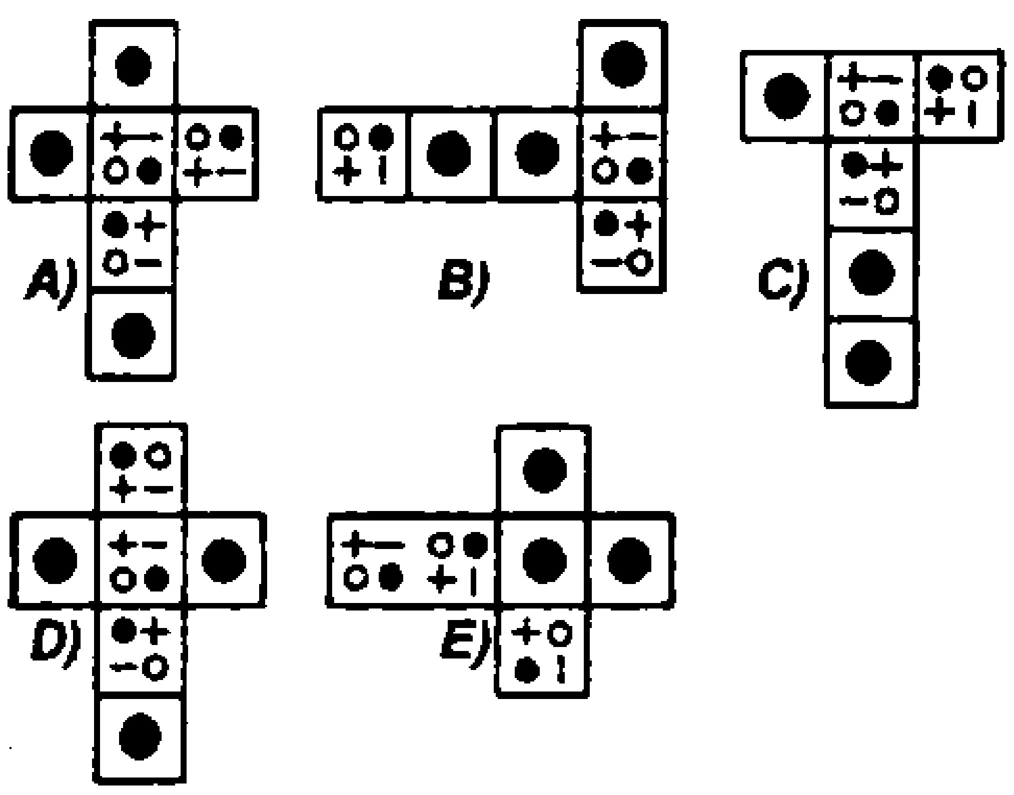
* Entonces , el cubo que se obtiene es: 

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

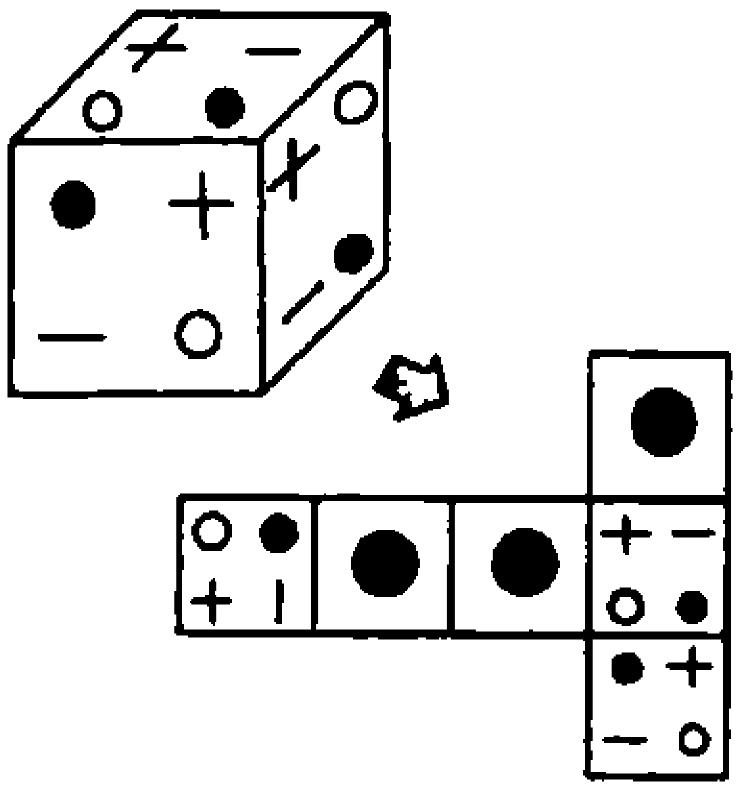
Determine el desarrollo que corresponde a la figura adjunta:





RESOLUCIÓN:

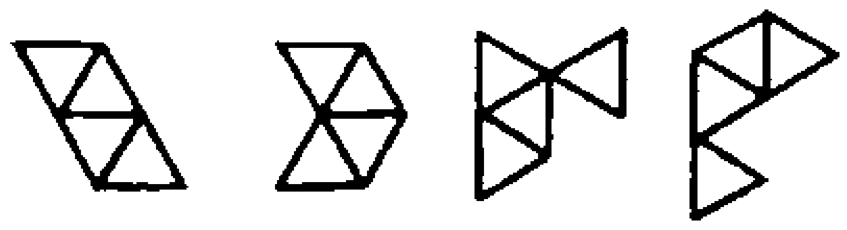
* Al observar y analizar el sólido y las alternativas que muestran su desarrollo posible, concluimos que la alternativa ***B*** , es la única que corresponde a la figura, por cuanto la posición y sentido de los símbolos de cada cara mantiene su ubicación correcta al desplegarla.



RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Determine el desarrollo que no corresponde a una pirámide de base triangular.

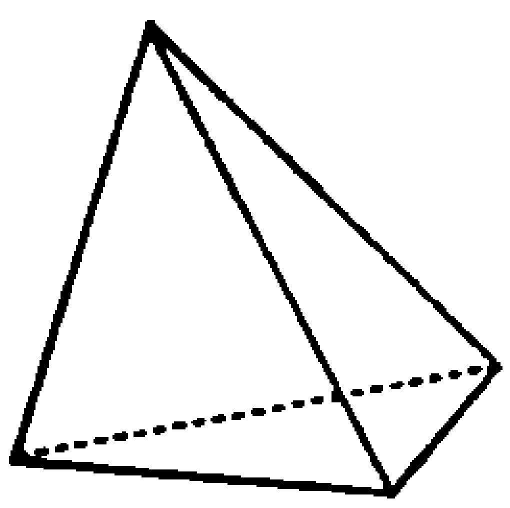


I) II) III) IV)

A) solo I B) solo II C) II y III D) II y IV E) III y IV

RESOLUCIÓN :

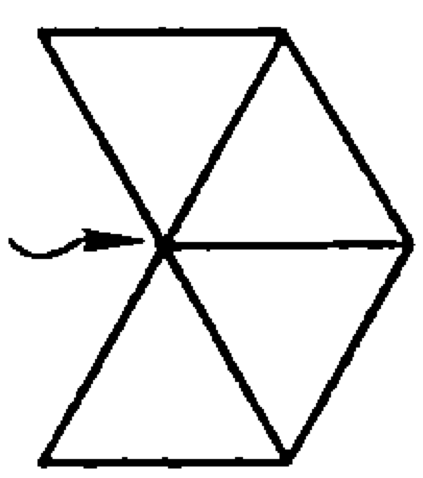
Definición de pirámide: Es un poliedro limitado por una base que es un polígono cualquiera; y por caras, que son triángulos y coinciden en un punto denominado ápice.



Al plegar cada uno de los desarrollos mostrados, notamos que para obtener una pirámide de base triangular, en un vértice no pueden concurrir más de ***3*** caras.

Debido a ello, la figura ***II*** no correspondería al sólido deseado.

En este vértice (INDICADO) concurren ***4*** caras

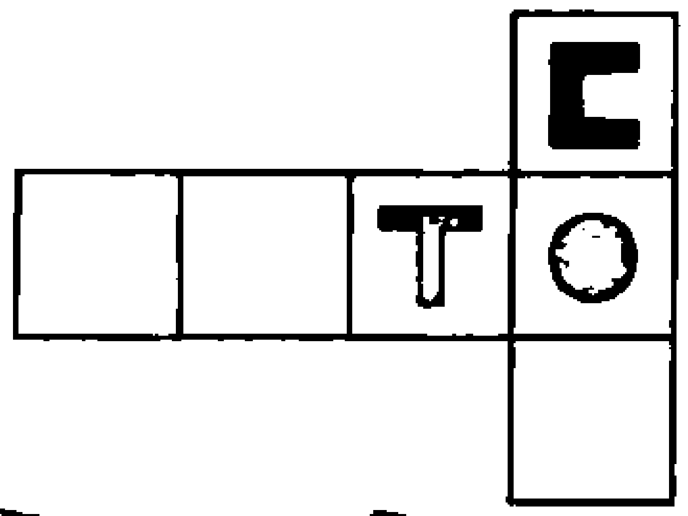


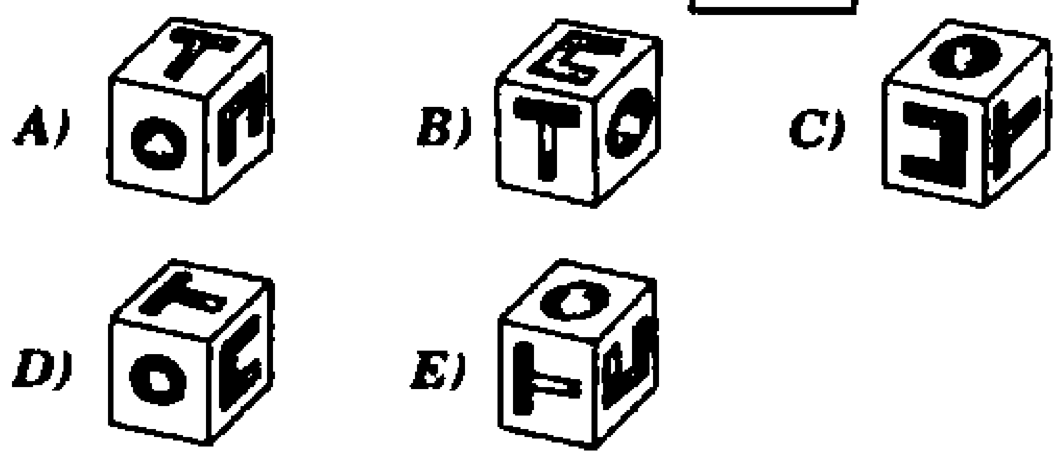
El desarrollo que no corresponde a una pirámide de base triangular sólo es la figura ***II***.

RPTA: "B"

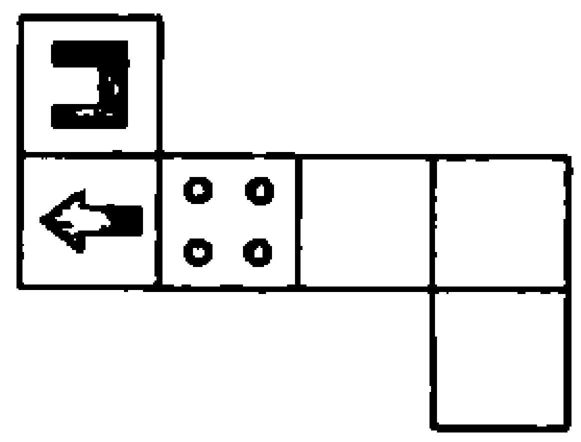
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

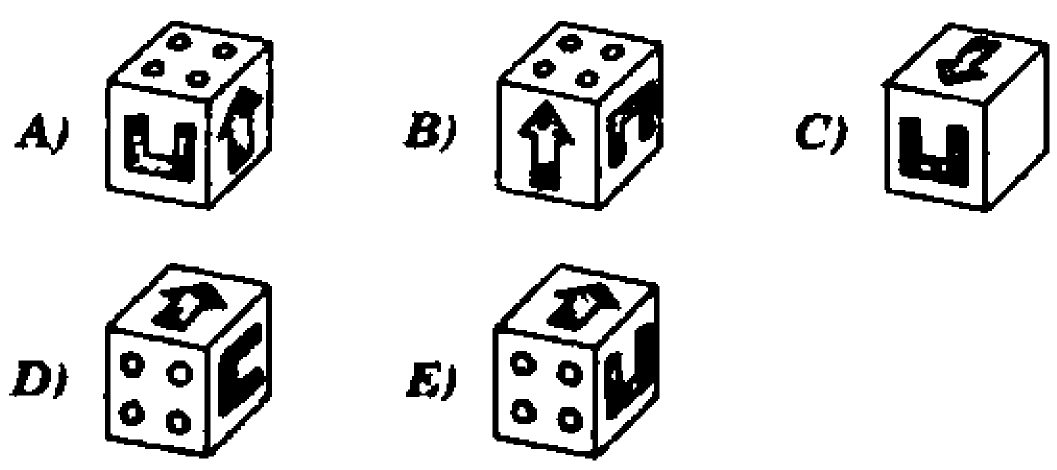
01 ¿A qué cubo corresponde el siguiente hexomino?



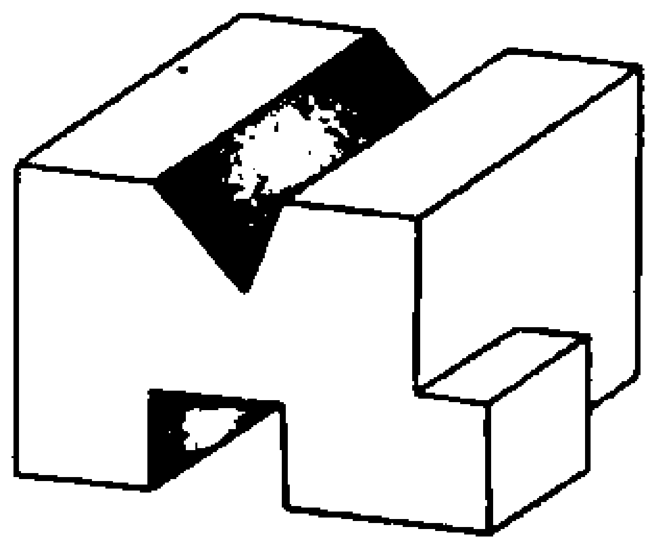


02 ¿A qué cubo corresponde el siguiente hexomino?



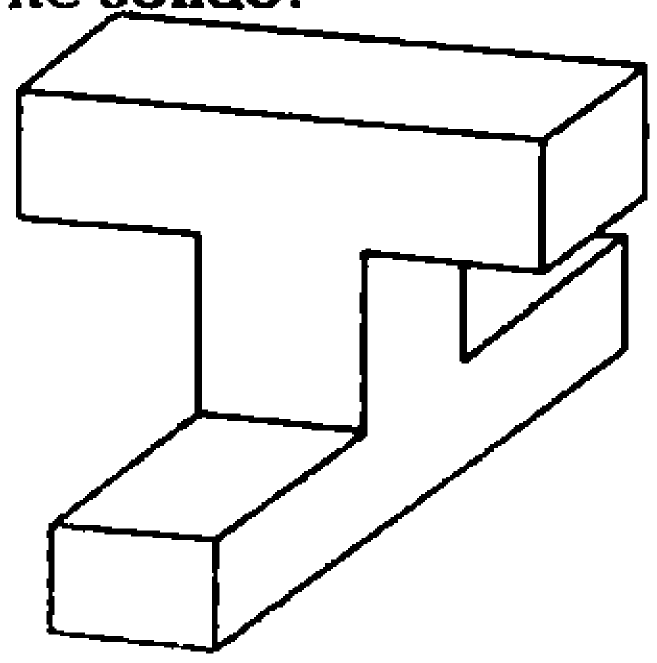


03 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



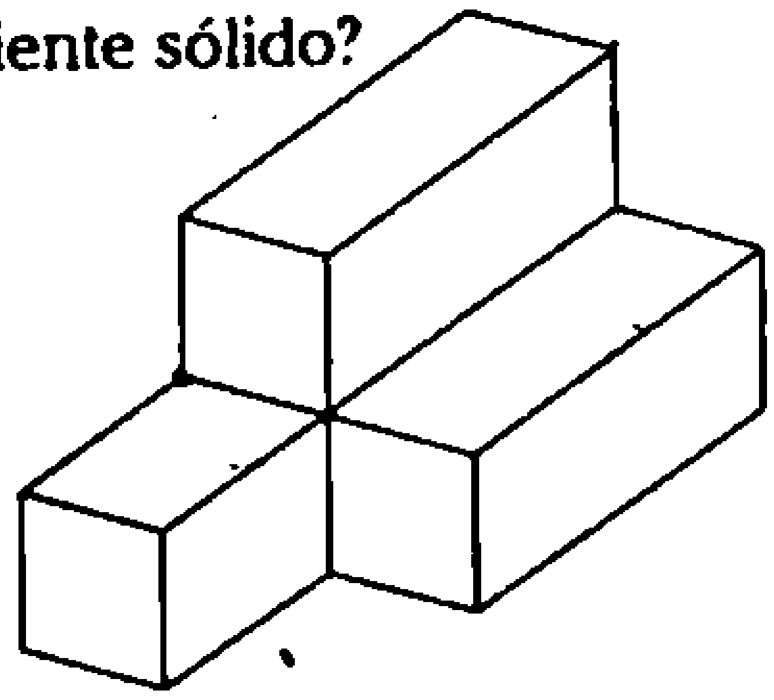
A)12 B)13 C)16 D)14 E)15

04 ¿ Cuántas caras contiene el siguiente sólido?



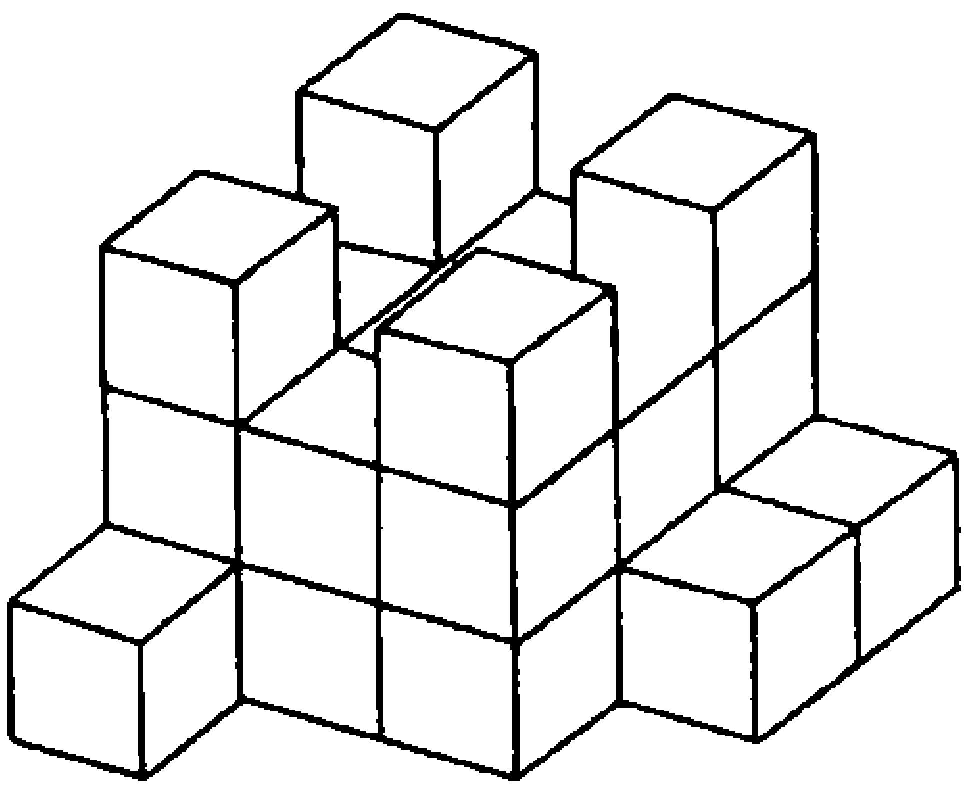
A)14 B)13 C)15 D)12 E)16

05 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



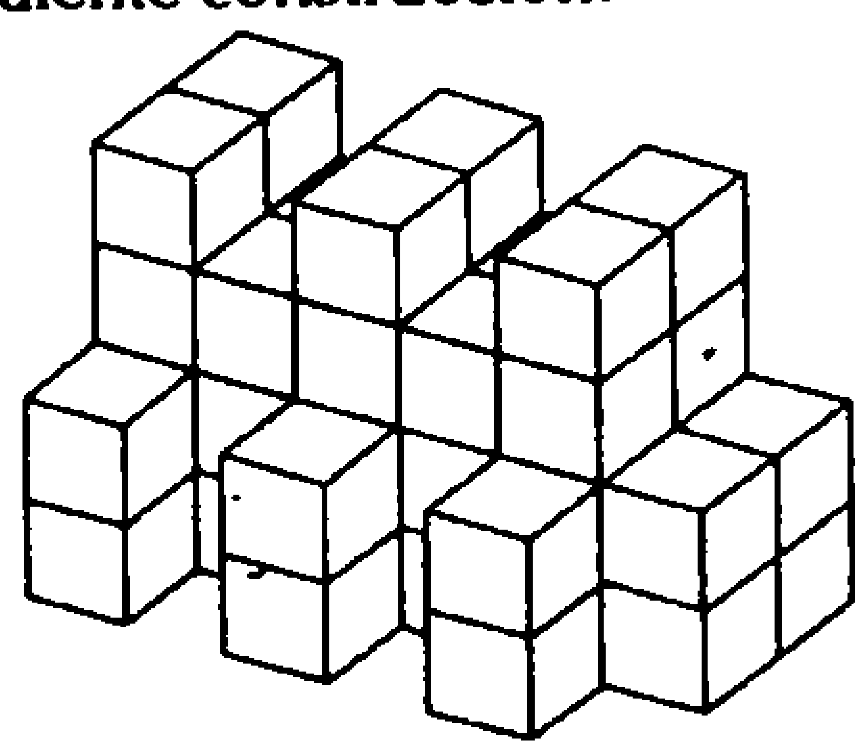
A) 14 B) 10 C) 11 D) 13 E) 12

06 ¿Cuántos "cubitos" tiene la siguiente construcción?



A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

07 ¿Cuántos "cubitos" tiene la siguiente construcción?

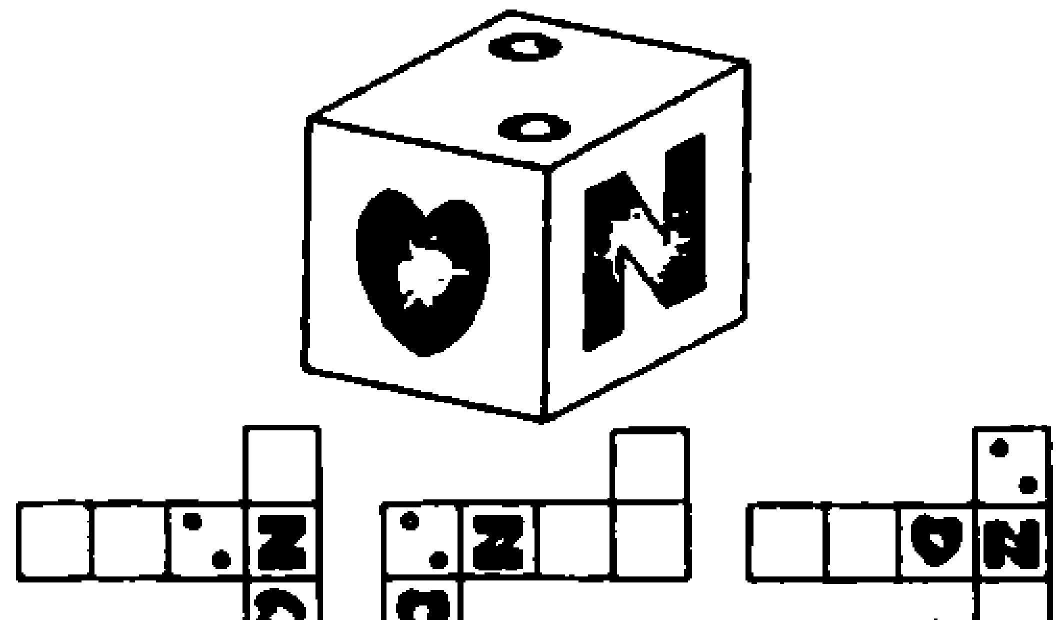


A)46 B)47 C)48 D)49 E)45

08 ¿Cuántos "cubitos" tiene la siguiente construcción?

A)24 B)20 C)21 D)22 E)23

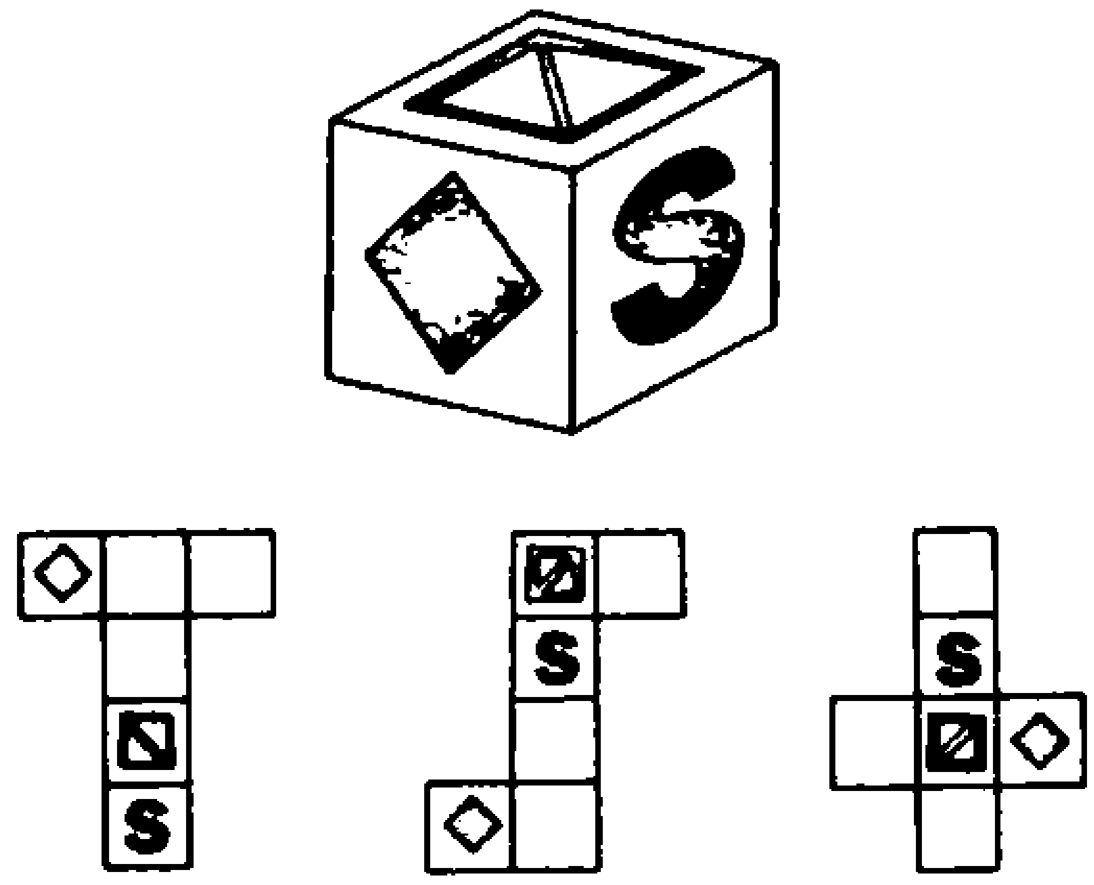
09 ¿Cuál de los siguientes hexominos corresponde al cubo?



I II III

A)I y II B)II y II C)I y III
D) Todas E) Ninguno

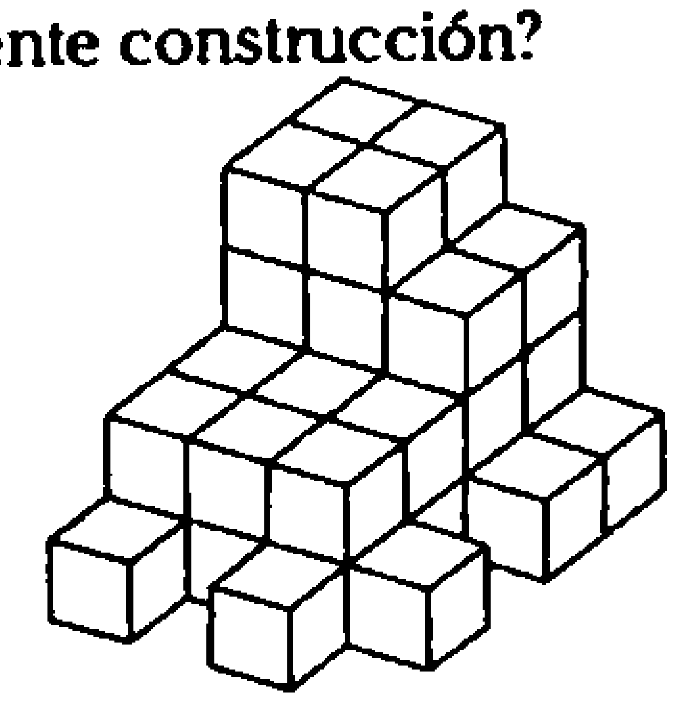
10 ¿Cuál de los siguientes hexominos corresponde al cubo?



I II III

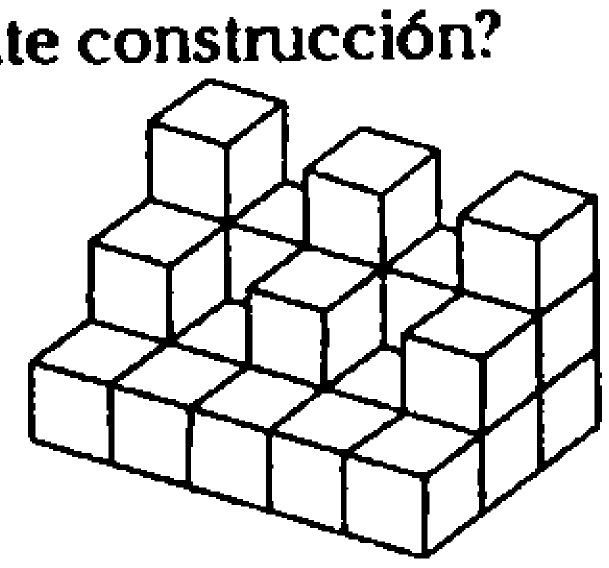
A)I y II B)II y II C)I y III
D) Todas E) Ninguno

11 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



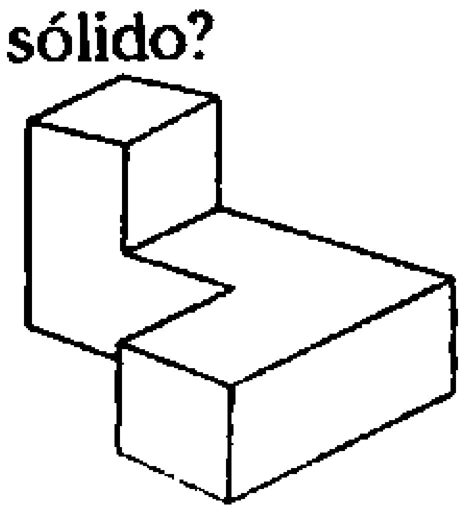
A)36 B)37 C)38 D)39 E)40

12 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



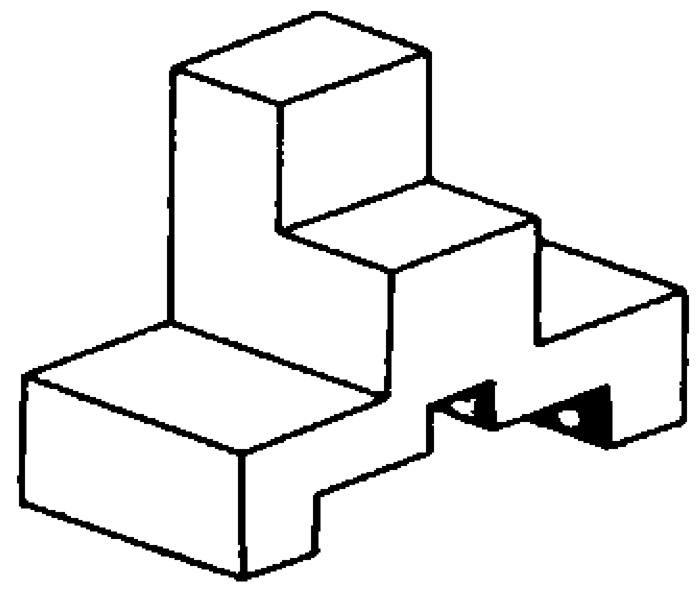
A)36 B)37 C)38 D)39 E)40

13 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



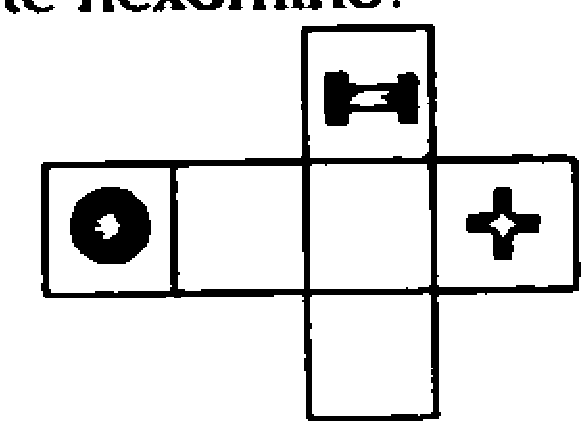
A)10 B)11 C)12 D)9 E)8

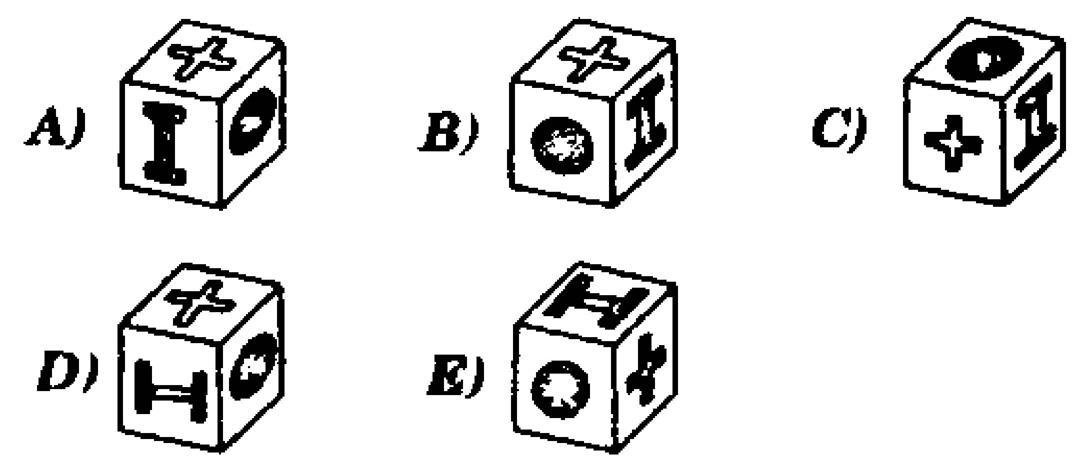
14 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



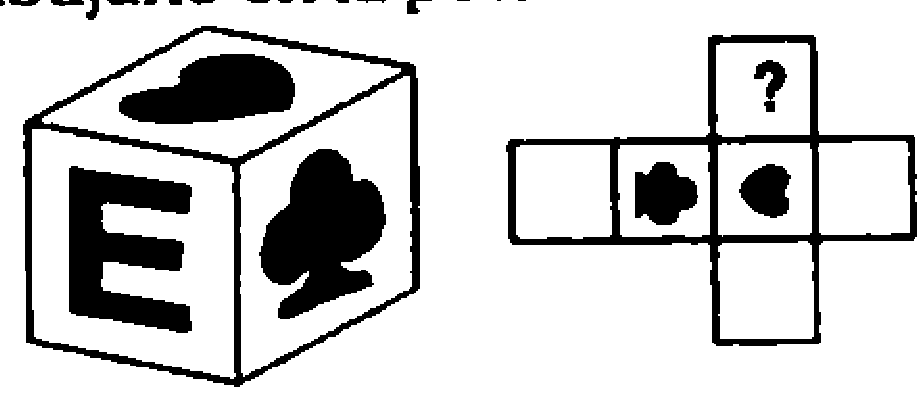
A)19 B)20 C)21 D)22 E)23

15 ¿A qué cubo corresponde el siguiente hexomino?

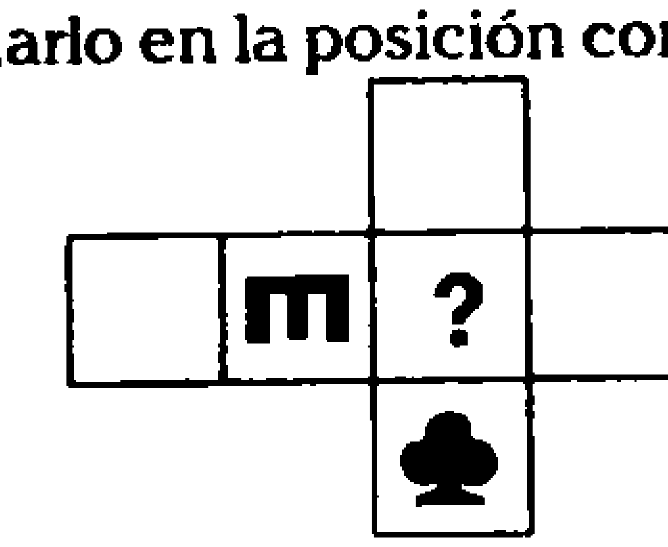




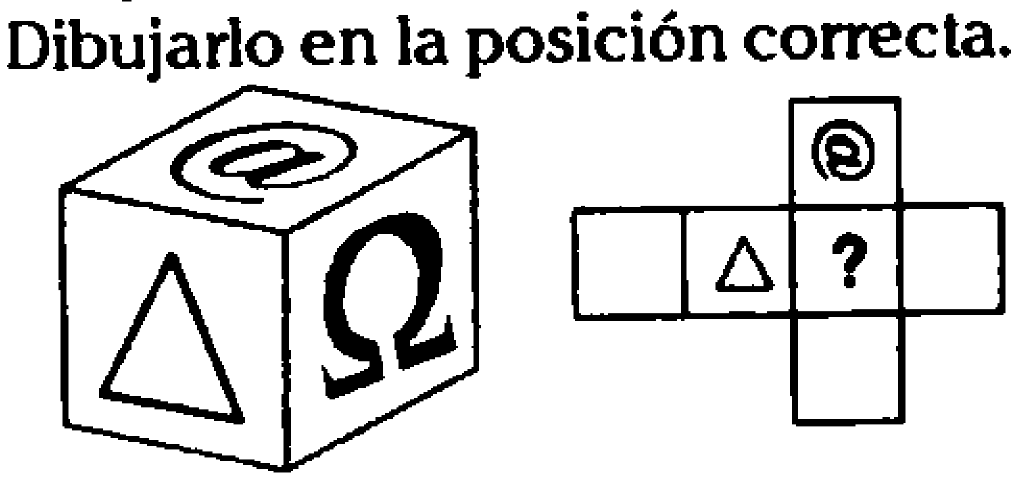
16 De acuerdo al siguiente cubo desplegado, dibujar la figura que ocupa el lugar de la incógnita *(?)*. Dibujarlo en la posición correcta.



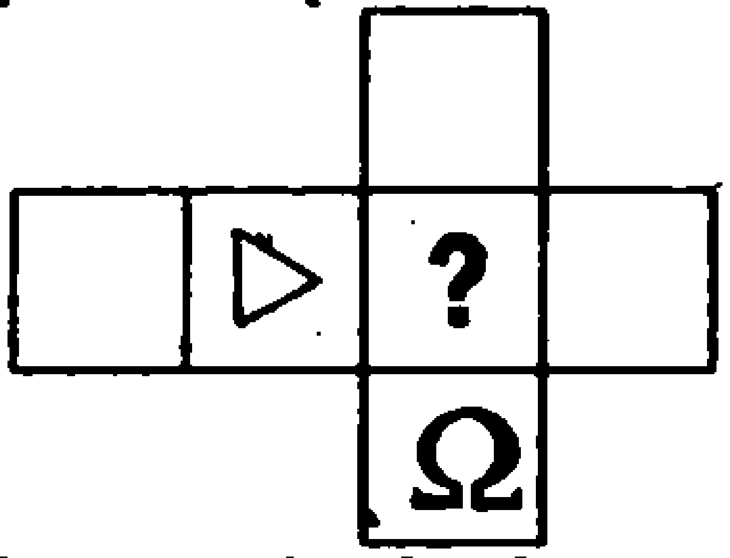
17 De acuerdo al cubo anterior, ¿qué figura falta en el lugar ocupado por la incógnita *(?)*? Dibujarlo en la posición correcta.



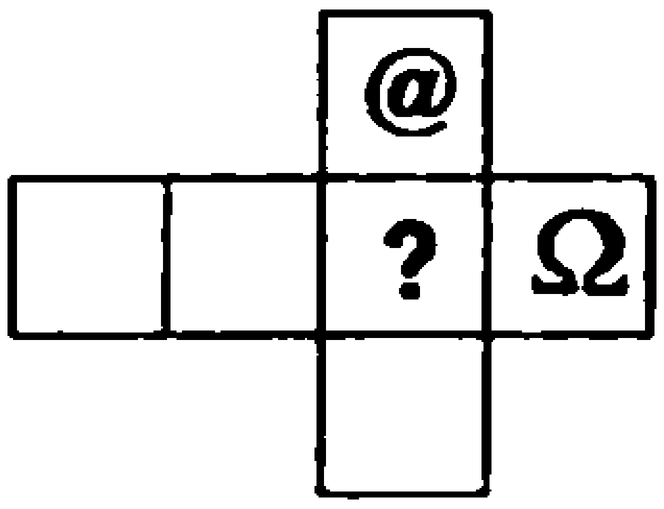
18 De acuerdo al siguiente cubo desplegado, dibujar la figura que ocupa el lugar de la incógnita *(?)*. Dibujarlo en la posición correcta.



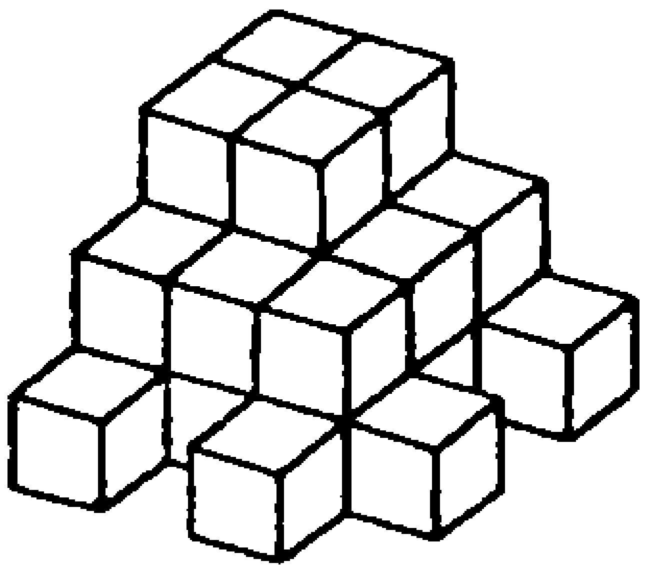
19 De acuerdo al cubo anterior, ¿qué figura falta en el lugar ocupado por la incógnita *(?)?*. Dibujarlo en la posición correcta.



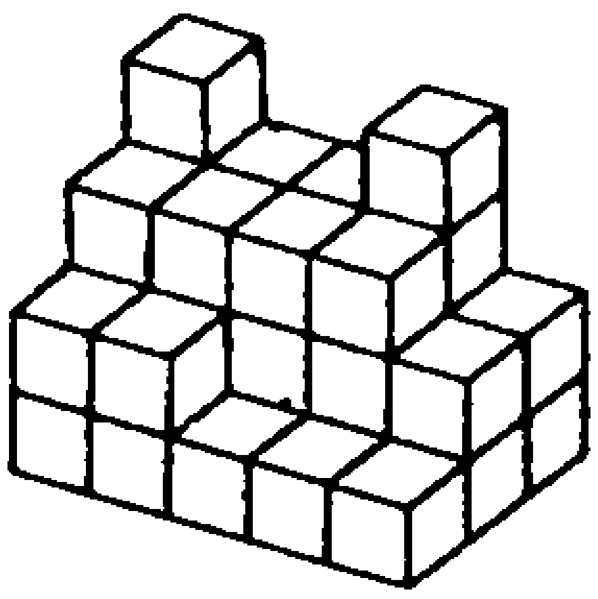
20 De acuerdo al cubo enterior, ¿qué figura falta en el lugar ocupado por la incógnita*(?)?*.Dibujarlo en el posición correcta.



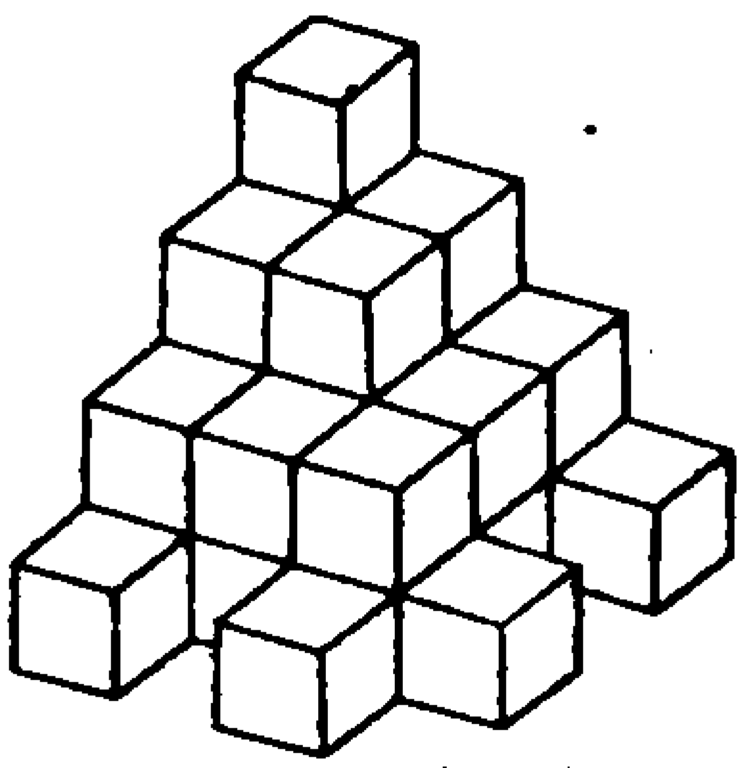
21 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



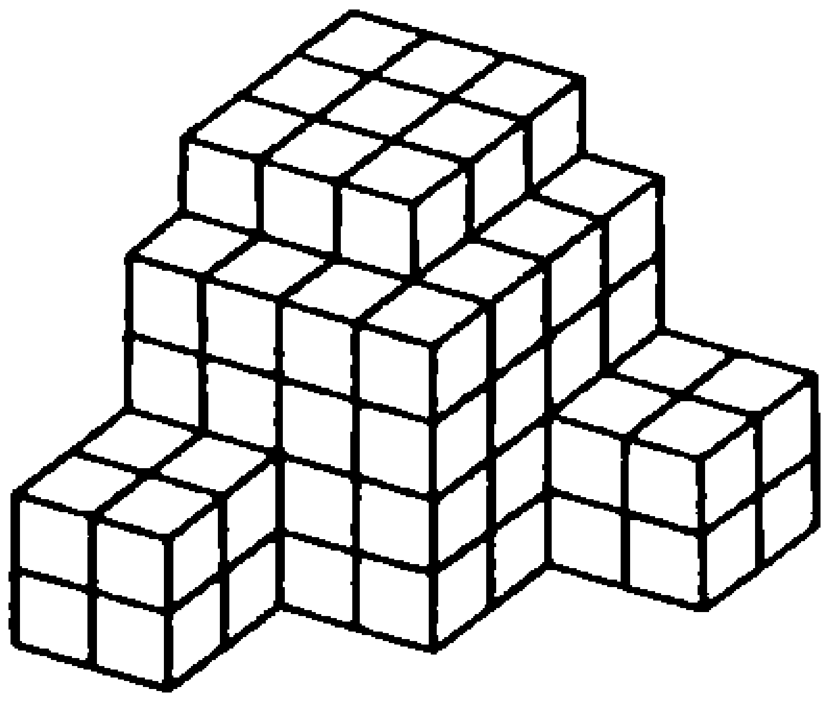
22 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



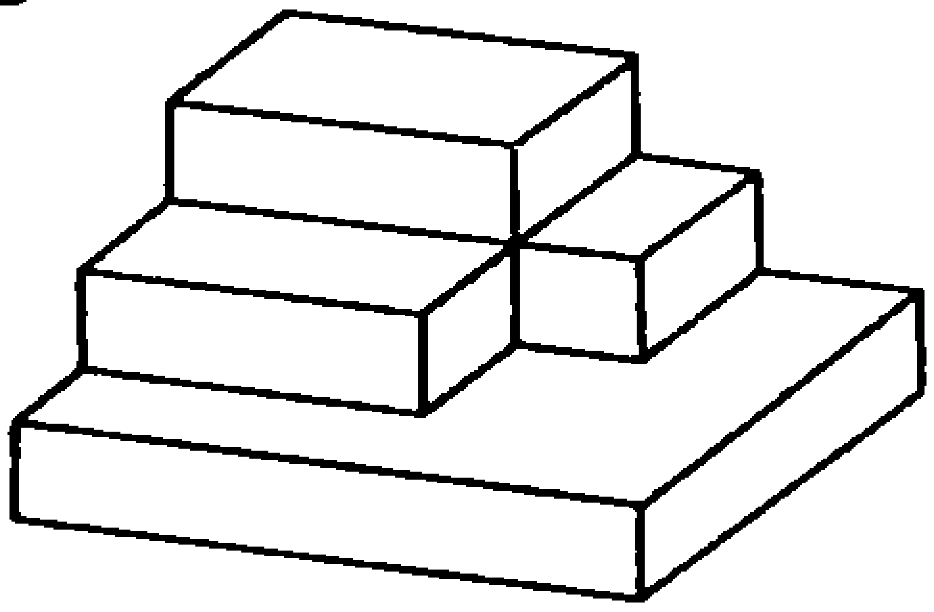
23 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



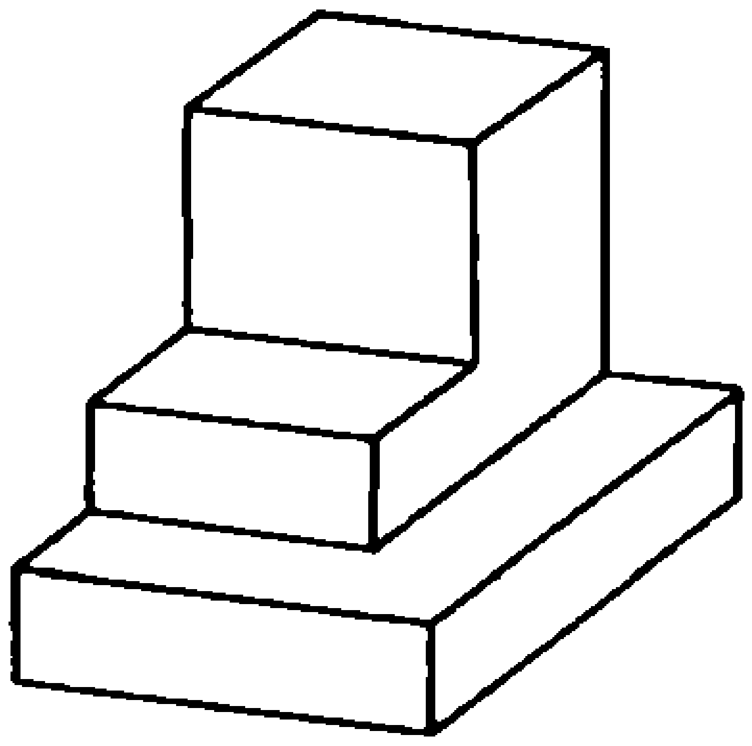
24 ¿Cuántos "cubitos" hay en la siguiente construcción?



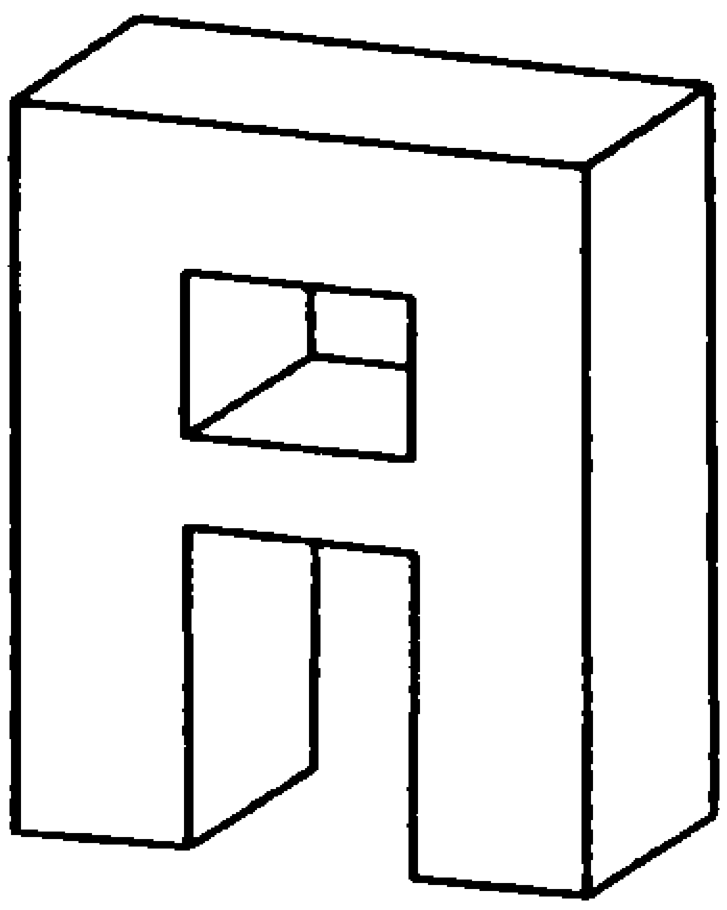
25 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



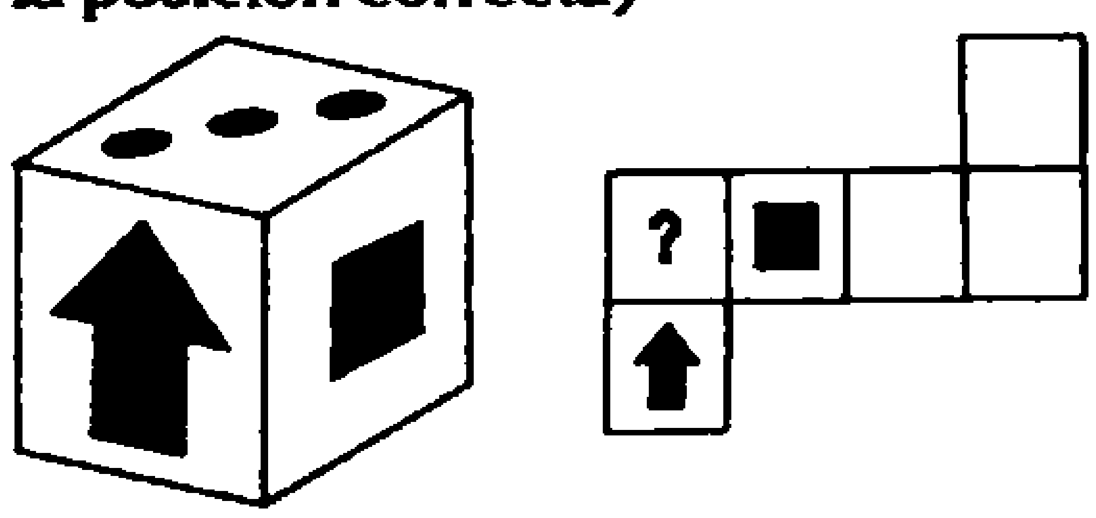
26 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



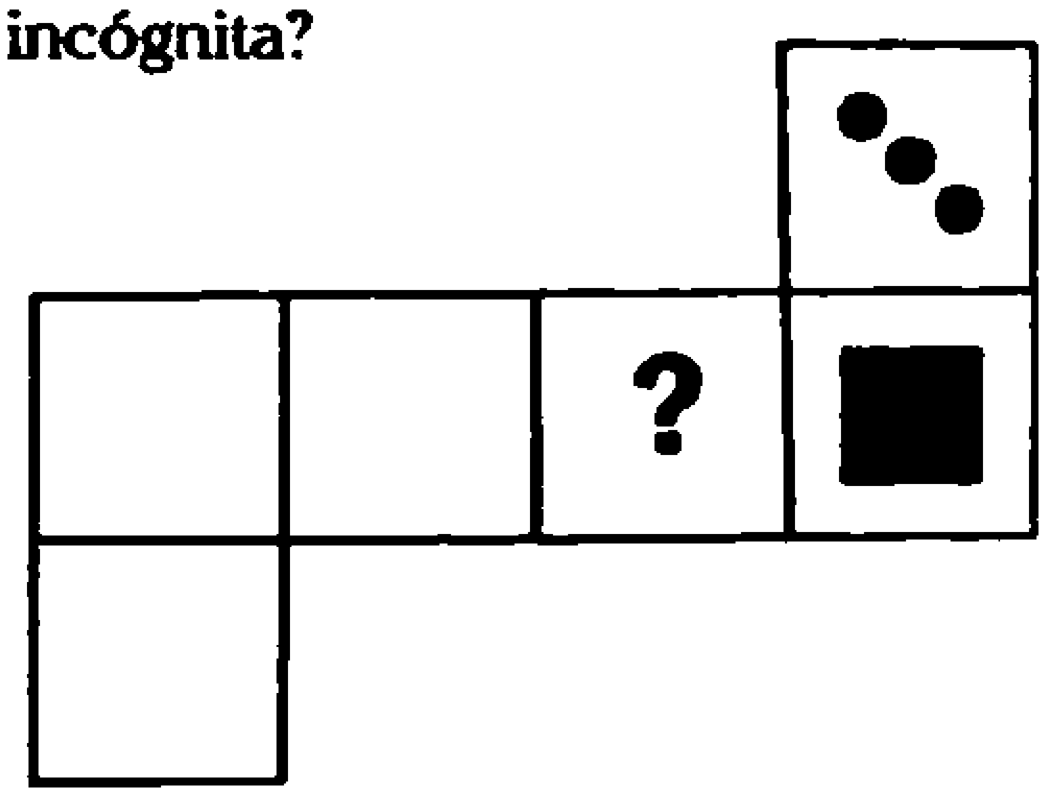
27 ¿Cuántas caras tiene el siguiente sólido?



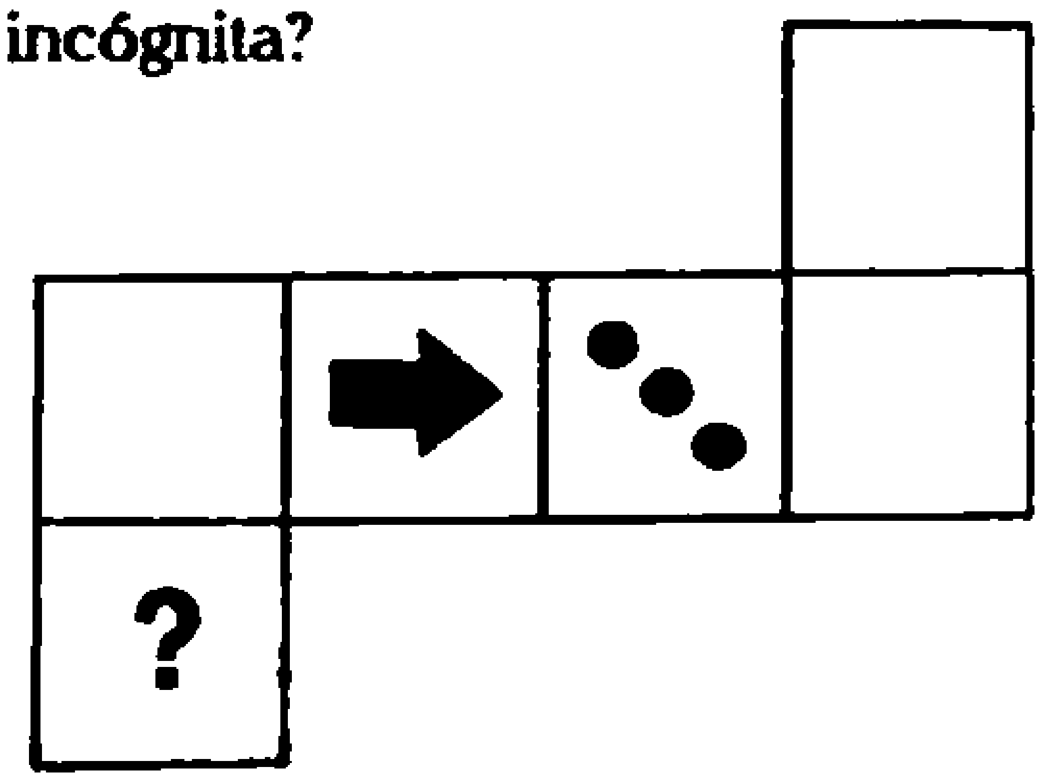
28 De acuerdo al siguiente cubo desplegado,¿Qué figura ocupa el lugar de la incógnita? (Dibujando en la posición correcta)



29 De acuedo al cubo anterior. ¿Qué figura ocupa el lugar de la incógnita?

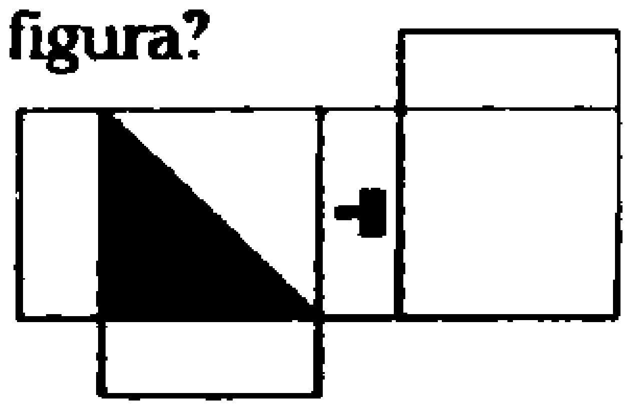


30 De acuerdo al cubo anterior. ¿Qué figura ocupa el lugar de la incógnita?

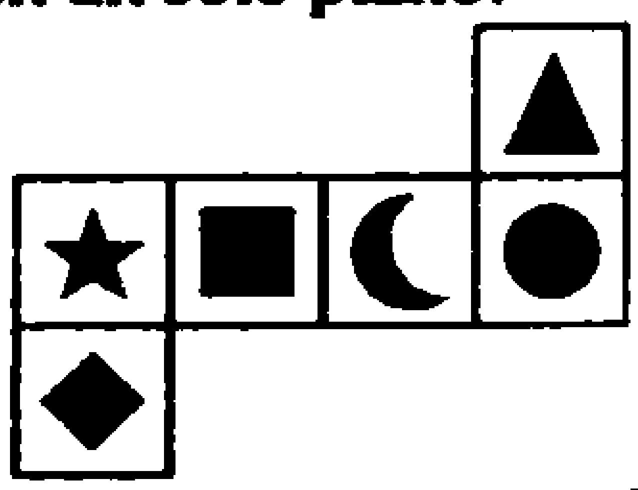


PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

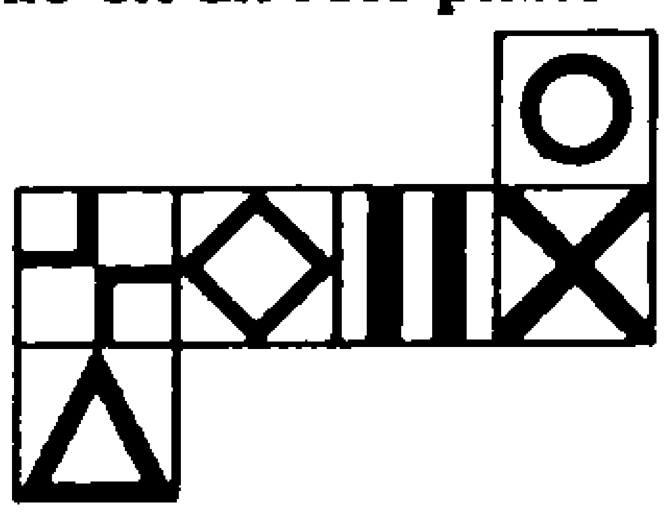
01 ¿Qué sólido se forma con la siguiente figura?



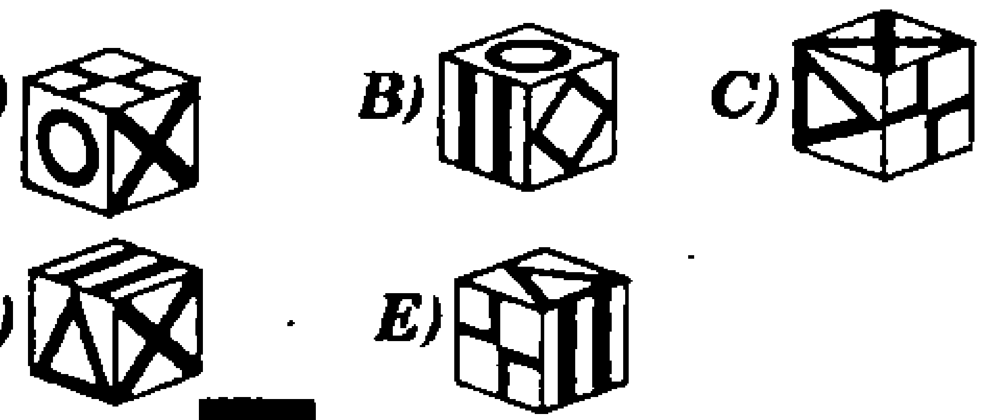
02 ¿Qué figura corresponde , a este desarrollo en un solo plano?



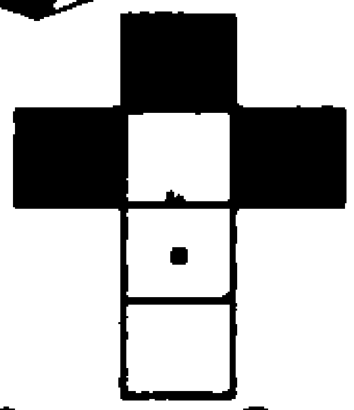
03 ¿Qué figura corresponde , a este desarrollo en un solo plano?



A) B) C) D) E)

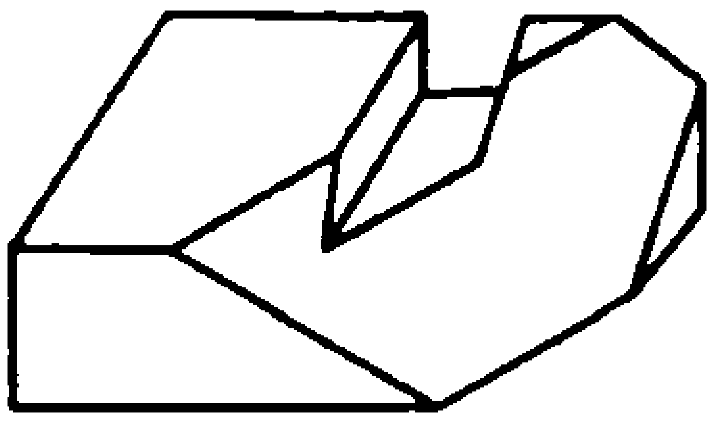


04

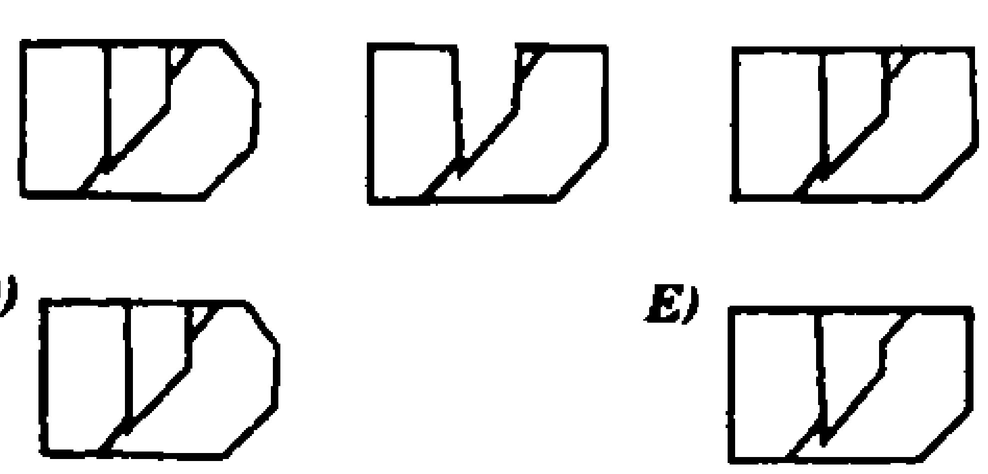


A) B) C) D)

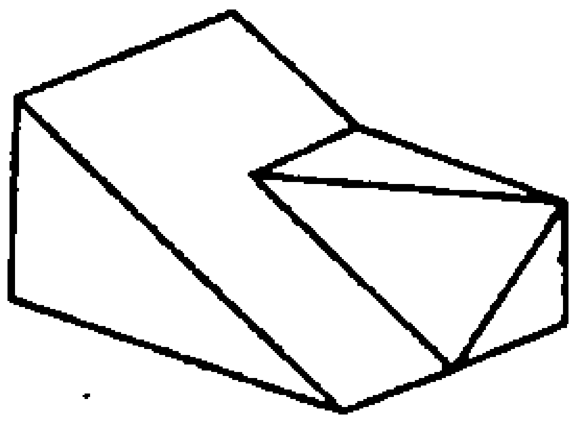
05 Halle la vista horizontal del siguiente sólido.



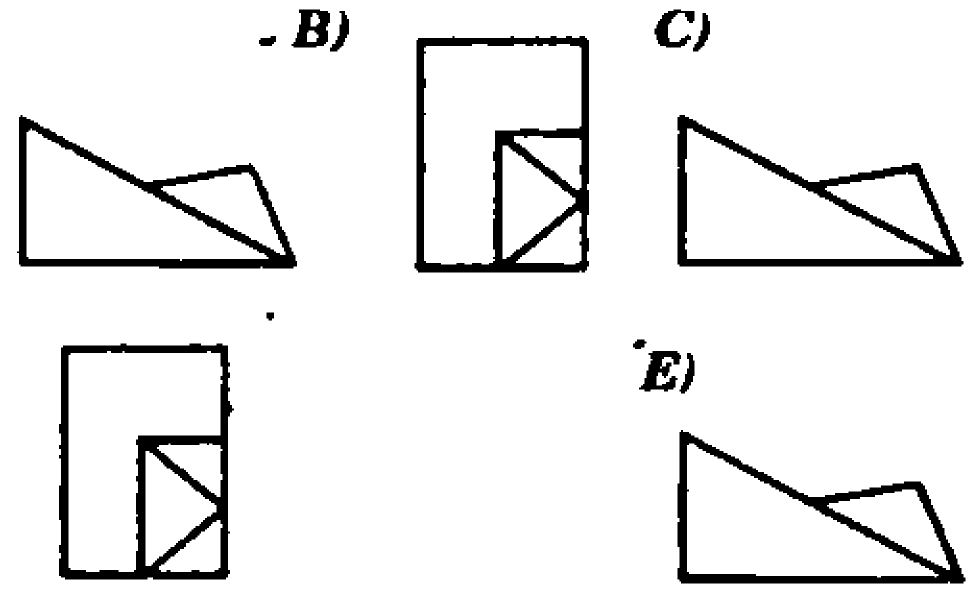
A) B) C) D) E)



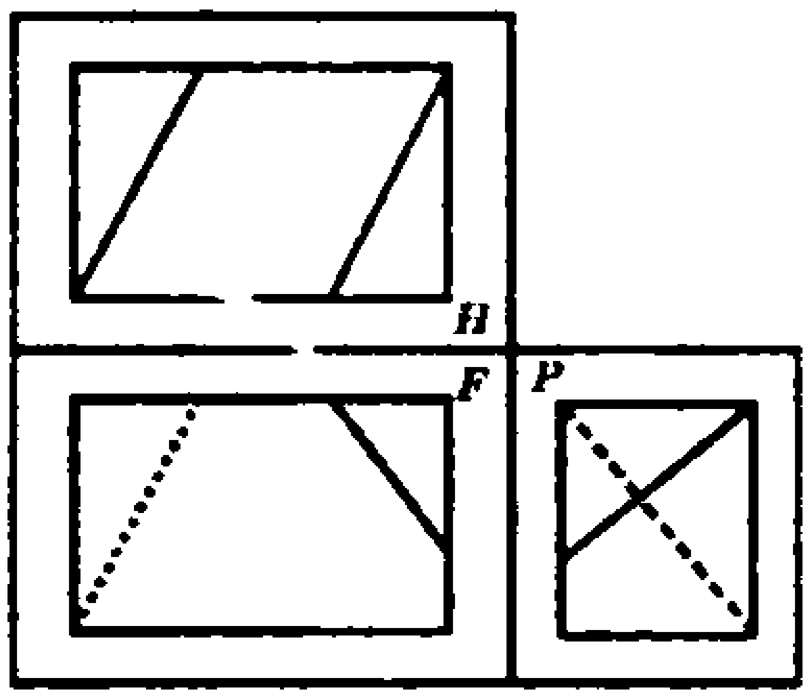
06 Halle la vista frontal del siguiente sólido.



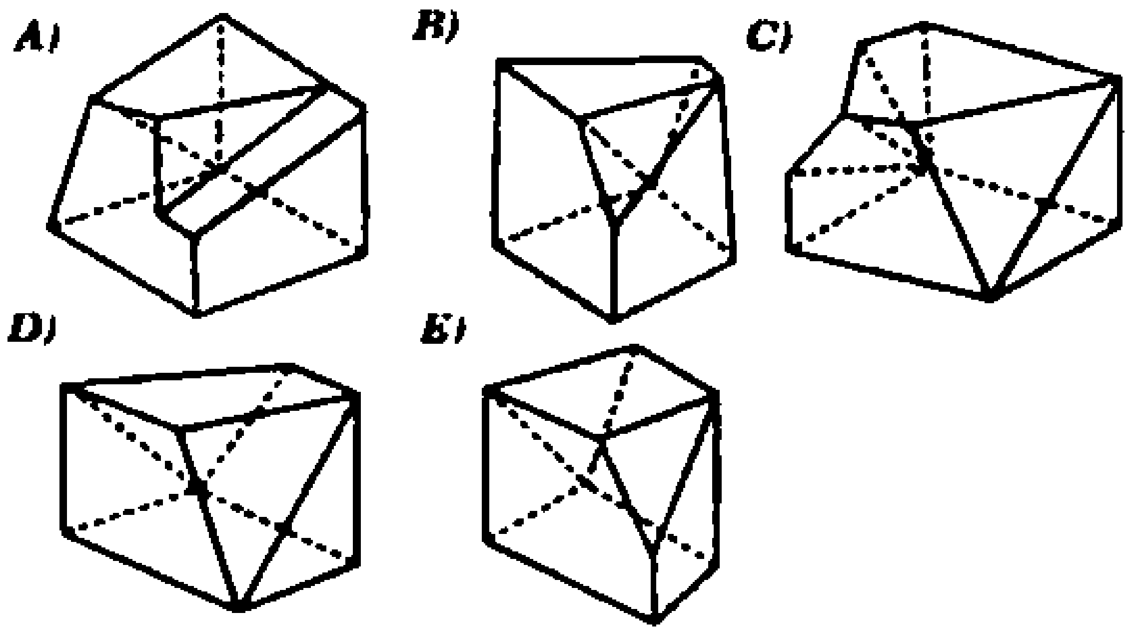
A) B) C) D) E)



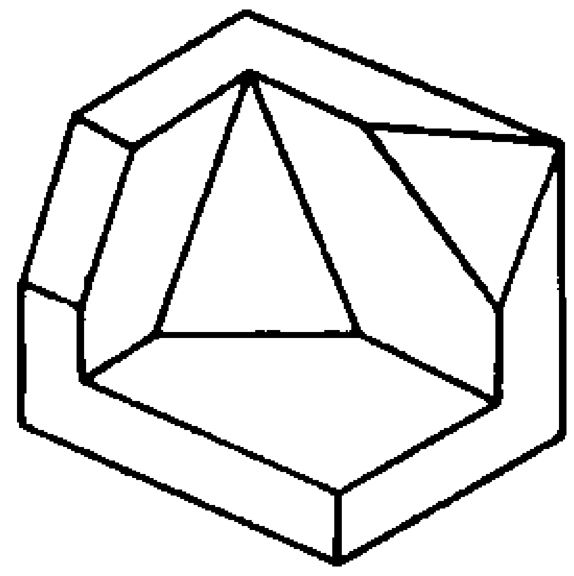
07 ¿Cuál es el sólido cuyas vistas principales se muestran a continuación?



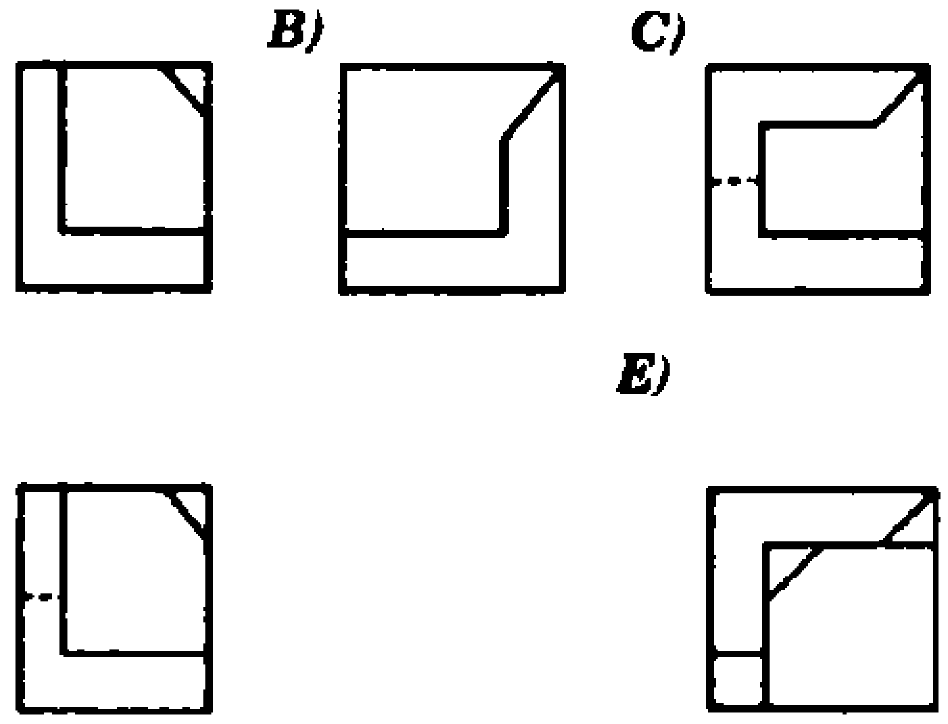
A) B) C) D) E)



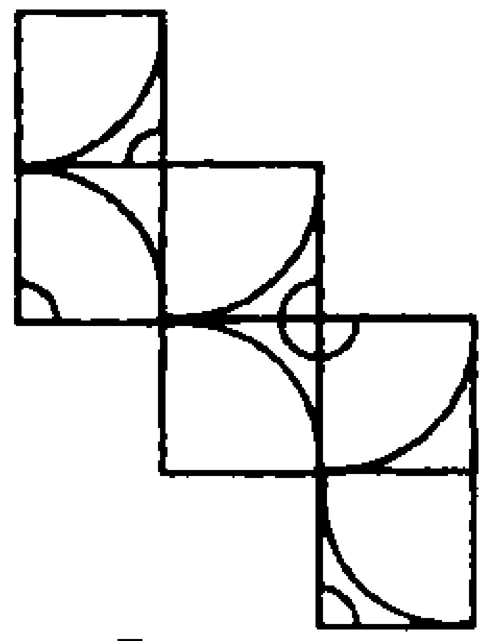
08 Indique una de las vistas del siguiente sólido.



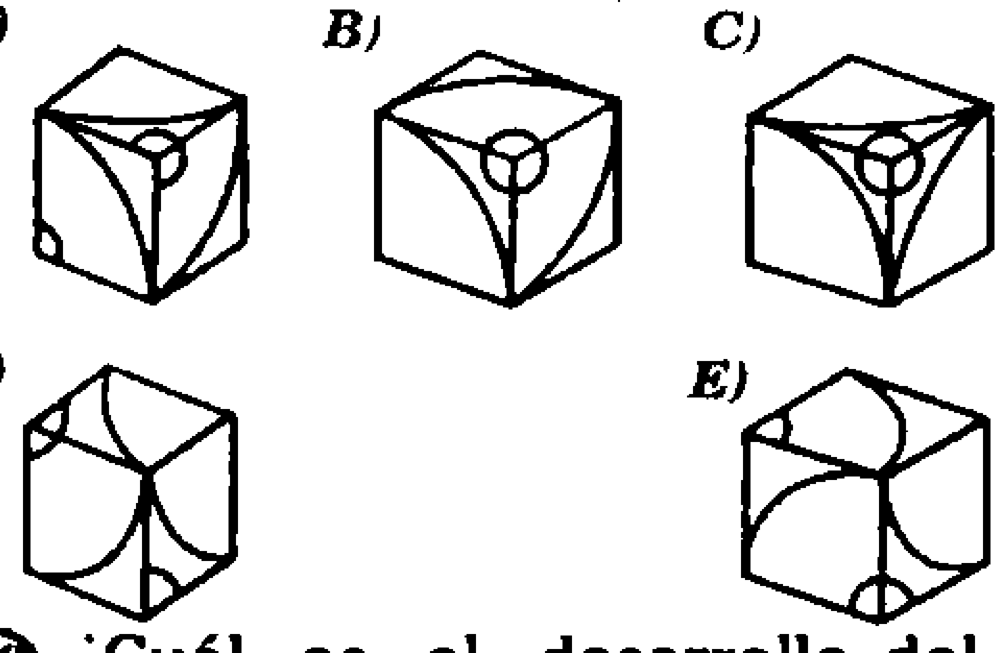
A) B) C) D) E)



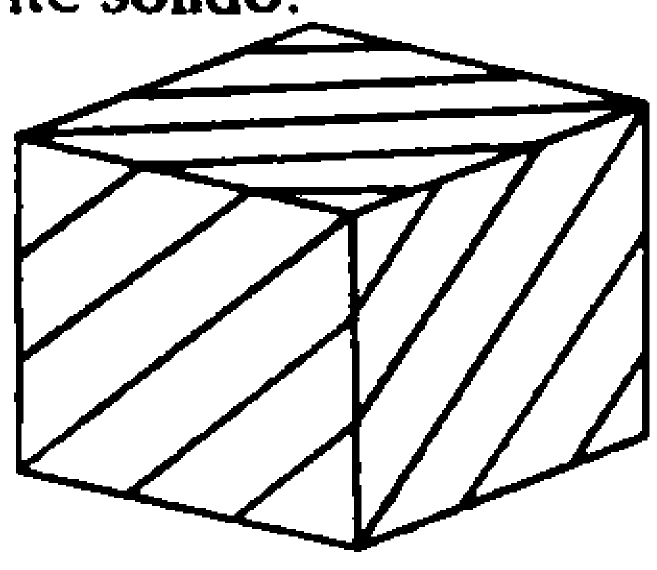
09 Al plegar el desarrollo mostrado en el gráfico, halle el sólido que resulta.



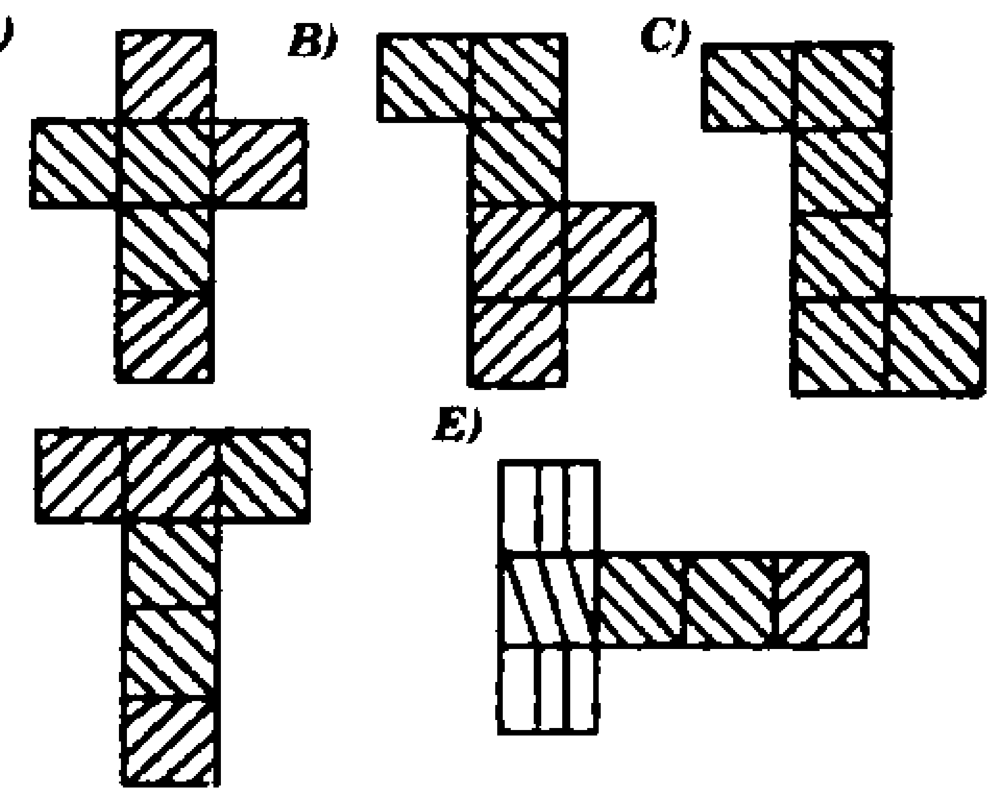
A) B) C) D) E)



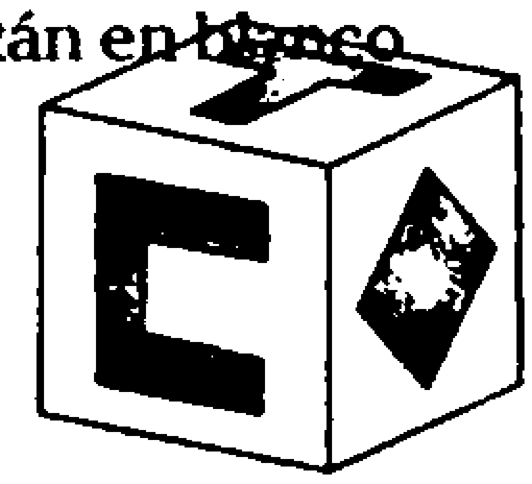
10 ¿Cuál es el desarrollo del siguiente sólido?

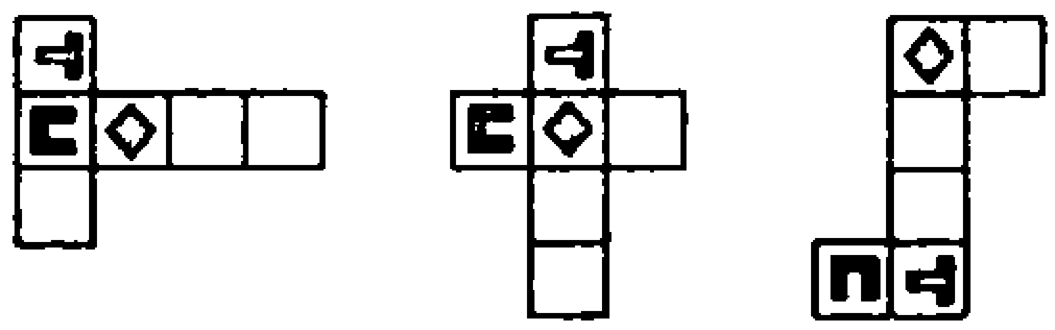


A) B) C) D) E)



11 ¿Cuál de los siguientes hexominos corresponde al cubo de la figura? Las caras no visibles del cubo están en blanco.

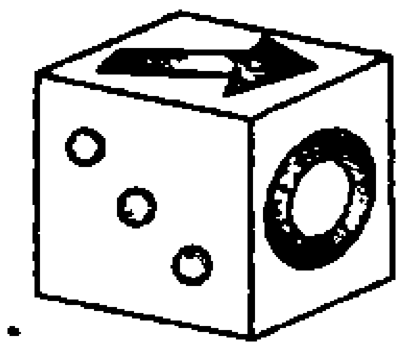




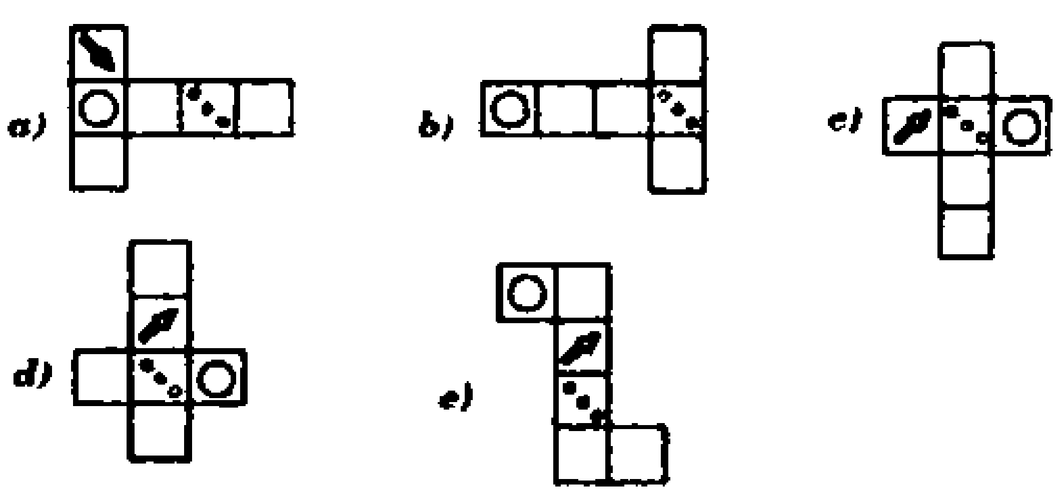
I II III

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III
D) II y III E) I y II

12 ¿Cuál de los siguientes despliegues corresponde al cubo de la figura? Las caras no visibles del cubo, están en blanco.

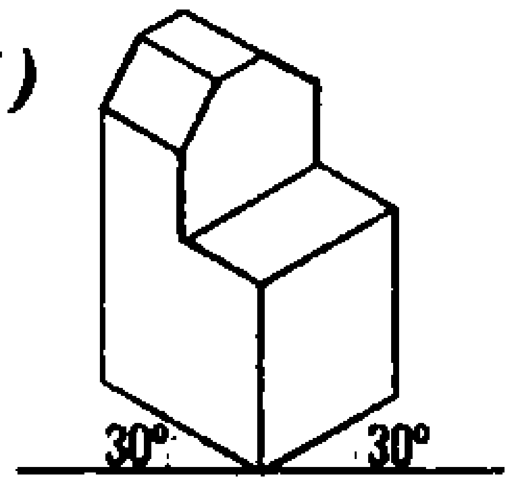


a) b) c) d) e)

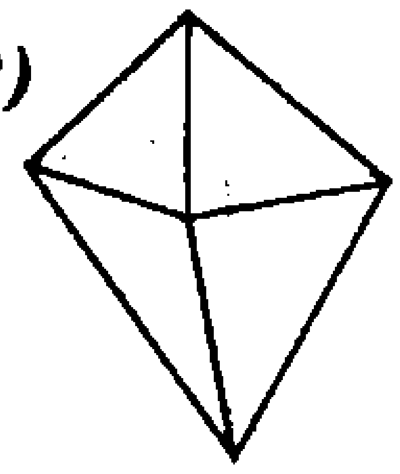


13 Calcular las proyecciones *H, F* y *P*, en cada caso.

1)



2)



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)D	4)C	5)C	6)C	7)E	8)E	9)D	10)C

SUCESIONES NUMERICAS

CAPITULO 037

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo. el lector estará en la capacidad de:

- *Identificar las sucesiones que se presentan en el desarrollo de la matemática.*
- *Establecer la correspondencia de los números enteros positivos con cada término de la sucesión.*
- *Representar convenientemente una sucesión.*
- *Clasificar las sucesiones de acuerdo a características propias.*
- *Deducir la expresión general del término n-ésimo de una sucesión.*

SUCESIONES

Conjuntos ordenados de números , donde cada elemento tiene un orden designado , es decir a cada uno le corresponde un ordinal; por lo general se considera a un término representativo de toda la sucesión , llamado TÉRMINO ENÉSIMO, que se simboliza como: «T_n»; donde «n» indica la posición que ocupa cada elemento , como también el «número de términos»

EN GENERAL :

Primero — Segundo — Enésimo

Número Ordinal	1°	2°	3°	......	n°
Término de la sucesión	T_1	T_2	T_3	......	T_n

EJEMPLO 1 :

$$\begin{array}{ccccc} 1 ; & 8 ; & 27 ; & .... ; & n^3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ T_1 & T_2 & T_3 & ...... & T_n \end{array}$$

EJEMPLO 2 :

Indicar los cuatro primeros términos , de una sucesión que tiene por término enésimo a :

$$T_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

RESOLUCIÓN :

Ordinal : 1° ; 2° ; 3° ; 4°

$$Tn = \frac{2n}{n^2+1} : \frac{2(1)}{1^2+1} ; \frac{2(2)}{2^2+1} ; \frac{2(3)}{3^2+1} ; \frac{2(4)}{4^2+1}$$

$$\Rightarrow T_1 = 1 ; \; T_2 = \frac{4}{5} ; \; T_3 = \frac{3}{5} \; \text{y} \; T_4 = \frac{8}{17}$$

EJEMPLO 3 :

Determinar el término enésimo en :

$$3 ; 4 ; 5 ; 6 ; ......$$

RESOLUCIÓN :

- El primer término debe de estar en función de *1*, el segundo en función de *2* , el tercero en función de *3* , y así sucesivamente , hasta el enésimo que debe de representarse en función de «n», luego dando una forma adecuada a :

$$\begin{array}{cccccc} 3 ; & 4 ; & 5 ; & 6 ; & .... ; & T_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{1+2} ; & \overline{2+2} ; & \overline{3+2} ; & \overline{4+2} & ... & \overline{n+2} \end{array}$$

$$\Rightarrow T_n = n + 2$$

NOTA :

Como puedes apreciar cada término , involucra al orden que ocupa (su número ordinal) ; por eso será de mucha importancia , saber calcular el término enésimo . A continuación presentamos ; la más importante sucesiones con sus respectivos términos enésimos :

Sucesión ó Progresión Aritmética

$T_1 ; T_2 ; T_3 ; ... ; T_n$ (de cada término al siguiente: $+r$, $+r$)

$$T_n = T_1 + (n-1)r$$

ó

$$T_n = T_0 + rn$$

EJEMPLO :

- Dado :

$3 \; ; \; 7 \; ; \; 11 \; ; \; ......$ (+4, +4)

$\Rightarrow T_1 = 3 \; ; \; r = 4 \Rightarrow T_n = 3 + (n-1)4$

$\Rightarrow T_n = 3 + 4n - 4$

$\Rightarrow T_n = 4n - 1$

ó $T_0 = 3 - 4 = -1 \; ; \; r = 4 \Rightarrow T_n = -1 + 4n$

SUCESIÓN CUADRÁTICA

$; T_2 \; ; \; T_3 \; ; T_4 \; ; \; .... \; ; \; T_n$

+r, +p, +q ....

+a, +b ....

$$T_n = T_1 + (n-1)r + \frac{(n-1)(n-2)a}{2}$$

ó

$$T_n = T_1 + (n-1)r + \frac{(n^2 - 3n + 2)a}{2}$$

EJEMPLO 1 :

- Dado :

$1 \; ; \; 7 \; ; \; 17 \; ; \; 31 \; ; \; ....$

+6, +10, +14

+4, +4

$\Rightarrow T_1 = 1 \; ; \; r = 6 \; ; \; a = 4$

$\Rightarrow T_n = 1 + (n-1)6 + \frac{(n^2 - 3n + 2)}{2} \times 4$

$\Rightarrow T_n = 1 + 6n - 6 + 2n^2 - 6n + 4 \Rightarrow T_n = 2n^2 - 1$

Método Práctico :

$T_1 \; ; \; T_2 \; ; \; T_3 \; ; \; T_4 \; ; \; ... \; ; \; T_n$

m, n, p

r, r

$T_n = an^2 + bn + c$

Donde :

$a = \frac{r}{2}$

$b = m - 3a$; $c = T_0$ *(Anterior al primero)*

EJEMPLO 2 :

Hallar el término enésimo en : $5 \; ; \; 11 \; ; \; 19 \; ; \; 29 \; ; \; ......$

RESOLUCIÓN :

* Calculando las diferencias sucesivas y las anteriores a éstas:

$c = 1 \; ; \; 5 \; ; \; 11 \; ; \; 19 \; , \; 29 \; ; \; ......$

$A = b = 4$, +6, +8, +10

$2a = 2$, +2, +2

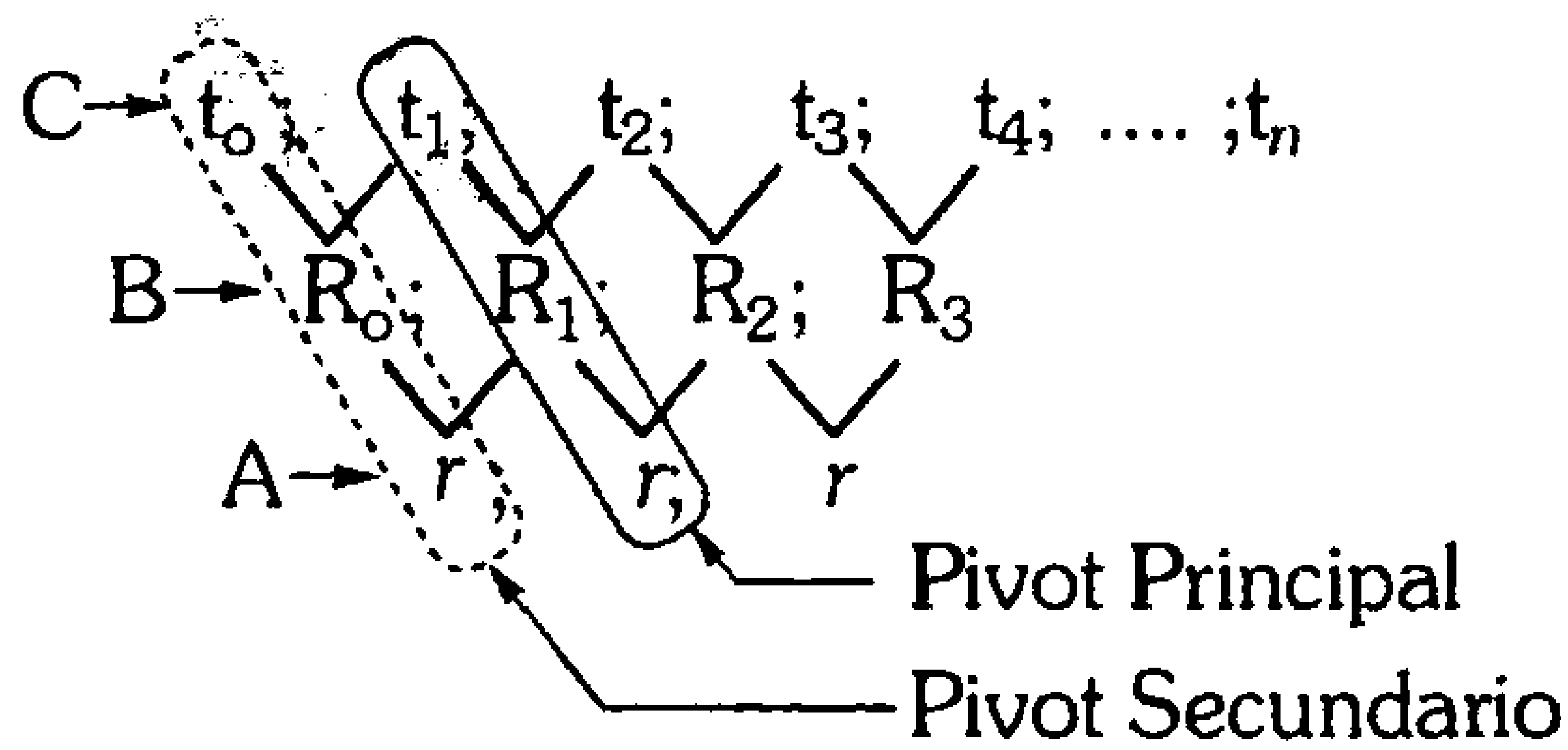
$a = 1$

$1 + b = 4 \Rightarrow b = 3$ ó $b = 6 - 3(1)$

$c = 1 = T_0$

* Luego : $T_n = n^2 + 3n + 1$

REGLA PRÁCTICA PARA ENCONTRAR LA LEY DE FORMACIÓN:



T_n: término enésimo:

$$T_n = \left(\frac{A}{2}\right)n^2 + \left(B - \frac{A}{2}\right)n + C$$

SUCESIONES POLINOMIALES DE ORDEN SUPERIOR

$a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; a_3 \; ; \; a_4 \; ; \; a_5 \; ; \; a_6 \; .... \; ; a_n$

$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$

$d_1 \quad d_2 \quad d_3$

$e \quad e \longrightarrow$ *constante*

Donde :

$$a_0 = a_1 + b_1 C_1^{n-1} + c_1 C_2^{n-2} + d_1 C_3^{n-3} + e_1 C_4^{n-4}$$

* En el cual :

$$C_k^n = \frac{\overbrace{n(n-n)(n-2)........}^{\text{"k" factores}}}{\underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ....}_{\text{"k" factores}}}$$

* $C_4^{n-1} = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\times 2\times 3\times 4}$

* $C_3^{n-1} = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3}$

* $C_2^{n-1} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{1\times 2}$

* $C_1^{n-1} = \dfrac{(n-1)}{1} = n-1$

EN GENERAL :

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

EJEMPLO :

Calcular "a_{10}" en :

$$6\ ;\ 11\ ;\ 21\ ;\ 38\ ;\ 64 ....$$

RESOLUCIÓN :

6 ; 11 ; 21 ; 38 ; 64 ....

+5 +10 +17 +26

+5 +7 +9

+2 +2

$$a_n = 6 + 5\,C_1^{n-1} + 5C_2^{n-1} + 2C_3^{n-1}$$

* ahora para $n = 10$:

$a_{10} = 6 + 5C_1^9 + C_2^9 + 2C_3^9$

$\Rightarrow a_{10} = 6 + 5 \times \dfrac{9}{1} + 5\times \dfrac{9\cdot\times 8}{1\times 2} + 2\times\dfrac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3}$

$\Rightarrow a_{10} = 6 + 45 + 180 + 168$

$\Rightarrow a_{10} = 399$

SUCESIÓN GEOMÉTRICA (P.G.)

Una progresión geométrica es una sucesión de números tal que cualquier término posterior al primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número no nulo. Llamado ***razón*** de la progresión .

$$t_1\ ;\ t_2\ ;\ t_3\ ;\ ....\ ;\ t_n$$

$\times q$ $\times q$

$$\boxed{t_2^2 = t_1\times t_3}\ \boxed{t_n = t_1\times q^{n-1}}\ ;$$

$$\boxed{S_n = t_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)}$$

NOTACIÓN :

t_1 = Primer término.

q = Razón de la P.G.

t_n = Término enésimo o de lugar « n ».

S_n = Suma de los « n » primeros términos.

EJEMPLO :

En una *sucesión geométrica* el primer término es ***7***, el último es ***448*** y la suma ***889***. Hallar la razón.

RESOLUCIÓN :

$$t_1 = 7\ ;\ t_n = 488\ ;\ S_n = 889$$

Reemplazando en :

* $t_n = t_1\times q^{n-1}$

$\Rightarrow 7\,q^{n-1} = 448$

$\Rightarrow q^{n-1} = 64$ ....(I)

* $\boxed{S_n = t_1\times\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)}$

$\Rightarrow 7\times\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right) = 889$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{q^n-1}{q-1} = 127}$ ....(II)

*de (I) y (II) :

$q^{n-1} = 2^6 = 2^{7-1}$

$\Rightarrow \boxed{q = 2}\ ;\ \boxed{n = 7}$

Sucesión o Progresión Geométrica	
$T_1\ ;\ T_2\ ;\ T_3\ ;\ ...\ ;\ T_n$ $+q$ $+q$	$T_n = T_1\times q^{n-1}$

EJEMPLO :

◆ Dado :

3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ......

×2 ×2 ×2

$$\Rightarrow T_1 = 3\ ;\ q = 2 \Rightarrow T_n = 3\times 2^{n-1}$$

SUCESIONES NOTABLES :

1°	2°	3°	...	n°
1	2	3	...	$t_n = n$
2	4	6	...	$t_n = 2n$
1	3	5	...	$t_n = 2n = 1$
1 1^2	4 2^2	9 3^2	...	$t_n = n^2$
1 1^4	8 2^3	27 3^3	...	$t_n = n^3$
1 1^1	4 2^2	27 3^3	...	$t_n = n^n$
2 1×2	6 2×3	12 3×4	...	$t_n = n(n+1)$
1 $\frac{1 \times 2}{2}$	3 $\frac{2 \times 3}{2}$	6 $\frac{3 \times 4}{2}$	...	$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$

SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; ......

OBSERVACIÓN

En una sucesión o progresión aritmética; para calcular el número de términos , se aplicará la siguiente relación :

$$\# \text{ de términos} = \frac{\text{último término} - \text{1er. término}}{\text{razón}} + 1$$

ó

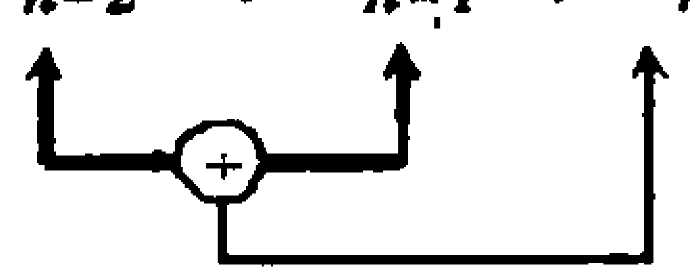
$$n = \frac{T_n - T_1}{r} + 1$$

SUCESIÓN DE FIBONACCI :

Aquella en la cual cada término a partir del tercero es la suma de los dos anteriores.

$$T_n = T_{n-2} + T_{n-1} \quad n \geq 3$$

$$T_{n-2} \quad ; \quad T_{n-1} \quad ; \quad T_n$$



1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; ......

Término General :

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

SUCESIÓN DE LUCAS :

Es una sucesión generalizada de *«FIBONACCI»*

1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 11 ; 18 ;......

Término General:

$$t_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

SUCESIÓN DE TRIBONACCI :

Es aquella en la cual cada término a partir del cuarto es la suma de los tres anteriores.

1 ; 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 13 ; 24 ; ......

$$T_n = T_{n-3} + T_{n-2} + T_{n-1} \quad n \geq 4$$

CANTIDAD DE CIFRAS UTILIZADAS DESDE 1 HASTA UN NÚMERO N

Sea la sucesión :

$$1 ; \ 2 ; \ 3 ; \ 4 ; \ldots ; \underbrace{N}_{\text{«k» cifras}}$$

$$\# \text{ de cifras utilizadas} = (n+1)k - \underbrace{111\ldots11}_{\text{«k» unos}}$$

EJEMPLO 1 :

¿Cuántas cifras o dígitos se utilizaron al escribir la siguiente distribución?

123456789101112 19992000

A) 4000 B) 5993 C) 6271 D) 6893 E) 971

RESOLUCIÓN :

* El último término será : *N = 2000 ; K = 4*

\# de cifras utilizadas :

$$(2000 + 1) \times 4 - 1111 = 6893 \text{ CIFRAS}$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 2 :

En la siguiente secuencia:

00001 ; 00002 ; 00003 ; .... ; 10 000

¿Cuántos ceros inútiles se han escrito?

A) 10 116 B) 10 316 C) 11 106
D) 11 116 E) 11 006

RESOLUCIÓN :

· En la siguiente secuencia se han utilizado :

5 × 10000 = 50000 dígitos

· De los cuales, en la numeración correcta se usaron:

(10000 + 1) 5 – 11111 = 38894 dígitos

· De donde , # de ceros inútiles:

50000 – 38894 = 11106

RPTA :"C"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dada la siguiente sucesión de números:

$$4 ; 9 ; 25 ; 49 ;... ; x^y ; ... ; 361 ; z^y ; 841;...$$

determine $(x + z)$, si $11 < x < 16$

A) 40 B) 46 C) 36 D) 34 E) 42

RESOLUCIÓN :

* La sucesión corresponde a los cuadrados de los primeros números primos consecutivos:

$$2^2 ; 3^2 ; 5^2 ; 7^2 ; ... ; x^y; ... ; 19^2 ; z^y ; 29^2$$

♦ El único primo entre *19* y *29* es *23* , entonces : $z = 23$

♦ Deducimos que $x=13$, puesto que :

$$11 < x < 16$$

♦ Piden : $x + z = 36$

RPTA :"C"

PROBLEMA 2 :

Determinar el término que sigue :

$$81x + 7y^8 ; 27x^2 + 12y^6 ; 9x^4 + 16y^3 ;3x^7 + 19y^{-1} ; ......$$

A) $x^9 + 19y^{-1}$ B) $x^{11}+ 25y^6$ C) $x^{11}+ 21y^{-6}$ D) $x^{11} + 2y^{-6}$

RESOLUCIÓN :

$$81x^1+7y^8 ; 27x^2+12y^6 ; 9x^4+16y^3 ; ...$$

(exponentes de x: +1, +2, +3 ; coeficientes de y: +5, +4, +3 ; coeficientes de x: ÷3, ÷3, ÷3)

$$3x^7 + 19y^{-1} ; x^{11} + 21y^{-6}$$

(+2 ; ÷3)

RPTA: "C"

PROBLEMA 3 :

En la siguiente sucesión :

$$1 ; \frac{5}{6} ; \frac{5}{6} ; \frac{17}{20} ; \frac{13}{15} ; ......$$

La diferencia entre el denominador y el numerador del nésimo término es :

A) $n - 1$ B) $n - 2$ C) n D) $2n - 1$ E) $- 1$

RESOLUCIÓN :

* Transformando las fracciones a sus equivalentes, que hagan coherente a la sucesión:

$$\frac{2}{2} ; \frac{5}{6} ; \frac{10}{12} ; \frac{17}{20} ; \frac{26}{30} ;......$$

* Piden la diferencias siguientes:

$$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...... ; \underbrace{n-1}_{\text{Se deduce}}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 4 :

Determinar el décimo octavo término de la sucesión:

$$\frac{3}{2} ; \frac{9}{10} ; \frac{19}{24} ; \frac{3}{4} ; \frac{51}{70} ;......$$

A) $\frac{339}{494}$ B) $\frac{519}{752}$ C) $\frac{649}{954}$

RESOLUCIÓN :

Numeradores: $2(1)^2 + 1$; $2(2)^2 + 1$; $2(3)^2 + 1$

Denominadores: $3(1)^2 - 1$; $3(2)^2 - 2$; $3(3)^2 - 3$

SE DEDUCE

$$\frac{3}{2} ; \frac{9}{10} ; \frac{19}{24} ; ... ; \underbrace{\frac{2(18)^2+1}{3(18)^2 - 18}}_{\text{DÉCIMO OCTAVO TERMINO}} = \frac{649}{954}$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 5 :

Indique la alternativa que continúa correctamente en la siguiente sucesión :

$$6 ; 15 ; 36 ; 93 ; 258 ; ...$$

A) 373 B) 489 C) 621 D) 747 E) 1005

RESOLUCIÓN :

$$6 ; 15 ; 36 ; 93 ; 258 ; ... ; 747$$

$$9 \quad 21 \quad 57 \quad 165 \quad 489$$

$$+12 \quad +36 \quad +108 \quad +324$$

$$\times3 \quad \times3 \quad \times3$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 6 :

Si a la sucesión cuya forma general es $T_n=\frac{n}{2n+2}$, se eliminan los términos de posición par , la nueva sucesión tendrá como forma general a :

A) $\frac{n+1}{3n}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2n-1}{4n}$

RESOLUCIÓN :

* Desarrollando la sucesión:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{7}$	

* Eliminando los términos de las posiciones pares :

$$\frac{1}{4};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{12};\ \longrightarrow \overbrace{\frac{2n-1}{4n}}^{\text{Enésimo}}$$

(+2, +2)
(+4, +4)

RPTA :"C"

PROBLEMA 7 :

Determinar el número de términos , en cada uno de las siguientes sucesiones :

S_1 : 206 ; 199 ; 192 ; ...... ; 38

S_2 : 1 ; 1 ; 3 ; 7 ; ...... ; 343

A) 26 y 24 B) 17 y 25 C) 23 y 24
D) 24 y 25 E) 25 y 20

RESOLUCIÓN :

I) En « S_1 »

206 ; 199 ; 192 ; ...... ; 38
(−7, −7)

«Se trata de una progresión aritmética de razón «−7», luego :

$$T_1 = 206 \ ; \ U = 38 \ ; \ r = -7 \ ; \ n = ?$$

* Sabemos que :

$$n=\frac{U-T_1}{r}+1 \Rightarrow n=\frac{38-206}{-7}+1=25$$

OTRO MÉTODO :

«Se calcula el término enésimo, para luego igualarlo al último término, y de esa manara se calcula «n», en lo dado se tiene :

$$T_n=T_1+(n-1)r$$

$$\Rightarrow T_n=206+(n-1)(-7)=213-7n$$

◆ Igualando al último término :

$$T_n = 38 \Rightarrow 213-7n = 38$$

$$\Rightarrow 175 = 7n \Rightarrow 25 = n$$

II) En « S_2 »

; 1 ; 3 ; 7 ; .... ; 343
(+0, +2, +4)
(+2, +2)

$$T_1=1 \ ; \ r=0 \ ; \ a=2$$

$$\Rightarrow T_n=1+(n-1)0+\frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$

Operando : $T_n = n^2 - 3n + 3$

◆ Igualando al último término :

$$T_n = 343$$

$$n^2 - 3n + 3 = 343$$

$$n(n-3) = 340 \text{ (Tanteando adecuadamente)}$$

$$n(n-3) = 20 \times 17$$

$n = 20$

RPTA :"E"

PROBLEMA 8 :

¿Cuál es el tercer término negativo? :

671 ; 665 ; 669 ; ......

A) −11 B) −14 C) −15 D) −13 E) −17

RESOLUCIÓN :

* Planteamos la siguiente inecuación , para calcular los valores de «n», que hacen aparecer negativos :

$$T_n < 0 \Rightarrow 677 - 6n < 0$$

$$\Rightarrow 677 < 6n \Rightarrow 112,\ldots < n$$

$$\Rightarrow n \in \{113 ; 114 ; 115 ; \ldots\}$$

◆ Los términos negativos , aparecerán a partir de $n=113$ (1er. negativo) ; luego el tercer negativo será para : $n=115$, es decir :

$$T_{115} = 677 - 6(115) = -13$$

RPTA :"D"

OTRO MÉTODO:

* Sí todos fueran múltiplos de 6 , se tendría :

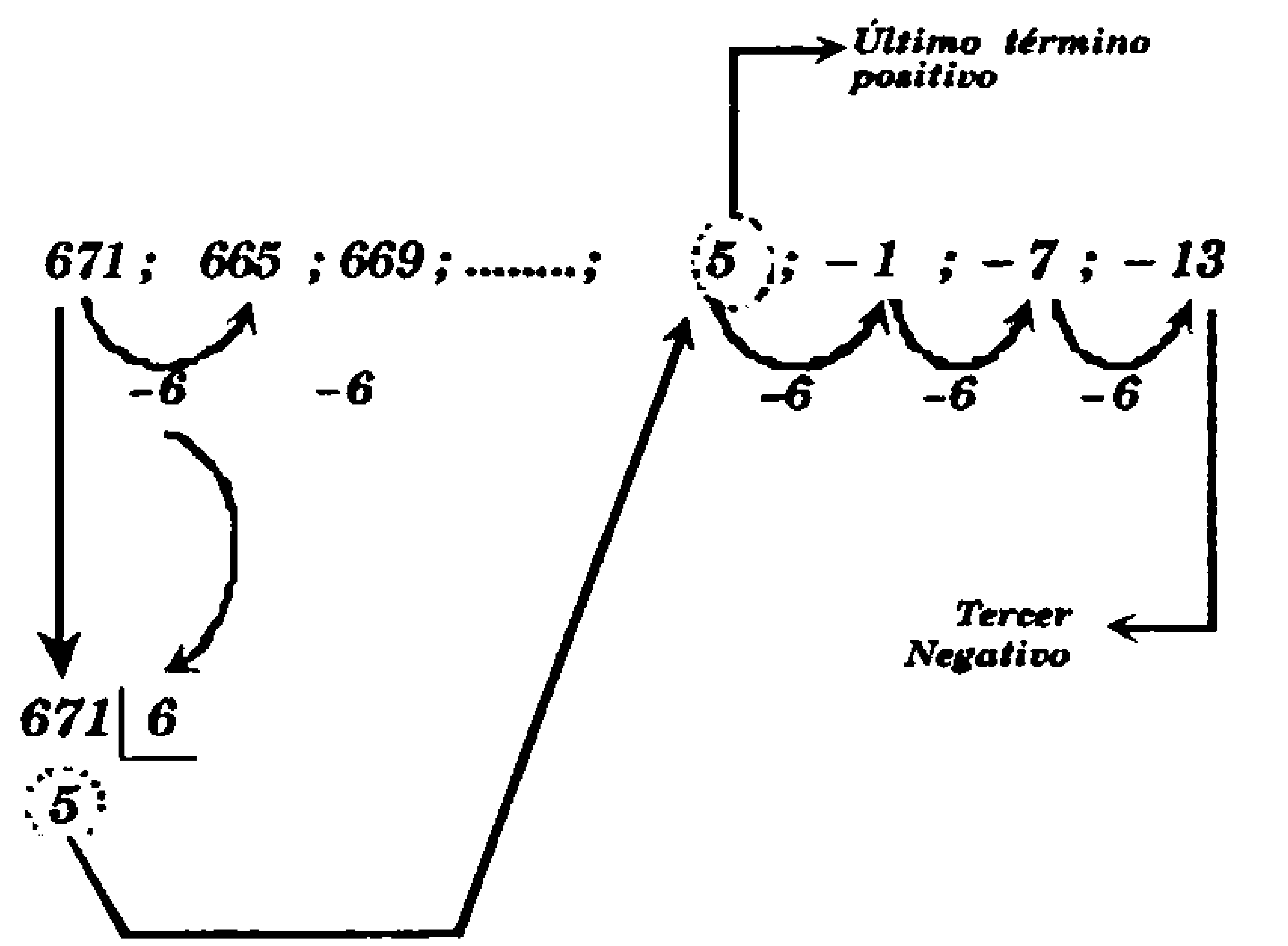
671 | 6
5 111

$\overbrace{666}^{671-5}$; 660 ; 654 ; ... ; 6 ; 0 ; − 6 ; −12 ; −18

* Sumando 5 a cada término se obtiene la sucesión dada : 671 ; 665 ; 661 ; ... 11 ; 5 ; −1 ; −7 ; −13

Método Práctico

MÉTODO PRÁCTICO:



PROBLEMA 9 :

Determinar el valor de «u» en la siguiente sucesión :

$$(x+5)^2 ; (x+8)^7 ; (x+11)^{12} \ldots (x+103-u)^u$$

A) 51 B) 73 C) 62 D) 75 E) 83

RESOLUCIÓN :

* Como por cada base hay *1* exponente , luego el números de términos , tanto en la sucesión de exponentes como en la sucesión de las bases es la misma , entonces aplicaremos :

$$n=\frac{u-T_1}{r}+1$$

$$\overbrace{\frac{u-2}{5}+1}^{\text{Para los exponentes}}=\overbrace{\frac{(x+103-u)-(x+5)}{3}+1}^{\text{Para las bases}}$$

$$\Rightarrow \frac{u-2}{5}=\frac{98-u}{3}\Rightarrow 3u-6=490-5u$$

$$\Rightarrow 8u=496\Rightarrow u=62$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

¿cuántos términos de la sucesión :

$$22\ ;25\ ;28\ ;31\ ;......;622\ ,$$

serán cuadrados perfectos , luego le restamos *7* unidades?

A) 6 B) 13 C) 23 D) 4 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Después de restarle *7* a dada término resultará :

$$15\ ;18\ ;21\ ;24\ ;......615\ ,$$

cuyo término enésimo será : $T_n=3n+12$

* Por condición del enunciado :

$$3n+12=K^2\Rightarrow \text{Cuadrado perfecto}$$
$$3(n+4)=K^2$$

* Para que : $3(n+4)$ sea cuadrado, entonces $n+4=3p^2$, cosa que : $T_n=3\times 3p^2=(3p)^2$

Pero tenemos que acotar la sucesión como :

$$15\le T_n\le 615$$

$$\Rightarrow 15\le (3p)^2\le 615\quad \left(\text{Sacando raíz cuadrada}\right)$$

$$\Rightarrow 8,...\le 3p\le 24,...$$

$$\Rightarrow 1,...\le p\le 8,...$$

$$\Rightarrow p\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$$

* Como «n» depende de «*p*», entonces como «*p*» toma *7* valores, luego «*n*» tendrá también *7* valores que hacen cuadrados perfectos .

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Sí : S_1 : 4 ; 13 ; 22 ; ......

S_2 : 11 ; 18 ; 25 ; ...... ; 844

¿Cuántos términos son comunes, ha ambas sucesiones?

A) 13 B) 15 C) 7 D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Los términos enésimos son :

$$T_n=9n-5\qquad ;\qquad T_n=7n+4$$

$$T_n=\overset{\circ}{9}-5\qquad\qquad T_n=\underbrace{\overset{\circ}{7}+4}_{\text{Múltiplo de }\overset{\circ}{7}+4}$$

$$T_n=\overset{\circ}{9}+9-5$$

$$T_n=\underbrace{\overset{\circ}{9}+4}_{\text{Múltiplo de }\overset{\circ}{9}+4}$$

♦ Los términos comunes serán , aquellos que sean «$9+\overset{\circ}{4}$» y «$7+\overset{\circ}{4}$» a la vez , es decir :

Los términos comunes

$$T_n=MCM\left(\overset{\circ}{9}+4\ ,\ \overset{\circ}{7}+4\right)\ \text{Los términos comunes}$$

$$\Rightarrow T_n=\overset{\circ}{63}+4$$

$$\Rightarrow T_n=63n+4$$

♦ Pero debemos acotar la sucesión :

$$11\le T_n\le 844$$

$$\Rightarrow 11\le 63n+4\le 844$$

$$\Rightarrow 0,..\le n\le 13\ ,\ ...$$

$$\Rightarrow n\in\{1\ ;2\ ;3\ ;.....;13\}$$

* Entonces hay *13* términos comunes que serán :

$$\{67\ ;130\ ;193\ ;...;63(13)+4\}$$

67 → 63(1) + 4

130 → 63(2) + 4

RPTA :"A"

PROBLEMA 12 :

Dada la sucesión : $\frac{5}{3}\ ;\ \frac{7}{6}\ ;\ \frac{9}{9}\ ;\ \frac{11}{12}\ ;\ ......$

¿A partir de qué lugar los términos son menores que *0,75*?

A) 15vo. B) 13vo. C) 14vo. D) 17vo. E) 31vo.

RESOLUCIÓN :

* Hallando el enésimo :

$$\overset{+2}{\frac{5}{3(1)}}\ ;\ \overset{+2}{\frac{7}{3(2)}}\ ;\ \frac{9}{3(3)}\ ;\ ...\ ;\ T_n=\frac{5+(n-1)2}{3n}$$

♦ Ahora veamos para que valores de «*n*», T_n es menor que :

$$0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$$

es decir :

$$T_n<\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3+2n}{3n}<\frac{3}{4}\Rightarrow 12+8n<9n\Rightarrow 12<n$$

Primer valor que hace que :

$$\Rightarrow n \in \{13 ; 14 ; 15 ; .....\}$$

→ Primer valor que hace que: $T_n > \frac{3}{8}$

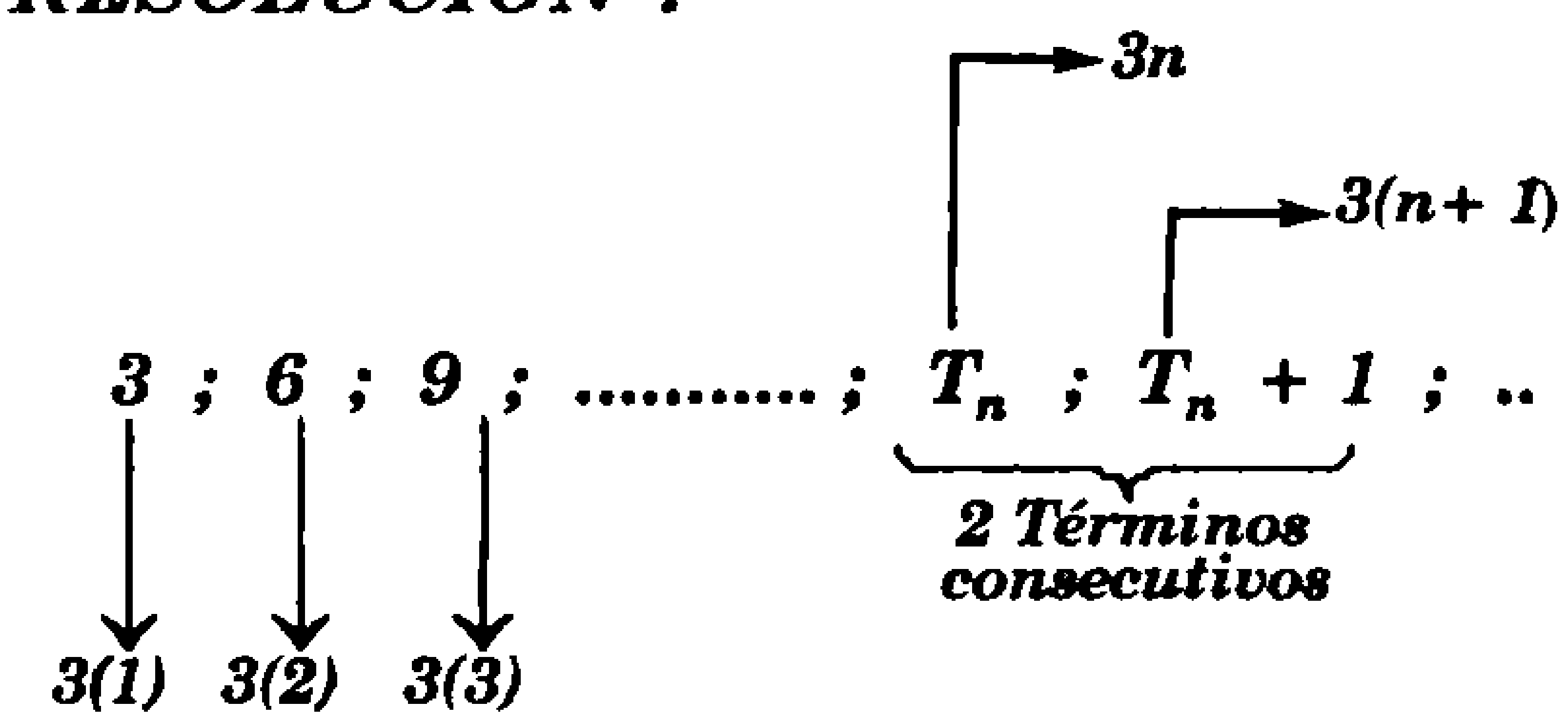
RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

¿qué lugares ocupan los *2* términos consecutivos de la siguiente sucesión , cuya diferencia de cuadrados es *909*? $3 ; 6 ; 9 ; 12 ; ......$

A) 31 y 32 *B) 49 y 50* *C) 50 y 51*
D) 72 y 73 *E) 91 y 92*

RESOLUCIÓN :



* Según condición :

$$(T_{n+1})^2 - (T_n)^2 = 909 \Rightarrow (3(n+1))^2 - (3n)^2 = 909$$

$$\Rightarrow 9(n+1)^2 - 9n^2 = 909 \Rightarrow (n+1)^2 - n^2 = 101$$

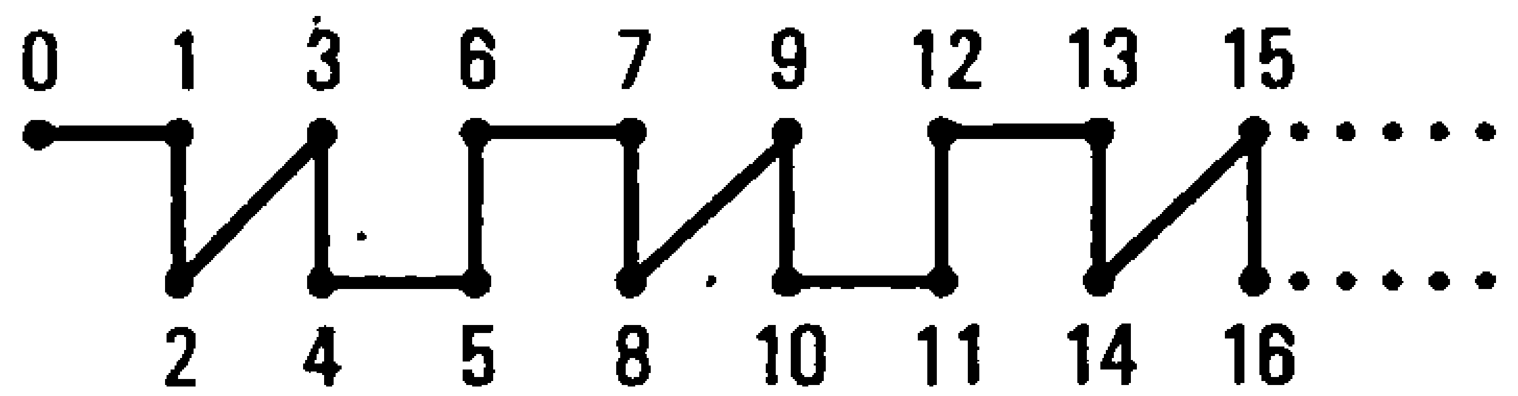
$$\Rightarrow n^2 + 2n + 1 - n^2 = 101 \Rightarrow n = 50$$

$$\wedge\ n + 1 = 51$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 14 :

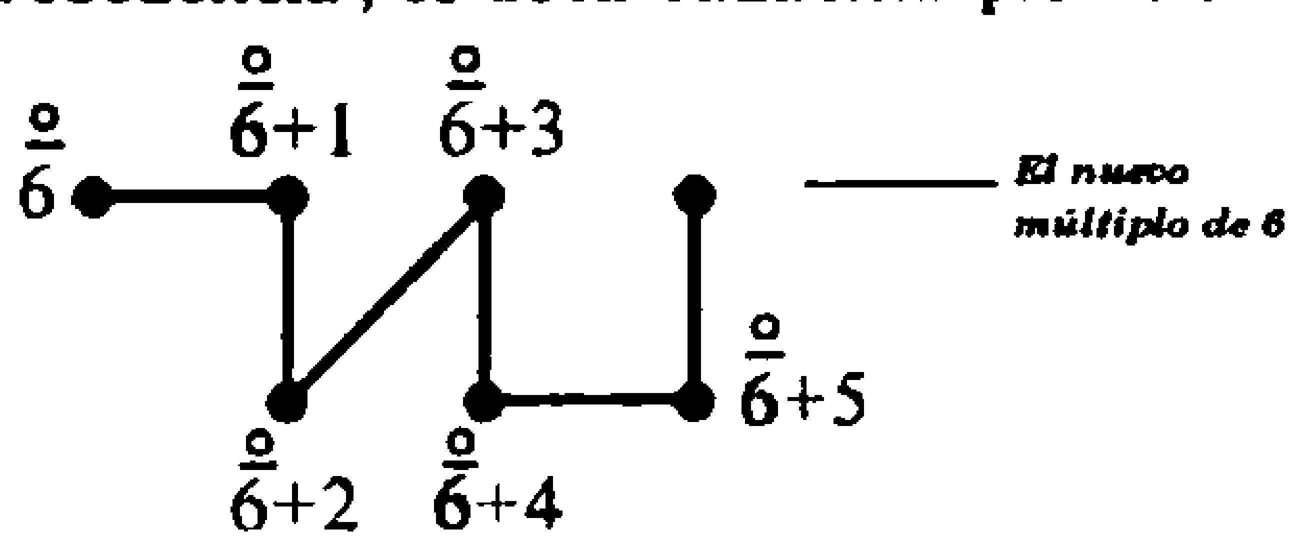
Nosotros tenemos una repetición de figuras como mostramos abajo.



¿Cuál es el pedazo que une el punto *2002* con el punto *2005*?

RESOLUCIÓN :

* Se observa que cada *6* segmento consecutivo se repite la secuencia ; es decir cada múltiplo de *6* ó $\overset{o}{6}$

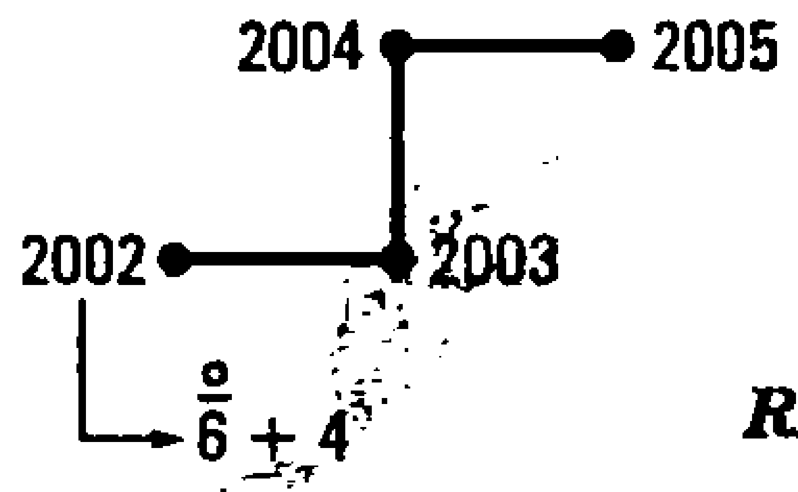


* Ahora como :

$2002 \underline{|\ 6}$

$4 \quad 333 \Rightarrow 2002 = \overset{o}{6} + 4$

◆ luego la figura pedida será :



RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Si $\{a_n\}$ es sucesión definida por :

$$a_1 = 2 ; a_{23} = 156 \quad ; \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

Calcular : «a_{35}»

A) 321 *B) 217* *C) 240* *D) 301* *E)502*

RESOLUCIÓN :

* De : $a_n = 2a_{n-1} - a_n - 2$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + a_{n-1} - a_n - 2$$

$$\Rightarrow \underline{an - an - 1} =$$

$$\underline{an - 1 - an - 2}$$

$r \longrightarrow$ *Razón Aritmética*

* Se deduce que es una sucesión aritmética , puesto que :

$$...... a_{n-2} ; a_{n-1} ; a_n ; ......$$

(+r) (+r)

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = r$$

* Luego : $a_n = a_1 + (n-1) r$

* Para $n = 23 \rightarrow a_{23} = 2 + 22r$

$$156 = 2 + 22r \rightarrow r = 7$$

***PIDEN PARA** $N = 35 : A_{35} = 2 + 34(7) = 240$

RPTA :"C"

PROBLEMA 16 :

Si: $x ; x^2 ; 3x ; ......$ forman una sucesión aritmética . Indicar el valor de «x» :

A) 1 *B) 2* *C) 4* *D) 6* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

* En una sucesión aritmética se cumple :

$$x ; x^2 ; 3x ; ....$$

(+r) (+r) ⟶ *Razón aritmética* (*La diferencia es constante*)

$$\Rightarrow \underline{x^2 - x = 3x - x^2} = r \quad \Rightarrow 2x^2 = 4x$$

$\Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0 \;\; x = 0$ ó $x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

RPTA:"B"

PROBLEMA 17 :

Dada la sucesión geométrica :

$$4^{3a-2};\ 2^{2a-1};\ \sqrt{2}^{\,a};\ \ldots\ldots$$

Calcular «*a*»

A) 0,5 *B) 0,1* *C) 0,2* *D) 0,6* *E) 0,8*

RESOLUCIÓN :

* Por definición de sucesión geométrica , se tendrá :

$$4^{3a-2}\ ;\ 2^{2a-1}\ ;\ \sqrt{2}^{\,2}\ ;$$

$\times q$, $\times q$ ⟶ Razón geométrica

$$\Rightarrow \frac{2^{2a-1}}{4^{3a-2}} = \frac{\sqrt{2}^{\,a}}{2^{2a-1}} = q \Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{El cociente}\\ \text{es constante}\end{matrix}\right)$$

$$2^{2a-1} \times 2^{2a-1} = 2^{\frac{a}{2}} \times (2^2)^{3a-2}$$

$$\Rightarrow 2^{4a-2} = 2^{\frac{a}{2}+6a-4} \Rightarrow 4a - 2 = \frac{a}{2} + 6a - 4$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a}{2} + 2a \Rightarrow 2 = \frac{5a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Dada la siguiente sucesión :

$$2^7\ ;\ 3^{10}n^2\ ;\ 5^{14}n^6\ ;\ 7^{19}n^{12}\ ;\ 11^{25}n^x\ ;\ y^z n^{30}$$

Calcular : $H = (x - y)^2 - z$

A) 21 *B) 0* *C) –3* *D) 17* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

• Considerando primero las bases numéricas se tendrán :

$$\underbrace{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ y\ ;\ \ldots\ldots\ldots}_{\text{Números Primos}} \longrightarrow y = 13$$

• Ahora los exponentes, de estos números primos :

$$7\ ;\ 10\ ;\ 14\ ;\ 19\ ;\ 25\ ;\ z$$

$+3$, $+4$, $+5$, $+6$, $+7$ → Se deduce .

$\Rightarrow z = 32$

• Luego los exponentes de «*n*»

$$2\ ;\ 6\ ;\ 12\ ;\ x\ ;\ 30$$

1×2 , 2×3 , 3×4 , ⟶ , 5×6

$x = 4 \times 5$

$x = 20$

* Piden : $H = (20 - 13)^2 - 32 = 17$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

De los siguientes términos que forman una sucesión aritmética : *8 ; 21 ; 34 ; ...*

¿Cuántos términos están comprendidos entre *300* y *500*?

A) 16 *B) 13* *C) 15* *D) 12* *E) 14*

RESOLUCIÓN :

♦ Hallando el término enésimo se tendrá que :

$$T_n = 13n - 5$$

♦ Ahora solo deseamos que :

$300 < T_n < 500$

$\Rightarrow 300 < 13n - 5 < 500$

$\Rightarrow 305 < 13n < 500$

$\Rightarrow 23, \ldots < n < 38, \ldots$

$\Rightarrow n \in \{24\ ;\ 25\ ;\ 26\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ 38\}$

$+1$, $+1$

♦ Los valores que puede tomar «*n*» es :

$$\frac{38 - 24}{1} + 1 = 15$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 20:

Si en la sucesión : $a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ a_n\ ;\ \ldots\ldots$

Se tiene que : $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n = 10$

parta todo $n \geq 1$ y además $a_9 = a_{11} = 10$

Hallar el valor de : $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

A) 30 *B) 40* *C) 50* *D) 70* *E) 60*

RESOLUCIÓN :

* De :

$$a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \overbrace{a_n\ ;\ a_{n+1}\ ;\ a_{n+2}}^{\text{Según dato}}$$

(a_n ⊕ a_{n+1} ⊜ a_{n+2})

$$\Rightarrow a_9 + a_{10} = a_{11} \Rightarrow 10 + a_{10} = 10 \Rightarrow a_{10} = 0$$

* Ahora en la sucesión :

$$a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4\ ;\ a_5\ ;\ a_6\ ;\ a_7\ ;\ a_8\ ;\ 10\ ;\ 0$$

(⊕ Igual ; ⊕ Igual)

$a_5 \to 50$, $a_6 \to -30$, $a_7 \to 20$, $a_8 \to -10$

* Se deduce que :

$$a_8 = -10 \quad a_7 = 20 \quad a_6 = -30 \quad a_5 = 50$$

* Piden :

$$\underbrace{a_3 + a_4}_{a5} + \underbrace{a_5 + a_6}_{a7} = 20 + 50 = 70$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21 :

Si se escribe la serie de los números naturales a partir de *1* , sin separar las cifras. ¿Cuál es en esta serie la cifra que ocupa el *1992°* lugar?

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 5* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

* Como la última cifra es el *1992°* lugar , entonces , se ha empleado *1992* cifras .

Números de una cifras:

$$1 ; ... ; 9 \rightarrow 9\#s \longrightarrow 9 \times 1 = 9 \text{ cifras}$$

Números de cifras :

$$10 ; ... ; 99 \longrightarrow 90\#s \rightarrow 90 \times 2 = 180 \text{ cifras}$$

* Los números restantes deben de ser de *3* cifras en los cuales se utilizan :

$$1992 - (9 + 180) = 1803 \text{ cifras}$$

* Determinando la cantidad de números :

$$1803 \div 3 = 601$$

⇒ El último número es : *99 + 601 = 700*

⇒ La cifra del *1992°* lugar es el «*0*»

RPTA :"A"

PROBLEMA 22 :

Para numerar un libro de *1000* páginas se dispone de *234* cifras «*5*» ¿Cuántos sobran o faltan?

A) Sobran 36 *B) Faltan 36* *C) Sobran 66*
D) Faltan 66 *E) No se sabe*

RESOLUCIÓN :

Al numerar las páginas del libro

• De la pág. *1* al *9*

Nro. de cifras «*5*» = *1* .... *(I)*

• De la pág. *10* a la *99*

En las unidades *(15 ; 25 ; ...... ; 95)*

Nro. de cifras «*5*» = *9*

En las decenas *(50 ; 51 ; ...... ; 59)*

Nro. de cifras «*5*» = *10*

Nro. de cifras «*5*» = *9 + 10 = 19* ... *(II)*

• De pág. *100* hasta *1000*

En las unidades *(105 ; ... ;195 ;... ; 905 ;... ; 995)*

Nro. de cifras «*5*» = *90*

En las decenas *(150 ; ... ; 159 ; ... ; 950 ; ... ; 959)*

Nro. de cifras «*5*» = *90*

En las centenas *(500 ; ... ; 501 ; ... ; 599)*

Nro. de cifras «*5*» = *100*

Nro. de cifras «*5*»

90 + 90 + 100 = 280 ....*(III)*

* De *(I); (II); (III);* el número total de cifras «*5*» que se utilizó es: *1 + 19 + 280 = 300*

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

La suma de n términos de una progresión aritmética es : $S_n = 3n^2 - 5$

Determinar : T_{22}

A) 220 *B) 129* *C) 181* *D) 88* *E) 118*

RESOLUCIÓN :

* Consideremos para : $n = 22$ y $n = 21$
* Entonces :

$$S_{22} = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{21} + T_{22}$$
$$S_{21} = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{21}$$
$$(-)$$
$$S_{22} - S_{21} = T_{22}$$

$$\overbrace{3(22)^2 - 5} - \overbrace{(3(21)^2 - 5)} = T_{22}$$

* Operando : $129 = T_{22}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

¿Cuántos términos terminan en la cifra *5* en la siguiente sucesión :

$$4 ; 15 ; 26 ; 37 ; .... ; 433$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

♦ Calculemos el número de términos ;

$$n = \frac{433 - 4}{11} + 1 = 40$$

$$n \in \{1 ; 2 ; 3 ; ...... ; 40\} \text{ ...... (I)}$$

♦ Ahora el enésimo :

$$T_n = 4 + (n - 1)\,11 \Rightarrow T_n = 11n - 7$$

♦ Según condición :

$$T_n = ...\,5 \Rightarrow 11n - 7 = ...\,5$$
$$\Rightarrow 11n = ...\,2$$
$$\Rightarrow n = ...\,2 \text{ .... (II)}$$

♦ De *(I)* y *(II)* :

$$n \in \underbrace{\{ 2 \; ; \; 12 \; ; \; 22 \; ; \; 32 \}}_{\text{Hay 4 valores que hacen que haya términos que terminan en 5}}$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 25 :

Si consideramos los números *4 ;14 ;24* y todos los números que terminan en *4* ; ¿cuál será la cifra que

ocupará el lugar *290*?

Todos los números se escriben sucesivamente sin separación .

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{4}_{1\ cifra};\ \underbrace{14;24;...;94}_{9\times 2=18\ cifras};\ \underbrace{104;114;...;994}_{}$$

(+10, +10)

$\left(\frac{994-104}{10}+1\right)=90$ Número de 3 cifras, Es decir : $9\times 3=270$ cifras

• Hasta el ***994*** , se han utilizado :

$$1+18+270=289\ cifras$$

• Entonces falta *1* cifra para las *290* que se debe utilizar ; esta cifra faltante debe ser la *1ra* . del *1004* (siguiente término al *994*), es decir lo pedido será el «*1*».

RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

En el siguiente triángulo numérico, hallar la suma del primer y último término de la fila *25* .

$$
\begin{array}{c}
1 \quad F_1\\
3 \quad 5 \quad F_2\\
7 \quad 9 \quad 11 \quad F_3\\
13 \quad 15 \quad 17 \quad 18 \quad F_4\\
21 \quad 23 \quad 25 \quad 27 \quad 29 \quad F_5\\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

A) 625 *B) 325* *C) 650* *D) 1250* *E) 3000*

RESOLUCIÓN :

* Observando las filas impares :

Suma de extremos

Suma de extremos

$F_1 : 1 = 1^2 \longrightarrow 2$ (×2)

$F_3 : 7 \quad 9 = 3^2 \quad 11 \longrightarrow 7+11=18$ ($)^2$, ×2

$F_5 : 21 \quad 25 = 5^2 \quad 29 \longrightarrow 21+29=50$ ($)^2$, ×2

*Se deduce que en la fila *25* , la suma de extremos será : $2\times 25^2=1250$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Hallar el término enésimo en :

$$5\ ;\ 11\ ;\ 19\ ;\ 29\ ;\ 41\ ;\ ....$$

A) n^2+3 *B)* n^2+4n *C)* $n^2+3n+12$

RESOLUCIÓN :

$$5\ ;\ 11\ ;\ 19\ ;\ 29\ ;\ 41\ ;\ ....$$

+6 +8 +10 +12

+2 +2 +2

MÉTODO PRÁCTICO:

Primero :

Se considera como si fuera una sucesión aritmética de 1^{er} orden :

$$5\ ;\ 11\ ;\ ....$$

+6

$$\Rightarrow T_n=5+(n-1)\,6=6n-1$$

SEGUNDO :

Pero como es de 2^{do} orden, le aumentamos $k(n-1)(n-2)$ para que de este modo salga cuadrático y además que esta última expresión se debe eliminar para $n=1$ y $n=2$. Para hallar «*k*» se utiliza el tercer término, dando a $n=3$.

$$T_n=6n-1+k\,(n-1)\,(n-2)$$

* para $n=3$:

$$T_3=\underbrace{6(3)-1+k\,(3-1)\,(3-2)=19}_{k=1}$$

* Luego : $T_n=6n-1+(n-1)\,(n-2)$

$$\Rightarrow T_n=6n-1+n^2-3n+2$$

$$\Rightarrow T_n=n^2+3n+1$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Hallar el término de lugar *22* en :

$$2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 20\ ;\ 58\ ;\ 132\ ;\ ....$$

A) 8002 *B) 14328* *C) 16004* *D) 24032* *E) 7229*

RESOLUCIÓN :

$$2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 20\ ;\ 58\ ;\ 132\ ;\ ...$$

Razón: +2 +2 +14 +38 +74

0 +12 +24 +36

+12 +12 +12

Sucesión de tercer orden (cúbica) considerando el método práctico directamente :

$$T_n=2+(n-1)\cdot 2+k\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$

* Para $n=4$:

$$T_4=\underbrace{2+(4-1)\cdot 2+k\cdot 3\cdot 2\cdot 1=20}_{k=2}$$

$$T_{22}=2+(22-1)\times 2+2\times 21\times 20\times 19=16004$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

¿Cuántos términos de la sucesión :

$$13 \ ; \ 16 \ ; \ 19 \ ; \ ...... \ ; \ 613$$

Resultan tener raíz cuadrada exacta al sumarle **2** unidades?

A) 1 B) 7 C) 1 D) 10 E) 53

RESOLUCIÓN :

El término enésimo será : $T_n = 3n + 10$

Según enunciado :

$\sqrt{T_n + 2} = k$; k: Entero Positivo

↓

$$3n + 10 + 2 = k^2$$

$$\Rightarrow 3(n+4) = k^2 \Rightarrow n + 4 = 3p^2$$

$$\Rightarrow 3 \times 3p^2 = k^2$$

* Pero :

$$13 \leq 9p^2 \leq 613 \Rightarrow 1 \ , \ ... \leq p^2 \leq 68 \ , ...$$

$$\Rightarrow 1, \ ... \leq p \leq 8 \ , ...$$

$$P \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\} \Rightarrow 7 \text{ valores}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

La suma de los **6** términos centrales de una progresión aritmética creciente de **16** términos es **141** y el producto de sus extremos es **46** . ¿Cuál es la razón de la progresión?

A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :

$$3(a_1 + a_{16}) = 141$$

* Porque la suma de equidistantes es igual a la suma de los extremos :

$$a_1 \times a_{16} = 46 \ ......(dato)$$

* Resolviendo : $a_1 = 1$; $a_{16} = 46$

* Pero : $a_{16} = a_1 + (16 - 1)r$

$$\Rightarrow 46 = 1 + 15r \Rightarrow r = 3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

Hallar el segundo término negativo en la siguiente sucesión : **284 ; 278 ; 272 ; 266 ; ...**

A) –7 B) –8 C) –9 D) –10 E) –11

RESOLUCIÓN :

$$284 \ ; \ 278 \ ; \ 272 \ ; \ 266 \ ; \ ...$$

-6 -6 -6

* Comparando con la sucesión de los múltiplos de **6**

Se deduce

284 278 272 ... (8) 2 –4 –10

+2 +2 +2 +2 +2 +2 +2

282 276 270 ... 6 0 –6 –12

* Luego lo pedido será : **–10**

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

Cuántos términos de tres cifras hay en la siguiente sucesión :

$$3 \ ; 4 \ ; 11 \ ; 30 \ ; 67 \ ; 128 \ ; ......$$

A) 4 B) 6 C) 6 D) 7 E) 8

RESOLUCIÓN :

$$3 \ ; \ 4 \ ; \ 11 \ ; \ 30 \ ; \ 67 \ ; \ 128 \ ; ...$$

$$\Rightarrow 0^3+3 \quad 1^3+3 \quad 2^3+3 \quad 3^3+3 \quad 4^3+3 \quad 5^3+3$$

↓ ↓ ↓

(1–1) (2–1) (3 – 1)

* Luego: $T_n = (n-1)^3 + 3$

* Por condición :

$$100 \leq (n-1)^3 + 3 < 1000$$

$$97 \leq (n-1)^3 < 997 \Rightarrow 4 \ , \ ... \leq (n-1) < 9 \ , \ ...$$

$$\Rightarrow 5 \ , \ ... \leq n < 10 \ , \ ... \Rightarrow n \in \{6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 33 :

Si n es entero positivo y : $x_n = 3n + n^2$ siendo :

$$y_n = x_{n+1} - x_n$$

Afirmamos que :

I) Los números y_n están en progresión aritmética de razón **2** .

II) Los números y_n están en progresión geométrica de razón **4** .

III) $y_{n+2} = y_{n+1}2$ para cada entero positivo n .

¿Cuáles de las afirmaciones anteriores son verdaderas?

A) Sólo I B) I y II C) I y III

RESOLUCIÓN :

* Analizando y_n :

* Por dato : $x_{n+1} = 3(n+1) + (n+1)^2$

$$x_{n+1} = n^2 + 5n + 4$$

* Luego :

$$y_n = n^2 + 5n + 4 - 3n - n^2$$

$$\Rightarrow y_n = 2n + 4$$

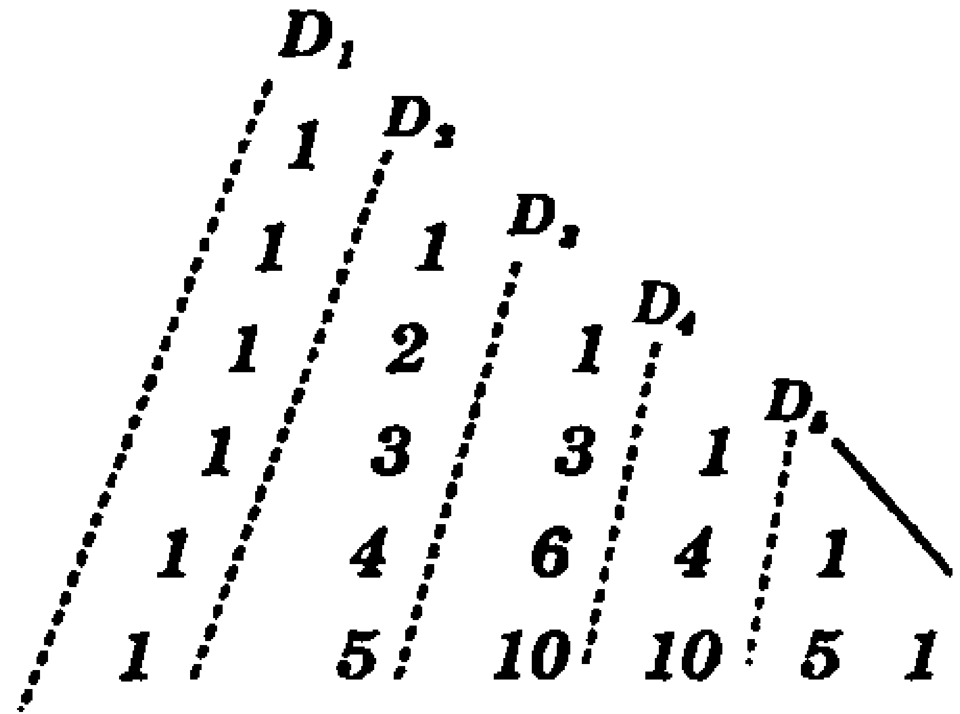
* Dando valores:

$$n = 1 \Rightarrow y_1 = 6$$
$$n = 2 \Rightarrow y_2 = 8 \quad (+2)$$
$$n = 3 \Rightarrow y_3 = 10 \quad (+2)$$

* Observamos: $y_1 ; y_2 ; y_3 ; ...$
* Forman una progresión aritmética de razón 2 .

PROBLEMA 34 :

Según el siguiente arreglo:



Calcular el valor del t_{15} en la diagonal número cuatro (D_4)

A) 720 *B) 460* *C) 564* *D) 912* *E)680*

RESOLUCIÓN :

• $D_2 : 1 ; 2 ; 3 ; .... ; n$

primeros números naturales

• $D_3 : 1 ; 3 ; 6 ; ...... ; \dfrac{n(n+1)}{2}$

primeros números triangulares

• $D_4 : 1 ; 4 ; 10 ; .... ; \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

primeros números cuadrangulares

* Luego piden el término 15 de la secuencia de los cuadrangulares el cual será:

$$\frac{15 \times 16 \times 17}{6} = 680$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 35 :

En el siguiente arreglo:

$$S_1 \longrightarrow 1$$
$$S_2 \longrightarrow 4 ; 9$$
$$S_3 \longrightarrow 16 ; 25 ; 36$$
$$S_4 \longrightarrow 49 ; 64 ; 81 ; 100$$
$$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Hallar la raíz cuadrada del término central de S_{25}

A) 315 *B) 325* *C) 313* *D) 328* *E) 411*

RESOLUCIÓN:

Cuadrados de los primeros números triangulares

$$S_1 \longrightarrow 1^2 = \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2$$
$$S_2 \longrightarrow 2^2 \; ; \; 3^2 = \left(\frac{2 \times 3}{2}\right)^2$$
$$S_3 \longrightarrow 4^2 \; ; \; 5^2 \; ; \; 6^2 \Rightarrow (1+2+3)^2 = \left(\frac{3 \times 4}{2}\right)^2$$

Cuadrados de los primeros números triangulares

* Luego :

$$S_{25} \longrightarrow \underbrace{a_1^2 ; \quad ; x^2 ; \quad ; \left(\frac{25 \cdot 26}{2}\right)^2}_{\text{«25 términos»}} \qquad (+12) \; (+12)$$

Término central : x^2

donde: $x + 12 = \dfrac{25 \times 26}{2} \Rightarrow x = 313$

* La expresión a calcular será : $\sqrt{x^2} = x = 313$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36 :

Claudia se propone leer una novela diariamente , el primer día lee 3 páginas , el segundo día lee 8 páginas , el tercer día 15 páginas , el cuarto día 24 páginas y así sucesivamente hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 14 veces el número de días que ha estado leyendo. Hallar el número de páginas leídas en dicho día .

A) 126 *B) 128* *C) 168* *D) 204* *E)192*

RESOLUCIÓN :

• Sea «n» el número de días que ha estado leyendo , luego : $T_n = 14n$ (dato)

• Cálculo del enésimo :

$$3 \; , \; 8 \; , \; 15 \; , \; 24 \; , ...$$
$$+5 \quad +7 \quad +9$$
$$+2 \quad +2$$

$$T_n = 3 + \frac{(n-1)5}{1} + \frac{(n-1)(n-2)2}{1 \times 2}$$

$$\Rightarrow T_n = n^2 + 2n$$

* Pero: $n^2 + 2n = 14n$

$$\Rightarrow n = 12$$

* Piden: $14 \times 12 = 168$

RPTA :"C"

PROBLEMA 37 :

En la sucesión : *7 ; 14 ; 21 ; ... ; 343 000*
¿cuántos términos son cubos perfectos?

A) 7 *B) 2* *C) 9* *D) 18* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

• El término enésimo será : $T_n = 7n$

• Según enunciado :

$$7n = k^3 \Rightarrow n = 7^2 \times p^3$$

• Pero :

$$7 \leq k^3 \leq 343\,000$$
$$\Rightarrow 7 \leq 7 \times 7^2 p^3 \leq 343000$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{49}} \leq P \leq 10$$
$$\Rightarrow 0,3\ ... \leq P \leq 10$$

$P \in \{1 ; 2 ; 3 ; ... , 10\} \Rightarrow$ *10 valores*

RPTA : "E"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el número que ocupa la posición *10* en la sucesion : *2 ; 11; 26 ; 47 ;............*

A) 270 *B) 279* *C) 285* *D) 265* *E) 299*

02 Hallar «n» en : *1 ; 7 ; 25 ; 80 ; n ;............*

A) 256 *B) 267* *C)228* *D) 241* *E) 239*

03 Halle el número que ocupe la posición 10 en :

3 ; 7; 15 ; 31 ; ....

A) 2047 *B) 2011* *C) 2120* *D) 2155* *E) 2045*

04 Cuál de los números deberá ser reemplazado por *255* en :

126 ; 159 ; 192 ; 230 ; 258 ; 291 ; 324 ....

A) 260 *B) 230* *C) 250* *D) 240* *E) 270*

05 ¿Qué número no corresponde a la siguiente sucesión; si los de posición par están correctas:

1 ; 5 ; 9 ; 14 ; 12 ; 17 ; 16 ; 21 ; 25 ; 29

A) 17 *B) 13* *C) 15* *D) 12* *E) 19*

06 Si «x» es el término que sigue a *15* en la sucesión : *0 ; 1 ; 3 ; 7 ; 15 ; ...*

Entonces el valor de $x^2 - 30x + 2$ es:

A) 72 *B) 81* *C) 63* *D) 33* *E) 31*

07 Dada la sucesión : $2 ; \frac{5}{2} ; 2 ; \frac{11}{8} ; \frac{7}{8} ; ...$

Halle el término *11* de la sucesión:

A) $\frac{5}{32}$ B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{5}{1024}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{1}{1024}$

08 Hallar el décimo término de la sucesión:

$$\frac{1}{2} ; \frac{7}{4} ; \frac{17}{8} ; \frac{31}{16} ; ...$$

A) $\frac{133}{1024}$ B) $\frac{147}{1024}$ C) $\frac{165}{1024}$ D) $\frac{199}{1024}$ E) $\frac{101}{1024}$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos términos tiene la siguiente sucesión aritmética?

$$\overline{aa}; ...\overline{(2a)b}; \overline{54}; \overline{ba}$$

A) 5 *B) 7* *C) 9* *D) 6* *E) 8*

02 La suma del sexto y décimo segundo término de una progresión aritmética es *1 800* y la relación del cuarto y décimo segundo término es como *2* es a *6*. Calcular el primer término.

A) 50 *B) 100* *C) 200*
D) 400 *E) 500*

03 En la siguiente sucesión, calcule el cuarto término negativo y el lugar que ocupa:

328; 322; 316; 310; ...

A) –20 y 59° *B) 15 y 16°*
C) –30 y 60° *D) –23 y 35°*
E) –21 y 34°

04 En la siguiente sucesión:

8; 15; 22; 29; ...

¿cuántos de sus términos de *3* cifras terminan en *5*?

A)12 *B)13* *C)14* *D)15* *E)16*

05 Se tiene la siguiente progresión aritmética: *5; ... ; 47; ... ; 159*, donde el número de términos que hay entre *47* y *159* es el triple del número de términos que hay entre *5* y *47*. Calcule el primer término de *3* cifras.

A) 101 *B) 103* *C) 105*
D) 107 *E) 109*

06 Se reparte caramelos a un grupo de niños en cantidades que forman una progresión aritmética. Al séptimo niño le tocó la mitad de lo que le tocó al último y a éste el quíntuplo de lo que le tocó al primero. ¿Cuántos niños son?

A)16 B)15 C)12 D) 17 E) 20

07 En la siguiente progresión geométrica, calcule el valor de "*k*":

$$(3k + 1); (k - 3); (2k + 9); ...$$

A) -7 B) 6 C) 7 D) -8 E) -9

08 El primer y quinto término de una progresión geométrica es 12 y 972, respectivamente. Si la progresión consta de 21 términos, calcular la suma de las cifras del tercer término.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

09 El producto de los términos de lugar impar de una progresión geométrica con un número impar de términos es 65 536 y el producto de los términos de lugar par es 4 096. Calcule el término central.

A) 6 B) 16 C) 21 D) 23 E) 27

10 Una hoja de papel se parte por la mitad después se superponen las partes y se vuelven a partir por la mitad; luego los cuatro pedazos se superponen y se vuelven a partir por la mitad; y así sucesivamente. Después de 8 cortes, ¿cuántos trocitos de papel habrá?

A) 254 B) 255 C) 256 D) 257 E) 258

11 En la siguiente sucesión, calcule la suma de cifras del término 31:

$$1; 2; 5; 10; 17; 26; ...$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 9 E) 13

12 Se divide el conjunto de números naturales en grupos de modo que cada uno de ellos termina en un número par, resultando la sucesión:

$$(1; 2), (2; 3; 4), (3; 4; 5; 6) ...$$

Calcule la suma de los números correspondientes al término 22.

A) 860 B) 759 C) 801 D) 764 E) 608

13 Dada la siguiente sucesión, ¿a partir de qué lugar los términos son menores que 3/4?

$$\frac{5}{3}; \frac{7}{6}; 1; \frac{11}{12}; ...$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

14 La suma de los "*n*" primeros términos de una sucesión se encuentra mediante la expresión: $S_n = n(3n + 2)$. Calcule el número de términos que hay entre los términos 89 y 239 de dicha sucesión.

A) 23 B) 26 C) 21 D) 24 E) 25

15 En la sucesión calcule el valor del término 21:

$$\frac{0}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{12}{17}; ...$$

A) $\frac{210}{217}$ B) $\frac{211}{221}$ C) $\frac{42}{89}$ D) $\frac{42}{221}$ E) $\frac{210}{221}$

16 Roxana se propone leer una novela, el primer día lee 3 páginas, el segundo lee 8 páginas, el tercer día 15 páginas, el cuarto 24 páginas, y así sucesivamente; hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 14 veces el número de días que ha estado leyendo. Calcule el número de páginas leídas dicho día.

A) 168 B) 128 C) 126
D) 204 E) 192

17 Juan va a una tienda y compra un caramelo, regalándole el vendedor un caramelo por su compra; en una segunda vez compra 3 caramelos y le regalan 2, en la tercera vez compra 6 y le regalan 3, en la cuarta vez compra 10 y le regalan 4, en la quinta vez compra 15 y le regalan 5, y así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos recibirá en total cuando entre a la tienda a comprar por vigésima vez?

A) 210 B) 230 C) 240
D) 250 E) 215

18 Al escribir el siguiente número:

$$2002220000222222000000222 ....$$

Determine los dígitos que aparecen en los lugares 20 020 y 20 200.

A) 0; 2 B) 2; 0 C) 1; 3 D) 0; 0 E) 2; 2

19 Se sabe que tres términos consecutivos de la sucesión: 3; 6; 11; 18; ...

suman 371. Calcular el tercer término de los tres mencionados.

A) 146 B) 123 C) 102
D) 164 E) 136

20 Las sucesiones:

$$124; 120; 116; ...; \wedge -2; 1; 4; 7; ...$$

tienen igual cantidad de términos y además sus últimos términos son iguales. El penúltimo término de la segunda sucesión es:

A) 18 B) 49 C) 55 D) 52 E) 56

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)B	3)A	4)B	5)B	6)D	7)A	8)D	9)B	10)C
11)A	12)B	13)D	14)D	15)E	16)A	17)B	18)A	19)A	20)B

SERIES y SUMATORIAS

CAPITULO 038

SUMATORIAS

El símbolo $\sum_{k=1}^{n} k$, se llama Sigma e indica la sumatoria desde $k = 1$; hasta para $k = n$, donde:

$k = 1$; límite inferior
$k = n$; límite superior
"k" ; término genérico

Para poder desarrollar una sumatoria , tenemos que empezar asignando para $k=1$; $k=2$; $k=3$; y así sucesivamente hasta $k = n$, al término genérico, para luego sumar todos los resultados .

EJEMPLO :

$$\sum_{k=1}^{3}(7k+8)=\underbrace{7(1)+8}_{\substack{Para\\k=1}}+\underbrace{7(2)+8}_{\substack{Para\\k=2}}+\underbrace{7(3)+8}_{\substack{Para\\k=3}}=66$$

A) SUMA DE LOS 1ROS NÚMEROS

$$N:\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

• Calcular : $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

"La suma está dada por la mitad de la multiplicación del último sumando con su consecutivo"

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + \underset{\text{Último término}}{10} = \frac{10 \cdot \overset{\text{Consecutivo de "10"}}{11}}{2} = 55$$

• Calcular :

$$A = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + 7\times 8$$

$$B = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + 3\times 4\times 5 + \ldots + 9\times 10\times 11$$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

"La suma esta dada por la multiplicación entre el último término y el consecutivo al último factor del último término , y todo sobre la cantidad de factores que se va ha formar"

$$A=1\times 2+2\times 3\times 4+\ldots+\underbrace{7\times 8}_{\text{Último término}}=\frac{\overbrace{7\times 8\times \underset{\text{Consecutivo del "8"}}{9}}^{\text{"3 Factores"}}}{3}$$

$$B = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \ldots + 9\times 10\times 11$$

$$\Rightarrow B=\frac{9\times 10\times 11\times 12}{4}$$

EN GENERAL :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

n : Número de términos

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=1\times 2\times 3+2\times 3\times 4\ldots\ldots+n(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\ldots(k+P)=\frac{(n+p+1)!}{(P+2)(n-1)!}$$

donde : $\boxed{n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n}$

Factorial de un número

B) SUMA DE LOS 1ROS . NÚMEROS PARES: $\left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right)$

• Calcular : $2 + 4 + 6 + \ldots + 40$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

"La suma esta dada por la multiplicación de la mitad del último y el consecutivo de ésta mitad"

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 40 = 20\times 21 = 420$$

(40: *Último término*; $\div 2$ → 20; 21: *Consecutivo de la mitad de 40.*)

EN GENERAL :

$$\sum_{k=1}^{n} 2k=2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

($2n \div 2$)

C) SUMA DE LOS 1ROS NÚMEROS IMPARES : $\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)$

- Calcular : $1+3+5+...+19$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

"La suma está dada por el cuadrado de la semisuma del primer y último término"

$$\underset{\text{Primer Término}}{1}+3+5+......+\underset{\text{Último Término}}{19}=\underbrace{\left(\frac{1+19}{2}\right)^2}_{\text{Cuadrado de la semisuma}}=100$$

OJO :

Pero cuando nos muestren la cantidad de términos la suma será igual al cuadrado de dicha cantidad de términos o sumandos.

- Calcular : $\underbrace{1+3+5+......}_{25\ \text{términos}}$

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{1+3+5+...}_{25\ \text{términos}}=25^2=625$$

EN GENERAL :

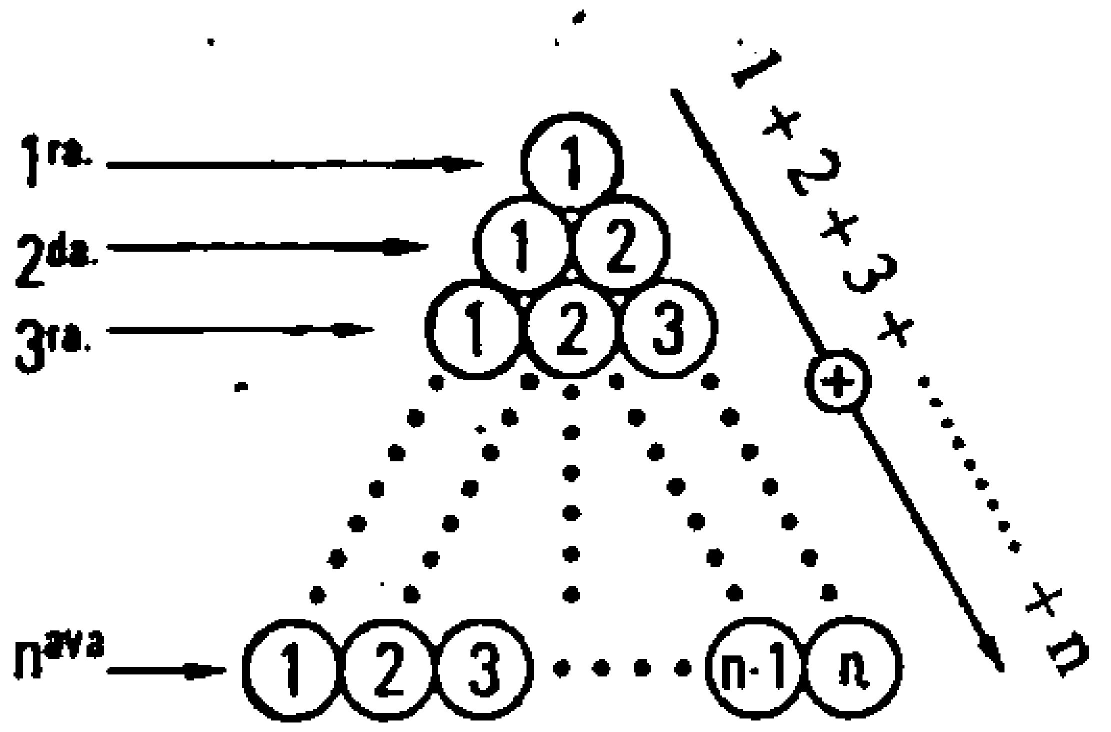
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$$

EJEMPLO 1 :

En una industria de productos para "Taco" produce *78* bolas por cada minuto , las cuales las acondicionan en forma de triángulo de modo que en la 1^{ra} fila haya una bola , en la 2^{da} dos, en la 3^{ra} tres y así sucesivamente. ¿Cuántas filas se formarán?

RESOLUCIÓN :

* sea "n" el número de filas



* Total de bolas :

$$\frac{n(n+1)}{2}=78 \Rightarrow n(n+1)=156$$

$$\Rightarrow n(n+1)=12\times 13 \Rightarrow n=12$$

EJEMPLO 2 :

Si : $S_n=1+2+3+...+n$

Calcular : $S_1+S_2+S_3+...+S_{20}$

A) 1240 B) 1610 C) 2000 D) 400 E) 210

RESOLUCIÓN :

* Se tiene que : $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

* Luego piden :

$$\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+...+\frac{20\times 21}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+20\times 21]=\frac{1}{2}\left[\frac{20\times 21\times 22}{3}\right]=1610$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 3 :

Calcular "$x+y$" si:

$$1+3+5+7+...+x=196$$
$$2+4+6+8+...+y=420$$

A) 69 B) 68 C) 67 D) 40 E) 27

RESOLUCIÓN :

* Aplicando métodos prácticos :

$$\underbrace{1+3+5+7+...+x}=196$$

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^2=196 \rightarrow x=27$$

* Resolviendo: $x=27$

$$\underbrace{2+4+6+8+...+y}=420$$

$$\frac{y}{2}\left(\frac{y}{2}+1\right)=20\times 21$$

$$\frac{y}{2}=20 \Rightarrow y=40$$

* Luego : $x+y=27+40=67$

RPTA : "C"

EJEMPLO 4 :

Calcular: $E=\sqrt{0{,}01+0{,}03+0{,}05+......+19{,}99}$

A) 1 B) 0,123 C) 80 D) 99 E) 100

RESOLUCIÓN :

* Transformando los decimales :

$$E=\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{3}{100}+\frac{5}{100}+...+\frac{1999}{100}}$$

$$\Rightarrow E=\sqrt{\frac{1+3+5+...+1999}{100}} \Rightarrow E=\frac{\sqrt{\left(\frac{1999+1}{2}\right)^2}}{10}=\frac{1000}{10}=100$$

(suma de los primeros impares)

RPTA : "E"

EJEMPLOS 5 :

Calcular : "x" en : $1+2+3+......+x=\overline{aaa}$

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 111

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{1+2+3+...+x}=\overline{aaa}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+1)}{2}=a\times 111$$

$$\Rightarrow x(x+1)=\underbrace{a\times 2\times 3\times 37}_{36\ \Rightarrow\ se\ deduce}...(Tanteando)$$

$$\Rightarrow x=36$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 6 :

Determinar el valor de :

$$S=20\times 1+19\times 2+18\times 3+...+1\times 20$$

A) 4525 B) 1245 C) 3870 D) 1580 E) 1540

RESOLUCIÓN :

* Haciendo la siguiente distribución, la cual es su equivalente :

$$20\ filas\begin{cases}1=\frac{1\times 2}{2}\\ 1+2=\frac{2\times 3}{2}\\ 1+2+3=\frac{3\times 4}{2}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ 1+2+3+...+20=\frac{20\times 21}{2}\end{cases}$$

$$20\times 1+19\times 2+18\times 3+...+1\times 20=\frac{1}{2}(1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+20\times 12$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{20\times 21\times 22}{3}\right)=1540$$

RPTA :"E"

D) SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS 1ROS $N:\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$

• Calcular : $1^2+2^2+3^2+...+10^2$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

"La suma esta dada por la multiplicación, entre el número de términos , con su consecutivo y la suma del número de términos y su consecutivo , para luego dividir todo sobre 6".

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+...+10^2}_{10\ términos}=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

(10 +11)

* EN GENERAL :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)2n+1)}{6}$$

donde : n = número de términos

E) SUMA DE LOS CUBOS DE LOS 1ROS $N:\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)$

• Calcular : $1^3+2^3+3^3+...+n^3$

RESOLUCIÓN PRÁCTICA :

** La suma está dada por el cuadrado de la mitad de la multiplicación entre el número de términos y su consecutivo .*

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+...+10^3}_{10\ términos}=\underbrace{\left[\frac{10\times 11}{2}\right]}_{Cuadrado\ de\ la\ mitad\ de\ la\ multiplicación}2=3025$$

EN GENERAL :

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

donde : n : Número de términos

EJEMPLO 1 :

Juan conviene en pagar un artículo cada fin de semana de la siguiente forma : la primera semana paga ***S/.0,25,*** la segunda semana ***S/.1,*** la tercera ***S/.2,25,*** la cuarta ***S/.4*** y así sucesivamente durante veinte semanas. El precio del artículo es :

A) S/.750,50 B) S/.700,50 C)S/.350,50
D)S/. 717,50 E) S/.400,50

RESOLUCIÓN :

* Sea "S" la suma a pagar , luego :

$$S=\underbrace{0,25+1+2,25+...}_{20\ sumandos}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}+4+...=\frac{\overbrace{1+4+9+16+...}^{20\ sumandos}}{4}$$

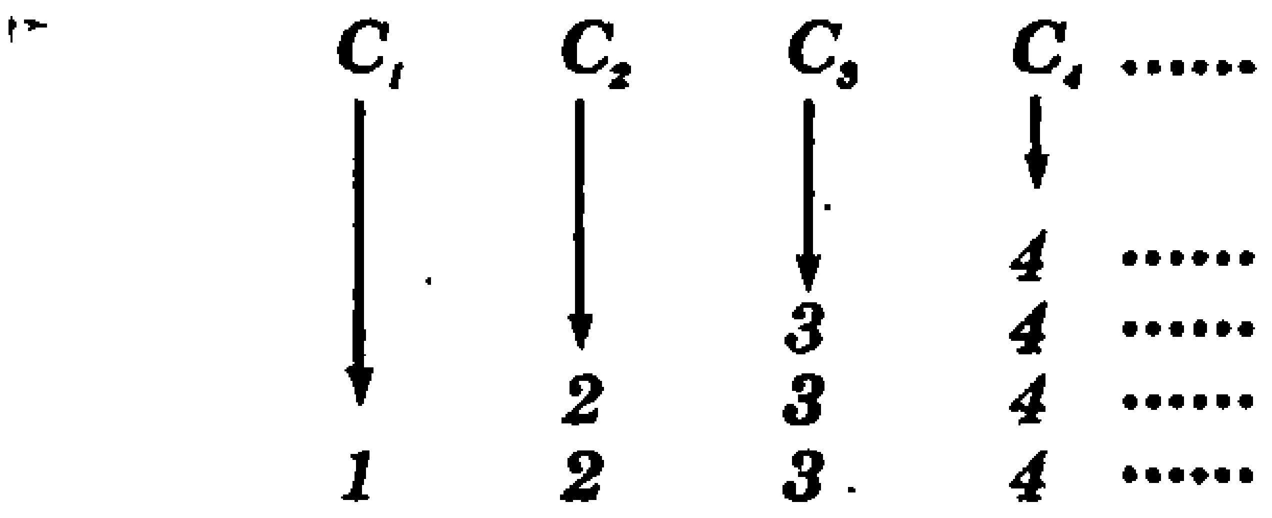
$$\Rightarrow S=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+(20)^2}{4}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{4}\ \frac{20(21)(41)}{6}=717,5$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 2 :

En el triángulo numérico hallar la suma de las veinte primeras columnas (dar como respuesta la suma de cifras del resultado)



A) 16 B) 17 C) 18 D) 15 E) 19

EJEMPLO :

* Piden: $1(1) + 2(2) + 3(3) + ... + 20(20)$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 20^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

* Pero se requiere : $2 + 8 + 7 + 0 = 17$

RPTA : "B"

EJEMPLO 3 :

Efectuar :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ ... \ + 10^2$$
$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ ... \ + 10^2$$
$$3^2 + 4^2 + 5^2 + \ ... \ + 10^2$$
$$\vdots$$
$$10^2$$

A) 1000 B) 3025 C) 2750 D) 10000 E) 27500

RESOLUCIÓN :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots\cdots + 10^2$$
$$2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots\cdots + 10^2$$
$$3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots\cdots + 10^2$$

$$\underline{1(1^2) + 2(2^2) + 3(3^2) + ... + 10(10^2)}$$

$$\Rightarrow 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 10^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 = 3025$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 4 :

Calcular :

$$S = 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + ... + 625$$

A) 5525 B) 5665 C) 5385 D) 3600 E) 5388

RESOLUCIÓN :

* Es importante considerar que la fórmula de los cuadrados , específicamente está referida a la suma de los cuadrados de los primeros enteros positivos , es decir que si la suma no empieza en $1^2 + 2^2$; será necesario hacer un artificio previo, que consiste en suponer que efectivamente empieza en 1^2, para luego restarle los primeros términos que no correspondan a la suma planteada inicialmente ; es decir que siendo la suma original :

$$S = 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + ... + 625,$$

* que se puede expresar :

$$S = [8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + ... + 25^2]$$

* el artificio será : $n = 25$

$$S = \underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+(8^2+9^2+10^2+11^2+12^2+...+25^2)}_{n=25} - \underbrace{(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)}_{n=7}$$

* Este procedimiento conocido, como el *QUITA Y PON* nos permite aplicar la fórmula dos veces, primero para los *25* primeros términos y luego en el sustraendo a los siete primeros términos , apliquemos pues :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

* Luego : $S = \frac{(25 \times 26 \times 51)}{6} - \frac{(7 \times 8 \times 15)}{6} = 5385$

RPTA : "C"

EJEMPLO 5 :

Calcular: $S = 12^3 + 13^3 + 14^3 + ... + 20^3$

A) 194736 B) 36191 C) 39744 D) 8910 E) 11197

RESOLUCIÓN :

* Aplicamos un procedimiento análogo al ejemplo *4* , se tendrá que falta :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 11^3 = \left(\frac{11 \times 12}{2}\right)^2$$

* Luego : $S = \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 - \left(\frac{11 \times 12}{2}\right)^2 = 39744$

RPTA : "C"

RELACIONES ADICIONALES

I) SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS PARES NATURALES:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ... + (2n)^2 = \frac{2n}{3}(n+1)(2n+1)$$

II) SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS IMPARES NATURALES.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{2n}{3}(4n^2 - 1)$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

(IGUAL; +1; +1)

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + 11^2 = \frac{11 \times 12 \times 13}{6}$$

(IGUAL)

III) SUMA DE LOS CUBOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS PARES NATURALES.

$$2^3+4^3+6^3+8^3+\ldots+(2n)^3=2[n(n+1)]^2$$

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6}$$

(IGUAL, +1, +1)

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+30^2=\frac{30\times31\times32}{6}$$

(IGUAL)

IV) SUMA DE LOS CUBOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS IMPARES NATURALES

$$1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

V) SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

• Calcular : $4+7+10+13+\ldots+37$

RESOLUCIÓN :

* Debemos tomar en cuenta los conceptos utilizados en una progresión aritmética .

$$4+7+10+13+\cdots\cdots+37$$

+3 +3 +3 — Razón aritmética $r=3=7-4$

1er término $a_1=4$; Último término $a_n=37$

$$a_n=a_1+(n-1)r\;;\quad n=\frac{a_n-a_1}{r}+1\;;\quad S_n=\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)n$$

Donde :

n : número de términos

a_n : término enésimo

s_n : suma de los "n" primeros términos en el problema:

$$\left.\begin{array}{l}a_1=4\\ r=3\\ a_n=37\end{array}\right\}\; n=\frac{37-4}{3}+1 \;\Rightarrow\; n=12 \qquad S_{12}=\left(\frac{37+4}{2}\right)12=246$$

OJO :

$$S=\left(\begin{array}{c}\text{Semisuma}\\ \text{de extremos}\end{array}\right)\times \text{Número de términos}$$

* *CONSIDERACIONES IMPORTANTES :*

1) En toda *P. A.* cada término comprendido entre el primero y el último , es igual a la semisuma de sus dos términos adyacentes.

2) En toda *P. A.* de número impar de términos , siempre se cumple que existe un único término central cuyo valor es la semisuma de dos términos equidistantes .

$$T_{central}=\frac{S_{\text{terminos equidistantes}}}{2}$$

3) En toda serie aritmética de número impar de términos se cumple .

$$T_{central}=S_{\text{terminos de lugar impar}}-S_{\text{terminos de lugar par}}$$

4) $$S=T_{central}\times \text{Número de términos}$$

V) SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA FINITA.

Calcular : $\underbrace{3+6+12+24+\ldots}_{8\ \text{términos}}$

RESOLUCIÓN :

* Debemos tomar en cuenta los conceptos utilizados en una progresión geométrica:

$3+6+12+24+\ldots\ldots$ "8 términos"

×2 ×2 ×2

* Donde : $T_1=3$ (primeros términos)

$q=2$ (razón geométrica)

$n=8$ (números de términos)

• S_n : suma de los "n" primeros números.

• $q>1$.

* En el problema : $T_1=3$; $q=2$; $n=8$

* *CONSIDERACIONES IMPORTANTES :*

1) En toda *P.G.* cada término comprendido entre el primero y el último es igual a la raíz cuadrada del producto de sus dos términos adyacentes .

2) En toda *P.G.* de número Impar de términos se cumple siempre que existe un único término central, cuyo valor es la raíz cuadrada del producto de dos términos equidistantes .

$$T_{CENTRAL}=\sqrt{\text{PRODUCTOS DE 2 TÉRMINOS EQUIDISTANTES}}$$

EJEMPLO 1 :

Calcular : $Q=1+2+2^2+2^3+2^{2001}$

A) $2^{2002}-1$ B) 2^{2001} C) 2^{2003} D) 4^{2001} E) 16^{16}

RESOLUCIÓN :

* Estamos frente a una progresión geométrica finita:

$$T_1=1\;;\;q=2\;;\;n=2002$$

* donde :

$$S_n=T_1\left[\frac{q^n-1}{q-1}\right]\Rightarrow Q=1\times\left[\frac{2^{2002}-1}{2-1}\right]=2^{2002}-1$$

RPTA : "A"

EJEMPLO 2 :

Si n es un entero positivo , el valor de la suma :

$$3+33+333+\ldots\ldots+\underbrace{3\ldots\ldots3}_{n\ cifras}$$

Es :

A) $\dfrac{10^n-9n-10}{27}$ B) $\dfrac{10^{n+1}+9n-10}{27}$

C) $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$ D) $\dfrac{10^{n+1}-9n+10}{27}$

RESOLUCIÓN :

$$S=3+33+\ldots\ldots+\underbrace{3\ldots\ldots3}_{n\ cifras}$$

* multiplicando por 3 :

$$3S=9+99+\ldots\ldots+\underbrace{9\ldots\ldots}_{n\ cifras}$$

* Podemos expresar como:

$$3S=(10-1)+(10^2-1)+\ldots+(10^n-1)$$

* Observamos "n" sumandos :

$3S=(10+10^2+\ldots+10^n)-(1+1+\ldots$ "n" sumandos)

* aplicando "S" de progresión geométrica

$$3S=\frac{10\times(10^n-1)}{10-1}-n\Rightarrow S=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}$$

RPTA : "C"

VI) SUMA DE LOS INFINITOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE (SUMA LÍMITE) :

• Calcular : $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$

RESOLUCIÓN :

* Es decreciente ya que los términos van disminuyendo su valor , donde el término enésimo tiende a cero , cuando "n" es muy grande

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots \quad (\times\tfrac{1}{2},\ \times\tfrac{1}{2},\ \times\tfrac{1}{2}) \quad \begin{cases} a_1=1 \\ q=\frac{1}{2}<1 \end{cases}$$

{por eso es dependiente

SUMA LÍMITE : $S_\infty=\dfrac{a_1}{1-q}$

* Donde : $0<|q|<1$

* En el problema : $S_\infty=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=2$

EJEMPLO 1 :

Hallar "S" : $S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}\ldots$

A) 2 B) 1 C) 1/3 D) 1/4 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Aplicando suma límite , donde la razón geométrica será :

$$q=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2} \quad ; \quad a_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_\infty=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

Si los radios de una sucesión de circunferencias son:

$$1m\ ;\ \frac{1}{2}m\ ;\ \frac{1}{4}m\ ;\ \frac{1}{8}m\ ;\ldots$$

La suma de sus correspondientes longitudes es igual a :

A) π B) 2π C) 4π D) 8π E) 16π

RESOLUCIÓN :

* Se debe saber que la longitud de una circunferencia se calcula como se indica :

$$L_\odot=2\pi R$$

* Luego la suma de longitudes será :

$$L=2\pi(1)+2\pi\left(\frac{1}{2}\right)+2\pi\left(\frac{1}{4}\right)+2\pi\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$\Rightarrow L=2\pi\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)\Rightarrow L=2\pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\Rightarrow L=4\pi$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 3 :

Calcular : $S=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{49}+\dfrac{3}{343}+\dfrac{4}{2301}+\ldots+\infty$

A) 1/49 B) 7/36 C) 1/2 D) 1/4

RESOLUCIÓN :

* Como : $S=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{49}+\dfrac{3}{343}+\dfrac{4}{2301}+\ldots+\infty$ (−)

* Multiplicando a "S" por 7 :

$$7S=1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}++\frac{4}{7^3}+\ldots+\infty$$

$$6S=\underbrace{1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}++\frac{1}{7^3}+\ldots}_{Suma}\Rightarrow 6S=\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\Rightarrow S=\frac{7}{36}$$

RPTA : "B"

EJEMPLO 4 :

Se tiene un triángulo equilátero cuyo lado mide "a". Se toman los puntos medios de sus lados y al unírseles se forma otro triángulo equilátero , en este

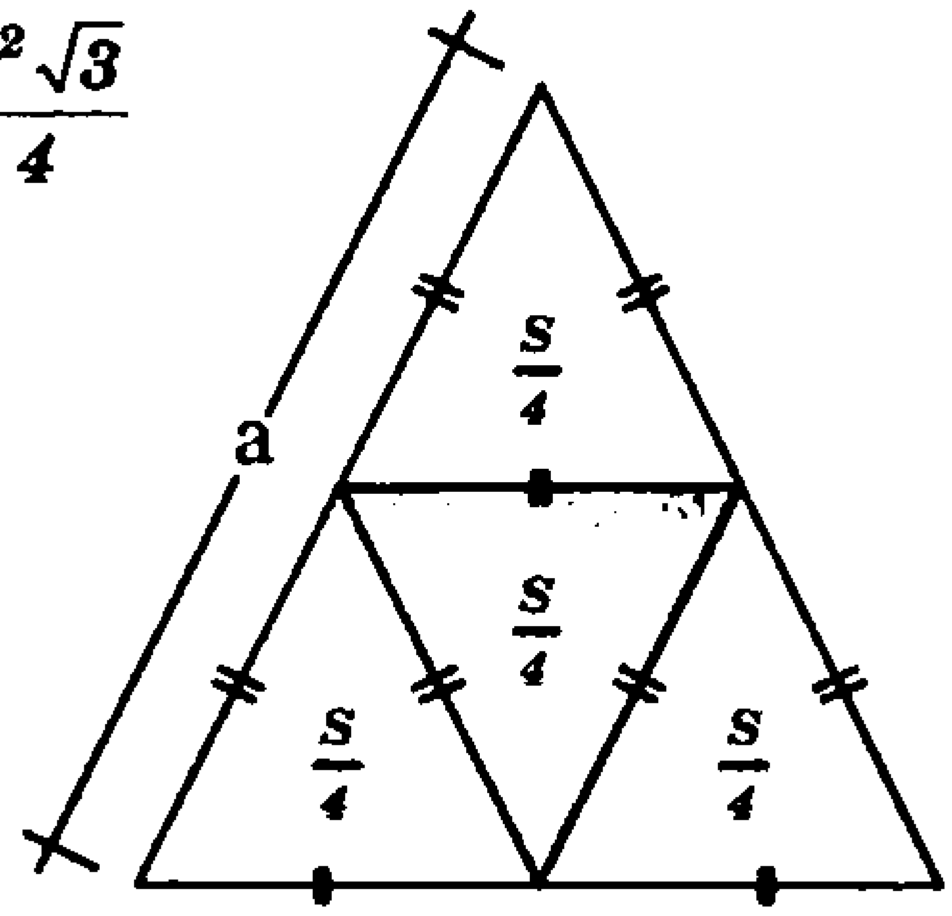
triángulo a su vez se toman los puntos medios de sus lados y se les une, formando otro triángulo equilátero y repetimos la operación infinitas veces. Calcular la suma de las áreas de todos estos triángulos formados, incluyendo el mayor

A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Sea "S" el área del triángulo de lado "a", luego según la figura se formará un triángulo cuya área es la cuarta parte de "S" y así sucesivamente.

* Donde : $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



* Luego la suma de todas las áreas será :

$$S+\frac{S}{4}+\frac{S}{16}+\dots\dots+\infty$$
$$\times\frac{1}{4} \quad \times\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}S=\frac{4}{3}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

RPTA : "A"

OBSERVACIÓN :

$$\frac{1}{q}+\frac{1+r}{q^2}+\frac{1+2r}{q^3}+\frac{1+3r}{q^4}+\dots+\infty=\frac{r+q-1}{(q-1)^2}$$
$$+r \quad +r \quad +r$$
$$\times q \quad \times q \quad \times q$$

$$\frac{1}{7}+\frac{4}{49}+\frac{7}{343}+\dots\dots+\infty=\frac{3+7-1}{(7-1)^2}=\frac{1}{4}$$
$$+3 \quad +3$$
$$\times 7 \quad \times 7$$

VII) SUMA DE LAS INVERSAS DE LOS PRODUCTOS CONSECUTIVOS

EJEMPLO 1 :

Calcular : $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\ 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{n-1}{n}$ C) $\frac{n}{n+1}$ D) $\frac{n}{n-1}$

RESOLUCIÓN :

* En este tipo de situaciones se trata de descomponer cada término en la diferencia de 2 fracciones

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

Calcular:

$$S=\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\dots+\frac{1}{11\times 12\times 13}$$

A) $\frac{71}{120}$ B) $\frac{77}{147}$ C) $\frac{77}{312}$ D) $\frac{77}{71}$ E) $\frac{73}{97}$

RESOLUCIÓN :

* Expresando todos los sumandos tal como :

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\times 2\times 3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}\right)$$

* Factorizando $\frac{1}{2}$ en todos:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{11\times 12}-\frac{1}{12\times 13}\right)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{156}\right)=\frac{77}{312}$$

RPTA : "C"

EN GENERAL :

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+P)}=\frac{1}{P}\left[P-\frac{n!}{(n+P)!}\right]$$

$$\frac{1}{a_1\times a_2}+\frac{1}{a_2\times a_3}+\quad+\frac{1}{a_{n-1}\times a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$$
$$+r \quad +r \quad +r$$

EJEMPLO :

$$\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\dots+\frac{1}{35\times 38}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{38}\right)=\frac{3}{19}$$

EJEMPLO 3 :

Efectuar :

$$S=\frac{3}{5\times 6}+\frac{3}{6\times 7}+\frac{3}{7\times 8}+\frac{3}{8\times 9}+\dots+\frac{3}{40\times 41}$$

A) 124/175 B) 128/245 C) 129/295

D) 136/225 *E) 108/205*

RESOLUCIÓN :

* Factorizando el "3" :

$$S=3\left[\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\ldots+\frac{1}{40\times 41}\right]$$

+1 +1

$$\Rightarrow S=3\left[\frac{1}{1}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{41}\right]\right]=\frac{108}{205}$$

RPTA : "E"

PROPIEDADES DE LAS SUMATORIAS

1) $\sum_{k=1}^{3} 5=5+5+5=3(5)$

(Cuando el término genérico es una constante)

2) $\sum_{k=1}^{n} 5k^3=5\sum_{k=1}^{n} k^3$

(La constante que multiplica al término genérico puede salir fuera de "$\sum$")

3) $\sum_{k=1}^{n}(k^4+3k)=\sum_{k=1}^{n} k^4+3\sum_{k=1}^{n} k$

Una sumatoria se puede separar en 2 o más sumatorias.

EJEMPLO 1 :

Calcular : $\sum_{k=1}^{12}(2k^3-5k^2+7k+4)$

A) 8727 *B) 7912* *C) 9512* *D) 9192* *E) N.A.*

RESOLUCIÓN:

* Aplicando las propiedades de la sumatoria, resultará :

$$2\sum_{k=1}^{12}k^3-5\sum_{k=1}^{12}k^2+7\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}4$$

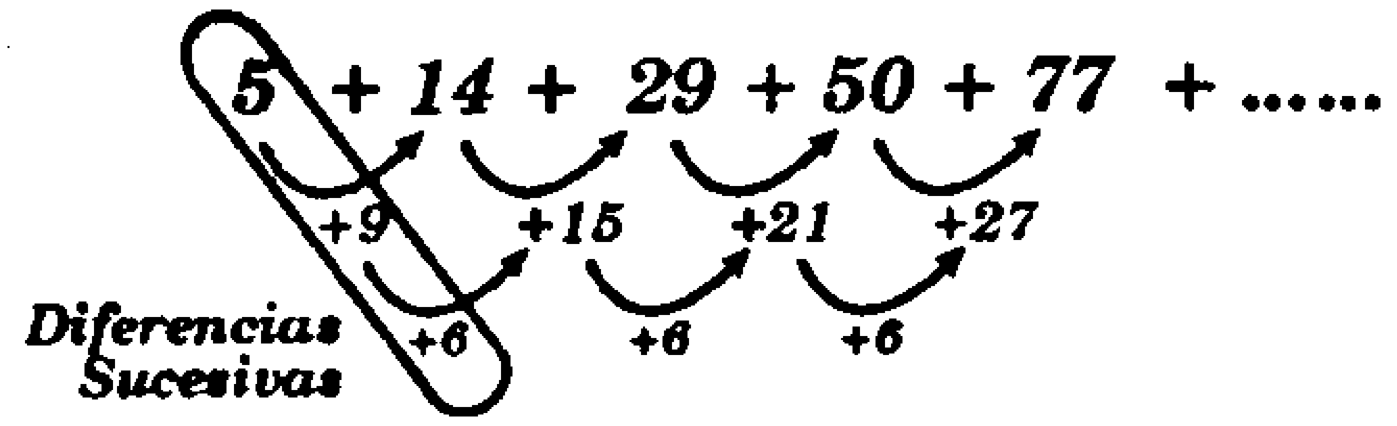
$$=2\left(\frac{12\times 13}{2}\right)^2-5\left(\frac{12\times 13\times 25}{6}\right)+7\times\frac{12\times 13}{2}+48=9512$$

RPTA :"C"

VIII) SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN POLINOMIAL

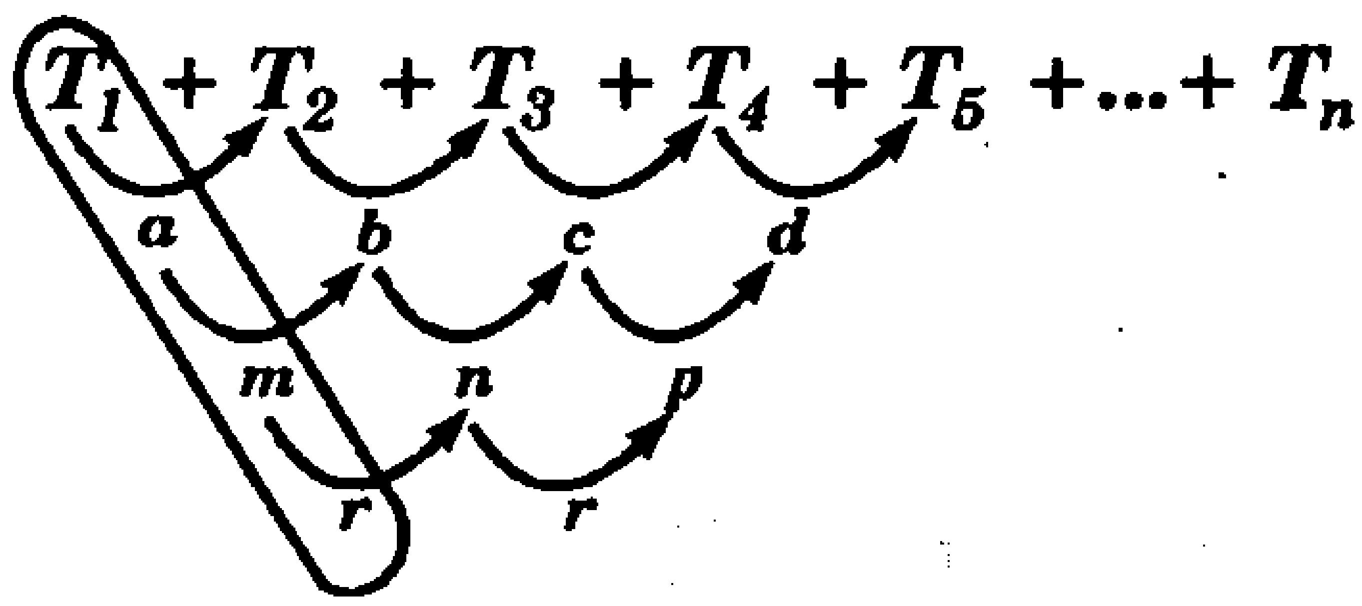
Calcular : $\underbrace{5+14+29+50+77+\ldots\ldots}_{10\ términos}$

RESOLUCIÓN :



MÉTODO PRÁCTICO

Dado :



$$S_n=T_1\ \ C_1^n+aC_2^n+mC_3^n+rC_4^n$$

$$\Rightarrow S_n=nT_1+\frac{n(n-1)a}{1\times 2}+\frac{n(n-1)(n-2)m}{1\times 2\times 3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)r}{1\times 2\times 3\times 4}$$

* En el problema :

$n=10;\ T_1=5;\ a=9;\ m=6;\ r=0$

* Reemplazando en "s_n":

$$S_{10}=10\times 5+\frac{10\times 9\times 9}{2}+\frac{10\times 9\times 8}{6}\times 6=1175$$

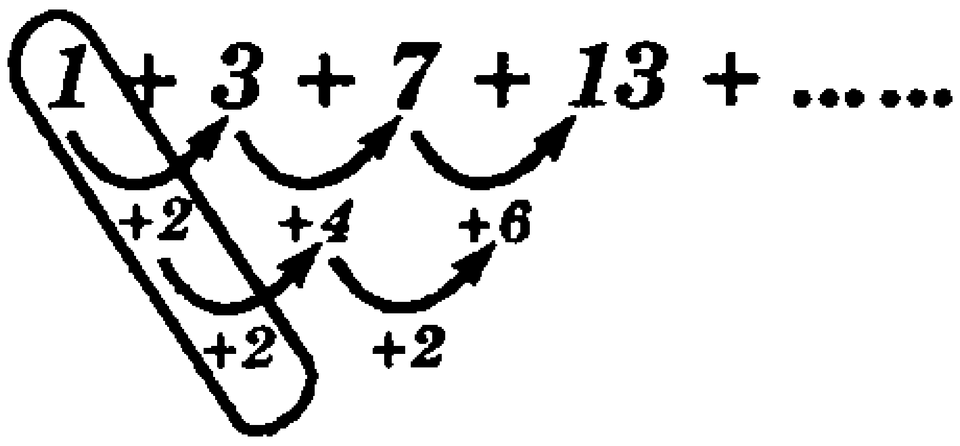
EJEMPLO 1 :

Calcular : $1+3+7+13+21+\ldots$ "20 términos"

A) 4260 *B) 5440* *C) 2680*
D) 4440 *E) 8980*

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el método de las diferencias sucesivas .



$$\Rightarrow S_{20}=1\times 20+\frac{20\times 19\times 2}{1\times 2}+\frac{20\times 19\times 18\times 2}{1\times 2\times 3}=2680$$

RPTA :"C"

IX) SUMA DE TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN POLINOMIAL CONOCIENDO SU TÉRMINO ENÉSIMO (T_n) :

Si : $T_n=7n+2$

calcular "S_n" e indicar su valor para $n=50$.

RESOLUCIÓN :

* Se coloca "T_n" como término genérico de una sumatoria :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}T_k=\sum_{k=1}^{n}(7k+2)=7\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2=\frac{7n(n+1)}{2}+2n$$

* Luego para $n=50$.

$$S_{50}=\frac{7\times 50\times 51}{2}+2(50)=9025$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular "m":

$$m+(m-1)+(m-2)+\dots+3+2+1=105$$

A) 7 B) 12 C) 16 D) 14 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Expresando el miembro izquierdo en una forma conocida :

$$\underbrace{1+2+3+\dots+m}_{\text{Suma de los "m" primeros naturales}}=105 \Rightarrow \frac{m(m+1)}{2}=105$$

$$\Rightarrow m(m+1)=210$$

Debemos expresarlo como el producto de 2 consecutivos

$$m(m+1)=14\times 15$$

* Por comparación : $m=14$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Calcular "y^3" en:

$$1+3+5+\dots+(3y-2)=169$$

A) 64 B) 729 C) 512 D) 125 E) 1000

RESOLUCIÓN :

* Estamos frente a la suma de los primeros impares, con lo que recuerda que es igual: "al cuadrado de la semisuma de extremos"; entonces :

$$\underbrace{1+3+5+\dots+(3y-2)}_{\left(\frac{1+3y-2}{2}\right)^2=169}=169$$

$$\Rightarrow \frac{3y-1}{2}=13 \Rightarrow 3y-1=26 \Rightarrow 3y=27 \Rightarrow y=9$$

* Pero piden : $y^3=9^3=729$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular : $2^2+4^2+6^2+\dots+30^2$

A) 2450 B) 4960 C) 2800 D) 3700

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo la base de cada término :

$$(2\times 1)^2+(2\times 2)^2+(2\times 3)^2+\dots+(2\times 15)^2$$

$$=2^2\times 1^2+2^2\times 2^2+2^2\times 3^2+\dots+2^2\times 15^2$$

* Factorizando "2^2" : $=2^2(1^2+2^2+3^2+\dots+15^2)$

$$=4\left(\frac{15\times 16\times 31}{6}\right)=4960$$

RPTA : "B'

PROBLEMA 4 :

Calcular : $S=1\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}+9\frac{1}{2}+16\frac{1}{2}+\dots+400\frac{1}{2}$

A) 2620 B) 2280 C) 3240 D) 3460 E) 2880

RESOLUCIÓN :

* Separando adecuadamente :

$$S=1+4+9+\dots+400+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S=1^2+2^2+3^2+\dots+20^2+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}}_{20\text{ SUMANDOS}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{20\times 21\times 41}{6}+20\times\frac{1}{2}=2880$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Calcular: $C=\left(150-\frac{1}{3}\right)+\left(30-\frac{1}{6}\right)+\left(6-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{24}\right)+\dots$

A) $\frac{1121}{6}$ B) 1 C) $\frac{1211}{6}$ D) $\frac{1125}{5}$ E) 2

RESOLUCIÓN :

* Asociando adecuadamente :

$$C=(150+30+6+\quad+\infty)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\quad+\infty\right)$$

(razones: $\times\frac{1}{5}$, $\times\frac{1}{5}$; $\times\frac{1}{2}$, $\times\frac{1}{2}$)

Por suma límite :

$$C=\frac{150}{1-\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1121}{6}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

La suma de 20 enteros consecutivos es "S". ¿Cuál es la suma de los 20 siguientes?

A) S+210 B) S+200 C) S+190 D) S+20 E) S+400

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$S=\underbrace{(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+20)}_{20\text{ enteros consecutivos}}$$

* Lo que piden es :

$$S_1=(x+20+1)+(x+20+2)+(x+20+3)$$
$$+(x+20+4)+\dots+(x+20+20)$$

* Separando adecuadamente :

$$S_1=\underbrace{(x+1)+(x+2)+(x+3)+\dots+(x+20)}_{S}+\underbrace{20+20+\dots+20}_{20\text{ sumandos}}$$

$$\Rightarrow S_1=S+20\times 20=S+400$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Lucha y Pili leen una novela de Vargas Llosa ; Lucha lee *10* páginas diarias y Pili lee *1* página el *1^er^* día , *2* el *2^do^* día , *3* el *3^er^* día y así sucesivamente . ¿Después de cuántos días coincidirán si empiezan al mismo tiempo?

A) 10 *B) 20* *C) 19* *D) 21* *E) 42*

RESOLUCIÓN :

* Sea *"n"* : número de días .
* Según enunciado se planteará :

$$\underbrace{10+10+10+\ldots+10}_{\substack{\text{"n" días}\\ \text{(Páginas leídas por Lucha)}}} = \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\substack{\text{"n" días}\\ \text{(Páginas leídas por Pili)}}}$$

Coinciden

$$\Rightarrow 10n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 19=n$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Determine la suma de los *100* primeros términos de la sucesión :

$$2;\ 5;\ 5;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 3;\ \ldots$$

A) 1 519 *B) 1 525* *C) 1 569* *D) 1575* *E) 1581*

RESOLUCIÓN :

* En la sucesión :

100 términos

$$(2;5);(5;3);(4;5);(7;3);\ldots$$

$$\quad 7 \qquad 8 \qquad 9 \qquad 10 \ldots$$

$$+6\begin{cases} 1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ\ 4^\circ \ldots\ldots 50^\circ \\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ \ldots ;56 \end{cases}$$

50 términos

$$7+8+9+10+11+\ldots+56=\left(\frac{7+56}{2}\right)50=1575$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

En el siguiente triángulo numérico , hallar la suma de las diez primeras filas.

$$\begin{array}{ll} F_1 \longrightarrow & 1 \\ F_2 \longrightarrow & 2\ \ 3 \\ F_3 \longrightarrow & 4\ \ 5\ \ 6 \\ F_4 \longrightarrow & 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10 \\ & \vdots \end{array}$$

A) 13250 *B) 13255* *C) 22155*
D) 11350 *E) 5565*

RESOLUCIÓN :

* Redistribuyendo en forma horizontal:

$$\begin{array}{c} F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{10} \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \underbrace{1+\overbrace{2+3}+\overbrace{4+5+6}+\ldots\ldots} \end{array}$$

$$\text{Número de Términos}: 1+2+3+\ldots+\frac{10\times 11}{2}=105$$

* Luego nos piden :

$$1+2+3+\ldots+105=\frac{105\times 106}{2}=5565$$

RPTA : "E"

OTRO MÉTODO :

$$\begin{array}{llll} & & & 1=\frac{1\times 2}{2} \\ & & 2 & 3=\frac{2\times 3}{2} \\ & 4 & 5 & 6=\frac{3\times 4}{2} \\ 7 & 8 & 9 & 10=\frac{4\times 5}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & =\frac{10\times 11}{2}=105 \end{array}$$

Números Triángulares

* Luego piden :

$$1+2+3+\ldots+105=\frac{105\times 106}{2}=5565$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

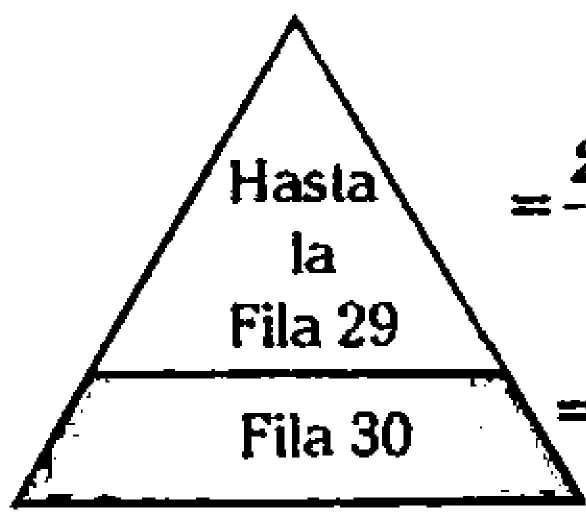
Se disponen los números naturales , según el arreglo adjunto :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2\quad 3 \\ 6\quad 5\quad 4 \\ 7\quad 8\quad 9\quad 10 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Calcular la suma de los números de la fila *30* .

A) 12742 *B) 13892* *C) 18734*
D) 18645 *E) 13515*

RESOLUCIÓN :



$$=\frac{29\times 30}{2}=435\ \text{términos}$$

$$=\frac{30\times 31}{2}=465\ \text{términos}$$

* Del esquema:

$$\binom{\text{Hasta la}}{\text{fila 29}}+\text{Fila 30}=\binom{\text{Hasta la}}{\text{fila 30}}$$

$$\Rightarrow \text{Fila 30}=\binom{\text{Hasta la}}{\text{fila 30}}-\binom{\text{Hasta la}}{\text{fila 29}}$$

$\Rightarrow$ *Fila 30* $= (1+2+3+...+465)-(1+2+3+...+435)$

$\Rightarrow$ *Fila 30* $=\dfrac{465\times 466}{2}-\dfrac{435\times 436}{2}=13515$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Determinar la suma de la fila *10* en el siguiente arreglo :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 6 & & 11 & & \\ & 16 & & 21 & & 26 & \\ 31 & & 36 & & 41 & & 46 \end{array}$$

A) 2185 *B) 3140* *C) 2355* *D) 2435* *E) 2485*

RESOLUCIÓN :

$$\text{Fila } 10=\begin{pmatrix}\text{Hasta la}\\ \text{Fila } 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Hasta la}\\ \text{Fila } 9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Fila } 10=\underbrace{(1+6+11...)}_{\frac{10\times 11}{2}=55 \text{ términos}}-\underbrace{(1+6+11...)}_{\frac{9\times 10}{2}=45 \text{ términos}}$$

$$\Rightarrow \text{Fila } 10=\left(\frac{T_{46}+T_{55}}{2}\right)\times 10$$

* Pero : $T_1=1$; $r=5$; $T_n=a_1+(n-1)r$

$\Rightarrow T_{46}=1+(46-1)5=226$

$\Rightarrow T_{55}=1+(55-1)5=271$

* Luego : $\text{Fila } 10=\left(\dfrac{226+271}{2}\right)\times 10=2485$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

En el siguiente arreglo triangular calcular la suma de los términos de F_{20} :

$$\begin{array}{lccc} F_1 \longrightarrow & & 1 & \\ F_2 \longrightarrow & 4 & & 9 \\ F_3 \longrightarrow 16 & & 25 & & 36 \\ \vdots & & & \\ F_{20} \longrightarrow & & & \end{array}$$

E indicar la suma de cifras del resultado .

A) 16 *B) 15* *C) 17* *D) 19* *E) 21*

RESOLUCIÓN :

* Piden :

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+...}_{\frac{20\times 21}{2}=210 \text{ Términos}}-\underbrace{1^2+2^2+3^2+...}_{\frac{19\times 20}{2}=190 \text{ Términos}}$$

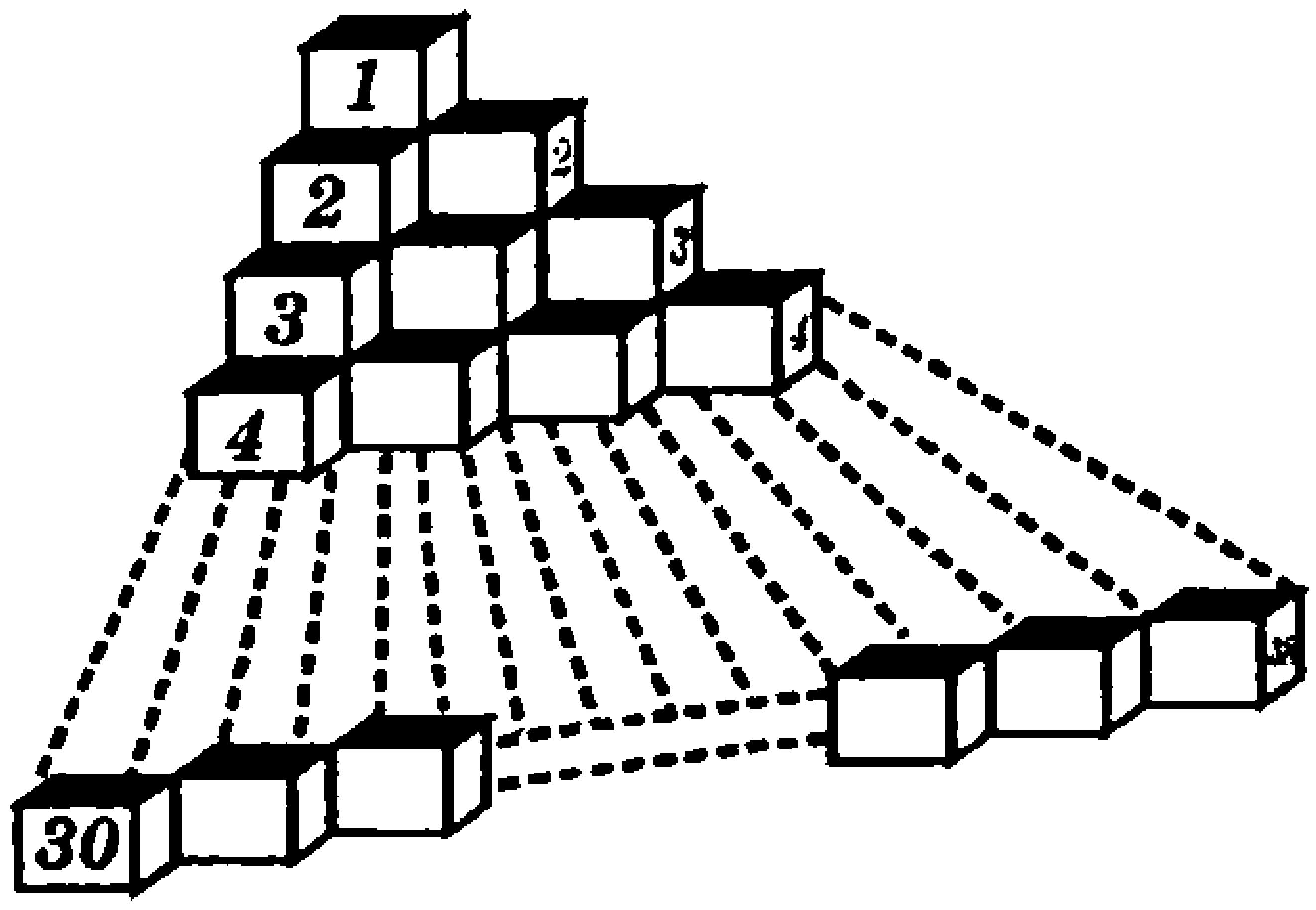
$$=\frac{210\times 211\times 421}{6}-\frac{190\times 191\times 381}{6}=1045240$$

* Piden : $1+0+4+5+2+4+0=16$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

¿Cuántos cubos pintados hay?



A) 300
B) 900
C) 455
D) 465
E) 930

RESOLUCIÓN :

* Contabilizando desde la parte superior se tendrá : "*1* cubito , más *2* cubitos , más *3* cubitos y así sucesivamente hasta más *30*", con lo cual se obtendrá :

$$1+2+3+...+30=\frac{30\times 31}{2}=465$$

Cubitos pintados .

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Hallar la suma de los *30* primeros múltiplos de *5* .

A) 2 500 *B) 1 955* *C) 2 325* *D) 2 242*

RESOLUCIÓN :

* Piden :

$5\times 1+5\times 2+5\times 3+5\times 4+...+5\times 30$

$=5(1+2+3+...+30)=5\left(\dfrac{30\times 31}{2}\right)=5\times 15\times 31=2325$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Calcular :

$$S=5+12+21+...+480$$

A) 3640 *B) 3590* *C) 3710* *D) 3340*

RESOLUCIÓN :

* Dando una forma adecuada cada uno de los sumandos :

$$S=1\times 5+2\times 6+3\times 7+...+20\times 24$$

* Ahora:

$S=1\times(1+4)+2\times(2+4)+3\times(3+4)+...+20\times(20+4)$

* Efectuando las operaciones :

$S=1^2+1\times 4+2^2+2\times 4+3^2+3\times 4+...+20^2+20\times 4$

* Agrupando :

$S=(1^2+2^2+3^2+...+20^2)+4(1+2+3+...+20)$

* Aplicando la fórmula adecuada :

$$S=\frac{20\times 21\times 41}{6}+4\times\frac{20\times 21}{2}=3710$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Hallar la suma total de siguiente arreglo:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 60$$
$$4 + 6 + \ldots + 60$$
$$6 + \ldots + 60$$
$$\vdots$$
$$60$$

A) 9455 B) 95560 C) 18910 D) 12431

RESOLUCIÓN :

* Tomando los sumandos diagonalmente :

$$1\times 2 + 2\times 4 + 3\times 6 + \ldots + 30\times 60$$

Se deduce

* Dando una forma conocida :

$$= 2\times 1^2 + 2\times 2^2 + 2\times 3^2 + \ldots + 2\times 30^2$$

$$= 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 30^2) = 2\left(\frac{30\times 31\times 61}{6}\right) = 18910$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Hallar el resultado de sumar :

$$20 + 19 + 18 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$
$$20 + 19 + 18 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2$$
$$20 + 19 + 18 + \ldots + 5 + 4 + 3$$
$$20 + 19 + 18 + \ldots + 5 + 4$$
$$20 + 19 + 18 + \ldots + 5$$
$$\vdots$$
$$20 + 19$$
$$20$$

A) 3450 B) 1870 C) 4070 D) 2870 E) 4230

RESOLUCIÓN :

* Se nota que hay :

$$20 + 20 + \ldots + 20 + 19 + 19 + \ldots + 19 +$$

$$\underbrace{20+20+\ldots+20}_{20\text{ sumandos}} + \underbrace{19+19+\ldots+19}_{19\text{ sumandos}} + \ldots + \underbrace{2+2}_{2\text{ término}} + \underbrace{1}_{1\text{ términos}}$$

$$= 20(20) + 19(19) + 18(18) + \ldots + 2(2) + 1(1)$$

$$= 20^2 + 19^2 + 18^2 + \ldots + 2^2 + 1^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 18^2 + 19^2 + 20^2 = \frac{20\times 21\times 41}{6} = 2870$$

RPTA : "D"

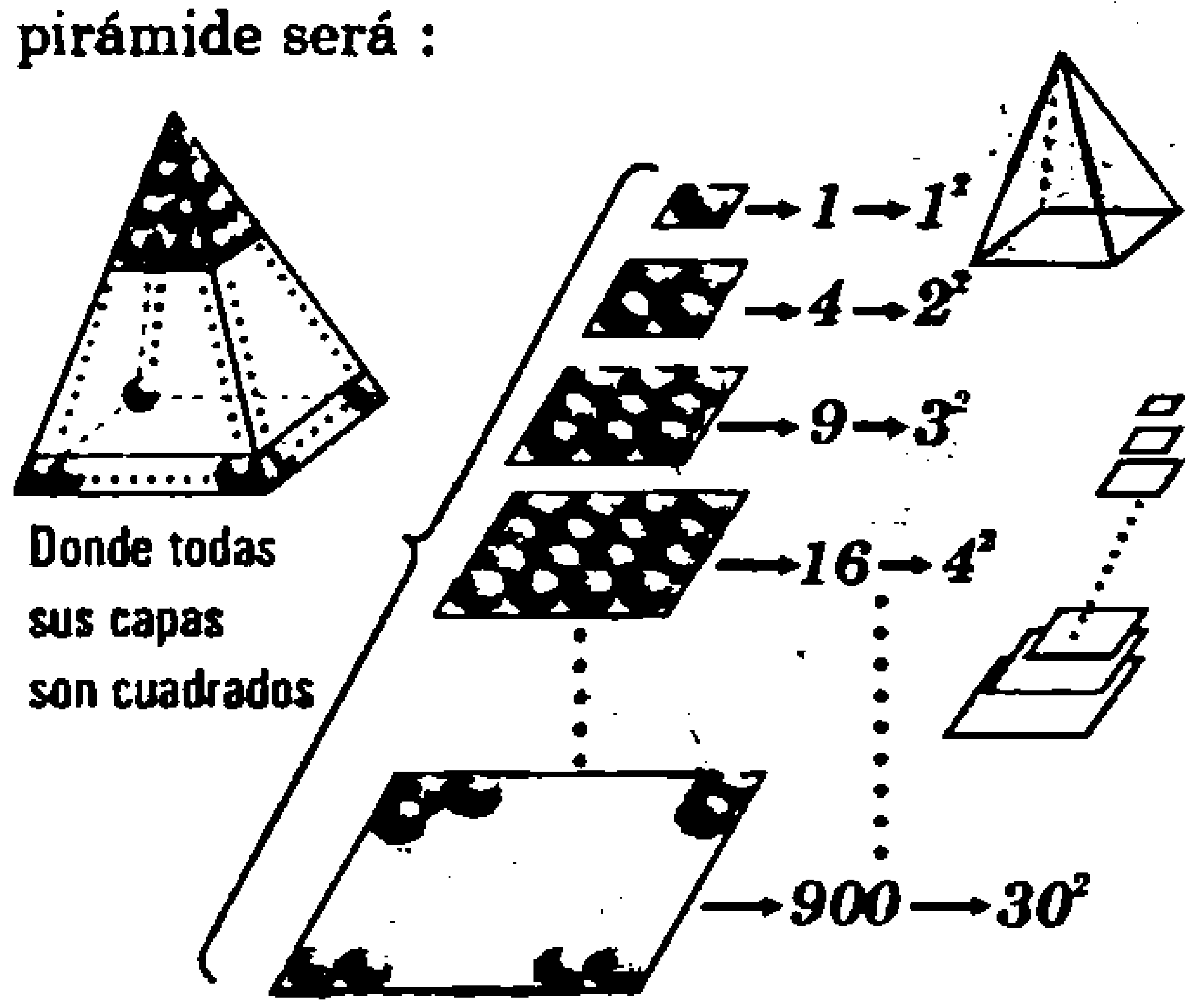
PROBLEMA 18 :

En la base cuadrangular de una pirámide se ha usado *900* bolas ¿Cuántas bolas se han usado en total?

A) 9215 B) 7215 C) 9455 D) 3025 E) 17085

RESOLUCIÓN :

* La pirámide será :



* En total se a usado :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 30^2 = \frac{30\times 31\times 61}{6} = 9455$$

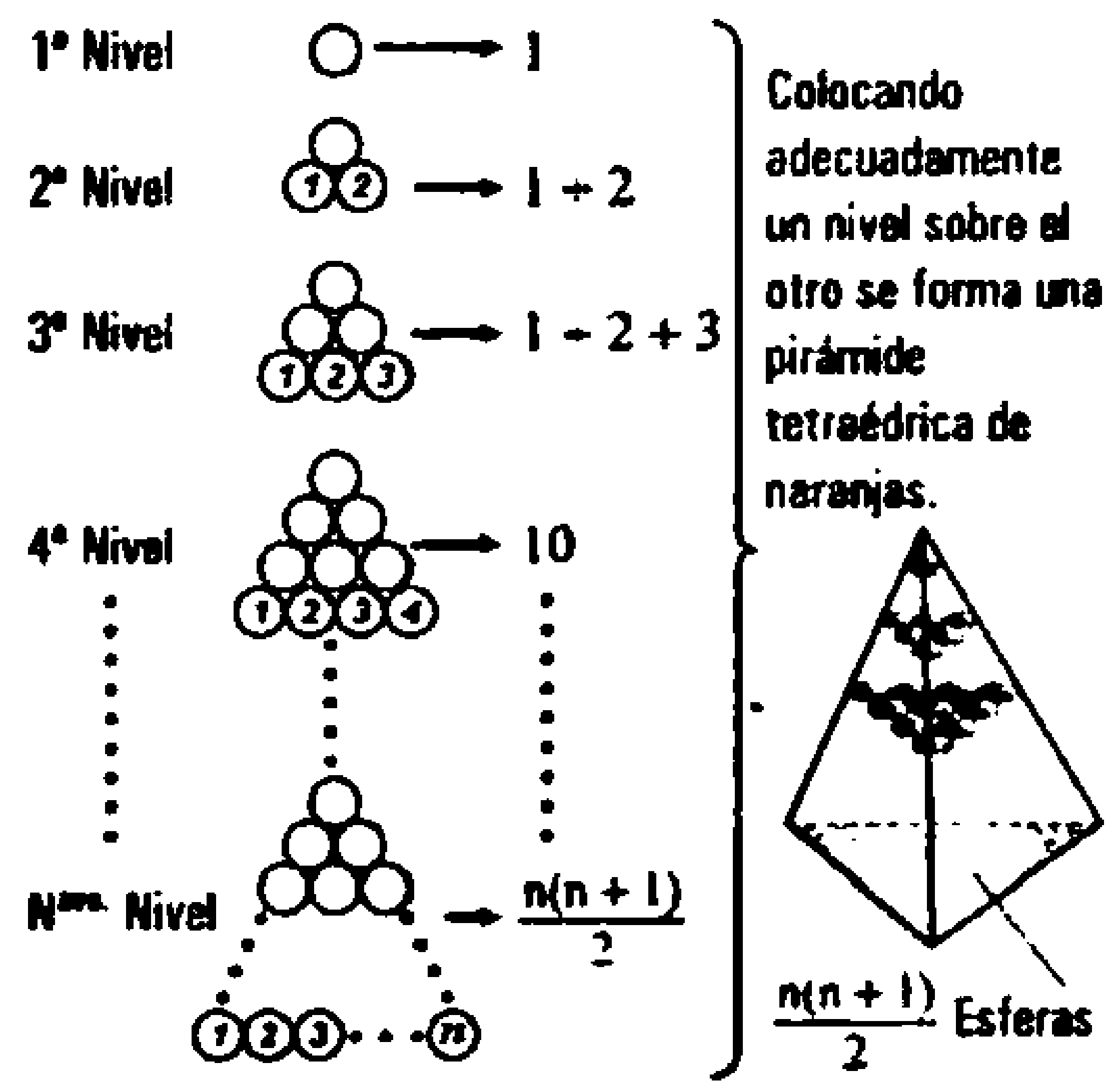
RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Se forma una pirámide triangular regular (Tetraedro) con *1540* esferas ¿Cuántas esferas conforman la base?

A) 200 B) 930 C) 210 D) 190 E) 420

RESOLUCIÓN :



$$\overbrace{1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 1 + 2 + 3 + \ldots + n}^{\text{Total de esferas} = 1540}$$

$$\frac{1\times 2}{2} + \frac{2\times 3}{2} + \frac{3\times 4}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = 1540$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1)) = 1540$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right) = 1540$$

$$n(n+1)(n+2) = 2\times 3\times 11\times 7\times 20$$

$$n(n+1)(n+2) = 20\times 21\times 22$$

$$n = 20$$

♦ Luego en la base habrá : $\frac{20\times 21}{2} = 210$ esferas

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

Hallar la suma de los *50* primeros términos de la sucesión : $\dfrac{1}{1\times 4};\dfrac{1}{4\times 7};\dfrac{1}{7\times 10};...$

A) 1 B) $\dfrac{151}{150}$ C) $\dfrac{50}{151}$ D) $\dfrac{161}{110}$

RESOLUCIÓN :

* Hallando el término *50* , para lo cual hay que deducir que :

$$T_n=\frac{1}{(3n-2)(...)}\Rightarrow T_{50}=\frac{1}{148\times 151}$$

(+3)

$$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+...+\frac{1}{148\times 151}=\underbrace{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{151}\right]}_{\text{Método Práctico}}=\frac{50}{151}$$

(+3) (+3)

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Calcular el valor de : *"a+b"* sabiendo que:

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+......+\frac{1}{a\times b}=\frac{11}{23}$$

A) 42 B) 44 C) 24 D) 48 E) 36

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que $a+2=b$; y aplicando el método práctico tendremos :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{b}\right]=\frac{11}{23}\Rightarrow \begin{matrix} b=23 \\ a=21 \end{matrix}$$

* Luego : $a+b=44$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Calcular : $\underbrace{\dfrac{1}{2\times 6}+\dfrac{1}{4\times 9}+\dfrac{1}{6\times 12}+...}_{20 \text{ sumandos}}$

A) $\dfrac{7}{20}$ B) $\dfrac{21}{43}$ C) $\dfrac{10}{63}$ D) $\dfrac{17}{29}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Dando una forma conocida:

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{20\times 21}\right]=\frac{1}{6}\left[\frac{20}{21}\right]=\frac{10}{63}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Calcular : $\underbrace{\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{2}{3\times 5}+\dfrac{3}{5\times 8}+\dfrac{4}{8\times 12}+......}_{30 \text{ sumandos}}$

A) $\dfrac{17}{237}$ B) $\dfrac{465}{934}$ C) $\dfrac{401}{948}$ D) $\dfrac{410}{29}$

RESOLUCIÓN :

* Piden :

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{3}{5\times 8}+\frac{4}{8\times 12}+...+\frac{30}{...\times U}$$

(+30)

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{U-30}-\frac{1}{U}=\frac{1}{2}-\frac{1}{U}$$

♦ Cálculo de *«U»* para lo cual consideraremos:

$$3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 12\ ,......U$$

(+2 , +3 , +4)

$$+2+3+4+...+30$$

$$\Rightarrow U=3+2+3+4+...+30$$

$$\Rightarrow U=2+1+2+3+4+...+30=2+\frac{30\times 31}{2}\Rightarrow U=467$$

* Luego , la expresión a calcular será :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{467}=\frac{465}{934}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Calcular : $E=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^3}+\dfrac{5}{3^5}+\dfrac{7}{3^7}+...\infty$

A) 15/32 B) 15/16 C) 15/64 D) 1 E) 12/25

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por la razón geométrica de los denominadores , para luego restar :

$$E=\frac{1}{3}+\frac{3}{3^3}+\frac{5}{3^5}+\frac{7}{3^7}+......\infty$$

$$(\times 9)\quad 9E=3+\frac{3}{3}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^5}+......\infty \quad (-)$$

$$8E=3+\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+......\infty}_{\text{Suma límite}}$$

$$\Rightarrow 8E=3+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}\Rightarrow E=\frac{15}{32}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 25 :

Calcular el valor de :

$$R=\frac{2}{12}+\frac{7}{144}+\frac{37}{1728}+...$$

A) 1 B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{17}{66}$ D) $\dfrac{13}{77}$ E) $\dfrac{1}{9}$

RESOLUCIÓN :

* Dando una forma conocida :

$$R=\frac{1+1}{12}+\frac{6+1}{12^2}+\frac{6^2+1}{12^3}+\dots$$

$$R=\left(\frac{1}{12}+\frac{6}{12^2}+\frac{6^2}{12^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\dots\infty\right)$$

$\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{12}$ $\times\frac{1}{12}$

$$\Rightarrow R=\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}}=\frac{17}{66}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Calcular "S", si :

$$S=\underbrace{22+23+24+25+26+27+\dots}_{100\ sumandos}$$

A) 8345 B) 7150 C) 817 D) 928

RESOLUCIÓN :

* Estamos frente a la suma de los términos de una sucesión aritmética , luego debemos aplicar :

$$S=\left(\frac{a_1+U}{2}\right)n \text{ y } U=a_1+(n-1)r$$

* Luego : $S=\underbrace{22+23+24+\dots\dots+U}_{100\ Términos}$

$r=1;\ n=100;\ a_1=22;\ U=22+99(1)=121$

* Entonces :

$$S=\left(\frac{22+121}{2}\right)100=7150$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

¿Cuántos términos hay que considerar en las dos sumas siguientes para que tengan el mismo valor?

$$S_1=1+2+3+4+\dots\dots$$
$$S_2=100+98+96+94+\dots\dots$$

A) 61 B) 100 C) 67 D) 50 E) 48

RESOLUCIÓN :

Consideremos "n" términos para cada serie:

- $S_1=\underbrace{1+2+3+\quad+n}_{n\ términos}=\frac{n(n+1)}{2}$
- $S_2=\underbrace{100+98+96+\quad+U}_{"n"\ términos}$ (Suma en progresión aritmética), con diferencias -2, -2

* Pero : $U=100+(n-1)(-2)=102-2n$

$$\Rightarrow S_2=\left(\frac{100+102-2n}{2}\right)n=(101-n)n$$

- Ahora según condición :

$$S_1=S_2\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=(101-n)n$$

$$\Rightarrow n+1=202-2n\Rightarrow 3n=201\Rightarrow n=67$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

Sabiendo que la suma de ***20*** números impares consecutivos es ***400*** , hallar la suma de los ***20*** posteriores a los ***20*** siguientes números impares consecutivos , si todos son positivos .

A) 800 B) 1 200 C) 2 100
D) 2 000 E) 4 000

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$$\underbrace{1+3+5+\dots\dots\dots}_{"n"\ sumandos}=n^2 \quad (\ )^2$$

- Luego como el primer dato señala :

$$\underbrace{\text{Suma de Impares}}_{20\ términos}=400=20^2 \quad (\ )^2$$

- Entonces se trata de los ***20*** primeros impares , luego:

"x": incógnita

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+3+5+}_{20\ términos}+\underbrace{\text{suma de los 20 siguientes}}_{20\ términos}}_{\text{Suma de los 40 primeros impares}}+\underbrace{\text{suma de los 20 posteriores}}_{20\ términos}}_{\text{Suma de los 60 primeros impares}}$$

- De donde se deduce : $40^2+x=60^2\Rightarrow x=2000$

RPTA : "D"

PROBLEMA 29 :

Hallar "S" :

$$S=1\times3+3\times5+5\times7+\dots+49\times51$$

A) 22 075 B) 22050 C) 21 025
D) 15 625 E) 21 525

RESOLUCIÓN :

* Haciendo los siguientes artificios :

$$1\times3=(2-1)(2+1)=2^2-1^2=2^2-1$$
$$3\times5=(4-1)(4+1)=4^2-1^2=4^2-1$$
$$\vdots$$
$$49\times51=(50-1)(50+1)=50^2-1^2=50^2-1$$

- Luego :

$$S=2^2-1+4^2-1+6^2-1+\dots+50^2-1$$

- Agrupando adecuadamente :

$$S=2^2(1^2+2^2+3^2+\dots+25^2)-\underbrace{(1+1+1+\dots+1)}_{25\ términos}$$

$$\Rightarrow S=4\left(\frac{25\times26\times51}{6}\right)-25(1)=22075$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 30 :

Hallar la suma de los *20* primeros términos :

$$S = 1\times3 - 3\times5 + 5\times7 - 7\times9 + \ldots$$

A) –820 B) –700 C) 820 D) –840 E) 0

RESOLUCIÓN :

$$S = \overbrace{\underbrace{3-15}+\underbrace{35-63}+\underbrace{99-143}+\ldots\ldots}^{20\ \text{términos}}$$

$$S = \underbrace{-12 - 28 - 44 - \ldots\ldots - U}_{10\ \text{términos}} \qquad (-16,\ -16)$$

$$\Rightarrow U = a_1 + (n-1)r = -12 + 9(-16) = -156$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{a_1 + U}{2}\right)n = \left(\frac{-12-156}{2}\right)10 = -840$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 31 :

Calcular el valor de *"S"* :

$$S = \underbrace{\frac{4}{1\times3} - \frac{8}{3\times5} + \frac{12}{5\times7} - \frac{16}{7\times9} + \ldots\ldots}_{20\ \text{términos}}$$

A) 19/20 B) 21/20 C) 39/40
D) 41/40 E) 40/41

RESOLUCIÓN :

* Considerar :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab} \Rightarrow \frac{\overbrace{b+a}^{\text{Suma}}}{\underbrace{ab}_{\text{Producto}}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

* Luego : $\dfrac{4}{1\times3} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{8}{3\times5} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}$

* Dado :

$$S = \underbrace{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) + \ldots}_{20\ \text{Paréntesis}}$$

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots - \frac{1}{39} - \frac{1}{41}$$

$$S = 1 - \frac{1}{41} = \frac{40}{41}$$

Es *20* avo. número impar, es decir "*2(20)–1*", se debe deducir

RPTA : "E"

PROBLEMA 32 :

Calcular el valor de *"x"* :

$$4 + 7 + 10 + \ldots\ldots + x = 175$$

A) 26 B) 31 C) 30 D) 29 E) 28

RESOLUCIÓN :

$$\underbrace{\overset{t_1}{4} + 7 + 10 + \ldots + \overset{U}{x}}_{} = 175 \qquad (+3,\ +3)$$

$$\left(\frac{T_{1+U}}{2}\right)n \text{ , donde : } n = \frac{U - T_1}{r} + 1$$

* Entonces :

$$\left(\frac{4+x}{2}\right)\left(\frac{x-4}{3}+1\right) = 175 \Rightarrow (x+4)(x-1) = 1050$$

$$x^2 + 3x - 4 = 1050$$

$$x^2 + 3x - 1054$$

$$x \qquad -31 \Rightarrow x - 31 = 0 \Rightarrow x = 31$$

$$x \qquad +34 \Rightarrow x = -34$$

RPTA : "B"

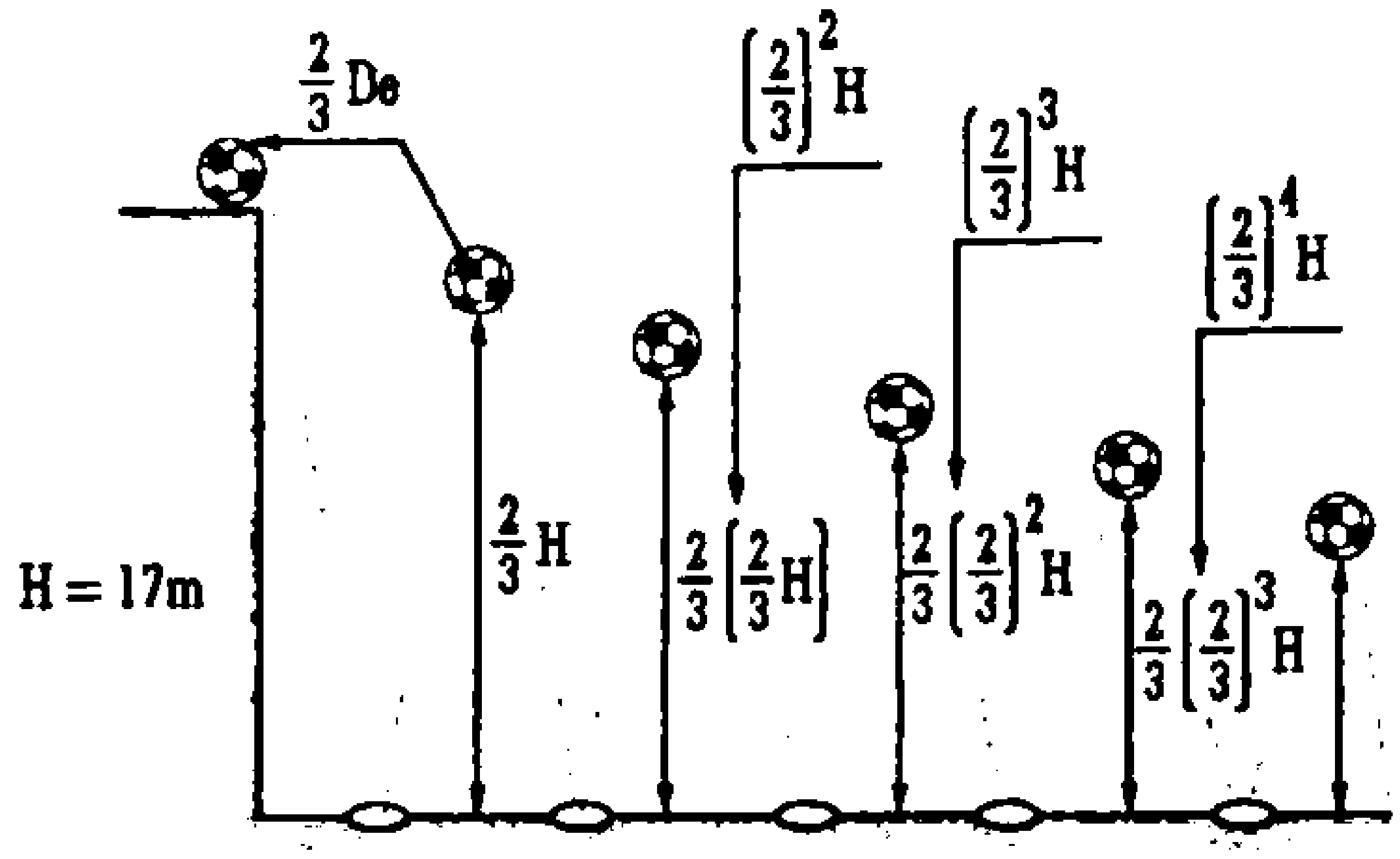
PROBLEMA 33 :

Una pelota se suelta desde una altura de *17* metros . Si en cada rebote alcanza una altura igual a los *2/3* de la altura anterior , calcular la distancia total recorrida hasta que se detenga .

A) 85 B) 84 m C) 120 m D) 127

RESOLUCIÓN :

* Graficando el suceso de la pelota :



* Se observa que el recorrido total es :

El doble, porque es subida y bajada

$$S = H + 2\left(\frac{2}{3}H\right) + 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 H\right) + 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 H\right) + \ldots\infty$$

$$\Rightarrow S = H + 2H\underbrace{\left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right)}_{\text{Calculamos la suma límite}}$$

$$\Rightarrow S = H + 2H\left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}}\right) \Rightarrow S = H + 2H(2) = 5H$$

♦ Pero : $H=17\ m \Rightarrow S=5(17\ m)=85\ m$

RPTA : "A"

OBSERVACIÓN :

• La expresión : $E=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+...\infty$

• Podemos también calcular así : Factorizamos la razón a partir del *2do* . término y tendremos :

$$E=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...\infty\right)}_{E}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(E) \Rightarrow \frac{1}{3}E=\frac{2}{3} \Rightarrow E=2$$

PROBLEMA 34 :

Samuel observó que su secretaria había hecho *37* llamadas telefónicas hasta el *14* de Diciembre . El día *15* hizo *2* llamadas , el *16* hizo *4* llamadas , el *17* hizo *6* llamadas y así consecutivamente hasta el fin de mes. ¿Cuál es el total de llamadas que hizo la secretaria en el mes de Diciembre?

A) 361 B) 240 C) 280 D) 330 E) 343

RESOLUCIÓN :

Día: $\overbrace{(1^\circ - 14^\circ)\ 15^\circ\ 16^\circ\ 17^\circ\ 18^\circ\ \ \ 31^\circ}^{\text{Diciembre <> 31 días}}$

$$S=\underbrace{37+2+4+6+8+\ \ +2(17)}_{17\ \text{términos}}$$

$$S=37+2(1+2+3+...+17) \Rightarrow S=37+2\left(\frac{17\times 18}{2}\right)=343$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 35 :

Se contrata un obrero para cavar en busca de fósiles prometiéndole pagar una suma por el primer fósil que encuentre y que se le irá duplicando dicha suma por cada nuevo fósil encontrado. Si encuentra *12* fósiles y recibe *$ 12284* ¿Cuánto le pagarán por el quinto fósil?

A) $ 84 B) $ 48 C) $ 58 D) $ 64 E) $ 36

RESOLUCIÓN :

1°	2°	3°	4°	5°	....	1°
x	2x	4x	8x	16x	...	...

Pago por el 1er. Fósil (en soles)

* Condición :

$$x+2x+4x+8x+...=12285$$

$$x\,[1+2^1+2^2+2^3+...+2^{11}]=12285$$

* Suma en progresión geométrica finita :

$$x\left(\frac{2^{12}-1}{2-1}\right)=12285$$

$$x\times\frac{4095}{1}=12285 \Rightarrow x=3$$

* Luego por el quinto fósil le pagaron : ***16(3) = 48***

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Un ciclista parte de *"A"* hacia *"B"* con una velocidad constante de *8km./h.* Después de *11,5* horas sale de *"A"* otro ciclista con una velocidad de *1km./h.* en la primera hora , *2km./h.* en la segunda hora , *3km./h.* en la tercera hora y así sucesivamente con la dirección a *"B"* . Después de cuantas hora el segundo alcanza al primero .

A) 22 B) 20 C) 24 D) 23 E) 25

RESOLUCIÓN :

* Después *de 11,5 h.* el primero sacó una ventaja al segundo de : $C = 8km/h \times 11,5h. = 92\ km.$

* Luego para que el *2°* alcance al *1°* , debe descontar esa ventaja , es decir para un mismo tiempo , el *2°* deberá recorrer ***92 km.*** más, con lo que plantearemos :

$$\overbrace{\underbrace{1+2+3+.....}_{T\ \text{Sumandos}}}^{\text{(Recorrido por el 2do. en T horas)}}=\overbrace{\underbrace{8+8+8+...+8}_{\text{"T" Sumandos}}}^{\text{(Recorrido por el 1ro. en T horas)}}+92$$

$$\frac{T(T+1)}{2}=8T+92 \Rightarrow T^2+T=16T+184$$

$$\Rightarrow T^2-15T-184=0$$

* Factorizando : $(T-23)(T+8)=0$

$$\Rightarrow T-23=0 \Rightarrow T=23$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

El mayor número natural *"n"* para el cual la suma:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{n(n+1)}$$

satisface : $S_n \le \frac{66}{71}$; es :

A) 12 B) 13 C) 11 D) 10 E) 14

RESOLUCIÓN :

$$S_n=\underbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}}_{\text{Suma de las inversas de los 1ros. productos binarios (ver teoría)}}=\frac{n}{n+1}$$

• Por condición :

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{66}{71} \Rightarrow 71n \le 66n+66 \Rightarrow 5n \le 66 \Rightarrow n \le 13,2$$

• Luego el mayor número natural que puede tomar "*n*" será *13* .

RPTA : "B"

PROBLEMA 38 :

Calcular :

$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{19^2}+\frac{1}{20^2}}$$

A) $19\frac{1}{3}$ B) $18\frac{2}{9}$ C) $20\frac{1}{3}$ D) $18\frac{9}{20}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Operando en cada término :

$$\sqrt{\frac{6^2+3^2+2^2}{6^2}}+\sqrt{\frac{12^2+4^2+3^2}{12^2}}+\sqrt{\frac{20^2+5^2+4^2}{20^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{380^2+20^2+19^2}{380^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{49}{6^2}}+\sqrt{\frac{169}{12^2}}+\sqrt{\frac{441}{20^2}}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{13}{12}+\frac{21}{20}+\ldots\ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{6}\right)+\left(1+\frac{1}{12}\right)+\left(1+\frac{1}{20}\right)+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2\times3}\right)+\left(1+\frac{1}{3\times4}\right)+\left(1+\frac{1}{4\times5}\right)+\ldots+\underbrace{\left(1+\frac{1}{19\times20}\right)}_{\text{Se deduce}}$$

* Asociando adecuadamente :

$$=\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{\text{"18 sumandos"}}+\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{19\times20}\right)$$

$$=18(1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)=18+\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=18+\frac{9}{20}=18\frac{9}{20}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 39 :

En una *P . A .* la suma de los "*n*" primeros términos está dada por la siguienté relación :

$$S_n=\frac{n(3n+13)}{2}$$

Hallar el término de lugar *400*.

A) 1205 B) 1203 C) 1200 D) 1208 E) 1211

RESOLUCIÓN :

$$\overbrace{\underbrace{T_1+T_2+T_3+\ldots+T_{399}}_{S_{399}}+T_{400}}^{S_{400}}$$

* Se observa que :

$$\Rightarrow S_{399}+T_{400}=S_{400}\Rightarrow T_{400}=S_{400}-S_{399}$$

$$\Rightarrow T_{400}=\frac{400(3\times400+13)}{2}-\frac{399(3\times399+13)}{2}$$

$$\Rightarrow T_{400}=242600-241395=1205$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Indicar la suma de cifras del resultado de :

$$9+99+999+\ldots\ldots+\underbrace{999\ldots99}_{40\text{ cifras}}$$

A) 45 B) 90 C) 99 D) 360 E) 40

RESOLUCIÓN :

* Colocando como potencias de "*10*" :

$$10^1-1+10^2-1+10^3-1+\ldots+10^{40}-1$$

* Asociando adecuadamente :

$$\underbrace{10^{40}+10^{39}+\ldots+10^3+10^2+10}_{\text{Proviene de la descomposición polinómica de :}}-\underbrace{(1+1+1+\ldots+1)}_{\text{"40 sumandos"}}$$

$$\underbrace{111\ldots\ldots\ldots110}_{\text{"40 cifras uno"}}-40(1)$$

* Colocando verticalmente :

$$\begin{array}{r} \overbrace{111\ldots\ldots1110}^{\text{"41 cifras"}}\ - \\ 40 \\ \hline \underbrace{111\ldots\ldots1070}_{\text{"41 cifras"}} \end{array}$$

* Piden : $\underbrace{1+1+1+\ldots\ldots+1}_{\text{"38 sumandos"}}+0+7+0=45$

RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

Calcular "*S*" :

$$S=\underbrace{1\times5-2\times6+3\times7-4\times8+5\times9-\ldots}_{\text{"20 Productos"}}$$

A) 250 B) –250 C) 320 D) –320 E) –800

RESOLUCIÓN :

* Operando de *2* en *2* términos :

$$S=\underbrace{1\times5-2\times6}+\underbrace{3\times7-4\times8}+\underbrace{5\times9-6\times10}+\ldots\ldots$$

$$S=\ -7\quad+\ (-11)\quad+\ (-15)\ +\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow S=-\underbrace{(7+11+15+\ldots\ldots\ldots)}_{\text{"10 Sumandos"}}$$

$$S=-(\ 7+11+15+\ldots\ldots+\underbrace{10(4)+3}_{\text{Décimo término}})$$

(+4, +4)

* Considerando la suma en progresión aritmética :

$$S=-\left(\frac{7+43}{2}\right)\times10=-250$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 42 :

La suma del máximo número de triángulos de la figura $n+1$ y el máximo número de cuadriláteros de la figura $n-1$ es :

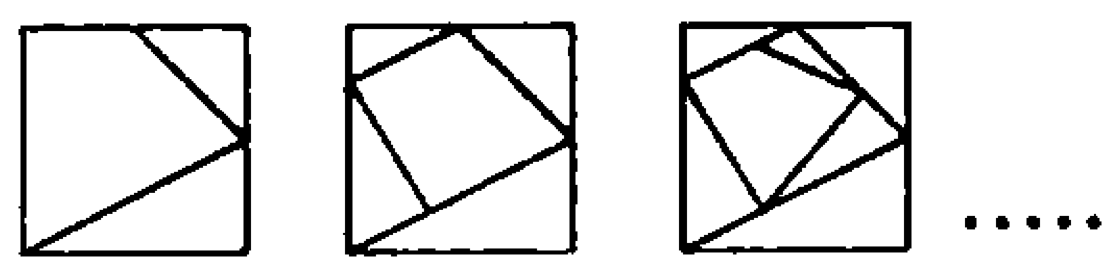


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 .....

A) $n(n+1)$ B) $4n+1$ C) $3(n+1)$
D) $4(n+1)$ E) $2n+3$

RESOLUCIÓN :

* Por inducción (contando por simple inspección) :

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3		Fig. n−1	Fig. n	Fig. n+1
# de triángulos	2	4	6	...		2n	2(n+1)
# de cuadriláteros	3	6	7	...	2(n−1)−1	2n−1	

• La expresión a calcular será :

$$2(n+3)+2(n-1)+1=4n+1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 43 :

Un ciclista sale de una ciudad *A* y recorre *1 km* . el primer día , *4* el segundo , *7* el tercero... es decir , *3km*. más que el día anterior. Después de *3* días de su partida , un motociclista sale a darle alcance y recorre *17km*. el primer día , *18 km*. el segundo , *19km*. el tercero ... encontrándose por primera vez en un pueblo *B* y por segunda vez en "*C*". Hallar la distancia entre estas *2* ciudades.

A) 82 km. *B) 35 km.* *C) 117 km.*
D) 71 km. *E) 76 km.*

RESOLUCIÓN :

* Para que se encuentren , los espacios recorridos deben ser los mismos , luego :

$$\underbrace{1+4+7+\ldots+\overbrace{3n-2}^{T_n}}_{\text{"n" términos}}=\underbrace{17+18+19+\ldots+\overbrace{m+16}^{T_m}}_{\text{"m" términos}}$$

donde : $m=n-3$ *(uno empezó 3 días después)*

• Considerando la suma en progresión aritmética se tendrá: $\left(\dfrac{1+3n-2}{2}\right)n=\left(\dfrac{17+m+16}{2}\right)m$

$$(3n-1)n=(m+33)m$$

* Pero : $m=n-3$, luego :

$$(3n-1)n=(n-3+33)(n-3)$$

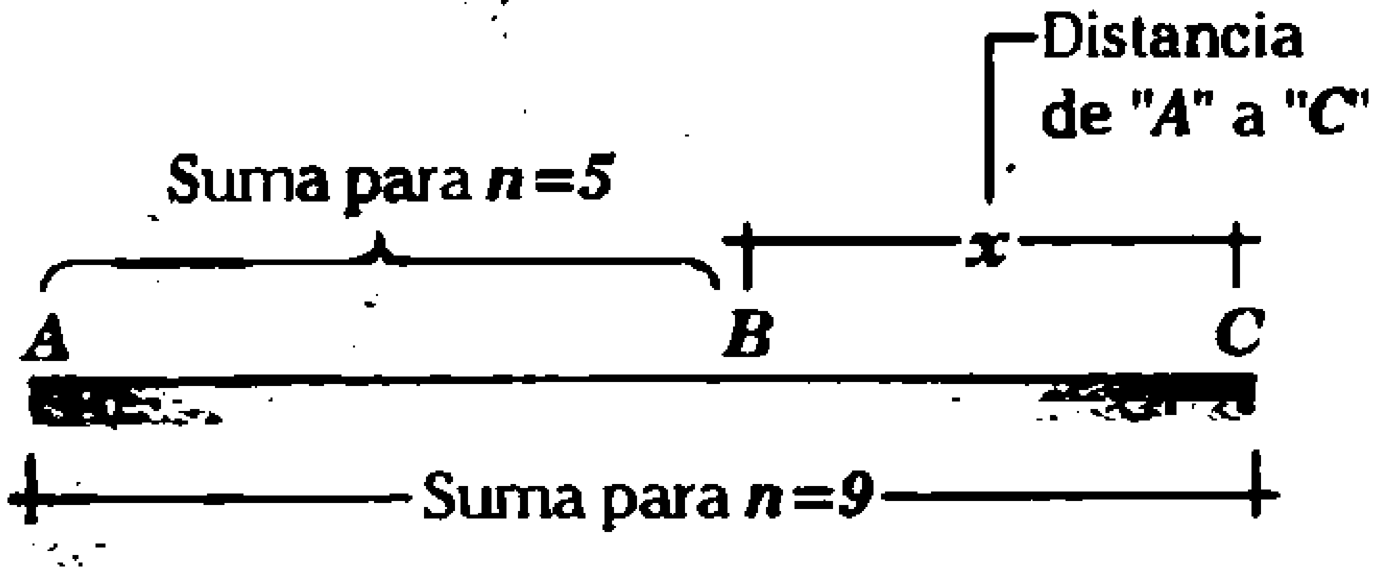
$$3n^2-n=(n+30)(n-3)\Rightarrow 3n^2-n=n^2+27n-90$$

$$2n^2-28n+90=0$$

$$n^2-14n+45=0 \quad \textit{(aspa simple)}$$

$$n \quad -9 \Rightarrow n=9$$
$$n \quad -5 \Rightarrow n=5$$

* Luego el encuentro en "*B*" ocurrió a los *5* días y en "*C*" a los *9* días , entonces :



* Dado que : $S_n=\left(\dfrac{1+3n-2}{2}\right)n=\left(\dfrac{3n-1}{2}\right)n$

$$\Rightarrow S_5+x=S_9$$

$$\left(\frac{3(5)-1}{2}\right)5+x=\left(\frac{3(9)-1}{2}\right)\times 9\Rightarrow x=82\,km$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 44 :

Cuál es la suma de la serie :

$$S=\frac{1}{2\times4\times6}+\frac{1}{4\times6\times8}+\frac{1}{6\times8\times10}+\ldots+\frac{1}{40\times42\times44}$$

A) 4/115 *B) 115/3696* *C) 230/294*
D) 15/7392 *E) 230/7390*

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo cada fracción como la diferencia de *2* fracciones parciales .

$$\frac{1}{2\times4\times6}=\frac{k}{2\times4}-\frac{k}{4\times6}\Rightarrow \frac{1}{2\times4\times6}=\frac{6k-2k}{2\times4\times6}$$

$$\Rightarrow 1=4k\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

* Luego : $\dfrac{1}{2\times4\times6}=k\left(\dfrac{1}{2\times4}-\dfrac{1}{4\times6}\right)$

* Entonces :

$$\frac{1}{2\times4\times6}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\times4}-\frac{1}{4\times6}\right)$$
$$\frac{1}{4\times6\times8}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4\times6}-\frac{1}{6\times8}\right)$$
$$\frac{1}{6\times8\times10}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6\times8}-\frac{1}{8\times10}\right)$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{40\times42\times44}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{40\times42}-\frac{1}{42\times44}\right)$$

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\times4}-\frac{1}{42\times44}\right)\Rightarrow S=\frac{1}{4}\left(\frac{116-1}{1848}\right)=\frac{115}{7392}$$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Determinar : $\sum_{i=5}^{11}2i$

A) 66 *B) 118* *C) 56* *D) 224* *E) 112*

02 Determinar : $\sum_{i=12}^{15}2i$

A) 108 *B) 116* *C) 98* *D) 216* *E) 118*

03 Determinar : $\sum_{i=2}^{6}i^2$

A) 90 *B) 80* *C) 95* *D) 81* *E) 144*

04 Determinar : $\sum_{i=3}^{i=9}(i+2)$

A) 65 B) 56 C) 58 D) 62 E) 76

05 Determinar : $\sum_{i=4}^{i=9}(12-i)$

A) 55 B) 48 C) 36 D) 33 E) 42

06 Determinar : $\sum_{i=1}^{i=8}2i$

A) 144 B) 72 C) 64 D) 66 E) 82

07 Hallar la suma de los *36* primeros múltiplos de *7*.

A) 4 736 B) 4 528 C) 4 792 D) 4 662 E) 4 972

08 Calcular el valor de *"R"*

$$R=0,1+0,2+0,3+...+2$$

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

09 Hallar *"x"* $1+3+5+7+...+(2x+5)=3\,025$

A) 50 B) 52 C) 51 D) 53 E) 54

10 Hallar el valor de *"S"*

$$S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+...+100$$

A) 10 000 B) 11 000 C) 10 050 D) 10 500 E) 10 450

11 Sabiendo que: $1+2+3+4+...+n=406$

Hallar *"n"*

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 24

12 Hallar el valor de *"M"*

$$M=1-2+3-4+5-...-90$$

A) –90 B) –45 C) –50 D) –60 E) –70

13 Calcular el valor de *"E"*

$$E=8^2+9^2+10^2+11^2+...+20^2$$

A) 2 670 B) 2 590 C) 2 780 D) 2 730 E) 2 610

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Se tiene *20* candados y *20* llaves que le corresponden, pero todas las llaves están mezcladas. ¿Cuántas veces será necesario probar las llaves para saber con certeza a qué candado corresponden?

A) 20 B) 10 C) 210 D) 200 E) 190

02 La reina y el rey salen a pasear por los bosques de sus dominios; mientras la reina da *20* pasos en forma constante por cada minuto, el rey avanza *1* paso en el primer minuto, *2* pasos en el segundo minuto, *3* pasos en el tercer minuto, y así sucesivamente. Si al final llegan juntos a su destino, ¿cuál es la distancia que han recorrido?

A) 750 pasos B) 760 pasos C) 770 pasos
D) 780 pasos E) 790 pasos

03 Calcular "x" en: $1+3+5+7+...+x=289$

A) 33 B) 34 C) 35 D) 36 E) 17

04 A un maestro pirotécnico le encargan hacer, con motivo de una fiesta, *5 929* calaveras; gastando una determinada suma de dinero en su fabricación. El *1er* día gasta *1* sol y fabrica una calavera, el *2do* día gasta *2* soles y fabrica *3* calaveras, el *3er* día gasta *3* soles y fabrica *5* calaveras, el *4to* día gasta *4* soles y fabrica *7* calaveras; y así sucesivamente. ¿Durante cuántos días trabajó y cuánto gastó en la fabricación de las calaveras?

A) 77 días, S/. 3 005 B) 74 días, S/. 3 003
C) 67 días, S/. 2 278 D) 77 días, S/. 3 003
E) 87 días, S/. 3 828

05 El segundo término de una *P.A* es *7* y el séptimo término es *22*. Calcular la suma de los *10* primeros términos.

A) 172 B) 174 C) 185 D) 175 E) 165

06 Los números: $x;\ x+4;\ x+6;\ ...$ son los tres primeros términos consecutivos de una progresión geométrica. Calcular la suma de sus *10* primeros términos.

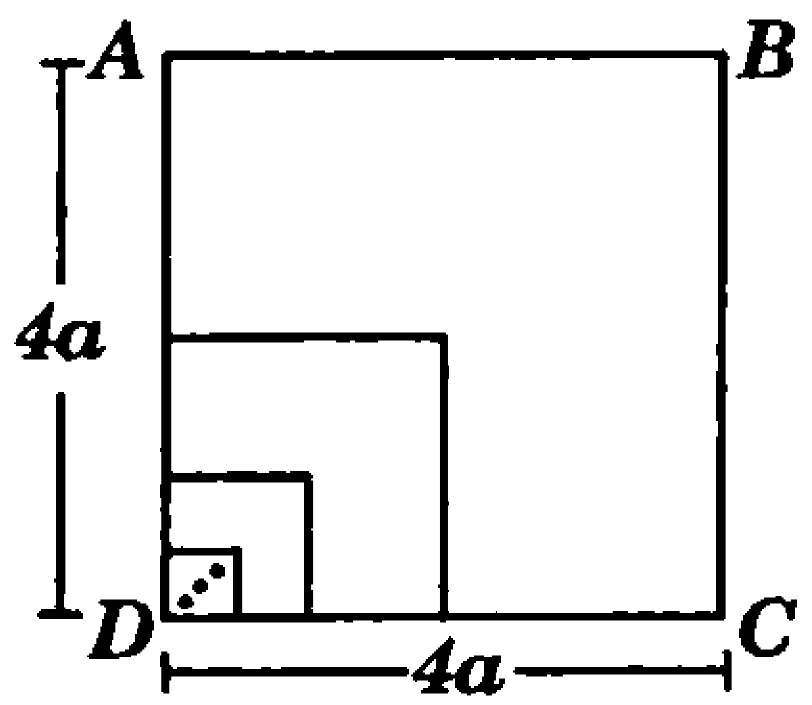
A) 59 049 B) 59 048 C) 56 048 D) 57 046 E) 59 047

07 Calcular: $S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+...\infty$

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{3}$

08 Determinar la suma de las áreas de los infinitos cuadrados formados como muestra la figura. (Tomando como lado del cuadrado la mitad del lado del cuadrado anterior)

Nota: Considerar al cuadrado *ABCD* como inicial.



A) $\frac{64}{3}a^2$ B) $\frac{65}{4}a^2$ C) $\frac{64}{7}a^2$ D) $\frac{64}{9}a^2$ E) $\frac{64}{11}a^2$

09 Una pelota de hule cae de una altura de *18* metros y cada vez rebota hasta una tercera parte de la altura alcanzada en el rebote anterior. Calcular el espacio total recorrido por la pelota hasta que teóricamente quede en reposo.

A) 30m B) 36m C) 25m D) 39 m E) 30 m

10 Calcular la siguiente sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{20}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right]$$

A) 3 870 B) 2 870 C) 2 780
D) 3 780 E) 3 080

11 Calcule la suma de los números de la figura *20*:

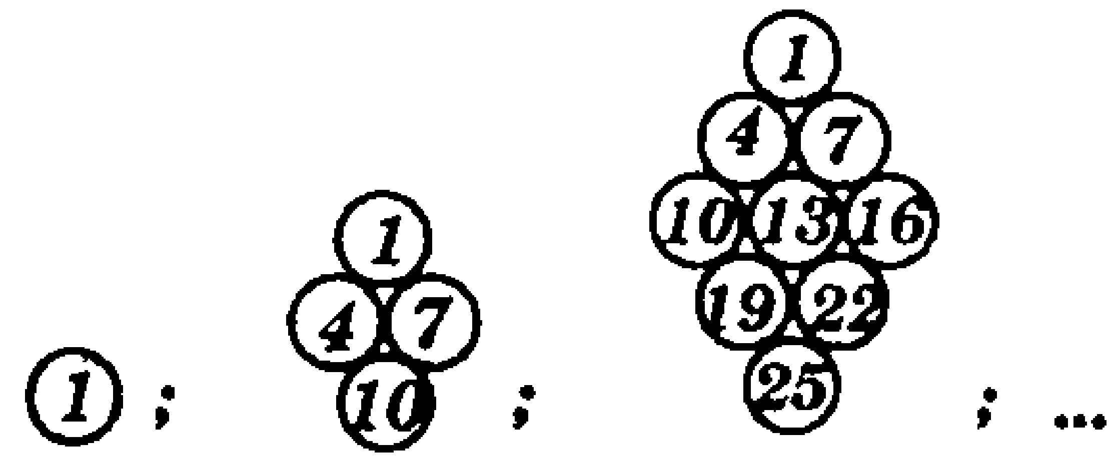


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

A) 239 800 B) 293 800 C) 289 300
D) 279 805 E) 249 800

12 Calcular la suma total:

$5 + 6 + 7 + 8 + \ldots\ldots + 20$
$6 + 7 + 8 + \ldots\ldots + 20$
$7 + 8 + \ldots\ldots + 20$
$8 + \ldots\ldots + 20$
⋮
20

A) 2 010 B) 2 030 C) 2 040
D) 2 020 E) 2 050

13 Calcule el valor de:

$$S = 7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots77}_{20\ cifras}$$

A) $\frac{7}{81}(10^{20}-190)$ B) $\frac{13}{81}(10^{21}-190)$ C) $\frac{7}{81}(10^{21}-190)$
D) $\frac{7}{81}(10^{20}-19)$ E) $\frac{81}{7}(10^{21}-190)$

14 Un caracol asciende *2 cm* en el día y resbala *1 cm* en la noche, luego asciende *4 cm* y resbala *1 cm*, luego asciende *6 cm* y resbala *1 cm*; y así continúa su ascenso hasta llegar a lo alto de un árbol de *401 cm*. ¿Cuál es el recorrido total del caracol hasta cumplir su objetivo?

A) 429 cm B) 439 C) 438 D) 459 E) 472

15 ¿Cuál es la suma de la serie?

$$\frac{1}{2\times4\times6}+\frac{1}{4\times6\times8}+\frac{1}{6\times8\times10}+\ldots+\frac{1}{40\times42\times44}$$

A) $\frac{115}{3696}$ B) $\frac{117}{3696}$ C) $\frac{230}{3696}$ D) $\frac{116}{3696}$ E) $\frac{15}{3696}$

16 Dados los conjuntos de enteros consecutivos:

{1}, {2; 3}, {4; 5; 6}, {7; 8; 9; 10}, ...

Donde cada conjunto contiene un elemento más que el precedente, sea S_n la suma de los elementos del *n*-ésimo conjunto, luego S_{21} será igual a:

A) 4 640 B) 4 641 C) 4 651 D) 4 741 E) 4 341

17 Un rollo de papel cuyo diámetro es de *30 cm* se ha formado con *500* vueltas de papel fuertemente enrollado en un cilindro de *10 cm* de diámetro. ¿Qué longitud tiene el papel?

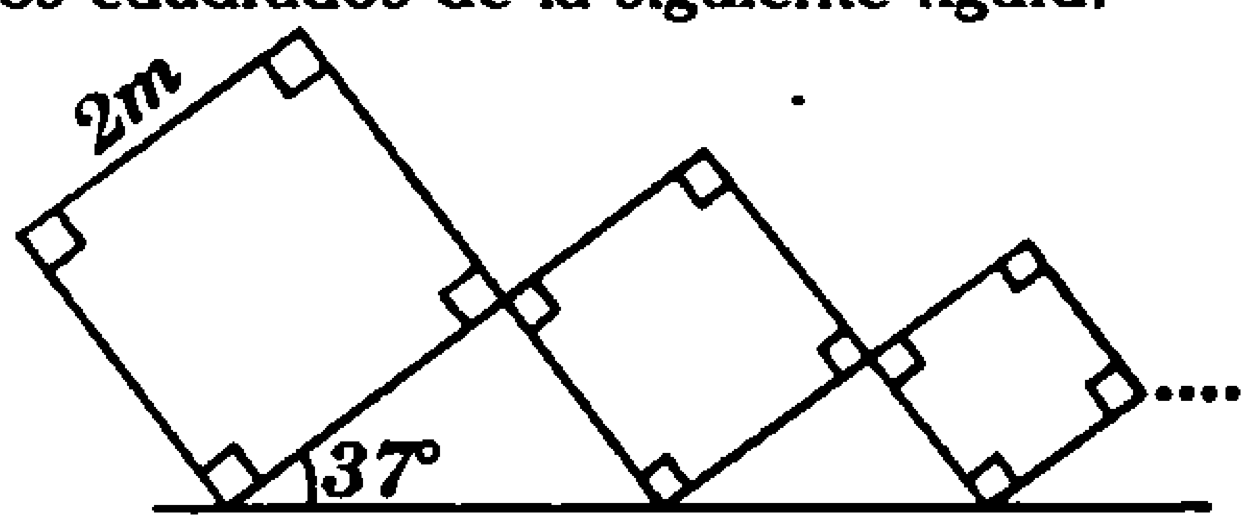
Considere $\pi = 3,142$

A) 314,2 m B) 314 C) 315,2 D) 316,2 E) 316

18 Calcule: $S = \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n}{(n^2-1)^2}\right]$

A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

19 Calcule la suma de los perímetros de los infinitos cuadrados de la siguiente figura:



A) 16 m B) 24 C) 20 D) 32 E) 40

20 A Angélica y Rocío les gusta comer duraznos. Angélica come *46* duraznos cada día: mientras que Rocío come *1* durazno el primer día, *4* el segundo, *9* el tercero, *16* el cuarto y así sucesivamente. Si comenzaron a comer juntas el *2* de abril, ¿en qué fecha ambas habrán consumido en total la misma cantidad de duraznos?

A) 11 abril B) 12 C) 13 D) 9 E) 14

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)E	2)D	3)A	4)D	5)D	6)B	7)D	8)A	9)B	10)B
11)A	12)C	13)C	14)B	15)A	16)B	17)A	18)A	19)D	20)B

CONTEO DE FIGURAS

CAPITULO 039

OBJETIVOS :

* Desarrollar la capacidad de inspección en una figura determinada.
* Descubrir y aplicar métodos sencillos para realizar el conteo de figuras.
* Desarrollar el método inductivo y deductivo a través de ejercicios vinculados a contabilizar figuras.
* Reforzar los conocimientos sobre sucesiones y series.
* Desarrollar la capacidad de abstracción y análisis con modelos de figuras concretas para su aplicación posterior en la vida diaria.

INTRODUCCIÓN :

El hombre desde que nace empieza a aprender. Aprendemos en la casa, en la comunidad y en particular en la escuela. Este aprendizaje es logrado a través del desarrollo del pensamiento, el cual se realiza inicialmente mediante la búsqueda de relaciones entre conceptos, proposiciones, procedimientos, figuras y otros elementos.

Precisamente existen ejercicios en los cuales se refuerza lo mencionado anteriormente. En este tipo de ejercicios se presenta una figura principal dividida por líneas en figuras llamadas secundarias, siendo el objetivo encontrar el número de figuras con ciertas características que se encuentran en la figura principal, siendo dicho número el mayor posible.

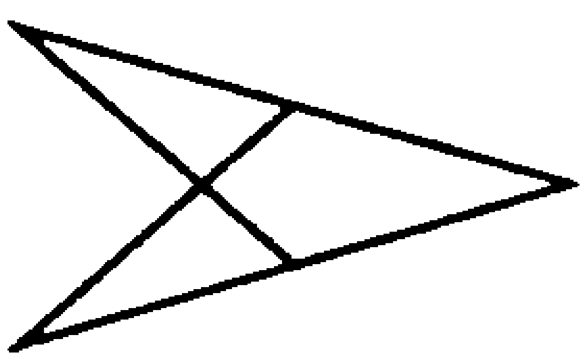
Por otro lado, a diario se observan figuras geométricas de diversas formas y tamaños; edificios, vehículos, objetos, etc; pero pocas veces nos hemos interesado en realizar el conteo respectivo. Para llevar a cabo dicho conteo existen métodos abreviados, los cuales permiten agilizar el conteo correspondiente.

CONTEO DE FIGURAS

En este tipo de preguntas se presenta una figura principal dividida en figuras secundarias de diversa formas y tamaños. El objetivo es calcular el número exacto (máximo) de figuras de cierto tipo que puedan reconocerse en la figura principal.

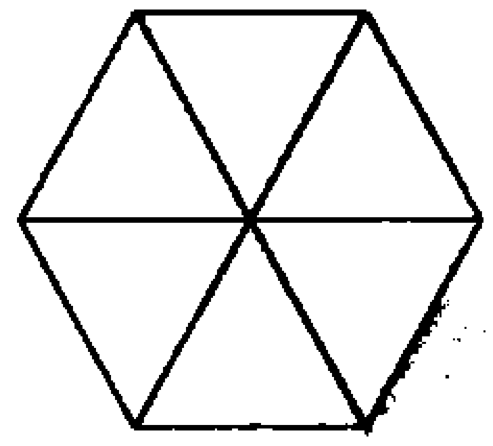
EJEMPLOS :

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



RPTA : " 4"

◆ ¿Cuántos triángulos hay en? :

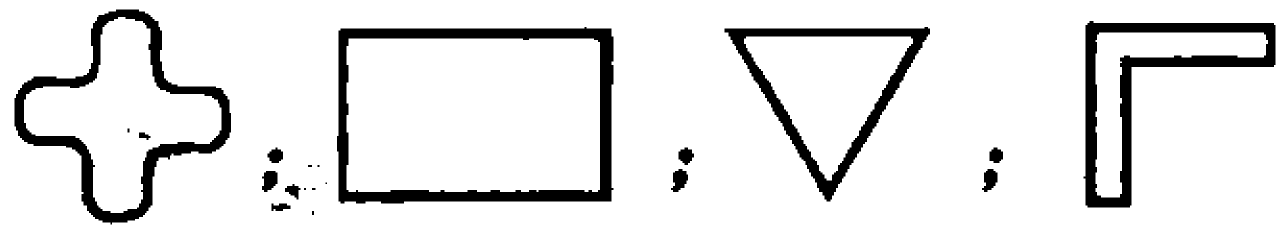


Rpta :
"6" triángulos
(Método visual)

FIGURA O REGIÓN SIMPLE :

Aquella que no está dividida por ninguna otra figura.

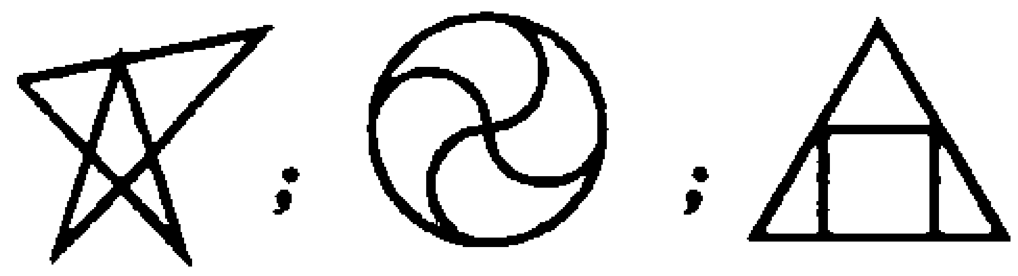
EJEMPLOS :



FIGURAS COMPUESTAS :

Aquella figura que presenta divisiones que generan regiones simples.

EJEMPLOS :



MÉTODO DE CONTEO DE FIGURAS

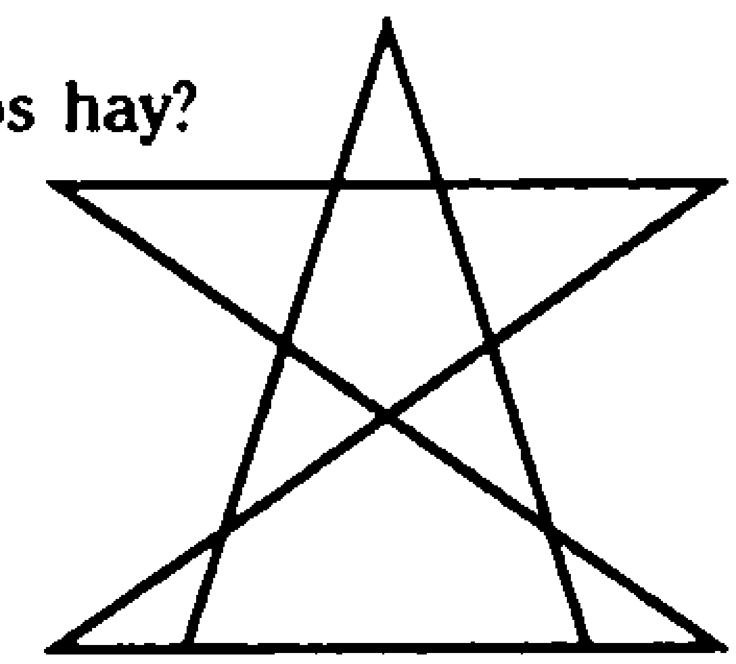
I) MÉTODOS DE SCHOENK :

Consiste en contar una a una las figuras que son objeto de la pregunta .

Para que el conteo se haga de manera sistematizada, asignaremos digitos o letras a cada una de las regiones simples; luego empezamos contando las figuras con *1* dígito o letra, enseguida figura con *2* dígitos o letras, luego con *3* y así sucesivamente.

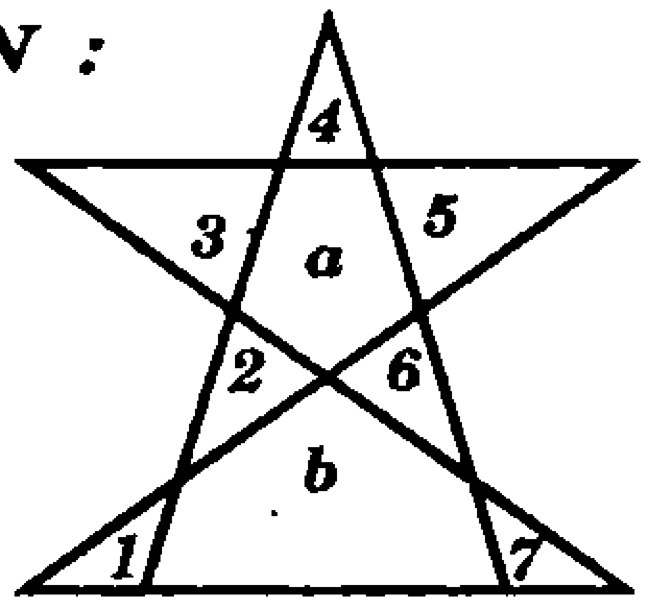
EJEMPLO :

¿Cuántos triángulos hay?



A) 7
B) 8
C) 16
D) 10
E) 15

RESOLUCIÓN :



Los triángulos son:
1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
1b6; 1b7; 2a4; 2a5; 3a5; 3a6; 4a6; 7b2; 24a6b

* Se puede contabilizar *16* triángulos de todo tamaño.

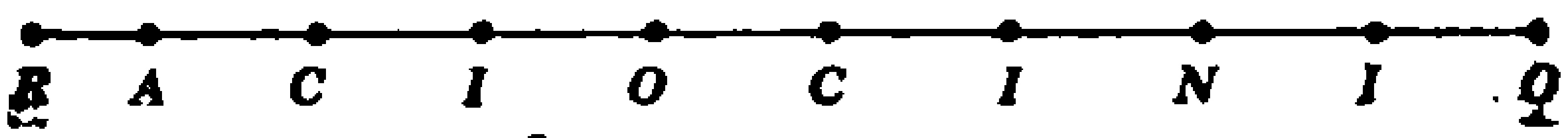
RPTA : "C"

II)CONTEO MEDIANTE INDUCCIÓN : (FÓRMULA)

Consiste en analizar casos particulares a la figura dada (figuras análogas), tratando de encontrar una ley de formación coherente , para luego poder generalizar (encontrar la fórmula) .

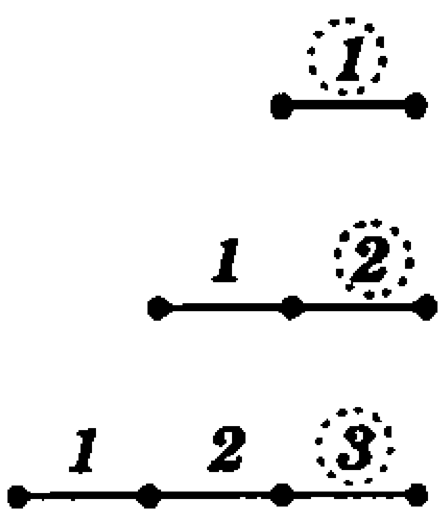
EJEMPLO 1 :

¿Cuantos segmentos hay en:



RESOLUCIÓN :

Casos particulares: ***Números de segmentos:***

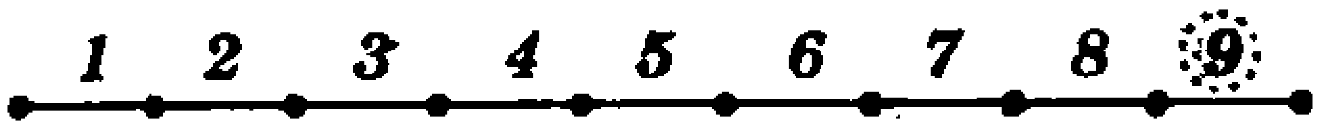


$$\longrightarrow 1=\frac{1\times 2}{2}$$

$$\longrightarrow 3=1+2=\frac{2\times 3}{2}$$

$$\longrightarrow 6=1+2+3=\frac{3\times 4}{2}$$

* Ahora en lo pedido:



El número total de segmentos será:

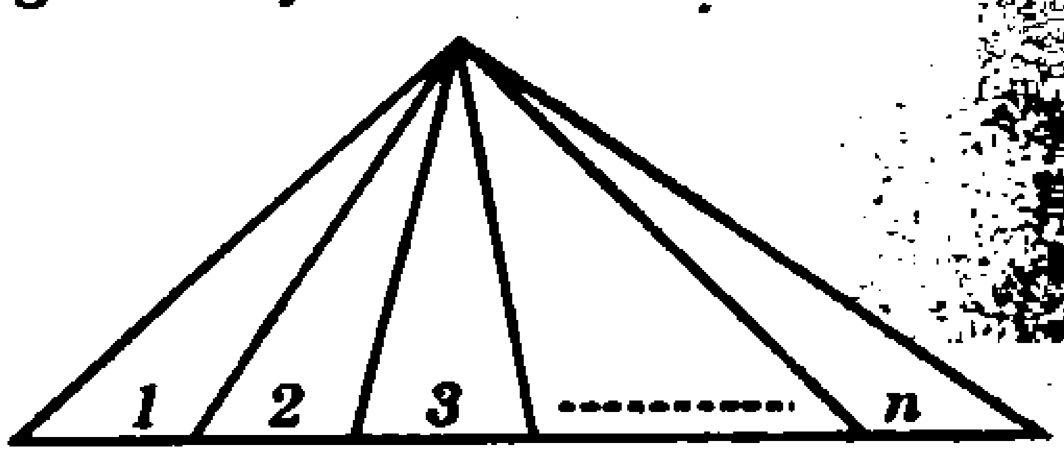
$$1+2+3+\ldots+9=\frac{9\times 10}{2}=45$$

EN GENERAL:

$$\text{Número total de segmentos}=\frac{n(n+1)}{2}$$

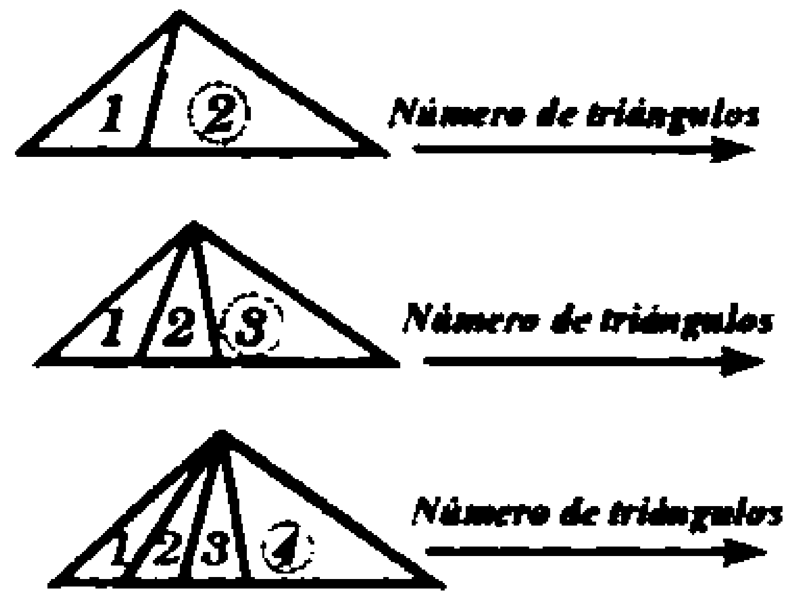
EJEMPLO 2 :

¿Cuántos triángulos hay?



RESOLUCIÓN :

Casos particulares:



$$=3=1+2=\frac{2\times 3}{2}$$

$$=6=1+2+3=\frac{3\times 4}{2}$$

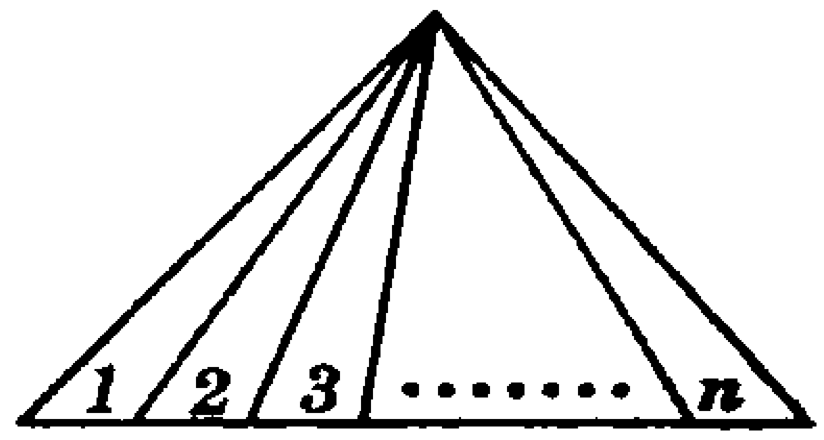
$$=10=1+2+3+4=\frac{4\times 5}{2}$$

* Entonces en la figura dada se tendrá que :

$$\text{Total de triángulos}=\frac{n(n+1)}{2}$$

EJEMPLO 3 :

♦ ¿Cuántos triángulos hay en? :

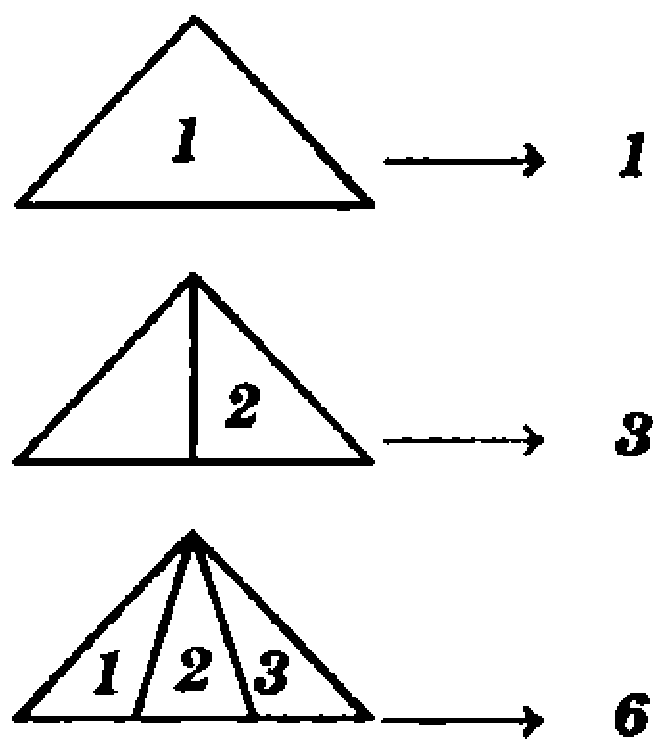


RESOLUCIÓN :

* Casos Particulares :

Para n = 1 ; Para n = 2 ; Para n = 3

La Figura será Número de triángulos



* ***LEY DE FORMACIÓN :***

1.........(Para *1* espacio)
1 + 2.........(Para *2* espacios)
1 + 2 + 3.........(Para *3* espacios)

⇒ para "*n*" espacios :
número de triángulos :

$$1+2+3+\ldots+n=\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{\text{Ver sumatorias}}$$

NOTA:

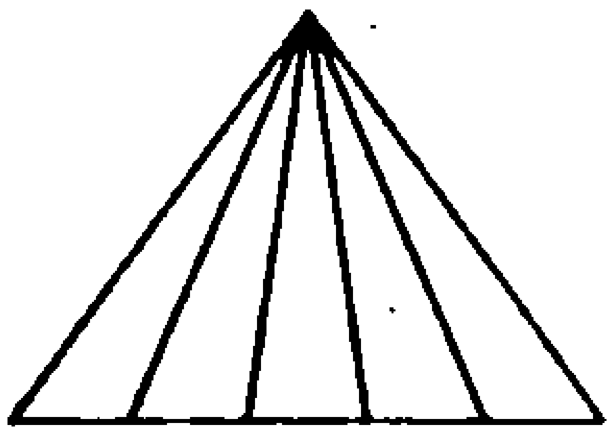
Este método nos sirve para contar también ***"segmentos"***; ***"cuadriláteros"*** ; ***"ángulos agudos"***; ***"sectores circulares"***; ***"hexágonos"*** ; ***"trapecios"***; ***"letras"***; ..... etc.

MÉTODO PRÁCTICO :

El número de figuras esta dado por : ***"La mitad de la multiplicación del número de espacios y el consecutivo del número de espacios"***

EJEMPLO 1 :

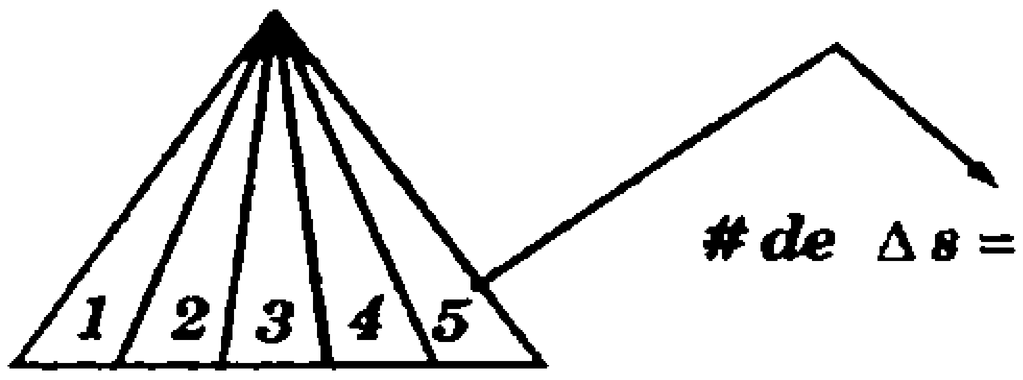
¿Cuántos triángulos hay en?



A) 10 *B) 20* *C) 15* *D) 12* *E) 9*

RESOLUCIÓN :

* Método Práctico :



$$\# \text{ de } \Delta s = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos segmentos hay en? :

A) 36 *B) 72* *C) 90* *D) 45* *E) 100*

RESOLUCIÓN :

"Método Práctico"

$$\text{Número de segmentos} = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 3 :

¿Cuántos cuadriláteros hay en?:

A) 20 *B) 400* *C) 140* *D) 205* *E) 210*

RESOLUCIÓN :

* ***"Método práctico"*** :

Como hay ***20*** espacios , luego :

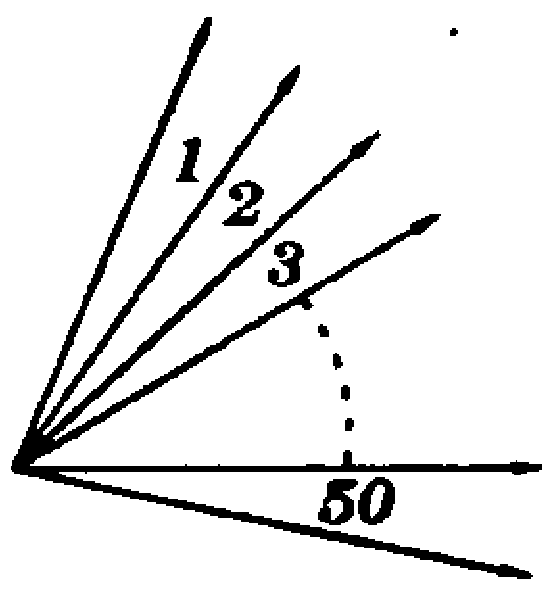
$$\text{número de cuadriláteros} = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

RPTA : "E"

EJEMPLO 4 :

¿Cuántos ángulos agudos hay? :

A) 50
B) 100
C) 2500
D) 800
E) 1275



RESOLUCIÓN :

"Por el método práctico"

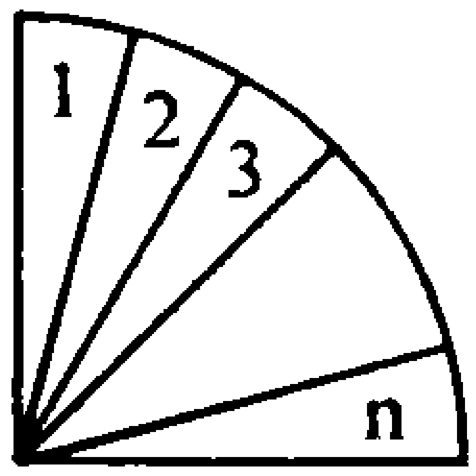
$$\text{Número de ángulos agudos} = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$$

RPTA : "E"

EJEMPLO 5 :

¿Cuántos sectores circulares hay en? :

A) n
B) n^2
C) $\frac{n(n-1)}{2}$
D) $\frac{n(n+1)}{2}$



RESOLUCIÓN :

"Método práctico"

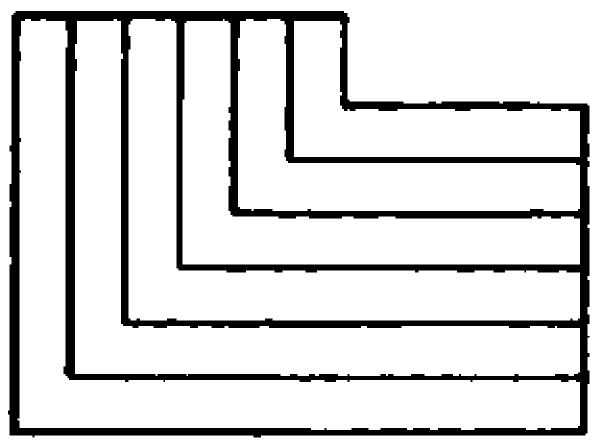
$$\text{Número de sectores circulares} = \frac{n(n+1)}{2}$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 6 :

¿Cuántos hexágonos hay en? :

A) 6
B) 16
C) 15
D) 21
E) 42



RESOLUCIÓN :

- Contando encontramos ***6*** espacios , luego :

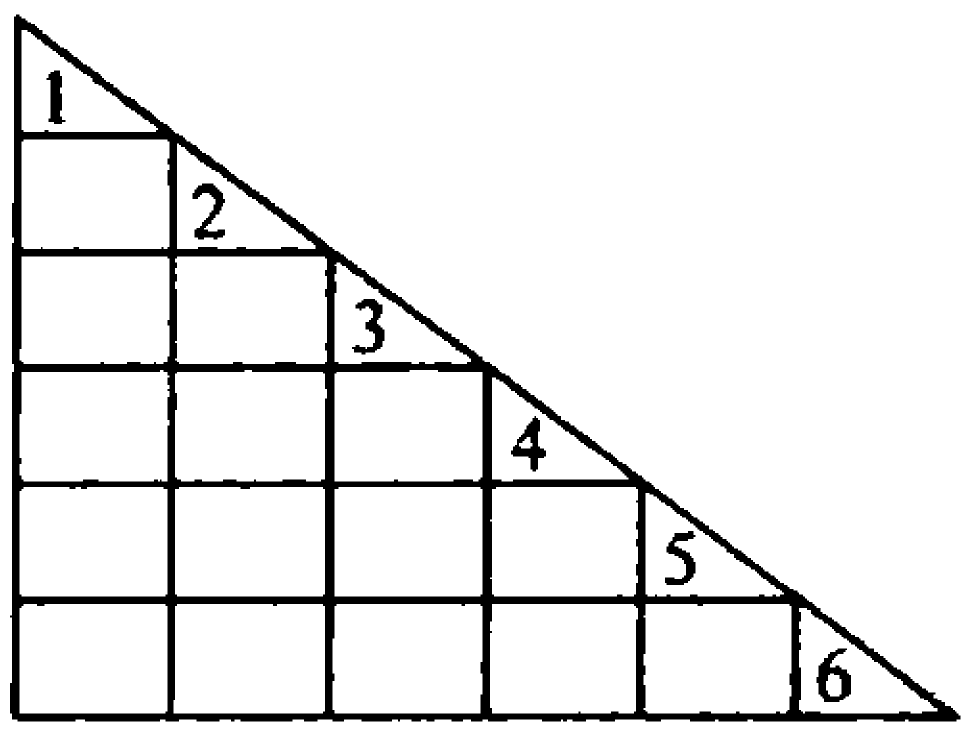
$$\text{Número de hexágonos} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

RPTA : "D"

EJEMPLO 7 :

¿Cuántos triángulos hay en? :

A) 42
B) 36
C) 6
D) 12
E) 21



RESOLUCIÓN :

* Analizando casos particulares nos daremos cuenta que cumple con el "Método práctico" :

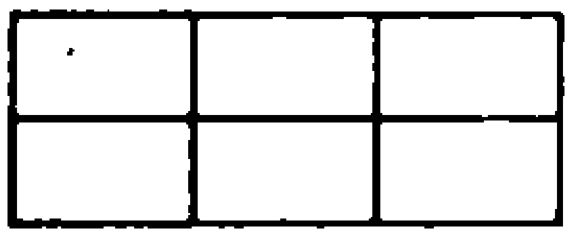
$$\Rightarrow \text{Número de triángulos} = \frac{6 \times 7}{2} = 21$$

RPTA : "E"

EJEMPLO 8 :

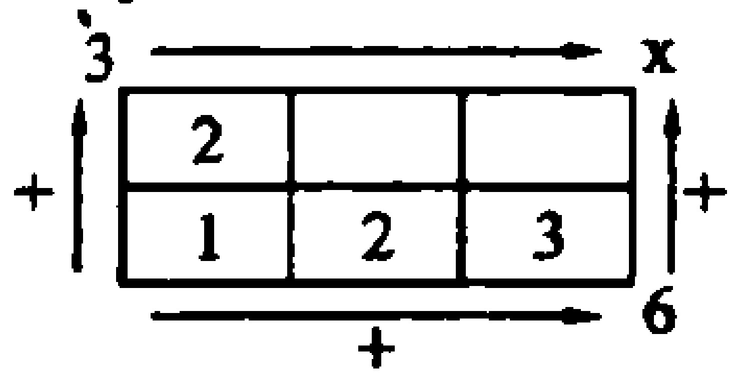
¿Cuántos cuadriláteros hay en? :

A) 6
B) 12
C) 16
D) 18



RESOLUCIÓN :

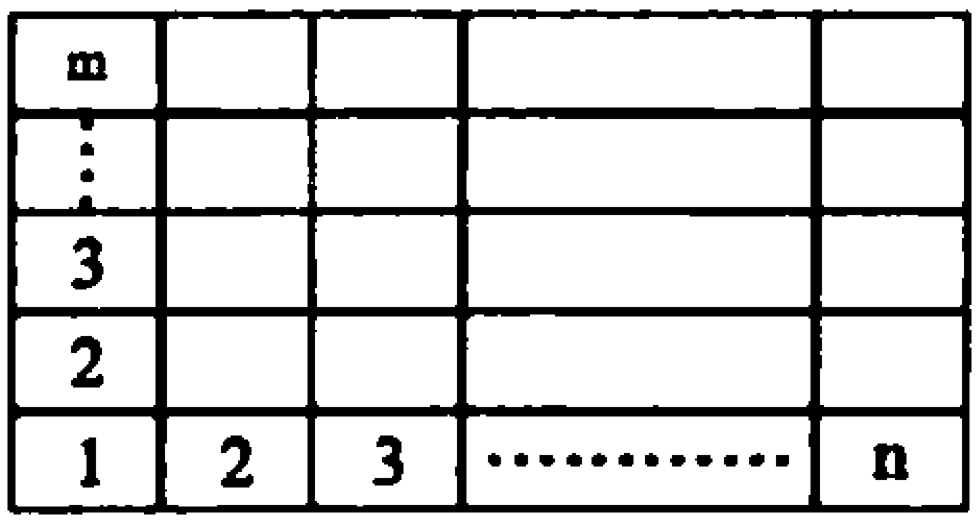
* Contando directamente , encontraremos *18* , pero el método más rápido sería :



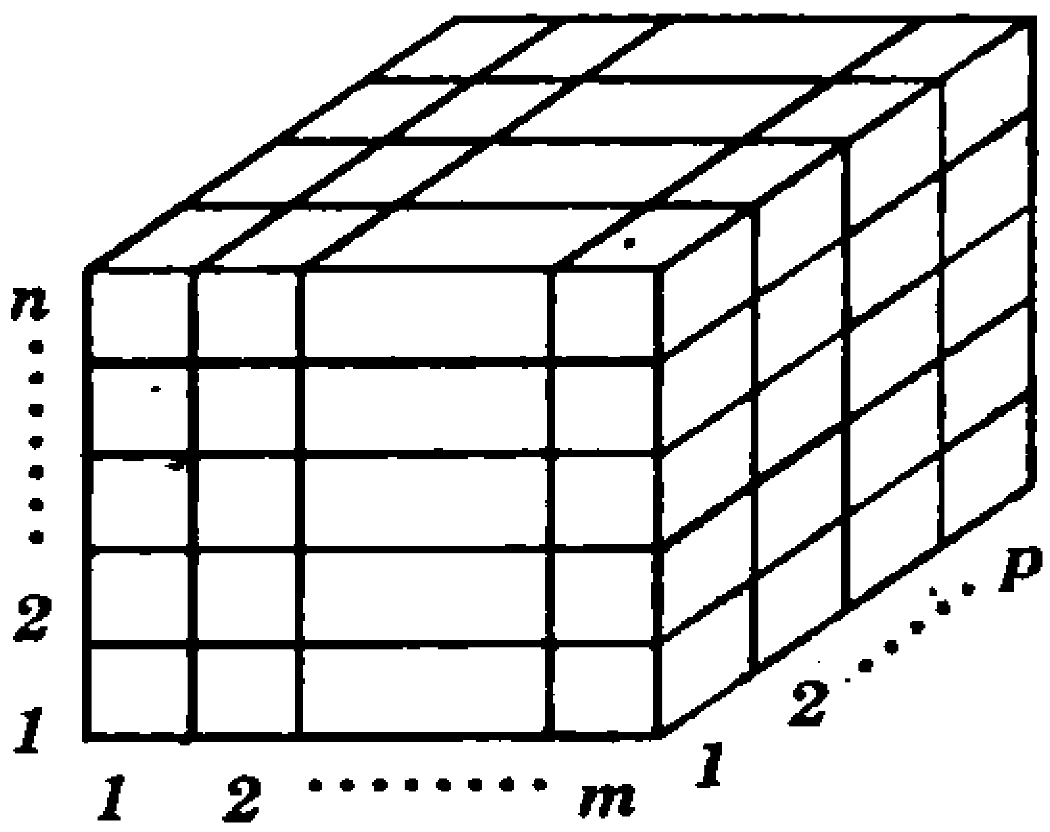
Número de cuadriláteros $= 3 \times 6 = 18$

RPTA : "D"

* EN GENERAL :



$$\text{Número de cuadriláteros} = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{horizontal} \times \underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}_{vertical}$$

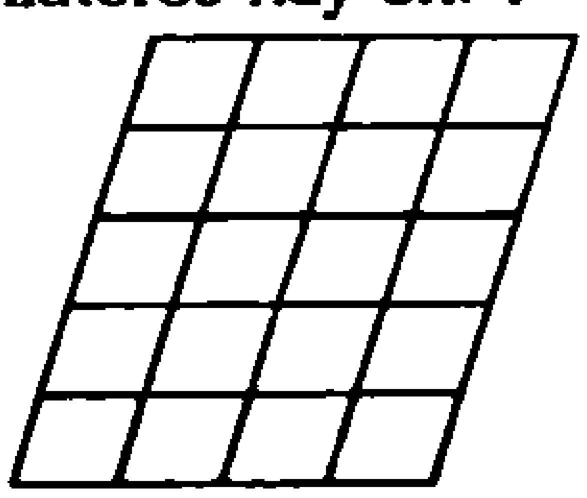


$$\text{Número de paralelepípedos} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$$

EJEMPLO 9 :

¿Cuántos cuadriláteros hay en? :

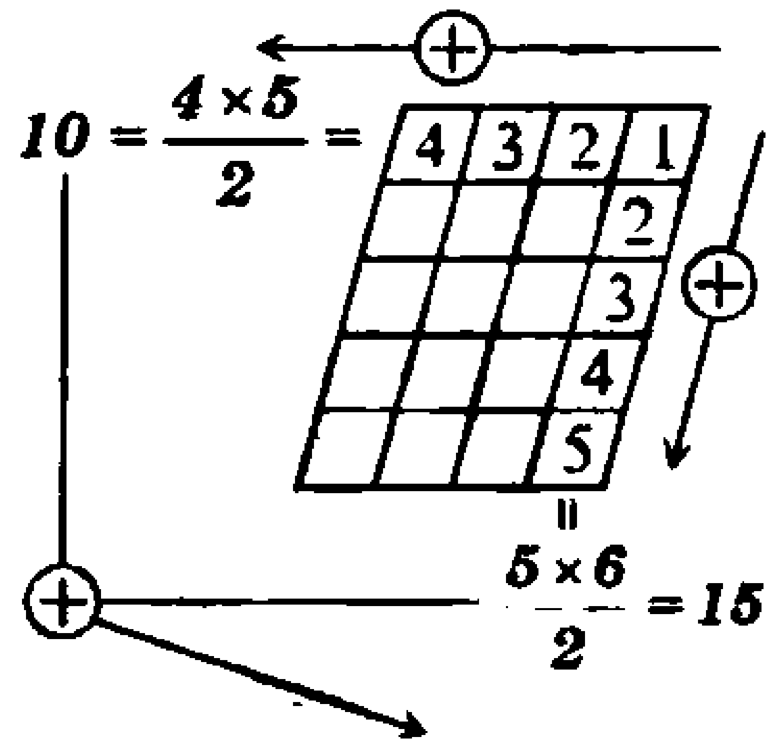
A) 120
B) 150
C) 250
D) 320



RESOLUCIÓN :

* "Por el método práctico" :

$$\text{Número de cuadriláteros} = 10 \times 15 = 150$$

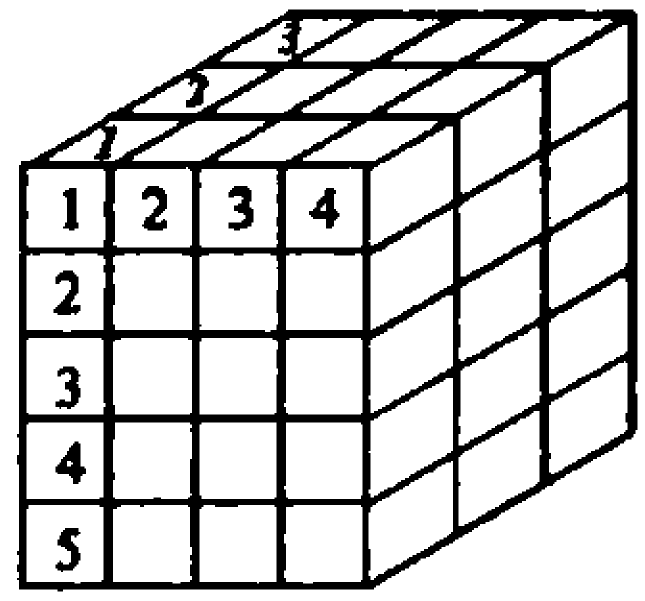


RPTA : "B"

EJEMPLO 10 :

¿Cuántos paralelepípedos hay en? :

A) 20
B) 60
C) 125
D) 900
E) 2750



RESOLUCIÓN :

* Por el método práctico :

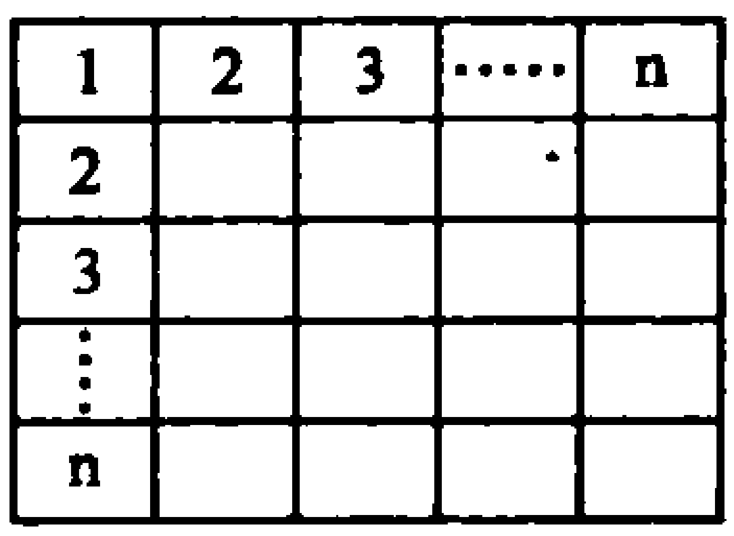
$$\text{Número de paralelepípedos} = \frac{5 \times 6}{2} \times \frac{4 \times 5}{2} \times \frac{3 \times 4}{2} = 900$$

RPTA :"D"

MÉTODO PARA CONTAR CUADRADOS Y CUBOS

EJEMPLO 1 :

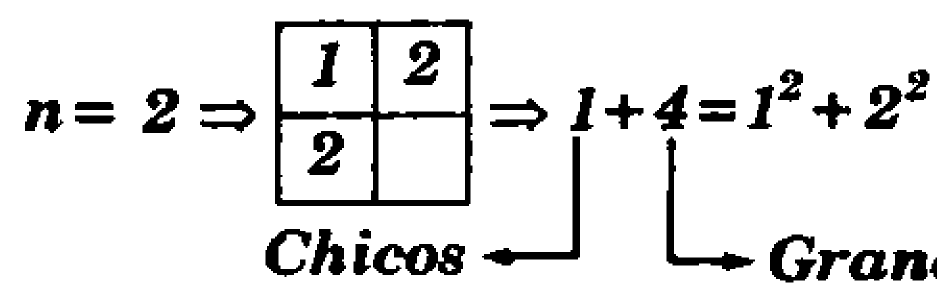
¿Cuántos cuadrados hay en? :

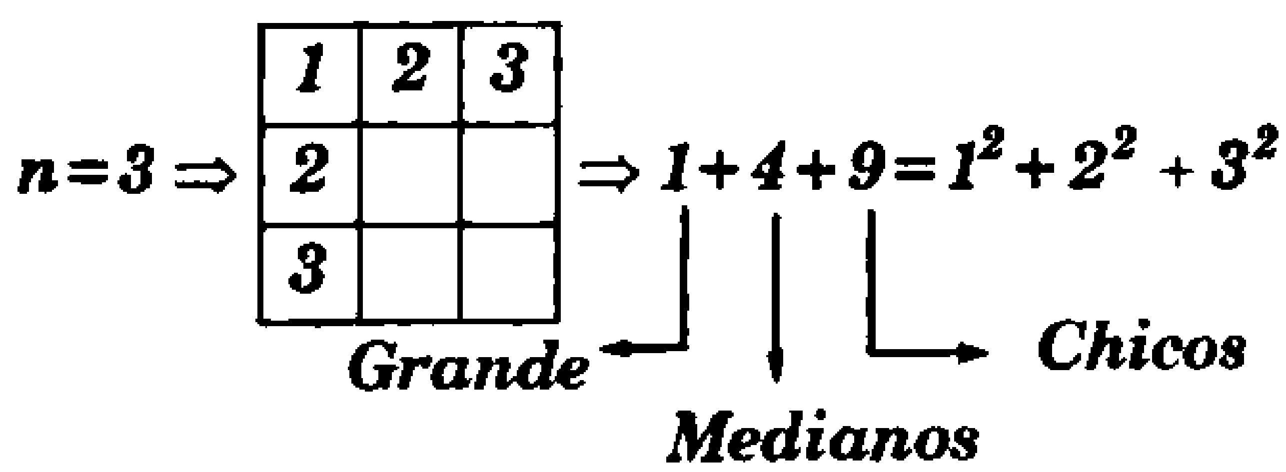


RESOLUCIÓN:

Casos particulares	Número de cuadrados	Ley de formación

$n=1 \Rightarrow$ [1] $\Rightarrow 1 = 1^2$

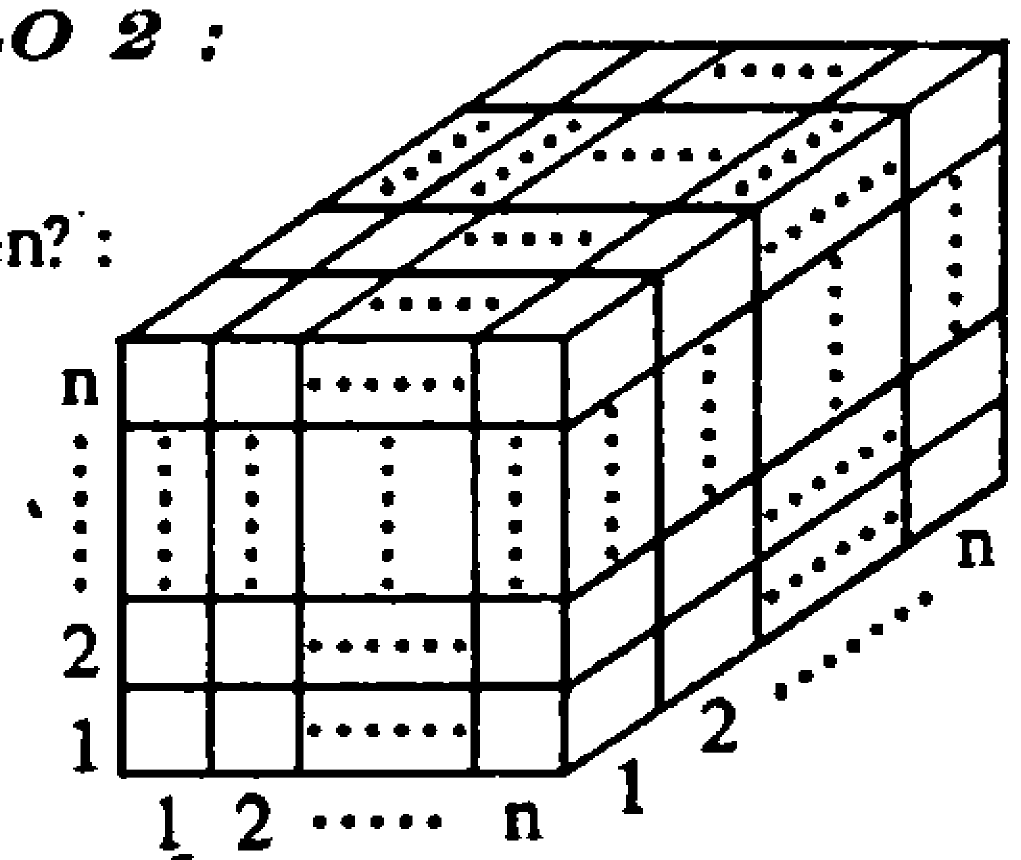




Para "*n*" : ***Número de cuadrados*** $= \underbrace{1^2+2^2+3^2+...+n^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ } *Ver sumatoria*

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos cubos hay en? :



RESOLUCIÓN :

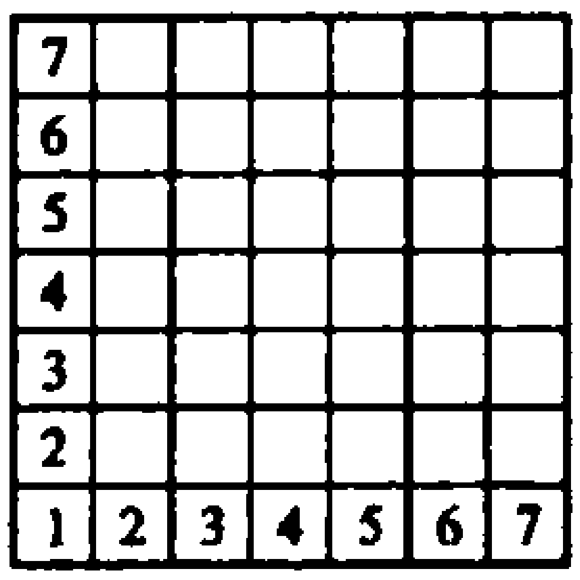
* Al igual que lo anterior los cubos se relacionan con la suma de cubos :

$$\textit{Número de cubos} = 1^3+2^3+3^3...+n^3 \Rightarrow \textit{Número de cubos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

EJEMPLO 3 :

¿Cuántos cuadrados hay en? :

A) 140
B) 120
C) 230
D) 49
E) 343



RESOLUCIÓN :

$$\textit{Número de cuadrados} = 1^2+2^2+3^2...+7^2 \quad (\to 7+8)$$

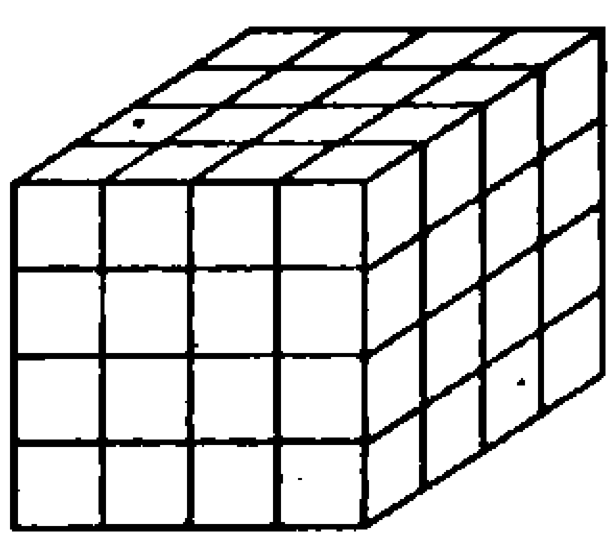
$$= \underbrace{\frac{7\times8\times15}{6}}_{\textit{Método práctico en sumatorias}} =$$

RPTA :"A"

EJEMPLO 4 :

¿Cuántos cubos hay en?:

A) 64
B) 216
C) 100
D) 220
E) 512



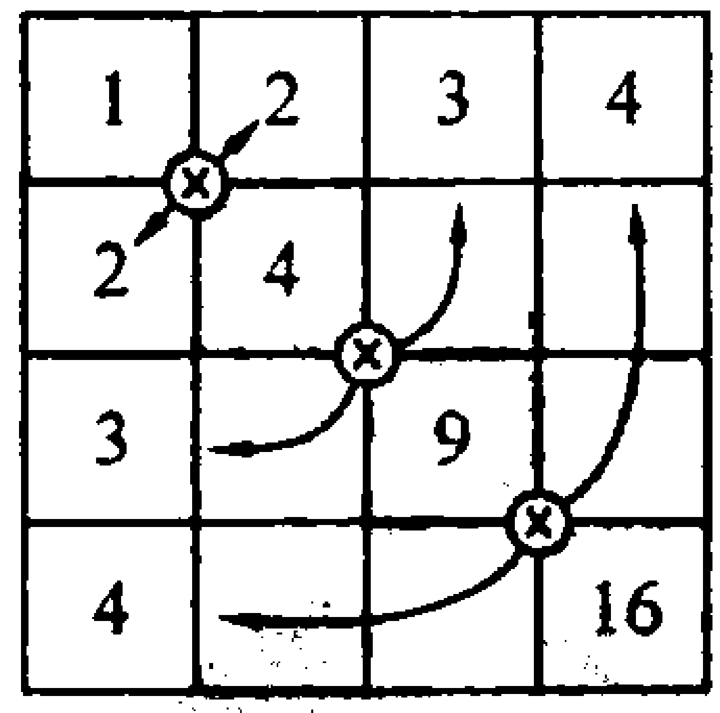
RESOLUCIÓN :

* Como el cubo es de $4\times4\times4$

$$= 1^3+2^3+3^3+4^3 = \left(\frac{4\times5}{2}\right)^2 = 100$$

NOTA:

El número de cuadrados también se puede calcular así : "Se multiplica los extremos y se suman los resultados"



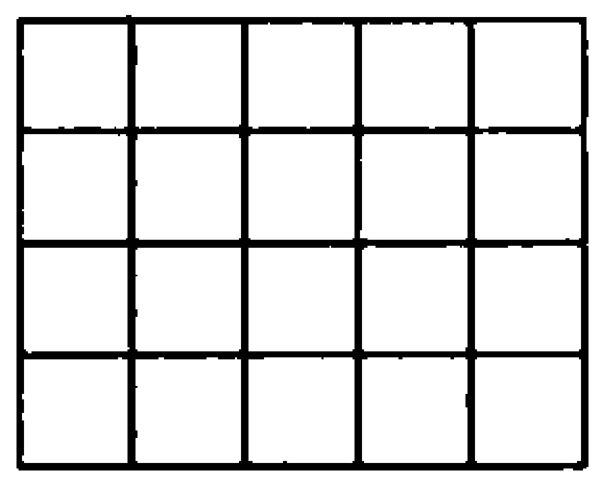
Número de cuadrados = ***1 + 4 + 9 + 16 = 30***

"Este método nos sirve para contar cuadrados, en una figura no cuadrada"

EJEMPLO 5 :

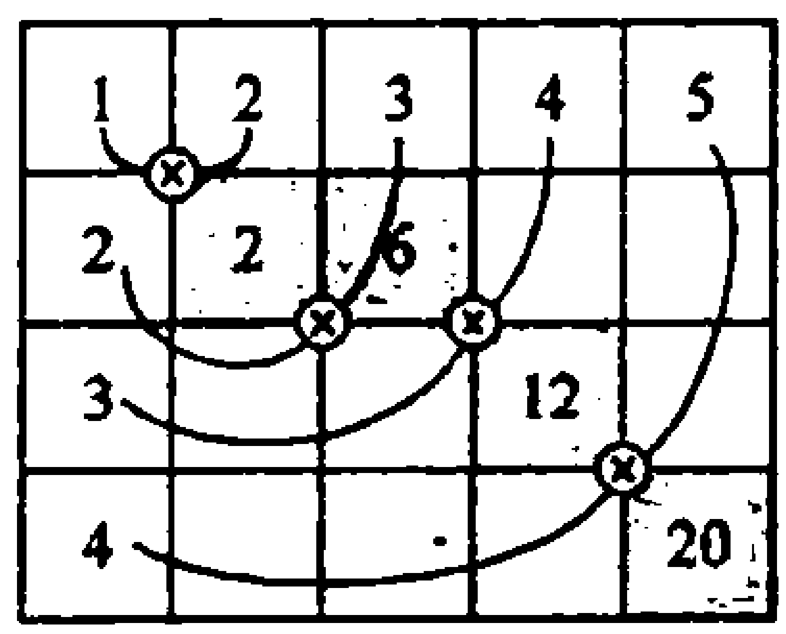
¿Cuántos cuadrados hay en?:

A) 20
B) 40
C) 30
D) 42
E) 60



RESOLUCIÓN:

* Por el método práctico :



⇒ Número de cuadrados = ***2+6+12+20 = 40***

RPTA : "B"

EJEMPLO 6 :

En el ejemplo "*5*" , hallar el total de cuadriláteros que no son cuadrados

A) 40 *B) 60* *C) 110* *D) 20* *E) 5*

RESOLUCIÓN :

$$\textit{número de cuadriláteros pero no cuadrados} = \textit{Total de cuadriláteros} - \textit{número de cuadrados}$$

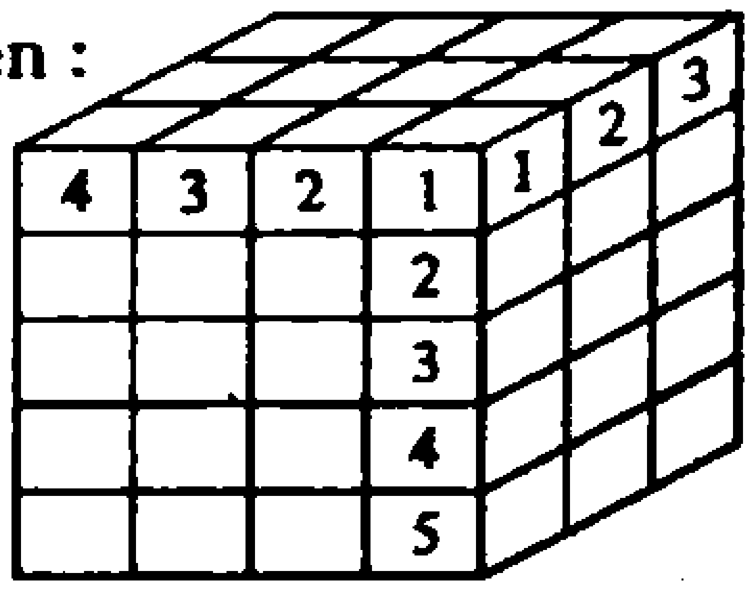
$$= \underbrace{\left(\frac{5\times6}{2}\right)\times\left(\frac{4\times5}{2}\right)}_{\textit{Método para los cuadriláteros}} - \underbrace{40}_{\textit{Según problema 5}}$$

$$= 110$$

RPTA : "C"

EJEMPLO 7 :

¿Cuántos cubos hay en :



A) *125*
B) *60*
C) *90*
D) *180*
E) *720*

RESOLUCIÓN :

"Aplicando el método de los cuadrados en una figura no cuadrada" :

$$\text{Número de cubos} = 5 \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1 = 90$$

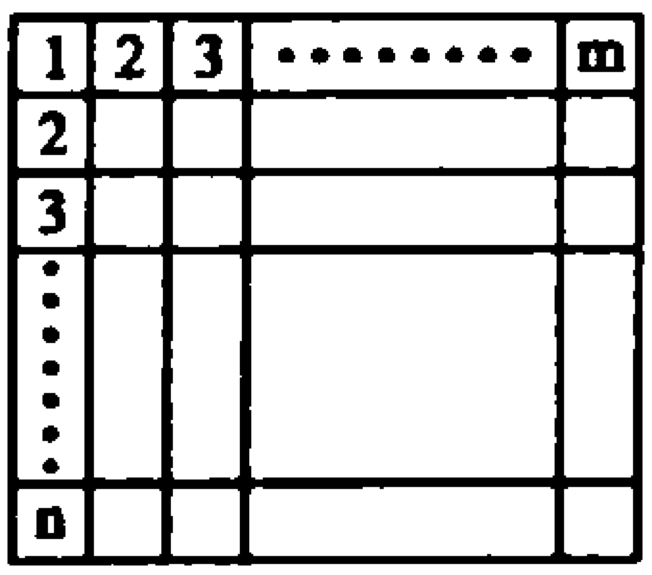
RPTA : "C"

EN GENERAL :

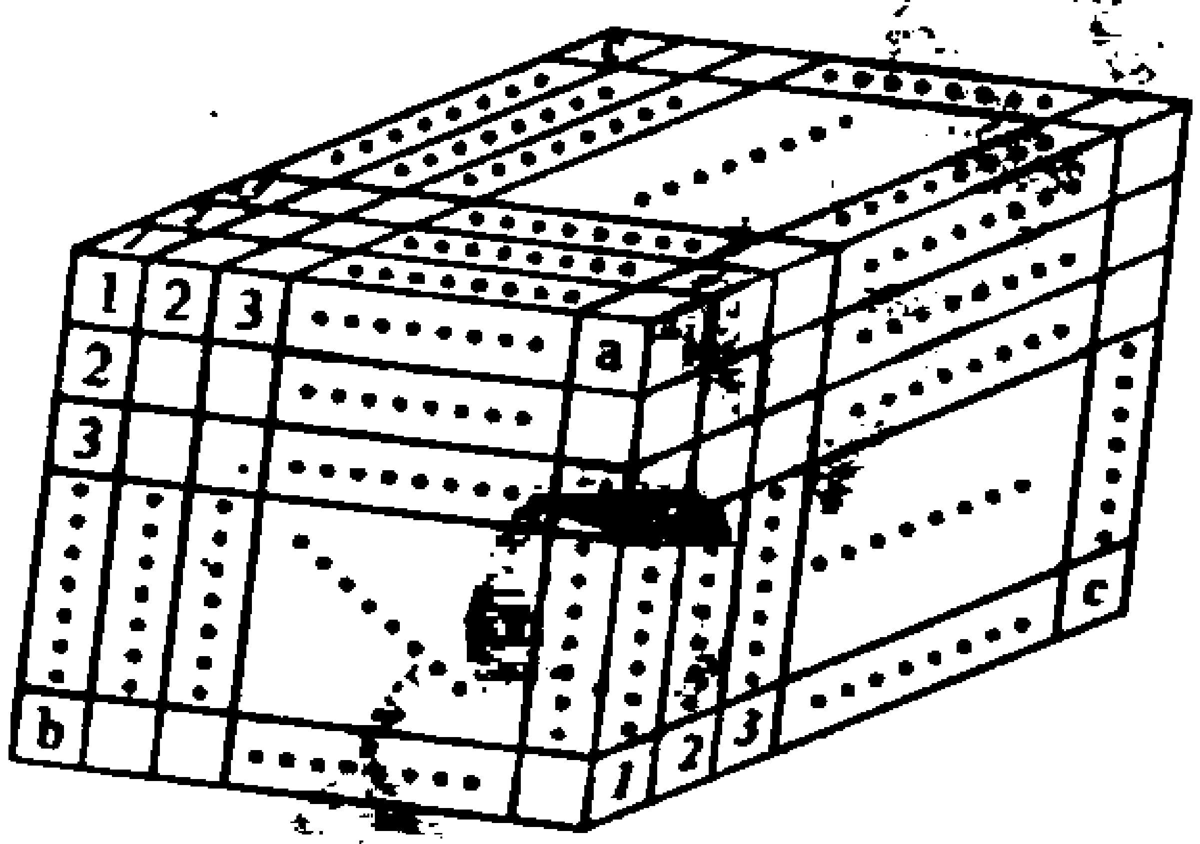
conteo de cuadrados :

1	2	3	········	n

$$\text{Total de cuadrados} = n$$

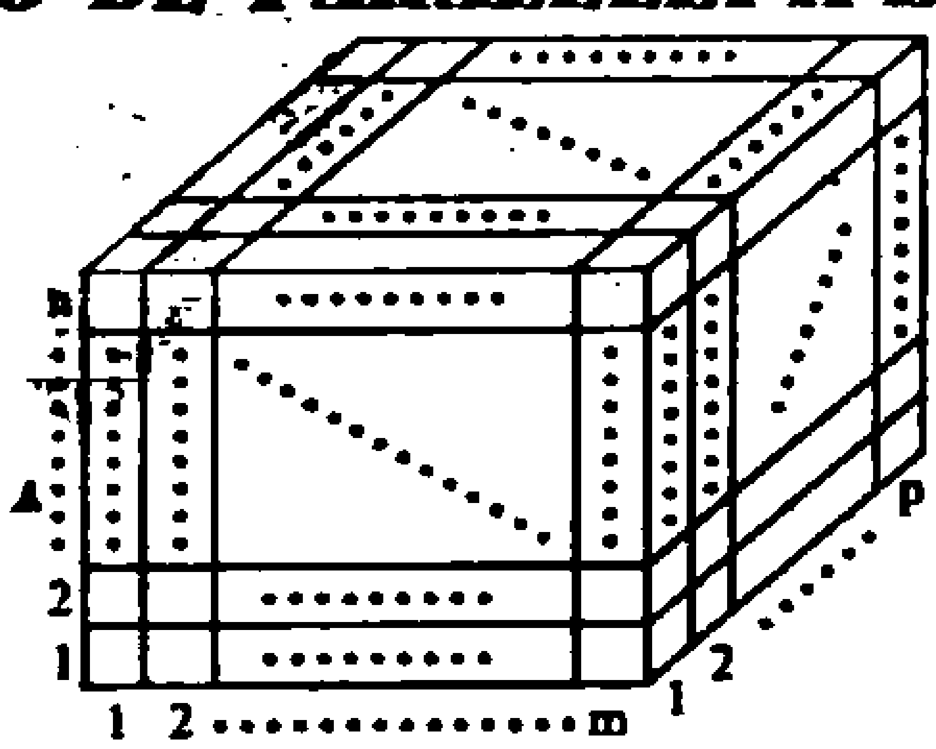


$$\text{Total de cuadrados} = m \times n + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots$$



$$\text{Total de cubos} = abc + (a-1)(b-1)(c-1) + (a-2)(b-2)(c-2) + \ldots$$

CONTEO DE PARALELEPÍPEDOS :



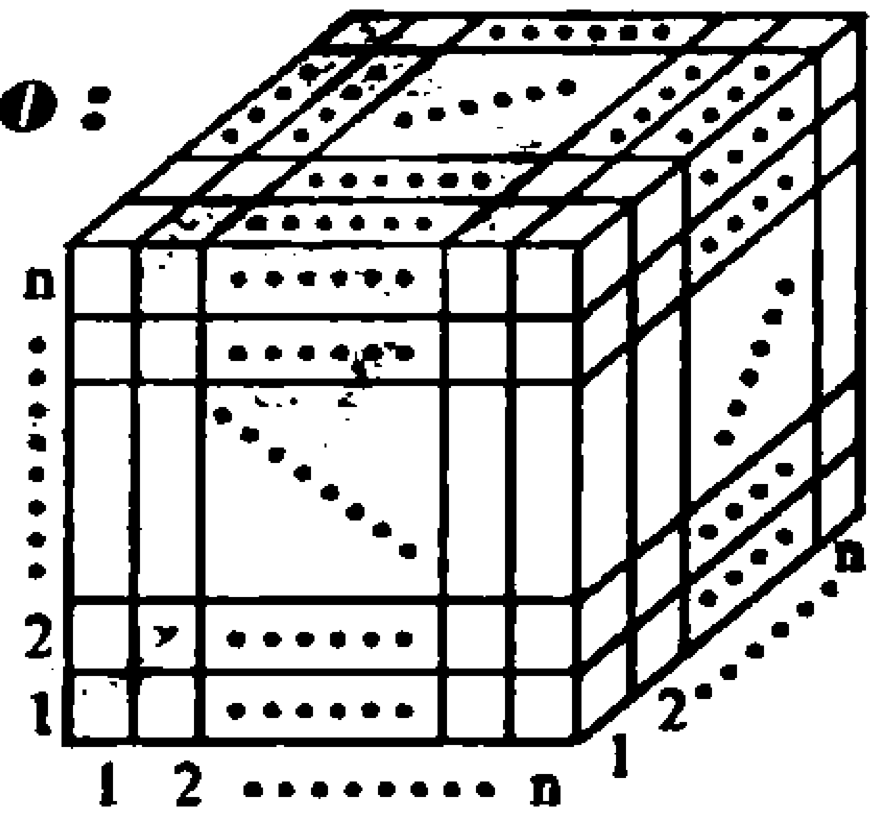
En la figura se muestra un paralelepípedo que puede estar formado ya sea por cubos simples o por paralelepípedos simples .

Procediendo por inducción, es sencillo demostrar que :

$$\text{Número de paralelepípedos} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\text{número total de cubos} : np + (m-1)(n-1)(p-1) + (m-2)(n-2)(p-2) + \ldots\ldots$$

EN UN CUBO :

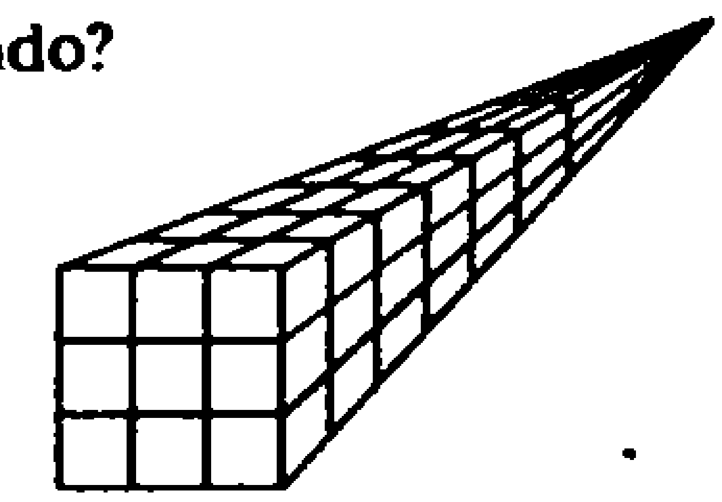


"El número de cubos estará dado por la siguiente serie" $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3$

$$\text{Número de cubos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

EJERCICIO :

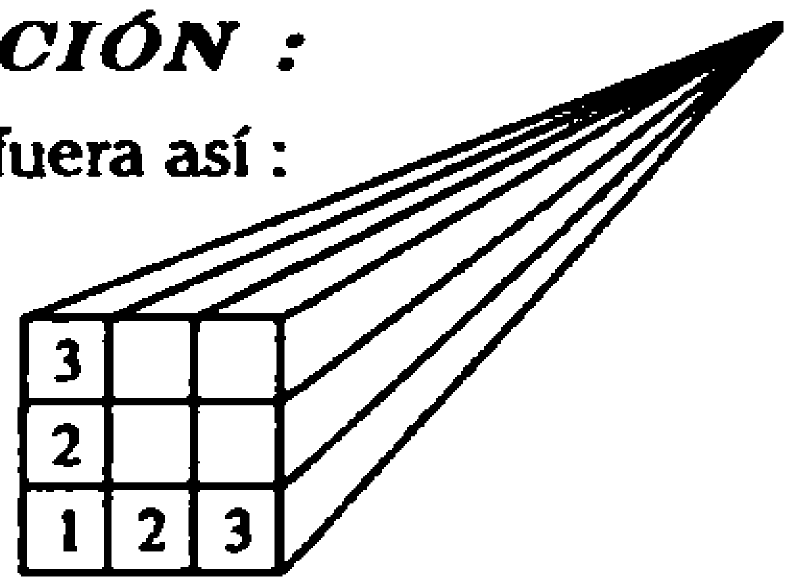
¿Cuántas pirámides de base cuadrangular hay en el sólido mostrado?



A) *98* ***B)*** *108* ***C)*** *252* ***D)*** *72* ***E)*** *64*

RESOLUCIÓN :

* Si la figura fuera así :



* Habría : $\frac{3 \times 4}{2} \times \frac{3 \times 4}{2} = 36$ cuadriláteros

* El cual indica , la cantidad de pirámides ya que cada cuadrilátero es la base de *1* pirámide , pero solo estamos considerando *1* capa vertical , luego en el problema se observa *7* de éstas capas , entonces :

$$\text{Número total de pirámides} : 36 \times 7 = 252$$

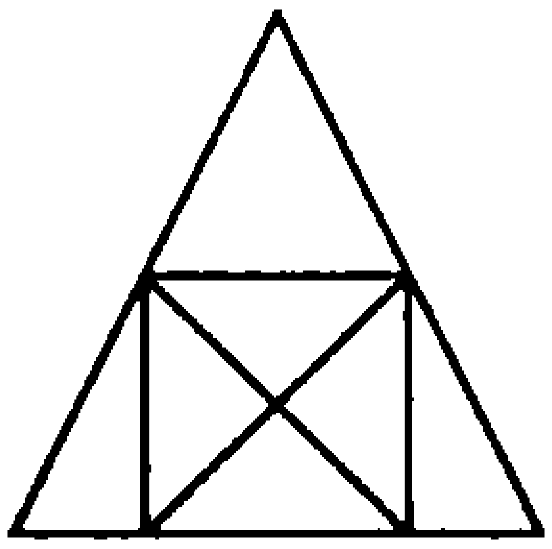
RPTA : "C"

PROBLEMAS RESUELTOS

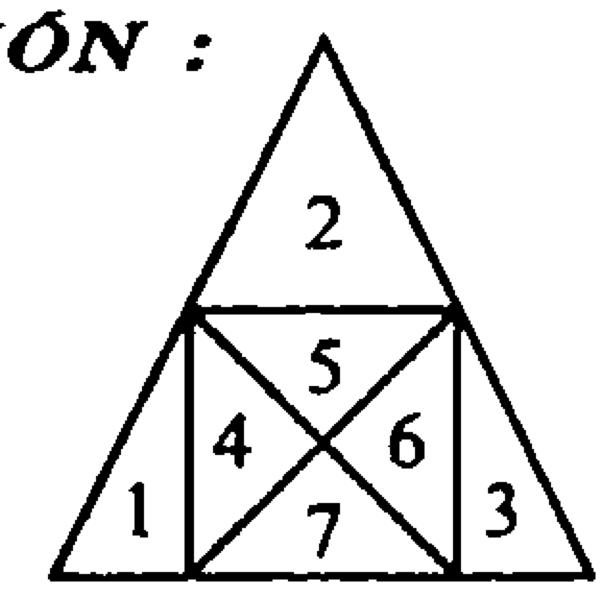
PROBLEMA 1 :

Indique el número de triángulos que hay en la siguiente figura :

A) 18
B) 14
C) 16
D) 7
E) 8



RESOLUCIÓN :



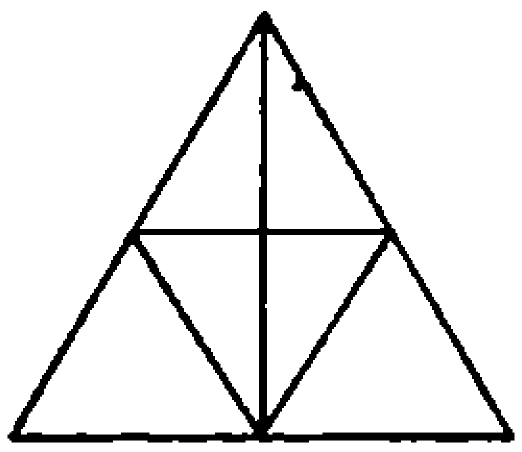
* De *1* sólo número : *7*
* De *2* números : *(47); (67); (56); (45)* ⇒ *4*
* De *3* números : *(367); (147)* ⇒ *2*
* De *7* números : *(1234567)* ⇒ *1*

Total : *14*

RPTA : "B"

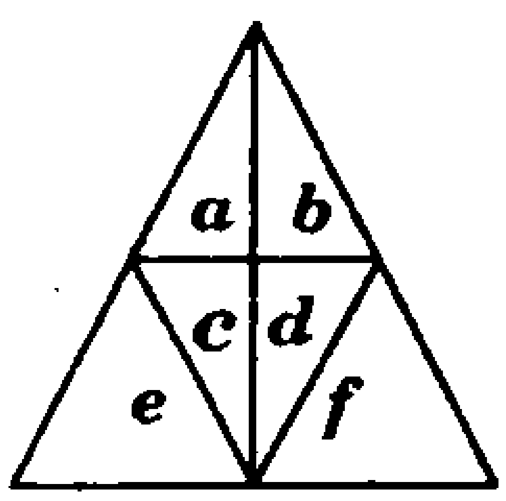
PROBLEMA 2 :

¿Cuántos triángulos hay en la figura mostrada?



A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

RESOLUCIÓN :



• Con *1* zona: *6* triángulos.
• Con *2* zonas: *4* triángulos.
• Con *3* zonas: *2* triángulos.
• Con *6* zonas: *1* triángulo.

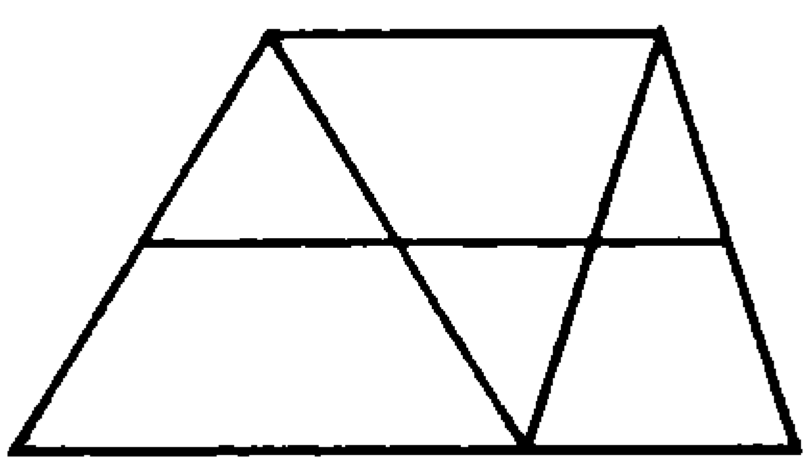
⇒ Total : $6+4+2+1=13$ triángulos

RPTA : "D"

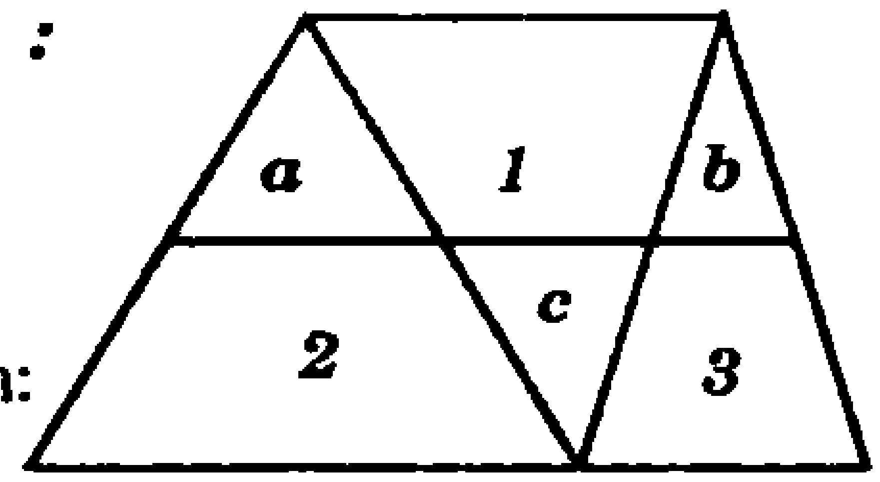
PROBLEMA 3 :

¿Cuántos cuadriláteros hay?

A) 12
B) 14
C) 10
D) 13
E) 15



RESOLUCIÓN :



Los cuadriláteros son:

1; 2; 3; 1a; 1b;

2c; 3c; 1ab; 2c3; 12ac; 1bc3; 123abc

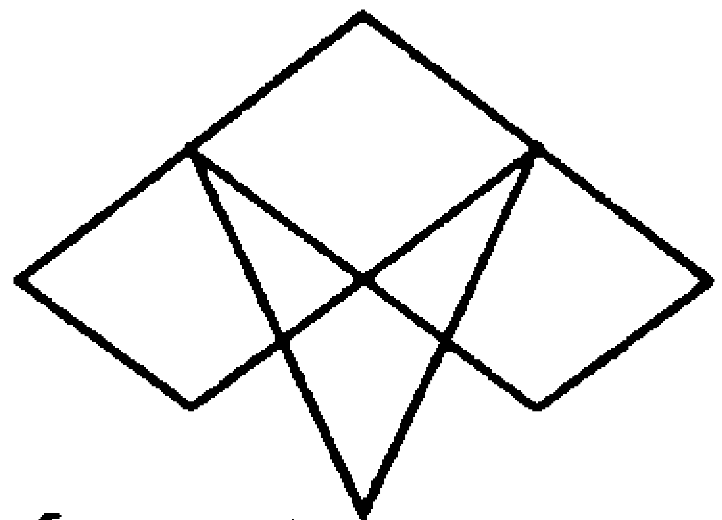
* Se puede contar en total 12 cuadriláteros de toda forma y tamaño.

RPTA : "A"

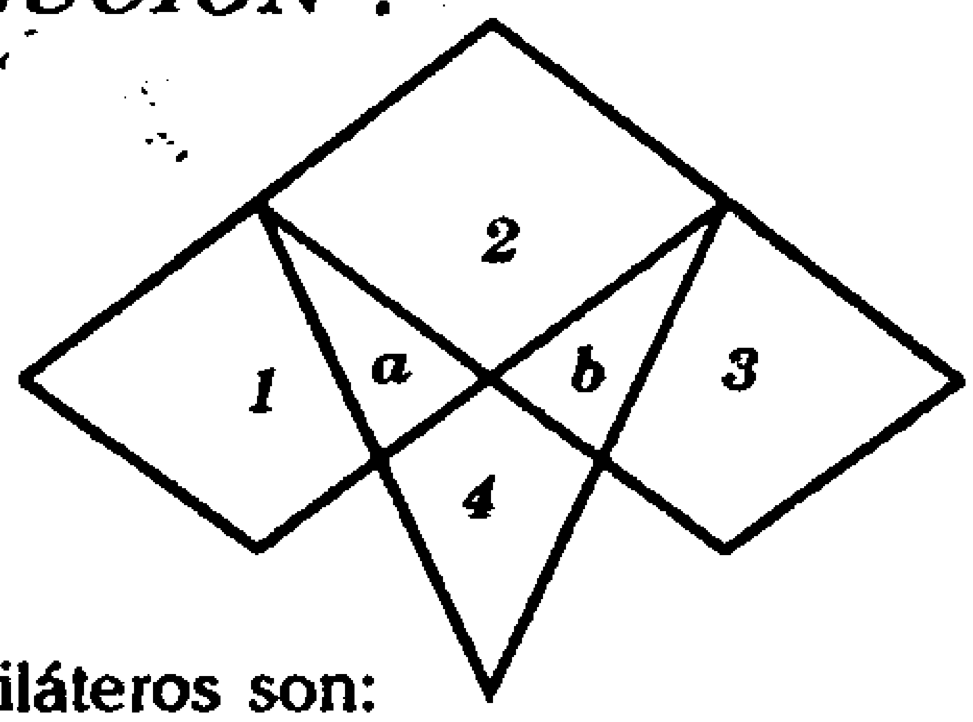
PROBLEMA 4 :

¿Cuántos cuadriláteros hay?

A) 8
B) 4
C) 3
D) 12
E) 22



RESOLUCIÓN :



Los cuadriláteros son:

1; 2; 3; 4; 1a; 2a; 2b; 3b; 1a2; 2b3; ab4; 2a4b

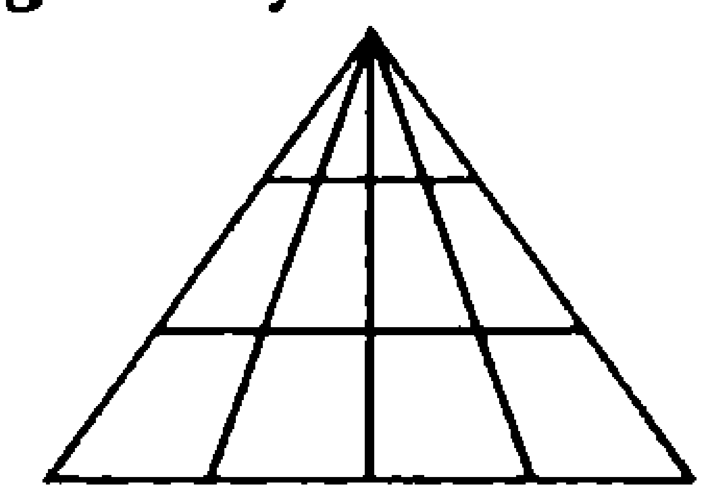
* Se puede contabilizar: *12* cuadriáteros en total .

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

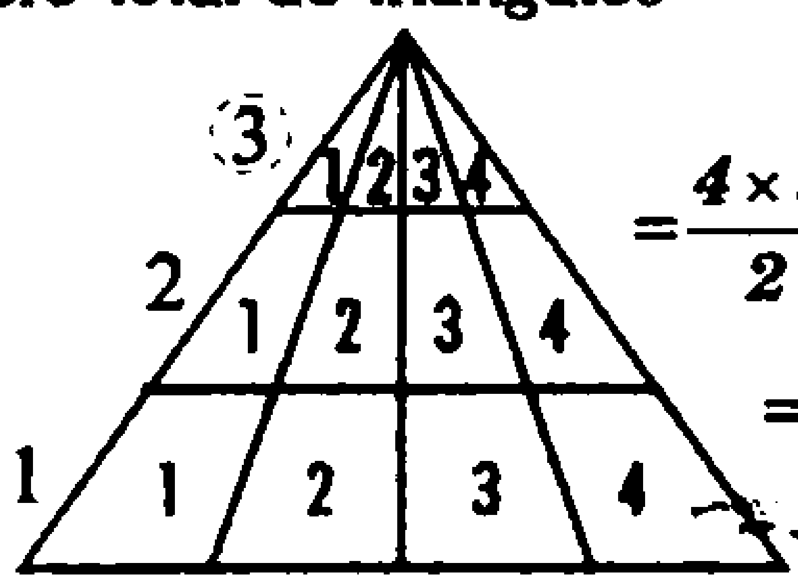
¿Cuántos triángulos hay en :

A) 30
B) 40
C) 20
D) 50
E) 18



RESOLUCIÓN :

Número total de triángulos



$$=\frac{4\times5}{2}=10$$

$$=\frac{4\times5}{2}=10$$

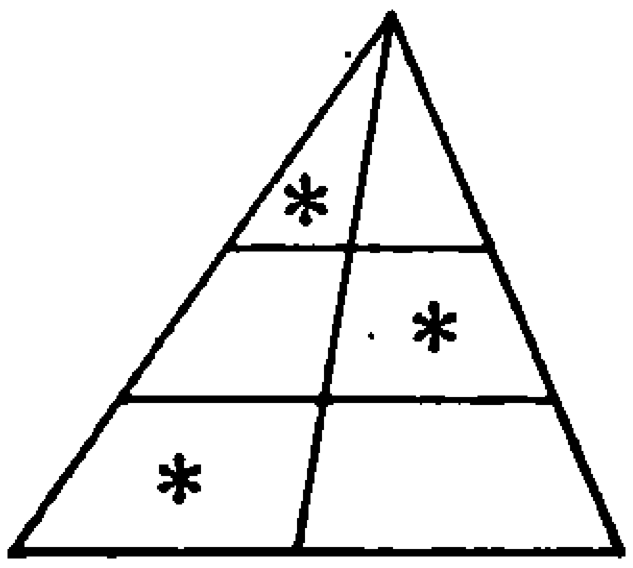
$$=\frac{4\times5}{2}=10$$

Número total de triángulos = ③×10 = 30

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco en su interior



A) 9
B) 8
C) 10
D) 7
E) 12

RESOLUCIÓN :

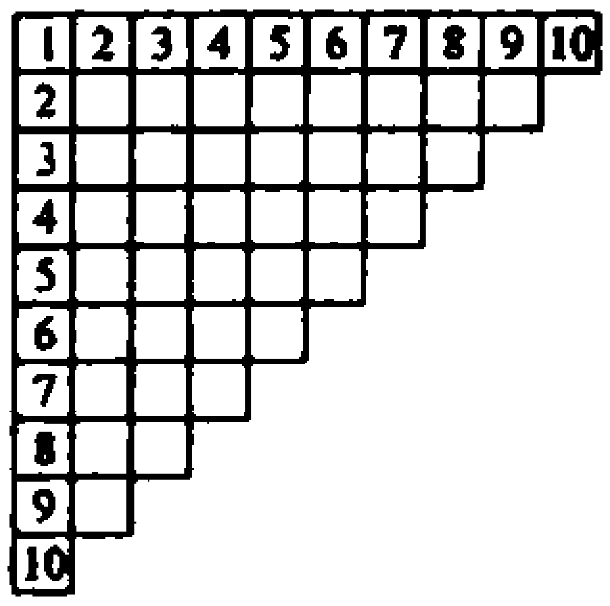
$$\underbrace{\text{Número de triángulos que tienen al menos un asterisco}} = \text{Total de triángulos} - \overbrace{\text{Número de triángulos que no tienen asterisco}}^{\text{Se cuenta por simple inspección}}$$

$$=\left(\frac{2\times 3}{2}\right)\times 3-1=8$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

¿Cuántos cuadrados hay en :



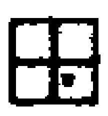
A) 100
B) 93
C) 81
D) 125
E) 64

RESOLUCIÓN :

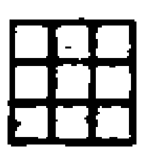
Contando por simple inspección :

- Cuadrados de la forma □, hay :

$$1+2+3+...+10=\frac{10\times 11}{2}=55$$

- Cuadrados de la forma  (solo el más grande), hay :

$$1+2+3+...+8=\frac{8\times 9}{2}=36$$

- Cuadrados de la forma  (sólo el más grande) hay :

$$1+2+3+...+6=\frac{6\times 7}{2}=21$$

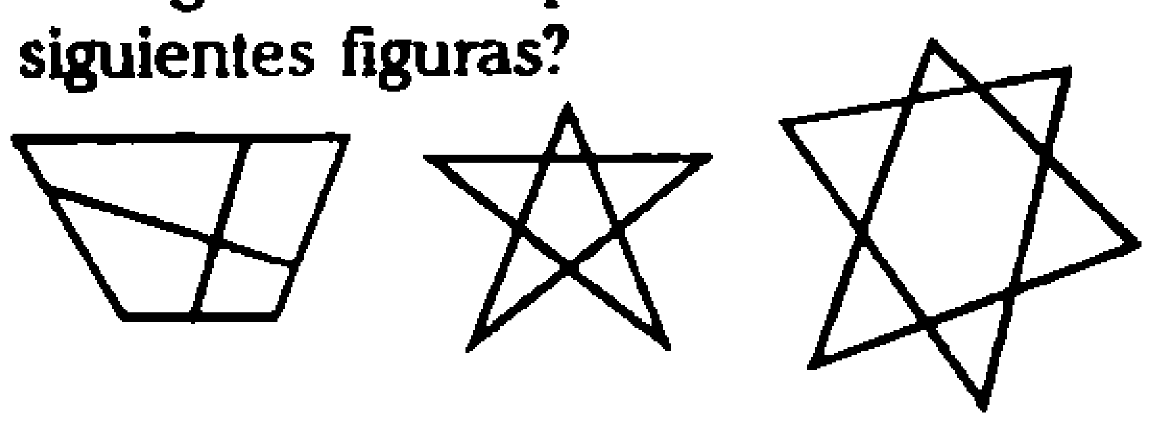
- Cuadrados de *(4×4)*, hay : $1+2+3+4=10$.
- Cuadrados de *(5×5)* ; hay : *3*
- Finalmente . Total de cuadrados :

$55+36+21+10+3=125$

RPTA :"D"

PROBLEMA 8 :

¿Cuántos segmentos se pueden contar en cada una de las siguientes figuras?



Indicar la suma de las *3* cantidades

A) 60 *B) 24* *C) 72* *D) 84* *E) 126*

RESOLUCIÓN :

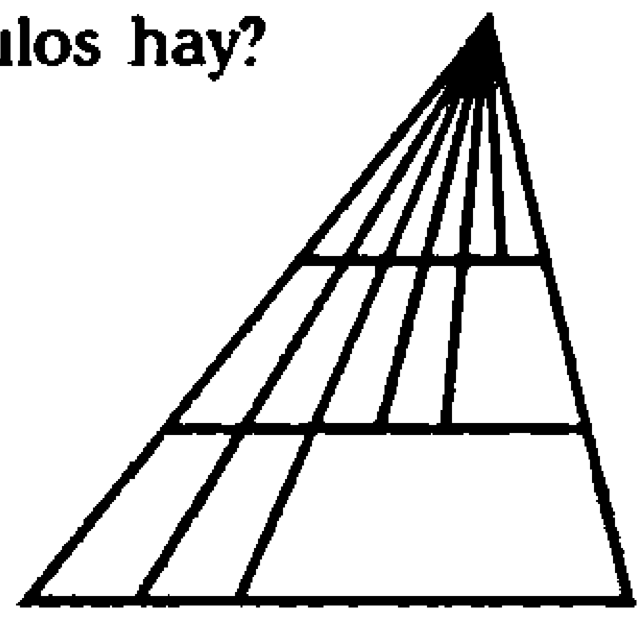
En la *1ra* figura se puede observar que su conformación se da con *6* líneas de: $1+2=3$ segmentos, por tanto basta contar una línea y el resultado multiplicarlo por *6* ; eso mismo ocurrirá con las otras *2* figuras, entonces la expresión a calcular será:

$$(1+2)\times 6+(1+2+3)\times 5+(1+2+3)\times 6=84$$

RPTA : "D"

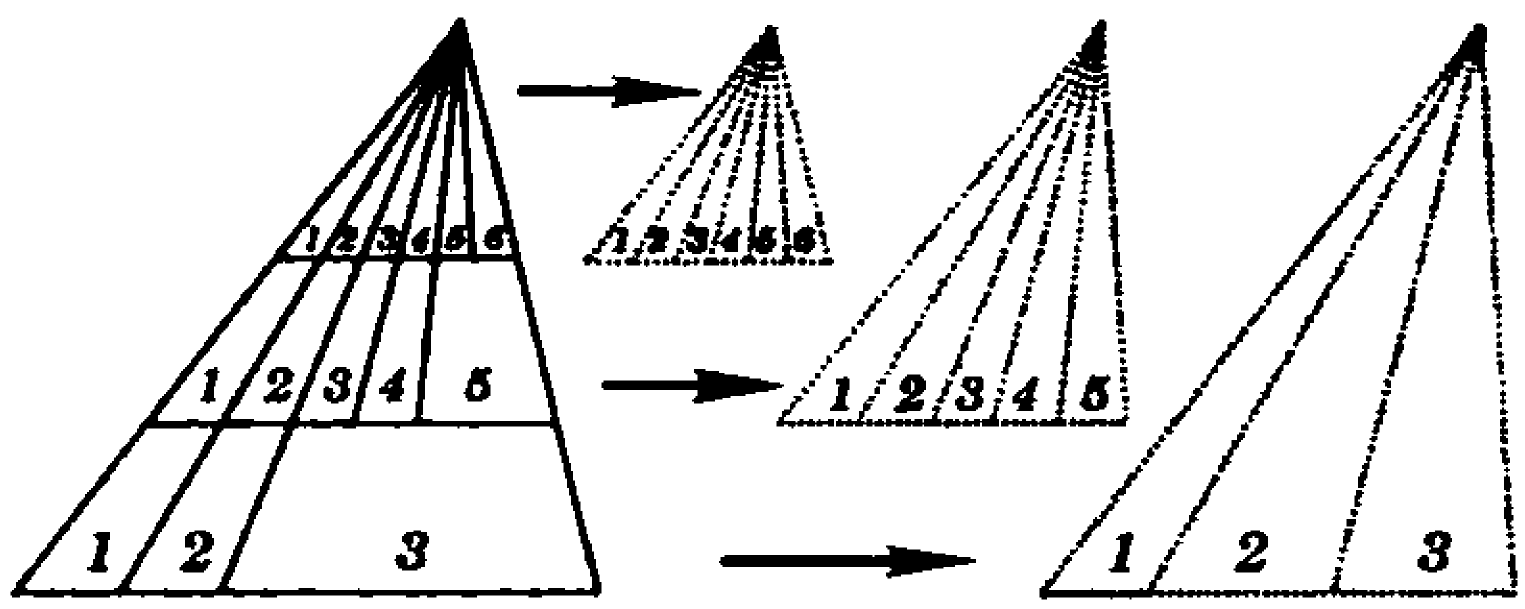
PROBLEMA 9 :

¿Cuántos triángulos hay?



A) 36
B) 17
C) 42
D) 38
E) 56

RESOLUCIÓN :



* Entonces el total de triángulos será :

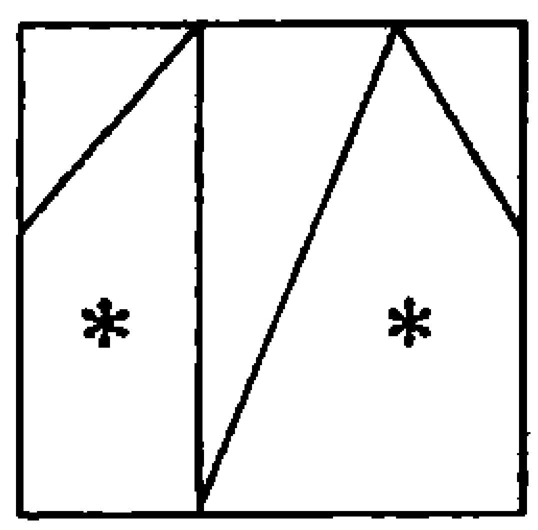
$$(1+2+3+4+5+6)+(1+2+3+4+5)+(1+2+3)$$

$$=\frac{6\times 7}{2}+\frac{5\times 6}{2}+\frac{3\times 4}{2}=21+15+6=42$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

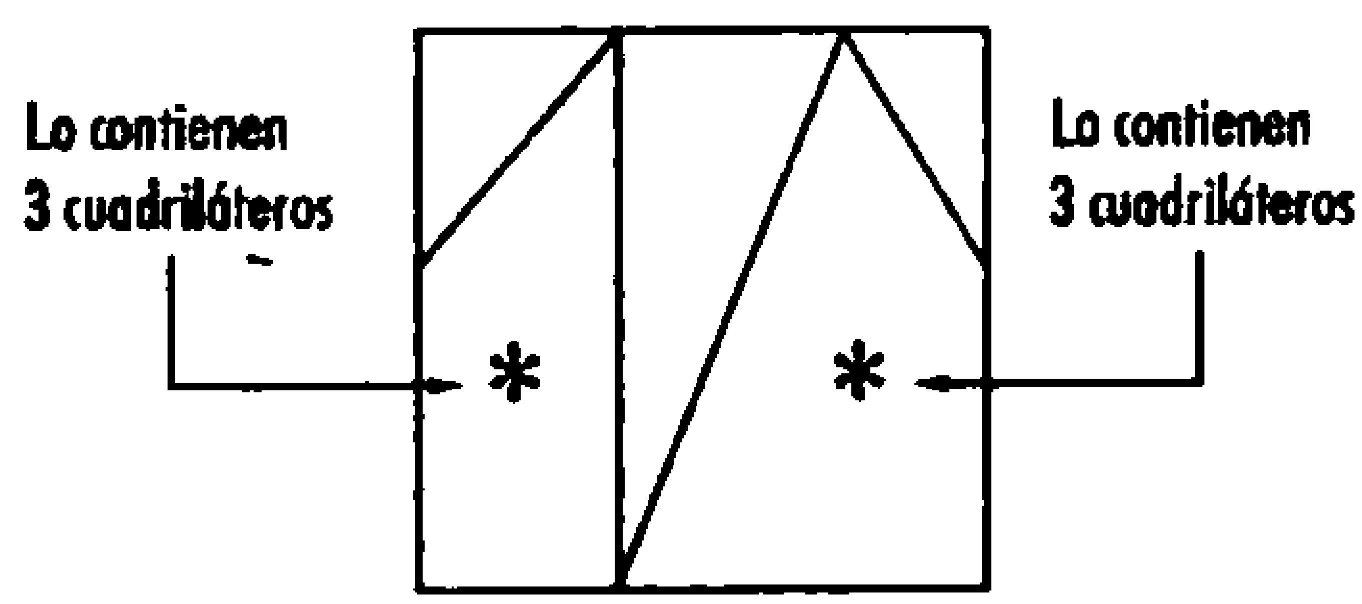
¿Cuántos cuadriláteros contienen un solo asterisco?



A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

RESOLUCIÓN :

* Por simple inspección :



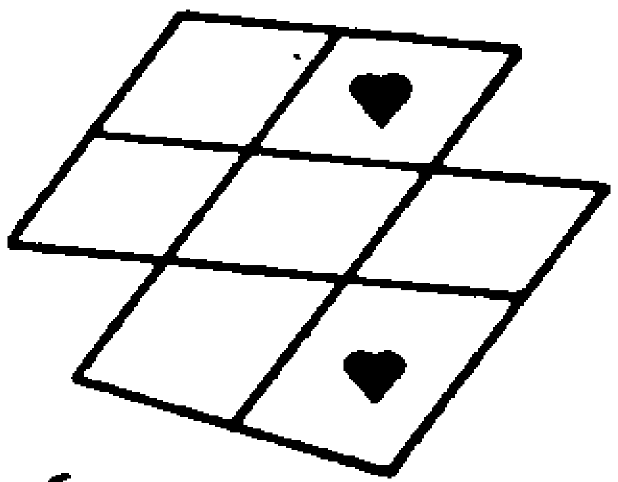
* Lo pedido será : $3 + 3 = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

¿Cuántos cuadriláteros no contienen ningún ♥?

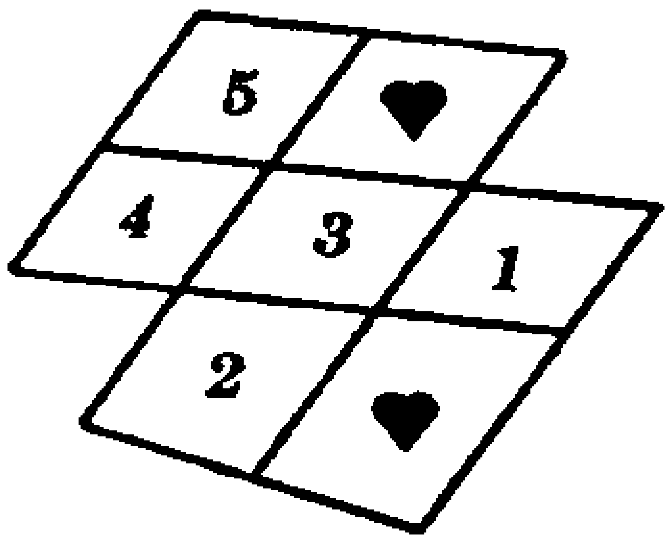
A) 7
B) 12
C) 15
D) 10
E) 13



RESOLUCIÓN :

* Los cuadriláteros con ningún corazón serán :

1; 2; 3; 4; 5; 13; 23; 34; 45; 134



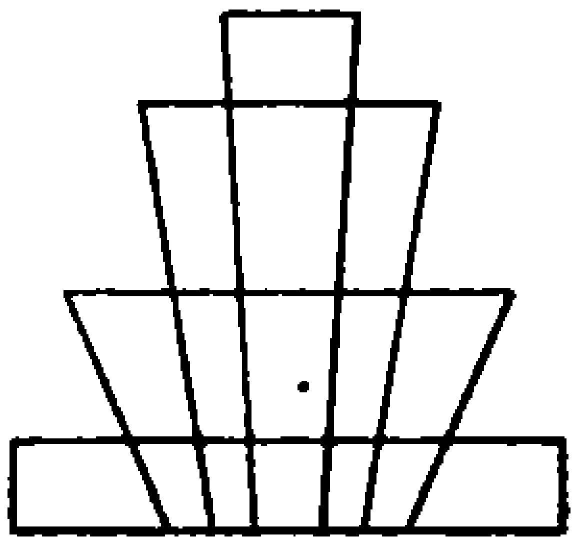
* Entonces se contabilizarán: ***10*** cuadriláteros requeridos.

RPTA : "D"

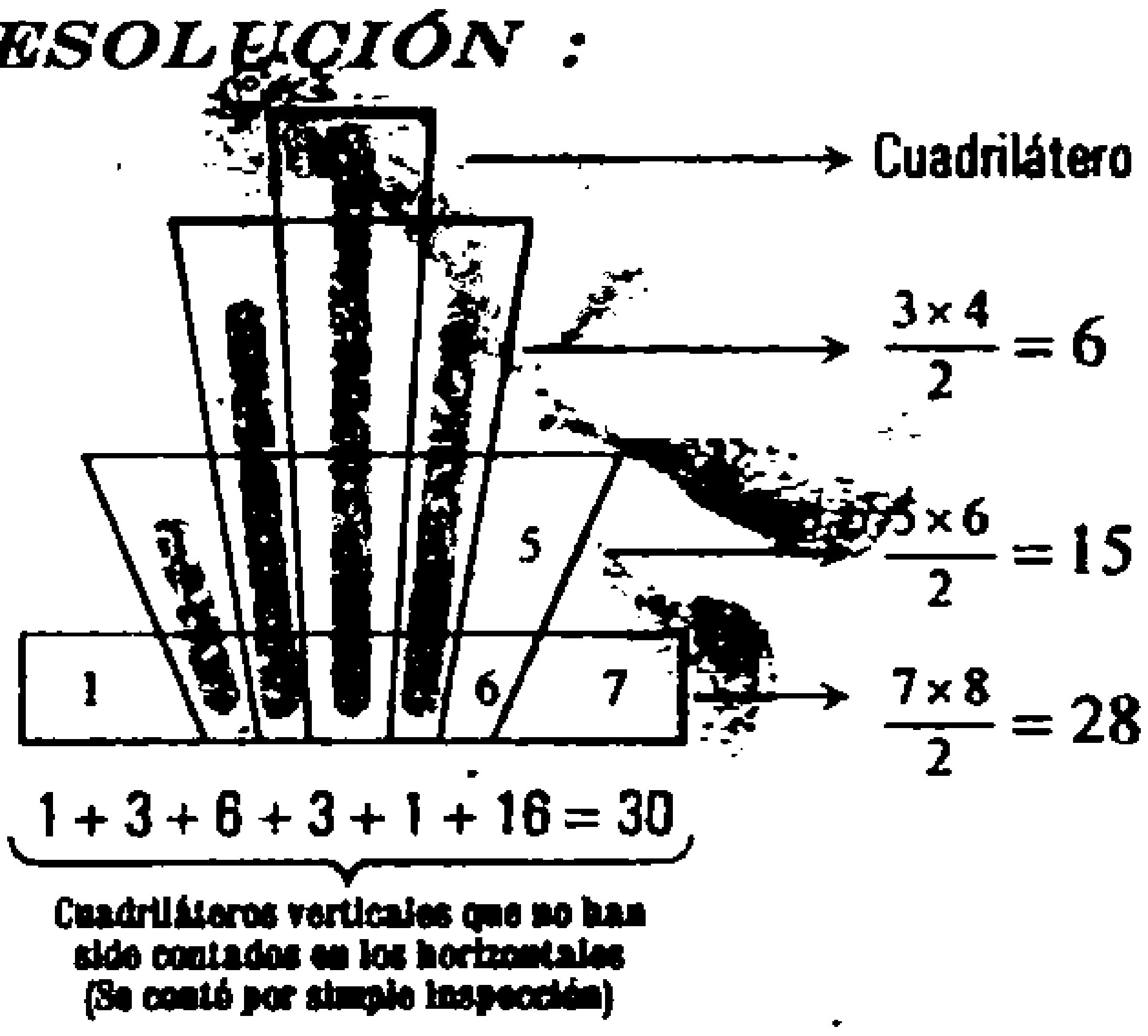
PROBLEMA 12 :

¿Cuántos cuadriláteros hay como máximo en la figura mostrada?

A) 72
B) 78
C) 80
D) 82
E) 86



RESOLUCIÓN :



* Luego el total de cuadriláteros será :

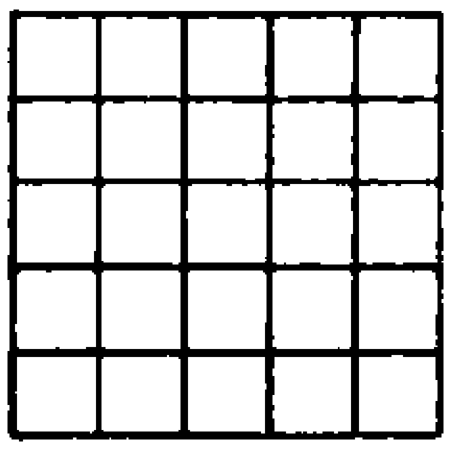
$$1 + 6 + 15 + 28 + 30 = 80$$

RPTA : "C"

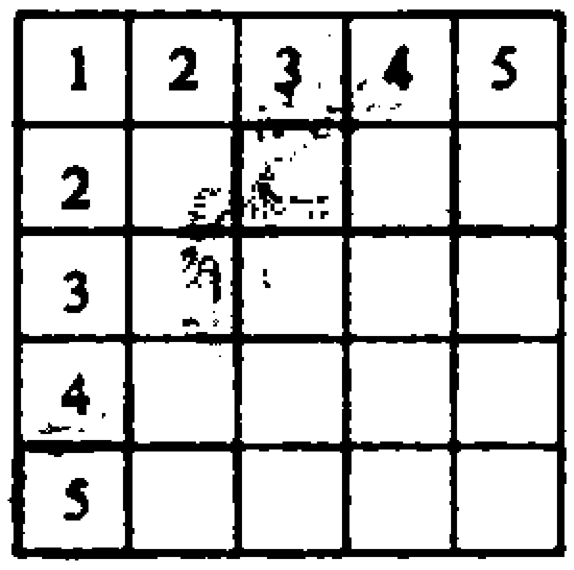
PROBLEMA 13 :

En la figura , ¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados hay en total?

A) 70
B) 225
C) 170
D) 180
E) 36



RESOLUCIÓN :



de cuadriláteros : $\left(\frac{5\times6}{2}\right)\left(\frac{5\times6}{2}\right)=225$

de cuadrados : $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$$= \frac{5\times6\times11}{6} = 55$$

* Luego consideremos que :

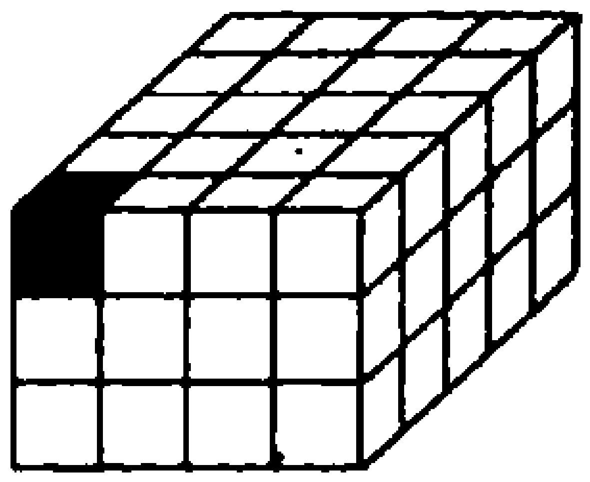
$$\begin{pmatrix}\text{\# de}\\ \text{cuadrados}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{\# de cuadriláteros}\\ \text{que no son cuadrados}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{\# total de}\\ \text{cuadriláteros}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{\# de cuadriláteros}\\ \text{no cuadrados}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\text{Total de}\\ \text{cuadriláteros}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Total de}\\ \text{cuadrados}\end{pmatrix}$$

Entonces lo pedido será : $225 - 55 = 170$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :



I) El número de cubitos

II) El número de cubos

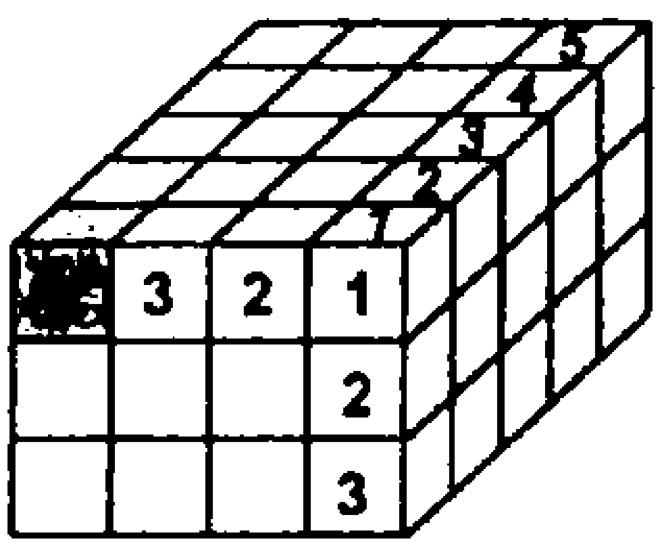
III) El número de paralelepípedos

IV) El número de paralelepípedos que no son :

* Indicar la suma de los resultados

A) 960 *B) 870* *C) 1070* *D) 1860* *E) 3020*

RESOLUCIÓN :



I) # de cubitos :

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

II) # total de cubos :

$$3\times 4\times 5 + 2\times 3\times 4 + 1\times 2\times 3 = 90$$

III) # de paralelepípedos :

$$\left(\frac{3\times4}{2}\right)\left(\frac{4\times5}{2}\right)\left(\frac{5\times6}{2}\right)=900$$

IV) **# de paralelepípedos que no son cubos = Total de paralelepípedos – Total de cubos**
= 900 – 90 = 810

* La expresión pedida será :

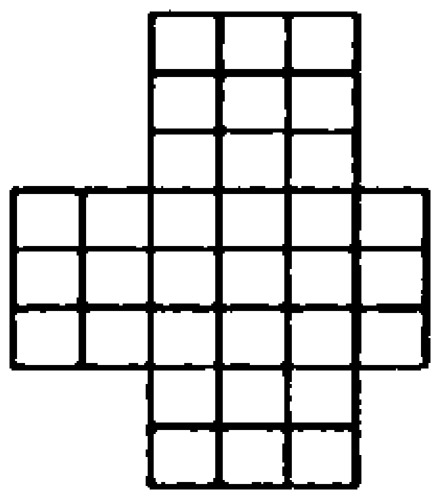
60 + 90 + 900 + 810 = 1860

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

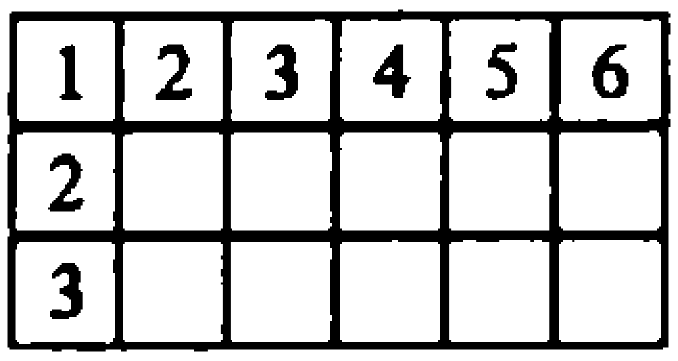
¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura mostrada?

A) 316
B) 306
C) 304
D) 300
E) 288

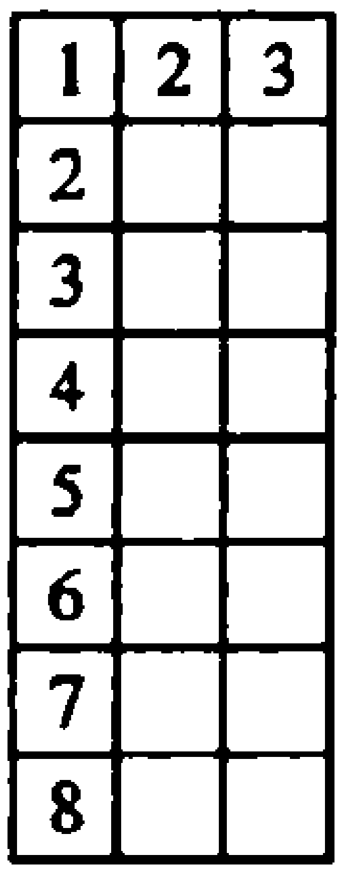


RESOLUCIÓN :

• Primero calculamos el número de cuadriláteros de las siguientes figuras .



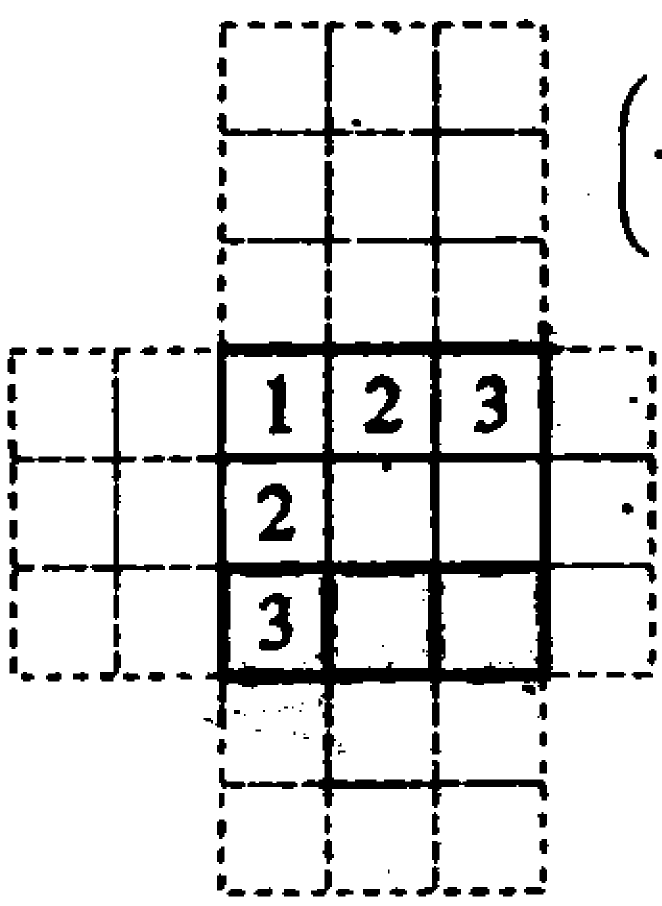
de cuadriláteros : $\left(\frac{3\times4}{2}\right)\left(\frac{6\times7}{2}\right)$
$= 126$



de Cuadriláteros : $\left(\frac{8\times9}{2}\right)\left(\frac{3\times4}{2}\right)$**=216**

• Luego en forma conjunta :

Hay una parte de la figura que ha sido contada *2* veces (la intersección la parte que esta sombreada) donde su número será :



$\left(\frac{3\times4}{2}\right)\times\left(\frac{3\times4}{2}\right)$**=36**

los cuales solamente debemos considerarlos *1* vez. (por eso debemos restarlos).

* Finalmente lo pedido será :

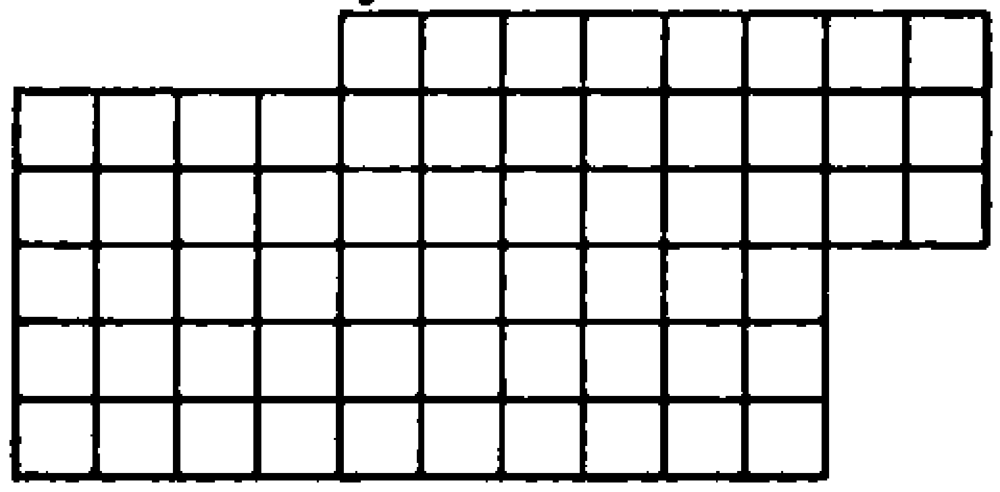
126 + 216 – 36 = 306 cuadriláteros

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

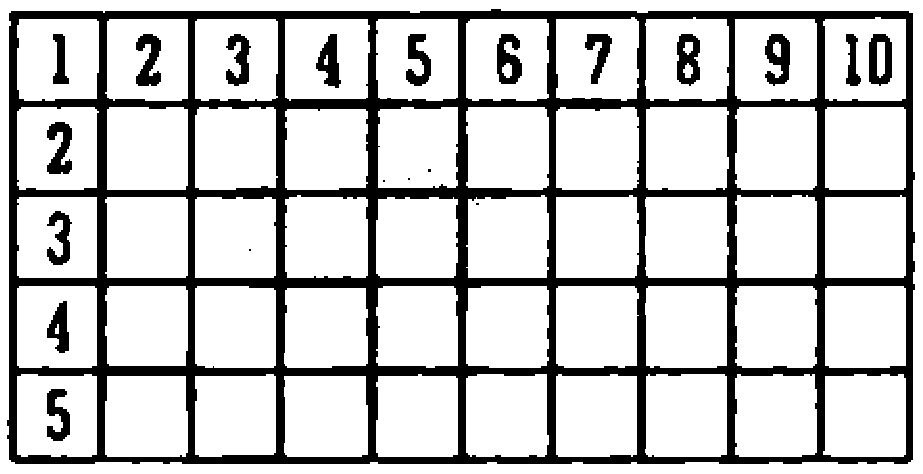
¿Cuántos cuadrados hay?

A) 174
B) 167
C) 89
D) 216
E) 906



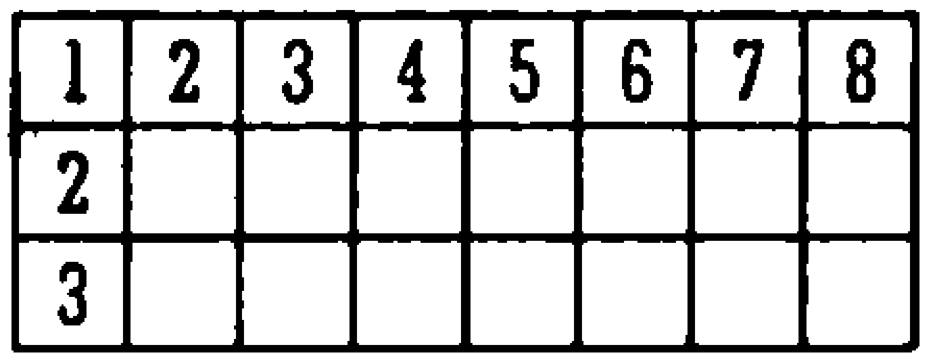
RESOLUCIÓN :

Aplicando el mismo criterio que el problema anterior (pero considerando *2* cuadrados) :

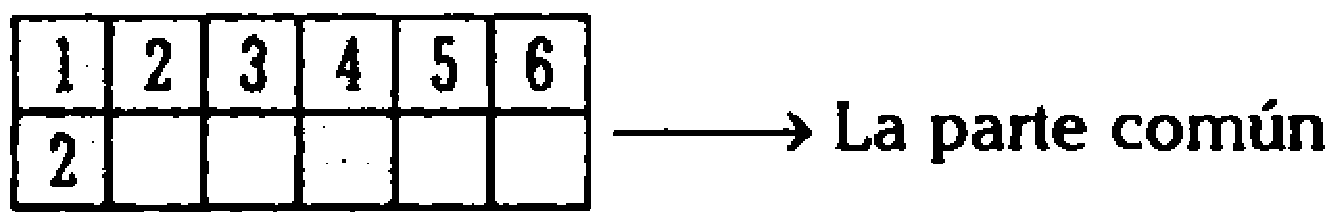


de cuadrados :

5×10 + 4×9 + 3×8 + 2×7 + 1×6 = 130



de cuadrados : **3×8 + 2×7 + 1×6 = 44**



de cuadrados : **2×6 + 1×5 = 17**

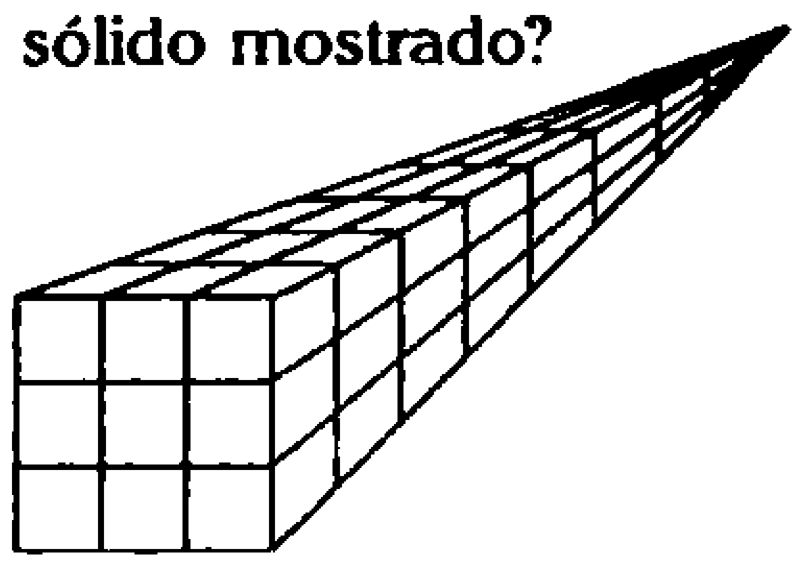
• La expresión a calcular será :

130 + 44 – 17 = 157 Cuadrados

RPTA : 'B"

PROBLEMA 17 :

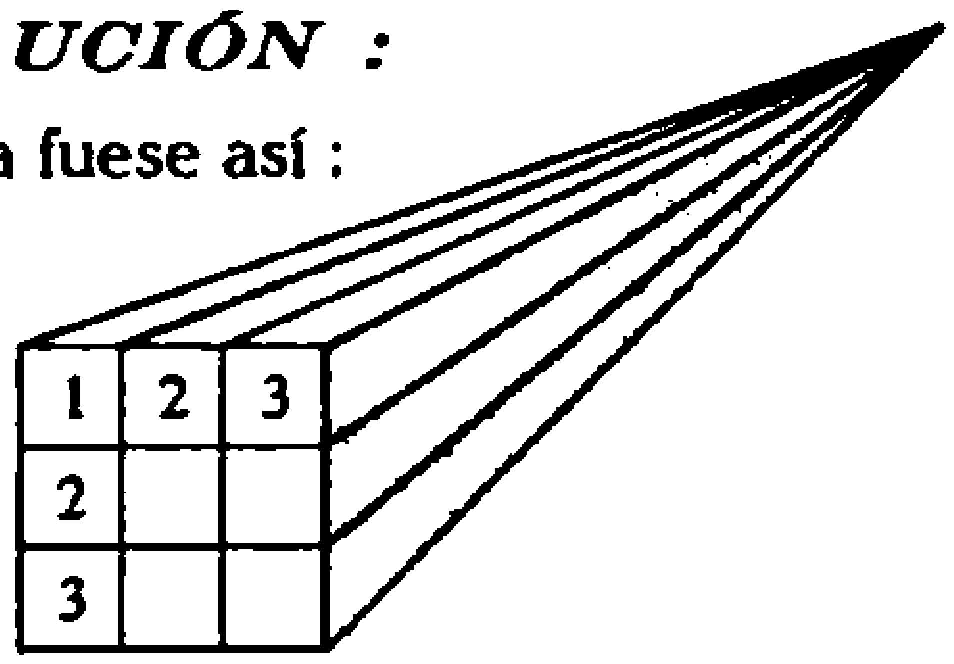
¿Cuántas pirámides de base cuadrada se pueden contar en el sólido mostrado?



A) 68 *B) 88* *C) 98* *D) 112* *E) 196*

RESOLUCIÓN :

Si la figura fuese así :



* Se nota que en la base hay :

$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ cuadrados ; está última cantidad ,

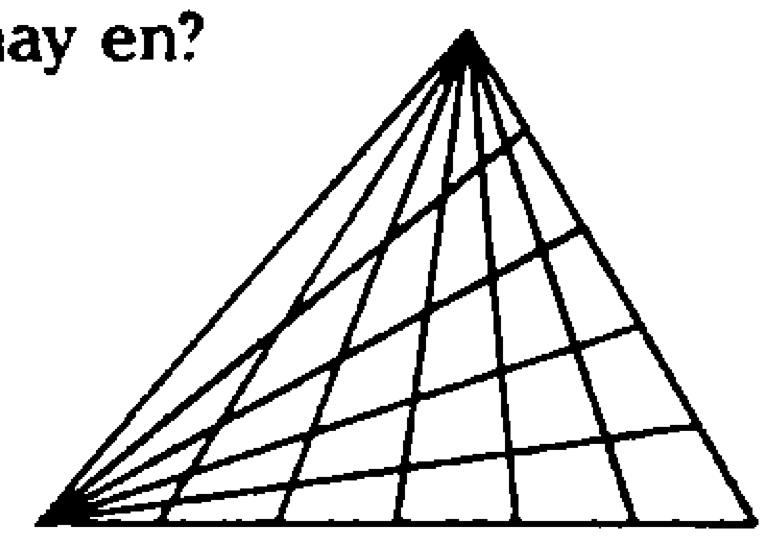
también indica la cantidad de pirámides con base cuadrada , de una pirámide, pero solo estamos considerando *1* capa vertical , luego como en el problema se observa *8* de éstas capas, entonces :

Número total de pirámides con base cuadrada $\Rightarrow 8\times 14 = 112$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

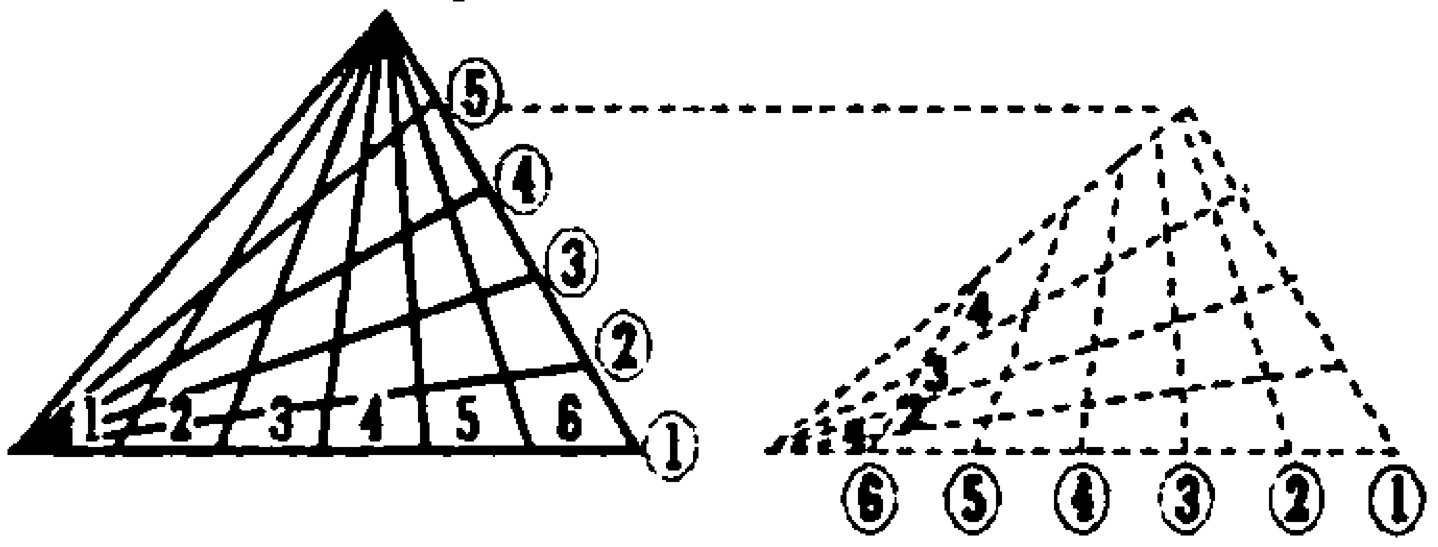
¿Cuantos triángulos hay en?



A) 30
B) 90
C) 75
D) 165
E) 225

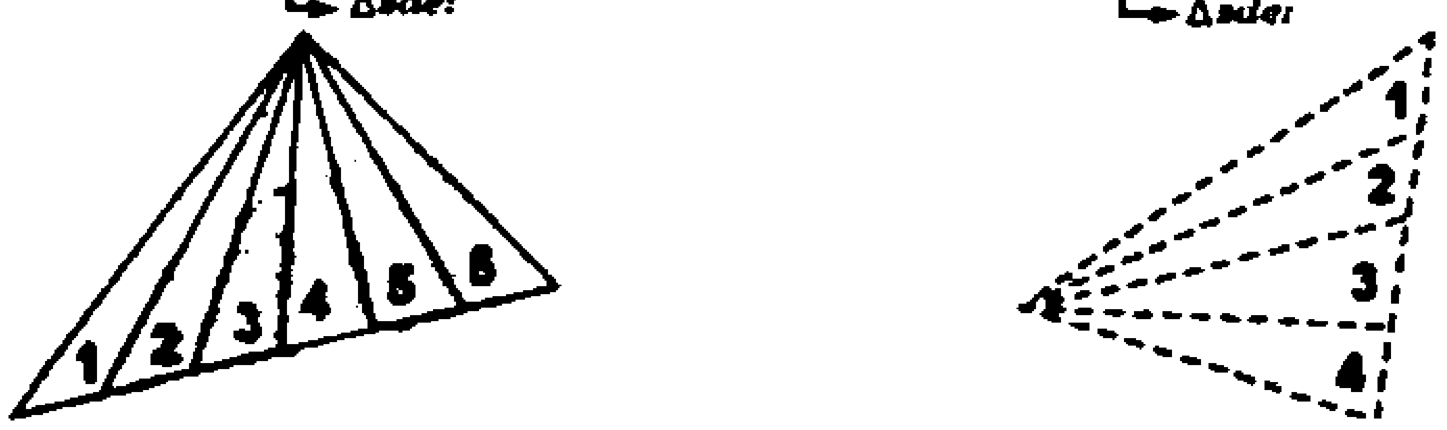
RESOLUCIÓN :

Calculemos en *2* partes :



Contaremos solo Δs horizontales — Contaremos solo Δs verticales

$$\underbrace{(1+2+3+4+5+6)}_{\Delta s\ de:}\times \underbrace{5}_{\#\ de\ capa} + \underbrace{(1+2+3+4)}_{\Delta s\ de:}\times \underbrace{6}_{\#\ de\ capa}$$

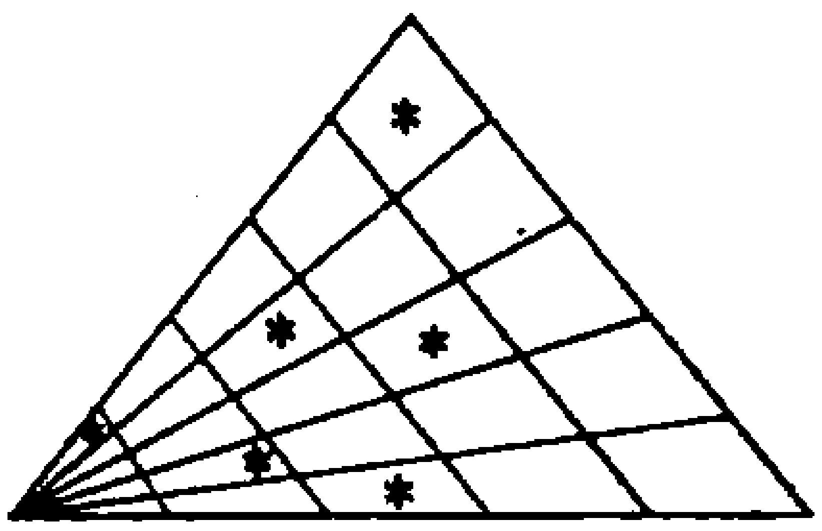


$= \left(\dfrac{6\times 7}{2}\right)\times 5 + \left(\dfrac{4\times 5}{2}\right)\times 6 = 165$, Triángulos

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

¿Cuántos triángulos se encuentran que por lo menos tengan un asterisco en su interior?



A) 60
B) 55
C) 50
D) 45
E) 40

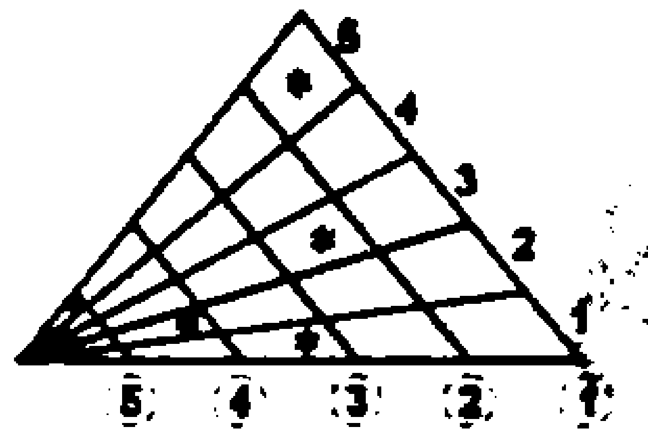
RESOLUCIÓN :

• Piden aquellos triángulos que tienen asteriscos, entonces

$$\#\text{ de triángulos con asteriscos} + \#\text{ de triángulos sin asteriscos} = \text{Total de triángulos}$$

$$\#\text{ de triángulos con al menos 1 asterisco} = \text{Total de triángulos} - \left(\#\text{ de triángulos que no tienen asteriscos}\right)$$

⇓ ⇓



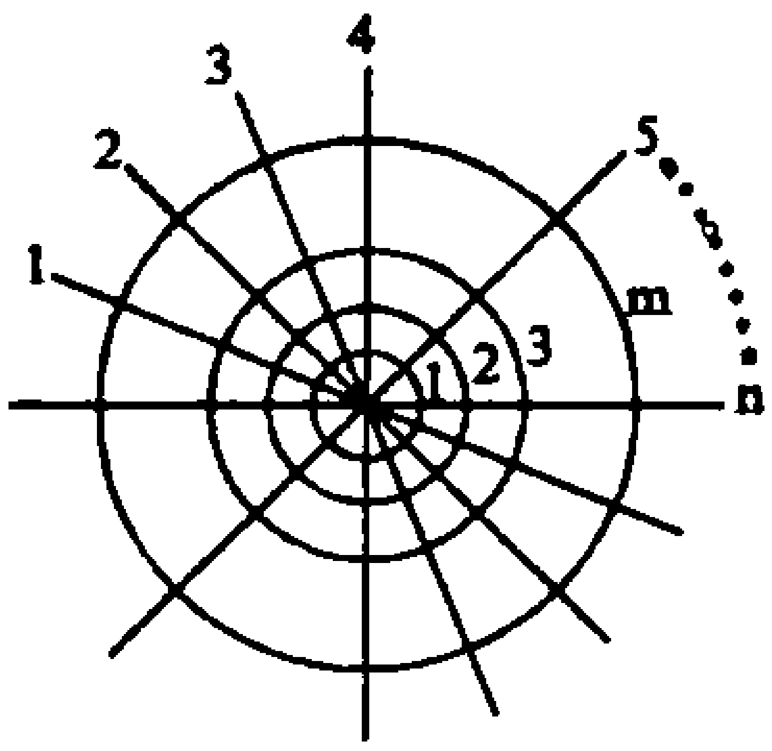
Lo contaremos por simple inspección

$$= \left(\frac{5\times 6}{2}\right)\times 5 - 15 = 60$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

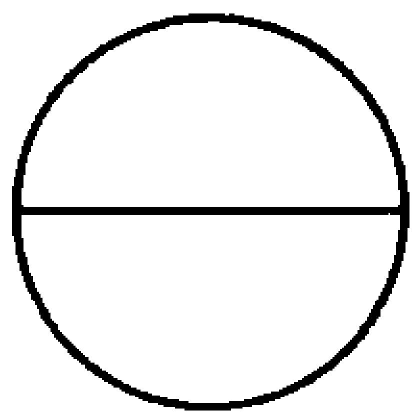
¿Cuántas semicircunferencias se encuentran como máximo en la figura mostrada?



A) 2(m + n) *B) 2(m – n)* *C) 2mn*

RESOLUCIÓN :

* Por cada diámetro (en una circunferencia) hay *2* semicircunferencias :



⇒ Como en la figura se observa "*n*" diámetros; entonces por cada semicircunferencia habrá : "*2n*" semicircunferencias.

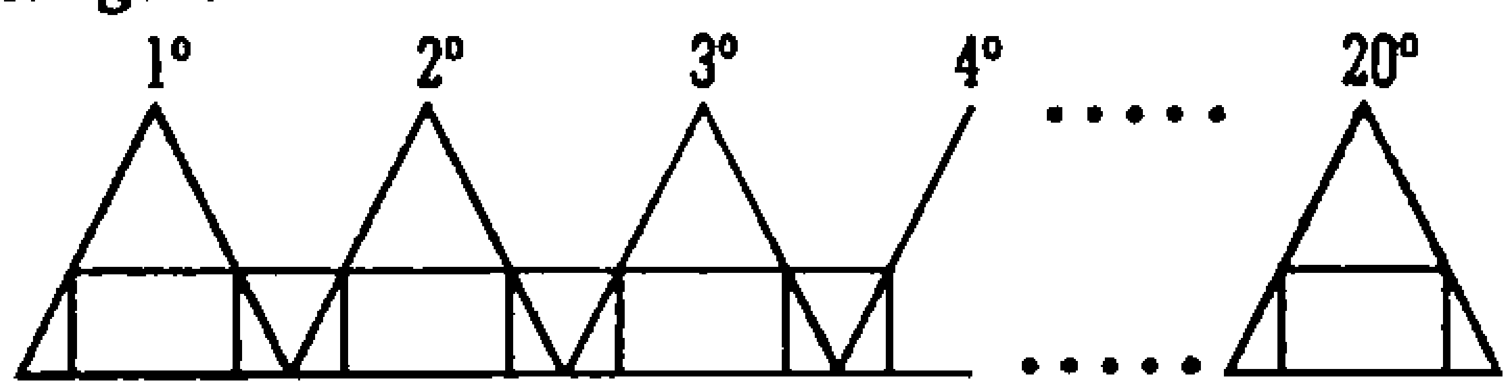
* Pero en el problema hay "*m*" circunferencias, entonces:

$$\#\text{ de semicircunferencias} : \underbrace{2n+2n+2n+\ldots+2n}_{\text{"m" sumandos}} = m(2n) = 2mn$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

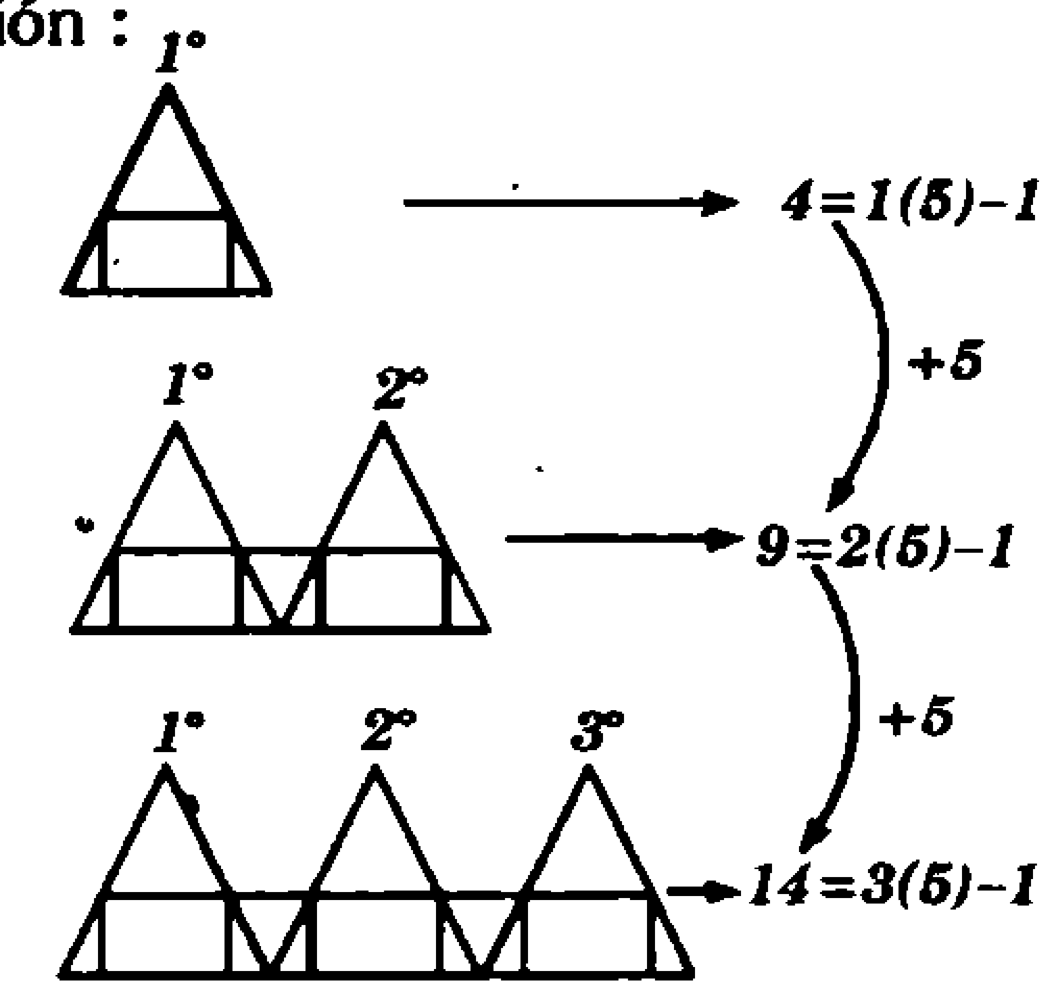
En la figura determinar el máximo número de triángulos.



A) 80 *B) 90* *C) 100* *D) 99* *E) 88*

RESOLUCIÓN :

Por Inducción :



• Luego en la figura dada, el número de triángulos será: $20(5) - 1 = 99$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

En la figura mostrada , ¿Cuántos triángulos se puede contar en total?

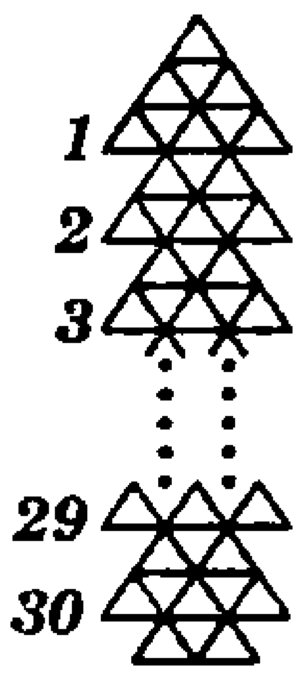
A) 365

B) 361

C) 370

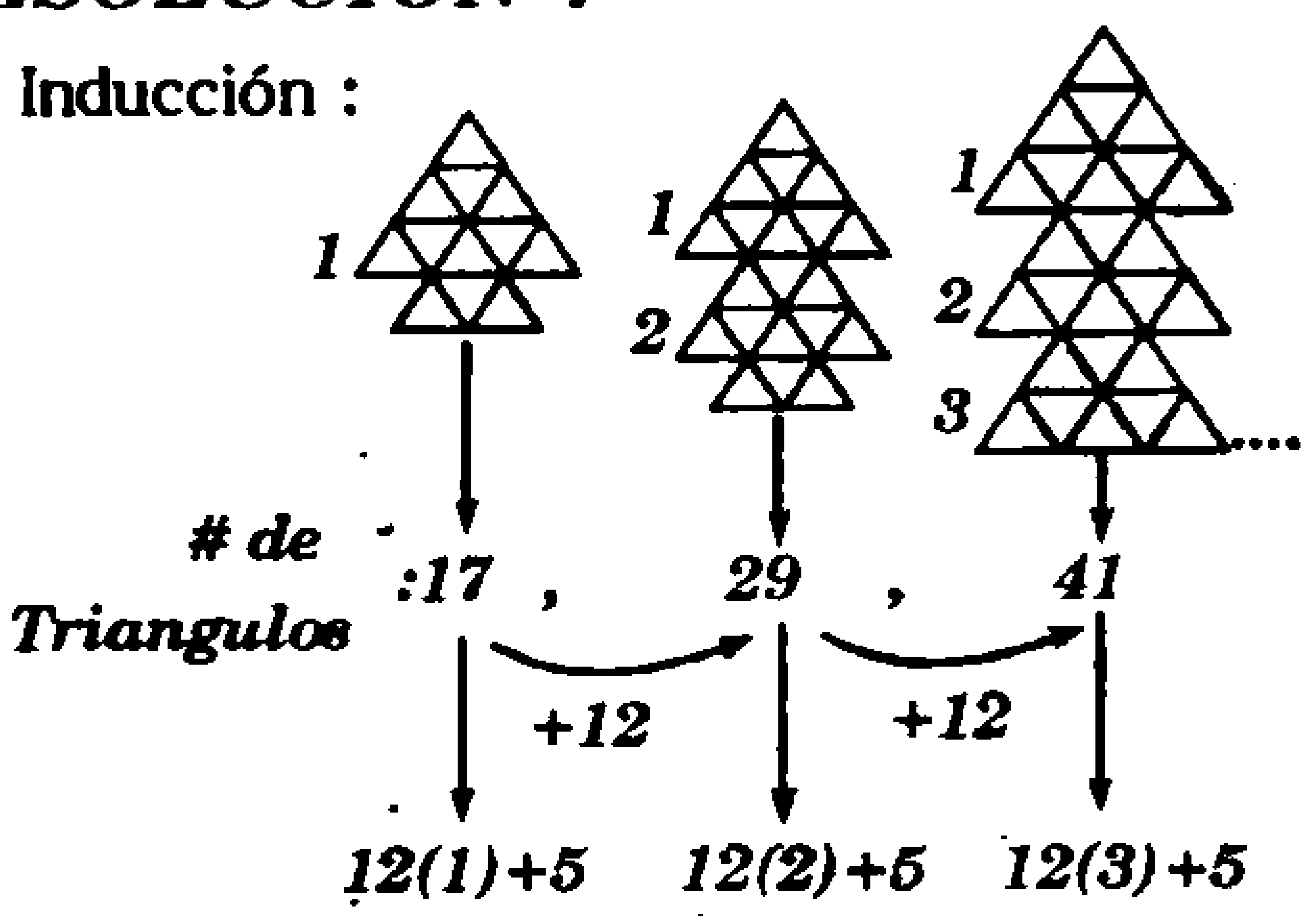
D) 463

E) 520



RESOLUCIÓN :

Por Inducción :



• No están pidiendo el término *30* de sucesión, que se ha formado, el cual será : $12(30) + 5 = 365$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

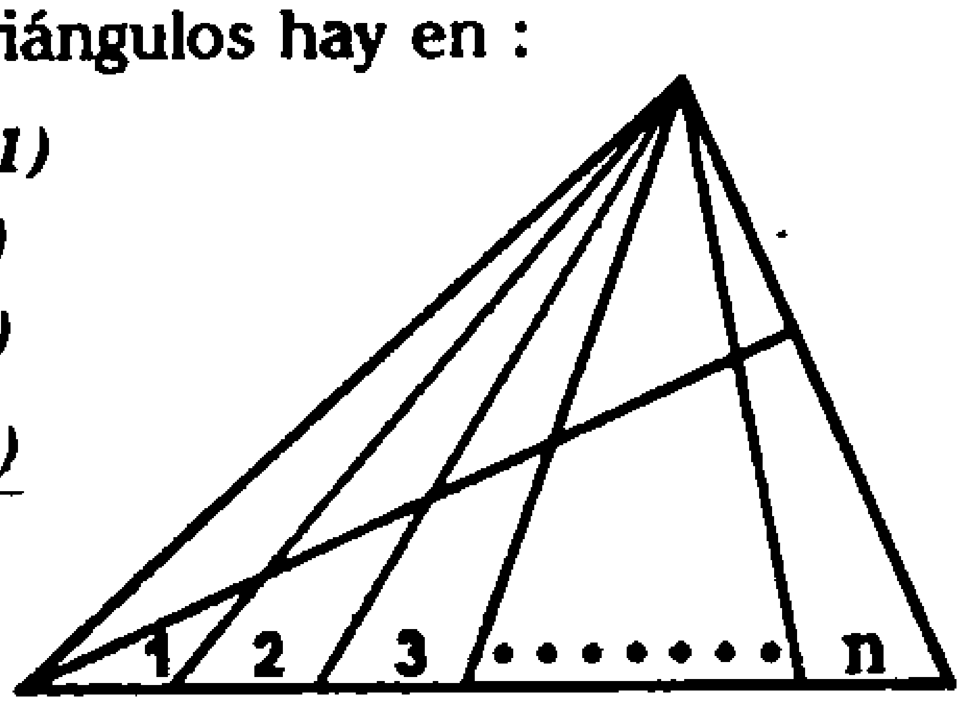
¿Cuántos triángulos hay en :

A) $3n(n + 1)$

B) $3(n + 1)$

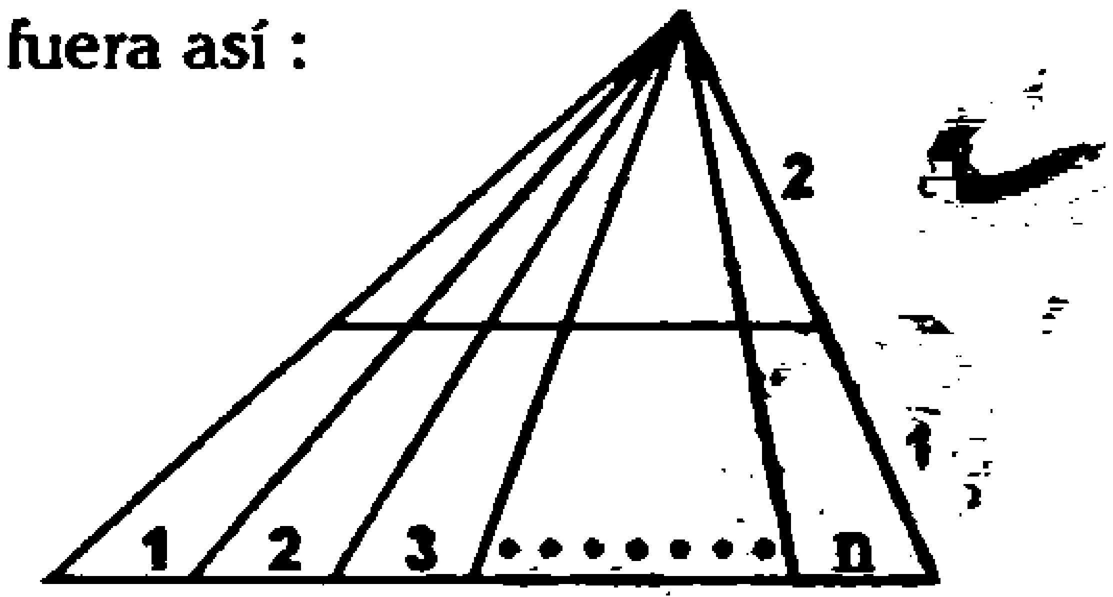
C) $n(n + 2)$

D) $\frac{n(n+1)}{2}$



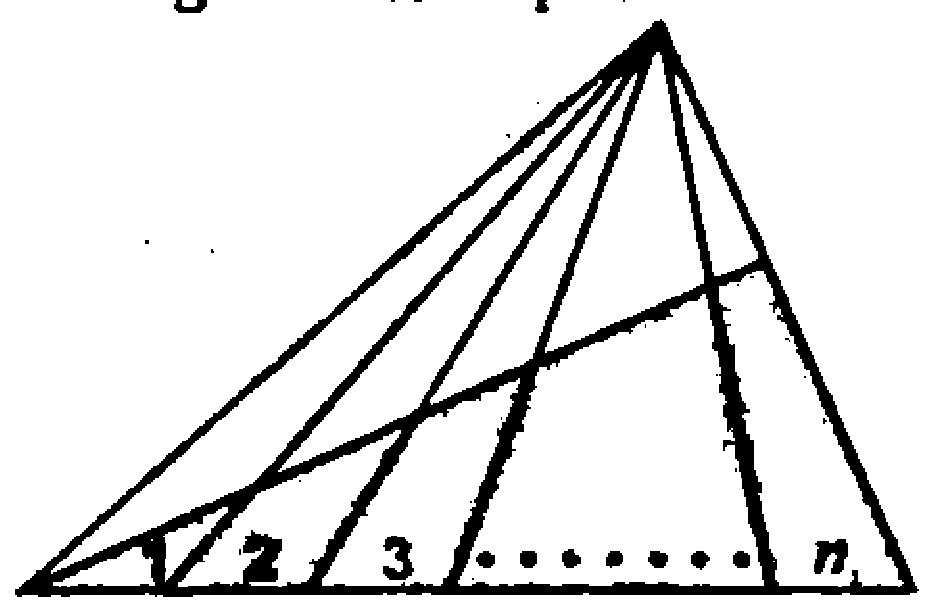
RESOLUCIÓN :

* Si la figura fuera así :



* Habría : $\frac{n(n+1)}{2} \times 2 = n(n+1)$

triángulos , pero a ésta cantidad, hay que aumentar el número de triángulos de la parte sombreada .



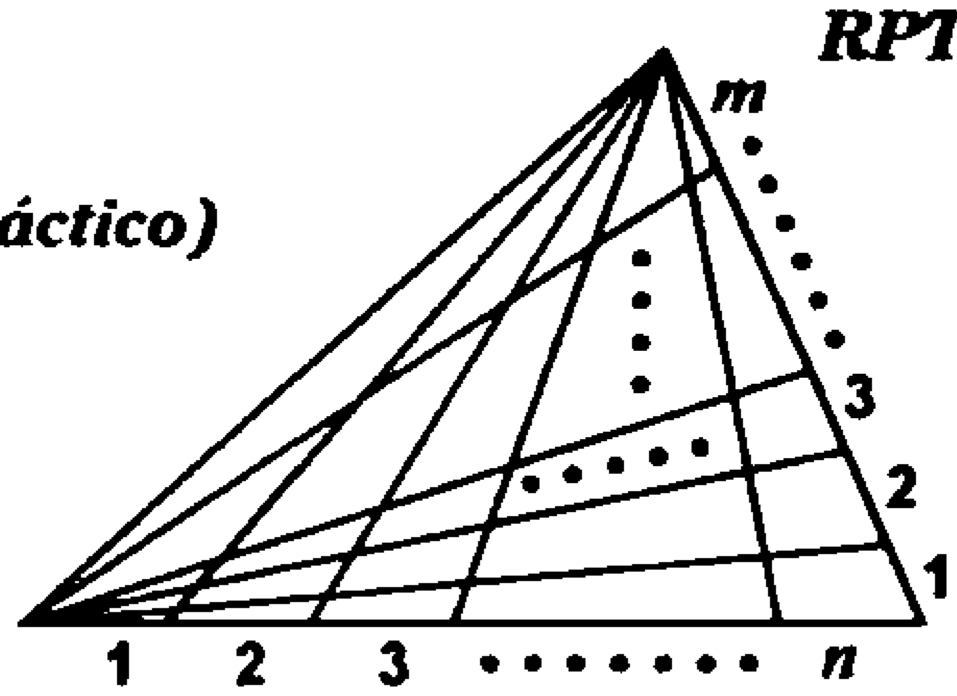
* Luego el total de triángulos será :

$$n(n + 1) + n = n\,(n + 2)$$

RPTA : "C"

En general :

(Método Práctico)



$$\text{Número de triángulos} = \frac{mn(m+n)}{2}$$

Donde : *m* y *n* indican la cantidad de espacios .

PROBLEMA 24:

¿Cuántos triángulos hay en? :

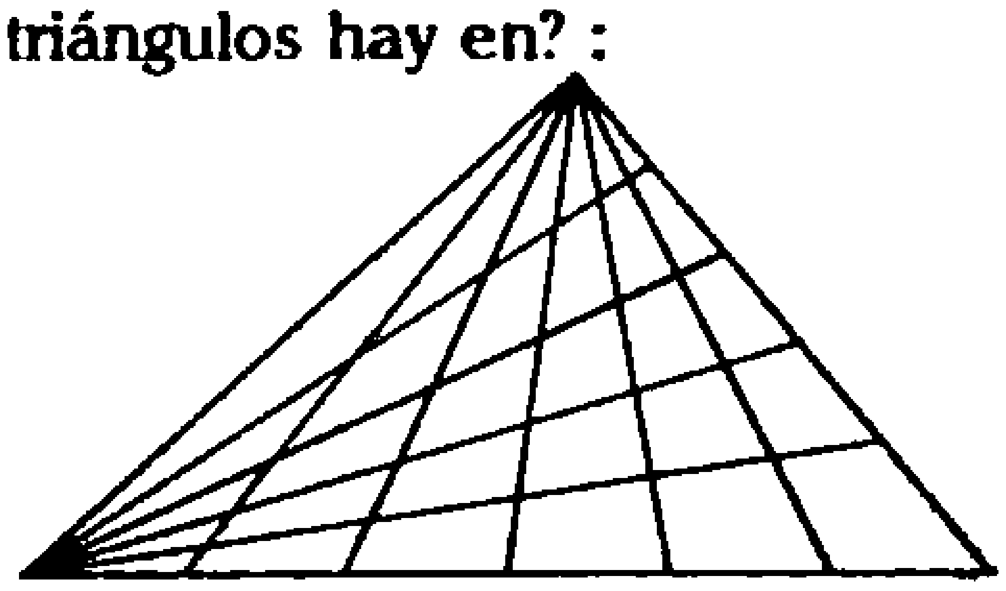
A) 30

B) 90

C) 75

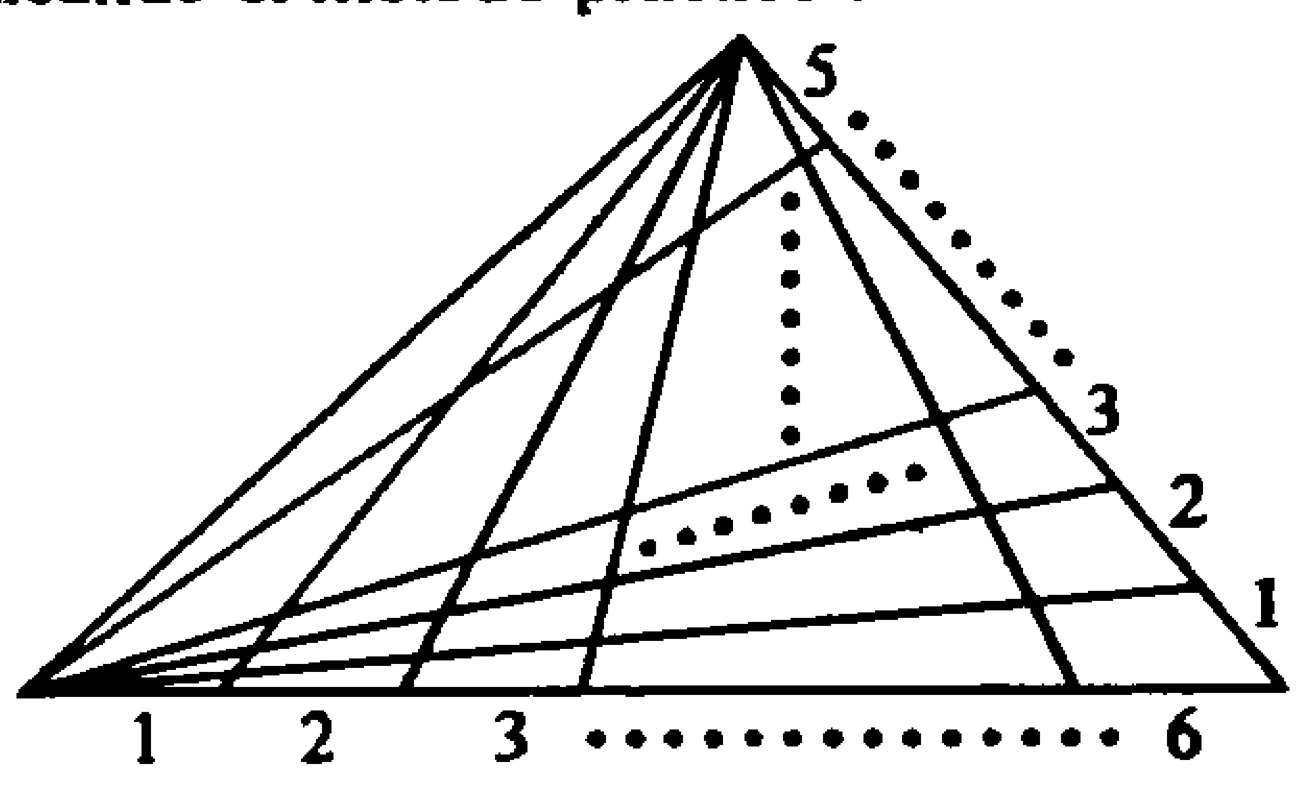
D) 165

E) 225



RESOLUCIÓN :

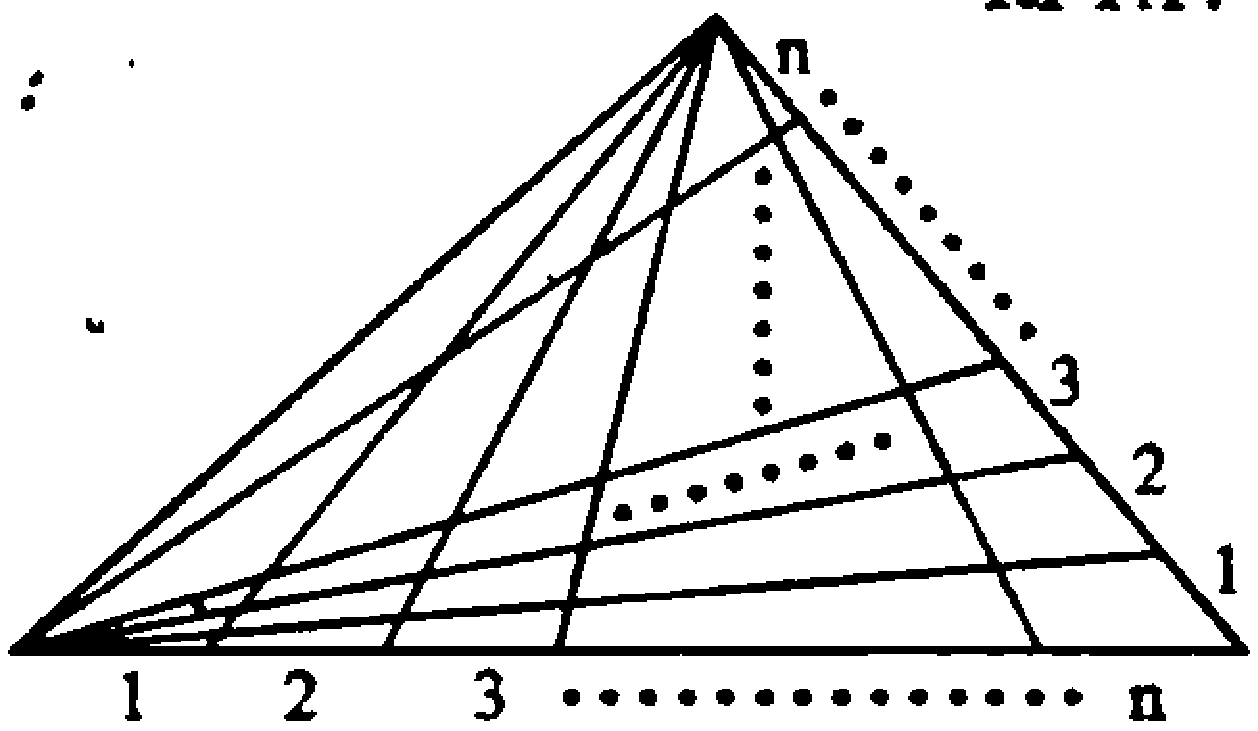
* Aplicando el método práctico :



Número de triángulos $= \dfrac{5\times 6(5+6)}{2} = 165$

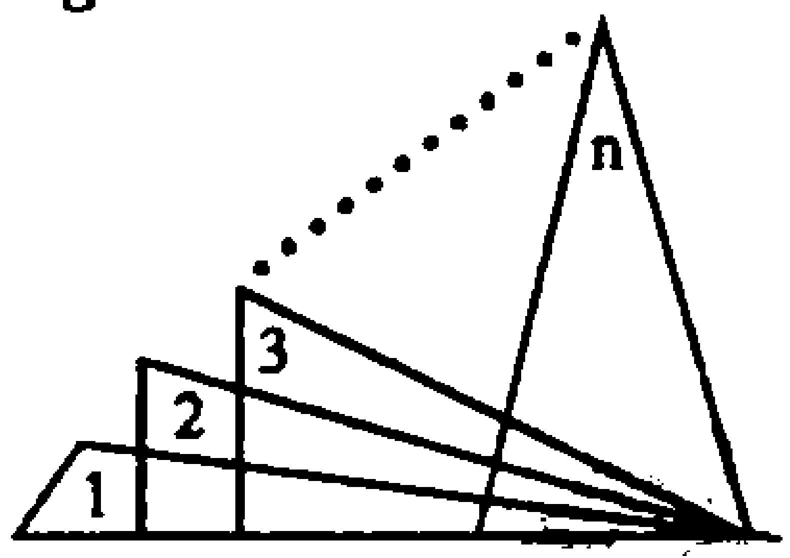
RPTA : "D"

OJO :



Número de triángulos : n^3

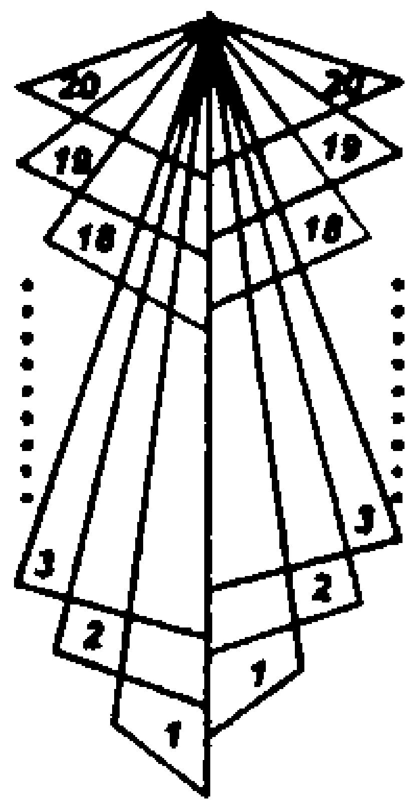
Números de triángular : $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$



Números de triángulos : $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

PROBLEMA 25 :

¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?

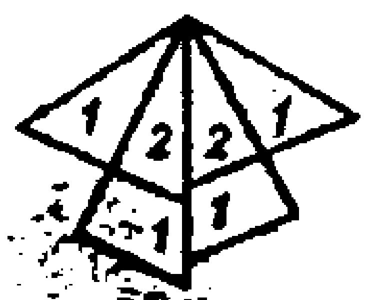


A) 1240
B) 3240
C) 3080
D) 4000
E) 8000

RESOLUCIÓN :

* Por inducción matemática :

$\Rightarrow 2 = 1\times 2$



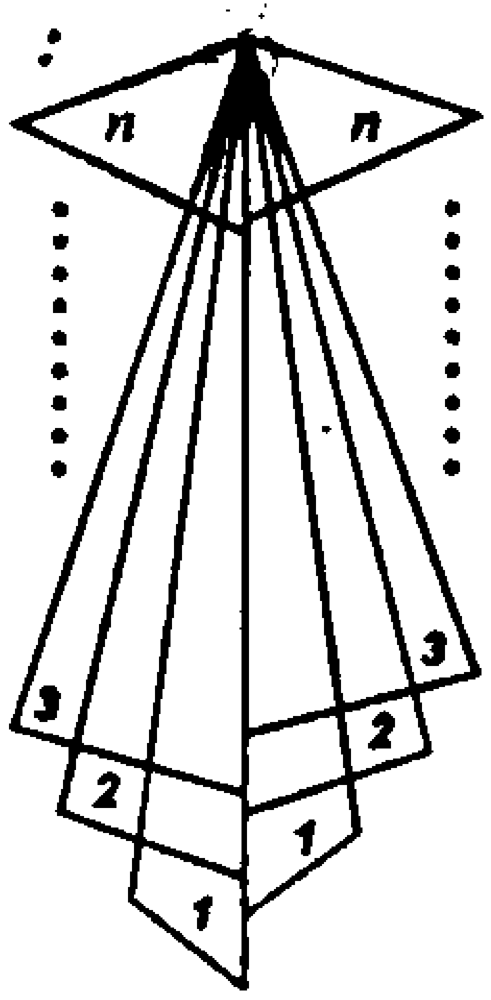
$\Rightarrow 2+6 = 1\times 2 + 2\times 3$

* Se está formando la suma de los primeros productos binarios, luego en la figura dada, el número de triángulos será :

$$\underbrace{1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + 20\times 21}_{\text{Revisar sumatorias}} = \frac{20\times 21\times 22}{3}$$

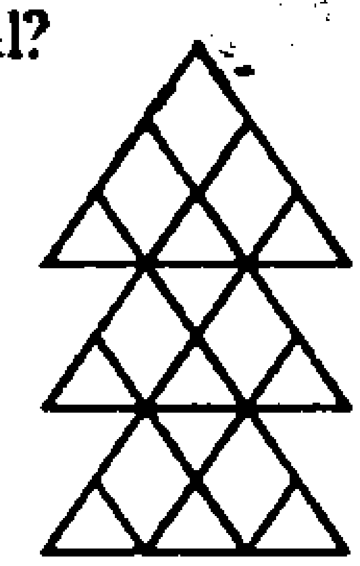
RPTA : "C"

EN GENERAL :



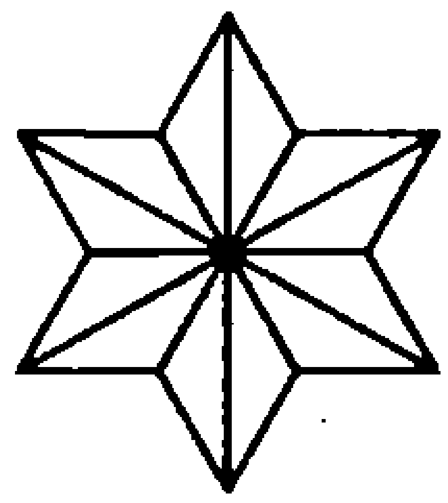
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura mostrada. ¿Cuántos triángulos se pueden contar en total?



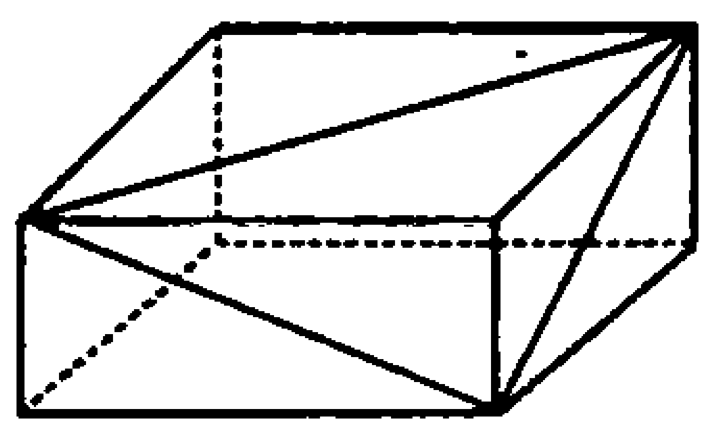
A) 10
B) 18
C) 20
D) 22
E) 24

02 ¿Cuántos heptágonos hay?



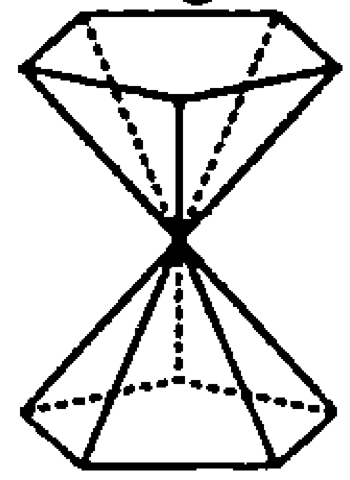
A) 13
B) 12
C) 11
D) 10
E) 9

03 ¿Cuántos triángulos hay?



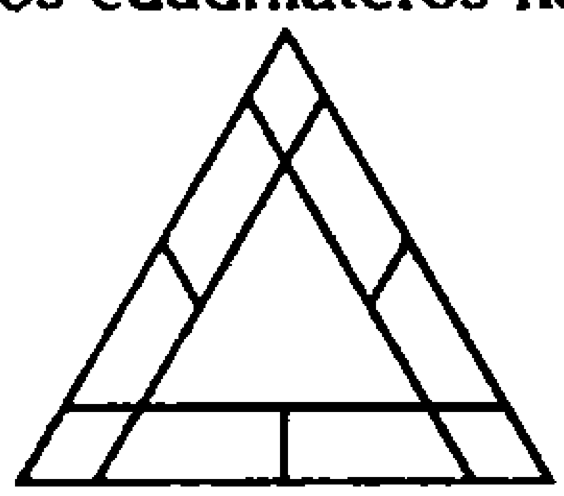
A) 7
B) 6
C) 10
D) 12
E) 8

04 ¿Cuántos triángulos hay?



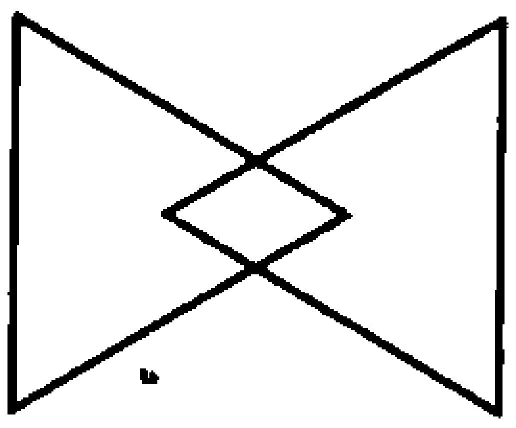
A) 5
B) 6
C) 10
D) 9
E) 15

05 ¿Cuántos cuadriláteros hay?



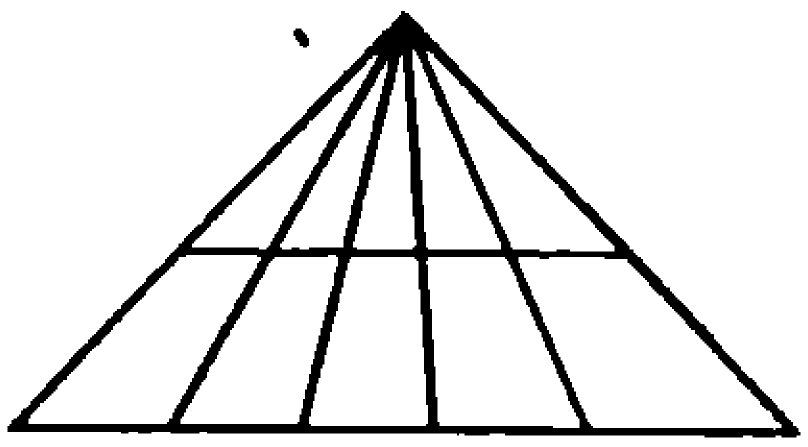
A) 9
B) 24
C) 27
D) 28
E) 20

06 ¿Cuántos segmentos tiene la figura?



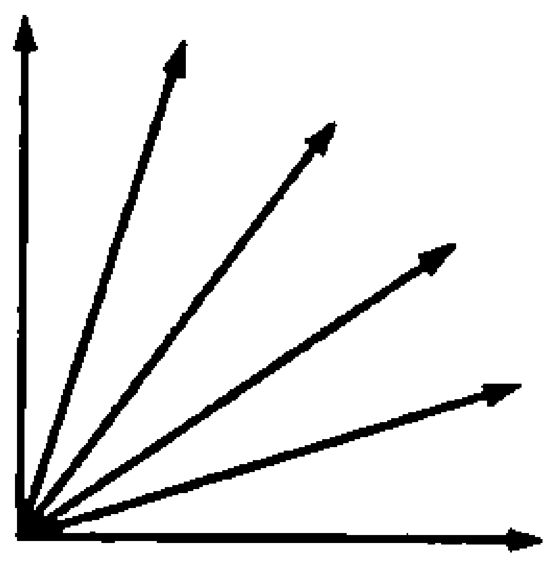
A) 10
B) 12
C) 14
D) 11
E) 15

07 ¿Cuántos triángulos hay?



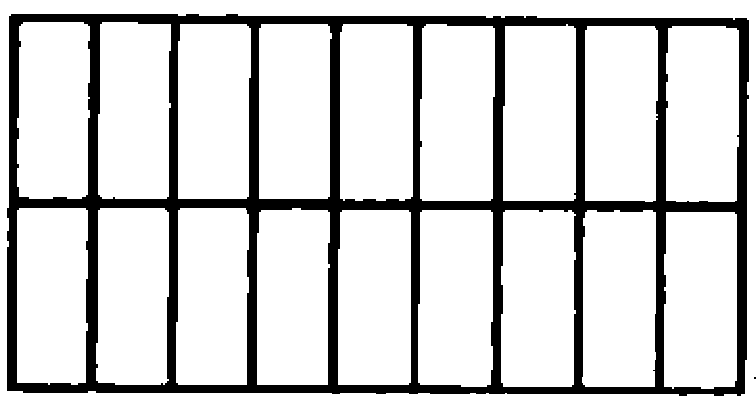
A) 13
B) 18
C) 29
D) 30
E) 11

08 Calcular el número total de ángulos agudos en la figura.



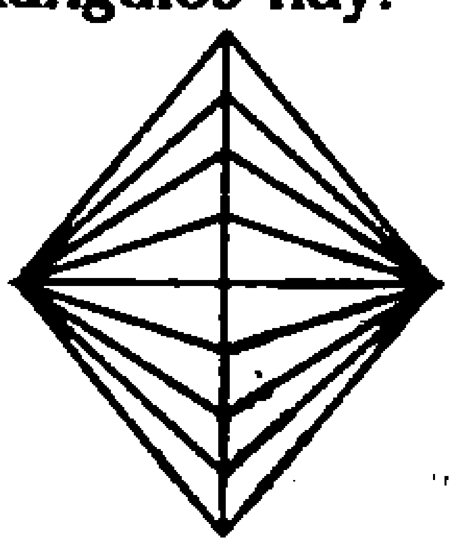
A) 6
B) 10
C) 12
D) 15
E) 18

09 ¿Cuántos cuadriláteros hay?



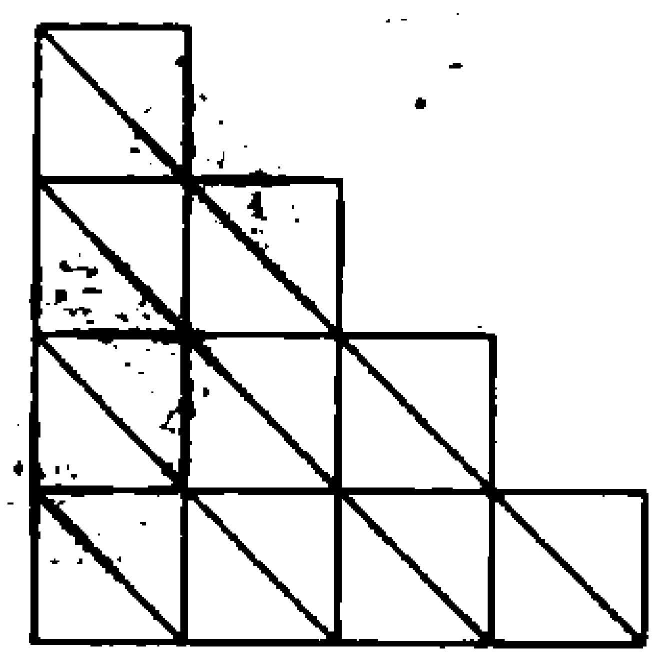
A) 72
B) 90
C) 135
D) 27
E) 110

10 ¿Cuántos triángulos hay?



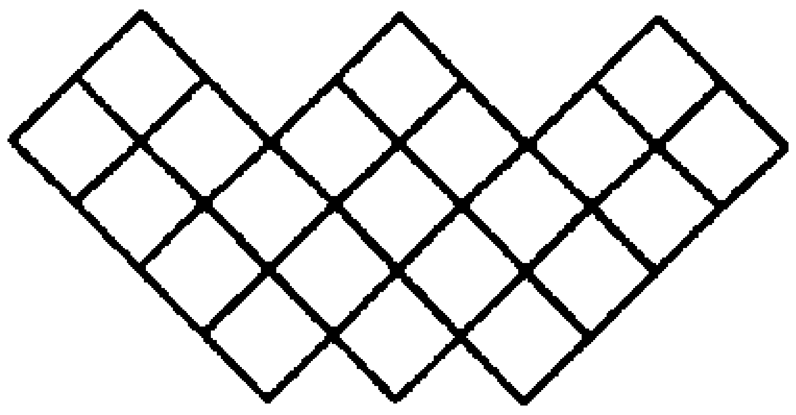
A) 36
B) 72
C) 40
D) 30
E) Más de 80

11 ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



A) 33
B) 40
C) 32
D) 35
E) 30

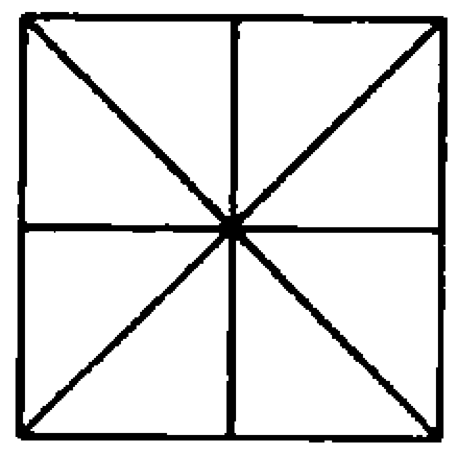
12 ¿Cuántos cuadrados se cuentan en total en la siguiente figura?



A) 30
B) 32
C) 36
D) 31
E) 42

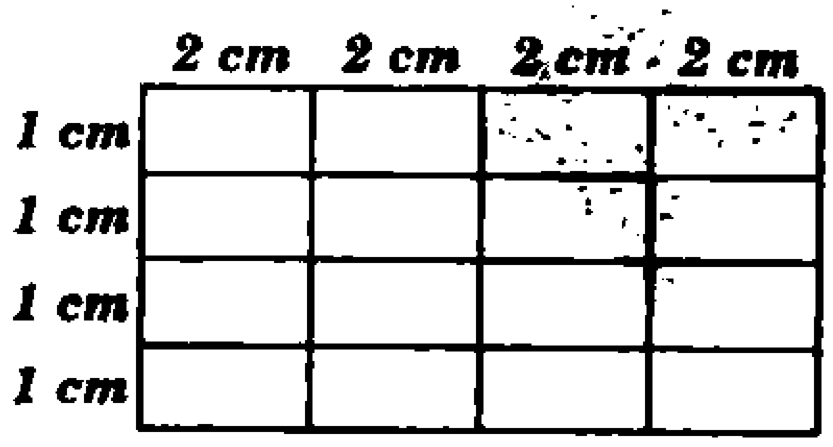
PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Calcule el máximo número de triángulos.



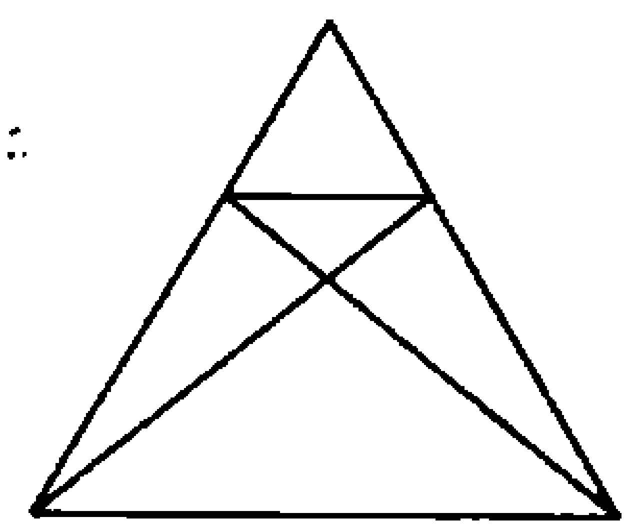
A) 12
B) 18
C) 8
D) 16
E) 20

02 Determine el número de cuadrados.



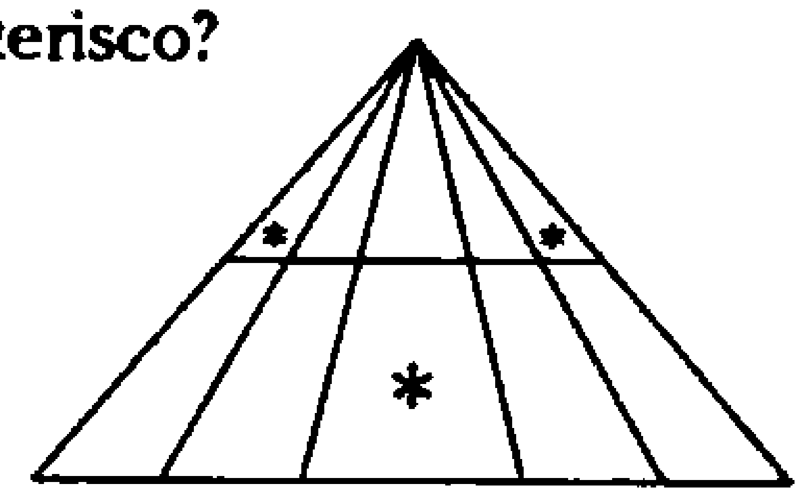
A) 12
B) 14
C) 16
D) 10
E) 15

03 En la figura existen *a* triángulos y *b* cuadriláteros. Halle *a* + 2*b*.



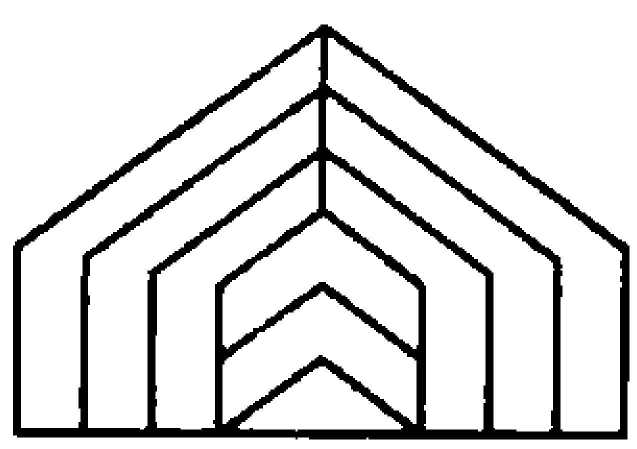
A) 14
B) 15
C) 16
D) 18
E) 21

04 En el gráfico. ¿Cuántos triángulos no tienen por lo menos un asterisco?



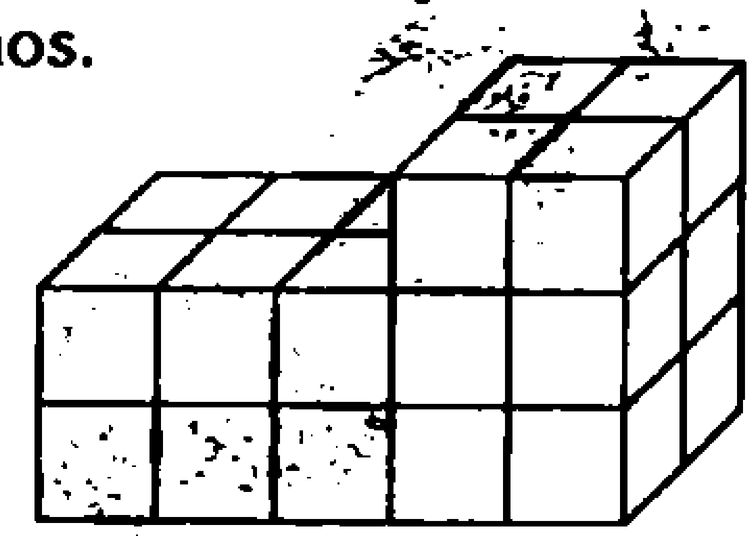
A) 6
B) 8
C) 11
D) 13
E) 22

05 Halle el máximo número de exágonos en la siguiente figura.



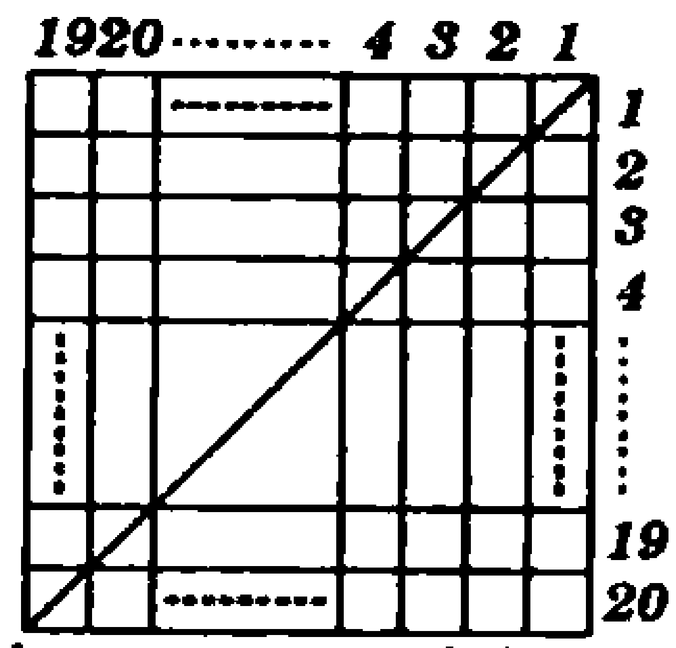
A) 15
B) 18
C) 39
D) 1
E) 40

06 Determine el número total de cubos que se puede contar en el sólido formado por cubos pequeños.



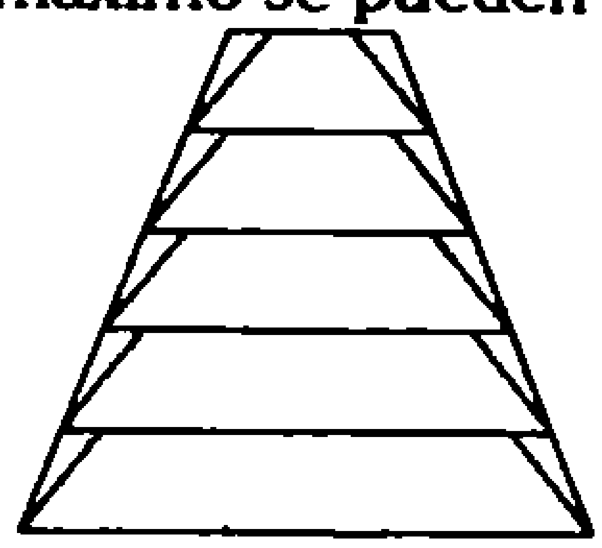
A) 29
B) 24
C) 28
D) 25
E) 26

07 En el siguiente gráfico, ¿cuántos cuadrados tienen trazada la diagonal?



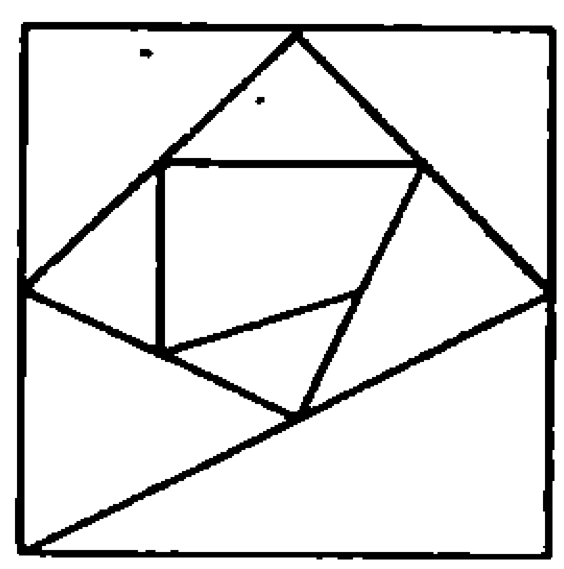
A) 200
B) 220
C) 210
D) 310
E) 400

08 ¿Cuántos cuadriláteros como máximo se pueden contar?



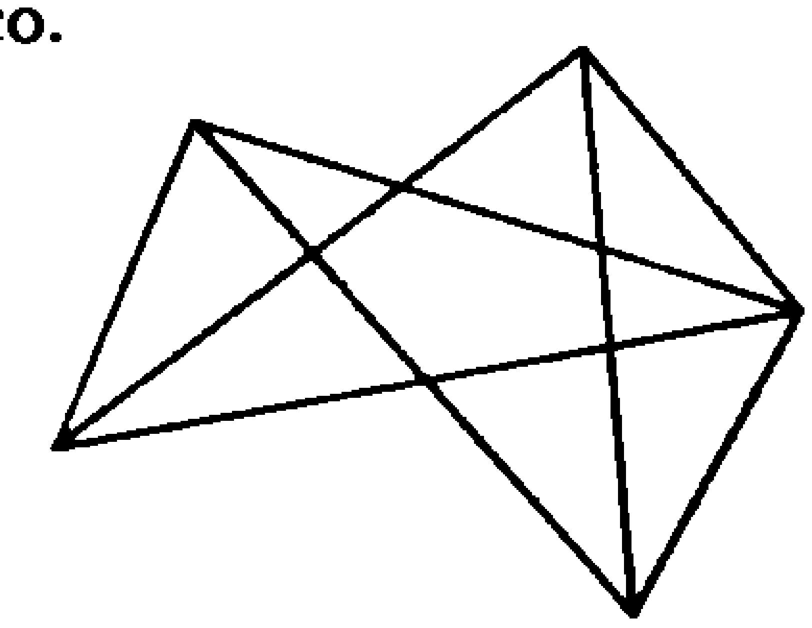
A) 15
B) 32
C) 25
D) 30
E) 60

09 ¿Cuántos cuadriláteros hay en el siguiente gráfico?



A) 10
B) 9
C) 12
D) 7
E) 8

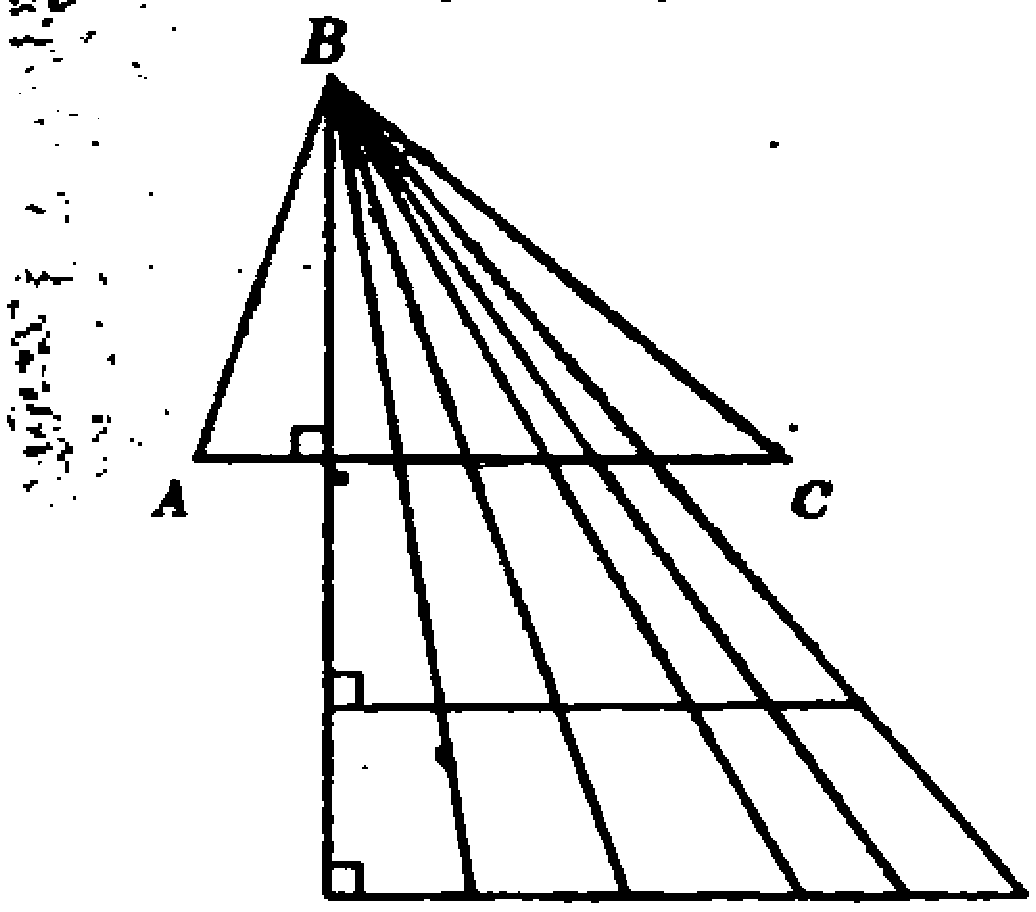
10 Determine el total de triángulos en el siguiente gráfico.



A) 20
B) 22
C) 23
D) 21
E) 24

11 En el siguiente gráfico, halle el total de ángulos agudos.

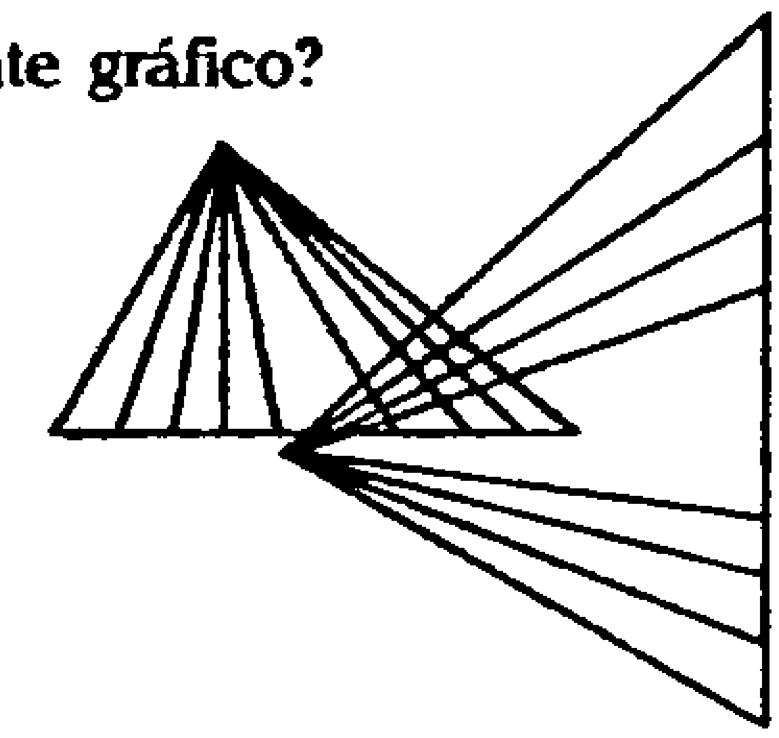
Considere que $m\measuredangle ABC=75°$



A) 45 B) 54 C) 47 D) 57 E)49

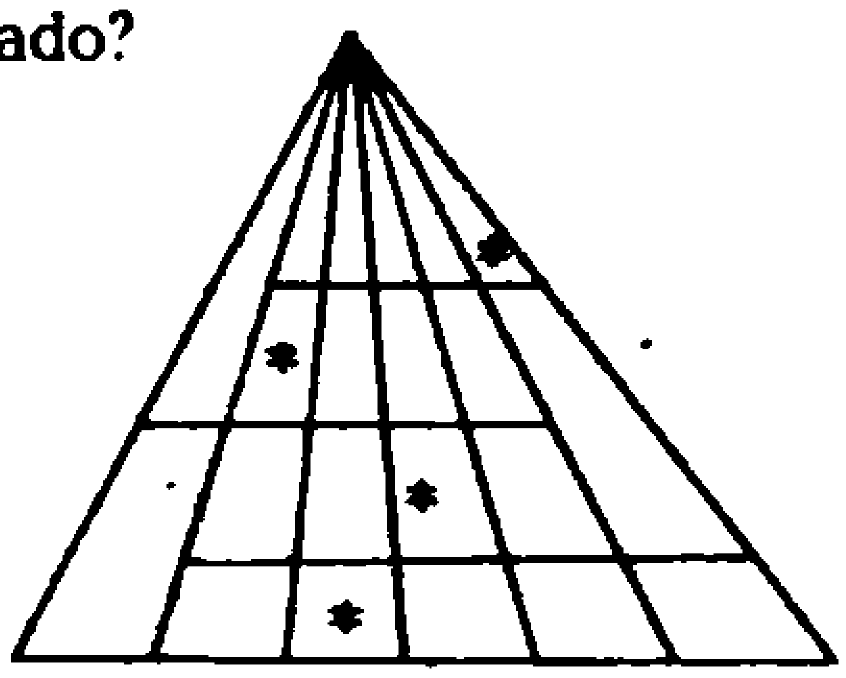
12 Cuántos triángulos hay en el siguiente gráfico?

A)134
B)136
C)147
D)144
E) 149

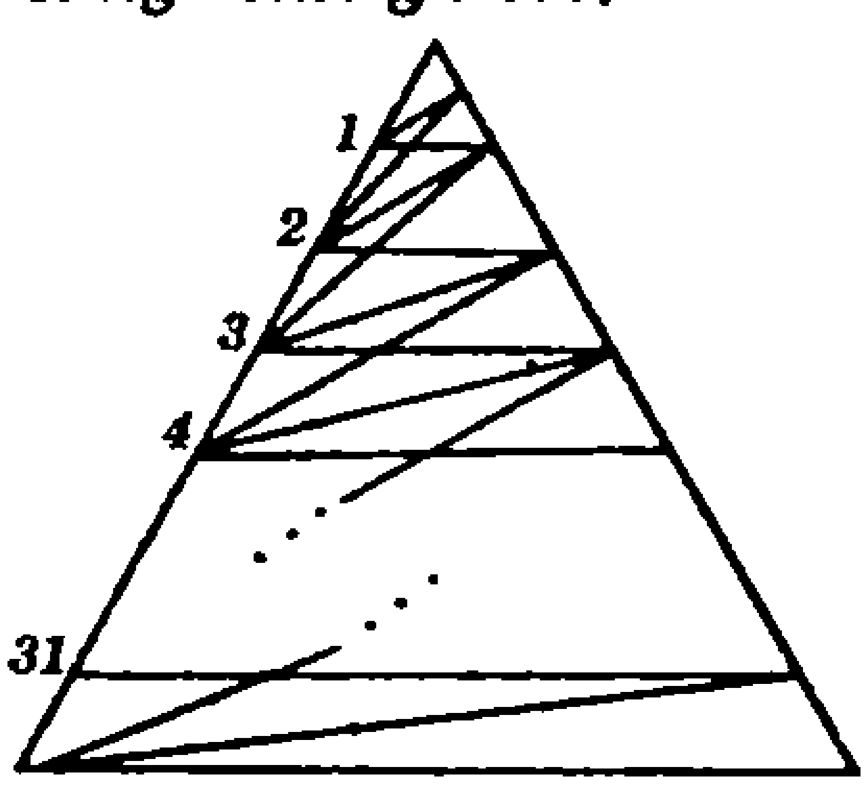


13 ¿Cuántos triángulos que tengan por lo menos un asterisco en su interior hay en el gráfico mostrado?

A)40
B) 50
C) 45
D) 49
E)47

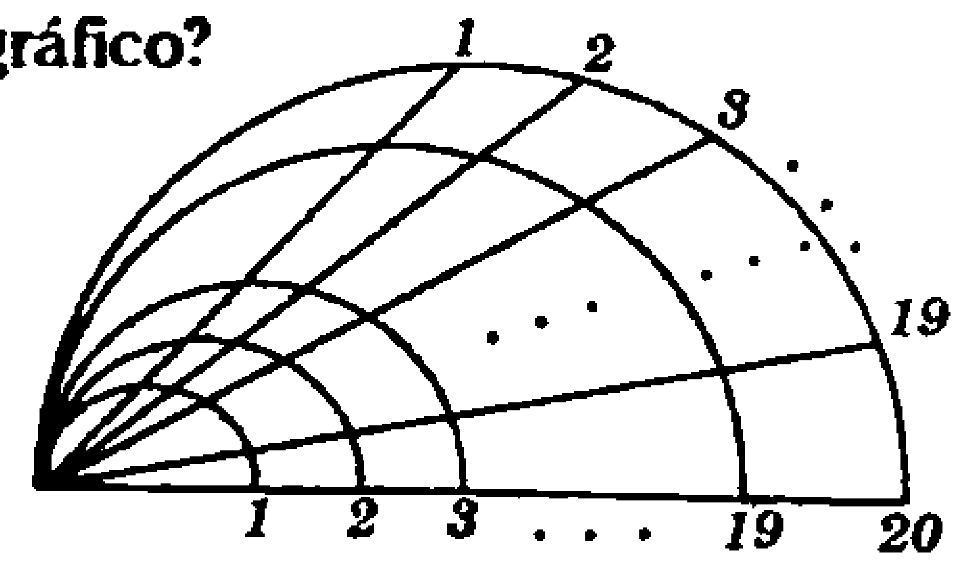


14 Determine el total de regiones simples que se cuentan en el siguiente gráfico.



A) 120 B) 126 C) 122
D) 123 E) 124

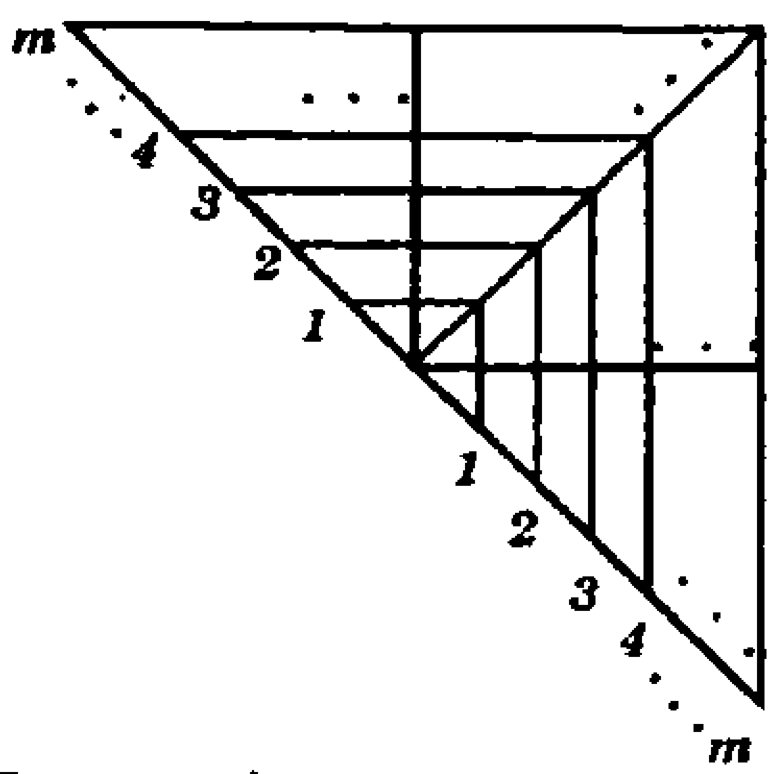
15 ¿Cuántos arcos de circunferencia hay en el siguiente gráfico?



A) 8400 B) 9600 C) 7900
D) 4200 E) 1110

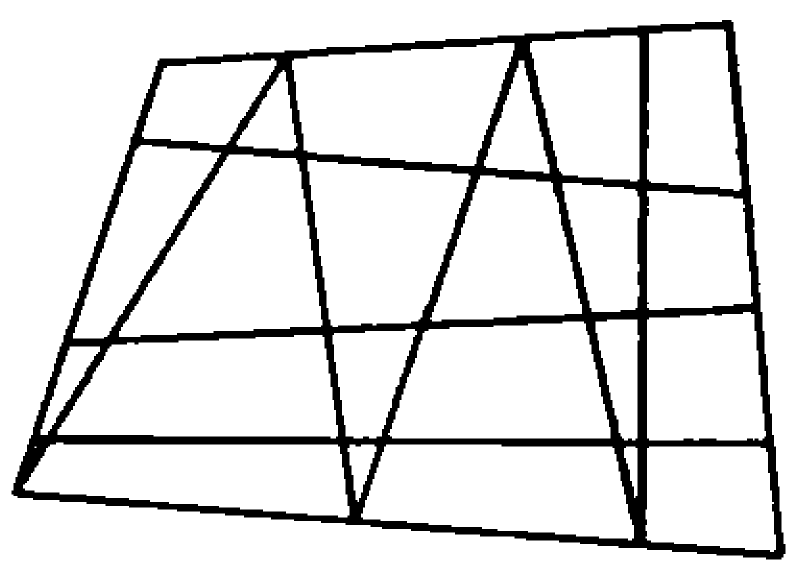
16 En el gráfico se tiene en total *378* triángulos. Halle el valor de *m*.

A) 38
B)48
C) 54
D) 50
E)42

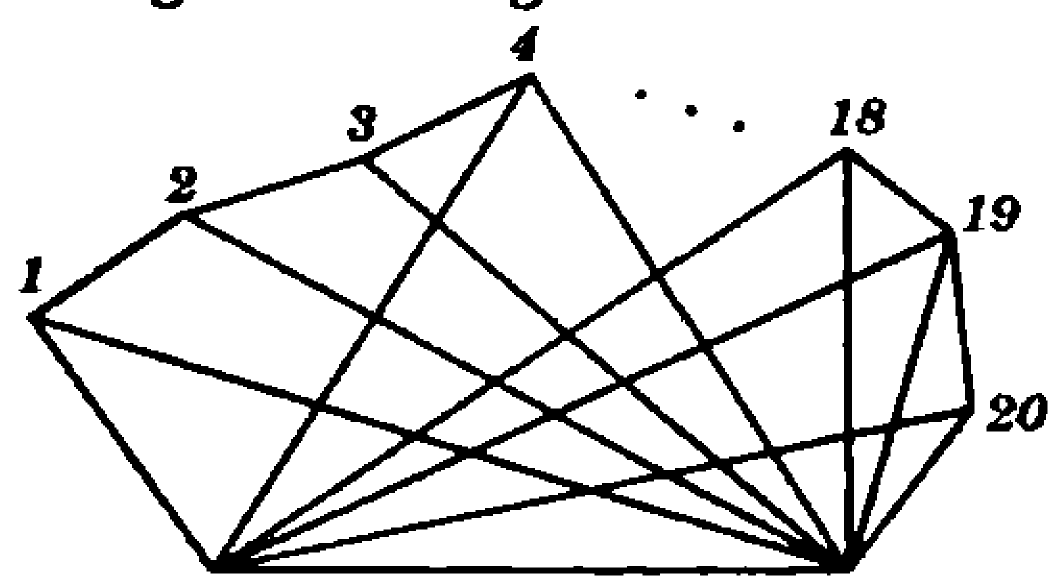


17 Determine el total de cuadriláteros en el siguiente gráfico.

A) 170
B) 180
C) 190
D) 200
E) 210



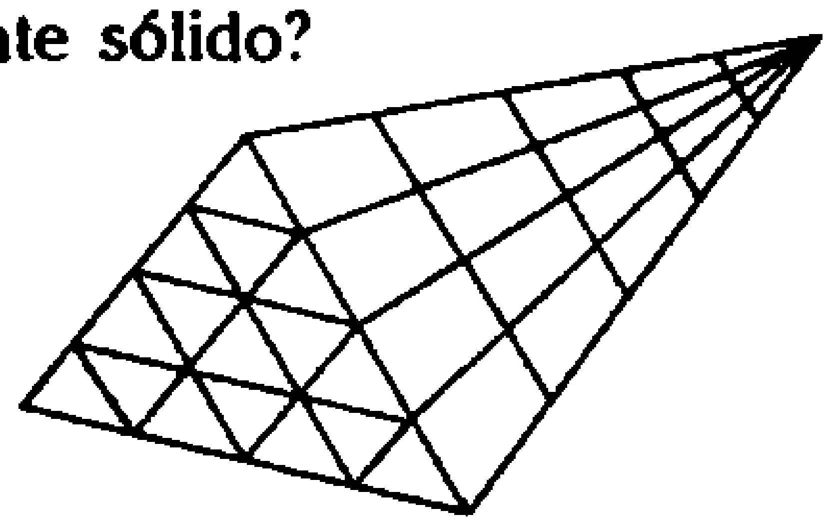
18 Determine el número total de triángulos en el gráfico mostrado.



A) 2910 B) 2904 C) 2927
D) 2907 E) 2917

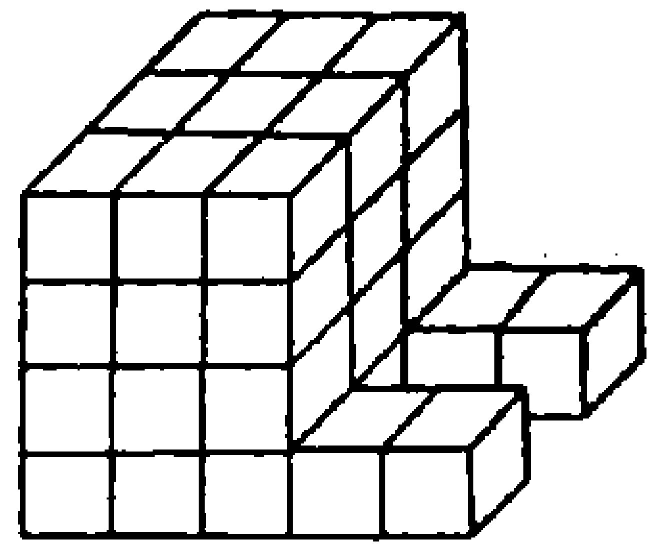
19 ¿Cuántas pirámides de base triangular se cuentan en el siguiente sólido?

A)130
B)120
C) 80
D) 135
E)140



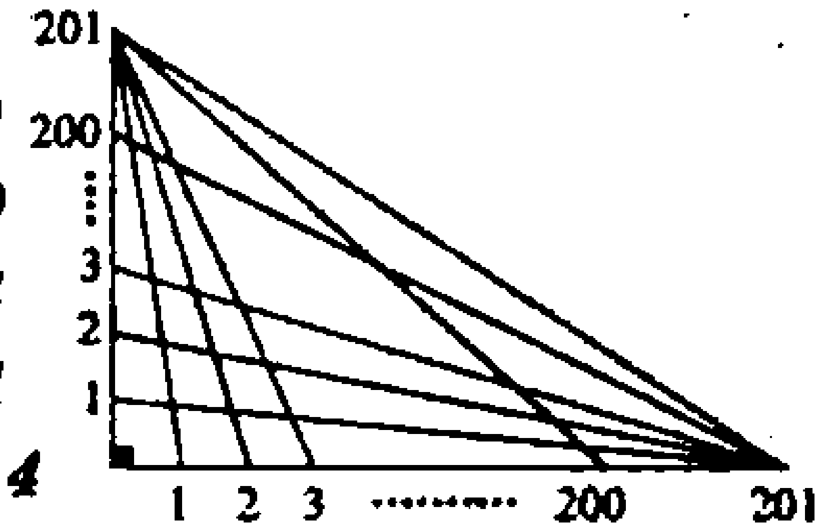
20 ¿Cuántos paralelepípedos hay en el siguiente sólido?

A) 360
B) 374
C) 362
D) 378
E) 412

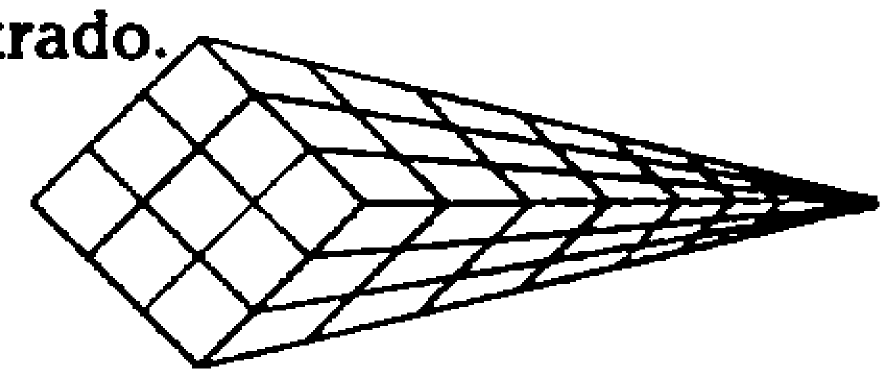


21 ¿Cuántos triángulos rectángulos hay como máximo en la siguiente figura?

A) 210
B) 320
C) 444
D) 401
E) 4414



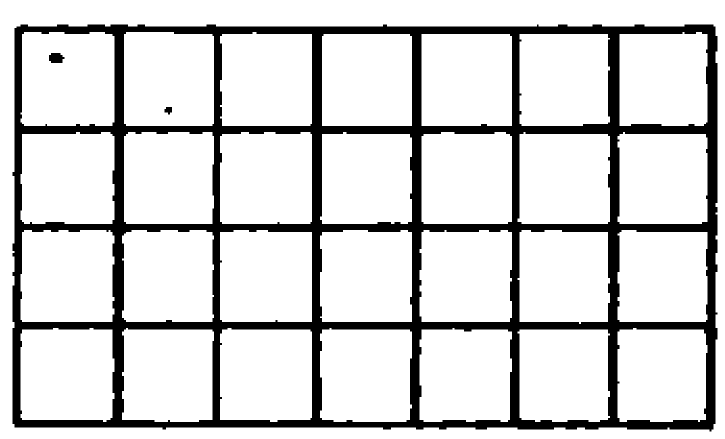
22 Cuántas pirámide de base cuadrada hay en el sólido mostrado.



A) 42 B) 49 C) 94 D) 98 E) 96

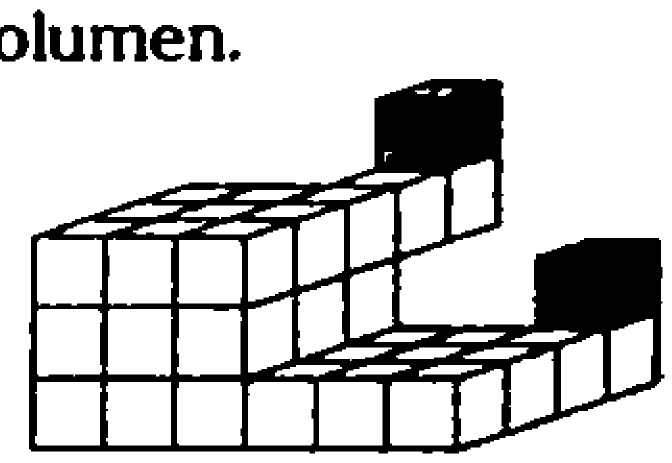
23 La figura mostrada es una cuadrícula de *7cm.* por *4cm.* ¿Cuántos hexágonos de *4cm²* de área hay en la figura?

A) 96
B) 108
C) 112
D) 98



24 La siguiente figura muestra una ruma de *44* cúbitos de *1 cm.* de arista. Hallar el máximo número de paralelepípedos de *2cm³* de volumen.

A) 79
B) 101
C) 82
D) 93



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)E	3)C	4)B	5)A	6)A	7)C	8)D	9)B	10)C
11)B	12)A	13)C	14)E	15)D	16)C	17)C	18)[illegible]	19)D	20)[illegible]

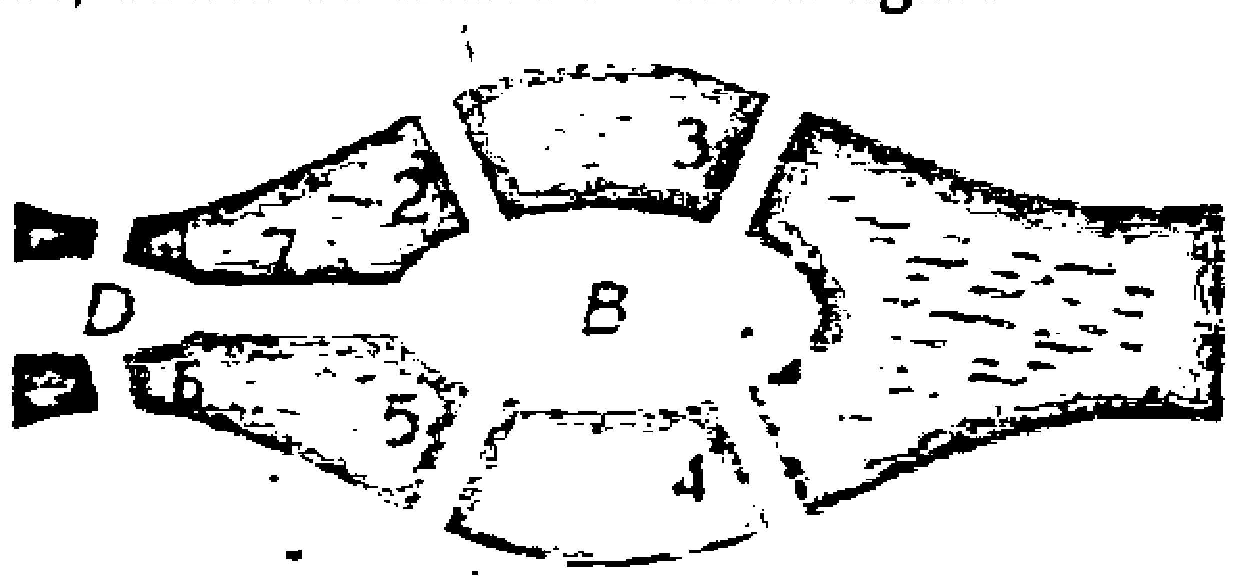
TRAZADO DE FIGURAS
Recorridos Eulerianos
CAPITULO 040

OBJETIVOS :

* *Conocer y aplicar los postulados de Euler para identificar un recorrido euleriano.*
* *Determinar el número mínimo de líneas a repetir cuando el grafo presente más de dos vértices impares.*
* *Resolver problemas de la vida cotidiana a través de la aplicación de la teoría brindada.*
* *Desarrollar la capacidad de abstracción mediante el estudio de grafos topológicos.*

INTRODUCCION :

El siguiente problema le fue presentado al brillante matemático suizo del siglo *XVIII* Leonard Euler. La ciudad de Koniesberg se asentaba, por aquel entonces, alrededor de dos islas situadas en el lugar en que se bifurcaba el río Pregel. Los diferentes distritos de la ciudad estaban unidos por siete puentes, como se muestra en la figura.



A los paseantes habituales les unía la conjetura de que se podían atravezar todos los puentes en un paseo continuo sin cruzar dos veces ninguno de ellos. Euler demostró que la conjetura era falsa.

Cuando Euler presentó la solución ante la academia rusa de San Petesburgo en el año *1 795*, quedó fundada la topología.

CAMINO EULERIANO

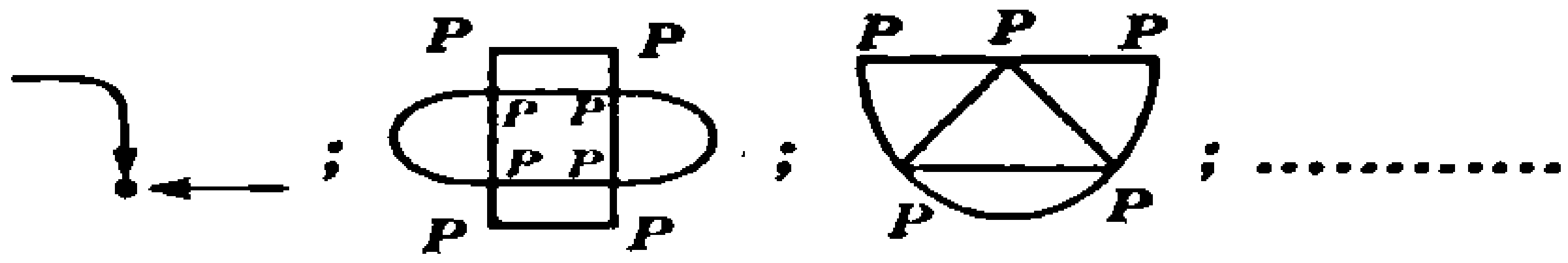
Consiste en un trazo continuo que recorre toda la gráfica sin pasar por ningún lado más de una vez.

El objetivo de esta parte, es verificar sí una figura se puede dibujar de un solo trazo; sin levantar el lapicero del papel, ni pasar *2* veces por una misma línea, y para ello debemos de considerar lo siguiente:

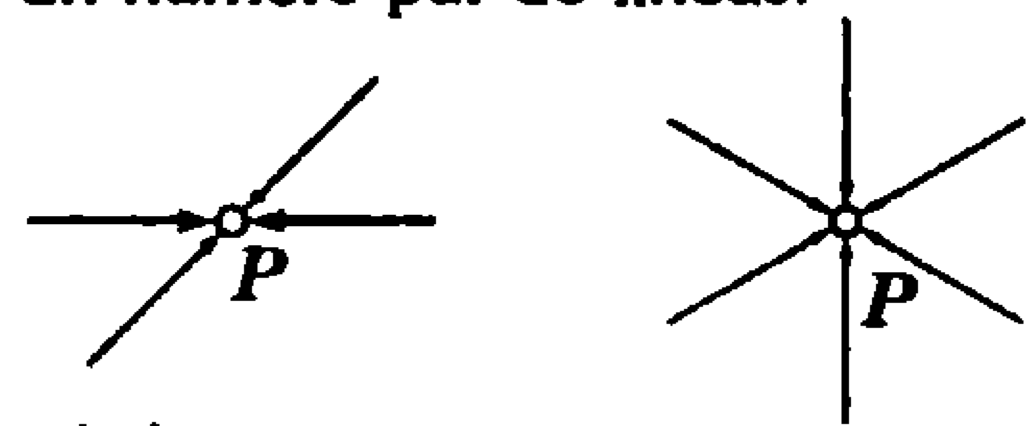
PUNTO PAR Ó VÉRTICE PAR (P) :

Es aquel punto donde convergen un número par de líneas.

EJEMPLO:

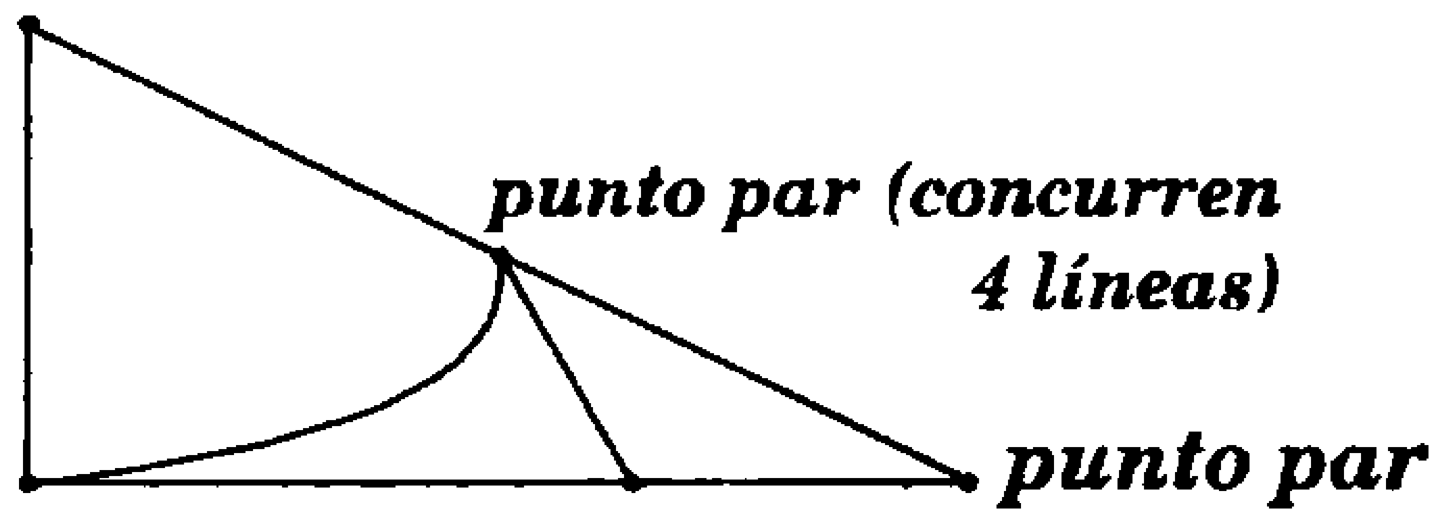


Es decir son aquellos puntos de la figura al cuál llegan un número par de líneas.



* Son vértices o puntos pares, porque se puede apreciar que convergen *4* y *6* líneas respectivamente.

Llamados también vértice par ; es aquél donde concurren un número par de trazos (líneas rectas o curvas) , tal como lo muestra la siguiente figura:

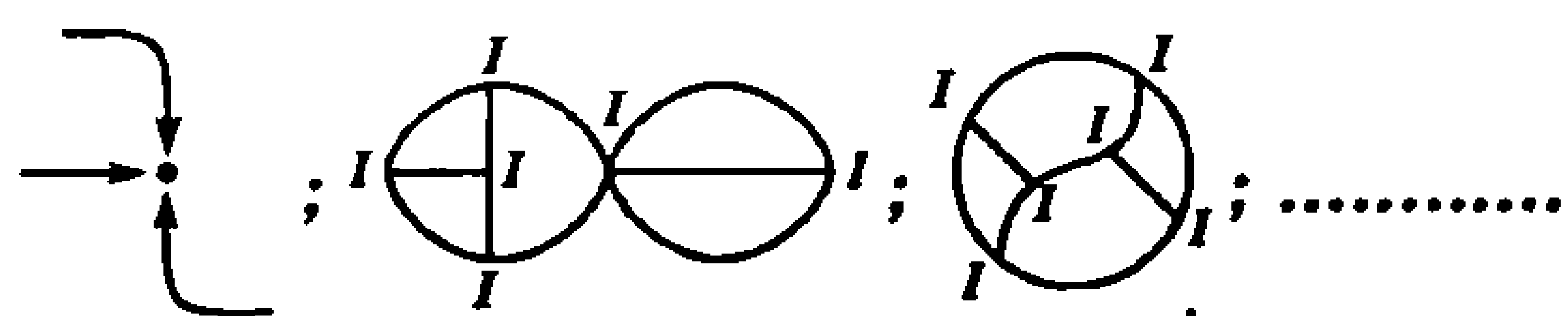


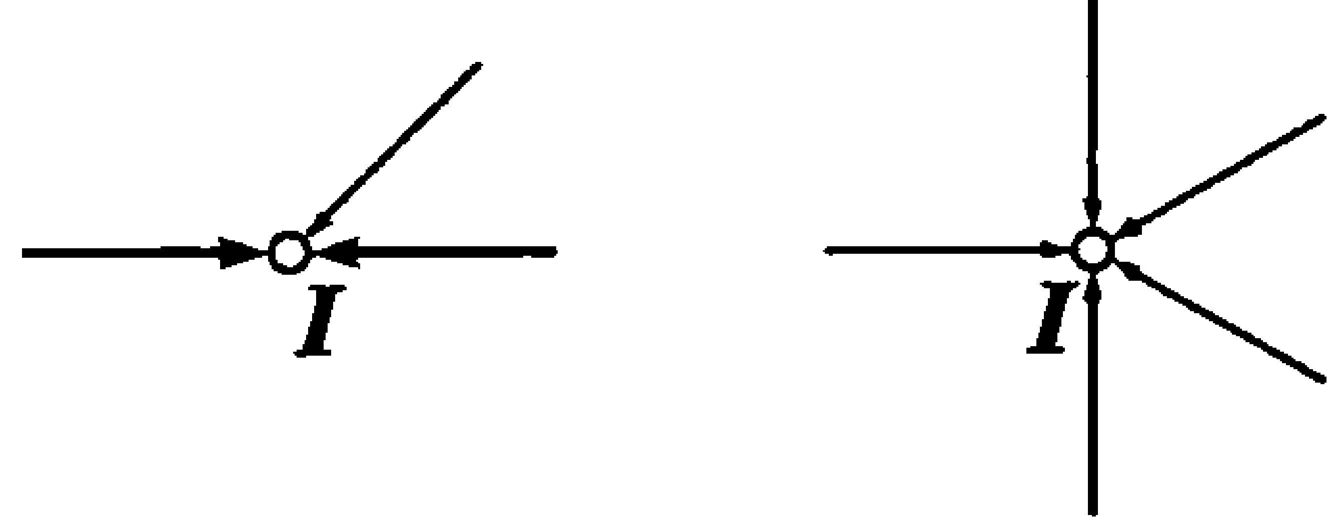
PUNTO Ó VÉRTICE IMPAR (I)

Es el punto en el cual convergen un número impar de líneas.

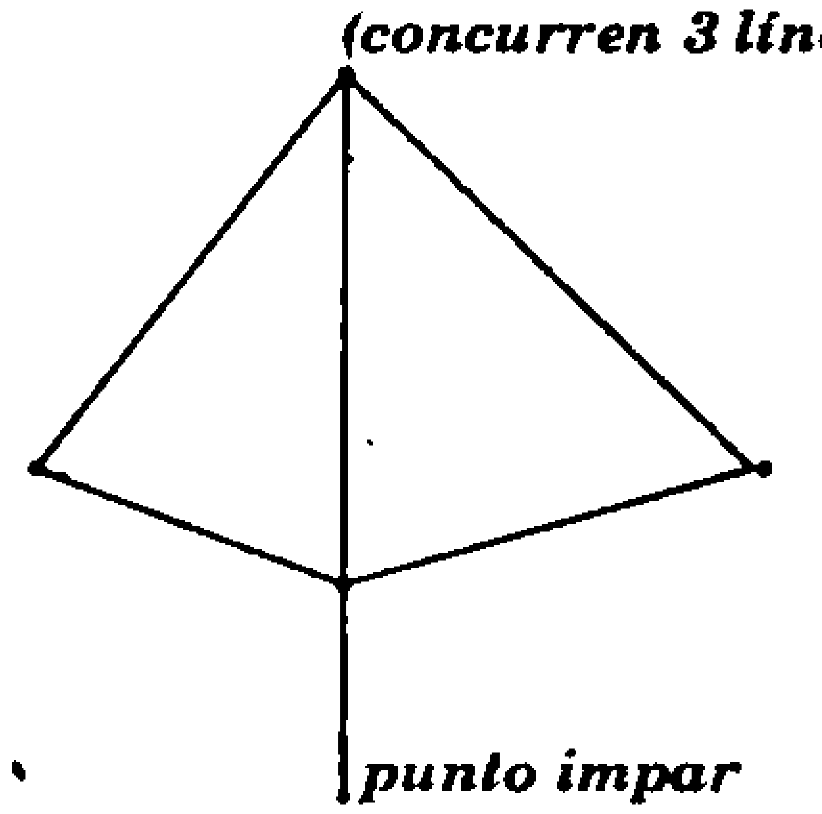
Es decir son aquellos puntos de la figura al cual llegan un número impar de líneas.

EJEMPLOS :





Llamados también vértice impar; es aquél donde concurren un número impar de trazos (líneas rectas o curvas) , tal como lo muestra la siguiente figura :



OJO :

Ahora estamos interesados en averiguar, si una figura se puede dibujar completamente de un solo trazo continuo, sin pasar 2 veces por una misma línea. Para tal efecto, haremos uso de los postulados de Euler, quien descrubrió y enunció la siguientes conclusiones:

TEOREMAS DE EULER

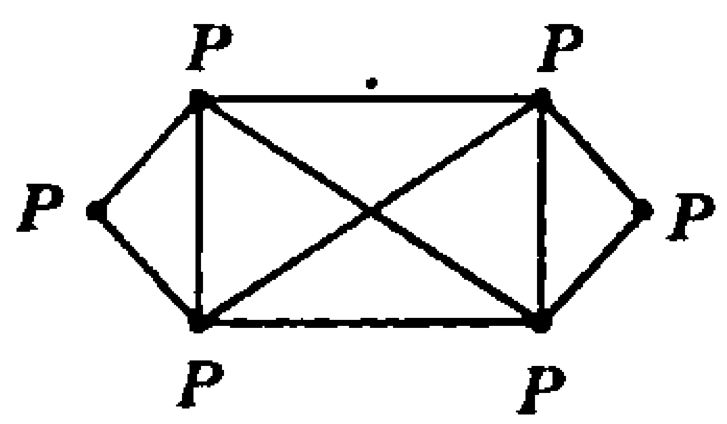
TEOREMA 1 :

Una gráfica admite un camino Euleriano si y solo sí todos los puntos son pares (carece los puntos impares).

$I = O \Rightarrow$ sí admite un camino Euleriano

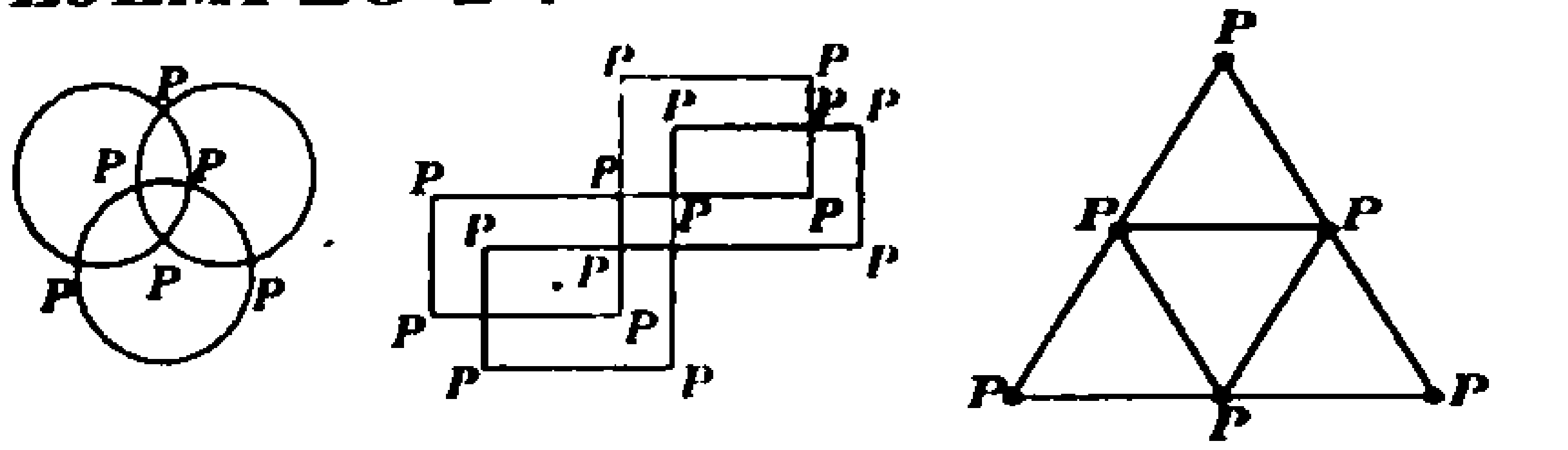
Es decir si una figura posee sólo puntos pares , se podrá dibujar de un solo trazo y se puede comenzar por cualquier punto y terminando en el mismo punto.

EJEMPLO 1 :

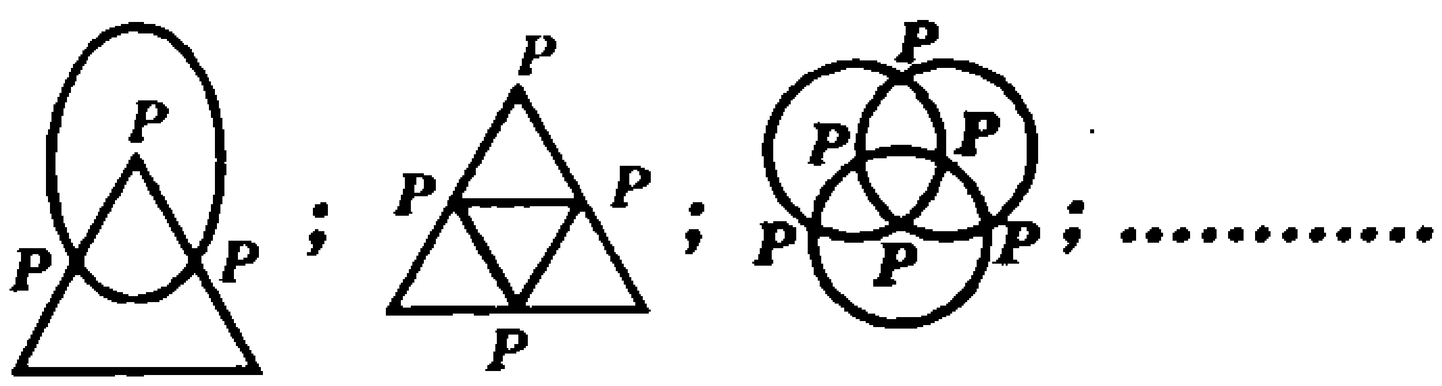


"La figura se puede dibujar de un solo trazo , porque todos sus vértices o puntos de intersección son pares".

EJEMPLO 2 :

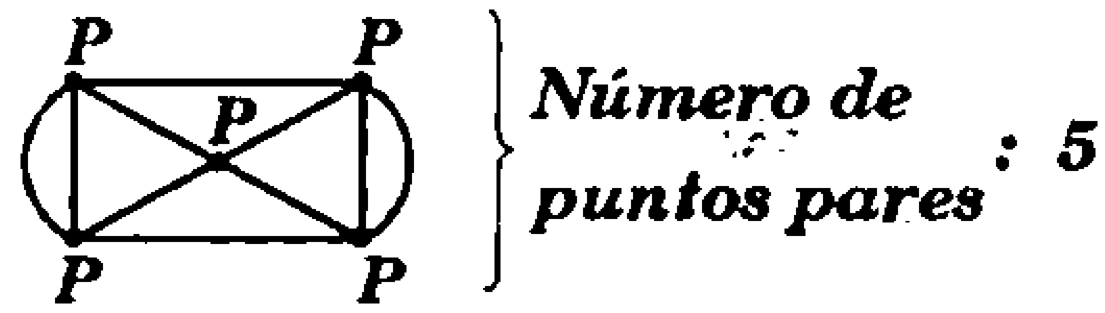


Las *3* figuras si se pueden realizar de un solo trazo, dado que únicamente poseen vértices pares.



Como puedes apreciar en cada una de las figuras mostradas, si la figura carece de puntos impares, entonces se podrá realizar de un sólo trazo comenzando por cualquier punto y acabando en ese mismo punto.

OTRO EJEMPLO :



En esta figura, observamos que todos los puntos son pares, luego sí se puede construir de un solo trazo continuo.

¡RECUERDA!

Para que se pueda trazar una figura , sin levantar el lápiz ni repetir ningún trazo , es necesario que todos los puntos de intersección sean pares.

Podemos empezar por cualquier punto par .

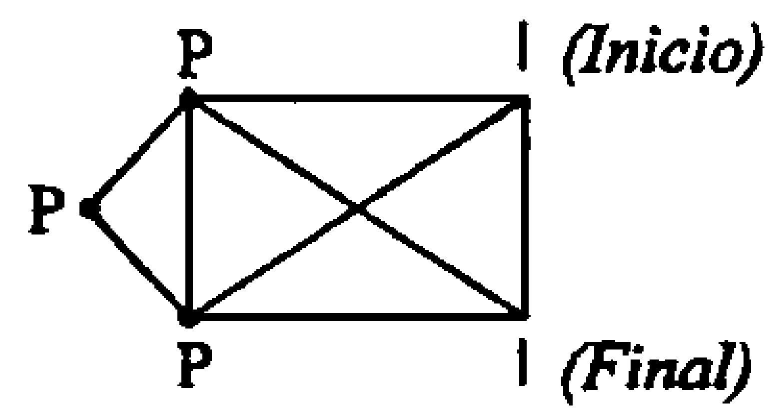
TEOREMA 2 :

Una gráfica admite un camino Euleriano si y sólo sí tiene *2* puntos impares.

$I = 2 \Rightarrow$ Sí admite camino Euleriano

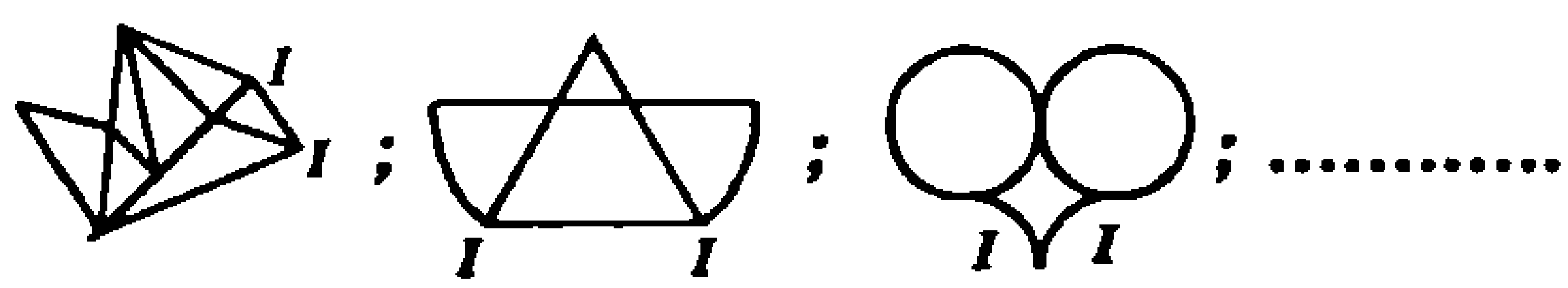
Si una figura presenta *2* puntos impares, se podrá dibujar de un sólo trazo, siempre y cuando se empiece en uno de los puntos impares y se termine en el otro.

EJEMPLO 1 :

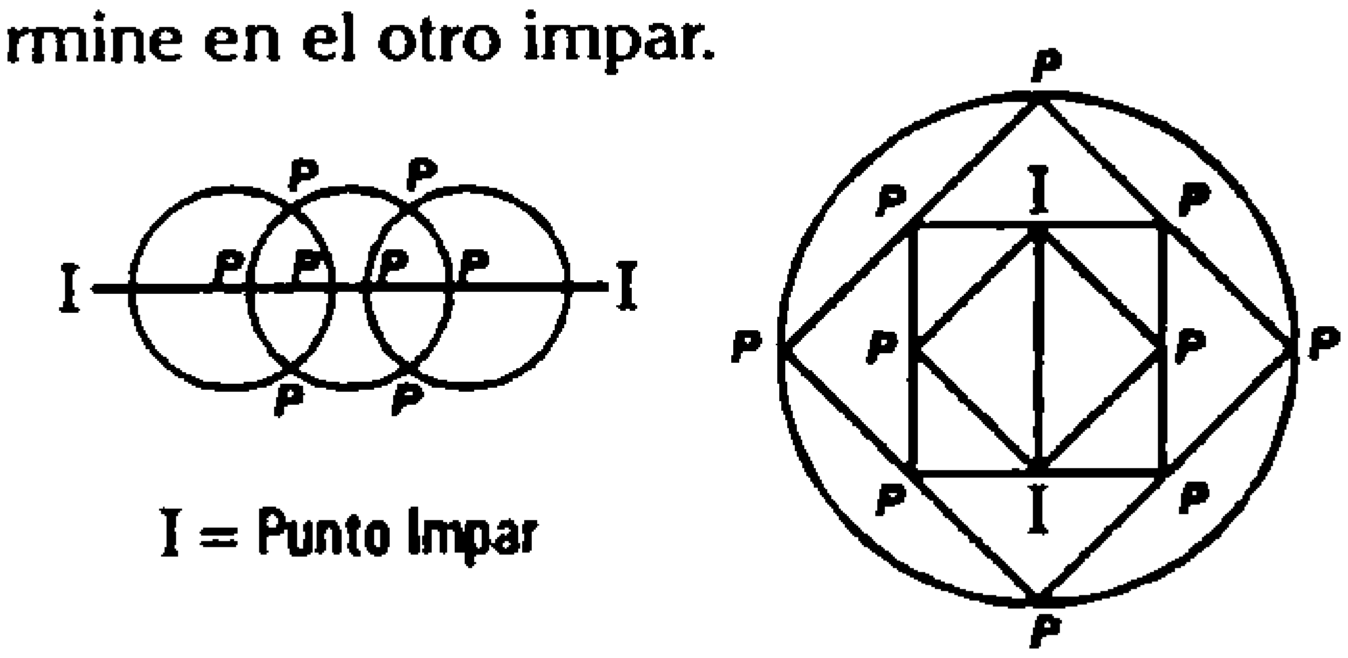


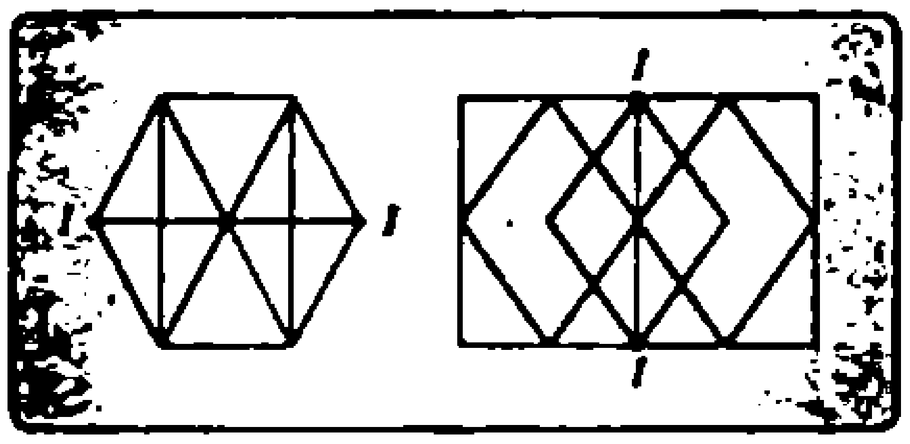
"La figura se puede dibujar de un solo trazo, porque solo presenta *2* puntos impares"

EJEMPLO 2 :



Si la figura solo presenta puntos pares y además *2* impares, entonces se podrá dibujar de un solo trazo continuo sin pasar dos veces por una misma línea, siempre y cuando se comience en un punto impar y se termine en el otro impar.





* Si se pueden dibujar de un solo trazo, dado que poseen únicamente *2* vértices impares y el resto pares.

¡RECUERDA!

Para que una figura se pueda trazar sin levantar el lápiz ni repetir ningún trazo, es necesario que existan a lo más dos vértices impares, siendo los demás vértices pares. Esto significa que, si hay más de dos vértices impares, la figura no se puede realizar de un solo trazo. Siempre debemos empezar por un punto impar y terminar en el otro vértice impar .

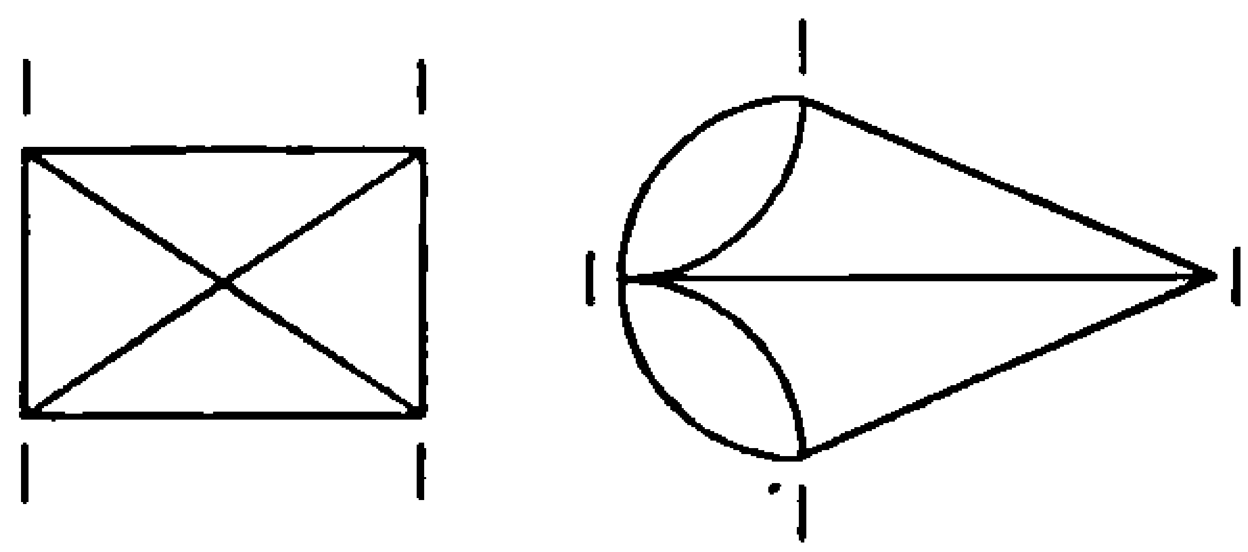
TEOREMA 3 :

Una gráfica no admite un camino Euleriano sí y solo sí tiene más de *2* puntos impares.

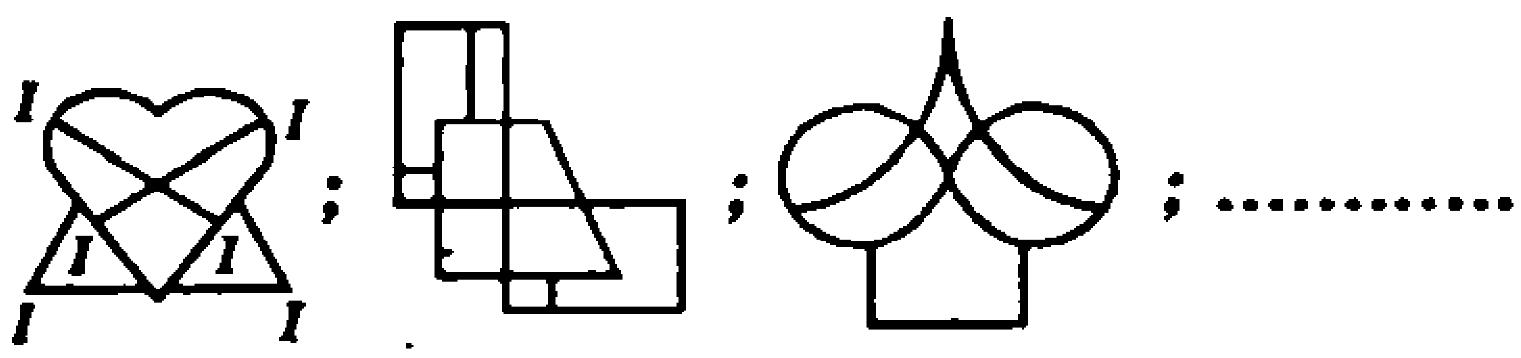
$I > 2 \Rightarrow$ no admite camino Euleriano

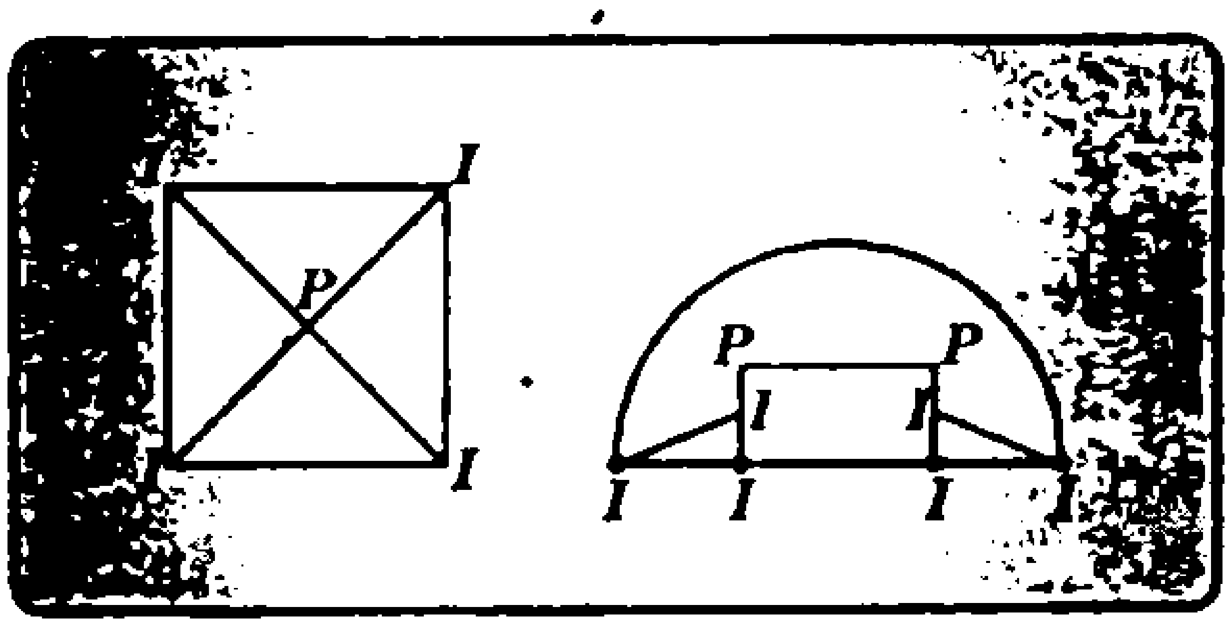
Si la figura presenta más de *2* puntos impares , es imposible dibujarla de un sólo trazo .

EJEMPLO 1 :



Estas figuras nunca se podrá dibujar de un sólo trazo porque poseen más de *2* puntos impares.





* No se puede construir en la figura, por tener más de dos puntos impares.

¡RECUERDA!

Si la figura presenta más de *2* puntos impares, entonces no se podrá dibujar de un solo trazo continuo sin pasar dos veces por una misma línea .

TEOREMA DEL RECORRIDO MÍNIMO

Si queremos dibujar una figura que presente más de dos puntos impares de un solo trazo continuo , se deben repetir algunas líneas ¿Cuál es el menor número de líneas que se repiten?

Se presenta *2* casos :

I) Si empezamos de un punto (debe ser impar) y terminamos en un punto distinto (también impar) :

$$\text{Mínimo número de líneas que se repiten} = \frac{I-2}{2} \qquad I: \text{ Número de puntos impares.}$$

II) Si empezamos en un punto (debe ser impar) y terminamos en el mismo punto :

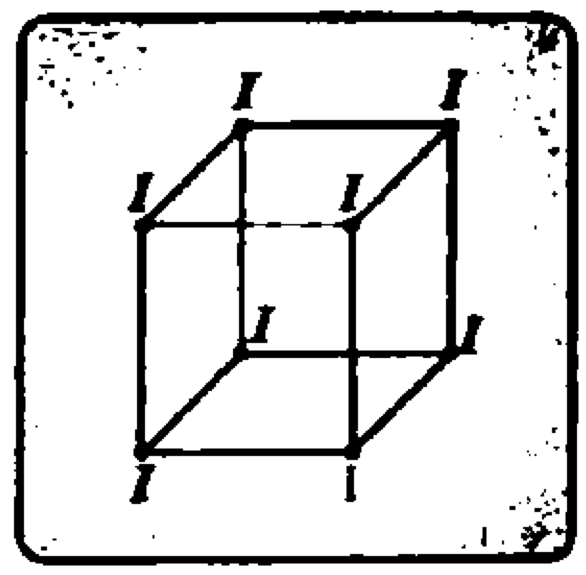
$$\left(\begin{matrix}\text{Mínimo número}\\ \text{de líneas que}\\ \text{se repiten}\end{matrix}\right) = \frac{I}{2} \qquad I: \text{ Número de puntos impares.}$$

NOTA :

Las líneas que repitan son líneas impares .

EJEMPLO 1 :

Una araña recorre todas las aristas de un cubo en 1 minuto como mínimo. Qué tiempo demora en recorrer una arista.



* Aristas de *1* sólo trazo: *12* aristas
* Aristas repetidas: $(I = 8)$

$$\#\ aristas\ repetidas = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ arista}$$

$$\Rightarrow Aristas\ recorridas = 12 + 3 = 15 \text{ arista}$$

Finalmente: $\frac{60s}{15} = 4s$

OBSERVACIONES :

* El número de puntos impares de una figura es siempre un número par .
* Para trazar el gráfico de una figura que tiene dos vértices impares se comienza de un vértice impar y se termina en el otro.
* Si se tiene una figura no realizable de un solo trazo (con más de dos vértices impares) , y se realiza de un trazo continuo, aún repitiendo algunos trazos, el número de trazos repetibles está dado por :

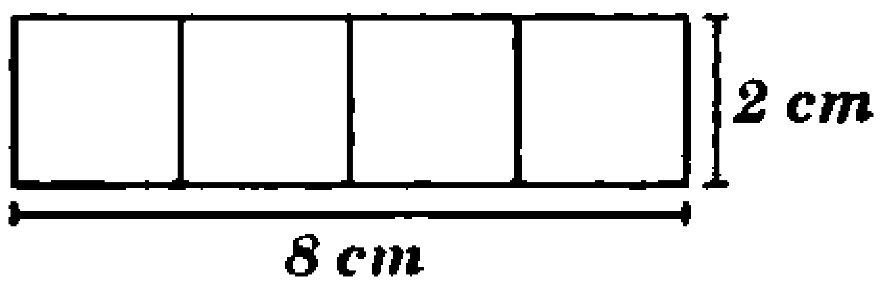
$$\#\,trazos\ repetidos = \frac{\#v\acute{e}rtices\ impares - 2}{2}$$

* Los trazos no tienen que ser consecutivos.

* La fórmula dada anteriormente garantiza el número de trazos repetidos, pero no precisa cuál o cuáles de ellas se repiten como mínimo . En tales condiciones , para realizar la figura , se recomienda identificar los puntos impares más cercanos , y repetir los trazos que unen dichos puntos según el número dado por la fórmula .

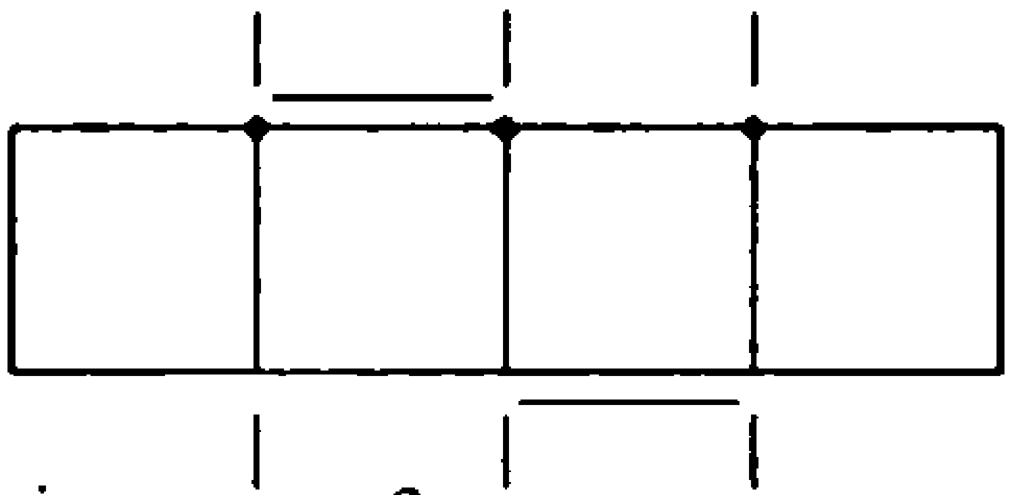
EJEMPLO 1 :

En la siguiente figura , encontrar la longitud del recorrido mínimo que se debe hacer para trazar la figura sin levantar el lápiz del papel.



A) 28 cm B) 29 cm C) 30 cm D) 32 cm E) 42 cm

RESOLUCIÓN :



 # vértices impares = 6

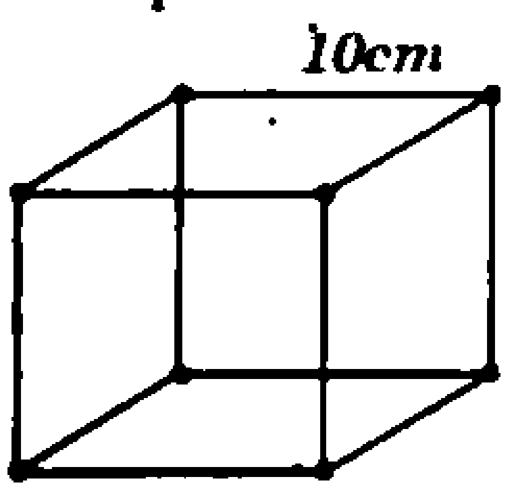
 # trazos repetidos $= \dfrac{6-2}{2} = 2$

$\Rightarrow L_{min} = 8 + 8 + 10 + 2(2) = 30\ cm$

RPTA : "C"

EJEMPLO 2 :

El siguiente es un cubo construido de alambre: Calcular el recorrido mínimo de una hormiga para pasar por todas las aristas.



 # de puntos impares : I=8

mínimo de líneas repetida:

$$L_R = \frac{8-2}{2} = 3$$

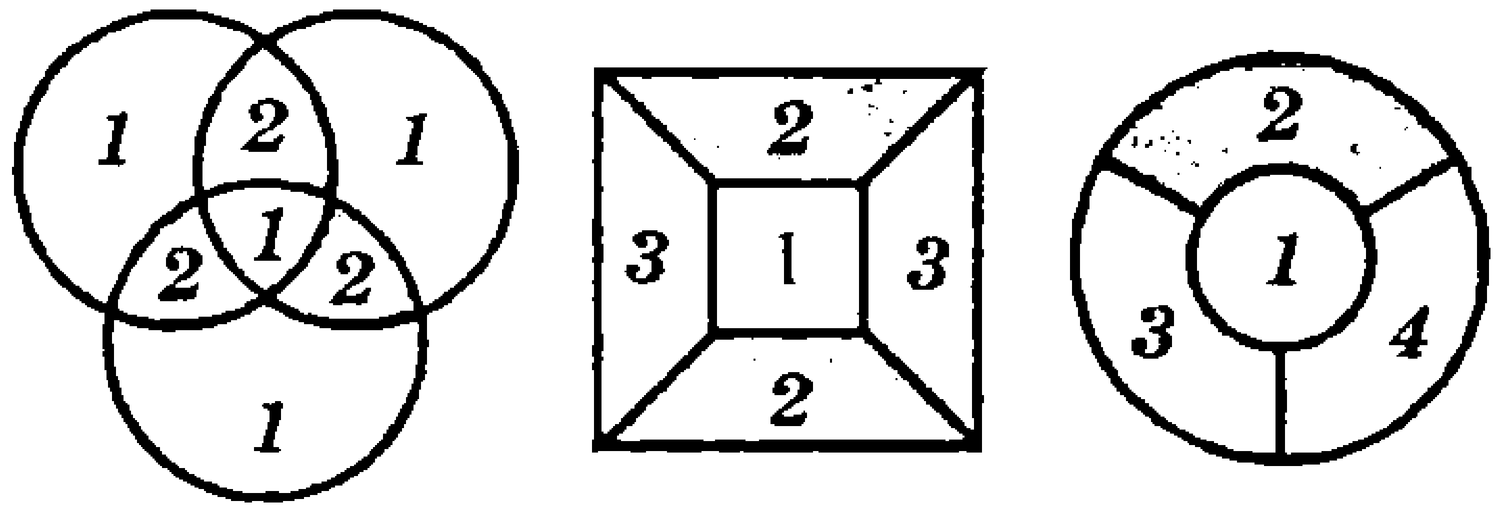
Recorrido mínimo = *(12+3)(10) = 150*

BUENA COLORACIÓN DE MAPAS

(NÚMERO CROMÁTICO)

Es el menor número de colores necesarios para colorear cualquier mapa con la condición que *2* países fronterizos estén pintados de colores diferentes.

EJEMPLO:



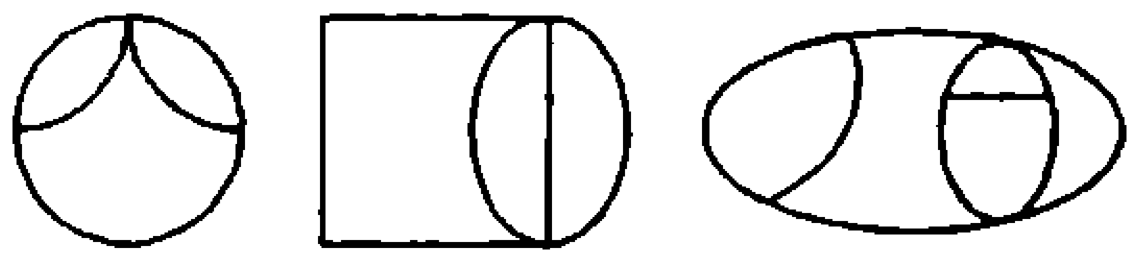
TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES :

Dibujando muchos mapas se ha demostrado que es siempre suficiente *4* colores como máximo para colorear un mapa en el plano.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

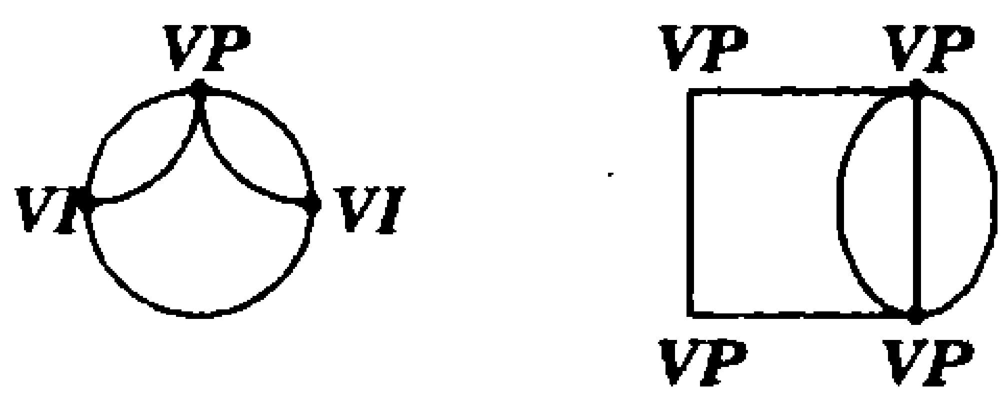
¿Qué figura(s) se puede(n) realizar con un solo trazo y sin levantar el lápiz del papel?



(I) (II) (III)

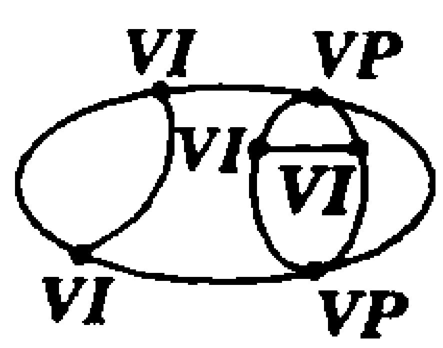
A) I y II B) II y III C) I y III
D) Sólo I E) Sólo II

RESOLUCIÓN :



(I) *Tiene dos vértices impares. Se puede realizar.*

(II) *Tiene sólo vértices pares. Se puede realizar.*



(III)

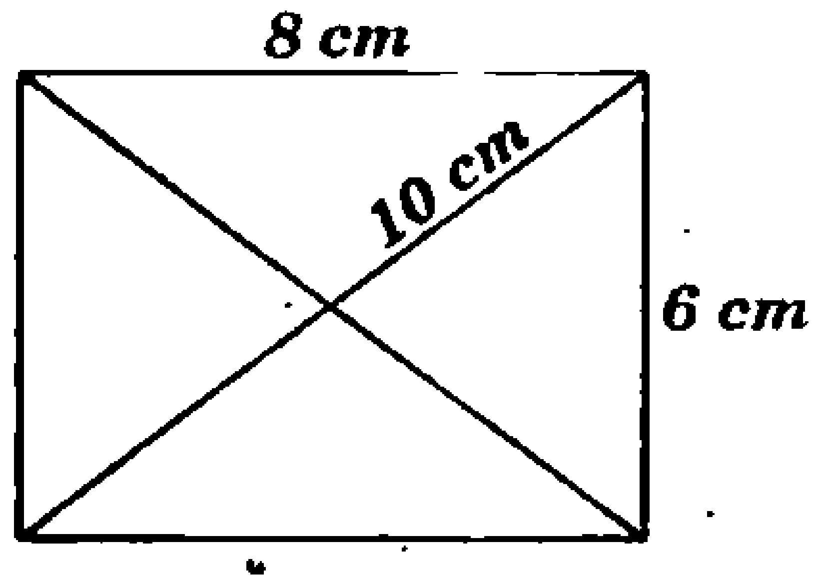
Tiene 4 vértices impares. No se puede realizar.

RPTA : "A"

PROBLEMA 2:

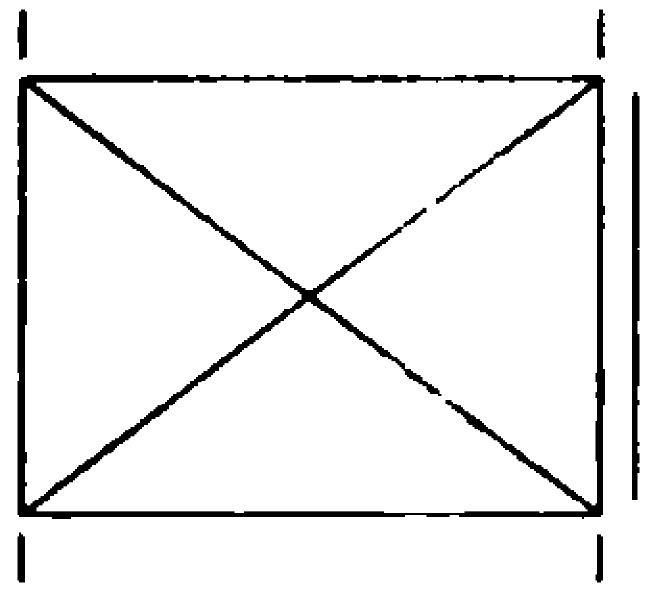
En la siguiente figura se exhibe un rectángulo con sus respectivas diagonales.

Calcular la menor distancia que debe recorrer la punta de un lápiz para dibujar la figura .



A) 58 cm *B) 56* *C) 54*
D) 50 *E) 52*

RESOLUCIÓN :



vértices impares = *4*

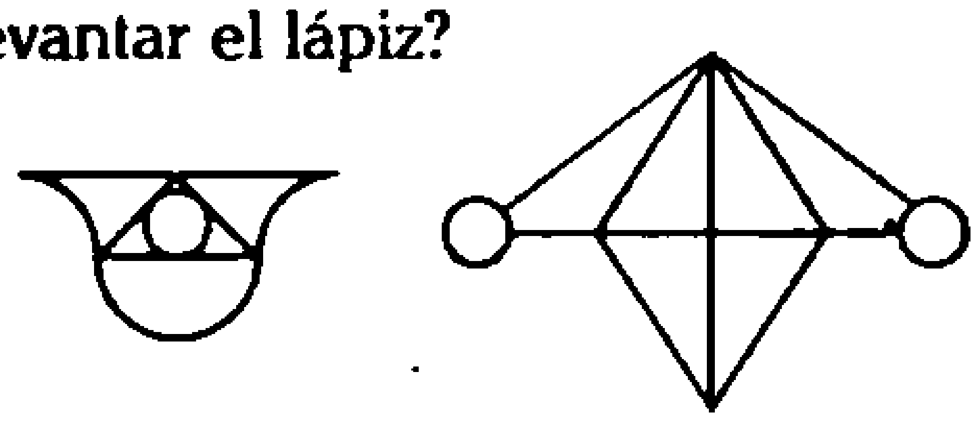
de trazos repetidos $= \frac{4-2}{2} = 1$

$\Rightarrow d_{mín} = 2\ (10) + 2\ (8) + 3(6) = 54$ cm

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

¿Cuál (es) de las figuras mostradas pueden dibujarse de un solo trazo, sin repetir una línea ni levantar el lápiz?

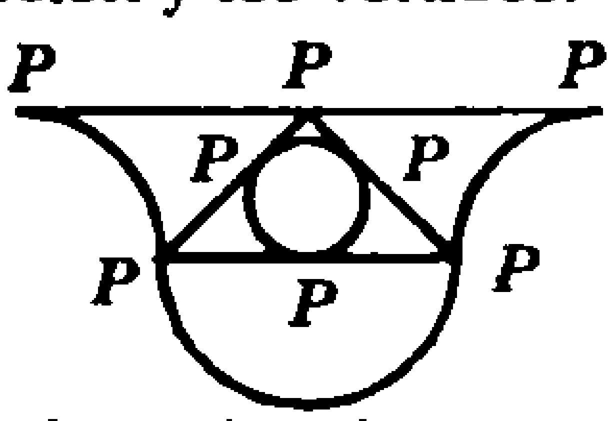


(I) (II)

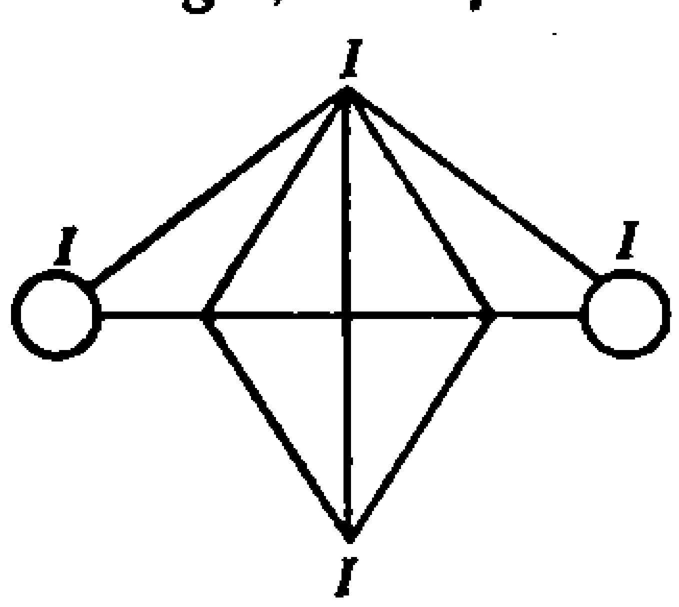
A) I *B) II* *C) I y II*
D) Ninguna *E) No se puede saber*

RESOLUCIÓN:

Analicemos los puntos de intersección y los vertices:



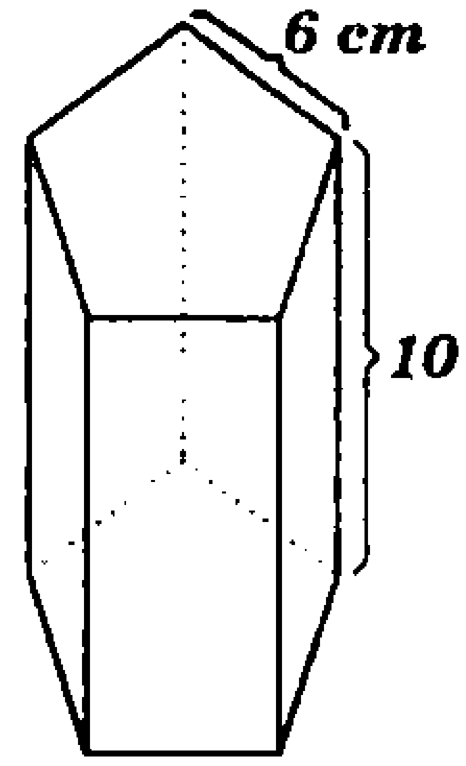
"Según *1^ra^* regla, *si se puede*"



"Según 3^ra^ regla, imposible dibujarlo de un solo trazo"

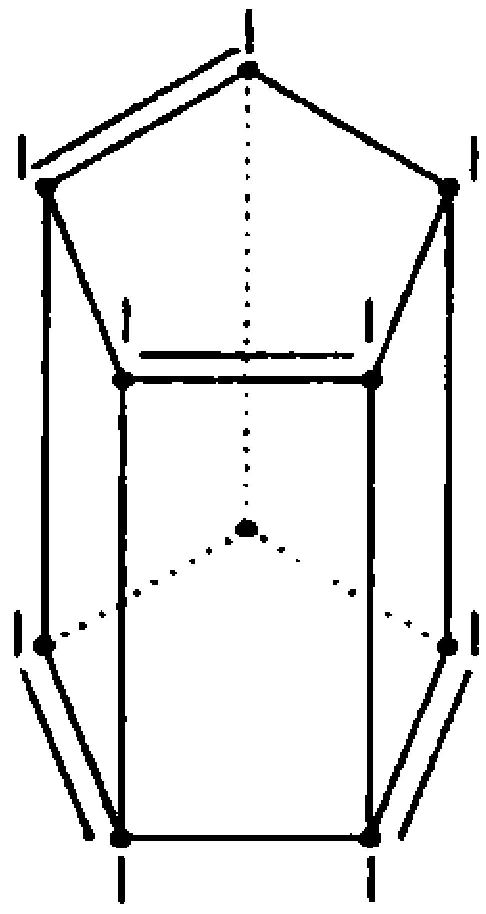
PROBLEMA 4 :

Hallar la longitud del recorrido mínimo para trazar el siguiente sólido regular.



A) 124 cm
B) 122 cm
C) 134 cm
D) 136 cm
E) 138 cm

RESOLUCIÓN :



vértices impares = *10*

trazos repetidos $= \frac{10-2}{2} = 4$

Recorrido mínimo :

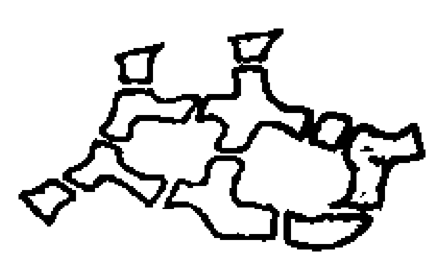
$6(10) + 10(5) + 4(6) = 134$ cm

RPTA : "C"

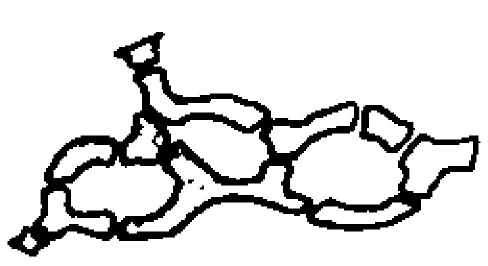
PROBLEMA 5 :

En las figuras están representadas las ciudades, los ríos y los puentes. ¿En cuál(es) de los casos un individuo puede pasearse utilizando cada puente por una sola vez?

I



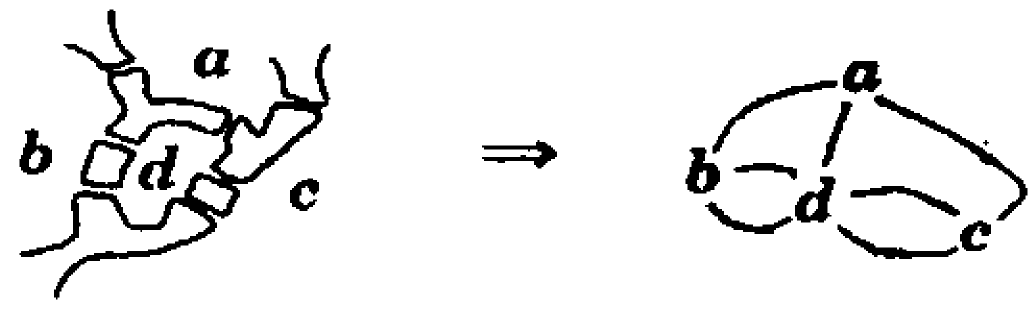
II



III

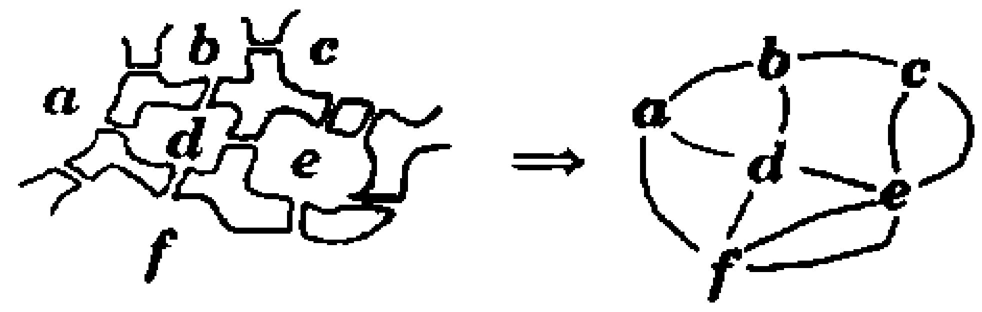
A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III*
D) II y III *E) I y III*

RESOLUCIÓN :

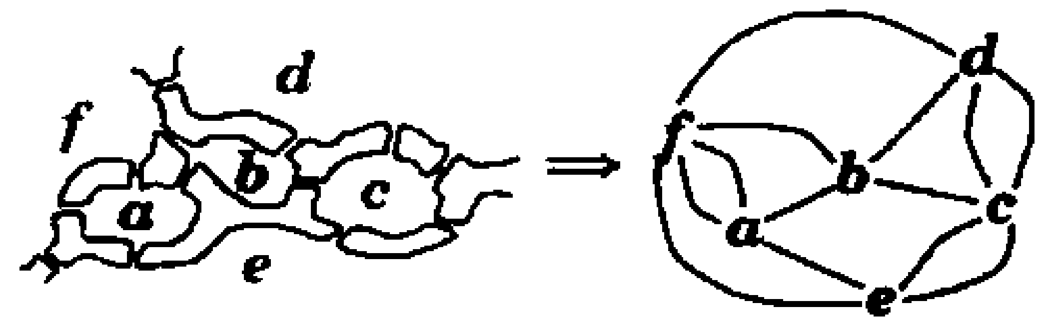


I

* No es posible (ver trazos de figuras) :



II



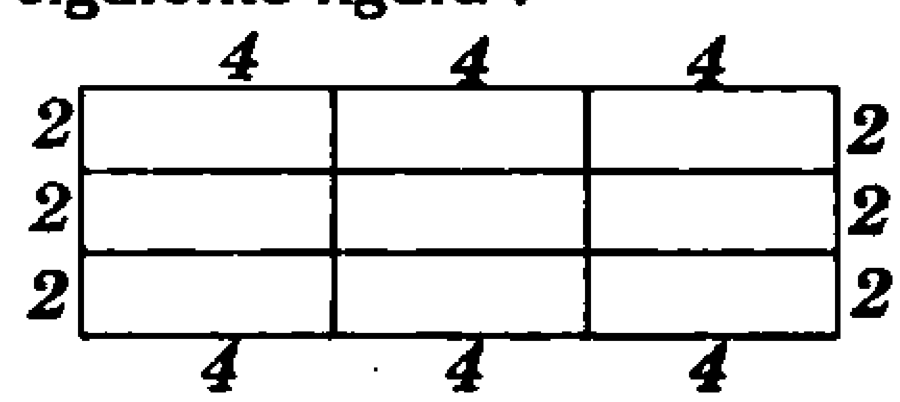
III

*Como se puede observar, sólo en el caso *III* se podrá pasear utilizando cada puente una sola vez.

RPTA : "C"

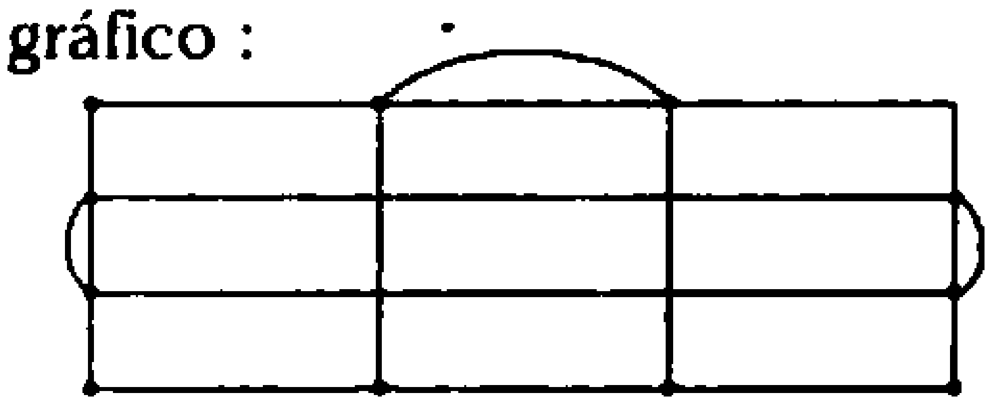
PROBLEMA 6 :

Indicar la menor longitud que se recorrerá con el lápiz para dibujar la siguiente figura :



RESOLUCIÓN :

* Observemos atentamente el gráfico :



* En la figura de la derecha se muestran las líneas que se repiten

de puntos impares : *8*

de líneas repetidas $= \frac{8-2}{2} = 3$

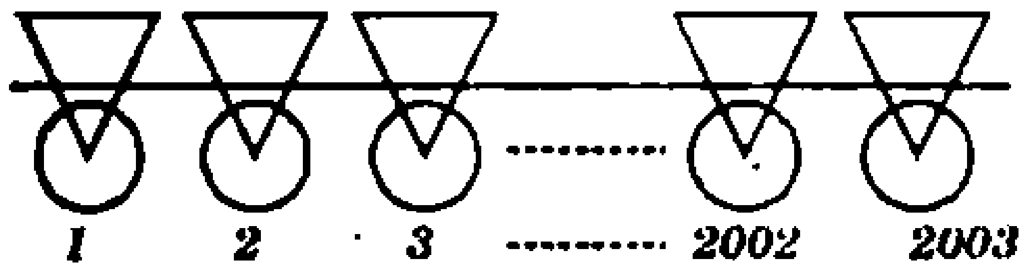
$\Rightarrow$ Mínimo recorrido :

$4(6) + 4(12) + 2(2) + 4 = 80$

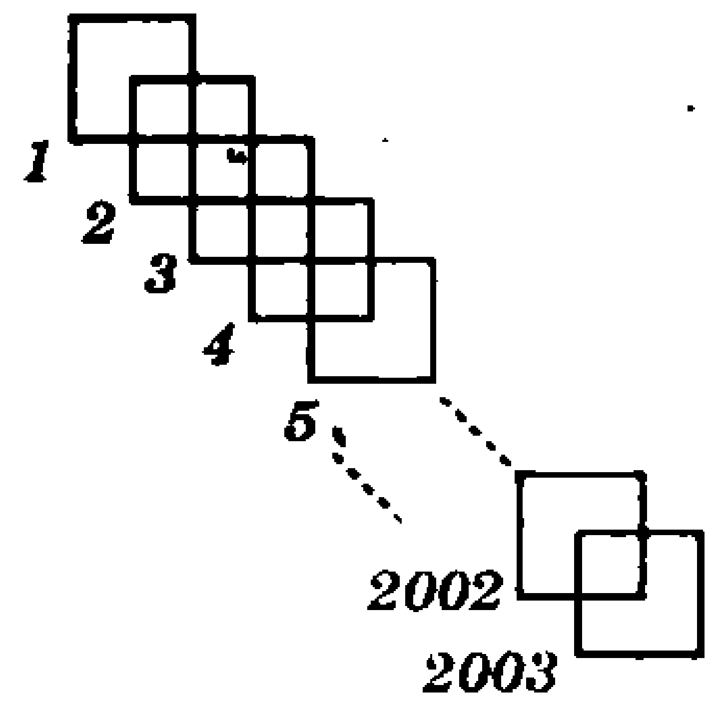
PROBLEMA 7:

¿Cuál de las siguientes figuras no se puede dibujar de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel y sin repetir una misma línea?.

A)

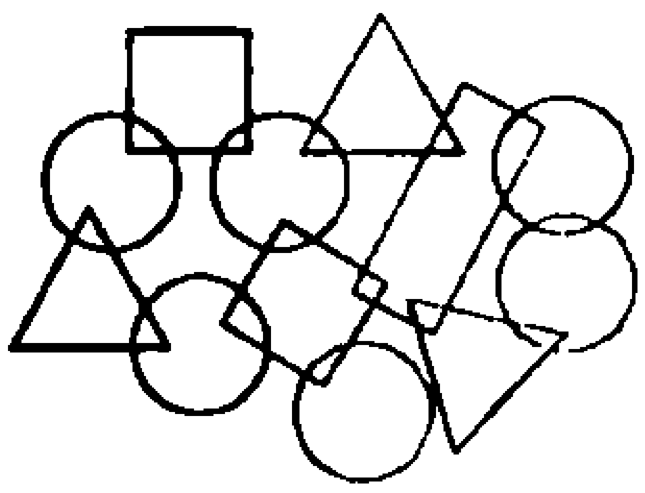


B)

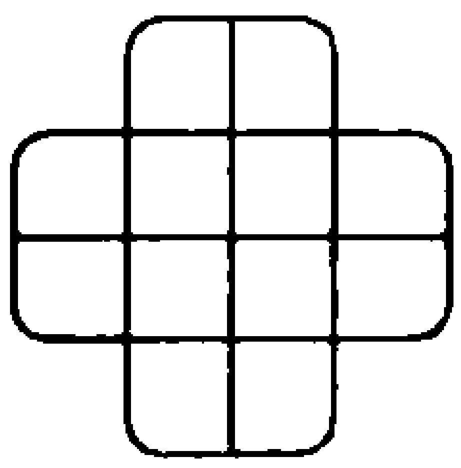


C)

D)



E)



RESOLUCIÓN:

* Las figuras *A* y *C* tienen sólo 2 puntos impares cada una, por lo tanto ***sí se pueden dibujar*** de un sólo trazo.

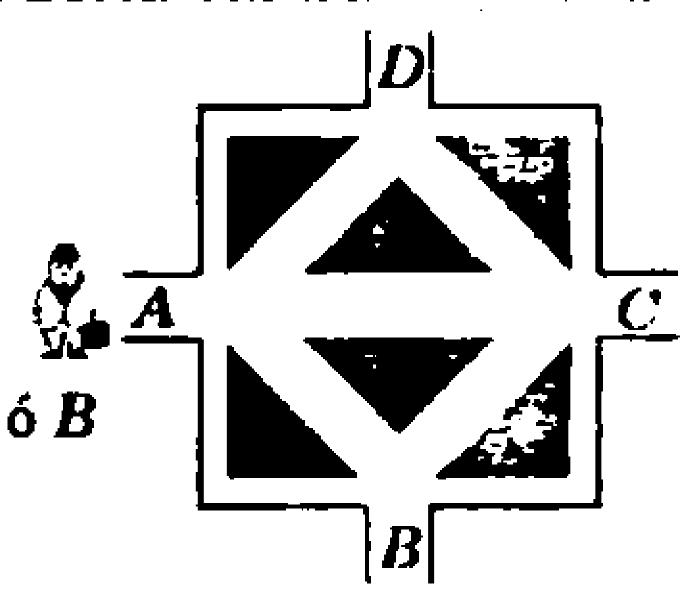
* Las figuras *B* y *D* tiene todos sus puntos pares, por lo tanto, ***sí se pueden dibujar*** de un sólo trazo .

* La figura *E* tiene 4 puntos impares, por lo tanto ***no se puede dibujar*** de un solo trazo.

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Una persona debe de correr todas las calles de la siguiente figura, sin pasar dos veces por una misma calle. Si entra por la puerta *A* ¿por cuál puerta saldrá al finalizar?

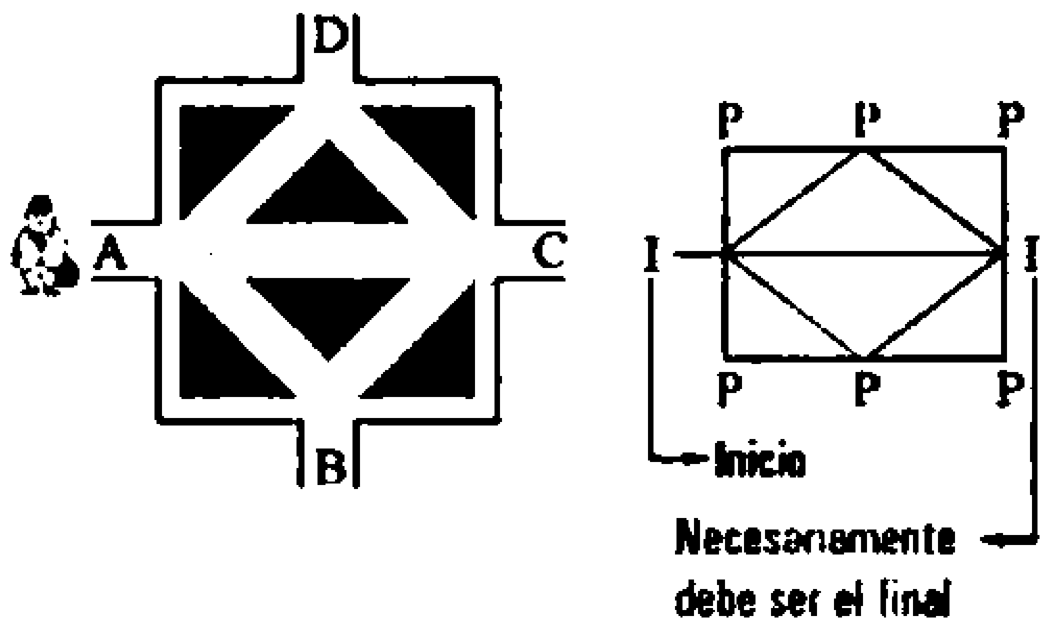


A) D
B) C
C) B
D) D ó B

RESOLUCIÓN :

Hagamos el posible recorrido :

• Lo obtenido será :

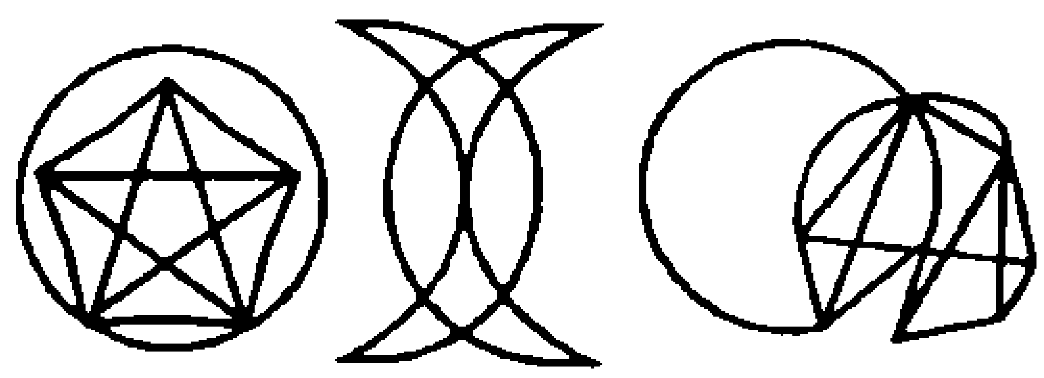


• Como presenta *2* puntos impares, entonces si se podrá recorrer en forma continua, siempre y cuando empecemos y terminemos en un punto impar

RPTA : "B"

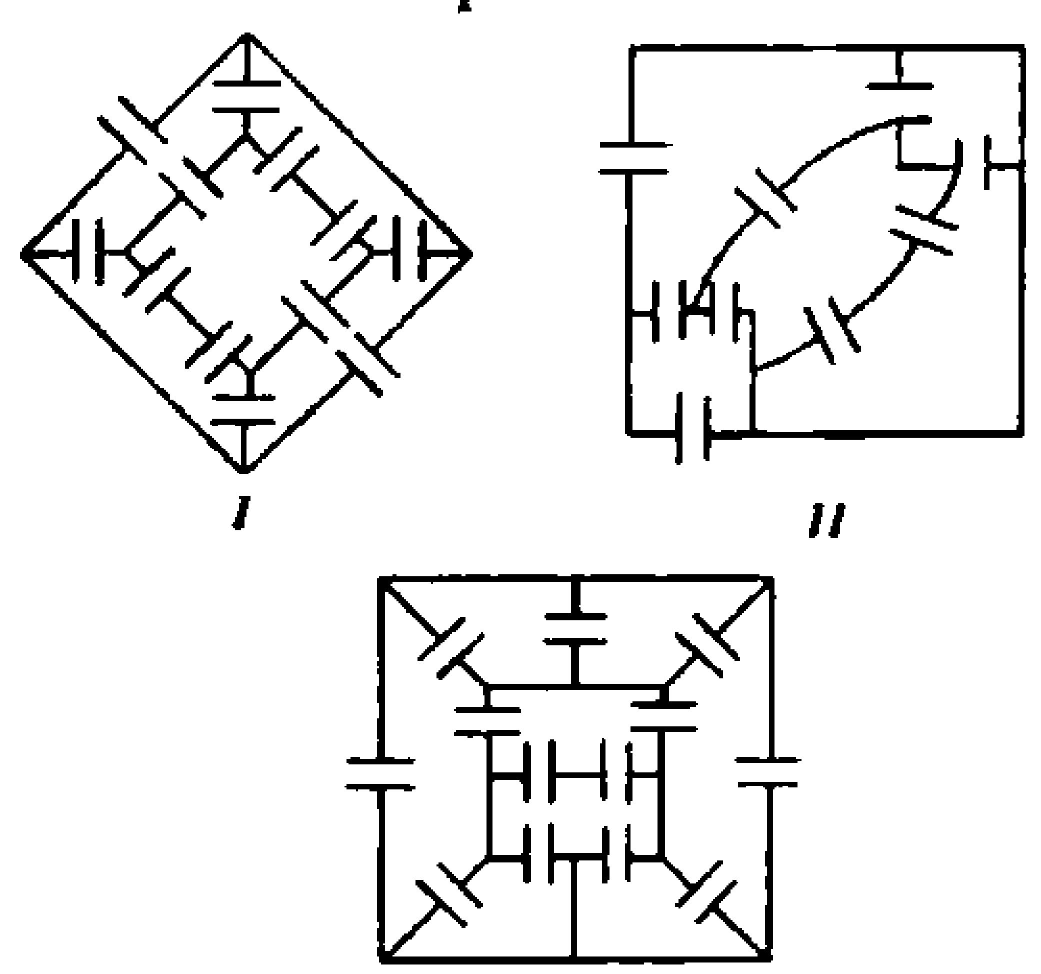
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar si las siguientes figuras corresponden a un recorrido EULERIANO.



A) Sí, NO, Sí ***B) Sí, Sí, Sí***
C) NO, Sí,Sí ***D) Sí. Sí, NO***
E) NO, NO, NO

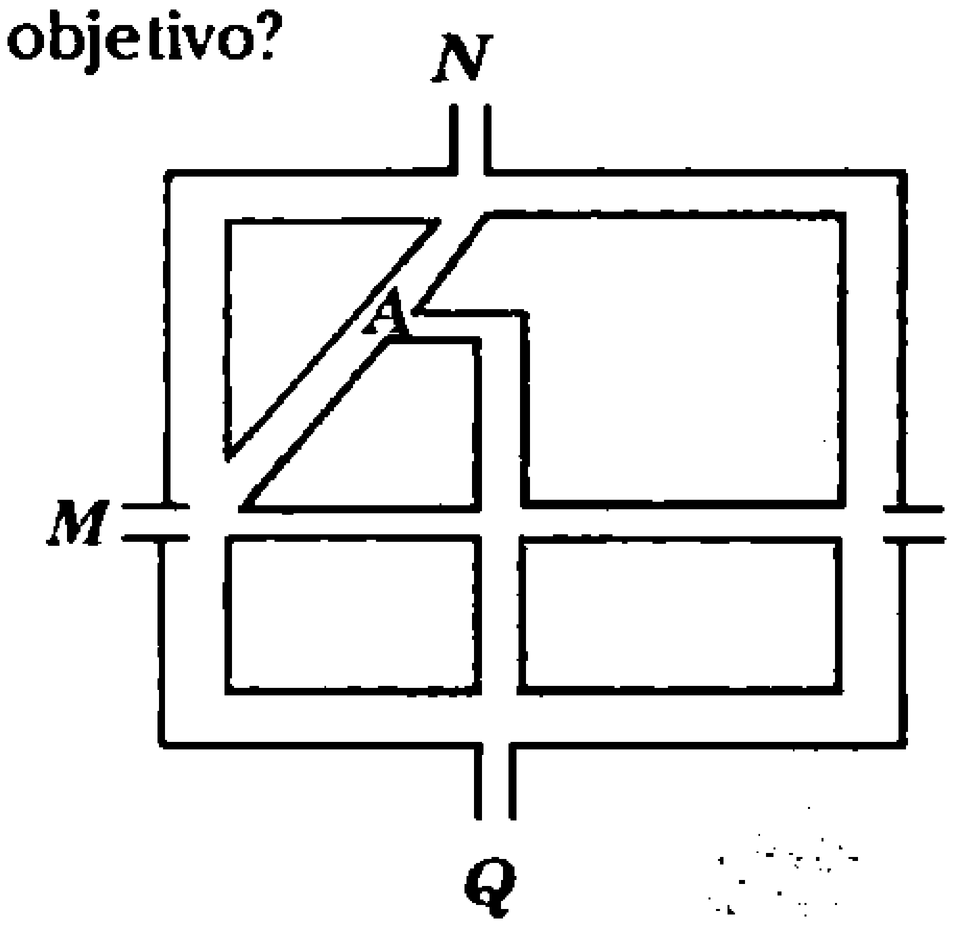
02 ¿ En qué planos se puede pasar por todas las puertas una sola vez empezando y terminando fuera de cada plano?.



I II III

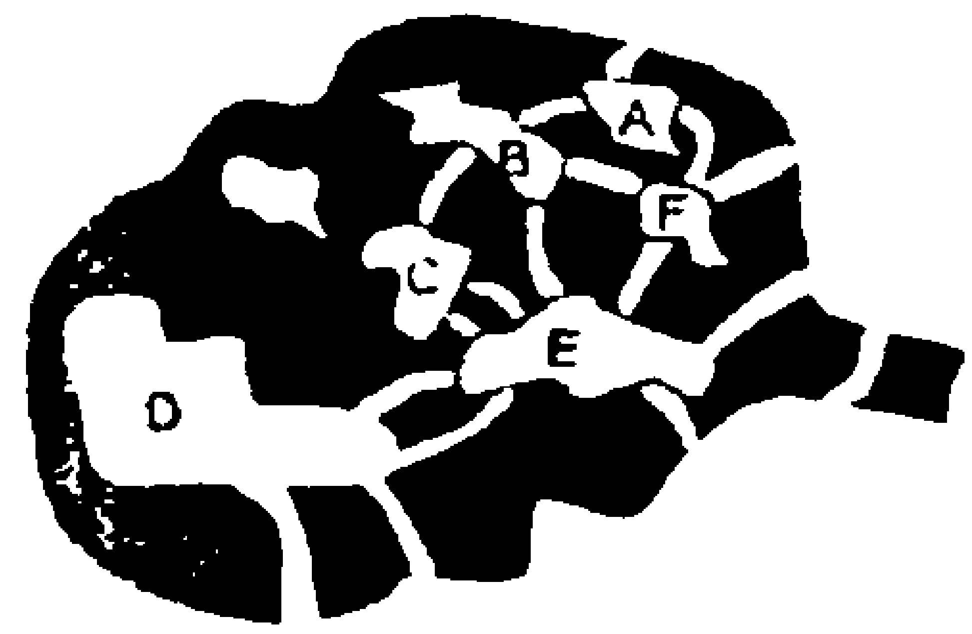
A) Sólo I ***B) Sólo II*** ***C) I y II***
D) I y III ***E) Todas***

03 Una persona se encuentra en el punto *A* y debe recorrer todos los caminos del parque, sin repetir ninguno de ellos. ¿Por cuál puerta saldrá a cumplir su objetivo?



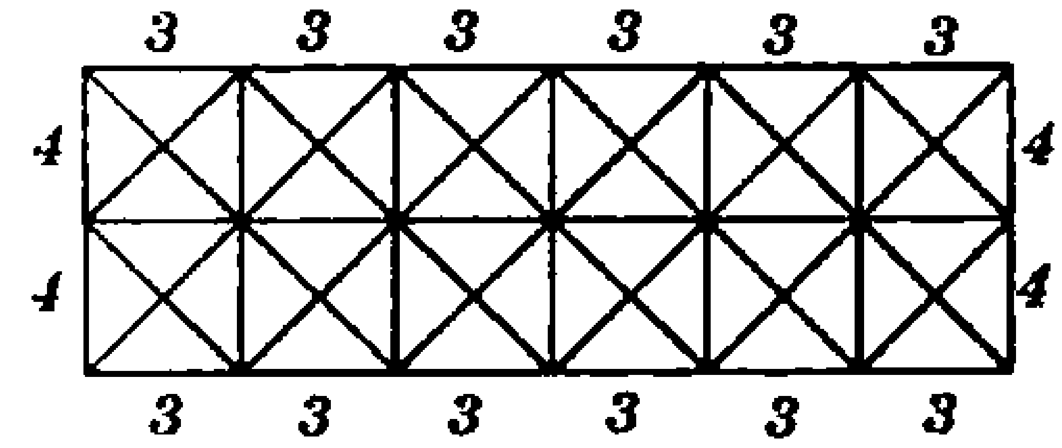
A) M ***B) N*** ***C)P*** ***D) O***
E) No puede salir

04 ¿Se puede pasar por los *17* puentes que unen entre si las partes del archipiélago, sin pasar por cada uno más de una vez?



A)Sí, empezando en D y terminando en C.
B)Si empezando en A y terminando en C.
C) No.
D)Sí, empezando en C y terminando en F.
E) Sí, empezando en cualquier isla y terminando en la misma.

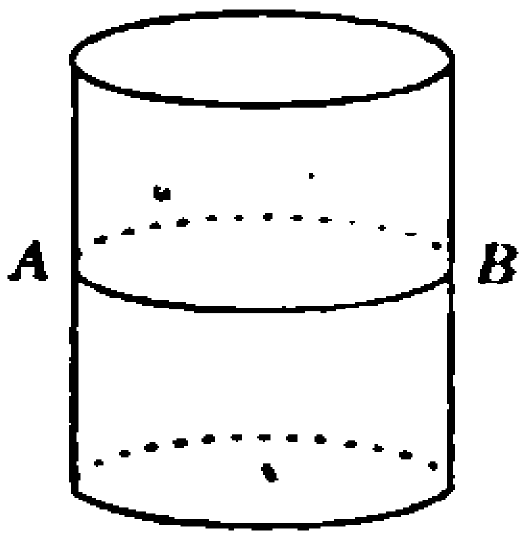
05 ¿Cuál es el mínimo recorrido que debe realizar la punta de un lápiz, para poder dibujar la siguiente figura, esto sin levantar el lápiz del papel?



A)172 ***B) 170*** ***C)174***
D)180 ***E) 176***

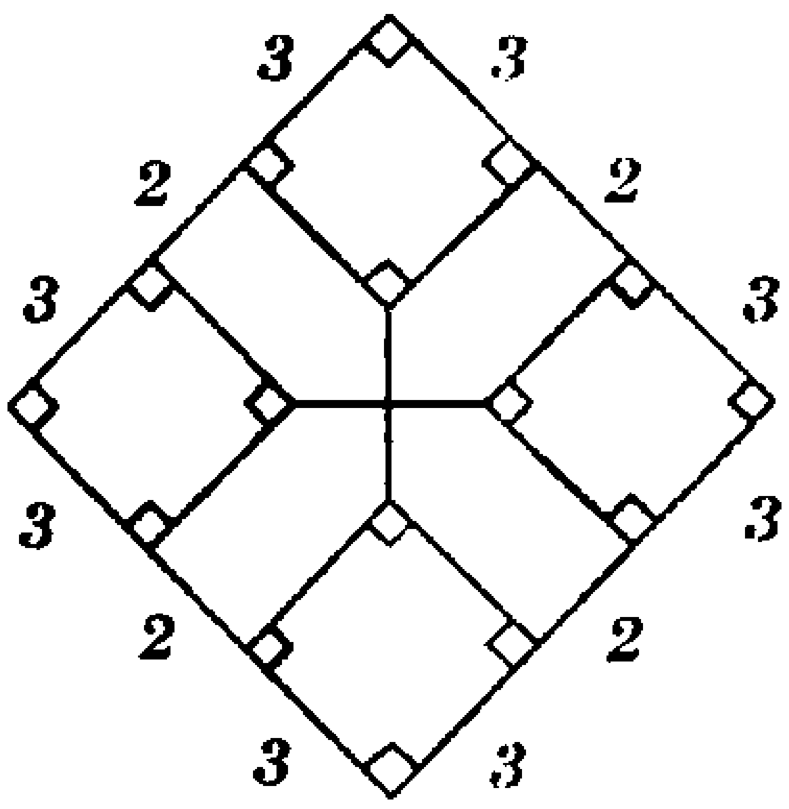
06 Calcular el recorrido mínimo que debe hacer una

arañita para pasar por todo el alambre que forma una estructura cilíndrica de *15 cm* de radio y altura *48 cm*, si además *A* y *B* son puntos medios.



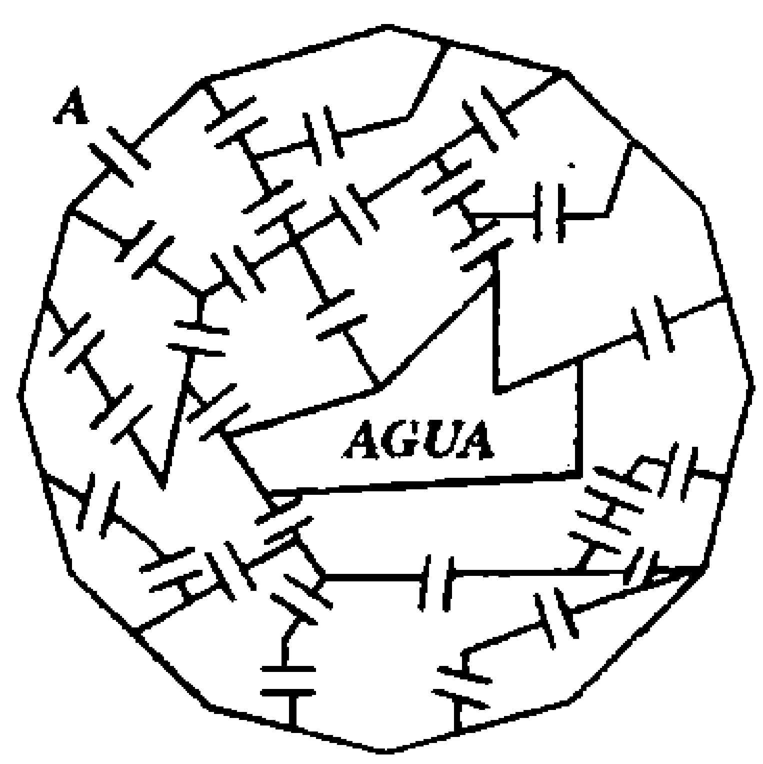
A) $96 + 120\pi$ B) $64 + 120\pi$ C) $144 + 90\pi$
D) $96 + 105\pi$ E) $144 + 105\pi$

07 Un caracol debe recorrer por todas las líneas que conforman la figura. Calcular su menor recorrido para lograr su objetivo.



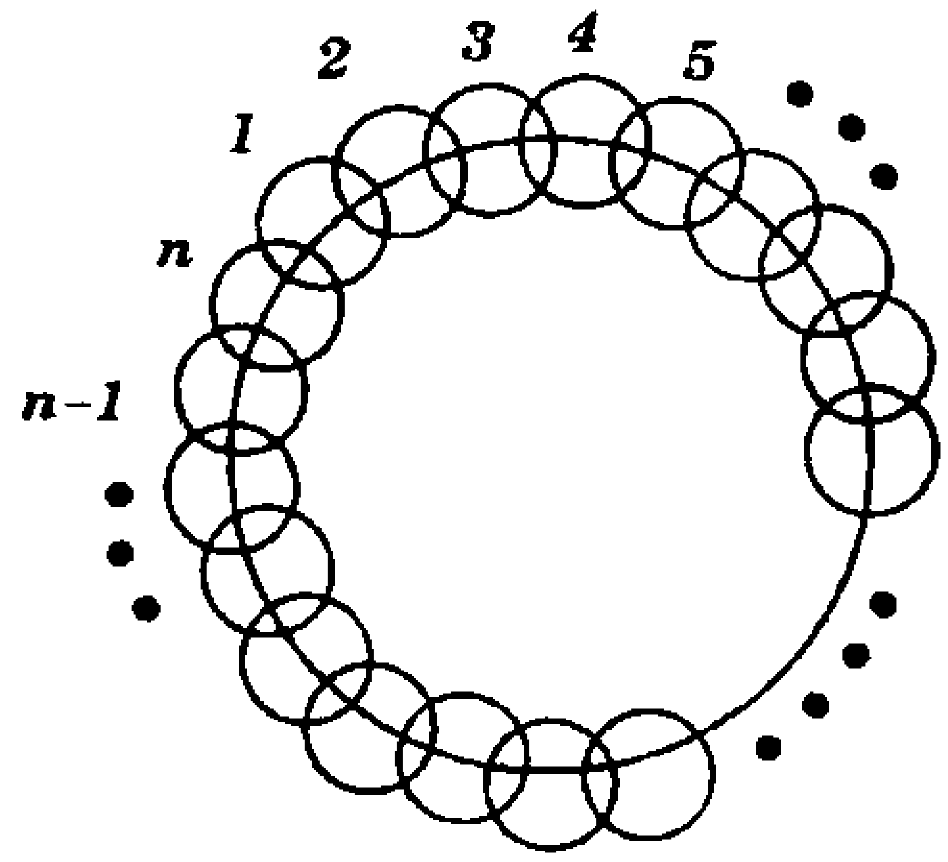
A) $66 + 4\sqrt{2}$ B) $64 + 6\sqrt{2}$ C) $64 + 8\sqrt{2}$
D) $64 + 4\sqrt{2}$ E) $72 + 4\sqrt{2}$

08 En la figura se aprecia el plano del Museo de Dodecalandia construido sobre el océano Euler en el planeta RUBIÑOS. Todas las habitaciones están conectadas por medio de puertas. Debido a los grandes tesoros guardados en dicho museo, se instaló un sistema de seguridad el cual permitía recorrer todas las puertas interiores del museo a lo más una vez, caso contrario el piso en dicha puerta se abría expulsado al individuo hacia el océano donde era devorado por criaturas extrañas. Además la puerta exterior *A* podía cruzarse dos veces si anteriormente se había recorrido todas las habitaciones con el mayor número de puertas interiores recorridas. ¿Cuánto es este número?



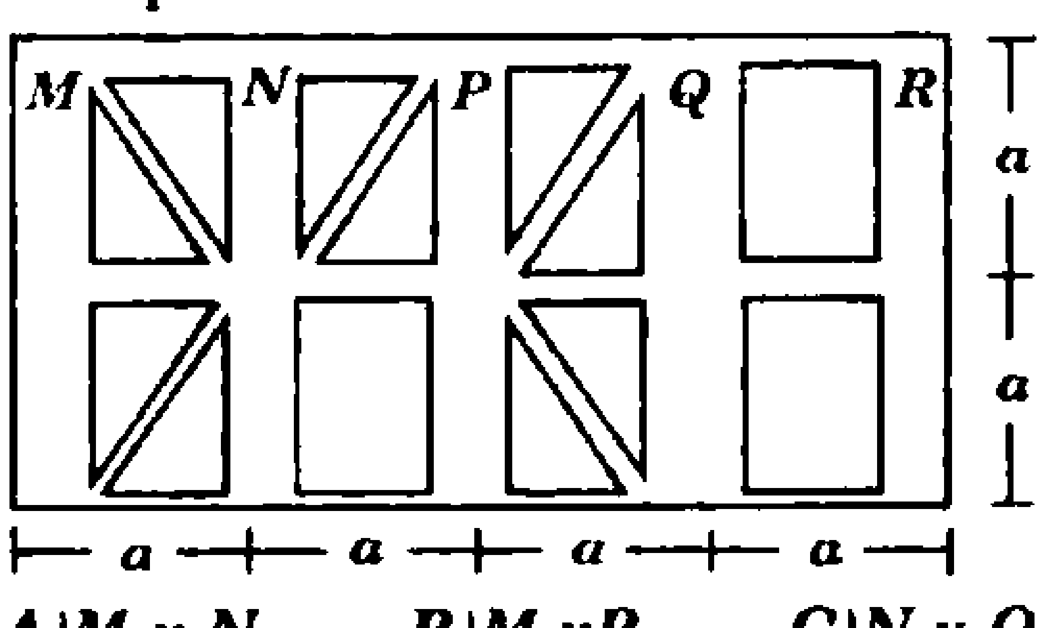
A) 31 B) 30 C) 29 D) 28 E) 27

09 ¿La siguiente figura admite un recorrido euleriano?



A) Sí B) No C) Sí, si "n" es par.
D) Sí, si "n" es impar.
E) No se puede determinar.

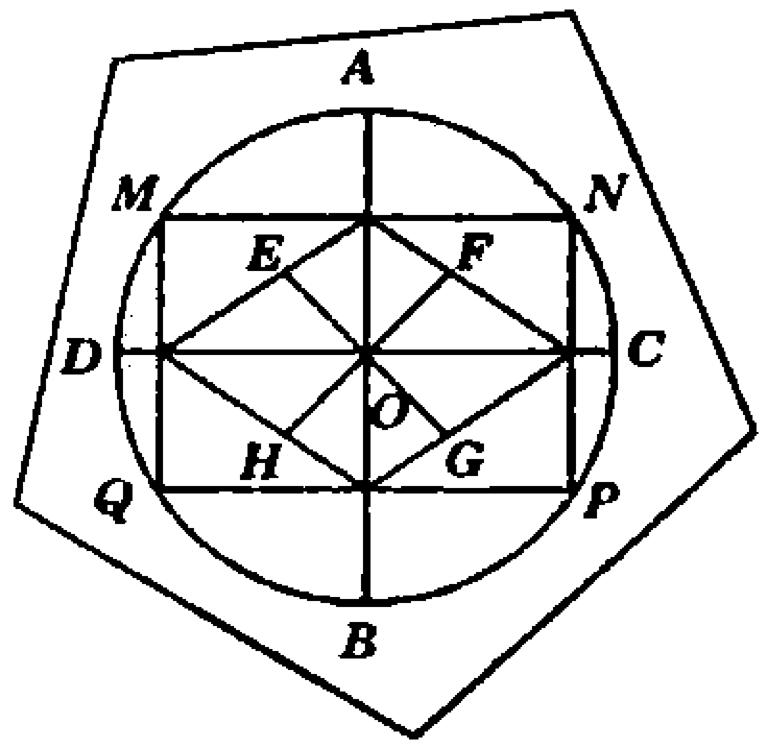
10 En la figura se muestra la ubicación de las personas *M, N, P, Q* y *R* en las esquinas de un parque. Si cada una de las personas se desplaza con la misma rapidez constante, ¿qué personas recorrerán todo el contorno de las áreas en el menor tiempo Posible?



A) M y N B) M y P C) N y Q
D) Sólo N E) Sólo M

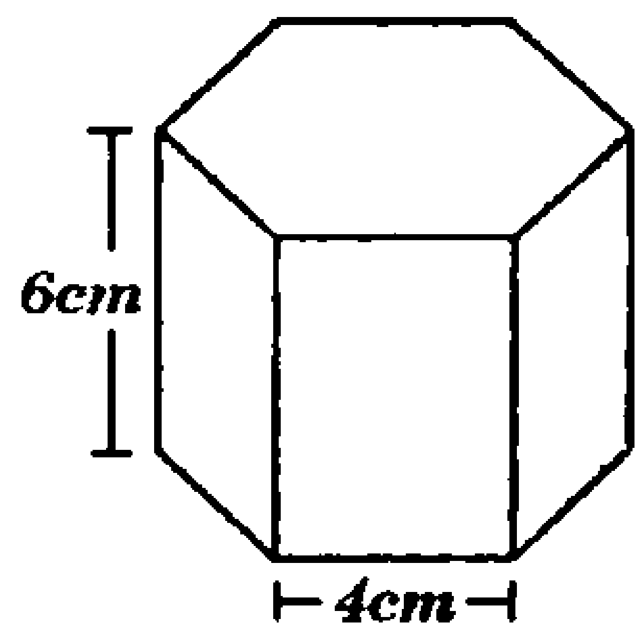
11 El parque mostrado es recorrido cada fin de semana por los vecinos de la urbanización *Mira el sol*. ¿Cuál es el menor espacio recorrido que hará un vecino si desea recorrer todas las aceras del parque?

(MN = 80, NP = 60 m)



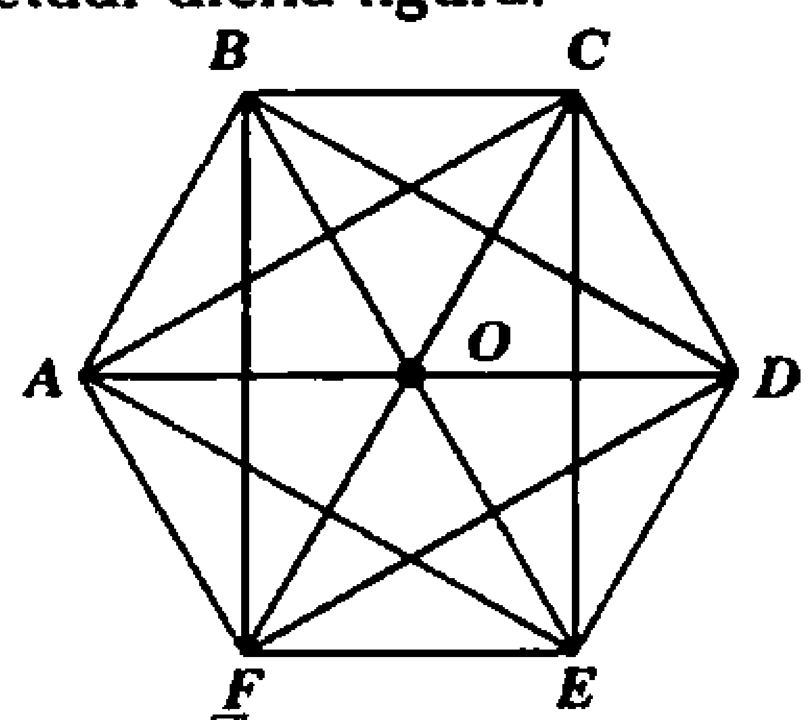
A) $895 + 100\pi$ B) $695 + 100\pi$
C) $750 + 100\pi$ D) $560 + 120\pi$
E) $840 + 120\pi$

12 En el gráfico se muestra un prisma recto cuyas bases son hexágonos regulares. Una hormiga camina sobre las aristas de dicho prisma y tarda como mínimo *8* minutos en recorrerlas todas, caminando con rapidez constante. Calcule dicha rapidez de la hormiga.



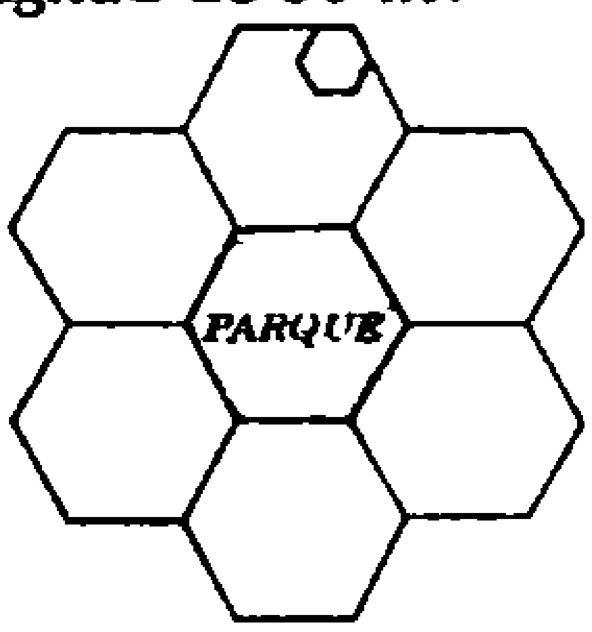
A) 10 cm/min B) 11 cm/min
C) 12 cm/min D) 13 cm/min
E) 14 cm/min

13 En la figura *ABCDEF* es un hexágono regular cuyo lado mide *4 cm*. Calcular la longitud mínima que debe recorrer la punta del lápiz sin levantarla del papel, para efectuar dicha figura.



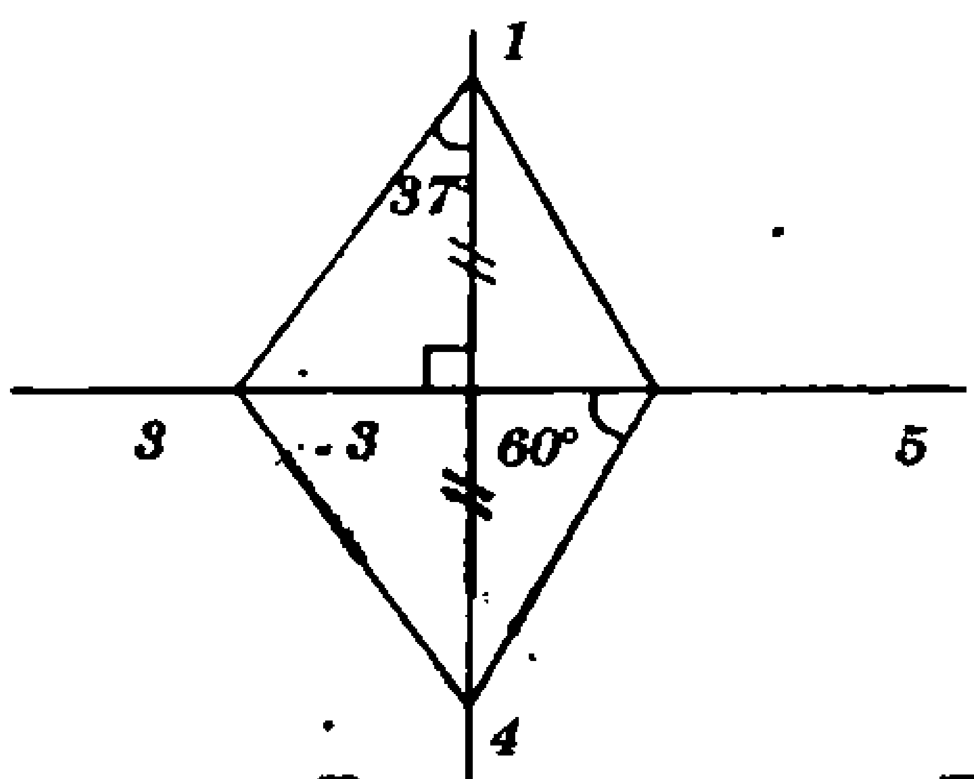
A) $(64 + 24\sqrt{3})$ cm
B) $(48 + 24\sqrt{3})$ cm
C) $(56 + 12\sqrt{3})$ cm
D) $(46 + 42\sqrt{3})$ cm
E) $(56 + 24\sqrt{3})$ cm

14 La figura muestra todas las calles de la residencial EXAGOCITY compuesta por seis bloques de viviendas y un bloque central del parque. Max es un deportista que le gusta recorrer por las mañanas todas las calles de la residencial. Si Max empieza su rutina en la puerta de su casa, la cual se muestra sombreada, ¿cuál será la menor distancia recorrida por Max? Cada calle tiene una longitud de ***90 m***.



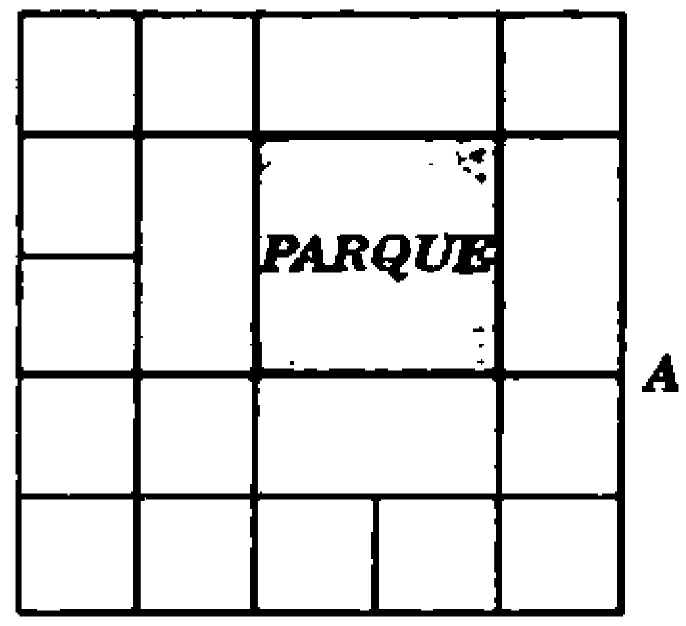
A) 3150 m ***B) 2700m*** ***C) 3 240 m***
D) 3 060 m ***E) 2 970 m***

15 Calcular la longitud mínima que debe recorrer la punta de un lápiz, sin levantarla del papel, para realizar la siguiente figura: (longitudes en centímetros).



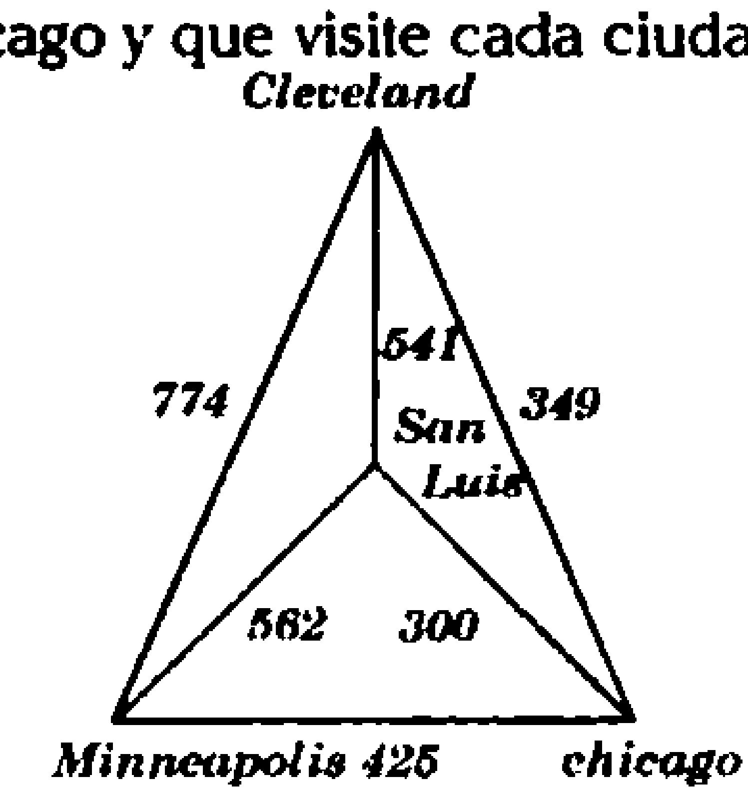
A) $36 + 20\sqrt{3}$ ***B)*** $43 + 20\sqrt{3}$
C) $50 + 18\sqrt{3}$ ***D)*** $34 + 16\sqrt{3}$
E) $45 + 18\sqrt{3}$

16 En la urbanización ***R.M*** todas las manzanas son de ***150*** metros por ***150*** metros excepto las que colindan con el parque cuyas dimensiones son de ***150*** metros por ***300*** metros. El camión de basura recoge la basura de ambos lados de cada calle (de ***150 m***) en "***n***" minutos. Calcular la longitud mínima que recorre el camión al recorrer todas las calles, y el valor de "***n***", sabiendo que cuando pasa una calle por segunda vez demora la cuarta parte del tiempo al pasar por primera vez y el tiempo mínimo empleado es de ***7 h 10 min***. El camión inicia su recorrido por la entrada ***A***.



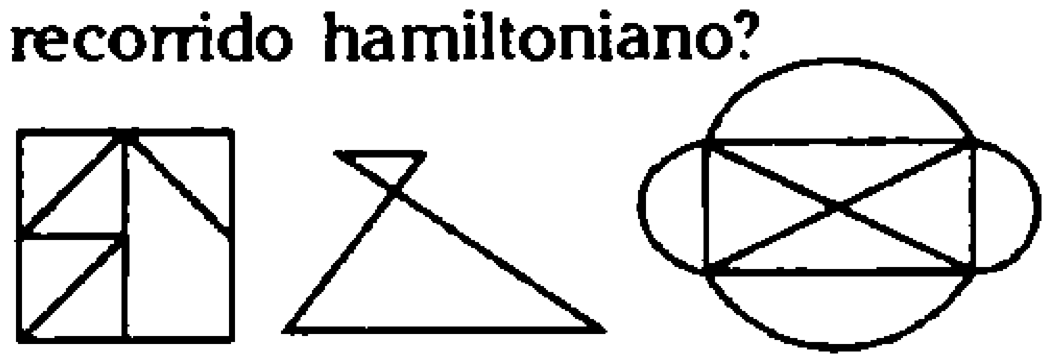
A) 9000m,10 ***B) 8 850 m, 8***
C) 7 800 m, 6 ***D) 8 250 m, 6***
E) 8 700 m, 6

17 Un grupo de estudiantes limeños becados en la Universidad de Chicago, durante sus vacaciones de primavera, deciden ir en coche a visitar a otros amigos en Minneapolis, Cleveland y San Luis. El club local del automovilista les ha proporcionado las distancias en millas entre tales ciudades (ver figura). ¿Cuál será el recorrido mínimo (en millas) que empiece y termine en Chicago y que visite cada ciudad una vez?



A) 1 985 ***B) 2 040*** ***C) 1 074***
D) 1 877 ***E) 1 190***

18 Qué gráficas admiten un recorrido hamiltoniano?



I ***II*** ***III***

A) Sólo I ***B) Sólo II*** ***C) Sólo III***
D) Todos ***E) Ninguno***

19 El transporte subterráneo de cierta ciudad, los pasajeros pueden ir:

– De la estación ***R*** a las estaciones ***S, T*** y ***W***.

– De la estación ***S*** a la estación ***U***.

– De la estación ***X*** a las estaciones ***S*** y ***T***.

– De la estación ***W*** a las estaciones ***T, V*** y ***Z***.

– De la estación ***Z*** a la estación ***X***.

– De la estación ***Y*** a las estaciones ***X*** y ***Z***.

Todas las vías mencionadas son de doble sentido. Si un pasajero se encuentra en la estación ***R***, ¿cuál es el máximo número de estaciones que puede visitar, sin pasar dos veces por una misma estación, sin considerar a ***R***?

A) 4 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 7*** ***E) 8***

20 En Canadá existe una red ferroviaria que une las ciudades de Vancouver y Sidney. Se sabe qué sólo se puede viajar en ferrocarril y según las siguientes rutas comerciales:

– De Vancouver a Whitehorse ***(2 días)***.

– De Vancouver a Regina ***(3 días)***.

– De Whitehorse a Regina ***(3 días)***.

– De Whitehorse a Sudbury ***(6 días)***.

– De Regina a Churchill ***(5 días)***.

– De Regina a Sudbury ***(2 días)***.

– De Churchill a Sudbury ***(1 día)***.

– De Churchill a Montreal ***(3 días)***.

– De Sudbury a Montreal ***(2 días)***.

– De Churchill a Sidney ***(4 días)***.

– De Montreal a Sidney ***(1 día)***.

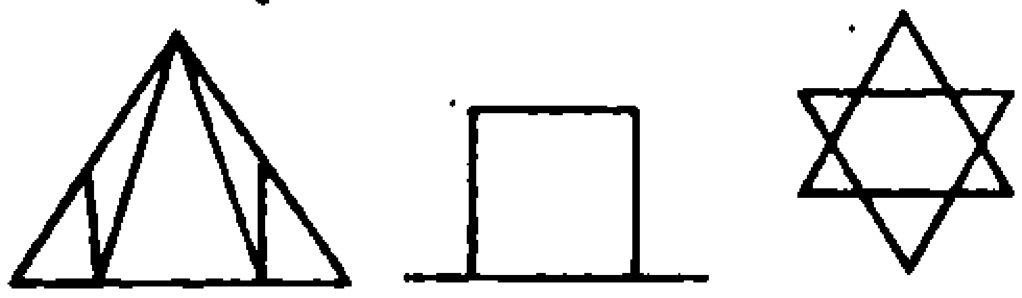
¿Cuál es el máximo número de días que tomará ir de Vancouver a Sidney, sin pasar dos veces por una misma ciudad?

A)14 B) 15 C)16D) 17 E) Más de 17

TAREA DOMICILIARIA

01 Cuál(es) de las siguientes figuras se puede(n) realizar de un

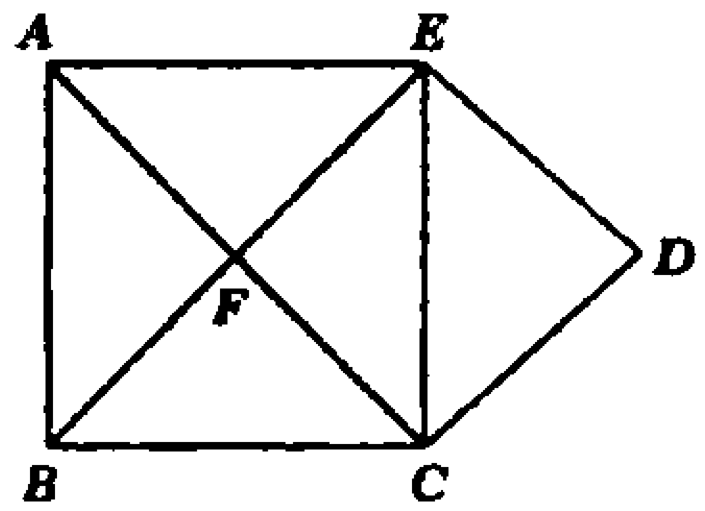
solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel sin pasar más de una vez por una misma línea?



(I) (II) (III)

A) Sólo I *B) Sólo II* *D) I y III*
C) I y II *E) Todas*

02 Respecto al trazado de la figura de un solo trazo sin levantar el lapicero.



indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

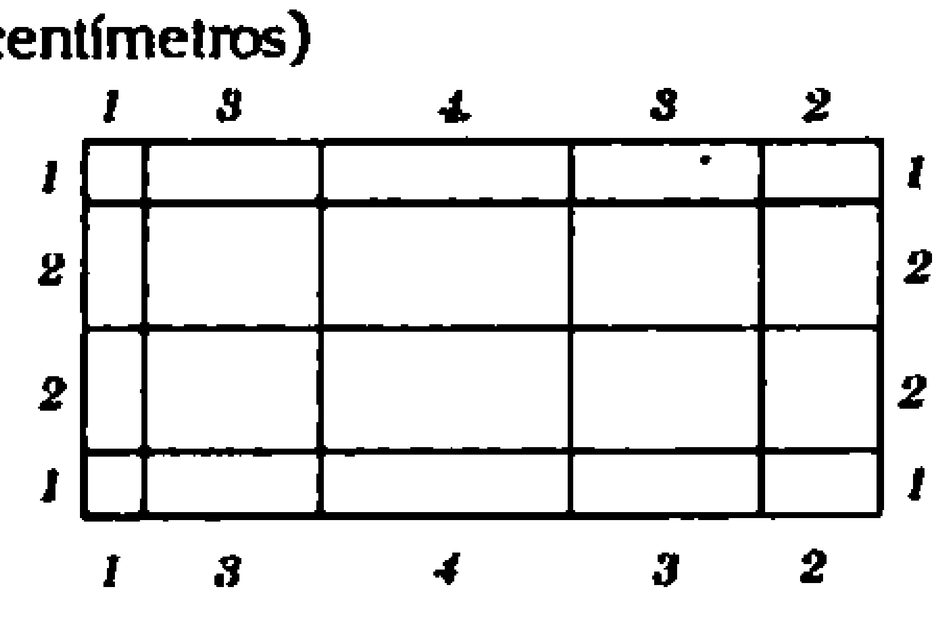
( ) Partiendo de *E*, no se puede trazar.
( ) Partiendo de *D*, si se puede trazar.
( ) Partiendo de *B*, si se puede trazar.

A) VFV *B) VFF* *C) FVV*
D) FFV *E) FFF*

03 Con un alambre de *240 cm* se construye un cubo. Un insecto tarda como mínimo *10* minutos en recorrer todas las aristas del cubo, caminando con rapidez uniforme. Calcular dicha rapidez.

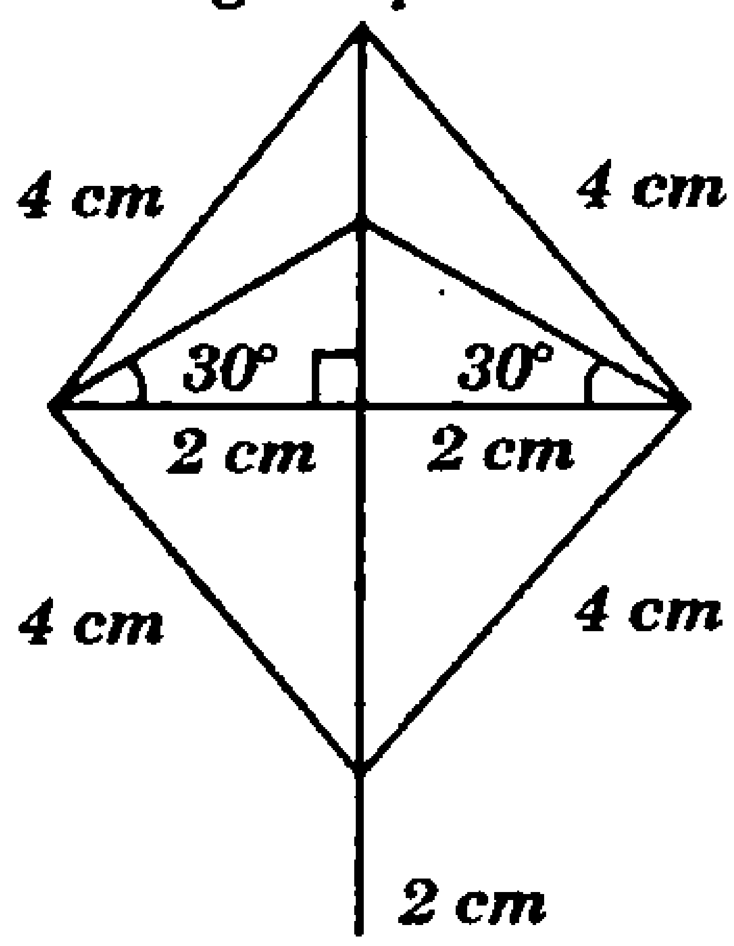
A) 40 cm/min *B) 30 cm/min*
C) 20 cm/min *D) 10 cm/min*
E) 5 cm/min

04 Calcular la longitud mínima que debe recorrer la punta de un lápiz, sin levantarla del papel, para realizar la siguiente figura (longitudes en centímetros)



A) 96 cm *B) 108 cm* *C) 98 cm*
D) 112 cm *E) 116 cm*

05 Calcular la longitud mínima que debe recorrer la punta de un lápiz, sin levantarla del papel, para realizar la figura que se muestra.



A) $\frac{1}{3}(33 + 5\sqrt{3})$ *cm*

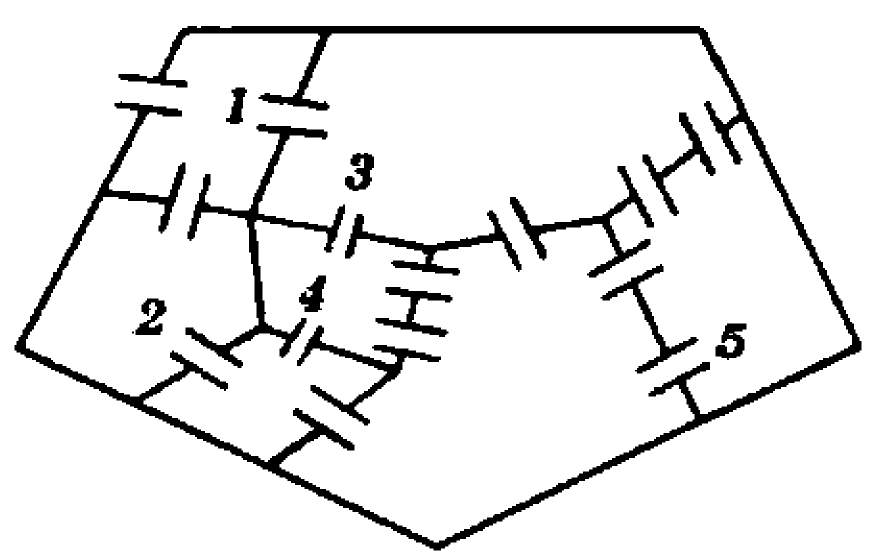
B) $10\sqrt{3}$ *cm*

C) $\frac{3}{2}(25 + \sqrt{3})$ *cm*

D) $\frac{2}{3}(33 + 10\sqrt{3})$ *cm*

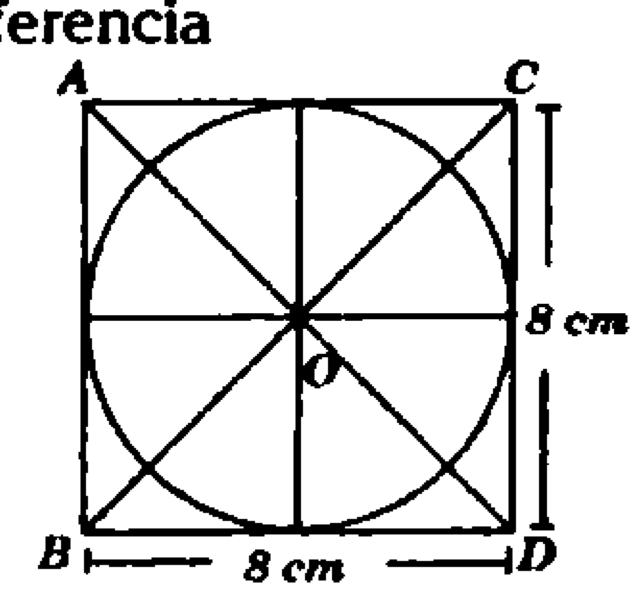
E) $\frac{2}{3}(23 + 10\frac{2}{3})$ *cm*

06 Un juego consiste en entrar por la puerta *A* al laberinto mostrado en el gráfico, encender *13* focos y salir por la puerta *A* en el menor tiempo posible. Si para encender un foco, ubicado en cada puerta, se debe pasar completamente por ella, pero no volver por ésta porque el foco se apagaría, ¿por cuál de las puertas no se debe pasar para ganar el juego?



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

07 Calcular la menor longitud que debe recorrer la punta de un lápiz para dibujar la siguiente figura donde *ABCD* es un cuadrado y *O* es centro de la circunferencia



A) $(60 + 8\sqrt{2})$ *cm*

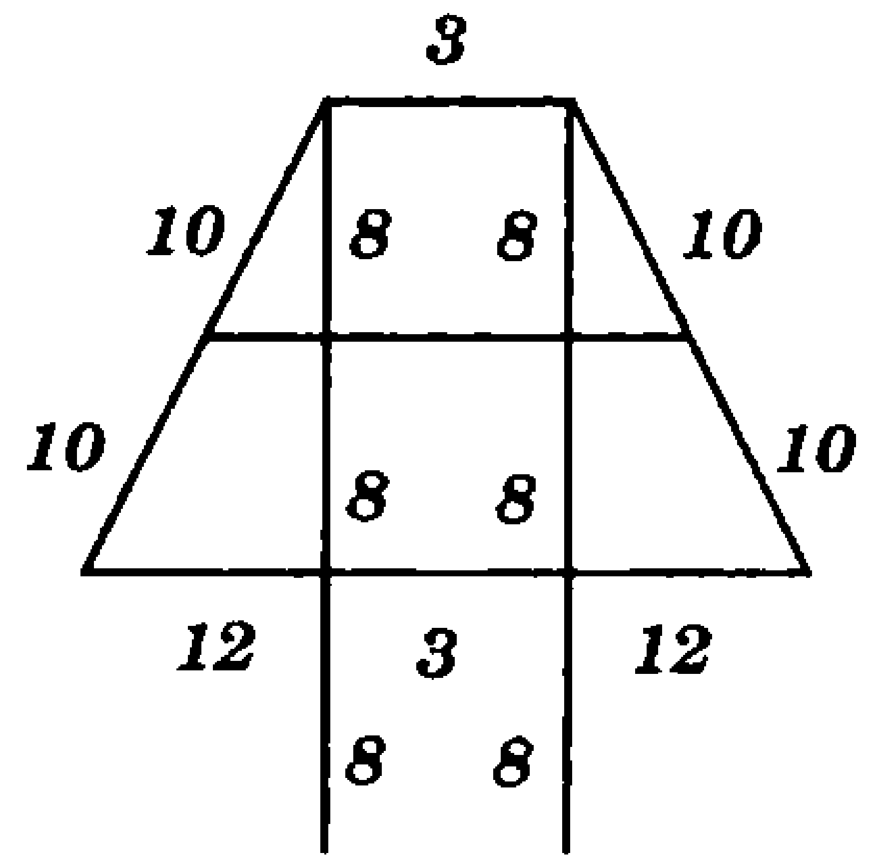
B) $(45 + 2\pi)$ *cm*

C) $(48 + 3\sqrt{2})$ *cm*

D) $(60 + 16\sqrt{2} + 8\pi)$ *cm*

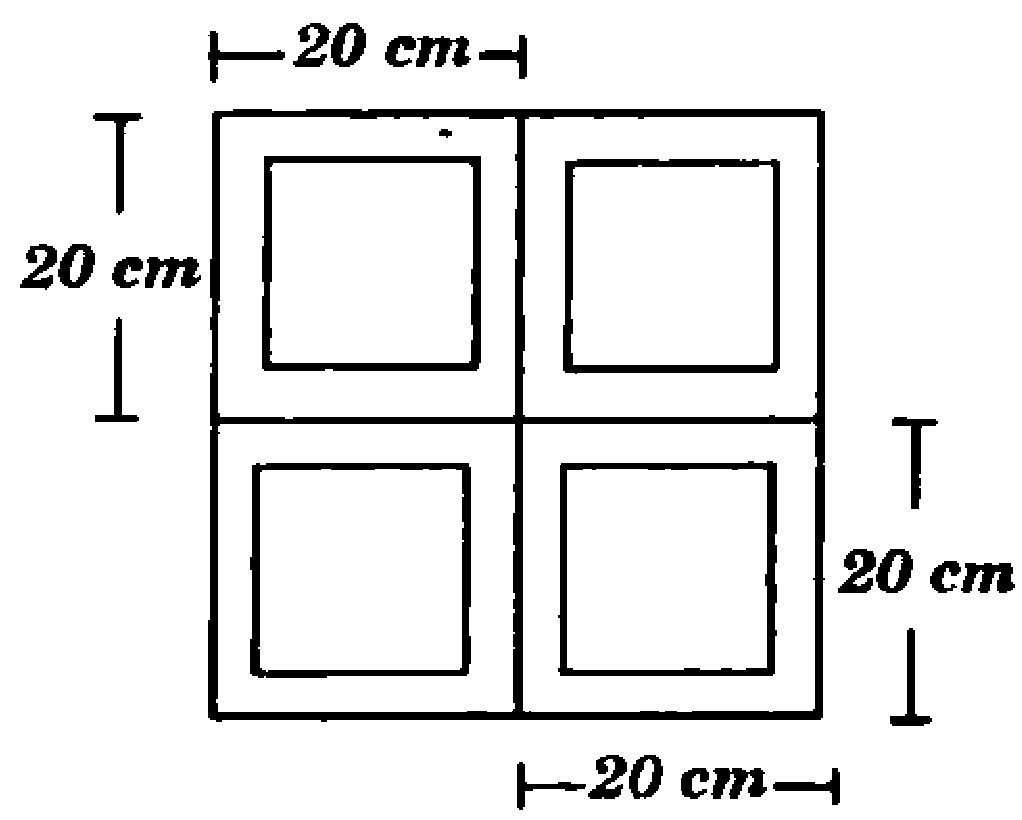
E) $(60 + 8\sqrt{2} + 8\pi)$

08 ¿Cuál es la menor longitud que debe recorrer la punta del lápiz, sin separarla del papel, para dibujar la siguiente figura? (longitudes en *cm*)



A) 123 cm *B) 149 cm* *C) 151 cm*
D) 139 cm *E) 153 cm*

09 ¿Cuál es el tiempo mínimo que emplearía una persona para recorrer los pasillos de una casona cuya configuración se muestra, caminando con una rapidez de *2 m/s*?



A) 130 s *B) 200 s* *C) 260 s*
D) 140 s *E) 180 s*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)D	3)B	4)B	5)A	6)D	7)B	8)D	9)A	10)E
11)A	12)E	13)B	14)C	15)B	16)B	17)D	18)D	19)D	20)D
1)D	2)A	3)B	4)E	5)D	6)C	7)D	8)C	9)D	

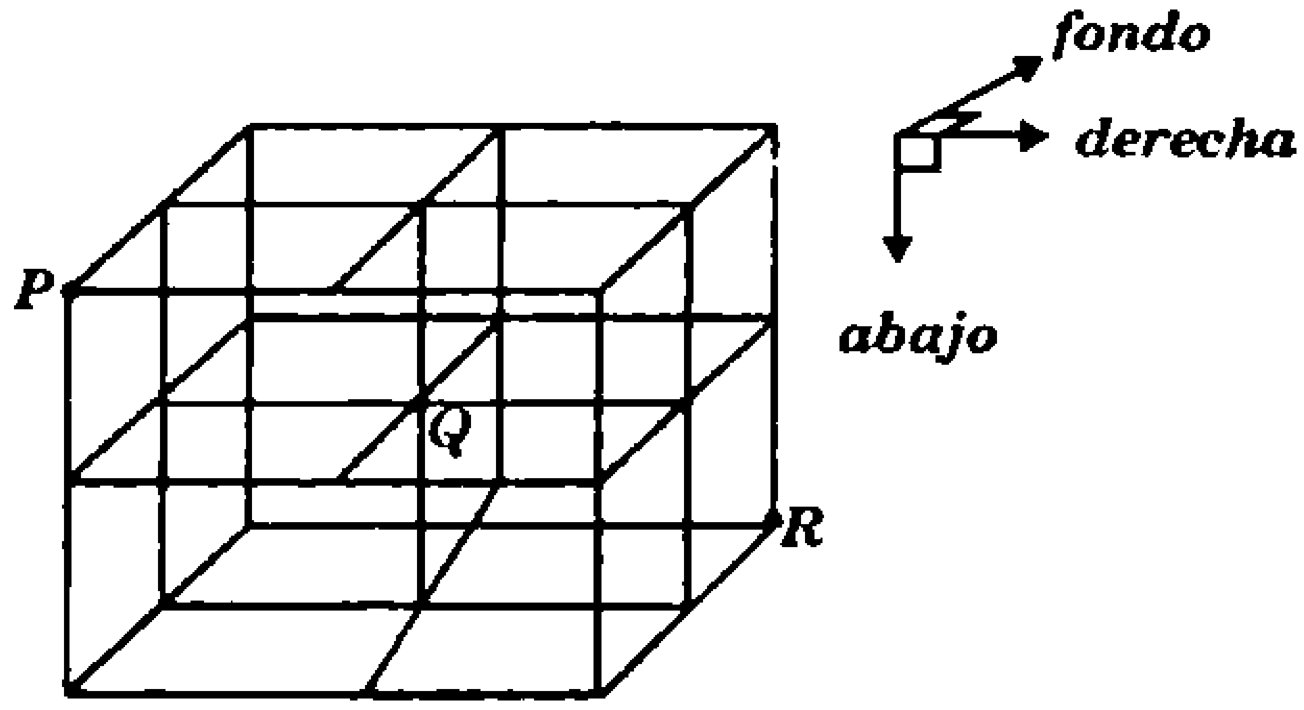
CONTEO DE RUTAS

CAPITULO 041

EJEMPLO :

La figura mostrada es una estructura construida de alambre. Recorriendo solamente por los alambres, hacia la derecha, hacia abajo o hacia el fondo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto ***P*** al punto ***R***. pasando siempre por el punto ***Q***?

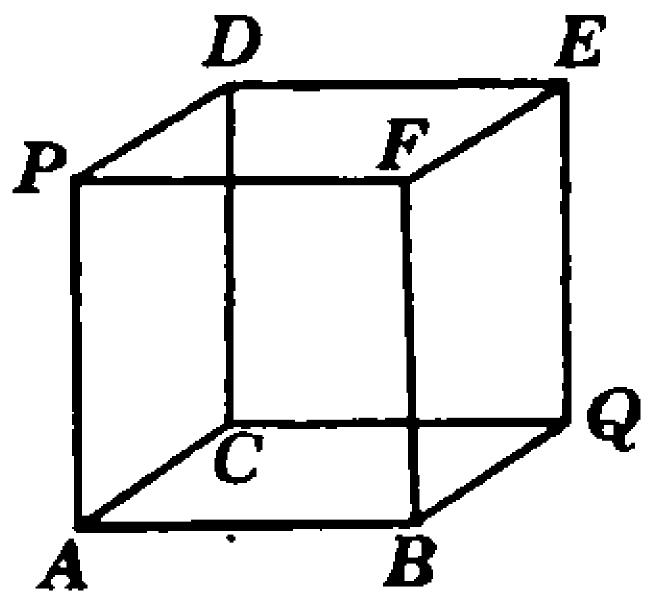
A) 30
B) 36
C) 25
D) 20
E) 32



RESOLUCIÓN :

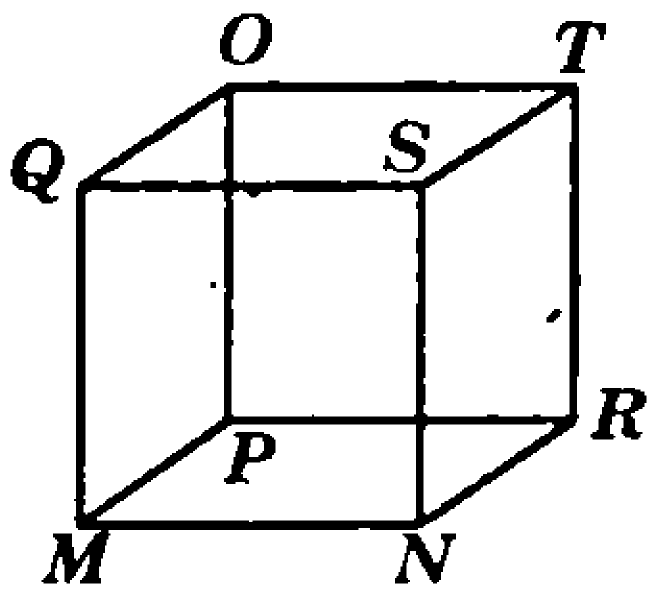
Se tiene :

I) De $P \to Q$ — *# maneras*



PABQ, PACQ, PFEQ, PDCQ, PDEQ } *5 maneras*

II) De $Q \to R$ — *# maneras*



QMNR, QMPR, QSNR, QSTR, QOTR, QOPR } *6 maneras*

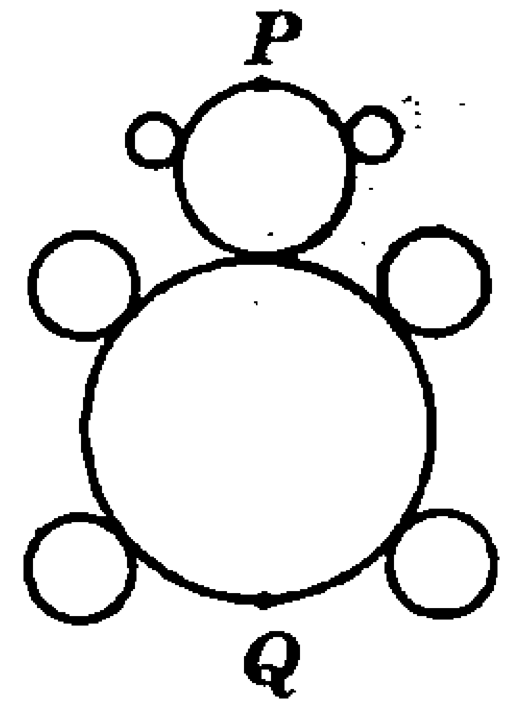
Total de maneras $(P \to R) = 5 \times 6 = 30$

RPTA : "A"

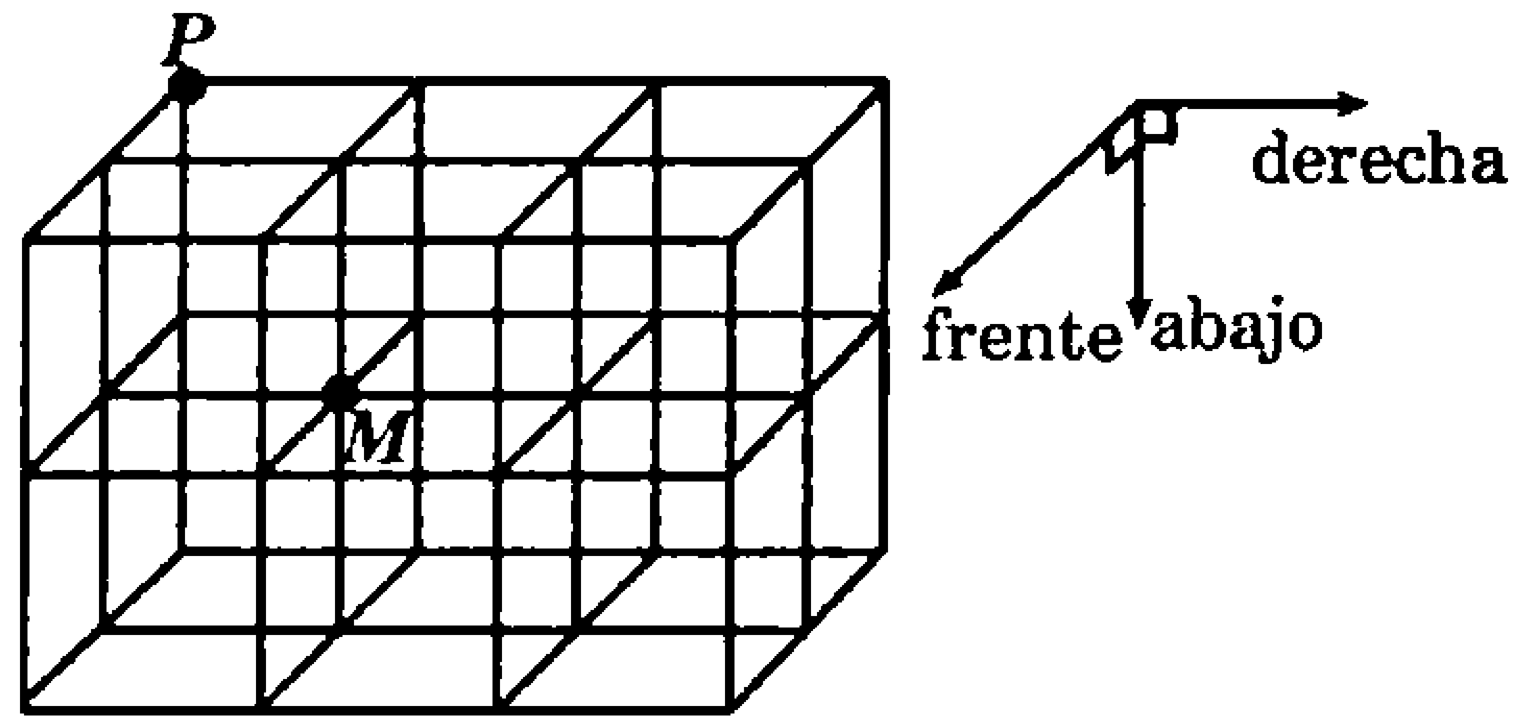
PRACTICA DIRIGIDA

01 La figura muestra circunferencias tangentes. Recorriendo por las líneas de la figura, sin pasar dos veces por el mismo tramo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto ***P*** al punto ***Q***.

A) 54
B) 108
C) 81
D) 90
E) 96



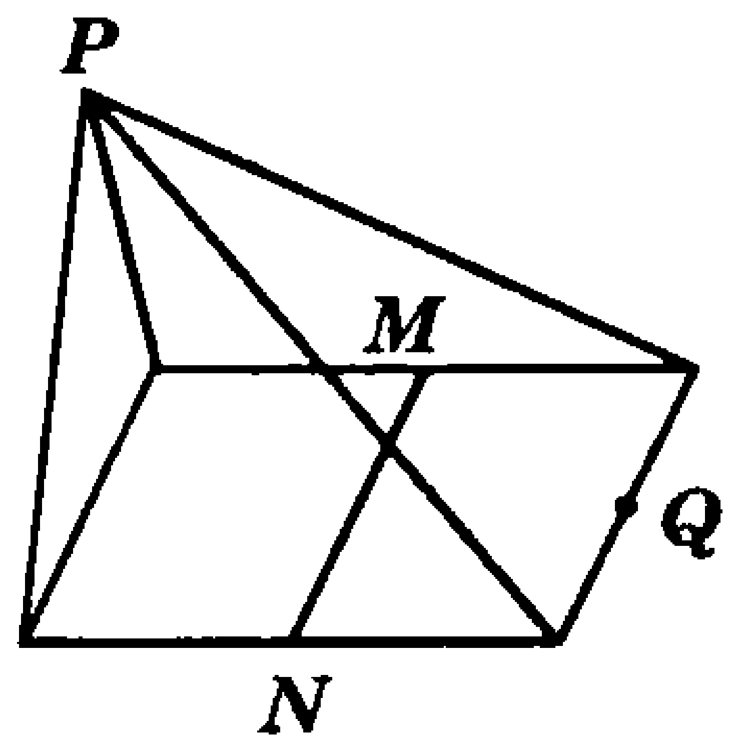
02 La figura, muestra a un paralelepípedo, construido de alambre. Recorriendo solamente por los segmentos alámbricos, hacia la derecha, hacia abajo ó hacia el frente, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto ***P*** al punto ***Q***, pasando siempre por el punto ***M***?



A) 36 *B) 72* *C) 56* *D) 96* *E) 60*

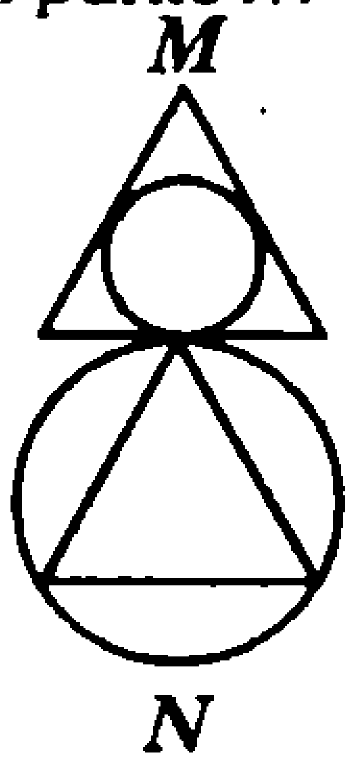
03 La figura muestra una pirámide con base cuadrilátera y en esta base se ha trazado $\overline{MN}$. Recorriendo solamente por las aristas de la pirámide o por $\overline{MN}$, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto ***P*** al punto ***Q***, pasando siempre por $\overline{MN}$?

A) 4
B) 10
C) 6
D) 8
E) 12



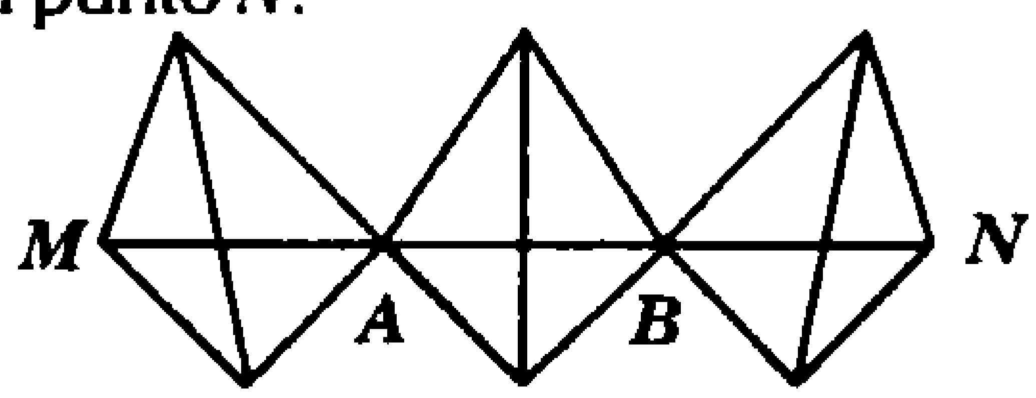
04 La figura muestra dos circunferencias

tangentes y los triángulos, uno inscrito y el otro circunscrito a las circunferencias. Recorriendo por las líneas de la figura, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *M* al punto *N*?



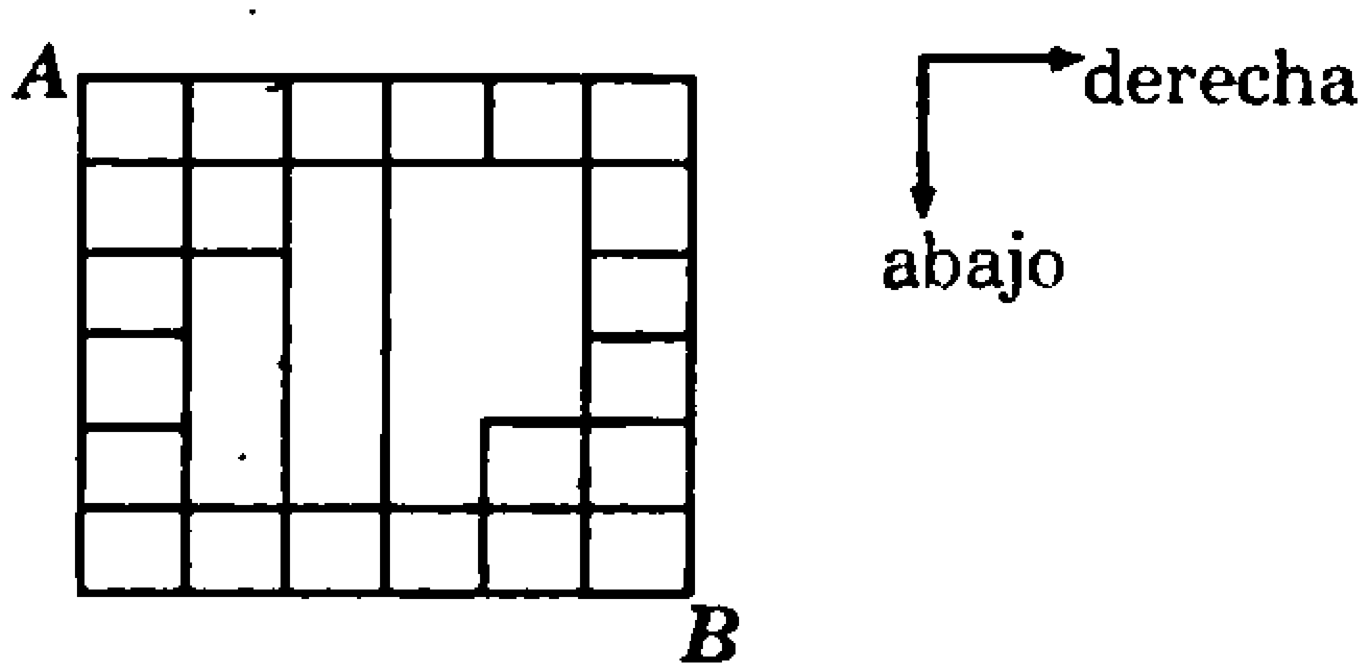
A) 72
B) 64
C) 81
D) 49
E) 54

05 La figura mostrada está formada por tres tetraedros unidos por los vértices *A* y *B*. Recorriendo solamente por las aristas de los tetraedros, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *M* al punto *N*?



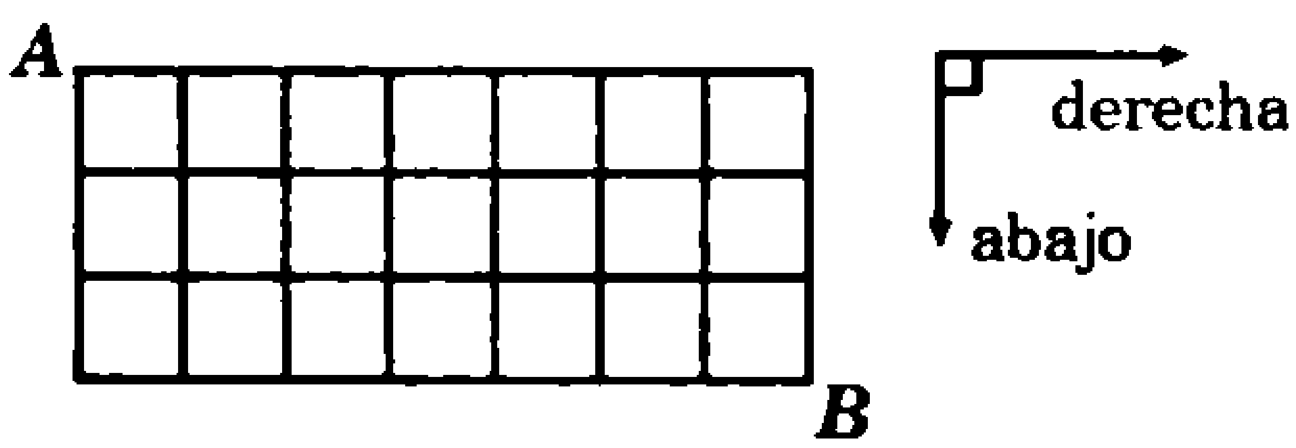
A) 100 B) 27 C) 216 D) 64 E) 125

06 En la figura, recorriendo solamente por los segmentos, hacia la derecha o hacia abajo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *A* al punto *B*?



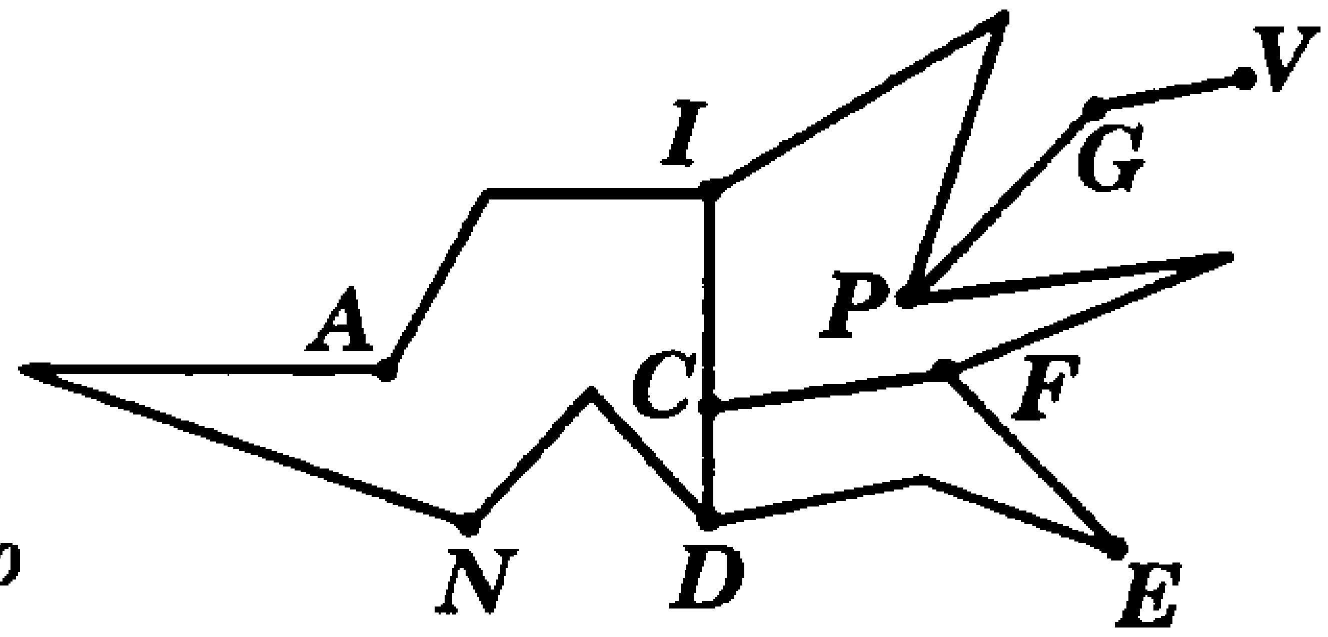
A) 118
B) 130
C) 120
D) 140
E) 160

07 En la figura, recorriendo solamente por los segmentos, hacia la derecha o hacia abajo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *A* al punto *B*?



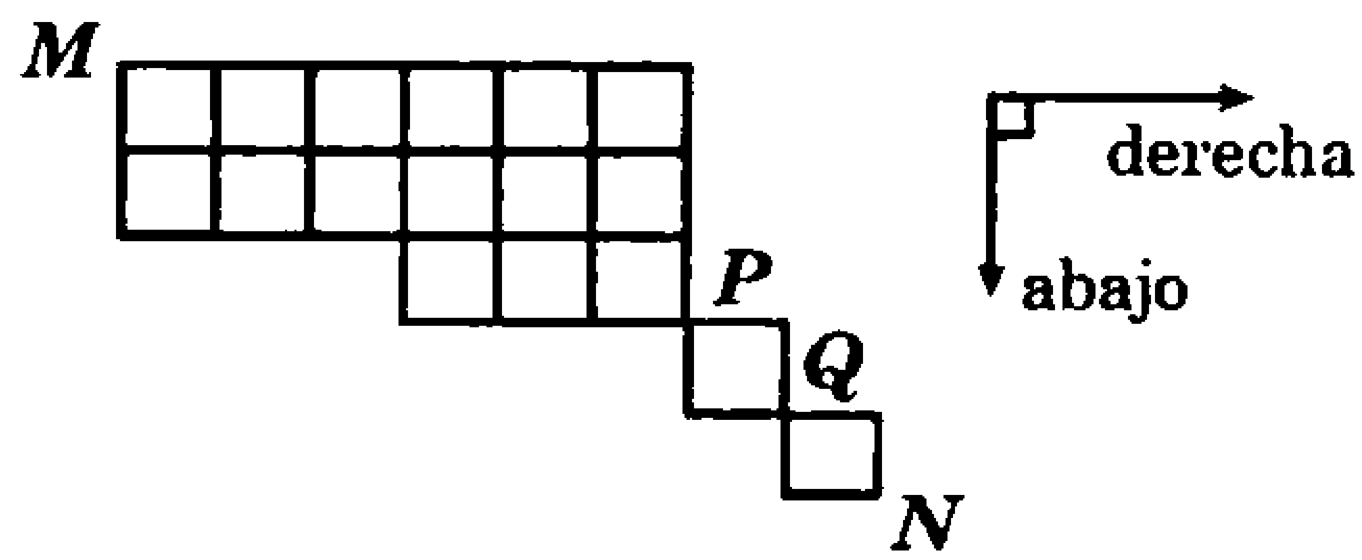
A) 80 B) 100 C) 110 D) 120 E) 160

08 En la siguiente figura están representados los caminos y las ciudades. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de la ciudad *A* a *V* sin pasar dos veces por un mismo punto?



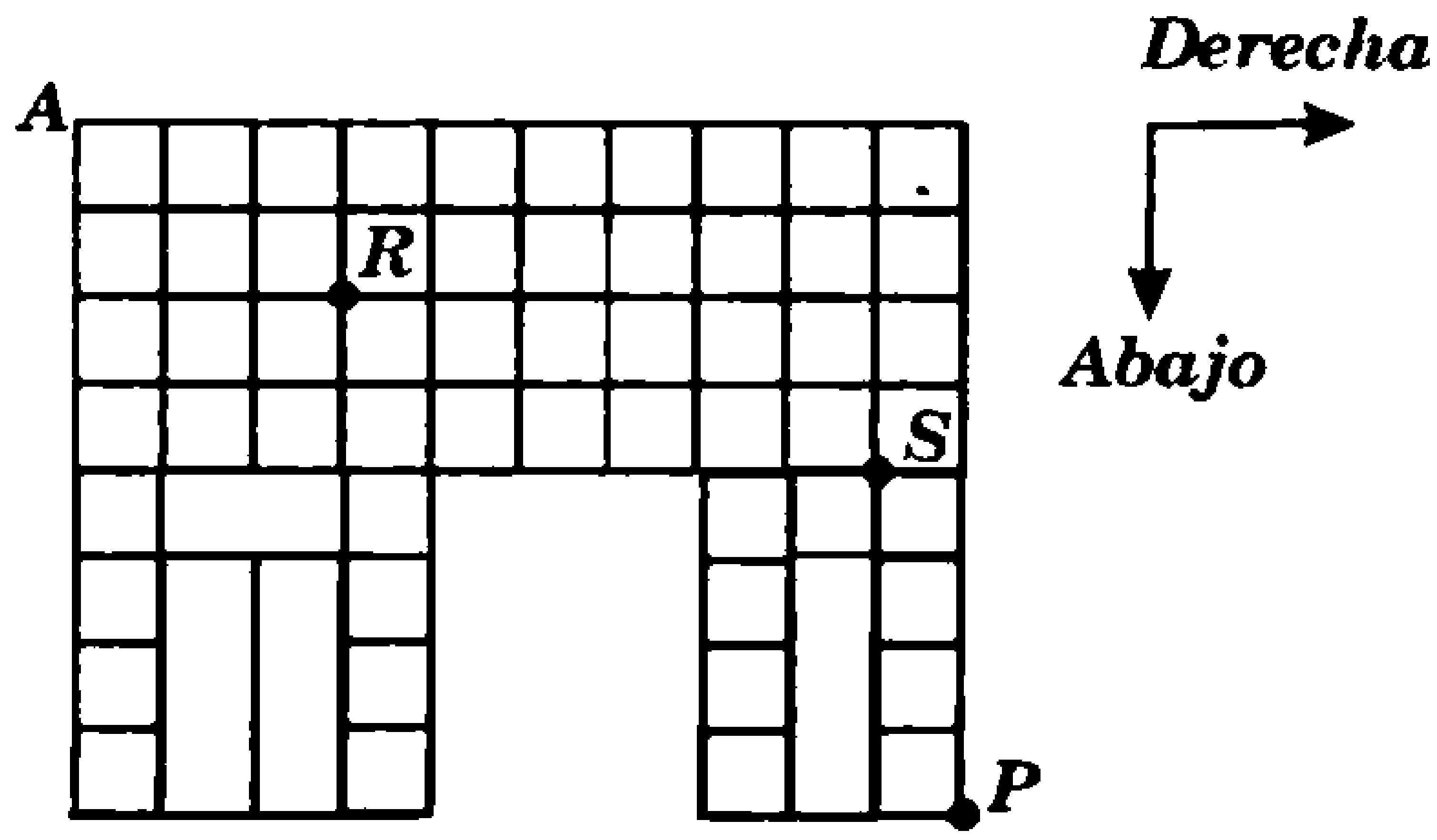
A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

09 Recorriendo solamente por los segmentos hacia la derecha o hacia abajo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *M* al punto *N*?



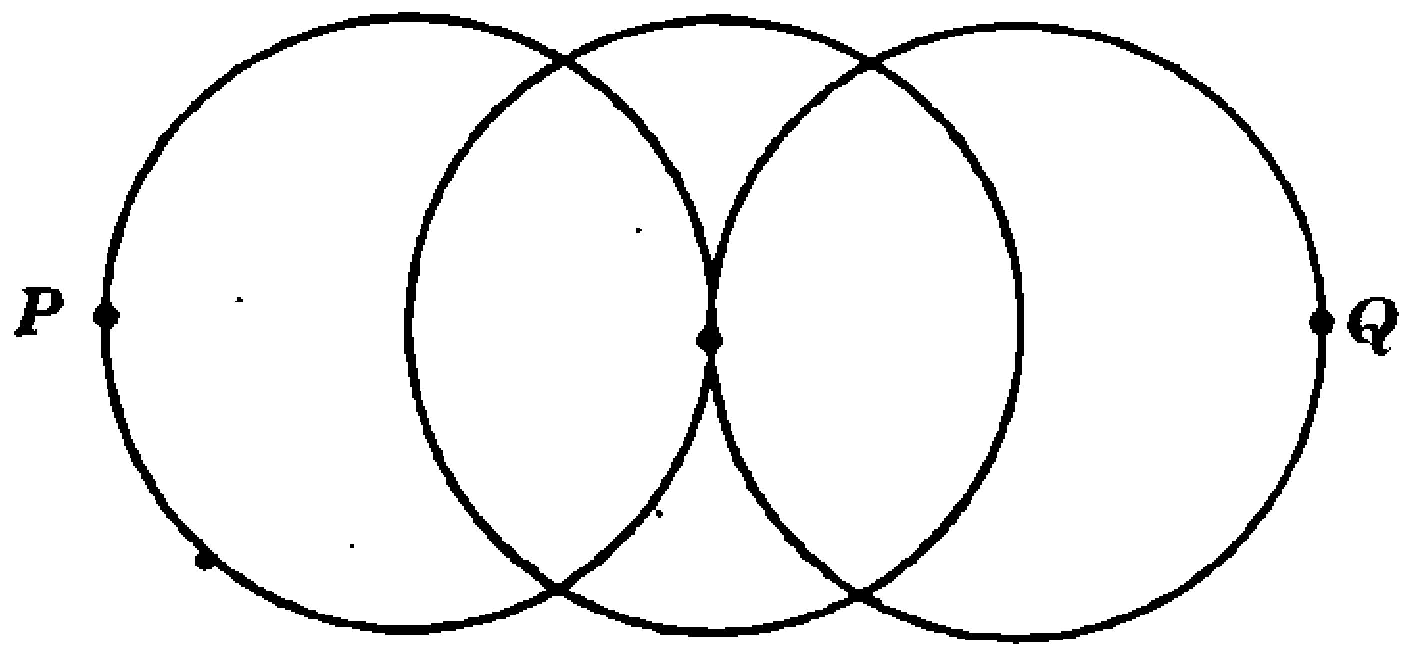
A) 296
B) 336
C) 264
D) 256
E) 304

10 En la figura, recorriendo solamente por los segmentos, hacia la derecha o hacia abajo, ¿cuántas rutas distintas existen para ir desde el punto *A* al punto *P*, pasando por los puntos *R* y *S*?



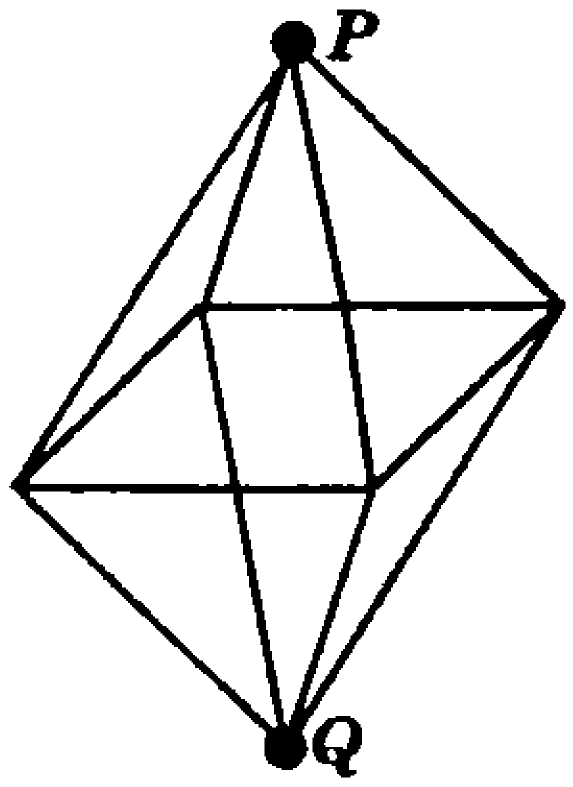
A) 1020 B) 1320 C) 1400
D) 1520 E) 2100

11 La figura muestra una circunferencia secante a las dos circunferencias tangentes. Recorriendo por los arcos de las circunferencias, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *P* al punto *Q* ?



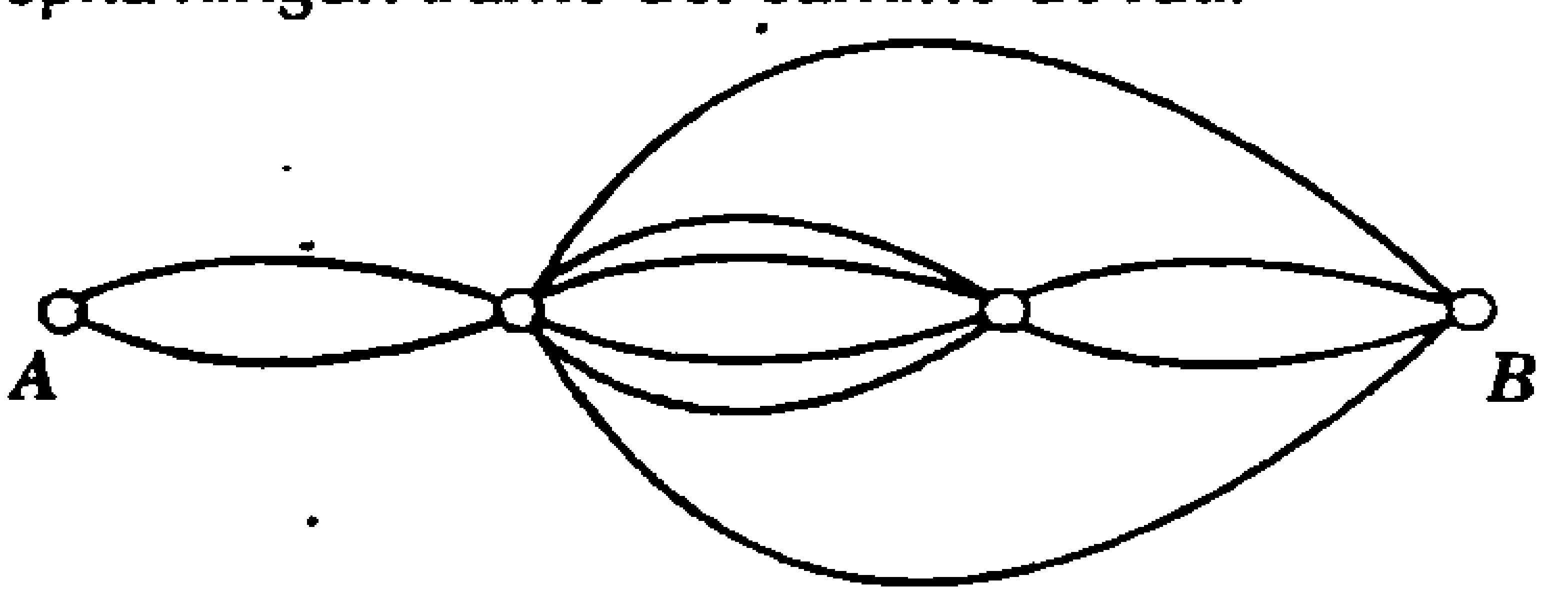
A) 36 B) 32 C) 34 D) 40 E) 38

12 La figura muestra un octaedro construido con *12* segmentos de igual longitud. Recorriendo solamente por los segmentos de las aristas del octaedro y sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *P* al punto *Q*?



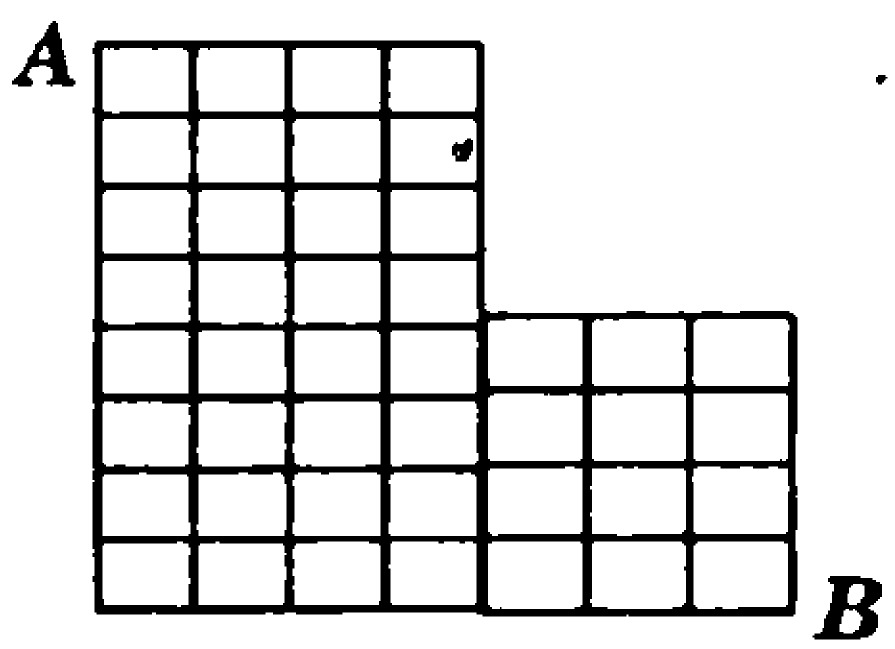
A) 24
B) 20
C) 28
E) 36
D) 32

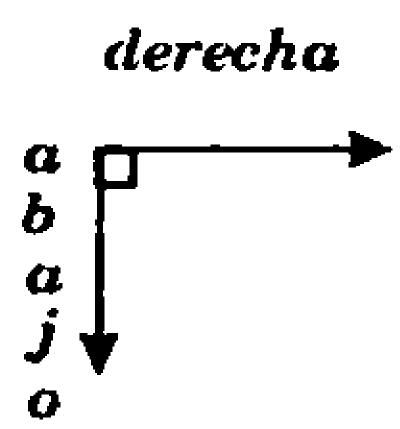
13 En la figura las líneas representan caminos. Calcular de cuantas maneras diferentes se puede ir de *A* hasta *B* sin retroceder en ningún momento y luego volver hasta *A* por un camino que no repita ningún tramo del camino de ida.



A)114 B)118 C)115 D)116 E)117

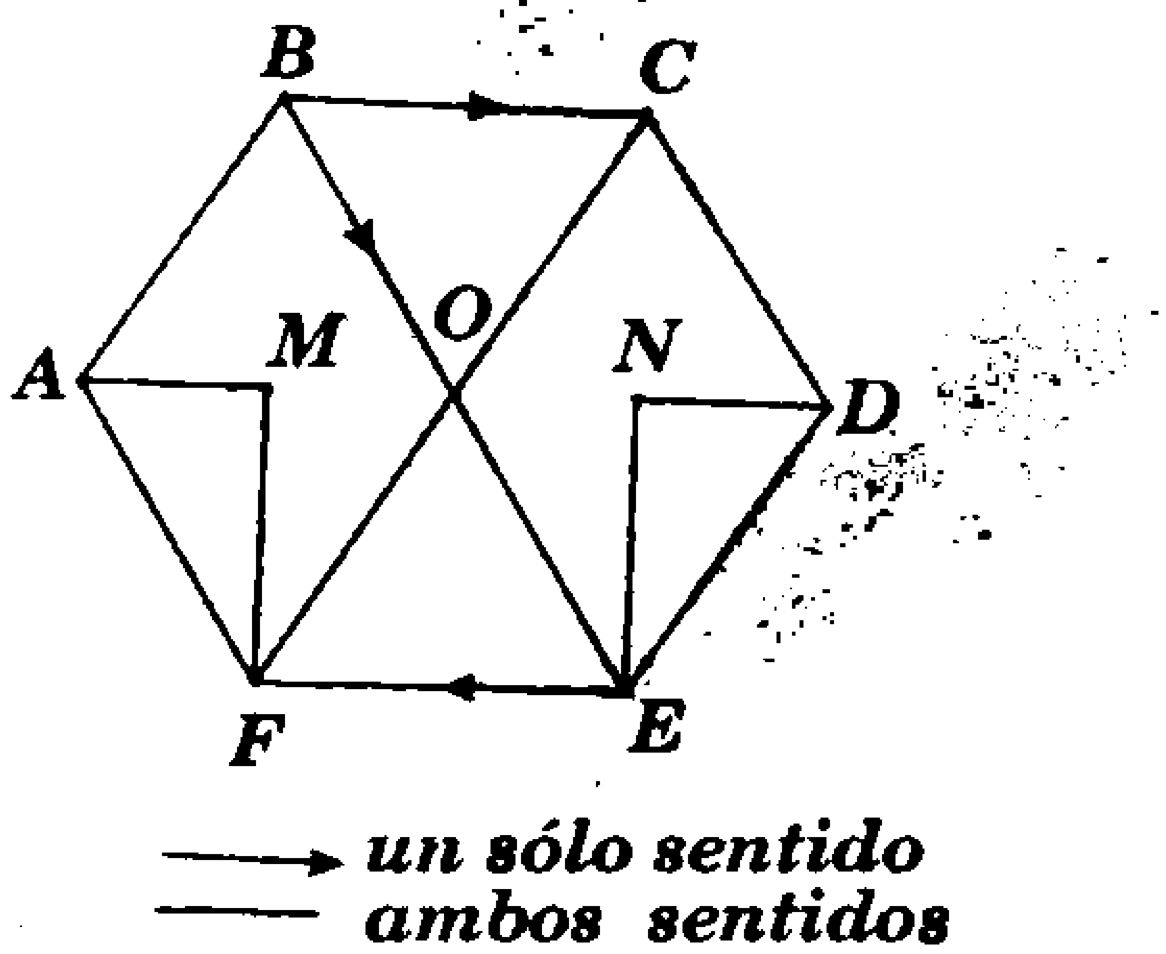
14 En la figura las líneas representa caminos . Si solo se puede ir hacia la derecha o hacia abajo, ¿de cuántas maneras diferentes se puede ir de *A* hasta *B*?





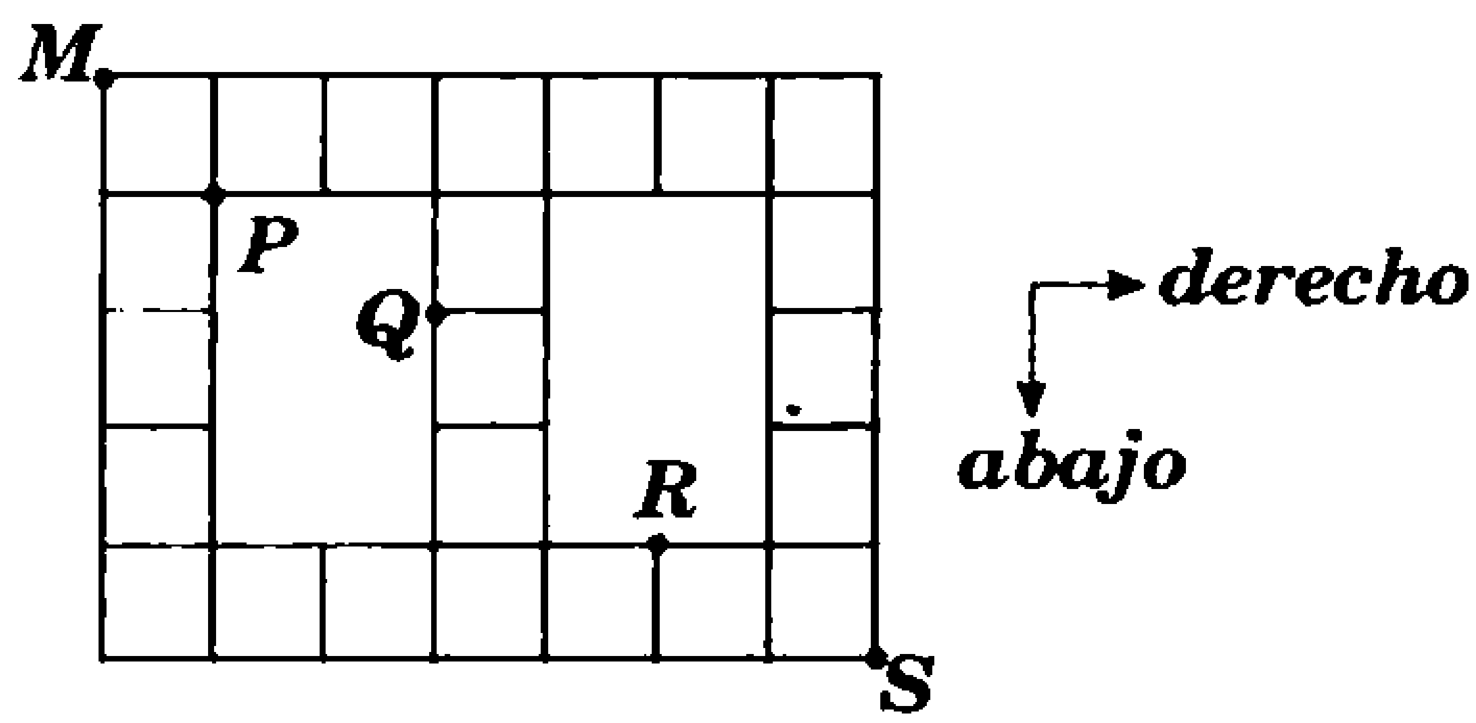
A) 6400 B) 6641 C) 6541
D)6401 E) 5055

15 El plano indica la distribución de los museos *ABCDEF* de una ciudad. Un turista desea ir de *A* hacia *D*, en carro sin pasar más de una vez por el mismo museo y pasando siempre por *O*. ¿Cuántas rutas posibles existen?



A)11 B)9 C)10 D)8 E)12

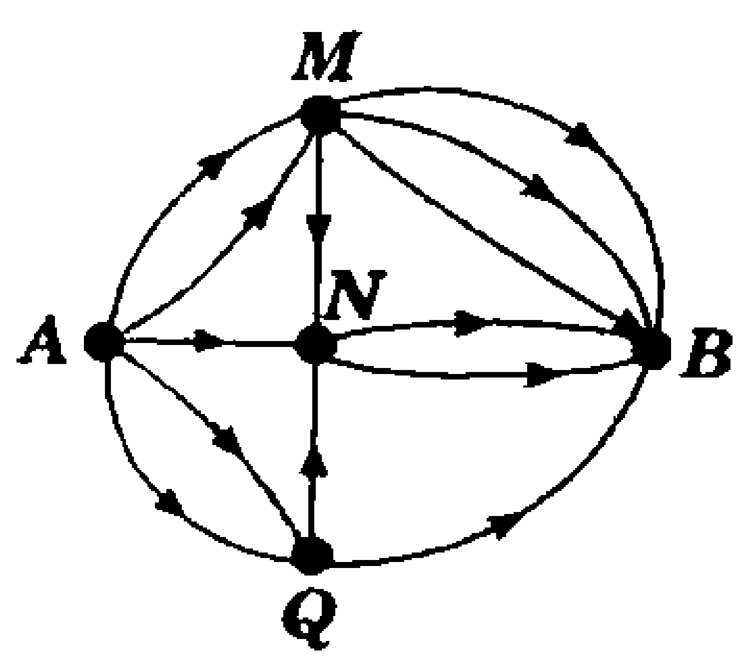
16 En la figura, recorriendo solamente por los segmentos solo hacia la derecha o hacia abajo. ¿Cuántas rutas distintas existen desde el punto *M* al punto *S*. pasando siempre por los puntos *P*, *Q* y *R*?



A)15 B)20 C)18 D)17 E)16

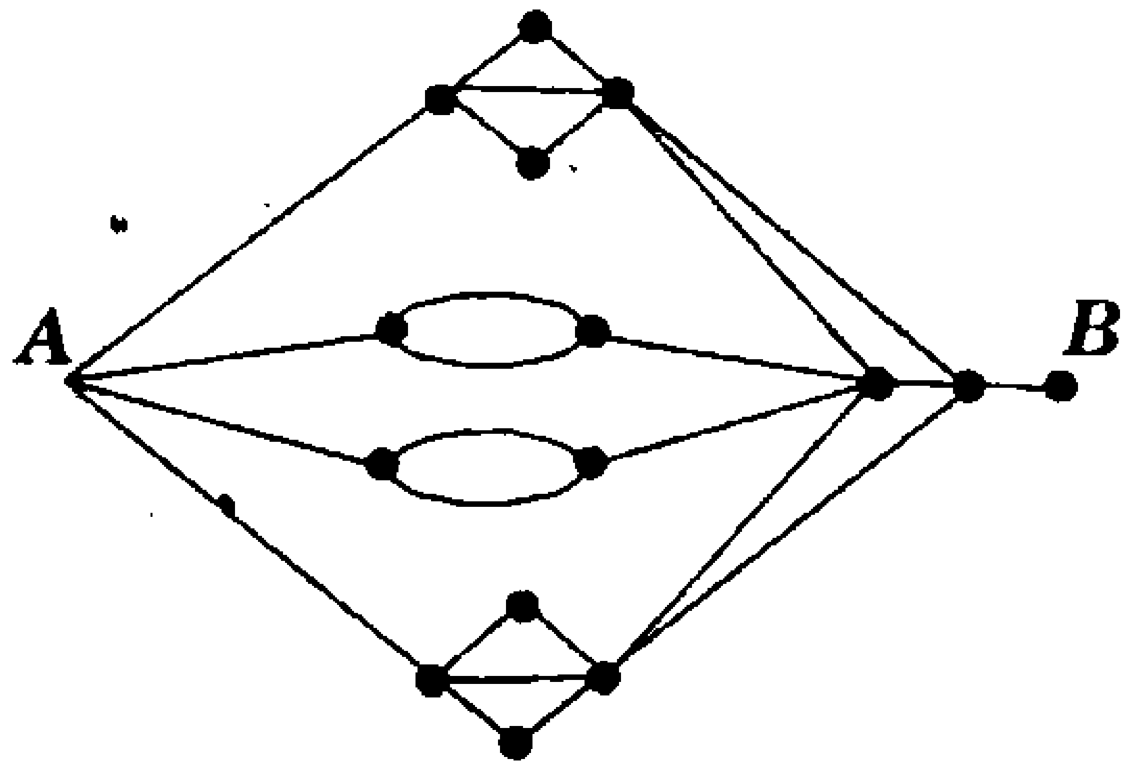
17 En la figura , recorriendo en la dirección que indican las flechas y sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas formas diferentes existen, para ir de *A* hacia *B* sobre las líneas?

A)16
B)17
C)20
D)18
E) 22



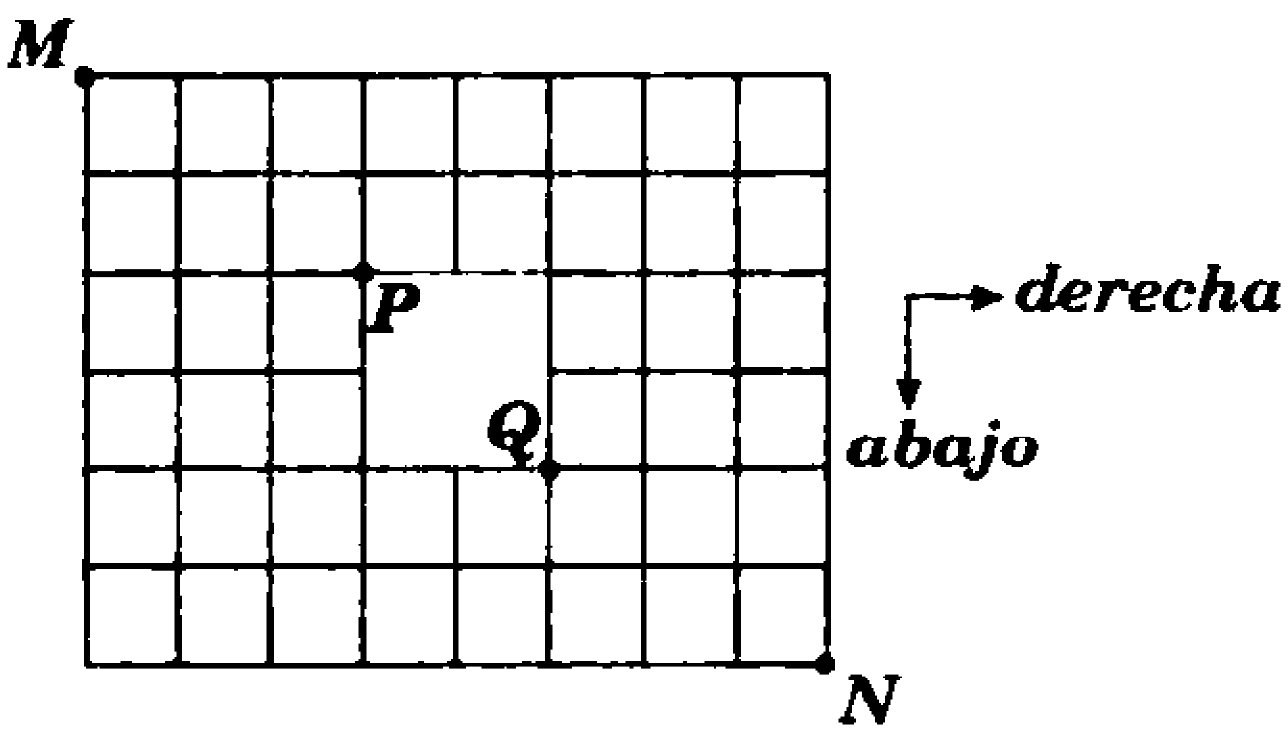
18 La figura muestra una red de caminos. sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas formas diferentes existen, para ir de *A* hacia *B*?

A)30
B)28
C)24
D) 34
E) 36



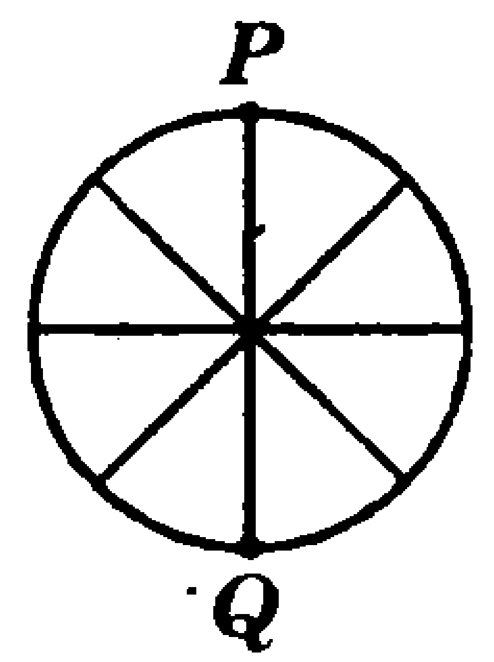
19 En la figura, recorriendo solamente por los segmentos, hacia la derecha o hacia abajo, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *M* al punto *N*, pasando siempre por los puntos *P* y *Q*?

A)150
B)200
C)180
D)210
E)160



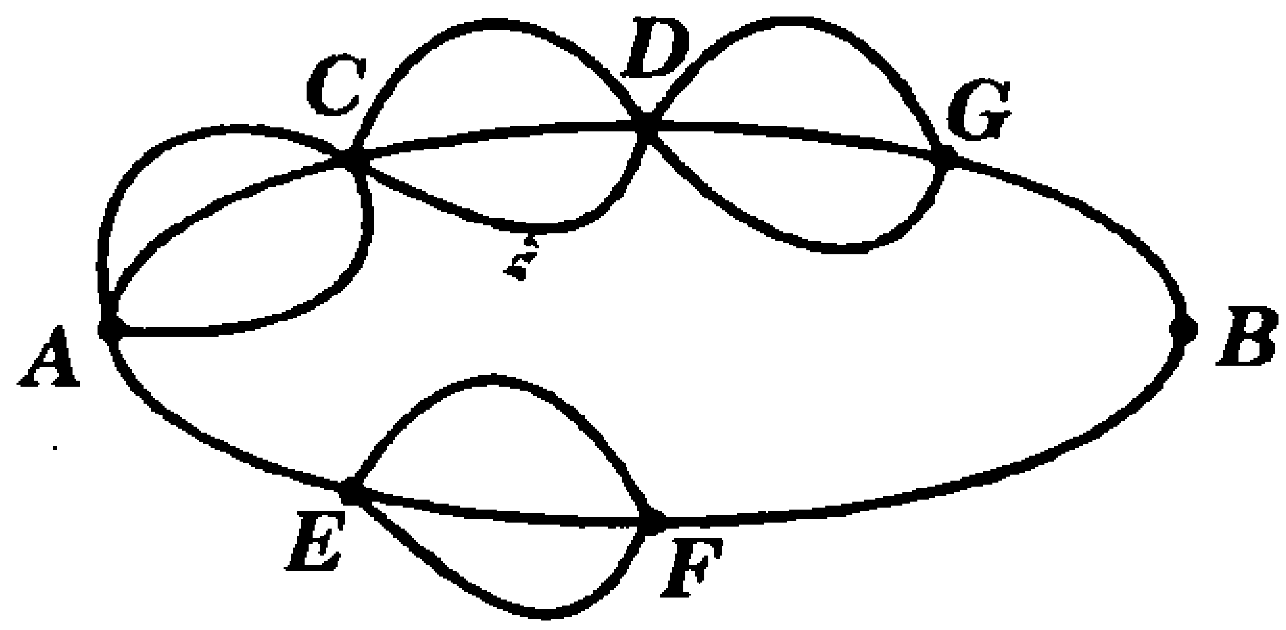
20 La figura mostrada es una circunferencia con sus cuatro diámetros. Recorriendo por los segmentos o arcos de la circunferencia, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *P* al punto *Q*, pasando siempre por el centro de la circunferencia?

A)45
B)37
C)43
D)41
E)39



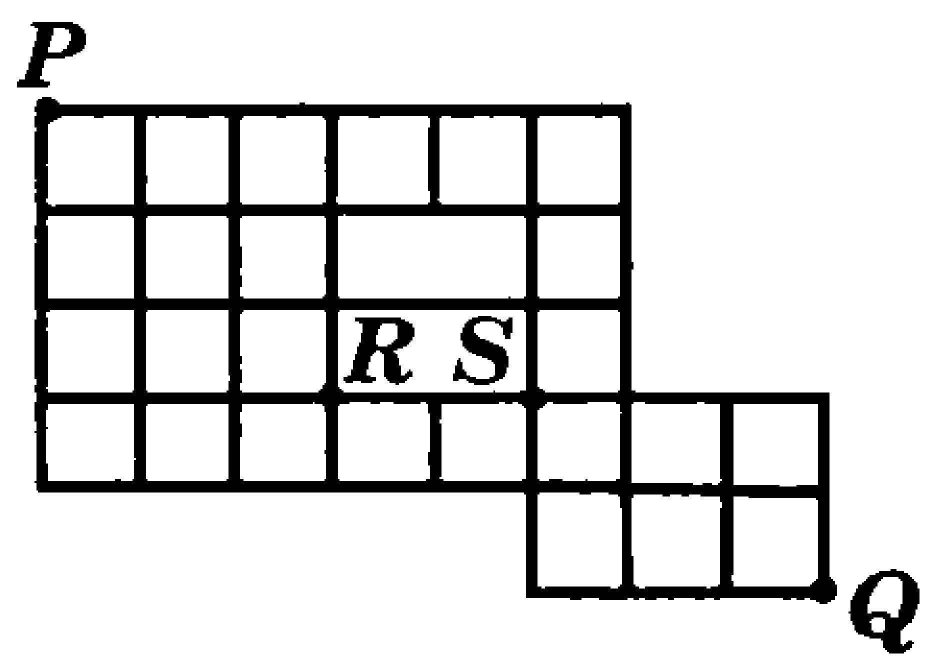
21 El plano indica la distribución de 7 centros de esparcimiento: *A, B, C, D, E, F, G;* y están intercomunicados por un sistema de carreteras, como se muestra en la figura. Sin pasar dos veces por el mismo lugar, ¿de cuántas maneras diferentes un profesor del curso de habilidad lógico matemático puede ir de *A* a *B*?

A)12
B)32
C)30
D)33
E)81



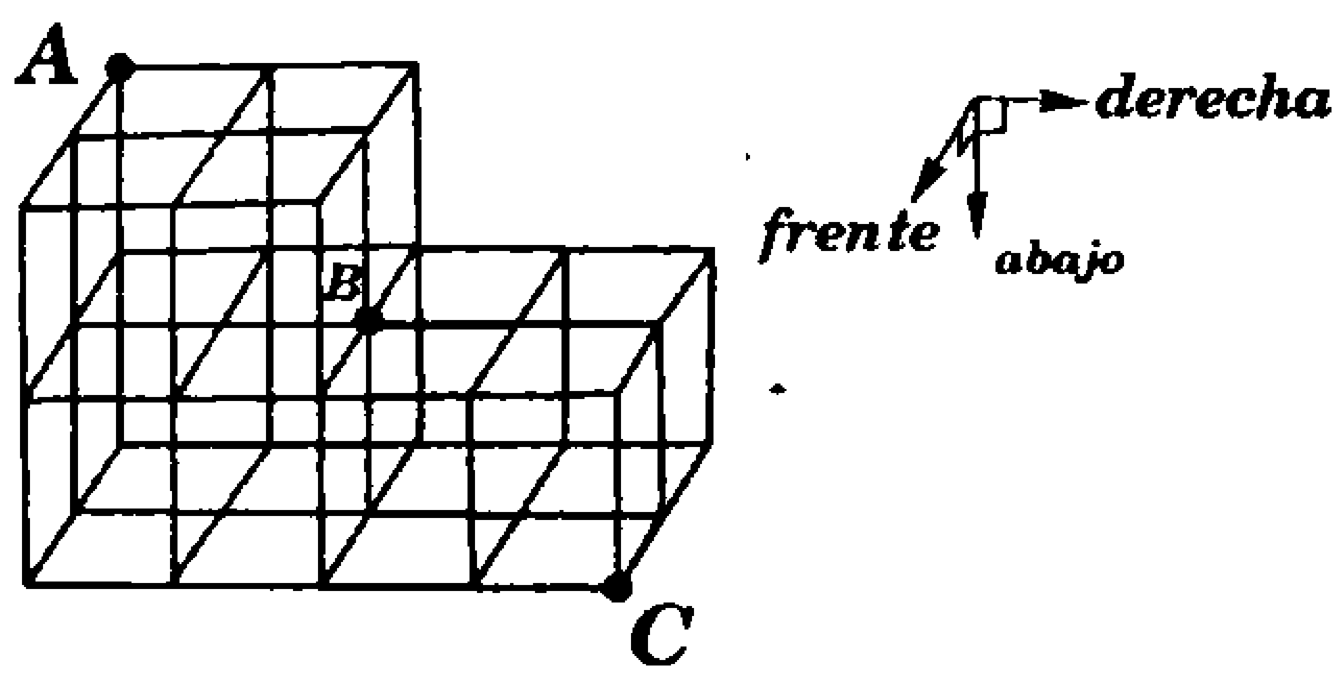
22 Recorriendo solamente por los segmentos, hacia la derecha ó hacia abajo. ¿cuántas rutas distintas existen desde el. punto *P* al punto *Q*, pasando siempre por los puntos *R* y *S* ?

A) 220
B) 280
C)240
D)31
E)200



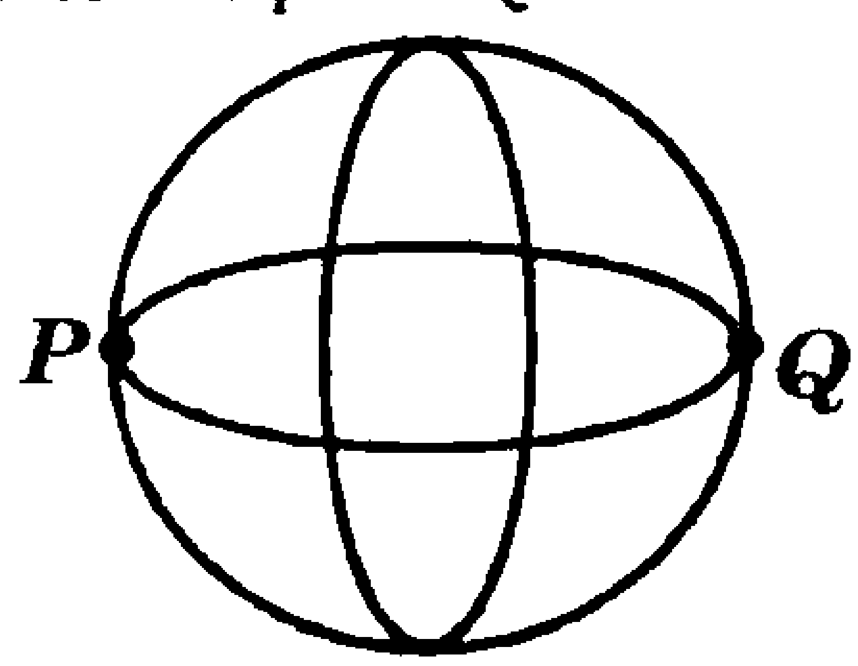
23 La figura mostrada es una estructura construida de alambre. Recorriendo solamente por los alambres, hacia la derecha, hacia abajo ó hacia el frente, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *A* al punto *C*, pasando siempre por el punto *B*?

A)144
B)121
C)100
D)169
E)196



24 La figura muestra una esfera construida por tres circunferencias hechas de alambre de iguales diámetros. Recorriendo solamente por los arcos de las circunferencias, sin pasar dos veces por el mismo punto, ¿cuántas rutas distintas existen desde el punto *P* al punto *Q* ?

A)25
B)20
C)28
D) 27
E) 26



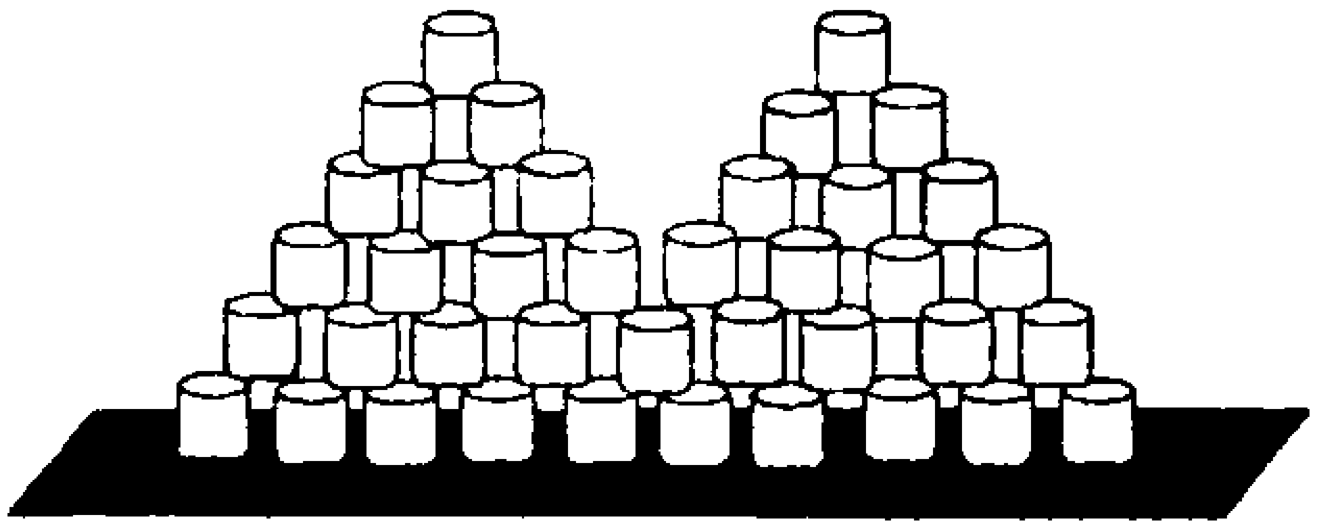
CLAVES

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
B	B	C	B	E	C	D	B	A	C
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
C	C	E	E	A	C	D	A	B	B
21	**22**	**23**	**24**						
C	E	C	C						

MISCELANEA

01 Se ha formado una ruma con latas cilíndricas como se muestra en la figura. Cada bola que se lanza da en una sola lata, tira esa lata y todas las que pierden apoyo. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que se deben lanzar para tirar las latas negras? .

A)3
B)4
C)2
D)5
E)6

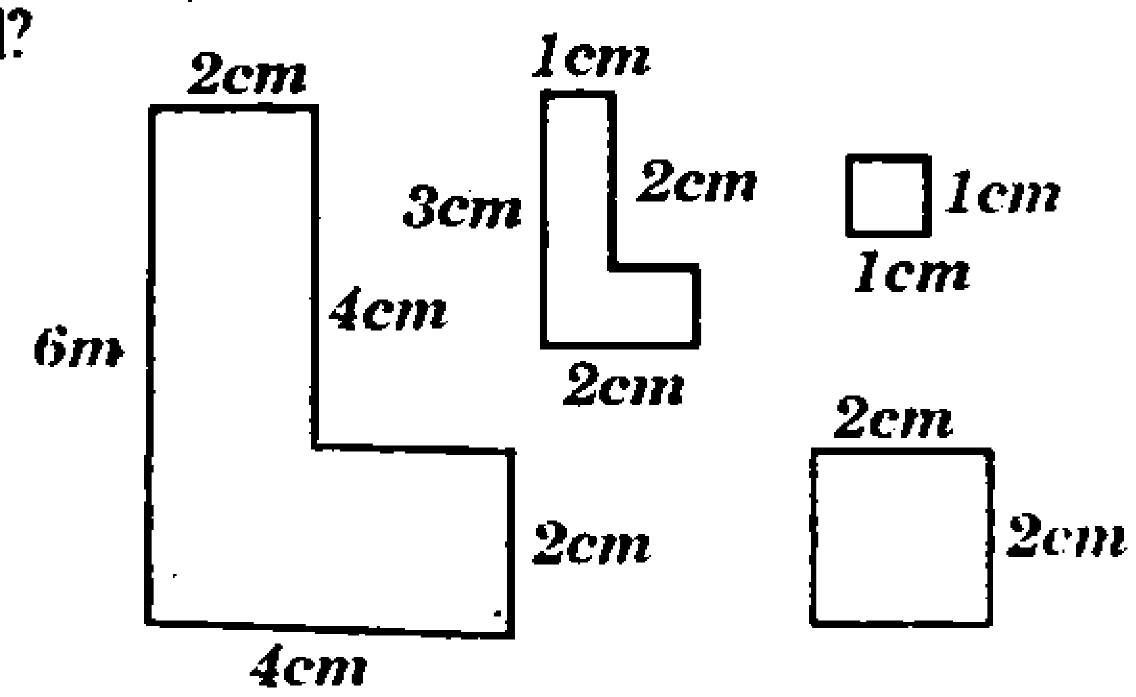


02 Se tiene *8* candados diferentes y *4* llaves diferentes. Si se sabe que cada llave sólo abre un candado, ¿cuál es el mínimo número de intentos que pueden determinar con seguridad que la llave corresponde a que candado?.

A) 21 *B) 23* *C) 6* *D) 20* *E) 22*

03 Abel tiene fichas suficientes hechas de cartón como las que se indican en la figura. Si Abel quiere formar con ellas un cuadrado de area mínima, usando la misma cantidad de las fichas del mismo tipo que tiene, ¿cuál es el área del cuadrado que logra construir Abel?

A)106 cm²
B)64 cm²
C)81 cm²
D)121 cm²
E)144 cm²



04 Sobre un tablero se ubican *16* fichas numeradas del *1* al *16*, como se muestra en el gráfico. ¿Cuántas fichas se deben cambiar de lugar. como mínimo, para que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal del tablero sea la misma?

A)6
B)8
C)10
D)12
E)14

4	8	12	16
2	7	11	14
3	6	10	15
1	5	9	13

05 Las figuras que se muestran representan tres láminas transparentes que tienen la forma de octógonos regulares y además están divididas en sectores triangulares congruentes cada uno. Si la figura *(I)* y *(II)* roten *225°* respecto a sus centros en sentido antihorario y horario, respectivamente; luego, se trasladan sobre la figura *(III)* y esta unión se rota *855°* en sentido horario, ¿qué figura resulta?

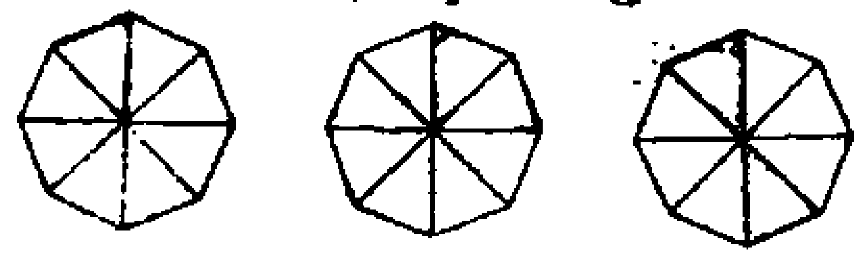
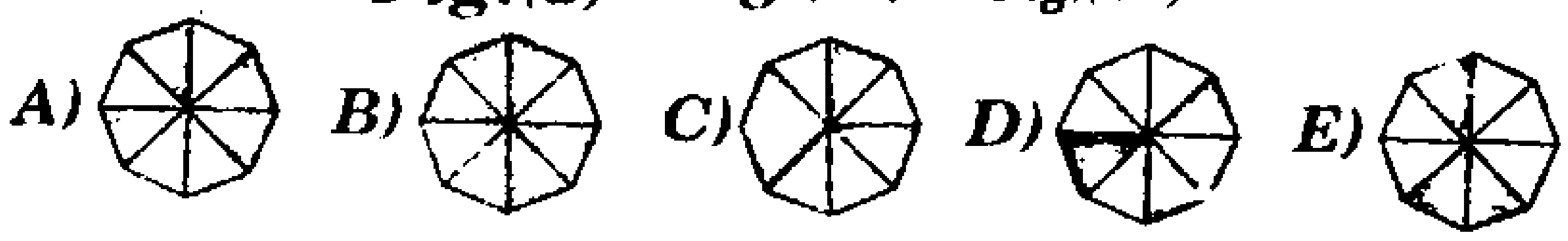


Fig.(I) *Fig.(II)* *Fig.(III)*



06 En la siguiente sucesión de figuras formadas por láminas transparentes y congruentes, al trasladar la figura *627* sobre la figura *717*, ¿qué figura se obtiene?

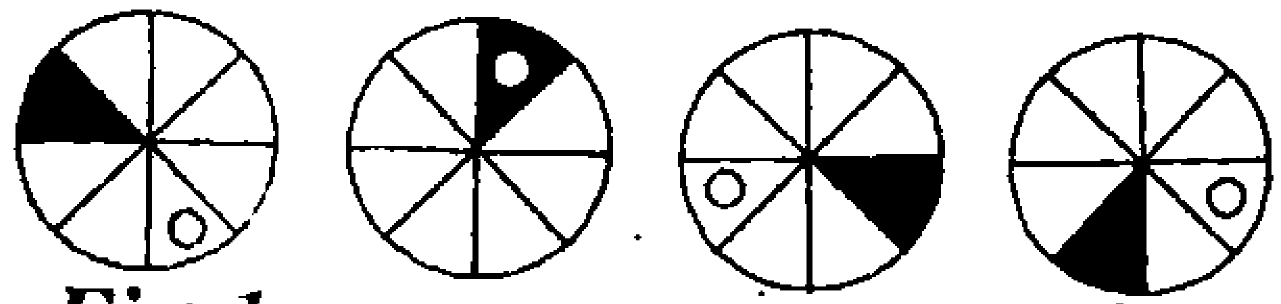
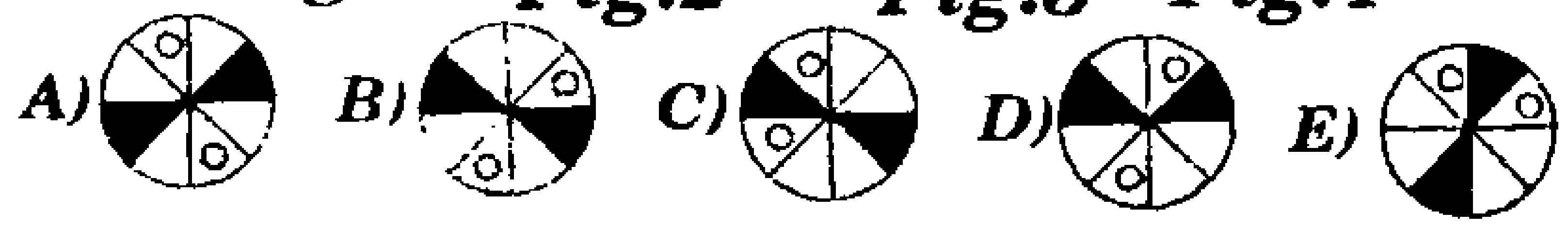


Fig.1 *Fig.2* *Fig.3* *Fig.4*



07 Una hoja rectangular de papel (blanca de un lado y gris del otro) fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:

El rectángulo *1*, que quedó de color blanco luego del primer doblez, tiene *20 cm* más de perímetro que el rectángulo *2*, que quedó blanco luego del segundo doblez, y éste a su vez tiene *16 cm* más de perímetro que el rectángulo *3*, que quedó blanco luego del tercer doblez. Determine el perímetro de la hoja.

A) 94 cm *B) 93 cm* *C) 92 cm*
D) 91 cm *E) 90 cm*

08 Daniel es el único sobrino de la hermana de la esposa del único cuñado del padre de Katy, Carlos es el tío de la prima hermana de Daniel. Daniel no tiene tíos consanguíneos pero sí dos tías que no son hermanas. Rosa es la única cuñada del único hermano del esposo de la tía de Daniel. ¿Qué parentesco existe entre Rosa y Carlos?

A)esposos ***B)hermanos*** ***C)primos***
D)cuñados ***E)hija – padre***

09 En una reunión familiar están presentes tres padres, dos madres, dos hermanas, dos cuñados, dos nietos, dos tías, dos sobrinos, dos hijas, dos hijos, dos tíos, un abuelo, dos cuñadas, dos parejas de esposos y dos primos. ¿Cuántas personas hay en dicha reunión, como mínimo

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) 10***

10 En la celebración de las bodas de oro de los esposos Juan y Ana, asistieron todos sus hijos y nietos. En dicha reunión se pudo observar: un abuelo, una abuela, un suegro, una suegra, tres padres, tres madres, dos hijos, tres hijas, dos nietas, tres parejas de esposos, dos tíos, tres cuñadas, dos cuñados y dos nueras. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión?

A) 7 ***B) 8*** ***C)9*** ***D) 10*** ***E)11***

11 Este año tiene más martes y miércoles que otros días de la semana. ¿Qué día de la semana será el *1* de marzo del próximo año?

A)domingo ***B)martes*** ***C)jueves***
D)miércoles ***E)sábado***

12 En un año común se observa que la fecha del penúltimo lunes del mes pasado, sumada a la fecha del último viernes del siguiente mes, resulta *53*. ¿Qué fecha será el último domingo del mes actual? Considere que todos los meses pertenecen a un mismo año

A)30 de mayo ***B)29 de julio*** ***C)26 de septiembre***
D)28 de junio ***E)27 de agosto***

13 Las fechas de tres martes de este mes resultan ser números pares. Lo mismo ocurrió el mes pasado pero con los domingos. ¿Qué día de la semana será el *21* del próximo mes?

A)lunes ***B)martes*** ***C)miércoles***
D)jueves ***E)sábado***

14 Complete el siguiente recuadro con números enteros de modo que se forme un cuadrado mágico; es decir, que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal sea la misma. Indique el producto de la constante mágica y el número ubicado en la casilla sombreada.

16	(sombreada)	
		15
11		

A)324
B)272
C)236
D)252
E)144

15 Complete el recuadro mostrado con *5* circunferencias (○) , *4* triángulos (△) y *7* cuadrados (□); cada casilla no debe quedar vacía y puede haber más de un elemento, además, debe cumplirse que el valor total en cada fila, columna y diagonal sea el mismo, según las siguientes equivalencias: △=○○○ y □=△○. Si el valor contenido en cada casilla debe ser distinto a los demás pero menor a lo que vale □△△, ¿qué elementos aparecen en lá casilla sombreada? Considere que ya se utilizó un triángulo (△) y una circunferencia (○).

		(sombreada)
△		○

A) △○
B) □□○
C) △
D) ○
E) □△

16 Supongamos que las solteras siempre mienten y las casadas siempre dicen la verdad. Dos amigas afirmaron:

- Alicia: "Karen es casada y yo también soy casada".
- Karen: "Alicia es soltera".

Si sólo una de ellas dice la verdad, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I) Alicia es soltera y Karen es casada.
II) Alicia es casada y Karen es soltera.
III) Alicia miente y Karen dice la verdad.
IV) Alicia dice la verdad y Karen miente.
V) Alicia es casada y Karen dice la verdad.

A) I y IV ***B) III y V*** ~~***B) I y III***~~
D) II y V ***E) III y IV***

17. El gráfico muestra dos cuadrados mágicos de orden ***3*** que comparten ***2*** casillas. Complételos utilizando algunos números del ***1*** al ***16*** (pueden repetirse) y dé como respuesta el valor de ***R+A+Z – O – N– E.***

		6		
R	A	Z		1
16		O	N	E
		12		

A) 1
B) 16
C) 6
D) 12
E) 15

18. Lourdes debe consumir ***3*** pastillas del tipo ***A*** cada ***5*** horas y ***2*** pastillas del tipo ***B*** cada ***6*** horas. Si comenzó su tratamiento tomando ambos tipos de pastillas, ¿en cuántas horas habrá tomado ***46*** pastillas en total?

A) 48 ***B) 42*** ~~***C) 45***~~ ***D) 50*** ***E) 60***

19. En una función de cine se observa que la cantidad de asistentes, al ser dividida entre ***15***, genera de residuo ***4***; y, además, el costo en soles de cada entrada es múltiplo de ***15***, más ***7***. ¿Cuál es el residuo en soles al dividir la recaudación por ***15***?

A) 12 ***B) 11*** ~~***C) 13***~~ ***D) 14*** ***E) 7***

20. El siguiente arreglo de letras está formado por ***100*** filas. ¿Cuántas veces las letras ***R*** aparecen en el arreglo?

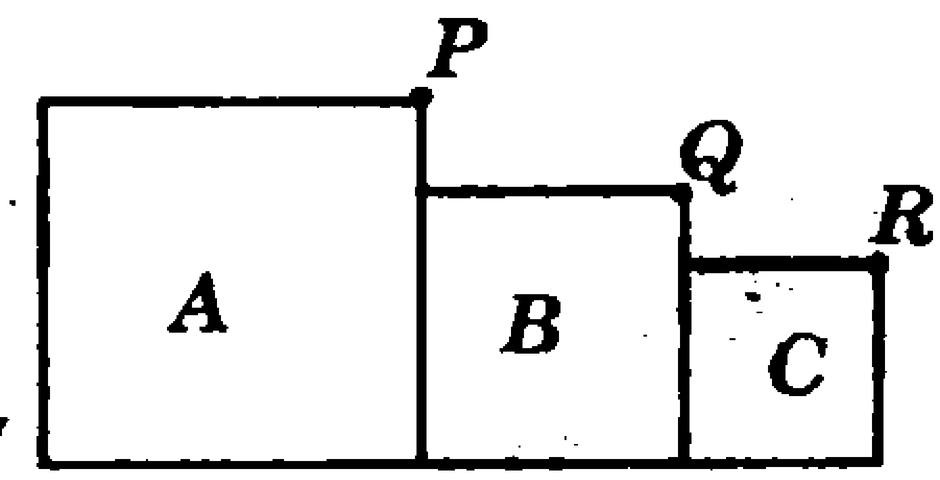
A
A M
A M O
A M O R
A M O R A
A M O R A M
A M O R A M O
A M O R A M O R
A M O R A M O R A
⋮

A) 1300
~~***B) 1225***~~
C) 1250
D) 1275
E) 975

21. En la figura se indican tres cuadrados que descansan sobre una misma recta y comparten parte de un lado. Para determinar el área del cuadrado ***B***, es suficiente:

I) El área del cuadrado ***A*** mide ***16 cm²***.
II) El lado del cuadrado ***C*** mide ***4 cm²***.
III) Los puntos ***P,Q*** y ***R*** son colienales.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) I y II
D) I y III
~~***E) Juntos I, II y III***~~

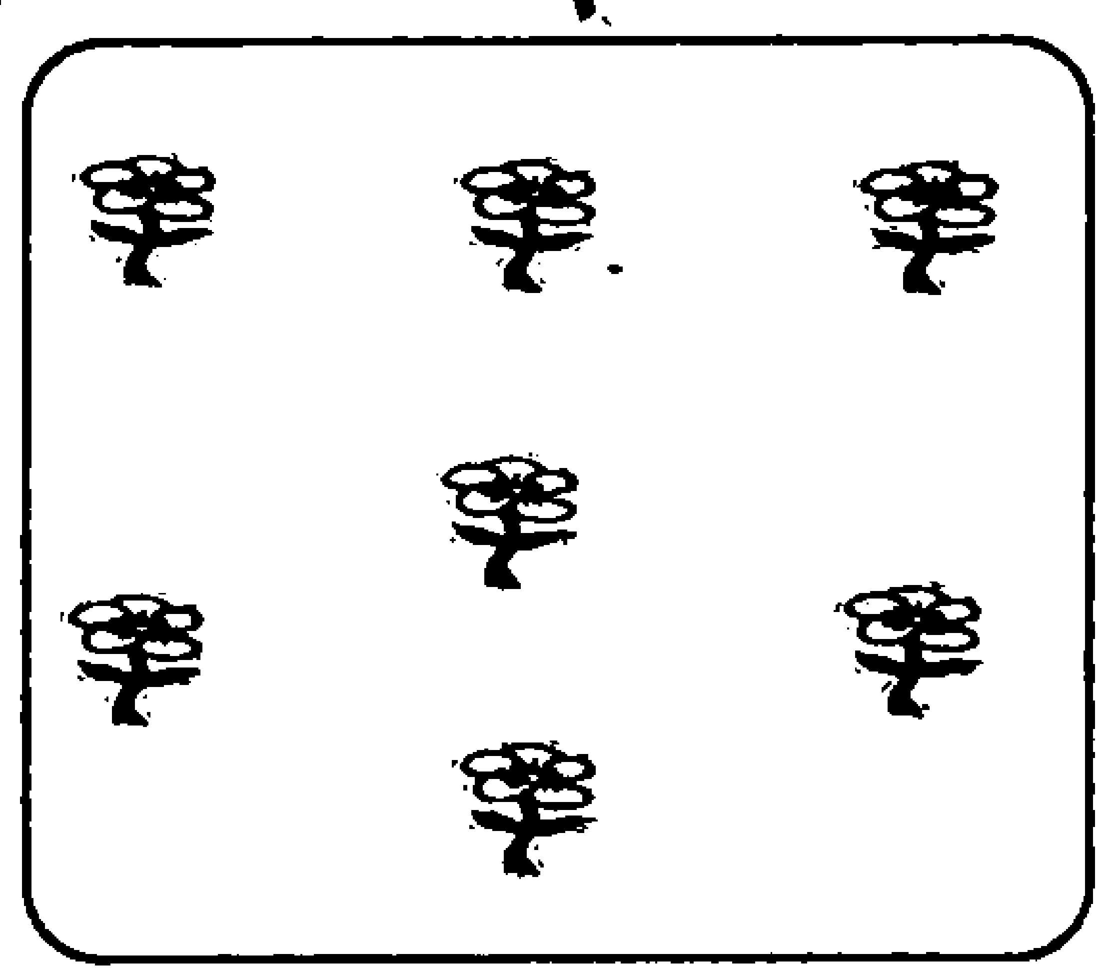


22. En los recuadros del siguiente esquema se escriben cuatro números enteros, positivos y diferentes, todos de una cifra. ¿Cuál será el menor valor de ***S***?

$$S = [\square \times (\square + \square)] - \square$$

A) – 4 ***B) – 3*** ***C) – 1*** ***D) 2*** ***E) 1***

23. En la figura se muestra una alfombra con siete rosas bordadas. ¿Cuántos trazos de líneas rectas se deben realizar, como mínimo, de manera que cada rosa se encuentre aislada en una región distinta?



A) 5 ***B) 4*** ***C) 1*** ***D) 2*** ***E) 3***

24. Partiendo de cero y alternativamente, los participantes deben ir sumando cantidades hasta llegar a 100. Estas cantidades no deben ser superiores a 10, es decir, solo son validas las comprendidas entre 1 y 10, ambas inclusive. Gana quien totaliza 100. Existe una estrategia con la que resulta casi imposible perder. ¿Cuál es?

ANALISIS COMBINATORIO

CAPITULO 042

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Aplicar correctamente los principios básicos de conteo* en *situaciones concretas.*
* *Determinar el* número *total de ordenamientos (permutaciones) que se pueden realizar con parte* o *todos los* elementos de un conjunto dado.
* *Deducir las fórmulas de permutaciones (lineal ,circular* y *con elementos repetidos).*
* *Conocer el* número *de subconjuntos (grupos) que se puede formar con parte* o *con todos los elementos de un* conjunto.
* *Deducir la fórmula de combinaciones.*

INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones estamos interesados en conocer sólo el número de elementos de un conjunto que cumple ciertas condiciones: sin que sea necesario enumerarlos, para ello debemos hacer uso de las técnicas de conteo. Dichas técnicas están ligadas directamente a la historia de la matemática, porque es la forma como las personas tienen su primer contacto con esta disciplina.

Podemos señalar que dos tipos de problemas que ocurren frecuentemente en el análisis combinatorio son:

Demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito dado y que satisfacen ciertas condiciones.

Contar o clasificar los subconjuntos de un conjunto finito y que satisfacen ciertas condiciones dadas. Actualmente el análisis combinatorio dispone de técnicas generales que permiten resolver ciertos tipos de problemas, sin embargo la solución de un problema combinatorio exige casi siempre ingeniosidad y una comprensión plena de la situación descrita en el problema. Ese es uno de los encantos de esta parte de la matemática donde problemas fáciles de enunciar, se toman a veces difíciles exigiendo una alta dósis de creatividad para su resolución.

ANALISIS COMBINATORIO

El análisis combinatorio es la parte de la Matemáticas que estudia el número de ordenamientos o grupos que se pueden formar con las cosas o los elementos.

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea « *n* » un número entero positivo , el factorial de «*n*», se denota por «*n!*» o «$\underline{n|}$.» y se define como el producto de los enteros consecutivos desde *1* hasta *n* o desde *n* hasta la unidad inclusive.

$$\boxed{n! = \;= 1\times 2\times 3\times 4\times \ldots\times (n-1)\times n}$$

EJEMPLOS :

* $1! = 1$
* $2! = 1\times 2 = 2$
* $3! = 1\times 2\times 3 = 6$
* $4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$
* $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$
* $6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$
* $7! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 = 5040$
* $8! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8 = 40320$
* $9! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9 = 362880$
* $10! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10 = 3628800$

SE OBSERVA :

$$10! = 10\times \overbrace{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}^{9!}$$

$$10! = 10\times 9!$$

$$10! = 10\times 9\times 8!$$

$$10! = 10\times 9\times 8\times 7!$$

Entonces :

$$\boxed{n! = (n-1)!\times n}$$

* De aquí , obtenemos para $n=1$

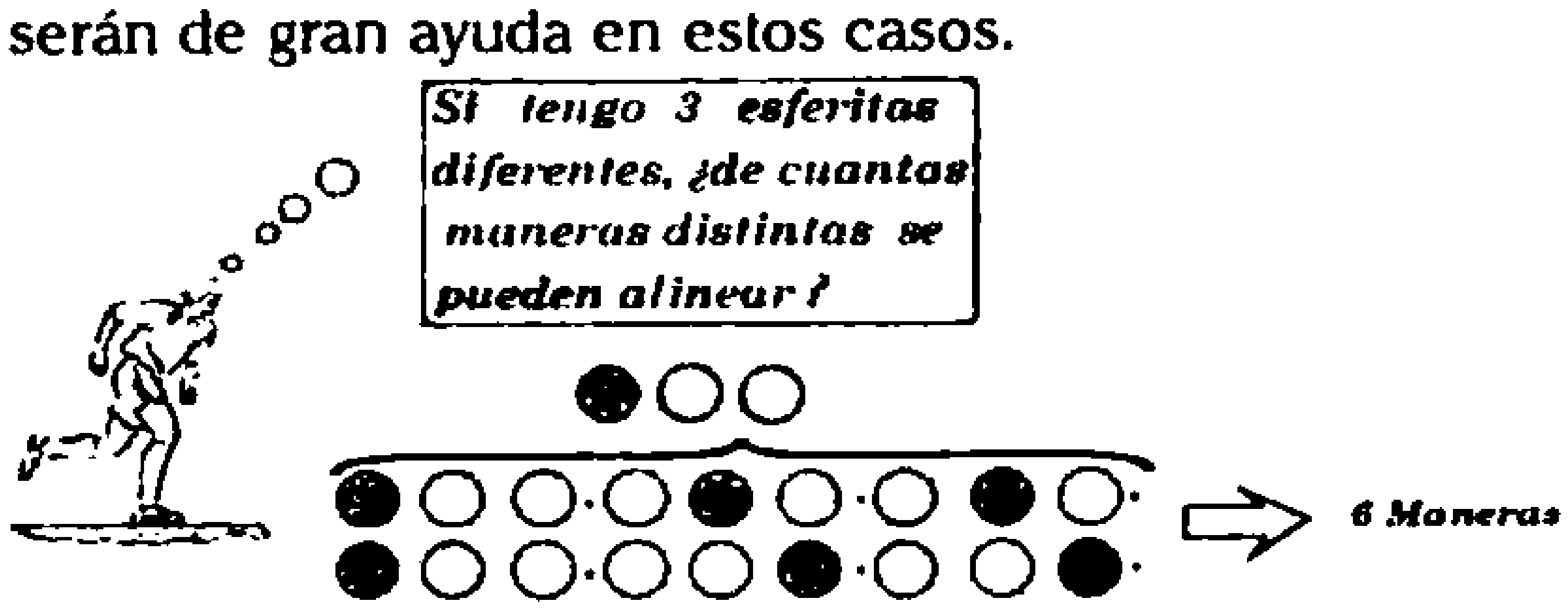
$$1! = (1-1)!\times 1 = 0!\times 1 = 0!$$

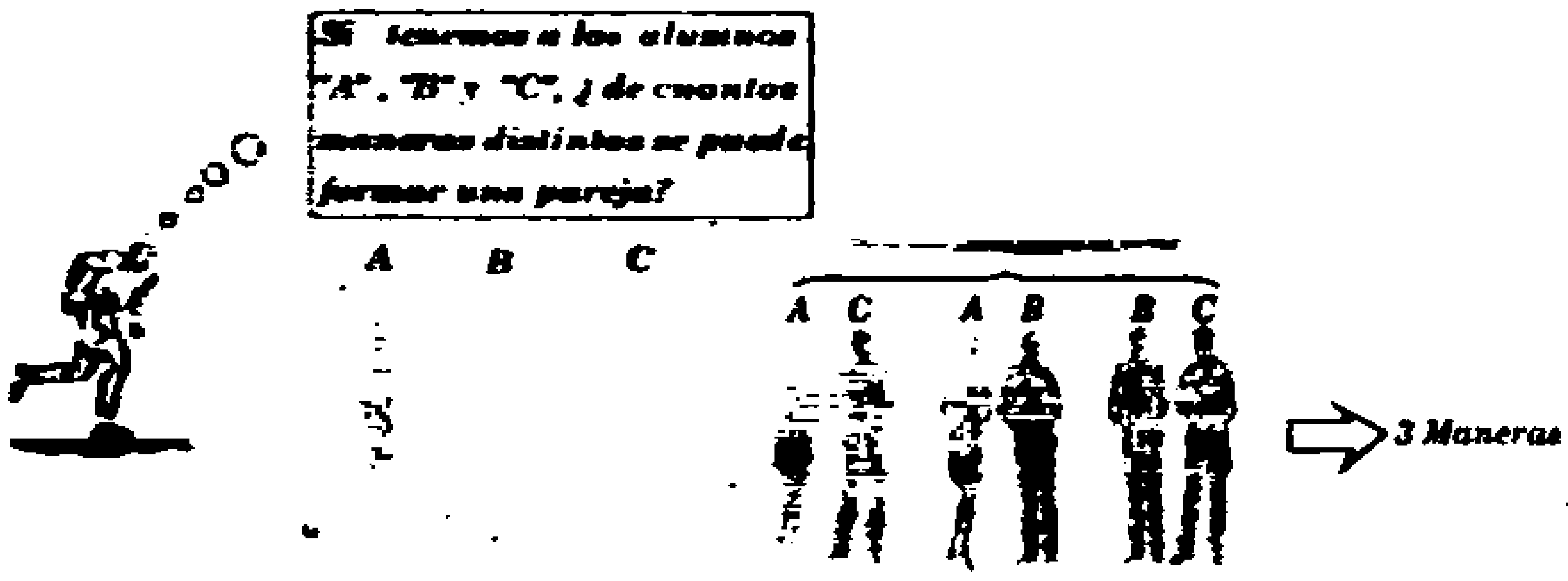
* Luego , definimos convencionalmente : $\boxed{1! = 0! = 1}$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

En los ejemplos siguientes , nos damos cuenta que dado un evento particular (alinear las *3* esferitas o formar una pareja), estamos interesados en conocer todas las maneras distintas en que puede ocurrir.

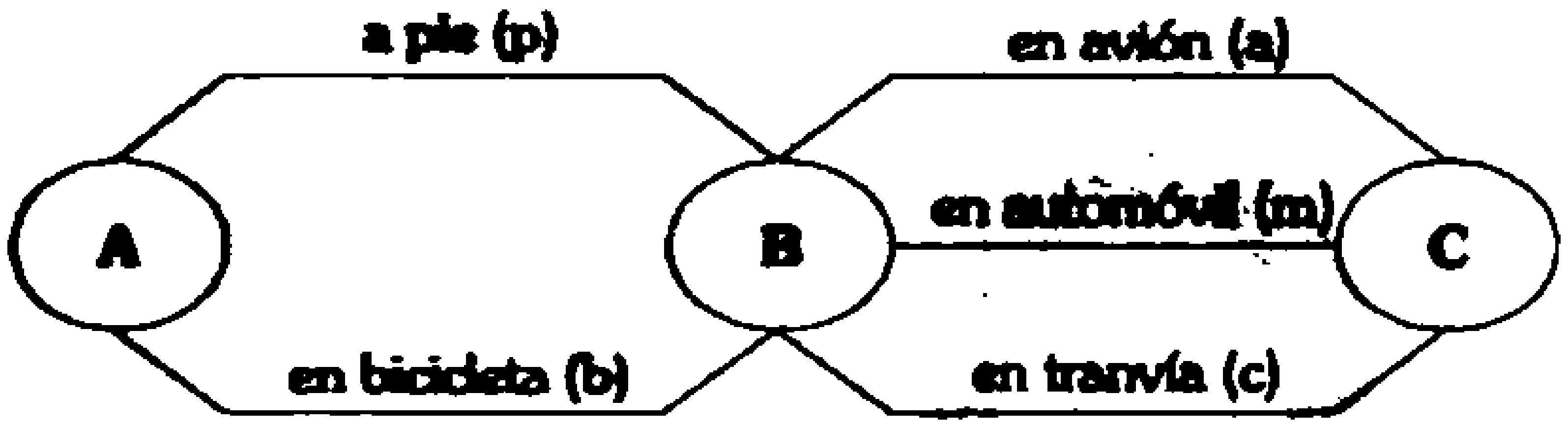
Para determinar las veces que ocurre un determinado evento , haremos uso de las técnicas de conteo , que serán de gran ayuda en estos casos.



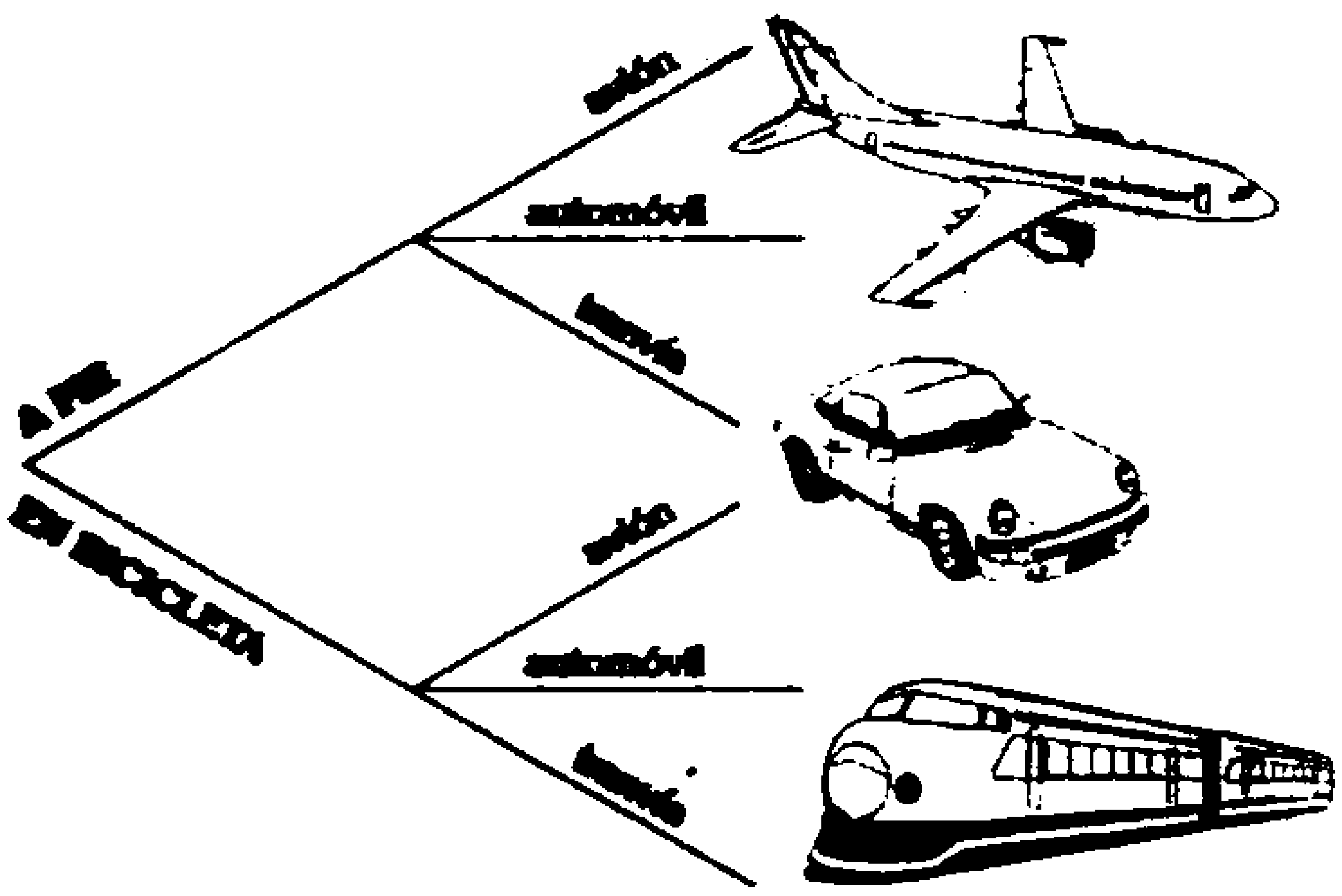


OTRO EJEMPLO :

Suponga que una persona tiene **2** formas de ir de una ciudad **A** a otra ***B***, y una vez llegada a ***B***, tiene 3 maneras de llegar a otra ciudad ***C***. ¿De cuántas maneras podrá realizar el viaje de ***A*** a ***C*** pasando por ***B***?



La persona tuvo seis formas diferentes de realizar el viaje que son: (iniciales) ***pa , pm , pc , ba , bm , bc***. Se puede representar en un diagrama de árbol.



CASOS :

- pie - avión
- pie - automóvil
- pie - tranvía
- bicicleta - avión
- bicicleta - automóvil
- bicicleta - tranvía

Por lo que podemos citar dos principios fundamentales del análisis combinatorio, que pueden expresarse así :

Si un primer acontecimiento ***A*** puede efectuarse de m formas distintas, un segundo acontecimiento ***B*** puede efectuarse de n formas distintas, entonces el número total de formas diferentes en que puede efectuarse ***A*** o ***B***, en forma mutuamente excluyentes, esta dado por la suma $(m+n)$.

En el último ejemplo planteado :

O bien inicia su recorrido a pie o bien lo inicia en bicicleta. Si inicia a pie tienen ***3*** formas de continuar (avión, automóvil o tranvía), si inicia en bicicleta tiene ***3*** formas de continuar (avión, automóvil o tranvía). Por lo tanto tendrá $3+3=6$ formas de realizar el viaje de *A* a ***C*** pasando por ***B***.

Si un primer acontecimiento ***A*** puede efectuarse de m formas distintas, un segundo acontecimiento ***B*** puede efectuarse de n formas distintas, entonces el número total de formas diferentes en que puede efectuarse ***A*** y ***B***, en forma simultánea o en forma consecutiva, esta dado por el producto $m\times n$.

En el último ejemplo planteado :

Por cada una de las ***2*** formas en que ir de *A* hasta ***B*** (a pie o bicicleta), tiene ***3*** formas de continuar de *B* hasta *C* (avión , automóvil o tranvía). Por lo tanto tendrá $2\times 3=6$ formas de realizar el viaje de *A* a *C* pasando por ***B***.

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el n-ésimo paso de N_r maneras o formas , entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de;

$$N_1\times N_2\times \ldots\ldots\times N_r \quad \textit{maneras o formas}$$

El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad deben ser llevados a efecto, uno tras otro.

*En particular si un procedimiento se puede descomponer en dos etapas y si existen **m** resultados posibles de la primera etapa, y para cada uno de estos resultados, existen **n** resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento total se puede realizar, en el orden dado, de **m×n** formas.*

EJEMPLO :

Para una obra de teatro hay ***6*** hombres y ***8*** mujeres que aspiran a los papeles principales. El director puede elegir a la pareja principal de $6\times 8=48$ formas.

Esta regla también puede ampliarse a más de dos etapas.

PRINCIPIO ADITIVO

Si se desea llevar a efecto una actividad, la cuál tiene formas alternativas para ser realizada (no simultánea mente ***2*** o más actividades), donde la primera de esas alternativas puede ser realizada de ***M*** maneras o formas, la segunda alternativa puede realizarse de ***N*** maneras o formas ..... y la última de las alternativas puede ser realizada de ***W*** maneras o formas, entonces esa actividad puede ser llevada a cabo de :

$$M+N+\ldots\ldots+W \textit{ maneras o formas}$$

*Es decir si una primera tarea puede realizarse de **m** formas y una segunda tarea puede realizarse de **n** formas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces para realizar cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de **m + n** formas.*

EJEMPLO :

Una biblioteca tiene ***40*** libros de historia y ***50*** de filosofía. Si un estudiante quiere aprender acerca de alguno de

estos dos temas, por la regla de la suma puede elegir entre $40 + 50 = 90$ libros.

(Nota : el estudiante no quiere estudiar historia y filosofía, sino historia o filosofía.)

La regla puede ampliarse a más de dos tareas, siempre que ningún par de ellas pueda ocurrir simultáneamente.

PERMUTACIÓN

Dado un conjunto de n elementos, se denomina permutación a cada uno de los conjuntos que se pueden formar con K de estos elementos tales que cada uno de ellos difiere de otro en el orden en que son considerados los elementos.

Dicho de otro modo, dada una colección de n objetos distintos, cualquier disposición lineal de K de estos objetos se denomina permutación de la colección.

EJEMPLO:

un grupo de 5 personas va a sentarse en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

$$\underset{1^a\,pos}{\underline{5}} \quad \underset{2^a\,pos}{\underline{4}} \quad \underset{3^a\,pos}{\underline{3}} \quad \underset{4^a\,pos}{\underline{2}} \quad \underset{5^a\,pos}{\underline{1}}$$

Cualquiera de las 5 personas puede ocupar la primera posición de la fila . Para la segunda posición podemos elegir entre 4 personas. Continuando de esta manera, sólo tenemos una persona para ocupar la quinta posición.

Esto produce un total de $5\times4\times3\times2\times1=120$ disposiciones posibles de las 5 personas. Se obtiene exactamente la misma respuesta si las posiciones se ocupan en otro orden (por ejemplo, 3^a posición, 1^a posición, 4^a, 5^a y 2^a).

EN GENERAL :

El número de permutaciones de « n» elementos diferentes tomados de «K» en «K» , se calcula como:

$$\boxed{P_K^n = \frac{n!}{(n-K)!}} \;;0 < K \leq n$$

OBSERVACIONES :

* Cuando se toman todos los elementos del conjunto para ordenarlos o permutarlos (es decir $K=n$), se dice que es una permutación de «n» elementos y se denota por P_n .

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

$$\boxed{P_n^n = P_n = n!}$$

EJEMPLO :

tomados de 2 en 2 se denota como P_2^4

$$P_2^4 = 12 = 4\times3 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1}$$

APLICACIÓN DE LA PERMUTACIÓN

«Cuando nos piden agrupar y ordenar (permutar) a la vez, los elementos de un conjunto, con parte o todos los elementos, interesando el orden, de modo que cada grupo se diferencie de otro en por menos un elemento, ó por el orden dispuesto».

EJEMPLO 1 :

¿Cuántos números de 2 cifras diferentes se puede formar con ios dígitos 3 ; 4 y 5?

RESOLUCIÓN :

Contando → *Interesa el orden*

$$\left.\begin{array}{l} 34 \neq 43 \\ 35\ ,\ 53 \\ 45\ ,\ 54 \end{array}\right\} \textit{6 número de 2 cifras diferentes}$$

Aplicando Permutaciones :

$$P_2^3 = 3\times2 = 6$$

(3 → *Dígitos disponibles*; 2 → *Tomados de 2 en 2*)

EJEMPLO 2 :

En una carrera participan 4 atletas . ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar a la meta , si llegan uno a continuación del otro?

RESOLUCIÓN :

Sean : A ; B ; C y D los atletas y como :

Posiciones

4^{to}	3^{ro}	2^{do}	1^{ro}		4^{to}	3^{ro}	2^{do}	1^{ro}
D	C	B	A	$\neq$	D	C	A	B

(Interesa el orden)

$$\text{Número de maneras} = P_{4\,atletas}^{4\,posiciones} = 4\times3\times2\times1 = 24$$

PERMUTACIÓN CIRCULAR ($P_n^{circular}$)

Donde : $P_n^{circular} = (n-1)!$

Es un arreglo u ordenación de elementos diferentes alrededor de un objeto . En estas ordenaciones , no hay primer ni último elemento , por hallarse todos en línea cerrada.

EJEMPLO :

* Permutar « A » , « B » y « C » en forma circular.

NOTA :

Para determinar el número de permutaciones circulares de «n» elementos distintos , denotado por, $PC_{(n)}$ basta fijar la posición de uno de ellos y los « $n-1$» restantes podrán ordenarse de $(n-1)!$ maneras. Si se toma otro elemento como fijo , las ordenaciones

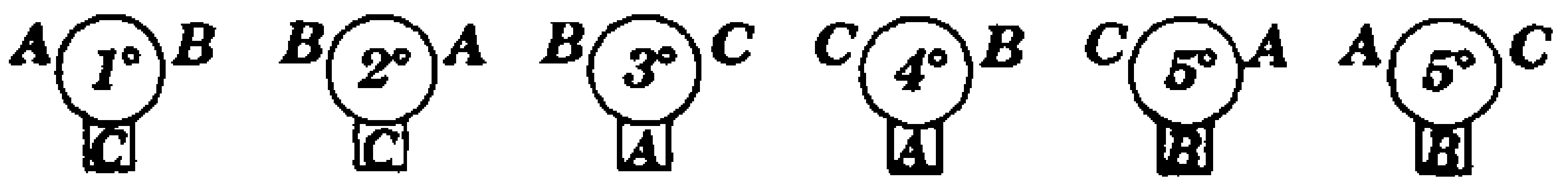
de los restantes serán seguro uno de los ya considerados Luego :

$$PC_{(n)} = (n-1)!$$

OBSERVACIONES :

* Para diferenciar una permutación circular de otra , se toma uno de los elementos como elemento de referencia y se recorre en sentido horario o antihorario. Si se encuentran los elementos en el mismo orden , entonces ambas permutaciones serán iguales y en caso contrario , diferentes.

* ***Para el ejemplo anterior :***



Aparentemente , hay *6* ordenamientos , lo cual no es cierto , por que : si hacemos girar al *1°* ordenamiento en sentido antihorario obtenemos el ordenamiento *3°* ; y si lo hacemos girar en sentido horario obtenemos el ordenamiento *5°* ; de igual forma si al ordenamiento *2°* lo hacemos girar en sentido antihorario obtenemos el ordenamiento *6°*, y si lo hacemos girar en sentido horario obtenemos el ordenamiento *4°*. De todo este análisis se deduce que los elementos *A* , *B* y *C* sólo pueden ordenar de *2* maneras diferentes. Pero si fueran más elementos, sería más tedioso mostrar todos los ordenamientos posibles. Esto nos conlleva a utilizar la fórmula antes indicada.

* Osea : $PC_{(3)} = (3-1)! = 2! = 2$

APLICACIÓN DE LA PERMUTACIÓN CIRCULAR

«Cuando nos piden ordenar un grupo de elementos alrededor de un objeto» . En estas ordenaciones no hay primer ni último elemento, para calcular el número de permutaciones circulares , basta fijar la posición de uno de ellos y los *(n– 1)* restantes se podrán ordenar de *(n–1)*!, maneras.

EJEMPLO 1 :

¿De cuántas maneras distintas , se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa?

RESOLUCIÓN :

$P_5^{circular} = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneras

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

$$(P^{n}_{(a\,;\,b\,;\,c\ldots)})$$

En los casos anteriores se han obtenido permutaciones en donde todos los elementos utilizados para hacer los arreglos son diferentes. A continuación se obtendrá una fórmula que nos permite obtener las permutaciones de n objetos, cuando entre esos objetos hay algunos que son iguales.

Donde : $$(P^{n}_{(a\,;\,b\,;\,c\ldots)}) = \frac{n!}{a!\times b!\times c!\ldots}$$

$$a + b + c + \ldots \leq n$$

APLICACIÓN :

Cuando nos piden ordenar grupo de elementos, los cuales no son todos diferentes .

EJEMPLO 1 :

Se tienen *3* bolas azules y *2* negras todas enumeradas del *1* al *5*. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila?

RESOLUCIÓN :

$$n = 5\,;\; a = 3\,;\; b = 2$$

$$\text{Número de maneras} = P^{5}_{(3;2)} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{120}{6\times 2} = 10$$

EJEMPLO 2 :

Obtenga todas las permutaciones posibles a obtener con todas las letras de la palabra *OSO*.

RESOLUCIÓN:

* Para obtener la fórmula, es necesario primero suponer que todas las letras de la palabra *OSO* son diferentes y para diferenciarlas pondremos subíndices a las letras *O* , por lo que quedaría, O_1SO_2 y las permutaciones a obtener serían :

$$P_3^3 = 3\times 2\times 1 = 6$$

definiendo las permutaciones tenemos que estas serían,

$$O_1SO_2;\; O_2SO_1;\; SO_1O_2$$
$$SO_2O_1;\; O_1O_2S;\; O_2O_1S$$

¿Pero realmente podemos hacer diferentes a las letras O?, eso no es posible, luego entonces ¿cuántos arreglos reales se tienen?

Como:

ARREGLOS REALES :

$$O_1SO_2 = O_2SO_1 \Rightarrow OSO$$
$$SO_1O_2 = SO_2O_1 \Rightarrow SOO$$
$$O_1O_2S = O_2O_1S \Rightarrow OOS$$

Entonces se observa que en realidad sólo es posible obtener tres permutaciones con las letras de la palabra *OSO* debido a que las letras *O* son idénticas, ¿pero qué es lo que nos hizo pensar en seis arreglos en lugar de tres?, el cambio que hicimos entre las letras *O* cuando las consideramos diferentes, cuando

en realidad son iguales.

Para obtener los arreglos reales es necesario partir de la siguiente expresión :

El número de arreglos reales = # de permutaciones considerando a todos los objetos como diferentes

Los cambios entre objetos iguales

$$\begin{pmatrix}\text{El número de}\\ \text{arreglos reales}\end{pmatrix}=\frac{3!}{2!}=\frac{3\times 2!}{2!}=3$$

EJEMPLO 3 :

Obtenga todas las señales posibles que se pueden diseñar con seis banderines, dos de los cuales son rojos, tres son verdes y uno morado.

RESOLUCIÓN:

$$P^{6}_{3;2;1}=\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60\ \text{señales diferentes}$$

EJEMPLO 4 :

¿De cuántas maneras es posible plantar en una línea divisoria de un terreno dos nogales, cuatro manzanos y tres ciruelos?

RESOLUCIÓN:

$$P^{9}_{2;4;3}=\frac{9!}{2!\times 4!\times 3!}=1260\ \text{maneras diferentes}$$

COMBINACIÓN

Es una selección o grupo que se puede formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto . En una combinación no interesa el orden de sus elementos.

A través de un ejemplo nos daremos cuenta que hay una estrecha relación entre las permutaciones y las combinaciones:

Dado el conjunto $A=\{a\,;b\,;c\,;d\}$, calcular el número de permutaciones y el número de combinaciones de los elementos de «*A*» tomados de *3* en *3*.

permutaciones (ordenamientos)	combinaciones (grupos)
abc; acb;bac;bca;cab;cba ⇒ 6	abc ⇒ 1
abd;adb;bad;bda;dab ; dba ⇒ 6	abd ⇒ 1
acd ; adc ; cad ; cda ; dac ; dca ⇒ 6	acd ⇒ 1
bcd ; bdc ; cbd ; cdb ; dbc ; dcb ⇒ 6	bcd ⇒ 1
Total : $24=P^4_3$	Total: $4=C^4_3$

Del ejemplo anterior, obtenemos las siguientes conclusiones :

* El número de combinaciones de *4* elementos tomados de *3* en *3* se denota por C^4_3
* Cada combinación tiene *6* permutaciones , es decir

$$C^4_3=4=\frac{24}{6}=\frac{P^4_3}{3!}\Rightarrow \boxed{C^4_3=\frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!}=\frac{4!}{3!(4-3)!}}$$

EN GENERAL :

El número de combinaciones de «*n*» elementos tomados de «*K*» en «*K*» , se calcula como :

$$\boxed{C^n_K=\frac{n!}{K!(n-K)!}}\ ;\ 0<K\le n$$

$$\text{Donde : } C^n_k=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}^{k\ \text{veces}}}{k(k-1)\ (k-2)...3\cdot 2\cdot 1}$$

- $C^5_2=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$
- $C^7_4=\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1}$
- $C^n_1=\frac{n}{1}=n$
- $C^n_0=C^n_n=1$

¡IMPORTANTE!

- $C^n_k=C^n_{n-k}\longrightarrow C^{98}_{96}=C^{98}_2$

APLICACIÓN DE LA COMBINACIÓN

«Cuando nos piden agrupar un conjunto de elementos con parte o todos los elementos sin interesar el orden de los elementos», de modo que cada grupo se diferencie de otro en por lo menos un elemento.

EJEMPLO 1 :

Con Tati, Paco y Pito, ¿cuántos grupos de **2** personas se pueden formar?

RESOLUCIÓN :

Contando → *No Interesa el orden*

Tati, Paco = Paco, Tati
Tati, Pito
Paco, Pito
} *3 maneras diferentes*

APLICANDO COMBINACIONES :

$$\begin{matrix}\text{Número}\\ \text{de grupos}\end{matrix}=C^3_2=\frac{3\times 2}{2\times 1}=3$$

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos triángulos se podrán formar al unir *7* puntos no colineales?

RESOLUCIÓN :

Para formar un triángulo es suficiente *3* puntos no colineales y como :

ΔABC = ΔACB (no interesa el orden)

$$\begin{matrix}\text{Número de}\\ \text{triángulos}\end{matrix}=C^7_3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35$$

OBSERVACIONES :

* Cuando se toman todos los elementos del conjunto para agruparlos o combinarlos (es decir , *K=n*), se dice que es una combinación de «*n*» elementos y :

$$C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!\times 0!}=1 \Rightarrow \boxed{C_n^n=1}$$

$$\boxed{C_n^n=C_0^n=1}$$

$$\boxed{C_k^n=C_{n-k}^n}$$

$$\boxed{C_{k-1}^n+C_k^n=C_k^{n-1}}$$

$$\boxed{C_1^n+C_2^n+C_3^n+\ldots+C_n^n=2^n-1}$$

ALUMNA : ¿Cuándo aplico combinaciones y cuando permutaciones y como me doy cuenta?

PROFESOR : La diferencia radica en el «orden»

Combinación	*Permutación o Variación*
"No importa el orden"	*"Importa el orden"*
$AB = BA$	$AB \neq BA$

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos cierta situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por ***35*** alumnos.

a) El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como mantener el aula limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

b) El maestro desea que se nombre a los representantes del salón (Presidente, Secretario y Tesorero).

RESOLUCIÓN:

a) Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para limpiar el aula o entregar material, (aunque pudieron haberse seleccionado a Rafael, Daniel y a Enrique, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente).

¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?

Reflexionando al respecto nos damos cuenta de que el orden en este caso no tiene importancia, ya que lo único que nos interesaría es el contenido de cada grupo, dicho de otra forma, ¿quiénes están en el grupo?

Por tanto, este ejemplo es una combinación, quiere decir esto que las combinaciones nos permiten formar grupos o muestras de elementos en donde lo único que nos interesa es el contenido de los mismos.

b) Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como Presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los que se muestran a continuación:

CAMBIOS

PRESIDENTE :	***Daniel***	***Arturo***	***Rafael***	***Daniel***
SECRETARIO :	***Arturo***	***Daniel***	***Daniel***	***Rafael***
TESORERO :	***Rafael***	***Rafael***	***Arturo***	***Arturo***

Ahora tenemos cuatro arreglos, *¿se trata de la misma representación?*

Creo que la respuesta sería no, ya que el cambio de función que se hace a los integrantes de la representación original hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente, ¿importa el orden de los elementos en los arreglos?. La respuesta definitivamente sería sí, luego entonces las representaciones antes definidas son diferentes ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto es este caso estamos tratando con permutaciones.

COMBINACIONES CON REPETICIÓN (CR_r^n)

Combinaciones con repetición de «*n*» elementos de orden «*r*», son todas las agrupaciones de un número *r* de elementos con repetición de un conjunto de n objetos (sin restricciones de «*r*» respecto de «*n*»).

PROPIEDAD :

El número de combinaciones con repetición de «*n*» elementos de orden «*r*», denotado por , está dado por :

$$\boxed{CR_r^n=C_r^{n+r-1}}$$

EJEMPLO 1 :

¿Cuántas agrupaciones de dos elementos se pueden formar con las letras : ***A, B, C*** y ***D***, si se permite repeticiones?

A) 9 ***B) 10*** ***C) 6*** ***D) 8*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN :

El problema es una combinación con repetición . El número de maneras en que se pueden formar agrupaciones de dos letras con repetición es :

$$CR_2^4=C_2^{4+2-1}=C_2^5=10$$

Estas agrupaciones son : ***AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD.***

RPTA : "B"

EJEMPLO 2 :

¿De cuántas formas podemos distribuir ***4*** caramelos idénticos entre ***3*** niños?

A) 24 ***B) 20*** ***C) 10*** ***D) 4*** ***E) 15***

RESOLUCIÓN :

El problema es una combinación con repetición . Entonces el número de maneras en que podemos distribuir los ***4*** caramelos entre los ***3*** niños es :

$$CR_4^3 = C_4^{3+4-1} = C_4^6 = 15$$

RPTA : "E"

EJEMPLO 3 :

¿De cuántas formas se puede distribuir ***7*** canicas blancas idénticas en ***4*** recipientes diferentes?

A) 84 B) 72 C) 36 D) 240 E) 120

RESOLUCIÓN :

El problema es una combinación con repetición de ***4*** elementos de orden ***7***. Entonces el número de formas que se distribuye las canicas a los recipientes es:

$$CR_7^4 = C_7^{4+7-1} = C_7^{10} = 120$$

RPTA : "E"

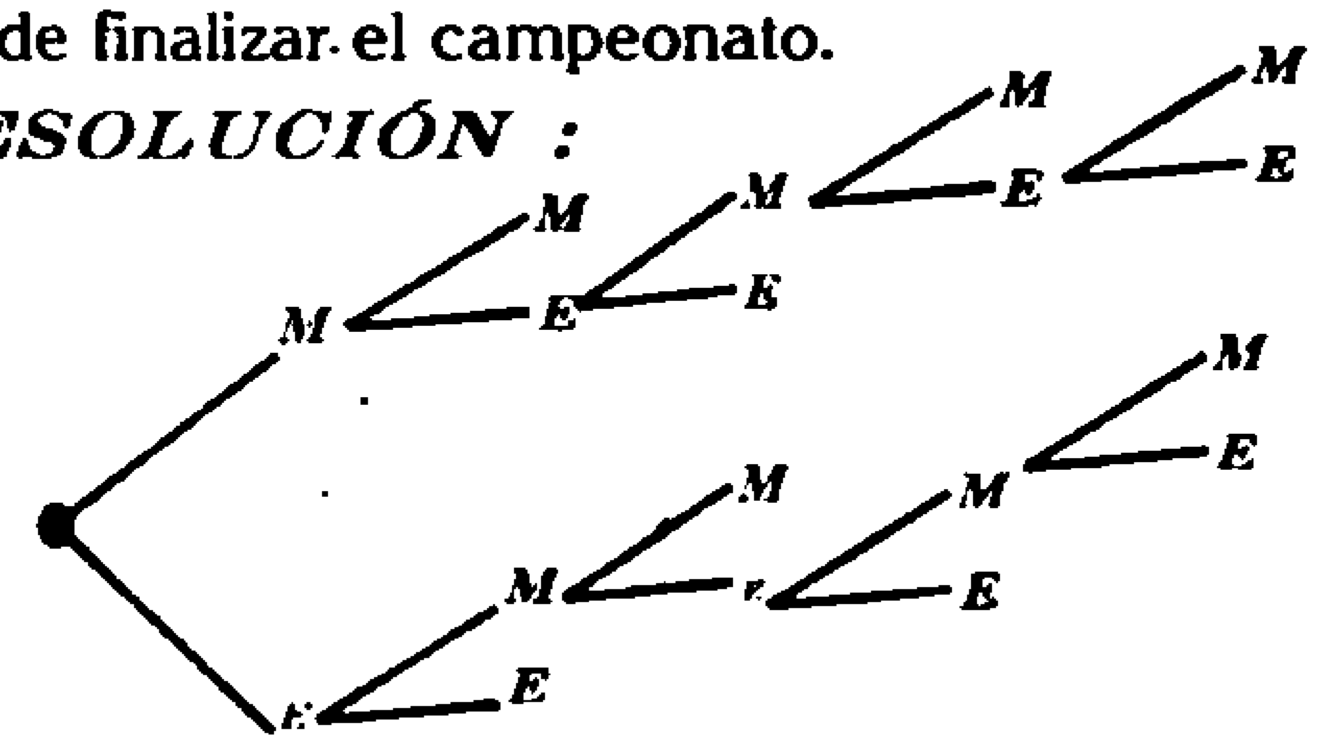
DIAGRAMA DE ÁRBOL

Un diagrama de árbol es el dibujo que se usa para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos en donde cada experimento puede suceder en un número finito de maneras . En los ejemplos que siguen , ilustraremos la construcción de diagramas de árbol.

EJEMPLO 1 :

Marcos y Enrique van a jugar un campeonato de tenis. El primero en ganar dos juegos seguidos o que gane un total de tres juegos, gana el torneo. El diagrams siguiente da varias formas en las cuales puede finalizar el campeonato.

RESOLUCIÓN :



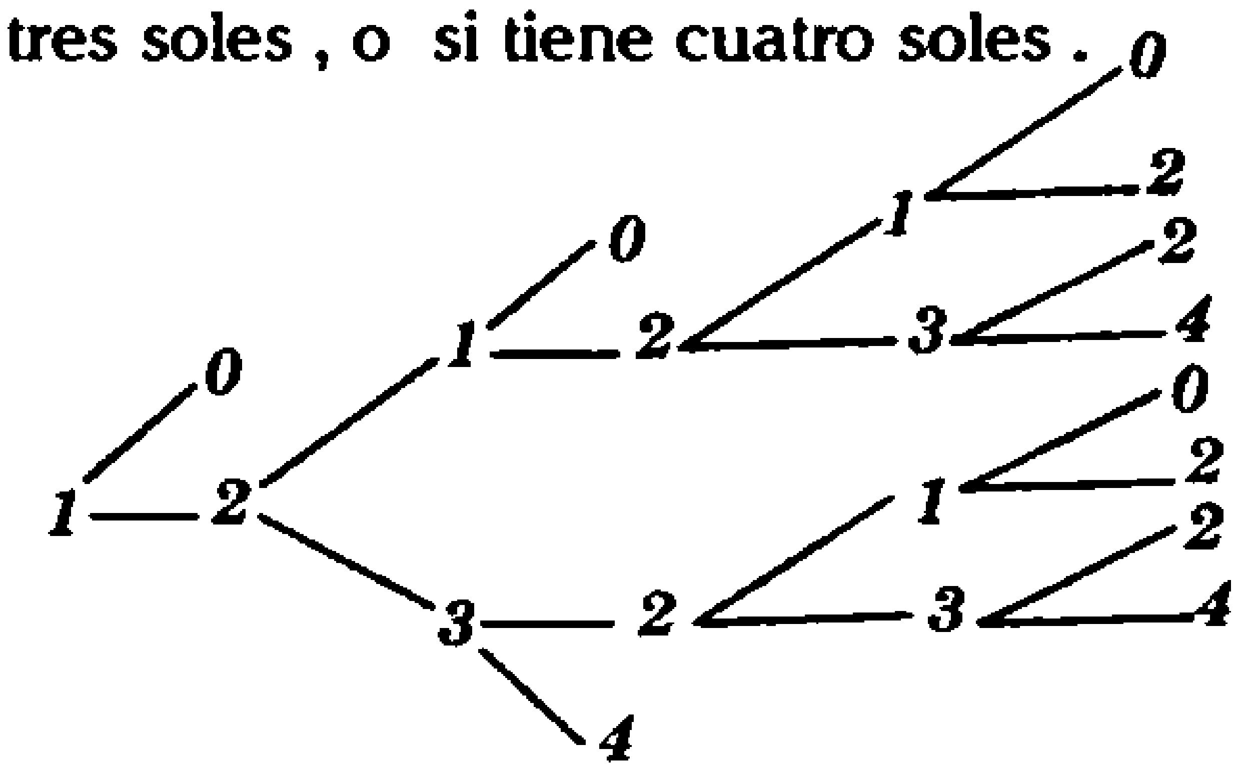
Observemos que existen ***10*** puntos extremos, los cuales corresponden a las ***10*** maneras en que puede finalizar el campeonato :

MM, MEMM, MEMEM, MEMEE, MEE, EMM, EMEMM, EMEME, EMEE, EE

La trayectoria desde el comienzo del árbol al punto extremo describe quien gane determinado juego durante el torneo.

EJEMPLO 2 :

Un hombre tiene tiempo de jugar ruleta por lo menos cinco veces . En cada ocasión gana o pierde un sol. El hombre comienza con un sol y se detendrá antes de la quinta ocasión, si pierde todo su dinero o si gana tres soles , o si tiene cuatro soles .



El diagrama de árbol describe la manera en la cual las apuestas puede desarrollarse. Cada número del diagrama representa los pesos que tiene en ese punto. Las apuestas pueden tener lugar de ***11*** maneras diferentes. Notemos que dejará el juego antes de la quinta ocasión , en tres de los casos solamente.

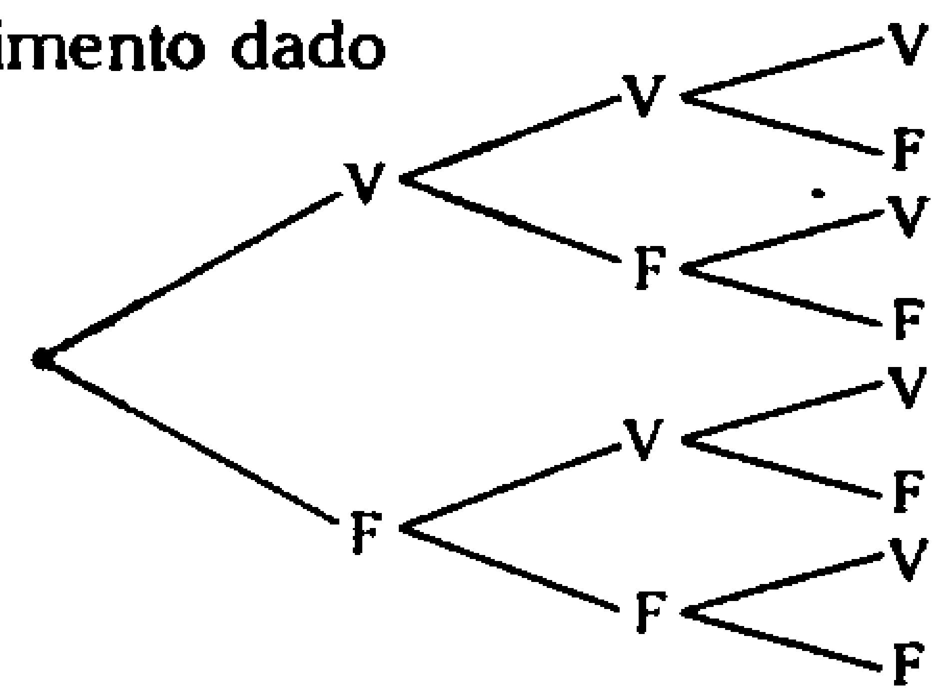
EJEMPLO 2 :

Si en una prueba de verdadero – falso hay tres preguntas, ¿de cuántas formas diferentes pueden contestarse estas tres preguntas?

A) 8 B) 6 C) 10 D) 4 E) 3

RESOLUCIÓN :

Consideremos ***V*** para la respuesta verdadero y ***F*** para la respuesta falso . Los resultados posibles del problema lo obtendremos construyendo un diagrama de árbol . La construcción del diagrama de árbol se realiza de izquierda a derecha y en cada rama se coloca los resultados posibles del experimento dado



Los puntos finales el diagrama de árbol indica el número de resultados posibles de la prueba . Los ***8*** resultados posibles de la prueba son : ***VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF.***

RPTA : "A"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un baile escolar la profesora forma parejas extrayendo de una bolsa el nombre de un niño y de otra bolsa el nombre de una niña . Si en el aula hay

9 niños y *7* niñas, ¿cuántas posibles parejas distintas se podría formar?.

A) 63 B) 5040 C) 45360 D) 181440 E) 196

RESOLUCIÓN :

* Por cada niño se tiene la opción de formar *7* parejas (dado que hay *7* niñas), entonces como hay *9* niños, se puede formar un total de :

$$9\times 7 = 63 \text{ parejas}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

¿De cuántas formas se pueden sentar siete personas en torno a una mesa circular, si tres de las personas insisten en sentarse juntas?

A) 240 B) 720 C) 144 D) 36 E) 210

RESOLUCIÓN :

* En primera instancia las tres personas juntas pueden considerarse como una sola persona , con la que el número total se reduce a *5*, y se tiene $P^C_{(5)}$ ordenaciones distintas en torno de la mesa circular. Pero cada uno de estos , las tres personas juntas pueden ordenarse entre sí, originando P_3 ordenaciones distintas. Por el principio de multiplicación, el número de maneras de sentarse en torno a una mesa circular las *7* personas es :

$$P_3\times P^C_{(5)} = 3!\times(5-1)! = 3!\times 4! = 144$$

RPTA : "C"

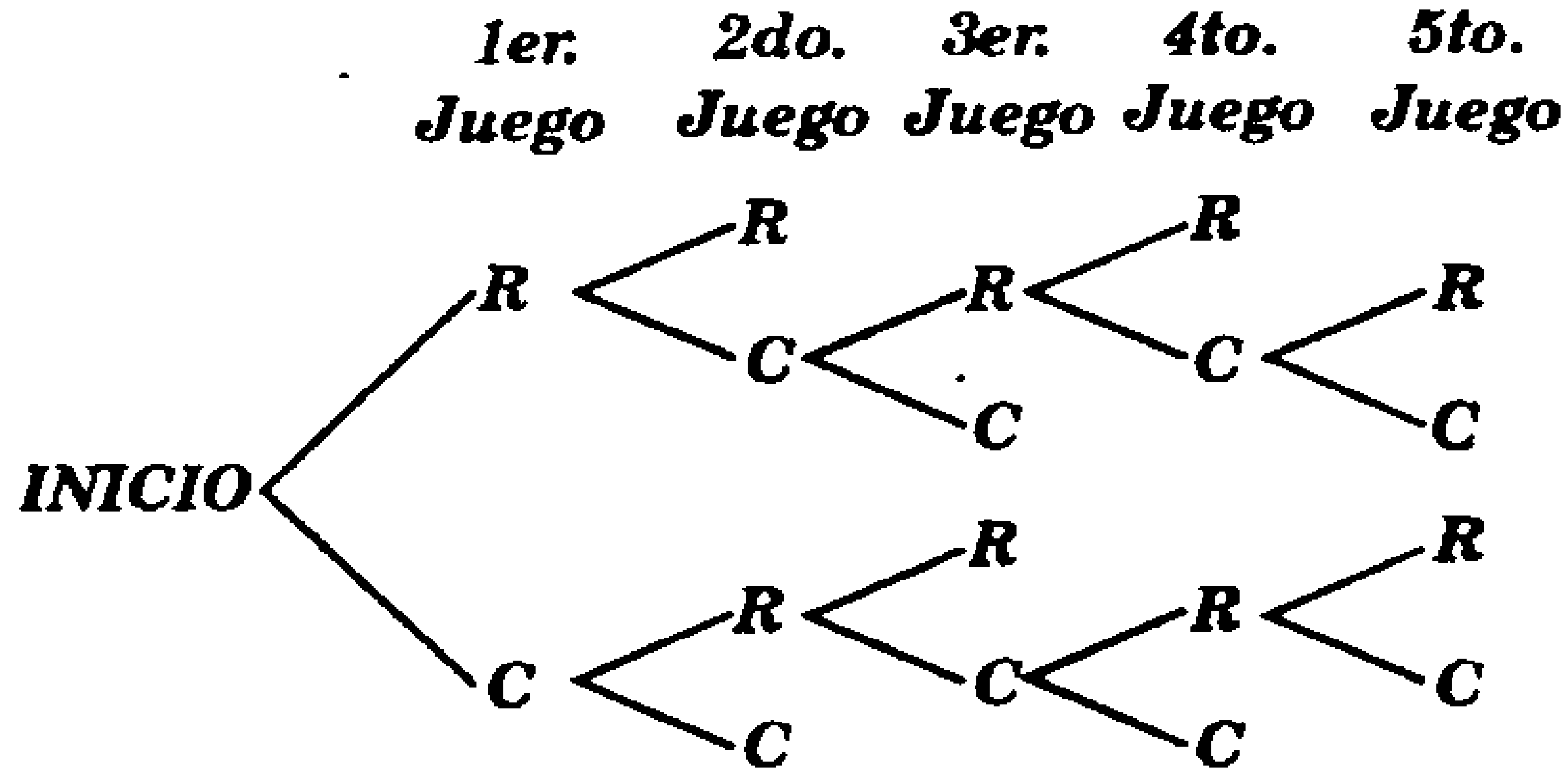
PROBLEMA 3 :

Raúl y César intervienen en un torneo de ajedrez : La primera que gana dos juegos seguidos o que complete tres gana el torneo , ¿Cuál es el número de maneras diferentes de cómo puede suceder el torneo?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Consideremos *R* y *C* los juegos ganados por Raúl y Cesar, respectivamente en cada jugada. El diagrama de árbol siguiente muestra los posibles resultados del torneo .



El diagrama tiene *10* puntos finales que corresponde a los *10* resultados posible del torneo :

RR, RCRR, RCRCR, RCRCC, RCC, CRR, CRCRR, CRCRC, CRCC, CC.

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

¿De cuántas manera diferentes se pueden acomodar *7* personas en un automóvil (en marcha) de *5* asientos, sabiendo que sólo *3* de ellos saben manejar y que dos personas no viajan en dicho auto?

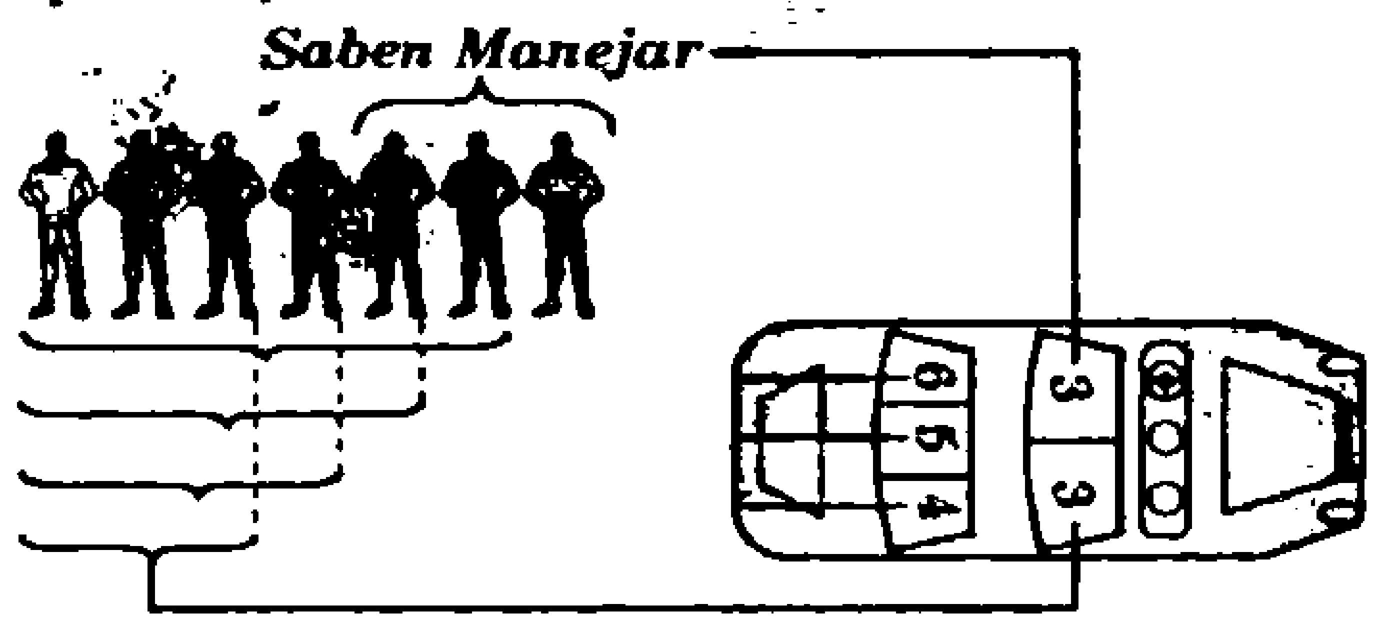
A) 1080 B) 1440 C) 360 D) 2160 E) 540

RESOLUCIÓN :

Al resolver el problema se debe tener en cuenta :

* El lugar del chofer puede ser ocupado sólo por *3* personas.

* Luego de ser ocupado el lugar del chofer por uno de los *3* que saben manejar , quedan *(7–1)=6* personas que van a permutarse en los otros *4* lugares que quedan, es decir :



Número de maneras $= 3\times P^6_4 = 1080$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

¿De cuántas maneras diferentes puede escogerse un comité , compuesto de *2* hombres y *3* mujeres, de un grupo de *4* hombres y *5* mujeres?

A) 90 B) 45 C) 80 D) 60 E) 72

RESOLUCIÓN :

* De los *4* hombres se pueden escoger *2* de C^4_2 maneras, y de las *5* mujeres, se puede escoger *3* de C^5_3 maneras. Por el principio de multiplicación, el comité se puede escoger de :

$$C^4_2\times C^5_3 = 60 \text{ manera distintas.}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar *4* personas en una banca con respaldar de *4* asientos?

A) 24 B) 12 C) 18 D) 20 E) 27

RESOLUCIÓN :

* Las *4* personas ubicadas en un orden representan una permutación . Entonces el número de maneras de ubicarse las *4* personas en la banca es :

$$P_4 = 4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir **3** fichas iguales en un recuadro como se muestra en la figura, si en cada fila y columna haya a lo más una ficha?

A) 27   B) 81   C) 3   D) 6   E) 24

RESOLUCIÓN :

* Para colocar la primera ficha en la 1^{ra} columna se tendrá **3** posibilidades. La segunda ficha necesariamente en la 2^{da} columna , donde tendrá **2** posibilidades (ya que no podrá colocarse en la fila que se colocó la primera ficha). La tercera ficha en la tercera columna , donde tendrá 1 posibilidad (ya que no puede colocarse en las filas que fueron colocados la primera y segunda ficha), pero debemos colocarlas a la vez entonces :

$$1^{ra} \text{ (y) } 2^{da} \text{ (y) } 3^{ra} \text{ ficha}$$

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Número de maneras

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

¿Cuántos números de **3** cifras existen?

A) 99   B) 999   C) 899   D) 900   E) 100

RESOLUCIÓN :

* Un número de **3** cifras está formado por :

Centenas y Decenas y unidades

$\overline{abc}$

Pueden ser

a	b	c
1	0	0
2	1	1
3	2	2
:	:	:
9	9	9

OJO : Un número no puede empezar con cero, es decir $a \neq 0$.

$$9 \times 10 \times 10 = 900 \text{ \#s de 3 cifras}$$

número de posibilidades

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 : .

Al lanzar un dado y una moneda simultáneamente. ¿Cuántos resultados se obtendrán?

A) 7   B) 8   C) 10   D) 4   E) 12

RESOLUCIÓN :

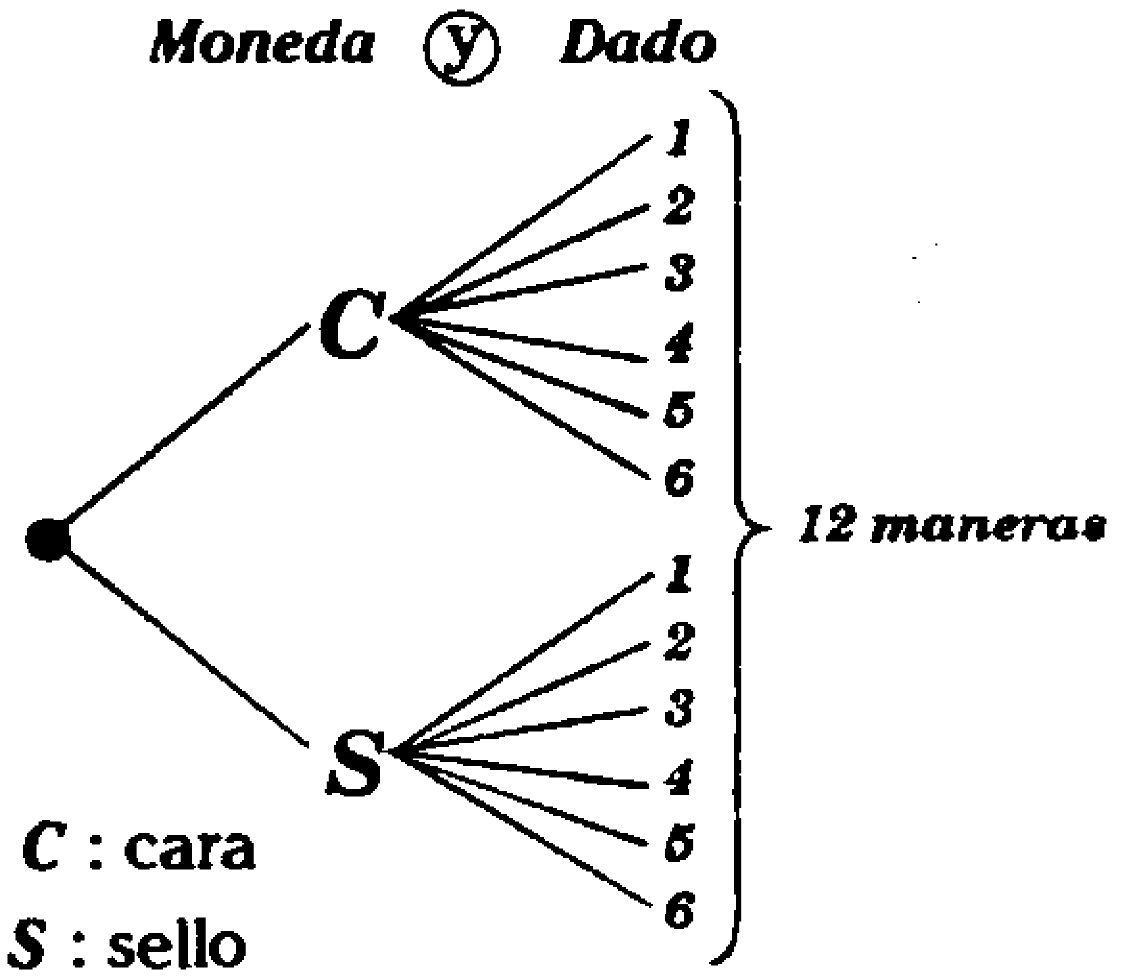
Dado y *moneda*

$$\underbrace{6 \times 2}_{\text{Posibilidades}} = 12 \text{ resultados}$$

RPTA : "E"

OJO :

También se puede mostrar por el diagrama del árbol



Donde : **C** : cara

S : sello

PROBLEMA 10 :

En un código secreto que consta de solo **2** símbolos: **O** y **✈** , se pueden formar únicamente **4** palabras: **O,O✈,✈✈✈** Mabel encuentra escrito un mensaje, pero sin separar entre una palabra y otra : **O✈✈O✈O** . ¿De cuántas maneras podrá interpretar el mensaje?

A) 2   B) 4   C) 5   D) 6   E) 8

RESOLUCIÓN :

* Separemos el mensaje: .. ✈✈.. ✈ .. con comas y usando solo las **4** «palabras» permitidas :

O,✈✈,O,✈,O   O✈, ✈ ,O,✈,O   O,✈✈,O✈,O

O✈,✈,O✈,O   O,✈,✈,O,✈,O   O,✈,✈,O✈,O

⇒ Son **6** formas.

RPTA : "D"

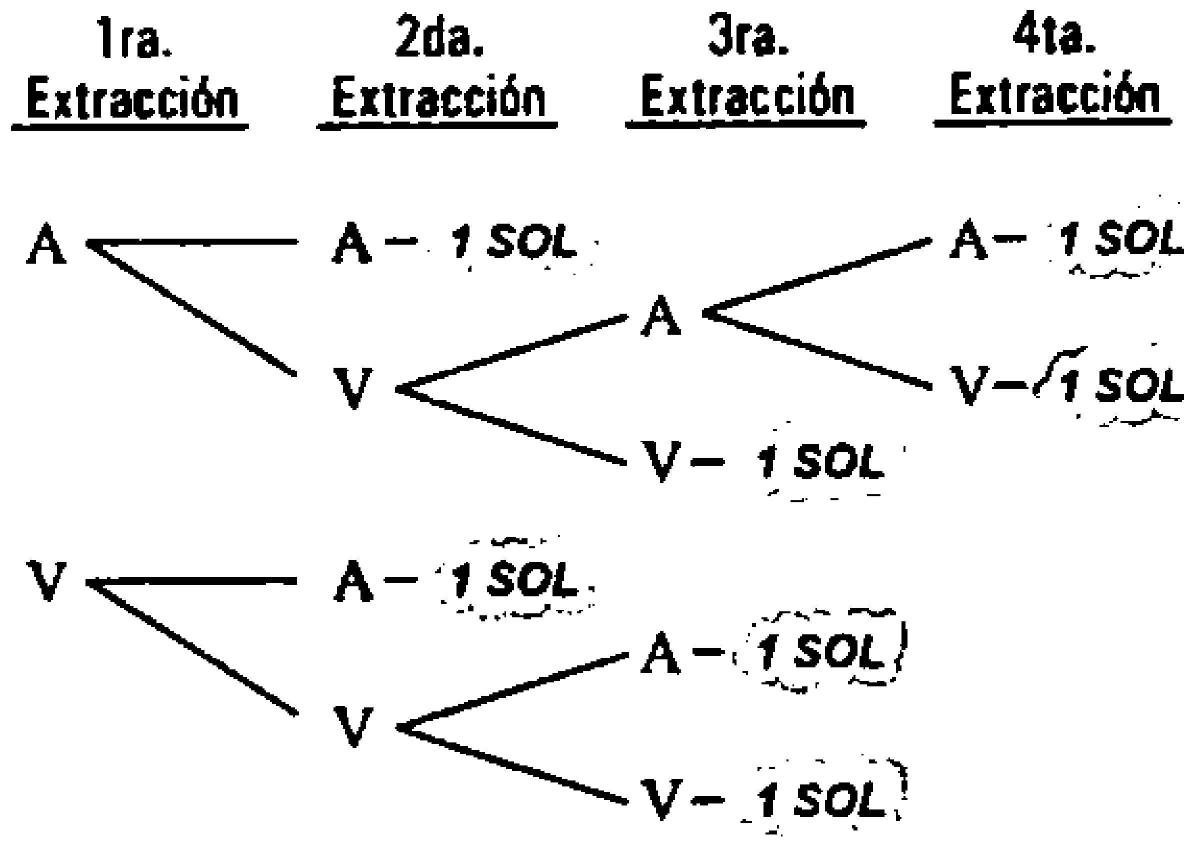
PROBLEMA 11 :

Se tiene una urna con fichas azules y verdes, para ganar **1** sol , es necesario sacar **2** fichas azules seguidas o **2** fichas verdes de cualquier forma. ¿De cuántas maneras se puede ganar un sol?

A) 7   B) 2   C) 6   D) 8   E) 9

RESOLUCIÓN :

* Por el diagrama del árbol :



6 {*AA, AVAA, AVAV, VVV, VA, VVA, VVV*}

según el gráfico , puedo ganar sol de *7* maneras: donde: *A* : azul ; *V* : verde

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Un producto se vende en *3* mercados en el primero se tienen disponibles *7* tiendas en el segundo en *4* tiendas y en el tercero en *6* tiendas. ¿De cuántas maneras puede adquirir una persona un ejemplar de dicho producto?

A) 148 B) 17 C) 168 D) 24 E) 236

RESOLUCIÓN :

* El producto lo podrá adquirir en el :

$$\overbrace{7}^{1er.\ mercado} + \overbrace{4}^{2do. mercado} + \overbrace{6}^{3er\ mercado} = 17 \text{ maneras}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

¿Cuántos grupos diferentes de *2* elementos , se puede formar con *10* elementos?

A) 10 B) 100 C) 45 D) 50 E) 55

RESOLUCIÓN :

* Sean «*A*» y «*B*» *2* elementos luego *AB* y *BA* representan el mismo grupo (no interesa el orden), entonces aplicaremos combinaciones

de grupos de *2* en *2* : $C_2^{10} = \dfrac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Con seis pesas de *1; 2; 3; 5; 10; 30; 70 kg* . ¿Cuántas pesas diferentes pueden obtenerse, tomando aquellas de *3* en *3*?

A) 15 B) 120 C) 20 D) 60 E) 80

RESOLUCIÓN :

* Como los grupos de *1; 2; 5 y 5; 2; 1* representan el mismo peso, entonces no importa el orden :

Pesas disponibles

$$\#\text{ de grupos de 3 en 3} : C_3^6 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Un total de *120* estrechadas de mano se efectuaron al final de una fiesta . Si cada participante es cortés con los demás, el número de personas era :

A) 12 B) 18 C) 20 D) 14 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Sea *n*: Número de personas y cómo las estrechadas de mano se dan cada *2* personas (sin interesar el orden).

de estrechadas de mano : $C_2^n = 120$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 120 \Rightarrow n(n-1) = 240$$

$$n\ (n-1) = 16 \times 15$$

$$n = 16$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

¿De cuántas maneras puede escogerse un comité compuesto de *3* hombres y *2* mujeres de un grupo de *7* hombres y *5* mujeres.

A) 530 B) 350 C) 305 D) 450 E) 380

RESOLUCIÓN :

I) Los *3* hombres lo escogeremos de un grupo de *7*

II) Las *2* mujeres los escogeremos de un grupo de *5*, y cómo queremos.

Un comité de 5 personas

Hombres y Mujeres

$$C_3^7 \times C_3^5 = 35 \times 10$$
$$= 350$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

5 viajeros llegan a una comunidad en la que hay *6* hoteles. ¿De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en hoteles diferentes?

A) 60 B) 24 C) 120
D) 720 E) 30

RESOLUCIÓN :

* Como es diferente hospedarse en el hotel «*A*» , que en el hotel «*B*» (interesa el orden), luego aplicaremos :

$$P_5^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720 \text{ maneras}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

¿De cuántas maneras diferentes, *2* peruanos, *3* argentinos y *4* colombianos pueden sentarse en fila de modo que los de la misma nacionalidad se sientan juntos?

A) 864 B) 1728 C) 688
D) 892 E) 1700

RESOLUCIÓN :

* Unas de las maneras será :

P_1	P_2	A_1	A_2	A_3	C_1	C_2	C_3	C_4

Juntos *Juntos* *Juntos*

* Pero debemos permutar o ordenar :

Per. ⓨ Arg. ⓨ Col. ⓨ todos a la vez

$P_2^2 \times P_3^3 \times P_3^3 \times P_3^3$

$= 2 \times 6 \times 24 \times 6 = 1728$ maneras

RPTA : "B"

PROBLEMA 19:

Se puede pintar cada cara de un cubo , o bien de negro o bien de blanco. Dos maneras de pintar un cubo se consideran diferentes si no es posible confundirlos sin importar cómo se sostiene el cubo para mirarlo. El número de maneras diferentes en que se puede pintar el cubo es :

A) 5 *B) 7* *C) 8* *D) 10* *E) 12*

RESOLUCIÓN :

- Con las *6* caras de blanco : *1* manera
- Con 1 cara de negro y *5* de blanco : *1* manera
- Con *2* caras de negro y *4* de blanco : *2* maneras
- Con *3* caras de negro y *3* de blanco : *2* maneras
- Con *4* caras de negro y *2* de blanco : *2* maneras
- Con *5* caras de negro y *1* de blanco : *1* manera
- Con las *6* caras de negro : *1* manera

$\Rightarrow$ ***10*** maneras

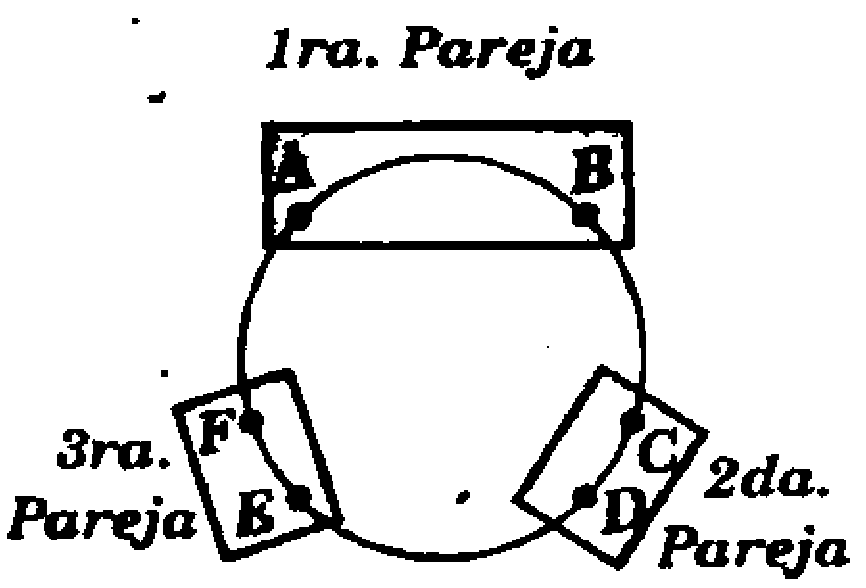
RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

¿De cuántas maneras *3* parejas de esposos se pueden ubicar en una mesa circular para jugar casino, si éstas parejas juegan siempre juntas?

A) 120 *B) 16* *C) 48* *D) 144* *E) 72*

RESOLUCIÓN :



* Primero hay que ordenar por separado cada pareja y luego todos juntos en forma circular :

$P^{2personas}_{2posiciones}$

1ra. Pareja	ⓨ	2da. pareja	ⓨ	3ra. pareja	ⓨ	Juntos
2	×	2	×	2	×	$P_3^{circular}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2! = 16$ maneras

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

¿Cuántos arreglos diferentes se pueden hacer con todas las letras de la palabra «*JAPANAJA*»?

A) 8! *B) 840* *C) 120* *D) 8* *E) 64*

RESOLUCIÓN :

* Estamos frente a una permutación con repetición , ya que «*A*» se repite *4* veces y la «*J*» *2* veces

Total de letras

$$P^{8}_{(4,2)} = \frac{8!}{4!\,2!} = 840\ arreglos$$

(8 → *Total de letras*)

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Con las frutas : plátano , papaya , melón , piña y mamey. ¿Cuántos jugos de diferentes sabores se podrán hacer?

A) 13 *B) 10* *C) 25* *D) 32* *E) 31*

RESOLUCIÓN :

* Como el jugo de plátano y papaya tiene el mismo sabor que de papaya y plátano (no importa el orden), entonces podemos formar jugos de :

1 sabor : $C_1^5 +$
2 sabores : C_2^5
3 sabores : C_3^5
4 sabores : C_4^5
5 sabores : C_5^5

Se suman, debido a que el jugo puede ser de 1 sabor ó de 2 sabores o 3 sabores ,..., o de 5 sabores.

$= \underbrace{2^5 - 1}_{ver\ propiedad} = 31$

RPTA : "E"

PROBLEMA 23:

Un palco de *4* asientos , es vendido a *2* parejas . ¿De cuántas maneras diferentes podemos acomodar si cada pareja quiere estar junta?

A) 2 *B) 16* *C) 12* *D) 8* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

*Sean las parejas : A y *B* ; *C* y *D* las *2* parejas permutan de $P_2^2 = 2$ maneras , en cada pareja los integrantes se permutan de *2* maneras, como son *2* parejas permutarían de *2×2* maneras .

A	B	C	D

$2 \times 2 \times 2 = 8$ *Maneras diferentes*

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

De *8* hombres y *5* mujeres , ¿de cuántas formas distintas se pueden seleccionar un grupo mixto de *7* personas integrado con por lo menos *3* hombres?

A) 78 *B) 94* *C) 1024* *D) 1680* *E) 169*

RESOLUCIÓN :

* Los grupos serán de la forma : $C_H^8 \times C_M^5$

donde $H \geq 3$ y $H + M = 7$

Número de formas : $C_3^8 \times C_4^5 + C_4^8 \times C_3^5 + C_5^8 \times C_2^5 + C_6^8 \times C_1^5$

Número de formas : ***1680***

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

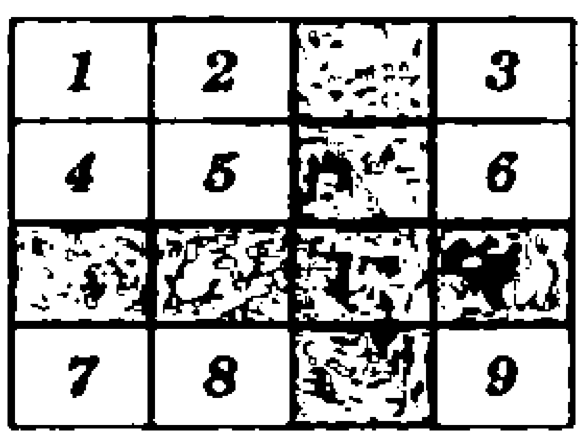
Un juego consiste en un tablero cuadriculado de ***4×4***. ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse ***2*** fichas, sin que estén en la misma columna ni en la misma fila?

A) 64 B) 56 C) 132 D) 144 E) 256

RESOLUCIÓN :

* La primera ficha puede ubicarse en cualquiera de los ***16*** casilleros

* Para la segunda ficha le queda únicamente ***9*** casilleros (ver figura)



1ra. y 2da.

Número de formas : $16 \times 9 = 144$

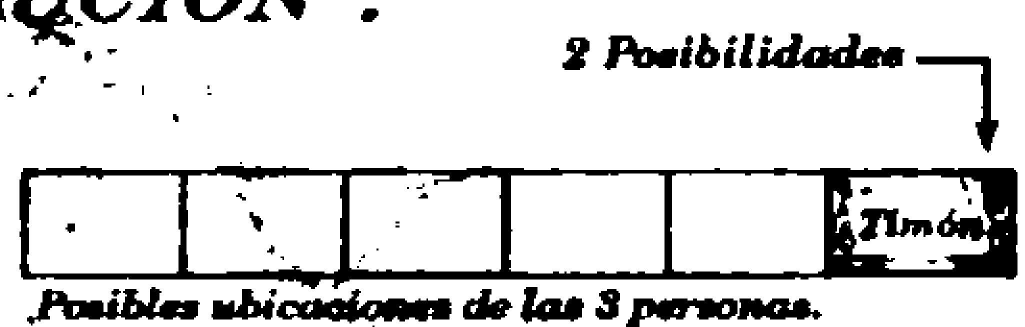
RPTA : "D"

PROBLEMA 26 :

4 personas abordan un automóvil en el que hay ***6*** asientos. Si sólo ***2*** saben conducir , ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

A) 24 B) 60 C) 120 D) 240 E) 360

RESOLUCIÓN :



Número de posibilidades : $P_3^5 \times 2 = 120$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar ***10*** personas en una mesa redonda de ***6*** asientos , si ***4*** están en espera?

A) 2520 B) 12000 C) 25200 D) 10! E) 15!

RESOLUCIÓN :

* Debemos escoger ***6*** personas y ordenarlas :

Escoger y Ordenar

$C_6^{10} \times P_6^{Circular} = 25200$

RPTA : "C"

PROBLEMA 28 :

Un examen consta de ***12*** preguntas de las cuales el estudiante debe contestar ***10*** . Si de las ***6*** primeras preguntas debe contestar por lo menos ***5*** , ¿cuántas posibilidades de elegir ***10*** preguntas tiene el estudiante?

A) 15 B) 36 C) 51 D) 21 E) 27

RESOLUCIÓN :

* Hay en total ***12*** preguntas . Por condición sólo hay que contestar ***10***. Como de las ***6*** primeras se debe contestar al menos ***5*** entonces se puede responder ***5*** ó ***6*** de estas preguntas y de las ***6*** últimas hay que elegir ***5*** y ***4*** preguntas , respectivamente .

* Luego los casos serían :

(5 preg. y 5 preg.) o (5 preg. y 4 preg.)

$\text{\# de casos} = C_5^6 \times C_5^6 + C_6^6 \times C_4^6$

$\text{\# de casos} = 6 \times 6 + 1 \times 15 = 51$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29:

¿Cuántas palabras de seis letras, que contengan dos vocales diferentes y cuatro consonantes distintas, se pueden formar con cuatro vocales incluyendo la ***e*** y seis consonantes incluyendo la ***s***, de manera que empiecen con ***e*** y contengan la ***s***.

A) 21600 B) 3600 C) 7200 D) 10800 E) 9600

RESOLUCIÓN :

Letras disponibles :

4 vocales incluyendo la ***«e»***

6 consonantes incluyendo la ***«s»***

Las palabras deben tener : .

2 vocales y ***4*** consonantes

Deben empezar por ***«e»*** y contener a la ***«s»***

EJEMPLO :

e _ _ ***S*** _ _

lugar fijo — *5 Letras*

Falta considera ***1*** vocal y ***3*** consonantes

⇒ Quedan :

3 opciones de tomar ***1*** vocal y además C_3^5 opciones de tomar ***3*** consonantes , además faltarían ordenar las ***5*** últimas letras, dado que formamos palabras:

$\text{\# Palabras } 3 \times C_3^5 \times 5! = 3600$

(N de formas de ordenar las 5 letras restantes)

RPTA : "B"

PROBLEMA 30 :

Dos varones y tres chicas van al cine y encuentran ***5*** asientos juntos, en una misma fila , donde desean

acomodarse.¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si las tres chicas no quieren estar una al costado de la otra?

A) 10 B) 16 C) 18 D) 15 E) 12

RESOLUCIÓN :

Número de maneras diferentes será

M	V	M	V	M

$3\times 2\times 2\times 1\times 1=12$

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

Un cuadrado está dividido en nueve cuadrados iguales. ¿De cuántas maneras se puede pintar con verde, negro y rojo , de modo que en cada horizontal y en cada vertical haya un cuadrado de cada color?

A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Los tres cuadrados superiores los podemos pintar mediante las permutaciones :

VNR , VRN , NRV , NVR , RNV y *RVN*

* Para cada una, sólo hay *2* formas de pintar los cuadrados restantes.

⇒ Hay $2\times 6=12$ formas diferentes.

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

Cierto juego consiste en lanzar dos dados. Se gana el juego si el resultado es :

a : La suma da *7* o ***b :*** Los dos dados muestran el mismo número.

Sea el siguiente experimento : «Se lanzan dos dados, si se gana terminamos el experimento ; si no se ganan se vuelve a lanzar los dados , terminando el experimento.

¿Cuántos eventos elementales tiene el espacio de muestras (espacio de posibilidades favorables) asociado al experimento mencionado

A) 1296 B) 876 C) 864 D) 432 E) 888

RESOLUCIÓN:

* Casos en que se gana el juego :

{(1;1) , (2;2) , (3;3) , (4;4) , (5;5) , (6;6) , (6;1) , (2;5) , (3;4) , (4;3) , (5;2) , (6;1)}

* Se nota que existe *12* posibilidades de ganar y el número de posibilidades de perder será :

$$\left(\begin{matrix}\text{Total de}\\ \text{posibilidades}\end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix}\text{Número de}\\ \text{posibilidades}\\ \text{de ganar}\end{matrix}\right)=6\times 6-12=24$$

* Luego el número de posibilidades asociadas al evento será.

Ganar o (ganar y perder) ó (perder y perder)

$$12 + 12\times 24 + 24\times 24 = 876$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Se tiene una urna con *6* bolas blancas , *3* negras y *3* rojas. Determine de cuántas maneras se puede extraer *4* bolas , de tal manera que :

I) sean de cualquier color.

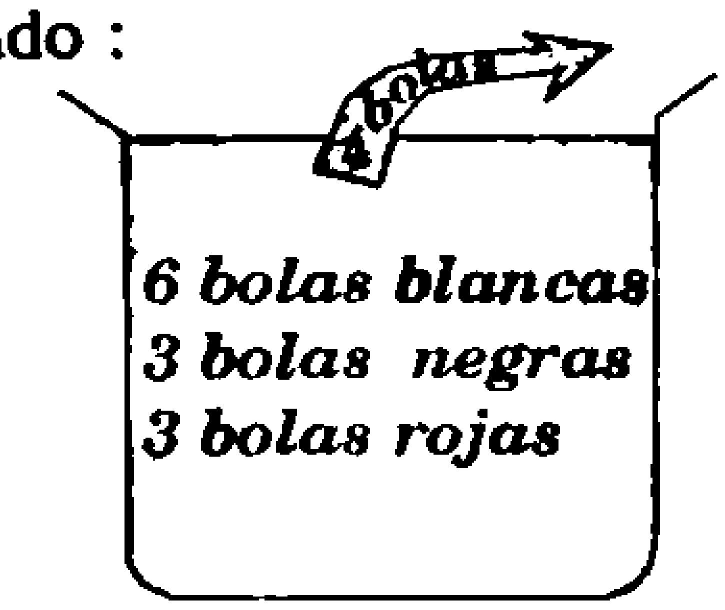
II) sean *2* blancas , una negra y una roja.

III) por lo menos *3* del mismo color.

A) 430; 135; 140 B) 450; 140; 135 C) 495; 140; 138 D) 135; 140; 495 E) 495; 135; 138

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado :



I) ¿De cuántas maneras se pueden extraer cuatro de cualquier color?

Hay *12* bola y se extrae *4* ; entonces el número de maneras es : $C_4^{12}=495$

II) ¿De cuántas maneras se pueden extraer *2* bolas blancas , *1* negra y *1* roja?

2 bolas blancas	1 negra	1 roja
C_2^6 ×	C_1^3 ×	C_1^3
15 ×	3 ×	3 = 135 maneras

III) ¿De cuántas maneras se pueden extraer *3* del mismo color?

* Se extrae *3* blancas y una de otro color :

$$C_3^6\times 6=120 \text{ maneras.}$$

* Se extrae *3* negras y una de otro color :

$$C_3^3\times 9=9 \text{ maneras.}$$

* Se extrae *3* rojos y una de otro color

$$C_3^3\times 9=9 \text{ maneras.}$$

$$\Rightarrow 120+9+9=138 \text{ maneras}$$

RPTA :"E"

PROBLEMA 34 :

Un equipo de béisbol consta de *6* jardineros , *7* jugadores de cuadra , *5* lanzadores y *2* receptores (entre titulares y suplentes). ¿De cuántas formas diferentes se puede elegir un equipo de *9* jugadores, sabiendo que debe haber *3* jardineros , *4* jugadores

de cuadra , un lanzador y un receptor?

A) 7 *B) 70* *C) 700* *D) 7000* *E) 77*

RESOLUCIÓN :

	Jardineros	Jugadores de cuadra	Lanzadores	Receptores	
Se cuenta con:	6	7	5	2	
Se requiere:	3	4	1	1	
Se puede escoger:	C_3^6 ×	C_4^7 ×	C_1^5 ×	C_1^2	=7000

7000 Formas Diferentes

RPTA : "D"

PROBLEMA 35 :

Los equipos de fútbol de la *UNI* y de la *UNMSM* participan en un torneo que consiste en varios partidos. la regla del torneo considera que no hay empates y campeona el primer equipo que gana *2* partidos seguidos o un total de *3* partidos. ¿De cuántas formas se puede desarrollar la serie de partidos?

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

RESOLUCIÓN :

* Hay sólo **2** equipos , uno de la *UNI* y el otro de *UNMSM*.

Por condición del problema , el torneo terminará cuando un equipo gane :

* *2* partidos consecutivos (lo cual equivale a que el otro pierda dos partidos cónsecutivos).

* Un total de tres partidos.

Analizando :

I) Si la *UNI* empezara ganando :

# Partido:	1er.	2do.	3er.	4to.	5to.	Casos
	G	→ G				GG
		P	→ P			GPP
			G	→ G		GPGG
				P	→ P	GPGPG
					G	GPGPP

II) Si la *UNMSM* empezara ganando se repite el mismo esquema anterior , es decir *5* casos más.

RPTA : "E"

PROBLEMA 36 :

En una reunión hay *40* damas y *20* varones . Se desea elegir un presidente , vicepresidente , tesorero y un secretario . La condición es que el tesorero sea una dama y el secretario un varón y nadie puede ocupar más de un cargo . Entonces el número de maneras en que puede elegirse ese grupo directivo es igual a:

A) 2644800 *B) 2844600* *C) 2866400*
D) 3088400 *E) 3244800*

RESOLUCIÓN :

Pres.	Vice-P.	Tes.	Secr.	
V	V	M	V	... (1)
V	M	M	V	... (2)
M	M	M	V	... (3)
M	V	M	V	... (4)

$(1): 20 \times 19 \times 40 \times 18 = 273\,600 +$

$(2): 20 \times 40 \times 39 \times 19 = 592\,800$

$(3): 40 \times 39 \times 38 \times 20 = 1\,185\,600$

$(4): 20 \times 19 \times 40 \times 18 = \underline{592\,800}$

$2\,644\,800$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

Un palco de *4* asientos es vendido a *2* parejas . ¿De cuántas maneras diferentes podemos acomodarlos si cada pareja quiere estar junta?

A) 2 *B) 16* *C) 12* *D) 8* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

* Sean las parejas *A* y *B* ; *C* y *D*

Las *2* parejas permutan de *2*! maneras , en cada pareja los integrantes permutan de *2* maneras . como son *2* parejas permutarían de *2×2* maneras :

A	B	C	D

$2! \times 2! \times 2 = 8$ *Maneras Diferentes*

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

Un Club tiene «*x*» miembros y está organizado en cuatro comités de acuerdo con las *2* reglas siguientes:

I) Cada miembro pertenece a dos y solamente a *2* comités.

II) Cada par de comités tiene uno y sólo un miembro en común.

Entonces «*x*» es .

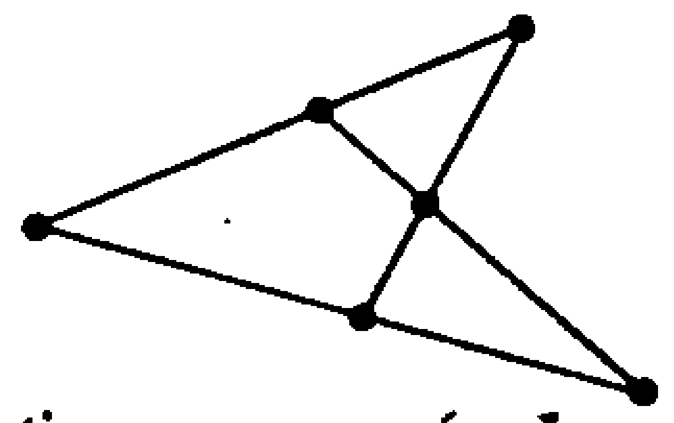
A) 4 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

RESOLUCIÓN :

* Este problema se puede interpretar como una figura geométrica compuesta por *4* rectas y *6* puntos , tal que cada par de rectas tiene solamente un punto en común ; y cada par de puntos tiene una recta en común.

o también :

$$x = C_2^4 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$



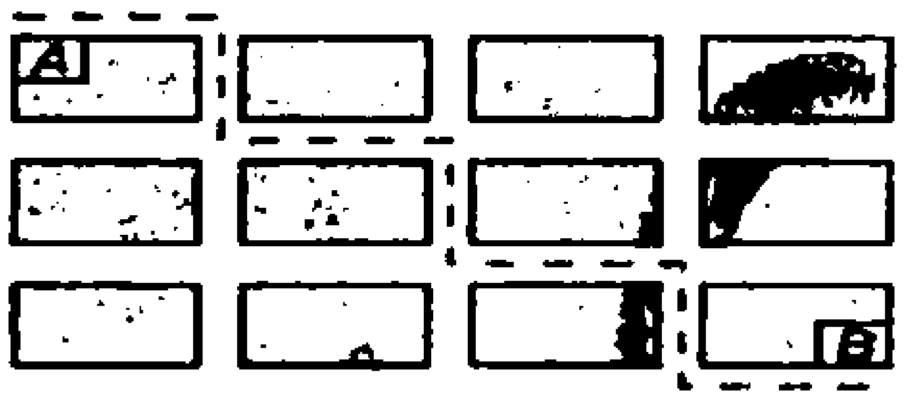
Donde cada *2* rectas tiene en común *1* punto .

RPTA : "B"

PROBLEMA 39 :

La línea punteada indica el camino a seguir, para llegar a *«B»* desde *«A»*, a través de las veredas . ¿Cuántos caminos diferentes , pero de igual longitud podemos recorrer para desplazarnos entre los puntos mencionados?

A) 20
B) 35
C) 12
D) 5040



RESOLUCIÓN :

* Se observa que a partir de *«A»* hasta *«B»* hay que recorrer *7* cuadras : *4* horizontales *(H)* y *3* verticales *(V)*, las posibilidades serán :

{ *HVHVHVH, HHHHVVV, VHVHVHH, ...*}

* Luego el problema consistiría en permutar *4H* y *3V*, lo cual es, una permutación con repetición .

$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Número de}\\ \text{caminos diferentes}\end{matrix} : P^{7}_{(4,3)} = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40 :

Si de los números del *1* al *1000* se marcan los números que contengan la cifra *2* o la cifra *5*. ¿Cuántos números se marcan?.

A) 506 B) 510 C) 511 D) 512 E) 515

RESOLUCIÓN :

PARTE I : Los números de una cifra.

{*1 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9*} (*7* se marcan)

PARTE II : Los números de dos cifras .

$\overline{a\ b}$
↓ ↓
$\overline{7 \times 8} = 56$ números marcados

PARTE III : (Los números de *3* cifras)

$\overline{a\ b\ c}$
↓ ↓ ↓
$\overline{7 \times 8 \times 8} = 448$ números marcados

PARTE IV : Los números de cuatro cifras.

{1000} (el único)

$\Rightarrow$ Total #s marcados : $7 + 56 + 448 + 1 = 512$

RPTA : "D"

PROBLEMA 41 :

Cuatro parejas de enamorados ¿de cuántas maneras diferentes pueden ubicarse alrededor de una fogata?, de modo .

I) Los hombres y mujeres queden alternados .

II) Cada pareja no se separe e indicar la suma de los resultados.

A) 81 B) 48 C) 240 D) 144 E) 82

RESOLUCIÓN :

I) Tomando como referencia a cualquier persona, luego:

$$\# \text{ de maneras} = P_4^{circular} \times P_4 = 3! \times 4! = 144$$

PAREJA

II) 1^{ra} y 2^{da} y 3^{ra} y 4^{ta} y todos

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times P_4^{circular}$$
$$= 16 \times 6 = 96$$

• La expresión a calcular será : $144 + 96 = 240$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42 :

Al ir *5* parejas de esposos al Teatro Segura tienen mala suerte de encontrar solamente *5* asientos juntos en una misma fila , ¿de cuántas maneras distintas sentar?, si se quiere que por lo menos esté sentado un hombre y una mujer.

A) 25600 B) 30000 C) 25600 D) 25 E) 625

RESOLUCIÓN :

Por condición debe haber por lo menos una pareja (*H* y *M*), entonces no se debe considerar los casos :

1º) Cuando los *5* asientos son ocupados por sólo hombres.

2º) Cuando los *5* asientos son ocupados por sólo mujeres.

Luego, podemos aplicar el método del *COMPLEMENTO*, es decir :

I) Determinamos la permutación de todas las personas *(10)* que se pueden sentar en *5* asientos .

$$P_5^{10} = \frac{10!}{5!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$$

II) Determinamos, cuando los que se permutan , son todos hombres o todas mujeres .

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

* Finalmente : # maneras $= 30240 - 120 - 120 = 30000$

RPTA : "B"

PROBLEMA 43 :

¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de *5* asientos : *2* hombres , *2* mujeres y un niño de modo

que a la derecha e izquierda del niño se encuentre siempre una mujer?

A) 12 *B) 18* *C) 8* *D) 36* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

* Consideremos al grupo formado por las mujeres y el niño como un elemento, con los **2** hombres, se tendría **3** elementos para ordenar .

Número de formas $= 3 \times 2 \times 1 = 6$

Este grupo tiene al centro, pero las mujeres pueden cambiar su ubicación de **2** formas.

* Luego :

(Ordenar los **3** elementos) y (ubicación de **2** mujeres)

↓ **6** ↓ **2**

Total de formas $= 6 \times 2 = 12$ formas

RPTA : "A"

PROBLEMA 44 :

¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir una persona que tiene **6** ternos (**2** iguales), **5** pares de medias (**3** iguales), **2** pares de zapatos , **8** corbatas (**2** iguales) y **6** camisas (**3** iguales)?

A) 420 *B) 280* *C) 288* *D) 840* *E) 2880*

RESOLUCIÓN :

* Como de los 6 ternos hay **2** iguales entonces habrán **5** diferentes ; de igual manera se deduce que se tiene **3** pares de medias diferentes , **7** corbatas diferentes y **4** camisas diferentes .

⇒ # de maneras diferentes de vestirse será :

$$5 \times 3 \times 2 \times 7 \times 4 = 840$$

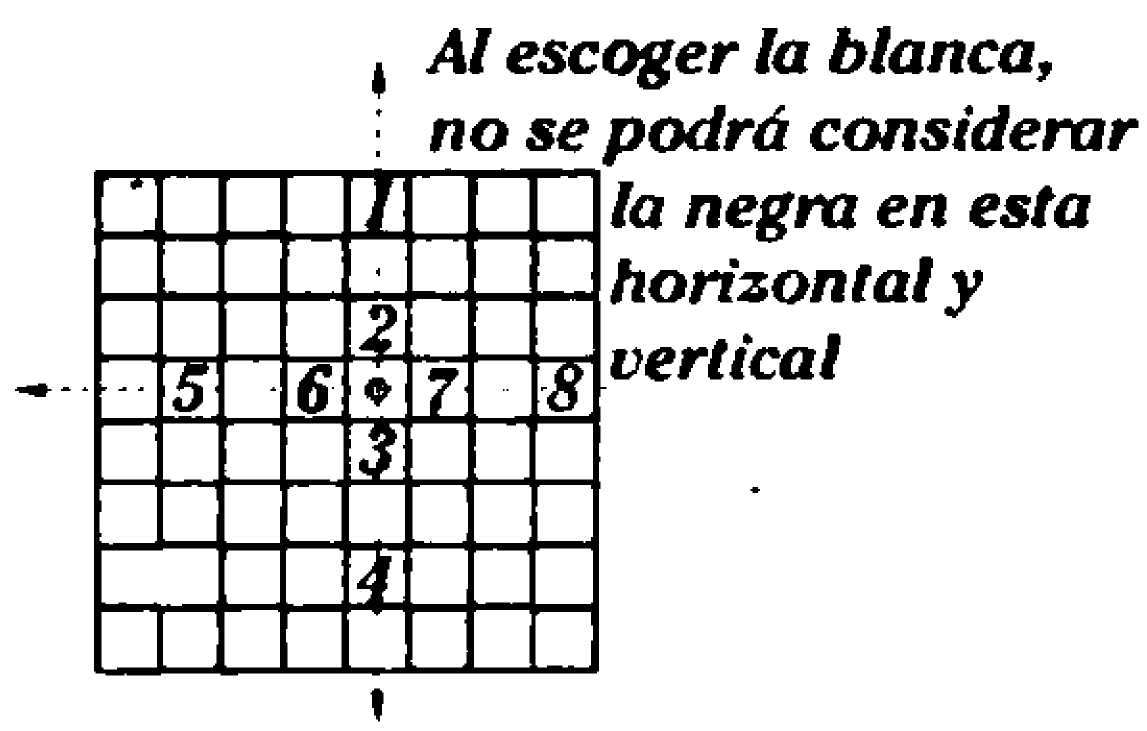
RPTA : "D"

PROBLEMA 45 :

¿De cuántas maneras se pueden escoger en un tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra que no estén en una misma línea horizontal y vertical?

A) 729 *B) 768* *C) 512* *D) 600* *E) 7230*

RESOLUCIÓN :



* Para la blanca habrán **32** posibilidades, de donde para la negra quedarán $32 - 8 = 24$ posibilidades

⇒ # de maneras $= 32 \times 24 = 768$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un provinciano desea viajar de Lima a Cusco y tiene a su disposición **4** líneas aéreas y **6** líneas terrestres. ¿De cuántas maneras diferentes podrá viajar?

A) 24 *B) 72* *C) 36* *D) 10* *E) 20*

02 Un producto se arma en **3** etapas; para la primera etapa se tienen disponibles **5** líneas de armado, para la segunda **4** y para la tercera **6** líneas de armado. ¿De cuántas maneras distintas puede obtenerse el producto en el proceso de armado?

A) 120 *B) 15* *C) 18* *D) 24* *E) 60*

03 ¿De cuántas maneras podrá vestirse una persona que tiene **3** pares de zapatillas, **4** buzos (**2** iguales), **5** pares de medias y **6** polos (**3** iguales)?

A) 360 *B) 180* *C) 135*
D) 240 *E) 225*

04 ¿De cuántas maneras se pueden escoger en el tablero de ajedrez una casilla blanca y una negra, que no estén en la misma horizontal ni vertical?

A) 594 *B) 636* *C) 640*
D) 768 *E) 942*

05 Se disponen de **6** focos de luz colocados en fila, prendiendo unos y apagando otros se pueden codificar señales. Según esto, ¿cuántas señales diferentes se pueden emitir?

A) 60 *B) 720* *C) 63* *D) 65* *E) 64*

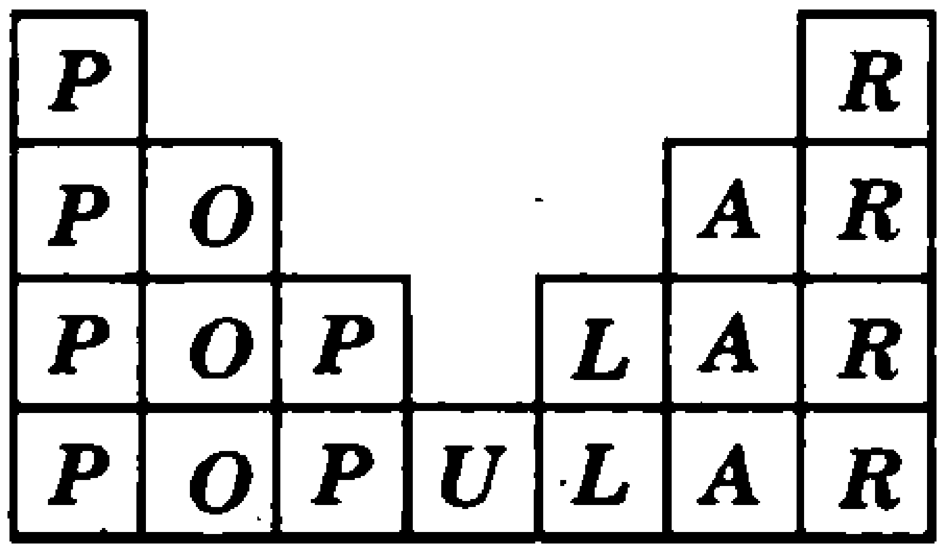
06 Si Maribel tiene **5** faldas que combinan con **3** blusas y también **9** pantalones que hacen juego con **6** polos diferentes, ¿de cuántas maneras distintas podrá vestirse?

A) 50 *B) 62* *C) 65* *D) 69* *E) 72*

07 En el plano de una ciudad las calles verticales están numeradas como **1**; **2**; **3**; **4**; .... que son paralelas y como **A**; **B**; **C**; **D**; .... las que figuran como horizontales que también son paralelas. Calcular el número de caminos con distancias mínimas que hay entre la intersección de **2** con **A** y **5** con **D**.

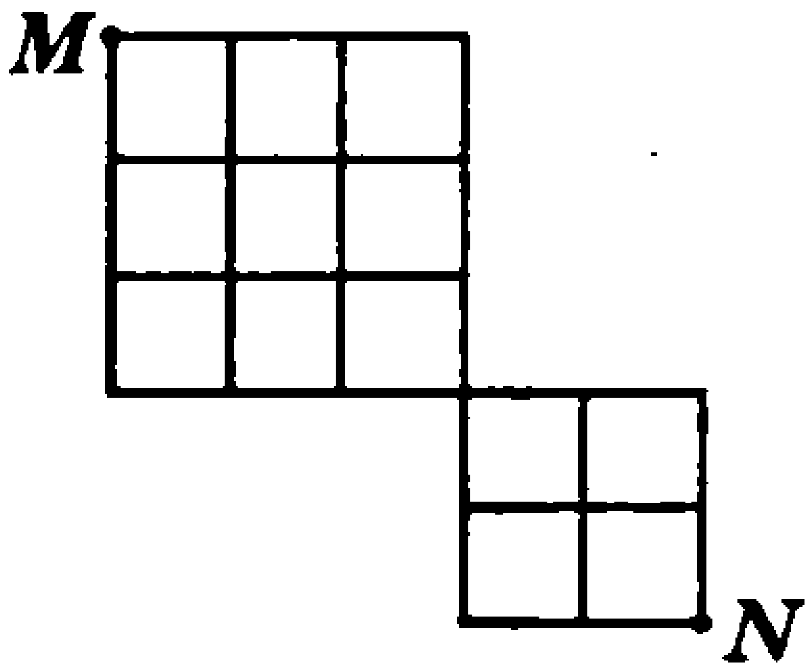
A) 10 *B) 15* *C) 20* *D) 30* *E) 40*

08 ¿De cuántas maneras diferentes puede leer *POPULAR*?



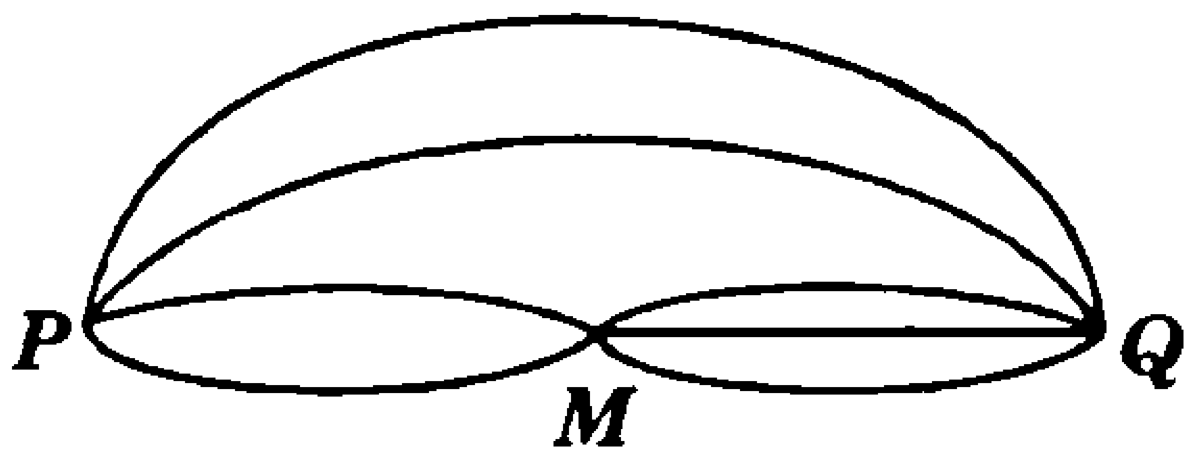
A) ***169*** ***B)*** ***140*** ***C)*** ***148***
D) ***156*** ***E)*** ***150***

(09) ¿De cuántas maneras se puede ir de ***M*** a ***N*** tomando el camino más corto?



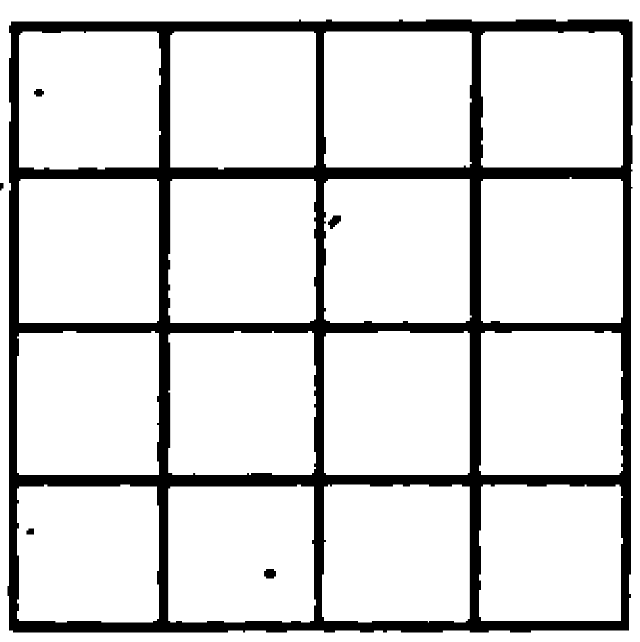
A) 100 ***B) 110*** ***C) 120*** ***D) 140*** ***E) 160***

(10) ¿De cuántas maneras se puede ir de ***P*** a ***Q*** y luego retomar por una ruta diferente?



A) 42 ***B) 56*** ***C) 84*** ***D) 48*** ***E) 50***

(11) Se tiene ***4*** fichas de colores diferentes. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar las ***4*** fichas en el siguiente tablero si en cada fila y columna debe haber sólo una ficha.



A) 24 ***B) 420*** ***C) 180***
D) 576 ***E) 144***

(12) Un ingeniero civil tiene ***6*** diseños de casas. En una avenida determinada se ubicarán ***4*** casas. Si un agente municipal no permite casas similares en una misma avenida, ¿de cuántas maneras diferentes puede el ingeniero utilizar sus diseños según la disposición del agente?

A) 60 ***B) 120*** ***C) 180*** ***D) 360*** ***E) 720***

(13) Tres amigos acuden a una juguería, donde ofrecen jugos de papaya, fresa, naranja y mango. Si a ninguno de ellos les gusta beber jugos mixtos, ¿de cuántas maneras diferentes se puede adquirir los jugos?

A) 28 ***B) 36*** ***C) 64*** ***D)18*** ***E)20***

(14) ¿Cuántas placas para automóviles pueden hacerse si cada placa consta de ***2*** letras diferentes seguida de ***3*** dígitos diferentes? (Considerar ***26*** letras del alfabeto)

A) 676 000 ***B) 936 000*** ***C) 642 000***
D) 468 000 ***E) 234 000***

(15) Determinar de cuántas maneras diferentes podrán viajar ***7*** personas en un automóvil de ***5*** asientos y una moto, sabiendo que todos saben manejar moto, pero sólo ***3*** de ellos saben manejar automóvil.

A) 720 ***B) 840*** ***C) 1 400***
D) 2 160 ***E) 3 000***

(16) En una carrera participan ***4*** atletas. ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar a la meta, si llegan uno a continuación del otro?

A) 24 ***B) 10*** ***C) 120*** ***D) 36*** ***E) 6***

(17) En una fila de ***7*** asientos se van a sentar ***2*** mujeres y ***5*** hombres ¿De cuántas maneras diferentes pueden ocurrir que un hombre se siente entre las ***2*** mujeres?

A) 240 ***B) 120*** ***C) 480***
D) 960 ***E) 720***

(18) El grupo Agua Bella está formado por ***3*** cantantes, ***5*** músicos y ***2*** bailarinas. Para salir al escenario deben hacerlo en fila, debiendo estar las bailarinas a los extremos y las cantantes no deben estar la lado de las bailarinas. ¿De cuántas formas diferentes pueden salir al escenario?

A) 1 200 ***B) 5 120*** ***C) 28 800***
D) 30 000 ***E) 34 300***

(19) Calcular el valor de "x". si:

$$\frac{(x+2)!+(x+1)!+x!}{(x+1)!+x!}=\frac{x!}{x}$$

A) 3 ***B) 2*** ***C) 8*** ***D) 4*** ***E) 6***

(20) El factorial de ***V*** tiene ***15*** cifras que se pueden ordenar de forma triangular:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & & \\ & & 5\ 5 & & \\ & 6 & 8 & 7 & \\ a & b & 8 & 0 & \\ 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

V!

Calcular: $a + b$.

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 7* *E) 6*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos sonidos distintos pueden producirse con las *8* teclas de un piano si sólo deben tocarse simultáneamente al menos *2* teclas pero no más de *6*?

A) 238 *B) 256* *C) 240*
D) 270 *E) 296*

02 De *10* polos, *6* de ellos son defectuosos, ¿de cuántas maneras podemos escoger *3* artículos de los mencionados de modo que entre ellos hay al menos *2* defectuosos?

A) 60 *B) 70* *C) 80* *D) 90* *E) 100*

03 ¿Cuántas comisiones integradas por un varón y una mujer se pueden formar de un total de *4* varones y *5* mujeres, si un varón en particular siempre pelea con *2* mujeres (Ana y Betty)?

A) 15 *B) 20* *C) 18* *D) 25* *E) 36*

04 De *7* números positivos y *6* negativos se escogen *4* números tal que su producto sea un número positivo. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse dicha elección?

A) 182 *B) 340* *C) 359*
D) 365 *E) 420*

05 Dos parejas de esposos ingresan a una dulcería donde se ofrecen *7* clases de dulces. Si luego de comprar cada persona un dulce, se ubican en una banca de *4* asientos, ¿de cuántas maneras se podrán tomar fotos distintas (teniendo en cuenta la posición y el dulce que consumen), si los esposos van juntos.

A) 280 *B) 560* *C) 720*
D) 1420 *E) 19 208*

06 Un barman tiene *4* licores: whisky, vodka y cañazo. ¿De cuántas maneras se pueden servir *7* tragos? (Pueden ser puros o mezclados de a dos en partes iguales)

A) 120 *B) 150* *C) 174*
D) 180 *E) 210*

07 Lila quiere visitar *5* lugares diferentes desde el día lunes hasta el domingo, visitando un lugar cada día y descansando dos de estos días que no sean seguidos. ¿De cuántas maneras diferentes puede distribuir sus visitas con sus descansos, si ella no quiere descansar lunes ni domingo?

A) 24 *B) 30* *C) 120* *D) 720* *E) 5 040*

08 Paola va a una discotienda y gasta *$ 18* en comprar Cds de ópera (a *$ 6* cada uno) y de technocumbia. (*a $ 3* cada uno). Determinar de cuántas maneras diferentes puede haber elegido su compra, si la discotienda tiene *5* Cds de cada género y son de diferentes autores.

A) 20 *B) 100* *C) 125*
D) 150 *E) 200*

09 En una empresa se quiere contratar *3* personas para cubrir las vacantes *A*; *B* y *C* se observó que *8* personas se presentan para cualquiera de las *3* vacantes, *5* personas sólo se presentan para la vacante *A* y *3* personas sólo para la vacante *B*. ¿De cuántas formas diferentes se puede cubrir las vacantes?

A) 120 *B) 280* *C) 400*
D) 504 *E) 904*

10 En una tienda de mascotas hay *6* perros y *4* gatos. ¿Cuántas elecciones diferentes se obtendría de tal forma que entre las escogidas haya por los menos una de cada especie?

A) 430 *B) 945* *C) 470*
D) 482 *E) 496*

11 De un grupo de *12* estudiantes, se quiere seleccionar a *4* de ellos. ¿De cuántas formas se puede seleccionarlos si dos de ellos en particular no pueden escogerse juntos?

A) 380 *B) 400* *C) 420*
D) 450 *E) 460*

12 De *6* varones y *5* chicas se desea seleccionar un comité de *4* personas. ¿De cuántas formas podrá hacerse dicha selección, si deben integrarlo al menos *2* chicas?

A) 80 *B) 120* *C) 180*
D) 210 *E) 215*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)A	3)B	4)D	5)E	6)D	7)C	8)A	9)C	10)B
11)D	12)D	13)C	14)D	15)D	16)A	17)D	18)C	19)E	20)E

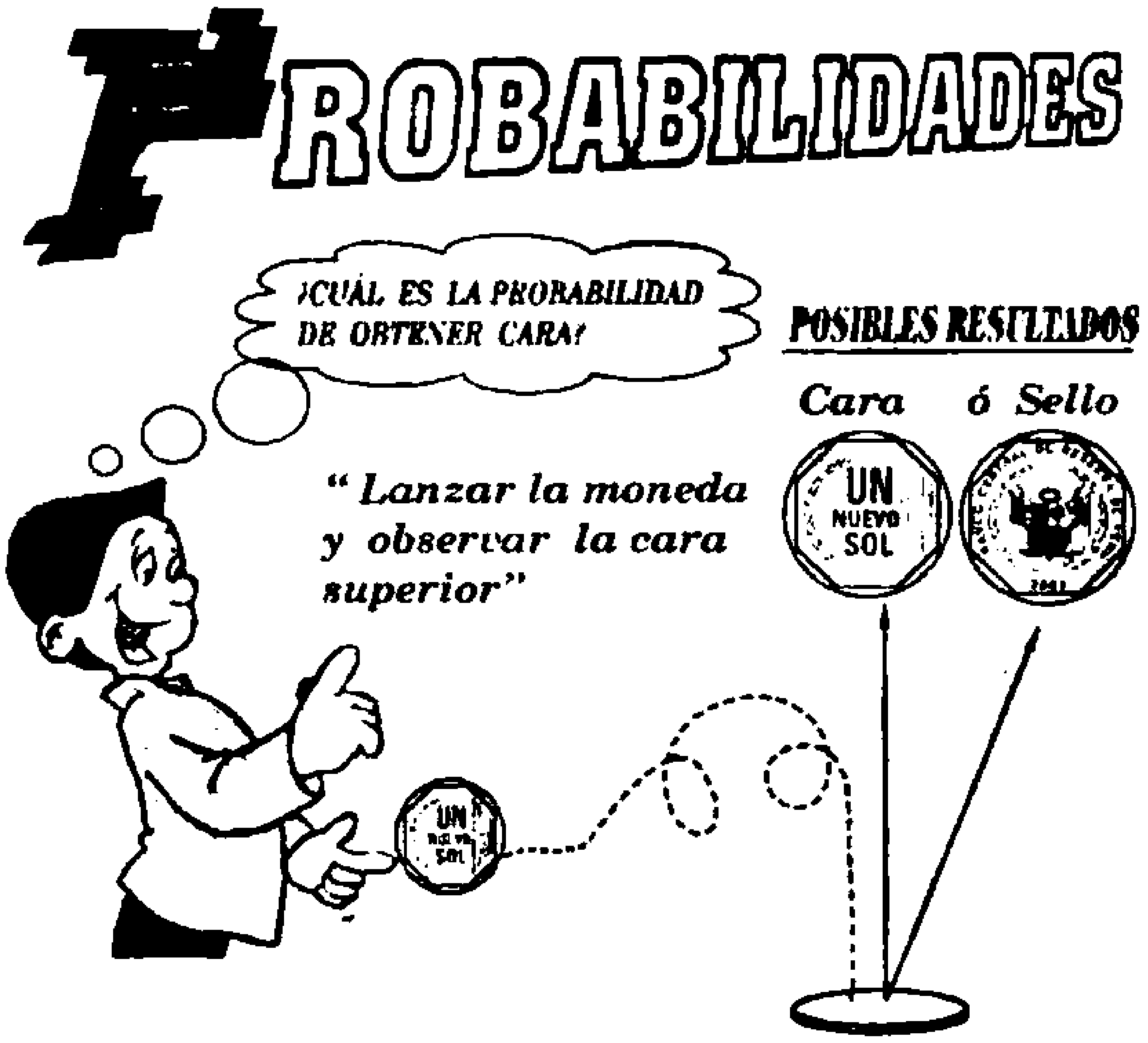
CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)A	2)C	3)C	4)D	5)E	6)A	7)D	8)C	9)E	10)B
11)D	12)E								

PROBABILIDADES

CAPITULO 043

OBJETIVOS :

* Deducir las leyes del azar y los resultados que estos determinan.
* Conceptuar: experimento aleatorio, espacio muestral, evento y probabilidad.
* Determinar los Grados de credibilidad a parir del concepto de probabilidad.
* Resaltar su estudio como aplicación dentro de las ciencias médicas, ciencias sociales, la economía, las industrias, los negocios, los seguros, ...



Si lanzamos una moneda y nos preguntarán que posibilidad tiene la parte de la cara de aparecer , ninguno de nosotros dudara al responder que tiene una entre dos posibilidades o sea : $\frac{1}{2}$ ó el *50%* ; este razonamiento es un ejemplo de situaciones en las cuales no estamos absolutamente seguros de lo que va ocurrir , pero expresa cierto grado de predicción de lo que puede suceder .

El estudio de la «probabilidad», nos proporcionan una teoría matemática para medir la posibilidad de ocurrencia de un evento ó suceso en un experimento aleatorio (no determinístico) o experimento que depende del azar .

A continuación , mencionaremos las definiciones necesarias para hacer entendible el tema en mención

EXPERIMENTO ALEATORIO (ξ)

Llamaremos experimentos aleatorios a aquellos cuyos resultados no se pueden saber con exactitud antes de su realización . Son experimentos que no dan siempre el mismo resultado al repetirlos en las mismas condiciones .

Es decir que son pruebas o ensayos que depende del azar , o sea que sus resultados no pueden predecirse sin haber realizado previamente la prueba , pero si que hay un conjunto de posibles resultados

EJEMPLOS:

* ξ_1 : Lanzar al aire un dado o una moneda .
* ξ_2 : predecir la duración de una conversación telefónica .
* ξ_3 : lanzar un proyectil hacia un blanco determinado

ε_4 : Lanzar una moneda y observar la cara superior.

ε_5 : Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior ..

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto de todos los resultados posibles que tiene el experimento aleatorio .

EJEMPLOS:

* Del experimento aleatorio de lanzar un dado, su espacio muestral sería : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$
* Del experimento aleatorio de lanzar una moneda, su espacio muestral sería : $\Omega=\{C;S\}$
* En « ε_4 » del ejemplo anterior $\Omega=\{C,S\}$

  C : Cara

  S : Sello

número de elementos : $n(\Omega)=2$

* Para « ε_5 » : $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

$$n(\Omega)=6$$

SUCESO O EVENTO : (A;B;C,...)

Es cualquier subconjunto del espacio muestral, en otras palabra , es un caso particular que se solicita del experimento aleatorio .

EJEMPLOS :

* En el experimento correspondiente a lanzar un dado, algunos sucesos son:

  A : obtener número par .

  B : obtener número primo .

  C : obtener número impar menor que 5.

* Al lanzar tres monedas pueden darse los siguientes casos:

  A : obtener al menos una cara .

  B : obtener como máximo un sello .

  C : obtener exactamente dos caras .

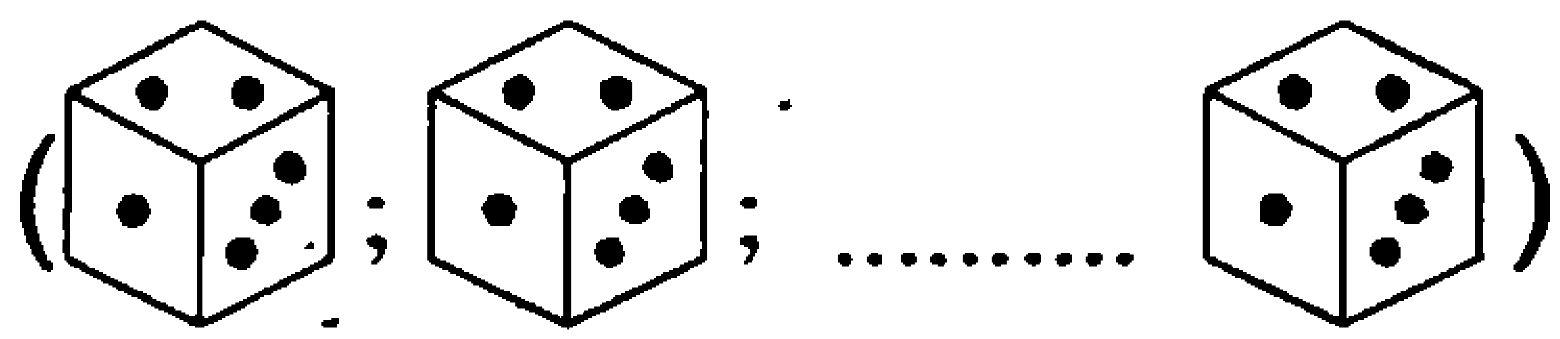
OBSERVACIÓN:

* Cada suceso está compuesto por varios sucesos elementales .
* Como los sucesos son subconjuntos de un conjunto mayor que es el espacio muestral , se pueden aplicar algunas propiedades de conjuntos:

* $A \cup A' = \Omega$
* $A \cap A' = \phi$
* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ALGUNOS ESPACIOS MUESTRALES

1) Experimento: Arrojar uno o más dados.



2) Experimento : Arrojar uno o más monedas.

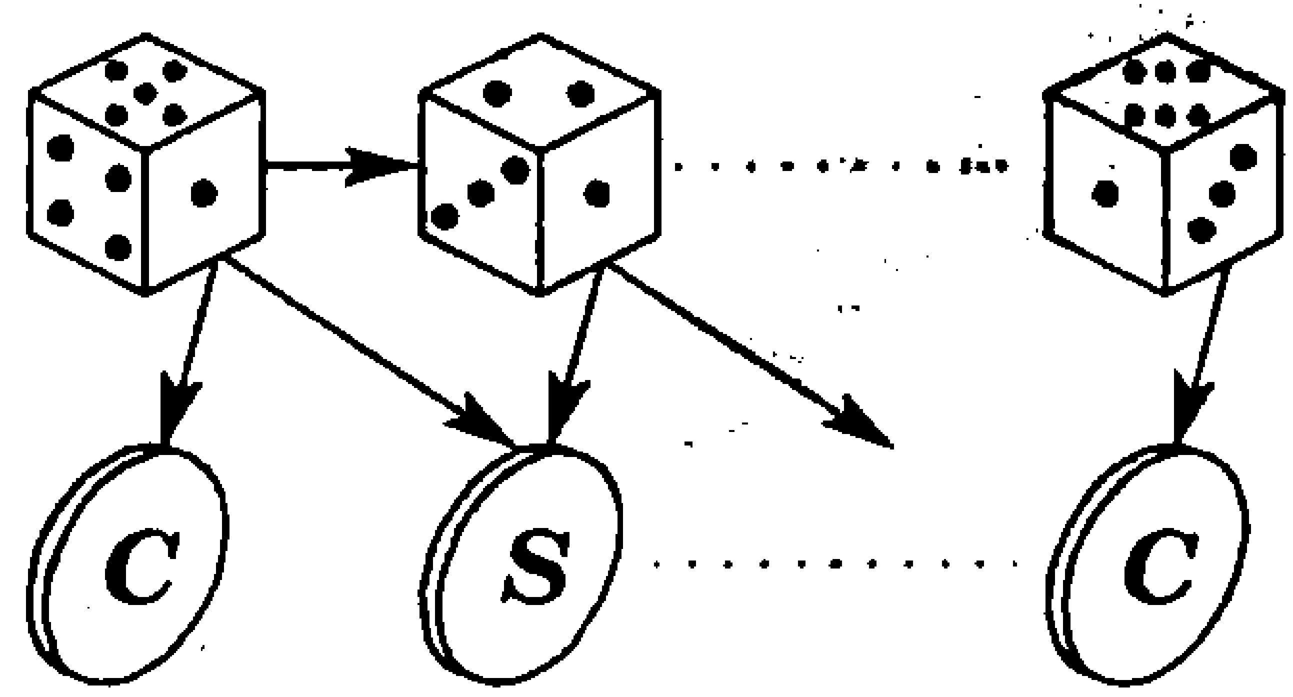
Número de dados	Espacio Muestral (A)	Número de casos totales
1	S={1; 2; 3; 4, 5; 6}	$n(s)=6^1$
2	S={(1;1),(1;2), ... (6;6)}	$n(s)=6^2$
3	S={(1;1;1),(3;1;2), ...(6;6;5),(6;6;6)}	$n(s)=6^3$
m	....	$n(s)=6^m$

3) Experimento : Arrojar m dados y w monedas.

Espacio muestral :

Número de monedas	Espacio Muestral (A)	Número de casos totales
1 (C)	A={C; S}	$n(A)=2$
2 (C)(S)	A={(C;C); (C;S); ...(S;S)}	$n(A)=2^2$
3 (C)(S)(C)	A={(C;C;C),....... ...(S;S;S)}	$n(A)=2^3$
W	....	$n(A)=2^W$

Total de casos posibles



$$n_{(EM)} = 6^m \times 2^w$$

A : resulte en el dado un número par.

B : resulte en la moneda cara .

Observamos que la ocurrencia de un suceso no influye en el otro y viceversa .

Observamos que la ocurrencia de un suceso no influye en el otro y viceversa .

Cuando dos sucesos no son independientes, se llaman sucesos dependientes .

DEFINICIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD

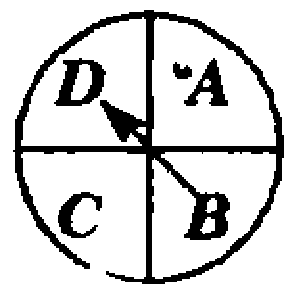
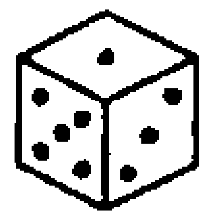
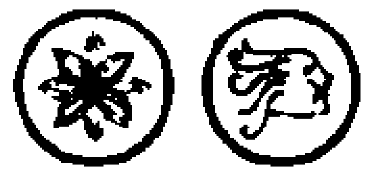
La probabilidad es un valor numérico que mide el grado de incertidumbre (duda) que se tiene al realizar un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar un dado común (insesgado), tenemos algunas dudas respecto al resultado que se va ha obtener, porque no sabemos con exactitud lo que va a resultar, justamente esa duda que se produce al realizar un experimento aleatorio puede ser medida con la probabilidad, la cual nos ayudará a ver con mayor amplitud qué sucederá al realizar un determinado experimento aleatorio, permitiéndonos tomar decisiones más acertadas.

La probabilidad se calcular de la siguiente manera:

$$P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "A"}}{\text{número de casos totales del experimento aleatorio}}$$

Se lee: La probabilidad de que ocurra el suceso *A* es.

A continuación, para tener claro los conceptos vistos hasta este punto y ver su relación entre sí, se presenta el siguiente cuadro :

Experimento	 *Gire el indicador*	 *Lance un dado*	 A B *Lance dos monedas A y B*
Resultados	*El indicador tiene la misma probabilidad de detenerse en cualquiera de las cuatro regiones - A, B, C, o D.*	*Es igualmente posible que cualquiera de las seis caras quede hacia arriba.*	A | B C | C ⟶ C | S ⟶ S | C ⟶ S | S ⟶ *Cada uno de los cuatro pares es igualmente posible.*
Espacio Muestral	*(A, B, C, D)* *El conjunto de los cuatro resultados igualmente posibles.*	*{1, 2, 3, 4, 5, 6}* *El conjunto de los seis resultados igualmente posibles.*	{(C; C) (C; S) (S; C) (S; S)} *El conjunto de los cuatro resultados igualmente posibles.*
Probabilidad	*La probabilidad que el indicador pare en la región C es* $\frac{1}{4}$. *Se escribe:* $P(C)=\frac{1}{4}$	*La probabilidad de obtener un 3 cuando se lanza el dado es* $\frac{1}{6}$. *Se escribe:* $P(3)=\frac{1}{6}$	*La probabilidad que en ambas monedas salga sello es* $\frac{1}{4}$. *Se escribe:* $P(S;S)=\frac{1}{4}$

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD :

Si *«A»* es un evento de un espacio muestral Ω, entonces la probabilidad de ocurrencia de *«A»* se denota *P(A)* y está dada por :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\text{Número de casos Favorables a «A»}}{\text{Número Total de casos posibles}}$$

EJEMPLO 1 :

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar, al lanzar un dado?

RESOLUCIÓN :

Posibles Resultados : $W=\{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow n(\Omega)=6$

Casos Favorables : $A=\{1;3;5\} \Rightarrow n(A)=3$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

EJEMPLO 2 :

En una urna donde hay *7* bolas blancas , *5* bolas rojas y *3* bolas azules ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer *2* bolas, éstas sean de color rojo?

RESOLUCIÓN :

*** Casos a favor :**

Tenemos que sacar un grupo de *2* bolas rojas de un total de *5* disponibles .

$$\Rightarrow\ n(A)=C_2^5=10$$

**** Total de Casos :***

Tenemos que extraer *2* bolas de un total de:

$$\underbrace{7}_{Rojas}+\underbrace{5}_{Azules}+\underbrace{3}_{Blancas}=15$$

$$\Rightarrow\ n(\Omega)=C_2^{15}=105$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{10}{105}=\frac{2}{21}$$

TIPOS DE EVENTO

I) EVENTO SEGURO :

Llamado también «universal», porque siempre ocurre.

A : Al lanzar una moneda y obtener cara o sello .

$$A=\{C;S\}=\Omega$$

II) EVENTO IMPOSIBLE :

Llamado también «vacío», porque nunca ocurre

B : Al lanzar una moneda y obtener *2* caras

$$B=\{C;C\}=\varnothing$$

III) EVENTO CONTRARIO (A') :

O complementario , se considera cuando un evento ocurre y otro no , es decir *«A'»* es el evento contrario a *«A»*.

EJEMPLO :

A : Lanzar un dado y obtener un número par .

Entonces :

A': Lanzar un dado y no obtener un número par .

IV) EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES :

Si la ocurrencia de uno de ellos, impide la ocurrencia de los demás (no pueden ocurrir juntos).

EJEMPLO :

A: Lanzar un dado y obtener un número múltiplo de 2. $\Rightarrow A=\{2,4,6\}$

B : Lanzar un dado y obtener 1 ó 3

$$\Rightarrow B=\{1,3\}$$

OJO :

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces : $A\cap B=\phi$

V) EVENTOS INDEPENDIENTES :

Cuando la ocurrencia de uno de los eventos, no afecta la ocurrencia de los demás (Pueden ocurrir en forma conjunta).

EJEMPLO :

A : Lanzar una moneda y obtener un número primo:

$$A=\{2;3;5\}$$

B : Lanzar un dado y obtener cara : $B=\{C\}$

NOTA :

Si A y B son eventos independientes , entonces pueden ocurrir en forma simultánea .

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

1) $0\le P(A)\le 1$

2) Si : $\underbrace{P(A)=0\rightarrow A=\varnothing}_{A\text{ : Evento imposible}}$.

3) Si : $\underbrace{P(A)=1\rightarrow A=\Omega}_{A\text{ : Evento seguro}}$

4) APLICACIÓN DEL EVENTO CONTRARIO :

$$\boxed{P(A)=1-P(A')} \quad \text{ó}$$

$$\boxed{P(A)+P(A')=1}$$

Donde :

$P_{(A)}$: Probabilidad de que ocurra el suceso A.

$P_{(A')}$: Probabilidad de que ocurra el complemento del suceso A, llamada también probabilidad complementaria o probabilidad de que no ocurra el suceso A .

EJEMPLO 1 :

¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola de una urna donde hay 3 bolas rojas , 7 bolas azules, 4 bolas blancas y 2 bolas negras; esta no sea roja?

RESOLUCIÓN :

A : Evento de extraer una bola que no sea roja .

A' : Evento de extraer una bola roja

$$\Rightarrow P(A)=1-P(A')$$

$$P(A)=1-\frac{3}{16} \longrightarrow \text{Rojas disponibles}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{13}{16} \longrightarrow \text{Total de Bolas}$$

EJEMPLO 2 :

¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello en el lanzamiento de 3 monedas?

RESOLUCIÓN :

A : Evento de obtener al menos un sello (Puede ser 1 sello , 2 sellos ó 3 sellos)

A' : Evento de no sacar ningún sello y es decir todos los resultados deben ser caras .

moneda

MONEDA

$$\textit{Número total de posibilidades}: \frac{1^{ra}}{2}\times\frac{2^{da}}{2}\times\frac{3^{ra}}{2}=8$$

$$A'=\{CCC\}\Rightarrow n(A')=1$$

$$P(A)=1-P(A')$$

$$P(A)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

En general :

5) $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$

EJEMPLO 1 :

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par ó un múltiplo de 3 al lanzar un dado?

RESOLUCIÓN :

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\} \quad n(\Omega)=6$$

$$A=\{2;4;6\} \;;\; n(A)=3 \;;\; P(A)=\frac{3}{6}$$

$$B=\{3;6\} \;;\; n(B)=2 \;;\; P(B)=\frac{2}{6}$$

$$A\cap B=\{6\} \;;\; n(A\cap B)=1 \;;\; P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

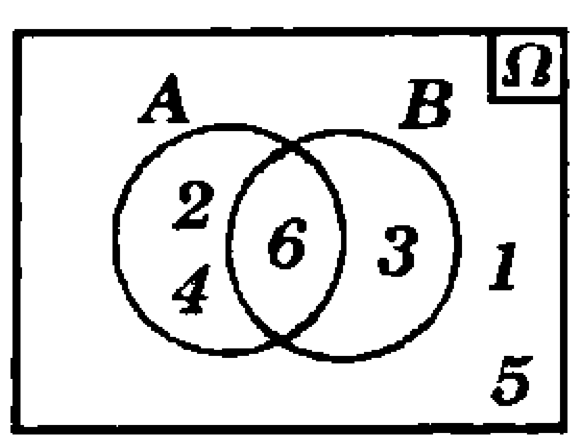
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

NOTA :

También se puede resolver por conjuntos

Del diagrama :



$$n(A\cup B)=4$$

$$n(\Omega)=6$$

$$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

6) PARA EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES : $(A \cap B = \varnothing)$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

EJEMPLO :

¿Cuál es la probabilidad de obtener *3* ó *4* al lanzar un dado?

RESOLUCIÓN :

$A = \{3\}\ ;\ n(A) = 1\ ;\ P(A) = \dfrac{1}{6}$

$B = \{4\}\ ;\ n(B) = 1\ ;\ P(B) = \dfrac{1}{6}$

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Como : $A \cap B = \varnothing$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

7) PARA EVENTOS INDEPENDIENTES (OCURRENCIA SIMULTÁNEA :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$ *P(A)* y *P(B)* *a la vez*

EJEMPLO :

Se lanza un dado y una moneda simultáneamente ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo y un sello?

RESOLUCIÓN :

$A = \{2;3;5\}\ ;\ n(A) = 3\ ;\ P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{S\}\ ;\ n(B) = 1\ ;\ P(B) = \dfrac{1}{2}$

* Como ocurren simultáneamente , entonces :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8) PARA VARIOS EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES :

$$\boxed{P(A) + P(B) + P(C) + \ldots\ldots = 1}$$

EJEMPLO :

3 caballos *A, B* y *C* intervienen en una carrera, *«A»* tiene doble posibilidad de ganar que *«B»* y *«B»* el doble de ganar que *«C»* ¿Cuál es la probabilidad de ganar de *«C»*?

RESOLUCIÓN :

$P(C) = x \Rightarrow$ Posibilidad de ganar de *«C»*

$P(B) = 2x$

$P(A) = 4x$

* Luego : $\Rightarrow P(C) + P(B) + P(A) = 1$

$$\Rightarrow x + 2x + 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

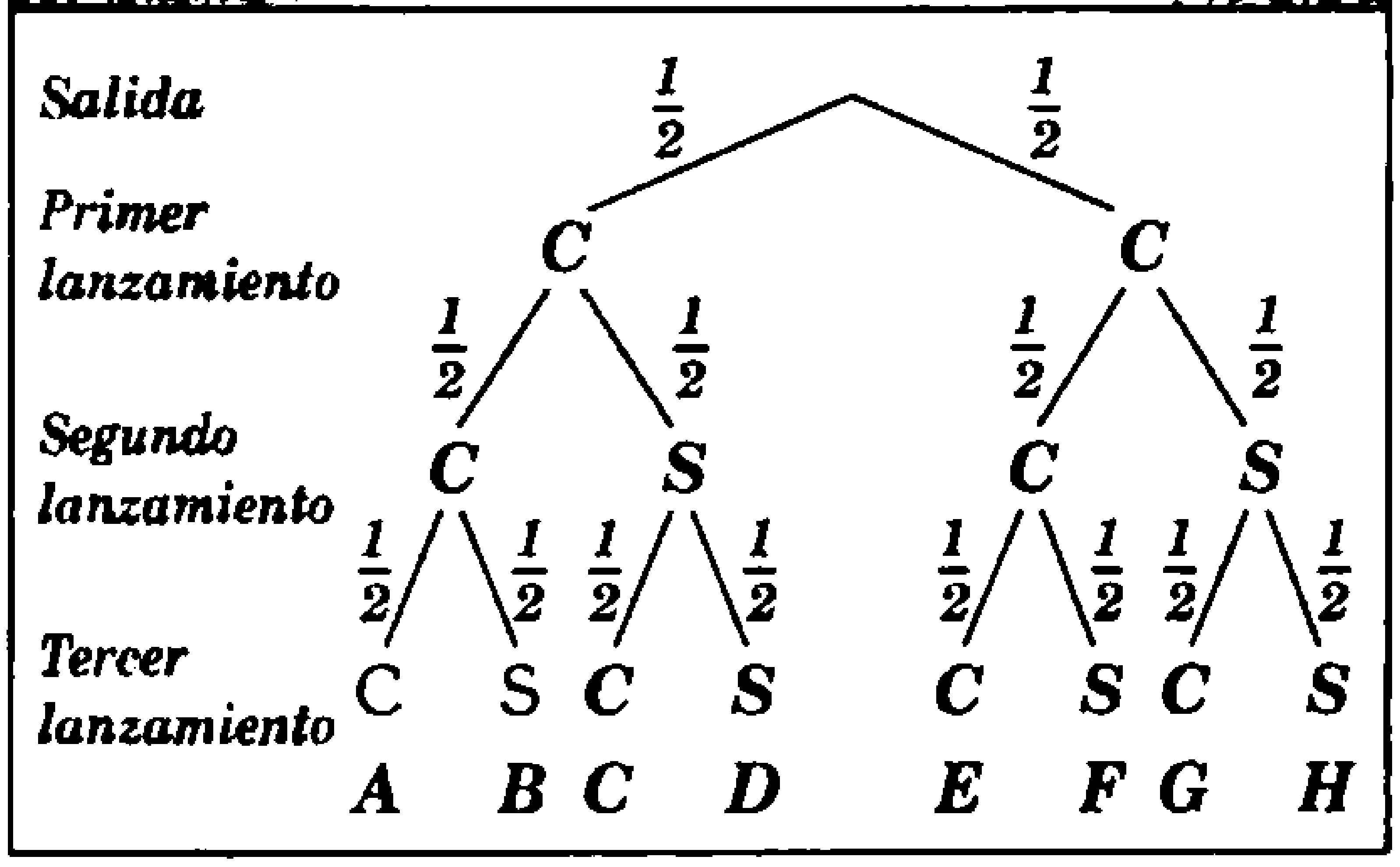
OBSERVACIÓN:

En el presente capítulo de Probabilidades se tendrá que recurrir con bastante frecuencia a lo aprendido en el capítulo de Análisis Combinatorio, ya que estamos observando que necesitamos averiguar de cuántas formas distintas ocurre un experimento aleatorio y de cuántas formas distintas ocurre un suceso.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Los diagramas de árbol son útiles para contar resultados y calcular probabilidades de cierto sucesos. Estudie el siguiente diagrama de árbol .

DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA EL LANZAMIENTO DE UNA MONEDA



Cada rama del árbol está marcada con $\dfrac{1}{2}$ debido a que la probabilidad que resulte cara o sello es $\dfrac{1}{2}$.

Observe que para llegar al punto *A* en el árbol, se debe obtener cara en cada uno de los tres primeros lanzamientos. El resultado *A* puede representar mediante el símbolo *CCC*. El resultado *B* se denota por el símbolo *CCS*. El diagrama del árbol indica que hay *8* resultados para *3* lanzamientos de una moneda. Puesto que todos los resultados son igualmente posibles, $P(A) = P(CCC) = \dfrac{1}{8}$ y $P(B) = P(CCS) = \dfrac{1}{8}$. Observe que la probabilidad de cada suceso puede encontrarse multiplicando a lo largo de cada rama del árbol . Asi :

$$P_{(B)} = P_{(CCS)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

EJEMPLO 2 :

Ruth se encuentra embarazada y ella va a tener trillizos determinar el evento que a sus dos únicos hijos varones se llamen *ALFREDO* y *ERNESTO* .

Determinación del espacio muestral para el sexo de los trillizos.

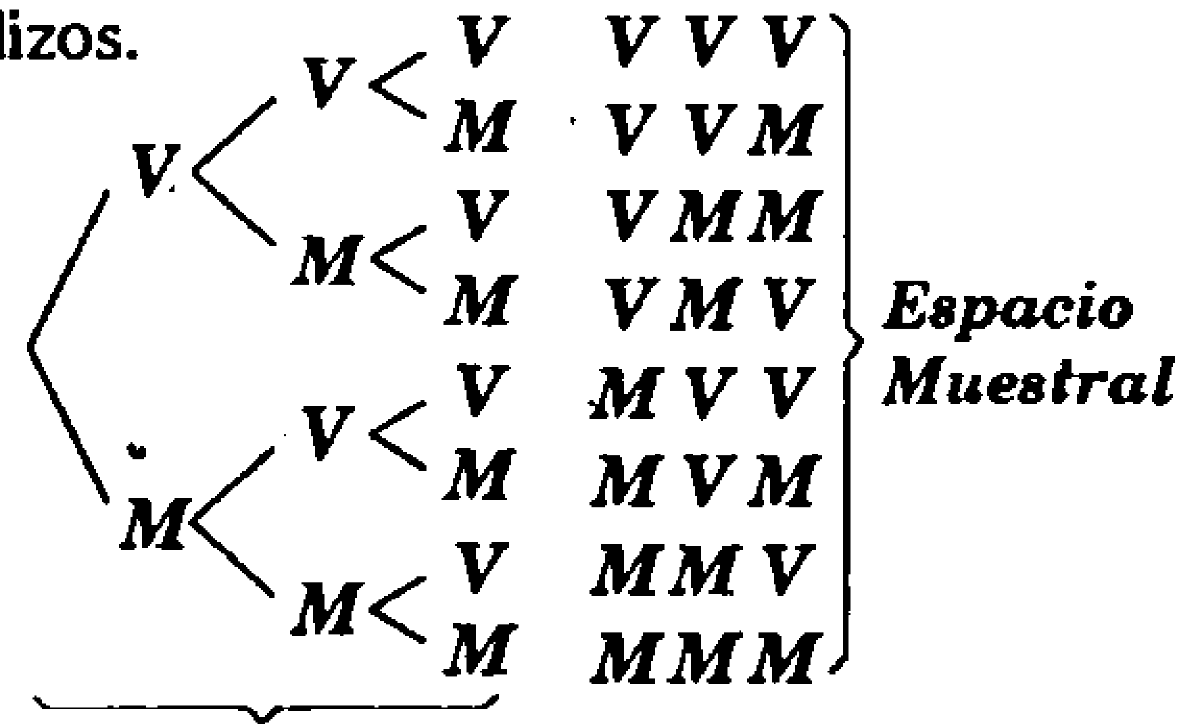


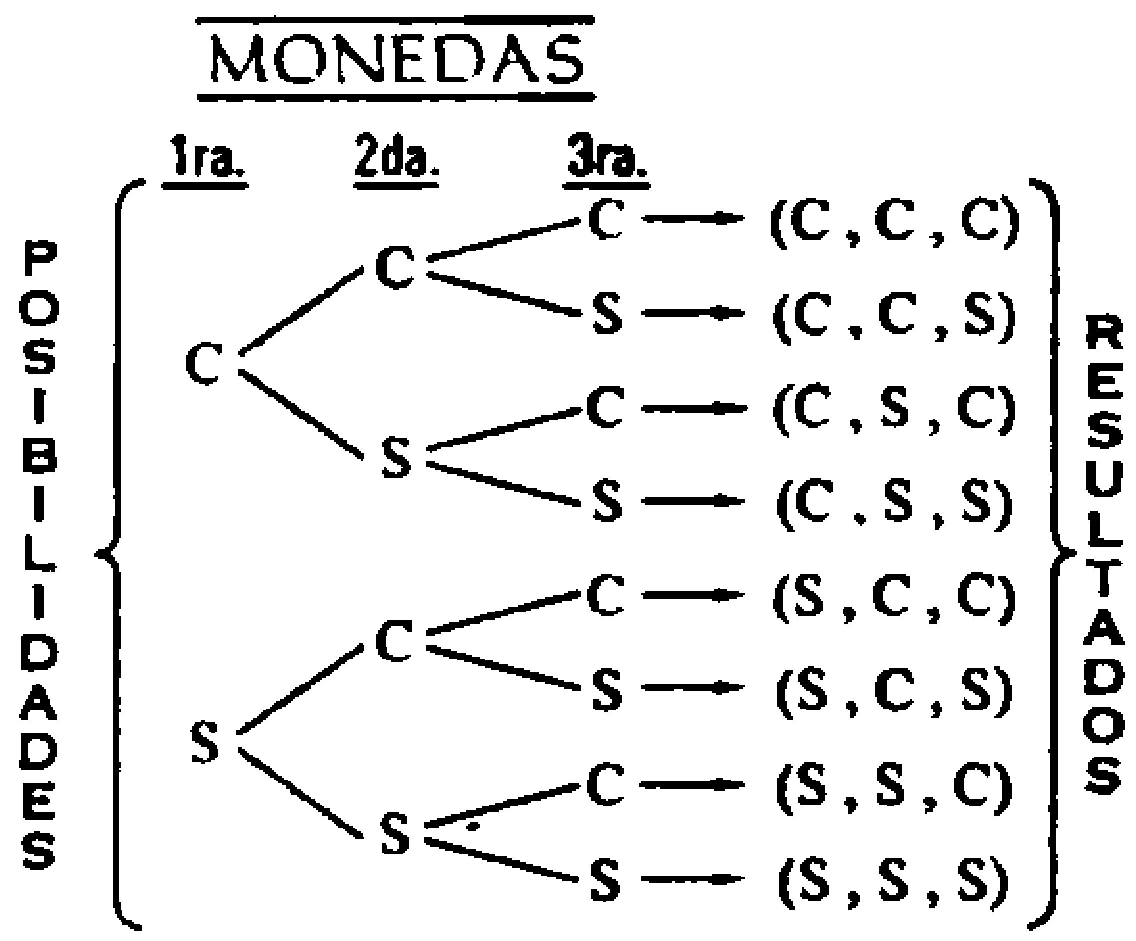
Diagrama de árbol

* Pero para asignarles los nombres a los varones .
(V; V; M), (V; M; V) y *(M; V; V)*.

EJEMPLO 3 :

Mostrar los posibles resultados al lanzar una moneda *3* veces.

RESOLUCIÓN :

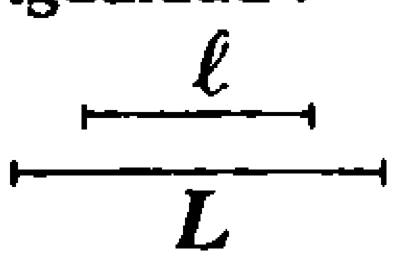


PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS

PROBABILIDAD LINEAL (L) :

Supongamos que el segmento ℓ es parte de un segmento L . Sobre el segmento *"L"* se ha marcado un punto al azar. Admitiendo que la probabilidad de que un punto caiga en el segmento ℓ es proporcional a la longitud de este segmento y no depende de su posición con respecto al segmento *L*. La probabilidad de incidencia del punto sobre el segmento ℓ se determina por la igualdad .

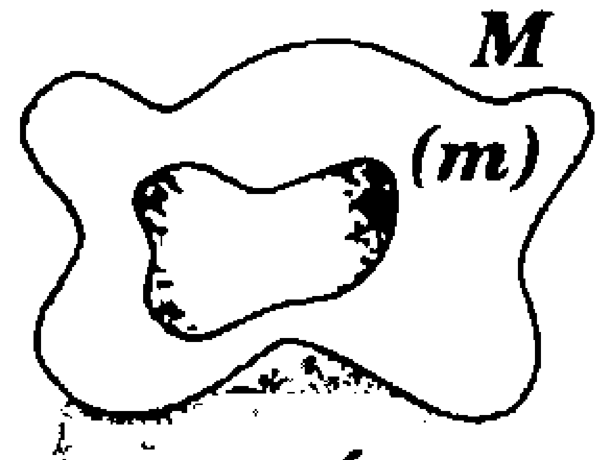
$$P=\frac{\text{Longitud } \ell}{\text{Longitud } L}$$



PROBABILIDAD SUPERFICIAL (S) :

Si la figura plana *(m)* es parte de una figura plana *M*, sobre la figura *M* se ha marcado un punto al azar. Suponiendo que la probabilidad de que un punto caiga en la figura *(m)* es proporcional a la superficie de esta figura y no depende ni de su ubicación respecto a *M*, ni de la forma de *(m)*, por lo tanto se calcula.

$$P=\frac{\text{Superficie } (m)}{\text{Superficie } (M)}$$



PROBABILIDAD VOLUMÉTRICA (V):

Análogamente se determina la probabilidad de que un punto de caída en la figura espacial *(υ)* que forma parte de la figura *V* :

$$P=\frac{\text{Volumen } (\upsilon)}{\text{Volumen } V}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que ocurra una evento *«A»*, una vez que el evento *«B»* haya ocurrido , esta dado por :

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Donde : $P(B)\neq 0$

EJEMPLO :

Se lanza un par de dados .

Si la suma es *6* . ¿Cuál es la probabilidad de que uno de los dados sea *2*?

RESOLUCIÓN :

$B = \{(1;5) , (2;4) , (3;3) , (4;2) , (5;1)\}$

$n (B) = 5$

$A = \{(2;4) , (4;2)\}$

$n (A) = 2$

$$A\cap B=\{(2;4) , (4;2)\}\Rightarrow n(A\cap B)=2$$

Sabemos que :

$$P (A/B) = \frac{\text{\# de maneras que "A" y "B" ocurren}}{\text{\# de maneras que "B" ocurren}}$$

$$\Rightarrow P(A/B)=\frac{2}{5}$$

Analicemos otro ejemplo :

En una encuesta a *112* personas sobre el color de los ojos, se obtiene la siguiente tabla de resultados :

	Ojos azules (A)	Ojos negros (N)	Total
Varones (V)	20	30	50
Mujeres (M)	22	40	62
Total	42	70	112

V, M, A y *N* representan, respectivamente, los sucesos que se verifican cuando al elegir una persona, ésta resulta ser varón o mujer, tener ojos azules o tener ojos negros. Si la elección se hace sin condiciones, la probabilidad de elegir una persona con los ojos azules , es $P(A)=\frac{42}{112}=\frac{3}{8}$

* La de elegir una persona con los ojos negros será:

$$P(N)=\frac{70}{112}=\frac{5}{8}$$

* Sin embargo, si la elección la hacemos sólo entre los varones, las probabilidades de ojos azules y ojos negros son, respectivamente

$$P(A)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5} \qquad P(N)=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

Para que quede claro que son probabilidades calculadas el conjunto de los varones , se escribe *P(A/V)*, que se lee: probabilidad de *A* condicionada a *V* o bien probabilidad de *A* dado que ocurre *V*. Las probabilidades de *A* y *N* condicionadas a *V* son, pues:

$$P(A/V)=\frac{2}{5}\ ;\ P(N/V)=\frac{3}{5}$$

Según acabamos de ver , $P(A/V)=\frac{2}{5}$ y además, del cuadrado inicial deducimos que :

$$P(V)=\frac{50}{112}=\frac{25}{56}\ \text{y}$$

$$P(A\cap V)=\frac{20}{112}=\frac{5}{28}$$

La relación existente entre estas tres probabilidad es:

$\frac{5}{28}=\frac{25}{56}\times\frac{2}{5}$ y de aquí deducimos que :

$$P(A\cap V)=P(V)\times P(A/V)\Rightarrow P(A/V)=\frac{P(A\cap V)}{P(V)}$$

Por esta razón, adoptamos como definición la siguiente expresión : Sea *A* un suceso cuya probabilidad es distinta de cero, y sea *B* cualquier suceso . Se llama probabilidad de *B* condicionado a *A* , al cociente: $\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$

(mide la proporción de veces que ocurre B de entre las que ha ocurrido *A*).

Consecuencia :

PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS :

De la fórmula de la probabilidad condicional deducimos que : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$

Igualdad llamada teorema de las probabilidades compuestas y que permite el cálculo de la probabilidad del suceso $A\cap B$ conocida las probabilidades *P(A)* y *P(B/A)*.

EJEMPLO :

Se extraen dos cartas de una baraja de ***40*** cartas (donde ***4*** de ellas son reyes). Calcule la probabilidad de que ambas cartas sean reyes.

RESOLUCIÓN:

Llamando *A* al suceso : la primera carta es un rey y *B* al suceso: la segunda carta es un rey , se nos pide la probabilidad del suceso $A\cap B$: ambas cartas son reyes .

Por tanto

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{4}{40}\times\frac{3}{39}=\frac{1}{130}$$

Tenga en cuenta que el suceso *B/A* es : sacar rey en la segunda extracción dado que en la primera salió rey. Hay ***3*** casos favorables (los tres reyes que quedan) sobre ***39*** (las cartas restantes)

SUCESOS INDEPENDIENTES

Se dice que un suceso *B* es independiente de otro *A* cuando: *P(B/A)=P(B)* (es decir, el suceso *A* no influye en *B*).

Si *B* es independiente de *A*, se cumple que :

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$$

A también es independiente de *B*, pues :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)$$

entonces *A* es independiente de *B* .

Así, pues, diremos simplemente que *A* y *B* son independientes cuando ocurre que :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

Cuando dos suceso no son independientes, se llaman sucesos dependientes .

EJEMPLO:

Al lanzar un dado se consideran los suceso *A* : obtener ***2; 4; 5***, ó ***6*** y *B*: obtener un número menor o igual que ***5*** . ¿Son *A* y *B* sucesos independientes?

RESOLUCIÓN:

Hemos de comprobar si ocurre que:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

El suceso $A\cap B$ es "obtener ***2 ; 4*** ó ***5***" cuya probabilidad es $P(A\cap B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Por otro lado $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ y $P(B)=\frac{5}{6}$ con lo que

$$P(A)\times P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

Concluimos , entonces , que :

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ y por tanto A y B no son independientes , es decir , son sucesos dependientes.

DIAGRAMAS DE ÁRBOL DE PROBABILIDADES

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad.

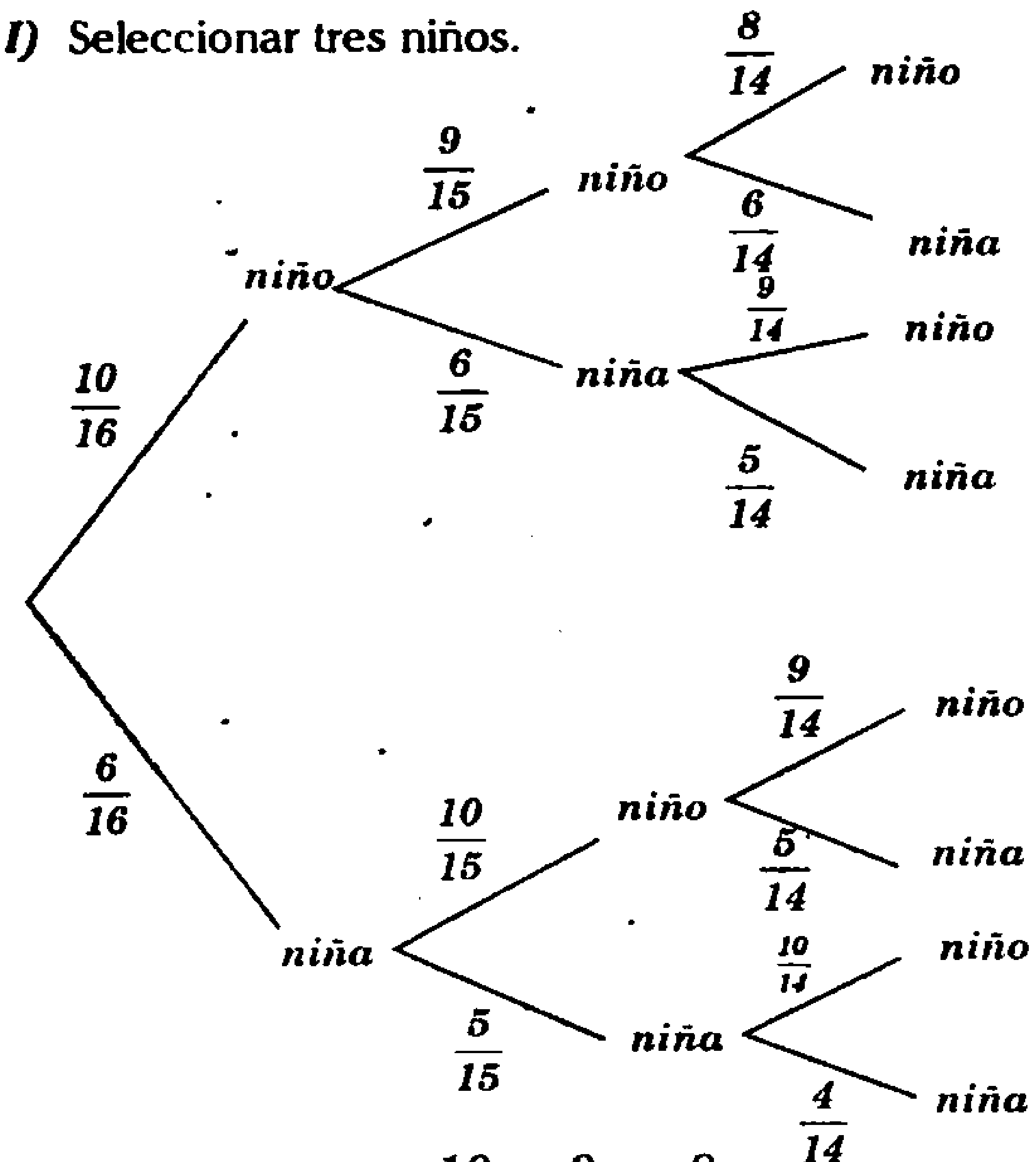
En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas , según las posibilidades del siguiente paso , salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

EJEMPLO 1 :

Una clase consta de seis niñas y ***10*** niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de:

I) Seleccionar tres niños.



$$P(3\,niños)=\frac{10}{16}\times\frac{9}{15}\times\frac{8}{14}=0,214$$

II) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.

$$P\binom{2\,niños}{y\,1\,niña}=\frac{10}{16}\times\frac{9}{15}\times\frac{6}{14}+\frac{10}{16}\times\frac{6}{15}\times\frac{9}{14}+\frac{6}{16}\times\frac{10}{15}\times\frac{9}{14}=0,482$$

III) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

$$P\binom{2\,niñas}{y\,1\,niño}=\frac{10}{16}\times\frac{6}{15}\times\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\times\frac{10}{15}\times\frac{5}{14}+\frac{6}{16}\times\frac{5}{15}\times\frac{10}{14}=0,268$$

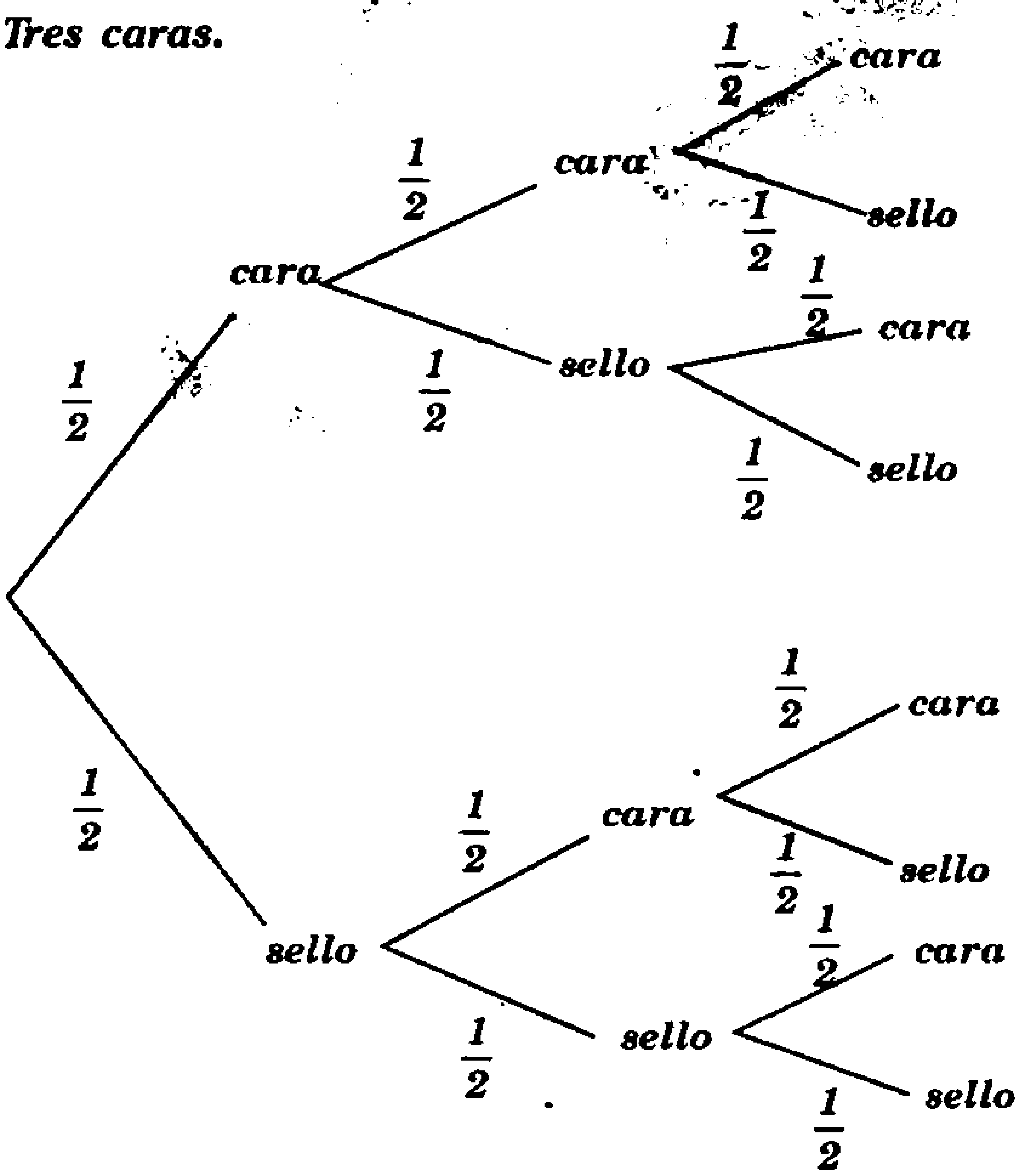
IV) Seleccionar tres niñas.

$$P(3\,niñas)=\frac{6}{16}\times\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}=0,0357$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras.



$$P(3\,caras)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

EXPERIMENTOS COMPUESTOS

Un *experimento compuesto* es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un **experimento** compuesto.

En los ***experimentos compuestos*** es conveniente usar el llamado **diagrama en árbol** para hacerse una idea global de todos ellos.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son:

* Sucesos incompatibles *2* a *2*.
* cuya unión es el espacio muestral

$$(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = E)$$

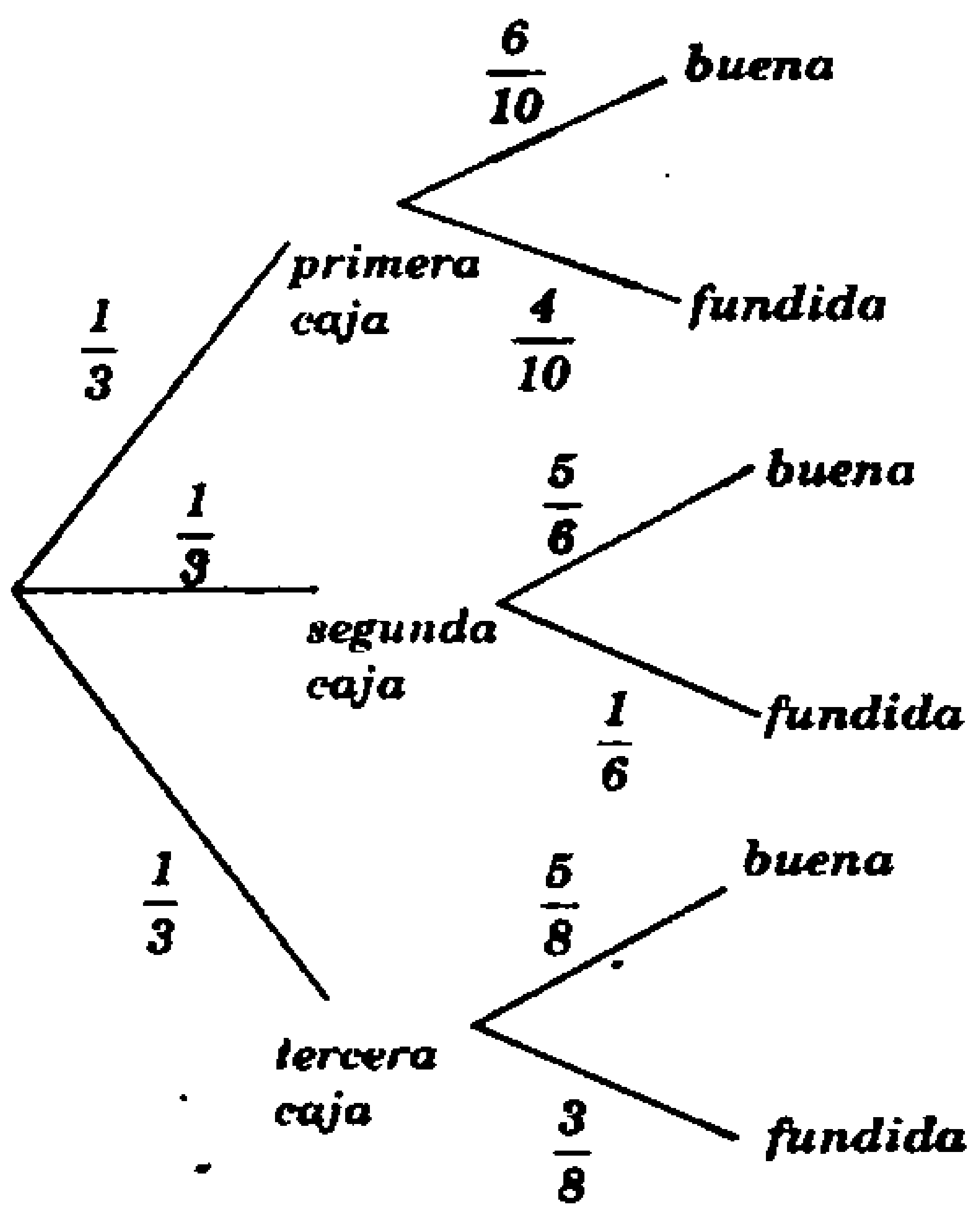
* *B* es otro suceso.

Resulta que:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + ... + P(A_n)P(B/A_n)$$

EJEMPLO :

Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene *10* bombillas, de las cuales a y cuatro fundidas; en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?



$$P(fundida) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

TEOREMA DE BAYES

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son:

* Sucesos incompatibles *2* a *2*.
* cuya unión es el espacio muestral

$$(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E)$$

* *B* es otro suceso.

Resulta que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + ... + P(A_n)P(B/A_n)}$$

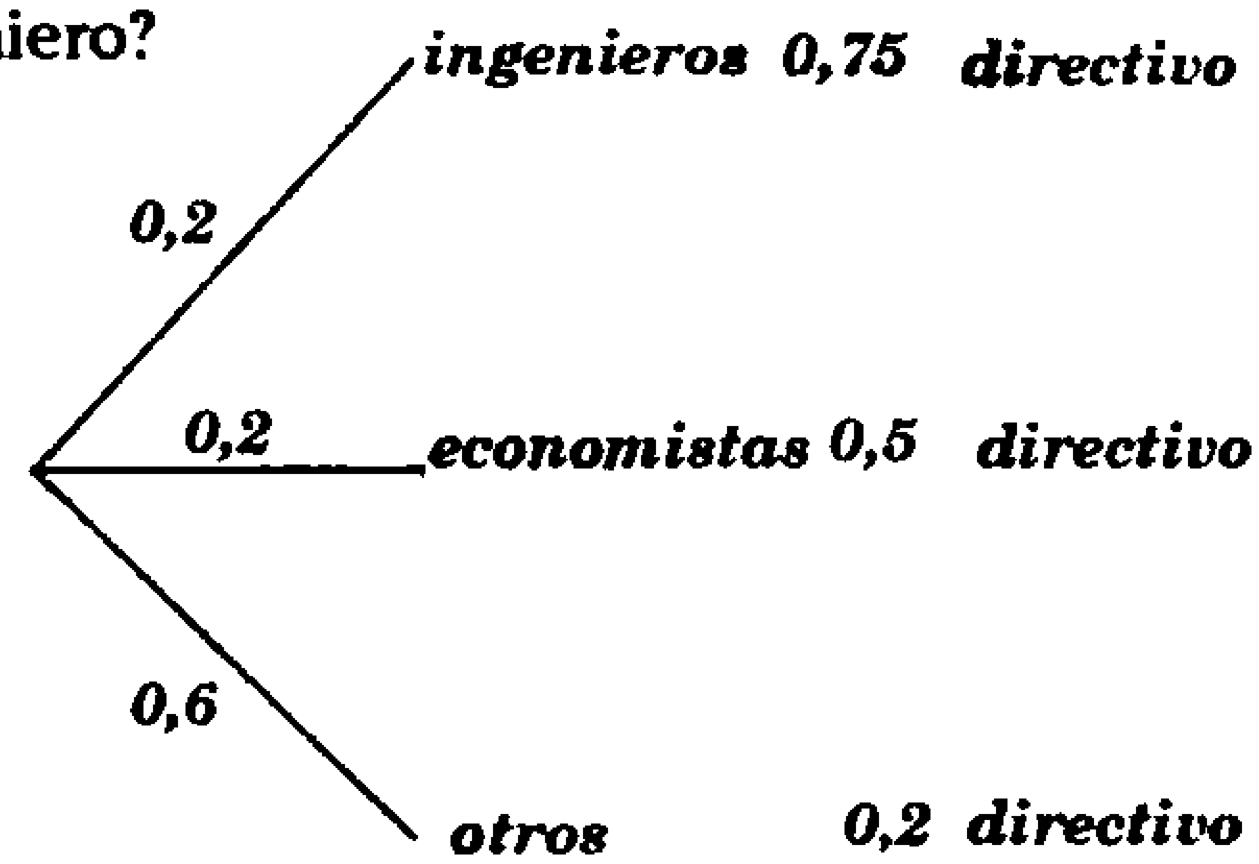
Las probabilidades $P(A_i)$ se denominan probabilidades a priori.

Las probabilidades $P(A_i/B)$ se denominan probabilidades a posteriori.

Las probabilidades $P(B/A_i)$ se denominan verosimilitudes.

EJEMPLO 1 :

El *20%* de los empleados de una empresa son ingenieros y otro *20%* son economistas. El *75%* de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el *50%* de los economistas también, mientras que los no ingenieros y los no economistas solamente el *20%* ocupa un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?



$$P(ingeniero/directivo) = \frac{0{,}2 \times 0{,}75}{0{,}2 \times 0{,}75 + 0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}6 \times 0{,}2} = 0{,}405$$

La probabilidad de que haya un accidente en una fábrica que dispone de alarma es *0,1*. La probabilidad de que suene esta sí se ha producido algún incidente es de *0,97* y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es *0,02.*

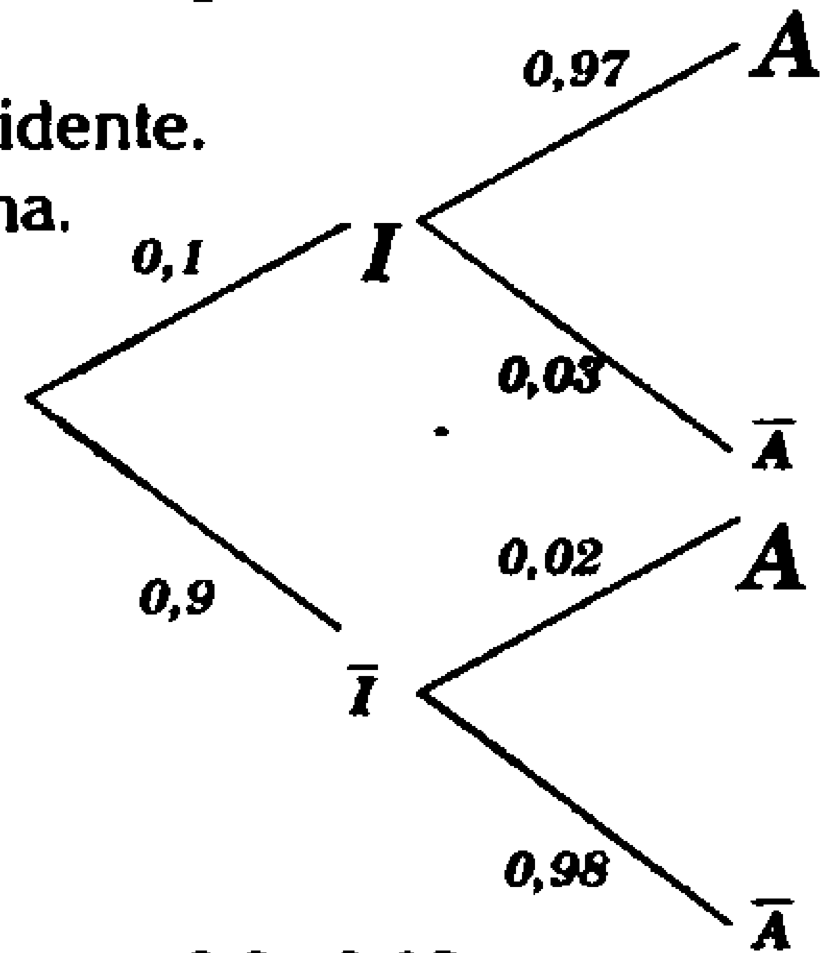
EJEMPLO 2 :

Según el ejemplo anterior en el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Sean los sucesos:

I = Producirse incidente.

A = Sonar la alarma.



$$P(\bar{I}/A) = \frac{0{,}9 \times 0{,}02}{0{,}1 \times 0{,}97 + 0{,}9 \times 0{,}02} = 0{,}157$$

VARIABLE ALEATORIA

Se llama variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral E un número real. Se utilizan letras mayúsculas *X, Y, ...* para designar variables aleatorias, y las respectivas minúsculas *(x, y, ...)* para designar valores concretos de las mismas.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA :

Una variable aleatoria discreta es aquella que sólo puede tomar valores enteros.

EJEMPLO :

El número de hijos de una familia, la puntuación obtenida al lanzar un dado.

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA :

Una variable aleatoria continua es aquella que puede tomar todos los valores posibles dentro de un cierto intervalo de la recta real.

EJEMPLO :

La altura de los alumnos de una clase, las horas de duración de una pila.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

Se llama función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X a la aplicación que asocia a cada valor de x_i de la variable su probabilidad P_i

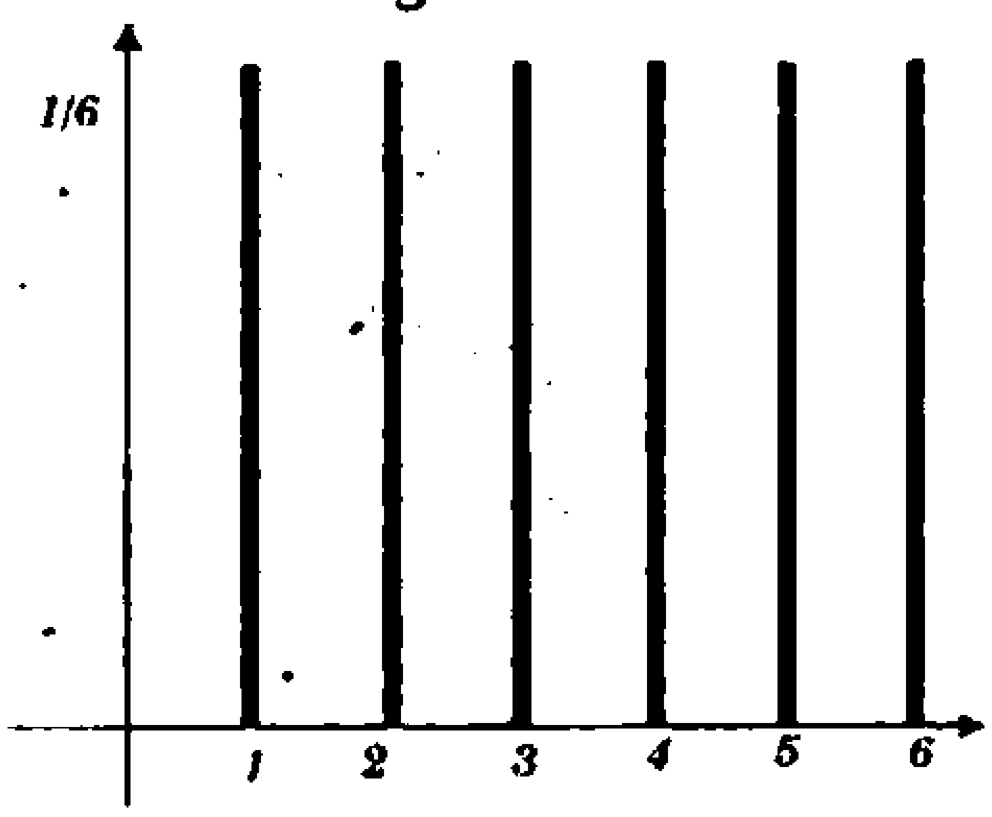
* $0 \leq P_i \leq 1$
* $P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = \sum P_i = 1$

EJEMPLO :

Calcular la distribución de probabilidad de las puntuaciones obtenidas al lanzar un dado.

x	P_i
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

La representación de una distribución discreta de probabilidad es un diagrama de barras.



FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta cuyos valores suponemos ordenados de menor a mayor. Llamaremos función de distribución de la variable X, y escribiremos $F(x)$ a la función

* $F(x) = P(X \leq x)$

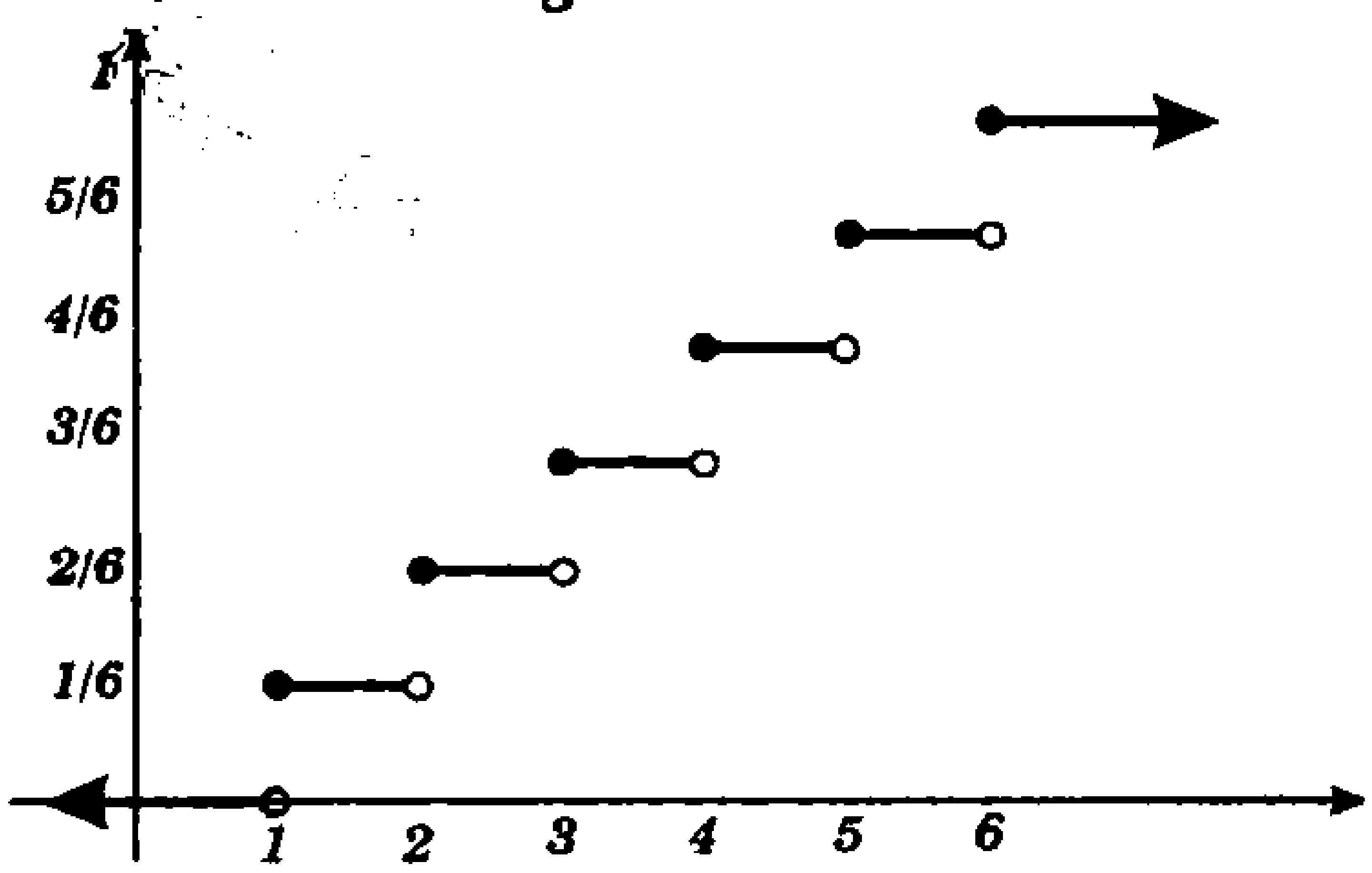
La función de distribución asocia a cada valor de la variable aleatoria la probabilidad acumulada hasta ese valor.

EJEMPLO :

Calcular la ***función de distribución de probabilidad*** de las puntuaciones obtenidas al lanzar un dado.

x	P_i
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1/6
$2 \leq x < 3$	2/6
$3 \leq x < 4$	3/6
$4 \leq x < 5$	4/6
$5 \leq x < 6$	5/6
$6 \leq x$	1

La representación de una función de distribución de probabilidad es una gráfica escalonada.



ESPERANZA MATEMÁTICA(E)

En estadística la **esperanza matemática** (o simplemente **esperanza**) o **valor esperado** de una variable aleatoria es la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso.

$$E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_iP_i = \sum_{i=1}^{n} x_iP_i$$

Por ejemplo, en un juego de azar el valor esperado es el beneficio medio.

Si todos los sucesos son de igual probabilidad la esperanza es la media aritmética.

EJEMPLO :

Calcular la **esperanza matemática**, de la distribución de probabilidad de las puntuaciones obtenidas al lanzar un dado.

$$E\begin{pmatrix}\text{al lanzar}\\ \text{un dado}\end{pmatrix} = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + ... + 6\times\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+...+6}{6} = \frac{21}{6}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

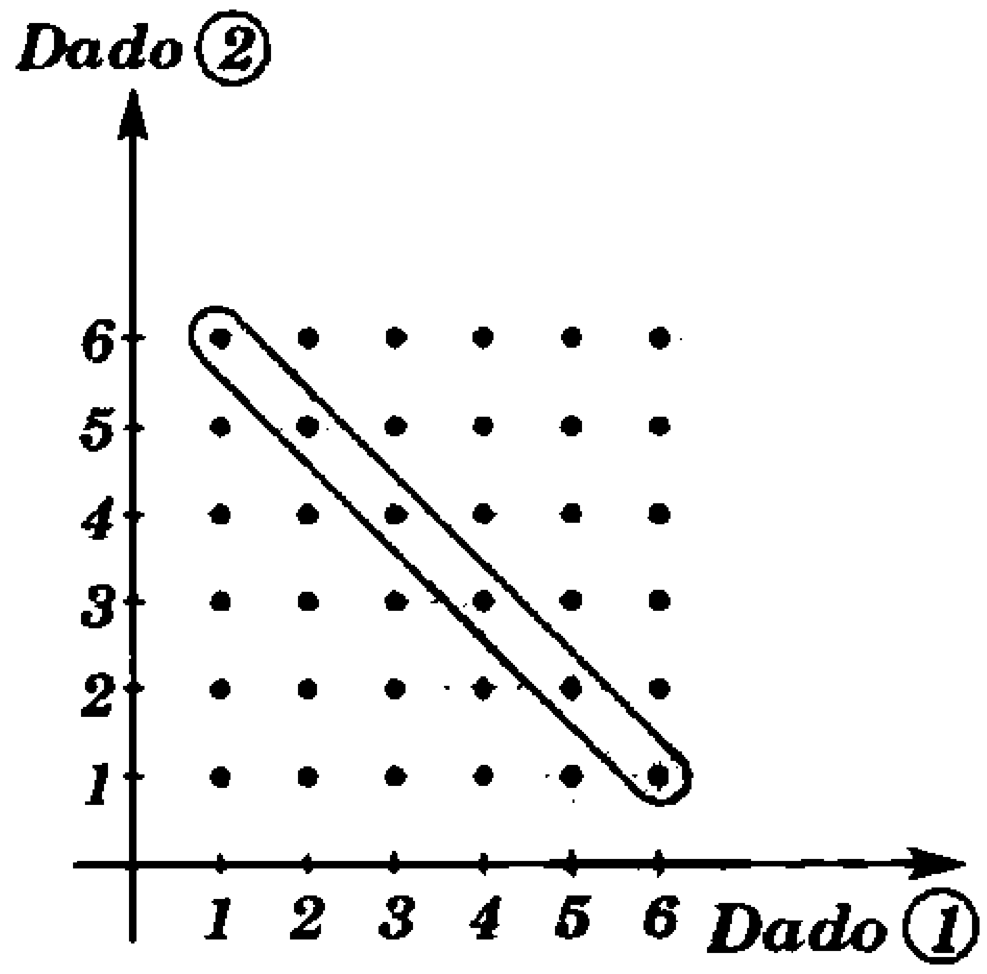
PROBLEMA 1 :

Al lanzar dos dados normales , ¿cuál es la suma que mayor probabilidad de ocurrencia tiene?

A) 12 ***B) 7*** ***C) 13*** ***D) 5*** ***E) 6***

RESOLUCIÓN :

Graficando total de casos posibles



En el gráfico se observa que la suma que tiene mayor ocurrencia es la *7* .

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Al lanzar una moneda *3* veces consecutivos, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres sellos?

A) 1/2 ***B) 1/4*** ***C) 1/8*** ***D) 1/32*** ***E) 1/5***

RESOLUCIÓN :

- Casos totales $=2\times2\times2=8$
- Casos favorables = Ⓢ Ⓢ Ⓢ = *1*

$$Probabilidad=\frac{Casos\ favorables}{Casos\ Totales}=\frac{1}{8}$$

⇒ La probabilidad es *1/8*

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente *3* caras en *4* tiros de una moneda y una suma igual a *11* en un tiro de dos dados?

A) 1/60 ***B) 1/72*** ***C) 1/62*** ***D) 1/52*** ***E) 1/55***

RESOLUCIÓN:

- Deseamos :

$$\frac{\frac{4!}{3!\times1}}{16}\times\frac{2}{36}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{72}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 6 :

Se lanzan *2* dados simultáneamente ¿Calcular cuántos elementos tiene el espacio muestral?

A) 6 ***B) 12*** ***C) 24*** ***D) 36*** ***E) 216***

RESOLUCIÓN :

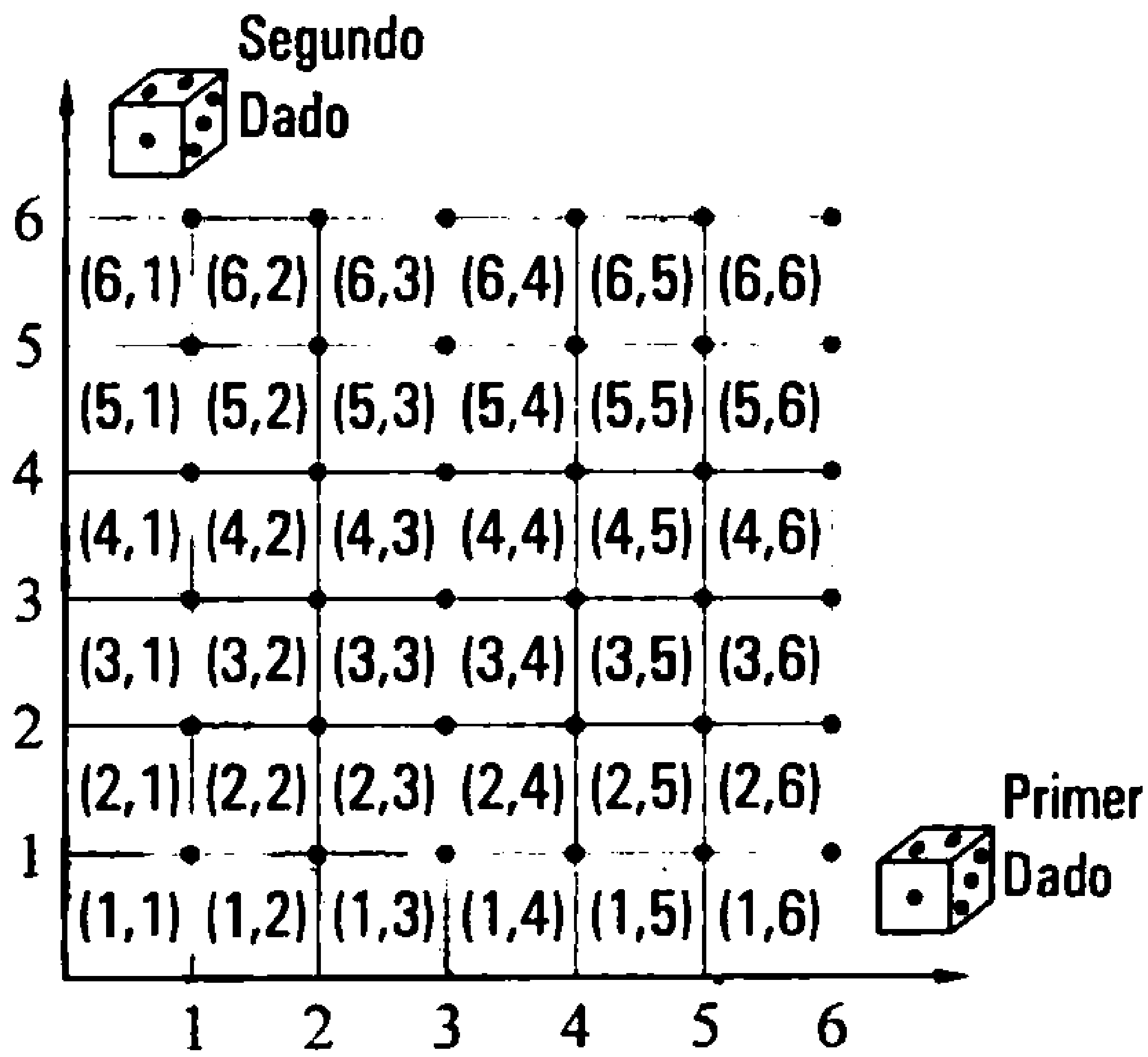
Principio multiplicativo

1^{er} dado	(y)	2^{do} dado	
6	×	6	= 36 resultado

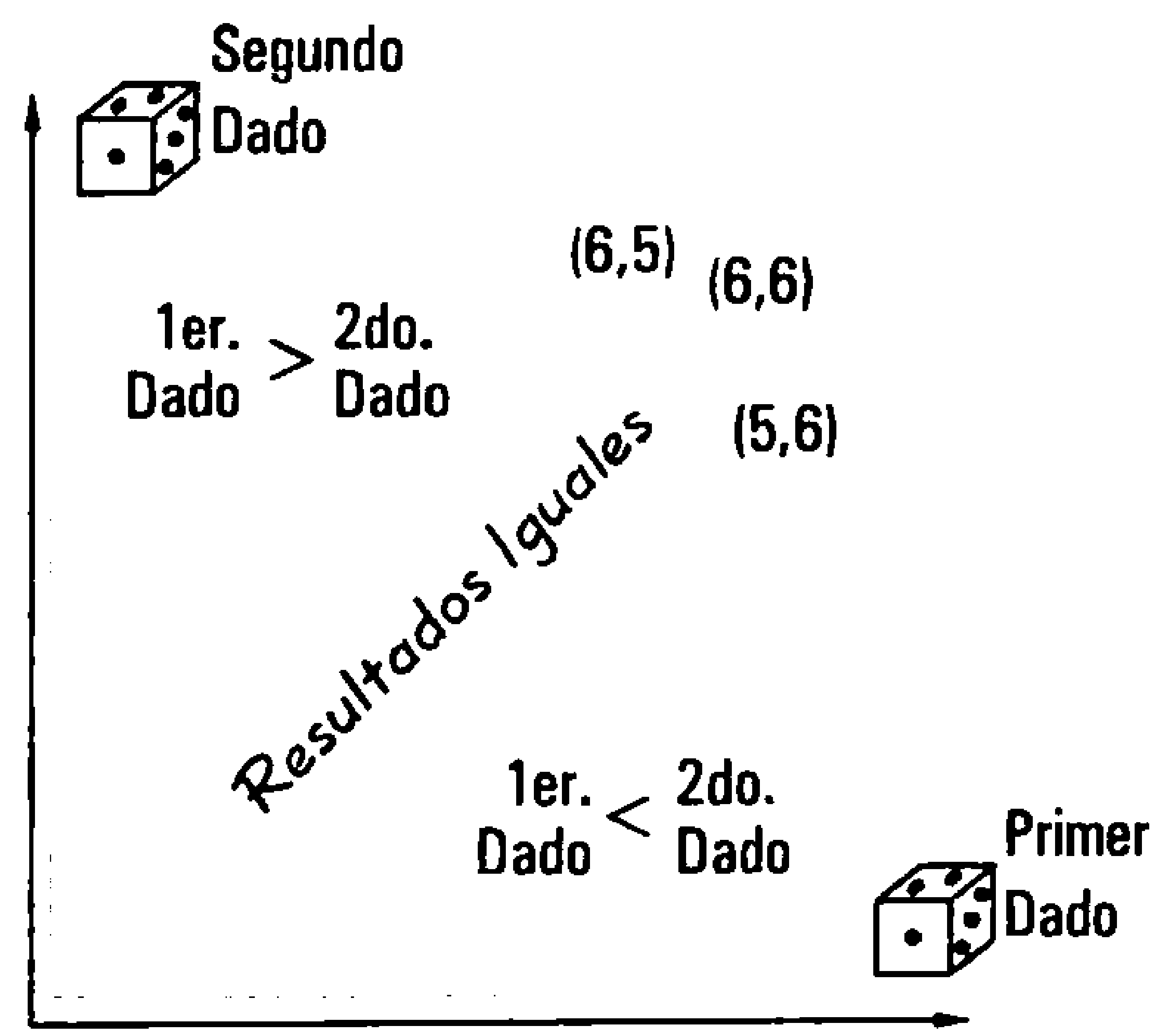
RPTA :"D"

NOTA :

En muchas situaciones es necesario mostrar el espacio muestral, para así poder observar los casos a favor. A continuación se presenta el diagrama del espacio muestral del lanzamiento de *2* dados.



¡ IMPORTANTE !



PROBLEMA 7 :

Determinar la probabilidad de que el resultado sea 7, al lanzar 2 dados?

A) $\frac{7}{36}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{9}{17}$

RESOLUCIÓN :

* Según el diagrama del problema anterior $n(\Omega)=36$

Casos a favor $\underbrace{\{(1;6),(2;5),(3;4),(4,3),(5;2),(6;1)\}}_{6\ resultados}$

$$\Rightarrow P\left(\begin{matrix}Suma\\ sea\ 7\end{matrix}\right)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

RPTA :"B"

PROBLEMA 8 :

Al lanzar 2 dados . ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de los 2 dados no sea 7?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{29}{36}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicamos «el evento complementario o contrario»

$$P(no\ sea\ 7)=1-\underbrace{P(sea\ 7)}_{Según\ problema\ anterior}$$

$$\Rightarrow P(no\ sea\ 7)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

RPTA : "C"

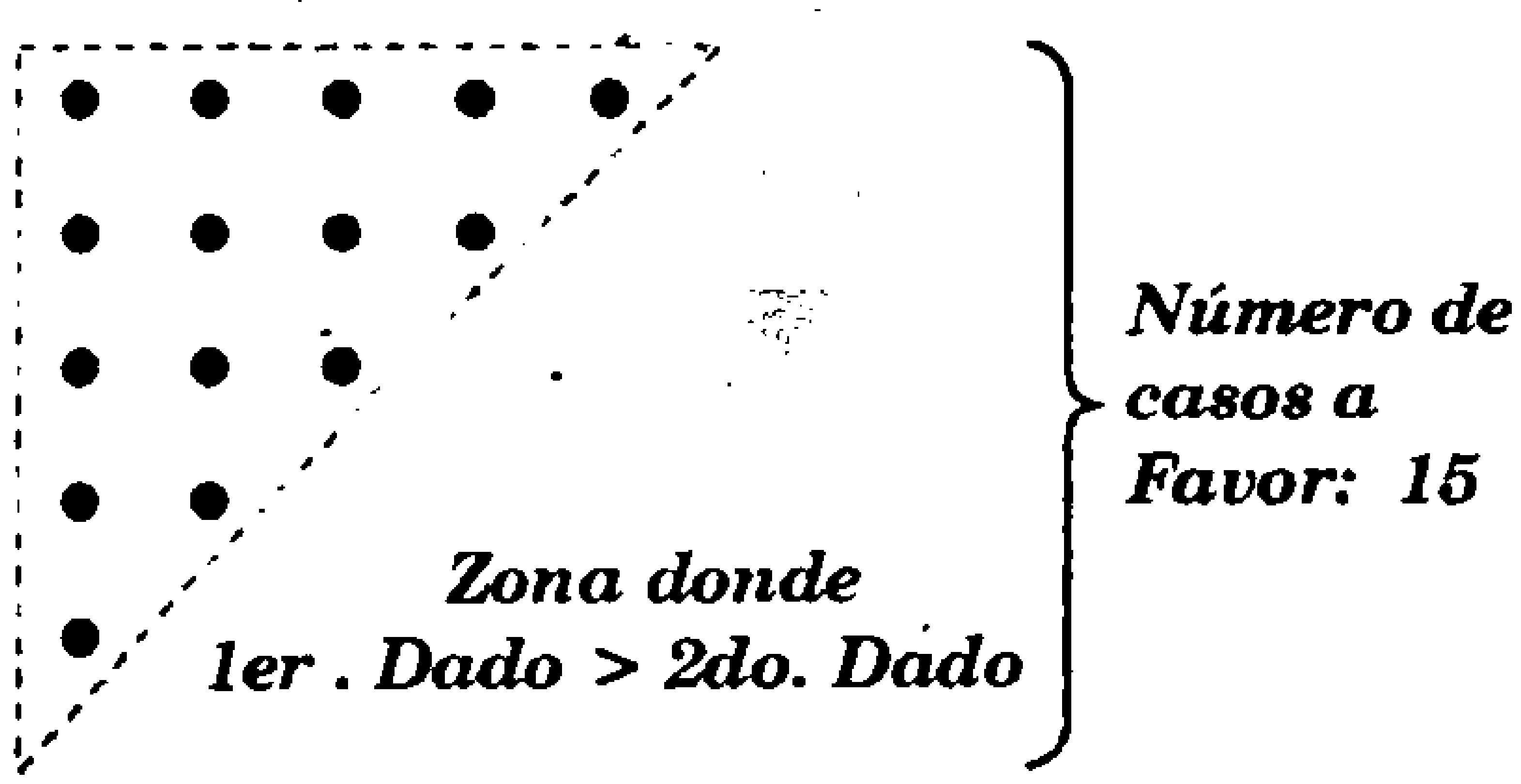
PROBLEMA 9 :

Al lanzar 2 dados, ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el segundo?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{30}$ E) $\frac{5}{12}$

RESOLUCIÓN :

* Se tendrá :



$n(\Omega)=36$

$$\Rightarrow P(1^{ero}>2^{do})=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 10 :

Determinar la probabilidad de que al extraer 2 cartas de una baraja , éstas sean corazones .

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{17}$ D) $\frac{3}{28}$ E) $\frac{4}{25}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que en una baraja se tiene 52 cartas, donde :

Clase : ♣ ♠ ♦ ♥

Nº cartas : 13 13 13 13

* Luego : Necesitamos grupos de 2 :

$$n(\Omega)=C_2^{52}$$

Casos a favor : C_2^{13} ⇒ Corazones disponibles

$$\Rightarrow p\left(\begin{matrix}Las\ 2\ sean\\ corazones\end{matrix}\right)=\frac{C_2^{13}}{C_2^{52}}=\frac{1}{17}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Se quiere seleccionar un comité de 5 personas a partir de 7 mujeres y 6 varones ¿Qué probabilidad habría que el Comité esté integrado por 2 mujeres?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{37}{91}$ C) $\frac{141}{429}$ D) $\frac{140}{429}$ E) $\frac{3}{38}$

RESOLUCIÓN :

* Necesito grupos de 5 personas de un total $7+6=13$.

$$n(\Omega)=C_5^{13}$$

2 mujeres (y) 3 varones

Casos a favor : $C_2^7\times C_3^6$

$$p\left(\begin{matrix}2\ mujeres\ y\\ 3\ varones\end{matrix}\right)=\frac{C_2^7\times C_3^6}{C_5^{13}}=\frac{140}{429}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

Sabiendo que la probabilidad de que ocurra un accidente en 1 km . de una carrera es $\frac{1}{3}$ ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra encontrar al menos un accidente en 3 km. de esa carretera?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{27}$ C) $\frac{8}{27}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{19}{27}$

RESOLUCIÓN :

Sea :

A : Evento de encontrar al menos un accidente en *3 km*.

A' : Evento de no encontrar accidente en *3 km*.

Como la probabilidad de encontrar un accidente en *1km* es $\frac{1}{3}$, entonces la probabilidad de no encontrar *1* accidente en *1 km* . será : $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

* Como queremos la probabilidad de no encontrar un accidente en *3 km*. , es lo mismo que la probabilidad de no encontrar accidente en el :

$$\overbrace{\frac{2}{3}}^{1°km.} \times \overbrace{\frac{2}{3}}^{2°km.} \times \overbrace{\frac{2}{3}}^{3°km.} = \frac{8}{27}$$

(1°km. (y) 2°km. (y) 3°km.)

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

Las probabilidades que tienen *A, B* y *C* de resolver un mismo problema son : $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente . Si intentan hacerlo los tres , determinar la probabilidad de que se resuelva el problema

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Como *P(A)* , *P(B)* y *P(C)* son las probabilidades de resolver el problema, entonces *P(A'), P(B')* y *P(C')* serán las probabilidades de que n puedan resolver el problema , luego :

$$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

$$P(C')=1-P(C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

* La probabilidad de que no puedan resolver el problema los *3* juntos será :

$$P(A')\times P(B')\times P(C')=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}\text{Resuelvan}\\ \text{los 3 juntos}\end{pmatrix}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Si se arrojan *5* monedas, ¿Cuál es la probabilidad de obtener *3* sellos y *2* caras?

A) 0,5 B) 0,32 C) 0,3275 D) 0,1 E) 0,3125

RESOLUCIÓN :

* Espacio Muestral : $n(\Omega)=2\times2\times2\times2\times2=32$

Casos a favor : Estamos frente a una permutación con repetición

$$P^{5}_{(3,2)}=\frac{5!}{3!\times2!}=10$$

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}\text{3 Sellos}\\ \text{2 caras}\end{pmatrix}=\frac{10}{32}=0,3125$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Si se lanza *5* veces un dado ¿cuál es la probabilidad de que las *5* caras que aparecen sean diferentes?

A) $\frac{7}{23}$ B) $\frac{31}{32}$ C) $\frac{1}{32}$ D) $\frac{7}{21}$ E) $\frac{5}{54}$

RESOLUCIÓN :

	1ro.	2do.	3ro.	4to.	5to. vez	
Casos a favor :	6 ×	5 ×	4 ×	3 ×	2	(5 caras Diferentes)
Casos totales :	6 ×	6 ×	6 ×	6 ×	6	(Espacio Muestral)

$$P\begin{pmatrix}\text{5 caras}\\ \text{Diferentes}\end{pmatrix}=\frac{6\times5\times4\times3\times2}{6\times6\times6\times6\times6}=\frac{5}{54}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

A una señora embarazada le diagnosticaron que tendría cuatrillizos . ¿Cuál es la probabilidad que el día del parto nazcan *4* mujeres?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN :

Casos Totales : $\overbrace{2}^{1^{ro}} \times \overbrace{2}^{2^{do}} \times \overbrace{2}^{3^{ro}} \times \overbrace{2}^{4^{to}\text{ hijo}} = 16$

(Varón o mujeres)

Casos a favor : $\overbrace{1}^{1^{ro}} \overset{y}{\times} \overbrace{1}^{2^{do}} \overset{y}{\times} \overbrace{1}^{3^{ro}} \overset{y}{\times} \overbrace{1}^{4^{to}} = 1$

(Mujer)

$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}\text{Nazcan}\\ \text{mujeres}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

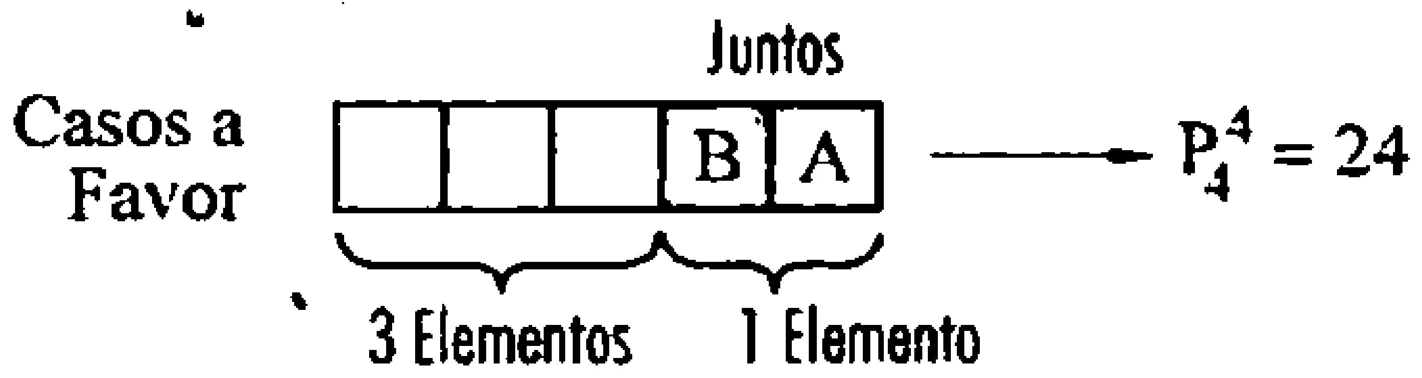
En una competencia atlética de *100 m* . intervienen, los atletas *A, B, C, D* y *E* . ¿Cuál es la probabilidad de

que al finalizar «*B*» llegue luego de «*A*»?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Casos Totales : $P_5^5 = 120$



$$\Rightarrow P\begin{pmatrix}\text{«B» llegue}\\ \text{Luego de «A»}\end{pmatrix} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

En una caja hay *10* focos de los cuales *4* están en buen estado, una persona toma al azar *3* focos . Hallar la probabilidad de que por lo menos uno esté en buen estado.

A) 2/3 B) 1/12 C) 5/6 D) 1/6 E) 1/5

RESOLUCIÓN :

ε : Elegir *3* focos de un total de *10*

$$\Rightarrow n(\Omega) = C_3^{10} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

A : Por lo menos uno esté en buen estado.

A : Ninguno esté en buen estado < > los *5* son defectuosos .

$$\Rightarrow n(A') = C_3^6 = \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} = 20$$

$$\Rightarrow n(A) = n(\Omega) - n(A') = 120 - 20 = 100$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

En una urna se tiene fichas numeradas consecutivamente desde *1* hasta *20* . ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una ficha se obtenga un múltiplo de *3*?

A) 0,1 B) 0,3 C) 0,7 D) 0,8 E) 0,5

RESOLUCIÓN:

* Considerando la numeración del *1* al *20*, los múltiplos de *3* son *3; 6; 9; 12; 15;* 18 luego:

$$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20 :

En un paquete hay *20* tarjetas perforadas marcadas con los números *401; 402;... ;420* y dispuestas arbitrariamente, Alfredo extrae al azar dos tarjetas. Hallar la probabilidad de que sean escogidas las tarjetas perforadas con los números *401* y *420*.

A) 1/170 B) 1/176 C) 1/186 D) 1/190 E) 1/180

RESOLUCIÓN:

$$P_{(401\ y\ 420)} = \frac{1\times 1}{\frac{20\times 19}{1\times 2}} = \frac{1}{190}$$

RPTA : "D"

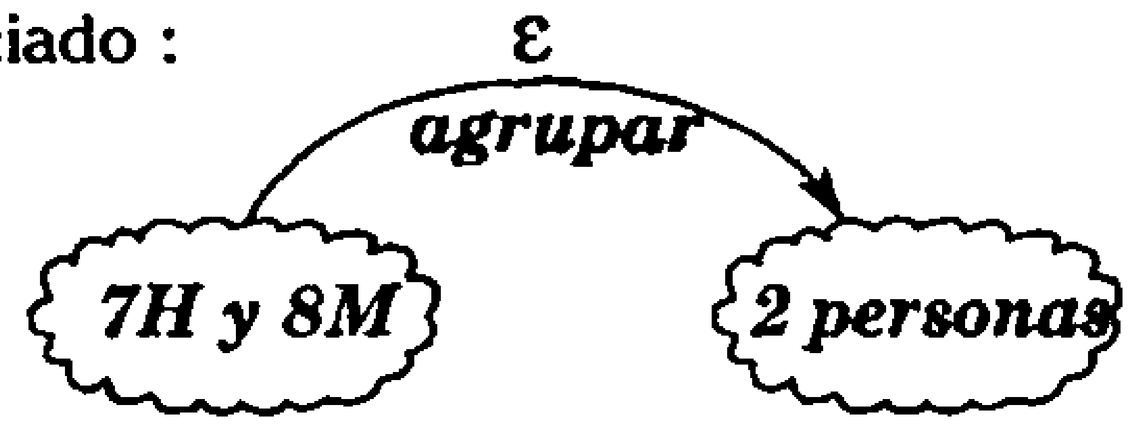
PROBLEMA 21 :

En un concurso participan *7* alumnos y *8* alumnas, si deben haber *2* ganadores, ¿cuál es la probabilidad de que los ganadores sean una pareja mixta?

A) 8/17 B) 5/11 C) 7/13 D) 8/15 E) 4/9

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado :



ε : Elegir dos personas

$$\Rightarrow n(\Omega) = C_2^{15} = \frac{15\times 14}{2\times 1} = 15\times 7$$

A: sea un hombre y una mujer *H* y *M*

$$\Rightarrow n(A) = 7\times 8 \Rightarrow P(A) = \frac{7\times 8}{15\times 7} = \frac{8}{15}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Un artillero dispara a un blanco. Si la probabilidad de acertar un disparo es *0,01* ¿qué probabilidad tiene de no acertar?

A) 0,72 B) 0,81 C) 0,92 D) 0,7 E) 0,99

RESOLUCIÓN:

* Los eventos considerados son complementarios :

$$\underbrace{P(\text{acierto})} + P(\text{no acierto}) = 1$$

$$0,01 + P(\text{no acierto}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\text{no acierto}) = 1 - 0,01 = 0,99$$

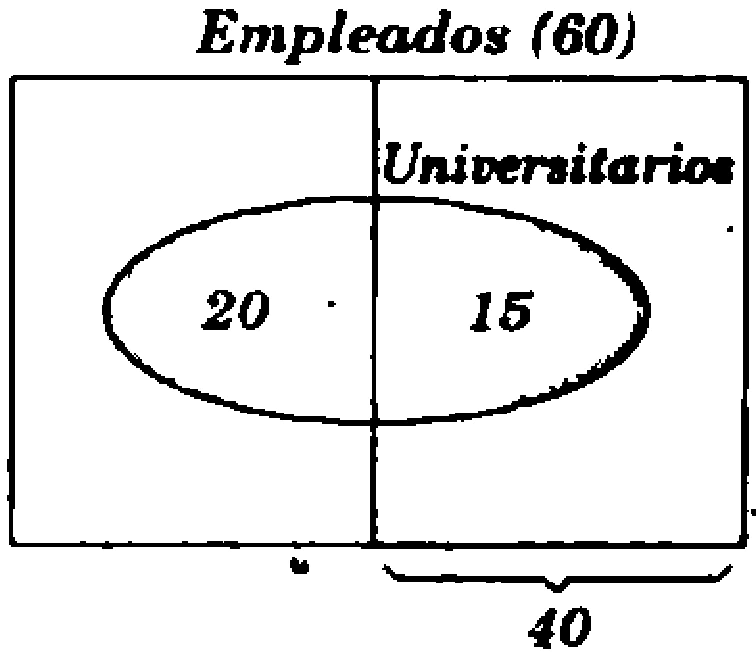
RPTA : "E"

PROBLEMA 23 :

En una oficina hay *60* empleados de los cuales *20* son solteros que no son universitarios y *40* son universitarios; además de los universitarios *15* están solteros. Si se selecciona un empleado al azar ¿cuál es la probabilidad de que sea soltero?

A) 7/6 B) 7/12 C) 8/9 D) 9/5 E) 9/7

RESOLUCIÓN :



$$P_{(soltero)}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea menor que seis, si sabemos que dicha suma ha sido múltiplo de cuatro?

A) *1/3* ***B)*** *1/5* ***C)*** *1/2* ***D)*** *2/7* ***E)*** *3/8*

RESOLUCIÓN:

Se nos pide la probabilidad : $P\left(^{suma<6}/_{suma\ múltiplo\ de\ 4}\right)$

Utilizando $P=\dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$ tenemos

CASOS POSIBLES.

No son todos los resultados posibles al lanzar dos dados , sino sólo aquellos que producen una suma múltiplo de *4*; es decir:

$$\underbrace{(1;3),(2;2),(2;6),(3;1),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2),(6;6)}_{N^{\circ}\ de\ casos\ posibles=9}$$

CASOS FAVORABLES.

Son aquellos de entre los anteriores cuya suma es menor que *6* , es decir: $\underbrace{(1;3);(2;2),(3;1)}_{N^{\circ}\ de\ casos\ favorables=3}$

Por tanto

$$P\left(^{suma<6}/_{suma\ múltiplo\ de\ 4}\right)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

RPTA : "A"

¡Observe que no hemos utilizado la fórmula de la probabilidad condicionada! Inténtelo usando dicha fórmula.

PROBLEMA 25 :

En una caja hay *10* bolas numeradas del *1* al *10*. Se extrae al azar una bola. ¿Cuál es la probabilidad que el número de la bola extraída no exceda de *10*?

A) *0,25* ***B)*** *0,5* ***C)*** *1* ***D)*** *1/3* ***E)*** *2/11*

RESOLUCIÓN:

$$P(A)=\frac{Casos\ favorables\ al\ evento}{Casos\ totales\ en\ \Omega}=\frac{10}{10}=1$$

RPTA : "C"

OBSERVACIÓN

El evento: "Sacar una bola con un número que no exceda de *10*" es un evento seguro pues de todas las bolas que hay ninguna excede al número *10*; (la numeración va de 1 hasta el *10* inclusive).

PROBLEMA 26 :

Se va ha seleccionar por lote un comité de *5* hombres, a partir de un grupo de *8* norteamericanos, *5* ingleses y *3* franceses. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité esté compuesto por *2* norteamericanos , *2* ingleses y *1* francés?

A) $\frac{3}{5}$ ***B)*** $\frac{7}{13}$ ***C)*** $\frac{5}{26}$ ***D)*** $\frac{1}{9}$ ***E)*** $\frac{31}{63}$

RESOLUCIÓN :

Casos Totales : $C_5^{8+5+3}=C_5^{16}$

2 norteam. *2 Ingleses* *1 Francés*

Casos a favor : $C_2^8 \times C_2^5 \times C_1^3$

Probabilidad pedida : $\dfrac{C_2^8\times C_2^5\times C_1^3}{C_5^{16}}=\dfrac{5}{26}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 27 :

De una baraja de *52* cartas, se sacan *3* naipes de uno en uno , y se devuelven después de cada extracción . ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean tréboles?

A) $\frac{1}{4}$ ***B)*** $\frac{1}{13}$ ***C)*** $\frac{1}{16}$ ***D)*** $\frac{1}{64}$ ***E)*** $\frac{1}{21}$

RESOLUCIÓN :

• Como en la baraja hay *13* tréboles , luego :

Casos Totales : $\overset{1^a.}{52}\times\overset{2^a.}{52}\times\overset{3^a.\ Carta}{52}$

Casos a favor : $13\times 13\times 13$

$$\Rightarrow P_{\left(\substack{Todos\ sean\\ tréboles}\right)}=\frac{13\times13\times13}{52\times52\times52}=\frac{1}{64}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

9 amigos se sientan al azar en círculo ¿Cuál es la probabilidad de que *2* de ellos queden juntos?

A) $\frac{1}{2}$ ***B)*** $\frac{1}{3}$ ***C)*** $\frac{1}{4}$ ***D)*** $\frac{1}{8}$ ***E)*** $\frac{1}{5}$

RESOLUCIÓN :

Casos Totales : $P_{9}^{circular}{}_{2}=(9-1)!=8!$

Juntos y *Todos*

Casos a favor : $P_2^2\times P_8^{circular}=2\times(8-1)!$

$$\Rightarrow P\,(2\,juntos) = \frac{2\times7!}{8!} = \frac{1}{4}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

6 parejas de casados se encuentran en una habitación . si las *4* personas se escogen al azar , encontrar la probabilidad de que se escojan *2* parejas de casados

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{17}$ D) $\frac{1}{33}$ E) $\frac{2}{5}$

RESOLUCIÓN :

Casos Totales : C_4^{12}

Casos a favor : C_2^6

Probabilidad Pedida : $\frac{C_2^6}{C_4^{12}} = \frac{1}{33}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Se tiene *5* libros, *3* de álgebra y *2* de aritmética, ordenados en un estante ¿Cuál es la probabilidad de que los libros de aritmética sean separados por los *3* libros de álgebra?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{10}$

RESOLUCIÓN :

A_1	x_1	x_2	x_3	A_2

$\underbrace{x_1\ x_2\ x_3}_{Algebra}$

Casos totales : $P_5^5 = 120$

Aritmética (y) *álgebra*

Casos a favor : $2 \times P_3^3 = 12$

Probabilidad pedida : $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Hallar la probabilidad de obtener al menos una cara al lanzar «*n*» monedas a la vez .

A) $\frac{1}{n}$ B) $1-\frac{1}{2^n}$ C) $2^n - n$

RESOLUCIÓN :

$$P\begin{pmatrix}Obtener\ al\\ menos\ una\ cara\end{pmatrix} = 1 - P\begin{pmatrix}De\ no\ Obtener\\ ninguna\ cara\end{pmatrix}$$

$$= 1 - \underbrace{\overset{1^a}{\frac{1}{2}} \times \overset{2^a}{\frac{1}{2}} \times \overset{3^a}{\frac{1}{2}} \times \dots}_{«n\ veces»} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

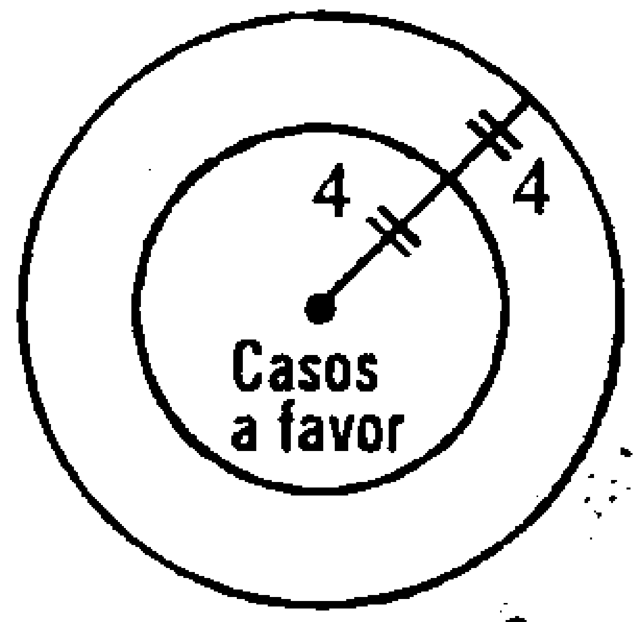
Se tiene un círculo de radio *8* cm si ubicamos un punto aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que este punto esté más cerca o a igual distancia del centro que de la circunferencia?

A) 0,85 B) 0,25 C) 0,35 D) 0,314 E) 0,11

RESOLUCIÓN :

• Casos totales será igual al área del círculo mayor.

• Casos a favor, será igual al área del circulo sombreado.



Probabilidad pedida : $\frac{\pi\times4^2}{\pi\times8^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Suponga que se ha «cargado» un dado de manera que la probabilidad que ocurra un número determinado es proporcional a mismo . Calcular la probabilidad que se obtenga un número menor que *4* o par.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{16}{21}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{17}{35}$

RESOLUCIÓN :

Número de Casos Totales : $1+2+3+4+5+6=21$

Casos a favor : $\{1;2;3;4;6\}$

Número de Casos a favor : $1+2+3+4+6=16$

Probabilidad pedida : $\frac{16}{21}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 34 :

Un dado está cargado de tal modo que la probabilidad de obtener *1; 2; 3; 4; 5* ó *6* es proporcional a los números *1; 2; 3; 4; 5; 6,* respectivamente . Si se lanza este dado, calcular la probabilidad de que el resultado sea par.

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{21}$ C) $\frac{9}{23}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

• Se planteará que :

$$\frac{P_{(1)}}{1}=\frac{P_{(2)}}{2}=\frac{P_{(3)}}{3}=\frac{P_{(4)}}{4}=\frac{P_{(5)}}{5}=\frac{P_{(6)}}{6}$$

* Por proporciones:

$$\frac{P_{(2)}+P_{(4)}+P_{(6)}}{2+4+6}=\frac{\overbrace{P_{(1)}+P_{(2)}+P_{(3)}+P_{(4)}+P_{(5)}+P_{(6)}}^{1\ (teoría)}}{1+2+3+4+5+6}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{(2)}+P_{(4)}+P_{(6)}}{\underset{4}{\cancel{12}}}=\frac{1}{\underset{7}{\cancel{21}}}$$

* Luego : $P_{(Sea\ par)}=P_{(2)}+P_{(4)}+P_{(6)}=\frac{4}{7}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 35 :

Hallar la probabilidad de que al lanzar tres dados , la suma de los números que se obtengan sea igual a ***10*** .

A) $\frac{1}{2}$ B) 0,25 C) 0,125 D) 0,75 E) 0,7

RESOLUCIÓN :

Un dado al ser lanzado puede aparecer de ***6*** formas diferentes, luego:

I) Tres dados pueden caer de:

$6\times6\times6=216$ maneras

casos posibles = ***216***

II) Sea A el evento en la cual las tres caras superiores suman ***10***. Luego, ***10*** puede obtenerse como sigue :

(6;3;1) , (5;4;1) , (5;3;2)

(6;2;2) , (4;4;2) , (4;3;3)

Las ***3*** primeras de estas tiradas pueden ocurrir de ***6*** maneras (permutación de ***3*** en ***3***) y las ***3*** últimas tiradas pueden ocurrir de ***3*** maneras (permutación de ***3*** en ***3*** con un elemento repetido) . Entonces ***10*** puede obtenerse :

$6+6+6+3+3+3=27$ maneras

* Entonces : $P_{(A)}=\frac{27}{216}=\frac{1}{8}=0,125$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36 :

De una baraja de naipes (***52*** cartas) , se extraen ***2*** cartas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas extraídas sean una reina y una jota?

A) 4/663 B) 2/663 C) 1/1326 D) 8/663 E) 4/13

RESOLUCIÓN :

* En una baraja se tiene ***4*** reinas ***(Q)*** y ***4*** jotas (J). Luego una reina y una jota pueden extraerse de ***4×4=16*** maneras . Además , ***2*** cartas cualesquiera pueden extraerse de:

C_2^{52} maneras , entonces :

$$\text{Probabilidad buscada}=\frac{16}{C_2^{52}}=\frac{16}{1326}=\frac{8}{663}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

En un casting se seleccionan a ***5*** varones y ***7*** mujeres, de los cuales se aceptarán a ***4*** de ellos ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo aceptado sea mixto?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{90}$ C) $\frac{1}{99}$ D) $\frac{90}{97}$ E) $\frac{91}{99}$

RESOLUCIÓN :

* Por el método del complemento :

$$P_{\binom{Grupos}{mixtos}}=1-P_{\binom{Grupos\ no}{mixtos}}$$

(Sólo varones o sólo mujeres)

$$P_{\binom{Grupos}{mixtos}}=1-\left(P_{\binom{4}{varones}}+P_{\binom{4}{mujeres}}\right)$$

$$\Rightarrow P_{\binom{Grupos}{mixtos}}=1-\frac{C_4^5}{C_4^{12}}-\frac{C_4^7}{C_4^{12}}\Rightarrow P_{\binom{Grupos}{mixtos}}=\frac{91}{99}$$

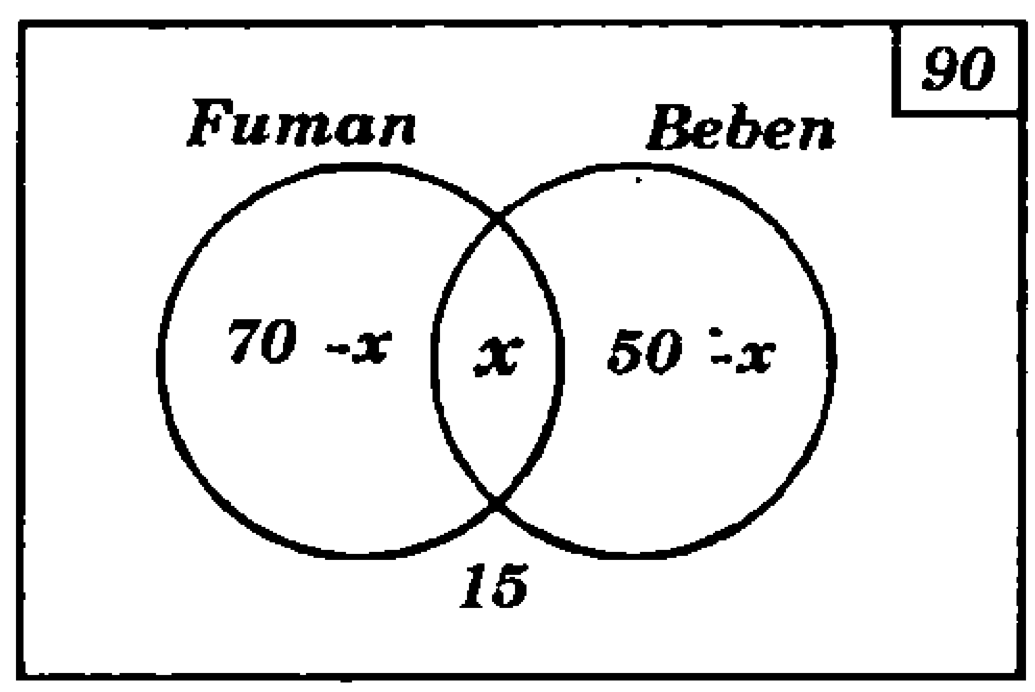
RPTA : "E"

PROBLEMA 38 :

En una fiesta donde asistieron ***90*** personas ; resulta que ***70*** fuman, ***50*** beben y ***15*** no fuman ni beben ; si de éstas personas se eligen una de ellas al azar . ¿Cuál es la probabilidad que beba y fume?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{8}$

RESOLUCIÓN :



*Del gráfico :

$$70-x+x+50-x+15=90$$

$$\Rightarrow 135-x=90$$

$$\Rightarrow x=45$$

$$\Rightarrow P(Beba\ y\ fumen)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que ***4***?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

02 Una moneda se lanza dos veces. ¿Cuántos elementos tiene su espacio muestral?

A) 4 B) 8 C) 10
D) 12 E) 16

03 Se va a seleccionar un comité de tres miembros, a partir de un grupo de cinco personas *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. Determinar el número de elementos que tiene el espacio muestral.

A) 12 B) 10 C) 8
D) 6 E) 4

04 Se lanzan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los números que salgan en sus caras sumen *6*?

A) $\frac{5}{216}$ B) $\frac{7}{108}$ C) $\frac{5}{108}$ D) $\frac{7}{216}$ E) $\frac{9}{216}$

05 Se lanzó un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de que no aparezca un número impar de puntos en cada dado?

A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{17}{36}$ C) $\frac{12}{36}$ D) $\frac{27}{36}$ E) $\frac{11}{36}$

06 ¿Cuál es la probabilidad de obtener la suma: *6* ó *10* en el lanzamiento de dos dados?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{1}{9}$

07 Al lanzar dos dados, determinar la probabilidad de que la suma de ambos dados no supere a diez.

A) $\frac{11}{15}$ B) $\frac{11}{17}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{9}{17}$ E) $\frac{7}{15}$

08 En una caja hay *10* artículos, de los cuales *6* están en buen estado. Una persona extrae al azar *4* de dichos artículos. Calcule la probabilidad de que todos los artículos extraídos estén en buen estado.

A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{14}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{5}{14}$

09 De un total de *52* cartas, se extraen dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que dichas cartas sean de trébol?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{27}$ C) $\frac{1}{17}$ D) $\frac{5}{52}$ E) $\frac{2}{5}$

10 Martha, Roxana y otras siete personas se sientan alrededor de una mesa circular. ¿Cuál es la probabilidad de que María y Roxana queden contiguas?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{5}$

11 Se lanzan cuatro monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tres de dichas monedas marquen la misma cara?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{7}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

12 Calcule la probabilidad de que al lanzar *5* monedas resulten *2* caras.

A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{7}{16}$ D) $\frac{9}{16}$ E) $\frac{5}{16}$

13 De una baraja de *52* cartas, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer una carta, ésta sea *10* ó una figura roja?

A) $\frac{15}{26}$ B) $\frac{7}{13}$ C) $\frac{6}{13}$ D) $\frac{9}{13}$ E) $\frac{8}{13}$

14 De una urna de *8* bolas de las cuales *5* son blancas y *3* negras, ¿cuál es la probabilidad de sacar *5* bolas de las cuales *3* sean blancas y *2* negras?

A) 53, 5 B) 40, 9 C) 59, 6
D) 20, 7 E) 44, 5

15 ¿ Cuál es la probabilidad que en una familia de *3* hijos hayan *2* niños y una niña a la vez?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

16 Una caja contiene *2* fichas blancas, *3* fichas verdes y *4* fichas azules. Si se extra en *2* fichas al azar, calcular la probabilidad de que las dos fichas sean azules.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

17 Se lanzan dos dados simultáneamente. Calcular la probabilidad de que el resultado de la suma sea *9*.

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{16}{35}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{11}{36}$

18 En un salón hay *5* hombres y *4* mujeres, se selecciona un grupo de *5* personas. Calcular la probabilidad de que el grupo esté integrado por *2* hombres y *3* mujeres.

A) $\frac{20}{63}$ B) $\frac{10}{21}$ C) $\frac{20}{21}$ D) $\frac{5}{63}$ E) $\frac{10}{63}$

19 Se lanzan dos dados simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener en la suma por lo menos *9*.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{5}{18}$

20 De un grupo de *10* lapiceros *3* están fallados. Se escogen *4* al azar, determinar la probabilidad de que *2* estén fallados.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{3}{10}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)A	3)B	4)C	5)D	6)D	7)C	8)A	9)C	10)A
11)A	12)E	13)B	14)A	15)D	16)E	17)D	18)A	19)E	20)E

PERIMETROS
CAPITULO 044

PERÍMETRO :

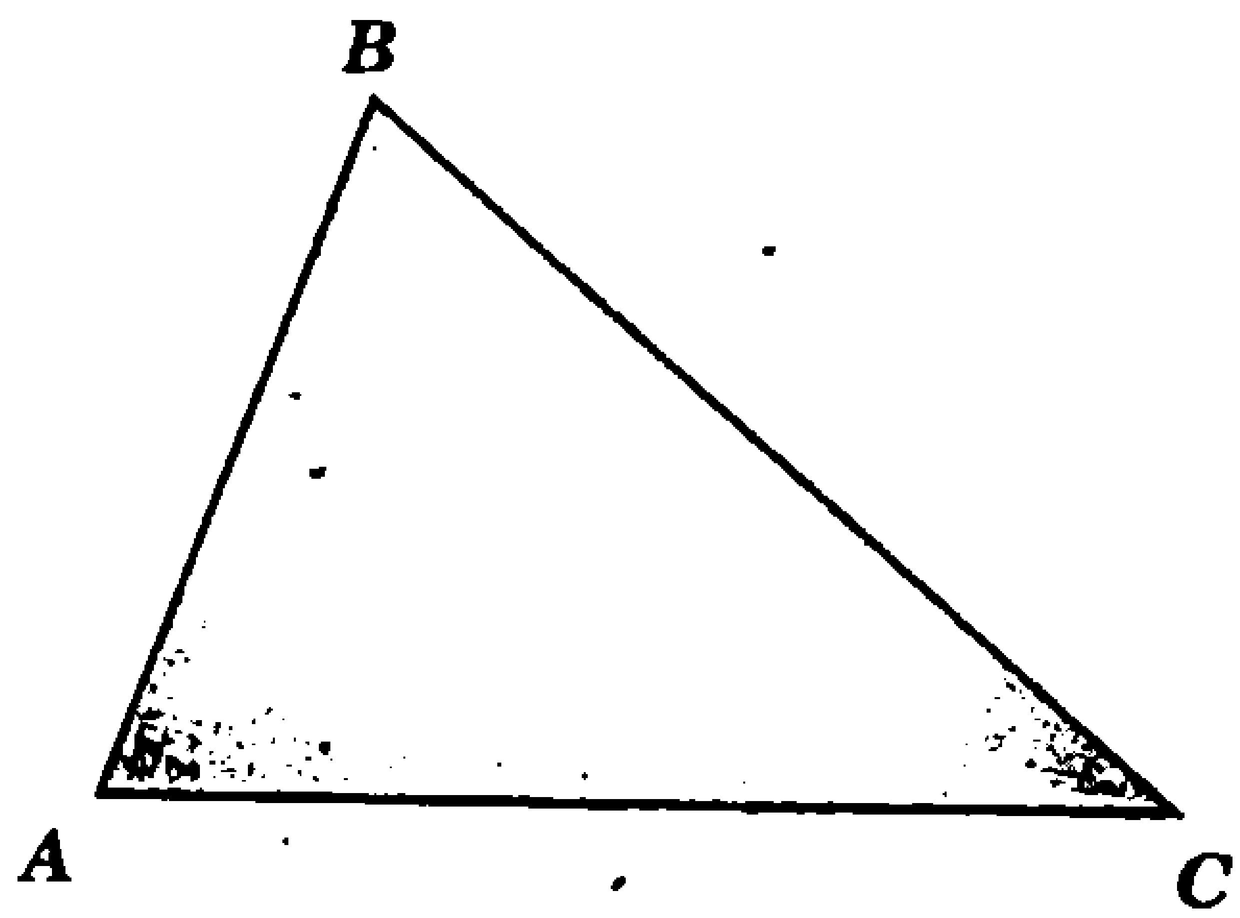
El perímetro de una figura plana es la longitud del contorno (frontera) de la figura ; al perímetro de las figuras planas se le representa por el símbolo ***«2p»***, y la mitad del perímetro se llama ***semiperímetro,*** se representa por ***«p»***

Perímetro = 2p = longitud del contorno de un figura plana

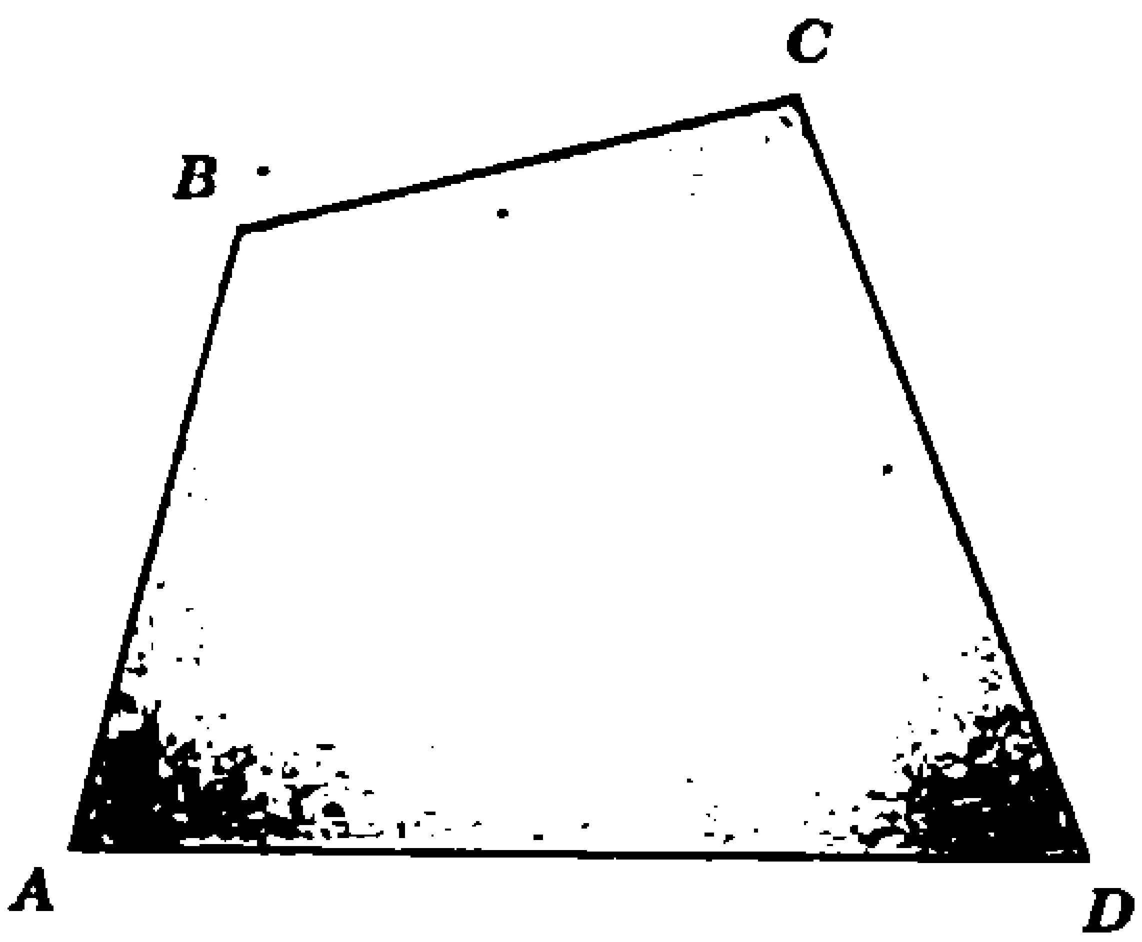
Semiperímetro = $p = \frac{perímetro}{2}$

El perímetro de una figura geométrica, propiamente dicho, ***es la longitud del contorno de dicha figura;*** cuando se trata de un polígono el perímetro es la suma de las longitudes de los lados, en cambio si la figura es circular el perímetro será la longitud de la circunferencia. Insistamos en que el perímetro es una magnitud longitudinal, y la unidad en el sistema internacional es el metro lineal *(m)*.

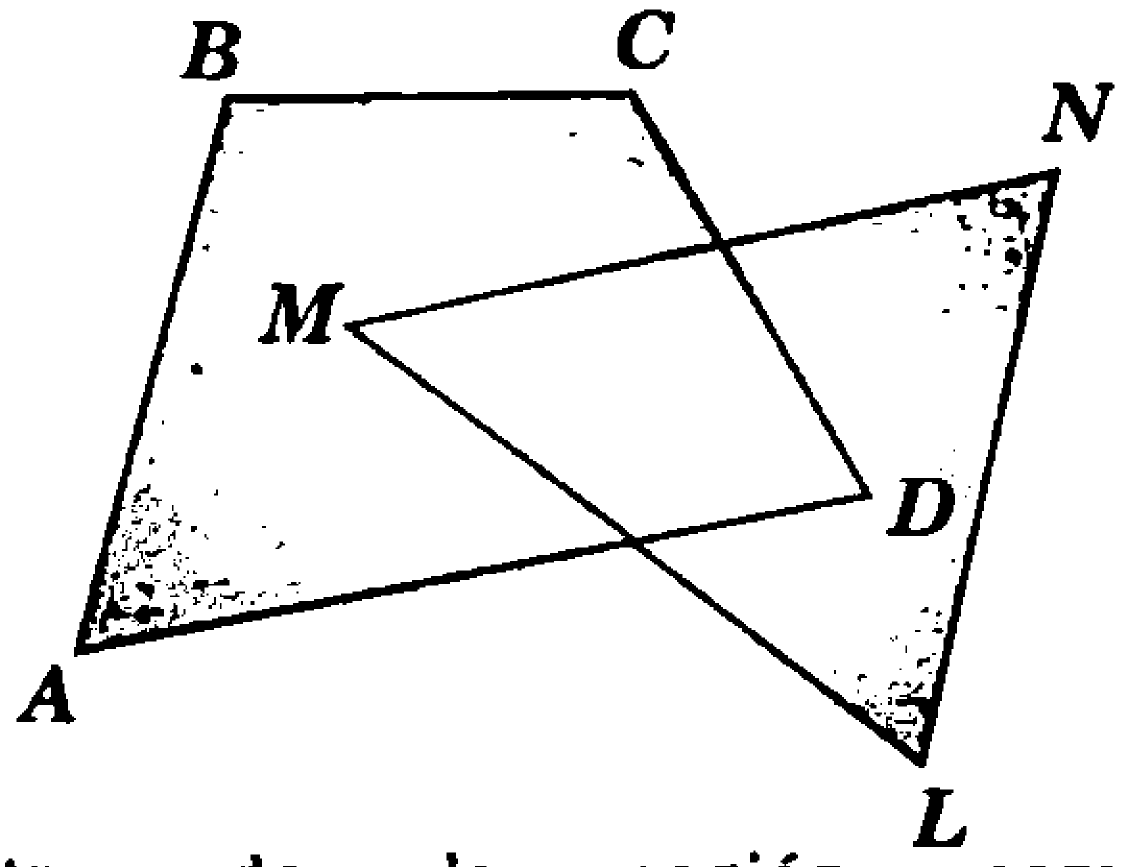
EJEMPLOS



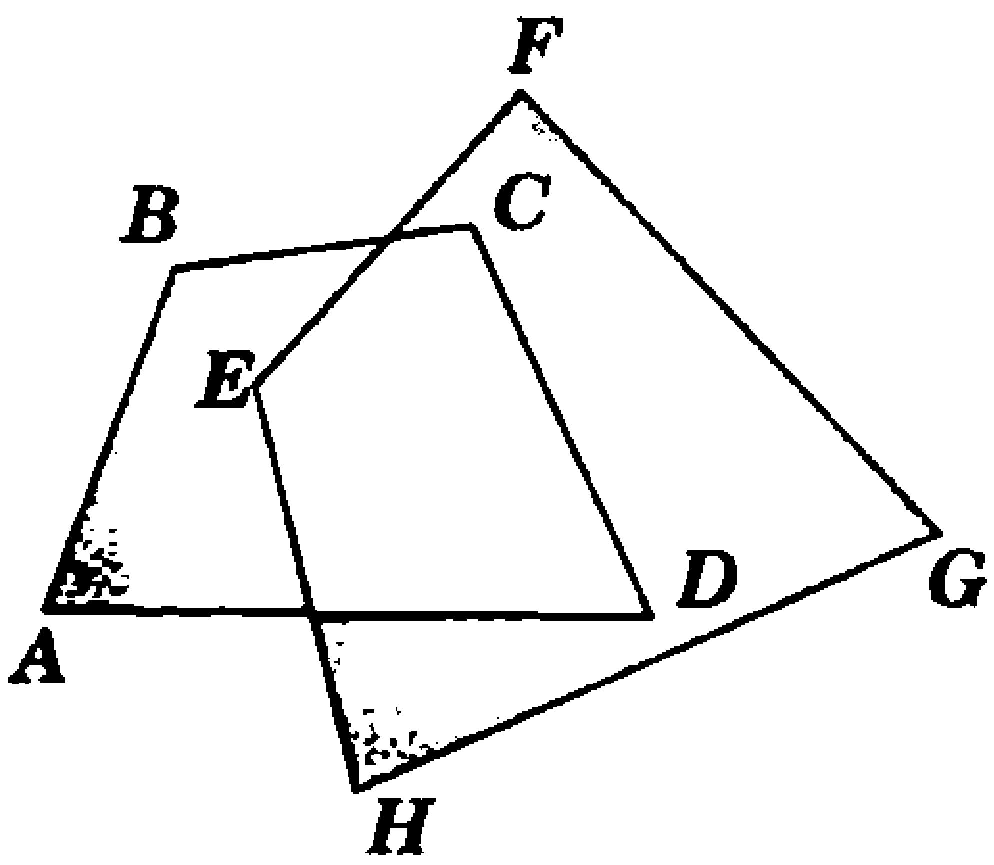
Perímetro de la región triangular $AB+BC+AC$



Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CD+DA$

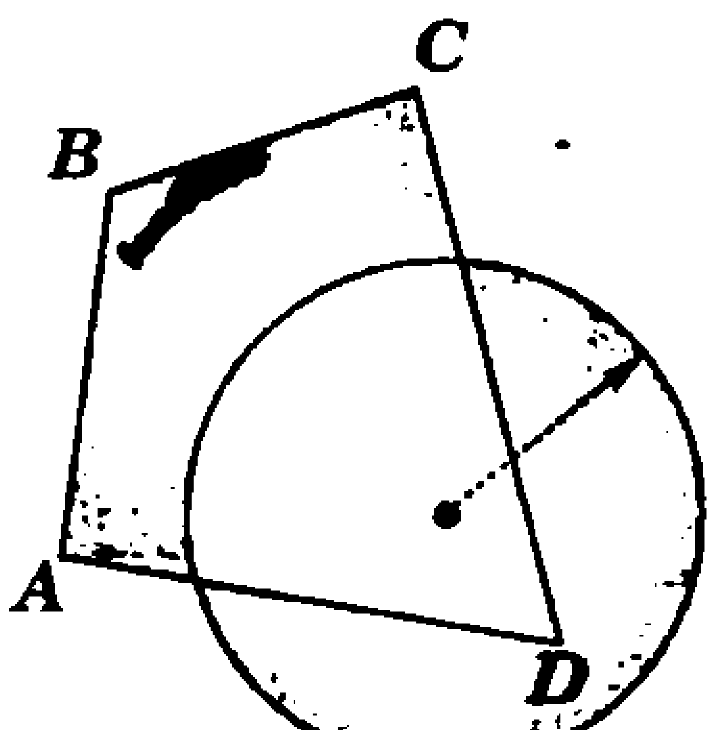


Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CD+DA+MN+NL+LM$

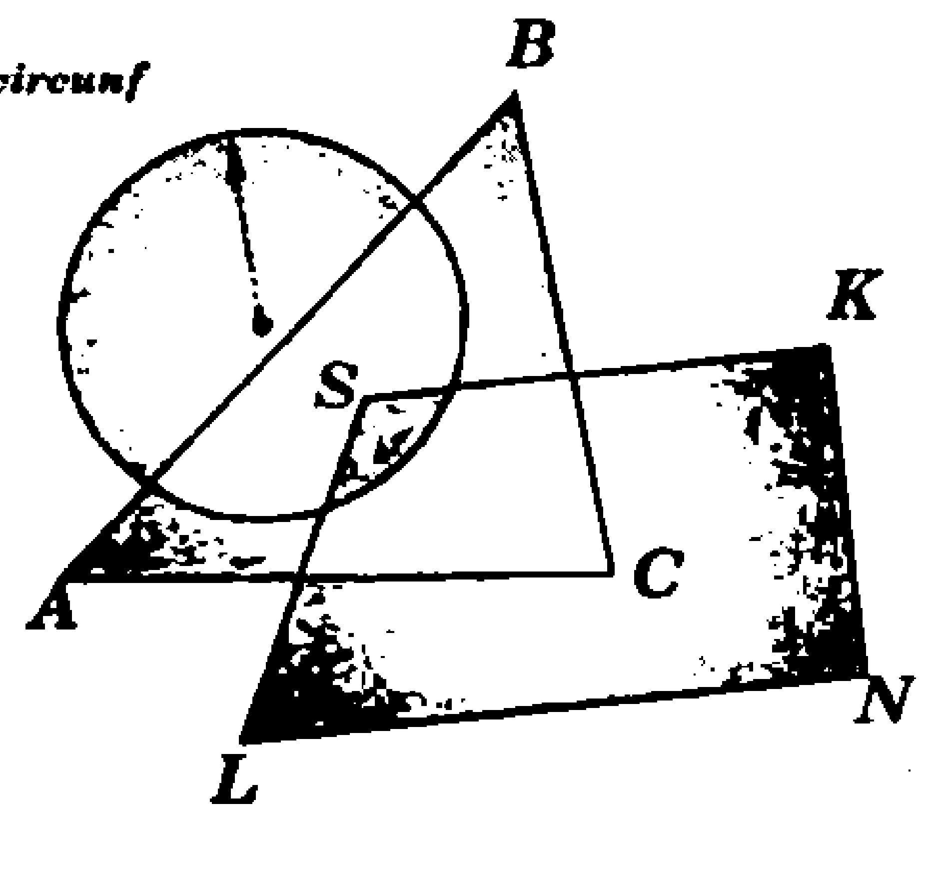


Perímetro de la región sombreada

$AB+BC+CD+DA+EF+FG+GH+HE$



Perímetro de la región sombreada $AB+BC+CD+DA+\ell_{circunf}$



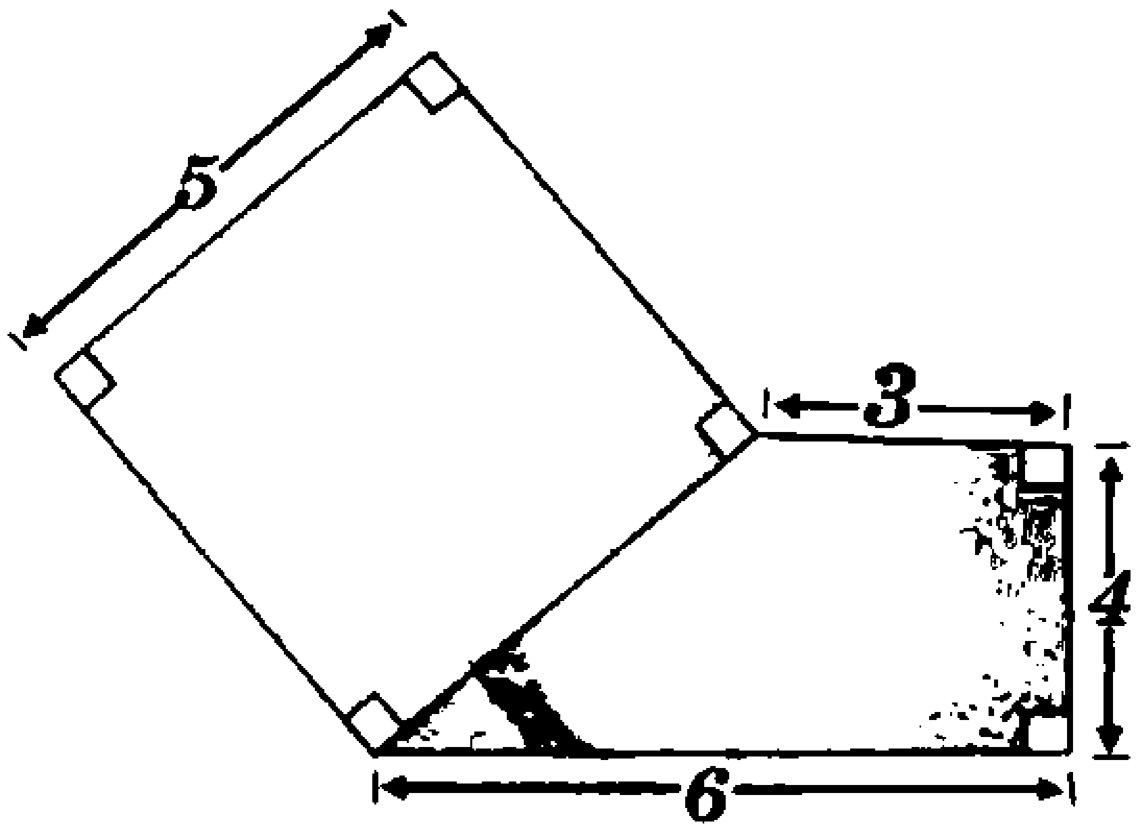
Perímetro de la región sombreada

$AB+BC+AC+LS+SK+KN+NL+\ell_{circunf}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

La figura mostrada esta formada por un cuadrado y un trapecio rècto . Determinar el perímetro de la figura .



A) 26
B) 24
C) 32
D) 28
E) 33

RESOLUCIÓN :

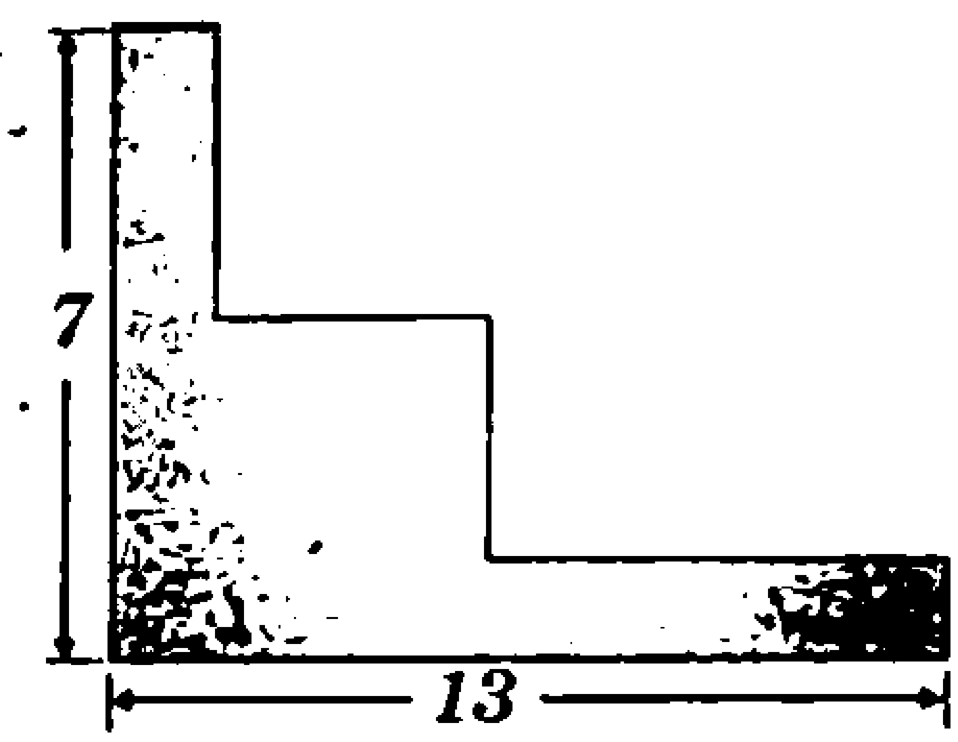
*Recordemos que el perímetro de un figura plana es la longitud de su contorno ó la suma de las longitudes de cada uno de sus lados ; entonces lo pedido , será :

Perímetro ⇒ $6+4+3+5+5+5=28$

RPTA : "D"

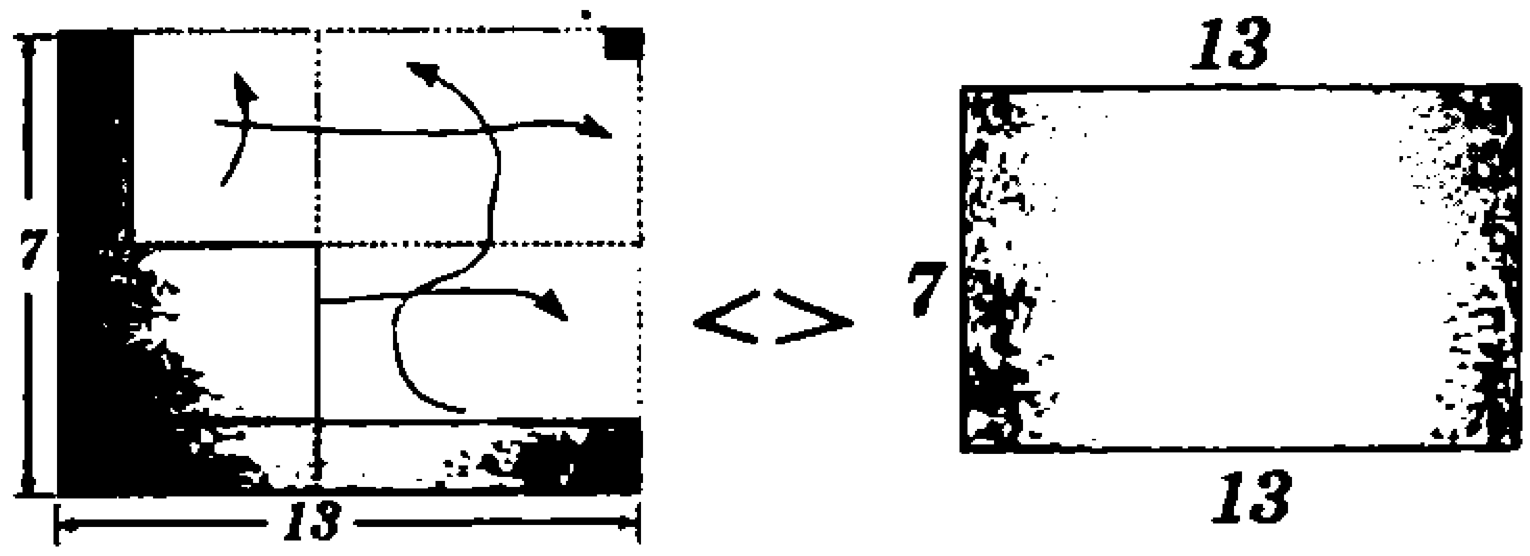
PROBLEMA 2 :

El perímetro de la región śombreada es:



A) 20
B) 40
C) 12
D) 30
E) 60

RESOLUCIÓN :



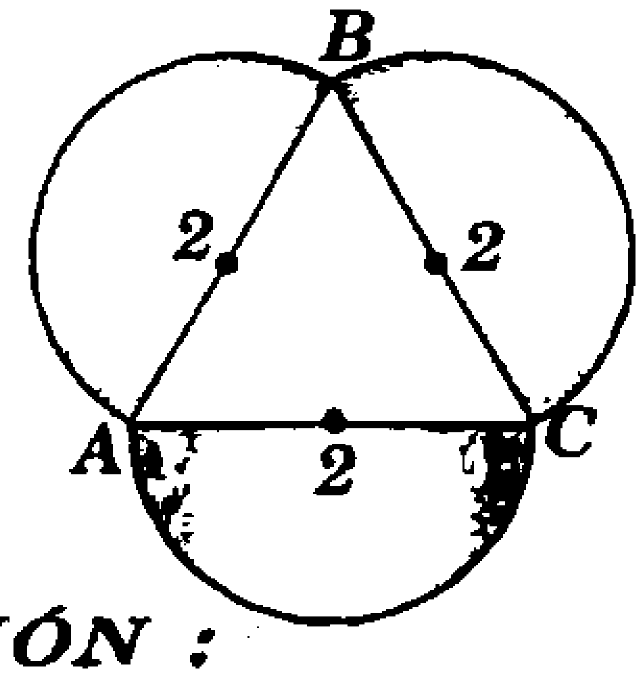
*haciendo una aparente traslación de longitudes de los escalones , deduciremos que el perímetro pedido será , equivalente al de un rectángulo de 13 de largo y 7 de ancho , es decir lo deseado será :

$$13+7+13+7=40$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

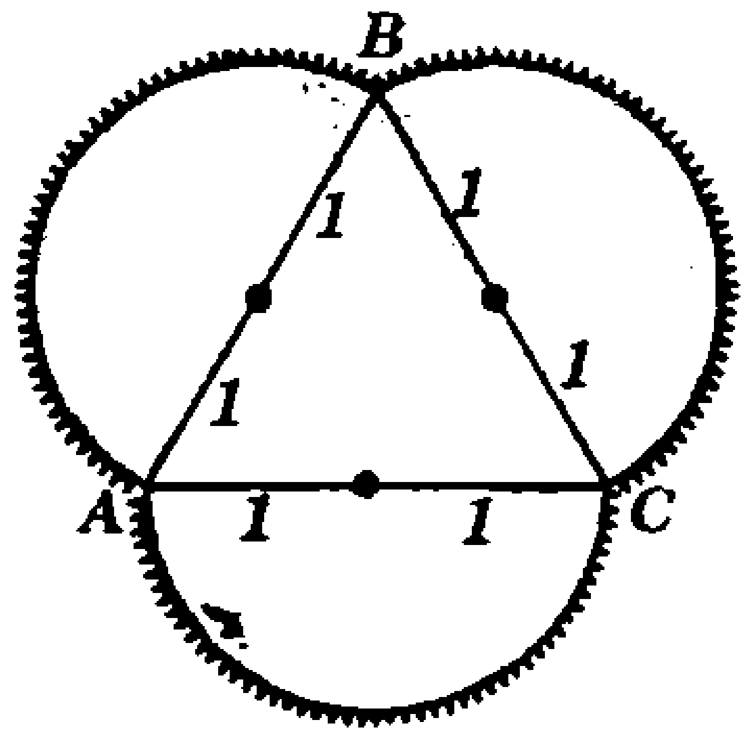
El perímetro de la región sombreada es:



A) 2π
B) 6π
C) 10π
D) 15π
E) 3π

RESOLUCIÓN :

* El perímetro deseado , se deduce contorneando con el lapicero , el contorno de la figura sombreada , así :
* Entonces:



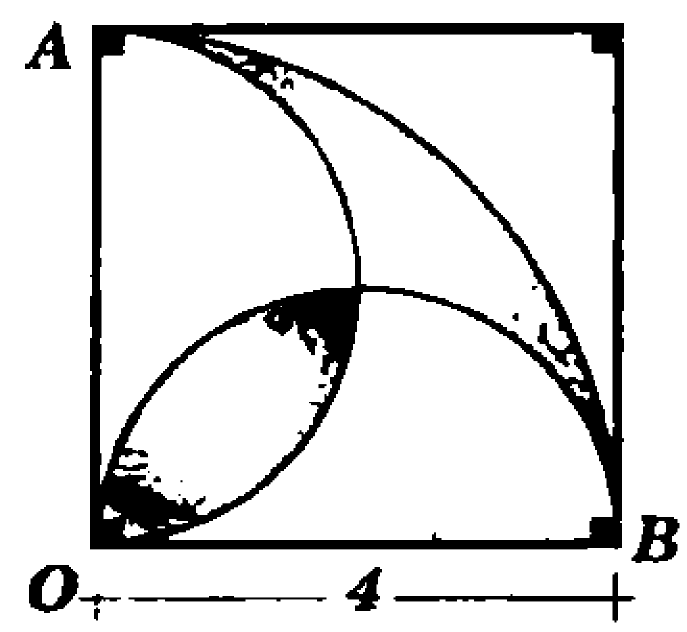
Perímetro Deseado: Suma de las longitudes de 1 a 3 semicircunferencias.

$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Perímetro}\\ \text{Deseado}\end{matrix} : \frac{2\pi(1)}{2}+\frac{2\pi(1)}{2}+\frac{2\pi(1)}{2}=3\pi$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

Encontrar el perímetro de la región sombreada, donde O es centro del arco AB . $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ Son diámetros de las semicircunferencias.



A) 4π
B) 6π
C) 10π
D) 2π
E) 14π

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que lo pedido , será :

Perímetro = longitud $\widehat{AO}$ + *longitud* $\widehat{BO}$ + *longitud* $\widehat{BA}$

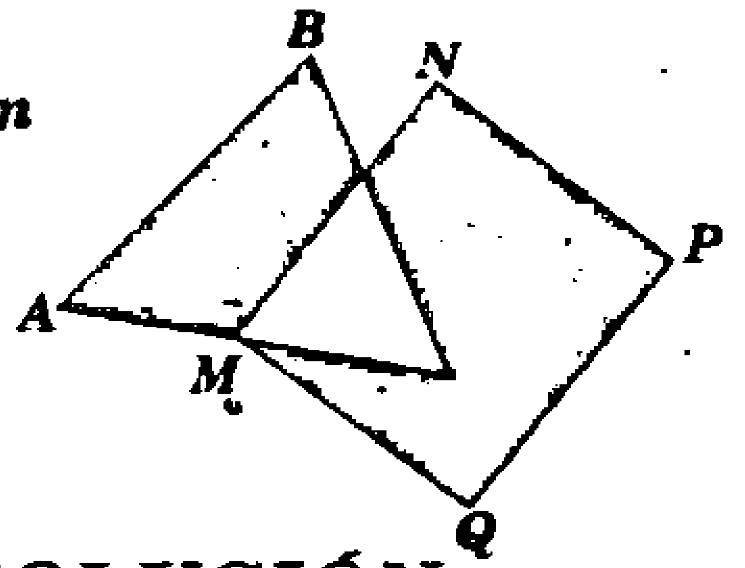
$$\Rightarrow \text{Perímetro}=\frac{2\pi(2)}{2}+\frac{2\pi(2)}{2}+\frac{2\pi(4)}{4}=6\pi$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Determinar el perímetro de la región sombreada , si se sabe que $MNPQ$ es un cuadrado de lado $3m$

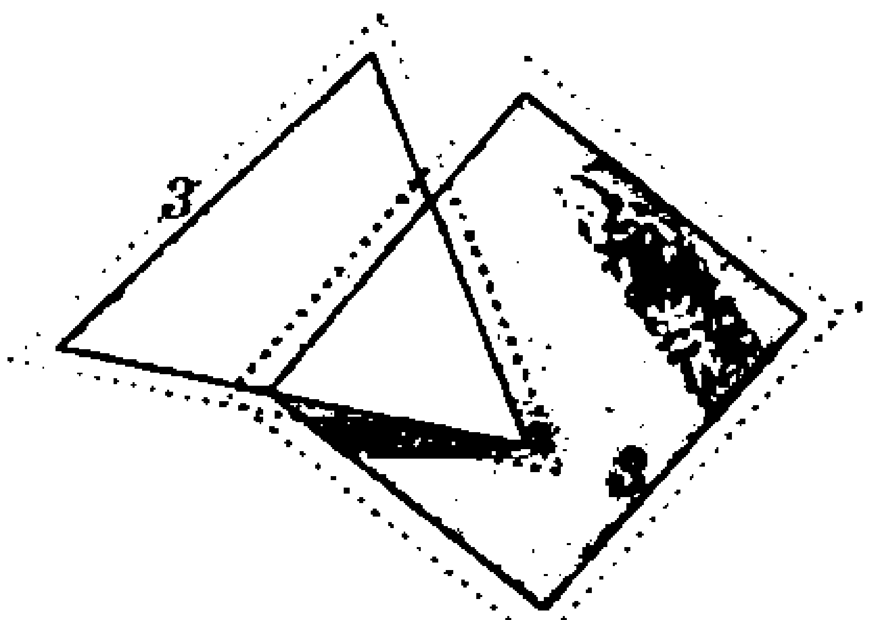
y que *ABC* es un triángulo equilátero de lado *3m*.



A) 16m
B) 14
C) 18
D) 20
E) 21

RESOLUCIÓN :

* Si uno contornea (recorre el contorno o perímetro) a la región sombreada notará que esto equivale a remarcar el perímetro del triángulo *ABC* y el perímetro del cuadrado *MNPQ* .



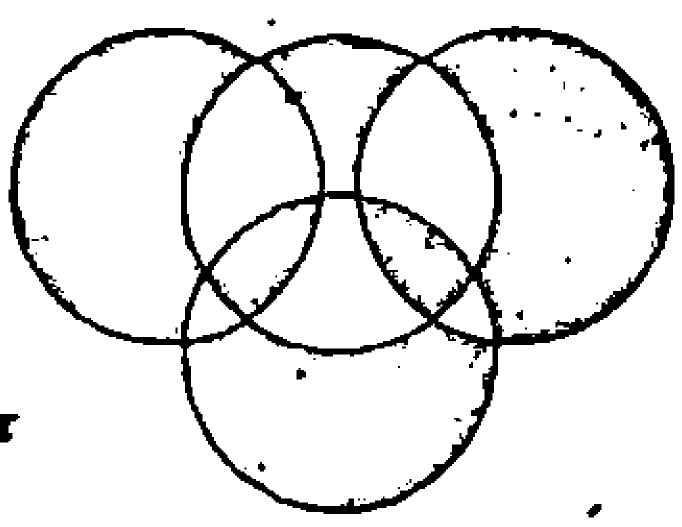
*Se puede apreciar que el perímetro pedido será:

$3(3)+4(3) = 21m$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Determinar el perímetro de la región sombreada , si todos son círculos de radio *1m* .



A) 6 π
B) 7 π
C) 8 π
D) 4 π
E) 16 π

RESOLUCIÓN :

* Contorneando la región sombreada , notaremos que lo pedido será la longitud de las *4* circunferencias de radio *1m* , luego :

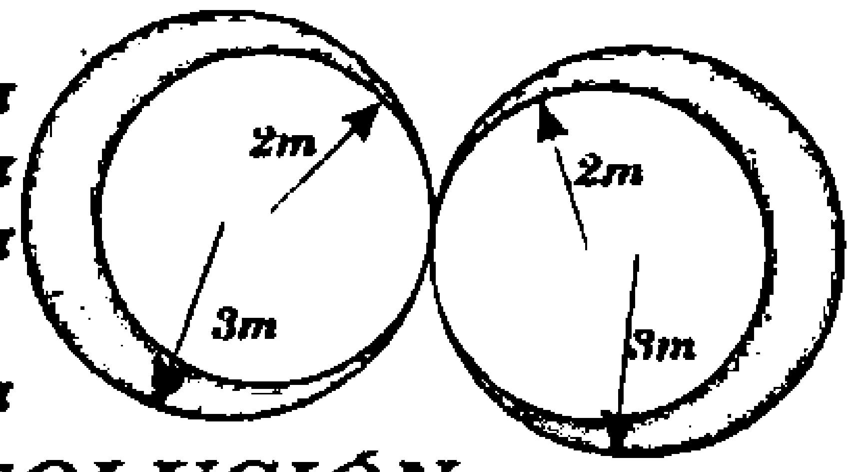
* ***Perímetro de la Región sombreada :***

$4(L_{\odot}) = 4(2\pi(1)) = 8\pi$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Determinar el perímetro de la región sombreada.



A) 16π
B) 20π
C) 12π
D) 4π
E) 22π

RESOLUCIÓN :

*El proceso es similar que lo anterior , es decir que si se contornea la región sombreada con el lapicero , podrás percatarte que esto equivale a remarcar las cuatro circunferencias , luego :

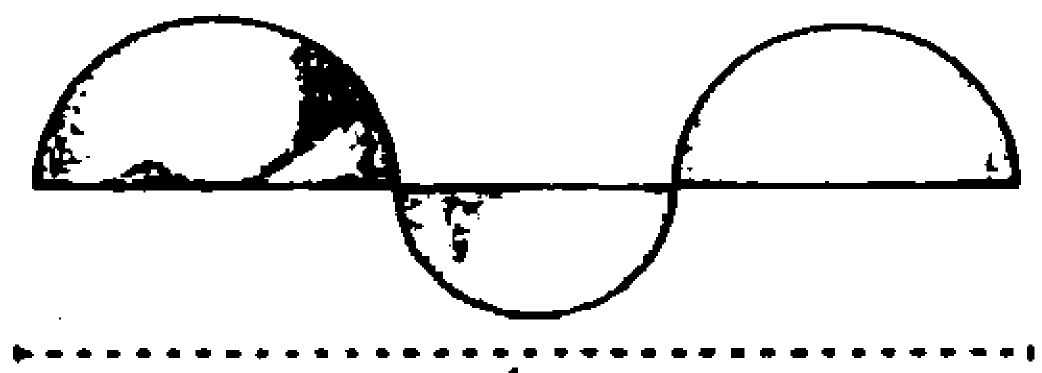
Perímetro de la Región sombreada :

$2(L_{\odot}) + 2(L_{\odot}) = 2(2\pi \times 3) + 2(2\pi \times 2) = 20\pi$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Determinar el perímetro de la región sombreada .



A) 8π ***B) 2(π+2)*** ***C) 6π+4***
D) 8π+2 ***E) π+4***

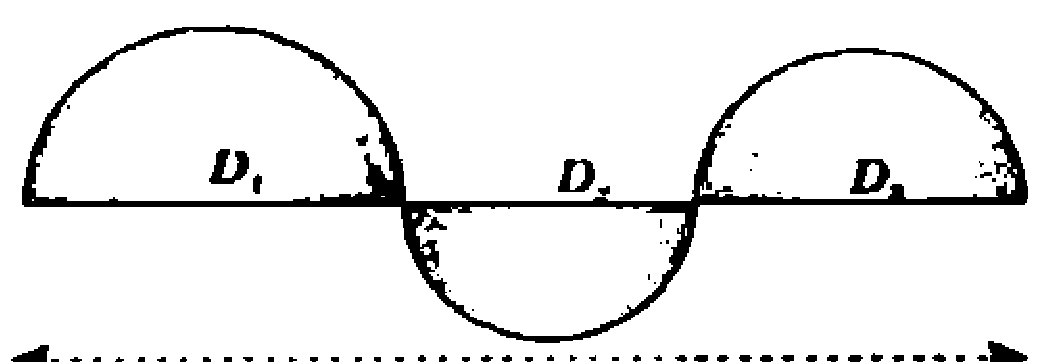
RESOLUCIÓN :

* En este caso debemos sumar las longitudes de las *3* semicircunferencias más el segmento de *4m*; pero debemos recordar:

$$\text{Longitud de la Circunferencia} = \pi D$$

$$\text{longitud de la semicircunferencia} = \frac{\pi D}{2}$$

Donde ***"D"*** es el diámetro .



*Entonces el perímetro de lo sombreado será :

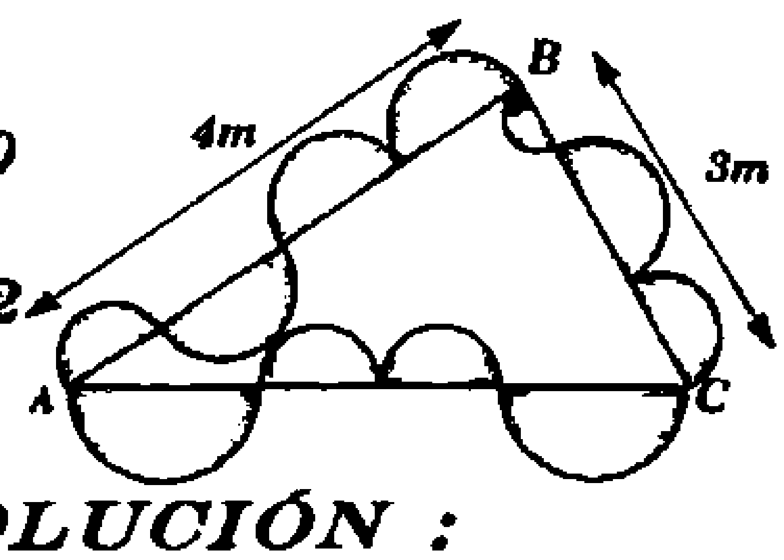
$$\frac{\pi D_1}{2}+\frac{\pi D_2}{2}+\frac{\pi D_3}{2}+4=\frac{\pi}{2}\underbrace{(D_1+D_2+D_3)}_{\text{vale } 4}+4$$

$$=\frac{\pi}{2}(4)+4=2\pi+4=2(\pi+2)$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Del siguiente gráfico , determinar la longitud total de todas las semicircunferencias .



A) 3π
B) 6π+20
C) 6π
D) 3π+12
E) 2π

RESOLUCIÓN :

*Considerando la idea del problema anterior se tendrá :

*Suma de las longitudes de las semicircunferencias sobre $\overline{AB}$

$$=\frac{\pi(4)}{2}=2\pi$$

*Suma de las longitudes de las semicircunferencias sobre $\overline{BC}$

$$=\frac{\pi(3)}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

*Suma de las longitudes de las semicircunferencias sobre $\overline{AC}$

(se deduce) 7

$$=\frac{\pi(5)}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

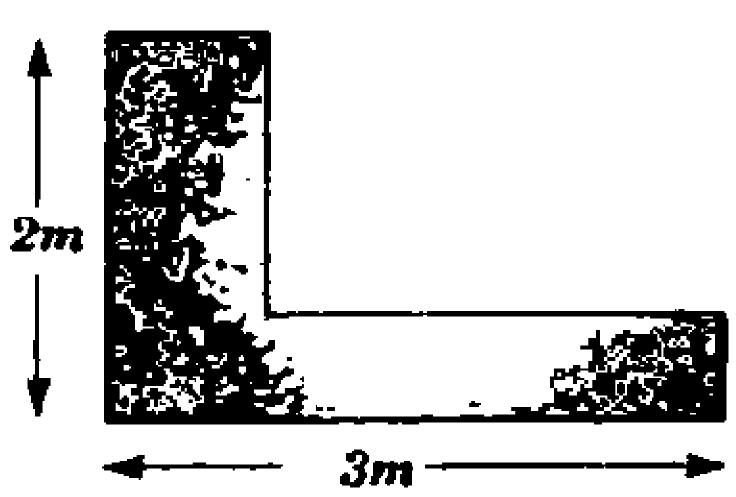
*Luego la longitud total de todas las semicircunferencias será :

$$2\pi+\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}=2\pi+\frac{8\pi}{2}=2\pi+4\pi=6\pi$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

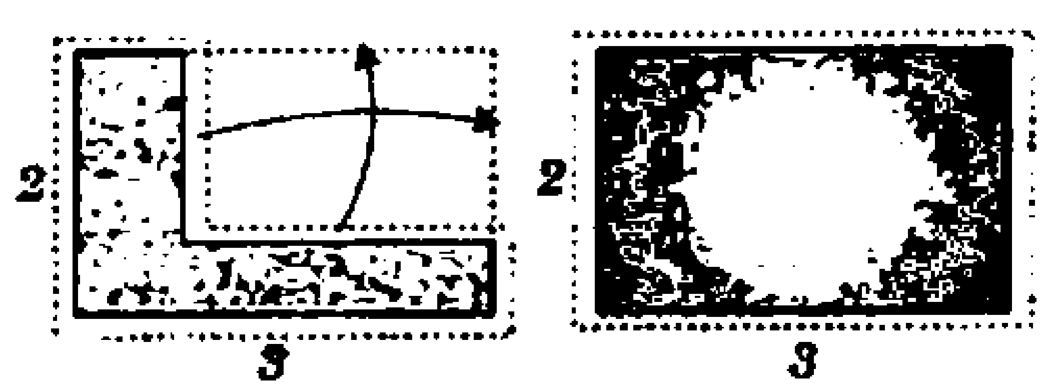
Determinar el perímetro de la región sombreada.



A) 10 m
B) 5
C) 12
D) 7
E) 21

RESOLUCIÓN :

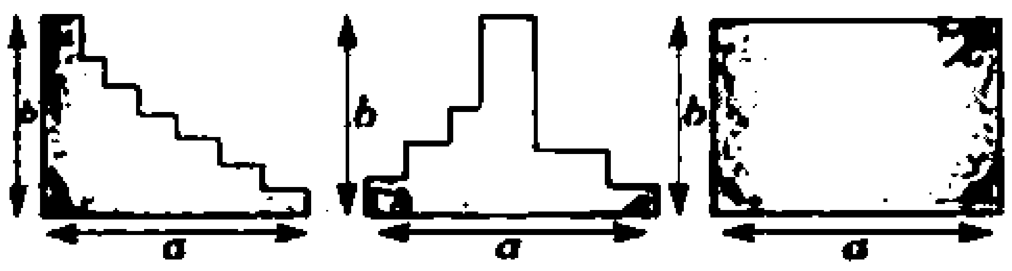
* Contornear lo sombreado , será lo mismo que contornear el rectángulo que se muestra .



* Luego el perímetro pedido, será igual al perímetro del rectángulo que se obtiene al proyectar algunas líneas, entonces:

Perímetro : $2+3+2+3 = 10\,m$ *(deseado)*

OBSERVACIÓN :



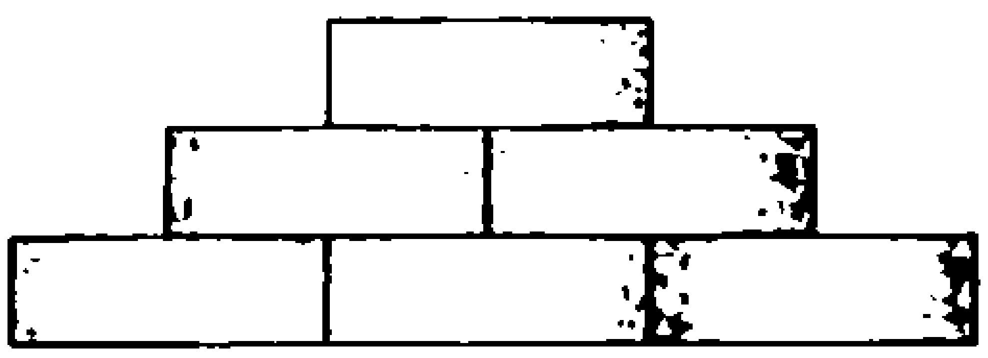
"Las *3* figuras tienen perímetros iguales, el cual es :

$$2a + 2b = 2\,(a+b)$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

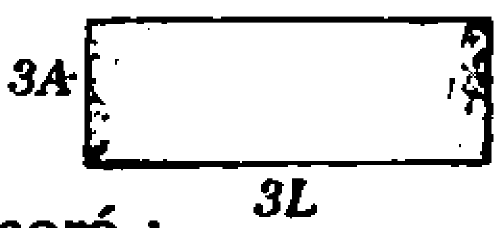
Determinar el perímetro de la siguiente figura , si existen seis rectángulos iguales cada uno y de largo "*L*" y de ancho "*A*".



A)6L+4A *B)8L+6A* *C)6(L+A)* *D)4(L+A)* *E)N.A.*

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la observación anterior , se deduce que el perímetro será igual al perímetro de :



*El cuál será :

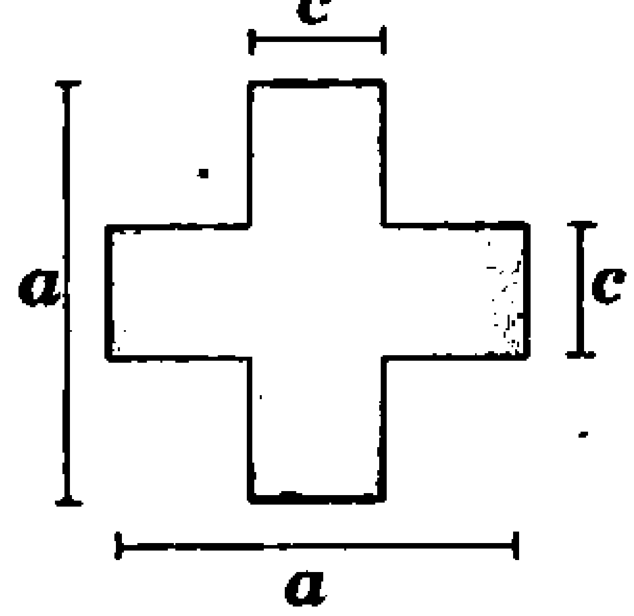
$$2(3L) + 2(3A) = 6L + 6A = 6(L+A)$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

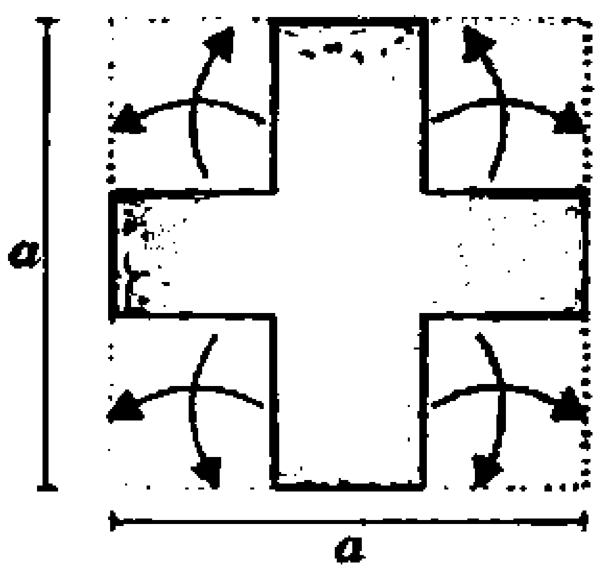
Determinar el perímetro de la siguiente figura :

A) 4a–4c
B) 8a–4c
C) 4a
D) 8a–2c
E) N.A.



RESOLUCIÓN :

* Por simple inspección notarás que el perímetro deseado será : *4a*

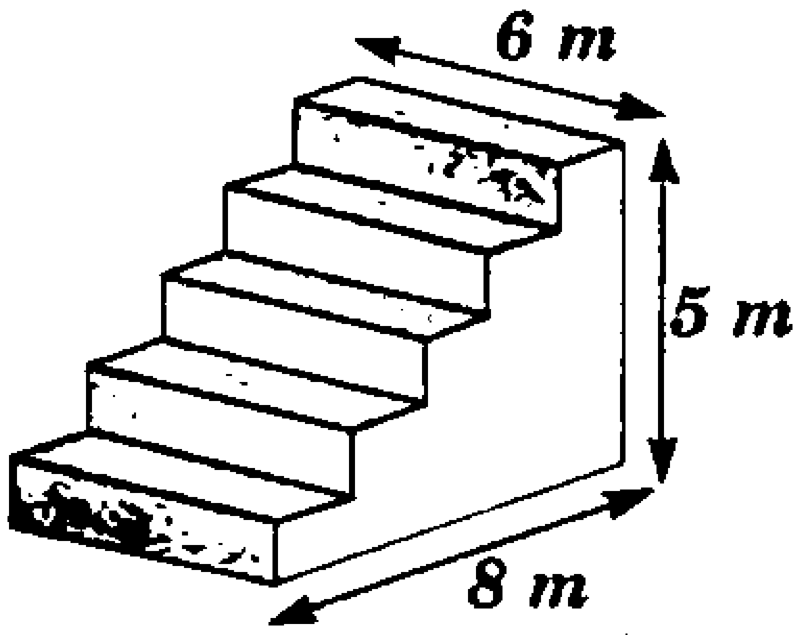


RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Determinar el perímetro de la región sombreada

A) 16m
B) 38
C) 36
D) 24
E) 16



RESOLUCIÓN :

*Aplicando la misma idea que el problema *2*, entonces se tendrá que deducir que lo deseado será:

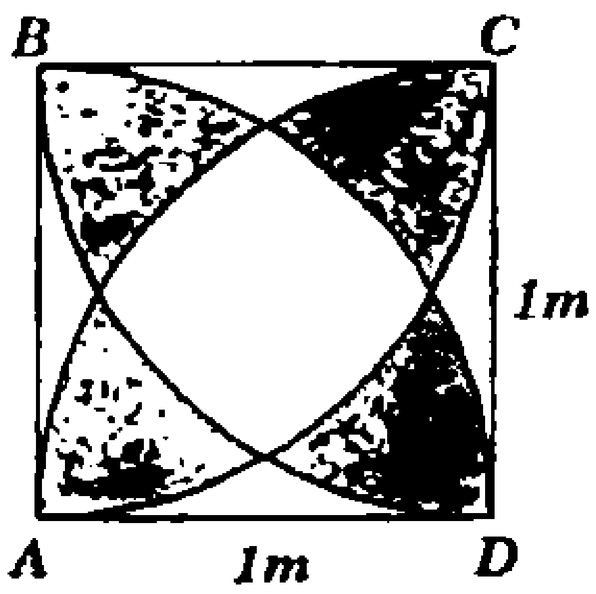
$$8+5+8+5+6+6 = 38\,m$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Determinar el perímetro de la región sombreada .

A) 2π
B) 4π
C) 6π
D) π
E) $\frac{\pi}{2}$



RESOLUCIÓN :

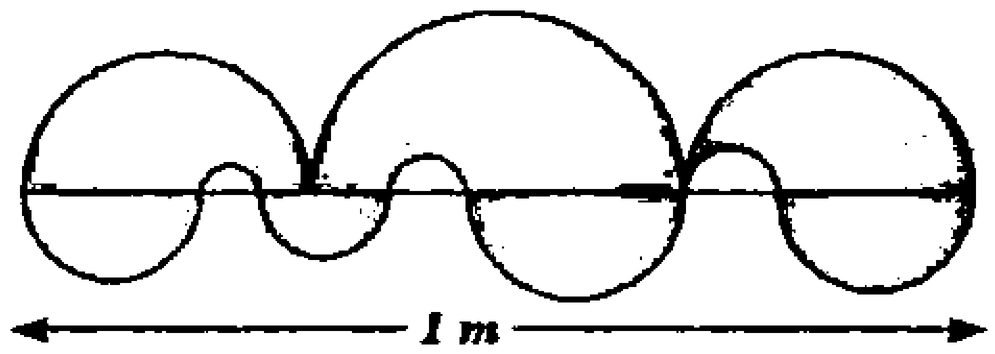
* Contorneando lo sombreado , se debe deducir que el perímetro será *4* veces la longitud del arco *BD* (que se aprecia que es un cuarto de circunferencia) , entonces , al expresión a calcular será :

$$4\left(\text{arco } BD\right) = 4\left(\frac{2\pi(1)}{4}\right) = 2\pi$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Determinar el perímetro de la región sombreada (todas las curvas son semicircunferencias)



A) 2π *B)* π *C)* 4π *D)* $\frac{\pi}{2}$ *E)* 8π

RESOLUCIÓN:

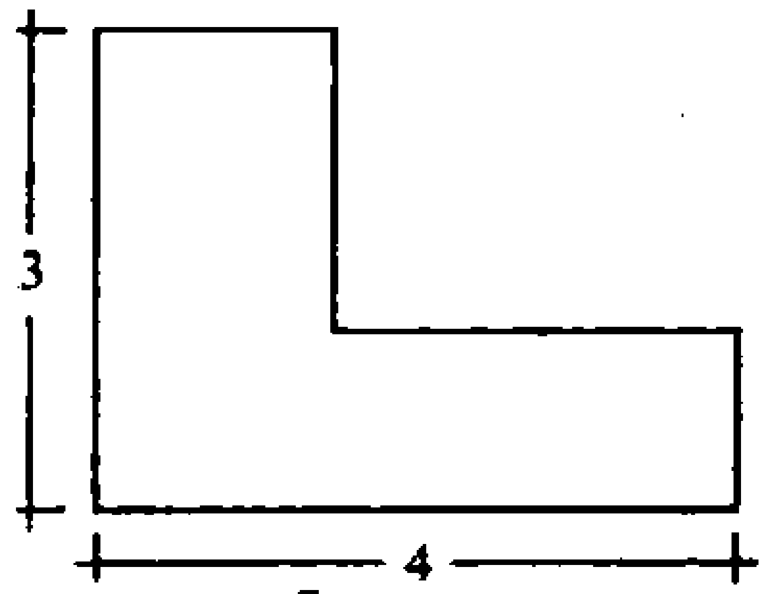
* Aplicando un razonamiento análogo al problema *9*, se tendrá que deducir que lo deseado será la longitud de una circunferencia de diámetro *1m*, la cual será : $\pi(1) = \pi$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

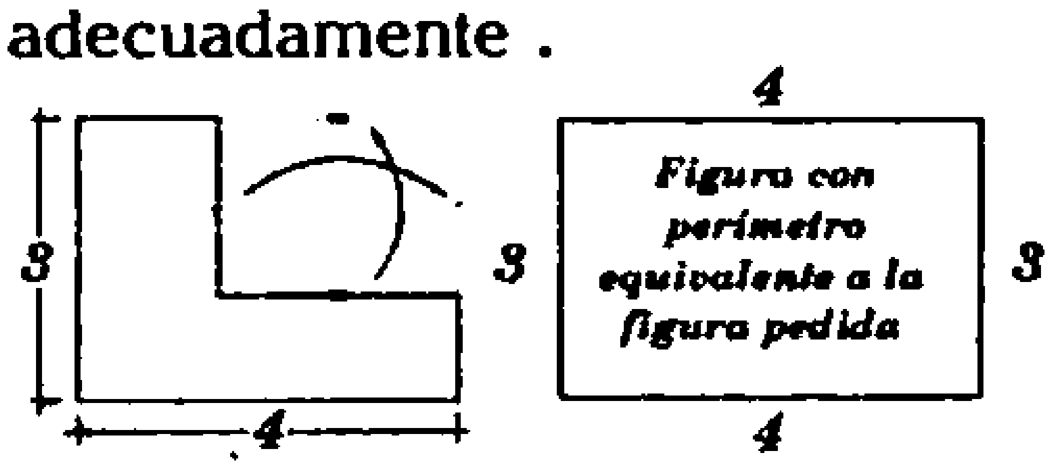
Determinar el perímetro de :

A) 7
B) 12
C) 10
D) 14
E) 21



RESOLUCIÓN :

Trasladando algunas líneas adecuadamente .



Perímetro : $3 + 3 + 4 + 4 = 14$

RPTA : "D"

EN GENERAL :

A) Figura *1*

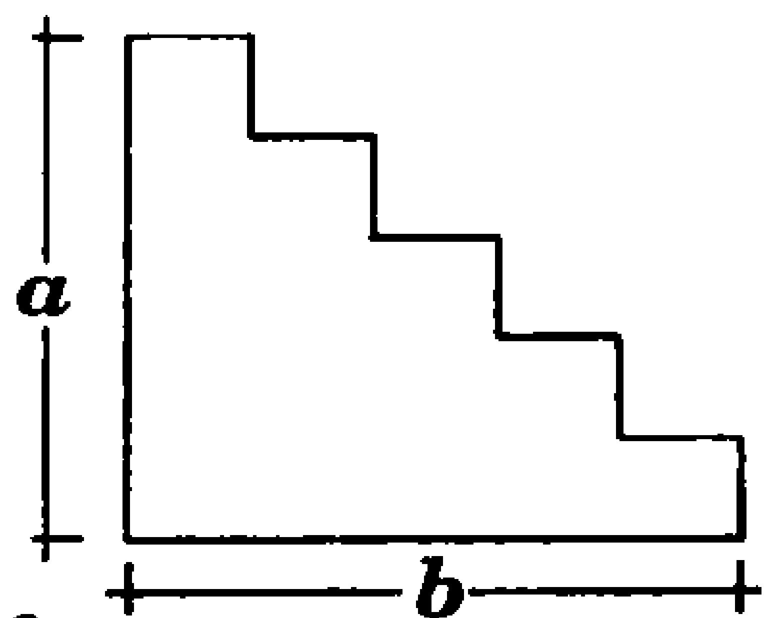
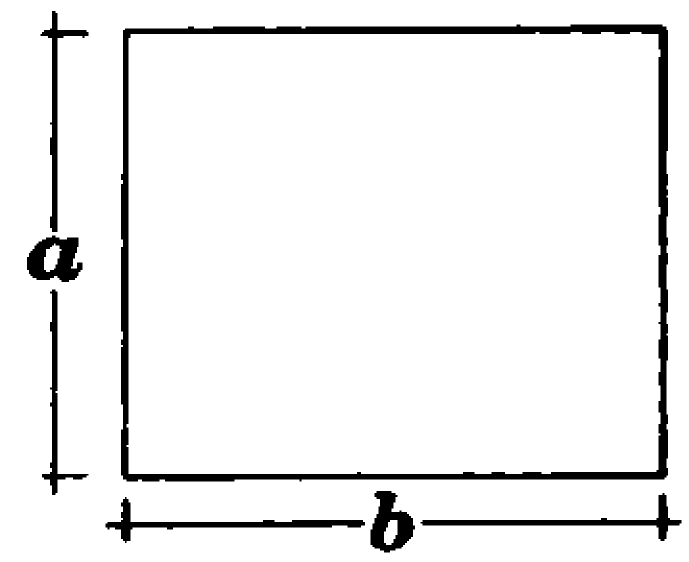
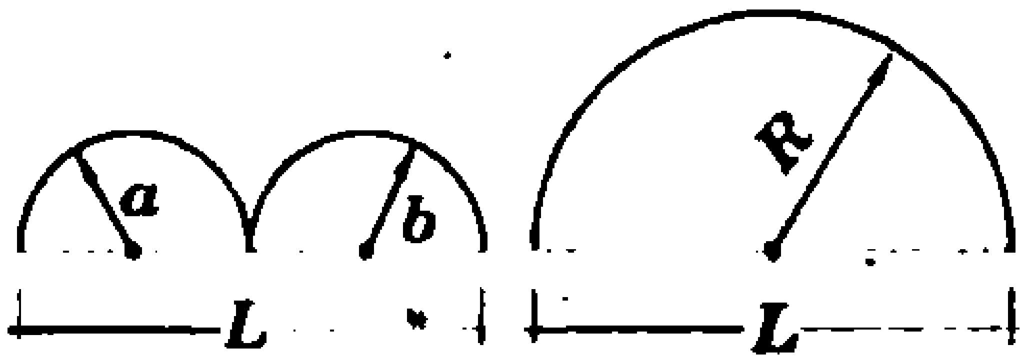


Figura *2*



$$\left(\begin{array}{c}\text{Perímetro}\\ \text{de la figura 1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{Perímetro}\\ \text{de la figura 2}\end{array}\right)=2(a+b)$$

B) ***Figura 1*** ***Figura 2***



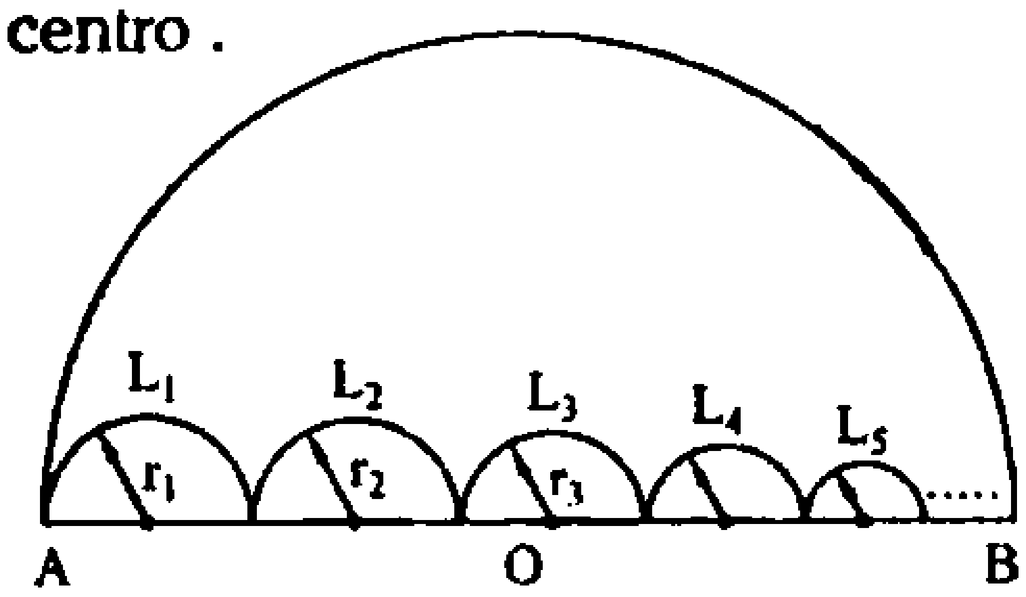
$$\left(\begin{array}{c}\text{Suma de las}\\ \text{longitudes de las}\\ \text{semicircunferencias}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{Longitud de la}\\ \text{semicircunferencia}\\ \text{de radio R}\end{array}\right)=\pi R$$

Donde:

$$\text{Longitud de una circunferencia} = L = 2\pi R$$

PROBLEMA 17 :

Determinar la suma de las longitudes de las semicircunferencias construidas sobre el diámetro *AB = 2*, *«O»* es centro .



A) π B) 2π C) 4π D) 6π E) π²

RESOLUCIÓN :

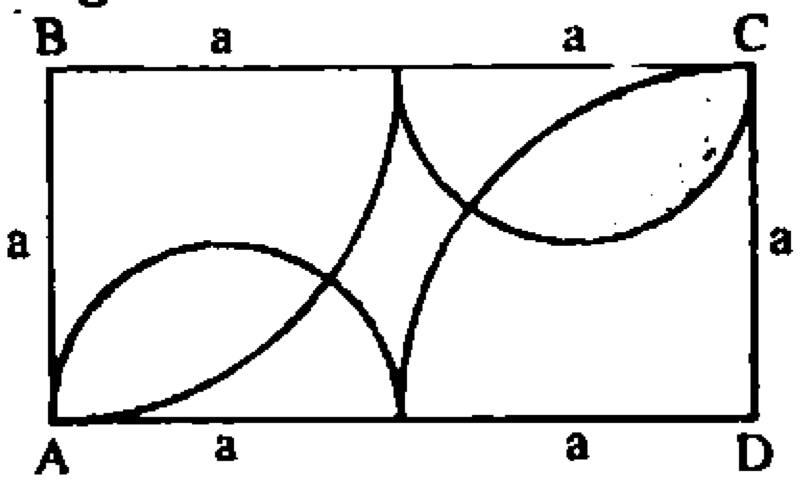
*Por la propiedad *«B»*, la suma de las longitudes de las semicircunferencias interiores a la semicircunferencia con diámetro $\overline{AB}$, es igual a la longitud de ésta última circunferencia , luego lo que piden será :

$$2\left(\begin{array}{c}\text{Longitud de la}\\ \text{semicircunferencia}\pi\\ \text{mayor (R = 1)}\end{array}\right)=2(\pi\times 1)=2\pi$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 18 :

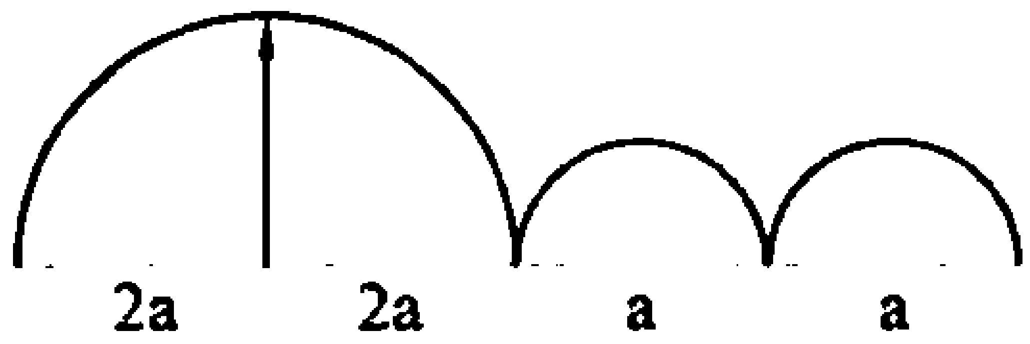
Determinar el perímetro de la figura sombreada , si *ABCD* es rectángulo .



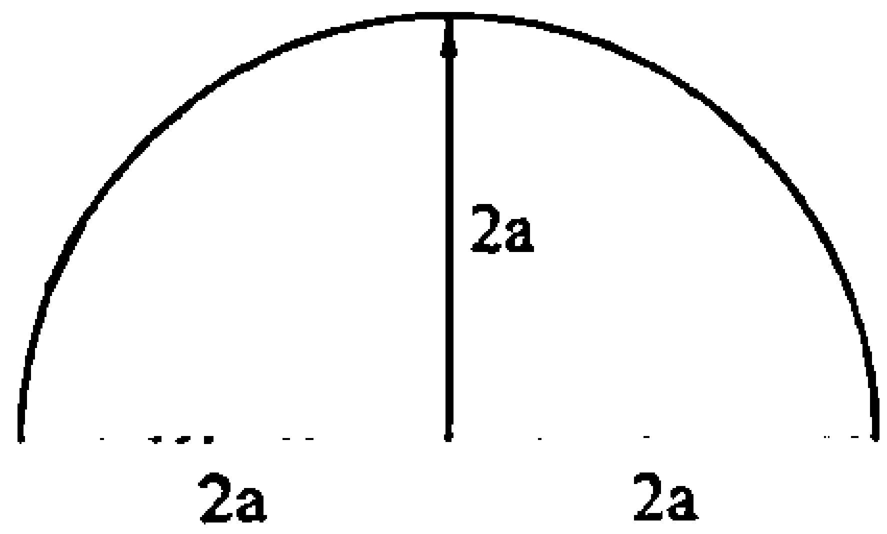
A) 3πa B) 2πa C) πa
D) 4πa E) 5πa

RESOLUCIÓN :

*El perímetro equivalente a lo pedido será el perímetro de :



*equivale a la longitud de una semicircunferencia



$$<>\ \pi(2a)=2\pi a$$

RPTA: "B"

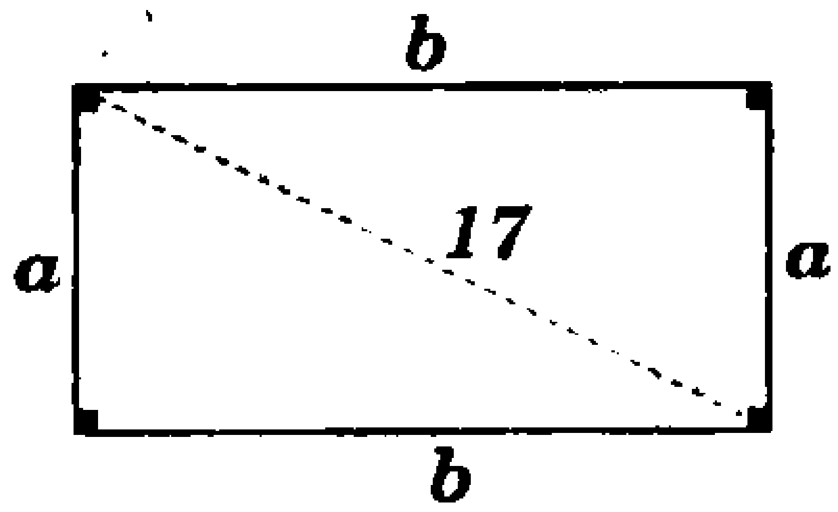
PROBLEMA 19 :

Un terreno tiene forma rectangular y se sabe que su perímetro mide *46 m* y su diagonal *17 m* . ¿Cuál es el área del terreno?

A) 100 m² B) 120 m² C) 210 m²
D) 80 m² E) 92 m²

RESOLUCIÓN :

Graficando :



I) Perímetro = *46*

$$2a+2b=46 \Longrightarrow a+b=23$$

II) Por Pitágoras : $a^2+b^2=17^2$

III) Elevando al cuadrado ***(I)***

$$(a+b)^2=23$$

$$a^2+2ab+b^2=23^2$$

$$\underline{a^2+b^2}+\underline{2ab}=23^2$$

$$17^2+2\left(\begin{array}{c}\text{área de}\\ \text{rectángulo}\end{array}\right)=23^2$$

$$\text{área}=120\ m^2$$

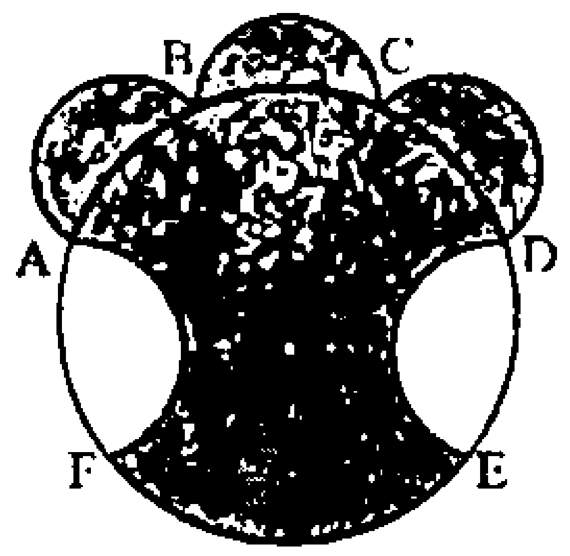
RPTA: "B"

PROBLEMA 20 :

En la figura *A , B , C , D , E* y *F* son vértices de un hexágono regular de *24cm* . de lado . Determinar el perímetro de la región sombreada .

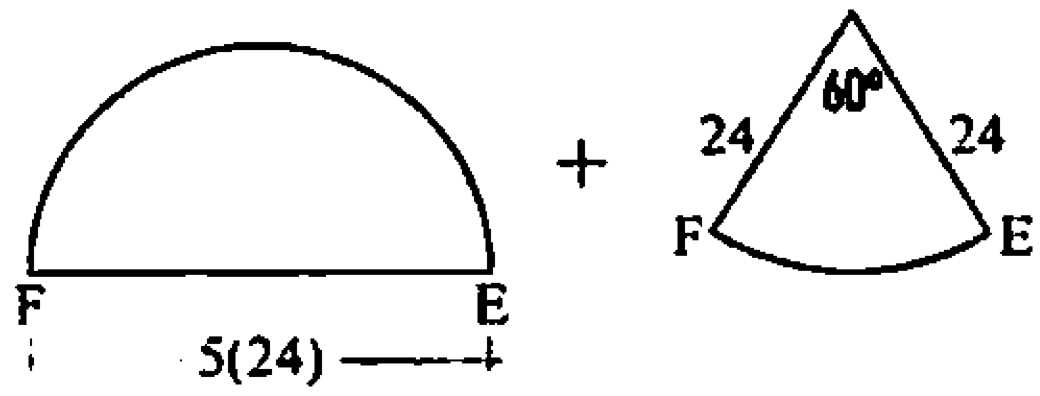
Si : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{AF}$ son diámetros.

A) 60π
B) 48π
C) 68π
D) 65π
E) 56π



RESOLUCIÓN :

*El equivalente al perímetro pedido , será la suma de las longitudes de las siguientes curvas:

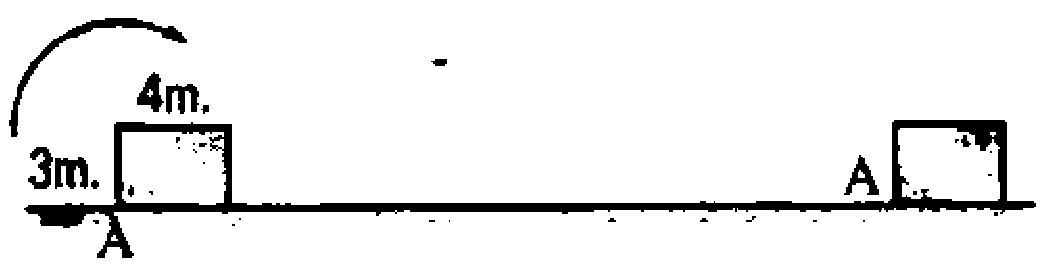


$$=\frac{\pi(120)}{2}+\frac{2\pi(24)}{6}=68\pi$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

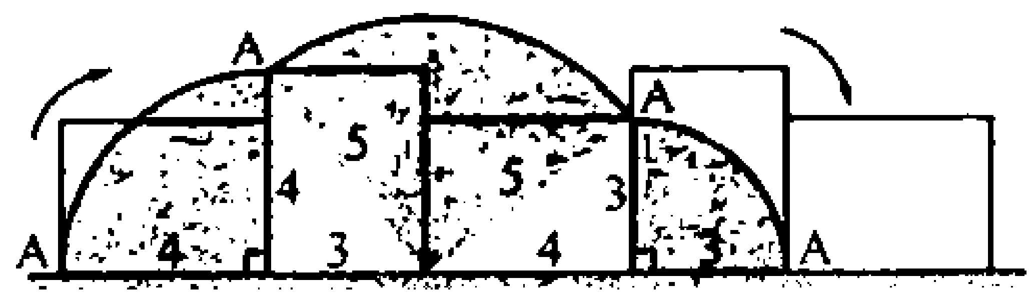
En el gráfico determinar la longitud recorrida por el punto *«A»*, si el rectángulo gira en el sentido indicado , hasta tomar una posición igual a la inicial por primera vez .



A) 7π B) 6π C) 3π D) 12π E) 23π

RESOLUCIÓN :

♦ Esquematizando el trayecto recorrido por *«A»*.



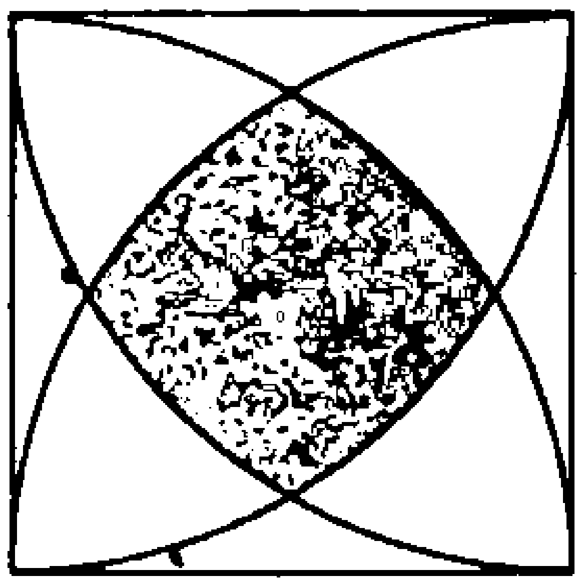
♦ El recorrido de *«A»* será la suma de las longitudes de los arcos de los cuadrantes sombreados , la cual será :

$$\frac{2\pi(4)}{4}+\frac{2\pi(5)}{4}+\frac{2\pi(3)}{4}=6\pi$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 22 :

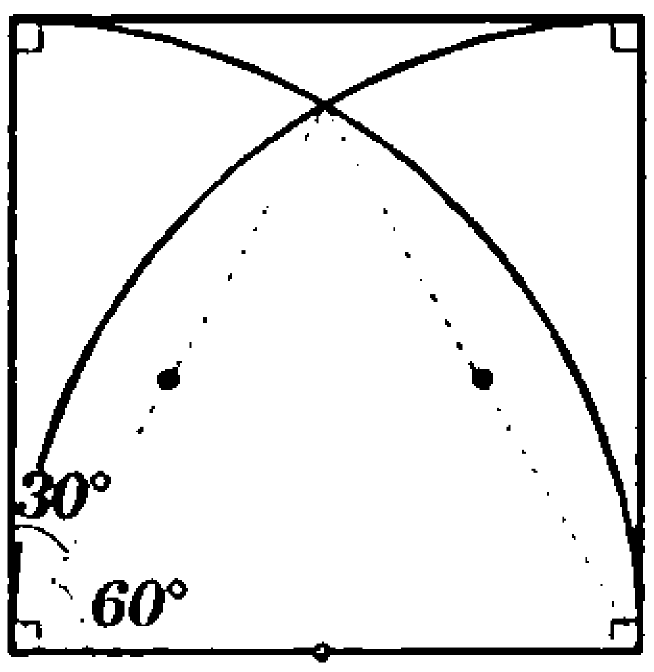
Determinar el perímetro de la región sombreada :



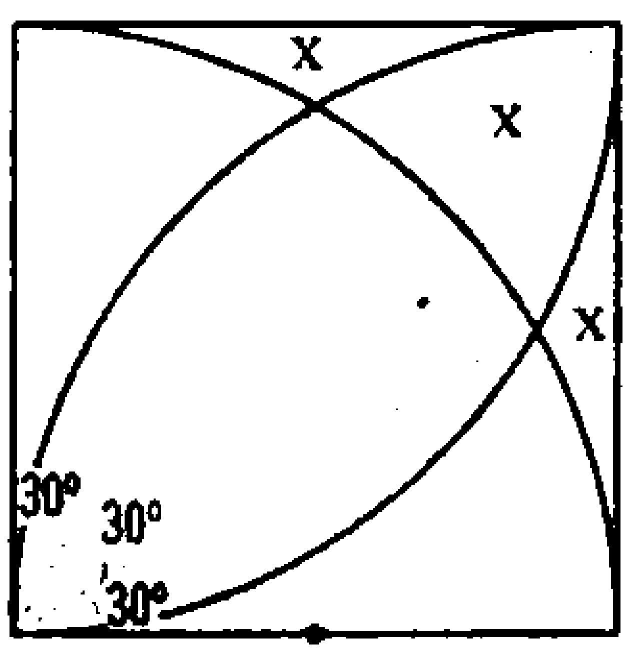
A) πa B) $\frac{\pi a}{3}$ C) $\frac{4\pi a}{3}$
D) $\frac{2\pi a}{3}$ E) $\frac{2\pi a}{5}$

RESOLUCIÓN :

· Trazando los radios de los cuadrantes , se obtiene un triángulo equilátero .



*Luego :



• $3x = \widehat{\ }$

$3x = \frac{1}{4}\left[L_{\odot}\right]$

$3x = \frac{1}{4}(2\pi a)$

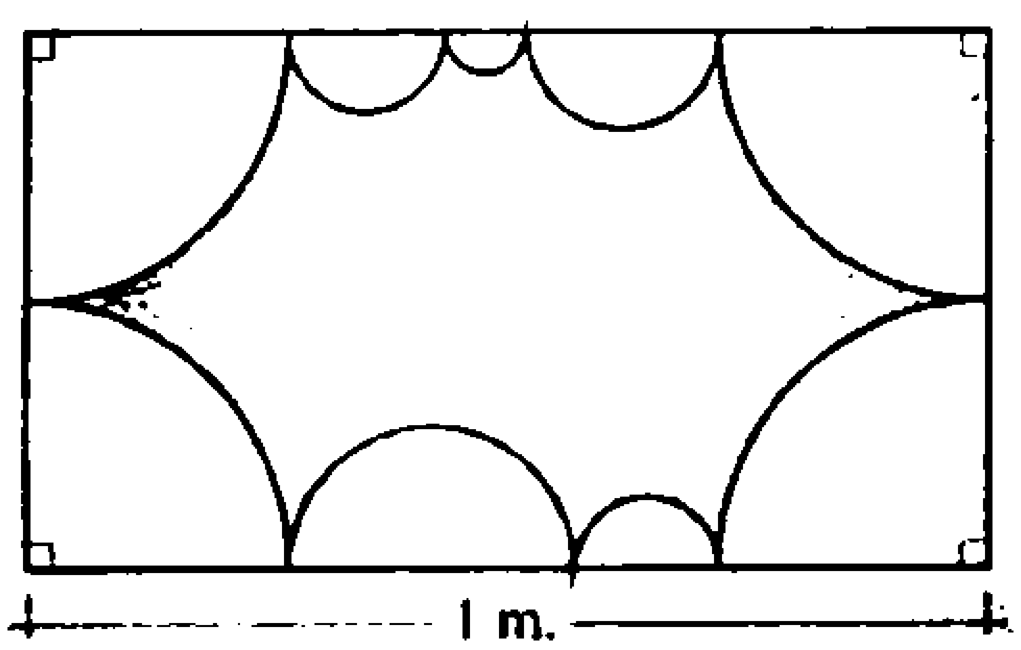
$x = \frac{\pi a}{6}$

• Piden :
Perímetro : $4x = 4\left(\frac{\pi a}{6}\right) = \frac{2\pi a}{3}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23 :

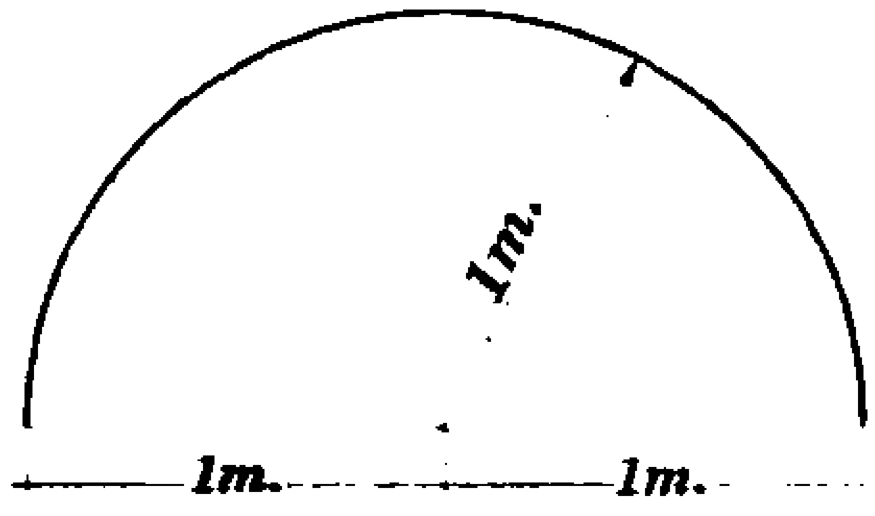
Determinar el perímetro de la región sombreada :



A) 1m B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) 2π E) $\frac{3\pi}{2}$

RESOLUCIÓN :

*La propiedad de las semicircunferencias, también cumplen para cuartos de circunferencias, luego lo pedido será equivalente a longitud de la siguiente semicircunferencia :



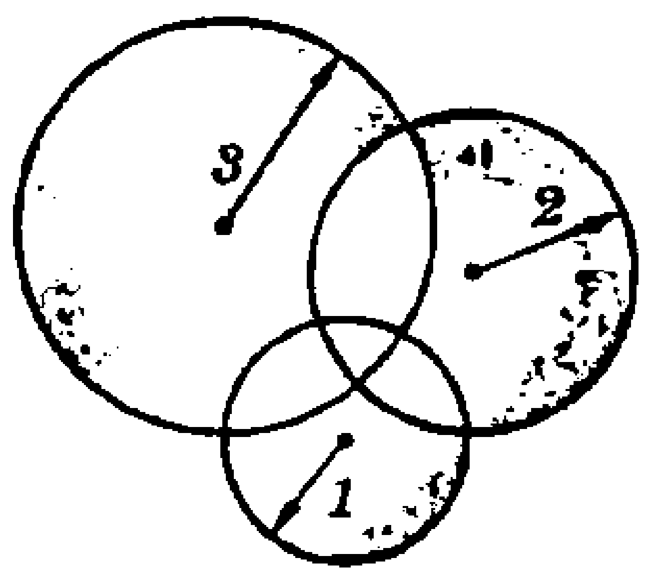
Perímetro Pedido : $\frac{2\pi(1m)}{2} = \pi m$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Los radios de los círculos son **3 cm** , **2cm** y **1 cm** respectivamente . ¿Cuál es el perímetro de los sectores sombreados?

A) 6π
B) 9π
C) 12π
D) 18π
E) 24π



RESOLUCIÓN:

El perímetro de los sectores sombreados , es el mismo que el de los tres círculos (se demuestra contorneando lo sombrado con un lapicero) .

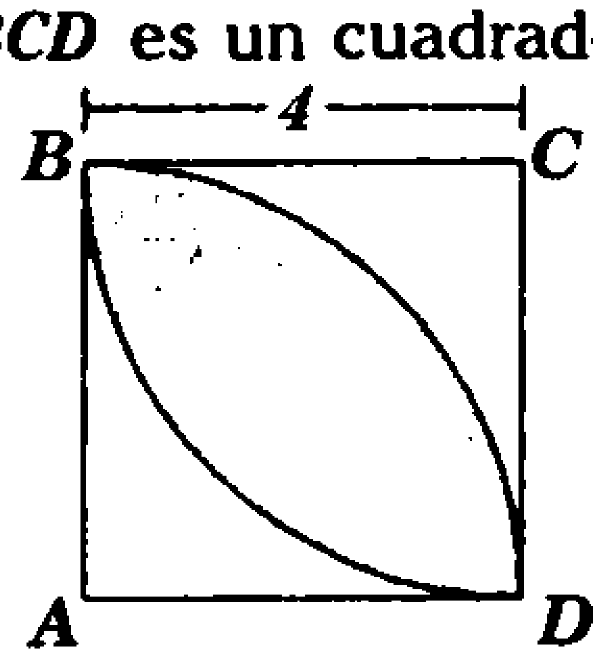
$2\pi(3) + 2\pi(2) + 2\pi(1) = 12\pi$

RPTA: "C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

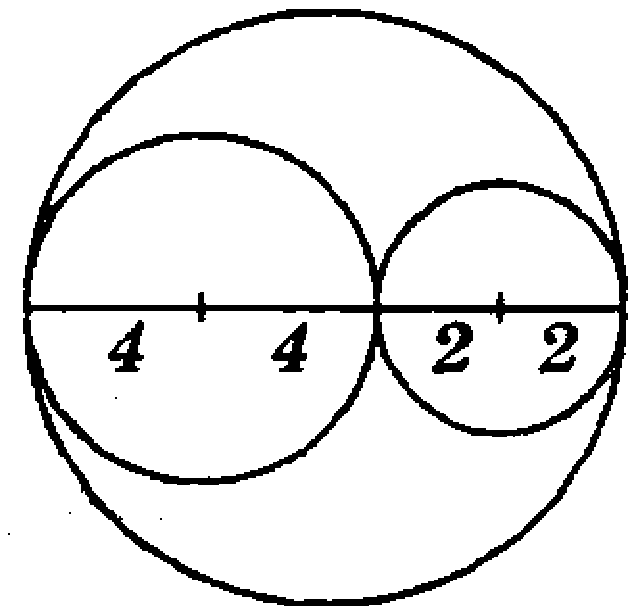
01 Determinar el perímetro de la hoja si *ABCD* es un cuadrado de lado *4* .

A) 2π
B) 4π
C) 6π
D) 8π
E) 12π



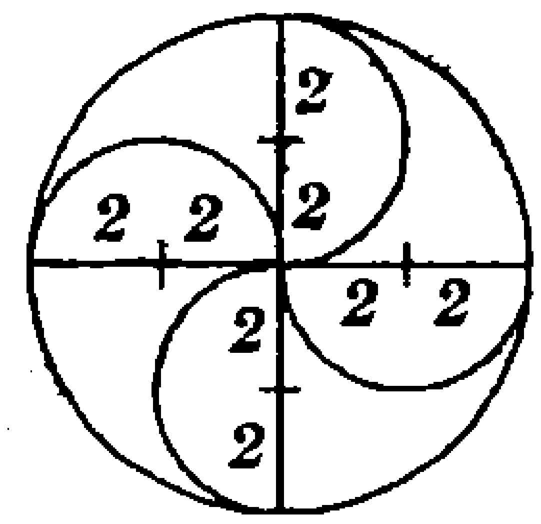
02 Determinar el perímetro de la zona sombreada :

A) 12π
B) 16π
C) 18π
D) 24π
E) 20π



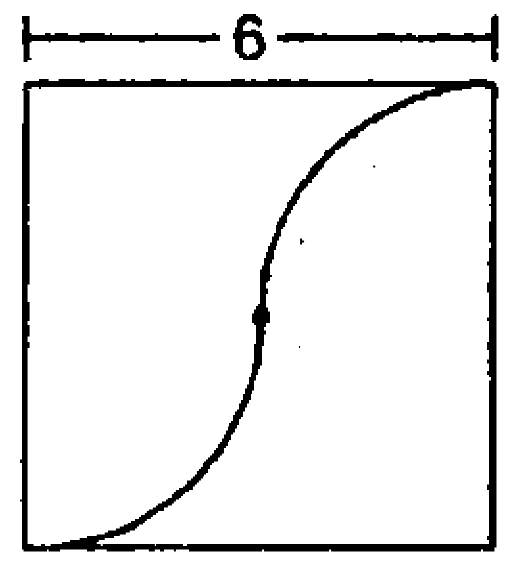
03 Determinar el perímetro de la región sombreada .

A) $16+8\pi$
B) $8\pi+8$
C) $8\pi+24$
D) $16+16\pi$
E) $32+16\pi$

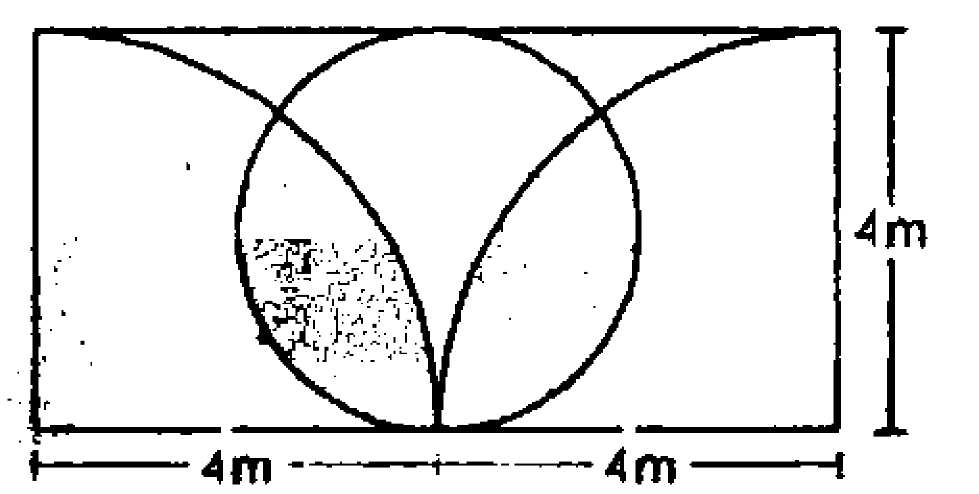


04 Determinar el perímetro de la región sombreada de:

A) $6\pi+6$
B) $6\pi+12$
C) $3\pi+12$
D) $3\pi+6$
E) 3π



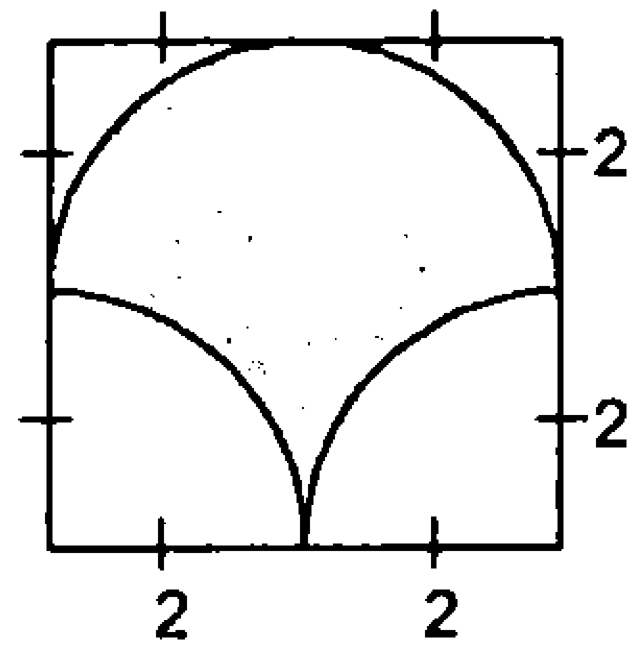
05 Determinar el perímetro de la zona sombreada



A) $16\pi m$ B) 8π C) 8π D) 16π E) $8+8\pi$

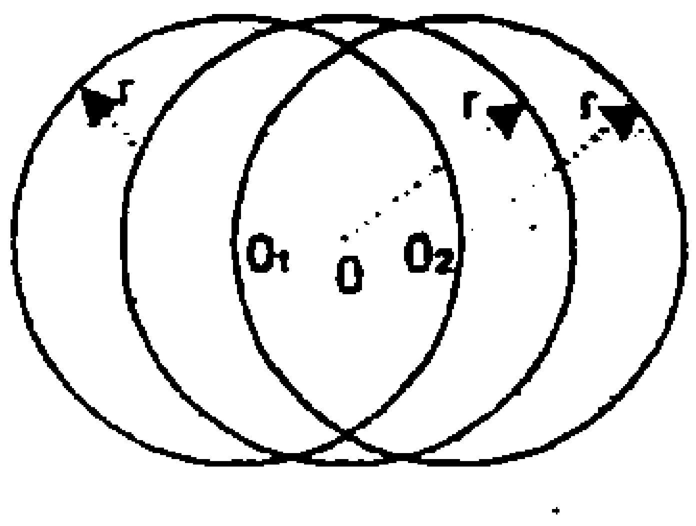
06 Determinar el perímetro de la zona sombreada , si es un cuadrado de lado *4u* .

A) 2π *u*
B) $4\pi u$
C) $6\pi u$
D) $16u$
E) $8u$

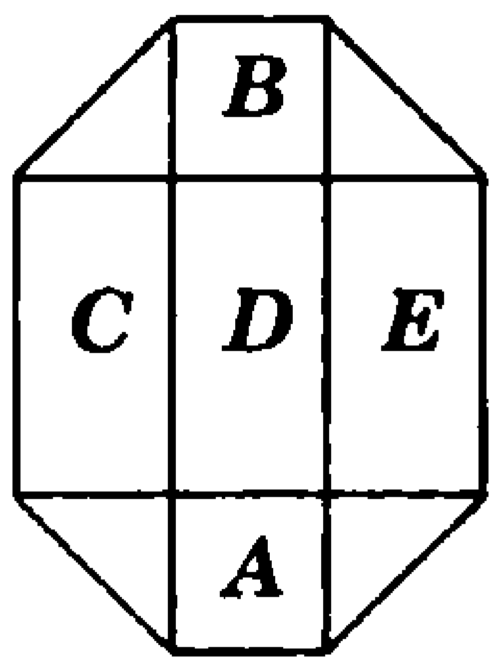


07 Determinar el perímetro de la región sombreada *r= 3cm (O ; O_1 ; O_2* son centros de la circunferencias)

A) 12π cm
B) 13π cm
C) 15π cm
D) 18π cm
E) 21π cm

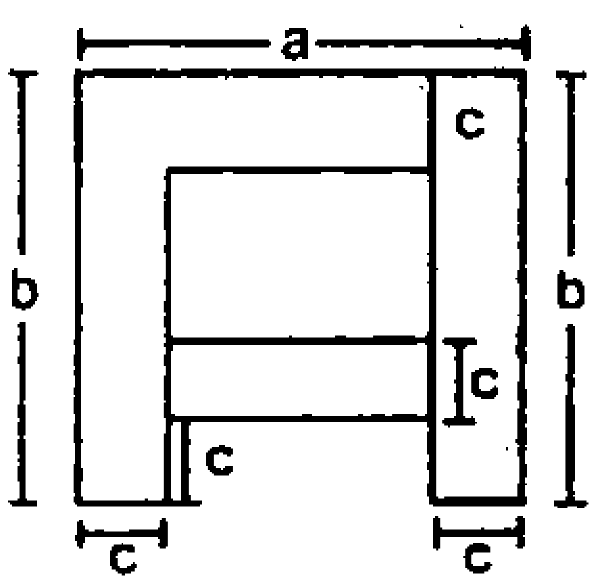


08 En la figura *A* y *B* son cuadrados de lado a ; *C, D* y *E* son rectángulos de lado *2a* . ¿Cuál es el perímetro de la figura en función de a?



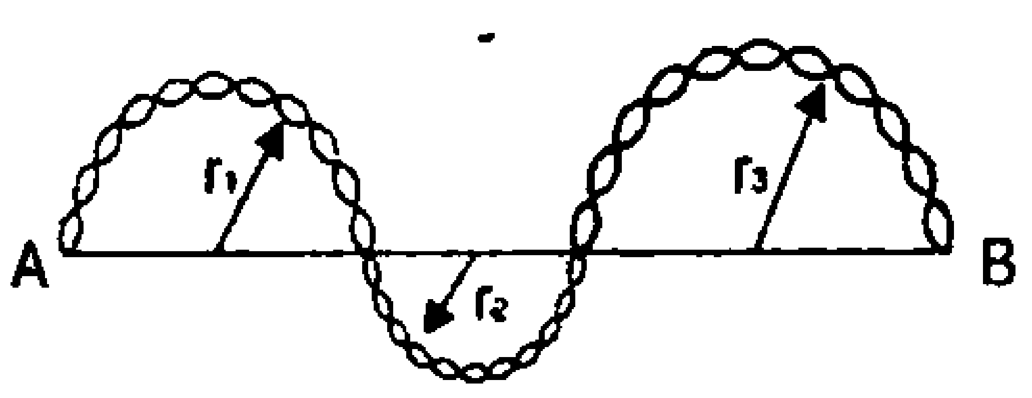
A) 8a
B) 10a
C) 14a
D) $4a-4a\sqrt{2}$
E) $6a+4a\sqrt{2}$

09 Determinar el perímetro de la región sombreada :



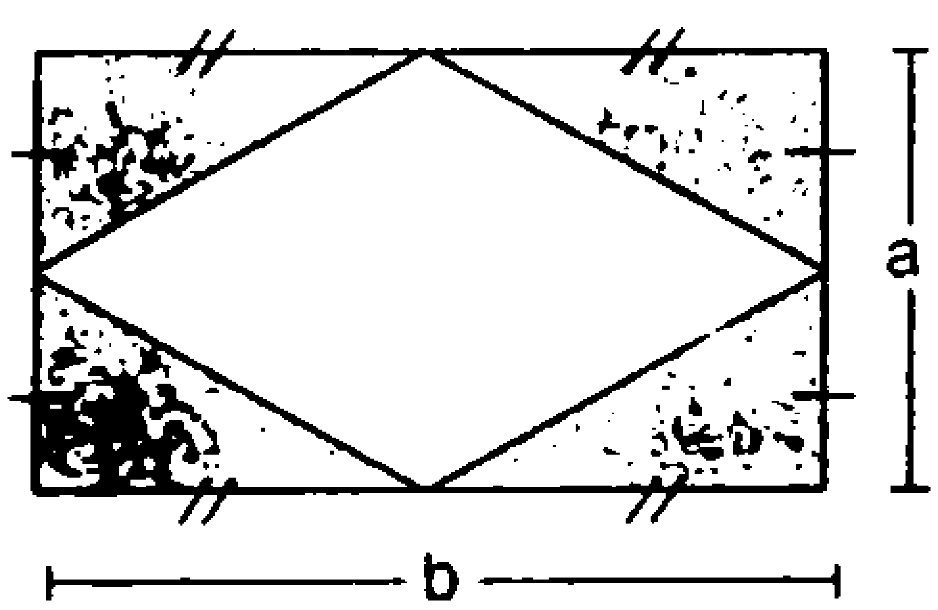
A) 3a+4b–6c
B) 4a+6b–4c
C) 2(a+b–3c)
D) 4(a+b–2c)
E) 4(a+b)

10 Determinar la longitud de la cadena
AB = 12 m .



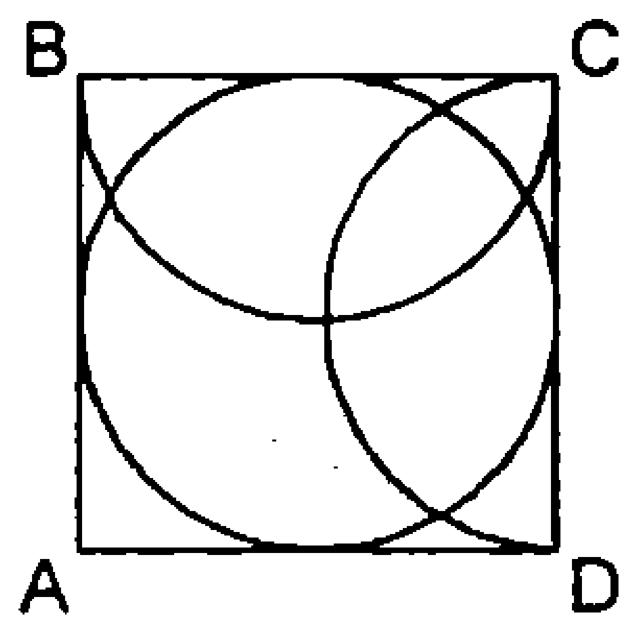
A) 12πm B) 6π C) 18π
D) 15π E) faltan datos

11 Determinar el perímetro de la región sombreada :



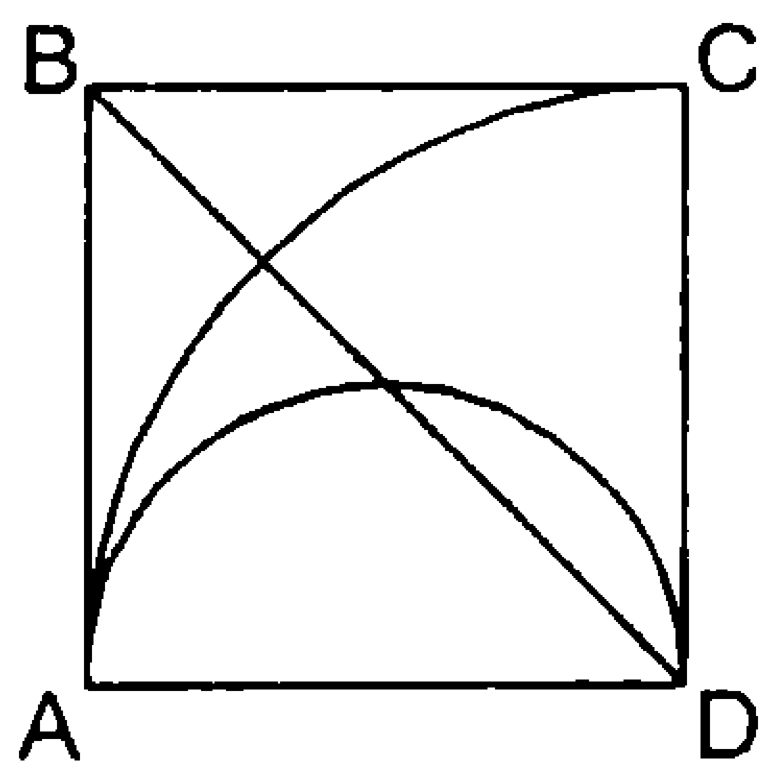
A) $2a+3b+\sqrt{a^2+b^2}$
B) $2(a+b+\sqrt{a^2+b^2})$
C) $2a+b+2\sqrt{a^2+b^2}$
D) $3(a+b+\sqrt{a^2+b^2})$

12 En la siguiente figura se dan , el cuadrado *ABCD* , dos semicircunferencias y una circunferencia inscrita .Determinar el perímetro de la región sombreada , si el cuadrado *ABCD* tiene lado igual a *20cm*.



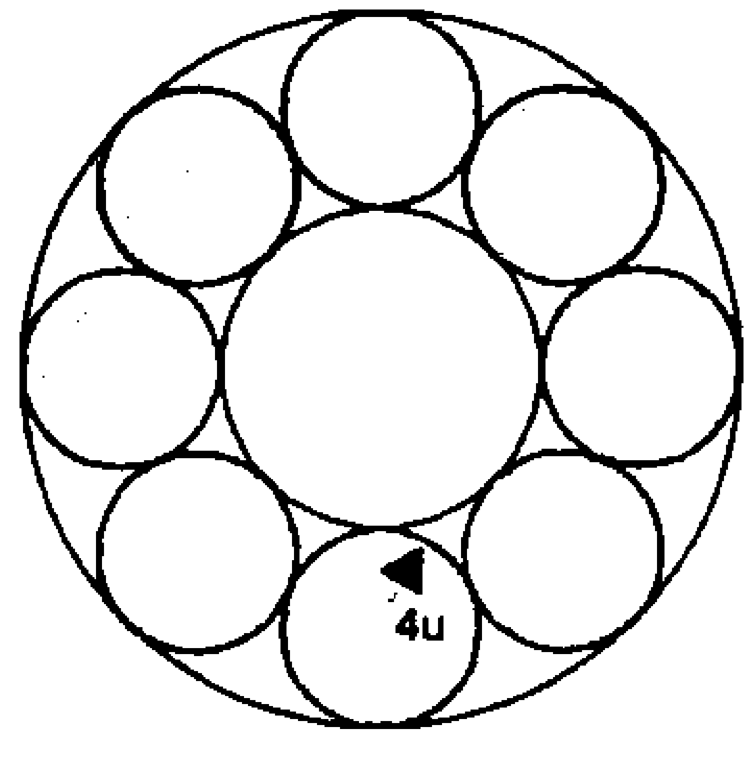
A) $30\pi+40$
B) $25\pi+40$
C) $30\pi+50$
D) $25\pi+55$
E) $25\pi+30$

13 Determinar el perímetro de la región sombreada , si *ABCD* es un cuadrado de lado *10cm*



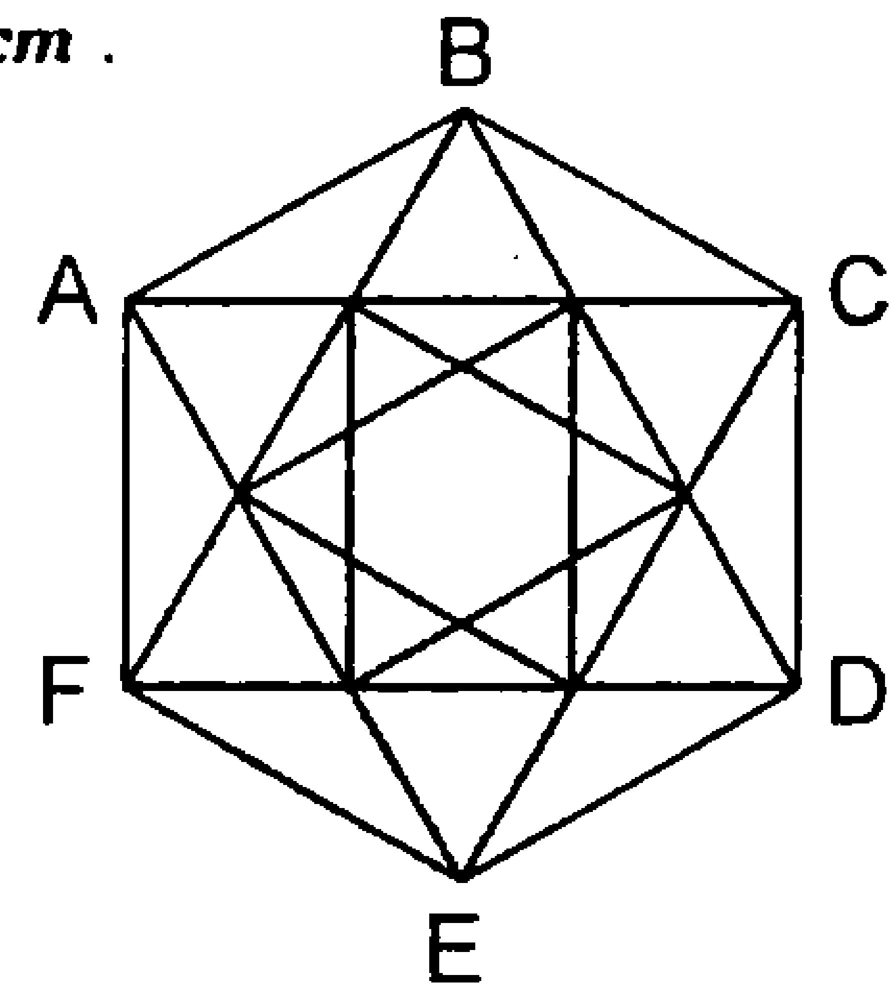
A) $10+10\sqrt{2}+5\pi$ B) $10(1+\sqrt{2}+\pi)$
C) $10(1+\sqrt{2}+\pi)$ D) 10+10
E) $10(\sqrt{2}+1)$

14 En la figura Determinar el perímetro de la región sombreada



A) $64\pi u$
B) $32\pi u$
C) $16\pi u$
D) $16\pi u$
E) $12\pi u$

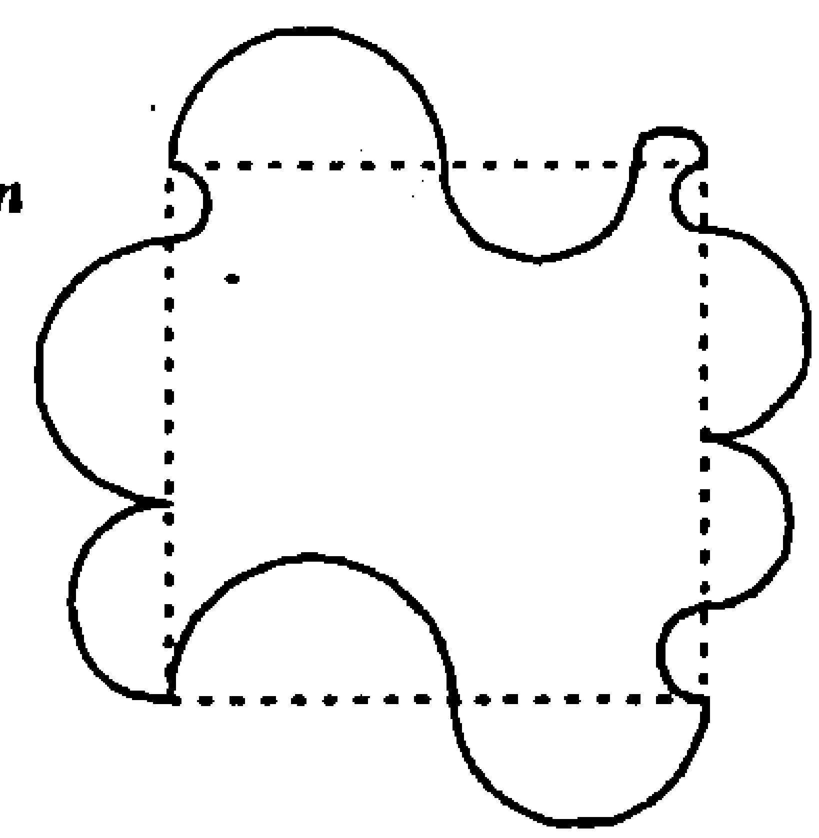
15 Determinar el perímetro de la región sombreada. Si el lado del exágono regular *ABCDEF* mide *6cm* .



A) $18(3+\sqrt{2})$ cm B) $18(2+2\sqrt{3})$ cm
C) $36(\sqrt{3}+3)$ cm D) $12(\sqrt{3}+1)$ cm
E) $12(\sqrt{3}-1)$ cm

16 Las longitudes del horario y del minutero de un reloj son de *6cm* y *8cm* respectivamente . ¿A qué distancia en cm, se encuentran las puntas de dichas manecillas a las *3p.m.*?
A)12 cm B) 9 C) 10 D) 7,5 E) 15

17 Determinar el perímetro de la figura sombreada si las curvas son semicircunferencias . Lado del cuadrado es *6 m*.



A) 4π m
B) 8π
C) 12π
D) 15π
E) 24π

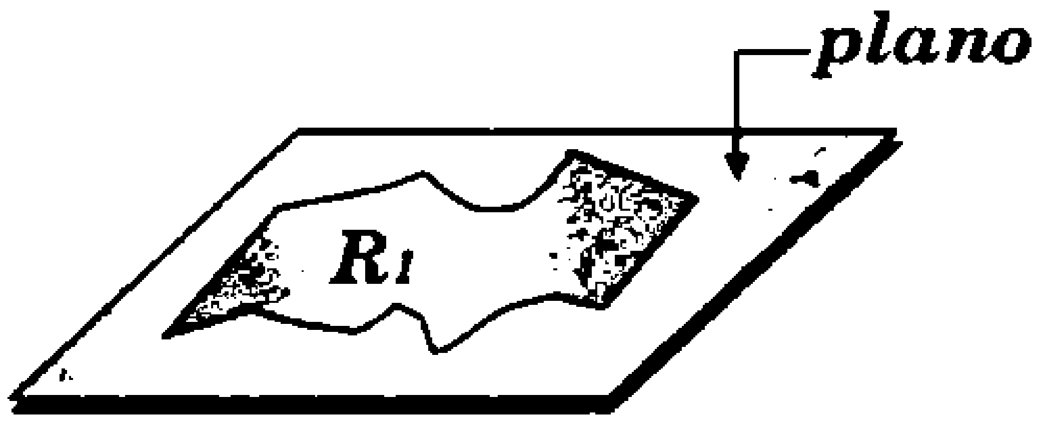
CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)D	3)E	4)C	5)E	6)B	7)D	8)E	9)E	10)B
11)B	12)A	13)B	14)A	15)B	16)C	17)A			

ÁREAS DE REGIONES SOMBREADAS

CAPÍTULO 045

REGIÓN PLANA

Es una región de plano limitada por una línea cerrada , tan bien llamada frontera de la región.



R₁: Región Plana

La línea que limita a la región puede ser poligonal o curva , las regiones específicas a tratarse en este capítulo son : la región triangular (limitada por un triángulo), la región cuadrangular (limitada por un cuadrilátero) y la región circular (limitada por una circunferencia).

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Es la medida numérica de una región plana , lo cual resulta de comparar dicha región con otra , tomada como unidad (denominada Región Unitaria) , esta es la región cuadrada limitada por un cuadrado cuyo lado mide *1*.

ÁREA :

Es la medida de una región o superficie finita, expresada en cierta unidad de longitud elevada al cuadrado , estas unidades pueden ser:

cm^2, m^2, km^2,...., etc.

Para simbolizar el área de una región cualquiera , comúnmente se usa la letra «$\mathbb{S}$» , por ejemplo el área de una región triangular *ABC* , lo podemos indicar por : «$\mathbb{S}_{ABC}$» (área de una región < > $\mathbb{S}$)

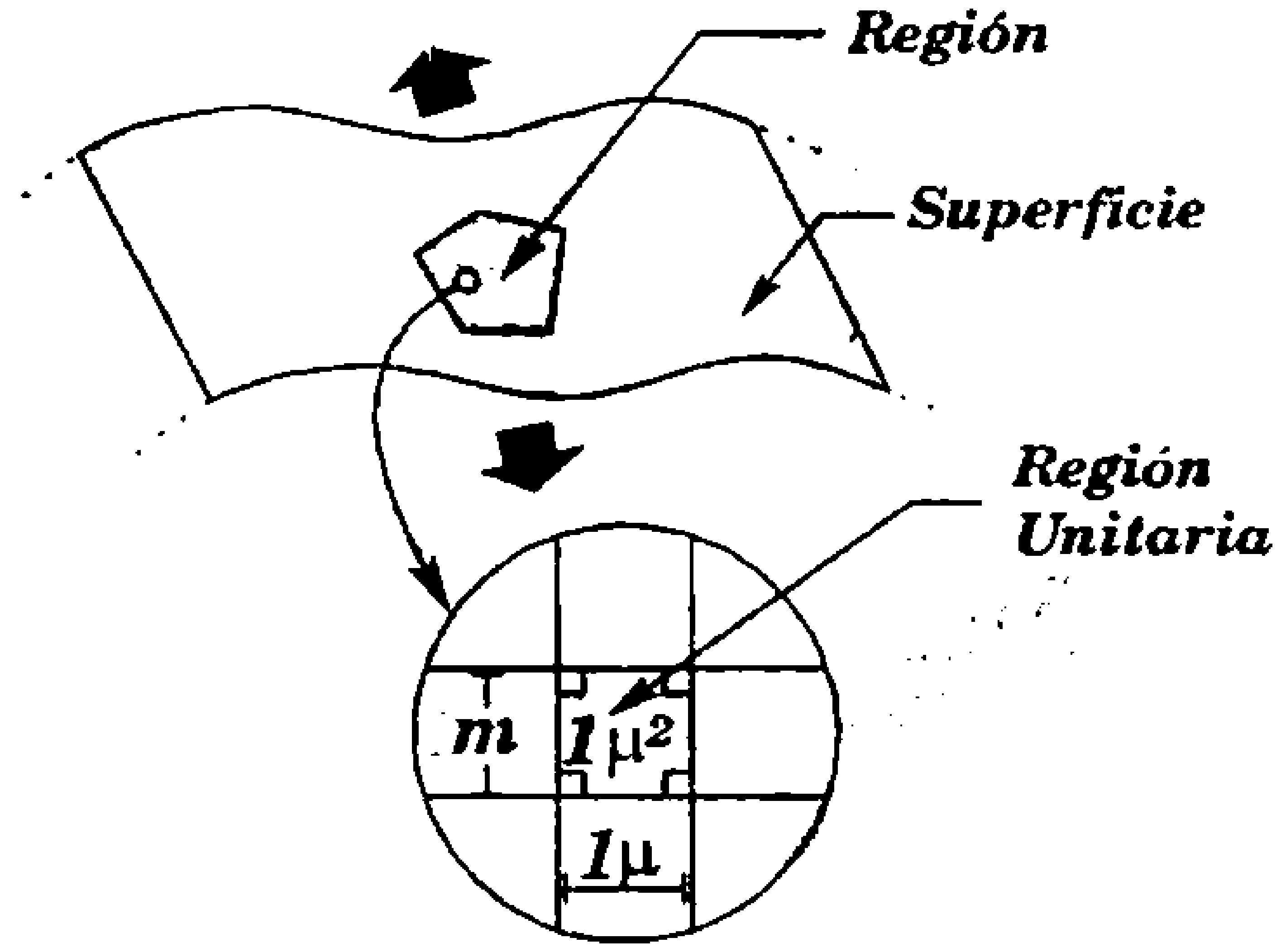
OBSERVACIÓN :

En adelante , para abreviar , haremos referencia al área de un triángulo , área de un polígono , área de un círculo , etc. , entendiendo desde luego , que se trata del área de la región correspondiente .

REGIÓN UNITARIA :

Es una región cuadrada , cuyo lado mide la unidad de longitud y su área es una unidad cuadrada.

Así en la figura :



$$\mathbb{A}_{\text{REGIÓN}} = K \ \text{veces}\left(1\mu^2\right) \quad (K \in \mathbb{R})$$

EJEMPLO :

La región *BCD* contiene *8* veces a la región unitaria.

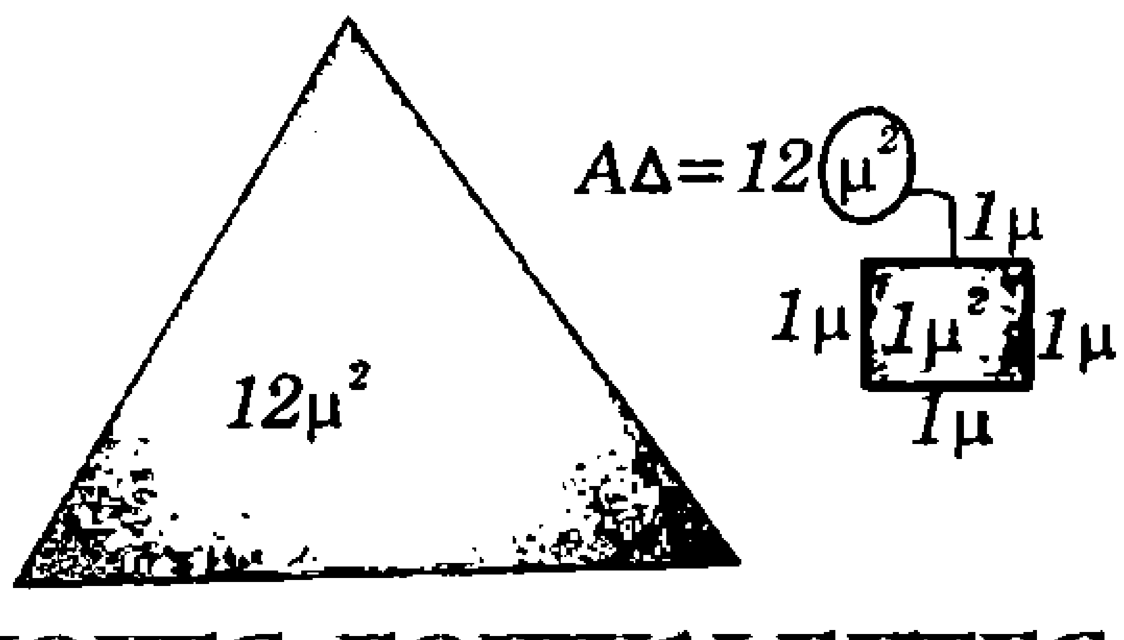
$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = 8\left(1\mu^2\right) = 8\mu^2$$

Así también podemos notar que el área *ABCD* es numéricamente igual al producto de sus dimensiones (largo×ancho)

$$\mathbb{A}_{\square ABCD} = 8\mu^2 = (4\mu)(2\mu)$$

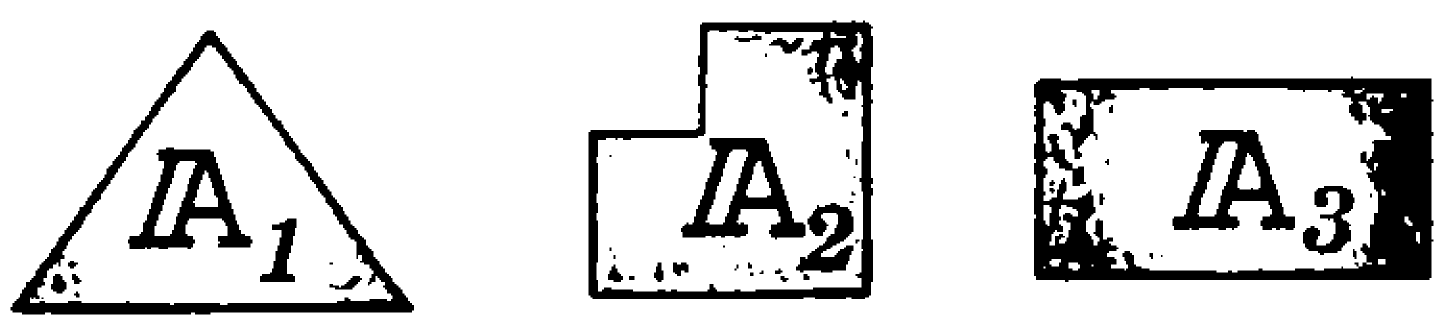
EJEMPLO :

Si el área de una región triangular es *12* u^2 quiere decir que su región contiene *12* veces la de $1u^2$, que es la región cuadrada cuyo lado tiene por longitud *1 u*.



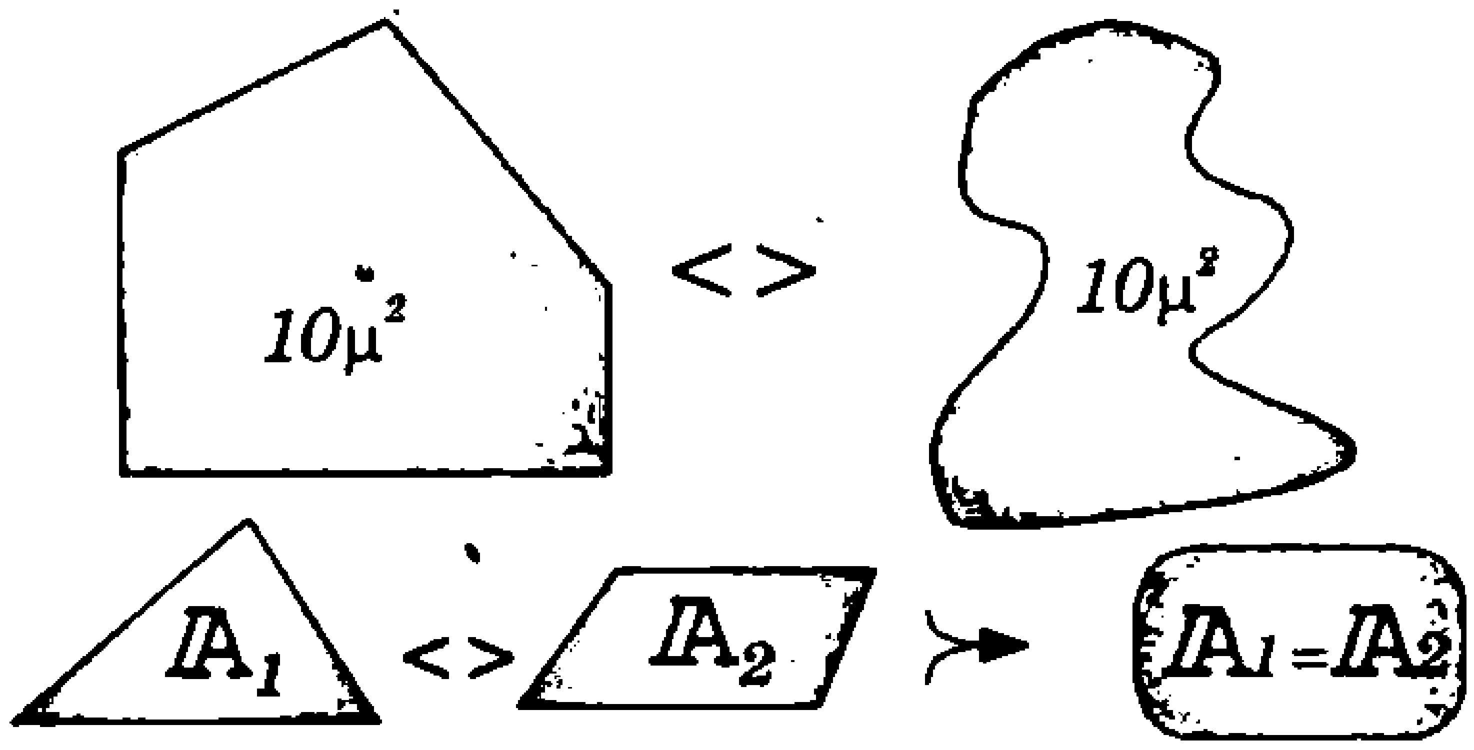
REGIONES EQUIVALENTES :

Son regiones planas que tienen la misma área. Sus formas no necesariamente son iguales. Es decir :



Si las regiones R_1, R_2 y R_3, son equivalentes, se cumple : $A_1 = A_2 = A_3$

A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las regiones sombreadas.



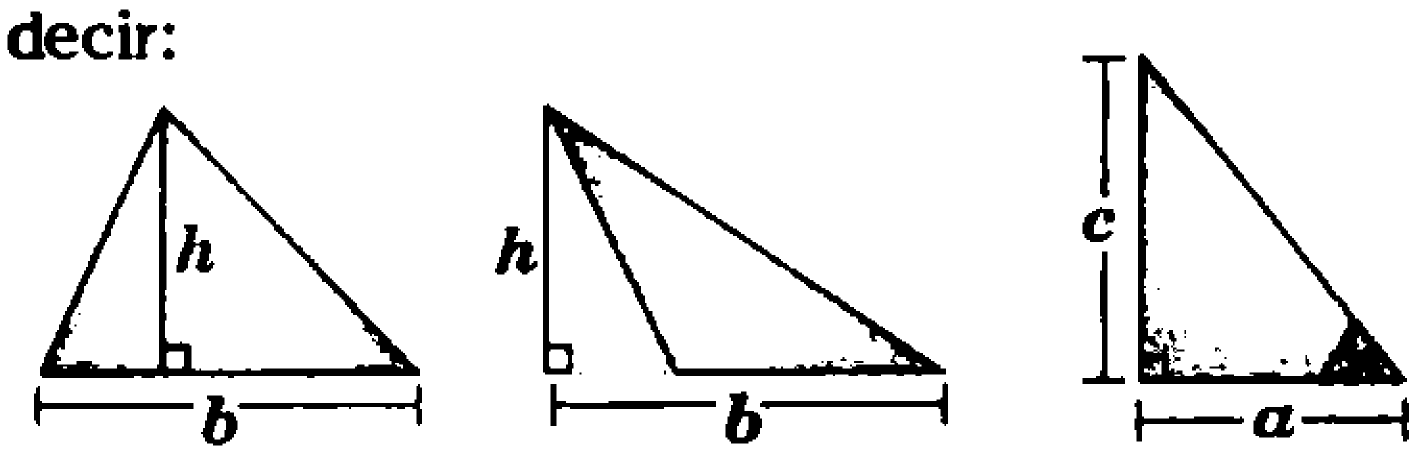
ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

Para calcular el área de una región triangular se utilizarán las siguientes propiedades :

FÓRMULA BÁSICA :

El área de una región triangular es igual al semiproducto entre las longitudes de un lado y la altura relativa a dicho lado.

Es decir:



$A_\Delta = \dfrac{bh}{2}$ $\qquad A_\Delta = \dfrac{bh}{2}$ $\qquad A_\Delta = \dfrac{ac}{2}$

ÁREA DEL TRIÁNGULO :

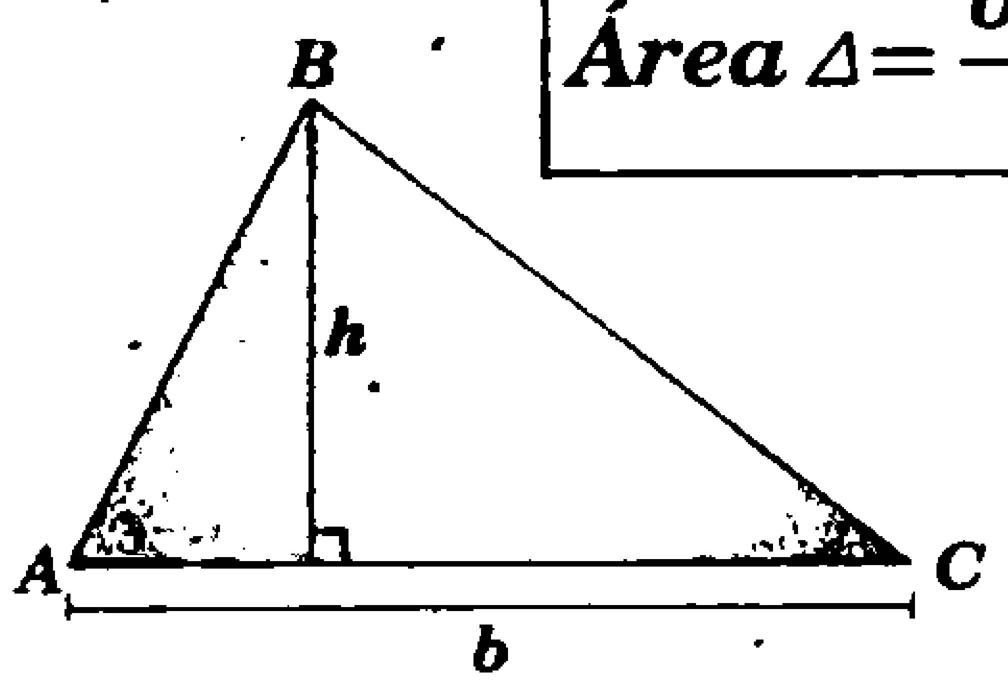
El área de la región de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base y de su altura.

$$Área\,\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$$

*Donde:

b: base

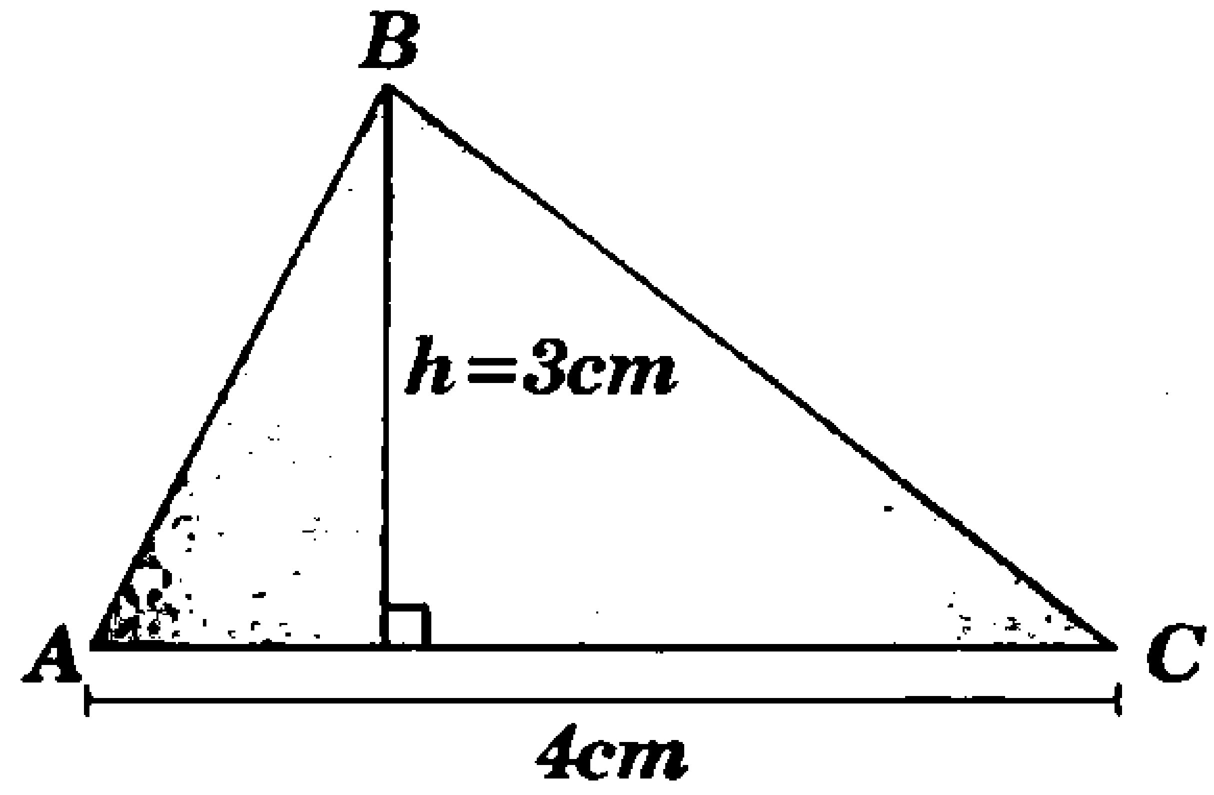
h: altura



EJEMPLO :

La base de un triángulo mide ***4 cm*** y la altura relativa a su base mide ***3 cm***. Hallar el área de la región del triángulo.

RESOLUCIÓN:



* Sabemos que : $Área\,\Delta = \dfrac{b \cdot h}{2}$

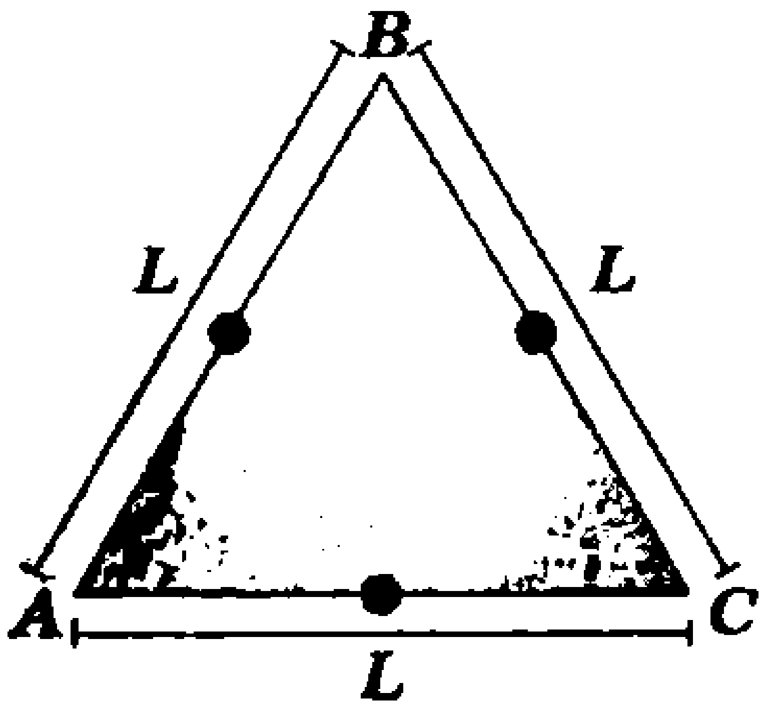
* Reemplazamos: $b = 4\ cm$ y $h = 3\ cm$

$$Área\,\Delta = \frac{4\,cm \times 3\,cm}{2}$$

$$Área\,\Delta = \frac{12\,cm^2}{2} \Rightarrow \boxed{Área\,\Delta = 6cm^2}$$

ÁREA DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

El área de la región de un triángulo equilátero es igual al cuadrado de su lado por la raíz cuadrada de tres, dividido por cuatro.



$$Área\,\Delta = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

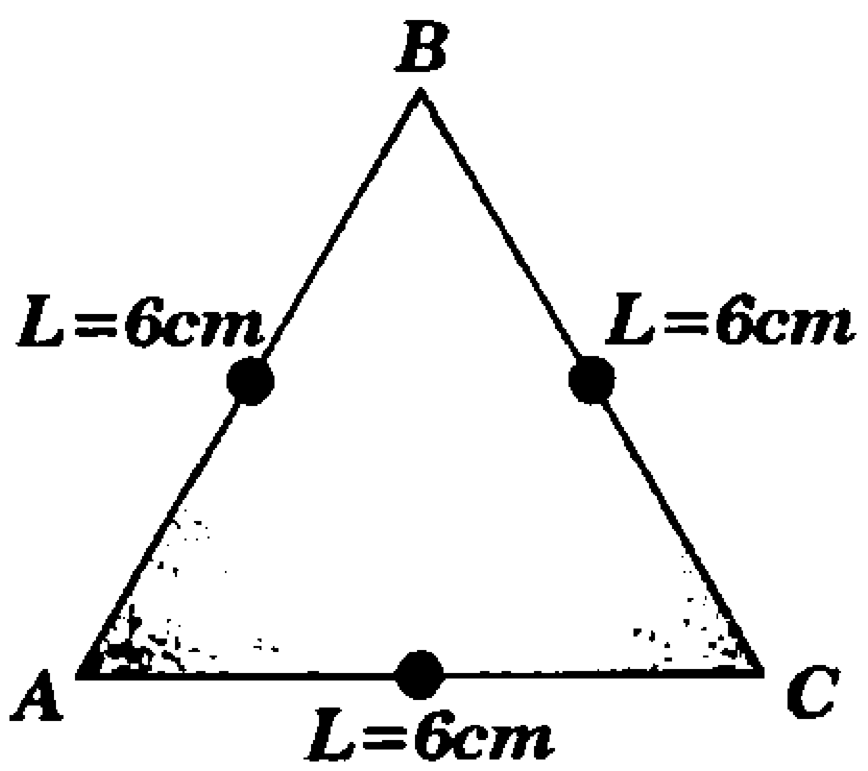
L: Longitud del lado del triángulo equilátero.

EJEMPLO :

El lado de un triángulo equilátero mide 6 cm. Encontrar el área de su región.

RESOLUCIÓN:

*Sabemos que:



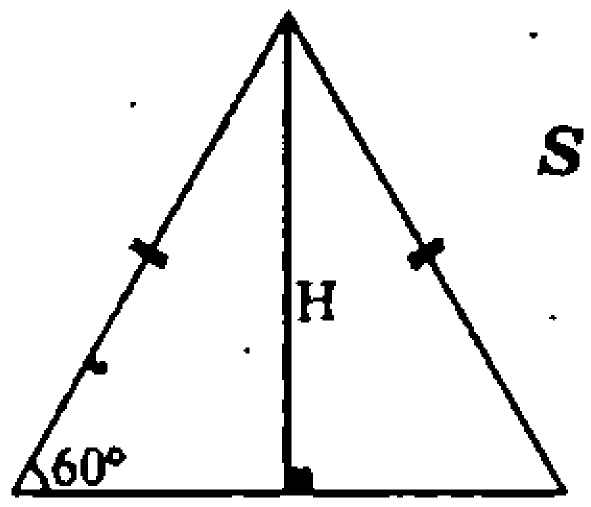
$$Área\,\Delta = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

* Reemplazamos: $L = 6cm$

$$Área\,\Delta = \frac{(6cm)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36cm^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{Área\,\Delta = 9\sqrt{3}\ cm^2}$$

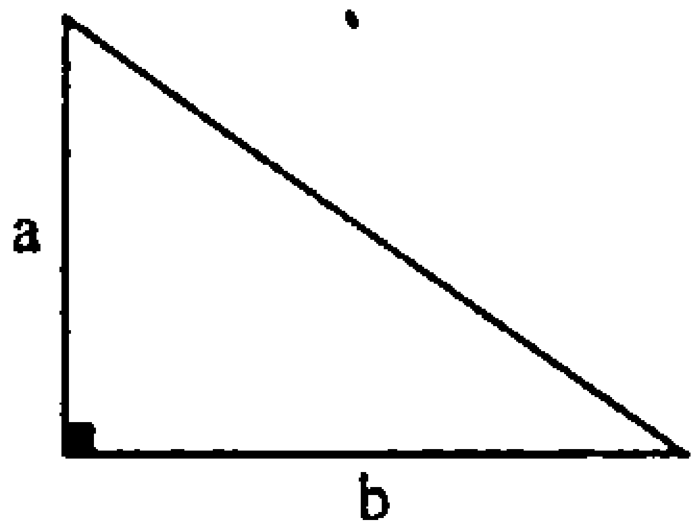
TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

En función de su altura .



$$S = \frac{H^2\sqrt{3}}{3}$$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

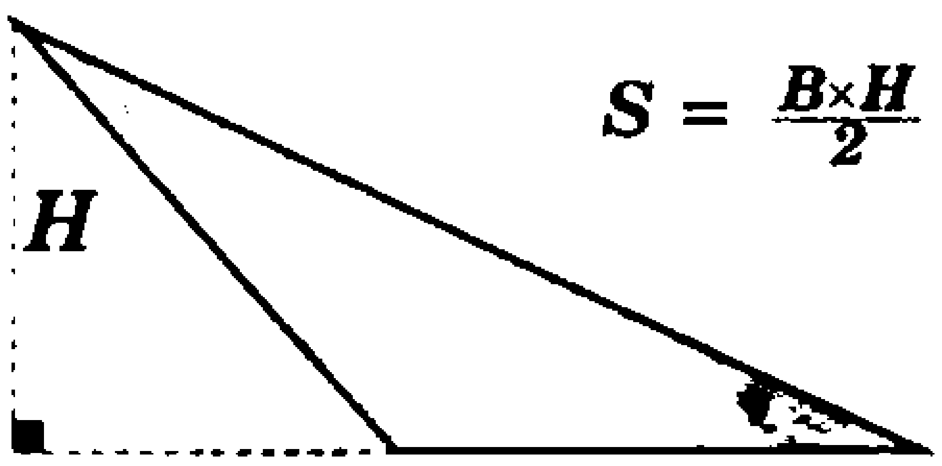


En función de sus catetos .

$$S = \frac{a \times b}{2}$$

TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO :

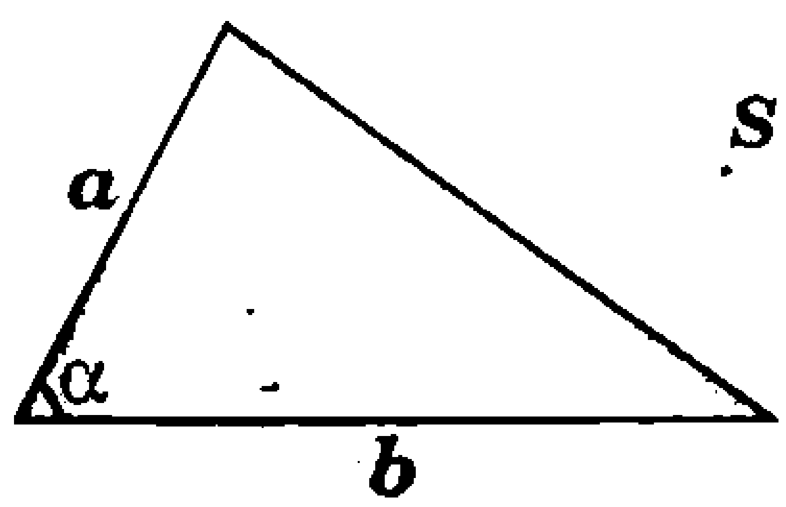
En función de su base y altura exterior .



$$S = \frac{B \times H}{2}$$

TRIÁNGULO :

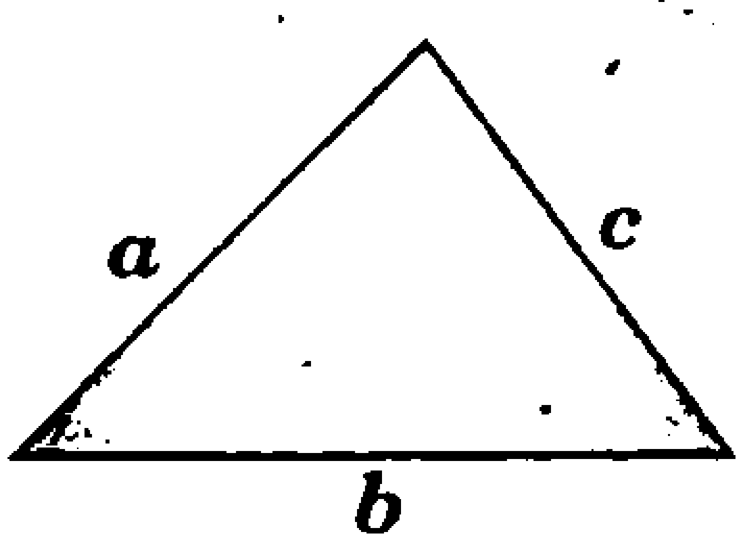
En función de 2 lados y el ángulo que forman entre sí.



$$S = \frac{ab\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

TRIÁNGULO :

En función de sus lados y su semiperímetro .



$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Semiperímetro :

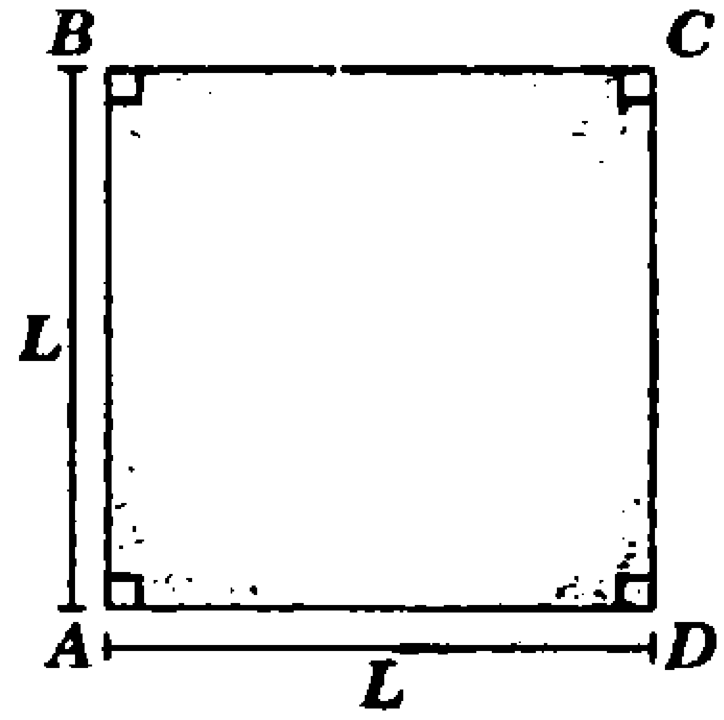
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

El área de una región triangular es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro de la región triangular y la diferencia en dicho semiperímetro con la longitud de cada uno de los lados.(*FÓRMULA DE HERÓN*)

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

ÁREA DEL CUADRADO :

El área de la región de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado.

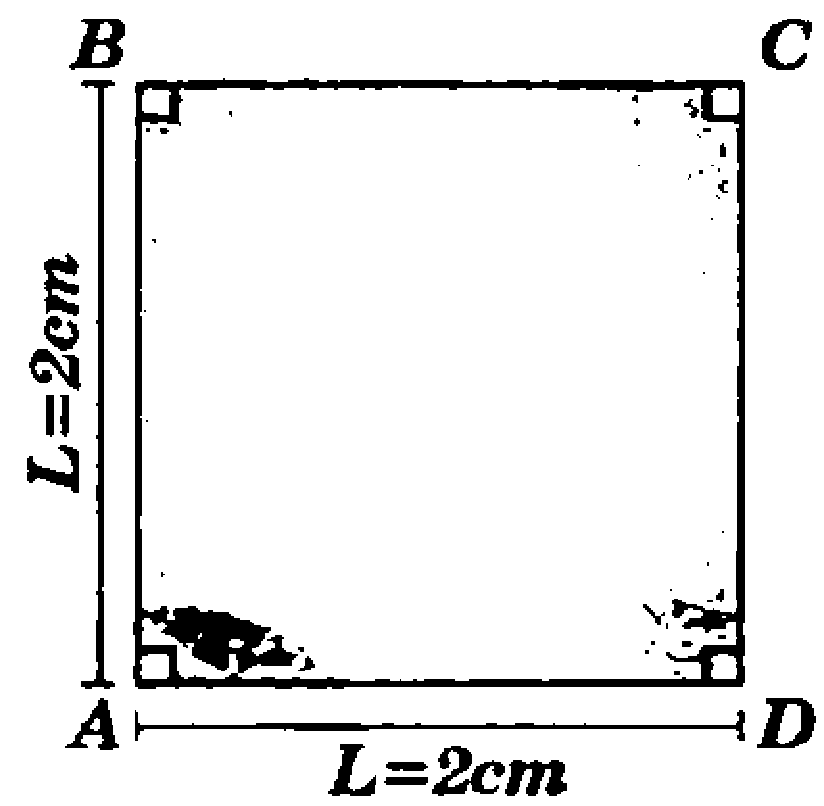


$$\text{Área}\square = L^2$$

EJEMPLO :

Hallar el área de la región de un cuadrado, si su lado mide *2 cm*.

RESOLUCIÓN:



* Sabemos que :

$$\text{Área}\square = L^2$$

* Reemplazando :

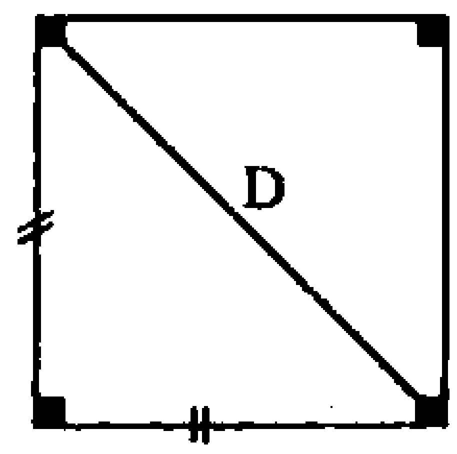
$L = 2cm$

$\text{Área}\square = (2cm)^2$

$\Rightarrow \boxed{\text{Área}\square = 4cm^2}$

CUADRADO :

El área de un cuadrado es igual a la mitad del cuadrado de la longitud de su diagonal .

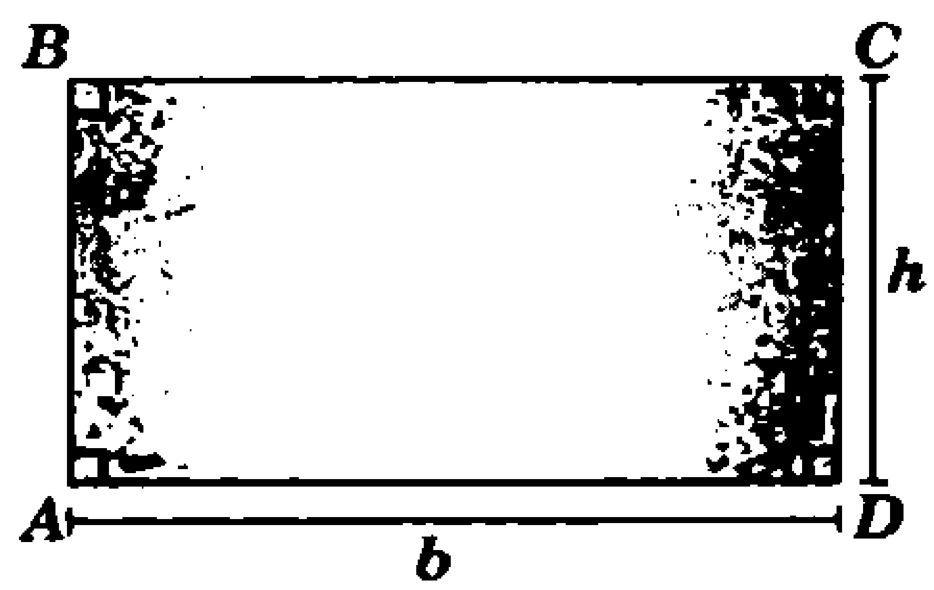


En función de su diagonal .

$$S = \frac{D^2}{2}$$

ÁREA DEL RECTÁNGULO :

El área de la región de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.



$$\text{Área}\ \square = b \times h$$

*Donde:

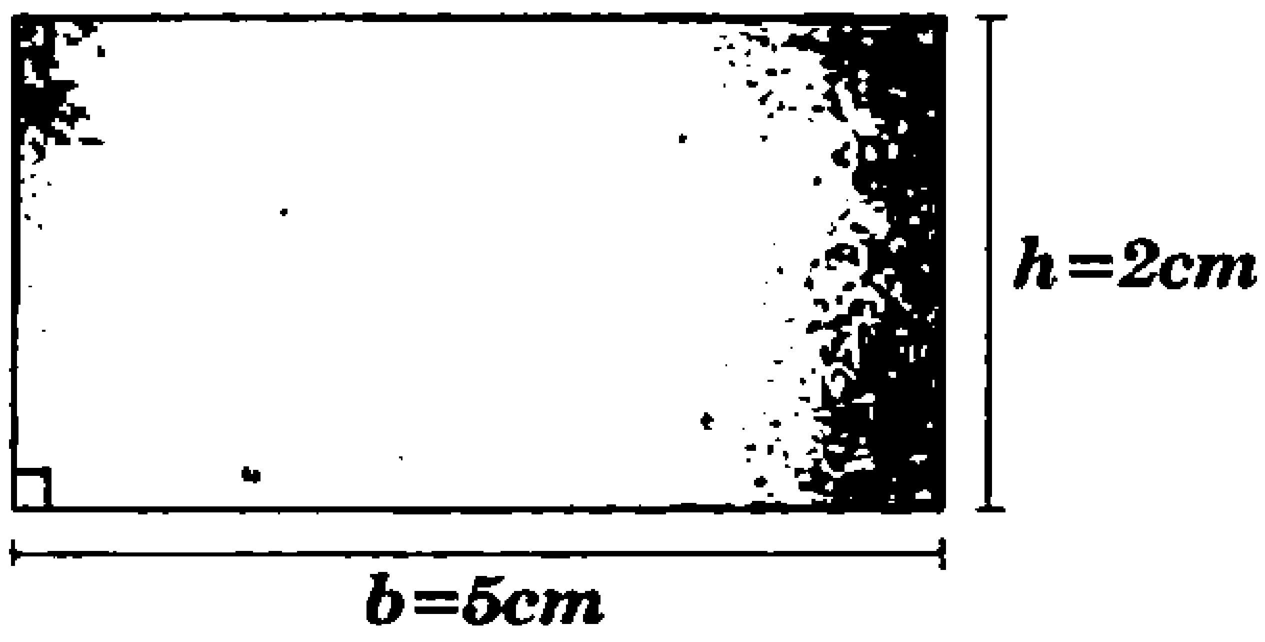
b: base

h: altura

EJEMPLO:

Encontrar el área de la región de un rectángulo, su base mide *5 cm* y su altura mide *2 cm*.

RESOLUCIÓN:



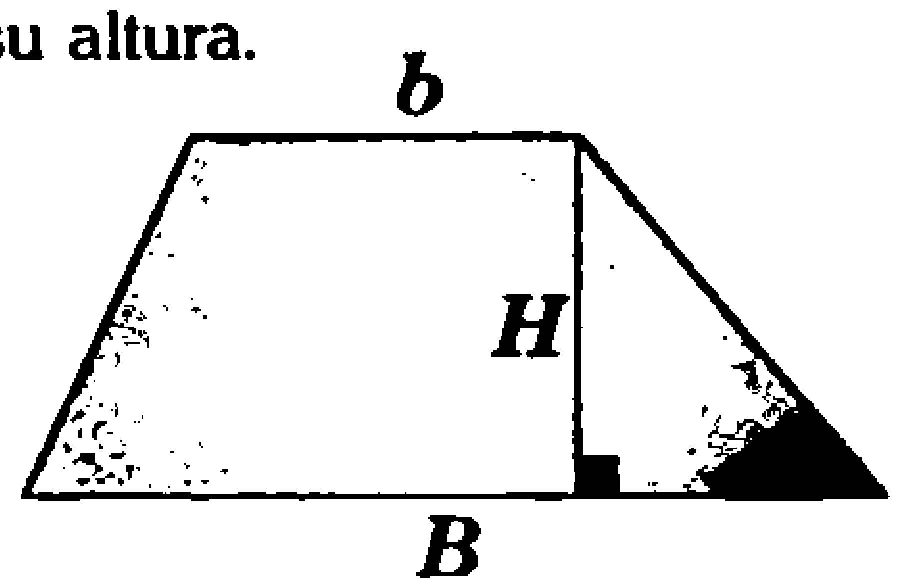
* Sabemos que : $\text{Área}_{\square} = b \times h$
* Reemplazando: $b=5$ cm y $h=2$ cm

$\text{Área}_{\square} = 5\,cm \times 2\,cm$

$\Rightarrow \boxed{\text{Área}_{\square} = 10\,cm^2}$

TRAPECIO :

El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases por su altura.

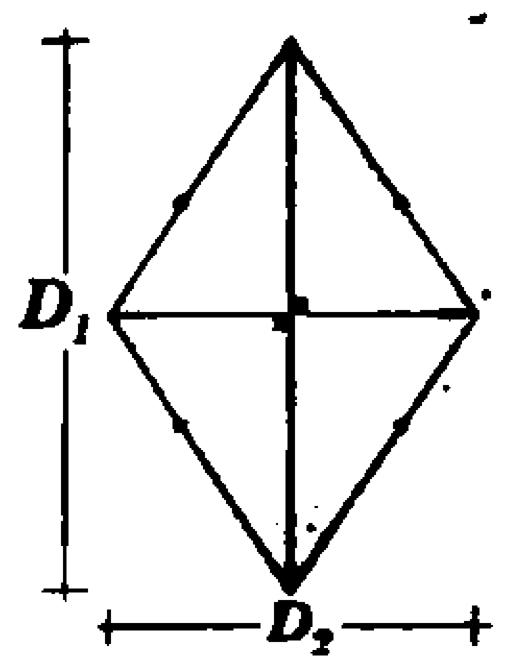


En función de sus bases (mayor y menor y su altura)

$$S = \left[\frac{B+b}{2}\right]H$$

ROMBO :

El área de un rombo es igual semiproducto de sus diagonales

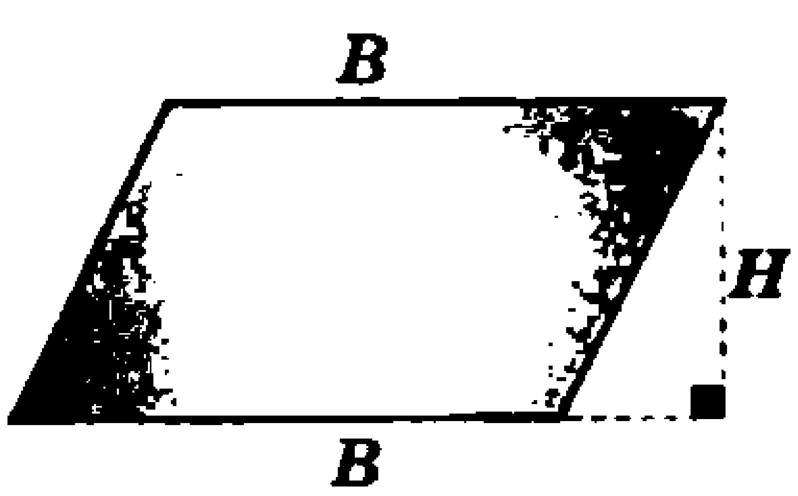


En función de sus diagonales .

$$\boxed{S = \frac{D_1 \times D_2}{2}}$$

PARALELOGRAMO :

El área de un paralelogramo es igual a la base multiplicada por su altura.

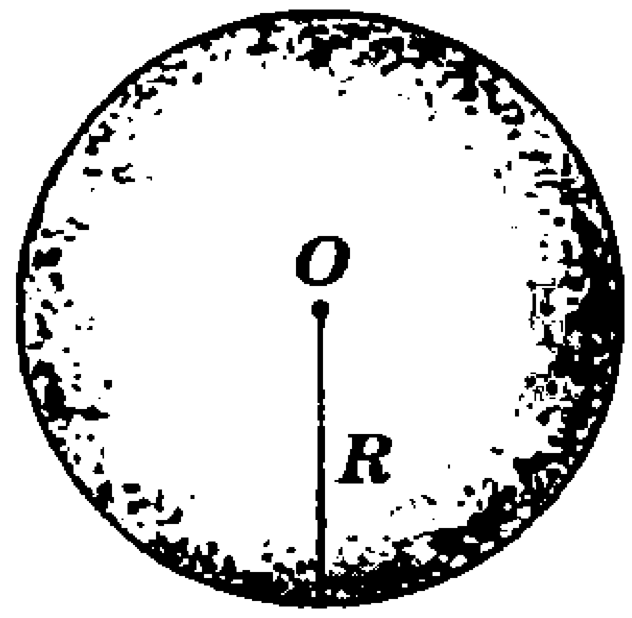


En función de su base y altura . $S = B \cdot H$

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

ÁREA DE UN CÍRCULO :

El área de un círculo esta dado por el producto de "π" (pi) por el cuadrado de su radio.



(círculo)

$$\boxed{\text{Área}_{\bigcirc} = \pi R^2}$$

EJEMPLO :

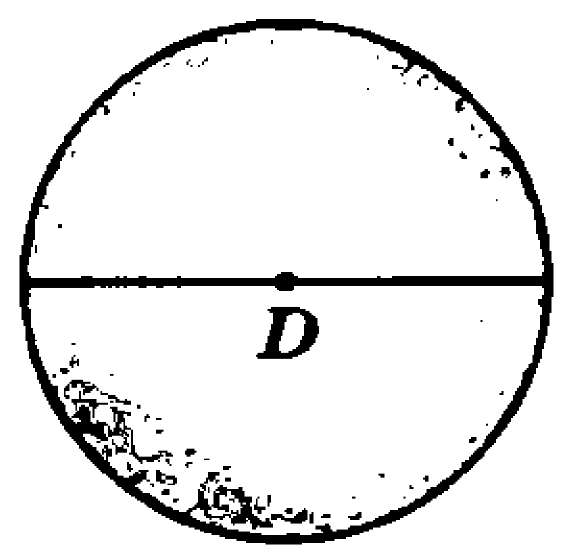
Calcular el área de un círculo cuyo radio mide *3 m*.

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que el área de un círculo se calcula así:

$$\text{Área}_{\bigcirc} = \pi R^2 \Rightarrow \text{Área}_{\bigcirc} = \pi(3)^2 = 9\pi$$

CÍRCULO :



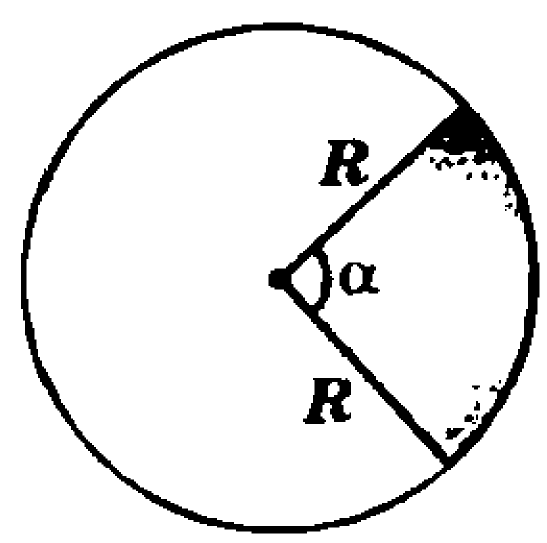
En función de su diámetro .

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$S_{semicírculo} = \frac{\pi D^2}{8}$$

SECTOR CIRCULAR :

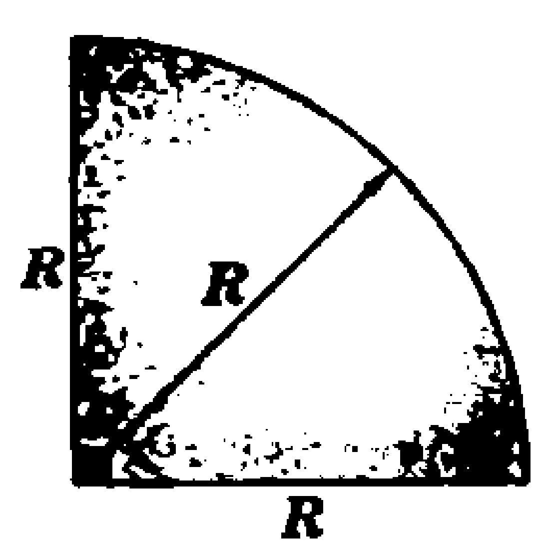
En función de su radio y ángulo central .



$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}}$$

CUADRANTE :

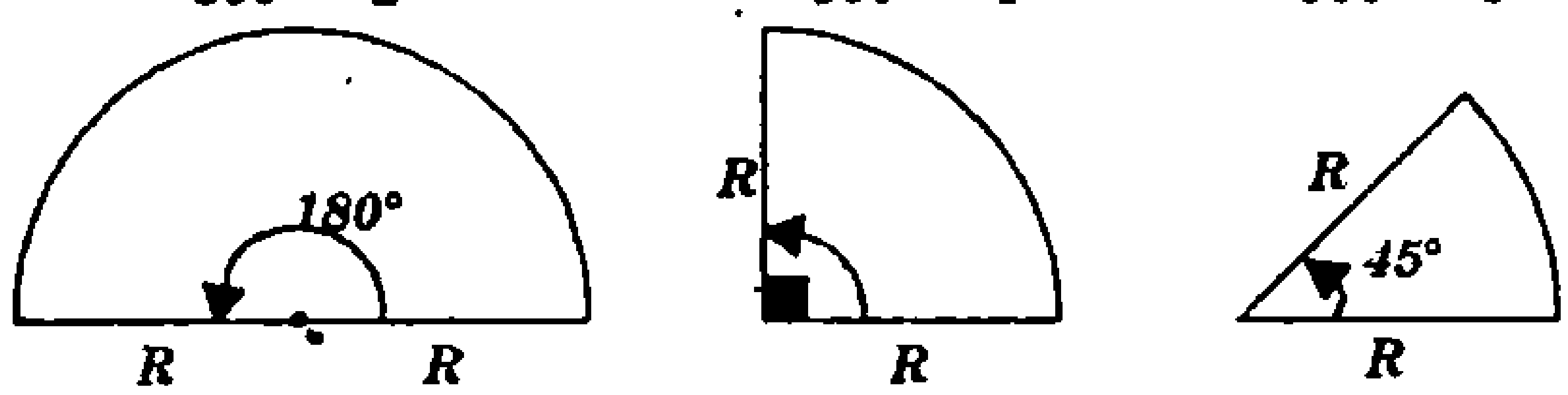
En función de su radio .



$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

FRACCIONES DE CÍRCULO

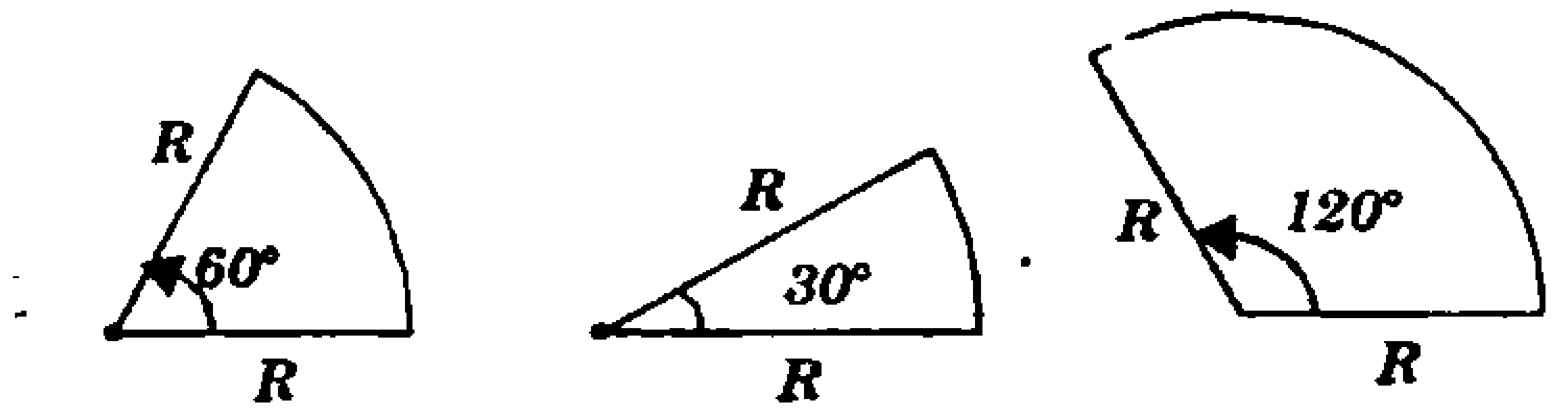
$\frac{180}{360}=\frac{1}{2}$ $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ $\frac{45}{360}=\frac{1}{8}$



la mitad | *la cuarta parte* | *la octava parte*

$S = \frac{\pi R^2}{2}$ $S = \frac{\pi R^2}{4}$ $S = \frac{\pi R^2}{8}$

$\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ $\frac{30}{360}=\frac{1}{12}$ $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$



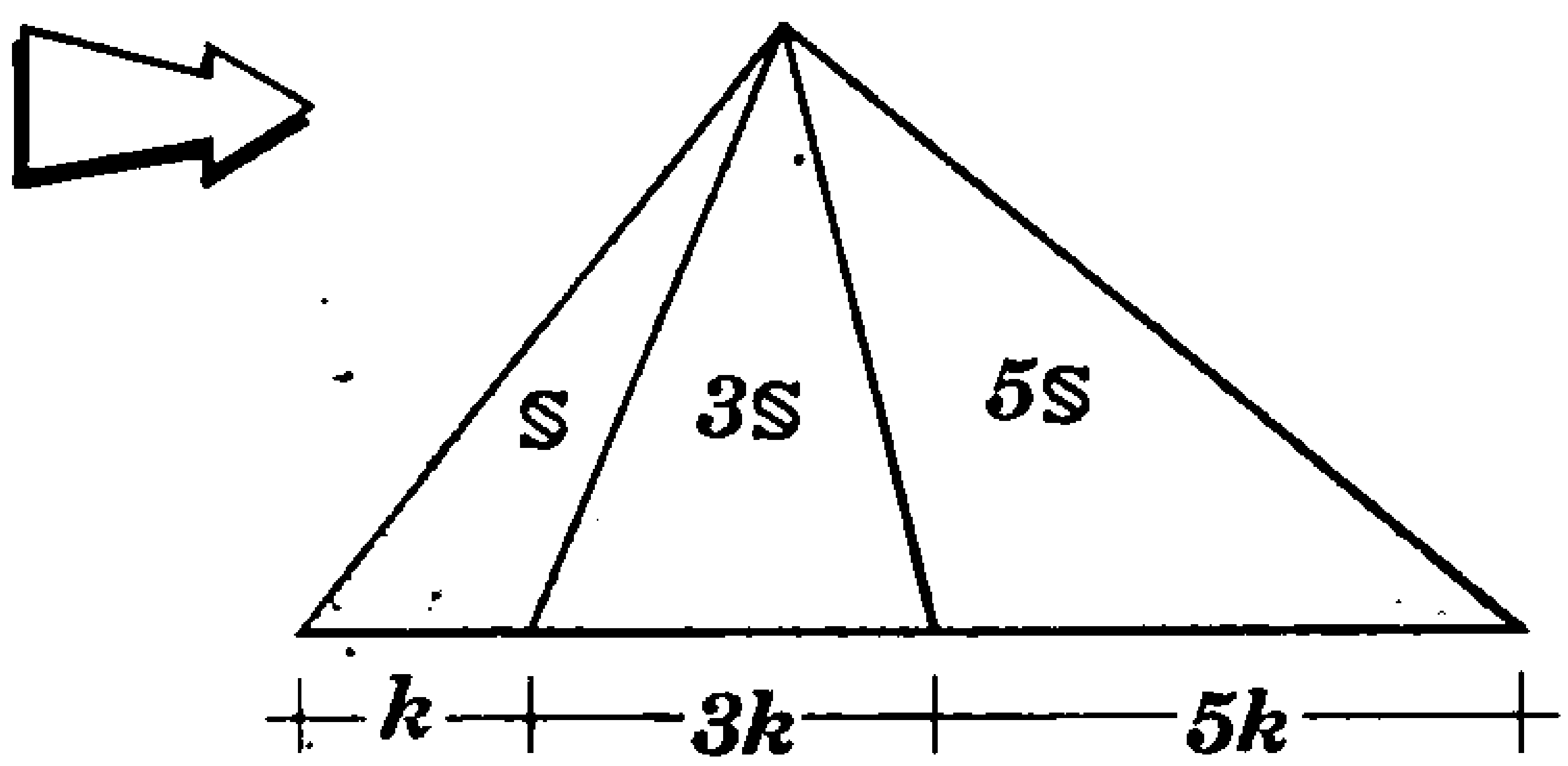
la sexta parte | *la doceava parte* | *la tercera parte*

$S = \frac{\pi R^2}{6}$ $S = \frac{\pi R^2}{12}$ $S = \frac{\pi R^2}{3}$

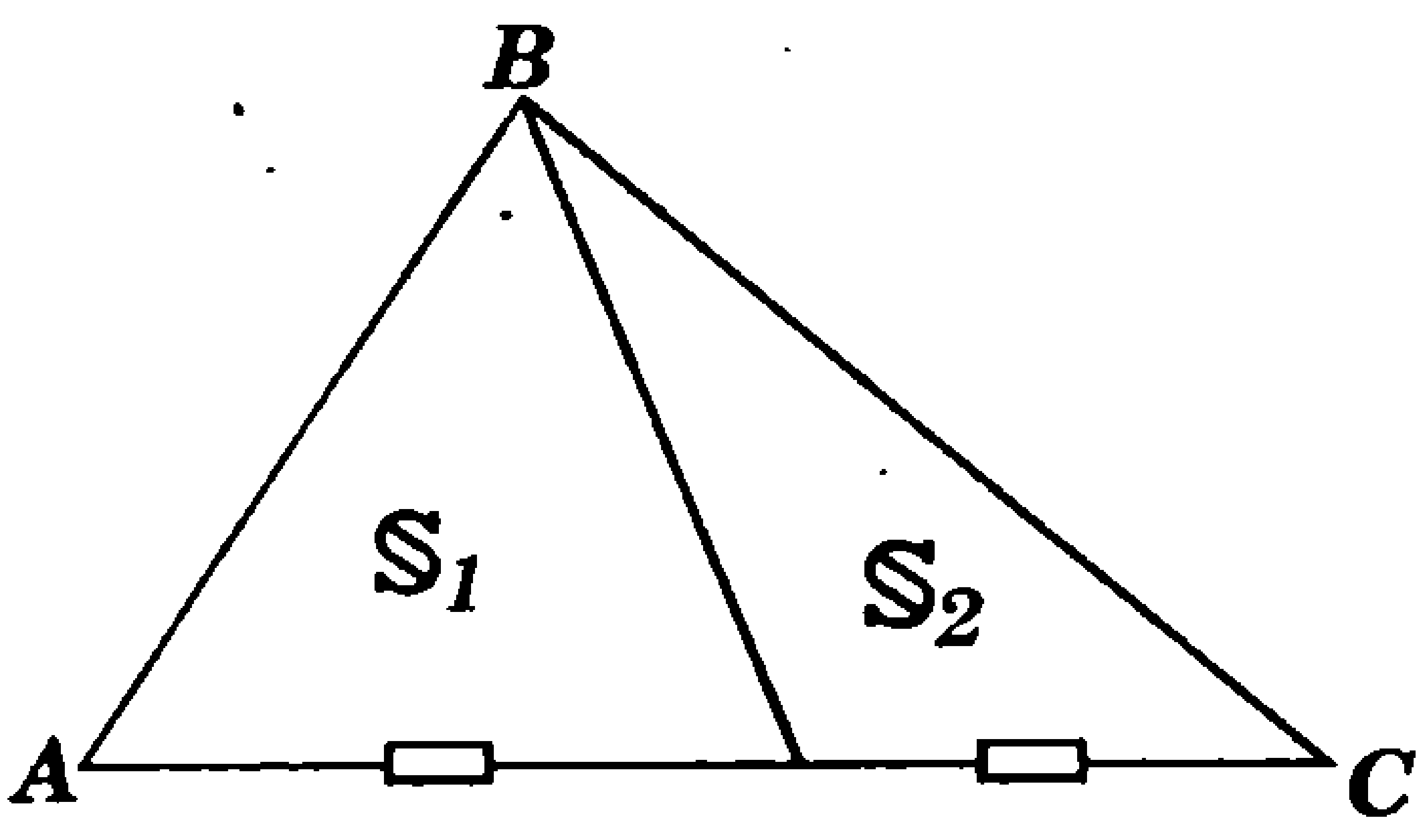
PROPIEDADES IMPORTANTES

A) TRIÁNGULOS CON ALTURA COMÚN :

Si 2 o mas triángulos tienen una altura en común . Luego sus áreas serán proporcionales a sus bases .

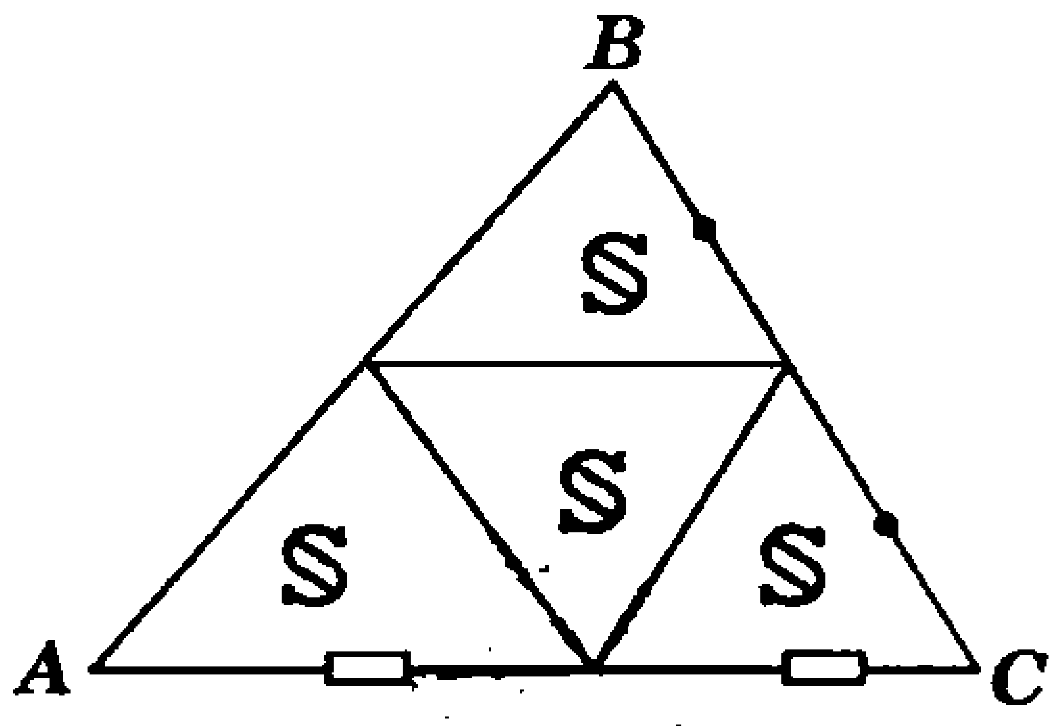


B) PROPIEDAD DE LA MEDIANA :



como $\overline{BM}$ = mediana ⇨ $S_1 = S_2$

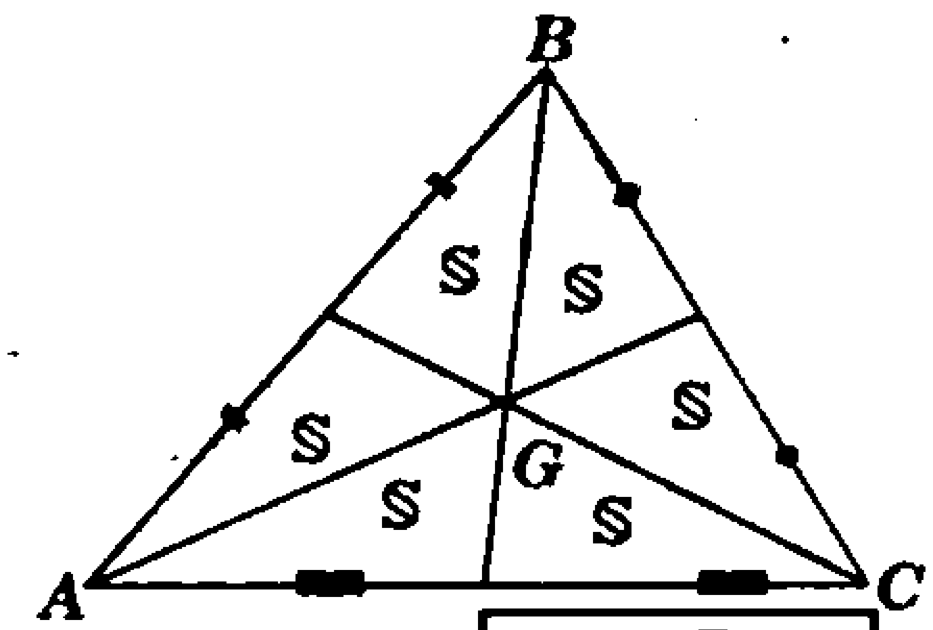
C) PROPIEDAD DE LA BASE MEDIA:



$4S = S_{ABC}$ ⇨ $S = \frac{S_{ABC}}{4}$

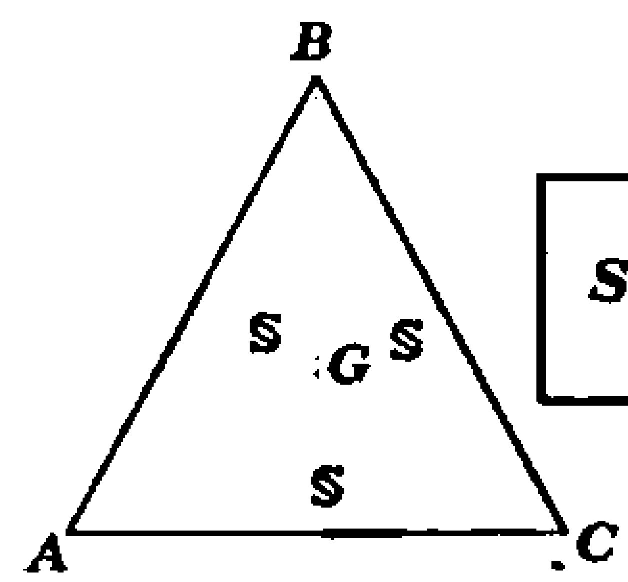
D) PROPIEDAD DEL BARICENTRO (G) :

G : Punto de intersección de las medianas .

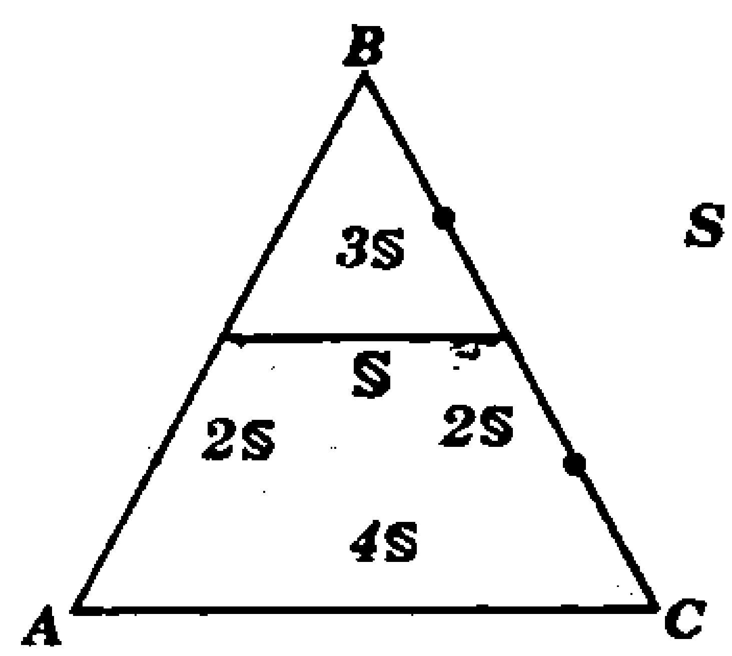


$6S = S_{ABC}$ ⇨ $S = \frac{S_{ABC}}{6}$

CONSECUENCIA DE LA PROPIEDAD -D-:

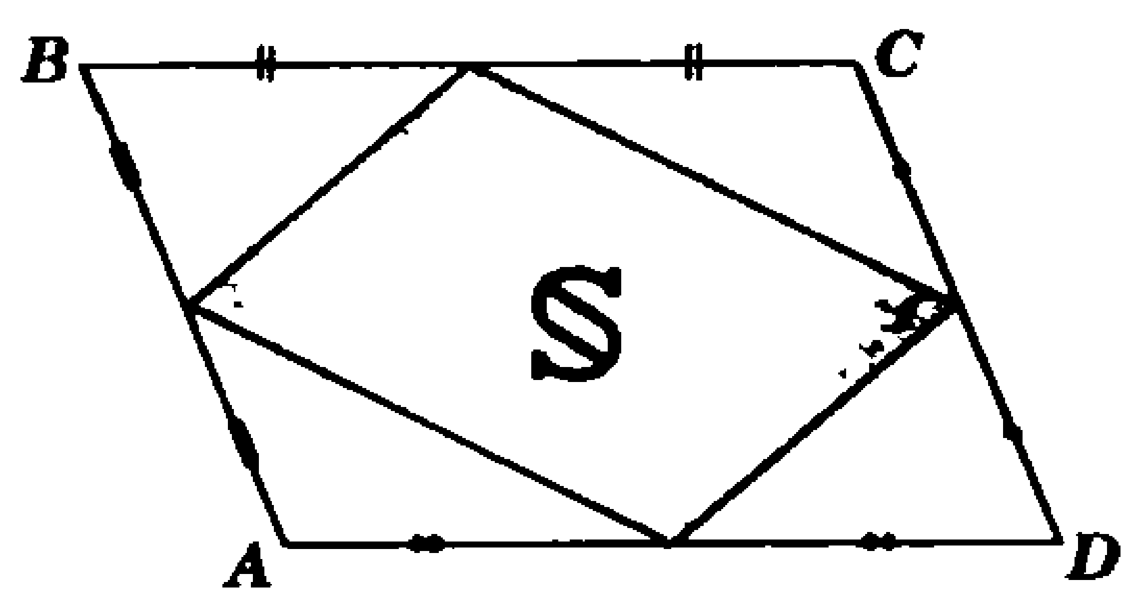


$S = \frac{S_{ABC}}{3}$



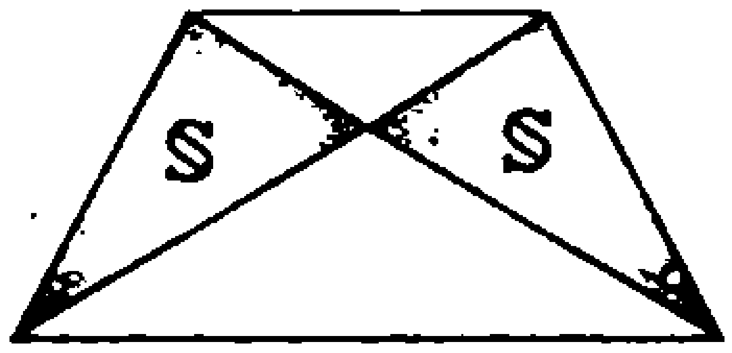
$S = \frac{S_{ABC}}{12}$

E) UNIÓN DE LOS PUNTOS MEDIOS EN UN CUADRILÁTERO :

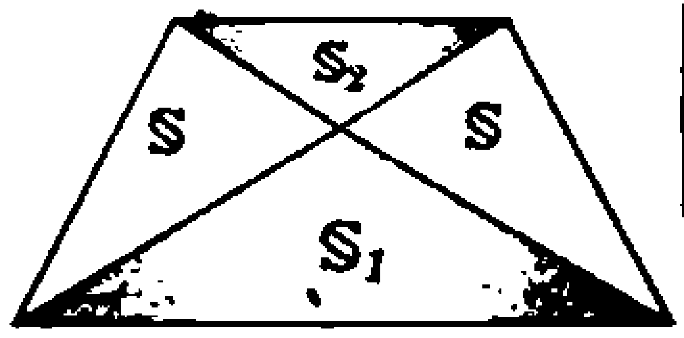


$S = \frac{S_{ABCD}}{2}$

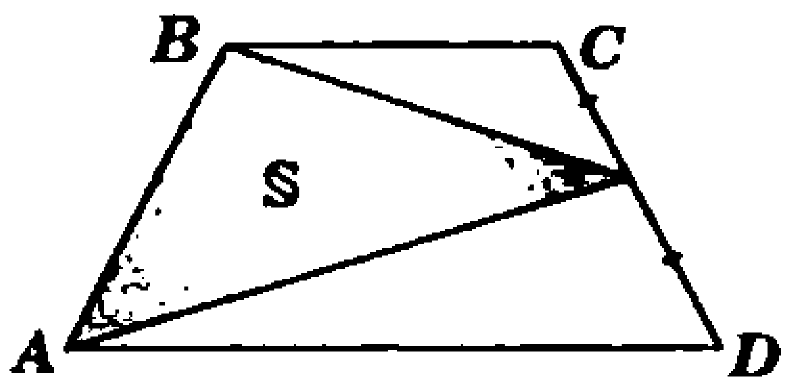
F) EN UN TRAPECIO :



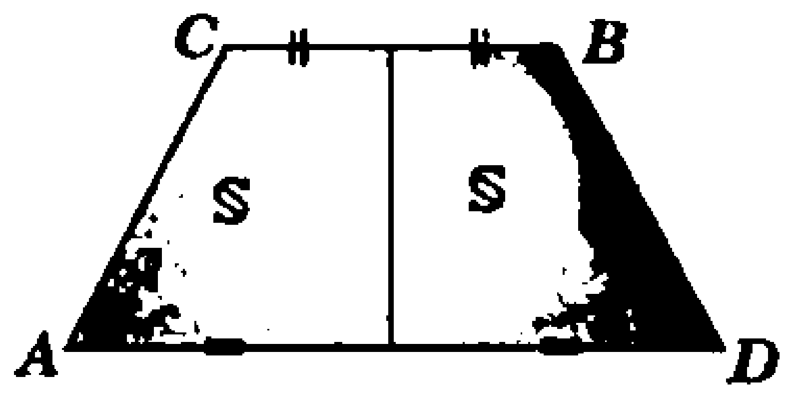
Las regiones sombreadas tienen la misma área.



$$\mathbb{S} = \sqrt{\mathbb{S}_1 \cdot \mathbb{S}_2}$$

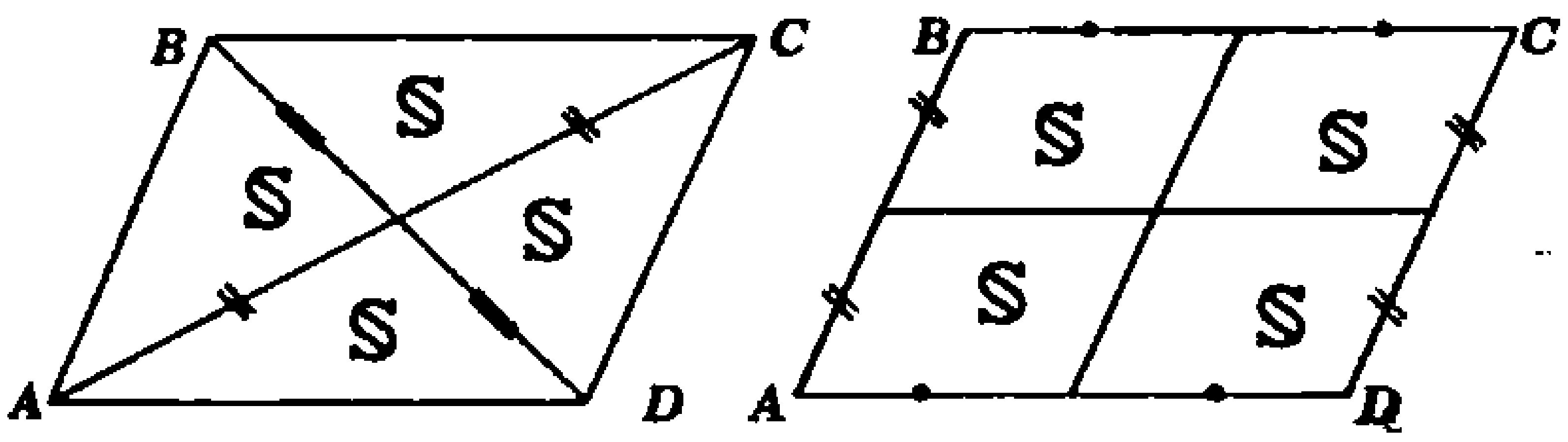


$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{2}$$



$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{2}$$

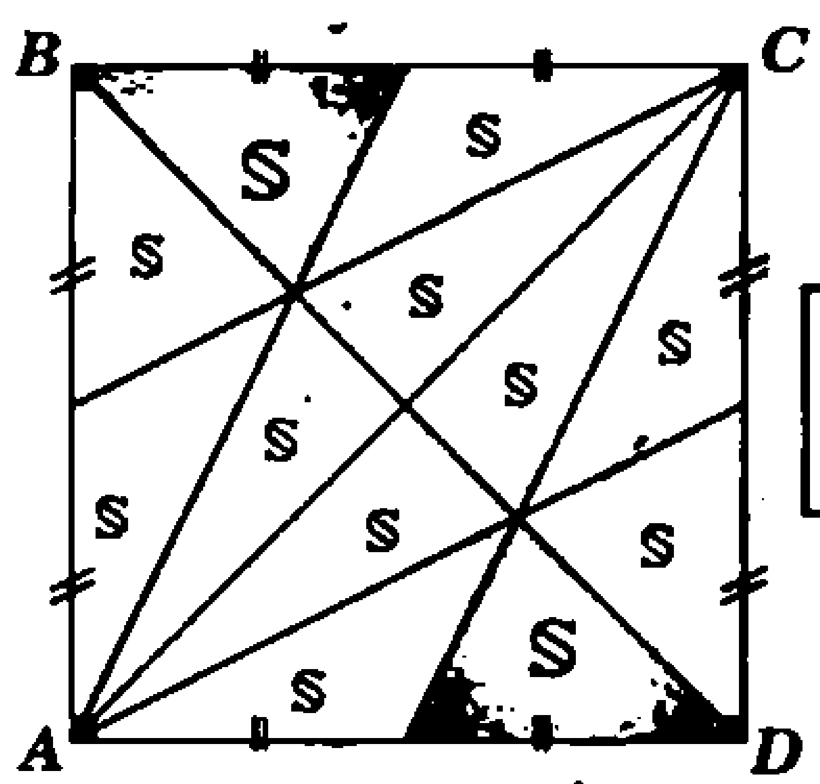
G) EN UN PARALELOGRAMO :



$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{4}$$

H) EN UN CUADRADO :

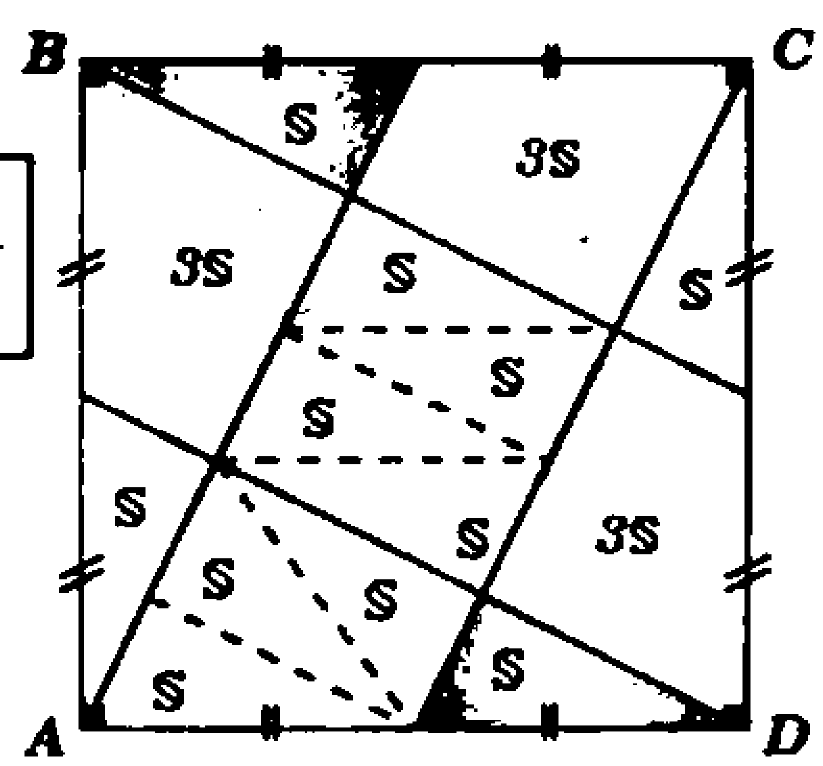
I)



$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{12}$$

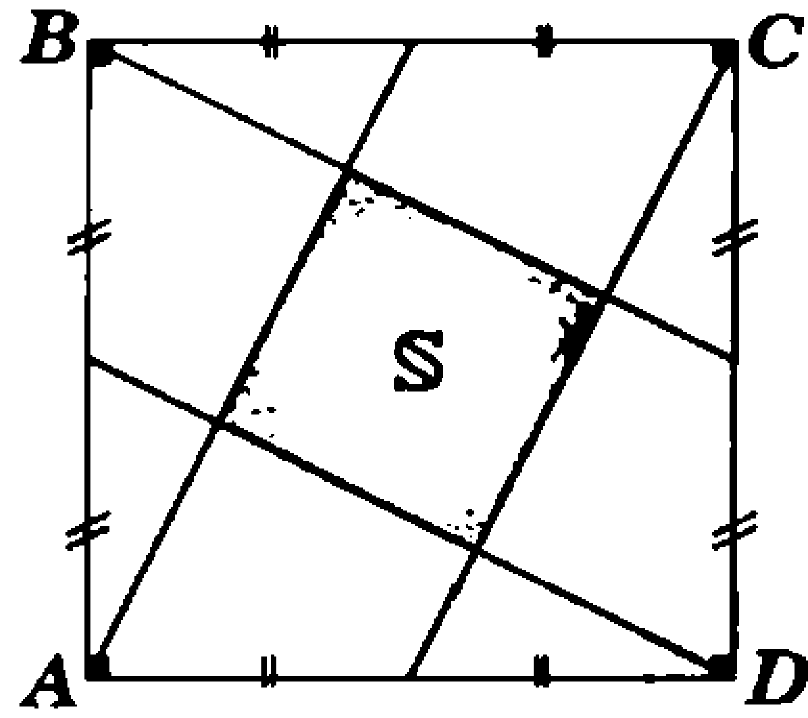
II)

$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{20}$$



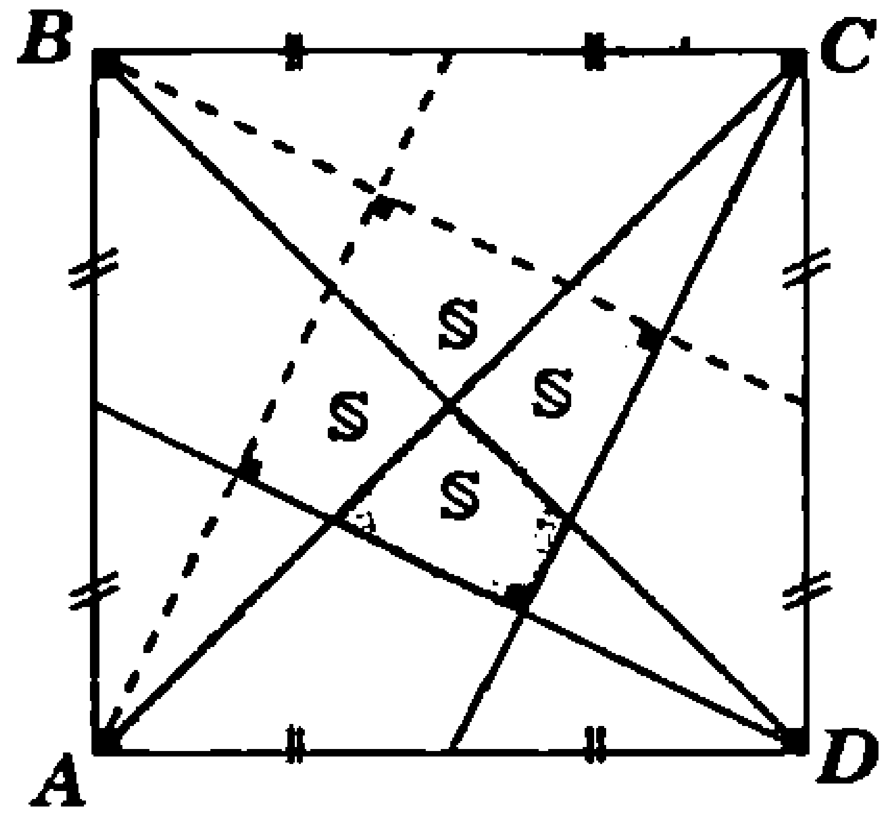
CONSECUENCIAS :

III)



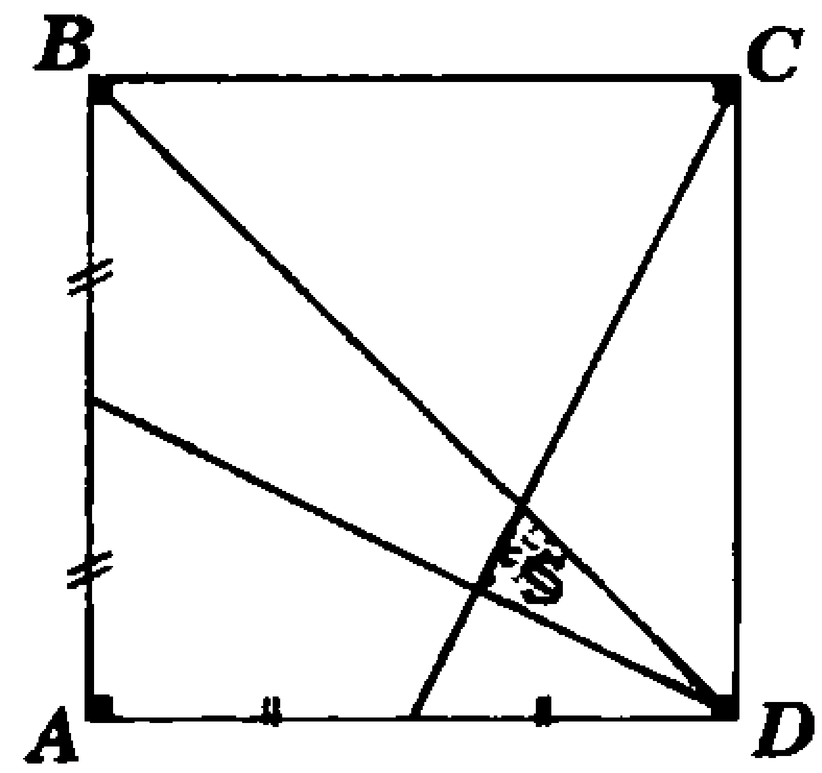
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{5}$$

IV)



$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{20}$$

V)



observando las relaciones *I* y *II* se deduce que:

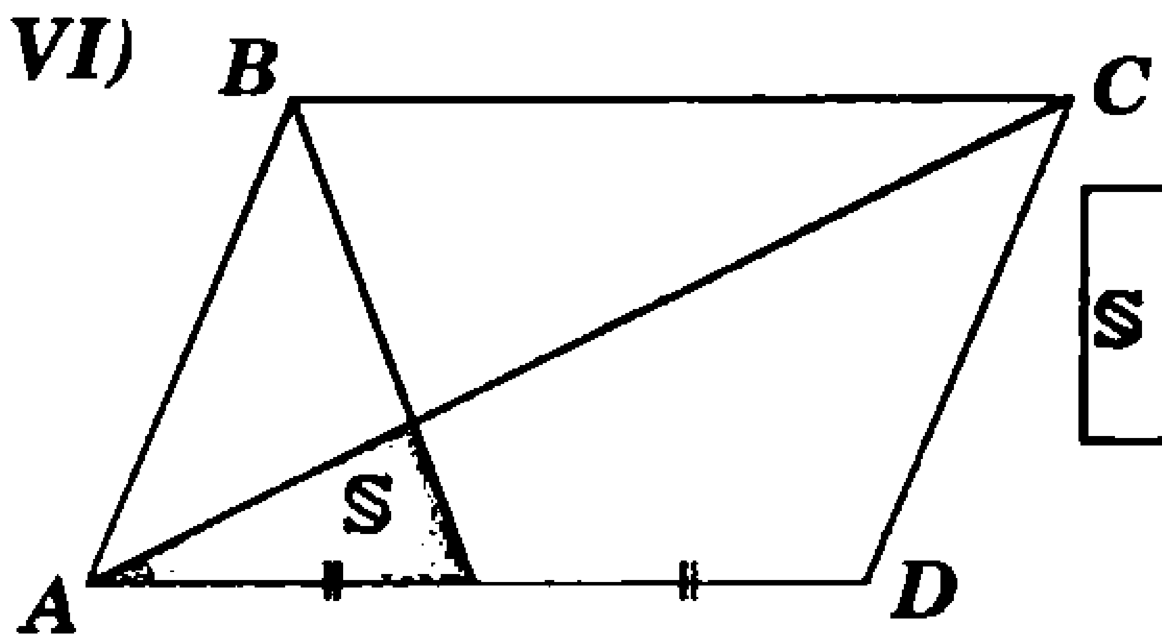
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{12} - \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{20}$$

De donde : $\mathbb{S} = \dfrac{\mathbb{S}_{ABCD}}{30}$

NOTA :

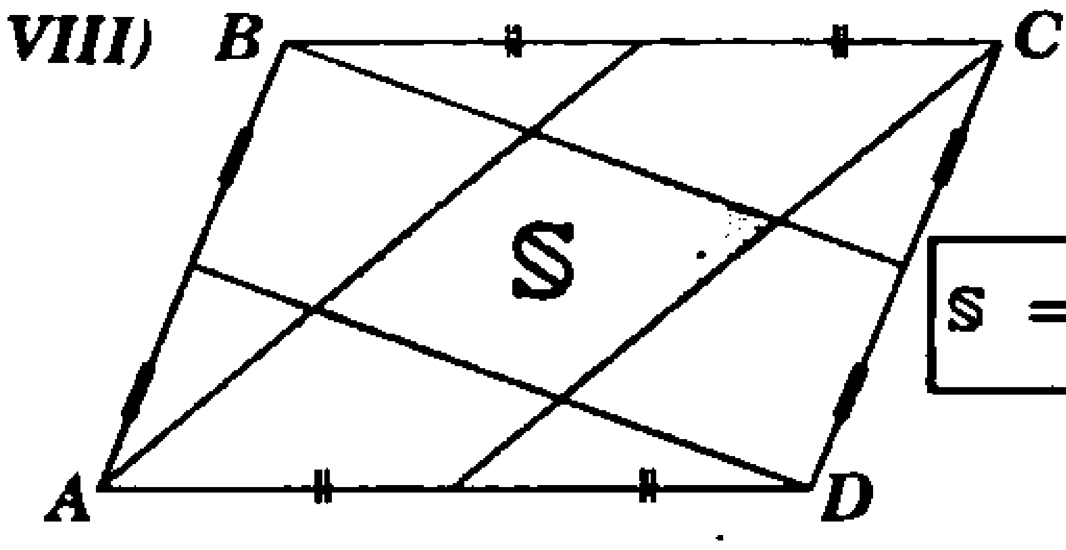
Estás últimas relaciones también se verifican en un paralelogramo

VI)



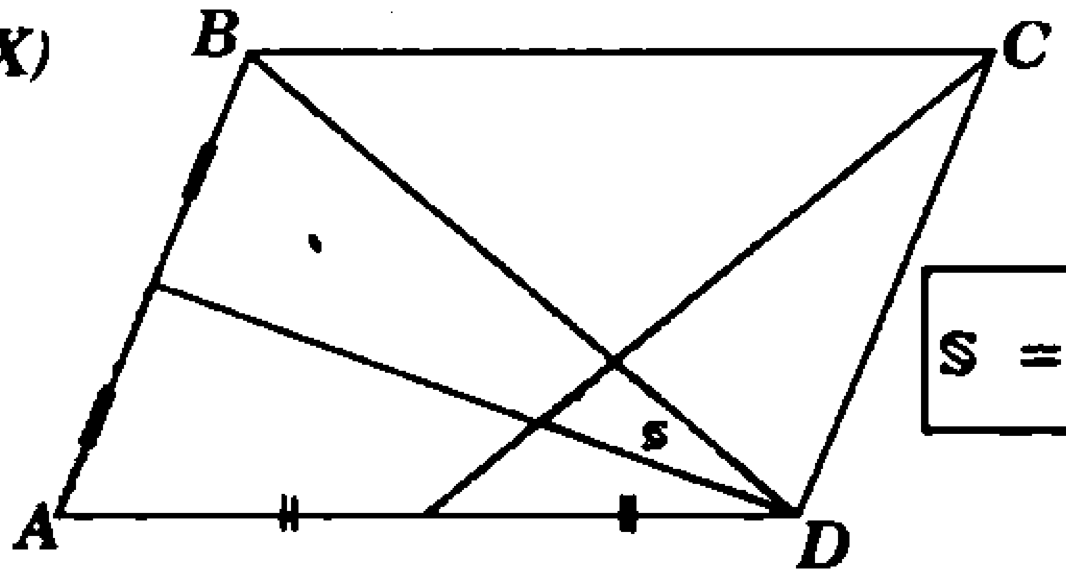
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{12}$$

VIII)



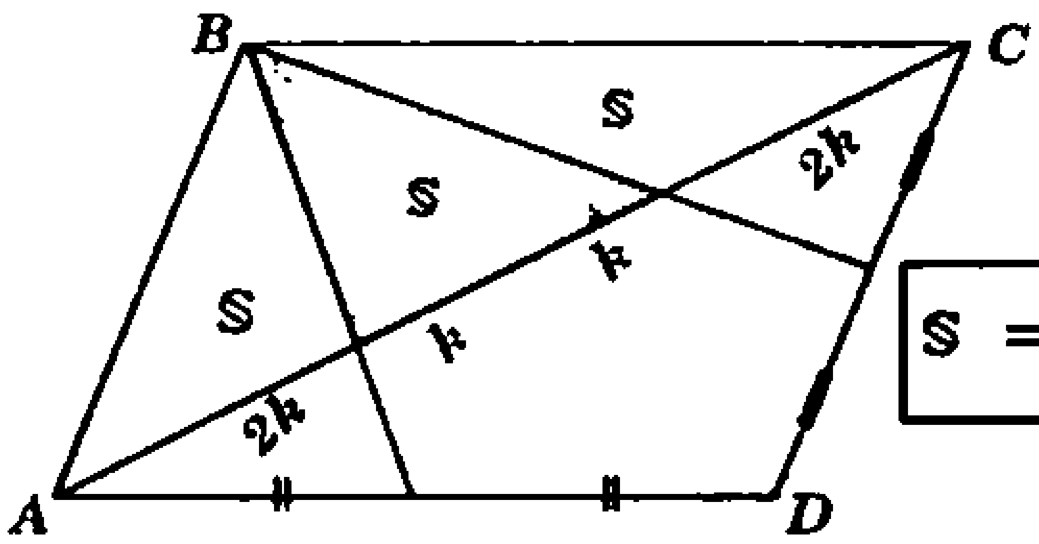
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{5}$$

IX)



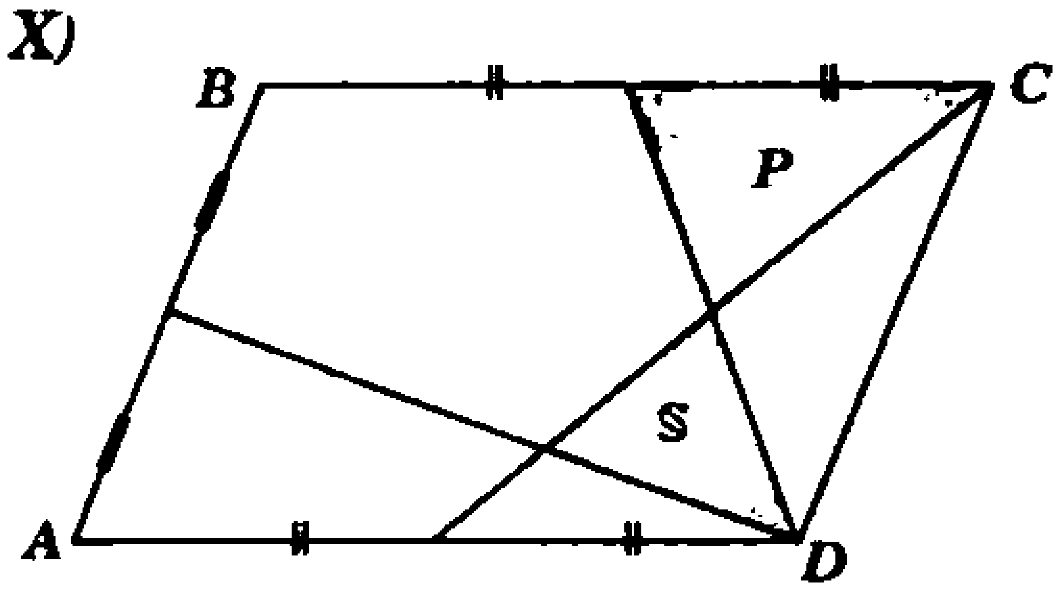
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{30}$$

X)



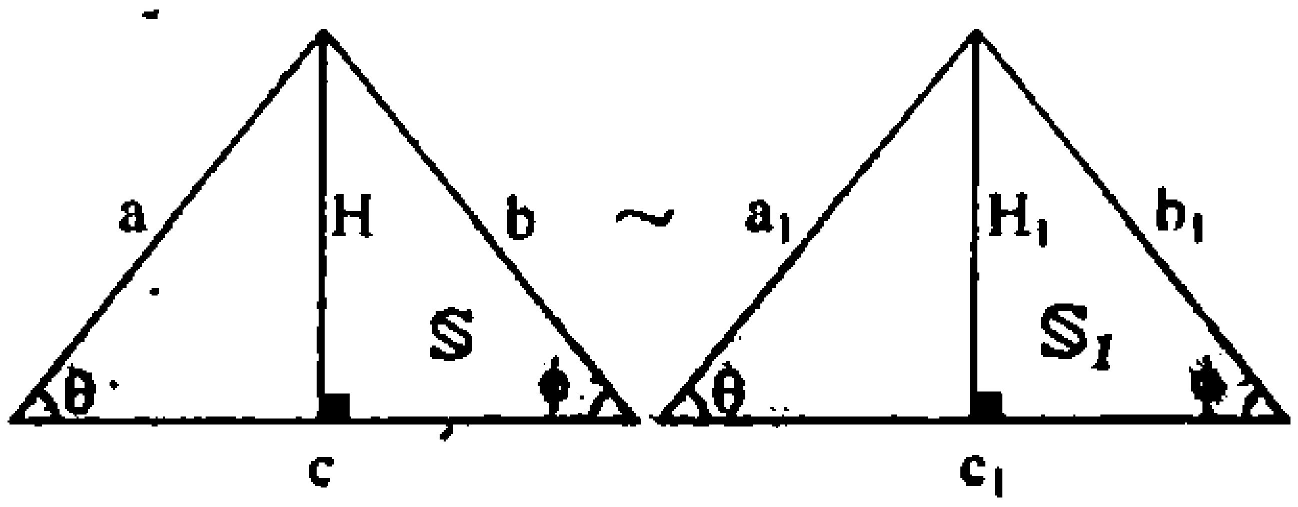
$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{6}$$

X)



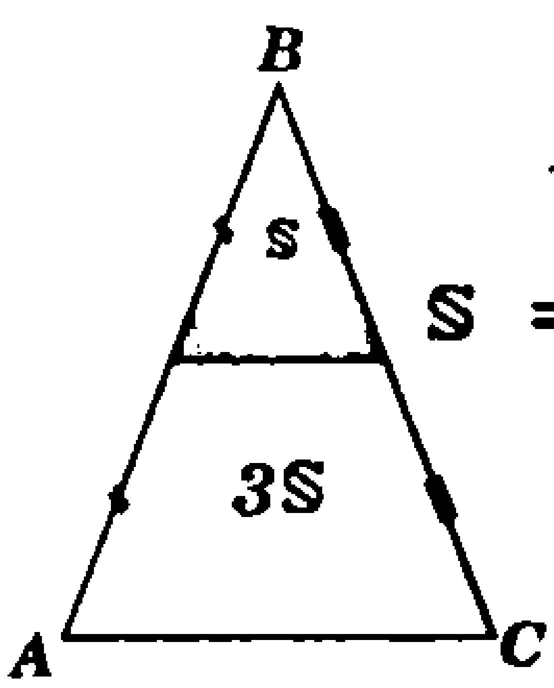
$$P = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{8} \Rightarrow \mathbb{S} = \frac{3\mathbb{S}_{ABCD}}{40}$$

I) EN TRIÁNGULOS SEMEJANTES :

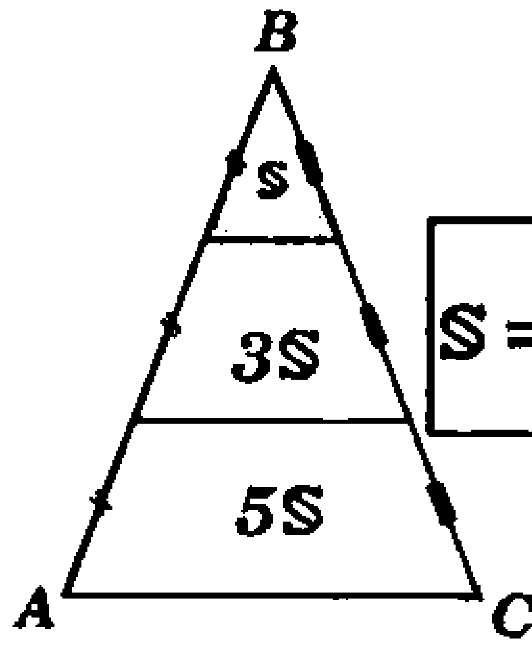


$$\frac{\mathbb{S}}{\mathbb{S}_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2} = \frac{H^2}{H_1^2} = K = \text{cte}......$$

CONSECUENCIAS :

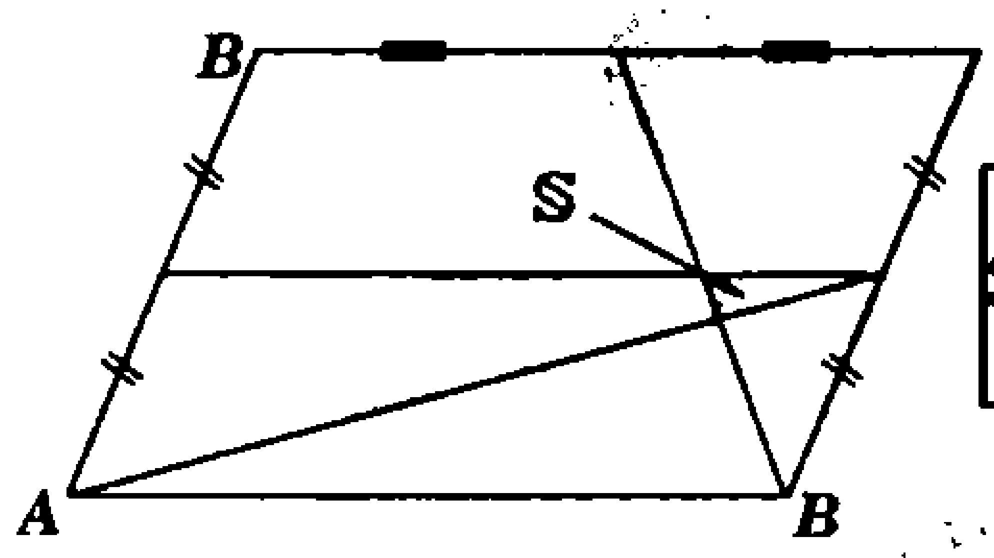


$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABC}}{4}$$



$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABC}}{9}$$

PARALELOGRAMO :

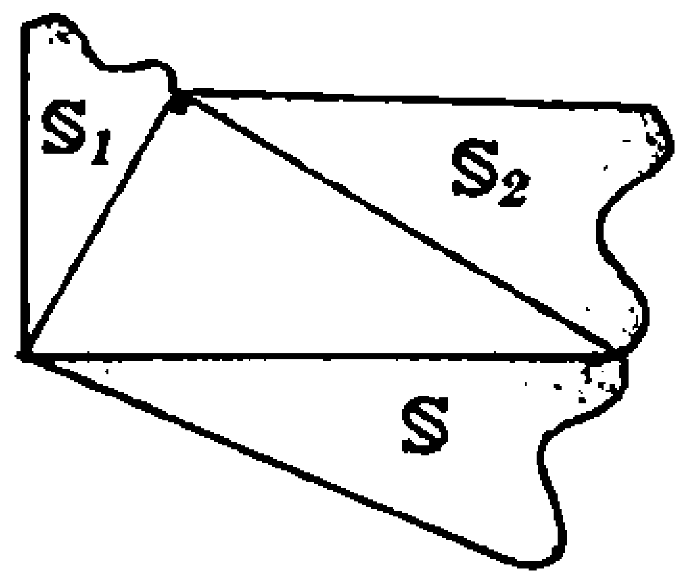


$$\mathbb{S} = \frac{\mathbb{S}_{ABCD}}{80}$$

J) PROPIEDAD EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

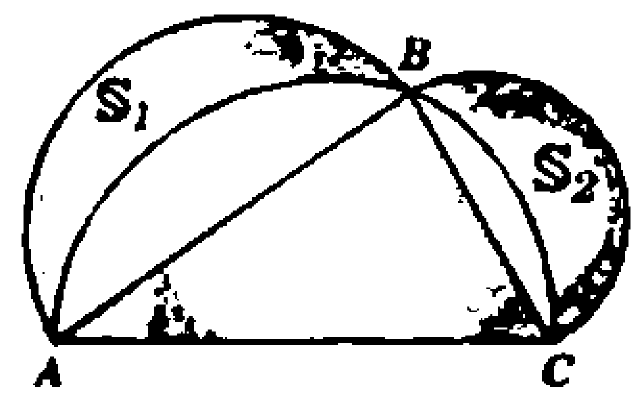
Si los lados de un triángulo rectángulo son líneas homólogas de figuras semejantes construidas sobre ellos , entonces la suma de las áreas de regiones construidas sobre los catetos es igual al área de la región apoyada en la hipotenusa .

Si:



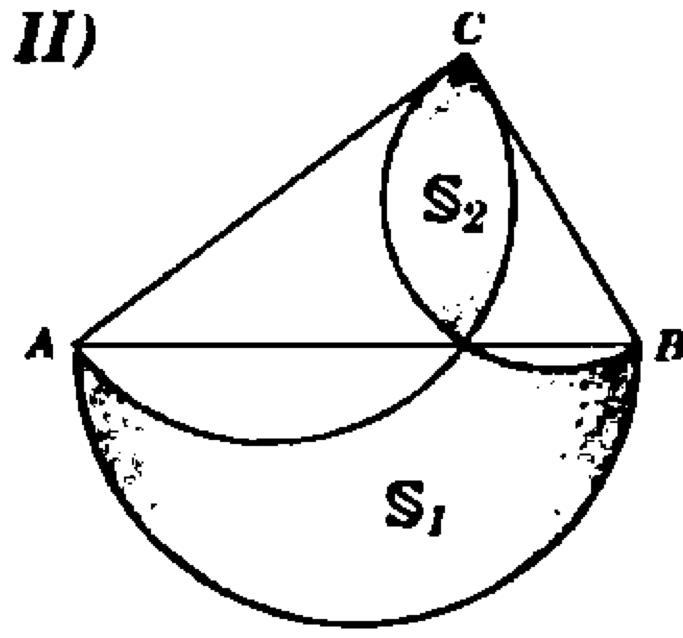
$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

LÚNULAS DE HIPÓCRATES :



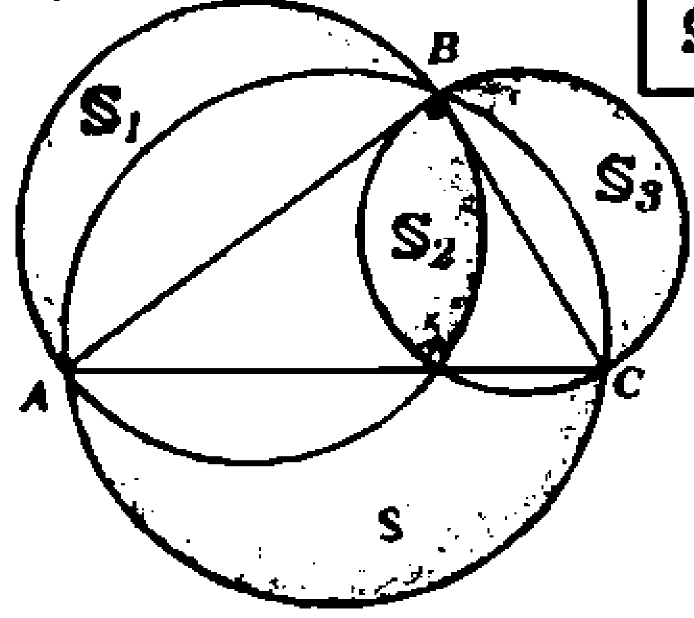
$$\mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$$

II)



$$\mathbb{S}_{ABC} = \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2$$

III)



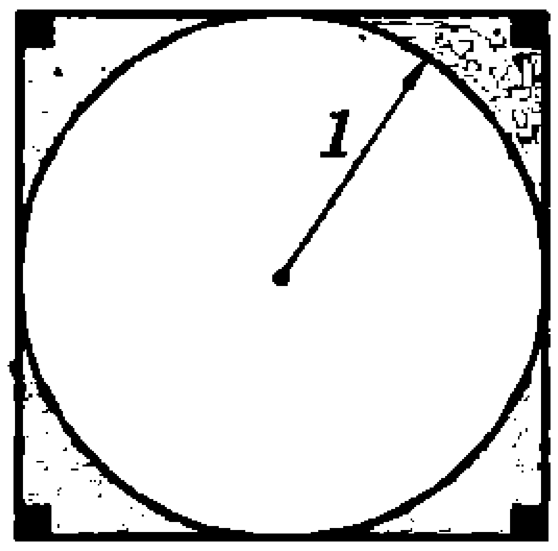
$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3$$

PROBLEMAS RESUELTOS

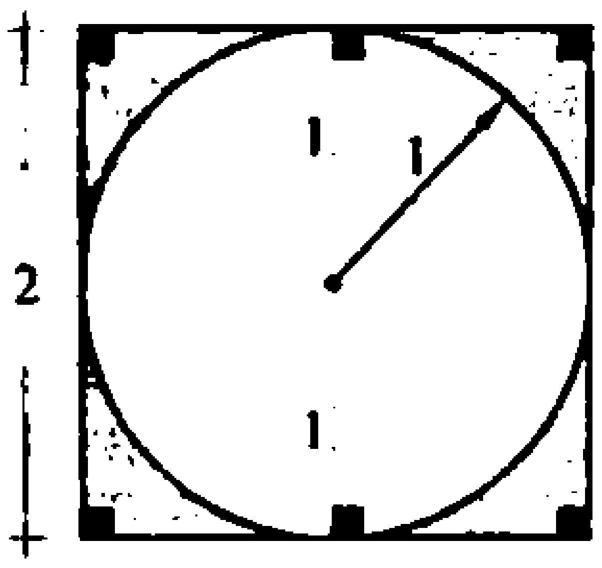
PROBLEMA 1 :

Determinar el área de la región sombreada :

A) π
B) $2+\pi$
C) $\pi-2$
D) $4-\pi$
E) $\pi+1$



RESOLUCIÓN :



Se observa que el lado del cuadrado mide **2** . Luego :

$$S_{somb} = S_{cuadrado} - S_{círculo}$$

$$S_{somb} = (2)^2 - \pi(1)^2$$

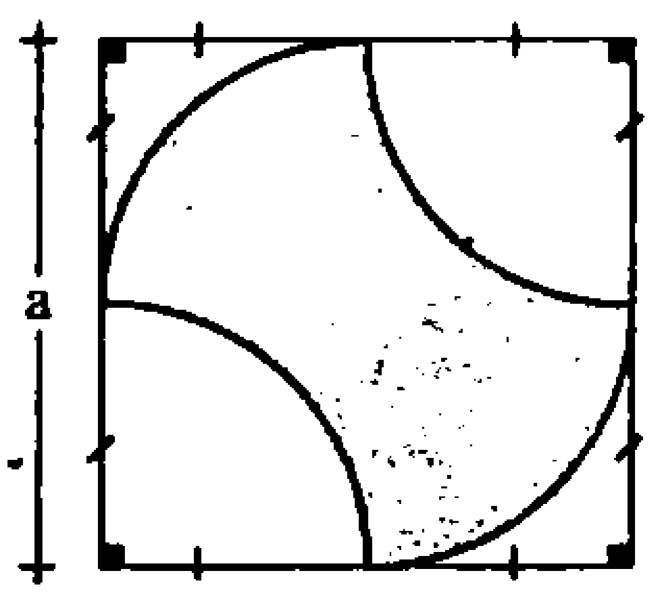
$$S_{somb} = 4 - \pi$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

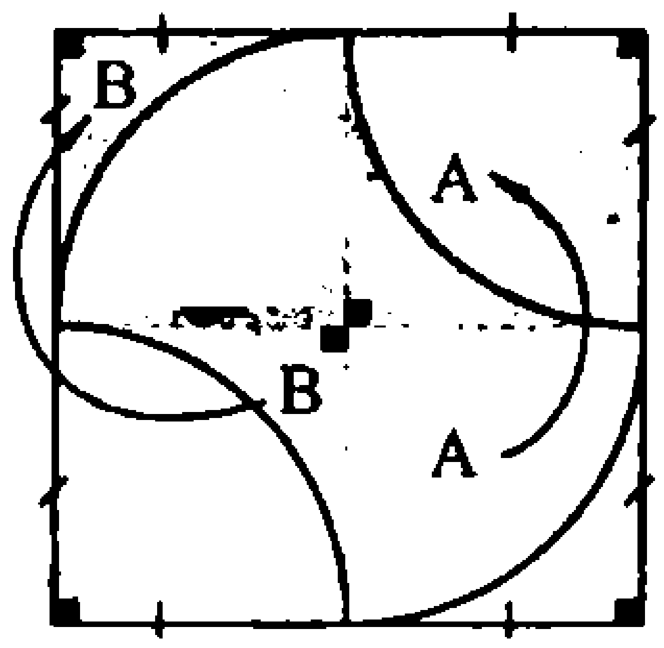
Determinar el área de la región sombreada :

A) $a^2/2$
B) $a^2/4$
C) $a^2/3$
D) $3a^2/4$
E) $a^2/5$



RESOLUCIÓN :

Trazando las líneas que unen los puntos medios de los lados paralelos para luego trasladar adecuadamente :



se observa que la región sombreada será :

$$S_{sombreada} = \frac{S_{cuadrado}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

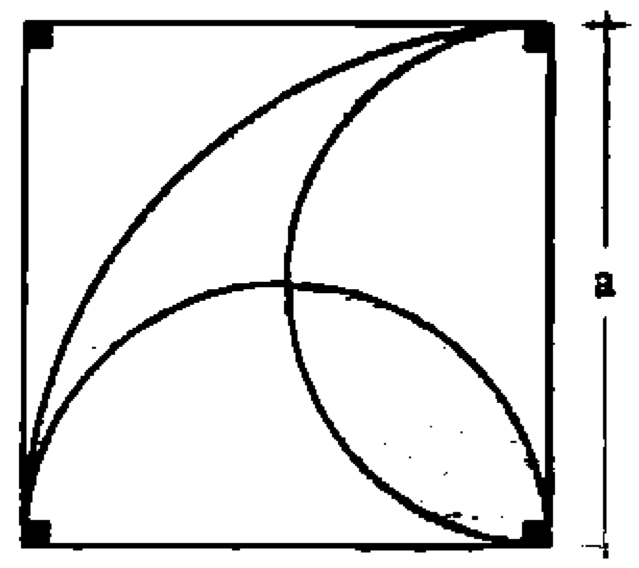
(La mitad del cuadrado)

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

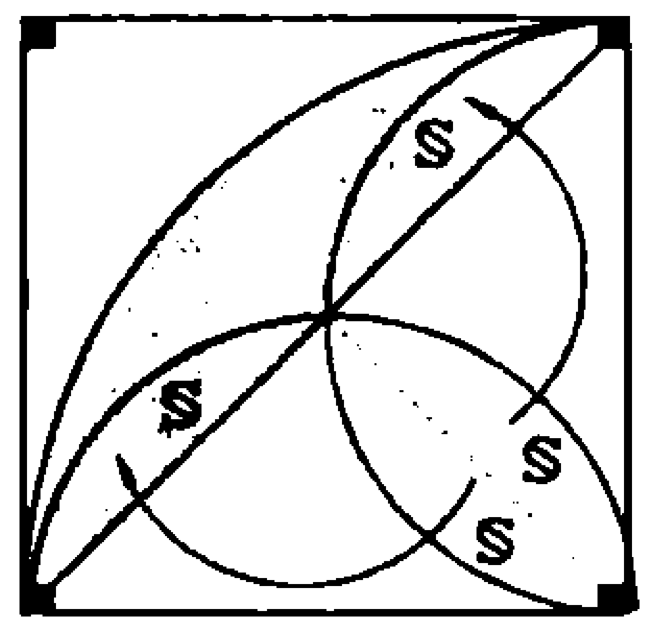
Determinar el área de la región sombreada :

A) $a^2(\pi-2)/4$
B) $a^2(2-\pi)/4$
C) $a^2(6-\pi)/4$
D) $a^2(4-\pi)/4$
E) $a^2\pi/4$



RESOLUCIÓN :

*Trazando líneas auxiliares , para luego trasladar :



*Se observa que la región sombreada esta dada por un segmento circular (según problema ***122***)

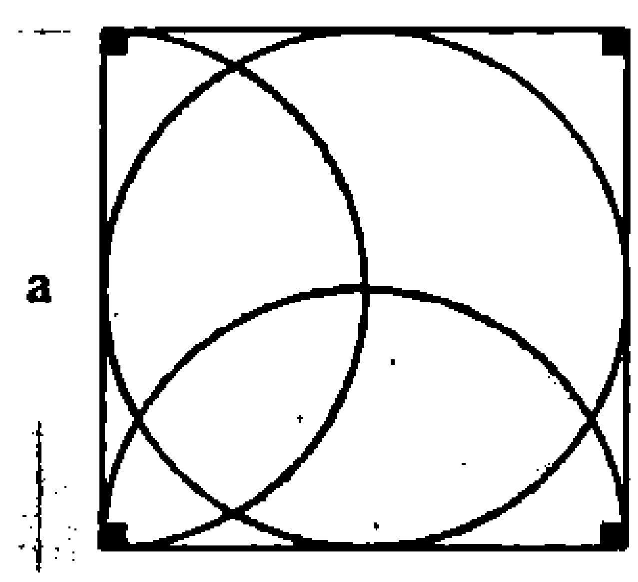
$$S_{somb} = \frac{a^2(\pi-2)}{4}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

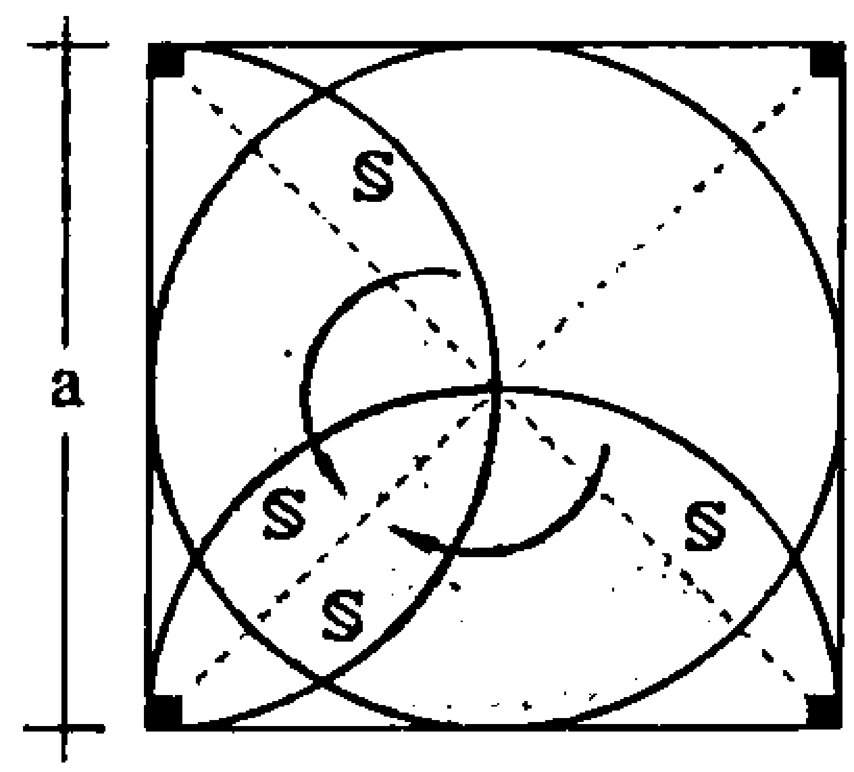
Determinar el área de la región sombreada :

A) $\pi a^2/8$
B) $\pi a^2/12$
C) $\pi a^2/4$
D) πa^2
E) $\pi a^2/16$



RESOLUCIÓN :

*Trazando las diagonales , para luego trasladar.



∴ Se observa que se va ha formar un semicírculo de diámetro «*a*».

Luego :

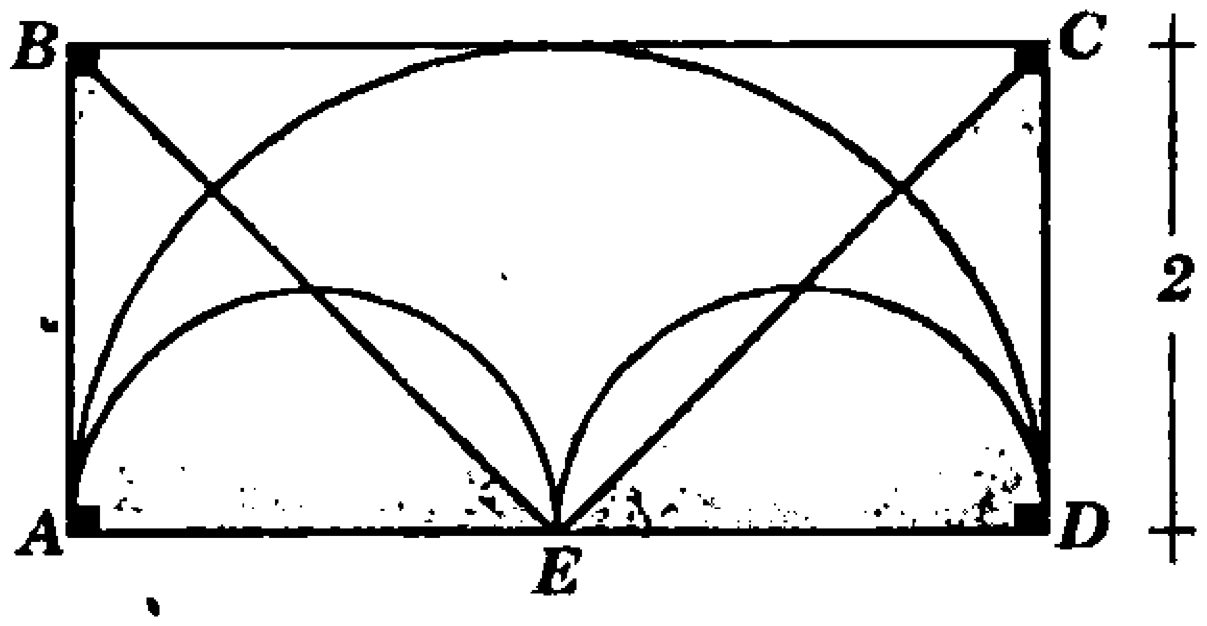
$$S_{somb} = \frac{S_{círculo}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi(a)^2}{4}\right)$$

$$\Rightarrow S_{somb} = \pi a^2/8$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

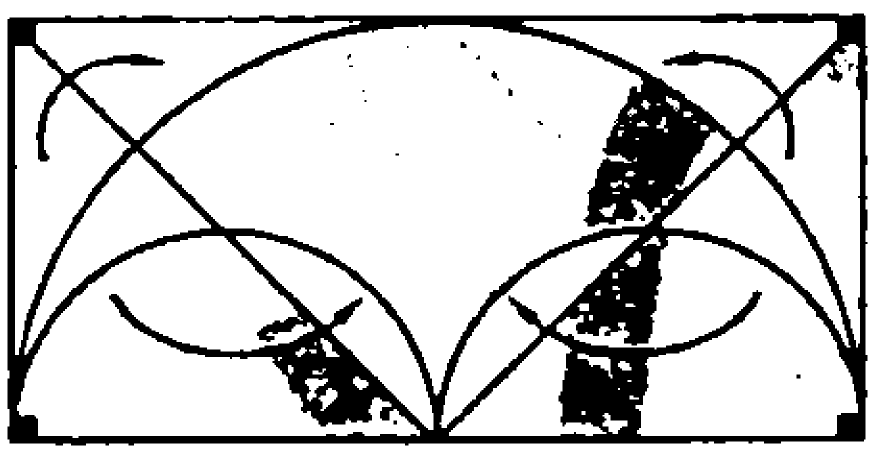
Determinar el área de la región sombreada , si $AE=ED$



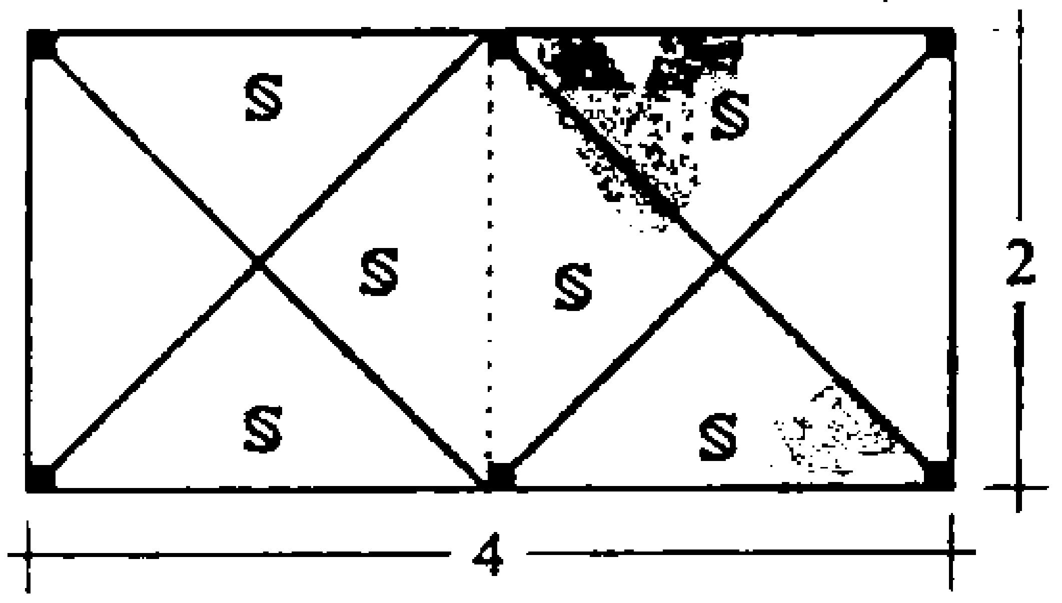
A) 2 *B) 4* *C) 8* *D) 5* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

*Trazando y trasladando adecuadamente



Quedará:



*Quedó sombreado :

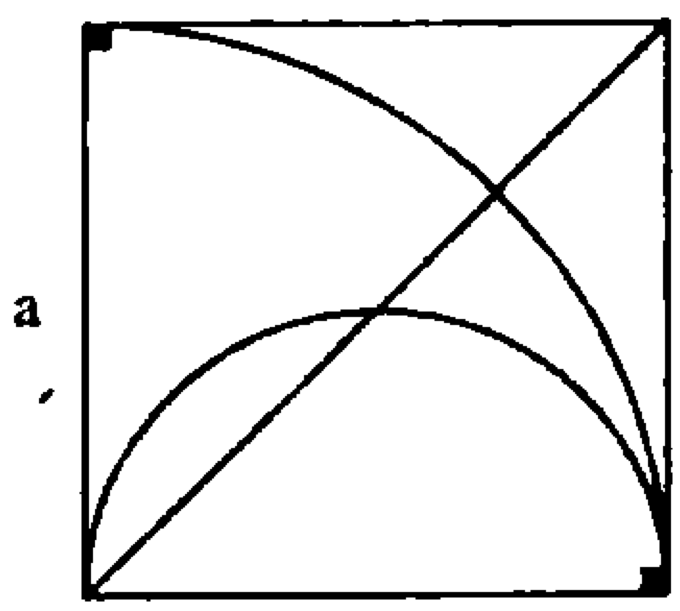
$$\text{Los } \frac{6\,S}{8\,S}\left(\begin{array}{c}\text{Área del}\\ \text{rectángulo}\end{array}\right)=\frac{3}{4}(4\cdot 2)=6$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

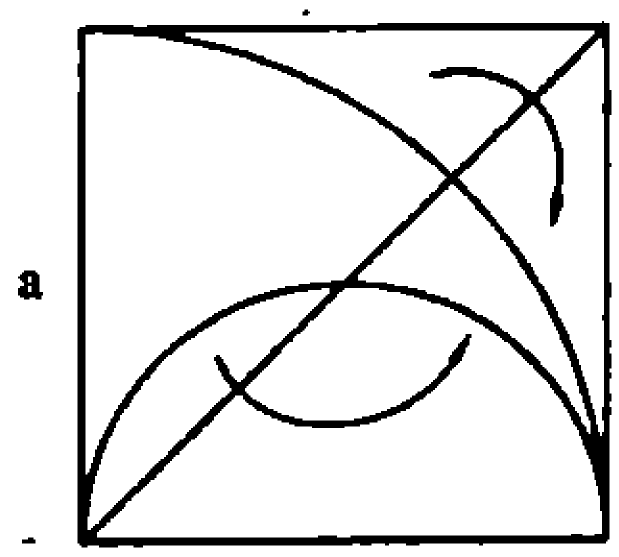
Determinar. el área de la región sombreada :

A) $a^2/2$
B) $a^2/4$
C) $3a^2/5$
D) $2a^2$
E) $3a$

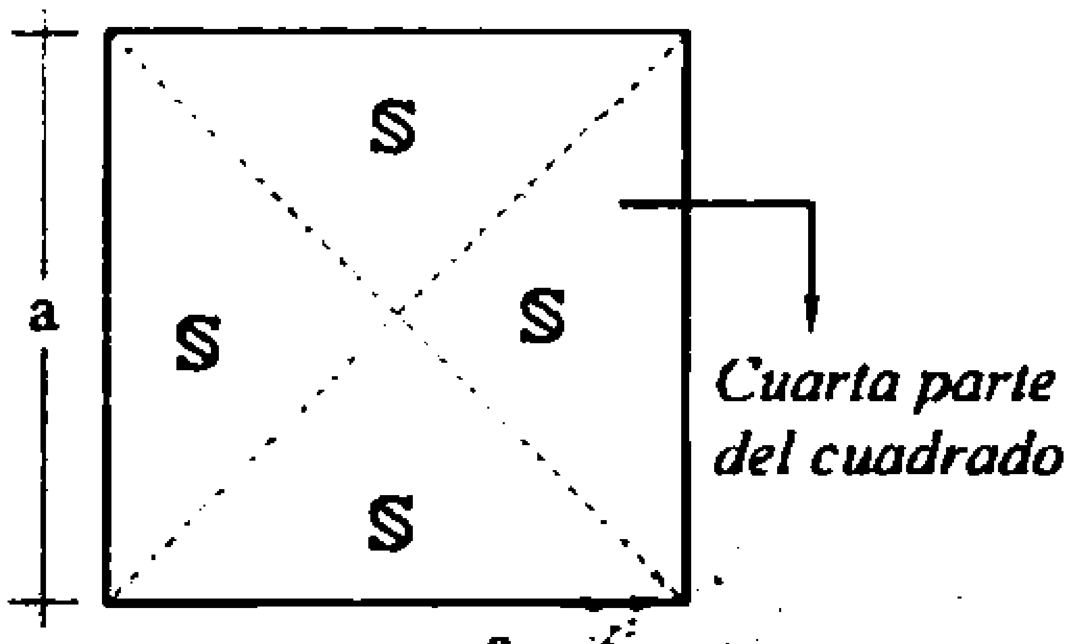


RESOLUCIÓN :

*Trazando la otra diagonal y trasladando adecuadamente regiones sombreadas a otras sin sombrear que tengan las mismas áreas.



*Quedará :

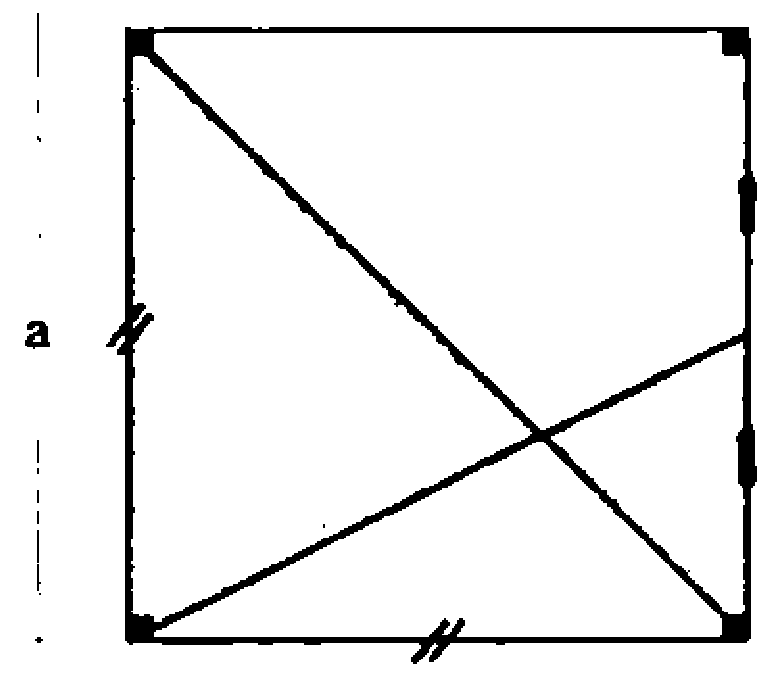


$$S_{sombreada}=\frac{S_{cuadrado}}{4}=\frac{a^2}{4}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

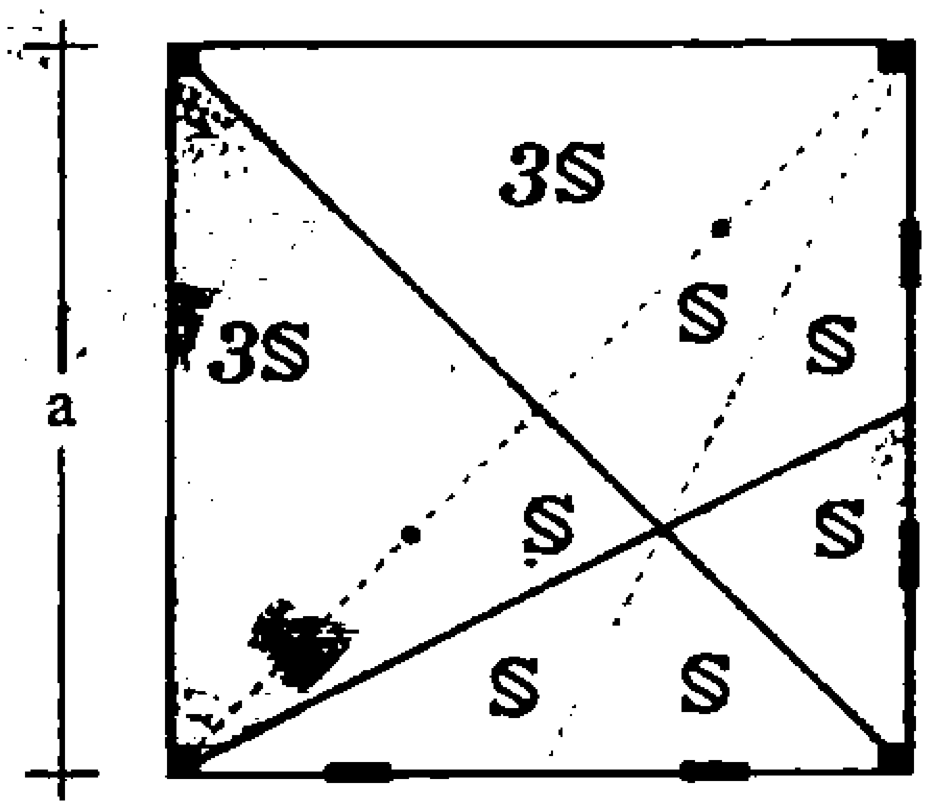
Determinar el área de la región sombreada .



A) $\frac{a^2}{2}$ B) $\frac{a^2}{3}$ C) $\frac{5a^2}{12}$ D) $\frac{3a^2}{8}$ E) $\frac{7a^2}{12}$

RESOLUCIÓN :

*Trazando la otra diagonal y una mediana adecuada:



*Se observa que de los *12S* está sombreado *5S*, luego:

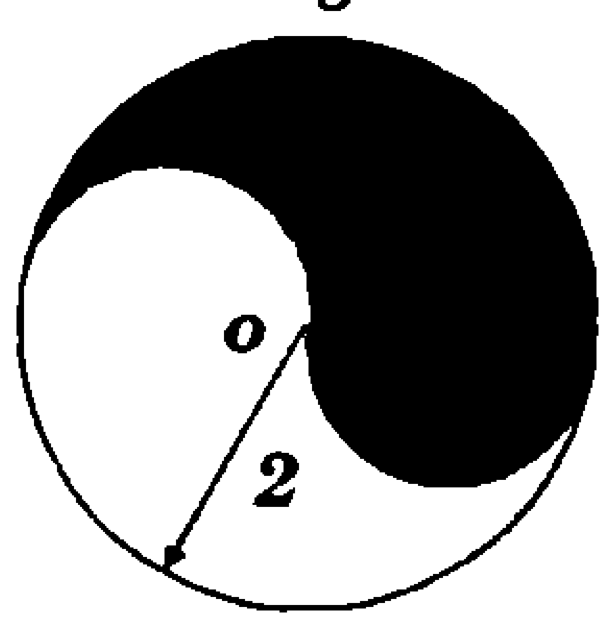
$$S_{somb}=\frac{5}{12}\ (S_{cuadrado})=\frac{5a^2}{12}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Determinar el área de la región sombreada , siendo "*O*" centro .

A) π
B) 2π
C) 4π
D) 4
E) 2



RESOLUCIÓN :

• Se puede apreciar que la parte sombreada y no sombreada (interiores al círculo) son congruentes, entonces ambas tendrán áreas iguales e igual a la mitad del círculo , luego :

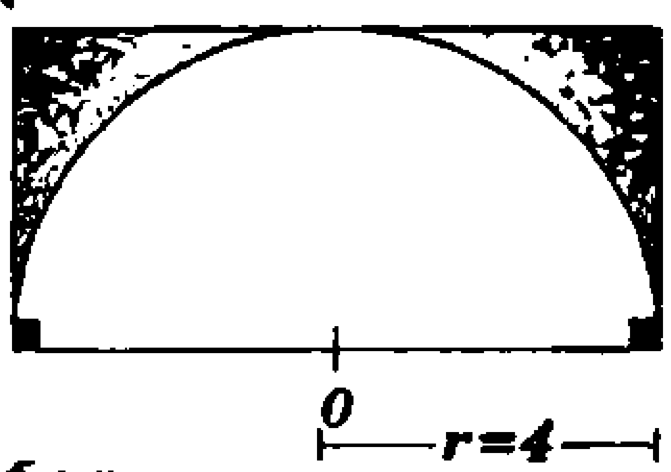
$$S_{sombreada}=\frac{\pi(2)^2}{2}=2\pi$$

RPTA : "B"

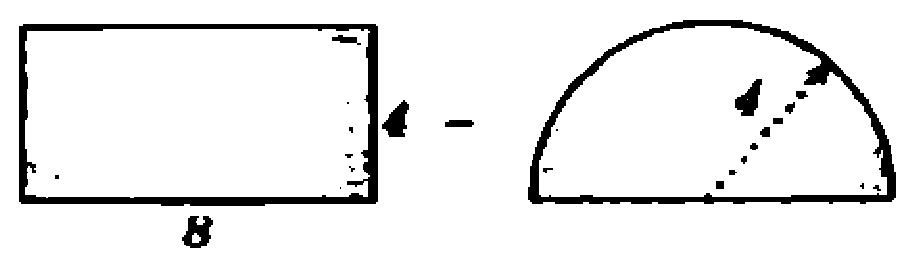
PROBLEMA 9 :

Determinar el área de la región sombreada :

A) $16-\pi$
B) $2(16-\pi)$
C) $8(4-\pi)$
D) $2(\pi-2)$
E) $16(2-\pi)$



RESOLUCIÓN :

$S_{sombreada}=$ 

$$\Rightarrow S_{sombreada}=8\times4-\frac{\pi\times4^2}{2}$$

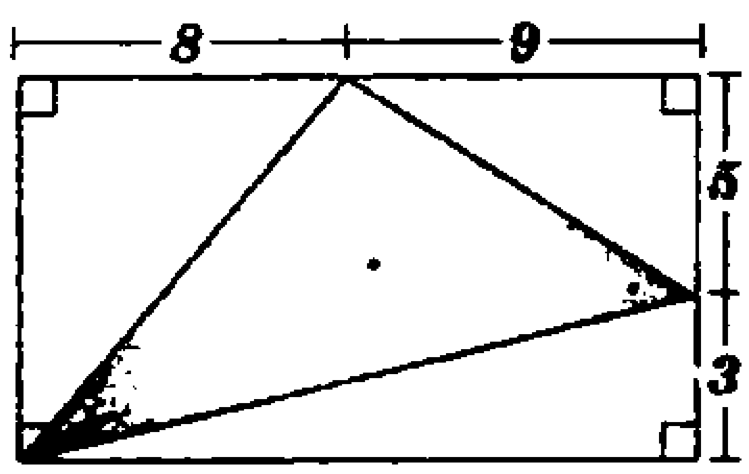
$$\Rightarrow S_{sombreada}=32-8\pi=8(4-\pi)$$

RPTA : "C"

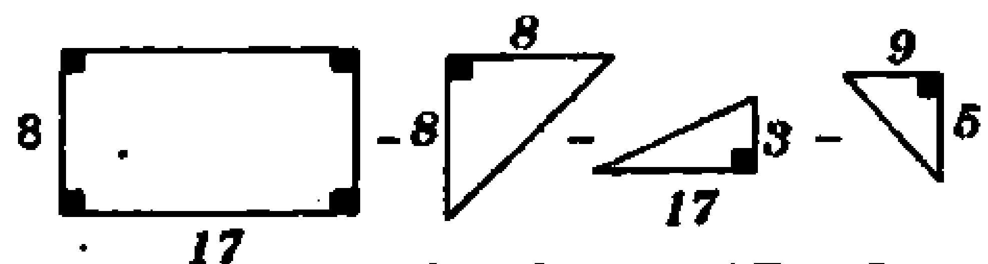
PROBLEMA 10 :

Determinar el área de la región sombreada .

A) 20
B) 56
C) 36
D) 42
E) 24,5



RESOLUCIÓN :

$S_{sombreada}=$ 

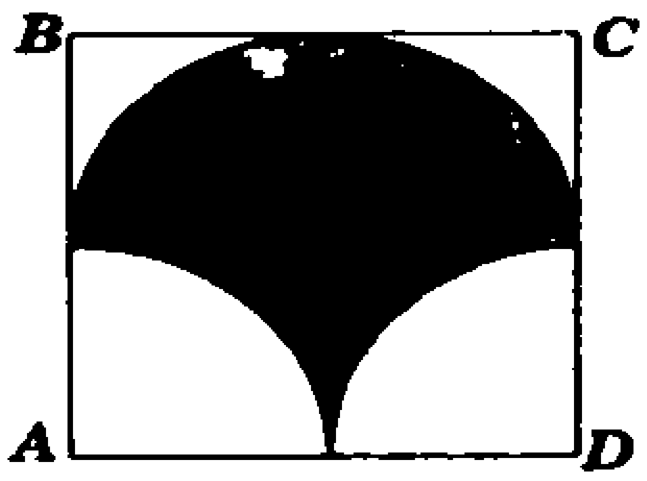
$$\Rightarrow S_{sombreada}=8\times17-\frac{8\times8}{2}-\frac{17\times3}{2}-\frac{9\times5}{2}$$

$$\Rightarrow S_{sombreada}=136-32-\frac{51}{2}-\frac{45}{2}=\frac{27}{2}=56$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

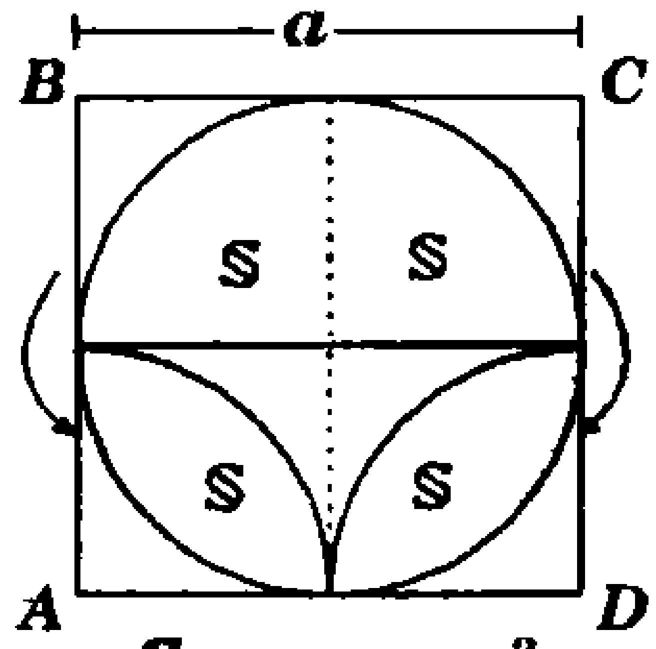
Si *ABCD* es un cuadrado de lado "*a*". Determinar el área de la región sombreada .



A) $\frac{3a^2}{2}$ *B)* $\frac{a^2}{3}$ *C)* $\frac{a^2}{2}$ *D)* a^2 *E)* $\frac{a^2}{4}$

RESOLUCIÓN :

• Trazando rectas paralelas a los lados y trasladando las regiones sombreadas equivalentes .

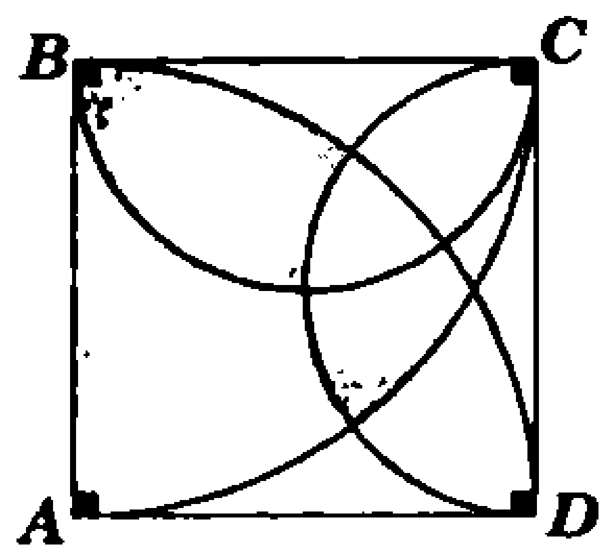


*Luégo : $S_{sombreada}=\frac{S_{cuadrado}}{2}=\frac{a^2}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

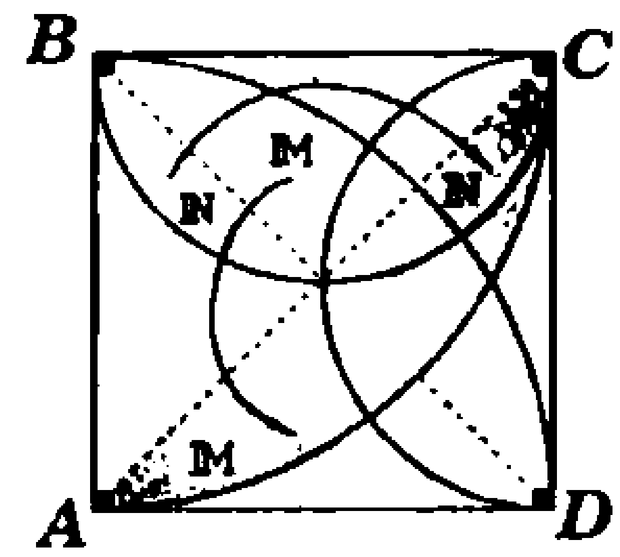
Determinar el área de la región sombreada ; en el cuadrado de lado «*a*».



A) $\left(\frac{\pi-2}{4}\right)a^2$ *B)* $\left(\frac{\pi-2}{2}\right)$ *C)* $\pi\frac{a^2}{4}$ *D)* pa^2 *E)* $\frac{a^2}{4}$

RESOLUCIÓN :

I) Trazando las diagonales y trasladando adecuadamente .



II) Luego , el área de la región sombreada estará dado por :

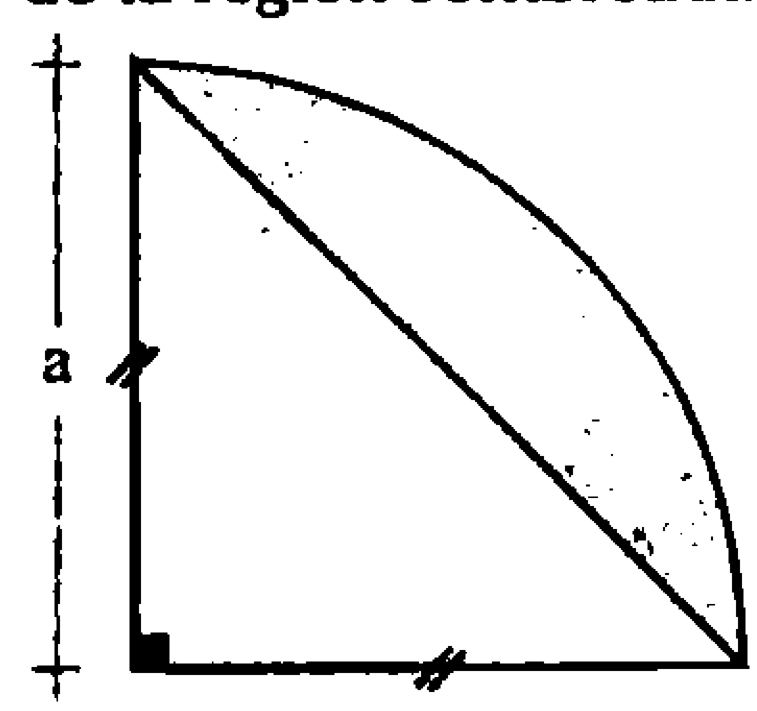
$$\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a\times a}{2}=\left(\frac{\pi-2}{4}\right)a^2$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

Determinar el área de la región sombreada.

A) $a^2(\pi-2)$
B) $\frac{a^2}{2}(\pi+2)$
C) $\frac{a^2}{4}(\pi-2)$
D) $a^2(\pi+1)$
E) $a^2\pi$



RESOLUCIÓN :

$S_{sombreada} = S_{cuadrante} - S_{triángulo}$

$\Rightarrow$ *Segmento circular* $= \dfrac{\pi(a)^2}{4} - \dfrac{a \cdot a}{2}$

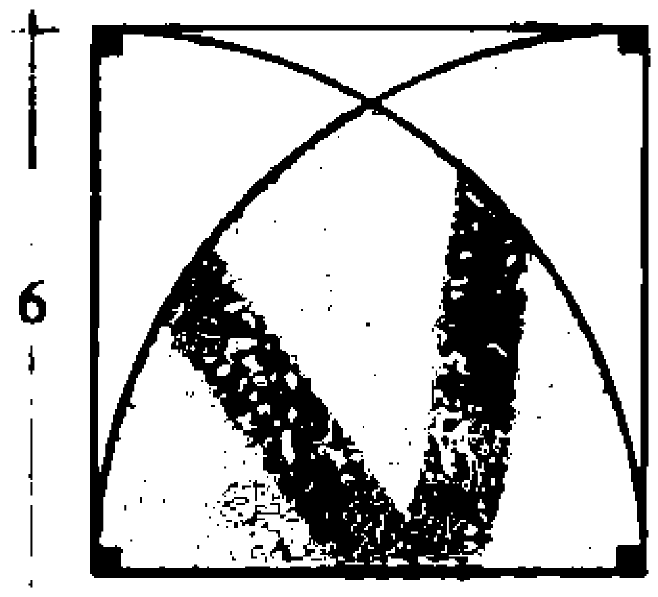
$\Rightarrow$ *Segmento circular* $= \dfrac{\pi(a)^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}$

$\Rightarrow$ *Segmento circular* $= \dfrac{\pi a^2 - 2a^2}{4}$

$\Rightarrow$ *Segmento circular* $= \dfrac{a^2}{4}(\pi - 2)$ **RPTA : "C"**

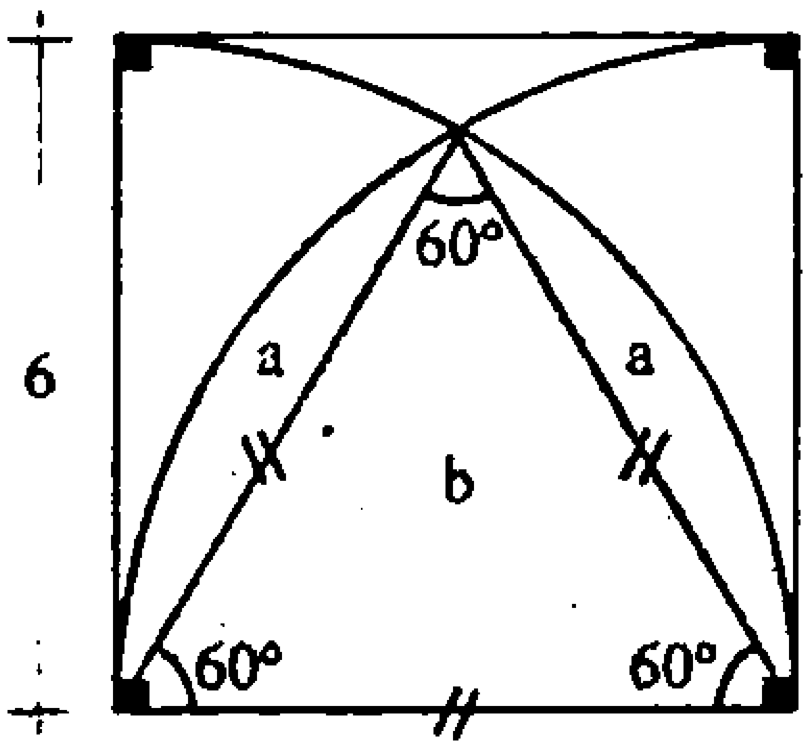
PROBLEMA 14 :

Determinar el área de la región sombreada .



A) $3(4\pi - 3\sqrt{3})$ B) $4(3\pi - \sqrt{3})$ C) $7\pi - 2\sqrt{3}$
D) $7\sqrt{3} - 2\pi$ E) $7\pi + 2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

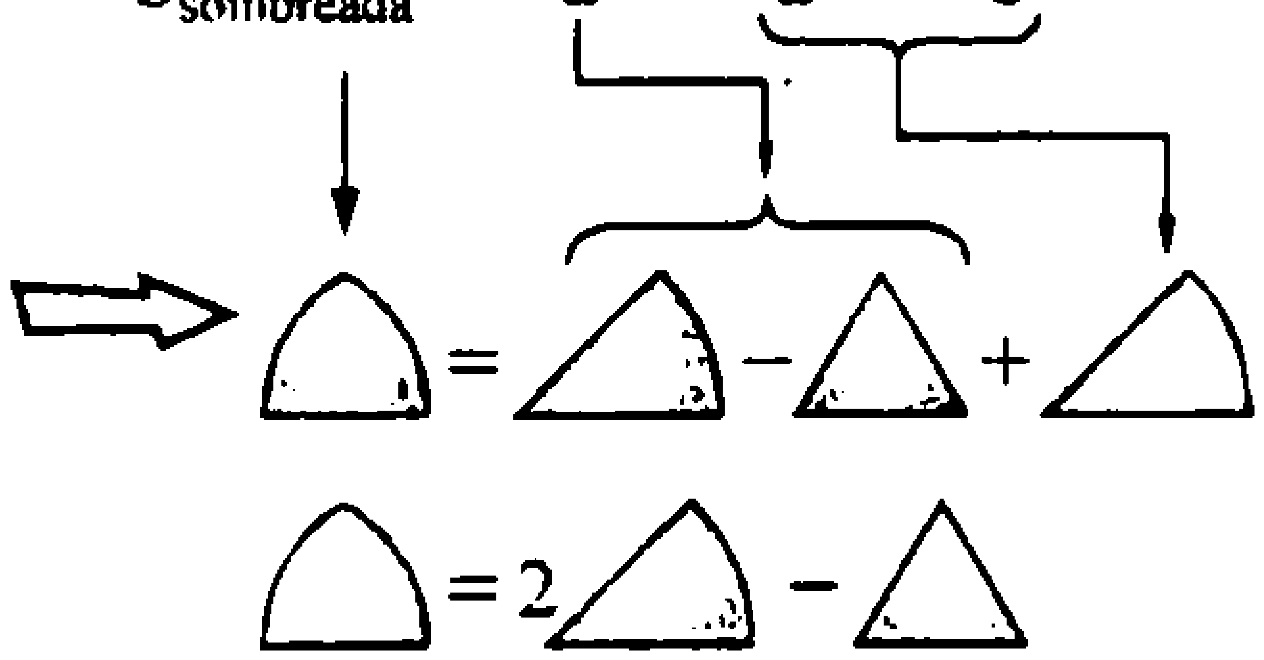


*Trazando los radios y asignando una letra a cada región conocida .

Se nota que :

- b : triángulo equilátero (lado $= 6$)
- $a + b$: sector circular $(\theta = 60°)$
- «a»: $\begin{pmatrix} sector \\ circular \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} triángulo \\ equilátero \end{pmatrix}$

$S_{sombreada} = a + a + b$

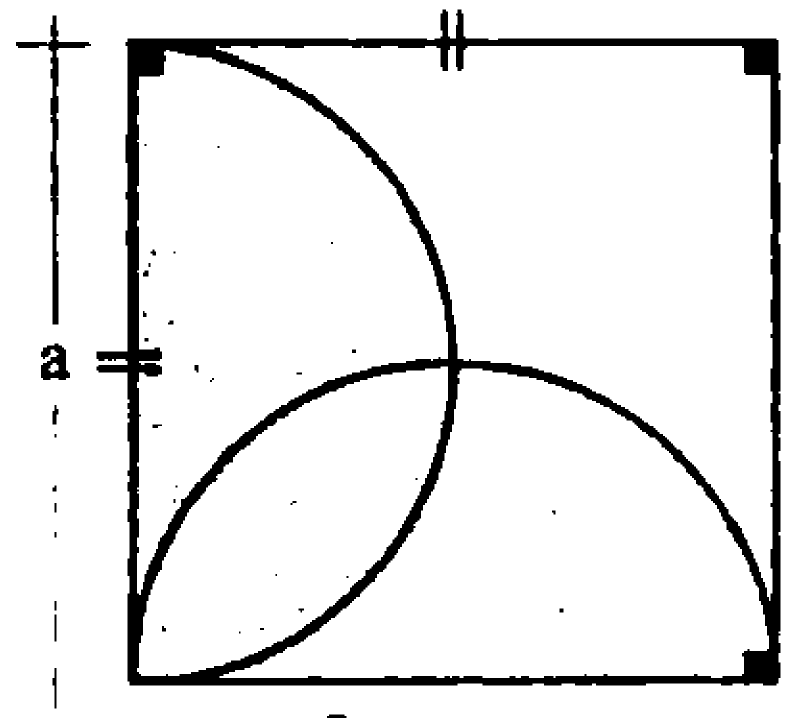


$= 2\left[\dfrac{\pi(6)^2}{6}\right] - \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 12\pi - 9\sqrt{3} = 3(4\pi - 3\sqrt{3})$

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

Determinar el área de la región sombreada .

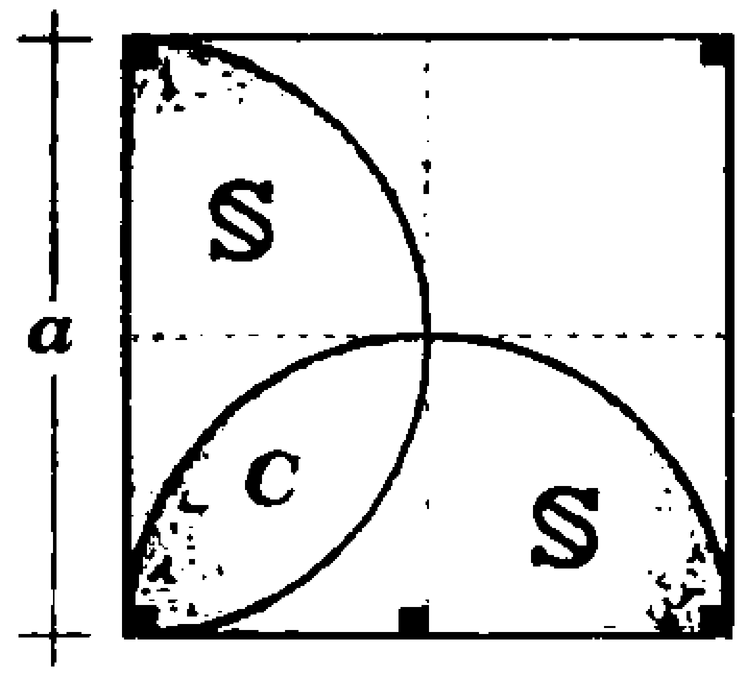


A) $\dfrac{a^2(\pi + 2)}{8}$ B) $\dfrac{a^2(\pi - 29}{4}$ C) $\dfrac{a^2(\pi + 4)}{2}$

D) $\dfrac{a^2(\pi + 4)}{4}$ E) $\dfrac{a^2(\pi - 2)}{8}$

RESOLUCIÓN :

*Dividiendo la región sombreada en figuras conocidas :



- Se observa que las 2 figuras «*S*» juntas representan un semicírculo de diámetro «*a*» y «*C*» la cuarta parte del cuadrado de lado «*a*»

$\text{(semicírculo de diámetro } a) + \dfrac{\square a}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi(a)^2}{4}\right) + \dfrac{a^2}{4}$

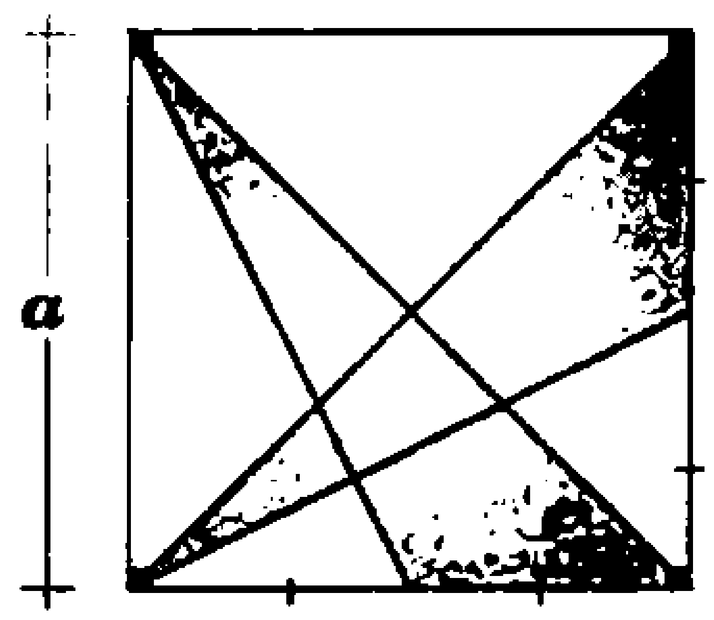
$\Rightarrow S_{somb} = \dfrac{\pi a^2 + 2a^2}{8} = \dfrac{a^2}{8}(\pi + 2)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

Determinar el área de la región sombreada .

A) $a^2/2$
B) $9a^2/20$
C) $a^2/3$
D) $3a^2/5$
E) $3a^2/8$



RESOLUCIÓN :

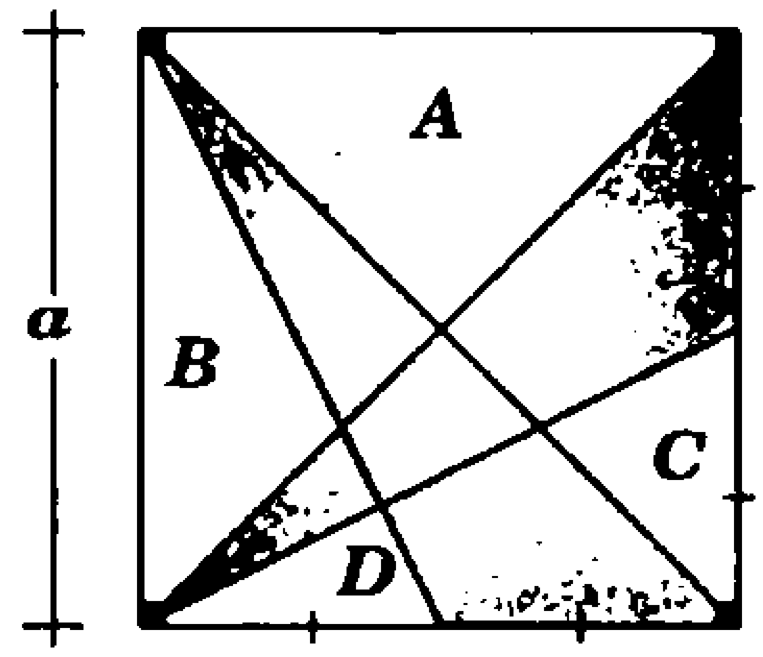
*Asignando una letra a cada región no sombreada y recordando las relaciones en un cuadrado

(propiedad «H») , luego :

$$A + B + C + D + S_{som} = S_{cuadrado}$$

$$\Rightarrow S_{somb} = S_{cuadrado} - (A + B + C + D) \quad (I)$$

*Pero según propiedades :



- $A = \dfrac{S_{cuadrado}}{4}$ • $B = \dfrac{S_{cuadrado}}{6}$

- $C = \dfrac{S_{cuadrado}}{12}$ • $D = \dfrac{S_{cuadrado}}{20}$

*Reemplazando en *(I)* se tendrá :

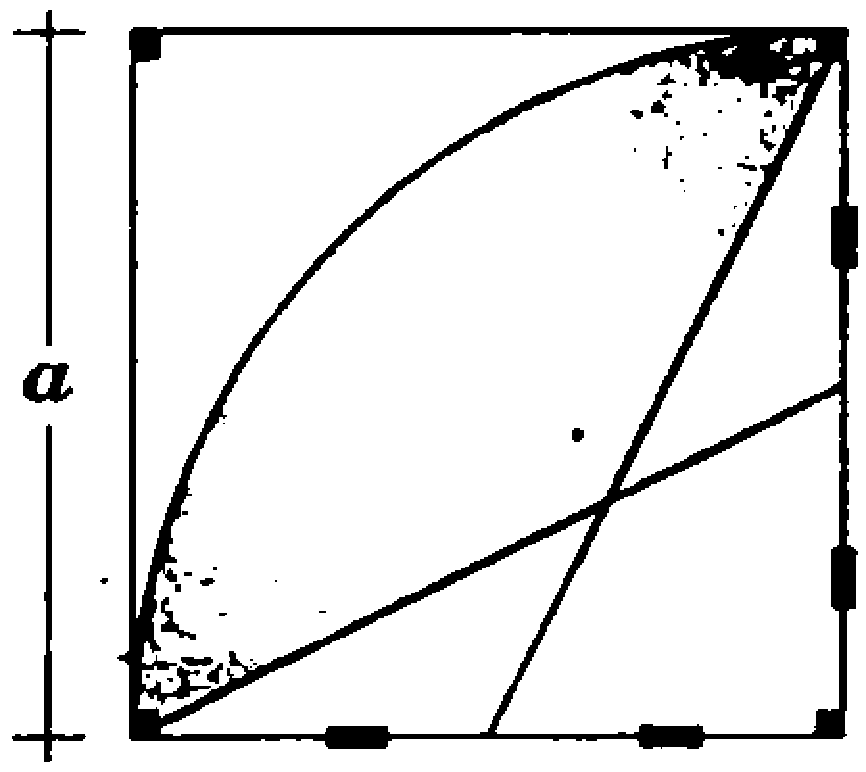
$$S_{somb} = S_{cuadrado}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right)$$

$$\Rightarrow S_{somb} = \frac{9}{20}\ S_{cuadrado} = \frac{9a^2}{20}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Determinar el área de la región sombreada .

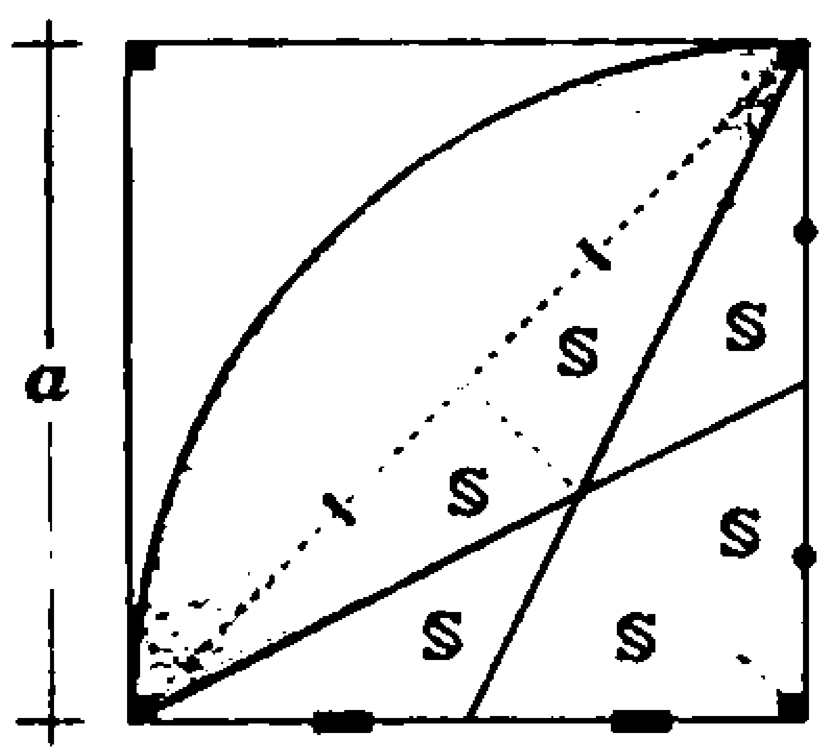


A) $\dfrac{a^2}{12}(3\pi - 1)$ B) $\dfrac{a^2}{12}(\pi - 4)$ C) $\dfrac{a^2}{8}(3\pi - 1)$

D) $\dfrac{a^2}{6}(3\pi - 4)$ E) $\dfrac{a^2}{12}(3\pi - 4)$

RESOLUCIÓN :

*Trazando la diagonal y así podemos aplicar la propiedad del baricentro .



Por propiedad : $S = \dfrac{S_{cuadrado}}{12} = \dfrac{a^2}{12}$

- De la figura :

$$S_{somb} = S_{cuadrante} - 4S$$

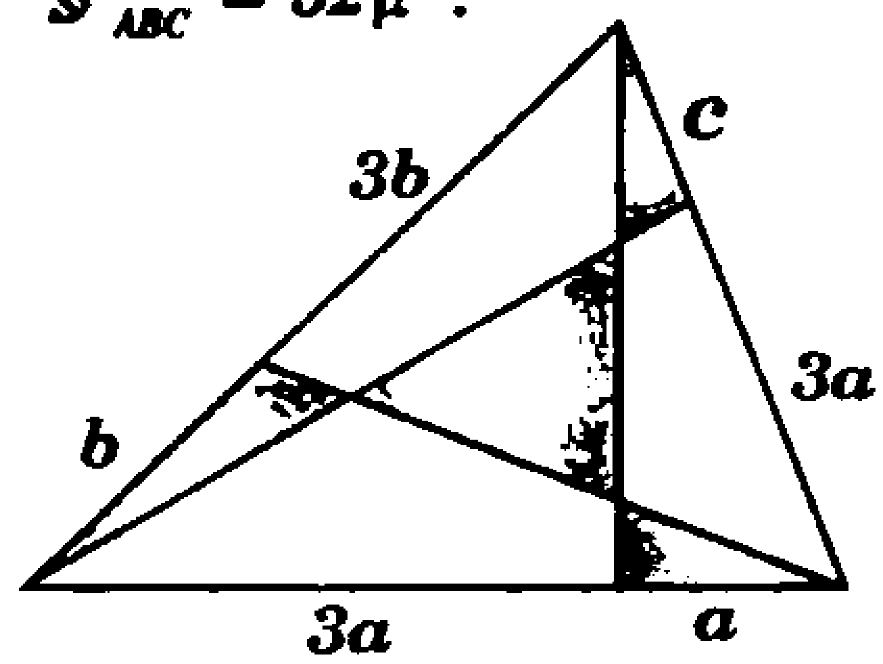
$$\Rightarrow S_{somb} = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{4a^2}{12}$$

$$\Rightarrow S_{somb} = \frac{a^2}{12}(3\pi - 4)$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

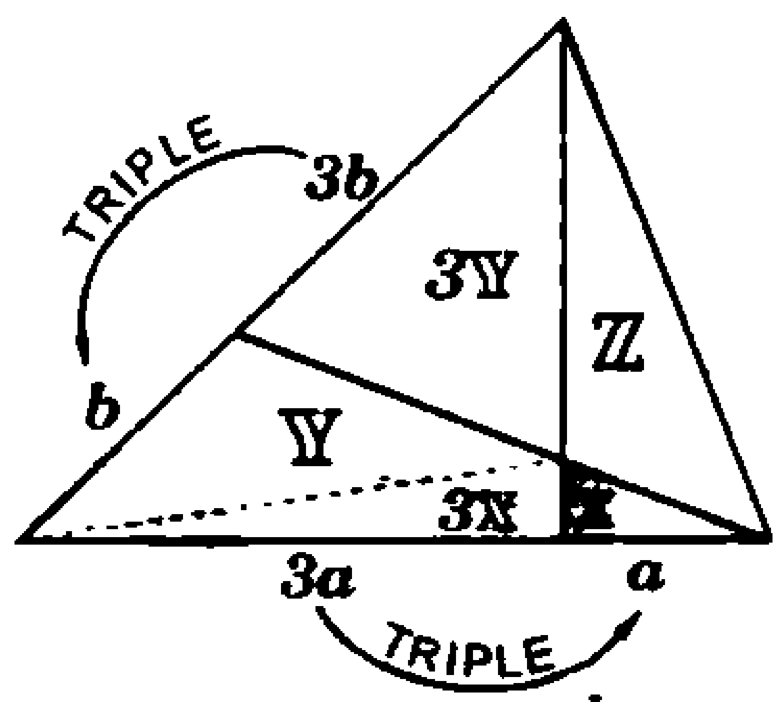
En la figura ,determinar el área de la región sombreada , si $S_{ABC} = 52\mu^2$.



A) 17 B) 19 C) 23 D) 26 E) 42

RESOLUCIÓN :

Construyendo una línea auxiliar :



De la figura :

I) $3Y + Z = 3(Y + 3X + X)$

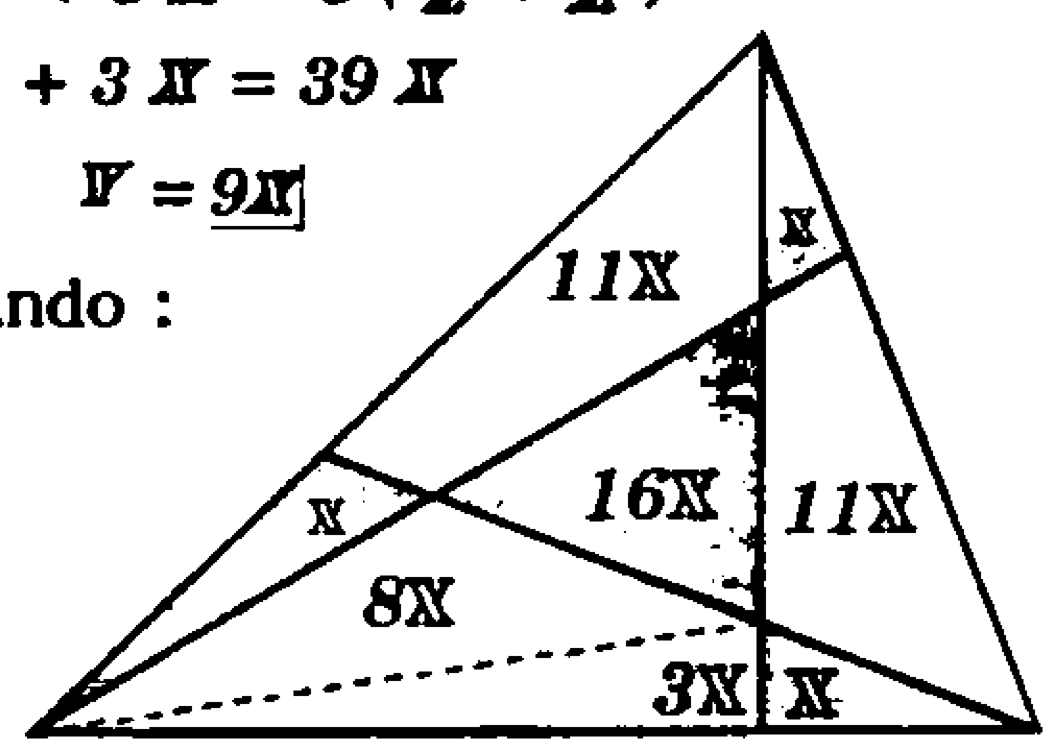
$Z = \underline{12X}$

II) $3Y + Y + 3X = 3(Z + X)$

$4Y + 3X = 39X$

$Y = \underline{9X}$

*Reemplazando :



*De la figura :

$$S_{abc} = 52x = 52$$

$$x = 1$$

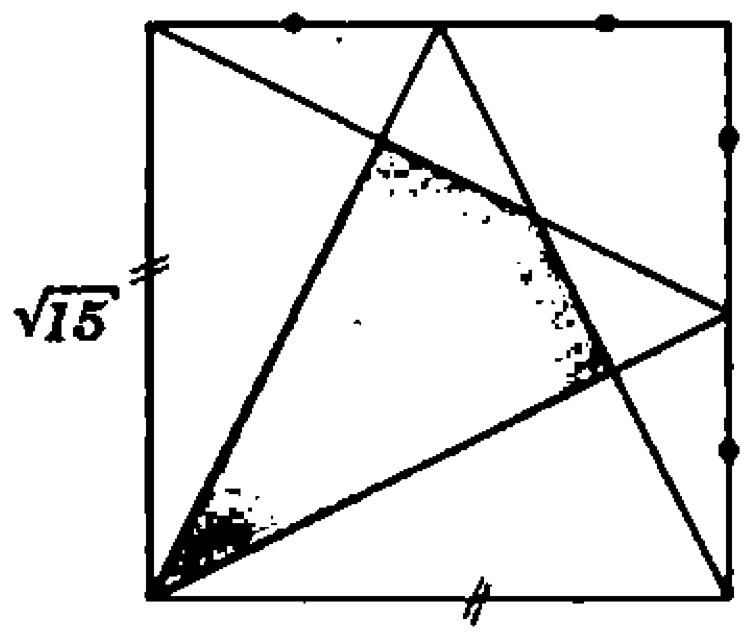
$$\Rightarrow S_{somb.} = 19x = 19\,(1) = 19$$

RPTA : "B"

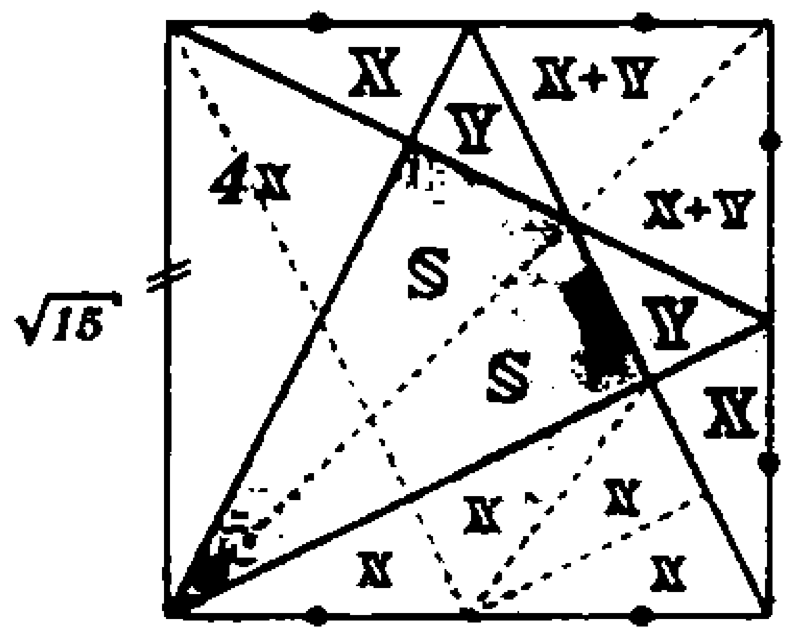
PROBLEMA 19 :

Determinar el área de la región sombreada :

A) 3
B) 4
C) 7
D) 9
E) 5



RESOLUCIÓN :



*Sabemos que :

$$X + Y = \frac{S_{CUADRADO}}{12}$$

$$Y = \frac{S_{CUADRADO}}{20}$$

$$X = \frac{S_{CUADRADO}}{30}$$

*Luego :

$$2S + 12X + 4Y = S_{CUADRADO}$$

$$\Rightarrow 2S + 12\frac{S_{CUADRADO}}{20} + 4\frac{S_{CUADRADO}}{30} = S_{CUADRADO}$$

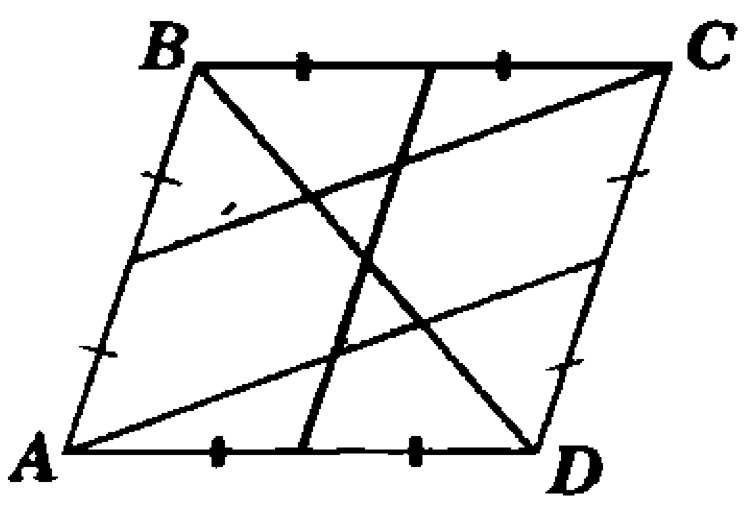
$$\Rightarrow 2S = \frac{4S_{CUADRADO}}{15} = \frac{4\sqrt{15}^{\,2}}{15} = 4$$

RPTA : "B"

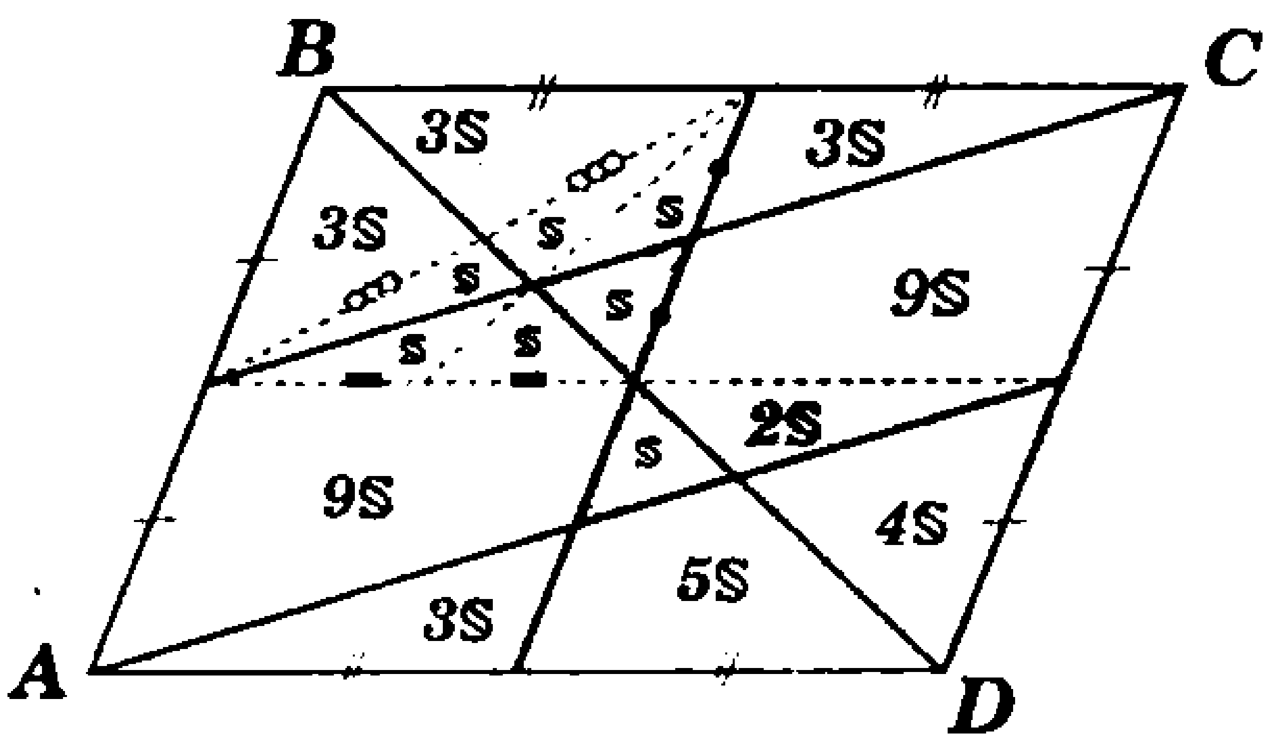
PROBLEMA 20:

Si *ABCD* es un paralelogramo cuya área mide $240m^2$. Calcular el área de la región sombreada..

A) 5 m^2
B) 10
C) 15
D) 20
E) 12



RESOLUCIÓN :



*De la figura : $S_{ABCD} = 48S = 240$

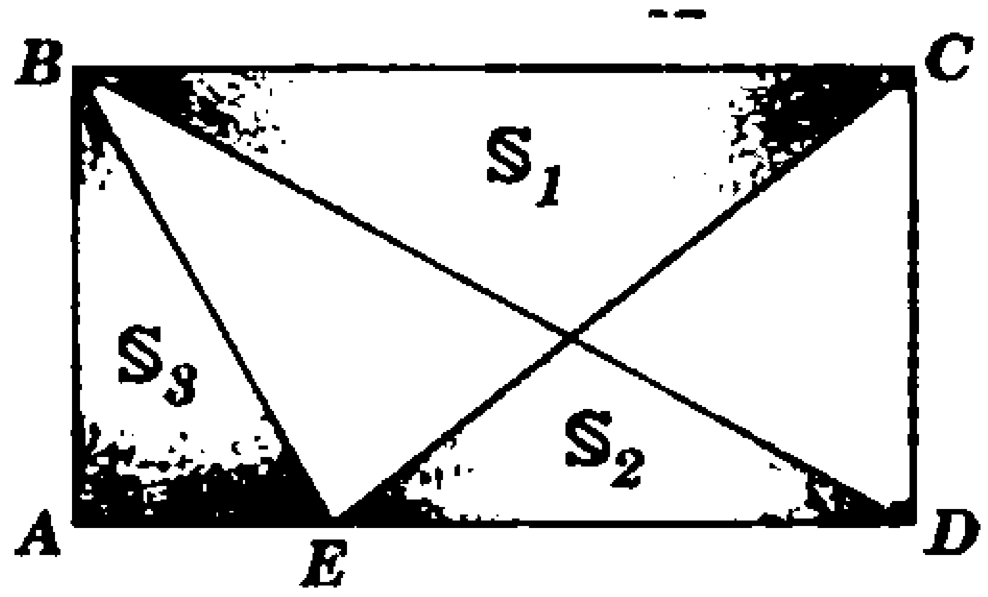
$$S = 5$$

*Luego : $S_{som} = 2S = 10$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Dado :

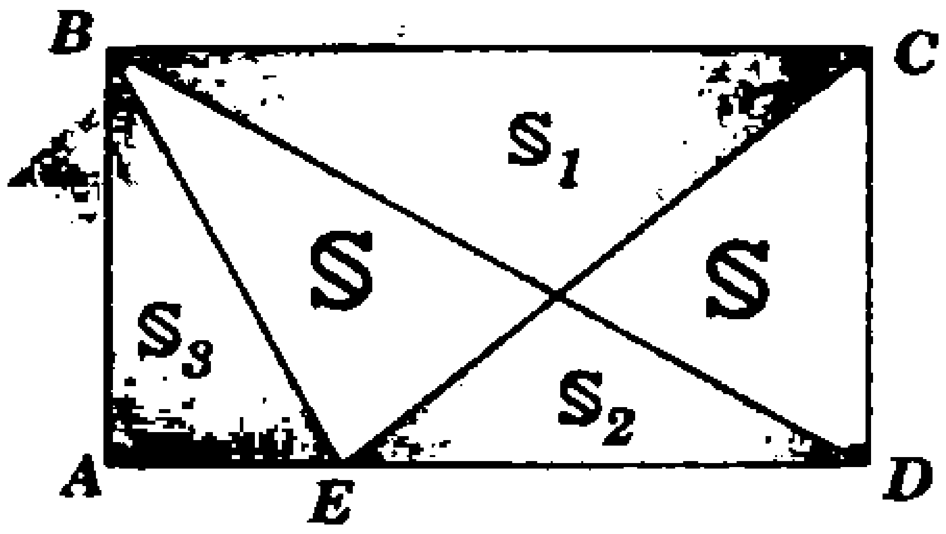


Determinar : S_3 , si : $S_1 - S_2 = 2$

A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) 1,5

RESOLUCIÓN :

I) Como *BCDE* es un trapecio entonces:



II) Como *ABCD* es un rectángulo , luego :

$$S_{ABD} = S_{BCD}$$

$$\Rightarrow S_3 + S + S_2 = S_1 + S$$

$$\Rightarrow S_3 = S_1 - S_2 \text{ .... (Dato)}$$

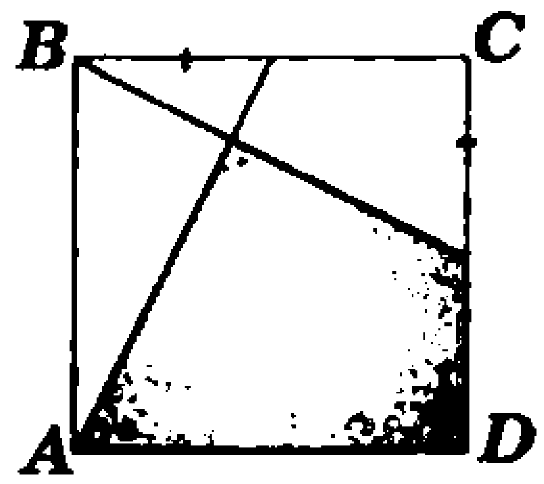
$$\Rightarrow S_3 = 2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

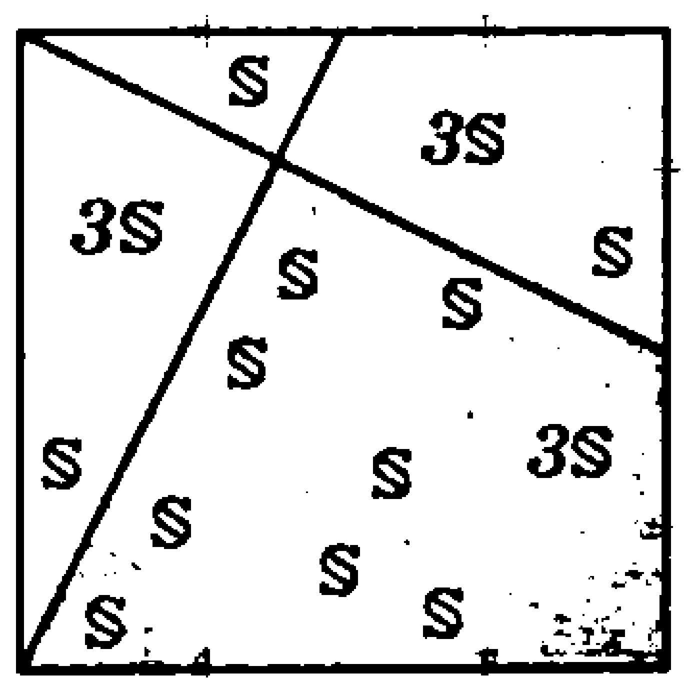
ABCD es un cuadrado de $20u^2$ de área . Determinar el área de la región sombreada .

A) $10u^2$
B) $11u^2$
C) $8u^2$
D) $4u^2$
E) $6u^2$



RESOLUCIÓN :

*Luego el área de la región sombreada estará dado por :

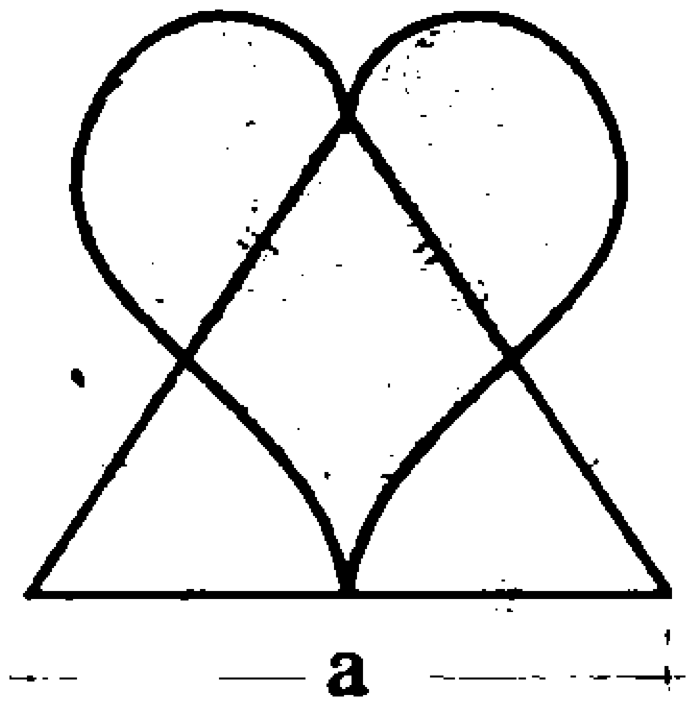


$$\frac{11\mathcal{S}}{20\mathcal{S}}(\text{Área del cuadrado}) = \frac{11}{20}(20) = 11$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

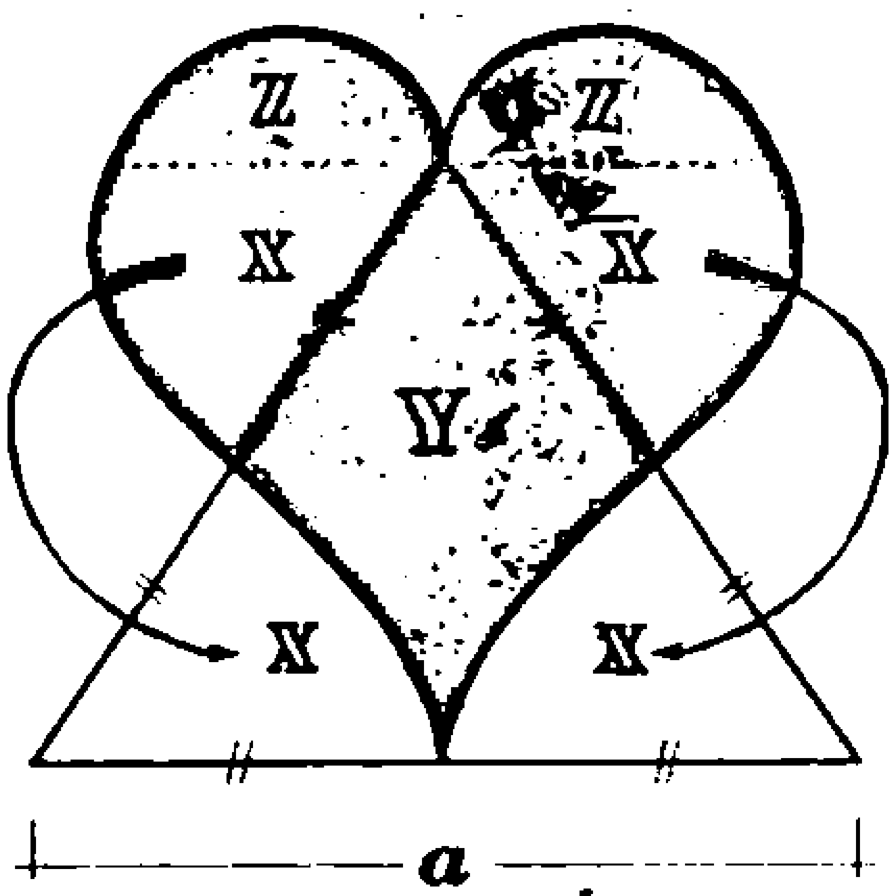
Determinar el área de la región sombreada :



A) $\frac{a^2}{8}(\sqrt{3}+\pi)$ B) $\frac{a^2}{16}(\pi-\sqrt{3})$ C) $\frac{a^2}{16}(4\sqrt{3}+\pi)$

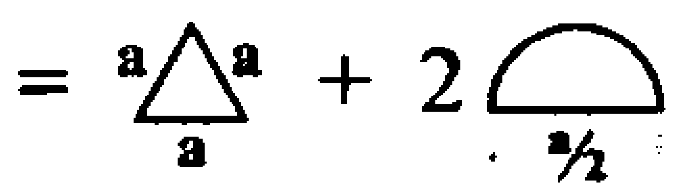
D) $\frac{a^2}{32}(4\pi+\sqrt{3})$ E) $a^2(\pi+\sqrt{3})$

RESOLUCIÓN :



- Se aprecia que :

$$\mathcal{S}_{sombreada} = 2X + Y + 2Z$$



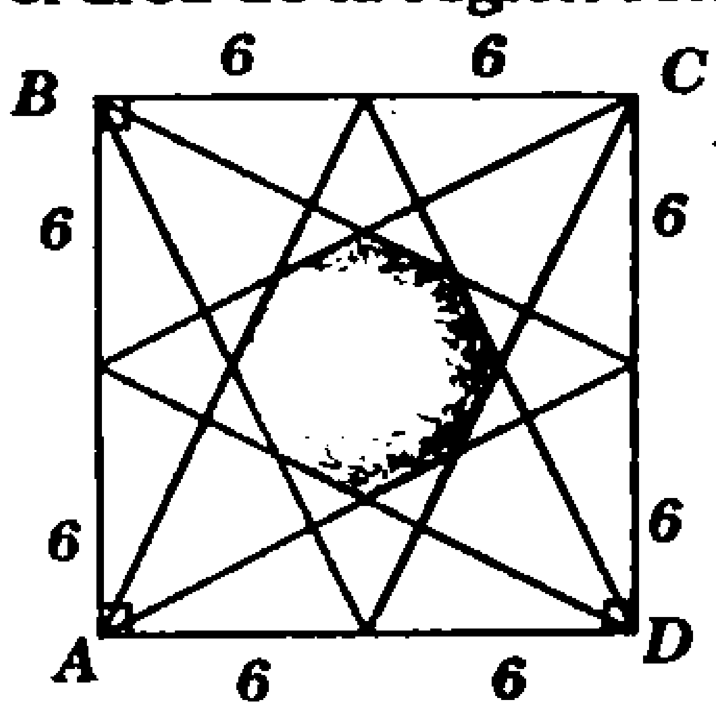
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2\left(\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{8}\right) = \frac{a^2}{16}(4\sqrt{3}+\pi)$$

RPTA : "C"

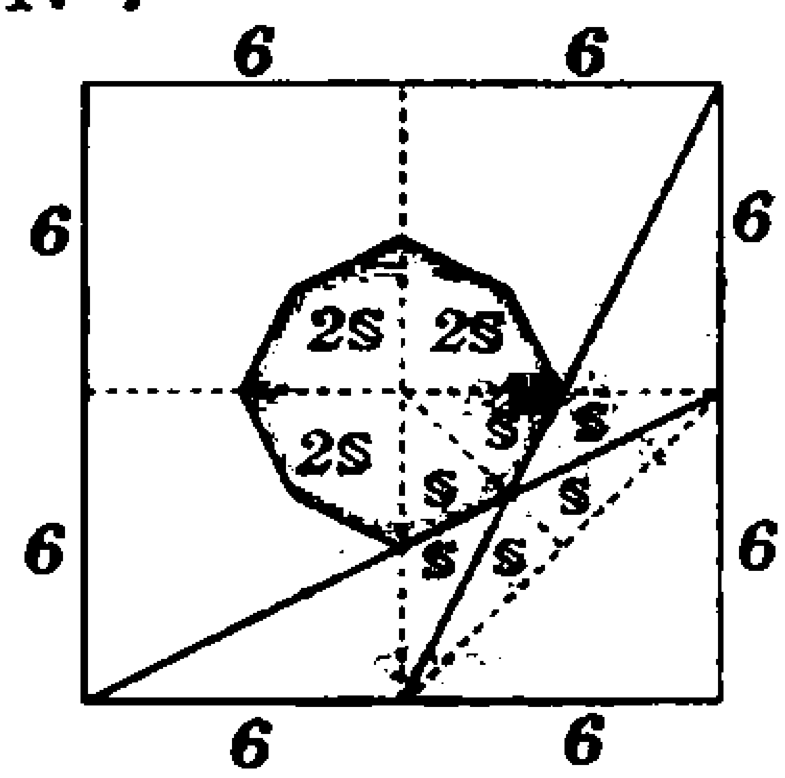
PROBLEMA 24 :.

Determinar el área de la región sombreada .

A) 26
B) 20
C) 18
D) 24
E) 21



RESOLUCIÓN :



Se observa que :

$$\mathcal{S}_{sombreada} = \frac{8\mathcal{S}}{4\times 12\mathcal{S}}(12)^2$$

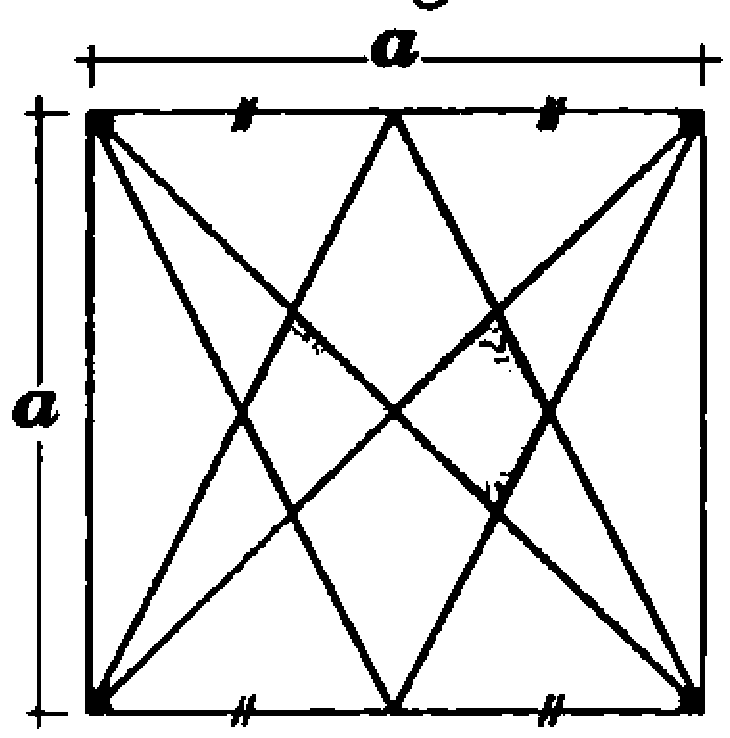
$$\mathcal{S}_{sombreada} = 24$$

RPTA : "D"

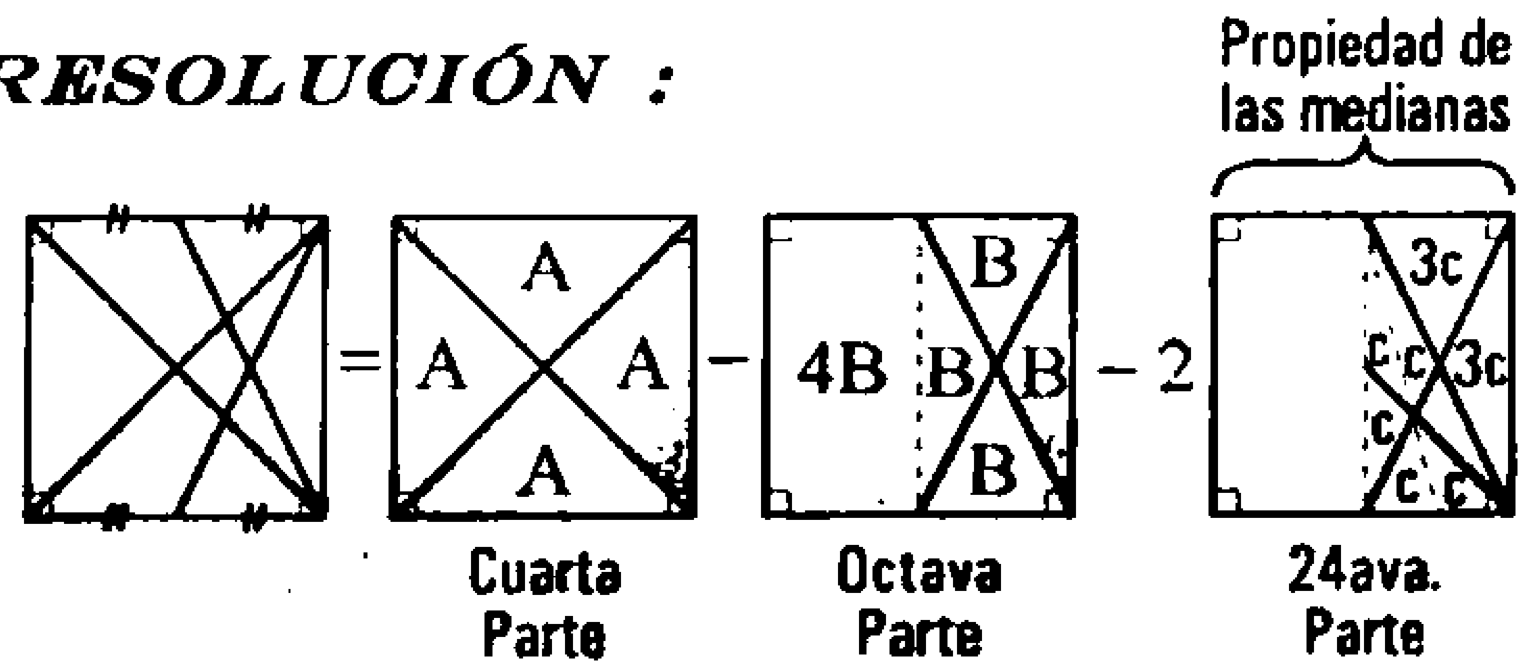
PROBLEMA 25 :

Determinar el área de la región sombreada en :

A) $a^2/6$
B) $a^2/12$
C) $a^2/8$
D) $3a^2/20$
E) $a^2/5$



RESOLUCIÓN :

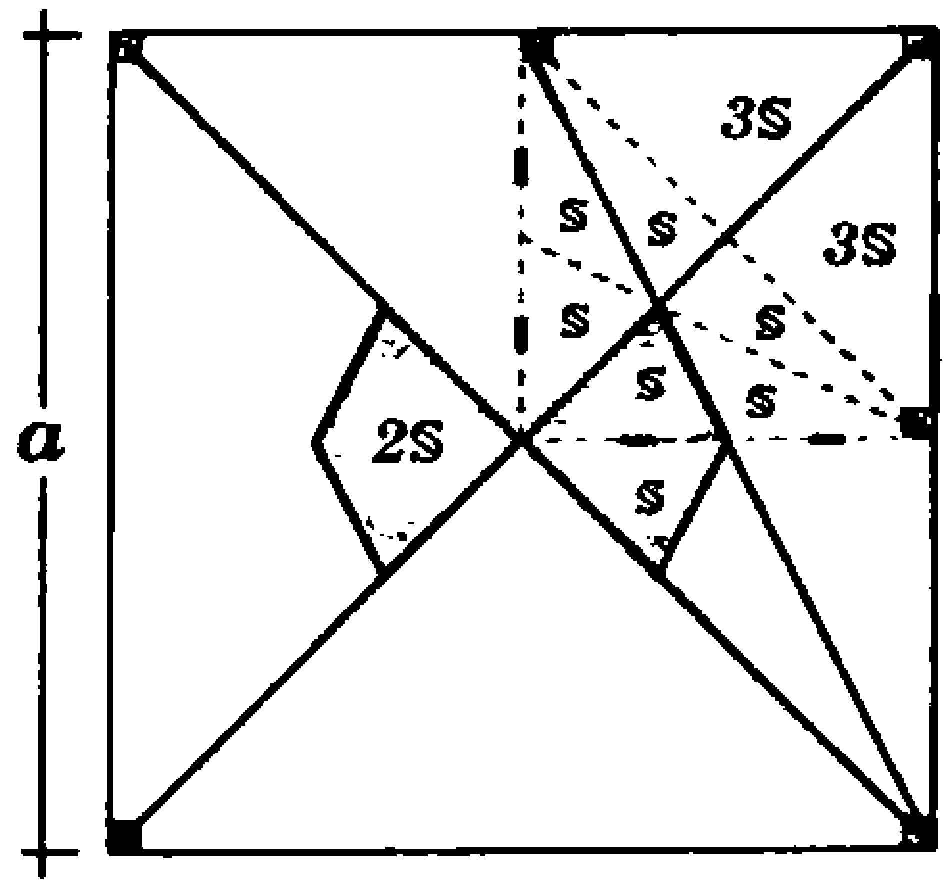


$$\mathcal{S} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} - 2\frac{a^2}{24} \Rightarrow \mathcal{S} = \frac{a^2}{24}$$

*Piden : $2\mathcal{S} = 2\times\frac{a^2}{24} \Rightarrow 2\mathcal{S} = \frac{a^2}{12}$

RPTA : "B"

OTRO MÉTODO :



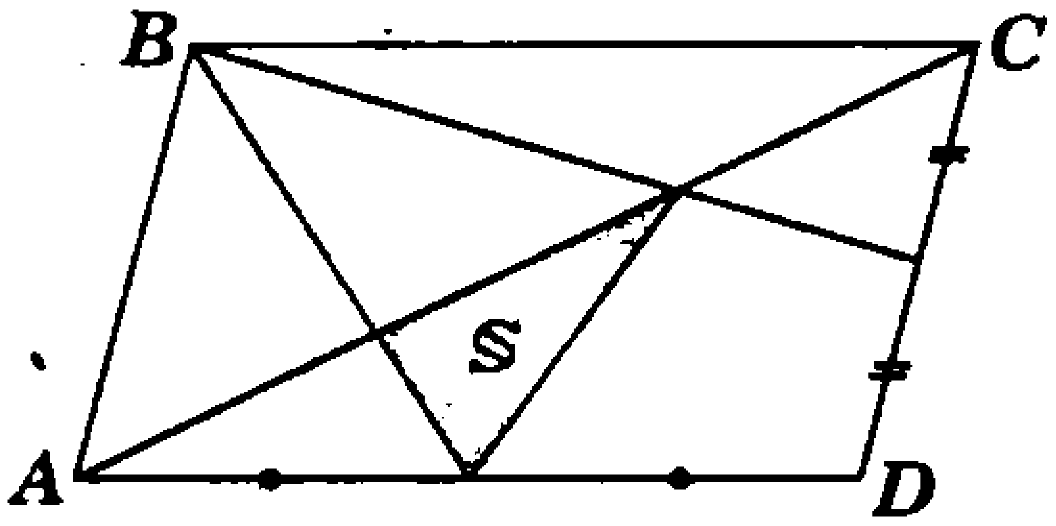
$$\underbrace{4(12}_{\mathcal{S}_{cuadrado}=a^2}\ \mathcal{S}) = a^2$$

$$\mathcal{S} = \frac{a^2}{48}$$

*Piden : $4S = 4\dfrac{a^2}{48} = \dfrac{a^2}{12}$

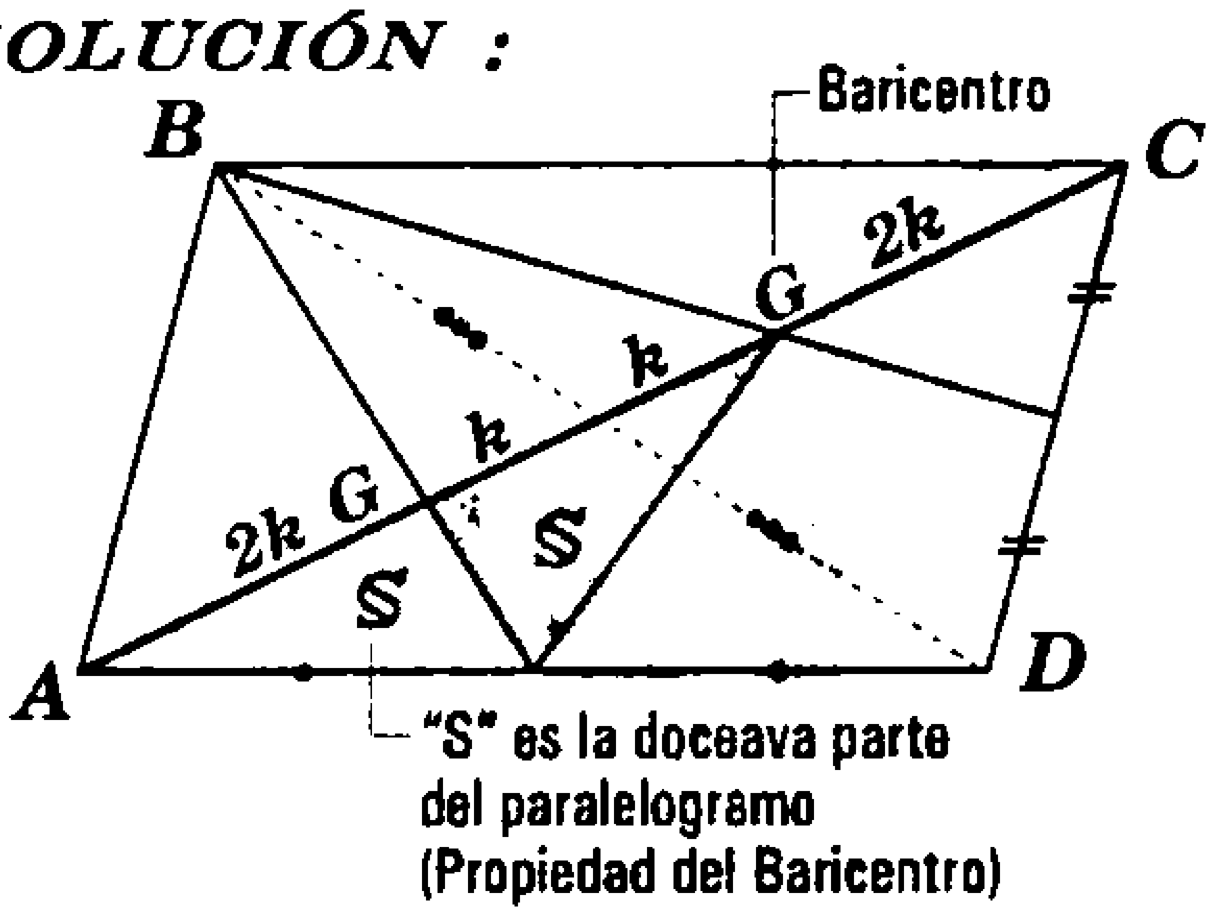
PROBLEMA 26 :

Determinar el área « S » di el área del paralelogramo $ABCD$ es $12m^2$.



A) $2m^2$
B) $1m^2$
C) $0{,}5m^2$
D) $3m^2$
E) $5m^2$

RESOLUCIÓN :



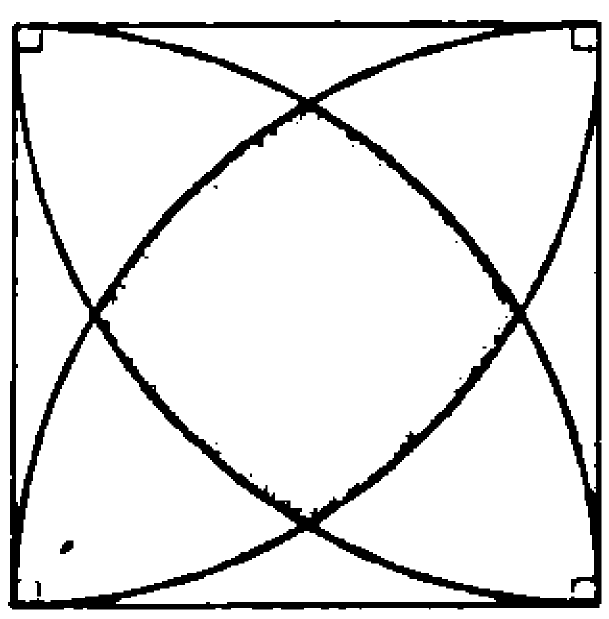
« S » es la doceava parte del paralelogramo (propiedad del baricentro)

$$\Rightarrow S = \frac{S_{ABCD}}{12} = \frac{12m^2}{12} = 1m^2$$

RPTA : "B"

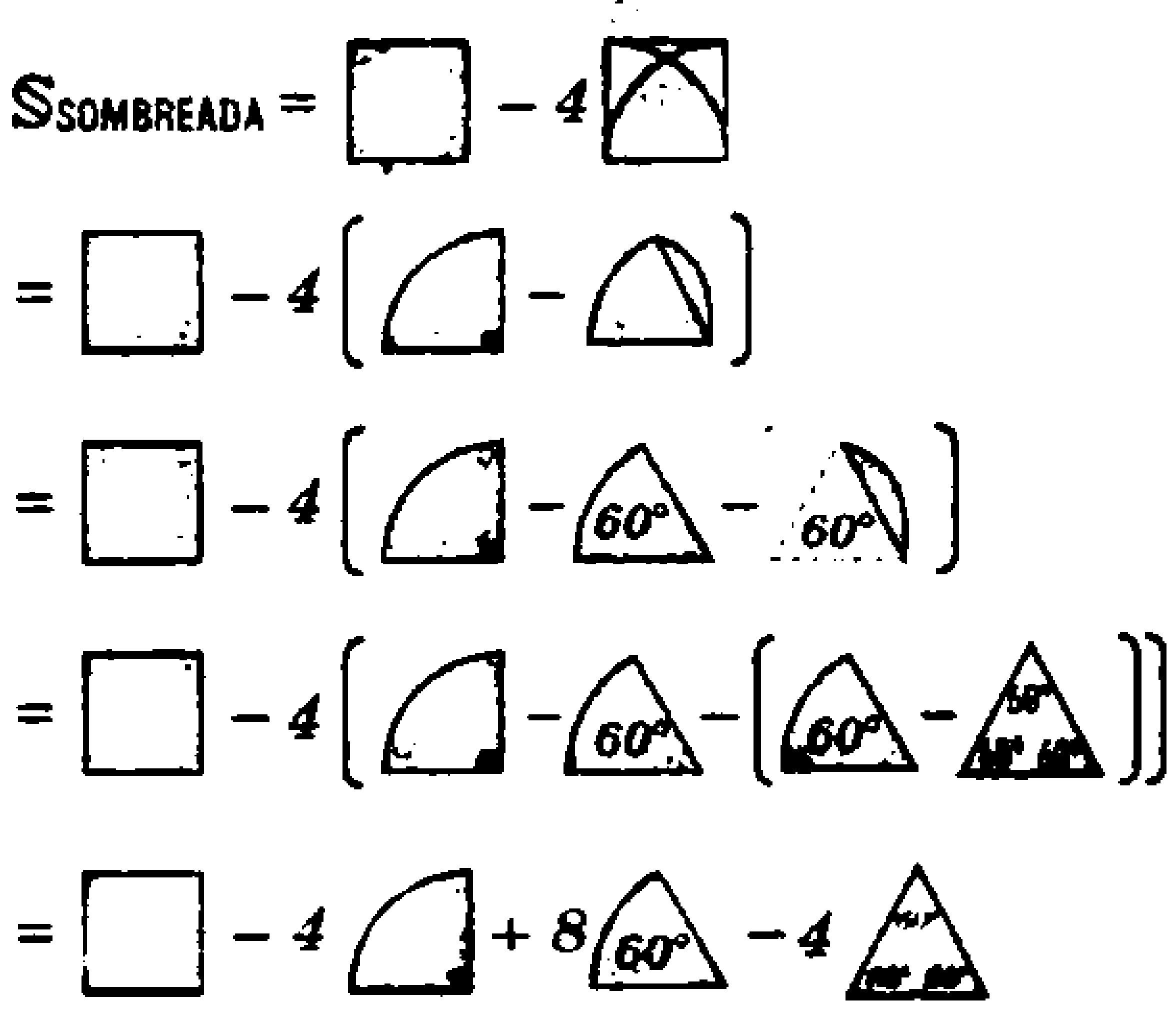
PROBLEMA 27 :

¿Cuánto mide al área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide $2\sqrt{3}$?



A) $4+\pi+\sqrt{3}$
B) $6+2\pi-\sqrt{3}$
C) $12+4\pi-12\sqrt{3}$
D) $\pi-\sqrt{3}+1$
E) $6+2\pi+\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :



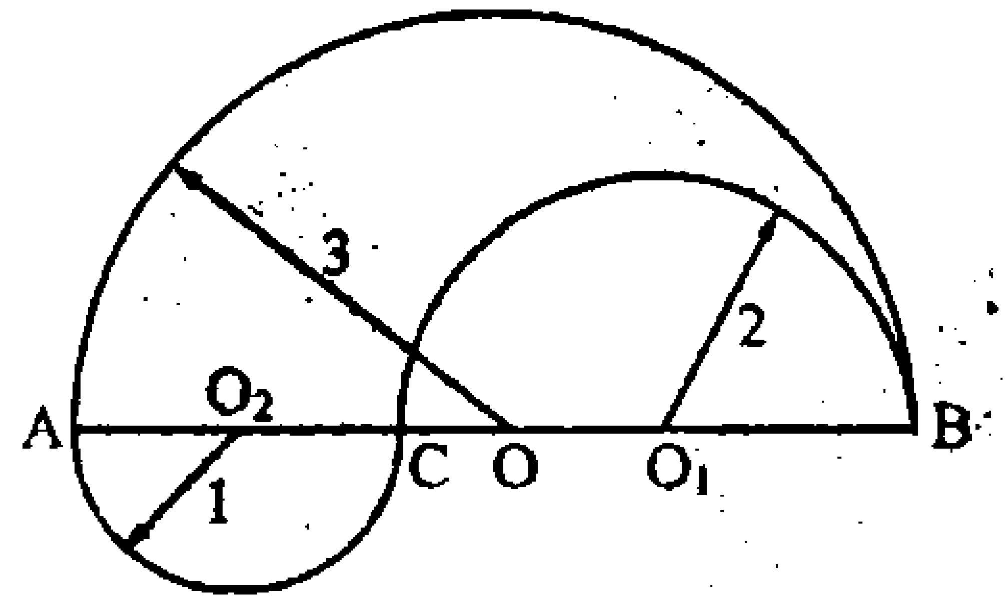
$$= (2\sqrt{3})^2 - \frac{4\pi(2\sqrt{3})}{4} + \frac{8\pi(2\sqrt{3})^2}{6} - \frac{4(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= 12 + 4\pi - 12\sqrt{3}$$

RPTA : "C

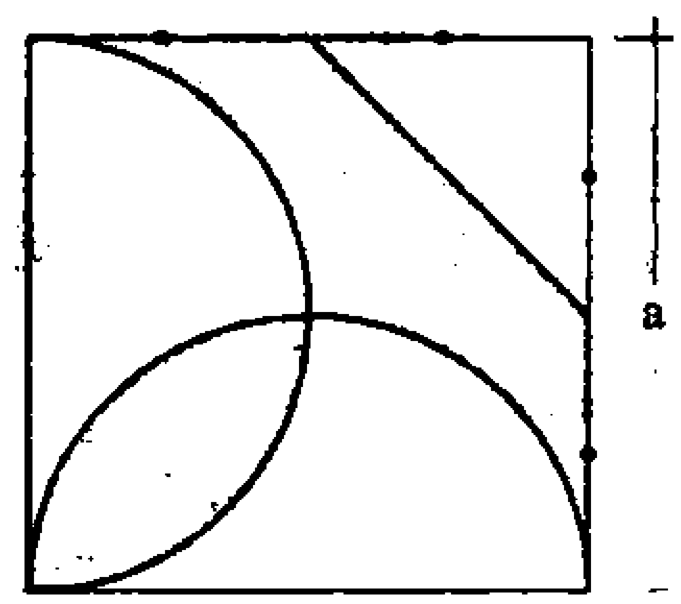
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el área de la región sombreada .



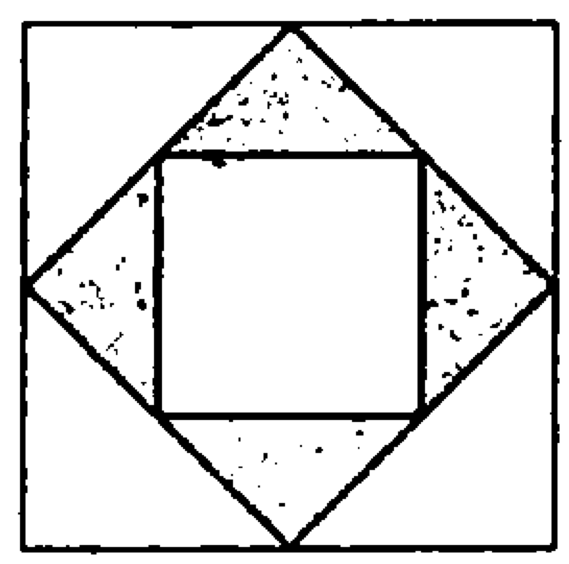
A) π
B) 2π
C) 3π
D) 4π
E) 5π

02 Determinar el área de la región sombreada .



A) $3\dfrac{a^2}{8}$ B) $\dfrac{a^2}{2}$ C) $2\dfrac{a^2}{5}$ D) $3\dfrac{a^2}{7}$ E) $4\dfrac{a^2}{13}$

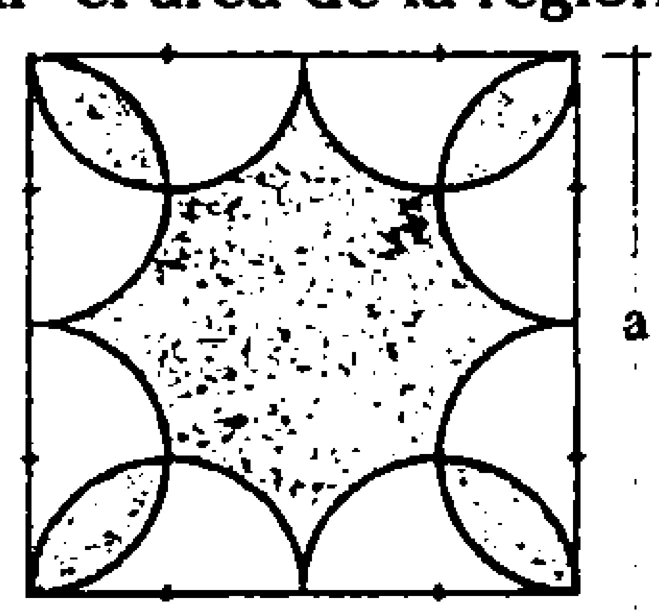
03 Si el área del cuadrado mayor es M y los vértices de cada cuadrado interior parten en el punto medio del lado del cuadrado en que están inscritos. ¿Cuáles son correctas?



1) El área sombreada es $M/2$
2) El área sombreada es igual a la del cuadrado menor.
3) El área sombreada es $M/4$

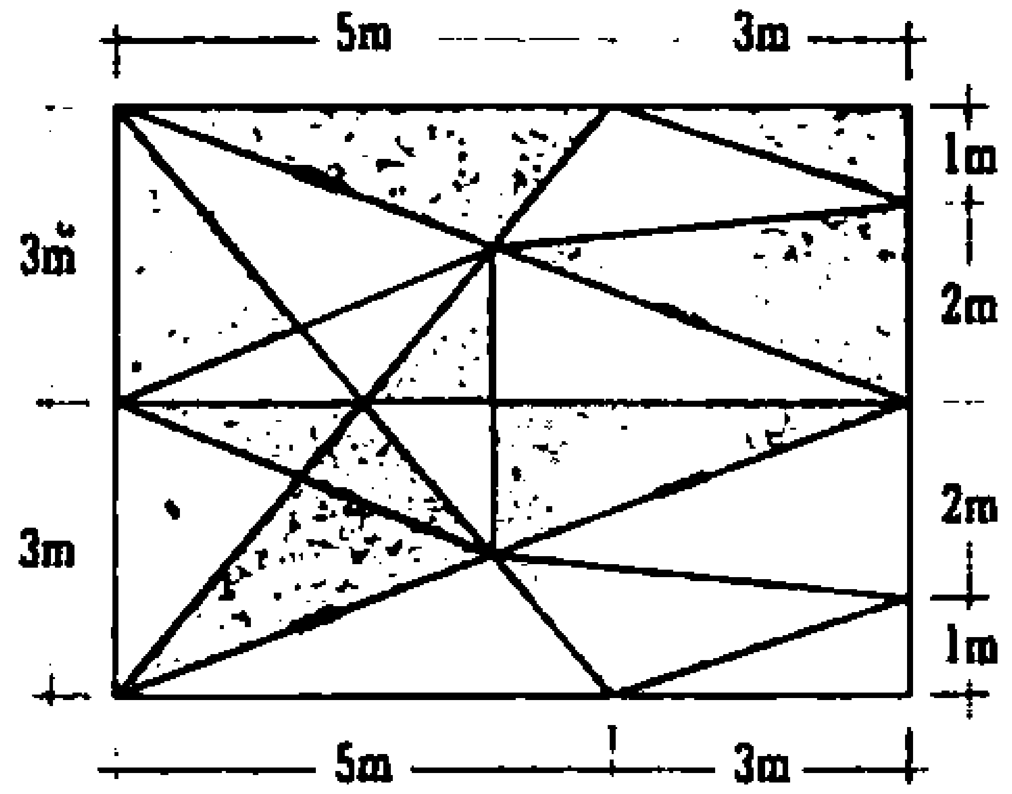
A) Sólo 2 B) Sólo 3 C) 1 y 2 D) 2 y 3 E) Sólo 1

04 Determinar el área de la región sombreada .



A) $\frac{a^3}{3}$ B) $2\frac{a^2}{3}$ C) $3\frac{a^2}{4}$ D) $\frac{a^2}{2}$ E) $3\frac{a^2}{5}$

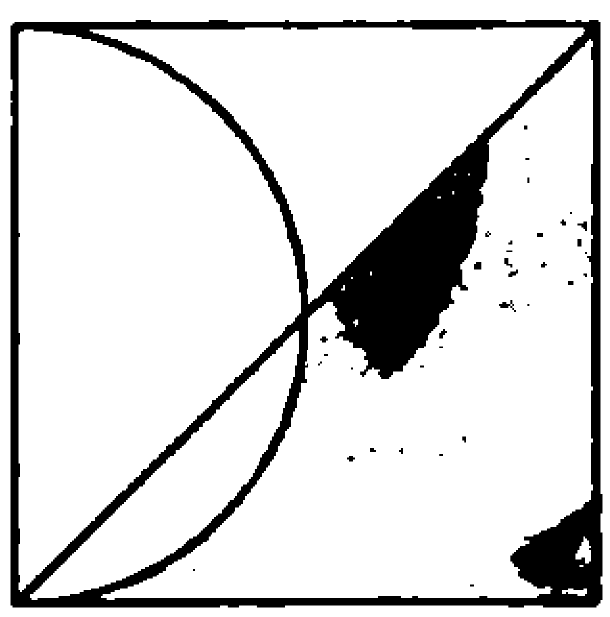
05 Determinar el área de la región sombreada .



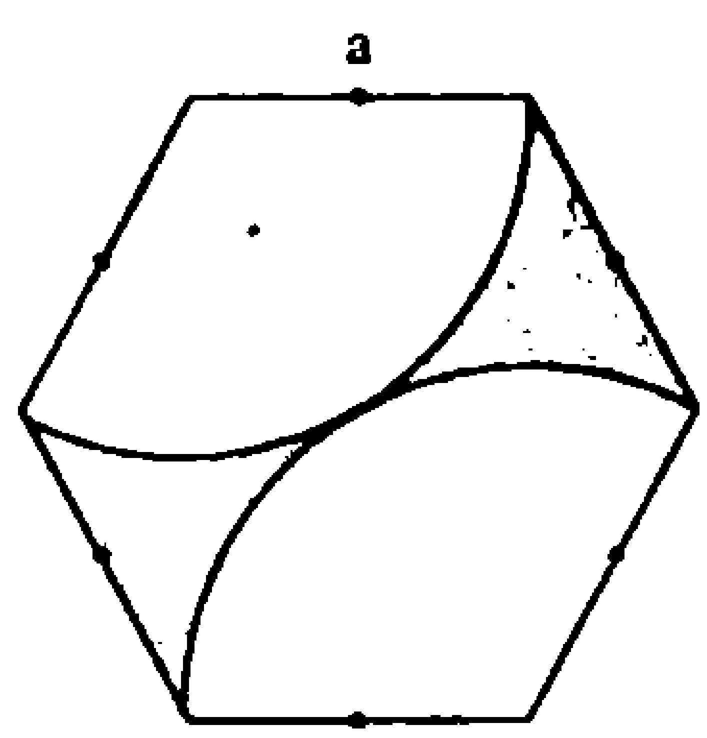
A) 24m² B) 23 m² C) 22 m² D) 21 m² E) 20 m²

06 Determinar el área de la región sombreada ; si el lado del cuadrado mide *4cm*.

A) $(6-\pi)\ cm^2$
B) $8-\pi$
C) $p-2$
D) $10-\pi$
E) $4-\pi$

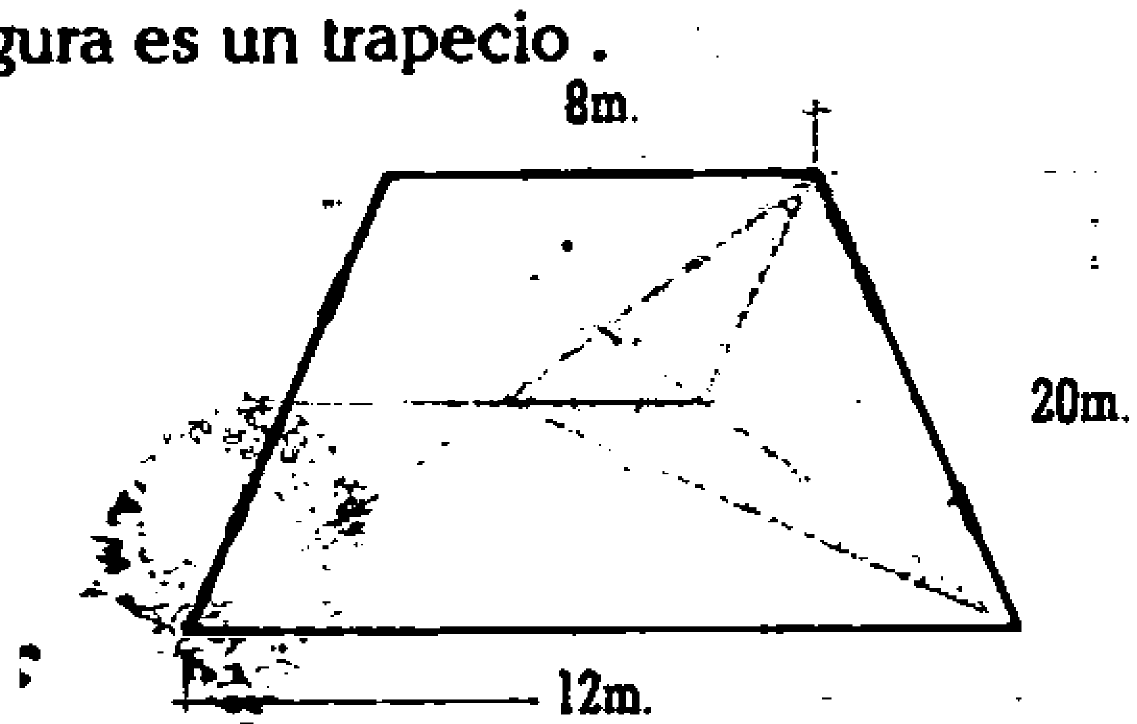


07 Determinar el área de la región sombreada



A) $a^2(6\sqrt{3}-2\pi)/6$
B) $a^2(4\sqrt{3}-3)/4$
C) $a^2(9\sqrt{3}-4\pi)/6$
D) $a^2(9\sqrt{3}-3\pi)/3$
E) $a^2(9\sqrt{3}-3\pi)/2$

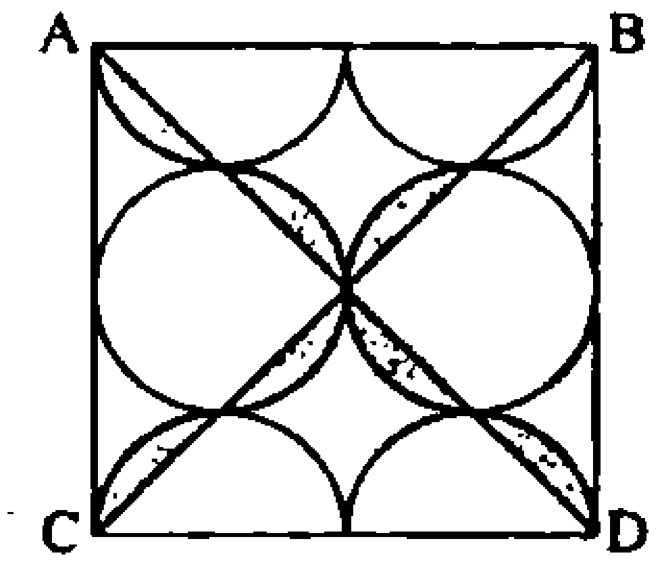
08 Determinar el área de la región sombreada . La figura es un trapecio .



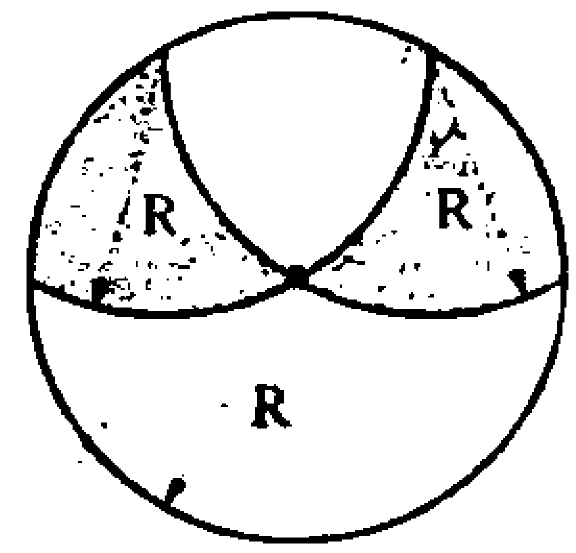
A) 15 m² B) 16 m² C) 18 m² D) 19 m² E) 20 m²

09 Determinar el área de la región sombreada , si *ABCD* es un cuadrado de *8 cm* de lado.

A) $4(\pi+2)cm^2$
B) $8(\pi-2)cm^2$
C) $8(\pi-1)cm^2$
D) $4(\pi-2)cm^2$
E) $8(\pi+1)cm^2$

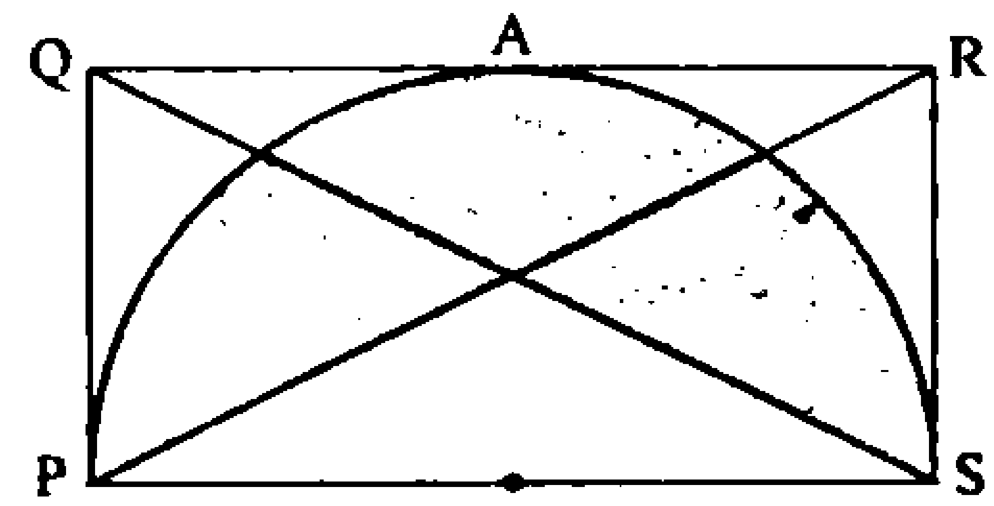


10 Determinar el área de la región sombreada .



A) $\pi R^2/2$ B) $\pi R^2/3$ C) $\pi R^2/4$ D) $2\pi R^2/3$ E) $\pi R^2/5$

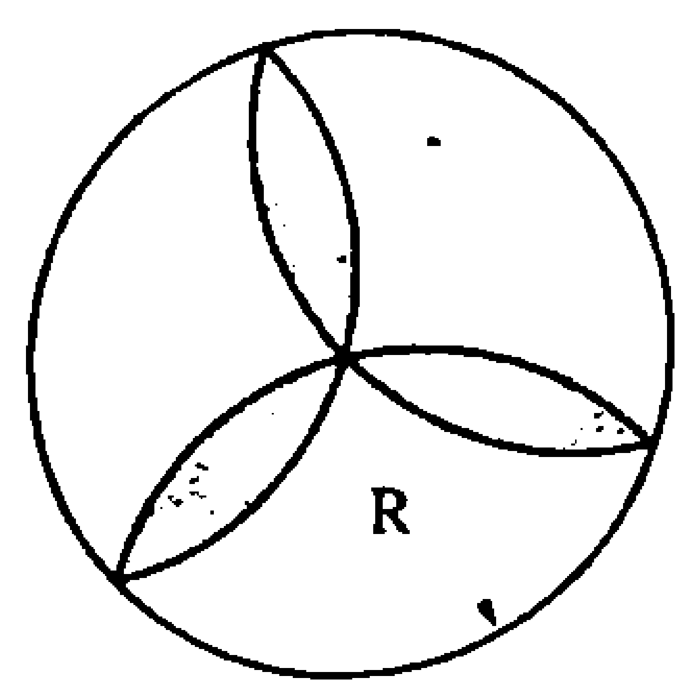
11 Según el gráfico *PQRS* es un rectángulo. Determinar el área de la región sombreada , si el área de la región rectangular es *200 cm²*. (A es punto de tangencia) .



A) $35\pi\ cm^2$ B) $45\pi\ cm^2$ C) $40\pi\ cm^2$
D) $37\pi\ cm^2$ E) $50(\pi-50)$

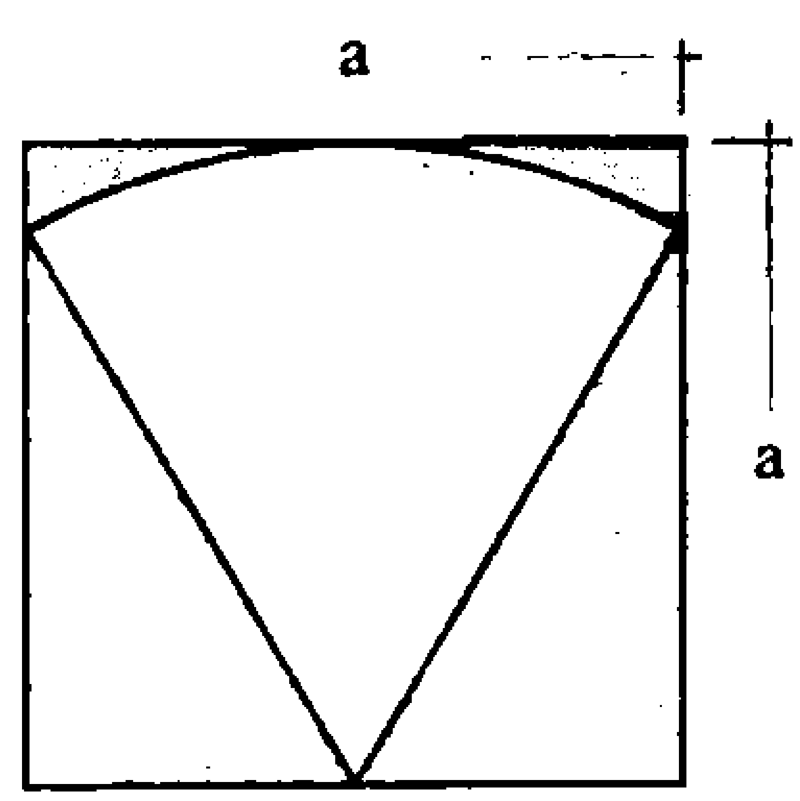
12 Determinar el área de la región sombreada .

A) $R^2(\pi-\sqrt{3})/4$
B) $R^2(2\pi-\sqrt{3})/2$
C) $R^2(2\pi-\sqrt{3})/4$
D) $R^2(2\pi-3\sqrt{3})/2$
E) $R^2(\pi-3)/2$

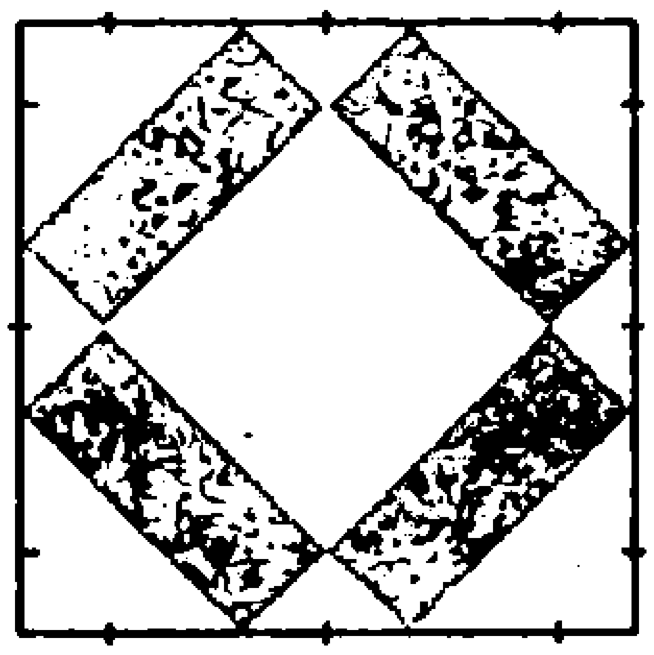


13 Determinar el área de la región sombreada .

A) $a^2(6-\pi)/6$
B) $a^2(4-\pi)/3$
C) $a^2(6-\pi)/4$
D) $a^2(6-\pi)/3$
E) $a^2(4-\pi)/2$

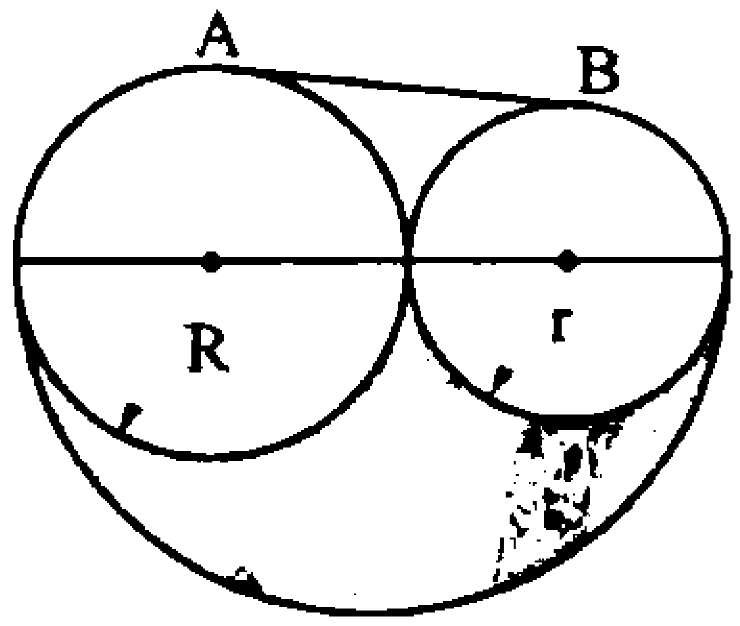


(14) Determinar el área de la región sombreada.



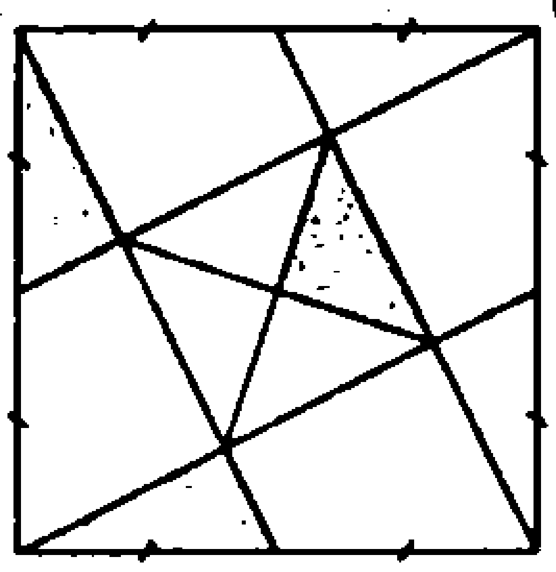
A) $2a^2/7$
B) $a^2/5$
C) $3a^2/8$
D) $2a^2/9$
E) $4a^2/9$

(15) Determinar el área de la región sombreada si $\overline{AB} = 4$.



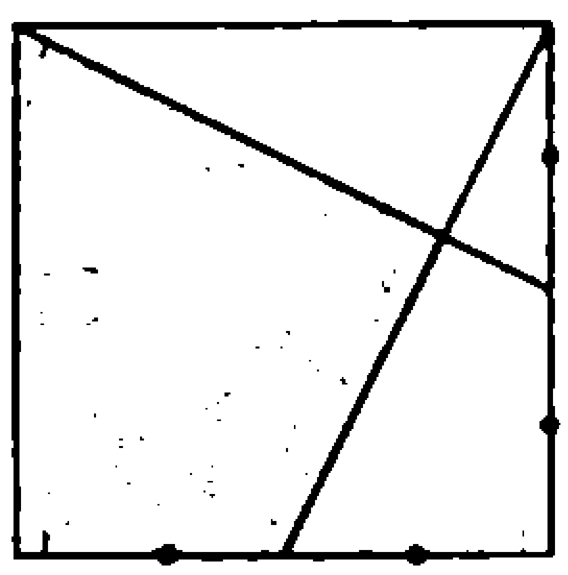
A) 4π
B) 3π
C) 2π
D) 5π
E) 6π

(16) En la figura, *ABCD* en un cuadrado cuyo lado mide *10cm*. Determinar el área de la región sombreada.



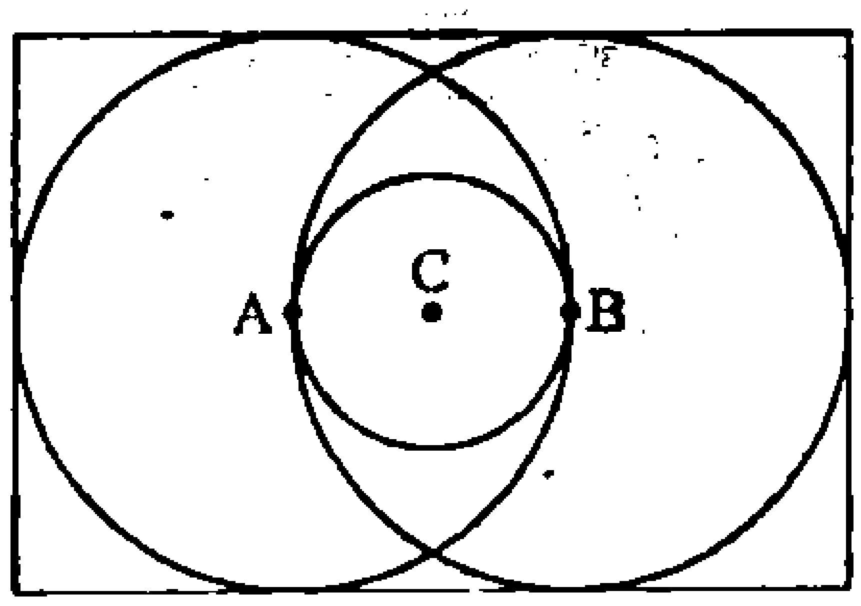
A) $10\ cm^2$
B) $15\ cm^2$
C) $20\ cm^2$
D) $25\ cm^2$
E) $28\ cm^2$

(17) En la figura, si el área del cuadrado es $20\ m^2$, determinar el área de la región sombreada.



A) $10\ m^2$
B) $15\ m^2$
C) $12\ m^2$
D) $11\ m^2$
E) $8{,}5\ m^2$

(18) Determinar el área de la región sombreada (*A, B* y *C* son centros de las circunferencias).

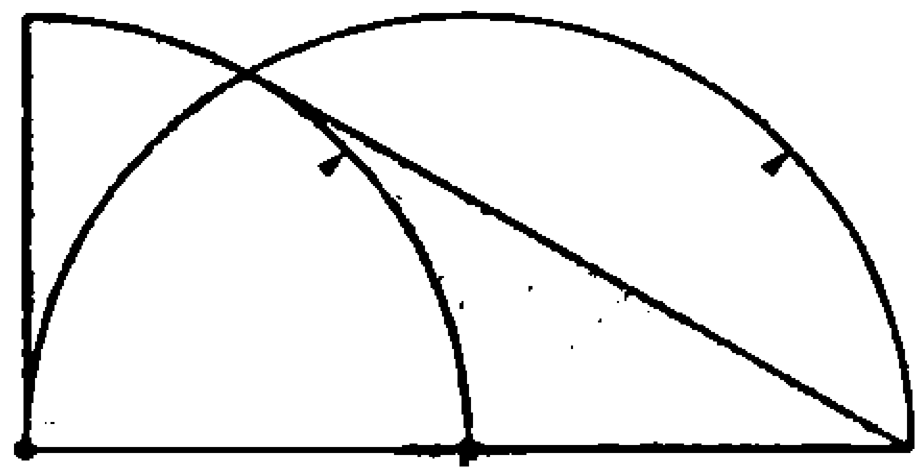


6cm

A) $17\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}$ *B)* $24\pi - 5\sqrt{3}$ *C)* $16\frac{\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

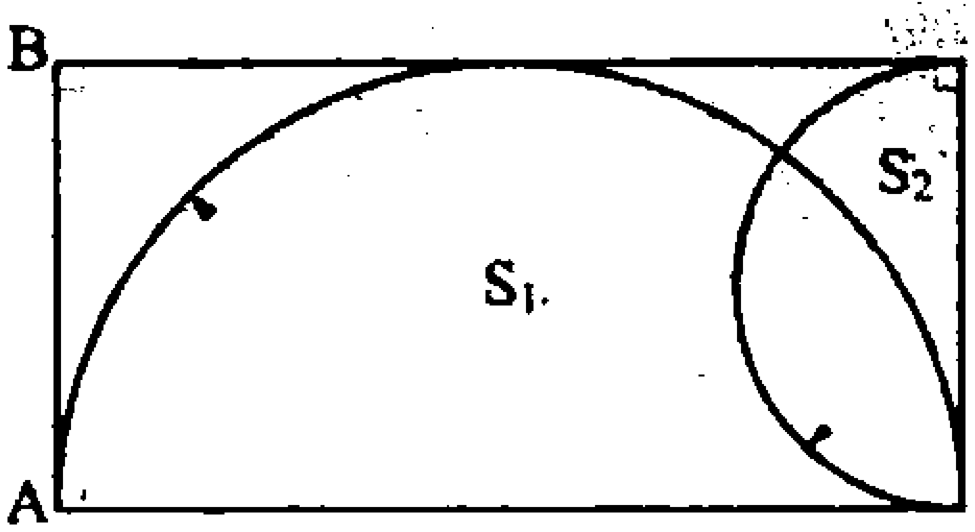
D) $7\pi - 6\sqrt{2}$ *E)* $\frac{19\pi}{3} - 2\sqrt{3}$

(19) Según la figura, Determinar la razón de áreas de las regiones sombreadas.



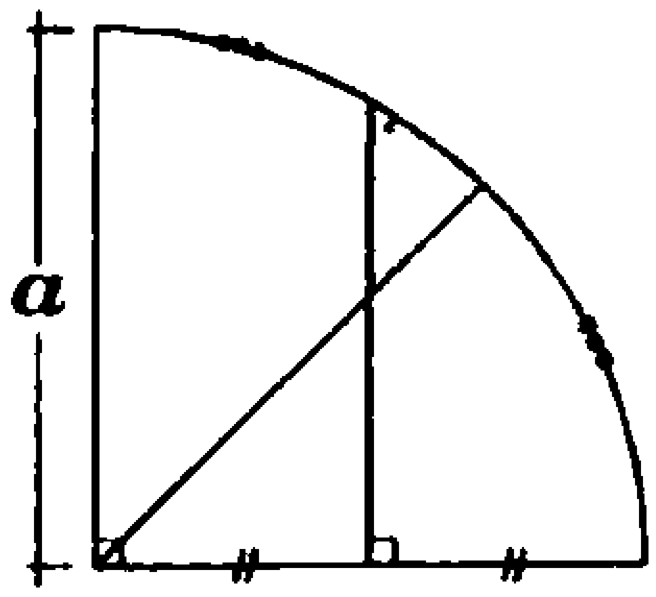
A) 1:3 *B)* 1:2 *C)* 1:4 *D)* 1:5 *E)* 1:1

(20) En el gráfico, *P* es punto de tangencia, sabiendo que $S_1 - S_2$? $12u^2$. Determinar el área del semicírculo menor.



A) $12u^2$ *B)* $10u^2$ *C)* $8u^2$ *D)* $4u^2$ *E)* $6u^2$

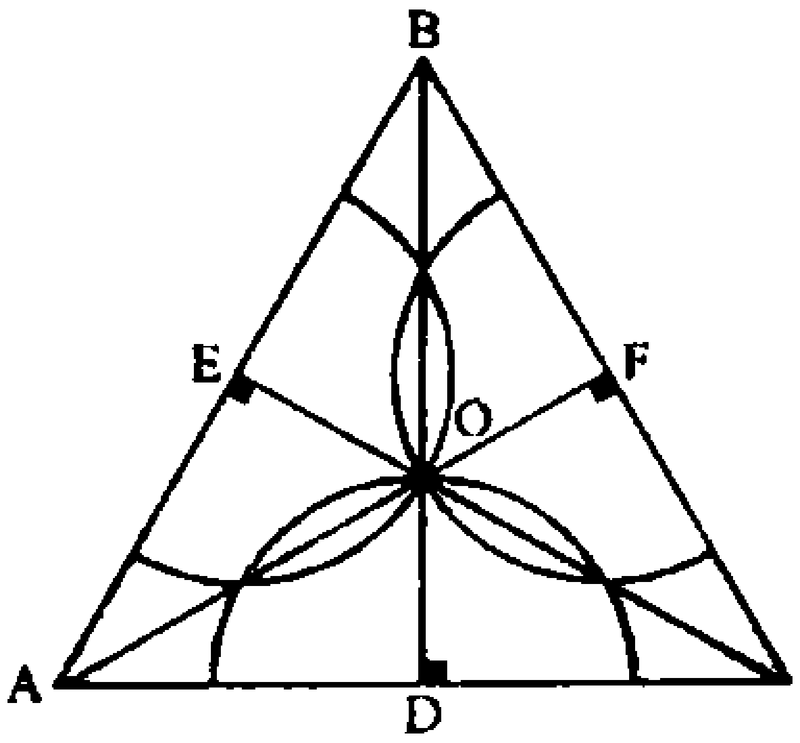
(21) Determinar el área de la región sombreada:



A) $a^2(\pi - \sqrt{3} + 1)$ *B)* $\frac{a^2}{12}(\pi + 1 + \sqrt{3})$

C) $\frac{a^2}{24}(\pi + 3 - \sqrt{3})$ *D)* $\frac{a^2}{24}(\pi + 3 - 3\sqrt{3})$

(22) La longitud del lado del triángulo equilátero *ABC*, es *L*. *E, F, D* son puntos medios de los lados y las semicircunferencias tienen su diámetro sobre cada lado. Determinar el área de la región sombreada.



A) $\pi L^2\sqrt{3}/24$
B) $\pi L^2/24$
C) $\pi L^2/36$
D) $\pi L^2\sqrt{3}/48$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)A	3)D	4)D	5)A	6)D	7)C	8)E	9)B	10)B
11)E	12)D	13)A	14)E	15)A	16)B	17)D	18)E	19)B	20)D

GEOMETRIA ANALITICA

CAPITULO 046

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de :

* Entender y aplicar correctamente la Geometría Analítica en diversos problemas planteados.

* Comprender las ecuaciones algebraicas para luego analizarlas si es posible en un plano cartesiano.

* Consolidar el aprendizaje y aplicar correctamente los conceptos sobre diagrama cartesiano, par ordenado, etc.

* Desarrollar la capacidad analítica en ejercicios de gráficas y ecuaciones.

* Conocer con claridad las bases para una profundización en la geometría analítica.

* Afianzar la habilidad en la resolución de ejercicios de geometría analítica, sin recurrir a demás a determinadas fórmulas.

INTRODUCCIÓN :

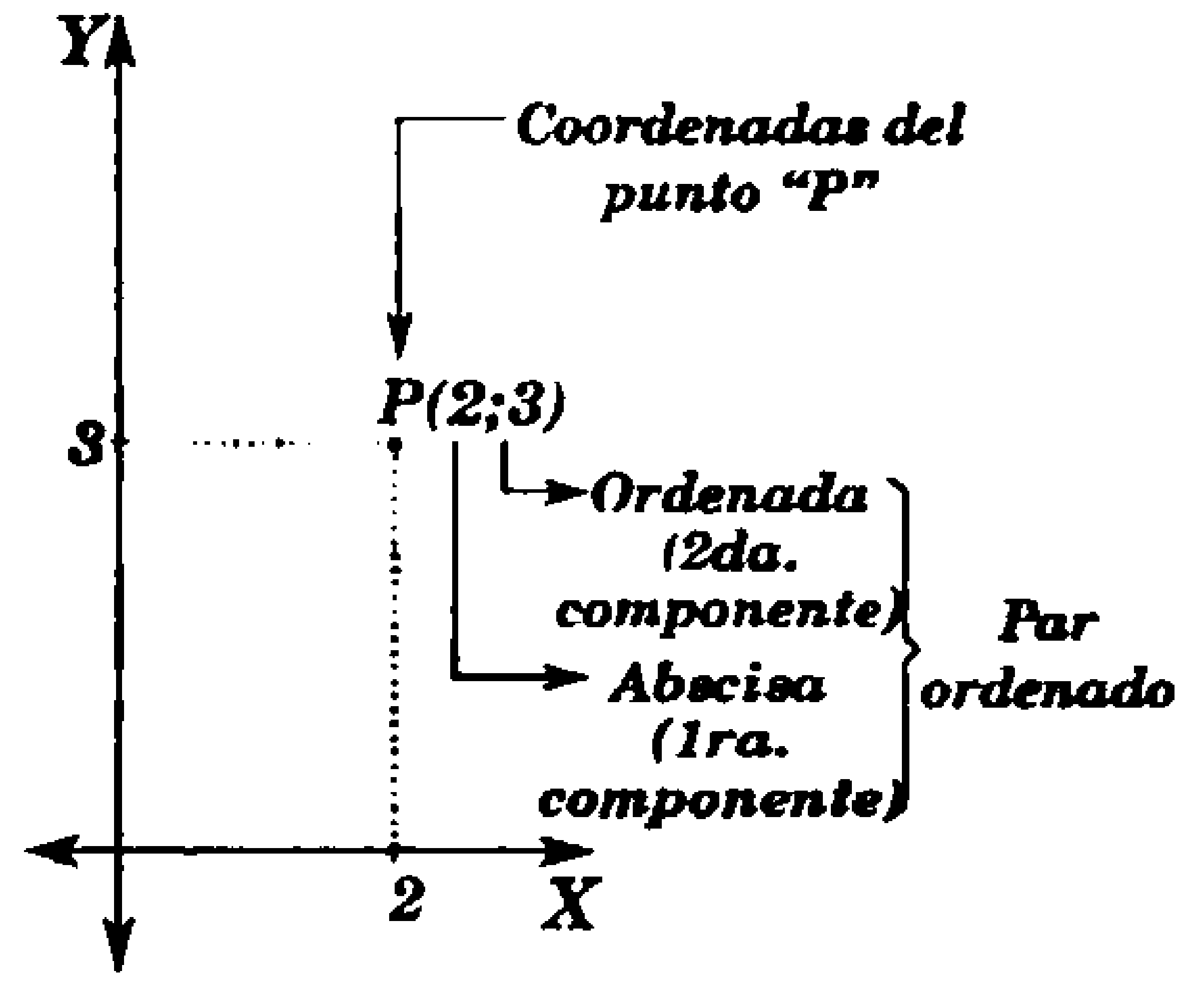
El primer gran paso adelante en la geometría, después de la época de los griegos fue el desarrollo de un nuevo método llamado geometría cartesiana (geometría analítica).

Esta geometría es la fusión de la geometría clásica con el álgebra, creada por René Descartes en el siglo *XVII*, para dominar los posibles movimientos de los puntos sobre el plano a través de algo que ya sabemos manejar, los números.

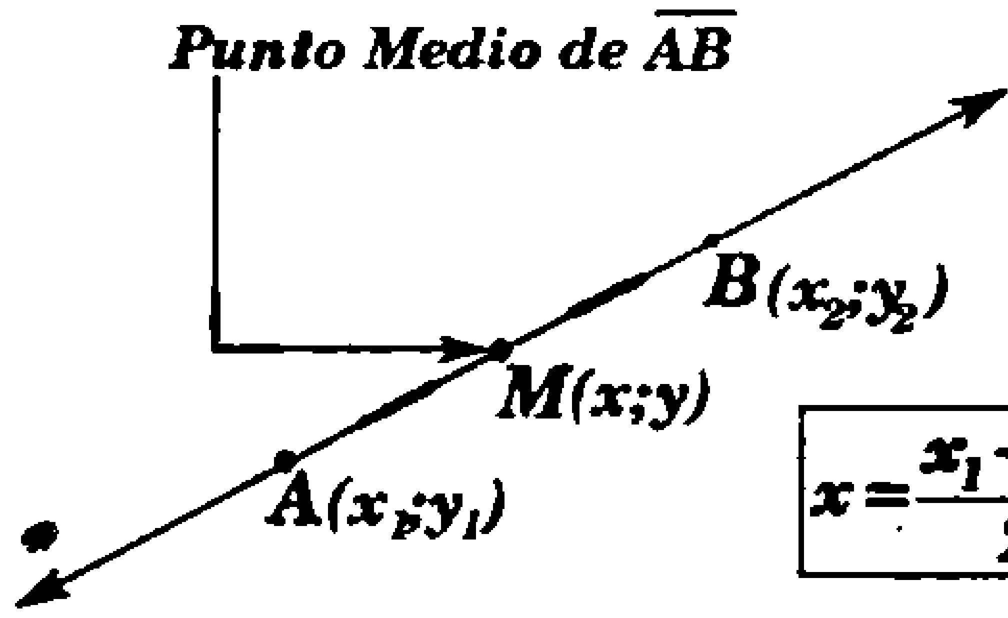
René Descartes, matemático y filósofo francés *(1596 – 1650)* en su juventud se volvió soldado en el ejército del príncipe Mauricio Nassau, es autor del libro Discurso del Método fue él quien usó por primera vez pares ordenados de números para la ubicación de un punto en el plano, a lo que se le denomina coordenadas cartesianas del punto.

El desarrollo del sistema de coordenadas cartesianas sirvió de fundamento al cálculo infinitesimal descubierto poco después por Newton y Leibnitz.

En el presente capítulo daremos mayor énfasis al desarrollo de problemas sobre rectas y circunferencias ya que la teoría se ha desarrollado en el curso respectivo, sólo para afianzar más su aprendizaje haremos un breve repaso de los principales puntos teóricos con sus respectivas aplicaciones.



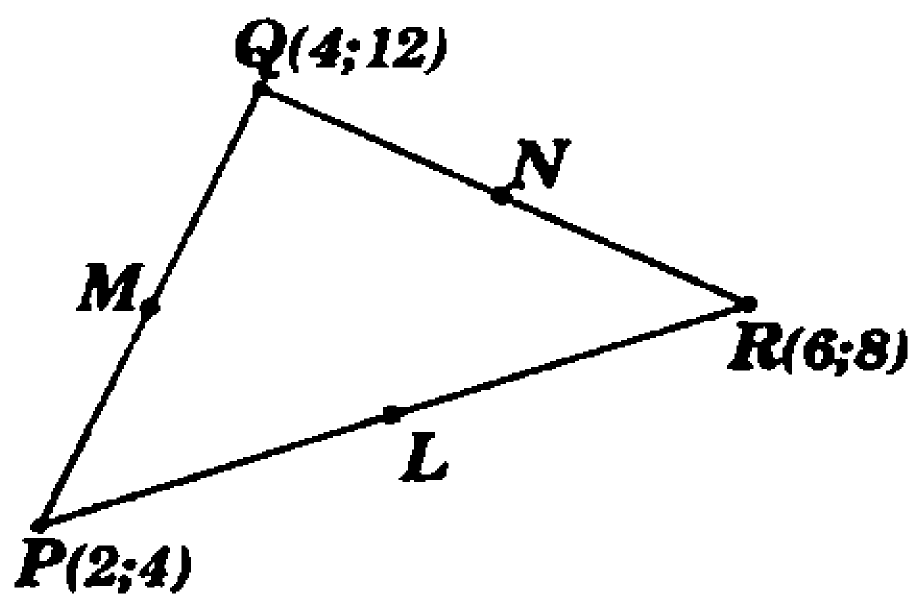
COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

EJEMPLO :

Halle las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo.



RESOLUCIÓN :

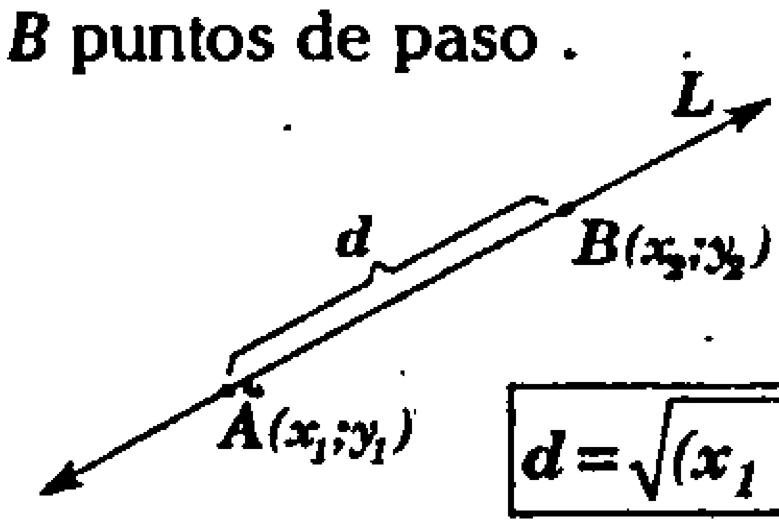
$$M=\left(\frac{2+4}{2};\frac{4+12}{2}\right)\Rightarrow M=(3;\ 8)$$

$$N=\left(\frac{4+6}{2};\frac{12+8}{2}\right)\Rightarrow N=(5;\ 10)$$

$$L=\left(\frac{2+6}{2};\frac{4+8}{2}\right)\Rightarrow L=(4;\ 6)$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DADOS

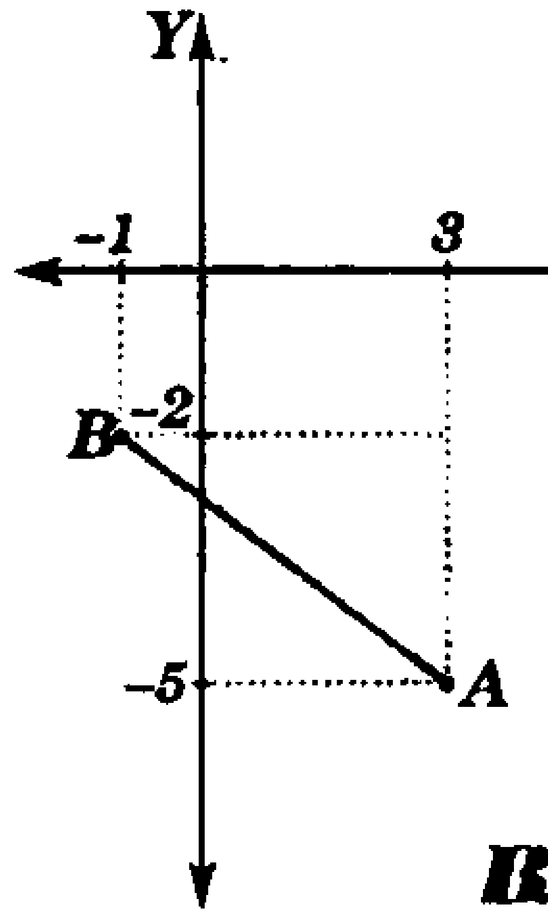
A y *B* puntos de paso .



$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

EJEMPLO :

Halle la distancia entre los puntos ***A(3;–5); B(–1;–2).***

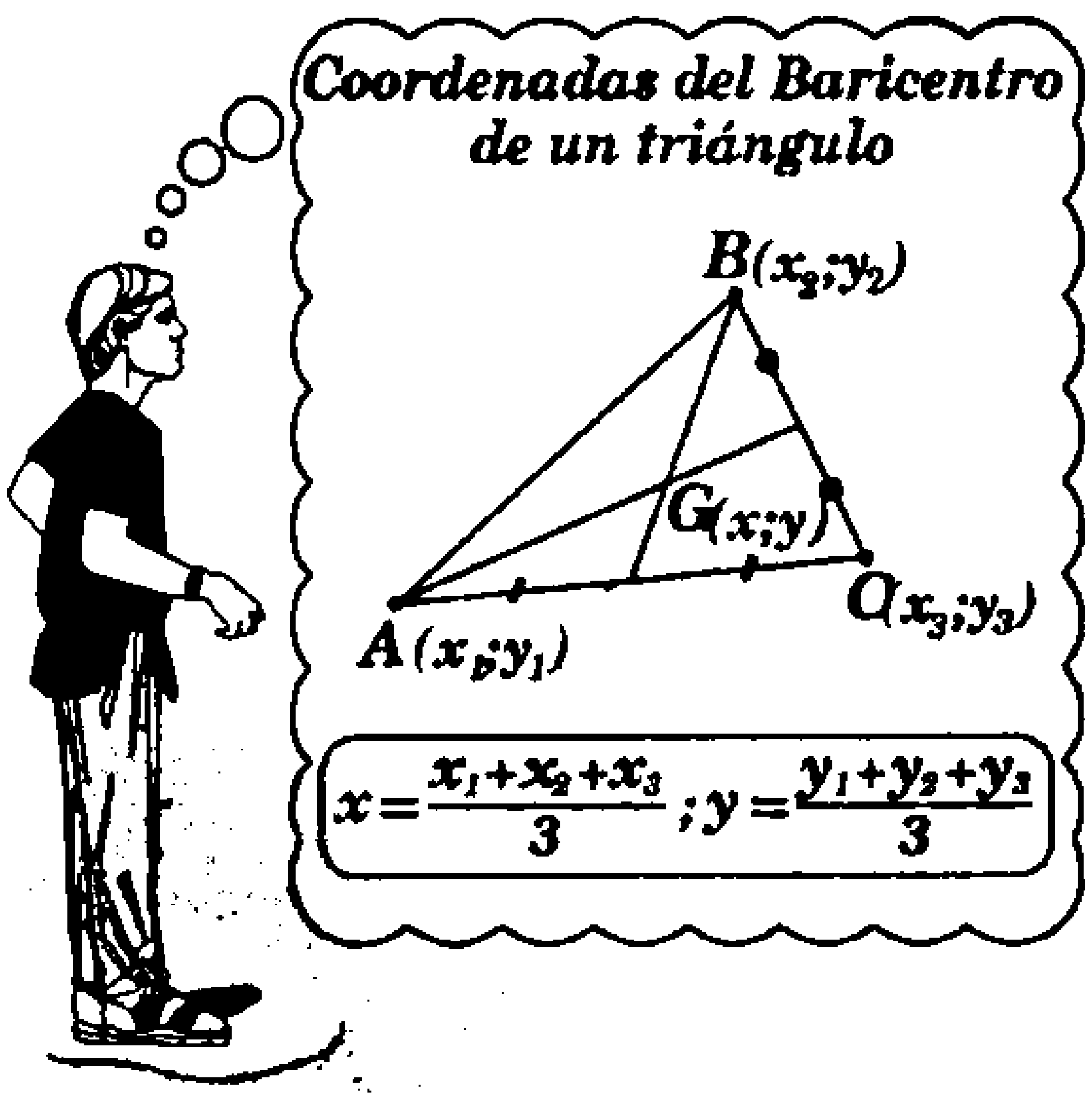


$$d_{AB}=\sqrt{(3-(-1))^2+(-5-(-2))^2}$$

$$\Rightarrow d_{AB}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

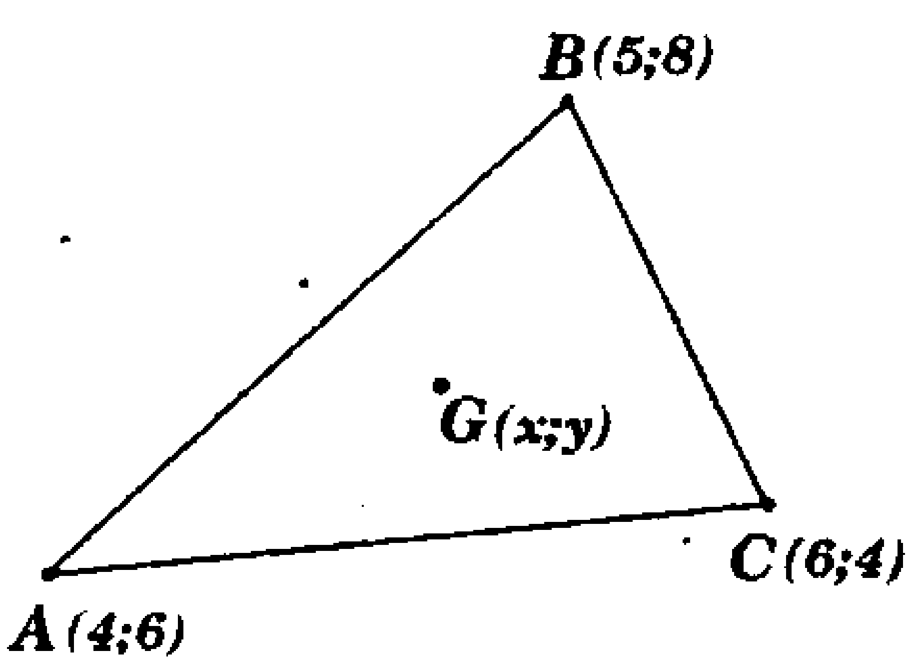
$$\Rightarrow d=5$$

BARICENTRO



EJEMPLO :

Halle las coordenadas del baricentro en :

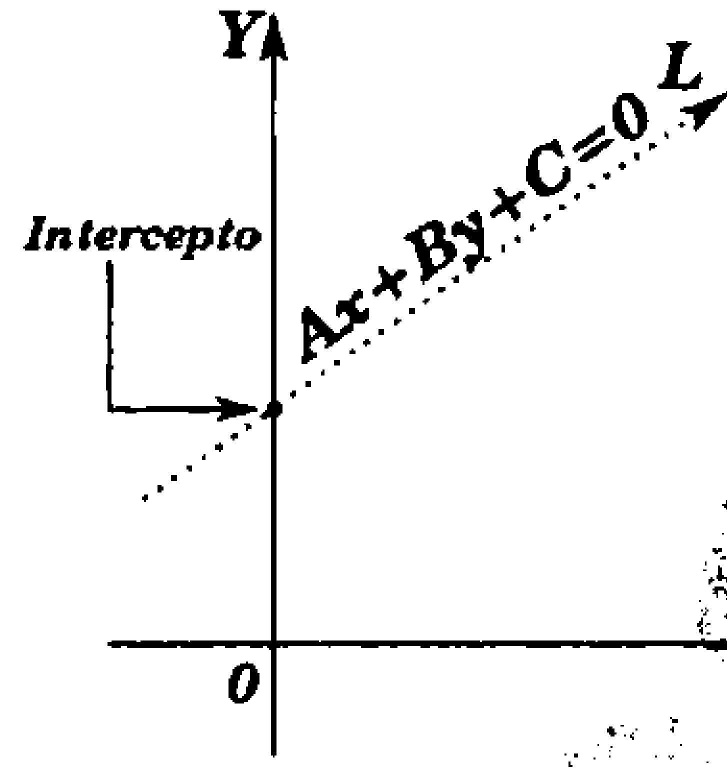


RESOLUCIÓN :

$$x=\frac{4+5+6}{3}=5 \qquad y=\frac{6+8+4}{3}=6$$

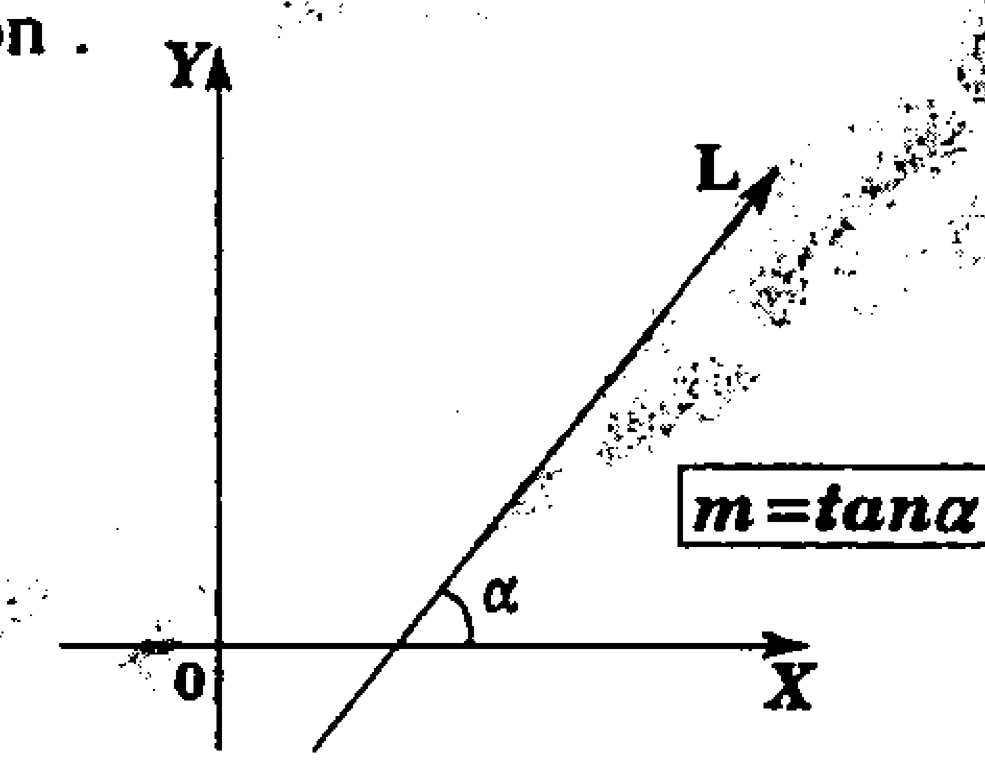
$$G(x;\,y)=G(5;\,6)$$

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA



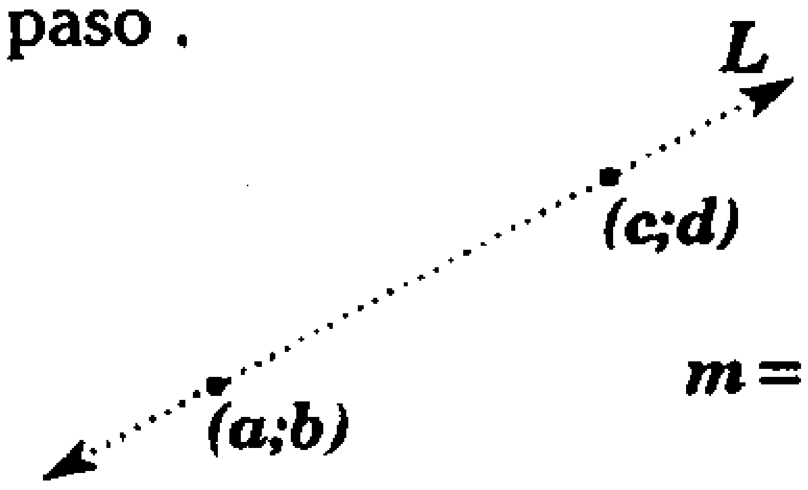
$$L: Ax+By+C=0$$

1) Pendiente de una recta conociendo su ángulo de inclinación .



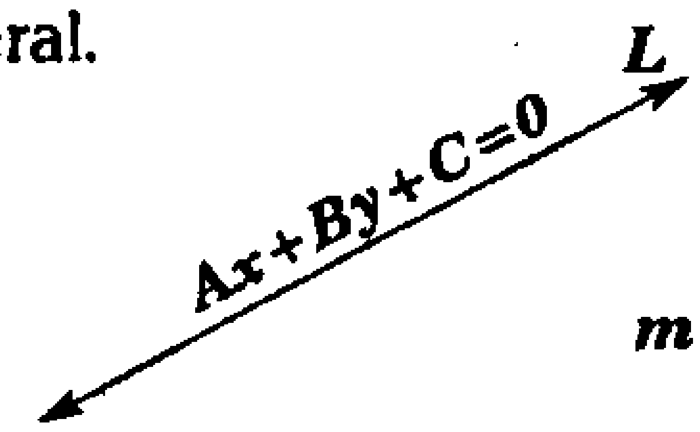
m : pendiente

2) Pendiente de una recta conociendo dos puntos de paso .



$$m=\frac{d-b}{c-a}$$ ***m***: pendiente

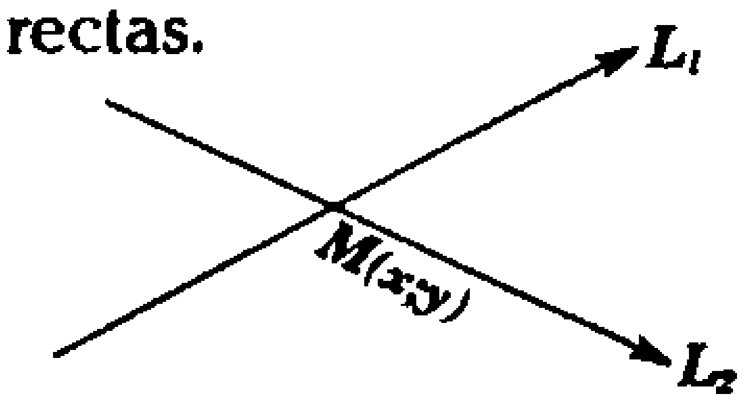
3) Pendiente de la recta conociendo su ecuación general.



$$m=-\frac{A}{B}$$ ***m***: pendiente

OBSERVACIÓN:

Coordenadas del punto de intersección de dos rectas.



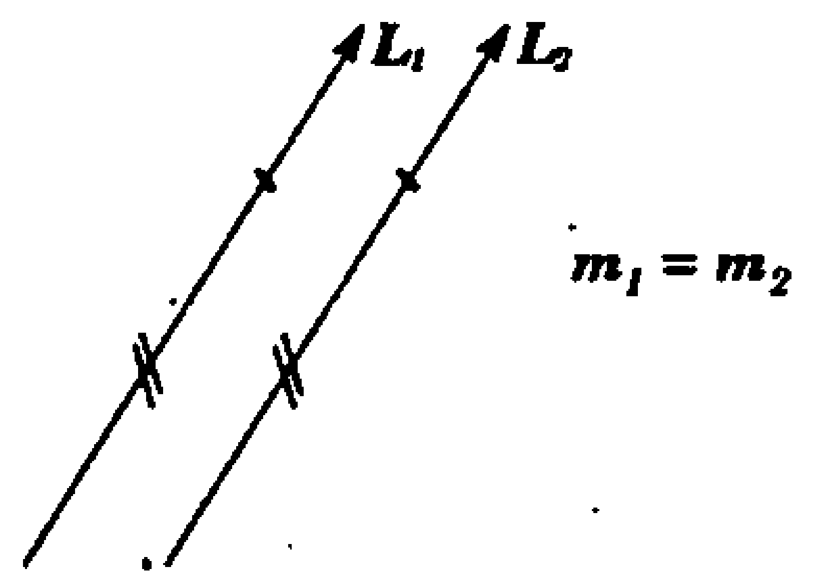
$$\left.\begin{array}{l} L_1:\ 2x+3y-12=0 \\ L_2:\ 3x+y-6=0 \end{array}\right\} \quad x=\frac{6}{7} \quad y=\frac{24}{7}$$

Resolviendo :

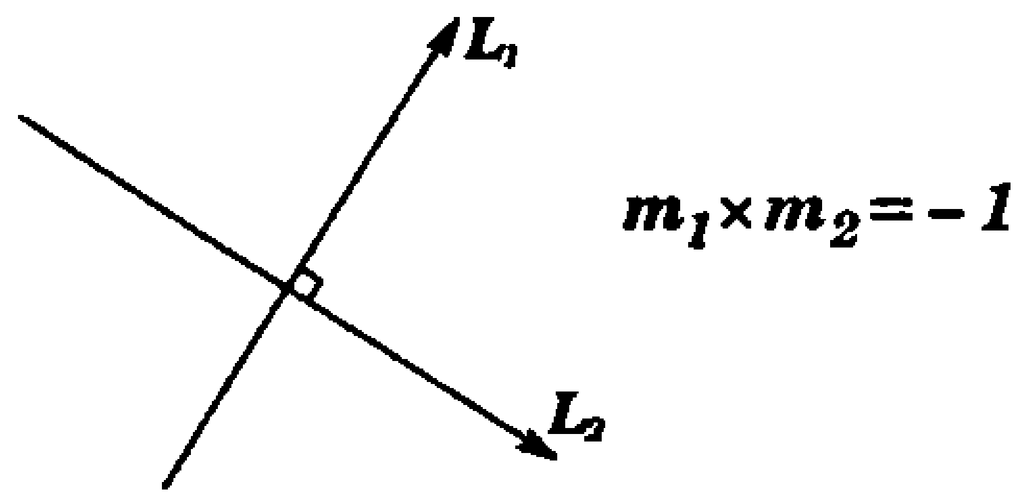
$$x=\frac{6}{7};\ y=\frac{24}{7}\Rightarrow M(x;y)=M\left(\frac{6}{7};\,\frac{24}{7}\right)$$

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

1) Cuando se tienen rectas paralelas sus pendientes son iguales .



2) Si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es igual a -1



EJEMPLO :

Se tienen *2* rectas paralelas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son : $L_1: 2x+3y+5=0$; $L_2: kx+7y-2=0$

Halle k

RESOLUCIÓN :

* Igualando las pendientes por ser paralelos :

$$\left.\begin{array}{l}\text{De } L_1 : m_1 = -\dfrac{2}{3} \\ \text{De } L_2 : m_2 = -\dfrac{k}{7}\end{array}\right\} \begin{array}{l} -\dfrac{2}{3} = -\dfrac{k}{7} \\ \dfrac{14}{3} = k \end{array}$$

EJEMPLO:

Se tienen *2* rectas perpendiculares L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son :

$$L_1: 6x-4y+5=0 \quad ; \quad L_2: 2x+ay+1=0$$

Halle a

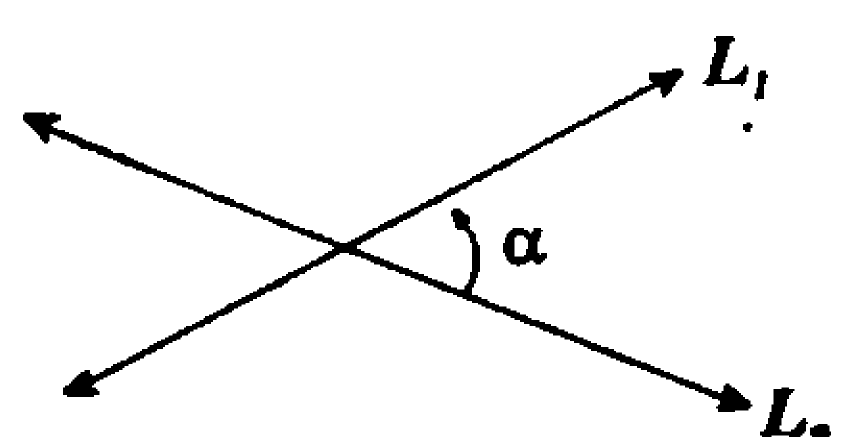
RESOLUCIÓN :

* Por ser perpendicualares L_1 y L_2 :

$$\left.\begin{array}{l}{}^{*}\text{De } L_1 : m_1 = \dfrac{3}{2} \\ {}^{*}\text{De } L_2 : m_2 = -\dfrac{2}{a}\end{array}\right\} \dfrac{3}{2} \times -\dfrac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = 3$$

CÁLCULO DEL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Conociendo las pendientes de las rectas que forman el ángulo puede calcular dicho ángulo.



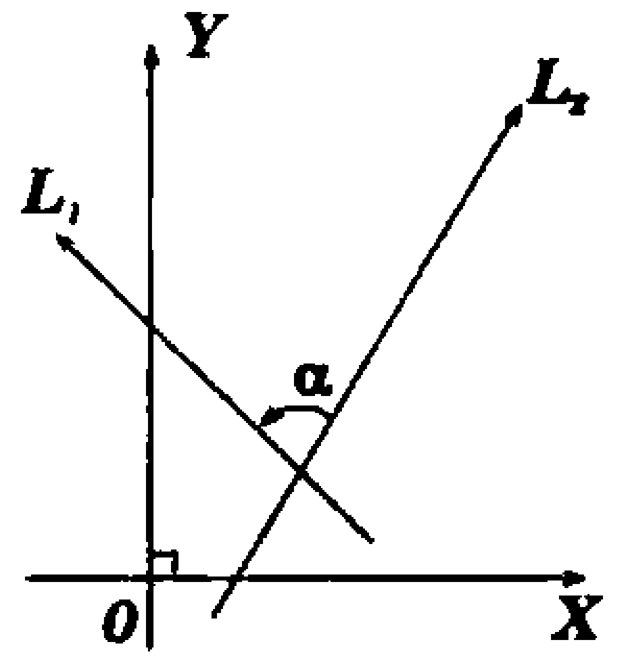
$$\boxed{tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}}$$

m_1 es la pendiente de la recta final (L_1) y m_2 es la pendiente de la recta inicial (L_2). Denominamos a L_1 ***Recta Final***, porque de acuerdo con la figura el lado final del ángulo está en L_1 , lo mismo sucede con L_2.

EJEMPLO :

Calcular el ángulo agudo formado por dos rectas cuyas pendientes son : -2 y 3

RESOLUCIÓN :



* Sea

$m_1 = -2$ y $m_2 = 3$

* Entonces :

$$tg\alpha = \frac{-2-3}{1+(-2)(3)} \Rightarrow tg\alpha = 1$$

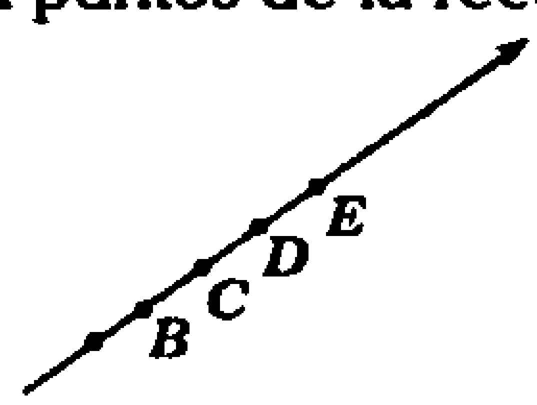
$$\Rightarrow \alpha = 45°$$

RECTA

La recta es un conjunto de puntos, tales cuando se toman dos puntos cualesquiera de ésta. la pendiente no varía.

EJEMPLO :

Si *A, B, C* y *D* son puntos de la recta *L,*



entonces se cumple que :

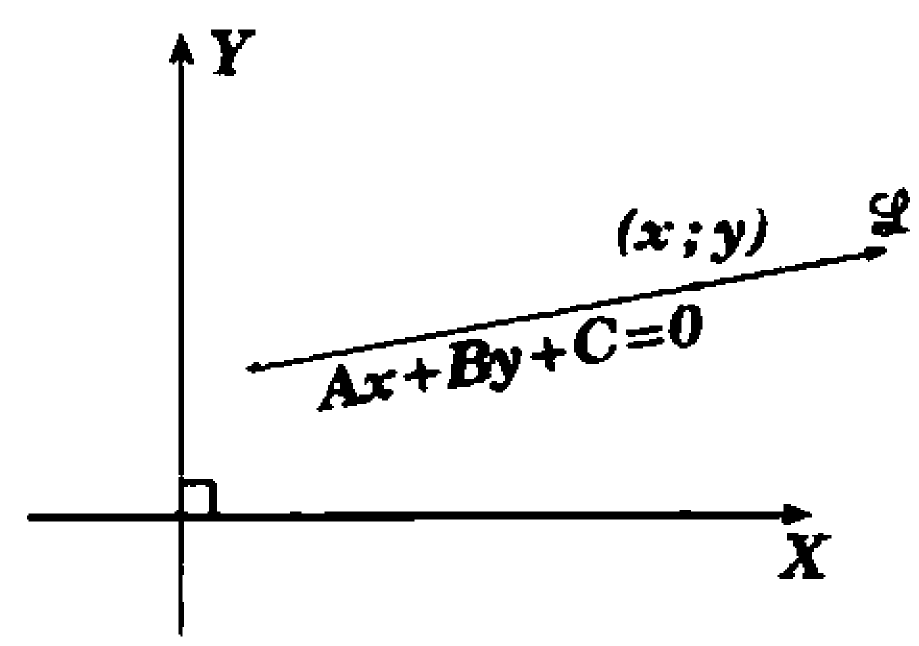
$$m_{AB} = m_{CD} = m_{BD} \ldots\ldots = m_L$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

La ecuación lineal de la forma $Ax + By + C = 0$, representa geométricamente la ecuación de una recta, así tenemos:

FORMA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Toda ecuación lineal de la forma $Ax+By+C=0$,se denomina ecuación lineal en variables x e y o de primer grado donde $(x ; y)$ pertenece a dicha recta. Esto es la ecuación general de una recta, se cumple para todo valor de x e y que satisface dicha ecuación.



* Del gráfico :

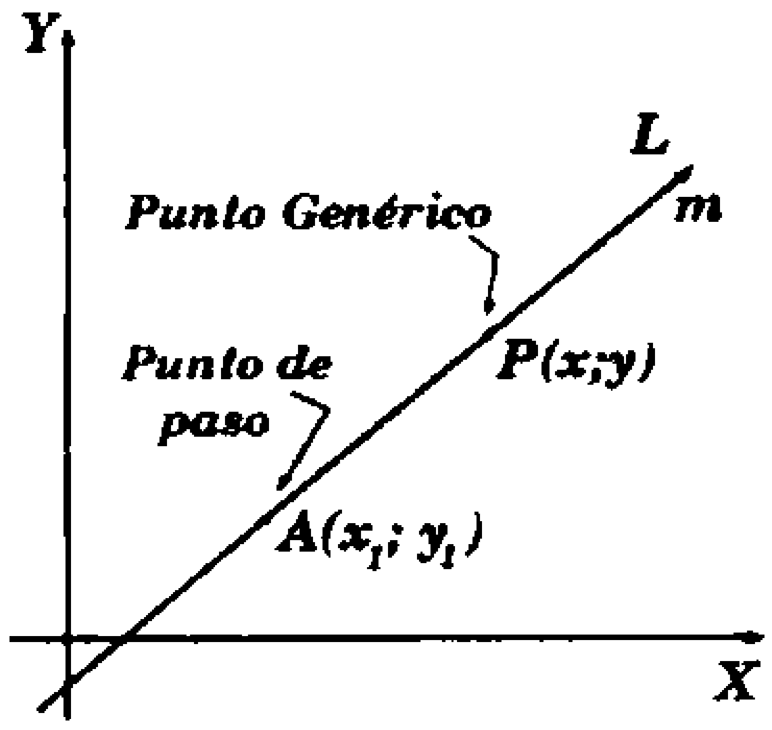
$\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$ Ecuación general

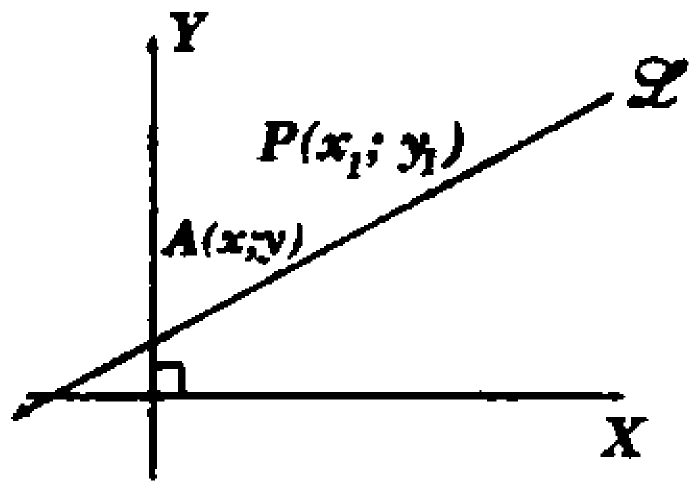
donde A, B y C son constantes , siendo m su pendiente.

$$\Rightarrow m = -\frac{A}{B}$$

FORMA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA DADO UN PUNTO Y SU PENDIENTE

La ecuación de una recta que pasa por un punto $P(x_1 ; y_1)$ y tiene una pendiente m es: $y-y_1=m(x-x_1)$





* Sea $A(x;y) \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, luego por cálculo de la pendiente

$$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

* Luego : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}: y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación punto pendiente

* Donde

$P(x_1;y_1)$: *punto de paso*

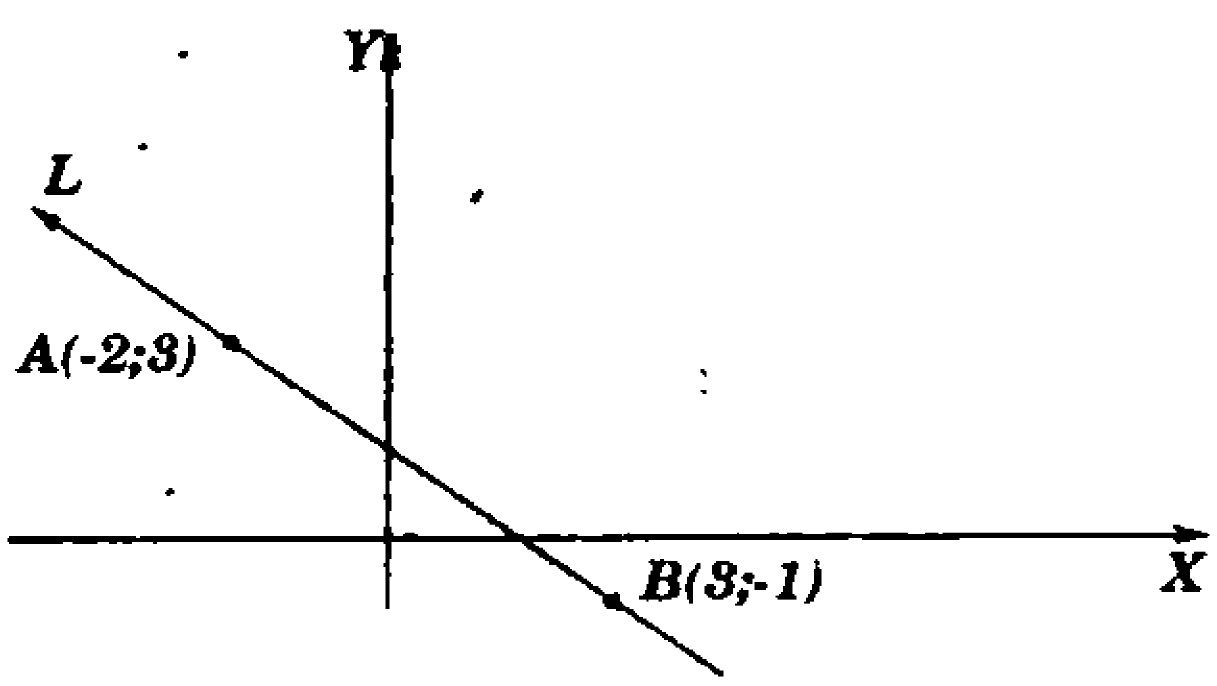
$A(x;y)$: *punto genérico*

m : *punto pendiente*

EJEMPLO :

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2;3)$ y $(3;-1)$.

RESOLUCIÓN :



* Para calcular la ecuación de la recta L, aplicamos:

$$y - y_1 = m(x-x_1)$$

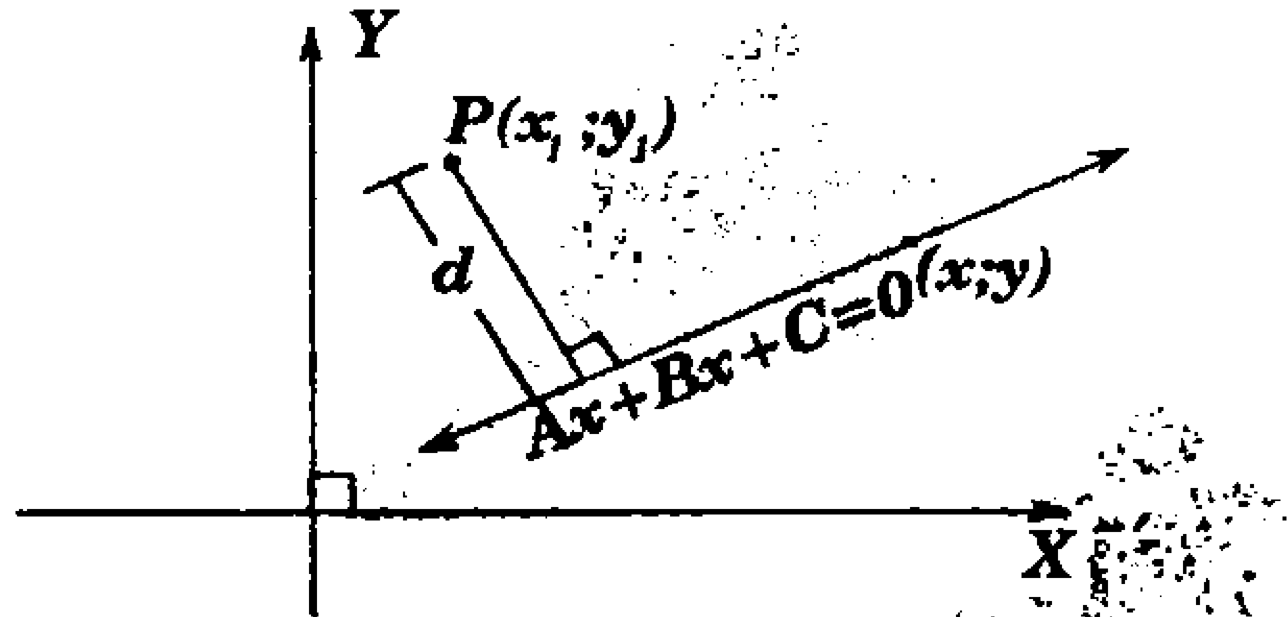
donde $(x_1; y_1)$ puede ser A ó B

$$\wedge m = \frac{3+1}{-2-3} = \frac{-4}{5} \Rightarrow y - 3 = -\frac{4}{5}(x+2)$$

* Luego : $4x + 5y - 7 = 0$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea $\mathscr{L}$ una recta cuya ecuación es de la forma : $Ax + By + C = 0$ y un punto $P(x_1; y_1)$ que no pertenece a dicha recta, luego la distancia del punto P a la recta L está dada por :



* Del gráfico : $d(p,\mathscr{L}) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$d(p,\mathscr{L})$: distancia del punto a la recta $\mathscr{L}$.

EJEMPLO 1 :

Hallar distancia del punto $(6;-5)$ a la recta $y=-\frac{2}{3}x+4$

RESOLUCIÓN :

$$d = \frac{\left|-5-\left(-\frac{2}{3}\right)6-4\right|}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+1}} \Rightarrow d = \frac{15\sqrt{13}}{13}$$

EJEMPLO 2 :

Hallar la distancia del punto $(-2 ;1)$ a la recta :

$$3x + 5y - 2=0$$

RESOLUCIÓN :

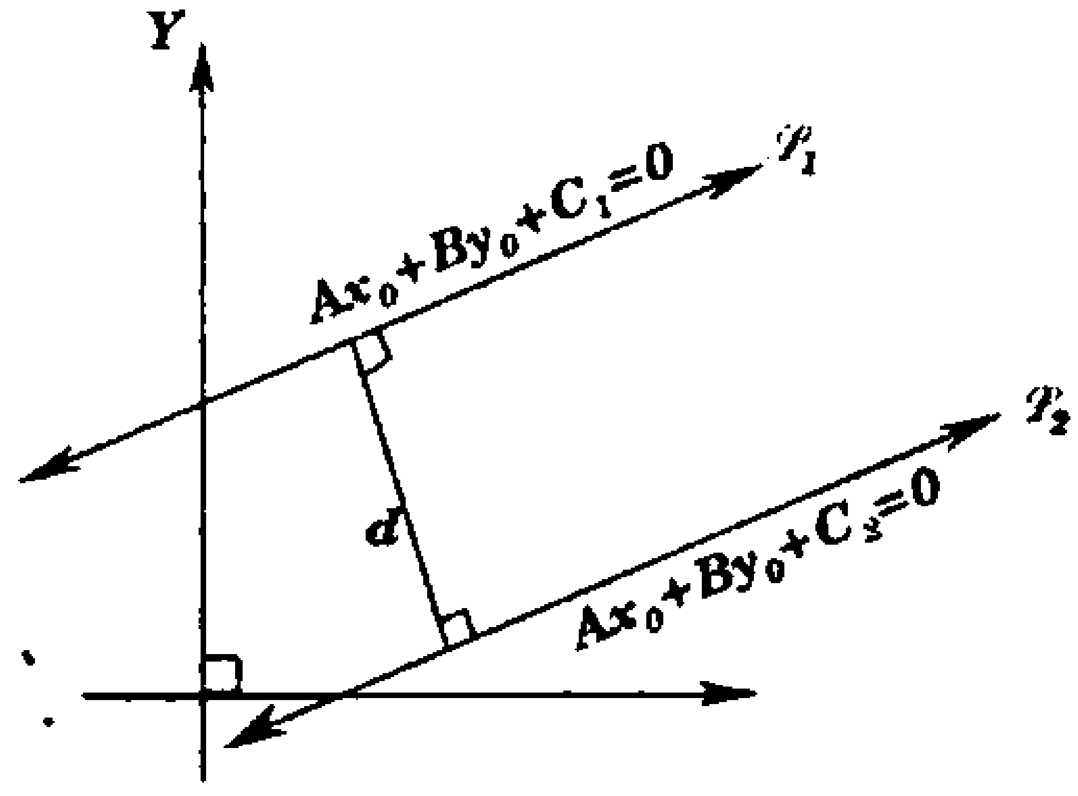
$$d=\frac{|3(-2) + 5(-1)-2|}{\sqrt{3^2+5^2}} \Rightarrow \boxed{d=\frac{13\sqrt{34}}{34}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Sean las rectas paralelas $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ cuyas ecuaciones son :

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}: Ax_0 + By_0 + C_1=0$ $\quad \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}: Ax_0 + By_0 + C_2=0$

* Luego la distancia entre dichas rectas está dado por :



* Del gráfico : $\boxed{d(\mathscr{L}_1 ; \mathscr{L}_2) = \dfrac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$

PUNTO DE INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Las coordenadas del punto de intersección de dos rectas tienen que satisfacer las ecuaciones de ambas rectas, puesto que pertenece a ambas. Por consiguiente para hallar las coordenadas del punto de intersección de dos rectas bastará resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

EJEMPLO :

Hallar las coordenadas del punto intersección de las rectas

$$y = 2x-3 \quad \text{y} \quad 3x + 2y - 6=0$$

RESOLUCIÓN :

$y = 2x- 3$..............................(I)

$3x+ 2y - 6 = 0$....................(II)

* De (I) en (II) :

$3x + 2(2x-3)-6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{12}{7}$

$\Rightarrow$ Punto de intersección $(x ; y)=\left(\dfrac{12}{7};\dfrac{3}{7}\right)$

NOTAS :

* Cuando se tiene la ecuación de una recta, se despeja "*y*" para calcular la pendiente.

EJEMPLO :

* Sea : $L = 3y - 6x+10 = 0$

Se tiene : $3y = 6x -10$

$$\Rightarrow y=2x - \frac{10}{3} \Rightarrow y = 2x + \left(\frac{-10}{3}\right)$$

$$\begin{cases} m = 2 \Rightarrow \textit{Pendiente} \\ 0 ;\left(-\dfrac{10}{3}\right) \Rightarrow \textit{Intercepto con "y"} \end{cases}$$

* Si un punto $(a ; b)$ pertenece una recta "*L*" de ecuación :

$Ax+By+C=0$, entonces debe satisfacer su ecuación, es decir :

$(a;b)\in L : Ax+Bx+C=0 \Rightarrow \boxed{Aa+Bb+C=0}$

EJEMPLO :

El punto $(a ; 5)$ pertenece a la recta de ecuación :

$$2x-3y-12=0$$

Calcular el valor de "*a*".

RESOLUCIÓN :

$(a; 5) \in L : 2x - 3y - 12=0 \Rightarrow 2a - 3(5) - 12=0$

$\Rightarrow 2a - 15 - 12=0 \Rightarrow 2a=27 \Rightarrow a=\dfrac{27}{2}$

MÉTODO PARA GRAFICAR UNA RECTA

Para graficar una recta, calculamos los interceptos con los ejes coordenados, para eso hacemos $(x=0)$ e $(y=0)$ en la ecuación, obteniendo los interceptos luego la recta pasa por esos puntos.

EJEMPLO :

Graficar la recta cuya ecuación es $2x - 3y - 6 = 0$

RESOLUCIÓN :

* $x=0$ en $2x - 3y - 6 = 0$

$\Rightarrow 2(0) - 3y - 6 = 0$

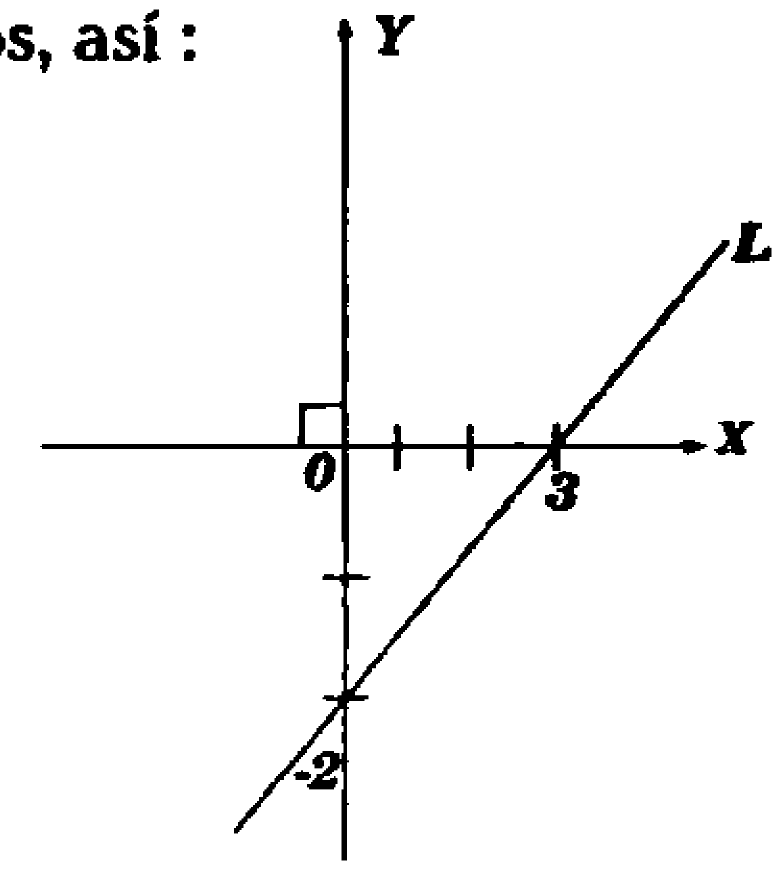
$\Rightarrow -3y = 6 \Rightarrow y= -2$ *Intercepto con el eje y*

* $y=0$ en $2x - 3y - 6=0$

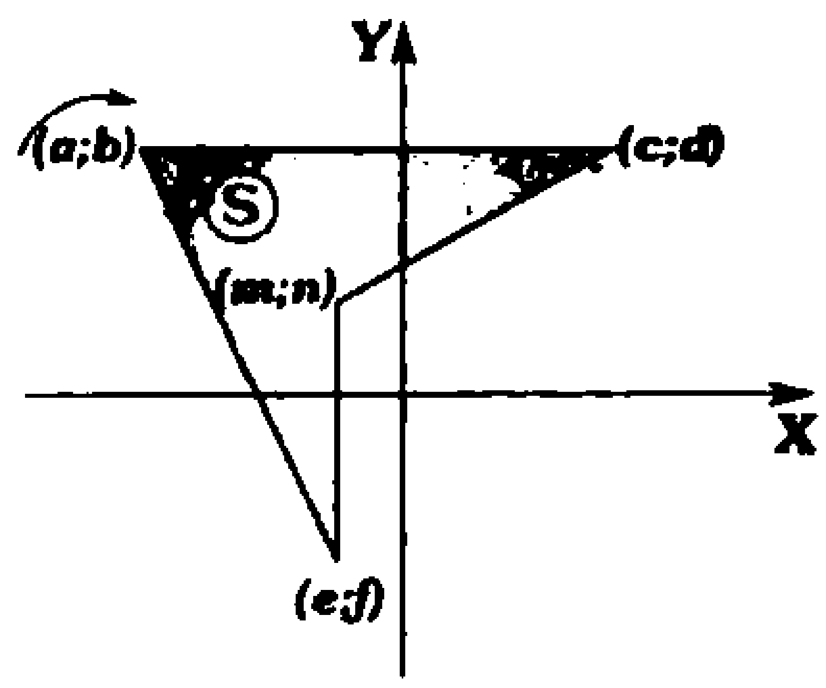
$\Rightarrow 2x - 3(0) - 6=0$

$\Rightarrow 2x= 6 \Rightarrow x= 3$ *Intercepto con el eje x*

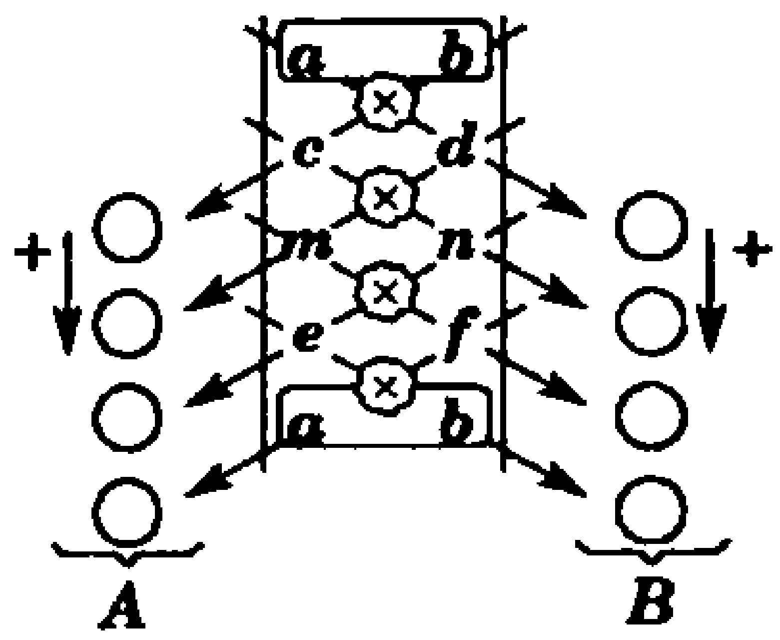
* Ubicamos los interceptos en los ejes y trazamos la recta por ellos, así :



ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL CONOCIENDO LAS COORDENADAS DE SUS VÉRTICES



Ordenando las coordenadas de los vértices en una matriz, en el sentido que indica la flecha.



$$\boxed{S = \frac{1}{2}|A - B|}$$

* Al ordenar los pares ordenados en la matriz siempr inicias y terminas con el mismo par ordenado.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que contiene el par de puntos. $A(-8;-4)$ y $B(5;9)$.

A) -1 y $135°$ B) $\frac{3}{5}$ y $37°$ C) $\frac{1}{2}$ y $60°$

D) 1 y $45°$ E) $-\frac{1}{2}$ y $53°$

RESOLUCIÓN :

Calculando la pendiente: $m=\dfrac{(-4)-(9)}{(-8)-(5)}=\dfrac{-13}{-13}=1$

Además :

$$m=tg\theta=1 \Rightarrow \theta=45° \qquad m=1\ ;\ \theta=45°$$

RPTA : "D"

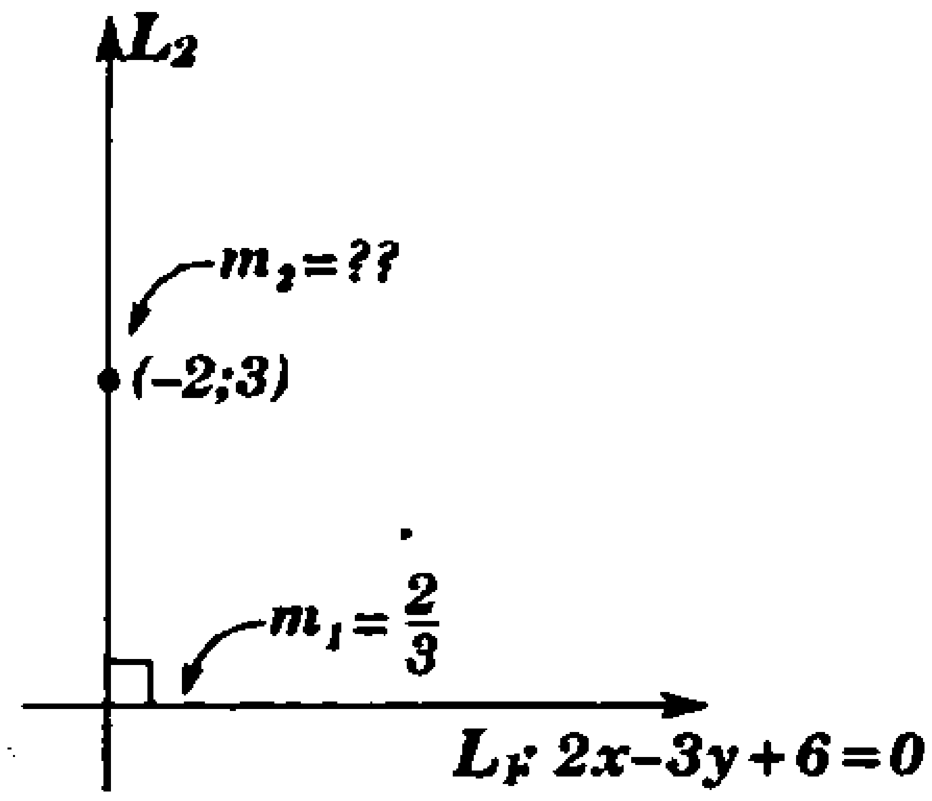
PROBLEMA 2 :

Hallar la ecuación de la recta L_2 que pasa por el punto $(-2;3)$ y es perpendicular a la recta $2x-3y+6=0$

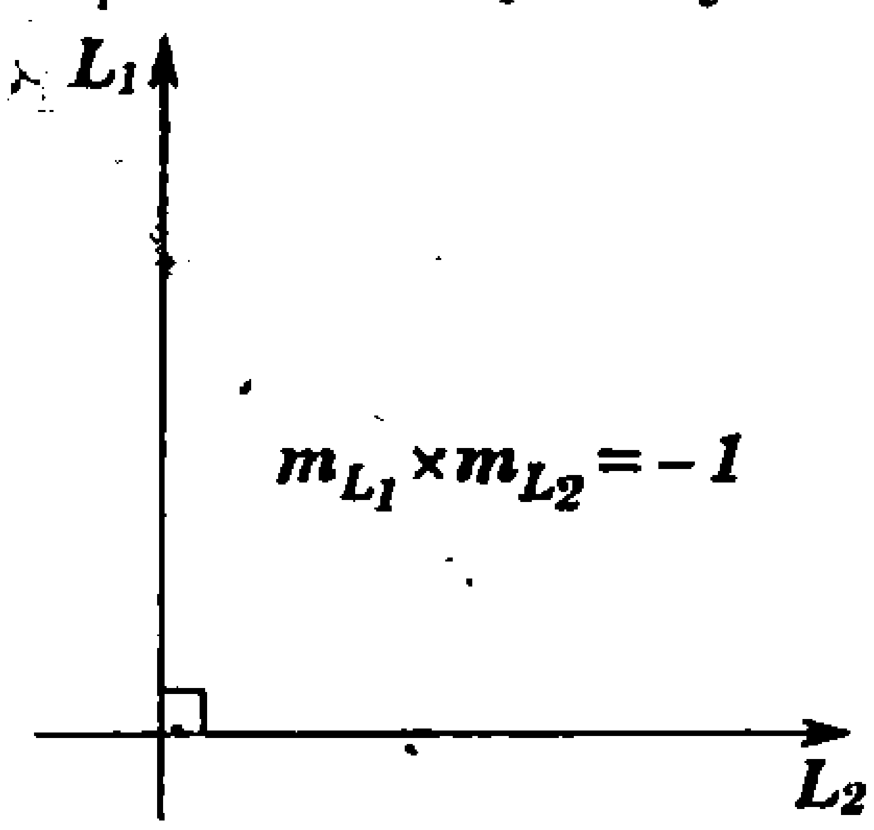
A) $3x-2y=0$ B) $2x-3y=0$ C) $3x+2y=0$

D) $2x+2y=0$ E) $2x-2y=0$

RESOLUCIÓN :



Recordando :



$$m_{L_1}\times m_{L_2}=-1$$

$$m_{L_2}\cdot\frac{2}{3}=-1 \Rightarrow m_{L_2}=-\frac{3}{2}$$

Luego :

$$L_2:\ y-3=-\frac{3}{2}(x+2) \qquad L_2:\ 3x+2y=0$$

RPTA : "C"

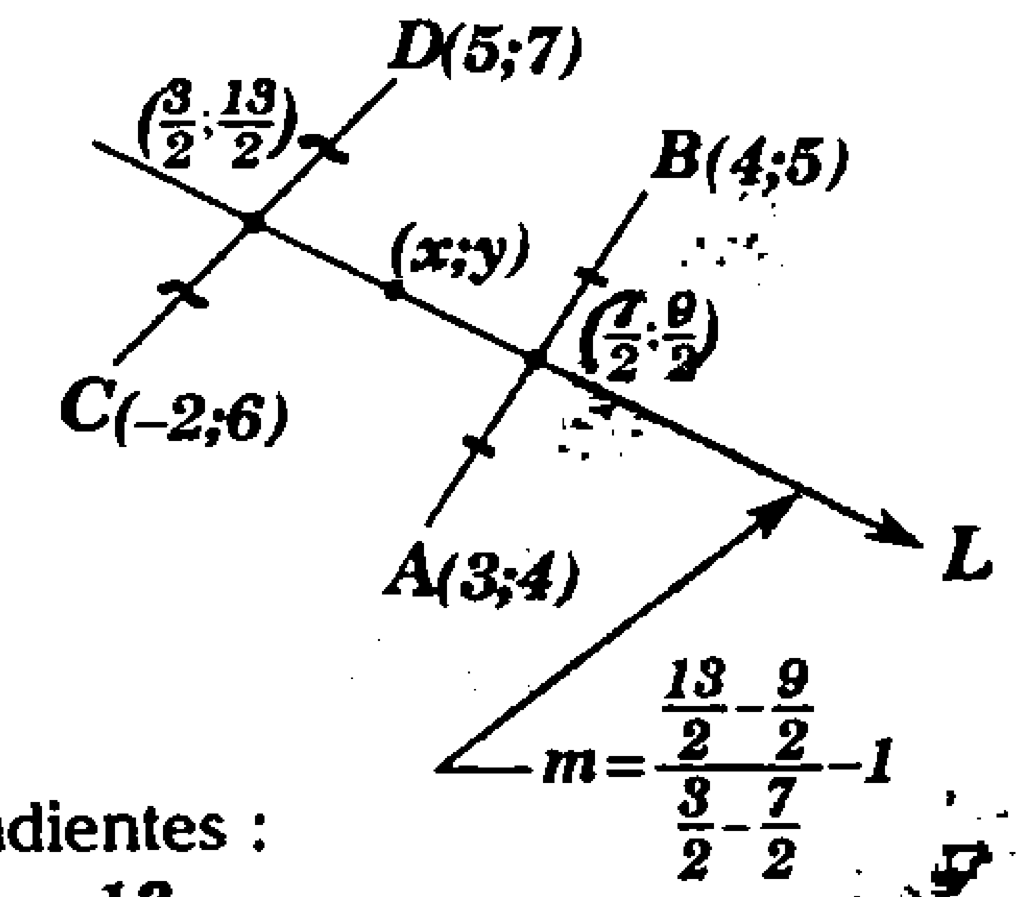
PROBLEMA 3 :

La ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, siendo . $A=(3;4)$, $B=(4;5)$, $C=(-2;6)$, $D=(5;7)$, es

A) $x+y-5=0$ B) $x-5+y=0$ C) $x-y-5=0$

D) $x+y+5=0$ E) $x+2y-3=0$

RESOLUCIÓN :



Por pendientes :

$$\overline{L}:\ \frac{y-\frac{13}{2}}{x-\frac{3}{2}}=-1\ \ y-\frac{13}{2}=x+\frac{3}{2} \Rightarrow x+y+5=0$$

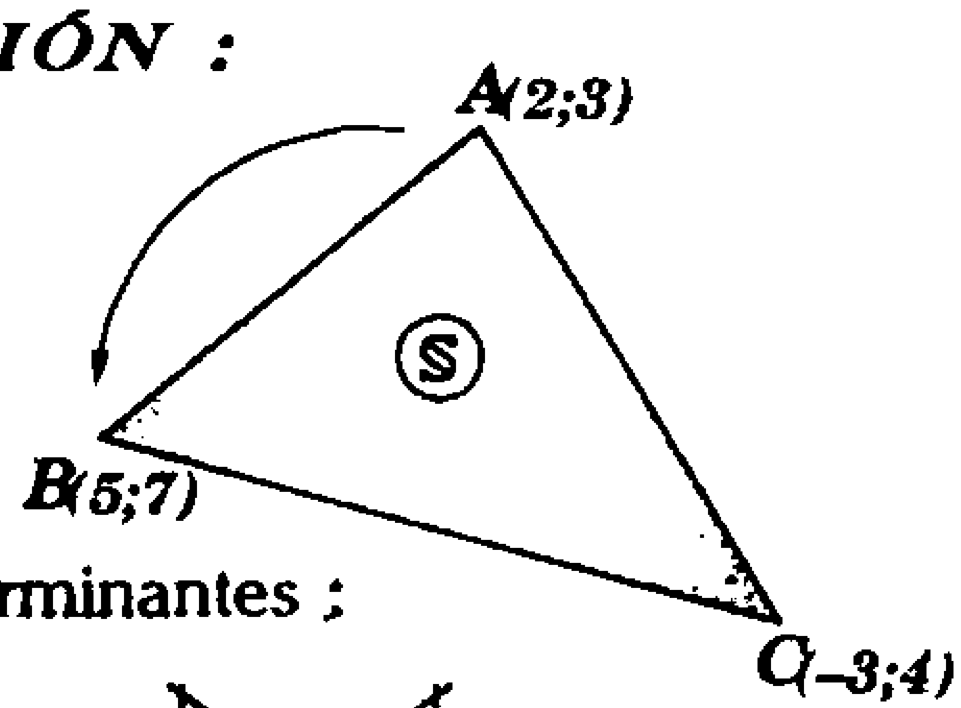
RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

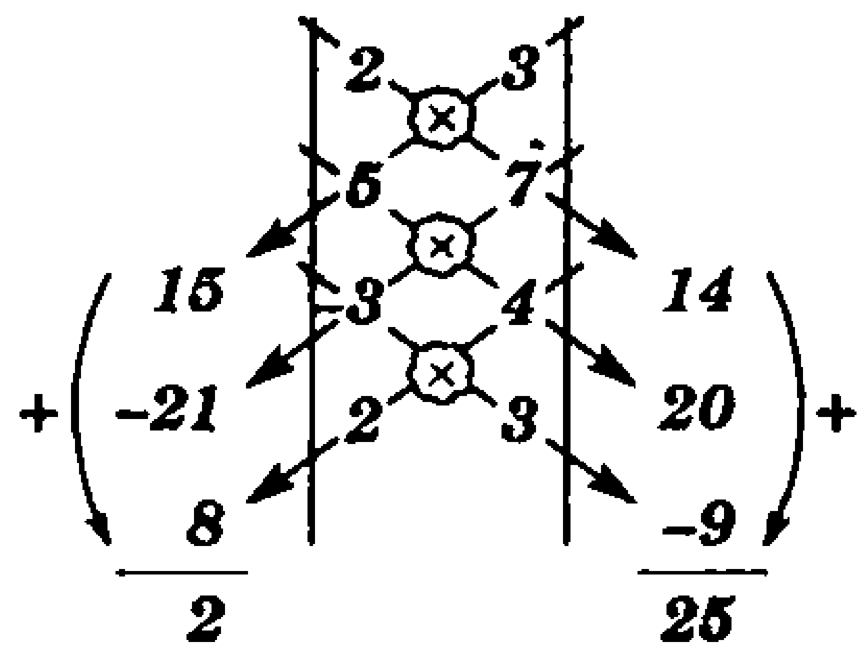
Hallar el área de un triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas $A(2;3)$, $B(5;7)$ y $C(-3;4)$.

A) $12\ \mu^2$ B) $11,5\ \mu^2$ C) $12,5\ \mu^2$ D) $21\ \mu^2$ E) $9,5\ \mu^2$

RESOLUCIÓN :



Aplicando determinantes ;



$$S=\frac{|2-25|}{2}=\frac{|-23|}{2}=\frac{23}{2}=11,5$$

RPTA : "B"

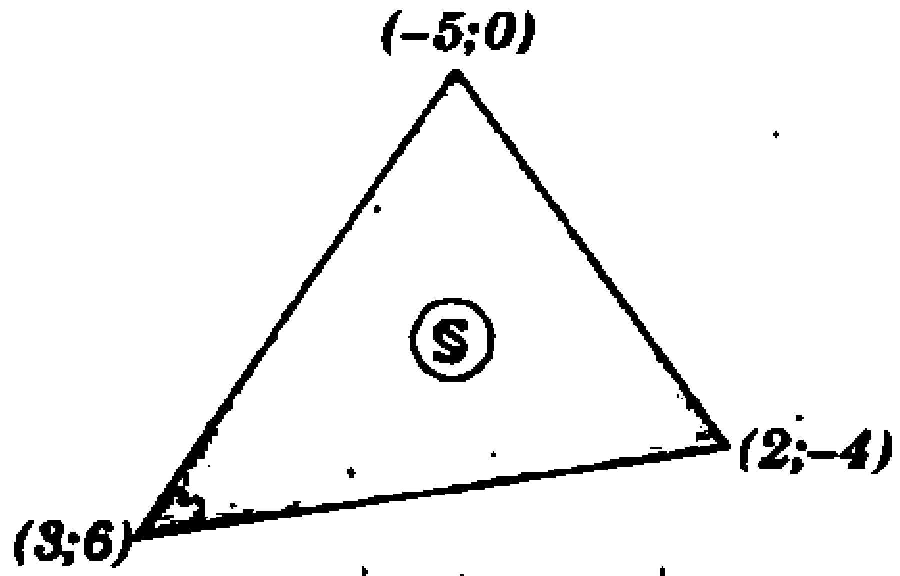
PROBLEMA 5 :

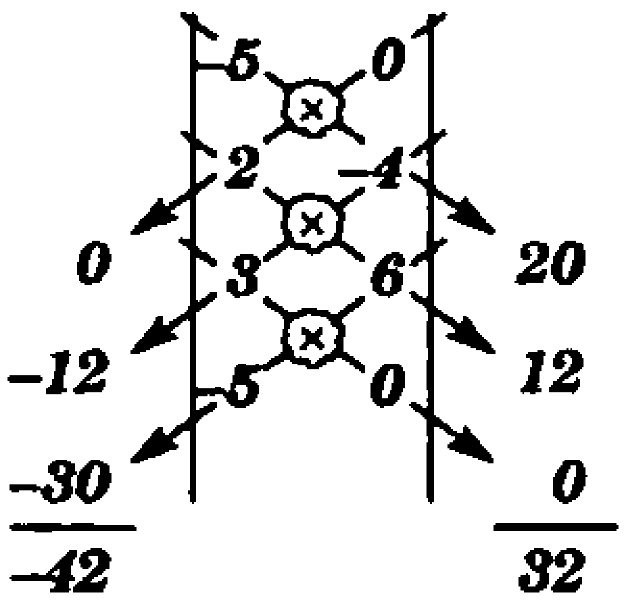
Lenín, posee un terreno de forma triangular determinado por los puntos $(-5;0)$, $(2;-4)$ y $(3;6)$; en la cual deberá sembrar pasto para alimentar a su ganado .

Hallar el área total del terreno que deberá trabajar .

A) $29\ \mu^2$ B) $17\ \mu^2$ C) $39\ \mu^2$ D) $37\ \mu^2$ E) $25\ \mu^2$

RESOLUCIÓN :





Luego : $S=\frac{|-42-32|}{2}=37u^2$

RPTA : "D"

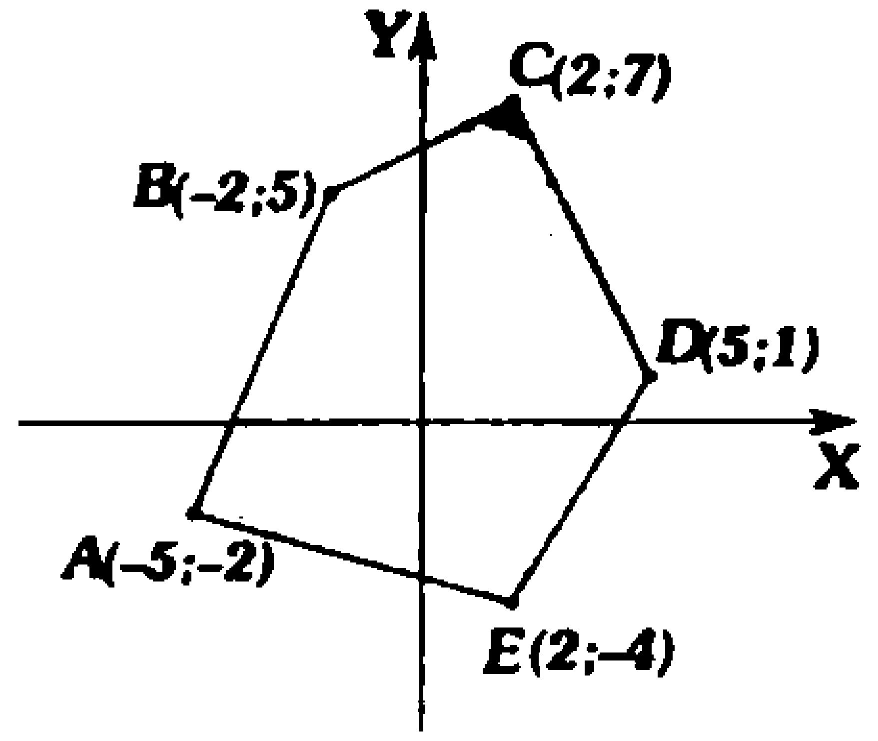
PROBLEMA 6 :

Calcular el área de un pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas

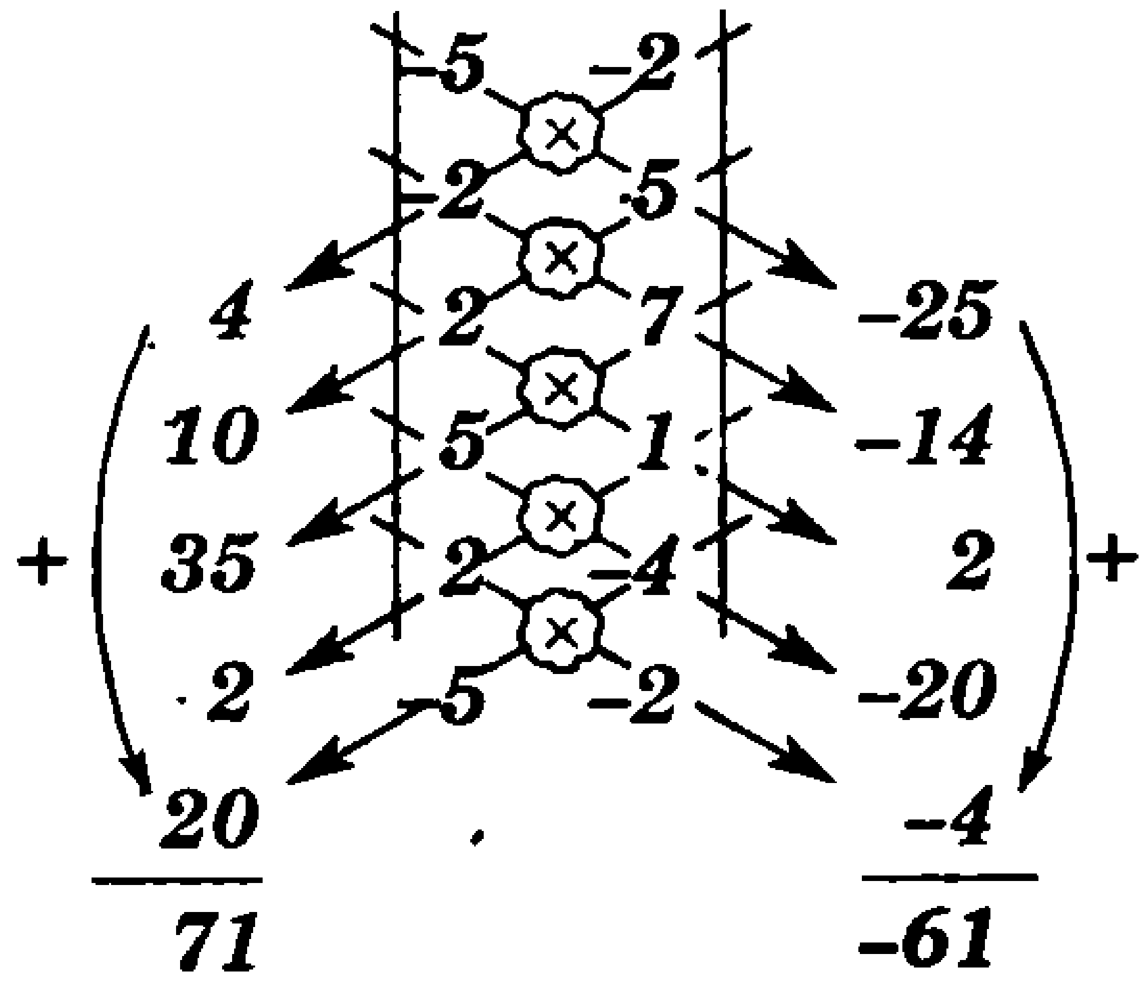
A(– 5; – 2), B(– 2; 5), C(2; 7), D(5; 1) y *E(2; – 4).*

A) 66 μ² B) 72 μ² C) 54 μ² D) 48 μ² E) 32 μ²

RESOLUCIÓN :



Hallando el área por determinante :



Área $=\frac{|71-(-61)|}{2}=\frac{132}{2}=66\ u^2$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Hallar el valor de *"n"* para que la recta: $3nx+5y+n=2$ pase por el punto *(–1; 4)*.

A) 3 B) –3 C) –7 D) 9 E) 6

RESOLUCIÓN :

Según el dato del problema podemos decir que:

$$(-1;4)\in\overline{L}\ :3nx+5y+n=2$$

Reemplazando : $3n(-1)+5(4)+n=2$

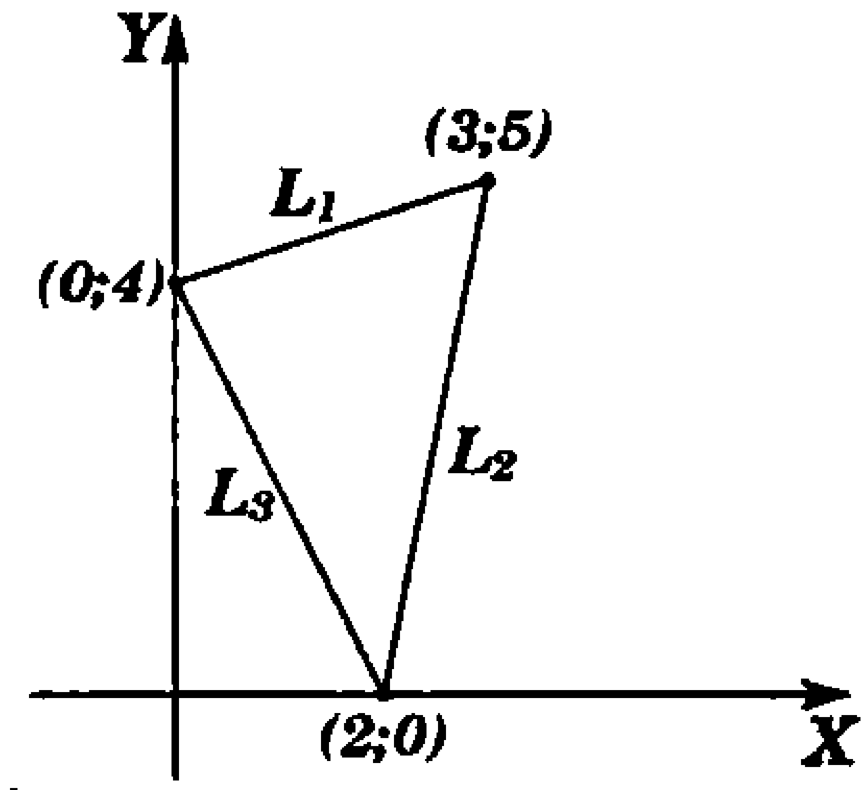
Resolviendo : $n=9$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

Hallar : $a+b+c$, si $L_1: x-3y+a=0$ $L_2: y=5x+b$ y $L_3: y=-2x+c$

A) 0
B) –5
C) 4
D) –4
E) 6



RESOLUCIÓN:

Toda coordenada perteneciente a una recta debe cumplir la ecuación: $(0;4)\in L_1$ y L_3:

$L_1: x-3y+a=0 \Rightarrow a=12$
↓ ↓
0 4

$L_3: y=-2x+c \Rightarrow c=4$
↓ ↓
4 0

$(2;0)\in L_2$: $y=5x+b \Rightarrow b=-10$ $12-10+4=6$
↓ ↓
0 2

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dado el segmento *AB* donde *A(2;3)* y *B(11;10)*; calcular la suma de sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

02 Dado un triángulo *ABC*, donde *AB = BC*, hallar el perímetro si *A(–3; 1); B(1;4)* y *C(5 ; 1)*

A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22

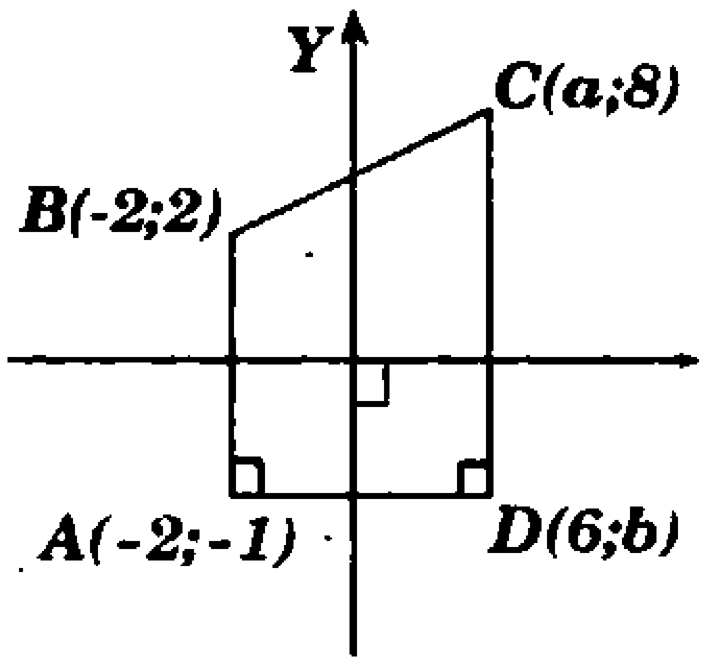
03 Hallar coordenadas del vértices *C* de un triángulo equilátero *ABC*, si *A=(–3 ;4)* y *B=(–3 ;– 2)*, además la abscisa de *A* es menor que la abscisa de *C*.

A) $(-3+3\sqrt{3};1)$ B) $(-3\sqrt{3}+3;1)$ C) $(-3\sqrt{3};1)$

D) $(3;1+3\sqrt{3})$ E) $(3\sqrt{3};-1)$

04 Hallar el perímetro de trapecio *ABCD*.

A) 26 u
B) 27 u
C) 28 u
D) 30 u
E) 32 u



05 Los vértices de un triángulo son los puntos *A(–1; – 1); B(–1; 12) C(11; 4)*. Calcular la longitud de la proyección del lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 6 *B) 8* *C) 10* *D) 12* *E) 14*

06 Determinar el valor de «*b*» si la distancia entre los puntos *A(7;1)* y *B(3; b)* es *5*. *(b < 0)*

A) -1 *B) -2* *C) – 8* *D) -5* *E) – 3*

07 Se tiene un triángulo *ABC* , donde *A(6;5), B(3;7)* y *C(2;–1)* determinar la naturaleza del triángulo.

A) Equilátero *B) Acutángulo* *C) Escaleno*
D) Obtusángulo *E) Rectángulo*

08 Encontrar un punto sobre el eje de las ordenadas que equidista de los puntos *(3;1)* y *(6; 2)*

A) (0; 3) *B) (0; 4)* *C) (0;5)* *D) (0; 6)* *E) (0; 7)*

09 Hallar el perímetro de un triángulo equilátero si dos de sus vértices son : *(–1;–1)* y *(5; 7)*

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 60* *E) 120*

10 se tiene un triángulo *ABC* , de vértices *A(6; 5), B (3; 7)* y *C(2;–1)*. Calcular la longitud de la mediana relativa al lado *AC*.

A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{21}$ C) $\sqrt{26}$ D) $\sqrt{31}$ E) $\sqrt{41}$

11 Calcule las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$, si *A(a + 3 ; b + 4)* y *B(7 – a ; 6 – b)*

A) (2; 3) *B) (3; 2)* *C) (5; 3)* *D) 5, 5)* *E) (5; 4)*

12 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC* donde las longitudes de sus lados son proporcionales a números consecutivos. Si *A(–1; 2)* y *B(– 4;2)*, calcular el perímetro.

A) 9 *B) 10* *C) 11* *D) 12* *E) 13*

13 Si *A(2;5)* y *B(6;8)* son los extremos de un diámetro de una circunferencia hallar su longitud.

A) 3π *B) 4 π* *C) 5 π* *D) 8 π* *E)10 π*

14 El lado de un rombo es igual a $5\sqrt{10}$ y dos de sus vértices opuestos son los puntos *P(4; 9)* y *Q(–2; 1)*.Calcular el área del rombo.

A) 80 *B) 150* *C) 90* *D) 100* *E) 65*

15 El triángulo de vértices *(3;2), (5;– 4)* y *(1;– 2)* es :

A) Isósceles *B) Rectángulo* *C) Equilátero*
D) Escaleno *E) Rectángulo – Isósceles*

16 El punto *P(a ; a+1)*, es un punto que equidista de *A(2, 1)* y *B(–6;5)*. Calcular de valor de «*a*».

A) – 2 *B) – 4* *C) – 6* *D) – 3* *E) – 10*

17 La ordenada de un punto es *8* y su distancia al punto *B(5; – 2)* es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto.

A) 13 *B) –13* *C) 3* *D) –3* *E) Hay 2 respuestas*

18 Uno de los puntos extremos de un segmento es *(7;8)* y su punto medio es *(4;3)*. Hallar el otro extremo.

A) (–1;–2) *B) (1; – 2)* *C) (1; 2)* *D) (–1; 2)* *E) (2; 1)*

19 Cuál es perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son: *(–3;–1), (0;3), (3;4), (4;–1)*

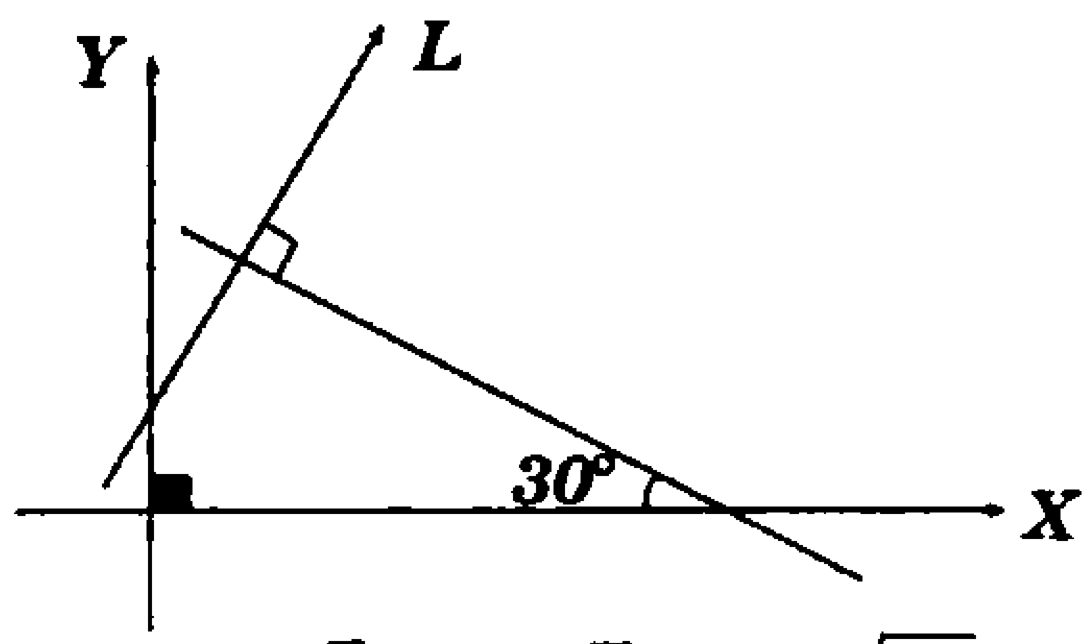
A) $12+\sqrt{10}+\sqrt{26}$ B) $6+\sqrt{10}+\sqrt{26}$ C) $18+\sqrt{10}+\sqrt{26}$
D) $\sqrt{10}+\sqrt{26}$ E) $8+\sqrt{10}+\sqrt{26}$

20 En un triángulo *ABC* los puntos medios de los lados *AB, AC* y *BC* son respectivamente *(1;3), (4;2), (-3;1)*. Hallar el vértice *A*.

A) (7; 4) *B) (5,7)* *C) (5;8)* *D) (8,4)* *E) (4;7)*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar la pendiente de la recta «*L*».



A)–1/3 *B) 1/3* C) $-\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3/3}$

02 Hallar la intersección de las rectas:

$$x + 9y - 6 = 0 \ \wedge \ 9x - y - 21 = 0$$

A) (0;3/2) *B) (0;–3/2)* *C) (5/2;0)*
D) (5/2;3/2) *E) (0;7)*

03 El punto $(-3;5)$ pertenece a la recta:

$$3x-2y+k=0$$

Hallar «k».

A) 8 B) 2 C) 17 D) 6 E) 19

04 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(1;2)$ y $(5;0)$

A) $y-x=5$ B) $y=3x$ C) $y+x=5$
D) $2y+x=5$ E) $2y-x=5$

05 Las rectas de pendientes: $m_0=\frac{3}{4}\wedge m_1=-1$ se interceptan . Hallar el mayor ángulo que forman.

A) 108° B) 98° C) 128° D) 138° E) 118°

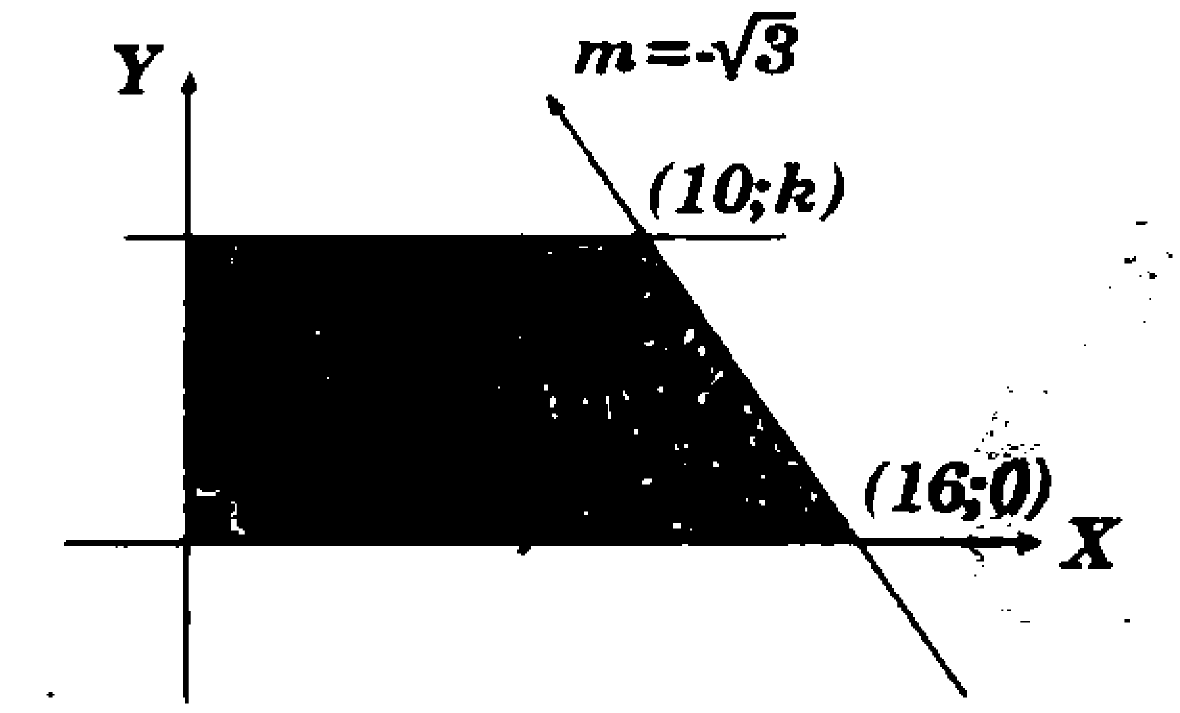
06 Una recta tiene un ángulo de inclinación de 135° y pasa por los puntos $P(5;-1)=$ y $Q(k;3)$. Hallar «k»

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) –2

07 Una recta pasa por los puntos: $(-3;1),(0;4)$ y $(8;n)$.Hallar «n».

A) 6 B) 12 C) 4 D) 8 E) 7

08 Hallar el área del trapecio sombreado.



A) $78\ u^2$
B) $78\sqrt{3}\ u^2$
C) $50\sqrt{3}\ u^2$
D) $100\ u^2$
E) $100\sqrt{3}\ u^2$

09 De los siguientes puntos , cual no pertenece a la recta: $y-3x+8=0$

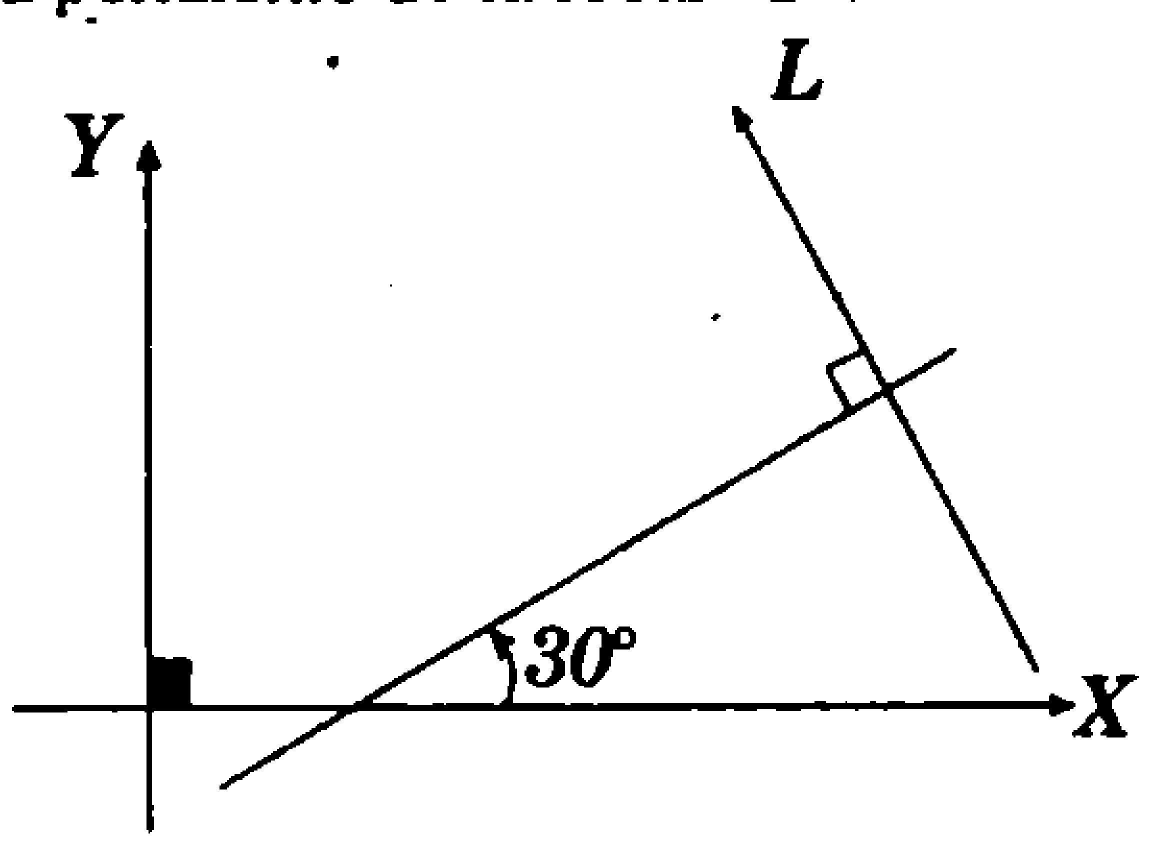
A) $(-4;20)$ B) $(0;-8)$ C) $(3;1)$ D) $(-1;-11)$ E) $(2;-4)$

10 Hallar el punto de intersección de las rectas:

$$x+2y-5=0\wedge 2x-y-10=0$$

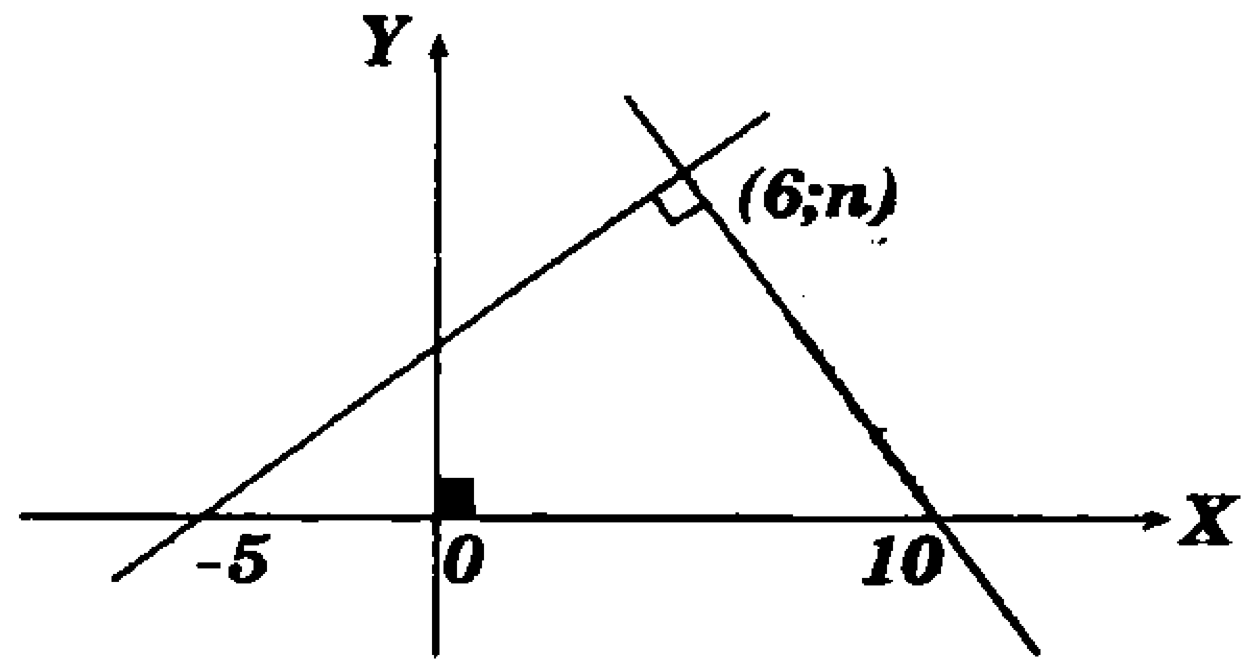
A) $(1;-2)$ B) $(0;-8)$ C) $(5;-5)$ D) $(0;-5)$ E) $(5;0)$

11 Hallar la pendiente de la recta «L».



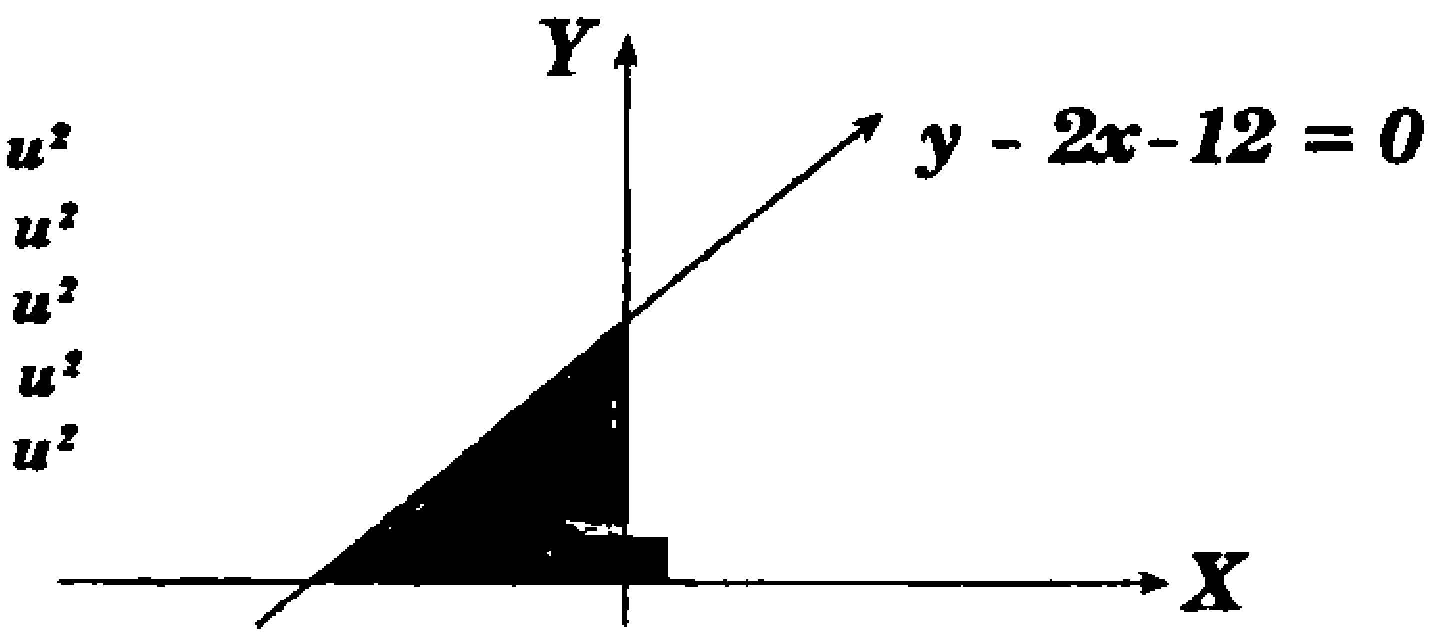
A) $-1/3$
B) $-3\sqrt{3}/3$
C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{3}$
E) $-\sqrt{3}$

12 Hallar «n» en la figura.



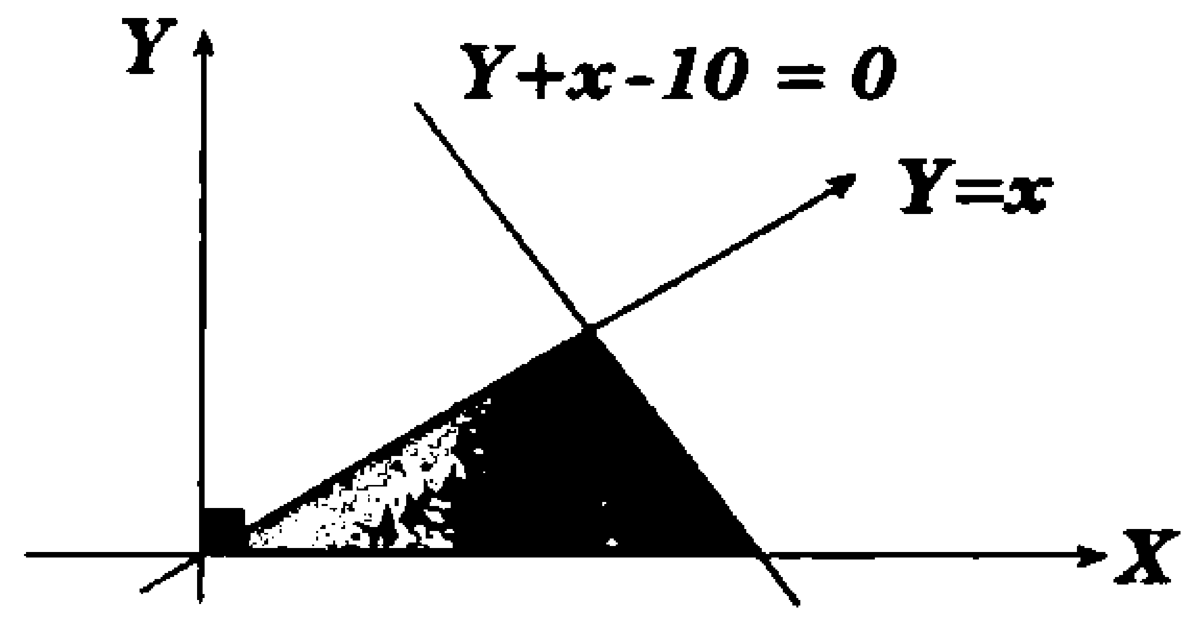
A) 11
B) $-\sqrt{11}$
C) $\sqrt{11}$
D) $-2\sqrt{11}$
E) $2\sqrt{11}$

13 Hallar el área del triángulo sombreado.



A) $46\ u^2$
B) $20\ u^2$
C) $40\ u^2$
D) $18\ u^2$
E) $36\ u^2$

14 Hallar el área del triángulo sombreado.



A) $100\ u^2$
B) $20\ u^2$
C) $50\ u^2$
D) $25\ u^2$
E) $40\ u^2$

15 Hallar la ecuación de una recta que tiene un ángulo de inclinación de 120° y que pasa por el punto $(3\sqrt{3}:-6)$

A) $y=-\sqrt{3}x$ B) $y-2x+\sqrt{3}=0$ C) $y=\sqrt{3}x-3=0$
D) $y-\sqrt{3}+1=0$ E) $y-\sqrt{3}x$

16 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $(-5;0)$ y $(0;4)$

A) $x-y=20$ B) $5x-4y=20$ C) $y-4x=20$
D) $5y-4x=20$ E) $x+y=20$

17 Hallar la ecuación de la recta «L» que pasa por el punto $(1;2)$ y que perpendicular a la recta:

$$3x-4y+12=0$$

A) $4y+3x-10=0$ B) $3x-y+20=0$ C) $x+y-10=0$
D) $4x+3y-10=0$ E) $x+y-20=0$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) C	2) A	3) A	4) D	5) B	6) B	7) E	8) C	[illegible]	10) C
11) D	12) D	13) C	14) B	15) E	16) C	17) E	[illegible]	19) A	20) D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1) D	2) D	3) E	4) D	5) B	6) C	7) B	8) B	9) E	10) E
11) E	12) E	13) E	14) D	15) C	[illegible]	17) D			

POLEAS y ENGRANAJES

CAPITULO 047

INTRODUCCION :

La ciencia que trata de las leyes que rigen el movimiento de las máquinas, sin considerar a las fuerzas que lo producen se llama *CINEMÁTICA*.

MECANISMO :

Es una combinación de partes resistentes al movimiento dispuestas de modo tal que el movimiento que una produzca, también se de en las demás , según un dispositivo que dependa de la combinación formada .

POLEA : un dispositivo que cambia o trasmite la forma del movimiento.

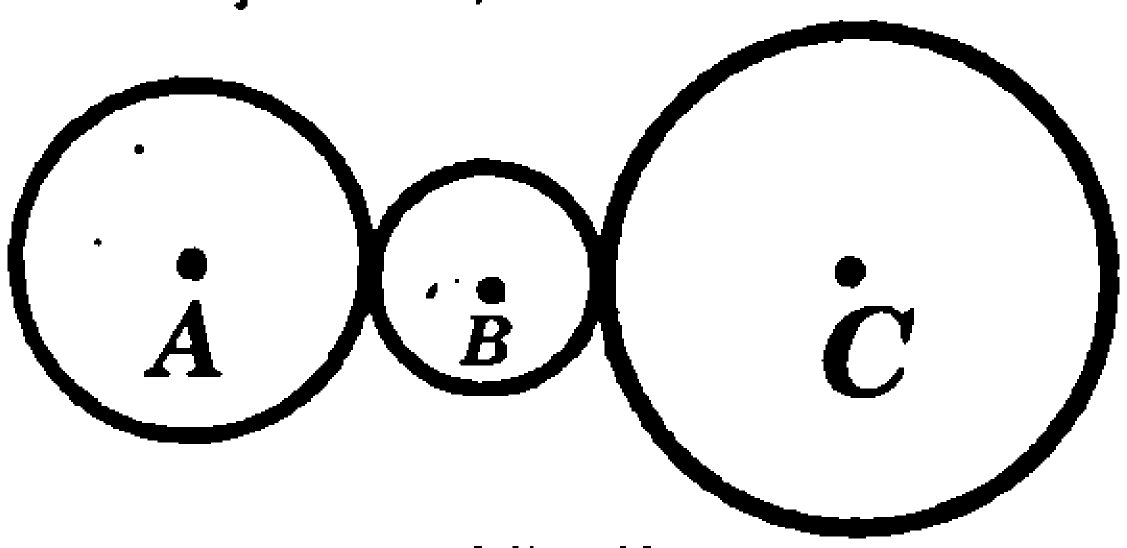
Por ejemplo, dos ruedas en contacto de rodamiento, la biela y manivela de una máquina (locomotora).

MÁQUINA :

Es una combinación de partes resistentes, dispuestas de tal modo, que una fuente de energía calculada en una parte, causa movimiento en las otras y a la vez produce trabajo.

Una máquina se compone de uno o más mecanismos; por lo que un mecanismo no es forzosamente una máquina.

La parte de un mecanismo que produce el movimiento se llama la ***conductora o motora*** y la parte que se deja llevar, se llama ***la conducida***.



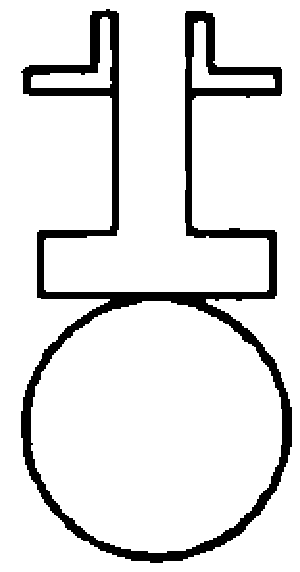
(Fig.1)

La rueda girante *A* ***(fig.1)*** mueve la rueda *B*; de modo que *A* se llama la conductora, y *B* la conducida.

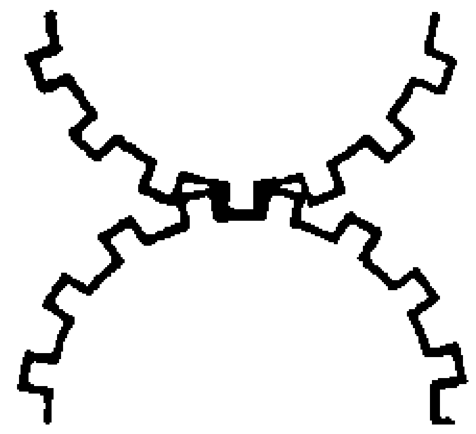
Sin embargo *B* hace girar a *C*, entonces *B* es la rueda conductora y *C* la conducida.

La rueda *B* es pues, conductora y conducida en el mismo mecanismo.

Para que el movimiento del conductor cause el movimiento del conducido, deben estar en contacto o conectados entre sí por algún cuerpo interpuesto, capaz de trasmitir el movimiento del uno al otro.



(Fig. 2)



(Fig. 3)

Cuando conductor y conducido están en contacto directo, el movimiento se trasmite por rodamiento ***(fig.1)***, por deslizamiento ***(fig.2)*** o por una combinación de los dos como en el movimiento de los dientes de dos engranajes ***(fig. 3)***.

Los conectores intermedios pueden ser de tres tipos; es decir rígidos, flexibles o fluidos. Las conexiones o trasmisiones flexibles, tales como cadenas, cables y correas se llaman bandas, éstas se trasmiten únicamente por tracción.

MOVIMIENTO :

Es un cambio de posición, para ésto siempre ha de referirse a un punto fijo, siendo relativo.

Si todos los puntos se mueven en la misma dirección y a la misma velocidad, se considera de Traslación. Si los puntos, moviéndose en planos paralelos, están a distancias fijas de una línea dada y perpendicular a todos los planos, el movimiento es de Rotación.

REVOLUCIÓN :

Se dice que un punto revuelve, o da vueltas sobre un eje cuando su traslación describe un círculo que está en un plano perpendicular al eje y tiene su centro en este eje.

Puede dividirse el movimiento en tres tipos: ***continuo, intermitente*** y ***alternativo.*** El movimiento es ***continuo*** cuando el punto se mueve en la misma trayectoria y sentido, como los puntos de una rueda en rotación.

Es ***intermitente*** cuando se interrumpe por períodos de parada.

Es ***alternativo*** cuando sigue la misma trayectoria y al final regresa por la misma, como en un pistón y su vástago que se une a la biela.

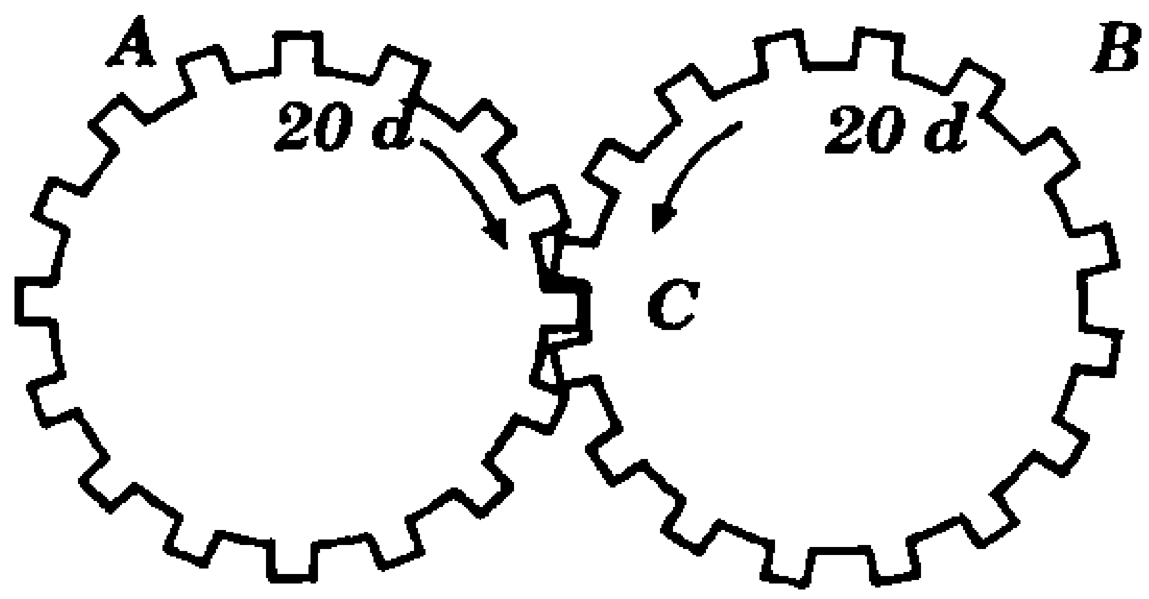
ENGRANAJES :

Son ruedas en las cuales se han labrado dientes, los cuales trasmiten el movimiento por rodadura y por deslizamiento del uno sobre el otro, cuando se traban y engranan entre sí.

Se les utiliza para mantener constante el coeficiente de trasmisión.

El piñón es la menor rueda de dos, dentadas en un engranaje.

Dos ruedas dentadas como ***A*** y ***B*** que tienen el mismo número de dientes, giran con la misma velocidad.



"Supongamos que ***A*** es la rueda conductora y ***B*** la conducida. Si ***A*** gira en el sentido de las agujas del reloj (indicada por ra flecha), ***B*** girará en el sentido opuesto .

Supongamos que cada rueda tiene ***20*** dientes. Cuando gira ***A***, cada uno de sus dientes pasa por el punto ***C*** y engrana con un diente de ***B***.

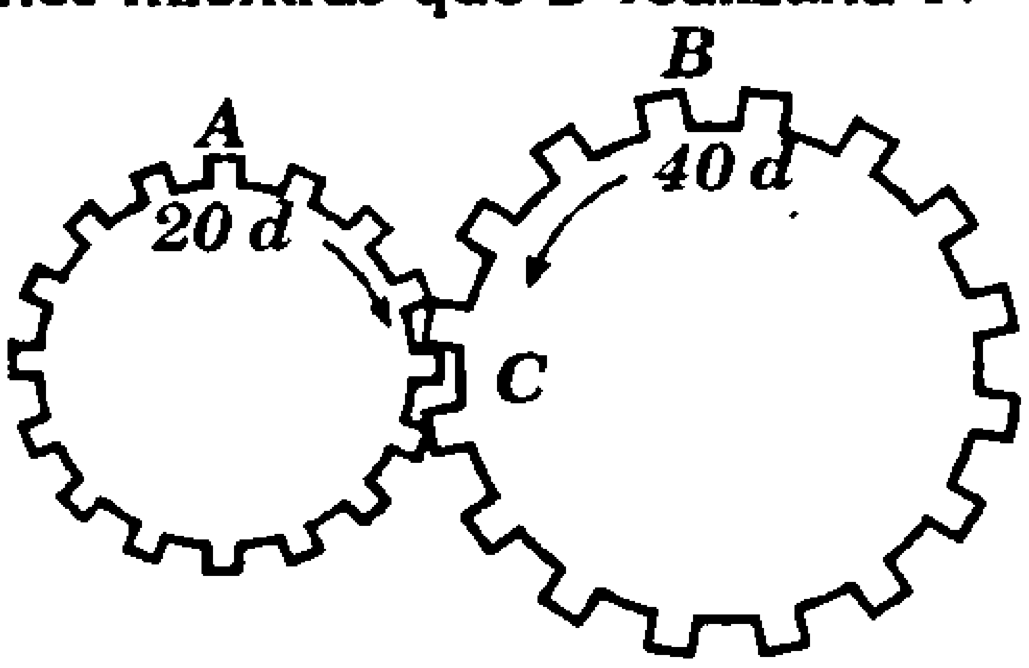
Cuando ***A*** ha dado una vuelta completa, es decir cuando sus ***20*** dientes han pasado por el punto ***C***, éstos habrán engranado con ***20*** dientes de ***B*** la cual habrá dado también una vuelta completa.

Pero si ***A*** tiene ***20*** dientes y ***B*** tiene ***40 (como en la siguiente figura)*** en una vuelta completa de ***A***, sus ***20*** dientes habrán pasado por ***C*** y habrán engranado con ***20*** dientes de ***B***.

Pero como ***B*** tiene ***40*** dientes, ***A*** tendrá que dar dos vueltas completas para que ***B***, dé una.

En este caso se dice que la relación de velocidades de las ruedas es de ***1*** a ***2***; ésto es una revolución de ***B***, corresponde a ***2*** revoluciones de ***A***.

Si ***A*** tuviera ***20*** dientes y ***B*** tuviera ***60*** ; ***A*** efectuaría ***3*** revoluciones mientras que ***B*** realizaría ***1***.



Las ruedas tendrían una relación de velocidades de ***1*** a ***3***.

En cada caso, ***la rueda más pequeña es la que gira con mayor rapidez y la mayor es la más lenta.***

Entre las velocidades de las ruedas dentadas y el número de dientes hay una proporcionalidad inversa; ésto es, la velocidad de una rueda (engranada) disminuye al aumentar el número de dientes :

$$\frac{\text{Dientes rueda conducida}}{\text{Dientes rueda motora}} = \frac{\text{Revoluciones rueda motora}}{\text{Revoluciones rueda conducida}}$$

$$\frac{D_c}{D_m} = \frac{R_m}{R_c}$$

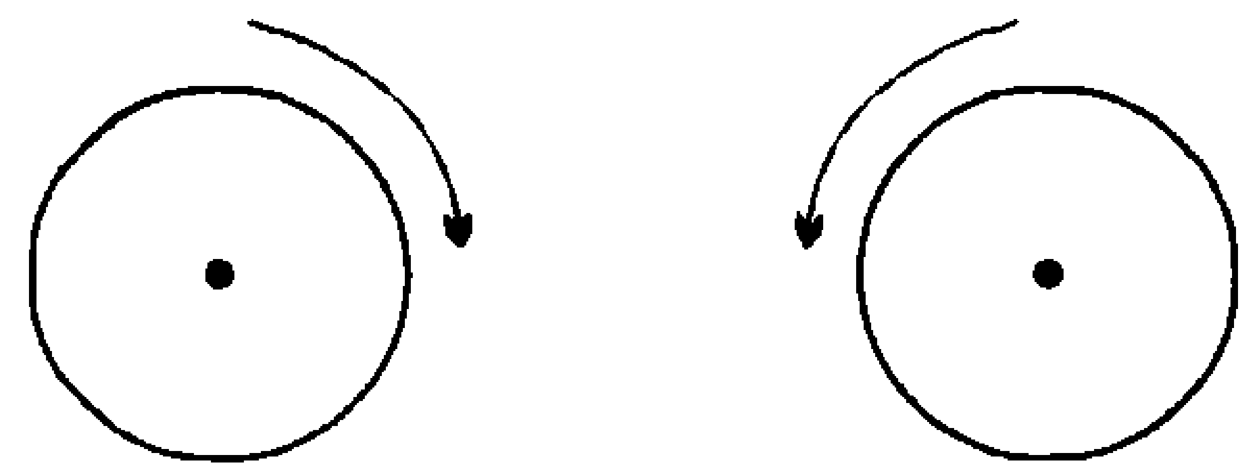
D_c = Dientes rueda conducida.

D_m = Dientes rueda conductora.

R_m = Revoluciones rueda motora.

R_c = Revoluciones rueda conducida.

POLEAS Y TRANSMISIONES



GIRO HORARIO (derecha) — *GIRO ANTIHORARIO (izquierda)*

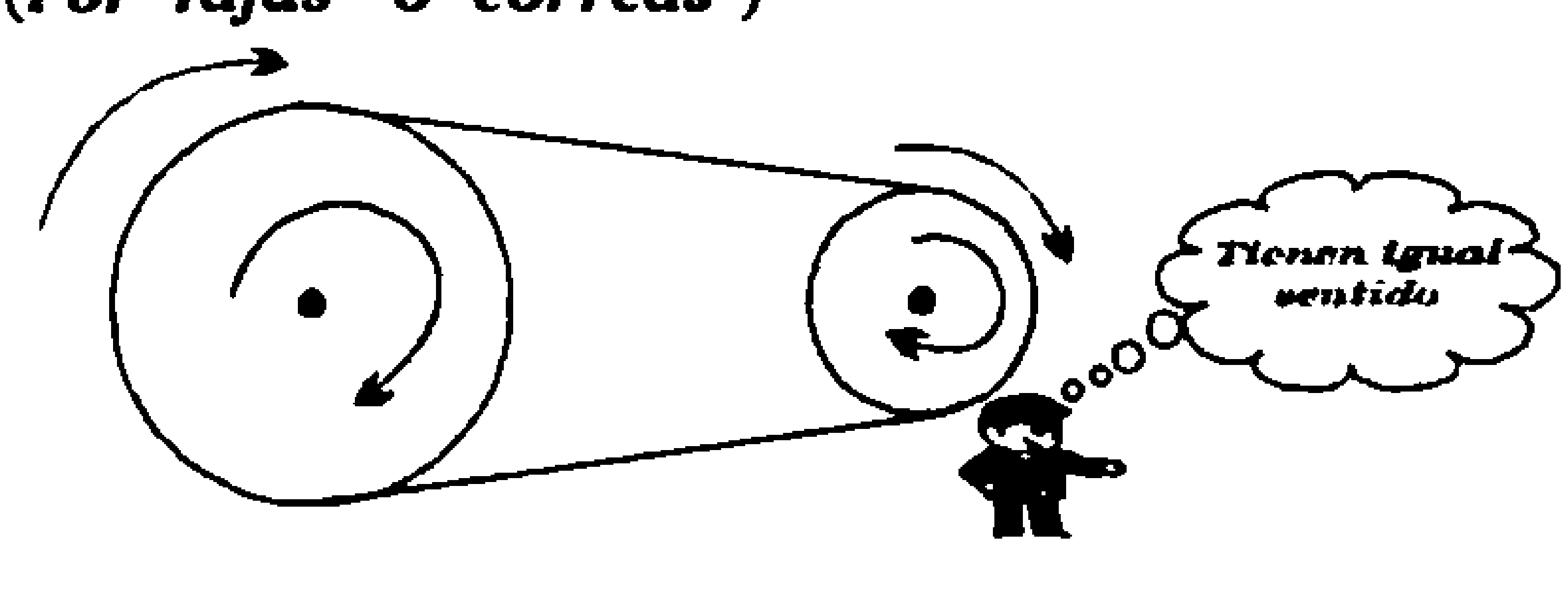
EJEMPLO :

La bicicleta va hacia la derecha y las ruedas también van hacia la derecha . El sentido en que las ruedas están girando (hacia la derecha) se denomina : *HORARIO* , pues es el sentido en que giran las agujas de un reloj.

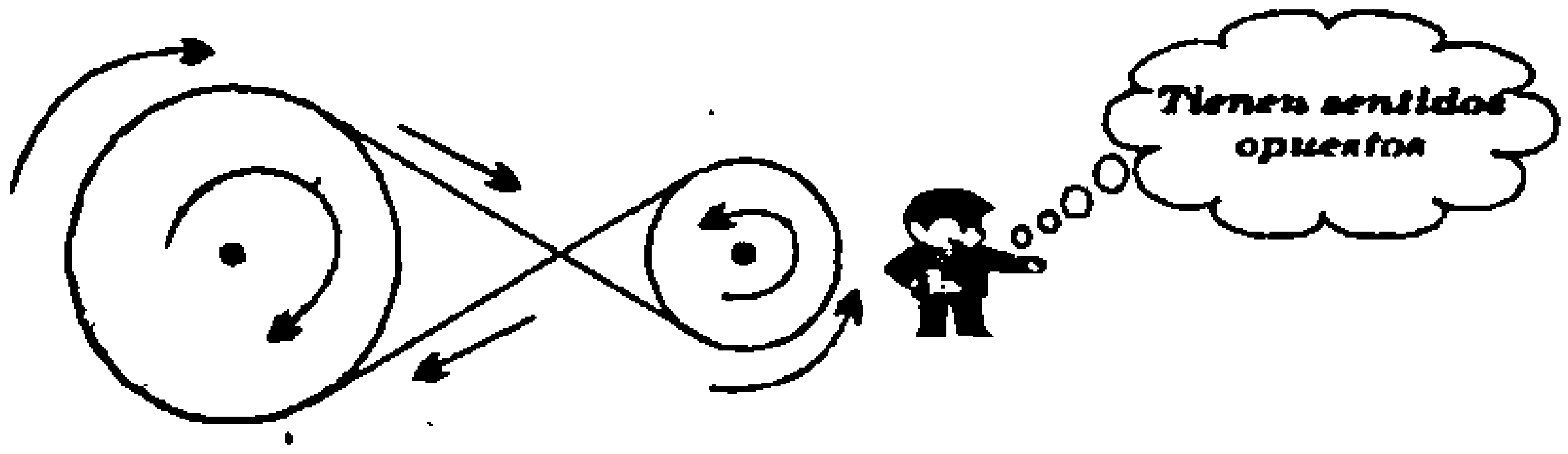
TRANSMISIONES DE MOVIMIENTO

I) TRANSMISIÓN ABIERTA:

(*Por fajas o correas*)

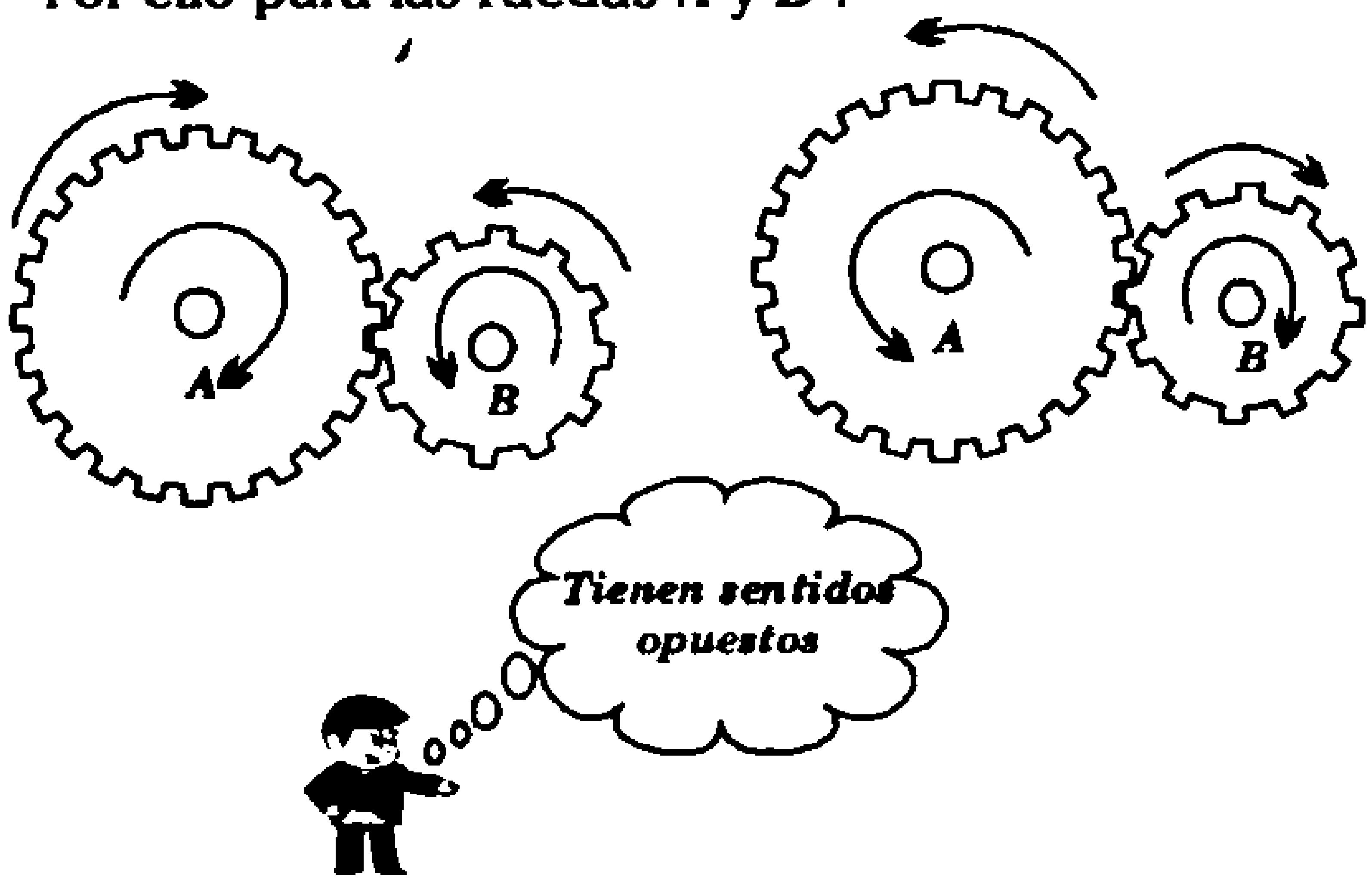


II) TRANSMISIÓN CRUZADA :



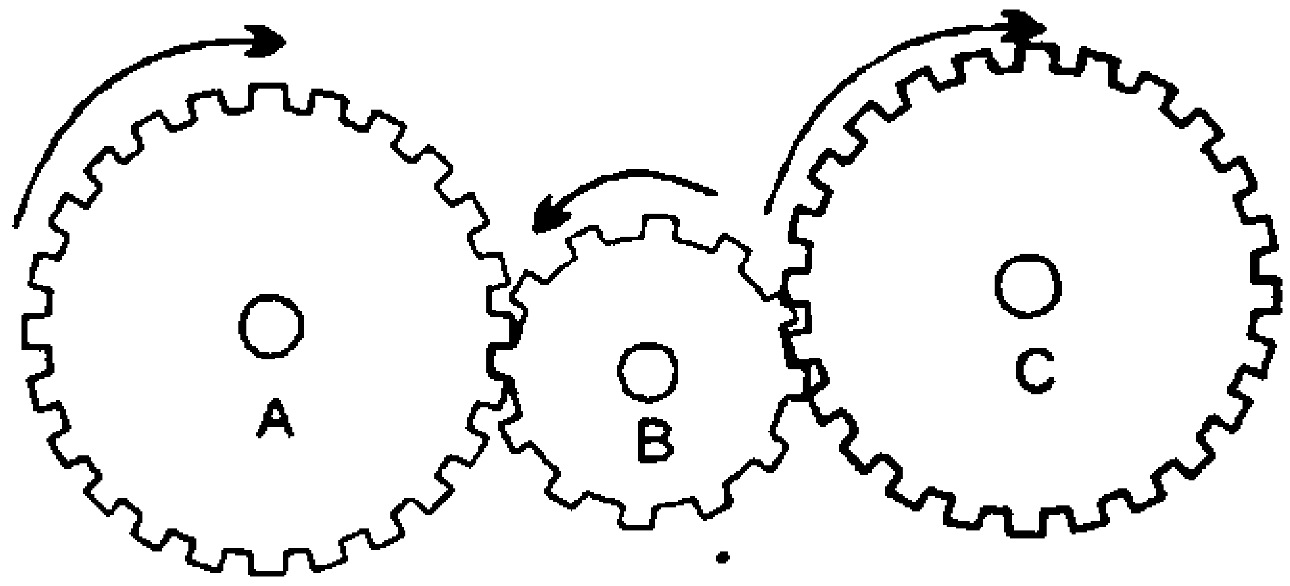
TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES

* Por ello para las ruedas *A* y *B* .

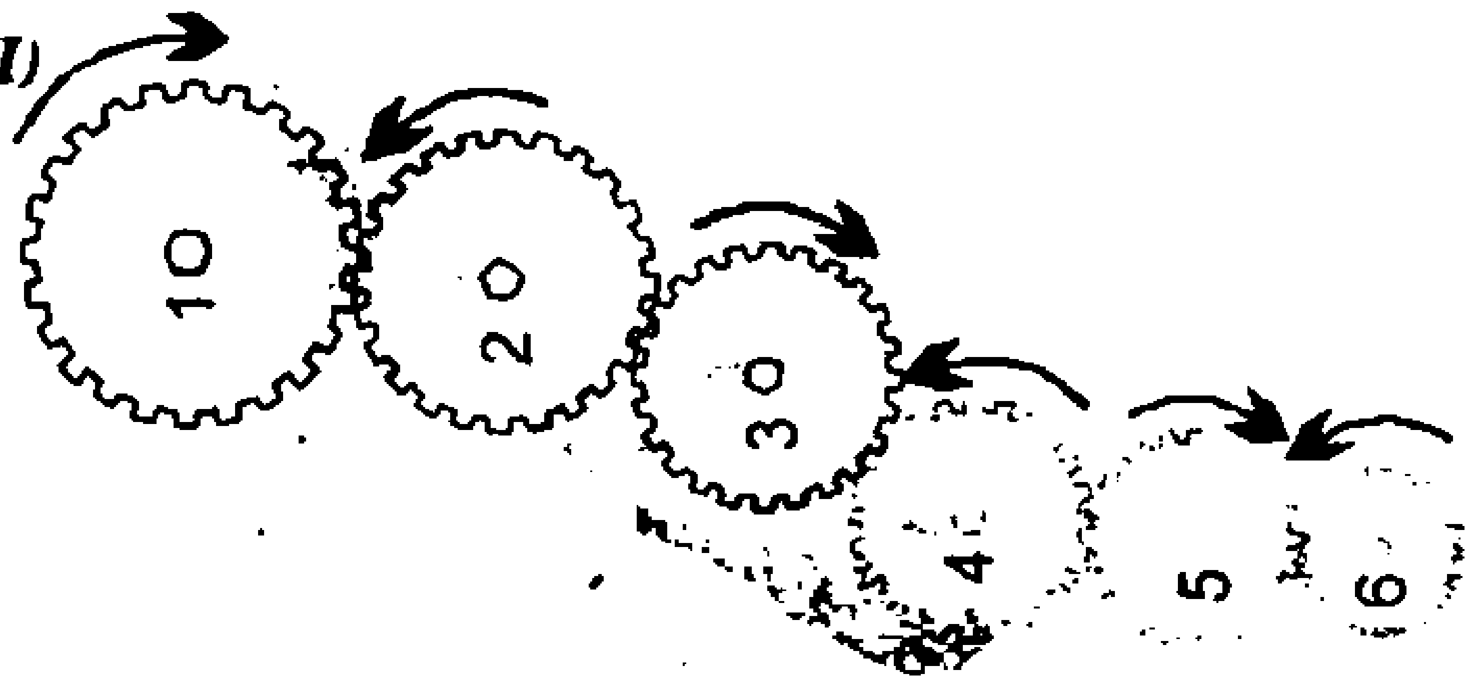


EJEMPLOS :

I)

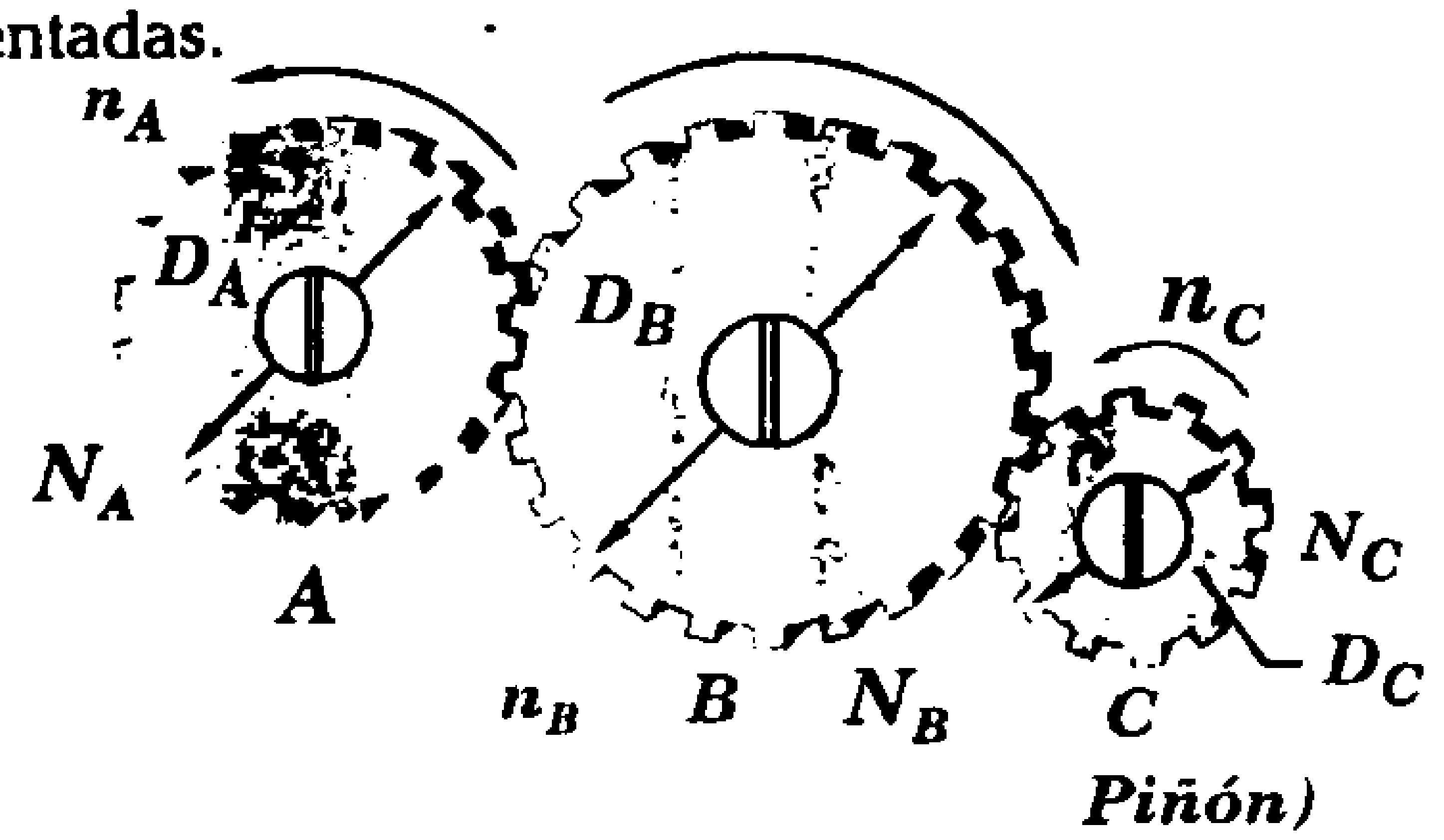


II)



NOTA :

Los engranajes se denominan también ruedas dentadas.



CARACTERÍSTICAS:

- La rueda *A* y *B* tienen diferente sentido de giro.
- La rueda *A* y *C* tienen el mismo sentido de giro.
- El engranaje de menor diámetro *(C)* se llama Piñón.

Considerar :

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{D_B}{D_A} = \frac{n_B}{n_A}$$

N_A y N_B : Número de vueltas o revoluciones por minuto

D_A y D_B : Diámetros

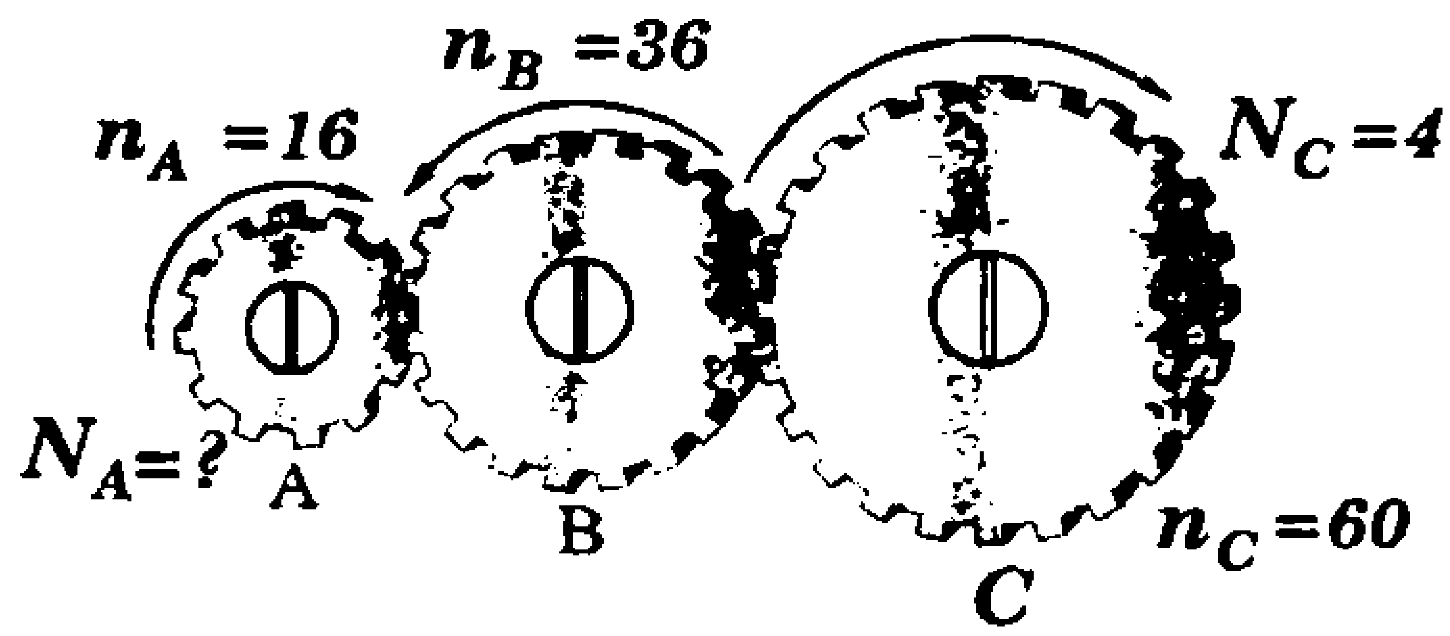
n_A y n_B : Número de dientes.

OBSERVACIÓN:

El número de vueltas es inversamente proporcional a los diámetros.

$$N_A \times D_A = N_B \times D_B$$

EJEMPLO :



Supóngase que el número de dientes de los engranajes de *A, B* y *C* son de *16; 36* y *60* respectivamente, para el tren de engranaje mostrado en la figura. Si A hace girar a *B* y éste hace girar a C. Mientras *C* da *4* vueltas completas, *A* dará:

A)5 vueltas *B)15 vueltas* *C)20 vueltas*
D)2 vueltas *E)El problema es imposible.*

RESOLUCIÓN:

n_A y n_C tienen el mismo sentido de giro.

La rueda intermedia n_B no modifica el número de revoluciones, luego se tiene:

$$N_A\,(n_A) = n_C\,(N_C)$$

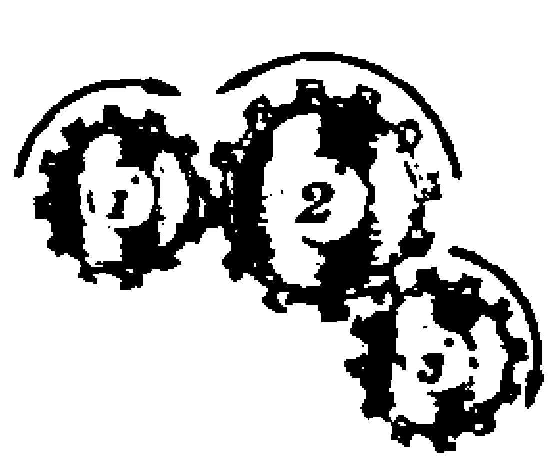
$$N_A\,(16) = 4\,(60)$$

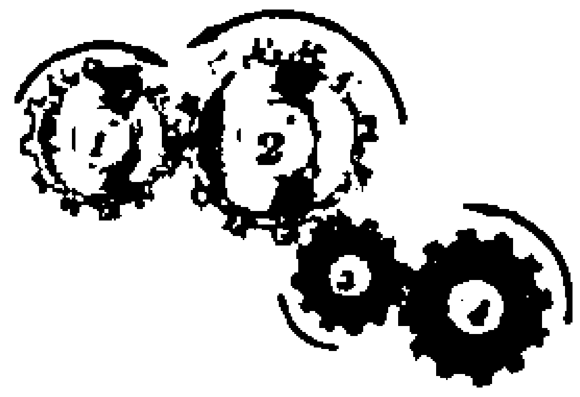
$$\Rightarrow N_A = \frac{4(60)}{16} = 15 \text{ vueltas}$$

RPTA : "B"

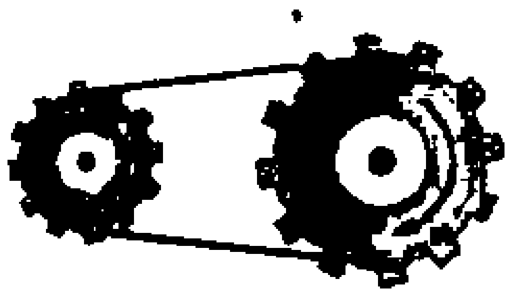
OBSERVACIONES :

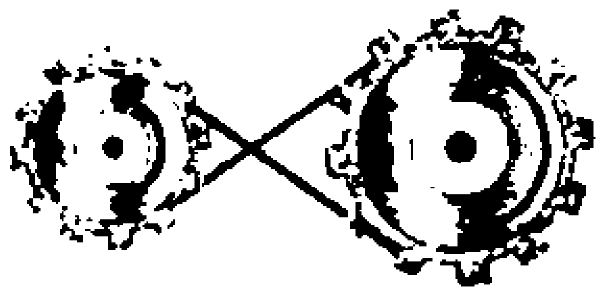
I) Si el número de engranajes es un número impar, el último girará en el mismo sentido que el primero, y si es par en sentido contrario.





II)



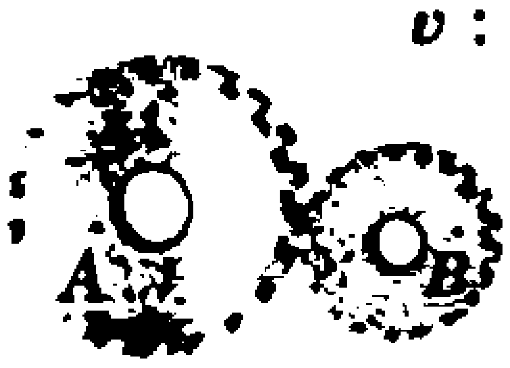


Para una trasmisión, los engranajes tendrán igual sentido.

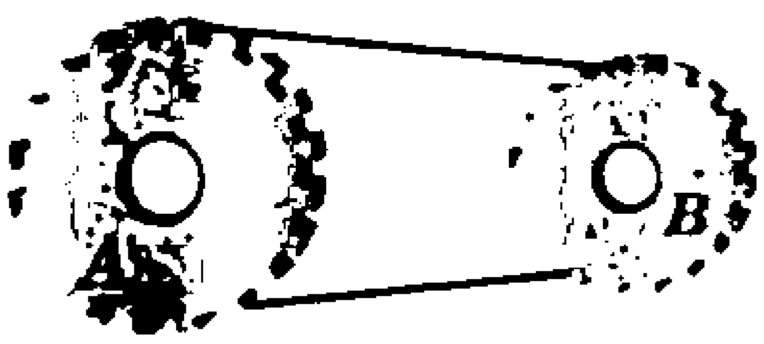
Para una trasmisión, cruzada, se tendrán sentidos contrarios.

III) Siendo: n : # de dientes

v : velocidad



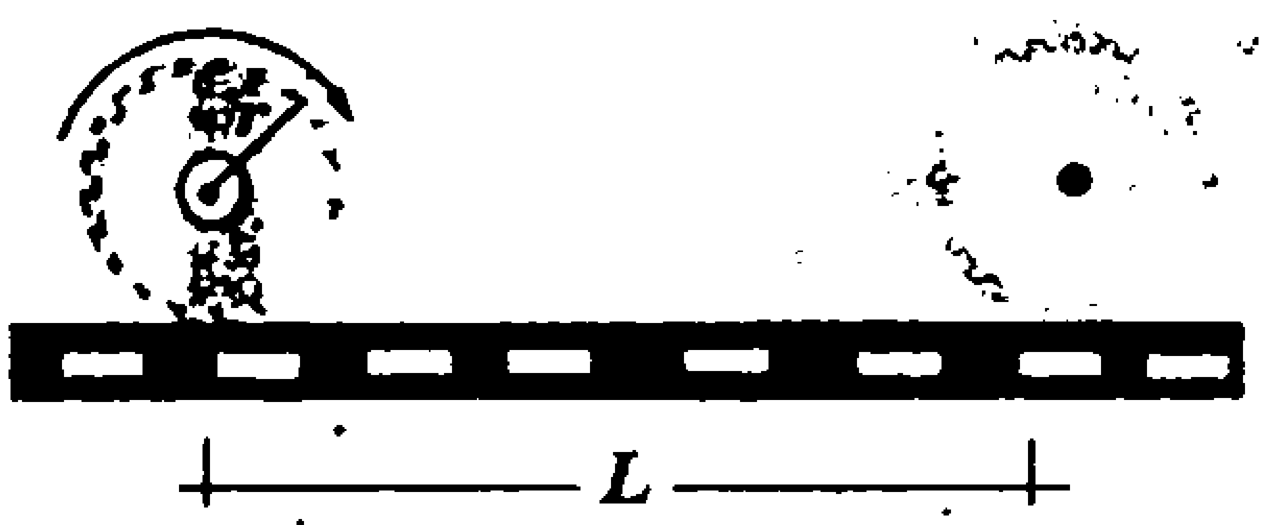
$\Rightarrow \boxed{n_A v_A = n_B v_B}$



$\Rightarrow \boxed{n_A v_A = n_B v_B}$

$\Rightarrow \boxed{v_A = v_B}$

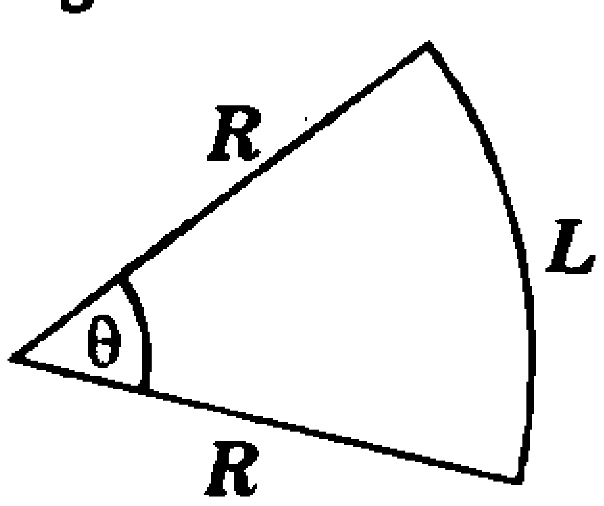
IV) Cuando una rueda va rodando sobre una superficie plana



$$\text{Número de vueltas} = \frac{L}{2\pi r}$$

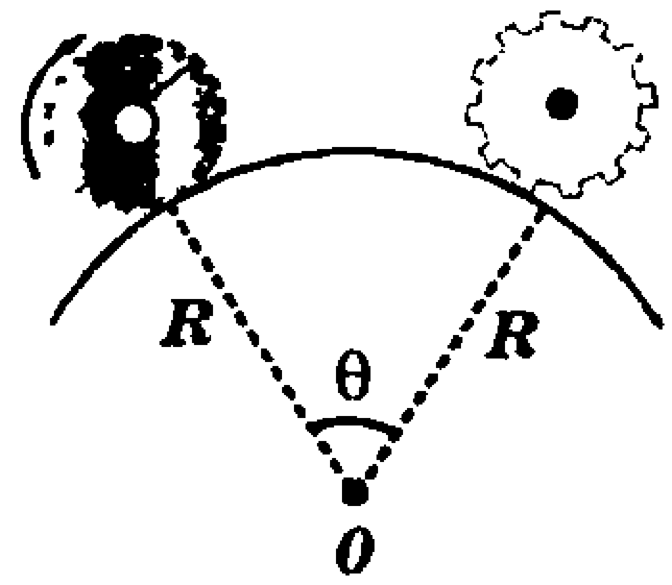
OJO : Se considera a "L" como el recorrido del centro de la rueda.

V) Longitud de Arco

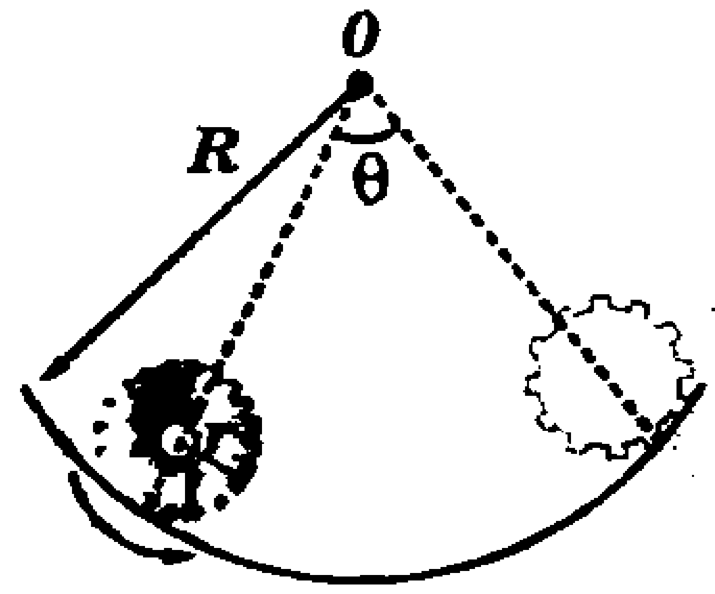


$\Rightarrow \boxed{L = R\theta}$

Cuando la rueda gira o va rodando sobre una superficie curva.



$$\Rightarrow \boxed{\left(\begin{matrix}\text{Número}\\ \text{vueltas}\end{matrix}\right) = \frac{\theta(R+r)}{2\pi r}}$$



$$\Rightarrow \boxed{\text{Número vueltas} = \frac{\theta(R-r)}{2\pi r}}$$

VELOCIDAD ANGULAR :

Es la razón con respecto al tiempo de cambio de desplazamiento angular de un cuerpo.

Se representa por "ω" (omega).

$$\textit{Unidad de velocidad angular} = \frac{\textit{Unidad de ángulo}}{\textit{Unidad de tiempo}}$$

Puede darse en :

$$\frac{\text{grados}}{\text{segundos}}, \frac{\text{vueltas}}{\text{segundo}}, \frac{\text{vueltas}}{\text{minuto}}, \frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}}$$

EJEMPLO 1 :

Un móvil con movimiento circular uniforme tarda *5* segundos en dar *2* vueltas. Calcular su velocidad angular.

$$\frac{2\ \text{vueltas}}{5\ \text{segundos}} = 0,4\frac{\text{vueltas}}{\text{segundo}} = 24\frac{\text{revol.}}{\text{minuto}} =$$

$$24\frac{360°}{\text{minuto}} = 8640\frac{\text{grados}}{\text{minuto}} = 144\ \text{grados/segundo}$$

EJEMPLO 2 :

Un motor efectúa *2 000* revoluciones por minuto. Calcular su velocidad angular en grados/segundo.

RESOLUCIÓN :

Como una revolución o vuelta tiene *360°*.

Entonces :

$$= 2000\frac{360°}{60\text{seg.}} = 12000\frac{\text{grados}}{\text{seg.}} = 12000\frac{\text{revoluciones}}{\text{minuto}}$$

También es importante recordar que :

$$1\text{vuelta} = 2\pi\ \text{radianes}.$$

Además que un radián es el ángulo central al que le corresponde un arco de longitud igual al radio.

¿Qué relación podemos establecer entre la

velocidad angular y al velocidad lineal?

La relación existente es : $V=\omega R$

Donde :

V = Velocidad lineal

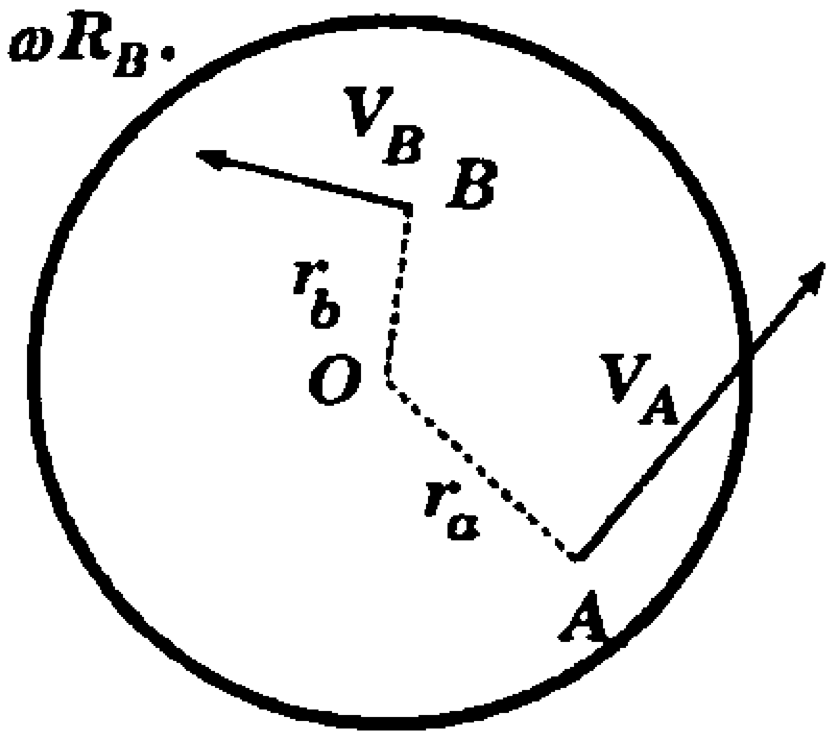
R = Radio ; ω = Velocidad angular

Si como en el caso de una rueda ***(en la siguiente figura)***, un cuerpo está rotando alrededor de un eje fijo, la velocidad lineal de un punto cualquiera del cuerpo es igual a su velocidad angular por su distancia desde el centro de rotación; ésto es : $V=\omega R$

Pero la velocidad angular de todas las partes del cuerpo es la misma (si no fuera así el cuerpo se desintegraría) .

Luego las velocidades de *A* y *B* son respectivamente:

$V_A=\omega R_A$ y $V_B=\omega R_B$.



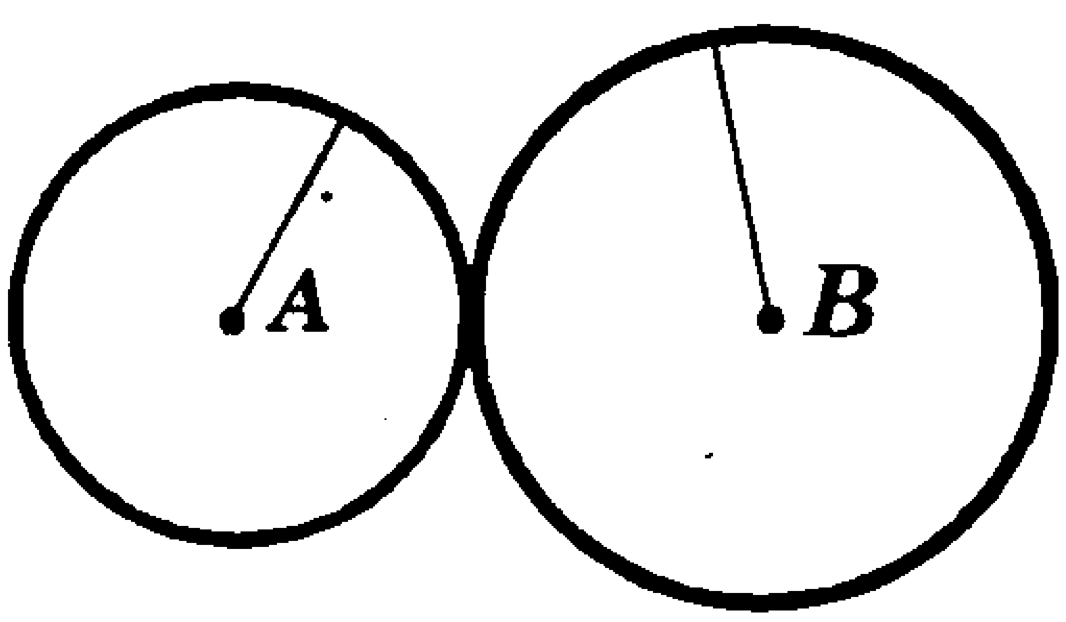
Dividiendo miembro a miembro se tendrá :

$$\boxed{\frac{V_A}{V_B}=\frac{R_A}{R_B}}$$

"En un cuerpo en rotación, los valores de las velocidades lineales de dos puntos son directamente proporcionales a su distancias desde el centro o eje de rotación".

Consideremos ahora dos ruedas en contacto de rodamiento ***(la siguiente figura)***.Si el rodamiento es sin deslizamientos, los puntos de la periferia (perímetro) de ambas ruedas tienen la misma velocidad lineal. Es decir , $V_A= V_B$ de donde operando se tendrá que :

$$\omega_A R_A=\omega_B R_B$$



«Las velocidades angulares son inversamente proporcionales a los radios»

Una serie de ruedas usadas para trasmitir potencia, se llama tren de ruedas. La velocidad angular de la rueda conducida a la conductora se llama ***Razón de Tren.*** Si en la ***figura anterior*** , la rueda *B* es la conductora y *A* la conducida $\Rightarrow r=\dfrac{\omega_A}{\omega_B}$

Donde ***r = Razón de tren.***

Deducimos que : $r=\dfrac{\omega_A}{\omega_B}=\dfrac{D_B}{D_A}$

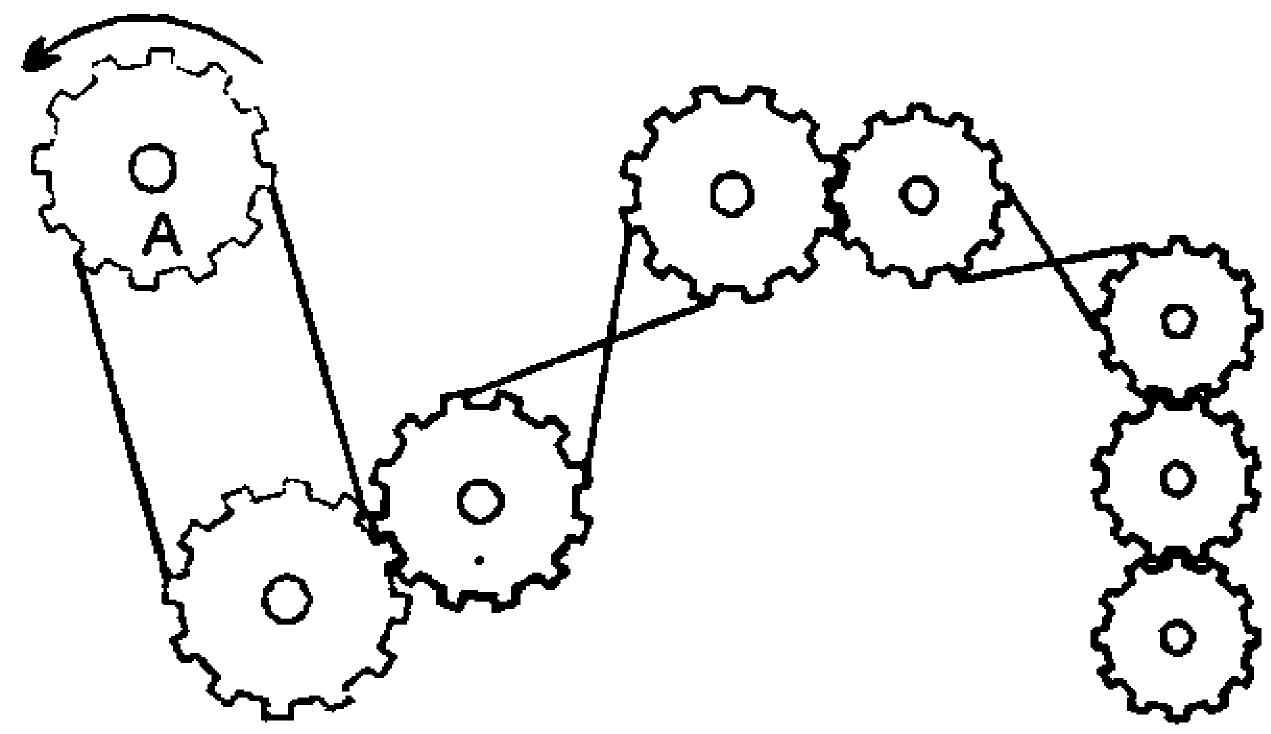
Es decir que el coeficiente de trásmisión o de tren de dos ruedas en contacto directo de rodamiento, es igual a la razón del diámetro de la conductora a la conducida. Cuando se halle el ***SENTIDO***, éste puede darse en forma horaria o antihoraria, teniendo como referencia el movimiento de las manecillas del reloj.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

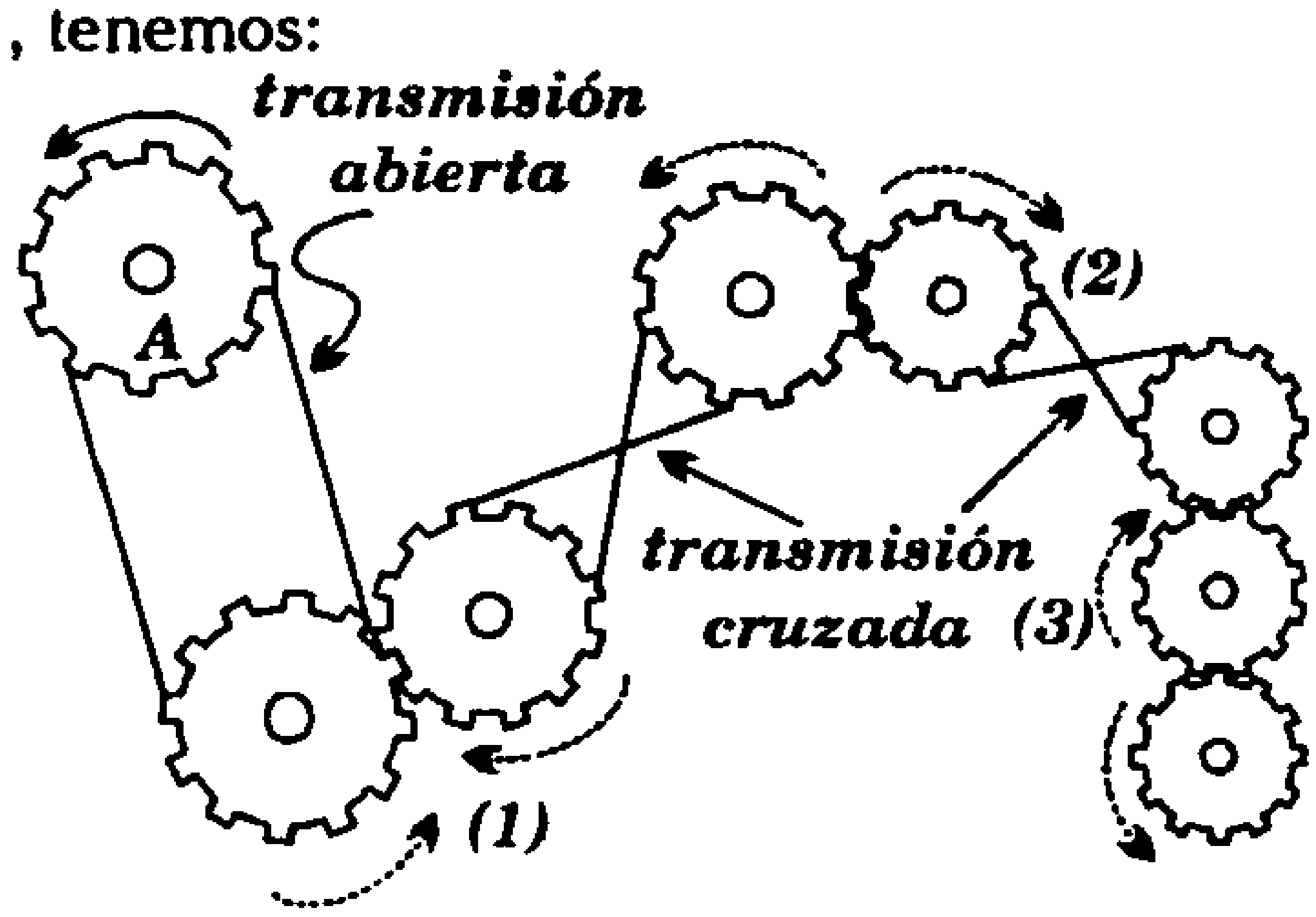
En el tren de ruedas dentadas, el engranaje *"A"* es impulsado como indica la flecha . ¿Cuántas ruedas se mueven en el sentido horario?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 7



RESOLUCIÓN:

* Tomando como referencia la rueda impulsada y el tipo de transmisión por cadena abierta o cruzada , tenemos:

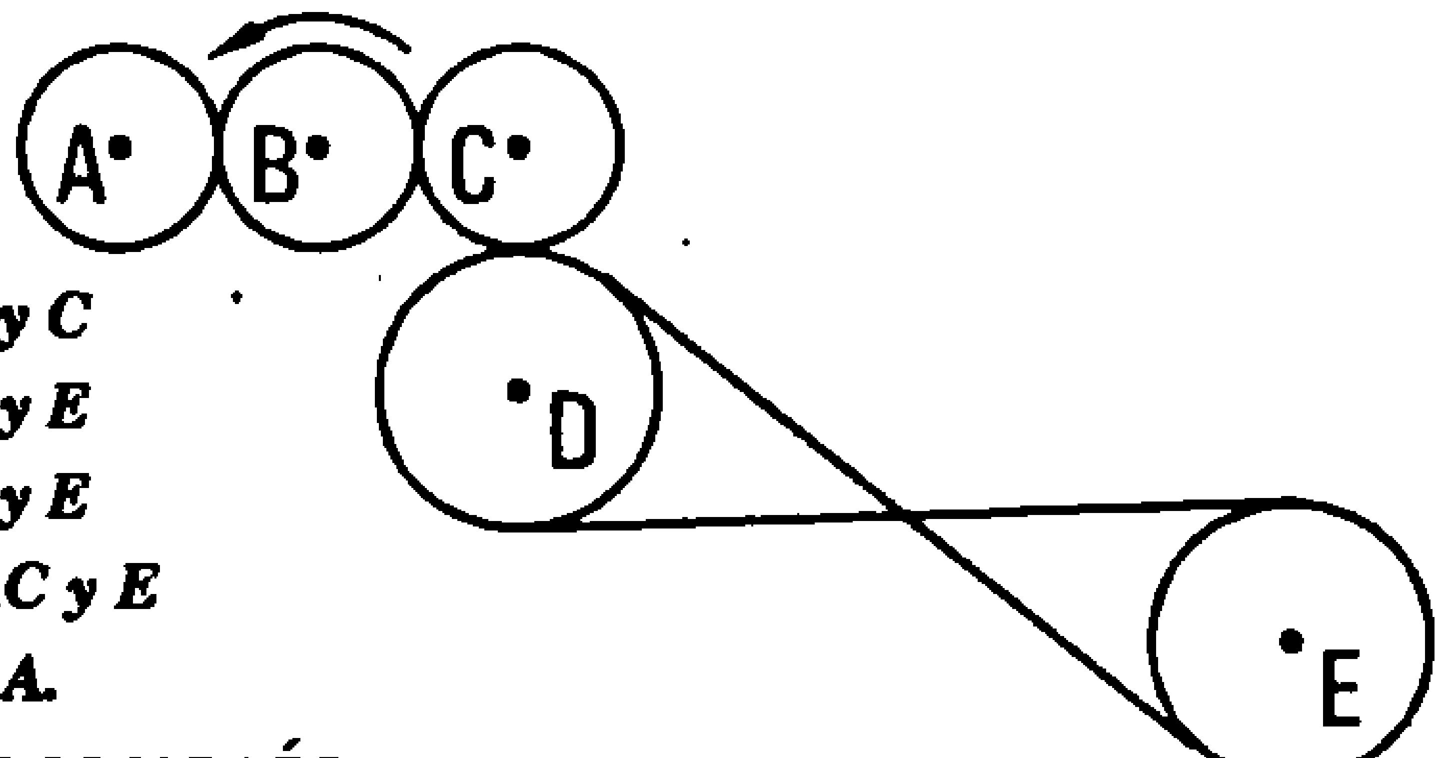


* En sentido horario se mueven *3* ruedas: ***(1), (2)*** y ***(3)***

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

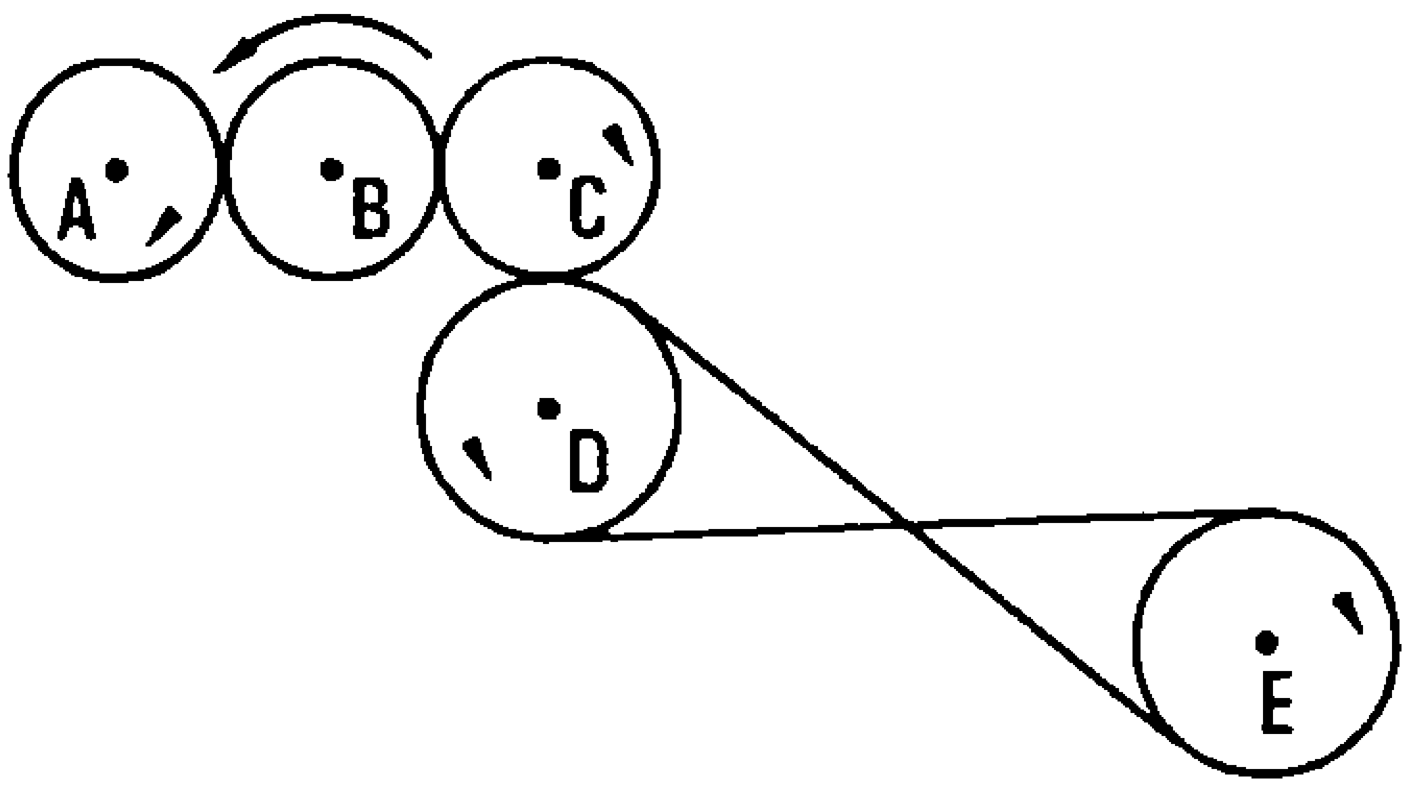
Si el engranaje "*B*" se mueve en el sentido de la flecha. Indicar cuales se mueven hacia la derecha .



A) B y C
B) B y E
C) C y E
D) A,C y E
E) N.A.

RESOLUCIÓN :

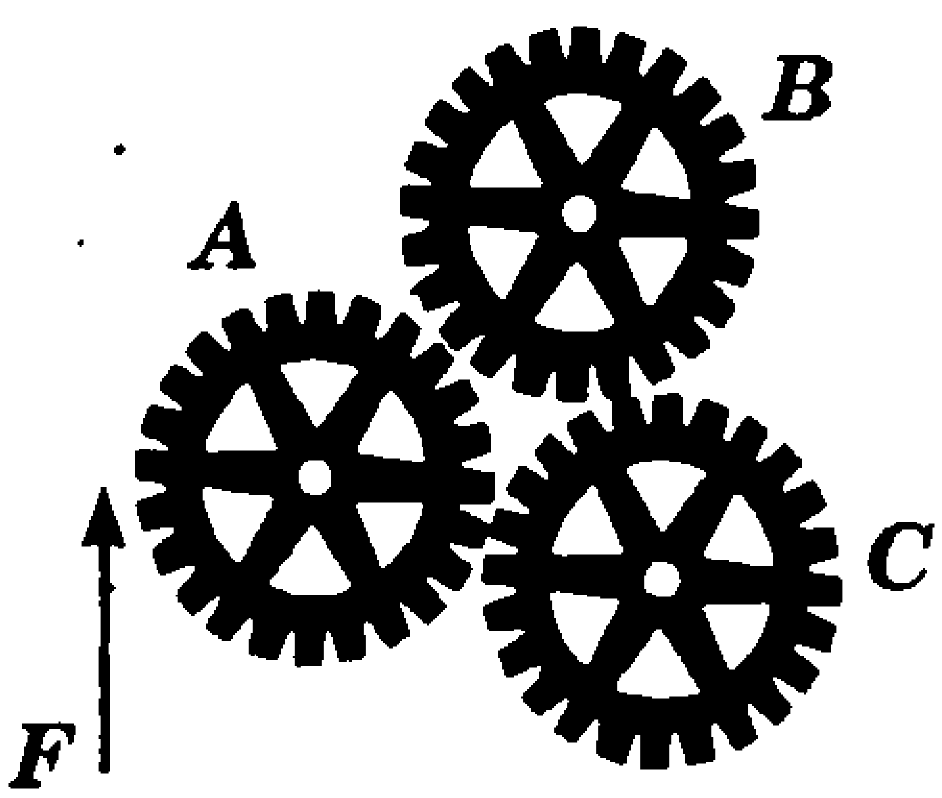
• Tomando como referencia el sentido de rotación del engranaje "*B*" y observando que los engranajes *D* y *E* están unidas por una cadena de transmisión cruzada donde tienen sentido inverso de rotación , se tendrá :



RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

Un sistema de *3* ruedas dentadas tiene la configuración siguiente: a la rueda dentada «*A*» se le aplica una fuerza «*F*» en la dirección de la flecha. En qué dirección se moverán las ruedas dentadas?



A) «A» en el sentido horario, «B» y «C» en el sentido contrario.
B) «A» y «C» en el sentido horario y «B» al revés.
C) A,B,C, en el sentido horario.
D) A y B en el sentido horario, C al revés.
E) No se moverán.

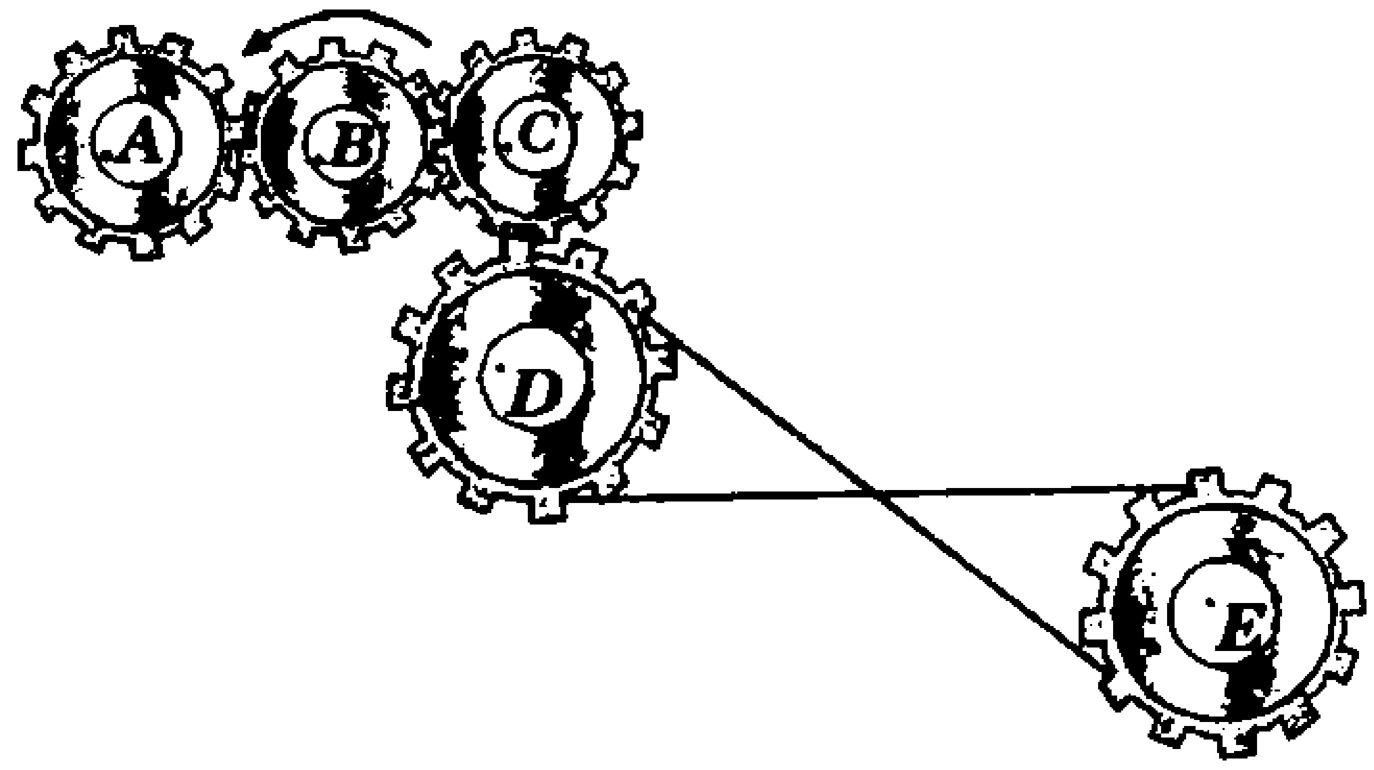
RESOLUCIÓN:

Saber qué: Por cada dos engranajes entre sí , tienen diferente sentido de giro. Cuando se aplica la fuerza F en «*A*» éste engranaje tiende a mover a «*B*» en sentido antihorario, pero el engranaje «*C*» es el que detiene el movimiento porque *A* y *C* tendrían el mismo sentido de giro y esto no se da. Por lo tanto no se moverán.

RPTA : "E"

PROBLEMA 04 :

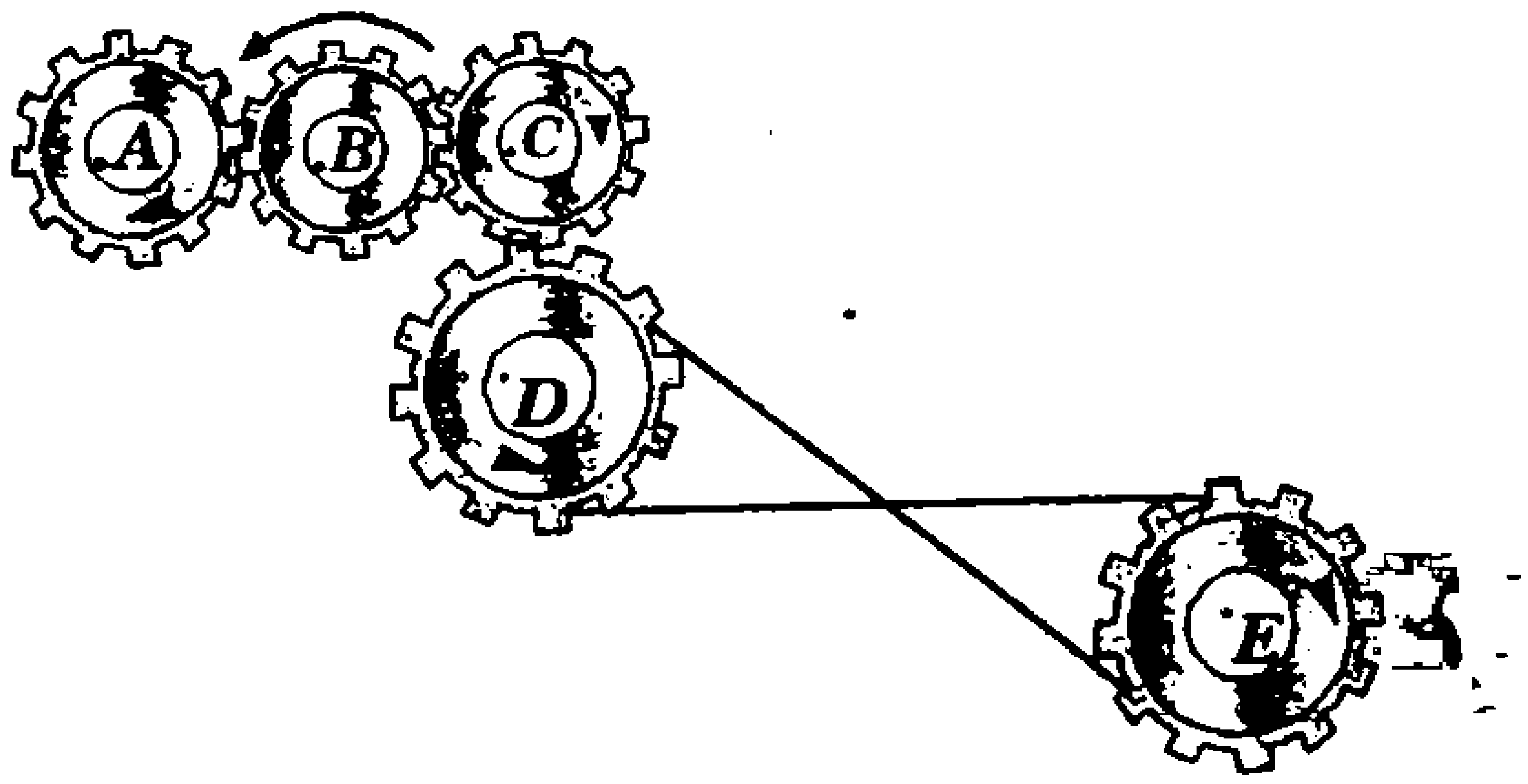
Si el engranaje «*B*» se mueve en el sentido de la flecha. Indicar cuales se mueven en sentido horario.



A)B y C *B)B y E* *C) C y E*
D)A,C y E *E)Ninguna anterior*

RESOLUCIÓN:

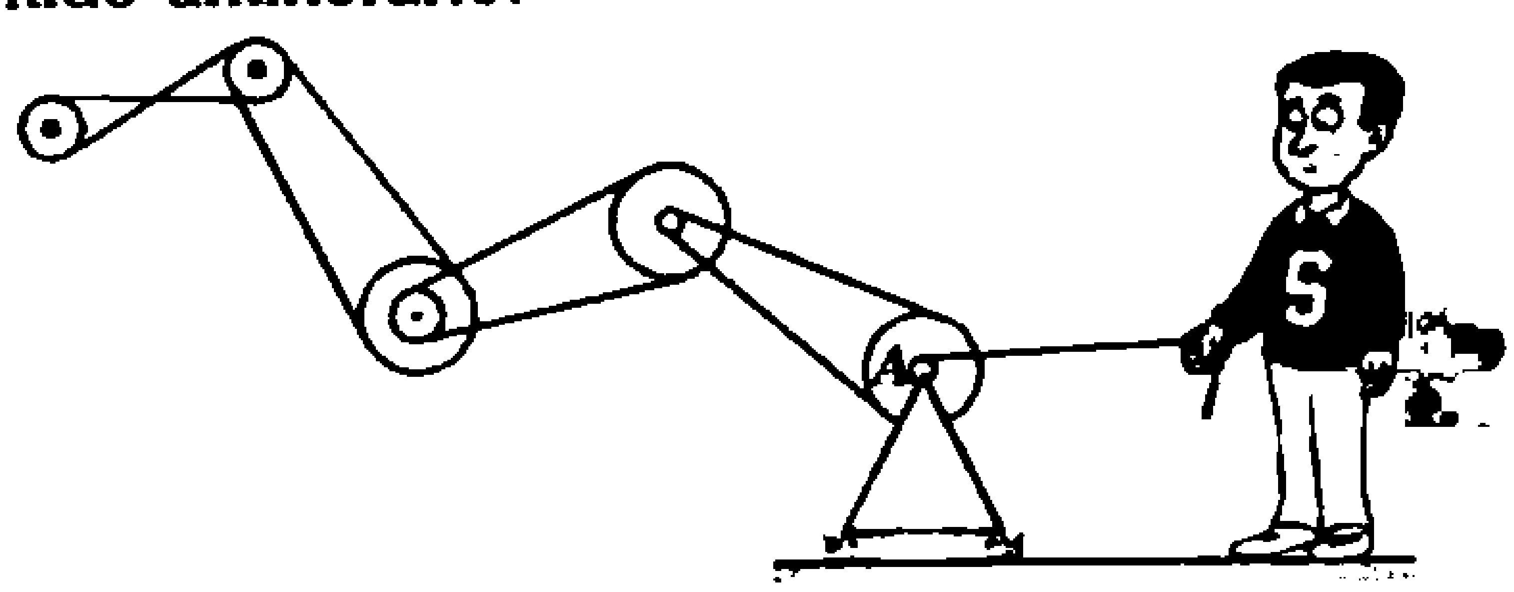
Tomando como referencia el sentido de rotación del engranaje «*B*» y observando que los engranajes *D* y *E* están unidas por una cadena de transmisión cruzada donde tienen sentido inverso de rotación, se tendrá:



RPTA: "D"

PROBLEMA 05 :

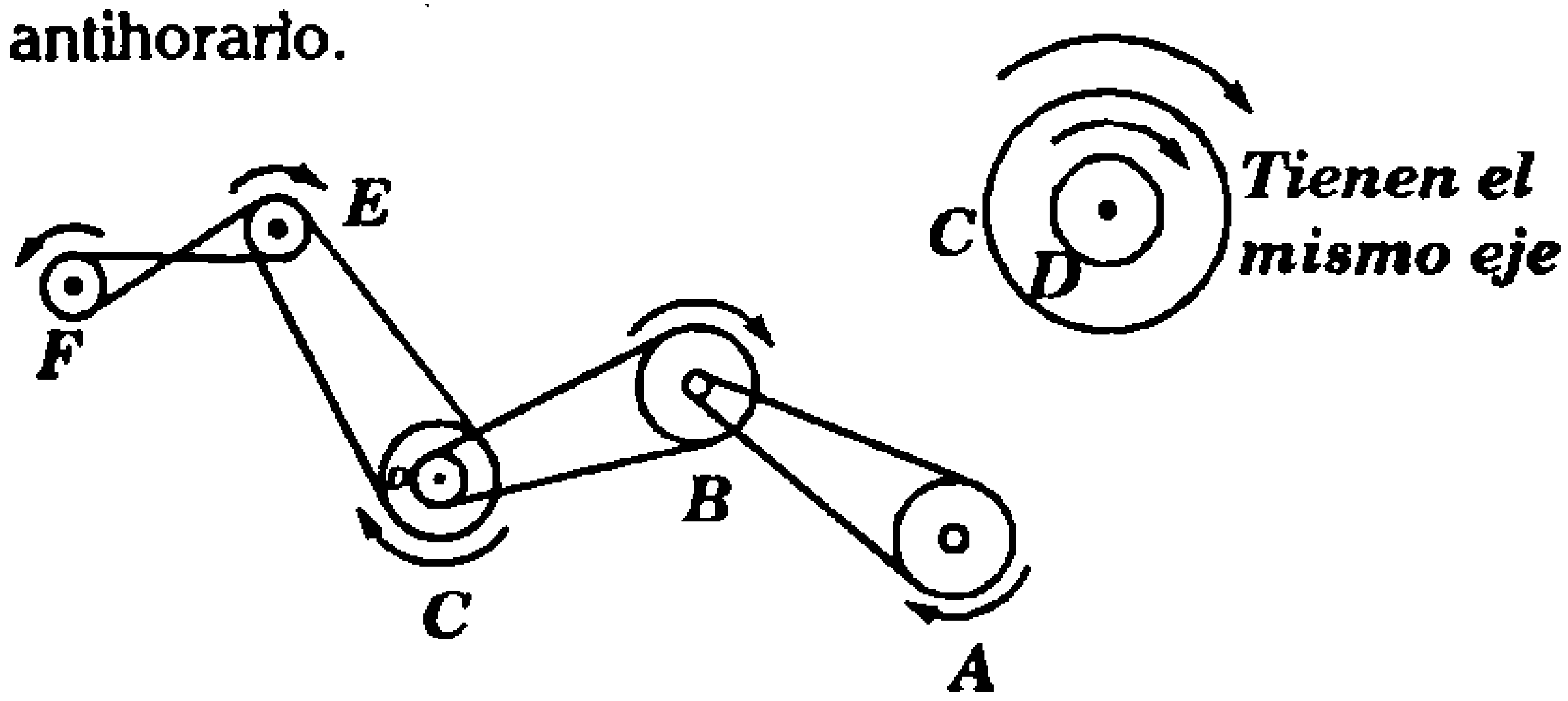
Prudencio al jalar la cuerda, hace girar la rueda "*A*", en sentido horario. ¿Decir cuántas ruedas giraran en sentido antihorario?



A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

RESOLUCIÓN :

Como se observa el hombre al jalar hace que la rueda *A* gire en sentido horario, la rueda *B* gira en el mismo sentido, de igual manera las ruedas *C* y *E* giran en sentido horario y la rueda *F* gira en sentido antihorario.



• Las ruedas *C* y *D* giraran en el mismo sentido horario pues tienen el mismo eje de rotación.

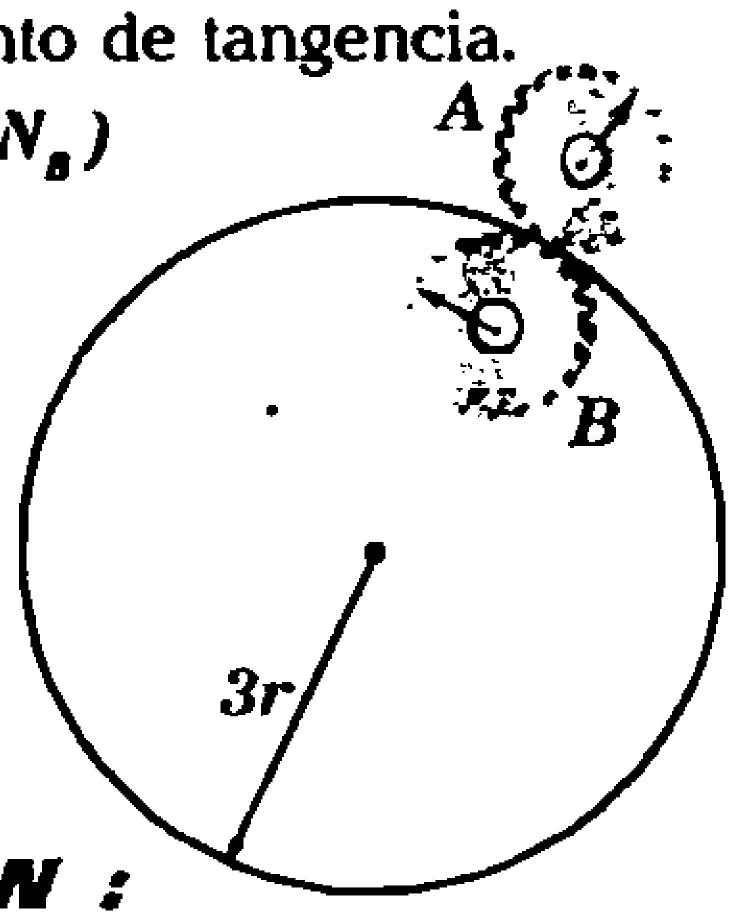
Una rueda gira en sentido antihorario.

RPTA : "B"

PROBLEMA 06 :

En la siguiente figura, se muestra un aro fijo de radio «*3r*» y *2* ruedas tangente de radio «*r*», en el mismo instante ambas ruedas empiezan a girar, la rueda *A* gira en sentido horario y la rueda *B* en sentido antihorario y ambas se detienen cuando vuelven a compartir el punto de tangencia.

Hallar: $(N_A + 2N_B)$



A) 4
B) 3
C) 2
D) 5
E) 6

RESOLUCIÓN :

Para que compartan de nuevo un punto de tangencia, entre las dos deben barrer un ángulo de 2π, luego:

$\theta_A + \theta_B = 2\pi$

♦ Calculando:

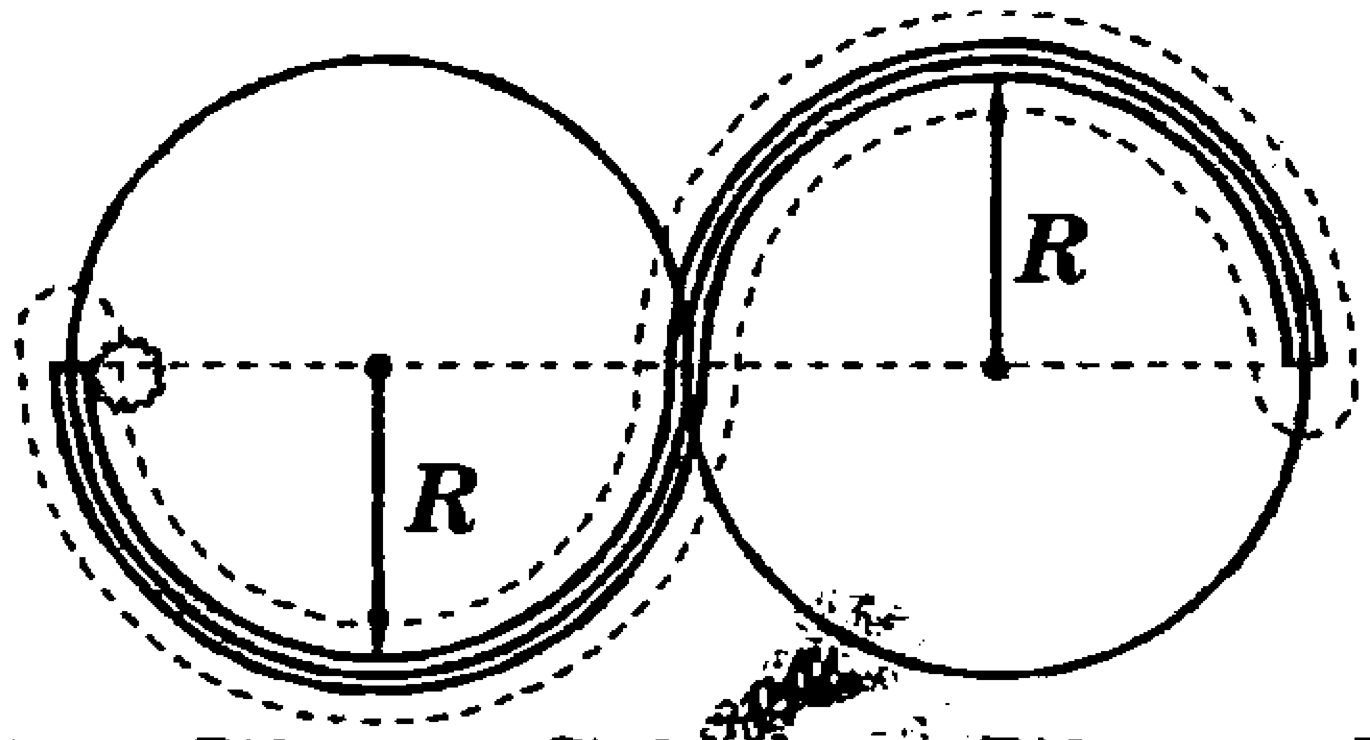
$$N_A + 2N_B = \frac{\theta_A(3r+r)}{2\pi r} + \frac{2\theta_B(3r-r)}{2\pi r}$$

$$= \frac{4(\theta_A+\theta_B)}{2\pi} = \frac{4\times 2\pi}{2\pi} = 4$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 07 :

En el circuito mostrado el espesor de la pista es despreciable respecto al radio de la rueda. Si esta última da un recorrido completo según la línea discontinua y *R=10m*, *r = 2 m*. Hallar el número de vueltas que efectúa la rueda para tal recorrido.



A)11 B)9 C)12 D)8 E)10

RESOLUCIÓN :

Total de vueltas = # de vueltas Internas + # de vueltas Externas + Vueltas en los extremos

$$= \frac{2\pi(10-2)}{2\pi\times 2} + \frac{2\pi(10+2)}{2\pi\times 2} + \frac{2\pi\times 2}{2\pi\times 2}$$

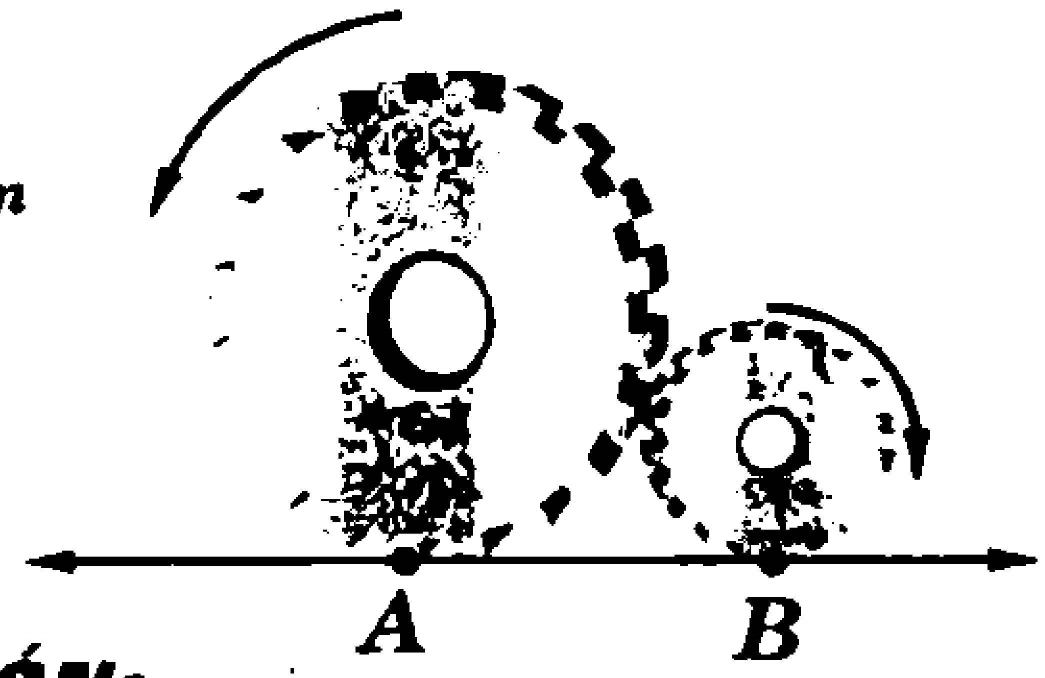
$$= 11$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 08 :

En la figura, los radios de las ruedas miden *4 cm* y *1 cm*. Si la rueda mayor avanza *5* vueltas y la menor *20* vueltas en las direcciones indicadas. ¿Cuál es la distancia de *A* a *B* en su nueva posición?

A)$4(1 + 20\pi)$ cm
B)80π
C)$1 + 80\pi$
D)π
E)11

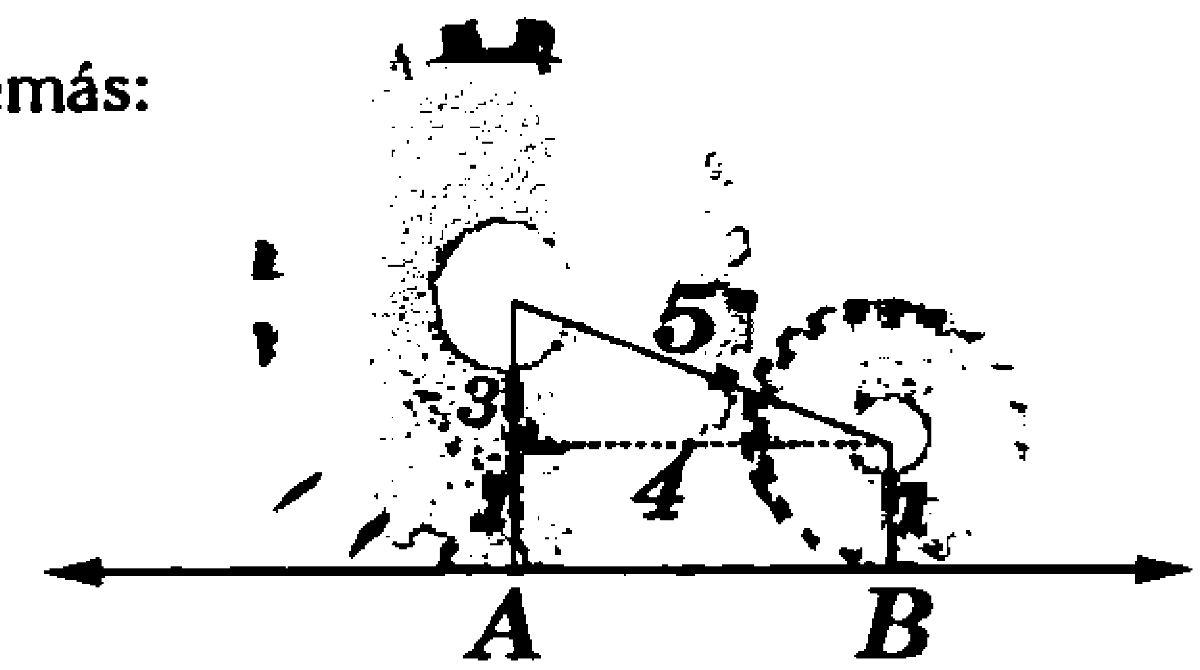


RESOLUCIÓN:

♦ Sabemos que:

$$N = \frac{L}{2\pi r} \Rightarrow L = 2\pi r N$$

♦ Además:



♦ Nueva distancia:

$L_A + L_B + \overline{AB}$

$= 2\pi\times 4\times 5 + 2\pi\times 1\times 20 + 4 = 4(1 + 20\pi)$ cm.

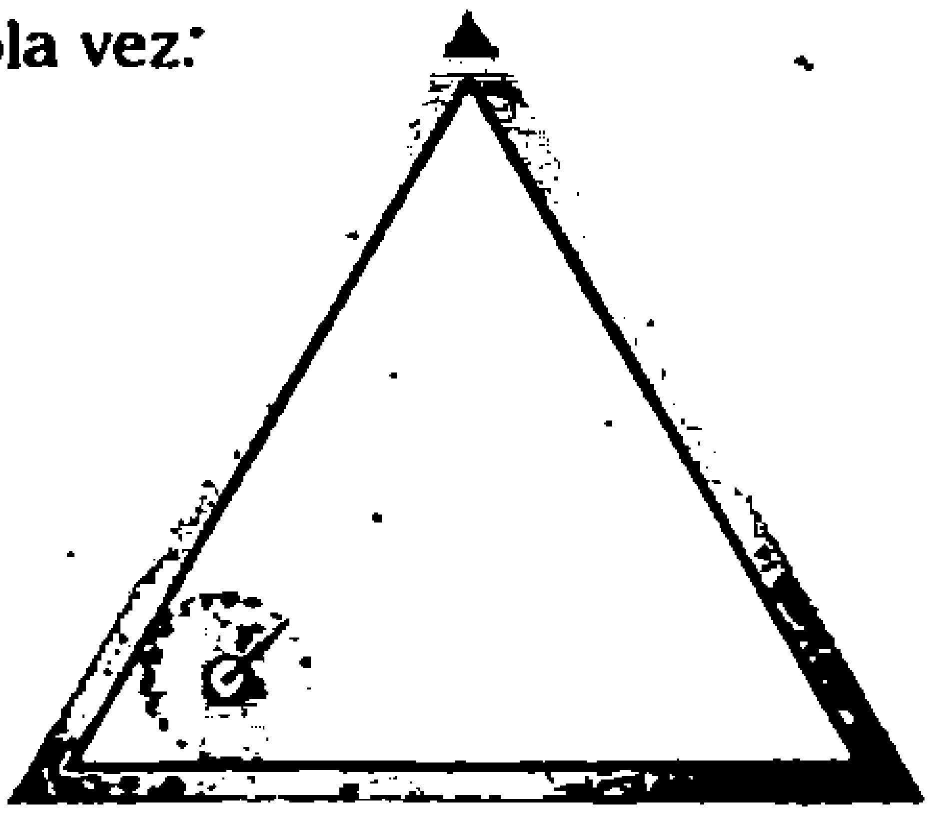
RPTA : "A"

PROBLEMA 09 :

Calcular el número de vueltas que da la rueda por el interior del triángulo equilátero de lado $12\sqrt{3}\mu$, al

recorrerlo una sola vez:

Dato: $r = 2\mu$.



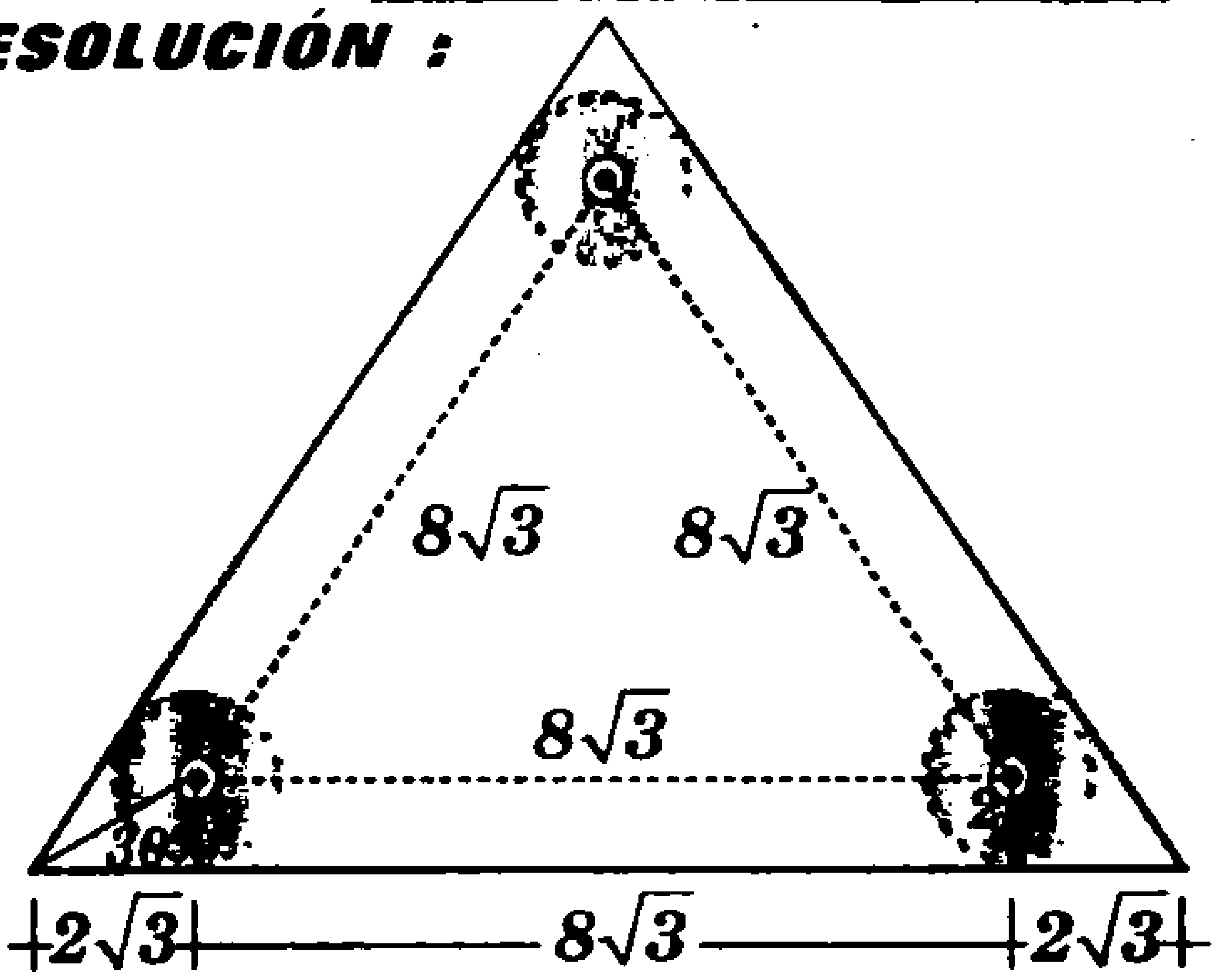
A) $6\sqrt{3}$

B) $6\sqrt{3\pi}$

C) $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$

D) 8

RESOLUCIÓN :



$\Rightarrow$ Recorrido del centro : $24\sqrt{3}$

Número de vueltas : $\dfrac{24\sqrt{3}}{2\pi(2)} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

La figura muestra una lámina triangular equilátera de **6 cm** de lado, donde *P* es el punto medio. Si la lámina gira en el sentido indicado una vuelta, ¿qué longitud recorre el punto *P*?

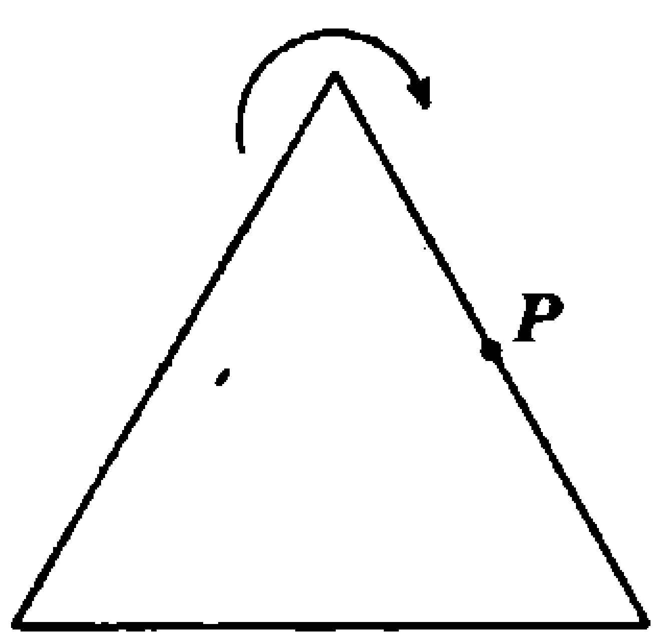
A) $2\pi(2+\sqrt{3})$

B) $2\pi(1+\sqrt{2})$

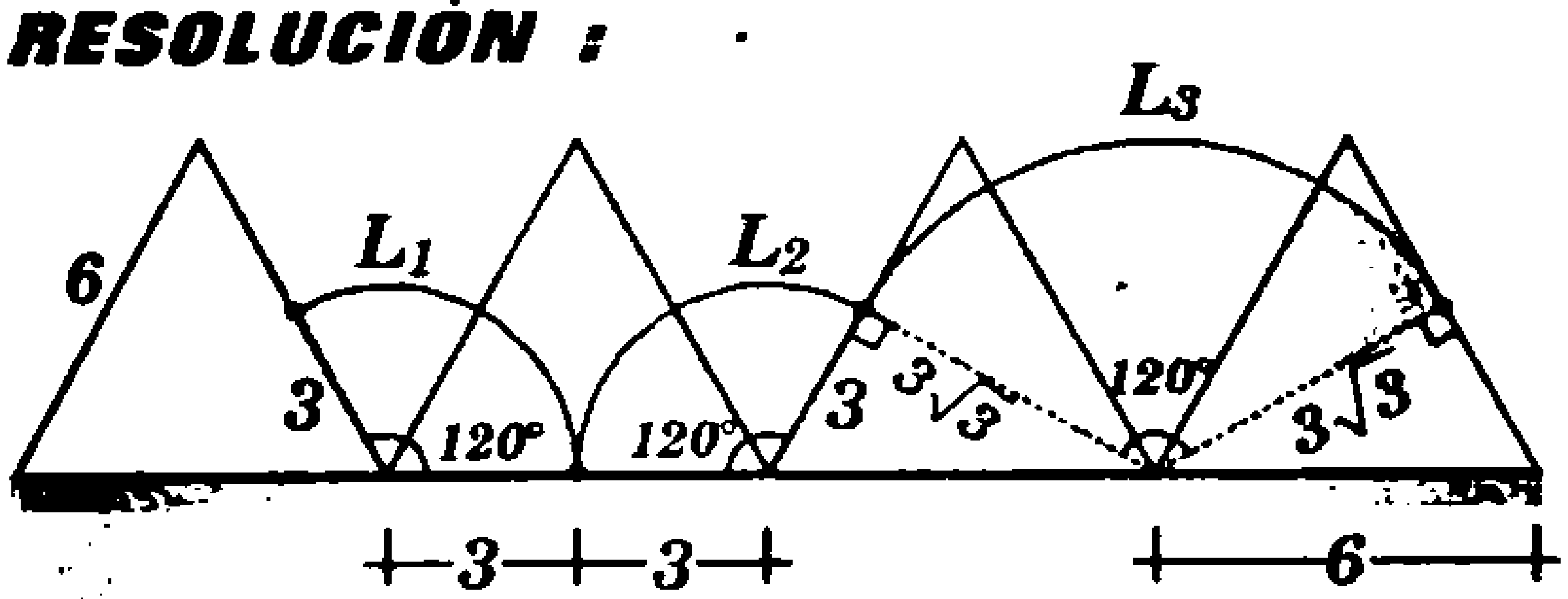
C) $2\pi\sqrt{3}$

D) 2π

E) $2\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :



• $120° = \dfrac{2\pi}{3}$ *Recordar :* $L = R \times \theta$

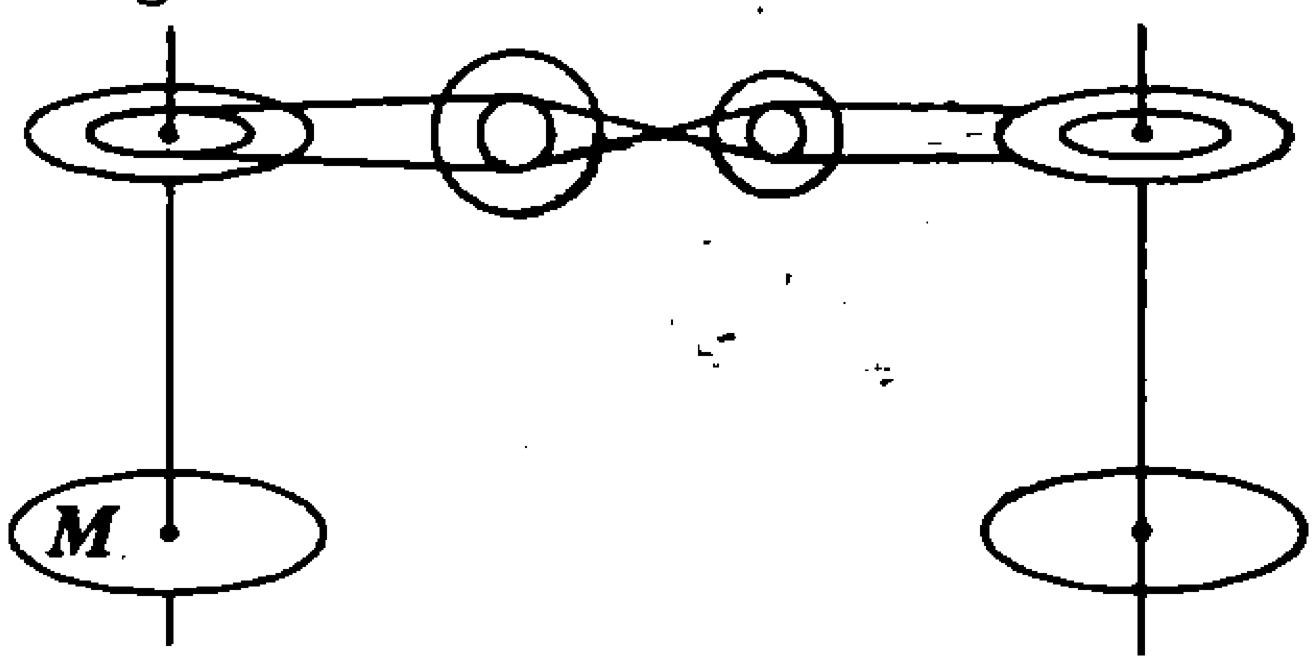
• Longitud total : $L_1 + L_2 + L_3$

$$= 3\times\frac{2\pi}{3} + 3\times\frac{2\pi}{3} + 3\sqrt{3}\times\frac{2\pi}{3} = 2\pi(2+\sqrt{3})$$

RPTA : "A"

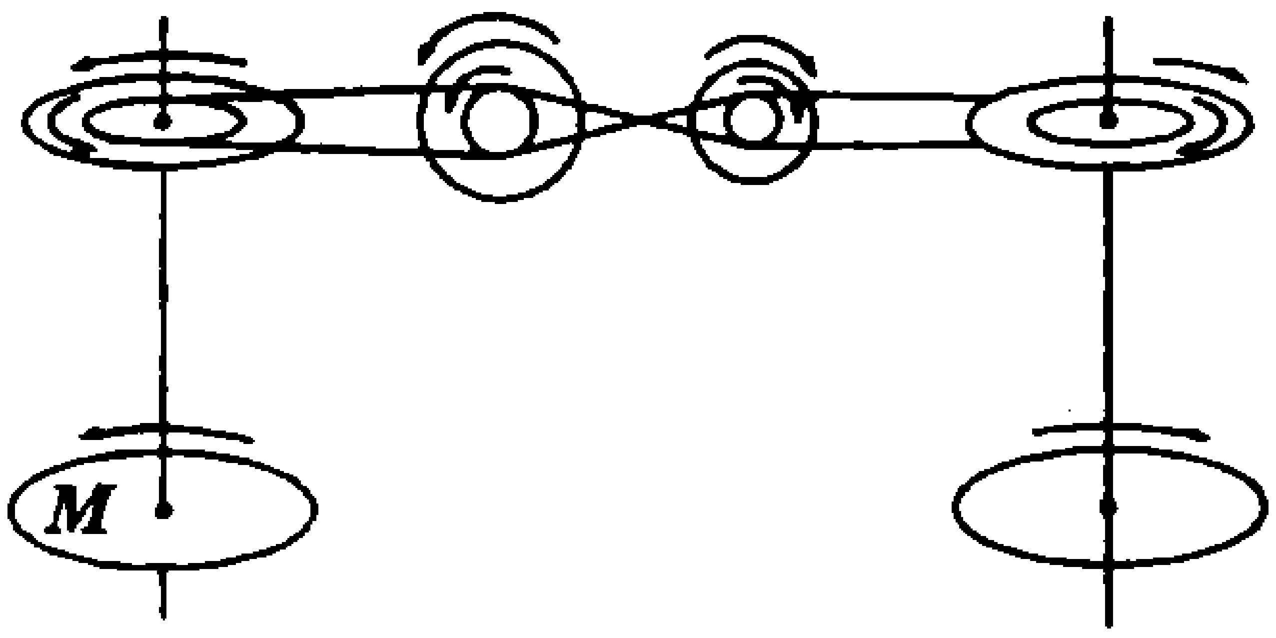
PROBLEMA 11 :

En la figura la polea «*M*» gira en sentido antihorario. ¿cuántas giran en el sentido horario?



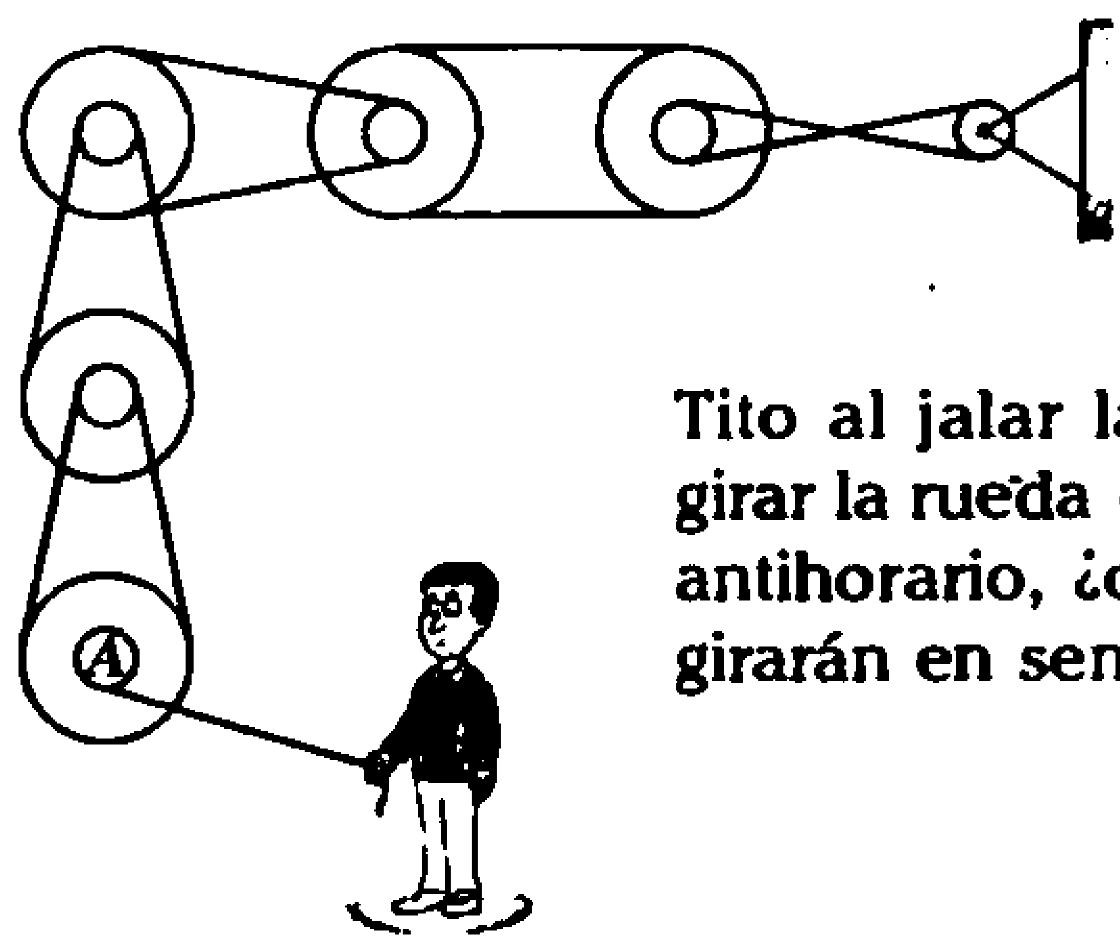
A) 6 B) 4 C) 5 D) 8 E) 7

RESOLUCIÓN :



RPTA : "C"

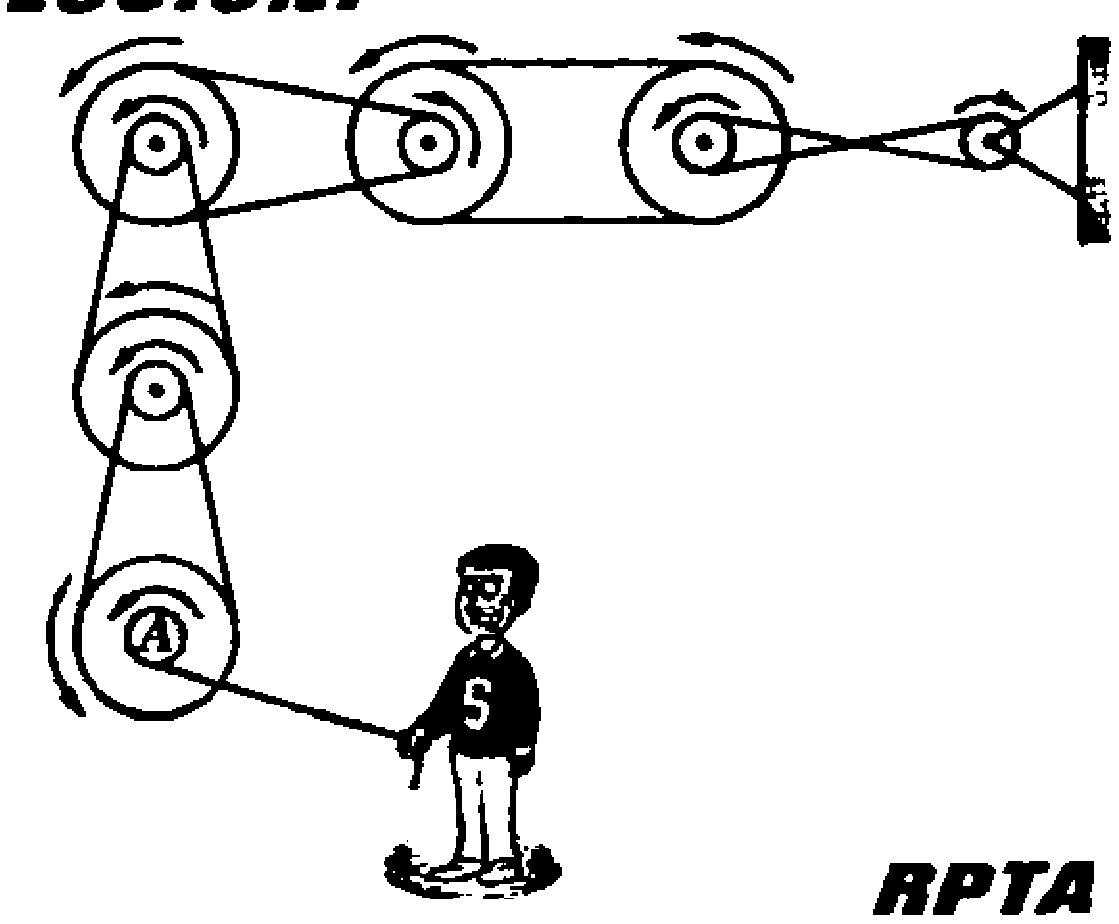
PROBLEMA 12 :



Tito al jalar la cuerda hace girar la rueda «*A*», en sentido antihorario, ¿cuántas ruedas girarán en sentido horario?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

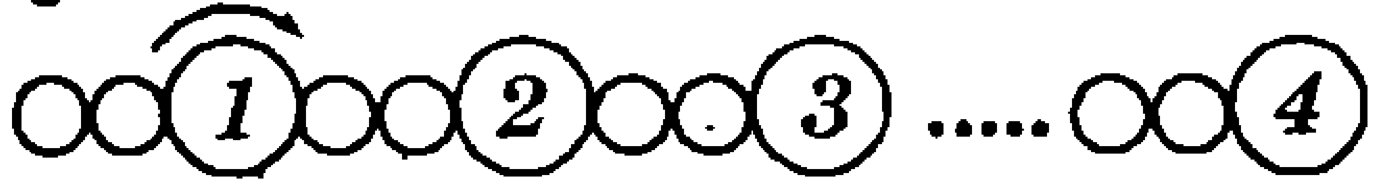
RESOLUCIÓN:



RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Hallar el número de ruedas pequeñas que giran en el sentido horario, y el número de ruedas grandes que giran en sentido horario.



A) 13 ; 6 B) 13 ; 7 C) 13 ; 11 D) 7 ; 5 E) 9 ; 13

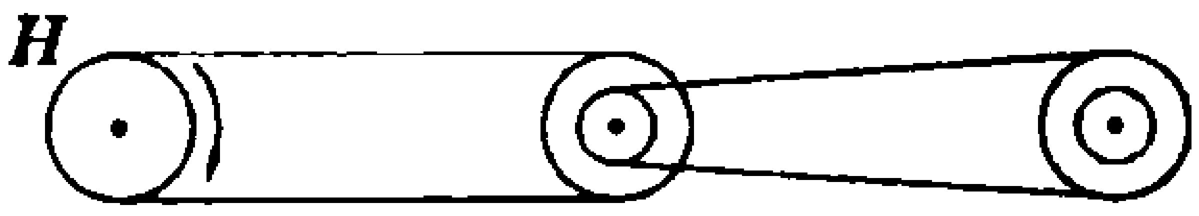
RESOLUCIÓN :

* Se deduce que por cada rueda grande hay una rueda pequeña que gira en sentido horario, es decir que éstas son *13*. Además se deduce que todas las ruedas grandes de numeración impar son las que giran en sentido horario, o sea *7*.

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

Si la polea *«H»* se mueve en sentido horario, ¿indicar cuántas más se mueven en sentido horario?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

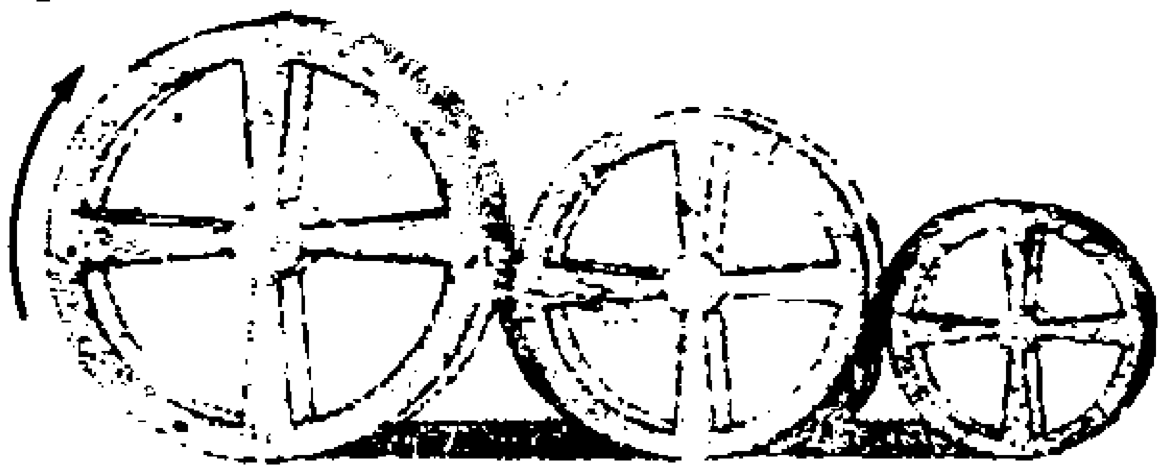
RESOLUCIÓN :

Cuatro más se mueven en sentido horario.

RPTA : "D"

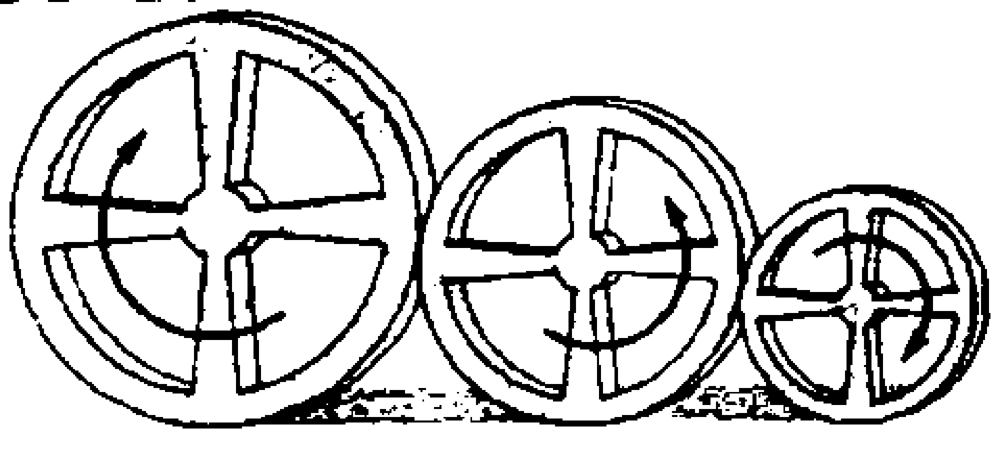
PROBLEMA 15 :

Si la rueda grande gira en sentido horario ¿en qué sentido girará la rueda pequeña?



A) En sentido antihorario.
B) En sentido horario.
C) En cualquiera de los dos sentidos.
D) Falta mas información.
E) Depende del tipo de rueda.

RESOLUCIÓN :

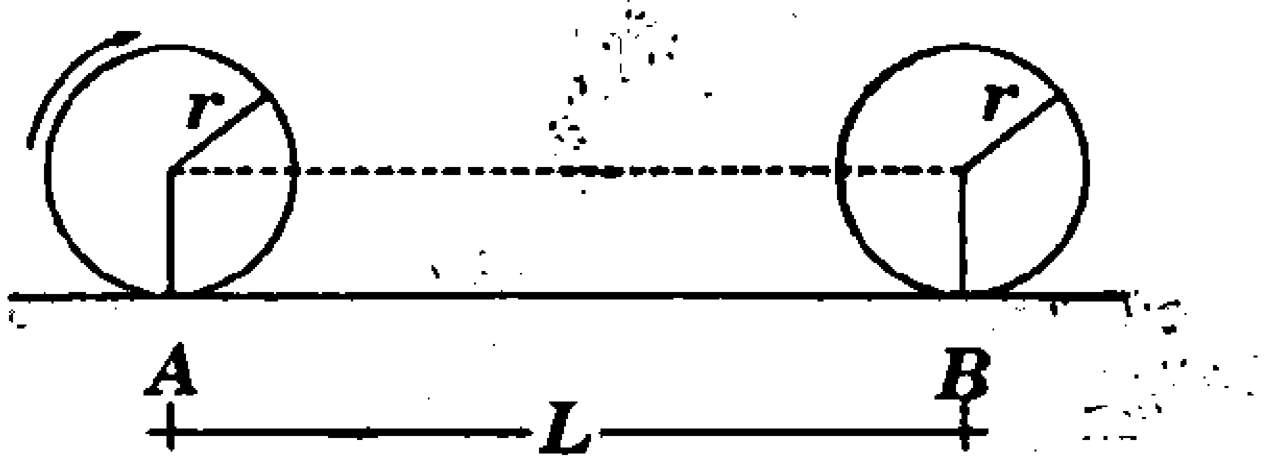


La rueda pequeña girará en el sentido de la rueda grande.

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En la figura adjunta la rueda de *80cm*. de diámetro pasa de la figura *«A»* a la posición *«B»*, dando *6* vueltas completas, determinar la longitud del segmento *AB*.



A) 380 πcm. B) 240πcm. C) 48 πcm.
D) 480πcm. E) 490πcm.

RESOLUCIÓN :

I) Se sabe que $L = AB = 2\pi r(n_v)$ donde n_v=# de vueltas que da la rueda para trasladarse de *A* hasta *B*, *r*=radio.

II) Luego; reemplazando los datos del problema se tiene :

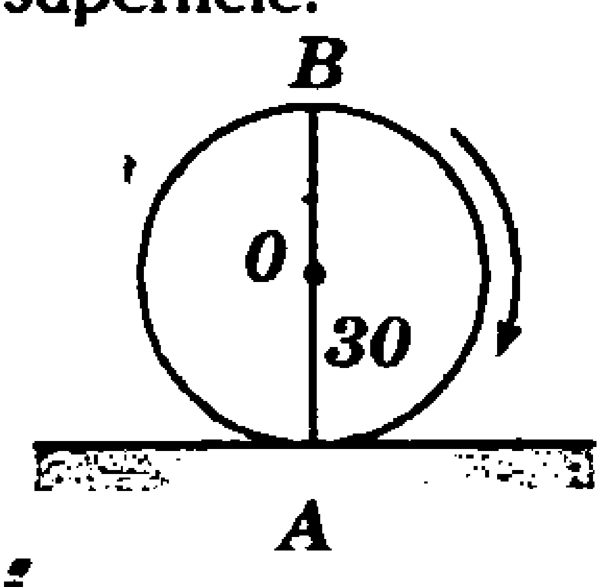
$$AB = L = 2\pi(40)(6)$$
$$AB = L = 480\pi \text{ cm.}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

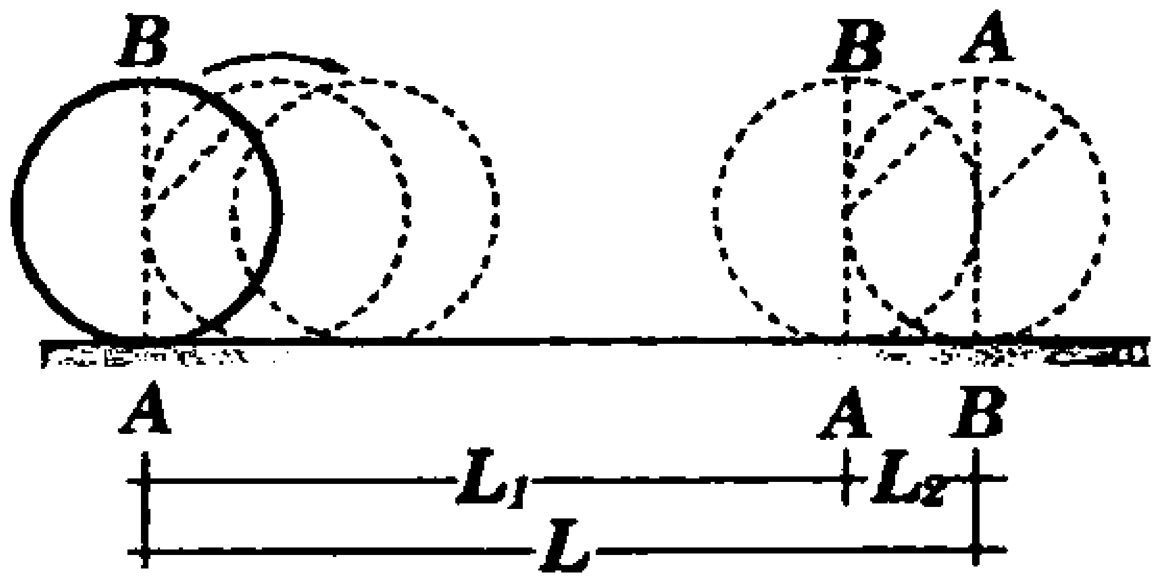
Calcular la longitud que recorre la rueda de radio *30 cm*. como se muestra en la figura adjunta. Si el punto *«A»* vuelve a tener contacto con la superficie otras *10* veces y al detenerse el punto *«B»* se encuentra en contacto con la superficie.

A) 600πcm.
B) 630πcm.
C) 615πcm.
D) 640πcm.
E) 632πcm.



RESOLUCIÓN :

I) Gráficamente tendríamos :



II) Cuando la rueda da *10* vueltas completas se tiene:

$$L_1 = 2\pi r(n_v) = 2\pi(30)(10) = 600\pi \text{ cm.}$$

III) Como el punto *B* debe finalmente estar con el piso entonces tendrá que recorrer una distancia

adicional a las *10* vueltas completas es decir :

$$L_2 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = \pi(30) = 30\pi cm.$$

IV) Finalmente :

$$L = L_1 + L_2 = 600\pi cm + 30\pi cm.$$

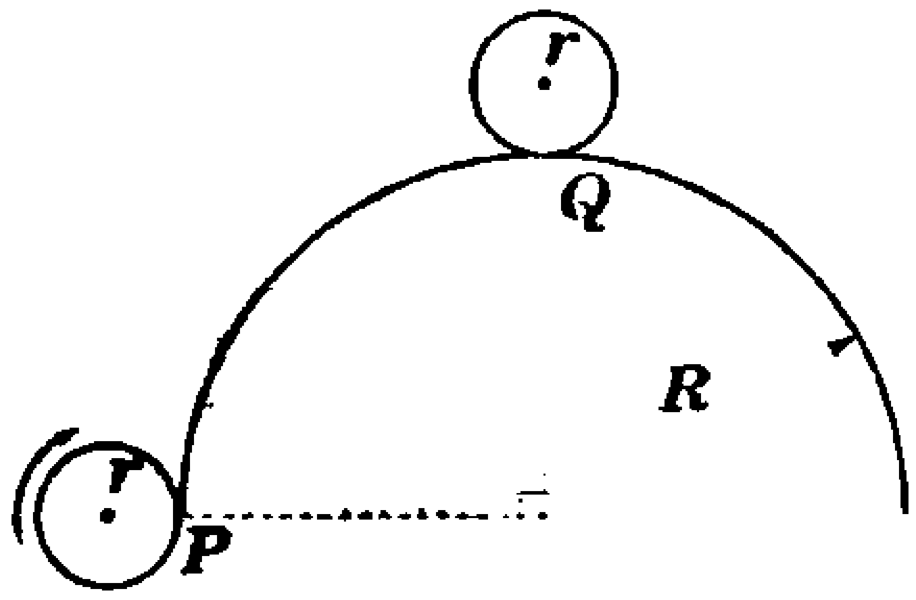
$$\Rightarrow L = 630\pi cm.$$

RPTA : "B"

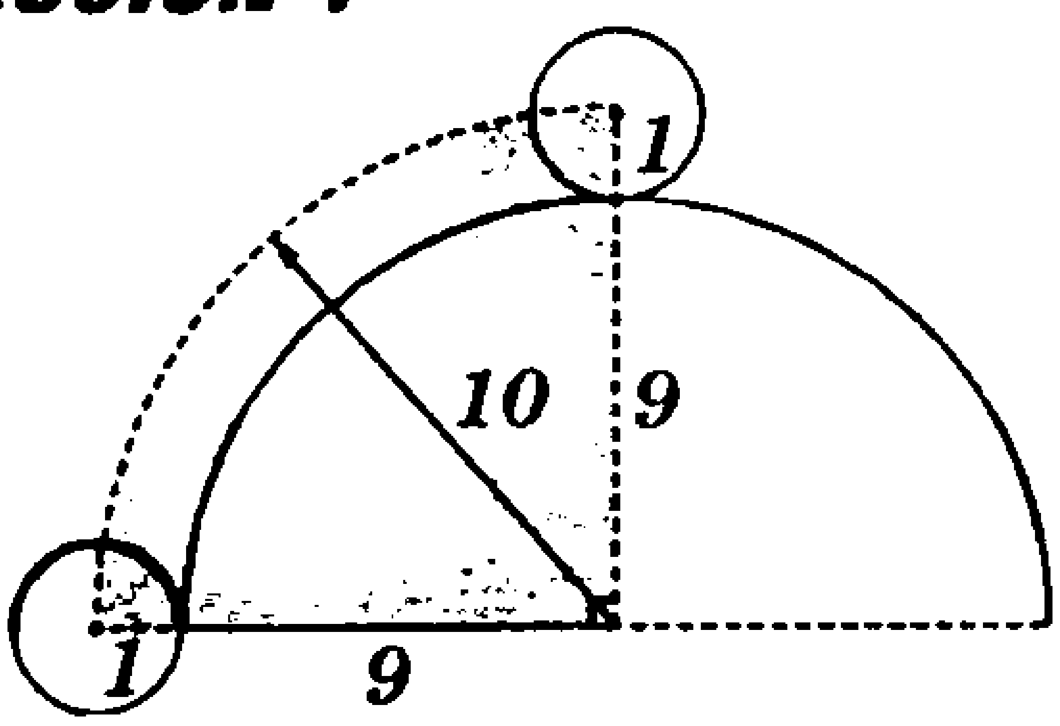
PROBLEMA 18 :

Si $R=9cm.$ y $r=1cm.$, ¿Cuántas vueltas da la rueda pequeña para ir del punto *P* al punto *Q*?

A) 2,5
B) 2
C) 5
D) 4
E) 3



RESOLUCIÓN :



Sabemos que :

$$\# \text{ de vueltas} : \frac{\text{longitud recorrida por el centro}}{2\pi r}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2\pi \times 10)}{2\pi \times 1} = 2,5$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

Se tienen dos aros de radios *r* y *R* $(r<R)$ el primero recorre el perímetro del segundo y da un número de vueltas «*a*». Luego el segundo aro recorre el perímetro del primero y su número de vueltas es «*b*». Hallar *a/b*.

A) $\frac{R}{r}$ B) $\frac{r}{R}$ C) $\frac{2R}{r}$ D) $\frac{R}{(2r)}$ E) $\frac{2r}{R}$

RESOLUCIÓN :

$$a = \frac{2\pi(R+r)}{2\ r}$$

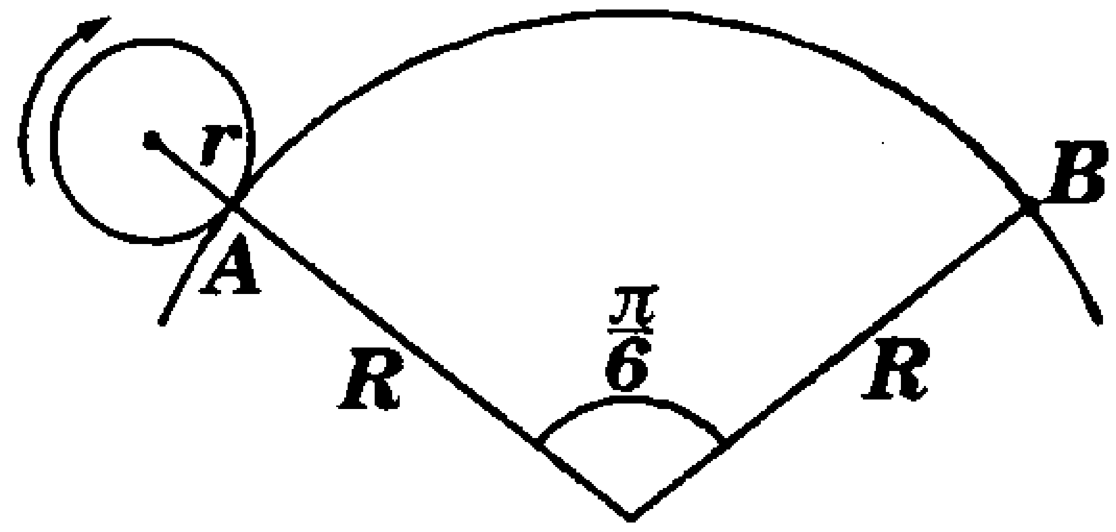
$$b = \frac{2\pi(R+r)}{2\pi R}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{R}{r}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

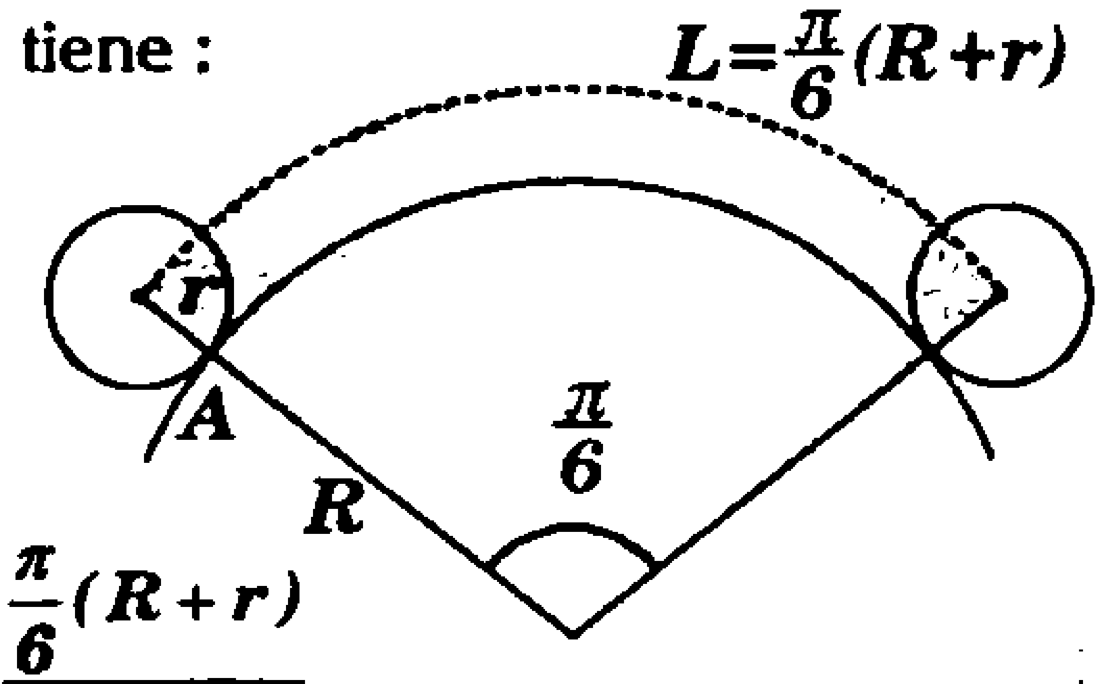
En la figura que se muestra, la rueda pequeña al desplazarse del punto *A* al punto *B* da una vuelta. Si $R=88cm.$ hallar el radio «*r*».



A) 8 cm. B) 10 cm. C) 6 cm. D) 24 cm. E) 16 cm.

RESOLUCIÓN :

Graficamente se tiene :



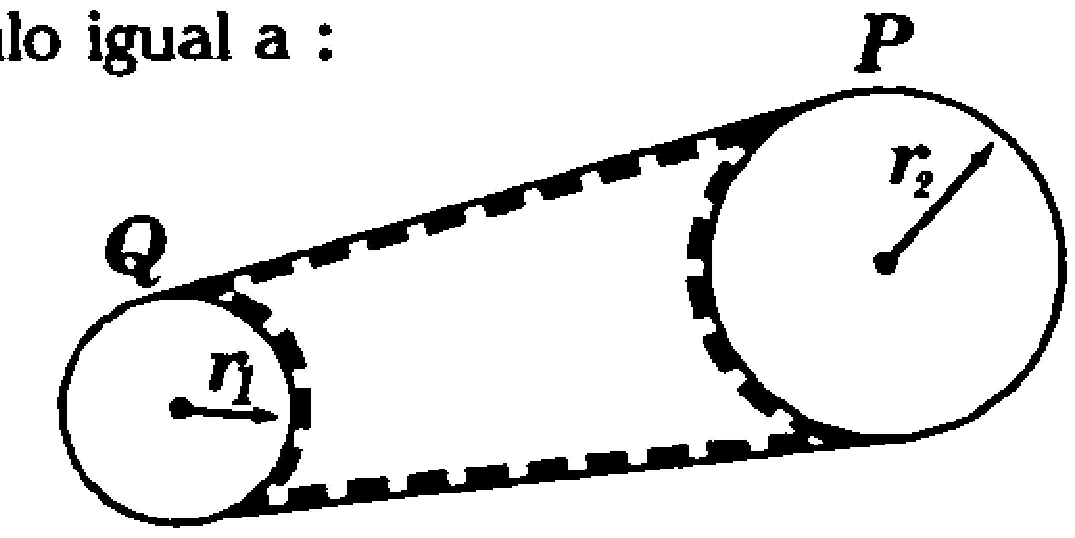
$$\# \text{ de vueltas} = \frac{\frac{\pi}{6}(R+r)}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(88+r)}{12r} \Rightarrow r = 8$$

RPTA : "A"

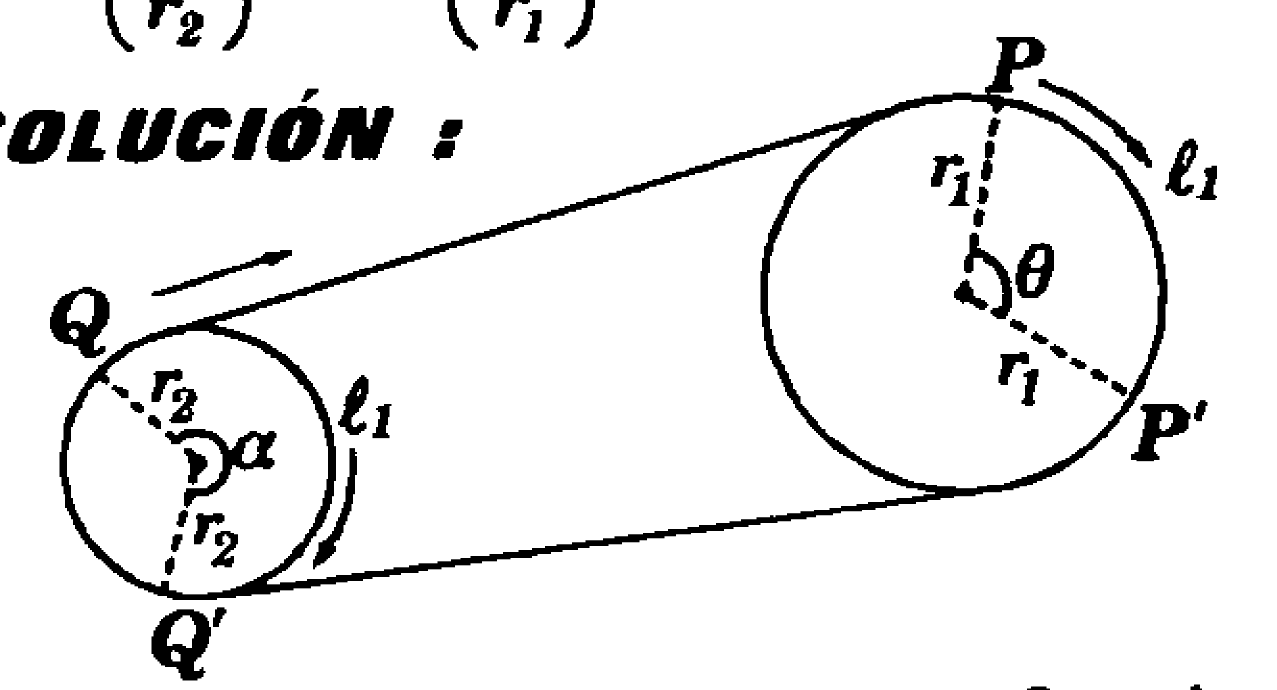
PROBLEMA 21 :

La figura representa una transmisión dentada de radios, r_1 y r_2 como se indica. Si el punto *P* sobre la rueda de mayor radio r_1 gira un ángulo θ, entonces el punto *Q* correspondiente sobre la otra rueda girará un ángulo igual a :



A) θ B) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\theta$ C) $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\theta$ D) $(r_1, r_2)\theta$ E) $|QP|\theta$

RESOLUCIÓN :



Sea α el ángulo girado por el punto *Q* en la rueda de radio r_2.

Como las ruedas están unidas por una cadena se cumple :

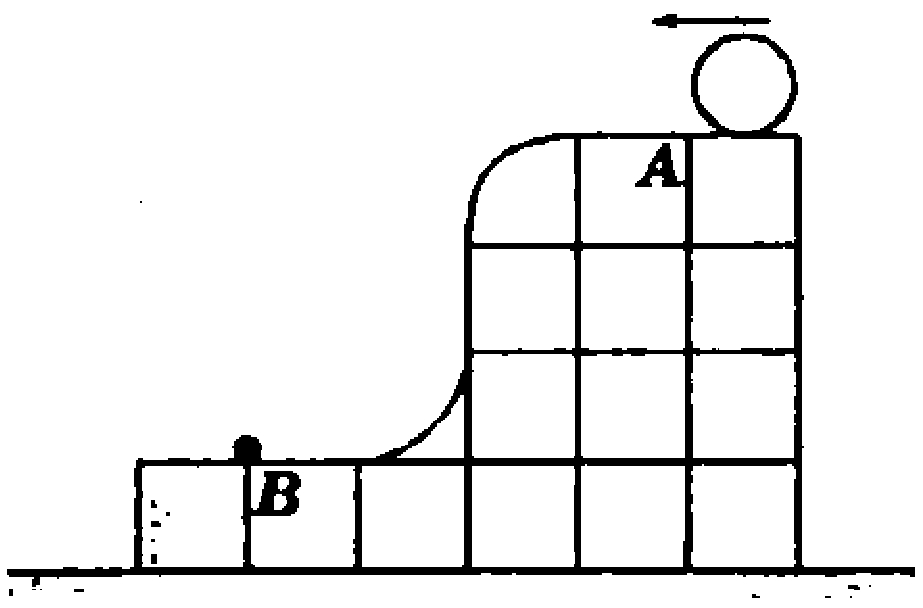
$$\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow \theta r_1 = \alpha r_2 \Rightarrow \alpha = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\theta$$

RPTA : "B"

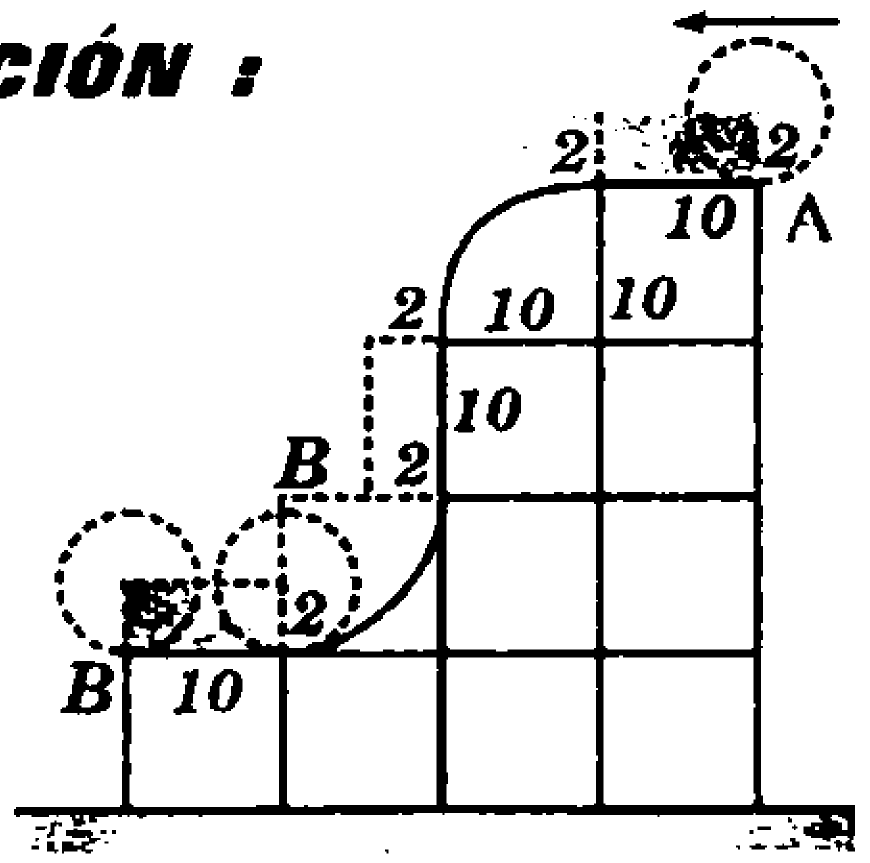
PROBLEMA 22 :

La pared está formada por láminas cuadradas de *10cm*. de lado. Calcular la longitud que recorre el centro de la rueda de radio *2cm*. si éste recorre tangencialmente desde *A* hasta *B*.

A) $10(2\pi+3)$
B) $10(2\pi-1)$
C) $12(3\pi-1)$
D) $10(\pi+3)$
E) $12(\pi+3)$



RESOLUCIÓN :



Se observa que el recorrido de la rueda es :

$$10 + \frac{2\pi(10+2)}{4} + 10 + \frac{2\pi(10-2)}{4} + 10 = 10(\pi+3)$$

RPTA : "D"

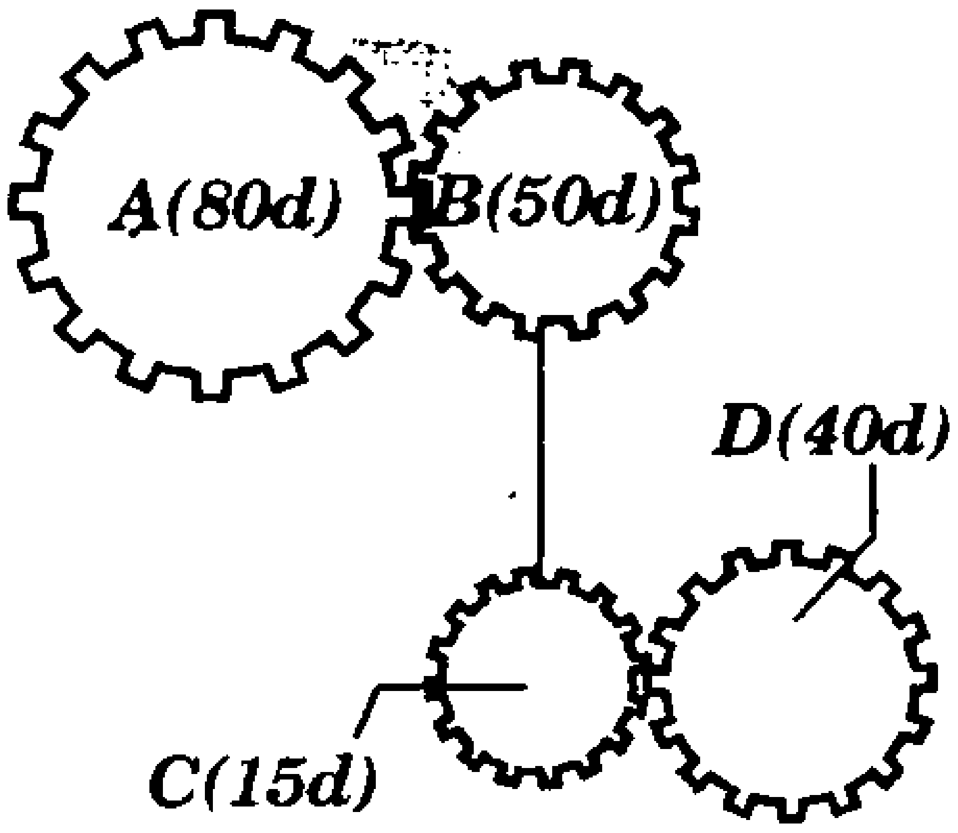
PROBLEMA 23 :

Una rueda *A* de *80* dientes engrana con otra rueda *B* de *50* dientes. Fijo al eje de *B* hay otra rueda *C* de *15* dientes que engrana con una rueda *D* de *40* dientes. Si *A* da *120* vueltas por minuto. ¿Cuántas vueltas dará *D*?.

A) 70 B) 72 C) 60 D) 90 E) 96

RESOLUCIÓN :

Haciendo un gráfico :



Para dos ruedas engranadas se cumple que el número de dientes es inversamente, proporcional al número de vueltas :

I) «*A*» que tiene *80* dientes dá *120* vueltas, «*B*» que tiene *50* dientes da N_B.

$$\Rightarrow N_B \times 50 = 120 \times 80 \Rightarrow N_B = \frac{80 \times 120}{50} = 192 \text{ vueltas}$$

II) «*B*» y «*C*» darán el mismo número de vueltas en el mismo tiempo. «*C*» que tiene *15* dientes da *192* vueltas ; "*D*" que tiene *40* dientes da N_D

$$\Rightarrow N_D \times 40 = 192 \times 15 \Rightarrow N_D = \frac{15 \times 192}{40} = 72 \text{ vueltas}$$

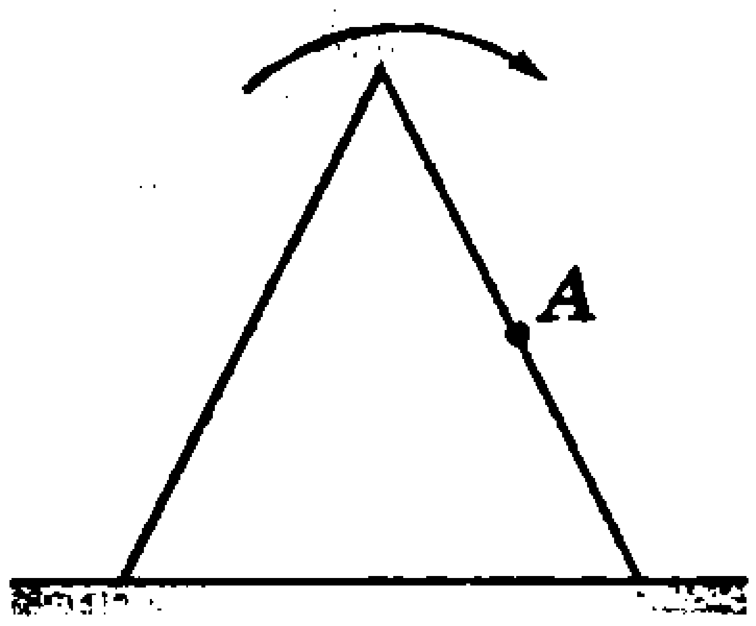
⇒ La rueda «*D*» dará : *72* vueltas

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

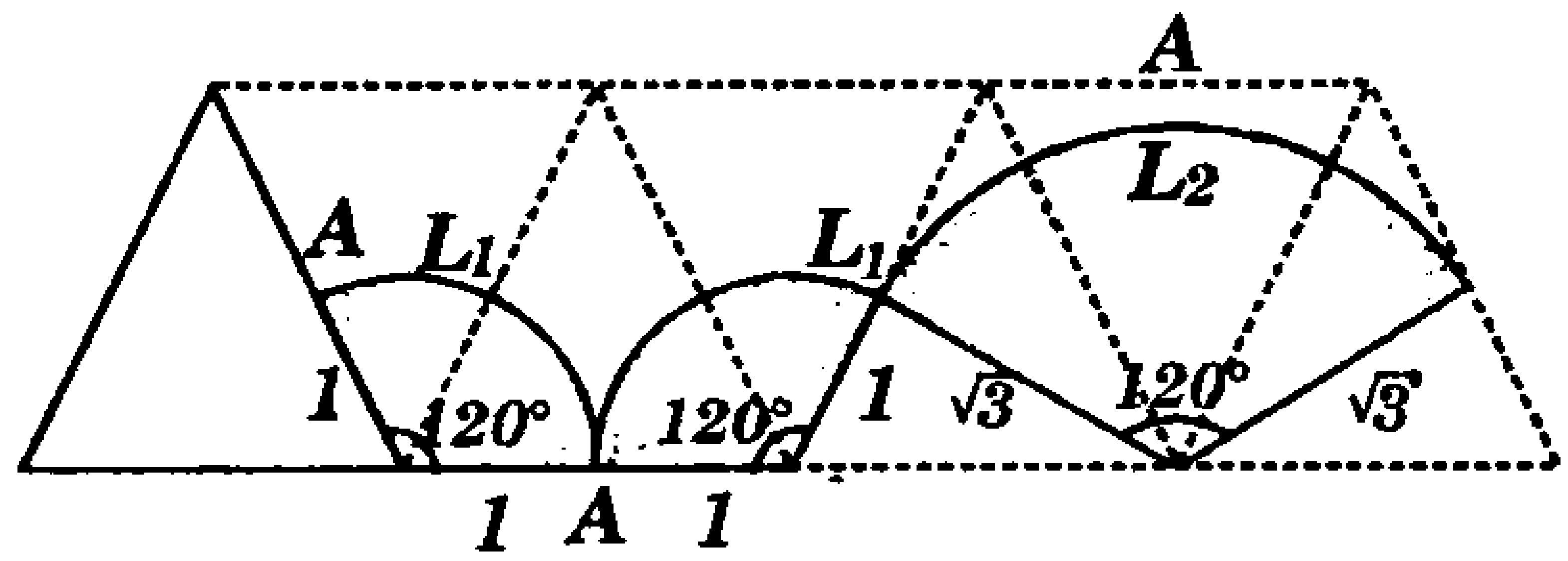
La figura muestra una lámina triangular equilátera de *2cm*. de lado y *A* es punto medio de estos lados. Si la lámina gira en el sentido indicado una vuelta. ¿Qué longitud recorre el punto *A*?

A) $\frac{2\pi}{3}(4+\sqrt{3})cm.$
B) $\frac{2}{3}\pi(4-\sqrt{3})cm.$
C) $\frac{2}{3}\pi(2+\sqrt{3})cm.$
D) $\frac{2}{3}\pi(3+2\sqrt{3})cm.$
E) $\frac{2}{3}\pi(3-\sqrt{3})cm.$



RESOLUCIÓN :

I) Graficando el recorrido el punto «*A*» tenemos :



II) La longitud recorrida por el punto «*A*» al dar una vuelta completa la lámina es: longitud recorrida por $A = 2L_1 + L_2$.

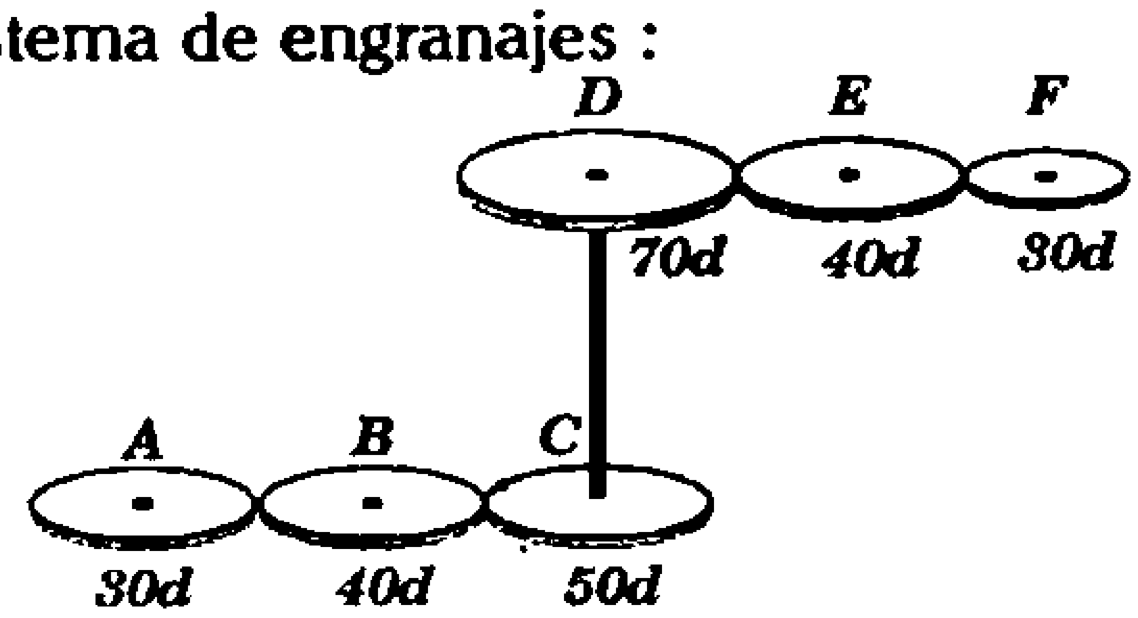
Luego : $L = 2\left[\frac{2\pi}{3}(1)\right] + \frac{2\pi}{3}(\sqrt{3})$

$$\Rightarrow L = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \Rightarrow L = \frac{2\pi}{3}(2+\sqrt{3})cm.$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

Si el sistema de engranajes :



funciona *1* minuto ¿En qué relación estará el número de vueltas de *A* y *F*?

A) 5/7 B) 4/5 C) 3/5 D) 7/4 E) 4/3

RESOLUCIÓN :

Sabemos que :

$$(\text{\# de vueltas})\,(\text{\# de dientes}) = K$$

Donde : «*K*» es constante.

* Para «*A*» y «*C*» :

$\Rightarrow N_A \times 30 = N_C \times 50$ .... *(I)*

* Para «*D*» y «*F*» :

$\Rightarrow N_D \times 70 = N_F \times 30$ .... *(II)*

* Como «*C*» y «*D*» están unidas mediante un eje se cumple :

$\Rightarrow N_C = N_D$ .... *(III)*

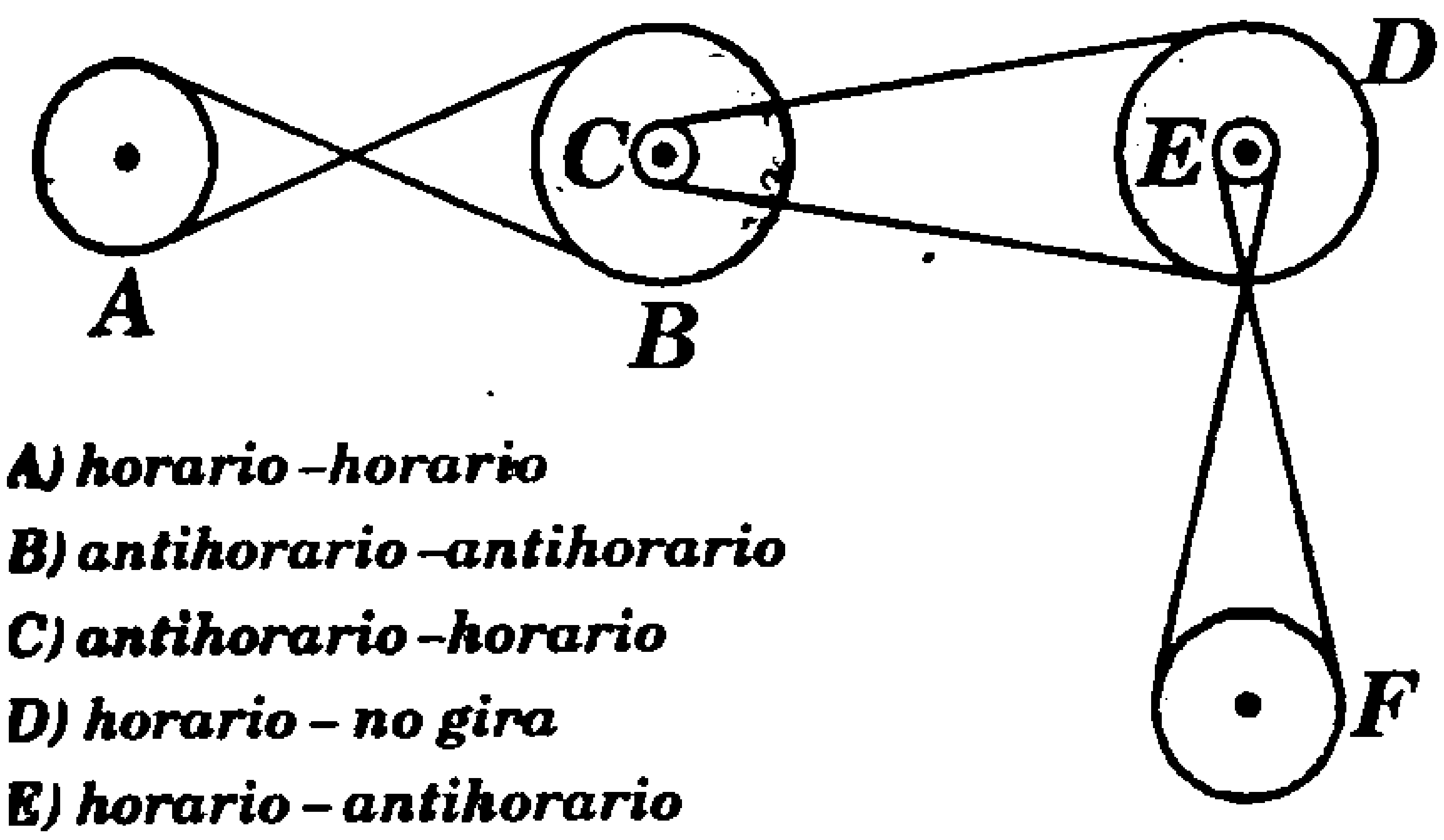
* De *(I)*, *(II)* y *(III)* se tiene :

$$\frac{N_A}{N_F} = \frac{5}{7}$$

RPTA : "A"

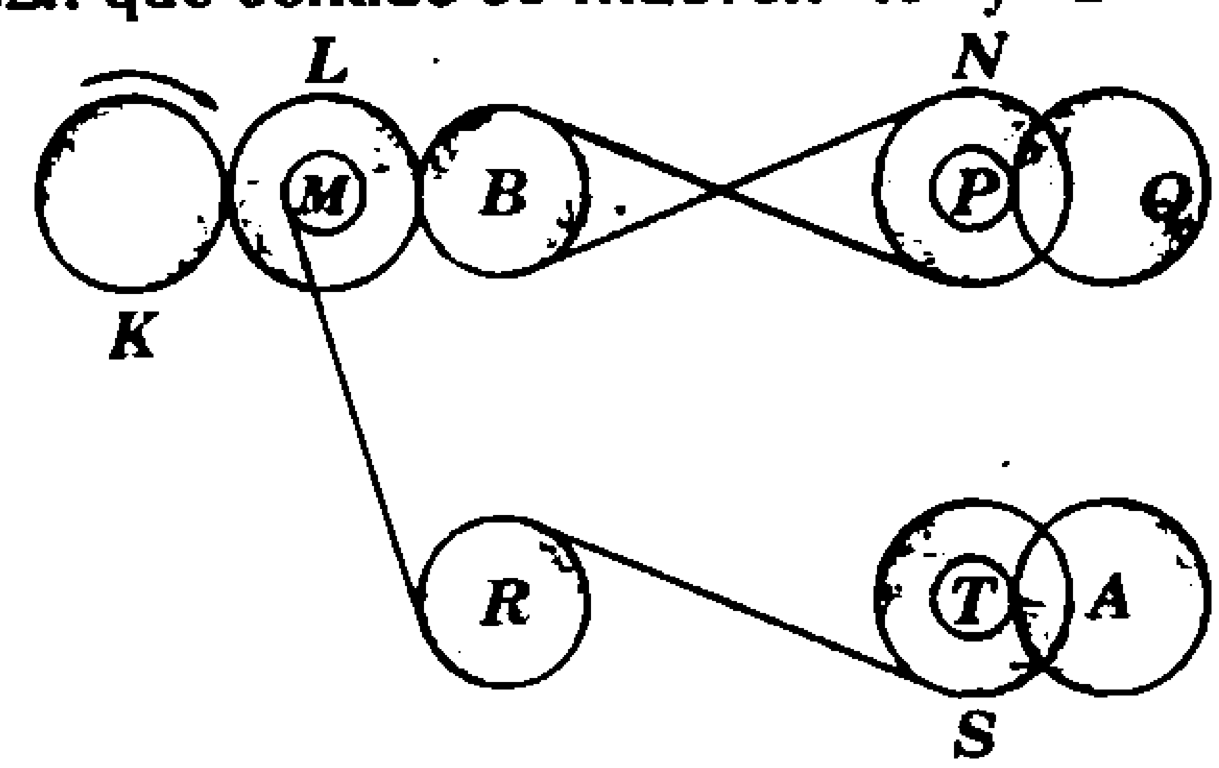
PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿En qué sentido girarán las poleas *C* y *F* si la polea «*A*» lo hace en sentido antihorario?



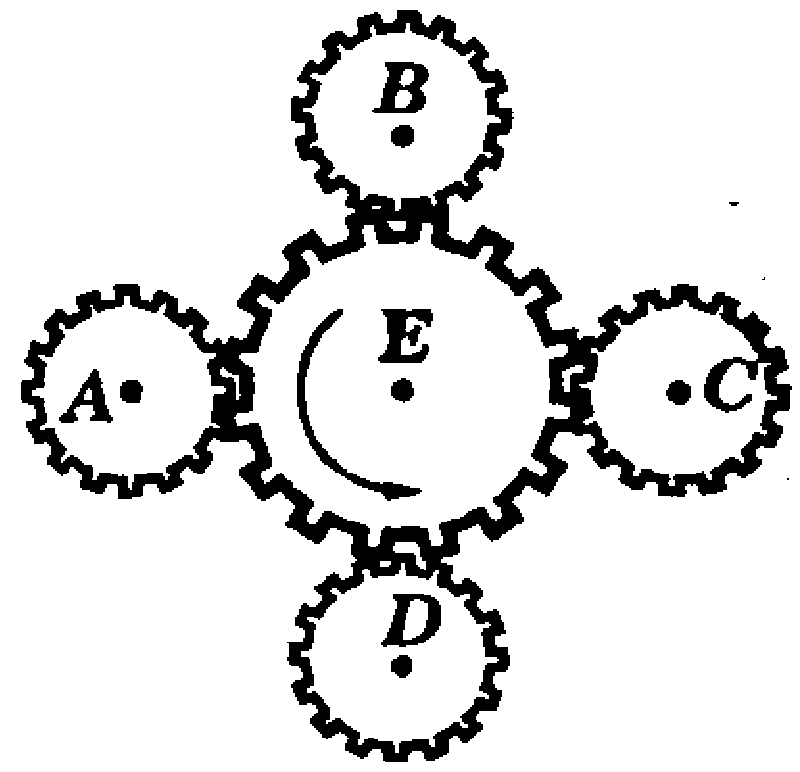
A) horario - horario
B) antihorario - antihorario
C) antihorario - horario
D) horario - no gira
E) horario - antihorario

02 ¿En qué sentido se mueven «*A*» y «*B*»?



A) No se mueven   ***B)*** ↶ ***, no se mueve***
C) ↶ ↷   ***D)*** ↷ ↷
E) ↶ ↶

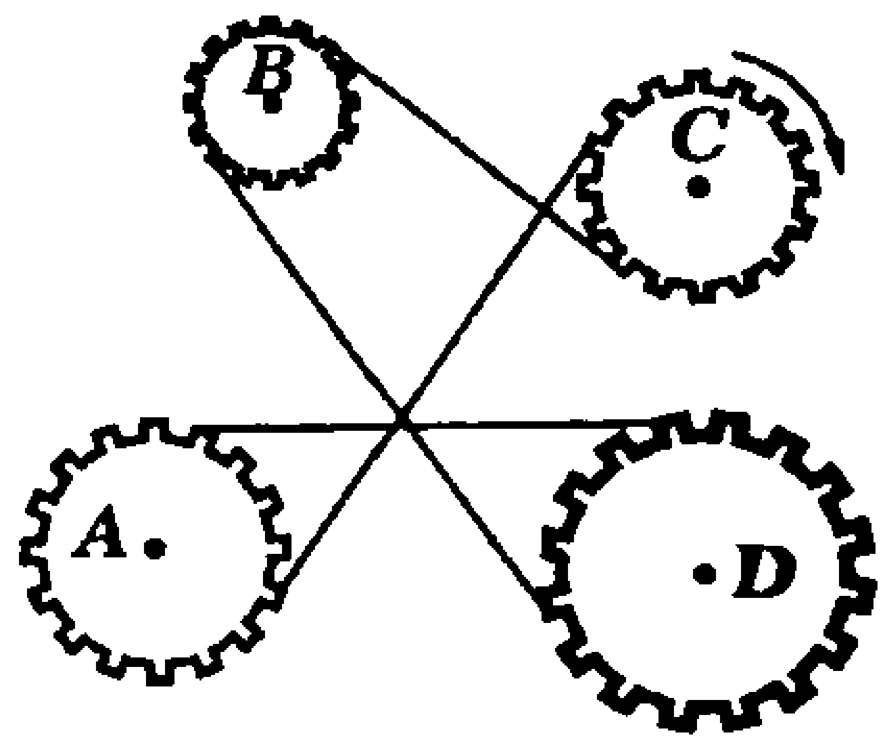
03 Si el engranaje «*E*» se mueve en el sentido de la flecha. Indicar cuántas se mueven hacia la izquierda.



A) B B) A, B C) A, B y C
D) Sólo E E) Todo menos E

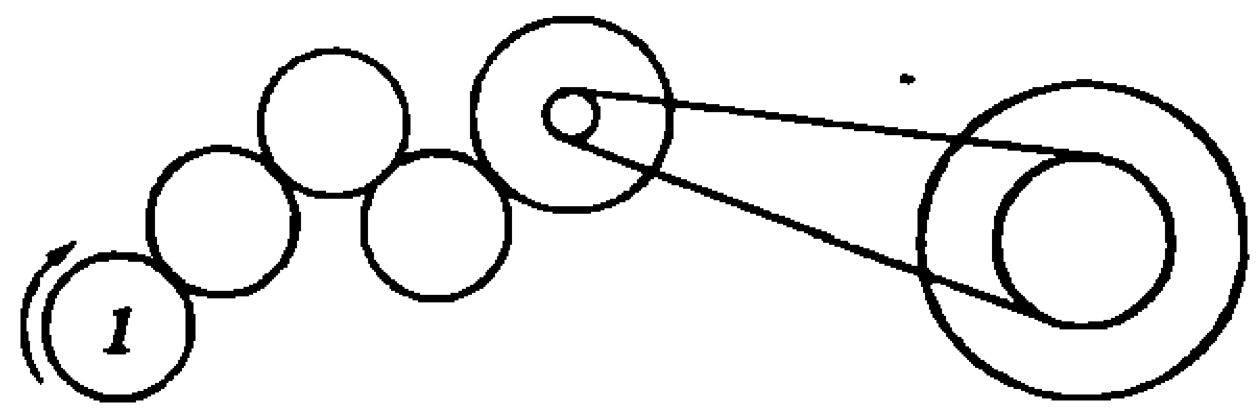
04 ¿Cuál de los engranajes se mueve más lento y hacia donde?

(Tamaño : ***D>A>C>B)***



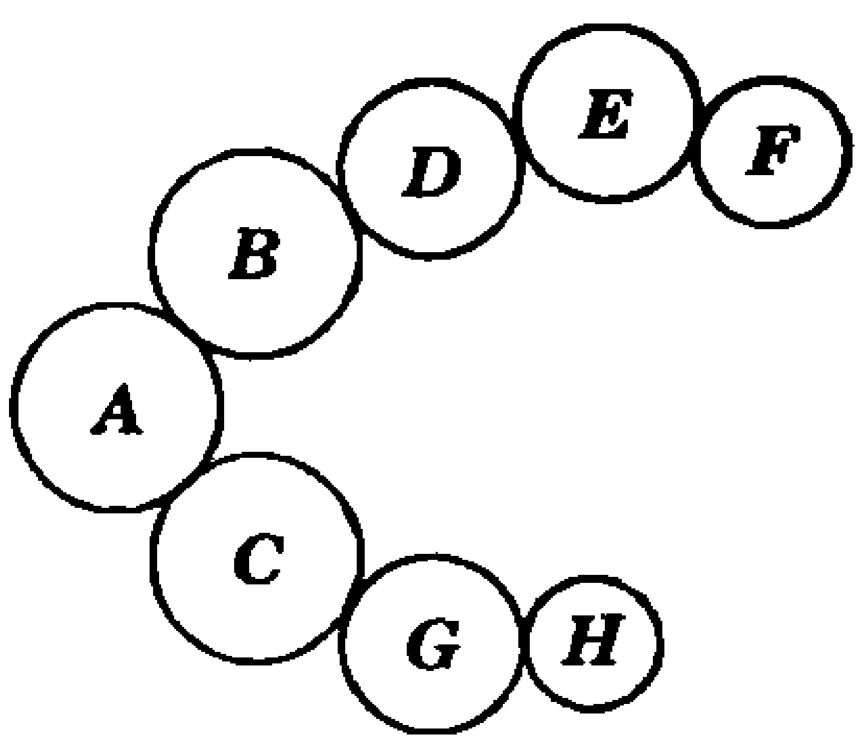
A) A, izquierda B) C, derecha C) B, derecha
D) D, izquierda E) B, izquierda

05 ¿Cuántos engranajes giran en sentido antihorario, si la rueda *1* gira en sentido horario?



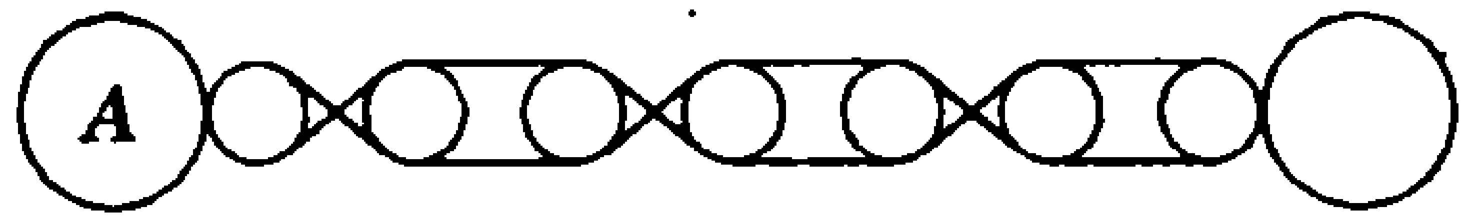
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguno

06 Si queremos hacer girar la rueda «*A*» en sentido horario, ¿cuántas en total girarán en sentido horario?



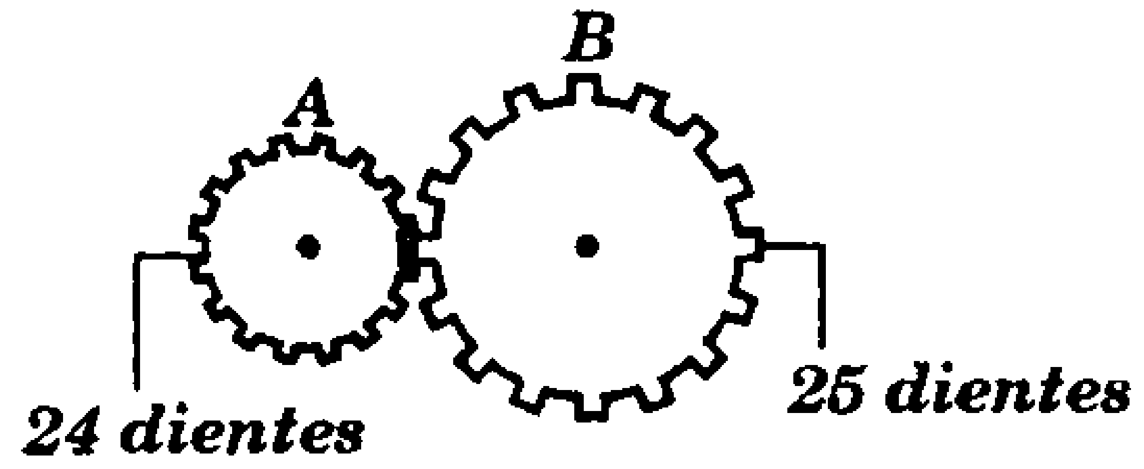
A) 7 B) 15 C) 4 D) Todas E) Ninguna

07 Si «*A*» gira en sentido antihorario, ¿cuántas giran en sentido horario?



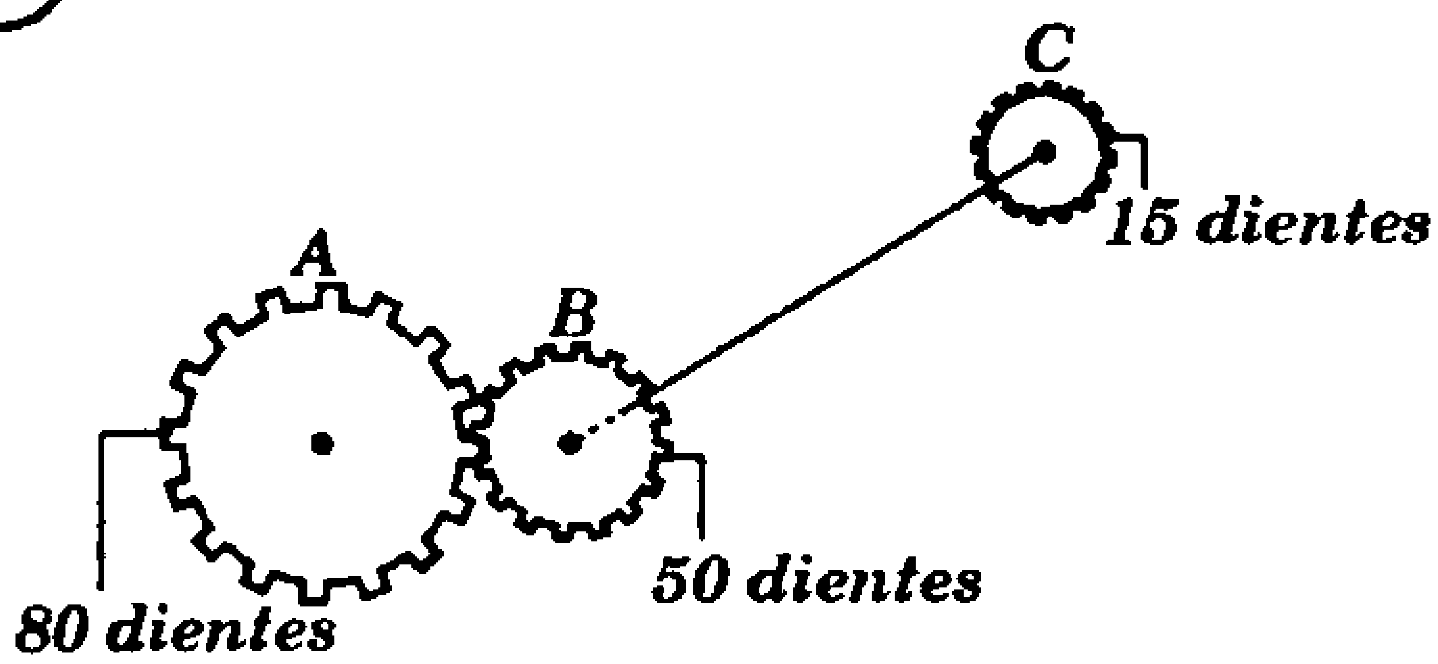
A) 5 *B) 2* *C) 4* *D) 3* *E) 1*

08 Si uno de ellos da *70* vueltas más que el otro. ¿Cuántas vueltas da *B»?*



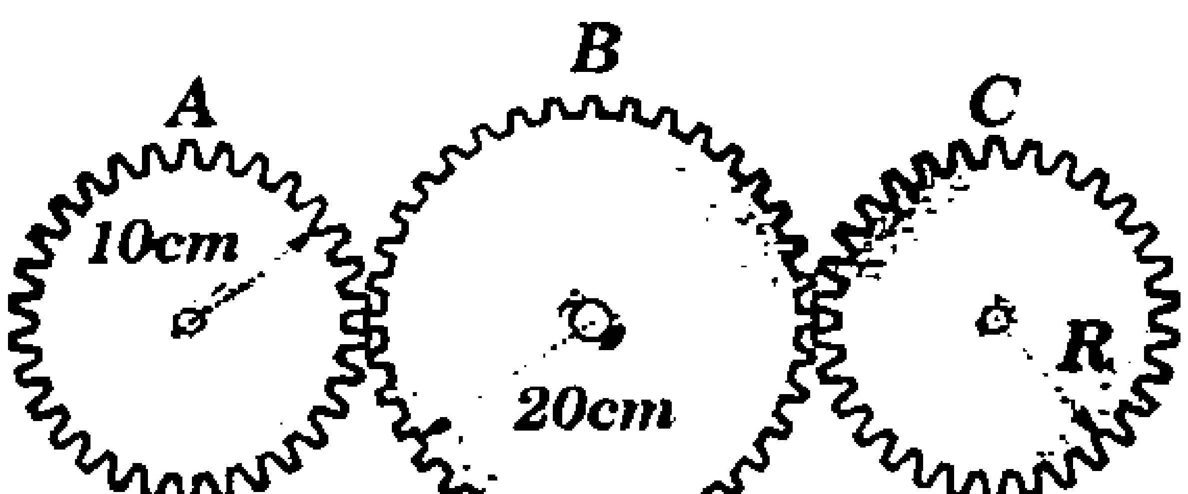
A) 69 *B) 70* *C) 79* *D) 80* *E) 75*

09 Si *A* da *120* vueltas ¿Cuántas vueltas da *C?*



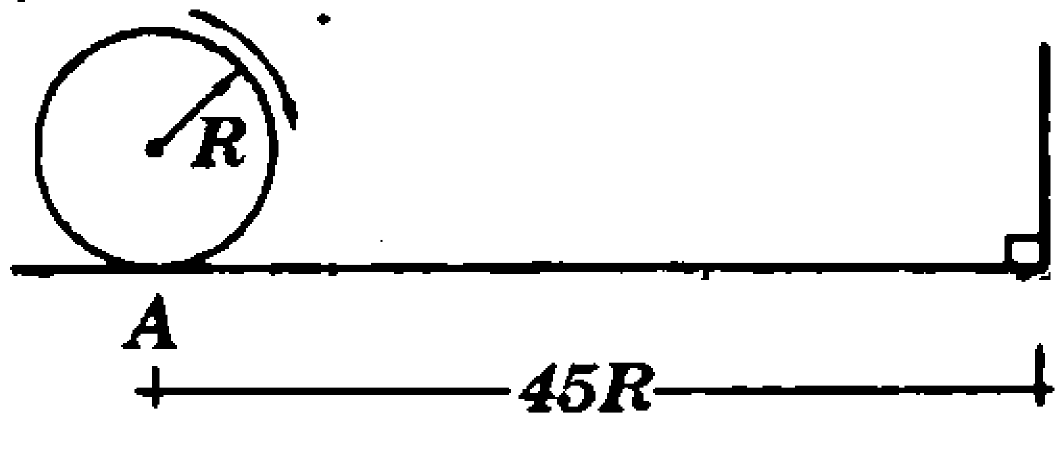
A) 50 *B) 80* *C) 195* *D) 192* *E) 145*

10 En el siguiente sistema de engranajes, *A* tiene *40* dientes y *B* tiene *20* dientes más que *C*. Si *A* da *6* vueltas ¿cuántas vueltas dará *C?*



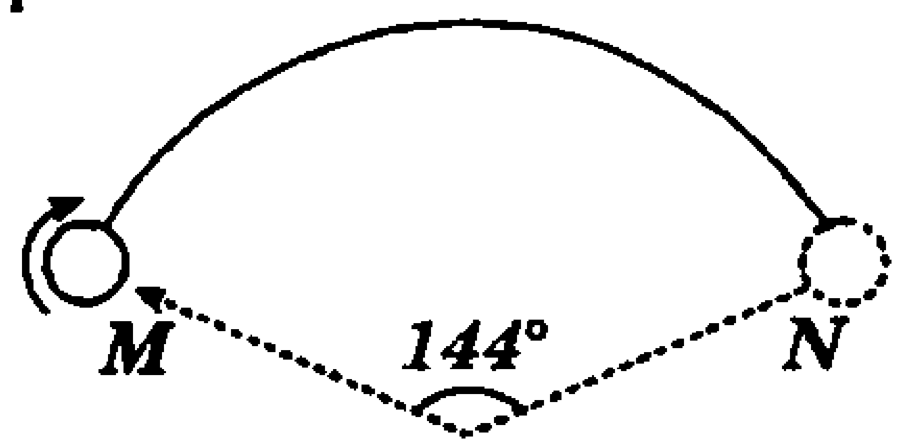
A) 3 *B) 4* *C) 3,5* *D) 4,5* *E) 5*

11 Calcular el número de vueltas que dará la ruedita al ir desde «*A*» hasta tocar la pared ($\pi=22/7$).



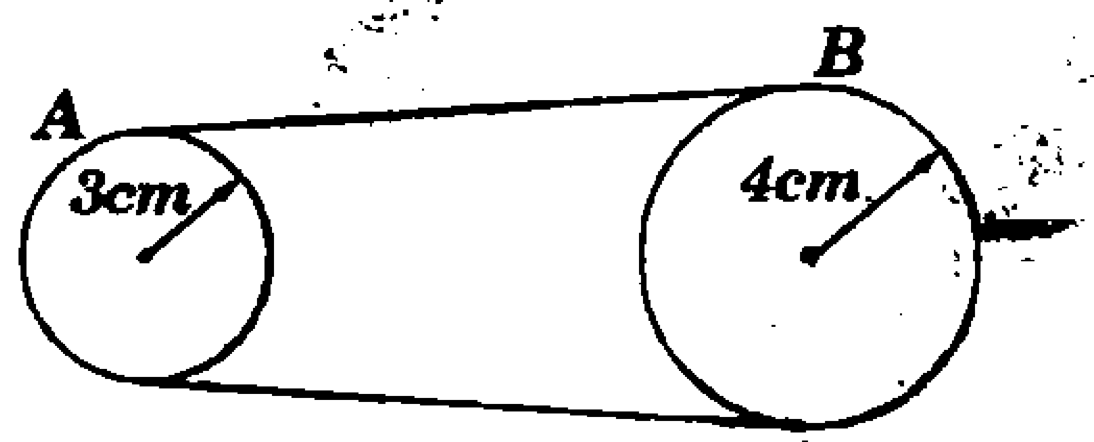
A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 3,5*

12 Calcule el número de vueltas que da la rueda al ir del punto «*M*» al punto «*N*» sabiendo que su radio es un cuarto del radio de la superficie sobre la cual se desplaza.



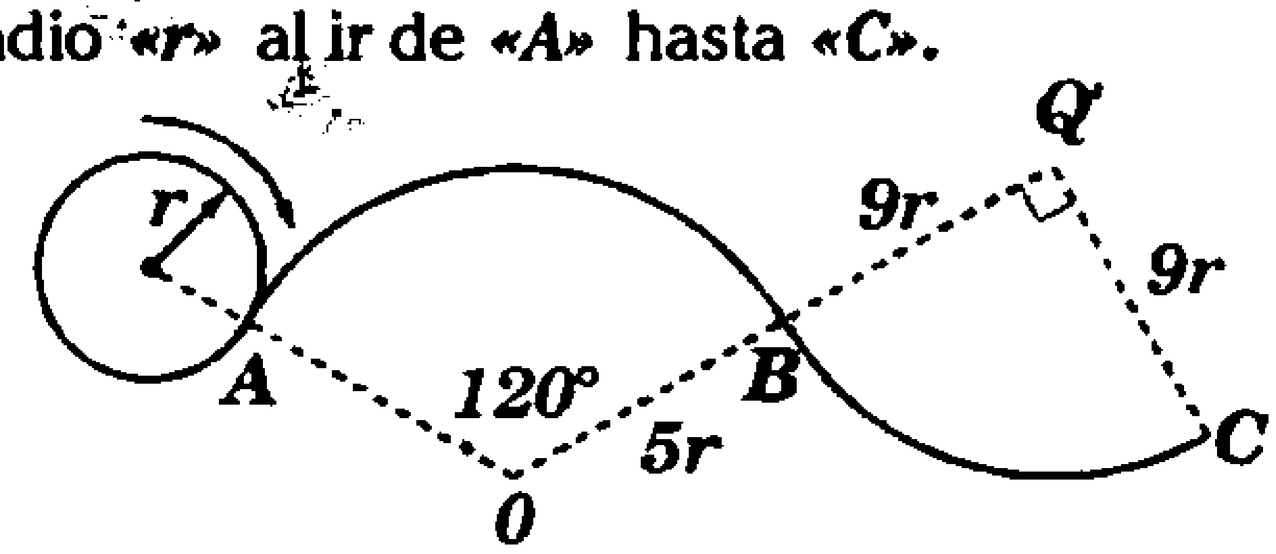
A) 4 *B) 3* *C) 2* *D) 1* *E) 1/2*

13 En la figura, se sabe que la rueda «*A*» da *24* vueltas por minuto. Al cabo de *5* minutos, ¿cuántas vueltas más que la rueda «*B*» habrá dado la rueda *A?*



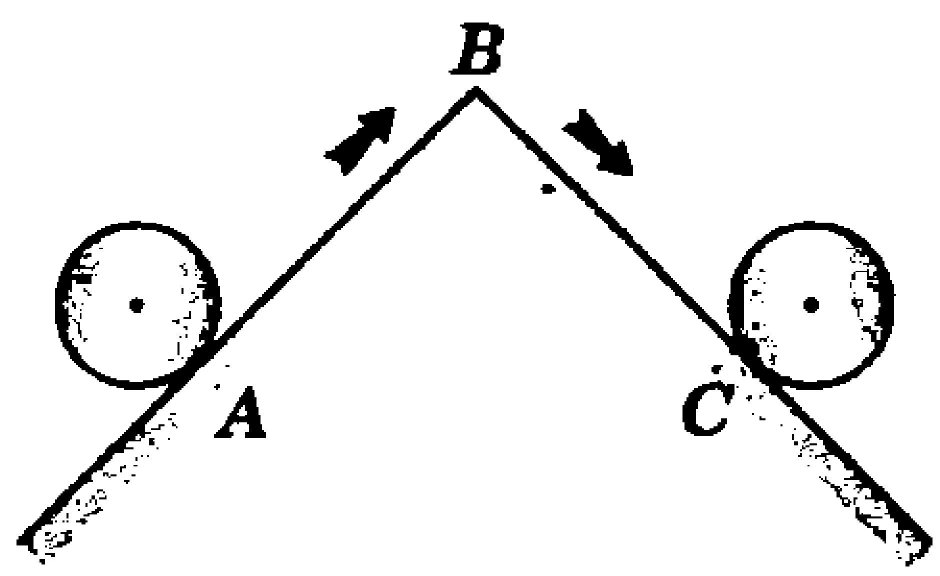
A) 15 *B) 20* *C) 30* *D) 25* *E) 35*

14 Indique el número de vueltas que da la ruedita de radio «*r*» al ir de «*A*» hasta «*C*».



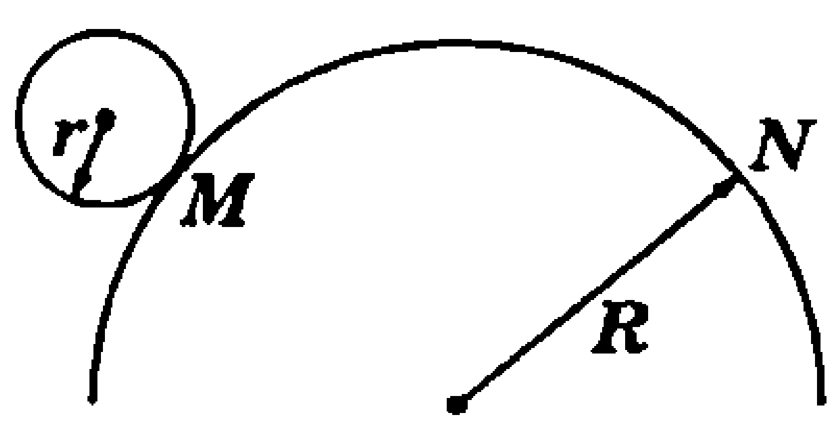
A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

15 Calcular el número de vueltas que dará la rueda, al ir desde «*A*» hasta «*C*». Si : $AB=9\pi$ y $BC=10\pi$ (Perímetro de la rueda = 4π)



A) 4 *B) 4,75* *C) 5* *D) 5,25* *E) 6*

16 Sobre una superficie curva de radio «*R*» gira una rueda cuyo radio es «r», si dicha rueda da una vuelta al ir de *M* a *N*. Calcular la longitud del arco *MN*.



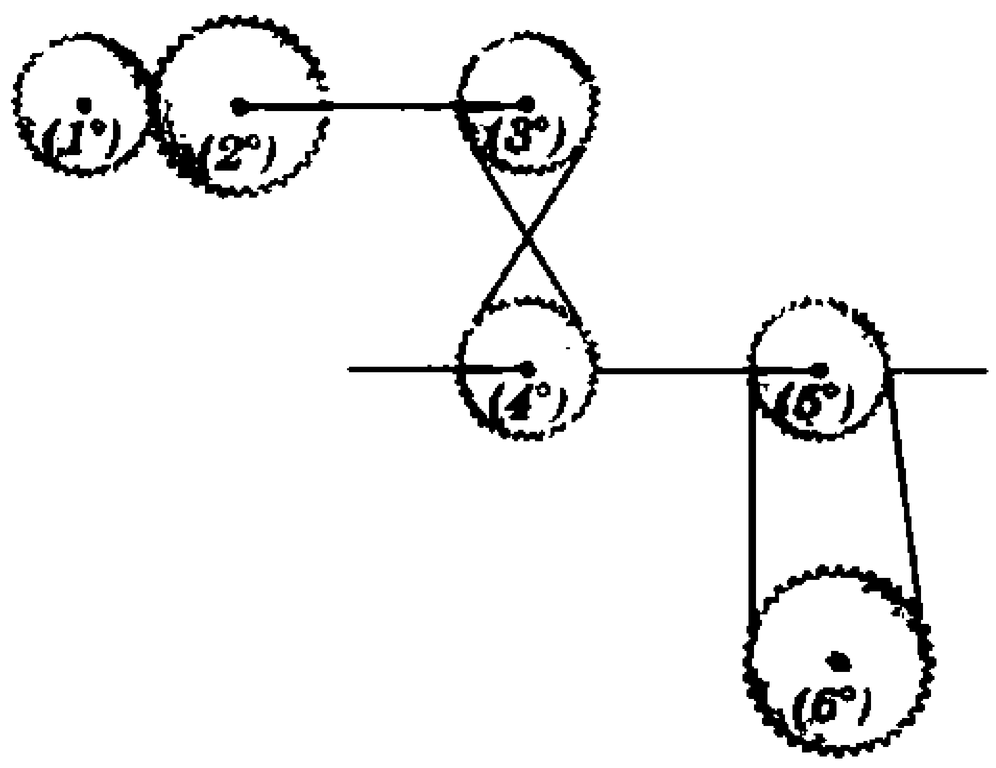
A) $\dfrac{2\pi Rr}{R+r}$ B) $\dfrac{2\pi r^2}{R+r}$ C) $\dfrac{2\pi R^2}{R+r}$

D) $2\pi(R+r)$ E) N.A.

17 Se tiene un sistema de engranajes donde los discos de numeración impar tienen los *2/3* del número de dientes que tienen los discos de numeración par. Halle el número de vueltas que dará el 6^{to} disco cuando el 1^{ro} da *27* vueltas.

OBSERVACIÓN:

Los engranajes de numeración par son iguales y los de numeración impar también.



A) 10

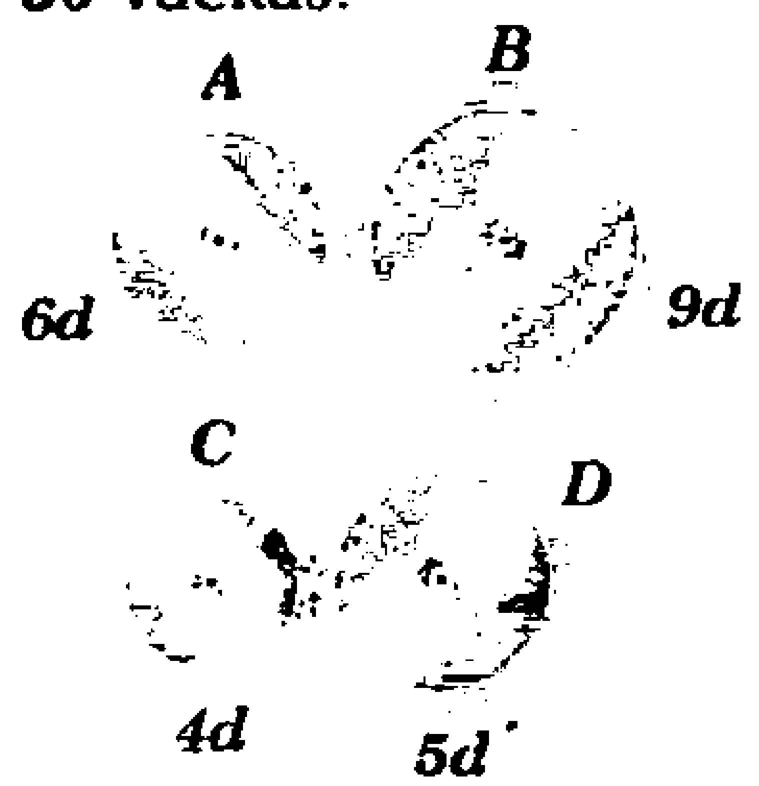
B) 8

C) 24

D) 18

E) 12

18 La figura muestra un sistema de engranajes: ¿Calcular el número de vueltas que girará la rueda *D* cuando *A* gire *30* vueltas?



A) 40

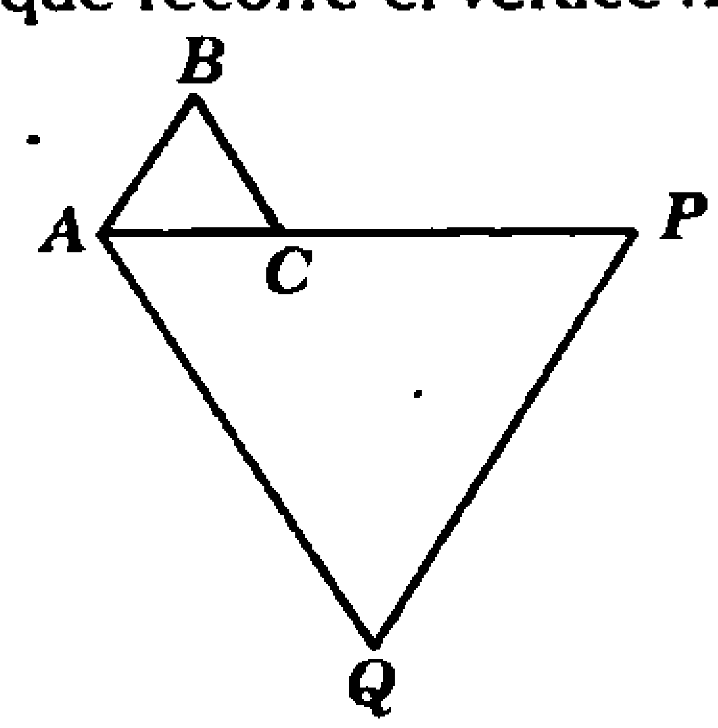
B) 5

C) 8

D) 17

E) 16

19 En la figura, *ABC* y *APQ* son láminas triangulares equiláteras, $AP = 3AC = 18$ *cm*. Si la lámina *ABC* es una lámina metálica y esta se hace rotar *120°* en sentido horario con respecto al punto *P*, luego se traslada de manera que el vértice *A* coincida con *P*, finalmente se la hace rodar sobre *PQ*, sin que se deslice hasta que el vértice *A* coincida con *Q*, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el vértice *A*?



A) $2(2+11\pi)$ *cm*

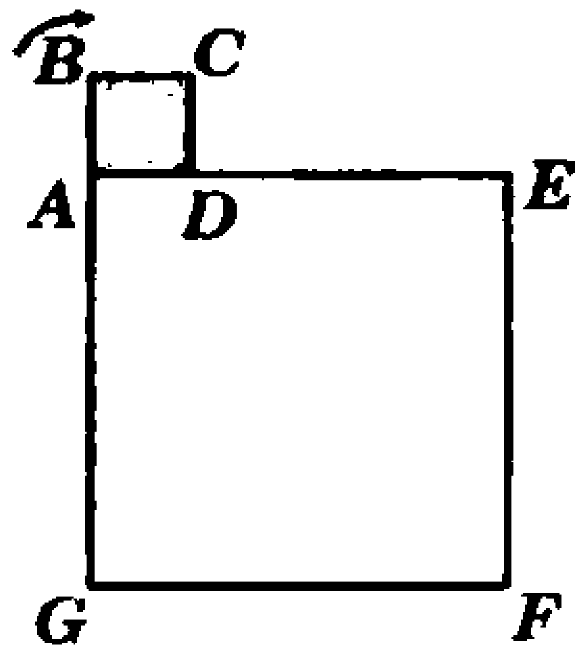
B) $2(9+13\pi)$ *cm*

C) $2(9+10\pi)$ *cm*

D) $2(11+10\pi)$ *cm*

E) $2(13+10\pi)$ *cm*

20 En la figura, *ABCD* y *AEFG* son láminas metálicas cuadradas y $AE = 4AD = 24$ *cm*. Si la lámina *ABCD* se hace rodar en sentido horario, en torno del perímetro del cuadrado *AEFG* hasta que alcance la posición inicial, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el vértice



A) $12\pi(\sqrt{2} + 4)$ *cm*

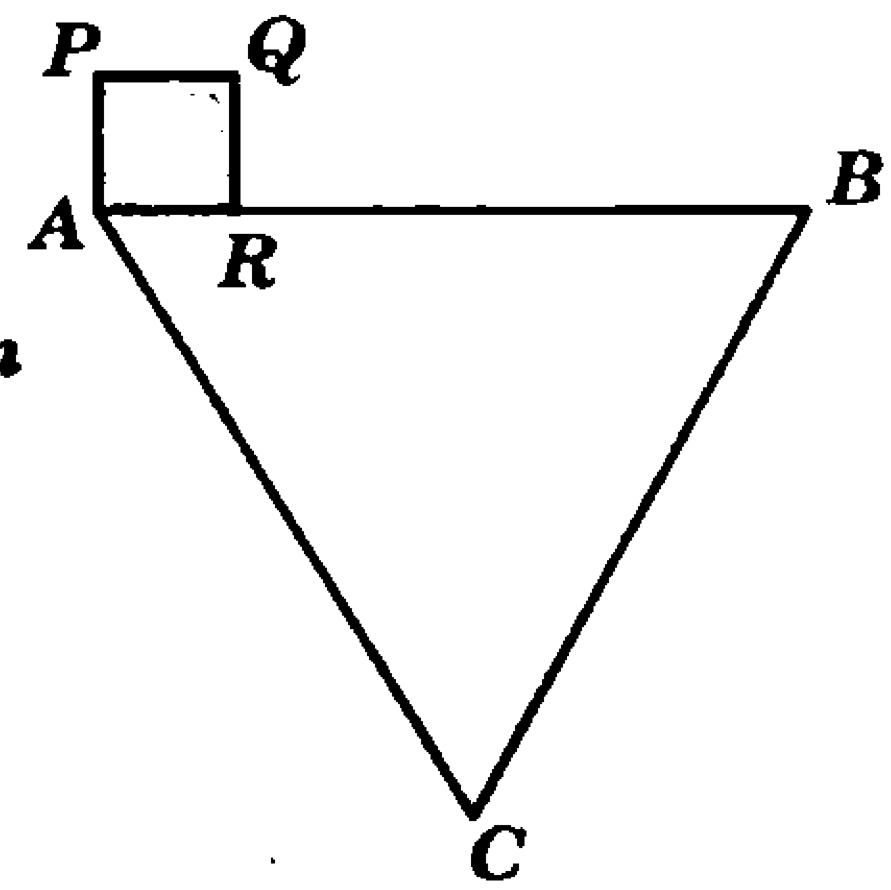
B) $12\pi(\sqrt{2} + 2)$ *cm*

C) $12\pi(\sqrt{2} + 5)$ *cm*

D) $12\pi(2\sqrt{2} + 3)$ *cm*

E) $12\pi(\sqrt{2} + 3)$ *cm*

21 En la figura, *ABC* es un triángulo equilátero y *APQR* es un cuadrado, cuyos lados miden *24* y *6 cm* respectivamente. Si *APQR* es una lámina metálica y esta se hace rodar en el sentido horario, en torno del perímetro del triangulo *ABC* hasta que alcance la posición inicial, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el vértice *P*?



A) $2\pi(5\sqrt{2}+12)$ *cm*

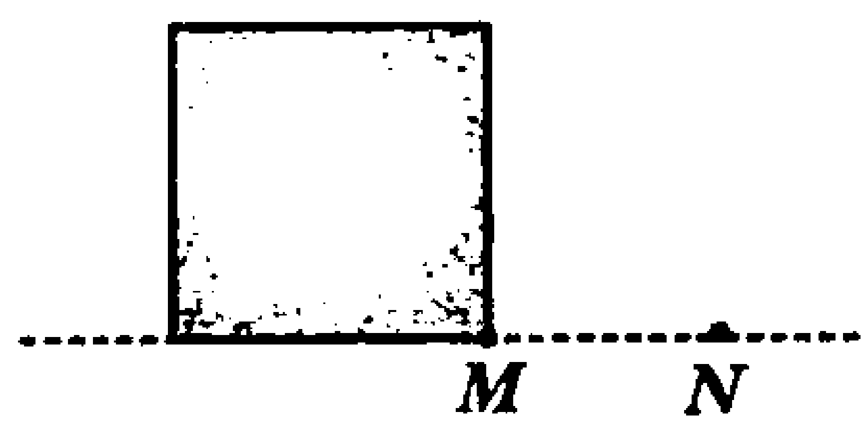
B) $3\pi(\sqrt{2}+10)$ *cm*

C) $3\pi(2\sqrt{2}+5)$ *cm*

D) $3\pi(3\sqrt{2}+7)$ *cm*

E) $3\pi(3\sqrt{2}+7)$ *cm*

22 En la figura se muestra un cuadrado de *12 cm* de lado y $MN = 4$ *cm*. Si al cuadrado se le hace rotar *120°* en sentido horario con respecto al punto *N*, ¿cuál es el perímetro de la región generada por el cuadrado?

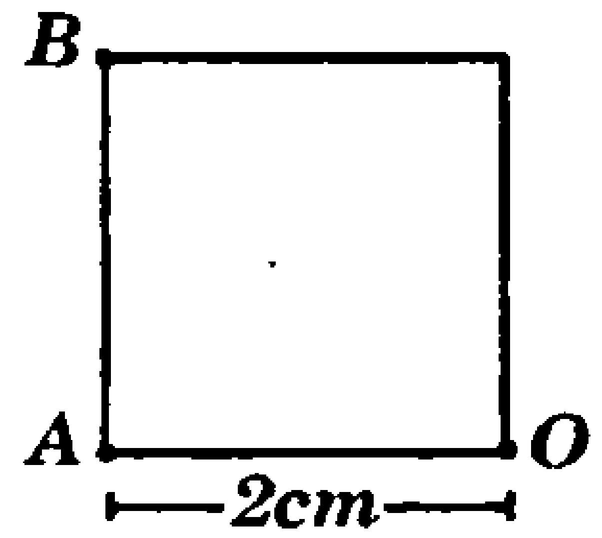


A) $16(\pi+3)$ *cm* *B)* $16(2\pi+3)$ *cm* *C)* $16(3\pi+2)$ *cm*

D) $16(\frac{\pi}{2} + 3)$ *cm* *E)* $16(\pi+2)$ *cm*

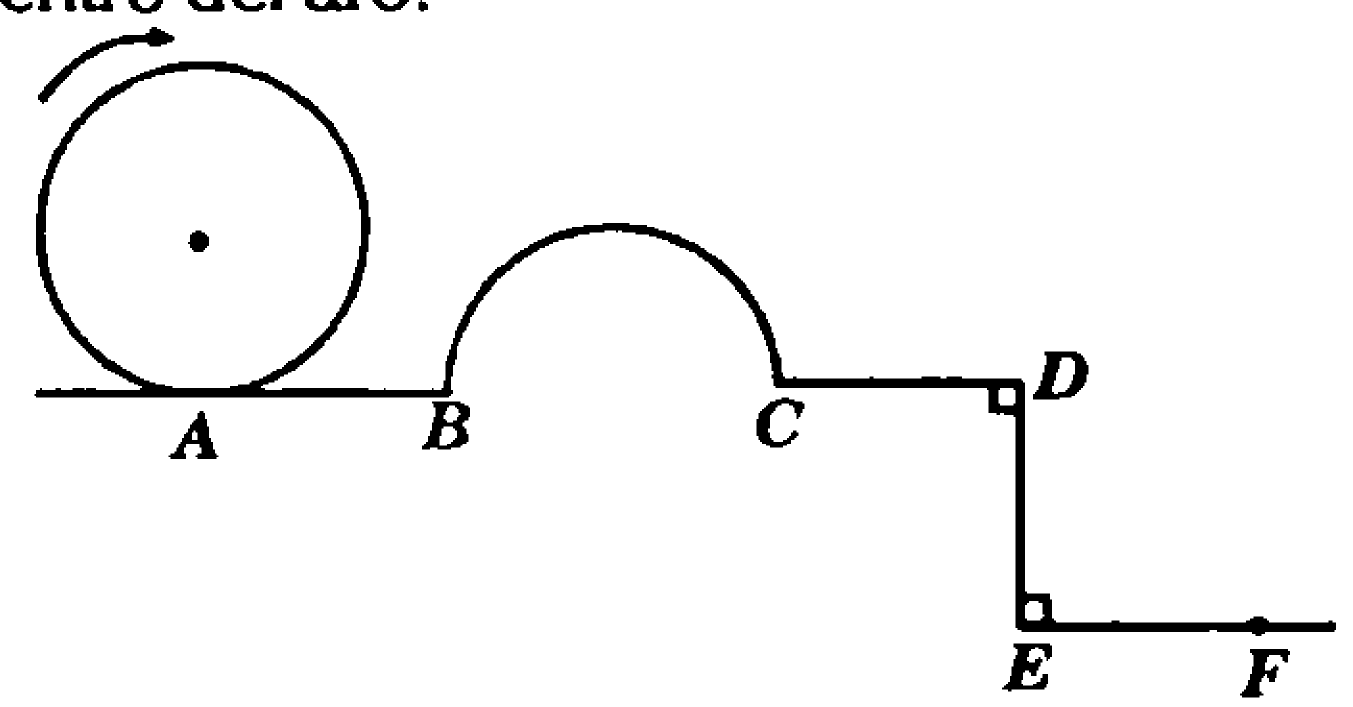
23 En la figura se muestra un cuadrado de lado *2cm*. Si el cuadrado gira con centro en el vértice

O un ángulo de *90°*, calcule el área de la región generada por el lado $\overline{AB}$.



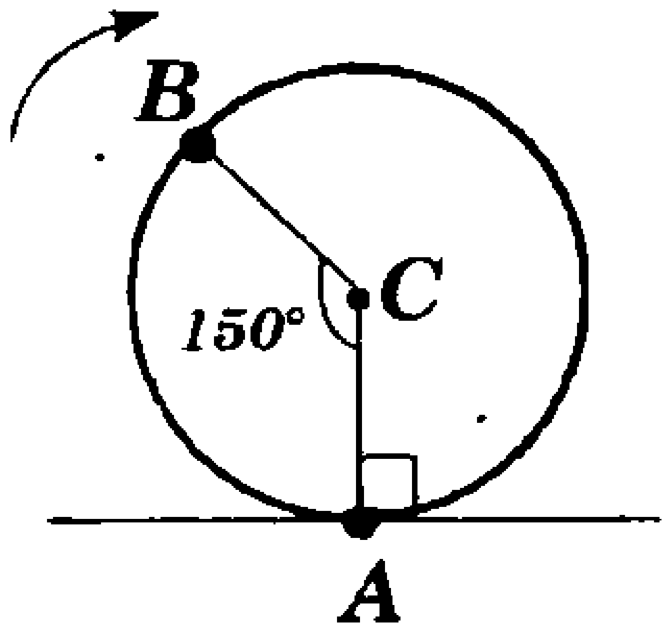
A) πcm^2
B) $4\pi cm^2$
C) $2\pi cm^2$
D) $3\pi cm^2$
E) $5\pi cm^2$

24 En la figura se muestra un aro de radio *6 cm*, $AB = CD = 6(2+\sqrt{3})$ *cm*, *DE = EF = 12 cm* y $\widehat{BC}$ es una semicircunferencia de radio *6 cm*. Si el aro rueda, en el sentido indicado desde el punto *A* hasta el punto *F*, sin deslizarse en ningún momento, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el centro del aro?



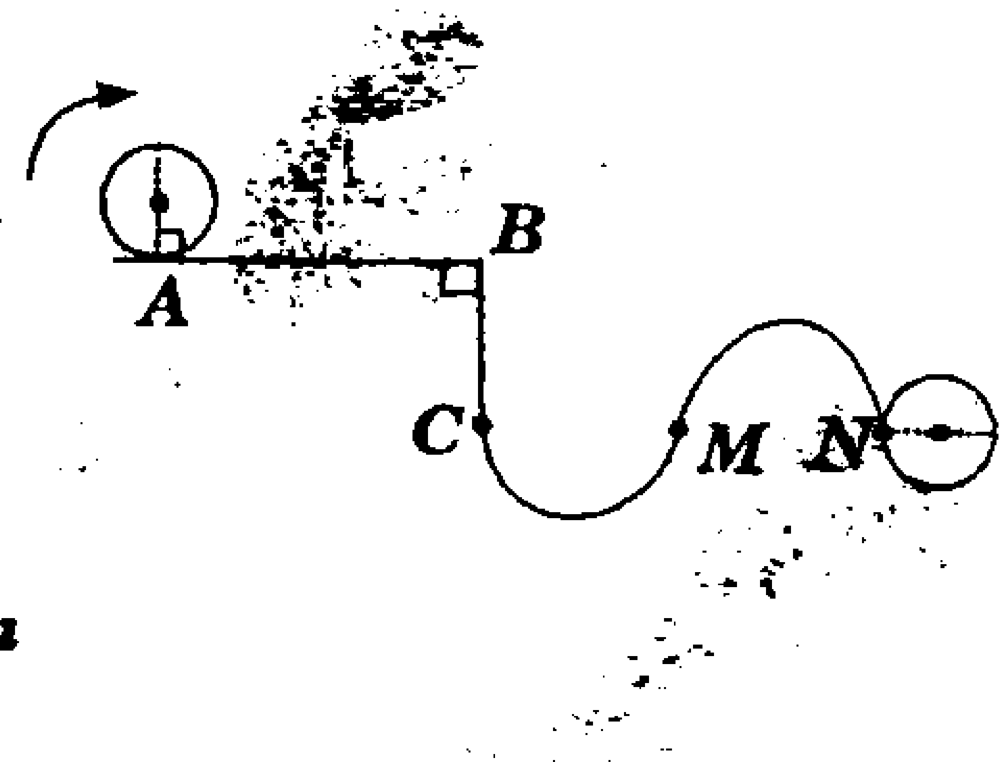
A) $(48+11\pi)$ cm B) $2(24+5\pi)$ cm C) $(48+13\pi)$ cm
D) $2(24+7\pi)$ cm E) $3(16+3\pi)$ c

25 La figura muestra una rueda de radio *6 cm*, con los puntos *A* y *B* sobre ella, que gira tangencialmente sobre una superficie plana en el sentido indicado. Si el punto *A* vuelve a tener contacto con la superficie otras siete veces y al detenerse, el punto *B* se encuentra en contacto con la superficie, ¿cuál es la longitud que ha recorrido la rueda hasta detenerse?



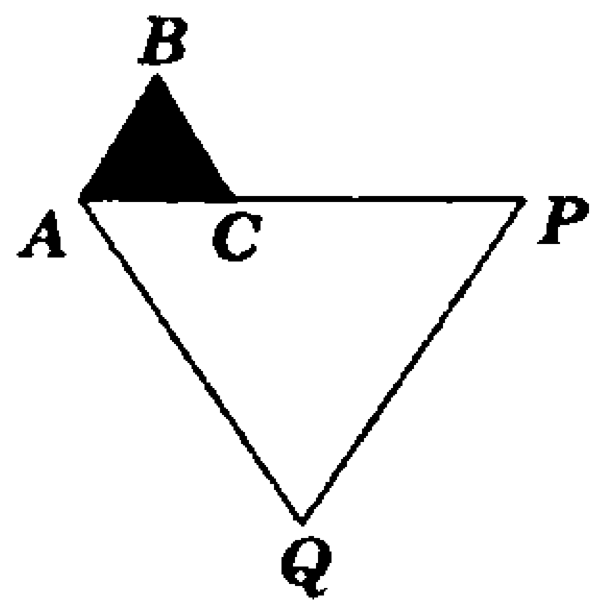
A) 90π cm.
B) 92π cm.
C) 91π cm.
D) 89π cm.
E) 93π cm

26 En la figura, se muestra un aro de radio *10 cm*, *AB = 50 cm, BC = 30 cm, CM* y *MN* son semicircunferencias de radios *60 cm* y tangentes en *M*, $\overline{BC}$ es tangente a la semicircunferencia *CM* en *C*. Si el aro rueda en el sentido indicado desde el punto *A* hasta llegar al punto *N* como indica la figura, sin deslizarse en ningún momento, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el centro del aro?



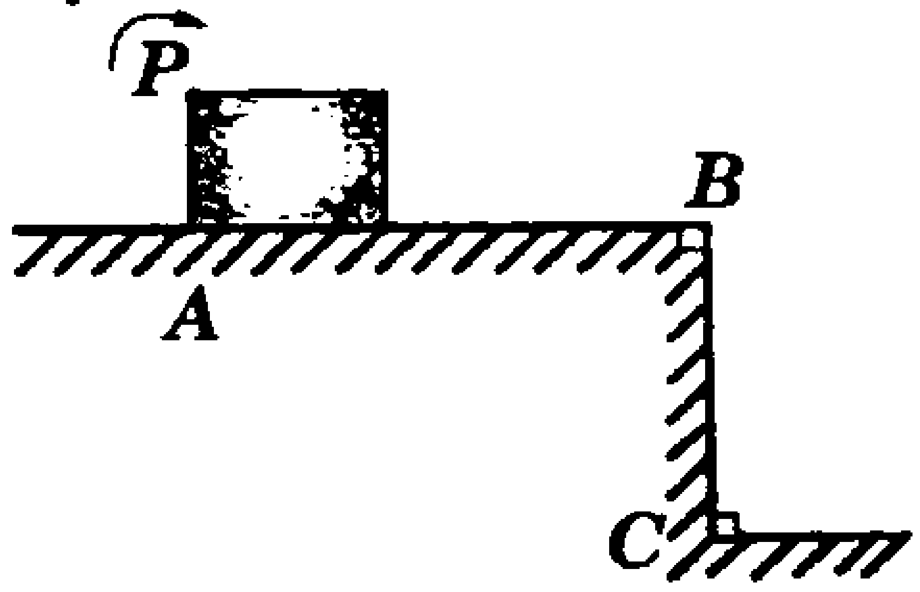
A) $5(16+25\pi)cm$
B) $5(16+9\pi)cm$
C) $5(16+\pi)cm$
D) $5(16+5\pi)cm$
E) $5(16+27\pi)cm$

27 En la figura, *ABC* y *APQ* son triángulos equiláteros, *AP=18cm* y *AC=6 cm*. Si el triángulo *ABC* es una lámina metálica y esta se hace rotar *120°* en sentido horario con respecto al punto *P*, luego se traslada de manera que el vértice *A* coincida con el punto *P*, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el vértice *A*?



A) $2(11\pi+9)cm$
B) $6(2\pi+5)cm$
C) $6(2\pi+3)cm$
D) $4(4\pi+3)cm$
E) $4(2\pi+3)cm$

28 En la figura, se muestra una lámina metálica que tiene la forma de un rectángulo cuya base mide *4 cm* y su altura mide *3 cm*, además *AB=11cm* y *BC=7 cm*. Si a dicha lámina se la hace girar sin que se deslice, desplazándola sobre la superficie en el sentido indicado, siempre apoyada en un vértice hasta que el punto *P* toque a la superficie dos veces, ¿cuál es la minima longitud que recorre el punto *P*?

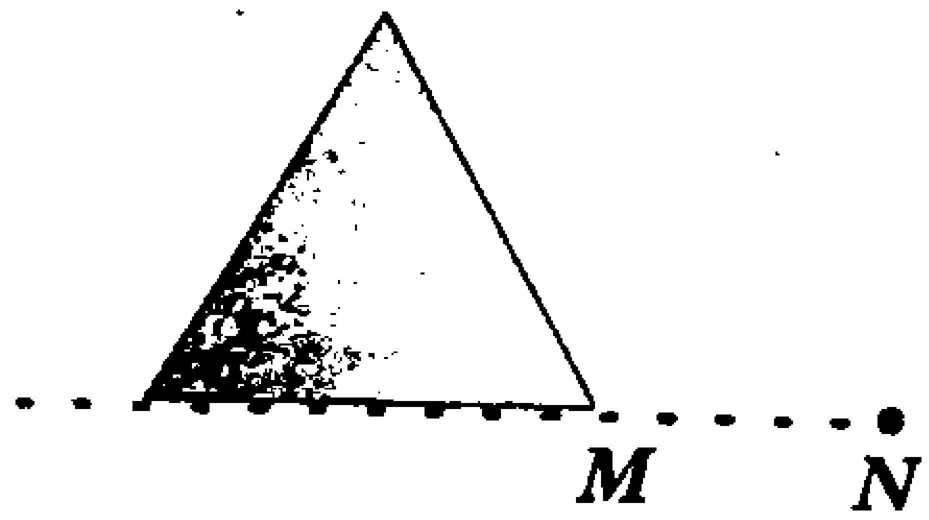


A) $8\pi cm$
B) $10\pi cm$
C) $12\pi cm$
D) $11\pi cm$
E) $9\pi cm$

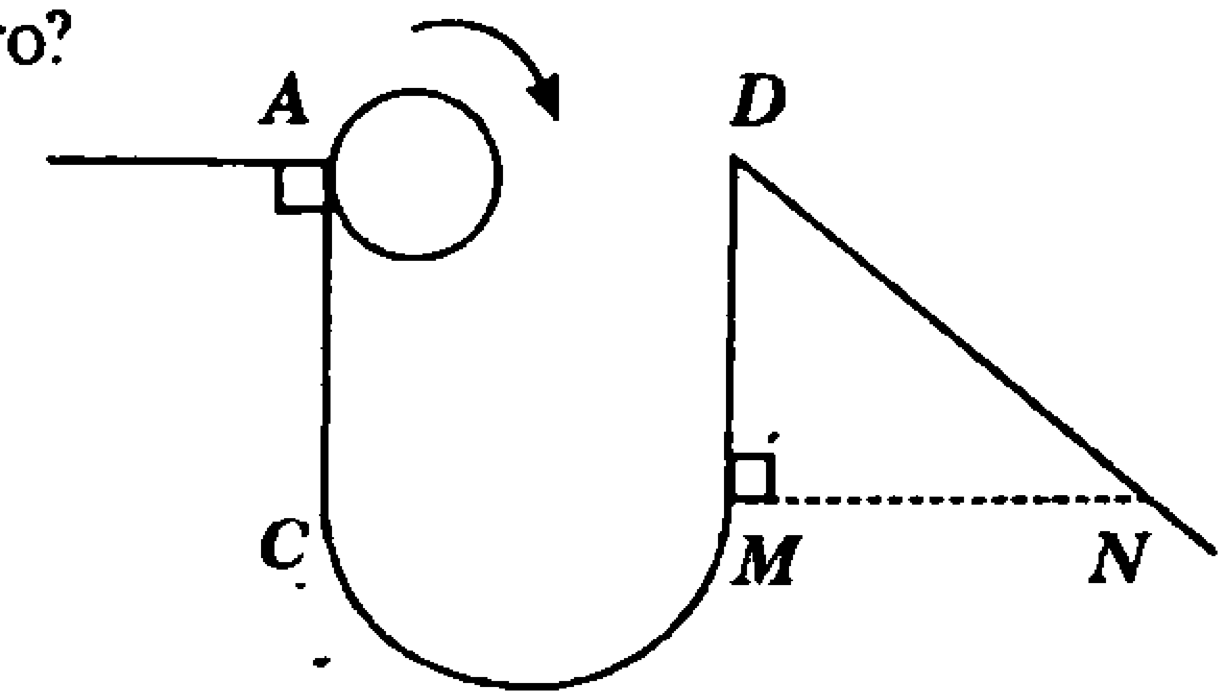
29 En la figura, se muestra una lámina que tiene la forma de un triángulo equilátero cuyo lado mide

6 cm y ***MN=4*** cm. Si la lámina se rota ***90°*** en sentido horario con respecto al punto ***N***, luego se traslada de manera que el baricentro ***G*** de la lámina coincida con ***N***, ¿cuál es la mínima longitud recorrida por el punto ***G***?

A) $\sqrt{13}(\pi+1)cm$
B) $\sqrt{13}(\pi+3)cm$
C) $\sqrt{13}(\pi+2)cm$
D) $\sqrt{11}(\pi+2)cm$
E) $\sqrt{11}(\pi+3)cm$

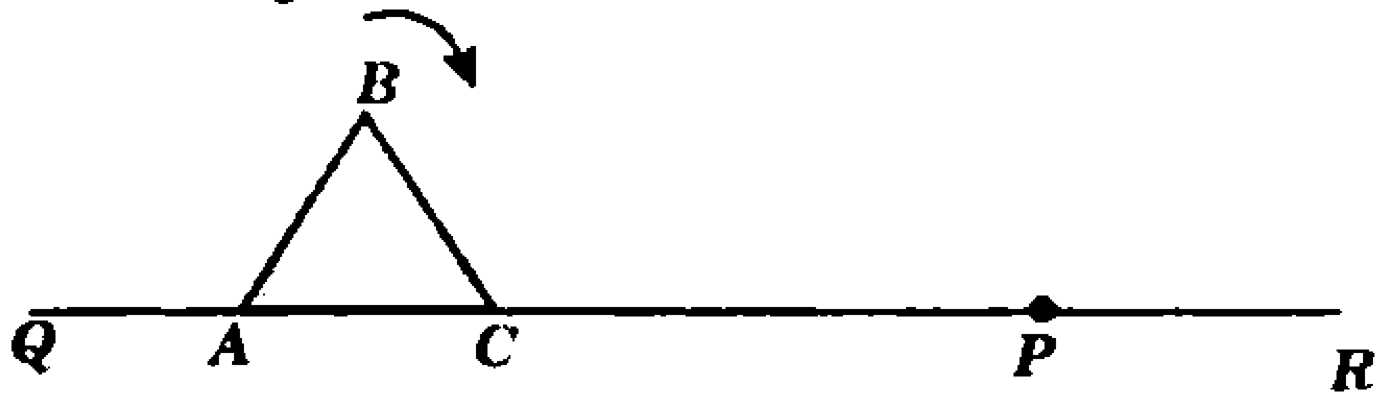


30 En la figura, se muestra un aro de radio ***12 cm, AC= 30 cm, CM*** es una semicircunferencia de radio ***62 cm***, $\overline{MD}$ es tangente a la semicircunferencia ***CM*** en ***M***, $MN=30\sqrt{3}\,cm$ y ***MD=30 cm***. Si el aro rueda sobre ***ACMDN***, en el sentido indicado desde el punto ***A*** hasta el punto ***N***, sin deslizarse en Habilidad Lógico Matemática ningún momento, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el centro del aro?



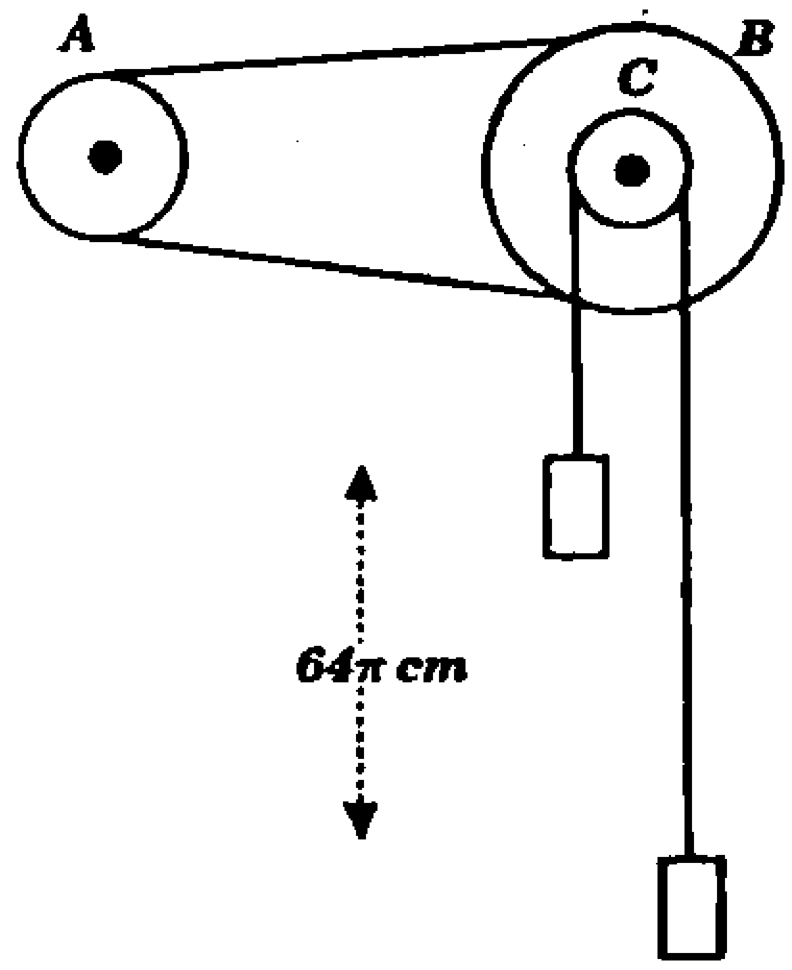
A) 2(60 + 29π) cm ***B) 2(60 + 30π) cm***
C) 2(60 + 31π) cm ***D) 2(60 +33π) cm***
E) 2(60 + 28π) cm

31 En la figura, ***ABC*** es triángulo equilátero que descansa sobre el segmento $\overline{QR}$, ***AP=18cm*** y ***AC = 6 cm***. Si ***ABC*** es una lámina metálica y esta se la hace rodar sobre $\overline{QR}$, sin que se deslice hasta que el vértice ***A*** coincida con ***P***, ¿cuál es la mínima longitud que recorre el vértice ***A***?



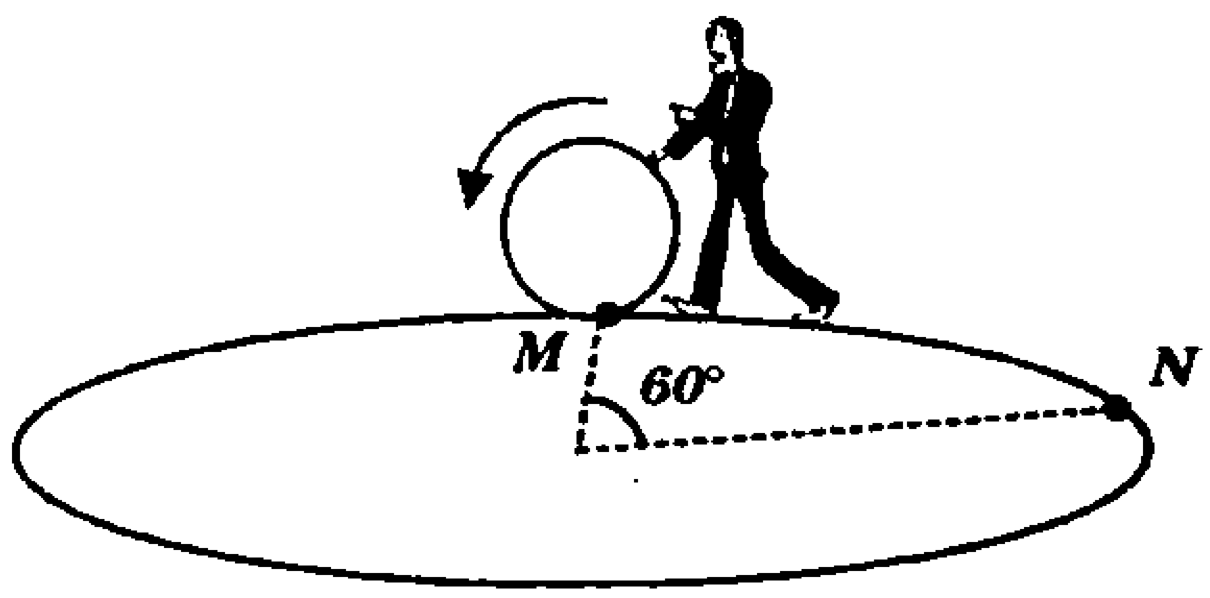
A) 11π cm ***B) 12π cm*** ***C) 8 π cm***
D) 10πcm ***E) 6π cm***

32 En la figura se muestra un sistema de poleas y dos bloques idénticos colgando de la polea ***C***. Si los radios de las poleas ***A,B*** y ***C*** son ***10cm, 20 cm*** y ***4 cm***, respectivamente. ¿Cuántas vueltas tiene que dar la polea ***A*** para que los bloques estén al mismo nivel?



A) 8
B) 12
C) 16
D) 6
E) 10

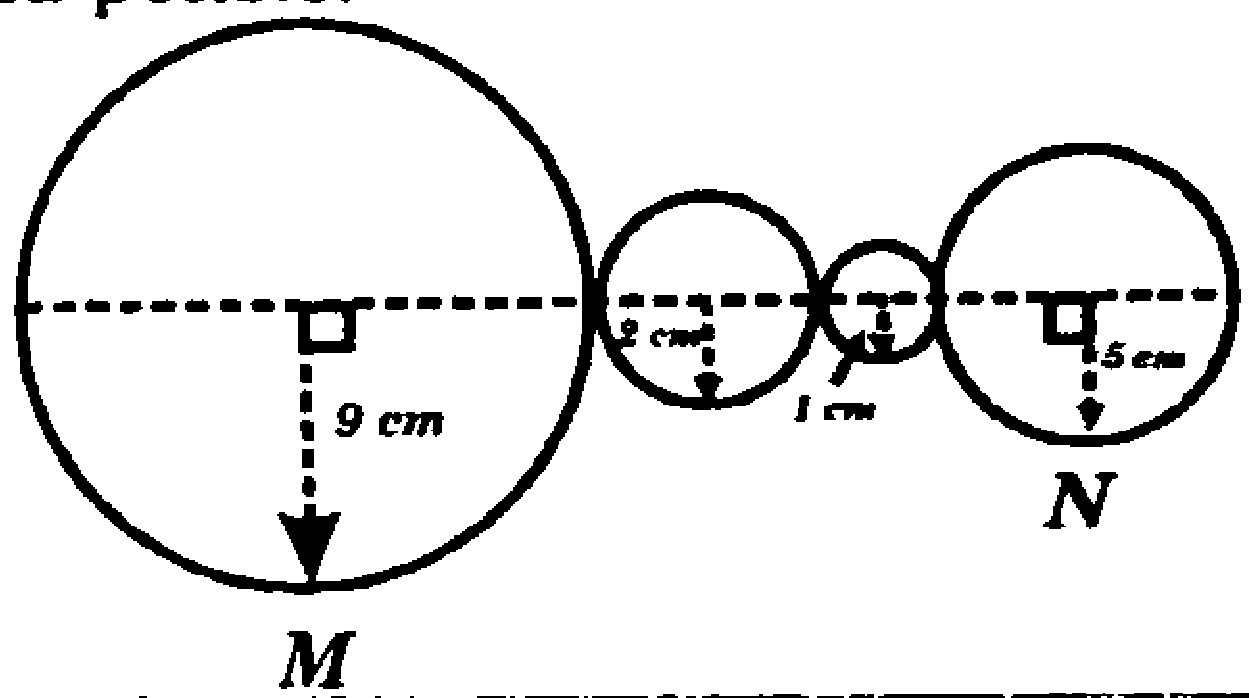
33 Carlitos sobre el suelo dibuja una circunferencia de ***18 m*** de radio y luego por ella hace rodar un aro de ***20 cm*** de radio. ¿Cuántas vueltas dio su aro para ir desde el punto ***M*** hasta ***N***?



A) 72
B) 60
C) 75
D) 80

34 En el sistema mostrado, ¿Cuántas vueltas como mínimo dará la rueda cuyo radio mide ***5 cm***, para que los puntos ***M*** y ***N*** se encuentre lo més cerca posible?

A) 7/4
B) 11/4
C) 9/4
D) 10/3
E) 2



01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
E	D	E	D	B	C	C	D	D	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	C	C	D	C	A	B	E	C	E
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	A	A	A	C	A	C	*	*	A
31	32	33	34						
C	A	C	C						

INTRODUCCIÓN :

Hay una variedad de problemas referentes a campanadas, estacas, pastillas, cortes, etc. los cuales tienen una particularidad común que es el conteo de intervalos. Los intervalos pueden ser de longitud (estacas, cortes) o de tiempo (campanadas, pastillas). En este capítulo veremos este tipo de problemas y comprobarás lo sencillo que es resolverlos.

INTERVALOS DE TIEMPO

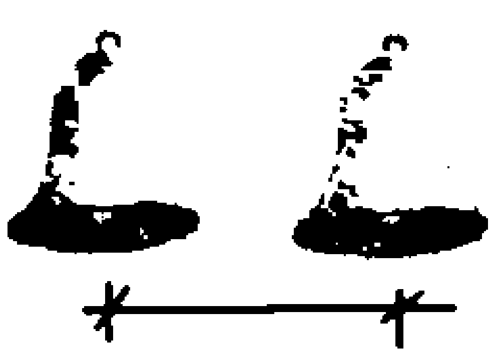
A) CAMPANADAS

EJEMPLO 1 :

Una campanada suena *9* veces en *16* segundos. ¿Cuántas veces sonará en *8* segundos?

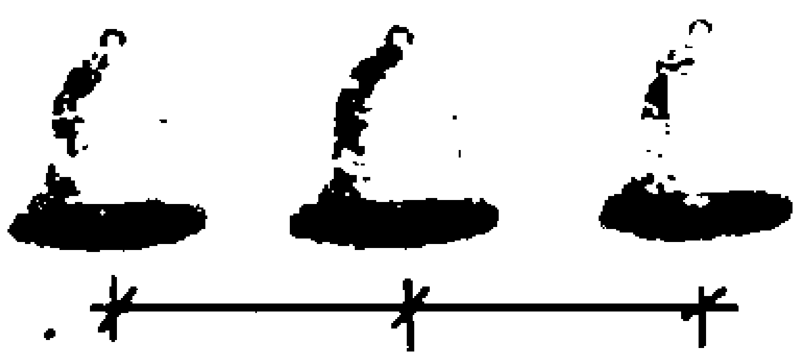
RESOLUCIÓN :

Si se realizan dos campanadas:



Hay un intervalo de tiempo

Si se realizan tres campanadas:



Hay dos intervalo de tiempo

Si se realizan cuatro campanadas:

Hay tres intervalo de tiempo

En general, el número de intervalos de tiempo es uno menos que el número de campanadas.

$$\left(\begin{array}{c}\text{NÚMERO}\\ \text{DE INTERVALOS}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{NÚMERO}\\ \text{DE CAMPANADAS}\end{array}\right)-1$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{NÚMERO}\\ \text{DE CAMPANADAS}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{NÚMERO}\\ \text{DE INTERVALOS}\end{array}\right)+1$$

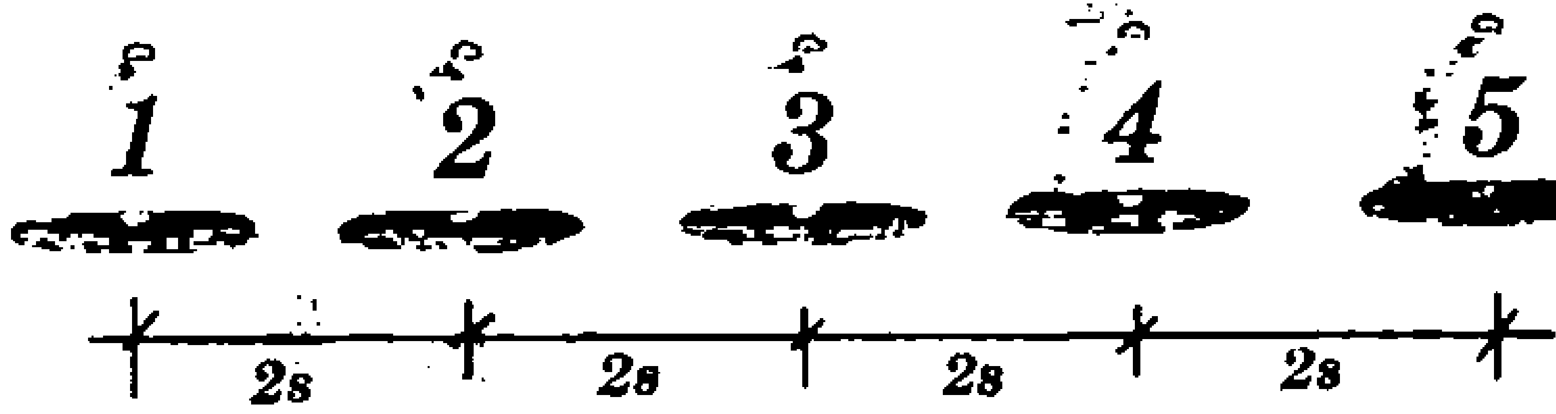
Aplicando el análisis previo en el problema:

Si la campana suena *9* veces significa que hay *8* intervalos de tiempo.

Si *8* intervalos de tiempo duran *16* segundos, cada uno tiene una duración de: $\frac{16}{8}=2\ seg.$

Finalmente, en *8* segundos hay: $\frac{8}{2}=4$ intervalos y como el número de campanadas es uno más que el número de intervalos, entonces se han escuchado *5* campanadas.

Gráficamente



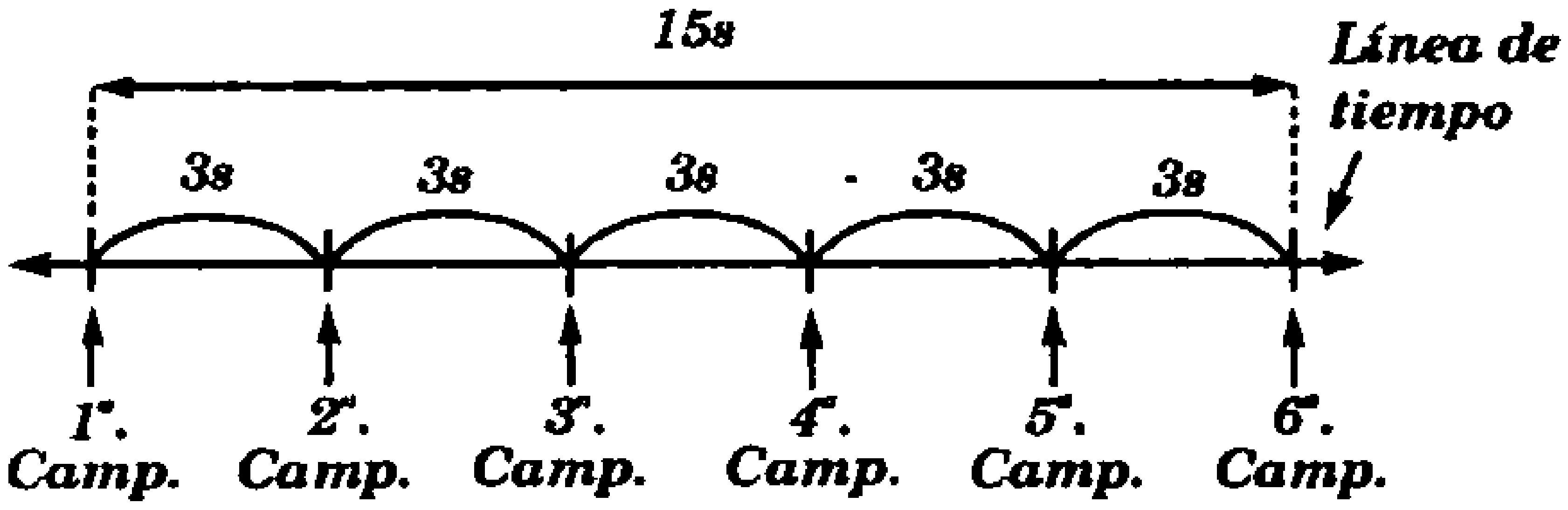
EJEMPLO 2 :

Si un campanario toca una campanada cada *3* segundos. ¿Cuántas campanadas tocará en *15* segundos?

RESOLUCIÓN :

Para responder, primero contamos cuántos intervalos. de *3* seg hay en *15* seg.

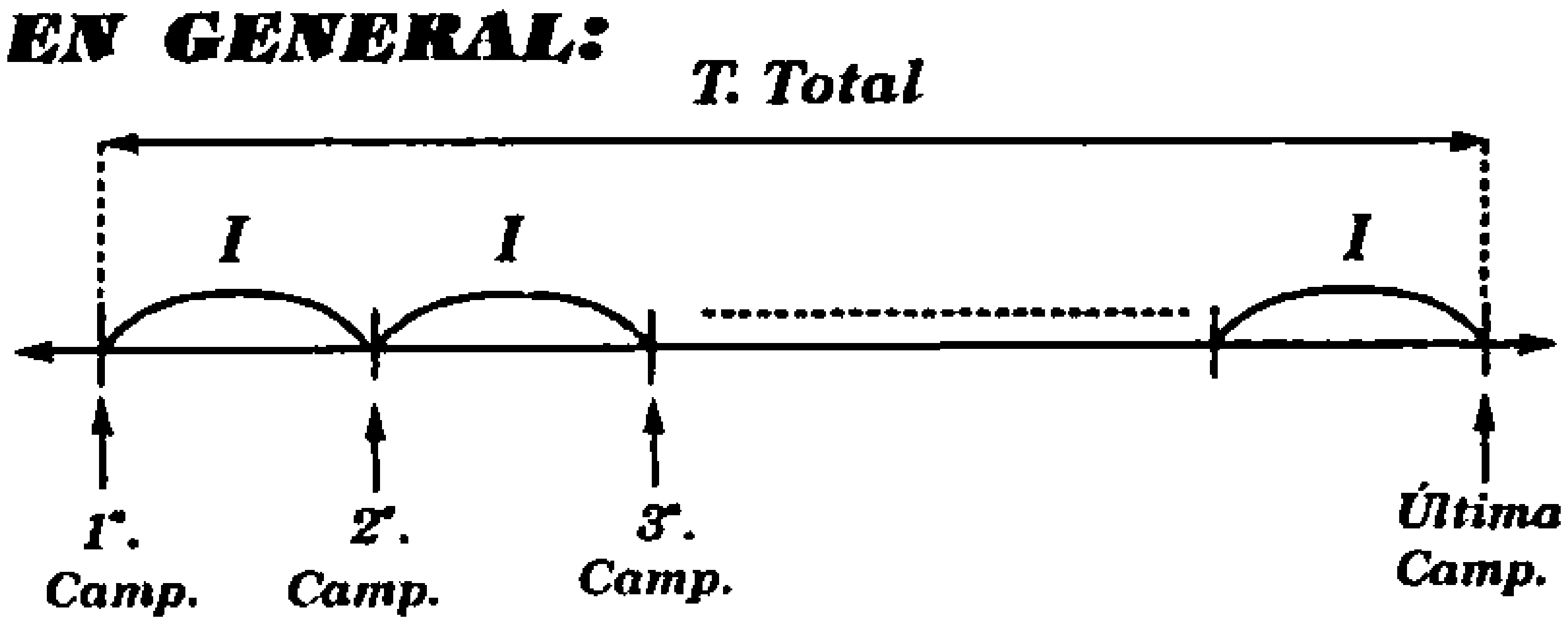
Esto es: $15 \div 3 = 5$ intervalos.



Luego, se observa que el número de campanadas es una unidad más que el número de intervalos.

Es decir: $5 + 1 = 6$ campanadas

EN GENERAL:



I) $\boxed{N^{\circ}\ de\ intervalos=\frac{T_{total}}{I}}$

II) $\boxed{N^{\circ}\ de\ campanadas = (N^{\circ}\ de\ intervalos) + 1}$

$$\Rightarrow \boxed{N^{\circ}\ de\ campanadas = \frac{T_{total}}{I} + 1}$$

Donde:

T_{total} = Tiempo total desde la *1.ª* hasta la última campanada.

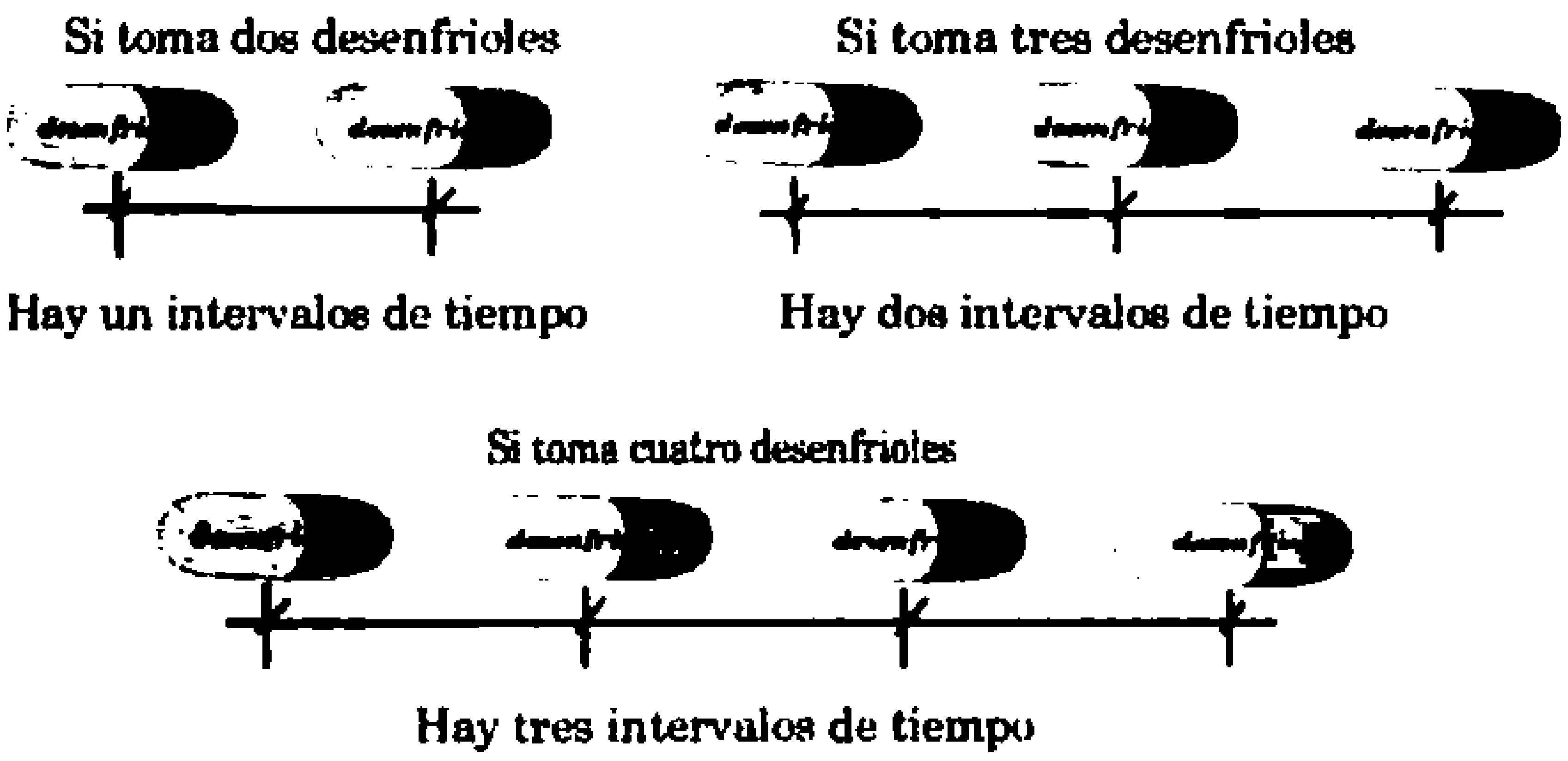
I = duración de cada intervalo.

B) PASTILLAS :

EJEMPLO 1 :

Jhony está agripado y por ello el doctor le indica tomar un desenfriol cada *4* horas durante *2* días. ¿Cuántos desenfrioles debe comprar Jhony para cumplir lo recetado por el doctor?

RESOLUCIÓN :



En general, el número de intervalos de tiempo es uno menos que el número de pastillas a tomar.

$$\boxed{\begin{pmatrix} NÚMERO\ DE \\ INTERVALOS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NÚMERO\ DE \\ PASTILLAS \end{pmatrix} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} NÚMERO\ DE \\ PASTILLAS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NÚMERO\ DE \\ INTERVALOS \end{pmatrix} + 1}$$

Aplicando el análisis previo en el problema:

En dos días hay: $24 \times 2 = 48$ horas.

Como Pepito debe tomar una pastilla cada *4h*,

entonces hay: $\frac{48}{4} = 12$ intervalos

$\Rightarrow$ El número de pastillas es: $12 + 1 = 13$

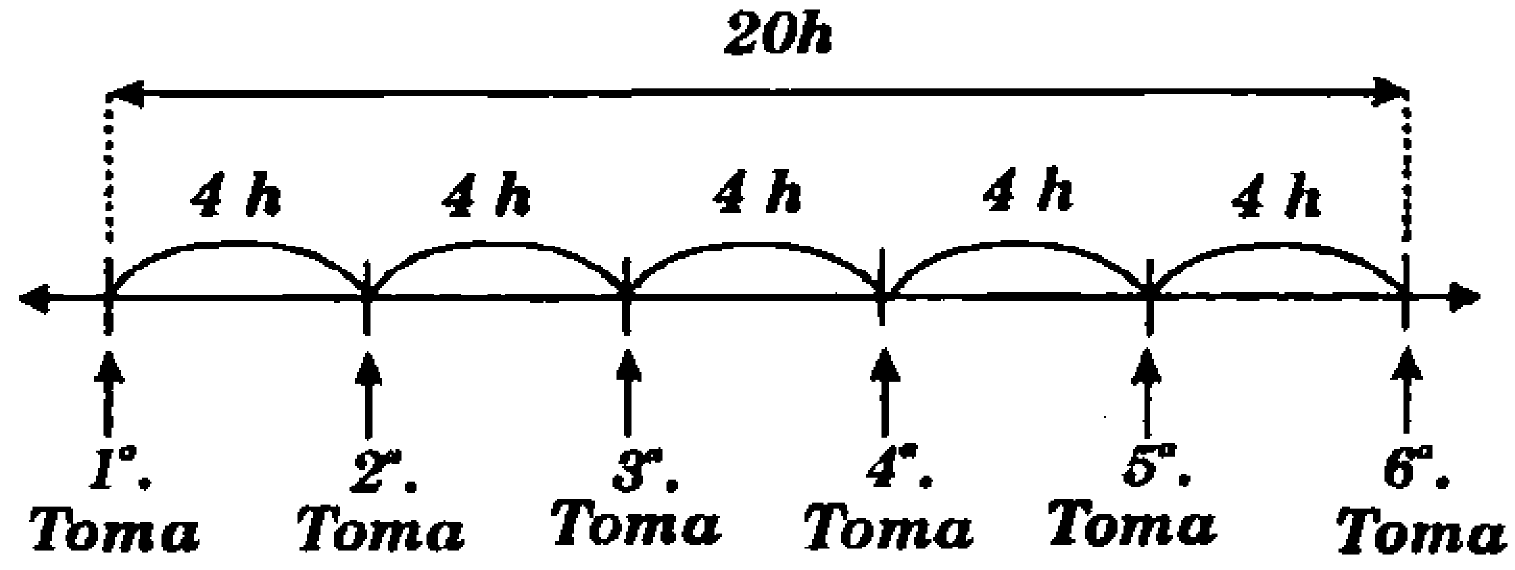
EJEMPLO 2 :

José debe tomar *2* pastillas de un medicamento cada *4* horas. ¿Cuántas pastillas tomará en *20* horas?

RESOLUCIÓN :

Primero contamos el número de intervalos de *4 h* que hay en *20 h*.

Esto es: $20 \div 4 = 5$ intervalos.



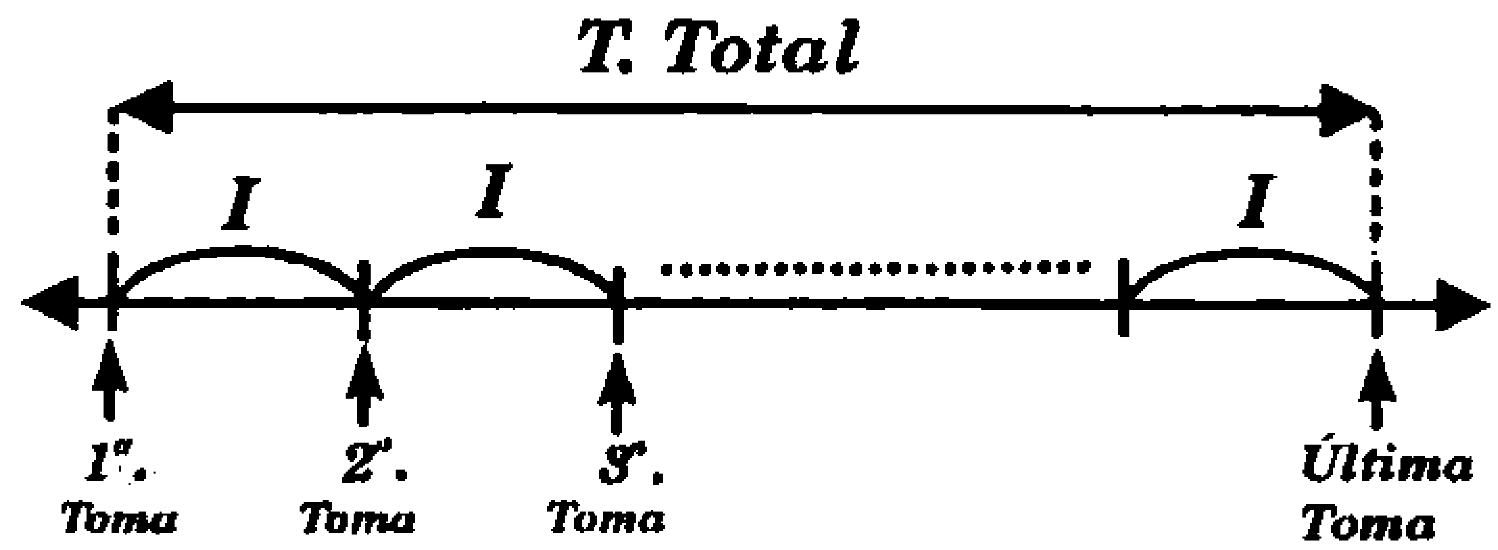
Luego se observa que el número de tomas excede en *1* al número de intervalos.

Es decir: $5 + 1 = 6$ tomas

* Finalmente como en cada toma debe pasar *2* pastillas:

$$N^{\circ}\ de\ pastillas = 6 \times 2 = 12$$

EN GENERAL:



I) $\boxed{(N^{\circ}\ de\ intervalos) = \frac{T_{total}}{I}}$

II) $(N^{\circ}\ de\ tomas) = (\#\ de\ intervalos) + 1$

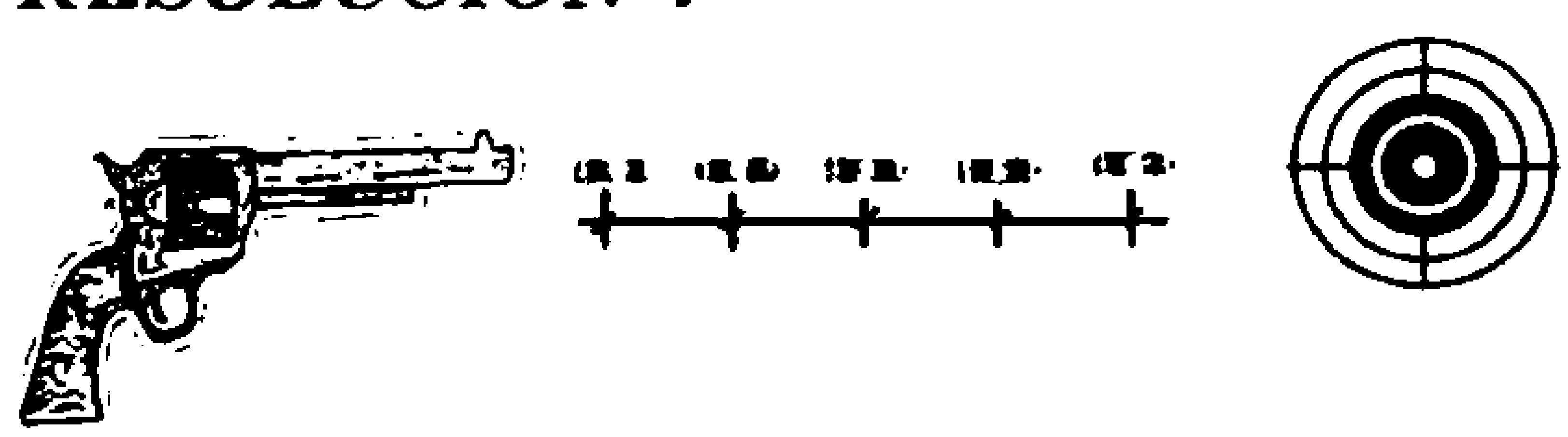
$$\Rightarrow \boxed{N^{\circ}\ de\ tomas = \frac{T_{total}}{I} + 1}$$

III) $\boxed{\begin{matrix} N^{\circ}\ del\ total \\ de\ pastillas \end{matrix} = \left(\frac{T_{total}}{I} + 1\right)\begin{pmatrix} N^{\circ}\ de\ pastillas \\ en\ c/toma \end{pmatrix}}$

EJEMPLO 3 :

Un tirador realiza *5* disparos en *20* segundos. ¿Cuántos disparos realizará en *35* segundos?

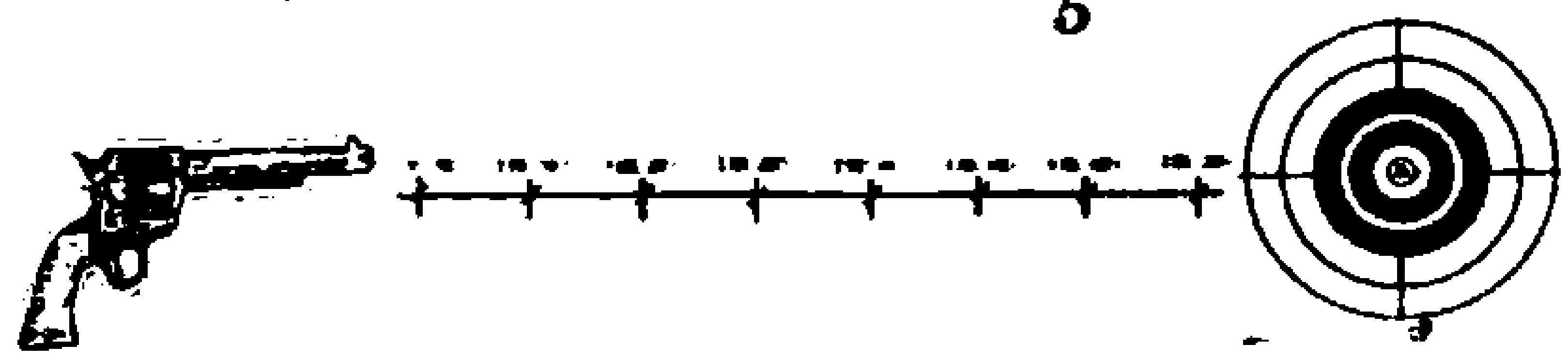
RESOLUCIÓN :



Como puedes notar en el gráfico, *5* disparos originan *4* intervalos de tiempo.

La duración de cada intervalo será de: $\frac{20}{4} = 5\,s$

En *35* segundos habrá entonces: $\frac{35}{5} = 7$ intervalos



Como podrás notar en el gráfico anterior, *7* intervalos

de tiempo son originados por *8* disparos.

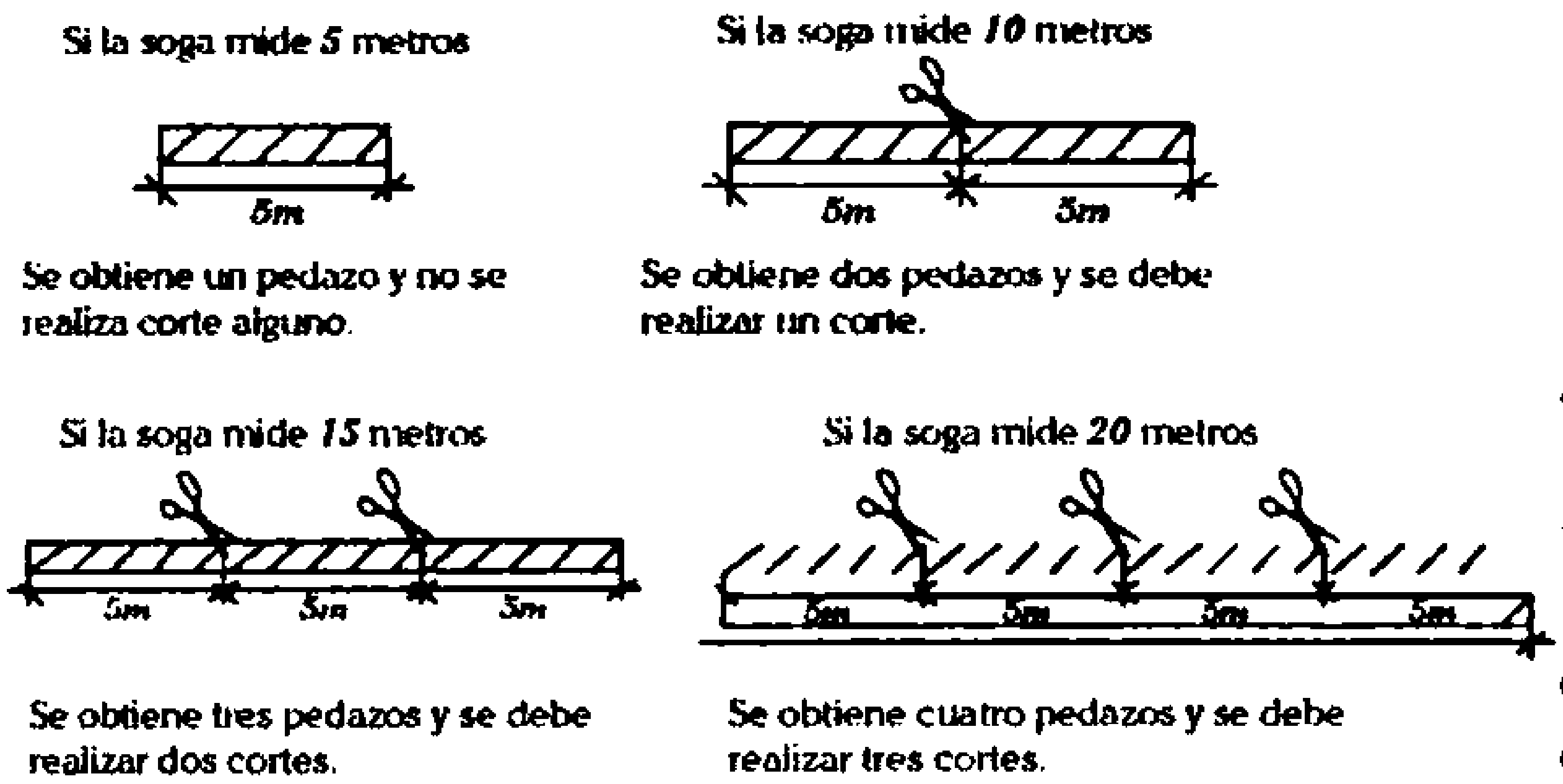
INTERVALOS DE LONGITUD

A) CORTES :

EJEMPLO 1 :

Se desea dividir una soga de ***60 m*** en pedazos de ***5*** metros cada uno. ¿Cuántos pedazos se obtienen y cuánto cortes se deben realizar?

RESOLUCIÓN :



Del análisis anterior se puede concluir que:

• El número de pedazos que se obtiene es el resultado de dividir la longitud total entre la longitud de cada uno de los pedazos.

• El número de cortes que se debe realizar es uno menos que el número de pedazos obtenidos.

GENERALIZANDO:

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{Número}\\ \text{de pedazos}\end{pmatrix} = \frac{\text{Longitud total de la soga}}{\text{Longitud de un pedazo}} = \frac{Lt}{Lu}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{Número}\\ \text{de cortes}\end{pmatrix} = \text{Número de pedazos} - 1}$$

Ahora:

Longitud de la soga: ***60*** metros

Longitud de cada pedazo: ***5*** metros

Entonces, el número de pedazos será: $\dfrac{60}{5} = 12$

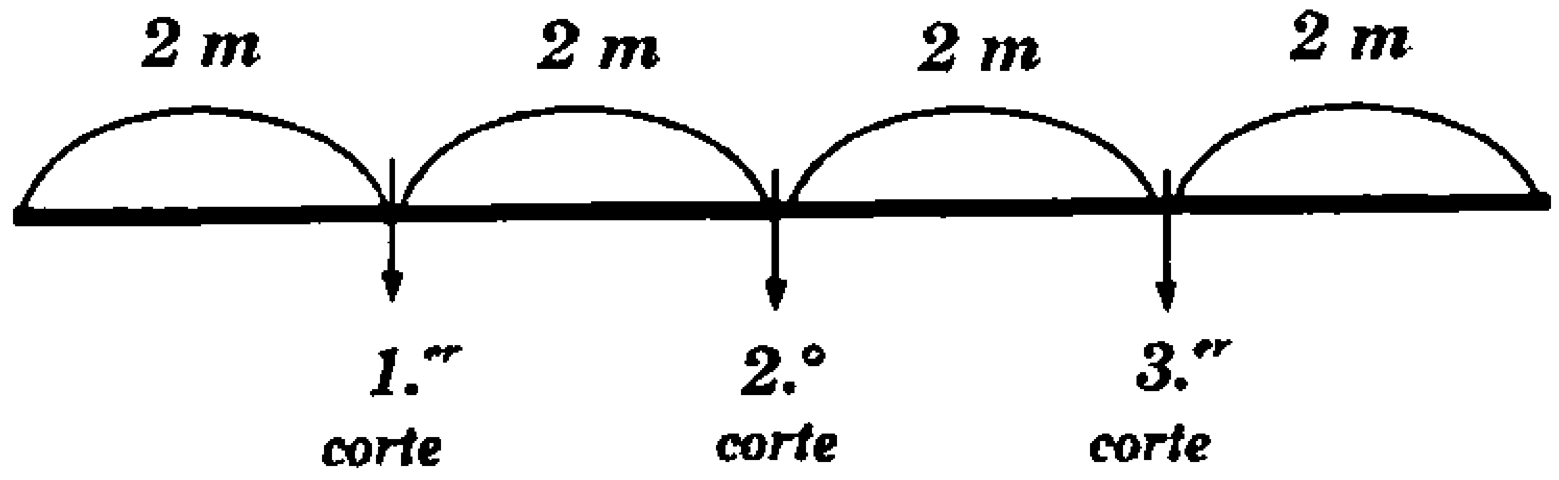
Y el número de cortes será: $12 - 1 = 11$.

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos cortes se le debe hacer a una varilla de metal de *8 m* de longitud para obtener trozos de ***2 m***?

RESOLUCIÓN :

Se obtiene: $8 \div 2 = 4$ trozos.



Pero sólo se hacen: $4 - 1 = 3$

EN GENERAL:

I) $\boxed{N^\circ \text{ de intervalos } = \dfrac{L_{total}}{I}}$

II) N° de cortes = (# de intervalos) − 1

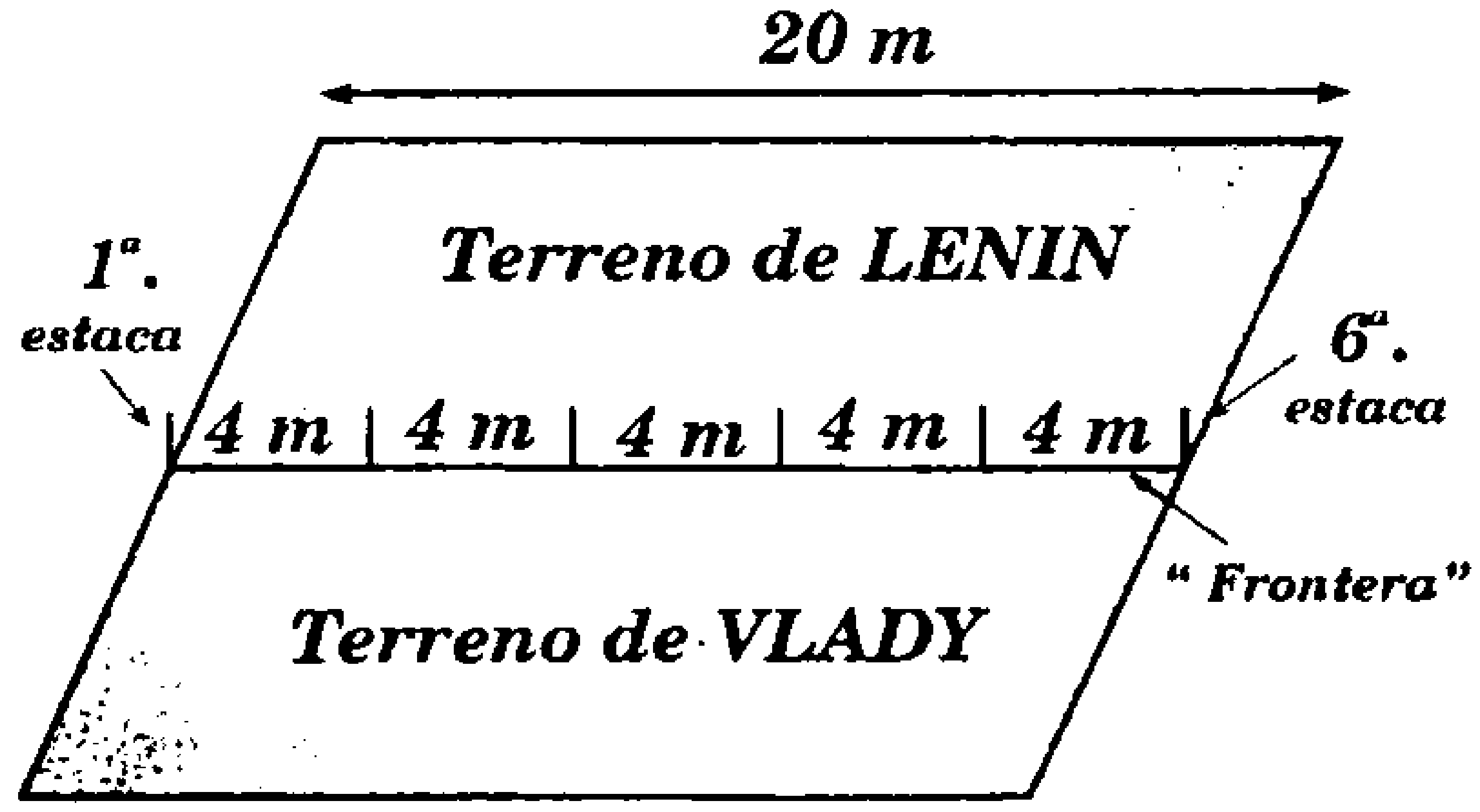
$$\Rightarrow \boxed{N^\circ \text{ de cortes} = \frac{L_{total}}{I} - 1}$$

B) ESTACAS :

EJEMPLO:

Lenin y Vlady tienen sus terrenos adyacentes, si desean demarcar bien su frontera común colocando estacas cada ***4*** metros. ¿Cuántas estacas utilizarán si la frontera mide ***20 m***?

RESOLUCIÓN :



N° de intervalos $= \dfrac{20}{4} = 5$

N° de estacas $= 5 + 1 = 6$

En general:

I) N° de intervalos $= \dfrac{L_{total}}{I}$

II) N° de estacas = (# de intervalos) + 1

$$\Rightarrow \boxed{N^\circ \text{ de estacas} = \frac{L_{total}}{I} + 1}$$

SUGERENCIAS :

• Para *cercar con estacas todo el contorno de un terreno o sobre cualquier figura poligonal o no, pero que sea "cerrada", el número de estacas es igual al número de intervalos y se calcula así:*

$$\boxed{N^\circ \text{ de estacas} = \frac{\text{Perímetro}}{I}}$$

• *Cuando se colocan estacas sobre figuras poligonales, ya sea un terreno o jardín, etc., siempre se debe colocar una estaca en cada vértice de la figura.*

• Cuando se hacen cortes a un arco o cualquier "línea cerrada", el número de cortes es igual al número de intervalos y se calcula así:

$$N^{\circ}\ de\ cortes = \frac{L_{total}}{I}$$

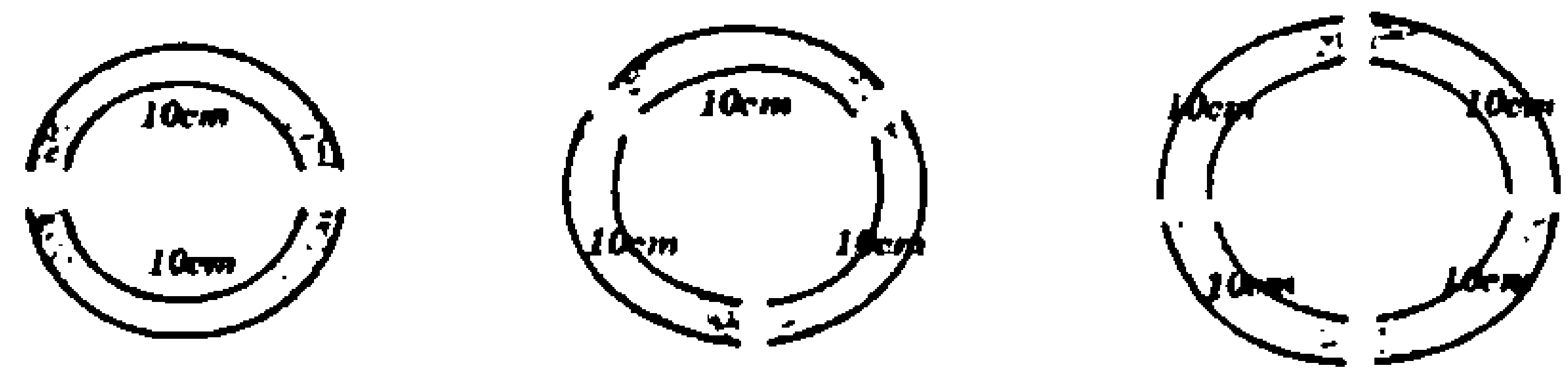
EJEMPLO 1 :

¿Cuántos cortes deben darse a un aro de aluminio de ***3*** metros de longitud para obtener pedazos de ***10*** centímetros?

RESOLUCIÓN :

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este caso, la figura es cerrada.

Si el arco mide ***20*** centímetros. Si el arco mide ***30*** centímetros. Si el arco mide ***40*** centímetros.



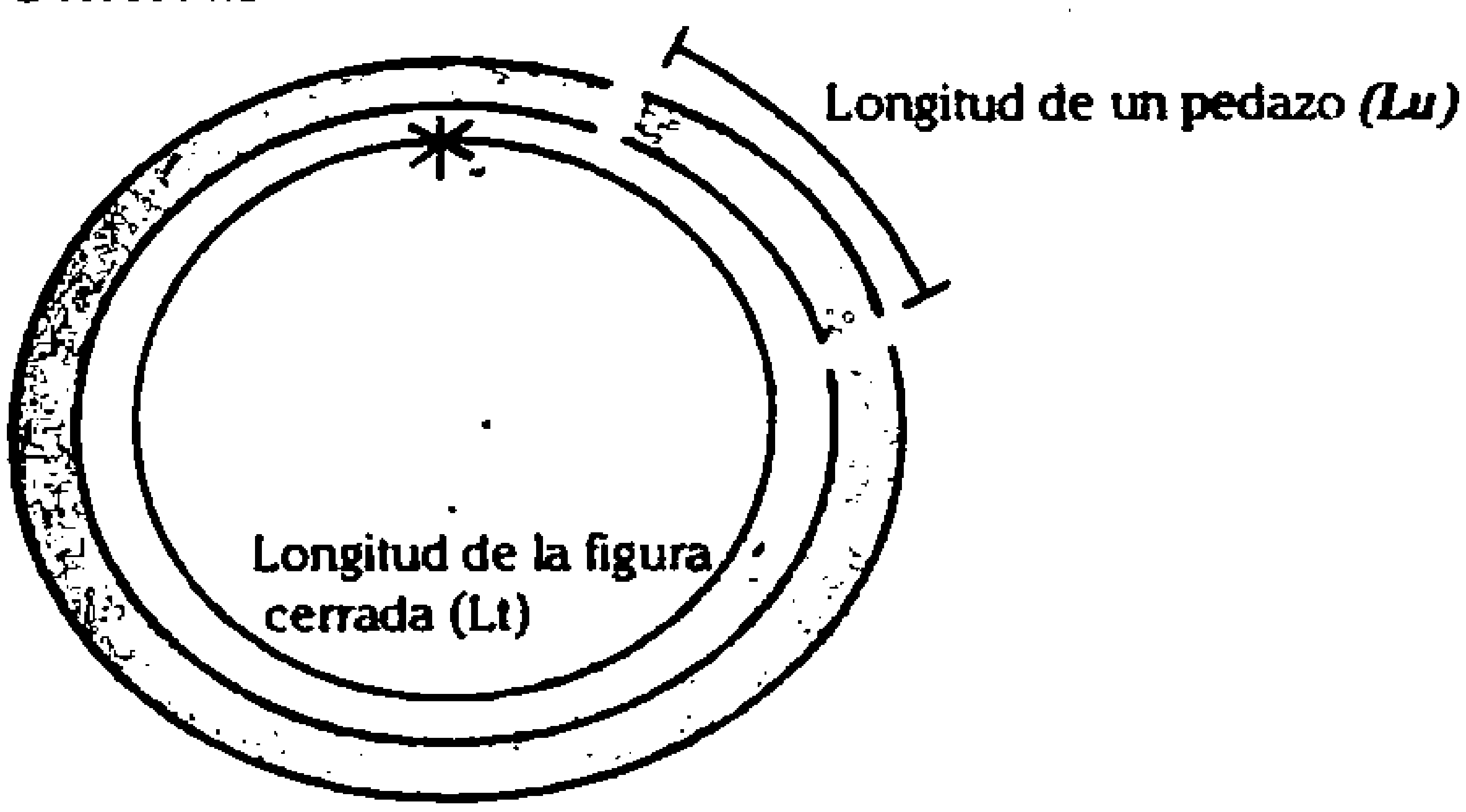
Si obtiene dos pedazos y se debe realizar dos cortes. Si obtiene tres pedazos y se debe realizar tres cortes. Si obtiene cuatro pedazos y se debe realizar cuatro cortes.

Del análisis anterior se puede concluir que:

• ***El número de pedazos se obtiene dividiendo la longitud total de la figura cerrada entre la longitud de cada pedazo.***

• ***El número de cortes es igual que el número de pedazos.***

Generalizando:



$$\textit{Número de pedazos} = \frac{\textit{Longitud de la figura cerrada}}{\textit{Longitud de un pedazo}} = \frac{Lt}{Lu}$$

Número de cortes = Número de pedazos

Ahora :

Longitud del aro: ***3*** metros <> ***300*** centímetros.

Longitud de cada pedazo: ***10*** centímetros.

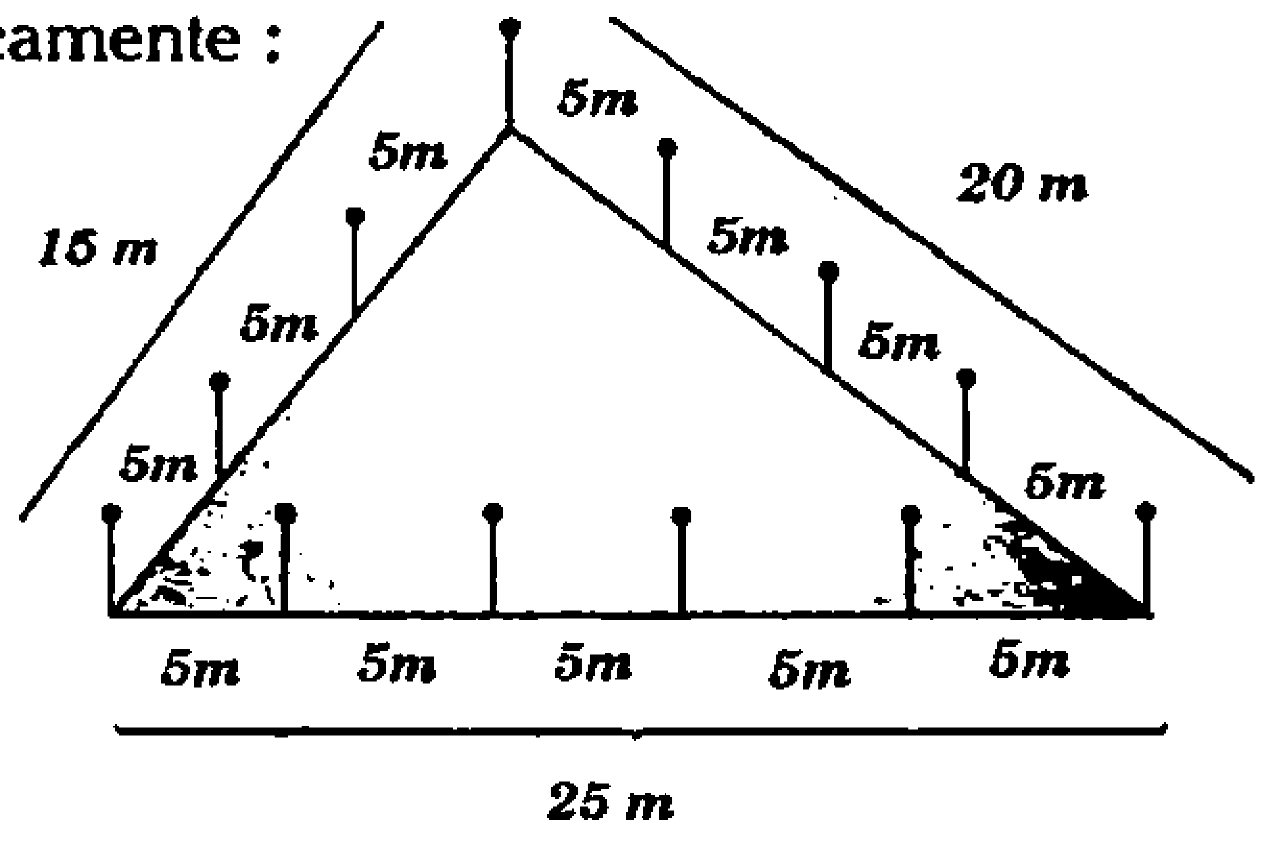
Número de pedazos $\frac{300}{10} = 30 \Rightarrow$ Número de cortes: ***30***

EJEMPLO 2 :

Se tiene un parque de forma triangular cuyos lados miden ***15; 20*** y ***25*** metros, incluyendo los vértices; ¿cuántas estacas se necesitan para cercarlo, si las estacas se colocan cada ***5*** metros?

RESOLUCIÓN :

Gráficamente :



n.° total = 12 estacas

Luego generalizando :

n° de estacas = Suma de n° de estacas por lado – n° de vértices

$$= (4 + 5 + 6) - 3 = 12$$

o también :

$$n^{\circ}\ de\ estacas = \frac{\text{Perímetro (suma de las longitudes de los lados)}}{\text{Longitud de separación entre estaca y estaca}}$$

$$n^{\circ}\ de\ estacas = \frac{15+20+25}{5} = 12$$

INTERVALOS DE TIEMPO

$$N^{\circ}\ de\ intervalos = \frac{T_{total}}{I}$$

$$N^{\circ}\ de\ campanadas = \frac{T_{total}}{I} + 1$$

$$N^{\circ}\ Total\ de\ pastillas = \left(\frac{T_{total}}{I} + 1\right)\left(N^{\circ}\ de\ pastillas\ en\ c/toma\right)$$

INTERVALOS DE LONGITUD

$$N^{\circ}\ de\ intervalos = \frac{L_{Total}}{I}$$

$$N^{\circ}\ de\ estacas\ (abierto) = \frac{L_{Total}}{I} + 1 \qquad N^{\circ}\ de\ estacas\ (cerrado) = \frac{L_{Total}}{I}$$

$$N^{\circ}\ de\ Cortes\ (abierto) = \frac{L_{Total}}{I} - 1 \qquad N^{\circ}\ de\ Cortes\ (cerrado) = \frac{L_{Total}}{I}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

¿Cuántos cortes debermos dar a una soga de *420* metros de longitud para obtener retazos de *21* metros?

A) 21 *B) 28* *C)12* *D) 19* *E) 13*

RESOLUCIÓN :

Siendo :

* Longitud total es *420* metros (de la soga).
* Longitud de cada retazo o longitud unitaria es *21* metros.

Se deduce que :

$$\# \text{ de cortes} = \frac{\text{longitud total}}{\text{longitud unitaria}} - 1$$

$$\# \text{ de cortes} = \frac{420}{21} - 1 = 20 - 1 = 19$$

Debemos efectuar ***19 cortes***

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Cuántos cortes deben darse a *25* aros de *20* metros de longitud; para tener pedazos de *5* metros?

A) 200 *B) 220* *C)100* *D) 190* *E) 130*

RESOLUCIÓN :

Siendo :

* Longitud total es *20* metros
* Longitud unitaria es *5* metros

Se deduce que :

$$\# \text{ de cortes} = \frac{\text{longitud total}}{\text{longitud unitaria}}$$

Esta fórmula se aplica en AROS, por tratarse de una figura cerrada.

Por cada aro, habrá :

$$\# \text{ de cortes} = \frac{20}{5} = 4 \text{ (pedazos)}$$

* Luego en *25* aros, se tendrá : ***25×4 = 100 pedazos***

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Una varilla de fierro ha sido seccionada en pedazos de *25 cm* de largo ; si para esto se hicieron *17* cortes. ¿Cuál fue la longitud inicial de la varilla de fierro?

A) 400 cm *B) 320* *C)450* *D) 190* *E) 130*

RESOLUCIÓN :

Siendo :

Longitud unitaria = ***25 cm***

 # de cortes = 17

Se deduce que :

$$\# \text{ de cortes} = \frac{\text{longitud total}}{\text{longitud unitaria}} - 1$$

Sustituyendo los datos mencionados :

$$17 = \frac{\text{longitud total}}{25} - 1$$

$$18 = \frac{\text{longitud total}}{25}$$

Longitud total = ***18 × 25 = 450 cm***

La longitud inicial de la varilla de fierro es ***450 cm***

RPTA : "C"

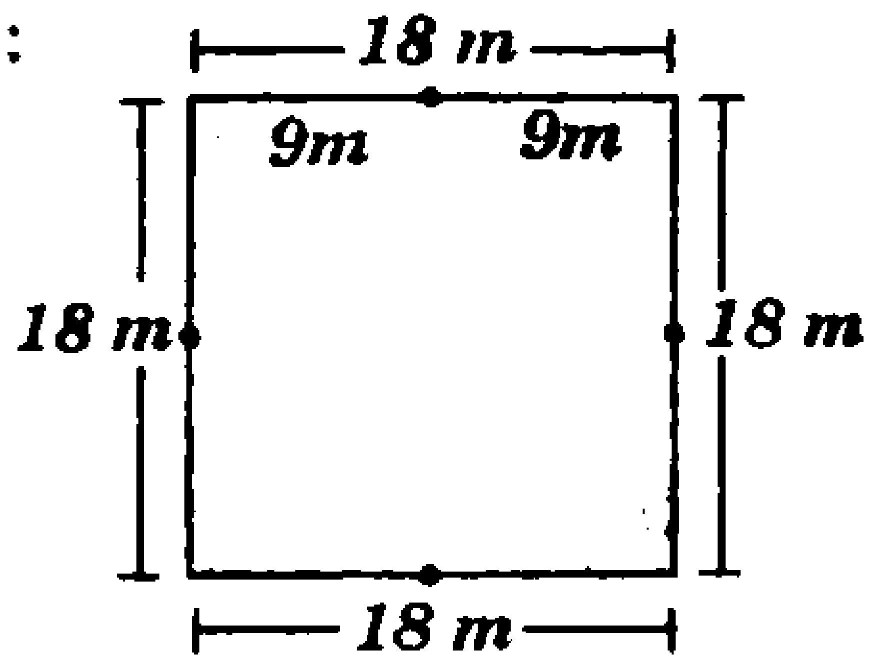
PROBLEMA 4 :

¿Cuántas estacas se necesitan para cerrar un terreno en forma de cuadrado cuyo lado es de *18* metros, si la estacas se colocan cada *9* metros?

A) 11 *B) 20* *C)12* *D) 9* *E) 8*

RESOLUCIÓN :

De la figura :



Perímetro = ***4 ×18 = 72*** metros

Longitud unitaria = ***9*** metros

Se deduce que :

$$\# \text{ de estacas} = \frac{\text{perímetro}}{\text{longitud unitaria}}$$

La fórmula se aplica, por ser línea cerrada.

¡OJO!

Longitud total o perímetro sustituyendo los datos mencionados

$$\# \text{ de estacas} = \frac{72}{9} = 8$$

Debemos colocar ***8 estacas***

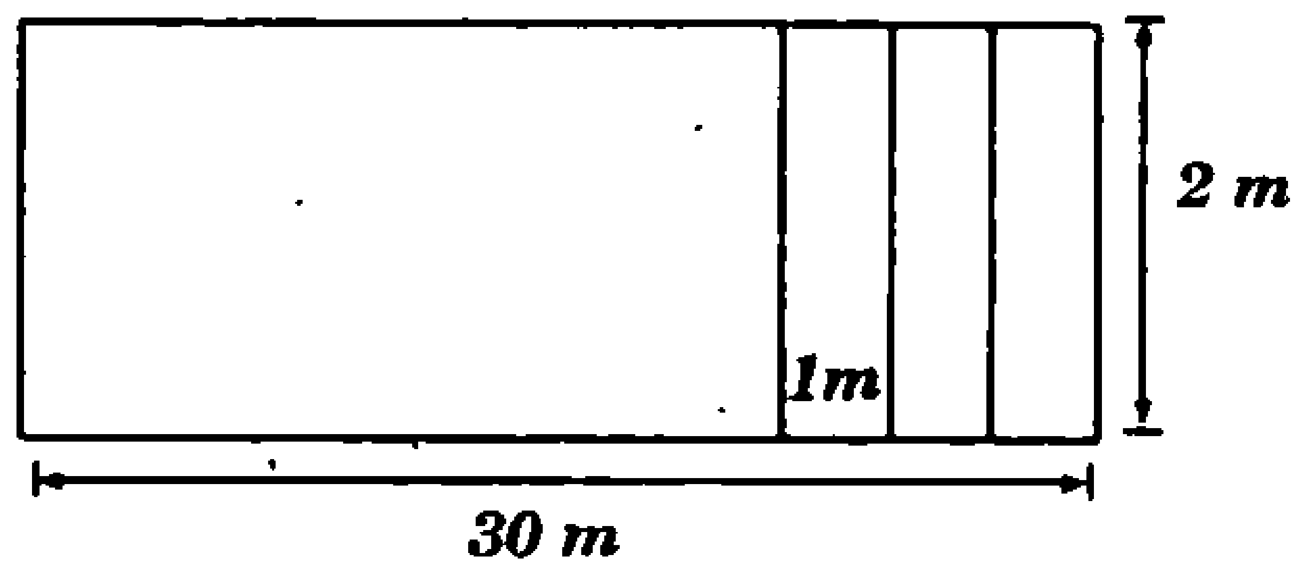
RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Un sastre tiene un corte de tela rectangular de *30m* de largo y *2m* de ancho ; ¿cuántos días se demorará el sastre para obtener pedazos de tela de *2* metros de largo y un metro de ancho , si corta por día sólo un pedazo?

A) 29 *B) 20* *C)32* *D) 28* *E) 30*

RESOLUCIÓN :



Como se desea obtener pedazos de ***2m*** de largo (ancho de tela) y un metro de ancho, entonces la dimensión de cada pedazo a obtener es de un metro, por lo que sólo será necesario encontrar el número de cortes que se deben hacer a la tela.

* Luego $n°\ de\ cortes = \dfrac{LT}{Lu} - 1$

$$n°\ de\ cortes = \frac{30}{1} - 1 = 29$$

* Además el sastre sólo corta un solo pedazo en un día, por lo que se demorará ***29*** días.

RPTA : "A"

PROBLEMA 6 :

Se tiene un lingote de plata de ***96 cm*** de largo, que se ha dividido en trozos de ***16 cm*** de largo cada uno. ¿Cuánto nos cobra el cortador por cada corte, sabiendo que recibió un total de ***55*** soles?

A) S/.25 B) 9 C)12 D) 11 E) 10

RESOLUCIÓN :

Siendo : Longitud total = ***96cm***

Longitud unitaria = ***96cm***

Se deduce que :

$$\#\ de\ cortes = \frac{longitud\ total}{longitud\ unitaria} - 1$$

$$\#\ de\ cortes = \frac{96}{16} - 1 = 6 - 1 = 5$$

* Luego de ***5*** cortes nos cobraron ***55*** soles, entonces el cobro por cada corte será :

$$S/.\frac{55}{5} = S/.11$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Un carpintero cobra ***35*** soles por dividir un tronco de árbol en ***6*** partes dando cortes paralelos.¿Cuánto tendremos que pagarle si necesitamos que corte el árbol en ***7*** partes? .

A) S/.45 B) 36 C)42 D) 51 E) 50

RESOLUCIÓN :

Se sabe :

 # de cortes = # de partes –1

 # de cortes = 6 –1= 5

* Luego de cortes nos cobraron ***35*** soles, entonces el cobro por cada corte será : $S/.\dfrac{35}{5} = S/.7$

* Averiguamos el número de cortes ; cuando al árbol se le ha dividido en ***7*** partes iguales :

 # de cortes = 7–1 = 6

* Ahora por ***6*** cortes se pagará, donde cada corte cuesta ***7*** soles :

$$6 \times S/.7 = S/.42$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Calcular el número de estacas de ***10*** metros de altura que se requieren para plantarlas en una línea recta de ***420*** metros, si se sabe que entre estacas y estaca la longitud debe ser de ***5*** metros.

A) 95 B) 90 C)92 D) 85 E) 100

RESOLUCIÓN :

Siendo :

Longitud total = 420 metros

Longitud unitaria = 5 metros

Se deduce que :

$$N°\ de\ estacas = \frac{longitud\ total}{longitud\ unitaria} + 1$$

$$\Rightarrow N°\ de\ estacas = \frac{420}{5} + 1 = 84 + 1 = 85$$

Debemos colocar ***85 estacas***

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

En un pista de salto de vallas hay ***23*** de éstas separadas por una distancia de ***3*** metros. ¿Cuál es la longitud entre la primera y la última valla?

A) 55 m B) 70m C) 66m D) 85m E) 50m

RESOLUCIÓN :

Lo que nos piden es análogo al número de estacas, donde :

 # de vallas = 23

Longitud unitaria = 3

Se deduce que :

$$\#\ de\ vallas = \frac{longitud\ total}{longitud\ unitaria} + 1$$

$$\Rightarrow 23 = \frac{longitud\ total}{3} + 1 \Rightarrow 22 = \frac{longitud\ total}{3}$$

Longitud total = ***22 × 3 = 66*** metros

La longitud entre la primera y la última valla es de ***66*** metros.

RPTA : "C"

PROBLEMA 10:

Para un compromiso social se deben ubicar a lo largo de una pared una fila de sillas, una a continuación de otra, logrando ubicar **160** sillas en dicha pared que tiene **80** metros de largo. Indicar el ancho de una silla.

A) 50 cm B) 70cm C) 66cm D) 85cm E) 50cm

RESOLUCIÓN:

Lo que nos piden es análogo al número de estacas, donde : ***# de sillas = 160***

Long. de la pared = ***80m = 8000 cm***

Se deduce que :

$$Ancho\ de\ una\ silla = \frac{long.\ pared}{\#\ de\ sillas}$$

$$Ancho\ de\ la\ silla = \frac{8000}{160} = 50\ cm$$

* La fórmula que hemos aplicado es por ser línea cerrada.

Entonces, el ancho de una silla es ***50 cm.***

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Lila está en cama por una enfermedad, por la que el médico le recomendó tomar cada **4** horas una pastilla durante **8** días. ¿Cuántas pastillas tomó si lo hizo desde el inicio del primer día hasta el final del último?

A) 49 B) 92 C)98 D) 45 E) 50

RESOLUCIÓN :

Siendo :

* Tiempo total = ***8 días = 192 horas***
* Intervalo de tiempo entre pastilla y pastilla es ***4*** horas.

Se deduce que :

$$\#\ de\ pastillas = \frac{tiempo\ total}{intervalo\ de\ tiempo} + 1$$

$$\Rightarrow \#\ de\ pastillas = \frac{192}{4} + 1 = 48 + 1 = 49$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Se debe colocar una cortina en una ventana amplia, para lo cual la cortina debe tener **12** metros de largo. Si los hojalillos deben estar separados ***15cm.*** uno seguido de otro, ¿cuántos de éstos se colocarán? (no se colocarán hojalillos en el límite de la tela).

A) 89 B) 79 C)98 D) 65 E) 70

RESOLUCIÓN :

Lo que nos piden es análogo al número de cortes, donde :

* Longitud total de la cortina es ***12*** metros o ***1200cm.***
* Los hojalillos tienen una separación cada ***15cm.***

Se tiene :

$$\#\ de\ hojalillos = \frac{1200}{15} - 1 = 80 - 1 = 79$$

En la cortina debemos hacer ***79*** hojalillos.

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Un sastre tiene una tela de **57** metros de longitud que desea cortarla en pedazos de **3** metros cada uno. Si para hacer cada corte se demora **7** segundos. El tiempo que demorará en cortar la totalidad de tela es :

A) 4,9 min. B) 9,2 C)9,8 D) 2,1 E) 5

RESOLUCIÓN :

Siendo :

Longitud total = 57 metros

Longitud unitaria = 3 metros

Se deduce que :

$$\#\ de\ cortes = \frac{longitud\ total}{longitud\ unitaria} - 1$$

$$\#\ de\ cortes = \frac{57}{3} - 1 = 19 - 1 = 18$$

* Tiempo total utilizado :

$$18 \times 7 = 126\ segundos$$

* En minutos :

$$126\ segundos \times \frac{1min}{60\ seg} = 2,1min$$

RPTA : "D"

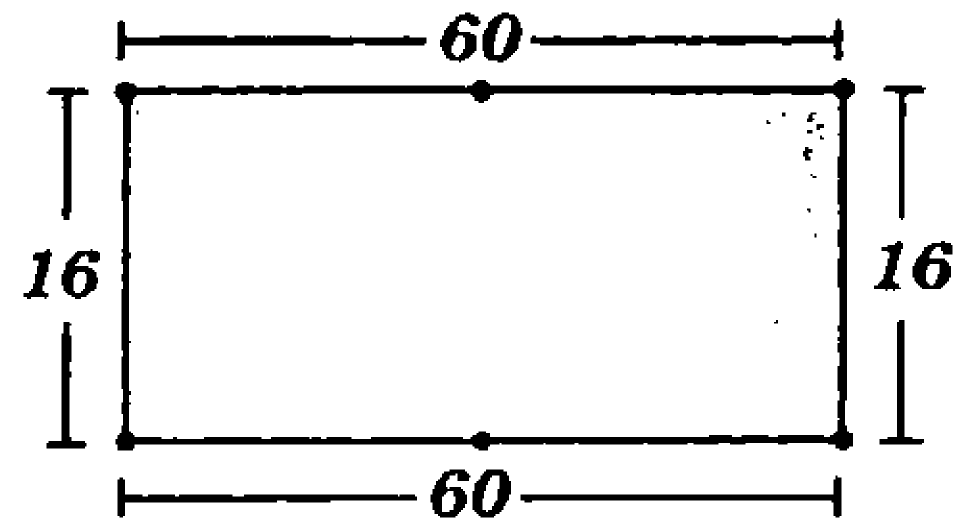
PROBLEMA 14 :

Un terreno rectangular mide **60** metros de largo por **16** de ancho. Necesitamos cercarlo con postes cada **8** metros. si cada poste mide **3** metros. ¿Cuántos de éstos necesitamos?

A) 19 B) 29 C)18 D) 17 E) 20

RESOLUCIÓN :

De la figura :



Siendo :

* Perímetro = ***60+60+ 16+ 16 = 152 m***
* Longitud unitaria = ***8*** metros

Por ser línea cerrada, aplicaremos la siguiente fórmula.

$$\# \text{ postes} = \frac{\text{perímetro}}{\text{longitud unitaria}}$$

Sustituyendo los datos mencionados :

$$\# \text{ de postes} = \frac{152}{8} = 19$$

Debemos colocar ***19 postes***.

RPTA : "A"

PROBLEMA 15 :

En la ventanilla de un banco se observa que la atención de un cliente demora ***6*** minutos ; si el banco atiende en horario corrido desde las ***9 a.m***. hasta las ***2 p.m.***; indicar el máximo número de clientes que se puede atender, si hay ***3*** ventanillas.

A) 132 B) 163 C)180 D) 162 E) 153

RESOLUCIÓN :

* Desde las ***9 a.m***. a las ***3 p.m***., hay ***5*** horas.
* En ***1*** hora hay ***60*** minutos, esto quiere decir que en ***5*** horas hay ***300*** minutos.

Se deduce que :

$$\# \text{ de clientes} = \frac{\text{tiempo total}}{\text{intervalo de tiempo}} + 1$$

$$\Rightarrow \# \text{ de clientes} = \frac{300}{6} + 1 = 50 + 1 = 51$$

Se atiende ***51*** clientes como máximo por cada ventanilla, luego por ***3*** ventanillas se atiende a :

$$51 \times 3 = 153 \text{ personas}$$

RPTA : "E"

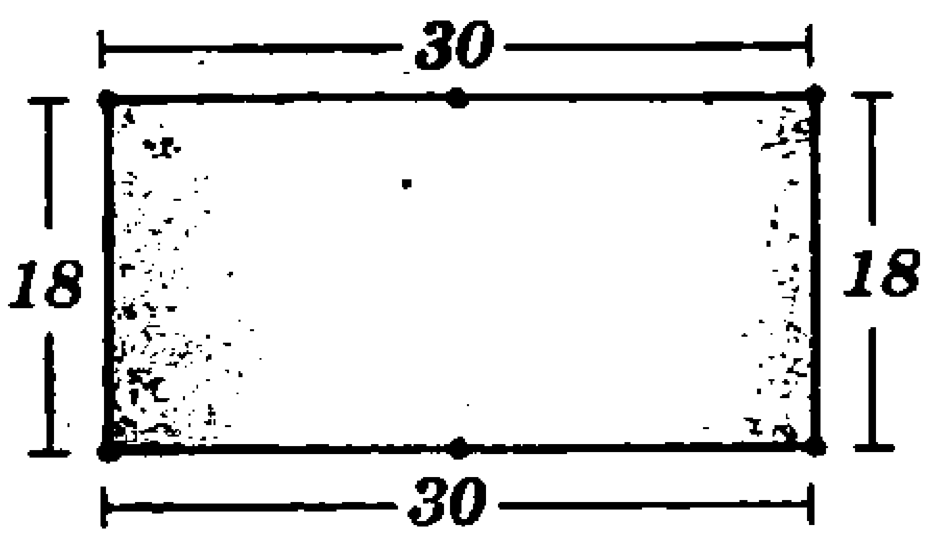
PROBLEMAS 16 :

Se desea cercar un terreno rectangular de ***18m×30m***, para lo cual es conveniente hacer una serie de columnas a una distancia de ***3*** metros una de otra; si el costo de cada columna es ***40*** dólares ; indicar el costo en dólares que originará levantar todas estas columnas.

A) 1222 B) 1250 C)1280 D) 1620 E) 1530

RESOLUCIÓN:

De la figura :



Siendo:

* Perímetro = ***30+30+18+18 = 96 m***
* Longitud unitaria = ***3m***

Por ser línea cerrada , aplicaremos la siguiente fórmula.

$$\# \text{ de columnas} = \frac{\text{perímetro}}{\text{longitud unitaria}}$$

Sustituyendo los datos mencionados :

$$\# \text{ de columnas} = \frac{96}{3} = 32$$

Se tiene ***32*** columnas, pero el costo de cada calumna es ***40*** dólares, entonces al levantar todas estas columnas será :

$$32 \times 40 = 1280 \text{ dólares}$$

RPTA : "C"

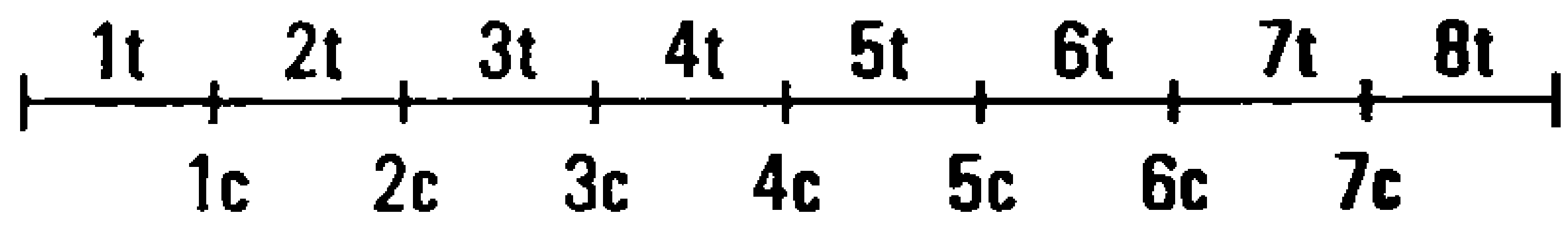
PROBLEMA 17 :

Se tiene ***"n"*** varillas y a cada varilla se le práctica cortes para obtener ***8*** trozos iguales. Cuantos cortes se realizarán en las ***"n"*** varillas?

A) 2n B) 8n C) 7n D)10n E) 5n

RESOLUCIÓN :

Analizando para ***1*** varilla.



N° de cortes = ***N°*** de trozos – ***1*** = ***8*** – ***1*** = ***7*** cortes.

Luego, para ***"n"*** varillas; el número de cortes en total será : ***7n***

RPTA: "C"

! RECUERDA ¡

Si en cada varilla se obtuvieran ***"n"*** trozos , entonces el número de cortes sería :

(n –1) por varilla . Para ***"n"*** varillas el total de cortes será : ***n (n – 1)***

N° de campanadas = ***N°*** de intervalos + ***1***

N° de cortes = ***N°***de partes iguales – ***1***

$$N° \text{ de partes iguales} = \frac{\text{Longitud total}}{\text{Longitud unitaria}}$$

PROBLEMA 18 :

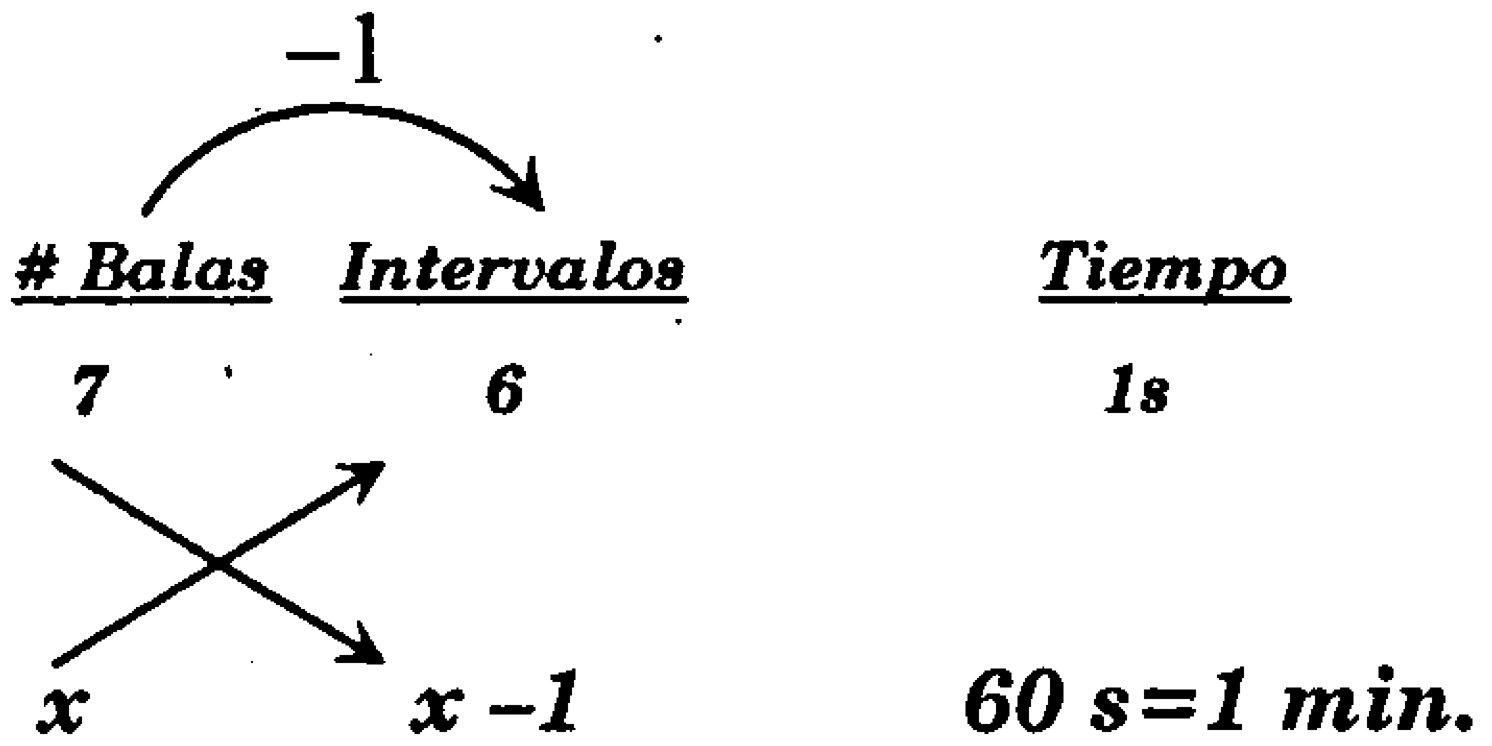
Un fusil automático puede disparar ***7*** balas por segundo . ¿Cuántas balas disparará en ***1*** minuto?

A) 420 B) 340 C) 361 D) 480 E) 500

RESOLUCIÓN :

* Aplicaremos una regla de tres , relacionando el número de intervalos de tiempo de bala y bala y el tiempo ; y no directamente con el número de balas (debido a que el tiempo se empieza a contabilizar a partir del ***1***[er] disparo , siendo el

número de intervalos de tiempo *1* menos que el número de balas) .



$6 \times 60 = (x-1) \times 1 \Rightarrow 360 = x-1 \Rightarrow 361 = x$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Un médico le prescribió a Juan tomar pastillas de un mismo tipo de la siguiente manera: el primer día *11* pastillas, el segundo *10*, el tercero *9* y así sucesivamente hasta que el último día debía tomar una sola pastilla. Si Juan tomó solo la mitad de la dosis cada día, ¿cuántas pastillas tomó los siete últimos días?

A) 21 B) 28 C)12 D) 14 E) 13

RESOLUCION :

Se tiene día	# pastillas que debía tomar	pastillas que tomó
1	11	11/2
2	10	10/2
3	9	9/2
4	8	8/2
5	7	7/2
⋮		
11	1	1/2

Total pastillas que tomó :

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+7)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7\times 8}{2}\right)=14 \text{ pastillas}$$

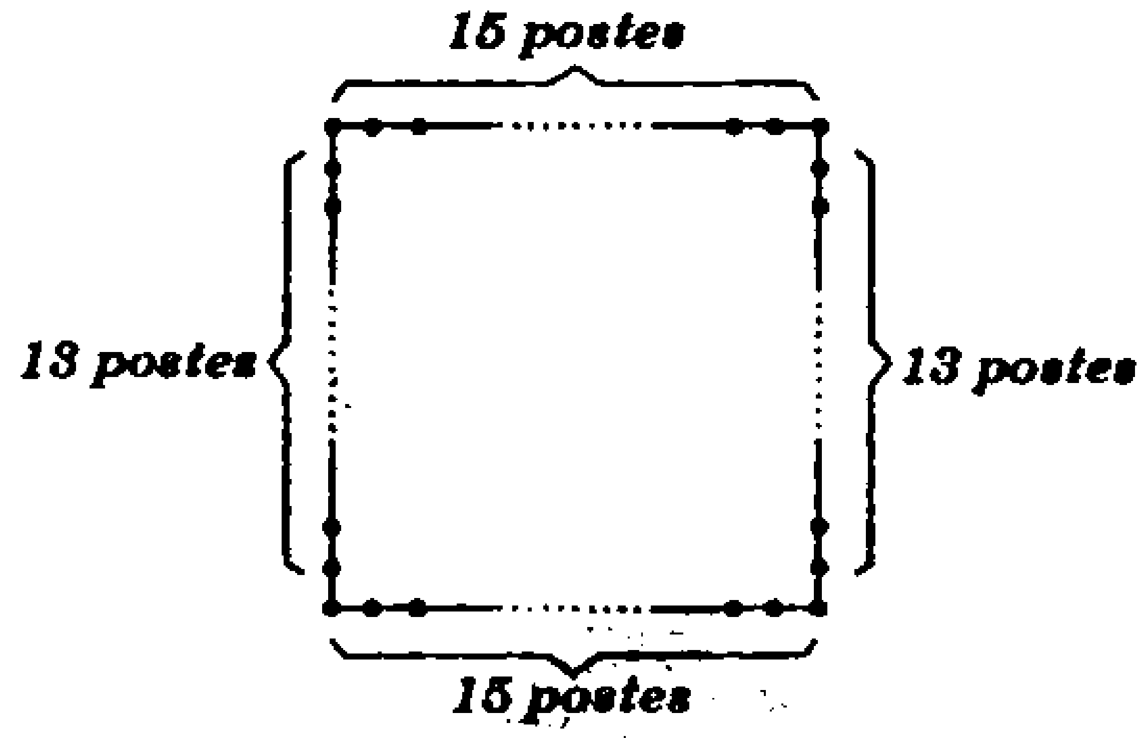
RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Juan cercó su jardín y la cerca formó un cuadrado en el que habían *15* postes en cada lado . ¿Cuántos postes utilizó?

A) 42 B) 64 C) 48 D) 56 E) 72

RESOLUCIÓN :



Luego , N° de postes utilizados :

$$15 + 15 + 13 + 13 = 56$$

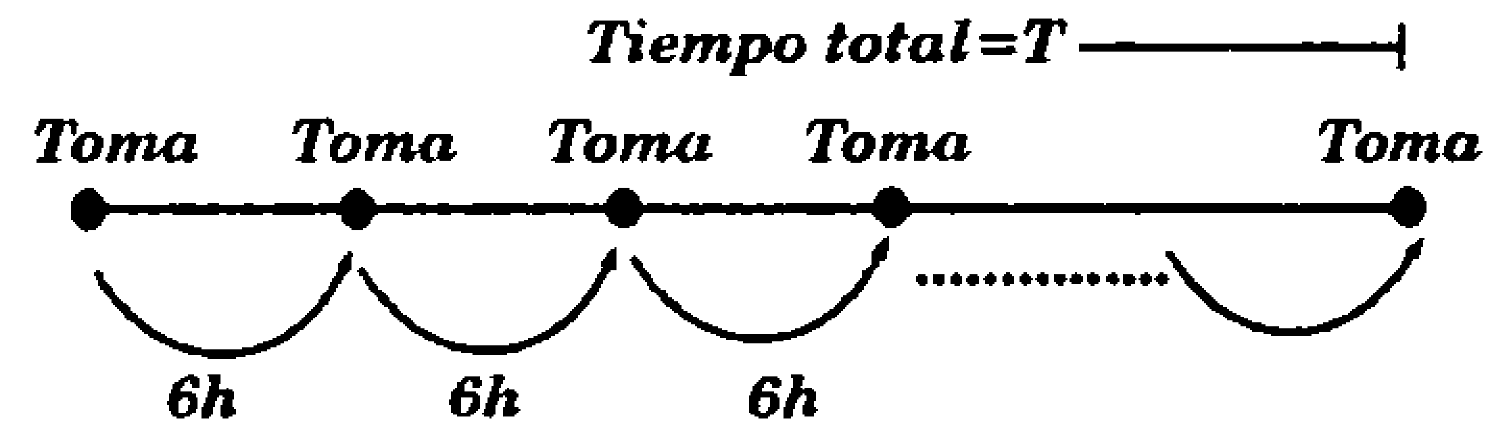
RPTA: "D"

PROBLEMA 21 :

Liz padece una extraña enfermedad, por lo que su médico le recetó tomar *3* pastillas de un mismo tipo, cada *6* horas. Si Liz empezó su tratamiento hoy domingo a las *7 h*. y su tratamiento terminará cuando en total haya tomado *69* pastillas, ¿en qué día y a qué hora culminará su tratamiento?

A) Sábado,7 h B) Viernes, 19 h C) Viernes,13 h
D) Viernes, 7 h E) Sábado, 19 h

RESOLUCIÓN:



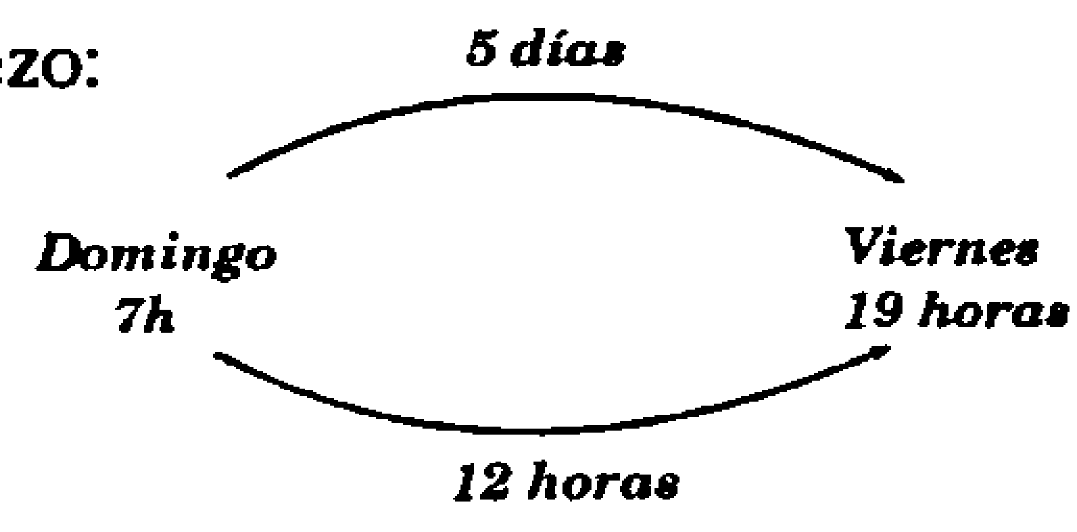
$\#\text{ intervalos}=\frac{T}{6}$; $\#\text{ Veces que toma}=\frac{T}{6}+1$

En cada toma, ingiere *3* pastillas.

$$\rightarrow 3\left(\frac{T}{6}+1\right)=69$$

$T = 132$ horas = *5* días + *12* horas

si empezo:



Culminará su tratamiento el viernes a las *19* horas

RPTA : "B"

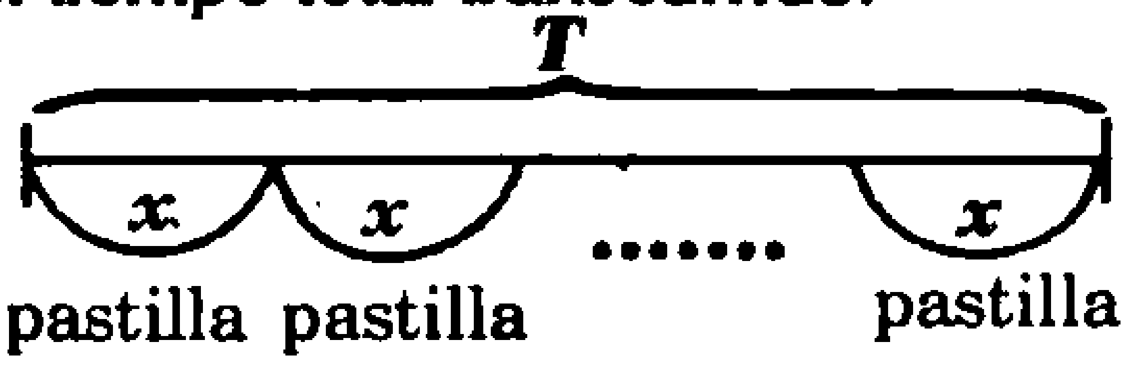
PROBLEMA 22 :

Un atleta toma dos tipos de pastillas para recuperar sus energías: del primer tipo, una pastilla cada *6* horas, y del segundo, *2* pastillas cada *8* horas. Si en total tomó *73* pastillas y empezó tomando ambos tipos, ¿durante cuánto tiempo tomó las pastillas?

A) 168 horas *B) 156 horas* *C) 186 horas*
D) 167 horas *E) 144 horas*

RESOLUCIÓN :

Sea T el tiempo total transcurrido.



$\# \text{ pastillas} = \frac{T}{x} + 1$, con 1 pastilla

Luego:

Para la pastilla 1: (1 pastilla cada 6 horas)

$$\# \text{ pastillas}_1 = \frac{T}{6} + 1 \qquad ...(I)$$

Para la pastilla 2: (2 pastillas cada 8 horas)

$$\# \text{ pastilla}_2 = 2\left(\frac{T}{8} + 1\right) \qquad ...(II)$$

De (I) y (II) :

$\# \text{ pastillas}_1 + \# \text{pastillas}_2 = 73$

$$\Rightarrow \left(\frac{T}{6} + 1\right) + 2\left(\frac{T}{8} + 1\right) = 73 \Rightarrow T = 168 \text{ Horas}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Alex tomó tres pastillas y media de tipo «*A*» cada *8* horas y media pastilla de tipo «*B*» cada *4* horas, hasta que la diferencia del número de pastillas tomadas sea *18*, ¿cuánto tiempo duró el tratamiento?

A) 2 días *B) 8* *C) 7* *D) 1,5* *E) 3*

RESOLUCIÓN:

$$\# \text{ de pastillas} = \frac{\text{tiempo total}}{\text{intervalo de tiempo}} + 1$$

* Sea «*T*» en número de horas que duró el tratamiento.
* Intervalo de tiempo cada *8* horas, tomando tres pastillas y media. $\left(3{,}5 = \frac{7}{2}\right)$ *de tipo "A"*
* Intervalo de tiempo cada *4* horas, tomando media pastilla

$$\left(0{,}5 = \frac{1}{2}\right) \text{ de tipo "B"}$$

Por condición del problema, se tiene :

$$\frac{7}{2}\left(\frac{T}{8} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{T}{4} + 1\right) = 18 \Rightarrow \frac{7}{2}\left(\frac{T+8}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{T+4}{4}\right) = 18$$

$$\Rightarrow \frac{7T+56}{16} - \frac{T+4}{8} = 18 \Rightarrow \frac{7T+56-2T-8}{16} = 18$$

$$\Rightarrow 5T + 48 = 288 \Rightarrow 5T = 240 \Rightarrow T = 240$$

El tratamiento duró *48* horas, es lo mismo que decir *2* días.

RPTA : "A"

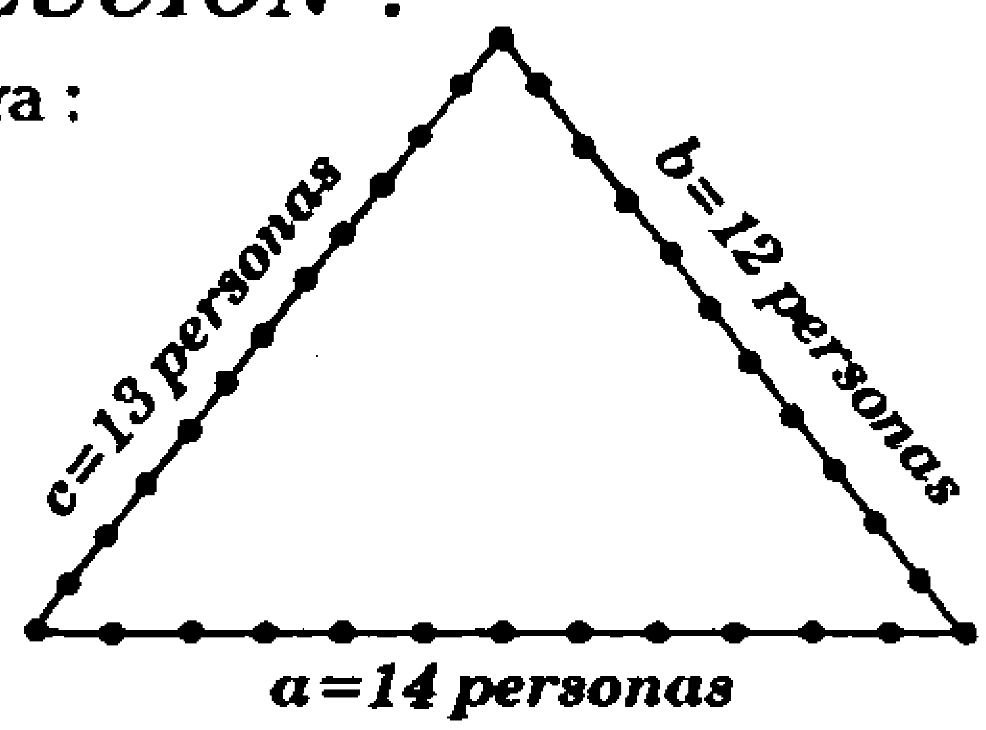
PROBLEMA 24 :

Se ha formado un triángulo donde en un lado hay *12* personas, en el segundo lado *13* personas y en el tercer lado *14* personas. ¿Cuántas personas hay en total, si en cada vértice hay una persona? .

A) 32 *B) 36* *C) 37* *D) 33* *E) 35*

RESOLUCIÓN :

De la figura :



Para cualquier polígono

$$N° \text{personas} = \sum_{\text{valores c/lado}} - N° \text{vertices}$$

Para nuestro problema, tenemos :

$N°$ *de personas* $= (12+13+14)$

$N°$ *de personas* $= 39 - 3 = 36$

RPTA : "B"

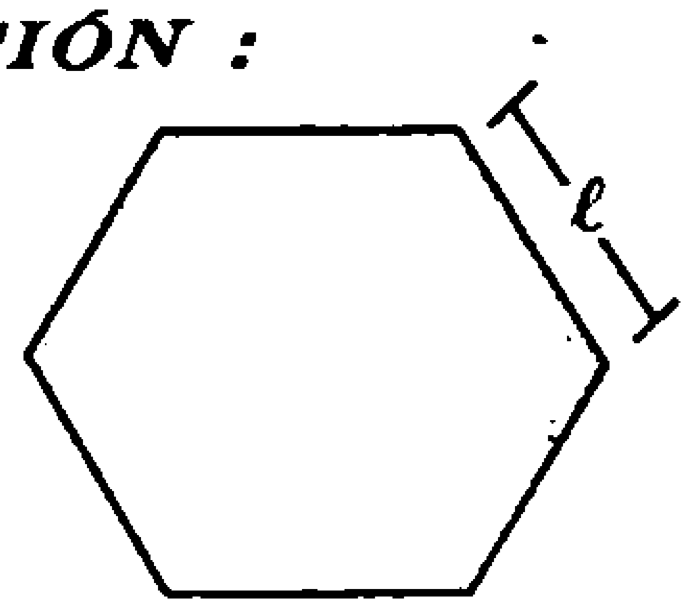
PROBLEMA 25 :

¿Cuántas estacas se necesitarán para cercar un terreno cuya forma es de un hexágono regular de área igual a $150\sqrt{3}m^2$, si las estacas se colocan cada *2* metros? .

A) 32 *B) 30* *C) 37* *D) 38* *E) 45*

RESOLUCIÓN :

* De la figura :



Por dato :

* Área del terreno = $150\sqrt{3}m^2$
* Luego unitaria : $2m$

Se sabe que :

$$\text{Área del hexágono} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Sustituyendo uno de los datos, para hallar su lado del hexágono :

$$150\sqrt{3} = \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Luego se tiene : $600 = 6\ell^2$

$$\ell^2 = 100 \Rightarrow \ell = 10$$

Se deduce que :

$$\text{\# de estacas} = \frac{\text{perímetro}}{\text{Longitud unitaria}} \Rightarrow \text{\# de estacas} = \frac{10\times 6}{2} = 30$$

Debemos colocar ***30 estacas.***

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

¿Cuántas pastillas tomará un enfermo durante *4* días que está hospitalizado , si la enfermera le da una pastilla cada *3* horas (si empezó a tomarlas a penas empezó su reposo hasta que culminó) .

A) 32 ***B) 33*** ***C) 34*** ***D) 35*** ***E) 36***

RESOLUCIÓN :

Tiempo	*Intervalo*
3H	*2 – 1*
4 días <> 4 × 24 H	*x – 1*

* Por regla de tres : $(x-1)3 = 4\times 24\times 1$

$\Rightarrow x = 33$.....(número de pastillas)

RPTA : "B"

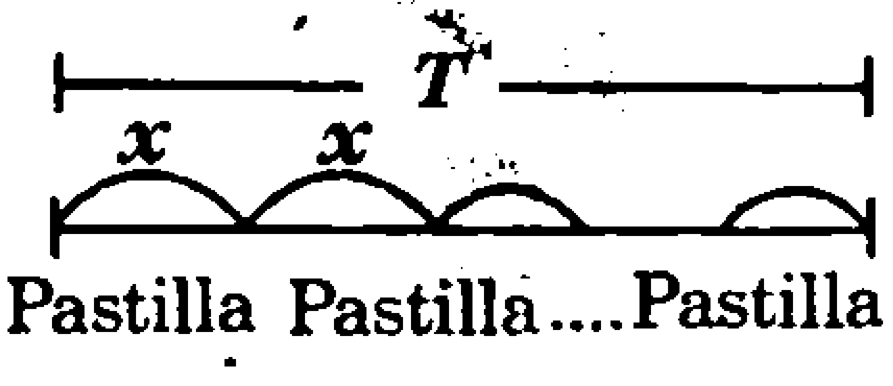
PROBLEMA 27 :

Sandra tiene que tomar *2* pastillas del tipo *M* cada *6* horas y *3* pastillas del tipo *N* cada *14* horas. Si Sandra comienza su tratamiento tomando ambos tipos de pastillas, ¿en cuántas horas habrá tomado *28* pastillas en total?

A) 40 ***B) 46*** ***C) 42*** ***D) 36*** ***E) 56***

RESOLUCIÓN :

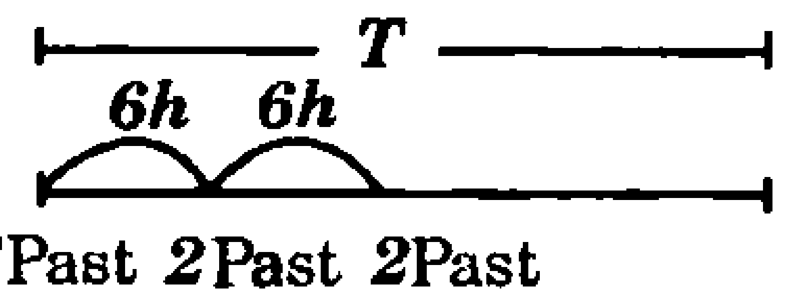
Se sabe:



$$\text{\# pastillas tomadas} = \frac{T}{x} + 1$$

Luego:

i) Pastilla tipo *M*:



$$\text{\# pastillas} = 2\left(\frac{T}{6} + 1\right)$$

ii) Pastillas tipo *N*:

$$\text{\# pastillas} = 3\left(\frac{T}{14} + 1\right)$$

Luego:

$$2\left(\frac{T}{6}+1\right) + 3\left(\frac{T}{14}+1\right) = 28 \Rightarrow T = 42h$$

RPTA : "C"

PRACTICA DIRIGIDA

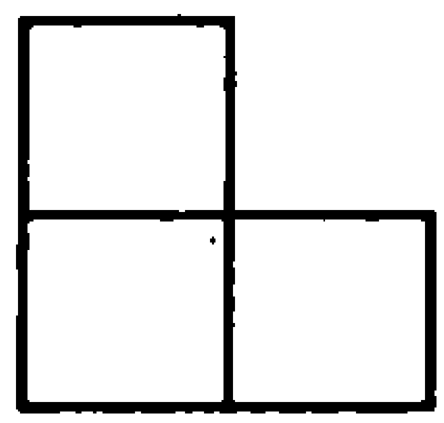
01 Con *22* niños por lado se forma un triángulo equilátero. ¿Cuántos niños deben unirse a este grupo para formar un cuadrado con *17* niños en cada lado?

A) 1 ***B) 2*** ***C) 3*** ***D) 4*** ***E) 0***

02 ¿Cuántas estacas se necesitan para cercar un terreno de forma cuadrada, cuya área es de $9025\ m^2$, si las estacas se colocan cada *10m*?

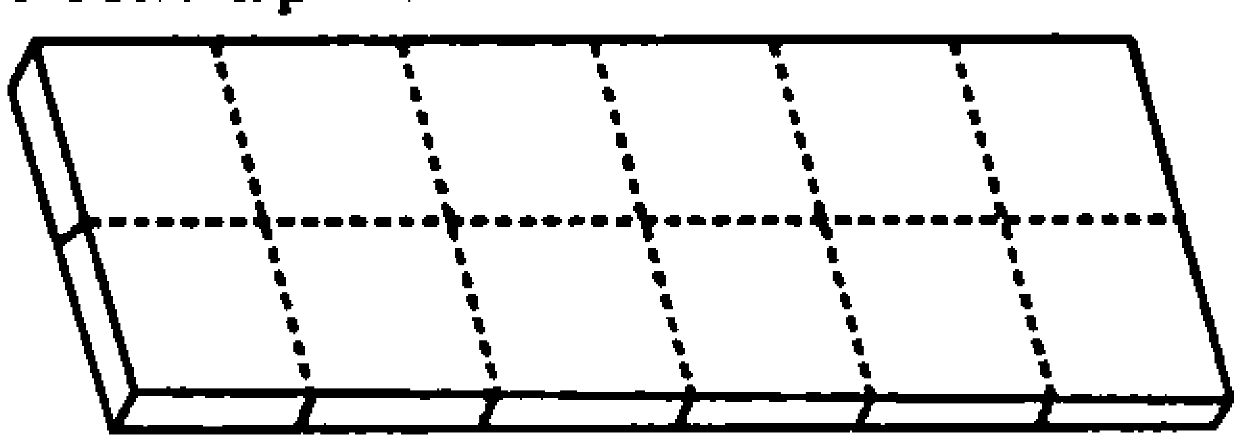
A) 38 ***B) 35*** ***C) 34*** ***D) 30*** ***E) 36***

03 Lenin tenía un terreno de $192\ m^2$, conformado por *3* parcelas cuadradas iguales (ver figura), el cual dividió en *4* partes exactamente iguales. Si a cada una de las cuatro nuevas parcelas obtenidas las cercó utilizando estacas igualmente distanciadas, ¿cuántas estacas como mínimo empleó Lenin?



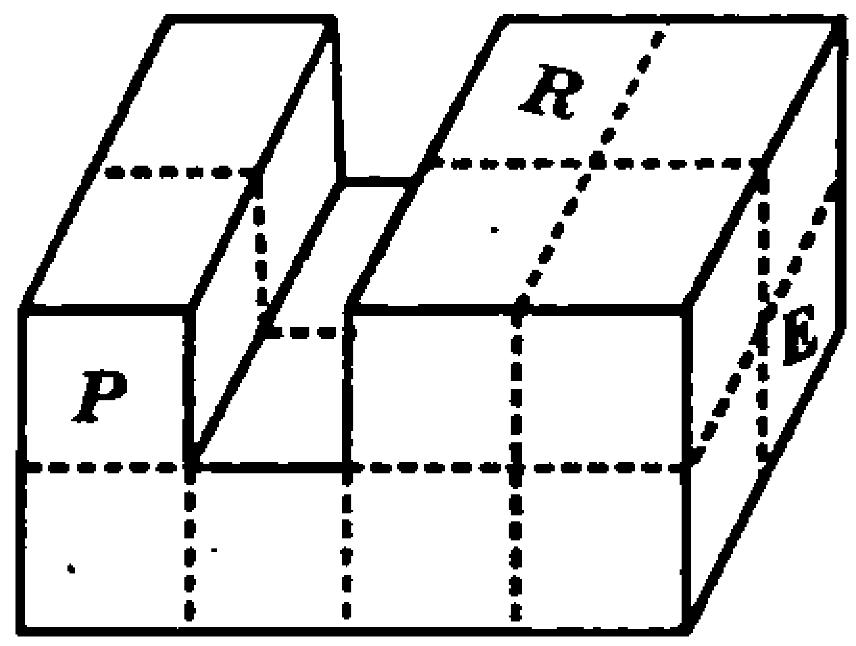
A) 8 ***B) 21*** ***C) 15*** ***D) 18*** ***E) 12***

04 En un trozo de madera se ha marcado una cuadrícula tal como se muestra en la figura. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo debe realizarse con una sierra eléctrica para obtener los *12* trozos cuadrados?



A) 3 ***B) 5*** ***C) 6*** ***D) 2*** ***E) 4***

05 En la figura se tiene un trozo de madera, el cual al ser cortado siguiendo las líneas punteadas se obtendrá *14* cubitos. ¿Cuántos cortes rectos como mínimo deberá realizarse con una sierra eléctrica para obtener los tres cubitos con las letras *P*, *R* y *E*?

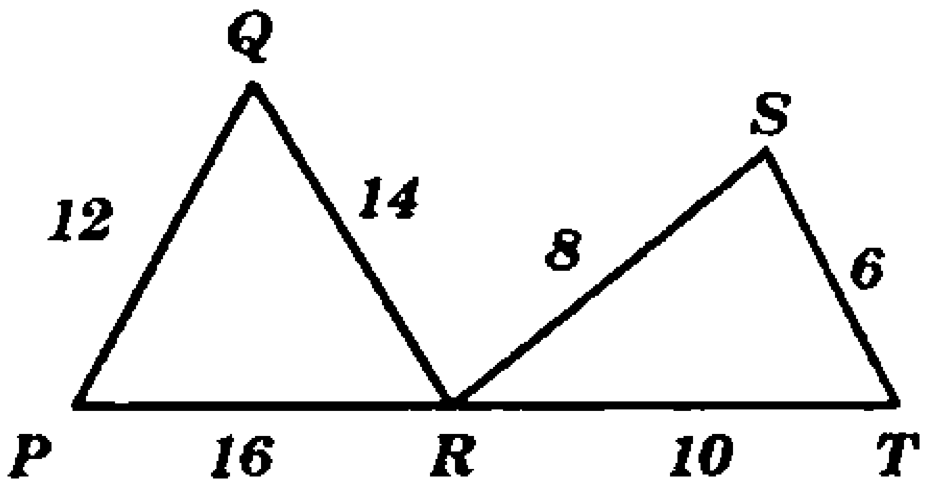


A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

06 En todo el perímetro de un terreno rectangular se han colocado ***160*** estacas separadas entre sí ***8 m***. ¿Cuál es el largo del terreno si el ancho es de ***200 m***?

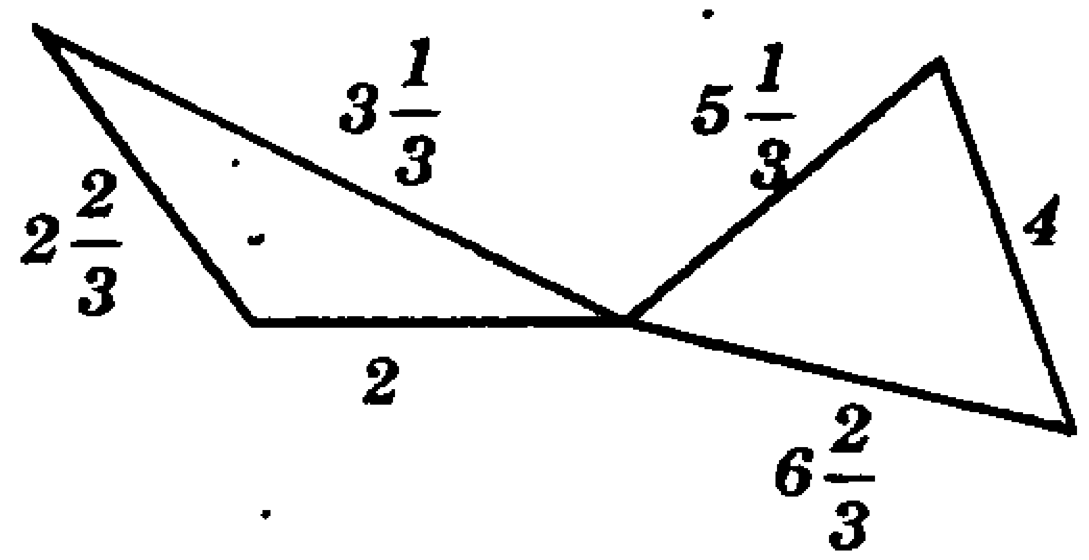
A) 420 m *B) 430 m* *C) 400 m* *D) 440 m* *E) 470 m*

07 Un granjero tiene un terreno de la forma como se muestra en la figura, que desea cercarlos con el mínimo número de estacas igualmente espaciadas. ¿Cuántas estacas necesita?



A) 34 *B) 33* *C) 32* *D) 31* *E) 30*

08 Un granjero quiere cercar su granja (ver figura). Si la distancia está en pies, ¿cuántas estacas de madera que están igualmente espaciadas debe colocar como mínimo?



A) 32 *B) 34* *C) 35* *D) 36* *E) 37*

09 Se tiene una figura hexagonal de lados iguales, cada uno de los cuales mide ***20 cm***. ¿Cuántos puntos rojos podemos marcar a su alrededor (a lo largo de su perímetro) si entre ellos debe haber una distancia de ***3 cm***?

A) 38 *B) 25* *C) 24* *D) 40* *E) 26*

10 En el perímetro y en las diagonales de un parque de forma rectangular de ***80 m*** por ***60 m*** se va a sembrar árboles igualmente espaciados. ¿ Cuál será el menor número de árboles que se podrá sembrar si no deben estar separados más de ***15*** metros?

A) 37 *B) 28* *C) 45* *D) 41* *E) 54*

11 Ronel toma dos tipos de pastillas para recuperarse; del primero tipo, dos pastillas cada ***8*** horas y *del* segundo, una pastilla cada ***6*** horas. Si en total tomó ***43*** pastillas y empezó tomando de ambos tipos, ¿durante cuántas horas tomó las pastillas?

A) 108 *B) 84* *C) 96* *D) 100* *E) 120*

12 Luis tomó dos pastillas y media de tipo ***A*** cada seis horas y media pastilla de tipo ***B*** cada tres horas, hasta que la diferencia del número de pastillas tomadas sea ocho. ¿Cuántas horas duró el tratamiento?

A) 20 *B) 25* *C) 24* *D) 12* *E) 30*

13 Se desea cercar un terreno de cultivo de ***50 m*** de largo por ***20 m*** de ancho, con estacas de madera y alambre de púas. Si se van a poner tres hileras de alambre y las estacas a una distancia de ***70 cm***, entre una y otra, ¿cuántas estacas y qué cantidad de alambre se necesitarían?

A) 200 y 400 m *B) 1 500 y 2500 m*
C) 200 y 4 200 m *D) 3 000 y 4 000 m*
E) 2 400 y 3 200 m

14 Se colocó postes cada ***15 m*** a lo largo de la berma central de una avenida de ***645 m***. Si se cobró ***S/. 308*** por el total de la mano de obra, ¿cuánto se cobró por colocar cada poste si se colocó uno al inicio y otro al final de la avenida?

A) S/. 5 *B) S/. 7* *C) S/. 10* *D) S/. 9* *E) S/. 8*

15 Se han colocado postes igualmente espaciados, en el contorno de un campo triangular, cuyos lados miden ***182***; ***234*** y ***260 m***, respectivamente. Sabiendo que la distancia entre poste y poste está comprendida entre ***4*** y ***20 m***, ¿cuántos postes se colocaron?

A) 50 *B) 51* *C) 52* *D) 53* *E) 54*

16 Para cercar un terreno de forma rectangular de ***36 m*** de largo y ***30 m*** de ancho se colocará estacas igualmente distanciadas. ¿Cuántas estacas se necesitan, como mínimo, si en el punto medio de cada lado debe haber una de ellas?

A) 34 *B) 66* *C) 44* *D) 22* *E) 64*

17 Se desea plantar árboles a lo largo de un camino de ***80*** metros de longitud, a una mínima distancia uno del otro. Si dicha distancia de separación aumentará en ***6*** metros, entonces el número de árboles necesarios disminuiría en ***3***

¿Cuántos árboles serán plantados de la primera forma?

A) 9 B) 12 C) 10 D) 16 E) 8

(18) A un anillo se le hacen ***6*** cortes: A tres de ellos se les pinta de color verde y al resto de rojo, a los de color rojo se les hacen ***3*** cortes a cada trozo, y a la mitad de ellos se les pintó de color verde. Enseguida, se toman todos los trozos de color verde y se les hace a cada uno ***3*** cortes, y a la mitad de ellos se le pinta de color rojo. ¿Cuántos trozos hay en total y cuántos trozos son de color rojo?

A) 36; 30 B) 42; 18 C) 38; 22 D) 33; 12 E) 42; 24

(19) Una gran avenida de ***120 m*** es dividida mediante marcas de pintura blanca cada ***40 cm*** y además se siembran árboles cada ***50 cm***. Calcule la suma entre la cantidad de marcas y la cantidad de árboles, en total, si se sabe que la avenida inicia y termina con un árbol sembrado, mas no con una marca.

A) 539 B) 540 C) 542 D) 538 E) 541

(20) A un terreno de forma rectangular se le ha dividido en parcelas cuadradas, todas iguales de ***8 m*** de lado obteniéndose ***1 419*** parcelas y se han empleado ***1 496*** postes que se han colocado en cada vértice de las parcelas. Calcular el perímetro del terreno.

A) 1 216 B) 1 208 C) 1 672 D) 1 200 E) 1 580

TAREA DOMICILIARIA

(01) Un comerciante tiene una pieza de paño de ***60*** metros de longitud que quiere cortar en trozos de ***1*** metro. Necesita ***5*** segundos para hacer cada corte. ¿Cuánto tarda en cortar toda la pieza?

A) 295 s B) 300 s C) 285 s D) 305 s E) 290 s

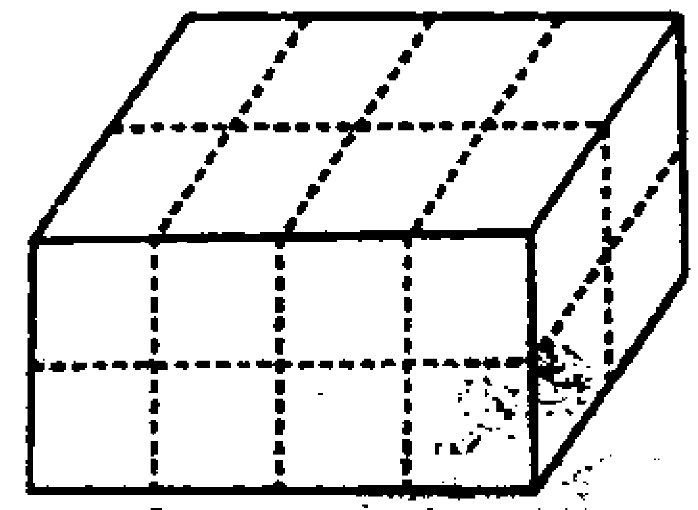
(02) Un sastre tiene una tela de ***40*** metros de longitud, la misma que necesita cortarla en retazos de dos metros cada uno. Sabiendo que en cada corte se demora ***8*** segundos, ¿qué tiempo emplearía como mínimo para cortar toda la tela?

A) 1 min 32" B) 3 min C) 2 min 36"
D) 4 min E) 2 min 32"

(03) Para cercar un terreno en forma de triángulo equilátero se utilizaron ***60*** estacas colocadas cada ***4*** metros y empezando en un vértice del triángulo. ¿Cuál es la longitud de cada lado del terreno?

A) 120 B) 80 C) 76 D) 84 E) 96

(04) En la figura se muestra un trozo de madera que será cortado con una sierra eléctrica en ***16*** trozos iguales siguiendo líneas marcadas. ¿Cuántos cortes como mínimo se debe hacer?



A) 3 B) 5 C) 6 D) 4 E) 7

(05) El ancho de un terreno es ***40 m***. Si en todo el perímetro se colocan ***80*** estacas cada ***5 m***, calcular el largo de dicho terreno.

A) 120 m B) 150 m C) 160 m D) 100 m E) 80 m

(06) A un cable de longitud ***"L"*** se le hacen ***9*** cortes y se obtienen pedazos de ***5 m*** cada uno. ¿Cuántos cortes deben hacerse para conseguir partes del mismo tamaño en un cable de longitud ***"3L"***?

A) 28 B) 30 C) 25 D) 29 E) 15

(07) En un terreno circular se clavan estacas alrededor, alternando longitudes entre estaca y estaca de ***5*** y ***10*** metros. Si en total se coloca ***40*** estacas, calcule el perímetro del terreno.

A) 200 m B) 300 m C) 400 m D) 150 m E) 600 m

(08) Juan toma una pastilla cada ***3*** horas. Si comienza tomando a las ***09:00 h*** de un día lunes, ¿cuántas pastillas tomará hasta el día viernes, de la misma semana, hasta las ***18:00 h***?

A) 18 B) 36 C) 37 D) 35 E) 39

(09) Un terreno de forma cuadrada tiene como área ***400 m²***. ¿ Cuántas estacas se pueden colocar en el perímetro del terreno cada ***2 m*** y cuántas de éstas se pueden colocar cada ***5 m***? Dar como respuesta la suma de ambos resultados.

A) 46 B) 50 C) 56 D) 63 E) 57

(10) Para un compromiso social se deben ubicar a lo largo de una pared una fila de sillas, una a continuación de otra, logrando ubicar ***200*** sillas en dicha pared que tiene ***90 m*** de largo. Indique el ancho de la silla.

A) 42 cm B) 40 cm C) 45 cm D) 46 cm E) 44 cm

CLAVES DE LA PRACTICA									
1)A	2)A	3)B	4)E	5)B	6)D	7)C	8)C	9)B	10)C
11)C	12)C	13)C	14)B	15)C	16)C	17)A	18)A	19)B	20)A
1)A	2)E	3)B	4)A	5)C	6)D	7)B	8)B	9)C	10)C

LOGICA PROPOSICIONAL

CAPITULO 049

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

- *Reconocer y diferenciar los enunciados de las proposiciones lógicas.*
- *Reconocer las proposiciones simples y compuestas.*
- *Utilizar correctamente los diferentes conectivos lógicos en la estructuración de las proposiciones compuestas (esquemas moleculares), y manejar con propiedad las tablas de verdad.*
- *Evaluar correctamente los esquemas moleculares y reconocer los esquemas tautológicos. contradictorios y consistentes.*

INTRODUCCIÓN :

Frecuentemente los términos «lógico» e «ilógico» los utilizamos para indicar lo que es razonable en contraposición de lo que no es razonable. Evidentemente que estos términos tienen que ver con la lógica. Pero ¿qué es la lógica?

No trataremos de definir a la lógica porque de hacerlo. sería circunscribir su dominio o campo de aplicación. Simplemente diremos que la lógica se ocupa de examinar los diversos procedimientos teóricos y experimentales que se utilizan en la adquisición de conocimientos. Por lo tanto. la lógica estudia los procesos del pensamiento para descubrir los elementos racionales que la constituyen y las funciones que los enlazan. Igualmente la lógica indaga las relaciones mutuas y las influencias recíprocas que existen entre el pensamiento y la realidad representada por este pensamiento.

¿Por qué es necesario estudiar lógica?

Es necesario aclarar desde un principio que las operaciones lógicas son practicadas continuamente. especialmente en nuestro lenguaje cotidiano. por todos nosotros en las distintas facetas de nuestro que hacer diario. aun cuando no tengamos plena conciencia de ello. Es decir. la lógica la venimos aprendiendo desde que hemos nacido. Ya que ésta se encuentra contenida implícitamente en todas las actividades. Sin embargo esta realidad tiene un límite y llega un momento en que necesariamente debemos estudiar lógica para poder razonar con mayor rigor. Ya sea en el aprendizaje de un determinado curso (como el caso de aritmética). ya sea en el ejercicio de nuestra profesión, ya sea en la solución de un problema o ya sea en la actividad científica. El conocimiento de la lógica y el adiestramiento en el manejo de sus operaciones nos colocará en una situación de poder actuar con mayor eficacia. de pensar con más penetración y objetividad y de emprender después por nuestra propia cuenta. la resolución de problemas que nos plantea la vida diaria o la ciencia misma.

PROPOSICIÓN

Oración aseverativa , es decir su característica principal es ser Verdadera *(V)* o Falsa *(F)*, generalmente se expresan como Oraciones declarativas, además, cumplen una función informativa señalando acontecimientos, hechos que se dan en la realidad objetiva.

EJEMPLOS :

- La tierra es un satélite. ....*(F)*
- César Vallejo no fue literato ....*(F)*
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ....*(V)*
- ¿Quieres ser mi enamorado? (No es proposición)
- ¡Ayúdame! (No es proposición)
- Supermán fue mi enamorado (No es proposición)
- $x+y=z$ (No es proposición)
- Más vale pájaro en mano que ciento volando. (No es proposición)
- *5 > 3*............. *(V)*

SON PROPOSICIONES	NO SON PROPOSICIONES
• *Las oraciones aseverativas.*	• *Los hechos o personajes literarios.*
• *Las Leyes Científicas*	• *Los proverbios, modismos y refranes.*
• *Las fórmulas matemáticas.*	• *Creencias religiosas, supersticiones y mitos.*
• *Fórmulas y/o esquemas lógicos*	• *Enunciados abiertos e indefinidos.*
• *Los enunciados cerrados o definidos.*	• *Las Interrogaciones.*
	• *Las ordenes.*
	• *Las interjecciones.*
	• *Los deseos, dudas y súplicas.*

En casos muy excepcionales, las preguntas y admiraciones pueden ser proposiciones .

EJEMPLO :

- ¿Acaso el castellano tiene *29* letras?

* ¡La ballena había sido un mamífero!

CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

I) SIMPLES , ATÓMICAS O ELEMENTALES :

Son aquellas que carecen de enlaces lógicos o conjunciones gramaticales y también del adverbio de negación: "*NO*"; esto hace que no se puedan dividir en enunciados más simples.

a) PREDICATIVAS: Son aquellas que atribuyen o afirman una característica respecto del sujeto, presentan la siguiente forma :

"*S*" es "*P*"

EJEMPLOS :

* Las matemáticas (*Sujeto*) es (*Verbo*) una ciencia (*Predicado*)
* Tú eres perseverante .

b) RELACIONALES: Aquellas que establecen un nexo entre dos o más sujetos. Este nexo no puede eliminarse razón por la cual un sujeto dependerá del otro necesariamente; las relaciones pueden ser por afinidad, ubicación o grado. Presentan la siguiente forma.

"*A*" relación "*B*"

EJEMPLOS:

* Yo (*A*) estoy a lado (*Relación por ubicación*) tuyo (*B*) .
* Pancho (*A*) y Manuela (*B*) se aman. (*Relación por afinidad*)
* Mi abuelo fue tú contemporáneo. (*Relación de Grado*)

II) PROPOSICIONES COMPUESTAS O MOLECULARES (O COLIGATIVAS) :

Son aquellas que están formadas por *2* o más proposiciones simples que se unen mediante enlaces o conectivos lógicos ("*y*", "*o*", "entonces", ... , etc.); además el adverbio de negación "*NO*" que afecta a una proposición simple, formará una proposición compleja.

EJEMPLOS :

* Alan es presidente (*Proposición Simple*) y (*Conectivo Lógico*) yo cachimbo (*Proposición Simple*)
* No es cierto que tú seas varón.

CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS

La conectiva principal da nombre a cada una de éstas proposiciones.

A) CONJUNTIVAS ($\wedge$):

Sus formas gramaticales son: ***«y», «pero», «aunque», «sin embargo», «no obstante», «también», «así como», «a la vez», «tal como», «tanto como», «al igual que», «incluso», «así mismo»***, ... etc.

EJEMPLO :

* Yo soy padre de familia (p) y ($\wedge$) tu eres universitario (q)
* Eres varón de día, (p) pero ($\wedge$) mujer de noche. (q)

Simbolización : $p \wedge q$ (se lee : "*p*" y "*q*")

TABLA DE VERDAD

La conjunción es verdadera sólo si sus componentes son verdaderas

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Lo que significa que la conjunción $p \wedge q$ sólo es verdadera si lo son las proposiciones p y q . En cualquier otro caso es falsa.

EJEMPLO :

Ayer tuve 23 años y mañana tendré 26

es la conjunción de las proposiciones

p : Ayer tuve ***23*** años

q : Mañana tendré ***26*** dicha conjunción es falsa, ya que la definición exige que las dos proposiciones simples sean verdaderas a la vez , lo que no es posible, pues si :

p : ayer tuve ***23*** años es verdadera, no será posible que

q : Mañana tendré ***26*** , sea verdadera .

B) DISYUNCIÓN DÉBIL O INCLUSIVA ($\vee$):

Cuando es posible que sus miembros componentes sean aceptados a la vez. Sus formas gramaticales son: ***«o», «u» , «salvo», «a menos que» , «excepto»*** .

EJEMPLO:

* Estudio (p) o ($\vee$) me caso (q)

* $\underbrace{\text{Ingresaré,}}_{p}\ \underbrace{\text{salvo}}_{\vee}\ \underbrace{\text{que me enamore}}_{q}$.

Simbolización : $p \vee q$ (se lee: "p" o "q")

TABLA DE VERDAD :

La disyunción es falsa solo si sus componentes son falsas, en otros casos será verdadera .

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lo que significa que la disyunción $p \vee q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones simples es verdadera y sólo es falsa si las dos proposiciones p y q son falsas a la vez.

El significado que tiene la disyunción difiere del significado de la del lenguaje natural porque además de ser verdadera cuando sólo una proposición simple lo es, también es verdadera cuando las dos proposiciones simples son verdaderas. Es por ello que también se le llama disyunción inclusiva.

EJEMPLO :

Me caso si es joven o hermosa

es la disyunción de las proposiciones

p : me caso si es joven

q : me caso si es hermosa

Aquí el sentido de la proposición es incluyente, es decir, que la disyunción ($p \vee q$) no sólo será verdadera cuando me case con una mujer joven o cuando me case con una mujer hermosa sino que además lo será cuando me case con una mujer joven y hermosa, pues es posible que las proposiciones p y q sean verdaderas simultáneamente.

C) DISYUNCIÓN FUERTE O EXCLUSIVA (Δ):

Cuando sólo uno de sus miembros puede ser aceptado , el otro queda inválido. Sus formas gramaticales son: «o ... o ...», «o» (en sentido excluyente).

EJEMPLO:

* $\underbrace{\text{O eres varón}}_{p}\ \underbrace{\text{o}}_{\Delta}\ \underbrace{\text{eres mujer}}_{q}$
* $\underbrace{\text{Nací en el Perú}}_{p}\ \underbrace{\text{o}}_{\Delta}\ \underbrace{\text{en el extranjero}}_{q}$

Simbolización : $p \Delta q$

TABLA DE VERDAD :

La disyunción exclusiva es verdadera sólo si sus componentes tienen valores diferentes, caso contrario será falsa .

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lo que significa que la disyunción exclusiva $p \Delta q$ es verdadera cuando una y sólo una de las proposiciones simples es verdadera . En cualquier otro caso es falsa.

EJEMPLO :

Juan nació en junio o julio

es la disyunción exclusiva de las proposiciones

p : Juan nació en Junio

q : Juan nació en Julio

Observa que el sentido de la proposición es excluyente ya que p y q no pueden ser simultáneamente verdaderos , ya que si Juan nació en junio no es posible que naciera en julio y viceversa.

Por la definición, la proposición también se puede escribir

O bien Juan nació en junio , o bien nació en Julio.

que será verdadera si Juan nació en el mes de junio ó si nació en julio y será falsa si nació en cualquiera de los otros diez meses del año.

EJEMPLO 2 :

Si en la disyunción *«Arturo esta vivo o está muerto»* la proposición *«Arturo está vivo»* es verdadera, la proposición *«Arturo está muerto»* será falsa. Y viceversa, si la proposición *« Arturo está vivo»* es falsa, la proposición *«Arturo está muerto»* será verdadera. Proposiciones como estas, donde el cumplimiento de una de las proposiciones simples excluye el cumplimiento de la otra proposición simple, se conocen como disyunción exclusiva o excluyente

D) CONDICIONALES (→):

Son aquellas proposiciones que se relacionan mediante la conjunción condicional :

"si ... entonces ..." o sus expresiones equivalentes.

EJEMPLO:

* Si te entregas entonces te seré fiel

NOTA :

La proposición condicional consta de 2 elementos, el antecedente y el consecuente .

Causa ← Si antecedente (p) **entonces** ⇒ consecuente (q) → Efecto

Las proposiciones condicionales pueden ser :

I) CONDICIONAL DIRECTA $(p \rightarrow q)$:

Antecedente y consecuente van en ese orden respectivo , sus formas gramaticales son :

* Si p entonces q
* p implica q
* p por lo tanto q
* p conclusión q
* p luego q
* p por consiguiente q
* p de ahí que q
* p de modo que q
* p deviene q
* dado p por eso q
* cuando p a si pues q
* de p derivamos q

EJEMPLO :

* Si estudio (p) luego ($\rightarrow$) triunfo (q)
* De la pereza (p) deviene, ($\rightarrow$) la pobreza (q)

Simbolización : $p \rightarrow q$

TABLA DE VERDAD :

La condicional es falsa solo si su antecedente es verdadera y su consecuente es falsa , en otros casos será verdadera .

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lo que significa que la condicional $p \rightarrow q$ sólo es falsa cuando el *antecedente* p es verdadera y el *consecuente* q es falsa. En cualquier otro caso es verdadera.

Esta definición que es muy útil tanto en lógica como para las pruebas deductivas en matemática , nos dice que no es necesario que el consecuente se derive lógicamente del antecedente, como lo muestran los dos últimos casos de

EJEMPLO 1 :

Si me pagan, vamos al cine

es el condicional de las proposiciones

p : me pagan

q : vamos al cine

para inducir la verdad o falsedad del condicional, vamos a entenderlo como un compromiso q (de ir al cine), condicionado por p (me paguen), y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso.

Si fuera el caso que p y q son verdaderas, es decir, me pagan y vamos al cine; el condicional es verdadero , puesto que se cumple el compromiso.

Si fuera el caso que p sea verdadera y q falsa , es decir , me pagan y no vamos al cine ; dicho condicional es falso , puesto que no se cumple el compromiso.

Si fuera el caso que p es falso, es decir, no me pagan, quedo liberado del compromiso, y vayamos o no vayamos al cine el condicional es verdadero, pues no se incumple al compromiso.

EJEMPLO 2 :

Si hoy es viernes, entonces mañana es sábado

es el condicional de las proposiciones

p : hoy es viernes

q : mañana es sábado

el condicional es verdadero ya que si p es verdadero, q también lo es y si p es falso , q igualmente será falso. No se puede dar el caso que es falso pues es imposible que p sea verdadero y que q sea falso.

Es importante saber que asociada al condicional $p \rightarrow q$, existen otros tres' condicionales:

$q \rightarrow p$; $\sim p \rightarrow \sim q$; $\sim q \rightarrow \sim p$, llamados respectivamente el recíproco, el contrario y el contrarrecíproco de $p \rightarrow q$.

II) CONDICIONAL INDIRECTA $(q \rightarrow p)$:

(Causa ← q, p → Efecto)

Consecuente y antecedente van en ese orden respectivo .

EJEMPLO:

Te amaré (Consecuente (efecto)) ⇐ ***siempre que*** ***me respetes*** (Antecedente (causa))

Sus formas gramaticales son :

* P, si q
* p ya que q
* p puesto que q
* p porque q
* p dado que q
* p cada vez que q
* p siempre que q
* p pues q
* p supone que q
* p a condición de que q
* p es condición necesaria para q

EJEMPLOS :

* Ingresé (p) dado que (←) me esforcé (q)

Simbolización : $q \rightarrow p$

E) BICONDICIONALES ($\leftrightarrow$)

Sus formas gramaticales son : ***«si y solo si»***, ***«solamente si»***, ***«cuando y solo cuando»***, ***«entonces y solo entonces»***, ***«es idéntico»***, ***«cada vez que y solo si»***, ..., etc.

EJEMPLOS:

* Me casaré, (p) si y solo si ($\leftrightarrow$) eres virgen (q)

Simbolización : $p \leftrightarrow q$

TABLA DE VERDAD :

La bicondicional es verdadera sólo si los valores de sus componentes son iguales en caso contrario es falso .

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

F) NEGATIVAS (~)

Aquellas donde el adverbio negativo «no» o sus expresiones equivalentes afectan a una o más proposiciones .

TABLA DE VERDAD

La negación es una proposición cuyo valor es opuesto al de la proposición original .

p	$\sim p$
V	F
F	V

EJEMPLO :

Si la proposición es :

p : todo número es mayor que 5.

su negación es $\sim p$: no todo número es mayor que 5.

O bien $\sim p$: existe algún número que no es mayor que 5.

La proposición p será verdadera si todos los números son mayores que 5 y será falsa si algún número no es mayor que 5.

Dado que es posible mostrar que existe al menos un número que no es mayor que 5, por ejemplo el número 4, decimos que la proposición p es falsa.

Asimismo, la proposición $\sim p$ es verdadera si existe algún número que no es mayor que 5 y es falsa si *no es cierto que existe un número que no es mayor que* 5, es decir, *si todo número es mayor que* 5.

Dado que se puede mostrar algún número, por ejemplo el 3, que no es mayor que 5, decimos que la proposición $\sim p$ es verdadera.

* Las proposiciones negativas pueden ser :

I) NEGACIÓN LIGADA (SIMPLE) :

Cuando afecta proposiciones simples, utilizando la forma gramatical : *"NO"* .

EJEMPLO:

* Pitito no (~) es varón (p)

Simbolización : $\sim p$

II) NEGACIÓN LIBRE (COMPUESTA) :

Cuando afecta a proposiciones compuestas. En tal sentido, al simbolizarse , deberá anteceder a signos de agrupación . Sus formas gramaticales más usuales son: ***«es falso que»***, ***«no es cierto que»***, ***«es absurdo que»***, ***«no se da el caso que»***, ***«no es posible que»***, ..., etc.

EJEMPLO :

* No es cierto que (~) seas varón ((p) y (∧) mujer (q))
* No es el caso que (~) trabajes ((p) o (∨) estudies (q))

III) BINEGACIÓN :

Es la negación conjuntiva, es decir, una conjunción de negaciones, su forma gramatical es representada por el término *"NI"*. Se simboliza como $(\sim p \wedge \sim q)$.

EJEMPLO :

* Ni estudio ni trabajo

* $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim p \wedge \sim q$

TABLAS DE VERDAD

Tabla de verdad es un cuadro de doble entrada que en una de sus columnas permite encontrar los valores de verdad de las proposiciones compuestas o esquemas lógicos. Para ello, se colocan en las primeras columnas(de la primera fila) de la izquierda las letras que representan a las proposiciones simples y debajo de ellas todas las combinaciones posibles de sus valores de verdad (*V* o *F*); a la derecha de las

letras se coloca la proposición compuesta o esquema lógico y luego se procede a aplicar la regla para cada uno de los operadores o conectivos, empezando por el de menor jerarquía (si fuera el caso), hasta llenar el cuadro con valores de verdad, según corresponda. La columna de valores de verdad del conectivo principal o de mayor jerarquía es la que. corresponde a la proposición compuesta.

EJEMPLO :

Hallar la tabla de verdad de:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

RESOLUCIÓN :

Como son tres ***(p ; q ; r)*** las letras que representan a las proposiciones simples , entonces, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad es $2^3 = 8$

p	q	r	$[(p \to q)$	$\wedge$	$(q \to r)]$	$\to$	$(p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Para la solución seguimos lo siguientes pasos:

1° Hallamos los valores de verdad de $(p \to q)$

2° Hallamos los valores de verdad de $(q \to r)$

3° Hallamos los valores de :

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)]$$

4° Luego , hallamos los valores de verdad de:

$$(p \to r)$$

5° Finalmente los valores de verdad de:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Si un esquema tiene cuatro letras que representan a proposiciones simples, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad es $2^4 = 16$. En general para un esquema de n letras, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad es 2^n.

OTRO EJEMPLO :

Hallemos la tabla de verdad de : $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ Te invito a construir la tabla de verdad del esquema en cuestión.

Después de trabajar con cuidado encontrarás que la columna del bicondicional (de mayor jerarquía) está formado por valores de verdad, todos verdaderos. El esquema $[(p \to q) \wedge (q \to p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ es una ley lógica.

EQUIVALENCIAS

Dos proposiciones o esquemas lógicos ***A*** y ***B*** son equivalentes si sus tablas de verdad son iguales. Se denota $A \equiv B$.

EJEMPLO :

Las proposiciones $p \nabla q$ y $\sim(p \leftrightarrow q)$ son equivalentes

Una forma de verificar la equivalencias es observando la columnas resultante de las tablas de verdad.

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$\sim(p \leftrightarrow q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Los valores de verdad de $p \Delta q$ y $\sim(p \leftrightarrow q)$ son: ***FVVF***

Las lecturas de las tablas de verdad nos permite decir que la proposición $p \Delta q$ es equivalente a la proposición :

$$\sim(p \leftrightarrow q)$$

En símbolos : $(p \Delta q) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

TAUTOLOGÍA

Una proposición compuesta es una tautología si los valores de verdad de su tabla de verdad son todos verdaderos.

EJEMPLO:

La proposición $(p \wedge q) \to q$ es una tautología . Lo puedes verificar trabajando en una tabla .

CONTRADICCIÓN

Una proposición compuesta es una contradicción si los valores de verdad de su tabla de verdad son todos falsos.

EJEMPLO :

El número natural es impar y par

La proposición que se expresa por $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

Lo que se verifica haciendo su tabla.

LEYES LÓGICAS NOTABLES

Permiten transformar y simplificar fórmulas lógicas.

1) LEY DE INVOLUCIÓN :

(Doble negación) $\sim(\sim P) \equiv P$ "No, no *P*, equivale a *P*"

2) LEY DE IDEMPOTENCIA

$$P \wedge P \equiv P \qquad P \vee P \equiv P$$

3) LEYES ASOCIATIVAS

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ *(Conjunción)*

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *(Disyunción)*

$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ *(Bicondicional)*

4) LEYES DE MORGAN :

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de negaciones.

5) LEYES BICONDICIONALES :

$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$

$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

6) LEYES CONMUTATIVAS :

$p \wedge q \equiv q \wedge p$ *(Conjunción)*

$p \vee q \equiv q \vee p$ *(Disyunción)*

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$ *(Bicondicional)*

7) LEYES DISTRIBUTIVAS :

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

8) LEYES CONDICIONALES :

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \quad \sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

EJEMPLO :

"Si Roy es escritor entonces es matemático".

p: Roy es escritor

q: Roy es matemático.

Simbología : $p \rightarrow q$

Su primer equivalente sería : $\sim p \vee q$

Se lee :

"Roy no es escritor o es matemático"

Su segundo equivalente sería : $(\sim p \wedge \sim q)$

Se lee :

"No es cierto que Roy sea escritor y no sea matemático"

9) ELEMENTO NEUTRO

$$P \wedge V \equiv P \qquad P \vee F \equiv P$$

10) LEYES DE ABSORCIÓN :

$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p \qquad p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

11) LEYES DE TRANSPOSICIÓN

$(p \rightarrow q) \equiv \sim q \rightarrow \sim p \qquad (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

EJEMPLO :

"Si Jhony estudia duro, entonces ingresará"

p : Jhony estudia duro *q* : Jhony ingresará.

Simbología : $p \rightarrow q$

Su equivalente : $\sim q \rightarrow \sim p$

Se lee :

"Si Jhony no ingresa entonces no estudió duro"

12) DISYUNCIÓN FUERTE :

$$p \Delta q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$$

SILOGISMO HIPOTÉTICO (IMPLICANCIA)

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

(Transitividad)

EJEMPLO :

Si estudias duro entonces ingresarás.

Si ingresas entonces te obsequiaré un auto del año.

p : estudias duro

q : ingresarás.

r : te obsequiaré un auto del año.

Simbología : $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

Conclusión : $p \rightarrow r$

Se lee :

"Si estudias duro entonces te obsequiare un auto del año" .

IMPORTANTE:

Hemos trabajado con proposiciones y esquemas lógicos como:

$(p \rightarrow q) \wedge q ; [(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)] \wedge (p \wedge r)$

en los que se usan signos de colección (paréntesis, corchetes, etc.); cuya solución, al igual que en la aritmética elemental se procede a resolverlos de ***«adentro»*** hacia ***«afuera»***, según indican los signos de colección.

Así en $(p \rightarrow q) \wedge q$, se empieza por la conjunción indicada en paréntesis y luego el condicional.

En $[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)] \wedge (p \wedge r)$, se empieza por los condicionales indicado en paréntesis, luego la conjunción indicada por los corchetes, finalizando con el condicional.

CUANTIFICADORES

Si se tiene la expresión $x + 3 = 7$, el cual se dijo que no podía afirmarse que sea verdadera o falsa, por cuanto se desconoce el valor de x.

¿ Qué pasa si a x le asignamos un valor numérico cualesquiera?

La respuesta es que se convierte en proposición.

En efecto , si $x = 4$, entonces la expresión se convierte en $4 + 3 = 7$, lo que es verdadera. Pero si. toma otro valor, digamos $x = 1$, la expresión se convierte en $1 + 3 = 7$, lo que es falsa.

Esto nos dice que una expresión como $x + 3 = 7$, llamada *enunciado abierto* o *función proposicional*, no es una proposición , pero que es posible convertirlo a proposición. asignándole un valor a su variable o indeterminada x tomado de un conjunto llamado *dominio D* del enunciado abierto o *dominio D* de la función proposicional.

Un enunciado abierto en x o función proposicional en x, suele representarse por $P(x)$, que se convierte en proposición $P(a)$, si $x = a$.

Así, en el ejemplo anterior, podemos escribir el enunciado abierto como :

$P(x): x + 3 = 7$, para luego convertirlo en la proposición $P(x = 4): x + 3 = 7$, que es verdadera o simplemente, $P(4): 4 + 3 = 7$

El mismo enunciado abierto podemos convertirlo también en la proposición :

$P(x = 1): x + 4 = 7$, que es falsa.

Para el enunciado abierto , $P(x): x + 1 > 0$, con un dominio $D = N$ de los números naturales , la expresión $P(x = 1): x + 1 > 0$ es una proposición verdadera.

Puede observarse que el enunciado abierto :

$P(x): x + 1 > 0$ será verdadero para cualquier número natural a, pues $a + 1 > a$.

También se dice que $P(x): x + 1 > 0$ es Verdadera, para todo número natural.

CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Es muy común en matemática encontrar enunciados abiertos como : $P(x): x + 3 = 7$

para el cual se dice que es posible encontrar un número que convierta al enunciado en proposición.

Dicho de otra manera , *existe un* número , llamado 4 que convierte al enunciado en proposición verdadera. A la expresión ***existe un*** se le conoce como ***cuantificador existencial*** , cuya simbolización es $\exists$.

IMPORTANTE:

*Una proposición con cuantificador existencial será verdadera si lo es para al menos un elemento del dominio **D**.*

EJEMPLO 1 :

El enunciado abierto $P(x): x - 4 = 9$, se convierte en proposición verdadera si decimos , existe un número natural con el cual $x - 4 = 9$.

En símbolos : $\exists x \in N / x - 4 = 9$

que se lee: existe un número natural tal que $x - 4 = 9$

•Tal número es el 13.

Nota que es necesario acompañar dos elementos al enunciado abierto :

El cuantificador existencial $(\exists)$ y el dominio N.

EJEEMPLO 2 :

Para el enunciado $q(y): y$ es ambidiestro ; y el dominio H formado por todos las personas, se puede escribir la proposición, $\exists y \in H / y$ es ambidiestro que se lee : *existe al menos una persona que es ambidiestra.* que resulta verdadera en tanto encontremos al menos una persona que se valga por igual con ambas manos.

Es importante darse cuenta que la proposición es *verdadera si existe al menos un objeto (pueden haber varios) que satisfaga el enunciado abierto.*

EN GENERAL :

una proposición con cuantificador existencial tiene la siguiente forma

$$\exists x \in D / P(x) \quad ó \quad \exists x \in D, P(x)$$

que se lee: existe un x en el dominio D tal que el enunciado $P(x)$ se cumple.

Es necesario reiterar que la proposición es *verdadera si existe al menos un objeto (pueden haber varios), que satisfaga el enunciado abierto.*

CUANTIFICADOR UNIVERSAL

En el enunciado abierto visto anteriormente,

$$P(x): x + 1 > 0$$

dijimos que cualquier número natural convertía al enunciado en una proposición verdadera. Dicho de otra manera, con ***todo*** número natural el enunciado se hace proposición verdadera. A la expresión ***todo o para todo*** se le conoce como *cuantificador universal*, cuya escritura simbólica es $\forall$.

IMPORTANTE:

Una proposición con cuantificador universal será verdadera si lo es para todos y cada uno de los

elementos del dominio D.

EJEMPLO 1 :

El enunciado abierto $P(x): x = x$, se puede convertir en la proposición : "para todo número natural se cumple que $x = x$ ", que es verdadera.

En símbolos : $\forall x \in N / x = x$

que se lee: para cualquier x natural, $x = x$ ó también para todo x natural, $x = x$ ó simplemente todo número natural es igual a si mismo. Así : $1 = 1 ; 2 = 2 ; 3 = 3$, etc. Aquí también es necesario acompañar dos elementos al enunciado abierto: El cuantificador universal $(\forall)$ y el dominio N.

EJEMPLO 2 :

Para el enunciado $q(y)$: y es mortal

El dominio H formado por todas las personas, La proposición se puede escribir, $\forall y \in H / y$ es mortal

que se lee: para todas las personas, se cumple que son mortales ó todas las personas son mortales ó cualquier persona es mortal. La proposición es verdadera, por cuanto no conocemos personas que no sean mortales. Nótese que si hubiera al menos una persona inmortal, la proposición dejaría de ser verdadera, es decir, sería falsa.

EN GENERAL :

una proposición con cuantificador universal tiene la siguiente forma : $\forall x \in D, P(x)$

que se lee : para todo x del dominio D, se cumple el enunciado $P(x)$

En ocasiones las proposiciones suelen tener más de un cuantificador como por ejemplo: $\exists x \in N, \exists y \in N / x + y = 10$ que se lee "existe en número natural x, y existe un número natural y tal que la suma de ambos es 10".

La proposición es verdadera, pues basta mostrar un valor para $x = 4$ y un valor para $y = 6$.

Hay proposiciones que tienen las siguientes estructuras:

$\exists x, \forall y, P(x) ; \forall x, \forall y, P(x) ; \forall x, \exists y / P(x)$

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

Consideremos las proposiciones anteriores:

$\exists x \in N / x - 4 = 9$; es verdadera

La negación de la proposición anterior es $\sim[\exists x \in N / x - 4 = 9]$ que se lee: no existe un número natural x tal que $x - 4 = 9$, que equivale a decir , todo número natural x es tal que no se cumple $x - 4 = 9$.

Simbólicamente :

$\forall x \in N$, no se cumple $x - 4 = 9$, o también, $\forall x \in N, x - 4 \neq 9$

Es decir : $\sim[\exists x \in N / x - 4 = 9]$ equivale a $\forall x \in N, x + 1 \neq 4$ que evidentemente es una proposición falsa.

¿Qué valor de verdad se espera para la proposición negada, si la proposición original es verdadera?

EN GENERAL :

podemos decir que una proposición de la forma : $\exists x \in D / P(x)$ se niega con la expresión $\forall x \in D, \sim P(x)$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Pia dice: ***"Adelgazo o no hago dieta"***. Esto equivale a decir:

A) Si adelgazo , hago dieta.

B) Si no adelgazo , hago dieta.

C) Si hago dieta , no adelgazo.

D) Si hago dieta , adelgazo.

E) Hago dieta o no adelgazo.

RESOLUCIÓN :

* Si llamamos "p" a "hago dieta" y "q" a "adelgazo" la proposición dada se simbolizará: $q \vee \sim p$ lo cual equivale a: $p \to q$, es decir : "si hago dieta , adelgazo"

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Simbolice correctamente :

No estudié para el examen final porque trabajé hasta tarde ; ya que llegaron muchos clientes .

A) $p \to (\sim q \to r)$ B) $\sim p \to (q \wedge r)$

C) $p \to (q \to \sim r)$ D) $r \to (q \to \sim p)$

RESOLUCIÓN :

p : estudié para el examen

q : trabajé hasta tarde

r : llegaron muchos clientes

$\Rightarrow$ "NO p porque q ; ya que r"

$\sim p$

$(q \to \sim p)$

$r \to (q \to \sim p)$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

¿Cuántas de las siguientes alternativas son equivalentes a: ***"Si te desabrigas, te resfrías"***?

I) Si te resfrías , te desabrigaste.

II) No te desabrigues o te resfriarás.

III) Si no te resfrías , no te desabrigas.

IV) No te resfrías o te desabrigas.

A) 0 *B) 1* *C) 2* *D) 3* *E) 4*

RESOLUCIÓN :

• Simbolicemos:

Te desabrigas = p ; Te resfrías = q

• La proposición dada será: $(p \to q)$. la cual equivale a : $(\sim q \to \sim p)$ o también a : $\sim p \vee q$

I) $q \to p$........(✗)

II) $\sim p \vee q$.......(✓)

III) $\sim q \to \sim p$......(✓)

IV) $\sim q \vee p$ ....(✗)

$\Rightarrow$ Solo hay *2* proposiciones equivalentes.

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

El dueño de una tienda de venta de autos desea colocar en la puerta de su establecimiento un letrero con un lema que lo identifique. Al inicio tiene como candidatos los siguientes lemas:

I) Un buen auto no es barato.

II) Un auto barato no es bueno.

III) Un auto es bueno o no es barato.

IV) Un auto es bueno y barato a la vez.

Su hijo , que estudia lógica , le señala que hay algunos lemas que son equivalentes ; ¿cuáles son?

A) II y III *B) I, II y IV* *C) I,II y III*
D) I y IV *E) I y III*

RESOLUCIÓN :

* Simbolizando la proposición "un auto es bueno" como "*p*" y "un auto es barato" como "*q*" , tendríamos :

• $p \to \sim q$

• $q \to \sim p$

• $q \vee \sim p$

• $\sim (p \wedge q)$

* Teniendo en cuenta las equivalencias lógicas :

$a \to b \equiv \sim b \to \sim a \equiv \sim a \vee b = \sim (a \wedge \sim b)$ podemos concluir que : *I = II = IV*

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Un anciano quiere dejar una herencia a su nieta Priscilla , pero como ésta es recién nacida. el abuelo piensa en algunas condiciones:

I) Priscilla recibirá la herencia cuando cumpla *18* años.

II) Si Priscilla no cumple *18* años , no recibirá la herencia.

III) No puede ocurrir que , Priscilla cumpla *18* años y no reciba la herencia.

Su abogado le informa que algunas de dichas condiciones son equivalentes. ¿Cuáles son?

A) I y II *B) I y III* *C) II y III*
D) Todas *E) No hay condiciones equivalentes*

RESOLUCIÓN :

• Simbolicemos cada proposición simple :

* Priscilla recibirá la herencia: p

* Priscilla cumplirá *18* años: q

• Veamos las alternativas.

• $q \to p = \sim q \vee p$

• $\sim q \to \sim p = p \to q = \sim p \vee q$

• $\sim (q \wedge \sim p) = \sim q \vee p$

$\Rightarrow$ *I* y *III* son equivalentes.

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Se sabe Que: ***"El picnic del domingo no se realizará solo si el tiempo no es soleado"***.Entonces se puede deducir válidamente que:

A) Si se realizara el picnic , el tiempo del domingo es indudablemente soleado.

B) Si no se realiza el picnic , el tiempo del domingo posiblemente sea nublado.

C) Si no es un domingo soleado , el picnic no se realizará.

D) Si es un domingo soleado , el picnic puede ser que se realice.

E) Si es un domingo soleado , el picnic debe realizarse.

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo con la lógica proposicional , la expresión : "*A* solo si *B*", se simboliza: $A \to B$, la cual equivale a su vez a: $\sim B \to \sim A$

Llamemos "*p*" a "el picnic se realizará el domingo" y "*q*" a "el tiempo es soleado". Entonces la premisa del problema se simboliza: $\sim p \to q$, la cual es equivalente a: $q \to p$

$\Rightarrow$ Si el tiempo es soleado , el picnic se realizará el domingo.

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Respecto de *Si gana Perú , no voy a estudiar*

Indique la alternativa que se puede concluir.

A) Si estudié , ganó Perú.

B) Si no ganó Perú , estudié.

C) Si no estudié , ganó Perú.

D) Si fui a estudiar , no ganó Perú.

E) Nunca estudio porque siempre gana Perú.

RESOLUCIÓN :

De la premisa si gana Perú , no voy a estudiar

* Si : p = gana Perú
  q = voy a estudiar
* Luego la premisa sería : $p \rightarrow \sim q$
* Esto es equivalente a : $q \rightarrow \sim p$
* Por lo tanto , Si *fuí a estudiar* , *no ganó Perú.*

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

La siguiente expresión no es falsa .

Si Juan no está enfermo o estudia el sábado en la noche entonces está enfermo .

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) Juan estudia sábado en la mañana .

B) Juan está enfermo .

C) Juan no estudia el sábado .

D) Juan va al medio .

RESOLUCIÓN :

p: Juan está enfermo

q: Juan estudia el sábado en la noche

$\Rightarrow$ "Si $\underbrace{\underbrace{\underbrace{no\ p}_{\sim p}\ o\ q}_{(\sim p \vee q)}\ entonces\ p}$"

$$R \equiv (\sim p \vee q) \rightarrow p$$
$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee p$$
$$\equiv (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee p$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee p \equiv p \equiv V$$

$\Rightarrow$ Juan está enfermo

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Es falso que las clases se suspenden o la universidad cierra , si se inician las vacaciones. Nos han comunicado falsamente que ni las clases se suspenden ni la universidad cierra.

Luego :

A) Se inician las vacaciones

B) No se inician las vacaciones

C) Se suspenden siempre las clases

D) Las clases no se suspenden

E) La universidad cierra

RESOLUCIÓN :

p : Las clases se suspenden

q : La Universidad se cierra

r : Se inician las vacaciones.

* Formalizando :
  $[r \rightarrow \sim(p \vee q)] \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)$
* Por la Condicional y Morgan :
  $[\sim r \vee \sim(p \vee q)] \wedge (p \vee q)$
* Por absorción : $(p \vee q) \wedge \underbrace{\sim r}$

No se inician las vacaciones

$\Rightarrow \sim r$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Si $(p \vee r) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$ es falsa, entonces indique el valor de verdad de las siguientes expresiones proposicionales :

I) $\sim p \wedge q$

II) $(p \vee r) \rightarrow p$

III) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

A) FVF B) FFV C) FVV D) FFF E) VFV

RESOLUCIÓN :

$$(p \vee r) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$$
$$\equiv \sim(p \vee r) \vee (\sim\sim p \vee q)$$
$$\equiv \underline{(\sim p \wedge \sim r) \vee p} \vee q$$
$$\equiv (\sim r \vee p) \vee q \equiv F$$

*La disyución es falsa si todas las proposiciones son falsas :

$\sim r \equiv F ; p \equiv F ; q \equiv F$

I) $\sim p \wedge q \equiv \sim F \wedge F \equiv F$

II) $(p \vee r) \rightarrow p \equiv (F \vee V) \rightarrow F \equiv F$

III) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$(F \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow F) \equiv V$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11 :

Se define el operador lógico ♦, según la siguiente tabla de verdad:

p	q	q ♦ p
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Entonces al simplificar la siguiente fórmula lógica: $(p \blacklozenge q) \blacklozenge [(\sim q \vee p) \blacklozenge (p \rightarrow q)]$ se obtiene

A) $p \rightarrow q$ B) V C) F D) $\sim p$ E) $q \vee p$

RESOLUCIÓN:

* De la tabla de verdad se nota que:

$(q \blacklozenge p) \equiv (p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv p \vee \sim q \equiv \sim q \wedge p$

* Luego :

$(p \blacklozenge q) \blacklozenge [(\sim q \vee p) \blacklozenge (p \to q)] \equiv$

$\equiv (\sim p \wedge q) \blacklozenge [(\sim q \vee p) \blacklozenge (\sim p \vee q)]$

$\equiv (\sim p \wedge q) \blacklozenge [\sim(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)]$

$\equiv \sim(\sim p \wedge q) \wedge [(q \wedge \sim p) \wedge (\sim p \vee q)]$

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \left[q \wedge \underbrace{\{\sim p \wedge (\sim p \vee q)\}}_{\sim p} \right]$

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (q \wedge \sim p)$

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim(p \vee \sim q) \equiv m \wedge \sim m \equiv F$

RPTA :"C"

PROBLEMA 12 :

Si * es un operador lógico definido mediante la siguente tabla de verdad :

p	q	$p \;\Phi\; q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Entonces al simplificar la proposición: $(p \Phi q) \Phi (q \Phi p)$, se obtiene:

A) $\sim p \wedge q$ *B)* $p \vee q$ *C)* $p \wedge q$ *D)* $p \wedge \sim q$

RESOLUCIÓN:

* De:

p	q	$p \;\Phi\; q$	$\sim$	$(p \vee q)$
V	V	F	F	(V)
V	F	F	F	(V)
F	V	F	F	(V)
F	F	V	V	(F)

* Se nota que : $p\Phi q \equiv \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
* También nótese que : $p\Phi q \equiv q\Phi p \wedge r\Phi r \equiv \sim r$
* Luego : $(p\Phi q)\Phi(q\Phi p) \equiv (p\Phi q)\Phi(p\Phi q)$

$\equiv \sim(p\Phi q) \equiv \sim[\sim(p \vee q)]$

RPTA :"B"

PROBLEMA 13 :

Simplificar :

$\sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r) \Delta [(q \wedge \sim p) \vee \sim(p \vee r)]]\}$

A) V *B)* F *C)* p *D)* q *E)* r

RESOLUCIÓN :

* Lo equivalente , será :

$\equiv \sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \Delta [\sim p \wedge q] \vee (\sim p \wedge \sim r)\}$

$\equiv \sim\{[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \Delta [\sim p \wedge (q \vee \sim r)]\}$

$\equiv \sim\{m \Delta m\} \equiv \sim\{F\} \equiv V$

RPTA :"A"

PROBLEMA 14:

Simplificar : $(p \to \sim q) \wedge [(q \to \sim p) \vee (q \to \sim r)]$

A) $p \wedge q$ *B)* $\sim p \vee \sim q$ *C)* $p \vee \sim r$
D) $q \vee r$ *E)* $\sim q \vee \sim r$

RESOLUCIÓN:

* Lo equivalente será :

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [(\sim q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim r)]$

* Como : $m \wedge [m \vee n] \equiv m$, se tiene :

$\equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee \sim r)]$

$\equiv (\sim p \vee \sim q)$

RPTA :"B"

PROBLEMA 15 :

Si p , q , r, s, t, u , v, y w son proposiciones lógicas tal que: $p \to (q \to r)$ es falsa, $q \leftrightarrow (p \to t)$ es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\sim t \wedge (r \to w)$

II) $q \vee (\sim r \leftrightarrow u)$

III) $t \to (s \Delta r)$

A) VVV *B)* VVF *C)* VFV *D)* FVV *E)* FFF

RESOLUCIÓN :

* Como : $p \to (q \to r)$ es F
* Entonces : p es V y $q \to r$ es F
* Luego : p es V; q es V y r es F

$q \leftrightarrow (p \to t)$ es F

* De donde : $p \to t$ es F y como p es V entonces t es F.
* Ahora :

I) $\sim t \wedge (r \to w) = V \wedge (F \to w)$

II) $q \vee (\sim r \leftrightarrow u) \equiv V \vee (\sim r \leftrightarrow u) \equiv V$

III) $t \to (s \Delta r) \equiv F \to (s \Delta r) \equiv V$

RPTA :"A"

PROBLEMA 16 :

Si p , q , x , z , y, t son proposiciones lógicas tal que cumplen las condiciones:

$p \Delta q$ es verdadera, $-x \to y$ es verdadera; indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $z \to \sim p \vee \sim q$

II) $p \leftrightarrow \sim q$

III) $(\sim x \wedge \sim y) \rightarrow t$

A) VVV B) FFF C) VVF D) FFV E) FVF

RESOLUCIÓN :

* Como : $p\Delta q$ es *V*, $\wedge \sim x \rightarrow y$ es *V*

Luego : p y q tienen valores opuestos: $\sim x \rightarrow y \equiv x \vee y$ es *V*

* Ahora :

I) $z \rightarrow \underbrace{\sim p \vee \sim q}_{V}$ pues uno de ellos es V

$\equiv z \rightarrow V \equiv V$

II) $p \leftrightarrow \sim q$ es *V*

* Pues p y $\sim q$ tienen el mismo valor

III) $(\sim x \wedge \sim y) \rightarrow t \equiv \sim (x \vee y) \rightarrow t$

$\equiv \sim (V) \rightarrow t = F \rightarrow t \equiv V$

RPTA :"A"

PROBLEMA 17:

La negación de la siguiente proposición lógica "$\exists x \in A; \exists y \in B / x + y = z$", es:

A) $\exists x \in A \ / \ \forall x \in B : x + y + z = 0$

B) $\exists x \in A \ / \ \forall y \in B : x + y + z = 0$

C) $\exists x \in A \ / \ \forall y \in B : x + y - z \neq 0$

D) $\forall x \in A \ / \ \exists y \in B : x + y - z \neq 0$

E) $\forall x \in A \ / \ \exists y \in B : x + y - z = 0$

RESOLUCIÓN:

* Se desea: $\sim (\forall x \in A, \exists y \in B \ / \ x + y = z) \equiv$

$\equiv \exists x \in A \ / \sim (\exists y \in B \ / \ x + y = z)$

$\equiv \exists x \in A \ / \forall y \in B : \ \sim (x + y = z)$

$\equiv \exists x \in A \ / \forall y \in B : x + y \neq z$

$\equiv \exists x \in A \ / \forall y \in B : x + y - z \neq 0$

RPTA :"C"

PROBLEMA 18 : .

Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 9\}$, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$p : \ \forall x \in A; \exists y \in A / x + y > 5$

$q : \exists x \in A \ / \ \forall y \in A ; 2x + y \geq 12$

$r : \forall x \in A; \forall y \in A; x + y \geq 8$

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FFV

RESOLUCIÓN :

I) $\forall x \in A : 3 \leq x \leq 9 \Rightarrow 6 \leq x + 3 \leq 12$

$\Rightarrow x + 3 \geq 6 > 5 \Rightarrow x + 3 > 5$

$\Rightarrow \ \forall x \in A: \exists y = 3 \in A / x + y > 5$

Luego, p es *VERDADERO*

II) $\forall y \in A : 3 \leq y \leq 9 \Rightarrow 3 + 2(5) \leq y + 2(5) \leq 9 + 2(5)$

$\Rightarrow 13 \leq 2(5) + y \leq 19 \Rightarrow 12 \leq 2(5) + y$

$\Rightarrow \exists x = 5 \in A / \forall y \in A: 2x + y \geq 12$

Luego , q es *VERDADERO*

III) $\forall x \in A: \forall y \in A : 3 \leq x \leq 9; \ 3 \leq y \leq 9$

$\Rightarrow \ 6 \leq x + y \leq 18 \not\Rightarrow x + y \geq 8$

Luego, r es *FALSO*

RPTA:"B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Simplificar :

$$\{(q \longrightarrow p) \longrightarrow \sim p] \wedge p$$

A) p *B)* $q \longrightarrow \sim p$ *C)* q

D) $\sim p$ *E)* $p \vee q$

02 Si:..

$(r \wedge \sim s) \longrightarrow \sim p$ es falso

Determinar la veracidad de :

$$\sim (s \vee p) \longrightarrow \sim t$$

A) F B)V C) No se sabe D) 1 E) 2

03 Determinar lo equivalente a :

"Es falso que , hace calor y no estudie"

A) Hace calor o no estudie.

B) NO hace calor o no estudie.

C) Hace calor y no estudie.

D)Hace calor o estudie

E)No estudio.

04 Si el siguiente esquema molecular es falso :

$$[(\sim p \Delta r) \rightarrow q] \rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (r \rightarrow s)]$$

Hallar el valor de verdad de :

I) $[\sim (p \wedge q)] \rightarrow \sim r] \Delta s$

II) $(\sim s \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

III) $[(s \vee r) \rightarrow p] \vee \sim q$

A)VFF B)VVV C)FVV D)FFV E)VFV

05 Si se sabe que la expresión :

$\{(p \Delta s) \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (\sim q \vee s)]\}$ es verdadera.

Hallar el valor de verdad de :

I) $\sim [(r \rightarrow x) \wedge \sim (p \wedge q \wedge s)]$

II) $\sim \{\sim [\sim (q \rightarrow p) \rightarrow (s \wedge w)]\}$

III) $(\sim q \wedge s) \rightarrow \sim (p \rightarrow r)$

A)VVF B)VVF C)FFF D)VFV E)FVV

06 Si : "s" es verdadera y la proposición:

$$\{[(p \to r) \wedge \sim (s \leftrightarrow r)] \Delta (s \vee \sim r)\} \vee q$$

Es falsa.
Halle los valores de verdad de "p", "q" y "r".

A)VFF *B)FFF* *C)FFV* *D)FVF* *E)VFV*

07 Si : $p \downarrow q$ se define por $(\sim p) \wedge (\sim q)$, entonces que proposición es equivalente a : $\sim (p \leftrightarrow q)$?

I) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [q \downarrow p]$

II) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [(\sim q) \downarrow p]$

III) $[(\sim p) \downarrow (\sim q)] \vee [p \downarrow q]$

A) III *B) II* *C) I* *D) II y III* *E) I y III*

08 Simplificar a su mínima expresión:

$$\{[(p \to q) \vee \sim p] \wedge (\sim p \to p)\} \wedge [q \vee (r \wedge s)]$$

A) q *B)* p *C)* $p \wedge q$ *D)* $p \to q$ *E)* $\sim p \vee \sim q$

09 Dado :

$$p \equiv q \equiv \{\sim p \to [p(q \wedge t \wedge r)]\} \wedge p$$

Simplificar :

$$[(p \to q) \equiv (q \wedge p)] \equiv \{p \leftrightarrow q)$$

A) p *B)* $p \wedge \sim q$ *C)* $\sim p$ *D)* $\sim q \vee \sim p$ *E)* $\sim p \vee q$

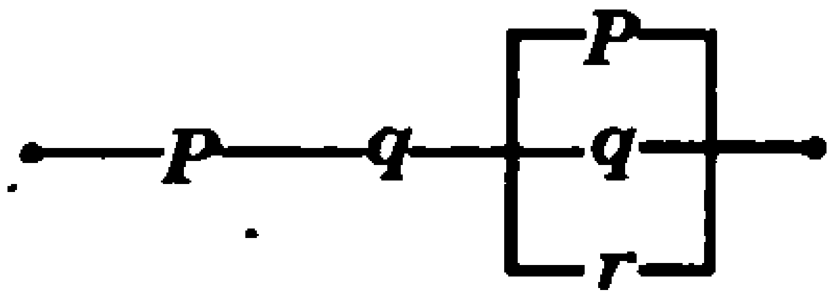
10 Sean p,q dos proposiciones cualesquiera. Se define el conectivo "$*$" en la forma siguiente:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Simplificar : $[(p * q) * q] * [(p * p) * \sim q]$

A) $\sim p$ *B)* p *C)* q *D)* $\sim p$ *E)* $p \vee q$

11 Dado el siguiente circuito :



Su equivalente es :

A) $p \vee q$ *B)* $p \wedge q$ *C)* r *D)* p *E)* $p \vee r$

12 Si : $P(x) \equiv \begin{cases} V; \text{ si "}x\text{" es par} \\ F; \text{ si "}x\text{" es impar} \end{cases}$

$Q(x) \equiv \underbrace{\sim(\sim(\sim \ldots\ldots\ldots(\sim p(x)\ldots\ldots)))}_{\text{«x» veces}}$

Donde : $x \in Z^+$

Halle el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\sim [p(6) \to \sim p(8)] \Delta [\sim (q(8) \wedge \sim (\sim (q(7))))]$$

A) verdadero *B) tautología* *C) falso*
D) Contradicción *E) consistencia*

13 Se define :

$$p\%q \equiv \{[(\sim q \to p) \to \sim p] \wedge q\} \vee \sim p$$

Simplificar: $[(p\% \sim q) \ \% \ (q\% \sim p)] \ \%p$

A) q *B)* $\sim q$ *C)* p *D)* $\sim p$ *E)* $p \vee \sim q$

14 Expresar la proposición : $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ de otra manera, en la que únicamente intervengan los conectivos $(\sim)$ y $(\to)$.

A) $(p \to q) \to \sim (r \to s)$

B) $(\sim p \to \sim q) \to (\sim s \to \sim r)$

C) $(p \to \sim q) \to (\sim r \to s)$

D) $\sim (p \to q) \to (s \to r)$

E) $\sim (p \to \sim q) \to (r \ \ s)$

15 De las siguientes premisas:

* Si me prestas *100* soles , iré al cine con Maribel
* Me prestas *100* soles o no eres mi amigo
* Si no eres mi amigo , no te ayudaré en tu trabajo.
* Por supuesto , te ayudaré en tu trabajo

Podemos concluir :

I) Te debo *100* soles

II) Iré al cine con Maribel

III) Eres mi amigo

A) Sólo I es correcta *B) Sólo I y II son correctas*
C) Sólo II y III son correctas *D) I, II y III son correctas*
E) Ninguna es correcta

16 María debe realizar cuatro tareas : ir al banco, limpiar su auto , preparar su clase y practicar deporte. Si :

* Irá al Banco si prepara su clase
* Preparará su clase si no limpia su auto

Podemos afirmar :

I) Si limpia su auto, irá al banco.

II) Si no va al banco, practicará deporte.

III) No practicará deporte, si no limpia su auto.

A) Sólo I *B) Sólo II* *C) Sólo III* *D) I y II* *E) II y III*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) A	2) B	3) B	4) E	5) E	6) B	7) B	8) A	9) E	10) A
11) B	12) A	13) D	14) C	15) D	16) C				

LOGICA DE CLASES

CAPITULO 050

OBJETIVO :

• Deducir (inferir) con certeza una o más conclusiones, a partir de uno o más proposiciones llamadas premisas, por medio del uso de los diagramas de Venn .

INTRODUCCIÓN :

La lógica estudia el orden que en la ciencia introduce nuestro entendimiento. Orden que no tiene nada de arbitrario, sino que se ajusta a leyes muy precisas y rigurosas. Este orden y leyes se manifiestan especialmente en los razonamientos o argumentaciones, que tienen en la ciencia el importantísimo papel de proporcionarnos conocimientos mediatos. La verdad de algunos de nuestros conocimientos es captada inmediatamente, verbigracia cuando afirmamos que hoy llueve. Por el contrario, tenemos conocimientos cuya verdad no puede captarse inmediatamente por medio de la experiencia, sino que proceden mediatamente de otros anteriormente admitidos. Por ejemplo, cuando decimos que somos mortales, cosa que afirmamos por saber que todo hombre es mortal y que nosotros somos hombres, no porque hayamos tenido experiencia directa de tan desagradable característica.

LA FORMA DEL RAZONAMIENTO

La lógica tiene el importantísimo cometido de dar a conocer las leyes del razonamiento. Leyes del razonamiento que determinan lo que se ha llamado forma del razonamiento, noción que debe distinguirse cuidadosamente de la materia del razonamiento. Considérense los ejemplos siguientes:

1) Todo hombre es mortal, todo chino es hombre, luego todo chino es mortal.

2) Todo hombre es plumífero , todo simio es hombre, luego todo simio es plumífero.

3) Todo hombre es mortal , todo chino es mortal , luego todo chino es hombre.

Estos razonamientos nos hablan en cada una de sus proposiciones acerca de la realidad, es decir, tienen un contenido o materia (la mortalidad del hombre, la humanidad del chino, etc.) que es diferente para cada uno de ellos.

Pero esta diferencia no impide que entre estas argumentaciones haya una gran semejanza en cuanto a su forma o estructura. Es más, el ejemplo primero y el segundo tienen una forma perfectamente idéntica, que puede esquematizarse de la manera siguiente:

Todo ***A*** es ***B***,

todo ***C*** es ***A***,

luego todo ***C*** es ***B***.

Pues bien, la lógica que aquí vamos a estudiar se ocupa de la forma o estructura de los razonamientos, dejando de lado el contenido o materia de los mismos. Por esta razón recibe la lógica el apelativo de formal.

LA LÓGICA DE CLASES

investiga no ya las formas o estructuras que se dan entre proposiciones dentro del razonamiento, sino que llevando más allá su análisis, considera también las relaciones formales existentes entre los términos dentro de cada proposición.

En el capítulo anterior vimos cómo algunos razonamientos muestran su corrección con sólo considerar la estructura existente entre sus proposiciones, sin necesidad de analizar dichas proposiciones en sus términos. Por ejemplo, la siguiente argumentación, ya mencionada: «Si el sol calienta sube el termómetro, y el sol calienta, luego sube el termómetro», que no es sino una aplicación del modus ponendo ponens de la implicación.

Pero hay razonamientos que exigen considerar las relaciones existentes entre los términos de la proposición, pues de sus relaciones mutuas surge la corrección del razonamiento. Verbigracia, el citado razonamiento:

Todo hombre es mortal.

Todo chino es hombre,

luego todo chino es mortal,

debe la validez de su conclusión al llamado término medio (hombre en este caso) que es el argumento o enlace entre los otros dos términos (chino y mortal). Por ende, si queremos conocer las leyes que rigen esas argumentaciones habrán de tenerse en cuenta las relaciones formales entre los términos.

Desde dos puntos de vista podemos considerar los conceptos y los términos (que son su expresión lógica): la extensión y la comprensión o intensión

Comprensión es el conjunto de notas o conceptos más generales que se hallan incluidos en un concepto. No puedo poseer el concepto hombre, por ejemplo, sin poseer antes, aunque sea confusamente, los conceptos ser animado o animal, viviente, ser corpóreo, ser en general.

El concepto objetivo hombre supone todos esos conceptos previos. Su definición es animal racional, y si quiero definir animal tendré que apelar a viviente, etc. Extensión, en cambio, es el conjunto de conceptos menos generales o de cosas concretas a las que puede aplicarse (atribuirse) el concepto. Así, la extensión del concepto hombre es el conjunto de seres humanos, y el de europeo, el de los que

habitan o han habitado nuestro continente.

Estas dos propiedades lógicas de los conceptos, comprensión y extensión, guardan entre sí una relación inversa. Es decir, que a mayor comprensión de un concepto corresponde menor extensión en el mismo, y viceversa. Cuanto más se concreta una idea o concepto, más se limita su esfera de aplicabilidad, y cuanto más se amplia su sentido, mayor será su esfera de atribución. El concepto hombre supone una nota más que el de animal (la racionalidad); su comprensión es mayor, pero su extensión resulta menor, puesto que excluye de su campo a todos los seres animales no racionales. Inversamente, el concepto viviente posee una nota menor que el animal, y por lo mismo conviene a una mayor zona de seres: todos los vegetales que estaban excluidos del concepto animal. En los puntos extremos de esta doble relación se halla el concepto de máxima extensión y mínima comprensión, que es el de ser, y el de mínima extensión y máxima comprensión, que es el individuo (Juan, Pablo, Luis, etc.). El concepto de ser no posee más que una nota, la misma de ser, por encima de la cual ya no existe ninguna noción más general. Su extensión es, por lo mismo, la más dilatada: todas las cosas reales, materiales, espirituales, ideales, etc., forman parte de su esfera de aplicabilidad. El concepto individual, en el extremo opuesto, representado por el nombre de un individuo (Juan Pérez, por ejemplo), contiene un número indefinido de notas. Posee todas las del concepto hombre más el innumerable número de cualidades propias, individuales, que hacen a un individuo ser ése y no otro. Por ello mismo su extensión es mínima: sólo a ese individuo, Juan Pérez, se puede aplicar ese nombre y ese concepto.

Estas dos propiedades de términos y conceptos (su comprensión y su extensión) permiten una doble consideración de los mismos, que es desarrollada por la lógica de predicados y la lógica de clases.

NOCION DE CLASE

Clase es el conjunto de objetos a los que conviene un predicado determinado. Verbigracia, la clase de los navarros es el conjunto de individuos que cumplen la condición de haber nacido en un determinado reino español.

Conocer la extensión de un concepto supone conocer su comprensión o intensión. ¿Cómo podemos saber si una cosa pertenece a la extensión de un concepto, si desconocemos las notas de que consta dicho concepto? Sólo si sabemos que «hombre» incluye las nociones de animal y de racional podremos aplicarlo a Juan, a Pedro, etcétera, y separar así el conjunto de objetos que cumplen las mencionadas propiedades.

De ahí que para la definición precisa de las clases deba recurrirse precisamente a algunas nociones de la llamada lógica de predicados.

La lógica de predicados adopta un punto de vista intensionalista o comprensivista al preocuparse de las propiedades y su conveniencia con ios individuos.

En este capítulo estudiaremos proposiciones que se relacionan entre sí, y métodos para inferir (deducir) a partir de premisas por medio de los diagramas de Venn. (situaciones que no se pueden resolver, por medio de la lógica proposicional).

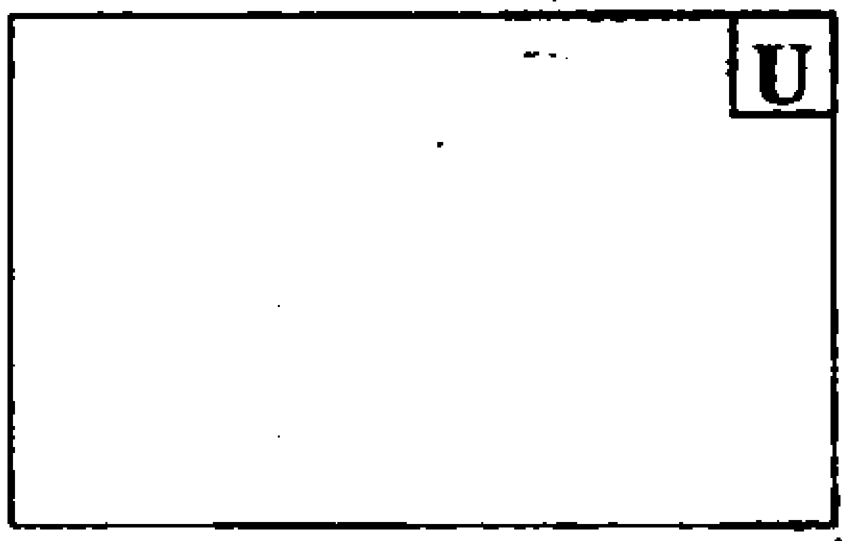
Debemos tomar en cuenta los siguientes conceptos:

CONJUNTO :

Colección de elementos con característica común.

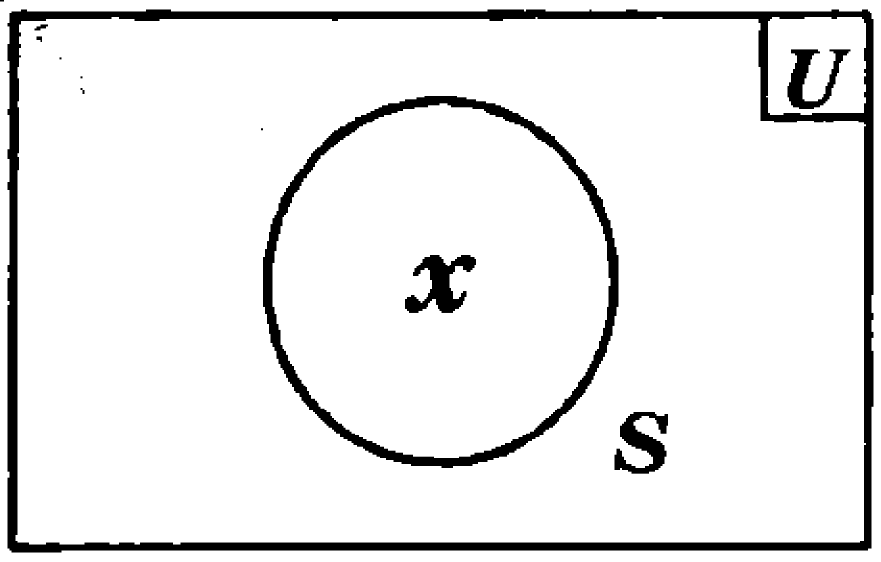
CONJUNTO UNIVERSAL (U) :

conjunto de todos los elementos posibles.



CONJUNTO NO VACÍO :

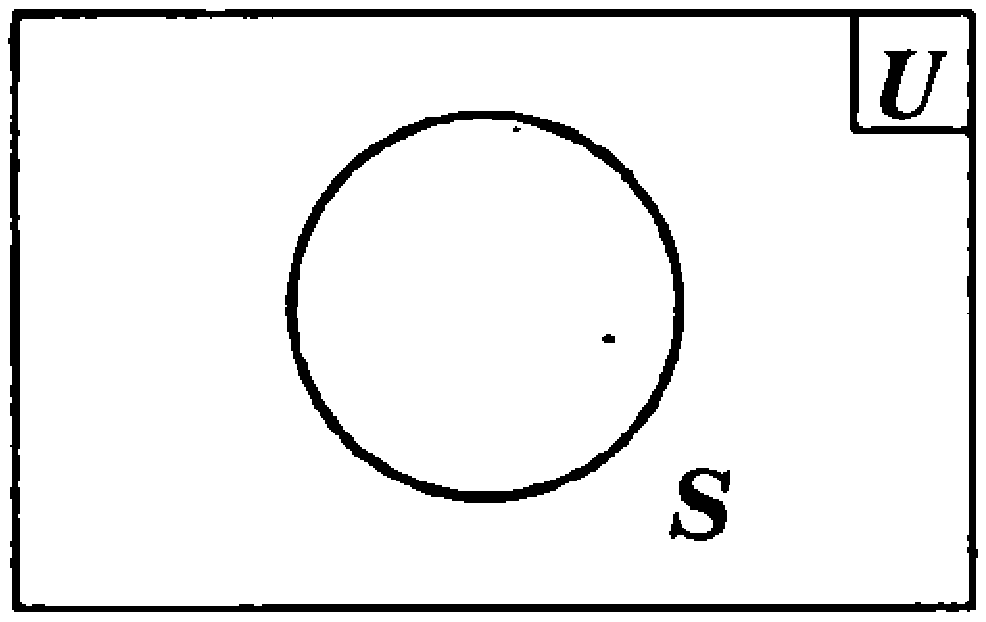
Conjunto que por lo menos contiene un elemento y se gráfica con una aspa



$S \neq \varnothing$

CONJUNTO INDETERMINADO :

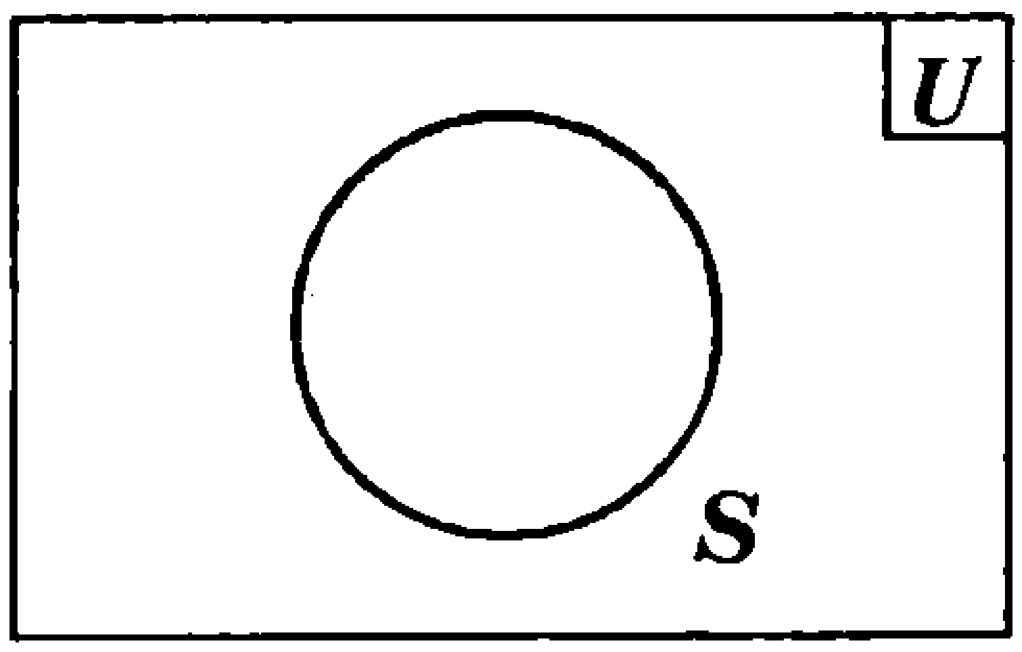
Conjunto que no se puede determinar la existencia o no existencia de elementos.



$S = ?$

CONJUNTO VACÍO (∅) :

Conjunto que carece de elementos. Se diagrama a través de un círculo sombreado.

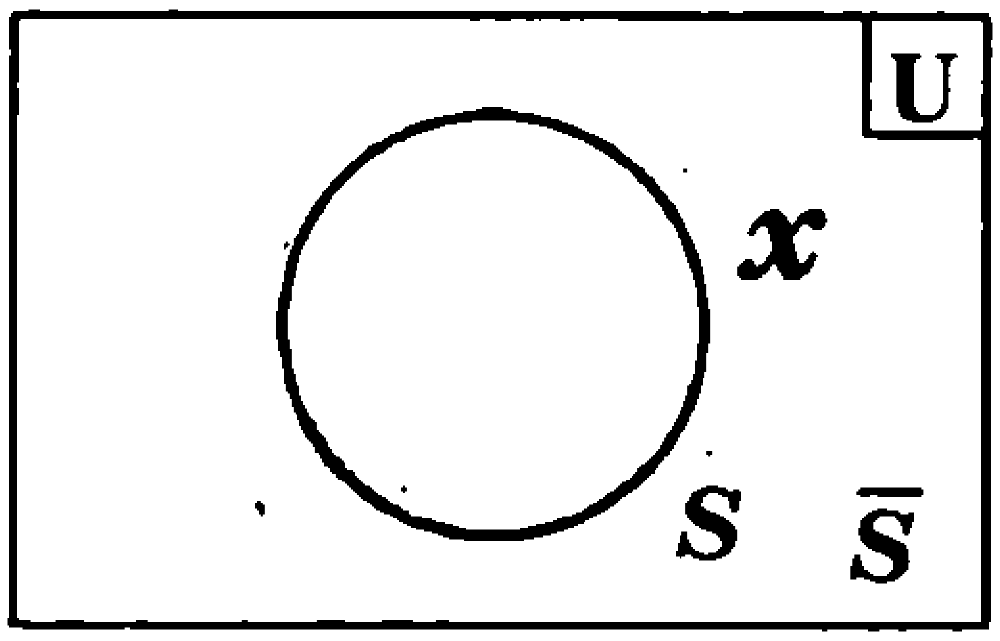


$S = \varnothing$

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO :

Conjunto de elementos que no pertenece a la clase en mención se simbolizan con una barra.

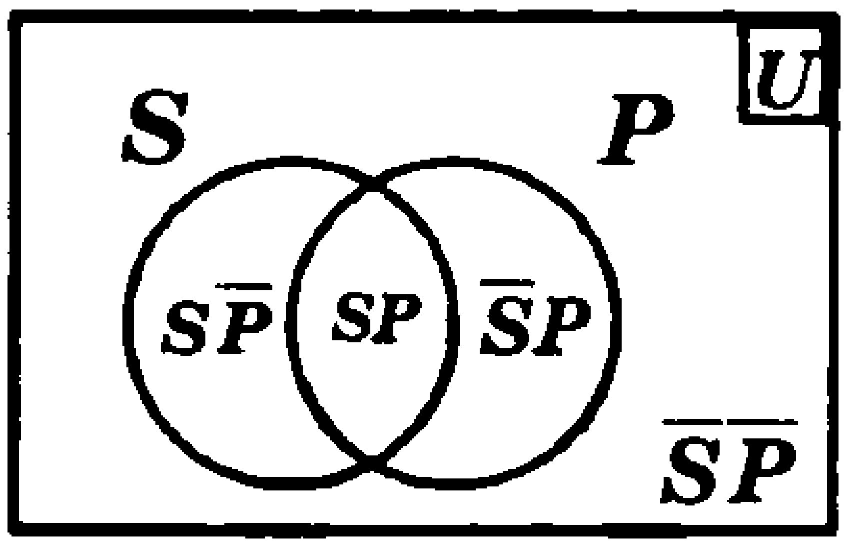
A) COMPLEMENTO NO VACÍO :



$\overline{S} \neq \varnothing$

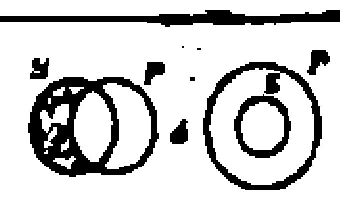
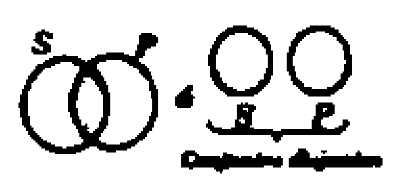
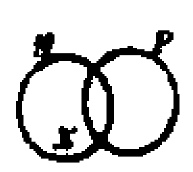
Intersección de 2 Conjuntos

$(S \cap P = SP)$



CUANTIFICADOR

Expresión que indica la cantidad lógica en una proposición y se puede mostrar de la siguiente forma :

Tipo	FORMA LITERAL	DIAGRAMA DE VENN	FÓRMULA BOOLEANA
UNIVERSAL AFIRMATIVO	Todo "S" es "P"		$S\overline{P} = \varnothing$
UNIVERSAL NEGATIVO	Ningún "S" es "P"		$SP = \varnothing$
PARTICULAR AFIRMATIVO	Algún "S" es "P"		$SP \neq \varnothing$
NEGATIVO NEGATIVO	Algún "S" no es "P"		$S\overline{P} \neq \varnothing$

NEGACIÓN DE UN CUANTIFICADOR

La negación de un término extremo (universal) se realiza con un termino medio (particular o al menos con un elemento).

PROPOSICIÓN	PROPOSICIÓN
Todos los "S" son "p"	Algunos "S" <u>no</u> son "p
Algunos "S" <u>no</u> son "p"	Todos los "S" son "p"
Algunos "S" son "p"	<u>Ningún</u> "S" <u>es</u> "P"
Ninguno de los "S" son "P"	Algunos (o al menos uno)"S" son "p"
Algún "S" es "P"	Ningún "S" es "P"

De donde :

La negación de un Universal es un Particular y La negación de un Particular es un Universal

$\sim$ (Todos los S son P) $\equiv$ Algunos no son P.
$\sim$ (Ningún S es P) $\equiv$ Algunos S son P .

$\sim$ *(Universal)* $\equiv$ *Particular*
$\sim$ *(Particular)* $\equiv$ *Universal*
$\sim$ *(Todos)* $\equiv$ *Algunos ..no*
$\sim$ *(ningún)* $\equiv$ *Algunos*
$\sim$ *(algunos)* $\equiv$ *Ningún*
$\sim$ *(algunos.. no)* $\equiv$ *Todos.*

EJEMPLOS:

♦ La negación de :

" Todos los hombres son terrícolas"

* será :

«Algunos hombres no son terrícolas»

♦ La negación de :

«Algunos peruanos son marcianos»

* será :

«Ningún peruano es marciano»

♦ La negación de :

«Algunos jugadores NO se entregan»

* será :

«Todo jugador se entrega»

¿En qué se diferencia con la lógica proposicional?

En el estudio de proposiciones que se relacionan entre sí.

¿Qué conceptos debo tener en cuenta?

Conjunto o clase: colección de elementos con característica común.

PROPOSICIÓN DE CATEGÓRICA

Enunciado que afirma o niega una relación de inclusión o exclusión (Total o parcial) entre conjuntos.

EJEMPLO :

* Todos los cursos son interesantes .
* Ningún alumno es tonto .

INFERENCIA :

Relación de una o más proposiciones categóricas llamadas premisas, de donde se deriva una nueva proposición llamada conclusión.

EJEMPLO :

Si :

* Todos los universitarios son inteligentes entonces se puede afirmar que :

«Algunos universitarios son inteligentes»

CLASES DE INFERENCIAS

I) INDUCTIVA :

Cuando a partir de experiencias particulares, se puede inferir un caso más general.

EJEMPLO :

- En el Perú existen sólo Varones y mujeres.
- En España existen solo varones y mujeres.
- En Japón solo existen varones y mujeres.

Entonces se puede inferir que :

- Es casi seguro que en todo el mundo sólo exista varones y mujeres.

II) DEDUCTIVA :

Cuando a partir de premisas muy generales, se deduce una conclusión que se deriva al relacionarlas.

EJEMPLO :

Si :

- Todo terrícola es inteligente.
- Todo Preuniversitario es terrícola entonces podemos concluir que :
- Todo Preuniversitario es inteligente.

NOTA :

Las inferencias deductivas son de *2* tipos.

A) INMEDIATAS :

Aquellas integradas por una premisa y una conclusión:

EJEMPLO :

Si :

- Todos los políticos son corruptos. entonces se puede concluir que :
- Algunos políticos son corruptos .

B)MEDIATAS :

Aquellas integradas por *2* o más premisas y una conclusión.

EJEMPLO :

Si :

- Todos los varones son fieles.
- Algunos raros son varones, entonces se puede concluir que :
- Algunos raros son fieles.

CUANTIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Consiste en analizar la extensión lógica de las proposiciones. Las cuales se pueden mostrar de las siguientes formas :

I) UNIVERSALES Y AFIRMATIVAS :

EJEMPLO :

- Todos los que han estudiado son exitosos.

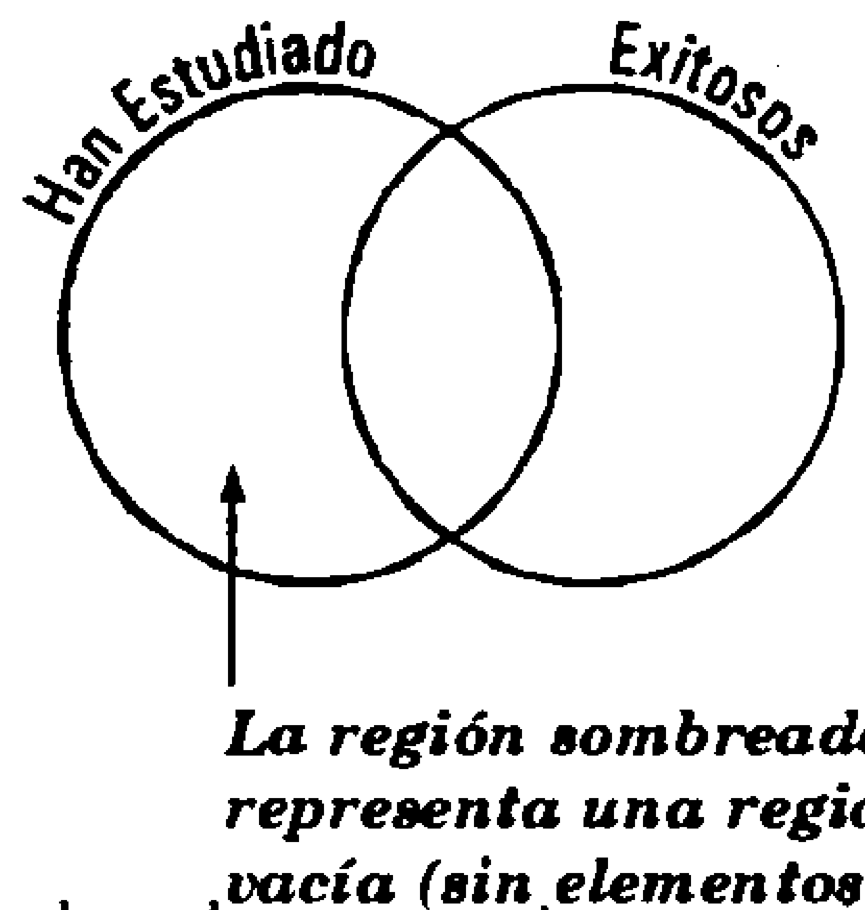
COMENTARIO :

El conjunto de los que han estudiado, está incluido en el conjunto de los exitosos (Relación de inclusión).

1ra. Forma de Graficar

* Cabe la posibilidad de que ambos conjuntos sean iguales.

2da Forma de graficar



La región sombreada representa una región vacía (sin elementos)

II) UNIVERSALES NEGATIVAS :

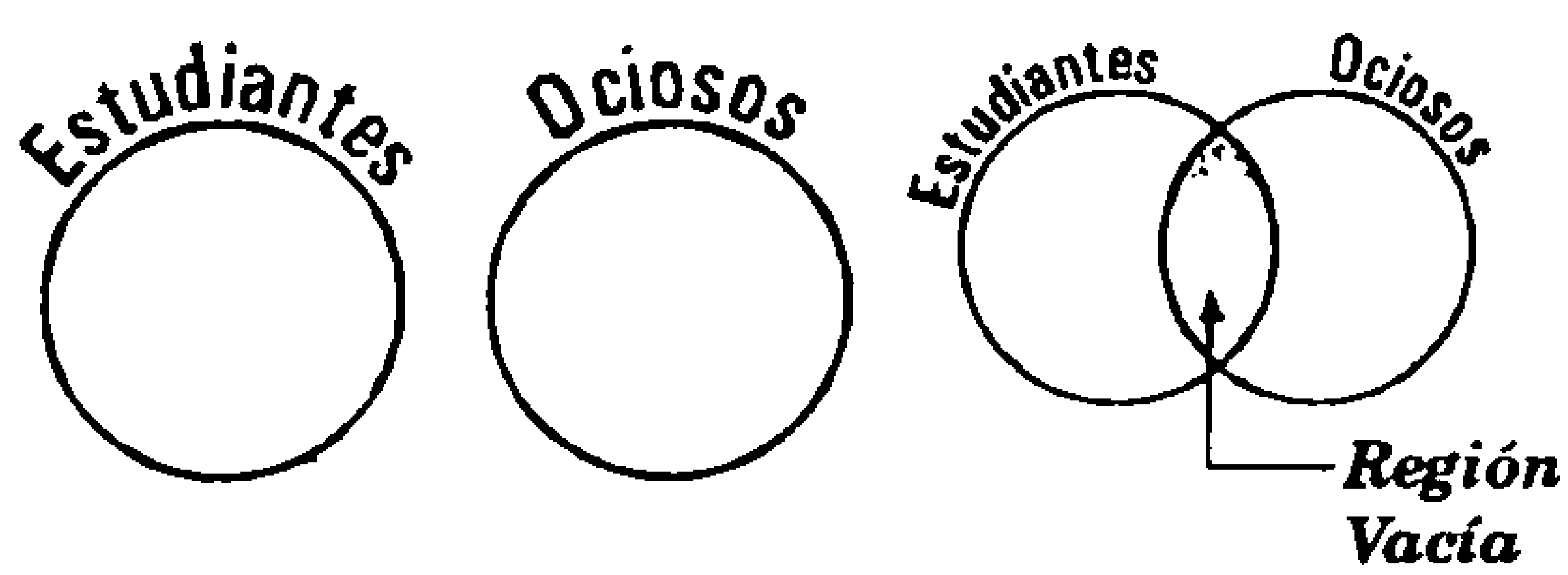
EJEMPLO :

- Ningún estudiante es ocioso.

COMENTARIO :

Está representado por una relación de exclusión, es decir ninguno de los elementos del conjunto de estudiantes está dentro del conjunto de los que son exitosos (conjuntos disjuntos).

1ra. Forma de Graficar ; 2da. Forma de Graficar



III) PARTICULARES AFIRMATIVAS:

EJEMPLO :

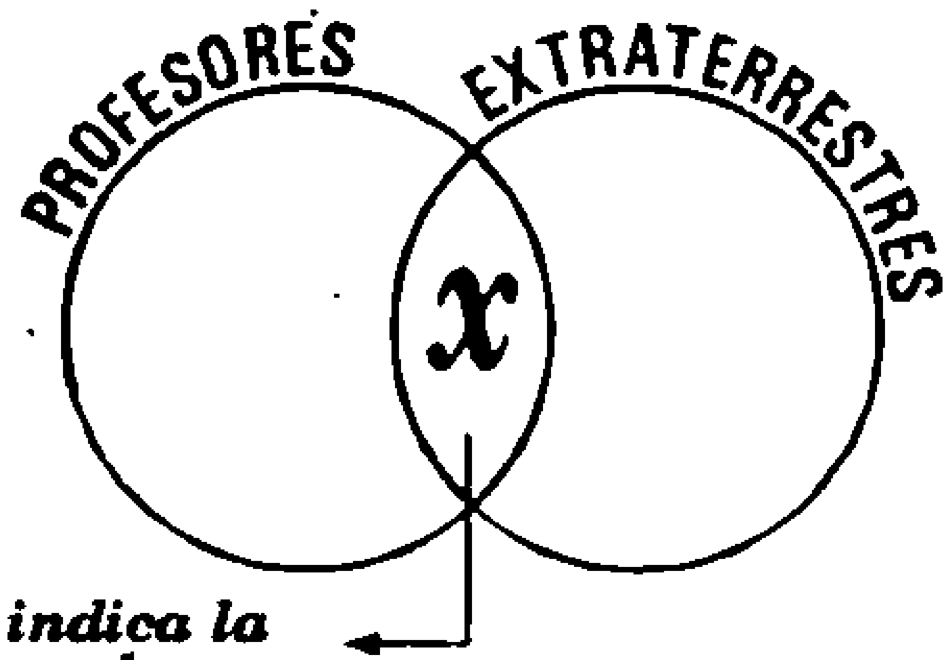
- Algunos profesores son extraterrestres.

COMENTARIO :

Está representado por una relación de intersección. Es decir,

algunos de los elementos del conjunto de profesores (no se sabe cuantos) están dentro del conjunto de los que son extraterrestres.

Gráfica :



La quesis (x) indica la presencia de por lo menos un elemento

* La conclusión inmediata sería que :

«Algunos extraterrestres son profesores»

IV) PARTICULARES NEGATIVAS :

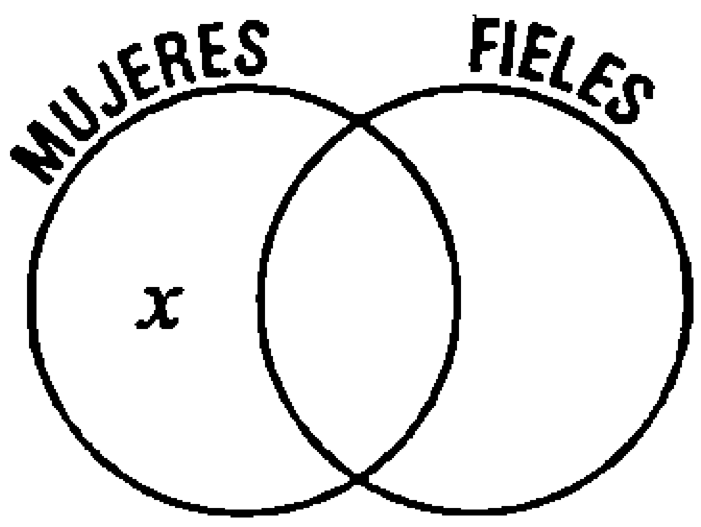
EJEMPLO :

♦ Algunas mujeres no son fieles.

COMENTARIO :

Muestra la existencia de por lo menos una mujer que está fuera del conjunto de las fieles.

Gráfica :



Una posible conclusión seria que :

«Algunas Infieles son Mujeres»

OBSERVACIÓN :

Por indicar que hay presencia de por lo menos un elemento denotaremos con una equis *(x)* en la región correspondiente. Para indicar que no hay presencia de elementos sombreamos la región correspondiente, en el otro caso (parte blanca) es una región indeterminada.

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

TÉRMINO	NEGACIÓN LÓGICA
Todos	Algunos .... no
Algunos ... no	Todos
Ninguno	Algunos
Algunos	Ninguno

EJEMPLOS :

* La negación de :

«Todo universitario es crítico»

Será : ***«Algunos universitarios no son críticos»***

* La negación de :

«Algunos matemáticos no son metódicos»

Será : ***«Todos los matemáticos son metódicos»***

* La negación de :

«Ningún provinciano es arrogante»

Será : ***«Algún provinciano es arrogante»***

* La negación de :

«Algunos de la UNI son anormales»

Será : ***« Ninguno de la UNI es anormal»***

EQUIVALENCIAS IMPORTANTES

1) No todos los Ⓢ son Ⓟ ≡ es falso que todos los Ⓢ son Ⓟ ≡ algunos Ⓢ no son Ⓟ

2) Ningún Ⓢ es no Ⓟ ≡ Todos los Ⓢ son Ⓟ

3) Ningún Ⓢ es Ⓟ ≡ Ningún Ⓟ es Ⓢ

4) Todos los Ⓢ son no Ⓟ ≡ Ningún Ⓢ es Ⓟ

5) Algunos Ⓢ son Ⓟ ≡ Algunos Ⓟ son Ⓢ

6) Algunos Ⓢ no son no Ⓟ ≡ Algunos Ⓢ son Ⓟ

7) Algunos Ⓢ son no Ⓟ ≡ algunos Ⓢ no son Ⓟ

8) Todos los Ⓢ no son Ⓟ ≡ Algunos Ⓢ no son Ⓟ

9) Ningún Ⓢ no es Ⓟ ≡ Algún Ⓢ es Ⓟ

OJO :

Considerando que ***S*** es un sujeto cualquiera y***P*** es un predicado .

INFERENCIAS INMEDIATAS NOTABLES

POR CONVERSIÓN :

1) (Todos los ***S*** son ***P***) ⇒ (Algunos ***P*** son ***S***)

2) (Ningún ***S*** es ***P***) ⇒ (Ningún ***P*** es ***S***)

3) (Ningún ***S*** es ***P***) ⇒ (Algunos ***P*** no son***S***)

4) (Algunos ***S*** son ***P***) ⇒ (Algunos ***P***son ***S***)

OBSERVACIÓN :

(Premisa y conclusión son equivalentes)

5)(Todos los ***S*** son***P***) ⇔ (Ningún ***S*** es no ***P***)

6)(Ningún ***S*** es ***P***) ⇔ (Todos los ***S*** son no ***P***)

7)(Algunos ***S*** son ***P***) ⇔ (Algunos ***S*** no son no ***P***)

8)(Algunos ***S*** no son ***P***) ⇔ (Algunos ***S*** son no ***P***)

POR CONTRAPOSICIÓN :

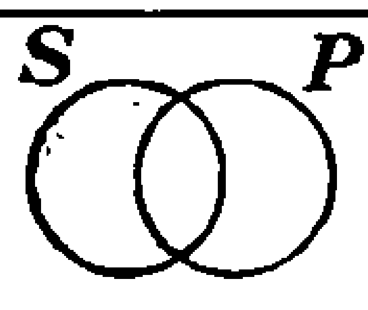
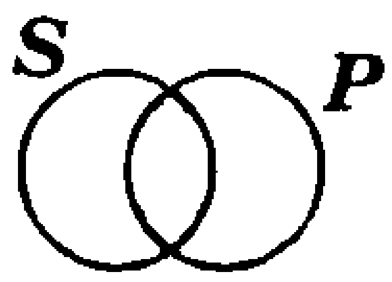
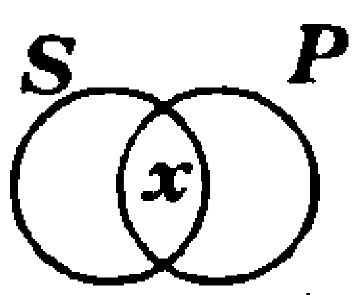
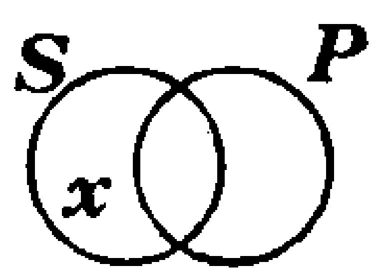
9) (Todos ***S*** son ***P***) ⇒ (Algunos no ***P*** son no ***S***)

10)(Ningún ***S*** es ***P***) ⇒ (Algunos no ***P*** no son no ***S***)

11)(Todos los ***S*** son ***P***) ⇒ (Todos los no ***P*** son no ***S***)

12) (Algunos S no son P) $\Rightarrow$ (Algunos no P no son no S)

MÉTODO DEL ALGEBRA DE BOOLE

FORMA LITERAL	DIAGRAMA DE VENN	FORMULA BOOLEANA
Todo S es P		$S\overline{P} = \varnothing$
Ningún S es P		$SP = \varnothing$
Algún S es P		$SP \neq \varnothing$
Algún S no es P		$S\overline{P} \neq \varnothing$

Donde: S : Cualquier sujeto

P : Cualquier predicado

$\overline{P}$: Complemento de «P»

$SP = S \cap P \qquad \overline{\overline{P}} \equiv P$

$\varnothing$ = Conjunto vacío.

EJEMPLO 1 :

Hallar el equivalente a :

«Todos los no deportistas son no atletas»

RESOLUCIÓN :

* Considerando : S : Deportista

P : Atleta

* Formalizando :

♦ La forma será : *"Todos los $\overline{S}$ son $\overline{P}$"*

$$\overline{S}\,\overline{\overline{P}} = \varnothing$$

$$\overline{S}P = \varnothing$$

$$P\overline{S} = \varnothing$$

* Que se leerá : *«Todos los P son S»*

* Entonces :

Todos los no deportistas son no atletas $\equiv$ todos los atletas son deportistas .

PROBLEMA DE CONTENIDO EXISTENCIAL

Algunas veces los razonamientos válidos no se pueden leer mediante gráficos (aplicando el álgebra de Boole), para ello debemos considerar el siguiente principio.

«Si la premisa o las premisas de una inferencia son proposiciones universales y la conclusión es una proposición particular, se debe suponer la premisa existencial»

EJEMPLO :

Si *«Toda fruta es nutritiva»*, entonces :

A) Ninguna fruta es nutritiva.

B) Todo lo nutritivo es fruta.

C) Algunas frutas son nutritivas.

D) Algunas frutas no son nutritivas.

E) Algunas frutas son ácidas.

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el álgebra de Boole :

S : Fruta

P : Nutritiva

* Dato: Todo S es P..................(UNIVERSAL)

Todo S es P *(UNIVERSAL)*

$$S\overline{P} = \varnothing$$

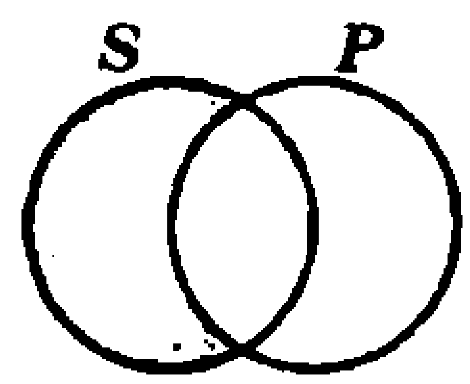
* Analizando alternativas :

A) $SP = \varnothing$ *B)* $P\overline{S} = \varnothing$

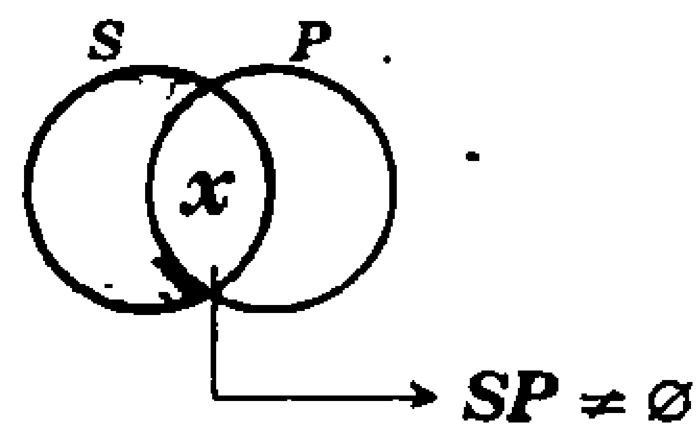
C) $SP \neq \varnothing$ *D)* $S\overline{P} \neq \varnothing$

E) Descartada (en el dato no hay ácidas)

* Aparentemente no hay clave, pero considerando «La ley del contenido existencial» se tendrá :

$S\overline{P} = \varnothing$ 

* Agregaremos que «S» es diferente del vació $(S \neq \varnothing)$, luego la gráfica será :



$\Rightarrow$ Algunas frutas son nutritivas

RPTA:"C"

CRITERIO PARA RESOLVER PROBLEMAS

primero : Graficar por medio de conjuntos (Diagramas de Venn) las premisas dadas (proposiciones categóricas), considerando en lo posible la intersección.

segundo : Analizar o ayudarse con las alternativas, ya que la que esté graficada en lo dicho en lo primero esa será la respuesta (puede ocupar parcial o totalmente la gráfica de los datos)

¡ Importante ! : A veces con un análisis lógico coherente se puede obtener la conclusión, con lo que se puede obviar hacer un diagrama, para ello debemos tener en cuenta.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dadas las siguientes proposiciones lógicas:

* Los jóvenes son preuniversitarios.
* Cada adolescente es un joven.

Marque la alternativa correcta considerando la proposición verdadera.

I) Ningún adolescente es preuniversitario.

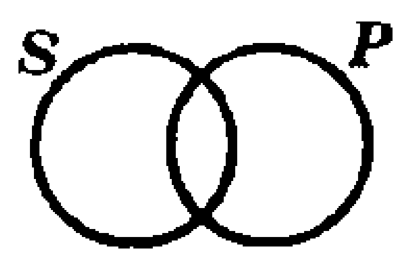
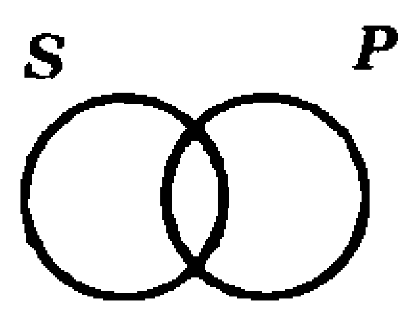
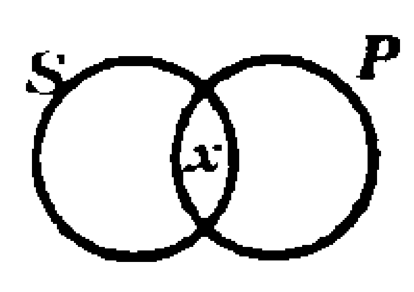
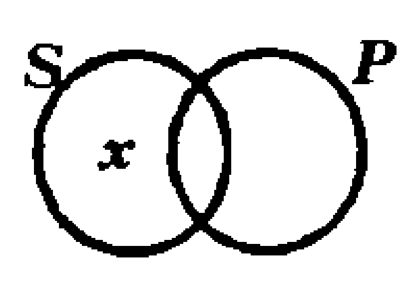
*II)*No existe preuniversitario que sea adolescente.

III) Todos los adolescentes son preuniversitarios.

A) solo I   B) solo II   C) solo III   D)I y II   E) II y III

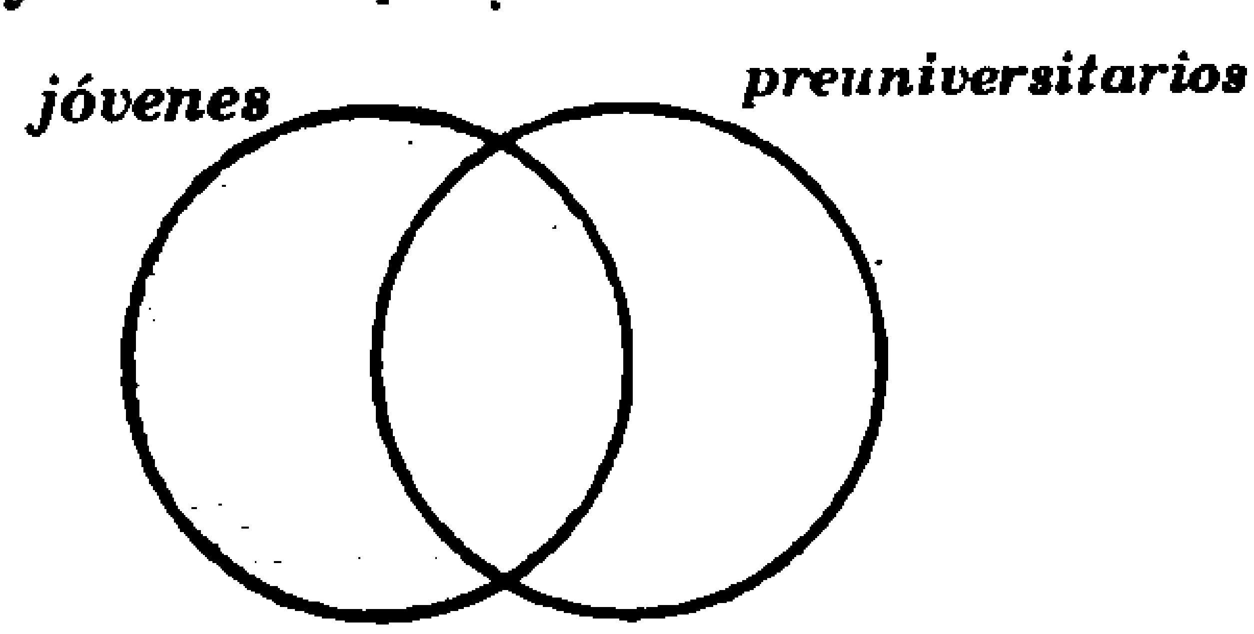
RESOLUCIÓN:

Recordemos como se grafica mediante diagramas de Venn.

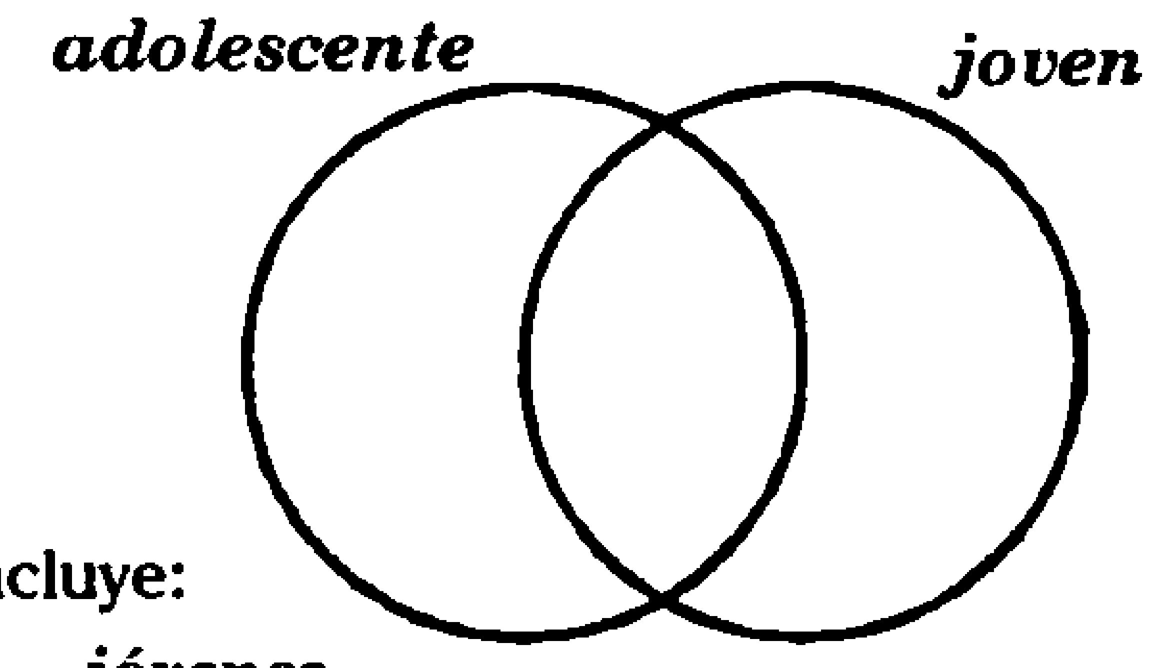
Tipos	*Proposiciones*	*Representaciones gráficas*
Universal afirmativa	*Todo S es P*	
Universal negativa	*Nigún S es P*	
Particular Afirmativa	*Algún S es P*	
Particular Negativa	*Algún S no es P*	

Representamos gráficamente las proposiciones mediante diagramas de Venn.

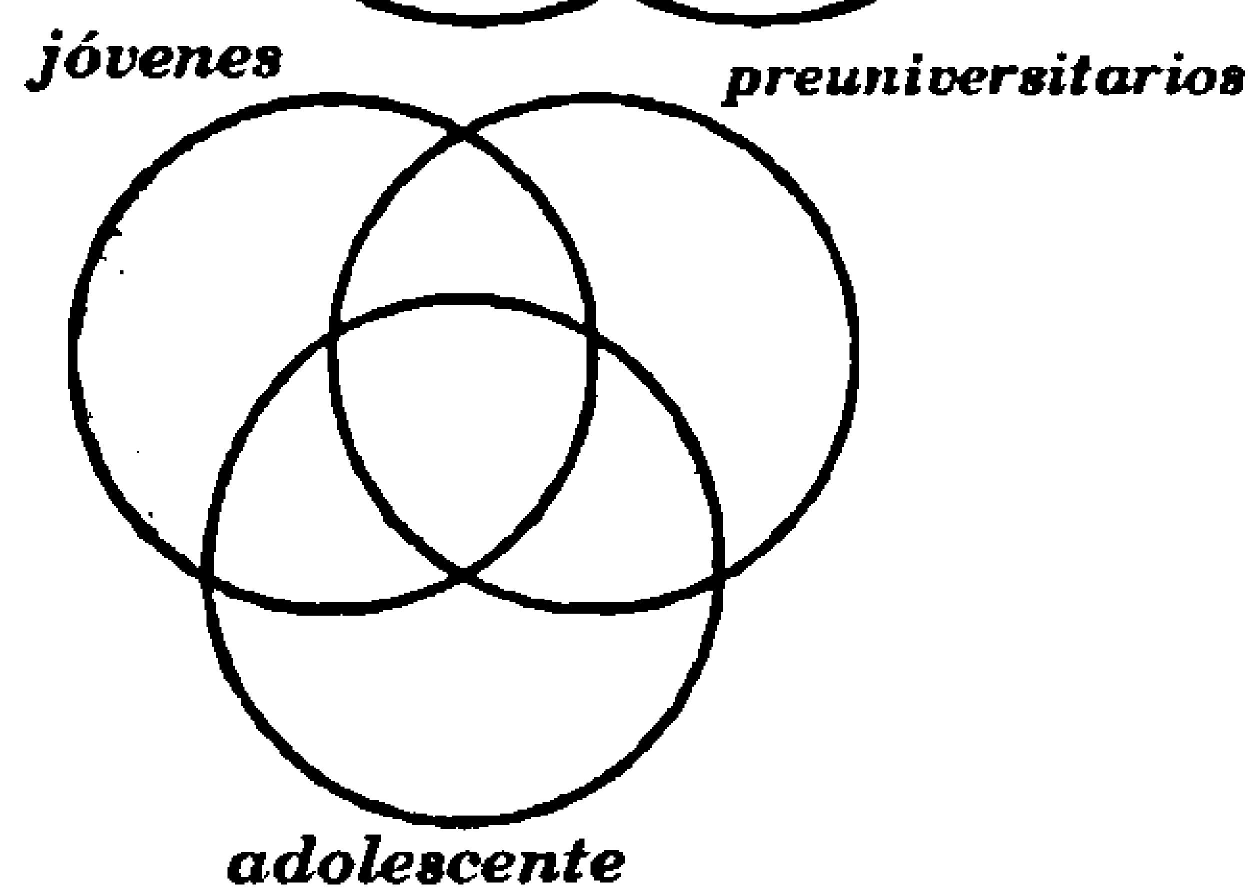
Los (Todos) jóvenes son preuniversitarios.



* Cada (Todos) adolescente es un joven.



Se concluye:



Evaluando las proposiciones, tenemos:

I) Ningún adolescente es preuniversitario ***(F)***

II) No existe preuniversitario que sea adolescente.

III) Todos los adolescentes son preuniversitarios. ***(V)***

RPTA: "E"

PROBLEMA 2 :

¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Todas estas preguntas son difíciles"?

A) Todas estas preguntas son fáciles.

B) Ninguna de estas preguntas es difícil.

C) Algunas de estas preguntas no son fáciles.

D) Algunas de estas preguntas son difíciles.

E) Algunas de estas preguntas no son difíciles.

RESOLUCIÓN :

* La negación de la proposición categórica :

"Todos los ***P*** son ***Q***" , es: "Algunos ***P*** no son ***Q***"

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Dadas las siguientes proposiciones lógicas:

Ningún científico es ingeniero.

Muchos católicos son científicos.

Entonces la proposición verdadera es:

A) Todo católico no es ingeniero.

B) Ningún ingeniero es católico.

C) Muchos católicos son teólogos.

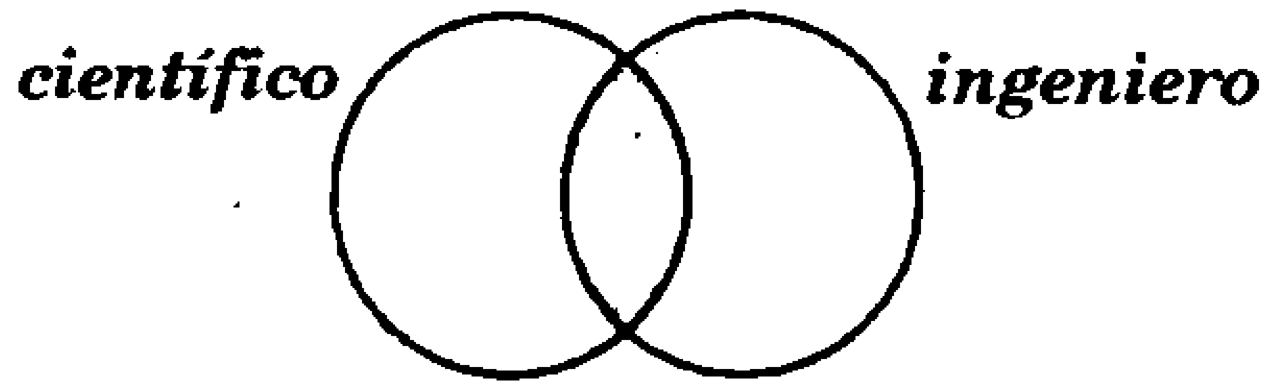
D) Todo ingeniero no es católico.

E) Algunos católicos no son ingenieros.

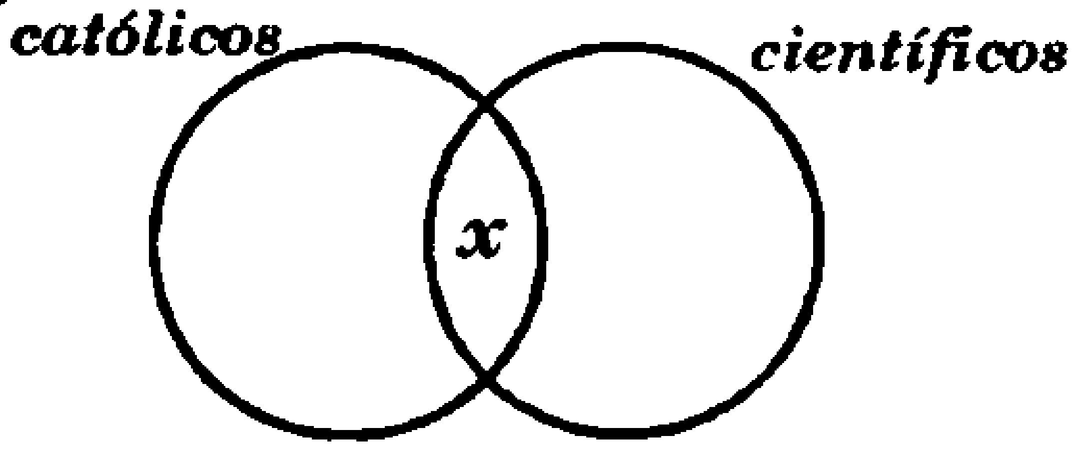
RESOLUCIÓN:

Representamos gráficamente la proposición.

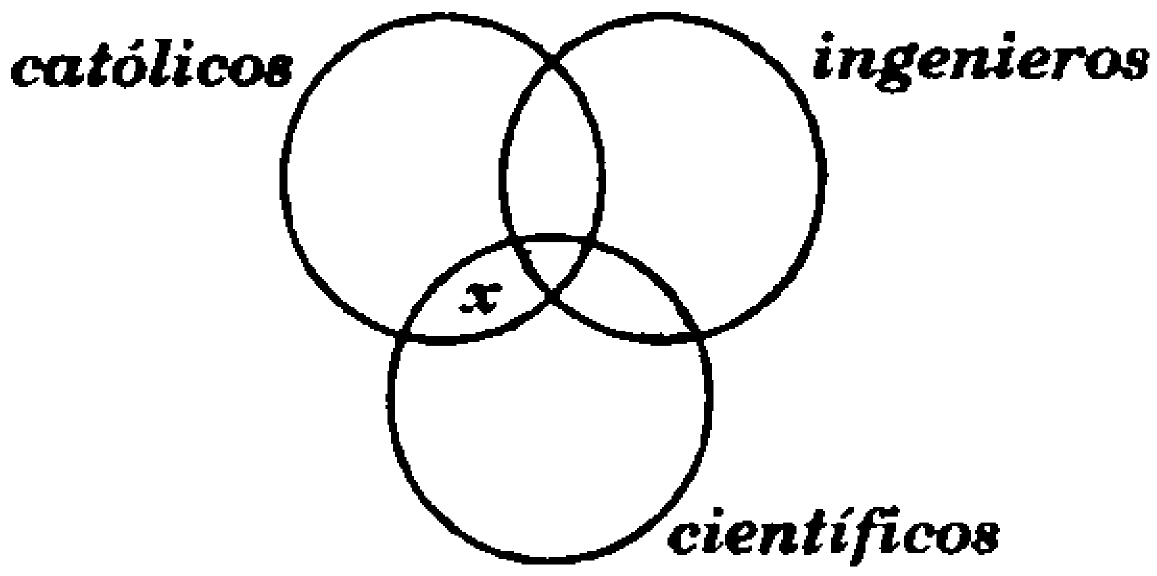
Ningún científico es ingeniero.



* Muchos católicos son científicos.
Algunos



La conclusión de la proposición es la siguiente:



La proposición verdadera es algunos católicos no son ingenieros.

RPTA: "E"

PROBLEMA 4 :

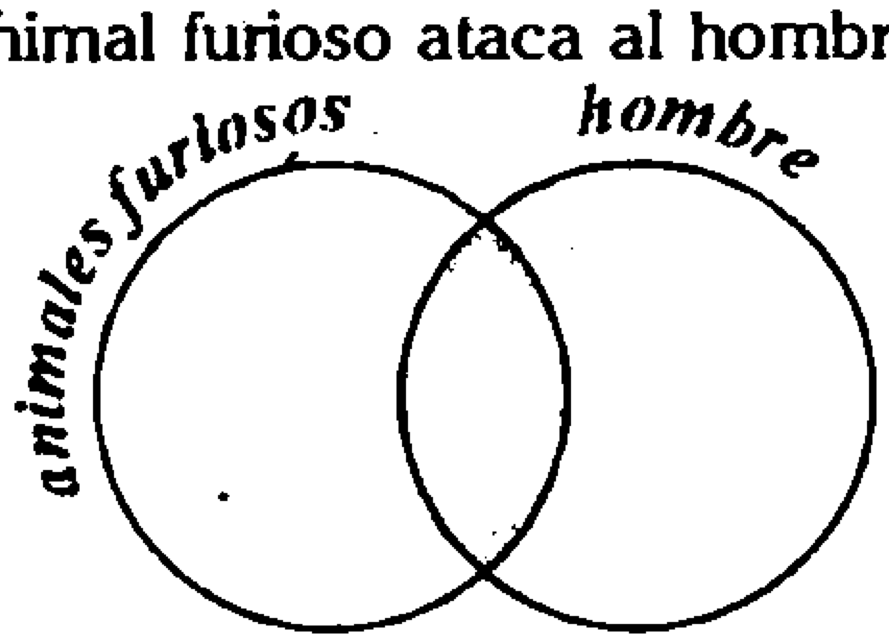
Si ningún animal furioso ataca al hombre y todos los perros son animales furiosos, luego :

A) algunos perros no son furiosos
B) algunos perros no atacan al hombre
C) ningún perro ataca al hombre
D) ningún perro deja de atacar al hombre
E) todos los perros atacan al hombre

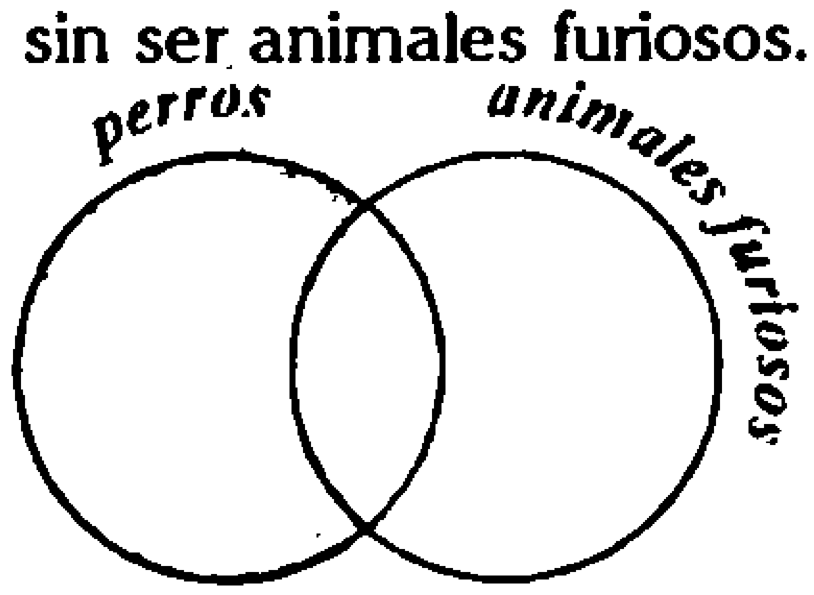
RESOLUCIÓN :

Utilizaremos los diagramas de Venn, pero sombreando la región donde no exista elemento y colocando una aspa donde exista.

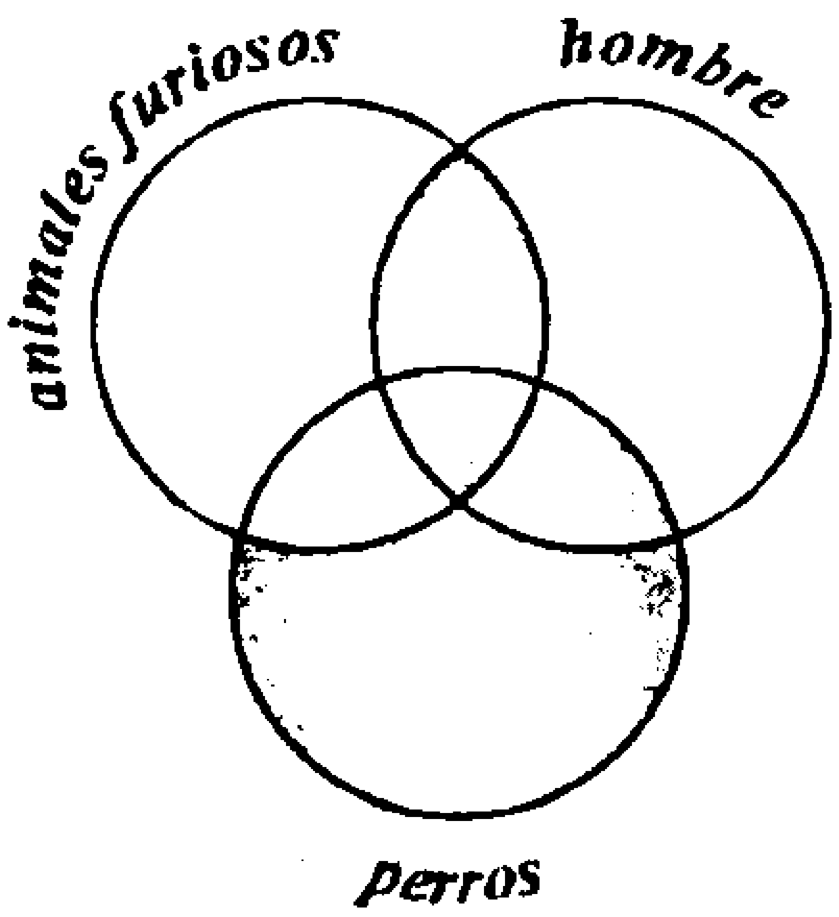
♦ Ningún animal furioso ataca al hombre



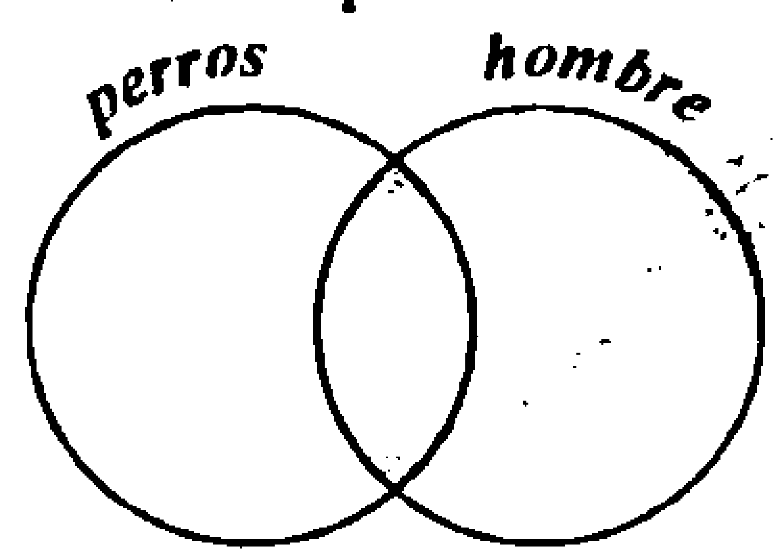
♦ Todos los perros son animales furiosos < > no existe perros sin ser animales furiosos.



♦ Luego juntando las 2 proposiciones :



♦ De donde se deduce que



⇒ Ningún perro ataca al hombre.

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Ningún científico admite la clonación de seres humanos, pero algunos aficionados a la ciencia ficción la admiten. En consecuencia,

A) todos los aficionados a la ciencia ficción son científicos

B) ningún científico es aficionado a la ciencia ficción

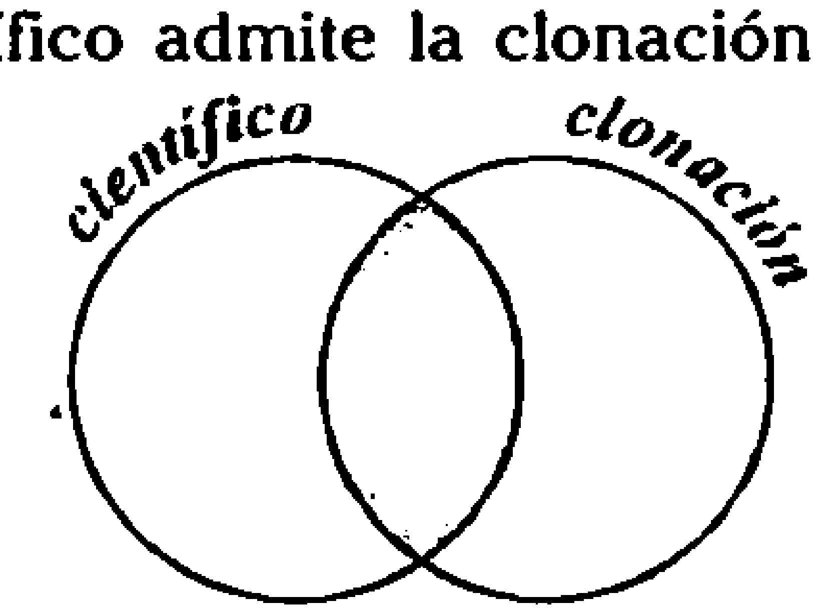
C) algunos aficionados a la ciencia ficción no son científicos

D) todos los científicos son aficionados a la ciencia ficción

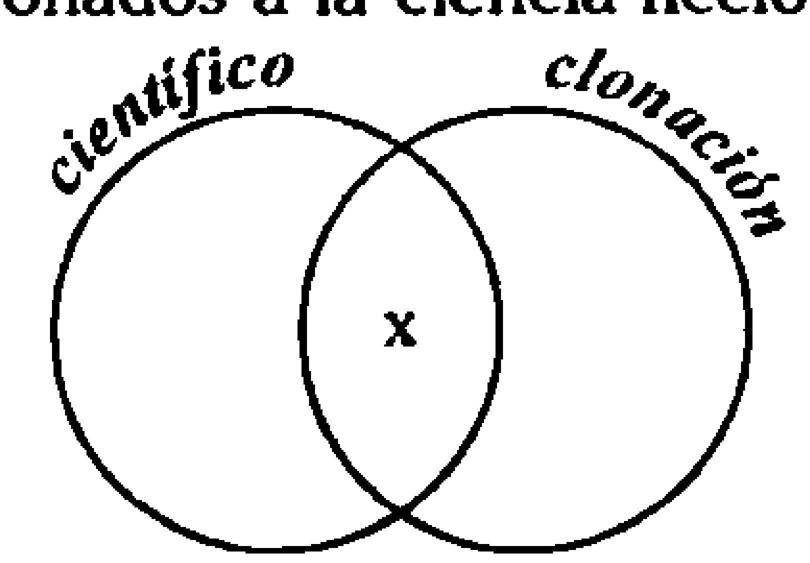
E) ningún aficionado a la ciencia ficción es científico

RESOLUCIÓN :

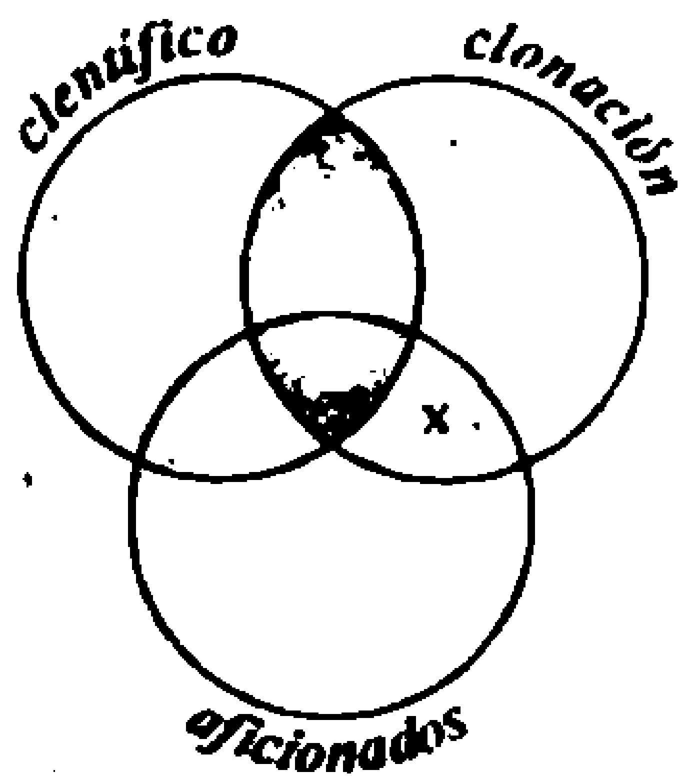
♦ Ningún científico admite la clonación de seres humanos.



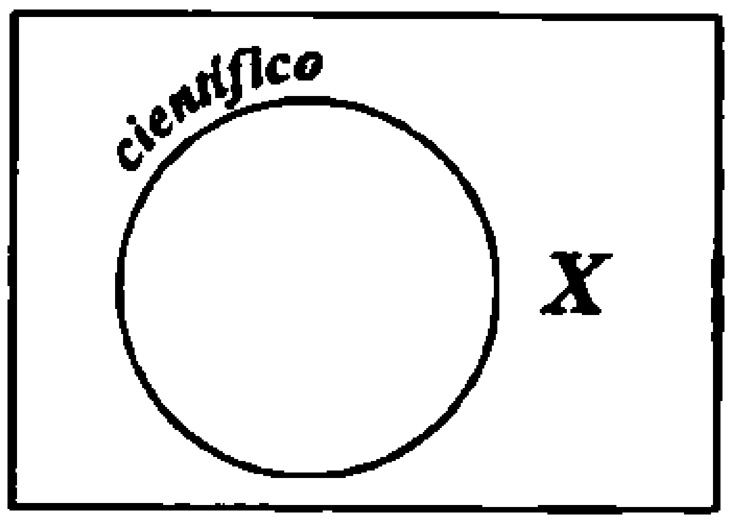
♦ Algunos aficionados a la ciencia ficción admiten.



♦ Luego juntando las *2* proposiciones.



* Del gráfico :



Algunos aficionados a la ciencia ficción no son científicos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Algunos científicos no son románticos"?

A) Algunos científicos son románticos.

B) Ningún científico es romántico.

C) Todos los científicos son románticos.

D) Todos los científicos no son románticos.

RESOLUCIÓN :

* La negación lógica de la proposición categórica:
"Algunos ***P*** no son ***Q***" es:
"Todos los ***P*** son ***Q***"

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

¿Qué alternativa muestra una proposición ***equivalente*** a :

"Ningún diplomático es descortés"?

A) Algún diplomático es cortés.

B) Algún diplomático no es descortés.

C) Ningún cortés es diplomático.

D) Todo diplomático es descortés.

E) Todo diplomático es cortés.

RESOLUCIÓN :

* La proposición: "Ningún ***S*** es no ***P***", donde se niega el predicado , es equivalente a : "Todos los ***S*** son ***P***", pudiendo expresarse también en singular.

⇒ Ningún diplomático es no cortés ≡ Todo diplomático es cortés.

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Indique una alternativa ***equivalente*** a la proposición lógica: ***"Todas las películas de ciencia ficción son irreales"***

A) Ninguna película de ciencia ficción es real.

B) Algunas películas de ciencia ficción son reales.

C) Algunas películas de ciencia ficción son irreales.

D) No todas las películas de ciencia ficción son reales.

E) Todas las películas de ciencia ficción no son reales.

RESOLUCIÓN :

* La proposición: "Todos los ***S*** son no ***P***", es equivalente a: "Ningún ***S*** es ***P***"

⇒ Todas las películas de ciencias ficción son no reales = Ninguna película de ciencia ficción es real.

RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

¿Cuál es la negación lógica de la proposición:

"Ningún matemático es distraído"?

A) Al menos un matemático no es distraído.

B) Al menos un matemático es distraído.

C) Todos los matemáticos son distraídos.

D) Todos los matemáticos no son distraídos.

RESOLUCIÓN :

* La negación de la proposición categórica:

"Ningún ***P*** es ***Q***", es:

"Algunos ***P*** son ***Q***", y dado que "Algunos" significa "al menos uno", también puede quedar así:

"Al menos un ***P*** es ***Q***"

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Dadas las premisas :

Todos los cerdos vuelan

Ningún cerdo tiene cola

¿Cuales de las siguientes conclusiones son verdaderas?

I) No todos los cerdos tienen cola.

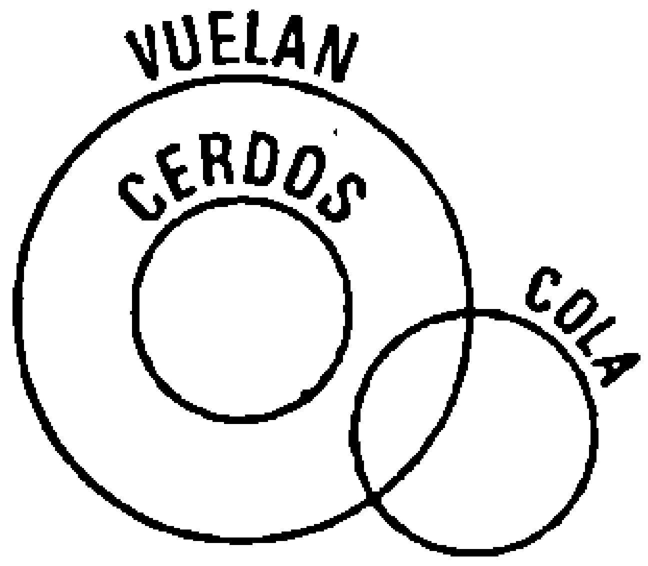
II) Ningún animal que vuela tiene cola.

III) Existen animales sin cola que vuelan.

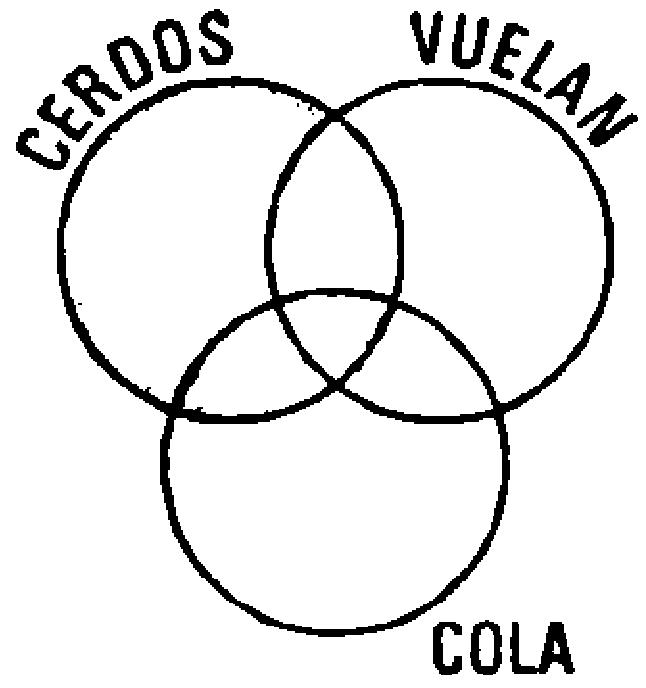
A)Sólo I ***B)Sólo II*** ***C)Sólo III***

D)II y III ***E)I y III***

RESOLUCIÓN :



ó



I)(Falsa) la conclusión debe ser una relación entre los que vuelan y los que tienen cola.

II) (Falsa), no necesariamente.

III)(Verdadera) esos animales sin cola, pueden ser los cerdos (ley del contenido existencial).

RPTA: "C"

PROBLEMA 11 :

Si afirmamos que :

- Algunas personas son corruptas
- Todo corrupto es ruin.
- Todo ruin es mediocre.

Entonces :

A) Algunas personas son mediocres.
B) Algunas personas son no mediocres.
C) Algunos no corruptos son mediocres.
D) Alguien que no es ruin es mediocre.
E) Algunas personas no son corruptas.

RESOLUCIÓN :

♦ De la primera y segunda premisa se deduce que :
«Esas personas que son corruptas, también son ruines».

♦ Considerando lo anterior y la tercera premisa, concluiremos que:

«Esas personas que son ruines, también son mediocres».

➤ Conclusión :

«Algunas personas son mediocres»

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

* Todos los futbolistas son ricos.
* Todos los artistas son personas alegres.

Si Oscar es futbolista y todas las personas alegres no son ricas, entonces es cierto que :

A) Algunos artistas son ricos.

B) Algunos futbolistas son alegres.

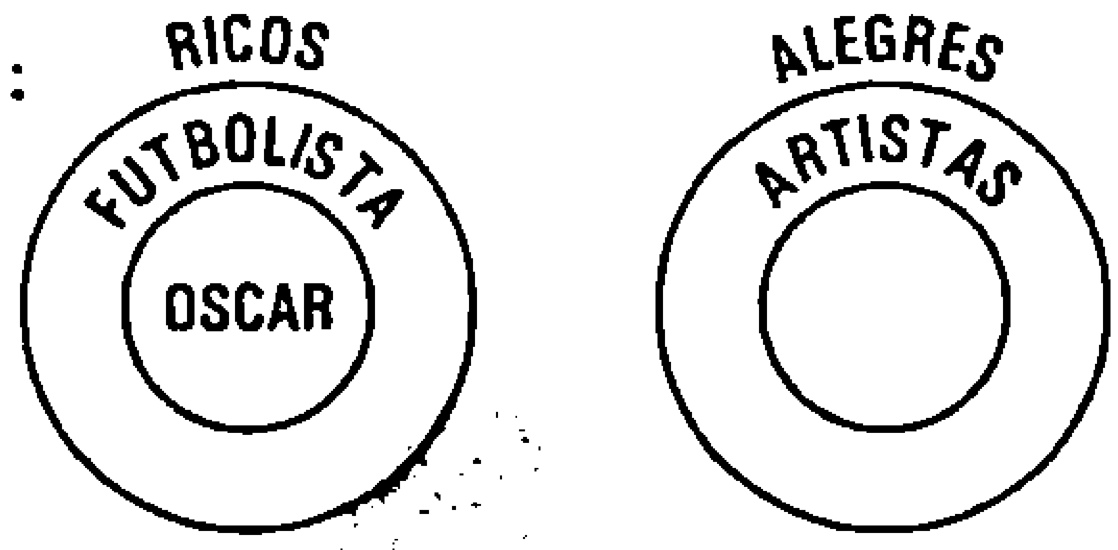
C) Oscar es alegre.

D) Oscar no es artista.

E) Oscar es artista.

RESOLUCIÓN :

Por inclusión de conjuntos :



Se deduce que Oscar no es artista.

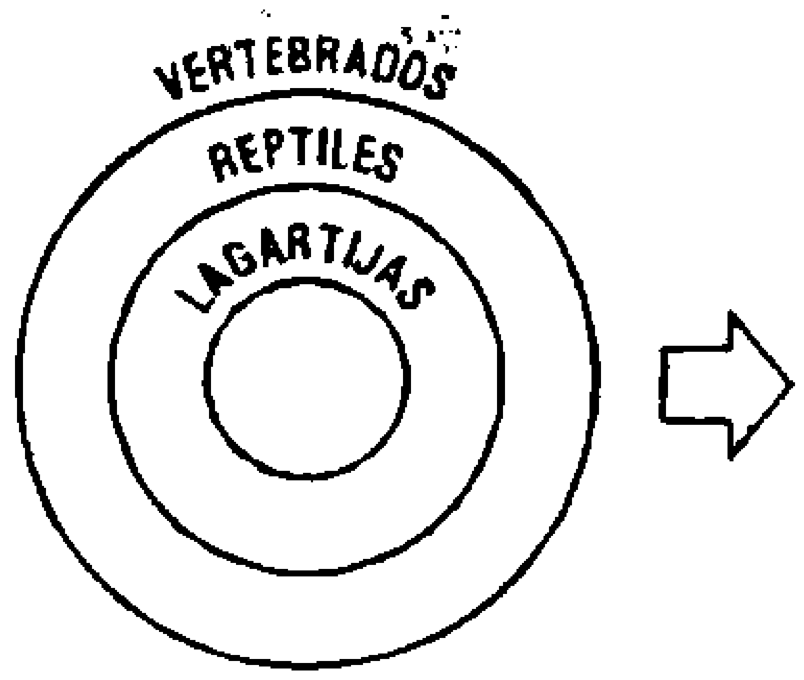
RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Si todas las lagartijas son reptiles y todos los reptiles son vertebrados, entonces se concluye que :

A) ninguna lagartija es vertebrado.
B) todas la lagartijas son vertebrados.
C) algunos reptiles no son vertebrados.
D) algunas lagartijas no son vertebrados.
E) algunas lagartijas no son reptiles.

RESOLUCIÓN :



♦ ***Todas las lagartijas son vertebrados***

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente a:

"Todos los diplomáticos no son católicos"

A) Ningún diplomático es católico.
B) Algunos diplomáticos son católicos.
C) No todos los católicos son diplomáticos.
D) Algunos diplomáticos no son católicos.
E) Algunos católicos no son diplomáticos.

RESOLUCIÓN :

* La proposición: "Todos los ***S*** no son ***P***", es equivalente a : "No todos los ***S*** son ***P***", y a su vez equivalente a : "Algunos ***S*** no son ***P***"

RPTA : "D"

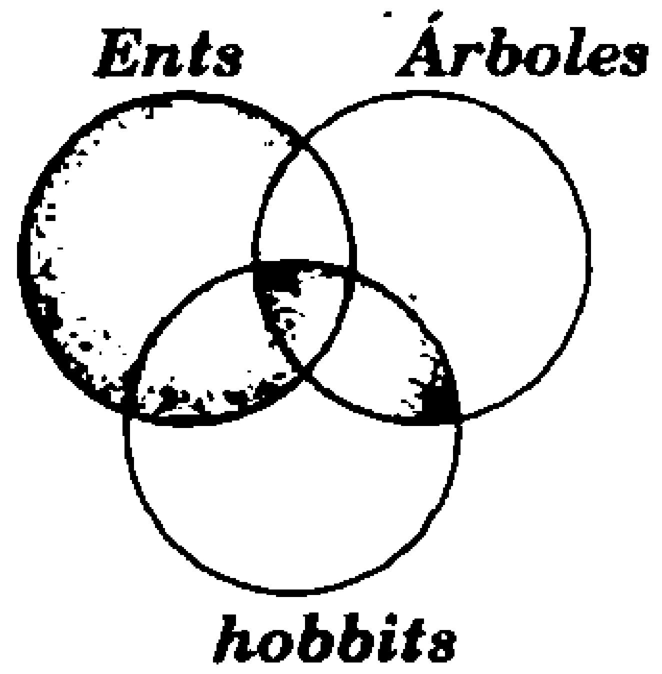
PROBLEMA 15 :

Si todos los ents son árboles y ningún hobbit es árbol , entonces:

A) algunos hobbits son ents
B) ningún hobbit es ent
C) algunos árboles no son ents
D) algunos hobbits no son árboles
E) todos los hobbits no son ents

RESOLUCIÓN :

• Graficando las proposiciones en un diagrama de Euler :



• Como *(Ents)∩(Hobbits) = ϕ,* se deduce que:

"ningún hobbit es ent"

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

A partir de la premisa: ***"Todos los estudiantes de LA PRE son inteligentes"***, se puede deducir válidamente que:

I) No es cierto que al menos un estudiante de *LA PRE* no sea inteligente.

II) Al menos un estudiante de *LA PRE* es inteligente.

III) Algunos estudiantes de *LA PRE* no son inteligentes.

A) Solo I B) Solo II C) I y II D) I y III E) II y III

RESOLUCIÓN :

Si llamamos ***"P"*** a los "estudiantes de *LA PRE*" y ***"Q"*** a "inteligentes" la premisa queda así:

"Todos los *P* son *Q*"

I) :(Algunos ***P*** no son *Q*), es equivalente a la premisa. ....*(Verdadero)*

II) Algunos *P* son *Q*, se deduce de la premisa ....*(Verdadero)*

III) Algunos ***P*** no son ***Q*** , no es equivalente ni se deduce. ....*(Falsa)*

RPTA :"C"

PROBLEMA 17 :

Dada las siguientes premisas:

• Algunos estudiantes no son honestos.

• Todos los miembros de la fraternidad son honestos

• Se puede deducir válidamente que:

A) Algunos estudiantes son miembros de la fraternidad.

B) Algunos miembros de la fraternidad no son estudiantes.

*C)*Algunos estudiantes no son miembros de la fraternidad.

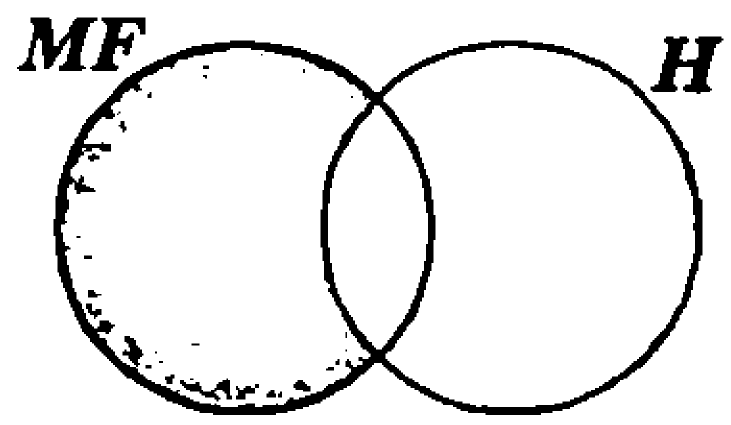
D) Ningún miembro de la fraternidad es estudiante.

E) Ningún estudiante es miembro de la fraternidad.

RESOLUCIÓN :

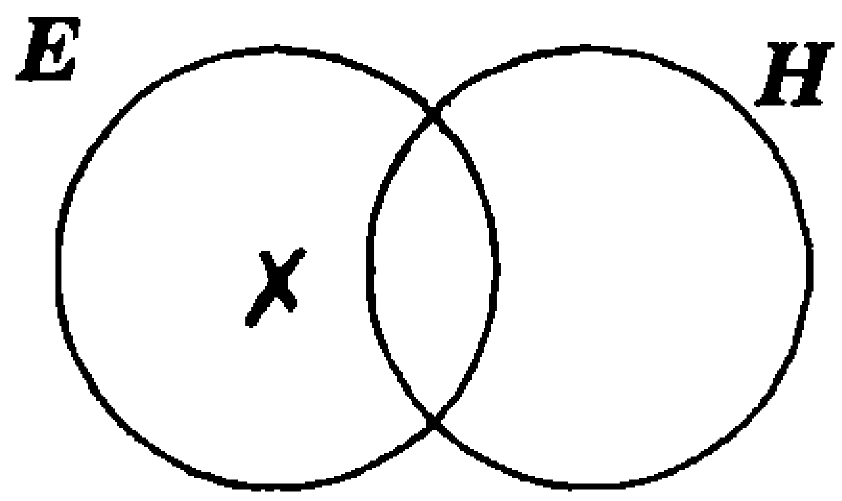
* Simbolicemos cada premisa en un diagrama de Venn–Euler.

• Todos los miembros de la fraternidad son honestos



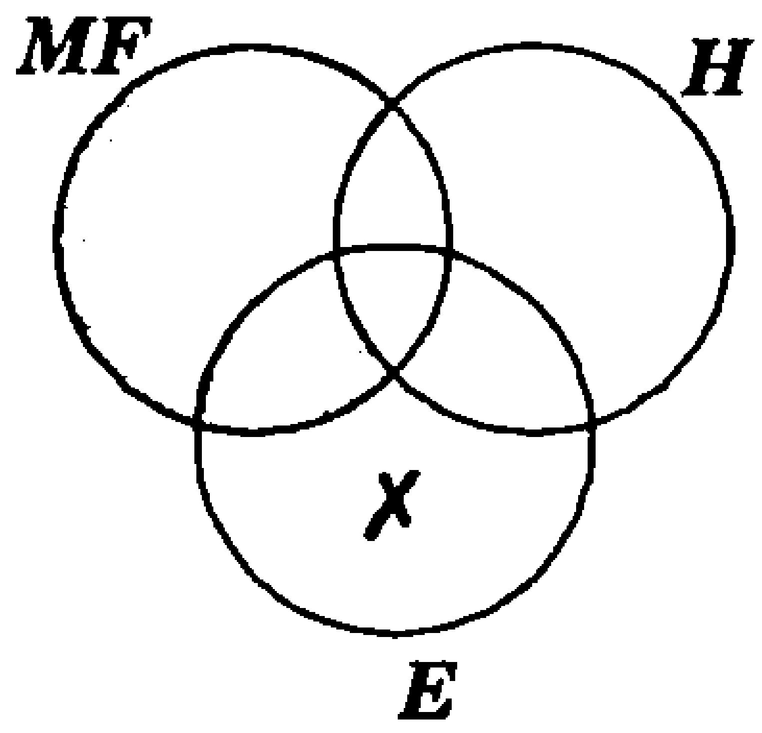
Recuerda que la zona sombreada es un conjunto vacío.

• Algunos estudiantes no son honestos.



Recuerda que el aspa indica por lo menos un elemento.

• Graficando ambas proposiciones en un solo diagrama:



⇒Algunos estudiantes (los ✗) no son miembros de la fraternidad.

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

Si ningún problema es difícil , y algunos problemas son interesantes, podemos concluir válidamente que:

A) Algunas cosas interesantes no son difíciles.

B) Algunas cosas interesantes son difíciles.

C) Algunos problemas no son interesantes.

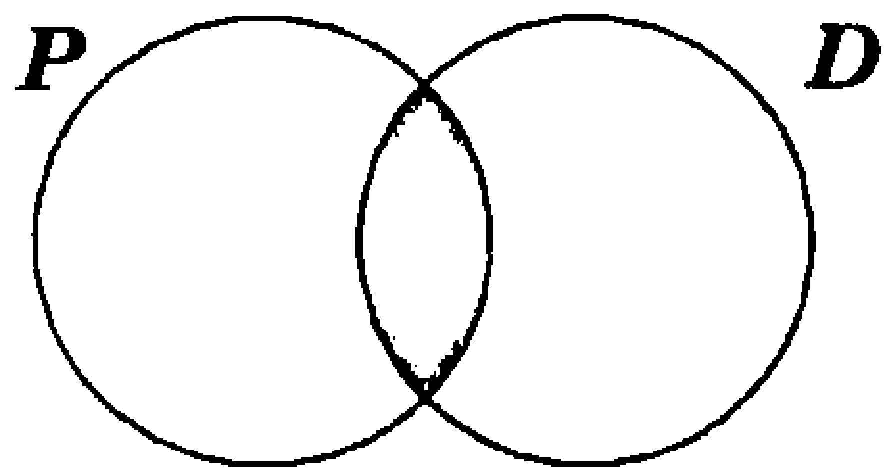
D) Algunas cosas difíciles no son interesantes.

E) Ninguna cosa difícil es interesante.

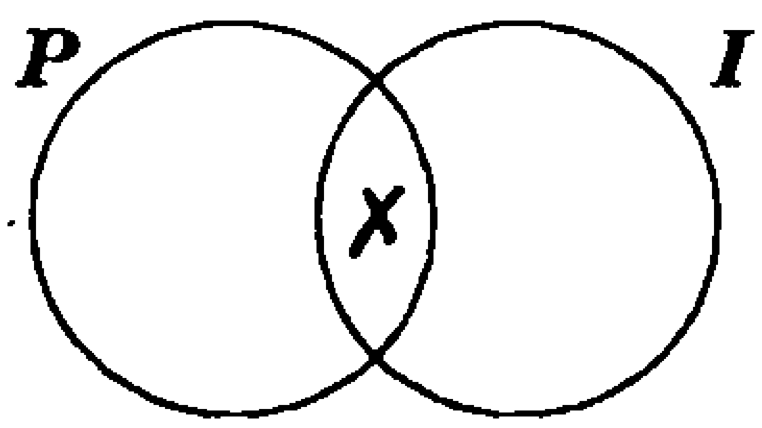
RESOLUCIÓN :

• Graficando cada proposición mediante los diagramas de Venn:

"Ningún problema es difícil"

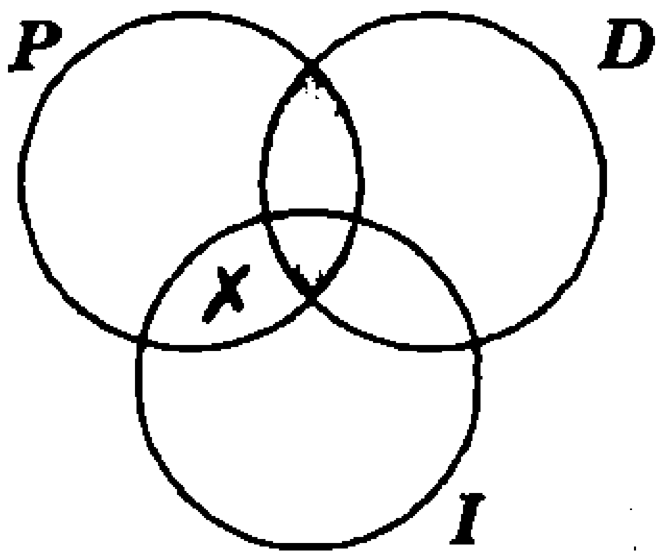


"Algunos problemas son interesantes"



• Recuerda que la χ representa al menos un elemento.

• Graficándolos en un sólo diagrama:



• Algunas cosas interesantes (las χ),no son difíciles.

RPTA : "A"

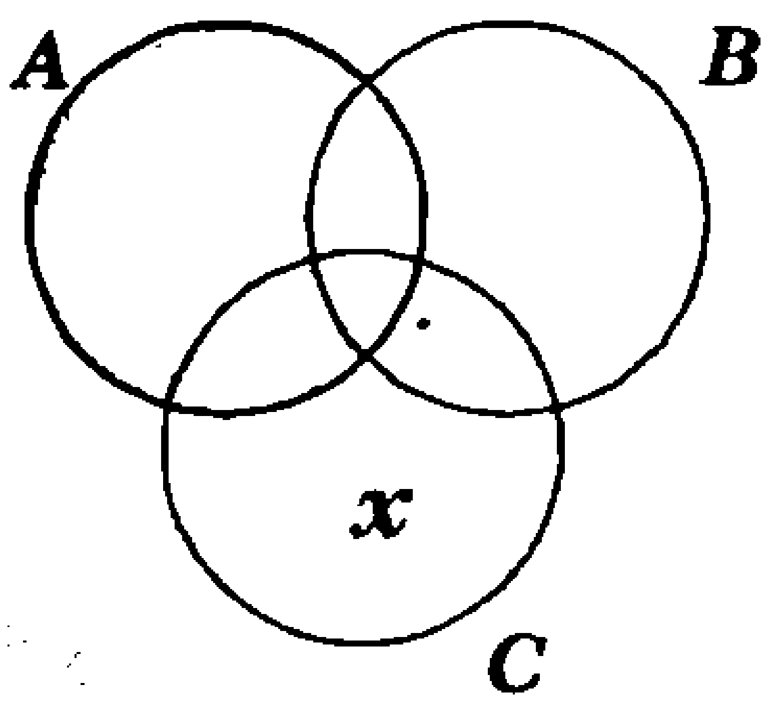
PROBLEMA 19 :

Si todos los *A* son *B* , y algunos *C* no son *B*, se deduce válidamente que :

A) Algunos A son C
B) Algunos B son C
C) Algunos C no son A
D) Algunos A no son C
E) Todos los A son C

RESOLUCIÓN :

* El diagrama de Venn correspondiente es:



* donde la zona sombreada indica una región vacía, y la **"x"** indica la presencia de por lo menos un elemento.

$\Rightarrow$ Algunos *C* (los *x*), no son *A*

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

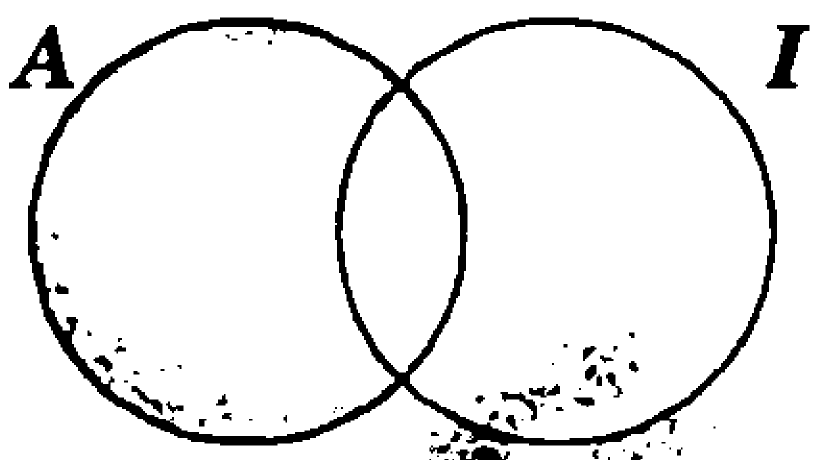
Si todos los aviadores son intrépidos , y ningún intrépido es fatalista , se deduce que:

A) Algún fatalista es aviador.
B) Ningún fatalista es aviador.
C) Algún fatalista no es aviador.
D) Algún aviador no es fatalista.
E) Todos los fatalistas son aviadores.

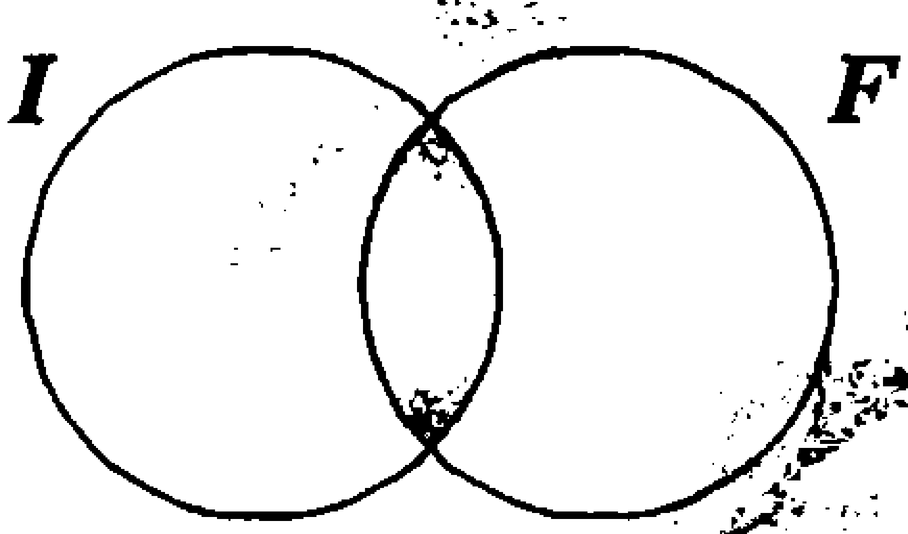
RESOLUCIÓN :

• Aplicando los diagramas de Venn en los cuales una región rayada indica ausencia de elementos (vacío), tenemos para cada proposición categórica:

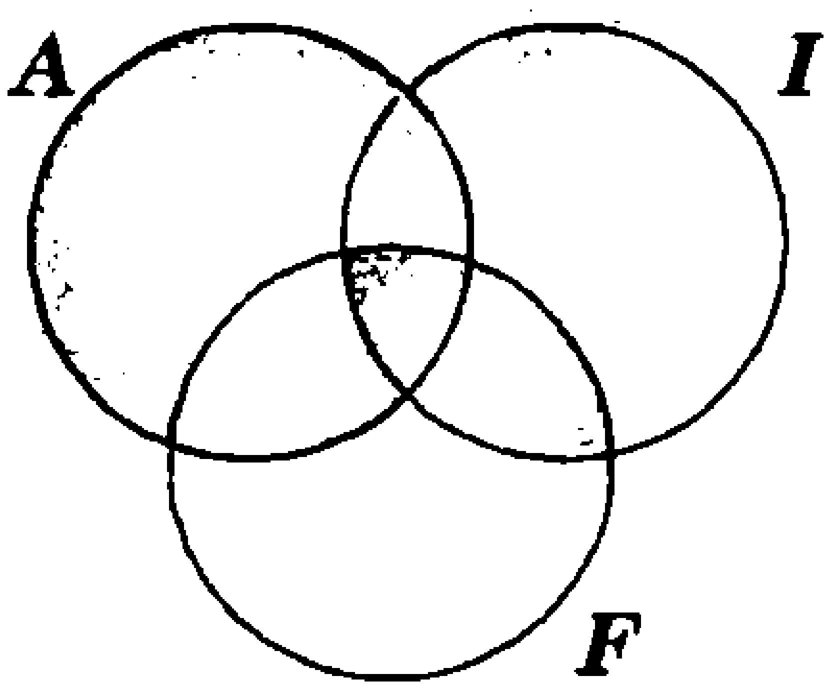
• Todos los aviadores *(A)* son intrépidos *(I):*



• Ningun intrépido *(I)* es fatalista *(F):*



• Dibujando ambas proposiciones en un sólo diagrama :



• Luego; como $A \cap F = \phi$, entonces:

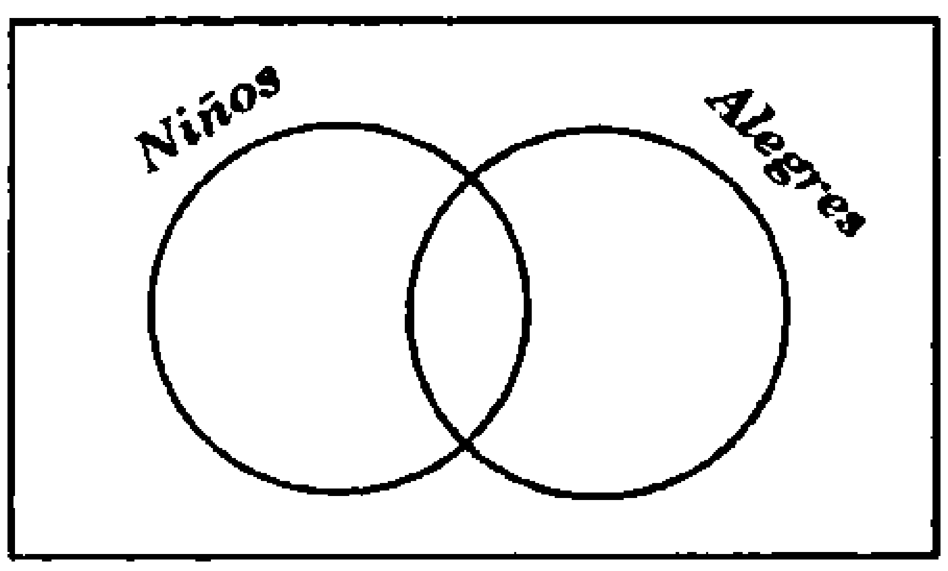
$\Rightarrow$ "Ningún aviador es fatalista"

RPTA : "B"

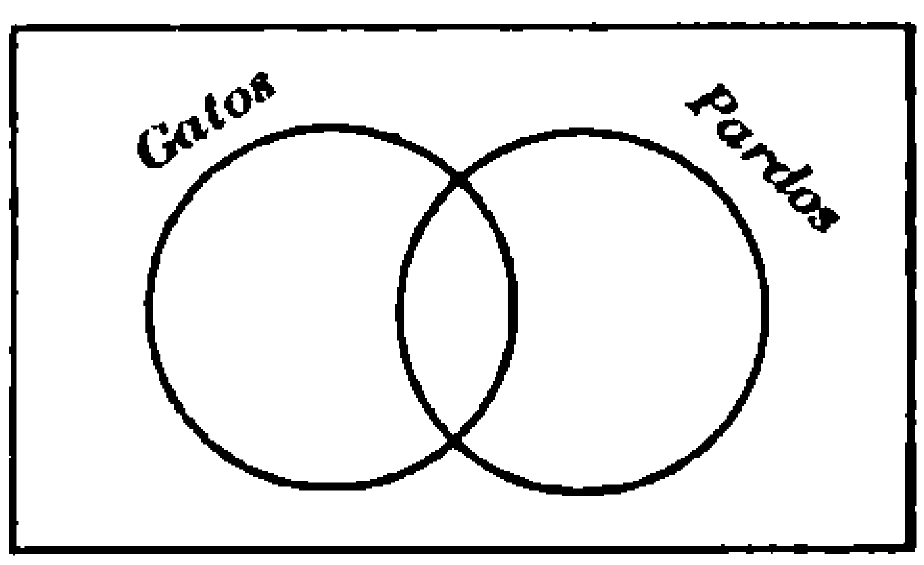
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

Representa las proposiciones en los diagramas de Venn , siguientes:

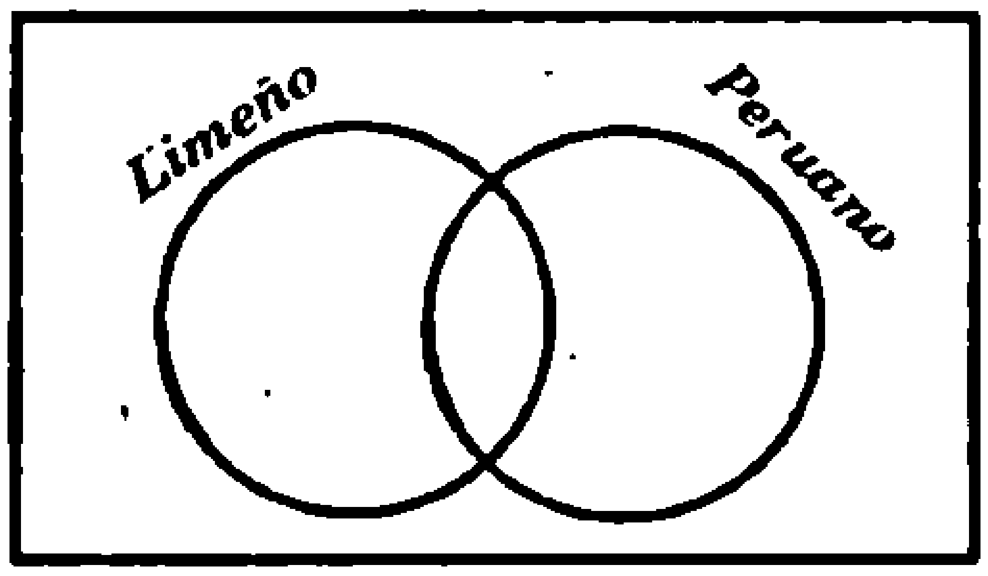
01 Todos los niños son alegres.



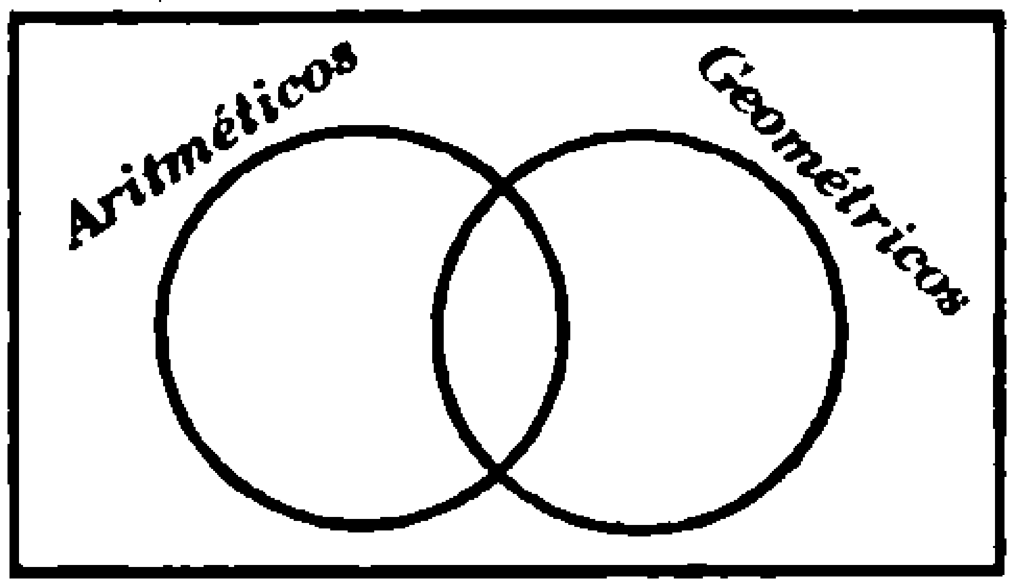
02 Algunos gatos son pardos.



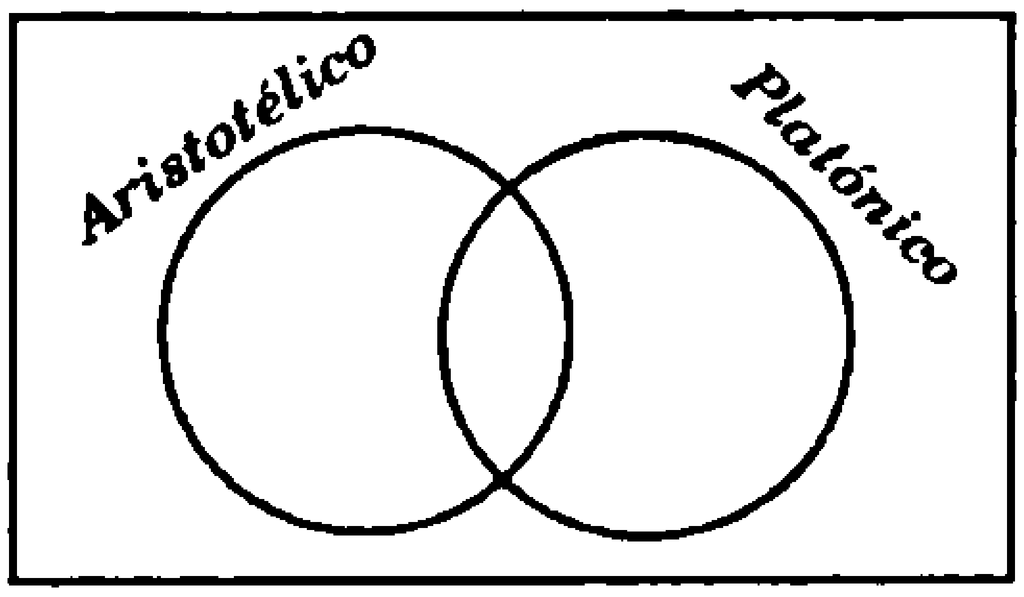
03 Todo limeño es peruano.



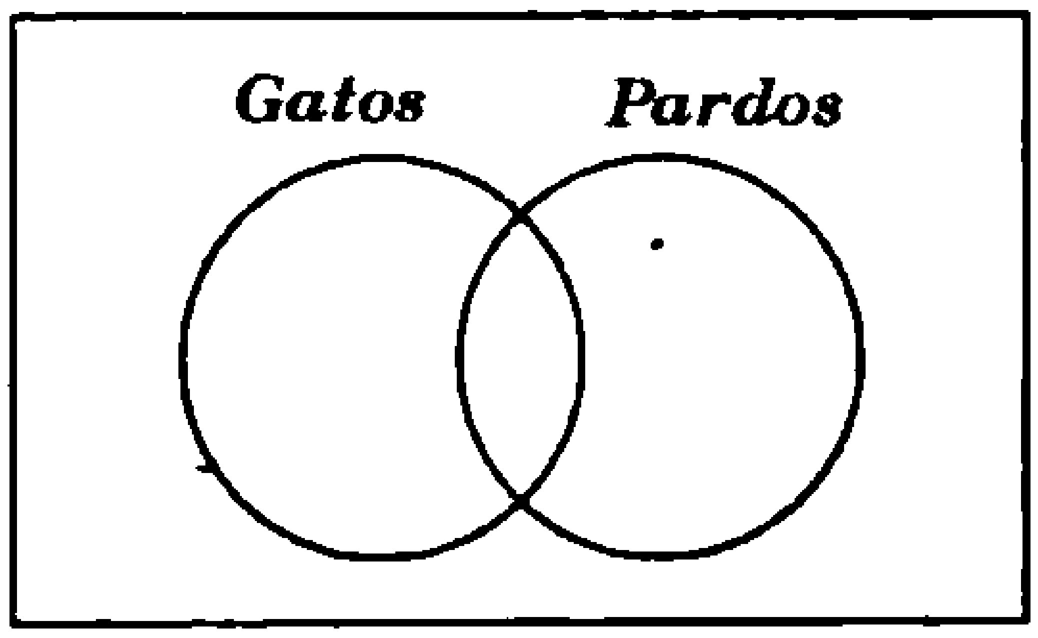
04 Algunos aritméticos son geométricos .



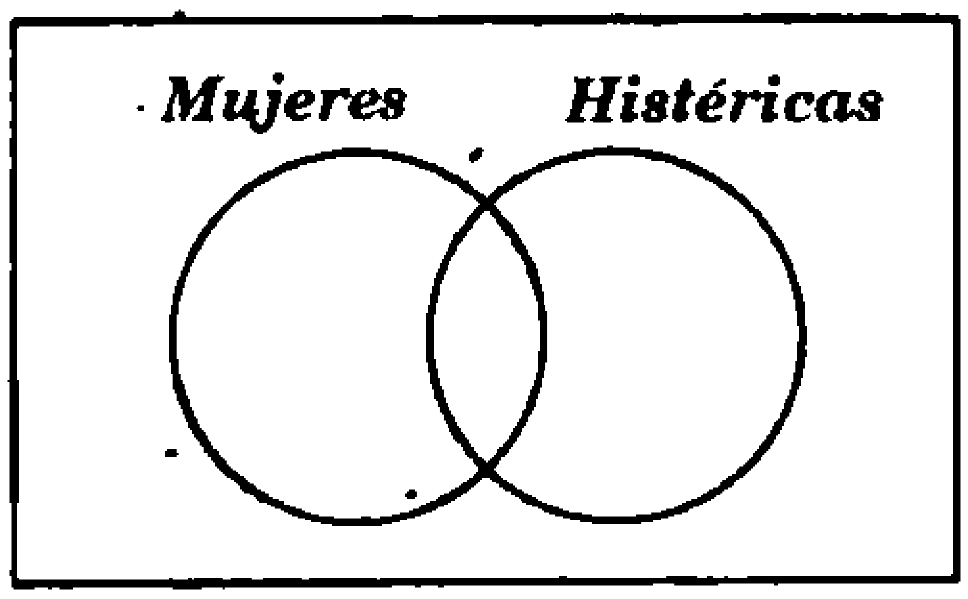
05 Ningún Aristotélico es Platónico .



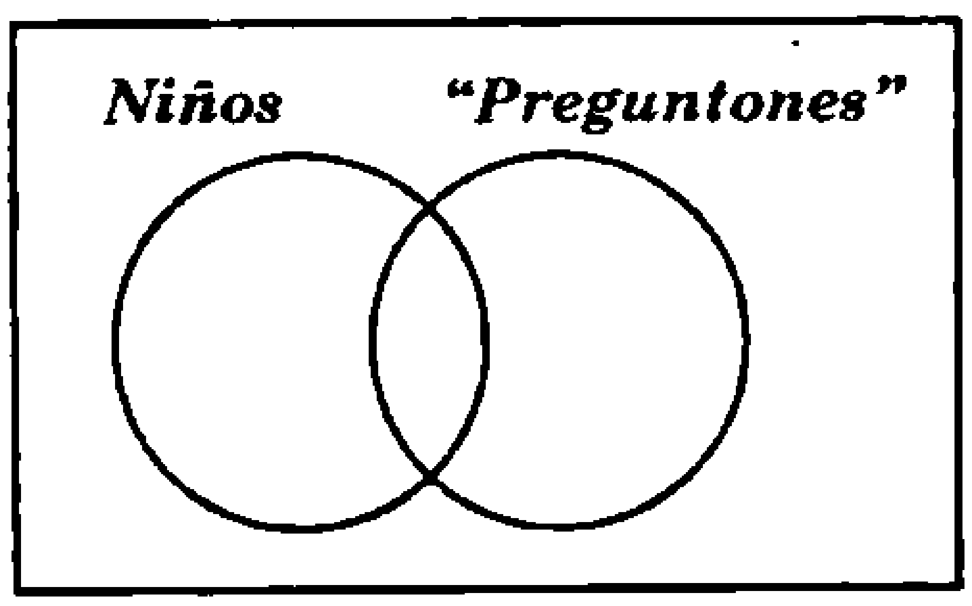
06 Todos los gatos son pardos .



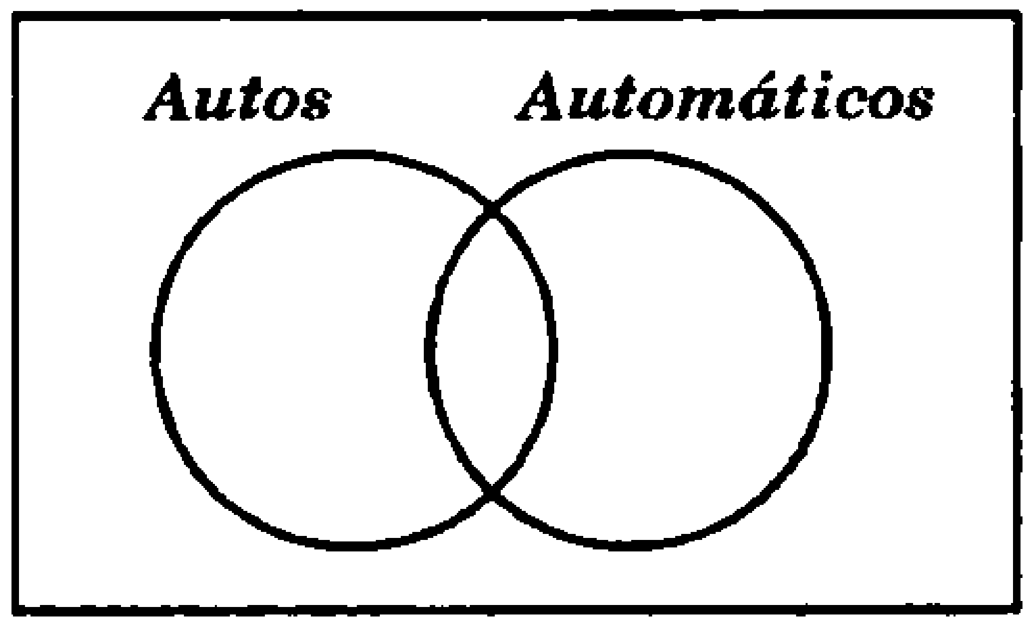
07 Algunas mujeres son histéricas .



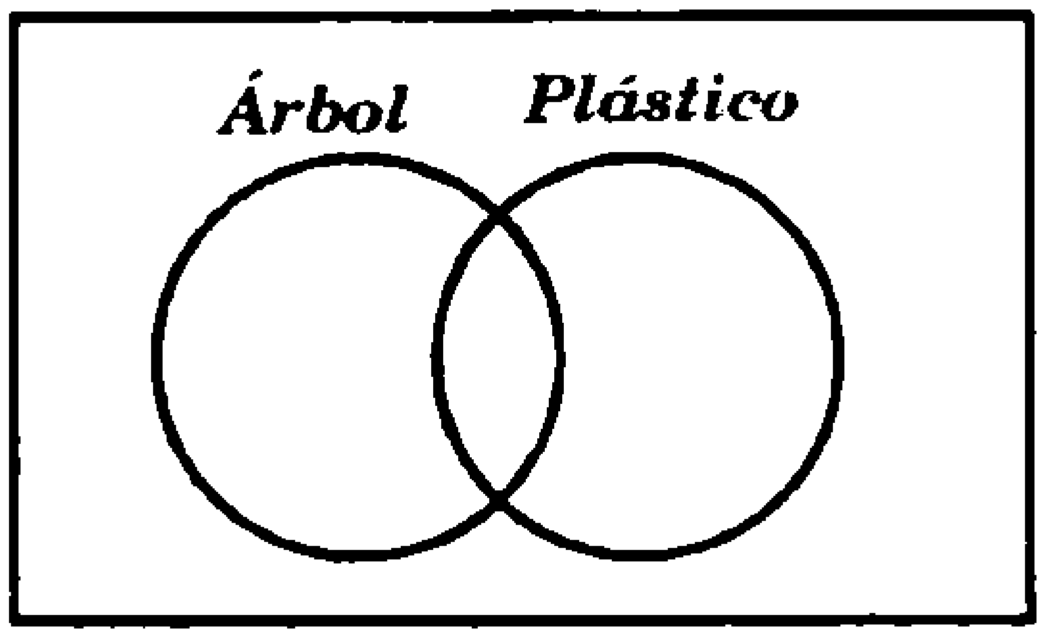
08 Todos los niños son «preguntones»



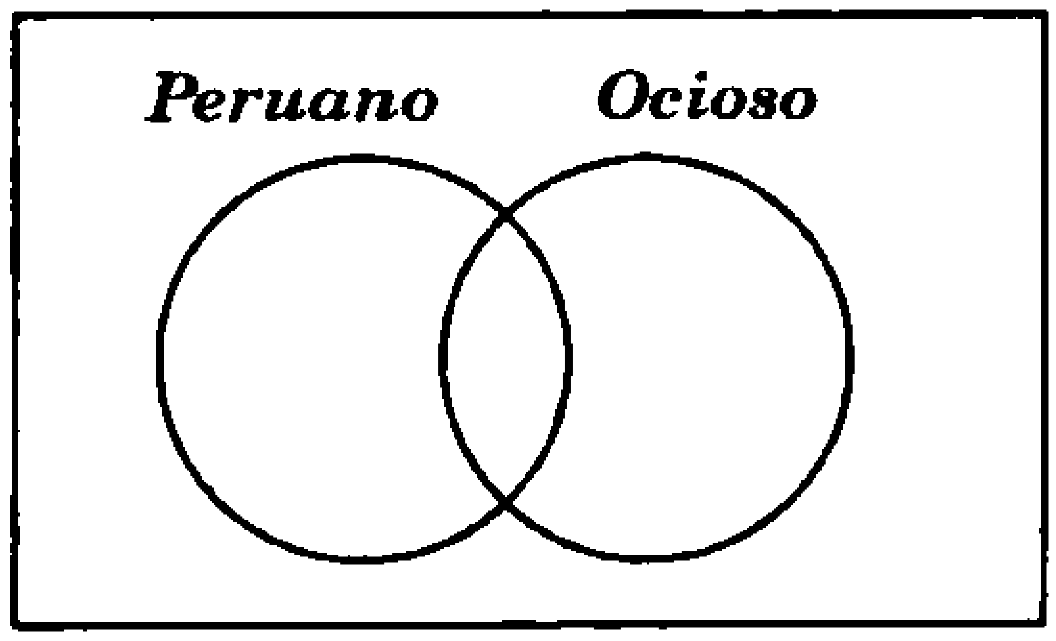
09 Algunos autos son automáticos .



10 Ningún árbol es de plástico .



11 Ningún peruano es ocioso siguientes:



Negar las siguientes proposiciones:

12 Todos los alumnos son fans de *RBD*

13 Todos los profesores tienen paciencia

14 Algunas verduras son desagradables

15 Algunos trabajadores no son puntuales.

16 Ningún puercoespín es comestible

17 Ninguna virtud es innecesaria.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si Todo inteligente es hábil yAlgunos inteligentes son petulantes

Entonces

A) algunos inteligentes son petulantes.

B) algunos hábiles son petulantes.

C) todo inteligente es petulante.

D) algunos petulantes no son hábiles.

E) ningún inteligente es no petulante.

02 Si es falso que Ningún católico tiene fe , se concluye que

A) todo católico tiene fe.
B) algunos católicos tienen fe.
C) algunos católicos no tienen fe.
D) nadie que tenga fe es católico.
E) no hay conclusión.

03 Si Todo matemático es hábil .

Entonces

A) algunos hábiles no son matemáticos.
B) algunos matemáticos no son hombres.
C) ningún matemático es no hábil.
D) ningún matemático es hábil.
E) todo matemático es no hábil.

04 Si Todo carnívoro es mamífero .

Entonces

A) es falso que algún carnívoro no sea mamífero.
B) todo mamífero es carnívoro.
C) ningún mamífero es carnívoro.
D) algunos carnívoros no son mamíferos.
E) algunos mamíferos no son carnívoros.

05 ¿Cuál es la negación de Algunas aves no vuelan?

A) todos los que vuelan son aves.
B) toda ave vuela.
C) ningún ave vuela.
D) algunas aves vuelan.
E) algunos de los que no vuelan son aves.

06 Si Ningún matemático es idealista .

Entonces

A) todo idealista es matemático .
B) es falso que ningún idealista sea matemático .
C) algún matemático es idealista .
D) todo matemático es idealista .
E) algunos matemáticos no son idealistas .

07 Si Ningún insecto es vertebrado .

Entonces

A) todo insecto es vertebrado.
B) algún insecto es vertebrado.
C) algunos vertebrados son insectos.
D) es falso que algún insecto es vertebrado.
E) todo vertebrado es insecto.

08 ¿Cuál es la negación de *Todo mamífero es terrestre?*

A) algunos mamíferos son terrestres.
B) algunos mamíferos no son terrestres.
C) ningún mamífero es terrestre.
D) todo mamífero es no terrestre.
E) todo terrestre es mamífero.

09 Si Todo universitario es crítico, entonces

A) todo crítico es universitario.
B) algunos universitarios son críticos.
C) algunos críticos no son universitarios.
D) algunos universitarios no son críticos.
E) ningún universitario es crítico.

10 ¿Cuál es la negación de *Ningún escritor es objetivo*?

A)todo escritor es objetivo.
B)algún escritor es objetivo.
C) todo escritor es no objetivo.
D) algunos escritores no son objetivos.
E) nadie que sea objetivo es escritor.

11 Si Todo poeta es romántico Ningún realista es poeta

Entonces

A) ningún romántico es realista.
B) todo romántico es realista.
C) algún romántico es realista.
D) algunos románticos no son realistas.
E) algunos realistas no son románticos.

12 Si Ningún realista es irracional Algún realista es objetivo

Entonces

A) algunos objetivos son irracionales.
B) todo objetivo es irracional.
C) ningún objetivo es irracional.
D) algunos objetivos no son irracionales.
E) ningún irracional es objetivo.

13 Si Todo tigre es felino Ningún carnívoro es felino

Entonces

A) ningún león es carnívoro.
B) ningún tigre es carnívoro.
C) todo tigre es carnívoro.
D) algún carnívoro es tigre.
E) ningún mamífero es carnívoro.

(14) Si Todo universitario es perseverante

Algunos universitarios logran sus objetivos

Entonces

A) algunos perseverantes logran sus objetivos.
B) todos los perseverantes logran sus objetivos.
C) ningún perseverante logra sus objetivos.
D) algunos perseverantes no logran sus objetivos.
E) todo perseverante es objetivo.

(15) Si Todo ingeniero es hábil Todo ingeniero es matemático

Entonces

A) todo matemático es hábil.
B) todo hábil es matemático.
C) algunos matemáticos son hábiles.
D) ningún matemático es hábil.
E) algún ingeniero es hábil.

(16) ¿Cuál es la negación de Algunas plantas son nutritivas?

A) todas las plantas son nutritivas.
B) algunas flores son plantas.
C) todo lo nutritivo es planta.
D) ninguna planta es nutritiva.
E) algunas plantas no son nutritivas.

(17) Si Algunas rosas no son aromáticas es falso, por lo tanto también es verdad que

I) ninguna rosa es aromática.
II) algunas rosas no son aromáticas.
III) toda rosa no es aromática.
IV) toda rosa si es aromática.

A) I y II B) sólo I C) todas D) I, II y III E) sólo IV

(18) Es falso que

No toda mujer opte por el machismo, equivale a

A) toda mujer opta por el machismo.
B) algunas mujeres no optan por el machismo.
C) algunas mujeres optan por el machismo.
D) muchas mujeres no optan por el machismo.
E) no toda mujer opta por el machismo.

(19) Si *Todo matemático es racional*

Todo matemático es minucioso

Entonces

A) todo racional es minucioso.
B) algunos racionales son minuciosos.
C) todo minucioso es racional.
D) algunos racionales no son minuciosos.
E) ningún racional es minucioso.

(20) Ya que ningún hombre es inmortal y todo racional es hombre derivamos

A) ningún racional es inmortal.
B) todo racional es inmortal.
C) ningún inmortal es irracional.
D) todo irracional es mortal.
E) ningún irracional es inmortal.

(21) Toda conquista es violenta de aquí que

A) algunas conquistas no son violentas.
B) no toda conquista es violenta.
C) toda conquista es violenta.
D) la conquista del Peru fue violenta.
E) ninguna conquista es violenta.

(22) Si afirmamos que Todo inteligente es hábil Todo ingeniero es inteligente concluimos que

A) algún hábil es inteligente.
B) algún inteligente es ingeniero.
C) todo inteligente es ingeniero.
D) todo ingeniero es hábil.
E) todo hábil es inteligente.

(23) Los infartos son preescolares, pero cada bebé es un infante.

por lo tanto

A) los preescolares son bebés.
B) no existe preescolar que sea bebé.
C) los bebes son preescolares.
D) algún escolar es bebé.
E) algún bebé es escolar.

(24) Si Algunos filósofos son materialistas entonces podemos concluir que:

A) no ocurre que ningún filósofo sea materialista.
B) ningún filósofo es materialista.
C) ningún materialista es filósofo.
D) todo filósofo es materialista.
E) algunos filósofos no son materialistas.

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) B	2) B	3) C	4) A	5) B	6) E	7) D	8) B	9) B	10) B
11) D	12) D	13) B	14) B	15) E	16) D	17) B	18) A	19) B	20) A
21) D	22) D	23) C	24) A						

COMPARACION CUANTITATIVA

CAPITULO 051

OBJETIVOS :

* *Ejercitar las capacidades para resolver los diferentes problemas tipo al comparar, mediante aproximación, cálculo simple, simplificación, uso de propiedades o sentido común, dos cantidades dadas.*

* *Aprender a identificar el procedimiento más adecuado para la solución de un problema.*

COMPARACIÓN CUANTITATIVA

Desde épocas remotas , la Matemática a estado en ia vida del hombre. Todo lo que le rodeaba no hacía sino conducirlo por un camino incipiente e inevitable de la Matemática : Comparar , agrupar y contar . Al comparar dos conjuntos de elementos diferentes (dedos y animales por ejemplo) y querer comunicarlos el hombre ilumina su mente inventa sonidos y voces que lo llevarán a calcular , interpretar y enseñar para que lo entendiesen. Así , supera su etapa primitiva aprendiendo y transformando constantemente la naturaleza de acuerdo a sus necesidades.

En la actualidad , algunas universidades están redefiniendo el perfil del profesional que desean que ingresen a ellas . Esto a su vez ha obligado a modificar la estructura y contenido del examen de ingreso , en los que las preguntas ya no sólo se elaboran para establecer el nivel de conocimientos de parte del postulante , sino reconocer las habilidades que estos poseen ante situaciones polémicas contextualizadas. El presente capítulo de ***comparación cuantitativa*** tiene como objetivo en mayor medida el de evaluar la habilidad del alumno para reconocer propiedades entre los números que un dominio de las técnicas operativas.

LA HABILIDAD MATEMÁTICA DE COMPARAR

Cabe indicar que comparar tiene varias acepciones; pero para los fines de este capítulo , la definiremos como una habilidad matemática que consiste en estimar las diferencias y semejanzas entre cantidades de una misma especie.

LEY DE TRICOTOMÍA :

Dados dos números reales a y b , sólo puede haber entre ellos la siguiente relación de orden :

$$\boxed{a<b \ \vee\ a>b \ \vee\ a=b}$$

PREGUNTAS DE COMPARACIÓN CUANTITATIVA

Es un tipo de ítem con cuyas preguntas se logra evaluar la comprensión matemática que posee una persona, al comparar dos cantidades dadas mediante aproximación , cálculo simple o sentido común.

* El modelo de este tipo de preguntas es :

Se dan dos cantidades ,algunas veces precedidas por un enunciado ,una en la columna ***A*** y otra en la columna ***B***.

Se trata de comparar estas dos cantidades y luego discriminar , deberás marcar :

A) Si la cantidad de ***A*** es mayor a la de ***B***.

B) Si la cantidad de ***B*** es mayor a la de ***A***.

C) Si ambas cantidades son iguales.

D) Si falta información para decidir.

E) No debe usar esta opción.

OBSERVACIÓN :

Según la ley de tricotomía sólo existen tres relaciones posibles entre ***A*** y ***B*** , si ésta no se puede establecer, entonces se apela a la alternativa ***D***; la última alternativa no es relevante ni trascendente, esta cumple sólo el papel de distractor.

Veamos algunos problemas sobre comparación de cantidades conocidas :

EJEMPLOS :

Enunciado	Columna A	Columna B
1	$13\frac{17}{21}+29\frac{14}{19}+18\frac{23}{12}$	$29\frac{23}{12}+18\frac{17}{21}+13\frac{14}{19}$
2	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}$
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$
4	$\frac{2004}{2005}$	$\frac{2003}{2004}$
5 Sea x un número positivo	x	x^2

RESOLUCIÓN :

1) Se podría operar los términos de ambas columnas, lo cual nos llevaría mucho tiempo. Recuerda que un número mixto es la suma de un entero y una fracción.

$$A=\underbrace{13}\underline{\frac{17}{21}}+\underbrace{29}\underline{\frac{14}{19}}+\underline{\frac{23}{12}}+\underbrace{18}\frac{23}{12} \qquad B=\underbrace{29}\underline{\frac{23}{12}}+\underbrace{18}\underline{\frac{17}{21}}+\underbrace{13}\underline{\frac{14}{19}}$$

Por lo tanto : $A=B$

RPTA : "C"

2) Una forma de comparar las expresiones dadas, es calculando el valor de cada columna :

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6} \qquad B=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$$

Ambos resultados tienen el mismo denominador, sólo

debemos comparar los numeradores :

$$5 \square \sqrt{13}\ ;\ Si\ \sqrt{9}=3 \wedge \sqrt{16}=4 ; \sqrt{13}$$

es un valor que está entre *3* y *4*.

* Por lo tanto **: $A > B$**

RPTA : "A"

3) Dado que no puede usar calculadora para comparar radicales, se recomienda elevar ambos términos a un mismo exponente tal que se elimine el radical.

$$(\sqrt{5})^6 \square (\sqrt[3]{3})^6 \to 2^3 \square 3^2 \to 8 \square 9$$

* Por lo tanto : $A < B$

RPTA : "B"

4) Si se dividen ambas fracciones , resultaría tedioso buscar la diferencia entre ambos cocientes dado que dichas cantidades son aproximadamente iguales. Analizando ambas columnas se observa que ambas fracciones están formadas por términos consecutivos. Se podría probar con números más pequeños (Inducción Matemática) para observar lo que se presenta al compararlos.

* Vemos : $\dfrac{3}{4} \square \dfrac{2}{3}$

* Por una propiedad de las fracciones , podemos compararlas mediante la multiplicación en aspa :

$$\Rightarrow 3(3) \square 4(2) \Rightarrow 9 \boxed{>} 8$$

* Intentemos con otro caso :

$$\frac{5}{6} \square \frac{4}{5} \Rightarrow 5(5) \square 6(4) \Rightarrow 25 \boxed{>} 24$$

* En ambos , el resultado de la primera columna es mayor por lo cual podemos inducir que :

$$\frac{2004}{2005} > \frac{2003}{2004}$$

* Por lo tanto **: $A>B$**

RPTA : "A"

OBSERVACIÓN :

Si se apela al Álgebra , se puede llegar a demostrar la resolución anterior de la siguiente forma : *2003*

$$\frac{2004}{2005} \square \frac{2003}{2004} \Rightarrow (2004)^2 \square \underbrace{(2003)}_{2004-1}\underbrace{(2005)}_{2004+1}$$

$$\Rightarrow (2004)^2 \boxed{>} (2004)^2 - 1$$

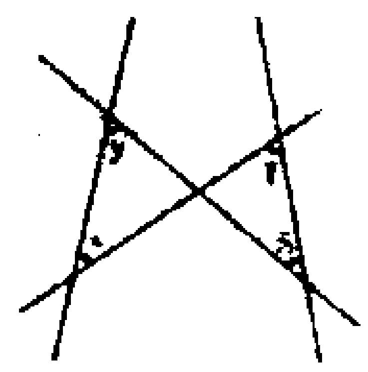
5) Para comparar cantidades desconocidas expresadas en forma de variables , es conveniente probar un juego de valores para dichas variables , y ver cómo varía la relación entre las columnas . Como «*x*» es un real positivo,

probemos con : $x = 0 ; 1 ; 2 ; \dfrac{1}{2}$

A		B
0	$\boxed{=}$	0^2
1	$\boxed{=}$	1^2
2	$\boxed{<}$	2^2
$\dfrac{1}{2}$	$\boxed{>}$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

Se observa que el orden no se mantiene igual para todos los valores supuestos. Por lo tanto ,para saber cuál de las columnas tiene una cantidad mayor se requiere de mayor información.

RPTA : "D"

# Preg.	Enunciado	Columna A	Columna B
1	23 + 23+ 16 16 57 27 x y 108 108	$3x$	$2y$
2	$x = 0$	$3+\dfrac{1}{x}$	$3-\dfrac{1}{x}$
3		$x+y$	$s+T$

RESOLUCIONES :

1) De la información :

* $23+16+57+x = 108 \Rightarrow x = 12$
* $23+16+27+y = 108 \Rightarrow y = 42$

Ahora :

Columna *A*	Columna *B*
$3x = 3(12)=36$	$2y=2(42)=84$

$\Rightarrow$ La columna "*B*" es mayor .

RPTA : "B"

2) * Si :

$$x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0 \Rightarrow 3+\frac{1}{x}>3\ ,\ -\frac{1}{x}<0 \Rightarrow 3-\frac{1}{x}<3$$

* Si : $x<0 \Rightarrow \dfrac{1}{x}<0 \Rightarrow 3+\dfrac{1}{x}<3,$

$\Rightarrow$ Entonces no podemos comparar las columnas, pues tendríamos que saber si "x" es positivo o negativo.

RPTA : "D"

3) Por la propiedad del ángulo exterior , se deduce que : $x + y = s + T$

RPTA : "C"

PRIMERA PRÁCTICA RESUELTA

A continuación se propone en cada pregunta , *2* expresiones o enunciados matemáticos y se pide determinar la relación entre ambos , teniendo

presente las siguientes alternativas :

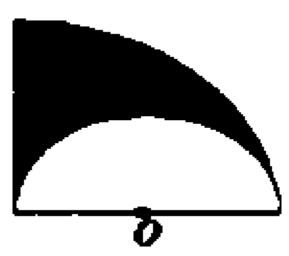
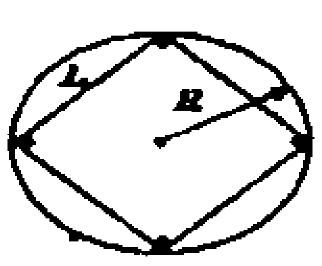
A) La cantidad en A es mayor que en B.

B) La cantidad en B es mayor que en A.

C) La cantidad en A es igual a B.

D) No se puede determinar

E) ¡ No debe usar esta opción !

#Prg.	Enunciado	ColumnasA	ColumnasB
1	$y = 5$	$(5-y)(y-5)$	0
2		MCD(228;450)	MCD(30;40;45)
3	$c > 0$	20%de5c	30%de7c
4	En el siguiente cuarto de circunferencia "O" es punto medio de la semicircunferencia. 	Área sombreada	Área no sombreada
5	$0 < x < 1$	$x - x^2$	$x - x^{20}$
6	Un cuadrado C con diagonal "c" y un cuadrado D Área de C = 3(Área de D)	c	$\sqrt{3}d$
7	$a + 2 = b$	$3a - 6$	$3b - 12$
8		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{7}{10}$
9		Cantidad de valores Z que puede tomar "n" $n+8<17$	Cantidad de valores Z que pueda tomar "n" $3n < 28$
10	Un hijo quiere comprar un carro y el padre piensa darle dinero por 7 días del siguiente	El primer día 7, el segundo día 14 y cada día así el doble del día anterior hasta el 7mo. día.	El primer día 30, el segundo día 60 y cada día así 30 soles más que el día anterior hasta el
11	$ab < 0$	$(a+b)^2$	$a^2 + b^2$
12		$L\sqrt{2}$	R
13	$x>0$; $y>0$	$\sqrt{x+y}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$

SOLUCIONARIO

1) Si : $y < 5$

$5-y >; y-5 < 0 \Rightarrow (5-y)(y-5)<0$

Si : $y > 5$

$5-y < 0 \Rightarrow y-5 > 0$

$\Rightarrow (5-y)(y-5)<0 \Rightarrow (5-y)(y-5)<0$

RPTA : "B"

2) $MCD(228 ; 450) = 6$

$MCD(30 ; 40 ; 45) = 5$

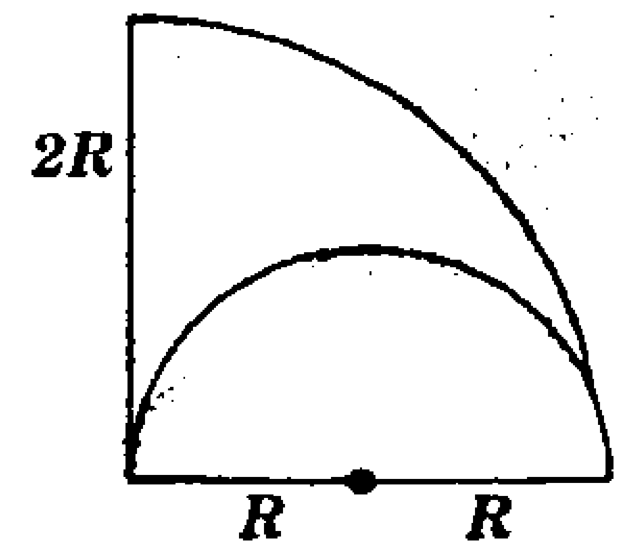
RPTA : "A"

3) $\frac{20}{100} \times 5c = c$; $\frac{30}{100} \times 7c = 2{,}1c$

Como $c > 0$, entonces respuesta es :

RPTA : "B"

4)



Columna *"A"*

área sombreada :

$$\frac{\pi(2R)^2}{4} - \frac{\pi R^2}{2} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2}$$

Columna *"B"*

área no sombreada : $\frac{\pi R^2}{2}$

RPTA : "C"

5) Si : $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 > x^{20}$

$\Rightarrow -x^2 < -x^{20} \Rightarrow x - x^2 < x - x^{20}$

RPTA : "B"

6) Si : $A_C = 3A_D \Rightarrow \frac{A_C}{A_D} = \frac{3}{1}$

* Luego :

$$\frac{Diagonal\ C}{Diagonal\ D} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3}{1} \Rightarrow c = \sqrt{3d}$$

RPTA : "C"

7) $a = b-2 \Rightarrow 3a = 3b - 6$

$\Rightarrow 3a - 6 = 3b - 12$

RPTA : "C"

8) Columna *A* — Columna *B*

$\frac{-\sqrt{2}}{2}$ — $\frac{-7}{10}$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-5\sqrt{2}}{10} \Rightarrow como : -5\sqrt{2} < -7 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{-7}{10}$$

RPTA : "B"

9) Columna *A* :

$n + 8 < 17 \Rightarrow n = \{1;2,3......8\}$: *8* valores

Columna *B* :

$3n < 28$

$n < 9{,}333..... \Rightarrow n = \{1;2,3......9\}$: *9 valores*

$\Rightarrow B > A$

RPTA : "B"

10) Columna *A* :

$$\overset{\times 2}{7 + 14} + 28 + 56 + ... + 224$$

$$\left(\frac{7(2^7-1)}{2-1}\right) = S/.889$$

Columna B :

$$\overset{+30}{30 + 60} + 90 + ... + 210$$

$$\left(\frac{210-30}{2}\right)7 = S/.840$$

$\rightarrow A > B$

RPTA : "A"

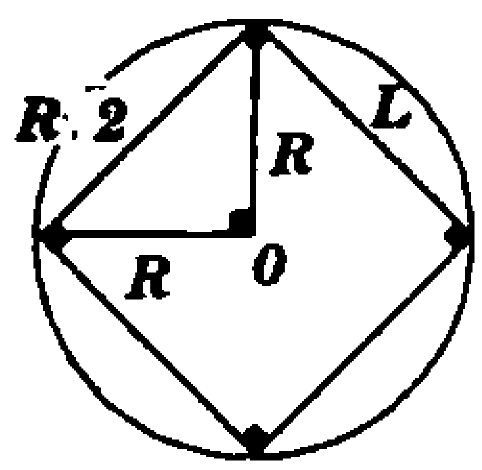
11) Columna A : $\cancel{a^2 + b^2} + \underset{(-)}{2ab}$

Columna B : $\cancel{a^2 + b^2}$

$\rightarrow B > A$

RPTA : "B"

12) Solución :



$L = R\sqrt{2}$

$L\sqrt{2} = 2R$

Columna $A : 2R$ Columna $B : R$

$\rightarrow A > B$

RPTA : "A"

13) Como $x>0 \wedge y>0$

* Elevando al cuadrado ambos :

A	B
$x+y$	$x+y+2\sqrt{xy}$

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

A estas preguntas , se dan dos cantidades , una en la columna A y la otra en la columna B. Tienes que determinar la relación entre ambas y marcar :

A) Si la cantidad en A es mayor que en B.
B) Si la cantidad en B es mayor que en A.
C) Si ambas cantidades son iguales.
D) Si falta información para poder determinarlo.
E) ¡NO DEBE UTILIZAR ESTA OPCIÓN!

COLUMNA A	COLUMNA B
1) 1h 40min 30s	99min 90s

2) Si M es el triple de N (M y N positivos)

$2M$	$5N$

3) Si A excede en 100 a B

A	B

4) Si x excede en 180 a y

$x-140$	$y+140$

5) Si x excede en 50 al doble de y

$x-y$	y

6) Si a y b son positivos , la solución de.

$117x + 2a + 15b = 0$	$119x - a - 3b = 0$

7) Si $a>0$ y $b>0$

$a^3 + b^3$	$(a+b)^3$

8) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2$	$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

9) El número de elementos de :

$A = \{x \in \mathbb{Z} / 1 < 3x < 17\}$	$B = \{x \in \mathbb{Z} / 8 < 2x < 6\}$

10) $9 - 8 + 4 \times 2$	$8 + 2(3-4)$

11) $777^2 - 775^2$	$778^2 - 776^2$

12) Dada la expresión : $3x-2y=5$

El valor de x cuando $y=5$	El valor de y cuando $x=6$

13) $\dfrac{78454}{78524}$	$\dfrac{78453}{78523}$

14) Si r y s son las raíces de $(x+3)^2=9$

$r+s$	rs

15) Número de conjuntos de $A=\{m;n;p;q\}$	Número de elementos de $B=\{x \in \mathbb{N}/2<x \le 18\}$

16) Si : $n(B \cap C)$	$n(A \cap B \cap C)+n(A-B)$

$A)=\{1;2;3;4;5\}$ $B)=\{1;2;4;6;7\}$ $C)=\{1;2;5;7;9\}$

17) La menor de las raíces de :

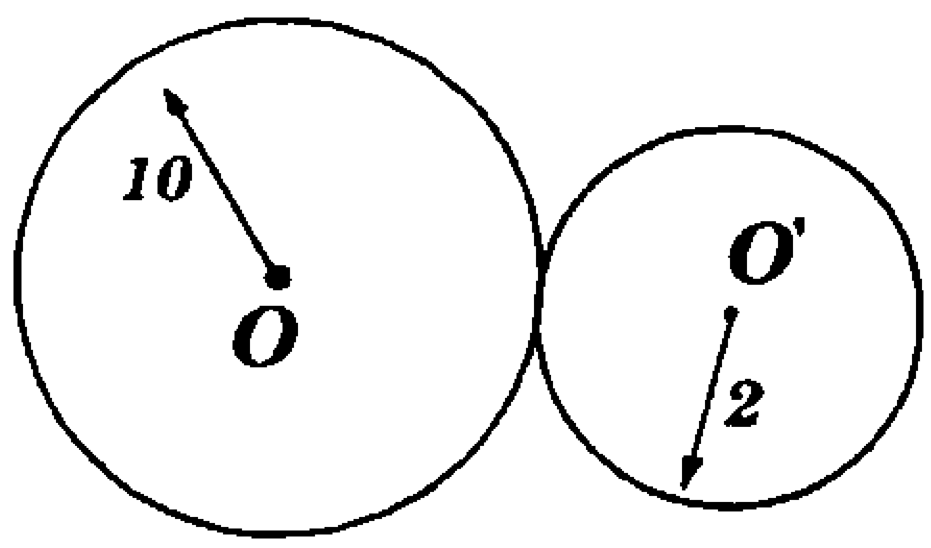
$(x+3)(x+4)(x+5)=0$	$(x+2)(x+5)(x+3)=0$

18) Si : $a^2b>0$; $b^2c<0$

c	b

19) 100m más 220cm más 5000mm	90m más 1700cm

20) En la figura , se tienen dos circunferencias tangentes exteriores



Distancia entre los centros	Longitud de la circunferencia menor

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) C	2) A	3) A	4) B	5) A	6) B	7) B	8) C	9) B	10) B
11) B	12) B	13) A	14) B	15) C	16) B	17) A	18) B	19) A	20) B

SUFICIENCIA DE DATOS

CAPITULO 052

OBJETIVOS :

* *Relacionar conceptos de diferentes capítulos en un solo problema .*
* *Precisar la relación entre entre dos situaciones.*
* *Desarrollar la capacidad para establecer que datos son necesarios o imprescindibles para llegar a la resolución de un problema.*
* *Afianzar conceptos matemáticos.*

SUFICIENCIA DE DATOS

Es un tipo de preguntas que consiste en reconocer qué datos son suficientes o necesarios para obtener la solución de un problema .

En las preguntas de este tipo se propone un problema y, generalmente, se ofrecen **2** informaciones para resolverlo. El objetivo es identificar qué información(es) se necesita *(n)* para resolver el problema, para discriminar y marcar:

A) La información ***I*** es suficiente.
B) La información ***II*** es suficiente.
C) Es necesario utilizar ambas informaciones.
D) Cada una de las informaciones, por separado, es suficiente.
E) Las informaciones dadas son insuficientes.

* Se debe tener en cuenta que un dato tendrá la información suficiente solo si con este se puede obtener única respuesta al problema planteado.

* Se puede èmpezar el análisis intentando resolver el problema con cada información por separado.

* Al resolver el problema con cada información por separado, no necesariamente se debe obtener el mismo resultado.

* Lo importante no es encontrar la solución del problema, sino determinar la información que se requiere para resolverlo.

EJEMPLO MODELO 1 :

Determinar *«x»*

I) $x+3y=7$ *II)* $x-2y=5$

A) La información I es suficiente.
B) Lo información II es suficiente.
C) Es necesario utilizar ambas informaciones.
D) Cada una de las informaciones , por separado , es suficiente.
E) Las informaciones dados son insuficientes.

RESOLUCIÓN :

* Con el primer dato es imposible (hay infinitas soluciones).

* Con el segundo dato es imposible (hay infinitas soluciones).

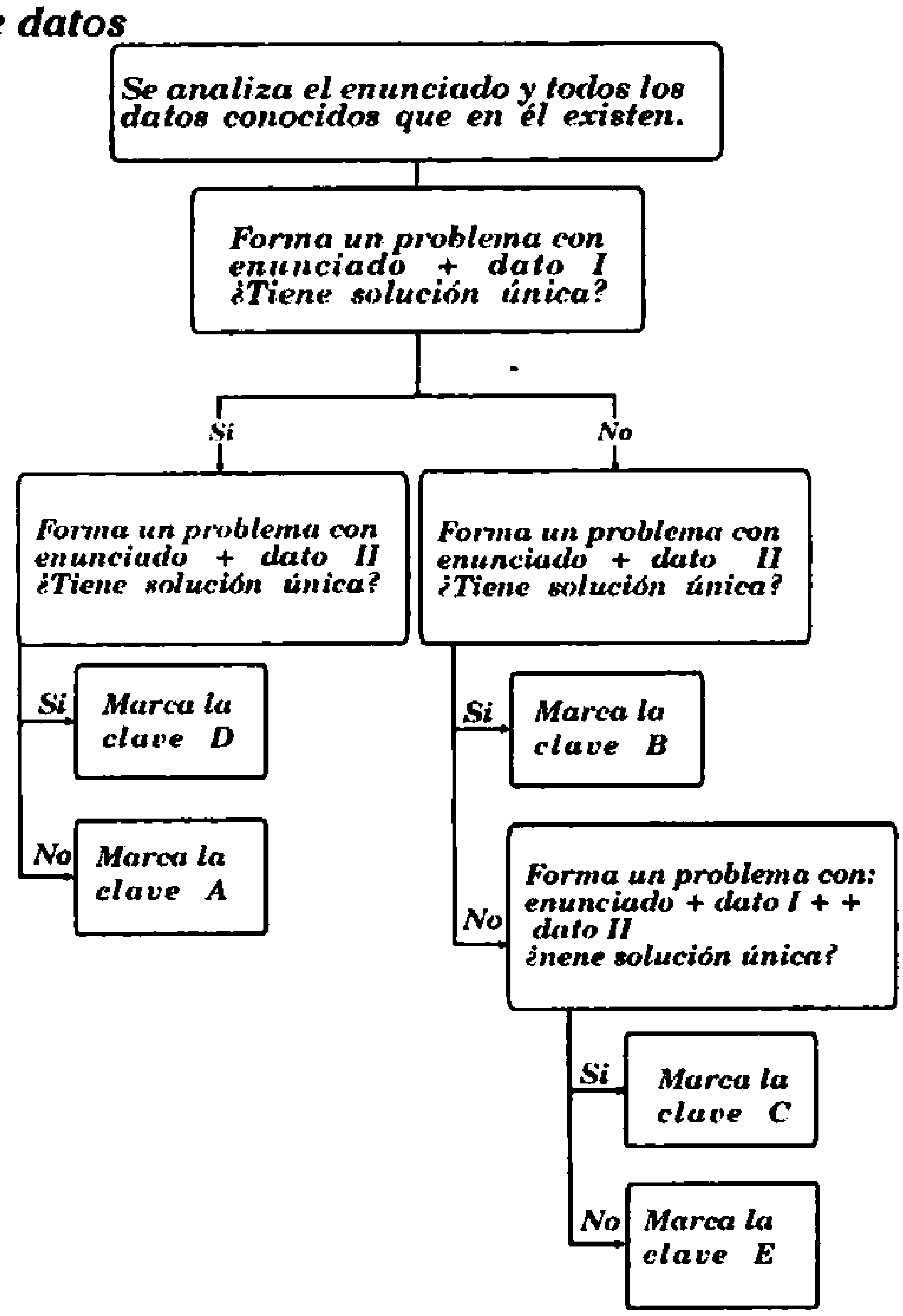
Si los combino tengo un sistema de **2** ecuaciones con **2** incógnitas . Si las sumo se podra determinar el valor de *«x»*. fin del análisis.

RPTA : "C"

¿Acaso me debí preocupar por el valor final de «a»? Pues no hizo falta.

* En algunos casos que se pide el valor numérico de alguna expresión grande , deberá primero pensar en factorizarla o reducirla . No intente reemplazar el dato de manera directa . Casi siempre lo único que se logra es complicar más el problema.

Estrategia para resolver problemas de suficiencia de datos



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

De cuatro números enteros el mayor es w y el menor es x siendo ambos impares y los dos restantes y y z son pares , comprendidos entre *2* y *10.*

Considerando la siguiente información :

I) $w+x=14$

II) $y > 5$ y $y-z=2$

Se desea determinar los números pares.

A) La información *I* es suficiente.

B) La información *II* es suficiente.

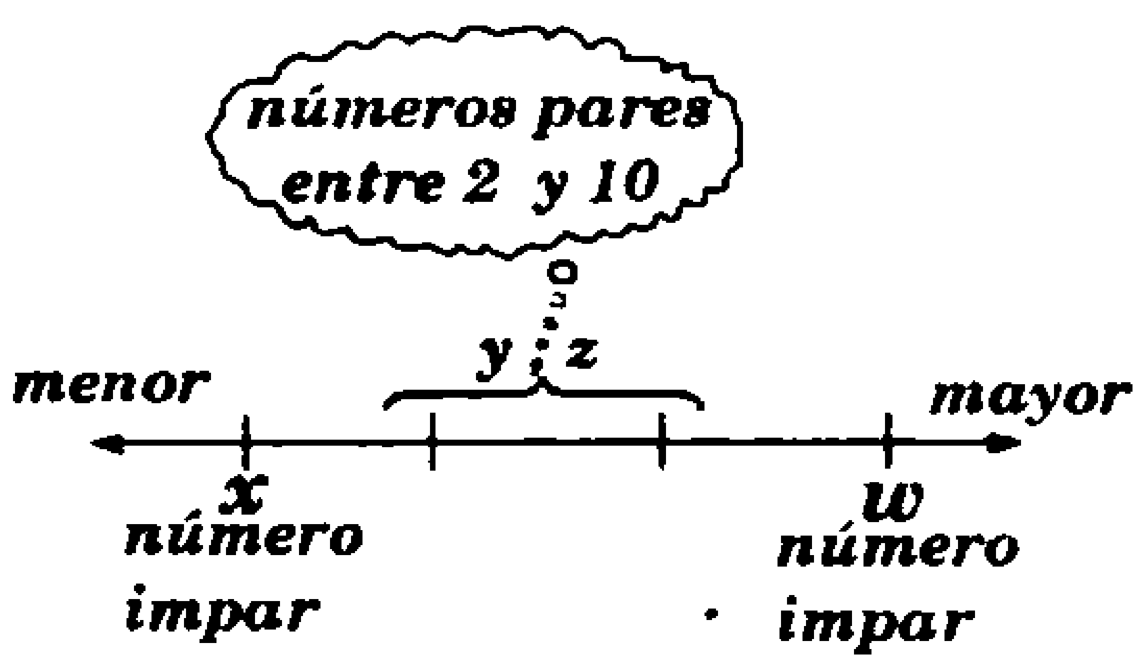
C) Es necesario emplear ambas informaciones a la vez.

D) Cada una de las informaciones , por separado , es suficiente.

E) La información no es suficiente.

RESOLUCIÓN :

* De los datos tenemos :



Para encontrar los números pares analizados

I) $w+x=14$

(la información brindada no nos permite calcular los números pares)

II) $y>5$; y $y-z=2$

Con dicha información obtenemos dos valores de :

y	z
6	4
8	6

Por lo tanto , la información brindada es insuficiente.

* ya que en el texto , y y z son pares , comprendidos entre *2* y *10* , la coma hace referencia a y y z.

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

¿Qué edad tiene el menor de tres hermanos , si el mayor tiene *10* años más que él y *3* años más que el segundo?

Información brindada

I) El segundo tiene *11* años.

II) La suma de las edades de los tres hermanos es *29* años.

Para resolver la pregunta.

A) la información *I* es suficiente.

B) la información *II* es suficiente.

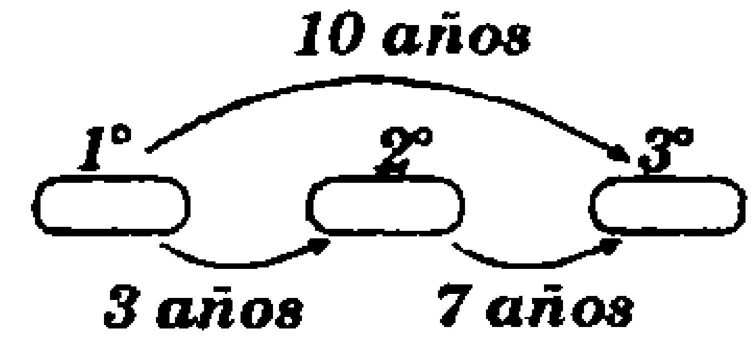
C) es necesario emplear ambas informaciones.

D) cada una de las informaciones , por separado , es suficiente.

E) la información brindada es insuficiente.

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado se deduce :



• La información *I* brinda la edad del 2^{do} (*11* años) con lo cual se obtiene la edad del menor (4 años).

• Con la información *II* se puede plantear la ecuación:

$$\overbrace{(x+10)}^{1^{ro}}+\overbrace{(x+7)}^{2^{do}}+\overbrace{x}^{3^{ro}}=29$$

y al resolver se obtiene $x=4$ (edad del menor)

* Por lo tanto , cada una de las informaciones , por separado es suficiente.

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Hallar "$a+b$"

Dato :

I) "a" es el doble de "b"

II) "a" es *17* unidades mayor que "b"

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El II es suficiente y el dato I no lo es .

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D)Cada uno de los datos , por separado ,es suficiente.

E) Se necesitan más datos .

RESOLUCIÓN :

Dato *I* : $a=2b$............(no es suficiente)

Dato *II* : $a=17+b$........(no es suficiente)

I y *II* juntos :

$2b=17+b \Rightarrow n=17 \wedge a=34$

$a+b=51$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Hallar el *MCD* de los enteros positivos y diferentes *A, B* y *C.*

Información brindada :

I) ***B*** y ***C*** son números consecutivos.

II) ***A*** es el único número par.

Para responder la pregunta :

A) La información I es suficiente.

B) La información II es suficiente.

C) Es necesario utilizar ambas informaciones.

D) Cada una de las informaciones por separado , es suficiente.

E) Las informaciones dadas son insuficientes.

RESOLUCIÓN :

I) ***B*** y ***C*** son primos entre sí

$\Rightarrow MCD(A;B;C)=1....(\checkmark)$

II) $A=6$, $B=3$, $C=9 \Rightarrow MCD(A;B;C)=3$

$A=6$, $B=5$, $C=7 \Rightarrow MCD(A;B;C)=1.......$ ✗

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Una empresa necesita cubrir ***17*** nuevos puestos de trabajo , para lo cual realiza un concurso de selección. Si en el concurso se presentan ***36*** postulantes en total y en ***13*** puestos se presenta más de una persona por puesto , ¿qué dato es suficiente para saber en cuantos puestos se presentarán ***3*** postulantes?

I) El número máximo de postulantes por puesto es de ***3***.

*II)*El total de puestos donde hubo dos postulantes fue ***7***.

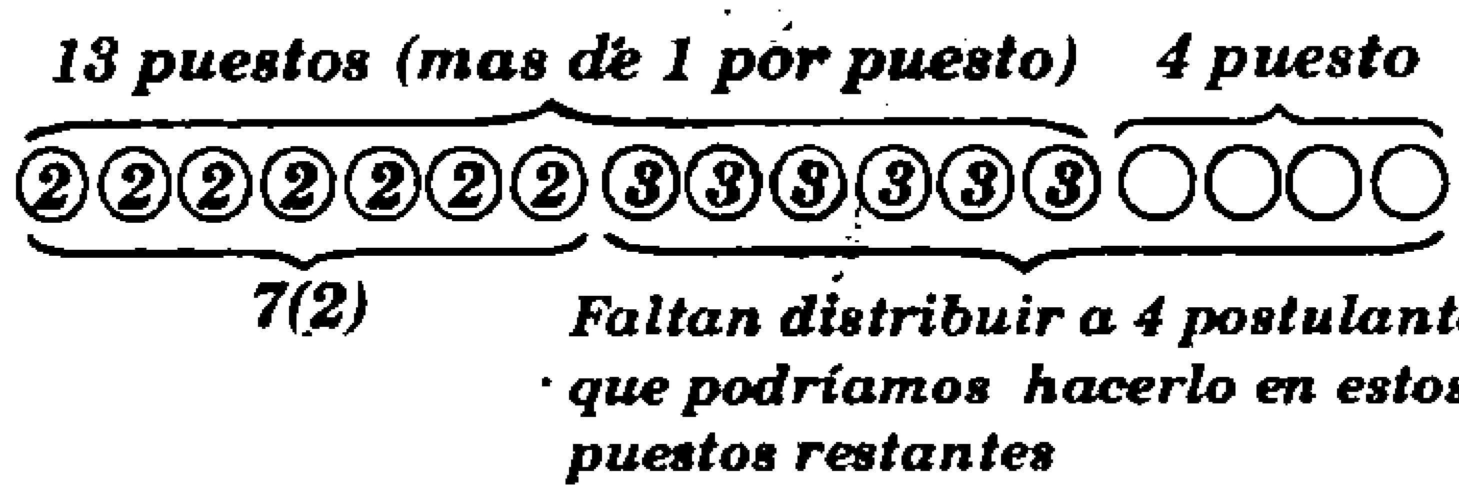
III) En todos los puestos , por lo menos hubo un postulante.

A) I , II y III ***B) II y III*** ***C) II***

D) I y II ***E) B ó D***

RESOLUCIÓN :

* Del análisis de las condiciones del problema y del dato ***II*** , se deduce que :



Con el dato ***I*** o con el dato ***III*** se deduce que dichos ***4*** postulantes se ubican en los ***4*** últimos puestos. Por lo tanto las alternativas correctas serían ***B*** o ***D***.

* Si asumiéramos que la información inicial dada implica cubrir necesariamente todos los puestos, entonces no harían falta los datos ***I*** y ***III*** y bastaría solo el dato ***II***

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Se requiere determinar el volumen de un cilindro recto.

I) Se conoce el perímetro de la base y la relación entre la altura y el radio.

II) Se conoce el área lateral del cilindro y el radio de la base.

A) La información I es suficiente.

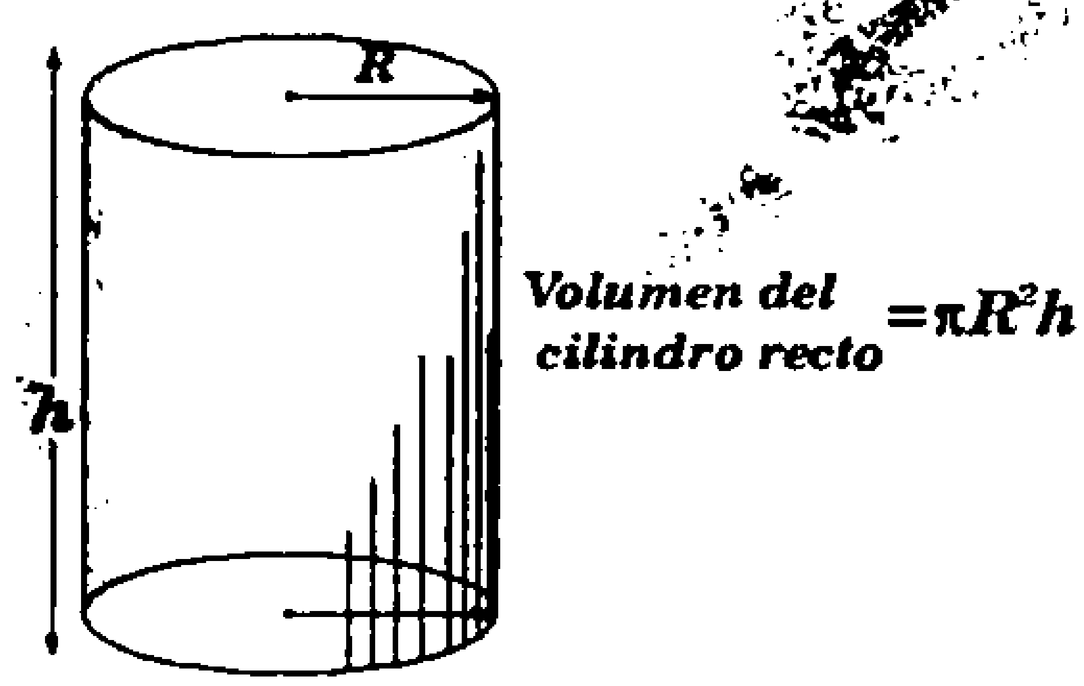
B) La información II es suficiente.

C) Es necesario emplear ambas informaciones a la vez.

D) Cada una de las informaciones, por separado, es suficiente.

E) La información brindada es insuficiente.

RESOLUCIÓN :



INFORMACIÓN I :

Perímetro de la base $\Rightarrow$ Se conocerá el radio ***(R)***

Altura / radio

* Como se conoce el radio (de lo anterior), se conocerá la altura ***(h)***

Entonces , con este dato se puede calcular el volumen.

INFORMACIÓN II :

* Área lateral = $(2\pi R)h$

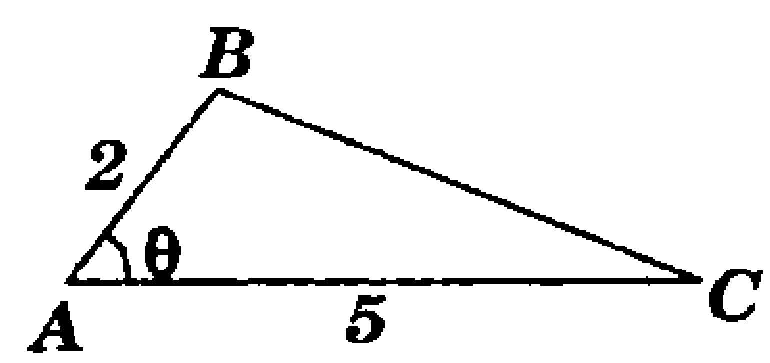
* Radio ***(R)***

Se puede hallar la altura ***(h)*** y como el radio es dato, por lo tanto , se puede calcular el volumen utilizando solo este dato.

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

La figura muestra un triángulo ***ABC*** , donde desde sus lados miden $AB = 2cm$, $BC = 5\ cm$; además ***q*** es un ángulo agudo.



Calcular el perímetro del triángulo ***ABC*** considerando la siguiente información :

I) El triángulo ***ABC*** es isósceles.

II) El valor del ángulo θ

Para resolver el problema :

A) La información I es suficiente.

B) La información II es suficiente.

C) Es necesario utilizar ambas informaciones.

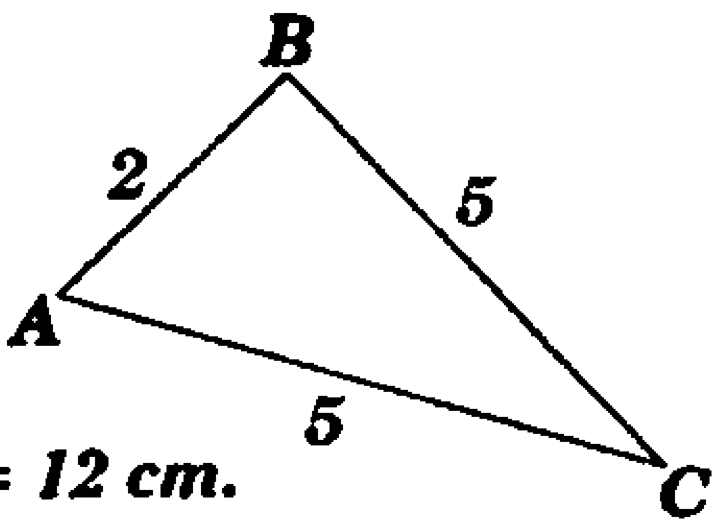
D) Cada una de las informaciones por separado , es suficiente.

E) Las informaciones dadas son insuficientes.

RESOLUCIÓN :

* Analicemos los datos por separado :

I) Si el triángulo es isósceles, tendríamos :



$\Rightarrow$ Perímetro = ***12 cm.***

* Ten en cuenta que $AB = BC = 2$ no es posible, por existencia de triángulos.

II) Si conocemos "θ", el lado $\overline{BC}$ podría calcularse mediante la "Ley de Cosenos" por ejemplo , y sería factible hallar el perímetro de ABC ✓

$\Rightarrow$ Cualquiera de los datos resuelve el problema.

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

Determine el valor de $P_{(40)}$, si $P_{(x)}=P_{(x+2)}-2$

INFORMACIÓN :

I) $P_{(0)} = 2$ *II)* $P_{(80)} = 82$

Para resolver el problema :

A) La información I es suficiente.

B) La información II es suficiente.

C) Es necesario emplear ambas informaciones a la vez.

D) Cada una de las informaciones , por separado es suficiente.

E) La información brindada es insuficiente.

RESOLUCIÓN :

* Según el dato : $P_{(x)}=P_{(x+2)}-2$

* Nos piden hallar el valor de $P_{(40)}$

I) Si $P_{(0)}=2$,

* tenemos para los siguientes términos :

$$P_{(0)} = \underbrace{P_{(0+2)}}_{P(2)} - 2 = 2 \rightarrow P_{(2)} = 4 \quad (+2)$$

$$P_{(2)} = \underbrace{P_{(2+2)}}_{P(4)} - 2 = 4 \rightarrow P_{(4)} = 6 \quad (+2)$$

$$P_{(4)} = \underbrace{P_{(4+2)}}_{P(6)} - 2 = 6 \rightarrow P_{(6)} = 8 \quad (+2)$$

$$\vdots$$

* En general : $P_{(n)}=n+2$,

* Entonces : $P_{(40)} = 42$

Luego , el dato *I* es suficiente para resolver el problema.

II) Si $P_{(80)} = 82$, tenemos para los siguientes términos

$$P_{(78)} = \underbrace{P_{(78+2)}}_{P(80)} - 2 \rightarrow P_{(78)} = 80 \quad (+2)$$

$$P_{(76)} = \underbrace{P_{(76+2)}}_{P(78)} - 2 \rightarrow P_{(76)} = 78 \quad (+2)$$

$$P_{(74)} = \underbrace{P_{(74+2)}}_{P(76)} - 2 \rightarrow P_{(74)} = 76 \quad (+2)$$

$$\vdots$$

* En general : $P_{(n)}=n+2$,

* Entonces : $P_{(40)} = 42$

* Luego , el dato *II* es suficiente para resolver el problema.

* Por lo tanto , cada una de las informaciones por separado es suficiente.

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

¿Qué se necesita para saber cuántos kilógramos de carne come en una semana seis gatos, seis perros y sesenta ratones?.

Datos :

I) Ocho gatos comen ***1kg*** en un día y cuatros perros comen ***1kg*** en un día.

II) Doce gatos comen ***3kg*** en dos días y ***10*** ratones comen ***1kg*** en dos días.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El II es suficiente y el dato I no lo es .

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D)Cada uno de los datos , por separado ,es suficiente.

E) Se necesitan más datos .

RESOLUCIÓN :

Dato ***I :***

Gastos	*Días*	*Carne*
8	1	1Kg
6	7	x

Perros	*Días*	*Carne*
6	1	1kg
6	7	y

Faltaría conocer lo que comen los ratones.

Datos ***II*** :

Gatos	*Días*	*Carne*
12	2	3Kg
6	7	x

Ratones	Días	Carne
10	2	1Kg
60	7	y

Faltaría conocer que comen los perros.
Necesitamos *I* y *II* saber lo que comen todos.

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Hay números reales *"a"* , *"b"* y *"c"*.
Hallar : *"ac – bc"*
Dato :
I) b=a *II)c=o*

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El II es suficiente y el dato I no lo es .
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D)Cada uno de los datos , por separado ,es suficiente.
E) Se necesitan más datos .

RESOLUCIÓN :

Datos *I :*
* Si : $b=a \Rightarrow cb=ca \Rightarrow ac \times bc = 0$ (suficiente)
Dato *II :*
* Si : $c = 0 \Rightarrow ac- bc = 0$ (suficiente)

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

Hallar *"x"*
Dato :
I) 3x = x + 3 *II) x + 3 = 3 + x*

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El II es suficiente y el dato I no lo es .
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos , por separado ,es suficiente.
E) Se necesitan más datos .

RESOLUCIÓN :

Dato *I* :

$3x = x + 3$

$2x = 3 \Rightarrow x = 1,5$ (suficiente)

Dato *II* : $x + 3 = 3 + x$
"x" toma cualquier valor (no es suficiente)

RPTA : "A"

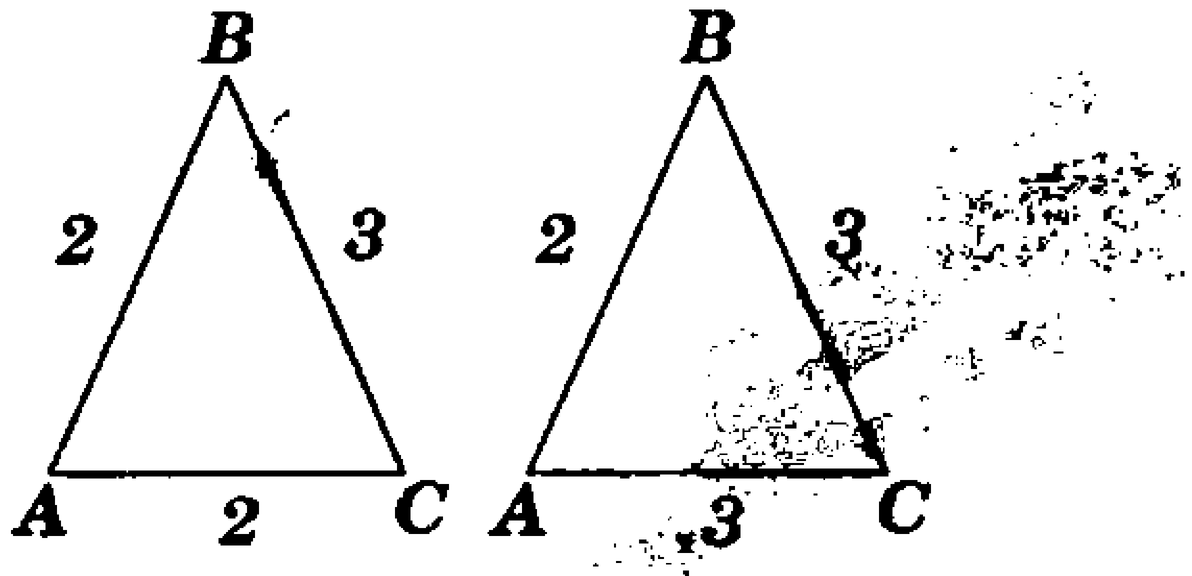
PROBLEMA 12 :

Calcular el área del triángulo isósceles *ABC*.
Información brindada :
I) AB = 2cm
II) BC = 3cm
Para responder la pregunta :

A) La información I es suficiente.
B) La información II es suficiente.
C) Es necesario utilizar ambas informaciones.
D) Cada una de las informaciones por separado , es suficiente.
E) Las informaciones dadas son insuficientes.

RESOLUCIÓN :

* Está claro que cada información por separado es insuficiente para hallar el área del triángulo , así que usaremos ambas a la vez :

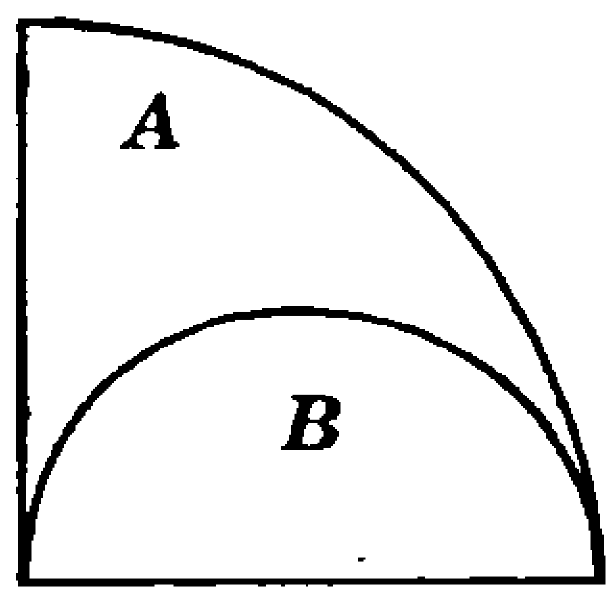


* Como hay *2* áreas posibles , falta información para determinar lo pedido.

RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

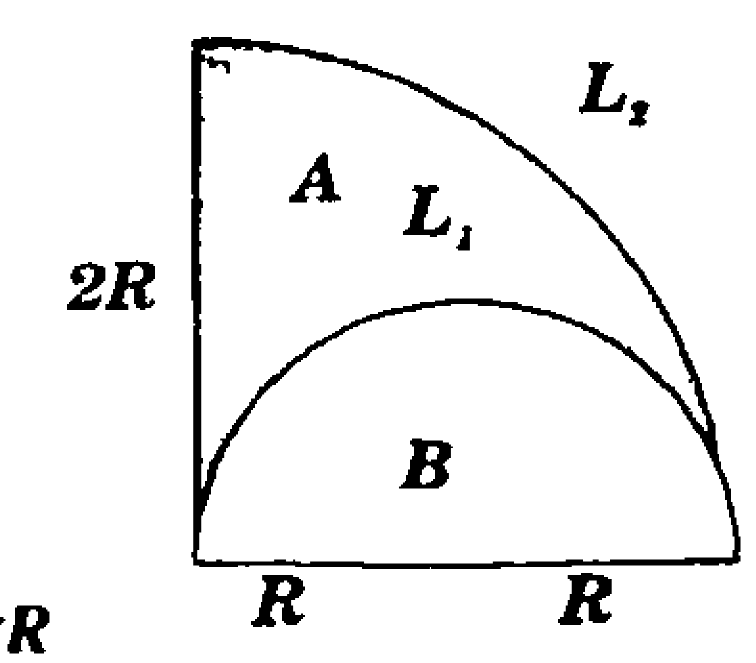
En un cuarto de círculo, hallar el perímetro de *"A"*. (Lo otro es semicircunferencia).



Datos :
I) Perímetro de *"B"*.
II) Perímetro de cuarto de çirculo.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El II es suficiente y el dato I no lo es .
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D)Cada uno de los datos , por separado ,es suficiente.
E) Se necesitan más datos .

RESOLUCIÓN :



$L_1 = \pi R$
$P_A = 2R + 2\pi R$

* Basta conocer *"R"* y con cualquiera de los *2* se podría calcular

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Se requiere determinar el número de asistentes a una reunión de padres de familia.

Información brindada :

I) El *60%* de los asistentes son mujeres.

II) El número de mujeres que asistieron excede en *10* al número de hombres.

Para resolver el problema:

A) La información I es suficiente.

B) La información II es suficiente.

C) Es necesario emplear ambas informaciones a la vez.

D) Cada una de las informaciones , por separada , es suficiente.

E) La información brindada es insuficiente.

RESOLUCIÓN :

Se pide el total de asistentes , entonces :

* De la información *I* :

Cantidad de mujeres = *60%*(total)

Cantidad de varones = *40%* (total)

* De la información *II* :

$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{mujeres}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{varones}\end{pmatrix}=10$$

* Reemplazando la información *I* en *II* se hallaría el total de asistentes.

* Por lo tanto ,es necesario emplear ambas informaciones.

RPTA :"C"

PROBLEMA 15 :

En una bolsa están contenidas bolas verdes , amarillas y blancas. Si en total existen nueve bolas , se desea saber de cuántas maneras distintas se pueden ordenar dichas bolas.

* Información brindada:

I) Existen *3* bolas verdes y *4* blancas.

II) Dentro de la bolsa existen además *2* bolas amarillas.

La pregunta se puede resolver, considerando :

A) Sólo la información I.

B) Sólo la información II.

C) Ambas informaciones a la vez.

D) Cada una de las informaciones por separada.

E) La información brindada es insuficiente.

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que los elementos a ordenar son nueve bolas y entre ellas hay bolas verdes, amarillas y blancas ; entonces para saber el número de ordenamientos diferentes que se pueden realizar con ellas es necesario conocer el número de bolas de cada color.

Analizando los datos , solo el dato I nos brinda la información nccesaria para conocer el número de elementos de cada color.

Por lo tanto , solo es necesario conocer el dato I para resolver el problema.

RPTA :"A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar : $\dfrac{4^m+32^{n+3}}{2^p}$

$I)\, p=2m \qquad II)\, m=\dfrac{5}{2}n$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el datoI no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

02 Hallar : $E=\sqrt[p]{\dfrac{32^n-8^n}{2^{3n}-2^n}}$;

$I)\, n+p=12 \qquad II)\, \dfrac{p}{n}=\dfrac{5}{3}$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el datoI no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

03 Hallar "x" , si : $x=\overline{ab}$; $y=\overline{ba}$

$I)\, x+y=44$

$II)\, \overline{aba}-\overline{bab}=182$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

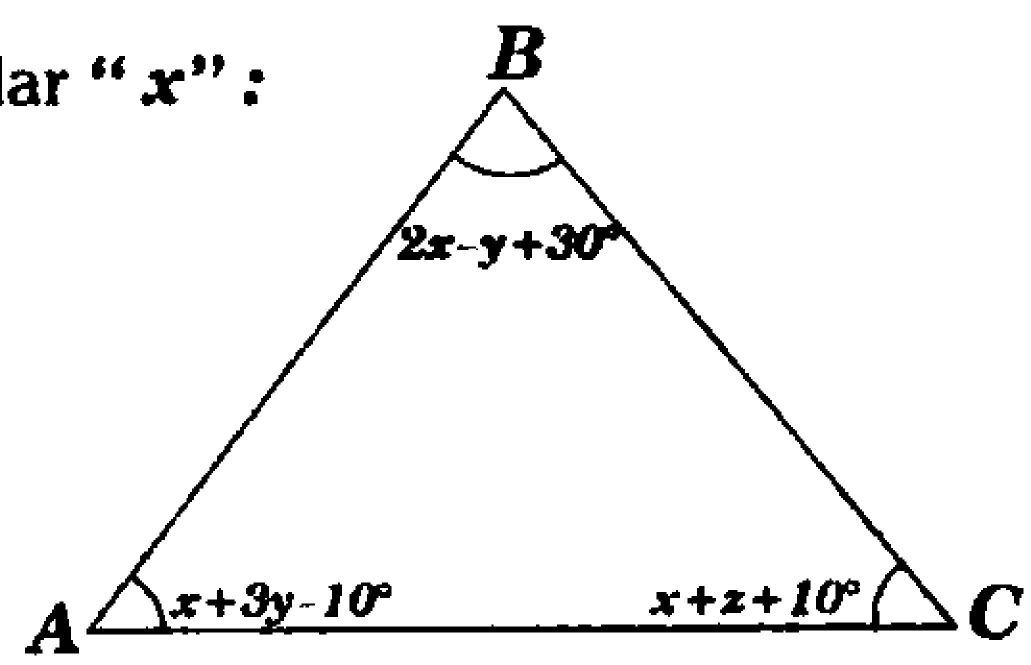
B) El dato II es suficiente y el datoI no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

04 Hallar " *x* " :



I) $z + 2y = 50°$

II) $y = 2z$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

05 Calcular el valor de : $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

I) $a + \dfrac{1}{a} = 2$ *II)* $a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 2$

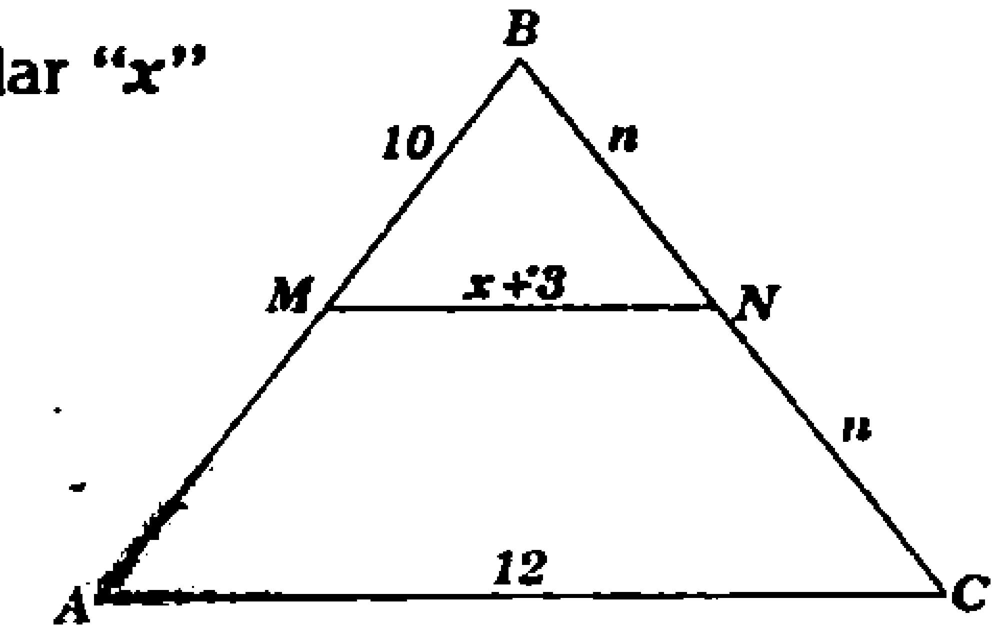
A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

06 Si : $x+2 = y+z$, hallar : x

I) $y = 2x$ *II)* $z = 3x$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

07 Hallar "x"



I) Segmento $\overline{AM}$ mide igual que el segmento $\overline{MB}$.

II) $\overline{MN}$ es paralela a $\overline{AC}$.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

08 Determinar el signo de : $p^3 - q^2$

I) $q > 0$ *II)* $p < 0$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

09 Determinar el signo de "$a \times b \times c$"

I) $c > a^2 > b^2$ *II)* $b < 0$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

10 Determinar el valor de "x"

I) $x+3 = 2(x+5) - x - 7$

II) $2x+5 = x + 3$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

11 Determinar el valor de :

$$E = (x-y)^2 + (x+y)^2$$

I) $x^2 = 4$ *II)* $y^2 = 9$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

12 El tiempo que necesita un móvil para recorrer *600* metros.

I) Recorre *300 m* en *40 seg.*

II) Recorre *500 m* en *1* minuto.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

13 El valor de "n"

I) $n! = \overline{abc}$

II) $a > n$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

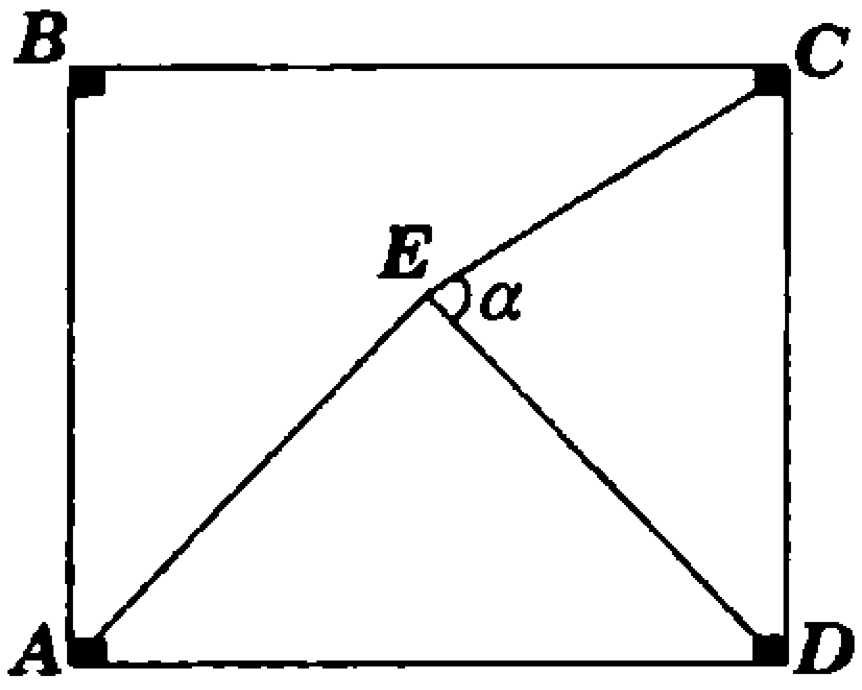
14 El valor de : $E = 3(-x+y-z) + 2(y-x) + 5(x-z)$

I) $y = 1{,}6z$

II) $x = z = 2$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

15 La medida del ángulo "*a*"



I) ΔADE es equilátero.
II) ΔBCE es isósceles $(BE = EC)$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

16 El peso de un ladrillo :

I) Su masa es de *200 gr*.
II) Su volumen es de $800cm^3$.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

17 El valor de $(x + y)^2$

$$I)\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

II) $xy > 0$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

18 ¿Cuántos hermanos más que hermanas tiene Juan?

I) Tiene *5* hermanos.
II) Una de las hermanas de Juan tiene *3* hermanos más que hermanas.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

19 ¿ Es $xy > 0$?

I) $x y^3 z^2 < 0$

II) $x^5 y^7 \left(\dfrac{z}{w}\right)^2 < 0; w \neq 0$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

20 Hallar el valor de :

$$16x^2 + 32 + 16y^2 - 32xy$$

I) $x = y + 4$
II) $x = 2y$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

21 Hallar el valor numérico de :

$$5x(5x + 4y) + 4(y^2 + 1)$$

I) $x = 2$
II) $5x + 2y = 3$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

22 ¿Se puede afirmar que $p^3 - q^2 > 0$?

I) $p, q > 0$
II) *p* es negativo

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.
C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.
D) Cada uno de los datos, por separado, es suficiente.
E) Se necesitan más datos.

23 Si Jorge le da a cada uno de sus sobrinos *S/.60* le faltan *S/. 120*. ¿Cuánto dinero tiene Jorge?

I) Si les diera *S/.40* a *c/u* le sobrarían *S/.100.*
II) Si les diera S/.70 a c/u le faltarían S/. 150.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

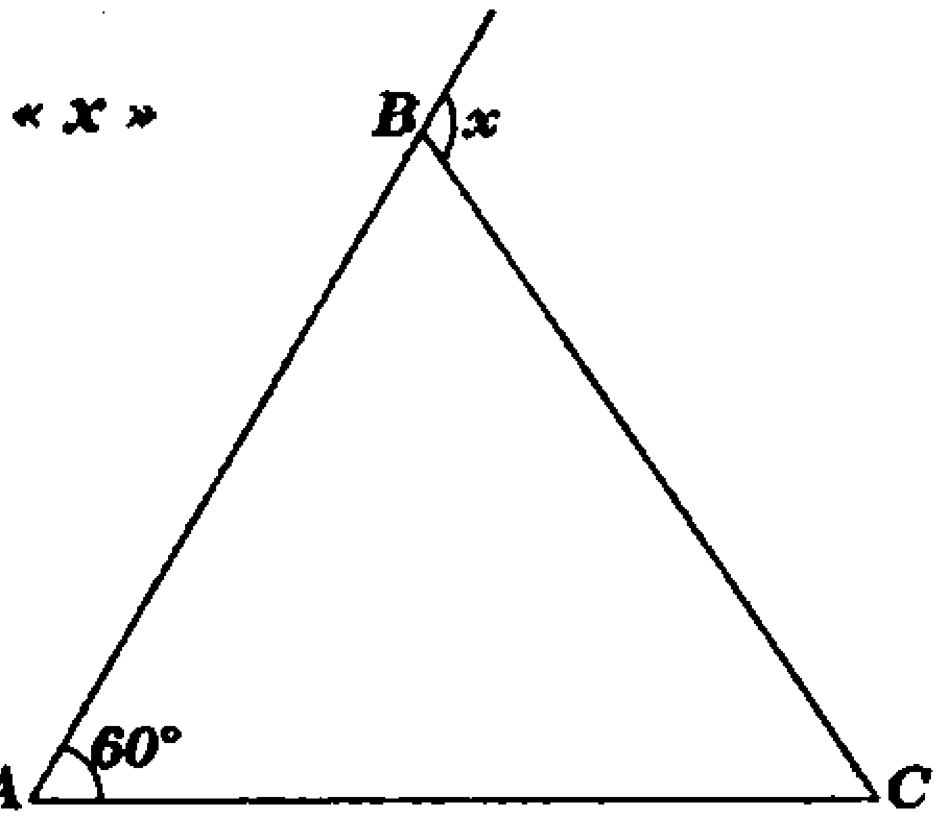
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(24) Hallar « *x* »



I) $AB = BC$

II) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 280° - \hat{B}$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

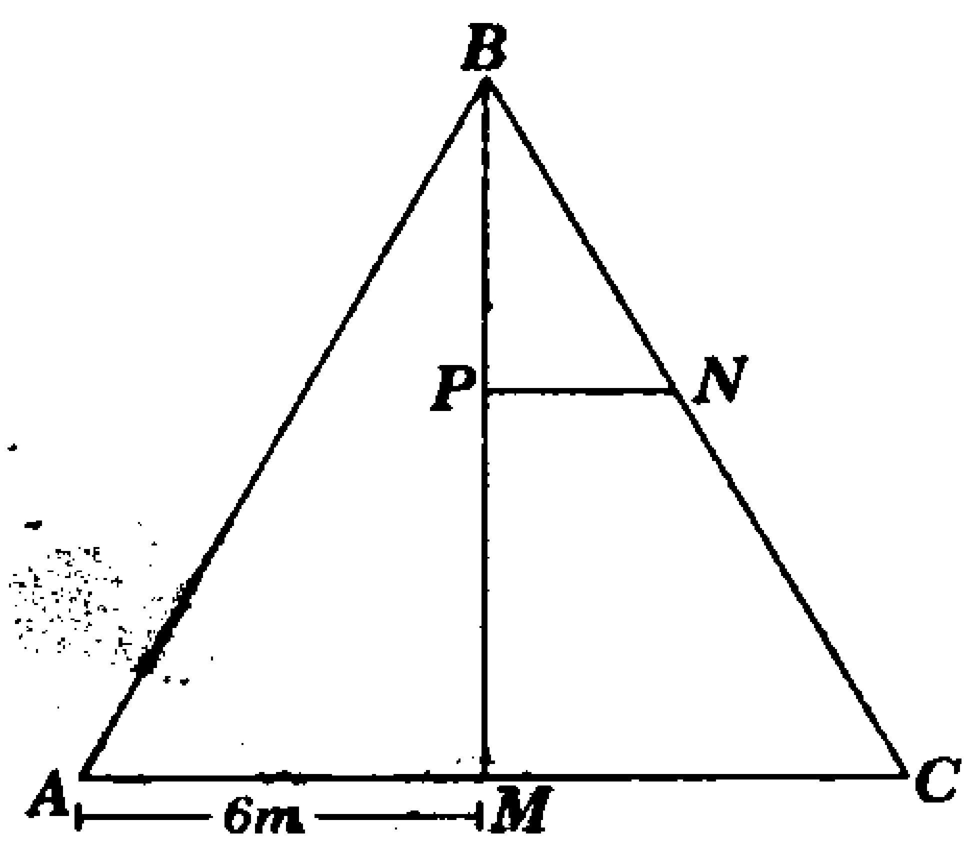
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(25) Hallar *PN* en el triángulo.



I) El Δ *ABC* es equilátero.

II) *P* y *N* son puntos medios de *BM* y *BC* respectivamente.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(26) ¿Es par $(a + 3)\ (b + 7)$? ; $(a , b \in \mathbb{Z})$

I) $b = 7$ *II)* $a + 5$ es impar.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el datoI no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(27) ¿Es par $(a+2)\ (b+6)$? $(a , b \in \mathbb{Z})$

I) $b + 10$ es par. *II)* $a + 5$ es impar.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

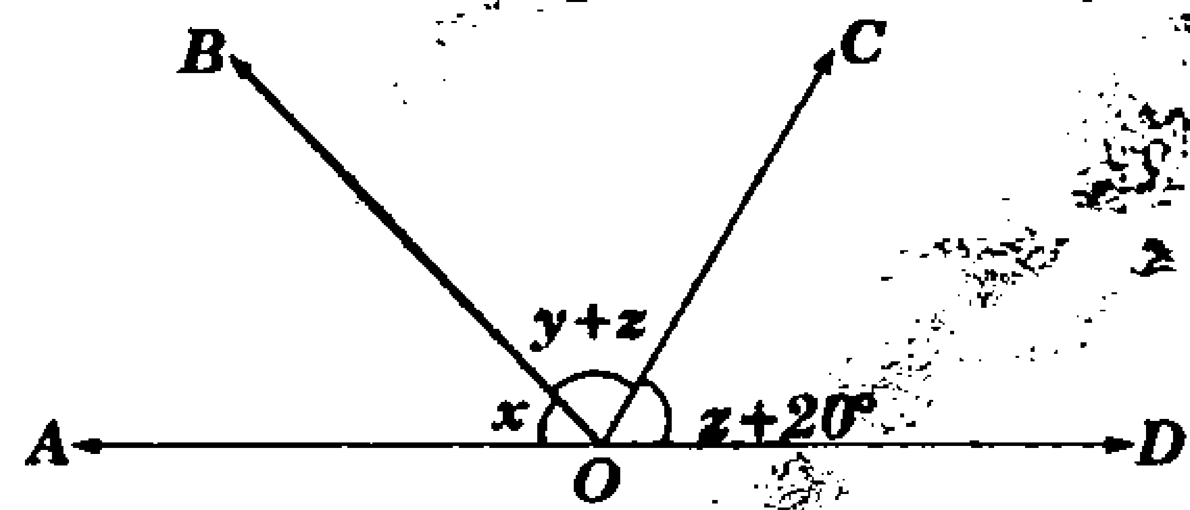
B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(28) Hallar « *x* » en la figura : (*AOD* : ángulo llano)



I) $z = 60°$ *II)* $\overline{OC}$ es bisectriz del ángulo $B\hat{O}D$

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(29) ¿Cuántos autos hay en un taller donde sólo hay bicicletas y autos?

I) Existen ***30*** timones.

II) En total hay ***90*** llantas.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el dato I no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

(30) ¿Es par la expresión $m^2n - 5$? ; $(m, n \in \mathbb{Z})$

I) "*m*" y "*n*" son pares.

II) $m\ (n+2)$ es par.

A) El dato I es suficiente y el dato II no lo es.

B) El dato II es suficiente y el datoI no lo es.

C) Es necesario utilizar I y II conjuntamente.

D) Cada uno de los datos , por separado , es suficiente.

E) Se necesitan más datos.

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1) C	2) B	3) C	4) A	5) D	6) C	7) D	8) B	9) E	10) B
11) C	12) E	13) C	14) A	15) E	16) A	17) C	18) C	19) D	20) A
21) B	22) E	23) D	24) D	25) E	26) A	27) D	28) C	29) C	30) D

TABLAS y GRAFICOS ESTADISTICOS

CAPITULO 053

OBJETIVOS :

• Determinación de la información que proporcionan las tablas de frecuencia y los gráficos estadísticos.

• Interpretación de la información brindada por tablas de frecuencia y gráficos estadísticos.

• Interpretación de nuestra situación real en comparación con otras , en base a gráficas estadísticas de producción, educación, etc.

• Incentivar al orden y colección de datos que nos sean útiles en una investigación.

• Desarrollar la correcta toma de decisiones bajo una buena información recopilada y graficada adecuadamente.

INTRODUCCIÓN :

En estadística denominamos gráficos a aquellas imágenes que, combinando la utilización De sombreado, colores, puntos, líneas, símbolos, números, texto y un sistema de referencia (coordenadas), permiten presentar información cuantitativa. La utilidad De los gráficos es doble, ya que pueden servir no sólo como sustituto a las tablas, sino que también constituyen por sí mismos una poderosa herramienta para el análisis de los datos, siendo en ocasiones el medio más efectivo no sólo para describir y resumir la información, sino también para analizarla.

En este trabajo solo nos vamos a centrar únicamente en los gráficos como vehículo de presentación de datos, sin abordar su otra faceta como herramienta de análisis.

Los gráficos son medios popularizados y a menudo los más convenientes para presentar datos, se emplean para tener una representación visual de la totalidad de la información. Los gráficos estadísticos presentan los datos en forma de dibujo de tal modo que se pueda percibir fácilmente los hechos esenciales y compararlos con otros.

Tipos de gráficos estadísticos

***Barras** ***Líneas** ***Circulares** ***Áreas**

***Cartogramas** ***Mixtos** ***Histogramas**

***Dispersograma** ***Pictogramas**

GRÁFICO ESTADÍSTICO

Es una representación o dibujo cuyo objetivo es ilustrar las dimensiones y comportamiento de una variable así como para comparar dos o más variables, Muchas veces un gráfico proporciona mayor información que un texto escrito porque transmite de manera casi instantánea información que permite analizar las variables estudiadas.

CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

La mayoría de los gráficos se construyen en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas.

PARTES DE UN GRÁFICO ESTADÍSTICO

Las principales partes de un gráfico estadístico son:

TÍTULO :

Indica claramente y de manera breve qué variable (o datos) se están representando en el gráfico.

GRÁFICO:

Propiamente dicho.

ESCALA y/o LEYENDA:

Son indicadores donde se precisan las unidades o medidas, símbolos o notación que facilitan la comprensión del gráfico.

FUENTE:

Información sobre la bibliografía o medios que permitieron obtener los datos estadísticos.
Se coloca en la parte inferior.

PRINCIPALES TIPOS DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Existe una variedad de gráficos estadísticos cuya aplicación depende del objeto de estudio, la naturaleza de los datos y el tipo de usuario al cual está dirigido.
Entre los principales gráficos se tienen:

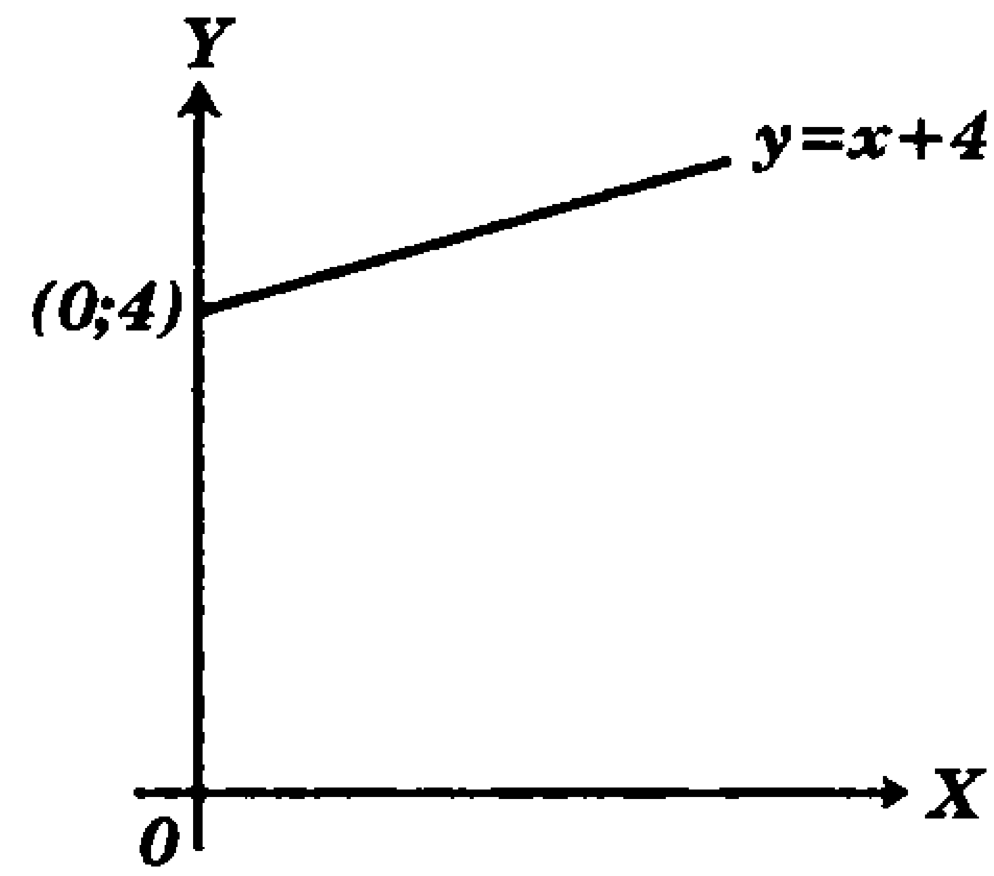
A) GRÁFICOS LINEALES:

Son todos aquellos que se grafican en un plano de dos dimensiones.

Aquí la relación es por lo general continua para todos los datos planteados , es decir para cada valor de un determinado rubro , existe un valor en otro rubro . Podemos poner como ejemplo las funciones lineales , cuadráticas , etc .

EJEMPLO :

Considerando una función lineal : $y = x + 4$



AI) GRÁFICOS DE DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIAS :

- *Gráfico de Frecuencias (Absolutas o Relativas).*
- *Gráfico de Frecuencias Acumuladas (Absolutas o Relativas).*
- *Histogramas de Frecuencias.*
- *Polígonos de Frecuencias (Absolutas o Relativas).*
- *Polígonos de Frecuencias Acumuladas (Absolutas o Relativas). También se les conoce como Ojivas.*

AII) GRÁFICOS DE SERIES CRONOLÓGICAS.

AIII) GRÁFICOS DE TASAS ESPECÍFICAS.

B) GRÁFICOS DE SUPERFICIE :

Son aquellos que utilizan algunas figuras geométricas; pueden ser:

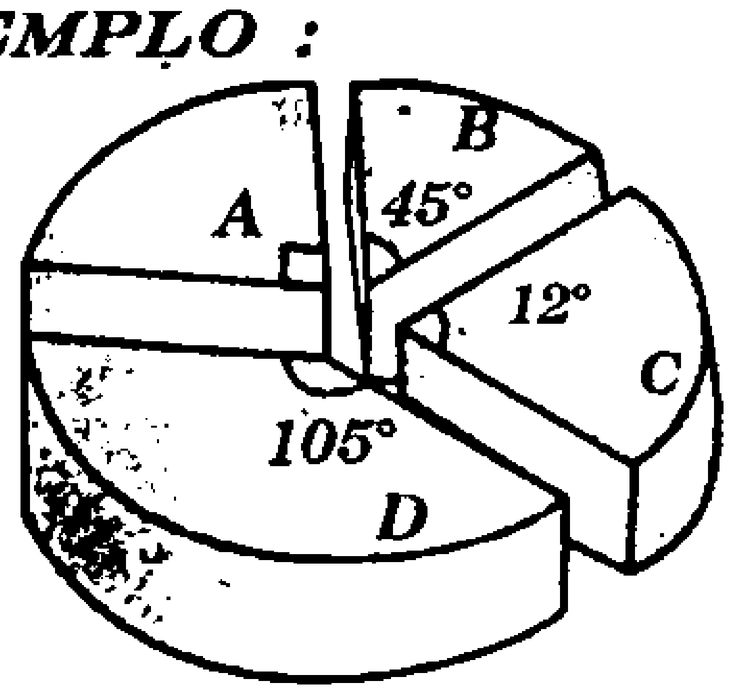
BI) Gráficos de Barras:

Simples o Compuestas. Tienen forma rectangular

BII) Gráficos de Sectores Circulares.

En los diagramas de sectores, o también denominados de pastel.

EJEMPLO :



$360° = 100\%$

$A: 90° = 25\%$

$B: 45° = 12{,}5\%$

$C: 120° = 33{,}3\%$

$$\Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{3} = \frac{C}{8}$$

BIII) Gráficos de Coronas Circulares.

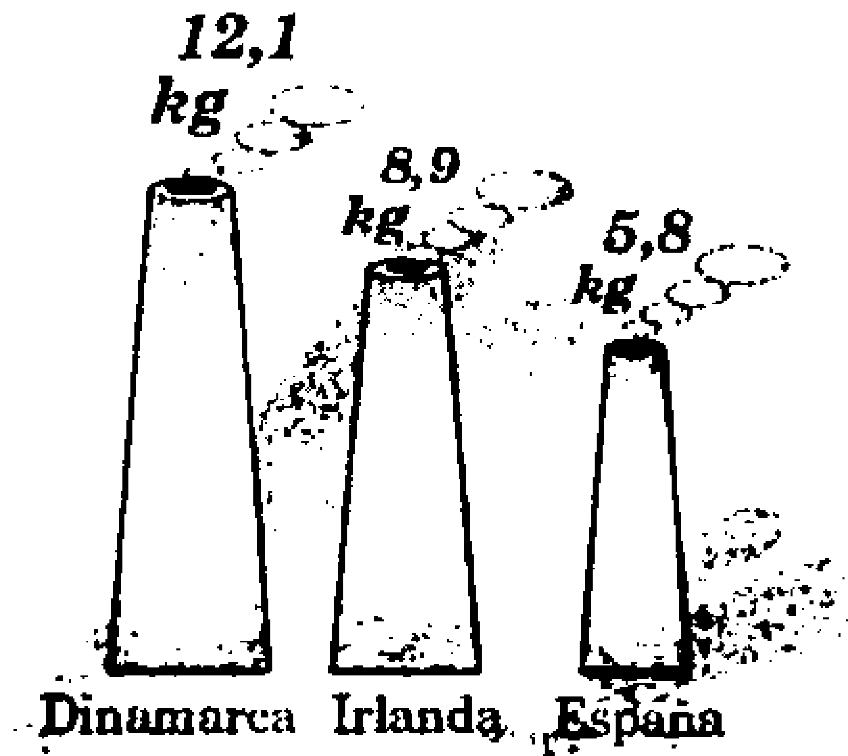
BIV) Gráficos de Pirámides.

C) PICTOGRAMAS:

Son todos aquellos que emplean dibujos.

Se dibuja un objeto característico de la variable, de manera que los tamaños sean directamente proporcionales a las frecuencias.

EJEMPLO :



Pictograma: Emisión de co_2 percápita.

D) MAPAS ESTADÍSTICOS :

Emplean dibujos de una región geográfica (provincia, departamento, país, etc.) para mostrar información estadística (también se les conoce como *Cartogramas*).

GRÁFICOS DE BARRAS

Son rectángulos verticales u horizontales que permiten representar comparativamente la frecuencia de un hecho o el valor de una variable, generalmente de tipo cualitativo.

Así, por ejemplo, dada las estaturas de un grupo de *55* alumnos se tiene que:

$[x; y\rangle$	M.C	f_i	F_i	h_i	H_i
1,40 – 1,45	1,425	1	1	1,81	1,81
1,45 – 1,50	1,475	4	5	7,27	9,08
1,50 – 1,55	1,525	3	8	5,46	14,54
1,55 – 1,60	1,575	18	26	32,73	47,27
1,60 – 1,65	1,625	15	41	27,27	74,54
1,65 – 1,70	1,675	10	51	18,18	92,72
1,70 – 1,75	1,725	3	54	5,45	98,17
1,75 – 1,80	1,775	1	55	1,81	100,00
TOTAL	....	$\sum f = 55$	....	$\sum h_i = 100$	....

SE CUMPLE QUE :

$F_1 = f_1$

$F_2 = f_1 + f_2$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3$

$\vdots \qquad \vdots$

$F_p = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p = \underset{n}{\underline{\text{total de datos}}}$

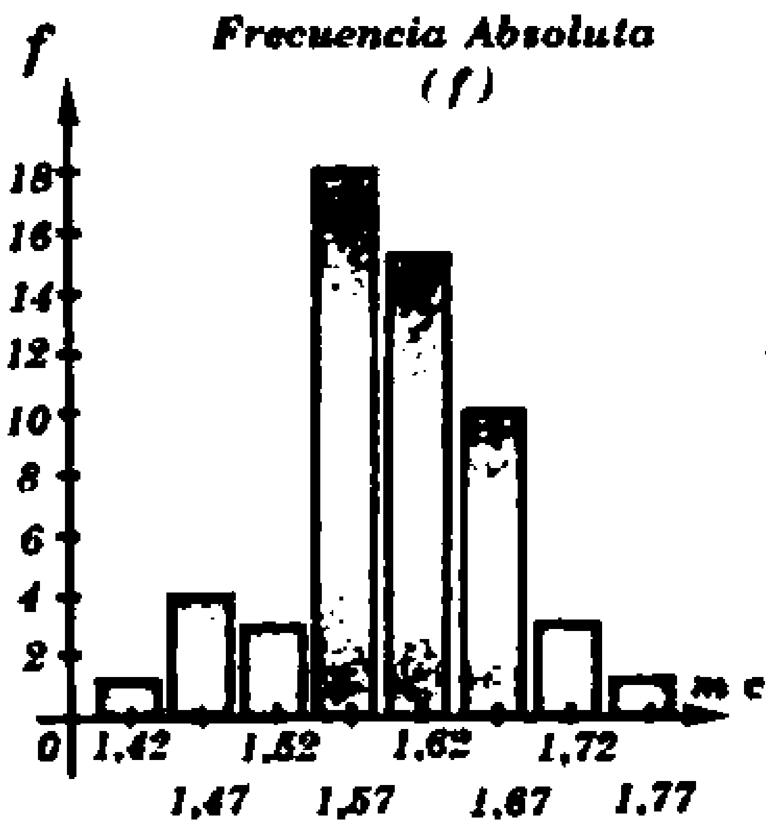
Donde $\quad h_1 = \dfrac{f_1}{n} \qquad h_1 = \dfrac{f_2}{n}$

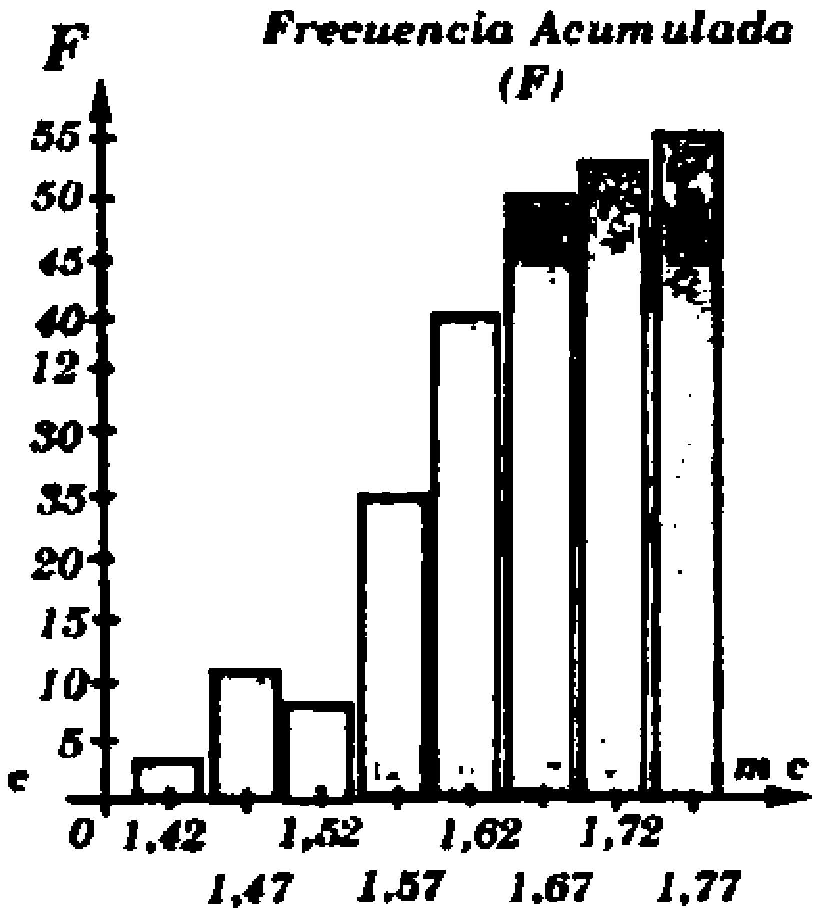
p: N.° de intervalos

Además $\quad h_p = \dfrac{f_p}{n}$

$$H_1 = h_1 + h_2 + \dots + h_p$$

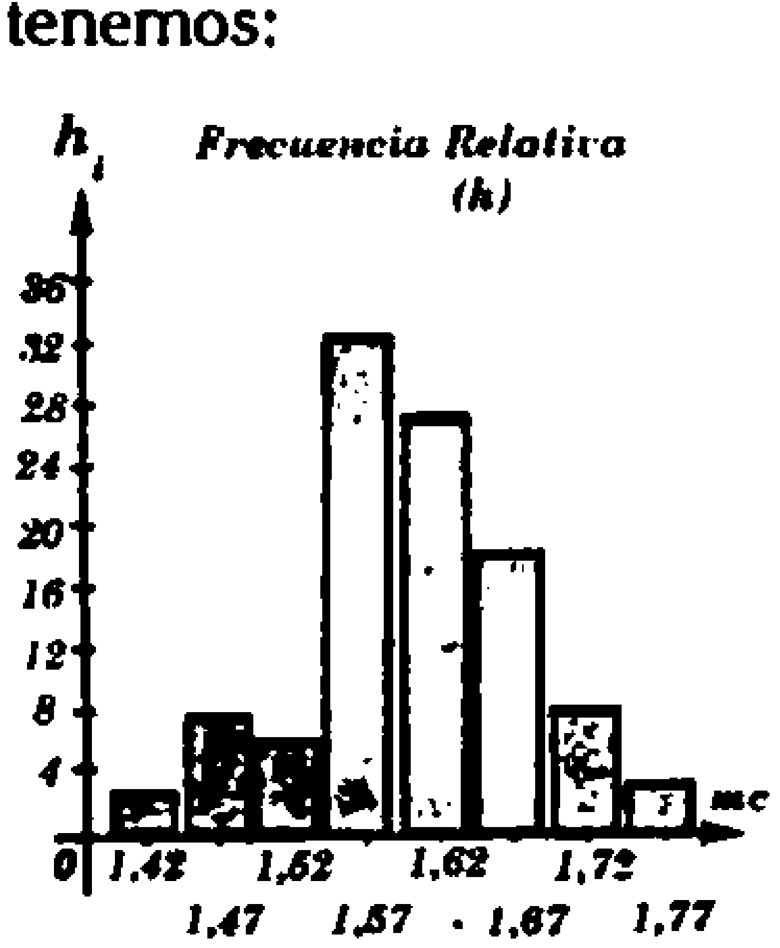
En el semieje positivo de las x se ubican los valores de la variable dependiente y; en el semieje positivo de las y se ubican los valores de las frecuencias. Cuando la información dada comprende intervalos se halla la marca de clase de cada intervalo y se levantan líneas verticales hasta la altura que corresponde a cada frecuencia.

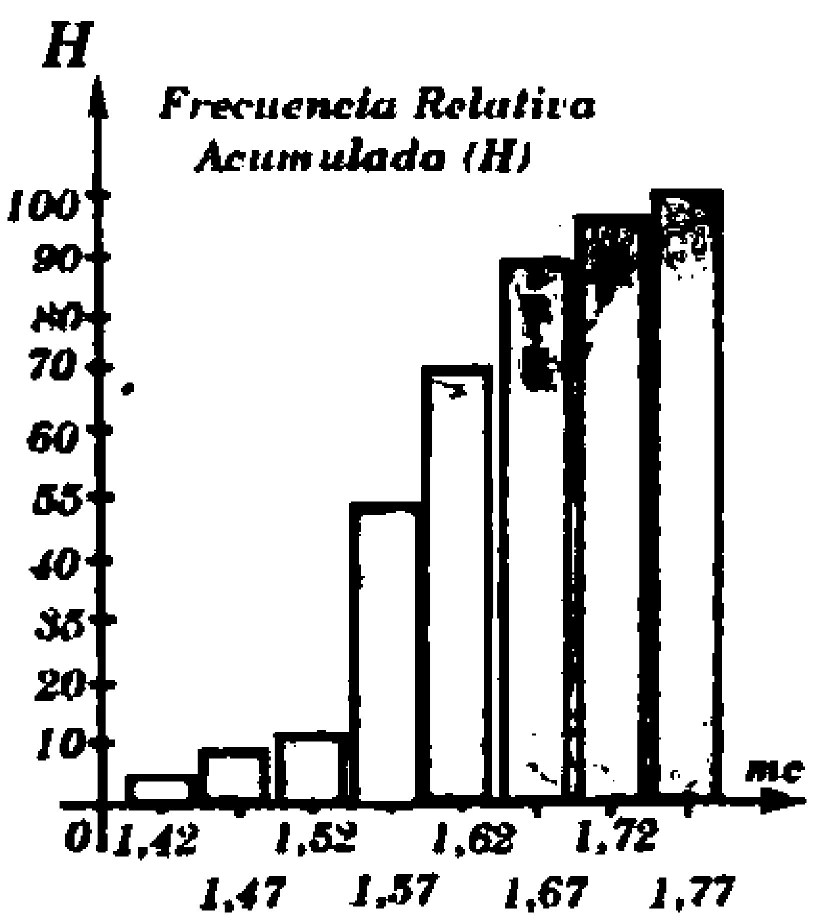




También se le denomina Gráfico acumulativo de frecuencias. En el semieje positivo horizontal (de las x) se ubican los valores de la variable dependiente y; en el semieje positivo vertical (de las y) se ubican los valores de las frecuercias acumuladas.

En cada valor de y se levantan segmentos de altura igual a los valores de la frecuencia acumulada. Así tenemos:

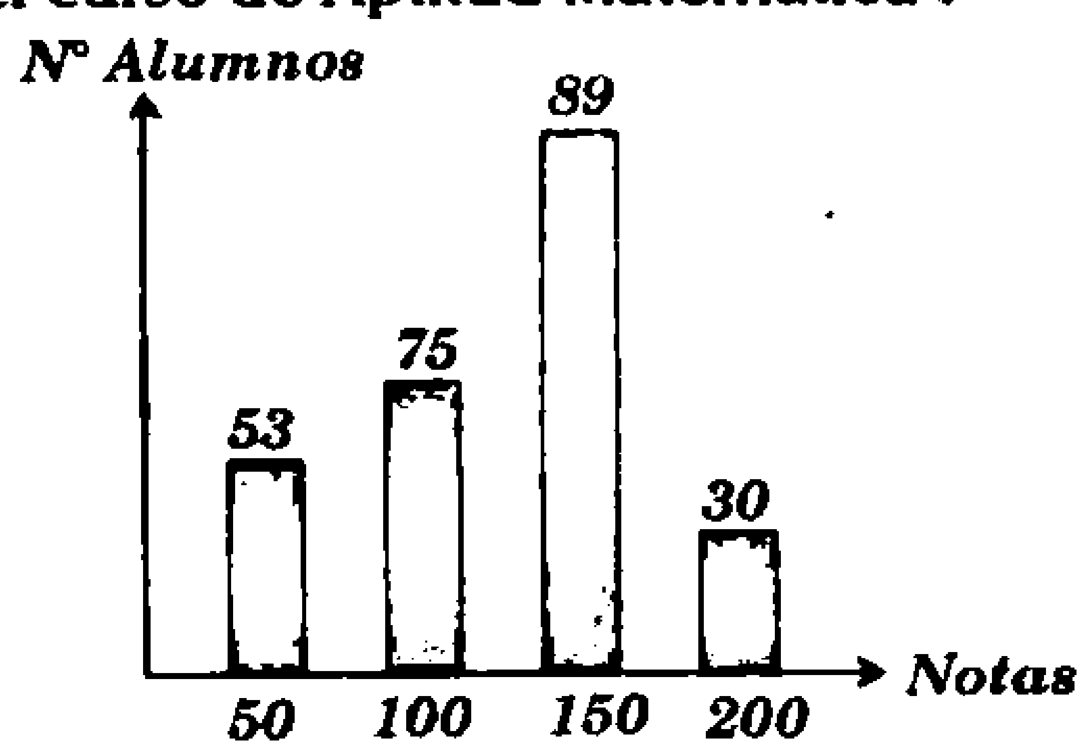




La información se presenta en forma de barra para cada periodo o rubro estudiado .

EJERCICIO :

En el siguiente gráfico se muestra la distribución de notas del curso de Aptitud Matemática .



¿Cuál es el porcentaje de alumnos que han obtenido nota mayor que *100*?

A) 40% ***B) 48%*** ***C) 52%*** ***D) 54%*** ***E) 45%***

RESOLUCIÓN :

* Total de alumnos : $53 + 75 + 89 + 30 = 247$

de alumnos con nota mayor que *100* :

$$89 + 30 = 119$$

* Se cumple :

$$247 \text{ ——— } 100\%$$
$$119 \text{ ——— } x$$
$$x = \frac{119 \times 100}{247} = 48\%$$

RPTA : "B"

POLÍGONOS DE FRECUENCIAS

Son similares en su fundamento a los diagramas de barra y suelen utilizarse para representar la evolución de un fenómeno a lo largo del tiempo o de una serie de etapas.

EJEMPLO:

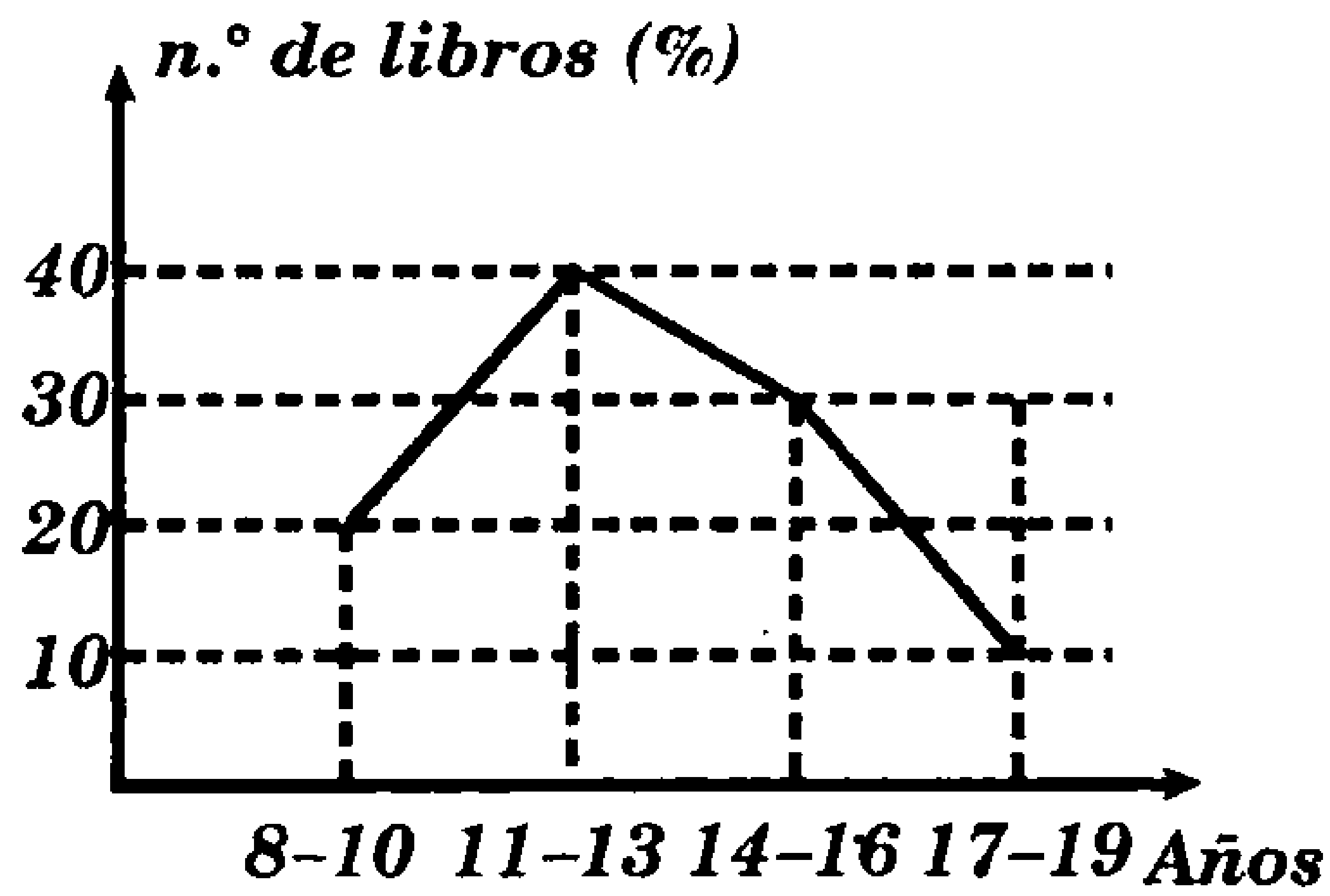


GRÁFICO CIRCULAR

Estos gráficos nos permiten ver la distribución interna de los datos que representan un hecho , en forma de porcentajes sobre un total. Se suele separar el sector correspondiente al mayor o menor valor, según lo que se desee destacar.

Debemos tener en cuenta que la suma de los diversos componentes representa el *100% (ó 360* grados)

Es importante recordar que :

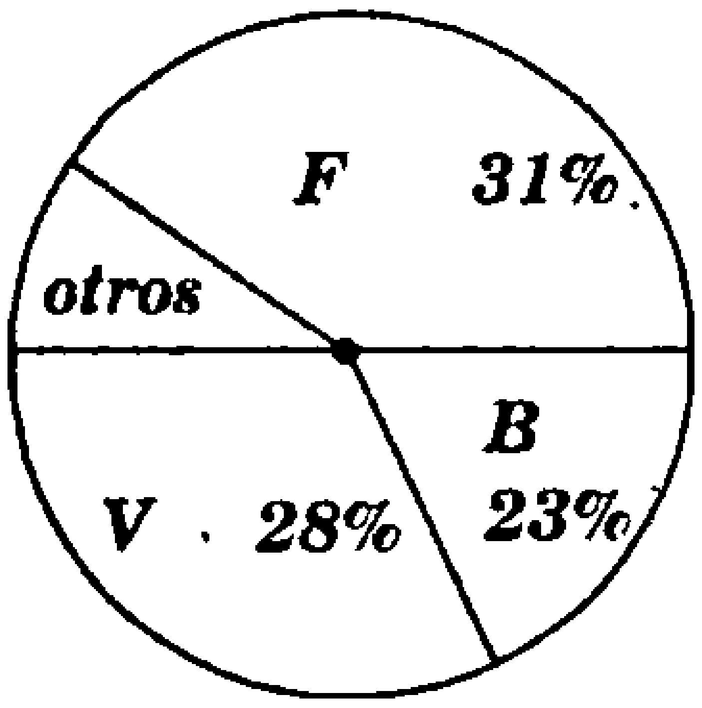
$100\% <> 360°$; $50\% <> 180°$

$25\% <> 90°$; $10\% <> 36°$

$5\% <> 18°$; $75\% <> 270°$

EJEMPLO 1 :

En una encuesta realizada a *1500* personas de un club, acerca de su deporte favorito se obtuvieron los siguientes resultados .



F (Fútbol) = 31%
B (Basquet)=23%
V (Voley) = 28%

¿Qué ángulo forma el sector de los que prefieren otros deportes?

A) 60° *B) 65°* *C) 70°* *D) 75°* *E) 80°*

RESOLUCIÓN :

Podemos establecer :

otros = $100\% - (31 + 28 + 23)\,\% = 18\%$

$$100\% \text{ ———— } 360°$$
$$18\% \text{ ———— } x$$
$$x = \frac{18 \times 360}{100} = 65°$$

RPTA : "B"

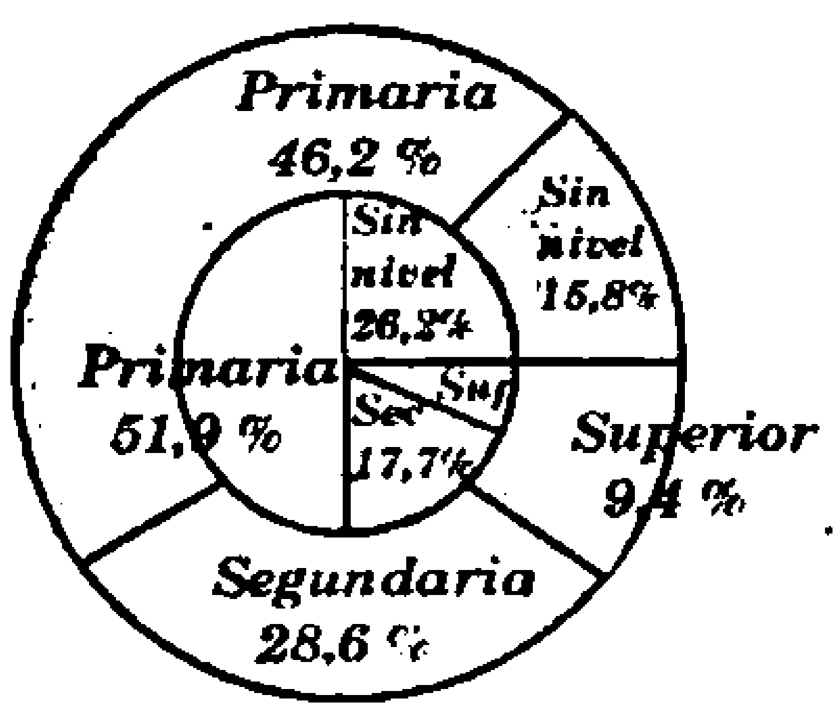
GRÁFICOS DE CORONAS CIRCULARES

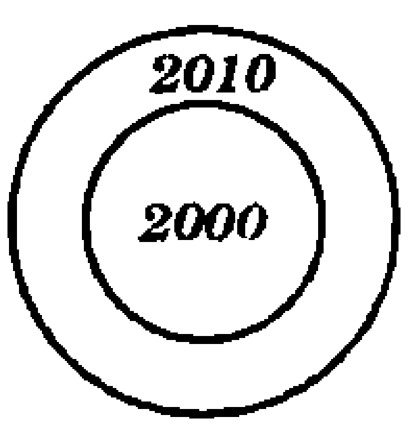
Las coronas circulares son círculos concéntricos que se emplean para mostrar cambios de la variable en dos momentos o lugares,

EJEMPLO:

Estudio de la variación porcentual de la población escolar, por nivel educativó.

Nivel Educativo	%		Gr. Sexagesimales	
	2000	2010	2000	2010
Sin nivel	26,2	15,8	94°	57°
Primaria	51,9	46,2	187°	166°
Secundaria	17,7	28,6	64°	103°
Superior	4,2	9,4	15°	34°
Totales	100,0	100,0	360°	360°





GRÁFICOS ESTADÍSTICOS DE SUPERFICIE

Son aquellos que se representan mediante figuras geométricas.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS LINEALES

Son todos aquellos que se representan por segmentos de recta o por líneas curvas.

Las frecuencias son siempre cantidades iguales o mayores que cero.

Sean variables discretas o continuas se grafican en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas.

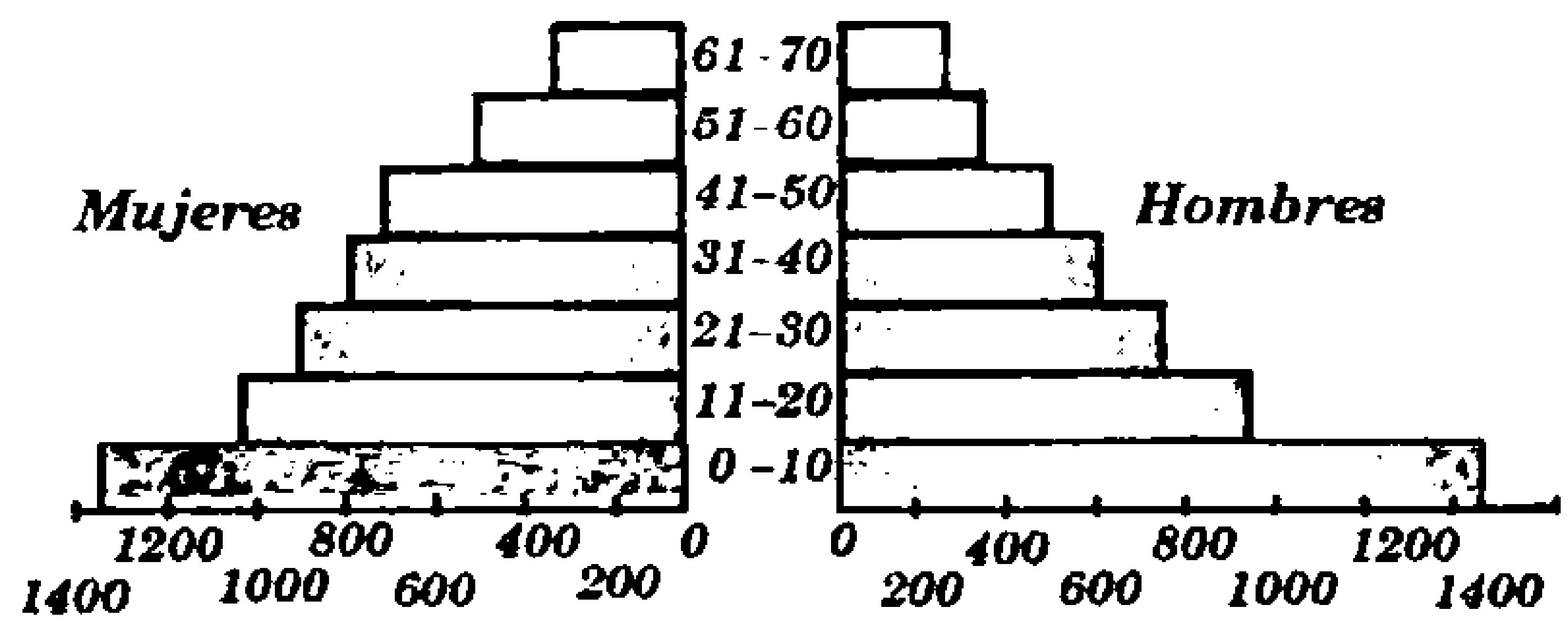
En el semieje positivo de las abscisas (o semieje positivo de las *x)* se indican los valores de la variable (sean puntos o sean intervalos) y en el semieje positivo de las ordenadas (o semieje positivo de las *y)* se registra el valor de la respectiva frecuencia; para ambos casos se determina una escala adecuada.

GRÁFICO DE PIRÁMIDES

Se usan para comparar el comportamiento de las variables independiente *(x)* y dependiente *(y)*, cuando esta última tiene dos indicadores,

En el eje central se ubican los valores de la variable independiente *(x)* y a ambos lados del eje, con barras horizontales, se grafican los valores de los indicadores de la variable dependiente *(y)* , Así, por ejemplo:

Población por sexo , según edades (en miles)



OBSERVACIONES :

En el presente capítulo, reforzaremos ciertos conceptos y criterios para un adecuado uso de algunas herramientas estadísticas, principalmente los gráficos estadísticos:

* Diagramas de sectores
* Diagramas de barras
* Tablas estadísticas

ACERCA DE LAS GRÁFICAS:

* ***Ventaja:***

Dan una información visual que resulta más cómoda que la lectura de una tabla.

* ***Desventaja :***

Si se toma una escala inadecuada, se puede desvirtuar la imagen del crecimiento real de un fenómeno.

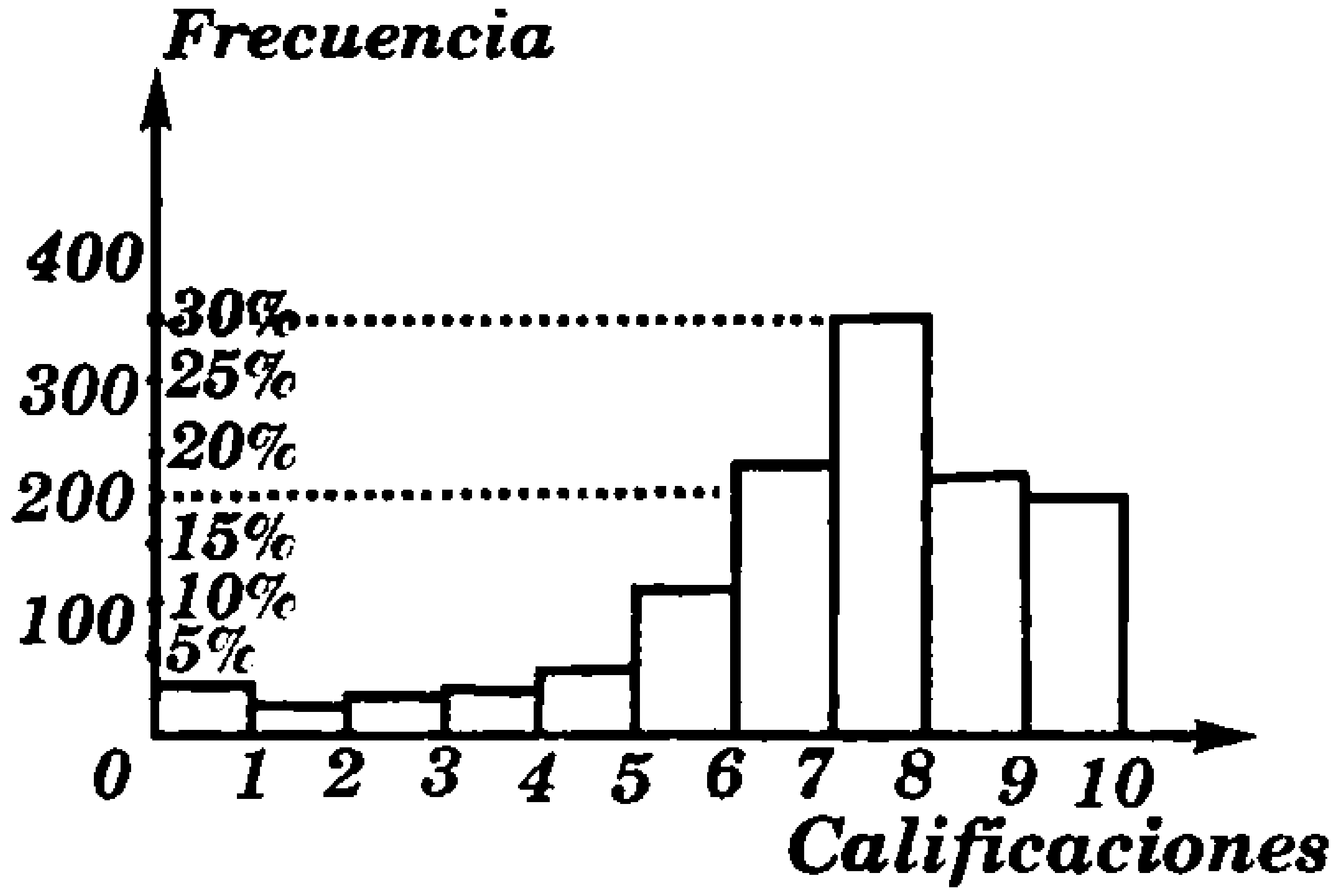
Como norma:

Altura = *69%*(ancho de la gráfica) máxima

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

El gráfico de barras muestra las notas obtenidas y sus frecuencias por un grupo de alumnos. Indique qué porcentaje de los alumnos obtuvo una nota entre ***9*** y ***10***.

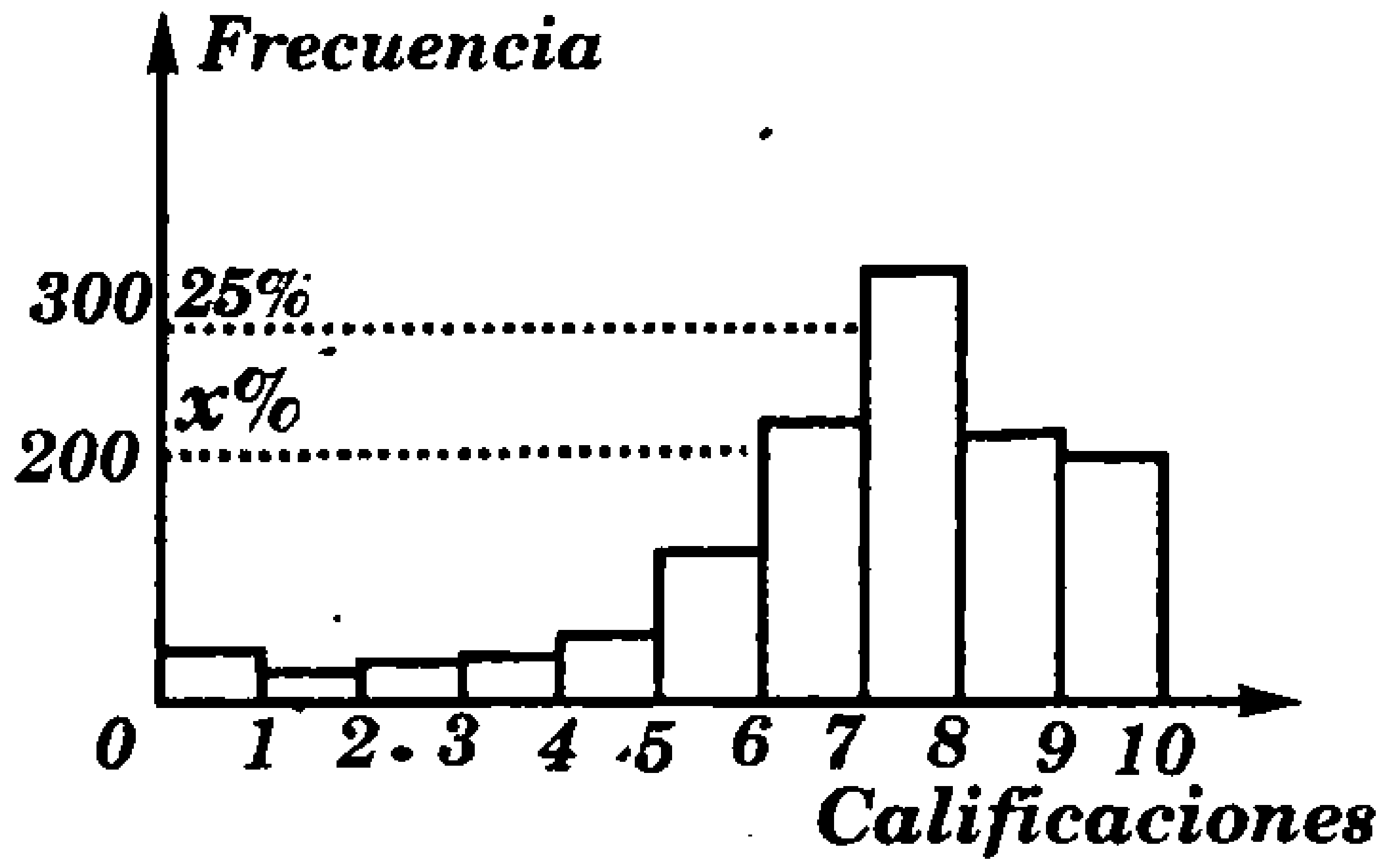


A) 10,00% ***B) 15,38%*** ***C) 16,66%***
D) 18,18% ***E) 23,07%***

RESOLUCIÓN :

*Se pide indicar el porcentaje ***(x%)*** de alumnos que obtuvieron una nota entre ***9*** y ***10***.

* El gráfico indica la relación de frecuencias y porcentajes que representa.



*Por regla de tres Simple * Solución del problema

# frecuencia	***porcentaje***
300	25%
200	x%

$$\Rightarrow 300 \times x = 25 \times 200$$

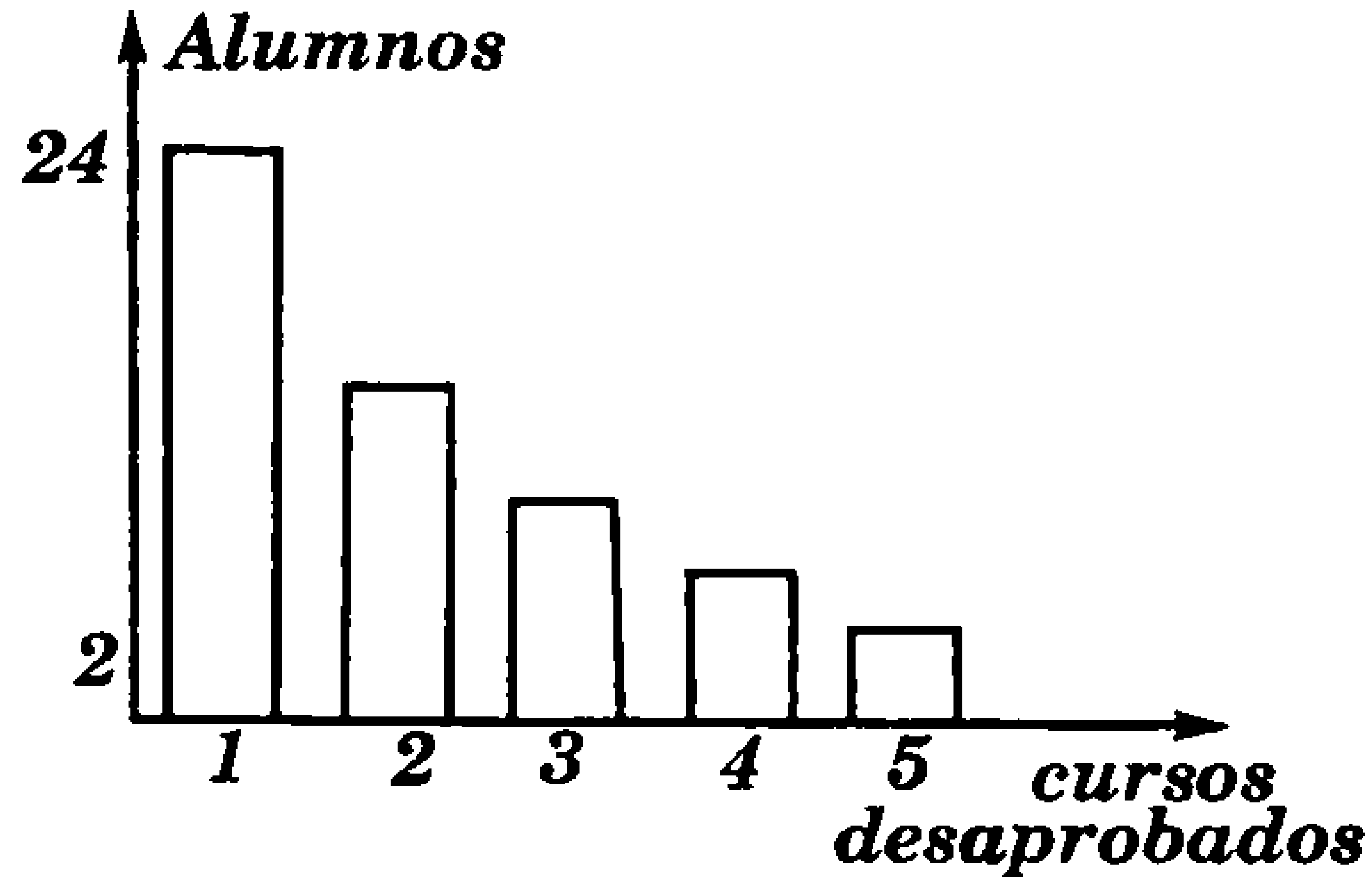
$$\Rightarrow x = 16,66....\%$$

* Es decir el porcentaje de alumnos que obtuvieron una nota entre ***9*** y ***10*** es ***16, 66 %***

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

La Facultad de Economía de una universidad está realizando un estudio sobre los cursos desaprobados por sus estudiantes. Los datos obtenidos de ***50*** estudiantes que desaprobaron al menos un curso se muestran en la figura:



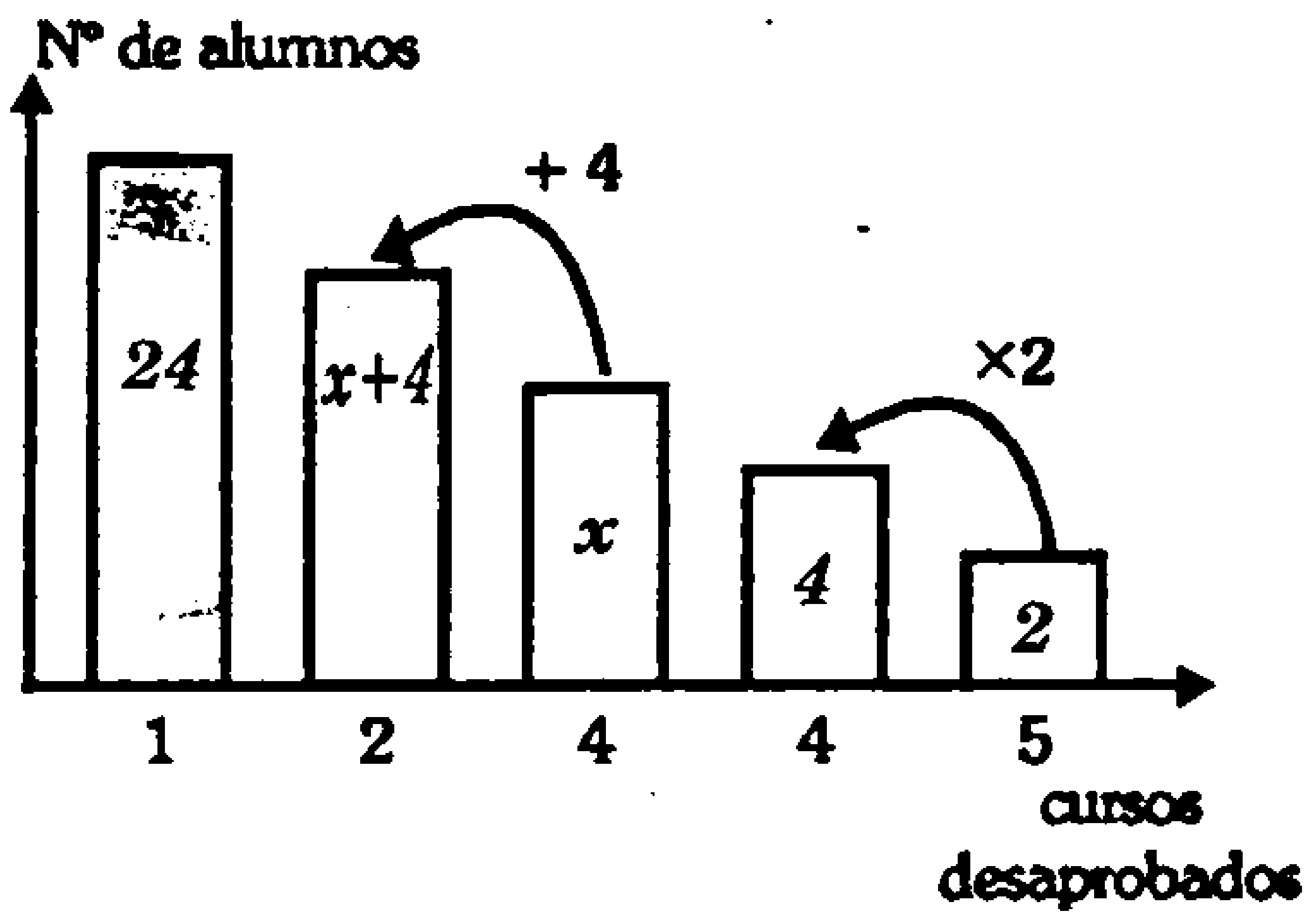
Se sabe que la cantidad de alumnos que desaprobó ***2*** cursos supera en ***4*** a los alumnos que desaprobaron ***3*** cursos; y que la cantidad de alumnos que desaprobó ***4*** cursos es el doble de los alumnos que desaprobaron ***5*** cursos. Calcule la cantidad de alumnos que desaprobaron ***2*** cursos, de los ***50*** considerados.

A)6 ***B)8*** ***C) 10*** ***D)12*** ***E)14***

RESOLUCIÓN :

* Se pide determinar la cantidad de alumnos que desaprueban ***2*** cursos.

Hallaremos el número de alumnos en cada caso mediante las reacciones dadas.



* Como son ***50*** alumnos, la suma del total de cada uno de ellos debe dar el total:

$24 + x + 4 + x + 4 + 2 = 50 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

* Como piden la cantidad de alumnos que desaprobaron ***2*** cursos: $x+4 \Rightarrow 8 + 4 = 12$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

La siguiente tabla muestra la distribución de ***100*** postulantes ***UNI***, de la modalidad Concurso Escolar.

Si la estadística de preguntas respondidas en la prueba de Matemática parte *I* es la siguiente:

Preguntas respondidas	*Cantidad de postulantes*
Hasta 5	*5*
De 6 a 10	*20*
De 11 a 20	*x*
De 21 a 30	*25*
Más de 30	*20*

Calcule el porcentaje que representan los postulantes que respondieron más de *20* preguntas respecto a quienes respondieron más de *10* preguntas.

A) 53,3% B)56,0% C)58,3% D)60,0% E) 62,3%

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico :

Preguntas respondidas	*Cantidad de postulantes*
Hasta 5	*5*
De 6 a 10	*20*
De 11 a 20	*x*
De 21 a 30	*25*
Más de 30	*20*

por dato $5+20+x+25+20=100 \rightarrow x=30$

Se pide :

$$\frac{\left(\text{N.° postulantes que respondieron más de } 20 \text{ preguntas}\right)}{\left(\text{N.° postulantes que respondieron más de } 10 \text{ preguntas}\right)} \times 100\%$$

reeplazamos : $\left(\dfrac{25+20}{30+25+20}\right) \times 100\% = 60\%$

RPTA: "D"

PROBLEMA 4 :

El gráfico *I* muestra el valor de las exportaciones del Perú a los países de Asia, desde el año *2005* al *2009* en millones de dólares. Determine el monto total, en miles de dólares, por las exportaciones en el sector minero del *2005* al *2009*, considerando la distribución por sectores del gráfico *II*

Gráfico I

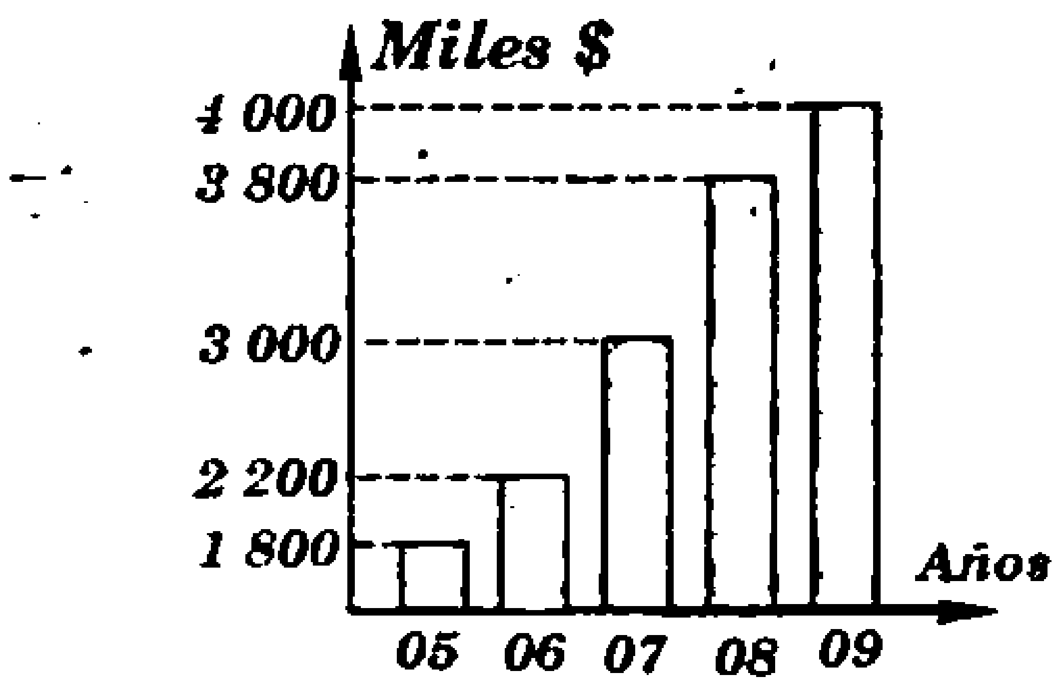
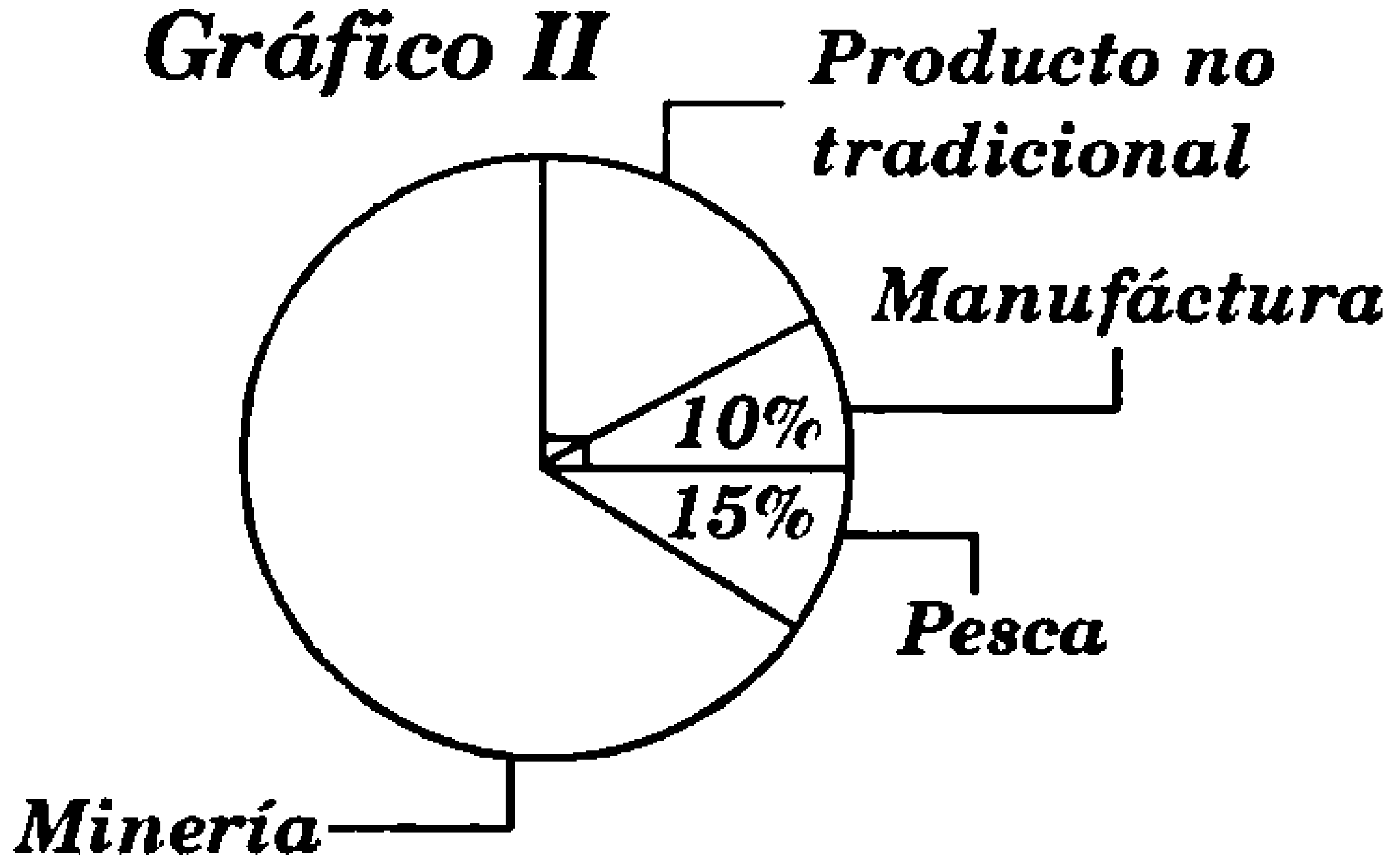


Gráfico II



A) 2400 B)4680 C) 4727,7 D)8880 E) 14800

RESOLUCIÓN :

Los gráficos estadísticos son herramientas que permiten mostrar información organizada y sintetizada, la cual se analiza e interpreta para sacar conclusiones. Se pide el monto (en miles de dólares) de exportaciones en el sector minero.

Del gráfico *I*

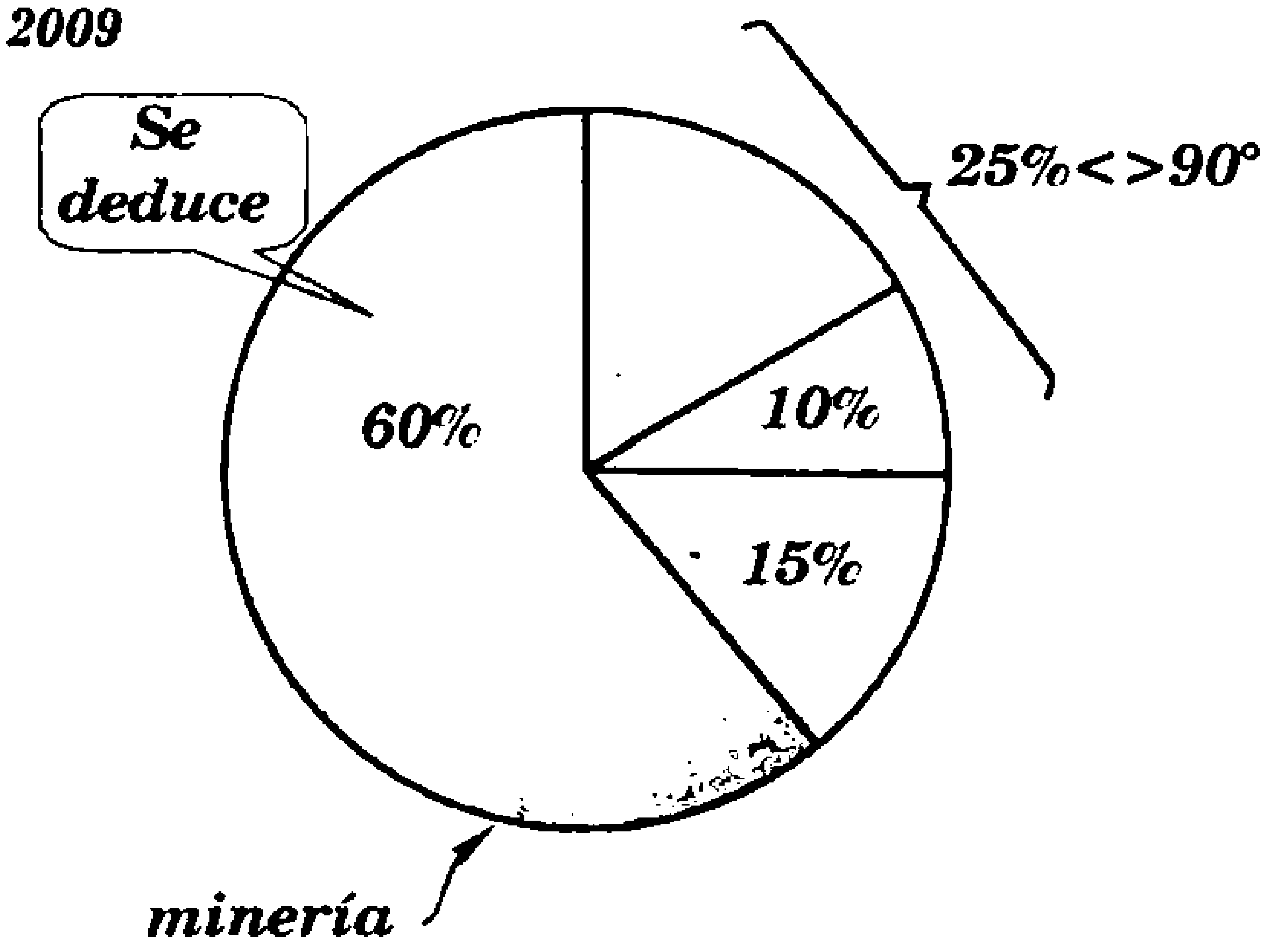
Total de exportaciones (en miles *$*) :

$$1800+2200+3000+3800+4000$$

$\Rightarrow$ Total de exportaciones = *14 800* (en miles *$*)

En el gráfico *II*

Distribución de exportación por sector del *2005* al *2009*



Del gráfico

Total de exportaciones en el sector minero (miles *$*) $=60\%(14800)=8880$

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

El siguiente gráfico muestra la cantidad de libros leídos en el año *2008* por *4* grupos de estudiantes (*5* en cada grupo) según sus edades.

¿Qué tanto por ciento del total de libros leídos por los grupos representa el número de libros leídos por aquellos estudiantes menores de *14* años?

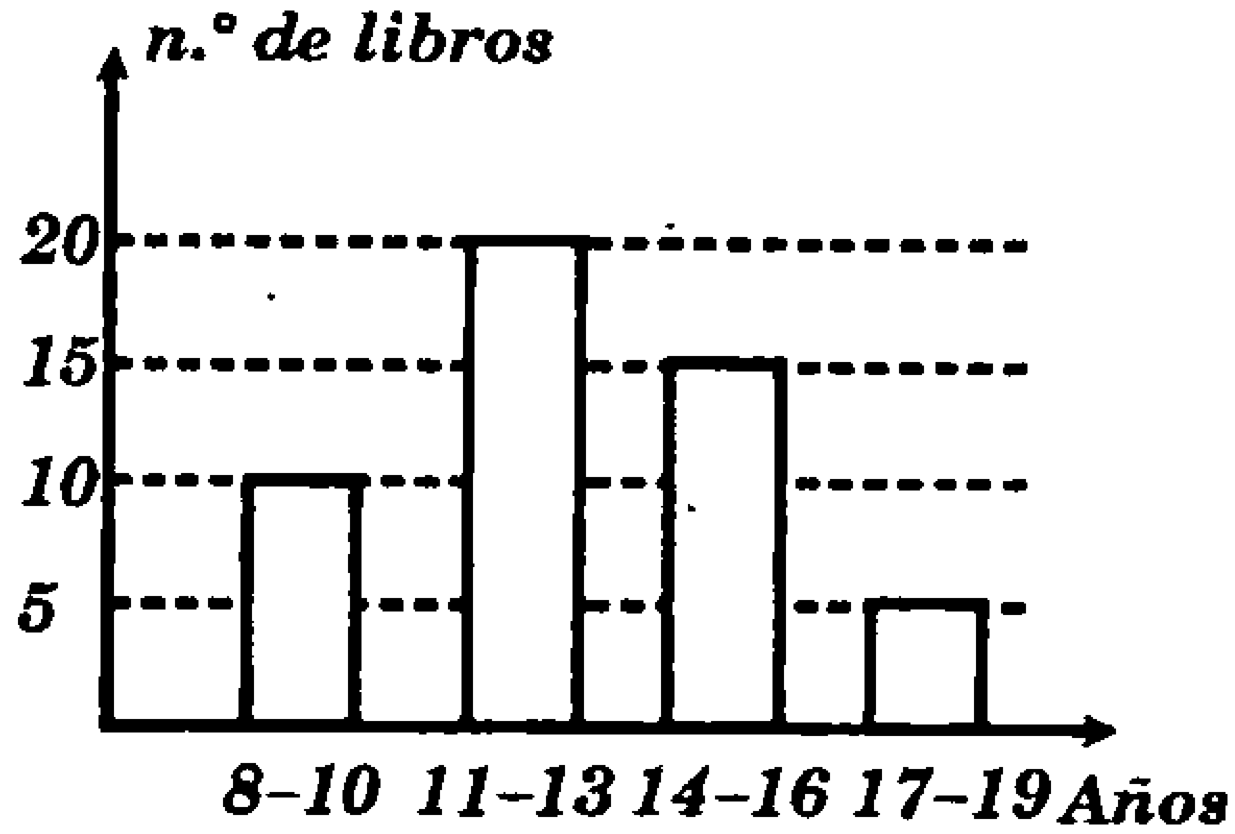


gráfico II

A)64% B)54% C)80 % D)50% E)60%

RESOLUCIÓN:

En el gráfico se observa que los estudiantes menores de *14* años corresponden a aquellos de

$\underbrace{13;\ 12;\ 11;}_{20\text{ libros leídos}}\ \underbrace{10;\ 9\text{ y }8}_{10\text{ libros leídos}}$ años (los dos primeros grupos) 30 libros = leídos

$$Piden = \frac{N.°\text{ libros leídos por est. menores de 14 años}}{N.°\text{ total de libros leídos}} \times 100\%$$

$$= \frac{30}{(10+20+15+5)} \times 100\% = 60\%$$

Por lo tanto, el número de libros leídos por estudiantes menores de *14* años representa el *60%* del total de libros leídos.

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

El cuadro nos muestra la cantidad de toneladas de espárragos orgánicos exportados por la compañía *TONE*, en los últimos siete años.

AÑO	TONELADAS EXPORTADAS
2001	1,8
2002	2,7
2003	3,9
2004	6,8
2005	8,7
2006	9,8
2007	10,8

¿En qué año el incremento porcentual respecto al año anterior fue mayor?

A) 2002 B)2003 C) 2004 D)2005 E)2006

RESOLUCIÓN :

* Se pide la ubicación del año en que hubo el mayor incremento porcentual respecto al año anterior.

* Recordemos que los gráficos estadísticos son herramientas que permiten mostrar información organizada y sintetizada, la cual se analiza e interpreta para sacar conclusiones.

AÑO	TONELADAS EXPORTADAS	Incremento
2001	1,8	
2002	2,7	2,7−1,8=0,9
2003	3,9	3,9−2,7=1,2
2004	6,8	6,8−3,9=2,9
2005	8,7	8,7−6,8=1,9
2006	9,8	9,8−8,7=1,1
2007	10,8	10,8−9,8=1,0

* Pero :

Toneladas antes $\xrightarrow{\text{Incremento}}$ Ahora

$$\left(\begin{matrix}\text{Incremento}\\ \text{Porcentual}\end{matrix}\right) = \frac{\text{Incremento}}{\left(\begin{matrix}\text{Toneladas}\\ \text{antes}\end{matrix}\right)} \times 100\%$$

*Luego :

Periodo	Incremento Porcentual
2001 – 2002	$\frac{0,9}{1,8} \times 100\% = 50\%$
2002 – 2003	$\frac{1,2}{2,7} \times 100\% = 44,44\%$
2003 – 2004	$\frac{2,9}{3,9} \times 100\% = 74,36\%$
2004 – 2005	$\frac{1,9}{6,8} \times 100\% = 27,94\%$
2005 – 2006	$\frac{1,1}{8,7} \times 100\% = 12,64\%$
2006 – 2007	$\frac{1}{9,8} \times 100\% = 10,20\%$

*Notamos que el único período en el cual el incremento es superior a la mitad de lo exportado el año anterior es del *2003* al *2004*.

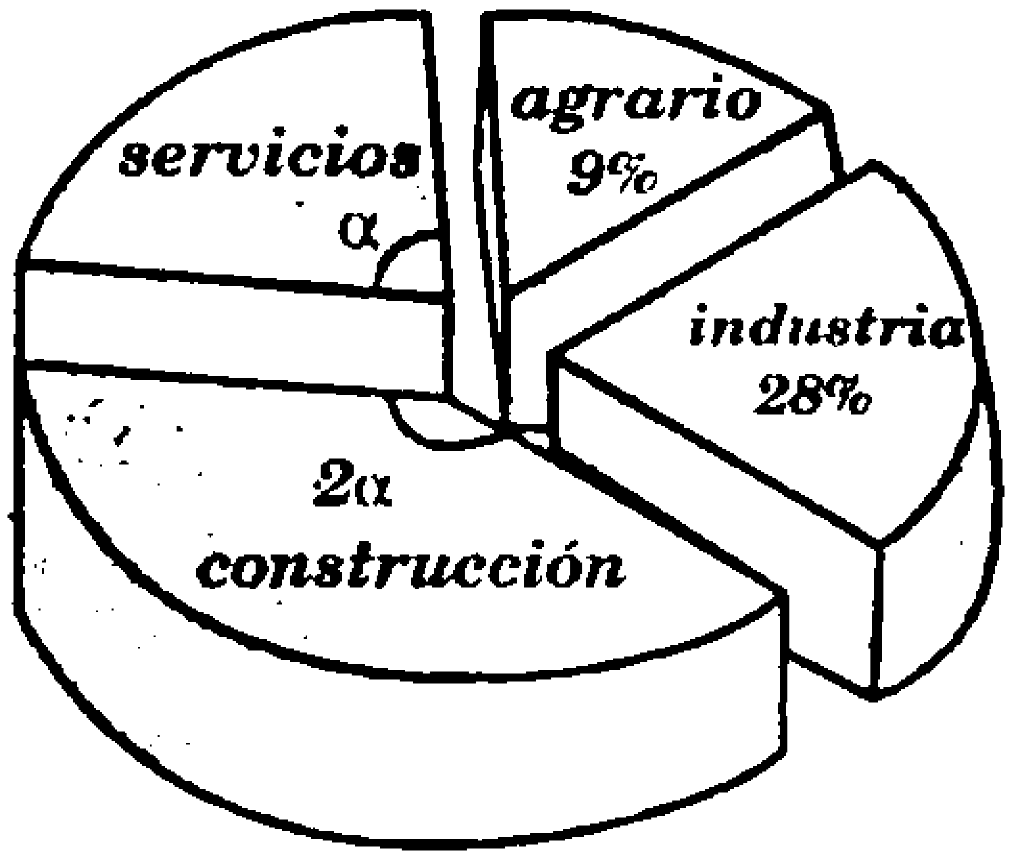
$$\frac{2,9}{3,9} \times 100 = 74,36\%$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

El gráfico muestra un estudio realizado en una determinada región sobre los accidentes mortales producidos en el trabajo, según el sector de actividad. Si hubo *135* accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número de accidentes mortales en el sector construcción?

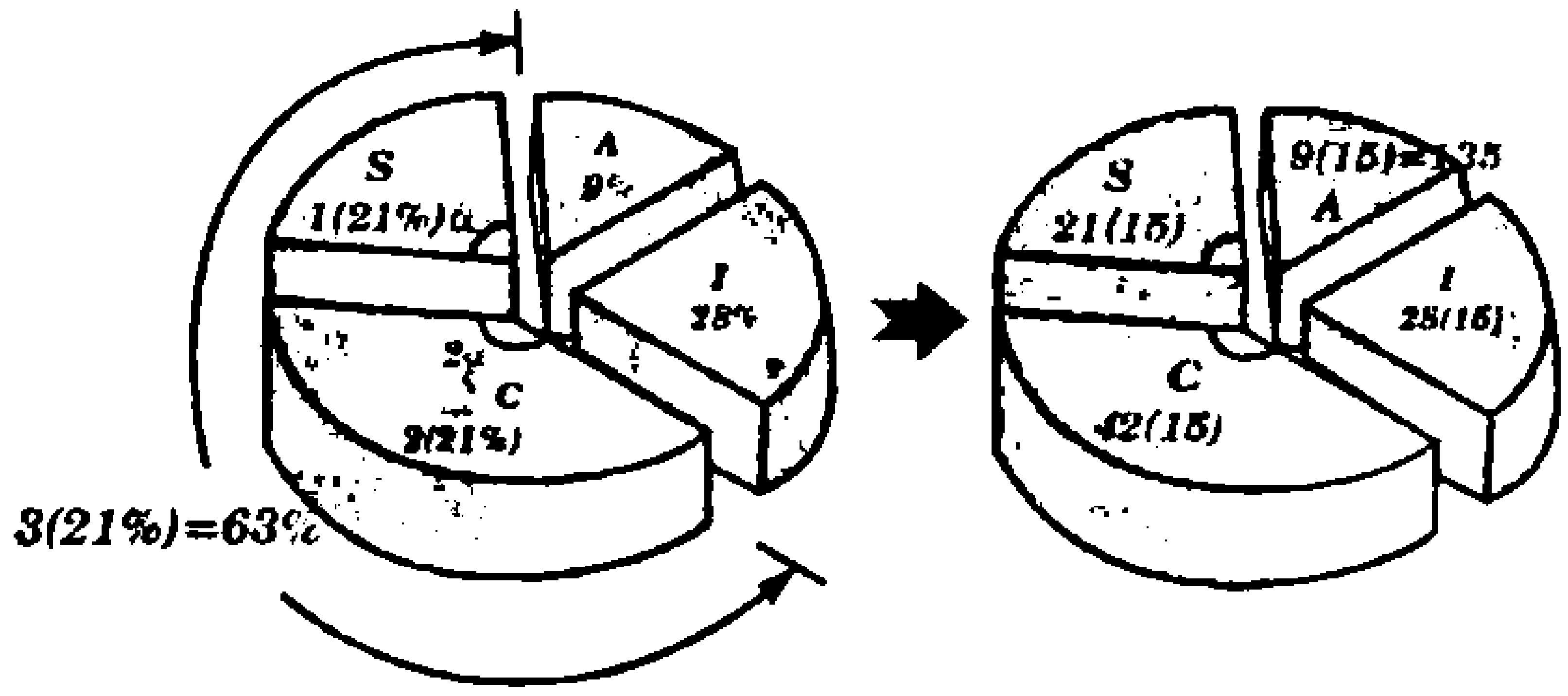
A)510
B)630
C)513
D)540
E)450



RESOLUCIÓN : ***Gráfico I***

En el gráfico: total = ***100%***

Según el dato, ***A = 135***.



Por lo tanto, el número de accidentes mortales en construcción es ***42 × 15 = 630***

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Las ventas de una tienda en el año ***2009*** se muestran por rubros en el gráfico ***I***. En el gráfico ***II***, se muestra el rubro equipos de cómputo por tipo. Determine el monto aproximado de ventas, en miles de dólares, de laptops.

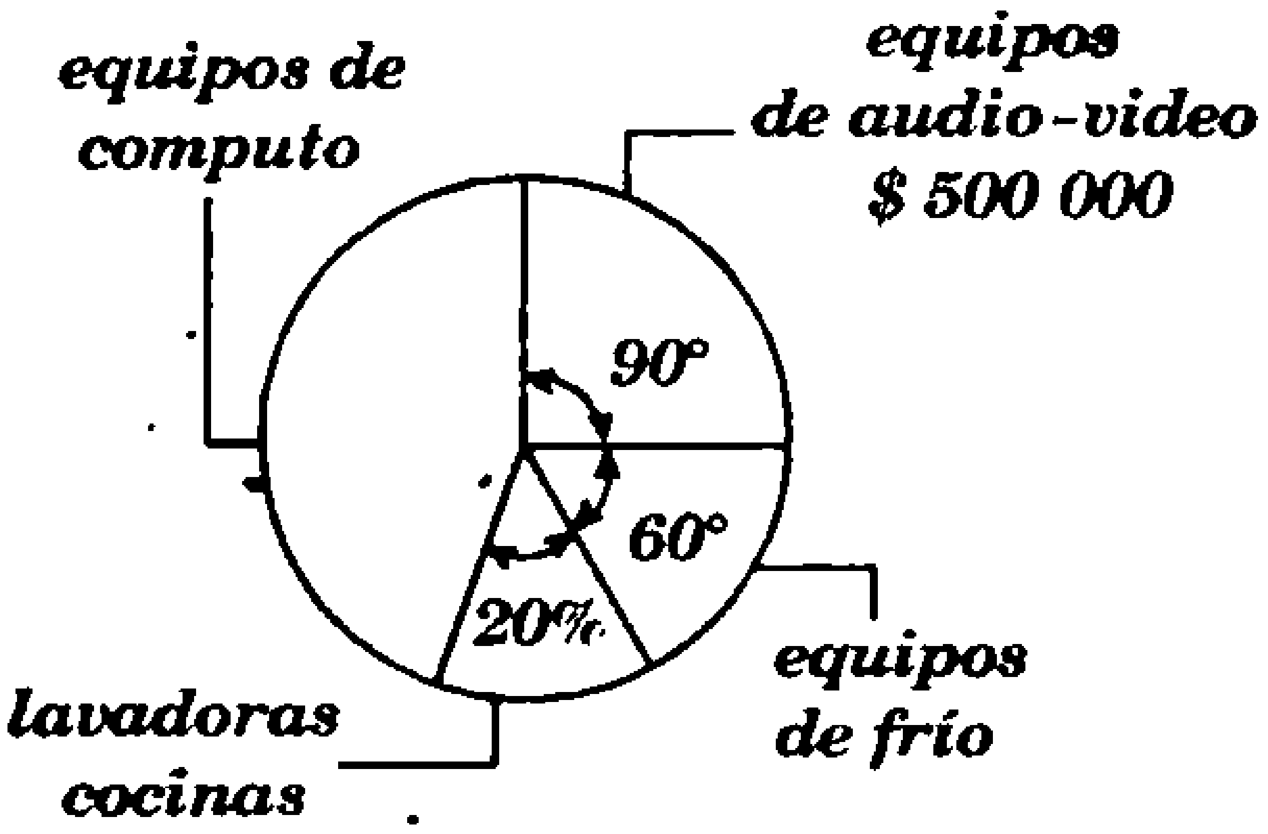
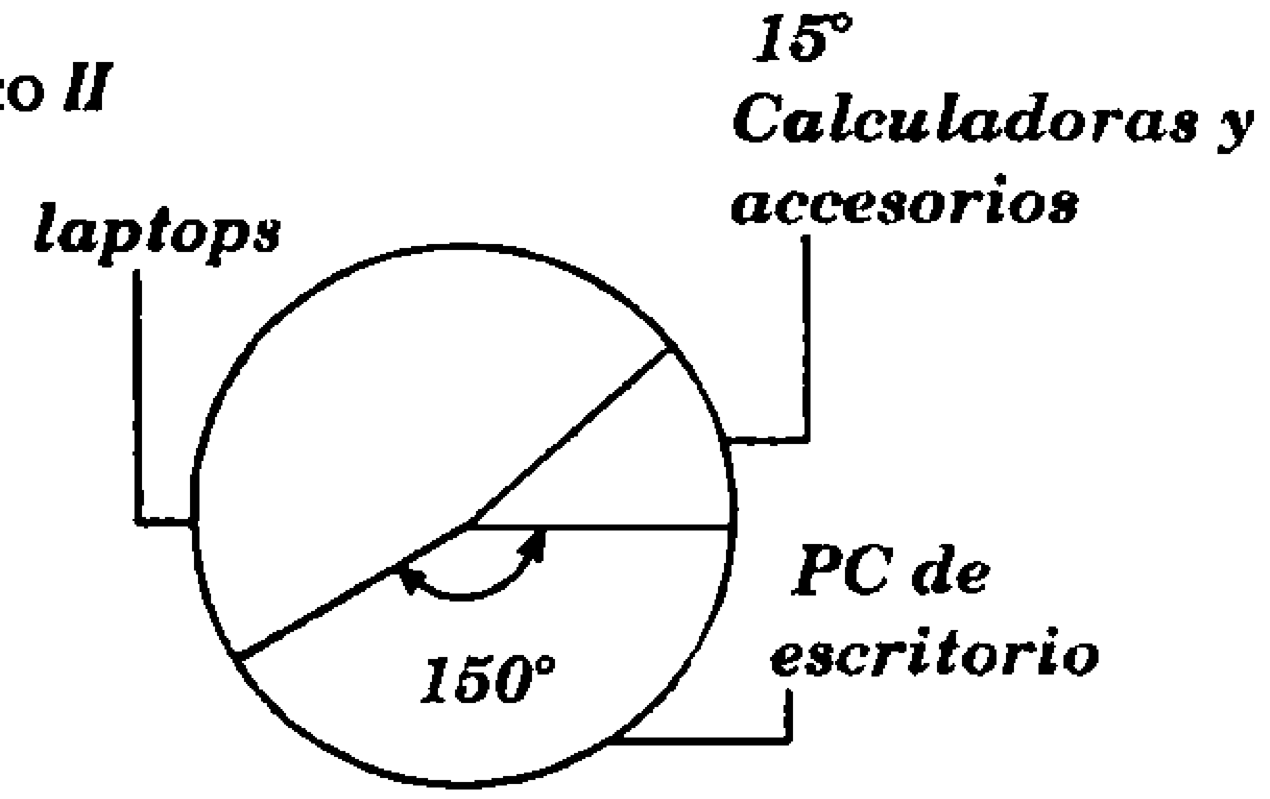


gráfico ***II***

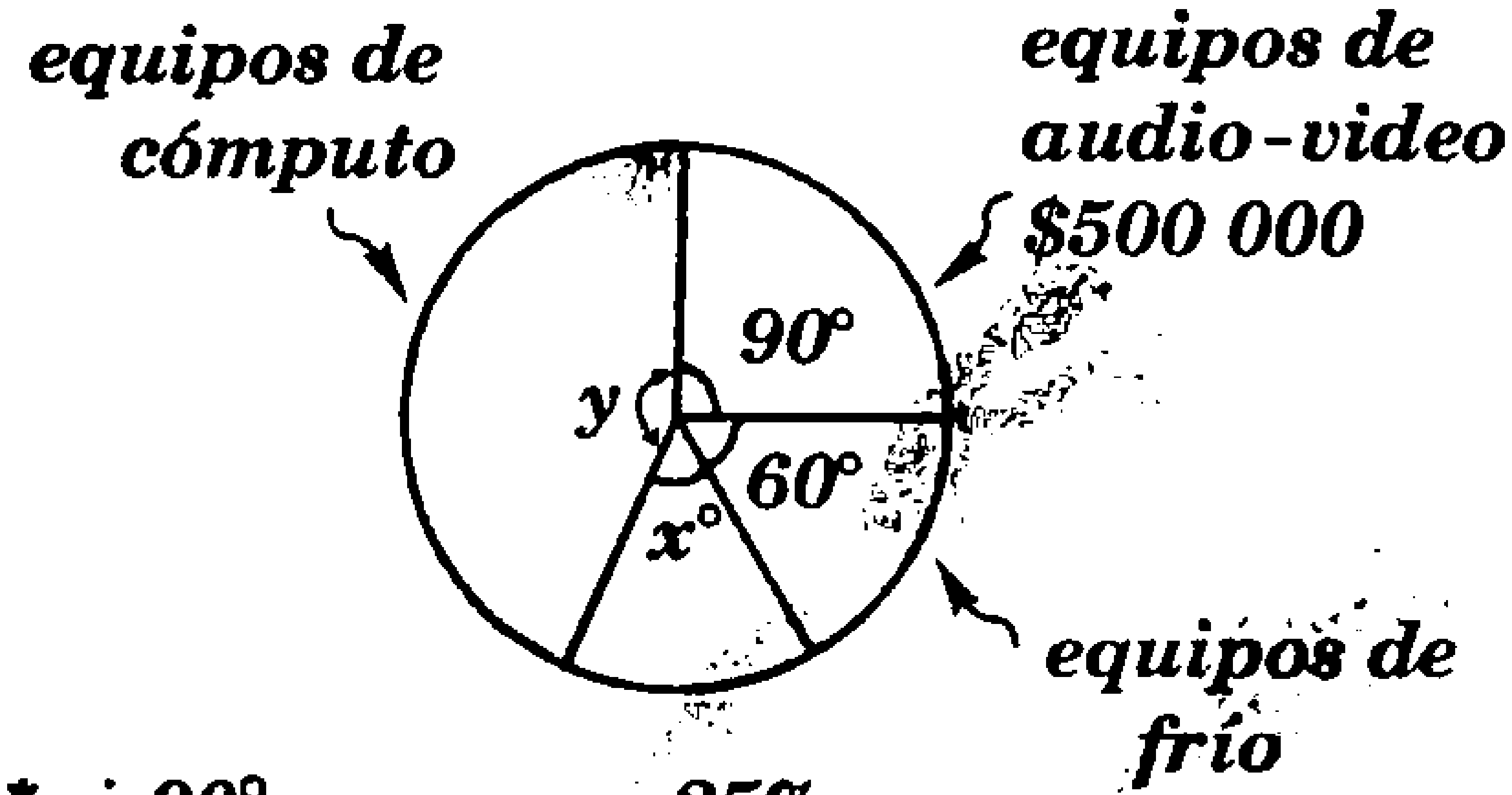


A) 319,44 B) 332,22 C) 333,33 D) 434,44 E) 766,66

RESOLUCIÓN:

Se pide el monto aproximado de ventas de laptops

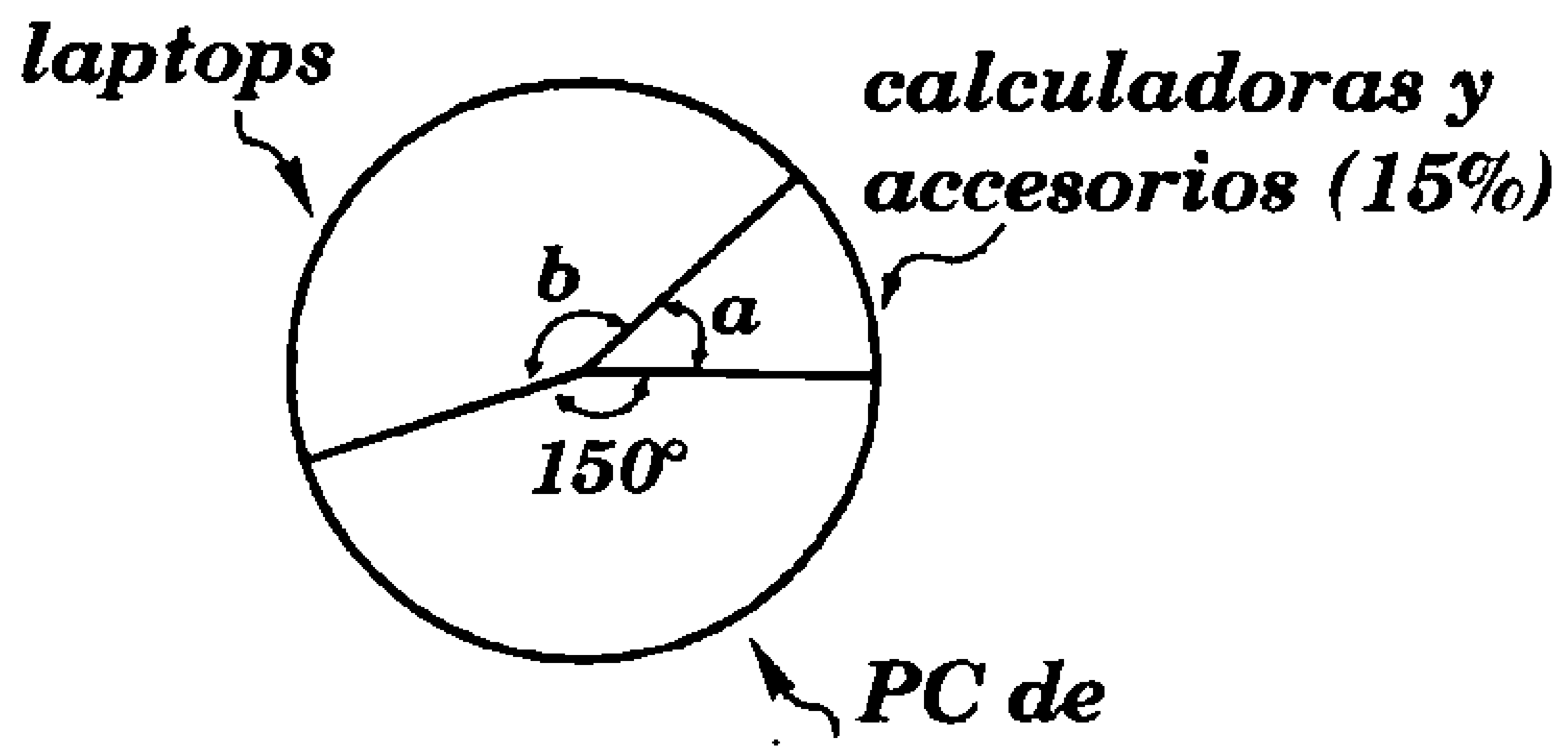
En el gráfico I



* si $90°$ ———— 25%

x ———— 20%

$$\Rightarrow x = \frac{90(20)}{25} = 72° \Rightarrow y = 138°$$



* si $90°$ ———— 25%

x ———— 15%

$$\Rightarrow x = \frac{90(15)}{25} = 54°$$

Luego ***b=156°***

Rnalmente:

$$\begin{pmatrix}\text{monto aproximado}\\ \text{de ventas de laptops}\end{pmatrix} = \frac{b}{360}\left(\frac{y}{90}(500\,000)\right) = \$332{,}22$$

⇒ El monto aproximado en ventas de laptops es ***$ 3 3 2 , 2 2.***

RPTA: "B"

PROBLEMA 9 :

Para la aprobación del ***TLC*** con China, se reunieron los ***120*** congresistas del Parlamento Nacional y emitieron su voto. Los resultados se muestran en la tabla adjunta.

Tipo de voto	*Número de congresistas*
A favor	*a*
En contra	*b*
Abstención	*c*
Total	*120*

Se pudo observar que el número de votos favorables superó en ***20*** a los desfavorables y en ***40*** a las abstenciones. Si la mitad de quienes se abstuvieron pertenecen al partido PEM, calcule la cantidad de congresistas de ese partido político.

A)5 B)8 C) 10 D)12 E) 14

RESOLUCIÓN :

Del gráfico :

Tipo de voto	*Número de congresistas*
A favor	*a*
En contra	*b*
Abstención	*c*
Total	*120*

Por dato

$$a-b=20 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$a-c=40 \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

Además $a+b+c=120$ ....(III)

De ***(I)*** y ***(II)*** en ***(III)***:

$$a+(a-20)+(a-40)=120 \rightarrow a=60$$

$$b=40$$

$$c=20$$

Luego, la mitad de quienes se abstuvieron pertenecen al partido PEM.

N.° de congresistas del partido PEM $\dfrac{c}{2}=\dfrac{20}{2}=10$

La cantidad de congresistas del partido PEM es ***10.***

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Los tiempos, en minutos, que un grupo de ***30*** estudiantes ha empleado en la realización de un examen son los siguientes:

31	*30,5*	*27,5*	*31,5*	*29,5*	*18,5*
16	*27*	*28,2*	*33*	*32*	*27*
21	*19*	*15,4*	*22*	*25,2*	*25*
27	*23,2*	*29*	*24,6*	*33*	*17*
26	*24*	*20,4*	*21,8*	*28,5*	*26,6*

Luego, construya una tabla de frecuencias con dichos datos.

N.° del intervalo (i)	intervalo	Marca de clas	f_i	F_i	h_i	H_i
1	[14; 18⟩	16	3	3	0,10	0,10
2	[18; 22⟩	20	5	8	0,17	0,27
3	[22; 26⟩	24	6	14	0,20	0,4
4	[26; 30⟩	28	10	24	0,33	0,80
5	[30; 34⟩	32	6	30	0,20	1,00

De la tabla, ¿qué tanto por ciento del total de estudiantes ha tardado no menos de ***18*** minutos, pero sí menos de ***30*** minutos?

A) 70% B) 52% C) 64% D) 60% E) 29%

RESOLUCIÓN

Se observa que los estudiantes que han tardado no menos de ***18*** minutos pero sí menos de ***30*** minutos corresponden a los estudiantes cuyos tiempos están en los intervalos

$$2,\ 3 \text{ y } 4:\ \underbrace{5+6+10}_{\text{frecuencias absolutas } f_2+f_3+f_4}=21$$

$$\text{Piden: } \frac{21}{n=30}\times 100\% = 70\%$$

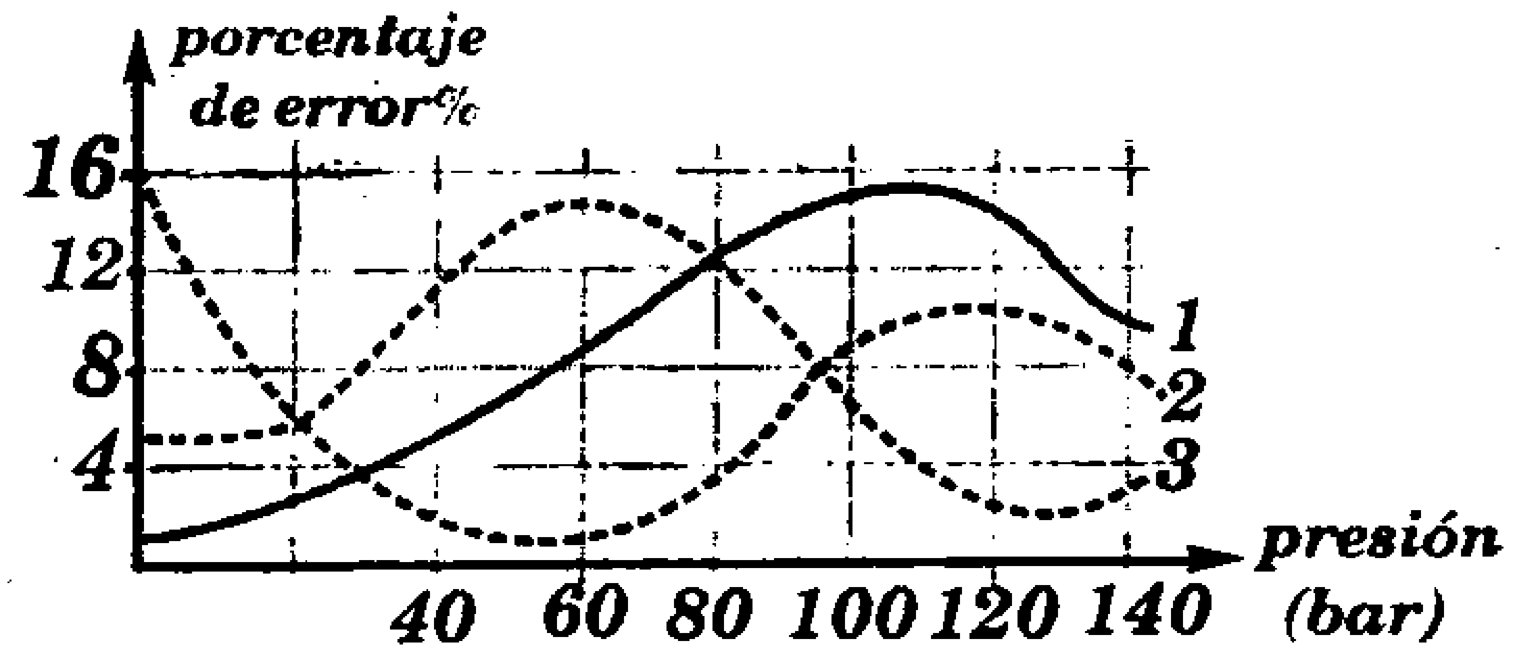
* También podemos utilizar las frecuencias relativas (h_i) ; $h_2+h_3+h_4=0,17+0,20+0,33=0,70$ que representa el ***70%*** de los estudiantes.

Por lo tanto, los estudiantes que han tardado no menos de ***18*** pero sí menos de ***30*** minutos son el ***70%*** del total de estudiantes.

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

Resultado de la calibración de los manómetros ***1 ; 2*** y ***3.***



La gráfica muestra el resultado de la calibración de los manómetros **1**; ***2*** y ***3***.Indique la alternativa correcta:

A) Para medir 100 bar es recomendable emplear el manómetro 2 y no el 3 .

B) El manómetro 1 es recomendable emplearlo para medir presiones comprendidas entre 0 y 40 bar, pero no para medir presiones entre 100 y 120 bar

C) El manómetro 3 es recomendable emplearlo

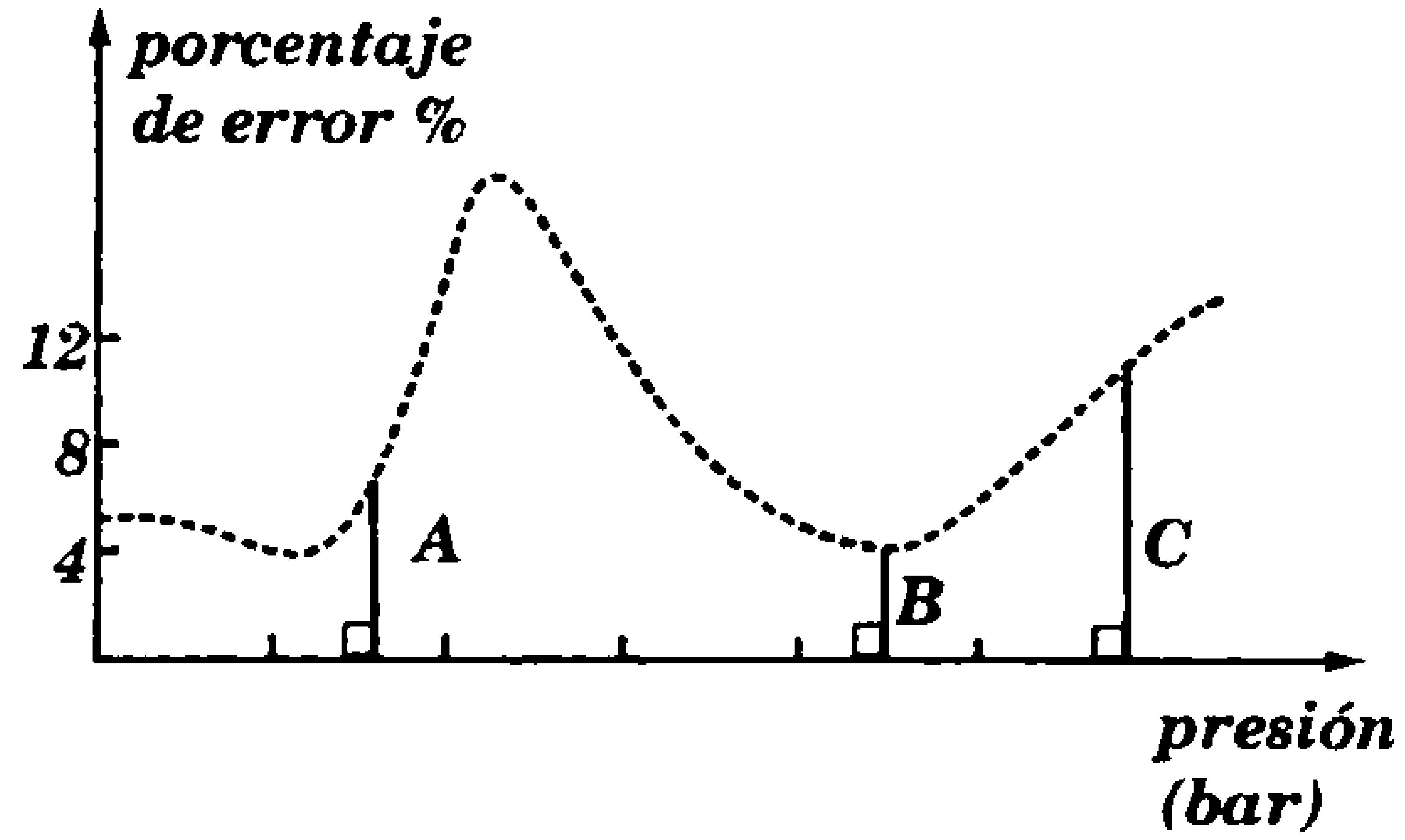
para medir presiones de 80 y 120 bar.

D) Los tres manómetros no son recomendables para medir 80 bar.

E) El manómetro de mayor porcentaje de error para medir 140 bar es el 2 .

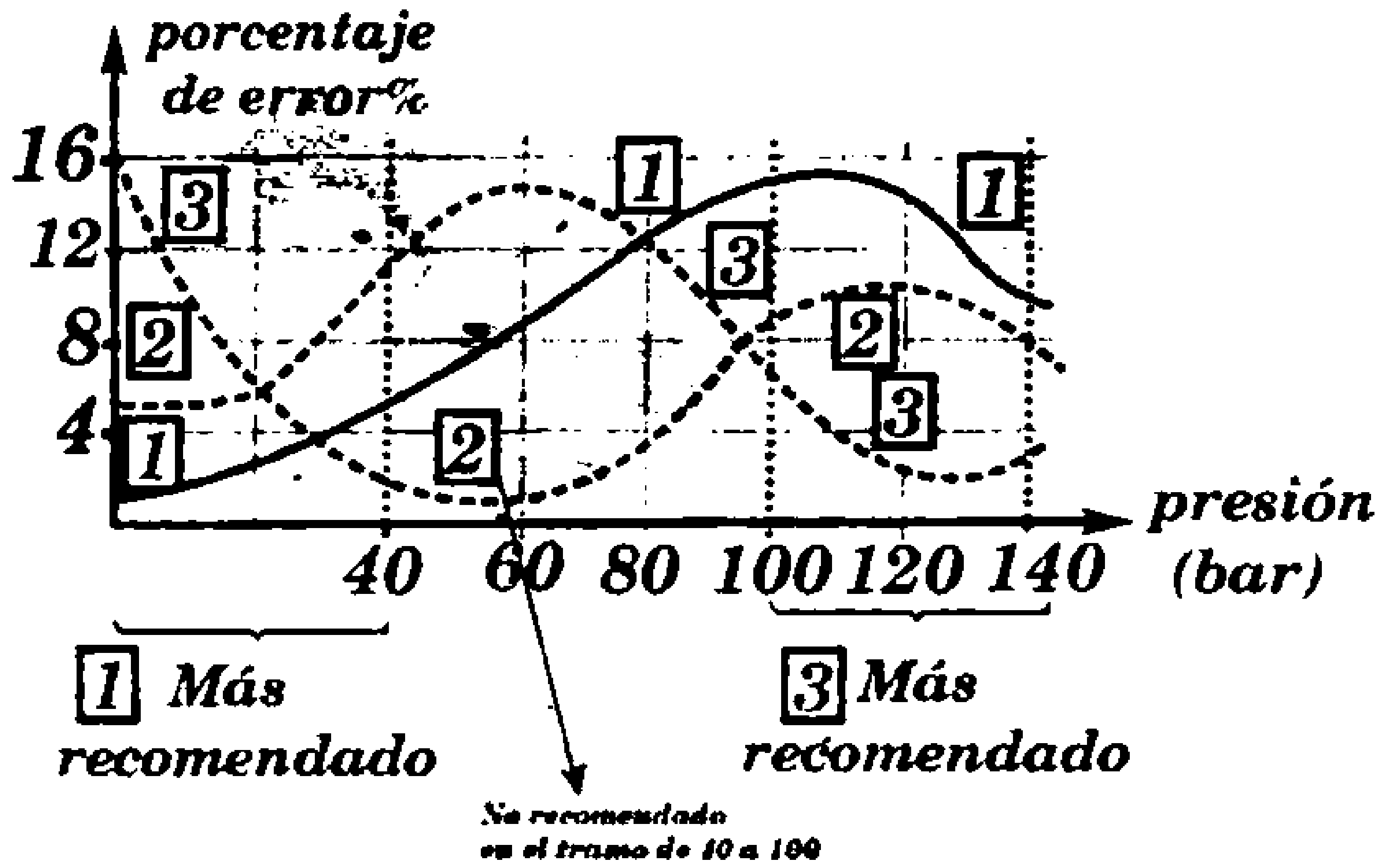
RESOLUCIÓN :

* En el gráfico, para cada punto (presión) el porcentaje de error es la distancia vertical *(A)* a la curva. Así pues, en *B* (o sus aproximaciones) tal distancia es mínima (menos porcentaje de error) y por lo tanto es recomendable usar el manómetro, siendo el caso opuesto *C* (donde hay mayor distancia vertical y por consiguiente mayor porcentaje de error).



Para cada tramo identificaremos al más recomendable (menor porcentaje de error) que es el de menor distancia vertical (y , por lo tanto, el más cercano al eje horizontal).

	Porcentaje(%) de error	
Presión	***Man.1***	***Man.2 y Man.3***
0 – 40	***Menos del 4%***	***Más del 4%***
100 – 120	***Más del 12%***	***Menos del 12%***



*Luego de las alternativas :

A) FALSO :

Para medir ***100*** bar es recomendable el manómetro ***2*** ó ***3***

B) VERDADERO :

Para presiones, entre ***0*** y ***40*** el manómetro ***1*** es el que tiene el menor porcentaje de error

C) FALSO :

Para presiones de ***80*** a ***100*** el manómetro recomendable es el número ***2*** y para presiones de ***100*** a ***120*** el número ***3***.

D) FALSO :

Para ***80*** bar el manómetro recomendado es el número ***1*** .

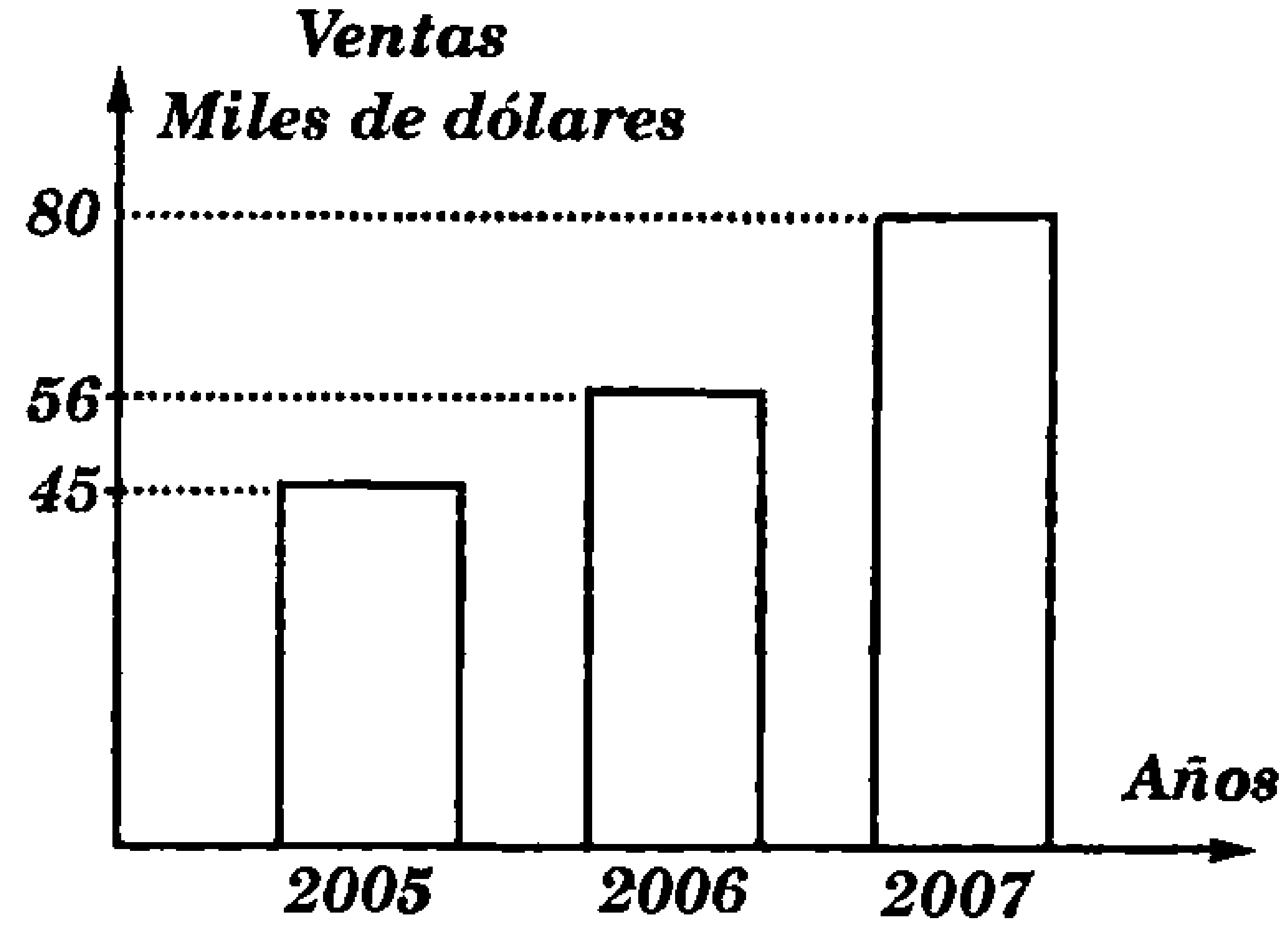
E) FALSO :

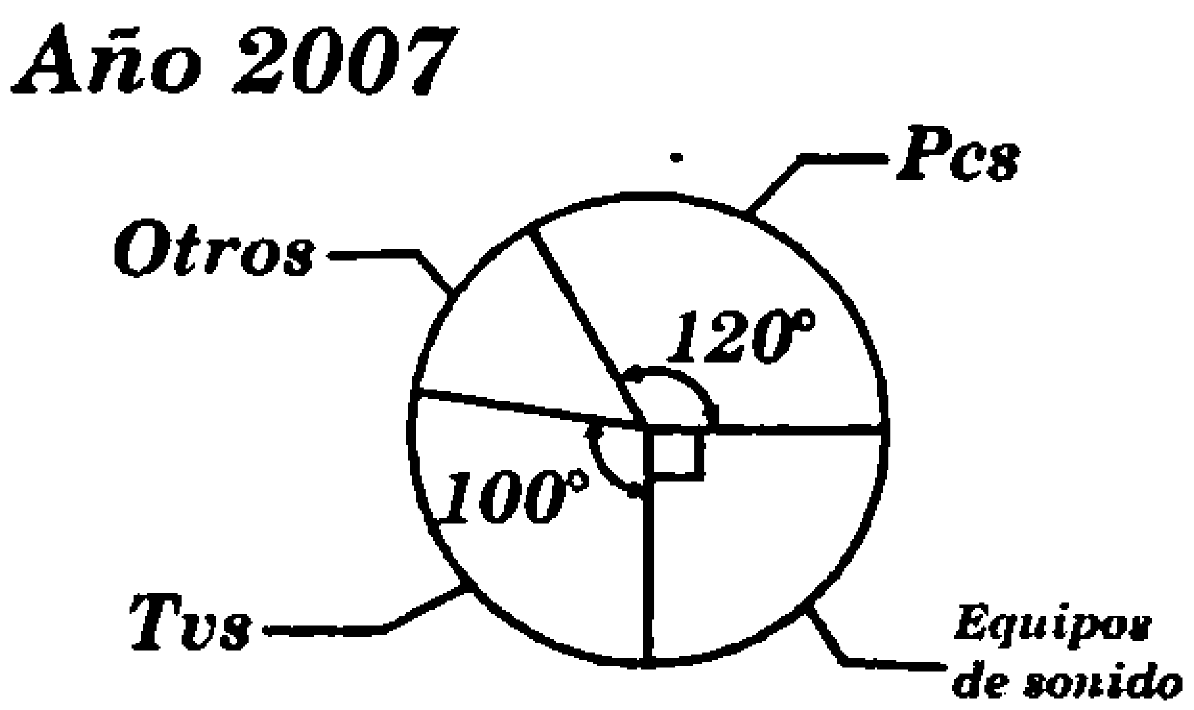
El manómetro con mayor porcentaje de error a ***140*** bar es el número ***1***.

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

Los gráficos muestran las ventas de una tienda de artefactos eléctricos.





Indique las afirmaciones que son verdaderas:

I) Las ventas se han incrementado en más del ***70%***, del ***2005*** al ***2007***.

II) En el ***2007***, la venta en equipos de sonido es de ***20*** mil dólares.

III) Las ventas en otros artículos, para el ***2007***, fue menos de ***10 000***

dólares.

A) Sólo I B) Sólo II C) I y II D) I y III E) II y III

RESOLUCIÓN :

* Se pide indicar los enunciados que son verdaderas.

* El diagrama de barras muestra las ventas del artefactos en los años ***2005***, ***2006*** y ***2007***.

* El diagrama circular muestra la distribución de artefactos vendidos en el año ***2007***.

* Luego :

I) VERDADERO :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ventas 2005: \$45 000}\\ \text{Ventas 2007: \$80 000}\end{array}\right\}(-)$$

Variación: $35000

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\text{Variación}\\ \text{Porcentual}\end{pmatrix}=\frac{3500}{4500}\times 100=77{,}77\%>70\%$$

II) VERDADERO :

• Ventas ***2007*** : $\$\,80\,000 \longrightarrow 360°$

• Equipos de sonido en ***2007*** : $\$\,x \longrightarrow 90°$

$$\Rightarrow x\times 360=90\times 80000$$

$$\Rightarrow x=20000$$

III) FALSO :

En el diagrama circular:

$$Tv+Pcs+Eq.\ de\ sonido+Otros=360°$$

$$\Rightarrow otros=50°$$

Luego:

Otro: $50° \Rightarrow \$x$

ventas ***2007***: $360° \Rightarrow \$\,80\,000$

$$\Rightarrow x=\$11111{,}11$$

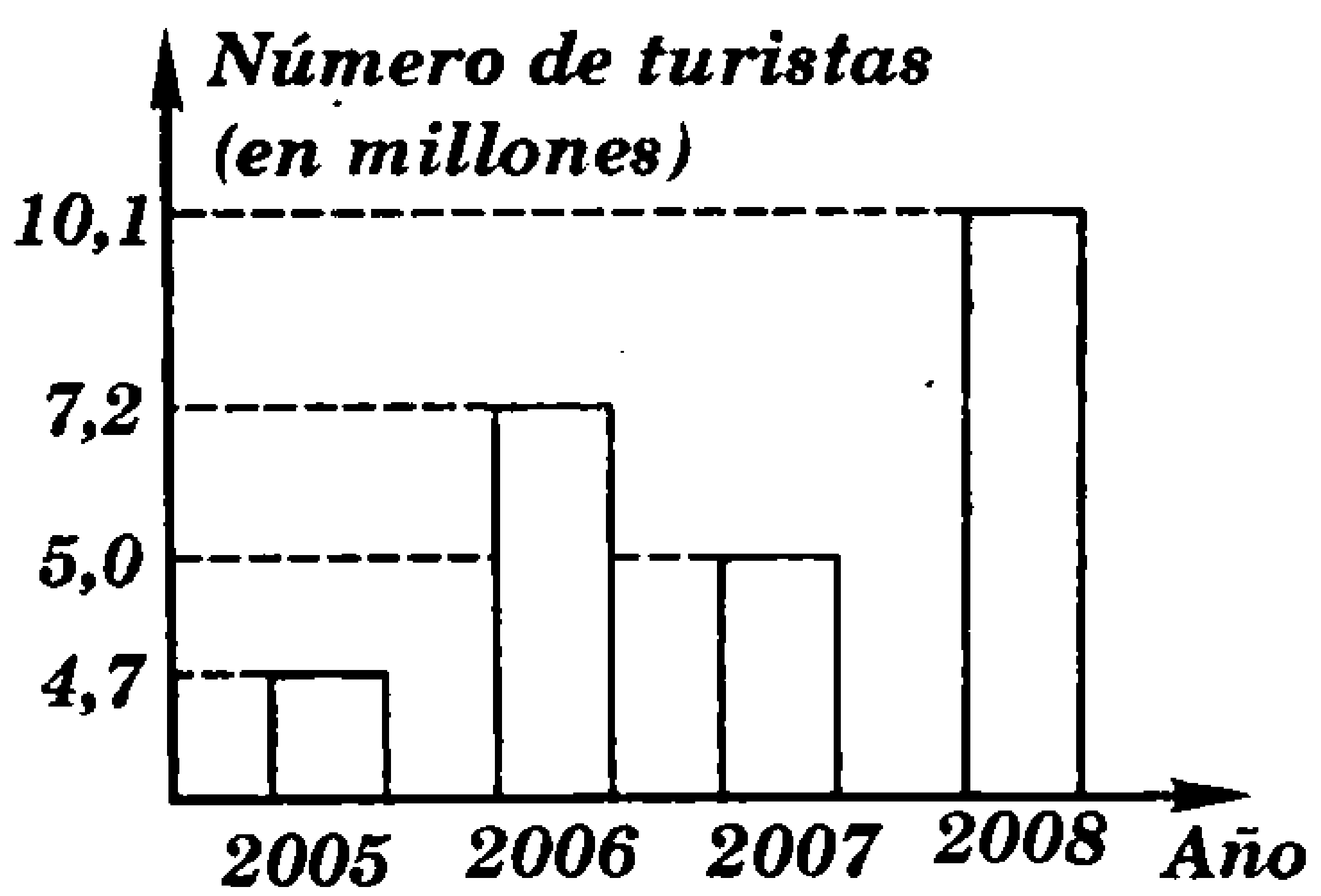
Sólo son verdaderas ***I*** y ***II***.

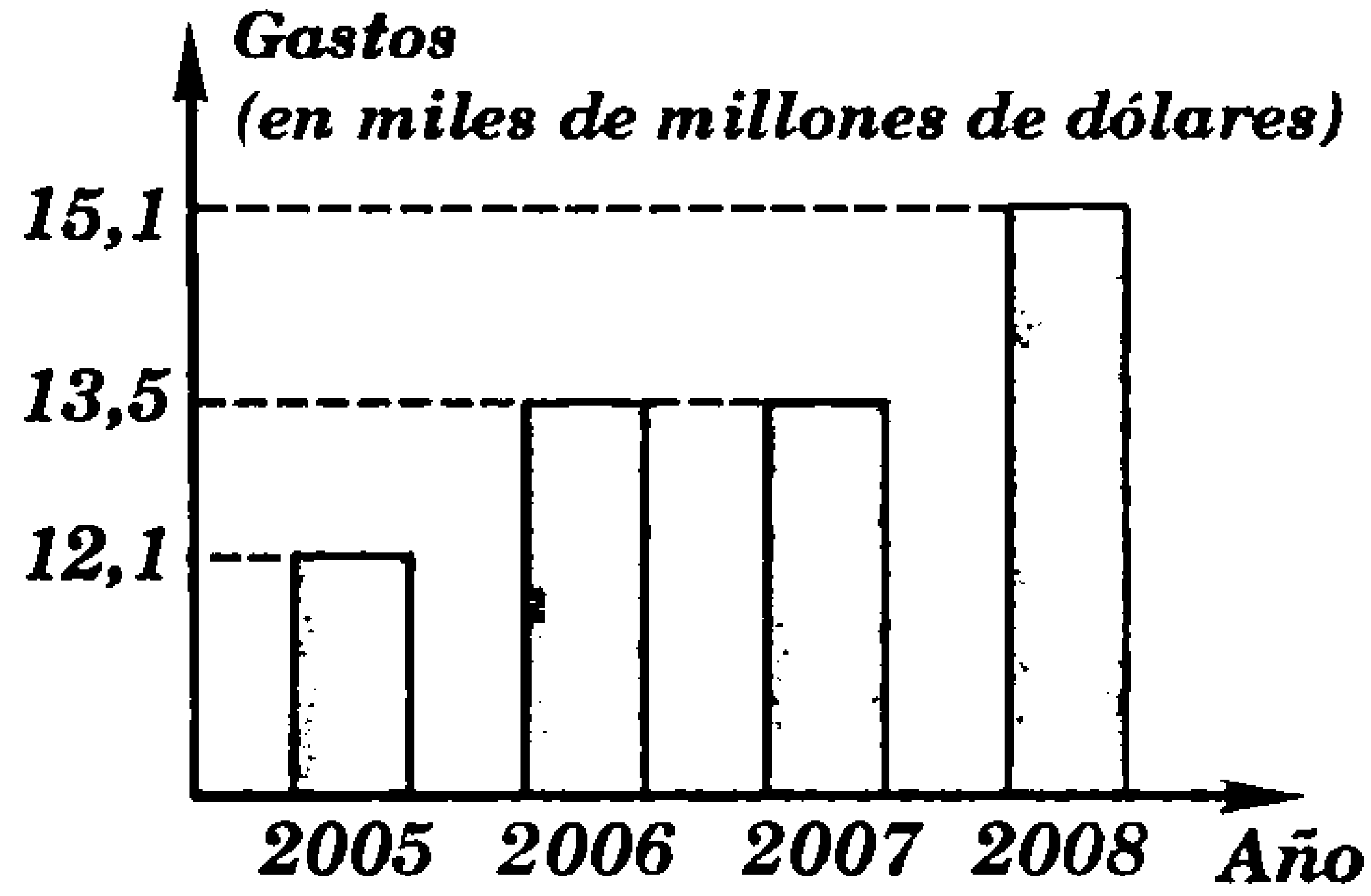
RPTA : "C"

PROBLEMA 13:

A continuación se muestran dos gráficos que reflejan el número de turistas que llega cada año a una ciudad y el dinero que gastan durante su visita:

número de turistas (en millones)





Marque la alternativa que tiene la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera ***(V)*** o falsa ***(F)***:

I) En promedio, en el año ***2007*** un turista gastó más que otro turista en el año ***2006***.

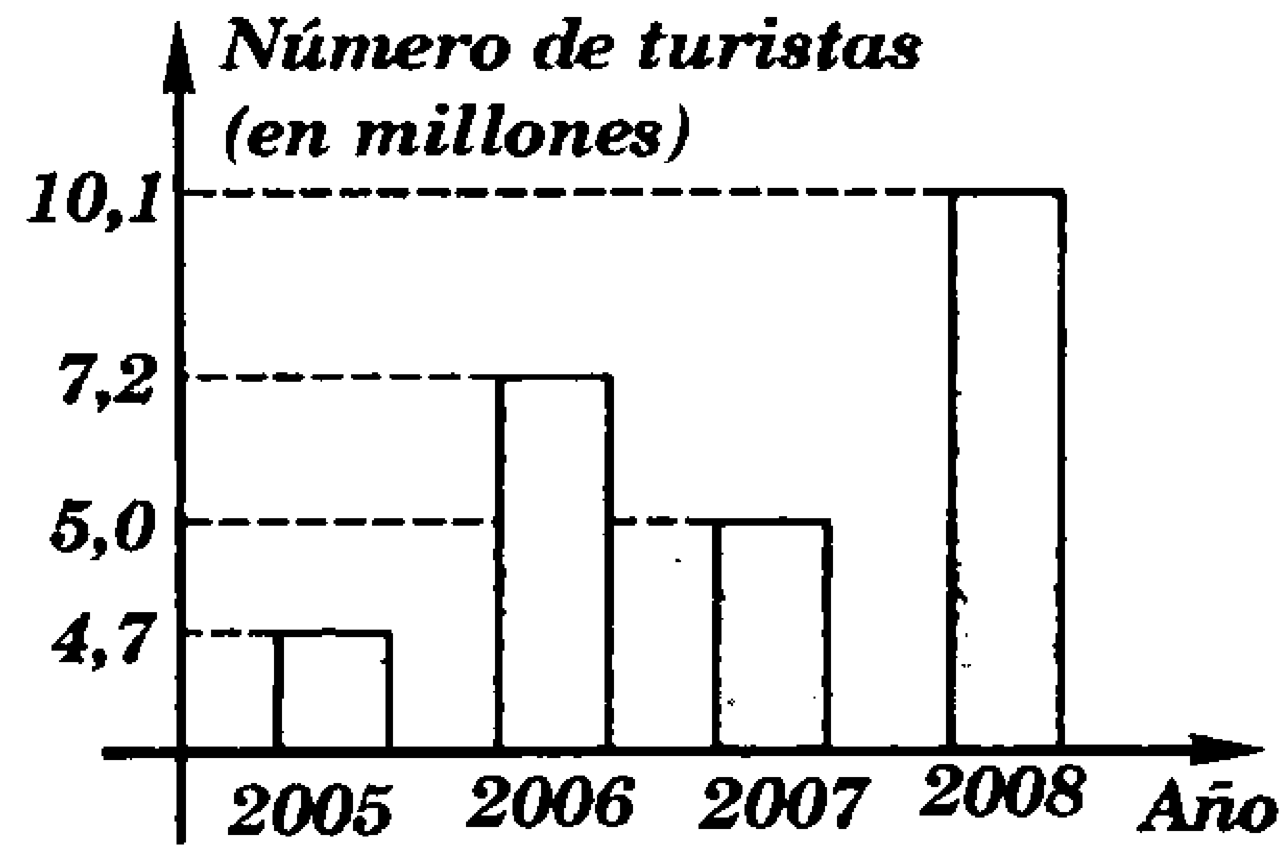
II) La variación porcentual en el número de turistas en el año ***2007*** respecto al ***2006*** es ***30,5%***.

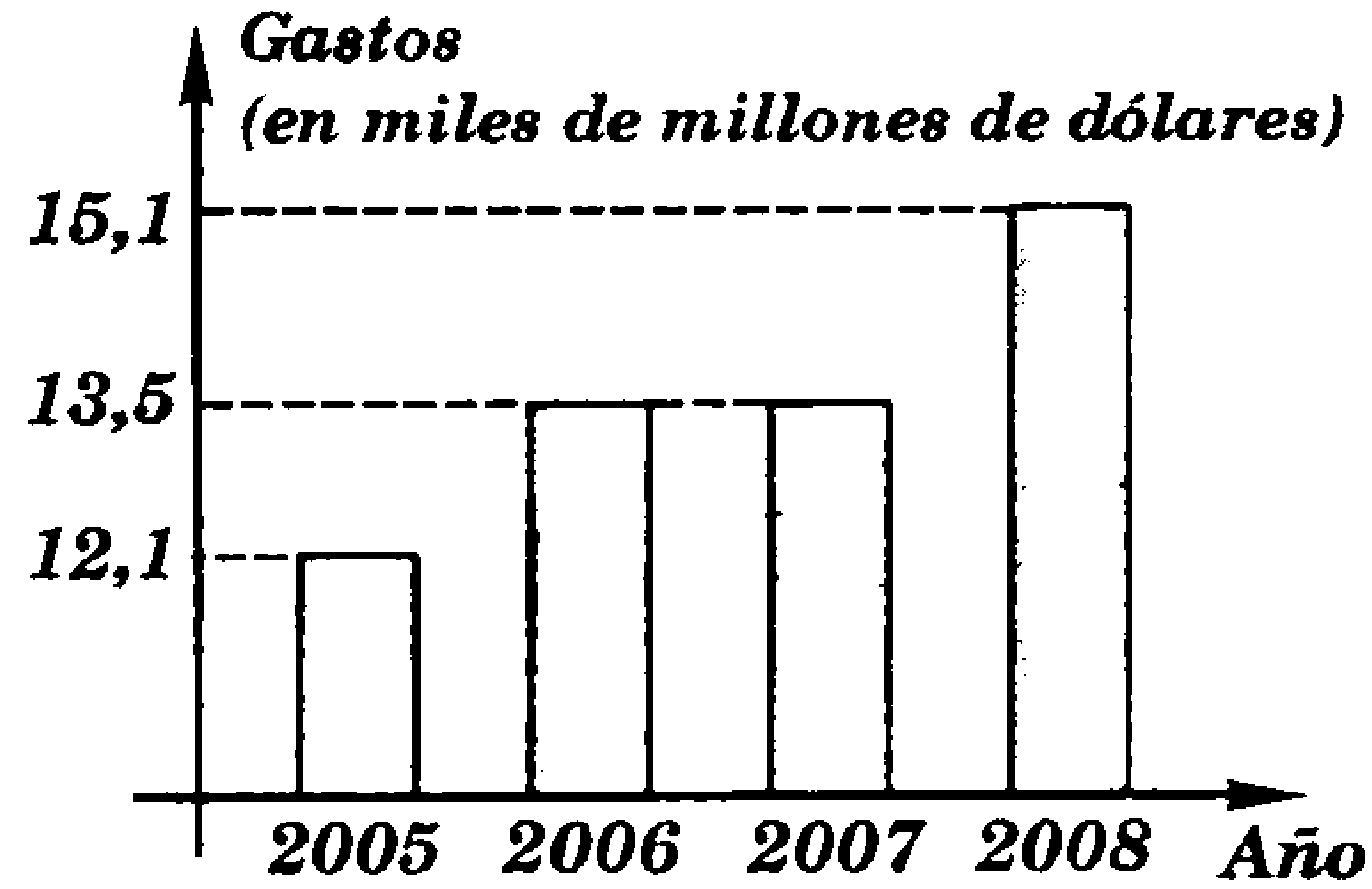
III) El promedio de gastos por turista en el periodo ***2005*** al ***2008*** es ***3 000*** dólares.

A) VVV B) VVF C) FVV D) VFF E) FFF

RESOLUCIÓN :

Datos





I) En promedio, en el año ***2007*** un turista gastó más que otro turista en el año ***2006***. ***(V)***

$$\text{Gasto por turista}:\frac{\overbrace{13{,}5}^{2007}}{5{,}0}>\frac{\overbrace{13{,}5}^{2006}}{7{,}2}\Rightarrow 2{,}7>1{,}875$$

II) La variación porcentual en el número de turistas en el año ***2007*** respecto al ***2006*** es $30,\widehat{5}\%$. ***(V)***

$$V_P=\frac{|5,0-7,2|}{7,2}\times 100\%=30,\widehat{5}\%$$

III) El promedio de gastos por turistas en el periodo ***2005*** al ***2008*** es ***3000*** dólares. ***(F)***

Promedio de gasto por turista :

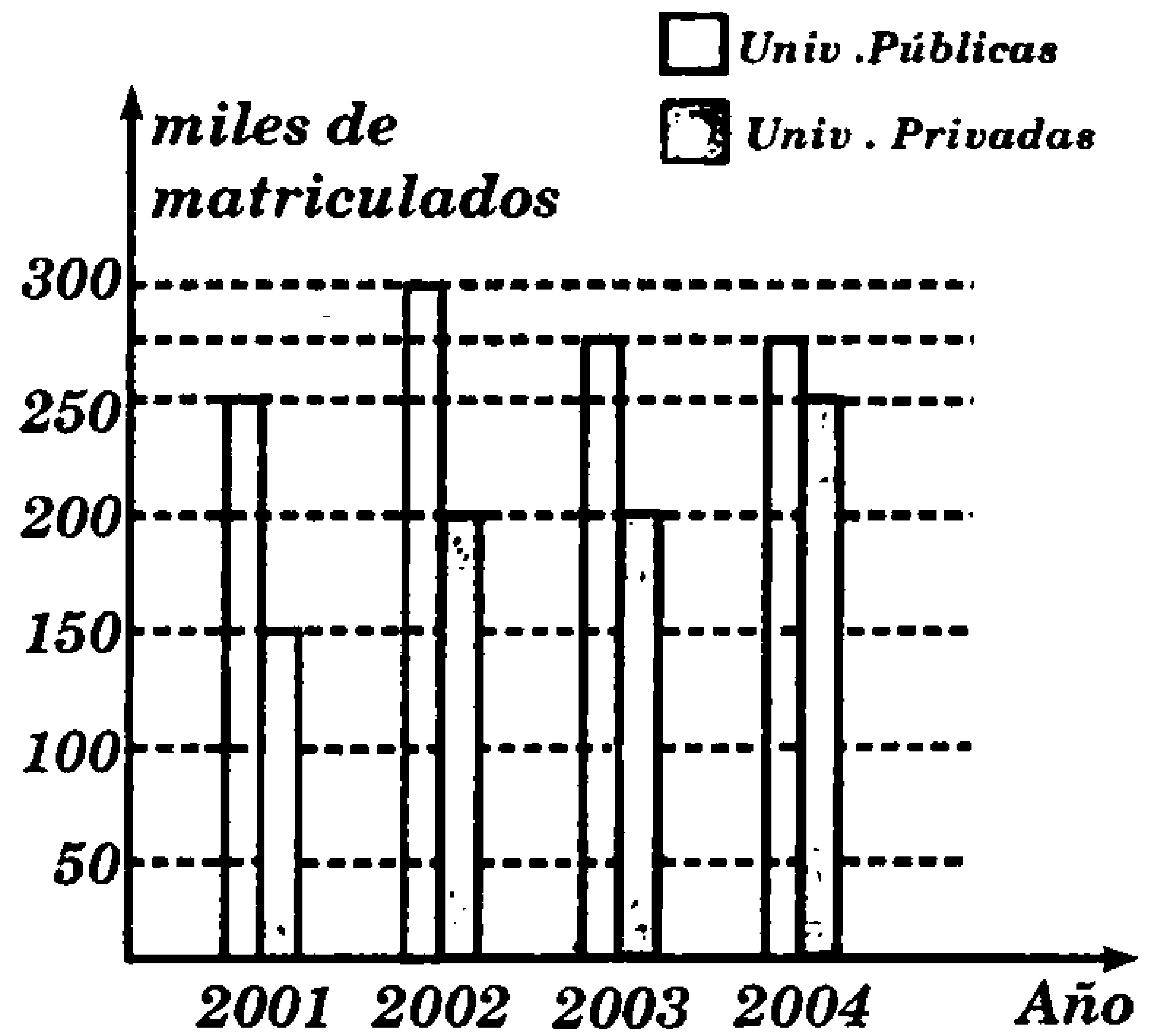
$$\frac{12,1+13,5+13,5+15,1}{4,7+7,2+5,0+10,1}=2007$$

VVF

RPTA: "B"

PROBLEMA 14 :

El gráfico muestra la evolución de la Matrícula en el Sistema Universitario del Perú, del año ***2001*** al ***2004.***



Determine el porcentaje que representa la cantidad de matriculados en las universidades privadas en los ***4*** años respecto al total de matriculados en el Sistema Universitario Nacional.

A) 40,00% ***B) 42,10%*** ***C) 50,00%***
D) 52,38% ***E) 53,00%***

RESOLUCIÓN:

* Se pide el porcentaje que representa la cantidad de matriculados en las universidades privadas respecto al total.

Pasando la información a una tabla:

Año	Univ.Pública	Univ.Privada	
2001	250	150	
2002	300	200	
2003	275	200	
2004	275	250	
Total	1100	800	1900

$$\frac{\textit{Total de matriculados en la univ. privadas}}{\textit{Total de matriculados a nivel nacional}}\times 100\%$$

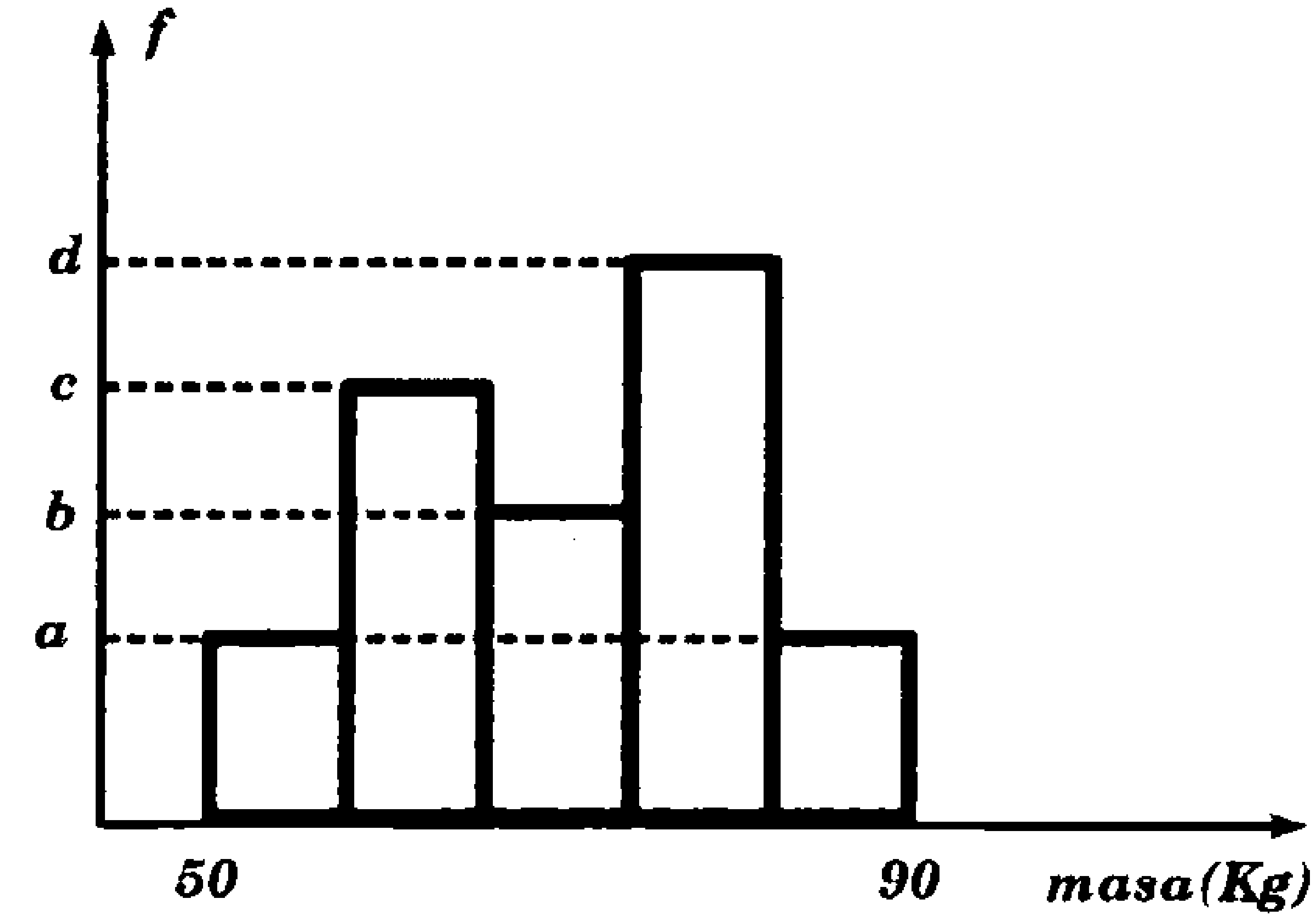
$$=\frac{150+200+200+250}{250+150+300+200+275+200+275+250}\times 100\%$$

$$=\frac{800}{1900}\times 100\%=42,10\%$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

El siguiente histograma muestra la distribución de las masas en kilogramos de un grupo de personas. El ancho de clase es constante. Si ***a*** , ***b*** , ***c*** y ***d*** son entre sí como ***2*** ; ***3*** ; ***4*** y ***5*** , respectivamente , ¿qué porcentaje de las personas tienen una masa comprendida entre ***65*** y ***80*** kilogramos? (redondear al centésimo)



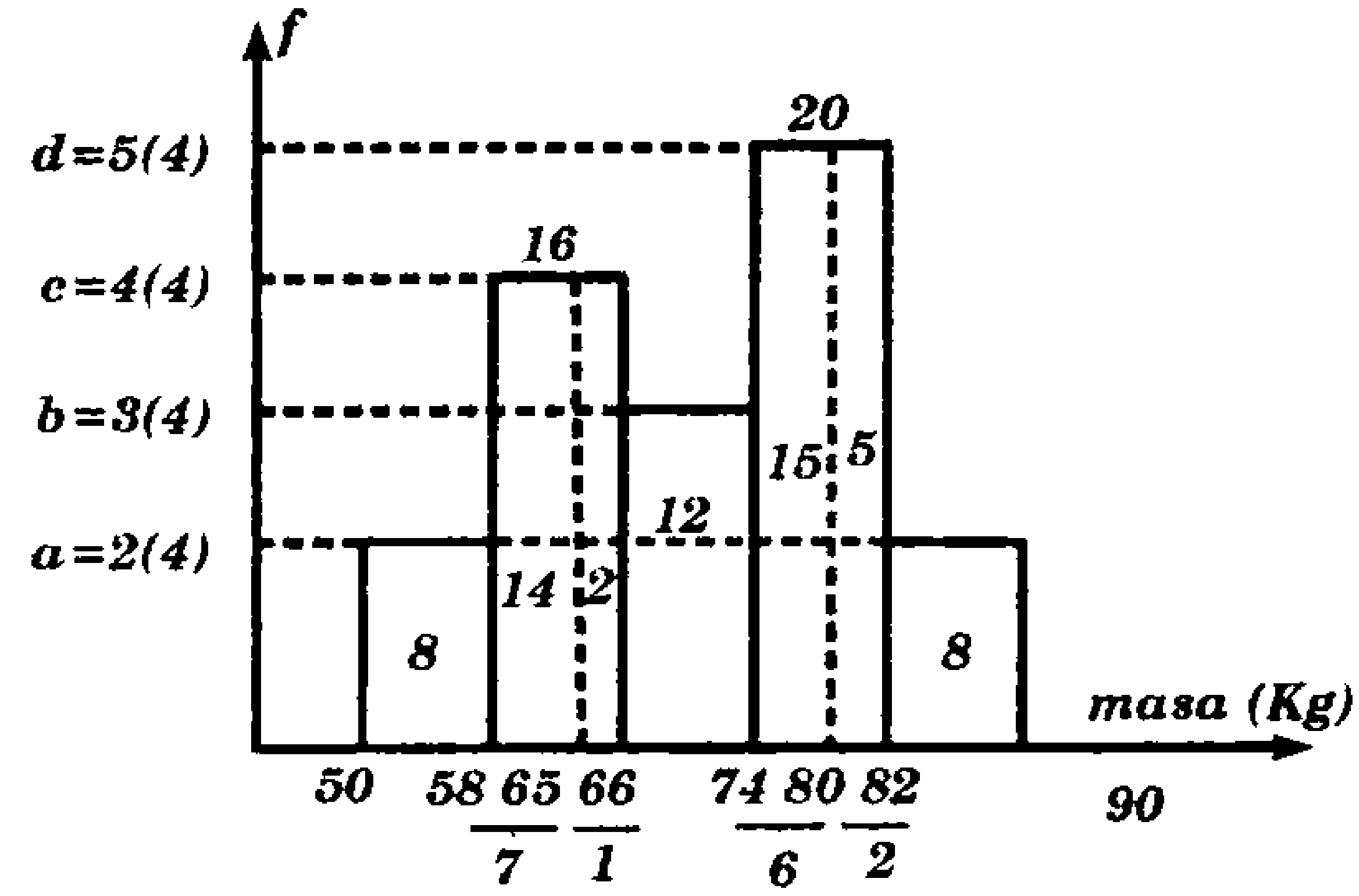
A) 42,31 ***B) 45,31*** ***C) 47,51***
D) 48,31 ***E) 50,51***

RESOLUCIÓN:

* En el histograma , el ancho de clase es constante :

$$W=\frac{90-50}{5}=8$$

* Se pide el tanto por ciento de personas que tienen una masa comprendida entre ***65*** y ***80*** kilogramos , para ello interpolamos dichos valores.



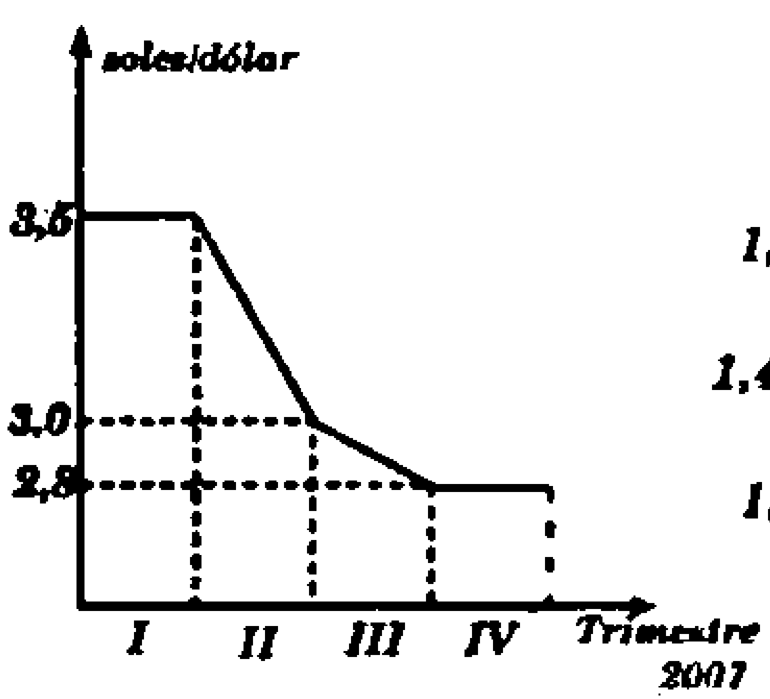
* Luego lo pedido es :

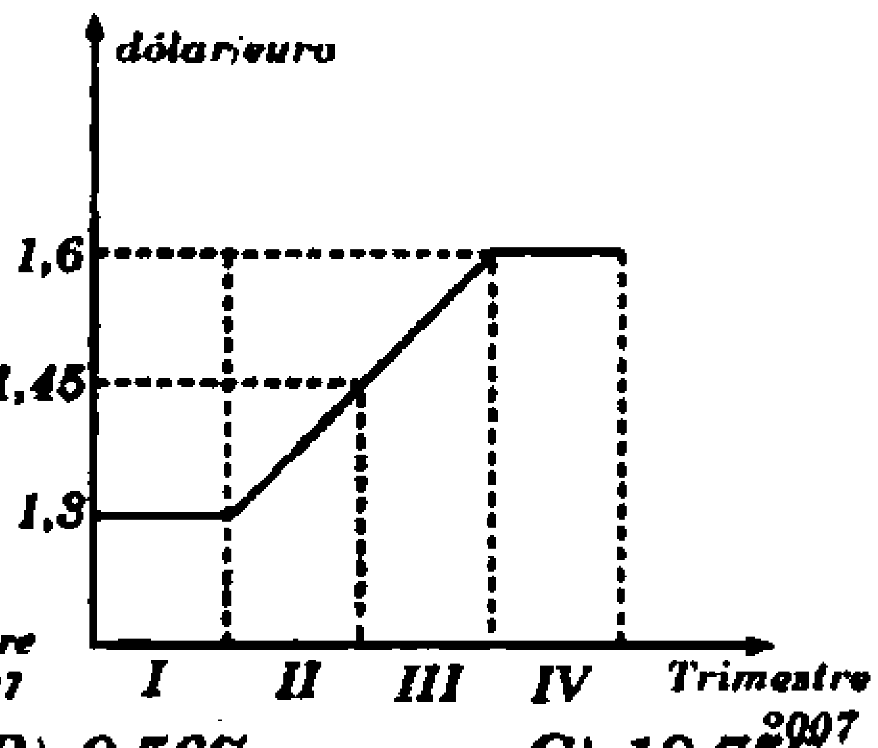
$$\frac{2+12+15}{8+16+12+20+8}\times 100\% = 45,31\%$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Pedro a inicios del año ***2007***, compró ***10 000*** dólares y ***10 000*** Euros. Al término del ***IV*** trimestre del ***2007***, cambia nuevamente sus ahorros a soles. ¿Qué porcentaje de su capital inicial en soles , perdió durante el año ***2007*** , si el comportamiento del tipo de cambio en las monedas mencionadas es el mostrado en las figuras adjuntas?





A) 1,87% ***B) 9,56%*** ***C) 18,75%***
D) 20,00% ***E) 21,70%***

RESOLUCIÓN:

Inicio 2007	Final 2007
1 dólar ≡ 3,5 soles	1 dólar ≡ 2,8 soles
1 euro ≡ 1,3 dólares	1 euro ≡ 1,6 dólares
↳1 euro ≡ 4,55 soles	↳1 euro ≡ 4,48 soles

I) Al inicio del trimestre

Para comprar ***10 000*** dólares y ***10 000*** euros se necesitó ***N.°*** de soles = ***10 000 (3,5) + 10 000(4,55) = 10 000(8,05)***

II) Al final del cuarto trimestre

Los ***10 000*** dólares y ***10 000*** euros equivalen ahora:

Número de soles

$$= 10\,000(2,8)+10\,000(4,48) = 10\,000(7,28)$$

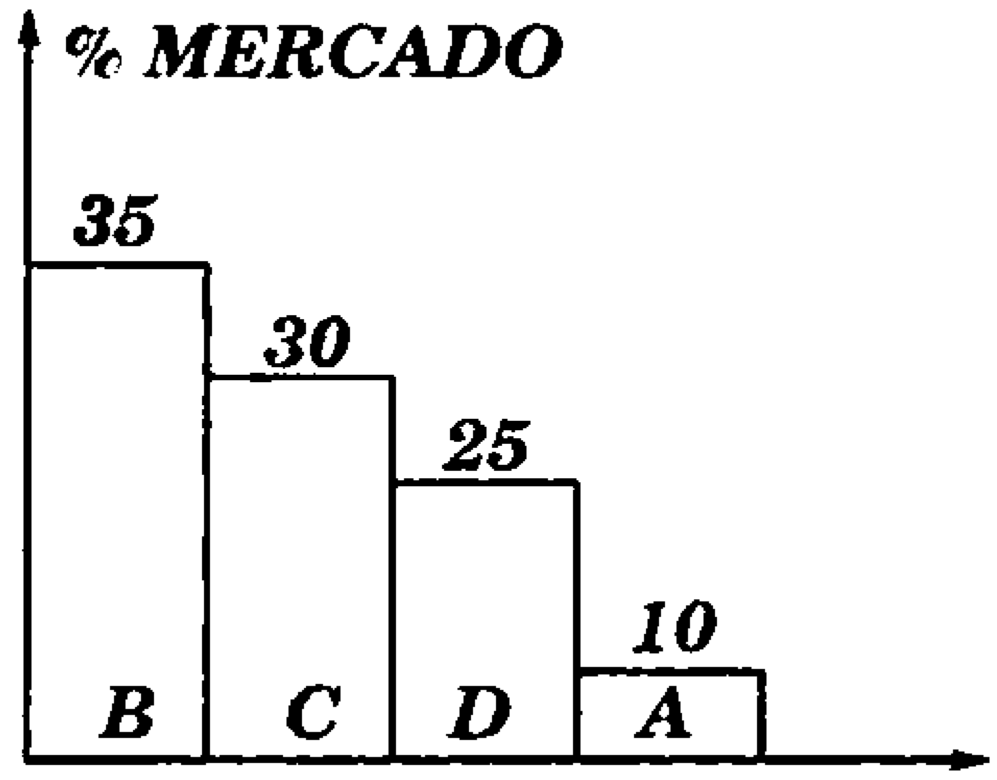
* El tanto por ciento de pérdida es:

$$\frac{10\,000(8,05) - 10\,000(7,28)}{10\,000(8,05)}\times 100\% = 9,56\%$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

El gráfico adjunto muestra cómo comparten el mercado de computadoras las empresas ***A*** , ***B,C*** y ***D*** . Si la empresa ***A*** se retira del mercado , la empresa ***B*** desea mantener la misma proporción del mercado comparado con ***C*** y ***D*** antes que se retire ***A***. Determine qué porcentaje del mercado total debe tener ***B*** para cumplir con su deseo .



A)36,10 ***B)38,88*** ***C)39,12*** ***D)40,01*** ***E)41,31***

RESOLUCIÓN :

* Si ***A*** se retira del mercado,entonces,el ***100 %*** es distribuido entre ***B;C*** y ***D***.

* Según la condición, la proporción entre ***B,C*** y ***D*** se mantiene,es decir : $\frac{B}{35}=\frac{C}{30}=\frac{D}{25}=\kappa$ (simplificados: 7, 6, 5)

$$\Rightarrow B = 7\kappa \; ; C = 6\kappa \; ; D = 5\kappa$$

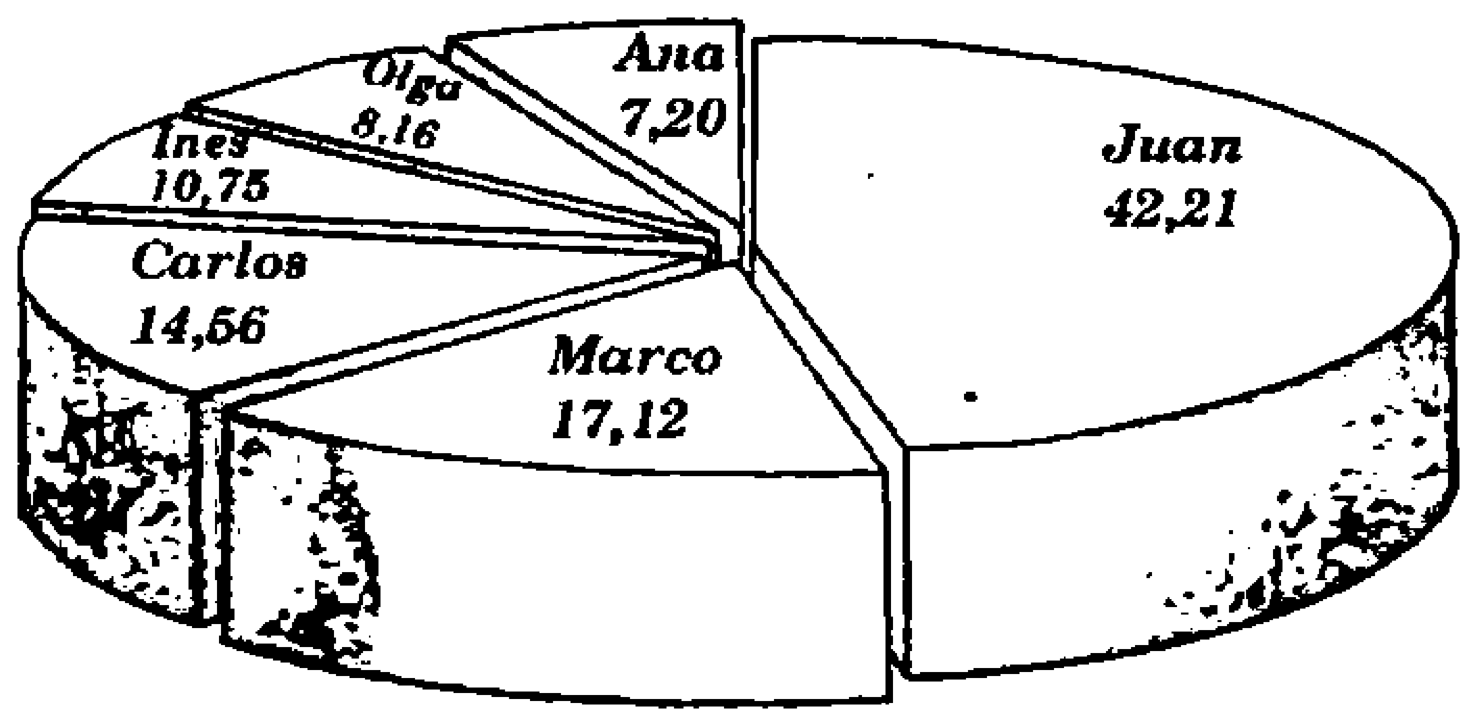
* Luego : $7k+6k+5k=100 \Rightarrow k=5,555$

* Nos piden: $B = 7(5,555) \Rightarrow B = 38,885$

RPTA :"B"

PROBLEMA 18 :

La figura muestra , en porcentajes , la producción de arroz durante el año ***2004***. ¿En qué porcentaje es mayor la producción de la parcela de Juan que el de la parcela de Inés?

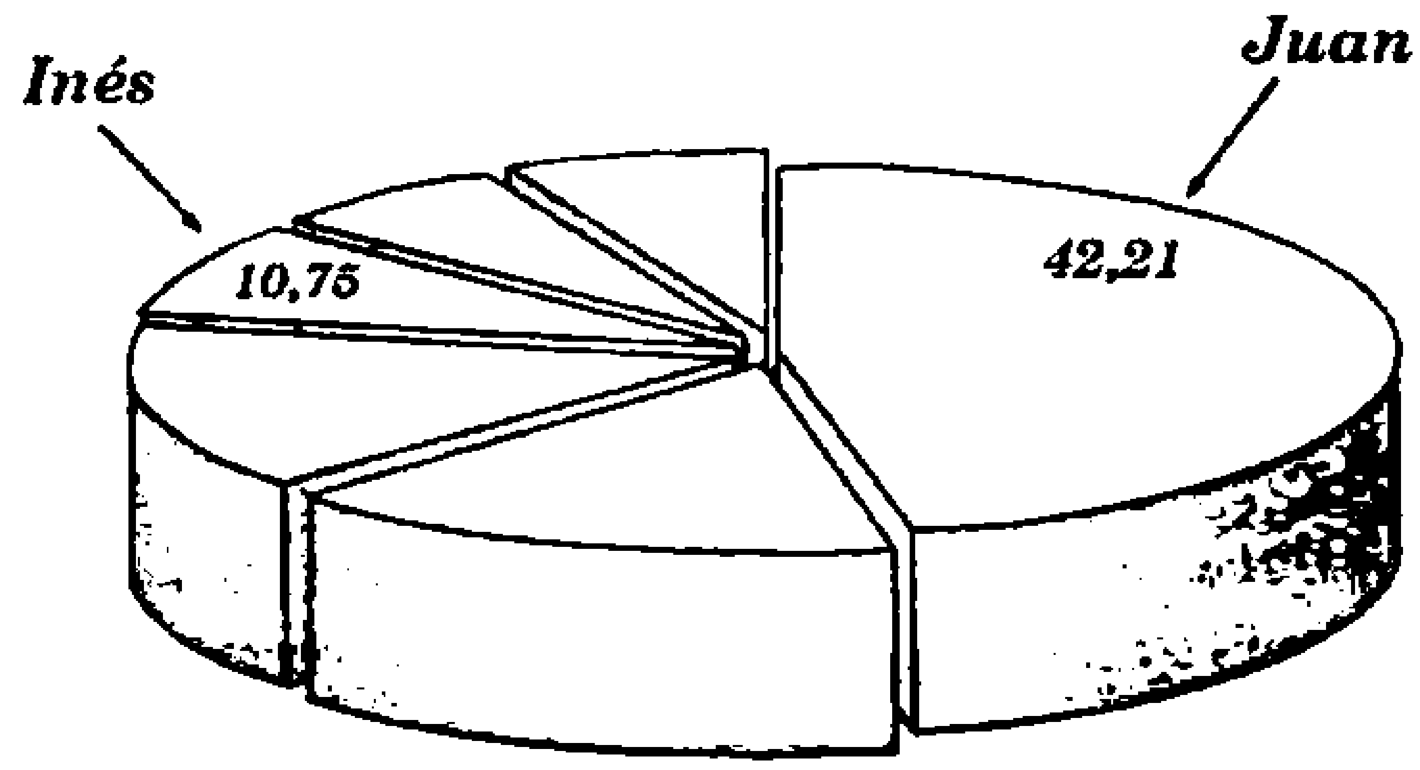


porcentaje de producción de las parcelas

A)25,46 ***B)31,46*** ***C)42,55*** ***D)74,53*** ***E)66,37***

RESOLUCIÓN :

* Como muestra el gráfico; la comparación de los porcentajes de Juan e Inés es respecto al total :



* Nos piden : *42,21−10,75=31,46*

RPTA :"B"

PROBLEMA 11 :

La tabla adjunta , muestra la producción y el costo total por tonelada métrica de conserva de espárragos blancos , según calidades. Si la empresa desea cubrir el costo de toda la producción con la exportación de las calidades *A* y *B* , y además obtener un excedente de *20%*, determine el precio promedio por tonelada de conserva de espárragos de las calidades *A* y *B*, en dólares/*TM*.

Producto	Producción	Costo
Calidad	TM	$/TM
A	250	950
B	360	800
C	480	300
Otro	110	80
Total	1200	

A) 565,2 B) 678,3 C)813,9 D)1111,9 E) 1334,3

RESOLUCIÓN :

* Ampliamos la tabla :

Producto	Producción	Costos en $ por TM	Costo Total
Calidad	N°de TM		
A	250	950	237 500
B	360	800	288 000
C	480	300	144 000
otros	1100	80	88 000
Total	1200		678300

Excedente:*20% (678 300)=135 660*

* La empresa desea obtener un ingreso total de *S/.678 300+S/135 660=S/.813 960*

* Este ingreso se consigue sólo con la exportación de las calidades *A* y *B*; es decir;

250 TM+360 TM=610 TM

* El precio promedio de cada una de estas *TM* es

$$\frac{S/.\ 813\ 960}{610}=\$.1\ 334{,}3$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19 :

La tabla adjunta muestra el registro de notas de *10* alumnos. Si el profesor afirma que la moda es *14* , determine el promedio de las *10* notas.

Alumno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Nota	10	13	14	10	15	13	16	?	18	14

A)12, 8 B)13, 3 C)13, 4 D)13, 7 E)13, 9

RESOLUCIÓN:

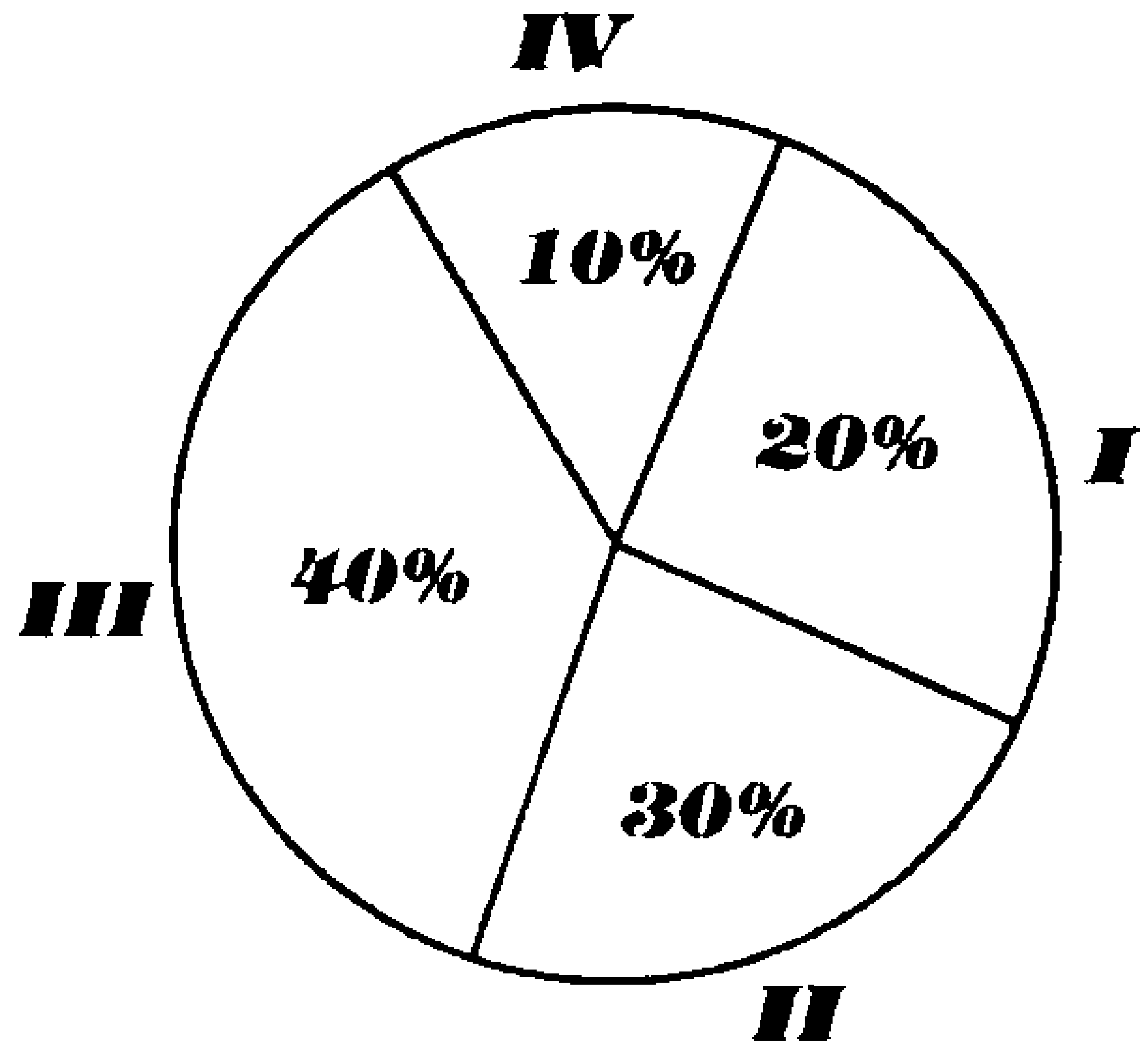
* Si la moda es *14* , implica que es la nota que más se repite , luego *H = 14* ; planteamos el promedio de la manera siguiente:

$$\frac{10(2)+13(2)+14(3)+15(1)+16(1)+18(1)}{10}=13,\ 7$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

Las tiendas *I , II , III* y *IV* han vendido un total de *820* televisores durante el primer semestre del año *2005* . El gráfico muestra el porcentaje de ventas de cada tienda en dicho período de tiempo.



Si el ingreso por la venta de los televisores , en la tienda *III* fue de *S/. 460 676* , determine el precio promedio , en nuevos soles , de los televisores vendidos por dicha tienda .

A) 1 360,5 B)1 404,5 C) 1 470,8 D) 1 540,2 E)1 560,8

RESOLUCIÓN:

Del gráfico se obtiene la siguiente información:

* El número de artefactos vendidos por la tienda *III* es : *40%(820)=328*

* Pero por dato el ingreso total es: *S/.460676*

* Por lo tanto , el precio promedio es:

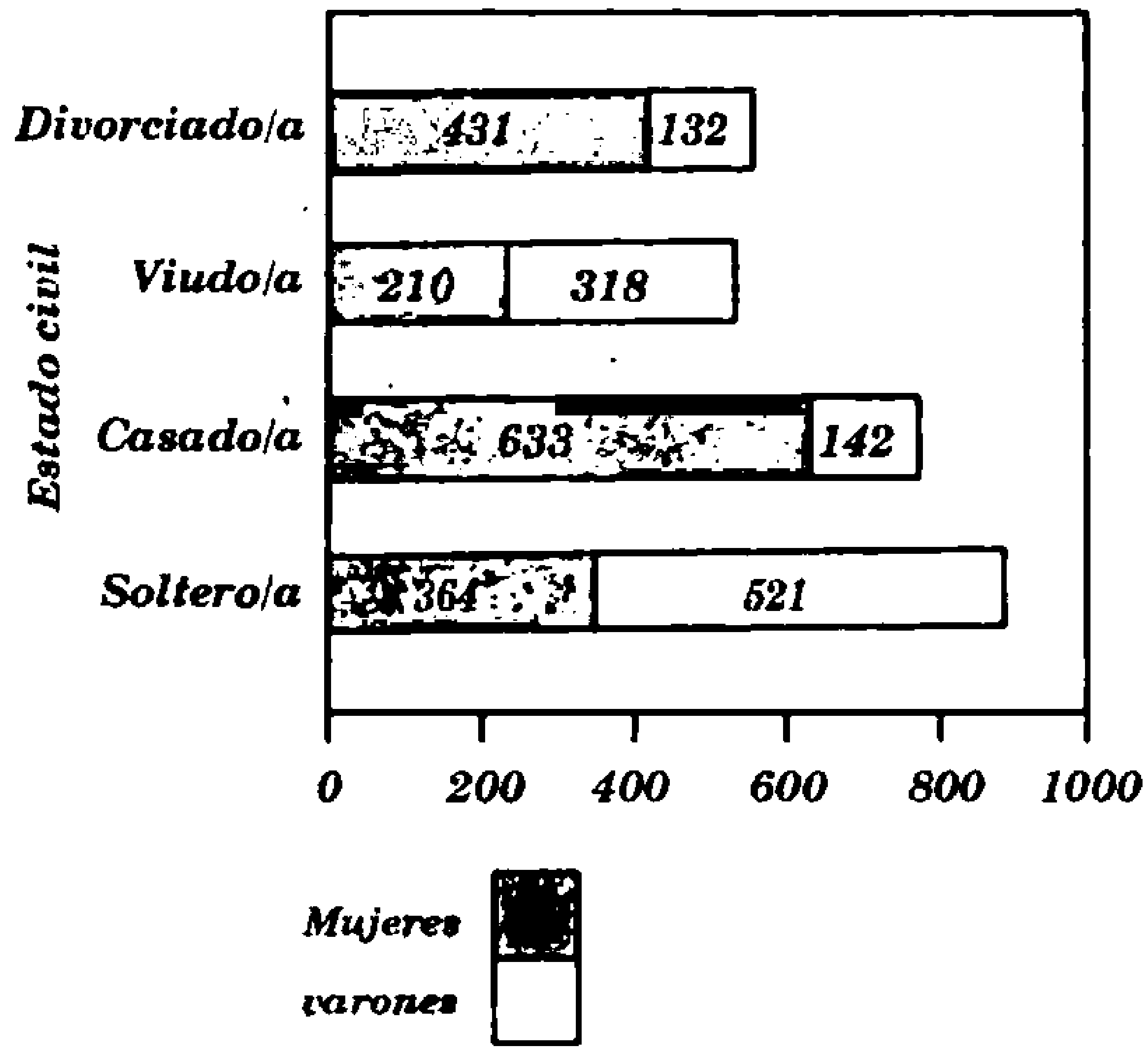
$$\frac{460\ 676}{328}=S/.1\ 404{,}5$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 21 :

Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta, considerando la información del cuadro de barras adjunto.

Cantidad de personas que prefieren usar café instantáneo en el desayuno , según estado civil y sexo , Septiembre de 2007



I) Hay más hombres que mujeres que prefieren usar café instantáneo.

II) El ***28,06%*** de las personas que prefieren usar café son casadas.

III) Hay más viudas que mujeres divorciadas, que prefieren usar café instantáneo.

IV) El porcentaje de mujeres solteras que prefiere usar café instantáneo es mayor al porcentaje de viudos.

A)I, II   B)II, III   C)I, III   D)II, IV   E)III, IV

RESOLUCIÓN :

•Interpretación de cuadros estadísticos :

I)FALSA :

Hay más hombres que mujeres que prefieren usar café instantáneo.

Varones: $132+318+142+521=1113$

Mujeres: $431+220+633+364=1648$

II)VERDADERO :

El ***28,06 %*** de las personas que prefieren usar café son casadas.

total de personas $=1113+1648=2761$

total de personas casadas$=633+142=775$

El tanto por ciento de personas casadas que usan café instantáneo es :

$$\frac{775}{2761}\times 100\%=28,06\%$$

III)FALSA :

Hay más viudas que mujeres divorciadas que prefieren usar café instantáneo.# de viudas$=220$; # de divorciadas $=431$

IV)VERDADERO :

El porcentaje de mujeres solteras que prefiere usar café instantáneo es mayor al porcentaje de viudas.

* El tanto por ciento de mujeres solteras es :

$$\frac{364}{2761}\times 100\%=13,18\%$$

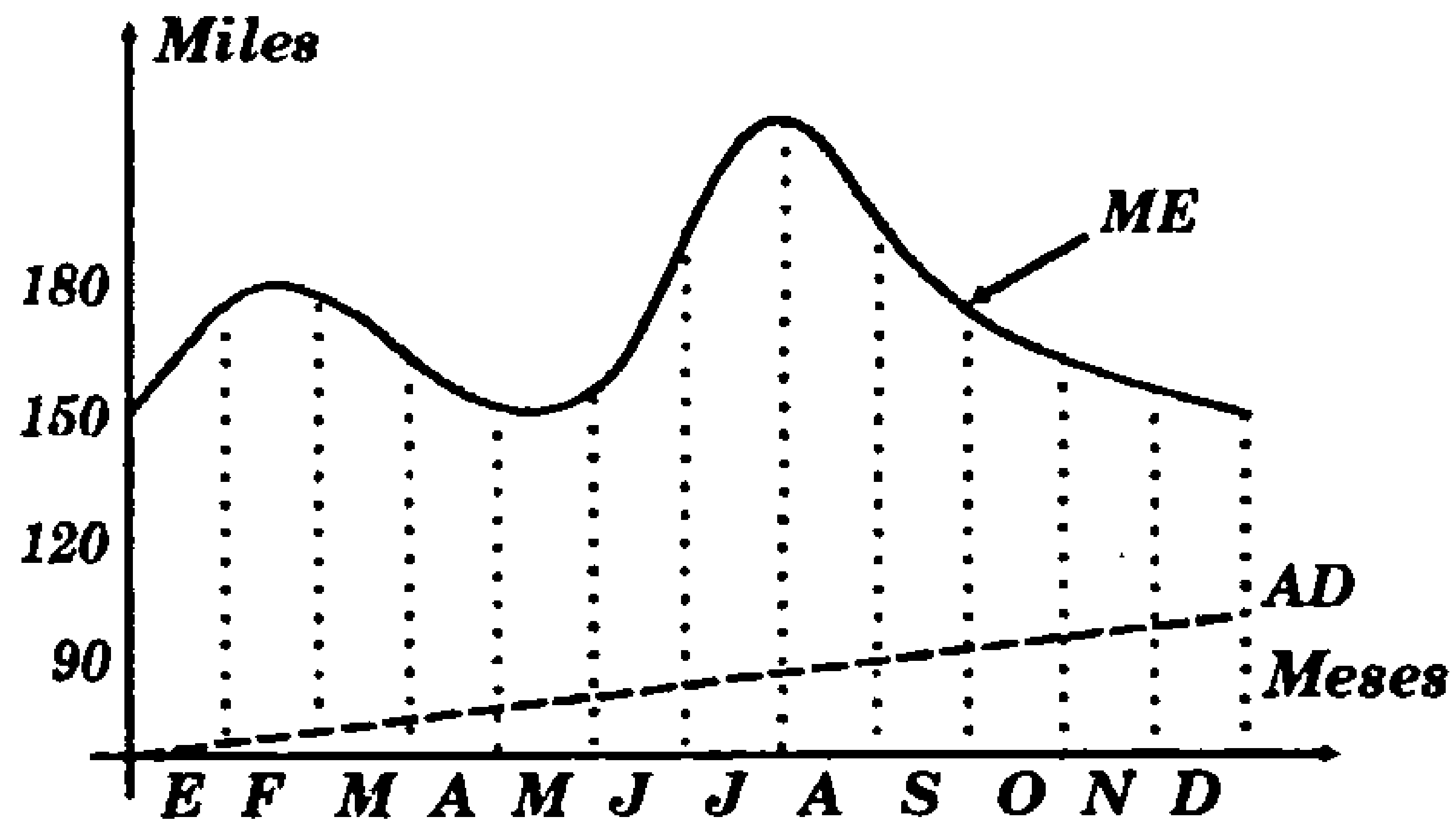
* El tanto por ciento de viudas es :

$$\frac{318}{2761}\times 100\%=11,5\%$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

El gráfico muestra el movimiento de entrada de extranjeros ***(ME)*** y el número de actos delictivos ***(ND)***, en el año ***2006.***



——Movimiento de entrada de extranjeros

.......Número de actos delictivos

Del análisis de la información brindada, se puede afirmar:

I) Con el aumento de actos delictivos, disminuye el flujo de entrada de extranjeros.

II) Hay temporadas altas de entrada de extranjeros, al margen del número de actos delictivos.

III) Los actos delictivos aumentan más rápidamente con la entrada de extranjeros.

A) Sólo I   B) I y II   C) II y III
D) Sólo II   E) Sólo III

RESOLUCIÓN :

* Analizamos las informaciones:

I) Con el aumento de ***AD*** disminuye el flujo de ***ME***. Esto es falso ya que, por ejemplo, en enero aumenta el ***ME***; igual ocurre en junio y julio.

*II)*Hay más entradas en estos meses Febrero y Marzo; Julio y Agosto independiente de los actos delictivos.

*III)*Los ***AD*** aumentan más rápidamente con la ***ME***. Esto es falso ya que, por ejemplo, en febrero y julio el aumento de ***ME*** es más rápido que el aumento de ***AD***; además el aumento de ***AD*** es constante.

*Entonces la respuesta es sólo ***II.***

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

La tabla muestra las notas de ventas de *3* productos ***A, B*** y ***C***, en *7* distritos. Indique la alternativa correcta.

A	B	C
12	17	16
23	31	30
29	39	30
50	43	43
71	61	70
77	69	70
88	83	70

A) La moda en C es 30.

B) La mediana en B es mayor a la mediana en A.

C) La mediana en C es mayor a la mediana en B.

D) La media en A es mayor a la media en C.

E) La media en C es mayor a la media en B.

RESOLUCIÓN :

* En la tabla se muestra las notas de ventas de los productos ***A, B*** y ***C*** en *7* distritos.

	A	B	C
	12	17	16
	23	31	30
	29	39	30
	50	46	43
	71	61	70
	77	69	70
	88	83	70
Total	350	343	329

* Determinenos la media, mediana y moda para ***A, B*** y ***C*** :

* ***La media en A es:***

$$\frac{12+23+29+50+71+77+88}{350}=50$$

* ***La media en C es:***

$$\frac{16+30+30+43+70+70+70}{329}=47$$

	A	B	C
Media	50	49	47
Mediana	50	49	43
Moda	No tiene	No tiene	70

*Entonces la media en ***A*** es mayor que la media en ***C***.

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

En enero de ***2006***, un inversionista compró acciones de la empresa ***A , B*** y ***C*** , por un monto de ***36 000*** dólares. en las proporciones Indicadas en el gráfico ***I***; en el gráfico ***II*** se muestra la variación de los precios de cada acción de enero a diciembre. Determine el monto de las acciones en total , en el mes de diciembre.

Gráfico ***I***

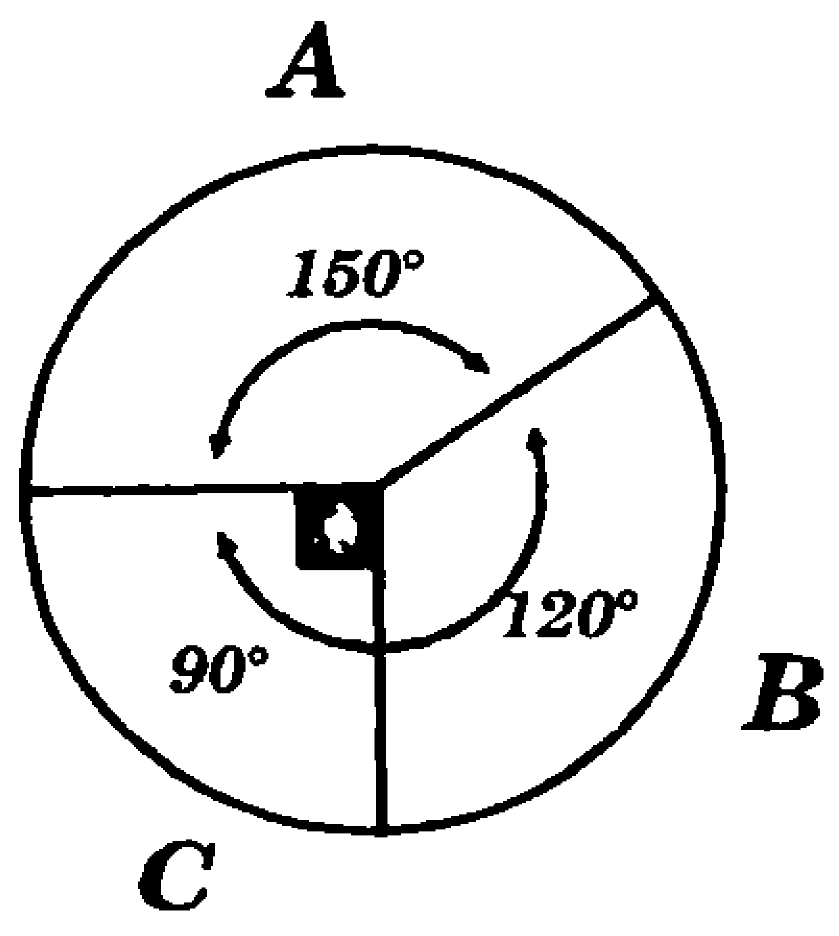
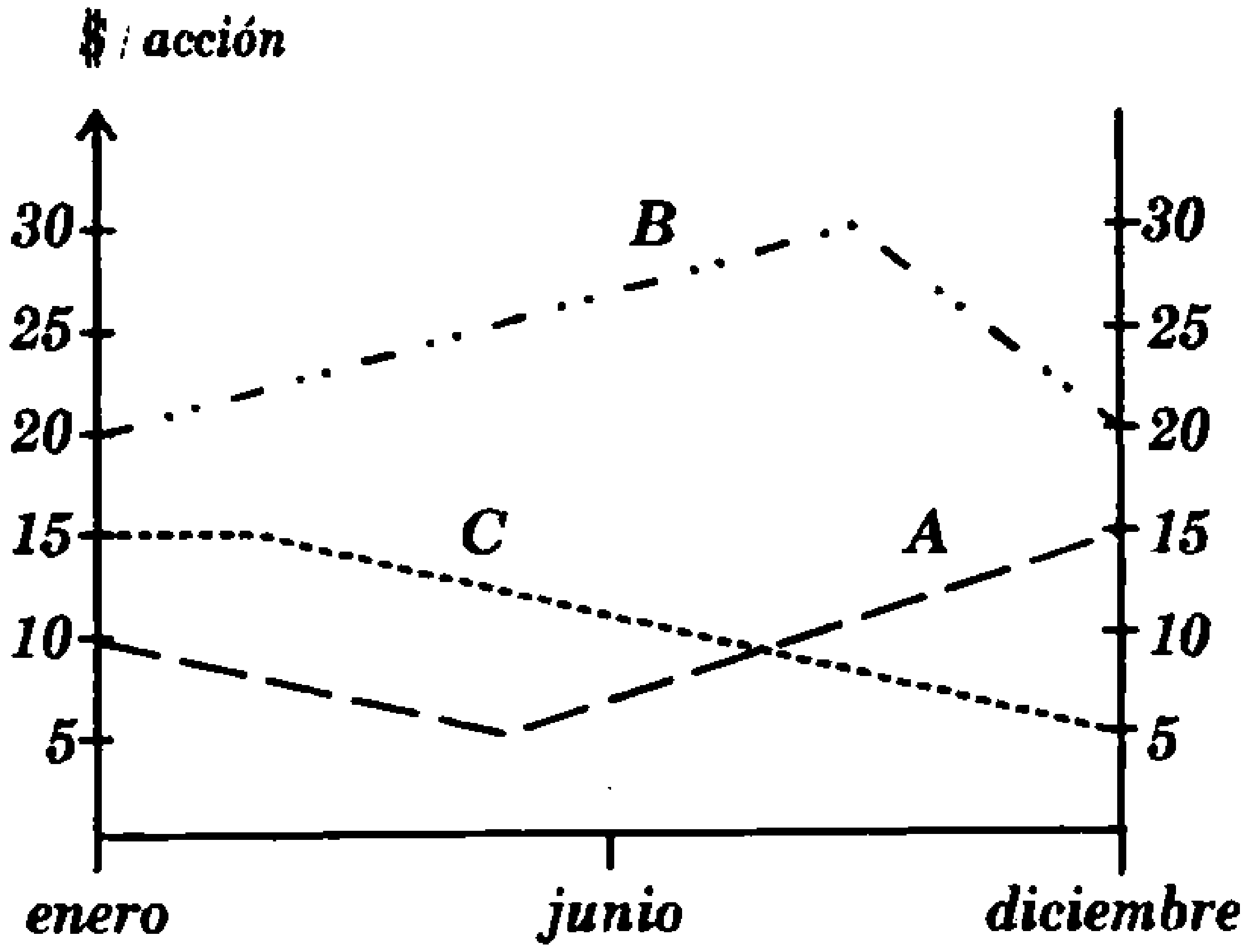


Gráfico ***II***



A)31 500 ***B)37500*** ***C)41500***
D)57 500 ***E)66 000***

RESOLUCIÓN:

* Según el dato del problema tenemos que el monto total en todas las acciones es: ***$36 000***

*Luego , repartimos proporcionalmente el monto en el gráfico ***I*** , del cual se obtiene:

Gráfico ***I***

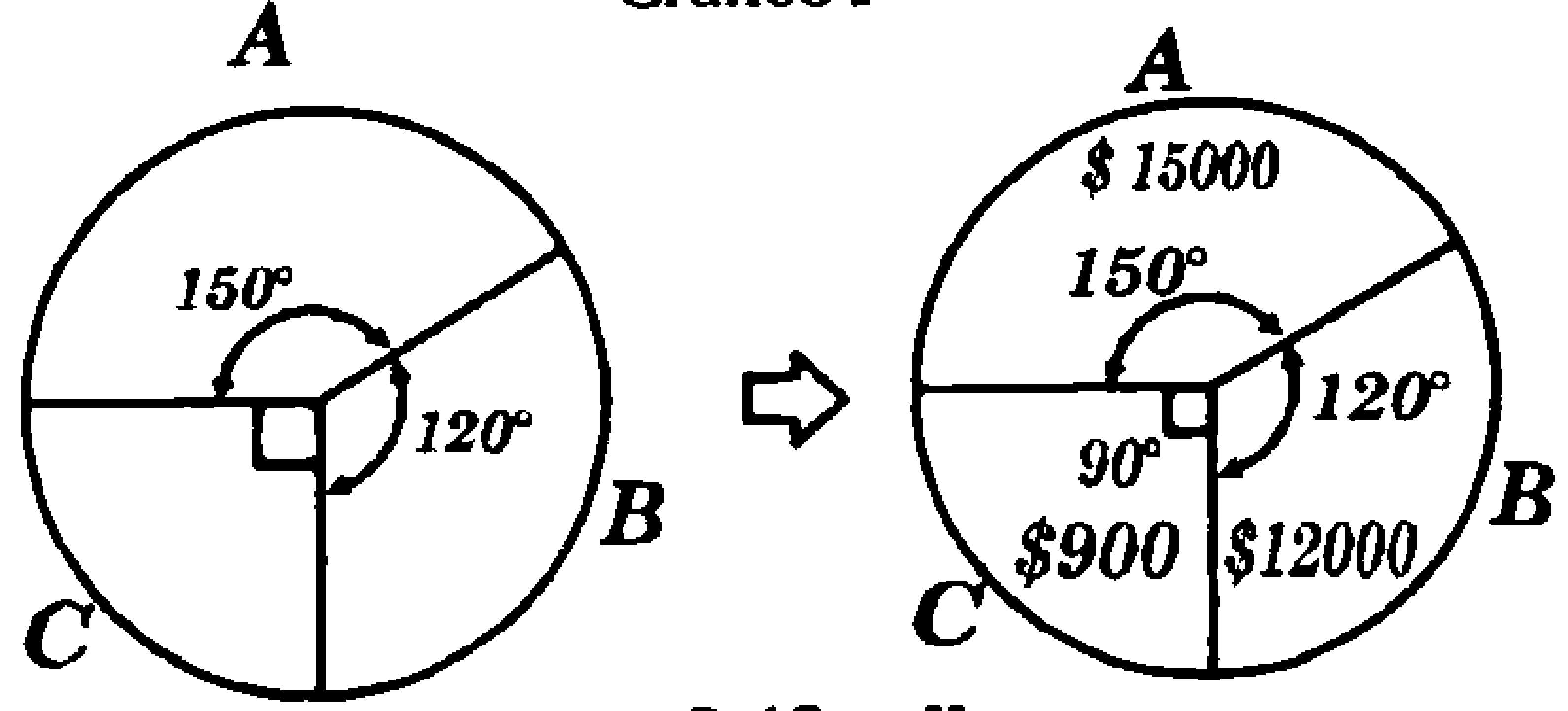
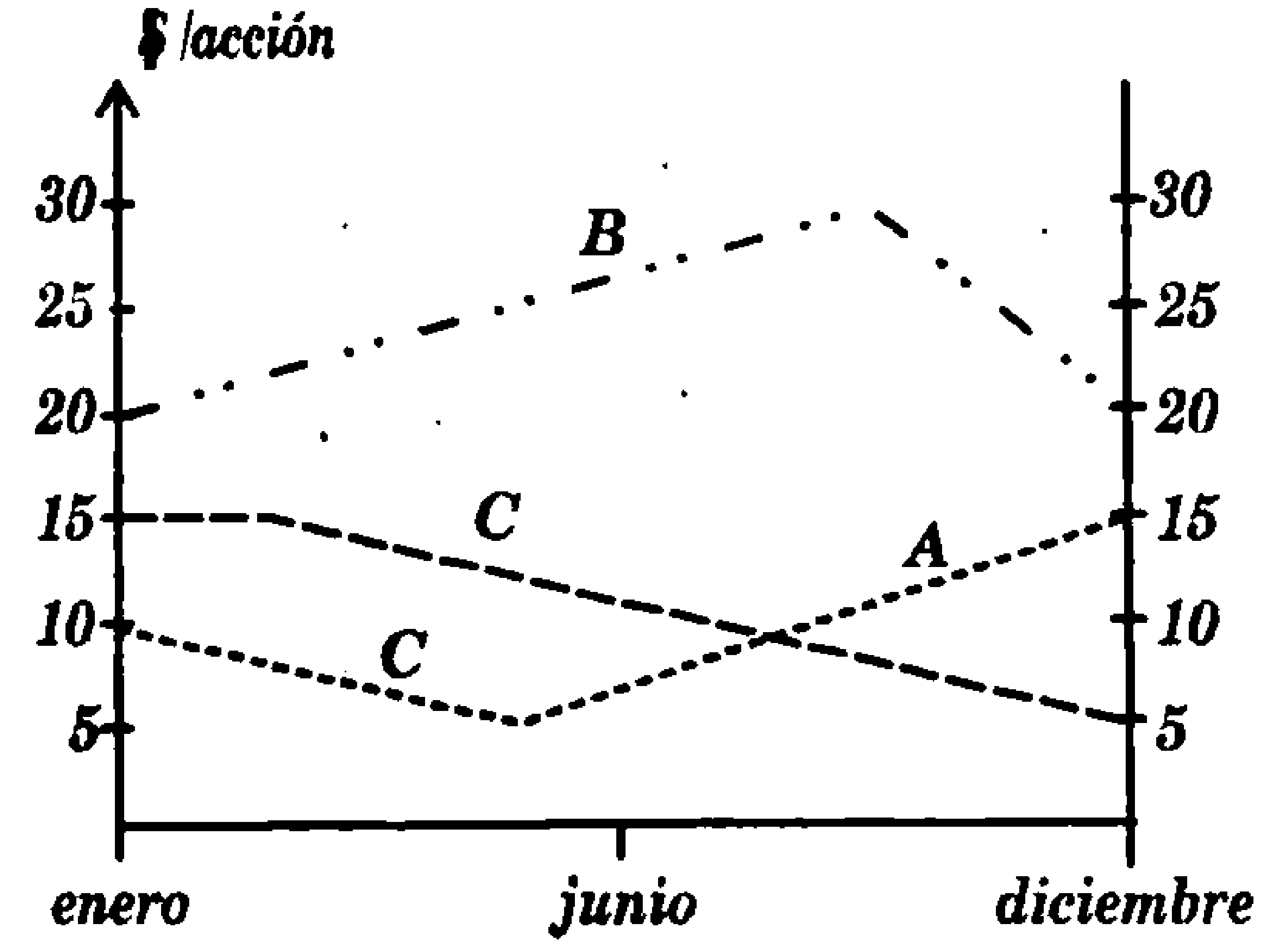


Gráfico ***II***



* En el gráfico *II* analizamos las variaciones con respecto al inicio y al final:

Precio de la acción *A* aumenta en su mitad.

Precio de la acción *B* se mantiene.

Precio de la acción *C* disminuye a su tercera parte.

* Finalmente, obtenemos el monto final de la siguiente manera:

$$Monto_{final} = 15\,000 \times \frac{3}{2} + 12\,000 \times 1 + 9000 \times \frac{1}{3}$$

$$Monto_{final} = 37\,500$$

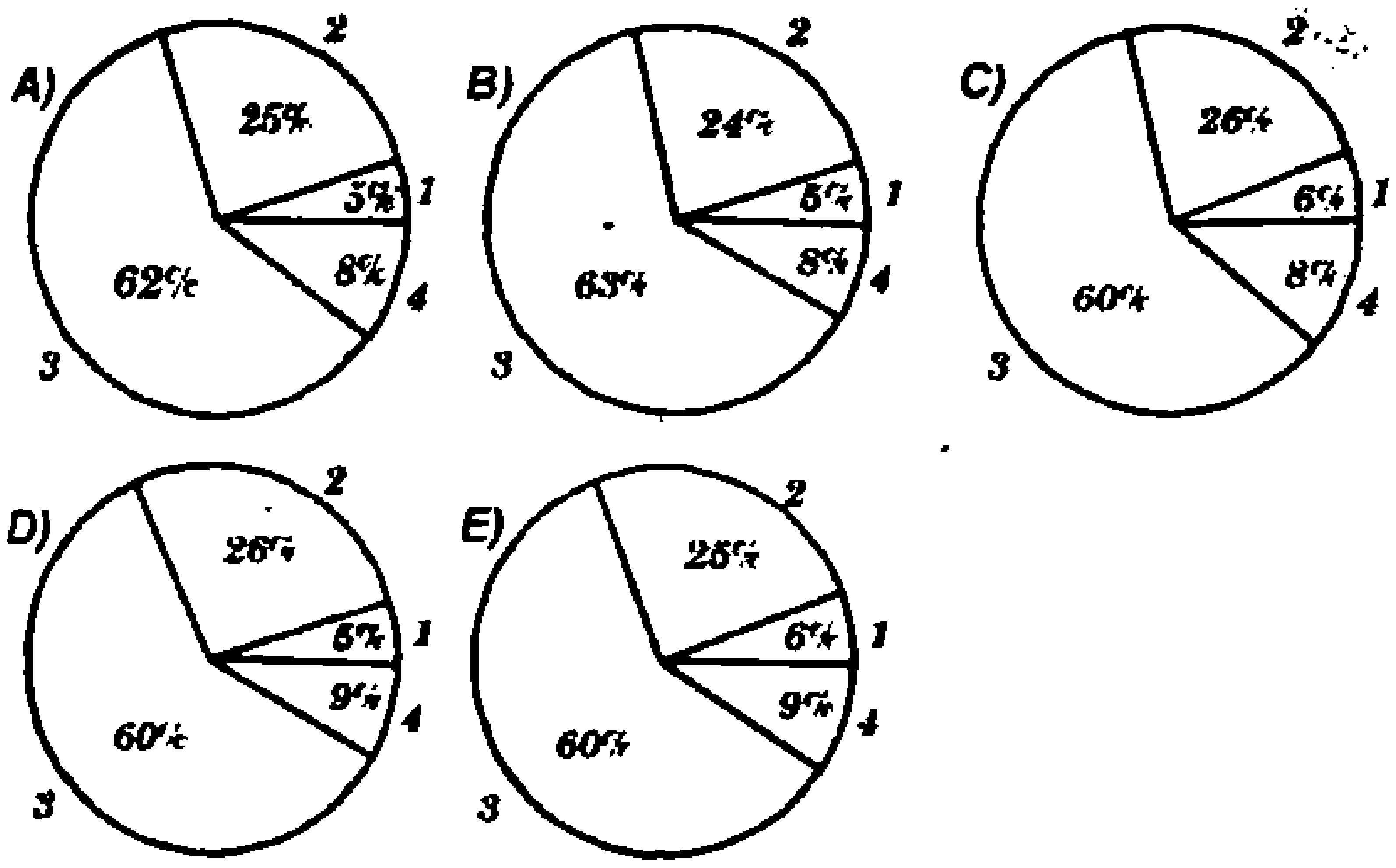
RPTA : "B"

PROBLEMA 25 :

Las frecuencias relativas correspondientes a las frecuencias *f*, que se presenta en la tabla:

Nº	Intervalo	f_i
1	[a - b⟩	3
2	[b - c⟩	13
3	[c - d⟩	30
4	[d - e]	4
		50

Son:



RESOLUCIÓN:

* Observamos en la tabla:

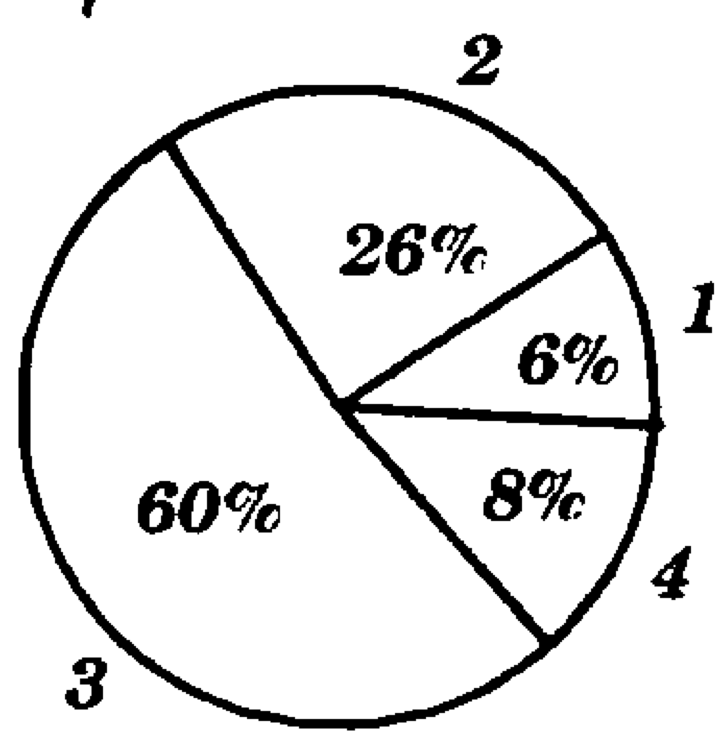
Nº	Intervalo	f_i	h_i		100%hi
1	[a - b⟩	3	0,06	⟶	6%
2	[b - c⟩	13	0,26	⟶	26%
3	[c - d⟩	30	0,60	⟶	60%
4	[d - e⟩	4	0,08	⟶	8%
		50	1,00	⟶	100%

* Donde ***hi*** = frecuencia relativa

* Luego :

$$h_1 = 3/50 = 0,06$$
$$h_2 = 13/50 = 0,26$$
$$h_3 = 30/50 = 0,60$$
$$h_4 = 4/50 = 0,08$$

* Para realizar la gráfica circular considerando la columna ***100% h_i*** obtenemos:



RPTA: "C"

PROBLEMA 26:

La tabla muestra todas las calificaciones, en la escala vigesimal, de un examen.

Calificación	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frecuencia	2	5	9	7	8	10	3	5	1

Si Juan obtuvo una calificación de *12*. ¿qué porcentaje de estudiantes tienen nota menores que la de Juan? ¿Cuántos estudiantes tienen la misma calificación que Juan?

A)38%; 8 *B)46%; 8* *C)38%; 7*
D)46%; 7 *E)50%; 7*

RESOLUCIÓN:

* Según la tabla de calificaciones tenemos:

Notas menores que la de Juan (8, 9, 10, 11) — *Nota obtenida por Juan* (12)

calificación	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nº de alumnos	2	5	9	7	8	10	3	5	1

23 alumnos obtuvieron nota menores que juan

8 alumnos obtuvierón nota 12, entre ellos está Juan

* El total de alumnos

$$=2+5+9+...+5+1=50$$

I) ¿Qué porcentaje de estudiantes tienen notas menores que la de Juan? $\frac{23}{50} \times 100\% = 46\%$

* Como Juan obtuvo nota igual a *12* , observamos en el cuadro que son *8* los alumnos que obtuvieron nota *12* , pero como nos preguntan ¿Cuántos tienen la misma calificación que Juan? , la respuesta es *7* y ¿Qué porcentaje tienen notas menores de *12*? , la respuesta es: *46%.*

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

GRÁFICO I :

Se encuestó a un grupo de personas sobre su entretenimiento preferido y cada una escogió una sola opción. El resultado se resume en esta tabla.

	Radio	Televisión	Cine	Teatro
# personas	45	50	35	20

Utilice esta información para responder a las cinco preguntas siguientes:

01 ¿Cuántas personas fueron encuestadas?.

A) 120 B) 125 C) 145 D) 150 E) 160

02 La mayoría prefiere:

A) radio B) televisión C) cine D) teatro E) N.A

03 ¿En que lugar de preferencia está el cine?.

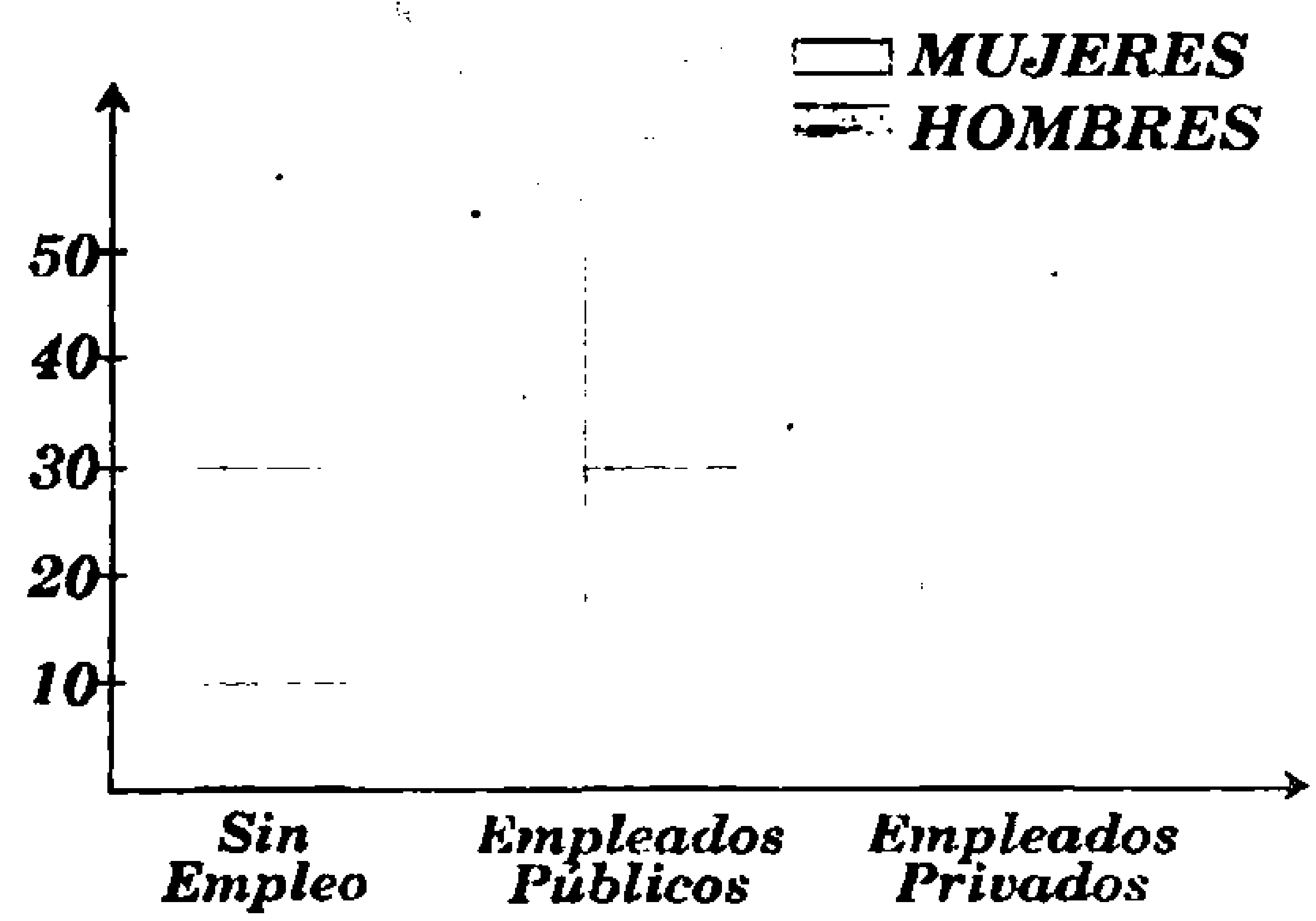
A) 1° B) 2° C) 3° D) 4° E) 5°

04 Si *1* de cada *x* personas encuestadas prefirió televisión , *x* es :

A) 10 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 ¿Qué porcentaje correspondió a "Radio"?

A) 30% B) 45% C) 15% D) 20% E) 25%



06 ¿Qué porcentaje de total representan los desempleados?.

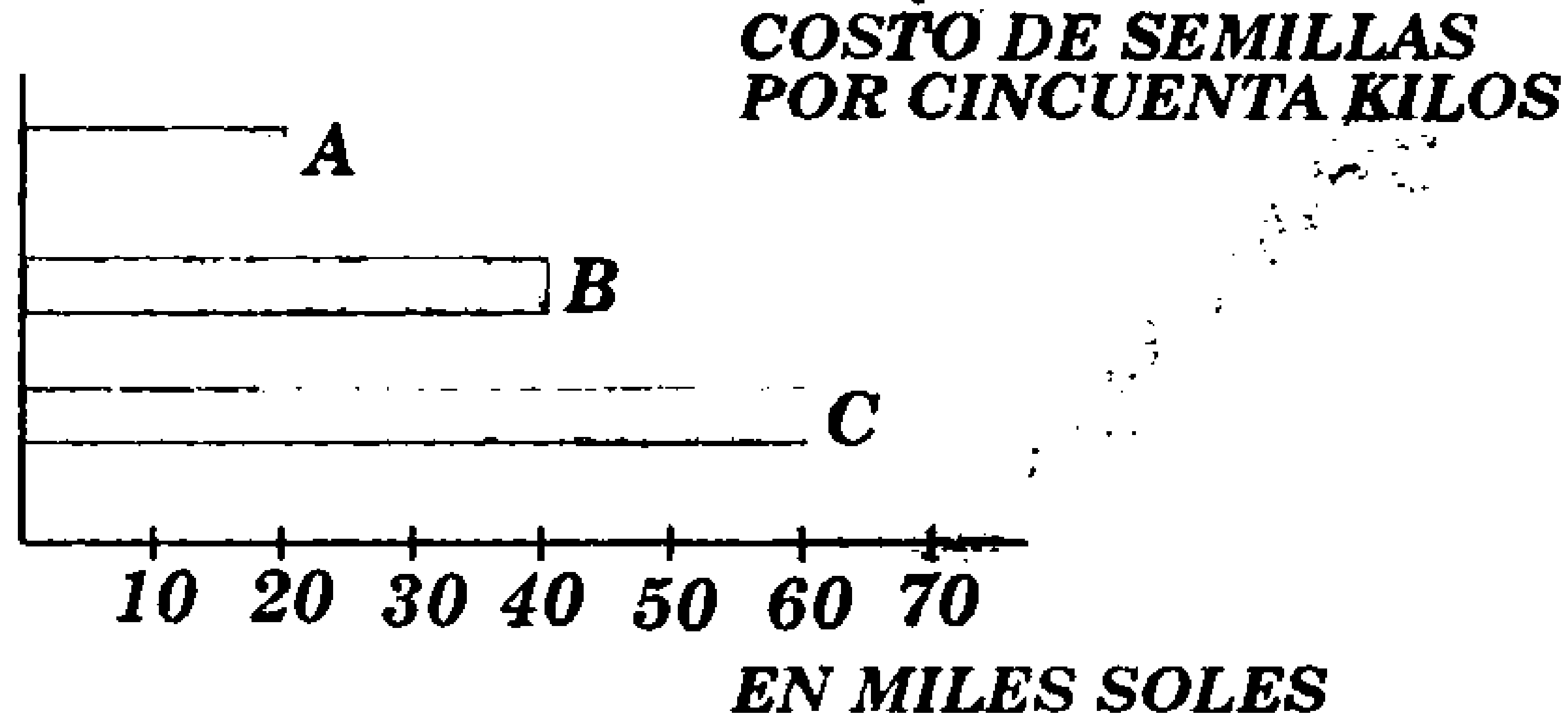
A) 30 B) 40 C) 35 D) 50 E) 45

07 ¿Qué porcentaje de las mujeres son las que no trabajan en el sector privado?.

A) 87,8 B) 88,8 C) 80 D) 85 E) 78

GRÁFICO II :

El costo de *3* tipos de semillas *A,B* y *C* se indican en el siguiente gráfico :



08 ¿Cuál es el costo de $12\frac{1}{2}$ kilos de semilla *B* ?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

09 ¿Cuántos kilos de semilla **C** se podría comprar con *30* mil?.

A) 10 B) 15 C) 25 D) 50 E) 75

10 El costo de un kilogramo de semilla *C*, ¿qué porcentaje del costo de un kilogramo de semilla *B* es?

A) 30% B) 100% C) 50%
D) 150% E) N.A

GRÁFICO III :

En un concurso , las notas de los equipos finalistas *A* y *B* fueron

	NOTAS				
A	15	20	18	17	16
B	16	20	20	14	15

Cada nota correspondió a un integrante de cada equipo.

11 En el equipo *A* , la suma de las notas es :

A) 84 B) 86 C) 80 D) 78 E) 88

12 En el equipo *B* , la suma de notas es:

A) 91 B) 84 C) 85 D) 88 E) 76

13 Si gana el equipo con mayor suma , el equipo ganador y su porcentaje son respectivamente .

A) A; 86 B) B; 86 C) A;84 D) B; 85 E) A; 88

14 La diferencia entre la mejor nota de *A* y la peor de *B* es:

A)3 *B)4* *C)5* *D)6* *E)7*

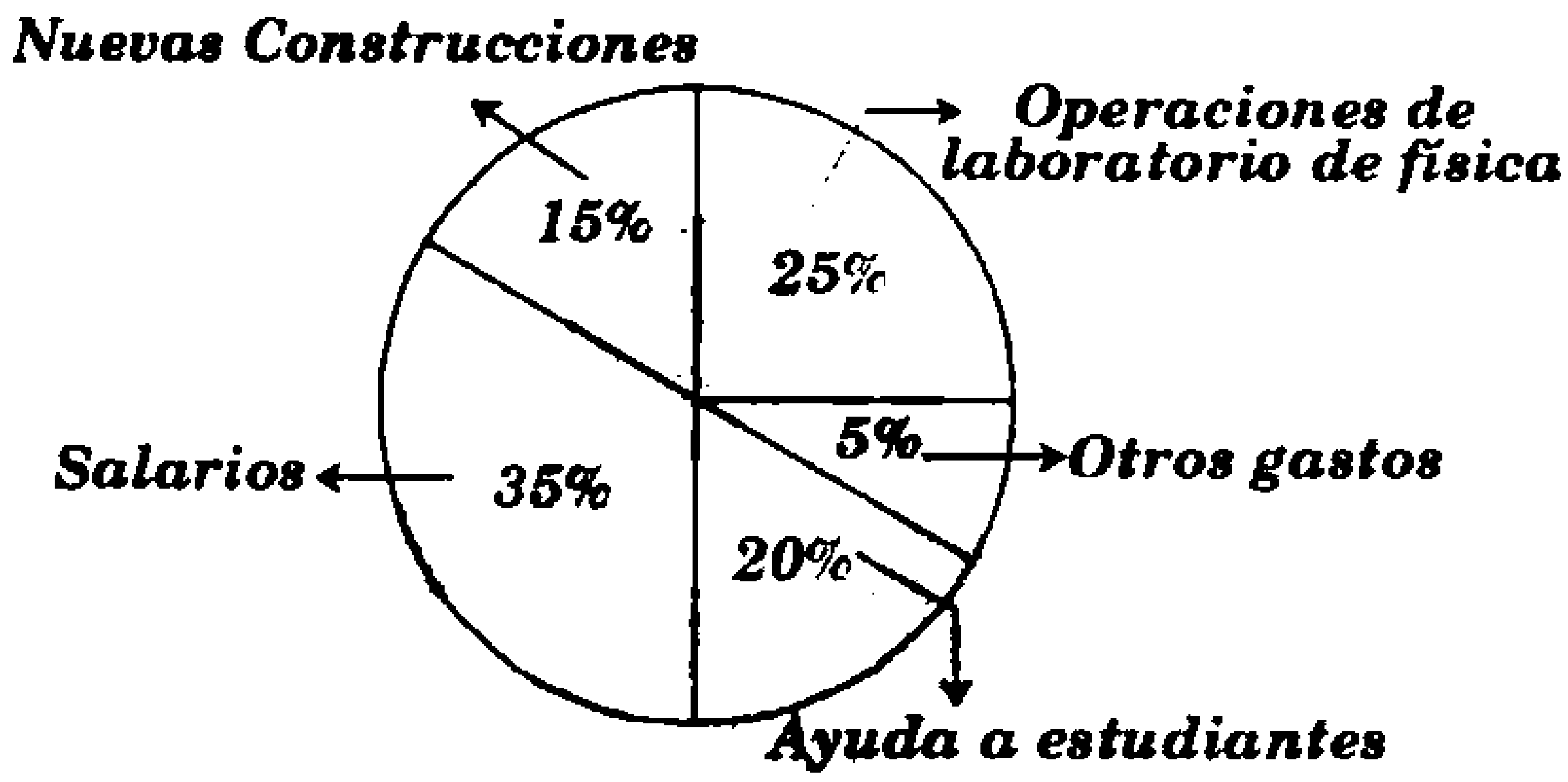
15) El promedio del equipo vencedor es :

A) 16,8 *B) 17,5* *C) 17,2* *D) 18, 1* *E) 17, 6*

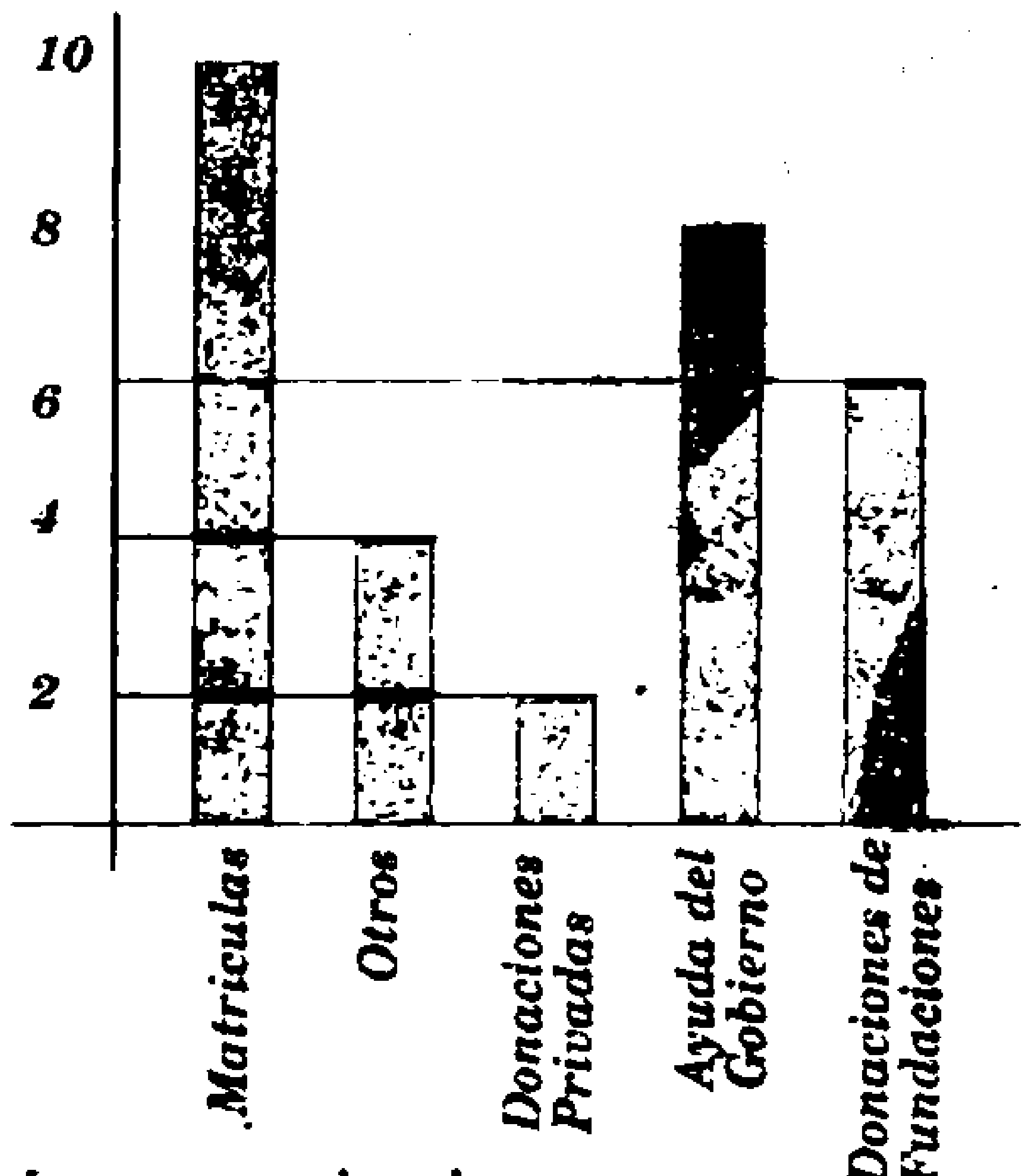
GRÁFICO IV :

Resuelva las siguiéntes preguntas de acuerdo a los gráficos del presupuesto *"P"* de la universidad *"A"* en el año *"A"*.

EGRESOS :



INGRESO (millones de S)



NOTA: Ingresos es igual que egresos

16) Para el año dado ¿cuánto gastó la universidad de la operación del laboratorio de física?.

A)$2500000 *B)$4000000* *C)$7500000*
D) $3000000 *E) $9000000*

17) ¿Qué porcentaje en el año de referencia corresponde a donaciones de fundaciones?.

A) 6% *B) 20%* *C) 25%*

18) para el año dado. ¿Cuánto más gastó la universidad en salarios que en ayuda a estudiantes?.

A) $ 16500000 *B) $ 10500000* *C) $6000000*
D) $ 4500000 *E) $ 2500000*

19) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones puede ser deducidas de la información dada?.

I) En el año a la matricula fue ***1/ 3*** del ingreso total.

II) En el año a las fundaciones contribuyeron 3 veces más que las donaciones privadas.

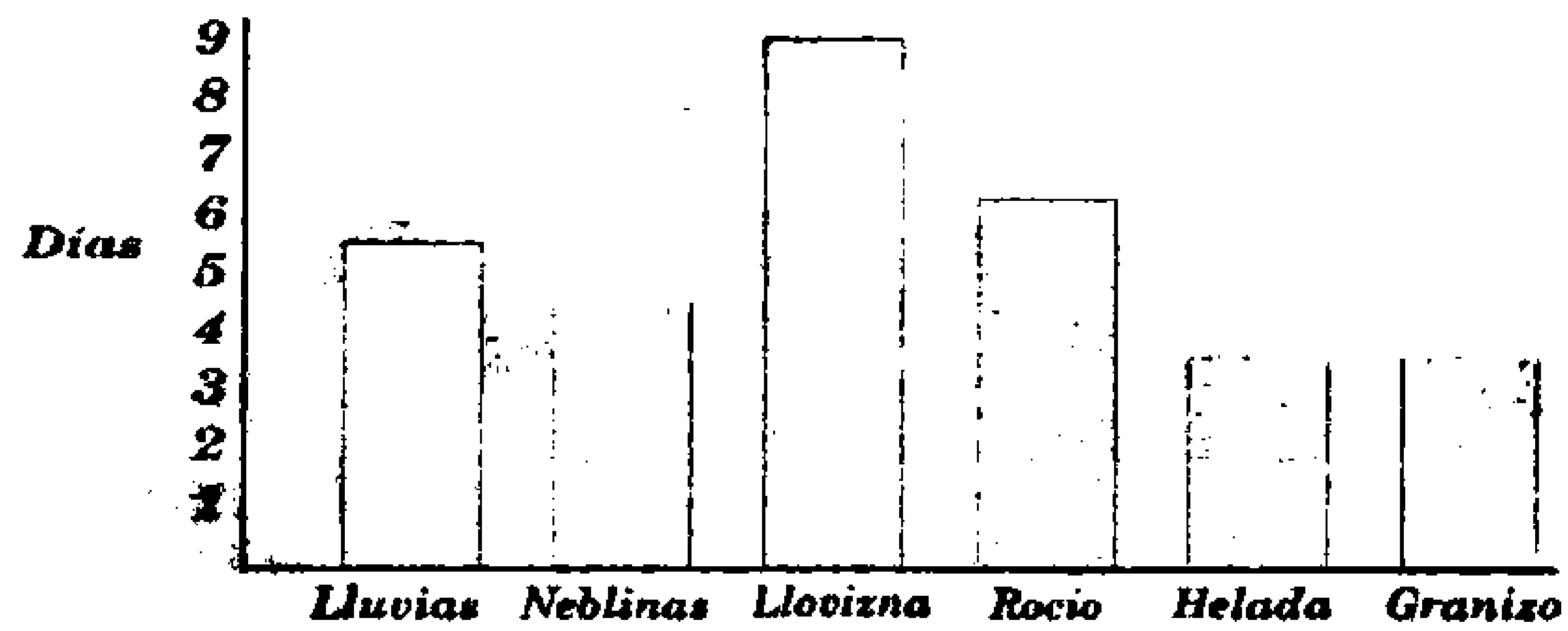
III) En el año ***A $ 4000000*** gastados en ayuda a estudiantes provinieron de donaciones de las fundación.

A) Sólo 1 ***B)Sólo II*** ***C) I y II*** ***D) II y III*** ***E) Todas***

20) Para el año dado. ¿Cuánto obtuvo la universidad de ingreso en el rubro matrícula :

A) 10 millones ***B) 8 millones*** ***C)6 millones***
D) 4 millones ***E) 2 millones***

GRÁFICO V :



Utilice está para responder a las cinco preguntas siguientes:

21) ¿Cuántos días hubo?

A)3 *B)4* *C)5* *D)6* *E)7*

22) ¿Cuántos días hubo rocío?

A)3 *B)4* *C)5* *D)6* *E)7*

23) ¿Cuántos días llovió más que los días que cayó helada?.

A)1 *B)4* *C)3* *D)2* *E)5*

24) Entre los días que lloviznó y los días que hubo neblina hay una diferencia de :

A) 1día ***B) 3 días*** ***C) 4 días*** ***D) 2 días*** ***E) 5 días***

25) El promedio entre el número de días que hubo neblina y el número de días que hubo rocío es :

A)3 *B)4* *C)5* *D)2* *E)6*

GRÁFICO VI :

Luego del examen final de química ***I***, se obtiene el siguiente cuadro :

N° de alumnos	*Nota*
10	*4*
20	*8*
25	*12*
15	*16*
5	*20*

(26) ¿Cuántos alumnos aprobaron?

A)40 *B)43* *C)45* *D)47* *E)50*

(27) ¿Qué porcentaje de alumnos desaprobaron?.

A) 60% *B) 50%* *C) 45%* *D) 40%* *E) 30%*

(28) ¿Cuántos alumnos tienen por lo menos *16* de nota?.

A)55 *B)5* *C)20* *D)70* *E)30*

(29) ¿Qué porcentaje tiene menos de *8*?

A)12% *B)40%* *C)*$12\frac{1}{3}\%$ *D)*$13\frac{1}{3}\%$ *E)15%*

(30) ¿Qué porcentaje de los que desaprobaron son los que aprobaron?

A) 60% *B) 200%* *C) 150%* *D)* $71\frac{1}{2}\%$ *E) 90%*

GRÁFICOS: (preguntas 31 A 33)

De un programa de televisión

	Gusta	*Gusta poco*	*No gusta*
Adultos Varones	*1*	*3*	*15*
Adultos Mujeres	*4*	*8*	*6*
Adolescentes Varones	*5*	*5*	*5*
Adolescentes Mujeres	*3*	*4*	*8*

(31) ¿Cuántos del total eran varones?

A)19 *B)15* *C)24* *D)29* *E)34*

(32) ¿Cuántos de los encuestados no son adultos varones?

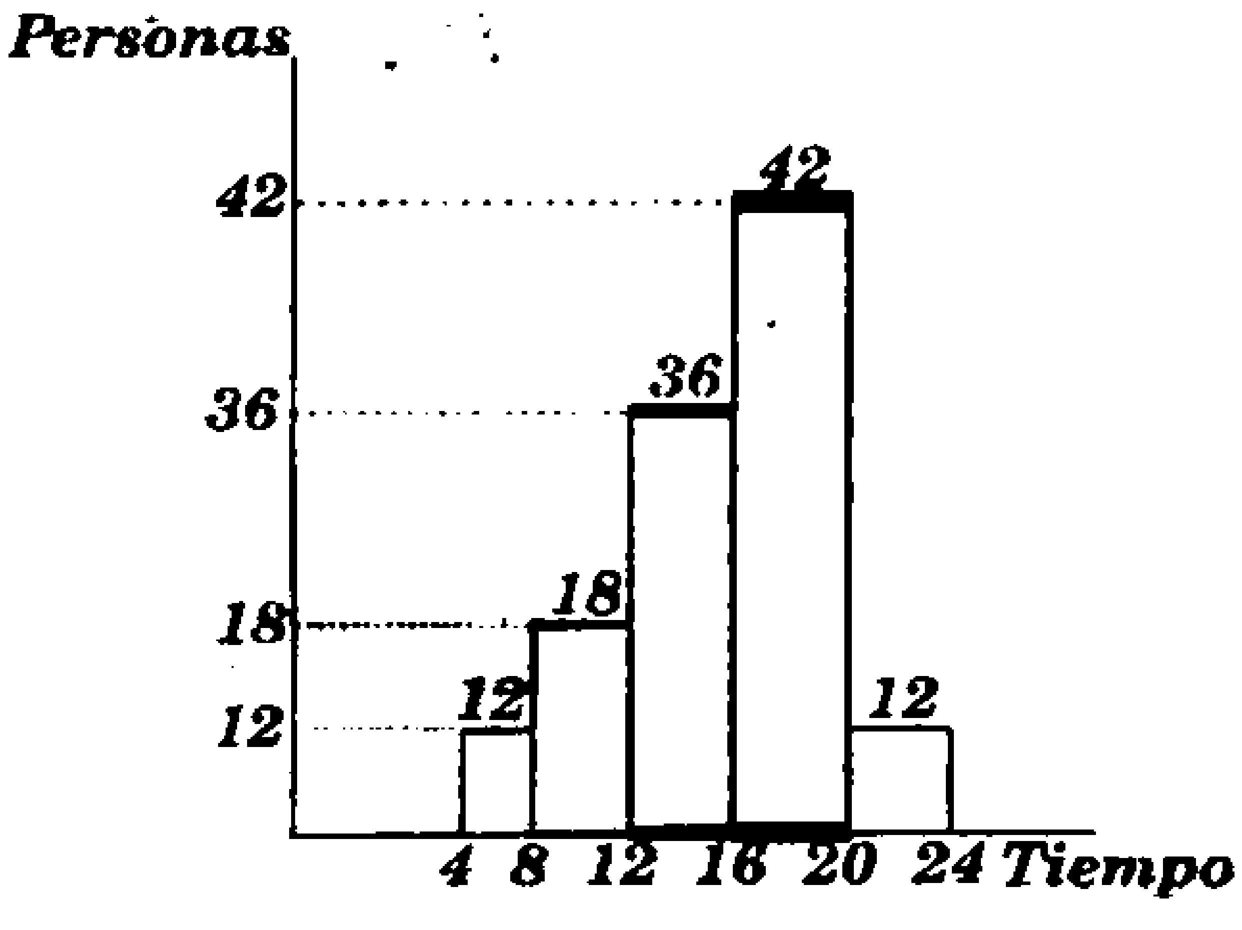
A)36 *B)49* *C)12* *D)38* *E)48*

(33) ¿A cuántos varones no adultos no les gusta el programa?

A)5 *B)10* *C)15* *D)20* *E)25*

GRÁFICO VIII :

De un total de *120* personas , se muestra el tiempo que realizan un determinado trabajo



(34) ¿Qué porcentaje del total representanlos que están entre *12* y *20* minutos?.

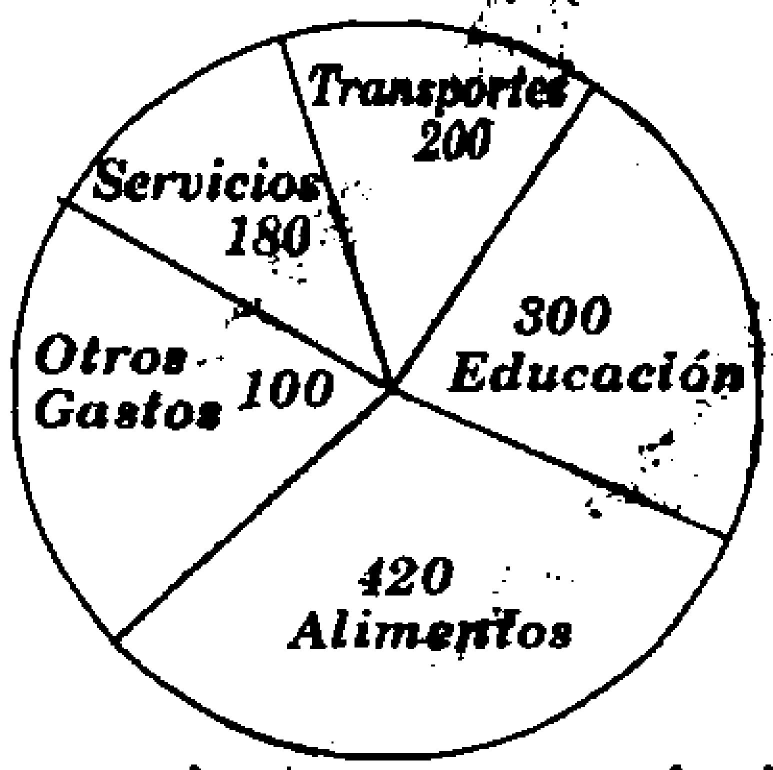
A)58 *B)55* *C)65* *D)50* *E)60*

(35) Si el *45%* de los tiempos es mayor o igual a ***k***. Hallar ***k***.

A)12 *B)15* *C)13* *D)16* *E)14*

GRÁFICO IX :

A continuación se muestra la distribución del presupuesto familiar mensual típico del sector *A*.



(36) ¿Qué porcentaje representa lo invertido en servicios respecto a lo invertido en educación?.

A)40% *B)50%* *C)60%* *D)70%* *E)80%*

(37) En promedio ¿cuánto gasta en alimentación al día? (Suponer que el mes tiene *30* días).

A)18 *B)14* *C)12* *D)15* *E)10*

(38) ¿Qué porcentaje del presupuesto representa lo invertido en servicios?.

A) 10% *B) 12%* *C) 15%* *D) 20%* *E) 25%*

(39) ¿Cuál es el ángulo central correspondiente al gasto en transporte?.

A)35° *B) 45°* *C) 50°* *D) 60°* *E) 70°*

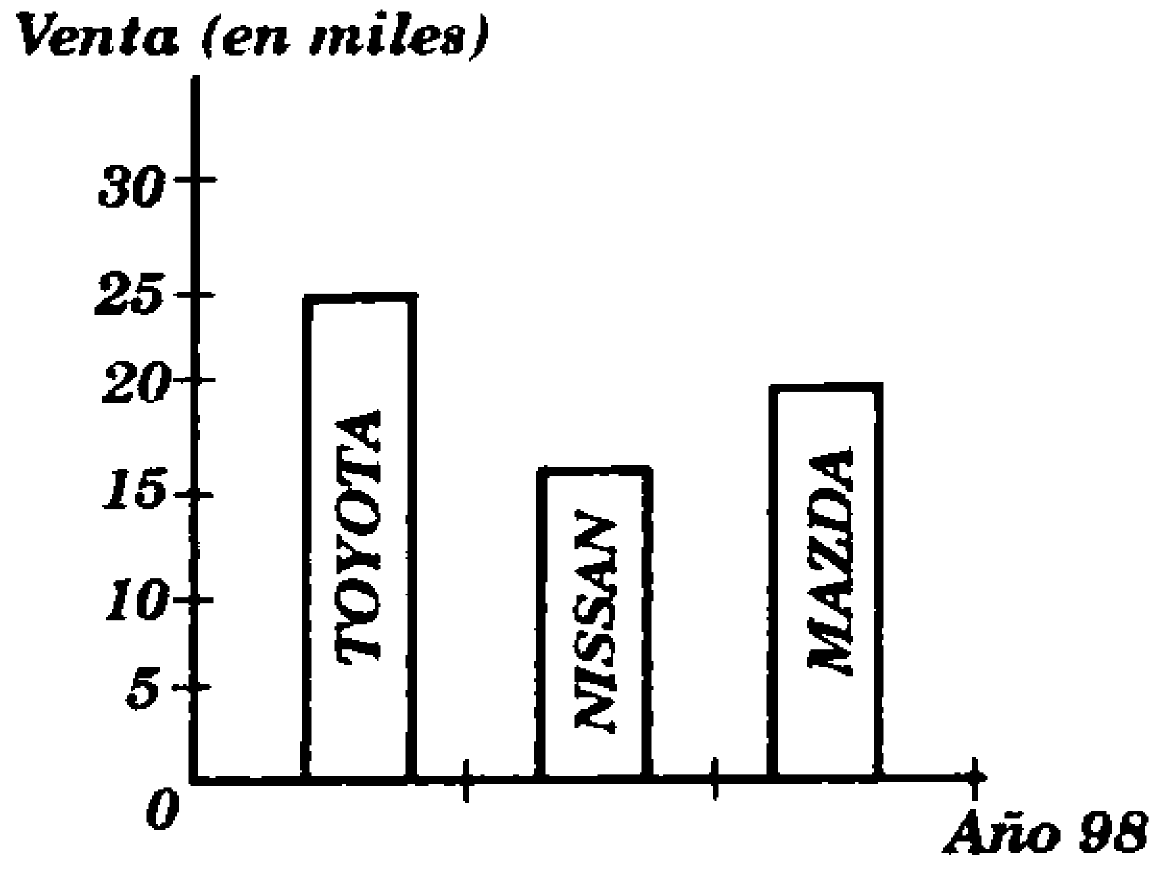
(40) ¿Cuál es la razón de lo invertido en educación respecto a lo invertido en alimentación?

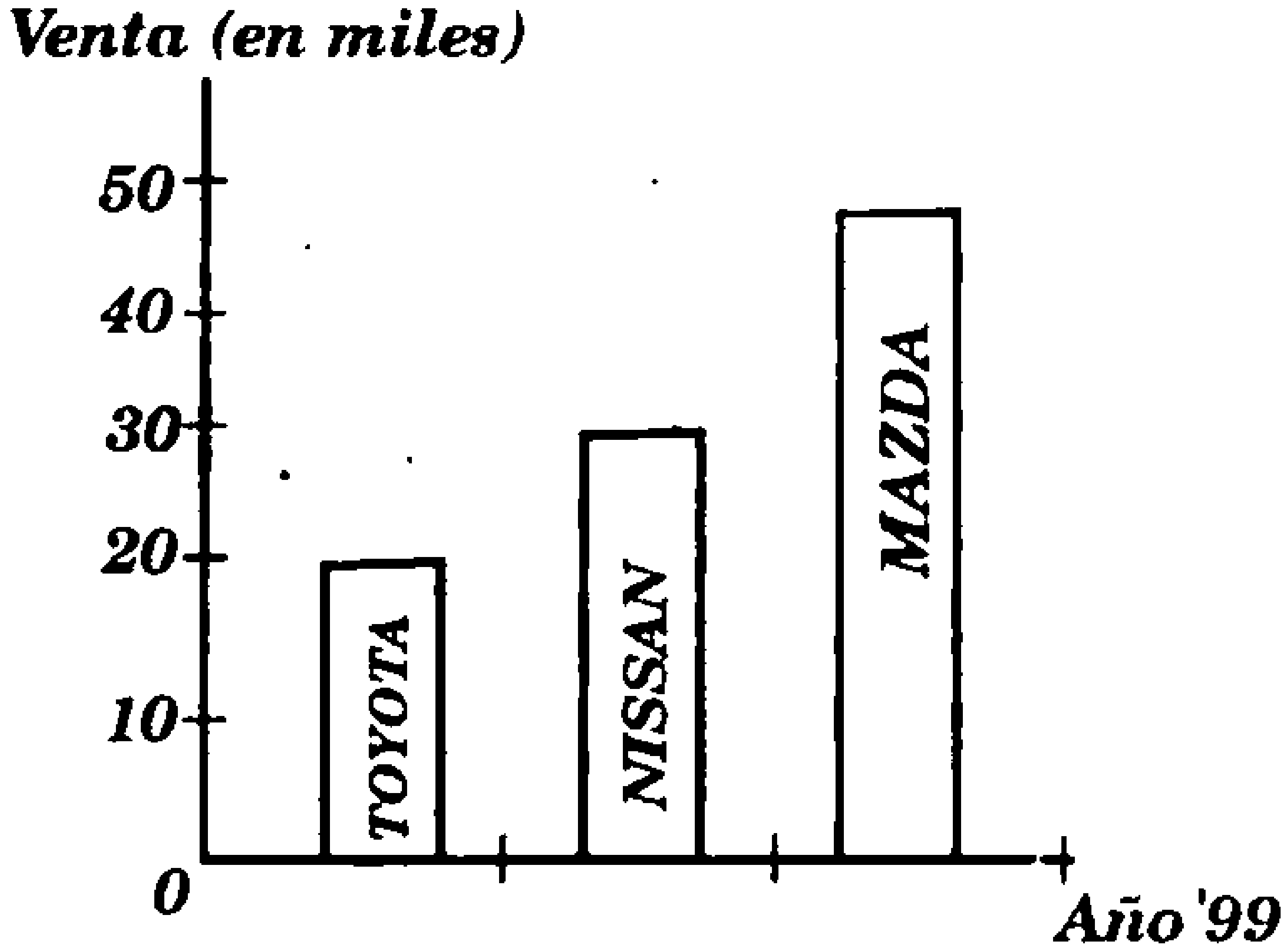
A) 5/6 *B) 5/7* *C) 3/5* *D) 6/7* *E) 2/3*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

ENUNCIADO :

El siguiente gráfico muestra las ventas de autos de diferentes casas automotrices.





01 ¿En qué casa comercial se presentó la mayor variación porcentual en el periodo *98 – 99*?

A) Toyota *B) Mazda* *C) Nissan*
D) a y b *E) b y e*

02 ¿Cuál fue la mayor variación relativa?

A) 2/5 *B) 1* *C) 3/2* *D) 1/6* *E) 1/4*

03 ¿Cuál es la variación porcentual de un año a otro?

A) 40% *B) 100%* *C) 200%*
D) 58,3% *E) 150%*

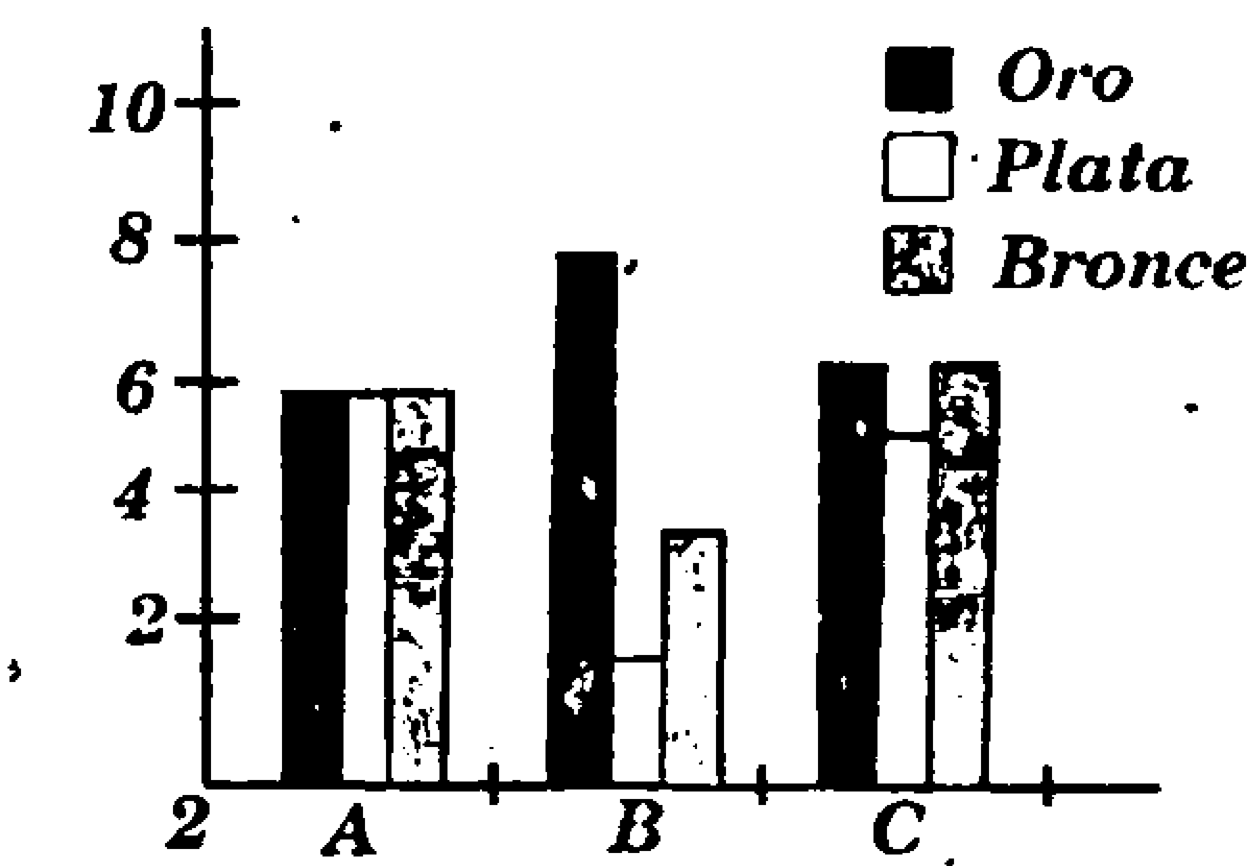
04 Si en el *2000* hubiese un incremento del *60%* en el número de autos. ¿Cuál sería la variación porcentual en el periodo *1998 – 2000*?

A) 4% *B) 220%* *C) 300%* *D) 153,5%* *E) 130%*

ENUNCIADO :

Las preguntas *05* al *07* se formulan en base a los datos siguientes : Registro del número de medallas obtenidas por tres países *A*, *B* y *C* en una semana de competencia.

Registro de medallas



05 El total de medallas obtenidas por los países *A*, *B* y *C*, es:

A) 22 *B)24* *C)34* *D)48* *E) 53*

06 El número de medallas obtenidas por el país *A*, excede al número de medallas obtenidas por el país *C*, en :

A)1 *B)2* *C)3* *D) 4* *E) 5*

07 De las siguientes proposiciones relativas a las medallas obtenidas por los países *A*, *B* y *C*.

I) El país *5* ha obtenido el menor número de medallas de oro.

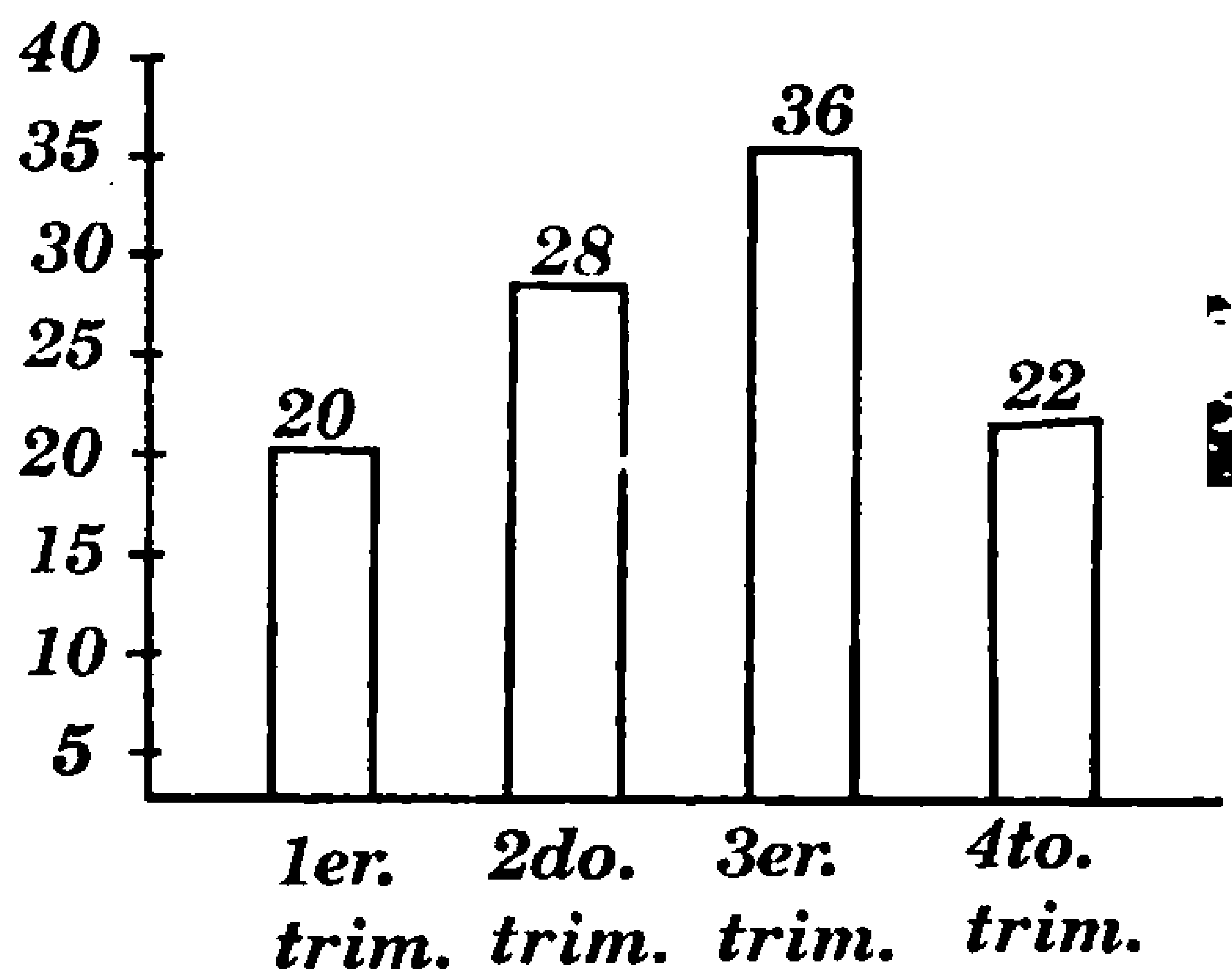
II) El menor número de medallas de plata corresponde al país *B*.

III) La suma del número de medallas de oro y plata obtenidas por los países *A* y *C* es el mismo. Son verdaderas :

A)FFF *B)VFV* *C)VVF*
D)VVV *E)FVF*

ENUNCIADO :

Las preguntas *08*, *09* y *10* se refieren al siguiente gráfico: Número de lavadoras vendidas en cada trimestre en al año *2005*.



08 ¿Qué porcentaje de las ventas anuales se realizó en el primer semestre? (aproximadamente)

A) 45% *B) 51%* *C) 72%*
D) 20% *E) 60%*

09 ¿Cuántas lavadoras adicionales se debieron vender en el primer trimestre para que las ventas en ambos semestres sean iguales?

A) 8 *B) 10* *C) 12*
D) 6 *E) 4*

10 ¿En qué porcentaje del primer semestre aumentaron las ventas durante el segundo semestre? (aproximadamente)

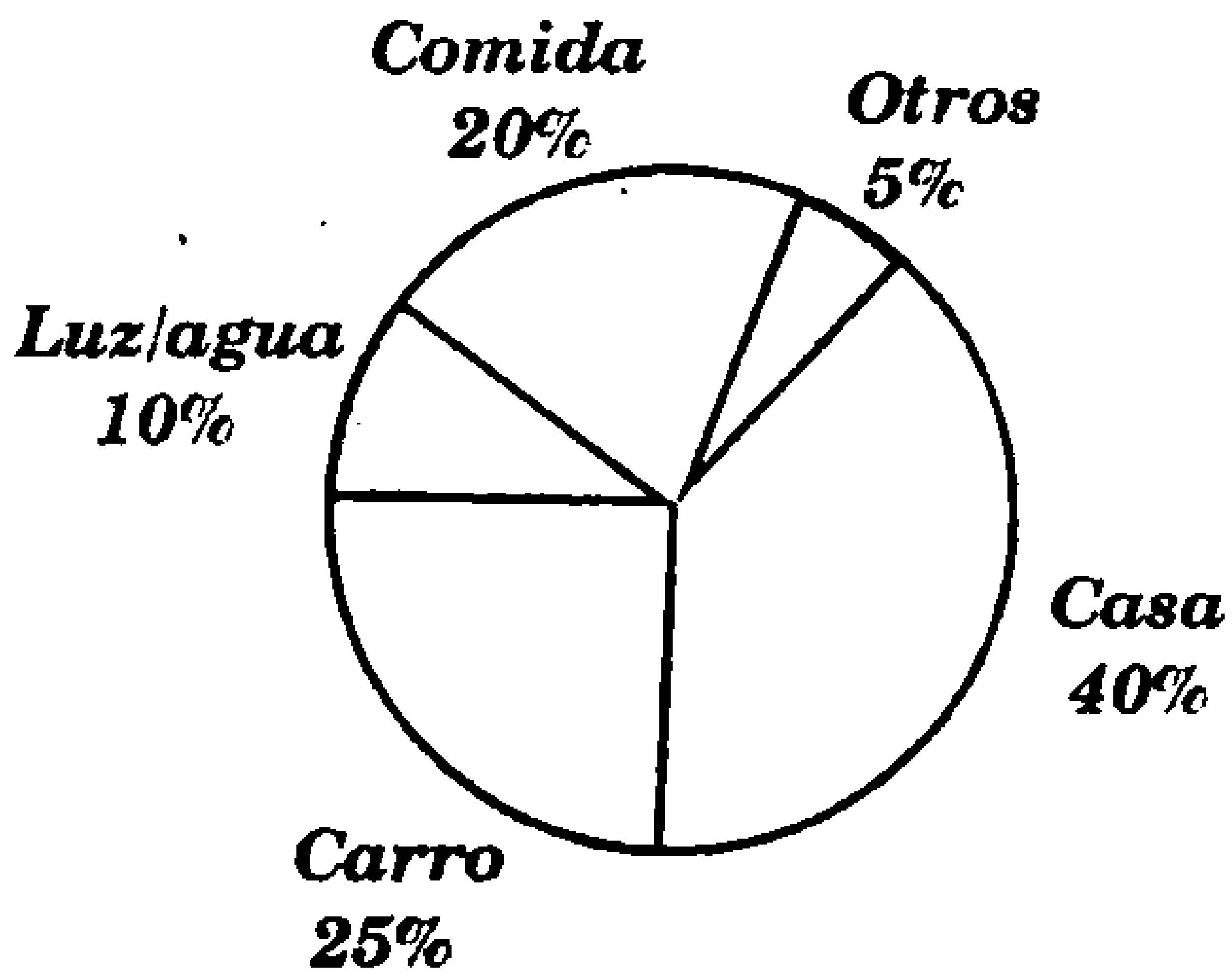
A) 45% *B) 51 %* *C) 72%*
D) 21% *E) 60%*

ENUNCIADO :

Las preguntas *11*, *12* y*13* se refieren al siguiente

gráfico, calcular :

Distribución del Presupuesto de la familia Cordova



Si la familia Cordova tiene un ingreso mensual de *S/.2400*, contesta las siguientes preguntas:

11 ¿Cuánto gastan en comida?

A)S/. 960 B) S/. 480 C) S/. 240 D)S/. 120 E) S/.600

12 ¿Cuánto gastan en casa, luz y agua?

A) S/. 960 B) S/. 720 C) S/.600
D) S/. 1200 E) S/. 840

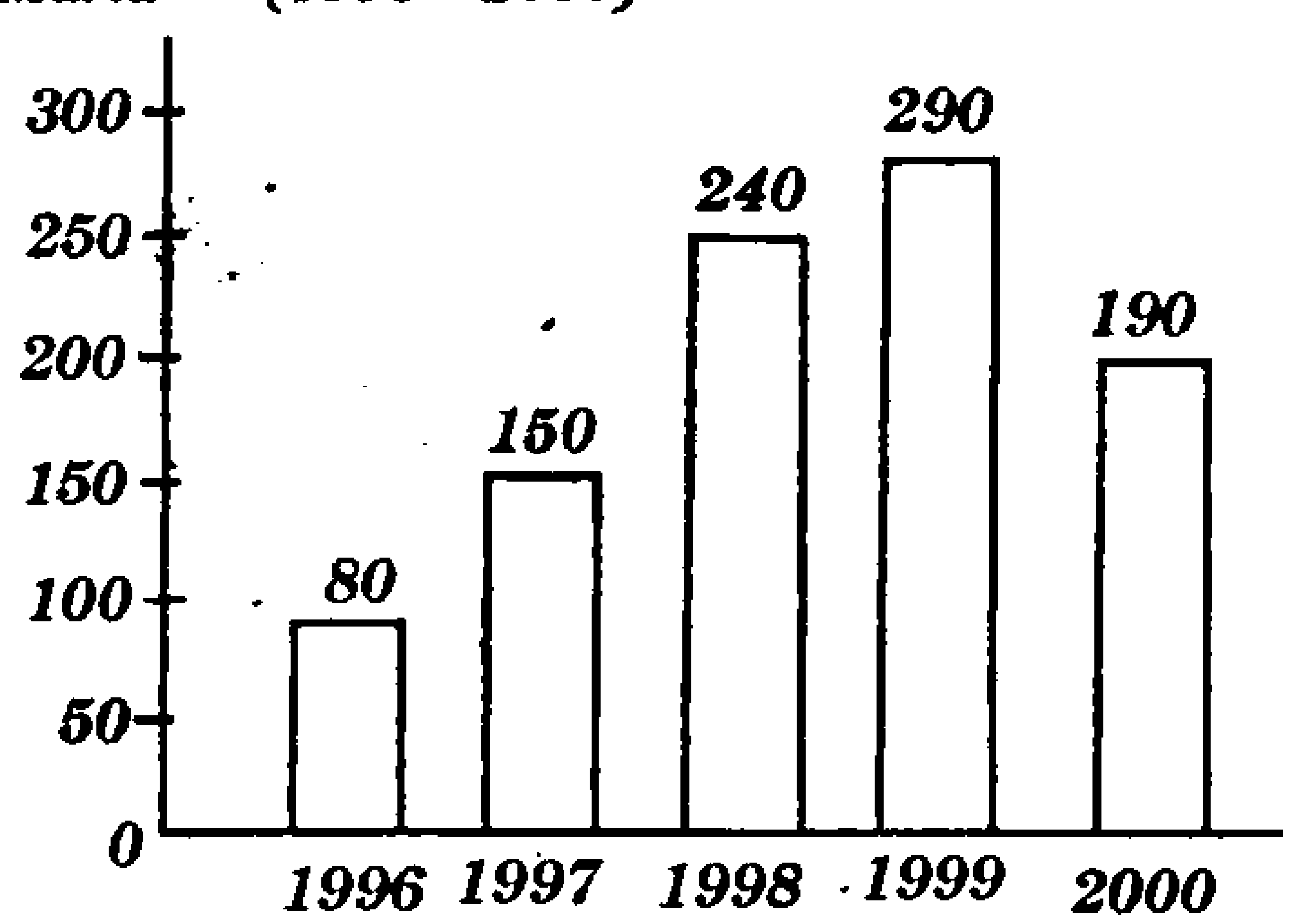
13 ¿Qué rubro consume la mayor parte de sus ingresos?

A) Comida B) Carro C) Luz – agua
D) Casa E) Teléfono

ENUNCIADO :

Las preguntas *14,15,16*y*17*se refieren al siguiente gráfico:

Casas construidas en Jesús María (1996 – 2000)



14 La diferencia entre el número máximo y el número mínimo de casas construidas en el periodo mostrado es:

A)75 B)160 C)175 D)190 E)210

15 El número total de casas construidas en el periodo *1996 – 2000*. ¿Cuántas veces contiene al número de casas construidas en el año *2000*?

A) 11,6 B) 9 C) 7 D) 5 E) 3,5

16 ¿En qué porcentaje aumentó la construcción de casas entre *1997* y 1998?

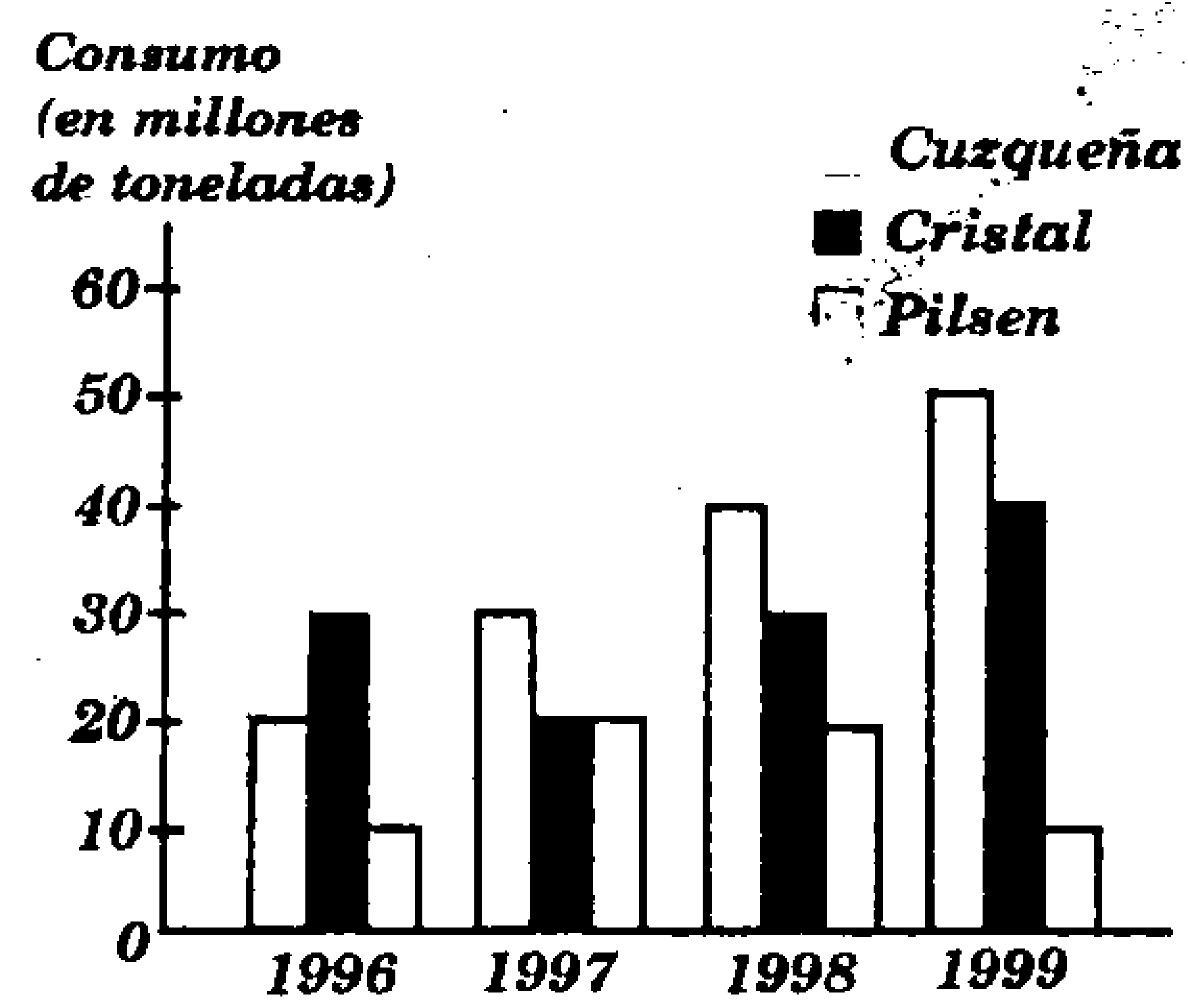
A) 50% B)30% C) 75% D) 20% E) 60%

17 ¿En qué año hubo mayor aumento en la construcción de casas?

A) 1996 B) 1997 C) 1998 D)1999 E) 2000

ENUNCIADO :

El siguiente gráfico muestra el consumo de cervezas durante *4* años en lima.



18 ¿En qué año se consumió la mayor cantidad de cerveza?

A)1996 B) 1997 C) 1998 D)1999 E) Más de 1 año

19 ¿Cuál es la cerveza cuyo consumo aumenta constantemente durante los *4* años?

A) Cuzqueña B) Cristal C) Pilsen
D) A y B E) B y E

20 ¿En qué periodo el consumo de cerveza se incrementó más, porcentualmente?

A) 96 -97 B) 97 – 98 E) 98 – 99
D) F.O. E) Ninguna

21 Según la tendencia, ¿cuál sería el consumo de cerveza cuzqueña para el *2000*?

A) 40 millones B) 50 C) 70 D) 60 E) 80

CLAVES DE LA PRACTICA DE EJERCICIOS #1

1) D	2) B	3) C	4) C	5) A	6) A	7) B	8) A	9) C	10) D
11) B	12) C	13) A	14) D	15) C	16) A	17) B	18) D	19) A	20) A
21) B	22) D	23) D	24)E	25) C	26) C	27) D	28) C	29)D	30) C
31) E	32) E	33) A	34) C	35) D	36) C	37)B	38) C	39) D	40) B

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1) B	2) C	3) B	4) B	5) D	6) B	7) E	8) A	9) B	10) D
11) B	12) D	13) D	14) E	15) D	16) E	17)D	18) D	19) A	20) B
21) D									

RAZONES y PROPORCIONES

CAPITULO 054

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de :

* *Identificar las magnitudes matemáticas de nuestro entorno y medir su intensidad para representarlas mediante las cantidades (valores).*
* *Entender el concepto de razón y su utilidad en la vida cotidiana.*
* *Identificar las cantidades mayor y menor por medio de la comparación.*
* *Diferenciar la razón aritmética de la razón geométrica.*
* *Establecer una analogía entre una razón y otra del mismo tipo.*
* *Aplicar el concepto de proporción en casos prácticos de la vida cotidiana.*
* *Reconocer las clases de proporciones con sus respectivos términos.*
* *Aplicar las propiedades y manejar adecuadamente las técnicas operativas para la resolución de los problemas que se presenten.*

INTRODUCCION :

Algunos enunciados que involucran números, tienen un significado muy restringido si no se comparan con otros o con otras cantidades. Supóngase por ejemplo que después de un examen se encuentran dos estudiantes y uno de ellos comenta que contestó correctamente 7 preguntas y el otro dice que contestó ***9*** correctamente; no podrá decirse a cuál de los dos le ha ido mejor en tal examen porque antes habría que ver cuántas preguntas tenía cada examen. Si en el primer caso fueron ***10***, entonces la calificación sería ***7/10*** y si en el otro hubiesen sido ***13***, la calificación sería ***9/13*** que es un poco menor que la del primer estudiante y consecuentemente le habrá ido mejor al primero aunque parezca lo contrário.

DEFINICION DE ARITMETICA

La Aritmética es una parte de las Matemáticas que estudia la formación de los números, el modo de expresarlos, y el cálculo, propiedades y resolución de los problemas derivados de los mismos.

Las operaciones fundamentales en cuanto se refiere a la forma de combinar los números, son la adición, la sustracción y radicación.

Otras operaciones como razones y proporciones, interés, ... etc., se refieren a la composición de los números. El origen de la Aritmética se remonta a los primeros tiempos de la aparición del hombre, tal vez cuando desarrolló su sentido de propiedad o posesión, lo que le obligó a idear un método para llevar un control de sus pertenencias, inicialmente estableciendo quizas una relación biunívoca de sus propiedades con sus dedos, posteriormente con piedrecitas, luego, cuando la cantidad de piedrecitas ya era demasiado grande, se vió obligado a idear como agruparlas y representar cada grupo por otra tipo de piedra u otro material , hasta que inventó la escritura simbólica y se inició lo que sería a decir de Gauss el nacimiento de la Reyna de las Matemáticas .

RAZONES

Es el resultado de comparar dos cantidades homogéneas o heterogéneas; pueden ser de dos clases.

RAZÓN ARITMÉTICA

Cuando la comparación se hace mediante una resta.

EJEMPLO :

Si tenemos ***36*** manzanas y ***15*** naranjas , entonces :

36	***15***	***21*** *Manzanas más*
Manzanas	*Naranjas*	*que Naranjas*

EN GENERAL :

$$\underbrace{A}_{\text{Antecedente}} - \underbrace{B}_{\text{Consecuente}} = \underbrace{r}_{\text{Razón Aritmética}}$$

OTRO EJEMPLO :

Un padre tiene ***42*** años y su hijo ***14*** años, la razón aritmética de sus edades será ***42 – 14 = 28***

Elementos: $a - b = r$ → ***Valor de la razón***

- a → ***Antecedente***
- b → ***Consecuente***

OBSERVACIÓN :

* El valor de la razón aritmética nos indica cuantas unidades más o cuantas unidades menos es una cantidad respecto a la otra.

RAZÓN GEOMÉTRICA

Cuando la comparación se hace mediante una división.

EJEMPLO :

$$\begin{matrix} N^\circ \text{ de hombres} = 60 \\ N^\circ \text{ de mujeres} = 75 \end{matrix} \quad \frac{60}{75} = \frac{4}{5} \text{....(razón)}$$

Significa : Por cada **4** hombres hay **5** mujeres.

EN GENERAL :

$$\frac{\overbrace{A}^{\text{Antecedente}}}{\underbrace{B}_{\text{Consecuente}}} = \underbrace{k}_{\text{Razón Geométrica}}$$

OTRO EJEMPLO :

Un padre tiene **42** años y su hijo **14** años, la razón geométrica de sus edades será : $\frac{42}{14} = 3$

Elementos :

$$\frac{a \rightarrow \text{Antecedente}}{b \rightarrow \text{Consecuente}} = K \rightarrow \begin{cases} \text{valor de} \\ \text{la razón} \end{cases}$$

OBSERVACIONES :

* La razón geométrica es llamada también relación o solamente razón

* El valor de la razón nos indica la cantidad de veces que una cantidad es respecto a la otra.

"Cuando nos digan que *A* y *B* están en relación de *2* y *3*"

"*A* y *B* son entre sí como *2* es a *3*"

"*A* es a *B* como *2* es a *3*"

"La razón de *A* y *B* es *2/3*"

↗ Podemos plantear : $\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$ ó $\frac{A}{2} = \frac{B}{3}$

↗ mejor : $A = 2k$ y $B = 3k$

PROPORCIONES

Se denomina así a la igualdad que existe entre *2* razones que tiene el mismo valor y pueden ser de *2* tipos : proporciones aritméticas y proporciones geometricas .

El concepto teórico de proporción se remonta a la época de los griegos, quienes la utilizaban para cuestiones geométricas donde la medida de una longitud era comparada con otra que hacía las veces de unidad y luego esta comparación se trasladaba a otra similar con dimensiones mayores. Euclides expone en el libro *V* de sus "Elementos" la teoría de proporciones que se le atribuía a Eudoxio.

Posteriormente se encontraron aplicaciones prácticas del conocimiento de las proporciones gracias a los matemáticos italianos del Renacimiento entre los que destacan Regiomontano y Lucas Paccioli; éste último merece especial mención por la singular atención que le dedicó a las proporciones con la finalidad de darle aplicaciones a la contabilidad, a la cual también contribuyó notablemente. En *1537* Nicolás de Fontana (conocido como Tartaglia) tuvo una original notación para las proporciones la cual es similar a la utilizada en la actualidad.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Es cuando se igualan *2* razones aritméticas que tienen el mismo valor y a su vez se clasifican en :

1) PROPORCION ARITMÉTICA DISCRETA:

$$\boxed{a - b = c - d}$$

* $a \neq b \neq c \neq d$
* "*d*" se denomina cuarta diferencial
* "*a*" y "*b*" ⇒ extremos
* "*b*" y "*c*" ⇒ medios
* Se cumple que : $a + d = b + c$

2) PROPORCIÓN ARITMETICA CONTINUA :

$$\boxed{a - b = b - c}$$

Es cuando los términos medios son iguales.

OBSERVACIONES :

* "*c*" se denomina tercera diferencial .
* "*b*" es la media diferencial o media aritmética .
* Se cumple : $b = \frac{a+c}{2}$

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Es cuando se igualan *2* razones geométricas que tienen el mismo valor y a su vez se clasifican en :

1) DISCRETA :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

OBSERVACIONES :

* $a \neq b \neq c \neq d$
* "*d*" se denomina cuarta proporcional

* "a" y "d" $\Rightarrow$ extremos
* "b" y "c" $\Rightarrow$ medios

Se cumple que :

$$a \times d = b \times c$$

EJEMPLO :

$$12 - 7 = 15 - 10$$

* Notamos que los términos ***7*** y ***15*** son diferentes.

* Luego : la proporción aritmética es discreta.

* Además al cuarto término ***10*** se le da el nombre de cuarta diferencial del ***12, 7*** y ***15*** (En ese orden)

2) CONTINUA :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c}}$$

Es cuando los términos medios son iguales.

OBSERVACIÓN :

* "c" se denomina tercera proporcional

* "b" es la media proporcional o media geométrica.

* Se cumple :

$$\boxed{b^2 = ac} \vee \boxed{b = \sqrt{ac}}$$

EJEMPLO :

$$19 - 13 = 13 - 7$$

* Los términos medios son iguales

* Luego : la proporción aritmética es discreta

* Además :

El cuarto término ***7*** toma el nombre de tercera proporcional de ***19*** y ***13*** (En ese orden).

Al término medio ***13*** es la media diferencial de ***19*** y ***7***; es decir :

$$13 = \frac{19 + 7}{2}$$

!RESUMEN¡

Proporción Aritmética	
Discreta	**Continua**
$a - b = c - d$	$a - b = b - c$
d: Es la cuarta diferencial de a, b y c	b: Media diferencial de a y c c: Tercera diferencial de a y b

Proporción Geométrica	
Discreta	**Continua**
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
d: Es la cuarta proporcional de a, b y c	b: Es la media proporcional de a y c c: Es la tercera proporcional de a y b.

PROPIEDADES :

* Dado $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Entonces se cumple que :

$$\boxed{\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}} \quad \frac{8}{6} = \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{8+6}{6} = \frac{12+9}{9}$$

$$\boxed{\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}} \quad \frac{10}{15} = \frac{14}{21} \Rightarrow \frac{10+15}{10} = \frac{14+21}{14}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}} \quad \frac{15}{9} = \frac{20}{12} \Rightarrow \frac{15+9}{15-9} = \frac{20+12}{20-12}$$

Si en una proporción geométrica de la forma :

$$\frac{A \pm a}{B \pm b} = \frac{C \pm c}{D \pm d} \text{........... } (I)$$

Se observa que, se cumple :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Entonces afirmamos que la igualdad ***(I)***, proviene de :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Es la sucesión de varias razones geométricas que poseen el mismo valor .

Es decir :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \underset{Razón}{k}$$

Donde :

Antecedentes : $a_1 ; a_2 ; a_3 ; ....; a_n$

Consecuentes : $b_1 ; b_2 ; b_3 ; ....; b_n$

Razón o constante de proporcionalidad : k

EJEMPLOS :

Las razones geométricas :

$$\frac{75}{45} ; \frac{40}{24} ; \frac{50}{30} \text{ y } \frac{65}{39}$$

Forman una serie de razones geométricas equivalentes, pues todas ellas poseen el mismo valor: $\frac{5}{3}$.

$$\frac{75}{45} = \frac{40}{24} = \frac{50}{30} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$$

No debes olvidar que los antecedentes son : ***75 ; 40 ; 50*** y ***65*** y los consecuentes son :

45 ; 24 ;30 y ***39 ;***

OBSERVACIÓN :

Se cumple que :

* $\dfrac{a_1}{b_1} = k \Rightarrow a_1 = b_1 k$
* $\dfrac{a_2}{b_2} = k \Rightarrow a_2 = b_2 k$
* $\dfrac{a_n}{b_n} = k \Rightarrow a_n = b_n k$

PROPIEDADES :

I) En toda serie de razones geométricas equivalentes se cumple que :

La razón geométrica entre la suma de sus antecedentes y la suma de sus consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad de dicha serie .

* Es decir :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_2 + b_2 + b_3 + ... + b_n} = k$$

EJEMPLO ;

Sea :

$$\frac{12}{4} = \frac{18}{6} = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow \frac{12 + 18 + 21}{4 + 6 + 7} = 3$$

II) La razón geométrica entre el producto de los antecedentes y el producto de los consecuentes posee un valor igual a la constante de proporcionalidad elevada a un exponente igual al número de razones que conforman la serie.

Es decir :

$$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times ....a_n}{b_2 \times b_2 \times b_3 \times ....b_n} = k^n$$

EJEMPLO :

Sea : $\dfrac{16}{4} = \dfrac{8}{2} = \dfrac{12}{3} = \dfrac{20}{5} = 4$

$$\Rightarrow \frac{16 \times 8 \times 12 \times 20}{4 \times 2 \times 3 \times 5} = 4^4$$

$$III)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\vee\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=....=\frac{a_m}{b_m}=k$$

$$\Rightarrow\frac{a_1^n+a_2^n+a_3^n+....+a_m^n}{b_1^n+b_2^n+b_3^n+....+b_m^n}=k^n$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\sqrt[n]{a_3}+...+\sqrt[n]{a_m}}{\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+\sqrt[n]{b_3}+...+\sqrt[n]{b_m}}=\sqrt[n]{k}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Dos números están en la relación de *2* a *7* agregando a uno de ellos *49* y *64* al otro se obtienen cantidades iguales . Hallar la suma de los números.

A) 7B) 21 C) 27 D) 19 E) 30

RESOLUCIÓN :

* Sean *A* y *B* los números.

$$A = 2k \quad y \quad B = 7k$$

* Luego: $2k + 64=7k+49$

$$\Rightarrow 15 = 5k \quad \Rightarrow 3 = k$$

* Ahora:

$A=2(3)\longrightarrow A=6$

$B=7(3)\longrightarrow B=21\Rightarrow A+B=27$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

60 personas van de campamento a "LUNA TRISTE" al llegar la noche, deciden hacer una fiesta, si *18* parejas se ponen a bailar y se observa que de cada *12* personas que no bailaban *7* son hombres. ¿En que relación se encuentra el número de mujeres y hombres?

RESOLUCIÓN:

Dato: $12\ personas\begin{cases}7\ h\\5\ m\end{cases}$

	hombres	*mujeres*
están bailando	18	18
no están bailando	7 k	5 k

$\Rightarrow 18+7k+18+5k=60$

$\Rightarrow 12k=24$

$\Rightarrow k=2$

$\#\ hombres = 18+7.k = 32$

$\#\ mujeres = 18+5k = 28$

$$\Rightarrow\frac{\#\ hombres}{\#\ mujeres}=\frac{32}{28}=\frac{8}{7}$$

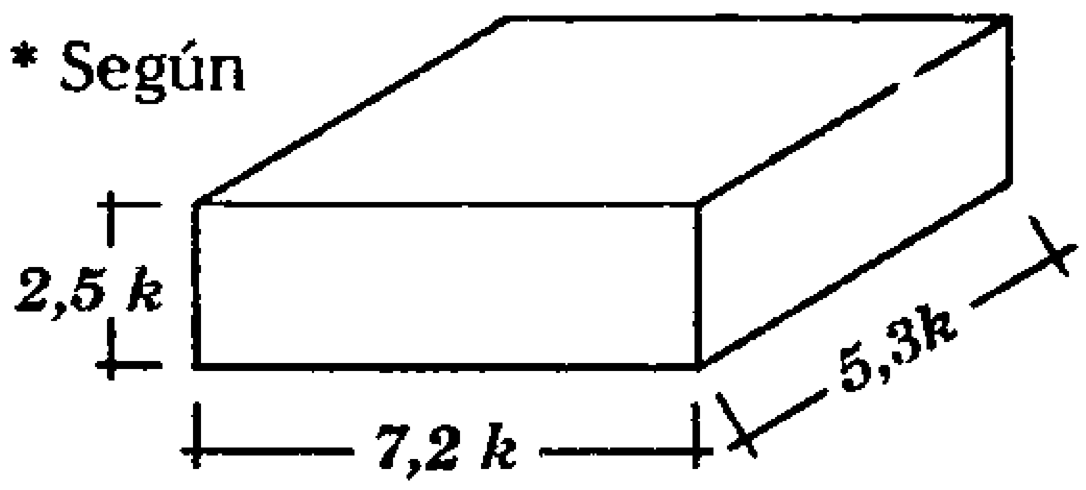
PROBLEMA 3 :

En una caja rectangular los lados de su base y su altura están en la relación de *7,2 ; 5,3* y *2,5*. Calcular el área de la base si su volumen es *763,2 cm³*.

A) 134 cm² B) 201 C) 152,64
D) 90 E) 301,2

RESOLUCIÓN :

* Según



La figura :

$\Rightarrow$ Volumen:

$$7,2\ k\times 2,5\ k\times 5,3\ k=763,2$$

$$\Rightarrow 95,4\ k^3=763,2$$

$$\Rightarrow k^3= 8\rightarrow k=2$$

Área de la base:

$$7,2(2)\times 5,3(2)=152,64\ cm^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

En una proporción geométrica continua, la suma de los extremos es *34* y la diferencia de los mismos es *16* . Calcular la media proporcional .

A) 7 B) 6 C) 15 D) 20 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Sea : Donde b=media proporcional.

* Luego :

$$\left.\begin{matrix}a+c=34\\a-c=16\end{matrix}\right\}\ a=\frac{34+16}{2}\rightarrow a=25$$

$$\Rightarrow c=\frac{34-16}{2}\rightarrow c=9$$

* Además :

$$a\times c=b^2\Rightarrow 25\times 9=b^2\Rightarrow b=15$$

RPTA : "C"

TOMA EN CUENTA

$$\left.\begin{matrix}a+c=S\\a-c=D\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{S+D}{2}...........(mayor)\\c=\dfrac{S-D}{2}...........(menor)\end{cases}$$

PROBLEMA 5 :

Si la media diferencial de *32* y *23* es "*a*"; y "*b*" es la cuarta proporcional de *62,5; 22,4* y *21,25*. Calcular $a+b$.

A) 17,5 B) 38,7 C) 19,1
D) 16,6 E)

RESOLUCIÓN :

$$*\ a=\frac{32+23}{2}$$

$\Rightarrow a=27,5...$*Media diferencial*

$$*\ \frac{62,5}{22,4}=\frac{31,25}{b}\Rightarrow b=\frac{22,4\times 31,25}{62,5}$$

$\Rightarrow b=11,2\Rightarrow a+b=38,7$

PROBLEMA 6 :

Si se cumple: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=K$, donde *K* es un entero positivo , y que $\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2^2-a_3^2}{b_2^2-b_3^2}=6$ entonces el valor de *K* es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

Por dato: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=K\in Z^+$

tenemos que $\dfrac{a_1}{b_1}=K\ \wedge\ \dfrac{a_2^2-a_3^2}{b_2^2-b_3^2}=K^2$

Luego , $K+K^2=6\ \Rightarrow K\in\{2;-3\}$

Pero $K\in Z^+\Rightarrow K=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 (TIPO UNI):

Sean a, b, c y d números naturales tales que :

$I)\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{d}=\dfrac{b}{c}=k,\ \ k\in N\setminus\{1;2\}$

$II)\ d-c=39$

Entonces el valor de $d-b$ es:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

RESOLUCIÓN

* De: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{d}=\dfrac{b}{c}=k\Rightarrow b=ck;\ a=ck^2$

*Como $d-c=39$ y nos piden $d-b$.

* En la serie :

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{d}=\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow\frac{c}{d-b}=\frac{ck^2+c-ck}{39}$$

* Luego :

$39=(d-b)\ (k^2-k+1);k\neq 1\ \wedge\ k\neq 2$

*Si $k=4$; $(d-b) \in z$

* Así : $3 \times 13 = (d-b)(4^2-4+1) \Rightarrow d-b=3$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 La razón aritmética de dos números es **20** y su razón geométrica es **2** . El número mayor es:

A) 20 B) 30 C) 40 D) 60 E) 80

02 La razón entre **2** números es **3/5**. Determinar la diferencia entre ellos , sabiendo que su suma es **72**.

A) 9 B) 12 C) 16 D) 18 E) 24

03 Dos números están en la razón de **3** es a **2**. Si la suma de dichos números excede a la diferencia de los mismos en **80** . Hallar el mayor de los números .

A) 45 B) 60 C) 75 D) 90 E) 120

04 La razón geométrica entre la suma y la diferencia de dos números es **5/3**. Si la suma del mayor con el triple del menor es **14**. Calcular la suma de los cuadrados de los números.

A) 68 B) 72 C) 76 D) 80 E) 100

05 José y Juan tiene **S/.700** entre ambos, lo que tiene José es a lo que tiene Juan como **4** es a **3**. ¿Cuánto tiene José?

A) S/.400 B) S/.300 C) S/.100 D) S/.200 E) S/.600

06 La razón de dos números es de **7** a **3**. ¿Cuál será la razón entre la suma de cuadrados y diferencia de cuadrados de dichos números?

A) 25/4 B) 29/20 C) 58/13 D) 29/5 E) 5/16

07 La razón aritmética de dos números es **12**. Si uno de ellos es el cuádruple del otro , Calcular la suma de dichos números .

A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

08 Si la razón geométrica de dos números es **9 ; 7** y su razón aritmética es **32**, entonces el menor de estos números es :

A) 112 B) 144 C) 132 D) 160 E) 98

09 Determinar la razón entre dos números tales que la razón entre la suma y su diferencia es de **15** a **7**

A) 11 : 3 B) 7 : 4 C) 11 : 4 D) 8 : 3 E) 7 : 11

10 En un salón hay **40** varones y **30** mujeres. ¿Cuántas parejas deben retirarse para que los varones que quedan sean a las mujeres que quedan como **7** es a **5**?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

11 Dos números son proporcionales a **2** y **5** si se aumenta **100** a uno de ellos y **85** al otro , se obtiene cantidades iguales. ¿Cuál es el menor?

A) 9 B) 10 C) 14 D) 40 E) 30

12 Sabiendo que uno de cada mil vehículos sufre accidentes en **1** kilómetro . ¿Cuántos vehículos de cada millón sufren un accidente en **2** kilómetros?

A) 2000 B) 200 C) 999 D) 1999 E) 991

13 La razón aritmética entre dos números es **20**. Si dichos números están en la relación de **8** a **3**. ¿Cuál es su suma?

A)44 B)33 C)66 D)55 E)22

14 Si: $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ y además: $b - a = 12$

Hallar "*a*".

A)2 B)6 C)10 D)4 E)8

15 Si: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$; $2a + b - c = 15$

Hallar "*bc*"

A)300 B)200 C)100 D)150 E)250

16 Calcular dos números que se encuentren en la relación de **5** a **7** y cuya suma sea **60**.

A)20 y 40 B)25 y 35 C)5 y 55 D)30 y 30 E)15 y 45

17 Si: $\frac{a}{x} = \frac{2}{7}$ y $2a + x = 39$

Dar: $(x - a)$

A)12 B)16 C)20 D)24 E)8

18 Si:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \qquad a + b = 60 \qquad b + c = 30$$

Calcular "*b*".

A)10 B)20 C)30 D)40 E)50

19 Si: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ y $a + b = 21$

Calcular "*c*"

A)10 B)15 C)20 D)25 E)30

20 Si: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ y $a = 8d$

Calcular: $\frac{a}{c}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Completar lo siguiente :

A) 25 – 11 = 32 –

B) 83 - = 42 – 24

C) 91 – 67 = – 45

02 Escribe "=" ó "≠" en cada caso :

A) $\frac{4}{5}$ $\frac{12}{15}$ B) $\frac{4}{15}$ $\frac{3}{7}$ C) $\frac{9}{16}$ $\frac{3}{4}$

03 Calcular la media diferencial entre:

A)40 y 32 B)32;5 y 62; 6 C) 28 y 52

04 Determinar la media proporcional entre :

A)16 y 4 B)72 y 100 C)3,29 y 6,8

05 Calcular la cuarta diferencial entre:

A) 23 ; 18 y 12
B)45 ; 37 y 54
C)2,14 ; 0,26 y 3,18

06 Calcular la tercera diferencial entre :

A) 42 y 30 B) 39 y 16 C) 10,18 y 6,15

07 Calcular la cuarta proporcional entre:

A)16 ; 28 y 20
B)14 ; 42 y 36
C)54,2 ; 61,7 y 38,1

08 Calcular la tercera proporcional entre:

A)18 y 24 B) 32 y 29 C) 6,24 y 5,18

09 En una proporción aritmética continua, la media diferencial es igual a *16* y la razón aritmética de los extremos es *8*, hallar el producto de los extremos.

A) 120B) 150C) 240D) 280 E) 360

10 La suma de la media diferencial de *28* y *12* con la cuarta diferencial de *18 ; 12* y *10* es igual a:

A) 18 B) 20 C) 24 D) 26 E) 30

11 En una proporción geométrica, la suma de los términos medios es *16* y la razón aritmética de los mismos es *4*. Hallar el producto de los extremos .

A) 60 B) 64 C) 18 D) 20 E) 24

12 Si *"m"* es la media proporcional de *9* y *4*; *"n"* es la cuarta proporcional de *8; "m"* y *12*. Hallar $(m+n)$.

A) 12 B) 15C) 18 D) 20 E) 24

13 El producto de los términos extremos de una proporción geométrica es *36* y la suma de los medios *12*. ¿Cuál es la diferencia de los medios?.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

14 Sabiendo que la suma de los cuadrados de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es igual a *324*. Determinar la media proporcional .

A) 7 B) 8 C) 10 D) 9 E) 12

15 ¿Cuánto suman la media diferencial de *30* y *20* con la media proporcional de *2* y *3*?

A)25 B)26 C)30 D)31 E)35

16 La suma de los *4* términos de una proporción aritmética continua es *60*. ¿Cuál es la media diferencial?

A)30 B)20 C)15 D)10 E)25

17 El producto de los *4* términos de una proporción geométrica es *256*. ¿Cuál es la media proporcional?

A)2 B)4 C)8 D)16 E)32

18 Si: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ y $a=9c;\ a+b=16$

Calcular "*c*".

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

19 Si:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d} \quad y \quad \frac{a^2b+b^2c+c^2d}{b^3+c^3+d^3}=9$$

Calcular: $\frac{a+b+c}{b+c+d}$

A)1 B)3 C)9 D)18 E)27

20 Si: $\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$ y $ab=180$

Calcular "*c*"

A)12 B)15 C)21 D)27 E)18

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcule el valor de la razón aritmética de:

*A)*Las edades de Sergio y Reny que son *15* y *10* años.

*B)*Los precios de dos artículos que son *S/.3,20* y *S/.8,40*

A)5 años y S/. 4,20
B)6 años y –S/. 5,20
C)5 años y S/. 5,20
D – 5 años y S/. 7,20
E)– 6 años y S/. 8,10

02 Las edades de Chicho y Pepe Lucho están en la relación de *7* a *5* respectivamente. Si la edad del mayor excede al del otro en *6* años, calcule la edad de Chicho.

A)15 años B)28 años C) 45 años D)14años E)21 años

03 Los volúmenes de dos sólidos son entre sí como *6* es a *13*. Si el menor volumen es $72u^3$, calcule el mayor volumen.

A) 132 u^3 B) 156 u^3 C) 144 u^3 D) 120 u^3 E) 96 u^3

04 En un evento deportivo se observa que por cada *3* varones hay *5* mujeres. Si en total han participado *96* deportistas, ¿cuántos son varones?

A) 36 B) 60 C) 24 D) 72 E) 50

05 En un bidón se tiene *72* litros de una mezcla de alcohol y agua, en la relación de *5* a *4* respectivamente. ¿Cuántos litros de agua se debe agregar para que la relación sea de *8* a *9*?

A) 23 L B) 16 L C) 9 L D) 13 L E) 7 L

06 En una proporción aritmética la suma de términos es *84*, además los extremos están en la relación de *4* a *3*. Calcule la diferencia de éstos.

A) 12 B)8 C)18 D) 10 E) 6

07 En una proporción aritmética continua, la suma de los extremos es *24*. Calcule la media diferencial.

A) 8 B) 16 C) 12 D) 24 E) 30

08 Si el primer antecedente es *80*, la suma de los dos primeros términos es *150* y la suma de los otros dos términos es *90*, calcular la cuarta proporcional.

A) 42 B) 48 C) 80 D) 70 E) 24

09 En una proporción geométrica continua la suma de los extremos es *75* y la diferencia de los mismos es *21*. Calcular la suma de cifras de la media proporcional.

A) 36 B).12 C) 9 D) 18 E)10

10 En una proporción geométrica, el producto de los términos es *3600*, además los términos extremos suman *16*. Calcule la diferencia de los términos extremos.

A)6 B)10 C)8 D)4 E) 12

11 Calcule la cuarta proporcional de *4*; «*m*» y «*n*», sabiendo que «*m*» es la media proporcional de *28* y *7*, y «*n*» es la tercera proporcional de *9* y *12*.

A) 28 B) 36 C) 56 D) 24 E) 42

12 Si *5* es la cuarta proporcional de «*x*»; *6* e «*y*» además «*y*» es la cuarta proporcional de «*x*» *9* y *30*, calcule $x+y$.

A) 22 B)33 C) 36 D) 28 E) 45

(13) La suma de los términos de una razón, cuyo valor es menor que ***1***, es ***37***. Si al mayor se le resta ***29*** y al menor se le suma ***29***, la relación inicial se invierte. Dicha relación es:

A) 13/27 ***B) 4/13*** ***C) 4/33***
D) 8/17 ***E) 11/24***

(14) De un recipiente que contiene ***65*** litros, entre alcohol y agua, cuyos volúmenes están en la relación de ***2*** a ***3***, respectivamente, se extraen ***15*** litros. Calcule cuántos litros de agua debe adicionarse para que al final la relación sea de ***1*** a ***3***.

A) 20 B) 18 C) 30 D)28 E) 36

(15) En una proporción geométrica continua se sabe que la diferencia de los extremos es ***45*** y la suma de los mismos es ***75***. Calcule la media proporcional.

A) 30 B) 35 C) 25 D) 20 E) 15

(16) En un corral, donde sólo hay patos y gallinas, la cantidad de patos es la séptima parte del total y de éstos la tercera parte son de color crema. Calcule cuántos patos hay, si el número de gallinas está comprendido entre ***80*** y ***100***.

A) 45 B)60 C) 15 D) 18 E) 24

(17) Una liebre va al alcance de una tortuga, estando sus velocidades en la relación de ***4*** a ***1***, además inicialmente estaban separados ***30*** metros. Calcule la suma de los espacios recorridos por ellos.

A)50 m ***B)60 m*** ***C) 40 m***
D)40,5 m ***E)62,5 m***

(18) En una escuela primaria donde hay $\overline{ab00}$ alumnos, la razón entre niños y niñas es $\frac{9}{8}$.

¿Cuál será el valor de la razón aritmética si es máxima?

A) 100 ***B)150*** ***C)600***
D) 400 ***E) 500***

(19) Se tiene un recipiente que contiene ***35*** litros de vino y ***5*** litros de agua. Al llegar Sergio, consume ***8*** litros de la mezcla y reemplaza lo que toma con agua, luego Andrés retira ***10*** litros de la nueva mezcla. ¿Cuántos litros de vino quedan en el recipiente?

A) 24,5 L ***B) 9 L*** ***C) 21 L***
D) 28 L ***E) 12 L***

(20) La suma de los cuatro términos de una proporción es ***160*** y cada uno de los tres últimos términos es la tercera parte del precedente. ¿Cuál es la suma de los medios?

A)36 B)112 C)48 D)60 E)108

(21) Se han sacado ***9*** litros de un barril lleno de vino, después se ha llenado de agua y de esta mezcla se han sacado otros ***9*** litros y el barril es nuevamente llenado con agua. Si la cantidad de vino que queda en el barril es a la cantidad de agua que hay en el barril como ***16*** es a ***9***, qué capacidad tiene el barril?

A) 30 ***B) 35*** ***C) 40***
D) 45 ***E) 50***

(22) En una proporción geométrica la suma de los extremos es ***29*** y la suma de los cubos de los cuatro términos de dicha proporción es ***49 210***. Calcular la suma del mayor extremo y el mayor medio de esta proporción si la suma de los términos medios es ***41***.

A) 30 ***B) 35*** ***C) 40***
D) 45 ***E) 50***

(23) En una proporción geométrica continua cuya razón es un número entero, se cumple que el producto de los antecedentes más el doble producto de los consecuentes es ***825***. Determinar el mayor de los extremos.

A) 65 ***B) 60*** ***C) 55***
D) 50 ***E) 45***

(24) A los números ***162; 198*** y ***210*** se le suman y restan ***a ; b*** y ***c*** respectivamente para formar los antecedentes y consecuentes de una serie de razones geométricas equivalentes. Calcular el valor de la constante de proporcionalidad que hace que los números naturales ***a ; b*** y ***c*** sean los menores posibles.

A) 21/19 ***B) 5/3*** ***C) 9/7***
D) 7/5 ***E) 19/17***

(25) En una proporción geométrica, se cumple que la suma de los cubos de sus cuatro términos es igual a ***315***. Determinar la suma de los cuatro términos, si el valor de la razón de dicha proporción es un número entero.

A) 12 ***B) 15*** ***C) 18***
D) 21 ***E) 24***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)E	3)B	4)A	5)D	6)E	7)C	8)A	9)C	10)D
11)C	12)B	13)C	14)C	15)A	16)C	17)A	18)E	19)C	20)C

PROPORCIÓN ARMÓNICA

Dado cuatro números ordinales ***a; b; c*** y ***d***: la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos, como la primera en al cuarto.

$$\boxed{\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}}$$

PROPORCIÓN ARMÓNICA DISCRETA

Es aquella en la que sus cuatro términos son diferentes

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}$$

Donde: ***a; b; c*** y ***d*** son llamadas cuartas armónicas.

PROPORCIÓN ARMÓNICA CONTINUA

Es aquella en la que sus términos medios son iguales.

$$\frac{a-b}{b-d}=\frac{a}{d}$$

Donde:

a y d : son llamadas terceras armónicas

b : media armónica

$$b=\frac{2ad}{a+d}$$

PROMEDIOS
CAPÍTULO 055

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Recopilar un conjunto de datos de forma adecuada y ordenada.*
* *Analizar los datos recopilados y determinar el representante más adecuado (promedio).*
* *Aplicar las propiedades en la resolución de problemas que se plantean.*

INTRODUCCIÓN :

El término promedio es muy usado en las conversaciones cotidianas. Hablamos de altura promedio, nos preocupamos si nuestro peso está muy por debajo o por encima del promedio para nuestra edad y altura, comparamos nuestras acciones con las del hombre promedio y esperamos que todo obedezca a "la ley de los promedios". Los hombres y las máquinas trabajan a una velocidad promedio; los jugadores de diversos deportes comparan minuciosamente sus promedios de puntuación, y grandes sumas de dinero se pueden ganar dependiendo de la exactitud con que se haya acertado un promedio de puntuación en el fútbol. En términos vagos, promedio significa algo en medio, con cualquiera disparidades o excentricidades a la derecha o a la izquierda equilibradas y compensadas. Mientras esto no pase de ser una idea vaga y general, no habrá mucho de dañino en ella; pero si se utiliza este concepto incierto y definido a medias, como base para algún cálculo, se originarán muchos problemas a causa de argumentos inexactos o ilógicos. El promedio es el punto medio de una distribución. Desgraciadamente, esto por sí solo no es muy claro; se puede interpretar de diferentes formas. Es lo mismo que tratar de encontrar el centro de un triángulo. ¿Es donde se cruzan las alturas?, ¿o las medianas?, ¿o las mediatrices? Cada uno de ellos tiene derecho a ser llamado el centro del triángulo, en una u otra forma. Si el triángulo es equilátero, no importará que interpretación usemos, ya que las cuatro coincidirán. Lo mismo pasa con una distribución; si es uniforme y simétrica, el valor medio será único y claramente definido, de otra forma podemos tener más de una interpretación posible.

PROMEDIOS

En una aula de "*LA PRE*" las edades de los alumnos son aproximadamente desde *15* años hasta *19* años. Pero se observa que la mayoría de los alumnos son de *17* años . ¡Si queremos encontrar una edad que represente al grupo ! ¿como la determinamos?

Si elegimos al azar un alumno y le preguntamos su edad sería tal vez *17* años ¿Porqué?

Para lograr la certeza necesitamos una herramienta matemática , a la cual denominamos promedio.

¿QUÉ ES PROMEDIO?

Se llama así aquella cantidad que representa a un conjunto de cantidades; es un valor de tendencia central, pues está comprendido entre la mínima y máxima cantidad promediada.

* Sean los datos: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots\ldots \le a_n$
* Se cumple: $a_1 \le promedio \le a_n$

TIPOS DE PROMEDIOS

1)PROMEDIO ARITMÉTICO O MEDIA ARITMÉTICA (MA) :

La ***media aritmética*** o promedio, de una cantidad finita de números, es igual a la suma de todos ellos dividida entre el número de sumandos.

$$MA = \frac{Suma\ de\ datos}{Número\ de\ datos}$$

Expresada de forma más intuitiva, podemos decir que la media (aritmética) es la cantidad total de la variable distribuida a partes iguales entre cada observación.

Por ejemplo, si en una habitación hay tres personas, la media de dinero que tienen en sus bolsillos sería el resultado de tomar todo el dinero de los tres y dividirlo a partes iguales entre cada uno de ellos.

Es decir, la media es una forma de resumir la información de una distribución (dinero en el bolsillo) suponiendo que cada observación (persona) tendría la misma cantidad de la variable.

También la media aritmética puede ser denominada

como centro de gravedad de una distribución, el cual no es necesariamente la mitad.

EJEMPLO 1 :

La media Aritmética de *2 ; 8 ; 11* es: $MA=\frac{2+8+11}{3}=7$

EJEMPLO 2 :

Las notas de un alumno fueron: *16; 15; 10* y *08,* hallar el promedio

$$\overline{MA}=\frac{16+15+10+08}{4}=12,25\approx 12$$

2) PROMEDIO GEOMÉTRICO O MEDIA GEOMÉTRICA (MG):

La **media geométrica** de una cantidad finita de números (digamos *n* números) es la raíz *n*-ésima del producto de todos los números.

$$MG=\sqrt[n]{Producto\ de\ datos}$$

n=Número de datos

* Sólo es relevante la media geométrica si todos los números son positivos.

* Si uno de ellos es *0*, entonces el resultado es *0*.

* Si hay un número negativo (o una cantidad impar de ellos) entonces la media geométrica es, o bien negativa o bien inexistente en los números reales.

* En muchas ocasiones se utiliza su trasformación en el manejo estadístico de variables con distribución no normal(tema de estadística descriptiva).

EJEMPLO 1 :

La Media Geométrica de *15 ; 25* y *9* es : $MG=\sqrt[3]{15\times 25\times 9}=15$

EJEMPLO 2 :

El siguiente cuadro refleja crecimiento poblacional de los pueblos jóvenes en Lima.

Año	2003	2002	2001	2000
Crecimiento%	16	81	256	625

Luego la tasa anual de crecimiento promedio será:

$$\overline{MG}=\sqrt[4]{16\times 81\times 256\times 625}=120$$

3) PROMEDIO ARMÓNICO O MEDIA ARMÓNICA (MH) :

La **media armónica**, representada por *H*, de una cantidad finita de números es igual al ***recíproco***, o inverso, de la ***media aritmética*** de los recíprocos de dichos números

$$MH=\frac{Número\ de\ datos}{suma\ de\ inversa\ de\ datos}$$

La media armónica resulta poco influida por la existencia de determinados valores mucho más grandes que el conjunto de los otros, siendo en cambio sensible a valores mucho más pequeños que el conjunto. La media armónica no está definida en el caso de la existencia en el conjunto de valores nulos.

EJEMPLO 1 :

La media Armónica de *2; 3* y *12* es :

$$MH\ \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}}=\frac{3}{\frac{6+4+1}{12}}=\frac{36}{11}=3,2$$

EJEMPLO 2 :

Si las edades de tres personas es *18; 12* y *16*. Hallar su promedio armónico.

$$\overline{MH}=\frac{3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}}=11,08$$

PROPIEDADES:

1) $\overline{MH}\le\overline{MG}\le\overline{MA}$ y son iguales: $\overline{MH}=\overline{MG}=\overline{MA}$, si todos los datos son iguales.

2) Sólo para dos datos:

$$\left(\overline{MG}\right)^2=\overline{MA}.\overline{MH}$$

3) Sólo para dos datos:

$$(a-b)^2=4\left(\overline{MA}^2\ \overline{MA}^2\right)$$

NOTA :

Si a todas las cantidades promediadas se les afecta aritméticamente (sumando, restando , multiplicando , dividiendo) por una misma cantidad, entonces el promedio quedará afectado del mismo modo.

EJEMPLO :

Si el *P.A.* de *7* números es igual a *20* "Si a todos los triplicamos y luego le sumamos *2* unidades".

Entonces el nuevo promedio de los *7* números será:

$$\Rightarrow 20\times 3+2=62$$

PROMEDIO PONDERADO

Es un caso particular del promedio aritmético, el cual se origina, cuando una cantidad se debe considerar *1; 2* ó más veces. La ponderación en los problemas está indicando el peso o importancia que se le debe asignar a las cantidades.

Sean las cantidades:

$$n_1,\ n_2,\ n_3\ \ldots\ldots\ldots\ldots n_k$$

de peso

$$P_1\ ,\ P_2\ ,\ P_3\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ P_k$$

respectivamente. entonces:

$$P_p=\frac{n_1\times P_1+n_2\times P_2+n_3\times P_3+\ldots\ldots+n_k\times P_k}{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_k}$$

EJEMPLO 1 :

Un alumno en el *3er* bimestre obtuvo en aritmética

	NOTAS	PESO
* Cuaderno	14	3
* Tarea	13	1
* Ex. mensual	16	2
* Ex. bimestral	20	3

$$\Rightarrow P_p=\frac{14\times 1+13\times 1+16\times 2+20\times 3}{1+1+2+3}$$

$$P_p=\frac{119}{7}\Rightarrow P_p=17$$

EJEMPLO 2 :

En un salón de clase de *3er.* año, la estatura promedio de los *25* varones es *1,68 m.* y de las *20* mujeres es *1,50 m.* Calcular el promedio de estatura de toda el aula.

$$P_p=\frac{25\times 1,68+20\times 1,50}{25+20}$$

$$\Rightarrow P_p=1,60\ m$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

La media aritmética y la media geométrica de *2* números enteros positivos se diferencian en *6* unidades y la suma de las raíces cuadradas de estos números enteros es $6\sqrt{3}$. Halle la media armónica de dichos enteros.

A) 17,3 *B) 17,6* *C) 18,3*
D) 18,7 *E) 19,2*

RESOLUCIÓN :

*Se nos dice que siendo *a* y *b* los números , luego :

• $\overline{MA}-\overline{MG}=6$..............................(I)

• $\sqrt{a}+\sqrt{b}=6\sqrt{3}\xrightarrow[\text{al cuadrado}]{\text{elevando}}a+b+2\sqrt{ab}=108$

$\xrightarrow{\div 2}\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{2}=\dfrac{108}{2}$

$\Rightarrow \overline{MA}+\overline{MG}=54$........................ (II)

* De *(I)* y *(II) :*

$$\overline{MA}=30 \text{ y } \overline{MG}=24$$

* Para determinar la $\overline{MH}$, utilizamos la propiedad :

$\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2$

$\Rightarrow 30\times\overline{MH}=24^2 \Rightarrow \overline{MH}=19,2$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Sean los números racionales a_1 ; a_2;...;a_n tales que $a_1<a_2<...<a_{n-1}<a_n$. Entonces se cumple que:

A) $a_1^n<\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}<a_n^n$ B) $a_1<\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}<a_n$

C) $a_1<\sum_{i=1}^{n}a_i<a_n$ D) $\sqrt[n]{a_1}<\sum_{i=1}^{n}a_i<\sqrt[n]{a_n}$

E) $\dfrac{a_1}{n}<\sum_{i=1}^{n}a_i<\dfrac{a_n}{n}$

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que todo promedio debe estar comprendido entre el menor y mayor dato.

Para un grupo de datos no todos iguales

$\left(\begin{matrix}\text{menor}\\\text{dato}\end{matrix}\right)<\text{MA}<\left(\begin{matrix}\text{mayor}\\\text{dato}\end{matrix}\right)$

$$a_1<\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}<a_n \Rightarrow a_1<\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}<a_n$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 (TIPO UNI) :

Tres números enteros *m* , *n* , *p* tienen una media aritmética de *10* y una media geométrica de $\sqrt[3]{960}$. Halle aproximadamente la media armónica de estos números, si $n\times p=120$.

A) 8,72 *B) 9,32* *C) 9,73*
D) 9,93 *E) 9,98*

RESOLUCIÓN:

* El promedio es un valor representativo de un conjunto de datos; dependiendo de la forma de cálculo tenemos:

• Media aritmética $(\overline{MA})$

$$\overline{MA}=\frac{\text{suma de datos}}{\text{cantidad de datos}}$$

• Media geométrica $\overline{MG}$

$$\overline{MG}=\sqrt[n]{\text{Producto de datos}}$$

n: cantidad de datos

• Media armónica *(MH)*

$$\overline{MH}=\frac{\text{cantidad de datos}}{\text{suma de las inversas de los datos}}$$

De los datos tenemos

$\overline{MA}(m,n,p)=\dfrac{m+n+p}{3}=10$

$\Rightarrow m+n+p=30$

$\overline{MG}(m,n,p)=\sqrt[3]{m\times n\times p}=\sqrt[3]{960}$

$\Rightarrow m\times n\times p=960$

Además, por dato tenemos que $n\times p=120$, como $m\times \underbrace{n\times p}_{120}=960$, entonces, $m=8$.

Nos queda que $n+p=22$

$$n\times p=120$$

de donde se obtiene $n=12$ y $p=10$

Finalmente, calculemos la $\overline{MH}(m,n,p)$.

$$\overline{MH}(m,n,p)=\frac{3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}=9,7297...$$

$\Rightarrow \overline{MH}(m,n,p)=9,73$

Aproximadamente, la $\overline{MH}$ de *m,n* y *p* es *9,73.*

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Las normas académicas de una institución educativa establecen las calificaciones siguientes:

Aprobado: Nota ≥ 14;

Desaprobado: $9\leq$ Nota<14 y

Reprobado: Nota <9

En el curso de Química, las calificaciones finales fueron: *40%* de aprobados, con nota promedio: *16* puntos; nota promedio de los desaprobados: *11* puntos; y nota promedio de los reprobados: *6* puntos. Si la nota promedio obtenida en el curso fue de *11* puntos, entonces el porcentaje de alumnos reprobados es:

A) 10% *B) 20%* *C) 30%*
D) 40% *E) 50%*

RESOLUCIÓN:

El promedio más empleado es la media aritmética; para su cálculo se utilizan todos los datos y se calcula así:

$$\overline{MA}=\frac{\text{suma de datos}}{\text{total de datos}}$$

Luego, tenemos que. Suma de datos$=\overline{MA}\times$(Total de datos)

	total de alumnos	aprobados	desaprobados	reprobados
cantidad	100%	40%	(60-x)%	x%
$\overline{MA}$	11	16	11	6

Luego se tiene lo siguiente:

$11\times 100\%=16\times 40\%+11(60-x)\%+6\times x\%$

$\Rightarrow 1100\%=640\%+660\%-5x\%$

$\Rightarrow 1100\%=1300\%-5x\%$

$\Rightarrow 5x\%=200\% \Rightarrow x\%=40\%$

Los alumnos reprobados representan el *40%*

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el promedio aritmético de los *6* primeros multiplos de *12*.

A)40 B)42 C)48 D)50 E)52

02 Hallar el promedio armónico de *10; 15* y *60*

A) $16\frac{4}{13}$ B) $16\frac{4}{11}$ C)16
D) $15\frac{1}{3}$ E) $15\frac{2}{7}$

03 Hallar el promedio aritmético de $\sqrt{98};\sqrt{50};\sqrt{18}$

A)5 B)$5\sqrt{3}$ C)$5\sqrt{2}$ D)$8\sqrt{2}$ E)$9\sqrt{2}$

04 Hallar el promedio geométrico de todos los divisores de *16*.

A)4 B)6 C)7 D)8 E)N.A.

05 Hallar el promedio geométrico de los *3* primeros múltiplos de *15*.

A)$15\sqrt{6}$ B)$15\sqrt{3}$ C)$15\sqrt{2}$ D)$15\sqrt[3]{6}$ E)N.A

06 Hallar el promedio ponderado de $n_1 = 20$ $n_2 = 30$ $n_3 = 10$

$p_1 = 15$ $p_2 = 12$ $p_3 = 14$

donde n = # elementos y p = promedio

A)$13,\hat{2}$ B)$13,\hat{4}$ C)$12,\hat{8}$

D)$13,\hat{3}$ E)$14,\hat{2}$

07 En una clase de *40* alumnos, el promedio de los pesos de los *25* hombres es *62kg*. y el de las mujeres es *52Kg*. Hallar el peso promedio de toda la clase.

A)58,25kg. B)56,4 C)54,32
D)52,4 E)N.A.

08 Un grupo de *6* personas tiene una edad promedio de *23* años, si se retiran *2* personas el nuevo promedio es *25* años. Hallar la suma de las edades de las personas que se retiraron.

A)28 B)34 C)38 D)42 E)46

09 En una reunión habían *58* personas cuya edad promedio era *25* años. Si se retira un grupo de *24* personas cuya edad promedio era *23* años ¿Cuál es la edad promedio de las que quedarón?

A)25,8 B)25,2 C)26,2
D)26,4 E)N.A.

10 Hallar la media aritmética de todos los números pares de *2* cifras:

A)52 B)54 C)62 D)64 E)N.A.

11 Un ciclista va de Lima a Chosica a razón de *50 Km/h* y regresa a razón de *30 km/h*. Hallar la velocidad promedio para todo su recorrido.

A)40 km/h B)38 C)37,5
D)36 E)N.A.

12 Carlitos alumno del aula *7* ha obtenido en las cuatro primeras prácticas las siguientes notas: *12; 11; 13* y *9*. ¿Cuál debe ser su nota en la quinta práctica para que su promedio sea *12*?

A)16 B)14 C)12 D)15 E)18

13 El promedio de las edades de cinco personas es *32* años. Si se retiran dos de ellos el promedio de las que quedan es *28* años. Hallar la suma de las edades de las personas que se retiraron.

A)76 B)66 C)84 D)94 E)N.A.

14 El promedio de las edades de cuatro personas es *28* años. Si consideramos una quinta persona, el promedio disminuye en un año. ¿Cuál es la edad de la quinta persona?

A)22 años B)23 C)25
D)26 E)N.A.

15 El promedio de *20* alumnos de una clase es *12*, de otros *15* es *14* y de las *27* restantes es *15*. ¿Cuál es el promedio de toda la clase?

A) menor que 13
B) entre 13 y 13,5
C) entre 13,5 y 14
D) entre 14 y 15
E) mayor que 15

16 El promedio de *5* números es *100*, Si se considera un sexto número, el promedio aumenta en *15*. Determinar el sexto número.

A)115 B)130 C)150
D)190 E)200

17 La media aritmética de *5* números es *140*. Si se agregan *5* números la media aritmética queda aumentada en *60*. ¿Cuál es la media aritmética de los *5* nuevos números?

A)200 B)220 C)240 D)260 E)280

18 El promedio de *85* números consecutivos es *58*. Determinar la media geométrica entre el menor y el mayor de los números.

A)60 B)40 C)30 D)20 E)65

19 ¿En qué relación se encuentra la media aritmética y la media armónica de *2* números sabiendo que: la media aritmética es a la media geométrica como *4* es a *3*?

A)3 a 4 B)4 a 3 C)16 a 9
D)9 a 16 E)2 a 3

20 La media aritmética de dos números $\frac{36}{11}$ y su media armónica $\frac{11}{9}$. ¿Cuál es su media geométrica?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

21 Halle el promedio aritmético de *24; 30; 36; ...; 618*

A) 320 B)321 C)324
D)325 E)330

22 Calcule el promedio geométrico de $2; 2^2; 2^3; ... ; 2^{15}$

A)32 B)64 C)128
D)256 E)512

23 El promedio aritmético de las notas de *36; 54* y *90* estudiantes son *15;20* y *10* respectivamente. Calcule el promedio aritmético de las *180* notas.

A)12 B)13 C)14 D)16 E)18

24 La edad promedio de *5* estudiantes es *18* años, al juntarse con ellos el profesor, la edad promedio sería seis años mayor que el anterior. Halle la edad del profesor.

A)52 B)54 C)55 D)56 E)58

25 El promedio aritmético de dos números es *15* y el promedio geométrico es *12*. Halle la diferencia de los números.

A)15 B)16 C)17 D)18 E)19

26 El promedio aritmético de *a; b* y c es *31*. Si "*b*" es el promedio de *14* y *16*. Calcular: *(a + c)*.

A)75 B)78 C)80 D)82 E)85

27 Calcular "*m*" para los siguientes datos si se sabe además que el promedio ponderado fue *15*.

	PESO	NOTA
Matemáticas	3	12
Física	2	m
Química	3	18

A)15 B)18 C)10 D)12 E)14

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 El promedio de cuatro números pares diferentes es ***5***. Calcular la mayor diferencia posible entre dos de ellos.

A) 2 B) 4 C) 6 D)7 E)5

02 El promedio aritmético de los cuatro números de dos cifras que se pueden formar con las cifras ***«a»*** y ***«b»*** es ***44***. Determine ***«a + b»***.

A) 3 B) 8 C) 2 D) 4 E) 16

03 Calcular el promedio armónico de: ***2; 6; 12; 20;................ ; 156***

A)12 B)11 C)13 D) 14 E) 15

04 Cuál es el valor de ***«n»***, si el promedio geométrico de los siguientes números:

$3; 9; 27; 81; .... ; 3^n$ es ***729***.

A) 10 B) 9 C)8 D) 11 E) 12

05 El promedio de dos números es ***5***. Si se triplica el primer número y al segundo se le disminuye en ***2*** unidades, entonces el nuevo promedio es ***8***. Calcular el producto de dichos números.

A) 16 B) 24 C) 28 D) 18 E) 36

06 Para ***2*** cantidades ***a*** y ***b*** se cumple que:

* $\overline{MA} \times \overline{MH} = 100$

* $\overline{MA} \times \overline{MG} = 125$

Calcular la relación entre ***a*** y ***b***.

A) 3/5 B) 1/4 C) 5/7 D) 2/3 E) 8/7

07 El promedio de ***41*** números consecutivos es ***50***. Si de los ***41*** números tomamos dos equidistantes, se observa que la razón aritmética de ellos vale ***28***. Calcular la media geométrica de dichos números.

A) 54 B) 60 C) 48 D) 72 E) 82

08 Al calcular el promedio de tres cantidades enteras diferentes se obtuvo un número comprendido entre ***5*** y ***6***. Calcule el mayor de los números, sabiendo que la media aritmética por la media armónica de dos de ellos es igual al tercero.

A)12 B)10 C)18 D) 15 E) 14

09 Calcular ***«n»***, si el promedio armónico de:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ....; \frac{1}{n} \text{ es } \frac{1}{23}$$

A) 22 B) 45 C)46 D)48 E) 34

10 El producto de dos números enteros es ***600*** y su media aritmética y armónica de los dos números, son números enteros consecutivos. Calcular los números e indicar su diferencia.

A) 13 B) 8 C) 5 D) 10 E) 20

11 La media armónica de dos números pares consecutivos es ***4,8***. Calcular el número impar entre los dos números pares.

A)5 B)7 C)3 D)9 E) Faltan datos

12 El promedio de ***50*** números es ***38***, siendo ***10*** y ***90*** dos de ellos. Eliminando estos dos números, ¿cuál es el promedio de los números restantes?

A) 25 B) 37,5 C) 35,2 D) 28,7 E) 36

13 El promedio aritmético de un conjunto de números es ***«P»*** y si le agregamos ***20*** números cuya suma de ellos es ***800***, entonces el promedio de todos los números existentes sigue siendo ***«P»***. Calcular ***«P»***.

A) 20 B)30 C)40 D)60 E) 38

14 El promedio aritmético de ***«n»*** números es ***50***. Si se suprime todos los números iguales a ***18***, que son un total de ***«x»***, entonces el promedio de los restantes es ***«50 + x»***. Calcular ***«x»***, si además: $\frac{n}{x} = \frac{11}{3}$.

A) 12 B) 9 C)44 D)6 E) 18

15 El promedio de las edades de ***30*** hombres es ***20*** años y ninguno de ellos es menor de ***18*** años. ¿Cuál es la máxima edad que puede tener uno de ellos?

A) 107 B) 78 C)49 D)36 E) 84

16 La cantidad de alumnos en ***3*** aulas ***A, B*** y ***C*** están en la relación de ***2; 5*** y ***3*** y el promedio de las edades de los estudiantes por aula son ***17,5 ; 17,2*** y ***18*** respectivamente. Calcule el promedio de las edades de los estudiantes de las tres aulas?

A)16 B) 18,5 C)17,5 D)15,5 E) 16,5

17 Al calcular el promedio geométrico del promedio aritmético y armónico de dos números enteros se observa que éste es igual a la raíz cuadrada del triple de la suma de dichos números. Calcular la diferencia de los números. si el mayor es el triple del menor de dichos números.

A) 12 B)8 C)4 D)2 E) 10

18 Se tiene el siguiente informe de notas:

Aula	*Promedio*	
	por Aula	*Total*
A	*60 puntos*	*67,2 puntos*
B	*72 puntos*	
C	*x puntos*	

Calcular ***«x»***, si la cantidad de alumnos en las aulas ***A, B*** y ***C*** están en la relación de ***2 ; 5*** y ***8*** respectivamente.

A) 60 B) 66 C) 61,6 D) 66,6 . E) 15,4

19 El promedio de ***81*** números enteros consecutivos es ***104***. Calcular la media geométrica del menor y mayor de ellos.

A) 64 B) 144 C) 96 D) 94 E) 84

20 La media aritmética y armónica de dos números enteros están en la misma relación que los números ***16*** y ***15***. Si el valor de la razón aritmética de dichos números es ***18***, calcular el mayor de ellos.

A) 45 B) 60 C) 27 D)36 E) 50

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)D	5)B	6)B	7)C	8)B	9)B	10)D
11)A	12)B	13)C	14)A	15)B	16)C	17)B	18)C	19)B	20)A

MAGNITUDES PROPORCIONALES

CAPITULO 056

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

** Reconocer las magnitudes que nos rodean, relacionarlas y compararlas determinando si son proporcionales o no.*

** Aplicar métodos prácticos para determinar la variación de las magnitudes.*

** Graficar el comportamiento de los valores que asumen dos magnitudes en determinado momento.*

** Inducir las propiedades que cumplen las magnitudes.*

** Aplicar las propiedades en la resolución de problemas que su entorno plantea.*

INTRODUCCIÓN :

Usualmente observamos que ciertas características de la realidad sufren variación, considerando el clima. observamos que la temperatura de la sierra es diferente a la temperatura de la selva en un determinado momento.

Observamos que los valores o comportamiento de estas características varían dependiendo de los valores de otras. La comparación efectuada en forma matemática (cuantitativamente) es el objetivo de este capítulo dada la complejidad de estas características, nuestro estudio se basará en un modelo con ciertas restricciones que será la base para los siguientes capítulos y nos ayudará a resolver problemas concretos.

MAGNITUDES

En el análisis de la ciencia se utiliza el término magnitud para caracterizar propiedades físicas de los cuerpos que experimentan cambios o variaciones como la longitud , el tiempo , etc. Por ejemplo , una barra metálica mide ***1m*** y luego de estar en un horno mide ***1,003m*** , la longitud experimentó un cambio. En aritmética la idea es similar utilizando para ello otras cantidades que también sufren cambios como: el número de obreros que realizan una obra , el precio de un producto , etc.

¿QUÉ ES UNA MAGNITUD ?

Es todo aquello (volúmen , precios , números de obreros , etc.) que experimenta cambios , que son medidos y que dicha medida puede aumentar o disminuir.

EJEMPLOS:

Magnitud	*Medida (valor)*	
Altura	*13*	*m*
Volumen	*4,5*	*L*
Edad	*15*	*años*

Se dice que dos magnitudes son proporcionales si ellas se relacionan de tal modo que, multiplicando la medida (o valor) de una de ellas por un número, la medida (o valor) correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

En el primer caso la proporcionalidad se llama *directa* y en el segundo *inversa*; usualmente se dice que las *Magnitudes son directamente proporcionales (D.P.) o inversamente proporcionales (I.P.)*

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

A) MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (D.P) :

La condición necesaria para que dos magnitudes sean ***D.P.*** , es que el cociente de cada par de sus valores correspondientes , sea una constante .

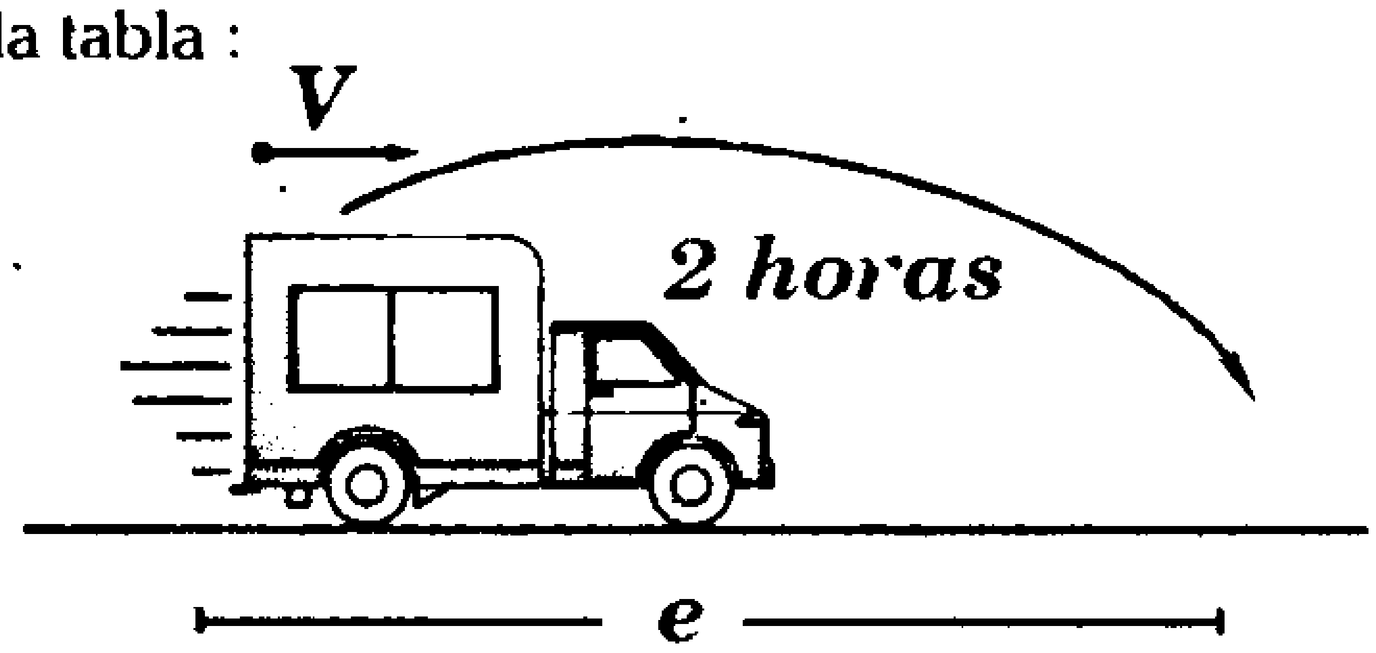
EJEMPLO 1 :

Maribel sale a pasear en su moto durante *2* horas por día , de lunes a viernes durante una semana . Si sus rapideces en cada día son ***10km/h ; 30Km/h ; 20km/h ; 5km/h ; 8,5km/h*** , ¿Cuál es el recorrido de Maribel cada día?

RESOLUCIÓN :

Este ejemplo es el que se utiliza en física o en los ejercicios de móviles en matemática . Si utilizamos lo aprendido en física , diríamos lo siguiente : si el Lunes su rapidez es ***10km/h*** , entonces Maribel en ***1*** hora recorre ***10km***, por lo tanto en ***2*** horas recorrerá ***20km***. Analizando similarmente los demás días

obtendremos los recorridos siguientes que se indican en la tabla :

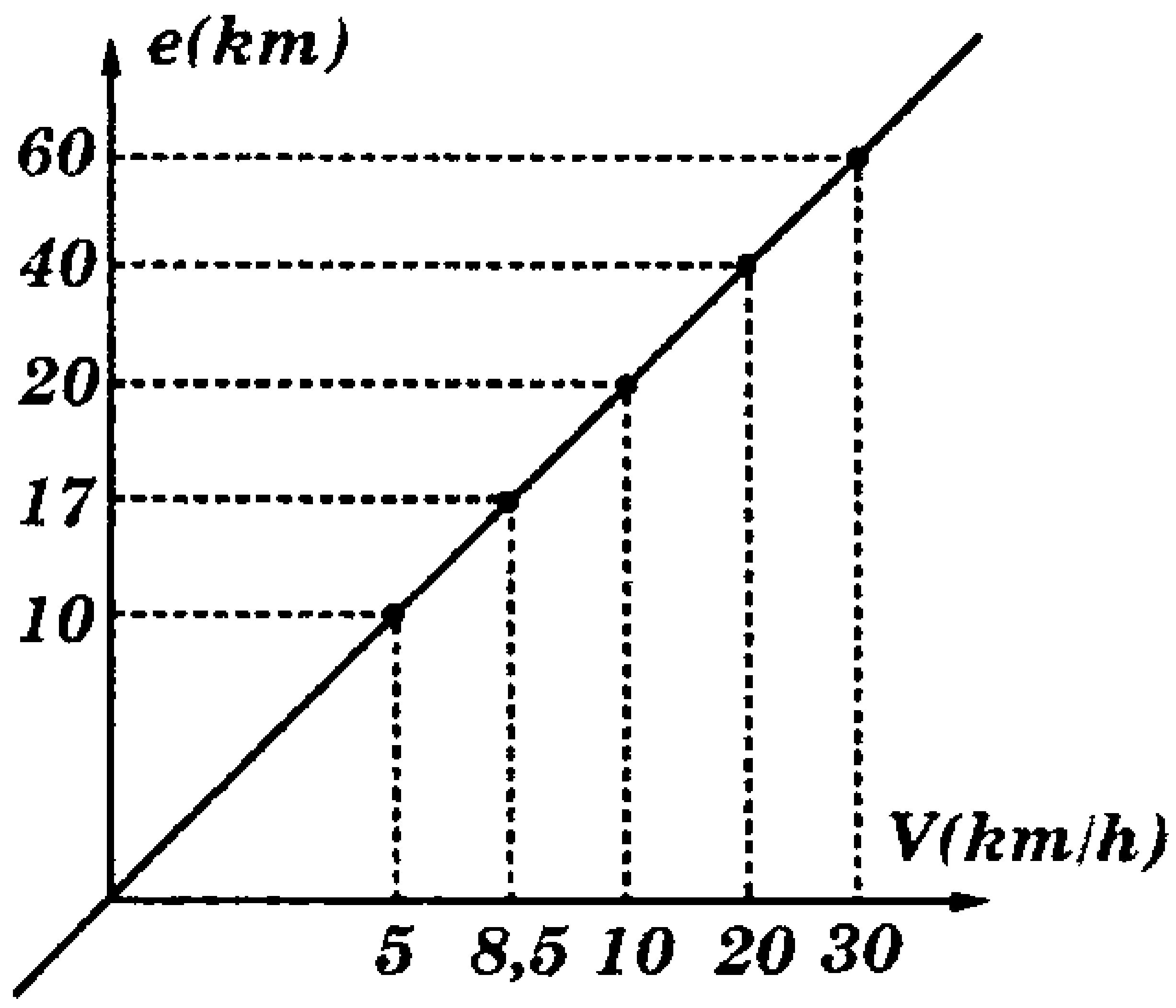


Rapidez (km/h)	*10*	*30*	*20*	*5*	*8,5*
Recorrido (km)	*20*	*60*	*40*	*10*	*17*

Rapidez D.P. Recorrido

$$\Rightarrow \frac{10}{20}=\frac{30}{60}=\frac{20}{40}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{1}{t}$$

* Graficando :



NOTA :

La gráfica es un recta que pasa por el origen de coordenadas.

EN GENERAL:

Si "A" es *D.P.* a "B" se cumple: $\frac{Valor\ de\ A}{Valor\ de\ B}=cte$

OTRO EJEMPLO:

El número de objetos y su precio cuando se paga a razón del número. Así:

« Si *1* cuaderno cuesta *S/.6* ; *3* cuadernos costarán *3×S/.6 = S/.18*

(Esto quiere decir que a *más* cuadernos *más* dinero)

« Si *8* lapiceros cuestan *S/.4* ; *5* lapiceros costarán *S/. 2,50*

(Esto quiere decir que a **menos** lapiceros **menos** dinero).

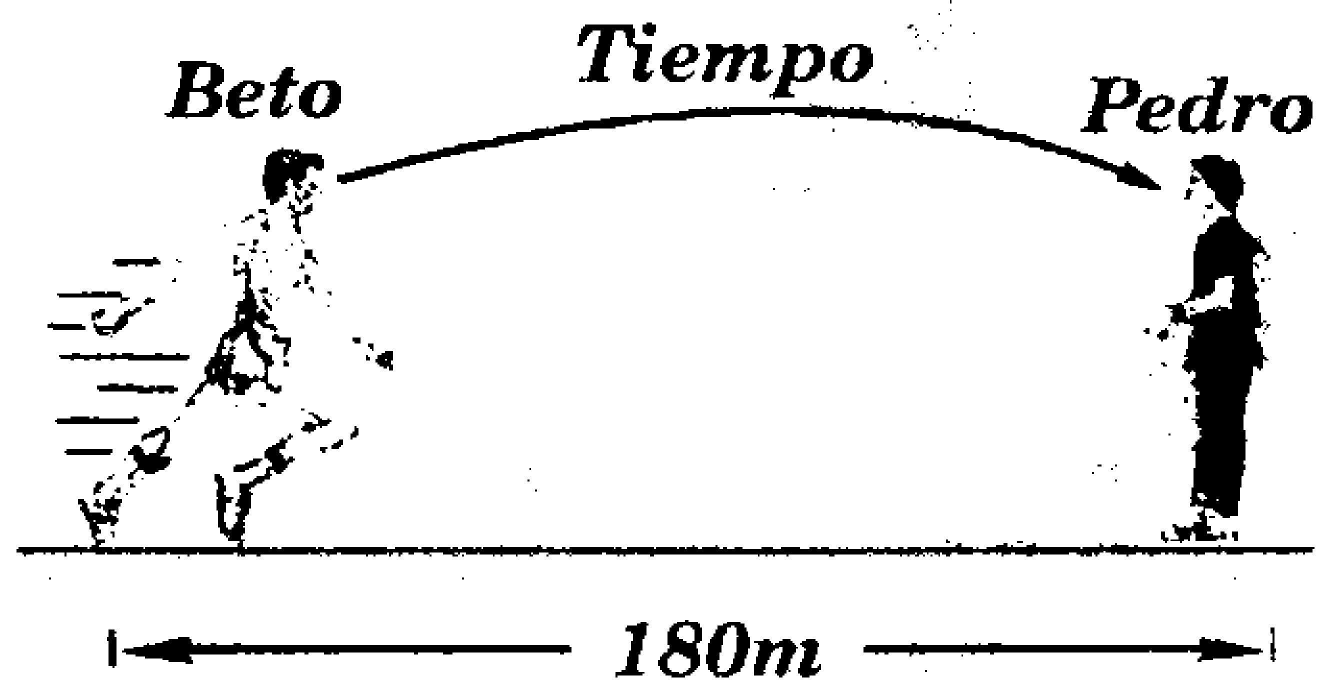
B) MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (I.P) :

La condición necesaria y suficiente para que dos magnitudes sean *I.P.* es que el productos de cada par de sus valores correspodientes sea una constante .

EJEMPLO 2 :

Beto y Pedro estan separados *180m*. Si Beto se dirige hacia Pedro con rapideces de *1 m/s* ; *3m/s. 4m/s ; 9m/s ; 10m/s*. ¿Qué tiempo tardará Beto en cada caso en estar junto a Pedro?

RESOLUCIÓN :



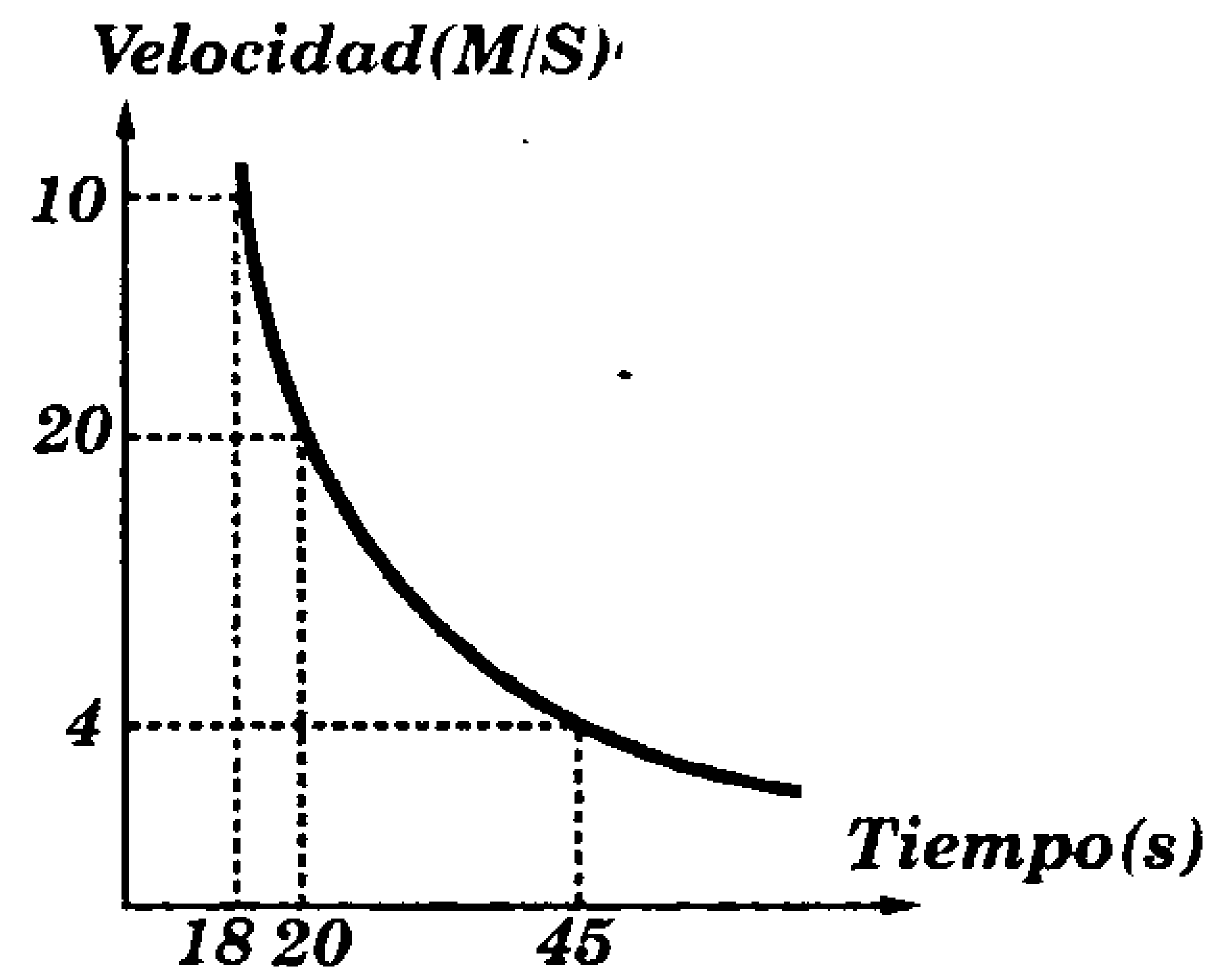
Utilizando la interpretación de la rapidez. Cuando tiene *1m/s*, en cada segundo avanza *1 m*, por lo tanto los *180 m* los avanzará en *180s*. Tomando las demás rapideces obtenemos los tiempos en el siguiente cuadro:

Tiempo(s)	*180*	*60*	*45*	*20*	*18*
Recorrido(km)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*

Tiempo *I.P* Velocidad

$$180\times1=60\times3=45\times4=20\times9=18\times10=180$$

* Gráficando:



EJEMPLO 3 :

El número de obreros y el tiempo necesario para hacer una obra. Así:

* « Si: *7* obreros hacen una obra en *4* días ; *14* obreros harían la misma obra en *2* días.

(Esto quiere decir que a **más** obreros se necesita **menos** tiempo para hacer la obra.

Los días de trabajo y las horas diarias que se trabajan.

Así:

* « Si: trabajando *10* horas diarias se necesitan *6* días

para hacer una obra, trabajando *5* horas diarias se terminará la obra en *12* días

(Esto quiere decir que a menos horas de trabajo se necesitaría más días de trabajo.

NOTA:

* « Las magnitudes directamente proporcionales van de más a más, o de menos a menos *(+a +; – a–)*

*« Las magnitudes inversamente proporcionales van de más a menos, o de menos a más *(+ a –; – a +)* juegos de datos, la incógnita se debe encontrar en el

EJEMPLO 4 :

10 costureras (todas de igual rendimiento) pueden confeccionar *400* casacas iguales en *48* horas. ¿Cuántas casacas confeccionarían si sólo fueran *8* las costureras y disponen sólo de *45* horas ?

RESOLUCIÓN:

En este caso participan tres magnitudes: costureras; trabajo y tiempo. Se elige una de referencia para relacionarla con las otras, por ejemplo elegimos a costureras, luego:

costureras es ***D.P.*** al trabajo costureras es ***I.P.*** al tiempo. Esto, matemáticamente se expresa del siguiente modo:

$$\frac{(costureras)\ (tiempo)}{(trabajo)}=constante$$

Esquema de proporcionalidad

Luego con los datos:

	Costureras	*Trabajo*	*tiempo*
i)	*10*	*400*	*48*
ii)	*8*	*n*	*45*

Se trabaja en el esquema:

$$\frac{\overset{(i)}{10\,(48)}}{400}=\frac{\overset{(ii)}{8\,(45)}}{n} \Rightarrow n = 300$$

Rpta.: confeccionarán ***300*** casacas

* Cuando en el problema participan más de dos magnitudes se dice que se tiene una proporcionalidad compuesta.

EN GENERAL :

Sean las magnitudes ***A, B, C, D y E***. De las cuales elegimos a la magnitud ***A*** como referencia y la relacionamos con las otras:

A es D.P. a B (C, D y E constantes)
A es I. P. a C (B, D y E constantes)
A es I. P. a D (B, C y E constantes)
A es D. P. a E (B, C y D constantes)

Se tendrá:

$$\frac{A\times C\times D}{B\times E}=constante$$

Cada caso en particular tendrá su esquema de proporcionalidad.

PROPIEDADES

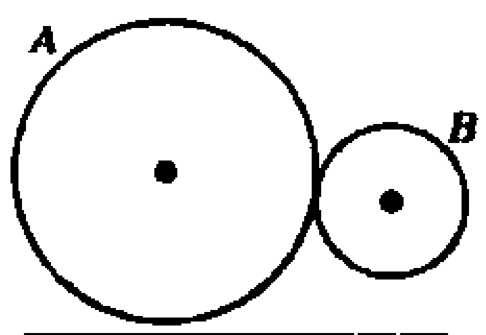
1) Si ***A*** es ***D.P.*** a ***B*** $\Rightarrow$ A^n es ***D.P.*** a B^n ; $n \in Q$

Si ***A*** es ***I. P.*** a ***B*** $\Rightarrow$ A^n es ***I. P.*** a B^n ; $n \in Q$

2) Si ***A*** es ***I.P*** a ***B*** $\Rightarrow$ ***A*** es ***D. P.*** a $\frac{1}{B}$.

SISTEMAS DE RUEDAS ENGRANADAS

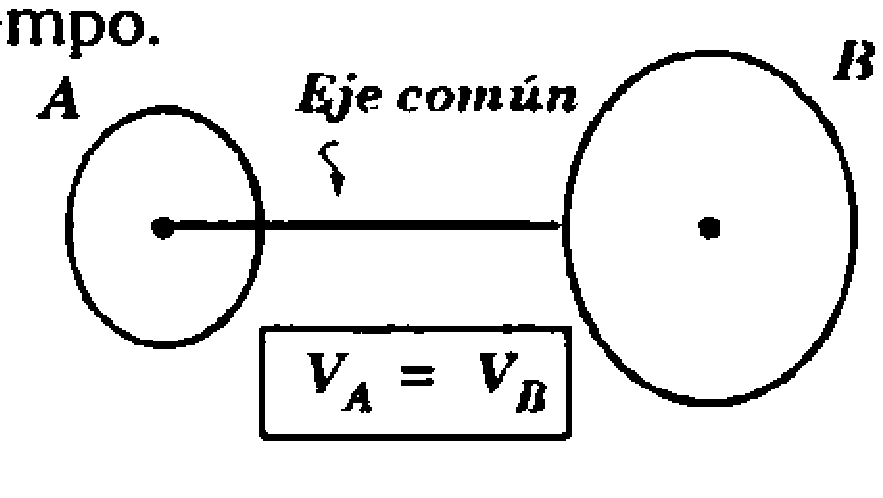
1) Si dos ruedas están en contacto a través de sus dientes, al girar una de ellas la otra también lo hace pero en sentido contrario. En un mismo tiempo dos ruedas engranadas giran una cantidad de vueltas que es inversamente proporcional a su respectivo número de dientes.



$D_A \times V_A = D_B \times V_B$

D_A: N° de dientes de A
V_A: N° de vueltas de A

2) Cuando dos ruedas están montadas sobre un mismo eje, independientemente del tamaño que puedan tener, girarán la misma cantidad de vueltas en el mismo tiempo.



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Supongamos que ***A*** varía directamente proporcional a ***X*** y ***Z***, e inversamente proporcional a ***W***. Si ***A=154*** cuando ***X=6 ; Z=11; W=3***, determine ***A*** cuando ***X=9, Z=20, W=7.***

A)120 ***B)140*** ***C)160*** ***D)180*** ***E)200***

RESOLUCIÓN :

* Según el problema tenemos:

$$\frac{A\times W}{X\times Z}=K \qquad (K: \text{constante})$$

*Haciendo una tabla para valores correspondientes tenemos:

A	***154***	***n***
X	***6***	***9***
Z	***11***	***20***
W	***3***	***7***

* Luego reemplazando los valores se tiene:

$$\Rightarrow \frac{154\times 3}{6\times 11}=\frac{n\times 7}{9\times 20} \Rightarrow n = 180$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 (TIPO UNI) :

De las magnitudes ***Z, W, X***. se sabe que ***Z*** es directamente proporcional a X^2 y ***W*** es inversamente proporcional a X^2.

Si $N = Z+W$ y $X = 1$ implica que $N = 6$ y $X = 0,5$ implica que $N = 9$ determinese ***N*** si $X=\sqrt{2}$

A) 6 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D) 10*** ***E) 12***

RESOLUCIÓN:

****Nos piden hallar N para*** $X = \sqrt{2}$

*ordenando los datos , se tiene :

$Z\ DP\ X^2 \rightarrow$

X^2	*1*	*0,25*
Z	*4k*	*k*

....*(I)*

$W\ IP\ X^2 \rightarrow$

X^2	*1*	*0,25*
W	*p*	*4p*

....*(II)*

X	*1*	*0,5*	$\sqrt{2}$
Z	*4k*	*k*	*8k*
W	*p*	*4p*	$\frac{p}{2}$
N	*6*	*9*	[illegible]

*Pero : $N = Z + W$ y del cuadro se observa que $4k + p = 6 \wedge k + 4p = 9$

* Desarrollamos : $k = 1$; $p = 2$

* Entonces cuando :

$$x=\sqrt{2} \Rightarrow N = 8k+\frac{P}{2}=9$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

A un trabajador le ofrecen *S/. 400,00*, una lavadora y una refrigeradora por realizar un trabajo en medio *año*. pero éste se compromete a realizar parte *del* trabajo en *4* meses, pidíendo que le entreguen *S/.50* ,la lavadora y la refrigeradora.Luego de empezar el trabajo, el trabajador se retira al cabo de *2* meses y medio recibiendo *S/. 10* y la lavadora. Halle el valor de la refrigeradora.

A) S/. 200,5 B) S/. 210,5 C)S/.215,5 D) S/. 220,5 E) S/. 222,5

RESOLUCIÓN :

* Sean :

S/.L = Costo de la lavadora

S/.R = Costo de la refrigeradora

* Se tiene :

Tiempo de trabajo	Pago
6 meses	400+L+R
4 meses	50+L+R
2,5 meses	10+L

→Por 2 meses le pagan 350

→Por 1,5 meses le pagan 40+R

* Luego : $\frac{2}{1,5}=\frac{350}{40+R}$ de donde

$R=222,5$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Sabiendo que *A* es *D.P.* a *C* e *I.P.* a *B*. Calcule *A* cuando $B = 6$ y $C = 18$, si cuando $A = 36$, $B = 12$ y $C = 24$.

A)27 B)36 C)42 D)54 E)63

02 Si *A* es *DP* con B^2 e *IP* a $\sqrt{C}$. Cuando $A = 8$; $B = 6$ y $C = 4$. Determinar *A* cuando $B=9$ y $C= 9$.

A)10 B)12 C)16 D)20 E)24

03 Si: *A* es *DP* con *B* e *IP* con *C* cuando *C* es igual a *4/3*, *A* es el triple de *B*. ¿Cuál es el valor de *B* cuando *A* es igual a *5* y *C* es igual a *8*?

A)10 B)12 C)16 D)20 E)24

04 Si A varía proporcionalmente a *B*, al cuadrado de *C* e inversamente proporcional a *D*. Si cuando $A = 16$, $B = 8$ y $C = 3$ entonces *D* es *9*. ¿Cuántos valdrá *B* cuando: $A = 3D$ y $D = 4C$?

A)10 B)12 C)16 D)20 E)24

05 Si el tiempo que demora la tierra en dar la vuelta al Sol es *DP* al cuadrado de la distancia entre el Sol y el planeta e IP al peso del planeta. ¿Cuánto tiempo demora un planeta de triple peso que el de la tierra en dar la vuelta al Sol, si la distancia que la separa del Sol es quíntuple que el de la tierra? (considerar: *1* año: *360* días).

A)3000 B)1200 C)1600 D)2000 E)2400

06 La capacidad de un condensador es directamente proporcional a su longitud *L* e inversamente proporcional a su sección *A*. ¿Qué sucede con la capacidad si *L* se hace la mitad y A se duplica?

A)Se duplica.
B)Se cuadruplica.
C)Se reduce a la mitad.
D)Se reduce a la cuarta parte.
E)No varía.

07 Dada las figuras *A; B* y *C*, se sabe que *A* es *D.P* a B^2 y B^2 es *D.P.* a *C*. Calcule *A* cuándo $C=6$ si cuando $A = 144$; $C = 72$.

A)2 B)4 C)6 D)12 E)18

08 Si las magnitudes *A* y *B* son inversamente proporcionales. Calcule: $a + 2b + 3c$.

A	a	8	12	c
B	24	9	b	36

A)21 B)36 C)48 D)24 E)32

09 El área de un círculo es *D.P.* al cuadrado de su radio. ¿En cuánto variará el área de un círculo si el radio se duplica?

A) aumenta una vez
B) disminuye una vez
C) aumenta en dos veces
D) aumenta en tres veces
E) disminuye en tres veces

10 Una magnitud *A* es *D.P.* al cuadrado de la magnitud *B*. Hallar el valor de *A* cuando *B* es *2*, si cuando *B* se incrementa en una unidad *A* aumenta en *35*.

A)24 B)28 C)32 D)35 E)42

11 Si las magnitudes *A* y B^2 son *IP*. Si cuando *A* es *24*, *B* es *6* encontrar *B* cuando *A* es *54*.

A)6 B)4 C) 12 D)12 E)9

12 El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Se sabe que un diamante cuesta *1000* dolàres, ¿cuánto costará si se parte en *2* pedazos que son proporcionales a *2* y *3*?

A)480 B)640 C) 520 D)680 E) 360

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

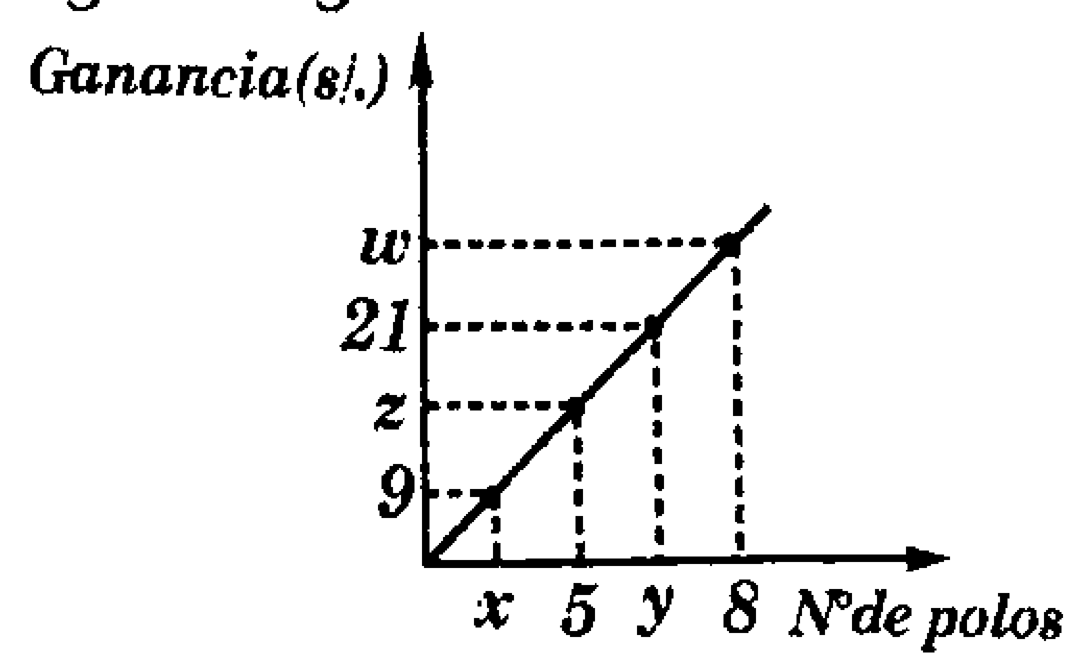
01 Si *A* y *B* son dos magnitudes directamente proporcionales, entonces, si $A=90$ y $B = 30$, calcular *A* cuando $B=8$.

A) 2 B) 16 C) 24 D) 27 E) 60

02 El gasto de una persona es *D.P* a su sueldo, siendo el resto ahorrado.Un señor cuyo sueldo mensual es de *S/.1200* ahorra *S/.200*. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea de *S/.3000* ?

A)S/.3400 B)S/.3 600 C)S/. 2800 D)S/.4000 E)S/. 50 20

03 Un confeccionista por cada *2* polos que vende gana *S/.6*. Luego de realizar *4* ventas esbozó el siguiente gráfico:



Calcule: $x+y+z+w$.

A) 45 B) 46 C) 49 D) 36 E) 24

04 Señalar la relación en la que *A* y *B* no son magnitudes proporcionales.

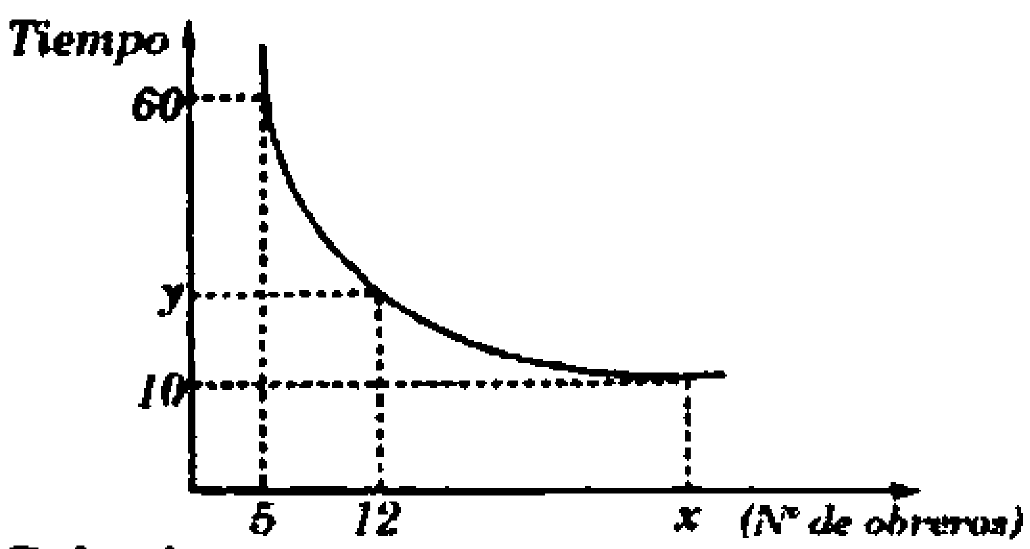
A) $A\times B = 36$

B) $A^2 = 5B^2$
C) $9A + 3B = 15B$
D) $3A + 5B = 11B$
E) $9A + 13 = 14B$

05 Si A y B son dos magnitudes inversamente proporcionales, entonces, si $A=40$ y $B=30$, calcular B cuando $A=24$.

A) 50 B) 60 C) 28 D) 80 E) 12

06 Con los valores de las magnitudes (obreros y tiempo) se realizó el siguiente gráfico:



Calcular $x + y$.

A) 40 B) 65 C) 35 D) 55 E) 82

07 El precio de un libro varía D.P al número de páginas e I.P al número de ejemplares. Sí cuando el número de ejemplares es 5000 el precio es S/.9 y el número de páginas 360, calcule el precio cuando los libros tienen 360 hojas y se imprimen 3000 ejemplares.

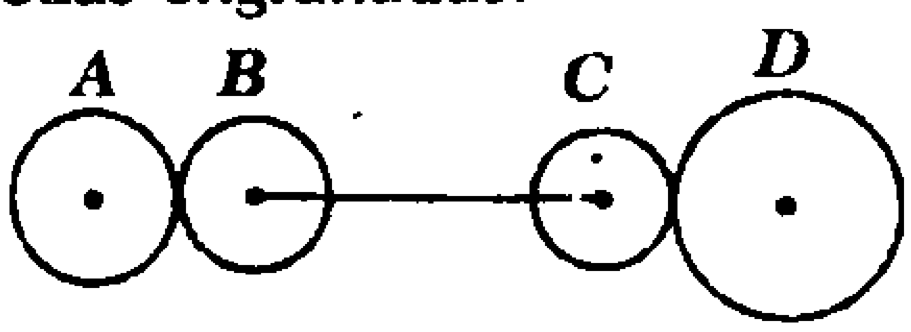
A) 15 B) 30 C) 10 D) 50 E) 40

08 Si las magnitudes A y B guárdan cierta relación de proporcionalidad. Calcule «$m+n$» con la siguiente información:

A	2	6	10	m	20
B	5	n	125	80	500

A) 53 B) 56 C) 64 D) 65 E) 72

09 En el siguiente sistema de ruedas engranadas:



las ruedas A, B, C y D tienen 50; 30 ; 20 y 60 dientes respectivamente. Si la rueda «A» da 90 vueltas en 1 minuto, ¿cuántas vueltas dará «D» en 2 minutos?

A) 50 Vueltas B) 350 Vueltas
C) 100 Vueltas D) 150 Vueltas
E) 200 Vueltas

10 Karla es una taxista que acostumbra cobrar de forma proporcional al número de pasajeros que transporta y a la distancia recorrida. Si a 2 pasajeros les cobró S/.30 por recorrer 60km, ¿cuánto les cobrará a 4 pasajeros por recorrer 15 km?

A) S/. 50 B) S/.15 C) S/. 30
D) S/. 10 E) S/. 20

11 Una rueda de 40 dientes engrana con otra de «y» dientes. dando la primera 18 vueltas/ minuto y la segunda 1 200 vueltas/ hora. El valor de «y» es:

A) 12 B) 36 C) 20 D) 24 E) 48

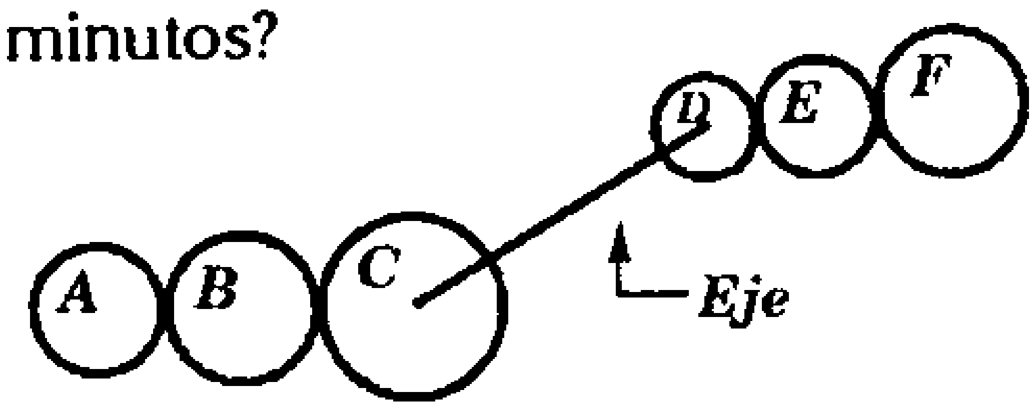
12 Se sabe que A^2 es D.P a B. Si $A=8$, cuando $B=16$, calcule A cuando $B=49$.

A) 49 B) 14 C) 16 D) 8 E) 34

13 Suponiendo que el costo de los terrenos es D.P a su área e I.P a la distancia que la separa de Lima. Un terreno de forma cuadrada ubicada a 28km al sur de Lima está valorizada en S/.60000. ¿Qué precio tendrá un terreno de forma cuadrada cuyo perímetro es los 3/4 del anterior y está ubicado a 14 km de Lima?

A) S/.67500 B) S/. 90 000
C) S/. 45000 D) S/. 180 000
E) S/. 80000

14 Se tiene el sistema de ruedas compuesto por los engranajes A,B,C,D,E y F de 15;30;60;10; 15 y 25 dientes respectivamente. Si en 1 minuto A da 162 vueltas más que F, ¿cuántas vueltas da «B» en 2 minutos?



A) 180 B) 90 C) 270 D) 135 E) 165

15 Un campesino razona de la siguiente manera: «El total de pasto que dispongo me sirve para alimentar a mi vaca Jacinta durante 15 días; pero con el mismo pasto alimentaría a mi oveja Chachi durante 1 mes». ¿Para cuántos días alcanzaría el pasto si tuviera que alimentar a la vaca y a la oveja?

A) 15 B) 22 C) 20 D) 12 E) 10

16 Se distribuye una cantidad de trabajadores en tres secciones proporcionalmente a 3; 5 y 7 pero por error se distribuyó proporcionalmente a 1 ; 2 y 3 observándose que en una sección había 6 trabajadores más. Calcule el número de trabajadores.

A) 180 B) 240 C) 90 D) 70 E) 120

17 Los rendimientos de cuatro operarios son proporcionales a los primeros impares positivos. Si se desea repartir una bonificación de S/.640, ¿cuánto le corresponde al más eficiente?

A) S/. 120 B) S/. 180 C) S/. 360
D) S/. 280 E) S/. 200

18 Repartir 1180 en tres partes inversamente proporcional a los números 5;7 y 2. Dar como respuesta la parte que no es mayor ni menor.

A) 420 B) 300 C) 280
D) 540 E) 160

19 Tres socios forman un negocio aportando capitales que están en la relación de 2; 3 y 4. Si la utilidad total fue de S/. 27000, calcular la menor ganancia.

A) S/.6000 B) S/.9000 C) S/.8000
D) S/.4000 E) S/.10000

20 Tres firmas comerciales transportan 140; 420 y 840 autos, en una embarcación, respectivamente. Para el desembarco de los autos alquilaron una grúa a S/.51000. Calcular cuánto pagó la firma que transportó menos autos.

A) S/.6000 B) S/.5100 C) S/.5010
D) S/.2600 E) S/.3 200

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)E	5)A	6)D	7)B	8)A	9)C	10)B
11)B	12)B	13)A	14)A	15)E	16)A	17)D	18)C	19)A	20)B

REPARTO PROPORCIONAL-REGLA DE COMPAÑIA

CAPITULO 057

OBJETIVOS :

Al finalizar el tema el alumno será capaz de :

- *Emplear los conocimientos de proporcionalidad para hacer distribuciones proporcionales directas e inversas.*
- *Simplificar índices con factores comunes, convirtiéndolos en enteros y pequeños para así efectuar un reparto más sencillo.*
- *Establecer la diferencia entre el reparto proporcional simple y compuesto.*
- *Ampliar los conceptos de reparto proporcional a situaciones similares a la realidad.*
- *Emplear la regla de compañía para efectuar repartos de utilidades o pérdidas entre los socios de una empresa.*

INTRODUCCION :

Desde la aparición de las primeras comunidades, la producción agrícola y/o ganadera era distribuida por los líderes de acuerdo a la jerarquía y necesidades de las distintas familias que conformaban la comunidad. Con el paso del tiempo se idearon mejores formas de reparto y quienes lo realizaban adquirieron destreza y técnica a tal punto que incluso se tenía una secuencia de pasos a seguir. Los egipcios, babilonios, aztecas, mayas, incas y otros tuvieron que haber accedido a tales conocimientos para lograr una eficiente administración y a la vez el bienestar de sus pueblos.

El reparto proporcional ha sido fuente de inspiración para ingeniosos problemas relacionados con la vida cotidiana y que incluso se les puede encontrar en algunas narraciones que tienen como principal objetivo entretener al lector; textos como *El Hombre que calculaba* o *Aritmética Recreativa* son sólo dos de los más recientes que podemos citar como ejemplo. Si bien es cierto que en la actualidad ya no se requieren tantas complicaciones para hacer un sencillo reparto, nos sirve como ejercicio para posteriormente podernos adaptar a situaciones reales en las cuales la distribución toma en cuenta muchas variables las que interactúan simultáneamente, para ello se estructuran pequeños modelos que nos permitirán idealizar la situación y poder lograr el cometido.

REPARTO PROPORCIONAL

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales, la cual consiste en repartir una cantidad en partes directas o inversamente proporcionales a otras cantidades llamadas indicadores o índices.

A) REPARTO SIMPLE DIRECTO :

Sea N una cantidad, la cual deberá ser repartida en "n" partes P_1; P_2; P_3; .... P_n D.P. a los índices i_1; i_2; i_3; ......, i_n; entonces :

$$\frac{P_1}{i_1}=\frac{P_2}{i_2}=\frac{P_3}{i_3}=\ldots=\frac{P_n}{i_n}=k$$

Por propiedad de Razones tenemos :

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots+P_n}{i_1+i_2+i_3+\ldots\ldots+i_n}=k$$

y como suma de Partes = Todo

$$P_1+P_2+P_3+\ldots\ldots+P_n=N$$

Luego :

$$\frac{N}{i_1+i_2+i_3+\ldots\ldots+i_n}=k$$

Donde $k \Rightarrow$ Cte. de Reparto

Finalmente :

$$N\begin{cases}P_1=k\times i_1\\ P_2=k\times i_2\\ P_3=k\times i_3\\ \vdots \quad \vdots\\ P_n=k\times i_n\end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Repartir **930** directamente proporcional (D.P.) a los números **2; 3** y **5.**

RESOLUCIÓN :

Sean A; B y C las partes a dividirse el número **930** ; entonces :

$$A+B+C=930 \ldots\ldots\ldots (I)$$

También :

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{5}=k \quad \left.\begin{matrix}A=2k\\ B=3k\\ C=5k\end{matrix}\right\}\ldots(II)$$

Reemplazando *(II)* en *(I)* :

$$2k+3k+5k=930$$

$$10k=930 \Rightarrow k=93$$

Luego :

- $A=2\ (93)=186$
- $B=3\ (93)=279$
- $C=5\ (93)=465$

MÉTODO PRÁCTICO:

Si el reparto es D.P. a los índices del Reparto.

Entonces :

$$N\begin{cases}\underline{\text{INDICES}}\\ i_1\\ i_2\\ i_3\\ \vdots\\ \underline{i_n}\\ \text{Suma de Indices}\end{cases}$$

Luego :

$$k = \frac{N}{\text{Suma de índices}}$$

***k* :** Constante de reparto

También :

$$\text{Cada parte} = \frac{\left(\begin{matrix}\text{Cantidad a}\\ \text{Repartir}\end{matrix}\right)\cdot\left(\begin{matrix}\text{índice}\\ \text{Respectivo}\end{matrix}\right)}{(\text{Suma de índices})}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver el problema anterior por el método práctico.

RESOLUCIÓN :

$$930\begin{cases}\text{Índices} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ \overline{10}\end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{930\times 2}{10} = 186 \\ B &= \frac{930\times 3}{10} = 279 \\ C &= \frac{930\times 5}{10} = 465 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 :

Repartir ***5000*** en forma D.P. a ***2, 3*** y ***5*** e indicar cada parte :

Luego tenemos :

sabemos :

$$K = \frac{5000}{2+3+5} \Rightarrow K = 500$$

luego : $2(500) = 1000$

$3(500) = 1500$

$5(500) = 2500$

B) REPARTO SIMPLE INVERSO

Si el reparto es (I.P.) inversamente proporcional a los índices, entonces dicho reparto se deberá pasar a un reparto (D.P.) directamente proporcional, tomando las inversas de los índices dados, teniendo en consideración las siguientes observaciones.

OBSERVACIÓN :

Si los índices de reparto son respectivamente fracciones, entonces es conveniente multiplicarlos por un mismo número para así hacerlos enteros; este número será el mínimo común múltiplo de los denominadores de dichas fracciones.

"Propiedad Fundamental"

Si todos los índices del Reparto son multiplicados o divididos por un mismo número, las partes que se obtienen en el reparto no se alteran.

EJEMPLO 4 :

Se desea repartir una bonificación de ***24.800*** dólares entre los tres vendedores líder de una empresa si este reparto será I.P. a sus inasistencias del año, las cuales fueron : ***5; 3*** y ***2***. ¿Cuánto le tocó a cada uno?

RESOLUCIÓN :

$$24800\begin{cases} \text{I.P.} \quad \text{D.P.} \\ 5 \Rightarrow \frac{1}{5}\times 30 = 6 \\ 3 \Rightarrow \frac{1}{3}\times 30 = 10 \\ 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\times 30 = 15 \end{cases} \qquad \overline{31}$$

Donde : $30 = MCM\ (5;\ 3;\ 2)$

Así por método práctico :

$$1ro. \Rightarrow \frac{24800\times 6}{31} = 4800 \text{ dólares}$$

$$2do. \Rightarrow \frac{24800\times 10}{31} = 8000 \text{ dólares}$$

$$3ro. \Rightarrow \frac{24800\times 15}{31} = 12000 \text{ dólares}$$

EJEMPLO 5 :

Repartir ***4800*** en forma I.P. a ***2; 3*** y ***6*** e indicar cada parte.

El reparto debe ser I.P. entonces cada indicador se invierte.

- Luego *:*

*Si resulta fracción se multiplica cada una por el **MCM** de los denominadores.*

entonces : $MCM(2;\ 3;\ 6) = 6$

$\left(\frac{1}{2}\right)6 \Rightarrow 3 \qquad \left(\frac{1}{6}\right)6 \Rightarrow 1$

$\left(\frac{1}{3}\right)6 \Rightarrow 2$

Sabemos :

$$K = \frac{4800}{3+2+1} \Rightarrow K = 800$$

Luego :

$3(800) = 2400$

$2(800) = 1600$

$1(800) = 800$

REPARTO COMPUESTO

Si un reparto se ha de realizar en ***2*** o más formas directas y/o inversamente proporcionales a respectivos índices de reparto, entonces primero se deberá considerar todos los índices inversos a directos y finalmente multiplicar todos los índices D.P. encontrando así un único índice; con lo cual el reparto se convertirá en simple y directo.

EJEMPLO 6 :

He decidido repartir ***400*** soles entre los ***3*** sobrinos que tengo, de manera proporcional al grado de estudios que cursan pero además I.P. a la edades que tienen que son ***6;8*** y ***10*** años. Si ellos están en segundo, cuarto y quinto grado respectivamente. ¿Cuánto le tocó a cada uno?

RESOLUCIÓN :

$$400\begin{cases} \text{D.P} \quad \text{I.P} \quad \text{D.P} \\ 2 \quad\ 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \\ 4 \quad\ 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \\ 5 \quad 10 \Rightarrow \frac{1}{10} \end{cases} \quad (\times)$$

D.P.

$$\Rightarrow 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}\times 6 \Rightarrow 2$$

$$\Rightarrow 4\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\times 6 \Rightarrow 3$$

$$\Rightarrow 5\times\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\times 6 \Rightarrow 3$$

$$\overline{8}$$

$1er.\ hermano = \dfrac{400 \times 2}{8} = S/.\ 100$

$2do.\ hermano = \dfrac{400 \times 3}{8} = S/.\ 150$

$3er.\ hermano = \dfrac{400 \times 3}{8} = S/.\ 150$

EJEMPLO 7 :

Repartir el número ***700*** en tres partes cuyos cuadrados sean D.P. a los números ***0, 2; 0,5*** y ***0,4*** e I.P. a los números ***3;1,2*** y ***8/3*** indicar cada una de las partes.

RESOLUCIÓN :

Sean ***A;B*** y ***C*** las partes a descomponer; luego :

$$700\begin{cases} & D.P. & & I.P. & D.P. \\ A^2 & 0{,}2 \Rightarrow & 2 & 3 \Rightarrow & 1/3 \\ B^2 & 0{,}5 \Rightarrow & 5 & 6/5 \Rightarrow & 5/6 \\ C^2 & 0{,}4 \Rightarrow & 4 & 8/3 \Rightarrow & 3/8 \end{cases}$$

×

D.P.

$\Rightarrow 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \times 6 = 4$

$\Rightarrow 5 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{25}{6} \times 6 = 25$

$\Rightarrow 4 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{2} \times 6 = 9.$

Luego sacando Raíz cuadrada.

$$700\begin{cases} D.P.: & \Rightarrow A = \dfrac{700 \times 2}{10} = 140 \\ A \quad 2 & \\ B \quad 5 & \Rightarrow B = \dfrac{700 \times 5}{10} = 350 \\ C \quad 3 & \\ \quad\ 10 & \Rightarrow C = \dfrac{700 \times 3}{10} = 210 \end{cases}$$

REGLA DE COMPAÑÍA

Es un caso particular del reparto proporcional y se emplea para realizar distribuciones de beneficios o pérdidas entre los socios de una empresa mercantil, proporcionalmente al capital aportado y/o al tiempo de permanencia en la sociedad.

$$\begin{pmatrix} \text{Ganancia} \\ \text{o pérdida} \end{pmatrix} DP\ (Capital)\ (Tiempo)$$

Para ***n*** socios :

$$\frac{G_1}{C_1 \times t_1} = \frac{G_2}{C_2 \times t_2} = \frac{G_3}{C_3 \times t_3} = \ldots = \frac{G_n}{C_n \times t_n}$$

Siendo G_i ; C_i y t_i la ganancia, capital y tiempo de permanencia en la sociedad respectivamente del i-ésimo socio $(1 \le i \le n)$.

EJEMPLO 8 :

Al finalizar un negocio que duró ***2*** años, ***3*** socios desean repartirse una utilidad de ***S/.4500***, habiendo aportado el primero ***S/.4000***, el segundo ***S/.5000***, y el tercero ***S/.6000.*** Hallar las partes de cada uno.

RESOLUCIÓN :

Sean ***a; b*** y ***c*** las partes de cada uno. Siendo; $a+b+c=4500$

$G_1=a$; $C_1=4000$; $t_1=2$; $G_2=b$; $C_2=5000$; $t_2=2$

$G_3=c$; $C_3=6000$; $t_3=2$; Se tendrá:

$$\frac{a}{4000 \times 2} = \frac{b}{5000 \times 2} = \frac{c}{6000 \times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$$

$a=4k$; $b=5k$; $c=6k$

$\Rightarrow a+b+c=15k=4500$

$k=300 \Rightarrow a=1200;\ b=1500;\ 1800$

EJEMPLO 9 :

Un comerciante forma un negocio aportando ***S/.5000, 3*** meses más tarde ingresa un socio con un capital de ***S/.6000.*** Si el negocio duró un año y produjo una pérdida de ***S/.570;*** hallar la pérdida de cada uno.

RESOLUCIÓN :

Sean ***a*** y ***b*** las pérdidas de cada uno.

$P_1=a$; $C_1=5000$; $t_1=12$; $P_2=b$; $C_2=6000$; $t_2=9$

$$\frac{a}{5000 \times 12} = \frac{b}{6000 \times 9} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{9} = k$$

$a=10k$; $b=9k \Rightarrow a+b=19k=570$

$k=30 \Rightarrow a=300$; $b=270$

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Repartir ***600*** caramelos en tres partes que sean DP a ***3 ; 5*** y ***7***. Indicar la suma de la mayor y menor parte obtenida.

A) 120 B) 200 C)280
D) 400 E) 480

02 Repartir ***711*** en partes ***IP*** a los números ***3 ; 5*** y ***8***. Calcular la menor parte.

A) 105 B) 110 C) 125
D) 135 E) 140

03 Repartir en ***3*** partes en forma DP a los números ***4 ; 5*** y ***3*** e IP a los números ***2 ; 3*** y ***5***. Indicar el valor de la menor parte que se obtiene.

A) 36 B) 45 C) 54
D) 63 E) 72

04 Repartir ***470*** canicas en forma DP a ***10 ; 15*** y ***25***. Calcular la mayor parte obtenida.

A) 230 B) 235 C) 240
D) 245 E) 250

05 Repartir ***840*** lapiceros en forma IP a los números ***12 ; 20*** y ***24***. Calcular la menor parte.

A) 200 B)180 C) 240
D)160 E) 270

06 Repartir ***1200*** en partes D.P. a los números ***2 ; 3*** y ***7***. Indicar como respuesta la suma de cifras de la mayor parte obtenida.

A) 6 B) 7 C) 5 D) 8 E) 9

07 Repartir ***720*** en forma D.P. a los números: ***2 ; 3*** y ***4***. Indicar la parte mayor.

A) 312 B) 316 C) 320
D) 324 E) 328

08 Repartir ***440*** en forma I.P a los números ***1 ; 2*** y ***3***. Indicar la parte mayor.

A) 230 B) 240 C)250
D) 260 E) 270

09 Repartir ***117*** en forma D.P. a los números $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$ y $\sqrt{48}$. Hallar la menor parte obtenida.

A) 13 B) 26 C) 39

D) 40 *E) 58*

10 Al dividir *222* en tres partes tales que la primera sea a la segunda como *2* es a *3* y la segunda sea a la tercera como *5* es a *4*. La parte menor es :

A)60 *B)70* *C)80* *D)90* *E)100*

11 Repartir *134* en partes directamente proporcionales a *2/3; 1/4* y *1/5*. Determine la suma de cifras de cantidad mayor?

A)6 *B)3* *C)8* *D)7* *E)9*

12 El número *728* se divide en tres partes iguales que son *D.P.* a las raíces cúbicas de los números *54; 128* y *686*. Dar la menor de las partes.

A) 364 *B) 156* *C) 208*
D) 112 *E) 224*

13 Repartir *1110 I.P.* a 10^{10}; 10^{11} y 10^{12}. La mayor parte es :

A) 10 *B) 100* *C)500*
D)1000 *E) 1010*

14 Repartir *42* entre *A; B* y *C* de modo que la parte de *A* sea el doble de la parte de *B* y la de *C* suma de las partes de *A* y *B*. Entonces la suma de los dos mayores partes es :

A) 21 *B) 28* *C) 30* *D) 33* *E) 35*

15 Iván invierte *S/.400* en una empresa ; así mismo después de tres meses Sofía da *S/.300* para el mismo negocio. Si al cabo de un año se obtiene una ganancia de *S/.2500*. ¿Cuánto es la ganancia que obtiene Sofía?

A) 800 *B) 900* *C) 1000*
D) 12000 *E) 600*

la cantidad que se encuentra encima de la incógnita por las diferentes fracciones que se forman en cada magnitud, si son *I.P.* se copia igual y si son *D.P.* se copia diferente.

16 Tres socios aportan en un negocio durante *4* años capitales de *S/.2000*, *S/.2500* y *S/.3500*. Al repartir al final de dicho tiempo una ganancia de *S/.1280* ¿cuánto le corresponderá al que aportó más capital?

A) S/.640 *B) S/.600* *C) S/.560*
D) S/.500 *E) S/.480*

17 Cuatro personas colocaron en un negocio *S/.8000* cada una. Si el primero estuvo *9* meses en el negocio, el segundo *6* meses, el tercero *8* meses y el último un año. ¿Cuánto le corresponderá al segundo si la ganancia de la sociedad fue de *S/.7000?*

A) S/.1800 *B) S/.1200* *C) S/.1600*
D)S/.2400 *E)S/.3500*

18 Tres socios estuvieron en un negocio *5 ; 6* y *9* meses respectivamente siendo sus capitales respectivos ; *S/.1500, S/.2000* y *S/.1000*. ¿Cuánto le corresponderá al primero en el reparto de *S/.11400* de utilidades?

A) S/.3000 *B)S/.4000* *C) S/.4200*
D)S/.4800 *E) S/.6000*

19 Dos socios reunieron un capital de *S/.5000* para hacer un negocio. El primero dejó su capital durante *6* meses y el otro durante *4* meses. Se pide encontrar la suma de las cifras de la diferencia de los capitales aportados, sabiendo que las ganancias fueron iguales.

A) 4 *B) 1* *C) 5* *D)3* *E) 2*

20 Tres socios intervienen en un negocio aportando capitales de *S/.4000, S/.6000* y *S/.14000* durante *4; 6* y *10* años respectivamente. Si el negocio quebró dejando una pérdida de *S/.48000*. Halle la pérdida del primer socio.

A)S/.4000 *B)S/.3500* *C)S/.3000*
D)S/.40000 *E)S/.9000*

21 Un anciano sin familia dispuso en su testamento que al morir, su herencia se reparta entre sus tres sirvientes inversamente proporcional a sus edades y directamente proporcional a sus años de servicio. Al morir dicho anciano las edades de sus sirvientes eran *30; 45* y *50* años y tenían *12; 20* y *25* años de servicio respectivamente. Al hacerse el reparto se observó que el que tenía más años de servicio recibió *S/. 900* más que el más joven. Hallar el valor de la herencia repartida (en *S/.*)

A) 12 100 *B) 12 300* *C) 12 700*
D) 13 100 *E) 13 700*

22 En una corporación dos socios *A* y *B* han aportado *3* y *5* millones y han permanecido tiempos que son proporcionales a *4* y *3* respectivamente. Si al final *A* se retira con *3 144 000* producto de su capital y su ganancia, ¿con cuánto se retira *B*?

A) 5 120 000 *B) 5 153 600*
C) 5 180 000 *D) 5 200 000*
E) 5 244 000

23 Un inversionista inició un negocio con *S/. 2 000 ; 5* meses más tarde ingresó un segundo socio con *S/. 3 000* y *4* meses antes de que termine el negocio ingresó un tercer socio con un capital que es tanto como los otros dos juntos. Si el primero recibió tanto como el segundo, y juntos *S/. 800* más que el tercero,¿cuál fue la utilidad total?

A) S/. 1 500 *B) S/. 1 600*
C) S/. 1 700 *D) S/. 1 800*
E) S/. 1 900

24 Una pareja de esposos donde el esposo es el mayor, reparte su herencia a sus tres hijos, del mayor al menor en forma directamente proporcional al producto, suma y diferencia de las edades de los esposos respectivamente. Si el reparto se hiciera en razón directa a las edades de los tres hijos, el mayor recibiría la mitad de lo anterior. Sabiendo que la suma de las edades de los tres hijos excede en dos a la edad de la madre; hallar la razón de la edad de la madre y la del hijo mayor.

A) 3/2 *B) 4/3* *C) 7/5*
D) 2 *E) 3*

OBJETIVOS :

* *Diferenciar los problemas de regla de tres simple: inversa y directa.*

* *Aplicación de las magnitudes en este tema.*

* *Aprender la resolución de un problema de regla de tres compuesta aplicando estas ideas.*

* *Su aplicación en hechos reales de la vida cotidiana.*

INTRODUCCION :

Este antiquísimo método de cálculo permite encontrar el cuarto término de una proporción cuando se conocen tres magnitudes proporcionales.

Si : a cosas cuestan b; ¿Cuánto (x) costarán c cosas?

En el libro Arya bhatiya, un breve volumen sobre astronomía y matemáticas escrito en verso por Aryabhata en el año ***499***, esta famosa regla se presenta así :

"En la regla de tres; multiplicar el fruto por el deseo y dividir por la medida; el resultado es el fruto del deseo"

En otras palabras, si : $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ será $x = \frac{bc}{a}$

donde :

- a *es la "medida"*
- b *es el "fruto"*
- c *es el "deseo"*
- x *es el "fruto del deseo"*

El siguiente es un ejemplo de dicho libro :

Si dos medidas y media de azafrán cuesta ***3/7*** de una moneda ¿Cuántas medidas de azafrán se podrán comprar con nueve monedas?

RESOLUCIÓN :

Con la terminología india de la época se tendría ***5/2*** es el fruto ; ***9*** es el deseo y ***3/7*** es la medida, el fruto del deseo será :

$$(9)(5/2)/(3/7) = 52\tfrac{1}{2}$$

Hoy se resolvería el problema con la siguiente proporción :

$$\frac{x}{9} = \frac{5/2}{3/7}$$

REGLA DE TRES

Es una aplicación de las magnitudes proporcionales; es un procedimiento basado en la relación proporcional de dos o más magnitudes.

La regla de tres consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, mediante la comparación de dos o más magnitudes proporcionales.

La regla de tres es un instrumento muy sencillo y útil al mismo tiempo. Consiste en una sencilla operación que nos va a permitir encontrar el cuarto término de una proporción, de la que sólo conocemos tres términos.

Así, por ejemplo, nos permite saber cuánto cuestan dos kilos de papas si el cartel del mercado marca el precio de un kilo, o calcular el precio de ***150*** bolígrafos si la caja de cinco unidades vale ***3*** nuevos soles. Además, la regla de tres nos va a permitir operar al mismo tiempo con elementos tan distintos como horas, kilómetros, número de trabajadores o dinero invertido.

REGLA DE TRES SIMPLE

Es un procedimiento de cálculo donde intervienen dos magnitudes conociéndose tres valores, dos de una magnitud y una de otra cantidad , y se debe calcular el cuarto valor.

Esta regla puede ser ***directa*** o ***inversa*** según las magnitudes sean directa o inversamente proporcionales respectivamente.

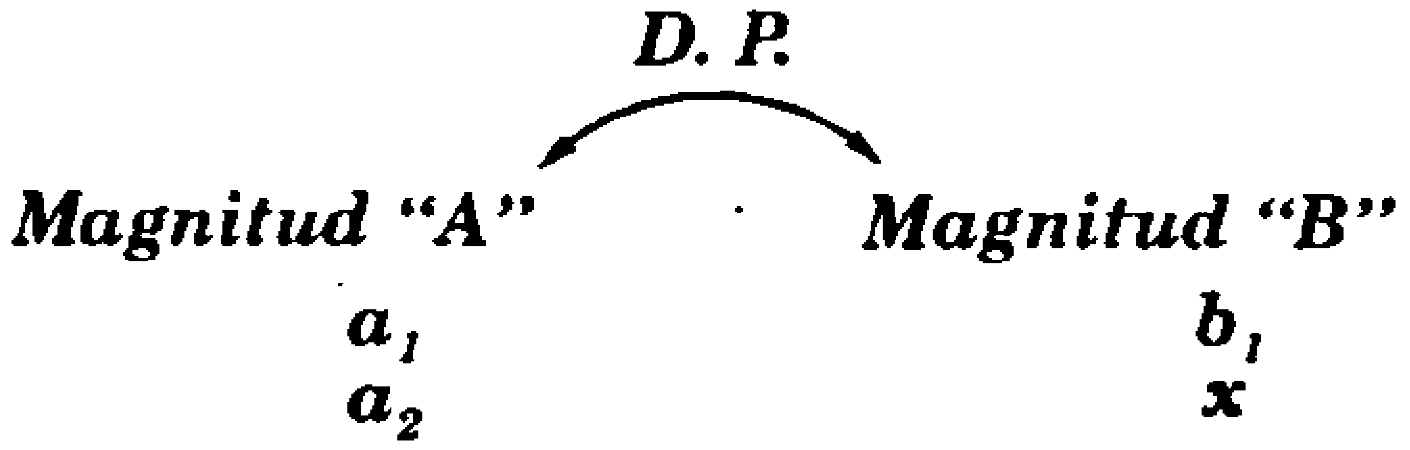
CLASES DE REGLA DE TRES SIMPLE

Dependiendo de las magnitudes que intervienen pueden presentarse dos casos :

A) REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA (R3SD) :

Cuando las magnitudes que intervienen son ***directamente proporcionales***, es decir, cuando aumenta una de ellas la otra también aumenta , o al disminuir una de ellas la otra también disminuye.

*** Esquema :**



*** MÉTODOS DE SOLUCIÓN :**

Aplicando magnitudes directamente proporcionales.

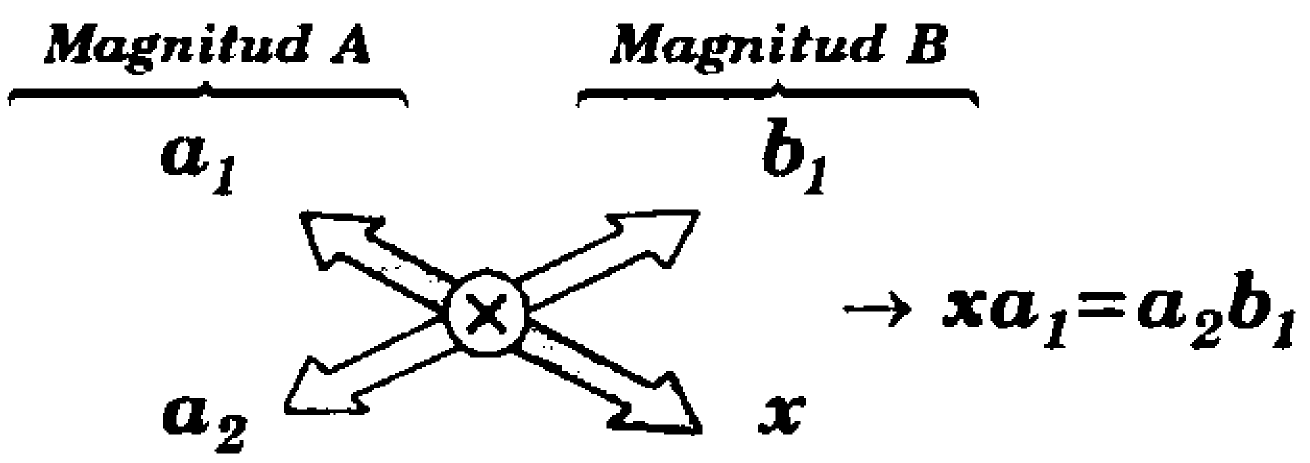
$$\boxed{\frac{A}{B} = cte \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}}$$

* Despejando :

$a_1\, x = b_1\, a_2$ ....(I)

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{b_1 a_2}{a_1}}$$

* De *(I)*, podemos observar un método práctico : *"Multiplicación en aspa"*.



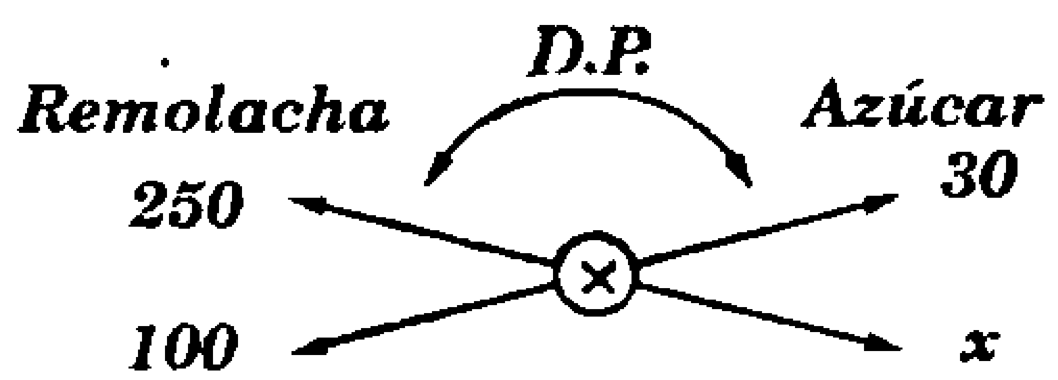
$\Rightarrow x = \dfrac{a_2 \times b_1}{a_1}$ .... *"Método de aspa"*

EJEMPLO 1 :

Sabiendo que de ***250*** quintales de remolacha pueden extraerse ***30*** quintales de azúcar ; ¿cuántos quintales de azúcar podrán proporcionar ***100*** quintales de remolacha?

RESOLUCIÓN :

* Notamos que a menos remolacha se obtendrá menos azúcar, por lo tanto son magnitudes directamente proporcionales ***(D. P.)***



* Por el método del aspa :

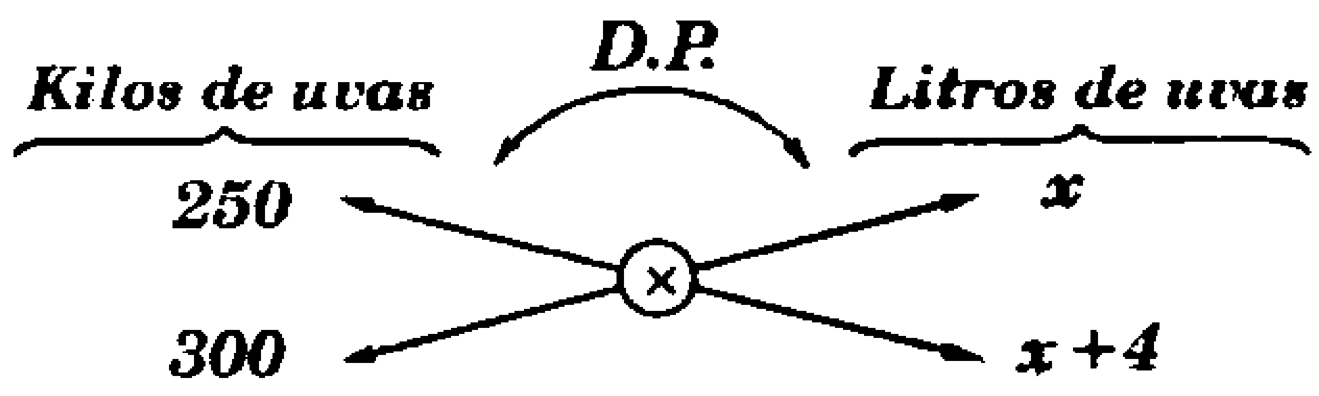
$$x = \frac{100 \times 30}{250} = 12 \textit{ quintales}$$

EJEMPLO 2 :

Si ***250*** kilos de uvas producen cierta cantidad de vino , y ***300*** kilos producen ***4*** litros más de vino, ¿cuántos litros de vino produces los ***250*** kilos?

RESOLUCIÓN :

* Observamos que al tener más kilos de uvas , se van ha producir más litros de vino , por lo tanto son magnitudes directamente proporcionales :



* Aplicando el método del aspa :

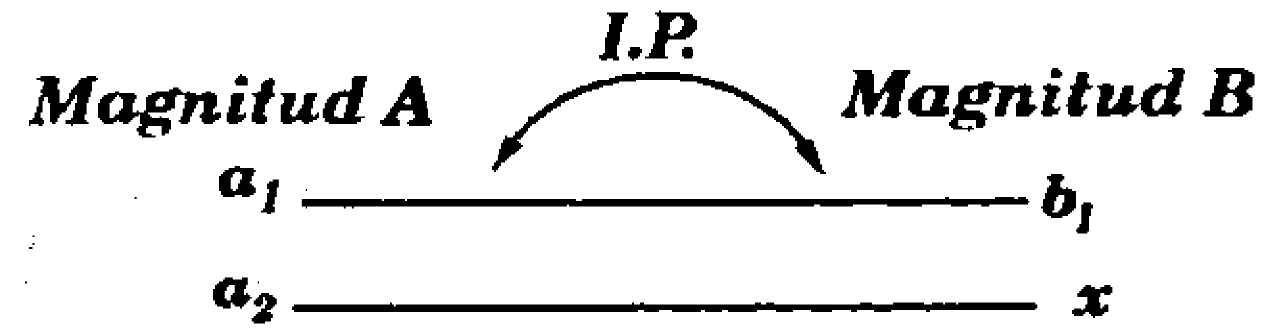
$$300x = 250(x+4) \Rightarrow 300\,x = 250x + 1000$$

$$\Rightarrow 50\,x = 1000 \Rightarrow x = 20 \textit{ litros}$$

B) REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA (R3SI) :

Cuando las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales , es decir , ***cuando aumenta una de ellas la otra disminuye*** y viceversa.

Esquema :



*** MÉTODOS DE SOLUCIÓN:**

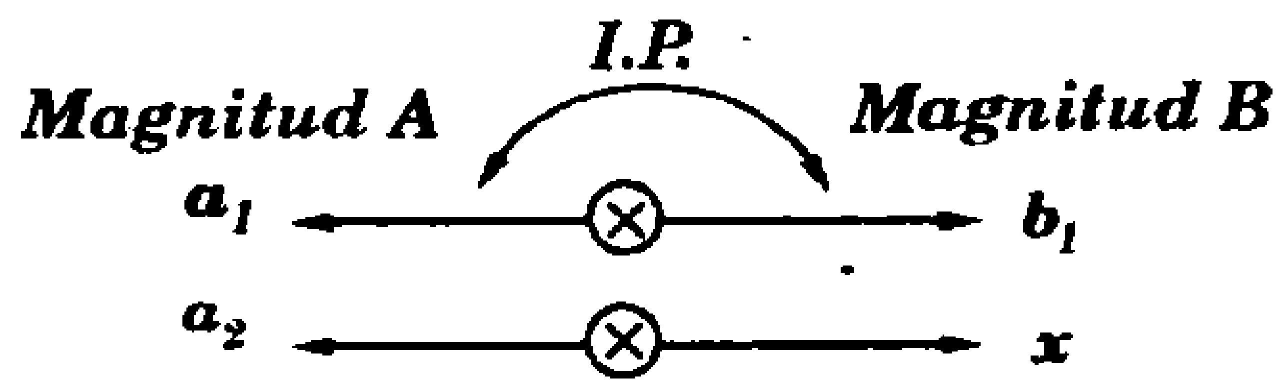
Aplicando magnitudes inversamente proporcionales

$$A \times B = cte \Rightarrow a_1\, b_1 = a_2\, x \text{..............(I)}$$

* Despejando :

$$x = \frac{a_1 \times b_1}{a_2}$$

* De *(I)* podemos observar un método práctico : *"Multiplicación en línea"*.

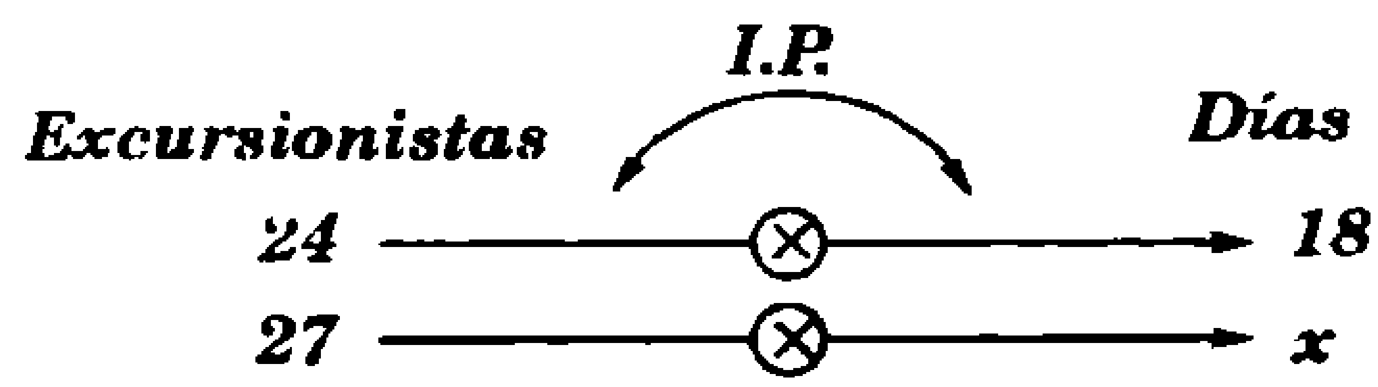


EJEMPLO 1:

Un grupo de ***24*** excursionistas lleva víveres para ***18*** días, pero al iniciar de la excursión se suman ***3*** personas más. ¿Cuántos días antes se acabarán los víveres?

RESOLUCIÓN :

* Se puede notar que a más personas los víveres durarán menos días , por lo tanto se trata demagnitudes inversamente proporcionales .



* Luego : $x = \dfrac{24 \times 18}{27} = 16 \textit{ Días}$

* Por lo tanto los víveres se acabarán :

$18 - 16 = 2$ días antes

EJEMPLO 2 :

Un barco tiene provisiones para *24* días y las distribuye equitativamente a todos los tripulantes. Si se desea que las provisiones duren *6* días más , ¿en que fracción se debe reducir la ración de cada tripulante?

RESOLUCIÓN :

* Podemos observar que las magnitudes que intervienen son número de días y ración. Si queremos que la provisiones duren más días , entonces se debe disminuir la ración en cada tripulante ; por lo tanto son ***inversamente proporcionales***. Consideramos que la ración inicial es la unidad y "x" la fracción que se debe disminuir, luego se hará el siguiente planteamiento.

N°de días (I.P.)	ración
24	1
30	$1-x$

* ***Multiplicamos en línea :***

$$30(1-x) = 24 \times 1 \Rightarrow 1 - x = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

* Por lo tanto, a cada tripulante se le debe reducir en un $\frac{1}{5}$ de su ración.

II) REGLA DE TRES COMPUESTA (R3C) :

Es una regla de tres donde intervienen más de dos magnitudes proporcionales.

**** MÉTODO DE SOLUCIÓN :***

Existen varios métodos de solución , en esta caso emplearemos el método de nombrar: "si la magnitud es directamente proporcional *(D. P.)*, o inversamente proporcional *(I.P.)*, con la magnitud donde se encuentra la incógnita".

PASOS A SEGUIR:

I) Se reconocen las magnitudes que intervienen en el problema.

II) En la primera fila se colocan los datos y en la segunda fila los demás datos incluido la incógnita.

III) Se compara la magnitud donde se encuentra la incógnita con cada una de las demás , indicando en su parte inferior , si es directamente proporcional por ***D. P.*** , o y si es inversamente proporcional por ***I. P.***

IV) Se despeja la incógnita multiplicando la cantidad que se encuentra sobre ella por las diferentes fracciones que se forman en cada magnitud, si son ***I.P.*** se copia igual y si son ***D. P.*** se copia diferente (se invierte).

Si: tenemos las magnitudes

a	c	d	f
b	x	e	g
I.P		D.P	I.P

entonces se cumple :

$$\frac{xbg}{e} = \frac{caf}{d}$$

$$\boxed{x = \frac{cafe}{bgd}}$$

EJEMPLO 1 :

Doce obreros trabajando *15* días de *8* horas diarias pueden construir *160* m de un muro. ¿Cuántos días se demorarán *10* obreros trabajando *10* horas diarias para construir *200 m* del mismo muro?

RESOLUCIÓN :

* Lo primero que hacemos es reconocer las magnitudes que intervienen y colocamos los dos juegos de datos , la incógnita se debe encontrar en el segundo juego de datos, para luego hacer las comparaciones.

Luego , el valor de la incógnita se hallará multiplicando la cantidad que se encuentra encima de la incógnita por las diferentes fracciones que se forman en cada magnitud, si son ***I.P.*** se copia igual y si son ***D.P.*** se copia diferente.

Número de obrero	Número de días	H/D	Obra
8		8	160
10		10	200
I.P. igual		I.P. igual	D.P. diferente

$$\Rightarrow x = 15 \times \frac{12}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{200}{160} \Rightarrow x = 18 \text{ días}$$

EJEMPLO 2 :

En una parrilla se pueden cocinar *120* chorizos en *18* minutos consumiendo *15kg* de carbón de madera. ¿Cuántos chorizos se podrán cocinar en *2* parrillas de iguales tamaños en *36* minutos con *45kg* de carbón de madera?

chorizos	min	carbón	parrilla
120	18	15	1
x	36	45	2
	DP	D·P	D·P

$$\frac{x}{36 \times 45 \times 2} = \frac{120}{18 \times 15}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{36 \times 45 \times 2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1080$$

OBSERVACIÓN :

En la regla de tres compuesta también podemos aplicar los aprendido en el capítulo de magnitudes proporcionales , recordando que :

(Obreros) ***I. P.*** (Rendimiento)

(Obreros) ***I. P.*** (Días)

(Obreros) ***I. P.*** (h/d)

(Obreros) ***D. P.*** (Obra)

(Obreros) ***D. P.*** (Dificultad)

* Entonces :

$$\frac{(Obreros)(Rendimiento)(Días)(h/d)}{(Obra)(Dificultad)}=k \quad ; \quad k: Cte$$

"TAN SÓLO ES CAUSA Y EFECTO"

La mayoría de algoritmos aritméticos que permiten resolver un problema por una regla de tres compuesta, son solo variantes de un método general que parte de la teoría de magnitudes.

Aprovechando la teoría sobre magnitudes proporcionales compararemos una magnitud con otros a considerar, para así establecer la constante de proporcionalidad; para esto tomaremos en cuenta aquellas magnitudes que intervienen con mayor regularidad en este tipo de problemas.

(+) Nº de Obreros	(–) Eficiencia	(–) Nº de días	(–) Nº de horas	(+) Obra	(+) Dificultad
a	b	c	d	e	f
m	n	p	q	r	s

$$\Rightarrow \frac{\binom{N^{o}\ de}{Obreros}(Eficiencia)\binom{N^{o}\ de}{días}\binom{N^{o}\ de}{horas}}{(Obra)\ (Dificultad)}=cte$$

Cumpliendose entonces :

$$\frac{m\times n\times p\times q}{r\times s}=\frac{a\times b\times c\times d}{e\times f}$$

Lo anterior, nos permite tener un esquema comodo y útil para resolver este tipo de problemas; para lo cual tendremos en cuenta que :

A mayor causa entonces mayor efecto, a menor causa entonces menor efecto.

Consideremos en *CAUSA* a aquellas magnitudes que generan producción, consumo o vencen una dificultad.

EJEMPLO :

Número de obreros o máquinas ; el rendimiento, la habilidad o eficiencia ; la velocidad o rapidez; el tiempo, número de días u horas de trabajo al día ....., etc.

* Consideramos en *EFECTO* a aquellas magnitudes que fueron generados consumidos o vencidos por las que se consideran en ***CAUSA.***

EJEMPLO :

La producción u obra, el uso de bienes de consumo, la dificultad o dureza de obra, el espacio recorrido por un movil, etc.

En resumen : $\frac{CAUSA}{EFECTO}=cte.$

APLICACIÓN :

Una compañía industrial posee ***3*** máquinas de ***84%*** de rendimiento que producen en conjunto ***2400*** envases cada ***6*** días de ***8*** horas diarias de trabajo. Si se desea producir ***3000*** envases en ***4*** días trabajando ***7*** horas diarias y la dureza que presenta esta producción es a la anterior como ***3*** es a ***2***. ¿Cuántas máquinas de ***90%*** se requieren, para esto?

RESOLUCIÓN :

$$\frac{\binom{N^{o}\ de}{Máquinas}(Rendimiento)\binom{N^{o}\ de}{días}\binom{N^{o}\ de}{horas}}{\binom{N^{o}\ de}{envases}(Dureza)}=cte$$

$$\Rightarrow \frac{x\times 90\%\times 4\times 7}{3000\times 3}=\frac{3\times 84\%\times 6\times 8}{2400\times 2}\Rightarrow x=9$$

⇒ Se requiere ***9*** máquinas de un rendimiento del ***90%***

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Si ***135*** obreros construyen ***30*** metros de pista, ***63*** obreros, ¿Cuántos metros construirán en igual tiempo?

A) 30 ***B) 50*** ***C) 60*** ***D) 75*** ***E) N.A.***

02 Si ***8*** chocolates cuestan ***145.*** ¿Cuál será el precio de ***6*** docenas de ellos?

A) 1300 ***B) 1450*** ***C) 1305*** ***D) 1500*** ***E) N.A.***

03 ***24*** carpinteros hacen una casa en ***30*** días el triple de carpinteros. ¿Qué tiempo tomarán para hacer la misma obra?

A) 30 ***B) 20*** ***C) 10*** ***D) 5*** ***E) 40***

04 Para pintar ***75*** m^2 de superficie son necesarios ***30*** galones de pintura. ¿Cuántos serán necesarios para pintar ***15***m^2?

A) 6 ***B) 7*** ***C) 8*** ***D) 9*** ***E) N.A.***

05 Si **20** obreros construyen **28** metros de pared en cada día. ¿Cuál será el avance diario, si se retiran **5** obreros?

A) 13 ***B) 20*** ***C) 21***
D) 25 ***E) 30***

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Un hombre tarda **2** días en colocar **48** ladrillos. ¿ Cuántos ladrillos podrá colocar si trabaja **15** días?

A)450 B)360 C)600 D)720 E) 750

02 **30** obreros en **8** días han hecho la mitad de una obra que les fue encomendado. Si se retiran **20** obreros, ¿en cuántos días terminarán lo que falta de la obra los obreros restantes?

A) 20 días B) 18 días C) 30 días
D) 24 días E) 32 días

03 Un jardinero siembra un terreno cuadrado de **1,8** metros de lado en **3** días. ¿Cuántos días se demora en sembrar otro terreno cuadrado de **3.6** metros de lado?

A)6 días B)12 días C)18 días
D)10 días E)3 días

04 La relación de eficiencia de Fer y Tomi es de **2** a **3**. Si Fer lee una obra en **90** minutos, ¿cuánto demorará en leer la misma obra Tomi?

A) 60 min B) 40 min C) 50 min
D) 70 min E) 80 min

05 Sobre un local de recepciones, se observa que Ana puede decorarlo en **2** horas, Marisol en **4** horas y Margaret en **12** horas. ¿Cuántas horas demorarían en hacer la decoración las tres juntas?

A) 1,5 h ***B) 1,2 h*** ***C) 0,5 h***
D) 2 h ***E) 1,8 h***

06 Para pintar las caras de un cubo se utilizaron **5** tarros de pintura. ¿Cuántos tarros más se utilizarán para pintar un cubo cuyo volumen sea **8** veces el volumen inicial?

A) 40 B) 5 C) 10 D) 15 E) 9

07 Si $\frac{n}{2}$ obreros pueden hacer una obra en $12n^2$ horas y $2n$ obreros hacen la misma obra en **8** días, calcule el valor de «***n***».

A) 6 B) 10 C) 8 D) 12 E) 14

08 Una obra la pueden hacer 5 obreros en «***t***» días trabajando «***t + 1***» horas diarias y **7** obreros la harían en **3** días menos, trabajando **2** horas más por día. Calcule «***t***»

A)7 B)5 C) 4 D)8 E) 10

09 Gustavo es el doble de rápido que Ricardo pero es la cuarta parte que de Edgar. Si los dos últimos hacen una obra en **33** días, ¿en cuántos días harán la misma obra los tres juntos?

A) 27 días ***B) 18*** ***C) 40***
D) 30 ***E) 17***

10 En **10** días, **8** obreros han hecho los $\frac{4}{5}$ de una obra. Si se retiran **4** obreros, ¿cuántos días demorarán los obreros restantes para terminar la obra?

A) 10 días ***B) 8*** ***C) 5***
D) 6 ***E) 9***

11 **15** obreros pueden hacer **30** carpetas en **36** días. ¿Cuántos días demorarán **5** obreros de cuádruple eficiencia en hacer **40** carpetas, si la dificultad es la tercera parte de la anterior?

A)48 B)10 C)6 D)15 E)12

12 Una obra puede ser hecha por **18** hombres en **8** días, trabajando **10 h/d**. Si antes de empezar la obra, **4** de ellos aumentan su rendimiento en **50%**, ¿cuántos días de **6 h/d** de trabajo demoran en realizar la obra?

A) 18 días ***B) 12*** ***C) 20***
D) 16 ***E) 14***

13 Un grupo de **30** obreros han hecho **30%** de una obra en **10** días, trabajando **8h/d**. ¿Con cuántos obreros tendrán que reforzarse para hacer el **30%** de lo que falta en **5** días, trabajando **6 h/d?**

A) 20 B) 24 C) 25 D) 18 E) 26

14 Si en **100** litros de agua existen **4** libras de azúcar, ¿cuántos litros de agua pura debemos agregar a **100** litros para que en cada **10** litros de la mezcla exista **1/3** libra de azúcar?

A) 20 L ***B) 10 L*** ***C) 40 L***
D) 60 L ***E) 25 L***

15 **24** obreros pueden hacer una obra en **42** días, pero la mitad de ellos aumentaron su eficiencia por lo cual la obra se terminó en sólo **48** días. ¿En qué parte disminuyeron su eficiencia dichos obreros?

A) 4/3 B) 1/4 C)50 D)1/3 E)21/5

16 **42** pintores emplean **25** días en pintar un mural. ¿Cuántos días más emplearían en pintar el mural si el $\left(\frac{50}{3}\right)$%de los pintores no participará en el pintado?

A) 30 días B)4 C)8 D)6 E)5

17 Se proyectó hacer una obra en «***t***» días. Si el número de obreros aumenta en **2/5**, la jornada de trabajo se disminuye en **1/3** y la dificultad de obra varía a los **2/5** de lo normal, entonces el tiempo requerido es :

A) $2t$ ***B)*** $\frac{5}{2}t$ ***C)*** $\frac{3}{7}t$ ***D)*** $\frac{2}{5}t$ ***E)*** t

18 En una fábrica de zapatos se dispone de **40** días para hacer **900** pares de zapatos con **12** máquinas que funcionan **8 h/d**, pero luego de avanzar la mitad del trabajo se malogran **4** de las máquinas y a las que quedan se les aumenta **2 h/d** de funcionamiento. Terminando el plazo fijado se observa que faltan hacer:

A) 20 pares de zapatos
B) 30 pares de zapatos

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)B	4)A	5)B	6)D	7)C	8)A	9)A	10)C
11)E	12)B	13)E	14)A	15)B	16)E	17)C	18)B	19)C	20)C

REGLA DEL TANTO POR CIENTO

CAPITULO 059

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el lector estará en la capacidad de:

* *Establecer una relación de una parte con el todo.*
* *Calcular el tanto por cuanto de una cantidad dada.*
* *Determinar el tanto por ciento de una cantidad.*
* *Operar con porcentajes.*
* *Calcular aumentos o descuentos sucesivos de una cantidad en referencia.*
* *Reconocer los elementos que intervienen en las operaciones comerciales.*

INTRODUCCION :

El tanto por ciento como regla práctica data de las primeras transacciones comerciales que se realizaron en tiempos no precisados por la historia, pero su difusión en obras de Aritmética es conocida a partir del siglo *XV*. Se conjetura que fue en la Italia de esos años en la que se dio origen al símbolo % como modificación de la abreviatura de ciento (cto) con el propósito de darle mayor practicidad a las operaciones mercantiles. El primero que difundió el uso de dicho símbolo fue el mercantilista francés Delaponte, quien en ***1685*** lo expuso en su libro "Le Guide des Negotien" (La Guía del Comerciante).

Aunque hay algunas versiones que el símbolo % proviene de la alteración de *1/100*, éstas no tienen mayor fundamento pues la escritura de las fracciones de dicha forma ha sido posterior a la aparición del tanto por ciento. En la actualidad el tanto por ciento ha cobrado importancia formal cuando lo introducimos como cantidad asignada a la variable de una función en matemática financiera, las cuales permiten elaborar modelos para simular complicadas operaciones mercantiles.

TANTO POR CIENTO

Es el número de unidades tomadas de una cantidad, considerándola como equivalente a ***100***. Por ejemplo, si decimos que en un colegio el ***20*** por ciento son mujeres, significa que ***20*** de cada 100 alumnos son mujeres ***(20** partes de cada **100)***; luego uno por ciento significaría tomar ***1*** parte de cada ***100***. Es decir, la centésima parte.

Por lo tanto: ***1 por ciento*** $<>\ \frac{1}{100} = 1\%$

* ***20*** partes < > ***20*** por ciento < > 20% < > $\frac{1}{5}$
* ***50*** partes < > ***50*** por ciento < > 50% < > $\frac{1}{2}$
* ***60*** partes < > ***60*** por ciento < > 60% < > $\frac{3}{5}$

Luego, la quinta parte de ***800*** es:

$(1/5) \times 800 = 160$ entonces 20% de $800 = 160$

NOTA :

$$a\% \text{ de } N <> \frac{a}{100}\times N$$

Considerando que: de, del, de los, indicarán en forma práctica una multiplicación. $N = 100\% N$

Lo que significa que toda cantidad es el ***100%*** de si misma.

OBSERVACIÓN :

A partir de:

Tanto	a	x
Cuanto	100	N

Si: Tanto *DP* Cuanto

$$\frac{a}{100} = \frac{x}{N} \Rightarrow x = \frac{a}{100}\cdot N = a\cdot\frac{N}{100}$$

Intuitivamente denominamos tanto por ciento *(a)* al número de partes que se consideran de las ***100*** partes iguales en que ha sido dividida una cantidad *(N)*.

$$\boxed{(a \text{ por ciento de } N) = a\%N = \frac{a}{100}\cdot N}$$

EJEMPLOS:

* $37\%500 = \frac{37}{1\cancel{0}\cancel{0}}\times 5\cancel{0}\cancel{0} = 185$
* $82\cancel{\%}20\cancel{0}\cancel{0} = 82\times 20 = 1640$
* $12\cancel{0}\cancel{\%}56\cancel{0} = 12\times 56 = 672$

OBSERVACIONES:

01 A la razón $\frac{a}{100} = a\%$ se le denomina porcentaje.

02 Todo porcentaje tiene su equivalente en fracción y toda fracción tiene su equivalente en porcentaje.

EJEMPLOS:

* $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
* $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$
* $74\% = \frac{74}{100} = \frac{37}{50}$
* $\frac{11}{8} = \frac{11}{8} \times 100\% = 137,5\%$

03 Toda cantidad representa el ***100%*** de si misma.

$$\boxed{N = 100\% N}$$

04 Para relacionar una parte con un total y expresarlo como porcentaje, debemos primero identificar ambos elementos.

EJEMPLOS:

* ¿Qué porcentaje de ***60*** es ***15***?

  ↑ ***Total*** (60) ↑ ***Parte*** (15)

$$\frac{15}{x\%} = \frac{60}{100\%} \Rightarrow x\% = 25\%$$

FORMA PRÁCTICA :

$$\frac{15}{60} \times 100\% = 25\%$$

* ¿Qué porcentaje es ***28*** de ***40*** ?

  ↑ ***Parte*** (28) ↑ ***Total*** (40)

$$\frac{28}{40} \times 100\% = 70\%$$

AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

$$\boxed{\begin{array}{l} N + a\%N = (100 + a)\%N \\ N - b\%N = (100 - b)\%N \end{array}}$$

EJEMPLOS:

* $\underbrace{580}_{100\%580} + 20\%580 = 120\%580$
* $\underbrace{W}_{100\%W} + 47\%W = 147\%W$
* $\underbrace{3775}_{100\%3775} - 23\%3775 = 77\%3775$
* $\underbrace{n}_{100\%n} - 85\%n = 15\%n$
* $123\%x - \underbrace{x}_{100\%x} = 23\%x$

TANTO POR CIENTO DEL TANTO POR CIENTO

$$\boxed{a\% \text{ del } b\% \text{ del } c\% \text{ de } N = \frac{a}{100} \times \frac{b}{100} \times \frac{c}{100} \times N}$$

EJEMPLO:

Hallar el ***25%*** el ***20%*** del ***40%*** de ***8000***

$$\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} \times 8000 = 160$$

DESCUENTOS SUCESIVOS

Al valor inicial que tiene un artículo u objeto lo llamaremos V_I el cuál luego de ser afectado por dos o más descuentos sucesivos se transformara en V_F al cuál llamaremos valor final.

* Apliquemos dos descuentos sucesivos uno del ***20%*** y el otro del ***30%***.

1er descuento ***20%***: $V_I \rightarrow 80\%V_I$

2do descuento ***30%***: $80\%V_I \rightarrow 70(80\%V_I)$

$$\Rightarrow V_F = \frac{70}{100} \times 80\%V_I \Rightarrow V_F = 56\%V_I$$

En Resumen

descuentos sucesivos del 20% y 30%: $100\%V_I \rightarrow 56\%V_I$

$$\begin{pmatrix} D_1 = 20\% \\ D_2 = 30\% \end{pmatrix} <> \begin{pmatrix} \text{Descuento} \\ \text{unico} \end{pmatrix} = 44\%$$

Sean los descuentos sucesivos:

$$d_1\%;\ d_2\%;\ d_3\%;\ \ldots;\ d_n\%$$

los cuales se aplican a V_I

Entonces:

$$\boxed{V_F = (100 - d_1)\%(100 - d_2)\% \ldots (100 - d_n)\%V_I}$$

haciendo:

$$(100 - d_1)\%(100 - d_2)\% \ldots (100 - d_n)\% = r\%$$

tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Descuento} \\ \text{Unico}\end{array} = (100 - r)\%}$$

$$Ahorro = V_I - V_F$$

También para el cálculo del descuento único de **2** descuentos sucesivos $d_1\%$ y $d_2\%$ se puede utilizar.

$$\begin{matrix}\textbf{Descuento}\\ \textbf{Unico}\end{matrix} = D_U = \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$$

AUMENTOS SUCESIVOS (ILUSTRACIÓN)

Al valor inicial que tiene un artículo u objeto lo llamaremos V_I el cúal luego de ser efectuado por dos o más aumentos sucesivos se transformara en V_F al cúal llamaremos valor final.

* Apliquemos dos aumentos sucesivos uno del **25%** y el otro del **20%**.

1^er^ descuento ***2^do^ descuento***

$$V_I \xrightarrow{25\%} 125\%V_I \xrightarrow{20\%} 120\%(125\%V_I)$$

$$\Rightarrow V_F = \frac{120}{100} \times 125\%V_I \Rightarrow V_F = 150\%V_I$$

En Resumen

$$100\%V_I \xrightarrow{\text{aumentos sucesivos del 25\% y 20\%}} 150\%V_I$$

$$\begin{pmatrix}A_1 = 25\%\\ A_2 = 20\%\end{pmatrix} <> \begin{pmatrix}\text{Aumento}\\ \text{unico}\end{pmatrix} = 50\%$$

Sean los aumentos sucesivos:

$$a_1\%;\ a_2\%;\ a_3\%;\ \ldots;\ a_n\%$$

los cuales se aplican a V_I

Entonces:

$$V_F = (100 + a_1)\%(100 + a_2)\%\ldots\ldots(100 + a_n)\%V_I$$

haciendo:

$$(100 + a_1)\%(100 + a_2)\% \ldots\ldots (100 + a_n)\% = r\%$$

tenemos que:

$$\begin{matrix}\textbf{Aumento}\\ \textbf{Unico}\end{matrix} = (r - 100)\%$$

$$Sobreprecio = V_F - V_I$$

También para el cálculo del descuento único de **2** descuentos sucesivos $a_1\%$ y $a_2\%$ se puede utilizar.

$$\begin{matrix}\textbf{Aumento}\\ \textbf{Unico}\end{matrix} = A_U = \left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$$

APLICACIÓN COMERCIAL

En la venta de un artículo se busca siempre una utilidad *(GANANCIA)*, pero no siempre ocurre ello; a veces se gana en otras se pierde ó solo recuperamos lo invertido.

Podemos citar la siguiente operación comercial:

> ***Un vendedor informal vendió 2 televisores por el mismo precio, observando que en uno ganó el 25% y en el otro perdió el 25%, además por cada uno obtuvo 600 dólares.***

Al finalizar la lectura surge la pregunta ¿Ganó o perdió? y en cualquiera de ambos casos ¿Cuánto del costo total representa esto? y si queremos ser más curiosos ¿Qué tanto por ciento de la venta representa el costo? ó ¿Qué tanto por ciento del costo representa la venta?

Vamos a continuación los casos que se presentan en el comercio.

01 El precio de venta de un artículo, cuando se obtiene una ganacia, beneficio, rentabilidad o utilidad.

$$P_V = P_C + G$$

02 El precio de venta de un artículo, cuando se obtiene una perdida. $P_V = P_C - P$

03 El precio de venta de un artículo, cuando se hace un descuento. $P_V = P_L - D$

DONDE:

- P_V $\Rightarrow$ ***Precio de Venta***
- P_C $\Rightarrow$ ***Precio de Costo***
- P_L $\Rightarrow$ ***Precio de Lista***
- G $\Rightarrow$ ***Ganancia***
- P $\Rightarrow$ ***Perdida***
- D $\Rightarrow$ ***Descuento***

OBSERVACIONES :

* La ganancia o perdida mientras no se diga nada, será referida al precio de costo.

* El descuento o aumento mientras no se diga nada, será referida al precio de lista.

* Si deducimos los gastos que ocasiona el transporte, el embalaje, etc. la ganancia (ganancia bruta) se vera efectada, por tal motivo se obtendra

una nueva ganancia (ganancia neta)

$$G_N = G_B - G_A$$

donde:

$G_N \Rightarrow$ *Ganancia Neta*
$G_B \Rightarrow$ *Ganancia Bruta*
$G_A \Rightarrow$ *Gasto Adicional*

EJERCICIO :

Dos blusas son vendidos en *30* soles c/u en la primera se gana *20%* y en la segunda se pierde el *20%*. Entonces se ganó o perdió y cuanto

RESOLUCIÓN:

1ra Camisa	*2da Camisa*
$P_{V_1} = 30$	$P_{V_2} = 30$
$P_{C_1} + 20\% P_{C_1} = 30$	$P_{C_2} - 20\% P_{C_2} = 30$
$P_{C_1} = 25$	$P_{C_2} = 37,5$

Luego: $P_{V_{TOTAL}} = 30 + 30 = 60$; $P_{C_{TOTAL}} = 25 + 37,5 = 62,5$ } *Se perdió S/.25*

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular el *10%* del *20%* del *40%* de *20000.*

A)120 B)150 C)16 0 D)180 E)200

02 Calcular el *5* por *11* de *88.*

A)20 B)40 C)60 D)80 E)50

03 Calcular el *5* por *9* del *900* por *1000* de *1600.*

A)200 B)400 C)600 D)800 E)500

04 En un salón: el *60%* del número de mujeres es igual al número de varones. Calcular que tanto por cientro representa el número de varones con respecto al total.

A)12,50% B)40% C)62,50% D)80% E)50%

05 ¿Qué tanto por ciento de *3200* es *800*?

A)25% B)40% C)60% D)80% E)50%

06 ¿A qué descuento único equivalen tres descuentos sucesivos del *20%* , *25%* y *20%?*

A)36% B)40% C)50% D)60% E)65%

07 ¿A qué aumento único equivalen tres aumentos sucesivos del *25%* , *20%* y *20%?*

A)80% B)75% C)50% D)60% E)65%

08 Un sastre vende dos camisas a *60* soles cada una. En una camisa gana *20%* de su costo y en el otro pierde el *20%* de su costo. ¿Ganó o perdió en la venta? ¿Cuánto?

A)Ganó 8% B)Perdió 8% C)Ganó 4% D)Perdió 4% E)No ganó ni perdió

09 El precio de un artículo se rebaja el *20%.* Para volverlo al precio original. ¿Qué porcentaje se debe aumentar?

A)36% B)40% C)50% D)20% E)25%

10 Una tienda vende sobre el precio marcado *15%* mas *15%* y otra con el *30%* de descuento respectivamente. El precio marcado es el mismo en ambas tiendas. ¿Quén vende más barato y a cuánto?

A)La primera B)La segunda C)Ambas dan el mismo descuento D)Faltan datos E)Ninguna

11 *0,0030*, ¿qué porcentaje es de la mitad de *0,006*?

A)100% B)50% C)25% D)60% E)40%

12 Si a una cantidad le quito el *20%* y luego el *20%*. ¿Qué porcentaje realmente estoy quitando ?

A)36% B)54% C)25% D)64% E)40%

13 A una baile asisten *20* caballeros y *60* damas. ¿Que porcentaje de la reunión son damas?

A)100% B)50% C)25% D)60% E)40%

14 Si el radio de un círculo aumenta *20%* entonces su área se incrementa en:

A)35% B)50% C)28% D)60% E)44%

15 Si el área de un círculo ha disminuido en *51%*. ¿En qué porcentaje ha disminuido su radio?

A)20% B)30% C)15% D)60% E)40%

16 ¿A qué descuento único equivale los descuentos sucesivos del *10%; 30%* y *60%?*

A)25,2% B)74,8% C)86,2% D)64,6% E)24,5%

17 En una compra que se realiza hay una opción para escoger entre tres descuentos sucesivos del *30%; 20%* y *10%* y tres descuentos sucesivos del *20%; 20%* y *20%*. Escogiendo el mejor se ahorra.

A)80% B)1,0% C)1,2% D)1,4% E)0,4%

18 En una reunión el *40%* de las personas son hombres, si se retiran la mitad de estos ¿Cuál es el

nuevo porcentaje de los hombres?

A)25% B)30% C)35% D)40% E)32%

19 En un corral el *25%* son cerdos, el *35%* son caballos y el resto son burros. Si el número de cerdos se duplica ¿Cuánto es el número de porcentaje de cerdos?

A)50% B)40% C)25% D)60% E)30%

20 Una grabadora al venderse se le descuenta el *10%* , luego se le recarga el *10%* pero se le vuelve a descontar el *10%* pagándose *S/. 89,10.* Determine el precio original de la grabadora.

A)S/ 150 B)S/. 200 C)S/. 99,9 D)S/. 100 E)S/. 120

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Un jugador apuesta su dinero y gana el *10%*, luego apuesta todo lo que tiene y gana el *5%*. Si finalmente se retira con *231* soles. ¿Con cuánto empezó el juego?

A) 200 B) 212 C) 215 D) 300 E)225

02 El precio de un objeto se aumenta en *S/.200*, pero al momento de vender se hace una rebaja en un *40%*; pero así se gana el *80%* del costo. ¿Cuál fue dicho costo?

A) 100 B) 120 C) 150 D) 110 E)220

03 Se el *84%* de "*N*" es igual al *105%* de *(N–120)*. ¿Qué porcentaje de *"N"* representa *192*?

A) 35% B) 32% C) 16% D) 48% E) 52%

04 Cierto día en una avícola se vendió el *15%* de las aves (pollos y gallinas), observándose que el *20%* de las aves no vendidas eran pollos y el resto eran *1632* gallinas. ¿Cuántas aves se vendieron?

A) 240 B) 280 C) 320 D) 360 E)390

05 El precio de un tonel de aceite ha quedado en *126* soles al final del año pasado, luego de haber sufrido durante el año dos aumentos sucesivos del *12%* y *25%* y una baja del *10%*. ¿Qué precio tenía al empezar el año?

A) S/. 92 B) S/. 120 C) S/. 96 D) S/. 100 E)S/. 102

06 Si gastara el *50%* del dinero que tengo y ganara el *20%* de lo que me quedaría, perdería *288* dólares. ¿Cuántos dólares tengo?

A) 1 000 B) 720 C) 760 D) 780 E) 650

07 Para fijar el precio de venta de un artículo se aumenta el precio de costo en *S/.600*; pero al momento de realizar la venta se rebaja en un *20%* y aún así se vende ganando el *30%* del costo. ¿Cuál es el precio de costo del artículo?

A) S/. 600 B) S/. 560% C) S/. 720%
D) S/. 840 E) S/. 960

08 En qué porcentaje varía el área de un rectángulo si su largo disminuye en un *25%* y el ancho aumenta en un *44%*.

A) Aumenta el 12% B) Aumenta el 6%
C) Aumenta el 19% D) Aumenta el 8%
E) Aumenta el 16%

09 Teniendo en cuenta que el costo de vida aumentó durante Enero : *60%*, Febrero : *40%* y Marzo: *25%* a su vez que los salarios suben en Enero: *30%*, Febrero: *20%* y Marzo : *10%*. Si por milagro se logra que durante Abril no siga subiendo el costo de vida, en que % deberá aumentarse los salarios para recuperar el poder adquisitivo de principio de año? (Redondear al entero más próximo)

A) 61% B) 63% C) 65% D) 64% E) 62%

10 En una reunión se observa que el número de hombres es el *150%* del número de mujeres, si después llegan *20* hombres y *30* mujeres; siendo entonces el número de mujeres el *44%* del nuevo total,hallar cuántos hombres habían inicialmente.

A) 40 B) 30 C) 120 D) 15 E) 20

11 Un comerciante compra *12,5 m* de tela, cuyo ancho es de *2m*, a *S/.600.* Pero dicha tela al lavarse se encoje *205* en el largo y *10%* en el ancho. Sabiendo esto el comerciante, luego de lavar dicha tela vende cada m^2 a un precio que es *25%* más de lo que le costó cada m^2 de tela nueva.

Determine usted si el comerciante ganó o perdió y cuánto, en dicha operación comercial

A) ganó S/. 60 B) pierde S/. 6 C) no gana ni pierde
D) ganó S/. 6 E) pierde S/. 60

12 Una persona lee durante una semana el *60%* de las páginas, en la segunda semana lee el *50%* de lo que le falta y la tercera semana lee las *210* páginas restantes. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A)990 B)1 020 C)1 080 D)1 100 E)1 200

13 Juan compra un artefacto y lo vende con un beneficio del *8%*. Si hubiera ganado el *8%* del precio

de venta anterior, habría ganado *8* soles más. Determinar el precio de compra de dicho artefacto?

A)1 000 B)1 250 C) 1 350 D)1 400 E)1 200

14 Al vender un objeto en *S/. 5 400* se ganó el *25%* de su costo. Si el beneficio neto fue *480*. Calcular los gastos que produce dicha venta.

A) 250 B) 600 C) 350 D)1 400 E) 400

15 Un hombre posee el *32,4%* de las acciones de una compañía. Si vende el *75%* de sus acciones ganando el *26,1%* y en el resto pierde el *21,7%*. ¿A cuánto asciende el importe de las acciones de dicha empresa si dicho accionista después de vender sus acciones obtuvo un efectivo de *S/. 352 350?*

A) S/. 200 000 B) S/. 1 450 000 C) S/. 2 400 000
D) S/. 1 800 000 E) S/. 1 300 000

16 En una tienda, a los clientes les hacen *2* descuentos sucesivos del *10%* y *20%*, ganando aún el *40%*. Si un artículo se compra en *36* soles, ¿que precio debe fijarse para su venta?

A) S/.40 B) S/.60 C) S/.56 D) S/.70 E) S/.58

17 Si a una cantidad *"C"* se le aumentó su *20%* y a la cantidad total obtenida se le aumenta nuevamente en su *20%* y así sucesivamente *K* veces, obteniendo en total al final *172,8% C*. Hallar *K*.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

18 El *X* por *80* más, del *X* por *90* menos de *N*, es igual a *"N"*. ¿Cuánto por ciento menos de *N* es el *X%* menos de su *X%* mas?

A) 10% B) 1% C) 2% D) 5% E)11%

19 Una vendedora compra una cantidad de huevos, va al mercado y comienza a vender, cuando ha vendido el *40%* de los huevos ganando el *30%* se da cuenta que el *31%* de los huevos que compró se habían roto. ¿En qué porcentaje deberá aumentar el precio original de los restantes para tener una ganancia del *10%* del costo?

A) 50 B) 100 C) 80 D) 120 E) 350

20 Un jugador apostó todo el dinero que tenía ganando el *10%*; esta nueva cantidad lo apostó perdiendo el *80%*; si la cuarta parte de lo que le queda lo apostó ganando su *15%*. Calcular cuánto dinero tenía al inicio sabiendo que si depositó el dinero con el cual se retira a una tasa de *7%* anual al cabo de *9* meses, obtendría un beneficio de *119 831,25*

A) 155 635 B) 256 235 C) 300 000
D) 6 000 000 E) 600 000

21 Para obtener fierro se dispone de un mineral que contiene *63%* de fierro, se sabe que en la escoria de la fundición se pierde el *1%* de contenido de fierro del mineral y que la producción anual de fierro es de *93 555* toneladas. ¿Cuántas toneladas de mineral se usa por año?

A) 125 400 B) 162 000 C) 98 000
D) 150 000 E) 100 000

22 Un comerciante compró sacos de arroz y los vende perdiendo el *50%* del costo y luego invierte su recaudación comprando sacos de azúcar y los vende ganando el *b%* del costo y nuevamente invierte todo el dinero, comprando sacos de café que luego vende perdiendo el *50%* del costo. Finalmente con el dinero que le queda compra nuevamente arroz que lo vende ganando el *b%*, sabiendo que la primera ganancia es igual a la última pérdida.

A) 40 B) 45 C) 50 D) 80 E) 100

23 Pedro tiene una casa que vale *100 000* soles, y se la vende a Beto con una ganancia del *10%.* Beto revende la casa a Pedro con una pérdida del *10%* según esto:

A) Pedro no gana nada B) Pedro gana 1 100
C) Pedro pierde 9 000 D) Pedro gana 10 000
E) Pedro pierde 10 000

24 Un cine tiene capacidad para *450* personas. Cierto día ingresó cierta cantidad de personas a media función pagando un *15%* menos, con lo cual el cine quedó completamente lleno, pero la recaudación se vio afectada en *6%*. Al otro día cuando se inicia la función sólo habían *5/6* de la cantidad habitual entonces a media función se rebaja el *24%*. ¿Cuál es el mínimo porcentaje en que se afecta la recaudación?

A) S/.18 B) S/.20 C) S/.17 D) S/.21 E) S/.19

25 Una casa y un automóvil se vendieron en "*x*" soles cada uno. La casa se vendió con un $\left(\frac{25}{2}\right)\%$ menos del costo, y el automóvil con una ganancia del $\left(\frac{25}{2}\right)\%$ del costo. El resultado de esta venta.

A)No es una pérdida ni ganancia
B)Es una pérdida
C)Es una ganancia

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)A	3)B	4)D	5)D	6)B	7)D	8)D	9)B	10)C
11)E	12)D	13)B	14)B	15)B	16)D	17)B	18)B	19)B	20)D
21)C	22)E	23)B	24)B						

MEZCLA y ALEACIÓN

CAPITULO 060

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el Alumno estará en la capacidad de:

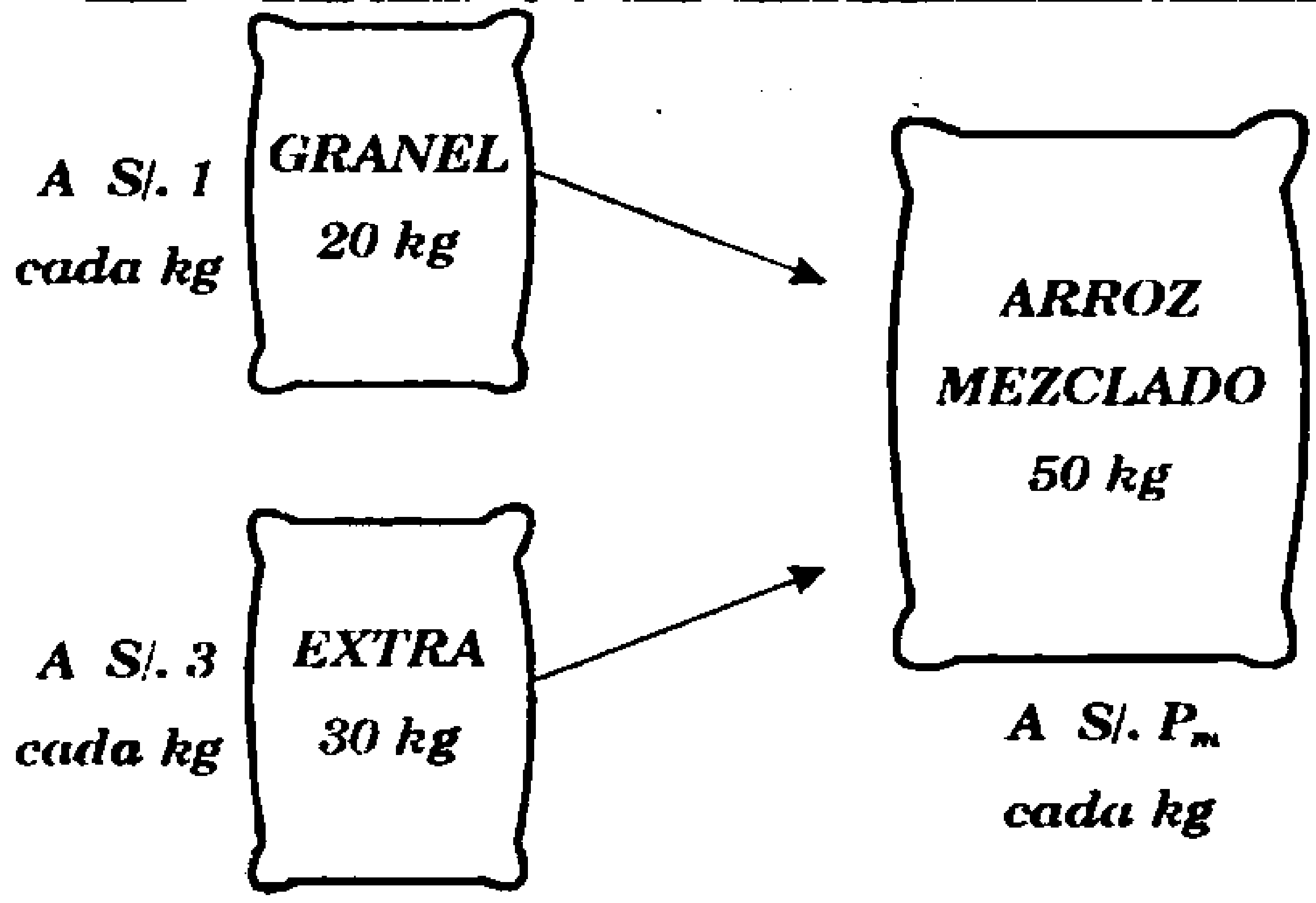
* *Reconocer las sustancias que intervienen en una mezcla.*
* *Determinar el precio medio, grado medio o ley media de una mezcla.*
* *Calcular el precio de venta de la mezcla considerando su ganancia respectiva.*
* *Calcular las cantidades convenientes de las sustancias para obtener la mezcla deseada.*
* *Hallar la cantidad de oro que interviene en una aleación y determinar el costo del objeto.*

INTRODUCCIÓN :

En nuestras actividades comerciales cotidianas , encontramos que cada objeto comercializado posee un determinado valor ya sea por la escasez que se presenta en la naturaleza o por propiedades que no todos los poseen , por la belleza y por la estética, por el costo de producido u obtener. Encontramos entonces que podemos tener objetos de un mismo tipo pero con precios diferentes ya sea por su color. forma, etc, es decir poseen calidades diferentes. En este capítulo abarcaremos el estudio de ciertas cualidades para objetos que habitualmente comercializamos; nuestro estudio va estar dado a las calidades, que se identifican por precios, grados de pureza por sus cantidades y de las calidades que se obtendrán al mezclarse estas.

MEZCLA

Viene a ser la reunión de dos o más sustancias, que están en proporciones variables y en la que cada una mantiene sus propiedades originales. A dichas sustancias se les llama componentes. Ejemplo: Arroz a granel con arroz extra, para obtener arroz de calidad intermedia y con mayor aceptación comercial.



Cantidades de los componentes : $C_1=20$; $C_2=30$

Precios unitarios de los componentes: $P_1=1$; $P_2=3$

Precio unitario de la mezcla: P_m

REGLA DE MEZCLA

Es un procedimiento aritmético (algoritmo) que permite calcular el precio de una unidad de medida de la mezcla (precio medio) para posteriormente determinar el precio de venta.

PRECIO MEDIO (P_M):

Es el precio unitario de la mezcla y se obtiene a partir de que el costo total de la mezcla es el mismo que la suma de los costos de los componentes.

Del ejemplo anterior:

* Costo total de la mezcla: $50\times P_m$
* Costo de los componentes: 20×1 y 30×3

Luego: $50\times P_m=20\times 1+30\times 3$

$$\Rightarrow P_m=\frac{20\times 1+30\times 3}{50}=\frac{C_1\times P_1+C_2\times P_2}{C_1+C_2}=2,2$$

para "*n*" componentes:

$$P_m=\frac{Costo\,Total}{Cantidad\,Total}=\frac{P_1\times C_1+P_2\times C_2+...+Pn\times Cn}{C_1+C_2+...+C_n}$$

OBSERVACIONES:

* El precio medio (P_m) es un promedio ponderado y como todo promedio su valor se encuentra comprendido entre el menor y el mayor de los precios. $\frac{P_1}{1}<\frac{P_m}{2,2}<\frac{P_2}{3}$

* El arroz más barato en apariencia produce una ganancia de $(2,2-1)=1,2$ soles por cada ***kg*** ; es decir la ganancia total vendría ser: $(1,2)\times 20=24.$

* El arroz más caro en apariencia produce una pérdida de $(3-2,2)=0,8$ soles por cada ***kg*** , es decir, la pérdida total vendría a ser: $(0,8)\times 30=24.$

* El precio de mezclar no implica alterar los costos, luego la ganancia aparente se compensa con la pérdida aparente.

$$\boxed{\begin{pmatrix}Ganancia\\ Aparente\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Pérdida\\ Aparente\end{pmatrix}}$$

EJEMPLO INDUCTIVO:

Un comerciante ha comprado harina de tres tipos, tal como se indica:

Tipo	*Cantidad (kg)*	*Precio (1 kg)*
A	*40*	*S/. 16*
B	*60*	*S/. 6*
C	*100*	*S/. 14*

A cómo debe de vender el ***Kg.*** de la mezcla de estos tres tipos de harina para ganar el ***25%.***

RESOLUCIÓN:

I) Se calcula el costo total y peso total de la mezcla:

Costo Total	*Peso Total*
40(16) = 640	*+ 40*
60(6 = 360	*60*
100(14)=1400	*100*
S/. 2400	*200 kg*

II) Se determina el precio medio (precio de costo de la mezcla)

$$\text{Precio Medio} = Pm = \frac{S/.\ 2400}{200} = S/.\ 12 \text{ por 1 kg}$$

III) Sobre el precio medio el comerciante determina el precio de venta considerando su ganancia respectiva.

$$\text{Precio de Venta} = P_v = S/.\ 12+25\%\ (S/.12) = S/.15$$

$\Rightarrow$ El Kilogramo de harina se debe vender en ***S/.15***

Analicemos los precios unitarios con respecto al precio medio de la mezcla.

Tipo	*Cantidad*	*Precio*	*Pm*	*Conclusión*
A	*40*	*S/. 16*	*S/. 12*	Se pierde ***S/.4***
B	*60*	*S/. 6*	*S/. 12*	Se gana ***S/.6***
C	*100*	*S/. 14*	*S/. 12*	Se pierde ***S/.2***

Perdida Total: $40(4) + 100(2) = S/.\ 360$

Ganancia Total: $60(6) = S/.\ 360$

De los resultados se puede señalar que tanto la ganancia como la pérdida son aparentes.

EN GENERAL PARA LAS MEZCLA TENEMOS :

1) $\boxed{\begin{pmatrix}Precio\\ Medio\end{pmatrix} = \dfrac{Costo\ Total}{Peso\ Total}}$

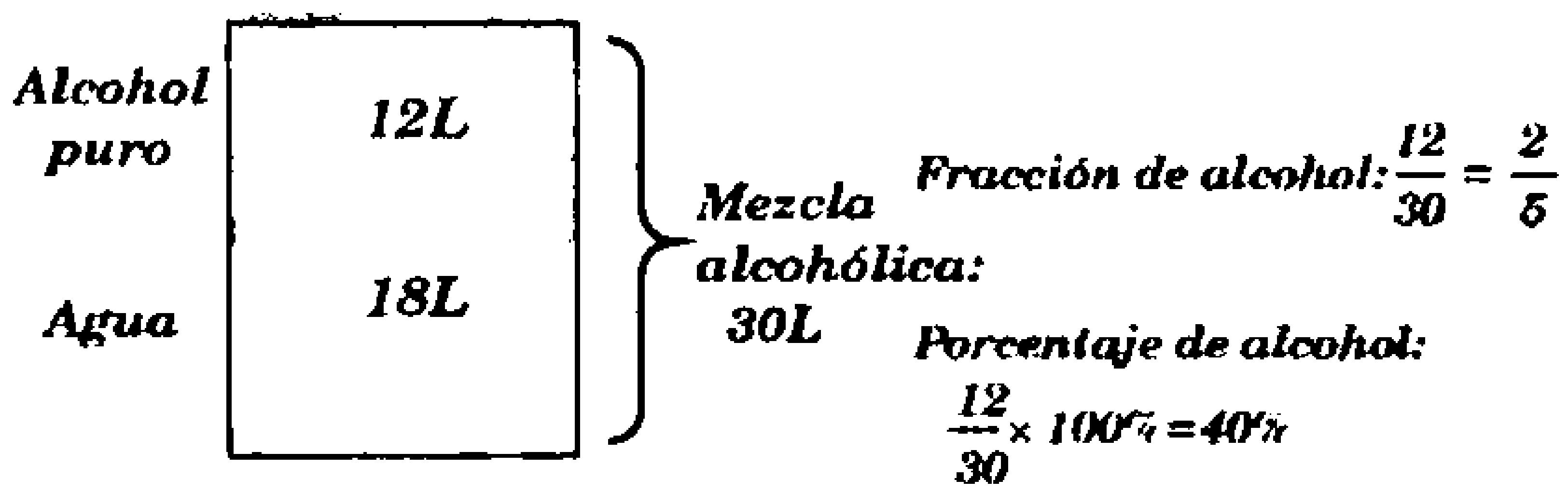
2) $\boxed{\begin{pmatrix}Ganancia\\ Aparente\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Pérdida\\ Aparente\end{pmatrix}}$

3) $\boxed{\begin{pmatrix}Precio\\ de\ Venta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Precio\\ Medio\end{pmatrix} + Ganancia}$

MEZCLA ALCOHÓLICA

Es aquella mezcla en la que interviene el alcohol puro y agua (generalmente).

EJEMPLO 1 :



GRADO DE ALCOHOL (G):

Es un indicador del nivel de pureza de una mezcla alcohólica y expresa la cantidad de alcohol puro que hay en una mezcla cuyo volumen es como ***100***; es decir es equivalente al tanto por ciento del alcohol puro contenido.

$$\boxed{G = \frac{Volumen\ del\ aloohol\ puro}{Volumen\ de\ la\ mezcla} \times 100}$$

Del ejemplo anterior: $G = \dfrac{12}{30} \times 100 \Rightarrow G = 40$

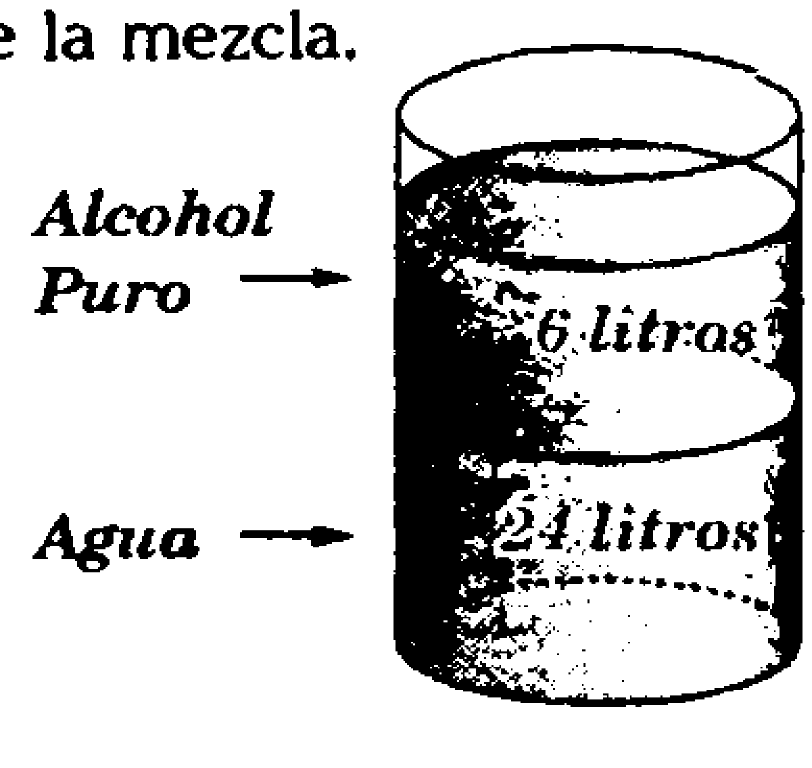
* El grado del alcohol puro es ***100*** y el del agua viene a ser ***0***.

EJEMPLO 2 :

En un recipiente se mezclan ***6*** litros de alcohol puro y ***24*** litros de agua. Determine la concentración o pureza alcohólica de la mezcla.

RESOLUCIÓN:

Volumen Total ***30 L***



* Pureza $= \frac{6}{30} \times 100\% = 20\%$
* Alcohólica

En la comercialización de las mezclas alcohólicas, la pureza alcohólica se expresa en grados y para ello convencionalmente se asume: *(%) <> (°)*

En nuestro ejemplo anterior la mezcla es de **20°** en general:

* $$\left[\begin{matrix}Grado\\Alcohólico\end{matrix}\right] = \frac{\text{volumen de alcohol puro}}{\text{volumen total de la mezcla}} \cdot (100\%)$$

* $$\left[\begin{matrix}\text{Porcentaje de alcohol}\\\text{puro en la mezcla}\end{matrix}\right] <> \left[\begin{matrix}\text{Grado alcóholico}\\\text{de la mezcla}\end{matrix}\right]$$

EJEMPLO 3 :

Se mezclan ***24*** L de alcohol de ***15°*** con ***36 L*** de alcohol de ***20°***. Determine el grado alcohólico de la mezcla.

RESOLUCIÓN:

Para el cálculo del grado alcohólico de la mezcla (llamado grado medio) se procede del mismo modo que para el cálculo del precio medio, esto es:

Volumen : ***24*** litros ***36*** litros

Grado : ***15°*** ***20°***

$$\left[\begin{matrix}Grado\\Medio\end{matrix}\right] = \frac{24(15)+36(20)}{24+36} - 18°$$

Por lo tanto $G_m = 18°$

GRADO MEDIO (G_m):

Si se mezclan alcoholes (no necesariamente puros) cuyos grados son: $G_1; G_2; ...; G_n$; en volúmenes que respectivamente son: $V_1; V_2; ...; V_n$; se obtiene un nuevo alcohol cuyo grado es G_m, el cual viene a ser:

$$G_m = \frac{G_1 \times V_1 + G_2 \times V_2 + ... + G_n \times V_n}{V_1 + V_2 + ... + V_n}$$

EJEMPLO:

Se mezclan alcoholes de diferentes grados: ***9°*** y ***15°*** en cantidades de ***20*** y ***40*** litros respectivamente, ¿Cuál será su grado medio?

$$G_m = \frac{9° \times 20 + 15° \times 40}{20+40} = 13° \;;\; 9° < G_m < 15°$$

Se observa que en apariencia el alcohol de menor grado, aumentó de ***9*** a ***13***, es decir ***4*** unidades (ganó calidad); mientras que el otro alcohol pareciera que disminuyó de ***15*** a ***13***, o sea ***2*** unidades (pierde calidad); pero esto es, tal como se mencionó, sólo en apariencia.

* Ganancia total en grado: ***4 . 20 = 80***
* Pérdida total en grado: ***2×40=80***

Luego: $\boxed{Ganancia\ en\ grado = Pérdida\ en\ grado}$

ALEACIÓN

Es una mezcla en la cual los ingredientes son dos o más metales . En una relación siempre intervienen un metal fino o precioso (por ejemplo : oro , plata , aluminio , etc .) y un metal ordinario también llamado liga (por ejemplo : cobre , níquel , etc.)

En una aleación la relación entre peso del metal fino y el peso total de la aleación determina la pureza de la aleación y se le denomina ley de la aleación.

En el caso de establecer la relación entre el peso del metal ordinario y el peso total se obtiene la liga de la aleación.

LEY DE UNA ALEACIÓN (L) :

Se llama ley a la razón que existe entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación . La ley generalmente se expresa en décimos o en milésimos.

$$L = \frac{F}{T}$$

Donde : F = Peso del metal fino

T = Peso total de la aleación

L = Ley de la aleación

EJEMPLO:

¿Cuál es una ley de una aleación conformado por ***330*** gramos de plata y ***70*** gramos de níquel?

RESOLUCIÓN :

* Observe que el peso total de la aleación es :

$$330 + 70 = 400\ g$$

Entonces :

$$L = \frac{F}{T} \rightarrow L = \frac{330\ g}{400\ g} = 0{,}825$$

La ley de esta aleación es de ***825*** milésimos. Esto significa que de cada ***1 000*** partes ***825*** son de plata el resto es de liga.

LEY DEL ORO DE QUILATES

La ley del oro suele expresarse en quilates , siendo un quilate ***1/24*** del peso total de la aleación. Por ejemplo si una sortija de oro es de ***18*** quilates , significa que ***18/24*** del peso de la sortija es de oro puro y el resto los ***6/24*** son de liga.

Si conocemos la ley en quilates, bastaría dividirla entre ***24*** para expresarla en milésimos

$$L = \frac{\text{Número de quilates}}{24}$$

EJEMPLO :

¿Cuál es la ley milésimo de un dije de ***18*** quilates?

RESOLUCIÓN :

$$L = \frac{\#\ quilates}{24} \Rightarrow L = \frac{18}{24} = 0{,}750$$

La ley de esta aleación es ***750*** milésimos. Esto significa que de cada ***1000*** partes ***750*** partes son de oro puro.

OBSERVACIÓN :

* La ley de una aleación es siempre menor o igual a la unidad.
* Un metal fino tendrá como ley la unidad
* Una liga tendrá como ley cero.

PROPIEDADES :

I) Para las aleaciones con el oro la ley se expresa en quilates asumiendo el oro puro una ley de ***24*** quilates

$$\boxed{Ley = \frac{N}{24}}$$; N = número de quilates

1 quilate = $\frac{1}{24}$ (peso total)

II) Para la mezcla de dos o más aleaciones

$$\boxed{L = \frac{P_1L_1 + P_2L_2 + P_3L_3 + \ldots\ldots + P_nL_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots + P_n}}$$

Donde :

* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$: Son los pesos de cada una de las aleaciones.
* $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$: Son las leyes de cada aleación:

III) En una aleación entre el oro y la plata se considera a la plata como metal ordinario.

IV) Para la mezcla de dos aleaciones ($L_1 > L_m > L_2$)

$$\overbrace{\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix}}^{Pesos} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \overbrace{\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}}^{Leyes} \Rightarrow L_m \Rightarrow \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \frac{L_m - L_2}{L_1 - L_m}}$$

EL PROBLEMA DIRECTO :

Consiste en calcular la ley resultante al fundir dos o más aleaciones de leyes diferentes. Para el cálculo aplicamos:

$$\boxed{L = \frac{Peso\ Total\ del\ Metal\ Fino}{Peso\ Total\ de\ Aleación}}$$

EJEMPLO :

Se funden tres lingotes de plata , el primero de ***1500g*** y ***0,85*** de ley ; el segundo de ***800 g*** y ***0,95*** de ley y el último de ***700 g*** y ***0,92*** de ley.

¿Cuál es la ley de la aleación obtenida?.

RESOLUCIÓN :

$P_1 = 1500\,g \quad P_2 = 800\,g \quad P_3 = 700\,g$

$L_1 = 0{,}85 \quad L_2 = 0{,}95 \quad L_3 = 0{,}92$

* Ahora aplicando , la formula dada :

$$L = \frac{1500 \times 0{,}85 + 800 \times 0{,}95 + 700 \times 0{,}92}{1500 + 800 + 700}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2679}{3000} = 0{,}893$$

EL PROBLEMA INVERSO

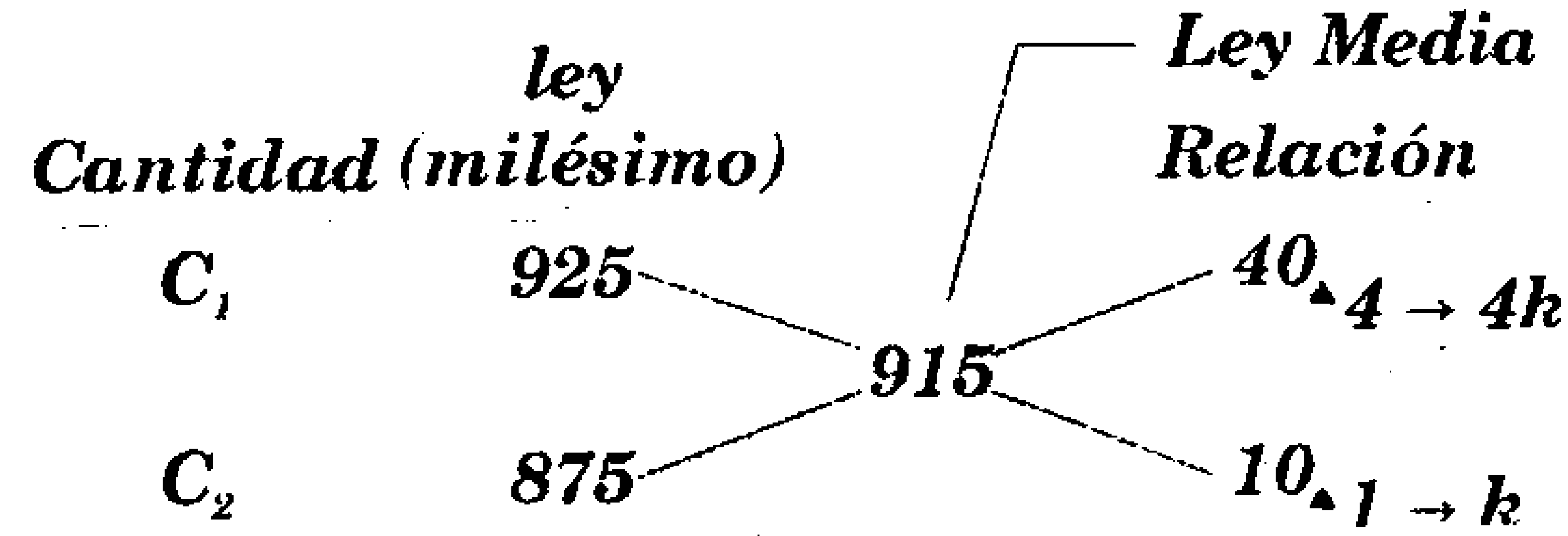
Consiste en calcular las cantidades de cada uno de las aleaciones que se necesitan para formar una aleación cuya ley es conocida . En este caso se puede aplicar el método de aspa y para facilidad de cálculo se puede tomar la ley de milésimos.

EJEMPLO :

Se tiene dos lingotes de plata , uno de ley ***0, 925*** y el otro de ley ***0,875.*** ¿Cuántos kilogramos de cada uno se han de tomar para obtener ***2,5 kg*** de ley ***0,915***?.

RESOLUCIÓN :

Cantidad Ley (milésimo) ley media Relación



* Pero :

$$C_1 + C_2 = 2{,}5 \Rightarrow 4k + k = 2{,}5$$

$$\Rightarrow 5k = 2{,}5 \Rightarrow k = 0{,}5$$

* Luego Habrá : ***4(0,5)=2kg*** de ley ***0,925***, y ***0,5 kg*** de ley ***0, 875***

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Determinar el precio medio de un kilogramo de arroz al mezclar :

Cantidad	precio x kilo
2 kg	S/.2, 00
3 kg	S/.3, 50
4 kg	S/.1, 50
1 kg.	S/.0, 50

A) 2 B) 2, 1 C) 2, 5 D) 3 E) 1, 9

02 Determinar el precio medio

Cantidad	precio x kilo
5 kg	S/. 3
7 kg	S/. 2
4 kg	S/. 5
4 kg.	S/. 1

A) 2, 25 B) 3, 15 C) 3, 25 D) 2, 65 E) 2, 85

03 Se mezcla vino de ***S/.150*** el litro y otro de ***S/.20*** el litro. ¿Cuántos litros de vino deben entrar del primer vino para obtener ***88*** litros de ***S/.115***?

A) 71 B) 73 C) 74 D) 76 E) 78

04 Se mezcla vino de ***S/.15*** el litro con vino de ***S/.8*** el litro y el precio del litro de la mezcla resulta a ***S/.12***. ¿En qué relación se debe mezclar los vinos.

A) 4: 3 B) 1: 3 C) 3:1 D) 2: 3 E) 3: 5

05 Una solución contiene ***30*** litros de alcohol con ***50%*** de pureza. ¿Cuántos litros de alcohol de ***80%*** de pureza se debe agregar para que la solución final sea de ***60%***?

A) 10 B) 15 C) 10, 5 D) 20 E) 17

06 Se tiene una mezcla de alcohol y agua al ***20%***. Si se agrega ***30 l*** de alcohol puro , la nueva mezcla tendría ***100*** al :

A) 45% B) 44% C) 72% D) 81% E)36%

07 Un comerciante tiene vino de ***S/.18***. el litro , le agrega una cierta cantidad de agua y obtiene una mezcla de ***120*** litros que venden en ***S/. 2070***. Si en esta venta gana el ***20%*** del preció de venta, ¿cuántos litros de agua contiene la mezcla?

A) 30 litros B) 35 C) 25 D) 28 E) 32

08 Se tiene ***800ml*** de alcohol de ***85°***, ¿cuántos ***ml*** de agua se debe añadir para reducir en ***5°*** la pureza de la mezcla?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 80 E) 100

09 ¿Cuál debe ser la pureza del alcohol que deberá añadirse a ***1200 ml*** de alcohol de ***96°***, para obtener ***2000 ml*** de mezcla de ***90°***?

A) 84° B) 81° C) 72° D) 75° E) 86°

10 A José se le pide que baje el grado de alcohol de un recipiente de ***3*** litros de ***57°***, para lo cuál agrega ***2*** litros de alcohol de ***20%***. ¿Cuántos grados disminuye la mezcla original?

A)13,2° B) 14, 5 C) 13, 8 D) 12, 9 E) 14, 8

11 ¿Cuántos litros de agua debe agregar a una mezcla de ***5*** litros al ***80%*** de pureza , para obtener una mezcla final del ***25%***?

A) 8 L B) 10 C) 9 D) 11 E) 12

12 Se tiene una solución de sal al ***24%*** y otra al ***4%*** para obtener ***20*** litros de solución al ***8%*** de sal. ¿Qué volumen de la segunda se debe considerar

A) 4 L B) 3 C) 2 D) 5 E) 16

13 Por el grifo de un caño sale agua a ***16°*** y por el otro a ***64°***. ¿Qué cantidad debe salir de cada grifo para tener ***288*** litros de agua a ***26°*** de temperatura?

A) 240 y 60 L B) 228 y 50
C) 228 y 60 D) 240 y 50

14 Se han mezclado ***90*** litros de alcohol al ***50%*** con ***20*** litros al ***20%***, con ***50*** litros de alcohol puro y ***40*** litros de agua. ¿Cuál es el grado de concentración de la mezcla final?

A) 52, 5% B) 49, 5% C) 42, 5%
D) 60% E) 55%

15 Determinar la ley en milésimos de una joya de ***14*** quilates.

A) 0, 5 B) 0, 65 C) 0, 583 D) 0, 68 E) 0, 75

16 Se tiene una cadena de plata, cuyo peso es ***200g***, cuya ley es de ***0,90***. ¿Cuál es peso de la liga?

A) 50 g B) 40 C) 30 D) 20 E) 35

17 Si se mezcla ***180 g*** de oro puro con ***60 g*** de liga, ¿cuál será su ley en quilates?

A) 14 B) 18 C) 20 D) 24 E) 16

18 Si fundimos ***200 g*** de oro de ***18*** quilates con ***300 g*** de oro de ***21*** quilates y con ***400 g*** de oro de ***14*** quilates , ¿cuál es la ley de la aleación en quilates?

A) 17,5 B) 17,4 C) 17,3
D) 17,2 E) 17,1

19 Para obtener una barra de plata de ***800g*** con una ley ***0,850*** se emplearon ***200 g*** de plata de ley ***0,700*** y el resto de plata con ley desconocida. Determinar la ley desconocida.

A) 0,900 B) 0,925 C) 0,850
D) 0,800 E) 0,750

20 ¿Cuál es la ley resultante al fundir ***30 g*** de plata pura , ***20 g*** de cobre puro y ***50 g*** de una aleación de

plata que contiene *10%* de metal ordinario?

A) 0,75 *B) 0,8* *C) 0,6*
D) 0,5 *E) 0,45*

21 ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse a la barra de plata que pesa ***615*** gramos y que tiene ***0,908*** de ley para que resulta una aleación de ***0,820*** de ley?

A) 66 g *B) 44* *C) 48* *D) 64* *E) 88*

22 Se funden dos barras de plata , la primera pesa ***600g*** y tiene una ley de ***925*** milésimos , la segunda pesa ***900g*** y su ley es ***800*** milésimos. Determinar la ley resultante en milésimos.

A) 800 *B) 820* *C) 825* *D) 850* *E) 875*

23 Si se funde ***50 g*** de oro puro , con ***450 g*** de una aleación de oro , la ley de la aleación aumenta en ***0,020.*** ¿Cuál es la ley de la aleación primitiva?

A) 0,900 *B) 0,800* *C) 0,850*
D) 0,750 *E) 0,875*

24 Una aleación de plata y cobre pesa ***140 g*** y tiene una ley de ***0,920*** ; se ha obtenido a fundir juntos dos lingotes , de los cuales uno pesa ***60g*** y es plata pura. Determinar la ley del segundo lingote.

A) 0,840 *B) 0,860* *C) 0,870*
D) 0,890 *E) 0,900*

25 Se dice que el oro americano es de ***18*** quilates y el brasileño de ***14*** quilates, si fusionamos ***800g*** de oro americano con ***2400g*** de oro brasileño, ¿cuál es la ley resultante en milésimos?

A) 625 *B) 650* *C) 675*
D) 700 *E) 725*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Completar las siguientes oraciones utilizando las palabras del recuadro. Use cada palabra sólo una vez.

Simple – puro – cero – liga – aleación
Uno – multiplica.– divide – suma

* En una aleación , al metal ordinario se le denomina ____________.

* Una ley de ***24*** quilates corresponde al oro____________.

* La ley de plata es____________como máximo y como ....mínimo.

* Para expresar el número de quilates del oro en milésimos se ____________por ***24***.

02 Indique entre paréntesis la letra que corresponde a la característica planteada.

( ) Es ***1/24*** del peso total de la aleación.
( ) Razón entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación.
( ) Método para hallar la ley resultante de una aleación.
( ) Ley de la liga.

A) Mezcla *B) Promedio geométrico* *C) Quilates*
D) Cero *E) Promedio ponderado*
F) ley *G) Uno*

03 ¿Qué ley nunca existe?

A) 0,800 *B) 0,600* *C) 0,750*
D) 1,25 *E) 0,975.*

04 ¿Cuál es la ley de una aleación conformado por ***240g*** de plata y ***60g*** de liga?

A) 0,700 *B) 0,600* *C) 0,800*
D) 0,900 *E) 0,750*

05 Si un plato recordatorio de plata pesa ***400g*** y tienen una ley de ***0,925,*** ¿Qué cantidad de plata pura contiene?

A) 360 g *B) 380* *C) 320*
D) 350 *E) 370*

06 Una barra de oro pesa ***15kg*** y tiene una ley de ***800*** milésimos, ¿cuál es la cantidad de liga empleada?

A) 10 kg *B) 11* *C) 4* *D) 3* *E) 2*

07 Una barra de plata que pesa ***8 kg*** tienen grabada como ley ***0,925*** , pero en realidad la ley es ***0,875*** . ¿qué cantidad de plata pura se ha dejado de emplear?

A) 0,3 kg *B) 0,4* *C) 0,2*
D) 0,5 *E) 1,2*

08 En la fundición se tiene ***25 kg*** de plata con una ley de ***0,930***, si se añaden ***5 kg*** de liga, ¿cuál será la nueva ley?

A) 0,850 *B) 0,900* *C) 0,750*
D) 0,800 *E) 0,775*

09 Si mezclamos oro de ***21*** quilates y oro de ***14,*** ¿en qué proporción debe estar los pesos para luego de fundirlo se obtenga oro de ***18*** quilates?

A) 4: 3 *B) 3. 2* *C) 2: 1*

D) 5: 2 *E) 3: 1*

10 Se desea reducir la ley de una barra de oro de 18 quilates a *16* quilates. ¿Qué cantidad de liga debe emplearse para cada kilogramo de dicha barra?

A) 120 g *B) 150* *C) 125*
D) 130 *E) 145*

11 Una barra de *600g* contiene *400g* de plata pura y el resto plata con una ley de *850* milésimos, ¿cuál es la ley de la barra?

A) 8, 750 *B) 0, 925* *C) 0, 976*
D) 0, 920 *E) 0, 950*

12 Un lingote contiene *3kg* de plata pura y *1 kg* de liga, ¿qué cantidad de plata cuya ley es *0,90* es necesario fundir para obtener plata con una ley de *0,850*?

A) 8 kg *B) 7* *C) 6* *D) 5* *E) 9*

13 Se tienen dos lingotes de plata y cobre de leyes *0,825* y *0,625* . El primero tiene *14 kg* de cobre y el segundo *50 kg* de plata. Hallar la ley del lingote resultante de la fusión de ambos

A) 0,725 *B) 0,690* *C) 0,820*
D) 0,792 *E) 0,759*

14 Se tienen dos lingotes de plata y cobre de leyes *0,750* y *0,850*. El primero pesa *60 kg* y el segundo tiene *5kg* de plata. Hallar la ley del lingote resultante de la fusión de ambos.

A) 0,780 *B) 0,790* *C) 0,800*
D) 0,820 *E) 0,830*

15 ¿Cuántos quilates tiene una aleación que contiene *85* gramos de oro y *15* gramos de cobre?

A) 18 *B) 16* *C) 19* *D) 22* *E)20,4*

16 Un anillo de oro de *18* quilates pesa *4* gramos. Si el gramo de oro puro se paga a *$7,20*; ¿cuánto vale el anillo?

A) $21,60 *B) 17,60* *C) 14*
D) 34, 4 *E) 34, 08*

17 Se tienen dos barras de oro, en la primera el *80%* del peso total es oro , en la segunda el *75%* de su peso es oro , siendo esta el cuádruple del anterior . Calcular la ley de la fusión de ambas.

A) 0,760 *B) 0,755* *C) 0,782*
D) 0,756 *E) 0,742*

18 Se hizo una aleación con *22 g* de oro cuya ley es *500* milésimo, *25g* de oro de ley *750* milésimos. ¿De cuántos quilates resulta la aleación , en quilates?

A) 14,4 *B) 13,5* *C) 13,8*
D) 15,6 *E) 16,4*

19 Una aleación con un peso de *4 kg* se funde con *5kg* de plata y resulta *0,9* de ley. ¿Cuál es ley de la aleación primitiva?

A) 0,825 *B) 0,525* *C) 0,345*
D) 0,775 *E) 0,629*

20 ¿Qué cantidad de cobre habrá de añadirle a una barra de plata de *4,4 kg* cuya ley es *0,92* para que esta disminuya a *0,88*?

A) 0, 1 kg *B) 0,2* *C) 0,3*
D) 0, 4 *E) 0,5*

TAREA DOMICILIARIA

01 Expresar en milésimo una ley de *21* quilates.

A) 850 *B) 875* *C) 925* *D) 825* *E) 900*

02 Se funden dos barras de oro , la primera pesa *500g* y su ley es *840* milésimos ; la segunda pesa la mitad de la primera y es de *18* quilates, ¿cuál es la ley resultante en milésimos?

A) 810 *B) 815* *C) 820*
D) 830 *E) 840*

03 Una barra de oro pesa *400 g* y es de *14* quilates ; se funde con otra barra de *240 g* y de *18* quilates, ¿cuál es la ley resultante en quilates?

A) 14,5 *B) 15* *C) 15,5*
D) 16 *E) 16,5*

04 Una barra de plata pesa *6 kg* y tiene una ley de *850* milésimos . Se quiere aumentar la ley a *900* milésimos fusionándola con plata de ley *975* milésimas, ¿cuántos *kg* de la segunda aleación se necesitará?

A) 2 *B) 2,5* *C) 3* *D) 3,5* *E) 4*

05 Si tenemos *1400 g* de oro de *18* quilates, ¿cuántos gramos de oro de *21* quilates se debe agregar , para que la ley resultante sea de *19* quilates?

A) 700 *B) 800* *C) 900* *D) 1000* *E) 500*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)*	2)*	3)D	4)C	5)E	6)D	7)B	8)E	9)A	10)C
11)E	12)A	13)A	14)C	15)E	16)A	17)A	18)A	19)D	20)B
1)B	2)A	3)C	4)E	5)A					

REGLA DE INTERES

CAPITULO 061

OBJETIVOS :

- *Reconocer qué magnitudes intervienen en el cálculo del interés.*
- *Poder tener una idea de qué tipo de interés aplican las entidades financieras y cómo elegir un mejor pago.*

* *Obtener el beneficio por cierto dinero prestado o impuesto.*

* *Obtener la utilidad del dinero por cada cantidad de tiempo (Tasa)*

- *Manejar en distintos periodos la tasa y el tiempo.*

INTRODUCCION :

"La señora Lucha compra un artículo por el valor de ***S/.500*** y como no entiende mucho de esto que son los créditos, prefire pagar la deuda en 6 cuotas fijas mensuales, a pesar que el cajero de la tienda le ofrece el pago rotativo (monto , ***24*** = Pago mínimo)".

¿Eligió bien la señora Lucha o no? (tasa: ***5%*** men).

Veamos la siguiente tabla

MES	CAPITAL	INTERÉS	MONTO	PAGO ÓPTIMO	PAGO FIJO	PAGO MÍNIMO
1	S/.500,00	S/. 25,00	S/. 525,00	S/. 150	S/. 98,51	S/. 21,88
2	S/. 375,00	S/. 18,75	S/. 393,75	S/. 100	S/. 98,51	S/. 16,41
3	S/. 293,75	S/. 14,69	S/. 308,44	S/. 100	S/. 98,51	S/. 12,86
4	S/. 208,44	S/. 10,42	S/. 218,86	S/. 100	S/. 98,51	S/. 9,12
5	S/. 118,86	S/. 5,94	S/. 124,80	S/. 100	S/. 98,51	S/. 5,20
6	S/. 18,86	S/. 0,94	S/. 19,80	S/. 20	S/. 98,51	S/. 0,83
			TOTAL=	S/. 570	S/. 591,06	
TASA=	5%	MENSUAL	DIFERENCIA	S/. 21,05	A FAVOR DEL CLIENTE	

En ella vemos que el crédito rotativo o pago mínimo es rentable cuando se paga más de lo que nos dice el recibo y a su vez mejor que pagar cuotas fijas.

Esta diferencia de ***S/. 21,05*** sería mayor si la primera u otras de las cuotas fueran mayores en la columna de pago óptimo. ¿Por qué?.

REGLA DE INTERES

En el desarrollo de nuestra vida diaria, tratamos de mejorar nuestra situación, por ejemplo si poseemos cierta suma de dinero y deseamos que esta genere algún beneficio se presta a una persona, para que esta luego de un cierto tiempo devuelva la cantidad prestada y una suma adicional, que nos va a representar una ganancia, beneficio o utilidad. Hay instituciones dedicadas a recibir una suma de dinero de un cliente y luego de un cierto tiempo esta le paga los intereses acordados entre ambas partes.

Nuestro desarrollo en el presente capítulo es justamente calcular estas ganancias o intereses en forma práctica conociéndose la suma de dinero prestado o depositada, el tiempo y la tasa de interés.

El interés es un procedimiento aritmético que en base a la comparación de magnitudes permite determinar el beneficio (Interés: ganancia o utilidad), generado por un bien (capital: mueble o inmueble), que ha sido depositado, prestado o invertido en forma productiva, durante un determinado período (tiempo), bajo ciertas condiciones financieras (tasa de interés)

ELEMENTOS

CAPITAL (C) :

Es todo aquello que se va a prestar o alquilar para que luego de un periodo de tiempo genere una ganancia.

TIEMPO (t) :

Es el período durante el cual se va a ceder o depositar un determinado capital. Para efectos comerciales se considera generalmente el mes comercial y el año comercial donde:

* ***1*** mes comercial tiene ***30*** días

* ***1*** año comercial tiene ***360*** días

* ***1*** año común tiene ***365*** días

* ***1*** año bisiesto tiene ***366*** días

INTERÉS (I) :

Es la ganancia, utilidad o beneficio que produce el capital, durante cierto período de tiempo y bajo ciertas condiciones.

TASA DE INTERÉS (r%) :

Llamado también rédito, es la ganancia que se obtiene por cada ***100*** unidades monetarias en una unidad de tiempo.

EJEMPLO:

Una tasa del ***5%*** mensual, significa que cada mes se gana el ***5%*** del capital.

OBSERVACIONES:

i) Cuando no se indique la unidad de tiempo referida a la tasa, se asumirá que es anual.

ii) Tasas equivalentes

18% bimestral < > 9% mensual.

4% mensual < > 12% trimestral

60% anual < > 5% mensual.

MONTO (M) :

Es la suma del capital más los intereses que se obtienen, al final del período de imposición.

$$\boxed{M = C + I}$$

CLASES DE INTERÉS

1) INTERÉS SIMPLE :

Es cuando el interés o ganancia que produce el capital no se acumula al capital.

EJEMPLO INDUCTIVO:

Alberto deposita en un Banco ***S/. 3 000*** durante ***5*** meses a una tasa del ***4%*** mensual. ¿Cuánto es el interés producido y el monto obtenido?

RESOLUCIÓN:

Capital : ***S/. 3 000***

Tiempo : ***5*** meses

Tasa : ***4%*** mensual

Sabemos que ***4%*** mensual significa que en un mes se ganará el ***4%*** del capital, esto es:

Interés *(1* mes*)* = ***4% (3000)***

Deducimos que:

Interés *(5* meses*)* = ***4% (3000)× 5***

⇒ Interés *(5* meses*)* = ***S/. 600***

Además:

Monto = ***3 000 + 600*** ⇒ Monto = ***S/. 3600***

EN GENERAL:

Interés = (Tasa) (capital) (tiempo)

Debe estar expresados en las mismas unidades (tasa y tiempo)

EJEMPLO :

Calcular el interés que produce ***S/. 2 400*** al cabo de ***7*** meses a una tasa del ***60%***.

RESOLUCIÓN:

Capital : ***S/. 2 400***

Tiempo : ***7 meses***

Tasa : ***60% anual***

Como el tiempo está expresado en meses, la tasa debe ser mensual, luego: ***60%*** anual < > ***5%*** mensual

Interés = ***5% (2400)×7***

⇒ Interés = ***S/. 840***

FORMULAS :

$$\boxed{I = \frac{C \times r \times t}{100}} \quad \textit{Cuando "t" está en años}$$

$$\boxed{I = \frac{C \times r \times t}{1200}} \quad \textit{Cuando "t" está en meses}$$

$$\boxed{I = \frac{C \times r \times t}{36000}} \quad \textit{Cuando "t" está en días}$$

* El rédito *(r)* siempre se considera ***anual***.

INTERÉS COMPUESTO

Es cuando a un capital se le acumula un interés al final de cada intervalo de tiempo establecido. Este procedimiento es conocido como el proceso de capitalización.

EJEMPLO INDUCTIVO:

Joel deposita en un Banco ***S/. 2 000*** durante medio año a una tasa del ***60%*** y capitalizable bimestralmente. Calcular el interés y el monto.

RESOLUCIÓN:

Como el período de capitalización es bimestral, la tasa y el tiempo deben ser expresados en bimestres.

Capital : ***S/. 2 000***

Tiempo : Medio año < > ***3*** bimestres

Tasa : ***60%*** anual < > ***10%*** bimestral.

* Gráficamente evaluamos lo que ocurre :

10%(2000) → *10%(2200)* → *10%(2420)* →

S/ 2000(2m)	*2200(2m)*	*2420(2m)*	*2662*
Monto (capital)	*Monto (capital)*	*Monto (capital)*	*Monto Final*
1er Periodo	*2do periodo*	*3er periodo*	

Monto Final = ***S/. 2 662***

Interés Total = ***2 662 – 2000 = S/. 662***

EN GENERAL :

Monto Final = (1 + Tasa) $^{\text{periodos de capital}}$ ***× Capital***

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Una persona deposita *S/. 3 200* en un Banco, al cabo de *7* meses se convirtió en *S/. 4 096*. Halle la tasa de interés.

RESOLUCIÓN:

Capital : *3 200*

Tiempo : *7* meses

Monto : *4 096*

Interés : $4\,096 - 3\,200 = 896$

Tasa : *r %* mensual

Luego : Interés = Tasa × capital × tiempo $896 = r\%(3\,200)\times 7$

$\Rightarrow 4\% = r\%$

$\Rightarrow$ La tasa anual es $4\%\,(12) = 48\%$

PROBLEMA 2 :

Calcular el interés que producirá un capital de *S/. 6 250* en medio año, al *12%* trimestral, capitalizable trimestralmente.

RESOLUCIÓN:

Capital : *6 250*

Tiempo : Medio año <> *2* trimestres

Tasa : *12%* trimestral.

Entonces:

Monto $= (1 + 12\%)^2 \times 6\,250$

$= S/.\ 7\,840$

Luego: Interés $= 7\,840 - 6\,250$

$\Rightarrow$ Interés = *S/. 1 590*

PROBLEMA 3 :

Halle la tasa al cual fue impuesto *S/. 3 750*, para que en un año genere un interés de *S/.2730* y capitalizándose cuatrimestralmente.

RESOLUCIÓN:

Capital : *S/. 3 750*

Interés : *S/. 2 730*

Monto : $3\,750 + 2\,730 = S/.\ 6\,480$

Tiempo : *1* año <> *3* cuatrimestres

Entonces: $6480 = (1 + r\%)3 \times 3750$

$\Rightarrow r\% = 20\%$

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Al cabo de cuántos meses los intereses de un capital al *60%* serán iguales a dicho capital.

A)14 B)16 C)20 D)21 E)22

02 Determinar el interés producido por *S/. 2600* al *7%* en *5* meses.

A)S/. 910 B)S/. 790 C)S/. 800 D)S/. 808 E)S/. 810

03 Hallar el capital que colocado al *4,5%* durante *2* años se ha convertido en *$1744*.

A)$1500 B)$1550 C)$1600 D)$1650 E)$1700

04 ¿Qué capital se debe imponer al *6%* para que en un año se tenga un interés de *$3600*?

A)$50000 B)$56 000 C)$60 000 D)$62000 E)$64 000

05 Que tiempo debe ser prestado un capital al *20%* para que se triplique.

A)18 años B)12 C)15 D)10 E)20

06 Determine el tiempo que debe ser colocado un capital al *25%* para que se duplique.

A)dos años B)tres años C)cuatro años D)cinco años E)seis años

07 ¿Durante cuánto debe ser impuesto un capital al *5%* anual para que el interés sea igual al *20%* del monto?

A)dos años B)tres años C)cuatro años D)cinco años E)seis años

08 María impone la tercera parte de su capital al *80%* anual y el resto al *30%* anual, si el interés producido en *5* meses por su capital total es *S/. 3850* ¿Cuál será su capital inicial?

A)30000 B)32000 C)18000 C)19800 E)25000

09 Un artículo vale *$ 18000* al contado. Un comprador conviene en pagar *$ 80000* como cuota inicial y el resto en *60* días con un recargo del *5%* sobre el precio de contado. ¿Qué tasa de interés simple anual pagó?

A)24 B)30% C)36% D)36% E)54%

10 Carlos impone los *4/7* de su capital al *4%* y el resto al *5%* y resulta un interés anual de *S/. 3100*; diga ¿Cuál es la suma impuesta al *4%*?

A)S/. 20000 B)S/. 24000 C)S/. 30000 D)S/. 40000 E)S/. 48000

11 Un capital impuesto durante un año al *3%* produce *S/. 21* mas que otro impuesto al *4%* durante 9 meses, ¿cuál es la diferencia de dichos capitales?

A)S/. 21 000 B)S/. 2 100 C)S/. 70 000 D)S/. 7 000 E)S/. 700

12 ¿Qué interés produce *S/. 240 000* en *3* meses y *15* días al *12%* trimestral?

A)S/. 33 600 B)S/. 3 360 C)S/. 67 200 D)S/. 6 720 E)S/. 16 800

13 ¿A qué porcentaje debe ser colocado un capital para que en *2* años y *1* mes produzca un interés equivalente a los *1/5* del monto?

A)10% B)15% C)20% D)25% E)12%

14 Los *5/7* de un capital colocado al *3%* produce anualmente *S/. 100* mas que el resto colocado al *4%* ¿Cuál es el capital?

A)S/. 60 000 B)S/. 30 000 C)S/. 20 000 D)S/. 10 000 E)S/. 25 000

15 ¿Qué capital es aquel que colocado al *5%* anual durante *12* meses produce *S/. 3300* menos que si se impone al *5%* mensual durante el mismo tiempo?

A)S/. 8 000 B)S/. 6 000 C)S/. 5 000 D)S/. 4 000 E)S/. 3 000

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Un capital estuvo impuesto al *9%* de interés anual y después de *4* años se obtuvo un monto de *S/.10 200*. ¿Cuál es el valor del capital?

A)S/. 6 528 *B)S/. 12 000*
C)S/. 13 872 *D) S/. 9 260*
E) S/. 7 500

02 ¿A qué tasa de interés la suma de *S/. 20 000* llegará a un monto de *S/. 21 200* colocada a interés simple en *9* meses?

A) 5% B) 6% C) 7% D) 8% E) 9%

03 La diferencia de dos capitales es de *S/. 2000,00* el primero se impone al *16%* anual y el segundo al *10%* semestral. Si al cabo de un año los montos son iguales, hallar el mayor capital.

A) 48 000 B) 46 200 C) 60 000
D) 60 800 E) 48 400

04 ¿Cuál es el capital que se coloca al *25%* durante *3* años, para obtener un interés de *S/. 1620*?

A) S/. 2 160 B)S/. 1 800 C)S/. 720
D) S/. 972 E) S/. 2 430

05 Un capital estuvo impuesto al *9%* anual. Si se obtuvo un monto después de *4* años de *S/.10200*. ¿Cuál es el capital?

A)S/. 5 800 B)S/. 6 000 C)S/. 6 500
D)S/. 7 000 E)S/. 7 500

06 Se tiene un capital prestado a una determinada tasa de interés de tal manera que en *5* meses produce un monto de *S/. 33 750* y en 7 meses el monto producido es de *S/. 35 250*. ¿Cuál sería el monto al término del año?

A)S/.37750 B)S/.39000 C)S/.39 250
D)S/.39750 E) S/. 40 000

07 Un capital impuesto al *15%* trimestral de interés simple produce anualmente *S/. 3 000* más de interés que si se impusiese al *55%* anual. ¿Cuál es dicho capital?

A)S/.60000 B)S/.65000 C)S/. 68 000
D) S/. 69 000 E) S/. 70 000

08 Andrea tiene *S/.400* que presta al *10%* mensual. Fabiola tiene *S/.600* que presta al *10%* bimensual. Dentro de cuánto tiempo los montos serán iguales.

A)30 meses B)20meses C)18 meses
D) 24 meses E) 27 meses

09 La suma de un capital con sus intereses durante dos *(2)* meses ha sido de *4200000* unidades monetarias y la suma del mismo capital con sus intereses, impuestos a igual tanto por ciento, durante *4* meses, ha sido de *6400000* unidades monetarias. Calcular el porcentaje anual a que estuvo impuesto.

A) 400% B) 500% C) 660%
D) 600% E) 650%

10 Durante cuánto tiempo estuvo depositado un capital al *12%* anual, si los intereses producidos alcanzan el *60%* del capital.

A) 3 años B) 5 años C) 6 años
D) 7 años E) 8 años

11 Un artefacto que cuesta *25 000* nuevos soles se desvaloriza uniformemente a razón de *2 500* nuevos soles al año. Una persona que desea comprarlo deposita *12 500* nuevos soles al *4%* de interés simple. Dentro de cuánto tiempo podrá adquirir dicho artefacto.

A) 7 años, 5 meses
B) 3 años, 1 mes
C) 2 años, 4 meses
D) 5 años, 3 meses
E) 4 años, 2 meses

12 Los $\frac{2}{5}$ de un capital han sido impuestos al *30%*, $\frac{1}{3}$ al *35%* y el resto al *40%* . El interés total es de *S/. 41 200* anuales. Calcúlese el capital.

A) 100 000 B) 120 000 C) 130 000
D) 140 000 E) 145 000

13 Se presta un capital al *21%* trianual. Si se hubiese impuesto a *2* años más, a la misma tasa, el interés hubiera sido *125%* del anterior. ¿Cuál fue el tiempo de imposición?

A) 10 años B) 6 años C) 7 años
D) 8 años E) 9 años

14 Un capital se impone al *50%* anual durante *3* años, de manera que cada año se reciben las ganancias y la mitad de ellas se suman al capital. Si al final del tercer año se recibieron *S/. 37 500*. ¿Cuál fue el capital depositado?

A)S/.1000 B)S/.16 000 C)S/.32 000
D)S/.20000 E)S/.11000

15 El interés que produce un capital al *r%* mensual durante *1* año y medio es mayor en *2 112* soles al que produce dicho capital al *r%* anual en el mismo tiempo. Calcular el interés que produce el capital mencionado al *r%* diario durante *2* meses.

A) 9 200 B) 7 425 C) 7 680
D) 8 650 E) 8 120

16 Tres personas imponen sus capitales que están en la misma relación que sus edades que son *20*, *25* y *21* años. Al *15%*, *20%* y *22/7%* respectivamente. Calcular la suma de los intereses que producirán los capitales en un año. Si la suma de los capitales es *S/. 1 320*.

A)S/.169,42 *B)S/.178,85*
C)S/.165,2 *D)S/.163,8*
E)S/.173,2

17 Un capitalista coloca su fortuna al *4%* dos años después retira *1/3* del capital y deja a los demás producir interés durante *6* meses; después de este tiempo retira *1/3* del capital que quedaba entonces colocado, deja el capital disminuido durante *9* meses. El total de los intereses desde el principio ha sido de *S/. 19 456*. ¿Cuál era el capital primitivo?

A)S/.182000 *B)S/.182100*
C)S/.182200 *D)S/.182 300*
E) S/. 182 400

REGLA DE DESCUENTO

CAPITULO 062

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

- *Reconocer los elementos de la regla de descuento en una operación financiera.*
- *Distinguir un descuento comercial de un descuento racional.*
- *Aplicar las propiedades del descuento en la resolución de problemas.*
- *Realizar cambio de letras en diferentes formas de pago.*
- *Calcular el tiempo de vencimiento de la letra única.*

INTRODUCCIÓN :

El préstamo con interés y la usura son actividades de origen muy remoto. Por el contrario el origen de la «letra de cambio» es mucho mas reciente. puesto que surgió hacia el siglo XII cuando las transacciones comerciales, se volvieron más complicadas estableciéndose la práctica de pagar mediante un documento (escrito. bajo promesa) una cantidad determinada en un lugar distinto de aquel en el cual se contrae la deuda.

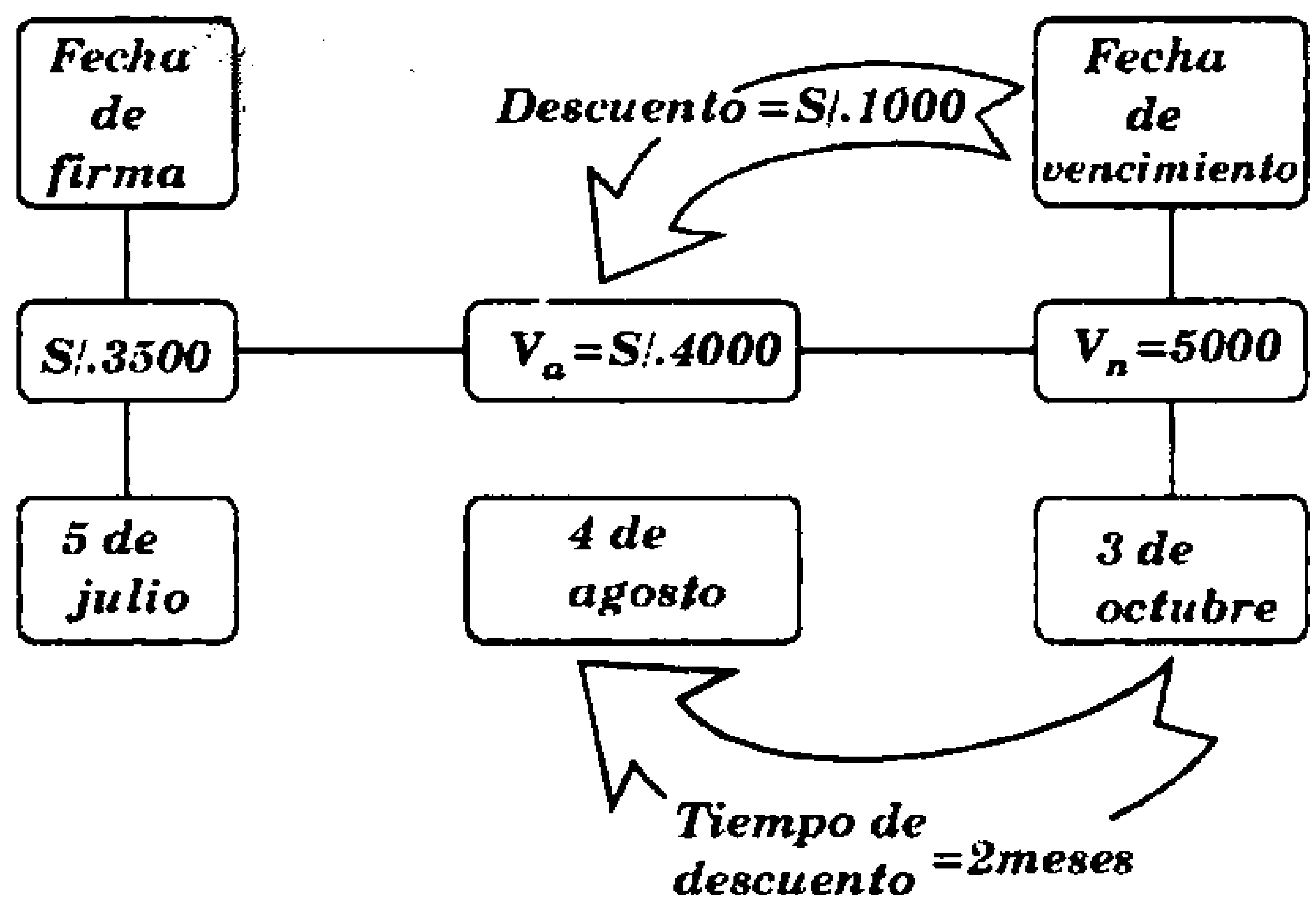
Una letra de cambio es un documento por el cual una persona manda a otra que pague, a su orden o a la de una tercera persona , una cantidad de dinero en el lugar y tiempo que se indica en el documento. La persona a la que se dirige la letra y que paga se denomina librado y la persona que cobra la letra se llama tenedor. Las letras de cambio pueden girarse al contado o a plazos.

REGLA DE DESCUENTO

En nuestro quehacer cotidiano muchas veces no disponemos de dinero efectivo para la adquisición de bienes o ampliar el negocio , por lo que se tiene la necesidad de recurrir a un préstamo , para poder formalizar este préstamo es necesario que la persona que prestará el dinero ***(acreedor)*** haga firmar un documento comercial ***(letra de cambio)***, a la persona que recibe este ***(deudor)***, comprometiéndose de esta manera a cancelar su deuda.

Para integrarnos a este capítulo de una manera más simple , veamos el siguiente ejemplo :

«Lenin prestó a Bofy ***S/.3500*** el ***5*** de julio , con la condición que le devuelva ***S/.5000*** al cabo de ***3*** meses , para formalizar la deuda Bofy le firmó un documento ***(letra de cambio)*** de ***S/.5000 (valor nominal)*** pagadera el ***3*** de octubre ***(fecha de vencimiento)*** éste se liberó de la deuda el ***4*** de agosto pagando ***S/.4000 (valor actual)***. Se observa que pagó sólo ***S/.4000*** y no los ***S/.5000***, esto se debe a que pagó ***2*** meses ***(tiempo de descuento)*** antes de la fecha de vencimiento , es decir , le hizo un descuento de ***S/.1000***»



* De donde se puede deducir , que :

$$\boxed{V_n = V_a + D} \quad ó \quad \boxed{D = V_n - V_a}$$

A partir del ejemplo anterior identifiquemos los elementos de la regla de descuento.

LETRA DE CAMBIO :

Documento de crédito donde una persona , llamada DEUDOR , se compromete a pagar una determinada suma de dinero a otra persona llamada ACREEDOR , al cabo de cierto tiempo. El pagaré o cheque bancario también cumple la misma función.

VALOR NOMINAL (V_n) :

Valor que va impreso claramente en la letra de cambio.

FECHA DE VENCIMIENTO (F_V) :

Fecha límite para poder hacer efectivo el valor nominal de un descuento comercial .

VALOR ACTUAL (V_A) :

Valor que pagamos por un documento comercial, por hacerlo efectivo antes de su fecha de vencimiento.

DESCUENTO (D)

Beneficio para el deudor por cancelar un documento comercial antes de la fecha de vencimiento ; está representado por la diferencia entre el valor nominal y el valor actual del documento : $D = V_n - V_a$

TIEMPO DE DESCUENTO (T) :

Tiempo comprendido entre la fecha de negociación y la fecha de vencimiento.

TASA DE INTERÉS (r):

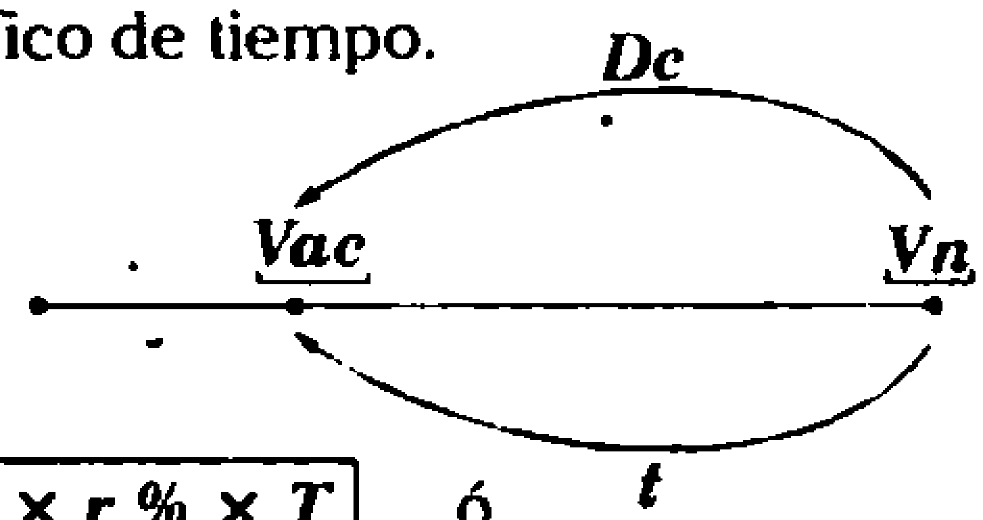
Porcentaje de pérdida respecto a cierta cantidad.

CLASES DE DESCUENTO

Consideraremos *2* clases de descuento según el capital que se asume como referencia , si éste es el valor nominal se denominará DESCUENTO COMERCIAL , si la referencia es el valor actual se denominará DESCUENTO RACIONAL.

I) DESCUENTO COMERCIAL (D_C) :

Interés que generaría el valor nominal bajo una base de descuento durante el tiempo de vencimiento. También se le llama DESCUENTO EXTERNO o DESCUENTO ABUSIVO. Analicemos en general una letra de cambio en un gráfico de tiempo.



$D_c = V_n \times r\,\% \times T$ ó

$D_c = V_n - V_{ac}$

* Donde los casos particulares , serán :

$$D_C = \frac{V_n \times r \times t}{100} \quad \textit{Tiempo en años}$$

$$D_C = \frac{V_n \times r \times t}{1200} \quad \textit{Tiempo en meses}$$

$$D_C = \frac{V_n \times r \times t}{36000} \quad \textit{Tiempo en días}$$

NOTA :

El descuento comercial es proporcional al tiempo de descuento.

OBSERVACIONES ADICIONALES :

A) El denominador varía de acuerdo al tiempo , al igual que en la regla de interés simple.

B) Usualmente la tasa se considera anual.

C) Si : $V_a = V_n - D_C$

$$\Rightarrow V_a = V_n - \frac{V_n \times t \times r}{100}$$

* Al despejar «V_n», se obtendrá :

$$V_n = \frac{100V_a}{100 - rt}$$

* Tambien : $$D_C = \frac{V_a \times r \times t}{100 - rt}$$

EJEMPLO :

Se tiene una letra de *S/.6000* pagadera en *30* días al *12%* anual. Esta letra fue negociada luego de *10* días de la firma . Calcular el descuento comercial y el valor actual , e indicar su diferencia.

RESOLUCIÓN :

$V_n = 6000$

$T = 20$ días

$r = 12\%$

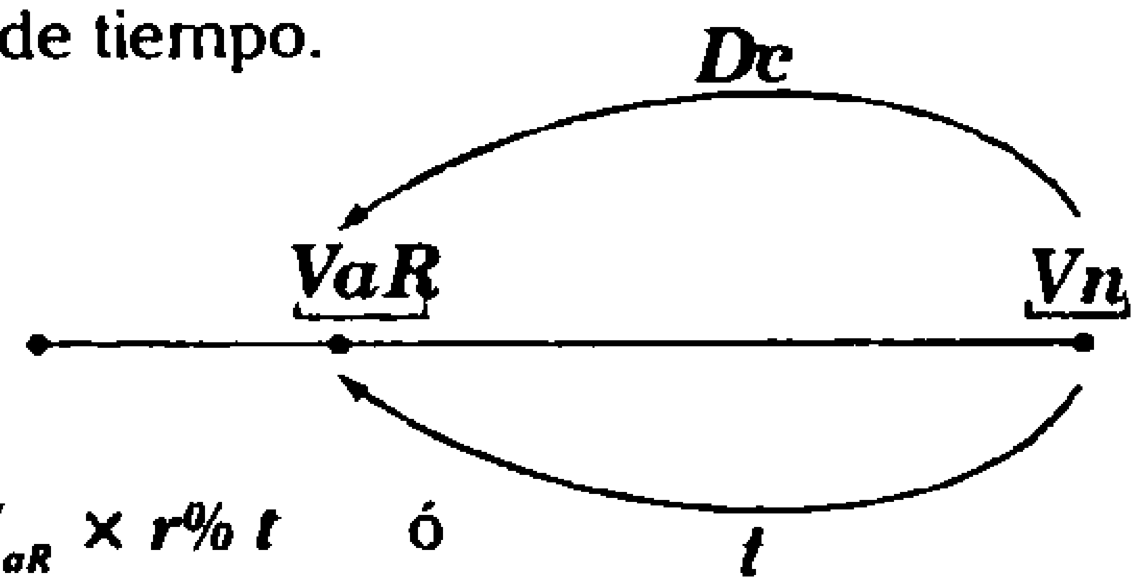
• $D_C = \dfrac{6000 \times 20 \times 12}{36000} = 40$ → Por ser en días

* $V_a = V_n - D_c = 6000 - 40 = 5960$

* La expresión pedida es : $5960 - 40 = 5920$

II) DESCUENTO RACIONAL (D_R) :

Interés que generaría el Valor Actual bajo una tasa durante el tiempo de vencimiento . También se le llama DESCUENTO INTERNO O DESCUENTO MATEMÁTICO. Analicemos en general una letra de cambio en un gráfico de tiempo.



$D_R = V_{aR} \times r\% \, t$ ó

$D_R = V_n - V_{aR}$

Donde : V_{aR} = Valor Actual Racional

* Además los casos particulares , serán :

$$D_R = \frac{V_{aR} \times r \times t}{100} \quad \textit{Tiempo en años}$$

$$D_R = \frac{V_{aR} \times r \times t}{1200} \quad \textit{Tiempo en meses}$$

$$D_R = \frac{V_{aR} \times r \times t}{36000} \quad \textit{Tiempo en días}$$

OBSERVACIÓN :

* Como :

$$V_{aR} = V_n - V_R$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{aR} = V_n - \frac{V_R \times r \times t}{100}}$$

* Al despejar « V_{aR} », se obtendrá :

$$\boxed{V_{aR} = \frac{100V_n}{100+rt}} \rightarrow \textit{Tiempo en años}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_R = \frac{V_n \times r \times t}{100+rt}} \rightarrow \textit{Tiempo en años}$$

EN GENERAL :

$$\boxed{D_R = \frac{V_n \times r\%t}{1+r\%t}}$$

EJEMPLO :

$$\boxed{D_R = \frac{V_n \times r\%t}{1200+rt}} \rightarrow \text{"}t\text{" en meses}$$

PROPIEDADES

Para una misma letra , tasa de descuento y en un mismo tiempo , se cumple :

I) Como : $V_n > V_a$

entonces : $D_C > D_a$; $V_{aC} < V_{aR}$

II) $\boxed{D_c - D_R = V_{aR} - V_{aC}}$

III) $\boxed{D_C - D_R = \frac{D_R \times rt}{100}}$.

IV) $\boxed{V_n = \frac{D_C D_R}{D_C - D_R}} \vee \boxed{\frac{1}{V_n} = \frac{1}{D_R} - \frac{1}{D_C}}$

V) $\boxed{D_C = \frac{V_a \times r\% \times t}{1-r\%t}} \wedge \boxed{D_R = \frac{V_n r\%t}{1+r\%t}}$

CAMBIO DE LETRAS

Consiste en reemplazar ***2*** o más letras por una letra única cuyo valor actual deberá ser la suma de los valores actuales de las respectivas letras.

* Se debe cumplir :

$$V_{a_{única}} = V_{a_1} + V_{a_2} + V_{a_3} + \ldots\ldots V_{a_n}$$

EJEMPLO :

Lenin tiene una letra de ***S/.200*** que vence dentro de ***60*** días y Vlady tiene otra letra de ***S/.225*** que vence dentro de ***120*** días . Si ambos intercambian sus letras , ¿quién de ellos se perjudica? Considere que se aplica en ambos casos una tasa de descuento del ***5%*** mensual.

RESOLUCIÓN :

* Recordemos que el valor nominal de un documento es el valor que se pagará en la fecha de vencimiento , pero hoy el valor de cada letra es menor, calculemos los valores actuales .

*Como la tasa es mensual podemos considerar el tiempo en número de meses .

$$D_{C1} = 200 \times 5\% \times 2 \Rightarrow D_{C1} = 20$$

$$D_{C2} = 225 \times 5\% \times 4 \Rightarrow D_{C2} = 45$$

	V_n	D	V_a
Letra de Lenin	200	20	180
Letra de Vlady	225	45	180

* Comparamos resultados y notamos que hoy el valor de cada letra es ***S/.180*** por lo cual se pueden intercambiar sin beneficio ni perjuicio de Lenin o de Vlady.

LETRAS EQUIVALENTES :

dos letras son equivalentes cuando sus valores actuales son iguales .

COMPRA A PLAZOS :

cuando se compra al crédito , muchas veces se paga una parte y el saldo se cancela en partes en cuotas cada cierto tiempo , el valor de cada cuota es el valor nominal de la letra , y la suma de los valores actuales de las letras es igual al saldo.

$$\begin{pmatrix}\textit{Precio al}\\ \textit{Contado}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\textit{Cuota}\\ \textit{Inical}\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\textit{Suma de los}\\ \textit{Valores Actuales}\end{pmatrix}}_{\textit{Saldo}}$$

VENCIMIENTO COMÚN

Es un caso particular que se presente en un cambio de letras con las siguientes condiciones :

I) Se reemplazará un conjunto de letras de cambio por una sola.

II) El valor nominal de la letra reemplazante es igual a la suma de los valores nominales de las letras reemplazadas.

III) Todas las letras son descontadas comercialmente y a una misma tasa.

$$T_{unico} \quad \frac{V_{n1} \times T_1 + V_{n2} \times T_2 + \ldots\ldots + V_{n_n} \times T_n}{V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} + \ldots\ldots + V_{n_n}}$$

$$\underbrace{V_{n_1} ; V_{n_2} ; \ldots\ldots ; V_{n_n}}_{\textit{Son los respectivos valores normales}}$$

$$\underbrace{t_1 ; t_2 ; \ldots\ldots ; t_n}_{\textit{Son los respectivos tiempos de imposición}}$$

EJEMPLO :

Un deudor tiene tres letras que pagar al banco. La ***1ra***. de ***S/.100*** pagadera dentro de ***30*** días ; ***2da***. de ***S/.200*** pagadera en ***60*** días y la ***3ra***. de ***S/.300*** pagadera dentro de ***90*** días. ¿Dentro de cuántos días debe ser pagada la letra única cuyo valor nominal se la suma de los valores nominales de las otras ***3*** letras?

RESOLUCIÓN :

Aplicando la fórmula anterior :

$$T_{único} = \frac{100 \times 30 + 200 \times 60 + 300 \times 90}{100 + 200 + 300}$$

$$\Rightarrow T_{único} = \frac{3000 + 12000 + 27000}{600}$$

$$\Rightarrow T_{único} = \frac{4200}{600} \Rightarrow T_{único} = 70\,días$$

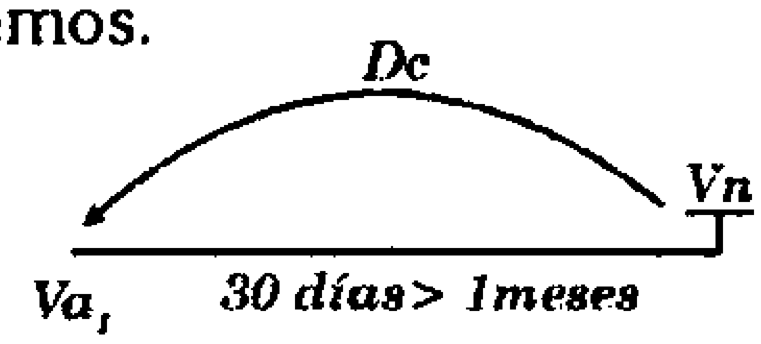
PROBLEMAS RESUELTOS

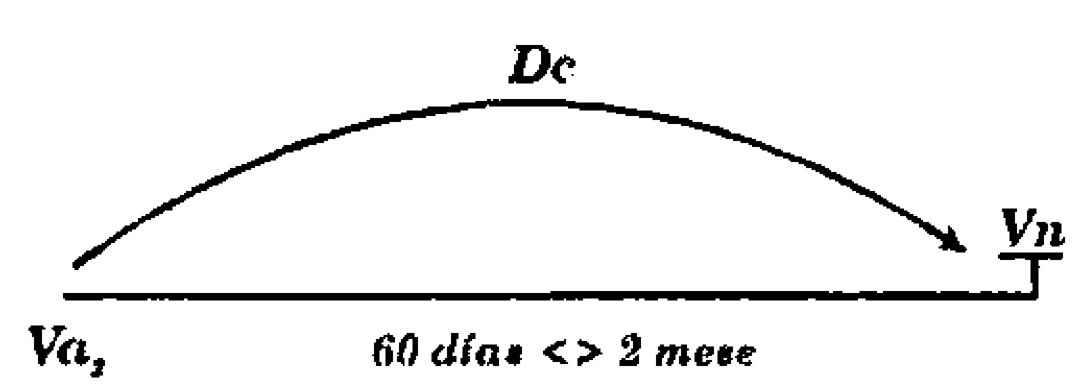
PROBLEMA 1 :

Dos pagarés por igual valor nominal que se vencen dentro de ***30*** y ***60*** días , respectivamente son descontados comercialmente hoy al ***a%*** anual. Entonces el valor nominal de cada uno de ellos , si se recibe un total de ***S*** nuevos soles , es :

RESOLUCIÓN:

* Según los datos del problema tenemos.





* Se descuentan comercialmente al $a\%$ anual <> $\frac{a\%}{12}$ mensual

* Dato: se recibe un total de S.

$$S=Va_1+Va_2$$

$$S=Vn-\left(Vn\times\frac{a\%}{12}\times 1\right)+Vn-\left(Vn\times\frac{a\%}{12}\times 2\right)$$

$$S=2Vn-Vn\frac{a\%}{12}(1+2)=Vn\left(2-\frac{a}{400}\right)$$

$$\Rightarrow Vn=\frac{400\times S}{800-a}$$

* Si la tasa fuera: $\left(\frac{a\%}{12}\right)$ anual , la respuesta sería $\frac{4800\times S}{9600-a}$

PROBLEMA 2 (TIPO UNI):

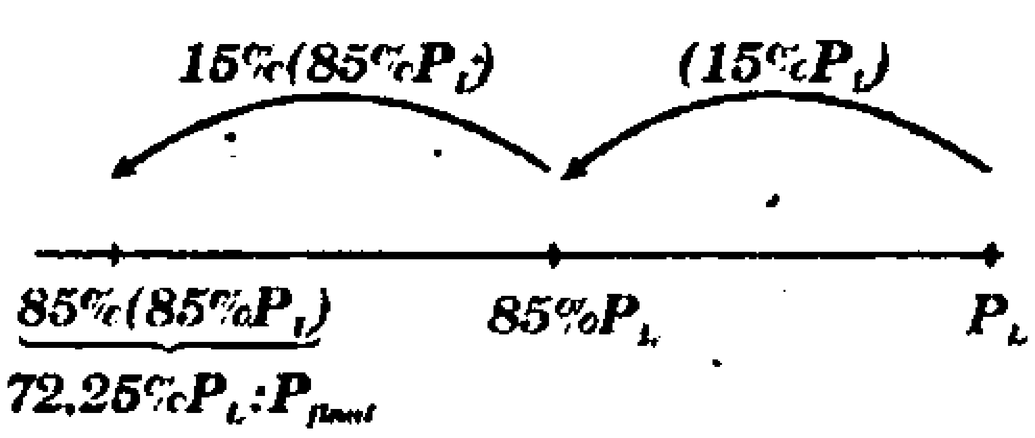
Una tienda vende un producto haciendo descuento primero uno de ***15%*** y luego otro de ***15%***. Una segunda tienda , que tiene el mismo producto y al mismo precio de lista , realiza un descuento del ***30%*** , ¿cuánto de descuento ***(en %)*** o de incremento (en %) debe efectuar la segunda tienda para que en ambas tiendas el producto tenga el mismo precio final? La respuesta aproximada es

A) descuenta 3,2%
B) incrementa 3,2%
C) descuenta 6,4%
D) incrementa 6,4%
E) incrementa 5,2%

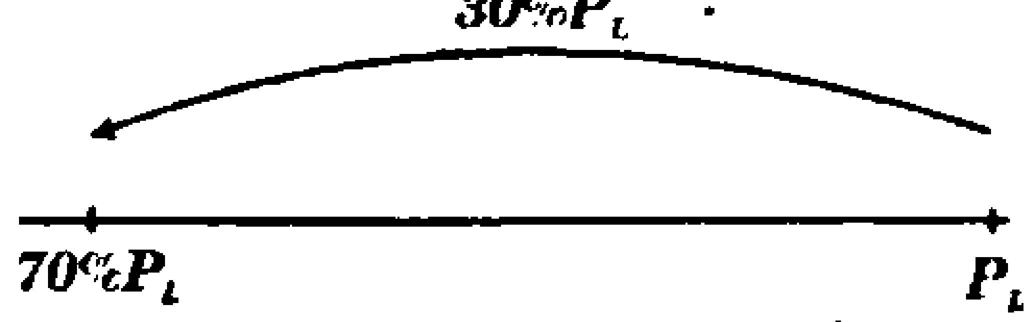
RESOLUCIÓN:

* Asumimos : P_L precio de lista en ambas tiendas

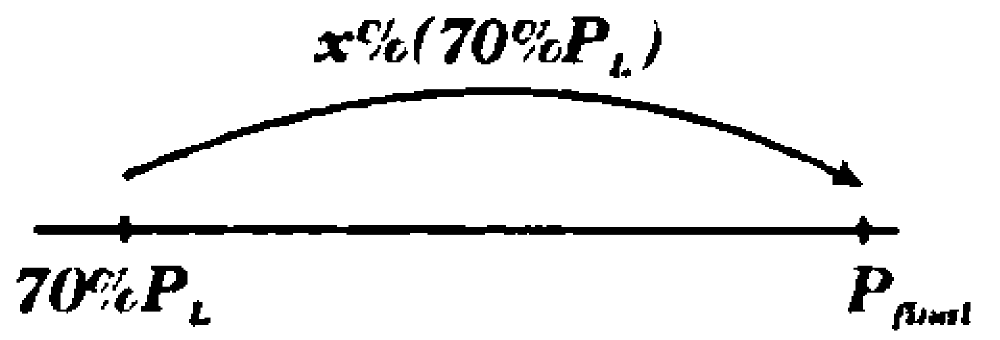
1ra tienda



2da tienda



* Notamos que el precio final de la 2da tienda es menor que 1ra tienda , entonces para que los precios de ambas tiendas sean iguales debemos realizar un incremento ***(x%)*** en la 2da tienda.



* Finalmente igualando los precios finales:

$$72{,}25\%P_L=70\%P_L+x\%(70\%P_L)$$

$$x\%\cong 3{,}2\%$$

* Entonces la 2da tienda debe incrementar un ***3,2%***

RPTA : "B"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se ha descontado comercialmente una letra de ***S/. 1 800*** que vencía dentro de ***4*** meses a una tasa del ***40%*** anual. ¿Cuánto ha sido el descuento?

A) S/. 640 B) S/. 240 C) S/. 320
D) S/. 480 E) S/. 360

02 Una letra que vencía dentro de ***5*** meses ha sido descontada racionalmente a una tasa del ***2%*** mensual, obteniéndose como valor actual ***S/. 500***. Hallar el descuento.

A) S/. 25 B) S/. 50 C) S/. 75
D) S/. 20 E) S/. 40

03 Una letra de ***S/.1200*** se descuenta racionalmente a una tasa del ***5%*** mensual, obteniéndose por ella ***S/.1000***. ¿Dentro de cuánto tiempo vencía dicha letra?

A) 1 mes B) 2 meses C) 3 meses
D) 4 meses E) 5 meses

04 Una letra de ***S/.2000*** fue negociada a ***40*** días de su vencimiento y por ella se obtuvo ***S/.1980***. Determine la tasa de descuento.

A) 18% B) 12% C) 4,5%
D) 9% E) 16%

05 Calcular el descuento comercial de una letra de cambio cuyo valor nominal es de ***S/.24 300*** que vence en ***60*** días a una tasa del ***8%*** anual.

A) S/. 326 B) S/. 328 C) S/. 334
D) S/. 452 E) S/. 324

06 Se quiere saber el valor de una letra que se vencía dentro de ***45*** días y al descontarla comercialmente al ***9%*** anual ha recibido ***S/.11 865***.

A) S/.12500 B) S/.16400 C) S/.12 000
D) S/. 18 500 E) S/. 13 000

07 Calcular el valor nominal de una letra que, descontada por ***4*** meses al ***5%***, da una diferencia de ***2*** soles entre el descuento comercial y el descuento racional.

A) S/.7320 B) S/. 3 230 C) S/. 7 050
D) S/. 4 025 E) S/. 7 280

08 Una letra se descuenta racionalmente cinco meses antes de su vencimiento, a la tasa de interés simple de ***52%*** anual. Si el descuento resultó ***18 200***, ¿cuál es el valor nominal de la letra?

A) S/. 102 200 B) S/. 180 340
C) S/. 100 140 D) S/. 80 560
E) S/. 342 082

09 Una letra pagadera dentro de ***2*** meses se va a descontar al ***3%*** anual. ¿Cuál es el valor nominal de dicha letra, sabiendo que la diferencia de los valores actuales bajo el descuento racional y comercial es de ***5*** nuevos soles?

A) 100 000 B) 151 000 C) 197 000
D) 201 000 E) 215 000

10 ¿Cuál será el descuento comercial y el valor efectivo de un pagaré de ***S/. 720 000*** que vence el ***15*** de noviembre y se negocia al ***5%*** el ***17*** de agosto del mismo año?

A) 9 000 y 711000
B) 8 590 y 711 410
C) 9 500 y 710500
D) 9 100 y 710 000
E) 8 090 y 711 010

11 Se quiere saber el valor nominal de una letra que se vencía dentro de ***45*** días y al descontarla comercialmente al ***9%*** anual se ha recibido ***S/.7 910***.

A) S/.7 500 B) S/.8 000 C) S/. 8 500
D) S/.9000 E) S/. 9 500

(12) El descuento racional de una letra pagadera en tres años al *4%* es *S/.250*. ¿Cuál es el descuento comercial?

A) S/. 255 *B) S/. 260* *C) S/. 270*
D) S/. 280 *E) S/. 290*

(13) Una letra vence dentro de *2* meses y tiene un valor actual de *S/. 40 000*. Si la letra se descontara dentro *15* días, el descuento sería de *S/. 4 500*. Hallar el valor nominal de la letra.

A) S/. 42 000 *B) S/. 48 000*
C) S/. 52 000 *D) S/. 46 000*
E) S/. 35 000

(14) Si el descuento comercial de una letra es *S/.600* y el descuento racional es *S/.400*. Hallar el valor nominal.

A)S/.3 600 *B)S/.1 200* *C)S/. 2 400*
D)S/.4 200 *E) S/. 3 800*

(15) Calcular el valor nominal de un letra que descontada por *4* meses al *5%* dé una diferencia de *S/.2* entre el descuento comercial y el racional.

A)S/.3 660 *B)S/.3 230* *C)S/.7 230*
D)S/.7 050 *E)S/.7 320*

(16) Al calcular los descuentos comercial y racional de una letra se observa que el segundo es el *80%* del primero: ¿Qué tanto por ciento del valor nominal será el descuento comercial?

A) 10% *B) 15%* *C)20%*
D)12% *E) 25%*

(17) Se negocia un pagaré *60* días de su vencimiento, si el descuento fue el *5%* del valor nominal del pagaré. ¿Qué tasa de descuento comercial anual pagó?

A) 45% *B) 30%* *C) 15%*
D) 10% *E) 20%*

(18) Se compró un televisor y como parte de pago se firmó una letra de *S/. 315*, el cual se desea cancelar *4* meses antes de su fecha de vencimiento con un descuento racional del *15%* anual. ¿Cuál es la suma que se debe pagar?

A) S/. 200 *B) S/. 250* *C) S/. 300*
D) S/. 320 *E) S/. 280*

(19) Dos pagarés por igual suma, se vencen dentro de *30* y *60* días respectivamente, son descontados comercialmente hoy al *12%* anual. ¿Cuál es el valor nominal de cada uno de ellos si se reciben *S/.10 638*?

A)S/.5 200 *B)S/.5 300* *C)S/. 5 400*
D)S/.5 500 *E)S/.5 600*

(20) El valor actual de una letra es *S/.1470*. La suma del valor nominal y el descuento es *S/.1 530*. Si la tasa descontable es *12%*. ¿Dentro de cuánto tiempo es la fecha de vencimiento?

A) 3 meses *B) 2 meses* *C) 4 meses*
D) 5 meses *E) 6 meses*

TAREA DOMICILIARIA

(01) Determine el valor nominal si el descuento comercial de una letra es *S/. 1600* y su descuento racional es *S/. 1200*

A)S/. 1200 *B)S/. 4200*
C)S/. 4400 *D)S/. 4600*
E)S/. 4800

(02) Se negocia un pagaré *60* días antes del vencimiento, si el descuento fue el *5%* del valor nominal del pagaré ¿Qué tasa de descuento comercial anual pagó?

A)50% *B)40%* *C)30%*
D)60% *E)70%*

(03) ¿Cuál es el valor nominal de una letra al *1%* mensual y en *90* días ha dado un valor actual de *S/. 97000*?

A)S/. 80000 *B)S/. 90000*
C)S/. 90000 *D)S/. 110000*
E)S/. 120000

(04) El valor nominal y el valor actual de una letra de cambio que vence dentro de *9* meses están en la relación de *7* a *3*, si dentro de *4* meses el descuento es *5480*. Determine el valor nominal de dicha letra en soles.

A)17750 *B)17850* *C)17262*
D)17260 *E)17520*

(05) Dos pagarés por la suma, se vencen dentro de *30* y *60* días respectivamente son descontados comercialmente al *12%* anual. ¿Cuál es el valor nominal de cada uno de ellos, si se reciben *S/. 10368* ?

A)S/. 5000 *B)S/. 526291*
C)S/. 5400,28 *D)S/. 5600*
E)S/. 5842,15

(06) ¿Qué descuento comercial se debe realizar, al hacer efectivo una letra de *S/. 30 000* , *4* años antes de su vencimiento con una tasa de descuento del *3%*?

A)S/.12 000 *B)S/.8 000* *C)S/.9 600*
D)S/. 2 400 *E)S/. 3 600*

(07) ¿Cuál es el valor actual comercial de la letra en el problema anterior?

A)S/. 18 000 *B)S/. 22 000*
C)S/. 20 400 *D)S/. 27 600*
E)S/. 26 400

(08) ¿Cuál es el descuento racional que se debería aplicar a una letra de *S/. 120 000* al hacerla efectiva *2* años antes de su vencimiento si se aplica una tasa de descuento del *10%*?

A)S/. 20 000 *B)S/. 30 000*
C)S/. 26 000 *D)S/.27 000*
E)S/. 25 000

(09) ¿Cuál es el valor actual racional de la letra en el problema anterior?

A)S/. 100 000 *B)S/. 90 000*
C)S/. 94 000 *D)S/. 93 000*
E)S/. 95 000

(10) ¿Qué descuento externo se debe realizar, al hacer efectivo una letra de *S/.60000* , *3* meses antes de su vencimiento con una tasa de descuento del *24%*?

A)S/.12 000 *B)S/.8 000* *C)S/.9 600*
D)S/. 2 400 *E)S/. 3 600*

TEORIA DE CONJUNTOS

CAPITULO 063

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de :

* *Establecer correctamente la noción de conjunto y su notación.*
* *Representa situaciones de la vida cotidiana utilizando la noción de conjunto.*
* *Utilizar adecuadamente los símbolos matemáticos*
* *Definir relaciones y operaciones entre conjuntos.*
* *Aplicar las propiedades de los conjuntos a la solución de problemas reales.*

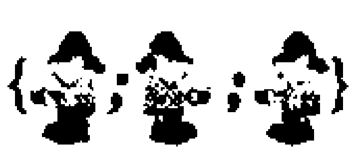
INTRODUCCIÓN :

En nuestro quehacer cotidiano , observamos a los objetos , cosas e ideas en forma individual o en forma grupal . Si quisiéramos realizar un estudio de objetos que poseen características comunes , o realizar una estadística de ellos , hay la necesidad de agruparlos en conjuntos. Ya agrupados podemos analizarlos y relacionarlos con otros grupos de objetos coleccionados también por otras características comunes.

Es decir en la vida y el desarrollo de las disciplinas se agrupa a los objetos en todo momento , ya sea por su forma, tamaño , calidad, especie territorialidad, etc. Lo que desarrollamos en este capítulo serán dichas agrupaciones , principalmente las de tipo numerico.

CONJUNTOS

Entenderemos por conjunto a la reunión , agrupación, colección , familia o un grupo bien definido de objetos, que reciben el nombre de elementos que pertenecen a una misma especie.

Así decimos
* ***Conjunto de niños:*** {}
* ***Conjunto de letras:*** {*t; e; t; r; a; s*}

NOTACIÓN :

I) Todo conjunto se denota mediante letras mayúsculas.

II) Los elementos de un conjunto deben escribirse con letras minúsculas a excepción de los sustantivos propios.

III) Todos los elementos de un conjunto debe estar separados por coma, o punto y coma, y además agrupados entre llaves. *({})*

EJEMPLOS :

* El conjunto de los cinco primeros números impares.

$$A=\{1; 3; 5; 7; 9\}$$

* El conjunto de las vocales

$$B=\{a; e; i; o; u\}$$

* El conjunto de las letras del abecedario

$$C=\{a; b; c; d; \ldots\ldots; z\}$$

* El conjunto de los países de América del Sur .

D= {Perú, Bolivia, Ecuador, ... , Brasil}

* El conjunto de la capital del Perú . *E*={*Lima*}

NOTA :

Observa que un conjunto puede tener un elemento o más elementos, como también no puede poseer elementos .

RELACIÓN EN LOS CONJUNTOS

A continuación señalaremos las dos relaciones más importantes en teoría de conjuntos .

RELACIÓN DE PERTENENCIA :

Si un objeto es elemento de un conjunto se dice que pertenece *(∈)* a este conjunto, en caso contrario se dirá que no pertenece *(∉)* a dicho conjunto. La relación de pertenencia es una relación exclusiva de elementos al conjunto del cual forma parte .

$$\text{Elemento} \xrightarrow[\notin]{\in} \text{Conjunto}$$

EJEMPLO 1:

* Dado el conjunto $M=\{2; a ; 3\}$
* *2* pertenece al conjunto $M(2 \in M)$
* *a* pertenece al conjunto $M(a \in M)$
* *5* no pertenece al conjunto $M(5 \notin M)$
* *b* no pertenece al conjunto $M(b \notin M)$

EJEMPLO 2 :

Si : $A=\{1; 4;6 \text{ y } 7\}$ y $B=\{2; 3; 4; 5\}$

Luego :

* $1 \in A$, sería verdadera; porque 1 es el elemento de A.

* $4 \notin B$, sería falsa ; porque 4 es el elemento de B .

* $\{6\} \in A$, sería falsa; porque el elemento es 6 y no $\{6\}$

* $3; 4 \in B$; sería falsa ; porque son 2 elementos y la relación debe ser de "un elemento "*A*" un conjunto".

INCLUCIÓN ($\subset$) :

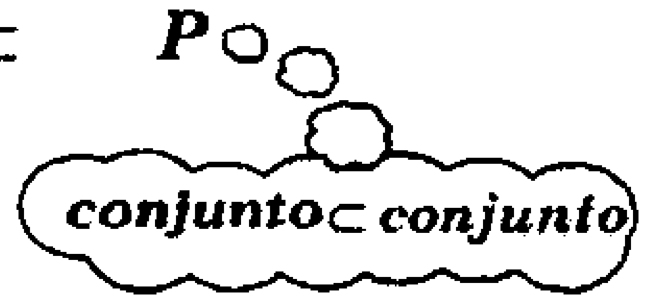
Es la relación que vincula un conjunto con otro conjunto , siempre y cuando todos los elementos del primer conjunto se encuentran en el segundo conjunto.

EJEMPLO 1 :

Si : $P=\{4; 5; 6; 7\}$, $Q=\{5; 6\}$

$\Rightarrow \{5;6\} \subset \{4;5;6;7\}$

$\Rightarrow Q \subset P$



* También habrá que considerar que $\not\subset$ significa "no está incluido"

* Así , del ejemplo anterior: $\{6; 8\} \not\subset P$

OBSERVACIÓN :

Se dice que un conjunto A está incluido en el conjunto B, si solo sí todos los elementos de A son también elementos del conjunto B.

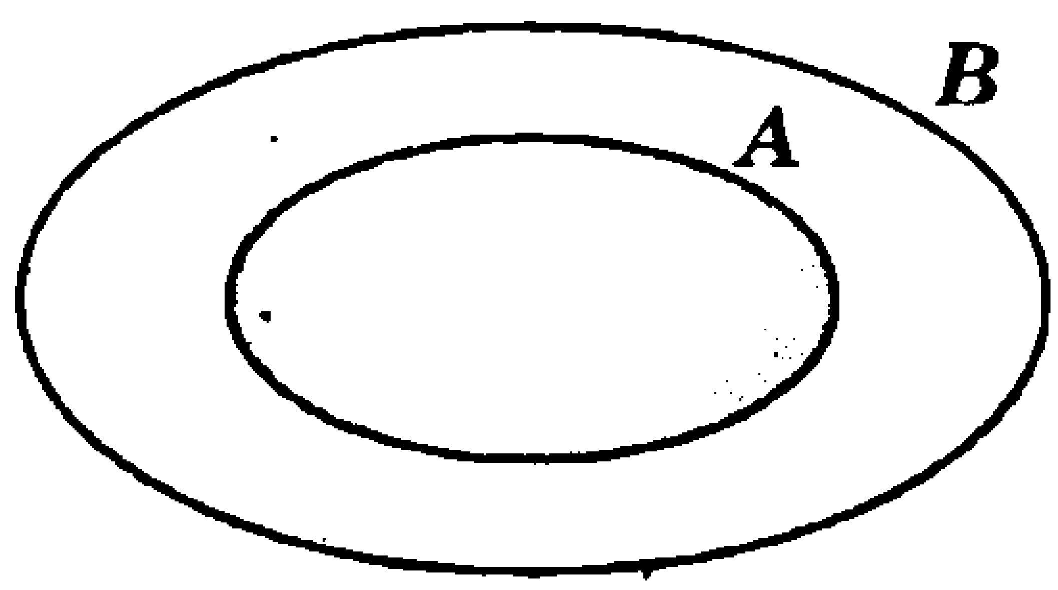
Si A está incluido en B, se denota $A \subset B$

Se lee :

* A está incluido en B * A está contenido en B

* A es un subconjunto de B * B contiene al conjunto A

DIAGRAMA :



Se define : $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

EJEMPLO 2 :

Si : $A=\{2; 4; 6\}$, $B=\{2; 4; 6; 8\}$, $C=\{2; 4; 6; 8; 10\}$

Luego :

* $A \subset B$ sería ***verdadero*** ; porque todos los elementos de A, también se encuentran en el conjunto B .

* $C \subset B$ sería ***falso*** ; porque no todos los elementos de C se encuentran en el conjunto B, falta el 10.

NOTA :

Antes de continuar, debes considerar que .

I) Cuando un conjunto no tiene elementos se le llama conjunto vacío y se simboliza por ϕ ó { }, el cual tiene la particularidad de estar incluido en cualquier conjunto, es decir $\phi \subset A$.

II) Todo conjunto está incluido en sí mismo.

¡IMPORTANTE!

Dentro del lenguaje matemático conjuntista , debemos tomar en cuenta lo siguiente :

* $\neq$: se lee "diferente" * $\forall$: se lee "para todo"

* $\vee$: se lee "o" * $\wedge$: se lee "y"

* $\Rightarrow$: se lee "entonces" * $\Leftrightarrow$: se lee "si y sólo si"

* $/$: se lee "tal que"

* En un conjunto, los elementos no deben repetirse, así tenemos :

$$F=\{e;x;c;e;l;e;n;t;e\}$$

Apreciamos que la letra "*e*" se repite 4 veces, pero sólo se considera una vez, entonces :

$$F=\{e;x;c;l;n;t\}$$

Para determinar un conjunto se puede indicar cada uno de los elementos o indicar una propiedad común de sus elementos .

DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Determinar un conjunto es indicar o señalar en forma precisa los elementos que lo conforman. Un conjunto se puede determinar por extensión o por comprensión.

I) POR EXTENSIÓN O EN FORMA TABULAR :

Es cuando se señala a cada uno de sus elementos del conjunto, enumerándolos o indicándolos en forma secuencial .

EJEMPLO :

* Las estaciones del año

A={verano, invierno, otoño, primavera}

* Los días de la semana

B={lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

* Las vocales.

$C=\{a; e; i; o; u\}$

* Los números cuadrados perfectos mayores que uno y menores que *37*.

$$D=\{2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ 5^2;\ 6^2\}$$

* Los países sudamericanos

E = {*Perú, Bolivia, Argentina, ..., Chile*}

II) POR COMPRENSIÓN O EN FORMA CONSTRUCTIVA :

Es cuando se mencionan una o más características comunes y exclusivas de los elementos del conjunto.

Esquema :

$$M=\left\{\underset{\text{Forma general del elemento}}{\underline{\qquad\qquad}}\ /\ \underset{\text{Característica de los elementos o la variable}}{\underline{\qquad\qquad}}\right\}$$

EJEMPLOS :

* Las estaciones del año

A = {*x/x* es una estación del año}

* Los días de la semana

B = {*x/x* es un día de la semana}

* El conjunto de las vocales

C = {*x/x* es una vocal}

* Los números cuadrados perfectos mayores que uno y menores que *37*.

$$D=\{x^2/1<x<37 \wedge x\in N\}$$

* Los países de Sudamérica

E = {*x/x* es un país sudamericano}

NOTA :

Al expresar por comprensión un conjunto, se distinguen dos partes :

$$A=\{\overbrace{4x}^{\text{forma general}}/\underbrace{x\in N;\ 2\leq x<7}_{\text{condiciones}}\}$$

condiciones (generalmente con expresiones matemáticas)

(generalmente con expresiones matemáticas)

MÁS EJEMPLOS :

Por Comprensión	*Por extensión*
$A=\{x/x\in N;\ 0\leq x\leq 4\}$	$A=\{0;1;2;3;4\}$
$B=\{y/y\in Z;-3\leq y<2\}$	$B=\{-2;-1;0;1\}$

NUMERO CARDINAL

El número cardinal de un conjunto *A* nos indica la cantidad de elementos diferentes que posee el conjunto y se denota por ***n(A)***.

EJEMPLOS :

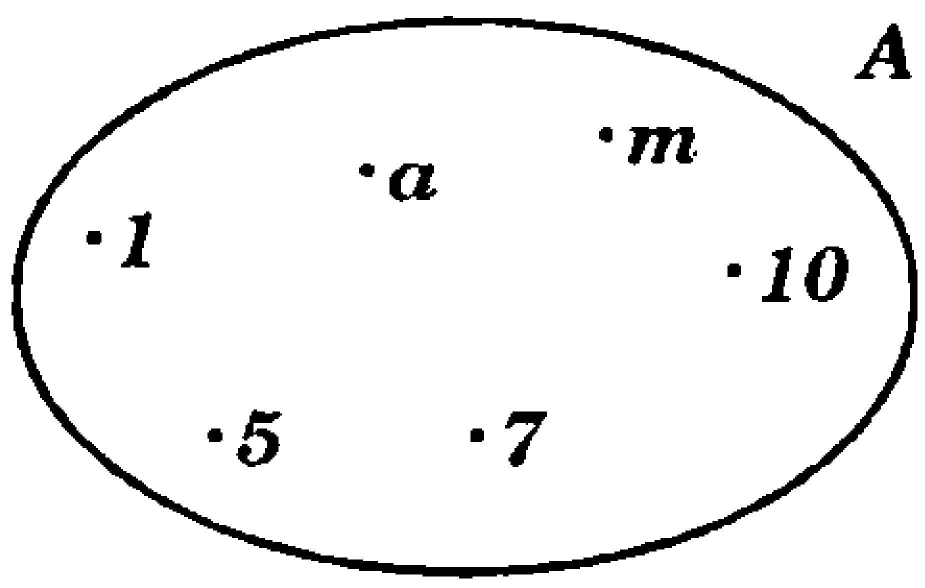
* En el conjunto $M=\{2;3;5\}\Rightarrow n(M)=3$
* En el conjunto $N=\{4;5;7;4;7;6\}\Rightarrow n(N)=4$
* $P=\{17;27;37;47;...;997\}\Rightarrow n(P)=99$
* $Q=\{2;6;12;20;30;...;930\}\Rightarrow n(Q)=3$
* *R* = {*x/x* es una letra del abecedario} ⇒ ***n(R)=27***
* $S=\{a;\{a\};b;\{b\};\{a;b\}\}\Rightarrow n(S)=5$
* *T* = {*x/x* es un planeta del sistema solar} ⇒ ***n(T)=9***

DIAGRAMA DE VEEN-EULER

Los diagramas de *VEEN-EULER* representan a los conjuntos mediante regiones planas limitadas por figuras geométricas cerradas .

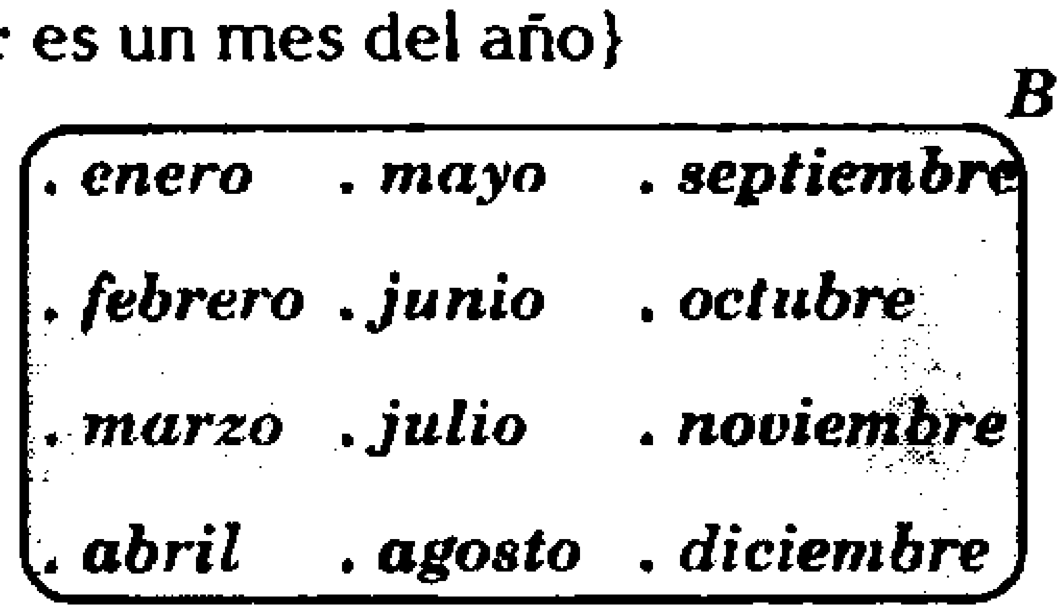
EJEMPLO 1 :

* *A* = {*1; a; 5; 7; 10; m*}



EJEMPLO 2 :

* *B* = {*x/x* es un mes del año}



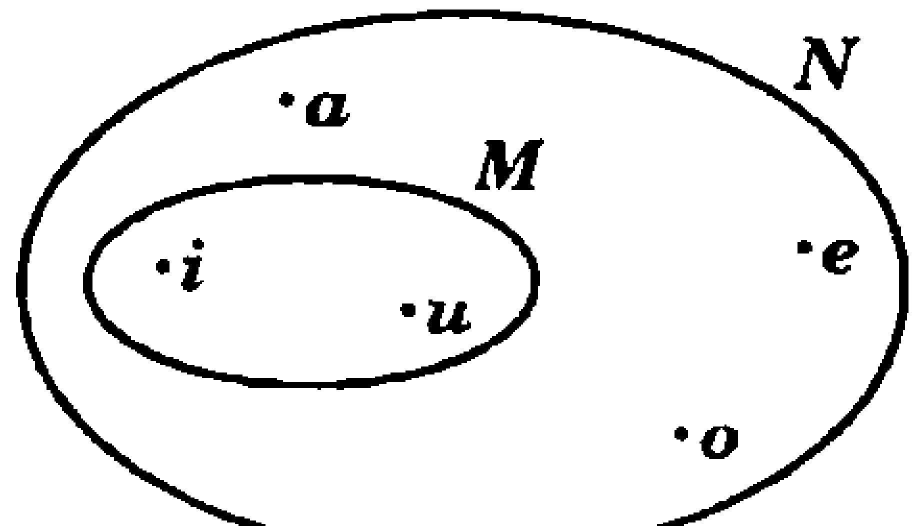
EJEMPLO 3 :

* Sean los conjuntos *M* = {*x/x* es una vocal débil}

N = {*x/x* es una vocal}

Toda vocal débil es una vocal

DIAGRAMA :

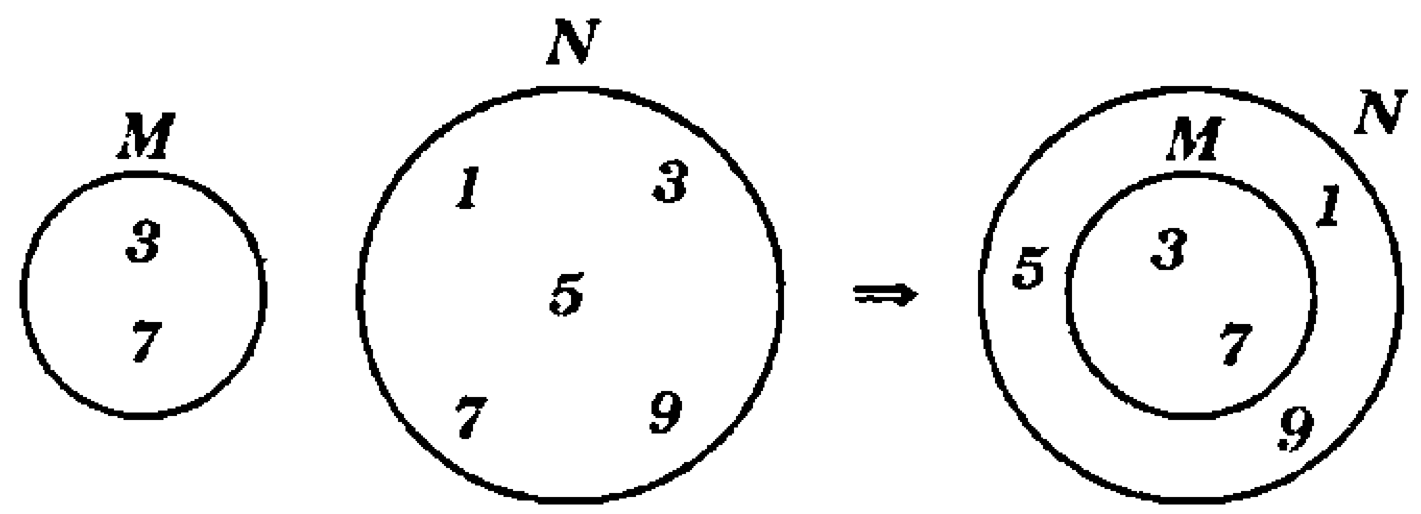


$$\Rightarrow M\subset N$$

SUBCONJUNTO PROPIO :

Si un conjunto "*A*" es un subconjunto de otro conjunto "*B*", y este otro conjunto "*B*" tiene uno o más elementos que no pertenecen al subconjunto "*B*", entonces "*A*" es subconjunto propio de "*B*".

EJEMPLO :



"*M*" es subconjunto propio de "*N*"

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Intuitivamente dos conjuntos *A* y *B* son iguales, cuando estos conjuntos poseen los mismos elementos.

Si dos conjuntos son iguales, se denota $A=B$

Se lee, el conjunto *A* es igual al conjunto *B* .

NOTA :

Si al menos un elemento de dicho conjunto no es elemento común a dichos conjuntos entonces no son iguales.

* Se define : $A=B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$

EJEMPLO 1 :

* Sean los conjuntos

$A=\{2;\ 4;\ a;\ b\}$ $B=\{2;\ 2;\ 4;\ a;\ b;\ a;\ b\}$

Como $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$ entonces $(A=B)$

EJEMPLO 2 :

Si: $A=\{1;3;5\}$ y $B=\{x/x$ es un número impar menor que $6\}$

Entonces $A=B$

NOTA :

Todo conjunto es subconjunto de si mismo, es decir: $A \subset A$

CONJUNTO DISJUNTOS :

Dos conjuntos son disjuntos cuando no poseen elementos comunes :

EJEMPLOS :

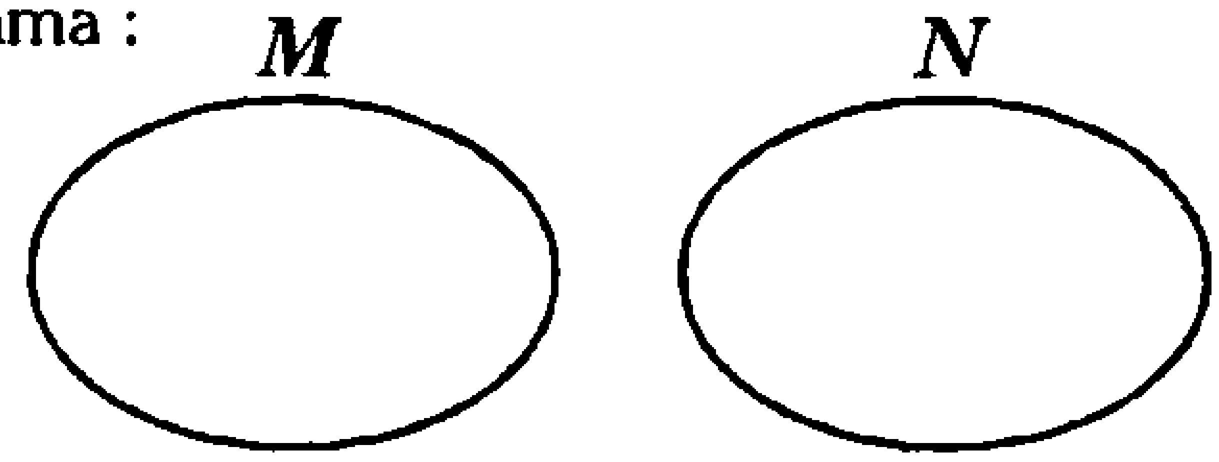
* $A=\{2;\ 3;\ 5\}$ $B=\{4;\ 6;\ 8\}$ $\rightarrow$ *A* y *B* son disjuntos
* $C=\{x/x$ es un valor$\}$ $D=\{x/x$ es una mujer$\}$

$\Rightarrow$ *C* y *D* son disjuntos

* $M=\{x/x$ es un número par$\}$ $N=\{x/x$ es un número impar$\}$

$\Rightarrow$ *M* y *N* son disjuntos

Diagrama :



M y N son disjuntos

DIAGRAMA DE CARROL

Es un diagrama rectangular utilizado mayormente para conjuntos disjuntos cuya unión comprende la totalidad de los elementos .

EJEMPLOS :

* En una reunión asistieron hombres y mujeres, además se observó que un grupo de dichos asistentes son casados representar a través, de un diagrama los conjuntos mencionados.

	S	*C*
H	*1*	*2*
M	*4*	*3*

* Es decir :

H: conjunto de los hombres

M: conjunto de las mujeres

S: conjunto de los solteros

C: conjunto de los casados

* Podemos identificar las regiones

1 : hombres solteros

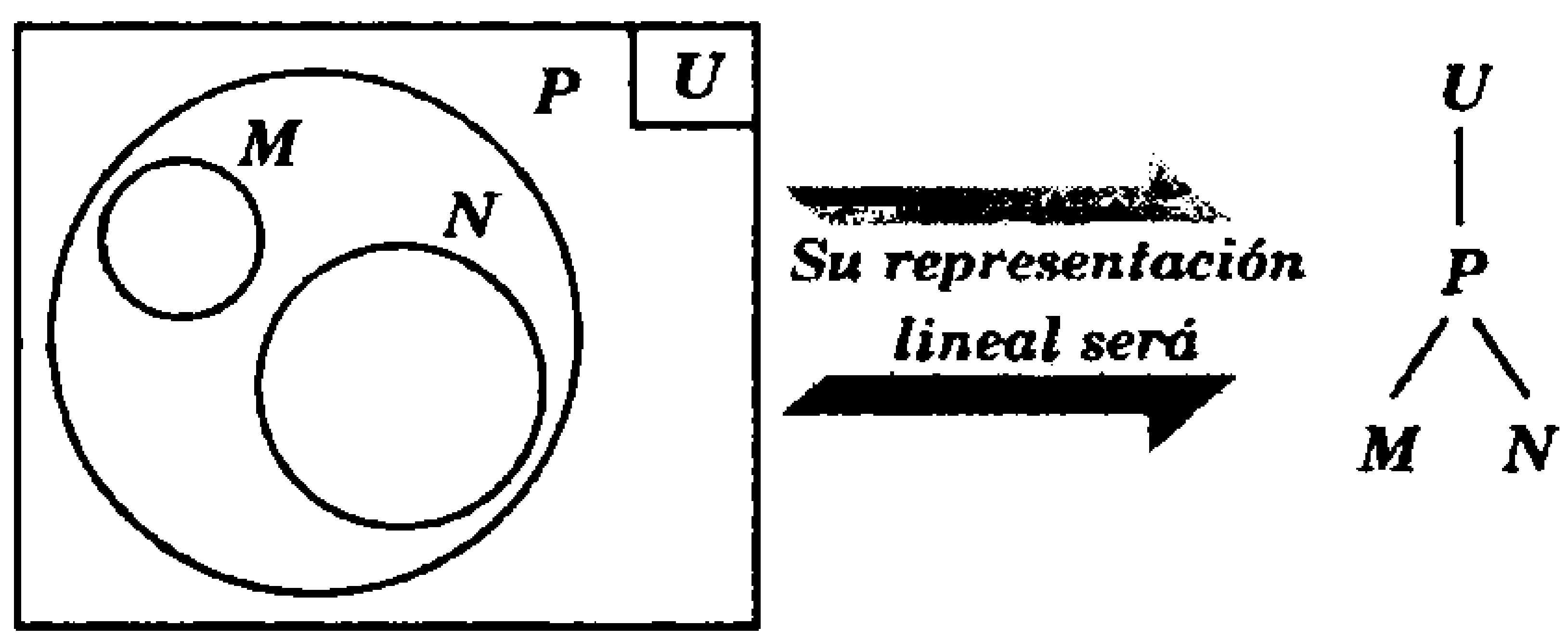
2 : hombres casados

3 : mujeres casadas

4 : mujeres solteras

NOTA :

Para la relación de "inclusión" se puede utilizar "Diagramas Lineales", los cuales se representan por medio de segmentos verticales .



CLASES DE CONJUNTOS

CONJUNTO VACÍO O NULO (ϕ) :

Es aquel que carece de elementos, se representan por "ϕ" (se lee "fi") ó { }.

EJEMPLO :

$A=\{x/x$ es número natural ; $5<x<6\}$, luego : $A=\phi$ ó $A=\{\}$, es vacío porque no existe número natural entre 5 y 6.

OJO :

El conjunto vacío se considera subconjunto de todo conjunto. Simbólicamente $(\forall A,\ \phi \subset A$ ó $\{\ \} \subset A)$

$B=\{x/x$ es una persona que vivió 200 años$\} \Rightarrow B=\phi$

CONJUNTO UNITARIO :

Es aquel que tiene uno y solo un elemento.

EJEMPLO :

* $A=\{5\}$ * $B=\{4;\ 4;\ 4\}$
* $C=\{x/x$ es la capital de Arequipa$\}$
* $D=\{x \in N/2<x<4\}$ → Igual a: $D=\{3\}$
* $E=\{\ \phi\ \}$

$\Rightarrow n(E)=1 \Rightarrow$ Es un conjunto unitario

CONJUNTO UNIVERSAL (U) :

Es el conjunto referencial que se toma para el estudio de otros conjuntos incluidos en él. No existe conjunto universal absoluto.

Se denota generalmente con la letra U.

EJEMPLO 1 :

* Para los conjuntos

$A=\{x/x$ es un gato$\}$ $B=\{x/x$ es un tigre$\}$

* Los siguientes conjuntos pueden ser considerados universos que contienen a los conjuntos anteriores.

$U_1=\{x/x$ es un animal$\}$

$U_2=\{x/x$ es un mamífero$\}$

EJEMPLO 2 :

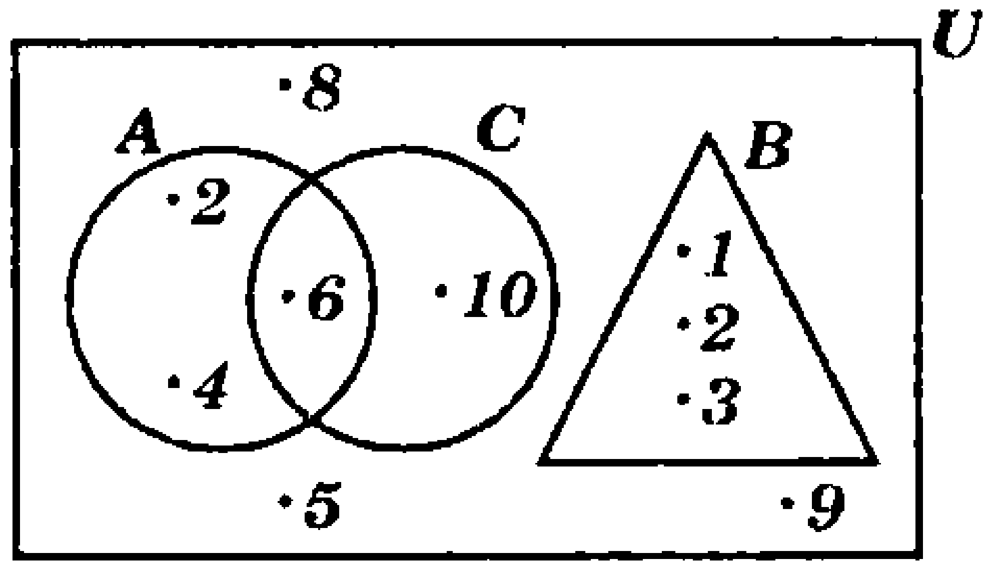
* Para los conjuntos

$A=\{2;\ 4;\ 6\}$ $B=\{1;\ 3;\ 7\}$ $C=\{6\ ;\ 10\}$

* Podemos considerar los siguientes conjuntos como universales.

$U=\{x\ /\ x \in N \wedge 1 \leq x \leq 10\}=\{1;2;3;......;9;10\}$

Diagrama :



CONJUNTO FINITO :

Es aquel que está compuesto por un número limitado de elementos.

EJEMPLO :

$A=\{x/x$ es un día de la semana$\}$

$B=\{a\ ;\ e\ ;\ i\ ;\ o\ ;\ u\}$

CONJUNTO INFINITO :

Es aquel que está compuesto por un número ilimitado de elementos y cuyo último elemento no se puede señalar.

EJEMPLO :

$$N=\{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;...\}$$

NOTA :

Los puntos suspensivos significan que siguen los elementos y como la numeración es ilimitada, luego "N" es un conjunto infinito.

CONJUNTO COMPARABLES :

Dos conjuntos A y B son comparables si y sólo si $A \subset B$ ó $B \subset A$ es decir cuando uno de los conjuntos está incluido en el otro.

EJEMPLO :

*Si : $A=\{\square;\triangle;\bigcirc\}$ y $B=\{x/x$ es una figura geométrica$\}$, luego "A" es comparable con "B", por que : $A \subset B$

FAMILIA DE CONJUNTOS

Es aquel cuyos integrantes, son todos conjuntos.

EJEMPLO : $A=\{\{a\ ;e\ ;i\};\{1\};\{\phi\};\phi\}$

CONJUNTO POTENCIA:

Se llama así a aquel conjunto que tiene por elementos a todos los subconjuntos de un conjunto dado, si el conjunto dado es "A", el conjunto potencia de "A" se denota por $P(A)$ y se lee: "P de A".

EJEMPLO :

* Dado : $A=\{a;\ b;\ c\}$
* Luego su conjunto potencia :

$P(A)=\{\{a\};\{b\};\{c\};\{a;b\};\{a;\ c\};\{b;\ c\};\{a;b;c\};\phi\}$

* Debemos tomar en cuenta que el conjunto ϕ (vacío), es subconjunto de cualquier conjunto .

OBSERVACIÓN :

El número de elementos del conjunto potencia de "*A*", se puede determinar por la siguiente relación:

$$\boxed{n\left[P(A)\right]=2^{n(A)}}$$

* Donde : $n(A)$ es el número de elementos del conjunto "*A*".

* Para el ejemplo: $n(A)=3$, luego $n\left[P(A)\right]=2^3=8$ elementos del conjunto potencia de "*A*".

* Todo conjunto tiene "subconjuntos", y la cantidad de estos está dada por :

$$\boxed{\text{Número de subconjuntos}=2^{n(A)}}$$

* Se denomina "subconjunto propio", a todos los subconjuntos de un conjunto dado ; excepto al que es igual al conjunto.

$$\boxed{\text{Número de subconjutos propios}=2^{n(A)}-1}$$

* Si : $(A\subset B)$ y $(B\subset C)\Rightarrow(A\subset C)$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

UNIÓN O REUNIÓN ($\cup$):

La unión de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por la agrupación de todos los elementos de *A* con todos los elementos de *B* .

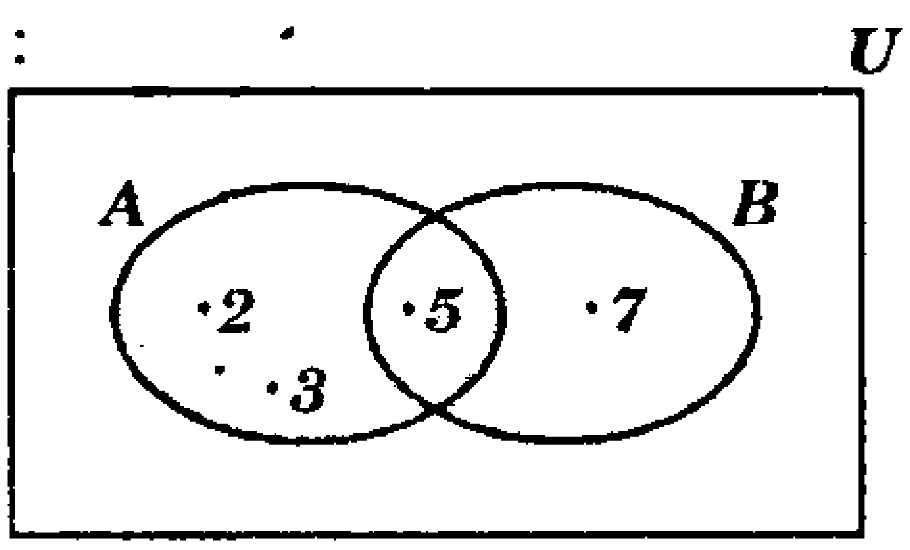
Se denota : $A\cup B$, se lee *A* unión *B* .

Se define : $A\cup B=\{x/x\in A\vee x\in B\}$

EJEMPLO 1 :

* Sea : $A=\{2;3;5\}$ $B=\{5;7\}$ $A\cup B=\{2;3;5;7\}$

* Diagrama :



$A\cup B$

EJEMPLO 2 :

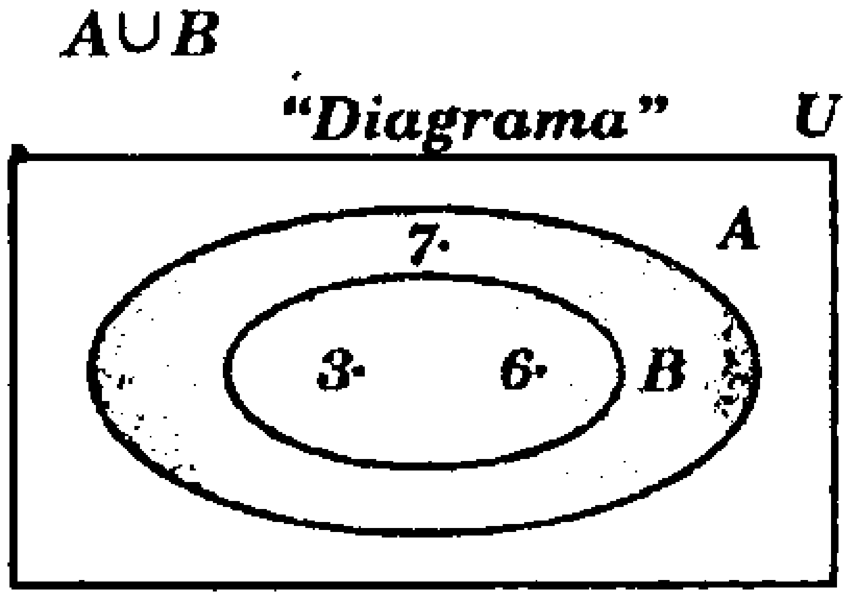
* Sea :

$A=\{6;3;7\}$

$B=\{6;3\}$

$A\cup B=\{6;3;7\}$

* Diagrama :



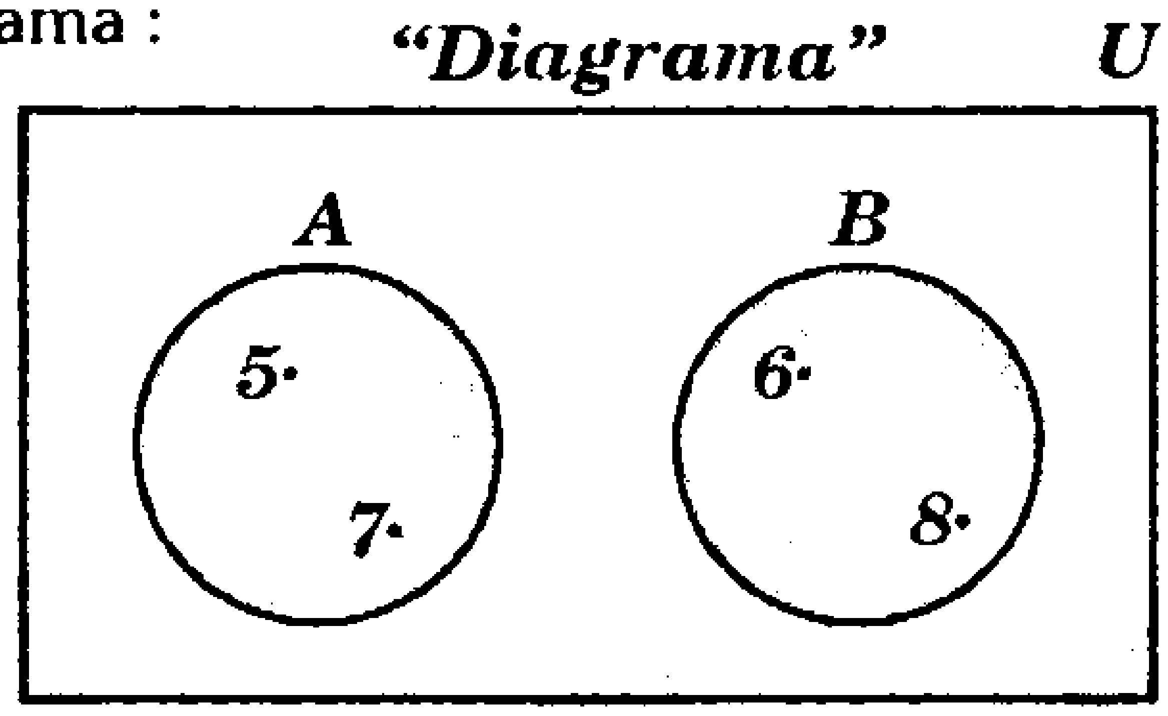
$A\cup B$

Note que : $B\subset A\Rightarrow A\cup B=A$

EJEMPLO 3 :

* Sea : $A=\{5;7\}$ $B=\{6;8\}$ $A\cup B=\{5;7;6;8\}$

* Diagrama :



$A\cup B$

Note si *A* y *B* son disjuntos $\Rightarrow$ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

INTERSECCIÓN ($\cap$):

La intersección de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez .

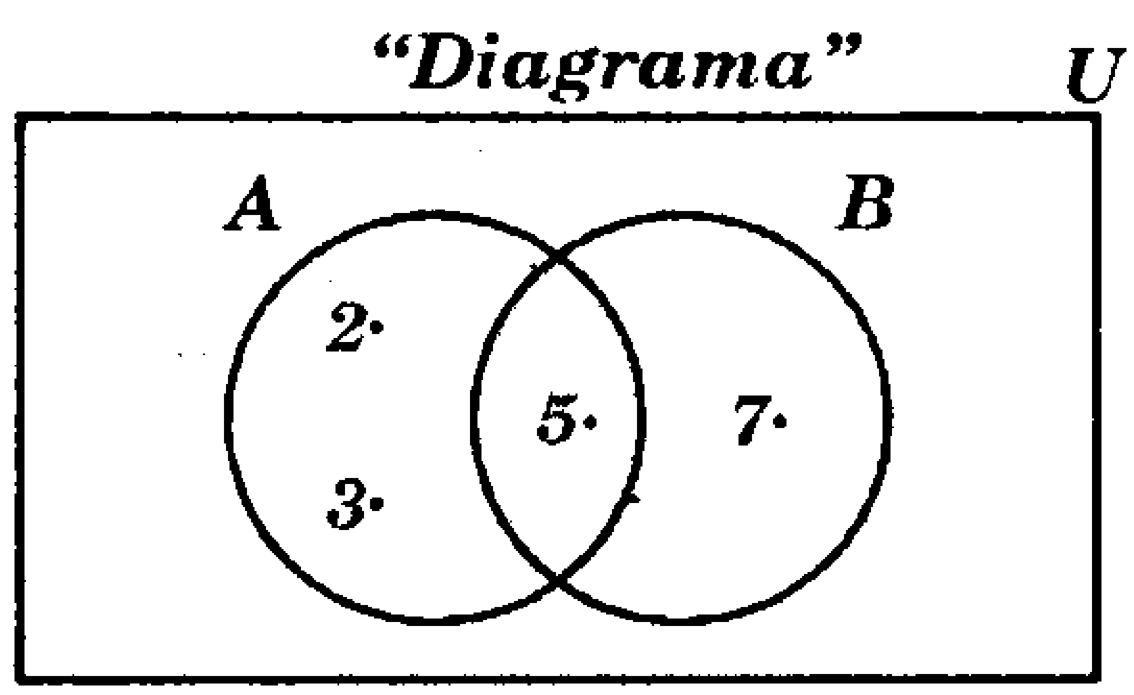
* Se denota $A\cap B$, se lee *A* intersección *B*

* Se define $A\cap B=\{x/x\in A\wedge x\in B\}$

EJEMPLO 1 :

* Sea : $A=\{2;3;5\}$ $B=\{5;7\}$ $A\cap B=\{5\}$

* Diagrama :



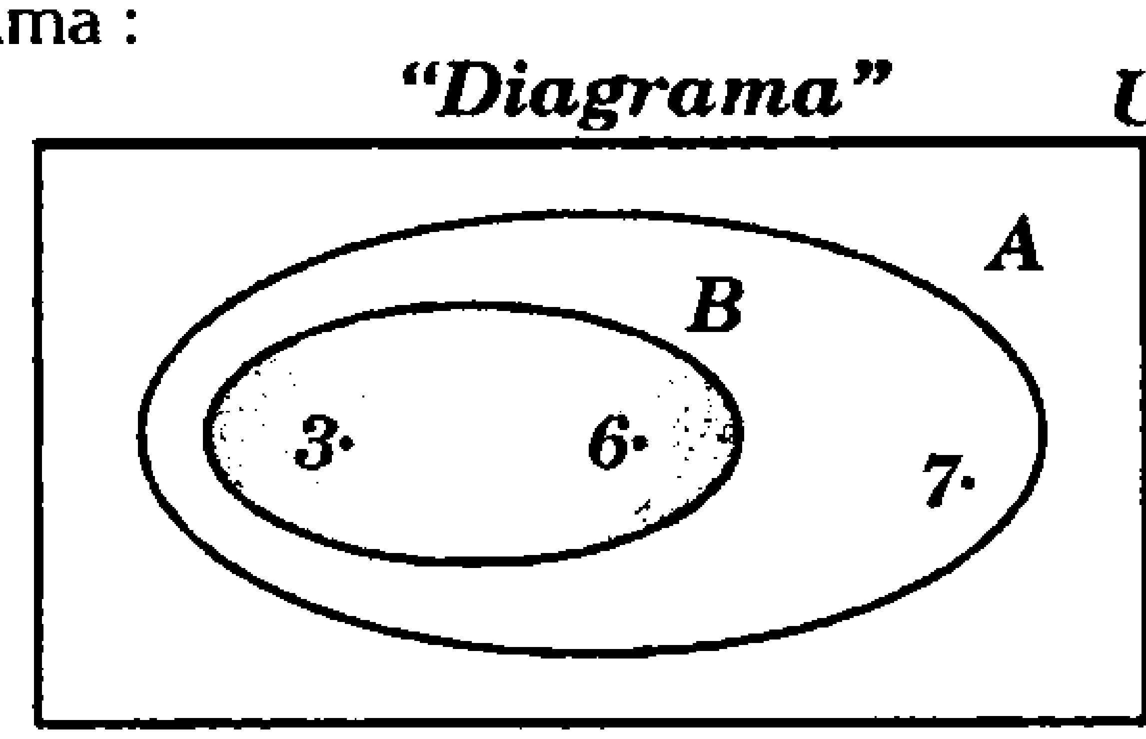
$A\cap B$

NOTA : $\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$

EJEMPLO 2 :

* Sea : $A=\{6;3;7\}$ $B=\{6;3\}$ $A\cap B=\{6;3\}$

* Diagrama :



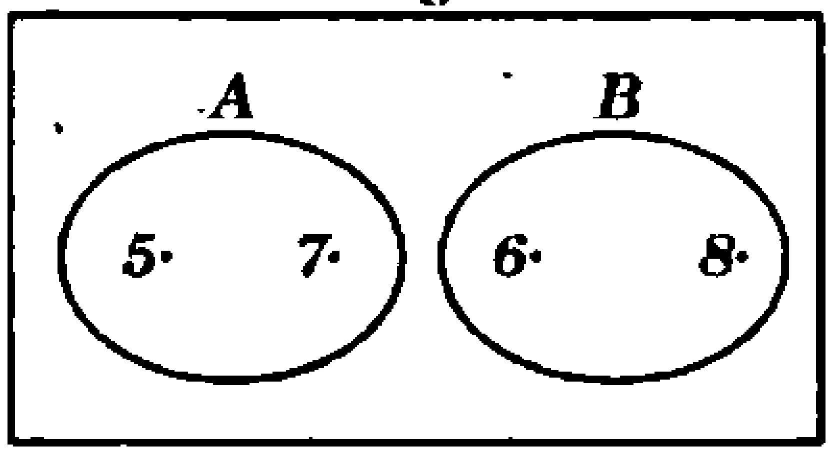
$A\cap B=B$

Nótese que si $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$

EJEMPLO 3 :

* Sea : $A=\{5;7\}$ $B=\{6;8\}$ $A \cap B=\{\ \}=\phi$
* Diagrama :

"Diagrama" U



$A \cap B = \phi$

DIFERENCIA (–) :

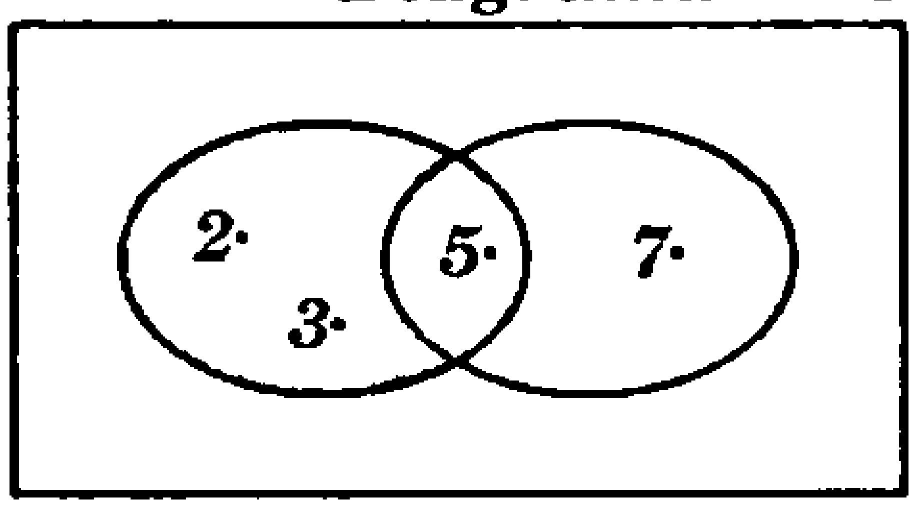
La diferencia de dos conjuntos *A* y *B* (en dicho orden) es el conjunto formado por los elementos de *A* pero que no pertenecen a *B* .

* Se denota $A - B$, se lee *A* menos *B*
* Se define $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

EJEMPLO 1 :

* Sea : $A=\{2;3;5\}$ $B=\{5;7\}$ $A-B=\{2;3\}$
* Diagrama :

"Diagrama" U

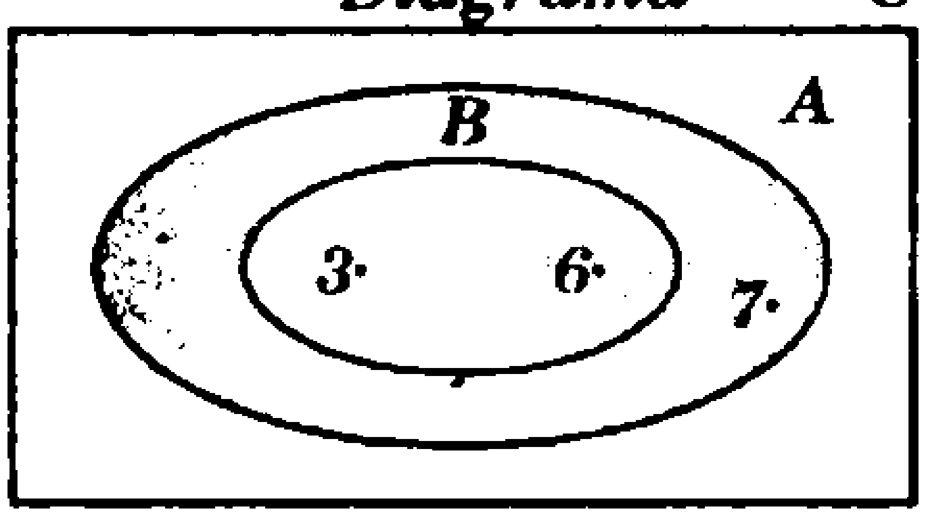


$A - B$

EJEMPLO 2 :

* Sea : $A=\{6;3;7\}$ $B=\{6;3\}$ $A-B=\{7\}$

"Diagrama" U



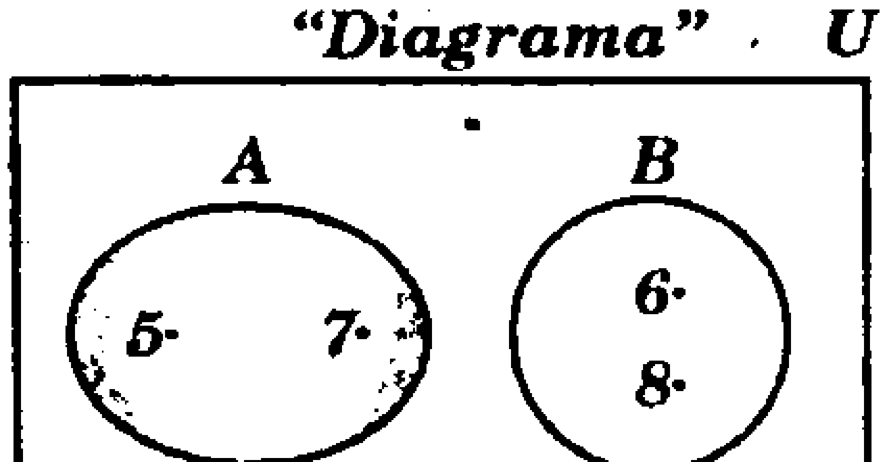
$A - B$

* Note que si : $B \subset A \Rightarrow B - A = \phi$

EJEMPLO 3 :

* Sea : $A=\{5;7\}$ $B=\{6;8\}$ $A-B=\{5;7\}$

"Diagrama" U



$A - B = A$

Si *A* y *B* disjuntos $\Rightarrow A - B = A$

DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ)

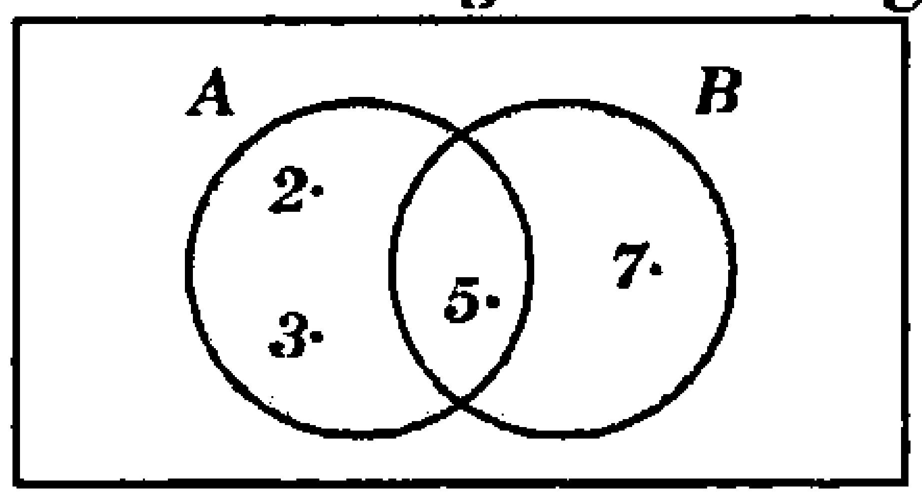
La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a *A* o *B* pero no a ambos .

* Se denota $A \Delta B$, se lee *A* diferencia simétrica con *B*.
* Se define $A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$

EJEMPLO 1 :

* Sea : $A=\{2;3;5\}$ $B=\{5;7\}$ $A \Delta B=\{2;3;7\}$

"Diagrama" U



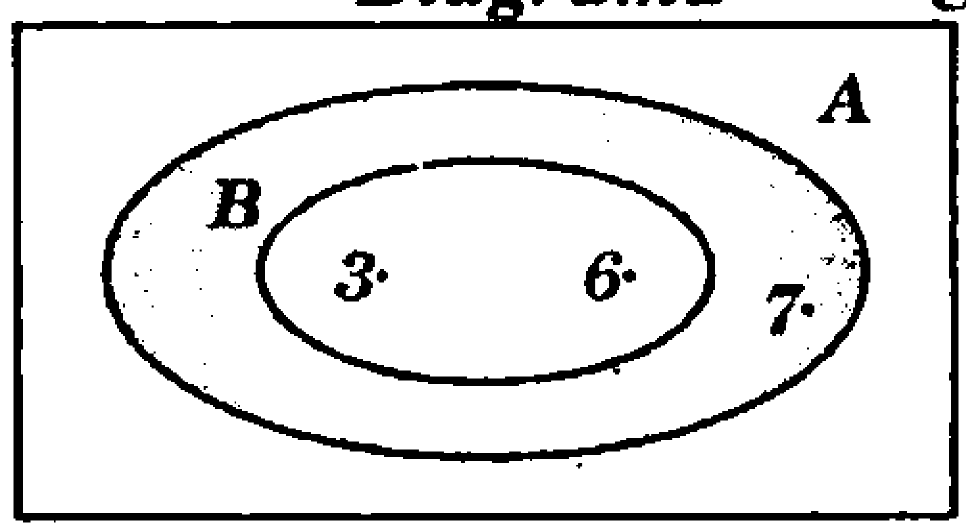
$A \Delta B$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

EJEMPLO 2 :

* Sea : $A=\{6;3;7\}$ $B=\{6;3\}$ $A \Delta B=\{7\}$

"Diagrama" U



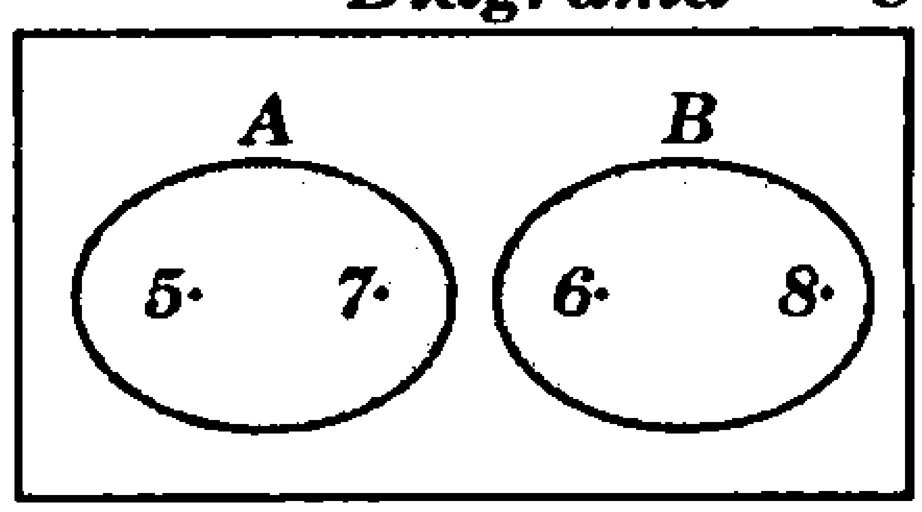
$A \Delta B$

Si $(B \subset A) \Rightarrow (A \Delta B) = A - B$

EJEMPLO 3 :

* Sea : $A=\{5;7\}$
  $B=\{6;8\}$

"Diagrama" U



$A \Delta B$

Si *A* y *B* son disjuntos $A \Delta B = A \cup B$

COMPLEMENTO (A^c) :

El complemento de un conjunto *A* es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal *U* pero no al conjunto *A* .

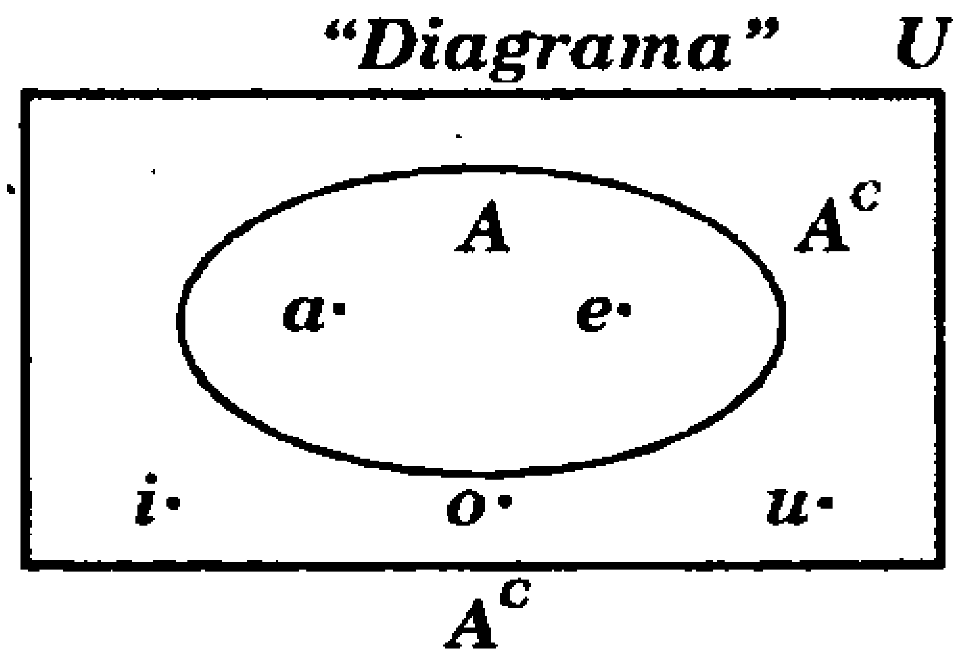
* Se denota $\mathscr{C}A$; $\overline{A}$; A^c; A'
* Se lee complemento de *A*

* Se define $A'=\{x/x \in U \wedge x \notin A\}$

EJEMPLO :

$A=\{a ; e\}$, $U=\{x/x$ es una vocal$\}$, $A'=\{i ; o ; u\}$

"Diagrama"



IMPORTANTE :

I) $\boxed{A \cup A^C = U}$ *II)* $\boxed{A \cap A^C = \phi}$ *III)* $\boxed{n(A)+n(A^C)=n(U)}$

IV) $\boxed{(A^C)^C = A}$ *V)* $\boxed{\phi^C = U}$ *VI)* $\boxed{(U)^C = \phi}$

PROPIEDADES :

UNIÓN ($\cup$) :

1) $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ *2)* $\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$

3) $\boxed{A \cup \phi = A}$ *4)* $\boxed{A \cup U = U}$

INTERSECCIÓN ($\cap$) :

1) $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ *2)* $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

3) $\boxed{A \cap U = A}$ *4)* $\boxed{A \cap \phi = \phi}$

DIFERENCIA (-) :

1) $A - B \neq B - A$ (Para dos conjuntos distintos)

2) $\boxed{A - \phi = A}$

3) $\boxed{\phi - A = \phi}$

DIFERENCIA SIMÉTRICA (Δ) :

1) $\boxed{A \Delta B = B \Delta A}$ *2)* $\boxed{A \Delta A = \phi}$

ENUNCIADOS DE CONJUNTOS

DETERMINACIÓN DE ZONAS :

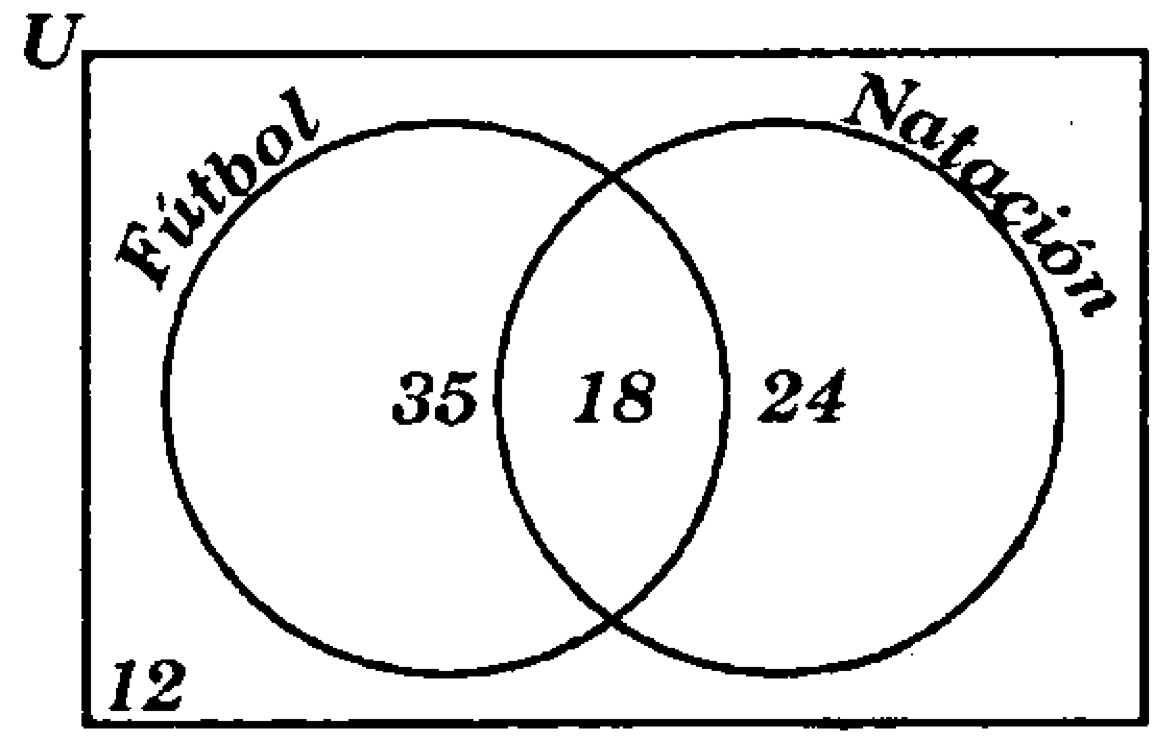
En los enunciados de conjuntos, lo primero es determinar y darse cuenta de cuantos conjuntos se deben graficar , de acuerdo a ello existirán algunos modelos , los cuales aplicaremos a tres casos .

CASO I :

Cuando estemos en un enunciado con dos conjuntos, intersectaremos a dichos conjuntos .

EJEMPLO 1 :

El siguiente diagrama de Venn representa los alumnos matriculados en una academia deportiva. De acuerdo a esta información responda las preguntas .



A) ¿Cuántos alumnos están inscritos en fútbol?

RPTA : 35+18=53

B) ¿Cuántos están inscritos en natación?

RPTA : 18+24=42

C) ¿Cuántos en fútbol o natación?

RPTA: 35+18+24=77

D) ¿Cuántos en fútbol y natación?

RPTA : 18

E) ¿Cuántos alumnos tiene la academia?

RPTA : 35+18+24+12=89

F) ¿Cuántos están inscritos sólo en natación?

RPTA: 24

G) ¿Cuántos no están inscritos en fútbol ni en natación?

RPTA : 12

EJEMPLO 2 :

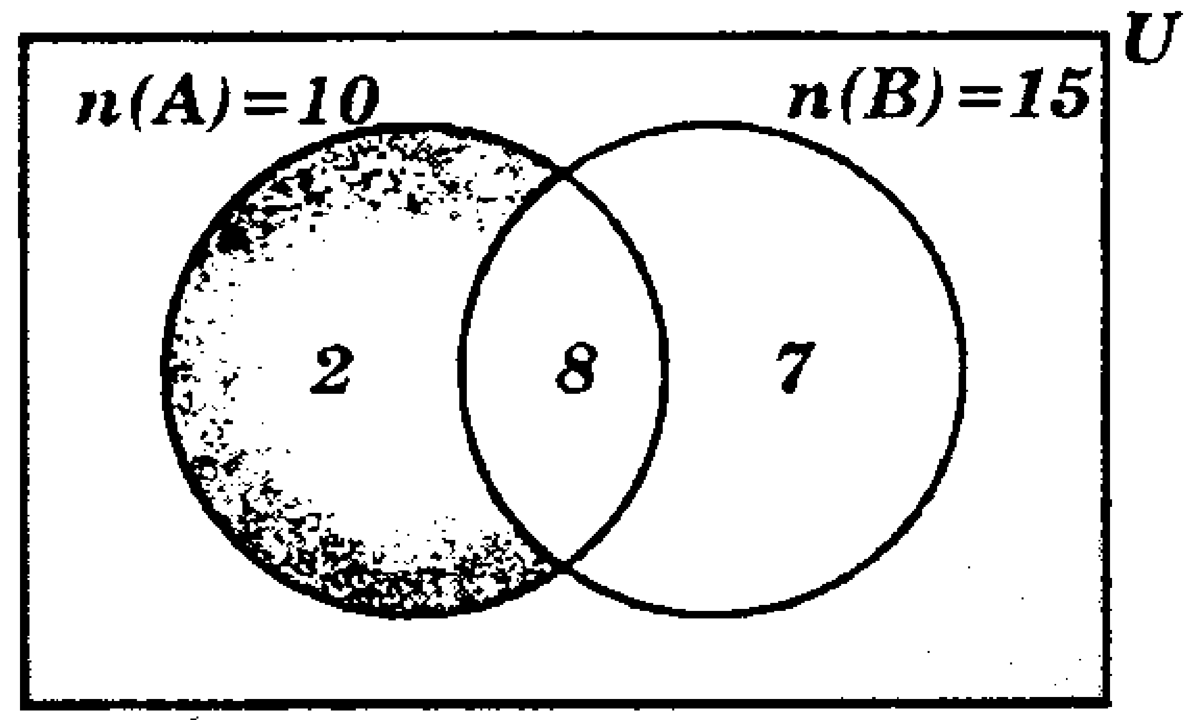
Dados los conjuntos A y B y los cardinales siguientes:

$$n(A)=10; n(B)=15 \text{ y } (A \cap B)=8.$$

Hallar $n(A-B)$

RESOLUCIÓN :

Gráficamente apreciaremos :-



$$\Rightarrow n(A-B)=2$$

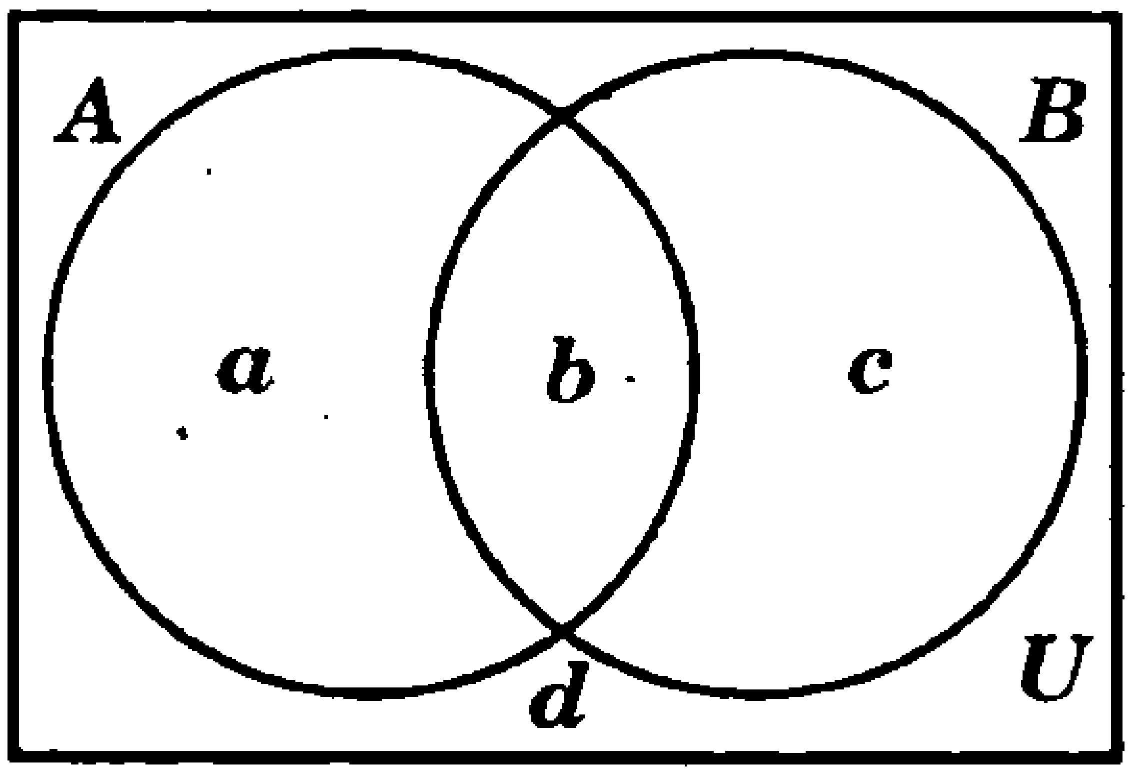
INDICACIONES :

1) Primero se coloca el cardinal de $A \cap B$ en el lugar correspondiente.

2) Luego se completa las regiones faltantes en el conjunto A y B con las cantidades que completen sus respectivos cardinales.

3) Así también podemos decir que $n(B-A)=7$

EN GENERAL :



La zona ⇒ representa

$a \Rightarrow$ ***Sólo "A" ó*** $n_{(A-B)}=a$

$b \Rightarrow$ ***"A" y "B" ó*** $n_{(A\cap B)}=b$

$c \Rightarrow$ ***Sólo "B" ó*** $n_{(B-A)}=c$

$d \Rightarrow$ ***Ni "A", ni "B" ó*** $n_{[(A\cup B)']}=d$

OBSERVACIÓN :

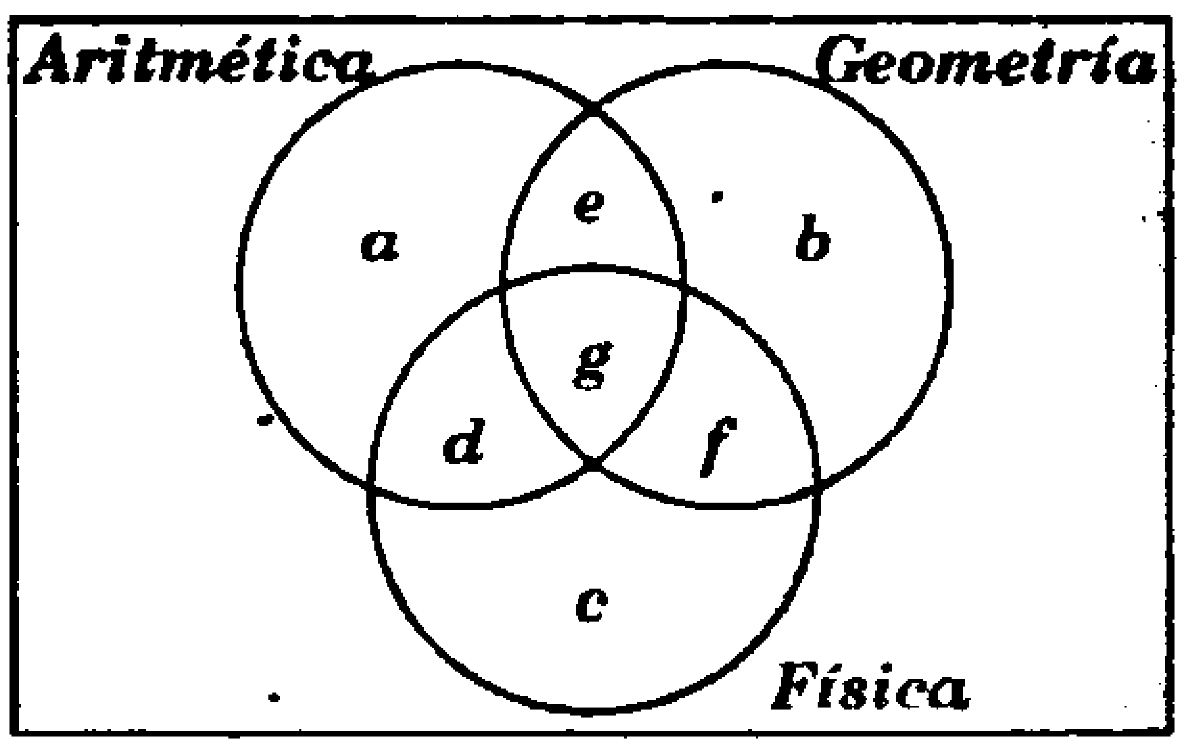
Para los enunciados : $A\,y\,B=A\cap B$; $A\,ó\,B=A\cup B$

CASO II :

En la posibilidad que estemos frente a tres conjuntos, estos se intersectarán del siguiente modo.

EJEMPLO 1 :

Analiza el gráfico y determina en los diagramas de Venn Euler las zonas .



Aritmética : $\underline{a+e+g+d}$

Geometría : $\underline{e+g+b+f}$

Física : $\underline{c+f+d+g}$

Aritmética y Geometría : $\underline{e+g}$

Geometría y Física : $\underline{g+f}$

Aritmética y Física : $\underline{d+g}$

Física pero no Geometría : $\underline{c+d}$

Geometría pero no Aritmética : $\underline{b+f}$

Aritmética pero no Física : $\underline{a+e}$

Sólo Aritmética y Física : $\underline{d}$

Sólo Geometría y Física : $\underline{f}$

Sólo Geometría y Aritmética : $\underline{e}$

Sólo Física : $\underline{c}$

Sólo Aritmética : $\underline{a}$

Sólo Geometría : $\underline{b}$

No Aritmética: $\underline{c+f+b}$

No Física: $\underline{a+e+b}$

No Geometría: $\underline{a+d+c}$

Geometría o Física: $\underline{e+b+g+f+d+c}$

Aritmética o Geometría : $\underline{a+d+e+g+b+f}$

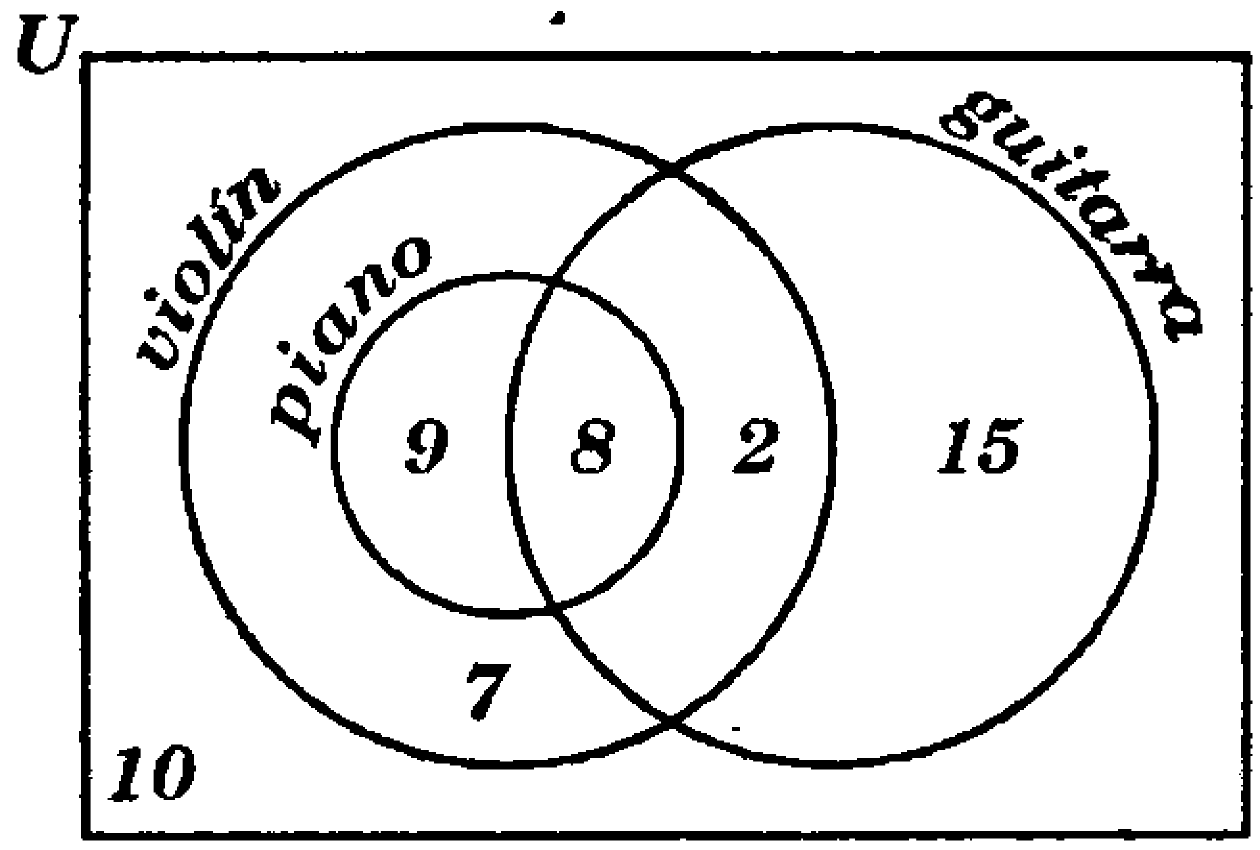
No Física pero si Aritmética: $\underline{a+e}$

No Geometría pero si Física : $\underline{d+c}$

No Aritmética pero si Geometría : $\underline{b+f}$

EJEMPLO 2 :

El siguiente diagrama de Venn muestra los instrumentos que tocan un grupo de músicos .



De acuerdo a esta información responda :

A) ***¿Cuántos tocan el violín? Rpta:*** $9+8+2+7=26$

B) ***¿Cuántos tocan el piano? Rpta:*** $9+8=17$

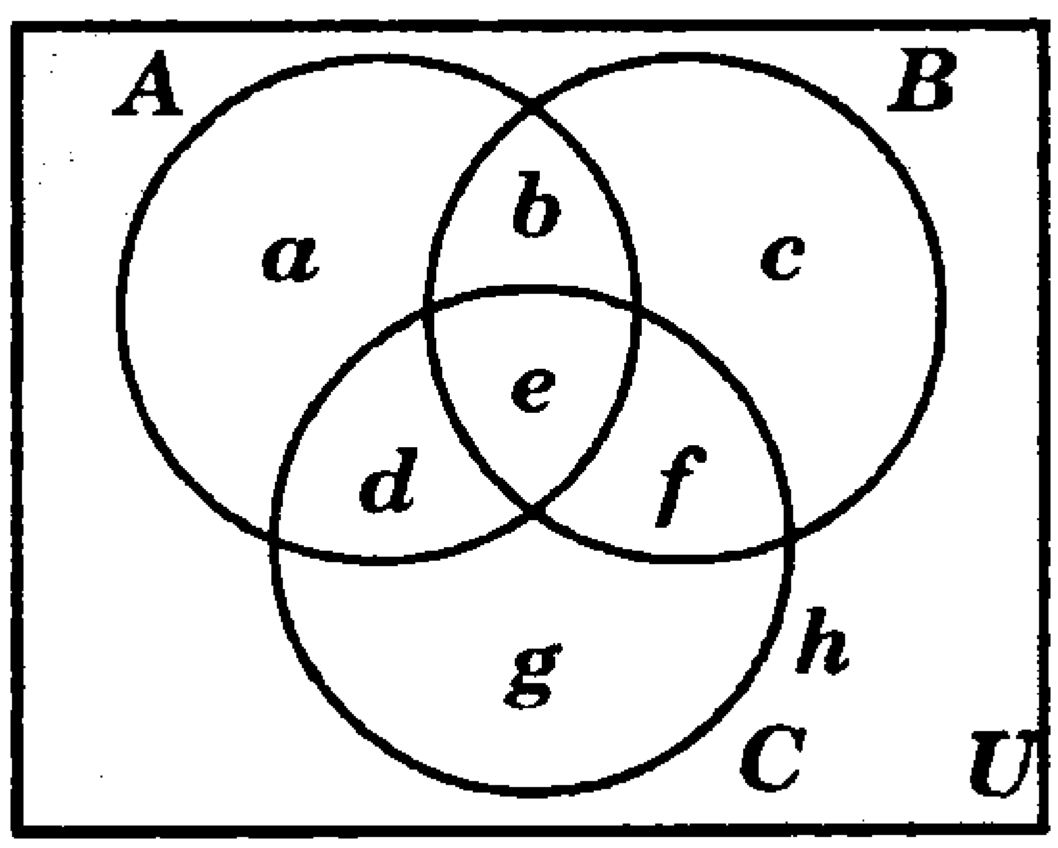
C) ***¿Cuántos tocan sólo guitarra? Rpta:***

D) ***¿Cuántos tocan el violín pero no el piano? Rpta:***

E) ***¿Cuántos tocan el violín y la guitarra? Rpta:***

F) ***¿Cuántos tocan el piano o la guitarra? Rpta:***

EN GENERAL :



La zona $\Rightarrow$ representa

$a \Rightarrow$ *Sólo "A"* ó $n_{[A-(B\cup C)]}=a$

$b \Rightarrow$ *Sólo "A" y "B" ó* $n_{[(A\cap B)-C]}=b$

$c \Leftrightarrow$ *Sólo "B"* ó $n_{[B-(A\cup C)]}=c$

$d \Leftrightarrow$ *Sólo "A" y "C" ó* $n_{[(A\cap C)-B]}=d$

$e \Leftrightarrow$ *"A"; "B" y "C" ó* $n_{[(A\cap B\cap C)]}=e$

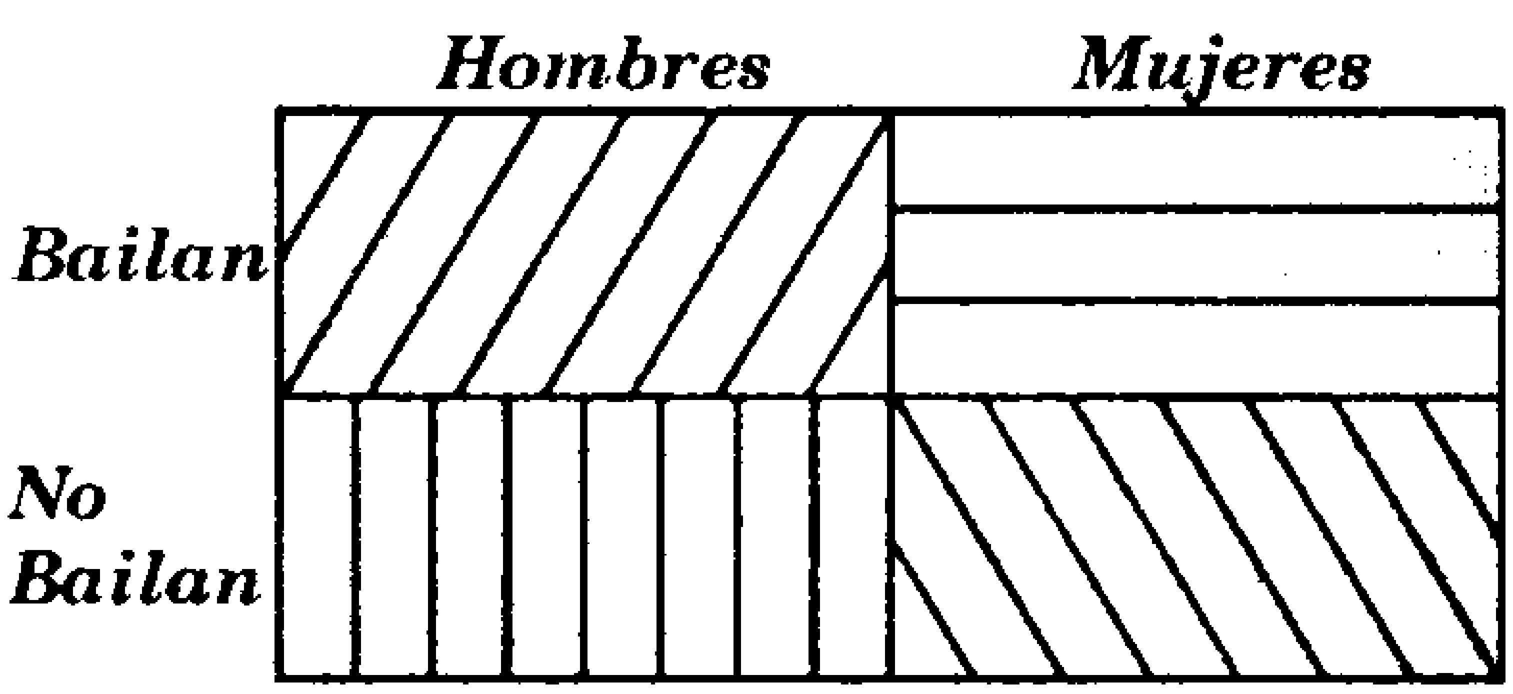
$f \Leftrightarrow$ *Sólo "B" y "C" ó* $n_{[(B\cap C)-A]}=f$

$g \Leftrightarrow$ *Sólo "C"* ó $n_{[C-(A\cup B)]}=g$

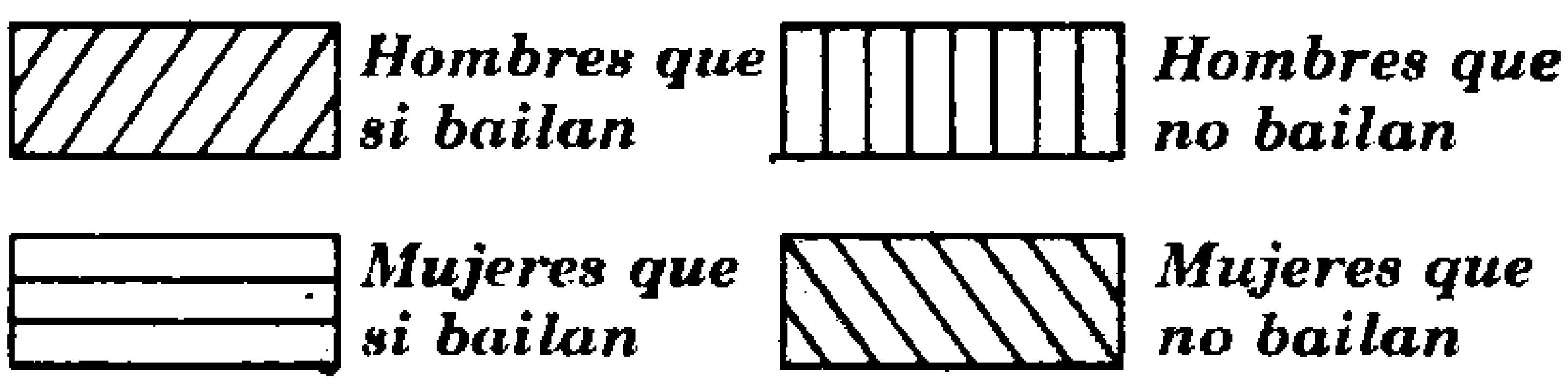
$h \Leftrightarrow$ *Ni "A", ni "B", ni "C" ó* $n_{[(A\cup B\cup C)']}$

CASO III (PARA CONJUNTOS DISJUNTOS):

EJEMPLO 1 :



Donde :



EJEMPLO 2 :

Analiza el gráfico y determina en el diagrama de Carrol las zonas :

	Hombres	Mujeres
Altos	a	b
Bajos	c	d

Número de :

Hombres : $a+c$ *Mujeres :* $b+d$

Hombres bajos : c *Mujeres altas :* b

Personas altas : $a+b$ *Mujeres bajas :* d

Hombres altos : a *Personas bajas :* $c+d$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)* :

I) Si $A=\{\phi\}$;entonces $A\subset P(A)$; $P(A)$ potencia de A.

II) $A\Delta B\in P(A\cup B)$

III) Si $A/B=\phi$ entonces $A=B$

A) VVV B) VVF C) VFV D) VFF E) FFF

RESOLUCIÓN :

I) VERDADERO :

El conjunto potencia de A está formado por todos los subconjuntos de A.

$$\forall A, A\subset A \wedge A\in P(A)$$

$$\text{Si } A=\{\phi\}\Rightarrow P(A)=\{\{\phi\};\phi\}$$

$$\text{Luego } \{\phi\}\subset P(A)$$

II) VERDADERO :

$(A\Delta B)\subset(A\cup B)\rightarrow(A\Delta B)\in P(A\cup B)$

III) FALSO :

$A/B=\phi\Rightarrow A=B$ no necesariamente

Contra ejemplo :

$A=\{2;3\}$ $B=\{1;2;3;4\}$

* Por lo tanto $A\backslash B=\phi$; sin embargo. $A\neq B$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Dado tres conjuntos A,B y C, tales que $(A\cup B)\subset(A\cup C)$ y $(A\cap B)\subset A\cap C$ entonces.

A) $B\subset C$ *B)* $B=C$ *C)* $C\subset B$

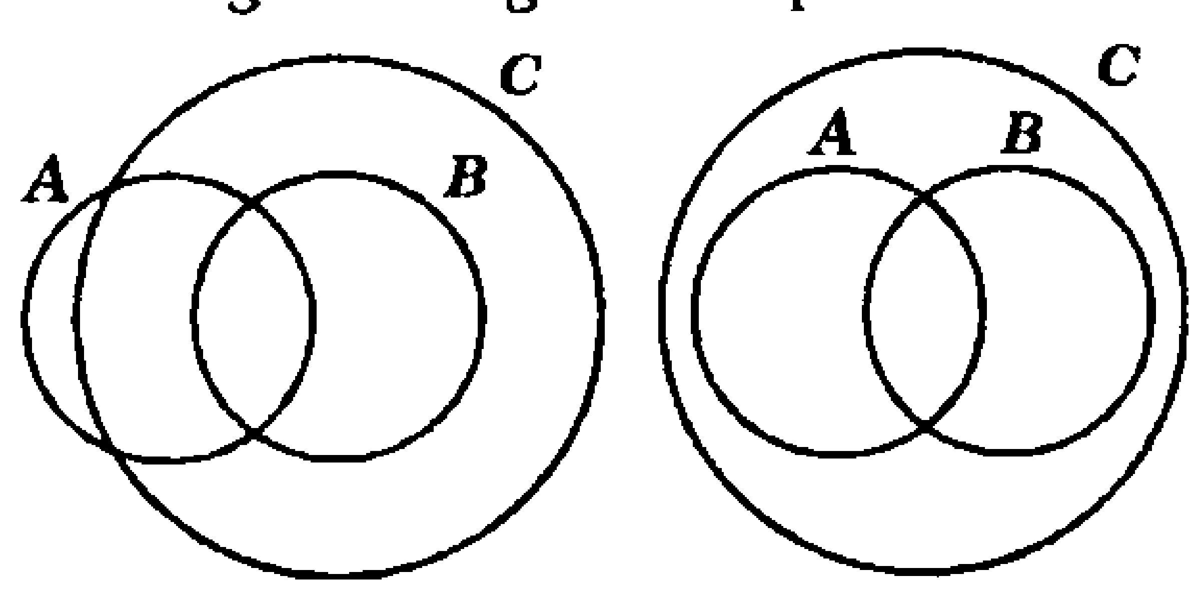
D) $(A\cup C)\subset B$ *E)* $(A\cup B)\subset C$

RESOLUCIÓN :

De las condiciones

$$(A\cup B)\subset(A\cup C) \text{ y } (A\cap B)\subset(A\cap C)$$

tenemos los siguientes gráficos que verifican .



Luego , en ambos casos se cunmple que $B\subset C$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Durante todo el mes de octubre un alumno estuvo preparándose en Aritmética y Álgebra. Veinte días estudió Aritmética y *16* días Álgebra. Si el *1ro* de octubre fue domingo y todos los domingos descansó, ¿En cuántos días estudia ambos cursos?

A) 9 ***B) 8*** ***C) 10*** ***D) 11*** ***E) 5***

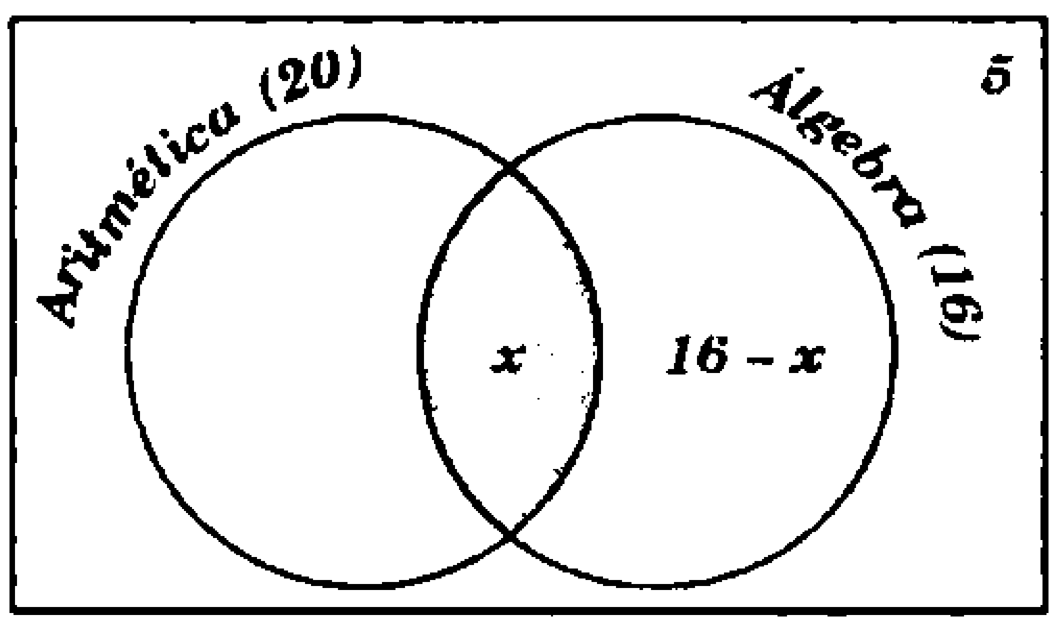
RESOLUCIÓN:

* El mes de octubre tiene *31* días.

* Como *1ro* de octubre fue domingo, entonces hay *5* domingos.

* Por lo tanto en el mes de octubre ha estudiado durante *26* días.

* Gráficamente se tiene:



* Sea x el número de días que estudió ambos cursos.

* Luego: $20+16-x=26 \Rightarrow x=10$

RPTA: "C"

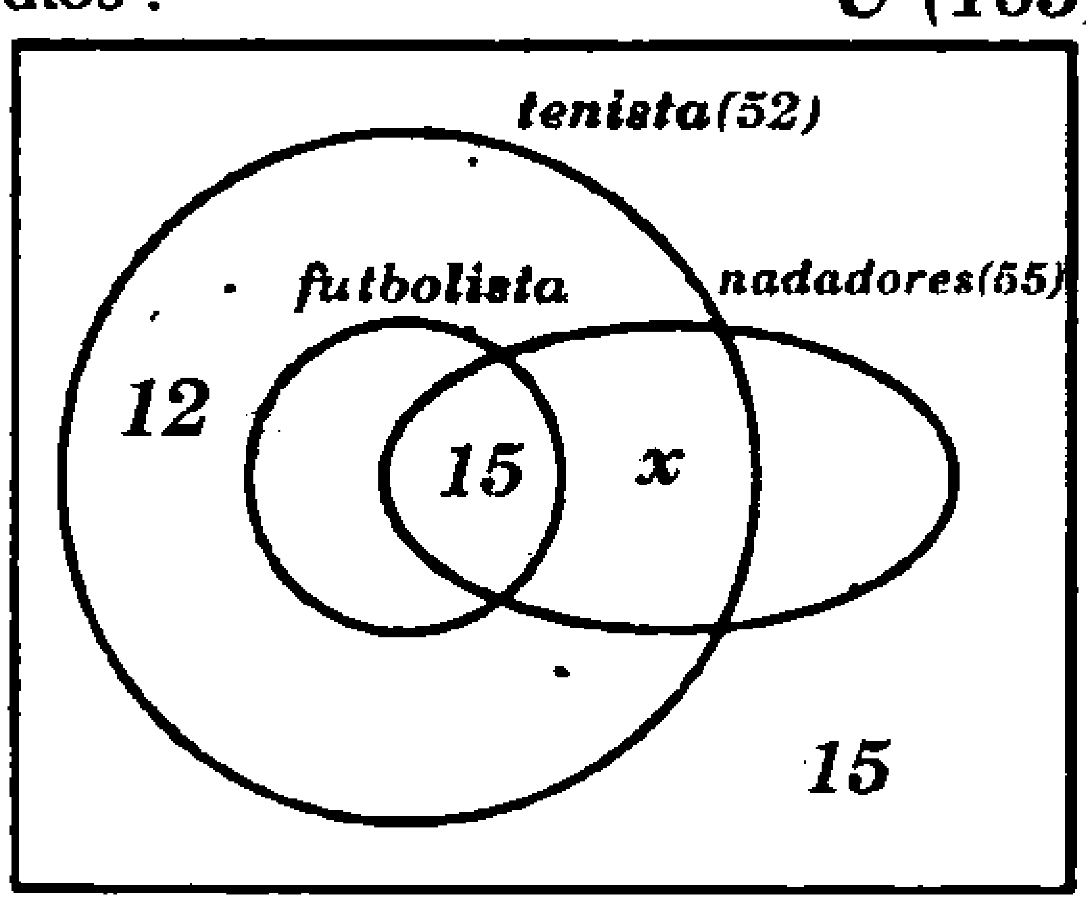
PROBLEMA 3 :

De un grupo de *105* personas, *52* son tenistas y *55* son nadadores. Sabemos, también, que *15* tenistas practican fútbol y natación y todos los futbolistas son tenistas. Sí *12* personas solo practican tenis y *15* personas no practican ninguno de los deportes mencionados. ¿Cuántas personas son tenistas y nadadores pero no futbolistas?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 1*** ***D) 5*** ***E) 4***

RESOLUCIÓN :

De los datos :



total tenistas		total nadadores		ningún deporte		total personas		tenista y nadadores
52	+	55	+	15	=	105	+	(15+x)

$x=2$

$\Rightarrow 2$ personas son tenistas y nadadores, pero no fulbolistas

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Indicar si es verdadero *(V)* o falso *(F)*, en cada caso, si :

$A=\{2;4;,6;8\}$ $R=\{4;5;6\}$,

$B=\{1;2;3;4;5\}$, $S=\{3;6;9;12\}$

* $2\in A$....( ) * $7\in B$.......( ) * $8\notin A$...( )

* $1\notin A$....( ) * $2;3\in B$....( ) * $5\notin R$....( )

* $2\in S$....( ) * $12\in R$.......( )

02 Decir ; verdadero *(V)* o falso *(F)*.

Si : $A=\{2;5;7\}$ $B=\{2;5;6;7\}$

$C=\{2;3;5;6;7;10\}$ $D=\{4;3;2;1\}$

* $\{12;5\}\subset A$...( ) * $\{1;6\}\subset A$...( ) * $A\subset B$...( )

* $B\subset C$...( ) * $A\subset C$...( ) * $C\subset A$...( )

* $\{2;3\}\subset C$...( ) * $\{4;3;1\}\subset D$...( ) * $C\not\subset B$...( )

* $\phi\not\subset A$...( ) * $\{\ \}\not\subset B$...( ) * $A\subset A$...( )

03 Marcar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda, si :

$A=\{1;2;3;4\}$ $C=\{5;7;8;9\}$

$B=\{1;3;5;7\}$ $D=\{5;6;8;10\}$

* $3\in A$.....( ) * $5\in B$.....( ) * $5\in A$.....( )

* $2\notin B$.....( ) * $4\notin B$.....( ) * $6\notin C$.....( )

* $7\in D$.....( ) * $8\notin C$.....( )

04 Sea el conjunto $A=\{a;\ \{a\};\ 7;\ \{7\};\ \{18\}\}$ ¿Cuántas proposiciones son verdaderas?

I) $a\notin A$ .... ( )

II) $\{a\}\in A$ .... ( )

III) $\{a\}\subset A$ .... ( )

IV) $\{7;\ \{7\}\}\notin A$ .... ( )

V) $\{\{a\}\}\subset A$ .... ( )

VI) $n(A)=5$ .... ( )

VII) $\{8\}\subset A$ .... ( )

VIII) $\{a;\ 7\}\not\subset A$ .... ( )

IX) $\{\{7\};\ 7\}\subset A$ .... ( )

X) $8\in A$ .... ( )

05 Sabiendo que :

$A=\{1;2;3;4;5\}$ $B=\{1;2;3\}$ $C=\{1;2\}$ $D=\{2\}$

* $A\subset C$.......( )   * $D\subset B$......( )   * $C\subset B$......( )
* $B\not\subset A$.......( )   * $D\not\subset D$......( )   * $\phi\subset B$.......( )
* $B\subset B$.......( )   * $C\not\subset A$.......( )   * $D\subset A$..... ( )
* $A\subset B$.....( )   * $A\subset D$......( )   * $C\subset D$......( )

¿Cuántas son falsas?

06 Convierte los siguientes conjuntos dados por extensión a comprensión :

$A=\{2;3;4;5;6\}$ $B=\{-4;-3;-2;-1\}$
$C=\{5;6;7;8\}$ $D=\{7;8;9;10;11;12\}$
$E=\{2;4;6;8\}$ $F=\{-2;0;2\}$
$M=\{1;4;9;.......;81\}$ $P=\{1;8;27;........;1000\}$
$Q=\{4;8;12;16;.....;56\}$

07 Teniendo :

$A=\{1;2;4\}$ $B=\{4;5;6\}$ $C=\{1;4;9\}$ $D=\{2;3\}$

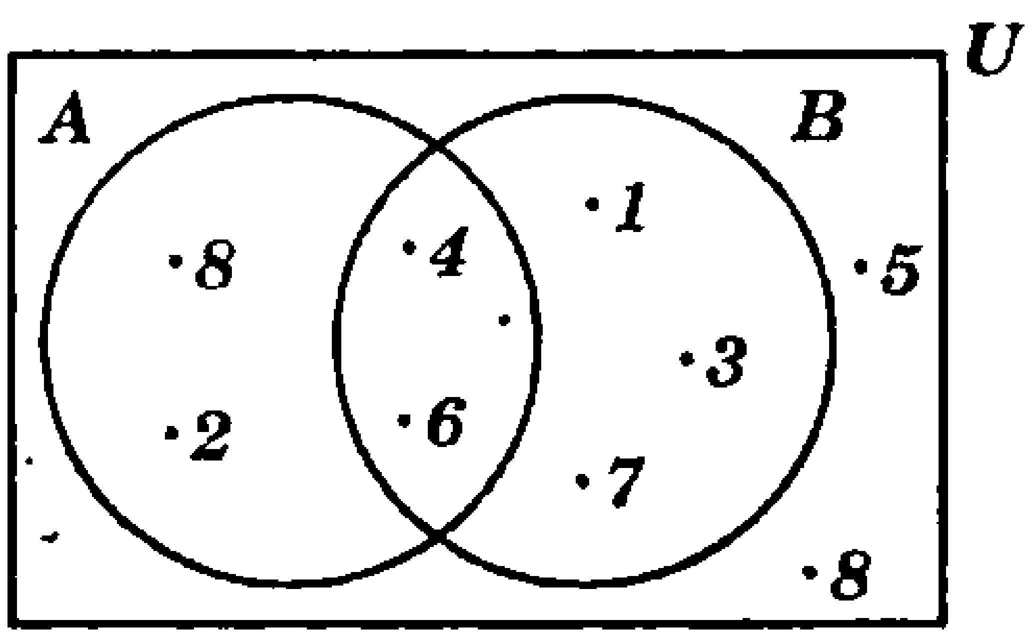
Y el conjunto universal : $U=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Determina :

* $A\cup B$ * $B\cap C$ * $C-D$ * $D\Delta A$
* $C\cup B$ * $B\cap D$ * C' * $B-A$

08 Dado los conjuntos :

$A=\{2;4;6;8\}$ $B=\{1;3;4;6;7\}$
$C=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$



Hallar :

* $A\cup B$ * $A\cap B$ * $A-B$ * $B-A$
* $A\Delta B$ * A^C * B^C * $(A\cup B)^C$

09 Dados los conjuntos A y B incluidos en el universo U, determine las operaciones con dichos conjuntos y compruebe su respuesta :

$A=\{4;5;7;8\}$ $B=\{5;8;9\}$ $U=\{3;4;5;6;7;8;9\}$

* $A\cup B=\{4;5;7;8;9\}$ * $A\cap B=\{5;8\}$
* $A-B=\{4;7\}$ * $B-A=\{9\}$
* $A\Delta B=\{4;7;9\}$.   * $A^C=\{3;6;9\}$
* $B^C=\{3;4;6;7\}$ * $(A\cup B)^C=\{3;6\}$

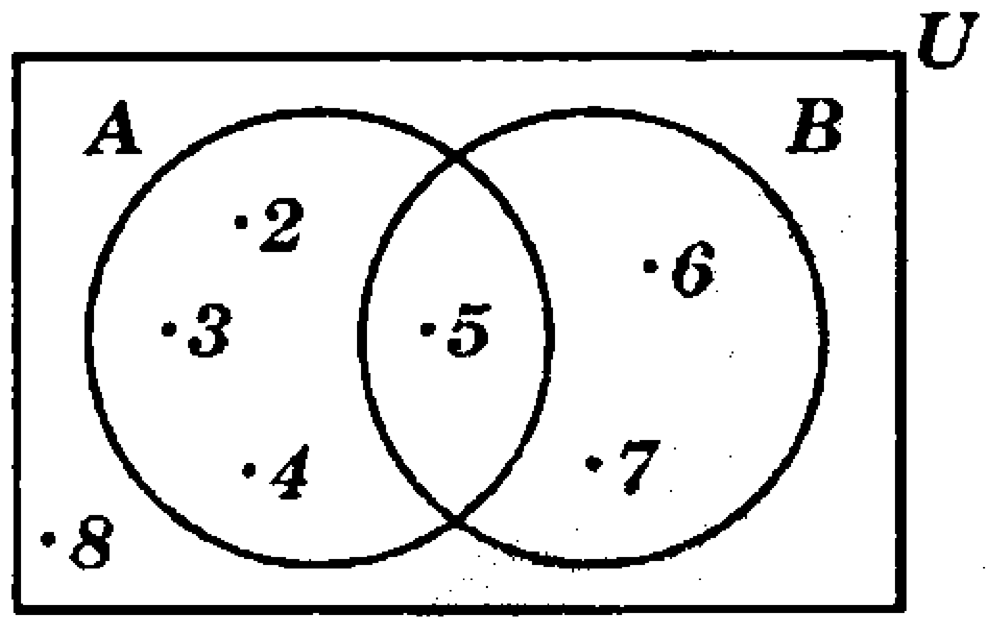
10 Dado los conjuntos :

$A=\{2;5;7;9;10\}$ $B=\{2;4;7;8;11\}$
$U=\{1;2;9;12;8;13\}$

Hallar :

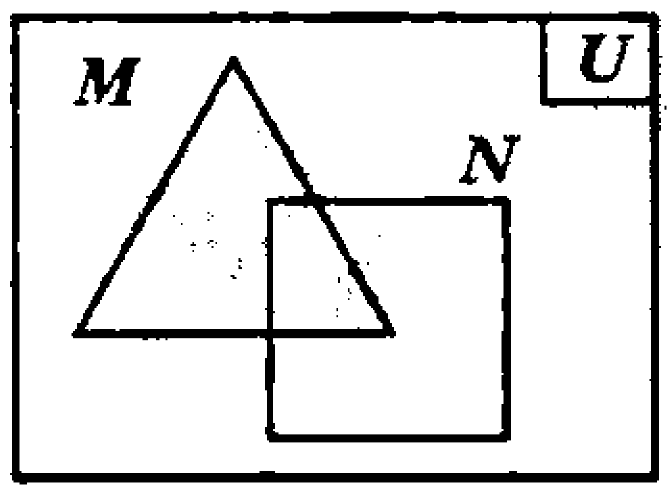
* $(A\cup B\cup C)$ * $(A\cap B\cap C)$ * $A-B$
* $(A\cup C)^C$ * $(A\cap B)^C$ * $(A\Delta C)^C$
* $B-(A\cup C)$ * $(A\cap B\cap C)^C$

11 Del gráfico mostrado :

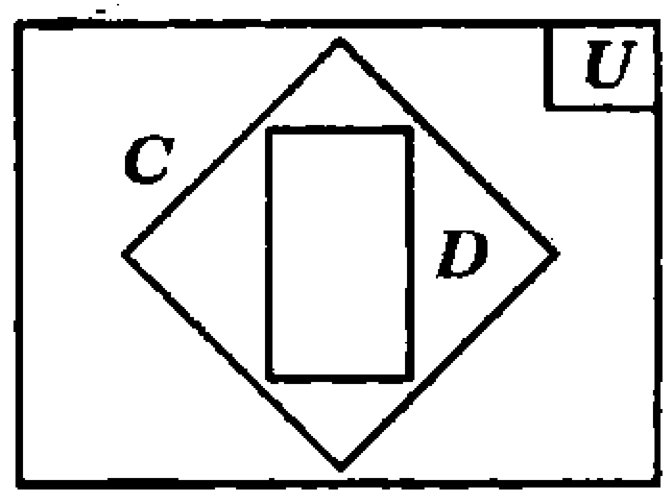


Halla : I) $(A\cap B)-A$; II) $(A\Delta B)-(A-B)$; III) $B\Delta A$

12 Sombrea las zonas correspondientes a cada operación conjuntista :

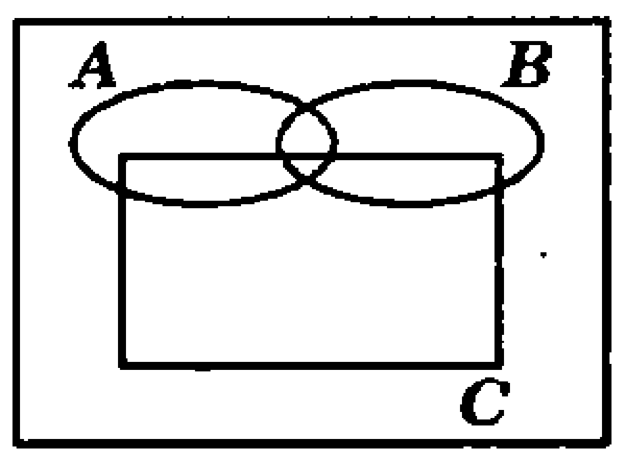


$(M-N)$

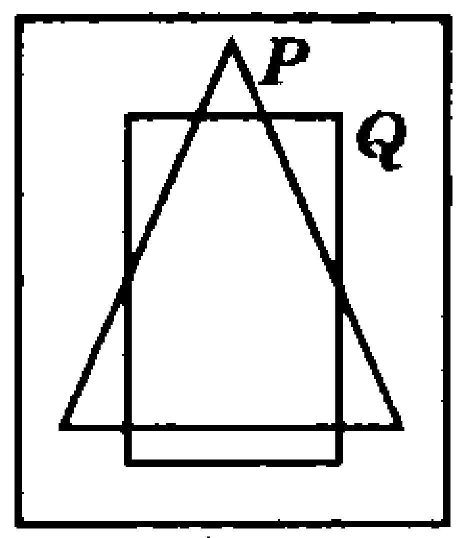


$(C\cap D)$

13 Sombrea las zonas correspondientes a cada operación señalada :



$(B\Delta C)$

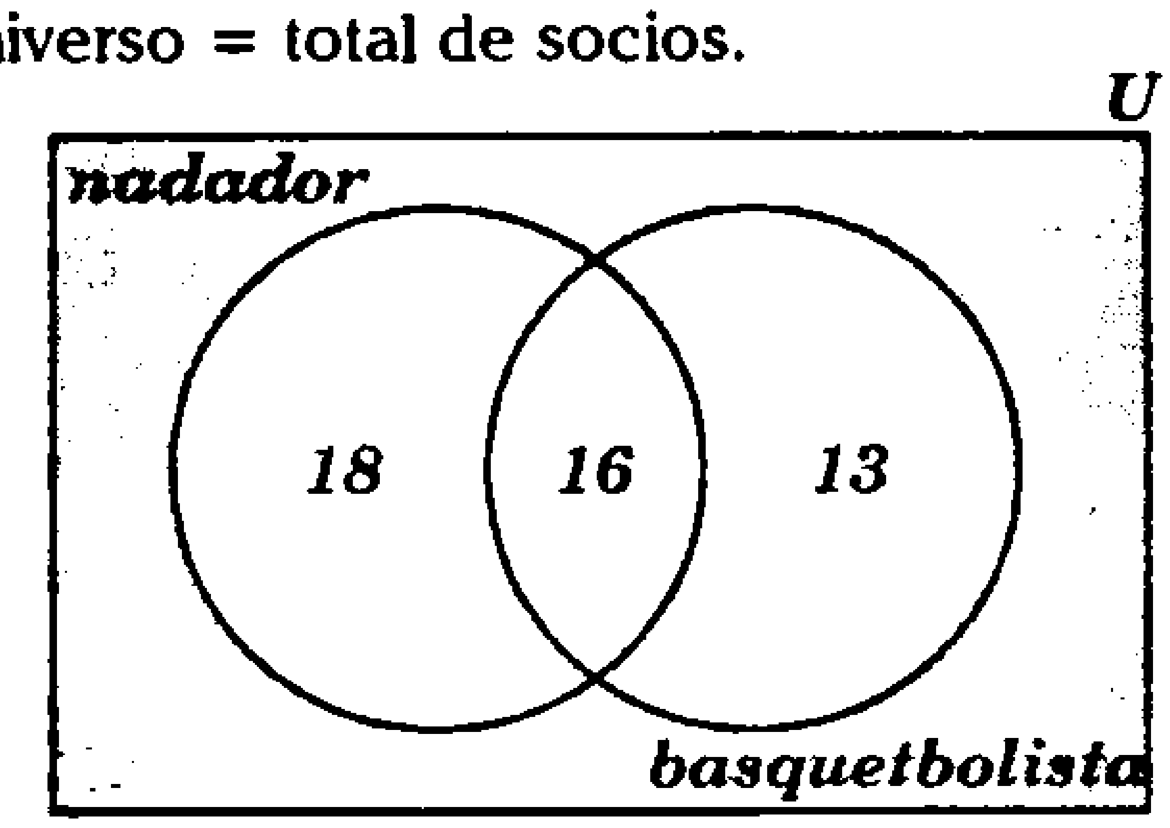


$(Q-P)$

14 Si : $A=\{2;4;5;6;8\}$ $B=\{1;2;4;7;9\}$

Hallar : $(A\cup B)-(A-B)$

15 Si el esquema representa la cantidad de socios en un club que practican básquet y natación donde $U=$ Universo = total de socios.



Contestar :

A) ¿Cuántos practican sólo básquet?

B) ¿Cuántos practican ambos deportes?

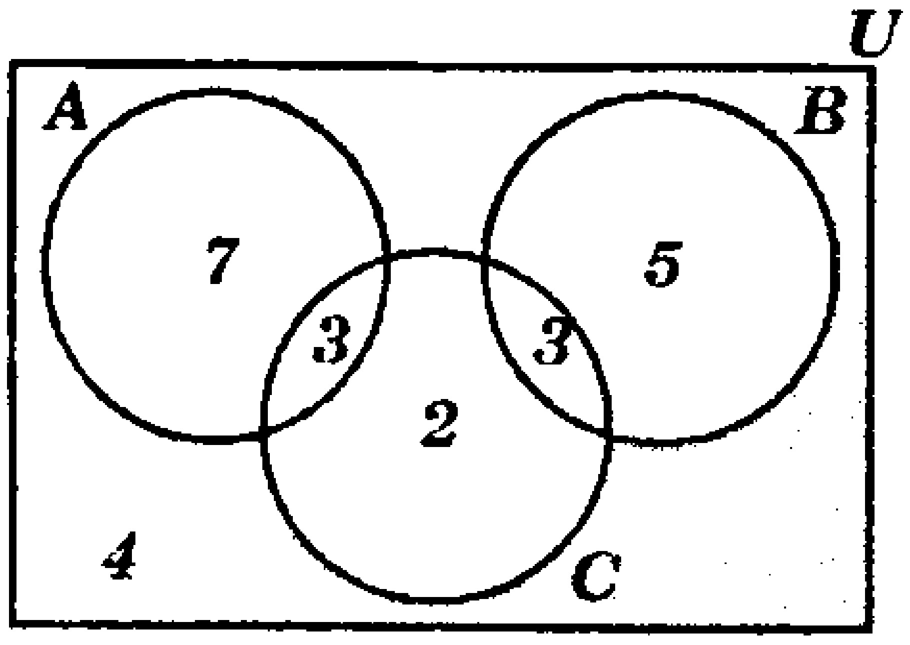
C) ¿Cuántos practican solamente natación?

D) ¿Cuántos no practican ningún deporte?

Y relacionar con los siguiente :

I)18 *II)33* *III)16* *IV)13*

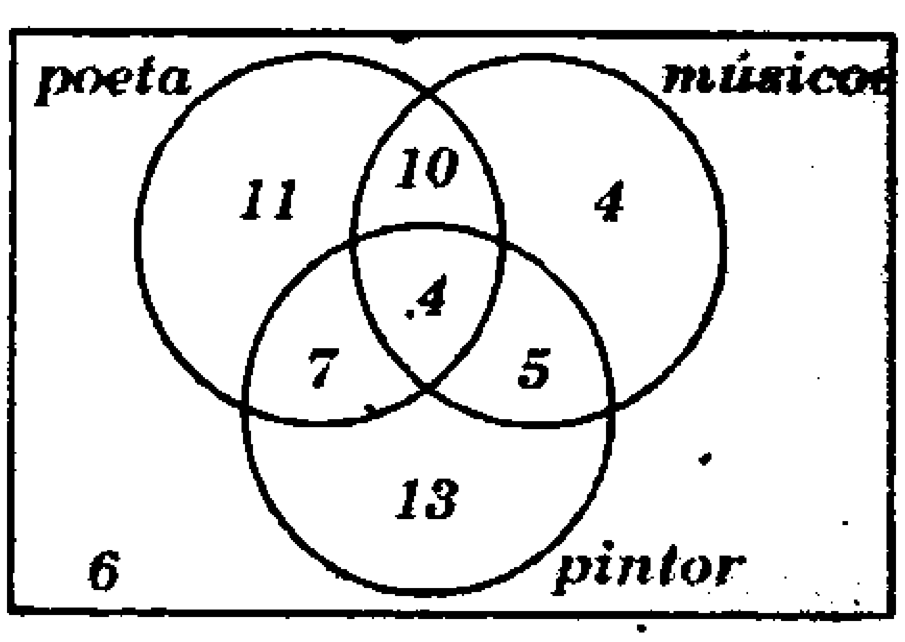
16 Dado el siguiente gráfico en donde se indica la cantidad de elementos de cada zona :



Hallar la cantidad de elementos de cada enunciado.

- *A:* .... * *B:* ______
- *C:* .... * *Sólo A:* ______
- *Sólo B:* .... * *Sólo C:* ______
- *No A:* .... * *No B:* ______
- *No C:* .... * *A y B:* ______
- *B y C:* .... * *A ó C:* ______
- *Ni A, ni B:* .... * *Ni B, ni C:* ______

17 Si en el esquema se indica la cantidad de personas que se dedican a las siguientes actividades :



Contestar :

A) ¿Cuántos poetas existen?

B)¿Cuántos músicos existen?

C)¿Cuántos pintores existen?

D)¿Cuántos poetas y músicos?

E) ¿Cuántos sólo poetas y músicos?

F) ¿Cuántos músicos y pintores?

G) ¿Cuántos sólo músicos y pintores?

H) ¿Cuántos poetas y pintores?

I) ¿Cuántos son poetas y pintores?

J) ¿Cuántos son poetas, músicos y pintores?

K) ¿Cuántos no son poetas, ni músicos, ni pintores?

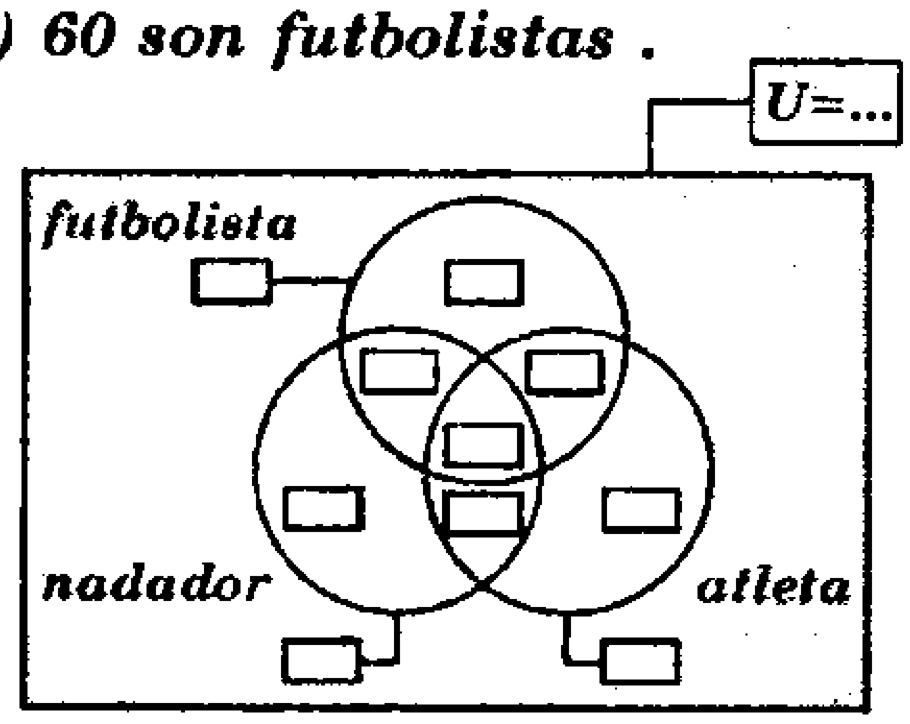
L) ¿De cuántas personas en total estamos hablando?

Y relacionar con :

I) 6 *II)60* *III) 7* *IV) 4*
V) 5 *VI)11* *VII)32* *VIII)23*
IX) 10 *X)14* *XI) 29* *XII) 9*

18 Complete el esquema con los siguientes datos :

A) 10 son sólo nadadores .
B) 14 son sólo atletas y futbolistas
C) 17 no realizan ninguno de los deportes .
D) 17 no son nadadores ni futbolistas .
E) 40 no son futbolistas .
F) 8 practican los 3 deportes .
G) 50 son nadadores .
H) 60 son futbolistas .



PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Dado el conjunto:

$$A = \{3x + 1 / x \in N ; \ 3x - 2 < 13\}$$

Indicar la relación correcta

A) $1 \in A$ *B)* $10 \in A$ *C)* $2 \subset A$
D) $3 \notin A$ *E)* $7 \in A$

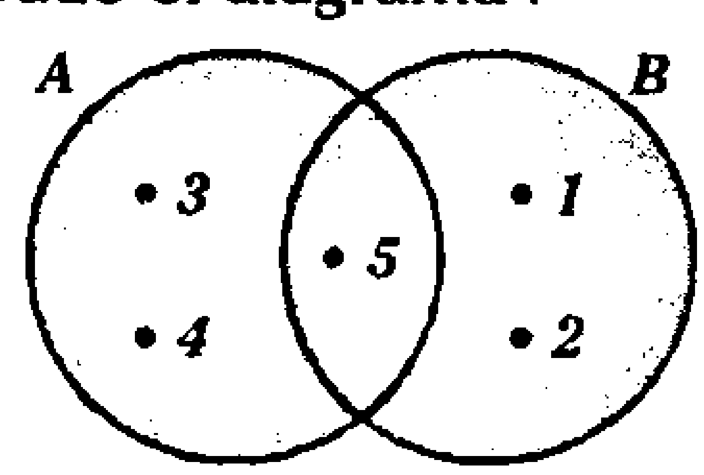
02 Dado el conjunto :

$$A = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{Z}; -3 < x < 3\}$$

Calcular la suma de sus elementos:

A)10 *B)7* *C)8* *D)5* *E)6*

03 Dado el diagrama :

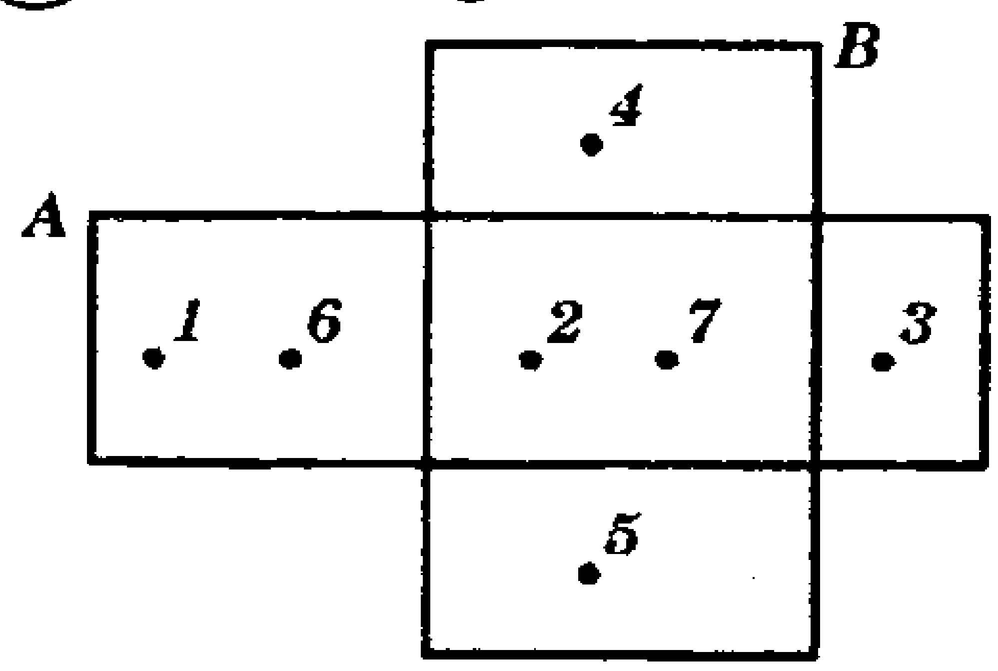


Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*

I) $3 \in A$ *II)* $5 \notin B$
III) $2 \notin A$ *IV)* $7 \notin B$

A)VVVV *B)VFVV* *C)VVVF*
D)FVVV *E)VVFV*

04 Dado el diagrama :



Indicar *"V"* ó *"F"*

I) $n(A) = n(B)$

II) $2; \ 7 \in B$

III) $3 \in A$

A)FVV *B)FVV* *C)VFV*
D)VFF *E)FFF*

05 Dado : $A = \{2; 2; 3; 2; 3\}$

¿Cuántos subconjuntos posee?

A)128 *B)64* *C)4*
D)16 *E)32*

06 Dado el conjunto:

$$M = \{P; E; R; Ú\}$$

¿Cuántos subconjuntos propios posee?

A)31 *B)15* *C)11* *D)12* *E)3*

07 Sea el conjunto

$A = \{A;M;O;L;A;A;R;I;T;M;E;T;I;C;A\}$

Calcular : $n[P_{(A)}]$

A)512 *B)10245* *C)128*
D)256 *E)64*

08 Si los conjuntos :

$A = \{3x - 1; \ 8\}$

$B = \{x^2 + 1; \ 5y\}$ *Son unitarios*

Calcular $x+y$

A)2 *B)4* *C)5* *D)7* *E)8*

09 Sean *M* y *N* dos conjuntos se sabe :

$$n = [P_{(M)}] = 64$$

$$n = [P_{(N)}] = 16$$

Calcular $n(M)+n(N)$

A)9 *B)8* *C)6* *D)10* *E)7*

⑩ $A=\{2;3;3;3\}$

$B=\{3;4;4;4\}$

Calcular $A\cup B$

A) {2} B) {3} C) {2;3}
D) {2;3;4} E) {3,4}

⑪ $M=\{2;1;4;7;9\}$

$N=\{2;4;5;6;8\}$

Calcular $(N\cup M)-(M-N)$

A) {1;2;4;7;9} B) {2;4;6;8}
C) {1;2;9} D) {5;4;9}
E) {1;2;7}

⑫ $A=\{1;2;3;5;7\}$

$B=\{2;3;4;7;9\}$

Calcular $n(A\Delta B)$

A) 2 B) 5 C) 6 D) 4 E) 3

⑬ $n=\{P_{(A)}\}=128$

$n=\{P_{(B)}\}=64$

$n=[P_{(A\cup B)}]=10$

Calcular $n=[P_{(A\cap B)}]$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 2 E) 5

⑭ $n=[P_{(A-B)}]=8$

$n=[P_{(B-A)}]=16$

$n=[P_{(A\cup B)}]=512$

Hallar : $n[P_{(A\cap B)}]$

A) 2 B) 4 C) 0 D) 1 E) 8

⑮ De 90 personas, 50 hablan inglés y 80 hablan castellano. ¿Cuántas personas hablan un sólo idioma?.

A) 30 B) 50 C) 40 D) 35 E) 60

⑯ De 40 personas, se sabe que 15 no estudian ni trabajan, 10 personas estudian y 3 estudian y trabajan. ¿Cuántas realizan sólo una de las 2 actividades?

A)20 B)22 C)35 D)32 E)30

⑰ De un total de 400 alumnos del colegio, se sabe que 140 practican Karate, 160 practican Tae–Box y 120 no practican ninguno de estos deportes. ¿Cuántos practican ambos deportes?.

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 35

⑱ En una encuesta realizada en la ciudad se sabe que al 76% de la población le gusta el pescado y al 83% el chancho, si al 8% no le agrada ninguno de estos productos.

¿Qué porcentaje de la población gusta sólo de chancho?

A) 9 B) 67 C) 71 D) 80 E) 16

⑲ De 60 personas que conforman un club, 32 juegan futbol y 25 juegan voley.

¿Cuántos juegan sólo un deporte, si 10 no practican ninguno de estos dos deportes?.

A) 7 B) 25 C) 18 D) 43 E) 20

⑳ De 21 docentes de la facultad de metalurgia de la UNI :

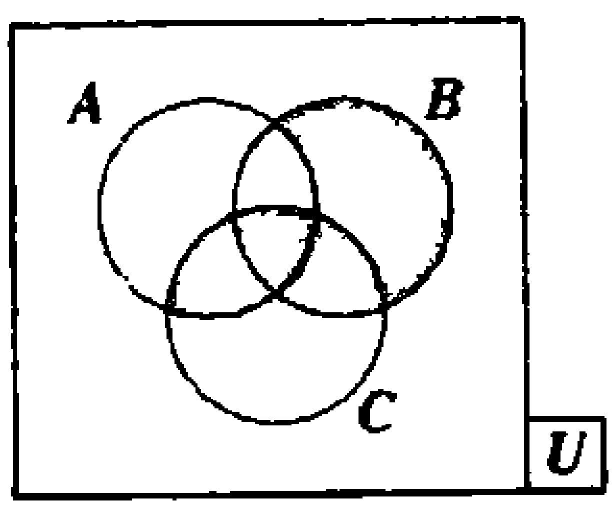
20 tienen servicio de internet y 8 de cable ¿Cuántos docentes tienen un solo servicio?

A) 12 B) 7 C) 13 D) 14 E) 18

㉑ De 60 cuadriláteros, 20 son rombos, 30 son rectángulos, 12 no son rombos ni rectángulos. ¿Cuántos son cuadrados?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

㉒ Qué opinión representa la región sombreada?



A) $(A\cup B)\cap C$ B) $(A\cup B)-(A-C)$
C) $(A\Delta B)-C$ D) $(A\cup B)\cup C$
E) $(A\cup B)\cup C'$

㉓ En una encuesta realizada a 35 personas sobre la preferencia de los artículos A y B se tiene el siguiente resultado :

- 20 personas no prefieren A
- 12 personas no prefieren B
- 5 personas no prefieren algunos de estos artículos.

¿Cuántos prefieren A y B?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

㉔ En una fiesta las mujeres que no bailan es el triple de los hombres que bailan ; estos últimos a su vez son las sexta parte de los hombres que no bailan, si en la fiesta hay 55 personas ¿Cuántas parejas bailan?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Sean los conjuntos :

A) $=\{x+1/x\in N;\ x<30\}$

B) $=\{x$ es par $/\ x\in A\}$

C) $=\{x=k^2/x\in B\}$

Calcular la cantidad de subconjuntos binarios de C.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 16

02 El conjunto A tiene 15 subconjuntos propios. Calcular el cardinal de A.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 24

03 El conjunto M tiene 28 subconjuntos binarios, entonces el número de elementos de M es :

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

04 Dado los conjuntos :

$A=\{1;2;3;4;5;6\}$ y

$B=\{0;1;4;6;7;8;9\}$

sea: "p" el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B y "q" lo análogo de B al conjunto A. Calcular "p + q".

A) 5 B) 7 C) 22 D) 24 E) 26

05 De una muestra recogida a 200 turistas, se determinó lo siguiente: 64 eran norteamericanos, 86 eran europeos y 90 eran economistas; de estos últimos 30 eran norteamericanos y 36 europeos. ¿Cuántos de los que no eran europeos, tampoco eran norteamericanos ni economistas?

A) 12 B) 18 C) 26 D) 32 E) 48

06 Una agencia de turismo realiza un cuestionario a 6000 personas para analizar las preferencias

sobre los viajes al Cusco, Iquitos y Trujillo. De acuerdo con los resultados, ***2 400*** personas desean viajar por lo menos al Cusco, ***3000*** por lo menos a Trujillo, ***2100*** por lo menos a Iquitos, ***1000*** a Trujillo e Iquitos, ***800*** al Cusco e Iquitos, ***1500*** a Trujillo y al Cusco, y ***500*** están dispuestos a realizar las tres excursiones. En referencia a los lugares mencionados.

I) ¿Cuántos desean hacer una sola excursión siempre que ninguna de ellas sea al Cusco?

II) ¿ Cuántos no quisieran ir por lo menos a Trujillo o a Iquitos? Dar como respuesta la suma de los valores hallados.

A) 3 000 ***B) 3 200*** ***C)3700***
D) 4 000 ***E) 4 500***

07 Sean ***A***, ***B*** y ***C*** tres conjuntos. La intersección de los tres tiene 5 elementos y la unión de los tres tiene ***50*** elementos. Si la unión de ***A*** y ***B*** tiene ***35*** elementos y se sabe que cada intersección de dos de ellos tiene ***10*** elementos, entonces el número de elementos de ***C*** es:

A) 10 ***B) 20*** ***C)30*** ***D) 40*** ***E) 50***

08 Sabiendo que un conjunto tiene ***40*** elementos y otro conjunto tiene ***60*** elementos y además la intersección de ellos tiene ***30*** elementos, calcular cuántos elementos tiene el conjunto formado por la intersección de los complementos de estos dos conjuntos, si se sabe que el cardinal del conjunto universo de ambos de ***120***.

A) 10 ***B) 20.*** ***C) 30*** ***D) 40*** ***E) 50***

09 Si los conjuntos ***A*** y ***B*** son unitarios :

$A = \{2a - 3;\ 4b - 5;\ a + b + 6\}$

$B = \{c + 5;\ 2d - 7;\ c + d - 6\}$

calcular : $a + b + c + d$

A) 25 ***B)30*** ***C)35*** ***D) 40*** ***E)50***

10 Se tiene los conjuntos ***A***, ***B*** y ***C*** cuyos números cardinales están en la relación de ***1***; ***2*** y ***3*** respectivamente. Además se sabe que:

$n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 584$

Calcular el máximo valor del cardinal de la unión de ***A***, ***B*** y ***C***.

A) 18 ***B) 20*** ***C) 24*** ***D) 32*** ***E) 71***

11 Si : $n(A) - n(B) = 2$ además el número de subconjuntos de ***A*** excede al número de subconjutntos de ***B*** en ***768***, calcular : $n(A)$.

A) 6 ***B) 8*** ***C) 9*** ***D)10*** ***E)12***

12 Se tiene los conjuntos :

$A = \{a^2 + 1;\ 3a - 1\}$

$B = \{3x + y;\ x - y + 8\}$

que son conjuntos unitarios; calcular :

$S = a + x + y;\ si: a, x, y \in Z$

Dar como respuesta la suma de los valores que puede tomar ***«S»***

A) 9 ***B) 10*** ***C)11*** ***D) 12*** ***E) 13***

13 En un colegio el ***38%*** juega voleybol, el ***67%*** juega fútbol y el ***10%*** no juega dichas disciplinas deportivas. ¿Qué porcentaje juega voleybol y fútbol?

A) 11 % ***B) 12%*** ***C) 13%***
D) 14% ***E)15%***

14 La unión de dos conjuntos ***A*** y ***B*** tiene ***126*** subconjuntos más que su intersección que es un conjunto unitario. ¿Cuántos elementos tiene ***A***, si conocemos que ***(B–A)*** tiene cuatro subconjuntos?

A) 2 ***B) 3*** ***C) 4*** ***D)5*** ***E) 6***

15 En una de nuestras aulas hay ***80*** alumnos de los cuales: ***30*** desean seguir la carrera ***«A»***, ***40*** la carrera ***«B»*** y ***15*** la carrera ***«C»***. Si $(C - (A \cup B)) = C$, calcular cuántos alumnos desean seguir solo una carrera. Se sabe que no hubo abstenciones.

A) 35 ***B) 50*** ***C)75***
D) 80 ***E) 30***

16 De un total de ***100*** personas de los cuales ***30*** eran mujeres se notó que : ***25*** no tenían reloj. ***60*** hombres tenían reloj. ¿Cuántos hombres usaban anteojos y ternos si eran igual al número de mujeres que tenían reloj?

A) 5 ***B) 10*** ***C)15*** ***D)20*** ***E) 25***

17 En un momento de una fiesta se observa que el número de damas que no bailan es el doble de varones que están bailando y que el total de varones es el doble del número de damas. ¿Cuántas personas bailan si asistieron ***720*** personas?

A) 40 ***B)60*** ***C)80*** ***D) 100*** ***E)160***

18 Dados los conjuntos :

$A = \{1;\ 2\}$ y $B = \{3\}$

Sea ***«m»*** el número de elementos de ***A . A*** y ***«n»*** el número de elementos de ***A . B***. Calcular ***m + n***.

A)3 ***B)5*** ***C)6*** ***D)12*** ***E)18***

19 De una muestra recogida a ***200*** aeromozas, ***40*** eran rubias, ***50*** eran morenas y ***90*** tenían ojos azules; de estas últimas ***65*** no son rubias y ***60*** no son morenas. ¿Cuántas de las aeromozas no eran rubias no morenas, ni tenían ojos azules?

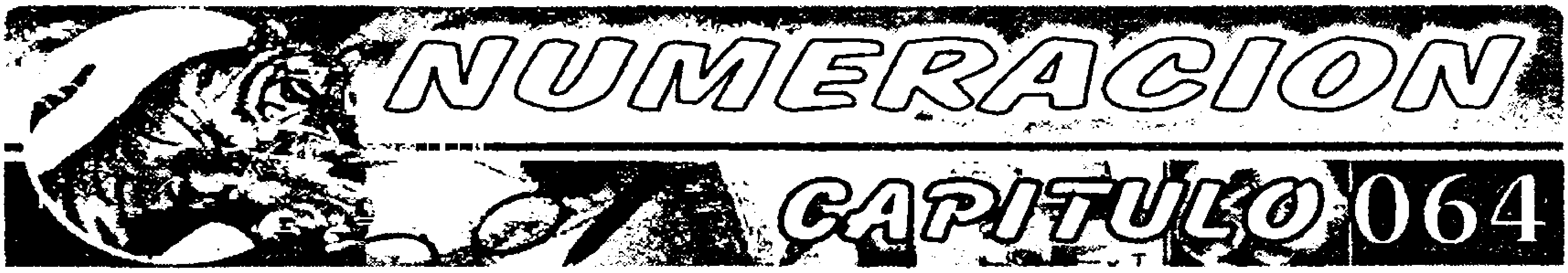
A) 50 ***B)75*** ***C)90*** ***D) 100*** ***E) 120***

20 En un salón de clases el ***60%*** de alumnos trabajan, el ***32%*** son mayores de edad y la quinta parte de los que trabajan son mayores de edad y la quinta parte de los que trabajan son mayores de edad. ¿Qué porcentaje son menores de edad y no trabajan?

A)20% ***B) 30%*** ***C) 40%***
D) 50% ***E) 10%***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)C	3)E	4)C	5)C	6)C	7)C	8)C	9)E	10)A
11)D	12)C	13)E	14)D	15)C	16)C	17)E	18)C	19)B	20)A



OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Representar cualquier cantidad de unidades simples en un determinado sistema posicional de numeración.*
* *Descomponer polinómicamente cualquier numeral de un sistema posicional de numeración.*
* *Realizar cambios de base en los sistemas de numeración (casos especiales).*
* *Aplicar las propiedades de un sistema de numeración en la solución de problemas que nos plantee nuestro entorno.*

INTRODUCCIÓN :

En tiempos prehistóricos los jóvenes de tu edad probablemente se daban cuenta de números simples al contar, como por ejemplo "un venado" o "dos lanzas". Los pueblos primitivos también aprendieron a tomar nota de los números. A veces hacían en una cuenta (Kipus: cultura inca) o hacían marcas en palo para contar los objetos (cuneiforme: babilónios) otras veces usaban montoncitos de piedras. Para contar sus ovejas un pastor tendría piedritas o haría cortes en un palo. Así, cada piedrecita o marca representaba una oveja. Así podía darse cuenta días después de que no tenía todas sus ovejas, si no había por cada piedrecita o por cada marca en el palo. Haces el mismo tipo de anotaciones cuando juegas Voley 卌 una por cada punto. En el transcurso de los siglos la gente empezó a usar sonidos o nombres por los números. Actualmente tenemos un conjunto de patrón de nombres para los números. Hoy en día el hombre posee tantos símbolos *(1; 2 ; 3 ; ....)* como palabras (uno, dos, tres, ...) para representar los números.

NUMERACIÓN

Conjuntos de reglas y principios que hacen posible la correcta lectura y escritura de los números ; así como las diversas propiedades que se originan de ellos

NÚMERO: Es un ente matemático que nos permite cuantificar los objetos de la naturaleza , el cuál nos da la idea de cantidad.

NUMERAL:

Es la representación gráfica mediante signos o símbolos de un número. Esto significa que un número se puede representar mediante diferentes numerales . Se conocen diversos sistemas de símbolos para la representación de los números tales como los numerales chinos , egipcios , mayas , romanos , y arabigos . Entre estos , los últimos tuvieron mayor trascendencia y fueron divulgados por los árabes ; este sistema cuenta con diez símbolos o guarismos , con los cuales se pueden representar todos los números .

EJEMPLOS :

4=cuatro=four=tawa=IV

5 ; V ; 卌 ; cinco

CIFRA (DIGITO) :

Son los símbolos que convencionalmente se utilizan para la formación de los números .

* Tenemos a:

0	;	*1 ;2 ; 3 ;4;5;6;7;8;9*
Cifra No significativa		*Cifras Significativas*

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es un conjunto de reglas , principios y convenios que se utilizan para representar y expresar a los llamados numerales.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

I) DE ORDEN :

Toda cifra que forma parte de un numeral posee un lugar y un orden . El lugar se lee de izquierda a derecha a partir de uno ; y el orden de derecha a izquierda a partir de cero.

Lugar →	1	2	3	4	5	
Numeral:	9	7	8	6	4	
	4	3	2	1	0	← Orden

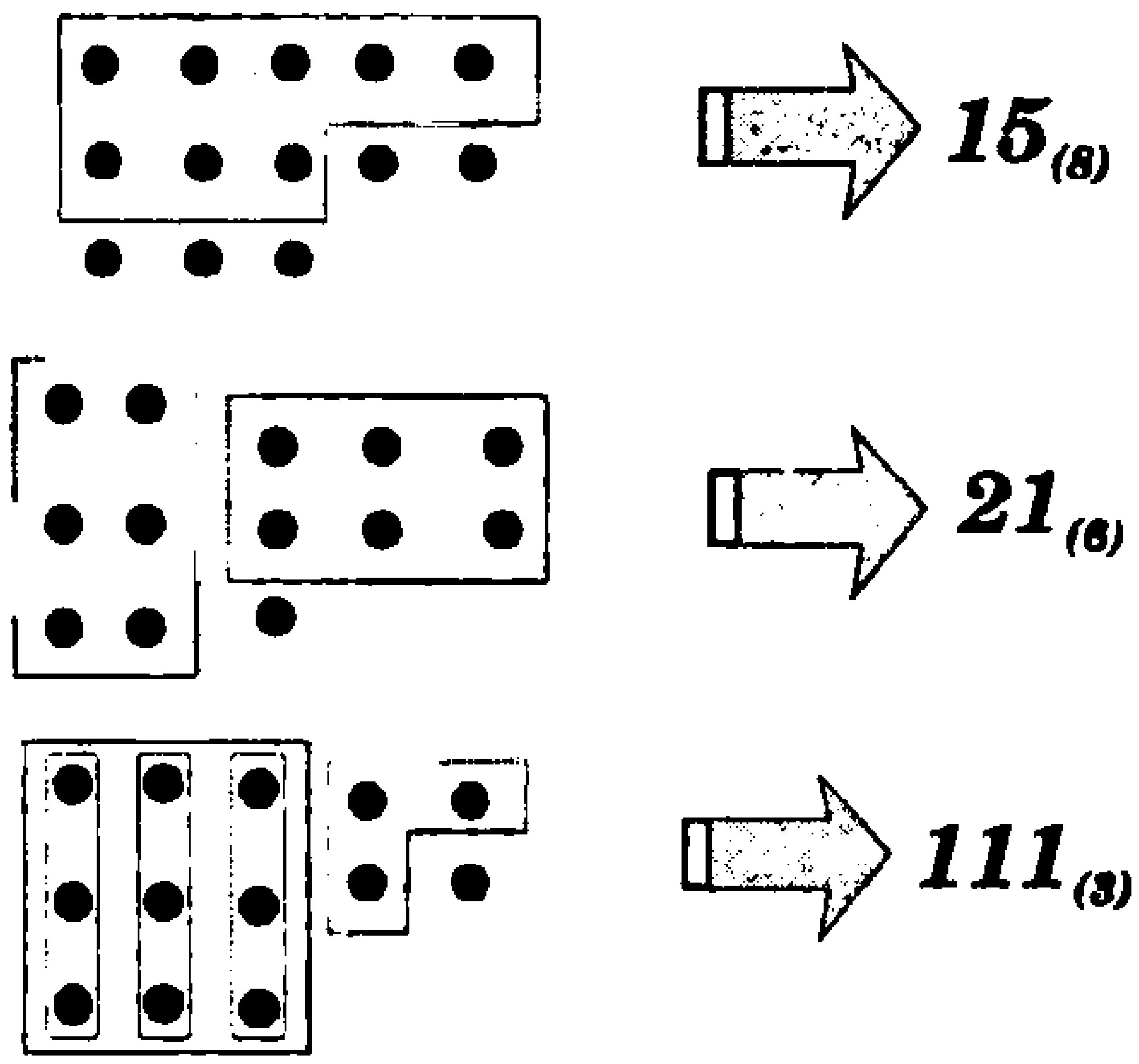
Lugar →	1°	2°	3°	4°	5°	
	5	9	6	2	7	
	4	3	2	1	0	← Orden

II) DE LA BASE :

Todo sistema de numeración posee una base que es un número entero y mayor que la unidad , el cuál nos indica la cantidad de unidades suficientes y necesarias de un orden cualquiera para formar una unidad de orden inmediato superior.

EJEMPLO :

* Representar *13* unidades en base *8*; base *6*; base *3*.



* Luego tenemos que: $13=15_{(8)}=21_{(6)}=111_{(3)}$

* En forma práctica puede decirse que la base de un sistema de numeración indica de cuánto en cuánto se están agrupando las unidades simples en dicho sistema de numeración.

* Para que un numeral esté correctamente inscrito , es necesario que las cifras sean valores no negativos menores que la base.

* En donde observamos que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y a menor numeral aparente le corresponde la mayor base.

REGLA DE SIGNOS :

En una igualdad de *2* numerales se cumple , que a mayor numeral aparente le corresponde menor base.

EJEMPLO :

$$\overbrace{32}^{-}{}_{(x)} = \overbrace{120}^{+}{}_{(z)}$$

$$+ \qquad \longleftarrow$$

* Se cumple: $z < x$

III) DE LAS CIFRAS :

Las cifras son números naturales; inclusive el cero, que siempre son menores que la base en la cual son empleadas o utilizadas.

* En base "*n*", se pueden utilizar "*n*" cifras diferentes, las cuales son :

$$\underset{\text{Cifra no significativa}}{\overset{0}{\uparrow}} \qquad \underbrace{1\,;2\,;3\,;4....;\overbrace{(n-1)}^{\text{Máxima}}}_{\text{Cifras significativas}}$$

ALGUNOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Base	Nombre del sistema	Cifras Disponibles
2	binario	0 ; 1
3	ternario	0 ; 1 ; 2
4	cuaternario	0 ; 1 ; 2 ; 3
5	quinario	0 ;1 ; 2 ; 3 ; 4
6	senario	0;1;2;......;5
7	heptanario	0;1;2;........6
8	octanario	0;1;2;........;7
9	nonario	0;1;2;........;8
10	decimal	0;1;2;.........;9
11	undecimal	0;1;2;3;......;(10)
12	duodecimal	0;1;2;.......;(11)

* Por convención cuando la cifra es mayor que *9* se utilizan letras para su representación.

(10)<>α<>A ; (11)<>β<>B ; (12)<>γ<>C

EJEMPLOS :

$$\overline{5(10)3(11)}_{(16)}=\overline{5\alpha3\beta}_{(16)}=\overline{5A3B}_{(16)}$$

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NUMERAL

Cuando no se conocen las cifras de un numeral estas se representan por lo general mediante letras minúsculas de nuestro alfabeto; teniendo en cuenta que :

I) La primera cifra de un numeral debe ser diferente de cero.

II)Letras diferentes no necesariamente representan cifras diferentes ; salvo que lo indiquen.

iii) Toda expresión entre paréntesis representa una cifra.

iv)La mayor cifra que se puede utilizar en cierto sistema de numeración siempre será igual a la base disminuida en una unidad

v)El número de unidades de cualquier orden que coincida con la base del sistema de numeración originará una unidad del orden inmediato superior

vi) Para leer un número en un sistema diferente al decimal se le nombra cifra por cifra de izquierda a derecha y al final se lee la cifra .

vii) La mayor cifra que se puede utilizar en cierto sistema de numeración siempre será igual a la base disminuida en una unidad

viii) Si un numeral está escrito en base par , su paridad dependerá de la última cifra , es decir :

si su última cifra es par ,el numeral será par , pero si es impar , el numeral resultará impar.

EJEMPLO :

*** 7485_{16} es impar ya que terminar en 5.**

*** 2406_8 es par puesto que termina en 8.**

* Si un numeral está escrito en base impar, su paridad dependerá de la suma de sus cifras, es decir: si la suma de sus cifras es par, y si es impar, entonces el numeral será impar.

EJEMPLO :

*** 1103_5 es impar ya que $1+1+0+3=5$.**

*** 2406_9 es par puesto que $2+4+0+6=12$.**

EJEMPLOS :

* a: Cualquier número de una cifra.

$\{1 ; 2 ; 3 ; .... ; 9\}$

* $\overline{aa}$: Cualquier número de dos cifras

$\{10 ; 11 ; 12 ; 13 ; .... ; 99\}$

* $\overline{abc}$: Cualquier número de tres cifras

$\{100 ; 101 ; 102 ; .... ; 999\}$

* $\overline{aa}$: Cualquier número de dos cifras iguales

$\{11 ; 22 ; 33 ; .... ; 88 ; 99\}$

* Un numeral de 3 cifras en base 5

$\overline{mnp}_{(5)}\{100_5 ; 101_5 ; ..... ; 444_5\}$

$\overline{abc}_7$: $100_{(7)} ; 101_{(7)} ; ..... ; 666_{(7)}$

NÚMERO CAPICÚA :

Es aquel cuyas cifras equidistantes de los extremos son iguales es decir se leen iguales por ambos lados.

EJEMPLOS :

* De 2 cifras : $\overline{aa}$
* De 3 cifras : $\overline{aba}$
* De 4 cifras : $\overline{abba}$
* 828   * $\overline{abcab}$
* 3553   * $\overline{Somos}$
* 724427   * $\overline{reconocer}$

IV) DEL VALOR DE LAS CIFRAS :

Toda cifra que forma parte de un numeral tiene dos valores.

VALOR ABSOLUTO (V. A.) :

Por la cantidad de unidades simples que representan.

VALOR RELATIVO (V. R.):

Por el orden que ocupa el numeral.

Vamos a determinar cuántas unidades simples tiene una unidad en cada orden.

EN BASE 10:

...	3	2	1	0 ← orden
....	10^3	10^2	10	1
	×10	×10	×10	

1 unidad de orden	contiene la siguiente cantidad de unidades simple
0	$1=10^0$
1	10^1
2	10^2
3	10^3
⋮	⋮

EN BASE 7:

...	3	2	1	0 ← orden
....	7^3	7^2	7	1
	× 7	× 7	× 7	

1 unidad de orden	contiene la siguiente cantidad de unidades simple
0	$1=7^0$
1	7
3	7^2
3	7^3
⋮	⋮

* Dado el numeral *87534* indique el valor de sus cifras.

Cifra	Valor absoluto (V.A).
4	4 unidades simples
3	3 unidades simples
5	5 unidades simples
7	7 unidades simples
8	8 unidades simples

Cifra	Valor relativo (V.A).
4	4 unidades de orden 0 : 4×10^0
3	3 unidades de orden 1 : 3×10^1
5	5 unidades de orden 2 : 5×10^2
7	7 unidades de orden 3 : 7×10^3
8	8 unidades de orden 4 : 8×10^4

* Para el numeral $714\,653_{(9)}$, indique el valor de sus cifras.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Viene a ser la suma de los valores relativos de cada una de sus cifras.

EJEMPLOS :

* $2453 = \underbrace{VR(2) + VR(4) + VR(5) + VR(3)}_{D.P.}$

$\Rightarrow 2453 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

* $415 = 4 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5$
* $723_8 = 7 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3$
* $5142_7 = 5 \times 7^3 + 7^2 + 4 \times 7 + 2$
* $3796 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6$
* $\overline{abba} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + b \times 10^1 + a$

EN GENERAL :

$$\boxed{\overline{abcde}_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e}$$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA POR BLOQUES

* $\overline{abab} = \overline{ab} \times 10^2 + \overline{ab} = 101\,\overline{ab}$
* $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 10^3 + \overline{abc} = \overline{abc}\,(1001)$

$\quad 10^3 \quad 1$

* $3143_5 = 31_5 \times 5^2 + 43_5$
* $24351_7 = 24_7 \times 7^3 + 357 \times 7 + 1$
* $454545_6 = 45_6 \times 64 + 45_6 \times 6_2 + 45_6$
* $\overline{abab}_n = \overline{ab}_n \times n^2 + \overline{ab}_n$

CAMBIOS DE BASE EN LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

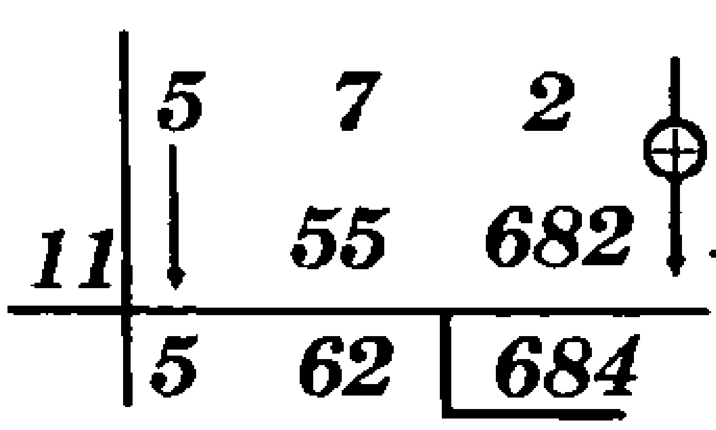
A) DE UNA BASE DIFERENTE DE 10 A LA BASE 10. POR DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA :

EJEMPLO :

a) 572_{11} a base 10	b) 4132_5 a base 10
$572_{11} = 5 \times 11^2 + 7 \times 11 + 2$	$4132_5 = 4 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2$
$\Rightarrow 57211 = 684$	$\Rightarrow 4132_5 = 542$

OTRO METODO: (POR RUFFINI)

a)



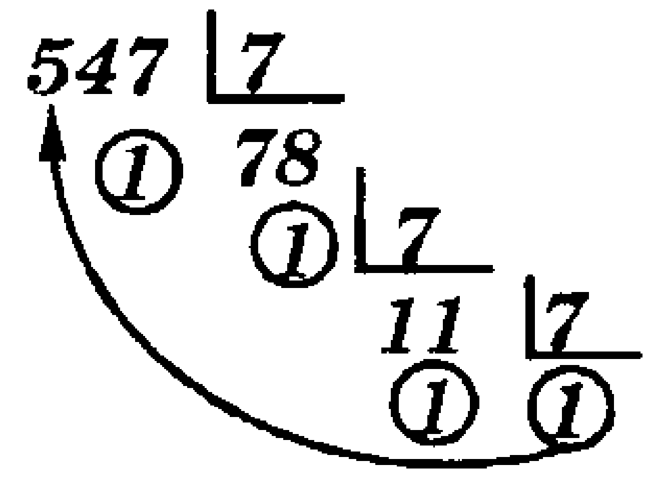
$\longrightarrow 572_{11} = 684$

B) DE LA BASE 10 A UNA BASE DIFERENTE DE 10. POR DIVISIONES SUCESIVAS :

Para pasar un número de la base *10* a otra base , se divide el número por la base a la cual se quiere expresar; el cociente obtenido se vuelve a dividir nuevamente por dicha base y así sucesivamente hasta que se obtenga un cociente menor que la base en la cual se quiere expresar dicho número . Para representar el número en el nuevo sistema de numeración se escribe el último cociente como cifra de mayor orden y cada uno de los residuos hallados en las divisiones anteriores se van escribiendo sucesivamente a su derecha.

EJEMPLO :

a) 547 *a* base *7*



$\longrightarrow 547 = 1411_7$

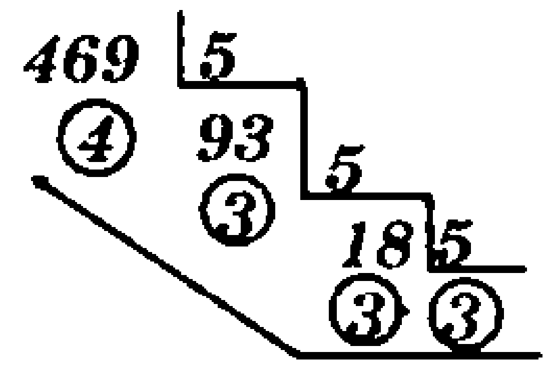
* Podemos llevar gracias a los métodos anteriores de base diferente de *10* a base diferente de *10*.

EJEMPLOS :

I) Exprese $210_{(6)}$ en base *5*.

en primer lugar llevaremos 210_6 a base diez , para luego llevarlos a base *7*.

$2101_{(6)} = 2 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 1 \quad 2101_{(6)} = 469$



$\blacktriangleright 2101_{(6)} = 3334_{(6)}$

CASOS ESPECIALES EN LOS CAMBIOS DE BASE DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

PRIMER CASO :

De base "*n*" a base "n^k", $k \in Z^+$

PROCEDIMIENTO :

* El numeral se descompone en bloques de *k* cifras a partir del orden cero.
* Cada bloque se descompone polinómicamente y el resultado es la cifra en la nueva base

EJEMPLO :

Expresar $120221_{(3)}$ en el sistema nonario.

RESOLUCIÓN :

* Como $9 = 3^2$ cada bloque debe tener 2 cifras.

12	02	21 $_{(3)}$
$\underbrace{1\times3+2}_{5}$	$\underbrace{0\times3+2}_{2}$	$\underbrace{2\times3+1}_{7}$ $_{(9)}$

SEGUNDO CASO :

De Base "n^k" a base "n", $k \in \mathbb{R}^+$

PROCEDIMIENTO :

* Cada cifra del numeral genera un bloque de k cifras.
* Las cifras de cada bloque se obtienen mediante las divisiones sucesivas.

EJEMPLO :

Exprese 547_9 en el sistema ternario.

RESOLUCIÓN :

* Como $9=3^2$ el bloque debe tener 2 cifras.

5	4	7 $_{(9)}$
5 ⌊3	4 ⌊3	7 ⌊3
2 1	1 1	1 2
1 2	1 1	2 1 $_{(3)}$

$$\rightarrow 547_{(9)} = 121121_{(3)}$$

PROPIEDADES

1) NUMERAL DE CIFRAS MÁXIMAS :

* $9 = 10 - 1$ * $7_8 = 8 - 1$
* $99 = 10^2 - 1$ * $77_8 = 8^2 - 1$
* $999 = 10^3 - 1$ * $777_8 = 8^3 - 1$
* $\underbrace{99...9}_{k\ cifras} = 10^k - 1$ * $\underbrace{77...7_{(8)}}_{k\ cifras} = 8^k - 1$

EN GENERAL :

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1).......(n-1)}_n}_{k\ cifras} = n^k - 1$$

2) NUMERAL DE BASE SUCESIVA :

* $\overline{1c}_n = n + c$ * $\overline{1b}_{\overline{1c}_n} = n + c + b$

* $\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_n}} = n + c + b + a$

EN GENERAL

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\overline{1d}_{\ddots_{\overline{1x}_n}}}}} = n + x .... + d + c + b + a$$

EJEMPLOS :

$\left.\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_{(n)}}}}\right\}$ K numerales $= n + Ka$

$17_{12_{13_{15_{12_K}}}} = K + 2 + 5 + 3 + 2 + 7$

CANTIDAD DE NUMERACIÓN CON CIERTA CANTIDAD DE CIFRAS

¿Cuántos números de 3 cifras . Existen en el sistema de base 10 y base 7?

RESOLUCIÓN :

* Base 10 : Sea el numeral
$$\overline{abc} \notin \{100 ; 101 ; 102 ; ... ; 999\}$$
* Cantidad de númerales: $999 - 99 = 900$
* Luego : $102 \le \overline{abc} < 103$
* Base 7: Sea el número $\overline{xyz} \in \{100_7 ; 101_7 ; .... ; 666_7\}$
* Cantidad de númerales: $666_7 - (100_7 - 1) = 294$
* Luego : $7^2 \le \overline{xyz} < 7^3$

* ***EN GENERAL:***

Si $N_{(b)}$ tiene k cifras, se limita de siguiente forma :

$$\boxed{b^{k-1} \le N_b < b^k}$$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS EN LOS NÚMEROS AVALES

I)UNA BASE DIFERENTE DE 10 A BASE 10:

Método :

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA:

$$\boxed{0,\overline{abcd.....}_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{d}{n^4} + ...}$$

EJEMPLO :

Convertir: $0,321_{(5)}$ a base 10

RESOLUCIÓN :

$$0,321_5 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3}$$

$$\Rightarrow 0,321_5 = \frac{86}{125} \Rightarrow 0,321_5 = 0,6088$$

MÉTODO:

MULTIPLICACIONES SUCESIVAS

Por donde se encuentra la coma ,se traza una línea vertical que separe la parte entera de la parte que se va a ser multiplicada por la base a la cual se va a pasar del resultado : la parte entera se coloca a la

izquierda de la linea vertical trazada , mientras que el resto vuelve a ser multiplicado por la base y se repite la operación; hasta que la parte que está a la derecha de la vertical sea cero o de lo contrario la parte que está a la izquierda se repite lo cual formaría periódicos puros o mixtos .

EJEMPLO :

Convertir: ***0,6088*** a base ***5***.

RESOLUCIÓN :

FORMA PRÁCTICA:

Se traza una vertical por la coma del decimal.

* La parte decimal se multiplica por la nueva base , del resultado , la parte entera se coloca a la izquierda de la vertical y la parte decimal se vuelve a multiplicar por la nueva base y así sucesivamente.

0	$6088 \times 5 = 3{,}440$
3	$440 \times 5 = 2{,}200$
2	$2 \times 5 = 1{,}0$
1	

$$\Rightarrow 0{,}6088 = 0{,}321_{(5)}$$

* Observaciones Adicionales :

$$I)\ 0,\overline{abc}_n = \frac{\overline{abc}_n}{1000_n}$$

$$II)\ 0,\widehat{abc}_n = \frac{\overline{abc}_n}{(n-1)(n-1)(n-1)_n}$$

$$III)\ 0,\overline{ab}\widehat{cde}_n = \frac{\overline{abcde}_n - \overline{abc}_n}{(n-1)(n-1)000_n}$$

$$IV)\ 0,\widehat{a}_n = \frac{a}{n} + \frac{a}{n^2} + \frac{a}{n^3} + \ldots\ldots\infty = \frac{a}{n-1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si $1244_{(b)} = [32_{(b)}]^2$; hallar el valor de « b »

RESOLUCIÓN:

* Convertimos ambos miembros al sistema de base decimal

$$1244_{(b)} = b^3 + 2b^2 + 4b + 4$$

$$[32_{(b)}]^2 = [3b + 2]^2 = 9b^2 + 12b + 4$$

* luego tenemos la igualdad:

$$b^3 + 2b^2 + 4b + 4 = 9b^2 + 12b + 4$$

reduciendo términos semejantes tenemos:

$$b^3 + 2b^2 + 4b + 4 - 9b^2 - 12b - 4 = 0$$

$$b^3 - 7b^2 - 8b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 7b - 8) = 0$$

$$b(b-8)(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ ó } b = 8 \text{ ó } b = -1$$

Luego como la base no puede ser cero ni un valor negativo entonces: $b = 8$ Respuesta: $b = 8$

PROBLEMA 2 :

Sabiendo que: $\overline{a00a}_{(6)} = \overline{bc1}$, 0 es el cero , $a \neq 0$, determine la suma $(a+b+c)$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

RESOLUCIÓN:

*Se pide : $a+b+c$

*Se nos dice que : $\overline{a00a}_6 = \overline{bc1}$

*Por descomposición polinómica , se tiene que:

$$a \times 6^3 + a = \overline{bc1} \Rightarrow 217 \times a = \overline{bc1}$$

por terminación ***se tiene :*** $a = 3$

$$217 \times 3 = 651 \rightarrow b = 6 \text{ y } c = 5$$

*Finalmente : $a+b+c = 14$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Si los siguientes números están correctamente escrito:

$$\overline{n24p}_m;\ \overline{p23}_n;\ \overline{m4n}_5;\ \overline{110}_p$$

Halle : $m + n + p$

A)14 B)12 C)9 D)15 E)8

02 Si los siguientes numerales están correctamente escritos:

$$\overline{5ab}_c;\ \overline{2c}_7;\ \overline{4b}_a$$

Halle : $a+c$

A)12 B)11 C)13 D)15 E)14

03 Si: $\overline{136}_m + \overline{33n}_p + \overline{23m}_n = \overline{44}_p$

Calcule : $m+n+p$

A)21 B)24 C)23 D)22 E)20

04 Halle: $S = \overline{3xy}_6 + \overline{4yz}_x + \overline{23}_y$

A)255 B)295 C)235 D)225 E)275

05 Halle: $S = \overline{10a}_4 + \overline{2bc}_a + \overline{bb}_c$

A)45 B)36 C)38 D)34 E)42

06 Descomponer polinómicamente (SIMPLE) los siguientes numerales:

A) 4326_5 B) $679\alpha_4$ C) $9\alpha76_5$

07 Descomponer y sumar:

A) 45_3 B) 56_3

08 Descomponer por bloques:

A)4200 B)1313 C)2525

09 Descomponer por bloques:

A)123123 B)456456 C) $\overline{abcabc}$

10 Descomponer y sumar:

A)389389 B)128128

11 Si: $\overline{486}_9 = \overline{mnp}_8$.

Hallar $m+n+p$

A)9 B)12 C)10 D)11 E)13

12 Si:

12 $= 23$
 15
  17
   x

Hallar "x"

A)10 B)12 C)8 D)9 E)11

13 Si: $\overline{aaa} = 4210_a$.

Hallar "a"

A)7 B)6 C)8 D)5 E)4

14 Si:

12 $= 351_6$
 13
  14
   $\overline{abc}$

Calcular : $a+b+c$

A)9 B)7 C)4 D)3 E)6

15 Si:

$$\underbrace{\overline{(x-1)(x-1)(x-1)\ldots\ldots(x-1)}}_{40\ cifras}{}_{(x)} = 64^{20} - 1$$

Calcular : x

A)7 B)8 C)10 D)16 E)64

16 Hallar el número de 2 dígitos que sea igual a 5 veces la suma de sus cifras. Dar como respuesta el producto de dichos dígitos.

A)20 B)16 C)18 D)30 E)24

17 Si los siguientes numerales están escritos correctamente:

$$\overline{351}_{(m)};\ \overline{4m2}_{(n)};\ \overline{n46}_{(8)}$$

Calcular: $n^2 - m^2$

A)12 B)13 C)14 D)15 E)16

18 Hallar: $x + y$ en:

$$\overline{xxx}_{(6)} = \overline{yyx}_{(7)}$$

A)5 B)6 C)7 D)8 E)9

19 El mayor número de *3* cifras de base *5* se suma con el mayor número de *3* cifras diferentes de base *4*. El resulado en el sistema decimal es:

A)181 B)183 C)185 D)187 E)189

20 Si a un numeral de tres cifras que empieza con la cifra *6*, se le suprime estas cifras, el numeral que queda resulta *1/5* del número original. Dar la suma de cifras del numeral original.

A)7 B)8 C)9 D)10 E)11

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si los siguientes numerales están bien escritos:

$$\overline{5ab}_{(c)}; \overline{2c}_{(7)}; \overline{4bd}_{(a)}$$

calcular: $a + c$

A) 11 B) 12 C) 13 D)14 E) 15

02 Si: $\overline{aba}_{(5)} = \overline{aab}_{(6)}$, calcular: $a + b$

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

03 ¿Cuántos números de dos cifras existen que sean iguales a *7* veces la suma de sus cifras?

A)1 B) 2 C) 3 D)4 E)6

04 Si: $\overline{a57}_{(x)} = \overline{a14}_{(9)}$ calcular: $x + a$

A)9 B)10 C) 12 D) 14 E) 15

05 Gustavo nació en el año $\overline{19aa}$ y en $\overline{19(a+2)b}$ cumplió $(5a - b)$ años. Calcular: $\overline{ab}$, si $a < b$.

A) 8 B) 25 C) 48 D) 24 E) 18

06 Si: $\overline{abab}_{(N)} = 221$, calcular: $a + b$

A) 4 B) 5 C) 6 D)7 E)8

07 ¿En qué cifra terminará el mayor número de *501* cifras del sistema nonario al ser convertido al sistema decimal?

A)0 B)3 C)7 D)8 E)9

08 Si: $3^a + 3^b + 3^c = 273$

calcular: $a + b + c$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 7 E) 11

09 Un número está representado en la base *«n»* y en la base *«2n»* como *1 323* y *173* respectivamente. Calcular *«n»*.

A) 1 B) 2 C) 3 D)4 E)5

10 ¿Qué número representa la siguiente descomposición polinómica?

$$2\times7^5 + 5\times7^4 + 2\times7^3 + 6$$

Dar como respuesta la suma de las cifras de dicho número.

A) 8 B) 10 C)12 D)13 E)15

11 ¿Cómo se expresa el siguiente numeral $\overline{(a-4)\,a\,(a-2)}_{(6)}$ en el sistema decimal?

A) 45 B) 50 C)69 D)76 E) 78

12 La cantidad de números enteros entre $23_{(5)}$ y $32_{(5)}$ es:

A) 5 B) 4 C) 3 D)2 E)6

13 De las siguientes proposiciones,

¿cuántas son verdaderas?

( ) Todo número entero positivo puede ser base de un sistema de numeración.

( ) El numeral $\overline{121}_{(6)}$ tiene tres cifras en base *10*.

( ) En base *n* se utilizan *n* cifras diferentes para representar a todos los números.

( ) Si $\overline{ab} = 5(a + b)$ entonces tiene una solución.

A) 1 B) 2 C)3 D)4 E) 5

14 ¿Cómo se escribirá el número *816* en el mayor sistema de numeración usándose *4* cifras?

A) $2213_{(4)}$ *B)* $8106_{(9)}$ *C)* $7412_{(8)}$ *D)* $1106_{(9)}$ *E)* $2131_{(4)}$

15 ¿En cuántos sistemas de numeración, *250* se escribe con tres cifras, de manera que la suma de dichas cifras sea *10*?

A)2 B)4 C)3 D)5 E)6

16 Determinar el valor numérico de $(a+b-c)$, si se cumple que: $\overline{abc}_{(9)} = \overline{2553}_{(c)} = \overline{1611}_{(a)} = \overline{1205}_{(b)}$

A)5 B)8 C)9 D) 10 E) 12

17 Calcular *«n»* si el número $15_{(n)}$ queda triplicado al invertir el orden de sus cifras.

A)6 B)7 C) 8 D)9 E)12

18 El máximo valor de *«n»* en: $\overline{ab}_{(7)} = \overline{ba}_{(n)}$ es:

A)37 B)7 C)14 D)21 E)55

19 Calcular $a+b$, si: $\overline{aba}_{(7)} = \overline{11b1}_{(6)}$

A)6 B)7 C)8 D) 9 E) 10

20 El mayor número de tres cifras del sistema de base *«k»* se escribe en el sistema senario como *2211*. ¿Cuánto vale *«k»*?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

21 Si :

$$6502 = 1214_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{k}}}}}}}$$

Hallar : $a + k$; $(a \neq 0)$

A)12 B)14 C)16 D)13 E)15

22 Al convertir $1003_{(n+1)}$ a base *«n»* se observa que la suma de dichas cifras es igual a *«n»* Determinar : *«n»*.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

23 Si : $\overline{abca}_{(8)} = \overline{ddbc}_{(12)}$

Determinar : $a + b + c + d$

A)13 ó 17 B)15 ó 19 C)15 ó 21 D)15 ó 18 E)13 ó 18

24 Se tiene que :

$$\overline{\left(\frac{15}{m}\right)\left(\frac{6}{m}\right)\left(\frac{9}{m}\right)}_{(7)} = \overline{(m-1)(m-3)(m-1)(5-m)}_{(n)}$$

Determinar : $m + n$

A) 4 B) 6 C) 3 D) 8 E) 2

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)C	3)D	4)B	5)C	6)A	7)D	8)B	9)D	10)E
11)C	12)C	13)C	14)B	15)B	16)C	17)B	18)A	19)C	20)C

CONTEO DE NUMEROS

CAPITULO 065

OBJETIVOS :

- *Calcular la cantidad de numerales de una cierta característica .*
- *Determinar la cantidad de números que cumplan con ciertos requisitos.*
- *Aplicar el método de la progresión aritmética y sus propiedades para el conteo de números.*
- *Aplicar métodos para poder contar cifras en una serie natural de números.*
- *Establecer formas prácticas para contar todas las cifras en la serie de numeración de la compaginación de libros.*

INTRODUCCIÓN :

Se ha señalado, con razón, que la vida humana está como impregnada de matemática. En efecto, gran parte de los juicios de comparación que el hombre formula, así como ciertos gestos y actitudes de la vida diaria, aluden, conciente o inconcientemente, a juicios aritméticos y a propiedades geométricas, sin olvidar que el hombre, en especial el hombre moderno, vive en permanente contacto con dos mundos saturados de matemática: La técnica y la economía. Pero la actividad que mejor compueba la densidad de la atmósfera matemática que rodea al hombre es, sin duda, el contar, proceso que a la par de frecuente, es tan arraigado en el hombre, se presenta en él tan íntimamente vinculado con el pensar y con el hablar, que parece hasta poco concebible que alguna vez haya sido inventado o descubierto. Es conocida la aguda réplica de Platón a quienes pretendían, según una vieja leyenda, atribuir el arte de contar a Palámedes, mitológico personaje en quien se simbolizaba el Oriente con todos sus inventos.

"¿De manera – habría preguntado Platón – que antes de Palamedes, Agamenón no sabía cuántos pies tenía?" De ahí que el origen del contar, o sea el origen de la sucesión natural de los números (excluídos el *0* y el *1*, que prácticamente no cuentan), deba verse en la lejana y confusa penumbra que envuelve al origen del hombre y de sus mitos. La historia no hace sino comprobar este hecho, pues en las civilizaciones que han dejado documentos escritos o monumentos con inscripciones, se encuentran ya fijados sistemas de numeración, a veces muy perfeccionados. Igual comprobación ofrece le etnografía al señalar en el léxico de todos los pueblos primitivos (y conjeturalmente de los prehistóricos) un conjunto de palabras que puede considerarse como un incipiente sistema de numeración hablada, que puede ir desde la forma rudimentaria, constituida por la mera ordenación o las palabras uno, dos, muchos, hasta un grupo de vocablos destinados a designar los números más pequeños y las fracciones más simples.

NÚMERO CARDINAL

Al contar los elementos de un conjunto, el número que corresponde al último elemento se llama número cardinal que representa al conjunto.

E	S	T	U	D	I	A
1	2	3	4	5	6	7

7

E	S	T	U	D	I	A
7	6	5	4	3	2	1

7

Se observa que el último elemento ha sido el 7 que es el número cardinal.

NÚMERO ORDINAL :

Al contar los elementos de un conjunto, el número natural que corresponde a cada elemento se llama número ordinal.

Contando los elementos de:

A	L	U	M	N	O
1	2	3	4	5	6

Sí contamos de izquierda a derecha, el número ordinal de la letra *A* es el *1*, osea que *A* es el primer elemento, osea que el número ordinal de *L* es el *2*, es decir que la *L* es el segundo elemento, el número ordinal de *N* es el *5*, osea que es el quinto elemento, etc.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA(P.A.)

Es un conjunto ordenado de números , en la cual la diferencia de dos términos de posición consecutiva es una constante denominada"*Razón Aritmética*".

EJEMPLOS :

$*20 ; 24 ; 28 ; 23 ; 36 ; \Rightarrow 24 - 20 = 28 - 24 = 4$

↘↗↘↗↘↗↘↗

+4 +4 +4 +4........... *Razón Aritmética*

$* 47 ; 44 ; 41 ; \Rightarrow 44 - 47 = 41 - 44 = -3$

↘↗↘↗

−3 −3......................... *Razón Aritmética*

* Observe que para hallar un termino de una *P.A.*, Bastaría sumar su razón a su antecesor.

* En la primera progresión : $24 + 4 = 28$...*razón*

* En la segunda progresión : $47 + -3 = 44$....*razón*

* Si la *razón es positiva*, la progresión es *creciente*

* Si la *razón es negativa*, la progresión aritmética es *decreciente*.

CÁLCULO DE UN TÉRMINO CUALQUIERA

Toda progresión aritmética se podría representar por:

$$T_1 ; T_2 ; T_3 ;....; T_k ;...; T_n$$

↘↗↘↗

+r +r

Donde : T_1 : primer término

T_2 : segundo término

T_3 : tercer término

T_k : termino de lugar "*k*"

T_n : término de lugar "*n*"(o último termino)

r : razón aritmética

* Para calcular el término de lugar "*n*", se aplicará :

$$T_n = T_1 + (n - 1)r$$

Donde: T_1 = primer término

n = posición o lugar del témino

r = valor de la razón

EJEMPLO 1:

Calcular el término de lugar *30* en la siguiente *P.A.*:

$$42; 45; 48;.....$$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que $T_n = T_1 + (n - 1) r$

* En el ejemplo :

$T_1 = 42$

$n = 30 \qquad \Rightarrow T_{30} = 42 + (30 - 1)\,3 = 129$

$r = 3$

EJEMPLO 2 :

Calcular el termino de lugar *37*, en la progresión aritmética. *25; 18; 11;......*

RESOLUCIÓN :

* Reconocer los elementos :

$T_1 = 25 \qquad T_{37} = T_1 + (37 - 1).r$

$r = 18 - 25 = -7 \qquad \Rightarrow T_{37} = 25 + 36(-7)$

$n = 37$.....(lugar 37) $\qquad \Rightarrow T_{37} = 123$

EJEMPLO 3 :

Calcular el término de lugar *25* , en la siguiente progresión aritmética : $m ; m + 3 ; 18 - m; .....$

RESOLUCIÓN :

* Como es un progresión aritmética igualamos la razón , y de esta manera hallamos el valor de "*m*"; luego aplicaremos la fórmula para calcular el termino de lugar *25* :

$$(m + 3) - m = (18 - m) - (m + 3)$$

$$\Rightarrow 3 = 15 - 2m \Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6$$

* Reemplazando : $6 ; 9 ; 12 ; .....; T_{25}$ .... , $r=3$

$$T_{25} = T_1 + (25 - 1)r$$

$$\Rightarrow T_{25} = 6 + 24(3) \Rightarrow T_{25} = 78$$

FORMULA PARA OBTENER EL NÚMERO DE TÉRMINOS (n)

Para calcular el número de términos, se aplica:

$$\boxed{n = \frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{razon}} + 1}$$

EJEMPLO 1 :

En la siguiente *P.A.*, calcular el número de términos.

$$28; 33; 38; 43; ......; 293$$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

Número de términos:

$$\frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{razon}} + 1$$

* En el ejemplo :

Ultimo = *293* ; Primero = *28* ;Razón = *5*

$$\Rightarrow \#\text{ de términos} = \frac{293 - 28}{5} + 1$$

$$\Rightarrow \#\text{ de términos} = 54$$

EJEMPLO 2 :

En la siguiente progresión aritmética , calcular el número de términos : *60; 64; 68 ,.......;284*

RESOLUCIÓN :

* Reconociendo elementos :

T_1 = primero $=60$

T_n = último termino $=284$

r= razón $= 64 - 60 = 4$

$$\boxed{n = \frac{T_n - T_1}{r} + 1} \Rightarrow n = \frac{248 - 60}{4} + 1$$

EJEMPLO 3 :

En la siguiente progresión aritmética, hallar el número de términos :

$\overline{bb}\ ;\ \overline{b(b+3)}\ ;\ \overline{bc}\ ;........;\ \overline{2(b+5)(b+2)}$

RESOLUCIÓN :

* Como nos informan que es una progresión aritmética , la diferencia del segundo y el primer término nos dará la razón , en este caso esta diferencia es 3 , solo observe las cifras de las unidades.

$T_1=\overline{bb} \Rightarrow T_n=\overline{2(b+5)(b+2)}$

$r=3 \Rightarrow n=\frac{252}{3}+1 \Rightarrow n=? \Rightarrow n=85$

$$\boxed{n=\frac{T_n-T_1}{r}+1} \Rightarrow n=\frac{\overline{2(b+5)(b+2)}-\overline{bb}}{3}+1.$$

$\Rightarrow n=\frac{252}{3}+1=85$

En particular Si los números son consecutivos $(r=1)$. Se cumple: n=ultimo – primero $+1$

EJEMPLOS :

*$12 ; 13 ; 14 ;.......78$

$\Rightarrow n=(78-12)+1= 67$

* $14; 15; 16;..........;128$

$\Rightarrow n = (128 - 14) +1 = 115$

CANTIDAD DE CIFRAS EMPLEADAS EN UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Para calcular el número de cifras que se utilizan en una progresión aritmética , se siguen los siguientes pasos :

PASO 1 :

Se debe conocer el primer y el último término de la progresión , para formar grupos que tengan la misma cantidad de cifras .

PASO 2 :

Se calcula el número de términos, que hay en cada grupo formado.

PASO 3 :

Se calcula el número de cifras , que hay en cada grupo, así por ejemplo:

* 20 números de 2 cifras , emplean : $20\times2=40$ cifras

* 80 números de 3 cifras , emplean : $80\times3=240$ cifras.

PASO 4 :

Se suma los resultados de cada grupo y obtenemos el total de cifras.

EJEMPLO :

¿Cuántas cifras se emplean en la siguiente *P. A*?

$40; 42; 44; 46;............; 220$

RESOLUCIÓN :

PASO 1 :

$40 ; 42 ; 44 ; 46 ;.....; 98$

$\Rightarrow$ números de 2 cifras

$100 ;102 ; 104;106; 220$

$\Rightarrow$ número de 3 cifras

PASO 2 :

\# de términos de 2 cifras

$=\frac{98-40}{2}+1=30$ términos

\# de términos de 3 cifras

$=\frac{220-100}{2}+1=61$ términos

PASO 3 :

30 términos de dos $\Rightarrow 30\times2=60$ cifras

61 términos de tres cifras

$\Rightarrow 61\times3=183$ cifras

PASO 4 :

Total de cifras : $60+183 = 243$ cifras

OBSERVACIÓN :

Un caso particular de progresión aritmética , es la sucesión de números enteros positivos :

$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ ....;\ N$

Para calcular cuantas cifras se utilizan en este tipo particular de progresión , empleamos la siguiente fórmula :

$$\boxed{\left[\begin{matrix}\text{Cantidad}\\ \text{de cifras}\end{matrix}\right] = (N+1)k - \underbrace{111....11}_{k\text{ "veces"}}}$$

donde "k" es el número de cifras de "N".

EJEMPLO :

¿Cuántas cifras se emplean la siguiente enumeración?

$1; 2 ; 3 ; 4 ; ......; 220$

RESOLUCIÓN :

* En esta caso: $N = 220$ y $k = 3$, luego : Cantidad de cifras $=(220+1)3-111=552$ cifras

EJEMPLO 2 :

¿Cuántas cifras se emplean al escribir los números naturales desde el uno hasta 285?

RESOLUCIÓN :

$N = 285 ; k = 3$ ....(números de cifras de "N")

* Cantidad de cifras

$=(285+1)3- 111 = 747$ Tipo de imprenta <> cifra ó dígito

MÉTODO COMBINATORIO

La cantidad de números que existen ,está determinado por el producto de las cantidades de valores que pueden adoptar las variables independientes contenidas en el número dado.

EJEMPLO :

¿Cuántos números de 2 cifras existen en base 5?

RESOLUCIÓN :

Como los números que se formán son de la base 5, entonces los dígitos que solo se pueden utilizar son: $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;$ de esta forma tendremos :

10	20	30	40
11	21	31	41
12	22	32	42
13	23	33	43
14	24	34	44

* Por lo tanto observamos que

existen $4\times5=20$ números

MÉTODO GENERAL DE RESOLUCIÓN

* Colocamos el número en forma literal, es decir un numeral de dos cifras : $\overline{ab_5}$

* Se procede a analizar cada cifra tanto por su forma * como por los valores que puede adoptar según su base.

* Se encuentra los posibles valores de cada cifra y estos se multiplican :

	a	b_5	
	↓	↓	
	1	0	
Posibles	2	1	Posibles
Valores	3	2	valores
de "a"	4	3	de "b"
		4	

Números de valores : $4\times5=20$ números

EJEMPLO 2 :

¿Cuántos numerales de tres cifras que empiecen y terminen en cifra par ,existen?

RESOLUCIÓN :

* Analizando que valores pueden tomar cada cifra independiente , se obtendrá : $\overline{abc}$

0; 2; 4; 6; 8........"c" toma *5* valores *0; 1; 2; 3;-4; 5; 6; 7; 9........"b"* toma *10* valores *2; 4; 6; 8......"a"* toma *4* valores ⇒ Total de numerales $=4\times10\times5=200$ numerales

EJEMPLO 3:

¿Cuántos números de *4* cifras existen , en el sistema decimal?

RESOLUCIÓN:

a	b	c	d
↓	↓	↓	↓
1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
⋮	⋮	⋮	⋮
9	9	9	9

$9\times10\times10\times10=9\,000$

Rpta : 9000 números

EJEMPLO 4 :

¿Cuántos números de *3* cifras existen , en la base *3* ?

RESOLUCIÓN :

a	b	$c_{(3)}$
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
	2	2

$2\times3\times3=18$ *números*

EJEMPLO 5 :

¿Cuántos números de *4* cifras , todas impares hay en base *7*?

RESOLUCIÓN :

a	b	c	$d_{(7)}$
↓	↓	↓	↓
1	1	1	1
3	3	3	3
5	5	5	5

$3\times3\times3\times3=81$ *números*

EJEMPLO 6:

¿Cuántos números de *3* cifras existen , en el sistema de base *8*?

RESOLUCIÓN :

a	b	$c_{(8)}$
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
⋮	⋮	⋮
7	7	7

$7\times8\times8=448$ *números*

EJEMPLO 7 :

¿Cuantos números capicúas de *4* cifras existen , en el sistema decimal?

RESOLUCIÓN :

a	b	b	a
↓	↓		
1	0		
2	1		
⋮	⋮		
9	9		

Ya no se consideran, porque ya se analizaron en el primer y segundo lugar

$9\times10=90$ *números*

EJEMPLO 8 :

¿Cuantos números de la forma $(a+1)(b-2)\left(\frac{a}{2}\right)(2b)$, existen?

RESOLUCIÓN :

* Observamos que el numeral tiene cuatro cifras :

Si :$(a+1)$ y $\left(\frac{a}{2}\right)$ son cifras , entonces : $a\Rightarrow 0; 2;4;6;8...5$ valores

Si : $(b-2)$ y $(2b)$ son cifras , entonces : $b\Rightarrow 2;3;4$ ....(3 valores)

* Luego el total de números esta fijado por los valores que pueden tomar *"a"* y *"b"*, es decir :

Total de numerales $=5\times3=15$ numerales

EJEMPLO 9 :

¿Cuántos números capicúas de *5* cifras tienen un solo *"6"* en su escritura?

RESOLUCIÓN:

a	b	c	b	a
↓	↓	↓		
1	0	6		
2	1			
3	2			
6	6 ?			
⋮	⋮			
9	9			

6 6 ? se excluyen porque la cifra "6" es "c"

$8\times9\times1=72$

EJEMPLO 10 :

¿Cuántos números de dos cifras diferentes, se pueden formar con los dígitos : *2 ; 3 ; 4* y *5*?

RESOLUCIÓN :

* Si las cifras son diferentes, entonces el valor que puede tomar *"a"* no puede tomar *"b"*, en:

a	b
↓	↓
2	2
3	3
4	4
5	5

$4\times3=12$ *números*

└→ *41* └→ *el valor que tome "a"*

* Los números serán :

23; 24; 25; 32; 34; 35;

42; 43; 45; 52; 53; 54;

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En las siguientes progresiones aritméticas, determinar el número de términos :

I) 17; 22 ; 27; 32 ;................;642

II) 102 ; 99 ; 96 ;...................;12

RESOLUCIÓN :

* Debemos recordar :

$$\# \text{ de términos} = \frac{\text{último término} - \text{primer término}}{\text{razón}} + 1$$

I) 17 ; 22 ; 27 ; 32 ; .....; 642 (+5, +5, +5)

$$\Rightarrow \# \text{ de términos} = \frac{642-17}{5} + 1 = 126$$

II) 102 ; 99; 96;........; 12 ; Razón: –3

$$\Rightarrow \# \text{ de términos} = \frac{12-102}{-3} + 1 = 31$$

PROBLEMA 2 :

Calcular el último término de cada una de las sucesiones en progresión aritmética .

I) $\underbrace{4; 8; 12; 16; \ldots\ldots}_{23 \text{ TERMINOS}}$

II) $\underbrace{4; 7; 10; 13; \ldots\ldots}_{30 \text{ TERMINOS}}$

Indicar la suma de estos últimos términos.

A) 190 B) 191 C) 192 D) 193 E) 194

RESOLUCIÓN :

* Recordemos que una progresión aritmética , se cumple :

Ultimo término = primero $+(n-1)r$

* Entonces en :

I) 4 ; 8 ; 12 ; 16 ;........ (+4, +4, +4) $\begin{cases} T_1 = 4 \\ n = 23 \\ U = ? \end{cases}$

$$\Rightarrow U = 4 + (23-1)4 = 4 + 22 \times 4 = 92$$

II) 4 ; 7 ; 10 ; 13 ;........... (+3, +3, +3) $\begin{cases} T_1 = 4 \\ n = 30 \\ U = ? \end{cases}$

$$\Rightarrow U = 4 + (30-1)3 = 4 + 29 \times 3 = 91$$

* Se pide : $92 + 91 = 183$

PROBLEMA 3 :

Determinar cuantos términos tiene la progresión aritmética.

$\overline{a24}$; $\overline{a28}$; $\overline{a32}$;..........;$\overline{a96}$

A) 12 B) 11 C) 19 D) 21 E) 23

RESOLUCIÓN :

* La razón será :

$$\overline{a28} - \overline{a24} \text{ ó } \frac{\overline{a28} - \overline{a24}}{4}$$

* Luego aplicamos la fórmula adecuada ,para el número de términos :

N° de términos

$$= \frac{\overline{a96} - \overline{a24}}{4} + 1 = \frac{72}{4} + 1 = 19$$

PROBLEMA 4 :

Calcular el décimo quinto término de la sucesión :

20; 17; 14; 11;......

A) –25 B) –22 C) 22 D) –19 E) 19

RESOLUCIÓN :

* Recordemos que para calcular cualquier término de la progresión ; aplicaremos :

Termino de la Posición "n" = Primero + $(n-1)r$

ó $T_n = T_1 + (n-1)r$

* En el problema se tendrá que :

$T_1 = 20; n = 15; r = 17 - 20 = -3$ y $T_{15} = ?$

* Entonces :

$$T_{15} = 20 + (15-1)(-3) = 20 - 42 = -22$$

PROBLEMA 5 :

Determine el trigésimo quinto término de la P.A.

100 ; 97 ; 94 ; 91; ....

A) 1 B) –7 C) 0 D) –8 E) –2

RESOLUCIÓN :

* En el problema :

$T_1 = 100 ; n = 35 ; r = 97 - 100 = -3$ y $T_{35} = ?$

* Entonces aplicamos la fórmula adecuada ; Así :

$$T_{35} = 100 + (35-1)(-3) = 100 - 102 = -2$$

PROBLEMA 6 :

¿Cuál es el último término de la siguiente progresión aritmética *11;15;19;23; ....;m,* si tiene *20* términos?

A) 49 B) 59 C) 69 D) 79 E) 87

RESOLUCIÓN :

* Como tiene *20* términos , entonces el último será el término *20* , luego identificando los términos se obtendrá :

$T = 11; r = 15 - 11 = 4; n = 20$ y $T_{20} = ?$

* Entonces :

$$T_{20} = 11 + (20-1)4 = 87$$

PROBLEMA 7 :

El cuarto término de una sucesión es *29* y el décimo quinto término es *117.* Calcule el séptimo término.

A) 15 B) 18 C) 53 D) 4 E) 32

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que el cuarto y décimo quinto término, serán :

$$T_4 = 29 \Rightarrow T_1 + (4-1)r = 29$$

$$T_{15} = 117 \Rightarrow T_1 + (15-1)r = 117$$

$$\Rightarrow 15r - 4r = 117 - 29 \Rightarrow 11r = 88 \Rightarrow r = 8$$

* En una misma progresión aritmética, se cumple :

$$T_n - T_m = (n-m)r$$

* Luego como deseamos el término *7*, plateamos :

$$T_7 - T_4 = (7-4)8$$

$$T_7 - 29 = 3 \times 4 \Rightarrow T_7 = 53$$

PROBLEMA 8 :

Determinar la cantidad de tipos utilizados en un libro de *654* páginas.

RESOLUCIÓN :

* Recordemos que para calcular la cantidad de cifras en la secuencia de números naturales , aplicaremos:

$$C_{\substack{cifras\ de \\ 1\ a\ "N"}} = (N+1)K - \underbrace{111.....11}_{"K"\ veces}$$

* Donde *K* es el número de cifras de *"N"*

* La numeración de las páginas del libro será:*1; 2; 3; 4;..........; 654*

Como son números consecutivos y empieza desde la unidad , entonces aplicamos la formula,así :

$$C_{\substack{cifras\ de \\ 1 \Rightarrow 654}} = (654+1)3 - 111 = 1854$$

PROBLEMA 9 :

¿Cuantas cifras se emplearon para numerar un libro de *256* hojas?

RESOLUCIÓN :

* Si el libro tiene *256* hojas entonces tiene $256\times2=512$ páginas ,entonces al numerarlos tenemos :

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \ldots\ldots;\ 512$$

* Utilizando tenemos la formula para la cantidad de cifras , así:

$$C_{\underset{1-512}{cifras\ de}}=(512+1)\,3-111=1228$$

PROBLEMA 10 :

Determinar el valor de $(a+b)$,si para escribir desde el *1* hasta $\overline{ab}$, se emplearon *159* cifras :

RESOLUCIÓN :

* Se tiene: $1;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ldots\ldots;\ \overline{ab}$

* Además :

$$C_{\underset{del\,1\Rightarrow\overline{ab}}{cifras}}=\left(\overline{ab}+1\right)2-11=\underbrace{159}_{por\ dato}$$

$$\Rightarrow 2\,\overline{ab}+2-11=159\Rightarrow 2\,\overline{ab}=168$$

$$\Rightarrow \overline{ab}=84$$

* Se pide : $a+b=8+4=12$

PROBLEMA 11 :

Si al numerar un libro se emplearon *735* cifras ¿Cuántas páginas de *3* cifras tiene el libro?

A)160 *B)182* *C)164*
D)170 *E)178*

RESOLUCIÓN :

* Como no sabemos cuantas cifras tiene la última página ,vamos analizar por partes:

$$\underbrace{1,2,3,4,\ldots 9}_{\substack{9\times1=9\,cifras\\ \downarrow\\ N^{\circ}\ términos}}\ ;\ \underbrace{10;11;12;\ldots;12}_{\substack{90\times2=180\,cifras\\ \downarrow\\ N^{\circ}\ términos}}\ ;\ \underbrace{100,101,\ldots,999}_{\substack{900\times3=2700\,cifras\\ \downarrow\\ N^{\circ}\ Términos}}$$

* Para que la cantidad de cifras sea *735* el número de la última página debe ser más de *99* y menos de *999* o sea un número de tres cifras.

* Después del *99* las cifras que faltan sería :

$$735-(9+180)=546 \text{ cifras}$$

* Por lo cual las páginas de tres cifras serian : $546\div3=182$

PROBLEMA 12 :

¿Cuántas cifras se emplearon para escribir la siguiente sucesión compuesta de *124* términos?

$$84^1;\ 85^2;\ 86^3;\ldots\ldots\ldots$$

A)564 *B)496* *C)620*
D)321 *E) 320*

RESOLUCIÓN :

* En los exponentes tenemos :

$$1;\ 2;\ 3;\ldots\ldots\ldots\ldots;\ 124$$

N° cifras $(124+1)\,3-111=264$

* De la base tenemos :

$$\underbrace{84;\ 85;\ 86;\ldots;\ 99}_{(I)};\ \underbrace{100;\ldots;\ 207}_{(II)}$$

* De *(I)* :N° de términos$=99-83=16$

N° de cifras $=16\times2=32$

De(II)*:N°de términos$=207-99=108$

N° de cifras $=108\times3=324$

* Luego el total de cifras , será:

$$264+32+324=620$$

PROBLEMA 13 :

¿Cuántos números pares de cuatro cifras significativas y diferentes entre sí,existen?

RESOLUCIÓN :

* Las cifras que solo se pueden utilizar son : $\{1;2;3;4;\ 5;\ 6;7;8;9\}$

* Como el número es par debe terminar en cifra par, además como las cifras son significativas estas podrán ser : $\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$

* Empezamos por la derecha ,porque el que adopta menos valores es "*d*" y estos están incluidos en los valores de "*c*" de "*b*" y "*a*", luego pasamos a "*c*", "*b*" y "*a*" respectivamente.

a	*b*	*c*	*d=N° par*
↓	↓	↓	↓
1	1	1	2
2	2	2	4
3	3	3	6
⋮	⋮	⋮	8
9	9	9	

$$(9-1)(9-2(9-1)4=6\times7\times8\times4=1344$$

PROBLEMA 14 :

Cuántos números de tres cifras significativas distintas, existen en el sistema decimal.

RESOLUCIÓN :

* Si son cifras significativas , todas serán diferentes de cero.

a	*b*	*c*
↓	↓	↓
1	2	3
⋮	⋮	3
9	9	9

$$9-2=7\Rightarrow\ 9-1=8\ 9$$

* Entonces , lo pedido , será : $9\times8\times7=504$ números

PROBLEMA 15 :

¿Cuántos números de tres cifras del sistema octal , no usan las cifras *2* y *4* en su escritura?

RESOLUCIÓN :

a	*b*	c_8
↓	↓	↓
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	5	5
7	6	6
	7	7

* Entonces existen: $5\times6\times6=180$ números

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el vigésimo segundo término de la siguiente progresión:

$$2\ ;\ 4\ ;6\ ;\ 8\ ;\ 10,\ \ldots$$

A) 22 *B) 44* *C) 20*
D) 48 *E) N.A.*

02 ¿Cuántas cifras se escriben en la numeración de las *300* pag. de un libro?

A) 691 *B) 592* *C) 792*
D) 1000 *E) N.A.*

03 ¿Cuántos ceros inútiles hay en:

0001; 0002;0003 ; ....7000?

A) 1107 *B) 1108* *C) 1109*
D) 1110 *E) 1121*

04 Hallar el número de valores en:

43 ; 52 ; 61 ; 70 ;.................... 7000

A) 774 ***B) 664*** ***C) 654***
D) 644 ***E) 634***

05 ¿Cuántos números de ***3*** cifras que siempre empiecen y terminen en cifra par existen?

A) 200 ***B) 300*** ***C) 400***
D) 600 ***E) N.A.***

06 Cuántos números de la forma:

$\overline{a(a+2)b\left(\frac{b}{3}\right)}_8$ existen

A)10 ***B)12*** ***C)15*** ***D)18*** ***E)20***

07 Cuántos números de la forma

$\overline{a(a^2+b)b}_5$ existen

A)5 ***B)6*** ***C)7*** ***D)8*** ***E)9***

08 Cuántos números de la forma

$\overline{a(a+b^2)b}_5$ existen

A)5 ***B)6*** ***C)7*** ***D)8*** ***E)10***

09 Cuántos numerales de ***4*** cifras tienen por lo menos una cifra ***5*** en su escritura.

A)2350 ***B)3168*** ***C)2525***
D)3200 ***E)3520***

10 Cuántos números de ***3*** cifras tienen por lo menos una cifra ***5*** en su escritura.

A)120 ***B)450*** ***C)280***
D)352 ***E)218***

11 ¿Cuántos números de cuatro cifras comienzan o terminan en ***7***? (sistema decimal).

A)2400 ***B)366*** ***C)900***
D)1800 ***E)7200***

12 Calcular la diferencia entre el mayor número de tres cifras que tenga todas sus cifras iguales con el menor número de ***3*** cifras que posea todas sus cifras diferentes.

A)876 ***B)899*** ***C)526***
D)798 ***E)897***

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular ***«m»*** en la siguiente progresión aritmética, si el promedio aritmético de sus términos es ***627***.

$$\overline{21m};221;.............;\overline{10m0}$$

A) 3 ***B)4*** ***C) 5*** ***D)6*** ***E)7***

02 ¿En qué sistema de numeración los números: ***51; 66*** y ***103*** están en progresión artimética?

A)Heptal ***B)octal*** ***C)Nonario***
D)Decimal ***E)Undecimal***

03 Desde ***1*** hasta ***99***, ¿cuántos números tienen solamente cifras significativas?

A) 99 ***B)90*** ***C) 89*** ***D) 80*** ***E) 79***

04 Calcular el cuadragésimo término en la siguiente progresión aritmética: ***20; 16; 12; ....***

A)–136 ***B)–140*** ***C)–144***
D)–148 ***E)–152***

05 En una ***P. A.*** de ***42*** términos, el primer término es ***29*** y el último ***316***. Calcular el vigésimo término.

A) 156 ***B) 166*** ***C)162***
D) 172 ***E) 160***

06 Calcular ***«n»*** en:

3;6; 7;11;11;16;15;21;......;n;246

A)10 ***B) 180*** ***C) 190*** ***D)195*** ***E) 200***

07 Si: $25_{(n)}$;$40_{(n)}$ y $53_{(n)}$ están en progresión aritmética, calcular el mayor número de tres cifras de base ***«n»***. Expresarlo en el sistema quinario.

A) 1024 ***B) 4021*** ***C) 221***
D)4012 ***E)3021***

08 Al escribir en el sistema decimal todos los números de dos cifras, ¿cuántas cifras se han escrito que sean diferentes de ***2*** y ***7***?

A) 56 ***B) 63*** ***C) 104*** ***D) 112*** ***E)142***

09 Al escribir consecutivamente todos los números desde $\overline{ab}$ hasta $\overline{3ab}$ se han empleado ***865*** cifras. Calcular ***a+b***.

A)6 ***B)7*** ***C)8*** ***D) 9*** ***E) 10***

10 En la numeración de las $\overline{5ab}$ páginas de un libro se usan $\overline{15ab}$ cifras. El valor de ***a + b*** es:

A)7 ***B) 8*** ***C)9*** ***D) 10*** ***E) 11***

11 ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen?

A)6 ***B)7*** ***C) 8*** ***D)9*** ***E) 10***

12 Encontrar el primer término de cuatro cifras en la siguiente progresión aritmética:

47;63;79; 95;...............

A)1001 ***B)1003*** ***C)1 005***
D)1007 ***E)1011***

13 ¿Cuántos términos de la siguiente progresión aritmética, se encuentran entre ***300*** y ***500*** ?

6 ; 20 ; 34 ; 48 ;......................

A) 13 ***B)14*** ***C) 15*** ***D) 16*** ***E) 18***

14 ¿Cuántos términos de la siguiente progresión: ***14; 22; 30; .....*** tienen tres cifras en base ***5***?

A) 10 ***B)12*** ***C) 13*** ***D) 14*** ***E) 15***

15 Al escribir la siguiente progresión aritmética:

51; 57; 63; 69; ..... ¿cuál es la cifra que ocupa el lugar ***300***?

A)1 ***B)3*** ***C)7*** ***D)9*** ***E)4***

16 El número de tipos de imprenta usados para enumerar las páginas de un libro es el triple del número de páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 997 ***B)1107*** ***C) 1212***
D)1 531 ***E)1642***

17 ¿Cuántos numerales capicúas de cinco cifras existen en base ***8***?

A)448 ***B) 484*** ***C) 488*** ***D) 344*** ***E) 480***

18 ¿ Cuántos numerales de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos: ***0;1;3;4; 7; 9*** sin repetición?

A) 200 ***B)300*** ***C)250*** ***D) 320*** ***E) 350***

19 ¿Cuántos números de cuatro cifras de la forma $\overline{(3-b)(a+2)(a-1)c}$ existen en base ***8***?

A)72 ***B)96*** ***C)120*** ***D)168*** ***E)280***

20 ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras tienen exactamente dos cifras no significativas en su escritura?

A) 72 ***B) 81*** ***C)90*** ***D)100*** ***E)110***

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)[illegible]	2)B	3)B	4)A	5)C	6)D	7)[illegible]	8)E	9)C	10)C
11)D	12)[illegible]	13)B	14)B	15)B	16)[illegible]	17)A	18)B	19)E	20)C

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Comprender la necesidad de utilizar algoritmos para facilitar las relaciones cotidianas.*

* *Deducir las operaciones de adición y sustracción como una relación binaria.*

* *Establecer relaciones binarias con los elementos de dos conjuntos.*

* *Deducir las propiedades que cumplen los elementos que forman parte de la adición y sustracción.*

* *Reconocer los componentes de una multiplicación: Multiplicando y Multiplicador*

* *Reconocer los componentes de una división así también como deducir sus propiedades .*

* *Aplicar la multiplicación y división en la solución de problemas concretos.*

INTRODUCCIÓN :

La divulgación de las operaciones fundamentales , que actualmente utilizamos se lo debemos a muchos personajes, de manera especial al monje francés Gerberto. Nació en ***950*** e inició su misión civilizadora como un monje ordinario. Hacia ***976*** fue a Córdova donde estudió, entre otras cosas, los numerales indios y los métodos indoarábigos. En ***999*** fue electo Papa con el nombre de Silvestre ***II*** y murió en ***1003*** después de difundir, en la cristiandad, los métodos que aún todavía usamos. Pero la aceptación de estos métodos no fue inmediata ni unánime, pues en Florencia se promulgó en ***1290*** una ley que prohibía el uso de los numerales indios en los bancos. Se supone que los abaquistas (Gremio de los computadores con Abaco) no veían con buenos ojos la llegada de una técnica tan simple que barrería con ellos. Veamos uno de los métodos de multiplicación, conocido como de duplicación y mediación y era usado en el antiguo Egipto.

$$\begin{array}{ll} 24 \times & 75 \\ 12 & 150 \\ 6 & 300 \\ 1 \leftarrow 3 & 600 \\ 1 & 1\,200 \end{array}$$

Por lo tanto: $24 \times 75 = 1200 + 600 = 1800$

EL CONJUNTO DE NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

Después de una evolución lenta, pasados muchos milenios, podemos hoy describir, de una manera concisa y precisa, el conjunto $\mathbb{N}$ (las tribus más rudimentarias contaban apenas uno, dos y muchos). No fue sino como producto de las necesidades impulsadas por un sistema social cada vez más complejo, que se pudo dar con precisión $\mathbb{N}$) valiéndonos de la notable síntesis hecha por el matemático italiano Guiseppe Peana en el siglo ***XX***.

«$\mathbb{N}$ es el conjunto, cuyos elementos son llamados números naturales, y su esencia reside en el significado del término «sucesor».

AXIOMAS DE PEANO

I) Todo número natural tiene un único sucesor.

II) Números naturales diferentes, tienen sucesores diferentes.

III) Existe un único número natural, llamado uno y representado por el símbolo ***1***, que no es sucesor de ningún otro.

IV) Sea x un conjunto de números naturales (esto es $x \subset \mathbb{N}$). Si ***1*** pertenece a x, y si el sucesor de todo elemento de x aún pertenece a x, entonces: $x = \mathbb{N}$.

OPERACIÓN BINARIA

Dado el conjunto no vacío A. En el conjunto $A \times A$ se define la función «*»:

* : es el operador (representa la función)

* : $A \times A \rightarrow A$

* : $(a;b) \rightarrow c$, donde $c = a*b$

En esta función se cumple que:

i) A cada par de elementos a y b del conjunto A, la función hace corresponder un elemento de A.

ii) Está definida sobre cada par de elementos de su dominio previamente definido.

iii) Una operación binaria asigna un sólo valor a cada par de elementos de su dominio.

EJEMPLOS:

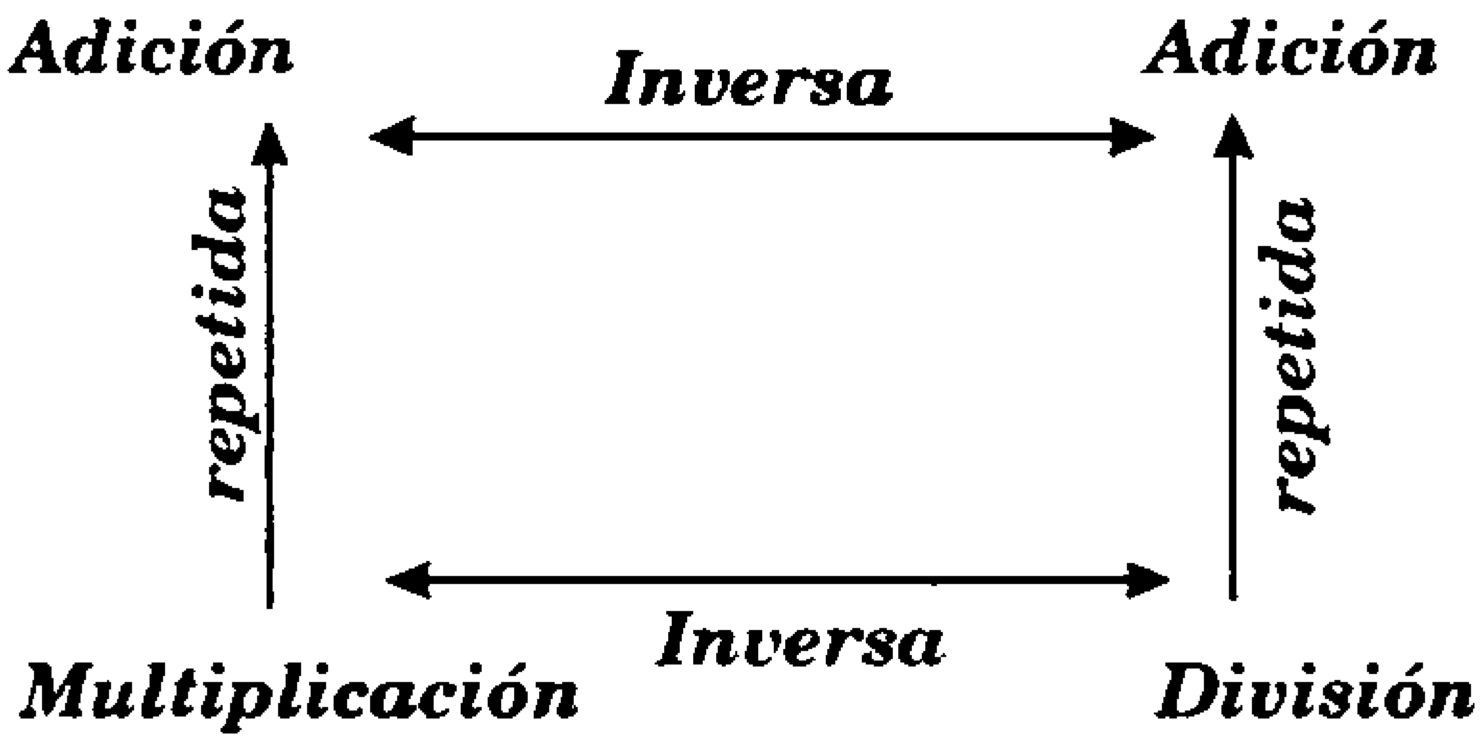
I) La adición es una operación binaria; es una función que determina un nuevo valor para cada par de valores m y n.

En vez de escribir $+ (m;n)$ para el valor de esta función se escribe «$m+n$» para indicar que m y n se combinan.

II) La división no es una operación binaria para los números enteros, porque no cumple la condición indicada en *I*.

«No toda forma de determinar un nuevo valor a partir de dos valores dados es una operación binaria».

Las cuatro operaciones fundamentales: adición, sustracción, multiplicación y división, están relacionadas de muchas maneras, como se muestra:



OPERACIONES FUNDAMENTALES EN EL CONJUNTO $\mathbb{N}$

Se denomina conjunto de los números naturales el conjunto $\mathbb{N} = \{1;2;3;........\}$.

ADICIÓN EN $\mathbb{N}$:

Dados dos números naturales a y b, mediante el operador + les hacemos corresponder un valor c, tal que:

$$+: (a;b) \rightarrow a + b = c \text{ (Sumandos: } a \text{ y } b\text{)}$$

Suma: c

+	1	2	3	...	....
1	2	3	4	...	....
2	3	4	5	...	....
3	4	5	6	...	....
.	.	.	.	...	....
.	.	.	.		

SUSTRACCIÓN EN $\mathbb{N}$:

Es una operación inversa a la adición .Dados dos números naturales m y n, se llama diferencia de m y n , al número natural d ,(si existe) tal que $m-n=d$, donde «m» se llama minuendo , «n» es el sustraendo y «d» la diferencia . $\boxed{m - n = d \Leftrightarrow n = s + d}$

MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{N}$:

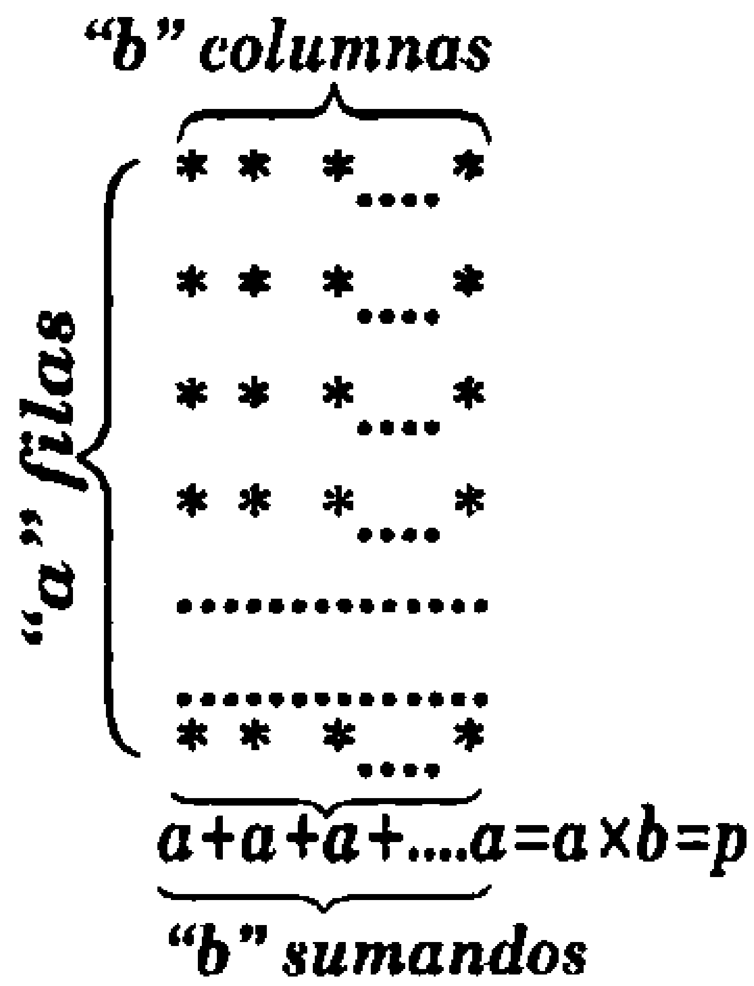
Es una operación directa . Si a y b son números naturales , le hacemos corresponder un valor p, tal que:

$$+: (a;b) \rightarrow a \times b = p \text{ (Factores : } a \text{ y } b\text{)}$$

Producto: p

Donde : a es el multiplicando
b es el multiplicador
c es el producto

×	1	2	3	4	....
1	1	2	3	4	....
2	2	4	6	8	....
3	3	6	9	12	....
4	4	8	12	16	....
.	.	.	.	...	....
.	.	.	.	...	....

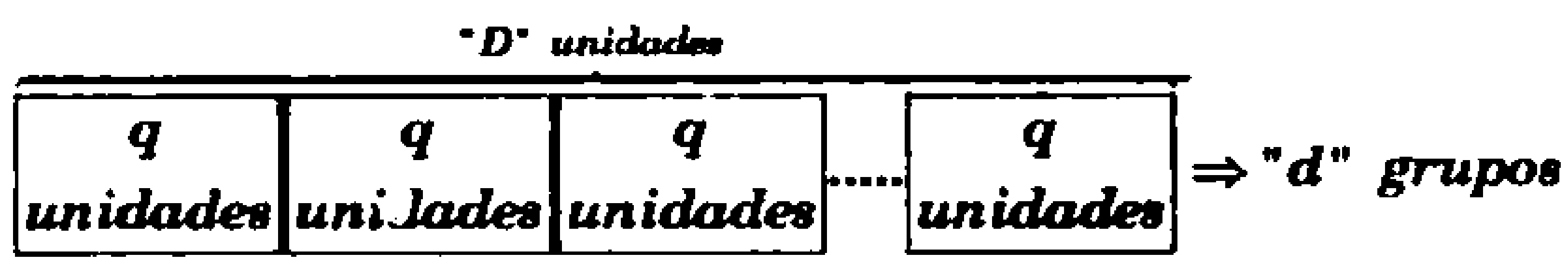


Se puede afirmar que la multiplicación que es una adición abreviada , como se muestra en el esquema superior .

DIVISIÓN EN $\mathbb{N}$:

Es una operación inversa a la multiplicación .Dados dos números naturales D y d, se quiere calcular el número natural q (se denota $\frac{D}{d}$),- si existe ; tal que : $D=d\times q$ $\boxed{\frac{D}{d} = q \Leftrightarrow D = d \times q}$

Con «D» unidades disponibles se forman «d» grupos de «q» unidades cada uno .



En el caso que «D» no posea una cantidad de grupos exactos , entonces se dice que hay un residuo (división inexacta) o una cantidad que sobra .

ADICIÓN y SUSTRACCIÓN EN $\mathbb{Z}$

$$\boxed{A + B = S}$$

Donde:

* A y B: Sumandos
* S : Suma

EJEMPLO:

Calcule : $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$

Si : $a+b+c=13$

Ordenando los sumandos

$$\begin{array}{r} 1\ 1\quad \\ \overline{a\ b\ c}\ + \\ \overline{b\ c\ a}\quad \\ \overline{c\ a\ b}\quad \\ \hline 1\ 4\ 4\ 3 \end{array}$$

ADICIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Efectuar: $213_5+322_5+442_5$

Ordenando los sumandos

$$\begin{array}{r} 1\ 1\quad \\ 2\ 1\ 3_5\ + \\ 3\ 2\ 2_5\quad \\ 4\ 4\ 2_5\quad \\ \hline 2\ 0\ 3\ 2_5 \end{array}$$

Orden:

1er. $3+2+2=7=12_5$ Llevo 1

2do. $1+2+4+1=8=13_5$ Llevo 1

3er. $2+3+4+1=10=20_5$ Llevo 2

SUMA DE TÉRMINOS EN P.A.

Se cumple:

$$S=\left(\frac{\left(\begin{array}{c}\text{Primer}\\ \text{término}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{último}\\ \text{término}\end{array}\right)}{2}\right)\left(\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{términos}\end{array}\right)$$

EJEMPLO:

Hallar «S»

$$S=13+20+27+\ldots..+188$$

$+7\quad +7$

RESOLUCIÓN

$1°)\ \#\,t=\dfrac{188-13}{7}+1=26$

$2°)\ S=\left(\dfrac{13+188}{2}\right)\times 26=2613$

SUMAS NOTABLES

A) $1+2+3+\ldots.+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

B) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

C) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

D) $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n(n+1)$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

E) $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

SUSTRACCIÓN

Es una operación inversa a la adición en la cual dadas dos cantidades minuendo y sustraendo calcular una tercera llamada diferencia. Así: $\boxed{M-S=D}$

Donde:

* M : Minuendo
* S : Sustraendo
* D : Diferencia

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 3\ - \\ 1\ 5\ 8\quad \\ \hline 4\ 1\ 5\quad \end{array}$$

Sustracción en otros sistemas de numeración efectuar.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 4_7\ - \\ 1\ 4\ 5_7\quad \\ \hline 1\ 4\ 6_7\quad \end{array}$$

Orden:

1er. $4+7-5=6$

2do. $1+7-4=4$

3er. $2-1=1$

RESTA NOTABLES

Sea: $\overline{abc}_{(k)}$; $a>c$

Si : $\overline{abc}_{(k)}-\overline{cba}_{(k)}=\overline{xyz}_{(k)}$

Se cumple :

$\boxed{y=k-1}\ \wedge\ \boxed{x+z=k-1}$

EJEMPLO:

* Si: $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{2mn}$

$\Rightarrow m=9\wedge 2+n=9$

$\Rightarrow n=7$

* Si: $\overline{abc}_{(8)}-\overline{cba}_{(8)}=\overline{pq3}_{(8)}$

$\Rightarrow q=7\ \wedge\ p+3=7$

$\Rightarrow p=4$

* Si:

$$\begin{array}{r} \overline{a\ b}\ - \\ \overline{b\ a}\quad \\ \hline \overline{m\ n}\quad \end{array}$$

Entonces: $m+n=9$

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ - \\ 2\ 5\quad \\ \hline 2\ 7\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} 6\ 1\ - \\ 1\ 6\quad \\ \hline 4\ 5\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8\ 3\ - \\ 3\ 8\quad \\ \hline 4\ 5\quad \end{array}$$

Si:

$$\begin{array}{r} \overline{a\ b\ c}\ - \\ \overline{c\ b\ a}\quad \\ \hline \overline{x\ y\ z}\quad \end{array}$$

Entonces: $x+z=y=9$

$$\begin{array}{r} 5\ 2\ 1\ - \\ 1\ 2\ 5\quad \\ \hline 3\ 9\ 6\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8\ 3\ 2\ - \\ 2\ 3\ 8\quad \\ \hline 5\ 9\ 4\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} 7\ 1\ 5\ - \\ 5\ 1\ 7\quad \\ \hline 1\ 9\ 8\quad \end{array}$$

En otros sistemas de numeración

$$\begin{array}{r} 4\ 1\ 2_7\ - \\ 2\ 1\ 4_7\quad \\ \hline 1\ 6\ 5_7\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} 5\ 3\ 1_8\ - \\ 1\ 3\ 5_8\quad \\ \hline 3\ 7\ 4_8\quad \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overline{a\ b\ c}_n\ - \\ \overline{c\ b\ a}_n\quad \\ \hline \overline{x\ y\ z}_n\quad \end{array}$$

$$x+z=y=n-1$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Es lo que le falta a un numeral para ser una unidad del orden inmediato superior al de su cifra de mayor orden.

Sea N un número de k cifras se define: $\boxed{CA(N)=10^k-N}$

EJEMPLOS:

* $CA(38)=10^2-38=62$
* $CA(\overline{abc})=10^3-\overline{abc}$
* $CA(\overline{abcd})=10^4-\overline{abcd}$
* $CA[43_{(8)}]=10^2_{(8)}-43_{(8)}=35_{(8)}$
* $CA[\overline{abc}_{(9)}]=10^3_{(9)}-\overline{abc}_{(9)}$

MÉTODO PRÁCTICO :

$$\begin{array}{ll} & \ \ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 10 \\ \text{Si: } N= & \ \ 4\ 7\ 8\ 2\ 1\ 7 \\ CA(N)= & \ \ 5\ 2\ 1\ 7\ 8\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \ \ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 10 \\ \text{Si: } N= & \ \ 3\ 5\ 7\ 2\ 8\ 0\ 0 \\ CA(N)= & \ \ 6\ 4\ 2\ 7\ 2\ 0\ 0 \end{array}$$

$CA\ \overset{9\,9\,10}{\overline{aba}}=\overline{(9-a)(9-b)(10-a)}_{(8)}$

$CA\left|\overset{7\,7\,8}{\overline{abc}_{(8)}}\right|=\overline{(7-a)(7-b)(8-a)}_{(8)}$

MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{Z}$

Es una operación directa que cosiste en que dadas dos cantidades multiplicando y multiplicador, permite calcular una tercera llamada producto.

$$\boxed{A \times B = P}$$

Donde:

*A : Multiplicando
*B : Multiplicador } FACTORES
*P : Producto

EJEMPLO:

multiplicando	4 3 5 ×
multiplicador	6 2
	8 7 0 } PRODUCTOS
	2 6 1 0 } PARCIALES
Producto	2 6 9 7 0

EJEMPLO:

Al multiplicar $\overline{abc}$ por *314* la suma de los productos parciales fue *1096*.

Calcule: $(a + b + c)$

$a\,b\,c \times$
$3\,1\,4$

$4 \times \overline{abc}$ } PRODUCTOS
$1 \times \overline{abc}$
$3 \times \overline{abc}$ } PARCIALES

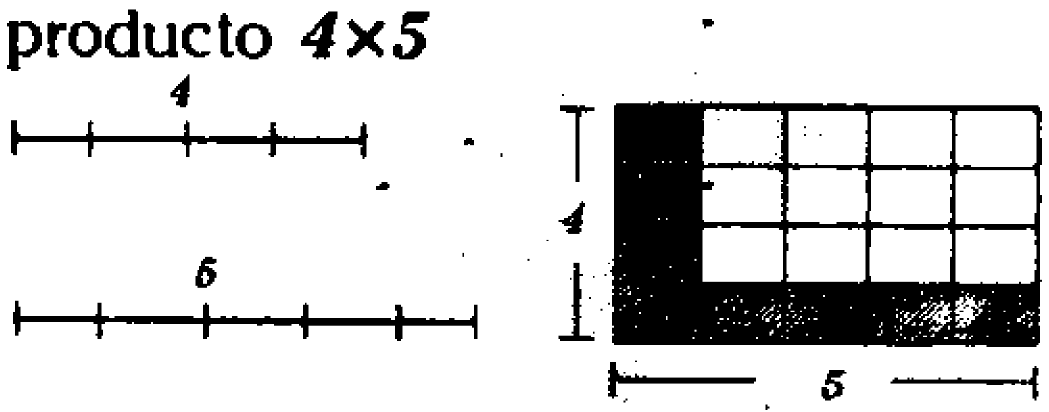
Luego: $8 \times \overline{abc} = 1096$

$\overline{abc} = 137$

Por lo tanto: $a + b + c = 11$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO

Representar graficamente el producto *4×5*



El rectángulo formado por *4* filas horizontales de *5* cuadrados cada una, osea de $5+5+5+5=20$ cuadrados es la representación gráfica del producto *5 x 4*, porque el desarrollo de éste producto es:

$$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$$

NOTA :

El producto de *2* o más factores termina en el producto de las cifras de unidades de los factores.

EJEMPLO:

$$\overline{ab2} \times \overline{c7} \times \overline{d9} = \ldots 6$$

DETERMINACIÓN APRIORI DE LA CANTIDAD DE CIFRAS QUE PUEDE TENER UN PRODUCTO

Sean los factores:

$A \Rightarrow x$ *cifras*
$B \Rightarrow y$ *cifras*
$C \Rightarrow z$ *cifras*

$\Rightarrow \boxed{P = A \times B \times C}$

A) $\boxed{C_{max}(P) = x + y + z}$ cantidad máxima de cifras que puede tener *P*

B) $\boxed{C_{min}(P) = C_{max}(P) - (\#factores) + 1}$

Cantidad máximas de cifras que puede tener *P*

DETERMINACIÓN APRIORI DE LA CANTIDAD DE CIFRAS ENTERAS QUE PUEDE TENER UN COCIENTE

$$Sea: q = \frac{D}{d} \begin{array}{l} \leftarrow x \text{ cifras} \\ \leftarrow y \text{ cifras} \end{array}$$

$$\boxed{C_{min(q)} = x - y}$$

$$\boxed{C_{ma\,.\,q)} = (x - y) + 1}$$

DIVISIÓN :

Es aquella operación inversa a la multiplicación que consiste en que dadas dos cantidades dividendo *(D)* y divisor *(d)* se obtiene una tercera cantidad llamada cociente *(q)* tal que su producto con el divisor sea igual o se acerque lo más posible al dividendo.

EJEMPLO:

Dividendo → 109 | 13 ← Divisor
5   8 ← Cociente
↑
Residuo

$\Rightarrow$ D | d
r   q

DIVISIÓN ENTERA

1) EXACTA :

Cuando no hay residuo o por convención decimos que el residuo es cero.

$D \,|\, d$, $0 \quad q$ $\Rightarrow \boxed{D = d \times q}$ D: Dividendo, d: divisor, q: cociente

El dividendo *«D»* es exactamente *«q»* veces

INEXACTA :

Cuando el dividendo *«D»* no es exactamente algunas veces el Divisor *«d»* es decir existe residuo diferente de cero $(r > 0)$

POR DEFECTO :

$D \,|\, d$, $r \quad q$ $\Rightarrow \boxed{D = d \times q + r}$ $; r \in \mathbb{Z}^+$

POR EXCESO:

$D \,|\, d$, $r_E \quad q_E$ $\Rightarrow \boxed{D = d \times q_E + r_E}$ $; r_E \in \mathbb{Z}^+$

EJEMPLO:

Dividir en forma entera *40* entre *12*

Por Defecto	Por Exceso
40 | 12 ; 4 3	40 | 12 ; 8 3
$40 = 12 \times 3 + 4$	$40 = 12 \times 4 - 8$

PROPIEDADES

1) $\boxed{|q_E - q| = \ .}$ 2) $\boxed{0 \le r < |d|}$

Conclusión:

$\boxed{r_{min} = 1}$ convencional para una división inexacta.

$\boxed{r_{máx} = |d| - 1}$

3) $\boxed{r + r_E = |d|}$

ALTERACIONES DE LA DIVISIÓN INEXACTA

1) AL SUMAR UNIDADES AL DIVIDENDO:

Al sumarle un cierto valor al dividendo, este mismo valor se le suma al residuo. Si lo que se obtiene es mayor o igual al divisor se divide entre él, el cociente que se obtenga será el número de

unidades que aumenta el cociente de la división inicial y el residuo que deja será el nuevo residuo de la división.

EJEMPLO:

$108 \,\underline{|\,13}$ $\Rightarrow$ $108 + 28 = 136$

$4 \quad 8$ $4 + 28 = 32 \,\underline{|\,13}$

$\qquad\qquad 6 \quad 2$

Por lo tanto el nuevo cociente $= 8 + 2 = 10$

El nuevo residuo $= 6$

Verificando: $136 \,\underline{|\,13}$

$6 \quad 10$

EJEMPLO:

$152 \,\underline{|\,11}$ $\Rightarrow$ $152 + 29 = 181$

$9 \quad 13$ $9 + 29 = 38 \,\underline{|\,11}$

Por lo tanto: $\qquad 5 \quad 3$

Nuevo cociente $= 13 + 3 = 16$

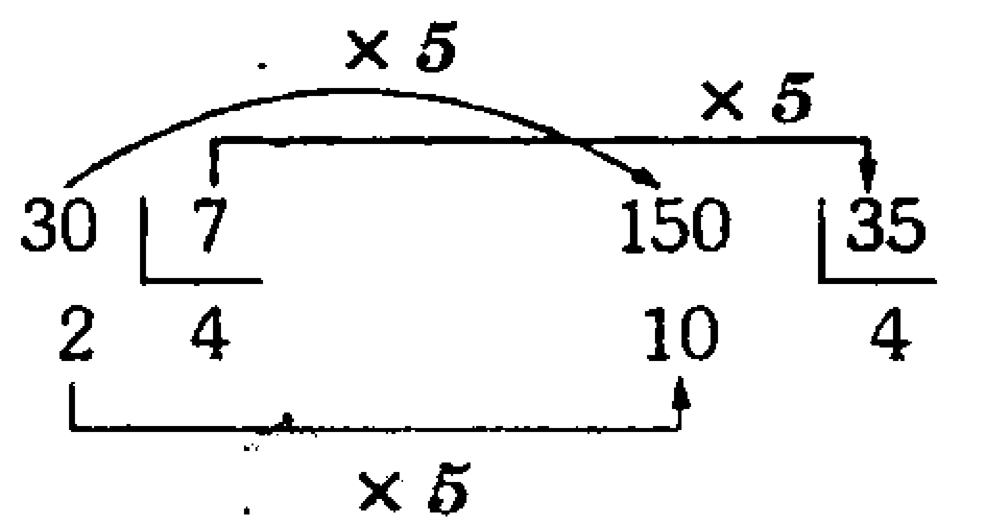
Nuevo residuo $= 5$

2) AL MULTIPLICAR POR UN NÚMERO AL DIVIDENDO :

2A) ALTERANDO AL DIVISOR :

Si se multiplica al dividendo y al divisor por un mismo número, el cociente no varía y el residuo quedará multiplicado por dicho número.

EJEMPLO:



2B) ALTERANDO EL COCIENTE:

Si se multiplica al dividendo y al cociente por un número, el residuo quedará multiplicado por el mismo número, teniendo en cuenta las observaciones del caso *(1)*.

EJEMPLO:

$70 \,\underline{|\,11}$ $\Rightarrow$ $70 \times 7 = 490$

$4 \quad 6$ $4 \times 7 = 28 \,\underline{|\,11}$

$\qquad\qquad 6 \quad 2$

Nuevo cociente: $6 \times 7 + 2 = 44$

Nuevo residuo: 6

Verificando: $490 \,\underline{|\,11}$

$6 \quad 44$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Obtenga la suma de los n primeros números naturales que tengan todas sus cifras iguales a 7, más la suma de los n primeros números naturales que tengan todas sus cifras iguales a 1.

A) $\frac{8}{9}(10^{n+1} - 9n - 10)$ B) $\frac{8}{81}(10^{n+1} - 9n - 9)$

C) $\frac{8}{81}(10^{n+1} - 10^n - 9)$ D) $\frac{8}{81}(10^{n+1} - 9n - 10$

E) $\frac{8}{81}(10^{n+1} - 9n)$

RESOLUCIÓN:

* Sea:

$$S_1 = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots + \underbrace{777\ldots777}_{n\,cifras}$$

$$S_2 = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{111\ldots111}_{n\,cifras}$$

* Entonces:

$$S_1 + S_2 = 8 + 88 + 888 + 8888 + \ldots + \underbrace{888\ldots888}_{n\,cifras}$$

*Luego factorizando 8 y multiplicando ambos miembros por 9 tenemos:

$$9(S_1 + S_2) = 8(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{n\,cifras})$$

$$S_1 + S_2 = \frac{8}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^n - n)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{8}{9}(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - 1 - n)$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = \frac{8}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} - 1 - n\right)$$

* Nos piden :

$$S_1 + S_2 = \frac{8}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 (TIPO UNI):

Sea el número $N = 777\ldots.7_{(8)}$ de 100 cifras. Calcule la suma (expresada en base diez) de las cifras del número N^2, que está expresada en base 8.

A) 640   B) 700   C) 740
D) 780   E) 800

RESOLUCIÓN:

En problemas de multiplicación, cuando se multiplica un número por otro cuyas cifras son máximas, el producto se puede expresar como una sustracción.

EJEMPLO:

$$\overline{abc} \times 99 = \overline{abc}(100 - 1) = \overline{abc00} - \overline{abc}$$

$$\overline{mnp}_8 \times \overline{777}_8 = \overline{mnp}_8(1000_8 - 1) = \overline{mnp000}_8 - \overline{mnp}_8$$

Por dato : $N = \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}{}_8$

Entonces:

Pero $N^2 = \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}{}_8 \times \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}{}_8$

$$N^2 = \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}{}_8\left(1\underbrace{00\ldots0}_{100\,cifras}{}_8 - 1\right)$$

$$N^2 = \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}\underbrace{00\ldots0}_{100\,cifras}{}_8 - \underbrace{777\ldots77}_{100\,cifras}{}_8$$

Ordenando en forma vertical y operando obtenemos

$$\begin{array}{r} 77\ldots700\ldots00_8 \\ 77\ldots77_8 \\ \hline \end{array}$$

$$N^2 = \underbrace{77\ldots6}_{100\,cifras}\underbrace{00\ldots01}_{100\,cifras}{}_8$$

Entonces, la suma de cifras de N^2es

$$7 \times 99 + 6 + 1 = 700$$

La suma de cifras de N^2es 700

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Dada la sucesión .

$2\,;\ 6\,;\ 12\,;\ 20\,;\ 30\,;\ 42\,;\ \ldots\ldots$ determine la suma de los 100 primeros términos de la sucesión anterior.

A) 10 100   B) 294 880   C) 323 400
D) 333 300   E) 343 400

RESOLUCIÓN:

• Una serie es la suma de los términos de una sucesión y se denota por $\sum_{n=1}^{k} t_n$

Algunas sumas notables:

• $\sum_{k=1}^{k} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

• $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

• $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \ldots + n(n+1)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

De la sucesión

$$\underbrace{2; 6; 12; 20; 30; 42; \ldots}_{100\ términos}$$

notamos que cada término se expresa como

$1\times2;\ 2\times3;\ 3\times4;\ 4\times5;\ 5\times6;\ 6\times7;\ ...;100\times101$

Entonces, el término general de la sucesión es $t_n=n(n+1)$

* calculando la suma de los *100* términos de la sucesión, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{100} n(n+1)=\frac{100\times101\times102}{3}=343400$$

La suma de los *100* términos de la sucesión es *343 400.*

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

En base b se cumple que $\overline{AAA}\times F=1776$. Entonces, el valor mínimo de b, para que se cumpla la condición anterior, es :

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) No existe

RESOLUCIÓN:

* Según las condiciones del problema:

$\overline{AAA}_b\times F_b$ } A y F son menores que b

$\boxed{16}_b$ / $\boxed{16}_b$ / $\boxed{16}_b$ — Los tres productos parciales son igual, siendo:
• La última cifra *6*.
• Se llevará *1* al orden superior

$1776_b \Rightarrow b>7$

* Por tanto:

$A \times F = 16_b = b+6$

A	F	b+6
2	7	8
7	2	8
3	5	9
5	3	9
⋮	⋮	⋮

$\Rightarrow b_{mín=8}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

¿Cuántos números enteros menores que *45 000* existen, tales que al dividirlos entre otros números capicúas, el cociente resulte siempre *102* y el residuo *306*?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN:

$N=d(102)+306<45000$

$\Rightarrow d=<438,1$ y $d<\underset{residuo}{306}$

* son capicúas:

$313;323;...;393;404;424;434$

13 valores del divisor

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

En una división por defecto cuyo cociente es *22*, si se aumentan *42* unidades al dividendo el cociente resulta *25* y el residuo aumenta en *3*; pero si el dividendo se aumenta en *43* el cociente aumenta en *4*. Calcule la suma de cifras del dividendo.

A) 16 B) 18 C) 15 D) 17 E) 14

RESOLUCIÓN:

$D=d\times q+R=22d+R$ ....(I)

* Pero:

$D+42=25d+(R+3)$ ....(II)

* De: (I) y (II): $d=13$.......división exacta

$D+43=(22+4)d=\widehat{26d}$

* luego $R+3$ = residuos máximo $=12$

$\Rightarrow R=9$

$\Rightarrow D=(13)(22)+9=295$

$\Rightarrow$ suma de cifras $=16$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Al dividir el mayor numeral de la forma $\overline{abba}$ entre *26* se obtuvo un residuo máximo. Calcule la suma de cifras del cociente.

A) 9 B) 8 C) 10 D) 12 E) 11

RESOLUCIÓN:

$\overline{abba}=26q+25$ → residuos máximos
↑ par impar
debe ser impar

* Mayor numeral: $\overline{9bb9}$

$\overline{9bb9}=26q+25 \begin{cases} q=354 \\ b=2 \end{cases}$

→ sumas de cifras: $3+5+4=12$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

En la multiplicación de $\overline{aba}$ y $\overline{cdc}$ la suma de sus productos parciales es *5 299* y uno de los productos parciales excede a otro en *757*. Si $\overline{aba}$ sólo tiene cifras impares. Determinar: $a+b+c+d$.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 17 E) 19

RESOLUCIÓN:

$\overline{aba}\times$
$\overline{cdc}$

... ← $\overline{aba}\times c$
... ← $\overline{aba}\times d$ (productos parciales)
... ← $\overline{aba}\times c$

→ suma: $(2c+a)\overline{aba}=5299$

$(d-c)\overline{aba}=757$

* Identificando: $\overline{aba}=757$ Sólo cifras impares

* luego:

$\left.\begin{array}{l} 2c+d=7 \\ d-c=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=2 \\ d=3 \end{array}$

$\Rightarrow a+b+c+d=7+5+2+3=17$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Si se cumple:

$\overline{abca}+\overline{8abc}+\overline{b7c8}+\overline{ccab}=\overline{24b22}$

Hallar : a^2+b+c

A) 31 B) 32 C) 33 D) 34 E) 35

02 Calcule el valor de $x+y-z$; si se cumple Q:

$\overline{xyz}=\overline{zyx}+\overline{yx(y+1)}$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

03 Si:

$a+b+3=c+d+4=m+n+6=17$

Calcular : $\overline{acm}+\overline{bdn}$

A) 1514 B) 1154 C) 1145 D) 1541 E) 1641

04 Si: $\overline{2a1}_n+\overline{4b3}_n+\overline{365}_n=\overline{ac02}_n$

Calcule: "$a+b+c-n$"

A) 2 B) 4 C) 6 D) 5 E) 3

05 Si: $a+b=15$; calcular: $\overline{ab}_{12}+\overline{ba}_{12}$; dar como respuesta la suma de cifras.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 11 E) 13

06 La suma de términos de una sustracción es *124*. Calcular la suma de cifras del minuendo.

A) 7 B) 10 C) 9 D) 11 E) 8

07 En una sustracción el triple del minuendo es ***144*** y la diferencia ***32***. ¿Cuál es el valor del sustraendo?

A)20 B)36 C)24 D)18 E)16

08 $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{p(q+2)q}$.

Calcular: $q-p$

A)5 B)7 C)3 D)9 E)6

09 $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mnp}$

Calcular: $\overline{mnp}+\overline{nmp}+\overline{pmn}$

A)1778 B)1398 C)2900 D)1998 E)2000

10 $C.A.(\overline{abc})=\overline{cab}$

Calcular: $a\times b\times c$

A)100 B)120 C)45 D)98 E)20

11 Hallar $a+b+c$

si: $\overline{abc}\times 3=1701$

A)15 B)18 C)17 D)20 E)13

12 $\overline{abc}\times p=1284$

$\overline{abc}\times q=1605$

Calcular $\overline{abc}\times\overline{pq}$

A)17304 B)112533 C)112537 D)17334 E)1445

13 si: $\overline{ab}\times 8=\overline{c52}$.

Calcular: $a+b+c\ (a\neq b)$.

A)20 B)11 C)16 D)18 E)15

14 Si: $\overline{abcd}\times 99=\ldots 4332$.

Calcular $a+b+c+d$

A)16 B)17 C)20 D)19 E)18

15 $\overline{abcd}\times 4=\overline{dcba}$

A)20 B)16 C)18 D)17 E)19

16 En una división:

D=40; d=5. Calcular q.

A)4 B)5 C)1 D)7 E)8

17 Calcular la suma de cifras del dividendo, si el divisor es el triple del cociente, el cociente es el quíntuple del residuo y el residuo es mínimo.

A)31 B)36 C)76 D)43 E)13

18 Si: $a+b+c=14$

Calcular el residuo de dividir

$(\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc})\div 9$

A)1 B)5 C)7 D)6 E)4

19 Cada letra es una cifra en el desarrollo de la división. Calcular la suma de $a+b+c+d+e+p$.

$$\begin{array}{r|l}
\overline{ab938} & \overline{c1} \\ \cline{2-2}
\underline{88} & \overline{d90e} \\
99 & \\
\underline{aa} & \\
003d & \\
\underline{ee} & \\
p &
\end{array}$$

A)16 B)29 C)20 D)22 E)33

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 La suma de las cifras «*a*» y «*c*» es igual a ***12***, la diferencia de los numerales $\overline{abc}$ y $\overline{cba}$, es igual a ***396***. Calcular el valor de «*a*».

A) 2 B)4 C) 5 D) 8 E) 9

02 Calcular la suma de todos los números de tres cifras que empiezan y terminan en ***4***. Dar como respuesta la suma de cifras.

A) 12 B) 15 C) 17 D) 21 E) 24

03 La suma de dos números enteros de «*n*» cifras y tales que uno es el triple de su complemento aritmético y el otro es la tercera parte de su complemento aritmético, siempre es:

A) 10^{n} B) 10^{2n} C) 10^{3n} D) 10^{2} E) 10^{3}

04 Calcular $a+b+c$, si:

$\overline{abc}+\overline{cba}=\overline{x8x}$

$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{5mn}$

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

05. Si: $C.A(\overline{abc})+C.A(\overline{bab})-C.A(\overline{bb})=120$

calcular: $a+b+c$

A)12 B)15 C)17 D) 18 E) 20

06 Si: $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{pqr}$

calcular: $\overline{pqr}+\overline{rqp}$

A)1020 B)1050 C) 1089 D)1090 E) 2010

07 El complemento aritmético de los numerales $\overline{abc}$ y $\overline{abcba}$ son $\overline{bac}$ y $\overline{badad}$ respectivamente:

Calcular: $\overline{ab}+\overline{cd}$

A) 110 B) 117 C) 120 D) 135 E) 148

08 Calcular: $a+b+c$ si:

$\overline{mpn}+\overline{npm}=1\,372$

$\overline{pmn}+\overline{mnp}=\overline{abc7}$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12

09 Si se cumple que:

$\overline{abc}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ calcular: $a+b-c$

A)0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

10 Si a, b, c y d son cifras diferentes y pares que verifican la siguiente suma:

$\overline{20b7a}+\overline{c0b5c}+\overline{bcb}+\overline{d6xd}=\overline{9xxxx}$

calcular: $\overline{dbc}-\overline{dab}$

A) 22 B) 45 C) 48 D) 80 E) 84

11 Si: $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mn4}$ y $a+b+c=20$, calcular «*b*»

A) 5 B)7 C) 8 D) 9 E) 2

12 ¿Cuántos números hay que tomar de cada una de las series siguientes para que la suma de números sea la misma en ambas?

1; 2; 3; 4; ....

100;98;96; ....

A)8 B)32 C)45 D)51 E) 67

13 Sabiendo que «*a*» es impar y «*b*» es impar, calcular «*c*» en:

$\overline{231}_{(a)}+\overline{11a}_{(b)}-\overline{1ab}_{(8)}=\overline{2c}_{(7)}$

A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 Si: $\overline{SEIS}+\overline{DOS}=\overline{VIII}$ (O=cero)

calcular el máximo valor de :

$V+I+D+E+S$

A) 24 B)28 C)35 D)32 E) 45

15 Sabiendo que cada letra representa a una cifra diferente y que «*O*» es cero, calcular $M+E$,

si: $\overline{TINTURA}_{(M)}+\overline{ROMA}_{(E)}=\overline{EEEE}_{(9)}$

A)12 B) 15 C) 18 D) 10 E) 9

16 Calcular:

$S=\overline{3ab}_{(6)}+\overline{4b2}_{(a)}+\overline{23}_{(b)}$

en el sistema décuplo.

A) 185 B) 245 C) 275

D) 320 *E) 420*

17 Si: $\overline{abc}+\overline{1xy}=\overline{cba}$, además: $a+c=12$, calcular $(2a+3c)$

A) 28 B)31 C)32 D) 36 E) 15

18 Calcular el valor de «*S*», si:

$$S = 5+8+13+20+29+...+229$$

Dar como respuesta la suma de cifras de «*S*».

A) 4 B)9 C) 12 D) 15 E) 18

19 Si: $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mnp}$, calcular $\overline{mpn}+\overline{nmp}+\overline{pnm}$, dar la suma de cifras.

A)9 B) 12 C) 18 D)20 E)27

20 Un alumno recuerda que la diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es un número de tres cifras consecutivas crecientes de izquierda a derecha. Calcular el mayor de los números.

A) 111 B) 113 C) 115
D) 119 E) 121

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Se dan para multiplicar los números *57* y *35*. Si al multiplicando se le quintuplica, ¿cuántas unidades es necesario restar al multiplicador para que el producto no várie?

A) 25 B) 26 C)27 D) 28 E) 30

02 En qué cifra termina:

$$E=(2\times 7\times 11\times 13\times 18)^{4681}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

03 Calcular $(a+b+c)$ si se sabe que: $\overline{abc}\times 37=...............243$

A)14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 19

04 La suma de los tres términos de una multiplicación es *47*. Si se multiplica por *6* al multiplicando, la nueva suma será *207*. Calcular el multiplicador.

A) 5 B) 6 C)7 D)8 E)15

05 Sea «*P*» el producto de cuatro factores. Si cada uno de dichos factores aumenta en su doble, ¿en cuántas veces aumenta su valor el producto «*P*»?

A) 16 B) 15 C) 81
D) 80 E) 32

06 Si: $N\times\overline{ab}=17472$; $N\times\overline{cb}=53\,872$ además: $c-a=5$. calcular «*N*».

A)886 B)416 C)728 D)736 E)816

07 Al multiplicar un número entero por otro de dos cifras, el primer producto parcial fue *506* y el segundo *1 265*. Calcular la suma de los factores.

A) 278 B)253 C)728
D)305 E) 318

08 Un número de cuatro cifras es multiplicado por *9999* obteniéndose como producto un número terminado en *4153*. Dar la suma de las cifras de dicho número.

A) 24 B) 22 C) 283 D) 25 E) 26

09 Calcular: $E=(b+c)-(a+d)$ siendo el producto $\overline{abcd}\times 95$; siendo la diferencia de los productos parciales *15372*.

A)3 B) 6 C)8 D) 10 E) 12

10 Al multiplicar un número por *47* se comete el error de colocar los productos parciales uno debajo del otro sin dejar un lugar vacío a la derecha, obteniéndose como resultado *5973*. Calcular el producto verdadero.

A) 25 543 B) 25 533 C) 25 521
D) 25 510 E) 25 512

11 Calcular el dividendo de una división exacta, cuyos términos suman *125* y el dividendo es *6* veces el divisor.

A)96 B)98 C)100 D)102 E)104

12 La suma de dos números es *36*, su cociente es *5* y su residuo *6*. Calcular el mayor de los sumandos.

A) 25 B) 27 C) 29 D) 31 E) 33

13 En una división inexacta el residuo máximo es *29*. y se sabe que el divisor tiene las mismas cifras del cociente pero, en orden inverso. Determine el dividendo y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 14

14 La diferencia de dos números es *132*, su cociente es *7* y su residuo es el más grande posible. Calcular el mayor de ellos.

A) 19 B)32 C)113 D) 132 E) 151

15 Determinar la suma de las cifras del mayor numeral entero que dividido entre *53* da un residuo que es el triple del cociente respectivo.

A) 10 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

16 Al dividir $\overline{abc}$ entre $\overline{bc}$ se obtuvo *11* de cociente y *80* de residuo. Calcular $a+b+c$

A)15 B)16 C)17 D)18 E)19

17 El cociente y el residuo de una división inexacta son respectivamente *43* y *27*, si se le aumenta al dividendo *108* unidades y se efectúa nuevamente la división el cociente aumenta en *3* y el residuo disminuye en *12*. ¿Cuál es el divisor respectivo?

A) 28 B) 32 C) 40 D)45 E)50

18 El producto de un numeral capicúa de cuatro cifras por *23* termina en *11*. Calcular la suma de las cifras del producto.

A) 12 B)15 C) 21 D) 29 E)30

19 Un número de tres cifras se divide entre *27* y su doble, un número de cuatro cifras entre el cociente anterior dando *55* de cociente y *3* de residuo. ¿Cuántos de estos números existen?

A) 3 B) 4 C) 5 D)6 E)9

20 Al resto de una cierta división le faltan *8* unidades para ser máximo. Si se suma *6416* unidades al dividendo, el cociente aumenta en *89* y el resto se vuelve máximo. ¿Cuál es el divisor?

A) 54 B)65 C)72 D) 84 E) 90

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)C	3)A	4)B	5)C	6)C	7)B	8)B	9)C	10)A
11)C	12)E	13)B	14)C	15)B	16)C	17)B	18)A	19)E	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)C	3)C	4)E	5)B	6)C	7)D	8)A	9)B	10)C
11)D	12)B	13)C	14)E	15)D	16)E	17)C	18)C	19)E	20)C

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Obtener los múltiplos de un número entero positivo, llamado "Módulo"*

* *Aplicar correctamente los principios de la divisibilidad en la solución de problemas concretos.*

* *Calcular el residuo de una división, sin efectuar esta operación.*

INTRODUCCIÓN :

La divisibilidad de los números es conocida desde tiempos remotos. Así, los hindúes ya conocían la divisibilidad por tres, siete y nueve y los egipcios conocían los números pares e impares. El matemático griego Euclides demostró los teoremas básicos de la divisibilidad de números enteros. Ya posteriormente, el matemático francés Pascal ***(1623-1662)*** propuso las reglas para conocer la divisibilidad de cualquier número.

La teoría de la divisibilidad adquiere un nuevo aspecto con la teoría de congruencias : GAUSS invento este concepto, simple pero fecundo e importante en su monumental obra Disquisitiones Arithmeticae, publicada en ***1801*** cuando tenía ***24*** años. Se dice que a y b son congruentes módulo m y se escribe $a \equiv b \pmod{m}$ si los restos de dividir a y b por m son iguales o, en otros términos si $(a-b)$ es múltiplo de m.

Otra de las grandes áreas de interés reside en la búsqueda de soluciones enteras de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros. Debido a que Diofanto se ocupó de ellas se las denomina ecuaciones diofánticas y análisis diofántico a la parte de la teoría que las estudia.

La ecuación : $2x^2 - y + 1 = 0$

Tiene infinidad de soluciones; a cada valor de x le correspónde uno de y dado por : $y = 2x^2 + 1$

DIVISIBILIDAD

Es la parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe cumplir, un número entero para poder ser dividido exactamente entre otros.

* Se dice que "A" es divisible por "B"; si al dividir el primero ***(A)*** entre el segundo ***(B)*** la divisibilidad resulta exacta y el cociente entero .

"A" es divisible entre "B" $\Rightarrow \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}$

EJEMPLO INDUCTIVO :

* Averiguar si ***72*** es divisible entre ***6***. Veamos :

$$\begin{array}{r|l} 72 & 6 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$$

* Como la división es exacta :

72 es divisible entre 6
6 es divisor de 72

** Ahora , esta división, según su algoritmo es equivalente a : $72=6(12)$

* De esta multiplicación , diremos :

72 es múltiplo de 6
6 es módulo de 72

OBSERVACIÓN :

Si "***72*** es divisible entre ***6***" entonces "***72*** es múltiplo de ***6***" y viceversa , es decir son equivalentes.

OTROS EJEMPLOS :

I) $\begin{array}{r|l} -42 & 6 \\ \hline 0 & -7 \end{array} \Leftrightarrow -42=6\times(-7)$

-42 es divisible entre $6 \Leftrightarrow -42$ es múltiplo de 6

6 es divisor de $-42 \Leftrightarrow 6$ ès módulo de -42

II) $\begin{array}{r|l} 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \Leftrightarrow 0=6\times(0)$

"0" es divisible entre $6 \Leftrightarrow 0$ es múltiplo de 6

6 es divisor de $0 \Leftrightarrow 6$ es módulo de 0

OBSERVACIÓN :

Si "***A***" es divisible entre "***B***", también se puede decir:

$\Rightarrow$ "***A***" es múltiplo de "***B***"

$\Rightarrow$ "***B***" es divisor de "***A***"

III) $\begin{array}{r|l} -48 & 6 \\ \hline 0 & -8 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -48 \text{ es divisible por } 6 \\ 6 \text{ es divisor de } -48 \\ 6 \text{ divide a } -48 \end{cases}$

IV) $\begin{array}{r|l} 0 & 11 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ es divisible por } 11 \\ 11 \text{ es divisor de } 0 \\ 11 \text{ divide a } 0 \end{cases}$

EN GENERAL :

* Dados los números : $A \in Z$
$B \in Z^+$ (*entero positivo*)
$K \in Z$

* Si se cumple que :

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline K & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ es divisible por } B \\ B \text{ es divisor de } A \\ B \text{ divide a } A \end{cases}$$

EJEMPLO :

$$\begin{array}{l|l} 28 & 4 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 28 \text{ es divisible por } 4 \\ 28 \text{ es múltiplo de } 4 \\ 4 \text{ es divisor de } 28 \end{cases}$$

NOTACIÓN :

Para denotar que "*A*" es divisible entre "*B*", escribiremos :

$A = \overset{\circ}{B}$ se lee : "*A*" es múltiplo de "*B*".

MULTIPLICIDAD DE NÚMEROS

Un número entero *A* es múltiplo de otro número entero positivo *B* llamado módulo, si *A* es el resultado de multiplicar *B* por otro número.

EJEMPLOS :

$$* \; 36 = 9 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} 36 \text{ es múltiplo de } 9 \\ 9 \text{ es factor de } 36 \\ 9 \text{ es módulo de } 36 \end{cases} \Rightarrow 36 = \overset{\circ}{9}$$

$$* \; -48 = 6 \times (-8) \Rightarrow \begin{cases} -48 \text{ es múltiplo de } 6 \\ 6 \text{ es factor de } -48 \\ 6 \text{ es módulo de } -48 \end{cases} \Rightarrow -48 = \overset{\circ}{6}$$

$$* \; 0 = 11 \times (0) \Rightarrow \begin{cases} 0 \text{ es múltiplo de } 11 \\ 11 \text{ es factor de } 0 \\ 11 \text{ es módulo de } 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \overset{\circ}{11}$$

EN GENERAL :

Dados los números : $A \in Z$, $B \in Z^+$ y $K \in Z$

Si se cumple que :

$$A = B \times K \Rightarrow \begin{cases} A \text{ es múltiplo de } B \\ B \text{ es factor de } A \\ B \text{ es módulo de } A \end{cases}$$

Se denota como : $A = \overset{\circ}{B}$

* Así , de los ejemplos anteriores :

* $72 = 6(12) \Rightarrow 72 = \overset{\circ}{6}$ * $-42 = 6(-7) \Rightarrow -42 = \overset{\circ}{6}$

* $0 = 6(0) \Rightarrow 0 = \overset{\circ}{6}$

Todo entero es múltiplo de los factores positivos o divisores que contiene .

EJEMPLO :

15 →
- $1(15)$ $15 = \overset{\circ}{1}$
- $3(5)$ $15 = \overset{\circ}{3}$
- $5(3)$ $15 = \overset{\circ}{5}$
- $15(1)$ $15 = \overset{\circ}{15}$

EJERCICIO :

Determine en forma explícita los divisores y los múltiplos de *15*.

RESOLUCIÓN :

* Los divisores positivos de *15* son :

$$D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$$

* Los múltiplos de *15* son :

$$\overset{\circ}{15} = 15k \begin{cases} \rightarrow 15(1),\ 15(2),\ 15(3),\ 15(4),\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rightarrow 15(0) = \text{cero} \\ \rightarrow 15(-1),\ 15(-2),\ 15(-3),\ 15(-4),\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Donde "*k*" es un entero cualquiera.

OBSERVACIÓN :

Todo número posee divisores y múltiplos, así por ejemplo para el *20* , tendremos

20 →
- *Divisores: 1; 2; 4; 5; 10; 20*
- *Múltiplos: 0; 20; 40; 60; 80; 100*

* Debemos considerar que :

I) El cero , es múltiplo de todos los números.

II) El uno , es divisor de todos los números.

EJEMPLO :

* $0 = 6 \times 0 \Rightarrow 0 = \overset{\circ}{6}$ * $0 = 7 \times 0 \Rightarrow 0 = \overset{\circ}{7}$

* $0 = 11 \times 0 \Rightarrow 0 = \overset{\circ}{11}$

EJERCICIO :

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son múltiplos de *7* ?

RESOLUCIÓN :

Sea: $\overline{ab} = \overset{\circ}{7} = 7k$

	$\overline{ab}$	k	
13 valores	14	2	13 valores
	21	3	
	28	4	
	⋮	⋮	
	91	13	
	98	14	

$\Rightarrow$ Hay *13* números $\overset{\circ}{7}$ que cumplen

* Hasta ahora se ha visto el caso cuando un número es divisible por otro , sin embargo , dicho número puede resultar no divisible entre algún otro número. Esto es cuando la división es inexacta .

EJEMPLO INDUCTIVO :

Averiguar si *72* es divisible entre *15*

RESOLUCIÓN :

* Veamos ; efectuando la división por :

Defecto		*Exceso*	
72	15	72	15
12	4	3	5

* Según el algoritmo de la división :

$$\boxed{72=15(4)+12} \quad \boxed{72=15(5)-3}$$

* Se observa que *72* no es divisible entre *15*, sin embargo se puede expresar en función de este módulo :

$$\boxed{72=\overset{\circ}{15}+12} \quad \boxed{72=\overset{\circ}{15}-3}$$

* Además , debes recordar que la suma de los residuos es igual al divisor (módulo) : *12 +3 = 15*

Luego :

* Si: $N=\overset{\circ}{15}+4$, significa que al dividir *"N"* entre *15* el residuo por defecto es *4*.

* Si : $A=\overset{\circ}{9}-2$, significa que al dividir *"A"* entre *9* el residuo por exceso es *2*.

PRINCIPIOS DE MULTIPLICIDAD

PRIMER PRINCIPIO :

* La adición o sustracción de múltiplos de un mismo número, siempre es igual a un múltiplo del mismo número.

* La multiplicación de un múltiplo de *"n"* por un entero, da como producto un múltiplo de *"n"*.

$$\boxed{\overset{\circ}{n}\times K=\overset{\circ}{n}}$$

ADICIÓN :

$$44 + 33=77$$
$$11(4)+11(3)=11(7)$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\overset{\circ}{11}+\overset{\circ}{11}=\overset{\circ}{11}$$

Luego : $\overset{\circ}{n}+\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$

SUSTRACCIÓN :

$$99 - 63 = 36$$
$$9(11)-9(7)=9(4)$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\overset{\circ}{9}-\overset{\circ}{9}=\overset{\circ}{9}$$

Luego: $\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$

MULTIPLICACIÓN :

$44=\overset{\circ}{11}$ entonces : $44(5)= \begin{cases}\overset{\circ}{11}\\ \overset{\circ}{5}\\ \overset{\circ}{55}\end{cases}$

* Así también :

* Si : $A=\overset{\circ}{7}$ entonces: $11A= \begin{cases}\overset{\circ}{7}\\ \overset{\circ}{11}\\ \overset{\circ}{77}\end{cases}$

* Luego, si $A=\overset{\circ}{n}$ *"k"* es un número entero positivo.

$$k\times A= \begin{cases}\overset{\circ}{n}\\ \overset{\circ}{k}\\ \overset{\circ}{(kn)}\end{cases}$$

NOTA :

Si un número es $\overset{\circ}{n}+a$ y otro es $\overset{\circ}{n}+b$ entonces el producto de ambos es : $\overset{\circ}{n}+a\times b$

EJEMPLOS :

* $\left(\overset{\circ}{7}+2\right)\left(\overset{\circ}{7}+3\right)=\overset{\circ}{7}+\underbrace{2\times 3}=\overset{\circ}{7}+\boxed{6}$

* $\left(\overset{\circ}{11}-3\right)\left(\overset{\circ}{11}+4\right)=\overset{\circ}{11}-\boxed{12}$

* $\left(\overset{\circ}{9}+2\right)\left(\overset{\circ}{9}-4\right)\left(\overset{\circ}{9}+3\right)=\overset{\circ}{9}-\boxed{24}$

POTENCIACIÓN :

$$(10)^3=1000 \Rightarrow (\overset{\circ}{5})^3=\overset{\circ}{5}$$

Luego , si : $A=\overset{\circ}{n}$ entonces $A^K=\overset{\circ}{n}$ donde *"K"* es un entero positivo.

SEGUNDO PRINCIPIO :

EJEMPLOS :

Si: $N=\overset{\circ}{15}=15K=1\times 3\times 5K \begin{cases}N=\overset{\circ}{1}\\ N=\overset{\circ}{3}\\ N=\overset{\circ}{5}\\ N=\overset{\circ}{15}\end{cases}$ *divisores de 15*

Si: $\overline{abc}=\overset{\circ}{35} \rightarrow \overline{abc} \begin{cases}\overset{\circ}{5}\\ \overset{\circ}{7}\end{cases}$

TERCER PRINCIPIO :

EJEMPLOS :

* Si : $4\times N=\overset{\circ}{7} \longrightarrow \boxed{N=\overset{\circ}{7}}$

no comparten divisores comunes aparte del uno

* Si : $9\times A=\overset{\circ}{8} \rightarrow \boxed{A=\overset{\circ}{8}}$

* Si : $6\times \overline{ab}=\overset{\circ}{11} \rightarrow \boxed{\overline{ab}=\overset{\circ}{11}}$

OTROS CASOS :

I) $9\times N=\overset{\circ}{15}$ → *Divisores comunes: 1 y 3*

* En este caso , en forma practica, se simplifica y queda : $3N=\overset{\circ}{5} \rightarrow N=\overset{\circ}{5}$

II) $\rightarrow \left(\begin{array}{l}3N=\overset{\circ}{10}+9\\ 1N=\overset{\circ}{10}+3\end{array}\right)\div 3$

DIVISIBILIDAD APLICATIVA AL BINOMIO DE NEWTON

Dado : "*a*", "*r*" y "*k*" enteros positivos.

CASO I : $(\overset{\circ}{a}+r)^k = \overset{\circ}{a}+r^k$

EJEMPLOS :

* $(\overset{\circ}{9}+2)^4 = \overset{\circ}{9}+2^4$ * $(\overset{\circ}{9}+2)^5 = \overset{\circ}{9}+2^5$

* $(\overset{\circ}{9}+1)^{200} = \overset{\circ}{9}+1$

CASO II :

$$(\overset{\circ}{a}-r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{a}+r^k; \text{ “}k\text{” es par} \\ \overset{\circ}{a}-r^k; \text{ “}k\text{” es impar} \end{cases}$$

EJEMPLOS :

* $(\overset{\circ}{11}-2)^3 = \overset{\circ}{11}-8$ * $(\overset{\circ}{11}-2)^4 = \overset{\circ}{11}+16$

* $(\overset{\circ}{11}-10)^{100} = (\overset{\circ}{11}+1)^{100} = \overset{\circ}{11}+1$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Es el conjunto de condiciones que debe reunir un número para ser divisible entre otro ; dichas condiciones se deducen de la regla general.

I) DIVISIBILIDAD ENTRE 10 ; 100 ;1000... :

Un número es divisible entre *10 ; 100 ; 1000 ; ...* o múltiplo de estos , si termina en uno , dos ,tres ,... ceros.

EJEMPLO :

* *80* es divisible entre *10* (termina en un cero).
* *1400* es múltiplo de *100* (termina en dos ceros).
* *60000* es divisible entre *1000* (termina en tres ceros).

II) DIVISIVILIDAD POR DOS:

Un número es divisible por dos , cuando acaba en cifra par

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{2} \Leftrightarrow d = 0; 2; 4; 6; 8$$

EJEMPLO:

* *40* es divisible por *2* (termina en un cero, que es par).
* *1876* es múltiplo de *2* (termina en *6*, que es par).
* *13258* es divisible por *2* porque su última cifra es $\overset{\circ}{2}$
* *541* no es divisible por *2* porque su última cifra no es $\overset{\circ}{2}$

III) DIVISIBILIDAD POR 3 :

Un número será divisible por *3*, si la suma de sus cifras es múltiplo de *3*.

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{3} \Leftrightarrow a+b+c+d = \overset{\circ}{3}$$

EJEMPLOS :

* *471* es divisible por *3* porque *4+7+1=12* y *12* es $\overset{\circ}{3}$
* *512* no es divisible por *3* porque *5 + 2 + 1= 8* y *8* no es $\overset{\circ}{3}$
* *3420* es divisible entre *3* (pues *3+4+2+0=9*, y *9* es múltiplo o divisible entre *3*)

IV) DIVISIBILIDAD ENTRE 4:

Un número es divisible entre *4* ó múltiplo de *4*, si el número formado por sus dos últimas cifras es divisible entre *4*.

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{cd} = \overset{\circ}{4}$$

EJEMPLOS :

* *2<u>80</u>* es divisible por *4* porque *80* es $\overset{\circ}{4}$
* *45<u>38</u>* no es divisible por *4* porque *38* no es $\overset{\circ}{4}$
* *816* es divisible entre *4* (termina en *16*, que es divisible entre *4*)
* *1284328* es múltiplo de *4* (termina en *28*, que es múltiplo de *4*)

V)DIVISIBILIDAD POR 5 :

Un número es divisible por cinco, cuando la última cifra es cero o cinco.

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow d = 0 \text{ ó } 5$$

EJEMPLOS :

* *320* es divisible por *5* porque termina en *“0”*
* *155* es divisible por *5* porque termina en *“5”*
* *578* no es divisible por *5* porque *NO* termina en *“0”* o *“5”*
* *860* es divisible entre *5* (termina en *0*)
* *8385* es múltiplo de *5* (termina en *5*)

VI) DIVISIBILIDAD POR 6 :

Un número es divisible por seis, cuando es divisible por dos y por tres.

$$\overline{abcd} = \overset{\circ}{6} \Leftrightarrow \overline{abcd} = \overset{\circ}{2} \text{ y } \overset{\circ}{3}$$

VII) DIVISIBILIDAD POR 7 :

Un número es divisible por siete, cuando al multiplicar a cada una de las cifras (empezando en el primer orden) por : *1; 3; 2; – 1; – 3; – 2; 1; 3; 2; ...* y luego efectuar la suma algebraica , el resultado es un múltiplo de *7*.

$$\overset{-1\,2\,3\,1}{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{7} \Leftrightarrow -a+2b+3c+d=\overset{\circ}{7}$$

VIII) DIVISIBILIDAD POR 8 :

Un número es divisible por ocho , cuando sus tres últimas cifras forman un múltiplo de ocho.

$$\overline{abcd}=\overset{\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{bcd}=\overset{\circ}{8}$$

IX) DIVISIBILIDAD POR 9:

Un número es divisible por nueve , si la suma de cifras es múltiplo de *9*.

$$\overline{abcd}=\overset{\circ}{9} \Leftrightarrow a+b+c+d=\overset{\circ}{9}$$

EJEMPLOS :

* *873* es divisible por *9* porque $8+7+3=18$ y *18* es $\overset{\circ}{9}$
* *2751* no es divisible por *9* porque $2+7+5+1=15$ y *15* no es $\overset{\circ}{9}$

X) DIVISIBILIDAD POR 11 :

Un número es divisible por *11*, si al sumar las cifras de orden impar (empezando por la derecha) menos la suma de cifras de orden par es múltiplo de *11*.

$$\overset{-+-+}{\overline{abcd}}=\overset{\circ}{11} \Leftrightarrow -a+b-c+d=\overset{\circ}{11}$$

EJEMPLOS :

* *6 2 4 0 3* es divisible por *11* porque:

$$\overset{+\,-\,+\,-\,+}{}(3+4+6)-(0+2)=13-2=11 \text{ y } 11 \text{ es } \overset{\circ}{11}$$

* *5 9 7 8 5* es divisible por *11* porque:

$$\overset{+\,-\,+\,-\,+}{}(5+7+5)-(8+9)=17-17=0 \text{ y } 0 \text{ es } \overset{\circ}{11}$$

MÁS EJEMPLOS :

* $4727=\overset{\circ}{2}+\underbrace{7}_{\overset{\circ}{2}+1} \Rightarrow 4727=\overset{\circ}{2}+1$
* $5324=\overset{\circ}{2}+\underbrace{4}_{\overset{\circ}{2}} \Rightarrow 5324=\overset{\circ}{2}$
* $623=\overset{\circ}{4}+\underbrace{23}_{\overset{\circ}{4}+3} \Rightarrow 623=\overset{\circ}{4}+3$
* $\overline{mn05}=\overset{\circ}{4}+\underbrace{05}_{\overset{\circ}{4}+1} \Rightarrow \overline{mn05}=\overset{\circ}{4}+1$
* $\overline{a803}=\overset{\circ}{8}+\underbrace{803}_{\overset{\circ}{8}+3} \Rightarrow \overline{a803}=\overset{\circ}{8}+3$
* $\overline{abc7}=\overset{\circ}{5}+\underbrace{7}_{\overset{\circ}{5}+2} \Rightarrow \overline{abc7}=\overset{\circ}{5}+2$

XI) DIVISIBILIDAD POR 13 :

$$\overline{abcdefg}=\overset{\circ}{13}$$
$$\underbrace{1\,4\,3}_{+}\underbrace{1\,4\,3}_{-}\underbrace{1}_{+} \Leftarrow$$

Entonces : $a+4b+3c-d-4e-3f+g=\overset{\circ}{13}$

DIVISIBILIDAD COMPUESTA

Para que un número sea divisible por un número compuesto debe serlo de cada uno de sus factores; es decir :

* Si un número es divisible por *6* :

Entonces : el número será divisible por *3* y el número será divisible por *2*.

* Si un número es divisible por *15*:

Entonces : el número será divisible por *3* y el número será divisible por *5*.

* Si un número es divisible por *30* :

Entonces : el número será divisible por *2*, el número será divisible por *3*, el número será divisible por *5*, el número será divisible por *10*, el número será divisible por *6*, el número será divisible por *15*

* Si se tiene un número $N=\overset{\circ}{30}$

Entonces : *N* será múltiplo de cada uno de los factores de *30* ; es decir :

$$N=\overset{\circ}{2} \qquad N=\overset{\circ}{3} \qquad N=\overset{\circ}{5}$$

Donde *2 ; 3* y *5* son los criterios estudiados anteriormente y serán aplicados independientemente para hallar los valores de las cifras que se requieran.

* Si : $\overline{abcd}=\overset{\circ}{15} \Rightarrow \overline{abcd}=\overset{\circ}{3}$ y $\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}$
* Si : $\overline{abcd}=\overset{\circ}{72} \Rightarrow \overline{abcd}=\overset{\circ}{8}$ y $\overline{abcd}=\overset{\circ}{9}$

DIVISIBILIDAD POR POTENCIA DE CINCO

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Si : } \overline{abcd}=\overset{\circ}{5} \\ \Rightarrow d=\overset{\circ}{5}\ (0 \text{ ó } 5) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Si : } \overline{abcd}=\overset{\circ}{25} \\ \Rightarrow \overline{cd}=\overset{\circ}{25}\ (00;\ 25;\ 50;\ 75) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ Si : } \overline{abcd}=\overset{\circ}{125} \\ \Rightarrow \overline{bcd}=\overset{\circ}{125}\ (000;125;\ 250;\ ...) \end{array} \right\}$$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los siguientes criterios nos permiten averiguar si un número es divisible por otro de una forma sencilla, sin necesidad de realizar una división.

NÚMERO	CRITERIO	EJEMPLO
2	*El número acaba en 0 ó cifra par.*	*374: porque 4 es par.*
3	*La suma de sus cifras es un múltiplo de 3.*	*405: porque 4+0+5 = 9 es múltiplo de 3.*
4	*El número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4.*	*7324: porque 24 es múltiplo de 4.*
5	*La última cifra es 0 ó 5.*	*485: porque acaba en 5.*
6	*El número es divisible por 2 y por 3.*	*24: Ver criterios anteriores.*
7	• *Para números de 3 cifras: Al número formado por las dos primeras cifras se le resta la última multiplicada por 2. Si el resultado es múltiplo de 7, el número original también lo es.*	*469: porque 46 – 2×9 = 28 que es múltiplo de 7.*
	• *Para números de más de 3 cifras: Dividir en grupos de 3 cifras y aplicar el criterio de arriba a cada grupo. Sumar y restar alternativamente el resultado obtenido en cada grupo y comprobar si el resultado final es un múltiplo de 7.*	*52176376: porque (37–12) – (17–12)+(5 – 4) =25 – 5+1=21 es múltiplo de 7.*
8	*El número formado por las tres últimas cifras es múltiplo de 8.*	*27280: porque 280 es múltiplo de 8.*
9	*La suma de sus cifras es múltiplo de 9.*	*3744: porque 3+7+4+4= 18 es múltiplo de 9.*
10	*La última cifra es 0.*	*470: La última cifra es 0.*
11	*Se suman y restan las cifras que forman el número de forma alternativa para ver si da un múltiplo de 11 (El cero también lo es).*	*4972: porque 4-9+7-2 = 0 es múltiplo de 11.*
12	*El número es divisible por 3 y 4.*	*528: Ver criterios anteriores.*
13	• *Para números de 3 cifras: Al número formado por las dos primeras cifras se le suma la última multiplicada por 4. Si el resultado es múltiplo de 13, el número original también lo es.*	*364: porque 36+4×4= 52 es múltiplo de 13.*
	• *Para números de más de 3 cifras: Dividir en grupos de 3 cifras, sumar restar alternativamente los grupos de derecha a izquierda y aplicar el criterio de arriba al resultado obtenido. Si es multiplo de 13, el número original también lo es.*	*432549: porque 549-432 = 117 y luego 11 + 4×7 = 39 es múltiplo de 13.*
14	*El número es divisible por 2 y por 7.*	*224: Ver criterios anteriores*
15	*El número es divisible por 3 y por 5.*	*255: Ver criterios anteriores*
16	*El número formado por las cuatro últimas cifras es múltiplo de 16.*	*254176: porque 4176 es múltiplo de 16.*
17	*Al número obtenido al suprimir la última cifra, se le resta esta última cifra múltiplicada por 5, y se comprueba si el resultado es múltiplo de 17.*	*493: porque 49 – 5 ×3 = 34 es múltiplo de 17.*
18	*El número es divisible por 2 y por 9.*	*576: Ver criterios anteriores*
19	*Al número obtenido al suprimir la última cifra, se le suma esta última cifra múltiplicada por 2, y so comprueba si el resultado es múltiplo de 19.*	*323: porque 32+3 ×2 = 38 es múltiplo de 19.*
20	*El número acaba en cero y la penúltima cifra es par.*	*480: porque acaba en 0 y 8 es par.*

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En una reunión de profesionales hay *131* personas , la mayor parte son varones. Si la octava parte de los varones son ingenieros y la séptima parte de las mujeres son economistas , ¿cuántos varones no son ingenieros?

A) 12 B) 21 C) 30 D) 84 E) 96

RESOLUCIÓN:

Sabemos que:

* La mayor parte son varones.

* La octava parte de los varones son ingenieros.

* La séptima parte de las mujeres son economistas.

Entonces: total de mujeres: *7* y

* Luego:

$$\underbrace{8x}_{\overset{\circ}{(7+1)}} + \underbrace{7y}_{\overset{\circ}{7}} = \underbrace{131}_{\overset{\circ}{7}+5}$$

$$x=\overset{\circ}{7}+5;\ x=5;\ 12$$

Si $x=5$

$$\underbrace{8(5)}\ +\ \underbrace{7(13)} = 131$$

n.° varones < n.° mujeres

Si $x=12$

$$\underbrace{8(12)}\ +\ \underbrace{7(5)} = 131$$

n.° de varones > n.° de mujeres

Entonces , el total de varones es *96* como el número de varones que son ingenieros es $\frac{1}{8}(96)=12$, la cantidad de varones que no son ingenieros es *84*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Un número *N* de la forma $N=\overline{abcabc};\ a\neq 0$ es siempre divisble por.

A) 3, 5 B) 7, 8, 11 C) 7,11,13 D) 7, 17,19 E) 9, 11, 19

RESOLUCIÓN:

* Como:

$$N=\overline{abcabc}=1000\overline{abc}+\overline{abc}=1001\overline{abc}$$

$$=7\times 11\times 13\times \overline{abc}\Rightarrow N=\overset{\circ}{7};\overset{\circ}{11};\overset{\circ}{13}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

En una fábrica un empleado trabaja *4* días seguidos y descansa el 5^{TO} día. Si él empieza su trabajo un día lunes. ¿Cuántos días tiene que transcurrir para que le toque descansar un domingo?.

A) 35 B) 34 C) 36 D) 40 E)38

RESOLUCIÓN:

* Se puede deducir que cada $4+1=5$ días, descansa el 5^{TO}; pero como empieza el lunes y desea descansar el domingo, entonces debe transcurrir un número $\overset{\circ}{7}$ de días.

* *CONCLUSIÓN:* Para que se cumpla las condiciones, debe pasar un múltiplo de *5* y *7* días a la vez, es decir un $\overset{\circ}{5\times 7}=\overset{\circ}{35}$ de días, pero como mínimo *35* días, de los cuales deben transcurrir *34* días, para que así descanse el día *35*.

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Al dividir $\overline{2a3b5c6d}$ entre *13* se obtiene *2* de residuo. Determinar el residuo de dividir $\overline{57a4b8c7d}$ entre *13*.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 7 E) 11

RESOLUCIÓN:

$$\overline{5\ 7\ a\ 4\ b\ 8\ c\ 7\ d}=\overset{\circ}{13}+x$$

$$\overline{2\ a\ 3\ b\ 5\ c\ 6\ d}=\overset{\circ}{13}+2$$

$$5\ 5\ 0\ 1\ 0\ 3\ 0\ 1\ 0=\overset{\circ}{13}+x-2$$

$$-4\ -3\ 1\ 4\ 3\ -1\ -4\ -3\ 1$$

$$\underbrace{-20-15+0+4+0-3+0-3+0}_{-\overset{\circ}{37}}=\overset{\circ}{13}+x-2$$

$$-\overset{\circ}{37}=\overset{\circ}{13}+x-2$$

$$\overset{\circ}{13}+2=x-2$$

$$\rightarrow 4=x$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 5 :

El número de alumnos de un colegio está comprendido entre *500* y *1000*. Si sale de paseo en grupos de *3* personas forman un número exacto de grupos y lo mismo sucede si salen en grupos de *5*. El colegio está formado por secciones del mismo número de alumnos, el número de secciones es igual al número de alumnos por sección. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio ?

A) 600 B) 750 C) 510 D) 900 E) 960

RESOLUCIÓN:

* Si existen "*N*" secciones de "*N*" alumnos, entonces:

* Total de alumnos $=N\times N=N^2$ ↗ $\overset{\circ}{3}$ ↘ $\overset{\circ}{5}$

$\Rightarrow N^2=\overset{\circ}{15}$ ....(I)

* Ahora: $500<N^2<1000$

$\Rightarrow 22,\ ....<N<31,$ ....(II)

* De *(I)* y *(II)*, se deduce que:

$$N=30\Rightarrow N^2=30^2=900$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 (TIPO UNI) :

Sea $N=\overline{abc}$ un número de tres cifras tal que :

$$\overline{abc}=\overset{\circ}{7}\ ;\overline{cba}=\overset{\circ}{11}\ \wedge\ \overline{cab}=\overset{\circ}{9}$$

Calcule la siguiente suma $3c+2a+b$.

A) 24 B)26 C)28 D)30 E) 32

RESOLUCIÓN:

* En los criterios de divisibilidad hay algunos casos particulares en donde se puede intercambiar el orden de las cifras; por ejemplo:

Si $\overline{mnp}=\overset{\circ}{9}\Leftrightarrow m+n+p=\overset{\circ}{9}$, al intercambiar el orden de las cifras también se genera números múltiplos de *9*; así, $\overline{mpn}=\overset{\circ}{9};\overline{pnm}=\overset{\circ}{9};...$

Si $\overline{mnp}=\overset{\circ}{11}\Leftrightarrow p-n+m=\overset{\circ}{11}$, al intercambiar las cifras de orden impar también se genera múltiplo de *11*; así $\overline{pnm}=\overset{\circ}{11}$.

* De los datos tenemos

$$\overline{abc}=\overset{\circ}{7}$$

$$\underset{+\,-\,+}{\overline{c\,b\,a}}=\overset{\circ}{11}\Rightarrow \underset{+\,-\,+}{\overline{c\,b\,a}}=\overset{\circ}{11}$$

$$\underset{+\,-\,+}{\overline{c\,a\,b}}=\overset{\circ}{9}\Rightarrow \overline{abc}=\overset{\circ}{9}$$

$$\overline{abc}=\begin{cases}\overset{\circ}{7}\\ \overset{\circ}{9}\\ \overset{\circ}{11}\end{cases}\Rightarrow \overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{MCM(7;9;11)}}$$

De donde

$\overline{abc} = \overset{\circ}{693} = 693K$ └ 1(único valor)

Luego, $a=6$, $b=9$ y $c=3$

* Entonces

$$3c+2a+b=3(3)+2(6)+9=30$$

La suma de $3c+2a+b$ es 30

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Consideremos la expresión:

$E(n) = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + ... + (n+9)^2$, $n \in N$: Entonces podemos decir que $E(n) = \overset{\circ}{7}$ si:

A) no existen $n \in \mathbb{N} / E(n) = \overset{\circ}{7}$
B) $n \in \{7r-5/r \in \mathbb{N}\} \cup \{7t-4/t \in \mathbb{R}\}$
C) $n \in \{7t-2/t \in \mathbb{N}\} \cup \{7s-1/s \in \mathbb{N}\}$
D) $n \in \{7r-3/r \in \mathbb{N}\} \cup \{7r-4/r \in \mathbb{N}\}$
E) $n \in \{7t-6/t \in \mathbb{N}\} \cup \{7r-3/r \in \mathbb{N}\}$

RESOLUCIÓN :

* Debemos encontrar la forma que debe tener «n» para que $E(n) = \overset{\circ}{7}$

* Operación del problema (Desarrollando) :

$$E(n) = 10n^2 + 90n + 285$$

* Pero como : $E(n) = \overset{\circ}{7}$

$$\underbrace{10}_{\overset{\circ}{7}+3} n^2 + \underbrace{90}_{\overset{\circ}{7}+6} n + \underbrace{285}_{\overset{\circ}{7}+5} = \overset{\circ}{7}$$

$\Rightarrow 3n^2 + 6n + 5 = \overset{\circ}{7}$; restamos $14, (\overset{\circ}{7})$

$\Rightarrow 3(n^2 + 2n - 3) = \overset{\circ}{7} \Rightarrow n^2 + 2n - 3 = \overset{\circ}{7}$

$(n+3)(n-1) = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow n+3 = \overset{\circ}{7} \vee n-1 = \overset{\circ}{7}$

* $n+3 = \overset{\circ}{7} \rightarrow n = \overset{\circ}{7} - 3$
$\Rightarrow n = 7r-3; r \in N$

* $n-1 = \overset{\circ}{7} \rightarrow n = \overset{\circ}{7}+1 \rightarrow n = \underbrace{\overset{\circ}{7}-6}_{\text{por exceso}}$
$\Rightarrow n = 7t-6; t \in N$

$\Rightarrow n \in \{7t-6/t \in N\} \cup \{7r-3/r \in N\}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8 :

Calcule todos los restos posibles de la división de un cuadrado por 7:

A) 1, 2, 4 B) 0, 1, 2, 4 C) 0, 1, 3, 4
D) 0, 1, 3 E) 1, 2, 3, 4, 5

RESOLUCIÓN:

* Se sabe que un número entero positivo , respecto del módulo 7, tiene las opciones:

$$\overset{\circ}{7}; \overset{\circ}{7} \pm 1; \overset{\circ}{7} \pm 2; \overset{\circ}{7} \pm 3$$

* Luego al cuadrado tendremos:

$$(\overset{\circ}{7})^2 = \overset{\circ}{7}$$

$$(\overset{\circ}{7} \pm 1)^2 = \overset{\circ}{7} + 1$$

$$(\overset{\circ}{7} \pm 2)^2 = \overset{\circ}{7} + 4$$

$$(\overset{\circ}{7} \pm 3)^2 = \overset{\circ}{7} + 2$$

* Entonces , los restos posibles son: $0; 1; 2; 4$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Coloca los múltiplos de 2 ; 3 y 4, y señala con un mismo color los que sean comunes a estos:

$\overset{\circ}{2}$													
$\overset{\circ}{3}$													
$\overset{\circ}{4}$													

02 Responde y fundamenta tu respuesta:

A) ¿Es 60 divisible entre 12?
B) ¿Es 6 múltiplo de 3?
C) ¿Es 36 número par?
D) ¿Es 49 número impar?

03 Hacer una lista de todos los divisores mayores que cero y menores que 80 de los números :

A) 8 B) 20 C) 15 D) 11 E) 30

04 Escribe los divisores de los números que te presento a continuación :

A)12 B)15 C)28 D)36 E)25 F)17

05 Escribe los 10 primeros múltiplos no negativos de los siguientes números :

A)2 B)3 C)5 D)7 E)8 F)11

06 Para cada caso completa las oraciones para que sean equivalentes a la primera :

A) **24** es múltiplo de **6**

☐ es divisor de ☐

☐ es factor de ☐

☐ es divisible por ☐

B) **12** es divisor de **96**

☐ es múltiplo de ☐

☐ es factor de ☐

☐ es divisible entre ☐

07 Indicar verdadero (V) o falso (F)

* $12 = \overset{\circ}{3}$ ....( )
* $40 = \overset{\circ}{7} + 5$ ....( )
* $0 = \overset{\circ}{8}$ ....( )

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVV E) VVF

08 Dado:

$$57 = \overset{\circ}{7} + x$$

$$60 = \overset{\circ}{7} + y$$

Calcule : $x+y$

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

09 Dado: $48 = \overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} - x$

Calcule : x

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

10 En la sucesión:

1; 2; 3; 4; ....; 800

¿Cuántos son múltiplos de 8?

A)100 B)40 C)90 D)120 E)200

11 Cuántos múltiplos de 7 hay entre 70 y 700?

A)88 B)89 C)90 D)100 E)70

12 Si:

$A = \overset{\circ}{7} + 2$; $B = \overset{\circ}{7} - 3$ y $C = \overset{\circ}{7} + 4$

Entonces : $A+B+C$ será:

A) $\overset{\circ}{7}+1$ B) $\overset{\circ}{7}+2$ C) $\overset{\circ}{7}+3$
D) $\overset{\circ}{7}+4$ E) $\overset{\circ}{7}+5$

13 Hallar el menor número entero positivo que sea divisible por 2; 5 y 7.

A)10 B)14 C)35 D)70 E)140

14 En un paseo del colegio "X" participaron menos de 400 alumnos; si los agrupamos de 7 en 7; 9 en 9 no sobra ningún alumno. ¿Cuál es el máximo número de alumnos?.

A)126 B)189 C)252
D)315 E)378

(15) ¿Cuántos números de dos cifras son divisibles entre *2, 3* y *5?*

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(16) Halla el menor valor entero positivo de *"n"* para que se cumpla:

$(\overset{o}{7}+3)+(\overset{o}{7}-2)+n=\overset{o}{7}+3$

A) $\overset{o}{7}+1$ *B)* $\overset{o}{7}+2$ *C)* $\overset{o}{7}+3$

D) $\overset{o}{7}+4$ *E)* $\overset{o}{7}+5$

(17) Si: $\overline{235a}=\overset{o}{2}$

Calcula la suma de valores de *a*

A)6 B)8 C)10 D)9 E)20

(18) Si: $\overline{152a2}=\overset{o}{3}$

Halla la suma de los valores de *a*

A)11 B)12 C)13 D)14 E)15

(19) Si: $\overline{67a2}=\overset{o}{4}$

Calcula la suma de valores de *a*

A)15 B)20 C)25 D)30 E)10

(20) Si: $\overline{mnpq}=\overset{o}{5}$

Halla el valor mayor de *"q"*

A)0 B)1 C)2 D)3 E)5

(21) Determine el valor de *x* en

$\overline{9130057x0}=\overset{o}{9}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) Calcular la suma de los *12* primeros múltiplos enteros positivos de *6*.

A) 330 B) 220 C) 468
D) 66 E) 110

(02) Determinar un numeral de dos cifras o divisibles entre *9* cuyo C.A sea $\overset{o}{7}$.

A) 63 B)72 C) 81 D)99 E) 54

(03) Si: $\overline{3a2a}=\overset{o}{7}$, calcular a^2.

A) 36 B) 16 C) 25 D)9 E) 4

(04) El numeral $\overline{abcabc}$ siempre es divisible entre:

A) 37 B) 11 C) 19 D) 23 E)5

(05) Sebastián cuenta en forma ascendente comenzando por *1992* y nombrando cada *3* años:

1992; 1995; 1998; 2001; .

uno de los números que nombra Sebastián en la sucesión es:

A) 2041 B) 2042 C) 2043
D) 2044 E) 2045

(06) ¿Cuántos números del uno al mil son múltiplos de *5* pero no de *50* ?

A) 160 B) 180 C) 100
D) 200 E) 150

(07) Del *1* al *1000*, ¿cuántos números son múltiplos de *5* pero no de *6*?

A) 169 B) 167 C) 170
D) 168 E) 110

(08) ¿Cuántos números enteros positivos de tres cifras son múltiplos de *20*?

A) 44 B) 45 C) 46 D)49 E) 50

(09) En la siguiente sucesión:

$6\times16;\ 6\times17;\ 6\times18;\ 6\times19;\dots\dots;6\times115$

¿cuántos términos no son múltiplos de *45*?

A) 100 B) 95 C) 83 D) 94 E) 68

(10) ¿Cuántos múltiplos de *6* terminados en *2* existen, entre *120* y *1236* ?

A) 39 B) 37 C) 35 D)41 E) 29

(11) Nacho había escrito un numeral de cuatro cifras en una hoja de papel, Chicho regó tinta en la hoja de tal forma que los últimos dígitos ya no se pueden ver: $\overline{97??}$. Si el numeral es divisible por seis, cuatro y cinco, entonces la suma de los dígitos tapados por la tinta es:

A) 3 B) 4 C) 2 D) 5 E) 6

(12) Calcular el residuo de dividir:

$N=1!+3!+5!+7!+\dots\dots\dots2005!$

entre *9*.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(13) En una reunión de dos países asistieron *700* personas, se observa que en el primer país los *2/5* son abogados, los *2/7* son ingenieros y *1/11* son economistas. Averiguar con cuántas personas se presentó el otro país.

A) 415 B) 525 C) 385
D)215 E)315

(14) En un barco donde habían *80* personas ocurre un naufragio. De los sobrevivientes se sabe que *1/12* son damas y que *1/5* de los muertos eran casados. ¿Cuántos murieron?

A) 40 B) 20 C)36 D)18 E)26

(15) Calcular la suma de los *40* primeros múltiplos enteros positivos de *10*.

A) 16400 B) 8 200 C) 6 000
D) 4 800 E) 9 600

(16) En la siguiente sucesión:

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;......... ;400

I) ¿ Cuántos son $\overset{o}{5}$?

II) ¿Cuántos son $\overset{o}{3}$?

III)¿Cuántos son $\overset{o}{15}$?

IV) ¿Cuántos no son $\overset{o}{5}$ ni $\overset{o}{3}$?

A) 60; 133;40; 120
B)80; 133;40;213
C)80; 133;26;213
D)90; 132;40; 180
E) 80; 133;25;214

(17) En la siguiente sucesión:

$24\times1;\ 24\times2;\ 24\times3;\dots;\ 24\times1000$

¿cuántos términos son múltiplos de *30*?

A) 160 B) 250 C) 500
D) 300 E) 200

(18) Si: $\overline{ab6127}=\overset{o}{101}$, calcular $a+b$.

A)5 B)7 C)6 D)9 E) 8

(19) Si: $\overline{5a6a4}=\overset{o}{23}$, calcular «*a*».

A)2 B)4 C)3 D)5 E) 6

(20) Sean:

$A_1=\{6\}$

$A_2=\{6;\ 12\}$

$A_3=\{6;\ 12;\ 18\}$

$A_k=\{6;\ 12;\ 18;\ 24;\ 30;\dots\dots\dots\}$

Calcular el menor Card$\{A_k\}$ tal

que la suma de los elementos de A_k es múltiplo de *84*.

Nota: Card (A_k) es el número de elementos de A_k.

A) 12 B) 27 C) 6 D) 7 E) 13

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular «a», sabiendo que:

$$\overline{4a2a7}=\overset{o}{9}$$

A)4 B)6 C)7 D)8 E) 5

02 Calcular la suma de los valores que puede tomar «a» en el siguiente numeral: $\overline{2452a2}=\overset{o}{4}$

A) 17 B) 21 C) 19 D)24 E) 25

03 Calcule «a»,si $\overline{3aaa4}$ es divisible por *11*.

A) 0 B) 7 C) 8 D) 4 E) 5

04 Calcular el menor $\overset{o}{11}$ que termina en *56*. Dar el producto de sus cifras.

A) 12 B) 13 C)0 D) 15 E) 16

05 Si: $\overline{2a3b26a}=\overset{o}{72}$ dar como respuesta la cifra de mayor orden de $\overline{abac}$.

A) 6 B)c C) 4 D)5 E)3

06 Si: $\overline{7a4a3}=\overset{o}{7}$, calcule el valor de a^2.

A) 9 B) 16 C)25 D) 36 E) 64

07 ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{abba}$ son divisibles entre *7*?

A) 16 B) 18 C) 9 D)24 E) 27

08 Si: $\overline{abc}=\overset{o}{8}$; $\overline{bca}=\overset{o}{5}$; $\overline{ab}=\overset{o}{17}$

calcule el *MCD* de a, b y c.

A)10 B)No existe C)5 D) 1 E) 8

09 Si el numeral $\overline{aba2b}$ es múltiplo de *99*, calcular $a\times b$.

A)7 B) 8 C) 16 D) 17 E) 9

10 Sabiendo que al dividir: $\overline{mnp}$; $\overline{pnm}$ y $\overline{pmn}$ entre *5;9* y *11*, respectivamente, se obtiene divisiones exactas. calcular $m+n+p$.

A) 9 B) 18 C) 27 D) 13 E) 14

11 Si el *C.A* de un numeral de cuatro cifras iguales es $\overset{o}{7}$, calcule la suma de cifras del numeral.

A) 19 B)20 C) 24 D) 12 E) 36

12 Si: $\overline{acb}=\overset{o}{5}$; $\overline{bca}=\overset{o}{4}$; $\overline{cab}=\overset{o}{7}$

además: $a\neq b\neq c$, calcule $a+b+c$.

A) 12 B) 11 C) 23 D) 18 E) 17

13 Sabiendo que: $\overline{abc1a5}=12\overset{o}{3}75$ calcular $a+b-c$.

A) 10 B) 15 C)0 D)4 E)3

14 Si: $\overline{1245x}$ es divisible por *8*, calcular el valor de «x».

A) 4 B) 6 C) 8 D) 3 E) 9

15 Calcular $a+b$, si:

$$\overline{2a5a8}=\overset{o}{9} \;;\; \overline{8b367}=\overset{o}{11}$$

A) 5 B) 6 C)7 D)8 E) 9

16 Si: $\overline{a713b}=\overset{o}{88}$, calcule $a+b$.

A) 10 B) 9 C) 14 D) 17 E) 13

17 Si: $\overline{a577b}=\overset{o}{72}$, calcule $a+b$.

A)8 B)7 C) 10 D)9 E) 12

18 Si el numeral $\overline{222aa}=\overset{o}{7}$, ¿cuántos valores puede tomar «a»?

A)1 B)2 C)3 D)4 E) 5

19 Si el numeral $\overline{7a31b}$ es divisible por *5* y por *11* pero no por *2*, calcular a^2.

A) 0 B) 1 C) 9 D) 4 E) 16

20 Calcular el valor de «b», si :

* $\overline{abca}=\overset{o}{5}$
* $\overline{cabc}=\overset{o}{9}$
* $\overline{bcab}=\overset{o}{7}$

A)7 B) 8 C)4 D)9 E) 3

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)A	4)B	5)C	6)B	7)B	8)B	9)B	10)B
11)C	12)A	13)E	14)B	15)B	16)C	17)E	18)B	19)A	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)E	3)B	4)C	5)C	6)C	7)B	8)D	9)A	10)B
11)B	12)D	13)C	14)B	15)C	16)B	17)A	18)B	19)C	20)A

ECUACIÓN DIOFÁNTICA

Se denomina así por el matemático griego Diofanto; en la cual sus constantes son números enteros y sus incógnitas representan también números enteros, estas pueden ser de dos o más incógnitas y de primer grado. En este caso particular estudiaremos la resolución las ecuaciones diofánticas lineal de dos incognitas donde:

$$\boxed{Ax+By=C}$$

- $(A, B, C, x, y) \in \mathbb{Z}$

Luego: x_o ; y_o es una solución particular:

tendremos la solución general.

$$\boxed{x=x_o+\frac{B}{d}t} \quad e \quad \boxed{y=y_o-\frac{A}{d}t}$$

donde: $d=MCD(A.B)$ y $t\in z$

En particular si *A* y *B* son PESI $(d = 1)$

$$\boxed{x=x_o+Bt} \quad e \quad \boxed{y=y_o-At}$$

EJEMPLO:

Resolver la ecuación **:**

$$52x + 68y = 3816$$

Al simplificar: $13x + 17y = 954$

Expresando en función del módulo del menor coeficiente:

$$\overset{o}{13}x+(\overset{o}{13}+4)y=\overset{o}{13}+5$$

Luego: $\overset{o}{13}+\overset{o}{13}+4y-5=\overset{o}{13}$

$$4y-5+13=\overset{o}{13} \Rightarrow 4(y+2)=\overset{o}{13}$$

$$\Rightarrow (y+2)=\overset{o}{13}$$

(Teorema de Arquímedes – Euclides)

Si: $\overset{o}{13}=13$ $\quad y_o=11 \Rightarrow x_o=59$

la solución general es:

$$y = 11 + 13t$$

$$x = 59 - 17t$$

al reemplazar valores enteros a t, tenemos sus posibles soluciones:

t	-1	0	1	2	....
x	-2	11	24	37	....
y	76	59	42	25	....

NUMEROS PRIMOS
CAPITULO 068

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Reconocer los números primos y compuestos.*
* *Clasificar a los números enteros positivos de acuerdo a su cantidad de divisores para un mejor estudio de ellos.*
* *Deducir y aplicar las propiedades de los números primos .*
* *Descomponer canónicamente un número para realizar un estudio de sus divisores.*
* *Profundizar en las características que presentan los divisores respecto a los divisores primos del número.*
* *Aplicar el teorema de Euler en la resolución de problemas concretos.*
* *Encontrar formas prácticas en el cálculo de operaciones con los divisores de un número.*

INTRODUCCIÓN :

La historia de los números primos es, en cierto modo, la propia historia de la matemática, cuyos orígenes se pierden en la noche de los tiempos. En los pocos milenios durante los cuales se conservaron registros del conocimiento humano, muchos matemáticos hicieron importantes contribuciones a la teoría de los números, interesándose muy especialmente en el estudio de los números primos. Entre aquellos, merecen citarse Euclides y Eratóstenes, de la Grecia antigua; Pierre de Fermat, del siglo *XVII* y Leonard Euler, del siglo *XVIII*; una pregunta que despertó el interés de muchos matemáticos es si existía alguna ley general de formación de números primos. Fermat; en el siglo *XVII*, afirmó que todos los números producidos por la expresión $2^{2^n}+1$ son primos. Un siglo después, Euler probó que Fermat estaba errado: el número $2^{2^5}+1$ es un número compuesto, divisible por *641.*

GOLDBACH (1690 - 1764)

Aparece en la historia de las matemáticas por una famosa conjetura que propuso como problema en una carta a Euler en *1742*. Comprobó que en todos los casos observados, todo número par (excepto el *2*, que es primo) puede ser representado como suma de dos números primos:

$$4 = 2 + 2$$
$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 5 + 5 = 3 + 7$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$

Goldbach preguntaba a Euler si era capaz de demostrar que esa propiedad es cierta para todo número par, o si podría encontrar un contraejemplo. Euler no pudo dar una respuesta, ni nadie ha podido darla hasta ahora.

NUMEROS PRIMOS

Son aquellos números que son divisibles por si mismo y por la unidad ; es decir , estos números solamente presentan dos divisores. Los números primos también son llamados " ***números primos absolutos*** " .

EJEMPLOS :

Los siguientes números son primos :

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97; ...

NÚMERO COMPUESTO :

Es todo número no primo , resulta de multiplicar dos o más números primos , o de las potencias de estos. También son aquellos que tiene mas de dos divisores.

EJEMPLOS :

Los siguientes números son compuestos son:

4 ; 6 ; 8; 10 ; 12 ; 14 ; 15 ; . . .

* ***4*** .... sus divisores son; ***1; 2 ; 4***
* ***12*** .... sus divisores son; ***1; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.***

	Divisible por sí mismo	*Divisible por la unidad*	*Es número primo*
El número 2 es divisible por sí mismo y por la unidad	2	1	Si
El número 3 es divisible por si mismo y por la unidad	3	1	Si
El número 4 es divisible por si mismo, por la unidad y por 2	4	1	No

	Divisible por sí mismo	Divisible por la unidad	Divisible también por	Es un número compuesto
El número 4 divisible por	4	1	2	Si
El número 7 es divisible por	7	1		No
El número 10 es divisible por	10	1	2 y 5	Si

NÚMEROS PRIMOS (ENTRE SÍ):

Son dos o más números que simultáneamente son divisibles solamente por la unidad , es decir , el único factor común es *1*, aunque independientemente pueden ser divisibles por otros números diferentes de uno.

* A los números primos entres sí , se les llama también: "*primos relativos*".

* Los siguientes ejemplos son números primos entre sí:

Número	Divisores	Número	Divisores
8	①; 2; 4; 8	12	①;2; 3; 4; ó 12
15	①; 3; 5; 15	25	①;5; 25
* 8 y 15; único divisor común: la unidad		* 12 y 25; único divisor común: la unidad	

* Los siguientes ejemplos no son números primos entre sí:

Número	Divisores	Número	Divisores
14	①; 2 ;⑦; 14	12	①; 3 ;⑤; 15
49	①;⑦: 49	25	①;⑤; 25
* 14 y 49; los divisores comunes: la unidad y 7		* 15 y 25; los divisores comunes: la unidad y 5	

CRIBA DE ERASTÓSTENES

Es una tabla denominada también "*Tabla de los números absolutos*" y nos permite obtener los primeros números primos. Erastótenes estableció un método para obtener los números primos , hasta un cierto límite.

LA REGLA ES LA SIGUIENTE :

Se escriben los enteros consecutivos , desde *1* hasta el número deseado. En seguida se tacha *1*, luego los múltiplos de *2* menos el propio *2* , en seguida los múltiplos de *3* menos el propio *3* , así sucesivamente, se tachan los múltiplos de los primos siguientes menos los propios primos. Los números que quedan sin tachar, son los números primos".

EJEMPLO :

Hallar todos los números primos no mayores a ***50***.

1°) Se escriben todos los números del *1* al ***50***.

1	②	③	4	⑤	6	⑦	8	9	10
⑪	12	⑬	14	15	16	⑰	18	⑲	20
21	22	23	24	25	26	27	28	㉙	30
㉛	32	㉝	34	35	36	㊲	38	39	40
㊶	42	㊸	44	45	46	㊼	48	49	50

2°) Como el uno no es primo, se tacha *(x)*

3°) Como *2* si es primo , lo dejamos , pero si tachamos los demás múltiplos de ***2***.

4°) Como *3* si es primo , lo dejamos; pero sí tachamos los demás múltiplos de ***3***.

5°) Repitamos este proceso hasta llegar al último número no suprimido , escojámoslo también. Por lo tanto , los números primos no mayores a ***50***, son:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 41; 43 y *47*

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS Z^+

Estudiaremos a los números enteros positivos $Z^+=\{1;2;3;4;......\}$ de acuerdo a su cantidad de divisores .

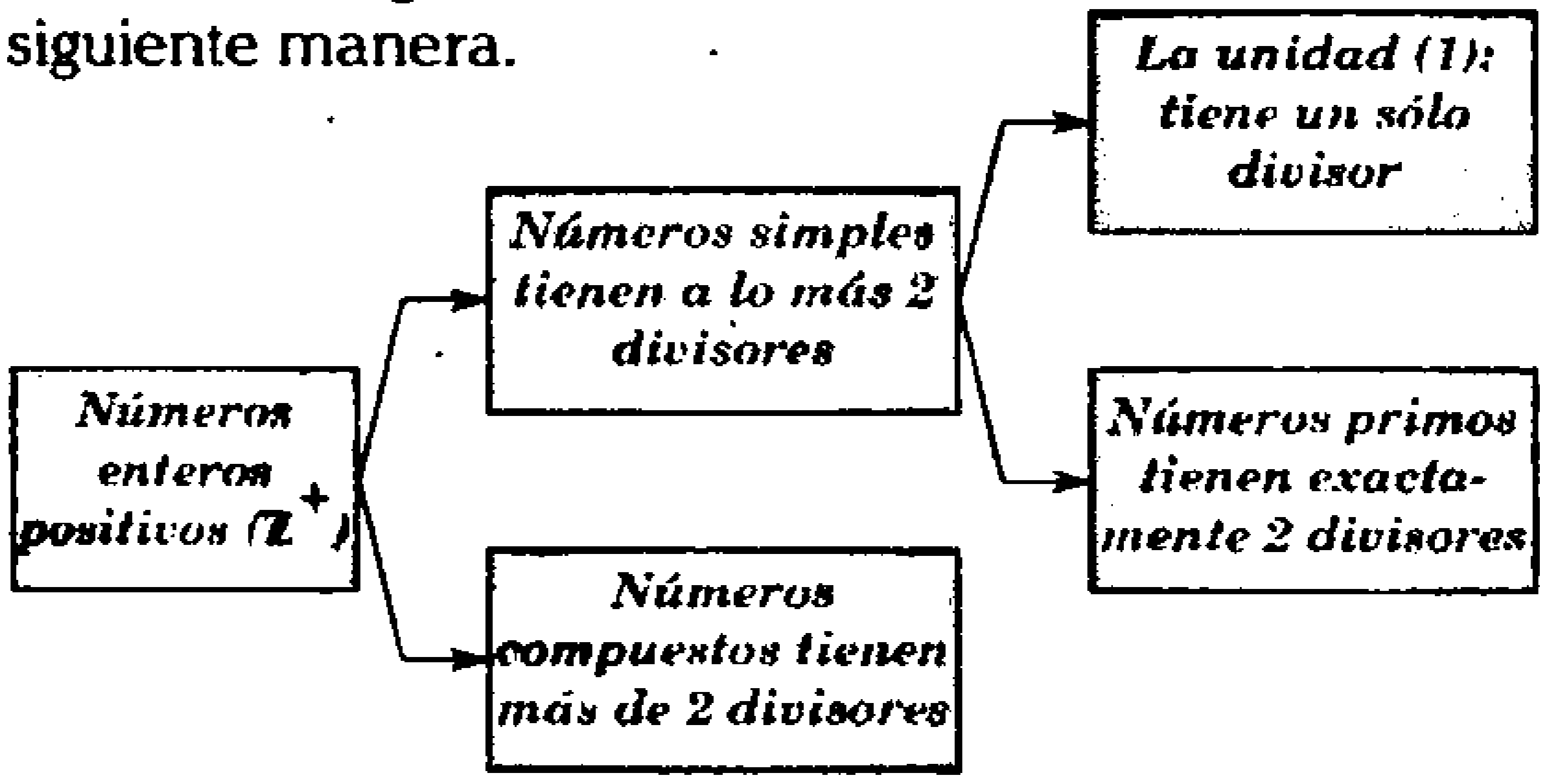
N°	Divisores	Cantidad de divisores
1	1	1
2	1; 2	②
3	1; 3	②
4	1; 2; 4	3
5	1; 5	②
6	1; 2; 3; 6	4
7	1; 7	②
8	1; 2; 4; 8	4
9	1; 3; 9	3
10	1; 2; 5; 10	4
11	1; 11	②
12	1; 2; 3; 4; 6; 12	6
13	1; 13	②

* De la tabla se aprecia :

* *1* es el único número que posee sólo un divisor.

* Los números = *2; 3; 5; 7; 11; 13;*....tienen exactamente *2* divisores.

* Los números *4; 6; 8; 10; 11,* ...... tienen más de *2* divisores. Según lo anterior se clasificarán de la siguiente manera.



PROCEDIMIENTO PARA CONOCER SI UN NÚMERO ES PRIMO O NO

REGLA :

Para conocer si un número es primo, se le divide sucesivamente por los números primos : *2; 3; 5; 7; 11; 13* y lo siguientes, hasta que el cociente llegue a ser igual o empiece a ser menor que el divisor, además el residuo tiene que ser diferente de cero (dicho divisor se puede aproximar extrayendo la raíz cuadrada).

EJEMPLO 1 :

Supongamos que deseamos averiguar si *131* es primo.

1°) Extraemos la raíz cuadrada del número dado, tomando sólo la parte entera.

* Es decir , $\sqrt{131} = 11, ...$

* Pero sólo tomamos *11.*

2°) Dividimos el número dado entre los números primos menores o iguales a *11*.

* Así : 131 ⌊2 → residuo ① cociente 65; 131 ⌊3 → ② 43; 131 ⌊5 → ① 26

131 ⌊7 → ⑤ 18 ; 131 ⌊11 → ⑩ 11

3°) Si todas las divisiones son inexactas , el número dado es primo. En este caso , *131* es número primo.

EJEMPLO 2 :

¿El número *23* es número primo?

RESOLUCIÓN :

* ¿El número *23* lo dividimos sucesivamente por los números primos : *2; 3; 5; 7; ...;* etc.

* Así: 23 ⌊2 → 1 11 ; 23 ⌊3 → 2 7 ; 23 ⌊5 → 3 4

* En la última cifra división se ha conseguido que el cociente sea menor que al divisor y el residuo diferente de cero ; por lo tanto *23* es un número primo.

EJEMPLO 3 :

¿El número *127* es un número primo?

RESOLUCIÓN :

* El número *127* lo dividimos sucesivamente por lo números primos : *2 ; 3 ; 5 ; 7; .... etc.*

127 ⌊2 → 1 63 ; 127 ⌊3 → 1 42 ; 127 ⌊5 → 2 25 ; 127 ⌊7 → 1 18 ; 127 ⌊11 → 6 11

* En la última división se ha conseguido que el divisor y el cociente sean iguales y el residuo es diferente de cero; por lo tanto *127* es un número primo.

OBSERVACIONES :

* Si dos números son primos entre sí *(PESI)* no es necesario que cada uno de ellos sea número primo.

EJEMPLO :

10 y ***21*** son ***PESI 10*** y ***21*** no son primos

* ***2*** ó más números consecutivos son siempre números *PESI*.

OTRO EJEMPLO :

12 ; 13 y ***14*** son ***PESI***

* ***2*** ó más números impares consecutivos son siempre números ***PESI.***

OTRO EJEMPLO :

15 ; 17 y ***19*** son ***PESI***

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

(TEOREMA DE GAUSS)

Todo número entero mayor que la unidad se puede expresar como el producto de sus divisores primos diferentes elevados a exponentes enteros positivos ***(Descomposición canónica)***

EJEMPLO :

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$360 = \underbrace{2\times2\times2\times3\times3\times5}_{}$ = $②^3 \times ③^2 \times ⑤^1$

* ***Divisores primos***

* ***Divisores simples:*** $\{1, 2, 3, 5\}$

MÉTODO :

Se divide el número por el menor de sus divisores primos; el cociente se divide también por el menor de sus divisores primos y así sucesivamente con los demás cocientes , hasta hallar un cociente primo que se dividirá por si mismo.

* Descomponer canónicamente el número ***1200.***

$$\begin{array}{r|l}
1\,200 & 2 \\
600 & 2 \\
300 & 2 \\
150 & 2 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 4 \text{ veces} \\
\left.\right\} 1 \text{ vez} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 2 \text{ veces}
\end{array}$$

* Luego: $1200 = 2^4 \times 3^1 \times 5^2$

EN GENERAL :

Todo número compuesto "*N*", puede ser expresado de la forma:

$$\boxed{N = A^{\alpha} \times B^{\beta} \times C^{\gamma}}$$

* Donde:

$A ; B ; C \Rightarrow$ son números primos absolutos diferentes.

$\alpha; \beta; \gamma \Rightarrow$ son enteros positivos.

CANTIDAD DE DIVISORES : CD(N)

EJEMPLO :

Hallar la cantidad de divisores de *24*.

RESOLUCIÓN :

div. de ***24: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12*** y ***24*** $\Rightarrow CD_{(24)}=8$

Observamos que ha sido fácil hallar la cantidad de divisores de *24*. Pero ¿qué pasaría si nos piden calcular la cantidad de divisores de un número más grande? ¿Habrá una forma sencilla de hacerlo?

* Claro que sí , veamos:

* En el primer ejemplo , nos pedían la cantidad de divisores de *24*.

Por el teorema fundamental de la aritmética:

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

* Si observas , los divisores de *24* excepto el *1* se forman por las combinaciones de sus divisores primos, así :

		Divisores de 2^3			
		1	2	4	8
Divisores de 3^1	1	1	2	4	8
	3	3	6	12	24

$CD\ (24) = 8$

* Ahora , para hallar la cantidad de divisores lo haremos así :

$$24 = 2^{③} \times 3^{①}$$

Se agrega una unidad a cada exponente y se multiplica.

$$CD\ (24) = (③+1) \times (①+1) \Rightarrow CD(24) = 4 \times 2 = 8$$

EN GENERAL :

Si: $N = \underbrace{a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\gamma} \times ...}_{D.C.}$

Entonces: $\boxed{CD_{(N)} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)...}$

EJEMPLO :

Calcular la cantidad de divisores de ***360***

RESOLUCIÓN :

$$\begin{array}{r|l}
360 & 2 \\
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \Rightarrow 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
 & 1
\end{array}$$

$$CD(360) = (3+1) \times (2+1) \times (1+1)$$

$$\Rightarrow CD(360) = 4 \times 3 \times 2 \Rightarrow CD(360) = 24$$

* Se acostumbra a distinguir de estos *24* divisores a:
* Divisores primos: {*2; 3; 5*}
* La unidad : *1*
* Y los restantes : divisores compuestos

③ ← divisores simples ④

① ← divisores no primos: ㉑

⑳

ANÁLISIS DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

EJEMPLO :

Analizaremos los divisores de ***200***:

$$\overbrace{1;}^{} \ \underbrace{2; 5;}_{\text{divisores primos}} \ \overbrace{4; 8; 10; 20; 25; 50; 40; 100; 200}^{\text{divisores compuestos}}$$

(*divisores primos* sobre 1; 2; 5 — *Divisores propios*: de 1 a 100)

Divisores propios

* De donde se aprecia que :

* $CD_{(200)}=12 \Rightarrow \underline{CD_{(200)} = CD_{simples} + CD_{compuesto}}$

* $CD_{(simples)}=3$ $\qquad 12 = 3 + 9$

* $CD_{(compuestos)}=9$

* Luego para *N* : $\boxed{CD_{(N)} = CD_{simples} + CD_{compuestos}}$

* $CD_{(primos)} = 2$ $\qquad$ * $CD_{(propios)} = 11$

* $CD_{(propios)} = CD_{(200)} - 1$ $\qquad 11 = 12 - 1$

* Luego para *N*: $\boxed{CD_{(propios)} = CD_{(N)} - 1}$

OBSERVACIONES :

* Para todo numero entero positivo, se cumple que:

Total divisores de un número	=	Total divisores primos	+	Total divisores compuestos	+	1

* El número uno (la unidad), no es primo ni compuesto por tener un solo divisor (él mismo).
* La serie natural de los números primos es ilimitada.
* La descomposición canónica de un número es única.
* Los divisores primos de un número, son las bases de la descomposición canónica.
* Dos números consecutivos siempre son primos entre sí *(PESI)*.
* Al conjunto de números conformados por la unidad y los números primos, se denominan simples.

SUMA DE LOS DIVISORES SIMPLES Y COMPUESTOS DE UN NÚMERO

EJEMPLO :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

2^3	3^2	5^1
1	1	1
2	3	5
4	9	
8		

$\Sigma(2^3)$: $1+2+4+8=15$

$\Sigma(3^2)$: $1+3+9=13$

$\Sigma(5^1)$: $1+5=6$

$$\Sigma(360) = \overline{15} \times \overline{13} \times \overline{6} = 1170$$

OBSERVACIÓN :

La suma de los divisores de *360* también la podemos calcular expresando la suma de los divisores de cada factor como un cociente notable, así para el ejemplo anterior tenemos :

$$\Sigma(360) = \left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^1-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)$$

EJEMPLO :

Para el número $156 = 2^2 \times 3^1 \times 13^1$

2^2	3^1	13^1
1	1	1
2	3	13
4		

$$\overline{7} \times \overline{4} \times \overline{14} = 392$$

EN GENERAL :

Dado el número: $N = A^\alpha \times B^\beta \times C^\gamma$

$$S.D.(N) = \left(\frac{A^{\alpha+1}-1}{A-1}\right)\left(\frac{B^{\beta+1}-1}{B-1}\right)\left(\frac{C^{\gamma+1}-1}{C-1}\right)$$

EJEMPLO :

Calcular la suma de los divisores de *120*

RESOLUCIÓN :

* Sea el número: $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

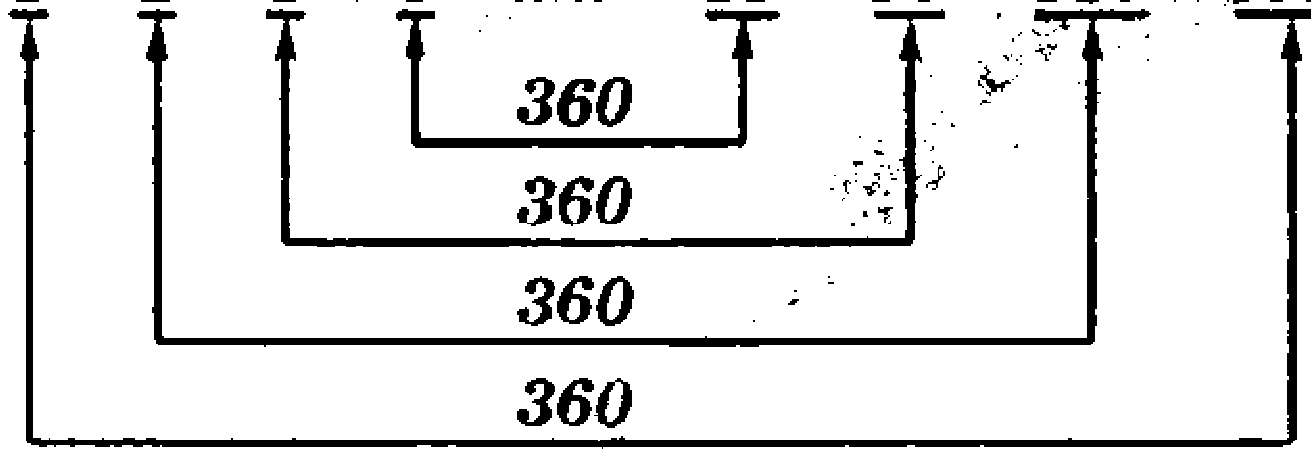
$$\Rightarrow S.D.(120) = \left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) \Rightarrow S.D.(120) = 360$$

PRODUCTO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

* Para nuestro ejemplo: $N = 360 \Rightarrow 24$ divisores

Si multiplicamos sus *24* divisores y los agrupamos por pareja.

$$P = 1 \times 2 \times 4 \times 8 \times \ldots \times 45 \times 90 \times 180 \times 360$$



$$P = \underbrace{360 \times 360 \times \ldots \times 360}_{12\ veces} = 360^{12} = 360^{\frac{24}{2}}$$

$$\Rightarrow P(360) = \sqrt{360^{24}}$$

EN GENERAL : $\boxed{PD_{(N)} = \sqrt{N^{CD_{(N)}}}}$

FUNCIÓN DE EULER ϕ (N)

Está dado para los números $N \in Z^+$ y representa la cantidad de números enteros positivos menores que N y que son primos relativos con N.

$$N = P_1^{\alpha_1}\ P_2^{\alpha_2}\ \ldots\ P_k^{\alpha_k}$$

$$\phi(N) = P_1^{\alpha_1-1}(P_1-1)\ P_2^{\alpha_2-1}(P_2-1) \ldots P_k^{\alpha_k-1}(P_k-1)$$

* $40 = 2^3 \times 5$

  $\phi(40) = 2^2\ (2-1)\ 5^{\circ}(5-1) = 16$

* $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

  $\phi(60) = 2(2-1)\ 3^{\circ}(3-1)\ 5^{\circ}(5-1) \Rightarrow \phi(60) = 16$

* $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

  $\phi(900) = 2(2-1)\ 3(3-1)\ 5(5-1) \Rightarrow \phi(900) = 240$

OBSERVACIÓN :

Para calcular la suma de todos los números menores que N y *PESI* con el se utiliza la relación:

$$\boxed{\frac{N \times \phi(N)}{2}}$$

EJEMPLO :

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$$\phi(72) = 2^2(2-1)3(3-1) \Rightarrow \phi(72) = 24$$

$$\text{Suma} = \frac{72 \times 24}{2} = 864$$

FUNCIÓN PARTE ENTERA DE N [N]

Esta se define para todos los valores reales de N y representa el entero mayor, no superior a N.

EJEMPLOS :

$$[11]=11 \qquad [7,3]=7$$

Esta función nos permite determinar el exponente, con el que un número primo dado "p" figura en el producto $N!$.

EJEMPLO :

El exponente con el que el número 3 figura en el producto $40!$ es:

$$\left[\frac{40}{3}\right]+\left[\frac{40}{9}\right]+\left[\frac{40}{27}\right]=13+4+1=18$$

$\Rightarrow 40!=3^{18}\times 2^{\alpha_1}\times 5^{\alpha_2}...$

El procedimiento se abrevia así:

40 ⌊3
13 ⌊3
+ 4 ⌊3
+ 1 : 18

EJEMPLO :

$$52!=2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d....$$

52 ⌊3 → 17 ⌊3 → 5 ⌊3 → 1
52 ⌊5 → 10 ⌊5 → 2

$b=17+5+1=23$ y $c=10+2=12$

TEOREMA DE EULER

Si $m>1$, además a y m son *PESI* entonces:

$$a^{\phi(m)}=\overset{o}{m}+1$$

EJEMPLOS :

- 8 y 15 son *PESI*
  $\phi(15)=3^0(3-1)5^0(5-1)=8$
  $\Rightarrow 8^8=\overset{o}{15}+1$
- 6 y 11 son *PESI*
  $\phi(11)=11^0(11-1)=10 \Rightarrow 6^{10}=\overset{o}{11}+1$

TEOREMA DE WILSON

Si p es número primo se cumple que:

$$(p-1)!+1=\overset{o}{p}$$

EJEMPLO :

- 7 es primo, entonces : $6!+1=\overset{o}{7}$
- 11 es primo, entonces: $10!+1=\overset{o}{11}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

¿Cuántos de los siguientes números son primos absolutos en base *11*?

$$13_{(11)};\ 31_{(11)};61_{(11)};\ 29_{(11)}$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Un número primo en base *10* es primo en cualquier otra base.

* Luego :

$13_{(11)}=14$................*No* es número primo.

$31_{(11)}=34$................*No* es número primo.

$61_{(11)}=67$................*Sí* es número primo.

$29_{(11)}=31$................*Sí* es número primo.

RPTA: "A"

PROBLEMA 2 :

¿Cuántos divisores tiene el número *914 760* ?

A) 182 B) 178 C) 194
D) 196 E) 192

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo canónicamente:

$$914760=2^3\times 3^3\times 5^1\times 7^1\times 11^2$$

* Entonces :

$$CD_{(914760)}=(3+1)(3+1)(1+1)(1+1)(2+1)=192$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 3 :

¿Cuántos divisores menos tiene el número *360* que el número *1 800*?

A) 12 B) 24 C) 6
D) 10 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo canónicamente :

$$360=2^3\times 3^2\times 5$$

$$\Rightarrow CD_{(360)}=(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

$$1800=2^3\times 3^2\times 5^2$$

$$\Rightarrow CD_{(1800)}=(3+1)(2+1)(2+1)=36$$

* Entonces *360* tiene $36-24=12$ divisores menos que *1800.*

RPTA: "A"

PROBLEMA 4 :

¿Cuántos divisores más tiene 120^3 que 64^3?

A) 47 B) 59 C) 63 D) 141 E) 99

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo canónicamente:

* $120^3=2^9\times 3^3\times 5^3$

$\Rightarrow CD_{(120^3)}=(9+1)(3+1)(3+1)=160$

* $64^3=2^{18} \Rightarrow CD_{(64^3)}=(18+1)=19$

* Entonces 120^3 tiene $160-19=141$ Divisores más que 64^3.

RPTA: "D"

PROBLEMA 5 :

Entre los números *180 ; 756* y *900*, ¿Cuál es el que tiene tantos divisores como *360*?

A) 900 B) Ninguno C) 180
D) 756 E) Todos.

RESOLUCIÓN :

* Calculemos el número de divisores :

$180=2^2\times 3^2\times 5\Rightarrow CD_{(180)}=(2+1)(2+1)(1+1)=18$

$756=2^2\times 3^3\times 7\Rightarrow CD_{(756)}=(2+1)(3+1)(1+1)=24$

$900=2^2\times 3^2\times 5^2\Rightarrow CD_{(900)}=(2+1)(2+1)(2+1)=27$

* Como : $360=2^3\times 3^2\times 5$

$\Rightarrow CD_{(360)}=(3+1)(2+1)(1+1)=24$

* El único que tiene divisores como *360* es *756*

RPTA: "D"

PROBLEMA 6 :

Determinar el valor de n, si $M=12\times 15^n$ tiene *60* divisores.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo canónicamente a "*M*": $M=2^2\times 3\times(3\times 5)^n=2^2\times 3^{n+1}\times 5^n$

$\Rightarrow CD_{(M)}=(2+1)(n+1)(n+1)$

* Pero por dato: $CD_{(M)}=60$

$\Rightarrow 3(n+2)(n+1)=60$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)=20=5\times 4$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)=(3+2)(3+1)\Rightarrow n=3$

RPTA :"C"

PROBLEMA 7 :

Si : $N=15\times 30^n$ tiene *294* divisores. Hallar "n"

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Haciendo la descomposición canónica de 15×30^n se tiene:

$15\times 30^n = 3\times 5(2\times 3\times 5)^n = 3\times 5\times 2^n\times 3^n\times 5^n$

$= 2^n \times 3^n \times 5^{n+1}$

$CD_{(N)} = (n+1)(n+2)^2$

* Por dato del problema se tiene que:

$\underline{(n+1)}\quad \underline{(n+2)}^2 = 294 = \underline{6}\times \underline{7}^2$

* Igualando factores se puede obtener que "n" tomará el valor de 5.

PROBLEMA 8 :

¿Cuántos números de la forma $\overline{aba}$ son primos absolutos menores que 329?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Si $\overline{aba} < 329$ es primo, entonces $a \in \{1;3\}$.

* Si $a = 1$ entonces

$\overline{1b1} \in \underbrace{\{101; 131; 151; 181; 191\}}_{5\ \text{números primos}}$

* Si $a = 3$ entonces

$\overline{3b3} \in \underbrace{\{313\}}_{1\ \text{número primo}}$

⇒ En total existen 6 números primos .

RPTA: "D"

PROBLEMA 9 :

Calcular la suma de las cifras de la suma de los divisores compuestos de 5040.

A) 21 B) 7 C) 18 D) 22 E) 14

RESOLUCIÓN :

* Sea : $N = 5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$

$SD_{(N)} = \left(\frac{2^5-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^3-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^2-1}{7-1}\right) = 193344$

* Además debemos recordar o deducir que :

$\underbrace{SD_{primos} + 1}_{Sd\ simple} + SD_{compuestos} = SD_N$

$\Rightarrow (2+3+5+7)+1+SD_{compuestos} = 19344$

$\Rightarrow SD_N = 19236$

* Piden : $1+9+3+2+6 = 21$

RPTA:"A"

PROBLEMA 10 :

Determine la suma de todos los valores posibles de a , sabiendo que la descomposición canónica (en sus factores primos) de N. es $N = (\overline{ab})^c(\overline{ac})^b$ y tiene 32 divisores.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 10 E) 14

RESOLUCIÓN:

* Se pide la suma de valores posibles de a

* Se nos dice que : $N = \overline{ab}^c \times \overline{ac}^b$ (descomposición canónica) $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ son números primos , por lo cual b y c son impares.

* Como N tiene 32 divisores , luego:

$(c+1)\quad(b+1) = 32$

Factores pares $\begin{cases} 8\times 4 \Rightarrow c = 7 \ ;\ b = 3 \\ 4\times 8 \Rightarrow c = 3 \ ;\ b = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow N = \overline{a7}^3 \times \overline{a3}^7 \ \vee\ N = \overline{a3}^7 \times \overline{a7}^3$

* Pero el valor N sólo depende de los valores de a.

* Como $\overline{a7}$ y $\overline{a3}$ son primos

$\Downarrow$ $\Downarrow$
17 13
47 43

⇒ Los valores de a son 1 y 4

* Finalmente la suma de valores de a es 5.

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 ¿Cuál de los siguientes números son primos?

A) 211 B) 247 C) 391

RPTA : ....

02 Entre 150 y 160, ¿cuántos números primos hay?

RPTA : ....

03 Hallar la suma de los diez primeros números primos.

RPTA : ....

04 Escribe entre los paréntesis "P" si es primo ó "C" si es compuesto. Si el número no es primo ni compuesto escribe x.

19.....( )	47.....( )
21.....( )	91.....( )
1.....( )	0.....( )
31.....( )	38.....( )
101...( )	61.....( )

05 Indicar verdadero (V) o (F) según corresponda:

A) Todos los números primos son impares ...... ( )

B) Si un número no es primo entonces es compuesto.........( )

C) La suma de dos números primos siempre da como resultado un número par ....( )

D) El único número primo par es 2 ....( )

E) El menor número primo de 2 cifras es el 11...( )

06 Escribe entre los paréntesis "V" si los números son *PESI*, o "F" si no lo son

19 y 37 ( )	26 y 55 ( )
26 y 39 ( )	51 y 34 ( )
17 y 20 ( )	1 y 8 ( )
21 y 84 ( )	14 y 22 ( )
35 y 63 ( )	31 y 32 ( )

07 Hallar la descomposición canónica de los siguientes números:

120 =	560 =
85 =	652 =
360 =	3969 =
420 =	4235 =
980 =	2475 =
4500 =	900 =
5200 =	4800 =
7200 =	300 =

08 De los siguientes números:

17; 24; 41; 61; 63; 76

¿Cuánto suman los números primos?

RPTA : ....

09 De los siguientes números :

21; 37; 1; 5; 29; 34

¿Cuánto suman los no primos?

RPTA : ....

10 Determine el valor de n si el número 72×5^n tiene 60 divisores.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

11 ¿Cuántos divisores de ***720*** son múltiplos de ***6***?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

12 Calcular n si $16^n \times 35^n$ tiene ***81*** divisores.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13 Si 15×30^n tiene ***294*** divisores. Determine la cantidad de divisores compuestos de:

$$\overline{(n-1)(n-1)(n-4)}$$

A) 6 B) 8 C) 9 D) 3 E) 7

14 ¿Cuántos divisores cuadrados perfectos tiene el número ***39 808***?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) 12

15 ¿Cuántos divisores de ***300*** son múltiplos de ***15***?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 10 E) 9

16 Hallar el valor de a si 30^a tiene ***64*** divisores.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

17 Hallar el valor de a si 21^a tiene ***81*** divisores

A) 6 B) 9 C) 8 D) 7 E) 5

18 ¿Cuál de los siguientes números tiene la mayor cantidad de divisores?

A) 16 B) 45 C) 18 D) 50 E) 10

19 ¿Cuál de los siguientes números tiene la mayor cantidad de divisores?

A)125 B)130 C)150 D)180 E)225

20 ¿Cuántas cifras ceros son necesarios colocar a la derecha del número ***35*** para que el número resultante tenga ***112*** divisores?

A) 6 B) 5 C) 8 D) 7 E) 10

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcule el residuo de dividir el producto de los ***200*** primeros números primos entre ***30***.

A)5 C)0 B)4 D)12 E)15

02 De todos los números que dividen exactamente a ***360***, ¿cuántos son pares?

A) 24 B) 18 C) 12 D)16 E)20

03 ¿Cuántos divisores de dos cifras tiene ***360***?

A)15 B)13 C) 14 D)16 E)12

04 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) ***239*** es un número primo.

( ) ***667*** es un número primo.

( ) ***22; 21*** y ***25*** son PESI.

A) VVF B) VVV C) VFV D) VFF E) FFV

05 Si los siguientes numerales $\overline{4a}$; ***16*** y ***18*** son PESI, calcule la suma de los valores que asume "a"

A) 24 8)25 C)16 D)18 E)30

06 Si: $N = a^n \times b^m \times \overline{1a} \times \overline{1b}$

$$M = \overline{pq}(\overline{qp} - 1)$$

están descompuestos canónicamente, calcule $a+b+p+q$, además $\overline{pq}$ es el menor posible.

A) 14 B)15 C) 16 D)18 E)20

07 Al descomponer canónicamente:

I) 45 II) 100 III) 360 IV) 128

¿cuántos divisores primos tiene cada uno, respectivamente?

A) 2; 3; 2; 1 B)2; 1; 3; 4 C) 2; 2; 2; 1 D) 2; 2; 3; 1 E) 2; 3; 2; 3

08 Calcule la cantidad de divisores de ***3900***.

A) 24 B) 28 C) 36 D)27 E)42

09 Calcule la suma de cifras de P, si su descomposición canónica es:

$$P = n^{(2n+1)}(n+1)^n$$

A)42 B)17 C)12 D)18 E)16

10 Del problema anterior, ¿cuántos divisores compuestos tiene P?

A) 18 B) 15 C) 16 D)14 E)20

11 El numeral: $A = 42 \times 3^n$ tiene ***3*** divisores menos de ***4900***. Calcular dicho numeral. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A)18 B)9 C) 10 D) 11 E)12

12 ¿Cuál es el menor perimetro que puede tener un rectángulo cuya área es $396\ m^2$, sabiendo que sus dimensiones expresadas en metros son números enteros?

A) 86 B) 90 C) 74 D)96 E) 80

13 ¿Cuántos rectángulos diferentes se puede tener cuya área es $396m^2$, sabiendo que sus dimensiones expresadas en metros son números enteros?

A) 18 B) 9 C) 12 D) 10 E) 16

14 Calcule $a + b + c$, si la descomposición canónica de $\overline{abc}$ tiene a sus cifras como factores primos.

A) 6 B) 105 C) 9 D) 18 E) 15

15 ¿Cuál es el menor número por el cual hay que multiplicar a ***72***, de tal manera que el nuevo número así obtenido tenga ***16*** divisores?

A)2 B)3 C)5 D) 9 E) 4

16 Si a, b y c son números primos, además se tiene que:

$*\ a + b + c = 82 \quad *\ a - b = 35$

calcule "c".

A) 41 B) 47 C) 2 D) 37 E) 43

17 Sea la descomposición canónica de N:

$$N = \underbrace{a^b \times (a+1) \times b \times (b+4)^a}_{D.C}$$

donde: $a + b = 9$. Calcule la suma de divisores primos de N.

A) 25 B) 24 C)23 D)18 E)34

18 Si: $N = \underbrace{a^x \times b^y}_{D.C}$ y se cumple:

*El número de divisores de N es ***12***.

$*\ x + y + a + b = C.D(N)$

¿cuántos valores toma N?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)B	4)C	5)B	6)B	7)D	8)C	9)D	10)B
11)B	12)E	13)C	14)E	15)B	16)E	17)C	18)D	19)A	20)C

MCD y MCM

CAPÍTULO 069

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Calcular los factores comunes que pueden tener ciertas cantidades enteras. para ser utilizados en el diseño de materiales, con dimensiones comunes.*

* *Establecer el concepto del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.*

* *Conocer los métodos para calcular el **MCD** y **MCM**.*

* *Cálculo de valores mínimos o máximos que pueden tener ciertos objetos para que sus dimensiones sean exactas en sus diseños. dada ciertas condiciones.*

* *Calcular las posibilidades que puede tener la dimensión de un objeto en su diseño. para obtener resultados exactos.*

* *Conocer y aplicar las propiedades en la resolución de problemas.*

* *Distinguir la diferencia entre el **MCD** y **MCM** para su aplicación en variados problemas.*

INTRODUCCIÓN :

Constantemente , hacemos cálculos , tales como obtener las dimensiones de un artículo ,de un terreno, de una pieza mecánica de una caja, etc; encontrar las veces que coinciden las visitas periódicas de *2* personas a un determinado lugar; el volumen que debe tener un recipiente como máximo para que al vaciar en ellos un volumen de líquido no sobre,ni falte líquido. Todo ello , surge por la necesidad de obtener el menor costo posible; hacer que no haya desperdicios, o en todo caso este sea mínimo , con la intensión de que en ciertos cálculos , los resultados sean enteros.

MCD Y MCM

MÁXIMO COMUN DIVISOR (M.C.D)

Dado un conjunto de números enteros positivos; el *MCD* de dichos números es aquel número que es divisor común de estos y a la vez es el mayor de los divisores comunes.

EJEMPLO 1 :

Sean los múltiplos ***32*** y ***40***.

* Luego :

Divisores de 32

$32 \Rightarrow$ ①; ②; ④; ⑧; 16 ; 32

$40 \Rightarrow$ ①; ②; ④; 5 ; ⑧; 10 ; 20 ; 40

Divisores de 40

(Divisores)

* Los divisores comunes son: ***1; 2; 4; 8,*** de los cuales el mayor es ***8***, entonces ***MCD(32; 40)=8***

EJEMPLO 2 :

Calcular el ***MCD*** de ***12 ; 18*** y ***30***

RESOLUCIÓN :

* Hallando sus divisores:

div de 12	1; 2; 3; 4; 6; 12
div de 18	1; 2; 3; 6; 9; 18
div de 30	1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30

* Divisores comunes:

1 ; 2 ; 3 ; ⑥ → *Máximo*

* Luego: ***MCD(12; 18; 30)=6***

Es decir:

* ***6*** es divisor común de los divisores dados.

* ***6*** es el mayor posible.

NOTA :

Observa que los divisores comunes a ***12 ;18*** y ***30*** son los divisores de su ***M.C.D.***

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)

Dado un conjunto de números enteros positivos; el ***M.C.M.*** de dichos números es aquel número positivo que es múltiplo común de estos y a la vez es el menor de los múltiplos comunes.

EJEMPLO 1 :

* Sean los números ***12*** y ***8***

Múltiplos de 12

$12 \Rightarrow$ 12 ; ㉔; 36 ; ㊽; 60 ; ㉗2; 84 ; 96 ; . . .

$8 \Rightarrow$ 8 ; 16 ; ㉔; 32 ; 40 ; ㊽; 56 ; 64 ; (72); ...

Múltiplos de 8

* Los múltiplos comunes son : *24; 48; 72 ;...;* de los cuales el menor es *24*, entonces *MCM(12; 8)=24.*

EJEMPLO 2 :

Calcular el *MCM* de *4* y *6*

RESOLUCIÓN :

* Hallando sus múltiplos positivos :

Múltiplo de 4	4; 8; 12; 16; 20; 28; 32; 36; 40;...
Múltiplo de 6	6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48;...

* Múltiplos comunes (12) ; 24 ; 36 ;...
  (12) → *Máximo*

* Luego *MCM(4 ; 6)=12*

Es decir:

* Es un múltiplo común de todos los números.
* Es el menor posible.

EJEMPLO 3:

* Para los números *4* y *6*

$M_4=\{4 ; 8 ; (12); 16 ; 20 ; (24); ..... ; (36)...\}$

$M_6=\{6 ; (12); 18 ; (24); 30 ; (36); .....\}$

* Los múltiplos comunes son :

$M_4 \cap M_6=\{12; 24; 36;....\}$

* El menor de los múltiplos comunes es: *12*

M.C.M.(4; 6)=12

NOTA:

Observa que los múltiplos comunes son múltiplos de su *M.C.M*

PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO PARA EL M.C.D

A)POR DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES PRIMOS (DESCOMPOSICIÓN CANÓNINA):

El *MCD* es el producto de los factores comunes obtenidos, cada uno elevado a su menor exponente.

EJEMPLO 1 :

Calcular el *MCD* para los números *360* y *300*

RESOLUCIÓN :

$360=23\times32\times51 \quad 300=22\times31\times52$

$\rightarrow MCD(360 ; 300) = 22\times31\times51$

"Es el producto de los factores primos comunes elevados a su menor exponente".

B) POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA EN FACTORES PRIMOS :

Para hallar el *MCD* de dos o más números solo se buscarán los factores comunes en forma simultánea y directa.

EJEMPLO 2:

Para los números: *144 ; 180* y *240*

144	360	240	2	
72	180	120	2	$2^2\times3$
36	45	60	3	
(12)	(15)	(20)		

son PESI, entonces se detiene la operación

$\rightarrow M.C.D(144; 180; 240)=2^2\times3=12$

EJEMPLO 3 :

Hallar el *MCD (360 ; 480)*

RESOLUCIÓN :

360	480	2
180	240	2
90	120	2
45	60	3
15	20	5
3	4	

Factores comunes:

$MCD(360; 480)=2^3\times3\times5$

$\rightarrow MCD(360; 480)=120$

PROCEDIMIENTO PARA EL CÁLCULO PARA EL M.C.M

A) POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS (DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA) :

El *MCM* es el producto de los factores comunes obtenidos , cada uno elevado a su mayor exponente.

EJEMPLO 1 :

Hallar el *MCM(120 ; 200)*

RESOLUCIÓN :

120	200	2
60	100	2
30	50	2
15	25	5
3	5	3
1	5	5
1	1	

Todos los factores:

$MCM(120; 200)=2^3\times3\times5^2$

$MCM(120; 200)=600$

EJEMPLO 2 :

Para los números: *80 ; 180* y *150*

$80=2^4\times5^1$

$180=2^2\times3^2\times5^1$

$150=2^1\times3^1\times5^2$

$\rightarrow MCM(80; 180 \text{ y } 150)=24\times32\times52=3600$

"Es el producto de factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente"

B) POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA EN FACTORES PRIMOS :

Para hallar el *MCM* de dos o más números; se buscarán los factores comunes y no comunes.

EJEMPLO 3 :

Para los números: ***48***; ***60*** y ***84***

48	60	84	2
24	30	42	2
12	15	21	2
6	15	21	2
3	15	21	3
1	5	7	5
1	1	7	7
1	1	1	

$2^4\times3\times5\times7$

$\rightarrow M.C.M(48;\ 60;\ 84)=2^4\times3\times5\times7=1680$

"Se agotan todos los factores primos sin excepción"

EJEMPLO 4 :

Hallar el ***MCM*** de ***24 ; 120*** y ***45***

RESOLUCIÓN :

36	120	90	2
18	60	45	2
9	30	45	2
9	15	45	3
3	5	15	3
1	5	5	5
1	1	1	

$\rightarrow M.C.M(36\,;120\,;90)=2^3\times3^2\times5=36$

EJEMPLO 5 :

Hallar el ***MCD*** y el ***MCM*** de ***168; 396*** y ***60***.

RESOLUCIÓN :

168	2	396	2	60	2
84	2	198	2	30	2
42	2	99	3	15	3
21	3	33	3	5	5
7	7	11	11	1	
1		1			

$*168=23\times3\times7$ $\quad *396=22\times32\times11$ $\quad *60=22\times3\times5$

$\rightarrow MCD(168;396;\ 60)=\ 2^2\times3=12$

$\rightarrow MCM(168;396;\ 60)=\ 2^3\times3^2\times5\times7\times11=27720$

PROPIEDADES RELATIVAS AL M.C.D Y AL M.C.M

(01) El *MCD* de dos o más números primos entre sí es ***1***.

EJEMPLOS :

$*\ MCD(12;\ 25)=1$ $\qquad *\ MCD(13;\ 18)=1$

(02) Sean "***a***" y "***b***" dos números enteros positivos. Si "***a***" es múltiplo de "***b***", entonces $MCD(a;b)=b$.

EJEMPLOS :

$*\ MCD(30;\ 6)=6$ $\qquad *\ MCD(40;\ 8)=8$

(03) El ***MCD*** de dos o más números es factor o divisor de cada uno de ellos.

EJEMPLO :

$*\ MCD(8;12)=4$ $\qquad *\ MCD(15;\ 20)=5$

$\rightarrow$ ***4*** es factor de ***8*** $\qquad\rightarrow$ ***5*** es factor de ***15***

$\rightarrow$ ***4*** es factor de ***12*** $\qquad\rightarrow$ ***5*** es factor de ***20***

(04) El ***MCM*** de dos números primos entre sí, es el producto de ambos .

EJEMPLO :

$MCM(12;\ 25)\ =\ 12\times25\ =\ 300$

(05) Sean "***a***" y "***b***" dos números enteros positivos. Si "***a***" es múltiplo de "***b***", entonces : $MCM(a;b)=a$

EJEMPLO:

$*\ MCM(30\,;6)=30$ $\qquad *\ MCD(40;\ 8)=40$

(06) El ***MCM*** de dos o más números es divisible por cada uno de ellos.

EJEMPLO:

$*\ MCM(8\,;12)=24$ ***24*** es factor de ***8*** ***24*** es factor de ***12***

(07) Si:

$$\begin{matrix} *\ N=\overset{\circ}{a} \\ *\ N=\overset{\circ}{b} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{N=\overset{\circ}{\overline{MCM(a;b)}}}$$ ***¡Importante!***

(08) Si:

$$\begin{matrix} *\ N=\overset{\circ}{a}\pm r \\ *\ N=\overset{\circ}{b}\pm r \\ *\ N=\overset{\circ}{c}\pm r \end{matrix} \Rightarrow \boxed{N=\overset{\circ}{\overline{MCM(a;\ b;\ c)}}\pm r}$$ ***¡Importante!***

(09) Si: "***A***" y "***B***" son ***PESI***

$M.C.D(A\ y\ B)=B \quad\wedge\quad M.C.M(A\ y\ B)=A$

(10) Si: $A=\overset{\circ}{B}$ (*A* contiene a *B*)

$M.C.D(A\ y\ B)=B \quad\wedge\quad M.C.M(A\ y\ B)=A$

(11) Si el ***M.C.D.(A ; B ; C)= d*** ; se cumple :

$M.C.D.(A^n\,;B^n\,;C^n)=d^n$ $\ ;M.C.D.(nA;\ nB;\ nC)=nd$

$$M.C.D.\left(\frac{A}{n};\frac{B}{n};\frac{C}{n}\right)=\frac{d}{n}$$

12 Si el $M.C.M.(A; B; C) = m$; se cumple :

$$M.C.M.(A^k; B^k; C^k) = m^k \; ; \; M.C.M.(kA; kB; kC) = km$$

$$M.C.M.\left(\frac{A}{k}; \frac{B}{k}; \frac{C}{k}\right) = \frac{m}{k}$$

13 Los cocientes de dividir a varios números enteros por su respectivo ***M.C.D.*** son ***PESI***

Si: $M.C.D.(A; B; C) = d$

$$* \frac{A}{d} = p \longrightarrow A = dp$$
$$* \frac{B}{d} = q \longrightarrow B = dq$$
$$* \frac{C}{d} = r \longrightarrow C = dr$$

(p, q, r: ***PESI***)

14 ***Propiedad sólo para dos números.***

El producto de dos números es igual al producto de su ***M.C.D.*** y su ***M.C.M.***

Si:

$$\left.\begin{array}{l} * M.C.D.(A; B) = d \\ * M.C.M.(A; B) = m \end{array}\right\} \boxed{A \times B = d \times m}$$

EJEMPLO :

Para los números *12* y *18*

$$\left.\begin{array}{l} M.C.D.(12; 18) = 6 \\ M.C.M.(12; 18) = 36 \end{array}\right\} \boxed{12 \times 18 = 6 \times 36}$$

PROPIEDADES IMPORTANTES PARA DOS NÚMEROS

1) Sean: *A* y *B* los números, si : $M.C.D.(A; B) = d$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A}{d} = p \\ \frac{B}{d} = q \end{array}\right\rangle PESI \quad \boxed{\begin{array}{l} A = d \times p \\ B = d \times q \end{array}}$$

$$\rightarrow M.C.M.(A; B) = d \times p \times q$$

EJEMPLO :

* Para los números *24* y *30* ; $M.C.D.(24; 30) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 6(4) \\ 30 = 6(5) \end{array}\right\rangle PESI$$

2) El producto de dos números es igual al producto de su ***M.C.D*** y su ***M.C.M.***

$$\boxed{MCD(A; B) \times MCM(A; B) = A \times B}$$

3) Sean los números :

$(a^m - 1)$ y $(a^n - 1)$, para: m y $n \in Z^{(+)}$

* Usando cocientes notables se puede demostrar que:

$$\boxed{MCD(a^m - 1; a^n - 1) = a^{MCD(m;n)} - 1}$$

* Propiedad que no es válida si quisiéramos calcular su ***M.C.M***

EJEMPLO :

Calcular el ***M.C.D.*** de $(3^4 - 1)$ y $(3^6 - 1)$

RESOLUCIÓN :

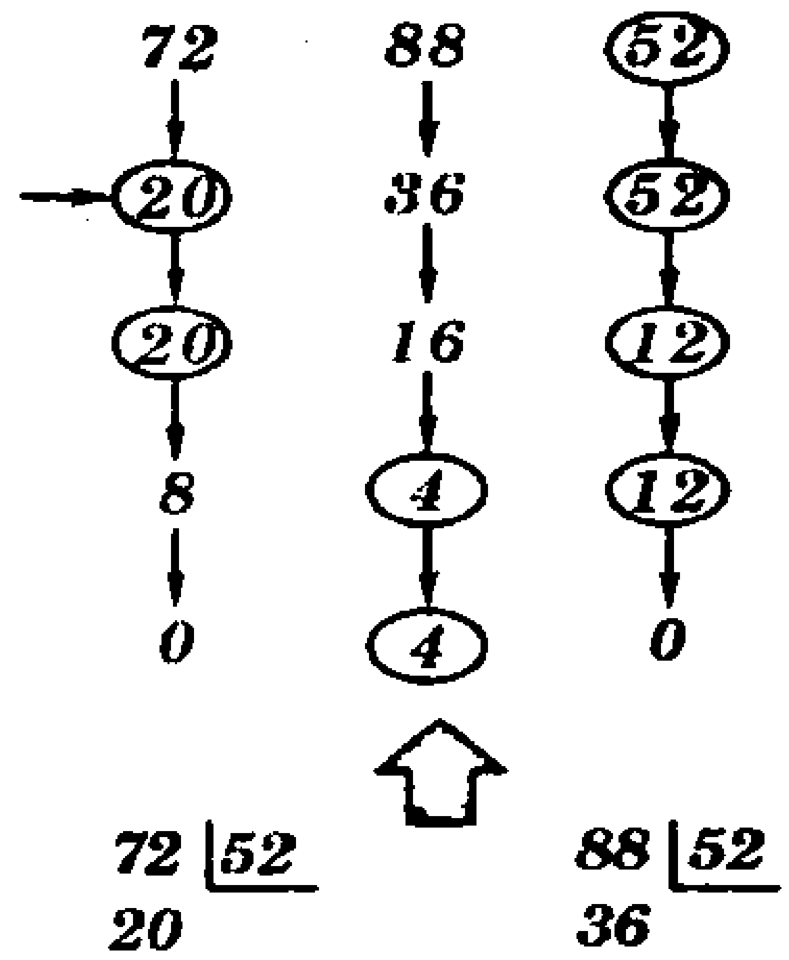
$$M.C.D = 3^{M.C.D(4;6)} - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

MÉTODOS DE STORN

Para el cálculo del ***M.C.D.*** de ***72 ; 88*** y ***52***

RESOLUCIÓN :

Se colocan los residuos, luego de dividirlos entre el número menor, que en este caso es el ***52***.



* Entonces : ***M.C.D.(72; 88; 52)=4***

OBSERVACIÓN :

El proceso termina cuando sólo queda un número y los demás son ceros.

ALGORITMO DE EUCLIDES O DIVISIONES SUCESIVAS

PARA EL CÁLCULO DEL M.C.D DE DOS NÚMEROS :

EJEMPLO 1:

Calcular el ***M.C.D.*** de ***4277*** y ***1547***

RESOLUCIÓN :

¿Parece complicado verdad? Pero observa este algoritmo que se lo debemos a Euclides , sí el mismo de geometría.

1° división	2° división	3° división	4° división
4227 ⌊1547	1547 ⌊1183	1138 ⌊364	364 ⌊91
1183 2	364 1	91 3	0 4

	2	1	3	9	← cocientes sucesivos
4277	1547	1183	364	(91)	← M.C.D.
1183	364	91	0		← residuos sucesivos

$\Rightarrow$ ***M.C.D(4227; 1547)=91***

EJEMPLO 2 :

Hallar el ***MCD*** de ***56*** y ***21***

RESOLUCIÓN :

1°) Se colocan en forma horizontal los números dados así.

Cocientes →				
56	21			
Residuos →				

2°) Se divide **56** entre **21** escribiendo el cociente y el residuo donde indica el cuadro.

Cocientes →	2			
56	21			
Residuos: 14				

3°) El residuo obtenido pasa a ser divisor, efectuando una nueva división **21** entre **14**.

Cocientes →	2	1		
56	21	14		
Residuos: 14	7			

4°) Se repite el paso **3**, hasta que el residuo sea cero.

Cocientes →	2	1	2	
56	21	14	7	← MCD
Residuos: 14	7	0		

Hasta ahí, ya no podemos repetir el paso **3**, por lo tanto el ***MCD*** de **56** y **21** es **7**.

$$\rightarrow MCD(56\,;21)=7$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Halle la cantidad de pares de números de modo que su ***MCD*** sea ***36*** y estén comprendidos entre ***750*** y ***950***.

A) 9 ***B) 10*** ***C) 11*** ***D) 12*** ***E) 13***

RESOLUCIÓN:

Se sabe que $MCD(A;B)=36$

$$A=36(p),\quad B=36(q) \quad \text{PESI}$$

Por dato, ***A*** y ***B*** deben estar entre ***750*** y ***950***. Por lo tanto

$$\frac{750}{36}<p<\frac{950}{36} \Rightarrow \frac{750}{36}<q<\frac{950}{36}$$

$$20{,}8...<p<26{,}3\;;\;\;20{,}8...<q<26{,}3...$$

Como p y q son ***PESI***

p	21	21	21	21	22	22	23	23	23	24	25
q	22	23	25	26	23	25	24	25	26	25	26

Hay ***11*** pares de números ***PESI*** que están entre ***20*** y ***27***. Por lo tanto, hay ***11*** pares de números que están entre ***750*** y ***950*** cuyo ***MCD*** es ***36***.

RPTA : "C"

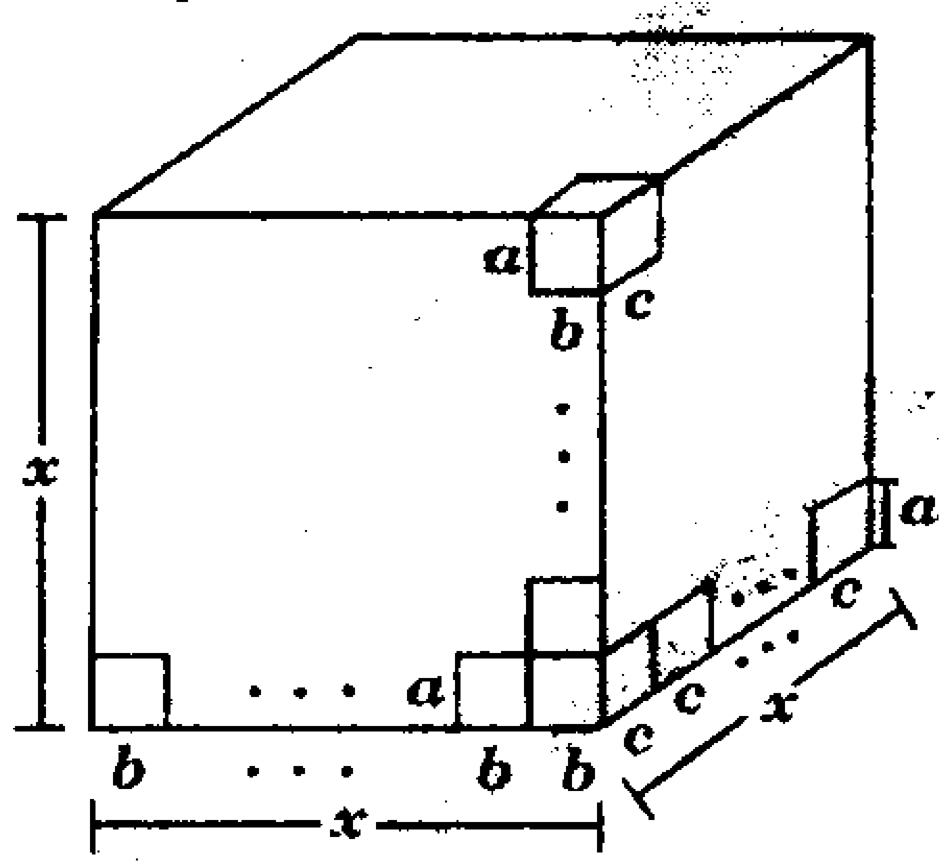
PROBLEMA 2 :

Si desea construir un cubo compacto, con ladrillos de dimensiones de ***24***; ***15*** y ***30*** centímetros. Si la medida de la arista de este cubo está comprendida entre ***1*** y ***2*** metros, y cada ladrillo cuesta ***S/.2***, ¿cuál sería el costo total de dicha construcción?

A)S/.160 ***B)S/.320*** ***C)S/.240*** ***D)S/.360*** ***E)S/.200***

RESOLUCIÓN :

* Cubo formado por ladrillos de dimensiones ***a, b*** y ***c***.



Sea x la medida de la arista, se cumple

$$\left.\begin{matrix} x=\overset{o}{a} \\ x=\overset{o}{b} \\ x=\overset{o}{c} \end{matrix}\right\} x=\overset{o}{\overline{MCM(a,b,c)}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{número total}\\ \text{de ladrillos}\\ \text{en el cubo}\end{pmatrix}=\frac{\text{Volumen del cubo}}{\text{Volumen de un ladrillo}}=\frac{x^3}{a\times b\times c}$$

* Dimensiones de ladrillos que conformarán el cubo: ***24; 15*** y ***30 cm.***

Sea x la medida de la arista del cubo

$$\Rightarrow x=\overset{o}{\overline{MCM(24;15;30)}}=\overset{o}{120}\ cm$$

Además,

$$\underbrace{1m}_{100\,cm}<x<\underbrace{2m}_{200\,cm} \Rightarrow x=120$$

$$\begin{pmatrix}\text{Número total}\\ \text{de ladrillos}\\ \text{en el cubo}\end{pmatrix}=\frac{\overset{5}{\cancel{120}}\times\overset{8}{\cancel{120}}\times\overset{4}{\cancel{120}}}{\cancel{24}\times\cancel{15}\times\cancel{30}}=160$$

Como cada ladrillo cuesta ***S/.2***

$$\Rightarrow \text{costo total} = 160\times 2 = S/.320$$

El costo total de la construcción será ***S/.320***.

RPTA : "B"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular por simple inspección :

A) M.C.D (4;8)= ____ ***B) M.C.D(12;36;60)=*** ____

C) M.C.D(15;8)= ____ ***D) M.C.D (25;16;9)=*** ____

02 Calcular por simple inspección :

A) M.C.M(4 ;8) = _____ B) M.C.M(6 ;10 ; 30)=_____

C) M.C.M(4; 7)=_____

03 Complementar la siguiente tabla colocando el máximo común divisor en el casillero correspondiente:

M.C.D.	*1*	*5*	*12*	*15*	*30*	*50*	*75*	*80*
1	*1*			*1*				
8				*1*				*8*
15			*3*					
40					*10*			
60						*10*		*20*

04 Hallar el ***MCD*** de los siguientes números :

A) 195 y 130 B) 240 y 400 C) 350 y 560

05 Hallar el ***MCM*** de los siguientes números :

A) 385 y 245 B) 288 y 168 C) 527 y 374

06 Hallar el ***MCD*** de ***48 ; 84 ; 90*** y ***108***

RPTA : ....

07 Hallar el ***MCM*** de ***18 ; 40 ; 56*** y ***30.***

RPTA : ....

08 Hallar el ***MCD*** de:

A) 20 y 25 ***F)*** $2^3 \times 3^2 \times 5$ y $2^4 \times 3 \times 5^2$

B) 18 y 24 ***G)*** $2^4 \times 3^2 \times 7^2$ y $2^2 \times 3^5 \times 11^2$

C) 56 y 49 ***H)*** $2^4 \times 3^4 \times 5 \times 7^3$ y $2^2 \times 3^2 \times 7$

D) 110 y 121 ***I)*** $3^4 \times 71^1 \times 13^2$ y $2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 13$

E) 504 y 540 ***J)*** $2^3 \times 75 \times 11^3$ y $2^4 \times 7^2 \times 11$

09 Hallar el ***MCD*** de :

A) 24 y 70 ***F)*** $2^3 \times 7 \times 5$ y $2^2 \times 7^2 \times 3$

B) 10 ; 40 y 120 ***G)*** 7×11 y 72×2

C) 14 ; 35 y 56 ***H)*** $5^2 \times 3 \times 2^2$ y $5 \times 3^2 \times 2$

D) 11 ; 20 y 121 ***I)*** $2^2 \times 7 \times 3$ y $2^3 \times 5$

E) 16 ; 11 y 12 ***J)*** $2^4 \times 5^2$ y $2^2 \times 3^3$

10 Utilizando la descomposición simultánea en factores primos calcular el ***M.C.M.*** de ***450; 540*** y ***840.***

11 ¿Cuál es el menor número entero que contiene en forma exacta a : ***72 ; 66*** y ***70***?

12 ¿Cuál es el menor número entero que dividido entre ***6 ; 8*** y ***10*** deja siempre un mismo residuo?

13 Calcular la suma de los cocientes que se obtengan al calcular el ***MCD*** de ***192*** y ***36*** mediante el algoritmo de Euclides.

A)8 B)11 C)10 D)9 E)7

14 Mediante el algoritmo de Euclides hallar el ***MCD*** de ***128*** y ***72.***

128	*72*		

A)6552 B)6525 C)6052
D)6553 E)6557

15 $A = 2^9 \times 3^5 \times 2^7$

$B = 2^{11} \times 3^2 \times 2^5$

Calcular el ***MCM*** de ***A*** y ***B***

A) $2^9 \times 3^2 \times 2^5$ ***B)*** $2^{11} \times 3^3 \times 2$ ***C)*** $2^5 \times 3^2 \times 2^{11}$

D) $2^{11} \times 3^5 \times 2^7$ ***E)*** $2 \times 3^7 \times 11^2$

16 $P = 2^3 \times 3^5 \times 7$

$Q = 2^4 \times 3^2 \times 7^3$

Determinar: ***MCD (P; Q)***

A) $2^4 \times 3^2 \times 7$ ***B)*** $2^3 \times 3^2 \times 7$ ***C)*** $2^3 \times 3^2 \times 7^3$

D) $7^2 \times 3^3$ ***E)*** $2^4 \times 3^5 \times 7$

17 Calcular la diferencia entre el ***MCM*** y el ***MCD*** de ***120*** y ***72.***

A)336 B)280 C)300 D)726 E)450

18 ¿Cuántos divisores tiene el ***MCD*** de ***350; 220*** y ***270***?

A)3 B)2 C)4 D)6 E)8

19 Si $A = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \wedge B = 2^2 \times 3^4 \times 7^2$

Determine el ***MCM*** de ***A*** y ***B***

A)167800 B)1578600 C)1787600
D)1587600 E)477800

20 Si ***MCD (3a; 3b) = 45.*** Halle ***MCD (2a; 2b).***

A)10 B)20 C)30 D)35 E)40

21 Calcular el ***MCM*** de ***208*** y ***400.***

A)2100 B)5200 C)20800
D)1300 E)4200

22 Si $MCM[A,B,C] = 60$.

Calcule $MCM[3A,3B,3C]$

A)120 B)140 C)150 D)180 E)200

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcule el ***MCD*** de $\overline{ab}$ y $\overline{a(b+1)}$

A)a+b B)10 C)1 D) ab E) 8

02 Calcule el ***MCD*** de $\overline{ab}!$ y ***4!.***

A) 5! B) 24 C) 1 D)64 E)60+a

03 Si: $MCD(210k;300k;420k)=1200$ calcule «k».

A) 20 B)30 C)40 D)25 E)35

04 Calcular el número de divisores del MCD de los siguientes números:

$$A = 2^2\times5^4\times7^2$$
$$B = 5^2\times2^6\times11^1$$
$$C = 2^2\times5^2\times13^2$$

A)8 B)9 C) 17 D) 21 E) 15

05 Si: $MCD(6^{n+1}+6^n;\ 9^{n+1}+9^n)=162$ calcule el valor de «n».

A)2 B)3 C)5 D) 4 E) 1

06 Al calcular el MCD de 2 números por el algoritmo de Euclides, se obtuvieron como cocientes sucesivos $1;3;2$. Determine la diferencia de los números si suman 480.

A) 90 B) 60 C) 30 D)80 E)160

07 Al calcular el MCD de dos números primos entre si por el algoritmo de Euclides, se tuvo por cocientes sucesivos a los 5 primeros números enteros positivos. Dar como respuesta el mayor de los 2 números.

A) 147 B)200 C)225
D)198 E)215

08 Calcular el valor de k, si:

* $MCD(6A;6B)=24k$
* $MCD(2A;\ 2B) =10k-20$

A)6 B)8 C)10 D) 12 E) 16

09 Si: $MCD(\overline{4a3};\ \overline{bab};\ \overline{c72}) = 11$

calcule $a + b - c$.

A)11 B) 21 C) 18 D)8 E)6

10 Si se cumple que :

$$*\ MCD(A;\ B)=50$$
$$*\ A + B = 350$$

¿cuántos pares de valores A y B cumple?

A)6 B)5 C)4 D)3 E)2

11 Si: $*\ MCD(A;\ B)=6$

$*\ A^2 - B^2=468$

calcule el valor de «A».

A)48 B)42 C)30
D) 70 E) 78

12 Tres cables que miden $20;\ 150$ y 180 metros se dividen en el menor número de trozos de igual longitud entera. ¿Cuál es la longitud de cada trozo?

A)20 B)5 C)10 D)6 E)12

13 Si tenemos que llenar cuatro cilindros de capacidad $72;\ 24;\ 56$ y 120 galones, ¿cuál es la máxima capacidad del balde que puede usarse para llenarlos exactamente?

A) 12 galones B) 6 galones
C) 16 galones D) 8 galones
E) 18 galones

14 Se tiene 3 cajas de galletas a granel y se desea empaquetarlas en bolsas plásticas de manera que no sobren galletas de las $270\ ;390$ y 450 galletas que respectivamente hay en las cajas. ¿Cuántas bolsas plásticas como mínimo se necesitan?

A) 74 B)38 C) 66 D)37 E) 84

15 Calcule $\overline{abc}$ (mínimo) tal que:

$MCD(\overline{abc};\ \overline{cba})=66 \wedge \overline{abc}-\overline{cba}=\overline{1xy}$

Dar como respuesta $a + b + c$.

A)10 B)11 C)12 D)14 E)13

16 Se han dividido 3 barras de acero de longitudes $540;\ 480$ y 360 mm en trozos de igual longitud entera, siendo ésta la mayor posible. ¿Cuál es esta longitud?

A) 60 mm B) 23 mm C) 90 mm
D) 50 mm E) 17 mm

17 Sobre el contorno de un terreno rectangular de 7480 m y 1020m de dimensiones , se desea plantar árboles a una misma distancia de manera que haya un árbol en cada esquina. Calcule la menor cantidad de árboles que se pueda plantar.

A)250 B)150 C)100 D)75 E)50

18 Sean A y B dos números que guardan una relación de 60 a 40. Si el $MCD(A\ ;\ B)=9$, calcule el mayor de A y B.

A) 18 B) 27 C)36 D)45 E) 9

19 Si: $MCD(36k;\ 54k;\ 90k)=108$

calcular la cifra de mayor orden del menor de los números.

A) 1 B) 3 C) 2 D)5 E)4

20 Se divide a $245;\ 340$ y 540 entre cierto número menor que 20, teniéndose de restos $5;4$ y 12 respectivamente. ¿Cuál es ese número entero?

A)12 B)10 C)16 D)15 E)14

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuántos divisores tiene el MCM de 180 y 240?

A) 15 B)18 C)30 D)24 E)40

02 Sean A y B números enteros positivos.

Si: $\dfrac{A}{B}=\dfrac{11}{3}$

* $MCM(A;B)+MCD(A;B)=612$

calcular el $MCD(A\ ;\ B)$.

A) 12 B) 252 C) 18
D) 54 E) 198

03 Si: $MCM(N;(N+1);3N)=546$ calcular el $MCD(N+2\ ;\ 2N+1)$

A) 135 B)3 C)182 D)5 E)9

04 Dado: $A = 2\times3^x\times5^y$

$$B = 2^x\times3\times5$$

además: $MCM(A;\ B)=180$

Calcule el valor de «A».

A) 60 B)30 C)450 D) 340 E) 90

05 El MCM de dos números consecutivos es 1056. Calcular el mayor de ellos.

A) 42 B)32 C)33 D)44 E) 72

06 Si: $A = 2^8\times5^4\times13^2$

$$B = 5^{12}\times2^9\times11^3$$

calcular el MCM de A y B. Dar como respuesta la cantidad de ceros del numeral resultante.

A)4 B)12 C)8 D) 9 E) 16

07 Un cartero «A» llega a la ciudad de Lima cada 6 días y un

cartero «*B*» llega a la ciudad de Lima cada *4* días. Si coincidieran el *2* de julio, ¿cuándo coincidirán nuevamente? (diga la fecha)

A) 26 de julio ***B) 14 de julio***
C) 27 de julio ***D) 15 de julio***
E) 13 de julio

08 Una persona va al cine cada *3* días, a bailar cada *5* días y al estadio cada *10* días. Si el *6* de setiembre realizó las tres actividades, ¿cuál es la fecha más próxima en que volverá a realizar las *3* actividades?

A) 5 de octubre ***B) 7 de octubre***
C) 6 de octubre ***D) 8 de octubre***
E) 4 de octubre

09 El número de hojas de un libro es mayor que *200* y menor que *300*. Si se cuentan de *2* en *2* sobra 1; de *3* en *3* sobran *2*; de *5* en *5* sobran *4* y de *7* en *7* sobran *6*. ¿Cuántas hojas tiene el libro?

A) 247 ***B)219*** ***C)209***
D)299 ***E) 295***

10 Un tren se desplaza a velocidad constante recorriendo primero *360 km* y luego *480 km*. Si el *MCM* de los tiempos empleados es *24* horas, ¿cuántas horas ha empleado en total?

A) 7 B) 28 C) 21 D)35 E)14

11 Determinar la menor superficie del terreno rectangular que puede ser dividido en lotes rectangulares de $12m\times10m$ y $20\ m\times8m$, sabiendo que las primeras dimensiones representan el largo y las segundas el ancho.

A)4800 m² B)1600 m². C)2400 m²
D)1 240 m² E)28 800 m²

12 Calcular «*A*», si:

* $MCM(A;B)=2A$
* $MCD(A;B)=\dfrac{A}{3}$
* $A-B=60$

A) 60 B)120 C) 180 D) 240 E) 300

13 Si se sabe que:

* $MCM(A;B)=300$
* $A+B=37$
* *A* y *B* son *PESI*. calcular $A-B$

A) 10 B)18 C) 13 D) 20 E)15

14 Sean *AyB* dos enteros positivos, donde se cumple:

* $AB=12MCM(A;B)$
* $A+B=6MCD(A;B)$

Calcular $A-B$. si $(A>B)$.

A) 46 B)84 C)60 D) 36 E) 48

15 Si:

* $MCM(A;B)=180$
* $A+B=150$

calcular *AB*.

A) 3 600 ***B) 9 000*** ***C) 5400***
D) 7200 ***E) 6 000***

16 Si:

$MCD(6!;5!)=\overline{a(b-3)(c-2)}$

$MCM((c+2)!;(b+2)!)=\overline{m(n-3)pq}$

calcule: $m+n+p+q+a+b+c$

A)18 B)15 C)28 D) 29 E) 20

17 Determinar la suma de los términos de una fracción equivalente a *36/63* tal que el *MCM* de sus términos sea *560*.

A) 220 ***B) 242*** ***C) 300***
D)264 ***E) 440***

18 Si: $MCM(A;B)=A^2=324$

determine el producto de cifras del $MCD(A;B)$.

A)9 B)8 C) 18 D)72 E) 324

19 El *MCM* de tres números primos absolutos es *1001*. ¿Cuál es el *MCM* del mayor de estos números con *5* ?

A) 68 B) 67 C) 65 D) 62 E) 55

20 Tres móviles *A* , *B* y *C* parten al mismo tiempo de la línea de partida de una pista circular que tiene *240* m de circunferencia. «*A*» se desplaza con velocidad de *8m/s*; «*B*» con velocidad de *5m/s* y «*C*» con velocidad de *3m/s*. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los móviles realicen el primer encuentro en la línea de partida?

A) 280 minutos ***B) 24 minutos***
C) 4 minutos ***D) 40 minutos***
E) 16 minutos

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)C	4)B	5)D	6)B	7)E	8)C	9)A	10)D
11)B	12)C	13)D	14)D	15)C	16)A	17)E	18)B	19)C	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

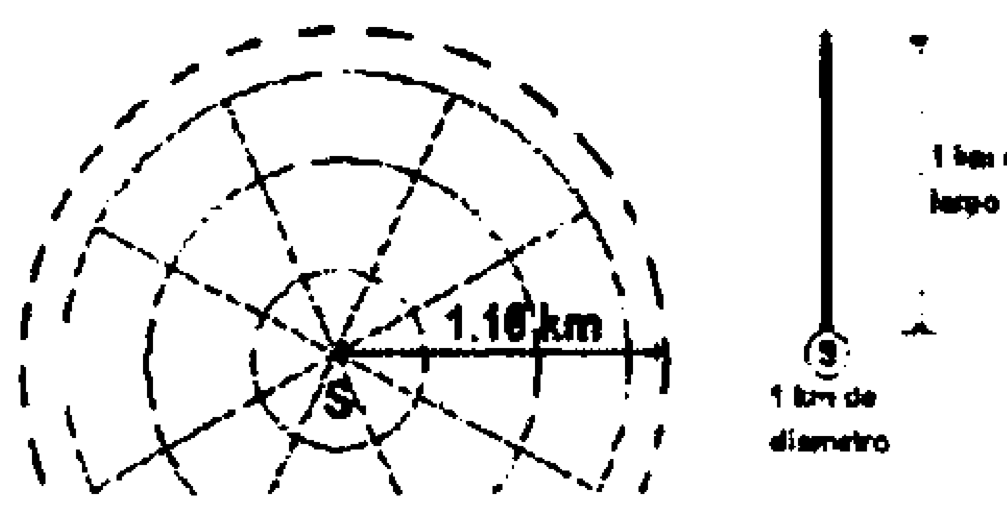
1)D	2)C	3)B	4)E	5)C	6)D	7)B	8)C	9)C	10)E
11)C	12)C	13)C	14)E	15)C	16)B	17)A	18)B	19)C	20)C

¿ De qué color es el oso ?

Un explorador camina un kilómetro hacia el sur, gira a su izquierda y camina un kilómetro hacia el este, vuelve a girar hacia su izquierda y camina un kilómetro hacia el norte. Se encuentra de regreso en el punto de partida. Le dispara a un oso. ¿De qué color es el oso?

RESOLUCIÓN :

La respuesta tradicional es «*BLANCO*», porque el explorador debió haber partido del Polo Norte . Bastante tiempo después , alguien se preguntó si esa sería la única solución posible y, luego de que trabajó en ello, descubrió que el Polo Norte no es el único punto de partida que satisface las condiciones dadas (caminar un kilómetro hacia el sur, después uno hacia el este, y por último uno hacia el norte para quedar en el punto de partida).



Si examinamos la zona del Polo Sur, en un mapamundi, nos daremos cuenta que cualquier punto de un paralelo situado a poco más de 1,16 kilómetros del polo cumple esas condiciones, pues después de caminar un kilómetro hacia el sur, y luego caminar un kilómetro en dirección este, se daría exactamente una vuelta alrededor del Polo Sur. Pero este paralelo no es el único que cumple las condiciones del problema.

¿Puedes decir cómo encontramos más sitios que cumplen con las condiciones dadas, aunque no haya osos en el Polo Sur.

RPTA : blanco

NUMEROS RACIONALES
CAPITULO 070

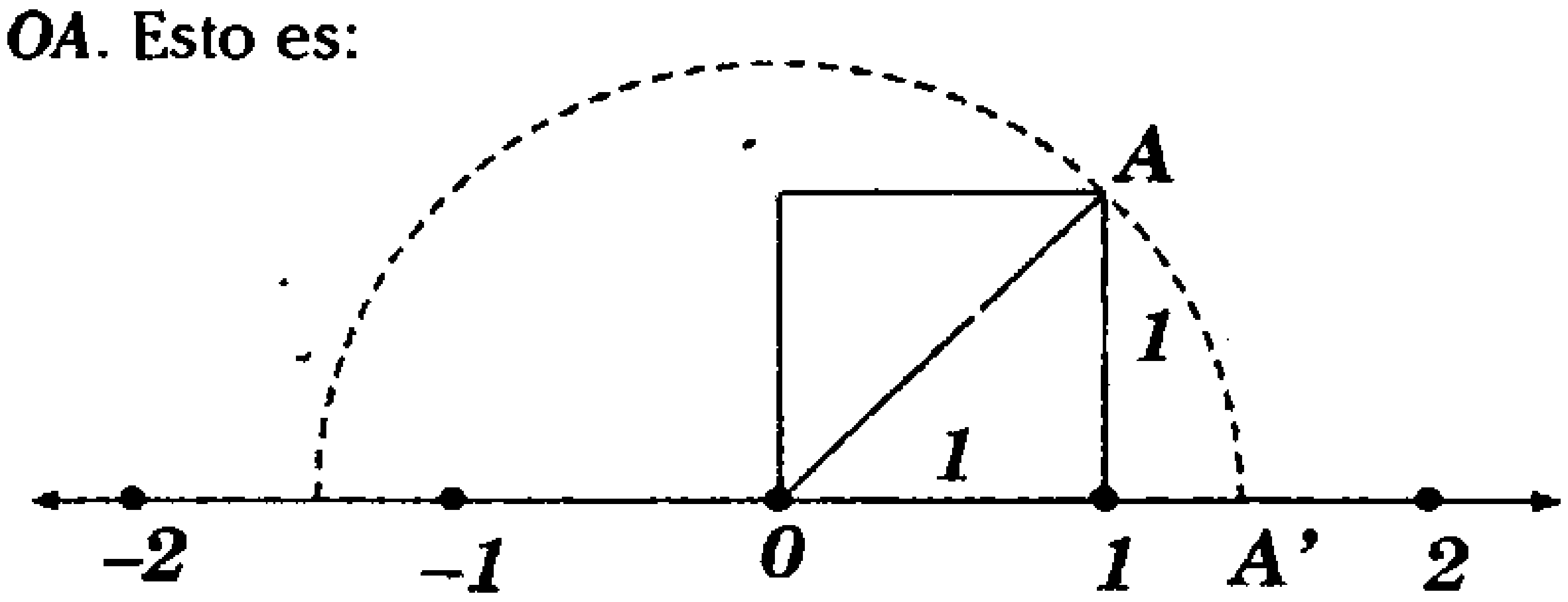
OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Justificar la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros.*
* *Determinar una fracción de números enteros.*
* *Construir el conjunto de número racionales a partir de fracciones equivalentes.*
* *Clasificar los números fraccionarios por su característica.*
* *Obtener los números avales e interpretarlos.*
* *Efectuar cambios de base con los números avales.*
* *Reconocer las fracciones continuas.*

INTRODUCCIÓN :

Se atribuye a Pitágoras (unos **500** años antes de nuestra era) el notable descubrimiento de los números irracionales. Para poner esto de manifiesto construyamos un cuadrado y tracemos la diagonal *OA*. Esto es:



* Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que sea $\frac{m}{n}$ (siendo m y n primos entre sí, lo que siempre resulta después de simplificar la fracción). La medida de la diagonal *OA* tomado el lado por unidad aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *O1A* se obtiene.

$$1^2 + 1^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

De donde: $2n^2 = m^2 = \#par \Rightarrow m = 2k$

$2n^2 = 4k^2$

$n^2 = 2k^2 = \#\,par \Rightarrow n = 2q$

Pero esto es imposible pues habíamos supuesto que m y n son primos entre sí.

NOCIONES PREVIAS :

Se conoce que la adición, sustracción y multiplicación están bien definidos en "Z", es decir que la suma , diferencia y productos de *2* números enteros es otro entero.

EJEMPLO :

* $2 + 5 = 7 \in Z$
* $2 - 5 = 3 \in Z$
* $2 \times 5 = 10 \in Z$

OJO :

Sin embargo la división es una operación que está parcialmente definido en "Z", puesto que el cociente de *2* números enteros , no siempre es entero.

EJEMPLO :

$*\ \frac{12}{4} = 3 \in Z \qquad *\ \frac{3}{7} \notin Z$

NOTA :

Como en nuestra rutina diaria se va a dar estos casos,es necesario ampliar el conjunto de los números enteros (Z).

NÚMEROS RACIONALES

Empezaremos tomando a los números enteros en pares ordenados , denotándolo a través de la división.

EJEMPLO :

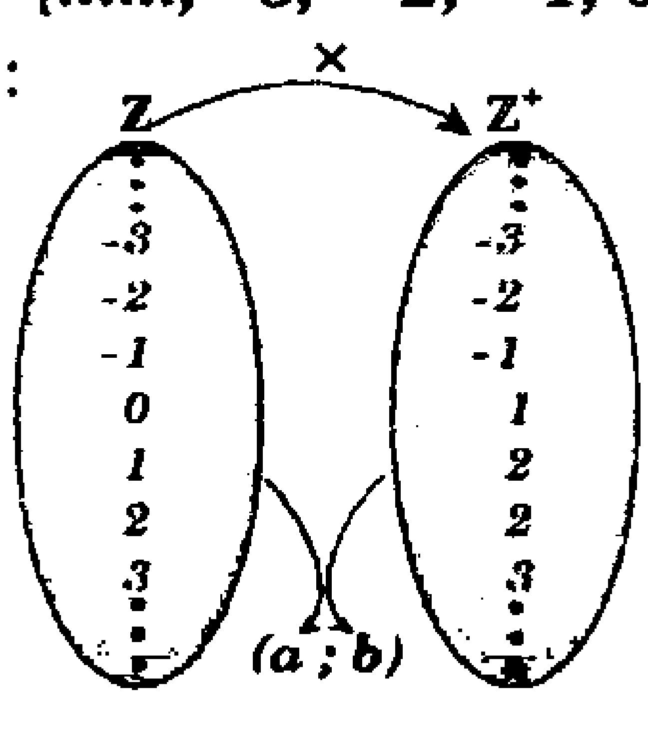
$*\ (1;2) = \frac{1}{2} \qquad *\ (-2;3) = \frac{-2}{3} \qquad *\ \underbrace{(5;0) = \frac{5}{0}}_{Indeterminado}$

Se puede apreciar que hay que tener cuidado que la *2da*. componente del par ordenado no sea cero ; para ello formemos el conjunto $Z \times Z^*$, donde :

$Z = \{....; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ;..........\}$

$Z^* = Z - \{0\} = \{......;-3; -2; -1; 0;1;2;3 ;......\}$

* Gráficamente :



* Entonces :

$$Z \times Z^{*} = \{(a\,;b) = \frac{a}{b} \,/ a \in Z \wedge b \in Z^{*}\}$$

OBSERVACIÓN :

Al considerar algunos pares y denotando las componentes mediante la división:

$$\ldots\ldots (2\,;3)\,,\ (4\,;6)\,,\ (6\,;8)\,,\ldots\ldots$$

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{4}{6} \qquad \frac{6}{9}$$

Son equivalentes

La invitación nos permite indicar que estos cocientes son "equivalentes", pero si nos preguntarán: ¿Los cocientes $\frac{4}{10}$ y $\frac{6}{15}$ son "equivalentes"?,

Necesitaríamos un fundamento teórico, para responder la interrogante.

ENTONCES :

En el conjunto $Z \times Z^{*}$, definamos la siguiente relación "~", donde : $(a;b) \sim (c;d)$, cuando $a \times d = b \times c$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{c}$$

EJEMPLO :

* $\frac{4}{10} \sim \frac{6}{15}$, porque $4 \times 15 = 10 \times 6$

OJO :

Se puede probar que las relación ~ es una relación de equivalencia en el conjunto $Z \times Z^{*}$ por verificar la propiedades : reflexiva , simétrica y transitiva. Al ser ~ una relación de equivalencia , determina en $Z \times Z^{*}$ una clasificación en clases de la equivalencia y en cada clase están todos los pares equivalentes entre si.

EJEMPLO :

$$\ldots\ldots \sim (-2\,;3) \sim (-4\,;6) \sim (-6\,;9) \sim \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \sim \frac{-2}{3} \sim \frac{-4}{6} \sim \frac{-6}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

* Luego todos ellos conforman una clase de equivalencia :

$$\left\{\ldots\ldots; \sim \frac{-2}{3} \sim \frac{-4}{6} \sim \frac{-6}{9}; \ldots\ldots\right\}$$

Así mismo cualquiera de ellos puede ser tomado como un representante de la clase.

EJEMPLO:

$\frac{-4}{6}$ y la notación sería :

$$\left[\frac{-4}{6}\right] = \left\{\ldots\ldots; \frac{-2}{3}\,;\, \frac{-4}{6}; \frac{-6}{9}; \ldots\ldots\right\}$$

En una clase de equivalencia de los infinitos representantes que tiene . Hay uno en particular aquel cuyas componentes son primos entre si, el cual es denominado representante canónico por ejemplo en la siguiente clase de equivalencia.

EJEMPLO :

En el ejemplo anterior : $\left[\frac{-2}{3}\right]$ es el presentante canónico

En la clase , dado que : *-2* y *3* son ***PESI***

* cada una de las clase de equivalencias determinadas en $Z \times Z^{*}$ es denominado número racional .

EJEMPLOS :

$$\left[\frac{-2}{3}\right], \left[\frac{3}{7}\right], \left[\frac{4}{9}\right]$$

OJO :

No hay un par que este en *2* clases , de aquí que se puede clasificar a todos los pares $\frac{a}{b}$,en conjuntos no vacíos disjuntos *2* a *2* y cuya unión es $Z \times Z^{*}$.

EN GENERAL :

Dados *2* pares ordenados $(a\,;b)$ y $(c\,;d)$, pertenecientes a $Z \times Z^{*}$ son equivalentes si y solo si: $a \times d = b \times c$

* Luego : $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

* Llamaremos clase de equivalencia de $\frac{a}{b}$ o Simplemente clase $\frac{a}{b}$, al conjunto de todos los pares ordenados equivalentes a $(a\,;b)$.

*Definiremos entonces el conjunto de los números racionales , como :

$$Q = \left\{\left[\frac{a}{b}\right] / (a;b) \in Z \times Z^{*}\right\}$$

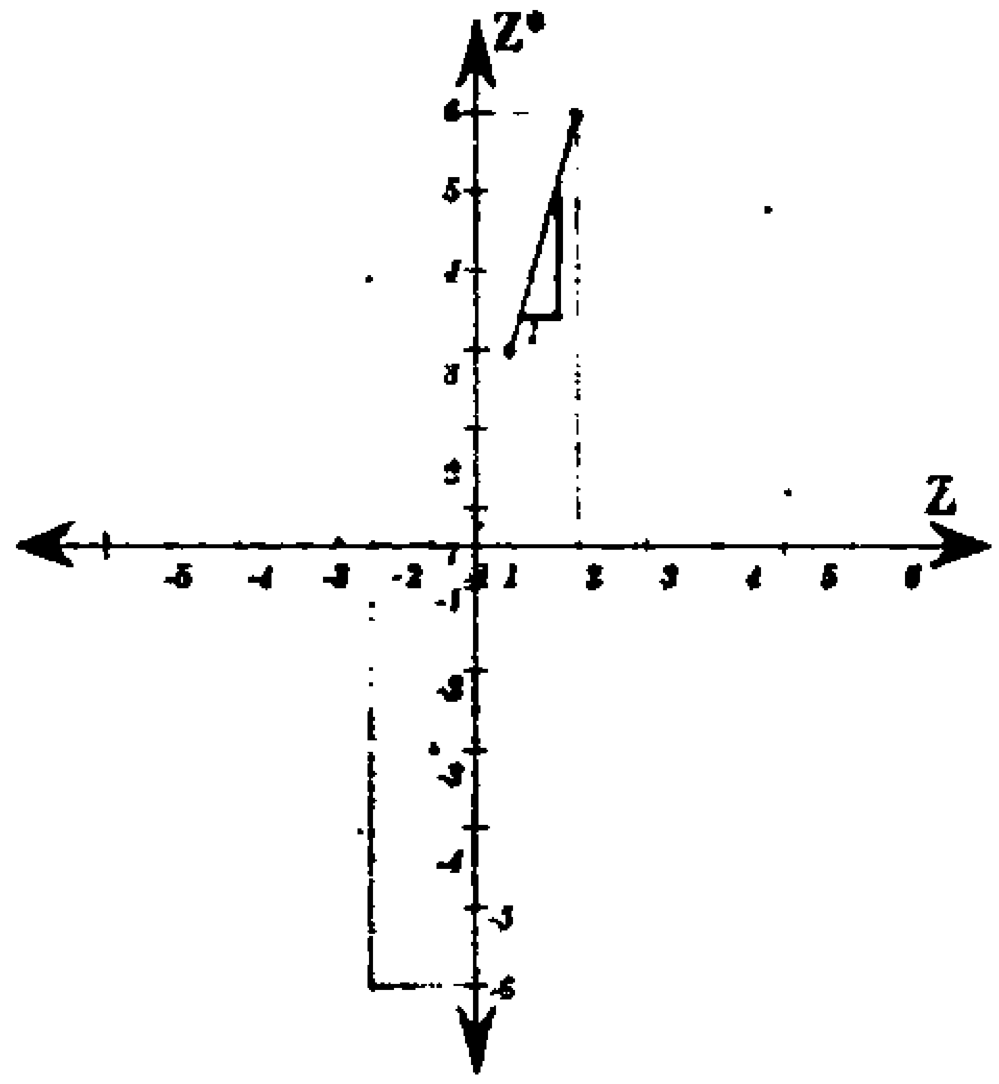
Donde :

$\left[\frac{a}{b}\right]$ se llama clase $\frac{a}{b}$ o número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$

OBSERVACIONES :

I) El conjunto Q es un conjunto de conjuntos , donde cada número racional (clase) tiene infinidad de representantes.

II) La gráfica de cualquier clase $\left[\frac{a}{b}\right]$ es parte de una recta que pasa por origen y cuya pendiente es $\frac{b}{a}$



* Estos puntos representan la gráfica de:

$$\left[\frac{1}{3}\right]=\left\{......;\frac{-2}{-6}\ ;\ \frac{1}{-3};\frac{1}{3};\frac{2}{6};.........\right\}$$

* Y se puede apreciar que forma parte de una recta cuya pendiente es *3*.

III) se tiene $\frac{5}{3}\sim\frac{10}{6}\sim\frac{15}{9}$, en nuestro uso normal es : $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}=\frac{15}{9}$, considera de igual forma todo número racional $\left[\frac{a}{b}\right]$ o $\frac{a}{b}$.

IV) El conjunto Z coincide con la unión de las clases

$$\left[\frac{n}{1}\right], con\ \frac{n}{1}=n,\ luego: Z\subset Q$$

DEFINICIÓN :

Un conjunto *A* es denso con la relación de orden $(\leq)$ si dados *2* elementos *a* y *b* de *A*, tales que $a<b$ existe un elemento, tal que $a<c<b$.

De lo anterior tenemos que *Q* es denso, pues entre *2* racionales cualesquiera distintos siempre puede encontrarse otro número racional.

EJEMPLO :

* Dados : $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$

* En particular : $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{12}$

Se encuentra :

$$\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}$$

NOTA :

De los anterior podemos afirmar que entre dos números racionales hay infinitos números racionales, pese a esto los números racionales no cubren totalmente la recta real. Dichos vacíos serán cubiertos por los números irracionales.

EJEMPLO :

$$2, -3, 5, \pi, etc....$$

Los cuales no pueden provenir de dividir *2* enteros.

OJO :

El conjunto de los números reales es la unión disjunta de los conjuntos de números racionales con el de los irracionales.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son aquellos números racionales que no son enteros.

EJEMPLOS :

$\frac{7}{8};\frac{2}{3};\frac{1}{3}$ (son números fraccionarios) ; $\frac{4}{-2};\frac{6}{3};\frac{-25}{5}$ (no son números fraccionarios)

FRACCIÓN :

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son positivos.

$\frac{1}{2};\frac{2}{4};\frac{5}{2};\frac{7}{3}$ (fracción) ; $\frac{-1}{2};\frac{3}{-5};\frac{1}{-7}$ (no son fracciones)

* Si *F* es fracción :

$$F=\frac{N}{D}\begin{matrix}\rightarrow Numerador\\ \rightarrow Denominador\end{matrix}$$

Donde :

$$N;D\in Z^{+}\wedge N\neq\overset{o}{D}$$

INTERPRETACIÓN :

* El denominador indica a las partes iguales en que se divide la unidad.

* El numerador representa las partes de la unidad (o el todo) que se toman o consideran.

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Sea la fracción: $\frac{N}{D}$

I) POR LA COMPARACIÓN DE SU VALOR RESPECTO A LA UNIDAD :

Propia	Impropia
$\frac{N}{D}<1\Rightarrow N<D$	$\frac{N}{D}>1\Rightarrow N>D$
$\frac{2}{3};\frac{1}{4};\frac{3}{13}$	$\frac{7}{5};\frac{9}{4};\frac{31}{2};$

OBSERVACIÓN :

Una fracción impropia también puede expresarse del siguiente modo :

$$\frac{5}{3}=1\underbrace{\frac{2}{3}}_{fracción\ mixta}\ porque\ \begin{array}{r|l}5&3\\2&1\end{array}$$

II) POR SU DENOMINADOR :

Decimal	Ordinaria
$D=10^{k}$	$D\neq10^{k}$
$\frac{3}{10};\frac{7}{10^{2}};\frac{125}{10^{3}}$	$\frac{1}{3};\frac{7}{19};\frac{2}{5};$

III) POR LA CANTIDAD DE DIVISORES COMUNES DE SUS TÉRMINOS :

Irreductible	Reductible
N y D son PESI MCD (N;D) = 1	N y D no son PESI MCD (N;D) ≠ 1
$\frac{5}{7};\frac{1}{3};\frac{7}{93}$	$\frac{3}{15};\frac{8}{24};\frac{42}{91};$

IV) POR GRUPOS DE FRACCIONES:

Homogéneas	Heterogéneas
Cuando todas tienen igual denominador.	Cuando al menos 2 de sus dominadores Son diferentes.
$\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{11}{3}$	$\frac{7}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};$

OBSERVACIONES :

A) Para comparar *2* fracciones se puede utilizar el método de "la multiplicación en aspa", el cual será el siguiente :

$$\begin{matrix}14 & & 15\\ \frac{2}{3} & \otimes & \frac{5}{7}\end{matrix}$$

como: $14<15\Rightarrow\frac{2}{3}<\frac{5}{7}$

EJEMPLO :

¿Qué fracción es menor : $\frac{7}{11}$ ó $\frac{8}{13}$

RESOLUCIÓN :

$$91 \swarrow \quad \searrow 88$$

$$\frac{7}{11} \otimes \frac{8}{13} \rightarrow 88<91 \rightarrow \frac{8}{13}<\frac{7}{11}$$

RPTA : $\frac{8}{13}$

OJO :

Si se pide comparar más de ***2*** fracciones , se puede aplicar el método de "la multiplicación en aspa", tomando de ***2*** en ***2*** las fracciones.

B) Dadas las fracciones:

$$F_1 = \frac{A}{M}; F_2 = \frac{B}{N} \text{ y } F_3 = \frac{C}{P}$$

Entonces :

I) $MCD\,(F_1;F_2;F_3)=\dfrac{MCD\,(A;B;C)}{MCM\,(M;N;P)}$

II) $MCM(F_1;F_2;F_3)\dfrac{MCM\,(A;B;C)}{MCD\,(M;N;P)}$

C) Sí: $\frac{A}{B} <1 \Rightarrow \frac{A}{B}< \frac{A+n}{B+n}; n \in Z^+$

* Sí: $\frac{A}{B} >1 \Rightarrow \frac{A}{B}> \frac{A+n}{B+n}; n \in Z^+$

D) Si:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ; k \in \mathbb{Z}^+$$

$\longrightarrow$ ***Fracciones irreductibles***

$\Rightarrow b = d$

E) A partir de una fracción irreductible se pueden se puede obtener todas las fracciones equivalentes a ella.

$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} = \frac{6}{21} \ldots\ldots = \frac{2k}{7k}; k \in Z^+$$

NOTA :

Una expresión de la forma :

$$2 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}$$

Es un ejemplo de fracción simple , la cual se deriva de : $\frac{35}{16}$, donde ***2 ; 5*** y ***3*** son los términos de la fracción llamada continua de $\frac{35}{16}$, que se denota ***[2,5,3]***.

EJEMPLO :

Expresar $\frac{31}{9}$ como fracción continua.

RESOLUCIÓN :

$$\frac{31}{9} = 3 + \frac{4}{9} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{4}} = 3 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{31}{9} = [3,\ 2,\ 4]$$

Esta expresión se puede obtener aplicando divisiones sucesivas.

Términos de la fracción Continua simple [3, 2, 4]

	③	②	④
31	9	4	1
	4	1	0

TEOREMA :

* Todo número racional puede ser expresado como una fracción continúa simple finita.

* Toda fracción continúa simple finita representa un número racional.

EJEMPLO 1 :

Evaluar : ***[2,1,7]***, utilizando el algoritmo de Euclides.

RESOLUCIÓN :

	2	1	7
23	8	7	1
	7	1	0

$\longrightarrow [2;\ 1;\ 7] = \frac{23}{8}$

ó también :

$$2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{8}{7}} = 2 + \frac{7}{8} = \frac{23}{8}$$

EJEMPLO 2:

Evaluar : ***[–3 ; 2 ; 2]***

RESOLUCIÓN :

$$-3 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} = -3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} = -3 + \frac{2}{5} = -\frac{13}{5}$$

OJO :

Si la fracción continua simple tiene infinitos términos se llama fracción continua simple infinita.

TEOREMA :

* Todo número irracional puede ser expresado como una fracción continua simple infinita.

* Toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.

EJEMPLO :

Expresar ***2*** como una fracción continua simple.

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{2} = 1 + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{k} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + k \ldots\ldots\ldots (I)$$

*Ahora :

$$k = \sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}-1)\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2+\underbrace{\sqrt{2}-1}_{k}}$$

$$k = \frac{1}{2+k} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+k}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+k}}} = \ldots\ldots$$

* Que al reemplazar en ***(I)***, resultará :

$$2 = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}}$$

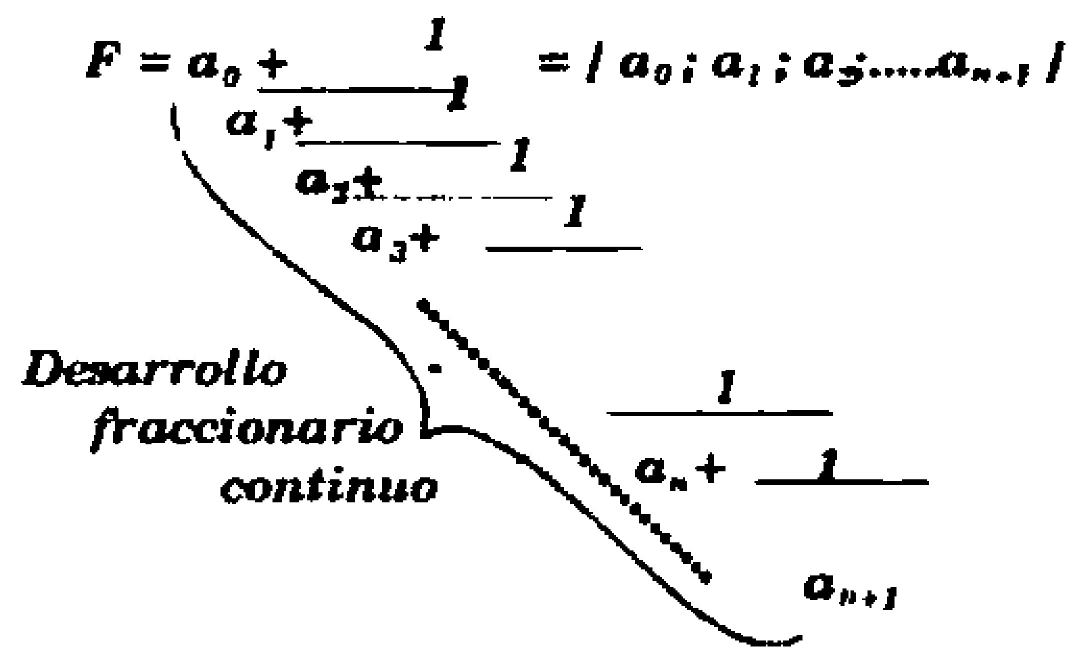
$$\Rightarrow \sqrt{2} = [\,1;2;2;2;2;\ldots\ldots\,] = [\,1;\bar{2}\,]$$

EN GENERAL :

FRACCIONES CONTINUAS

Son aquellas expresiones de la siguiente forma :

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots\, a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}}}}}} = [\,a_0; a_1; a_2; \ldots a_{n+1}\,]$$



Se le denominará fracción continua simple, donde a_0, a_1, a_2........a_{n+1}son enteros ,denominados términos de la fracción continua . Dicha se representará

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots\ldots\ldots,a_{n+1}\,]$$

Donde :

a_0: puede ser positivo , negativo ó cero los demás solamente serán positivos.

EJEMPLO :

Calcular el número irracional dado por : ***[3 ; 6; 6 ; 6 ;.......]***

RESOLUCIÓN :

Sea : $N = [3 ; 6 ; 6 ; 6 ;........]$

Entonces :

$$N = 3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}} \longrightarrow N-3=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}}$$

* Resultará :

$$N = 3+\frac{1}{6+N-3}$$

$$N = 3+\frac{1}{N+3} \Rightarrow N^2 = 3N+3(3)+1$$

$$\Rightarrow N^2 = 10 \Rightarrow N = \sqrt{10}$$

TEOREMA :

Si es un entero positivo entonces la *F. C. S.* Infinito que representa a $\sqrt{(p^2+1)}$ es $[p; \overline{2p}]$.

EJEMPLOS :

* $5=\sqrt{2^2+1}= [\ 2 ;\overline{4}]$
* $10 =\sqrt{3^3+1}= [3 ;\overline{6}]$

TEOREMA :

Si p es un entero positivo mayor que 1 , entonces la *F. C. S.* infinita que representa a :

$\sqrt{(p^2-1)}$ es $[(p-1; \overline{1,2(p-1)})]$.

EJEMPLOS :

* $\sqrt{3} = \sqrt{2^2-1} = [1; \overline{1\ ,2}]$
* $\sqrt{24} =\sqrt{52-1} = [4; \overline{1\ ,8}]$

OJO :

F.C.S., Es la abreviatura de "Fracciones continuas Simples"

NÚMEROS AVALES

Resulta al dividir los términos de una fracción, en cierto sistema de numeración.

EJEMPLOS :

* $\frac{2}{5} = \underbrace{0,4}_{\text{Número decimal}}$

* $\frac{37_8}{100_8} = \underbrace{0,37_8}_{\text{número octaval}}$

Todo número aval presenta dos partes:

* $\overbrace{93}^{Entera}\ ,\ \overbrace{12_5}^{aval}$ * $\overbrace{12}^{Entera}\ ,\ \overbrace{5_6}^{aval}$ * $\overbrace{3}^{Entera}\ ,\ \overbrace{12_5}^{aval}$

Cada cifra de la parte aval ocupa un orden, el cual se indica a partir de la "coma aval" hacia la derecha , del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc} & \textit{Orden} & \\ \xleftarrow{\textit{Entera}} & & \xrightarrow{\textit{Aval}} \\ 2\ 1\ 0 & & -1-2-3-4 \end{array}$$

$$A = 3\ 4\ 1,5\ 1\ 4\ 2_{(6)}$$

$$\begin{array}{cc} \xleftarrow{\textit{Entera}} & \xrightarrow{\textit{Aval}} \\ 1\ 0\ -1\ -2 & \textit{Orden} \end{array}$$

$$B = 5\ 2\ ,3\ 7_{(6)}$$

De estos podemos señalar que un número aval admite una descomposición.

De los números anteriores:

$A= 3\times 6^2 + 4\times 6+1 + 5\times 6^{-1} +1\times 6^{-2}+4\times 6^{-3} +2\times 6^{-4}$

$B = 5\times 10+2+3\times 10^{-1} +7\times 10^{-2} + 6\times 10^{-3}$

Para mayor comodidad en el estudio de los números avales , de aquí en adelante utilizaremos aquellos que sólo presentan parte aval.

* $0,315_{(7)}=3\times 7^{-1}+1\times 7^{-2}+5\times 7^{-3}=\frac{3}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{5}{7^3}$
* $0,\widehat{5}_{(8)}=\frac{5}{8^1}+\frac{5}{8^2}+\frac{5}{8^3}+\frac{5}{8^4}+.........\infty$
* $0,4323_6=\frac{4}{6}+\frac{3}{6^2}+\frac{2}{6^3}+\frac{3}{6^4}$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS AVALES

Dependiendo la división de los términos de la fracción se tendrá también las clases de números avales. Para ello trabajemos con las fraccion propia e irreductible :

$$F = \frac{A}{B}$$

I)NÚMEROS AVAL EXACTO:

$\xrightarrow{\times 100}$ * $M = 0,24$; $100\times M = 24$ $\Big\}\ M = \frac{24}{10^2} = \frac{6}{25} = \frac{6}{5^2}$

$\xrightarrow{\times 1000}$ * $N\ 0,875$; $1000N=875$ $\Big\}\ N = \frac{875}{10^3} = \frac{7}{8} = \frac{7}{2^3}$

$\xrightarrow{\times 100}$ * $P=0,55$; $100P=55$ $\Big\}\ P = \frac{55}{10^2} = \frac{11}{20} = \frac{11}{2^2\times 5}$

Luego podemos afirmar que ***F*** genera un decimal exacto , si solamente si ***B*** admite como único divisor primos a ***2*** y/o ***5***.

Además el número de cifras en la parte decimal lo indicará el mayor exponente del factor ***2*** ó ***5***.

MÁS EJEMPLOS :

* $\frac{13}{40} = \frac{13}{2^3\times 5} = \frac{13\times 5^2}{2^3\times 5\times 5^2} = \frac{325}{10} = 0,325$
* $\frac{9}{50} = \frac{9}{2\times 5^2} = \frac{9\times 2}{2\times 5^2\times 2} = \frac{18}{10^2} = 0,18$

En otro sistema de numeración:

* $A=0,236 \xrightarrow{\times 100_6} 100\times A=23_6$

$$\Rightarrow A = \frac{23_6}{100_6} = \frac{15}{6^2} = \frac{5}{12} = \frac{5}{2^2\times 3}$$

EN GENERAL :

$$0,\overbrace{abc............P_{(k)}}^{\text{"n" cifras}} = \frac{\overline{abc............P_{(k)}}}{k_n}$$

II)NÚMERO AVAL INEXACTO :

* $\frac{2}{3}= 0,666\ ....= 0,\widehat{6}$
* $\frac{3}{5}= 0,2121\ ....{}_{(4)}= 0,\widehat{21}_{(4)}$
* $\frac{7}{12}= 0,58333\ ....= 0,5\widehat{83}$
* $\frac{8}{15}= 0,23131\ ....{}_{(5)}= 0,2\widehat{31}_5$

De acuerdo a los resultados , se observa que estos números se dividen en dos tipos :

A)NÚMERO AVAL INEXACTO PERIÓDICO PURO :

* $M = 0,242424.............$

$\xrightarrow{\times 100}$ $100M = 24,\ 242424......$

$99M = 24$

$$\Rightarrow M = \frac{24}{99} = \frac{8}{3\times 11}$$

* $N = 0,029702970297.................$

$\xrightarrow{\times 10000}$ $10000N = 297,029702970297....$

$9999N = 297$

$$\Rightarrow M = \frac{297}{9999} = \frac{3}{101}$$

* Luego podemos afirmar que :

F genera un decimal inexacto periódico puro , si ***B*** no admite como divisores primos ni a ***2*** , ni a ***5***. Además el número de cifras en la parte decimal (período) estará indicando por la cantidad de cifras

del menor numeral formado por cifras "9" que contiene a *B*.

MÁS EJEMPLOS :

* $\frac{5}{27}=\frac{5\times37}{27\times37}=\frac{185}{999}=0,\widehat{185}$
* $\frac{7}{11}=\frac{7\times9}{11\times9}=\frac{63}{99}=0,\widehat{63}$

OJO :

Para trabajar con números decimales (base *10*) es necesario conocer :

$9 = 3^2$

$99 = 3^2 \times 11$

$999 = 3^3 \times 37$

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$

$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$

$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

En otro sistema de numeración:

* $P = 0,313131\ldots_{(5)}$

$\times 100_5$: $100_5 \times P = 31,313131\ldots_{(5)}$

$44_5 \times P = 31_{(5)}$

$$\Rightarrow P=\frac{315_5}{445_5}=\frac{315_5}{5^2-1}$$

EN GENERAL :

$$0,\overline{abc\ldots\ldots P}_{(k)}=\frac{\overline{abc\ldots\ldots P}_{(k)}}{k^n-1}$$

"n" cifras

B) NÚMERO AVAL INEXACTO PERIÓDICO MIXTO:

* $M = 0,23777\ldots\ldots = 0,23\hat{7}$

$\times1000$: $1000\,M = 237,77\ldots$

$\times100$: $100\,M = 23,777\ldots$

$900\,M = 237 - 23$

$$\Rightarrow M=\frac{237-23}{900}=\frac{214}{2^2\times5^2\times3^2}$$

* Luego podemos afirmar que :

F genera un número decimal inexacto periódico mixto si *B* admite como divisores primos a *2* y/o *5* y otros.

EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN :

* $N = 0,5444\ldots\ldots_{(7)} = 0,5\hat{4}_{(7)}$

$\times 100_7$: $100_7 \times N = 54,44\ldots_{(7)}$

$\times 10_7$: $10_7 \times N = 5,444\ldots_{(7)}$

$600_7 N = 54_{(7)} - 5_{(7)}$

$$\Rightarrow N=\frac{54_{(7)}-5_{(7)}}{600_{(7)}}=\frac{54_{(7)}-5_{(7)}}{7(7^1-1^1)}$$

EN GENERAL :

$$0,\underbrace{\overline{ABC\ldots Z}}_{\text{"}\alpha\text{" cifras}}\underbrace{\widehat{mnp\ldots s}}_{\text{"}\beta\text{" cifras}}{}_{(k)}=\frac{\overline{ABC\ldots s}_{(k)}-\overline{ABC\ldots Z}_{(k)}}{k^{\alpha}(k^{\beta}-1)}$$

OJO :

A continuación mostraremos cuadro resumen de los números decimales que será de muchas utilidad.

NÚMERO DECIMAL EXACTO

Siendo *F=A/B* una fracción decimal exacto , si "*B*" tiene como único divisor primos a *2* y/o *5*.

EJEMPLOS :

* $\frac{3}{5}=0,6$
* $\frac{7}{25}=\frac{7}{5^2}=0,28$
* $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=0,125$
* $\frac{9}{40}=\frac{9}{2^3\times5}=0,225$

El número de cifras en la parte decimal es el mayor exponente del factor *2* ó *5* que contiene *B*.

FRACCIÓN GENERATRIZ:

$$0,\overline{abc}=\frac{\overline{abc}}{100}$$

NÚMERO DECIMAL INEXACTO

Siendo *F=A/B* una fracción irreductible , genera un número decimal inexacto periódico puro , si *B* tiene divisores primos ni a *2* , ni a *5*.

EJEMPLOS :

* $\frac{2}{3}=0,666=0,\hat{6}$
* $\frac{5}{11}=0,4545\ldots..=0,\widehat{45}$
* $\frac{173}{407}=0,425061\ldots..=0,\widehat{425061}$
* $\frac{5}{33}=0,1515\ldots..=0,\widehat{15}$
* $\frac{1}{7}=0,142857=0,\widehat{142857}$

El número de cifras en la parte decimal es la cantidad de cifras del menor numeral formado por cifras "9" que contiene a "*B*".

FRACCIÓN GENERATRIZ:

$$0,\widehat{abc}=\frac{abc}{999}$$

NÚMERO DECIMAL INEXACTO

Siendo *F=A/B* una fracción irreductible , genera un número decimal inexacto periódico mixto se tiene como divisores a *2* y/o *5* y otros.

EJEMPLOS :

* $\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=0,16$
* $\frac{7}{14}=\frac{7}{2^2\times11}=0,1590$
* $\frac{1}{275}=\frac{1}{5^2\times11}=0,0036$
* $\frac{95}{148}=\frac{95}{2^2\times37}=0,64189$

El número de cifras de la parte no periódica se considera el criterio de decimal exacto, y de la parte no periódica se considera el criterio del decimal periódico puro.

FRACCIÓN GENERATRIZ:

$$0,\overline{ab}\widehat{cde}=\frac{\overline{abcde}-\overline{ab}}{99900}$$

Tabla de los nueves :

$9 = 3^2$

$99 = 3^2 \times 11$

$999 = 3^3 \times 37$

$9999 = 3^2 \times 101 \times 11$

$99999 = 3 \times 41 \times 271$

$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

$9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$

$99999999 = 3^2 \times 11 \times 101 \times 73 \times 137$

EJEMPLOS :

* Sean irreductibles las fracciones siguientes:

$\frac{A}{11}$ origina *2* cifras periódicas(*11* está contenido en *99*)

* $\frac{N}{271}$ origina *5* cifras periódicas (*271* está en *99999*)
* $\frac{M}{13}$ origina *6* cifras periódicas (*13* está en *999999*)

OBSERVACIÓN :

Si el denominador de la fracción irreductible es el producto de varios factores primos diferentes , el número de cifras periódicas está dado por el ***MCM*** de la cantidad de cifras de los menores números formados por ***9*** que contengan a los factores primos indicados.

EJEMPLOS :

$\dfrac{5}{11\times 37}$ | *11 contenido 99 (2 cifras periódicas)*
37 contenido 999(3 cifras periódicas)

MCM (2;3) = 6

Número de cifras del período es ***6***

* $\dfrac{13}{7\times 11\times 101}$

7 → ***6*** cifras periódicas

11 → ***2*** cifras periódicas

101 → ***4*** cifras periódicas

MCM(6 , 2 , 4) = 12

→ La fracción señalada tendrá ***12*** cifras periódicas

CAMBIOS DE BASE :

* Expresar ***0,25*** en el Sistema Senario

Procedemiento:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{0,25} \\ \hline 1 & 50 \\ 3 & 0 \end{array} \begin{matrix} \times 6 \\ \times 6 \end{matrix} \Bigg\} \; 0,25 = 0,13_6$$

* Expresar ***0,6*** en el Sistema Cuaternario.

Procedemiento:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{0,6} \\ \hline 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ \vdots & \vdots \end{array} \begin{matrix} \times 4 \\ \times 4 \\ \times 4 \\ \times 4 \end{matrix} \Bigg\} \; 0,6 = 0,2121\ldots_{(4)} = 0,\overset{\frown}{21}_{(4)}$$

* Expresar ***0,666...*** en el Sistema Quinario.

Procedemiento:

$0,666\ldots = 0,abcd\ldots_{(5)}$. Como $0,666\ldots = \dfrac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\; 2\times 5 = 10 \;\; \underline{|3} \\ \qquad\qquad\quad 1 \;\; 3 = a \\ \bullet\; 1\times 5 = 5 \;\; \underline{|3} \\ \qquad\qquad\quad 2 \;\; 1 = b \\ \bullet\; 2\times 5 = 10 \;\; \underline{|3} \\ \qquad\qquad\quad 1 \;\; 3 = c \\ \bullet\; 1\times 5 = 5 \;\; \underline{|3} \\ \qquad\qquad\quad 2 \;\; 1 = d \end{array}\right\} 0,666\ldots = 0,3131\ldots_{(5)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si la fracción $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$ es equivalente a $\dfrac{5}{17}$, determine «***b***», sabiendo que $a\times b\times c \neq 0$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN

Una fracción será equivalente a otra si resulta de multiplicar los términos de la fracción irreductible de esta última por una misma cantidad entera. Por ejemplo: Si queremos fracciones equivalentes

$\dfrac{12}{20} \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}$ irreductible.

Entonces, dichas fracciones serán de la forma $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3n}{5n}$, donde $a=3n$ y $b=5n\ (n\in Z)$.

Por dato, la fracción $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}}$ es equivalente a $\dfrac{5}{17}$.

Entonces, se cumple que $\dfrac{\overline{abc}}{\overline{cba}} = \dfrac{5n}{17n}$

$$\Rightarrow \overline{abc} = 5n = \overset{o}{5} \wedge \overline{cba} = 17n$$

De lo anterior se concluye que $c=5$ además, se tiene que

$$\underbrace{\overline{cba} - \overline{abc}}_{99(c-a)} = 12n = \overset{o}{4}$$

$$\Rightarrow 99(c-a) = 12n = \overset{o}{4} \Rightarrow c-a = \overset{o}{4}$$

pero $c=5 \Rightarrow a=1 \wedge n=33$

como $\overline{abc} = 5n = 5(33) = 165$

entonces, $b=6$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 (TIPO UNI) :

Clasifique como verdadero ***(V)*** o falso ***(F)*** cada una de las siguientes afirmaciones:

I) $\forall a, b$ números enteros, $\dfrac{a}{b}$ es un número racional.

II) $\forall a, b$, numeros enteros, $\dfrac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional.

III) Si $k\in Z$ y k^2 es par, entonces «***k***» es par.

A)FVF B)FFV C)FFV
D)VFF E)FFF

RESOLUCIÓN:

El conjunto de los números racionales se define

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \Big/ a\in Z \wedge b\in Z - \{0\} \right\}$$

Si $\dfrac{m}{n}\in Q$, se debe cumplir que $m\in Z \wedge n\in Z - \{0\}$. Además, se dice que un número es par si es un múltiplo de ***2***; es decir, si ***n*** es par, entonces, $n=2K$, $(K\in Z)$.

I) Por dato: $\forall\ a;b$ números enteros se debe concluir que $\dfrac{a}{b}$ es un número racional, pero esto no se cumple cuando $b=0$.

Por lo tanto, esta proposición es falsa ***(F).***

II) Por dato: $\forall\ a;b$ números enteros se debe cumplir que $\dfrac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional.

• Como ***a*** y ***b*** son enteros, la suma ***a+b*** sigue siendo entero

• Además, $a\in Z$.

Entonces, $0\le a^2\in Z \Rightarrow 1\le a^2+1\in Z$

$\dfrac{a+b}{1+a^2}$ es un número racional, pues $1+a^2$ es entero y diferente de cero.

Por lo tanto , esta proposición es verdadera ***(V).***

III) Por dato :

Si $k\in Z$ y k^2 es par, entonces «***k***» es par.

Por dato k^2 es par ,entonces $k^2=2n\,(n\in Z)$

Pero por ser un cuadrado perfecto y $k^2=2n$ entonces $n=2p^2$, de donde $k^2 = 4p^2 \Rightarrow k = 2p$ por lo tanto , ***k*** es par .

esta proposición es verdadera ***(V).***

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Convierte las siguientes fracciones heterogéneas en homogéneas.

A) $\frac{7}{8}, \frac{5}{16}$ y $\frac{9}{8}$. B) $\frac{5}{3}, \frac{-4}{7}$ y $\frac{-14}{9}$

02 Escribe <, > o =, según corresponda :

A) $-\frac{2}{5} \square \frac{1}{5}$ B) $-\frac{21}{5} \square -\frac{23}{6}$

C) $\frac{8}{9} \square \frac{7}{8}$ D) $5\frac{3}{4} \square 4\frac{3}{5}$

03 Ordena en la recta numérica los siguientes puntos.

$$P = -\frac{3}{2}, Q = -\frac{6}{2}, R = \frac{0}{2}, S = 3\frac{1}{2}$$

–3 –2 –1 0 +1 +2 +3

04 Ordena en la recta numérica los siguientes puntos.

$$P = -\frac{3}{3}, Q = -\frac{11}{3}, R = \frac{10}{3}, S = 1\frac{2}{3}, T = 2\frac{1}{3}$$

–4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4

05 Responde rápidamente .

A) ¿Cuántos tercios hay en una unidad?

B) ¿Cuántos quintos hay en *2* unidades?

C) ¿Cuántos novenos hay en *4* unidades?

D) ¿Cuántos onceavos hay en *4* unidades?

E) ¿Cuántos onceavos hay en una unidad?

F) ¿Cuántos quintos hay en *3* unidades?

G) ¿Cuántos cuartos hay en *5* unidades?

06 Efectuar en cada caso :

A) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=$ D) $\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=$

B) $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}=$ E) $\frac{7}{5}+\frac{3}{14}=$

C) $\frac{7}{11}+\frac{37}{11}=$ F) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}=$

07 Empleando la regla de productos *CRUZADOS* efectuar las siguientes adiciones :

+	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{5}$		

Indicar el mayor resultado.

08 Efectuar en cada caso :

A) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=$ D) $7\frac{2}{5}-4\frac{1}{7}=$

B) $\frac{7}{11}-\frac{5}{11}=$ E) $11\frac{3}{4}-10\frac{2}{5}=$

C) $\frac{4}{5}-\frac{7}{8}=$ F) $6\frac{3}{7}-5\frac{2}{3}=$

09 Empleando la regla de productos *CRUZADOS* efectuar las siguientes sustracciones .

–	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{7}$
$\frac{2}{5}$		
$\frac{1}{3}$		

Indicar el menor resultado.

10 Efectuar en cada caso :

A) $\frac{6}{5}+\frac{2}{7}=$ D) $5\times\frac{3}{4}=$

B) $\frac{7}{5}\times\frac{12}{11}=$ E) $\frac{11}{15}\times\frac{5}{33}=$

C) $\frac{36}{7}\times\frac{14}{9}=$ F) $\frac{7}{13}\times\frac{26}{11}\times\frac{121}{14}=$

11 Multiplicación :

Completa el siguiente cuadro simplificando el resultado de la operación indicada .

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{7}$
$\frac{5}{3}$			
$\frac{1}{4}$			

12 Efectuar en cada caso :

A) $\frac{7}{5}\div\frac{2}{3}=$ D) $6\div 2\frac{1}{3}=$

B) $2\frac{1}{3}\div\frac{1}{3}=$ E) $\frac{16}{5}+\frac{8}{3}=$

C) $7\frac{1}{5}\div 2\frac{3}{4}=$ F) $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}$

13 Escribe en los casilleros en blanco las potencias indicadas:

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	al cuadrado	Al cubo	a la cuarta
$\frac{2}{3}$			
$\frac{1}{2}$			
$-\frac{2}{5}$			

14 Calcular "*A* +*B*", si :

$A = \left(\frac{-1}{4}\right)^3$ $B = \left(\frac{-1}{2}\right)^5$

15 Calcular "*A* + *B*", si :

$A = \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ $B = \sqrt[3]{\frac{-1}{8}}$

16 Diga cuánto hay que agregar a cada una de las siguientes fracciones para que sean igual a la unidad.

A) $\frac{3}{11}$ G) $\frac{1}{8}$ M) $\frac{2}{43}$

B) $\frac{2}{5}$ H) $\frac{2}{17}$ N) $\frac{7}{18}$

C) $\frac{4}{7}$ I) $\frac{5}{21}$ O) $\frac{8}{21}$

D) $\frac{5}{9}$ J) $\frac{8}{17}$ P) $\frac{7}{15}$

E) $\frac{9}{13}$ K) $\frac{1}{4}$

F) $\frac{3}{24}$ L) $\frac{1}{31}$

17 ¿Cuántos enteros están contenidos en las siguientes fracciones?

A) $\frac{32}{8}$ D) $\frac{5}{2}$ G) $\frac{93}{30}$

B) $\frac{81}{9}$ E) $\frac{25}{8}$ H) $\frac{95}{18}$

C) $\frac{108}{12}$ F) $\frac{31}{4}$ I) $\frac{17}{5}$

18 Efectuar las siguientes operaciones :

A) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=$ K) $-\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=$

B) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{8}{5}+\frac{13}{3}=$ L) $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}=$

C) $+\frac{1}{10}+\frac{5}{6}+\frac{3}{10}+\frac{7}{6}+\frac{7}{10}=$ M) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$

D) $\frac{4}{3}+\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=$ N) $\frac{3}{21}+\frac{1}{2}+\frac{2}{40}=$

E) $\frac{4}{5}+\frac{5}{3}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$ O) $-\frac{3}{5}+\frac{7}{4}+\frac{11}{6}=$

F) $-\frac{3}{7}-\frac{2}{5}-\frac{4}{7}=$ P) $\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{18}=$

G) $-\frac{11}{3}-\frac{7}{4}-\frac{3}{4}-\frac{8}{3}=$ Q) $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}=$

H) $\frac{2}{11}+\frac{4}{9}+\frac{1}{11}+\frac{2}{9}=$ R) $-\frac{5}{8}+\frac{11}{64}=$

I) $3\frac{1}{4}-5\frac{3}{4}=$ S) $9\frac{3}{5}-4\frac{1}{10}=$

J) $8\frac{3}{7}-6\frac{5}{7}=$ T) $-7\frac{1}{8}+3\frac{5}{24}=$

(19) Efectuar en cada caso :

A) $\dfrac{2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}}{2\frac{1}{5}+3\frac{1}{2}}=$ D) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=$ B) $\dfrac{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=$

E) $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}=$ C) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}=$ F) $\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{1+\frac{2}{3}}=$

(20) Completa el siguiente cuadro efectuando todas las divisiones señaladas.

$\div$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{5}$			

(21) Escribir la expresión más simple equivalente a :

$$\frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{18}}=$$

(22) Emplea la adición y sustracción completando los espacios :

A) $-\frac{8}{5}+\text{—}=-\frac{11}{5}$ C) $\text{—}+\frac{4}{15}=-\frac{7}{10}$

B) $-\frac{7}{6}-\text{—}=\frac{13}{6}$ D) $\text{—}+-4\frac{6}{7}=-3\frac{3}{4}$

(23) Realiza las siguientes operaciones combinadas:

A) $-\frac{7}{6}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$

B) $\left[\left(-\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\right)-2\right]-\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{3}-\left[-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)\right]$

(24) Completa los espacios para que se cumpla la igualdad .

A) $-\frac{5}{3}\div\text{—}=\frac{2}{9}$ C) $\text{—}\div-\frac{12}{8}=3$

B) $\text{—}\div-1\frac{3}{4}=\frac{1}{10}$ D) $-2\frac{5}{7}\div\text{—}=3\frac{1}{2}$

(25) Emplea la división y multiplicación completando los espacios :

A) $-\frac{7}{10}\times\text{—}=-3$ C) $\text{—}\div\frac{6}{13}=-\frac{3}{10}$

B) $\text{—}\div-\frac{15}{9}=-\frac{150}{30}$ D) $-\frac{7}{4}\times\text{—}=-2\frac{1}{10}$

(26) Marca con un aspa según estimes conveniente.

Número	Número racional			Número irracional
	Decimal exacto	Decimal inexacto		
		Periódico puro	Periódico mixto	
6,786				
8,2999...				
2,49999				
8,42222...				
0,434343...				
7,4142135				
483,152				
8,141592...				

(27) Relacionar las siguientes fracciones con sus respectivas expresiones decimales :

1) $\frac{1}{2}$	A) 1,1
2) $\frac{2}{3}$	B) 0,8
3) $\frac{7}{5}$	C) 1,7
4) $\frac{11}{10}$	D) 0,5
5) $\frac{32}{15}$	E) 0,666..........
	F) 3,42
	G) 2,13333......
	H) 1,4

(28) Aproxima los siguientes números :

A) 4,67469 al milésimo.
B) 7,9057al centésimo.
C) 752,64945 al décimo.
D) 978,040055 al diez milésimo.
E) 0,8643255 al cienmilésimo.
F) 3,74867345 al millonésimo.

(29) Colocar mayor (>), menor (<) o igual (=) según corresponda.

A) –62,508	☐	87,52
B) –13,413	☐	13,412
C) 6,2	☐	6,2000
D) –1,53	☐	0,0
E) –6,13	☐	–6,12
F) 4,53	☐	4,531
G) 3,980	☐	3,908
H) 5,410	☐	5,41000
I) 3,95000	☐	3,9
J) 0,4177	☐	0,41777
K) 11,481	☐	10,481
L) 0,012	☐	0,01126

(30) Escribe los siguientes números:

A) Treinta y seis unidades, doscientos cinco milésimos.
B) Ochenta y cuatro centésimos.
C) Setecientas ocho unidades, seis diezmilésimos.
D) Cuatro mil sesenta y dos cienmilésimos.
E) Cincuenta y tres unidades, ochocientos nueve millonésimos.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Cuántas fracciones de denominador *120* están comprendidas entre *4/3* y *5/2?*

A) 141 B) 139 C) 120
D) 138 E) 140

(02) El denominador de una fracción excede en *5* unidades a su numerador. Si a este último le quitamos *1*, el resultado será *2/3*. ¿Cuál es el numerador original?

A) 17 B) 11 C)13 D) 18 E) 19

(03) Halle una fracción tal que si a sus *2* términos se les suma el denominador y al resultado se le resta la fracción, se obtenga la misma fracción.

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

(04) Cuál es la fracción impropia que resulta duplicada si se resta a sus dos términos la mitad de su numerador?

A) 9/5 B) 5/2 C) 19/5 D)3/2 E) 7/2

(05) *2* caños pueden llenar un depósito en *27* horas. Después de estar abiertos los *2* juntos durante *12* horas se cierra uno y el otro llena lo que falta en *20* horas .En cuántas horas lo llenará el de menor caudal trabajando solo?

A) 100 B) 104 C) 108
D) 110 E) 112

(06) De un frasco lleno de vino se extrae la cuarta parte y se reemplaza con agua, luego se extrae los *3/4* de la mezcla y se llena con agua pero solo hasta los *2/3* de su capacidad. Cuál es la relación entre la cantidad de agua y el total de la mezcla al final?

A) 23/48 B) 23/32 C) 9/23
D)9/32 E)32/53

07 Calcular:

$$M=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\dots\dots+\frac{1}{868}$$

A) $\frac{10}{31}$ B) $\frac{12}{29}$ C) $\frac{13}{41}$

D) $\frac{15}{37}$ E) $\frac{16}{33}$

08 La suma de *2* fracciones irreductibles es *5*. La suma de sus denominadores es *14* y la diferencia de sus numeradores es *9*. Halle una de las fracciones.

A) 8/7 B) 1/7 C) 22/7
D) 15/7 E) 12/7

09 El *MCD* del numerador y denominador de una fracción equivalente a *16/72* es *13* .Cuál es está fracción?

A) 130/234 B) 52/65 C) 26/117
D) 65/117 E) 26/39

10 Una fracción irreductible tiene la siguiente propiedad; al sumar *5* unidades a su numerador y *9* unidades a su denominador, la fracción no cambia de valor. La suma de sus términos es:

A) 14 B) 27 C) 33 D) 55 E) 44

11 Cuántos valores puede tomar *n* si *n/24* es una fracción propia mayor que *3/7* ?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

12 Cuántas fracciones impropias e irreductibles cuyo denominador es *12* existen tales que sean menores que $\frac{63}{17}$?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

13 Una compañía decide rebajar sus precios en *1/5* del precio inicial, esto origina que sus ventas aumenten en *2/3* más de lo acostumbrado. En qué fracción aumenta su ingreso bruto?

A) 1/5 B) 2/15 C) 1/3 D) 2/3 E) 2/13

14 El cociente de *2* fracciones irreductibles es *35* y su producto es *63/20*.

Hallar la suma de los *4* términos.

A) 36 B) 35 C) 34 D) 33

15 Hallar el valor de $a+b$, si:

$$\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=0,9696...$$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

16 Hallar el valor de $x+y$, si:

$$\frac{x}{11}+\frac{y}{25}=0,88363636...$$

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

17 Hallar el valor de E^2, si:

$$E=\sqrt{2,333...}+\sqrt{0,58333...}$$

A) 21/2 B) 21/4 C) 7/2
D) 14/3 E) 21/8

18 Simplificar la expresión:

$$\sqrt{\frac{\frac{39}{49}-1\frac{2}{49}+15\div 7,5}{\frac{5}{49}-\frac{11}{196}}\div\frac{36}{25}}$$

A) 5 B) 30 C) 25 D) 1 E) 25/36

19 Hallar la suma del numerador mas el denominador de la fracción que debo sumar a la fracción periódica *0,8787.....* para ser igual a la fracción periódica *1,2121......*

A) 6 B) 2 C) 4 D) 3 E) 5

20) Cuánto le falta a los *2/3* de los *5/6* de *0,0454545.......* para ser igual a la mitad de los *5/8* de *10/11* de *0,21333......*?

A) 1/22 B) 1/33 C) 1/132
D) 7/132 E) 5/132

TAREA DOMICILIARIA

01 Dadas las siguientes fracciones:

I) $\frac{\overline{aaa}}{148}$ II) $\frac{22}{\overline{a00a}}$ III) $\frac{\overline{a(b+1)}}{\overline{ab}}$

¿cuál(es) es irreductible?

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) todas

02 Una vendedora lleva naranjas al mercado y vende la mitad de las que tenía más media naranja; obsequia la mitad del nuevo resto más media naranja y le sobran todavía *2* naranjas. ¿cuántas naranjas llevó al mercado, sabiendo que no partió ninguna naranja?

A) 7 B) 9 C) 11 D) 15 E) 19

03 Con *2* números primos se forma una fracción que sumada con su inversa da *34/15* ¿cuál es el menor número primo?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 11

04 Halla una fracción que no cambia su valor al sumar *5* unidades a su numerador y *9* unidades a su denominador.

A) 15/29 B) 15/28 C) 15/27
D) 16/27 E) 15/18

05 Hallar la suma de los términos de una fracción tal que excede a su cuadrado en *14/31*.

A) 11 B) 12 C) 14 D) 15 E) 16

06 Simplificar:

$$E=\sqrt{\frac{(2,\widehat{15})(5)(3,\bar{5}-1,8\bar{3})}{(3,1)(0,\widehat{101})(71)(9,\bar{7}-6,\bar{4})}}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 1/3 E) 1/4

07 Calcular x, si:

$$\frac{\overline{1x}}{22}=0,x\widehat{x2}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

08 Hallar *C*, si:

$$C=\frac{0,\hat{1}+0,\hat{2}+0,\hat{3}+...+0,\hat{9}}{0,0\hat{1}+0,0\hat{2}+0,0\hat{3}+...+0,0\hat{9}}$$

A) 10 B) 0,10 C) 1,1 D) 100 E) 0,1

09 Cuánto le falta a la fracción decimal periódica *0,8787...* para ser igual a la fracción decimal periódica *1,2121...?*

A) 1/3 B) 0,33 C) 0.3334
D) 0,334 E) 34/99

10 Hallar el menor número *n* tal que al sumarlo al denominador y restarlo al denominador de la fracción generatriz de $0,\widehat{148}$ se convierte en fracción impropia.

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

POTENCIACION y RADICACION

CAPITULO 071

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Reconocer cuando un número es una potencia perfecta de grado* ***n.***
* *Deducir los criterios de inclusión* y *exclusión de los cuadrados* y *cubos perfectos.*
* *Calcular las cifras de* un *numeral* o *los posibles valores que toman las cifras, si dicho numeral es* un *cuadrado* o *cubo perfecto.*
* *Determinar la raíz enésima de un número,*
* *Aplicar las propiedades de los residuos máximos.*

INTRODUCCIÓN :

En nuestro quehacer diario , comercial, laboral y educativo , se relacionan las cantidades, por ende a los números , sus operaciones y métodos para realizar ciertos cálculos. En dicho cálculo, se consideran también: determinar el valor de un numero elevado a un exponente dado, el cual en la actualidad lo pueden realizar las calculadoras , así como calcular la raíz cuadrada o raíz cúbica de un número. En este capítulo vamos a conocer aspectos básicos de estos cálculos y formas prácticas para resolver problemas.

POTENCIACIÓN

Operación que consiste en multiplicar un número por si mismo varias veces.

EJEMPLOS :

* $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ → ***Potencia perfecta de grado 3***

* $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ → ***Potencia perfecta de grado 4***

En General:

$$\underbrace{b \times b \times b \times \ldots\ldots \times b}_{\text{"n" factores}} = b^{n}$$

n → ***Exponente***

b^n → ***Potencia perfecta de grado "n"***

TEOREMA FUNDAMENTAL

Para que un número, sea una potencia perfecta de grado ***n***, es condición necesaria y suficiente que todos los exponentes de los factores primos en su descomposición canónica sea múltiplos de ***n***.

EJEMPLO :

* $P = 3^7 \times 5^{21} \times 7^{14}$

OJO : "P" es una potencia perfecta de grado ***7***, porque los exponentes ***7;21*** y ***14*** son múltiplos de ***7***.

EN GENERAL :

Si: $N = \underbrace{a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}}_{\text{Descomposición canónica}} \Rightarrow N = \underbrace{a^{n\alpha} \times b^{n\beta} \times c^{n\theta}}_{\text{Potencia perfecta de grado "n"}}$

CASOS PARTICULARES

I) CUADRADO PERFECTO (K^2) :

Un número es cuadrado perfecto , si en su descomposición canónica , los factores primos , están elevados a exponentes múltiplos de ***2.***

$$K^2 = \underbrace{a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\gamma} \times \ldots}_{D.C.}$$

EJEMPLOS :

* $p = 2^4 \times 3^{12} \times 5^{16}$ es un número cuadrado perfecto porque los exponentes ***4 ; 6*** y ***16*** son múltiplos de ***2.***

* $169 = 13^2$ * $1024 = 2^{10}$

II) CUBO PERFECTO (K^3):

Un número es un cubo perfecto si en su descomposición canónica los factores primos , están elevados a exponentes múltiplos de ***3.***

$$K^3 = \underbrace{a^{3\alpha} \times b^{3\beta} \times c^{3\gamma} \times \ldots}_{D.C}$$

EJEMPLOS :

* $P = 2^6 \times 5^{12} \times 7^{15}$ es un número cubo perfecto , porque los exponentes ***6; 12*** y ***15*** son números múltiplos de ***3***.

* $64 = 4^3$ * $729 = 3^6$

CRITERIOS DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN DE CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

A) SEGÚN SU ÚLTIMA CIFRA :

K	..0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
K^2	..0	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1
K^3	..0	...1	...8	...7	...4	...5	...6	...3	...2	...9

* Se puede deducir , que :

I) Si un número termina en *2; 3; 7* ú *8* no es cuadrado perfecto , en los demás casos tiene la posibilidad de serlo.

II) Un cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra

EJEMPLOS :

* $\overline{abc6}$: puede ser cuadrado perfecto

* $\overline{mnp753}$: no puede ser cuadrado perfecto

B) POR SU TERMINACIÓN EN CIFRAS CEROS :

EJEMPLOS :

*6400=64 × 102=82 × 102 *90000=9 × 104=32 × 104

*8000=8 × 103=23 × 103 *100000=1 × 106=13 × 106

OJO :

De los ejemplos , se puede inferir , que :

I) $\overline{abc.........} \times \overline{000.......00} = K^2$

$\underbrace{\text{Cuadrado Perfecto} \quad \text{"2n ceros"}}_{\text{Condiciones para ser Cuadrado Perfecto}}$

II) $\overline{abc.........} \times \overline{000.......00} = K^3$

Cuadrado perfecto — "3n" ceros → Condiciones para ser cubo perfecto

C) POR LA TERMINACIÓN EN CIFRAS "5":

I) PARA UN CUADRADO PERFECTO :

EJEMPLOS :

* 52 = $\underline{25}$ * 25^2 = ②$\underline{25}$ ⟶ ② = 2×1

* 45^2 = ⑳$\underline{25}$ ⟶ ⑳ = 4×5

EN GENERAL :

Sí: $\overline{abc...x\,y\,5} = \overline{n5}^2 \Rightarrow [y = 2 \wedge \overline{abc...x} = n(n+1)]$

* Además: $n(n+1) \in \{...0;...2;...6\}$ ó $x = 0;2;6$

II) PARA UN NÚMERO CUBO PERFECTO:

* $5^3 = 125$ * $15^3 = 3375$ * $65^3 = 274625$

EN GENERAL :

Si: $\overline{ab.....xy5} = \overline{n5}^3$

* Entonces se cumple :

$y = 2$ .... si n es par

$y = 7$............ si n es impar

* Luego : $\overline{abcd5} = k^3$; entonces: $d=2$ ó $d=7$

D) POR CRITERIO DE DIVISIBILIDAD :

I) DIVISIBILIDAD POR 4 :

EJEMPLOS :

* $12=\overset{\circ}{4} \rightarrow 12=\overset{\circ}{4}$ * $17=\overset{\circ}{4}+1 \rightarrow 17=\overset{\circ}{4}-3$

* $22=\overset{\circ}{4}+2 \rightarrow 22=\overset{\circ}{4}-2$ * $35=\overset{\circ}{4}+3 \rightarrow 35=\overset{\circ}{4}-1$

* $16=\overset{\circ}{4} \rightarrow 16=\overset{\circ}{4}$ * $9=\overset{\circ}{4}+1 \rightarrow 9=\overset{\circ}{4}+1$

* $10=\overset{\circ}{4}+2 \rightarrow 10=\overset{\circ}{4}$ * $15=\overset{\circ}{4}+3 \rightarrow 15=\overset{\circ}{4}+3=\overset{\circ}{4}-1$

EN GENERAL :

N	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}+\overset{\circ}{2}$	$\overset{\circ}{4}+3$
N^2	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$
N^3	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+3$

II) DIVISIBILIDAD POR 9 :

N	N^2	N^3
$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+2$	$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}-1$
$\overset{\circ}{9}+3$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}+\overset{\circ}{7}$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+5$	$\overset{\circ}{9}+7$	$\overset{\circ}{9}-1$
$\overset{\circ}{9}+6$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+7$	$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+8$	$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}-1$

RADICACIÓN

Operación matemática inversa a la potenciación, que consiste en que dado dos números llamados indice y

radicando , se calcula un tercer número llamado raíz , donde este último elevado al indice reproduzca el radicando.

* Así tenemos :

$$\sqrt[n]{R}=K \leftrightarrow R=K^n \begin{cases} \text{Donde: } K, n \text{ y } R\in Z^+ \wedge n>1 \\ \text{Además:} \\ R=\text{radicando} \\ n=\text{índice} \\ K=\text{raíz enésima} \end{cases}$$

EJEMPLOS :

* $\sqrt[3]{8}=2$; porque : $2^3=8$

* $\sqrt[6]{729}=3 \Leftrightarrow 3^6=729$

OJO:

"Toda potencia perfecta de grado "n" posee raíz enésima exacta".

CASOS PARTICULARES :

	Raíz Cuadrada	Raíz Cubica
EXACTA (r=0)	$\sqrt{N}\,\lfloor K$, residuo 0 $\longleftrightarrow N=K^2$ Ejemplo: $\sqrt{169}\,\lfloor 13$, residuo 0 $\longleftrightarrow 169=13^2$	$\sqrt[3]{N}\,\lfloor K$, residuo 0 $\longleftrightarrow N=K^3$ Ejemplo: $\sqrt[3]{512}\,\lfloor 8$, residuo 0 $\longleftrightarrow 512=8^3$

	Raíz Cuadrada: Por defecto	Raíz Cuadrada: Por exceso	Raíz Cubica: Por defecto	Raíz Cubica: Por exceso
INEXACTA	$\sqrt{N}\,\lfloor K$, residuo r_d $N=K^2+r_d$	$\sqrt{N}\,\lfloor K$, residuo r_e $N=(K+1)^2-r_e$	$\sqrt[3]{N}\,\lfloor K$, residuo r_d $N=K^3+r_d$	$\sqrt[3]{N}\,\lfloor K$, residuo r_e $N=(K+1)^3-r_e$
	Propiedades: $r_d+r_e=2K+1$ Resto mínimo$=1$ Resto máximo$=2K$		Propiedades: $r_d+r_e=3K(K+1)+1$ Resto mínimo$=1$ Resto máximo$=3K(K+1)$	

EJEMPLOS :

Por defecto	Por exceso	Por defecto	Por exceso
$\sqrt{93}\,\lfloor 9$; 81; $r_d=12$	$\sqrt{93}\,\lfloor 10$; 100; $r_e=7$	$\sqrt[3]{100}\,\lfloor 4$; 64; $r_d=36$	$\sqrt[3]{100}\,\lfloor 5$; 125; $r_e=25$
$\rightarrow 93=9^2+12$	$\rightarrow 93=10^2-7$	$\rightarrow 100=4^3+36$	$\rightarrow 100=5^3-25$

$\sqrt{143}\,\lfloor 11$, residuo 22 $\begin{cases} 143+1: \text{cuadrado perfecto} \\ 22: \text{residuo máximo.} \end{cases}$

$\sqrt{624}\,\lfloor 24$, residuo 48 $\begin{cases} 624+1: \text{Cuadrado perfecto} \\ 48: \text{residuo máximo.} \end{cases}$

$\sqrt{N}\,\lfloor K$, residuo $2K$ $\begin{cases} N+1=\text{Cuadrado Perfecto} \end{cases}$

$2K \longrightarrow$ *residuo máximo*

CRITERIO PARA EXTRAER RAÍZ CUADRADA Y RAÍZ CÚBICA

I) POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA:

EJEMPLO1 :

Calcular la raíz cuadrada de : ***2704***

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{2704}=\sqrt{2^4\times 13^2}=2^2\times 13=52$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la raíz cúbica de: ***592704***

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt[3]{592704}=\sqrt[3]{2^6\times 3^3\times 7^3}=2^2\times 3\times 7=84$$

OJO :

Este método solo se aplica cuando la raíces son exactas.

II)MÉTODO GENERAL PARA EXTRAER RAÍZ CUADRADA :

EJEMPLO ILUSTRATIVO:

* Calcular la raíz cuadrada de: ***74356***

RESOLUCIÓN :

1^{ER} **PASO :**

* Se divide en grupos de 2 cifras empezando por la derecha ($\leftarrow$)

$$\sqrt{\underset{1^{ro.}}{\underline{7}}\ \underset{2^{do.}}{\underline{43}}\ \underset{3^{ro.}}{\underline{56}}}$$

$\llcorner \rightarrow$ ***No importa, que este quede con 1 cifra.***

$2^{DO.}$ **PASO**

* Se extrae la raíz cuadrada entera del 1er. Grupo y ella será la primera cifra de la raíz.

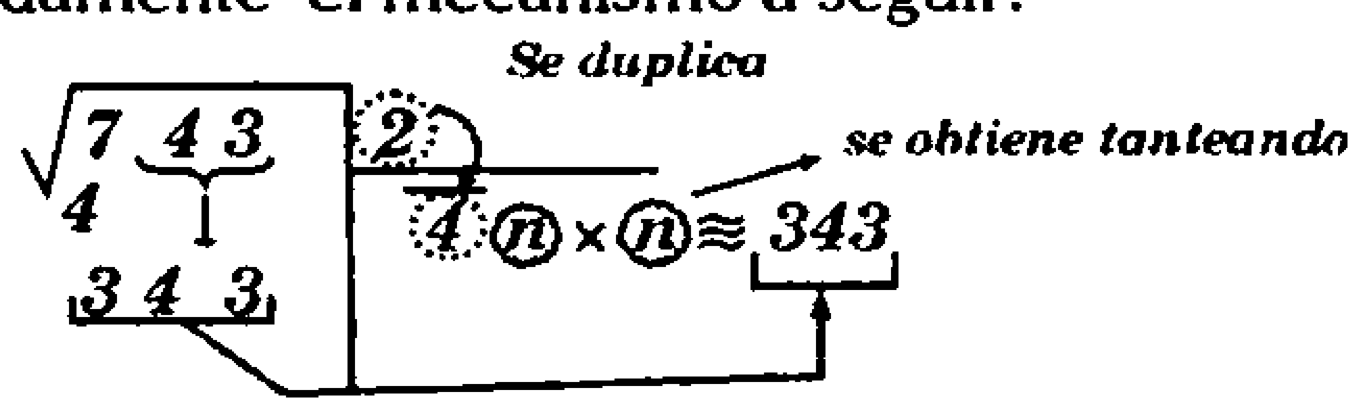
$3^{ER.}$ **PASO :**

* Se resta de 1er. Grupo el cuadrado de la cifra que forma parte de la raíz.

$$2^2 \longrightarrow \sqrt{7-}\,\lfloor 2 \quad ; \quad \underline{4} \quad ; \quad 3$$

$4^{TO.}$ **PASO:**

* Se baja el $2^{do.}$ Grupo y luego observa detalladamente el mecanismo a seguir:



¿Cuándo debe ser "*n*", para que $\overline{4n}\times n$ sea igual o aproximadamente *343*?

CLAVE : n=7 ; ya que 47 × 7 = 329

IMPORTANTE :

"*n=7*", va a formar parte de la raíz , entonces:

```
√7 4 3 | 2 7
 4     | 47 × 7 = 329
 3 4 3-
 3 2 9
   1 4
```

5^TO. PASO:

* Se baja el tercer grupo y se prosigue como en los pasos anteriores.

```
√7 4 3 5 6 | 2 7    se duplica
 4         | 4 7 ×7 =329
 3 4 3
 3 2 9
   1 4 5 6   54m × m ≈ 1456
```

* Tanteando adecuadamente , encontraremos , que: *m=2*; dado que *542 × 2 =1084*

* Finalmente resultará:

```
√7 4 3 5 6 | 2 7 2 ---------> raíz final
 4         | 47 ×7  = 329
 3 4 3     | 54 2×2 =14 5 6
 2 2 9
   1 4 5 6-
   1 0 8 4
     3 7 2
   residuo
```

* Verificación: $272^2 + 372 = 74356$

MÁS EJEMPLOS :

```
*√4 5 0 | 2 1              * √ 2     | 1, 4 1
  4     | 41×1= 41              1    | 24 × 4=96
 -5 0                           100  | -141×1=141
  4 1      Se coloca 2 ←        96
    9      ceros para la       400-
           coma                141
 → 21² + 9 = 450               259
```

```
√1, 42, 72, 3 | 11, 9 4
 1            | 21 × 1 = 2
 - 4 2        | 229×9 = 2061
   2 1        | 2384 × 4 = 9536
   2 1 , 7 2-
   2 0 , 6 1
     1 , 1 1 3 0-
     0 , 9 5 3 6
     0 , 1 5 9 4
```

$\rightarrow 142,723 = (11,94)^2 + 0,1594$

MÉTODO GENERAL PARA EXTRAER RAÍZ CÚBICA

EJEMPLO ILUSTRATIVO :

* Calcular la raíz cúbica de : ***1 3 5 4 2***

RESOLUCIÓN :

1^ER PASO:

* Se divide en grupos de *3* cifras empezando por la derecha (←):

```
∛1 3  5 4 2
 └──→ No importa que esto quede
      con menos de 2 cifras.
```

2^DO. PASO:

* Se extrae la raíz cúbica entera del *1*er. Grupo y ella será la primera cifra de la raíz.

```
∛13 | 2 ←┐
 └→ ∛ ───┘
```

3^ER. PASO:

* Se resta del primer grupo , el cubo de la cifra que formo parte de la raíz.

```
      ∛13- | 2
 2³ →   8  |
        5
```

4^TO. PASO:

Se baja el siguiente bloque, y ahora observa detalladamente el mecanismo a seguir:

```
∛1 3  5 4 2 | (2) ←──── Posible
  8                       │
  5 5 4  2                │
  └──→ 5 5 ÷(3×(2)²) ≈ 4 ─┘
```

Como se observa , se dividió el total de las centenas *(55)* entre el triple del cuadrado de la raíz hallada ($3\times 2^2 = 12$) , cuyo cociente resultó *4* , el cual va ha formar parte de la raíz.

*** PERO*:**

Lo anterior no será necesariamente cierto , para verificar la segunda cifra "*4*" de la raíz , es necesario que el resultado de :

$$300d^2u + 30du^2 + u^3 \le 5542 \quad \rightarrow \text{Nuevo indicador}$$

donde: d=2 y u=4 → *decenas y unidades de la raíz.*

* Cosa que al reemplazar, resulta:

$$300(2^2)\times 4+30\times 2\times 4^2+4^3=5824>5542$$

* *COMO* : Resultó mayor, entonces la cifra "*4*" no cumple, por lo que es necesario probar con la cifra "*3*", veamos:

$$300(22)\times 3+30\times 2\times 32+33=\underbrace{4167}_{\text{ya cumple}}<5542$$

⇒ La cifra "*3*", es la correcta

* Finalmente, resultará:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1\ 3\ 5\ 4\ 2} & 2\ 3 \\ \underline{8} & 300\times 2^2\times 3=3600 \\ 5\ 5\ 4\ 2- & 30\times 2\times 3^3=540 \\ \underline{4\ 1\ 6\ 7} & \underline{\quad 3^3=27} \\ 1\ 3\ 7\ 5 & 4167<5542 \end{array}$$

NOTA :

Si hubieran más grupos por bajar, se procede con las mismas operaciones que se hicieron.

NOTA:

* Los método anteriores se fundamentan, en :

I) $du^2=(10d+u)^2=100d^2+2\times 10\times d\times u+u^2$

* Acomodando adecuadamente, resultará:

$$\overline{du}^2=100d^2+\overline{(2d)u}\times u$$

II) $du^3=(10d+u)^3$

* Acomodando adecuadamente, resultará:

$$\overline{du}^3=1000d^3+300u^2d+30ud^2+d^3$$

EXTRACCIÓN DE UNA RAÍZ, CON UNA APROXIMACIÓN NO MAYOR A UNA FRACCIÓN DADA

EN GENERAL :

«$\sqrt{N}$ en menos de a/b»

$$q=\frac{a}{b}\underbrace{\sqrt{N\left(\frac{b}{a}\right)^2}}_{\text{por defecto}}$$

* Donde:

$$q-\frac{a}{b}\le\sqrt{N}\le q+\frac{a}{b}$$

↑	↑
Raíz cuadrada por defecto en menos de a/b	*Raíz cuadrada por exceso en menos de a/b*

EN FORMA SIMILAR PARA LA RAÍZ CUBICA

«$\sqrt[3]{N}$ en menos de a/b»

$$q=\frac{a}{b}\underbrace{\sqrt[3]{N\left(\frac{b}{a}\right)^3}}_{\text{por defecto}}$$

Donde:

$$q-\frac{a}{b}\le\sqrt[3]{N}\le q+\frac{a}{b}$$

↑	↑
Raíz cúbica por defecto en menos de a/b	*Raíz cúbica por exceso en menos de a/b*

EJEMPLO 1 :

Calcular la raíz cuadrada de 8, con una aproximación no mayor que $\frac{2}{7}$.

RESOLUCIÓN :

$$*\ \sqrt{8}=\frac{2}{7}\times\frac{7}{2}\times\sqrt{8}=\frac{2}{7}\times\sqrt{8\times\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow\sqrt{8}=\frac{2}{7}\times\sqrt{98}=\frac{2}{7}\times 9=\frac{18}{7}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular la raíz cúbica de 70, con una aproximación no mayor de $\frac{1}{10}$.

RESOLUCIÓN :

$$*\ \sqrt[3]{70}=\frac{1}{10}\times 10\times\sqrt[3]{70}=\frac{1}{10}\sqrt[3]{70\times 10^3}$$

$$\rightarrow\sqrt[3]{70}=\frac{1}{10}\times\sqrt[3]{70000}\rightarrow\sqrt[3]{70}=\frac{1}{10}\times 41=4{,}1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Se da un número positivo que no tiene raíz cúbica exacta. Si a este número se le disminuye en 721, entonces su raíz cúbica disminuye en una unidad, pero el residuo no se altera. Determine la suma de las cifras de la diferencia entre el número y el residuo.

A) 16 *B)17* *C)18* *D)19* *E)20*

RESOLUCIÓN:

* piden diferencia entre el número y el residuo : $N-r$

* Sea N un número positivo. Al no tener raíz cúbica exacta, tenemos: $\begin{array}{l|l}\sqrt[3]{N} & \underline{K} \\ r & \end{array}$

$$N=k^3+r\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

* Luego, se le desminuye en 721. $\begin{array}{l|l}\sqrt[3]{N-721} & \underline{K-1} \\ \underbrace{r}_{\text{mismo residuo}} & \end{array}$

$$\Rightarrow N-721=(k-1)^3+r\Rightarrow N=(k-1)^3+r+721\ \ldots.\ (II)$$

* Igualamos las expresiones I y II:

$k^3+r = (k-1)^3+r+721 \Rightarrow k=16$

* Como nos piden la suma de cifras de $(N-r)$:

$N-r=(k^3+r)-r=k^3 \Rightarrow k^3=16^3=4096$

*Entonces, la suma de cifras es **19**.

RPTA.: "D"

PROBLEMA 2 :

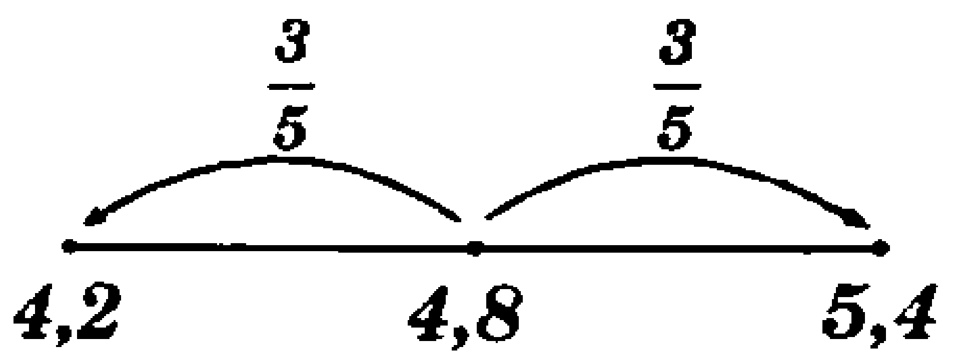
Determine la suma de todos aquellos números naturales tales que su raíz cuadrada, con una aproximación menor de $\frac{3}{5}$ es 4,8.

A)230 B)259 C)282 D)289 E) 312

RESOLUCIÓN:

* Una aproximación menor que $\frac{3}{5}=0,6$ puede presentarse por defecto o por exceso.

* Así tendremos :



* Entonces : $4,2<\sqrt{N}<5,4$; $N \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 17,64 < N < 29,16$; N tomará los valores 18; 19; 20; 21; ...; 28; 29

* La suma de los valores de N es :

$$18+19+20+...+29=\left(\frac{18+19}{2}\right)12=282$$

RPTA :"C"

PROBLEMA 3 (TIPO UNI) :

¿Cuántos números de tres cifras tienen la raíz cuadrada y la raíz cúbica con el mismo residuo no nulo?

A) 52 A) 53 C) 54 D) 55 E) 56

RESOLUCIÓN:

* Sea el número de tres cifras $\overline{abc}$.

Por dato

$\overline{abc}=k^2+R$ y $\overline{abc}=q^3+R$

$\left.\begin{array}{l}\overline{abc}-R=k^2\\ \overline{abc}-R=q^3\end{array}\right\}$ es cuadrado y cubo a la vez

Para dicha cantidad de cifras sólo cumple 3^6.

$\overline{abc}-R=3^6 \Rightarrow \overline{abc}=729+R$

$\overline{abc}=27^2+R \quad \overline{abc}=9^3+R$

Los restos máximos son

$R \le 2\times(27) \quad R \le 3\times(9)(10)$

$R \le 54 \quad R \le 270$

$R \in \{1;2;3;4;...53;54\}$

Por lo tanto, $\overline{abc}$ toma **54** valores.

RPTA : "C"

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

POTENCIACION

01 Hallar un cuadrado perfecto de 5 cifras cuyas cifras son: 2; 0; 8; 5 y 7. Indicar la suma de las cifras de la raíz.

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

02 Si $\overline{abc0}$ un cuadrado perfecto, siendo: $a+b+c=10$ el valor de:

$a-b$ es:

A) Mayor que 3
B) Múltiplo de 3
C) Menor que 4
D)Número impar
E) Cubo perfecto

03 Calcular: $a+b+c$, si $\overline{7abc00}$ es un cubo perfecto

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

04 ¿Cuál es el menor número por el cual es necesario multiplicar a 12! Para que el número resultante sea un cuadrado perfecto?

A) 21 B) 33 C) 77 D) 231 E) 462

05 Hallar el menor número múltiplo de 15 sabiendo que al sumarle su onceava parte el número resultante es una cubo perfecto. Dar como respuesta la suma de las cifras del número calculado.

A) 12 B) 15 C) 18 D) 21 E) 27

06 Si a un número entero se le resta 631, resulta un cubo perfecto. Siendo 631 el mayor posible con esta propiedad. Hallar la suma de las cifras del número dado.

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

07 Se quiere cercar una terreno de forma cuadrada cuya superficie es de 15 625 m^2, con cerca de tres hileras de alambre. Se desea saber cuanto costara toda la obra si el metro de alambre cuesta 15,50 y la mano de obra total S/. 4 225.

A) 11 975 B) 23 250 C) 26 925 D) 27 675 E) 27 475

08 Se compra cierto número de relojes por 5 625 dólares, sabiendo que el número de relojes comprados es igual al precio de un reloj en dólares. ¿Cuántos relojes se han comprado?

A) 70 B) 75 C) 90 D) 85 E) 65

09 ¿Cuántos cuadrados perfectos $\overset{\circ}{13}+4$ hay entre 924 y 5 920?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

10 Hallar $a+b$ en:

$$\overline{a(b+1)0}^2-\overline{ab9}^2=1959$$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

11 Se quiere disponer un cierto número de fichas, de modo que formen un cuadrado completo. En la primera disposición sobran 16 fichas; formando el cuadrado con una ficha más por lado, faltan 9. ¿Cuántas son las fichas?

A) 150 B) 160 C) 170 D) 180 E) 190

12 ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar 126, para que sea cuadrado perfecto?

A) 10 B) 11 C)12 D)13 E) 14

13 ¿Cuál es el menor número por el que es necesario dividir 2160 para que sea cubo perfecto?

A) 8 B) 9 C) 1 D) 11 E) 12

14 Se tiene: $M=\underbrace{\overline{6400.......0}}_{\text{"N" cifras}}$ Hallar «N» si M es cuadrado y cubo perfecto.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 12

15 ¿Cuántos números de la forma: $K^2=\overline{ab25}$ existen?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

16 Si el numeral $\overline{abaa5}$ es un cuadrado perfecto, determinar la suma de cifras de su raíz cuadrada.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

17 El cuadrado de un número con su doble producto es *63*, hallar el número.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

18 El cuadrado de un número y el doble producto de él con otro, suman *55*. Hallar los números con la condición de que sean los menores posibles.

A) 3 y 4 B) 5 y 3 C) 4 y 5
D) 2 y 3 E) 5 y 2

19 El cubo de un número, sumado con su triple producto y el triple de su cuadrado es *511*. Hallar el número.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

20 Hallar el menor número que multiplicado por *6 600* de como producto un cuadrado perfecto.

A) 55 B) 44 C) 66 D) 36 E) 54

21 Si $N \times 164 = K^2$ Hallar el menor N natural.

A) 4 B) 16 C) 8 D) 41 E) 32

22 Si: $\overline{ab000} = K^3$

Hallar $a+b$, si es el menor posible.

A) 7 B) 8 C) 9 D) 6 E) 5

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

RADICACION

01 Al extraer la raíz cúbica de un número se obtuvo como residuo *60*, siendo éste máximo. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

02 Cuántos números naturales tienen una raíz cuadrada entera igual a *42*?

A) 83 B) 84 C) 85 D) 86 E) 87

03 Hay *1849* árboles en un bosque. El número de árboles en una fila es igual al número de filas. Hallar el número de árboles en 5 filas.

A) 185 B) 195 C) 215
D) 220 E) 230

04 Hallar un número de la forma $\overline{abab}$ sabiendo que su raíz cuadrada por defecto es el doble de $\overline{ab}$ y su residuo $\overline{ab}$. Dar como respuesta $b-a$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

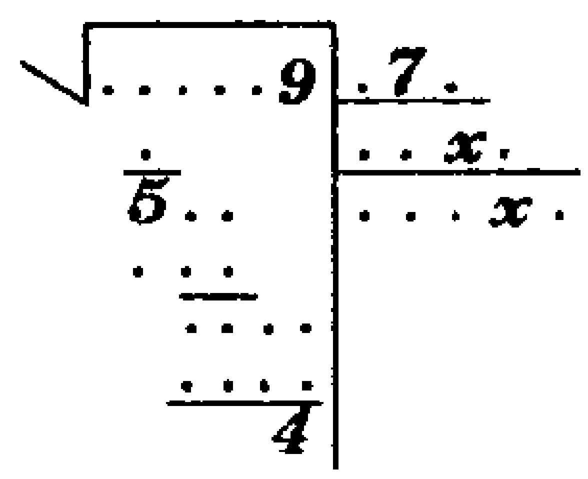
05 Hallar un número sabiendo que la suma de los residuos (defecto y exceso) de su raíz cuadrada es *83* y sabiendo además que el residuo por defecto excede en *29* unidades al residuo por exceso Indicar la cifra de menor número hallado.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

06 Hallar cuántos números menores que *10 000* existen tales que al extraerles su raíz cuadrada ésta termine en *4* y dé un residuo igual a *28*.

A) 12 B) 9 C) 15 D) 18 E) 10

07 Reconstruir la operación y dar como respuesta la suma de las cifras del radicando.



A) 12 B) 11 C) 15 D) 14 E) 13

08 Hallar $a+b+R$ en:

$$\sqrt{\overline{aba}} = 17, \quad \text{residuo } R$$

A) 30 B) 33 C) 36 D) 38 E) 39

09 Hallar la suma de cifras de «N» si:

$$\sqrt{N} = 11, \ \text{residuo } R_1 \qquad \sqrt[3]{N} = 5, \ \text{residuo } R_2$$

sabiendo que $R_1 + R_2 = 34$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 13

10 Si la raíz cuadrada entera de $\overline{12ab}$ es igual a $\overline{c(c+2)}$ y el residuo es *23*, hallar: $a+b+c$.

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

11 Al extraer la raíz cúbica entera por exceso de un número, se obtuvo *18* de raíz y *40* de residuo. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

12 Cuántos números de la forma $\overline{mnpq}$ existen tales que:

$$\sqrt{\overline{mnpq}} = A, \quad \text{residuo } 2A+1$$

A) 68 B) 69 C) 70 D) 71 E) 72

13 Al extraer la raíz cuadrada de un número entero se obtuvo como residuo por defecto *24* y residuo por exceso *33*. Hallar la suma de las cifras de dicho número.

A) 13 B) 14 C) 12 D) 8 E) 16

14 ¿ Cuántos números naturales tienen una raíz cúbica igual a *8*?

A) 214 B) 215 C) 216 D) 217 E) 218

15 Hallar el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de *2 895*.

A) 82 B) 83 C) 84 D) 85 E) 86

16 Al extraer la raíz cuadrada de un número se obtuvo *18* de raíz y *10* de residuo. Hallar dicho número:

A) 314 B) 324 C) 334
D) 342 E) 352

17 Al extraer la raíz cuadrada entera de un número se obtuvo *40* de raíz y residuo máximo. Hallar la suma de cifras de dicho número.

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

18 Hallar el residuo que se obtiene al extraer la raíz cuadrada de *278 954*.

A) 170 B) 180 C) 195 D) 205 E) 210

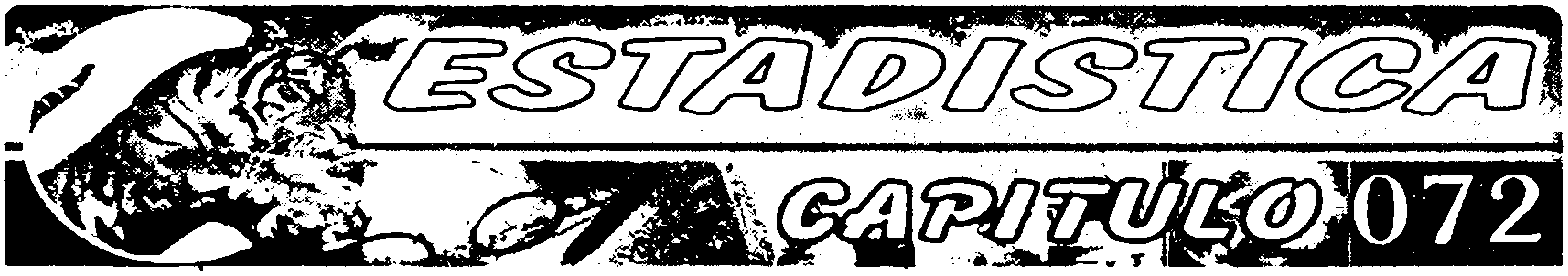
19 ¿ Cuántos números de *4* cifras tienen raíz cúbica exacta?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

20 Hallar la suma de cifras de $M \in \mathbb{Z}^+$ si:

$$\sqrt[3]{M} = 12, \quad \text{residuo } 25$$

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18



OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Conceptuar estadística* y *diferenciar entre población* y *muestra.*

* *Tener criterios para clasificar los diversas variables.*

* *Leer* e *interpretar correctamente información estadística proveniente de hechos reales.*

* *Construir tablas de distribución de frecuencias para variables cuantitativas* y *cualitativas.*

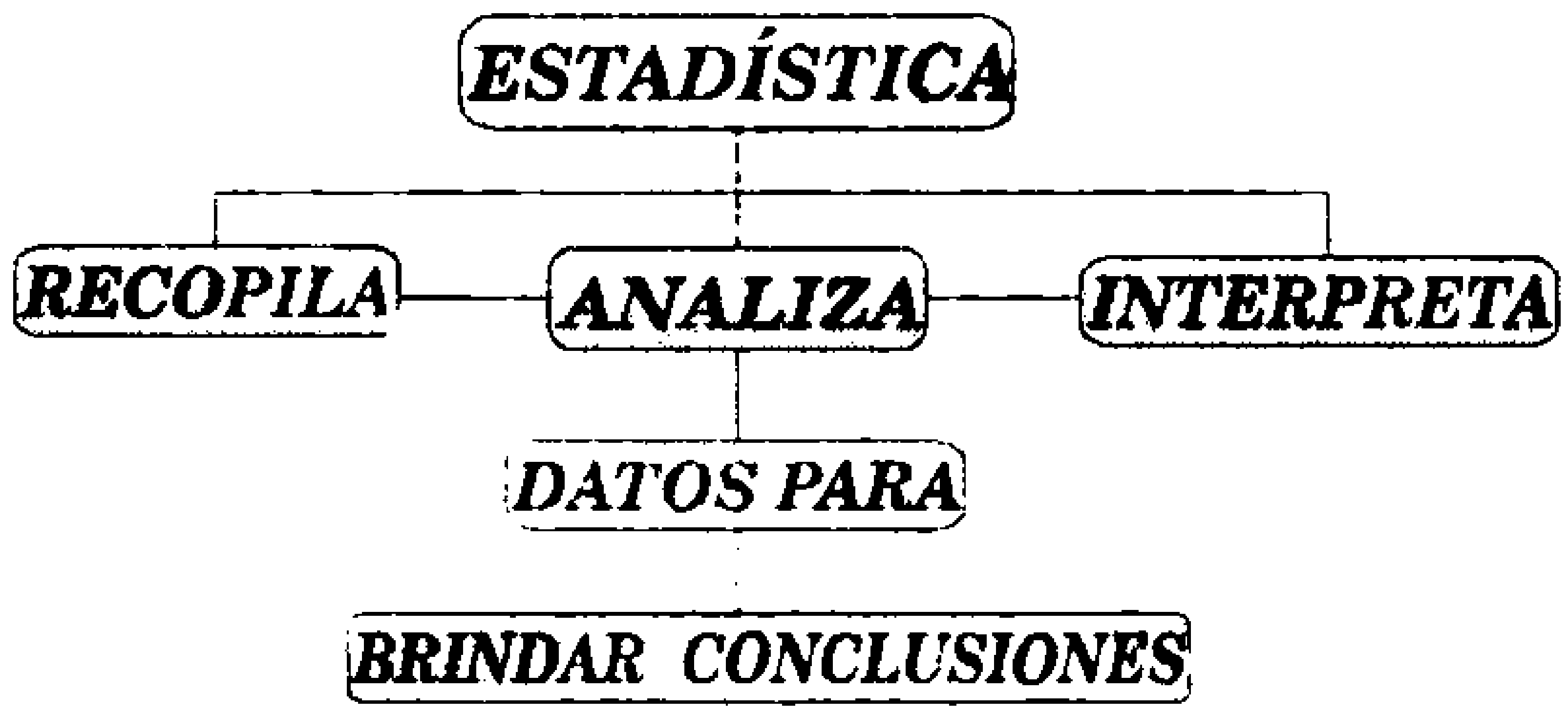
* *Usar parámetros estadísticos de medida de tendencia central para resolver situaciones concretas.*

INTRODUCCION :

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadísticas, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o ciertas cosas. Hacia el año ***3000*** a.C., los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el s. ***XXXI*** a. n. e. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año ***2000*** a. n. e. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el año ***594*** a. n. e. para cobrar impuestos. El Imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control. El registro de nacimientos y defunciones comenzó en Inglaterra a principios del ***s. XVI***, y en ***1662*** apareció el primer estudio estadístico notable de población, titulado Observations on the London Bilis of Mortality (Comentarios sobre las partidas de defunción en Londres). En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de los datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. El trabajo del experto estadístico ya no solo consiste en reunir y tabular los datos, sino, sobre todo, es un proceso de interpretación de esa información. El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar, con gran exactitud, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas; los resultados de estas se pueden utilizar para analizar datos estadísticos. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir el tipo y la cantidad de datos necesarios en un determinado estudio estadístico.

ESTADÍSTICA

La estadística es parte del método científico y se le define como un conjunto de técnicas usadas para recolectar, organizar, presentar, analizar e interpretar datos , con el fin de obtener conclusiones y tomar decisiones sobre determinados hechos o fenómenos en estudio. El presente capítulo tiene por finalidad describir en forma general el comportamiento de un conjunto de datos de una población a partir del estudio de un subconjunto de ella (muestra) al cual debe tener la mismas características de la población considerada para posteriormente convenientemente generalizarlos a la población.



TÉRMINOS USADOS EN LA ESTADÍTICA POBLACIÓN

Es el conjunto de datos (observaciones) que presentan una característica particular a ser analizada o estudiada de lo cual se desea información .

• MANEJO DE DATOS :

Para el manejo de datos es importante aclarar el significado de algunos términos:

• POBLACIÓN O UNIVERSO :

Es el conjunto sobre el cual se realiza el estudio; los elementos pueden ser personas, objetos o sucesos, simples o compuestos. Así por ejemplo si en un país se trata de determinar la estatura promedio de los hombres mayores de *18* años, la población estará formada por todos los hombres mayores de *18* años.

MUESTRA :

Es un subconjunto de la población , una muestra debe ser representativa ; lo cual quiere decir , que debe contener las características a estudiar , en la misma proporción en que figura en la población.

VARIABLE :

Característica de estudio de la investigación, «dato» que sufre variación dentro de una escala, recorrido o intervalo . Concretamente la variable es la característica que se registra o investiga.

EJEMPLOS :

POBLACIÓN	MUESTRA	VARIABLE
Niños enfermos	*Un grupo de niños enfermos*	*Enfermedad*
Alumnos de colegio	*Un grupo de alumnos*	*Nota*
Empresas mineras	*Empresas mineras del centro norte y sur del Perú*	*Producción de plano*

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES

I) VARIABLE CUALITATIVA :

Expresa una cantidad , propiedad , atributo de la variable , no pueden expresarse numéricamente .

EJEMPLOS :

* *Sexo*
* *Grado de instrucción*
* *Razas humanas*
* *Marcas de gaseosas*

II) VARIABLE CUANTITATIVA :

Son aquellas que son susceptibles de ser medidas o de ordenamiento (recuento).

EJEMPLOS :

* Peso , talla , edad , notas .
* Número de empleados .
* Producción mensual de maíz .
* Número de televisores vendidos .

Las variables cuantitativas de dividen en :

A) DISCRETAS :

Son aquellas que asumen un conjunto de valores que están en correspondencia biunívoca con los números naturales o con un subconjunto de estos .

EJEMPLO :

3 y *7*

B) CONTINUAS :

Son aquellas que asumen un conjunto de valores que están en correspondencia con los números reales.

EJEMPLOS :

1 ; 8,82 ; 0,86 ; 84,6

CLASES DE ESTADÍSTICA

I) DESCRIPTIVA :

Describe las características de la población , o la muestra , recopila , clasifica , resume , presenta y analiza datos , sin ningún intento de hácer una predicción basada en los datos.

II) INFERENCIAL :

Llamada también inductiva o de pronóstico , cuyo objetivo es investigar como deben ser utilizados ; los datos de la muestra para «deducir» resultados o probar alguna hipótesis sobre la población entera a la que pertenecen estos datos .

TABLAS ESTADÍSTICAS

1) TABLAS UNIDIMENSIONALES :

Cuando se analiza una sola variable.

x	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
	.
x_n	f_n
Total	$n=\sum_{i=1}^{n} f_i$

Valores que toma la variable (x)

Número de veces que se repite la variable (f_i)

2) TABLAS BIDIMENSIONALES :

Cuando se analizan *2* variables

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n	f_i
x						
x_1						
x_2						
x_3						
$\vdots$						
x_m						
f_k						

f_i — Total de la fila i–ésima

f_k — Total de la columna k–ésimam $= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{i_k}$

• DISTRIBUCIONES DE FRECUENCIA :

Es el método para organizar y resumir datos. Los datos se clasifican y ordenan para facilitar su interpretación. Cuando se dispone de numerosos datos conviene agruparlos en clases o intervalos e indicar cuantos elementos hay en cada intervalo; éste número se llama frecuencia.

• FRECUENCIA :

Es el número de veces que ocurrió un valor.

Agrupación de datos por su frecuencia:

1) Se ordenan los datos en orden creciente.

2) Se lee la demanda semana por semana.

Observemos que el menor de los valores obtenidos es ***59*** y el mayor ***97***. De esta observación surge el concepto de rango.

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

La investigación estadística es fundamentalmente de tipo descriptivo , se preocupa de la confiabilidad , validez y significación de los datos de las muestras , así como de los métodos y técnicas de recolección y análisis estadístico .

En este proceso se distinguen las siguientes etapas:

I) RECOPILACIÓN DE LOS DATOS :

Los métodos de recolección de datos son diversos y dependen de las posibilidades de acceso o contacto con los elementos investigados , del tamaño de la población y de la oportunidad de obtener los datos.

Entre las técnicas más frecuentes se tiene :

CENSO :

Es cuando se destina a obtener información de toda la población . Los censos más conocidos son los de población , vivienda , lo económico , etc.

ENCUESTA :

Destinadas por lo general al análisis de la muestra , respecto al tema de interés .

EJEMPLO :

Se tienen los ahorros mensuales de *20* personas elegidos al azar .

490	500	470	300	8 0
250	270	300	600	120
250	450	450	460	380
370	380	450	0	400

* Al observar los datos se puede apreciar su variabilidad , lo cual hace difícil destacar los hechos más importantes para obtener conclusiones acertadas que ayuden en la toma de decisiones . Es por ello que se hace necesario ordenar los datos en una tabla de distribución de frecuencia .

II) ORGANIZACIÓN DE DATOS :

Después de la recopilación de datos se procede a su organización , clasificación y tabulación de modo que se facilite su presentación en tablas, cuadros y gráficos .

EJEMPLO:

0	80	20	250	250
270	300	300	370	380
380	400	450	450	450
460	470	490	500	600

IV) PRESENTACIÓN DE DATOS :

Una vez recolectados los datos se procede a su organización , clasificación y tabulación , de modo que se facilite su presentación en una tabla (tabla de frecuencia) que es la distribución de las observaciones o clases.

ELEMENTOS DE UNA TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Clasificación de las observaciones , consiste en agrupar las observaciones , en un número bien determinando de categorías o clases excluyentes, anotando la cantidad de datos en cada intervalo de clase (frecuencia). Algunos conceptos que necesitaremos para construir la tabla de distribución de frecuencias se dan a continuación .

TAMAÑO (N) :

Es la cantidad de datos . En el ejemplo : $n=20$

ALCANCE (A) :

Intervalo cerrado que considera como límites al menor y mayor de los datos .

EJEMPLO :

* Del ejemplo anterior , se obtendrá :

$A\ [0\ ;\ 600]$

0 → *Menor valor*   600 → *Mayor valor*

RANGO (R) :

Es la amplitud del alcance, se calcula como la diferencia del mayor de los datos y el menor de los datos.

EJEMPLO :

Podemos considerar los siguientes intervalos .

Rango (R)

I_1 I_2 I_3

0 200 400 600

$I_1=[0 ; 200> ; I_2=[200 ; 400>; I_3=[400 ; 600]$

INTERVALO DE CLASE (I) :

Es una clasificación de los datos en grupos , equivale a particionar el alcance. para el ejemplo , *[120 ; 240>* es un posible intervalo de clase donde se ha de considerar a los estudiantes con ahorros de *120* a *240*

$$[120;240\rangle$$

Límite inferior ← → **Límite superior**

LÍMITES DE CLASE

Son los extremos de cada intervalo de clase

EJEMPLO :

$I = [120 ; 240 >$ — Límite superior; Límite inferior

ANCHO DE CLASE (W) :

Es el tamaño de un intervalo determinado ; se calcula como la diferencia del límite superior y límite inferior.

$$I=[120 ; 240>$$

$$\Rightarrow W=240-120 \Rightarrow W=120$$

* Ancho de clase común :

$$W=\frac{Rango}{Número\ de\ intervalos}=\frac{R}{K}$$

MARCA DE CLASE (x_i) :

Es un promedio de los datos en un intervalo; se calcula como la semisuma de los límites de un intervalo.

EJEMPLOS :

* En $I_1=[0 ; 200> \Rightarrow X_1=\frac{0+200}{2}=100$

* En $I_2=[200 ; 400> \Rightarrow X_2=\frac{200+400}{2}=300$

NÚMERO DE INTERVALOS (k) :

Al analizar un conjunto de datos , estas pueden clasificar, en cierta cantidad de intervalos , de igual ancho de clase convenientes en la que se deben clasificar , dependiendo del número de datos *(n)*.

REGLA DE STURGES :

$$k=1+3,3Log\ n$$

n : número total de datos

EJEMPLO :

$$k=1+3,3Log(20) \Rightarrow k=5,294....$$

Considerando k aproximado queda ser k: *4 ; 5 ; 6* Se puede trabajar con cualquiera de estos valores. En el ejemplo se va ha elegir ($k=5$)

FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i) :

Es el número de datos contenidos en un determinado intervalo se clase . La suma total de las frecuencias absolutas deben corresponder al número total de elementos *(n)*. si en $I_i=[a_i;b_i>$ hay *5* datos x_i tales que $a_i \le x_i \le b_i$

Entonces $f_i=5$. $\sum_{i=1}^{k} f_i=n$

FRECUENCIA RELATIVA (h_i) :

Es el cociente de cada frecuencia absoluta entre el número total de datos . Indica que porcentaje del total corresponde a cada clase . $h_i=\frac{f_i}{n}$

Además la suma de todas las frecuencias relativas es igual a *1* : $\sum_{i=1}^{K} h_i=1$

FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)

Es la suma de la frecuencia absoluta de una clase con todos los precedentes.

$$F_1= f_1$$
$$F_2= f_1+f_2$$
$$F_3= f_1+f_2+f_3$$

....

....

$$F_h=\sum_{i=1}^{K} f_i=n$$

FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)

Es la suma de la frecuencia relativa a una clase con todas las precedentes .

$$H_1=h_1$$
$$H_2=h_1+h_2$$
$$H_3=h_1+h_2+h_3$$

....

....

$$H_k=\sum_{i=1}^{k} h_i=n$$

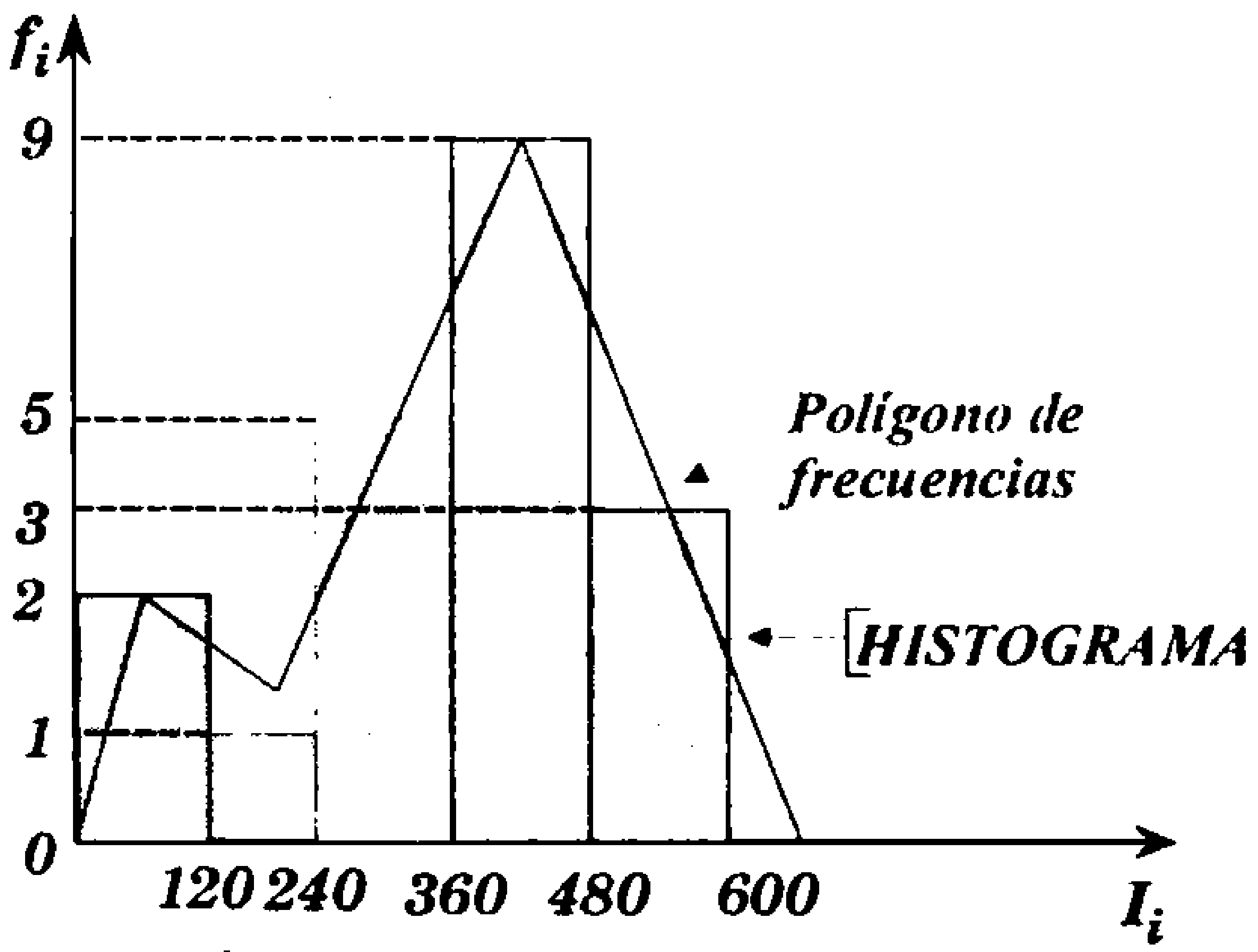
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

PRESENTACIÓN GRÁFICA

HISTOGRAMA :

Son diagramas de barras o rectángulos cuyas bases representan intervalos de clases y las alturas las frecuencias absolutas o relativas .

* Del ejemplo anterior , se obtendrá :

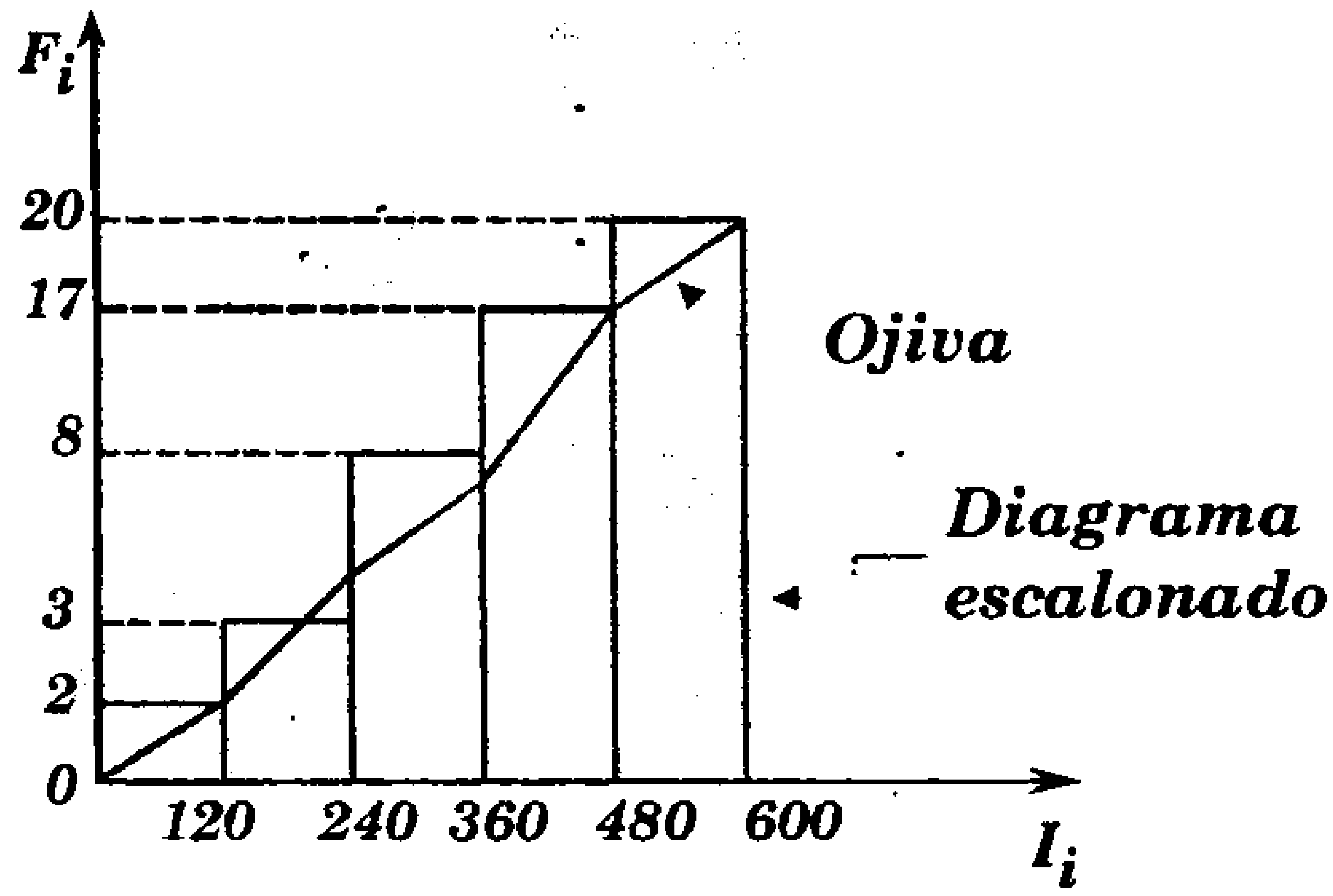


POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Es un gráfico de líneas trazado sobre los puntos medios de cada clase. Se obtiene uniendo los puntos medios de los extremos superiores de cada rectángulo. Se acostumbra prolongar el polígono hasta los puntos medios inferior y superior de las clases inmediatas. Construiremos ahora el polígono de frecuencias y el histograma para nuestro ejemplo, teniendo en cuenta la explicación anterior.

DIAGRAMA ESCALONADO

Son diagramas similares al histograma con la diferencia de que las alturas , son frecuencias absolutas acumuladas o relativas acumuladas .



OTRO EJEMPLOS :

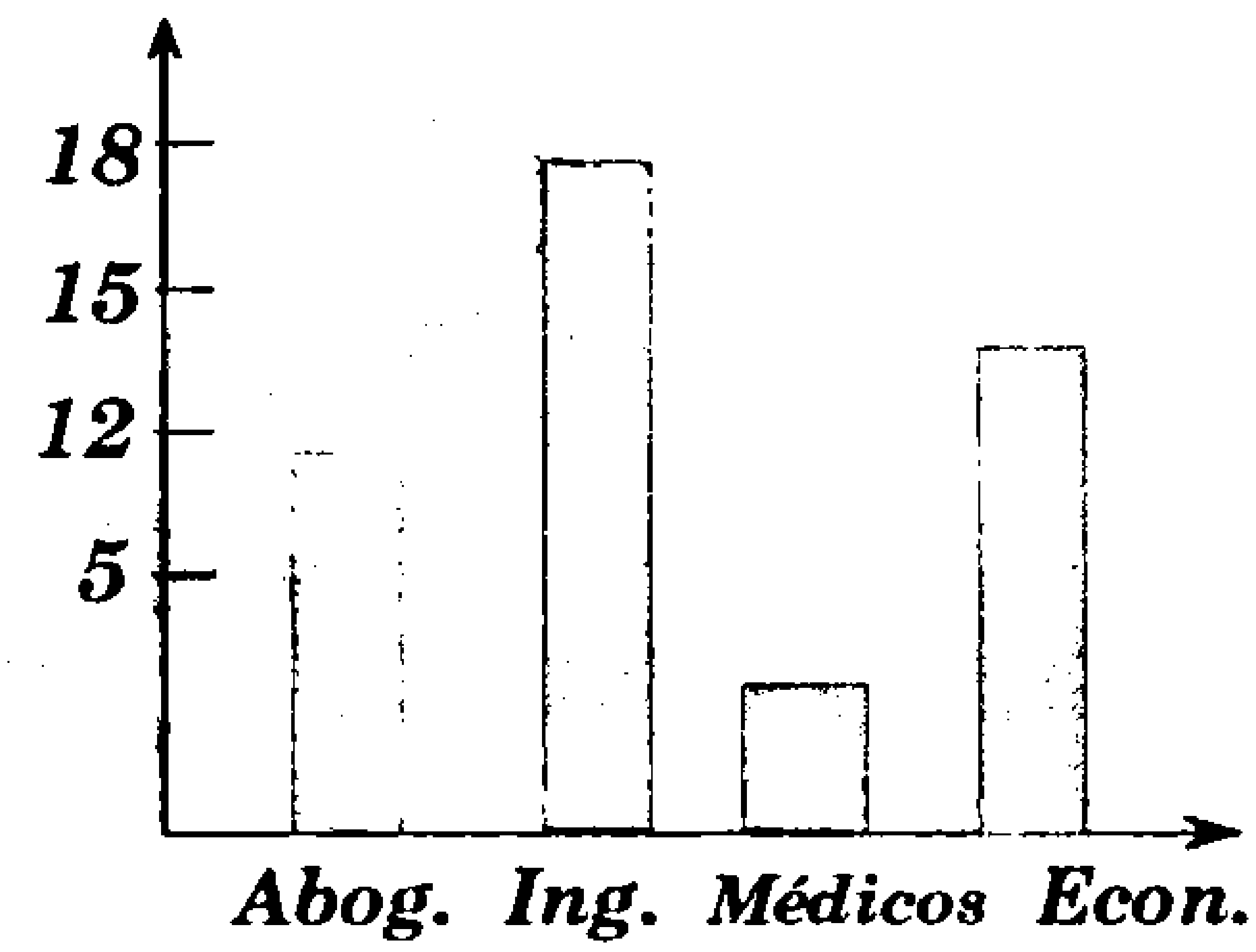
I)

Ocupaciones	f_i	$h_i \cong \%$
Abogados	12	$0,24 \cong 24\%$
Ingenieros	18	$0,36 \cong 36\%$
Médicos	5	$0,10 \cong 10\%$
Economistas	15	$0,30 \cong 30\%$

Total : ***50***

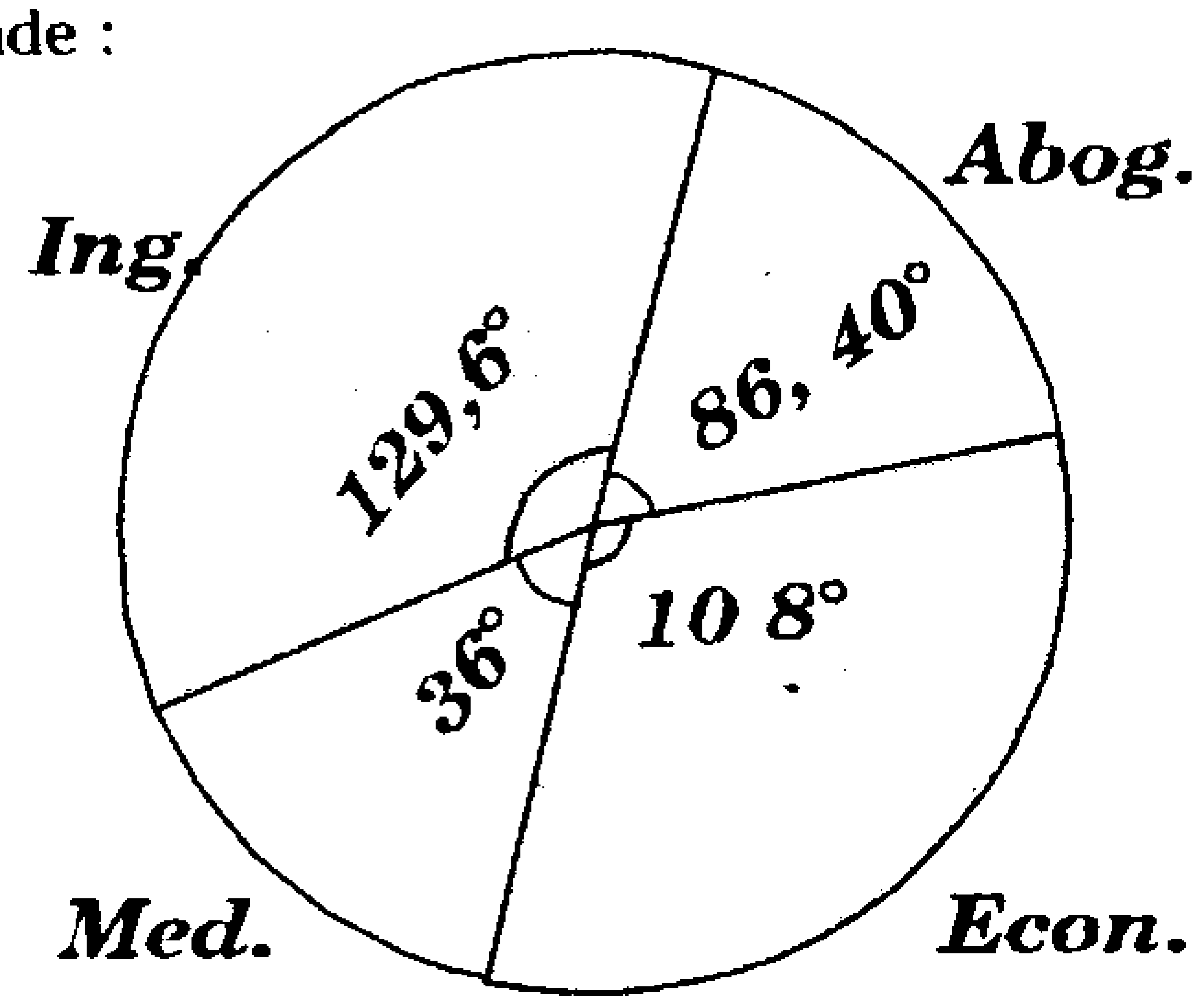
Su representación gráfica puede ser :

*** DIAGRAMA DE BARRAS SEPARADAS :**



*** DIAGRAMA CIRCULAR :**

* Donde :



$N = 100\% = 360°$	$\theta = h_i \times 360°$
▸ Número de datos	▸ Medida del ángulo central

* Es decir :

$$\theta_1 = 0,24 \times 360° = 86,4°$$
$$\theta_2 = 0,36 \times 360° = 129,6°$$
$$\theta_3 = 0,10 \times 360° = 36°$$
$$\theta_4 = 0,30 \times 360° = 108°$$

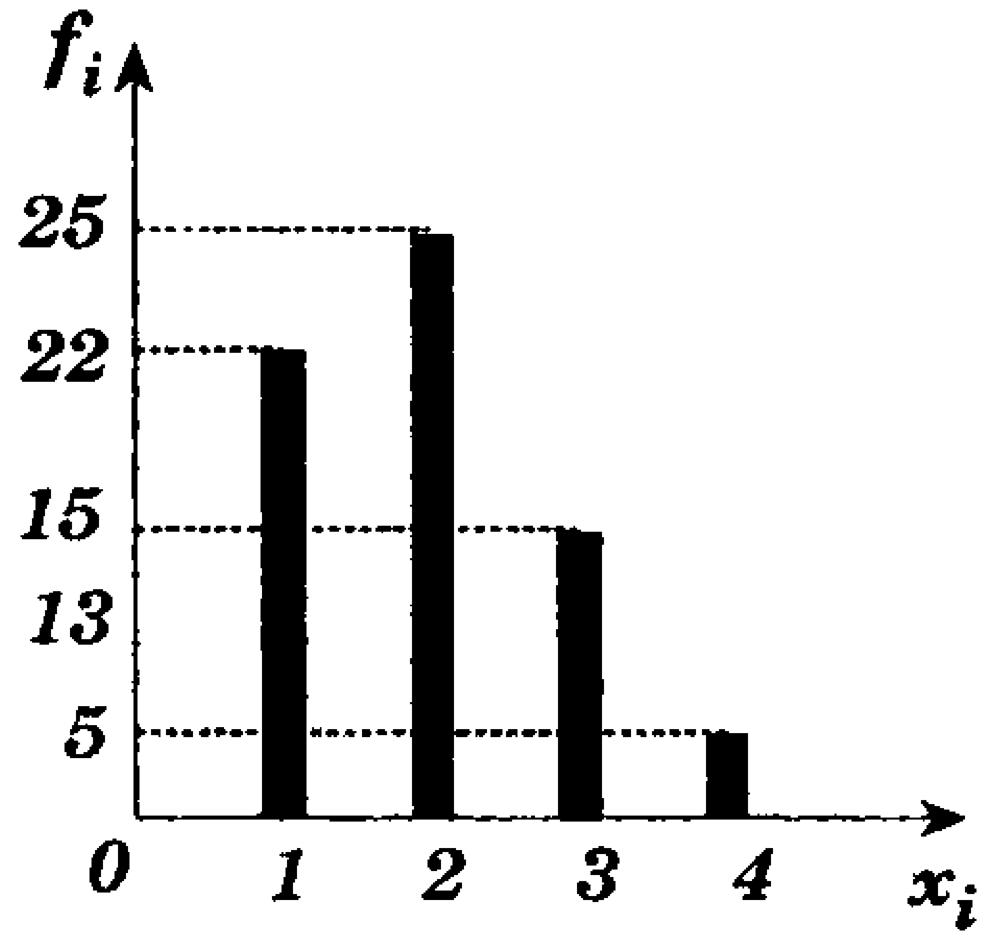
II) En una aldea de la selva se preguntó a un grupo de ***80*** familiares sobre el número de hijos que tenían . El resultado se muestra en la siguiente tabla.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	13	0, 1625	13	0, 1625
1	22	0, 275	35	0, 4375
2	25	0, 3125	60	0, 75
3	15	0, 1875	75	0, 9375
4	5	0, 0625	80	1

x_i=número de hijos por familia

* Su Representación Gráfica

En *Diagrama de bastones*, será :

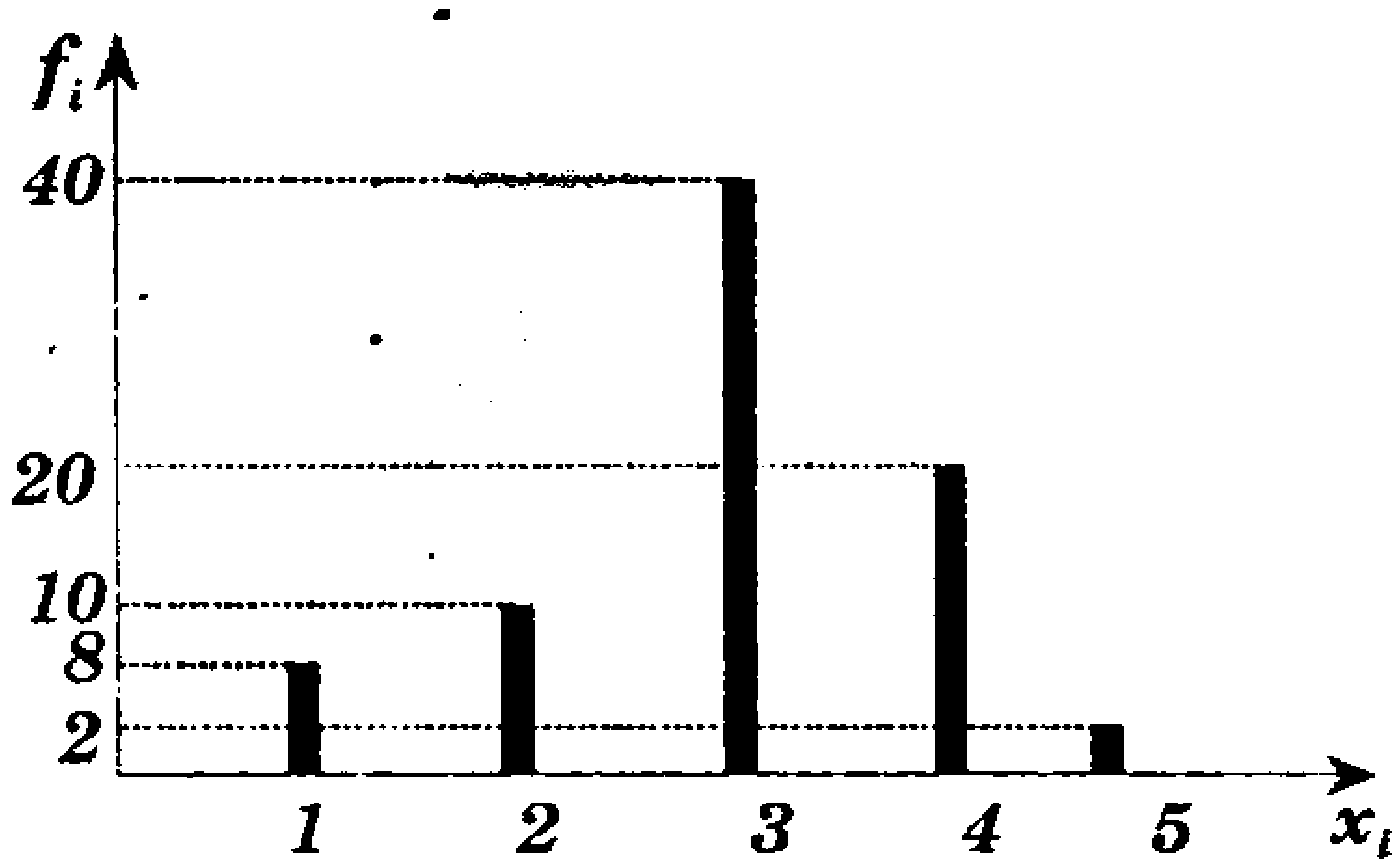


III) Analizaremos el siguiente cuadro estadístico, obtenido al entrevistar a *80* padres de familia en Huaraz, con respecto a la cantidad de hijos que poseen:

Hijos *Padres*

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	8	8	0,100	0,100
2	10	18	0,125	0,225
3	40	58	0,500	0,725
4	20	78	0,250	0,975
5	2	(80)	0,025	(1)

* Su Representación Gráfica en *«DIAGRAMA DE BASTONES»*, será:



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Son aquellas que dan una idea general acerca del valor más representativo para el grupo de datos.

Las más usadas son :

I) MEDIDA ARITMÉTICA ($\overline{MA}$ o $\bar{x}$) :

A) PARA «N» DATOS NO CLASIFICADOS :

$$MA=\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+.....+x_n}{n}$$

EJEMPLO :

La media aritmética de los datos: *4; 7; 5; 4;10*

$$\overline{MA}=\bar{x}=\frac{4+7+5+4+10}{5}=6$$

B) PARA DATOS CLASIFICADOS :

$$\overline{MA}=\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i f_i}{n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i f_i}{n} \quad \text{ó} \quad \bar{x}=\sum_{i=1}^{h}(h_i)x_i$$

h_i: frecuencia relativa simple de la clase i

f_i: frecuencia absoluta simple de clase i

x_i: marca de clase de clase i

k: número de clases

EJEMPLO :

* De la siguiente tabla hallar la media :

I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$
[10;30[	20	20	400
[30;50[	40	10	400
[50;70[	60	50	3 000
[70;90[	80	20	1 600

$n = 100$

$$\overline{MA}=\bar{x}=\frac{400+400+3000+1600}{100} \Rightarrow \overline{MA}=\bar{x}=54$$

EJEMPLO :

* De la siguiente tabla hallar la media:

I_i	x_i	h_i	$x_i\ h_i$
[0,20;0,40[	0,08	0,30	0,024
[0,40;0,60[	0,70	0,50	0,35
[0,60;0,80[	0,10	0,70	0,07
[0,80;1,00[	0,12	0,90	0,108

$$\overline{MA}=\bar{x}=0,024+0,35+0,07+0,108$$

$$\Rightarrow \overline{MA}=\bar{x}=0,552$$

II) MODA (Md) :

Es el valor de la variable que más se repite o el de mayor frecuencia .

EJEMPLOS :

* $\underline{21}$; 30 ; 18 ; $\underline{21}$; 15 ; 20 ; $\underline{21}$; 15 ; $\rightarrow Md=21$

* $\underline{15}$; $\underline{18}$; 20 ; $\underline{18}$; 12 ; $\underline{15}$; 19 $\rightarrow \left.\begin{matrix}Md_1=15\\ Md_2=18\end{matrix}\right\}$ *Bimodal*

OBSERVACIÓN:

A una distribución que tiene una sola moda se le denomina unimodal . Si hubiese más de dos valores con frecuencias máxima similar , la distribución es multimodal: bimodal , trimodal , etc.

En el caso que ningún valor se repita más que los otros se dice que no existe moda.

* Para *n* datos ***clasificados*** con intervalos de igual ancho de clase se tiene que la clase modal es aquella que tiene la mayor cantidad de datos . Luego el valor de la moda se da por :

$$M_o = L_o + W_o\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

* Donde :

L_o: Límite inferior de la clase modal

w_o: ancho de clase modal

d_1: Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente

d_2: Diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente .

EJEMPLO 1:

Se presenta un cuadro de los asistentes a una reunión distribuidos por edades

Edades	Persona
18 años	14
19 años	18
20 años	27
21 años	29
22 años	30
23 años	22

En este caso se dice que la moda es *22* años , porque hay la mayor cantidad de persona con esta edad

EJEMPLO 2 :

En la siguiente tabla de frecuencias. Hallar la moda

F_i	f_i
[20;30[	8
[30;40[	9
[40;50[	5
[50;60[	3

$w = 10$; I_i

$d_1 = 9 - 8 = 1$

$d_2 = 9 - 5 = 4$

$$\Rightarrow Md = 30 + 10\left(\frac{1}{1+4}\right) = 32$$

II) MEDIANA (Me):

Es un promedio que presenta el punto medio de los datos , para determinarlo el procedimiento es el siguiente:

* Se ordenan los datos en forma creciente o decreciente.

* Si el número de datos es impar , la mediana es el dato central.

* Si el número de datos es par , la mediana es el promedio aritmético de los datos centrales.

EJEMPLO :

Se ha recopilado las notas de *12* estudiantes los cuales son: *13; 15; 16; 18; 7; 8; 15; 10; 5; 20; 15; 7*. Calcule la mediana

RESOLUCIÓN:

* Ordenamos en forma decreciente:

20 18 16 15 15 15 13 10 8 7 7 5

Datos centrales: 15, 13

* Luego : $Me = \dfrac{15+13}{2} = 14$

* *CONCLUSIÓN:*

El *50%* de los estudiantes tienen *14* como nota máxima .

* *EN GENERAL :*

Para «*n*» datos no clasificados

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & ; n \text{ impar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & ; n \text{ par} \end{cases}$$

PARA DATOS CLASIFICADOS :

La clase mediana es la «primera clase» cuya frecuencia absoluta acumulada iguala o excede mínimamente a la midad del total de datos , luego el valor de la mediana se da por :

$$Me = L_m + W_m\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right]$$

* Donde :

L_m: Límite inferior de la clase medina

W_m: ancho de clase de la clase mediana

n : número total de datos

F_{m-1}: frecuencia absoluta acumulada de la clase que precede a la clase mediana

f_m : frecuencia absoluta de la clase mediana

EJEMPLO 1:

Dados los siguientes datos :

1; 2;1; 3; 2;1;7; 6; 3.

OBSERVACIÓN:

Primero ordenamos

$$\begin{array}{ccccccccc} 1; & 1; & 1; & 2; & 2; & 3; & 3; & 6; & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

$$\Rightarrow Me = x_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = x_5 = 2$$

EJEMPLO 2 :

Dado los siguientes datos:

04 ;12 ;12 ;08 ;07 ;04 ;13 ; 15.

OBSERVACIÓN :

Primero ordenamos

$$\begin{array}{cccccccccc} 04; & 04; & 07; & 07; & 08; & 08; & 12; & 12; & 13; & 15; \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$

$$Me = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{08+08}{2} = 08$$

EJEMPLO 3 :

Dada la siguiente distribución de frecuencias.
Hallar la mediana

	L_i	f_i	F_i	
	[10; 20[	10	10	
	[20; 30[	12	22	f_{i-1}
w	[30; 40[	8	30	$\frac{n}{2}=25$
L_i	[40; 50[	20	50	f

$$\Rightarrow Me = 30 + 10\left(\frac{25-22}{8}\right) = 33{,}75$$

OBSERVACIÓN:

La mediana divide al histograma en dos partes de igual área .

OTRO EJEMPLO :

Las edades de un grupo de deportistas fue agrupado tal como muestra la tabla .

Intervalo (Edades)	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i
[10 - 14>	12	6	72	6
[18 - 22>	20	12	240	28
[14 - 18>	16	10	160	16
[22 - 26>	24	9	216	37
[26 - 30>	28	3	84	40
		n=40	772	

I) la media aritmética $(\overline{M.A.})$, será :

$$M.A. = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{n} = \frac{772}{40} = 19{,}3$$

II) Para determinar la Moda , Veremos en el cuadro anterior , el intervalo de mayor frecuencia es el tercero ***[18 – 22>***; entonces :

$$L_i{:}18 \quad d_1{:}12-10=2$$

$$d_2{:}12-9=3 \quad W{:}\ 22-18=4$$

* Luego :

$$Md = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)W \Rightarrow Md = 18 + \left(\frac{2}{2+3}\right)4 = 19{,}6$$

La moda de todos los deportistas es ***19, 6***

III) Para determinar la ***mediana*** , se observa que del cuadro anterior , la mitad de los datos será :

$$\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

* Ahora en la columna de la frecuencia acumulada (F_i) buscamos aquella frecuencia que es mayor a ***20*** por primera vez , que será el tercer intervalo ***[18–22>.***

$$L_m = 18;\ F_{m-1} = 16\ ;\ f_m = 12\ ;\ W{:}\ 22-18=4$$

* Luego :

$$Me = L_m + W\left(\frac{\frac{n}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right) \Rightarrow Me = 18 + 4\left(\frac{\frac{40}{2} - 16}{12}\right) = 19{;}3$$

La mediana de datos los deportistas es ***19, 3***

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de tendencia central $(\bar{x}; M_e; M_o; M_g; M_h)$ no son suficientes para describir a un conjunto de datos ; es decir , para completar el análisis , se debe tener una idea del grado de concentración o disposición de las observaciones alrededor de un valor central o de posición , por lo que resulta necesario incluir medidas de disposición como por ejemplo la varianza representa por S^2 y la desviación estándar denotada por ***S***.

VARIANZA MUESTRAL

Una vez determinado el promedio de un grupo de datos , nuestra búsqueda de información se dirige de inmediato a una medida de dispersión. Por ejemplo que los datos son ***3; 4; 3; 5; 8*** y ***7***. La disposición o variabilidad que existe entre ellos se puede cuantificar al restar el mínimo valor del máximo valor ; esto es , ***8 – 3=5*** . Esta es una medida de variabilidad basada en los valores extremos del conjunto y , por tanto no informa nada con respecto a la variabilidad en la parte central de los datos.

Para desarrollar una medida de variabilidad más exacta , tomaremos las desviaciones de cada dato con respecto a la media de ellos . En el ejemplo, tenemos :

x_i	3	4	3	5	8	7	Total
$x_i-\bar{x}$	-2	-1	-2	0	3	2	0

Se podría suponer que el promedio de las desviaciones $(x_i-\bar{x})$ puede funcionar como medida de dispersión; sin embargo , puedes observar que la suma de estas desviaciones es exactamente cero. De hecho , siempre tendrá valor cero. ¿Por qué? , Revisa la definición de media para justificar esta afirmación. Es obvio que si esta medida va a ser siempre cero , no será útil para describir un conjunto cualquiera de datos . Observarás que hay una cancelación entre las desviaciones negativas y positivas . Este efecto de cancelación podría evitarse si todas las desviaciones fuesen positivas . Al elevar al cuadrado todas las desviaciones se tendrán siempre valores positivos y , por tanto , cuando se sumen tales valores , el resultado será positivo y , por tanto , cuando se sumen tales valores , el resultado será positivo . Retomaremos a nuestro ejemplo:

x_i	3	4	3	5	8	7	Total
$x_i-\bar{x}$	-2	-1	-2	0	3	2	0
$(x_i-\bar{x})^2$	4	1	4	0	9	4	22

Las desviaciones al cuadrado suman *22* . el producto de las desviaciones al cuadrado es $\frac{22}{6}=3,67$. Esta medida es conocida como varianza , se denota por S^2 y se define como la dispersión de los datos alrededor de la media :

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-(\bar{x})^2$$

La misma fórmula en datos resumidos en un distribución de frecuencias es :

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2f_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2f_i}{n}-(\bar{x})^2$$

EJEMPLO :

Dado:

Ingresos (S/.)	x_i	f_i	$(x_i-\bar{x})^2f_i$	$x_i^2 f_i$
200 - 300	250	6	194 000	375 000
300 - 400	350	9	57 600	1 102 500
400 - 500	450	12	48 000	2 430 000
500 - 600	550	13	187 200	3 932 500
Total		40	444 000	7 840 000

* Luego, la varianza de los ingresos es :

$$S^2=\frac{444\ 000}{40}=11\ 100$$

* Usando la fórmula reducida , tenemos :

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2f_i}{n}-(\bar{x})^2$$

* Esto es : $S^2=\frac{7840\ 000}{40}-(439)^2=11\ 100$

En los cálculos anteriores de varianza , los resultados se expresan en soles al cuadrado . Por ejemplo , la varianza de los ingresos resultó $S^2=11100$ soles^2. ¿Cómo interpretamos este resultado? La respuesta será «esto no es interpretable» o «no tiene interpretación». Pues el problema de la varianza como medida de dispersión no tiene interpretación debido a que está expresando en unidades cuadráticas .

Este problema de interpretación se resuelve utilizando la desviación estándar.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR
$(S=+\sqrt{varianza})$

Se define como la raíz positiva de la varianza . Se denota con la letra *S*. En el ejemplo anterior , la varianza de los ingresos fue *11 100* soles^2. Entonces , la desviación estándar es :

$$S=\sqrt{11\ 100\ \text{nuevos soles}^2}=S/.105,36$$

Cuya interpretación podría ser: «en promedio , el ingreso de una familia difiere del ingreso promedio familiar en *S/. 105, 36*»

Las unidades de medida de la desviación estándar son iguales a las unidades de medida de los datos. Si por ejemplo , los datos están en kilogramos , entonces la desviación estándar *S* también en kilogramos, y mientras mayor sea el valor de *S* o S^2, mayor será la dispersión de los datos.

OBSERVACIONES :

* No olvides que , por definición , tanto la varianza como la desviación estándar son dos valores positivos.

* S^2 y *S* son ambas medidas de dispersión , la diferencia radica en que S^2 está acompañada de las unidades originales elevadas al cuadrado , mientras que *S* está acompañada de las unidades originales . Por decir , si se calcula S^2 de un grupo de datos expresados en metros , y resulta $S^2=1,45$, lo correcto es : $S^2=1,45m^2$, mientras que para la desviación estándar se tiene que decir :

$$S=\sqrt{1,45}\ m=1,2041m$$

• DESVIACIÓN TÍPICA VARIANZA:

Dado un conjunto de números se define como varianza al cuadro de la desviación típica:

$$S^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N}(x_j - \bar{x})^2}{N}$$

• DISPERSIÓN ABSOLUTA Y RELATIVA :

- DISPERSIÓN ABSOLUTA :

Es la dispersión o variación real determinada por la desviación típica.

- DISPERSIÓN RELATIVA:

Es el cociente entre la dispersión absoluta y el promedio. Puede hallarse:

$$\text{Dispersión relativa} = \frac{\text{Dispersión absoluta}}{\text{Promedio}}$$

- COEFICIENTE DE VARIACIÓN :

Cuando la desviación absoluta es igual a la desviación típica, S, y el promedio es la media $\bar{x}$, la dispersión relativa se conoce con el nombre de coeficiente de variación, que se expresa como un porcentaje.

- COEFICIENTE DE VARIACIÓN :

$$V = \frac{s}{\bar{x}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

La tabla muestra algunos datos sobre las edades de *80* alumnos. Calcule la media.

Edad	f_i	h_i
11		0,25
12	8	
13		0,2
14		
15		0,35

A) 12,4 B) 13,2 C) 13,6
D) 14,0 E) 14,0

RESOLUCIÓN:

* Como $n = 80$ ....tamaño de la muestra.

* Se calcula :

$$f_1 = n \times h_1 = 80(0,25) = 20$$
$$f_3 = n \times h_3 = 80(0,20) = 16$$
$$f_5 = n \times h_5 = 80(0,35) = 28$$

* Como : $f_2 = 8$ y $n = 80$

$$\Rightarrow 80 = 20+8+16+f_4+28$$

* Se obtiene : $f_4 = 8$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{20(11)+8(12)+16(13)+8(14)+28(15)}{80}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 13,2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Para cubrir el puesto de mecánico electricista se recibieron solicitudes de *200* postulantes. En el cuadro siguiente se presenta la distribución de los postulantes según experiencia laboral en el área.

Experiencia laboral(años)	Porcentaje acumulado
[5 - 7⟩	8%
[7 - 9⟩	18%
[9 - 11⟩	34%
[11 - 13⟩	65%
[13 - 15⟩	100%

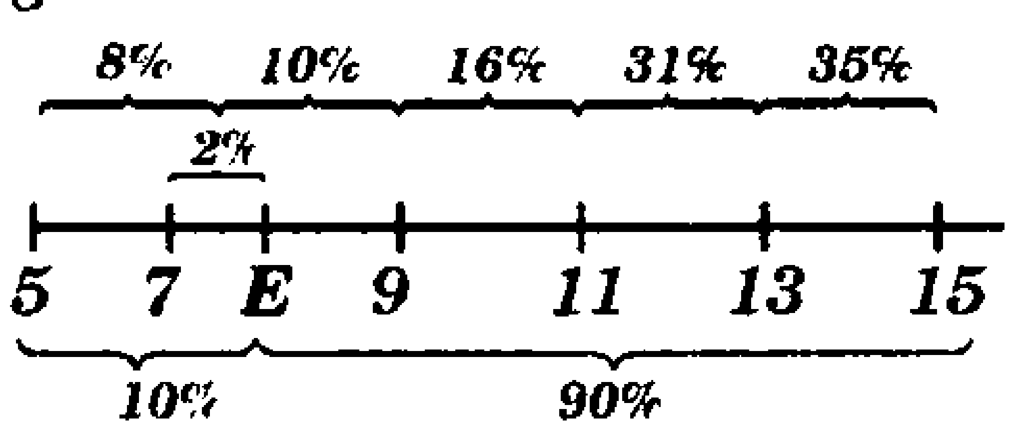
Entonces la experiencia laboral mínima para el *90%* de los postulantes es:

A)7,4 años B)8,4años C)10,4 años
D)12,4años E)14,4 años

RESOLUCIÓN:

* Sea E: experiencia laboral mínima para el *90%* de los postulantes.

* Del gráfico, podemos deducir lo siguiente:



$$\Rightarrow \frac{E-7}{2\%} = \frac{9-7}{10\%} \Rightarrow E = 7,4$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

En una prueba de aritmética se evaluaron a n estudiantes y las notas obtenidas se clasificaron en una tabla de distribución de frecuencias como se muestra en la siguiente tabla.

Marca de clase	45	55	65	75	85
Frecuencia relativa	$\frac{m}{50}$	$\frac{3m}{100}$	$\frac{2m}{25}$	$\frac{3m}{50}$	$\frac{m}{100}$

¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvieron una nota menor que *60* puntos o mayor o igual que *80* puntos?.

A) 20% B) 30% C) 35%
D) 35% E) 92%

RESOLUCIÓN:

* Se sabe : $\sum_{i=1}^{5} h_i = 1$

$$\frac{m}{50}+\frac{3m}{100}+\frac{2m}{25}+\frac{3m}{50}+\frac{m}{100}=1$$

* resolviendo : $m=5$

* Se obtiene la tabla :

I_i	x_i	h_i	h_i%
[40;50 >	45	0,10	10%
[50;60 >	55	0,15	15%
[60;70 >	65	0,40	40%
[70;80 >	75	0,30	30%
[80;90 >	85	0,05	5%

Estudiantes:

*Con nota menor a *60 :*

$$10\% + 15\% = 25\%$$

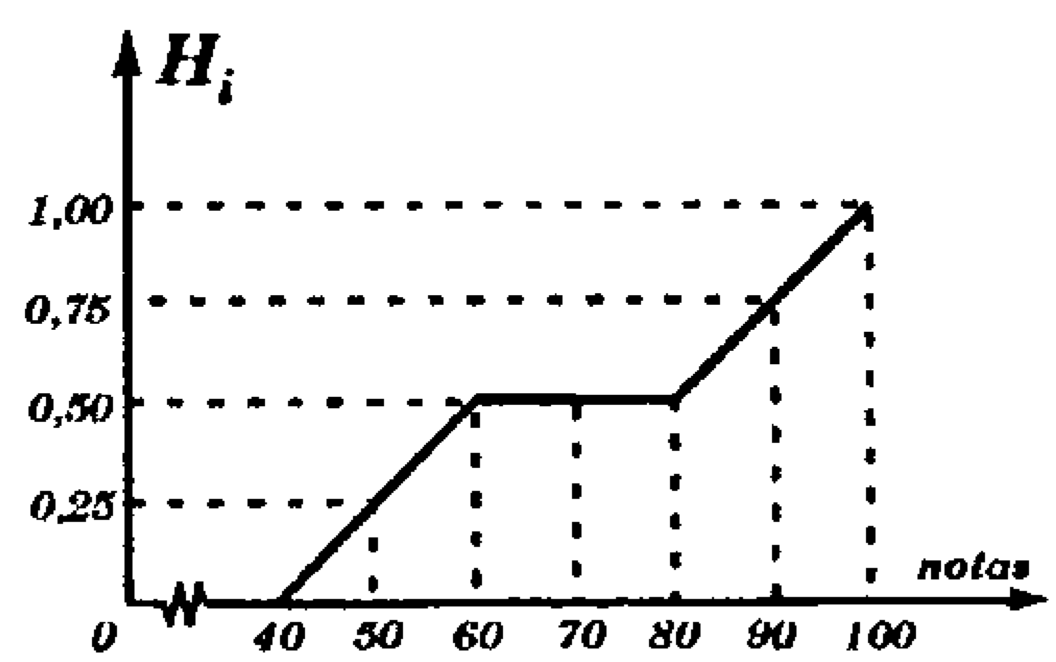
* Con nota mayor o igual a *80 : 5%*

* Total : *25% + 5% = 30%*

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

El siguiente gráfico representa las frecuencias relativas acumuladas (H_i) de las notas en un examen.



Determine los valores para las proposiciones ***I, II*** y ***III*** :

I) ¿Cuántos de los evaluados obtuvieron notas entre *70* y *80*?

II) ¿Qué porcentaje de evaluados tienen notas menores a ***65***?

III) Si hay en total ***400*** evaluados , ¿cuántos obtuvieron notas entre ***90*** y ***100***?

A) 0,50%, 80 ***B) 0,45%, 80***
C) 20,45%, 80 ***D) 0,50%,100***
E) 0,50%, 120

RESOLUCIÓN:

Del gráfico se obtiene el siguiente cuadro:

Notas	H_i	n_i	$100\% \, h_i$
[40 – 60⟩	0,50	0 ,50	50%
[60 – 80⟩	0,50	0	0%
[80 – 100⟩	1	0,50	50%

Nos piden:

I) El número de evaluados con notas entre ⟨70 – 80⟩ es ***0***.

II) El porcentaje de evaluados que tienen nota menor a ***65*** es ***50%***.

III) Los que obtienen notas entre ⟨90 – 100⟩ son

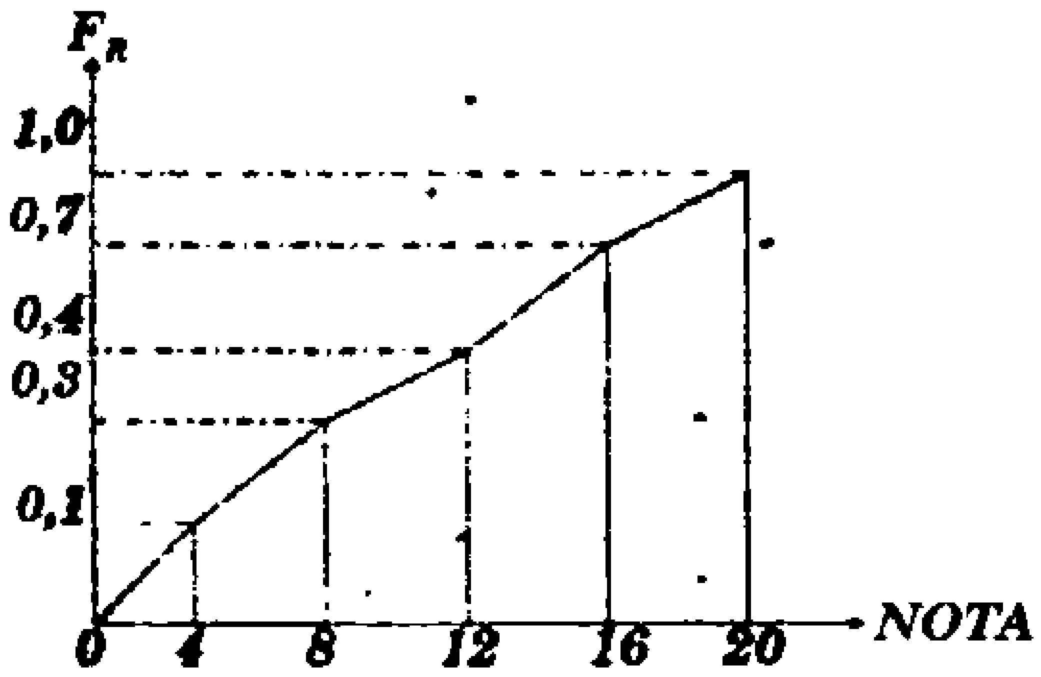
$$25\% \times 400 = 100$$

↑ *N° total de evaluados*

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

La siguiente figura muestra la ojiva de frecuencia relativa acumulada de las notas obtenidas por ***2000*** alumnos. ¿Cuántos alumnos aprobaron si la nota mínima aprobaría fue ***10***?.



A) 65% ***B) 35%*** ***C) 60%***
D)38% ***E)40%***

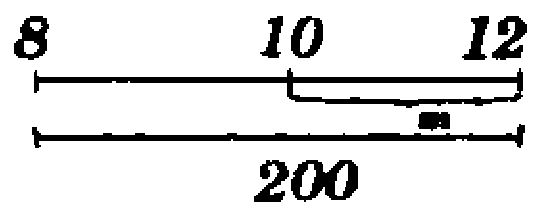
RESOLUCIÓN:

* Del gráfico se tiene la tabla:

I_i	x_i	H_i	h_i	$f_i = h_i \times 2000$
[0;4>	2	0,1	0,1	200
[4;8>	6	0,3	0,2	400
[8;12>	10	0,4	0,1	200
[12;16>	14	0,7	0,3	600
[16;20>	18	1	0,3	600

* Aprueba con notas mayores a ***10***

* En el tercer intervalo :



$$\frac{12-8}{200} = \frac{12-10}{m} \Rightarrow m = 100$$

* Aprueban :

$$100 + 600 + 600 = 1300$$

100 → ***3er. Intervalo***; 600 → ***4to. Intervalo***; 600 → ***5to. Intervalo***

$$\text{Porcentaje de aprobado} = \frac{1300}{2000} \times 100\% = 65\%$$

RPTA : "A"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 De la siguiente lista de variables estadísticas , ¿Cuáles son cualitativas?

I) Peso

II) Años de servicio en una empresa

III) Profesión.

IV) Nacionalidad.

V) Número de alumnos matriculados

A) I, III, IV ***B) II, IV*** ***C) III, IV***
D) IV ***E) IV, V***

02 Del siguiente conjunto de datos, determine su rango:

40; 45; 32; 60; 48; 54; 63; 34; 36

A) 34 ***B) 31*** ***C) 41***
D) 30 ***E) 35***

03 Si tenemos una muestra con ***«n»*** datos y lo queremos representar en una tabla de frecuencias, como se puede determinar el posible número de intervalos

I) $\frac{n}{4}$ ***II)*** $\sqrt{n}$ ***III)*** $\sqrt{\frac{n}{2}}$ ***IV)*** $1+3{,}3\log n$

A) I y II ***B) II y III*** ***C) I y III***
D) II y IV ***E) Sólo***

• ENUNCIADO :

En la siguiente tabla de frecuencias se muestra el peso de un grupo de alumnos.

Peso	N° alumnos (f_i)
[30 ; 25>	5
[35 ; 40>	9
[40 ; 45>	12
[45 ; 50>	8
[50 ; 60]	6

04 ¿Cuál es el límite superior de la cuarta clase?

A) 45 ***B) 50*** ***C) 60***
D) 35 ***E) 55***

05 ¿Cuál es la marca de clase del segundo intervalo?

A) 32, 5 ***B) 35*** ***C) 40***
D) 37, 5 ***E) 42, 5***

06 ¿Cuántos alumnos pesan ***40 kg*** o más?

A) 18 B) 12 C) 15 D) 202 E) 26

07 ¿Cuántos alumnos pesan menos de ***45 kg***?

A) 31 B) 26 C) 24 D) 17 E) 14

08 ¿Cuál es el total de alumnos encuestados?

A) 36 B) 40 C) 38 D) 45 E) 32

09 ¿Cuál es la frecuencia relativa del tercer intervalo?

A) 0, 25 ***B) 0,15*** ***C) 0,3***
D) 0, 45 ***E) 0, 5***

10 ¿Cuál es la frecuencia relativa del intervalo con menor frecuencia absoluta?

A) 0,15 ***B) 0,25*** ***C) 0,35***
D) 0,125 ***E) 0,2***

• ENUNCIADO :

Se muestra la siguiente tabla de distribución del número de trabajadores de una empresa constructora, de acuerdo a su ocupación :

xi ocupación	fi # pers.	Fi	hi
Obreros	180	180	0, 456
Ingenieros	20	200	c
Administrat.	A	b	0, 10
Secretarias	60	d	0, 15
Ayudantes	100	400	e
	n=400		

Completa la tabla y responda las siguientes preguntas:

⑪ Hallar «$a+b+d$» .

A) 480 B) 500 C) 520 D) 580 E) 620

⑫ Determinar «$e-c$»

A) 0, 1 *B) 0, 15* *C) 0,2*
D) 0, 25 *E) 0, 3*

⑬ ¿Qué tanto por ciento del total son ingenieros?

A) 12% *B) 10%* *C) 8%*
D) 5% *E) 6%*

⑭ Determinar «F_4+F_5» .

A) 300 *B) 400* *C) 500*
D) 700 *E) 800*

⑮ ¿Cuál es la frecuencia relativa de los ayudantes?

A) 0,15 *B) 0, 2* *C) 0,25*
D) 0, 3 *E) 0, 35*

• ENUNCIADO :

Se tomó un simulacro de admisión a los alumnos del 4^{to} y 5^{to} del colegio y se obtuvo los siguientes resultados (máximo puntaje posible : *100* puntos)

64	72	54	62	76	58
66	50	72	56	69	77
73	68	53	61	70	57
62	71	67	74	78	80
64	59	61	55	71	59

⑯ Si los datos se van a clasificarse en *6* intervalos *(k=6)*. ¿Cuál seria los límites del cuarto intervalo?

A) [55; 60> *B) [65; 70>* *C) [60; 65>*
D) [70; 75> *E) [60; 68>*

⑰ Hallar la frecuencia relativa del segundo intervalo.

A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 4* *E) 3*

⑱ ¿Qué tanto por ciento de los alumnos obtuvieron menos de *70* puntos?

A) 68,3% *B) 63,3%* *C) 60%*
D) 58,7% *E) 55,3%*

⑲ Si la nota aprobatoria es *60* o más puntos, ¿cual es el tanto por ciento de los aprobados?

A) 70% *B) 60%* *C) 55%*
D) 80% *E) 50%*

⑳ ¿Cuál es la suma de la mayor y menor frecuencia absoluta?

A) 4 *B) 6* *C) 8* *D) 10* *E) 12*

• ENUNCIADO :

Las edades de un grupo de alumnos del cuarto año del colegio «Marte» son :

15; 18; 17; 15; 18; 16; 16; 15

㉑ Determina la media ($\overline{x}$).

A) 17, 5 *B) 16, 25* *C) 17,25*
D) 16,75 *E) 15,75*

㉒ Determina la mediana *(Me)*.

A) 17, 5 *B) 17* *C) 16, 5*
D) 16 *E) 15, 5*

㉓ Determina la moda *(Mo)*.

A) 15 *B) 16* *C) 18*
D) 14, 5 *E) 16,5*

• ENUNCIADO :

De un grupo de *120* alumnos, se obtuvo la siguiente información sobre las horas diarias que acceden a internet .

x_i [N° horas]	f_i [N° alumnos]
1	16
2	32
3	45
4	18
5	9

㉔ En promedio, ¿qué tiempo acceden a internet?

A) 2,15 h *B) 2,35* *C) 2,77*
D) 1,75 *E) 1,50*

㉕ ¿Cuál es la moda?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

㉖ ¿Cuál es la media de los que acceden por lo menos *4* horas?

A) 4,75 h *B) 4,25* *C) 4,50*
D) 13/3 *E) 4,6*

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcule la media de la muestra:

8; 10; 6; 12; 13; 5; 7; 12; 11; 9 10 y 7

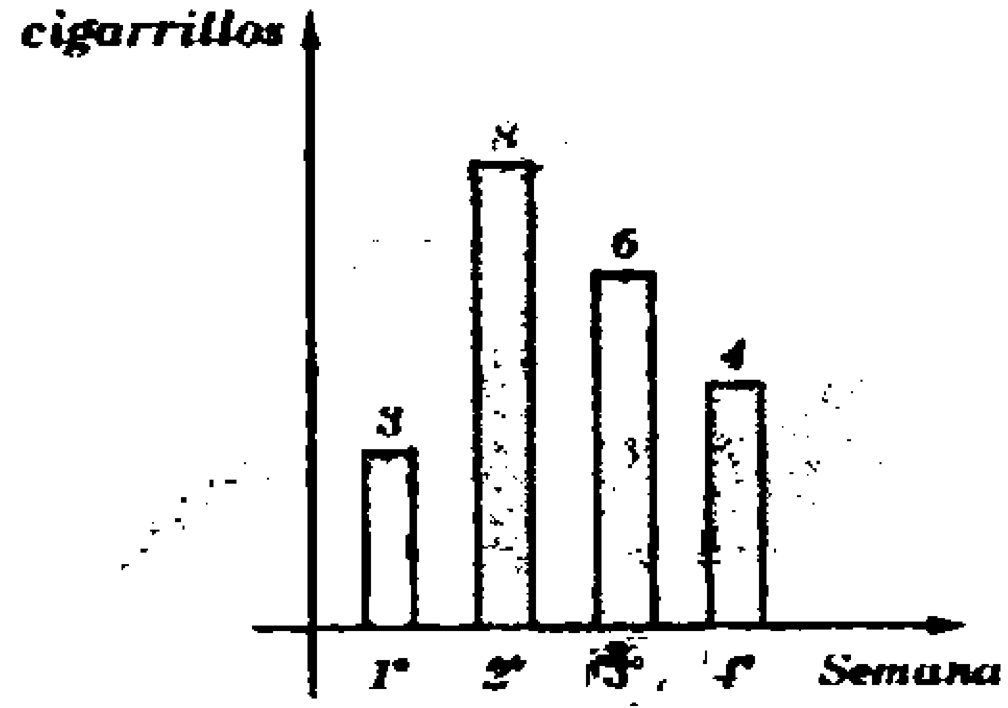
A) 7; 199 *B) 8; 177* *C) 9; 166*
D) 9; 566 *E) 8; 322*

02 Determine la media entre la moda y la mediana de la siguiente muestra sobre el número de hijos por familia:

0; 1; 1; 0; 2; 3; 5; 2; 3; 0; 1; 2
6; 4; 2; 1; 0; 3; 3; 3; 7; 3; 3; 1

A) 1 *B) 1; 5* *C) 2* *D) 2; 5* *E) 3*

03 La gráfica representa, en miles, el consumo semanal de cigarrillos durante el mes agosto, ¿Cuál fue el promedio de consumo del mes?



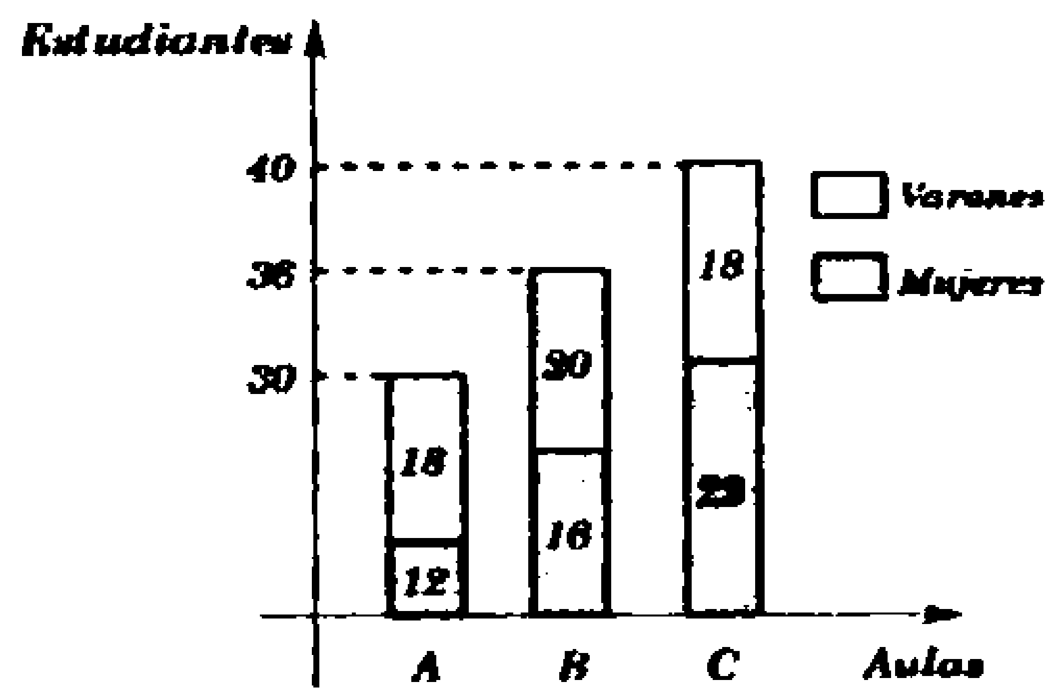
A) 4890 *B) 4750* *C) 5500*
D) 5000 *E) 5250*

04 Calcule la nota promedio:

CURSOS	Nota	Ponderación
Matemática I	15	2
Inglés	18	1
Microbiología	16	6
Ciencias Sociales	13	1
Química I	12	4
Física I	13	2

A) 14, 44 *B) 13, 28* *C) 15, 64*
D) 12, 98 *E) 16, 06*

05 La gráfica muestra a los estudiantes de tres aulas de 5to año de un colegio. Según esto halle el promedio de estudiantes mujeres de dichas aulas.



A) 12, 48 *B) 14, 23* *C) 15, 48*
D) 16, 67 *E) 15, 21*

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 De la siguiente tabla de distribución de frecuencia.

Clases	f_i	h_i	F_i	H_i
$[10-20\rangle$		0,1		
$[20-30\rangle$				
$[30-40\rangle$		0,3		
$[40-50\rangle$	24			0,85
$[50-60\rangle$	30			

Calcule f_1

A)20 B)30 C)35 D)40 E)50

02 La tabla muestra la información referente al número de alumnos por sección.

f_i = número de secciones.

I_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$[10-20\rangle$	4			0,16
$[20-30\rangle$	1			
$[30-40\rangle$				0,32
$[40-50\rangle$		11		
$[50-60\rangle$				1,00

Determine el número de secciones que tiene ***20*** a ***45*** alumnos.

A)5 aprox. B)4aprox. C)6 aprox. D)7 aprox. E)9 aprox.

03 Se calificó a ***100*** alumnos en el curso de matemática mediante el sistema de calificación vigesimal entera, y se obtuvo los siguientes resultados: ***5*** alumnos lograron notas de ***0*** a ***3;25*** alumnos notas de ***4*** a ***7; 40*** alumnos notas de ***8*** a ***11; 20*** alumnos notas de ***12*** a ***15.*** Si la nota mínima aprobatoria es ***11***. ¿Qué porcentaje de alumnos se puede considerar aprobado?

A)20% B)25% C)30% D)40% E)50%

04 En una distribución de ***5*** intervalos de ancho de clase común el $x_2=300$ y $x_4=420$.

Determine el límite superior del cuarto intervalo.

A)300 B)350 C)400 D)450 E)500

05 Se tiene una distribución de frecuencias con cuatro intervalos iguales ancho de clase, además se tiene los siguientes datos.

$x_1=10; x_4=22; h_1=0{,}30; h_4=17{,}5\%;$ $H_2=0{,}45$ y en total de datos es ***120.*** Calcule la mediana.

A)16,53 B)15,43 C)16,32 D)14,53 E)13,53

06 De un grupo de ***15*** personas se hace distribución en ***5*** intervalos, según edades resultando esta simétrica y con ancho de clase común.

$$x_2=17{,}5\ ;\ x_3=32{,}5;\ \frac{f_2}{f_3}=\frac{2}{3}\ ;\ F_3=9$$

¿Qué tanto por ciento tienen por lo menos ***20*** años?

A)40% B)60% C)50% D)80% E)20%

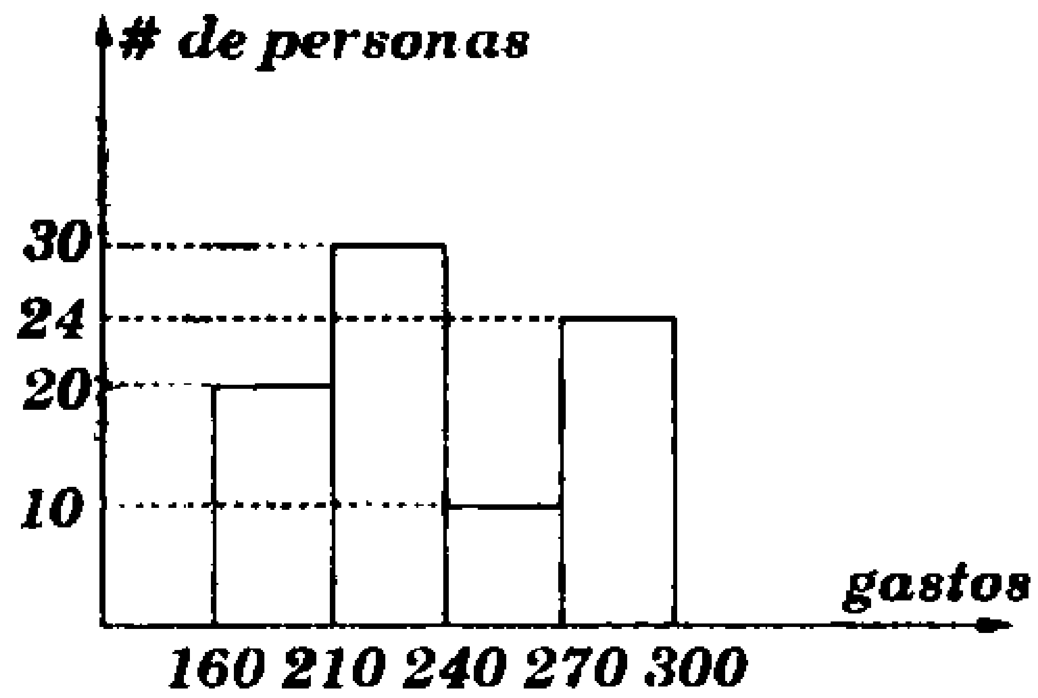
07 Completa la siguiente tabla de distribución de frecuencias, sabiendo que $f_3-f_2=9$

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$[10-\ \rangle$				0,06	
$[20-\ \rangle$	25		24		
$[\ -\ \rangle$	35		51		
$[\ -50\rangle$					0,60
$[\ -\ \rangle$	55				

Calcule h_5+H_2

A)0,20 B)0,33 C)0,40 D)0,50 E)0,70

08 Del siguiente gráfico, ¿cuántas personas gastan desde ***180,*** hasta ***280?***



A)50 B)56 C)60 D)66 E)70

09 En una compañía de ***M*** empleados los ***3/4*** ganan un salario medio por hora de ***S/. 3.00*** y el resto ganan ***S/. x*** de salario medio por hora. Calcule ***x***, si la media del salario medio por hora es ***S/. 2.75.***

A)2,50 B)2,00 C)2,80 D)3,00 E)2,60

10 En una familia donde hay ***7*** hijos de los cuales hay trillizos y mellizos, además se sabe que la media es ***20***, la moda al igual que la mediana que es ***18***. Halle la menor edad que puede tener el mayor de los hermanos.

A)25 B)30 C)31 D)33 E)37

11 La siguiente tabla muestra la distribución de las edades correspondientes a ***80*** futbolistas de un club.

Edades	f_i	F_i	h_i
20			
21	48	60	
22			0,25
23			0,075
24			

Calcular: $f_1+f_3+F_3+h_5$

A)82,05 B)82,15 C)76,05 D)92,05 E)92,15

Para los problemas ***12*** y ***13*** se muestran las notas de ***15*** alumnos en un examen de letras.

10; 12; 09; 12; 08; 14; 12; 10; 11; 12; 08; 06; 14; 15; 07.

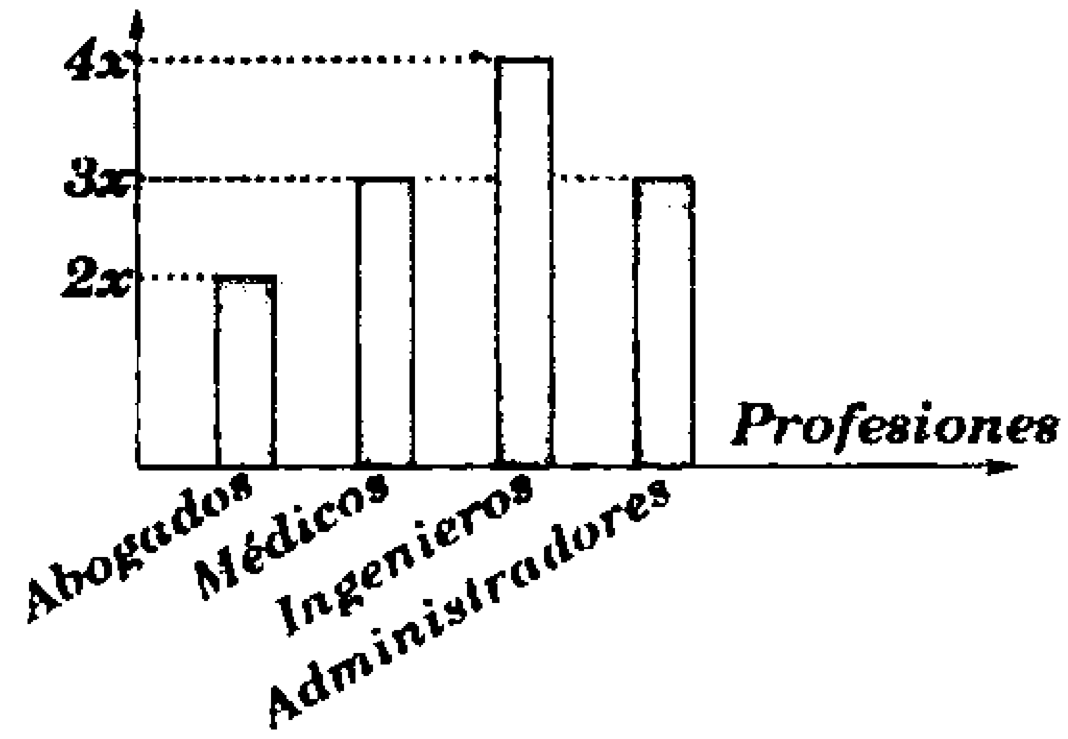
12 ¿Cuál es la moda?

A)09 B)10 C)11 D)12 E)08

13 Hallar la mediana.

A)09 B)10 C)10,5 D)12 E)11

14 El cuadro muestra los asistentes a un congreso, agrupados por profesores, además el tamaño de la muestra es ***240.***



Cuántos abogados asistieron a dicho congreso?

A)60 B)80 C)50 D)70 E)40

15 Si el profesor decide aprobar a los alumnos cuya nota sea mayor o igual que la mediana, ¿cuántos aprueban?

A8 B)7 C)5 D)10 E)4

16 Si se elimina la mayor nota, hallar la mediana de las notas

restantes.

A)10 *B)11* *C)10,5*
D)11,5 *E)12*

17 Completar la siguiente tabla de distribución de frecuencias e indicar: $f_1 + F_3$

N° de hijos	f_i	F_i	h_i	H_i
0			0,08	
1				0,40
2	20			
3	10			
4				

A)24 *B)34* *C)40* *D)44* *E)50*

18 Dado el siguiente conjunto de valores:

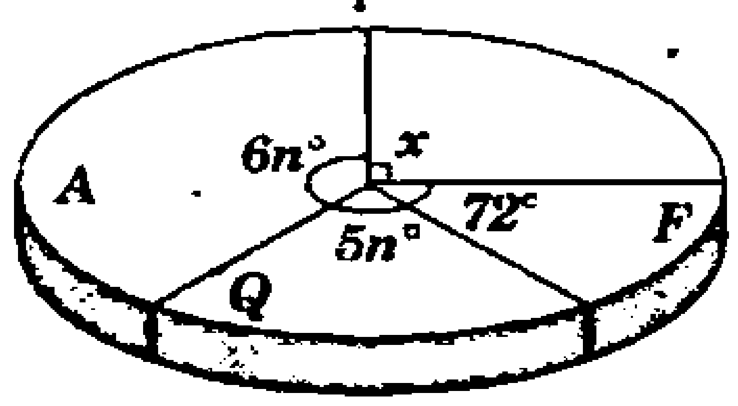
$A = \{1; 2; 1; 3; 1; 4; 5; 1; 1; 2; 5\}$

Hallar la moda, media y mediana. Dar como respuesta la suma de ellas.

A)4,5 *B)5,5* *C)6* *D)8,5* *E)6,5*

19 En un concurso de becas de la academia, los postulantes prefieren los cursos de Aritmética *(A)*; Álgebra *(X)*; Física *(F)* y Química *(Q)*.

Determinar cuántos prefieren Aritmética, si los que prefieren Álgebra son *100* personas.



A)140 *B)120* *C)180* *D)150* *E)130*

20 Dado el siguiente cuadro acerca de las edades de los obreros de una empresa :

Edades	f_i	h_i	H_i
24		0,25	
25			
26			0,65
27	40		
28		0,15	

además $h_2 = h_3$, calcular:

$$h_2 + n + f_5$$

A)230,2 *B)130,4* *C)180,3*
D)240,4 *E)210,8*

21 La tabla muestra la distribución de frecuencias sobre las estaturas de un grupo de *50* alumnos. Calcular cuántos alumnos tienen menos de *170 cm.*

Estatura (cm)	f_i
150	10
160	8
170	12
180	20

A)30 *B)32* *C)18* *D)20* *E)42*

22 De la siguiente distribución de frecuencias:

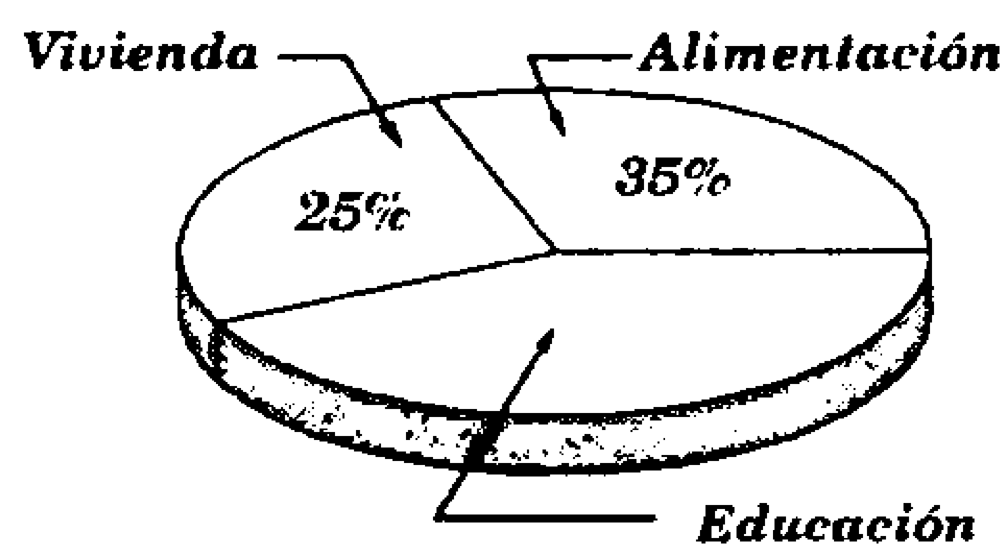
Edades	f_i	h_i	H_i
6			
8			
10	30		0,72
11		0,18	
15	10		

calcular: $f_4 + F_2 + h_3$

A)60,3 *B)50,3* *C)48,3*
D)36,4 *E)20,4*

ENUNCIADO:

El gobierno decide destinar *S/. 400000* para el desarrollo de un pueblo de la selva, la cual será invertida sólo en educación, vivienda y alimentación, se muestra un diagrama circular de cómo se ha distribuido este dinero.



23 ¿Cuánto ha utilizado en vivienda?

A)S/. 100 000 *B)S/. 150 000*
C)S/. 50 000 *D)S/. 75 000*
E)S/. 280 000

24 Del problema anterior, ¿cuánto se utilizó en educación?

A)S/.180000 *B)S/.160000*
C)S/.200000 *D)S/. 120000*
E)S/. 100000

25 Se hizo una encuesta a los alumnos de cierta sección de la UNI sobre la cantidad de problemas que han resuelto hasta el momento del *3er.* Seminario y se obtuvo los siguientes resultados:

42; 25; 15; 16; 25; 18; 36;48; 25; 48; 15; 20; 20; 16; 25;42; 61; 53; 61; 25; 72; 28; 25; 36

Hallar la suma de la media, mediana y moda de la muestra

A) 82,0 *B) 82,50* *C) 83,0*
D) 83,21 *E) 85*

26 En un curso de estadística cuyas notas finales fueron *04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11* y *12* el profesor manifiesta que un alumno aprueba si su nota es mayor que la media aritmética o mayor que la mediana.¿Cuántos alumnos no aprobaron?

A) 4 *B) 6* *C) 5* *D) 3* *E) 7*

27 A partir de la siguiente Información :

Intervalos	f_i	F_i	h_i	H_i
[10;20⟩			0;1	
[20;30⟩				
[30;40⟩			3;0	
[40;50⟩	24			0;85
[50;60⟩	30			

Calcular la mediana.

A)31,25 *B)31,96* *C)32,33*
D)33,35 *E)35,34*

28 Reconstruir la siguiente distribución simétrica y determinar la media y la mediana muestral.

Intervalos	f_i	F_i	H_i
[10;12]	7		0,14
[12;14]			0,24
[14;16]			
[16;18]			
[18;20]			

A)14,14 *B)15,15* *C)14,5; 14,5*
D)14,8 *E)15,5; 15,5*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)C	3)D	4)D	5)A	6)D	7)B	8)C	9)B	10)D
11)D	12)D	13)E	14)E	15)A	16)C	17)D	18)B	19)B	20)A
21)C	22)A	23)A	24)B						

TEORIA DE EXPONENTES

CAPITULO 073

OBJETIVOS :

Al final del tema, el alumno estará en condiciones de:

* *Notar que las leyes de exponentes tiene por objeto estudiar todas las clases de exponentes que existen y las relaciones que se dan entre ellos; y la operación que da origen al exponente es la potenciación.*
* *Conocer la definición de la potenciación.*
* *Manejar operaciones con exponentes, sus posibles transformaciones y sus significados.*
* *Realizar operaciones con potencias de igual base (multiplicación, división).*
* *Conocer la definición de la radicación en los reales y aplicarla cuando sea necesaria.*
* *Transformar un indice en un exponente fraccionario y visceversa.*
* *Realizar operaciones con radicales, aplicando correctamente las leyes respectivas.*

INTRODUCCIÓN :

El desarrollo de la ciencia se da en gran parte a la matemática; la física, la química incluso las ciencias biológicas y sociales de modelos matemáticos que muchas veces requieren de mucha abstracción.

La ciencia le debe mucho al heroísmo de científicos que hicieron avanzar a la ciencia a precio de su propia vida para este desarrollo hubieron bastantes trabas como algunos círculos de orientación religiosa también posiciones subjetivas «anticientíficas» obstaculizaron el desarrollo de las ciencias inclusive actualmente los autores de obras sobre historias de las ciencias subordinan su trabajo a fines ajenos a la objetividad y al carácter ajeno científico.

Vemos que el ***álgebra*** como parte de la matemática no va a estar desligada de situaciones reales. En el desarrollo del curso veremos enfoques aparentemente del todo abstractos, pero que tienen en el fondo algún punto de partida real.

Los exponentes son muy utilizados por los científicos de todo el mundo, un ejemplo de ello se tiene en la *NASA (EEUU)* donde se usa la potenciación para escribir números muy grandes como la distancia de la Tierra a la estrella más cercana que es ***25 000 000 000 000*** millas y se puede escribir como 25×10^{12}.

DEFINICIÓN DE ÁLGEBRA

Así como la aritmética surgió de la necesidad que tenían los pueblos primitivos de medir el tiempo y de contar sus posesiones, el origen del álgebra es muy posterior puesto que debieron de transcurrir muchos siglos para que el hombre llegara al concepto abstracto de número que es el fundamento del álgebra. El gran desarrollo experimentado por el álgebra se debió sobre todo a los matemáticos árabes y, muy en particular, a *Al-Hwarizmi* ***(Siglo IX d.C.)***, que sentó las bases del álgebra tal como la conocemos hoy en día.

El álgebra es la parte de las matemáticas que tienen por objeto generalizar todas las cuestiones que se pueden proponer sobre las cantidades.

El concepto algebraico de cantidad es mucho más amplio que el aritmético, puesto que mientras en aritmética las cantidades se representan mediante números que expresan valores determinados, en álgebra las cantidades se representan mediante letras que pueden representar cualquier valor que se les asigne.

LEYES DE EXPONENTES

Son aquellas definiciones y teoremas que estudian a los exponentes a través de las operaciones principalmente de la potenciación y radicación.

¿QUÉ ES LA POTENCIACIÓN?

Es la operación matemática que consiste en hallar una expresión llamada potencia , dadas otras dos llamadas base y exponente.

Notación : $a^n = x$

* Donde : a : *base*

n : *exponente natural*

x : *potencia*

EXPONENTE ENTERO POSITIVO :

Es el que indica el número de veces que se repite la base

EJEMPLOS :

* $2^8 = \underbrace{2\times2\times2\times.....2}_{8\ veces}$
* $a^{50} = \underbrace{a\times a\times a\times.....a}_{50\ veces}$
* $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2)$
* $(-5)^3 = (-5)(-5)(-3)$

EXPONENTE CERO :

$$\boxed{a^0 = 1} \; ; \forall a \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

EJEMPLO :

* $3^0 = 1$ * $(-7)^0 = 1$ * $-4^0 = -1$

* $\left(\frac{3^0}{2} - \frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^0 = 0^0$: no está definido

EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

• $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ • $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

• $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

TEOREMAS :

1) $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$; $a \in \mathbb{R} \wedge m,n \in \mathbb{N}$

EJEMPLOS :

• $X^5 \times X^7 \times X^{20} = X^{5+7+20} = X^{32}$

• $2^2 \times 2^3 \times 2^5 = 2^{2+3+5} = 2^{10}$

2) $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$; $m,n \in \mathbb{N} \wedge a \in \mathbb{R} - \{0\}$

EJEMPLOS :

♥ $\frac{3^{15}}{3^{10}} = 3^{15-10} = 3^5 = 243$

♥ $\frac{5^{10-3x+b}}{5^{7+b-3x}} = 5^{10-3x+b-(7+b-3x)} \Rightarrow 5^{10-3x+b-7-b+3x} = 5^3 = 125$

3) $\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$; $a \in \mathbb{R} \wedge mn \in \mathbb{N}$

EJEMPLOS :

♥ $(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$

♥ $(a^3)^5 \times (a^2)^6 = a^{3\times5}a^{2\times6} = a^{15}a^{12} = a^{27}$

EJERCICIOS :

Reducir : $\left\{\left\{\left[\left(\left(2^4\right)^{-1/3}\right)^{-6}\right]^5\right\}^{\frac{1}{40}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

RESOLUCIÓN :

$$2^{4\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)(5)\left(\frac{1}{40}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

4) $\boxed{(a \times b)^n = a^n b^n}$; $a,b \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$

EJEMPLOS :

* $(ab)^6 = a^6b^6$

$$\left(xy^2z^{\frac{1}{4}}\right)^8 = (x)^8(y^2)^8(z^{\frac{1}{4}})^8 = x^8y^{16}z^2 = x^8y^{16}z^2$$

1) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$; $n \in \mathbb{N},\; b \in \mathbb{R} - \{0\}$

COROLARIO :

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}} \; ; n \in \mathbb{N},\; ab \neq 0$$

EJEMPLOS :

* $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$ * $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

EJERCICIO :

Simplificar : $E = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{14}\right)^{-1}}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, se obtiene :

$$E = \frac{2^2 + 3^3}{3^2 + 2^3 + 14^1} = \frac{4 + 27}{9 + 8 + 14} = \frac{31}{31} = 1$$

RADICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Sea el número real "*a*" y el número natural "*n*" mayor que la unidad "*x*" se llama raíz n-ésima principal de "*a*". Es una operación inversa a la potenciación.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a} \; ; n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

* Donde : *a* : es el radicando ; *n* : es el índice
x : es la raíz n-ésima de «*a*»

APLICACIONES :

* $\sqrt[3]{27} = 3 \rightarrow 3^3 = 27$ * $\sqrt[4]{625} = 5 \rightarrow 5^4 = 625$
* $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

EXPONENTE FRACCIONARIO :

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}} \; ; n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

EJEMPLOS :

• $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$ • $4^{2/4} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2$

• $16^{-4^{-1}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2}$

EJERCICIO :

Efectuar : $E=8^{-27^{-9^{-4^{-0,5}}}}$

A) 0,5 *B)* 2 *C)* 25 *D)* 3/2 *E)* 1/4

RESOLUCIÓN :

3° 1° 2°

$$E=\left(\frac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}}}$$

* Reduciendo cada parte , se obtiene :

- $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ • $\left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$
- $\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$ • $E=\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$

TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

1) $\boxed{\sqrt[n]{a\times b}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}}$ Si n es par $a\geq 0\wedge b\geq 0$

EJEMPLOS :

- $\sqrt[3]{x^2\,y^5}=\sqrt[3]{x^2}\;\sqrt[3]{y^5}$
- $\sqrt[3]{8\times 27}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}=2\times 3=6$
- $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times 16}=\sqrt[3]{64}=4$

2) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$; $b\neq 0$ Si n es par $a\geq 0\wedge b>0$

EJEMPLOS :

- $\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{y^3}}$ • $\sqrt[3]{\frac{27}{-8}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{-8}}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$

3) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}}$; $m,n\in\mathbb{N}$; Si mn es par $\Rightarrow a\geq 0$

EJEMPLOS :

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[2\times 3\times 4]{x}=\sqrt[24]{x}$ • $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times 2]{2^6}=\sqrt[6]{2^6}=2$
- $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt[6]{-8}}}=\sqrt[120]{-8}$?

Si tuvieramos :

$$\boxed{\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b\sqrt[p]{c}}}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n\times m]{b}\;\sqrt[n\times m\times p]{c}}$$

EJEMPLOS :

- $\sqrt{3\sqrt[3]{5\sqrt[5]{7}}}=\sqrt{3}\times\sqrt[2\times 3]{5}\times\sqrt[2\times 3\times 5]{7}=\sqrt{3}\times\sqrt[6]{5}\times\sqrt[30]{7}$
- $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{y\sqrt[8]{z}}}=\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3\times 4]{y}\times\sqrt[3\times 4\times 8]{z}=\sqrt[3]{x}\times\sqrt[12]{y}\times\sqrt[96]{z}$

REGLA PRÁCTICA

$$\boxed{\sqrt[n]{x^a\sqrt[m]{x^b\sqrt[p]{x^c}}}=\sqrt[n\times m\times p]{x^{(am+b)p+c}}}$$

EJEMPLOS :

- $\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x^2}}=\sqrt[4\times 5]{x^{1\times 5+2}}=\sqrt[20]{x^7}$
- $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^5\sqrt[3]{x^8}}}=\sqrt[5\times 2\times 3]{x^{(3\times 2+5)\times 3+8}}=\sqrt[30]{x^{41}}$
- $\sqrt{2\sqrt[5]{16\sqrt[3]{32}}}=\sqrt{2^1\sqrt[5]{2^4\sqrt[3]{2^5}}}=\sqrt[2\times 5\times 3]{2^{(1\times 5+4)3+5}}=\sqrt[30]{2^{32}}$
- $\sqrt[n]{x^a\div\sqrt[m]{x^b\div\sqrt[p]{x^c}}}=\sqrt[nmp]{x^{(am-b)p+c}}$

EJEMPLOS :

- $\sqrt{x\div\sqrt[4]{x^5}}=\sqrt[2\times 4]{x^{1\times 4-5}}=\sqrt[8]{x^{-1}}$
- $\sqrt{x^3\div\sqrt[3]{x^2\div\sqrt[5]{x^7}}}=\sqrt[2\times 3\times 5]{x^{(3\times 3-2)5+7}}=\sqrt[30]{x^{42}}$

COROLARIO :

$\boxed{\sqrt[nm]{a^{p\times m}}=\sqrt[n]{a^p}}$ Si: $n\times m$ es par $a\geq 0$

EJEMPLOS :

$$\sqrt[18]{x^{30}}=\sqrt[6\times 3]{x^{6\times 5}}=\sqrt[3]{x^5}$$

* También :

* $\boxed{\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\ldots\infty}}}=\sqrt[n-1]{a}}$ * $\boxed{\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\sqrt[n]{a\div\ldots\infty}}}=\sqrt[n+1]{a}}$

* $\boxed{\underbrace{\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\times\sqrt[n]{a\ldots\sqrt[n]{a}}}}}_{\text{"m" radicales}}=\sqrt[n^m(n-1)]{a^{n^m-1}}}$

EJERCICIO :

Reducir , si en cada paréntesis existe "*p*" radicales.

$$E=\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\sqrt{2}}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}\right)$$

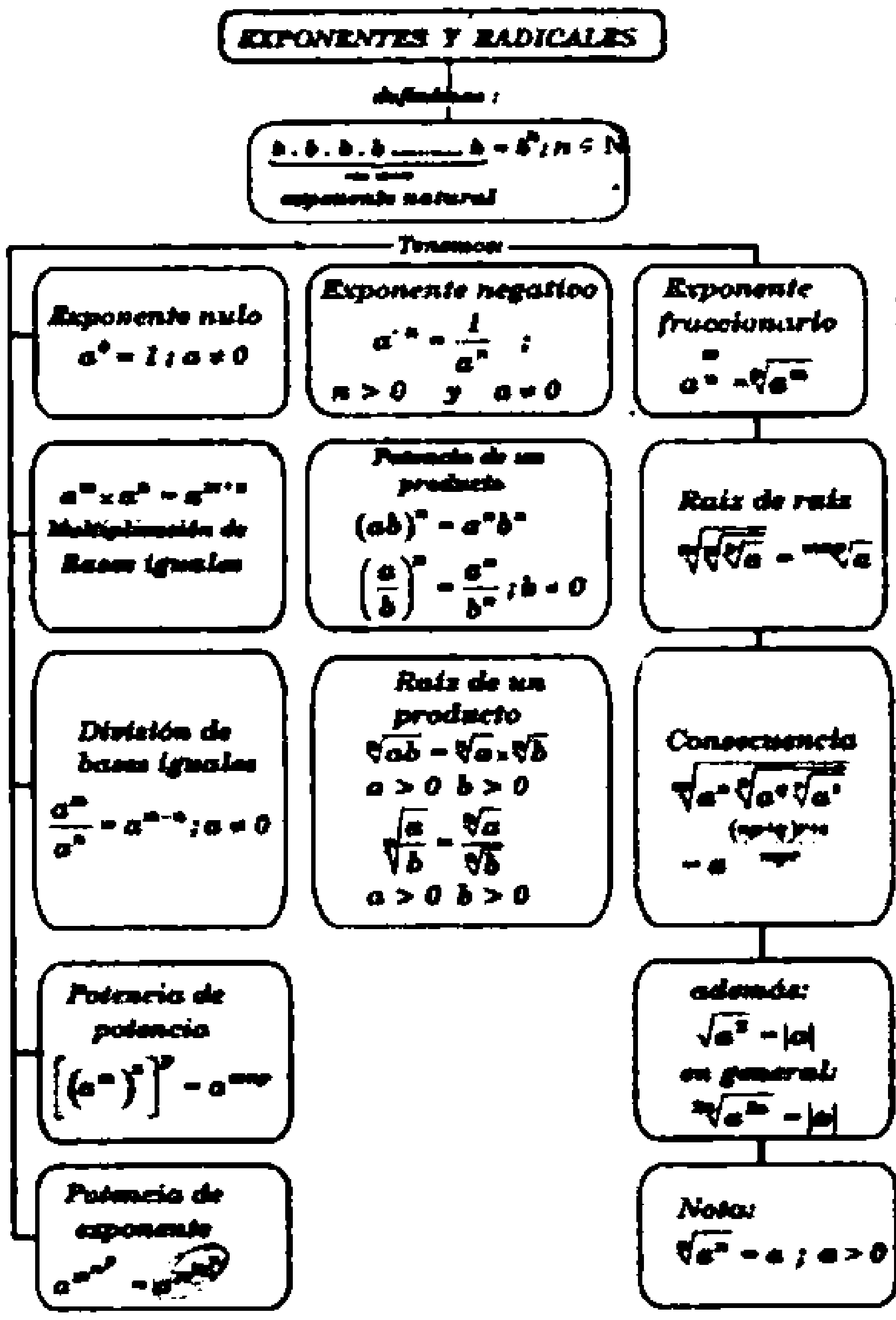
RESOLUCIÓN :

$$E=\left(\sqrt[2^p(2-1)]{2^{2^p-1}}\right)\left(\sqrt[2^p]{2}\right)$$

$$\Rightarrow E=2^{\frac{2^{p-1}}{2^p}}\times 2^{\frac{1}{2^p}}=2^{\frac{2^{p-1}+1}{2^p}}=2^{\frac{2p}{2p}}=2$$

* Luego :

$$n(n+1)=20=4\times 5=4(4+1)\Rightarrow n=4$$



OBSERVACIONES :

CORRECTO	INCORRECTO
$3^n \times 7^n = 21^n$	$3 \times 7^n = 21^n$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$(a+b)^n = a^n + b^n$
$(a^m)^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{nm}{p}}$	$(a^m)^{\frac{n}{p}} = a^{\frac{n}{mp}}$
$\sqrt[n]{a^{3n}} = a^3$	$\sqrt[n]{a^{3+n}} = a^3$
$\sqrt[p]{a^m \times b^n} = a^{\frac{m}{p}} \times b^{\frac{n}{p}}$	$\sqrt[p]{a^m + b^n} = a^{\frac{m}{p}} + b^{\frac{n}{p}}$

El uso del paréntesis es importante pues : $\underbrace{-2^2}_{-4} \neq \underbrace{(-2)^2}_{4}$.

¡Cuidado!

El exponente de 2 en 2^{3^4} es $3^4 = 84$.

Pero el exponente de 2 en $(2^3)^4$ es $3 \times 4 = 12$

Por lo tanto : $2^{3^4} \neq (2^3)^4$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Efectuar: $\dfrac{3^{4n+1} + 3 \times 2^{2n-1} + 3}{2^{n-1} \times 2^n + 3^{4n} + 1}$

A) 3^n B) 3 C) 2^n D) 5^0 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Factorizando en el numerador «3»; resultará: $\dfrac{3\left(3^{4n} + 2^{2n-1} + 1\right)}{2^{2n-1} + 3^{4n} + 1} = 3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2:

Reducir: $A = \dfrac{49(7)^6 - 7^{31} + 14\left(7^6\right)}{49(7)^5 - 7^{30} + 2\left(7^6\right)}$

A) 0 B) 5 C) 7 D) 6 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Factorizando «7» en el numerador, resultará:

$$A = \frac{7\left[49(7)^5 - 7^{30} + 2\left(7^6\right)\right]}{49(7)^5 - 7^{30} + 2\left(7^6\right)}$$

* Simplificando, resultará: $A = 7$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3:

Hallar «x», en: $x = 9^{-8^{-81^{-4^{-1}}}}$

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) 5

RESOLUCIÓN:

* Tomando los exponente de arriba hacia abajo ( ) de 2 en 2:

$$x = 9^{-8^{-81^{-\frac{1}{4}}}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{81}}}}$$

$$x = \left(\frac{1}{9}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{8}}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}}$$

$x = \dfrac{1}{3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Reducir: $M = \dfrac{2^{x+3} \times 4^{x+2m}}{8^{x-2} \times 16^{m+2}}$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Transformando todo a base 2:

$$M = \frac{2^{x+3} \times \left(2^2\right)^{x+2m}}{\left(2^3\right)^{x-2} \times \left(2^4\right)^{m+2}} = \frac{2^{x+3} \times 2^{2x+4m}}{2^{3x-6} \times 2^{4m+8}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2^{3x+4m+3}}{2^{3x+4m+2}} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5:

Si: $3^x = 7^y$

Reducir: $J = \dfrac{3^{x+1} - 7^{y+1} + 3^x}{7^y - 7 \times 3^x + 3 \times 7^y}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* Reemplazando el «3^x» por «7^y», según dato: $J = \dfrac{7^y \times 3^1 - 7^y \times 7^1 + 7^y}{7^y - 7 \times 7^y + 3 \times 7^y}$

* Factorizando «7^y», resultará:

$$J = \frac{7^y(3 - 7 + 1)}{7^y(1 - 7 + 3)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6:

Siendo $x^{-x} = \dfrac{1}{2}$; hallar «x^{3x}»

A) 2 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Elevado a «–3» ambos miembros del dato:

$$\left(x^{-x}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$x^{3x} = 2^3 \Rightarrow x^{3x} = 8$ ....

(lo que se pide)

RPTA : "C"

PROBLEMA 7:

Si: $n^n = 5$; hallar: $P = n^{2n^{n+1}+n}$

A) 5 B) 5^{11} C) 5^{12} D) 5^{10} E) N.A.

RESOLUCIÓN:

*Tratemos de formar en «P», «n^n», así:

$$P = n^{2n^n \cdot n + n} = n^{n\left(2n^n + 1\right)} = \left(n^n\right)^{2n^n + 1}$$

* Reemplazando el dato ($n^n = 5$):

$$P = (5)^{2(5)+1} = 5^{11}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

Determinar el valor de $m^{n^{m+1}} + n^{m^{1-n}}$

Siendo: $m^n = \dfrac{1}{3}$; $n^m = -2$

A) $\frac{1}{9}$ B) 4 C) –8 D) $-\frac{4}{9}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* De lo pedido, se obtendrá:

$$m^{n^m \cdot n} + n^{m^1 \cdot m^{-n}} = \left(m^n\right)^{n^m} + \left(n^m\right)^{\left(m^n\right)^{-1}}$$

* Reemplazando los datos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (-2)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular: $(-3)^2 + -3^2 + 3^3$

A)−9 B)27 C)−27 D)3 E)6

02 Calcular:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

A)12 B)17 C)−15 D)19 E)−20

03 Calcular:

$$2^{3^{2^{0^{4}}}} + 3^{1^{2^{3}}}$$

A)13 B)15 C)16 D)11 E)5

04 Efectuar:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

A)10 B)9 C)7 D)6 E)5

05 Calcular:

$$\left[2^{0} + 3^{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

A)5 B)6 C)1/6 D)−6 E)1/5

06 Simplificar:

$$P = \frac{2^{x+1} + 2^{x+3}}{2^{x+1}}$$

A)3 B)5 C)7 D)4 E)6

07 Efectuar:

$$M = \left(x^2\right)^2 \times \left(x^{2^2}\right)^2 \times \left(x \times x^2\right)^2$$

A) x^{20} B) x^{23} C) x^{28} D) x^{12} E) x^{18}

08 Reducir:

$$P = \frac{ax\left(a^2x^2\right)\ \left(a^5x^5\right)}{\left(a^2x^2\right)^4}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

09 Calcular el exponente final de x en:

$$\frac{\left[(a^{m-1})^2 \times a^m\right]^2 \times a}{\left[(a^m)^2 \times a^{-4}\right]^3}$$

A)9 B)−9 C)18 D)−27 E)27

10 Hallar la expresión equivalente:

A) $\sqrt{81x^{16}} =$ B) $\sqrt[4]{x^8y^{16}} =$

11 Reducir:

$$\sqrt{\left(\frac{3^{2x+8}}{3^{7+2x}}\right)^4}$$

A)1 B)3 C)9 D)27 E)30

12 Reducir:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2^{72}}}}}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)8

13 Calcular:

$$\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$$

A) $\sqrt[24]{x^7}$ B) $\sqrt[24]{x^{17}}$ C) $\sqrt[12]{x^5}$ D) $\sqrt[4]{x}$ E) $\sqrt{x}$

14 Calcular:

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$$

A)1 B)2 C)3 D)5 E)7

15 Calcular:

$$P = 8^{1/3} + 9^{1/2} + 16^{\frac{3}{2}}$$

A)66 B)69 C)70 D)72 E)75

16 Reducir: $16^{-\frac{1}{2}}$

A)2 B)4 C)1/2 D)1/4 E)8

17 Calcular:

$$K = \sqrt{\frac{16}{49}} + \left(\frac{7}{2}\right)^{-1} + \sqrt{\frac{1}{49}}$$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)7

18 El equivalente de:

$$\sqrt{x^3\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x^5}}}$$

A) $\sqrt[3]{x^5}$ B) $\sqrt[6]{x^{11}}$ C) $\sqrt{x^3}$ D) $\sqrt[5]{x^2}$ E) $\sqrt{x^7}$

19 Reducir:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{(2^4)^8}}}}$$

A)1 B)2 C)4 D)6 E)8

20 Si: $3^x=2$.

Halle: $E = \left[\sqrt[3^x]{3^{3^{2x}+3^x}}\right]^x$

A)27 B)8 C)81 D)729 E)3^9

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Reducir:

$$A = \frac{2^{x+5} \times 16^{x+4}}{8^{x+3} \times 4^{x+2}}$$

A)64 B)128 C)256 D)512 E)1024

02 Calcular:

$$R = \left(3^{4^{2006-x}}\right)^{4^{x-2005}}$$

A)3 B)9 C)27 D)81 E)243

03 Calcular:

$$E = \left(3^{3^3}\right)^3 \times \left(3^3\right)^{-3^3} \times \left(3^{3^2}\right)^{-2^3} \times (9)^{36}$$

A)0 B)1 C)3 D)27 E)3^{108}

04 Reduzca:

$$W = \frac{12^x + 20^x}{4^{x+2} - 4^{x+1}}$$

Si se verifica que: $3^x + 5^x = 24$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

05 Si:

$$x = \frac{9^7 + 9^3 + 81}{9^5 + 9 + 1} - 80\ ;\ y = \frac{7^{16} - 7^{13} + 7^5}{7^{14} - 7^{12} + 7^4} - 6$$

Calcule: $L = \left(\frac{x}{y}\right)^{2006}$

A)0 B)1 C)−1 D)3 E)00

06 Si: $x^x = \sqrt{3}$

Calcular el valor de:

$$E = \frac{(x^{12})^x}{(x^8)^x}$$

A)3 B)9 C)27 D)81 E)1/9

07 De la relación: $3^a = 5^b$.

Calcular:

$$P = \frac{5^{b+1} - 3^{a+1}}{5^{b+2} - 3^{a+2}}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D)2 E)4

08 De: $x^{x^x} = 2$

Calcular:

$$E = x^{x^{x+x^x}}$$

A)2 B)1/2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt[4]{2}$ E)4

09 De: $b^b=ab=2$. Calcular:

$$E = ab^{ab^{ab}}$$

A)2 B)4 C)16 D)4a E)4b

10 Simplificar:

$$\frac{16 \times 2^{n-2} + 10 \times 2^{n-1} + 64 \times 2^{n-6}}{26 \times 2^{n-1} - 2^{n+3}};\ n \in \mathbb{N}$$

A)2 B)1 C)4 D) $\frac{1}{2}$ E)8

11 Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}} - 27^{-2}\right)^0 = 1$

II) Si: $n < 0 \Rightarrow 0^n = 0$

III) $\left(x^{-3}\right)^{-2} = x^6;\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

A)VVV B)VVF C)FVV D)FFV E)FFF

12 Hallar el valor de:

$$E=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{7}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}}}}$$

A) 1 B) 0 C) 81 D) 3 E) 9

13 Reducir la expresión:

$$\frac{(x^2\cdot x^4\times x^6\ldots x^{100})((x^2y)^4x^7y)^2}{(x^{16}y^2)^5[(x^3)^{17}\cdot x^{-1}]^{50}};\ xy\neq 0$$

A) x^2 B) x C) x^{51} D) x^{50} E) 1

14 Si se cumple:

$$5^{x^{-5}}=x$$

Calcule:

$$A=\frac{1+x^5+x^{x^5}+x^{x^{x^5}}}{x^5-1}$$

A) 5 B) 1 C) 4 D) 16 E) 8

15 Si:

Hallar el valor de:

$$\left(\frac{2^{3x+xy}+3^{y+1}-6}{2^{x+4}}\right)^{2y+2^x}$$

A) 625 B) 675 C) 135 D) 225 E) 125

16 Calcular el valor al cual se aproxima: $\frac{F}{E}$

siendo:

$$E=\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\vdots}}}}}}$$

$$F=\sqrt[3]{36\sqrt[3]{36\sqrt[3]{36\ldots\ldots}}}$$

A) 2 B) 6 C) 3 D) 12 E) 4

17 Calcular el valor aproximado de "x", si "A" se aproxima a *101*.

$$A=\sqrt{x^4+x^2+\sqrt{x^4+x^2+\ldots}};\ x>0$$

A) 11 B) 100 C) 8 D) 6 E) 10

18 Halle el equivalente de la expresión:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^{2}}\cdot\sqrt[7]{\frac{1}{3}\ldots}}$$

A) $-\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{36}$ E) 6

19 Simplificar la expresión:

$$\frac{\left[\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}}}}\right]\times x^{\frac{9}{16}}}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}};\ x>0$$

A) 1 B) x C) x^2 D) $\sqrt{x}$ E) $\frac{1}{x}$

20 Calcular "n", si el exponente final de "x" en la expresión:

$$E=\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\ldots}}};\ \text{es}\ \frac{1}{17}$$

A) 16 B) 17 C) 19 D) 18 E) 20

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Simplificar:

$$A=\frac{\left(x^2\right)^3\times\left(x^3\right)^4}{\left(x^2\right)^5}$$

A) x^7 B) x^6 C) x^5 D) x^8 E) x^4

02 Simplificar:

$$B=\left[\left(x^2\right)^3\right]^4\left[\left(x^3\right)^4\right]^2$$

A) x^{50} B) x^{52} C) x^{48} D) x^{49} E) x^{51}

03 Simplificar: $C=\left[\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{3}{5}}$

A) $x^{\frac{1}{4}}$ B) $x^{\frac{1}{5}}$ C) $x^{\frac{1}{6}}$ D) x E) 1

04 Hallar: $M=2^{-\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 2 E) 4

05 Efectuar: $R=\left[2^{3^5}\times 2^{3^6}\right]^{3^{-5}}$

A) 4 B) 8 C) 16 D) 2 E) 9

06 Calcular: $M=\sqrt{2}\times\sqrt{2}^{9^{2^{-1}}}$

A) 2 B) 4 C) 3 D) 16 E) 8

07 Hallar el valor de:

$$M=\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{4}^{8^{27^{-\frac{1}{3}}}}$$

A) 4 B) 2 C) 16 D) 8 E) $\sqrt[3]{4}$

08 Reducir:

$$R=n^{-2^3}\left(n^{-3}\right)^2n^{(-2)^2}$$

A) n^{10} B) n^6 C) n^{-10} D) n^4 E) n^{-18}

09 Hallar el valor de:

$$E=64^{-8^{-27^{-\frac{1}{3}}}}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

10 Calcular:

$$A=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 5

11 Calcular: $Q=2^{27^{-\frac{1}{3}}}\times 4^{81^{-\frac{1}{4}}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

12 Reducir: $D=\sqrt[3]{\sqrt[4]{8}}\times\sqrt[4]{\sqrt[5]{2^{15}}}$

A) 2^0 B) 2 C) $\sqrt{8}$ D) 2^4 E) $\sqrt{2}$

13 Calcular: $E=\sqrt[x+3]{\frac{2^{x+5}2^8}{1024}}$

2^{x+1} B) 2^{x+3} C) 2^0 D) 2^x E) 2

14 Simplificar:

$$F=\sqrt[m]{\sqrt[4]{a^{8m}b^{16m}c^{32m}}}$$

A) $a^4b^{12}c^{28}$ B) abc C) $a^2b^4c^8$ D) a^2b^2c E) $a^3b^6c^{12}$

15 Efectuar:

$$G=\left(\sqrt{64x^4y^8}+\sqrt[3]{x^6y^{12}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A) $3xy^2$ B) $3xy$ C) $\sqrt{3}xy^2$ D) $\sqrt{3}xy$ E) $3x^2y$

16 Simplificar: $N=\frac{\sqrt{45}+\sqrt{20}}{\sqrt{125}-\sqrt{80}}$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 1

17 Simplificar: $E=\frac{2^{m+1}\times 4^{m+n}}{8^{m-1}\times 2^{n+3}}$

A) 4 B) 2n C) 2^{n+1} D) $\frac{1}{2^n}$ E) N.A.

18 Hallar el valor de:

$$Q=\frac{27^{b+1}\times 3^{2a-1}}{9^{a+b}\times 3^{b+2}}$$

A) 1 B) 3 C) 3^a D) 9 E) 27

19 Simplificar:

$$M=\frac{2^{n+3}\times 4^{4+2m}}{8^{n-2}\times 16^{m+2}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 16

20 Hallar el valor de:

$$R=\frac{9^{2a+b}\times 3^{b+3}}{81^{a+2}\times 27^{b-2}}$$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) 27

TAREA DOMICILIARIA

01 Reducir: $K=\frac{\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{54}}$

A) $\sqrt[3]{3}$ B) 3 C) $\sqrt[3]{3}$ D) $3\sqrt[3]{2}$ E) 1

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)E	2)C	3)B	4)C	5)C	6)B	7)A	8)C	9)D	10)E
11)B	12)E	13)D	14)B	15)A	16)C	17)C	18)A	19)B	20)B

ECUACIONES EXPONENCIALES

CAPÍTULO 074

OBJETIVOS :

• *Dar a conocer de manera muy simple; todas las formas de las ecuaciones exponenciales con sus respectivas resoluciones; usando las leyes básicas de los exponentes; para que finalmente se obtenga soluciones de acuerdo al nivel que este texto nos exige.*

• *Realizar operaciones con potencias y radicales, llevando a bases iguales y así llegar a la resolución de una ecuación exponencial.*

• *Aplicar algunos artificios matemáticos de manera que se pueda utilizar algunas propiedades de simetría y así obtener el valor de la incognita.*

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Las ecuaciones exponenciales son aquellas que se caracterizan porque la incógnita se encuentra ubicada en el exponente.

Si el conjunto solución se ha calculado por transformaciones elementales; entonces la ecuación será elemental.

EJEMPLO :

Resolver: $\sqrt[3]{4^{x-5}} = 64$

RESOLUCIÓN:

• Llevando a base 4; se tiene

$$\sqrt[3]{4^{x-5}} = 4^3$$

• Por el exponente fraccionario se tiene:

$$4^{\frac{x-5}{3}} = 4^3$$

• Igualando exponentes: $\dfrac{x-5}{3} = 3$

$$x = 14$$

Las ecuaciones exponenciales las hemos enfocado bajo dos casos generales y sub-casos para un mejor entendimiento.

I) PRIMER CASO:

Es de la forma: $\boxed{b^x = b^n}$ donde: $b \neq 0;\ b \neq 1$.

Para calcular la incógnita x, se utiliza el siguiente principio:

* Principio:

«A bases iguales se debe tener exponentes iguales».

Si: $b^x = b^n$
por principio : *(PP)*
$\boxed{x = n}$

NOTA :

Para resolver este primer caso debemos llevar a bases iguales los miembros de la ecuación.

• Dentro de este primer caso se presenta los siguientes sub-casos:

(I-A)ECUACIÓN EXPONENCIAL EN SU FORMA SIMPLE:

Es cuando las bases se expresa en su forma simple o se tiene la presencia de potencias.

EJEMPLO 1 :

Hallar el valor de x en:

$$3^{2x+1} = 243$$

RESOLUCIÓN:

Se observa que el *2do*. miembro es potencia en base *3*.

$$3^{2x+1} = 3^5$$

↑ ↑

Por principio:

$$2x + 1 = 5$$
$$2x = 4$$
$$\boxed{x = 2}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver:

$$16^{2x-1} = 64^{x+1}$$

RESOLUCIÓN:

Llevando a bases iguales:

$$(2^4)^{2x-1} = (2^6)^{x+1}$$

Efectuando:

$$2^{8x-4} = 2^{6x+6}$$

Por principio:

$$8x - 4 = 6x + 6$$
$$\Rightarrow 8x - 6x = 6 + 4$$
$$\Rightarrow 2x = 10$$
$$\Rightarrow \boxed{x = 5}$$

EJEMPLO 3 :

Calcular x si:

$$\sqrt{7}^{(1/7)x+2} = \sqrt{7}^{3432x-3}$$

RESOLUCIÓN:

Transformando cada miembro a base *«7»*

$$\sqrt{7}^{(7^{-1})x+2} = \sqrt{7}^{(7^3)2x-3}$$

Por principio:

$$(7^{-1})^{x+2} = (7^3)^{2x-3}$$
$$\Rightarrow 7^{-x-2} = 7^{6x-9}$$

Por principio:

$$-x - 2 = 6x - 9$$
$$\Rightarrow 9 - 2 = 6x + x$$
$$\Rightarrow 7 = 7x$$
$$\Rightarrow x = 1$$

(I-B)ECUACIÓN EXPONENCIAL CON POTENCIAS SUCESIVAS :

Son ecuaciones donde las bases están expresadas en potencias, estan elevadas a potencias una a otras para su solución debemos transformar las potencias hasta conseguir que las bases sean iguales.

EJEMPLO 1 :

Hallar x :

$$4^{8^{3+2x}} = 2^{2^{7x-1}}$$

RESOLUCIÓN:

Llevando a bases iguales:

$$(2^2)^{8^{3+2x}} = 2^{2^{7x-1}}$$

Operando:

$$2^{2\times 8^{3+2x}} = 2^{2^{7x-1}}$$

Por principio:

$$2\times 8^{3+2x} = 2^{7x-1}$$

* Nuevamente llevando a bases iguales:

$$2^1\times(2^3)^{3+2x} = 2^{7x-1}$$

Luego:

$$2^{1+9+6x} = 2^{7x-1}$$

Por principio:

$$1+9+6x = 7x-1$$

$$\Rightarrow 10+1 = 7x-6x$$

$$\Rightarrow \boxed{11 = x}$$

EJEMPLO 2 :

Resolver:

$$81^{8^x} = 3^{32^7}$$

RESOLUCIÓN:

* Llevando a bases iguales:

$$(3^4)^{8^x} = 3^{32^7}$$

Operando:

$$3^{4\times 8^x} = 3^{32^7}$$

Por principio:

$$4\times 8^x = 32^7$$

* Llevando a bases iguales nuevamente:

$$2^2\times(2^3)^x = (2^5)^7$$

$$2^{2+3x} = 2^{35}$$

Por principio:

$$2+3x = 35$$

$$\Rightarrow 3x = 33$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 11}$$

(I-C)ECUACIÓN EXPONENCIAL CON RADICALES:

Son ecuaciones donde aparece por lo menos un radical, aquí es necesario aplicar las leyes de exponentes con respecto a la eliminación del OPERADOR RADICAL para lograr transformar las bases a una base común.

EJEMPLO 1 :

Resolver:

$$\sqrt{27^{x+2}} = 243$$

RESOLUCIÓN:

Llevando a bases iguales:

$$\sqrt{(3^3)^{x+2}} = 3^5$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^{3x+6}} = 3^5$$

Por exponente fraccionario:

$$3^{\frac{3x+6}{2}} = 3^5$$

Por principio, se tiene:

$$\frac{3x+6}{2} = 5 \Rightarrow 3x+6 = 10 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

EJEMPLO 2 :

Hallar x en:

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}} - \sqrt[3]{4} = 0$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando las leyes con respecto a radicales:

$$\sqrt[3(x-1)]{2^{3x-1}} - \sqrt[3]{2^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3x-1}{3x-3}} - 2^{\frac{2}{3}} = 0$$

Despejando :

$$2^{\frac{3x-1}{3x-3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Por principio:

$$\frac{3x-1}{3x-3} = \frac{2}{3}$$

Operando:

$$9x-3 = 6x-6$$

$$\Rightarrow 3x = -6+3$$

$$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

EJEMPLO 3 :

Resolver :

$$\sqrt{2^{x+1}\sqrt[4]{2^x}} = \sqrt{4\sqrt{4\sqrt{4}}}$$

RESOLUCIÓN:

* Aplicando propiedad para reducir radicales:

$$\sqrt[2(4)]{2^{4(x+1)+x}} = \sqrt[(2)(2)(2)]{4^{(1\times 2+1)2+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{2^{5x+4}} = \sqrt[8]{4^7}$$

* Por Ley de Exponentes:

$$\sqrt[8]{2^{5x+4}} = \sqrt[8]{(2^2)^7}$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{2^{5x+4}} = \sqrt[8]{2^{14}}$$

Por principio:

$$5x+4 = 14$$

$$\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

(I-D) ECUACIÓN EXPONENCIAL CON SUMA O PRODUCTOS DE BASES IGUALES :

Para resolver estos tipos de ecuaciones se debe aplicar las leyes de exponentes de tal manera que se genere una potencia común para luego ser factorizado y aplicar el principio o en otros casos llevar a bases iguales.

EJEMPLO 1:

Hallar x en:

$$2^{x+5} - 2^{x+3} - 2^{x+1} = 88$$

RESOLUCIÓN:

Descomponiendo el exponente suma:

$$2^x\times 2^5 - 2^x\times 2^3 - 2^x\times 2 = 88$$

Factorizando:

(Factor Común 2^x)

$$2^x(2^5-2^3-2) = 88$$

$$2^x(22) = 8(22)$$

$$2^x = 2^3$$

$\Rightarrow$ Por principio :

$$x = 3$$

EJEMPLO 2 :

Resolver:

$$(4^{x-1})(8^{x+1}) = 16^{x+3}$$

RESOLUCIÓN:

Llevando a bases iguales:

$$(2^2)^{x-1}\times(2^3)^{x+1} = (2^4)^{x+3}$$

$$2^{2x-2}\times 2^{3x+3} = 2^{4x+2}$$

Por ley de Exponentes:

$$2^{2x-2+3x+3}=2^{4x+12}$$

Por principio:

$$2x-2+3x+3=4x+12$$

$$\Rightarrow 5x+1=4x+12$$

$$\Rightarrow x=11$$

EJEMPLO 3 :

Hallar n en:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=0.25$$

RESOLUCIÓN:

Llevando a bases iguales, en este caso a base *(1/2)*:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{n-1}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Multiplicando bases iguales:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Por principio:

$$n+3n-3=2$$

$$\Rightarrow 4n-3=2$$

$$\Rightarrow 4n=5\Rightarrow n=\frac{5}{4}$$

(I-E)ECUACIÓN EXPONENCIAL DE BASES DIFERENTES :

Es una ecuación donde las bases se reducen luego de operar a bases diferentes, de ahí que se hace necesario que los exponentes deben ser igual a cero para que la igualdad se cumpla.

EJEMPLO 1 :

Hallar x en : $2^{3x-6}=5^{x-2}$

RESOLUCIÓN:

1° MÉTODO: Se observa en ambos miembros bases diferentes:

$$2^{3(x-2)}=5^{(x-2)}\times 1$$

$$\Rightarrow\frac{2^{3(x-2)}}{5^{(x-2)}}=1\Rightarrow\left(\frac{2^3}{5}\right)^{x-2}=1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{8}{5}\right)^{x-2}=1\Rightarrow\left(\frac{8}{5}\right)^{x-2}=\left(\frac{8}{5}\right)^0$$

¡RECUERDA!

$$1=b^{\circ},\text{ con } b\neq 0$$

Por principio:

$$x-2=0$$

$$\Rightarrow x=2$$

2° MÉTODO:

Como se tiene : $2^{3x-6}=5^{x-2}$

Necesariamente por criterio los exponentes deben ser iguales a cero.

Luego:

$$3x-6=0\ \wedge\ x-2=0$$

$$\Rightarrow 3x=6\quad\wedge\ x=2$$

$$\Rightarrow x=2$$

(observa que los valores de «x» deben coincidir necesariamente).

NOTA :

Para fines prácticos aplicaremos el 2do. método cuando encontremos bases diferentes luego de haber reducido las operaciones.

EJEMPLO 1 :

Luego de resolver:

$25^x+9^x=2(15^x)$, determinar el valor de:

$$E=\frac{5^{-7x+1}+3^{-7x+2}}{7(5^{-7x-1})}$$

RESOLUCIÓN:

Resolviendo la Ecuación Exponencial:

$$(5^2)^x+(3^2)^x=2\times(3\times 5)^x$$

$$(5^x)^2+(3^x)^2=2\times 3^x\times 5^x$$

Despejando:

$$(5^x)^2-2(5^x)(3^x)+(3^x)^2=0$$

¡RECUERDA!

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

El 1° Miembro es producto notable:

$$(5^x-3^x)^2=0$$

Necesariamente : $5^x-3^x=0$

$$\Rightarrow 5^x=3^x$$

(como las bases son diferentes)

$$\Rightarrow x=0$$

Luego, reemplazando en E:

$$E=\frac{5^{0+1}+3^{0+2}}{7(5^{0-1})}$$

$$E=\frac{5^1+3^2}{7(5^{-1})}\Rightarrow\frac{14\times 5^1}{7}$$

$$E=10$$

Aquí presentamos las ecuaciones que forman parte del segundo caso y los sub-casos que se presenta en los ejercicios.

CASO ESPECIAL :

Es de la forma:

$$\boxed{f_{(x)}^{\,f(x)^{f(x)+n}}=b^{b^{b+n}}}$$

Donde : $b\neq 0;\ b\neq 1$

$f(x)$ Depende de x. La solución de estos tipos de Ecuaciones se da por comparación. Si observas que las relaciones que se dan en ambos miembros de la ecuación son equivalentes entonces por la simetría que se da la incógnita se obtiene igualando una relación con otra.

Este caso presenta los siguientes sub-casos:

I) ECUACIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA:

Si se tiene:

$$f(x)^{f(x)}=b^b$$

Por comparación

$$\Rightarrow\boxed{f(x)=b}$$

EJEMPLO 1 :

Hallar x en:

$$x^x=(0.5)^{2^{-1}}$$

RESOLUCIÓN:

Si observas en el 1er. miembro la base es igual al exponente; buscando la misma relación en el 2do. miembro.

$$x^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-1}}\Rightarrow x^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Por comparación : $x=1/2$

EJEMPLO 2 :

Resolver :

$$(x-2)^{(x-2)}=16^2$$

RESOLUCIÓN:

Buscando la misma relación en ambos miembros:

$$(x-2)^{(x-2)}=(4^2)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^{(x-2)}=4^4$$

Por comparación:

$$x-2=4 \Rightarrow x=6$$

EJEMPLO 3 :

Hallar x en: $x^{2x^2}=3^{18}$, para $x>0$.

RESOLUCIÓN:

Operando miembro a miembro:

$$(x^2)^{x^2}=(3^2)^9$$

$$(x^2)^{x^2}=(9)^9$$

Por comparación:

$$x^2 = 9$$

$$x=3, \text{con } x>0$$

II) ECUACIÓN EXPONENCIAL DE LA FORMA:

Si se tiene

$$f_{(x)}^{f(x)^{f(x)^{+n}}}=b^{b^{b+n}}$$

Por comparación

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=b}$$

Esta igualdad se cumple por propiedad.

$$x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}}=n$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt[n]{n}}$$

EJEMPLO 1 :

Hallar x en:

$$x^{x^2}=2$$

RESOLUCIÓN:

1° MÉTODO

Trabajando en el 2do. miembro:

$$x^{x^2}=\sqrt{2}^2$$

A la vez:

$$x^{x^2}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}$$

Por comparación:

$$\boxed{x=\sqrt{2}}$$

2° MÉTODO

Aplicando la propiedad anterior para $n=2$.

$$x^{x^2}=2$$

Por propiedad:

$$x=\sqrt[2]{2}$$

$$\boxed{x=\sqrt{2}}$$

NOTA :

Para fines prácticos vamos a resolver todo ejercicio que presenta esta forma especial aplicando la propiedad anterior..

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Hallar x en :

$$2^{x+1}\times 2^{3x-5}\times 2^{5x-9}=2^5$$

A)4 B)6 C)8 D)2 E)10

RESOLUCIÓN :

* Por producto de bases iguales :

$$2^{9x-13}=2^5$$

* Entonces :

$$9x-13=5 \rightarrow 9x=18 \rightarrow x=2$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Resolver : $\sqrt[4]{8^{x-1}}=\sqrt[3]{4^{x+1}}$

A)7 B)6 C)13 D)17 E)9

RESOLUCIÓN :

* Como 8 y 4 son potencias de 2, se tiene :

$$\sqrt[4]{(2^3)^{x-1}}=\sqrt[3]{(2^2)^{x+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{2^{3x-3}}=\sqrt[3]{2^{2x+2}}$$

* Por exponente fraccionario, resulta : $2^{\frac{3x-3}{4}}=2^{\frac{2x+2}{3}}$

* Igualando exponentes, se obtendrá : $\frac{3x-3}{4}=\frac{2x+2}{3}$

* Despejando la incógnita : $x=17$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Hallar x en : $125^{x-3}=25^{2x+1}$

A) -10 B) -9 C) -2 D) -11 E) -12

RESOLUCIÓN :

* Llevando todo a potencia de 5 :

$$(5^3)^{x-3}=(5^2)^{2x+1} \Rightarrow 5^{3(x-3)}=5^{2(2x+1)}$$

* Entonces : $3x-9=4x+2$

$$\Rightarrow -9-2=4x-3x \Rightarrow -11=x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Hallar x : $\sqrt[3]{\frac{2^7-2^x}{2^x-2}}=2$

A)1 B)4 C)3 D)$\frac{1}{4}$ E)$\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato, se obtendrá :

$$\frac{2^7-2^x}{2^x-2}=2^3 \Rightarrow 2^7-2^x=2^3\times 2^x-2^4$$

$$\Rightarrow 128=8\times 2^x+2^x-16$$

$$\Rightarrow 144=9\times 2^x \Rightarrow 16=2^x \rightarrow 2^4=2^x$$

* Entonces : $x=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Resolver : $x^{x^{x^5}}=5$

A)5 B)$\sqrt{5}$ C)$\sqrt[5]{5}$ D)5^3 E)5^5

RESOLUCIÓN :

* Tratando de formar una analogía, así :

$$x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^5 \Rightarrow x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^5}$$

$$\Rightarrow x^{x^{x^5}}=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^5}}$$

* Entonces : $x=\sqrt[5]{5}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Resolver : $x^x=\frac{1}{256}$

A)4 B)-4 C)2 D)16 E)-16

RESOLUCIÓN :

*Tratando de formar una semejanza :

$$x^x=\frac{1}{4^4} \Rightarrow x^x=4^{-4} \Rightarrow x^x=(-4)^{-4}$$

* Entonces : $x = -4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Hallar x : $x^x = \sqrt[2\sqrt{3}]{3^3}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Por exponente fraccionario :

$$x^x = 3^{\frac{3}{2\sqrt{3}}} \Rightarrow x^x = 3^{\frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow x^x = 3^{\frac{3\sqrt{3}}{2\times 3}} \Rightarrow x^x = 3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow x^x = \sqrt{3}^{\sqrt{3}}$$

* Entonces : $x = \sqrt{3}$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el valor de x

$$x^x = 27$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 1/3 E) –3

02 Resolver la ecuación exponencial:

$$x^x = 64^4$$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 12

03 Resolver:

$$(x-5)^{(x-5)} = 4$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 15

04 Calcular el valor de x

$$x^{x+1} = 81$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

05 Al resolver: $x^x = 4^{-1/4}$

Hallar el valor de: $20x - 3$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

06 Hallar el valor de x:

$$7^{5x-2} = 7^{8x+13}$$

A) 5 B) –3 C) –5 D) 3 E) 2

07 Resolver:

$$\sqrt{3}^{16} = \sqrt{3}^{2^{7x-3}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Hallar el valor de x:

$$8^{x+3} = 32^{x-1}$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 12

09 Resolver:

$$32^{5^{x+3}} = 2^{5^{10}}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

10 Resolver la ecuación exponencial:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$$

A) B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

11 Hallar el valor de x:

$$4^{3x-1} = 32^{x+6}$$

A) 8 B) 16 C) 32 D) 36 E) 40

12 Resolver:

$$27^{2x-1} = 243^{2x-3}$$

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) 10

13 Resolver:

$$\sqrt[4]{3} = 81^{16^{x+1}}$$

A) 1/2 B3/4 C)/7 D) 5/6 E) 5/10

14 Resolver:

$$3^{x+1} + 3^x = 12$$

A) 0 B) 1 C) 3 D) –1 E) – 2

15 Resolver:

$$\frac{21^{3x+5}}{7^{x+15}} = 3^{x+15}$$

A) 2 B) 5 C) 4 D) 3 E) 10

16 Resolver:

$$2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^{x+1} - 2^x = 50^x$$

A) 1/4 B) 1/5 C) 1/2 D) 1/3 E) 1/6

17 De la relación:

$$5^{2^{2x-1}} = 25$$

Dar como respuesta:

$$E = (x+1)^{x+1}$$

A) 4 B) 27 C) 256 D) 5^5 E) 6^6

18 Al resolver: $3^{3^x} = 27^{81}$

Dar como respuesta: $(2x-1)^2$

A) 4 B) 16 C) 64 D) 81 E) 121

19 De: $x^{x^3} = 36$

Calcular:

$$E = x^3 + x^6$$

A) 24 B) 28 C) 38 D) 42 E) 68

20 Calcular "n", en:

$$\frac{5^{2n-3} + 5^{2n-2} + 5^{2n-1}}{5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}} = 625$$

A) 5 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Resolver: $\sqrt[x]{4} = 2$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 4 D) 8 E) 3

02 Resolver : $27^x = 9$

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

03 Resolver : $5^x - 7^x = 0$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 57 E) 75

04 Resolver : $\sqrt[x]{x} = \sqrt{2}$; $x \neq 2$

A) 8 B) 4 C) 2 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

05 Resolver : $(2^x)^x = 16$

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 1

06 Resolver : $x^x = \frac{1}{4}$

A) 2 B) – 2 C) 4 D) – 4 E) $\frac{1}{2}$

07 Calcula el valor de x en:

$$5^{3x-1} = 25$$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

08 Resuelve : $2^{4x-1} = 8^{2x+4}$

A) – 1 B) – 2 C) – 13/2 D) 2/13 E) 1

09 Halla el valor de x en $9^{2x-5} = 3$.

A) –11 B) – 4 C) 4/11 D) 11/4 E) 1

10 Calcula x en : $16^{2x+4} = 8^{5x-3}$

A) 1/3 B) 25/7 C) 25 D) 7/25 E) 1

11 Resolver : $9^{x+1} = 27^{x-3}$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

12 Resolver : $256^{x-1} = 64^{3-x}$

A) 13/7 B) 7/13 C) 5 D) 1/5 E) 7

13 Resolver $4^x \times 8^{x+9} = 27^{x+2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 Resolver : $3^{x+3} \times 9^{x+9} = 27^{2x+12}$

A) – 5 B) – 4 C) – 3 D) – 2 E) – 1

15 Hallar x en : $2^{x+1} + 2^{x+2} = 48$

16 Hallar x en : $4^{x-1} + 1 = 17$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17) Hallar x en : $5^{5^{x-1}} = 5^{625}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18) Hallar x en : $(5x)^{(5x)} = 27$

A) 3/5 B) 5/3 C) 1/3 D) 1/5 E) 1/4

19) Hallar x en : $x^{x^3} = 36$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{6}$ D) $\sqrt[3]{5}$ E) $\sqrt[3]{12}$

20) Calcular x si : $x^{x^5} = 5$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt[3]{5}$ C) $\sqrt[4]{5}$ D) $\sqrt[5]{5}$ E) 5

TAREA DOMICILIARIA

01) Hallar x en : $4^{x^3} = 8^{18}$

A) -5 B) -3 C) 3^{-1} D) 2 E) 3

02) Si : $x^{x^{x+1}} = 27$ dar el valor de: x^x

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

03) Resolver:

$$2^{x+4} \times 4^{x+8} \times 8^{x+16} \times 16^{x+2} = 64$$

A) -1 B) -3 C) -5 D) -7 E) -9

04) Hallar n en :

$$\sqrt[0,1]{0,2} \times \sqrt[0,3]{0,04} = \sqrt[n]{5}$$

A) $-0,06$ B) 0,5 C) 0,06 D) $-0,068$ E) N.A.

05) Resolver : $x^{x^4} = 64$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt[4]{3}$ C) $\sqrt[4]{5}$ D) $\sqrt[4]{7}$ E) $\sqrt[4]{8}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01) Hallar x en : $4^{64^{x+3}} = 256^{16^{x+3}}$

A) 2 B) -2 C) 1 D) -1 E) 8

02) Hallar x en : $\left(3^{3^{x+2}}\right)^{3^{x-4}} = 3^{81}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

03) Hallar x en : $\sqrt[3]{\dfrac{3^7 - 3^x}{3^x - 3}} = 3$

A) 1 B) 4 C) 3 D) $\frac{1}{4}$ E) 8

04) Hallar x, en :

$$\sqrt{27}^{\,x+3} = \sqrt[4]{243}^{\,3x+1}$$

A) $\frac{13}{9}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

05) Hallar x, en :

$$\sqrt{5}^{\,x-2} \times \sqrt[3]{5}^{\,3-2x} \times \sqrt[5]{5}^{\,x-1} = 1$$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

06) Hallar x, en : $\sqrt[4]{5^x \sqrt[3]{5^x \sqrt{5^x}}} = \sqrt[8]{125}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

07) Hallar x, en :

$$125^{27^{-9^{-x^{-1}}}} = 5$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

08) Siendo "a" y "b" números enteros positivos, hallar "$a \cdot b$"

$$a^{b^a} = 512$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

09) Si : $x^{x^3} = 3$ dar el valor de x

A) $\sqrt[3]{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) N.A.

10) Si : $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dar el menor valor de x.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

11) Si : $x^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dar el mayor valor de x

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

12) Hallar x, en : $(4x)^{4x} = 64^4$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

13) Hallar x, en : $x^x = 8^{\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{9}$

14) Hallar x, en: $25^x + 4^x = 2(10^x)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1

15) Hallar x, en : $E = \sqrt{x^2+5}$ Luego resolver:

$$3^{4^{2^x}} = 81^{2^6}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 8

16) Si : $x^x = 24^{\sqrt{6}}$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt{12}$ D) $\sqrt{24}$ E) $\sqrt{48}$

17) Hallar x, en : $x^{x^6} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt[8]{2}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[6]{2}$

18) Hallar m, si:

$$8^{-27^{-9^{-4^{-0,5}}}} = 2^m$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)B	4)B	5)A	6)B	7)A	8)C	9)D	10)B
11)B	12)A	13)B	14)A	15)C	16)C	17)E	18)A	19)C	20)B
1)E	2)A	3)D	4)A	5)E					

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)C	3)B	4)A	5)D	6)B	7)C	8)C	9)A	10)B
11)A	12)B	13)D	14)A	15)C	16)B	17)B	18)A		

MAL	BIEN
$5^2 \cdot 5^4 = 5^8$ (No multiplique los exponentes) $5^2 \cdot 5^4 = 25^6$ (No multiplique las bases de las potencias)	$5^2 \cdot 5^4 = 5^6$
$\frac{5^6}{5^2} = 5^3$ (No divida los exponentes) $\frac{5^6}{5^2} = 1^4$ (No divida las bases de la potencia)	$\frac{5^6}{5^2} = 5^4$
$(5^2)^6 = 5^8$ (No sume los exponentes)	$(5^2)^6 = 5^{12}$
$(-2)^4 = -2^4$ (Mala interpretación del paréntesis)	$(-2)^4 = (-1)^4 2^4 = 2^4$
$(5)^0 = -1$ (Mala interpretación de la definición b^0)	$(5)^0 = -1$ (Definición de b^0)
$2^{-3} = -\frac{1}{2^3}$ (Mala interpretación de la definición de b^{-n})	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ (Definición de b^{-n})
$\frac{2^3}{2^{-4}} = 2^{3-4} = 2^{-1}$ (Descuido al restar exponentes)	$\frac{2^3}{2^{-4}} = 2^{3-(-4)} = 2^7$
$5^2 + 5^2 = 5^4$ (La adición de exponentes no se aplica con el signo de suma)	$5^2 + 5^2 = (1+1)5^2 = 2.5^2$ (Propiedad distributiva)
$(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$ (Mala aplicación de la definición del exponente negativo)	$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}$ (Definición del exponente negativo)
$\sqrt{25} = \pm 5$ (Mal uso de la definición de $\sqrt{a}$)	$\sqrt{25} = 5$
$16^{3/4} = (\sqrt[3]{16})^4$ (Mal uso de la definición de $b^{m/n}$)	$16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3$ ó $\sqrt[4]{16^3}$
$(-2)^{-1/3} = 2^{1/3}$	$(-2)^{-1/3} = \frac{1}{(-2)^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2}}$
$a^{-1/2} + b^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a+b}}$	$a^{-1/2} + b^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$

POLINOMIOS

CAPITULO 075

OBJETIVOS :

• *Saber identificar una expresión algebraica y su clasificación, lo cual nos va a permitir reconocer un polinomio y en forma directa calcular su valor numérico cuando en ciertos ejercicios así lo requieran.*

• *Se busca a través de un lenguaje claro y sencillo, que el estudiante logre asimilar las definiciones con respecto a los grados que se da entre un monomio y polinomio, ello permitirá dar criterios para la obtención de la solución de diversos ejercicios que se pueden presentar.*

• *Conocer y diferenciar correctamente los polinomios en forma directa y pueda desarrollar los diferentes problemas que se presentan con ellos.*

POLINOMIOS

En nuestra vida diaria , los polinomios tienen aplicación práctica , por *ejemplo* : Para la elaboración de una anticuchada necesitamos "*x*" kilos de corazón, "*y*" litro de preparado especial , "*z*" kilos de choclo "*a*" kilos de carbón . Luego si el presupuesto total es P , éste depende de las variables x , y , z , w y lo denotamos así : $P(x ; y ; z ; w)$

NOTACIÓN DE UN POLINOMIO :

* Un polinomio se denota así :

$$P(x ; y ; z) = ax^4 + bx^2y^3z^5 + cy^4z^8$$

donde x , y , z : son las variables ;

a , b , c : son coeficientes , valores constantes.

VARIABLES :

Son aquellas expresiones que cambian su valor se les representa por las letras x , y , z , ... cte.

CONSTANTES :

Son aquellas expresiones que tienen un valor fijo.

EJEMPLO :

$$\underbrace{R(x,y,z)}_{variables} = \underbrace{6x^4y^3 - \frac{8}{3}x^5yz^2 + \sqrt{2}z^5}_{constantes:\ 6,\ \frac{8}{3},\ \sqrt{2}}$$

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es un conjunto de variables y constantes ligados entre sí por los operadores aritméticos o cualquier combinación de ellas.

EJEMPLOS :

* $E(x) = 3x^2 + 2x - 8$ * $M(x;y) = \sqrt{2}x^2 - \frac{3}{5}y^3$

* $S(x;y;z) = \sqrt{\dfrac{3x^2 - 8xz}{y + 2z}}$

TÉRMINO ALGEBRAICO :

Es aquella mínima expresión algebraica en las cuales sus variables y constantes están ligadas entre sí por las operaciones aritméticas excepto por la adición y la sustracción.

EJEMPLOS :

* $L_{(x)} = x^5$ * $M(x ; y) = 6x^2y^5$ * $G(x;y;z) = 13\sqrt{xy^5z}$

PARTES DE UN TÉRMINO ALGEBRAICO

Todo término algebraico posee *3* partes

EJEMPLO :

$$T_{(x,y,z)} = -3x^2y^4z^7$$

* Coeficiente $\Rightarrow -3$
* Variables $\Rightarrow x , y , z$
* Exponentes de las variables $\Rightarrow 2 ; 4$ y 7

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Por su naturaleza se clasifican en :

1) EXPRESIÓN ALGEBRAICA RACIONAL (EAR) :

Se caracteriza porque , los exponentes de sus variables sean números enteros , ejemplos :

* $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 7x + 2$
* $G(x;y) = 4x^3 - \sqrt{2}xy^3 + 9y^{-4}$
* $R_{(x;y;z)} = \dfrac{6x^5 + 4x^4y - 8xz^{-4} - \sqrt{3}y^{-3}}{x^2 + y}$

A su vez se subdividen en :

1-A) E.A.R. ENTERA :

Se caracterizan porque los exponentes de las variables son enteros positivos.

EJEMPLO :

* $R(x) = 33x^2 - 6x+80$ * $P(x;y) = 9x^4y - \sqrt{7}x^2y^3 - \frac{2}{5}y^5$

1-B) E.A.R. FRACCIONARIA :

Caracterizada por que al menos una de sus variables posee un exponente entero negativo o variables en el denominador.

EJEMPLOS :

* $C_{(x,y,z)} = 3x^7 - 5xy^4z^5 + 7y^{-2}z^{-5}$
* $B(x,y) = 5x^{-4}+3$

2) EXPRESIÓN ALGEBRAICA IRRACIONAL (EAI)

Estas expresiones se caracterizan porque hay variables afectadas con exponente fraccionario , o el radicando tiene variables.

EJEMPLO :

* $E_{(x,y)} = 5\sqrt{x}+6\sqrt{y}$
* $M_{(x,y,z)} = 3x^{1/3} - 7y^{2/5} + 8z^{3/7}$

* Resumiendo :

EXPRESIONES ALGEBRAICAS	EXPONENTES DE LAS VARIABLES	VARIABLES EN EL DENOMINADOR
1) RACIONALES a) Enteras b) Fraccionarias	# Enteros positivos # Enteros negativos	No tienen Si tienen
2) Irracionales	# Fraccionarios	

POLINOMIO

Es toda expresión algebraica racional entera , definida sobre un campo numérico.

$$P(x)=3x^5+8x+2 \qquad F(x,y)=5x^3-xy^2+6$$

De acuerdo a su número de términos puede ser: monómio , binomio , trinomio , etc.

POLINOMIO EN VARIABLE "x" :

Es la expresión general de un polinomio y tiene la siguiente forma :

$$\boxed{P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a_n};\ a_0 \neq 0$$

* Donde :

$a_0, a_1, a_2,...a_n$: son coeficientes
x : es variable
n : grado del polinomio
a_0 : coeficiente principal *(C.P.)*
a_n : término independiente *(T.I.)*

VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Viene a ser el resultado que se obtiene al reemplazar las variables por constantes .

EJEMPLO 1 :

Sea : $P(x)=3x+9$

Hallar el valor numérico de P para $x=2$

RESOLUCIÓN :

Reemplazando x por 2 : $P(2)=3(2)+9=6+9=15$

EJEMPLO 2 :

Sea $Q(x)=\frac{x^2-3}{\sqrt{x-3}}$, hallar el valor númerico de la Q para $x=7$.

RESOLUCIÓN :

$$Q(7)=\frac{(7)^2-3}{\sqrt{7-3}}=\frac{49-3}{\sqrt{4}}=\frac{46}{2} \Rightarrow Q(7)=23$$

EJEMPLO 3 :

Hallar el valor númerico de : $J=\left[P_{(3)}^{\;P_{(0)}^{\;P_{(-1)}}}\right]^2$

Si $P_{(x)}=3x^3+2$

RESOLUCIÓN :

* Reemplazando los valores en P :

$P_{(3)}=3(3)^3+2=81+2=83$; $P_{(0)}={}^3(0)3+2=0+2=2$

$P_{(-1)}=3(-1)^3+2=-3+2=-1$

* Luego : $J=\left[83^{2^{-1}}\right]^2 = 83^{2^{-1+1}} = 83^{2^0} = 83^1$

$\rightarrow J = 83$

EJEMPLO 4 :

Si $R_{(3x-2)}=x+\frac{8}{3}$

Hallar el valor númerico $R_{(2)}$

RESOLUCIÓN :

* Igualamos : $3x-2=2 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

* Luego: $P_{(2)}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow P_{(2)}=4$

TEOREMAS :

Dado un polinomio $P(x)$

1) *La suma de coeficientes se obtiene reemplazando la variable por 1 :*

$$\boxed{\sum Coef.P_{(x)}=P_{(1)}}$$

2) *El término independiente se obtiene reemplazando su variable por cero.*

$$Term.Ind.P_{(x)}=P_{(0)}$$

EJEMPLOS :

1) Sea : $P_{(x)}=2x^3+9x-8$

* $\Sigma Coef\ P_{(x)}=P_{(1)}=2+9-8=3$
* $Term.Ind.P_{(x)}=P_{(0)}=0+0-8+8$

2) Si: $F_{(x)}=(2x^4-1)^{305}+2(1)+5$

$\Rightarrow \Sigma Coef\ F_{(1)}=(2-1)^{305}+2(1)+5$

$\Rightarrow \Sigma Coef\ F_{(1)}=1^{305}+2(1)+5=8$

$\Rightarrow Term.Ind.F_{(0)}=(2(0)^4-1)^{305}+2(0)+5$

$\Rightarrow Term.Ind.F_{(0)}=-1+0+5=4$

CAMBIO DE VARIABLE

Es el procedimiento que permite reemplazar la variable inicial de un polinomio por otra nueva variable previamente seleccionada.

EJEMPLO 1 :

Sea $f_{(x)}=3x-2$; hallar $f(x-1)$

RESOLUCIÓN :

* Reemplazando x por $x-1$

$f(x-1)=3(x-1)-2=3x-3-2 \Rightarrow f(x-1)=3x-5$

EJEMPLO 2 :

Si $G(x-3)=2x+5$; hallar $G(x)$

RESOLUCIÓN :

* Haciendo : $x-3=y \Rightarrow x=y+3$
* Luego : $G(y)=2(y+3)+5=2y+6+5$

$\Rightarrow G(y)=2y+11 \rightarrow G(x)=2x+11$

* Otra forma de hallar $G(x)$

$\Rightarrow G(x-3)=2x+\underbrace{5+6}_{11}-6 \Rightarrow G(x-3)=\underline{2x-6}+11$

$\Rightarrow G(\underbrace{x-3}_{x})=2\underbrace{(x-3)}_{x}+11 \rightarrow G(x)=2x+11$

NOTA :

La suma de coeficientes un polinomio $P(x)$, se obtiene reemplazando la variable por "*1*".

$$\Sigma\ Coef.\ (P)x = P(1)$$

* El término independiente se obtiene reemplazando la variable por cero. $T.Ind\ P(x)=P(0)$

EJEMPLO :

Sea : $P_{(x)}=5x^4+2x^3+3x+7$

* $\Sigma Coef.=P(1)=5+2+3+7=20$
* $T.Ind=P(0)=0+0+0+7=7$

GRADO DE UN POLINOMIO

Es la característica que tiene solo los polinomios , en relación a los exponentes de sus variables.

Los grados se clasifican en :

1) GRADO RELATIVO (G.R.) :

Esta representado por el mayor exponente de la variable al cual se calcula el grado.

EJEMPLO :

Sea el polinomio :

$P(x;y)=\sqrt{3}x^5y^2-\frac{6}{5}x^2y^4+7x^3y^7 \Rightarrow GR(x)=5 \wedge GR(y)=7$

2) GRADO ABSOLUTO (G.A)

Esta representado por el mayor grado absoluto de uno de sus términos.

El grado absoluto de un término (o de un monomio) se calcula sumando los exponentes de las variables.

EJEMPLO :

* Sea : $M(x,y,z)=3^4a^2b^3\ x^4\ y^5\ z^7$

$G.A(M)=4+5+7=16$

* Sea : $P(x,y)=3x^5\ y^6-\sqrt{3}x^3\ y^7+\frac{2}{3}x^1y^5$

$$\left.\begin{array}{l}GA(1er\ Term)=11\\GA(2do\ Term)=10\\GA(3er\ Term)=10\end{array}\right\}GA(P)=11$$

POLINOMIO ESPECIALES

1) POLINOMIO ORDENADO :

Con respecto a una de sus variables se dice que es ordenado cuando sus exponentes aumentan o disminuyen, según el orden sea creciente o decreciente.

EJEMPLO :

$P(x)=5-8x+2x^3+3x^5$ es creciente

$Q(x;y)=7x^4-2x^3y+3x^2y^3+2y^4$

Es, decreciente respecto a "*x*" y creciente respecto a "*y*".

2) POLINOMIO COMPLETO :

Con respecto a una variable , es aquel que se caracteriza porque tiene en forma consecutiva todos los exponentes de dicha variable.

EJEMPLO :

$$P(x)=3x^4-5x^3+2x^2-\sqrt{3}x+7$$

TEOREMAS :

1) El número de términos en todo polinomio completo en una variable es igual al grado aumentado en uno .

EJEMPLO :

Sea : $P(x)=3x^4-\sqrt{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+21x-7$

En este caso como el grado es ***4*** , el polinomio tendrá ***5*** términos.

2) En un polinomio ordenado y completo respecto de una variable , la diferencia de los grados relativos de dos términos consecutivos , es la unidad.

EJEMPLO :

$$P(x)=6x^5-2x^4+3x^3+\sqrt{3}x^2+9x+2$$

Se observa : $5-4=4-3=3-2=2-1=1$

3) POLINOMIO HOMOGÉNEO :

Se llama polinomio homogeneo a aquel cuyos grados absolutos de todos sus términos son iguales .

EJEMPLO :

$$P(x)=\underbrace{6x^3y^4}+\underbrace{2x^7}-\underbrace{9x^2y^5}+\underbrace{5x^6y}$$

$$GA\ =\ 7\ =\ 7\ =\ 7\ =\ 7$$

4) POLINOMIOS IDÉNTICOS :

Dos o más polinomio son idénticos , cuando tienen los mismos valores númericos para cualquier valor que se asigne a su variables.

EJEMPLOS :

* Sean los polinomios :

$$P(x)=(x-2)^2\ ;\ F(x)=x^2-4x+4$$

Asignamos para $x=3$, se obtiene :

* $P(3)=(3-2)^2=1$ * $F(3)=3^2-4(3)+4=1$

* luego : $P(x)\equiv Q(x)$

Además dos polinomios en una variable y del mismo grado son idénticos si los coeficientes de sus respectivos términos semejantes son iguales.

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv mx^3+nx^2+px+q$$
$$\Rightarrow a=m\ ,\ b=n\ ,\ c=p\ ,\ d=q$$

EJEMPLO :

Hallar $a+b+c$ si : $ax^2+5x+c-7\equiv 3x^2+bx+10$

RESOLUCIÓN :

Por identidad : $a=3\ ;\ 5=b\ ;\ c=7$

* Luego: $a+b+c=25$

5) POLINOMIO IDÉNTICAMENTE NULO :

Un polinomio es idénticamente nulo , si sus valores numéricos para cualquier valor asignado a su variable resulta siempre cero.

EJEMPLO :

En el siguiente polinomio : $p(x)=(x-1)^2-(x+1)^2+4x$

Se obtiene : $P(x)\equiv 0$. para cualquier valor de "x" .

* Sea un polinomio : $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n$ es idénticamente nulo , si todos sus coeficientes son cero. $\Rightarrow a_0=a_1=a_2=...=a_n\equiv 0$

EJEMPLO :

Hallar $\frac{a+b}{c}$, si : $(a-3)x^2+(b-7)x+(10-c)\equiv 0$

* Solución : $a=3\ ;\ b=7;\ c=10$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{c}=\frac{3+7}{10}=1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si $P(x)=2x^2-3$

Hallar : $P(-5)$

RESOLUCIÓN:

Hacemos el reemplazo de "x por -5"

$$\Rightarrow P(x)\ \xrightarrow{x=-5}\ P(-5)$$

Reemplazando : $x=-5$ en $P(x)$:

$P(x)=2x^2-3$

$\Rightarrow P(-5)=2(-5)^2-3$

RPTA : $P_{(-5)}=47$

PROBLEMA 2:

Si : $Q(x)=3x-5$

Hallar: $\frac{Q(x-1)-Q(x)}{3}$

RESOLUCIÓN:

Reemplazando x por $x-1$ en $Q(x)$.

Aquí: $x=x-1$

$\Rightarrow Q(x)=3x-5$

$\Rightarrow Q(x-1)=3(x-1)-5$

$\Rightarrow Q(x-1)=3x-8$

Reemplazando en:

$$\frac{Q(x-1)-Q(x)}{3}=\frac{3x-8-(3x-5)}{3}$$

$$=\frac{3x-8-3x+5}{3}$$

RPTA : -1

PROBLEMA 3 :

Si : $P(x)=x^2-2$

Calcular: $\underbrace{P(P(P(...P_{(2)}...)))}_{1256\ veces}$

RESOLUCIÓN:

Para calcular este problema, hacemos el cálculo de adentro hacia afuera.

Es decir:

1º Cálculo: $P(2)=2^2-2$ (aqui $x=2$)

$P(2)=2$

2º Cálculo: $P(\underbrace{P(2)}_{P(2)=2})=2$ (aqui $x=2$)

3º Cálculo: $P\underbrace{(P(P(2)))}_{2}=P(2)=2$

Observamos que el V.N. que se obtiene de adentro hacia afuera siempre da 2.

$$\underbrace{P(P(P(......P}_{1256\ veces}(2)....)))=2$$

RPTA : 2

PROBLEMA 4 :

Si se tiene : $P(x-2)=3x-1$

Hallar : $P(2)$

RESOLUCIÓN:

1º Calculamos el valor de x (valor de la variable)

Como: $P(x-2)=P(2)$

Igualamos: $x-2=2$.

Despejamos : $x=4$

2º Procedemos a reemplazar "x por 4"

$\Rightarrow P(x-2)=3x-1$

$\Rightarrow P(2)=3(4)-1 \Rightarrow P(2)=11$

RPTA : $P(2)=11$

PROBLEMA 5 :

Si: $H(3x-1)=2x^3-1$

Calcular: $H(5)$

RESOLUCIÓN:

1º Igualamos : $3x-1=5$

$3x=6$

$x=2$

2º Reemplazamos en:

$H(3x-1)=2x^3-1$

$\Rightarrow H(5)=2(2)^3-1$

RPTA : $H(5)=15$

PROBLEMA 6 :

Si $P(x-3)=5x-2$

Hallar : $P(x)$

RESOLUCIÓN:

Hacemos un cambio de variable; asignando $x-3$ *a* x.

1º $x-3\rightarrow x$(asignación de izquierda a derecha)

Osea : $x-3=x$

$x=x+3$

2º Reemplazando en $P(x-3)$:

$x=x+3$

$P(x-3)=5x-2$

Luego: ↓ ↓

$P(x)=5(x+3)-2$

RPTA : $P(x)=5x-13$

PROBLEMA 7 :

Se define: $P(x+5)=2x+1$

Hallar : $P(x)$

RESOLUCIÓN:

Haciendo un cambio de variable:

$x+5\rightarrow x$ (asignación de izq.a derecha)

Osea : $x+5=x$

$x=x-5$

Reemplazando en $P(x+5)$:$x=x-5$

$P(x+5)=2x+1$

↓ ↓

$P(x)=2(x-5)+1$

RPTA : $P(x)=2x-9$

PROBLEMA 8 :

Hallar el V.N. de: $E=x^2+y^3+3z$

para: $x=5;\ y=2;\ z=8$

A) 42 B) 54 C) 57
D) 81 E) 43

RESOLUCIÓN:

* Reemplazando los valores correspondientes se obtendrá:

$E=5^2+2^3+3(8)=57$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Hallar $P_{(3;2)}$ Si: $P_{(x;y)}=x^2+6y+60$

A) 72 B) 84 C) 81
D) 74 E) 74

RESOLUCIÓN:

* $P(3;2)$ es el valor numérico de $P(x,y)$

* Luego:

$$P_{(3;2)}=3^2+6(2)+60=81$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Si: $P(2x-3)=x^3$; calcular: $P(7)$

A) 27 B) 8 C) 125
D) 72 E) 216

RESOLUCIÓN:

* Igualando parte interna con interna, y externa con externa , es decir:

$P(2x-3)=x^3$; $P(7)=?$ $\begin{cases}2x-3=7\\ \Rightarrow 2x=10\\ \Rightarrow x=5\end{cases}$

* Entonces: $P(7)=5^3=125$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Sean t_1 y t_2 dos términos semejantes; calcular el valor de m, si: $t_1=3\sqrt{2}x^{m+3n-2} \wedge t_2=7\sqrt{5}x^{8+3n}$

A) 7 B) 6 C) 10 D) 9 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Si dos o más términos son semejantes, entonces tienen partes literales iguales, ¡los coeficientes pueden ser diferentes!

* Igualamos los exponentes de "x" porque de este modo las partes literales serán iguales.

$$\Rightarrow m+3n-2=8+3n$$

* Resolviendo la ecuación cuya incógnita es m: $\Rightarrow m=10$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Si:

$P(x)=7(x^2-1)+9(x^3-x^2+1)+3x^2-(3x)^2x$

Calcular: $P_{(\sqrt{3})}$

A)3 B)4 C)5 D)7 E)8

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que reemplazar x por $(\sqrt{3})$, pero antes de reemplazar podemos simplificar el polinomio dado, ya que hay términos semejantes.

* Aplicando la Propiedad Distributiva en el polinomio:

$P_{(x)}: P_{(x)}=7x^2-7+9x^3-9x^2+9+3x^2-9x^3$

* Reduciendo términos semejantes: $P_{(x)}=x^2+2$

* Nos piden calcular $P_{(\sqrt{3})}$ entonces reemplazamos x por $\sqrt{3}$:

$\Rightarrow P_{(\sqrt{3})}=\sqrt{3}^2+2 \Rightarrow P_{(\sqrt{3})}=3+2=5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Calcular el grado de $6\sqrt{2}x^{m+n}y^{m-n}$ si se sabe que $GR_x=6$ y $GR_y=4$

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

RESOLUCIÓN:

* En un monomio el grado se da por la suma de exponentes y los grados relativos son los exponentes respectivos.

* En un monomio de variables "x" y "y": $GA=GR_x+GR_y$ por las definiciones de grados:

$\Rightarrow GA=GR_x+GR_y \Rightarrow GA=6+4=10$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14:

Calcular "a" si el $GR_x=4$; en:

$$P_{(x;y)}=5x^{a+3}y^5+6x^ay^8$$

A)7 B)3 C)–1 D)1 E)0

RESOLUCIÓN:

* Planteamos el grado relativo a "x" de acuerdo a la definición y luego lo igualamos a 4 que es el dato del problema.

* Identificando el Grado Relativo a "x" en el polinomio que es el mayor exponente de "x" en dicho polinomio: $\Rightarrow GR_x=a+3$ ....(I)

Por dato: Grado Relativo a x es:

$$\Rightarrow GR_x=4 \text{ ....(I)}$$

* (I) y (II) expresan los mismos, luego: $\Rightarrow a+3=4$

* Resolviendo $\Rightarrow a=1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Calcular el valor de m si el polinomio $P_{(x,y)}$ es homogéneo.

$$P_{(x,y)}=7\sqrt{2}x^my^2+5xy^7-6y$$

A)6 B)3 C)2 D)4 E)5

RESOLUCIÓN:

* Si los grados de cada término son iguales, entonces el polinomio es homogéneo. Puedes notar que el 2^{do} y 3^{er} termino tienen grado 8 cada uno, entonces el primer término también debe ser de grado 8.

* Como el grado del 1^{er} término es igual a la suma de los exponentes de sus variables y además esta suma debe ser igual a 8:

$$\Rightarrow m+2=8$$

* Resolviendo la ecuación:

$\Rightarrow m=6$

RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

A partir de la identidad:

$$A(x-1)+B(x+2)=5x+1$$

Calcular "A" y "B"

A)3 B)5 C)7 D)0 E)–2

RESOLUCIÓN:

* Efectuando y ordenando:

$$Ax-A+Bx+2B\equiv 5x+1$$

$\Rightarrow (A+B)x+(-A+2B)\equiv 5x+1$

* Igualando coeficientes:

$A+B=5$ ......(I)

$-A+2B=1$ ......(II)

* Sumando (I) y (II):

$3B=6 \Rightarrow B=2$

* De (I): $A+2=5 \Rightarrow A=3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 17 :

El polinomio :

$$P_{(x)}=ax^d+bx^c+cx^b+ex^{a-9}$$

es completo y ordenado decrecientemente respecto de "x".

Calcular $a+b+c+d+e$ sabiendo que: $P_{(0)}=900$

A)702 B)703 C)192 D)901 E)915

RESOLUCIÓN:

* $P_{(x)}$ será de 3^{er} grado por ser completo:

$$\Rightarrow P_{(x)}=\underbrace{ax^d}_{3^0}+\underbrace{bx^c}_{2^0}+\underbrace{cx^b}_{1^0}+\underbrace{ex^{a-9}}_{0^0}$$

* Luego: $d=3;\ c=2;\ b=1;\ a-9=0$

$\Rightarrow a=9$

* Además:

$P_{(0)}=0+0+0+e \Rightarrow P_{(0)}=e=900$

$\Rightarrow a+b+c+d+e=915$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Calcular $(a+b+c)$ en el polinomio idénticamente nulo.

$P_{(x)}=(a+b-2)x^3+(a+c-3)x+(b+c-5)$

A)1 B)5 C)7 D)–1 E)0

RESOLUCIÓN:

* Dato del problema: $P_{(x)}\equiv 0$

* Entonces cada coeficiente es nulo.

$$\begin{cases} a+b-2=0 \text{ ......}(\alpha) \\ a+c-3=0 \text{ ......}(\beta) \\ b+c-5=0 \text{ ......}(\theta) \end{cases}$$

* Resolviendo el sistema sumando:

$\alpha+\beta+\theta:\ 2a+2b+2c-10=0$

$\Rightarrow 2(a+b+c)=10 \Rightarrow a+b+c=5$

RPTA : "B"

PROBLEMA 19 :

Calcular la suma de coeficientes del polinomio:

$$P(x;y)=a^2x^{a+7}-bx^ay^b+aby^{b+4}$$

Sabiendo que es homogéneo.

A)7 B)12 C)37 D)14 E)53

RESOLUCIÓN:

* Como es homogéneo los grado absolutos de cada uno de los términos son iguales.

$$a+7=a+b=b+4$$

* Resolviendo:

$$\not{a}+7=\not{a}+b \Rightarrow b=7$$

$$a+\not{b}=\not{b}+4 \Rightarrow a=4$$

* Piden la suma de coeficientes del polinomio.

$$a^2-b+ab=4^2-7+4(7)=37$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

De acuerdo a la siguiente condición:

$$(b+4)x^4+(n+b)\equiv 6x^4+3$$

Calcular: n^2+b^2

A)2 B)3 C)7 D)5 E)0

RESOLUCIÓN:

* Como son idénticos los polinomios, igualamos coeficientes:

$$\Rightarrow b+4=6 \wedge n+b=3$$

$$b=2 \wedge n+2=3 \Rightarrow n=1$$

* Luego: $n^2+b^2=5$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Reducir:

$$P=4\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}x^2-6\sqrt{2}x^2$$

A)0 B)1 C) $\sqrt{2}x^2$
D) $12\sqrt{2}x^2$ E) x^2

02 Reducir:

$$M=8\sqrt{5}m^2n-3\sqrt{5}nm^2-5\sqrt{5}nm^2$$

A)-2 B)-1 C)0
D) nm^2 E) $\sqrt{5}m^2n$

03 Reducir:

$$Q=\frac{4}{7}\sqrt{2}x+\sqrt{2}x+\frac{3}{7}\sqrt{2}x$$

A) -1 B)0 C) $\frac{1}{7}\sqrt{2}x$ D) $2\sqrt{2}x$ E) x

04 Indicar el valor de n si los términos: $4\sqrt{2}x^{2n-1} \wedge -3x^5$ son semejantes

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

05 Indicar el valor de m si los términos: $\frac{3}{7}\sqrt{5}x^{4m-6}$ y $\sqrt{2}x^{19}$ son semejantes.

A)24 B)8 C)6 D)4 E)2

06 Si: $P(a,b)=a^2-3ab+b^4$

Calcular : $P(-2, 1)$

A)5 B)7 C)10 D)11 E)15

07 Si: $P(x) = 3 + x$

Calcular $P(2) + P(3)$

A)5 B)6 C)8 D)9 E)11

08 Resolver:

Si: $P(3x+1)=2x+3$ Hallar: $P(7)$

A)1 B)3 C)5 D)7 E)9

09 Si: $P(x-\sqrt{2})=3+x^2$

Calcular : $P(\sqrt{2})$

A)5 B)10 C)11 D)13 E)15

10 Si:

$$P\left(1-\frac{1}{x}\right)=4x^2-2x-5$$

Hallar: $P(3)$

A)-1 B)-2 C)-3 D)0 E)1

11 Simplificar:

$$P=3a+2(a+2)-4$$

A)5a B)7a C)5a–8
D)8 E)5a+8

12 Reducir:

$$M=5(m-n)-2(n+m)+7n$$

A)4m B)3m C)2m
D)m E)-7m

13 Reducir:

$$P = 3(x + 2y) - 2(y + 2x) - 4y$$

A)x B)2y C)x+4y
D)-x E)4y

14 Reducir:

$$Q=\frac{3x-(y+2x)}{y-x}$$

A)1 B)-1 C)0
D)x E)y

15 Reducir:

$$\frac{2a-(a+b)}{b-a}$$

A)0 B)-1 C)1 D)2a E)b

16 Si se sabe:

$$M(a) = 5a^2+1$$

Hallar : $M(6)+ M(1)$

A)187 B)136 C)120
D)142 E)6

17 Si se sabe:

$$P(x)=3x^2-2x+5$$

Hallar $P(-3)$

A)26 B)38 C)10
D) −26 E) −38

18 Si: $P(x)=3x+2$

Calcular : $P(x+1)$

A)3x B)3x -1 C)3x+5
D)3x+1 E)2x+5

19 Si se sabe que: $M(x) = x +3$

Calcular : $M(x-2) - M(x+2)$

A)0 B) − 2 C) − 4 D)7 E)5

20 Si se sabe que:

$$P(x-\sqrt{2})=3+x^2$$

Calcular $P(\sqrt{2})$

A)10 B)11 C)12 D)13 E)14

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Calcular, $(m+n)$ si la expresión es racional entera

$$E(x;y)=(2m-8)\sqrt{x}+5x^2y^4+(n-2)\sqrt{y}+xy^5$$

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

02 Reducir los términos semejantes:

$$K=3ab^2-5ab^2+ab^2-10ab^2+4b^2a$$

A)0 B)7ab² C)-7ab²
D)ab² E)3ab²

03 Clasificar la siguiente expresión algebraica:

$$E(x;y)=\frac{2}{x^{-2}}+\left(\frac{3}{y}\right)^{-3}\left(\frac{1}{xy}\right)^5$$

A)Racional entera
B)Racional fraccionaria
C)Irracional
D)Transcendente
E)Racional

04 Reducir los términos semejantes de variables x e y:

$2x^3y^5+abx^{a+1}y^5-7x^3y^{b-1}+(a+b)x^3y^5$

A) $10x^3y^5$ B) $-2x^3y^5$ C) $15x^3y^5$
D) x^3y^5 E) $3x^3y^5$

05 Reducir los términos semejantes de variables x e y:

$(2a-d)x^{a+b}y^5+(b+3)x^2y^{c-d}+(c-a)x^2y^5$

A) $5x^2y^5$ B) $7x^2y^5$ C) $8x^2y^5$
D) $10x^2y^5$ E) $15x^2y^5$

06 Si se tiene:

$$P(x)=x^3-x^2+2x-1$$

Calcular: $P(2)$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

07 Si: $P(x;y)=x^3-xy+2y^3$

Calcular el valor de: $P(3;-2)$

A) 15 B) 17 C) 18 D) 20 E) 22

08 Si: $P(x)=x^2-x+11$

Calcular: $P(P(P(2)))$

A) 30 B) 33 C) 50 D) 53 E) 60

09 Si se tiene: $P(x-5)=2x-3$

Calcular el valor de: $P(4)$

A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 20

10 Si se tiene :

$$P(2x-3)=3x^2-x+1$$

Determinar el valor de: $P(5)$

A) 40 B) 44 C) 45 D) 48 E) 50

11 Si el GA del polinomio es $9°$ grado. Hallar (n^3-1)

$$P(x)=2+2x^{n+2}5x^{n+3}$$

A) 115 B) 215 C) 36 D) 12 E) 19

12 Si el $G.A.$ del polinomio es de $12°$ grado. Hallar (n^2+5).

$$P(x)=3+5x^{n+1}+6x^{n+2}$$

A) 105 B) 100 C) 102 D) 98 E) 76

13 Si el $G.A.$ del polinimio es de grado $18°$. Hallar (n^2+10).

$$P(x)=2x^{n+1}+3x^{n+8}-1$$

A) 49 B) 59 C) 69 D) 79 E) 89

14 Si el $G.A.$ del polinimio es de grado $20°$. Hallar $(n+20)$.

$$P(x)=2x^n+5x^{n+1}-3x^{n+10}$$

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

15 Si se tiene: $15x^{a-b}y^{b+7}$

Si : $GR(x)=8$ $GR(y)=10$

Calcular a^b

A) 0 B) 2 C) 5 D) 25 E) 125

16 En el monomio:

$$M(x;y;z)=2\sqrt{3}x^4y^5z^{10}$$

Calcular: $[GA-GR(z)]^{GR(y)-GR(x)}$

A) 1 B) 2 C) 5 D) 9 E) 12

17 Calcular el valor de n^2 si el monomio es de grado igual a 15.

$$-\frac{2}{3}x^{2n-5}y^9z$$

A) 20 B) 25 C) 36 D) 35 E) 49

18 En el polinomio:

$$P(x;y)=5x^7y^3-2x^{10}y^4+x^8y^7$$

Calcular el valor de:

$$GA-GR(x)+GR(y)$$

A) 5 B) 6 C) 10 D) 12 E) 15

19 En el polinomio:

$P(x;y)=5x^{m+2}y^{n+3}-mx^my^{n+7}+2nx^{m+18}y^{a+2}$

Se sabe: $GA=12$ $GR(x)=4$

Hallar la suma de sus coeficientes.

A) 10 B) 12 C) 13 D) 15 E) 20

20 Si el polinomio es de octavo grado:

$P(x;y)=4nx^{n+1}y^2-3x^3y^2+nx^3y^{n+2}$

Calcular la suma de los coeficientes.

A) 7 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

21 Hallar el coeficiente del monomio de sexto grado:

$$M(x)=3^n\sqrt{x^{4n}}$$

A) 9 B) 18 C) 27 D) 81 E) 243

22 Indicar el grado absoluto del polinomio:

$$P(x,y)=3x^4y^3-2x^6y^2+2^{10}x^3y$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 14 E) 17

23 Hallar el valor de m; para que la expresión: $M(x)=\sqrt[3]{x^{2m}\times\sqrt[4]{x^m}}$ sea de tercer grado.

A) 6 B) 8 C) 4 D) 10 E) 12

24 Calcular el término independiente del polinomio:

$P(x)=(x+2)^5-(x+3)^3+(x+2)(x+3)$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

25 Determinar el grado de:

$P(x)=(x+1)+(x+1)^4+(x+1)^9+...(x+1)^{400}$

A) 2700 B) 2840 C) 2870
D) 3049 E) 2743

26 Sea el polinomio completo y ordenado descenden-temente:

$$P(x)=x^m+...+x^a+x^b+x^c+...+1$$

Calcular: $E=\dfrac{a+b+c}{b}$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 1/3 E) 3

27 Calcular: $(a+b)$, en el polinomio homogéneo:

$$P(x,y)=3x^3y^a+9x^2y^b+x^{18}$$

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

28 Calcular: $(a+b)$, si el polinomio:

$P(x,y)=x^ay^b-(n+1)x^{2n}y^{n+1}+(ab)x^{3n}y^{n-8}$

es homogéneo.

A) 12 B) 28 C) 19 D) 32 E) 9

29 Si: $P(x)\equiv x+b$ además : $P(P(x))\equiv(a-3)x+a+8$

Determinar: ab

A) 12 B) 30 C) 18 D) 48 E) 24

30 Cuál será el valor de: $A+B+C+D$ para que el polinomio:

$P(x)=(A-3)x^3+(2+2C)x^2+(9-3B)x+D+8$

sea idénticamente nulo.

A) 4 B) -3 C) -4 D) 2 E) 1

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Hallar "abc".

$$ax^2+2x-3-2x^2+c-bx=0$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

02 Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio:

$$P_{(x,y)}=(x^2+xy-y^2)^{10}(x^2+x)(y^2+y-1)$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

03 Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio:

$P_{(x)}=(x^2-x+1)^{20}(2x-1)^{10}(x^3+x)(x^2+x+1)$

A)3 B)4 C)5 D)6 E)7

04 Hallar el término independiente del siguiente polinomio:

$P_{(x;y)}=(x^2+y^2+1)^{30}(x^2-y^2+1)^4(x+y+2)$

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

05 Hallar el término independiente del siguiente polinomio:

$P_{(x)}=(x^2+x+1)^{20}(2x-1)^{11}(x^2+x+1)$

A)–1 B)–2 C)–3 D)–4 E)–5

06 El siguiente polinomio es idénticamente nulo. Hallar "*abc*".

$(a+b-3)x^2+(b+c-7)x+c+a-4\equiv 0$

A)3 B)0 C)5 D)6 E)7

07 En la siguiente adición de monomios: $\frac{c}{3}x^a+\frac{c}{2}x^{6-a}=bx^{b-2}$

Calcular $a+b+c$

A)16 B)18 C)20 D)24 E)14

08 Calcular la suma de coeficientes del polinomio homogéneo, sabiendo que: $c=a+b$

$P_{(x,y)}=ax^{a-1}y^5+bx^7y^{b+1}+cx^6y^8$

A)30 B)31 C)32 D)33 E)N.A.

09 Calcular $a+b+c$, si el polinomio es homogéneo.

$P_{(x;y)}=x^{a+3}y^2+5x^{b-5}+6x^8y^{c+4}+x^{10}y^9$

A)30 B)31 C)32 D)33 E)45

10 Si: $P_{(x)}=x^{a+b}+2x^{b+c}+3x^{c+d}+4x^{d+4}$

A)41 B)42 C)43 D)44 E)45

11 Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo y ordenado.

$P_{(x)}=mx^m+(m+2)x^2-(m-1)x+(2m-1)x^{m-3}$

A)15 B)14 C)13 D)11 E)12

12 Indicar el valor de "*a*", si el polinomio es ordenado decrecientemente:

$P_{(x)}=3x^{2a-3}+4x^{5-a}+5x^{a-2}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

13 Si: $a(x+b)+b(x+a)\equiv x+26$

dar: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

A)13 B)$\frac{1}{13}$ C)6 D)$\frac{1}{15}$ E)N.A.

14 Calcular: $a+b+c$

Si: $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$; $P_{(x)}=4x^2+3x+2$

$Q_{(x)}=(a+b-1)x^2+(b-c+2)x+(c-a+4)$

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

15 El polinomio:

$P_{(x)}=3x^{m-10}+2x^{m-n+5}+x^{p-n+6}$

es completo y ordenado en forma descendente. Hallar "$m+n-p$".

A)14 B)16 C)18 D)20 E)0

16 Si: $P_{(x)}$ es ordenado y completo respecto de "*x*", hallar "$m+n$".

$P_{(x)}=x^4+x^{m+1}+x^{n-8}+x+1$

A)10 B)8 C)6 D)14 E)12

17 Calcular "*mn*", sabiendo que el polinomio $P_{(x;y)}$ es homogéneo.

$P_{(x;y)}=5x^my^4-\sqrt{3}x^6y^2-2x^3y^{5+n}$

A)1 B)0 C)–1 D)–2 E)4

18 Si: $m(x+n)+n(x+m)=3x+18$

Calcular: $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{-1}$

A)1 B)2 C)3 D)9 E)10

19 Calcular "$m+n+p$", si: $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$ Siendo: $P_{(x)}=4x^2+3x+2$

$Q_{(x)}=(m+n-1)x^2+(n-p+2)x+(p-m+4)$

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

20 Sabiendo:

$P_{(x;y)}=(a+b)^2x^2+(a+c)^2xy+(b+c)^2y^2$

$F_{(x;y)}=abx^2+2acxy+3bcy^2$

Además:

$$P_{(x;y)}\equiv F_{(x;y)}$$

Calcular:

$$\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{a^2+c^2+bc}{b^2+c^2}\right]$$

A)0 B)1 C)–1 D)2 E)–2

TAREA DOMICILIARIA

01 Si el polinomio $F_{(x)}$ es completo y ordenado; y tien catorce términos. Hallar $(a+n)$

$F_{(x)}=x^{n-3}+x^{n-2}+x^{n-1}+....+x^{n+4}$

A)12 B)15 C)3 D)7 E)9

02 Hallar $m+n+p$ si el polinomio es completo y ordenado en forma descendente.

$P_{(x)}=x^{m-10}-3x^{m-n+5}+15x^{p-n+6}$

A)10 B)12 C)16 D)38 E)40

03 Hallar el número de términos del siguiente polinomio completo.

$P_{(x)}=(m-1)x^{m-6}+(m-2)x^{m-5}+(m-3)x^{m-4}+....$

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

04 Hallar $(m-n)$ si el polinomio $P_{(x,y)}$ es homogéneo.

$P_{(x,y)}=3x^{3m+2n}y^4-2x^{2m-n}y^{2n-1}+7x^{2m}y^{n+7}$

A)5 B)–2 C)7 D)–5 E)–8

05 En el polinomio completo:

$P(x)=x^n+....+x^a+x^b+x^c+....+abc$

Calcular: $\frac{a+c}{3b}$

A)$\frac{2}{3}$ B)$\frac{3}{2}$ C)$\frac{1}{2}$ D)2 E)3

06 Hallar el grado de homogeneidad de un polinomio completo y ordenado, si la suma de los grados de todos sus términos es *182*.

A)10 B)12 C)13 D)15 E)20

07 Si el polinomio $P(x,y)$ es homogéneo. Hallar $P(-2,\sqrt{2})$

$P_{(x,y)}=b^{-a}x^{a-1}y^{a-1}-b^{-1}x^{2b-1}y^{2b}+a^{b-2}xy^{2n}$

A)4 B)–6 C)7 D)9 E)–8

08 Dado el polinomio:

$P_{(x,y)}=ax^{a^b}+bx\sqrt[b]{a^{a-b}}y^{12}+\frac{a}{b}x^3y^{13}+\frac{b^2}{2}y^{b^a}$

Calcular la suma de sus coeficientes, si se sabe que es homogéneo.

A)10 B)15 C)20 D)25 E)30

PRODUCTOS NOTABLES

CAPITULO 076

OBJETIVOS :

• Reconocer en forma directa aquellas multiplicaciones cuyos factores tienen forma conocida para luego escribir directamente su producto.

• Simplificar diversas operaciones al reconocer los diferentes Productos Notables y poder efectuarlos directamente.

** Saber usar los Productos Notables para calcular, a partir de ciertas condiciones, el valor o equivalente de una expresión.*

PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin tener que efectuar la multiplicación.

I) BINOMIO AL CUADRADO :

(Trinomio cuadrado perfecto): El cuadrado de la suma (diferencia) de dos términos es igual al cuadrado del primer término, más (menos) el doble producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLOS :

* $(x+5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + (5)^2$

$\Rightarrow (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

* $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2$

$\Rightarrow (2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

* $(x+1)^2 = x^2 + 2x(1) + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

* $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

EJEMPLOS :

* $\left(\sqrt{7}+2\right)^2 + \left(\sqrt{7}-2\right)^2 = 2(\sqrt{7}^2 + 2^2) = 22$

* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2 = 4x\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4$

NOTA :

$$(a-b)^2 = (b-a)^2 \qquad (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$$

II) DIFERENCIA DE CUADRADOS :

El producto de la suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$\underbrace{(a+b)}_{suma}\underbrace{(a-b)}_{diferencia} = a^2 - b^2$$

EJEMPLOS :

* $(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2$

$\rightarrow (x+2y)(x-2y) = x^2 - 4y^2$

* $(a+6)(a-6) = a^2 - 6^2 = a^2 - 36$

* $(5x^2-3y^3)(5x^2+3y^3) = (5x^2)^2 - (3y^3)^2 = 25x^4 - 9y^6$

* $(n+3)(n-3) = n^2 - 3^2 = n^2 - 9$

* $(x^2+1)(x^2-1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$

OBSERVACIÓN :

* Se cumple: $(a-b)^2 = (b-a)^2$

* No se cumple: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, es incorrecto

Pues: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, es lo correcto

III) TRINOMIO AL CUADRADO :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

EJEMPLOS :

* $(m+n+2)^2 = m^2 + n^2 + 2^2 + 2(mn + 2m + 2n)$

$\Rightarrow (m+n+2)^2 = m^2 + n^2 + 4 + 2mn + 4m + 4n$

IV) BINOMIOS AL CUBO :

«El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda»

Forma desarrollada :

$$(a+b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Forma abreviada :

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

"el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual

al cubo de la primera cantidad menos el triple del cuadrado de la primera cantidad por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda"

EJEMPLOS :

* $(x+1)^3 = x^3 + 3x^3(1) + 3x\,(1)^3 + (1)^3$

$$\Rightarrow (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

* $(n-2)^3 = n^3 - 2^3 - 3n(2)(n-2)$

$$\Rightarrow (n-2)^3 = n^3 - 8 - 6n(n-2)$$

V) SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS :

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$$

$$\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3}$$

EJEMPLO :

* $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1^3 = x^3+1$
* $(a^2+4)(a^4-4a^2+16) = a^6+64$
* $(n^2-3)(n^4+3n^2+9) = n^6-27$

VI) MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON TÉRMIN COMÚN :

El producto de dos binomios con un término común es igual al cuadrado del término común, más la suma "algebraica" de los términos de comunes por el término común, más el producto de los términos comunes.

Suma "algebraica" de términos no comunes

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$$

Cuadrado del término común — **Producto de términos no comunes**

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2(a+b+c) + x(ab+bc+ac) + abc$$

EJEMPLO 1 :

Efectuar : $(x-8)\,(x+15)$

RESOLUCIÓN:

$$(x-8)(x+15) = x^2 + (-8+15)x + (-8)(15)$$

$$= x^2 + 7x - 120$$

Término común

EJEMPLO 1 :

Efectuar : $(x-3)\,(x-6)$

RESOLUCIÓN:

$$(x-3)(x-6) = x^2 + (-3-6)x + (-3)(-6) = x^2 - 9x + 18$$

EJEMPLO 2 :

Efectuar : $(x-7)\,(x+4)$

RESOLUCIÓN :

$$(x-7)(x+4) = x^2 + (-7+4)x + (-7)(4) = x^2 - 3x - 28$$

* $(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 2\times 3 = x^2 + 5x + 6$
* $(x-1)(x+7) = x^2 + (1+7)x + (1)\times 7 = x^2 + 6x - 7$

NOTA :

Al desarrollo de un binomio suma al cuadrado, se le llama también trinomio cuadrado perfecto *(T. C. P)*.

Luego: $\underbrace{(a+b)^2}_{\text{binomio suma al cuadrado}} = \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$

RECONOCIMIENTO DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Para saber si se trata de un *T.C.P* :

a) Se saca la raíz cuadrada a los extremos.

b) El doble producto de los resultados debe coincidir con el término central.

EJEMPLO :

* Reconoce si es un *T. C. P* : $16a^2 + 24ab^5 + 9b^8$
* Saca raíz cuadrada a los extremos $4a$............$3b^4$
* El doble producto de los resultados es:

$$2(4a)(3b^4) = 24ab^4$$

Por lo tanto, si es un *T. C. P* .

VII) DESARROLLO DE UN TRINOMIO AL CUBO :

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc$$

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$$

$$(a+b+c)^3 = a3+b3+c3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

OTRAS IDENTIDADES

A) IDENTIDAD TRINOMICA DE ARGAND :

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4+x^2+1$$

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4+x^2y^2+y^4$$

GENERALIZANDO :

$$(a^{2n}+a^nb^m+b^{2m})(a^{2n}-a^nb^m+b^{2m}) = a^{4n}+a^{2n}b^{2m}+b^{4m}$$

B) IDENTIDAD DE GAUSS :

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

* de donde :

$$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

C) IDENTIDAD ESPECIAL :

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a+b+c)$

D) IDENTIDAD DE LAGRANGE :

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$$

E) IGUALDADES CONDICIONALES :

Si : $a+b+c=0$, entonces se cumple :

$$(ab+bc+ac)^2=(ab)^2+(ac)^2+(ca)^2$$

$$a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$a^5+b^5+c^5=-5abc(ab+bc+ac)$$

$$\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}$$

$$\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)=\frac{a^7+b^7+c^7}{7}$$

F) TEOREMAS :

Sean: $(a,b,c)\subset R$; $\{a,b,c\}\subset Z^+$

Luego:

1) $a^{2m}+b^{2n}+c^{2p}=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

2) $a^2+b^2+c^2=ab+ac+ca \; a=b=c$

3) $a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow a=b=c$ ó $a+b+c=0$

4) Si: $\sqrt[2n]{A}+\sqrt[2n]{B}+\sqrt[2n]{C}=0$; $\forall n\in Z^+$ se cumple que: $A=B=C=0$

5) Si: $\sqrt[m]{A}+\sqrt[m]{B}+\sqrt[m]{C}=-(D^n+E^n+F^n)$; siendo m y n números pares. Se verifican las relaciones numéricas simultáneas; $A=B=C=0 \wedge D=E=F=0$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Reducir: $E=(x+4)^2+(x-4)^2$

A) $2x-16$ B) $3x+16$ C) $2x^2+16$ D) $2x^2+32$

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando cada uno de los binomios:

$$E=x^2+2x(4)+4^2+x^2-2x(4)+4^2$$

$$E=x^2+8x+16+x^2-8x+16$$

* Reduciendo términos semejantes: $E=2x^2+32$

PROBLEMA 2 :

Efectuar: $(\sqrt{12}+\sqrt{3})(\sqrt{12}-\sqrt{3})$

A) 3 B) 4 C) 9 D) 6 E) 12

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$A=(\sqrt{12}+\sqrt{3})(\sqrt{12}-\sqrt{3})=\sqrt{12}^2-\sqrt{3}^2 \Rightarrow A=12-3=9=9$$

PROBLEMA 3 :

Efectuar: $B=(x+y)(x-y)(x^4+y^4)(x^8+y^8)+y^{16}$

A) x^8 B) x^4 C) x^{32} D) x^{16} E) 0

RESOLUCIÓN:

* Efectuando la multiplicación de 2 en 2:

$$B=\underbrace{(x+y)(x-y)}(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)+y^{16}$$

$$\Rightarrow B=\underbrace{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}(x^4+y^4)(x^8+y^8)+y^{16}$$

$$\Rightarrow B=\underbrace{(x^4-y^4)(x^4+y^4)}(x^8+y^8)+y^{16}$$

$$\Rightarrow B=(x^8-y^8)(x^8+y^8)+y^{16} \Rightarrow B=x^{16}-y^{16}+y^{16}=x^{16}$$

PROBLEMA 4 :

Si: $x+y=6 \; xy=2$, Hallar: x^2+y^2

A) 3 B) 4 C) 42 D) 44 E) 32

RESOLUCIÓN:

* Elevando a la potencia 2:

$$(x+y)^2=6^2 \Rightarrow x^2+2xy+y^2=36$$

$$\Rightarrow x^2+2(2)+y^2=36 \Rightarrow x^2+y^2=32$$

PROBLEMA 5 :

Si se tiene: $x+\frac{1}{x}=5$, Hallar: $x^3+\frac{1}{x^3}$

A) 120 B) 110 C) 124 D) 0 E) 625

RESOLUCIÓN:

* Recordando: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

* Se tiene: $x+\frac{1}{x}=5$

* Elevando a la potencia 3 : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=5$

* Desarrollando: $x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=125$

$$\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3(5)=125 \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=125-15=110$$

PROBLEMA 6 :

Efectuar: $C=\sqrt{(x+6)^2-(x+4)(x+8)}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 3 E) 1

RESOLUCIÓN:

* Desarrollando lo que está dentro de la raíz cuadrada:

$C=\sqrt{x^2+2x(6)+6^2-\left[x^2+12x+32\right]}$

$\Rightarrow C=\sqrt{x^2+12x+36-x^2-12x-32}$

* Reduciendo términos semejantes: $C=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2$

PROBLEMA 7 :

Desarrollar: $(x-5)^3$ e indicar su suma de coeficientes.

A) -64 B) 64 C) 16 D) 70 E) 0

RESOLUCIÓN:

* Recordando:

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(x-5)^3=x^3-3x^2(5)+3x(5)^2-53$

$\Rightarrow (x-5)^3=x^3-15x^2+75x-125$

* Se pide: $1-15+75-125=-64$

PROBLEMA 8 :

Efectuar:

$D=\left(\sqrt{x+abc}+\sqrt{x-abc}\right)\left(\sqrt{x+abc}-\sqrt{x-abc}\right)$

A) abc B) 2abc C) 0 D) 3abc E) a

RESOLUCIÓN:

* Aplicando: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$D=\left(\sqrt{x+abc}+\sqrt{x-abc}\right)\left(\sqrt{x+abc}-\sqrt{x-abc}\right)$

$\Rightarrow D=\sqrt{x+abc}^2-\sqrt{x-abc}^2$

$\Rightarrow D=x+abc-(x-abc)=2abc\Rightarrow D=2abc$

PROBLEMA 9 :

Si: $a+b=4$ $ab=2$, Hallar: a^3+b^3

RESOLUCIÓN:

* Recordando:

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

* $a+b=4$ (elevando al cubo)

$(a+b)^3=4^3$; desarrollando:

$\Rightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=4^3$

$\Rightarrow a^3+b^3+3(2)(4)=64$

$\Rightarrow a^3+b^3+24=64\Rightarrow a^3+b^3=40$

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Efectuar: $(4x+3)^2=$

A) $16x^2+24x+6$ B) $16x^2+24x+9$ C) $16x^2+12x+9$

02 Efectuar:

$(5x^2+1)^2-(5x^2-1)^2$

A) $20x^2$ B) $5x^2$ C) $10x^2$

03 Efectuar y calcular:

$K=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

A) 14 B) 15 C) 16

04 Efectuar :

$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2+-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

A) $16x^2$ B) $8x^2$ C) $4x^2$

05 Si:

$m+n=4$ $m.n=7$

Hallar m^2+n^2

A) 1 B) 2 C) 3

06 Calcular el valor de:

$(a+3)(a+2)-a^2-5a$

A) 5a B) 6 C) - 6

07 Calcular :

$(m+2)(m-2)-(m+2)(m+1)+3m$

A) -2 B) 2 C) 4

08 Calcular:

$(m+2)(m-2)-(m+5)(m-5)$

A) 17 B) 37 C) 21

09 Calcular:

$(a+3)(-3+a)-(a+2)(a-2)$

A) - 3 B) - 4 C) - 5

10 Calcular:

$(x+2)(x-1)-(x+2)(x-2)-x$

A) - 6 B) 4 C) 2

11 Calcular:

$(x-2)(x+2)-(x+5)(x-5)$

A) 41 B) 21 C) 51 D) 32 E) 42

12 Reducir:

$(a+b+c)(-a-b+c)+(a+b+c)(a+b-c)$

A) 1 B) 0 C) a b c D) a b E) 4 ab

13 Calcular:

$(m^3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-m^3)+m^6$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14 Reducir:

$(x+3)(x-5)+(x+5)(x-7)$

A) -50 B) 10 C) -15 D) 20 E) 25

15 Reducir:

$\left(\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-8}}\right)\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-8}}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Efectuar:

$A=\left[(x+6)(x+4)-(x+5)^2+10\right]^{0,5}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17 Reducir:

$B=\left[\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab}\right]^{\frac{1}{2}}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

18 Calcular:

$D=\sqrt[16]{1+8(10)(82)(3^8+1)(3^{16}+1)}$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

19 Dado los números irracionales

$a=\sqrt[3]{2}+1$; $b=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

Calcular: a^4b^4

A) 16 B) 64 C) 81 D) 144 E) $20\sqrt{2}$

20 Reducir:

$M=\frac{(a+b)(a^3-b^3)+(a-b)(a^3+b^3)}{a^4-b^4}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Se cumple: $x+y=6$; $xy=7$

Calcular el valor de: x^3+y^3

A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) 90

02 Efectuar:

$P=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$

A) 4 B) 8 C) 24 D) 42 E) 54

03 $x^3+y^3=28$; $xy(x+y)=12$

Calcular $(x+y)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

04 De: $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2=3$ entonces $m^3+\frac{1}{m^3}$ es:

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 6

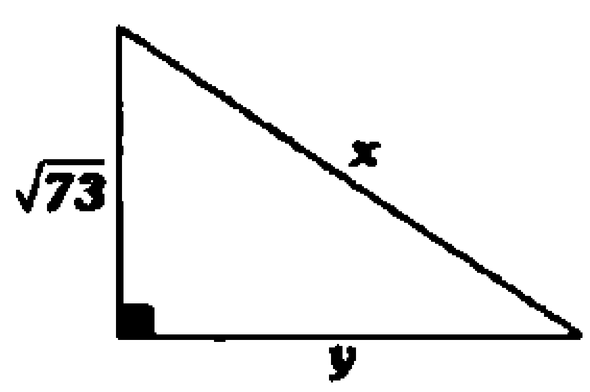
05 Se verifica que: $a+b=6$

$a^2+b^2=30$

Calcular $Q=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$

A) 63 B) 48 C) 12 D) 70 E) 54

06 Sean "x" e "y" dos números naturales, encuentre la suma de las cifras de "y".



A) 10 B) 9 C) 11 D) 8 E) 6

07 Reducir:

$P=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x-y)+y^8$

A) x B) $2x^2$ C) x^4 D) x^8 E) x^{16}

08 Si: $x+\dfrac{1}{x}=4$

Calcular: $x^2+\dfrac{1}{x^2}$

A)12 B)16 C)14 D)18 E)10

09 Calcúle

$P=(x-2)(x^2+2x+4)-(x+2)(x^2-2x+4)$

A)8 B)– 8 C)5 D)–5 E)–16

10 Se sabe que:

- $a+b+c=7$
- $a^2+b^2+c^2=20$

Calcule el valor de:

$P=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$

A)49 B)59 D)69 D)70 E)75

11 Si se tiene que:

$x+y+z=0;\ x;\ y;\ z\neq 0$

Calcule el valor de:

$$K=\frac{x^3+y^3+z^3}{9xyz}$$

A)1 B)3 C)1/3 D)2 E)1/2

12 Se sabe que:

$x+y+z=2$

Calcule el valor de:

$$P=\frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy}-3z$$

A)6 B)–6 C)3 D)–3 E)1

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indicar el valor de verdad en las siguientes proposiciones:

( ) $(a+b)^2=a^2+b^2$

( ) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2$

( ) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b;\ (b>2004)$

A) VVV B) FVF C) VVF D) FFV E) FVV

02 Reducir:

$(x-3)^2-(x+1)^2-8(x+1)$

A) 16 B)–16 C)16x D)–16x E) 0

03 Efectuar:

$M=(x+1)^2+(x+5)^2-2(x+3)^2$

y dar como respuesta el valor de: $\sqrt{M+1}$

A) 1 B) 5 C) 4 D)3 E) 2

04 Al efectuar:

$$\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{2}-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{2}$$

A)–2 B)2 C)1 D)-4 E)4

05 Al sumar las cifras del resultado de la operación:

$(1000001)^2+(999\,999)^2$

Se obtiene:

A) 2 B) 3 C)4 D) 1 E) 5

06 Si: $a-b=1$ la siguiente expresión:

$(x+a)^2-(x+b)^2-(x-b)^2+(x-a)^2$

es equivalente a:

A)4a–2 B)4b+1 C)4b+2 D) 4b –1

07 Dado: $a+b=4;\ ab=2$

calcular: "$a-b$", siendo: $a<b$

A) $-\sqrt{2}$ *B)* $-2\sqrt{2}$ *C)* $3\sqrt{2}$ *D)* $4\sqrt{2}$ *E)* $5\sqrt{2}$

08 Si: $(w+z)^2=2\left(w^2+z^2\right)$ el valor de:

$$E=\frac{3w^3-z^3}{w^2z}+\frac{3w+2z}{5w}+\frac{6z}{2w+z}$$

es:

A)3 B) 4 C)5 D)6 E)2

09 Si:

$x+y=2{,}5\wedge\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4{,}25$

calcular el valor de: xy

A) 4 B) 8 C) 6 D) 2 E)1

10 La suma de los cuadrados de dos números reales es igual a 2 y la suma de los mismos es igual a (– 2). El producto de ellos es:

A) 1 B) –1 C) 3 D) –3 E)2

11 Si: $x+y=2$, calcular:

$$M=\frac{x^2+4y-z}{y^2+4-z}$$

A)1 B) 0 C) 2 D)–1 E)z

12 Indicar el valor de verdad de las proposiciones:

( ) Si: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$

$\Rightarrow x+y+z=3xyz;\{x;y;z\}\subset R^+$

( ) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3=z^3+\dfrac{1}{z^3}+3\left(z+\dfrac{1}{z}\right);z\neq 0$

( ) Si: $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}=2\Rightarrow m=n;m\neq 0\wedge n\neq 0$

A)FVV B)VVF C)VFF D)FVF E)FFV

13 Sea: $\dfrac{(a+b)^3-(a^3+b^3)}{ab}=63$

$(a+b)-ab=1$

Calcular la diferencia entre los valores mayor y menor.

A) –19 B) 19 C) 20 D) 22 E) 18

14 Si:

$\begin{matrix}x+y=m\\ xy=n\end{matrix}\ \wedge\dfrac{x^3+y^3}{xy(x+y)}=1;\ m>0\wedge n>0$

calcular la relación entre m y n $(x\neq -y)$

A) 3m=n B) m=3n C) 2m=n D) $m=2n^{1/2}$ *E) m=n*

15 Simplificar:

$$\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{-2^{-2}}}$$

A)2x B) –8x C) 8x D) – x E) –2x

16 La expresión simplificada de:

$(a^b+a^{-b})(a^b-a^{-b})(a^{4b}+1+a^{-4b})$

es:

A) $(a^b-a^{-b})^6$ *B)* $(a^b-a^{-b})^{-6}$ *C)* $a^{-6b}-a^{6b}$ *D)* $a^{6b}-a^{-6b}$ *E)* $a^{6b}+a^{-6b}$

17 Reducir:

$(a^3b+ab^3)(a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4)-(a^6b^3-a^3b^6)$

A) 0 B) $2a^6b^3$ *C)* $2a^3b^6$ *D)* $2a^3b^6-2a^6b^3$ *E)* $2a^6b^3-2a^3b^6$

18 Calcular el valor de:

$(7000)^3-(6999)^3-(6999)^2-7(6\,999)(10^3)$

A) 49×10^6 *B)* 6999×10^6 *C)* $(6666)^3$ *D)* $(1111)^4$ *E)* 11×10^6

19 Si: $mn=2\wedge m+n=2\sqrt{2}$ el valor numérico de: $E=(m^{-3}+n^{-3})^{-1}$ es:

A)2 B)4 C) $\sqrt{2}$ *D)* $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ *E)* $\sqrt{2}/2$

20 Si:

$a=5-\sqrt[3]{9}\quad b=\sqrt[3]{9}-\sqrt{3}\quad c=\sqrt{3}-5$

calcular el valor de:

$$R=\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{(4ab+bc+ac)}$$

A)–3 B)6 C) –1 D)9 E)0

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)D	3)D	4)B	5)C	6)E	7)B	8)C	9)E	10)A
11)A	12)A	13)B	14)D	15)E	16)D	17)C	18)A	19)C	20)C

DIVISION ALGEBRAICA
CAPITULO 077

OBJETIVOS :

** Determinación del cociente, utilizando el método de Horner o la regla práctica de Ruffini. Descartando el procedimiento clásico del álgebra tradicional.*

** Reconocer y aplicar, cuando sea necesario, el algoritmo de la división.*

** Saber distinguir las clases de división de polinomios: Exacta e Inexacta.*

** En el cálculo inmediato del residuo de una división cualquiera, por el teorema de Descartes.*

DIVISIÓN ALGEBRAICA

Es la operación inversa a la multiplicación que tiene por objeto hallar una expresión algebraica llamado cociente; obtenida de otras dos expresiones algebraicas llamadas dividendo y divisor, de tal forma que el valor numérico del cociente sea igual al cociente de los valores numéricos del dividendo y divisor, para cualquier sistema de valores atribuidos a sus letras.

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DE LA DIVISIÓN ENTERA

Dado los polinomios dividendo $(D(x))$, divisor $(d(x))$, cociente $(q(x))$ y residuo $(R(x))$ condicionados por la definición, se cumple:

$$\boxed{D(x) \equiv d(x)q(x)+R(x)}$$

Donde :

- Dividendo .... : $D(x)$
- Divisor .... : $d(x)$
- Cociente .... : $q(x)$
- Resto o residuo .... : $R(x)$

EJEMPLO 1 :

Dividir $(x^2 - 6x + 10)$ entre $(x - 4)$ Veamos :

$$x^2 - 6x + 13 \;\big|\; x - 4$$

$\boxed{x-2}$ ← cociente

⑤ ← residuo

$\rightarrow x^2 - 6x + 13 = (x-4)(x-2) + 5$

EJEMPLO 2 :

Dividir $(x^2 + 3x + 4)$ entre $(x - 2)$

Efectuando por el método clásico.

$$\begin{array}{rl|l} x^2 + 3x + 4 & & x - 2 \\ -x^2 + 2x & & x+5 \leftarrow \text{cociente} \\ \hline 5x + 4 & & \\ -5x + 10 & & \\ \hline 14 & \leftarrow \text{residuo} & \end{array}$$

según la identidad, podemos expresarlo así:

$$\underbrace{x^2+3x+4}_{D} \equiv \underbrace{(x-2)}_{d}\ \underbrace{(x+5)}_{q} + 14$$

EJEMPLO 3 :

Dividir $(x^3 + 8)$ entre $(x^2 - 2x + 4)$

De igual manera, por el procedimiento tradicional:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 + 8 & & x^2 - 2x + 4 \\ -x^3 + 2x^2 - 4x & & x + 2 \leftarrow \text{cociente} \\ \hline 2x^2 - 4x + 8 & & \\ -2x^2 + 4x - 8 & & \\ \hline 0 & \leftarrow \text{residuo} & \end{array}$$

Expresándolo como la identidad, se tiene:

$$\underbrace{x^3+8}_{D} \equiv \underbrace{(x^2-2x+4)}_{d}\underbrace{(x+2)}_{q}$$

Como se puede observar, el residuo es nulo. El ejemplo nos representa a una división inexacta y el 2 a una división exacta. Por esto, dependiendo del residuo, las divisiones se clasifican tal como sigue:

CLASES DE DIVISIÓN

De acuerdo a su resto o residuo podemos clasificar en :

DIVISIÓN EXACTA ($R(x) = 0$) :

Llamaremos así cuando el resto o residuo sea un polinomio idénticamente nulo.

* Luego : $D(x) \equiv d(x)q(x)$

EJEMPLO :

Al dividir $(x^2 - 5x - 14)$ entre $(x - 7)$

Vemos que $x^2 - 5x - 14 \equiv (x-7)(x+2)$

$\Rightarrow q(x) = x + 2 \;;\; R(x) \equiv 0$

DIVISIÓN INEXACTA $(R(x) \not\equiv 0)$:

Llamada también División no exacta, toma este nombre cuando el residuo no es idénticamente nulo, por lo que definimos

$$\boxed{D(x) \equiv d(x) \times q(x) + R(x)}$$

*Como $d(x) \neq 0$, se tendrá la equivalencia siguiente:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

EJEMPLO:

Al dividir $x^3 - 3x+4$ entre x^2+x-1 tendremos

$$\underbrace{x^3 - 3x + 4}_{D(x)} \equiv \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{d(x)}\underbrace{(x-1)}_{q(x)} + \underbrace{3-x}_{R(x)}$$

* De manera equivalente

$$\frac{x^3 - 3x+4}{x^2+x-1} \equiv x - 1 + \frac{3-x}{x^2+x-1}$$

PROPIEDADES DE GRADO

I) El grado del cociente es equivalente a la diferencia del grado del dividendo y el grado del divisor.

$$\boxed{Grad(q) = Grad(D) - Grad(d)}$$

Vemos : $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

EJEMPLO : $\dfrac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

* Entonces

$$\underbrace{Grad(q)}_{2} \underbrace{=}_{=} \underbrace{Grad(D)}_{5} \underbrace{-}_{-} \underbrace{Grad(d)}_{3}$$

II) El grado máximo que puede tomar el residuo será uno menos al del divisor.

$$Grad.Max.R = Grad(d) - 1$$

Si el divisor es de grado "n", el residuo a lo más podrá se de ser de grado $(n-1)$.

EJEMPLOS EXPLICATIVOS:

1) Dado: $\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^5+nx^3+px+q}$ $\begin{matrix} \leftarrow [D]^\circ = 2 \downarrow \\ \leftarrow [d]^\circ = 5 \downarrow \end{matrix}$

como $[D]^\circ < [d]^\circ$; la expresión no se puede dividir.

2) Dado

$$\frac{x^{10}+ax^7+bx^4+cx^2+d}{x^3+mx^2+n} \quad \begin{matrix} \leftarrow [D]^\circ = 10 \\ \leftarrow [d]^\circ = 3 \end{matrix}$$

Se puede deducir que:

- El grado del cociente: $[q]^\circ = 10 - 7$
- El máximo grado del residuo es uno menos que la del divisor. Es decir: máx $[R]^\circ = 3 - 1 = 2$

Esto significa que el residuo, también puede ser de primer grado o de grado cero.

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE EXPRESIONES ENTERAS

DIVISIÓN DE MONOMIOS :

$$\frac{abx^m}{bx^n} = ax^{m-n}; \; b \neq 0$$

Tener en cuenta que la división de monomios siempre es *EXACTA*.

DIVISIÓN DE UN POLINOMIO ENTRE UN MONOMIO :

$$\frac{A+B+C}{m} = \frac{A}{m} + \frac{B}{m} + \frac{C}{m}; \; m \neq 0$$

Se tendrá que aplicar la propiedad distributiva de la división respecto de la adición.

* Para una división exacta

$$\frac{6x^3+2x^2+5x}{x} = \frac{6x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{5x}{x} = 6x^2+2x+5$$

* Para una división inexacta

$$\frac{8x^5+6x^3+5x-4}{2x^2} = \frac{8x^5}{2x^2} + \frac{6x^3}{2x^2} + \frac{5x-4}{2x^2} = 4x^3+3x+\frac{5x-4}{2x^2}$$

Por simple inspección, se puede deducir que:

* El cociente : $q(x) = 4x^3 + 3x$
* El residuo: $R(x) = 5x - 4$

3) DIVISIÓN DE POLINOMIOS CUALESQUIERA :

En este caso debemos tener en cuenta todos los principios de una división euclídea y que el proceso de la operación lo vamos a realizar con respecto a una variable tomada como referencia, al cual se le denomina ORDENATRIZ de la división.

Para dividir polinomios existen diversos métodos, cuyos procedimientos presentan reglas particulares que facilitan la resolución de la operación. Presentaremos a continuación algunos criterios para efectuar una división:

I) MÉTODO CLÁSICO O DIVISIÓN NORMAL :

Para dividir dos polinomios cualesquiera mediante este método, se debe seguir el siguiente procedimiento:

1) Los polinomios dividendo y divisor deben estar ordenados en forma decreciente. En el caso de que la división sea exacta, la ordenación es arbitraria.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, y se obtiene el primer término del cociente.

3) El primer término del cociente se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se les cambia de signo, colocándolos debajo del dividendo con su correspondiente término semejante.

4) Se divide el primer término del resto obtenido entre el primer término del divisor, y se obtiene el segundo término del cociente.

5) Se procede como en el paso número *3*.

6) Se continúa la operación hasta que se llegue a la última columna del dividendo.

EJEMPLOS 1 :

Dividir : $\dfrac{3x^3+2x^2+3x+7}{x^2+1}$

Disponiendo el dividendo y el divisor, según el esquema del método clásico:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +2x^2 & +3x & +7 & x^2+1 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & & -3x & & 3x+2 \\
\cline{1-4}
 & 2x^2 & & +7 & \\
 & -2x^2 & & -2 & \\
\cline{2-4}
 & & & +5 &
\end{array}
$$

Resultados obtenidos

Cociente : $q(x)=3x+2$

Residuo : $R(x)\equiv 5$

EJEMPLOS 2 :

Dividir: $\dfrac{6x^5-8x^4-3x^3-5x^2+4x+1}{3x^2+2x+1}$

Del mismo modo, aplicando el procedimiento clásico:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & -8x^4 & -3x^3 & -5x^2 & +4x & +1 & 3x^2+2x+1 \\
\cline{7-7}
-6x^5 & -4x^4 & -2x^3 & & & & 2x^3-4x^2+x-1 \\
\cline{1-3}
 & -12x^4 & -5x^3 & -5x^2 & & & \\
 & 12x^4 & +8x^3 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x^3 & -x^2 & +4x & & \\
 & & 3x^3 & -2x^2 & -x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -3x^2 & +3x & +1 & \\
 & & & 3x^2 & +2x & +1 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 5x & +2 &
\end{array}
$$

Resultados obtenidos:

* Cociente : $q(x)=2x^3-4x^2+x-1$
* Residuo : $R(x)=5x+2$

EJEMPLOS 3 :

Dividir: $\dfrac{3x^{17}-4x^{12}+9x^{10}-4x^7+3x^5-2}{3x^5+2}$

Efectuando, se tiene:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^{17} & -4x^{12} & +9x^{10} & -4x^7 & +3x^5 & -2 & 3x^5+2 \\
\cline{7-7}
-3x^{17} & -2x^{12} & & & & & x^{12}-2x^7+3x^5-1 \\
\cline{1-2}
 & -6x^{12} & +9x^{10} & -4x^7 & & & \\
 & 6x^{12} & & +4x^7 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 9x^{10} & & +3x^5 & & \\
 & & -9x^{10} & & -6x^5 & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -3x^5 & -2 & \\
 & & & & 3x^5 & +2 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

como se puede observar es una división exacta, donde:

* Cociente : $q(x)=x^{12}-2x^7+3x^5-1$
* Residuo : $R(x)\equiv 0$

II) MÉTODO DE LOS COEFICIENTES SEPARADOS:

Es un procedimiento similar a la de la metodología clásica, con la diferencia que en este caso, sólo se utilizan los coeficientes. Debemos tener en cuenta que a parte de la ordenación, tanto el dividendo como el divisor deben estar completos. Caso contrario, se sustituirán con CEROS los espacios correspondientes de los términos que faltasen.

EJEMPLOS 1 :

Dividir: $\dfrac{4x^6-7x^4+3x^3+8x+5}{2x+3}$ utilizando sólo los coeficientes, se tiene:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
4 & 0 & -7 & 3 & 0 & 8 & 5 & 2\;\;3 \\
\cline{8-8}
-4 & -6\downarrow & & & & & & 2\;-3\;\;1\;\;0\;\;0\;\;4 \\
\cline{1-2}
 & -6 & -7 & & & & & \\
 & 6 & 9\downarrow & & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 2 & 3 & & & & \\
 & & -2 & -3\downarrow & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0\downarrow & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 & 8 & & \\
 & & & & 0 & 8\downarrow & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 8 & 5 & \\
 & & & & & -8 & -12 & \\
\cline{6-7}
 & & & & & & -7 &
\end{array}
$$

donde:

* Cociente : $q(x)=2x^5-3x^4+x^3+4$
* Residuo : $R(x)=-7$

EJEMPLOS 2 :

Dividir : $\dfrac{x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+2}{x^4+2}$ del mismo modo, separando los coeficientes:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & & 1\;\;0\;\;0\;\;0\;\;2 \\
\cline{8-8}
-1 & 0 & 0 & 0 & -2 & & & 1\;\;1 \\
\cline{1-5}
 & 1 & 2 & 2 & -1 & 2 & & \\
 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & & \\
\cline{2-6}
 & & 2 & 2 & -1 & 0 & &
\end{array}
$$

Por lo tanto :

* Cociente : $q(x)=x+1$
* Residuo : $R(x)=2x^3+2x^2-x$

MÉTODOS PARA DIVIDIR 2 POLINOMIOS (LOS MÁS UTILIZADOS)

En este capítulo estudiaremos

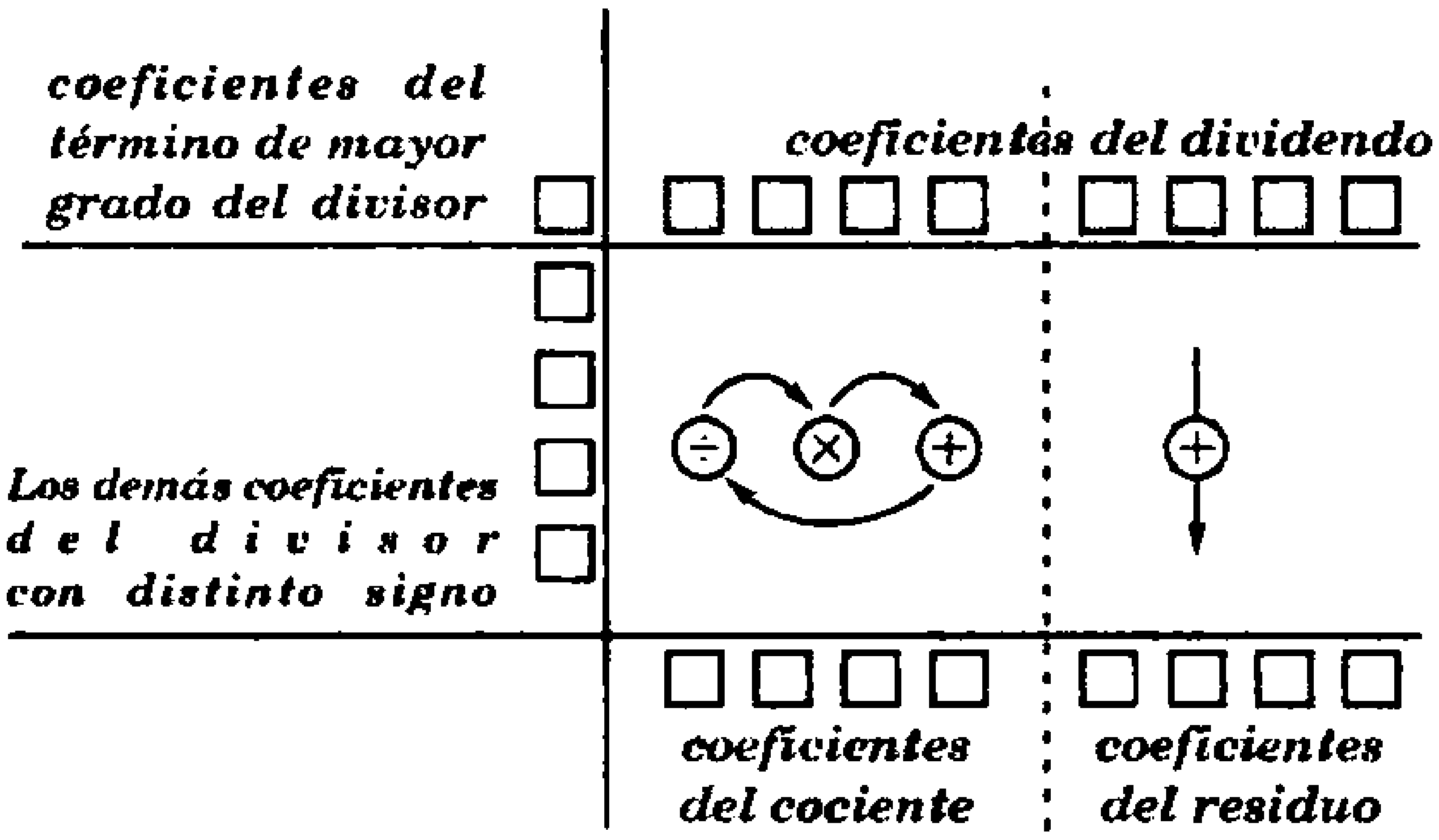
I) Método de Horner *II)* Método de Ruffini

OBSERVACIÓN :

En la división de dos polinomios estos deben ser completos y ordenados en forma descendente, con respecto a una letra llamada ordenatríz; si faltase alguna variable, ya sea en el dividendo o en el divisor, se completarán con ceros.

DIVISIÓN POR HORNER

Este método es aplicable para polinomios completos y ordenados en forma descendente, con respecto a una de sus letras, llamada ordenatriz. Así tenemos:



EJEMPLO 1 :

Efectuar por Horner : $\dfrac{12x^4-7x^3+20x^2-8x+7}{4x^2-3x-2}$

RESOLUCIÓN :

* Observemos que :

$$\begin{cases} Q^\circ = D^\circ - d^\circ = 4-2=2 \\ R^\circ_{max} = d^\circ - 1 = 2-1=1 \end{cases}$$

* Como los polinomios son completos y ordenados; de acuerdo al esquema de Horner se disponen los términos de la siguiente forma.

4	12	− 17	+ 20	− 8	+ 7
3					
2					

A continuación aplicamos los siguientes casos :

I) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, obteniendo el primer término de cociente.

II) El primer término del cociente multiplica a los términos con signo cambiado del divisor y el producto se escribe en la segunda fila debajo de los términos del dividendo corriendo un lugar a la derecha.

III) Se reduce la siguiente columna y el resultado se divide entre el primer término del divisor obteniendo el segundo término del cociente, el cual multiplica a los términos cambiados del divisor. El producto resultante se escribe en la tercera fila, debajo de los términos del dividendo corriendo un lugar a la derecha.

IV) Se continua este procedimiento hasta obtener un término debajo del último término del dividendo.

V) Los coeficientes del resto o residuo, se obtienen directamente de cada una de las columnas que le pertenecen.

* Respecto al ejemplo dado, tendríamos :

	12 ↑	− 8 ↑	20 ↑		
4	12	− 17	+ 20	− 8	+ 7
3		9	+ 6		
2			− 6	− 4	
				15	+10
	3	− 2	+ 5	3	+17
	x^2	x	T.I.	x	T.I.

* De donde :

$$\begin{cases} Q(x)=3x^2-2x+5 \text{ ....(Cociente)} \\ R(x)=3x+17 \text{ ....(Resto)} \end{cases}$$

EJEMPLO 2 :

Efectuar la división: $\dfrac{6x^5+17x^4-5x^3+10x-5}{2x^3+x^2-3}$

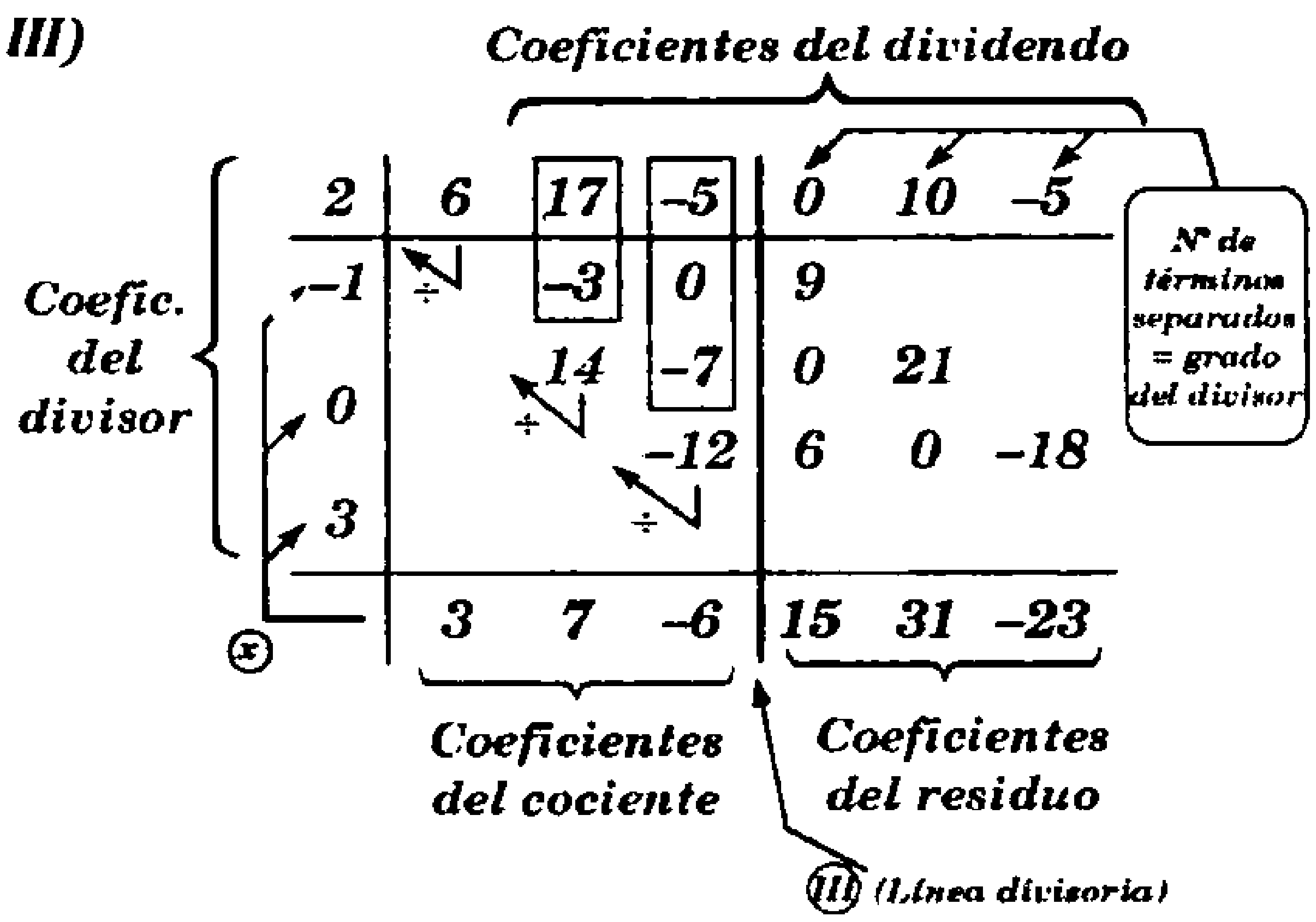
RESOLUCIÓN: (POR PASOS)

I) Completamos y ordenamos decrecientemente:

$$\frac{6x^5+17x^4-5x^3+0x^2+10x-5}{2x^3+x^2+0x-3}$$

II) Utilización del diagrama y

III)



IV) Parte propiamente operativa.

1º) $\frac{6}{2}=3 <> 1^{er}$ coeficiente del cociente

Luego: $3\times(-1)=-3$, $3\times(0)=0$, $3\times(3)=9$ } se colocan horizontalmente columnas a la vez

2º) De la ***1ra.*** columna:

$\frac{17-3}{2}=7 <> 2^{do}$ coeficiente del cociente

Luego:

$7\times(-1)=-7$, $7\times(0)=0$, $7\times(3)=21$ } se colocan horizontalmente y formando columnas a la vez

3º) De la ***2da***. columna:

$\frac{-5+0-7}{2}=-6 <> 3^{er}$ coeficiente del cociente

luego:

$$-6\times(-1)=6$$
$$-6\times(0)=0$$
$$-6\times(3)=-18$$

y así sucesivamente hasta transponer la línea divisoria.

4º) Los coeficientes del residuo, se hallan por suma directa de los términos de cada columna colocados después de la línea divisoria.

V) Finalmente el resultado está dado por los polinomios:

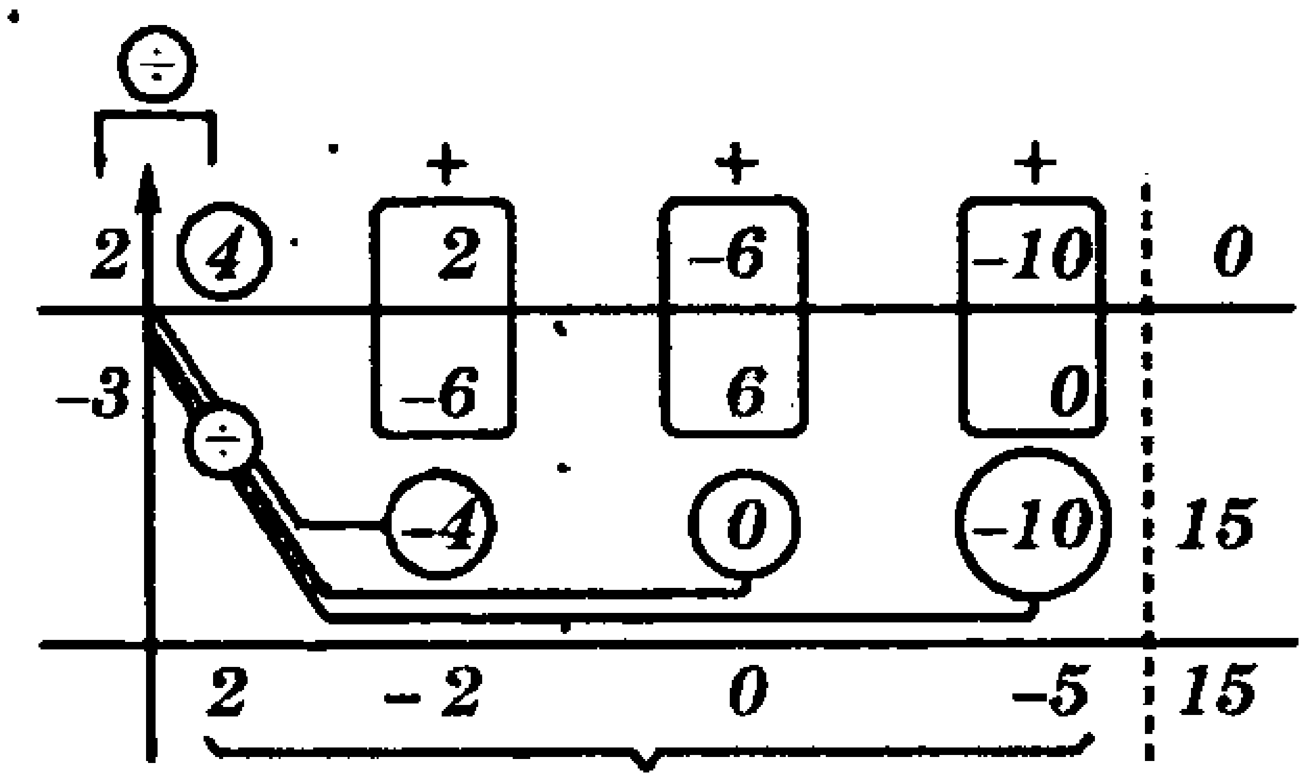
Cociente: $Q_{(x)}=3x^2+7x-6$

Residuo: $R_{(x)}=15x^2+31x-23$

EJEMPLO 3 :

Efectuar por Horner : $\frac{4x^4+2x^3-6x^2-10x}{2x+3}$

RESOLUCIÓN :



Coeficientes del cociente

$$\Rightarrow q(x)=2x^3-2x^2-5 \text{ y } R(x)=15$$

CÁLCULO DE COEFICIENTES EN EL DIVIDENDO O EN EL DIVISOR

En la solución de estos problemas debemos tener en cuenta las siguientes reglas :

REGLA I :

Dos polinomios son divisibles, o uno de ellos es múltiplo de otro, o nos dicen que la división entre ellos es exacta; cuando el resto o residuo de la división es un polinomio nulo.

REGLA II :

Si en una división nos dan como dato el resto, entonces el resto obtenido por Horner y el resto que es dato son polinomios idénticos.

REGLA III :

En toda división exacta los coeficientes del dividendo y del divisor se pueden escribir en sentido contrario y al efectuar la división esta sigue siendo exacta.

EJEMPLO :

Calcular "*a*" y "*b*" en la división exacta :

$$\frac{2x^4-x^3+ax-b}{x^2-x-2}$$

RESOLUCIÓN :

* Por Horner tendríamos :

	2		1		5			
1	2	–	1	+	0	+ a	–	b
1			2	+	4			
2					1	+ 2		
						5	+	10
	2	+	1	+	5	0	+	0

* Aquí vemos que :

$I)\ a+2+5=0 \Rightarrow \boxed{a=-7}$ $\quad II)\ -b+10=0 \Rightarrow \boxed{b=10}$

DIVISIÓN POR RUFFINI

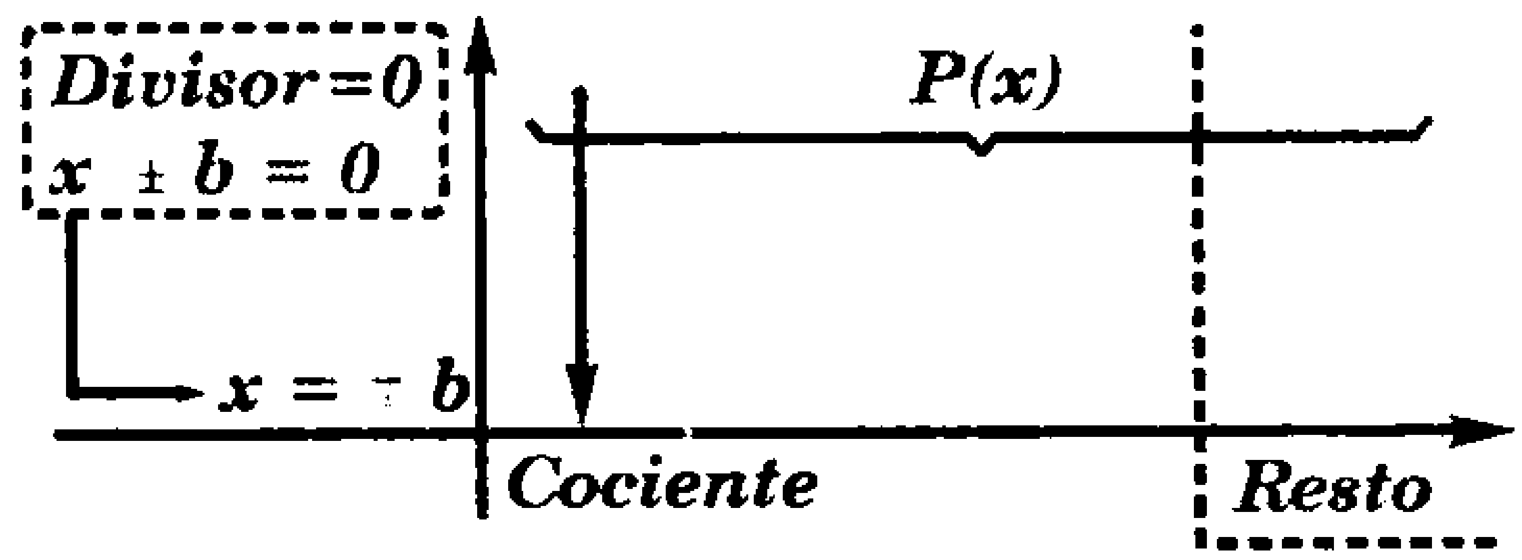
Este método es aplicable para divisores, binomios o transformables a binomios; es un caso particular de la división por Horner. Se presentan dos casos:

CASO I :

$$P(x)\div(x\pm b)$$

* Dividendo : $P(x)$
* Divisor : $x\pm b$

Esquema de Ruffini :



El primer elemento del dividendo se baja y corresponde al primer elemento del cociente, se procede como en la división por Horner y el resultado

de reducir la última columna es el resto de la división.

EJEMPLO 1 :

Efectuar : $\dfrac{2x^4 - x^2 + 3x - 2}{x + 2}$

RESOLUCIÓN :

* Del esquema de Ruffini , tendríamos :

$x + 2 = 0$	2	+ 0	− 1	+ 3	− 2
$x = -2$	↓	− 4	+ 8	− 14	+ 22
	2	− 4	+ 7	− 11	+ 20
	x^3	x^2	x	T.I.	

* Con lo cual :

$Q(x)=2x^3 - 4x^2 + 7x - 11$ .... (cociente)

$R(x)=20$.. (Resto)

EJEMPLO 2 :

Dividir : $\dfrac{3x^5 - 10x^2 - 12x - x^3 + 15}{x - 3}$

RESOLUCIÓN :

I) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

II) Usando el esquema (previamente ordenado)

	3	0	− 1	− 10	12	15
$x = 3$	↓	9	27	78	204	648
	3	9	26	68	216	663

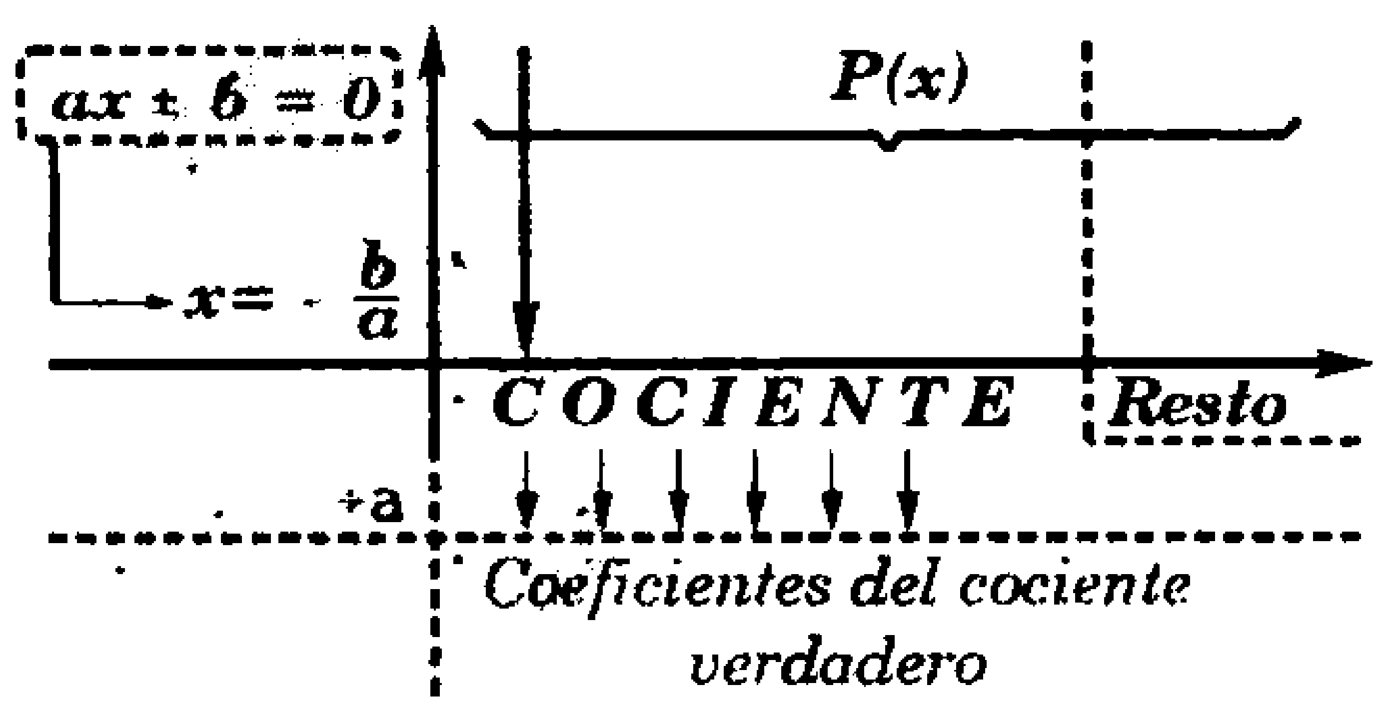
$\Rightarrow q(x)=3x^4+9x^3+26x^2+68x+216 \quad R(x)=663$

CASO II :

$$P(x) \div (ax \pm b)$$

* Dividendo : $P(x)$ * Divisor : $ax \pm b$

* Esquema de Ruffini:



* En este caso :

$$\begin{cases} Q(x)=\dfrac{COCIENTE}{a} \\ R(x)=Resto \end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Efectuar : $\dfrac{15x^3 - 4x^2 + 11x + 6}{5x + 2}$

RESOLUCIÓN :

* Por Ruffini, se tendría.

$5x + 2 = 0$	15	− 4	+ 11		+ 6
$x = -2/5$	↓	− 6	+ 4		− 6
	15	− 10	+ 15		0
÷ 5	3	− 2	+ 3		

$$\begin{cases} Q(x)=3x^2 - 2x + 3 \\ R(x)= 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 2 :

Dividir : $\dfrac{27x^4 - 6x^2 + x + 15}{3x - 1}$

RESOLUCIÓN :

* Esquematizando :

		+	+	+	+
	27	0	− 6	1	15
$x = 1/3$	↓	9	3	− 1	0
	27	9	− 3	0	15
÷3	↓				
	9	3	− 1	0	

* De donde : $q(x)=9x^3+3x^2 - x \quad R(x)=15$

TEOREMA DEL RESTO

Este teorema es importante por que nos permite encontrar el resto de la división, sin efectuarla.

ENUNCIADO :

El resto de dividir un polinomio racional $P(x)$ entre un divisor binomio de la forma $(ax \pm b)$ o cualquier otro divisor transformable a binomio; se obtiene al calcular el valor numérico de $P(\mp \frac{b}{a})$

CASOS QUE SE PRESENTAN

CASO I : $\dfrac{P(x)}{ax \pm b}$

Reglas para determinar el Resto :

I) Divisor igual a cero: $ax \pm b=0$

II) Hallamos el valor de x : $x = \mp \dfrac{b}{a}$

III) Reemplazamos el valor de "x" en el polinomio dividendo y el valor obtenido es el resto de la división.

EJEMPLO 1 :

Hallar el resto de la división :

$$\frac{2x^9 - 3x^5 + 5x^4 - 7x + 6}{x + 1}$$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando en las reglas tendríamos :

I) Divisor = $0 \rightarrow x+1=0$

II) Cálculo de $x \rightarrow x=-1$

III) Reemplazando en el dividendo; $x=-1$, obtenemos

* Resto:

$=2(-1)^9-3(-1)^5+5(-1)^4-7(-1)+6$

* Teniendo en cuenta que :

$(-)^{Par}=+ \ \wedge \ (-)^{Impar}=-$

* Resto = $-2+3+5+7+6=19$

EJEMPLO 2 :

Hallar el resto en

$$\frac{4x^3-5x^2+3x-1}{x+2}$$

RESOLUCIÓN :

Usando el teorema del resto

I) $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.....(forma práctica)

II) Reemplazar : $x=-2$ en el dividendo con lo cual se halla el resto.

$\Rightarrow R=4(-2)^3-5(-2)^2+3(-2)-1=-32-20-6-1$

$\Rightarrow R=-5$

Reglas para determinar el resto :

I) Divisor = $\Rightarrow ax^n \pm b=0$

II) Cálculo de $x^n \Rightarrow x^n=\mp\frac{b}{a}$

III) Reemplazamos el valor de x^n en el polinomio dividendo y el valor obtenido es el resto de la división:

EJEMPLO :

Hallar el resto de la división :

$$\frac{x^5+2x^3-5x^2+3x-2}{x^2+2}$$

RESOLUCIÓN :

* Expresando el dividendo en función de «x^2» se tendría :

$$\frac{(x^2)^2x+2(x^2)x-5(x^2)+3x-2}{x^2+2}$$

* Aplicando las reglas :

I) $x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2$

II) Por consiguiente :

$R(x)=(-2)^2x+2(-2)x-5(-2)+3x-2$

$\Rightarrow R(x)=4x-4x+10+3x-2$

$\Rightarrow R(x)=3x+8$

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL RESTO

Si el divisor de la operación es de grado arbitrario, se establece la siguiente regla general :

Para determinar el residuo de una división cualquiera; primeramente, el divisor deberá igualarse a cero, y a partir de esta igualdad se despejará una relación conveniente, el cual se reemplazará directamente en el dividendo.

El resultado de este reemplazo, nos representará el residuo de la división. Teniendo en cuenta que el máximo grado del residuo es uno menos que la del divisor.

Recordando :

$$\boxed{[R(x)]^\circ \leq [d(x)]^\circ - 1}$$

EJEMPLO 1 :

Calcular el resto de dividir :

$$\frac{4x^{121}+7x^{84}-5x^{33}+8x^{18}+6x^5-9}{x+1}$$

Regla : $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Reemplazando en el dividendo, se tiene :

$R=4(-1)^{121}+7(-1)^{84}-5(-1)^{33}+8(-1)^{18}+6(-1)^5-9$

$R=-4+7+5+8-6-9$

Por lo tanto, el resto es : $R=1$

EJEMPLO 2 :

Determinar el resto de la división:

$$P=\frac{16x^7-24x^5+10x^6-7x^3-22x^4+9}{x^2-2}$$

Regla: $x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2$

En el dividendo debemos buscar todos los x^2 posibles, para lo cual, cada uno de los términos se tienen que descomponer convenientemente, tal como sigue :

$P=16(x^2)^3x-24(x^2)^2x+10(x^2)^3-7(x^2)x-22(x^2)^2+9$

Reemplazando la relación $x^2=2$, se obtendrá el residuo:

$R=16(2)^3x-24(2)^2x+10(2)^3-7(2)x-22(2)^2+9$

$R=128x-96x+80-14x-88+9$

Finalmente : $R=18x+1$

EJEMPLO 3 :

Para que valor de a, la siguiente división : $\frac{2x^5-6x^3+(a-7)x^2+16}{x-2}$ es exacta.

Regla : $x-2=0 \Rightarrow x=2$

El residuo se obtiene al evaluar el dividendo, para dicho valor, así :

$R=2(2)^5-6(2)^3+(a-7)(2)^2+16$

$R=64-48+4(a-7)+16$

Reduciendo : $R=4a+4$

como es exacta :

$$4a+4=0 \Rightarrow a=-1$$

EJEMPLO 4 :

Determine el resto de dividir :

$$P=\frac{(x^3+1)(x-2)(2x-1)^2-3x^3(x-1)^3}{(x+2)(x-3)}$$

Regla : $(x+2)(x-3)=0$

Efectuando :

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow x^2-x=6$$

En el dividendo, debemos buscar la expresión (x^2-x), para luego sustituirlo por el valor de 6. Veamos:

$P=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(4x^2-4x+1)-3[x(x-1)]^3$

$P=(x^2-x-2)(x^2-x+1)[4(x^2-x)+1]-3[x^2-x]^3$

El residuo de la división, se obtendrá de :

$R=(6-2)(6+1)[4(6)+1]-3[6]^3$

$R=(4)(7)(25)-3(216)$

Finalmente : $R=700-648=52$

RESTOS ESPECIALES

TEOREMA Nº 1:

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les multiplica por un polinomio de grado no nulo, el residuo quedará multiplicado por dicho polinomio; es decir, resultará alterado. Mientras que el cociente permanecerá constante. Veamos :

Por definición :

$$D(x) \equiv d(x)\,q(x)+R(x)$$

Multiplicando *m.a.m.* por $S(x)$, tal que $S(x) \equiv 0$:

$$[D(x).S(x)] \equiv [d(x).\ S(x)]q(x) + \underbrace{R(x).S(x)}_{R'(x)}$$

De la identidad, observamos que :

$R(x) \Rightarrow$ Resto verdadero

$R'(x) \Rightarrow$ Resto falso o aparente

Se deduce que :

$$\boxed{R(x) = \frac{R'(x)}{S(x)}\ ;\ S(x) \not\equiv 0}$$

EJEMPLO 1:

Determinar el residuo de dividir :

$$\frac{5x^{74} + 6x^{31} - 4}{x^2 - x + 1}$$

RESOLUCIÓN:

Aplicar el teorema del resto con el divisor (x^2-x+1), es muy complicado. Busquemos un artificio que nos permita trabajar con un divisor más simple.

Como : $(x^2 - x + 1)(x + 1) = x^3 + 1$

Multipliquemos al dividendo y al divisor por $(x + 1)$, así:

$$\frac{5x^{74} + 6x^{31} - 4}{x^2 - x + 1} \cdot \frac{x+1}{x+1}$$

Efectuando, resulta :

$$P = \frac{5x^{75} + 5x^{74} + 6x^{32} + 6x^{31} - 4x - 4}{x^3 + 1}$$

Tener en cuenta que esta es una nueva división, cuyo residuo es R'. Por el teorema del resto, se tiene :

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

En P, busquemos todos los x^3 posibles, así :

$P = 5(x^3)^{25} + 5(x^3)^{24}x^2 + 6(x^3)^{10}x^2 + 6(x^3)^{10}x - 4x - 4$

Sustituyendo x^3 por (-1), resulta el resto falso o aparente :

$R' = 5(-1)^{25} + 5(-1)^{24}x^2 + 6(-1)^{10}x^2 + 6(-1)^{10}x - 4x - 4$

Operando :

$R' = -5 + 5x^2 + 6x^2 + 6x - 4x - 4$

Reduciendo: $R' = 11x^2 + 2x - 9$

Nos interesa el resto verdadero. Por el teorema *1*, se tiene :

$$R = \frac{R'}{x+1} = \frac{11x^2 + 2x - 9}{x+1} = \frac{(11x-9)(x+1)}{x+1}$$

Por lo tanto : $R = 11x - 9$

TEOREMA Nº 2 :

En toda división de polinomios, si al dividendo y al divisor se les divide entre un polinomio de grado no nulo, el residuo quedará dividido entre dicho polinomio; es decir, resultará alterado. Mientras que el cociente permanecerá constante. Veamos :

Por definición :

$$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$$

Dividiendo m.a.m. por $S(x)$, siendo $S(x) \neq 0$:

$$\left[\frac{D}{S(x)}\right] \equiv \left[\frac{d(x)}{S(x)}\right] \cdot q(x) + \left[\frac{R(x)}{S(x)}\right] \leftarrow R'(x)$$

De la identidad, observamos que :

* $R(x) \Rightarrow$ Resto verdadero
* $R'(x) \Rightarrow$ Resto falso o aparente

Se deduce que :

$$\boxed{R(x) = R'(x) \cdot S(x)\ ;\ S(x) \not\equiv 0}$$

EJEMPLO :

Determinar el residuo de dividir :

$$\frac{(x^3 + 8)(x^2 - 4)}{x^2 - x - 2}$$

RESOLUCIÓN:

Descomponiendo el dividendo por los productos notables :

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

y factorizando el divisor; la división propuesta queda así :

$$\frac{(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

Es evidente que, al dividendo y al divisor debemos dividirlo entre $(x - 2)$. La nueva división cuyo residuo es R', será :

$$\frac{(x+2)^2(x^2 - 2x + 4)}{x+1}$$

Por el Teorema del resto:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Sustituyendo en el dividendo, obtendremos el resto falso o aparente:

$R' = (-1 + 2)^2(1 + 2 + 4) = 7$

Por el Teorema 2, el resto verdadero será: $R = R'(x - 2) = 7(x - 2)$

Por lo tanto: $R = 7x - 14$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Dividir: $\dfrac{3x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 1}{x - 2}$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el Método de Ruffini:

$x - 2 = 0$	3	5	1	1	1
$x = 2$	⇩	6	2	6	10
	3	1	3	5	11

Como: $d(x) = ax - b$

$d(x) = x - 2$

$d(x) = 1x - 2 \Rightarrow \boxed{a = 1}$

- Cálculo de $Q(x)$:

$$(4x^2 + 6x + 5) \div (2x + 1)$$

$$\Rightarrow Q(x) = 3x^3 + x^2 + 3x + 5$$

$$R(x) = 11$$

PROBLEMA 2 :

Dividir: $\dfrac{5x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1}{5x + 1}$

RESOLUCIÓN :

Aplicando el Método de Ruffini:

$5x + 1 = 0$	5	-9	3	6	1
$x = \frac{-1}{5}$	⇩	-1	2	-1	-1
	5	-10	5	5	0

Como:

$\Rightarrow d(x) = 5x + 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5}$

* Calculo de $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{5x^3 - 10x^2 + 5x + 5}{5}$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 5$$

$$R(x) = 0$$

PROBLEMA 3 :

Dividir:

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$$

RESOLUCIÓN :

Regla : $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

	3	-7	0	4	5	-6
2	↓	6	-2	-4	0	10
	3	-1	-2	0	5	4

Los elementos de la división obtenida son:

Cociente:

$$q(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5$$

Residuo: $R(x) = 4$

PROBLEMA 4 :

Dividir:

$$\frac{x^5 + 2bx^4 + b(a+2b)x^3 - (a^3 - b^3)x^2 + ax + ab}{x - a + b}$$

RESOLUCIÓN :

Regla: $x - a + b = 0 \Rightarrow x = a - b$

	1	2b	$ab+2b^2$	$-a^3+b^3$	a	ab
a–b	↓	a–b	$ab^2-{}^3$	$ab^2-{}^3$	0	a^2-ab
	1	a+b	a^2+ab+b^2	0	a	a^2

Resultados obtenidos:

Cociente :

$$q(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (a^2 + ab + b^2)x^2 + a$$

Residuo: $R(x) = a^2$

PROBLEMA 5 :

Dividir:

$$\frac{6x^7 + 4x^6 + 3x^5 + 9x^3 + 8x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - 1}$$

RESOLUCIÓN :

Del mismo modo, tenemos:

3	6	4	3	0	9	8	0	5
-2		-4	0	2				
0		0	0	0				
1				-2	0	1		
					0	0	0	
						-6	0	3
	2	0	1	0	3	3	0	8

cuyos resultados se muestran:

* Cociente : $q(x) = 2x^4 + x^2 + 3$
* Residuo : $R(x) = 3x^2 + 8$

PROBLEMA 6 :

Dividir:

$$\frac{x^5 + (a+1)x^4 + (a+b)x^3 + (b+1)x^2 + ax + b}{x^2 + ax + b}$$

RESOLUCIÓN :

Dividiendo con respecto a la variable x, se tiene el diagrama adjunto:

1	1	a + 1	a + b	b + 1	a	b
−a		−a	−b			
−b			−a	−b		
				0	0	
					−a	−b
	1	1	0	1	0	0

* Cociente: $q(x) = x^3 + x^2 + 1$
* Residuo : $R(x) \equiv 0$ (División exacta)

PROBLEMA 7 :

Dividir:

$$\frac{8x^{18} - 2x^{15} + 4x^9 - 5x^6 + 9x^3 - 2}{4x^3 - 1}$$

RESOLUCIÓN :

Como *18, 15, 9, 6* y *3* son múltiplos de tres, se tiene:

$$\frac{8(x^3)^6 - 2(x^3)^5 + 4(x^3)^3 - 5(x^3)^2 + 9(x^3) - 2}{4x^3 - 1}$$

Sustituyendo : $x^3 = y$

Resulta:

$$\frac{8y^6 - 2y^5 + 4y^3 - 5y^2 + 9y^3 - 2}{4y - 1}$$

Regla: $4y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

	8	-2	0	4	-5	9	-2
$\frac{1}{4}$	↓	2	0	0	1	-1	2
	8	0	0	4	-4	8	0

El cociente verdadero será:

$$q(y) = \frac{q'(y)}{4} = 2y^5 + y^2 - y + 21$$

Es decir:

$$q(x) = 2x^{15} + x^6 - x^3 + 2$$

como es exacta $= R(x) = 0$

PROBLEMA 8 :

Dividir:

$$\frac{6(x-1)^{n+1} + 2(x-1)^n + 3x + 2}{3x - 2}$$

RESOLUCIÓN :

Como se repite $(x - 1)$, se tiene como división equivalente:

$$\frac{6(x-1)^{n+1} + 2(x-1)^n + 3(x-1) + 5}{3(x-1) + 1}$$

Sustituyendo : $x - 1 = a$

Resulta:

$$\frac{6a^{n+1} + 2a^n + 3a + 5}{3a + 1}$$

Regla: $3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

	6	2	0	0	...	3	5
$-\frac{1}{3}$	↓	-2	0	0	...	0	-1
	6	-2	0	0	...	3	4

El cociente verdadero será:

$q(a) = \dfrac{q'(a)}{3} = 2a^n + 1$ y como $a = x - 1$

Se tiene : $q(x) = 2(x-1)^n + 1$; y el residuo será $R(x) = 4$

PROBLEMA 9 :

Calcular el residuo de dividir :

$$\frac{6x^5 + 9x^4 + 4x^2 + 8x + 5}{2x + 3}$$

RESOLUCIÓN :

De acuerdo al teorema, se trata de evaluar el polinomio:

$$P(x) = 6x^5 + 9x^4 + 4x^2 + 8x + 5$$

para $x = -\frac{3}{2}$ Es decir :

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 6\left(-\frac{3}{2}\right)^5 + 9\left(-\frac{3}{2}\right)^4 + 4\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{3}{2}\right) + 5$$

Esto nos conducirá a la obtención del residuo.

Efectuando, resulta :

$$R = -\frac{729}{16} + \frac{729}{16} + \frac{36}{4} - \frac{24}{2} + 5$$

$$R = 9 - 12 + 5 = 2$$

PROBLEMA 10 :

Determinar el residuo de dividir:

$$\frac{x^{100} + 2}{x^2 + x + 1}$$

RESOLUCIÓN:

aplicar el teorema del resto con el divisor $(x^2 + x + 1)$, es muy complicado. Busquemos un artificio que nos permita trabajar con un divisor más simple.

como: $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$

Multipliquemos al dividendo y al divisor por $(x + 1)$, así:

$$\frac{(x^{100} + 2)(x - 1)}{(x^2 + x + 1)(x - 1)}$$

Efectuando, resulta:

$$\frac{x^{101} + 2x - x^{100} - 2}{x^3 - 1} \Leftarrow P$$

Tener en cuenta que esta es una nueva división, cuyo residuo es R'. Por el teorema del resto, se tiene: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1$

En P, busquemos todos los x^3 posibles, así:

$P = (x^3)^{33} \times x^2 + 2x - (x^3)^{33} \times x - 2$

sustituyendo x^3 por (1), resulta el resto falso o aparente:

$R' = (1)^{33} \times x^2 + 2x - (1)^{33} x - 2$

$R' = x^2 + 2x - x - 2$

Reduciendo: $R' = x^2 + x - 2$

Nos interesa el resto verdadero. Por el teorema 1, se tiene:

$R = \frac{R'}{x-1} = \frac{x^2+x-2}{(x-1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)}$

Por lo tanto: $R = x + 2$.

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Dividir: $\frac{-24x^7y^5z^2}{-8x^5y^3z^2}$

A) $2xyz$ B) $3x^2y^2z$ C) $5xyz^2$ D) $3x^2y^2$ E) $\frac{6}{2}xy$

02 Dividir: $\frac{51a^{10}b^{2m}c^{7n}}{-3a^9b^{2m}c^{6n}}$

A) $-5abc$ B) $-17ac^n$ C) $-19ab^0c$ D) $-17ab^2c$ E) $-19ab^0c^n$

03 Halle el cociente de dividir:

$$\frac{-65x^6y^a + 52x^5y^{a+1}}{-13x^5y^a}$$

A) $5x-4y$ B) $5xy-4y$ C) $5xy-2y^a$ D) $3x+5y^a$ E) $4x+5y$

04 Dividir: $\frac{63a^3b^{2m+3}}{7ab^{2m+1}}$

A) $21ab^{m+2}$ B) $7a^2b^{m+2}$ C) $9a^2b^2$ D) $7ab$ E) $9a^3b^2$

05 Al dividir: $\frac{ax^8+bx^6}{3x^5}$

Se obtiene como cociente:

$$5x^n + 2x$$

Calcule: $(a+b+n)$

A) 19 B) 20 C) 22 D) 23

06 Calcule el cociente por el método de *HORNER*:

$$\frac{24x^4+8x^3+7x^2-7}{8x^2-3}$$

A) $Q(x) = 3x^2+x+2$

B) $Q(x) = 3x^2+3$

C) $Q(x) = 3x^2+2x+1$

D) $Q(x) = 3x^2-5$

E) $Q(x) = 3x^2+x+1$

07 Halle el cociente por el método de Ruffini:

$$(2x^3-3x+2) \div (x+2)$$

A) $Q(x) = 2x^2+3x-3$

B) $Q(x) = 2x^2+5$

C) $Q(x) = 2x^2-3x+1$

D) $Q(x) = 3x^2-5$

E) $Q(x) = 2x^2+3$

08 Divida por Ruffini:

$$(x^5+3x^2-6) \div (x+1)$$

y señale el resto.

A) 3 B) –3 C) –2 D) –4 E) –5

09 Dividir por Ruffini:

$$\frac{3x^4+5x^3-2x^2+9x+2}{3x-1}$$

e indicar el residuo.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10 Halle el cociente de:

$$\frac{15x^5-10x^4+5x^3-3x^2+2x-1}{3x^2-2x+1}$$

A) $Q(x) = 5x^3+x+5$

B) $Q(x) = 5x^3-1$

C) $Q(x) = 5x^3+2$

D) $Q(x) = 5x^3+3x^2-2$

E) $Q(x) = 5x^3+1$

11 Dividir y Hallar el cociente de

$$(x^3+x^2-3x+10) \div (x^2-2x+3)$$

A) $Q(x) = x+3$ B) $Q(x) = 2x+1$ C) $Q(x) = 3x+1$ D) $Q(x) = x+5$ E) $Q(x) = x+4$

12 Efectúe y halle el cociente de

$$\frac{21x^3+19x-2-38x^2}{7x^2-8x+1}$$

A) $3x-2$ B) $3x+3$ C) $3x-4$ D) $3x-5$ E) $3x+7$

13 Calcule el valor de m en:

$$\frac{x^3+x^2-3x+m}{x+3}$$

Si el resto de dicha división es 15.

A) 15 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

14 Halle el valor de a si la división: $\frac{x^3+6x^2+2x+a}{x+5}$ es exacta.

A) –14 B) –15 C) –16 D) –13 E) –12

15 En la división:

$$\frac{3x^4+5x^3+7x^2+9x+m}{3x-1}$$

Halle el cociente y el valor de m si el resto es 17.

A) $x^3+x^2+3x+1 \wedge m=5$

B) $x^3+3x^2+2x+2 \wedge m=12$

C) $x^3+2x^2+3x+4 \wedge m=13$

D) $x^3+2x^2+2x+2 \wedge m=14$

E) $x^3+x^2+x+3 \wedge m=9$

16 Indicar al polinomio cociente en:

$$\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

A) x^3+1 B) x^3-1 C) x^2+x+1 D) x^2-x-1 E) $x+1$

17 Calcular (ab) para que la división:

$$\frac{ax^4+bx^3+x^2+2x+3}{x^2+x+1}$$

no deje resto

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18 x^8+ax+b, es divisible por x^2-2x+1

Calcular $(b-a)$

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

19 Hallar $(m+n)$ si luego de dividir $\frac{2x^4-6x^2+mx+n}{x^2+x-3}$; deja como resto $R(x)=5x+10$

20 Calcular (ab) si al dividir

$$\frac{ax^4+bx^3-19x^2+4x-8}{x^2+3x-10}$$

se obtiene como resto: $x+2$

A)6 B)8 C)10 D)12 E)16

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Calcule la suma de los coeficientes del cociente:

$$\frac{4x^6+x^5-x^3-12x^2+2x-3}{2x-3}$$

A)9 B)10 C)11 D)12 E)16

02 Al dividir

$$\frac{6x^5-2x^4+26x^2-13x^3+8-14x}{3x^2-x+1}$$

Indicar el residuo:

A)$2x-1$ B)$-2x+1$ C)$3x-2$
D)$-2x+3$ E)0

03 Calcule $m.n.p$ si la siguiente división tiene como residuo a: $5x^2+7x+8$

$$\frac{8x^5+4x^3+mx^2+nx+p}{2x^3+x^2+3}$$

RPTA.: ....

04 Calcule el valor de $(A-B)$ si la siguiente división es exacta:

$$\frac{2x^5-5x^4+4x^3-8x^2+9Ax+B}{x^2-3x+5}$$

A)3 B)5 C)7 D)3 E)12

05 Calcule el valor de $A\times B$ si la siguiente división es exacta:

$$\frac{Ax^4+Bx^3+2x^2-x+10}{2x^2-3x+5}$$

A)3 B)–4 C)–1 D)2 E)–2

06 Hallar la suma de los coeficientes del cociente y del residuo, al dividir:

$$\frac{x^4-x^3-13x^2-30x-15}{x^2+3x+5}$$

A)–9 B)13 C)14
D)10 E)20

07 Hallar el resto en:

$$\frac{x^5+\sqrt{2}x^4-(\sqrt{2}+1)x^3-2\sqrt{2}x^2+8\sqrt{2}x-12}{x+\sqrt{2}-1}$$

A)6 B)-6 C)$6\sqrt{2}$ D)$-6\sqrt{2}$ E)$-12\sqrt{2}$

08 Hallar "m", si la división es exacta:

$$\frac{2x^6+2\sqrt{2}x^5-3x^4-3\sqrt{2}x^3+6x+m\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

A)3 B)5 C)4 D)6 E)7

09 Si en la división:

$$\frac{mx^5+2(3+2m)x^4+(12-m)x^3+(n-6)x^2+2nx-n}{x^2+2x-1}$$

se obtiene un cociente que evaluado en $x=2$ es 39. Calcular: $Q=m^2+n$, sabiendo que "m" y "n" son enteros positivos.

A)2 B)8 C)16 D)3 E)4

10 Al dividir:

$$\frac{12x^4-14x^3+15x^2+mx+(m+10)}{4x^2-2x+1}$$

Se obtuvo como resto un polinomio de grado cero.

Hallar dicho resto.

A)–6 B)2 C)–2 D)4 E)6

11 Determine el resto en la siguiente división: $\dfrac{x^6-15x^2+9}{x-2}$

A)10 B)13 C)18 D)20 E)23

12 Calcule el resto:

$$\frac{(x+7)^4+(2x+13)^2+1}{x+5}$$

A)20 B)24 C)26 D)30 E)36

13 Determine el residuo:

$$\frac{12x^{40}-3x^{20}+8x^{15}-2x^5+7}{x^5-1}$$

A)22 B)25 C)32 D)34 E)38

14 Determine el residuo:

$$\frac{(x^3+2x-2)^{125}+(x^3+2x-5)^4+1}{x^3+2x-3}$$

A)10 B)15 C)17 D)22 E)25

15 Determine el resto en la siguiente división:

$$\frac{(x+2)(x+4)(x+5)(x+3)-19}{x^2+7x+1}$$

A)72 B)80 C)103 D)113 D)123

16 Hallar el resto en:

$$\frac{x^{1250}-81x^{1246}+x^3+2x-1}{x-3}$$

A)2 B)3 C)4 D)5 E)6

17 Determinar el resto de:

$$\frac{2x^{51}-x^{50}+8x-15}{2x-1}$$

A)–11 B)–12 C)–13 D)–14 E)–10

18 Al dividir:

$$\frac{3x^{72}-5x^{17}+3x-5}{x^3+1}$$

A)$5x^2+3x-2$ B)$3x^2+5x-2$
C)$2x^2-5x+3$ D)$3x^2-2x+5$
E)$2x^2-5x-3$

19 Hallar el resto de dividir:

$$\frac{2(x+2)^{20}-5(x+2)^{16}+(x+2)^7+x+3}{(x+3)(x+1)}$$

A)$2x+2$ B)$3x+3$ C)$4x+3$
D)$2x+3$ E)$2x+5$

20 Hallar el valor de "n", para que al dividir: $\dfrac{6x^2-5x+n}{x-1}$ el residuo es -10.

A)–11 B)–8 C)–9 D)–10 E)–12

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Sea $Gdo[D]=9 \wedge Gdo[d]=1$
$\Rightarrow Gdo\left[\dfrac{D}{d}\right]=9$

( ) Si el grado de $P(x)$ es $5 \wedge$ el de $Q(x)$ es $2 \Rightarrow$ el residuo de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ puede ser de primer grado.

( ) $D(x)=d(x).Q(x) \Rightarrow$ la división es exacta.

A)VVF B)VVV C)FFF
D)FVV E)FVF

02 Luego de dividir:

$$\frac{4x^3+3-6x^2+7x}{2x^2+3-x}$$

indicar el cociente.

A) $9-x$ B) $2x-2$ C) $3x-5$
D) $x-2$ E) $5-2x$

03 Al dividir: $\dfrac{6x^4+x^3-1}{2x^2-x+2}$ se obtiene por resto:

A)$-6x+3$ B) $4x+1$ C) $-4x+1$
D)$-4x-1$ E) $4x-1$

04 Luego de dividir: $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-x+1}$ se obtiene como suma del cociente con el residuo un polinomio de la forma: $m+nx+px^2$ Calcular:

$$M=\left(\frac{m+n+p}{m+4p}\right)^{-1}$$

A) 1 B)0 C) –1 D) 2 E) 3

05 Calcular el valor de m^2-n^2, sabiendo que el polinomio:

$P(x)=10x^5+x^4-9x^3+mx+n$ es divisible por $(x-1)(2x+3)$

A) 64 B) 82 C) -82 D) -80 E) 84

06 Si al dividir: $P(x)=x^4-3x^2+x+m$ por: x^2+3x-1 el resto es $-23x+9$ calcular m.

A) 1 B) 2 C) 3 D) -2 E) -1

07 Si: $x^4-x^3-2x^2-3x-1$ es divisible x^2+ax-1 calcular: a^2+a^4

A) 4 B) 20 C) 2 D) 90 E) 6

08 Si $Q(x)$ es el cociente obtenido al efectuar:

$$\frac{3x^4+5x^3-6x^2+7x-12}{3x-4}$$

calcular $Q(1)$.

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

09 Calcular el valor de $\left(\frac{C-6}{A+B}\right)$ si la división: $\frac{x^4+Bx^2+Cx+A}{x^3+2x^2-3x-1}$ tiene resto: $9x+1$

A) 5 B) 2 C) -2 D) -7 E) -6

10 Calcular el valor de "a" si en la división: $\frac{2x^3+4x^2+ax-1}{x+3}$ la suma de coeficientes del cociente es 4.

A) 1 B) 2 C) 3 D) -1 E) -2

11 Si el polinomio:

$$P(x)=x^3+x^2-4x-a$$

a es divisible por $x-2$, calcular el producto de sus coeficientes de $P(x)$.

A) 14 B) 18 C) 16 D) 12 E) -16

12 Sea:

$$P(x)=(2n-1)x^{16n}-(5n-3)x^{8n}+(n+5)x^{4n+5}-(3n-15)x^{39}+n+2$$

calcular el resto en la división:

$$\frac{P(x)}{x+1}$$

A) 15 B) -15 C) 16 D) -16 E) 12

13 Calcular el resto de la división:

$$\frac{(x^2+5x+9)^n+x^2(x+5)^2+2}{x^2+5x+8}$$

A) 67 B) 76 C) 66 D) 57 E) 77

14 Si la división: $\frac{x^3-kx^2+7x-3k}{x-1}$ es exacta, calcular el término independiente del cociente.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 6

15 Al dividir el polinomio $P(x)=x^3-mx+n$ por $x-2$ el residuo es 4, y si se le divide por $x+1$ el resto es 2. Calcular el producto de m por n.

A) 11/3 B) 7/3 C) 14/9 D) 15/9 E) 7/9

16 Calcular el resto al dividir x^5-2x^3+3 por x^2-x.

A) $-x+2$ B) $x+1$ C) $-x+3$ D) $x+4$ E) $-x+5$

17 Al dividir:

$$P(x)=(a-b)x^n+(a-b)^2x^{n-1}+(a-b)^3x^{n-2}$$

por $x-a+b$ se obtiene como residuo $3b^{n+1}$, calcular a/b.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18 Si $P(x)-P(x-10)=2x+1$, calcular la diferencia de los residuos de dividir $P(u)$ por $(u-10)$ y $(u+10)$

A) 22 B) 21 C) 20 D) 19 E) 23

19 Si: $P(x)=x^4+5x^3-mx^2-2mx+q$ es divisible por $R(x)=x^2-2$ calcular: $3m-2q$

A) 2 B) 3 C) 1 D) -1 E) -3

20 Si al dividir:

$$\frac{abx^5+b^2x^4+bcx^3-acx^2-abx-c^2}{ax^2+bx+c}$$

el resto es: abx, calcular: $\frac{2a+c}{c}$

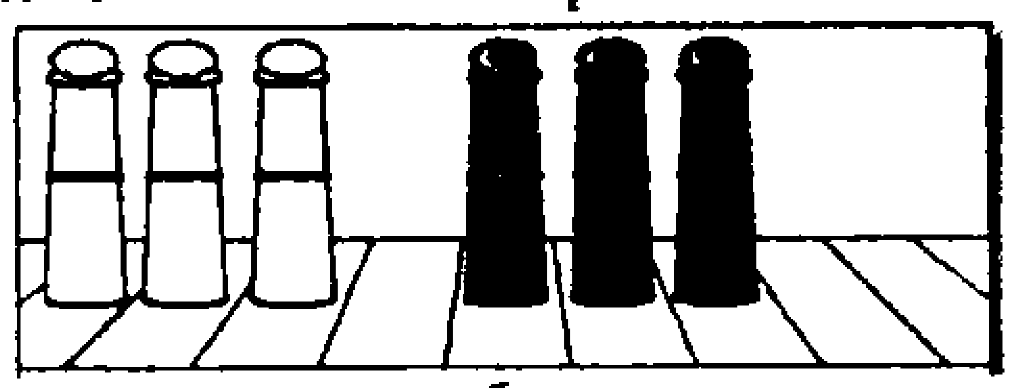
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)B	3)A	4)E	5)A	6)B	7)B	8)A	9)C	10)E
11)C	12)D	13)A	14)B	15)C	16)C	17)A	18)A	19)B	20)B

RETO LOGICO :

Existen n casillas alineadas a la derecha, una casilla central y n casillas alineadas a la izquierda. Se halla una pieza blanca sobre cada casilla de la izquierda, y una pieza negra sobre cada casilla de la derecha, la casilla central se encuentra vacía. Se trata de intercambiar lugares, las piezas blancas a la derecha y las negras a la izquierda, si sólo se permite mover una pieza a la vez, y que cada pieza pueda saltar sólo a una pieza contraria o se mueva a la casilla vecina vacía (para fines de optimización no se recomienda retroceder las piezas). Se pregunta mediante cuántos movimientos mínimos debe hacerse el intercambio y finalmente inducir cuántos movimientos existen para el intercambio de $2n$ piezas.



RESOLUCIÓN :

Se parte de los casos más simples y se va ascendiendo gradualmente en dificultad hasta determinar inductivamente la secuencia general. Para el caso particular de $n=3$ la secuencia de movimientos es la siguiente :

1) blanca avanza
2) salta negra
3) avanza negra
4) salta blanca
5) salta otra blanca
6) se mueve blanca
7) salta negra
8) salta otra negra
9) salta otra negra
10) se mueve blanca
11) salta blanca
12) salta otra blanca
13) se mueve negra
14) salta negra
15) se mueve blanca

OBJETIVO :

Obtener de manera directa , sin necesidad de operar , aquellas divisiones notables.

INTRODUCCION :

Recordemos algo sobre ***«Productos Notables»*** : Uno de lo más conocidos es :

Diferencia de cuadrados	$\Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

* Otro producto notable no menos conocido es :

Suma y Diferencia de cubos	$\Rightarrow a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

*¿Qué pasaría si, del lado derecho, pasamos a dividir el factor binómico al lado izquierdo?

...pues obtendríamos lo siguiente :

* $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ * $\dfrac{a^3 \pm b^3}{a \pm b} = a^2 mab + b^2$

* En ambos casos se obtienen expresiones denominadas COCIENTES NOTABLES.

* Así por ejemplo, podemos tener :

$$\frac{a^6 - b^6}{a - b} = a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5$$

* *EN GENERAL :*

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

COCIENTES NOTABLES

Son los resultados de ciertas divisiones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin necesidad de efectuar la operación de división. Esto, debido a la forma que presentan.

FORMA GENERAL DE UNA DIVISIÓN INDICADA QUE GENERA UN COCIENTE NOTABLE :

Las divisiones indicadas que originan *COCIENTES* NOTABLES, son de la forma general :

FORMA GENERAL DE UN COCIENTE NOTABLE EXACTO (R ≡ 0)

$$\underbrace{\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}}_{\text{Divisor}} \;(\leftarrow \text{Dividendo}) = \underbrace{x^{n-1} \pm x^{n-2} . y + x^{n-3} . y^2 \pm \dots \pm y^{n-1}}_{\text{Cociente}}$$

donde: $n \in N$, $n \geq 2$.

"n": indica el número de términos del cociente.

CASOS:

I) $\dfrac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2} . y + x^{n-3} . y^2 + \dots + y^{n-1}$

↑ ***Indica términos positivos en el cociente***

EJEMPLOS:

* $\dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$

* $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3$

* $\dfrac{x^4 - 625}{x - 5} = \dfrac{x^4 - 5^4}{x - 5} = x^3 + x^2 \times 5 + x \times 5^2 + 5^3$

$= x^3 + 5x^2 + 25x + 125$

II) $\dfrac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2} . y + x^{n-3} . y^2 - \dots \pm y^{n-1}$

↑ ***Indica signos alternados (+, -, +, -, +, ...) en el ociente***

EJEMPLOS:

$\forall$ "n" par

* $\dfrac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3$

2) $\dfrac{64x^6-1}{2x+1}=\dfrac{(2x)^6-1^6}{(2x)+1}$

$=(2x)^5-(2x)^4+(2x)^3-(2x)^2+2x-1$

$=32x^5-16x^4+8x^3-4x^2+2x-1$

III) $\dfrac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}\times y+x^{n-3}\times y^2-\ldots\pm y^{n-1}$

EJEMPLOS:

$\forall$ "n" impar

* $\dfrac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3+x^2y^2-xy^3+y^4$
* $\dfrac{x^5+32}{x+2}=\dfrac{x^5+2^5}{x+2}$

$=x^4-x^3(2)+x^2(2)^2-x(2)^3+2^4$

$=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$

* $\dfrac{243x^5+1}{3x+1}=\dfrac{(3x)^5+1^5}{3x+1}$

$=(3x)^4-(3x)^3+(3x)^2-(3x)+1$

$=81x^4-27x^3+9x^2-3x+1$

FORMA GENERAL DE UN COCIENTE NOTABLE INEXACTO ($R\neq 0$)

$$\boxed{\dfrac{x^n\pm y^n}{x\pm y}=x^{n-1}\pm x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}y^2\pm\ldots\pm y^{n-1}\pm\dfrac{R_{(x,y)}}{x\pm y}}$$

CASOS:

I) $\dfrac{x^n+y^n}{x-y}\Rightarrow$ *Según el Teorema del Resto:* $R=2y^n\neq 0$

$\dfrac{x^n+y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+y^{n-1}+\dfrac{2y^n}{x-y}$

EJEMPLO:

$$\dfrac{x^4+y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3+\dfrac{2y^4}{x-y}$$

II) $\dfrac{x^n+y^n}{x+y}\Rightarrow$ *Según el teorema del Resto* $R=(-y)^n+y^n=2y^n\neq 0$

$\forall$ "n" par

$\dfrac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}\times y+x^{n-3}y^2-\ldots\pm y^{n-1}+\dfrac{2y^n}{x+y}$

EJEMPLO:

$$\dfrac{x^4+1}{x+1}=x^3-x^2y+xy^2-y^3+\dfrac{2}{x+1}$$

III) $\dfrac{x^n-y^n}{x+y}\Rightarrow$ *Según el Teorema del Resto* $R=(-y)^n-y^n=-2y^n$

$\forall$ "n" impar

$\dfrac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}\times y+x^{n-3}y^2-\ldots\pm y^{n-1}-\dfrac{2y^n}{x+y}$

EJEMPLO:

$$\dfrac{x^5-1}{x+1}=x^4-x^3+x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}$$

• REGLA PRÁCTICA PARA DESARROLLAR:

$\dfrac{x^m\pm y^n}{x^p\pm y^q}$ **a)** El cociente admite su parte entera $\dfrac{m}{p}$ o $\dfrac{n}{q}$ términos

B) Los grados relativos a "x" van disminuyendo de "p" en "p" (empezando en "$m-p$", hasta cero)

C) Los grados relativos a "y" van aumentando de "q" en "q" (partiendo de cero hasta $n-q$)

EJEMPLOS:

1) $\dfrac{x^{15}-y^{10}}{x^3-y^2}=x^{12}+x^9y^2+x^6y^4+x^3y^6+y^8$

$\left(N^\circ \text{ de términos}=\dfrac{15}{3}=\dfrac{10}{2}=5\right)$

2) $\dfrac{x^{20}-y^{12}}{x^5+y^3}=x^{15}-x^{10}y^3+x^5y^6-y^9$

$\left(N^\circ \text{ términos}=\dfrac{20}{5}=\dfrac{12}{3}=4\right)$

3) $\dfrac{x^{28}-1}{x^4-1}=x^{24}+x^{20}+x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1$

$\left(N^\circ \text{ términos}=\dfrac{28}{4}=7\right)$

TÉRMINO GENERAL O DE LUGAR "K" (T_K):

Del desarrollo del *C.N.* $\dfrac{x^n\pm y^n}{x\pm y}$

$\boxed{T_K=x^{n-K}\times y^{K-1}}$	$\boxed{T_K=x^{n-K}\times(-y)^{K-1}}$
cuando el divisor es de la forma $(x-y)$	***cuando el divisor es de la forma*** $(x+y)$

NOTA:

Para el 2do. caso (divisor: $x+y$*) los términos de lugar impar son positivos y los términos de lugar par son negativos.*

EJEMPLO 1:

Determine el *7mo*. término del *C.N.* generado al dividir:

$$\dfrac{x^{15}-y^{15}}{x-y}$$

• En la fórmula general $n=15$ y $K=7$:

$$T_7=(+)\,x^{15-7}\,y^{7-1}$$

Por lo tanto : $T_7 = x^8 y^6$

EJEMPLO 2:

Calcular el ***13 avo***. término del desarrollo de la división indicada:

$$\frac{x^{24} - y^{24}}{x + y}$$

• En la fórmula general $n=24$ y $K=13$:

$$T_{13} = (+)\, x^{24-13}\, y^{13-1}$$

Por lo tanto: $T_{13} = x^{11} y^{12}$

EJEMPLO 3:

Señale el ***20avo***. término del ***C.N.*** obtenido al efectuar:

$$\frac{x^{39} + y^{39}}{x + y}$$

• En la fórmula general $n = 39$ y $K = 20$:

$$T_{20} = (-)\, x^{39-20}\, y^{20-1}$$

Por lo tanto: $T_{20} = -x^{19} y^{19}$

EJEMPLO 4:

Calcule el ***38*** avo término del ***C.N.*** generado al efectuar:

$$\frac{x^{153} + y^{102}}{x^3 + y^2}$$

• Acomodando convenientemente:

$$\frac{(x^3)^{51} + (y^2)^{51}}{(x^3) + (y^2)},\ T_{38} = (x^3)^{51-38} \times (-y^{+2})^{38-1}$$

$$T_{38} = -\,x^{39} \times y^{74}$$

TEOREMA :

Condición de Proporcionalidad Implícita

Para que la siguiente división indicada :

$$\frac{x^m \pm y^n}{x^p \pm y^q} = \frac{(x^p)^{\frac{m}{p}} \pm (y^q)^{\frac{n}{q}}}{(x^p) \pm (y^q)}$$

genere un ***C.N.***, se debe cumplir la condición necesaria y suficiente:

$$\boxed{\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = r\ ;\ r \in N\ ,\ r \geq 2}$$

siendo ***"r"*** el número de términos del ***C.N.***

EJEMPLO 1 :

En la siguiente división indicada:

$$\frac{x^{28} + y^{21}}{x^4 + y^3}$$

Aplicando la condición de proporcionalidad:

$$\text{Número de términos} = \frac{28}{4} = \frac{21}{3} = 7$$

Se observa que éste genera un cociente notable de ***7*** términos.

EJEMPLO 2 :

Si la división mostrada: $\dfrac{x^{55} - y^{11}}{x^{10} - y^2}$

genera un ***C.N.,*** debe cumplir la condición:

$$\text{Número de términos} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2} = 5,5$$

Lo cual es ***ABSURDO***. Por lo tanto, la división mencionada NO genera un cociente notable.

EJEMPLO 3:

Hallar el número de términos de la parte entera del ***C.N.*** que se obtienen a partir de la división:

$$\frac{a^{3m+2} - b^{5m-1}}{a^2 - b^{m-5}}$$

Por la condición: $\dfrac{3m+2}{2} = \dfrac{5m-1}{m-5} = r\ \ ;\ \ r \in N$

donde ***"r"*** nos expresa el número de términos pedido.

Resolviendo la ecuación:

$$(3m+2)(m-5) = 2(5m-1)$$

Efectuando, resulta: $3m^2 - 23m - 8 = 0$

Factorizando: $(m-8)(3m+1) = 0$

Para $m = 8$, se obtiene : $r = 13$ términos

Para $m = -1/3$, el valor de ***"r"*** no resulta un número natural.

EJEMPLO 4 :

Cuántos términos tiene el ***C.N.*** $\dfrac{32x^5 - y^5}{2x - y}$

RESOLUCIÓN :

Primero, debemos darle la forma :

* Observa : $\dfrac{32x^5 - y^5}{2x - y} = \dfrac{[2x]^5 - [y]^5}{2x - y}$

* Luego: $n=5$. Por lo tanto, el ***C.N.*** tiene cinco términos

EJEMPLO 5 :

Desarrollar el siguiente cociente notable e indicar el número de términos : $\dfrac{x^7 - y^7}{x - y}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y} = \underbrace{x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6}_{\text{el desarrollo contiene siete términos}}$$

EJEMPLO 6 :

Desarrollar el siguiente cociente notable. $\dfrac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3}$

RESOLUCIÓN:

$$\frac{x^{10} - y^{15}}{x^2 - y^3} = \frac{(x^2)^5 - (y^3)^5}{(x^2) - (y^3)} = (x^2)^4 + (x^2)^3(y^3)^1 + (x^2)^2(y^3)^2$$

$$+ (x^2)^1(y^3)^3 + (y^3)^4 = x^8 + x^6y^3 + x^4y^6 + x^2y^9 + y^{12}$$

EJEMPLO 7 :

Si A es el penúltimo término del cociente notable generado por : $\dfrac{x^{40}+y^{10}}{x^4+y}$

Hallar A :

RESOLUCIÓN :

de términos del $C.N. = \dfrac{40}{4} = 10$

Donde A ocupa el lugar 9 (penúltimo)

$$t_9 = (x^4)^{10-9}\,y^{9-1} \Rightarrow A = x^4 y^8$$

PROPIEDADES PARTICULARES

TÉRMINO CENTRAL DE LA PARTE ENTERA DE UN C.N.

Se tiene la división indicada: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$; $n \geq 2$

A) SI "n" ES UN NÚMERO IMPAR:

El cociente notable admite un sólo término central, cuya posición se calcula así:

$$\text{Lugar } (T_c) = \frac{n+1}{2} \in N$$

Luego, dicho término se determina por la fórmula:

$$T_c = T_{\frac{n+1}{2}} = (SIGNO)(xy)^{\frac{n-1}{2}}$$

B) SI "n" ES UN NÚMERO PAR :

El cociente notable admite dos términos centrales, cuyas posiciones se calculan así:

$$Lugar : (T_{c1}) = \frac{n}{2} \in N$$

$$Lugar : (T_{c2}) = \frac{n+2}{2} \in N$$

Luego los términos buscados se determinan por las fórmulas:

$$T_{c1} = T_{\frac{n}{2}} = (SIGNO)\,x^{\frac{n}{2}}\,y^{\frac{n-2}{2}}$$

$$T_{c2} = T_{\frac{n+2}{2}} = (SIGNO)\,x^{\frac{n-2}{2}}\,y^{\frac{n}{2}}$$

II) TÉRMINO CONTADO A PARTIR DEL EXTREMO FINAL :

Para la parte entera del cociente notable generado al dividir: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$; $n \geq 2$

Un término cualquiera de lugar "K", contado a partir del extremo final, se calcula así:

$$\overleftarrow{T_K} = (SIGNO)\,x^{K-1}\,y^{n-K}$$

EJEMPLO:

Señale el ***10mo.*** término contado a partir del final, en el desarrollo de: $\dfrac{x^{25}-y^{150}}{\sqrt[3]{x}+y^2}$

- Es evidente que el número de términos $n=75$.
- Aplicando la fórmula general:

$$\overleftarrow{T_{10}} = (-)\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-1}\ \left(y^2\right)^{75-10}$$

Por lo tanto: $\overleftarrow{T_{10}} = -x^3 y^{130}$

III) SUMA DE LOS GRADOS ABSOLUTOS DE TODOS LOS TÉRMINOS DEL DESARROLLO DE LA DIVISIÓN INDICADA:

* $\dfrac{x^m \pm y^n}{x^p \pm y^q}$ que admite "r" en términos en la parte entera del $C.N.$

Se tratar de calcular la suma de la serie:

$$\sum G.A. = GA(T_1) + GA(T_2) + GA(T_3) + \ldots + GA(T_r)$$

Es fácil deducir la siguiente relación:

$$\sum G.A. = \frac{r}{2}(m+n-p-q) \in N^* \quad \ldots(\alpha)$$

* Si se tiene la forma elemental de la división notable:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} \ ; \quad n \geq 2$$

Por simple inspección, se tienen por comparación los datos mostrados:

$$m = n \ ; \quad p = q = 1 \ ; \quad r = n$$

Reemplazando en la fórmula (α), resulta:

$$\sum G.A. = n(n-1) \in N^*$$

¡ RESUMEN !

COCIENTES NOTABLES

Son divisiones algebraicas entre binomios de la forma

$$\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b} \ ; \ con\ "n" \in N$$

* Aquí : «a» y «b» son denominadas «BASES» del Cociente Notable. Todo Cociente Notable tiene un desarrollo.

OBSERVA :

$$I)\ \frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

II) $\dfrac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - ab^{n-2} + b^{n-1}$

⇒ Aquí «*n*» debe ser IMPAR

III) $\dfrac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}$

⇒ Aquí *n* debe ser *PAR*

IV) $\dfrac{a^n + b^n}{a - b}$ ⇒ *Este NO es un Cociente Notable*

NÚMEROS DE TÉRMINOS

La cantidad de términos de un cociente notable es «*n*»

TÉRMINO k- ÉSIMO

Si en un desarrollo de algún *C.N.* queremos calcular el término de lugar «*k*» aplicamos la fórmula.

* Esta fórmula se aplica al *C.N.*

I) ➧ $T_k = a^{n-k} \times b^{k-1}$

* Esta fórmula se aplica al *C.N.*

II y III ➧ $T_k = a^{n-k} \times (-b)^{k-1}$

*En nuestro caso, trabajaremos principalmente con *C.N.* del tipo *I*, cuyos términos del desarrollo son todos positivos.

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Efectuar en cada caso :

* $\dfrac{x^6 - y^6}{x - y} =$ * $\dfrac{x^6 - y^6}{x + y} =$

* $\dfrac{x^4 - 81}{x - 3} =$ * $\dfrac{x^4 - 16}{x - 2} =$

* $\dfrac{x^5 + 100000}{x + 10} =$ * $\dfrac{x^5 - 32}{x + 2} =$

* $\dfrac{64x^6 + 1}{2x - 1}$ * $\dfrac{x^{15} - y^{10}}{x^3 - y^2} =$

02 Halle el término de lugar *13* en:

$$\frac{x^{50} - y^{50}}{x - y}$$

A) $x^{14}y$ B) $x^{26}y^{13}$ C) $x^{49}y^{12}$
D) $x^{37}y^{13}$ E) $x^{37}y^{12}$

03 Halle el número de términos del desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{5n-5} + 1}{x^{n-1} + 1}$$

A) 5 B) 6 C) 7 D) n E) n + 5

04 Halle el valor de "*a*" y el número de términos en el *C.N.*:

$$\frac{x^{a+24} - y^{a+10}}{x^5 - y^3}$$

A) 10 ∧ 6 B) 11 ∧ 7 C) 13 ∧ 6
D) 12 ∧ 9 E) 14 ∧ 15

05 Calcular "*m*" para que la división notable: $\dfrac{x^{4m+4} - y^{5m}}{x^{m+1} - y^{2m-3}}$; origine un cociente notable.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 14

06 Determinar el grado absoluto del sexto término del cociente notable al dividir: $\dfrac{x^{42} + y^{63}}{x^2 + y^3}$

A) 45 B) 65 C) 75 D) 105 E) 35

07 El desarrollo de la división notable: $\dfrac{x^m - y^n}{x^3 + y^4}$; origina un *C.N.* de *14* términos.

Halle: $m - n$

A) 14 B) –14 C) 98 D) –98 E) 49

08 Hallar el tercer término del *C.N.*: $\dfrac{a^n - b^{5n-18}}{a^2 - b^9}$

A) $a^{10}b^{16}$ B) $-a^{10}b^{18}$ C) $a^{30}b^{18}$
D) $a^{16}b^6$ E) $a^{32}b^{20}$

09 Con respecto al problema anterior, ¿cuál es el número de términos del *C.N.*?

A) 34 B) 35 C) 36 D) 37 E) 30

10 Calcular "$a \cdot b$", sabiendo que el tercer término del *C.N*. de: $\dfrac{x^{a+b} - y^{a+b}}{x^{a-b} + y^{a-b}}$ es $x^{60} \cdot y^{40}$

A) B) C) D) E)

11 Calcular el grado absoluto del sexto término del *C.N.* originado por:

$$\frac{x^{n-2} + y^{18}}{x + y^2}$$

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

12 En el desarrollo de:

$$\frac{x^{45} + a^{27}}{x^{15} + a^9}$$

Hay un término de grado *24*, la diferencia de los exponentes de "*x*" e "*y*" en ese término es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13 Determine el término de lugar *21* en el *C.N.* de dividir:

$$\frac{2x - x^2}{1 - \sqrt[20]{x - 1}}$$

A) $x + 1$ B) $x^2 - 1$ C) $(x - 1)^2$
D) $x - 1$ E) $(x + 1)^2$

14 Cuántos términos fraccionarios tiene el *C.N.* de dividir:

$$\frac{x^{45} - x^{-30}}{x^3 - x^{-2}}$$

A) 10 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

15 En el desarrollo de: $\dfrac{x^4 - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

¿Cuántos son irracionales?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 3

16 El siguiente cociente notable tiene en su desarrollo *20* términos; calcule el valor *n*.

$$\frac{x^{140} - y^{60}}{x^{n+12} + y^{n-2}}$$

A) 3 B) 5 D) 7 C) 9 E) 11

17 Determine el número de términos en el cociente notable:

$$\frac{x^{3n+10} - a^{5n}}{x^2 + a^3}$$

A) 30 B) 45 C) 50 D) 55 E) 60

18 Indicar la siguiente división que origina el siguiente cociente notable:

$a^{55} - a^{50}b^{10} + a^{45}b^{20} - ... + a^5b^{100} - b^{110}$

A) $\dfrac{a^{45} - b^{90}}{a - b}$ B) $\dfrac{a^{60} - b^{90}}{a^5 - b^{10}}$ C) $\dfrac{a^{60} - b^{120}}{a^5 - b^{10}}$

D) $\dfrac{a^{90} - b^{150}}{a^5 - b^{10}}$ E) $\dfrac{a^{60} - b^{150}}{a^5 - b^{10}}$

19 Calcule el sexto término en el cociente notable:

$$\frac{x^{30} + 3^{15}}{x^2 + 3}$$

A) $81x^{20}$ B) $-243x^{18}$ C) $243x^{18}$
D) $-81x^{18}$ E) $243x^{20}$

OBJETIVOS :

* Saber expresar un polinomio como la multiplicación indicada en otros polinomios cuyos grados son menores.

* Saber aplicar los diversos criterios existentes para la transformación de un polinomio en factores primos.

INTRODUCCIÓN :

Desde tiempos muy lejanos en todo argumento matemático estuvo presente siempre la teoría de los números, los cuales se apoyan en la parte algebraica. Como una necesidad para facilitar la resolución de las ecuaciones polinómicas surgen diversos procedimientos de transformación de polinomios a los cuales se les denomina factorización, en el cual se busca expresar un polinomio como una multiplicación indicada de otros polinomios de menor grado. Al expresar : $24 = 3 \times 8$; se ha factorizado 24 en producto de enteros; siendo 3 y 8 factores enteros de 24. A su vez : $24 = 3 \times 2^3$, 3 y 2 son también factores de 24 y se llaman factores primos. El término factorización proviene de la palabra factor. Es decir, en factorización vamos a expresar un polinomio como una multiplicación indicada de factores primos. En la multiplicación algebraica se tiene

$$\underbrace{(x+2)(x^2-2x+4)}_{factores} = \underbrace{x^3+8}_{producto}$$

El problema que nos plantemos ahora es, dado el polinomio producto debemos hallar los factores que lo originan. Si conseguimos los factores habremos factorizado el polinomio.

Así : $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

FACTORIZACIÓN

La factorización es un proceso que consiste en transformar un polinomio en el producto indicado de sus factores primos.

$$a^2 + 2a - 3 \underset{\xleftarrow{\text{Multiplicación}}}{\overset{\xrightarrow{\text{Factorización}}}{=}} (a+3)(a-1)$$

FACTOR O DIVISOR :

Un polinomio de grado no nulo se considera factor de otro cuando lo divide exactamente, por lo cual también es llamado divisor.

EJEMPLOS :

* $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

$$\text{Factores}\begin{cases} x+3 \\ x+2 \\ x^2+5x+6 \end{cases}$$

* $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

$$\text{Factores}\begin{cases} x-3 \\ x+4 \\ x^2+x-12 \end{cases}$$

FACTOR O DIVISOR PRIMO :

Un polinomio de grado no nulo se considera factor primo, si no admite descomposición en dos o más factores.

* $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

$$\begin{matrix}\text{Factores}\\ \text{Primos}\end{matrix}\begin{cases} x+3 \\ x+2 \end{cases}$$

* $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

$$\begin{matrix}\text{Factores}\\ \text{Primos}\end{matrix}\begin{cases} x-3 \\ x+4 \end{cases}$$

MÉTODOS PARA FACTORIZAR

FACTOR COMÚN :

Se denomina así el factor repetido en varios términos; para lo cual se eligen las bases comunes afectadas al menor exponente.

Así : $4x^3y^4 - 5x^2y^5 + 7x^4y^7$

Se observa: (x^2y^4) como factor común.

Luego factorizando tenemos : $x^2y^4(4x - 5y + 7x^2y^3)$

EJEMPLOS :

* Factorizar : $P(x;y) = 32x^2 + 8xy + 24x$

$\Rightarrow P(x;y) = 8x(4x + y + 3)$

* Factorizar : $P(a;b;c) = 4a^2bc + 3ab^2c - 2abc^2$

$\Rightarrow P(a;b;c) = abc(4a + 3b - 2c)$

* Factorizar : $P(a;b;c) = 4a^2bc + 3ab^2c - 2abc^2$

$\Rightarrow P(a;b;c) = abc(4a + 3b - 2c)$

POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:

Consiste en seleccionar convenientemente los términos de tal manera que se genere algún factor común.

EJEMPLOS :

1) $P(x;y) = \underline{a}x + \underline{b}x + \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{y}} + \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{y}}$

Agrupamos los términos de la siguiente manera :

$P(x;y) = (ax + bx) + (ay + by)$

$\Rightarrow P(x;y) = x(a + b) + y(a + b)$

$\Rightarrow P(x;y) = (a + b)(x + y)$

2) $P(a;b) = \underline{\underline{a^2}} + \underline{ab} + \underline{\underline{a}} + \underline{b}$

Agrupamos los términos de la siguiente manera :

$P(a;b)=(a^2+ a)+(ab+b)$

$\Rightarrow P(a;b)=a(a+1)+b(a+1)$

$\Rightarrow P(a;b)=(a+1)(a+b)$

MÉTODOS DE LAS IDENTIDADES

Es la aplicación inmediata de algunos Productos Natables como :

DIFERENCIAS DE CUADRADOS :

$$A^2 - B^2=(A+B)(A - B)$$

* Así, al factorizar : $9x^2 - 16$

Reconocemos : $(3x)^2 - (4)^2$

Luego : $9x^2 - 16=(3x - 4)(3x+4)$

EJEMPLOS :

* $x^2 - 4=x^2 - 2^2=(x+2)(x - 2)$
* $9 - 4a^2=3^2 - 2^2 \times a^2 = 3^2 - (2a)^2=(3+2a)(3-2a)$

DIFERENCIA DE CUBOS :

$$A^3 - B^3=(A - B)(A^2+AB+B^2)$$

EJEMPLO :

* Así, al factorizar : $27n^3 - 8$
* Reconocemos : $(3n)^3 - (2)^3$
* Luego : $27n^3 - 8=(3n - 2)(9n^2+6n+4)$

SUMA DE CUBOS :

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2 - AB+B^2)$$

EJEMPLO :

* Así, al factorizar : $8n^6 + 1$
* Reconocemos : $(2n^2)^3+(1)^3$
* Luego : $8n^6 + 1 = (2n^2 + 1)(4n^4 - 2n^2 + 1)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO :

$$A^2+2AB + B^2=(A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB+B^2=(B - A)^2=(A - B)^2$$

EJEMPLO :

* Así, al factorizar : $9x^4 + 6x^2 + 1$
* Nótese : $(3x^2)^2 + 2(3x^2)(1) + (1)^2$
* Luego : $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$
* Factorizar : $25y^4 - 20y^2 + 4$
* Nótese : $(5y^2)^2 - 2(5y^2)(2) + (2)^2$
* Luego : $25y^4 - 20y^2 + 4 = (5y^2 - 2)^2$

MÉTODO DE LAS ASPAS

ASPA SIMPLE :

Se utiliza para factorizar trinomios de la forma :

$$Ax^{2n} + Bx^n + C$$

Consiste en descomponer los términos extremos de tal manera que la suma de los productos en aspa nos de el término central. Los factores se toman en forma horizontal.

EJEMPLOS :

A) Factorizar : $x^2 + 3x + 2$

RESOLUCIÓN :

$x^2 + (3x) + 2$

$x \quad 2 \rightarrow 2x$

$x \quad 1 \rightarrow x$ } +

$(3x)$ *Término central*

* Luego : $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

B) Factorizar : $x^2 + x - 6$

RESOLUCIÓN :

$x^2 + (x) - 6$

$x \quad 3 \rightarrow 3x$

$x \quad -2 \rightarrow -2x$ } +

$(x) \rightarrow$ *Término central*

* Luego : $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

C) Factorizar : $x^2 - 7x+10$

RESOLUCIÓN :

$x^2 - (7x) + 10$

$x \quad -5 \rightarrow -5x$

$x \quad -2 \rightarrow -2x$ } +

$(-7x) \rightarrow$ *Término central*

* Luego : $x^2 - 7x + 10=(x - 5)(x - 2)$

D) Factorizar : $x^2 - 5x - 14$

RESOLUCION :

$x^2 - 5x - 14$

$x \quad -7 \rightarrow -7x$

$x \quad +2 \rightarrow +2x$ } +

$(-5x) \rightarrow$ *Término central*

* Luego : $x^2 - 5x - 14=(x - 7)(x+2)$

E) Factorizar : $2x^2+3x-20$

RESOLUCIÓN :

$2x^2+3x-20$

$2x \quad -5 \rightarrow -5x$
$x \quad\ \ 4 \rightarrow \underline{8x}$ (+)
$3x \rightarrow$ *Término central*

* Luego : $2x^2+3x-20=(2x-5)(x+4)$

F) Factorizar : $3x^2-2x-2$

RESOLUCIÓN :

$3x^2-x-2$

$3x \quad 2 \rightarrow 2x$
$x \quad -1 \rightarrow \underline{-3x}$ (+)
$-x \rightarrow$ *Término central*

* Luego : $3x^2-x-2=(3x+2)(x-1)$

CAMBIO DE VARIABLE

EJEMPLOS :

I) Factorizar : x^4+x^2-6

RESOLUCIÓN :

* Se observa que dos de los términos son potencias de x^2, asi tenemos : $x^4=(x^2)^2$ y $x^2=(x^2)^1$
* Luego hacemos un cambio de variable : $y=x^2$

$$x^4+x^2-6=(x^2)^2+x^2-6=y^2+y-6$$

* Ahora, factorizamos y^2+y-6 por aspa simple :

y^2+y-6

$y \quad +3 \rightarrow 3y$
$y \quad -2 \rightarrow \underline{-2y}$ (+)
y

* Por lo tanto: $y^2+y-6=(y+3)(y-2)$
* Pero como $y=x^2$ entonces tenemos :

$$x^4+x^2-6=y^2+y-6=(y+3)(y-2)=(x^2+3)(x^2-2)$$

* Luego : $x^4+x^2-6=(x^2+3)(x^2-2)$

II) Factorizar : $(a+b)^2+2(a+b)-3$

RESOLUCIÓN :

* Observamos que $(a+b)$ se repite en dos de los términos del trinomio.
* Luego hacemos un cambio de variables : $x=a+b$
* Entonces : $(a+b)^2+2(a+b)-3=(x^2)+2(x)-3$
* Ahora factorizamos x^2+2x-3 por aspa simple.

x^2+2x-3

$x \quad +3 \rightarrow 3x$
$x \quad -1 \rightarrow \underline{-1x}$ (+)
$2x$

* Por lo tanto : $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$
* Pero como $x=a+b$ entonces tenemos:

$$(a+b)^2+2(a+b)-3=x^2+2x-3=(a+b+3)(a+b-1)$$

* Luego : $(a+b)^2+2(a+b)-3=(a+b+3)(a+b-1)$

III) Factorizar : x^4+x^2-2

RESOLUCIÓN :

* Se observa que : $x^4+x^2-2=(x^2)^2+(x^2)-2$
* Ahora hacemos un cambio de variable : $y=x^2$
* Entonces : $x^4+x^2-2=y^2+y-2$
* Ahora factorizamos y^2+y-2 por aspa simple

y^2+y-2

$y \quad +2 \rightarrow 2y$
$y \quad -1 \rightarrow \underline{-1y}$ (+)
y

* Por lo tanto : $y^2+y-2=(y+2)(y-1)$
* Pero como $y=x^2$ entonces tenemos :

$$x^4+x^2-2=y^2+y-2=(y+2)(y-1)=(x^2+2)(x^2-1)$$
$$=(x^2+2)(x+1)(x-1)$$

* Luego : $x^4+x^2-2=(x^2+2)(x+1)(x-1)$

CRITERIO DE ASPA DOBLE

Se utiliza para factorizar polinomios de seis términos de la forma :

$$ax^{2n}+bx^ny^n+cy^{2n}+dx^n+ey^n+f$$

El método consiste en descomponer todos los términos que produzcan aspa, de tal manera que la suma de la multiplicación en aspa nos compruebe cada uno de los términos del polinomio. Si faltará algún término se le completará con cero, además los factores se toman horizontalmente.

EJEMPLO 1 :

Factorizar: $E_{(x;y)}=3x^2+4xy+y^2+4x+2y+1$

RESOLUCIÓN :

$E_{(x;y)}=3x^2+4xy+y^2+4x+2y+1$

$3x \quad y \quad 1$
$x \quad y \quad 1$
(aspas I, II, III)

* Comprobaciones :

I) $3xy + xy = 4xy$ II) $y + y = 2y$ III) $3x + x = 4x$

* Finalmente : $E_{(x;y)}=(3x+y+1)(x+y+1)$

EJEMPLO 2 :

Factorizar : $P_{(x;y)}=6x^2+13xy+6y^2+7x+8y+2$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando las aspas simples :

$6x^2+13xy+6y^2+7x+8y+2$

$3x \quad 2y \quad 2$
$2x \quad 3y \quad 1$

* Entonces la forma facorizada es :

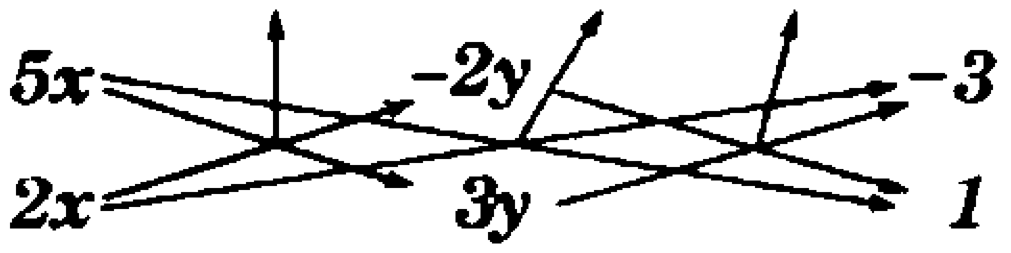
$$(3x + 2y + 2)(2x + 3y + 1)$$

EJEMPLO 3 :

Factorizar : $P_{(x;y)}=10x^2+11xy-6x^2-x-11y-3$

RESOLUCIÓN :

$$10x^2+11xy-6y^2-x-11y-3$$



* Descomponiendo en aspas simples :

$$\Rightarrow P(x;y)=(5x-2y-3)(2x+3y+1)$$

ASPA DOBLE ESPECIAL

Será posible aplicar a los polinomios que presentan la siguiente forma general :

$$P(x)=Ax^{4n}+Bx^{3n}+Cx^{2n}+Dx^n+E$$

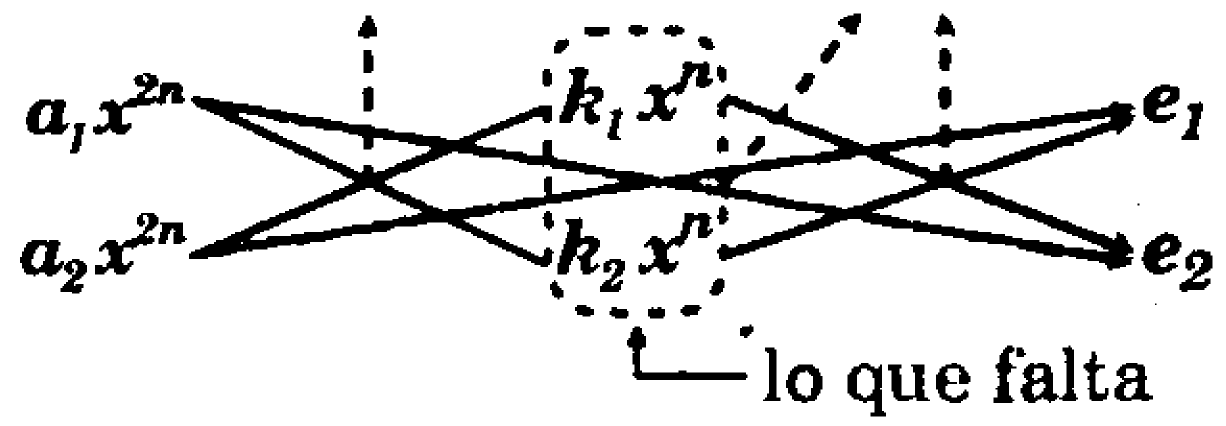
De manera particular, si $n = 1$ tendremos el polinomio de 4^{to} grado.

* Procedimiento para factorizar :

I) Se ordena de acuerdo a la forma general, colocando cero en el lugar del término que falta.

II) Se descompone adecuadamente los extremos buscando mediante un aspa simple, aproximarse al término central.

Así : $Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$



* Se debe tener *(SDT)* : Cx^{2n}
* Se tiene *(ST)* : $(a_1e_2+a_2e_1)x^{2n}$
* Falta : $(C-a_1e_2-a_2e_1)x^{2n}=Kx^{2n}$

III) Lo que falta se descompone en la parte central buscando aspas simple a ambos lados.

IV) Los factores se toman en forma horizontal

$$(a_1x^{2n}+k_1x^n+e_1)(a_2x^{2n}+k_2x^n+e_2)$$

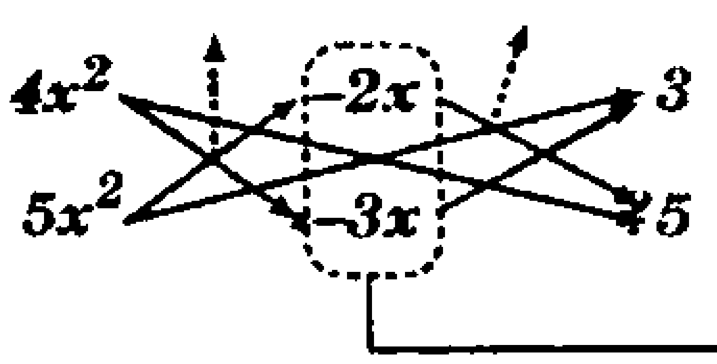
EJEMPLO 1 :

Factorizar : $f(x)=20x^4+2x^3-11x^2+19x-15$

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo en factores los términos extremos:

$$f_{(x)}=20x^4+2x^3-11x^2+19x-15$$



SDT: $-11x^2$
ST : $-6x^2$
Falta: $-5x^2$

$$\Rightarrow f(x)=(4x^2-2x+3)(5x^2+3x-5)$$

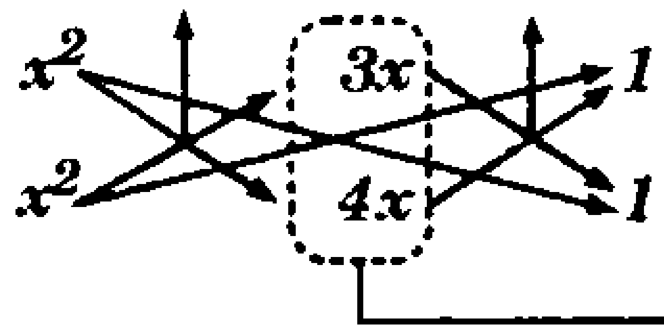
EJEMPLO 2 :

Factorizar : $P(x)=x^4+7x^3+14x^2+7x+1$

RESOLUCIÓN :

* Descomponiendo los extremos :

$$x^4+7x^3+14x^2+7x+1$$



SDT: $14x^2$
ST : $2x^2$
Falta: $12x^2$

$$\Rightarrow P(x)=(x^2+3x+1)(x^2+4x+1)$$

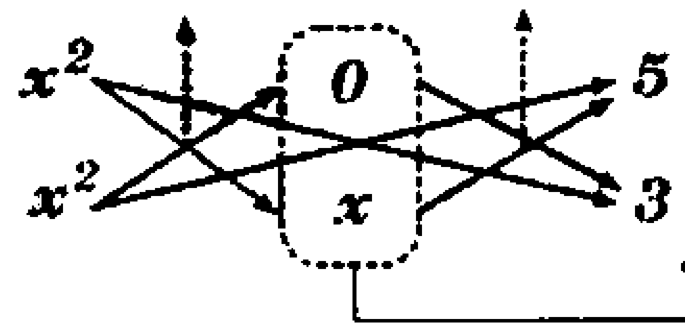
EJEMPLO 3 :

Factorizar : $f(x)=x^3(x+1)+2x^2+5(x-3)$

RESOLUCIÓN :

* Efectuando y ordenando de acuerdo a la forma general

$$S_{(x)}=x^4+x^3+2x^2+5x+15$$



SDT: $2x^2$
ST : $2x^2$
Falta: $0x^2$

$$\Rightarrow S(x)=(x^2+0x+5)(x^2+x-3)$$

$$\Rightarrow S(x)=(x^2+5)(x^2+x-3)$$

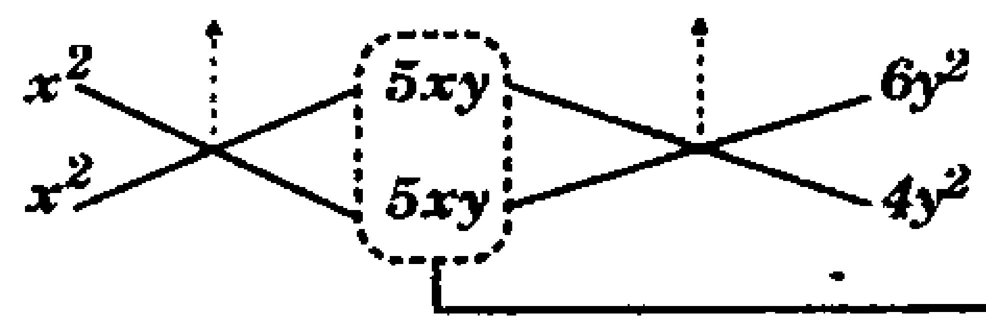
EJEMPLO 4 :

Factorizar :

$$P(x,y)=x^4-10x^3y+35x^2y^2-50xy^3+24y^4$$

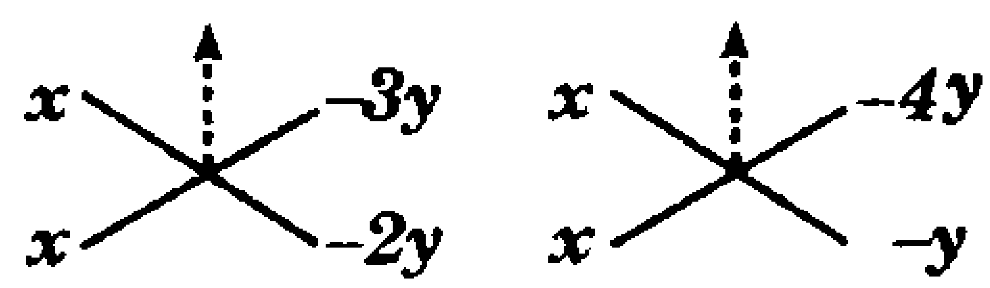
RESOLUCIÓN :

$$P_{(x,y)}=x^4-10x^3y+35x^2y^2-50xy^3+24y^4$$



SDT: $35x^2y^2$
ST : $10x^2y^2$
Falta: $25x^2y^2$

$$\Rightarrow P_{(x,y)}=(x^2-5xy+6y^2)(x^2-5xy+4y^2)$$



$$\Rightarrow P(x,y)=(x-3y)(x-2y)(x-4y)(x-y)$$

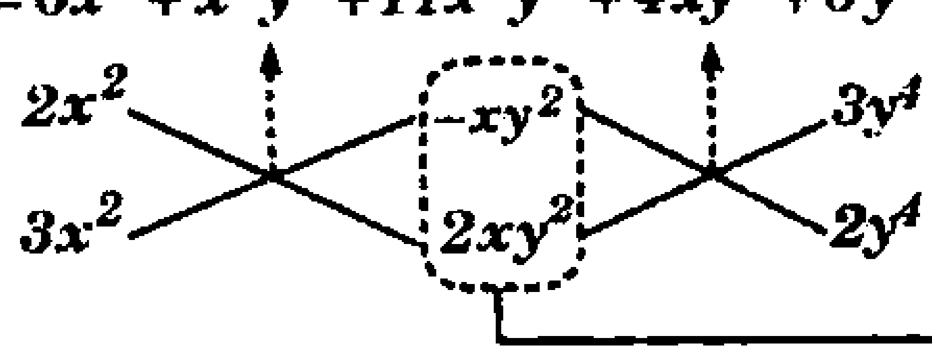
EJEMPLO 5 :

Factorizar : $P(x,y)=x^4+6y^8+4xy^6+11x^2y^4+x^3y^2$

RESOLUCIÓN :

* Ordenando para el aspa doble especial :

$$P_{(x,y)}=6x^4+x^3y^2+11x^2y^4+4xy^6+6y^8$$



SDT: $11x^2y^4$
ST : $13x^2y^4$
Falta: $-2x^2y^4$

$$\Rightarrow P(x,y)=(2x^2-xy^2+3y^4)(3x^2+2xy^2+2y^4)$$

OBSERVACIÓN :

1) No todos los polinomios de 4^{to} grado se pueden factorizar por doble aspa.

2) Si el polinomio de 4^{to} grado es factorizable por doble aspa, debe observarse si cada factor cuadrático es factorizable.

3) El trinomio : $ax^2+bx+c=0$ se puede factorizar, si su discriminante $(\Delta=b^2-4ac)$ es un cuadrado perfecto.

FACTORIZACIÓN POR DIVISORES BINÓMICOS

Este método se basa en el criterio del teorema del resto

I) Si : $P(x)$ es divisible entre $(x-a)$ entonces $P(a)=0$

II) Si : $P(x)$ es divisible entre $(x+b)$ entonces $P(-b)=0$

Observando en forma inversa :

I) Si : $P(a)=0$; entonces un factor es $(x-a)$

II) Si : $P(-b)=0$; entonces un factor es $(x+b)$

CASO DE POLINOMIOS MÓNICOS

El polinomio mónico se caracteriza porque el coeficiente de su máxima potencia es igual a la unidad.

1) Se hallan todos los divisores del término independiente del polinomio $P(x)$ a factorizar ; los divisores se consideran con el signo más y menos.

2) Cada divisor con signo $(+)$ o signo $(-)$ se evalúa en $P(x)$, si alguna de las evaluaciones vale cero, hemos encontrado un factor lineal.

3) Se recomienda encontrar una cantidad de ceros igual al grado del polinomio $P(x)$ menos dos.

EJEMPLO 1 :

Factorizar : $P_{(x)}=x^3-7x+6$

RESOLUCIÓN :

I) Los posibles ceros racionales son $\pm\{1;2;3;6\}$

Veamos : $P(1)=1-7+6=0 \Rightarrow (x-1)$ es un factor.

II) El otro factor por la regla de Ruffini :

$[P(x)\div(x-1)]$

	1	0	−7	6
$x=1$	↓	1	1	−6
	1	1	−6	0

$q_{(x)}$ (coeficientes 1, 1, −6)

* Recordar $P(x)\equiv(x-1)q(x)$

$$\Rightarrow P_{(x)}=(x-1)(x^2+x-6)$$

x 3

x −2

$$\Rightarrow P_{(x)}=(x-1)(x+3)(x-2)$$

EJEMPLO 2 :

Factorizar : $f_{(x)}=x^4-2x^3-16x^2+2x+15$

RESOLUCIÓN :

* Nótese que el polinomio es de cuarto grado, entonces

I) Los divisores del término independiente "*15*" son $\pm(1,3,5,15)$.

II) Evaluando :

A) $f_{(1)}=1-2-16+2+15=0$ entonces, un factor es : $(x-1)$

B) $f_{(-1)}=(-1)^4-2(-1)^3-16(-1)^2+2(-1)+15$

$\Rightarrow f_{(-1)}=0$; entonces, otro factor lineal es : $(x+1)$

III) Por la regla de Ruffini :

$x-1=0$	1	−2	−16	+2	+15
$x=1$	↓	1	−1	−17	−15
$x+1=0$	1	−1	−17	−15	0
$x=-1$	↓	−1	+2	+15	
	1	−2	−15	0	

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-2x-15)$

* El factor cuadrático es más fácil de factorizar, obteniéndose :

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-5)(x+3)$$

EJEMPLO 3 :

Factorizar : $f_{(x)}=x^3+3x^2-x-6$

RESOLUCIÓN :

* Recuerda que : Si el primer coeficiente es la unidad (polinomio mónico), se trabaja con los divisores del término independiente.

Así, al factorizar: (x^3+3x^2-x-6); notamos que es mónico, luego planteamos: $\pm(1;2;3;6)$

* Probando :

	1	3	−1	−6
$x=2$	↓	−2	−2	6
	1	1	−3	0 → *división exacta*

* Entonces : $f_{(x)}=(x+2)(x^2+x-3)$

EJEMPLO 4 :

Factorizar : $R_{(x)}=x^3-x-6$

RESOLUCIÓN :

* Los divisores del término independiente son:

$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6$

* Para $x=2$, se anula el polinomio; veamos : $2^3-2-6=0$
* Entonces tendrá un factor $(x-2)$
* Luego por Ruffini :

	1	0	–1	–6
2	↓	2	4	6
	1	2	3	0

* Finalmente : $R_{(x)}=(x-2)(x^2+2x+3)$

EJEMPLO 5 :

Factorizar : $A_{(x)}=x^5+5x^4+7x^3-x^2-8x-4$

RESOLUCIÓN :

* Los divisores del término independiente son: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4$
* Se anula para : $x=1;\ \ x=-2\ \ $ y $\ \ x=-1$
* Aplicando Ruffini tres veces :

	1	5	7	–1	–8	–4
1	↓	1	6	13	12	4
	1	6	13	12	4	0
–2	↓	–2	–8	–10	–4	
	1	4	5	2	0	
–1	↓	–1	–3	–2		
	1	3	2	0		

* Luego :

$$A_{(x)}=(x-1)(x+2)(x+1)(x^2+3x+2)$$

$$\begin{array}{ccc} x & \diagup\!\!\!\diagdown & 2 \\ x & & 1 \end{array}$$

$$A_{(x)}=(x-1)(x+2)(x+1)(x+2)(x+1)$$

* Finalmente : $A_{(x)}=(x-1)(x+2)^2(x+1)^2$

CASO DE POLINOMIOS NO MÓNICOS

Sea $P(x)$ el polinomio a factorizar :

1) Se hallan los divisores correspondientes al término independiente de $P(x)$ y los divisores correspondientes al coeficiente de la máxima potencia.

2) Los divisores a evaluar son los divisores del término independiente más las fracciones que se obtienen al dividir los divisores del término independiente entre los divisores del coeficiente de la máxima potencia.

EJEMPLO 1 :

Factorizar : $3x^3+7x^2-4$

RESOLUCIÓN :

1) Los posibles valores que anulan al polinomio son:

$$-\frac{4}{3}\ \begin{array}{l}\Rightarrow \textit{Divisores de 4}: \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 4 \\ \Rightarrow \textit{Divisores de 3}: \pm 1;\ \text{y}\ \pm 3\end{array}$$

Luego los posibles valores serán :

$$\pm 1;\ \pm 1/3;\ \pm 2;\ \pm 2/3;\ \pm 4\ \ \text{y}\ \pm 4/3$$

2) Probando con : $\boxed{x=1}$

$\Rightarrow 3x^3+7x^2-4=3(1)^3+7(1)^2-4=3(1)+7(1)-4=6$

$\Rightarrow (x-1)$ No es factor del polinomio

Probando con $\boxed{x=-1}$

$\Rightarrow 3x^3+7x^2-4=3(-1)^3+7(-1)^2-4=3(-1)+7(1)-4=0$

$\Rightarrow (x-1)$ si es factor del polinomio

3) Dividimos $3x^3+7x^2-4$ entre $(x+1)$

Ordenamos y completamos el polinomio, o sea :

$$3x^3+7x^2+0x-4$$

Aplicando Ruffini, obtenemos :

	3	+7	0	–4
–1	↓	–3	–4	+4
	3	+4	–4	0

Divisor → $3x^2+4x-4$

* Sabemos que :

$$\frac{\textit{Dividendo}}{3x^3+7x^2-4}=\frac{\textit{Divisor}}{(3x^2+4x-4)}\times\frac{\textit{Cociente}}{(x+1)}$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & \diagup\!\!\!\diagdown & -2 \\ x & & +2 \end{array}$$

$$=(3x-2)(x+2)(x+1)$$

$$\Rightarrow 3x^3+7x^2-4=(3x-2)(x+2)(x+1)$$

EJEMPLO :

Factorizar : $P_{(x)}=2x^3+x^2+x-1$

RESOLUCIÓN :

* Recuerda que :

Si no es mónico el polinomio, usaremos opcionalmente

$$\pm\frac{\textit{Divisores del término independiente}}{\textit{Divisores del coeficiente principal}}$$

* Así al factorizar :

$$(2x^3+x^2+x-1)$$

Planteamos, luego : $\pm\left(1; \frac{1}{2}\right)$

* Al usar el esquema, una vez agotados los valores enteros: $(+1; -1)$ no genera división exacta entonces probamos :

	2	1	1	−1
$x=\frac{1}{2}$	↓	1	1	1
	2	2	2	0 → ¡Importante! división exacta

* Finalmente :

$$P_{(x)}=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$$

$$\Rightarrow P_{(x)}=\left(\frac{2x-1}{2}\right)2(x^2+x+1)=(2x-1)(x^2+x+1)$$

EJEMPLO 3 :

Factorizar : $E_{(x)}=2x^3+3x^2+3x+1$

* Como el polinomio no es mónico se plantea :

$$\pm\left\{\frac{1}{1;\,2}\right\}=\pm 1;\ \pm\frac{1}{2}$$

* Para : $x=-\frac{1}{2}$ se anula, entonces tendrá un factor $(2x+1)$:

	2	3	3	1
$-\frac{1}{2}$	↓	−1	−1	−1
	2	2	2	0

$$\Rightarrow E_{(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)$$

$$\Rightarrow E_{(x)}=\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left[2(x^2+x+1)\right]$$

* Luego : $E_{(x)}=(2x+1)(x^2+x+1)$

EJEMPLO 4:

Factorizar : $R_{(x)}=12x^3+8x^2-3x-2$

RESOLUCIÓN :

* $R_{(x)}$ no es mónico, se plantea :

$$\pm\left\{\frac{1;\,2}{1;\,2;\,3;\,4;\,6;\,12}\right\}=\pm\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ldots\right\}$$

* Para : $x=\frac{1}{2}$ se anula, luego :

	12	8	−3	−2
$\frac{1}{2}$	↓	6	7	2
	12	14	4	0

$$\Rightarrow R_{(x)}=\left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^2+14x+4)$$

$$\Rightarrow R_{(x)}=\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left[2(6x^2+7x+2)\right]$$

$$\Rightarrow R_{(x)}=(2x-1)(6x^2+7x+2)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 2 \\ 2x & & 1 \end{array}$$

* Finalmente : $R_{(x)}=(2x-1)(3x+2)(2x+1)$

EJEMPLO 5:

Factorice : $P(x)=x^3-7x+6$

RESOLUCION :

Como el polinomio es MÓNICO, los posibles ceros racionales vendrán dados exclusivamente por los divisores del término independiente 6.

Es decir : $P.C.R.=\pm\{1, 2, 3, 6\}$

Evaluando, se obtienen directamente los tres ceros racionales de la expresión.

Veamos :

$x=1$: $P(1)=(1)^3-7(1)+6=0$

Por lo tanto, $(x-1)$ es un factor.

$x=2$: $P(2)=(2)^3-7(2)+6=0$

Se obtiene, $(x-2)$ como otro factor.

$x=-3$: $P(-3)=(-3)^3-7(-3)+6=0$

resulta como tercer factor $(x+3)$

finalmente : $P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

EJEMPLO 6 :

Factorice : $P(x)=6x^3+17x^2+x-10$

RESOLUCION :

$$P.C.R.=\pm\left\{\frac{\text{Divisores de }10}{\text{Divisores de }6}\right\}=\pm\left\{\frac{1;\,2;\,5;\,10}{1;\,2;\,3;\,6}\right\}$$

$$P.C.R.=\pm\left\{1;\ 2;\ 5;\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{10}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{5}{6}\right\}$$

Evaluando, para el valor entero (-1) así :

$$x=-1:\ P(-1)=6(-1)^3+17(-1)^2+(-1)-10=0$$

Por lo tanto, $(x+1)$ es un factor de $P(x)$.

Es decir : $P(x)=(x+1)F(x)\Leftarrow$ segundo grado

Para determinar el otro factor $F(x)$, aplicamos la regla de Ruffini, debido a que $F(x)$ es el cociente de la división indicada :

$P(x)=(x+1)F(x)\Leftarrow$ segundo grado $\frac{P(x)}{x+1}$.

	6	17	1	−10
−1	↓	−6	−11	10
	6	11	10	0

$$\underbrace{6\quad 11\quad 10}_{F}$$

Luego: $P(x)=(x+1)\ (6x^2+11x-10)$

$3x \quad -2$
$2x \quad +5$

$P(x) = (x+1)(3x-2)(2x+5)$

Observar que estos últimos factores se generan a partir de los ceros racionales $2/3$ y $-5/2$, que son elementos del *P.C.R.*

EJEMPLO 7 :

Factorice :

$P(x)=8x^5-14x^4-15x^3+20x^2+7x-6$

RESOLUCION :

$P.C.R. = \pm\left\{\dfrac{Divisores\ de\ 6}{Divisores\ de\ 8}\right\} = \pm\left\{\dfrac{1;\ 2;\ 3;\ 6}{1;\ 2;\ 4;\ 8}\right\}$

$P.C.R. = \pm\left\{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{3}{8}\right\}$

Evaluando para $x = 1$:

$P(1)=8(1)^5-14(1)^4-15(1)^3+20(1)^2+$
$+7(1)-6=0$

Por lo tanto; $(x-1)$ es un factor de $P(x)$.

Es decir :

$P(x)=(x-1)\ F(x) \Leftarrow$ cuarto grado

Aplicando la Regla de Ruffini como en el ejemplo anterior, se tiene :

	8	-14	-15	20	7	-6
1	↓	8	-6	-21	-1	6
	8	-6	-21	-1	6	0

F

Luego :

$P(x)=(x-1)[8x^4-6x^3-21x^2-x+6]$

$4x^2 \quad +7x \quad 3$
$2x^2 \quad -5x \quad 2$

Tomando horizontalmente los factores de F :

$P(x)=(x-1)(4x^2+7x+3)(2x^2-5x+2)$

$4x \quad 3 \qquad 2x \quad -1$
$x \quad 1 \qquad x \quad -2$

Finalmente :

$P(x)=(x-1)(4x+3)(x+1)(2x-1)(x-2)$

Observar que los últimos factores obtenidos se generan de los ceros racionales $-3/4$, -1 , $1/2$ y 2, que son elementos del *P.C.R.*

EJEMPLO 8 :

Factorice :

$P(x)=x^6-2x^5-x^4+x^3+2x^2+x-2$

RESOLUCION :

Como el polinomio es MÓNICO, los posibles ceros racionales vendrán dados por los divisores del término independiente (-2).

Es decir: $P.C.R. = \pm\ \{1;\ 2\}$

Por simple inspección, se observa que :

$P(1) = 0 \ \text{ y } \ P(-1) = 0$

Entonces, $(x-1)$ y $(x+1)$ son factores de $P(x)$.

Es decir :

$P(x)=(x-1)(x+1)\ F(x) \Leftarrow$ cuarto grado

Aplicando dos veces la Regla de Ruffini, sobre un mismo diagrama, se tiene:

	1	-2	-1	1	2	1	-2
1	↓	1	-1	-2	-1	1	2
	1	-1	-2	-1	1	2	0
-1	↓	-1	2	0	1	-2	
	1	-2	0	-1	2	0	

F

Luego :

$P(x)=(x-1)(x+1)[x^4-2x^3-x+2]$

Como el polinomio cuártico es simple, factoricémoslo por agrupación de términos, así:

$P(x)=(x-1)(x+1)[x^3(x-2)-(x-2)\ ]$

$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)[x^3-1]$

Como : $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Se obtiene finalmente :

$P(x)=(x-1)^2(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

EJEMPLO 9 :

Factorice :

$P(x)=8x^7-46x^5+48x^4-73x^3+60x^2$
$+21x-18$

RESOLUCION :

luego de determinar los *P.C.R.*, seguidamente empezamos a evaluar el polinomio, obteniéndose:

$P(1)=0 \ ; \quad P(2)=0 \ ; \quad P(-3)=0$

Por lo tanto, $(x-1)$; $(x-2)$ y $(x+3)$ son factores de $P(x)$.

Es decir :

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)F(x) \Leftarrow$ cuarto grado

Aplicando tres veces la regla de Ruffini, sobre un mismo diagrama, resulta :

	8	0	-46	48	-73	60	21	-18
1	↓	8	8	-38	10	-63	-3	18
	8	8	-38	10	-63	-3	18	0
2	↓	16	48	20	60	-6	-18	
	8	24	10	30	-3	-9	0	
-3	↓	-24	0	-30	0	9		
	8	0	10	0	-3	0		

F

Luego :

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)[8x^4+10x^2-3]$

$4x^2 \quad -1$
$2x^2 \quad +3$

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)(4x^2-1)$
$(2x^2+3)$

Descomponiendo el cuarto factor, por diferencia de cuadrados, resulta :

$P(x)=(x-1)(x-2)(x+3)(2x+1)$
$(2x-1)(2x^2+3)$

CRITERIOS PARA APLICAR ARTIFICIOS

CAMBIO DE VARIABLE

Nos permite encontrar una expresión equivalente más sencilla, para lo cual la parte repetitiva de la expresión original, se debe SUSTITUIR por una nueva variable simple.

EJEMPLO 1 :

Factorice:

$P_{(x)} = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

RESOLUCION :

Formando el desarrollo del cubo de un binomio:

$P_{(x)} = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 1$

$P_{(x)} = (x+1)^3 + 1$

Sustituyendo: $x + 1 = a$

Resulta como equivalente:

$P = a^3 + 1$

Por teoría:

$$P = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

Regresando a su variable original, se tiene:

$$P_{(x)} = [(x+1)+1][(x+1)^2-(x+1)+1]$$

Por lo tanto:

$$P_{(x)} = (x+2)(x^2+x+1)$$

EJEMPLO 2 :

Factorice:

$$F_{(a)} = (a+3)^2 + 2a + 7$$

RESOLUCION :

Formando la expresión repetitiva $(a+3)$, así:

$$F_{(a)} = (a+3)^2 + 2(a+3) + 1$$

Sustituyendo: $a + 3 = h$

Resulta: $F = h^2 + 2h + 1$

hemos obtenido un trinomio cuadrado perfecto: $F = (h+1)^2$

Regresando:

$$F_{(a)} = (a+3+1)^2 = (a+4)^2$$

EJEMPLO 3 :

Factorice:

$$R_{(m)} = (m^2+5m+5)^2 - 12m(m+5) - 49$$

RESOLUCION :

Efectuando convenientemente el *2do*. grupo de términos y descomponiendo:

$$-49 = -60 + 11.$$

Se tendrá:

$$R_{(m)} = (m^2+5m+5)^2 - 12(m^2+5m) - 60 + 11$$

factorizando *(–12)* en la demarcación, resulta:

$$R_{(m)} = (m^2+5m+5)^2 - 12(m^2+5m+5) + 11$$

Sustituyendo: $m^2 + 5m + 5 = x$

Se obtiene: $R = x^2 - 12x + 11$

(Polinomio de Stevin)

Es decir:

$$R = x^2 + (-11-1)x + (-11)(-1)$$

Por lo tanto: $R = (x-11)(x-1)$

Regresando:

$$R_{(m)} = (m^2+5m+5-11)(m^2+5m+5-1)$$

$$R_{(m)} = (m^2+5m-6)(m^2+5m+4)$$

De nuevo, dos polinomios de Stevin:

$$R_{(m)} = (m+6)(m-1)(m+1)(m+4)$$

SUMAR Y RESTAR SIMULTÁNEAMENTE

PARA POLINOMIOS DE GRADO PAR

Se trata de sumar y restar un mismo término en un polinomio, con la finalidad de formar un trinomio cuadrado perfecto *(TCP)*, para luego expresar dicho polinomio, como una diferencia de cuadrados.

EJEMPLO 1 :

Factorice:

$$P_{(x)} = x^4 - 6x^2 + 25$$

$\sqrt{\;}\downarrow\ x^2 \qquad \sqrt{\;}\downarrow\ 5$

$$T_c = 2(x^2)(5) = 10x^2$$

⇒ Debemos sumar y restar $10x^2$, así:

$$P_{(x)} = \underbrace{x^4 + 10x^2 + 25}_{T.C.P.} - 6x^2 - 10x^2$$

$$P(x) = (x^2+5)^2 - (4x)^2$$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados:

$$P_{(x)} = (x^2+5+4x)(x^2+5-4x)$$

ordenando:

$$P_{(x)} = (x^2+4x+5)(x^2-4x+5)$$

EJEMPLO 2 :

Factorice: $F_{(a,b)} = a^4 + 4b^4$

$\sqrt{\;}\downarrow\ a^2 \qquad \sqrt{\;}\downarrow\ 2b^2$

$$T_c = 2(a^2)(2b^2) = 4a^2b^2$$

⇒ Sumando y restando $4a^2b^2$, se tiene:

$$F_{(a,b)} = \underbrace{a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4}_{T.C.P.} - 4a^2b^2$$

$$F(a,b) = (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2$$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados:

$$F_{(a,b)} = (a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$$

ordenando, se tiene:

$$F_{(a,b)} = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$$

EJEMPLO 3 :

Factorice: $R_{(m)} = 10000m^8 + 4m^4 + 1$

$\sqrt{\;}\downarrow\ 100m^4 \qquad \sqrt{\;}\downarrow\ 1$

$$T_c = 2(100m^4)(1) = 200m^4$$

⇒ Sumando y restando $200m^4$, resulta:

$$R_{(m)} = \underbrace{10000m^8 + 200m^4 + 1}_{T.C.P.} + 4m^4 - 200m^4$$

$$R_{(m)} = (100m^4+1)^2 - (14m^2)^2$$

$$R_{(m)} = (100m^4+1+14m^2)(100m^4+1-14m^2)$$

Finalmente :

$$R_{(m)} = (100m^4+14m^2+1)(100m^4-14m^2+1)$$

PARA POLINOMIOS DE GRADO IMPAR

Luego de sumar y restar un término, se debe agrupar convenientemente. Para esto, será necesario considerar las siguientes equivalencias:

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

EJEMPLO 1 :

Factorice : $P_{(x)} = x^5 + x + 1$

RESOLUCION :

Restando y sumando x^2, se tiene :

$$P_{(x)} = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$$

$$P_{(x)} = x^2(x^3-1) + (x^2+x+1)$$

$$P_{(x)} = x^2(x-1)(x^2+x+1) + (x^2+x+1)$$

Extrayendo el $FCP = x^2 + x + 1$, se tiene :

$$P_{(x)} = (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$$

Efectuando :

$$P_{(x)} = (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

EJEMPLO 2 :

Factorice : $P_{(x)} = x^5 + x^4 + 1$

RESOLUCION :

Restando y sumando x^2, se tiene :

$$P_{(x)} = x^5 - x^2 + x^4 + x^2 + 1$$

$$P_{(x)} = x^2(x^3-1) + (x^4+x^2+1)$$

$P_{(x)} = x^2 (x-1)(x^2+x+1) +$
$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Extrayendo el $FCP = x^2 + x + 1$, resulta :

$P_{(x)}=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+(x^2-x+1]$

Por lo tanto :

$P_{(x)} = (x^2+x+1)(x^3-x+1)$

EJEMPLO 3 :

Factorice : $P_{(x)} = x^7 + x^2 + 1$

RESOLUCION :

Restando y sumando x^4, tal como sigue :

$P_{(x)} = x^7 - x^4 + x^4 + x^2 + 1$
$P_{(x)} = x^4(x^3-1) + (x^4+x^2+1)$
$P_{(x)} = x^4(x-1)(x^2+x+1) +$
$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Extrayendo el $FCP = x^2 + x + 1$, resulta :

$P_{(x)}=(x^2+x+1)[x^4(x-1)+(x^2-x+1]$

Finalmente :

$P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$

EJEMPLO 4 :

Factorice : $P_{(x)} = x^7 + x^5 + 1$

RESOLUCION :

Restando y sumando x^4, se tiene :

$P_{(x)} = x^7 - x^4 + x^5 + x^4 + 1$
$P_{(x)} = x^4(x^3-1) + (x^5+x^4+1)$

Recordando el ejemplo 2, se muestra :

$P_{(x)} = x^4(x-1)(x^2+x+1) +$
$+(x^2+x+1)(x^3-x+1)$

Extrayendo el $FCP=x^2+x+1$, queda:

$P_{(x)}=(x^2+x+1)[x^4(x-1)+ (x^3-x+1]$

Reduciendo :

$P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$

Reduciendo :

$P_{(x)}=(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^3-x+1)$

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Factorizar

- $m + m^2 =$

$25a^6b^3 + 15a^3b^6 =$

$49x^6y^8 - 21x^9y^4 =$

02 Factorizar:

$(x+2)(a-2)-(a-2)(x-2)$

A) $(a-2)(2x+4)$ B) $4(a-2)$
C) $2x(a-2)$ D) $4x(a-2)$
E) $(a-2)(x+4)$

03 Factorizar:

$(a+b)(x+1)-(x+1)(2a-b)$

A) $(2a-b)(x+1)$ B) $(3a-b)(x+1)$
C) $(x+1)(2a-b)$ D) $(x+1)(2b+a)$
E) $(x+1)(2a-b)$

04 Factorizar:

$3m^2 - 6mn + 4m - 8n$

A) $(m-2n)(3m+4$
B) $(m-2n)(2m-2)$
C) $(2m-n)(4m-3)$
D) $(m+n)(3m-2)$
E) $(2m-2n)(m-3)$

05 Factorizar:

$6y - 4x - 3xy + 2x^2$

A) $(3y-2x)(2-x)$
B) $(3x-2y)(x-1)$
C) $(4x-5y)(2-x)$
D) $(x+y)(2-y)$
E) $(4-2x)(x-2)$

06 Factorizar: $a^2 + 5a - 300$

A) $(a+15)(a+20)$ B) $(a-15)(a+20)$
C) $(a-15)(a-20)$ D) $(a-12)(a+30)$
E) $(a+10)(a-30)$

07 Factorizar: $3x^2 + 7xy + 4y^2$

A) $(3x+y)(x-4)$
B) $(3x+4y)(x+y)$
C) $(x+4y)(x+y)$
D) $(x+y)(3x+y)$
E) $(3x-y)(x+4)$

08 ¿Cuántos factores primos se obtienen al factorizar

$P(m) = m^4 - 13m^2 + 36$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

09 Factorizar el polinomio:

$P(x) = a^2x^2 - abx^2 + bx^2$

A) $x^2(a^2-ab)$ B) $x^2(a^2-ab+b)$
C) $x^2(a^2+b)$

10 Factorizar:

$Q(x;y) = x^2y^5 - 2x^4y^3 + xy^4$

A) $xy(x^2-2xy+1)$
B) $x^3y(xy-2y^2+y)$
C) $xy^3(xy^2-2x^3+y)$

11 Factorizar:

$P(x) = 36x^4 - 20x^2 + 12x^3$

A) $12x^2(3x^2-a+2x)$
B) $4x^2(9x^2-5+3x)$
C) $8x^2(5x-1+2x^2)$

12 Factorizar:

$Q(a;b) = x(a+b) - y(a+b) + (a+b)$

A) $(a+b)(x-y)$
B) $(a+b)(x-y+1)$
C) $(a+b)(x-y-1)$

13 Indicar un factor primo al factorizar:

$P(x;y) = x^2 + xy - x - y$

A) $(x+1)$ B) $(x-y)$ C) $(x-1)$

14 Factorizar: $P(x) = 16 - x^2$

A) $(x+4)(x+4)$ B) $(4+x)(4-x)$
C) $(8+x)(8-x)$

15 Factorizar:

$P(a;b) = a^4 + 10a^2 + 25$

A) $(a^2+10)(a^2+5)$
B) $(a+5)(a-5)$
C) $(a^2+5)(a^2+5)$

16 Factorizar: $P(x) = 1 - 8x^3$

A) $(1-2x)(1-2x+4x^2)$
B) $(1+2x)(1+2x+x^2)$
C) $(1-2x)(1+2x+4x^2)$

17 Indicar un factor primo:

$P(a;b) = a^3b + 2a^2b^2 + ab^3$

A) (a^2+1) B) $(a+b)$ C) (a^2+b)

18 Factorizar:

$12a^2b^5 + 20ab^3 - 8a^5b^2$

A) $4ab(3ab^4+5b^2-2a^4b)$
B) $4ab^2(3ab^3+5b-2a^4)$
C) $2ab(6ab^4+10b^2-4a^4b)$
D) $4a^2b^2(5ab^4-3b^2+5ab)$
E) $2ab^2(3a^2b^3-3b^2-2a^4)$

19 Factorizar: $9a^2 - 10a + 1$

A) $(9a+1)(a+1)$ B) $(9a-2)(a+4)$
C) $(9a-1)(a+10)$ D) $(9a-1)(a-1)$
E) $(9a+1)(2a+1)$

20 Factorizar: $6x^2 - 11x - 10$

A) $(3x+2)(2x+5)$ B) $(3x-2)(2x-5)$
C) $(3x+1)(2x-5)$ D) $(3x-1)(2x+5)$
E) $(3x+2)(2x-5)$

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Factorizar: $6x^2 - 5xy - 6y^2$

A) $(3x + 2y)(2x - 3y)$
B) $(3x - 2y)(2x - 3)$
C) $(2x + 3y)(4x - 8)$
D) $(3x + 2y)(3y + 1)$
E) $(2x - 3y)(2x - 5)$

02 Luego de factorizar:

$$x^2 + 20x + 99 \wedge x^2 + 12x + 27$$

Indicar el factor que es común para ambos polinomios.

A) $x + 3$ B) $x - 9$ C) $x + 9$
D) $x + 11$ E) $x - 11$

03 Factorizar: $P(x) = x^5 - 9x^3$

A) $x(x+3)(x-3)$
B) $x^3(x+2)(x-2)$
C) $x^3(x+3)(x-3)$

04 Factorizar:

$$P(x) = 5x^2 + 23x + 12$$

A) $(5x+2)(x+6)$
B) $(3x+10)(x+2)$
C) $(5x+3)(x+4)$

05 Factorizar:

$$P(x;y) = 5x^4 - 22x^2y^2 + 8y^4$$

A) $(5x^2 - 4y^2)(x+y)(x-y)$
B) $(5x^2 - 2y^2)(x+2y)(x-2y)$
C) $(3x^2 + y^2)(5x+y)(5x-y)$

06 Al factorizar:

$$P(x) = x^4 - 26x^2 + 25$$

¿Cuántos factores primos se obtienen?

A) 2 B) 4 C) 6

07 Factorizar:

$$P(x;y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + 4x + 3y + 1$$

A) $(3x - y + 2)(x + y + 1)$
B) $(3x + y + 1)(x + 2y + 1)$
C) $(3x + 2y + 1)(x + y + 1)$

08 Calcular la suma de los términos independientes de los factores primos de:

$$P(x;y) = x^2 + 3xy - 10y^2 + 3x + 8y + 2$$

A) 3 B) 5 C) 7

09 Uno de los factores de

$E_{(x)} = x^2 - 22x + 117$ es:

A) $x + 9$ B) $x - 9$ C) $x + 7$
D) $x - 10$ E) $x - 11$

10 Indique el número de factores primos de

$$P_{(x)} = x^4 - 34x^2 + 225$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

11 Factorice

$Q_{(x)} = 5x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x - 3$, e indique la suma de los términos independientes de sus factores.

A) 3 B) –3 C) –2 D) 2 E) 1

12 Uno de los factores de

$P_{(x)} = x^3 - x^2 - 2x - 12$ es

A) $x - 3$ B) $x - 2$ C) $x^2 - 2$
D) $x + 2$ E) $x + 3$

13 Al factorizar

$Q_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, indique un factor.

A) $x - 1$ B) $x + 2$ C) $x + 6$
D) $x + 4$ E) $x + 3$

14 Indicar el número de factores primos de:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

15 Reconocer a los factores primos cuadráticos:

$$Q(x,y,z,w) = x^4z^4 - x^4w^4 - y^4z^4 + y^4w^4$$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

16 Con respecto al polinomio:

$$a(x-1) - b(1-x) + cx - c$$

Señale verdadero o falso:

I) $(a + b + c)$ es un factor primo.

II) $(x + 1)$ es un factor primo.

III) Sólo tiene dos factores primos.

A) VFV B) FVF C) VVV
D) FFF E) FFV

17 Factorizar:

$(n^2 + n - 1)^2 + (2n + 1)^2$, e indicar la suma de los términos independientes de sus factores primos.

A) 3 B) 2 C) 1 D) 4 E) 5

18 Hallar la suma de los factores primos de:

$$x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$$

A) $2x + a + b + c$ B) $3x + a + b + c$
C) $x + a - b - c$ D) $x - a - b - c$
E) $2x + a - b - c$

19 Cuántos factores primos tiene el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

20 Factorizar:

$$P(x) = 2x^2 + 5xy + 3y^2 + 3x + 2y - 5$$

A) $(2x + 3y + 1)(x + y + 5)$
B) $(2x - 3y + 5)(x - y + 2)$
C) $(2x + 3y + 5)(x + y - 1)$
B) $(2x + 3y - 1)(x - y + 5)$
E) $(2x - 3y - 1)(x - y + 5)$

21 Calcule la suma de términos independientes de los factores primos:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 5$$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

22 Calcule la suma de los términos independientes de los factores primos:

$$P(x;y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x - 7y + 6$$

A) 8 B) –5 C) –3 D) 3 E) 5

23 Al factorizar

$$P(x;y) = (x+y+3)^2 + 7x + 7y + 31$$

La suma de los factores primos es:

A) $2x + y + 13$
B) $2x + y + 10$
C) $2x + 2y + 13$
D) $2x + y + 15$
E) $2x + y + 18$

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Se define el polinomio P como:

$P(x) = (x+2)(x^2+3)(y+4)$ luego se puede afirmar:

( ) Tiene 2 factores primos

( ) $(y+4)$ es un factor algebraico

( ) (x^2+3) es un factor algebraico mónico

A) VFV B) FFF C) FVV

D) VVF *E) VVV*

02 De las siguientes alternativas, indique cuál de los polinomios se presenta factorizado:

A) a^3+ab B) $a^9-a^7b^2$

C) $a^7(a^2-b^2)$ D) $a^7(a+b)(a-b)$

E) Más de una es correcta

03 Si P es un polinomio definido por: $P(x)\equiv x(x+2)^2(x-2)$ ¿cuál de las alternativas no es un factor algebraico?

A) x^2+4x+4 B) x^2-4 C) x^2-2x

D) x^2-x E) x^3-4x

04 Determine el número de factores primos que presenta el polinomio P definido por:

$$P(x)\equiv x(x^2-9)(x-3)^2$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

05 Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x)\equiv x^3+nx+14$$

tal que un factor primo es $(x+2)$, halle el otro factor.

A) x^2+x+7 B) x^2-x-7 C) x^2-2x-7

D) x^2-2x+7 E) x^2+x-7

06 Sabiendo que: x^2+2x+3, es un factor algebraico de:

$$P(x)\equiv x^4+x^3+6x^2+mx+n$$

indique lo correcto:

A) $m+n=21$ B) $mn<0$ C) $m<0$

D) n es par E) $n-2m=1$

07 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) $P(x)\equiv x^2+4$, es un factor primo sobre $Z(x)$

( ) $Q(x)\equiv x^2-3$, es un factor primo sobre $Q'(x)$

( ) $R(x)\equiv x^3$, no es un factor primo sobre $Z(x)$

A) VFV B) VVF C) VFF

D) FFV E) FFF

08 Luego de factorizar:

$$P(a;b;c)\equiv a^2+2ab+b^2-c^6$$

indique un factor primo:

A) $a-b+c^3$ B) $a+b+c^2$

C) $a+b+c^3$ D) $a+b-c^3$

E) Más de una es correcta

09 Factorizar el polinomio:

$$P(x;y)\equiv x^3+x^2y-4xy^2-4y^3$$

e indique la suma de los factores primos.

A) $x+2y$ B) $2x+3y$ C) $x+3y$

D) $3x+y$ E) $3x+2y$

10 Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x;y)\equiv x^5-x^4y-2x^3y^2+2x^2y^3+xy^4-y^5$$

indique lo incorrecto.

A) $(x+y)$ es un factor

B) Tiene 2 factores primos

C) No tiene factor cuadrático

D) La suma de sus factores primos es $2x$

E) (x^2-y^2) es un factor

11 Calcule la suma de coeficientes de un factor primo, luego de factorizar el polinomio definido por:

$$P(x;y)\equiv 2x^6+x^3y^2-15y^4$$

A) 1 B) -1 C) 4 D) 5 E) 6

12 Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda, si:

$$Q(n)\equiv(n^2+3n-9)^2+n^2+3n-11$$

luego:

( ) $(n-5)$ es un factor algebraico

( ) (n^2+3n-7) es un factor primo

( ) Presenta dos factores primos lineales

A) FFV B) FVV C) FVF

D) VVF E) VFF

13 Factorizar el siguiente polinomio:

$$P(x)\equiv(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)-18$$

indique lo correcto:

A) Presenta 3 factores primos

B) Tiene 2 factores lineales

C) (x^2+x-6) es un factor

D) $(x^2-2x-17)$ es un factor primo

E) (x^2+x-9) es un factor

14 Calcule la suma de coeficientes de un factor primo, luego de factorizar el polinomio:

$$P(x)\equiv x^4+2x^3-3x^2-4x-12$$

A) 2 B) -3 C) 4 D) -1

E) Más de una es correcta

15 Indique como respuesta un factor de la suma de los factores Primos de:

$$Q(n)\equiv n^4+9n^2+25$$

A) n B) $n+1$ C) n^2+1

D) $n^2+2n+10$ E) $2n^2+10$

16 Un factor de:

$P(x)\equiv 2x^4+3x^3+4x^2+x-2$ es:

A) $2x^2+x+1$ B) $2x^2-x-1$ C) x^2+x-2

D) x^2+x+2 E) x^2-+x+2

17 Si P es un polinomio definido por: $P(x)\equiv x^3-2x^2-13x-10$

indique lo correcto (c) o incorrecto (i):

( ) Presenta 1 factor primo cuadrático

( ) Tiene 3 factores cuadráticos

( ) $(x+5)$ es un factor algebraico

A) ici B) icc C) iii D) cii E) cic

18 Si Q es un polinomio definido por: $Q(x)\equiv 2x^3+11x^2+17x+6$

calcule el valor numérico del factor primo no mónico para $x=3$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) -1

19 Se define el polinomio A como:

$$A(x)\equiv x^4-9x^3+21x^2-19x+6$$

indique el número de factores primos

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) Falta información

20 Luego de factorizar el polinomio:

$$Q(n)\equiv n^6+4n^4-10n^2-n+6$$

se obtiene "k" factores primos. Calcule $k+9$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)D	3)D	4)B	5)D	6)E	7)C	8)E	9)D	10)C
11)C	12)B	13)D	14)E	15)E	16)D	17)A	18)C	19)B	20)D

FRACCIONES ALGEBRAICAS

CAPITULO 080

OBJETIVOS :

* *Tener el conocimiento concreto de sus significados y de sus diversas aplicaciones, y paralelamente darnos cuenta que estos dos conceptos son consecuencia directa de la teoría de divisores y múltiplos de magnitudes analizadas en aritmética, pero que en nuestro curso las generalizaremos para monomios y polinomios tomados como magnitudes abstractas.*

* *También será útil para la reducción y simplificación de fracciones algebraicas racionales como instrumento operativo.*

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D)

Dado dos o más expresiones enteras de grados no nulos. El ***MCD*** de dichas expresiones, es otra expresión de MAYOR GRADO ABSOLUTO que está contenida exactamente en dichas expresiones enteras. Para determinar el ***MCD***, se factorizan las expresiones, luego este vendrá dado por el producto de los factores comunes elevados a sus menores exponentes.

EJEMPLO 1 :

Dados los monomios : $A=12x^5y^2z^6 \wedge B=18x^3y^4w^5$

como : $A=2^2.3x^5y^2z^6 \wedge B=2.3^2x^3y^4w^5$

Luego : $MCD(A\,;B) = 2.3x^3y^2$

Finalmente : $MCD(A\,;B) = 6x^3y^2$

El cual, es la expresión de mayor ***G.A.*** que está contenida en ***A*** y ***B*** simultáneamente.

EJEMPLO 2 :

Se tienen los polinomios :

$$P = 4x\ (x+1)^5\ (2x-1)\ (x^2+x-1)^4$$

$$Q = 5x^2\ (x+1)^3\ (2x+1)\ (x^2+x-1)^6$$

Resulta : $M.C.D.(P;Q) = x\ (x+1)^3\ (x^2+x-1)^4$

Siendo este polinomio, el de mayor ***G.A.*** que está contenida en las expresiones ***P*** y ***Q***.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M)

Dados dos o más expresiones enteras de grados no nulos. El ***MCM*** de dichas expresiones, es otra expresión de MENOR GRADO ABSOLUTO que contiene exactamente a dichas expresiones enteras. Para determinar el ***MCM***, se factorizan las expresiones, luego este vendrá dado por el producto de los factores comunes y no comunes elevados a sus mayores exponentes.

EJEMPLO 1 :

Dados los monomios: $A=160x^7y^3z^2 \wedge B=192x^4y^6w$

como : $A=2^5\times 5x^7y^3z^2 \wedge B=2^6\times 3x^4y^6w$

Luego : $MCM(A,B) = 2^6.3.5x^7y^6z^2w$

Finalmente: $MCM(A,B) = 960x^7y^6z^2w$

El cual, es la expresión de menor ***G.A.*** que contiene exactamente a ***A*** y ***B*** simultáneamente.

EJEMPLO 2 :

Se tienen los polinomios :

$$P = 5x^3(x+1)^2\ (3x+1)\ (x^2-x+1)^7$$

$$Q = 3x^2\ (x+1)^4\ (3x-1)\ (x^2-x+1)^5$$

Se obtiene :

$$MCM(P,\ Q) = 15x^3(x+1)^4(3x+1)(3x-1)(x^2-x+1)^7$$

Siendo este polinomio, el de menor grado absoluto que contiene a las expresiones ***P*** y ***Q***.

TEOREMA 1 :

Dados dos polinomios cualesquiera ***P*** y ***Q***, se cumple la siguiente identidad polinómica:

$$\boxed{P(x)\cdot Q(x) \equiv MCD(P,Q)\cdot MCM(P,Q)}$$

Demostración :

Sean : $P(x) \equiv A(x).B(x)$ .... (a)

$Q(x) \equiv A(x).C(x)$ .... (b)

Donde ***B*** y ***C*** son primos entre sí.

entonces : $MCD(P,\ Q) = A(x)$

$MCM(P,\ Q) = A(x).B(x).C(x)$

Multiplicando ***m.a.m.*** (a) y (b) :

$$P(x).Q(x) \equiv A(x).B(x).A(x).C(x)$$

Por la propiedad asociativa :

$$P(x).Q(x) \equiv A(x).[A(x).B(x).C(x)]$$

$$P(x).Q(x) \equiv MCD(P,\ Q).MCM(P,\ Q)$$

con lo cual queda demostrado.

EJEMPLO :

Dados dos polinomios P y Q, tales que :

$$MCD(P,Q)MCM(P,Q) \equiv (x^2-4)^5(x^2-1)^3$$

Si uno de ellos es $(x+2)^2(x-2)^4(x-1)^3$.

Hallar a que es equivalente el otro.

RESOLUCIÓN :

Por el Teorema I, se tiene :

$$P(x).Q(x) \equiv (x^2-4)^5(x^2-1)^3$$

Reemplazando el dato para Q, resulta :

$$P(x).(x+2)^2(x-2)^4(x-1)^3 \equiv (x+2)^5(x-2)^5(x+1)^3(x-1)^3$$

Simplificando se tiene :

$$P(x) = (x+2)^3(x-2)(x+1)^3$$

FRACCIÓN ALGEBRAICA

Es aquella expresión que tiene por lo menos una letra o variable con exponente positivo en el denominador.

*** Son fracciones algebraicas :***

$$\frac{1}{x-1};\ \frac{x-1}{x};\ \frac{x^2-1}{x^2+x-1}$$

*** No son fracciones algebraicas :***

$$\frac{x+2}{a};\ \frac{x^3-x^2+x-1}{3};\ \frac{x^2-1}{4}$$

OBSERVACIÓN :

I) Si el grado del numerador es menor que el denominador , *LA FRACCIÓN ES "PROPIA"*.

EJEMPLO :

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1};\ \frac{x+1}{x^3+x^2-1};\ \frac{a^3-2}{a^4+1};\ \frac{m^4-1}{m^5+1}$$

II) Si el grado el numerador es mayor que el denominador, *LA FRACCIÓN ES "IMPROPIA"*.

EJEMPLO :

$$\frac{x^4}{x^2-1};\ \frac{x^2-1}{x-1};\ \frac{x^6-x^3-1}{x^2+x+1};\ \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$$

En una fracción algebraica se consideran tres signos:

* El signo de la fracción (se escribe delante de la fracción).
* El signo del numerador.
* El signo del denominador.

EJEMPLOS : $+\frac{-N}{-D} = -\frac{-N}{+D} = -\frac{+N}{-D} = -\frac{-N}{+D}$

NOTA :

Se pueden cambiar dos de los tres signos que hay que considerar en una fracción, sin que éste se altere.

Cambiando un par de veces los signos de la fracción, el valor de la fracción no varía.

EJEMPLOS :

* Si : $\frac{(x-3)}{x-2} = \frac{-(x-3)}{-(x-2)} = -\frac{-(x-3)}{x+2} = -\frac{(x-3)}{-(x+2)}$

* Si :

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(x-3)(x-4)} = \frac{[-(a-1)](a-2)}{[-(x-3)](x-4)} = \frac{[-(a-1)][-(a-2)]}{(x-3)(x-4)}$$

$$= \frac{(a-1)(a-2)}{[-(x-3)][-(x-4)]} = \frac{(1-a)(a-2)}{(3-x)(x-4)} = \frac{(a-1)(2-a)}{(x-3)(4-x)}$$

Son fracciones que tienen diferente forma, sin cambiar su valor.

EJEMPLO :

$$\frac{x+1}{x-1} \equiv \frac{(x+1)^2}{(x^2-1)} \Rightarrow \underbrace{(x+1)(x^2-1)}=\underbrace{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\boxed{x^3-x+x^2-1 = x^3-x+x^2-1}$$

son polinomios idénticos

Es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí. Si los términos son primos entre sí, la fracción es irreductible. Se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y denominador (siempre que sean distintos de cero).

SIMPLIFICACIÓN (O REDUCCIÓN) DE FRACCIONES

Para simplificar una fracción (reductible), se factorizan el numerador y/o el denominador y luego se eliminan los factores comunes en ambas partes.

EJEMPLO 1 :

Simplificar : $\frac{2x^2-x}{2x-1}$

RESOLUCIÓN :

* Se factorizan, si es posible tanto el numerador, como el denominador. $\frac{x(2x-1)}{2x-1}$

* Luego se suprimen aquellos factores comunes:

$$\frac{x\cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}} = x$$

EJEMPLO 2 :

$$\frac{x^2-4xy+3y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-3y)\cancel{(x-y)}}{(x+y)\cancel{(x-y)}} = \frac{x-3y}{x+y}$$

* También :

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b};\ \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b};\ -\left(\frac{-a}{-b}\right) = -\frac{a}{b}$$

* Muchas veces la simplificación consiste en un cambio de signo.

EJEMPLO 3 :

$$\frac{x^2-3x+2}{2-x}=\frac{(x-2)(x-1)}{2-x}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{-\cancel{(x-2)}}=\frac{x-1}{-1}=1-x$$

que tienen el mismo denominador es otra fracción cuyo numerador es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador es el denominador común.

EJEMPLOS :

$$*\ \frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3-4-2+1}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$$

$$*\ \frac{2}{x-3}-\frac{3x+4}{x-3}+\frac{x^2+5}{x-3}=\frac{2-(3x+4)+(x^2+5)}{x-3}=$$

$$=\frac{x^2-3x+3}{x-3}$$

de distinto denominador, se transforman éstas en otras equivalentes que tengan un denominador común. El denominador común mínimo ***(D.C.M.)*** de varias fracciones es el Mínimo Común Múltiplo ***(M.C.M.)*** de sus denominadores.

EJEMPLO :

* El ***D.C.M.*** de $\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{7}{10}$; es el ***M.C.M.*** de ***4 ; 5 ; 10*** que es ***20*** y el ***D.C.M*** de $\frac{2}{x^2},\frac{3}{2x},\frac{x}{7}$; es $14x^2$.

EJEMPLOS :

$$*\ \frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{7}{10}=\frac{15}{20}-\frac{16}{20}+\frac{14}{20}=\frac{15-16+14}{20}=\frac{13}{20}$$

$$*\ \frac{2}{x^2}-\frac{3}{2x}-\frac{x}{7}=\frac{2(14)-3(7x)-x(2x^2)}{14x^2}=\frac{28-21x-2x^3}{14x^2}$$

$$*\ \frac{2x+1}{x(x+2)}-\frac{3}{(x+2)(x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)-3x}{x(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{2x^2-4x-1}{x(x+2)(x-1)}$$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Se busca un común denominador ***(CD)*** que es igual al ***m.c.m.*** de los denominadores de las fracciones propuestas. Luego el ***C.D.*** se divide entre cada denominador inicial y los cocientes parciales se multiplican por los respectivos numeradores; finalmente la suma algebráica de los productos parciales es el nuevo numerador.

EJEMPLO :

Efectuar : $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

RESOLUCIÓN :

* ***M.C.M.*** $[x+1;\ x-1]=(x+1)(x-1)$

$$*\ \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$$

IMPORTANTE :

Suma abreviada
Resta abreviada

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}\pm\frac{S_{(x)}}{T_{(x)}}=\frac{[P_{(x)}]\times[T_{(x)}]\ \pm\ [Q_{(x)}]\times[S_{(x)}]}{[Q_{(x)}]\times[T_{(x)}]}$$

EJEMPLOS :

$$*\ \frac{a}{x}+\frac{y}{z}=\frac{az+xy}{xz}$$

$$*\ \frac{x}{2y-x}+3=\frac{x+3(2y-x)}{2y-x}=\frac{6y-2x}{2y-x}$$

Para multiplicar fracciones algebraicas se siguen los siguientes pasos :

1) Se descomponen en factores, todo lo posible, los términos de las fracciones que se van a multiplicar.

2) Se simplifica, suprimiendo los factores comunes en los numeradores y denominadores.

3) Se multiplican entre sí las expresiones que quedan en los numeradores luego de simplificar, y este producto se parte por el producto de las expresiones que quedan en los denominadores.

EJEMPLOS :

$$*\ \frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{15}{16}=\frac{2\times4\times15}{3\times5\times16}=\frac{1}{2}$$

$$*\ \frac{x^2-9}{x^2-6x+5}\times\frac{x-5}{x+3}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-5)(x-1)}\times\frac{x-5}{x+3}$$

$$=\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-1)\cancel{(x+3)}}=\frac{x-3}{x-1}$$

El cociente de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando la fracción dividendo (o fracción numerador) por el recíproco de la fracción divisor (o fracción denominador).

EJEMPLOS :

$$*\ \frac{3}{8}\div\frac{5}{4}\ \text{ó}\ \frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{10}$$

$$*\ \frac{7}{x^2-4}\div\frac{xy}{x+2}=\frac{7}{(x+2)(x-2)}\times\frac{x+2}{xy}=\frac{7}{xy(x-2)}$$

IMPORTANTE :

División de fracciones

$$\frac{\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}}{\frac{S_{(x)}}{T_{(x)}}}=\frac{[P_{(x)}]\times[T_{(x)}]}{[Q_{(x)}]\times[S_{(x)}]}$$

Es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador o en el denominador. Para simplificarla:

1) Se reducen el numerador y denominador a fracciones simples.

2) Se dividen las dos fracciones que resultan.

EJEMPLO :

$$\frac{x-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x}\times\frac{x}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}}=x-1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Simplificar : $E=\dfrac{x^2-100}{x^2-22x+120}$

RESOLUCIÓN :

$$E=\frac{x^2-10^2}{x^2-22x+120}=\frac{(x+10)\cancel{(x-10)}}{(x-12)\cancel{(x-10)}}\Rightarrow E=\frac{x+10}{x-12}$$

$x \quad -12$
$x \quad -10$

PROBLEMA 2 :

Simplificar: $L=\dfrac{a^2+b^2-c^2-2ab}{a^2b-ab^2+abc}$

RESOLUCIÓN :

$$L=\frac{a^2-2ab+b^2-c^2}{ab(a-b+c)}=\frac{(a-b)^2-c^2}{ab(a-b+c)}$$

$$\Rightarrow L=\frac{\cancel{(a-b+c)}(a-b-c)}{ab\cancel{(a-b+c)}}=\frac{a-b-c}{ab}$$

PROBLEMA 3 :

Efectuar: $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x^2-1}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1-(x+1)+3}{C.D.=(x+1)(x-1)}=\frac{x-1-x-1+3}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}$$

PROBLEMA 4 :

Simplificar: $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{16}{x^2-4}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-16}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{8x-16}{(x+2)(x-2)}=\frac{8\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\frac{8}{x+2}$$

PROBLEMA 5 :

Consideremos los siguientes polinomios en Z:

$$P(x)\equiv x^6-1,\ Q(x)\equiv x^5-x^4+x^3-x^2+x+1$$

encuentre el *MCD* de $P(x)$ y $Q(x)$.

RESOLUCIÓN :

Primero procederemos a resolver cada polinomio:

$$P(x)\equiv x^6-1\equiv(x^3+1)(x^3-1)$$

$$P(x)\equiv(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)\ldots\ldots..(I)$$

Luego sigamos con:

$$Q(x)\equiv(x^5-x^4)+(x^3-x^2)+(x-1)$$

$$Q(x)\equiv x^4(x-1)+x^2(x-1)+(x-1)\equiv(x^4+x^2+1)(x-1)$$

$$Q(x)\equiv(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)\ldots\ldots\ldots(II)$$

Los factores comunes de: *(I)* y *(II)*

$$(x-1),\ (x^2-x+1)\ \text{y}\ (x^2+x+1)$$

Luego por definición de *M.C.D.* se tiene:

$$MCD[P,Q]\equiv(x-1).(x^2-x+1)\ \text{y}\ (x^2+x+1)$$

PROBLEMA 6 :

El producto que resulta de multiplicar dos polinomios de variable libre "x" es $(x^6+1)^2-4x^6$, y el cociente de dividir el *MCM* y *MCD* de dichos polinomios es $(x^2+1)^2-4x^2$. Señale a que es equivalente el *MCD*.

RESOLUCIÓN :

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios.

Por el teorema *1*:

$$\underbrace{P(x).Q(x)}_{DATO}\equiv MCD(P,Q).MCM(P,Q)$$

$$MCD(P,Q).MCM(P,Q)\equiv(x^6+1)^2-4x^6\ \ldots.\ (\alpha)$$

Por el *2do*. dato :

$$\frac{MCM\ (P,Q)}{MCD\ (P,Q)}\equiv(x^2+a)^2-4x^2\ \ldots.\ (\beta)$$

como se quiere despejar el *MCD*, dividamos (α) entre (β), así :

$$\frac{MCM(P,Q).MCM\ (P,Q)}{\dfrac{MCM(P,Q)}{MCD(P,Q)}}=\frac{(x^6+1)^2-4x^6}{(x^2+1)^2-4x^2}$$

Luego :

$$[MCD(P,Q)]^2=\frac{(x^6-1)^2}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2(x^4+x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$[MCD(P,Q)]^2=(x^4+x^2+1)^2$$

Finalmente :

$$MCD(P,Q)=x^4+x^2+1$$

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Efectuar:

$$\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$$

A) 1 B) 0 C) $\frac{1}{a}$ D) $\frac{1}{abc}$ E) $\frac{a-b}{c}$

02 Efectuar:

$$\frac{p^2-2p}{p+4}\times\frac{4+p}{p^2+3p-10}\div\frac{p}{p^2-25}$$

A) p B) $p-2$ C) $p-5$ D) $p+5$ E) $\frac{1}{p}$

03 Efectuar:

$$\frac{m^2+2m}{m+1}\times\frac{m+1}{m^2-4}\div\frac{m}{5m-10}$$

A) 5 B) 1 C) $m+1$ D) $\frac{m}{m+2}$ E) $\frac{m+1}{m-2}$

04 Efectuar:

$$\frac{m^{10}}{5x+50}\times\frac{x+10}{m^4}\div\frac{m^6}{25}$$

A) $\frac{1}{5}$ B) 5 C) 1 D) m E) m^2

05 Efectuar:

$$\frac{\frac{2m+4}{m+1}}{\frac{m+2}{m^2+m}}$$

A) 1 B) 2 C) $2m$
D) m^2 E) $m+2$

06 Simplificar:

$$\frac{xy^2-x}{y^2-y}+\frac{xy-x^2}{xy-y^2}$$

A) x B) $-x$ C) y D) $-y$ E) 1

07 Simplificar:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}+\frac{x^2+7x+12}{x^2+6x+9}$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

08 Reducir:

$$\frac{2x^2+x-3}{x^2+3x-4}+\frac{x^2+10x+9}{x^2+5x+4}$$

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

09 Reducir: $\frac{8x-8y}{16x-16y}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) $\frac{1}{4}$

10 Efectuar: $\frac{x+2xy}{3x^2}\div\frac{2y+1}{6x}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) x E) y

11 Efectuar: $\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1-x^2}{1-x}$

A) $2x$ B) x C) $3x$
D) $2x-1$ E) -2

12 Simplificar:

$$\frac{x^2+3x}{4x^2-4}\times\frac{2x^2+2x}{x^2-9}\times\frac{x^2-4x+3}{x^2}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

13 Simplificar: $\dfrac{x+y}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

A) x B) y C) xy D) $\frac{1}{x}$ E) $\frac{1}{xy}$

14 Efectuar:

$$\frac{4x^2+13x+10}{x^2-4}-\frac{x^2+12x+11}{x^2-x-2}$$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

15 Efectuar:

$$\frac{5x^2+11x+6}{x^2+4x+3}-\frac{2x^2+x-6}{x^2+5x+6}$$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 3 E) 4

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Simplificar: $\frac{3m-7}{7-3m}+1$

A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) $-3m$

02 Simplificar:

$$\frac{a-1}{1-a}+\frac{b-2}{2-b}-\frac{c-3}{3-c}$$

Halle su cociente

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) -3

03 Simplificar: $\frac{b^2-2b+1}{b-1}$

A) 1 B) 2 C) $b+1$ D) $b-1$ E) $2b$

04 Simplificar: $\frac{9x^2-1}{3x-1}-3x$

A) 1 B) -1 C) 0 D) $3x$ E) $6x$

05 Simplificar: $S=\frac{x^2-y^2}{x-y}$

A) $x+y$ B) $x-y$ C) 1
D) x E) $x-1$

06 Reducir: $E=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}$

A) 1 B) x C) -1 D) 2 E) 0

07 Reducir: $U=\frac{x^2-4}{x+2}$

A) $x-1$ B) $x-2$ C) $x+2$
D) $x+1$ E) 1

08 Simplificar:

$$M=\frac{x+7}{5}+\frac{2x-3}{5}+\frac{2x+1}{5}$$

A) x B) $x+1$ C) 1
D) $x-1$ E) 0

09 Reducir:

$$A=\frac{x-3}{x}+\frac{2x+4}{x}+\frac{x-1}{x}$$

A) $\frac{4}{x}$ B) 4 C) $\frac{x+1}{x}$ D) -8 E) $\frac{3}{x}$

10 Simplificar: $R=\frac{x^2+1}{2x^2+2}$

A) x B) $2x$ C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{2}$

11 Reducir:

$$A=\frac{x+2}{x}-\frac{5}{x}+\frac{4-x}{x}$$

A) $\frac{1}{x}$ B) x C) $-\frac{1}{x}$ D) $-x$ E) 0

12 Efectuar: $\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1-x^2}{1-x}$

A) 0 B) 1 C) x D) $2x$ E) $-x$

13 Efectuar: $\frac{35-7x}{x^2-25}+\frac{7}{x+5}$

A) 0 B) 1 C) x D) 14 E) -14

14 Simplificar:

$$\frac{x^6+9x^3+8}{(x^2+x+2)(x^2-2x+4)(x^2+x+1)}$$

A) 0 B) 1 C) x
D) -1 E) $-x+1$

15 Simplificar:

$$\frac{(x-5)(y-8)(z-1)}{(8-y)(5-x)(1-z)}$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) $\frac{1}{3}$

16 Simplificar: $\dfrac{x-\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x^2-x}}$

A) 1 B) $x-1$ C) x^2 D) x E) -1

CLAVES DE LA PRIMERA PRÁCTICA

1)B	2)A	3)D	4)A	5)A	6)A	7)B	8)B	9)B	10)E
11)A	12)B	13)A	14)B	15)B	16)D				

RADICACION-RACIONALIZACION

CAPITULO 081

OBJETIVOS :

* *Aprenderemos a simplificar y reducir radicales, también operar expresiones irracionales, sean estas numéricas o literales.*

* *Conoceremos el procedimiento práctico para extraer la raíz cuadrada de un polinomio de grado par.*

RAÍZ ALGEBRAICA

Se denomina raíz algebraica de la $\sqrt[n]{a}$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; a cada una de las "n" raíces diferentes b_k, que verifican la igualdad :

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b_k \Leftrightarrow (b_k)^n = a; \quad k \in \mathbb{N} / 1 \leq k \leq n}$$

Es importante resaltar el siguiente detalle :

• Si el índice "n" es par, el elemento b_k, asumirá dos raíces reales y $(n-2)$ raíces imaginarias.

• Si el índice "n" es impar, el elemento b_k, asumirá una raíz real y $(n-1)$ raíces imaginarias.

De todo lo anterior, podemos concluir que, para determinar las "n" raíces algebraicas del número real "a", el análisis cualitativo de su cálculo, debemos hacerlo dentro del conjunto C de los números complejos.

EJEMPLOS :

• $\sqrt{4} = b_k \Leftrightarrow (b_k)^2 = 4 \;\; ; \;\; 1 \leq k \leq 2$

donde $k = 1 \; : \; b_1 = 2$

$k = 2 \; : \; b_2 = -2$

$\Rightarrow$ **2** y **− 2** son las raíces cuadradas algebraicas del número *4*.

• $\sqrt[3]{27} = b_k \Leftrightarrow (b_k)^3 = 27 \;\; ; \;\; 1 \leq k \leq 3$

donde : $k=1 \quad : \quad b_1=3$

$$k=2 \quad : \quad b_2=3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3w$$

$$k=3 \quad : \quad b_3=3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=3w^2$$

Siendo $i=\sqrt{-1}$ la unidad imaginaria, y convencionalmente el símbolo "w", nos representa a una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

$\Rightarrow$ $3;\ 3w$ y $3w^2$ son las raíces cúbicas algebraicas del número **27.**

• $\sqrt[4]{256} = b_k \Leftrightarrow (b_k)^4 = 256 \;\; ; \;\; 1 \leq k \leq 4$

donde: $k = 1 \; : \; b_1 = 4$

$k = 2 \; : \; b_2 = -4$

$k = 3 \; : \; b_3 = 4i$

$k = 4 \; : \; b_4 = -4i$

$\Rightarrow$ $4; -4; 4i$ y $-4i$ son las raíces cuartas algebraicas del número **256.**

Finalmente, debemos concluir con el siguiente ejemplo:

• El radical $\sqrt[6]{64}$ admite seis raíces algebraicas; los cuales se muestran:

$\sqrt[6]{64}$ →
- $+2$ (Raíz aritmética) } RAÍCES REALES
- -2 } RAÍCES REALES
- $+2w$ } RAÍCES IMAGINARIAS
- $-2w$ } RAÍCES IMAGINARIAS
- $2w^2$ } RAÍCES IMAGINARIAS
- $-2w^2$ } RAÍCES IMAGINARIAS

(todas ellas: RAÍCES COMPLEJAS)

CLASIFICACIÓN DE RADICALES

RADICALES HOMOGÉNEOS :

Éstos se caracterizan por tener el mismo índice.

EJEMPLO :

* $\sqrt{5}\ ;\ 2\sqrt{7}\ ;\ \sqrt{\frac{2}{3}}$; son homogéneos, de índice *2*.

* $\sqrt[3]{4}\ ;\ 3\sqrt[3]{9}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; son homogéneos, de índice *3*.

RADICALES SEMEJANTES :

Éstos tiene la misma expresión sub – radical y el mismo índice.

EJEMPLO : $5\sqrt[4]{2m}\ ; -7\sqrt[4]{2m}\ ; \frac{3}{4}\sqrt[4]{2m}$

Expresión sub–radical igual a $2m$, e índice *4*.

$\Rightarrow$ son radicales semejantes.

I) TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES A SIMPLES:

No siempre se podrá transformar los radicales *dobles* a *simples*. En este curso estudiaremos los dos casos

más usados con los correspondientes requisitos que se requieren para dicha transformación.

Deducción de la fórmula de transformación

* Sea el radical : $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$
* Por definición :

$$\begin{array}{l} \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \\ \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ \hline \sqrt{A+\sqrt{B}} + \sqrt{A-\sqrt{B}} = 2\sqrt{x} \end{array}$$

(+) *"Sumando miembro a miembro"*

* Se eleva al cuadrado :

$$A + \not{\sqrt{B}} + A - \not{\sqrt{B}} + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x$$

* Reduciendo y despejando : $x = \dfrac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$
* Entonces :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

Si : $\sqrt{A^2 - B} = C$, siendo $A^2 - B$ un cuadrado perfecto.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

donde : $C = \sqrt{A^2 - B}$

EJEMPLO 1 :

Transformar a radicales simples : $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$

RESOLUCIÓN :

* En este caso : $A = 13$ y $B = 48$
* Luego : $C = \sqrt{13^2 - 48} = \sqrt{121} = 11$
* Entonces :

$$\sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{13+11}{2}} + \sqrt{\frac{13-11}{2}} = \sqrt{12} + \sqrt{1} = 2\sqrt{3} + 1$$

EJEMPLO 2 :

Transformar a radicales simples : $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$

RESOLUCIÓN :

* Identificando : $A = 5$ y $B = 24$
* Entonces : $C = \sqrt{5^2 - 24} = \sqrt{1} = 1$
* Luego : $\sqrt{5+\sqrt{24}} = \sqrt{\dfrac{5+1}{2}} + \sqrt{\dfrac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

REGLA PRÁCTICA :

$$\boxed{\sqrt{A+2\sqrt{B}} = \sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \; ; (a > b)$$

* Donde : $A = a + b$ y $B = ab$

EJEMPLO 1 :

Transformar a radicales simples : $\sqrt{13 + \sqrt{48}}$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{13+\sqrt{48}} = \sqrt{13+\sqrt{4 \times 12}} = \sqrt{13+2\sqrt{12}}$$

Siempre el radical interior debe estar multiplicado por ***2***, si no lo está, se busca dicha multiplicación, descomponiendo el número del radical interior. Luego, se busca dos números que sumados den ***13*** y multiplicados den ***12*** y se simplifica.

$$\sqrt{13+2\sqrt{12}} = \sqrt{(12+1)+2\sqrt{12 \times 1}} = \sqrt{12} + \sqrt{1} = 2\sqrt{3} + 1$$

EJEMPLO 2 :

Transformar a radicales simples : $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$

RESOLUCIÓN :

* Por regla práctica

$x + y = 5$
$xy = 6$

De donde: $x = 3;\ y = 2;\ x > y$

$$\Rightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \underbrace{\sqrt{3} + \sqrt{2}}_{\text{Radicales simples}}$$

EJEMPLO 3 :

Transformar $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$

RESOLUCIÓN :

* No es posible aplicar la regla práctica debido a que el radical interno no tiene el coeficiente ***2***.

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-\sqrt{(4)(2)}} = \sqrt{3-\sqrt{4}\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y};\ x > y$$

* Ahora sí por regla práctica :

$x + y = 3$
$xy = 2$

De donde: $x = 2; y = 1; (x > y)$

$$\Rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{2} - 1$$

EJEMPLO 4 :

Transformar a radicales simples : $\sqrt{18 + \sqrt{128}}$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{18+\sqrt{4 \times 32}} = \sqrt{18+\sqrt{4}\sqrt{32}} = \sqrt{18+2\sqrt{32}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{18+\sqrt{128}} = \sqrt{(16+2)+2\sqrt{16 \times 2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$$

EJEMPLO 5 :

Transformar a radicales simples: $\sqrt{13 - \sqrt{160}}$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{13-\sqrt{160}} = \sqrt{13-\sqrt{4 \times 40}} = \sqrt{13-\sqrt{4}\sqrt{40}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13-2\sqrt{40}} = \sqrt{13-\sqrt{160}} = \sqrt{(8+5)-2\sqrt{8 \times 5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{8} - \sqrt{5} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

EJEMPLO 6 :

Transformar a radicales simples: $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ ;\ (x>y)$$

* No es posible aplicar la regla práctica debido a que el radical interno tiene el coeficiente 2 alterado.

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2(2)\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{4(2)}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}$$

* Ahora si por regla práctica :

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\quad ;\quad x>y$$

$x+y=9$

$xy=8$

De donde: $x=8;\ y=1;\ (x>y)$

II) TRANSFORMACIÓN EN RADICALES SIMPLES PARA RADICALES DE LA FORMA :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(II$$

* Si *(I)* y *(II)* se puede expresar en las formas :

$$\sqrt{A+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}}\quad \sqrt{A+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}})$$

* donde : $A=x+y+z$

* entonces se tendría que :

$$\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}-\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}$$

EJEMPLO :

Expresar en radicales simples :

$$S=\sqrt{15+\sqrt{60}+\sqrt{84}+\sqrt{140}}$$

RESOLUCIÓN :

* Como : $60=4\times15;\ \ 84=4\times21$ y $140=4\times35$

$$\Rightarrow S=\sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}$$

* ó también :

$$\Rightarrow S=\sqrt{15+2\sqrt{3(5)}+2\sqrt{3(7)}+2\sqrt{5(7)}}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$$

EJEMPLOS DE RACIONALIZACIÓN :

Racionalizar en todos los casos :

* $E=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\ \Rightarrow\ F.R.=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

* $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{5}+7\sqrt{3}}{2}$

$$\underbrace{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}_{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}$$

* $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\times\dfrac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{3^2-\sqrt{2}^2}=$

$$=\frac{5+\sqrt{2}}{1}=5+\sqrt{2}$$

III) RACIONALIZACIÓN DE RADICALES QUE SE ESTÁN SUMANDO ORESTANDO Y EN DONDE EL ÍNDICE ES 3 O MÚLTIPLO DE 3 :

En este caso para racionalizar se utiliza la suma o difererencia de cubos.

Así :

* $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=x+y$

* $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=x-y$

EJEMPLO :

Racionalizar

$$E=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\ \Rightarrow\ F.R.=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}\times\frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\times2}+\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{4})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=\frac{2(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4})}{\underbrace{4-2}_{2}}$$

$$\Rightarrow E=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}$$

IV) CUANDO EL DENOMINADOR ES UN BINOMIO O POLINÓMIO DE LAS FORMAS :

$a)\ \sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}\qquad b)\ \sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots\mp\sqrt[n]{b^{n-1}}$

**** DEBEMOS RECORDAR :***

1) Para todo valor de n:

$$(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$$

2) Para n impar :

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b$$

3) Para n par :

$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\ldots-\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

EJEMPLO :

Racionalizar : $F=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}-1}$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando el numerador, denominador por el factor racionalizante, obtenemos :

$$F=\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[5]{2^4}+\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2}+1}{\sqrt[5]{2^4}+\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2}+1}\right)$$

$$\Rightarrow F=\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1$$

RACIONALIZACIÓN

Es la operación que consiste en transformar una expresión algebraica irracional en otra parcialmente racional.

FRACCIÓN IRRACIONAL :

Se llama así a una fracción, cuando el denominador necesariamente es irracional.

FACTOR RACIONALIZANTE(F.R.)

Es una expresión irracional que multiplicado por la parte irracional de la fracción irracional la transforma en racional. Lo más frecuente es racionalizar *denominadores*, para lo cual basta multiplicar los dos términos de una fracción por un número irracional conveñientemente escogido (llamado factor racionalizante).

I) PRIMER CASO :

$$\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}};\ siendo;\ n>m$$

PROCESO :

$$\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}\Rightarrow \text{Factor Racionalizante} \Rightarrow \sqrt[n]{x^{n-m}}$$

De donde :

$$\frac{A}{\sqrt[n]{x^m}}=\frac{A\sqrt[n]{x^{n-m}}}{\sqrt[n]{x^m}\times\underbrace{\sqrt[n]{x^{n-m}}}_{\text{Factor Racionalizante(F.R.)}}}=\frac{A(F.R.)}{\sqrt[n]{x^n}}=\frac{A.(F.R.)}{x}$$

EJEMPLOS :

* $\frac{10}{\sqrt[5]{x^2}}\Rightarrow \text{Factor Racionalizante}\Rightarrow \sqrt[5]{x}^{5-2}=\sqrt[5]{x}^3$

$$\Rightarrow\frac{10}{\sqrt[5]{x}^2}=\frac{10\sqrt[5]{x}^3}{\sqrt[5]{x}^2\times\underbrace{\sqrt[5]{x}^3}_{\text{Factor Racionalizante(F.R.)}}}=\frac{10\sqrt[5]{x}^3}{\sqrt[5]{x}^5}=\frac{10\sqrt[5]{x}^3}{x}$$

* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\underbrace{\boxed{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}}_{F.R.}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ * $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}\times\boxed{\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}}=\frac{\sqrt{22}}{33}$

* $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}\times\boxed{\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}}=\frac{\sqrt{22}}{33}$ * $\frac{2}{\sqrt{a}}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{a}}\times\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\frac{2\sqrt{a}}{a}$

* $\frac{5}{\sqrt[6]{x^3y^5}}\Rightarrow \text{Factor Racionalizante}\Rightarrow\sqrt[6]{x^{6-3}\times y^{6-5}}=\sqrt[6]{x^3y^1}$

$$\Rightarrow\frac{5}{\sqrt[6]{x^3y^5}}=\frac{5\sqrt[6]{x^3y}}{\sqrt[6]{x^3y^5}\times\underbrace{\sqrt[6]{x^3y}}_{\text{Factor Racionalizante}}}=\frac{5\sqrt[6]{x^3y}}{\sqrt[6]{x^6y^6}}=\frac{5\sqrt[6]{x^3y}}{xy}$$

* $\frac{5a}{3\sqrt{a}}\Rightarrow\frac{5a}{3\sqrt{a}}\times\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\frac{5\not{a}\sqrt{a}}{3\times\not{a}}=\frac{5\sqrt{a}}{3}$

* $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt[4]{2}}\times\boxed{\frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}}}=\frac{3\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{3}{2}\sqrt[4]{8}$

* $\frac{5}{\sqrt[3]{7^2}}\Rightarrow\frac{5}{\sqrt[3]{7^2}}\times\boxed{\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}}=\frac{5\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{5\sqrt[3]{7}}{7}$

* $\frac{3}{\sqrt[5]{2^3}}\Rightarrow$ tenemos : $\frac{3}{\sqrt[5]{2^3}}\times\frac{\sqrt[5]{2^{5-3}}}{\sqrt[5]{2^{5-3}}}=\frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}$

II) SEGUNDO CASO :

Cuando el denominador irracional es un binomio de índice dos, de la forma :

$\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$; en este caso se multiplicará por la conjugada del dominador según sea el caso.

$$\frac{N}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\quad ;\quad FR=\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$$

* Es decir :

1) La conjugada de : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ es; $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

* Entonces : $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2=5-3=2$

2) La conjugada de : $3-\sqrt{2}$ es ; $3+\sqrt{2}$.

* Entonces : $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})=3^2-\sqrt{2}^2=9-2=7$

3) La conjugada de : $\sqrt{7}+5$ es; $\sqrt{7}-5$.

* Entonces : $(\sqrt{7}+5)(\sqrt{7}-5)=\sqrt{7}^2-5^2=7-25=-18$

EJEMPLOS :

* $\frac{3}{\sqrt{7}+2}=\frac{3}{\sqrt{7}+2}\times\underbrace{\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-2}}_{F.R}=\frac{3(\sqrt{7}-2)}{7-4}=\sqrt{7}-2$

* $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\underbrace{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}_{F.R}=\frac{4\sqrt{5}+4\sqrt{2}+\sqrt{10}+2}{3}$

* $\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{4(3+\sqrt{2})}{9-2}=\frac{4}{7}(3+\sqrt{2})$

* $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=5+2\sqrt{6}$

* $\dfrac{5}{\underbrace{\sqrt{7}-\sqrt{2}}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\underbrace{\sqrt{7}+\sqrt{2}}}=\dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

  $\sqrt{7}^2-\sqrt{2}^2$

* $\dfrac{2}{\underbrace{\sqrt{6}+2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-2}{\underbrace{\sqrt{6}-2}}=\dfrac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{6-4}=\sqrt{6}-2$

  $\sqrt{6}^2-2^2$

RAÍZ CUADRADA DE POLINÓMIOS EN $\mathbb{R}$

Dado un polinomio $P(x)$ de grado *PAR*, determinar su raíz cuadrada consiste en hallar otros dos polinomios llamados raíz cuadrada y residuo, denotados por $r(x)$ y $R(x)$ respectivamente. De tal manera que estos verifiquen la identidad fundamental de la radicación:

$$\boxed{P(x)\equiv r^2(x)+R(x)}$$

Los cuales resultan del algortimo :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{P(x)} & r(x) \\ \cline{2-2} R(x) & \end{array}$$

Donde:

- $P(x)$: Polinomio radicando
- $r(x)$: Polinomio raíz
- $R(x)$: Polinomio residuo

CLASIFICACIÓN :

1°) Una raíz cuadrada será EXACTA, si su residuo es un polinomio identicamente nulo. Es decir :

$$\boxed{P(x)\equiv r^2(x);\ \text{ya que } R(x)\equiv 0}$$

POR EJEMPLO :

$$\sqrt{4x^2-12x+9}\equiv 2x-3\Leftrightarrow 4x^2-12x+9\equiv(2x-3)^2$$

2°) Una raíz cúadrada será INEXACTA, si su residuo no es un polinomio identicamente nulo. Es decir :

$$\boxed{P(x)\equiv r^2(x)+R(x);\ siendo\ R(x)\not\equiv 0}$$

POR EJEMPLO :

$$\sqrt{16x^2-8x+5}$$

no es exacto, debido a que :

$$16x^2-8x+5\equiv(4x-1)^2+4$$

siendo: $r(x)=4x-1$ y $R(x)=4$

PROPIEDADES DE GRADO :

1) $0\le[R(x)]^\circ\le[r(x)]^\circ$

2) $[r(x)]^\circ=\dfrac{[P(x)]^\circ}{2}=n;\ n\in\mathbb{N};\ n\ge 1$

PROCEDIMIENTO PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN POLINOMIO

Considerando que el polinomio es de grado *PAR*, se siguen los siguientes pasos:

1°) El polinomio radicando debe estar ordenado, generalmente en forma decreciente y no necesariamente ser completo.

2°) Se extrae la raíz cuadrada al primer término del polinomio, el cual será el primero de la raíz. Luego, éste se eleva al cuadrado y el resultado se resta del polinomio.

3°) Se bajan los dos términos siguientes del radicando, y paralelamente se duplica la raíz encontrada. Se divide el 1^o término bajado entre la expresión duplicada, obteniéndose el segundo término de la raíz.

4°) Este término obtenido se le adiciona a la raíz duplicada, obteniéndose un resultado. Este resultado se multiplica por el segundo término de la raíz, para luego restarlo de los términos bajados del polinomio.

5°) Se bajan los dos términos subsiguientes y se repite el paso anterior, tantas veces hasta que el residuo sea de grado menor que el de la raíz o dicho resto sea un polinomio idénticamente nulo.

EJEMPLO 1 :

Extraer la raíz cuadrada del polinomio :

$$P(x)=4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$$

$$\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{4x^4-12x^3+13x^2-6x+1} & 2x^2-3x+1 & \\ \hline
-4x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \dfrac{-12x^3}{2(2x^2)}=-3x & (6x^3+4x^2)(-4x^2) \\
-12x^3+13x^2 \qquad\quad & & \\
12x^3-9x^2 \qquad\quad & \dfrac{4x^2}{2(2x^2)}=1 & (4x^2-6x+1)(-1) \\
4x^2-6x+1 & & \\
-4x^2+6x-1 & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

Raíz : $r(x)=2x^2-3x+1$

Residuo: $R(x)\equiv 0$

EJEMPLO 2 :

Hallar la raíz cuadrada del polinomio :

$$P(x)=9x^6+24x^5-14x^4-28x^3+33x^2-18x+15$$

$$\begin{array}{r|l|l}
\sqrt{9x^6+24x^5-14x^4-28x^3+33x^2-18x+5} & 3x^3+4x^2-5x+2 & \\ \hline
-9x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \dfrac{24x^5}{2(3x^3)}=4x^2 & (6x^3+4x^2)(-4x^2) \\
24x^5-14x^4 \qquad\qquad\qquad\quad & & \\
-24x^5-16x^4 \qquad\qquad\qquad\quad & \dfrac{-30x^4}{3(3x^3)}=5x & (6x^3+8x^2-5x)(5x) \\
-30x^4-28x^3+33x^2 \qquad\quad & & \\
30x^4+40x^3-25x^2 \qquad\quad & \dfrac{12x^3}{2(3x^3)}=2 & (6x^3+8x^2-10x+2)(-2) \\
12x^3+8x^2-18x+5 & & \\
-12x^3-16x^2+20x-4 & & \\ \cline{1-1}
-8x^2+2x+1 & &
\end{array}$$

Raíz : $r(x)=3x^3+4x^2-5x+2$

Residuo: $R(x)\equiv -8x^2+2x+1$

EJEMPLO 3 :

Determinar la raíz cuadrada del polinomio :

$P(x) = 16x^{10} + 24x^7 - 8x^5 + 9x^4 - 7x^2 + 4$

$$\begin{array}{l|l|l}
\sqrt{16x^{10} + 24x^7 - 8x^5 + 9x^4 - 7x^2 + 4} & 4x^5 + 3x^2 - 1 & \\
\hline
-16x^{10} & \dfrac{24x^7}{2(4x^5)} = 3x^2 & (8x^5 + 3x^2)(-3x^2) \\
\quad 24x^7 - 8x^5 + 9x^4 & & \\
\quad -24x^7 \qquad +9x^4 & & \\
\hline
\qquad -8x^5 \qquad -7x^2 + 4 & \dfrac{-8x^5}{2(4x^5)} = -1 & (8x^5 + 6x^2 - 1)(1) \\
\qquad 8x^5 + \qquad +6x^2 - 1 & & \\
\hline
\qquad\qquad -x^2 + 3 & &
\end{array}$$

EJEMPLO 4 :

Calcular los valores de "a" y "b", si el polinomio mostrado:

$P(x) = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + ax + b$

tiene raíz cuadrada exacta.

$$\begin{array}{l|l|l}
\sqrt{81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + ax + b} & 9x^2 + 12x + 4 & \\
\hline
-81x^4 & \dfrac{216x^3}{2(9x^2)} = 12x & (18x^2 + 12x)(-12x) \\
\quad 216x^3 + 216x^2 & & \\
\quad -216x^3 - 144x^2 & \dfrac{72x^2}{2(9x^2)} = 4 & (18x^2 + 24x + 4)(-4) \\
\hline
\qquad 72x^2 + ax + b & & \\
\qquad -72x^2 - 96x - 16 & & \\
\hline
\qquad (a-96)x + (b-16) & &
\end{array}$$

Como es exacta :

$R(x) = (a - 96)x + (b - 16) = 0x + 0$

Se cumplen :

$$a - 96 = 0 \Rightarrow a = 96$$

$$b - 16 = 0 \Rightarrow b = 16$$

EJEMPLO 5 :

Si la raíz cuadrada del polinomio :

$P(x) = 9x^4 + ax^3 + bx^2 - 67x + 54$

posee coeficiente principal y término independiente positivos. Calcular el valor de $(b - a)$, si el resto de la extracción es igual a $(3x+5)$.

• Aplicando la siguiente propiedad :

RADICACIÓN INEXACTA	→	RADICACIÓN EXACTA
$\sqrt{P(x)}\ \lvert\ r(x)$; $R(x)$		$\sqrt{P(x) - R(x)}\ \lvert\ r(x)$; 0

• Por el criterio mencionado :

$$F(x) = P(x) - (3x+5)$$

El nuevo polinomio :

$F(x) = 9x^4 + ax^3 + bx^2 - 70x + 49$

tendrá raíz cuadrada exacta.

• Utilizando la identidad de la radicación exacta.

Se tiene : $F(x) \equiv [r(x)]^2$

$9x^4 + ax^3 + bx^2 - 70x + 49 \equiv (3x^2 + nx + 7)^2$

Identificando, luego de desarrollar el 2do. miembro, resultan las relaciones:

$a = 6n,\ b = n^2 + 42$ y $14n = -70$

Luego : $n = -5$ por lo tanto:

$$a = -30 \text{ y } b = 67.$$

Finalmente $b - a = 97$

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Racionalizar los denominadores de :

* $\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$ * $\dfrac{1}{\sqrt{x}} =$

* $\dfrac{1}{\sqrt{5}} =$ * $\dfrac{6}{\sqrt{8}} =$

* $\dfrac{2}{\sqrt{2}} =$

02 Racionalizar los denominadores de :

* $\dfrac{1}{\sqrt{x-y}} =$ * $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$

* $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$ * $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} =$

* $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} =$ * $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

* $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

03 Efectuar:

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \sqrt{6}$$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$

04 Efectuar:

$$V = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

A) 4 B) 3 C) –1 D) 2 E) 0

05 Efectuar:

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 1 E) 4

06 Transformar el radial doble a radiales simples: $\sqrt{9-\sqrt{56}}$

A) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$

07 Calcular:

$$P = \sqrt{7+2\sqrt{12}} + \sqrt{12-2\sqrt{27}}$$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 11

08 Efectuar:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

09 Calcular:

$$K = \sqrt[4]{32-10\sqrt{7}} \times \sqrt{5+\sqrt{7}} - \sqrt[4]{16+6\sqrt{7}} \times \sqrt{3-\sqrt{7}}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

10 Al racionalizar indicar el valor de: $P = \dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

11 Reduzca:

$$E = \sqrt{12+8\sqrt{2}} - \sqrt{8}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{2}$

12 Simplifique:

$$P = \sqrt{15-10\sqrt{2}} + \sqrt{13+4\sqrt{10}} - \sqrt{10}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2 E) 1

13 De la siguiente relación calcular $(a + b + c)$

$$\sqrt{12+4\sqrt{3}+4\sqrt{5}+2\sqrt{15}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

14 Efectuar:

$$E = \sqrt{30+10\sqrt{2}+2\sqrt{6}+10\sqrt{3}} - \sqrt{12+\sqrt{140}}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{5}$

15 Efectuar:

$$Q = \frac{\sqrt{13-4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{28-6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}}$$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5

16 Efectuar:

$$R = \sqrt{9+2\sqrt{14}} - \sqrt{12-2\sqrt{35}}$$

A) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{7}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ E) N.A.

17 Calcular: $I + C$ si:

$$\sqrt{13+2\sqrt{22}} - \sqrt{14-2\sqrt{33}} = \sqrt{I} + \sqrt{C}$$

A) 5 B) 1 C) 8 D) 7 E) 3

(18) Reducir:

$$H=\sqrt{11+\sqrt{112}}-\sqrt{7}$$

A) 1 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{5}$ D) 2 E) $\sqrt{2}$

(19) Efectuar:

$$A=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

A) 3 B) -1 C) 1 D) -3 E) -4

(20) Efectuar:

$$R=\sqrt{9-\sqrt{80}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{7-\sqrt{40}}+1$$

A) 1 B) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) La raíz cuadrada de: $52+14\sqrt{3}$ es:

A) $5+\sqrt{3}$ B) $6+\sqrt{3}$ C) $7+\sqrt{3}$

D) $8+\sqrt{3}$ E) $6+\sqrt{27}$

(02) Luego de efectuar:

$$P=\sqrt{8+\sqrt{48}}-\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{5}-\sqrt{15+6\sqrt{6}}$$

dar el valor de P.

A) $-\sqrt{5}$ B) $-\sqrt{6}$ C) -2 D) -3 E) 0

(03) Calcule el valor de "n" en:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2n+5\sqrt{40n}}$$

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,4 E) 0,5

(04) Transformar a radicales simples:

$$\sqrt{\frac{x}{2}-\sqrt{3(x-3)}};\ 3<x<6$$

A) $\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{x-3}$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{x-3}$

C) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{x-3}{2}}$ D) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}$

E) $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}}$

(05) Reducir:

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}+\sqrt[4]{56+24\sqrt{5}}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}-1$

D) $\sqrt{5}+1$ E) -2

(06) Luego de reducir:

$$A=\sqrt{2+\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}$$

indique un radical simple.

A) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

D) $\sqrt{2}$ E) Más de una es correcta

(07) Transformar a radicales simples:

$$\sqrt{2+4+6...+2n+2\sqrt{n^3}}\ ;\ n>0$$

A) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ B) $n+\sqrt{n}$ C) $1+\sqrt{n+1}$

D) $n^2+\sqrt{n}$ E) $\sqrt{n+1}+n$

(08) Reducir:

$$A=\sqrt{x+2+\sqrt{2x+3}}+\sqrt{x+2-\sqrt{2x+3}}$$

para:

$$x>-1;a>-1;x=\frac{a^2+2a-5}{4}$$

A) $a-1$ B) $a+1$ C) $1-a$
D) $2a-1$ E) $2a+1$

(09) Luego de reducir:

$$A=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+\sqrt[4]{\frac{17+12\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}$$

se obtiene:

A) 1 B) -1 C) 0 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}/2$

(10) Calcular:

$$A=\frac{\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{72+18\sqrt{15}}}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 1/3 E) 1/4

(11) Calcular: m^4n^{-2}, si:

$$\sqrt{3\sqrt{2}-4}=m-\sqrt{n};m^2>n$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 1/2

(12) Calcular:

$$M=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{32+8\sqrt{15}}}$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(13) Sabiendo que:

$$\sqrt{5}=2a+1\ \ ;\ \ \sqrt{7}=2b+1$$

calcular el valor de A en:

$$A=\frac{1}{\sqrt{12+2\sqrt{35}}}+\frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{60}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{12}}}$$

A) ab B) a C) b D) 0 E) $a+b+1$

(14) Racionalizar: $M=\frac{2y}{\sqrt[7]{x^2y}}$ e indique su denominador.

A) x B) y C) $2x$ D) xy E) $4x$

(15) Determine el denominador racionalizado de:

$$A=\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}+\frac{4}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

(16) Si:

$$P=\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$$

calcule: $0,\hat{3}(P^3-3P^2+3P-1)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

(17) Efectuar:

$$A=\frac{9}{-\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{3}-\cfrac{1}{\sqrt{2}-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

(18) Efectuar:

$$M=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a+b+\sqrt{4ab}}$$

A) $a(a+b+2\sqrt{ab})$

B) $b(a+b+2\sqrt{ab})$

C) $(a-b)(a-b+2\sqrt{ab})$

D) $a+2b+\sqrt{ab}$

E) $(a-b)(a+b-2\sqrt{ab})$

(19) Luego de efectuar:

$$P=\frac{n}{\sqrt[3]{n}-1}-\frac{\sqrt[3]{n^2}}{1+\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1};n\neq\pm1$$

se obtiene:

A) $2+\sqrt[3]{n}$ B) $2+\sqrt[3]{n^2}$ C) $2-\sqrt[3]{n}$

D) $1+\sqrt[3]{n}$ E) $1-\sqrt[3]{n}$

(20) Determinar el denominador racionalizado de:

$$A=\frac{-10}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-2}$$

A) 1 B) 2 C) 5 D) -1 E) 8

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)E	4)C	5)B	6)E	7)B	8)B	9)C	10)D
11)B	12)C	13)C	14)A	15)C	16)A	17)C	18)E	19)B	20)B

OBJETIVOS :

- *Conocer algunos elementos de un nuevo sistema numérico que se genera como ampliación del sistema de los números reales.*
- *Hacer conocer que, de todas las cantidades imaginarias usuales en este nivel, el más importante es el número imaginario* $\sqrt{-1}$.
- *Conocer todas las propiedades que guarda la unidad imaginaria "i" y sus consecuencias diversas.*

INTRODUCCIÓN :

A través del tiempo el hombre tuvo que resolver ecuaciones, fruto del desarrollo de otras ciencias y para ella fue necesario diseñar nuevos conjuntos numéricos tales como los enteros, racionales, irracionales, reales, complejos, etc.

Leopoldo Kronecker describió en el siglo *XIX* la evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de número por el hombre.

Sabemos por ejemplo que cualquier número real al elevarlo al cuadrado será positivo o cero siempre. En cambio un número imaginario al ser elevado al cuadrado no tiene necesariamente que ser positivo y de ahí que estos nuevos números cumplirán nuevas propiedades, lo que nos ayudara a resolver problemas de ecuaciones más complicadas. Los números complejos desempeñan un papel muy importante en el desarrollo del álgebra moderna. Sobre todo en la resolución de ecuaciones polinomiales , además muchos lectores deben haber visto en revistas , televisión, cinto algunas figuras fascinantes, como los efectos especiales. Se trata de una nueva geometría , el producto de la interacción de un matemático genial y la computadora.

CANTIDADES IMAGINARIAS

Son aquellos números que resultan al extraer la raíz de aquellos radicales de índice par, de cantidades subradicales reales negativas. Es decir, se trata de extraer las *RAÍCES ALGEBRAICAS* del radical $\sqrt[2n]{-a}$, siendo $a \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

Veamos :

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a(-1)} = \underbrace{\sqrt[2n]{a}}_{\substack{raiz\\Aritmética}} \cdot \underbrace{\sqrt[2n]{-1}}_{\substack{raiz\\Algebraica}}$$

El problema consiste en hallar las *"2n"* raíces algebraicas del subradical *(–1)*. Observemos los siguientes ejemplos :

$$n=1 \Rightarrow \sqrt[2]{-1} = \pm i \ (\text{dos raíces})$$

$$n=2 \Rightarrow \sqrt[4]{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) \ (\text{cuatro raíces})$$

$$n=3 \Rightarrow \sqrt[6]{-1} = \begin{cases} \pm \ \ i \\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i) \end{cases} (\text{seis raíces})$$

$$n=4 \Rightarrow \sqrt[8]{-1} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \pm \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}\,i\right)$$

(ocho raíces)

y así sucesivamente.

APLICACIONES DIVERSAS:

- $\sqrt{-100} = \sqrt{100}\sqrt{-1} = 10i$
- $\sqrt[4]{-625} = \sqrt[4]{625} \quad \sqrt[4]{-1} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)$
- $\sqrt[6]{-729} = \sqrt[6]{729} \quad \sqrt[6]{-1} = 3i$
- $\sqrt[8]{-256} = \sqrt[8]{256}\sqrt[8]{-1}$

$$= \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,i$$

Tener en cuenta que $10i$; $\frac{5}{\sqrt{2}}(1+i)$; $3i$ y $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,i\right)$ son cantidades imaginarias, ya que provienen de radicales de índice par de cantidades subradicales negativas. Teniendo en cuenta que estos, son elementos del conjunto de los números complejos.

UNIDAD IMAGINARIA

Es aquella cantidad imaginaria elemental que resulta al extraer la raíz cuadrada de *(–1)*.

Es decir :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i \leftrightarrow i^2 = -1} \ \textbf{Notación Gaussiana}$$

EJEMPLOS :

- $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$
- $\sqrt{-7} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = \sqrt{7}i$
- $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{-1} = |a|i$
- $\sqrt{-28} = \sqrt{4 \times 7}\sqrt{-1} = 2\sqrt{7}i$

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Nos interesa analizar la potencia enésima de i^n ; $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Considerando las definiciones :

$$\boxed{i^0 = 1 \ ; \ i^1 = i}$$

Analicemos por inducción las potencias crecientes de i^n ; $n \geq 1$. Veamos :

* $i^1 = i$	* $i^5 = 1$	* $i^9 = 1$
* $i^2 = -1$	* $i^6 = -1$	* $i^{10} = -1$
* $i^3 = -i$	* $i^7 = -i$	* $i^{11} = -i$
* $i^4 = ①$	* $i^8 = ①$	* $i^{12} = ①$...

Se observa que las potencias de *"i"* se repiten cada cuatro veces y sólo asumen uno de los cuatro valores i ; -1 ; i y 1. Teniendo en cuenta lo siguiente :

$\overset{\circ}{4}$: 0, 4, 8, 12, 16,

$(\overset{\circ}{4}+1)$: 1, 5, 9, 13, 17,

$(\overset{\circ}{4}+2)$: 2, 6, 10, 14, 18,

$(\overset{\circ}{4}+3)$: 3, 7, 11, 15, 19,

Luego generalizando se tiene :

$$\boxed{i^{\overset{\circ}{4}}=1} \quad \boxed{i^{\overset{\circ}{4}+1}=i}$$

$$\boxed{i^{\overset{\circ}{4}+2}=-1} \quad \boxed{i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i}$$

Ejemplos diversos :

- $i^{84}=i^{\overset{\circ}{4}}=1$
- $i^{105}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i$
- $i^{78}=i^{\overset{\circ}{4}+2}=-1$
- $i^{123}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i$

Se sabe que un número es múltiplo de cuatro, si sus dos últimas cifras son múltiplos de él. Veamos los siguientes ejemplos :

- $i^{3841}=i^{38\overline{41}}=i^{\overset{\circ}{4}+1}=i$
- $i^{54739}=i^{547\overline{39}}=i^{\overset{\circ}{4}+3}=-i$
- $i^{6600092}=i^{66000\overline{92}}=i^{\overset{\circ}{4}}=1$
- $i^{71234506122}=i^{712345061\overline{22}}=i^{\overset{\circ}{4}+2}=-1$

Calculemos ahora la potencia negativa de i :

$$i^{-1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$$

Por lo tanto :

$$\boxed{i^{-1}=-i}$$

Generalizemos esto, mediante la siguiente propiedad :

$$i^{-k}=(i^{-1})^k=(-i)^k=\left[(-1)i\right]^k=(-1)^k i^k$$

TEOREMA :

$$\boxed{i^{-k}=(-1)^k i^k;\forall k\in \mathbb{Z}^+}$$

Ejemplos diversos :

- $i^{-53}=(-1)^{53}i^{53}=(1)i^{\overset{\circ}{4}+1}=(-1)=i$
- $i^{-87}=(-1)^{87}i^{87}=(-1)i^{\overset{\circ}{4}+3}=(-1)(-i)=i$
- $i^{-100}=(-1)^{100}i^{100}=(1)i^{\overset{\circ}{4}}=(1)(1)=1$
- $i^{63826}=(-1)^{63826}i^{638\overline{26}}=(1)i^{\overset{\circ}{4}+2}=(1)(-1)=-1$

Reducir :

$P=(\sqrt{-1})^{-4n+3};\ n\in Z^+$

$P=i^{-4n+3}=1^{-4n}.i^3=\underbrace{(-1)^{4n}i^{4n}}.(-i)$

Luego: $P=(1)(1)(-i)=-i=-\sqrt{-1}$

PROPIEDADES DIVERSAS:

I) $i+i^2+i^3+i^4=0$

II) $i^{4k}+i^{4k+1}+i^{4k+2}+i^{4k+3}=0$

III) $i^{k}+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=0$

IV) $2n=\overset{\circ}{4};\forall n\in N, n\geq 2$

V) $(\overset{\circ}{4}+r)^n=\overset{\circ}{4}+r^n;\forall n\in N,\forall r\in Z$

APLICACIONES ELEMENTALES

I) Calcular : $S=\sum_{k=100}^{1000} i^k; i=\sqrt{-1}$

$$S=\underbrace{i^{100}+i^{101}+i^{102}+i^{103}}+$$

$$\underbrace{i^{104}+i^{105}+i^{106}+i^{107}}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{i^{996}+i^{997}+i^{998}+i^{999}}+i^{1000}$$

Por la segunda propiedad se tiene:

$$S=0+0+\ldots+0+i^{4k}\Rightarrow S=1$$

II) Calcular las siguientes potencias:

- $A=i^{12^{13^{14}}}=i^{(4k)^{13^{14}}}=i^{4k}=1$
- $B=i^{22^{33^{44}}}=i^{(4k+2)^{33^{44}}}=i^{4k+(2)^{33^{44}}}=i^{4k}.i^{(2)^{33^{44}}}$

Aplicando la *4ta*. propiedad en el *2do*. factor :

$$B=(1)\,i^{4K}=(1)\,(1)=1$$

- $C=i^{27^{37^{47}}}=i^{(4k+3)^{37^{47}}}=i^{(4k-1)^{37^{47}}}=i^{4k+(-1)^{37^{47}}}$

Como 37^{47} es un número impar, se tiene :

$$C=i^{4k-1}=i^{4k+3}=i^{4k}\ .\ i^3=(1)(-i)=-i$$

III) Reducir :

$E=(\sqrt{-1})^{(4n+1)^{(4n+2)^{(4n+3)}}};\forall n\in Z^+$

$E=i^{(4n+1)^{(4n+2)^{(4n+3)}}}=i^{4n+(1)^{(4n+2)^{(4n+3)}}}$

$=i^{4n+1}=i=\sqrt{-1}$

IV) Calcular : $E=\sum_{k=0}^{100} i^{\lfloor k};\ k\in N$

$E=i^{\lfloor 0}+i^{\lfloor 1}+i^{\lfloor 2}+i^{\lfloor 3}+i^{\lfloor 4}+i^{\lfloor 5}+\ldots+i^{\lfloor 100}$

$E=i^1+i^1+i^2+i^6+i^{24}+i^{120}+\ldots+i^{100}$

Es evidente que : $\lfloor n=\overset{\circ}{4};\ n\geq 4$

$$E=i+i-1-1+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{97\ veces}$$

Por lo tanto : $R=2i+95$

NÚMERO COMPLEJO (Z)

Por definición, un número complejo es todo par ordenado de números reales. Donde la primera componente es la parte real y la segunda componente la parte imaginaria. Es decir :

Dado $Z=(a;b)$ tal que $a,b\in R$

Siendo :

- "a" $\Rightarrow$ es la parte real de Z
- "b" $\Rightarrow$ es la parte imaginaria de Z

En símbolos :

$$\boxed{Re(Z)=a}\ ;\ \boxed{Im(Z)=b}$$

TEOREMA :

Todo número complejo $Z=(a;b)$, tiene como equivalente la forma cartesiana $Z=a+bi$, denominada también binómica o rectangular.

DEMOSTRACIÓN :

Sea : $Z=(a;b)$; tal que $a,b\in R$

Por adición de pares ordenados :

$Z=(a;0)+(0;b)$

$Z=a(1;0)+b(0;1)$

Por definición :

$(1;0)=1$ *(unidad real)*

$(0;1)=i$ *(unidad imaginaria)*

Luego : $Z=a(1)+b\,(i)$

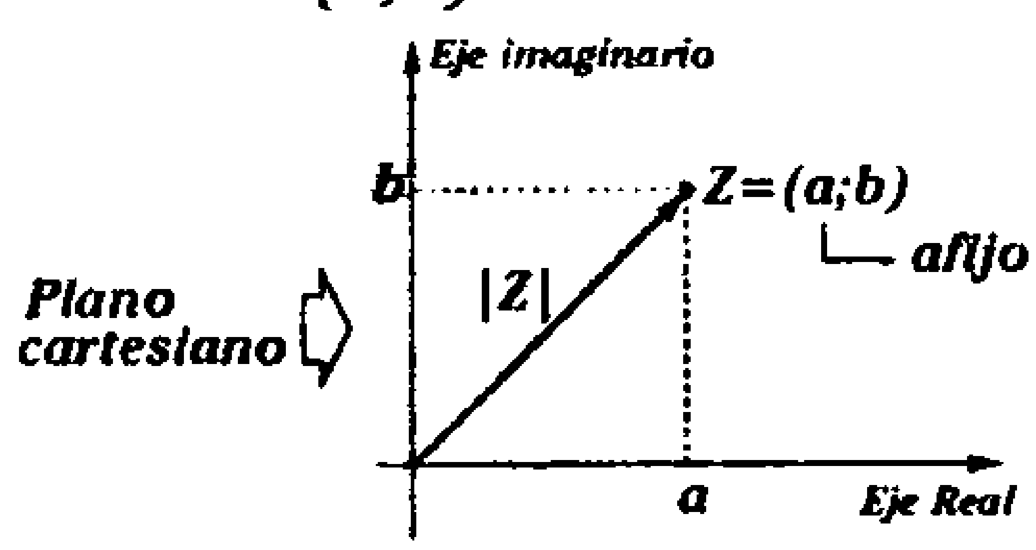
Finalmente : $\boxed{Z=a+bi}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

I) Forma rectangular o cartesiana

Dado el complejo

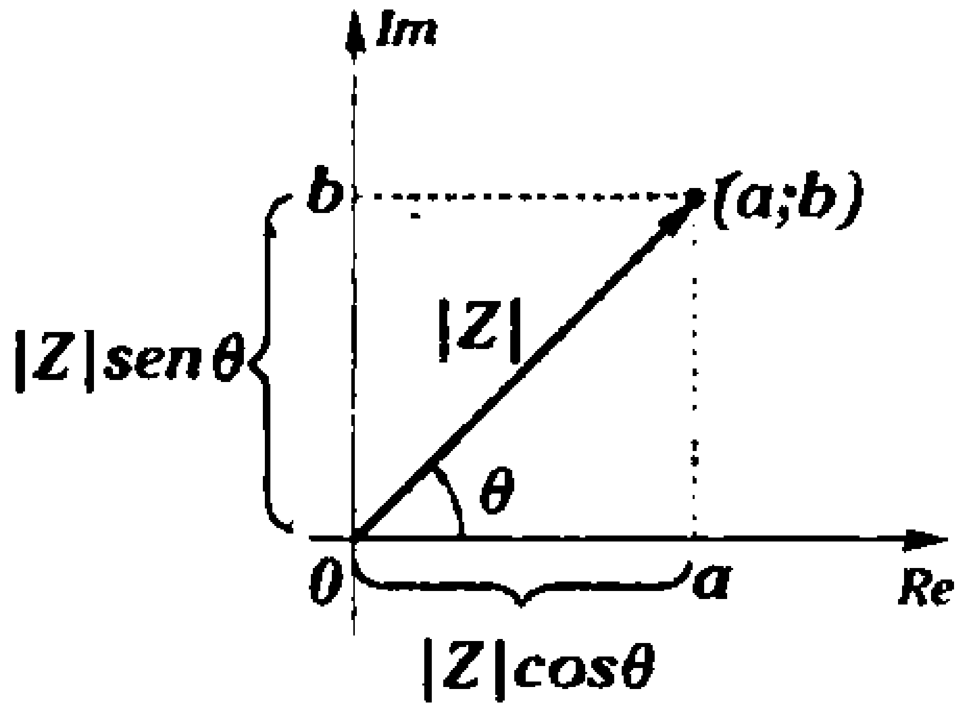
$Z=a+bi=(a;b)$



NOTA : $\boxed{|Z| \Rightarrow \text{es el módulo de } Z}$

II) Forma polar o trigonométrica:

Sea : $Z=a+bi=(a;\, b)$



Reempalzando :

$Z = a + bi$

$Z = |Z|\cos\theta + |Z|\operatorname{sen}\theta\,.i$

$$\boxed{Z = |Z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$$

Abreviadamente

$\boxed{Z = |Z|\operatorname{cis}\theta}$; θ: *Argumento principal*

NOTA :

Si : $tg\,\theta = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \theta = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)$

III) Forma Exponencial :

Sea $Z = a + bi$

Luego su forma exponencial :

$$\boxed{Z = |Z|e^{\theta i}}$$

Donde:

- $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = arctg\left(\dfrac{b}{a}\right)$ en radianes
- $e \approx 2{,}7182$ (Número de Neper)

OBSERVACIONES :

Si se tiene :

$Z = a + bi = (a;\, b);\, a;\, b \in \mathbb{R}$

Luego se tendrá

I) NÚMERO REAL:

Si : $b=0$

$\Rightarrow Z = a + bi \Rightarrow \boxed{Z = a}$

II) COMPLEJO PURO:

Si : $a = 0$

$\Rightarrow Z = a + bi \Rightarrow Z = 0 + bi \Rightarrow Z = bi$

III) COMPLEJO NULO:

Si : $a = 0;\; b = 0 \Rightarrow Z = a + bi$

$Z = 0 + 0i \quad \boxed{Z = 0}$

IV) IGUALDAD DE COMPLEJOS:

Si se tiene igualdad de dos Números Complejos $a+bi = c+di$

Entonces se cumple :

$$\boxed{a = c} \wedge \boxed{b = d}$$

V) CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

Sea el número complejo $Z=a+bi$; entonces se define conjugado de

Z como $\overline{Z}$: $\boxed{\overline{Z} = a - bi}$

VI) OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

Sea el número complejo $Z=a+bi$, entonces se define

Opuesto de Z como Z_{op} :

$$\boxed{Z_{op} = -a - bi}$$

VII) MÓDULO DE UN COMPLEJO:

Sea $Z = a + bi$; entonces

Módulo de Z es $|Z|$:

$\boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$; donde $|Z| \geq 0$

EJEMPLO :

Sea el número complejo :

$$Z = -3 + 4i = (-3;\, 4)$$

Entonces su :

- Conjugada de Z es $\overline{Z} = -3 - 4i$
- Opuesto de Z es $Z_{op} = 3 + 4i$
- Módulo de Z es

$$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

EJEMPLO :

Sea el número complejo :

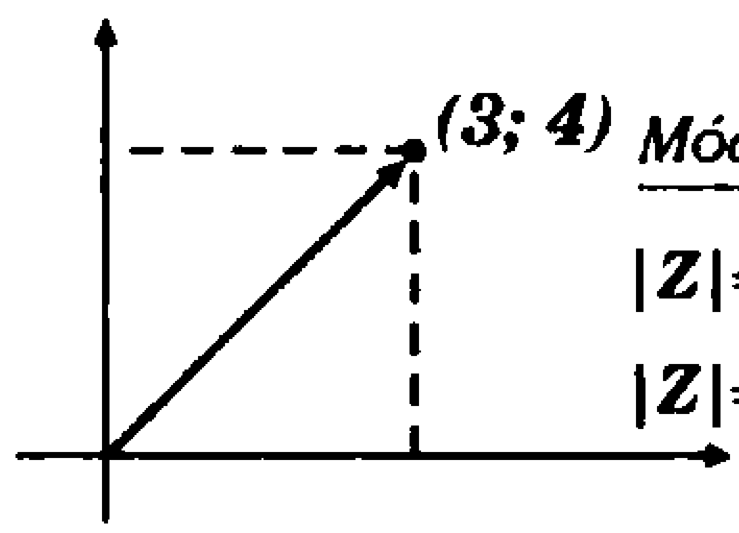
$$Z = 5 - 12i = (5;\, -12)$$

Entonces su :

- Conjugada de Z es $\overline{Z} = 5 + 12i$
- Opuesto de Z es $Z_{op} = -5 + 12i$
- Módulo de

Z es $|Z| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = 13$

Ejemplo : Sea $Z = 3 + 4i$



Módulo de Z

$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2}$

$|Z| = \sqrt{25} = 5$

OPERACIONES BÁSICAS EN LA FORMA CARTESIANA

I) Adición y Sustracción en $\mathbb{C}$:

Dados los $\mathbb{C}$ (conjunto de los números complejos) :

- $Z=a+bi \;\wedge\; W=c+di$

Se definen :

$$\boxed{\begin{array}{l} Z+W = (a+c)+(b+d)i \\ Z-W = (a-c)+(b-d)i \end{array}}$$

II) Multiplicación en $\mathbb{C}$:

Dados :

- $Z=a+bi \;\wedge\; W=c+di$

Se define :

$$\boxed{Z.W = (ac - bd) + (bc + ad)\, i}$$

III) Inversa de Z:

Dado el complejo : $Z = a+bi \neq 0$

Se define :

$$\boxed{Z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i}$$

IV) División en $\mathbb{C}$:

Se tienen los complejos :

- $Z = a+bi \;\wedge\; W = c+di$

Se define :

$$\boxed{\frac{Z}{W} = Z.W^{-1} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i}$$

PROPIEDADES USUALES

I) $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2$; $i = \sqrt{-1}$

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1$

Por lo tanto :

$$\boxed{(1+i)^2 = 2i}$$

II) $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2$; $i = \sqrt{-1}$

$(1+i)^2 = 1 + 2i - 1$

Por lo tanto : $\boxed{(1-i)^2 = -2i}$

III) Como consecuencia de las propiedades anteriores :

$$\boxed{(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4}$$

IV) Dado :

$$Z = \frac{1+i}{1-i}\; ; \; i = \sqrt{-1}$$

Racionalizando el denominador, se tiene :

$$Z=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

Por lo tanto : $\boxed{\dfrac{1+i}{1-i}=i}$

V) Dado : $Z=\dfrac{1-i}{1+i}$; $i=\sqrt{-1}$

De la propiedad anterior :

$$Z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$$

Por lo tanto : $\boxed{\dfrac{1-i}{1+i}=-i}$

EJEMPLO 1 :

Simplificar :

$$A=\frac{(1+i)^2(1+5i)}{i-5}=\frac{2i(1+5i)}{i-5}$$

$$A=\frac{2(i+5i^2)}{i-5}=\frac{2(i-5)}{i-5}=2$$

EJEMPLO 2 :

Reducir :

$$P=i+\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}}\ ;\quad i=\sqrt{-1}$$

Como: $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$; se tiene lo siguiente:

$$P=i+\cfrac{1-i}{1-\cfrac{1-i}{1+i}}=i+\frac{1-i}{1+i}=i-i=0$$

EJEMPLO 3 :

Efectuar:

$$T=(2-i)(3+2i)(8-i);\ i=\sqrt{-1}$$

Multiplicando los dos primeros factores, aplicando la propiedad distributiva:

$$T=(6+4i-3i-2i^2)(8-i);\quad i^2=-1$$

Luego: $T=(8+i)(8-i)$

Entonces :

$$T=8^2-i^2=64-(-1)=65$$

EJEMPLO 4 :

Resolver la ecuación:

$$(1+i)^n=512i;\quad i=\sqrt{-1}$$

Como: $512i=2^9i^9=(2i)^9$

resulta:

$$(1+i)^n=(2i)^9\Rightarrow(1+i)^n=\left[(1+i)^2\right]^9$$

$$(1+i)^n=(1+i)^{18}\Rightarrow n=18$$

EJEMPLO 5 :

Reducir:

$$R=\left(i^2+i^3+i^4+i^5+\ldots+i^{2004}\right)^{i^4-i^2}$$

RESOLUCIÓN:

Se sabe que:

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$$

Con la finalidad de aplicar la propiedad mostrada, en la base de la potencia dada sumamos y restamos "i" convenientemente, veamos:

$$R=\left(i+i^2+i^3+i^5+\ldots+i^{2004}-i\right)^{i^4-i^2}$$

En la expresión indicada existen $\dfrac{2004}{4}=501$ grupos que verifican la propiedad mostrada en consecuencia su suma es cero.

$$R=(0-i)^{i^4-i^2}=(-i)^{1-(-1)}=(-i)^2$$

$$\Rightarrow R=(-i)^2=i^2=-1$$

En conclusión $R=-1$.

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 El valor de: $2i-(-2i)^2$

es igual a:

A) 0 B) 6 C) $2i$
D) $2+4i$ E) $-4+i^2$

02 El valor de: $2i^4-i^2$, es:

A) 0 B) 3 C) 1
D) $2i^2$ E) $3i$

03 La expresión: $5i^4-i^5+i^2$

Equivale a:

A) 3 B) 5 C) $5i$
D) $4+i$ E) $4-i$

04 De las siguientes igualdades, la única que no cumple es:

A) $2i-3i=-i$ B) $-1+4i=3i$
C) $5i^2.i=-5i$ D) $4.2i^2=-8$
E) $(3i.\ 2i^2)^2=-36$

05 La expresión: $-3i^2.(2-i^4)$

es equivalente a:

A) 5 B) -3 C) 9 D) 0 E) 3

06 El producto:

$N=(2+3i)(5-8i)$ es:

A) 5 B) -3 C) 9 D) $34-i$ E) i

07 El valor de:

$$N=i^0+i^1+i^2+i^3+i^4$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

08 Reducir:

$$Q=i^{441}+i^{751}+i^{927}$$

A) $-i$ B) i C) $-2i$ D) $2i$ E) $-3i$

09 Simplificar:

$$Q=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10 Determinar: $Q=\sqrt{2\sqrt[5]{i}}$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-1+i$
D) $-1-i$ E) $-2i$

11 Si:

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{i+1}\right)\left(1+\frac{1}{i+2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{i+199}\right)=a+bi,$$

Calcular: $Q=a-b$

A) 201 B) -202 C) -200
D) 1 E) 200

12 Simplificar:

$$Q=\frac{(1+i)^3+(1-i)^3}{(1+i)^3-(1-i)^3}$$

A) i B) $-i$ C) $2i$
D) $-2i$ E) $3i$

13 Calcule el valor de:

$$P=\frac{i^{36}-i^{22}+i^{80}}{i^9+i^{16}+^{23}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 La diferencia de los complejos: $(5+2i)$ y $(3-5i)$ es:

A) $2+3i$ B) $2+7i$ C) $2-3i$
D) $2-7i$ E) $2+5i$

15 De la igualdad

$$(1+3i)a+(2-2i)b=1-13i$$

Calcule el valor de (ab)

A) -3 B) -5 C) -6 D) -4 E) -2

16 Calcular el valor de n para que el complejo:

$Z=\dfrac{2-ni}{1+2i}$ sea un complejo puro.

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

CAPITULO 083

OBJETIVOS :

* *Exponer con relativa amplitud las diferencias cualitativas respecto a la resolución de las ecuaciones polinomiales, fraccionarias e irracionales.*

* *Estudiar con detenimiento, la resolución general, la discusión de las raíces y las diversas propiedades inherentes de las ecuaciones polinomiales de primer grado.*

IGUALDAD

Es la relación que existe entre cantidades que tienen el mismo valor .

ECUACIÓN

Es una igualdad relativa que se verifica sólo para determinado (*s*) valor (*es*) de su incógnita .

EJEMPLO :

La ecuación : $x-7=3$.

Se verifica sólo para : $x=10$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se llama así al valor de la incógnita que reemplazando en la ecuación verifica la igualdad. Si la ecuación tiene una sola incógnita a la solución también se le denomina raíz .

EJEMPLO:

* $x^2=9 \Rightarrow$ soluciones o raíces:

$$x=3 \quad ó \quad x=-3$$

ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es una igualdad literal algebraica relativa de dos expresiones algebraicas que contienen una sola incógnita.

EJEMPLO :

$$2x^2+\frac{x-1}{x+1}=\sqrt[3]{x-2}+3$$

SOLUCIÓN O RAÍZ DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es aquel valor que toma la incógnita de la ecuación, que al reemplazarla en ésta, se obtiene una igualdad numérica.

EN EL EJEMPLO ANTERIOR:

$x=1$ es solución o raíz de la ecuación, ya que al sustituirla en dicha ecuación :

$$2(1)^2+\frac{1-1}{1+1}=\sqrt[3]{1-2}+3$$

Da lugar a la igualdad numérica:

$$2=2$$

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es el conjunto S de valores que toma la incógnita para los cuales se verifica la ecuación.

* ***Por ejemplo :***

La ecuación $x^3-7x+6=0$, se verifica para el conjunto de valores de x : $S=\{-3\,;\ 1\,;\ 2\}$

* ***Otro ejemplo:***

la ecuación:

$$2x^4-3x^3-6x^2+5x+6=0$$

cuyo equivalente es:

$$(x+1)^2\,(2x-3)\,(x-2)=0$$

Se verifica para el conjunto de valores : $S=\left\{-1;\ \frac{3}{2};\ 2\right\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES :

De acuerdo al número de elementos del conjunto S, pueden clasificarse de la siguiente manera:

1) ECUACIÓN COMPATIBLE :

Es aquella que admite en su conjunto solución por lo menos un elemento. Motivo por el cual, se subdivide en:

A) ECUACIÓN COMPATIBLE DETERMINADA:

Es aquella que admite un número finito de elementos para su conjunto solución; esto es, S es un conjunto finito.

EJEMPLO:

La ecuación algebraica:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

Se verifica para $x=1, x=2, x=3$.

Es decir : $S=\{1,\ 2,\ 3\}$

B) ECUACIÓN COMPATIBLE INDETERMINADA:

Es aquella que admite un número infinito de elementos para su conjunto solución; es decir S es un conjunto infinito.

EJEMPLO:

la ecuación racional:

$$3+\frac{x+1}{x}-\frac{4x+1}{x}=0$$

Efectuando operaciones elementales :

$$\frac{3x+(x+1)-(4x+1)}{x}=0 \quad ; \quad x\neq 0$$

resulta: $0x+x=0$

o simplemente: $0x=0\,;\ x\neq 0$

la cual se verifica para todo x distinto de cero, y se dice que S es un conjunto infinito.

2) ECUACIÓN INCOMPATIBLE:

Denominada también ecuación absurda; es aquella que no admite

en su conjunto solución, elemento alguno, esto es, S es un conjunto vacío.

EJEMPLO :

En la ecuación.

$$\frac{4x}{3}+\frac{8}{x-6}=8+\frac{8}{x-6}$$

reduciendo, sin restringir: $\frac{4x}{3}=8$

Despejando, se tiene: $x = 6$

Pero observamos que al reemplazar el valor de x en la ecuación inicial, resulta matemáticamente ¡Absurda!. Luego no existe, un valor para x que verifique la ecuación.

Por lo tanto: $S = \phi$

ECUACIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES

Son aquellas ecuaciones que admiten las mismas soluciones.

Por ejemplo: Las ecuaciones expuestas:

$$\sqrt[3]{x-\sqrt{x}}=0 \text{..................}(1)$$

$$(2x-1)2 = 1 \text{ .... } (2)$$

$$x\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=2x \text{.................}(3)$$

Son equivalentes, ya que cada una de ellas se verifican para $x = 0$ ó $x = 1$

TIPOS DE ECUACIONES DE ACUERDO A SU NATURALEZA

Según el operador algebraico que esté afectando a la incógnita, éstas pueden ser:

1)ECUACIÓN POLINOMIAL:

Es aquella ecuación algebraica, cuyos miembros son polinomios, la cual se puede reducir a la forma general:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ son los coeficientes con $a_0 \neq 0$.

GRADO U ORDEN DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

Se denomina grado u orden de una ecuación polinomial $P(x) = 0$, al mayor exponente de la incógnita x; donde $P(x)$ no posee términos semejantes.

EJEMPLO:

$$P(x) = x^5 - 3x^3 + 7x - 5 = 0$$

es una ecuación polinomial de quinto grado.

RAÍZ DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

Dado un polinomio $P(x)$ y un número r, que pertenece a $\mathbb{C}$, se dice que r es raíz de la ecuación $P(x)=0$, si verifica la igualdad numérica : $P(r) = 0$.

ECUACIONES POLINOMIALES EQUIVALENTES

Son aquellas ecuaciones del mismo grado, que admiten las mismas raíces.

EJEMPLO:

Las ecuaciones polinomiales:

$$4x^3-12x^2-x+3=0$$

$$\frac{2}{3}x^3-2x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}=0$$

admiten en común, las mismas raíces:

$$x_1=\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x_2=-\frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad x_3=3$$

PROPIEDAD :

Dadas las ecuaciones polinomiales del mismo grado:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$; $a_0 \neq 0$

$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n = 0$; $b_0 \neq 0$

Si ambas son equivalentes, se cumple:

$$\boxed{\frac{a_0}{b_0}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}}$$

2) ECUACIÓN FRACCIONARIA :

Es aquella ecuación algebraica, donde por lo menos uno de sus miembros es una expresión racional fraccionaria, la cual se puede reducir a la forma general:

$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ Donde P y Q son polinomios entre sí.

Una ecuación fraccionaria, siempre se transforma a una ecuación polinomial no necesariamente equivalente.

3) ECUACIÓN IRRACIONAL :

Es aquella ecuación algebraica, donde por lo menos uno de sus miembros es una expresión irracional, la cual puede presentar la forma general elemental:

$$\sqrt[n]{F(x)}=G(x)$$

Donde F y G son expresiones algebraicas cualesquiera, y n es un número natural $(n \geq 2)$.

RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE UNA ECUACIÓN IRRACIONAL DENTRO DEL CONJUNTO $\mathbb{R}$

PROPIEDAD :

Si es factible elevar ambos miembros de una ecuación irracional a un mismo exponente natural, se debe tener en cuenta dos criterios fundamentales:

A) Si el exponente es *PAR*, la ecuación que resulta no siempre será equivalente a la ecuación inicial.

EJEMPLO:

Dada la ecuación:

$$\sqrt{2x+29}=3-x \text{......}(\alpha)$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$2x + 29 = 9 - 6x + x^2$$

De donde:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \text{ .... } (\beta)$$

Factorizando: $(x-10)(x+2) = 0$

cuyas soluciones son $x = 10$ ó $x = -2$

verificando estos valores obtenidos en la ecuación (α).

Para $x = 10$:

$$\sqrt{2\ (10)+29} = 3-10$$

de donde se obtiene: $\sqrt{49} = -7$

Esta igualdad numérica no cumple con la definición de raíz aritmética. Por lo tanto, este valor no es solución de la ecuación.

Para $x = -2$:

$$\sqrt{2\ (-2)+29} = 3-(-2)$$

Del cual resulta: $\sqrt{25} = 5$

Luego: $x = -2$, es la única solución de la ecuación propuesta.

Nótese que el conjunto solución $S = \{-2\}$, y además las ecuaciones (α) y (β) NO son equivalentes.

B) Si el exponente es IMPAR, la ecuación que se obtiene siempre es equivalente a la ecuación inicial.

EJEMPLO:

Sea la ecuación:

$$\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{x-1} = 1 \ldots\ldots(\alpha)$$

Elevando al cubo miembro a miembro, y aplicando la identidad de Cauchy, resulta :

$$2x+1-3\ \sqrt[3]{3x}\ \sqrt[3]{x-1}\ (1) = 1$$

Luego: $2x = 3\ \sqrt[3]{3x\ (x-1)}$

Nuevamente, elevando al cubo:

$$8x^3 = 81x\ (x-1) \ldots\ldots\ (\beta)$$

Previamente: $x_1 = 0$ es solución.

Simplificando, resulta:

$$8x^2 - 81x + 81 = 0$$

factorizando: $(8x-9)\ (x-9) = 0$

Despejando: $x_2 = 9/8$ ó $x_3 = 9$

fácilmente se puede comprobar, que éstos tres valores verifican la ecuación inicial.

Es decir, las ecuaciones (α) y (β) son equivalentes.

EJEMPLO:

Compruebe que la ecuación:

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$$

y su ecuación polinomial RESOLVENTE son totalmente equivalentes.

PROPIEDADES DE TRANSFORMACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN ALGEBRAICA

PRIMERA PROPIEDAD :

Si en ambos miembros de una ecuación racional, se suma o resta una misma expresión definida, resulta una ecuación equivalente a la inicial.

Así: $\boxed{A = B \Leftrightarrow A \pm E = B \pm E}$

EJEMPLO :

En la ecuación racional :

$$x^2 - x + \frac{5}{x} = 6 + \frac{5}{x} \ldots\ldots(\alpha)$$

Considerando la restricción $x \neq 0$, restando miembro a miembro la expresión determinada $(5/x)$, con lo cual se obtiene la ecuación equivalente :

$$x^2 - x = 6;\ \ x \neq 0 \ldots\ldots (\beta)$$

cuyas soluciones son $x = 3$ ó $x = -2$, admisibles por ser diferentes de cero. Por lo tanto, las ecuaciones (α) y (β) son equivalentes.

Esta propiedad permite realizar la TRANSPOSICIÓN de expresiones de un miembro a otro con signo cambiado, con el objeto de preparar la ecuación como parte de su resolución.

SEGUNDA PROPIEDAD:

Si en ambos miembros de una ecuación algebraica, se multiplica o divide por una constante C no nula, resulta una ecuación equivalente a la inicial.

Dado un valor real $C \neq 0$, se verifican:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = B \Leftrightarrow A \times C = B \times C \\ A = B \Leftrightarrow \dfrac{A}{C} = \dfrac{B}{C} \end{array}}$$

EJEMPLO :

En la ecuación : $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} = 6 \ldots\ldots(\alpha)$

Multiplicando mam por 4, se obtiene: $3x + 2 = 24 \ldots\ldots (\beta)$

la cual es equivalente a la ecuación (α).

De la ecuación (β), por la primera propiedad, se obtiene:

$$3x = 22 \ldots\ldots (\gamma)$$

Del cual se obtiene : $x = 22/3$

Siendo la única solución, ya que (γ), también es equivalente a la ecuación inicial (α).

En el caso de una ecuación fraccionaria, al multiplicarse por una expresión dependiente de la incógnita *(MCM* de los denominadores), no siempre se obtendrá una ecuación equivalente a la inicial.

EJEMPLO :

En la ecuación fraccionaria:

$$2\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{x-2}{x-1} \ldots(\alpha)$$

Considerando que: $x \neq -2$ y $x \neq 1$, multiplicamos mam por el:

$$MCM = (x+2)\ (x-1) \neq 0$$

Se obtiene:

$$2\ (x+1)\ (x-1) + 3x = (x-2)\ (x+2)$$

la cual se reduce a:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

cuyas soluciones son:

$$x = -1 \text{ ó } x = -2.$$

Pero $x = -2$ no es solución de la ecuación inicial; y por ello, las ecuaciones (α) y (β) no son equivalentes.

CONSECUENCIA IMPORTANTE :

Si en ambos miembros de una ecuación fraccionaria reducida, se simplifica en los denominadores un mismo factor que contenga a la incógnita, no se pierden soluciones. Pero, si se simplifica en los numeradores, para no perder soluciones, previamente

dicho factor deberá igualarse a cero.

EJEMPLO:

En la ecuación racional:

$$\frac{4x-8}{x^2+x}=\frac{3x-6}{x+1}$$

Expresándola de otra manera :

$$\frac{4\ (x-2)}{x\ (x+1)}=\frac{3\ (x-2)}{x+1}$$

cuyas restricciones son:

$$x \neq 0 \text{ y } x \neq -1.$$

Además: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

es una solución de la ecuación inicial.

Simplificando se obtiene la nueva ecuación: $\frac{4}{x}=3 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Finalmente, el conjunto solución será : $S=\left\{2\ ,\ \frac{4}{3}\right\}$

TERCERA PROPIEDAD :

En la resolución de una ecuación no irracional dentro de $\mathbb{R}$, si ambos miembros se radican con un mismo índice, la ecuación que resulta no es equivalente a la ecuación inicial. Pero, si dicha ecuación se resuelve en $\mathbb{C}$, al efectuar la misma operación, se obtendrá una ecuación equivalente a la inicial.

Para mayor precisión, veamos los siguientes ejemplos explicativos:

1) Sea la ecuación :

$$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9$$

En $\mathbb{R}$: Extrayendo raíz cuadrada mam:

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{9} \Leftrightarrow |x|=3$$

Por definición:

$$x=3 \text{ ó } x=-3$$

En $\mathbb{C}$: Despejando x:

$x=\sqrt{9}$ (raíces cuadradas de *9)*

Se obtienen: $x=3$ ó $x=-3$

La ecuación propuesta, al ser analizada en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, nos da las mismas soluciones.

2) Sea la ecuación:

$$x^3-8=0 \quad x^3=8$$

En $\mathbb{R}$: Extrayendo raíz cúbica mam: $\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x=2$

En $\mathbb{C}$: Despejando x:

$x=\sqrt[3]{8}$ (raíces cúbicas de *8)*

Se obtienen:

$x=2$ ó $x=2w$ ó $x=2w^2$

donde w es una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

Se observa que la ecuación al ser analizada en $\mathbb{R}$, ha perdido dos soluciones.

3) Sea la ecuación:

$$x^4-16=0 \Leftrightarrow x^4=16$$

En $\mathbb{R}$: Extrayendo raíz cuarta mam: $\sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow |x|=2$

Por definición: $x=2$ ó $x=-2$

En $\mathbb{C}$: Despejando x:

$x=\sqrt[4]{16}$ (raíces cuartas de *16)*

Se obtienen: $x=2$ ó $x=-2$

$x=2i$ ó $x=-2i$

Donde i es la unidad imaginaria $\left(i=\sqrt{-1}\right)$.

También aquí la ecuación al ser analizada en $\mathbb{R}$, ha perdido dos soluciones.

4) En la ecuación racional:

$$(2x+3)^3=(x-5)^3$$

Observamos que ésta no se verifica para $x=-\frac{3}{2}$ ó $x=5$; esto quiere decir que ambos miembros son diferentes de cero.

Luego, dividiendo mam entre $(x-5)^3$: $\left(\frac{2x+3}{x-5}\right)^3=1$

Vamos a analizar la ecuación en $\mathbb{C}$, para obtener todas las raíces. Para lo cual extraemos raíz cúbica a cada miembro: $\frac{2x+3}{x-5}=\sqrt[3]{1}$

(raíces cúbicas de la unidad)

Del cual resultan :

$$\frac{2x+3}{x-5}=1 \text{ ó } \frac{2x+3}{x-5}=w \text{ ó } \frac{2x+3}{x-5}=w^2$$

Despejando se obtienen:

$$x=-8 \text{ ó } x=\frac{5w+3}{w-2} \text{ ó } x=\frac{5w^2+3}{w^2-2}$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

CONCEPTO:

Denominada también ECUACIÓN LINEAL, es aquella ecuación polinomial de una incógnita, que se reduce a la forma general :

$$ax+b=0 \ ; \quad a \neq 0$$

Cuya solución o raíz es: $\boxed{x=-\frac{b}{a}}$

DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN:

$ax+b=0$ Primer Caso.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$

La raíz $x=-b/a$ es única, y la ecuación resulta COMPATIBLE DETERMINADA de primer grado, de la forma: $ax+b=0$

SEGUNDO CASO :

Si $a \neq 0$ y $b=0$

La raíz $x=0$ es única y la ecuación también resulta COMPATIBLE DETERMINADA de primer grado, de la forma: $ax+0=0$

TERCER CASO :

Si $a=0$ y $b=0$

La ecuación se verifica para todo valor que toma la incógnita x ; esto quiere decir que, la ecuación es COMPATIBLE INDETERMINADA de primer grado, de la forma:

$$0x+0=0$$

CUARTO CASO :

Si $a=0$ y $b \neq 0$

La ecuación no se verifica para ningún valor de la incógnita; lo cual indica que, la ecuación es INCOMPATIBLE de primer grado de

la forma: $0x + b = 0$

La cual se reduce a: $b = 0$ y esto contradice la condición de este caso. Para nuestro propósito, nos limitaremos al estudio de las ecuaciones compatibles determinadas de primer grado de la forma:

$$ax + b = 0\ ;\ a \neq 0$$

APLICACIONES DIVERSAS:

1) De la ecuación lineal consistente:

$$\frac{mx}{3} - 5 = 4x + \frac{m}{2}$$

Que se puede afirmar respecto del parámetro "*m*", si esta admite solución única.

• Por transposición de términos:

$$\frac{mx}{3} - 4x = \frac{m}{2} + 5$$

Efectuando operaciones de reducción:

$$\left(\frac{m-12}{3}\right) x = \frac{m+10}{2}$$

Si es compatible determinada, la condición es:

$$\frac{m-12}{3} \neq 0 \quad \Rightarrow m \neq 12$$

Es decir, para cualquier valor de m distinto de 12, la ecuación admite una única solución, la cual es:

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\left(\frac{m+10}{m-12}\right)}$$

2) De la ecuación lineal mostrada:

$$\frac{(a+1)\ x}{3} - \frac{b}{4} = \frac{3x}{2} - \frac{b-1}{6}$$

que se deduce, si ésta admite infinitas soluciones.

• Transponiendo términos, se tiene:

$$\frac{(a+1)\ x}{3} - \frac{3x}{2} = \frac{b}{4} - \frac{b-1}{6}$$

$$\left(\frac{a+1}{3} - \frac{3}{2}\right) x = \frac{3b - 2(b-1)}{12}$$

Efectuando:

$$\left(\frac{2a-7}{6}\right) x = \frac{b+2}{12}$$

Simplificando: $(2a-7)x = \dfrac{b+2}{2}$

Si la ecuación es indeterminada, debe tomar la forma: $0x = 0$

Por ello:

$$2a - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/2$$
$$b + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2$$

3) Qué condiciones se debe establecer para que la ecuación algebraica:

$$\frac{x-p+1}{5} + \frac{x+q-2}{4} = \left(\frac{p+q}{10}\right) x$$

Sea incompatible.

• Multiplicando miembro a miembro por el $MCM = 20$:

$$4(x-p+1) + 5(x+q-2) = 2(p+q)\ x$$

reduciendo se tiene :

$$9x - 4p + 5q - 6 = (2p+2q)\ x$$

por transposición de términos:

$$\underbrace{(9-2p-2q)}_{=0}\ x = \underbrace{(6+4p-5q)}_{\neq 0}$$

Si no acepta solución alguna, la igualdad debe ser *ABSURDA*. Por esto, se deben cumplir:

$$9 - 2p - 2q = 0 \wedge\ 6 + 4p - 5q \neq 0$$

$$9 = 2\ (p + q)\ \wedge 6 + 4\ (p+q) - 9q \neq 0$$

$$\boxed{p + q = \frac{9}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$\wedge\ 6 + 4\ (9/2) - 9q \neq 0$$

$$24 \neq 9q \ \Rightarrow\ \boxed{q \neq \frac{8}{3}}$$

Reemplazando en *(α)*: $\boxed{p \neq \dfrac{11}{6}}$

SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN COMPATIBLE DETERMINADA DE COEFICIENTES REALES :

$$ax + b = 0$$

Dada la función real de variable real definida por la regla de correspondencia:

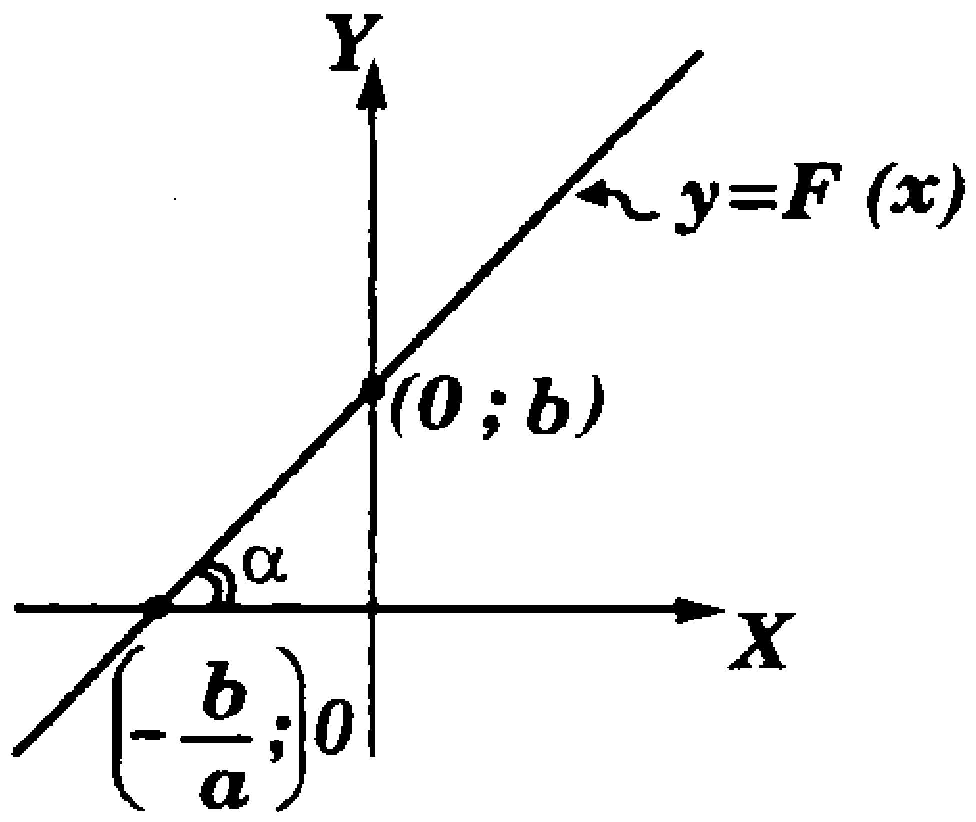
$$y = F(x) = ax + b\ ;\ a \neq 0$$

Cuya representación gráfica en el plano cartesiano es una *LINEA RECTA*, obtenida al unir los puntos cuyas coordenadas *(x ; y)* verifican la condición: $y = F(x)$

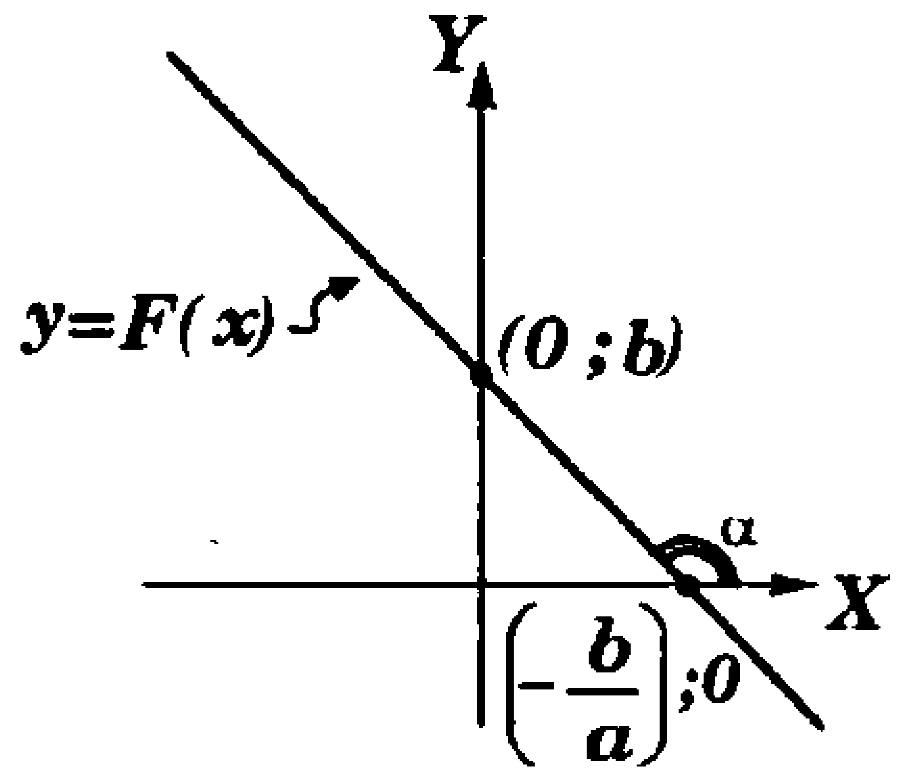
Donde la constante a es la pendiente de la recta, cuyo valor resulta de $a = Tg\,\alpha$, y la constante b es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas.

De acuerdo al valor de la pendiente, esta recta se inclina de dos maneras; veamos:

• Si $a > 0$:



• Si $a < 0$:



En la regla de correspondencia :

$$y = ax + b$$

Si $y = 0$, se obtiene $ax + b = 0$ (Ec. de *1er.* grado).

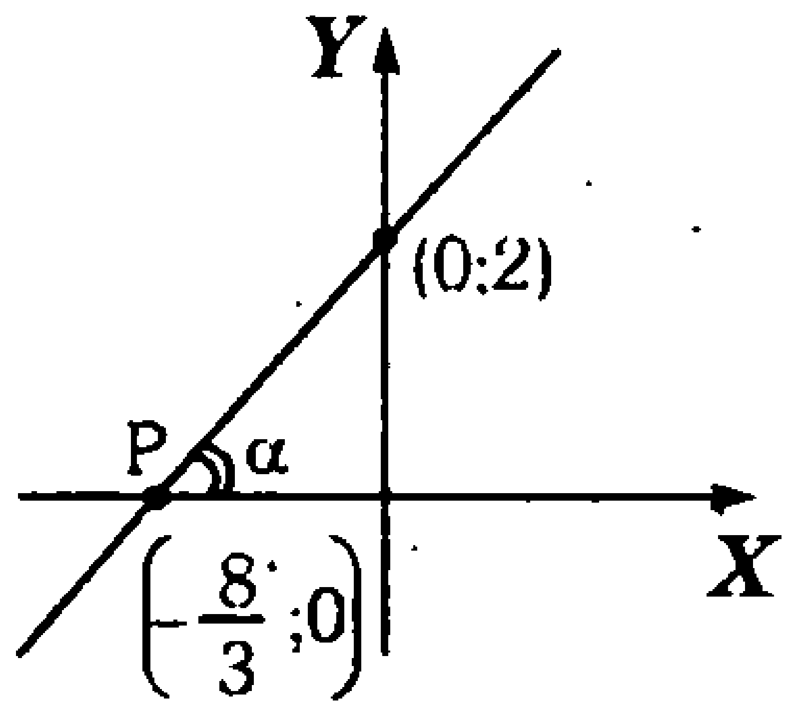
donde $x = -b/a$ (Raíz de la ecuación); y estos valores dan origen al par ordenado $\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$, que representa al punto de intersección de la recta $y = F(x)$ con el eje de abcisas.

EJEMPLO 1 :

Resolver gráficamente la ecuación: $\dfrac{3}{4}x + 2 = 0$

• Esbozemos la gráfica de la función lineal:

$$y = F(x) = \frac{3}{4}x + 2$$



$$tg\,\alpha=\frac{3}{4}$$

$$\boxed{\alpha=37°}$$

Observar que la abcisa del punto *P*, es la solución de la ecuación:

$$\boxed{x=-\frac{8}{3}}$$

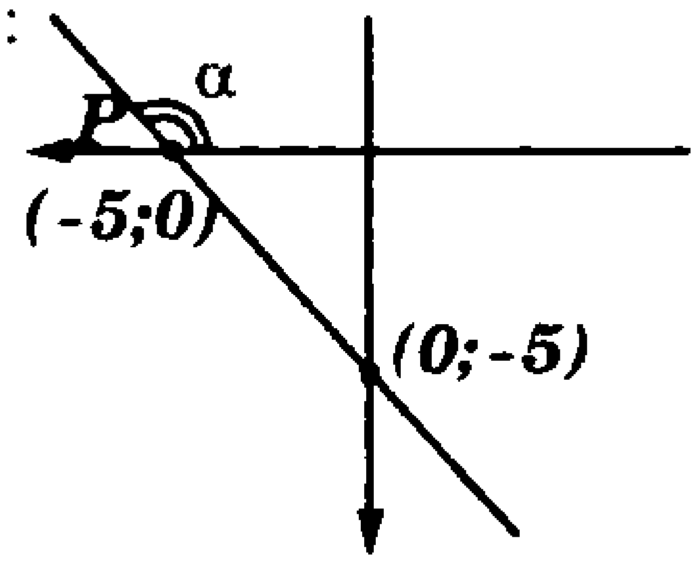
EJEMPLO 2 :

Resolver gráficamente la ecuación:

$$-x-5=0$$

• Esbozando la gráfica de $y=F(x)=-x-5$

resulta:



$$tg\,\alpha=-1$$

$$\boxed{\alpha=135°}$$

la abcisa del punto *P* es la solución de la ecuación dada:

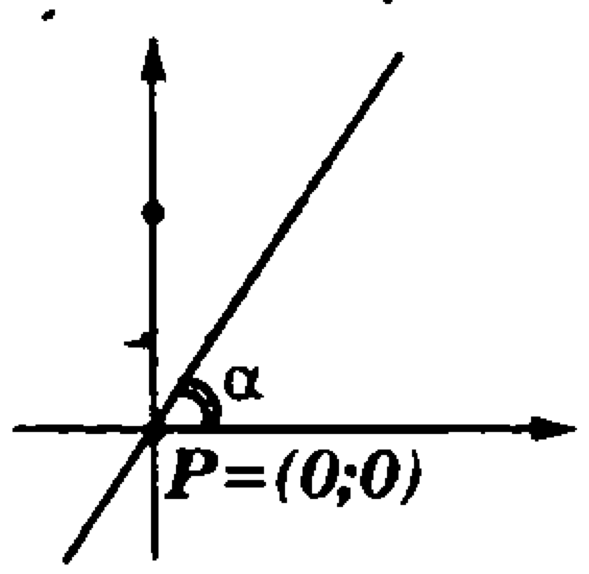
$$\boxed{x=-5}$$

EJEMPLO 3 :

Resolver gráficamente la ecuación:

$$2x=0$$

• Esbozemos la gráfica de $y=F(x)=2x$ tal como se indica:



$$tg\,\alpha=2$$

$$\boxed{\alpha=63,5°}$$

Observamos que el punto *P*, coincide con el origen de coordenadas, y la abcisa de este, es la solución de la ecuación: $\boxed{x=0}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver :

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=9\frac{3}{4}$$

A) 1 *B)* 3 *C)* $-\frac{1}{2}$ *D)* $-\frac{3}{2}$ *E)* –2

RESOLUCIÓN :

o Abramos los paréntesis :

$$\underbrace{x^2+\left(-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)x+\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}_{\bullet}-$$

$$\underbrace{[x^2+(-5+3)x+(-5)(+3)]}_{\bullet\bullet}=\frac{39}{4}$$

$$x^2-x-\frac{15}{4}-x^2+2x+15=\frac{39}{4}$$

o Transponiendo y reduciendo términos semejantes, tendríamos :

$$x=\frac{39}{4}+\frac{15}{4}-15\Rightarrow x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2:

Resolver : $\dfrac{7}{24}-\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{4}$

A) 20 *B)* 10 *C)* 15 *D)* –10 *E)* 30

RESOLUCIÓN :

□ Simplificando la fracción:

$$\frac{\frac{13}{15}}{\frac{10x+12}{15}}=\frac{13}{10x+12}$$

Reemplazando esta fracción en la ecuación :

$$\underbrace{\frac{7}{24}-\frac{1}{4}}_{\bullet\bullet}=\frac{13}{10x+12}\Rightarrow\underbrace{\frac{1}{24}}_{\bullet\bullet}=\frac{13}{10x+12}$$

□ Lugo : $10x+12=24\times 13$

□ Despejamos x:

$$x=\frac{312-12}{10}\Rightarrow x=30$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3 :

Resolver :

$$2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)=\frac{x^2+78}{2x^2-x-6}$$

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 0 *E)* 6

RESOLUCIÓN :

➢ Los denominadores son :

• $\underbrace{(x-2)}$ • $\underbrace{(2x+3)}$

• $2x^2-x-6=\underbrace{(2x+3)(x-2)}$

$$\begin{matrix}2x & & +3\\ x & & -2\end{matrix}$$

➢ Luego el *mcm* será : $(2x+3)(x-2)$

➢ Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por *el mcm* :

$$2\left(\frac{x+2}{x-2}\right)(2x+3)(x-2)-3\left(\frac{x-2}{2x+3}\right)(2x+3)(x-2)=\frac{(x^2+78)}{(2x+3)(x-2)}(2x+3)(x-2)$$

➢ Simplificando :

$$2(x+2)(2x+3)-3(x-2)^2=x^2+78$$

➢ *¡Cuidado!*

Antes de continuar, tenemos que establecer la condición: El *mcm* por el que hemos multiplicado la Ecuación debe ser distinto de cero, es decir:

$$(2x+3)(x-2)\neq 0$$

➢ Para que esto ocurra, cada factor debe ser distinto de cero :

$$2x+3\neq 0\Rightarrow z\neq -3/2$$

$$x-2\neq 0\Rightarrow x\neq 2$$

➢ Ahora si, ... continuemos con *(1)*: (desarrollando las multiplicaciones)

$$4x^2+14x+12-3x^2+12x-12=x^2+78$$

➢ Reduciendo términos semejantes y despejando x :

$$26x=78\Rightarrow x=3$$

➢ Aceptamos $x=3$ como solución correcta porque es distinto de $-3/2$ y de 2 como establece la condición anterior.

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Despejar x en: $a\left(b-\frac{x}{c}\right)=d\left(c-\frac{x}{b}\right)$

A) bc *B)* ac *C)* abc *D)* a–b *E)* 0

RESOLUCIÓN:

○ Efectuamos las restas dentro de los paréntesis :

$$a\left(\frac{bc-x}{c}\right)=d\left(\frac{bc-x}{b}\right)$$

○ Multiplicando ambos miembros por "bc" y llevando todo al $1°$ miembro :

$$ab(bc-x)-cd(bc-x)=0$$

○ Factor común polinomio :

$$(bc-x)\ (ab-cd)=0$$

$$\Rightarrow\ bc-x=\frac{0}{ab-cd}\Rightarrow bc-x=0$$

$$\Rightarrow\ x=bc$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5:

Resolver la ecuación literal :

$$\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}$$

A) 1 B) a C) $a-1$ D) $3b$ E) ab

RESOLUCIÓN:

□ Notaras que el mcm de los denominadores es $(a+b)(a-b)$.

Multiplicamos a toda la ecuación por este *mcm*.

$$(a+b)(a-b)\frac{(x+a)}{(a-b)}+(a+b)(a-b)\frac{(x-a)}{(a+b)}$$

$$=(a+b)(a-b)\frac{(x+b)}{(a+b)}+(a+b)(a-b)\frac{2(x-b)}{(x-b)}$$

□ Al simplificar tendríamos :

$$(a+b)(x+a)+(a-b)(x-a)$$
$$=(a-b)(x+b)+2(a+b)(x-b)$$

□ Si efectuamos las multiplicaciones indicadas, y reduciendo tendremos:

$$2ax+2ab=3ax+bx-ab-3b^2$$

□ Transponiendo y reduciendo :

$$ax+bx=3ab+3b^2$$

□ Extraigamos factor común:

$$x(a+b)=3b(a+b)\longrightarrow x=3b$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6:

Resolver: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=1$

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 0

D) *Incompatible* E) -1

RESOLUCIÓN:

➤ Elevamos al cuadrado a ambos miembros de la ecuación, considerando que al hacerlo, se introducen "soluciones extrañas" que hay que identificar y desechar.

$$[\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}]^2=1^2$$

➤ Desarrollando :

$$\sqrt{x+1}^{\,2}+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}^{\,2}=1$$

➤ Reduciendo los radicales :

$$x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1=1$$

➤ Reduciendo términos semejantes y transponiendo:

$$2\sqrt{x^2-1}=1-2x$$

➤ Volvamos a elevar al cuadrado :

$$4(x^2-1)=1-4x+4x^2$$

➤ Reduciendo términos semejantes:

$$4x=5\Rightarrow x=\frac{5}{4}\ \text{¡Pero ... cuidado!}$$

➤ Como hemos elevado al cuadrado 2 veces, es probable que la raíz obtenida sea "*solución extraña*". ¿Cómo identificarlo?. Probémosla; si reemplazamos $x=\frac{5}{4}$ en la ecuación original.

$$\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}-1}=1\Rightarrow\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=1\Rightarrow\ \frac{4}{2}=1\Rightarrow\ 2=1\ \text{.... ¡absurdo!}$$

➤ Luego $x=\frac{5}{4}$ ES SOLUCIÓN EXTRAÑA que ahora descartamos. Como no hay más soluciones que probar, la ecuación no tiene solución, es decir es INCOMPATIBLE .

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

Resolver en x :

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{5a}$$

A) $\frac{a}{5}$ B) 0 C) a D) $\frac{3a^2}{2}$ E) $\frac{4a^2}{5}$

RESOLUCIÓN :

○ Si elevamos al cubo a ambos miembros vamos a recurrir a :

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

○ Elevamos nuestra ecuación :

$$\left[\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right]^3=[\sqrt[3]{5a}]^3$$

○ Desarrollando :

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}^{\,3}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}^{\,3}+3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}$$
$$\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}})+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}})=5a$$

○ Simplificando :

$$a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\ \sqrt[3]{5a}=5a$$

○ Reduciendo términos semejantes:

$$3\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{5a}=3a$$

○ Nuevamente... al cubo :

$$[\sqrt[3]{a^2-x}\sqrt[3]{5a}]^3=a^3$$

$$\Rightarrow\quad 5a(a^2-x)=a^3$$

○ Más simplificaciones: $5a^2-5x=a^2$

despejamos x: $x=\frac{4a^2}{5}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 8:

Resolver :

$$\frac{n}{m}[a(m-x)+bx]=b(n-x)+ax$$

A) $m+n$ B) $mn-1$ C) $\frac{mn}{m+n}$ D) 0 E) 1

RESOLUCIÓN :

□ Transformando :

$$\frac{n}{m}[am-ax+bx]=bn-bx+ax$$

$$\Rightarrow amn-anx+bnx=bmn-bmx+amx$$
$$\Rightarrow amn-bmn=amx-bmx+anx-bnx$$
$$\Rightarrow mn(a-b)=mx(a-b)+nx(a-b)+nx(a-b)$$

□ Dividiendo por $(a-b)$, quedará así : $mn=x(m+n)\Rightarrow x=\frac{mn}{m+n}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Resolver:

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}$$

A) ab B) $\sqrt{ab}$ C) $-\sqrt{-ab}$

D) $\sqrt{-ab}$ E) "C" o "D"

RESOLUCIÓN:

➤ Transponiéndo términos :

$$\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}$$

$$\Rightarrow\frac{x+a-x-b}{(x+b)(x+a)}=\frac{x-a-x+b}{(x-b)(x-a)}$$

$$\Rightarrow\frac{a-b}{(x+b)(x+a)}=\frac{-(a-b)}{(x-b)(x-a)}$$

➢ De aquí :

$(x-b)(x-a)=-(x+b)(x+a)$

$\Rightarrow x^2-(a+b)x+ab=-x^2-(a+b)x-ab$

$\Rightarrow 2x^2=-2ab \Rightarrow x^2=-ab$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{-ab}$ **RPTA : "E"**

PROBLEMA 10:

Resolver: $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$

A) a B) b C) – b
D) – a E) "C" o "D"

RESOLUCIÓN:

○ Transponiendo:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{x-x-a-b}{(x+a+b)x}$

$\Rightarrow \frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{(x+a+b)x} \Rightarrow (x+a+b)x=-ab$

$\Rightarrow x^2+(a+b)x+ab=0$

x a
x a

○ De aquí : $(x+a)(x+b)=0$

○ Donde: $x=-a \vee x=-b$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Resolver :

$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

A) 40 B) 41 C) 49,5 D) 45,2 E) 50

RESOLUCIÓN :

❑ Efectuemos los factores que se indican:

$(x-3)(x-5)(x+2)(x+4)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

$(x^2-x-6)(x^2-x-20)-(x^2-x-13)^2+2x=50$

❑ De aquí, hacemos: $x^2-x=a$, quedará así :

$\Rightarrow (a-6)(a-20)-(a-13)^2+2x=50$

❑ Desarrollando:

$\Rightarrow a^2-26a+120-a^2+26a-169+2x=50$

❑ Transponiendo: $2x=50-120+169$

$\Rightarrow 2x=99 \Rightarrow x=49{,}5$

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 :

Resolver :

$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}=1$

A) 1 B) – 1 C) 0 D) 4 E) 0

RESOLUCIÓN:

➢ Multiplicando por la conjugada en cada término.

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}+\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{z+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})}+\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3})}=1$$

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}=1$

$\sqrt{x+4}=\sqrt{x+1}+1$ elevando al cuadrado.

$x+4=x+1+1+2\sqrt{x+1} \iff 1=\sqrt{x+1}$

al cuadrado : $1=x+1 \Rightarrow x=0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Calcular "x" al resolver :

$\frac{x-100}{50}+\frac{x+48}{24}=\frac{37}{25}$ y dar el valor $\frac{x^2}{24}+1$

A) 25 B) 32 C) 56 D) 1 E) 40

RESOLUCIÓN :

$\frac{x-100}{50}+\frac{x+48}{24}=\frac{37}{25} \Rightarrow \frac{x}{50}-2+\frac{x}{24}+2=\frac{37}{28}$

$\Rightarrow \frac{74x}{50\times 24}=\frac{37}{25} \Rightarrow x=\frac{37\times 50\times 24}{25\times 74}$

$\Rightarrow x=24$

Luego : $\frac{x^2}{24}+1=25$

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Resolver:

$x-3(x-1)=6-4(2x-3)$

A) 1/2 B) 1/4 C) 3/4
D) 3/2 E) 2

02 Resolver:

$5(x-1)+4(2x-3)=3(2x-7)-(x+4)$

A) 2 B) 1 C) – 3
D) – 2 E) – 1

03 Resolver:

$14x-(3x-2)-[5x+2-(x-9)]=0$

A) – 1 B) – 2 C) 1 D) 2 E) 3

04 Resolver:

$\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}\right)$

A) – 13 B) – 14 C) – 15
D) – 12 E) – 11

05 Resolver:

$\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{x-3}{4}$

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

06 Resolver la ecuación:

$\frac{15x}{2}+2-\frac{21x}{4}=3x+\frac{1}{4}$

A) 4/5 B) 1/2 C) 1/3
D) 4/3 E) 7/3

07 Resolver para "x":

$x+3(x-2)=2x-4$

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

08 Hallar "x" en:

$2(x+3)=5(x-1)-7(x-3)$

A) 5 B) 5/2 C) 2 D) 2/5 E) 3/2

09 Hallar "x" en:

$3x+4(x-2)=x-5+3(2x-1)$

A) 1 B) –1 C) 0
D) indeterminado E) N.A

10 Hallar "x" en:

$\frac{x-3}{2}=\frac{2x+4}{5}$

A) 9 B) 11 C) 15 D) 17 E) 23

11 Hallar "x"

$2(2x-5)=x-3-2(6-2x)$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12 Resolver:

$4-[-x+2-(4-2x)-5]=x+(-5+2x)$

A) 15 B) 16 C) 4 D) 3 E) 5

13 Resolver:

$\frac{x+4}{3}-\frac{x-1}{2}=x-1$

A) –1 B) –3 C) 17/7 D) –17/7 E) 2

14 Resolver:

$5+8x+2(x+1)=7(x-2)+3(x+1)+13+x$

A)5 B)-6 C)8 D)1996 E)todos

(15) Resolver : $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}=x-9$

A)5 B)6 C)12 D)15 E)10

(16) Resolver:

$$\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-1}{3}=\frac{4x-1}{4}$$

A) $5/12$ B) $3/7$ C) $12/7$ D)1 E) $7/12$

(17) Resolver:

$(2x-1)^2 + (3x+5)^2 = 13(x+1)(x-1) + 143$

A)2 B)3 C)4 D)6 E)8

(18) Resuelva:

$$\frac{5x+56}{32}-\frac{3x+40}{64}=\frac{x+18}{10}-\frac{x-72}{24}$$

A)48 B)52 C)36 D)72 E)24

(19) Resuelva:

$$\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$$

A)0 B)1 C)ab D)a+b E)a/b

(20) Halle x en:

$$\frac{x^2+12x+35}{x^2-8x+15}=\left(\frac{x+6}{x-4}\right)^2$$

A)0 B)-1 C)1 D)-1/2 E)1/2

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Resolver :

$-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x)-(x-3)=0$

A) 2 B) -3 C) 4 D) 5 E) 7

(02) Resolver: $x-(5-x)=3-(-2x+6)$

A) $\frac{5}{2}$ B) 0 C) 1 D) Indeterminado

(03) Resolver :

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=-\frac{x-5}{5}$$

A) 1 B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{11}{7}$

(04) Resolver: $\frac{x-3}{2}=2-\frac{x-2}{3}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(05) Resolver :

$$\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)$$

A) $\frac{13}{5}$ B) $\frac{18}{5}$ C) $1\frac{1}{2}$ D) $1\frac{1}{35}$ E) $\frac{18}{15}$

(06) Resolver:

$x+4(x-2)=x-5+3(2x-1)$

A) 1 B) 0 C) -1 D) Incompatible E) Indeterminados

(07) Resuelve :

$3+2[x-(2x+2)]=2[x+(3x-1)]$

A) 10 B) 1 C) $\frac{1}{10}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{5}$

(08) Resolver: $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{3x-2}{x+1}$

A) 1 B) 0 C) -1 D) Incompatible E) Indeterminado

(09) Sabiendo que : a, b y c son constantes negativas, además :

$$\frac{x+2a}{b+c}+\frac{x+2b}{c+a}+\frac{x+2c}{a+b}=-6$$

Halle usted el valor de :

$$R=\frac{b+c+x}{2a+b+c}$$

A) 1 B) a C) b D) c E) -1

(10) Resolver la ecuación en x:

$$(n-1)x^2+5x-n=4+5n$$

si este se reduce a una ecuación de primer grado.

A) 1 B) -1 C) -2 D) 2 E) 3

(11) Resolver:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{1}{(x-1)(x-3)}=0$$

A) {2} B) { } C) {∅} D) {1} E) {3}

(12) La ecuación :

$$\frac{x+1}{x-3}+\frac{x+5}{x-2}=\frac{2x^2-x-11}{x^2-5x+6}$$

tiene como conjunto solución a :

A) {3} B) {1} C) {2} D) {-3} E) { }

(13) Resolver :

$$\frac{2x-3}{x-1}=\frac{x+4}{x+1}-\frac{1}{x-1}$$

indicando luego: x^2-1.

A) 0 B) 2 C) 1 D) 3 E) 5

(14) Hallar "x" luego de resolver:

$$\frac{7-x}{2}+\frac{9-x}{4}=\frac{2x-7}{3}+\frac{x+1}{6}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(15) Resolver; hallar: "x"

$$\frac{x+5}{x+6}+\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+3}{x+4}+\frac{x+4}{x+5}$$

A) $-\frac{9}{2}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

(16) Resolver: $\frac{2}{x+1}+\frac{x}{4}=5$

Indicar una de sus raíces al cuadrado.

A) $\frac{16}{25}$ B) $\frac{25}{16}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 2 E) 7

¡RECUERDA!

La ecuación lineal con una incógnita.

$$ax+b=0 \; ; \; a\neq 0$$

* Tiene solución única:

$$x=-\frac{b}{a}$$

* Por tanto, para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se transponen todos los términos que contienen a la incógnita a un miembro de la ecuación y se realizan las operaciones para el despeje de la incógnita .

EJEMPLO:

Resolver la ecuación :

$$ax+b^2=a^2+bx \; ; \; a\neq b$$

RESOLUCIÓN :

* Por supuesto , aquí se sobre entiende que la incógnita es x y que por tanto, todas las letras representan constantes conocidas . Entonces procedemos como sigue: $ax-bx=a^2-b^2$

* Factorizando: $(a-b)x=a^2-b^2$

* Dividiendo entre $(a-b)$ si $a\neq b$; $x=a+b$

* Comprobaremos nuestra solución por sustitución directa de la raíz $(a+b)$ en la ecuación original , así tendremos .

$$a(a+b)+b^2=a^2+b(a+b)$$

* Osea la identidad :

$$a^2+ab+b^2=a^2+ab+b^2$$

DISCUSIÓN DE LA RAÍZ:

$x=-\frac{b}{a}$; de: $ax+b=0$

1) Si : $a=0$; $b=0$ ⇒ La ecuación es indeterminada

2) Si : $a=0$; $b\neq 0$ ⇒ La ecuación es incompatible

3) Si : $a\neq 0$; $b\neq 0$ ⇒ La ecuación es determinada

ECUACIONES DE 2DO GRADO

CAPÍTULO 084

OBJETIVOS :

* *Notar que de las ecuaciones polinomiales, la más importante, es la ecuación cuadrática; por su conformación característica y sus propiedades inherentes, bastante usuales en todas las ramas de la matemática.*

* *En el álgebra funcional, el análisis del parámetro crítico denominado discriminante ($\Delta = b^2-4ac$), es muy importante para entender el comportamiento y la variabilidad de la función cuadrática:*

$$F_{(x)} = ax^2 + bx + c \ ; \ a \neq 0$$

• *En el caso de ecuaciones cuadráticas con coeficientes reales y discriminante negativo, aprenderemos a trabajar con raíces imaginarias.*

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Denominada también ECUACIÓN CUADRÁTICA, es aquella ecuación polinomial de una incógnita de la forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ a \neq 0$$

a, b y c: Coeficientes, $a \neq 0$

ax^2 : Término cuadrático

bx : Término lineal.

c : Término independiente.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0 \ ; a \neq 0 \ ...(1)$

Multiplicando por "$4a$", así:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Transponiendo :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumando b^2 en ambos miembros, para formar en el primero un trinomio cuadrado perfecto :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Luego: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extrayendo raíz cuadrada, se tiene:

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Despejando la incógnita "x", resulta:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

que viene a ser la solución general de la ecuación cuadrática *(1)*. Establecida por FRANCOISE VIETE en el siglo *XVI*.

DISCRIMINANTE O VARIANTE

Se denomina así a la cantidad subradical de la solución general : $b^2 - 4ac$, y se le simboliza por la letra griega mayúscula "Δ"; es decir:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUATRÁTICA

De la solución general, se obtienen:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad ó \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Para conocer los valores de estas raíces, a partir de la ecuación polinomial:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ; a \neq 0$$

Se reemplazan directamente los valores de los parámetros a, b y c.

Pero, si el polinomio cuadrático se puede factorizar fácilmente, entonces se realiza este procedimiento, obteniéndose dos factores lineales; para luego igualar a cero cada uno de estos.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

I) POR FACTORIZACIÓN :

Consiste en factorizar el *1er.* término de la ecuación empleando aspa simple o completando cuadrados, enseguida, se iguala a cero cada uno de los factores obtenidos.

EJEMPLO :

• Resolver: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

RESOLUCIÓN :

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$2x \quad +1 \longrightarrow 2x + 1 = 0$

$1x \quad -3 \longrightarrow x - 3 = 0$

$$2x + 1 = 0 \ ó \ x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

• Resolver :

$x - 8)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow \ x - 8 = 0 \ ó \ x + 1 = 0$

de donde: $C.S. = \{-1;8\}$

• Resolver:

$$x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x + \sqrt{6}x - 8 = 0$$

$x \quad -\sqrt{3}$

$x \quad -\sqrt{2}$

$$(x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2}) = 0$$

$\Rightarrow x - \sqrt{3} = 0 \ \ ó \ x - \sqrt{2} = 0$

de donde: $C.S. = \{\sqrt{3} \ ; \ \sqrt{2}\}$

II) FÓRMULA GENERAL :

Sea: $ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ a \neq 0$

Multiplicando por $(4a)$:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Sumando y restando b^2:

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2} - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Despejando: $x_{(1;2)}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

FÓRMULA GENERAL PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA :

$$\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \vee \boxed{x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

O expresado de otro modo, la solución es :

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ;\ \frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}\right\}$$

EJEMPLOS:

❑ ***Resolver:*** $2x^2-3x-1=0$

Vemos que : $a=2\,;b=-3\,;c=-1$

Reemplazando en la fórmula :

$$x_{(1;2)}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

$$\Rightarrow\left\{x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}\qquad x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right.$$

Entonces : $C.S.=\left\{\dfrac{3+\sqrt{17}}{4};\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$

❑ ***Resolver:*** $x^2+x+3=0$

RESOLUCIÓN :

$$a=1\ ;\quad b=1\ ;\quad c=3$$

Reemplazando en la fórmula :

$$\sqrt{-1}=i$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$$

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{2}\ ;\ x_2=\frac{-1-\sqrt{11}\,i}{2}$$

DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON COEFICIENTES REALES :

$$ax^2+bx+c=0$$

La naturaleza de las raíces de la ecuación:

$ax^2+bx+c\ ;\ a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$

viene caracterizada por el valor que asume el discriminante Δ, es decir:

1er. Caso :

Si $\Delta>0$, las raíces serán reales y diferentes.

EJEMPLO:

Resolver: $3x^2-5x+1=0$

* Cálculo del discriminante:

$\Delta=(-5)^2-4(3)(1)=13$ donde : $\Delta>0$

Luego, reemplazando en la solución general:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{13}}{2(3)}$$

De aqui:

$$x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\quad \text{ó}\quad x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$$

Las raíces son reales y diferentes.

! RECUERDA¡

Si $\Delta>0$; las raíces son diferentes $(x_1\neq x_2)$ y reales. La ecuación presenta dos soluciones.

OBSERVACIÓN :

$\Delta\geq 0$; Raíces reales

2do. Caso :

Si $\Delta=0$, las raíces serán reales e iguales; esto es, una raíz real doble.

EJEMPLO:

Resolver: $4x^2-12x+9=0$

Análogamente:

$$\Delta=(-12)^2-4(4)(9)=0$$

En la solución general:

$$x=\frac{-(12)\pm\sqrt{0}}{2(4)}$$

De aquí: $x_1=x_2=\dfrac{3}{2}$

! RECUERDA¡

Si $\Delta=0$; las raíces son iguales $(x_1=x_2)$ y reales. La ecuación posee solución única. Además ax^2+bx+c es un trinomio cuadrado perfecto.

3er. Caso :

Si $\Delta<0$, las raíces serán imaginarias y conjugadas.

EJEMPLO:

Resolver: $x^2-2x+2=0$

De igual manera :

$$\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=-4$$

donde: $\Delta<0$, y en la solución general:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{-4}}{2(1)}$$

De aquí: $x_1=1+i$ ó $x_2=1-i$

las cuales son imaginarias y conjugadas.

! RECUERDA¡

Si $\Delta<0$; las raíces son complejas no reales y conjugadas:

$$(x_1=u+vi\ ;\ x_2=u-vi)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON COEFICIENTES REALES

Sean las funciones:

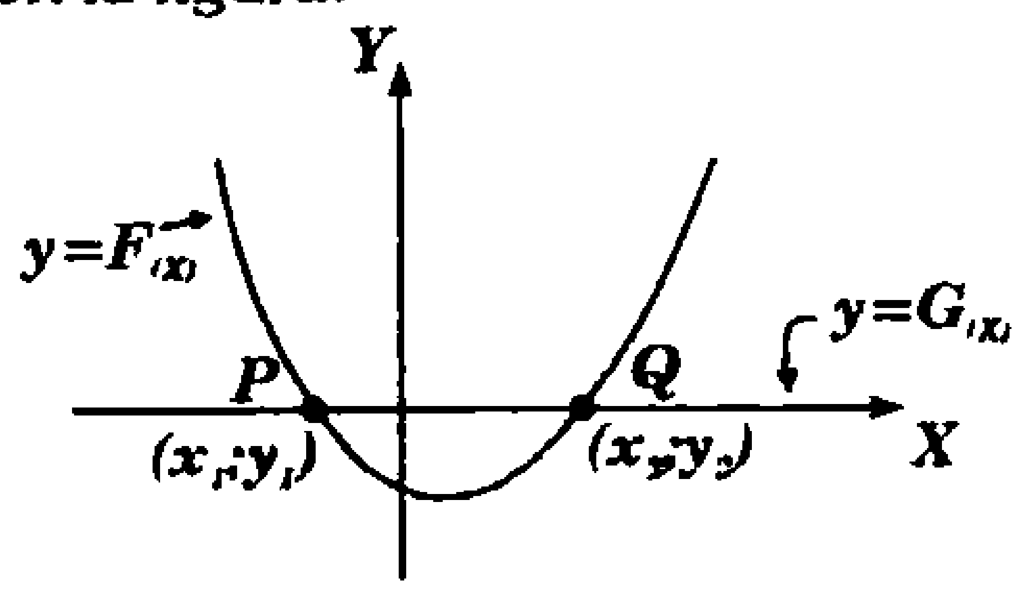
$$y=F_{(x)}=ax^2+bx+c\ ;\ a\neq 0$$
$$y=G_{(x)}=0$$

Si: $F_{(x)}=G_{(x)}\ .....\ (\alpha)$

Se obtiene la ecuación cuadrática:

$$ax^2+bx+c=0\,;a\neq 0$$

De la igualdad de funciones (α), se deben calcular aquellos "x" (x_1 y x_2) para los cuales las ordenadas de ambas funciones (y_1 y y_2) son las mismas; es decir, geométricamente, hallar los puntos de intersección de las gráficas de éstas funciones, como se muestra en la figura:



donde $y_1=y_2=0$ y $x_1\neq x_2$

Siendo las abcisas de los puntos de intersección $(x_1;0)$ y $(x_2;0)$ de las gráficas de F y G, las raíces o ecuaciones de la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$

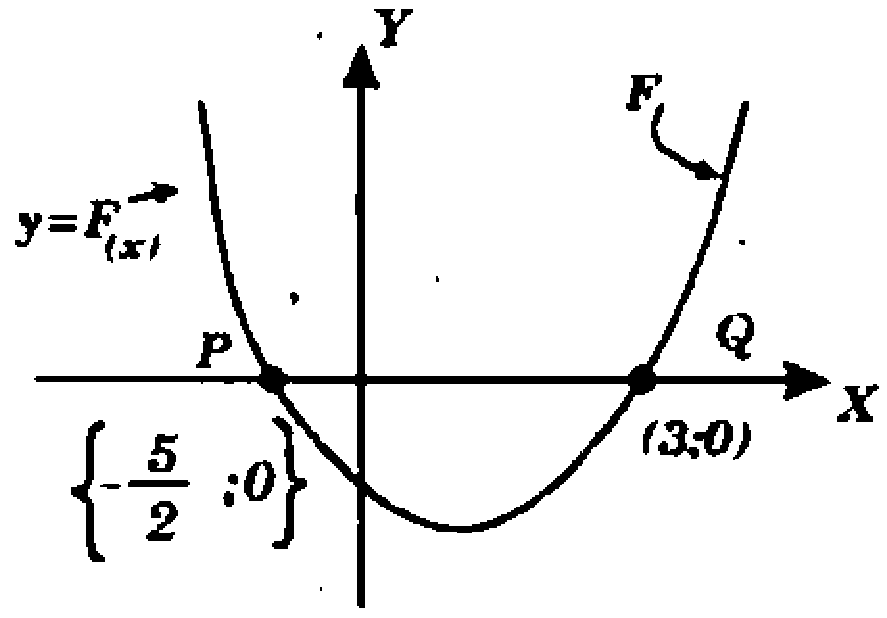
Ejemplo explicativo:

Resolver gráficamente :

$$2x^2-x-15=0$$

Esbozemos la gráfica de la función cuadrática(*).

$$y = F_{(x)} = 2x^2 - x - 15$$



las abcisas de los puntos P y Q de intersección de la gráfica de F y el eje horizontal, nos representan las raíces o soluciones de la ecuación.

Observar que, para:

$x = -\frac{5}{2} \Rightarrow y = \left(-\frac{5}{2}\right) = 0$
$x = 3 \Rightarrow y = F_{(3)} = 0$

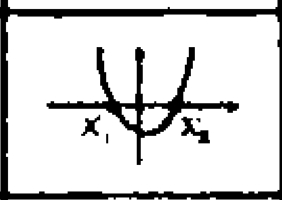
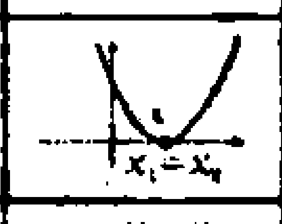
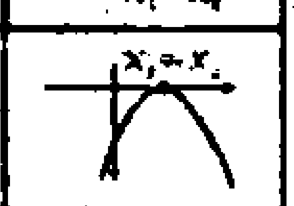
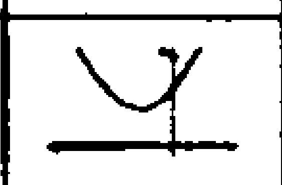
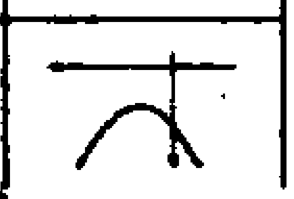
Se generan los puntos: $P = \left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$ $Q = (3;\ 0)$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA DE COEFICIENTES REALES .

En la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$$

Sabemos que la naturaleza de sus raíces viene dada por el valor del discriminante "Δ". Según esto, geométricamente, se obtienen gráficamente lo siguiente:

CARACT. DEL DISCRIMINANTE	COEFICIENTE PRINCIPAL	REPRESENTAC. GEOMÉTRICA	NATURALEZA DE LAS RAÍCES
$\Delta > 0$	$a > 0$		LAS RAÍCES SON REALES Y DIFERENTES $x_1 \neq x_2$
	$a < 0$		
$\Delta = 0$	$a > 0$		LAS RAÍCES SON REALES E IGUALES $x_1 = x_2$ O UNA RAÍZ REAL DOBLE
$\Delta < 0$	$a < 0$		
	$a > 0$		LAS RAÍCES SON IMAGINARIAS Y CONJUGADAS
	$a < 0$		

PROPIEDAD:

Dada la ecuación cuadrática con coeficientes racionales:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ;\ a \neq 0$$

Si su discriminante Δ es un número cuadrado perfecto, las raíces de dicha ecuación siempre serán racionales. Si no es así, serán irracionales y conjugados.

EJEMPLO:

Resolver : $2x^2 - x - 6 = 0$

* Cálculo del discriminante:

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-6) = 49$ (cuadrado perfecto)

Luego reemplazando en la solución general:

$x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2(2)}$; de la cual se obtienen:

$$x_1 = 2 \quad ó \quad x_2 = -3/2$$

Las cuales son números racionales.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA (Teoremas de Viéte)

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0\ ;\ a \neq 0$$

entonces, se verifica las siguientes propiedades:

SUMA DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Se obtiene dividiendo el cociente del término lineal con el signo cambiado entre el coeficiente del término cuadrático.

PRODUCTO DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Se determina dividiendo el término independiente entre el coeficiente del término cuadrático.

DIFERENCIA DE RAÍCES

$$\boxed{x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}}$$

Las anteriores propiedades se verifican en una ecuación cuadrática con coeficientes de naturaleza arbitraria (reales o complejos).

EJEMPLO :

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 6x + 3 = 0$$

Se cumplen las relaciones de Viéte:

• $x_1 + x_2 = -\dfrac{6}{2} = -3$

• $x_1 . x_2 = \dfrac{3}{2}$

$\Delta = (6)^2 - 4(2)(3) = 12$; luego:

• $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

PROPIEDADES AUXILIARES :

$T4. : (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2\,(x_1^2 + x_2^2)$

$T5. : (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES (Teorema Recíproco de Viéte).

Existen 2 procedimientos para formar una ecuación.

1) Se forma un producto de *2do.* grado a partir de sus raíces de dos binomios cuyo primer término es la incógnita, siendo los segundos las raíces con signos cambiados, finalmente se iguala a cero dicho producto.

2) Consiste en calcular la suma "*s*" y el producto "*P*" de las raíces luego se reemplazan estos dos valores en la siguiente fórmula.

$x^2 - S\,x + P = 0$ ó

$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\ x_2 = 0$

DEMOSTRACIÓN INDUCTIVA :

Sean x_1 y x_2 las raíces de cierta ecuación cuadrática de incógnita "x"; es decir:

$$x = x_1 \quad ó \quad x = x_2$$

Por transposición de términos, se tienen:

$$x - x_1 = 0 \quad ó \quad x - x_2 = 0$$

los cuales se obtienen a partir de:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Efectuando :

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

llamando a : $x_1+x_2=S$

$$y:\ x_1 . x_2=P$$

Se obtiene:

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}\ \ldots(\omega)$$

(A esta ecuación se le denomina canónica, normalizada u ordinaria, debido a que su coeficiente principal es la unidad).

Ejemplo explicativo *(1)*:

Formar una ecuación de segundo grado, cuyas raíces sean $\dfrac{3+\sqrt{29}}{10}$ ó $\dfrac{3-\sqrt{29}}{10}$

* Asumiendo que dichos valores son x_1 y x_2 respectivamente. Calculemos S y P por separado:

$$S=\frac{3+\sqrt{29}}{10}+\frac{3-\sqrt{29}}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P=\left(\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right)\left(\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)=\frac{3^2-\sqrt{29}^2}{100}$$

$$=-\frac{20}{100}=-\frac{1}{5}$$

Aplicando la fórmula "ω", se tiene:

$$x^2-\left(\frac{3}{5}\right)x+\left(-\frac{1}{5}\right)=0$$

que expresada con coeficientes enteros, resulta:

$$5x^2-3x-1=0$$

EJEMPLO :

Construir una ecuación cuadrática que acepte como raíces a $\left(\dfrac{3+i}{2}\right)$ ó $(-1+2i)$

Calculando S y P, se tienen:

$$S=\left(\frac{3+i}{2}\right)+(-1+2i)=\frac{1+5i}{2}$$

$$P=\left(\frac{3+i}{2}\right).(-1+2i)=\frac{-5+5i}{2}$$

La ecuación formada, será:

$$x^2-\left(\frac{1+5i}{2}\right)x+\left(\frac{-5+5i}{2}\right)=0$$

La cual reduce a:

$$2x^2-(1+5i)x-5+5i=0$$

Siendo: $i=\sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

PROPIEDADES PARTICULARES :

A) En la ecuación :

$$ax^2+bx+c\ ;\ a\neq 0$$

La condición que se debe cumplir para que:

A1) SUS RAÍCES SEAN ASIMÉTRICAS U OPUESTAS

Es decir, las raíces sean iguales en valor absoluto pero de signos contrarios.

Por propiedad : $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=0$

luego, la condición necesaria y suficiente es : $\boxed{b=0}$

La ecuación cuadrática que admite raíces simétricas, es de la forma genérica :

$$ax^2+c=0\ ;\ a\neq 0,\ c\neq 0$$

EJEMPLO :

$x^2-4=0$ presenta raíces simétricas ya que: $x_1=2,\ x_2=-2$.

A2) SUS RAÍCES SEAN RECÍPROCAS O INVERSAS

Es decir, una raíz es la inversa de la otra.

Por propiedad: $x_1 . x_2=\dfrac{c}{a}=1$

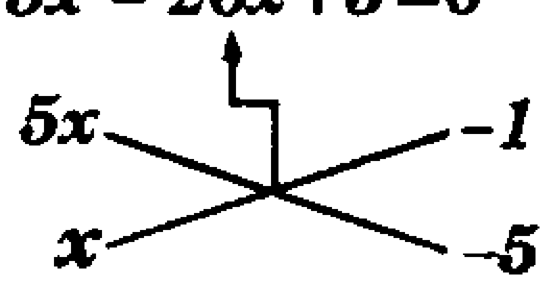
Entonces, la condición necesaria y suficiente es: $\boxed{c=a}$

la ecuación cuadrática que admite raíces recíprocas, tiene la forma genérica:

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0$$

EJEMPLO :

$$5x^2-26x+5=0$$



$$(5x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x_1=5\ ;\ x_2=\frac{1}{5}$$

A3) UNA DE SUS RAÍCES ES IGUAL A LA UNIDAD

Es decir $x=1$, verifica la ecuación cuadrática:

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

reemplazando este valor, resulta la condición necesaria y suficiente:

$$\boxed{a+b+c=0}$$

B) Para el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas:

$$a_1x^2+b_1x+c_1=0\ ;\ a_1\neq 0$$

$$a_2x^2+b_2x+c_2=0\ ;\ a_2\neq 0$$

La condición que se debe cumplir para que:

B1) AMBAS ECUACIONES TENGAN LAS MISMAS RAÍCES

Es decir, que las ecuaciones sean equivalentes. Se debe cumplir la relación de proporcionalidad entre los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, la cual es:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}}$$

B2) AMBAS ECUACIONES ADMITAN UNA RAÍZ COMÚN - TEOREMA DE BEZOUT

$$\boxed{(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)=(a_1c_2-a_2c_1)^2}$$

Siendo esta relación, la CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD conocida con el nombre de BEZOUTIANA, para que dos ecuaciones cuadráticas de una incógnita, tengan una raíz común, cuyo valor se determina así:

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=-\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

FORMAS SI POTENCIAS DE LA RAÍCES DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Se denomina así a las expresiones de la forma $(x_1^n+x_2^n)$, $n\in Z^+$, cuya característica es que al intercambiar x_1 por x_2 y x_2 por x_1,

la forma de la expresión original no se altera; siendo x_1 y x_2 raíces de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; ; \quad a \neq 0$$

Establezcamos una fórmula que nos permita relacionar la suma de las raíces, de los cuadrados, de los cubos, de las cuartas, y en general de las enésimas potencias de las raíces; las cuales denotaremos por S_1, S_2, S_3, S_4 y en general S_n.

Para facilitar el procedimiento de la deducción llevaremos la ecuación cuadrática general a su forma canónica:

$$x^2 + px + q = 0$$

donde : $p = \dfrac{b}{a}$ y $q = \dfrac{c}{a}$ y además : $x_1 + x_2 = -p$ y $x_1x_2 = q$.... (θ)

Construyendo progresivamente las sumas requeridas:

1°) $x_1 + x_2 = S_1 = -p$ ....(1)

$$S_1 + p = 0 \text{ .... } (\alpha)$$

2°) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2)$

De los (θ), reemplazando:

$$x_1^2 + x_2^2 = (-p)^2 - 2(q)$$

Luego: $x_1^2 + x_2^2 = S_2 = p^2 - 2q$ .....(2)

$$S_2 - p^2 + 2q = 0$$

$$S_2 + pS_1 + 2q = 0 \text{ ...... } (\beta)$$

De la misma manera:

3°) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1x_2) \times (x_1 + x_2)$

Por (1) y (θ), reemplazando:

$$x_1^3 + x_2^3 = (-p)^3 - 3(q)(-p)$$

Luego:

$$x_1^3 + x_2^3 = S_3 = -p^3 + 3pq \text{ ...... } (3)$$

$$S_3 + p^3 - 3pq = 0$$

$$S_3 + p\,(p^2 - 2q) + q\,(-p) = 0$$

De (1) y (2), se deduce que:

$$S_3 + pS_2 + qS_1 = 0 \text{ .... } (\gamma)$$

Asimismo:

4°) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 4(x_1x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 6(x_1x_2)^2$

Sustituyendo de (θ) y de (2):

$$x_1^4 + x_2^4 = (-p)^4 - 4(q)(p^2 - 2q) - 6(q)^2$$

$$x_1^4 + x_2^4 = S_4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2$$

Luego: $S_4 - p^4 + 4p^2q - 2q^2 = 0$

$$S_4 + p(-p^3 + 3pq) + q(p^2 - 2q) = 0$$

De (2) y (3), reemplazando :

$$S_4 + pS_3 + qS_2 = 0 \text{ .... } (\phi)$$

Por lo tanto, de (α), (β), (γ), (ϕ), resumiendo:

$$S_1 + p = 0$$

$$S_2 + pS_1 + 2q = 0$$

$$S_3 + pS_2 + qS_1 = 0$$

$$S_4 + pS_3 + qS_2 = 0$$

En general :

$$\boxed{S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} = 0}$$

y teniendo en cuenta que: $p = \dfrac{b}{a}$; $q = \dfrac{c}{a}$

la relación anterior se podrá escribir así:

$$\boxed{a\,S_n + b\,S_{n-1} + c\,S_{n-2} = 0}$$

A la cual se le denomina LEY GENERAL DE RECURRENCIA de las potencias de las raíces de la ecuación cuadrática.

EJEMPLO :

Calcular:

$$N = \left(1 + \sqrt{3}\right)^6 + \left(1 - \sqrt{3}\right)^6$$

• Podemos considerar que $\left(1 + \sqrt{3}\right)$ y $\left(1 - \sqrt{3}\right)$ son raíces de una ecuación de segundo grado; es decir: $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ y $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

y la ecuación de la cual provienen es :

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1x_2) = 0$$

reemplazando dichos valores se obtiene :

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \text{ .... } (1)$$

Luego : $p = -2$ y $q = -2$

Entonces, la expresión N nos representa la suma de las SEXTAS POTENCIAS de las raíces de la ecuación (1).

Así : $S_6 = x_1^6 + x_2^6$

Este valor, se puede obtener aplicando sucesivamente la ley general de recurrencia.

Tal como sigue :

$$S_1 - 2 = 0 \Rightarrow S_1 = 2$$

$$S_2 - 2S_1 - 4 = 0 \Rightarrow S_2 = 8$$

$$S_3 - 2S_2 - 2S_1 = 0 \Rightarrow S_3 = 20$$

$$S_4 - 2S_3 - 2S_2 = 0 \Rightarrow S_4 = 56$$

$$S_5 - 2S_4 - 2S_3 = 0 \Rightarrow S_5 = 152$$

$$S_6 - 2S_5 - 2S_4 = 0 \Rightarrow S_6 = 416$$

Finalmente: $N = 416$.

ECUACIÓN BICUADRADA

Son aquellas ecuaciones polinomiales de cuarto grado que no admite términos de grado impar; es decir; son de la forma general:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \; ; \quad a \neq 0$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN BICUADRADA

Sea : $ax^4 + bx^2 + c = 0 \,;\, a \neq 0$ ..... (1)

Realizando el cambio : $x^2 = y$, la ecuación (1) se puede transformar a una de segundo grado, llamada ECUACIÓN RESOLVENTE, de la forma:

$$ay^2 + by + c = 0 \,;\, a \neq 0$$

Cuya solución general es:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como: $y = x^2$, se tiene:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}} \text{ ....(I)}$$

donde: $\Delta = b^2 - 4ac$ (Discriminante o invariante).

Siendo ésta, la solución general de la ecuación bicuadrada (1). Haciendo todas las combinaciones posibles de los signos en (I), se

obtienen las siguientes raíces:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \;;\quad x_2=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x_3=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \;;\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

EJEMPLO :

Resolver: $2x^4+3x^2-5=0$

Cálculo del discriminante:

$\Delta=(3)^2-4(2)(-5)=49$

Reemplazando en la solución general ***(I)***,

Se tiene : $x=\pm\sqrt{\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2\ (2)}}$

luego, las raíces por separado son:

$$x_1=+\sqrt{\frac{-3+7}{4}}=1 \;;\quad x_2=-\sqrt{\frac{-3+7}{4}}=-1$$

Además:

$$x_3=+\sqrt{\frac{-3-7}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}i$$

$$x_4=-\sqrt{\frac{-3-7}{4}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}i$$

Algunas ecuaciones bicuadradas se pueden resolver factorizando el polinomio (ax^4+bx^2+c) en dos factores cuadráticos.

EJEMPLO 1 :

Resolver : $9x^4+481x^2-10\,000=0$

Aplicando el criterio del aspa simple, se tiene:

$$9x^4+481x^2-10\,000=0$$

$9x^2 \quad +625$

$x^2 \quad -16$

$$(9x^2+625)(x^2-16)=0$$

Igualando a cero cada factor cuadrático:

$9x^2+625=0$ ó $x^2-16=0$

$x^2=-\dfrac{625}{9}$ ó $x^2=16$

$x=\pm\dfrac{25}{3}i$ ó $x=\pm 4$

Luego, el conjunto solución S, será:

$$S=\left\{\frac{25}{3}i,-\frac{25}{3}i,4,-4\right\}$$

siendo $i=\sqrt{-1}$, la unidad imaginaria.

EJEMPLO 2 :

Resolver: $x^4-6x^2+1=0$

Aplicando el criterio del aspa doble especial; para lo cual, completamos con ceros los términos de grado impar, así:

$$x^4+0x^3-6x^2+0x+1=0$$

$x^2 \quad +2x \quad -1$

$x^2 \quad -2x \quad -1$

Luego, la ecuación quedará así:

$$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)=0$$

Igualando cada factor a cero, se obtiene:

$x^2+2x-1=0$ ó $x^2-2x-1=0$

Resolviendo cada ecuación cuadrática por la solución general:

$x=-1\pm\sqrt{2}$ ó $x=1\pm\sqrt{2}$

Finalmente, el conjunto solución de la ecuación es:

$$S=\left\{-1+\sqrt{2},-1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right\}$$

EJEMPLO 3 :

Resuelva Ud. la ecuación bicuadrada:

$$1296x^4+56x^2+1=0$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN BICUADRADA TEOREMAS DE VIÉTE

Siendo x_1, x_2, x_3 y x_4 son raíces de la ecuación bicuadrada:

$$ax^4+bx^2+x=0\;;\ a\neq 0$$

los cuales se caracterizan por conformar dos pares de raíces simétricas, es decir:

$$x_1=a\;;\quad x_2=-a$$

$$x_3=b\;;\quad x_4=-b$$

donde a y b son valores reales y/o imaginarios.

Entre estas raíces y los coeficientes de dicha ecuación, se generan las siguientes relaciones:

1) SUMA DE RAÍCES

$$\boxed{x_1+x_2+x_3+x_4=0}$$

2) SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS DE LAS RAÍCES

Por el Teorema de Cardano - Viéte que veremos a continuación :

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=b/a$$

como : $x_1+x_2=0$ y $x_3+x_4=0$

la relación anterior se reduce a:

$$\boxed{x_1\times x_2+x_3\times x_4=\frac{b}{a}}$$

3) PRODUCTO DE RAÍCES

$$\boxed{x_1\times x_2\times x_3\times x_4=\frac{c}{a}}$$

POR EJEMPLO :

Dada la ecuación bicuadrada:

$$6x^4+10x^2+9=0$$

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son raíces de la misma se verifican las relaciones :

- $x_1+x_2+x_3+x_4=0$
- $x_1\times x_2+x_3\times x_4=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$
- $x_1\times x_2\times x_3\times x_4=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN BICUADRADA A PARTIR DE SUS RAÍCES

(TEOREMA RECÍPROCO DE VIÉTE)

Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 las raíces de cierta ecuación bicuadrada con incógnita "x"; es decir:

$x=x_1$ ó $x=x_2$ ó $x=x_3$ ó $x=x_4$

los cuales se obtienen a partir de la ecuación:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0$$

Multiplicando, se obtiene:

$$x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+(x_1x_2x_3x_4)=0$$

Por las propiedades anteriores, esta relación se reduce a:

$$\boxed{x^4+(x_1x_2+x_3x_4)x^2+(x_1x_2x_3x_4)=0}\ldots(\delta)$$

La cual se denomina ecuación bicuadrada canónica, normalizada u ordinaria.

EJEMPLO 1 :

Formar una ecuación bicuadrada cuyas raíces sean:

$\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$

Formando las relaciones, se obtienen:

$\bullet\ x_1 x_2 + x_3 x_4 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = -\frac{41}{16}$

$\bullet\ x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)(\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = \frac{9}{8}$

Luego reemplazando en (δ) :

$$x^4 + \left(-\frac{41}{16}\right) x^2 + \left(\frac{9}{8}\right) = 0$$

Finalmente : $16x^4 - 41x^2 + 18 = 0$

EJEMPLO (2) :

Construir una ecuación bicuadrada cuyas raíces sean:

$\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$

Hallando separadamente los productos de:

$$x_1 \times x_2 = \left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}}\right) = -\frac{3+\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 \times x_4 = \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right) = -\frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

Sumando, se obtiene:

$$x_1 \times x_2 + x_3 \times x_4 = -\frac{6}{2} = -3$$

Multiplicando, resulta:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{(3)^2 - \sqrt{2}^2}{4} = \frac{7}{4}$$

Reemplazando en (d), se tiene:

$$x^4 + (-3)x^2 + \left(\frac{7}{4}\right) = 0$$

Expresando esta ecuación canónica con coeficientes enteros, así: $4x^4 - 12x^2 + 7 = 0$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver : $x^2 - 9x + 20 = 0$

siendo $x_1 \wedge x_2$ sus raíces.

Dar como respuesta $2x_1 - 3x_2$ $(x_1 > x_2)$

A) 2 B) 0 C) 1 D) – 1 E) – 2

RESOLUCIÓN :

$\bullet\ x^2 - 9x + 20 = 0$

$x \quad -4 \ \rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$

$x \quad -5 \ \rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

Ya que $x_1 > x_2$

* Piden : $2x_1 - 3x_2 = 2(5) - 3(4) = -2$

RPTA : "E"

PROBLEMA 2 :

Calcular "m" en la ecuación:

$$(m + 1)x^2 - (m + 8)x + 10 = 0$$

para que la suma de raíces sea $\frac{9}{2}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Considerando la forma general : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow a = m+1;\ b = -(m+8)$ y $c = 10$

* Además por teoría :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Dato $\Rightarrow \frac{9}{2} = -\frac{-(m+8)}{m+1}$

$\Rightarrow 9(m+1) = 2(m+8)$

$\Rightarrow 9m + 9 = 2m + 16$

$\Rightarrow 7m = 7 \Rightarrow m = 1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Hallar "m" para que el producto de las raíces de la ecuación:

$(m-2)x^2 - 5x + 2m = 0$ sea 6.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :

* Reconociendo los elementos :

$a = m - 2$; $b = -5$ y $c = 2m$

* Además se sabe que :

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Esto es 6

$\Rightarrow 6 = \frac{2m}{m-2} \Rightarrow 6m - 12 = 2m$

$\Rightarrow 4m = 12 \Rightarrow m = 3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Calcular "λ" en :

$$\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 1 = 0$$

si se cumple : $x_1 \times x_2 = x_1 + x_2$

A) 2 B) 8 C) 4 D) 6 E) –1

RESOLUCIÓN :

Considerando directamente las propiedades de la suma y producto de raíces :

$$x_1 x_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{-(\lambda - 5)}{\lambda}$$

$\Rightarrow 1 = \lambda - 5 \Rightarrow 6 = \lambda$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Si: m y n son las dos raíces de la ecuación : $x^2 - 2x + 2 = 0$

Calcular: $R = m^{m+n} n^{mn}$

A) –2 B) –4 C) 1 D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Como "m" y "n" son raíces, luego:

$m+n = -\frac{b}{a} \Rightarrow m+n = -\frac{-2}{1} \Rightarrow m+n = 2$

$mn = \frac{c}{a} \Rightarrow mn = \frac{2}{1} \Rightarrow mn = 2$

* Piden:

$R = m^2 \times n^2 = (mn)^2 = (2)^2 = 4$

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 :

Hallar "n" sabiendo que las raíces se diferencian en 3 unidades.

$x^2 - 7x + n = 0$

A) 10 B) 5 C) 4 D) 8 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Por dato: $x_1 - x_2 = 3$

* Por teoría: $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{1} = 7$ (+)

$2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$ y $x_2 = 2$

* Además :

$$x_1 \times x_2 = \frac{n}{1} \Rightarrow 5 \times 2 = n \Rightarrow 10 = n$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

En la ecuación : $(5x + n)^2 - 4 = 0$ encuentre el menor valor de n, de modo que (-1) sea una raíz.

A) –3 B) –7 C) 3 D) 7 E) 0

RESOLUCIÓN :

$(5x + n)2 = 4 \Rightarrow 5x + n = \pm 2$

$\Rightarrow 5x + n = 2$ ó $5x + n = -2$

* Se sabe que :

$x_1 = -1 \Rightarrow$ El menor valor de "n"

Será cuando : $5(-1) + n = -2$

$\Rightarrow n = 3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Si: x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$$

calcular el valor de: $\sqrt[3]{m+3}$,

sabiendo : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt[3]{6}$ E) $\sqrt[3]{7}$

RESOLUCIÓN :

* Del último dato se obtendrá :

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{-\frac{-(m-1)}{1}}{\frac{m+1}{1}}=\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow 3m-3=2m+2\Rightarrow m=5$

* Piden : $\sqrt[3]{5+3}=\sqrt[3]{8}=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Calcular "n" si una raíz de la ecuación : $x^2-(n-3)x-3n=0$ es el negativo de la otra.

A) 1 B) 2 C) – 2 D) – 3 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Dato : $x_1=-x_2$

$\Rightarrow \underbrace{x_1+x_2}=0-\frac{-(n-3)}{1}=0$

$\Rightarrow n-3=0\Rightarrow n=3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Hallar "m", si las raíces de la ecuación son recíprocas

$(m+4)x^2-(m-1)x+3m-6=0$

A) 1 B) 3 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Dato : $x_1=\frac{1}{x_2}$

$\Rightarrow \underbrace{x_1\,x_2}=1\Rightarrow\frac{3m-6}{m+4}=1$

$\Rightarrow 3m-6=m+4\Rightarrow m=5$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 :

Determine $k\in\mathbb{Z}$ de modo que la ecuación

$$4x^2+(3^k-77)x+1=0$$

admite raíces reales e iguales.

A) $k=4$ B) $k=3$ C) $k=5$
D) $k=-4$ E) $k=-3$

RESOLUCIÓN :

Por teoría, para que tenga raíces reales e iguales, se tendrá que :

$\Delta=0\Rightarrow b^2-4ac=0$

$\Rightarrow(3^k-77)^2-4(4)(1)=0$

$\Rightarrow(3^k-77)^2=16\Rightarrow 3^k-77=4$

$\Rightarrow 3^k=81\Rightarrow 3^k=3^4\Rightarrow k=4$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Calcular "m" de modo que la suma de los cuadrados de las raíces de :

$$x^2-(m-2)x+m-3=0$$

sea igual a 2.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Por dato : $x_1^2+x_2^2=2$

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2$$

$$\left(-\frac{-(m-2)}{2}\right)^2-2\left(\frac{m-3}{1}\right)=2$$

$$(m-2)^2-2m+6=2$$

$$\Rightarrow\ m^2-4m+4-2m+6=2$$

$m^2-6m+8=0$

$m \quad -4 \quad \rightarrow m-4=0\rightarrow m=4$

$m \quad -2 \quad \rightarrow m-2=0\rightarrow m=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Formar la ecuación de segundo grado que tenga como raíces la suma y el producto de las raíces de la ecuación: $2x^2-5x+7=0$

A) $4x^2+6x+35=0$ B) $4x^2-6x+35=0$
C) $4x^2-24x+35=0$ D) $4x^2+24x+35=0$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando la teoría de la suma y producto de raíces, entonces la nueva ecuación será :

$$x^2-\begin{pmatrix}\text{Suma de}\\ \text{raíces}\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\text{Producto de}\\ \text{raíces}\end{pmatrix}=0$$

$x^2-(S+P)x+SP=0$ — Nuevas Raíces

$$\Rightarrow x^2-\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)x+\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}=0$$

$\Rightarrow 4x^2-24x+35=0$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

Determine m y n de tal manera que las ecuaciones :

$$(2n+1)x^2+5nx+20=0$$

$$(5m-52)x^2+(m-4)x+4=0$$

tengan las mismas raíces. Hallar "$m+n$".

A) 12 B) 15 C) 18 D) 19 E) 20

RESOLUCIÓN :

* Por teoría para ecuaciones equivalentes se tendrá que :

$$\frac{2n+1}{5m-52}=\frac{5n}{m-4}=\frac{20}{4}$$

$5n=5m-10$ ....(I)

$2n+1=25m-260$ ....(II)

* Al resolver se tendrá que :

$m=11$ y $n=7\Rightarrow m+n=18$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Si la ecuación: $(b-1)x^2+2bx+c=0$ presenta raíces iguales, encontrar el mayor valor de "c", sabiendo que "b" es único.

A) 0 B) 4 C) –4 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Por teoría : $\Delta=0$

$$b^2-4ac=0$$

$$(2b)^2-4(b-1)c=0$$

$$4b^2-4(b-1)c=0$$

$$\longrightarrow\ \underbrace{b^2-cb+c}=0$$

Esta nueva ecuación también tiene raíces iguales (debido a que "b" es único)

⇒El nuevo discriminante también debe ser igual a cero :

$(-c)^2-4(1)(c)=0\Rightarrow c^2-4c=0$

$\Rightarrow c(c-4)=0\Rightarrow c=0$ ó $c-4=0$

$\Rightarrow \quad c=4$

mayor valor que de "c"

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Encontrar el valor de K que hace que la ecuación :

$$x^2+9x+k=0$$

una raíz sea el doble de la otra.

A) 9 B) 6 C) 3 D) 27 E) 18

RESOLUCIÓN :

* Dato : $x_1=2x_2$.......................(I)

* Por teoría

$\begin{cases}x_1+x_2=-9\text{............(II)}\\ x_1\,x_2=k\text{ ....(III)}\end{cases}$

* Reemplazando (I) en (II) y (III).

$3x_2=-9\Rightarrow x_2=-3$ ....(α)

$2(x_2)^2=k$ ....(β)

* Reemplazando (α) en(β):

$2(-3)^2=k\ \Rightarrow\ 18=k$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Indicar la mayor raíz de:

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

A) $-1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$
D) $1/6$ E) 1

02 Calcular la suma de las raíces por: $5x^2 - 2x + 1 = 0$

A) 5 B) 5/5 C) 2/5 D) 7 E) 1/5

03 Formar la ecuación cuya raíces son: 2 y 7.

A) $2x^2 + x - 14 = 0$

B) $x^2 - 7x + 14 = 0$

C) $x^2 - 9x + 14 = 0$

D) $x^2 + 7x - 14 = 0$

E) $2x^2 - x + 14 = 0$

04 Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación: $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Calcular: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 9

05 Calcular la diferencia de raíces al resolver: $\dfrac{x+3}{x-1} = x$

A) ± 2 B) ± 3 C) ± 4
D) ± 9 E) ± 10

06 Formar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son: $3/5$ y $-1/2$

A) $10x^2 + x - 3 = 0$

B) $10x^2 - x - 3 = 0$

C) $x^2 - 5x + 3 = 0$

D) $25x^2 - 3x - 8 = 0$

E) $15x^2 + 5x + 3 = 0$

07 m y n son raíces de la ecuación:

$$x^2 + mx + n = 0$$

calcular $(m + n)$

A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2

08 m y n son raíces de la ecuación:

$$x^2 + px + 20 = 0$$

además: $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = -2$; calcular "$p$".

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

09 x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 5 = 0$; calcular: $x_1^3 + x_2^3$

A) 40 B) 70 C) 50 D) 80 E) 75

10 Señale una raíz de:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$$

A) 7/2 B) $-7/4$ C) -3
D) $-7/2$ E) 1

11 El producto de raíces de la ecuación:

$$(5x-4)^2 - (3x+5)(2x-1) = 20x(x-2) + 27$$

es:

A) 5 B) 6 C) 8
D) 12 E) 24

12 Resolver la ecuación

$$(x+5)^2 - 2(x+3) = 5$$

A) $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$ B) 3 y -2
C) $-4+\sqrt{2}$ y $-4-\sqrt{2}$ D) $2-\sqrt{2}$ y $2+\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{2}-1$ y $2\sqrt{2}+1$

13 Calcule las raíces:

$$\frac{40}{x-2} - \frac{40}{x} = 1$$

A) 10 y -8 B) 3 y -5
C) 4 y 1/2 D) 5 y 10
E) 4 y -3

14 Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 15 = 0$

Calcule $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right)$

A) 5 B) 1/5 C) 3/5
D) 5/3 E) 3

15 Calcule el valor de n si las raíces de la ecuación :

$$3nx^2 - 2nx = -6$$

son recíprocas.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16 Si la ecuación :

$$x^2 + 12x - 3m = 0$$

tiene raíces iguales. Calcular el valor de m.

A) -12 B) 10 C) -8
D) 6 E) 4

17 $x_1 \wedge x_2$ son raíces de la ecuación: $x^2 - 3x + 5 = 0$

Calcular: $x_1^2 + x_2^2$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 4 E) 7

18 Al resolver la ecuación:

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

indicar una de las raíces.

A) 1 B) 4 C) 9
D) 25 E) 36

19 Una de las raíces de la ecuación:

$$\frac{x-13}{x} = 5 - \frac{10(5x+3)}{x^2}\ ;\ es:$$

A) 3 B) 4 C) 9
D) 11 E) 10

20 Indicar la suma de raíces de la ecuación: $\dfrac{2x-b}{b} + \dfrac{-x}{x+b} = \dfrac{2x}{4b}$

A) b B) $b+1$ C) $b/4$
D) $3b/2$ E) $b/3$

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)*, según corresponda:

( ) Una solución de: $2x^2+ax+6=0$, es (-2) entonces $a=-7$

( ) Se llamará conjunto solución *(C.S)* a la reunión de las soluciones

( ) Ecuación compatible indeterminada, es aquella ecuación que no presenta solución

A) FVV B) FVF C) FFV
D) VVV E) VVF

02 Consideremos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0;\ a \neq 0$$

indique correcto *(c)* o incorrecto *(i)*:

( ) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

( ) Si: $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene raíces reales y diferentes

( ) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{b}{c}$

A) icc B) ici C) iic D)ccc E)cci

03 Resolver la ecuación de variable "x":

$2mx+4m^2+n^2=nx+4mn$

A)$\{n-2m\}$ B)$\{2n-n\}$ C)$\{m-2n\}$
D)$\{2m+n\}$ E)$\{2n-m\}$

04 Si luego de resolver la ecuación en "x":

$$\frac{2x-1}{2}+\frac{3x-1}{3}+\frac{4x-1}{4}=\frac{8x-n}{3}$$

se obtiene como conjunto solución $\{2\}$, determine el valor de "n".

A)$1\frac{1}{2}$ B)$2\frac{1}{3}$ C)$2\frac{1}{2}$ D)$1\frac{1}{3}$ E)$1\frac{1}{4}$

05 Dada la ecuación paramétrica en "x": $(n^2+n-6)x=n^2-5n+6$

se afirma que:

A) Si $n=-3$ la ecuación es compatible determinado
B) Si $n=-2$ la ecuación es incompatible
C) Si $n=2$ la ecuación es compatible indeterminado
D) Si $n=4$ entonces $C.S=\{-7\}$
E) Si $n=3$ la ecuación es incompatible

06 Resolver la siguiente ecuación:

$$(2x-5)^2=x^2-x+39$$

A)$C.S=\left\{\frac{2}{3};-7\right\}$ B)$C.S=\left\{-\frac{1}{3};6\right\}$

C)$C.S=\left\{-\frac{1}{4};-7\right\}$ D)$C.S=\left\{-\frac{2}{3};7\right\}$

E)$C.S=\left\{-2;\frac{1}{4}\right\}$

07 Luego de resolver la ecuación:

$$5x^2+x-3=0$$

se obtiene como:

$$C.S=\left\{\frac{-1+\sqrt{n^2-3}}{10};\frac{-1-\sqrt{n^2-3}}{10}\right\}$$

calcule "n".

A) 8 B) -8 C) ± 8 D) 6 E) ± 6

08 Determine el discriminante de la siguiente ecuación cuadrática de variable "x":

$$bx^2+ax-c=0$$

A)b^2-4ac B)b^2+4ac C) a^2-4bc
D)a^2+4bc E)b^2-4c

09 Determine el valor de "n" en la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^2-(n-3)x+5-2n=0$$

si se cumple: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{5}{3}$

A) 4 B)3 C)6 D)34/13 E)$-1/2$

10 En la ecuación:

$$nx^2-(n+2)x+5=0$$

se cumple que la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación es igual a la suma de las raíces. Calcule "n".

A) 0,5 B) 0,4 C) 0,3
D) $-0,6$ E) $-0,8$

11 Determine la suma de valores de "n", si la siguiente ecuación:

$$4x^2-(n+3)x+n=0$$

tiene como $C.S=\{x_o\}$

A) -8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 16

12 Calcule el valor entero de "n", si en la ecuación:

$$4x^2-(3n-1)x+n=0$$

las raíces difieren en la unidad.

A) 2 B) 3 C) -4 D) -5 E) 6

13 Indique lo correcto, si en la ecuación cuadrática de variable "x": $(n+2)x^2+(n-1)x+1=0$

el cardinal de su $C.S$ es uno.

A) $n_1+n_2=-6$ B)$n_1n_2=8$ C)$n_1>n_2$
D) $n_1+n_2^2=8$ E)$n_1+n_2>0$

14 Dada la ecuación cuadrática de variable "x":

$$27m^mx^2+27(m^n-9)x-1=0$$

tiene raíces recíprocas y simétricas. Halle la ecuación cuadrática de raíces "m" y "n".

A)$x^2-x+6=0$ B) $x^2+x+6=0$
C) $x^2-2x-8=0$ D) $x^2+2x-8=0$
E) $x^2+x-6=0$

15 Luego de resolver la ecuación de variable "x":

$(m^2-4n^2)x^2+8mnx=m^2-4n^2$ se obtiene como $C.S=\{x_1;x_2\}$

Calcule: $x_1+x_2^{-1}$

A)$\dfrac{m+2n}{m+n}$ B)$\dfrac{m-n}{m-2n}$ C)$\dfrac{m-n}{m+2n}$

D)$\dfrac{m+n}{m-n}$ E) 0

16 Si "x_1" y "x_2" son raíces de la ecuación: $3x^2-2x+5=0$

entonces el valor de:

$$A=\frac{x_2}{x_1+2}+\frac{x_1}{x_2+2}\text{ es:}$$

A) $-1/9$ B) $-2/9$ C) $-1/3$
D) $-4/9$ E) -1

17 Si x_o es una raízde la ecuación cuadrática $2x^2+4x+3=0$

calcular: $A=\dfrac{-3-2x_0}{x_0+x_0^2}$

A) 1 B) 2 C) -3 D) 4 E) 1/4

18 Siendo "x_1" y "x_2" raíces de la ecuación: $x^2+x+5=0$ determine la ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

$$z_1=\frac{2}{3-x_1};\ z_2=\frac{2}{3-x_2}$$

A)$17z^2+14z-4=0$ B)$17z^2-14z+4=0$
C)$17z^2-14z-4=0$ D)$17z^2-8z-2=0$
E)$17z^2-12z-4=0$

19 Si la ecuación cuadrática:

$$2x^2-3x-7=0$$

tiene por raíces "α" y "β", halle una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean α^{-1} y β^{-1}

A) $7x^2-3x-2=0$ B) $7x^2+3x+2=0$
C) $7x^2+3x-2=0$ D) $7x^2+2x-3=0$
E) $7x^2+2x-3=0$

20 Si las ecuaciones cuadráticas:

$$(a+2)x^2+bx+1=0$$
$$(a-2)x^2+(b-1)x-2=0$$

son equivalentes, calcule ab^{-1}

A) $-1/3$ B) -2 C) -3
D) -4 E) $-1/2$

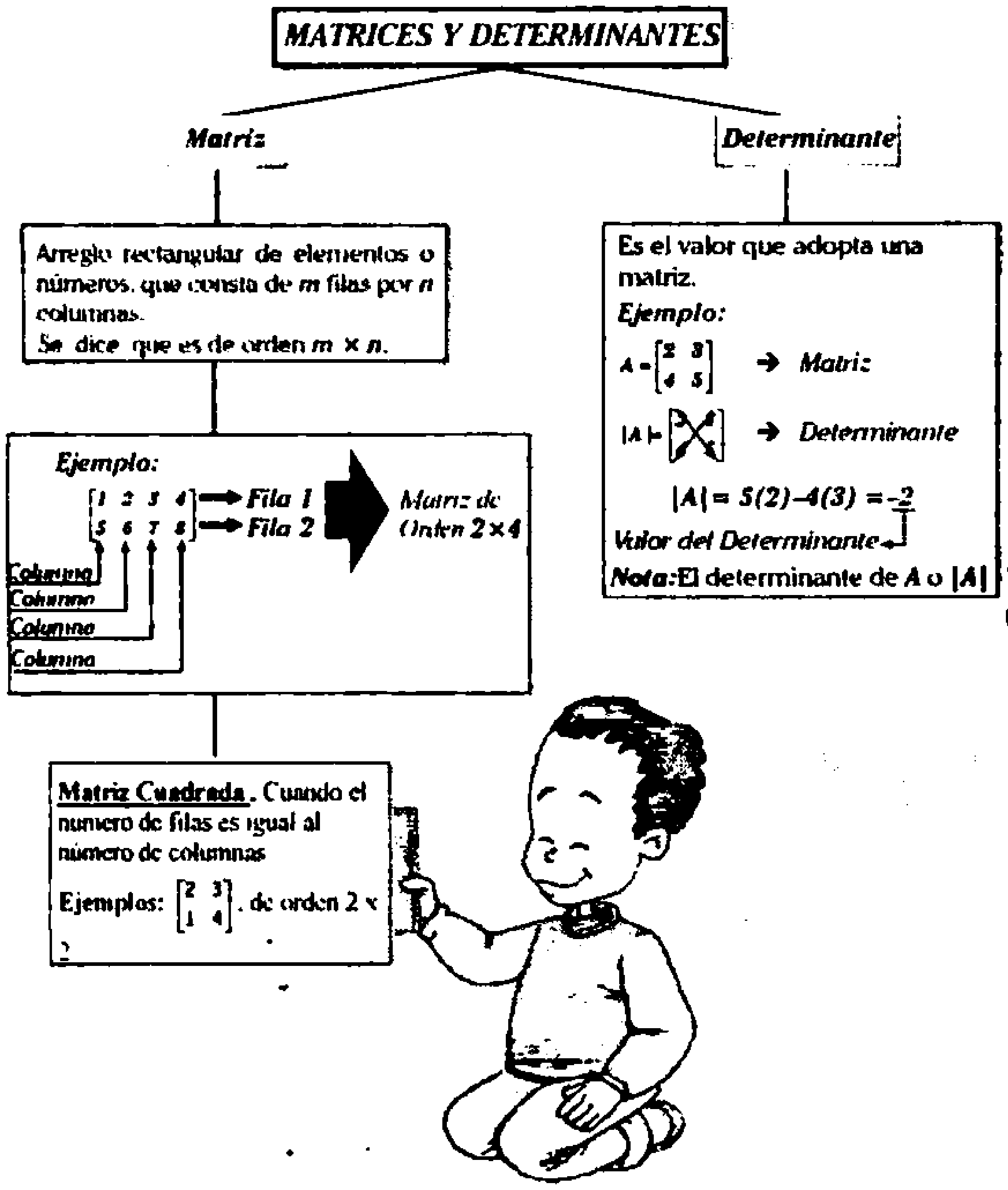
CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)A	4)E	5)C	6)D	7)C	8)D	9)D	10)A
11)C	12)B	13)D	14)E	15)E	16)B	17)B	18)B	19)C	20)B

DETERMINANTES

CAPÍTULO 085

OBJETIVO :

** Resaltar la importancia de las matrices y sus determinantes, como herramienta usual en la resolución del sistema de ecuaciones lineales o reducibles a él.*



MATRIZ

Es un arreglo rectangular de elementos distribuídos en filas y columnas. Dichos elementos están encerrados por corchetes, paréntesis o doble barra. Tales como:

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 18 \\ -6 & 8 & -5 \end{bmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 3+i & 2i-5 \\ 4i & -10i \end{pmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} f(a+b) & f(a) \\ f(a-b) & f(b) \end{Vmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} a_o + a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

Los elementos de una matríz pueden ser números reales, expresiones complejas, funciones escalares, submatrices, etc.

REPRESENTACIÓN GENERAL DE UNA MATRÍZ

Según LEIBNITZ, una matríz puede ser expresada de la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde el elemento a_{ij} de la matriz A nos expresa directamente su carácter posicional. De acuerdo a esto, la notación de KRONECKER simplifica la representación matricial. Veamos:

$$A = [a_{ij}]_{mxn} \quad \begin{cases} i = 1,2,3.......,m \\ j = 1,2,3........,n \end{cases}$$

Donde:

a_{ij} es un elemento de *A* ubicada en la i-ésima fila y j-ésima columna.

Como este arreglo admite *m* filas y *n* columnas, diremos que la matriz *A* es de orden $m \times n$.

MATRIZ CUADRADA :

Es aquella matríz que tiene igual número de filas y columnas. Por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{; es cuadrada}$$

ya que presenta *n* filas y *n* columnas. En consecuencia, se dirá que *A* es una matriz de orden *n*.

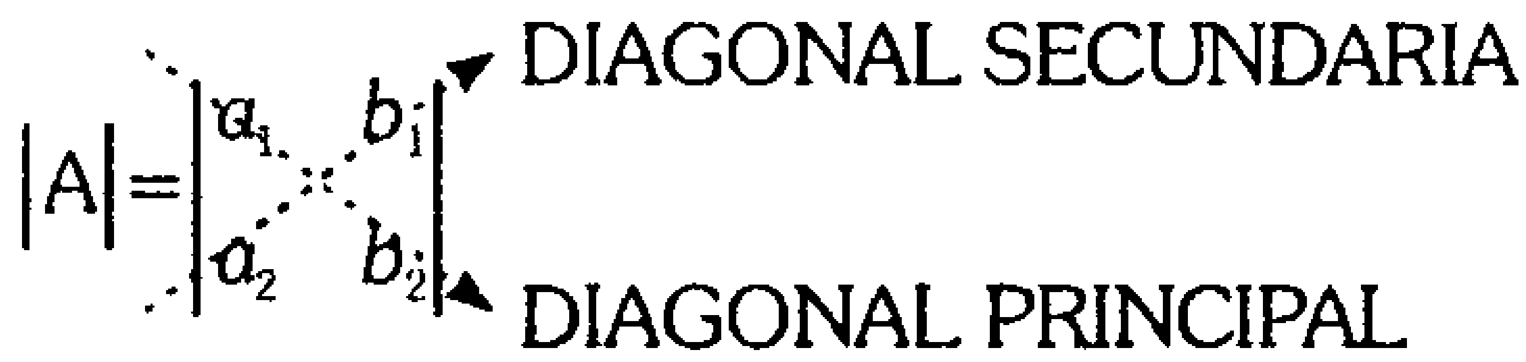
DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Es la regla polinomial o valor numérico obtenido escalarmente, al desarrollar convenientemente una matriz cuadrada.

Representa extensivamente por todos los productos que se pueden formar entre todos sus elementos, de tal modo que en cada producto participen tantos factores como lo indique el orden de la matriz. El concepto de orden también se extiende a los determinantes.

En este nivel, solo nos interesa estudiar a los determinantes de ***2do.*** y ***3er.*** orden, y en casos especiales, a los de ***4to.*** orden.

DETERMINANTES DE SEGUNDO ORDEN



$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Se determina restando los productos de los elementos de la diagonal principal y de la diagonal secundaria.

Así: $det(A) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$

EJEMPLOS :

Hallar el determinante de las siguientes matrices:

I) $p = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ ***II)*** $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -7 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ***III)*** $R = \begin{bmatrix} x-1 & x \\ 2 & x+1 \end{bmatrix}$

RESOLUCIÓN :

Apliquemos la *RESTA DE PRODUCTOS CRUZADOS* en cada ejemplo :

I) $\Delta P = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (5)(7) \Rightarrow \Delta P = 6 - 35$

$\Rightarrow \boxed{\Delta P = -29}$ ***Rpta.***

II) $\Delta Q = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -7 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - (3)(-7) \Rightarrow \Delta Q = 2 + 21$

$\Rightarrow \boxed{\Delta Q = 23}$ ***Rpta.***

II) $\Delta R = \begin{vmatrix} x-1 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1) - (x)(2)$

$\Rightarrow \Delta R = \boxed{x^2 - 1 - 2x}$ ***Rpta.***

DETERMINANTES DE TERCER ORDEN

En este curso, sólo emplearemos para el cálculo de estos determinantes la *REGLA DE SARRUS*, cuyo procedimiento es el siguiente :

Se repite las dos primeras filas (o las dos primeras columnas) a continuación de las existentes, después de lo cual :

• Se suman los resultados de multiplicar los elementos de la diagonal principal y las dos paralelas a ellas que tengan ***3*** elementos, obteniendo S_1.

• Se suman los resultados de multiplicar los elementos de la diagonal secundaria y las dos paralelas a ellas que tengan ***3*** elementos, obteniendo S_2.

* El valor del determinante estará dado por :

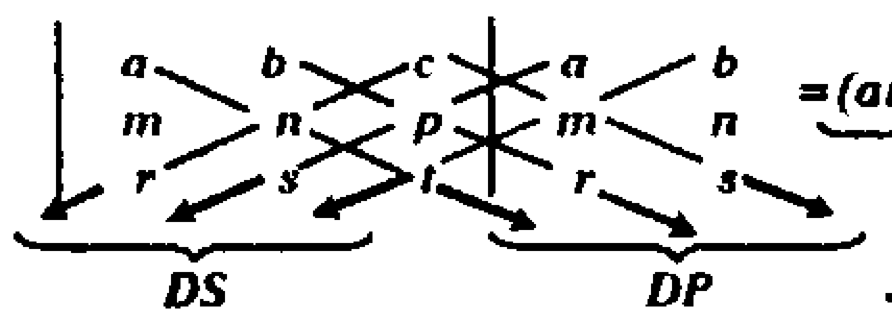
$$\Delta = S_1 - S_2$$

Así : Si el determinante a calcular fuera :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

MÉTODO 1 :

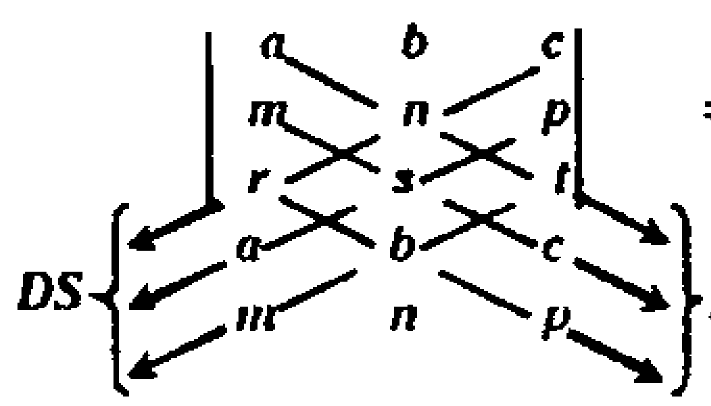
* Por la ***REGLA DE SARRUS horizontal,*** volvemos a escribir las dos primeras columnas en el lado derecho:



$= \underbrace{(ant+bpr+cms)}_{DP} - \underbrace{(cnr+aps+bmt)}_{DS}$

MÉTODO 2 :

* Por la *REGLA DE SARRUS* vertical , volvemos a escribir las dos primeras filas en la parte inferior :



$= \underbrace{(ant + msc + rbp)}_{DP} - \underbrace{(cnr + psa + tbm)}_{DS}$

Se disponen después de la última fila, las dos anteriores, respetando el orden de la ubicación. Luego, tomando como referencia a la diagonal principal se trazan paralelas a ella, de tal modo que siempre se encuentren tres elementos (triadas). Efectuamos el producto de estos sin cambiarle el signo del mismo. Análogamente se procede para la diagonal secundaria y sus paralelas, pero estas al ser efectuadas se les cambia de signo.

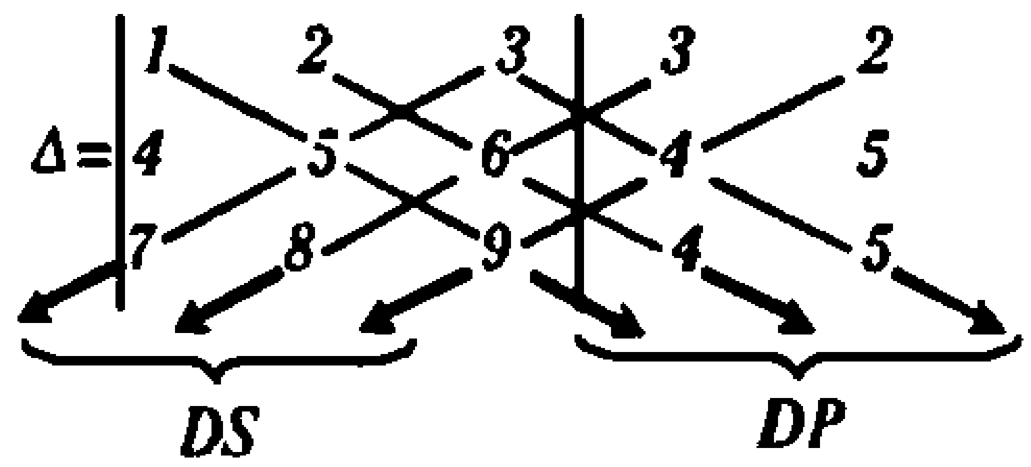
EJEMPLOS :

Hallar el determinante :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

* Por la *REGLA DE SARRUS* horizontal :



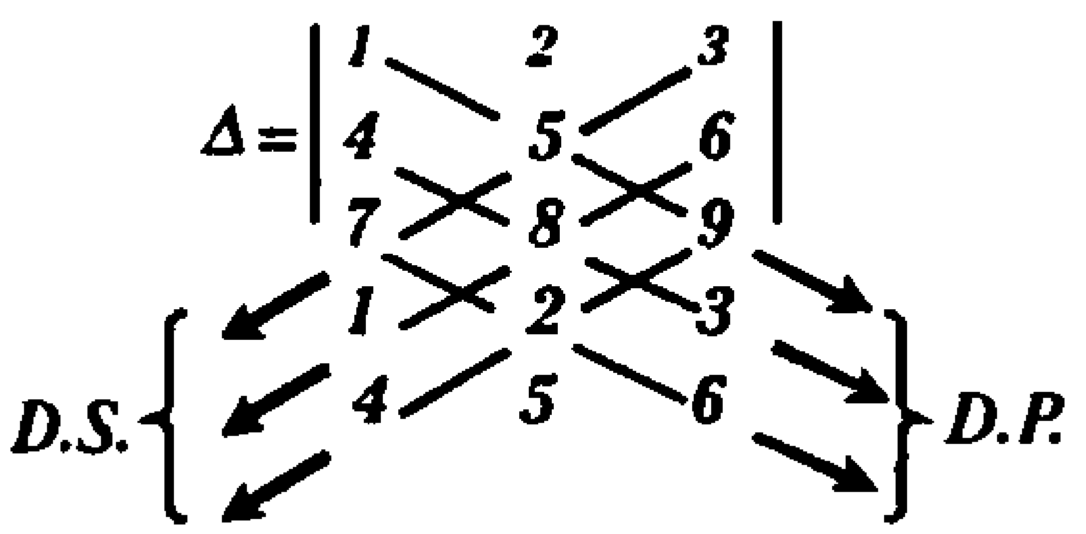
$\Delta=[1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8]$
$\quad-[3\times5\times7+1\times6\times8+2\times4\times9]$

$\Delta=[45+84+96]-[105+48+72]$

$\Delta=225-225\Rightarrow\boxed{\Delta=0}$

Comprobemos :

* Por la *REGLA DE SARRUS* vertical :



Aplicando :

$\Delta=D.P.-D.S.$

$\Delta=[1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6]-$
$\quad[3\times5\times7+6\times8\times1+9\times2\times4]$

$\Delta=[45+96+84]-[105+48+72]$

$\Delta=225-225\Rightarrow\Delta=0$

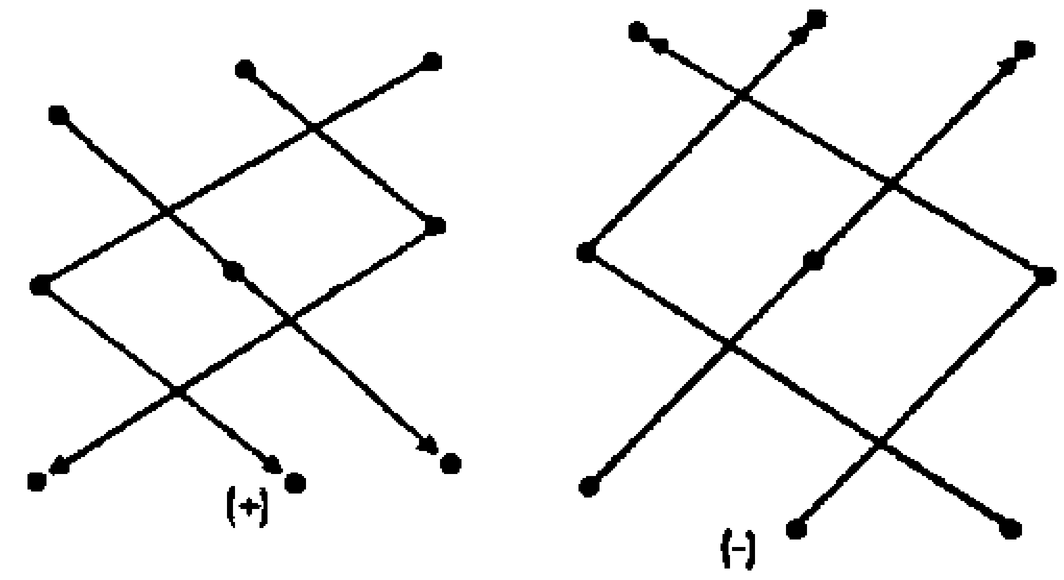
REGLA DE LA ESTRELLA

(Sarrus simplificado)

En el determinante mostrado:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

Representemos sus elementos por medio de puntos. Separemos en dos grupos, los productos ternarios de dichos elementos, tal como se muestra:



Al desarrollar el determinante, se obtiene:

$$|A|=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$$

REGLA DE LAPLACE O DE LOS MENORES COMPLEMENTARIOS

MENOR COMPLEMENTARIO:

Es la submatriz cuadrada que resulta después de eliminar todos los elementos de la fila y columna al cual pertenece el elemento tomado como referencia.

EJEMPLO:

Dado el determinante :

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1 & \cdots\cdots & b_1 & \cdots\cdots & c_1\\ a_2 & & b_2 & & c_2\\ a_3 & \cdots\cdots & b_3 & \cdots\cdots & c_3\end{vmatrix}$$

El menor complementario del elemento C_1, será: $\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & a_3\end{vmatrix}$

El menor complementario del elemento b_3, será: $\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$

CUADRO DE SIGNOS DE LOS ELEMENTOS TOMADOS COMO REFERENCIA

$$|A|=\begin{vmatrix}(+) & (-) & (+)\\ (-) & (+) & (-)\\ (+) & (-) & (+)\end{vmatrix}$$

PROCEDIMIENTO GENERAL:

1) A cada uno de los elementos del determinante le asociamos el cuadro de signos establecido, empezando siempre con el signo positivo, y los demás de manera alternada.

2) Se elige una fila o columna, de preferencia, la que tenga mayor número de ceros, la cual se denominará fila o columna referencia.

3) Cada elemento de la fila o columna referencia asociado a su signo, se multiplica por su menor complementario.

EJEMPLO 1 :

Desarrollemos el determinante de la matríz A, por la regla de LAPLACE de los menores complementarios:

$$|A|=\begin{vmatrix}\textcircled{a_1} & \textcircled{b_1} & \textcircled{a_1}\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

tomando como referencia la primera fila del mismo, se tiene:

$$|A|=+a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$$

El determinante de orden ***3***, se ha reducido a una suma de determinantes de orden ***2***.

EJEMPLO 2 :

Calcular:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & \textcircled{0}\\ 0 & 5 & \textcircled{-1}\\ -3 & 7 & \textcircled{0}\end{vmatrix}\begin{matrix}+\\-\\+\end{matrix}\qquad(\text{columnas: } + \; - \; +)$$

Tomando menores complementarios a lo largo de la tercera columna, por ser la que tiene mayor número de ceros.

Veamos:

$$|A|=+0\begin{vmatrix}0 & 5\\ -3 & 7\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 7\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 7\end{vmatrix}=(4)(7)-(-3)(2)$$

$$\Rightarrow|A|=28+6=34$$

EJEMPLO 3 :

Calcular:

$$|A|=\begin{matrix}+\\-\\+\\-\end{matrix}\begin{vmatrix}a & b & a & 0\\ b & a & 0 & a\\ a & 0 & a & b\\ 0 & a & b & a\end{vmatrix}$$

Tomando como referencia la 1ra. columna, se tiene:

$$= a\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ a & 0 & a \\ a & b & a \end{vmatrix}$$

Aplicando la regla de la estrella, por su rapidez:

$$= a\left[-ab^2\right] - b\left[2a^2b - b^3\right] + a\left[-ab^2\right]$$

Efectuando, resulta: $|A| = b^4 - 4a^2b^2$

NOTA:

Para una matriz: $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, tal que $\det(A) \neq 0$, su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Desarrollar:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m+1 & m^2+m+1 \\ m-1 & m^2-m+1 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$$\Delta = (m+1)\left(m^2-m+1\right) - (m-1)\left(m^2+m+1\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(m^3+1\right) - \left(m^3-1\right) = 2$$

PROBLEMA 2 :

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 7 \\ x-2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & 6 \\ 2x & 3 \end{vmatrix}$$

RESOLUCIÓN :

$4(x+1) - 7(x-2) = (5x)(3) - (2x)(6)$

$\Rightarrow 4x + 4 - 7x + 14 = 15x - 12x$

$\Rightarrow -3x + 18 = 3x$

$\Rightarrow 18 = 6x \Rightarrow x = 3$

PROBLEMA 3 :

Sabiendo que: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Calcular el valor de: $E = \dfrac{y}{z+x}$

RESOLUCIÓN :

* Por sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ x & y & z & x & y \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 6y + 8z + 15x - 12y - 5z - 12x = 0$

$\Rightarrow -6y + 3z + 3x = 0 \Rightarrow x + z = 2y$

$\Rightarrow \dfrac{y}{z+x} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

PROBLEMA 4 :

Que valor de x verifica la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & 8 & 2 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -128$$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ x & 8 & 2 & x & 8 \\ 4 & -7 & 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -128$$

$(2)(8)(5) + (3)(2)(4) + (5)(x)(-7)$
$-(4)(8)(5) - (-7)(2)(2) - (5)(x)(13)$
$= -128$

$\Rightarrow -50x - 28 = -128 \Rightarrow x = 2$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Sea A una matriz : $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Determinar : $|A|$

A) 1 B) –1 C) 0^3 D) 5 E) –2

02 Sea B una matriz triangular superior : $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Determinar : $|B|$

A) 3 B) –3 C) 4 D) 5 E) 0

03 Sea :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

Indicar : $A+B$

A) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 9 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 9 \\ 7 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

04 Si :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Indicar el valor de $|A| + |B| + |C|$

A) 10 B) 15 C) 15 D) 7 E) –7

05 Dados :

$A = \begin{bmatrix} m & 2m \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & p \\ a & b \end{bmatrix}$

Indicar el valor de :

$$E = a + b + p + m$$

Siendo : $A = B$

A) 6 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

06 Determinar x, en: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 11$

A) –2 B) –3 C) –4 D) –1 E) –5

07 Sea :

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m^2-1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} m & n & p \\ k & \ell & q \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Donde : $A = B$

Indicar : «$A + B$»

A) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 2 \\ 12 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

* Calcular los siguientes determinantes :

08 $\begin{vmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 1 & \sqrt{7} \end{vmatrix}$

A) 1 B) 6 C) 5 D) 4 E) 7

09 $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

A) 3 B) 3 C) 1 D) 6 E) 0

10 Resolver :

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

(11) Calcular :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x-\sqrt{2} & -7\sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{7} & 2x+\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

A) x *B) $4x$* *C) x^2*
D) $4x^2$ *E) N.A*

(12) Calcular :

$$|B| = \begin{vmatrix} -\sqrt{5} & 2 & -1 \\ 3 & \sqrt{5} & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

A) $9-7\sqrt{5}$ *B) $9+7\sqrt{5}$* *C) $18-14\sqrt{5}$*
D) $18+14\sqrt{5}$ *E) N.A*

(13) Calcular :

$$|E| = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

A) $2ab$ *B) $2(a^2+b^2)$* *C) a^2+b^2*
D) $4ab$ *E) N.A*

(14) Simplificar :

$$E = \frac{\begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix}}{xyz}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) N.A.*

(15) Indicar el valor de :

$$E = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}}$$

A) $a^3 - b^3$ *B) $a^2 + b^2$*
C) ab^2
D) $a + b$ *E) N.A.*

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Si : $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Indicar : $A + B$

A) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$ *B)* $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ *C)* $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ *D)* $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ *E)* $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

(02) Si :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Indicar : $2A$

A) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$ *B)* $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ *C)* $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ *D)* $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ *E)* $\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(03) Si : $A = B$

Siendo :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & b \\ m & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Indicar : $\dfrac{a+b}{m}$

A) 3 *B) 6* *C) 5* *D) 10* *E) 8*

(04) Resolver : (siendo $x < 0$)

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 5$$

A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) –2* *E) –3*

I) Calcular los siguientes determinantes:

(05) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

A) 4 *B) –4* *C) 2*
D) 10 *E) 14*

(06) $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

A) –1 *B) 0* *C) 1*
D) 2 *E) –2*

(07) $\begin{vmatrix} -a & (a^2-2a+4) \\ a+2 & -a^2 \end{vmatrix}$

A) 2 *B) 4* *C) A*
D) A^3 *E) 8*

(08) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

A) 3 *B) 6* *C) 9*
D) 12 *E) 15*

(09) $\begin{vmatrix} 5\sqrt{2}+1 & 7-\sqrt{3} \\ 7+\sqrt{3} & 5\sqrt{2}-1 \end{vmatrix}$

A) 1 *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) 5*

(10) Calcular :

$$E = \begin{vmatrix} x-y & y(x+y) \\ -2 & x+y \end{vmatrix}$$

A) 1 *B) $(x+y)^2$* *C) $(x-y)^2$*
D) –2 *E) 0*

(11) Resolver en «x»

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

A) –1 *B) –2* *C) -3*
D) –4 *E) –5*

(12) Calcular

$$\begin{vmatrix} m+n & m-n \\ m-n & m+n \end{vmatrix}$$

A) $4m$ *B) $(m+n)^2$*
C) $4mn$ *D) $3mn$*
E) $(m-n)^2$

(13) Calcular el determinante de «A» si : $A = B + C$

Siendo :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A) –1 *B) –2* *C) –3*
D) 0 *E) 1*

(14) Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinar : $|A|^2 + |B|^2$

A) 100 *B) 101* *C) 102*
D) 103 *E) 104*

(15) Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hallar :

I) $A + B$ *II) $3A - 2B$*
III) $A + 2B + 3C$

Indicar : «$x + y$»

A) 1 *B) –1* *C) 0*
D) –2 *E) 2*

(16) Calcular el valor de :

$$E = \begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

A) B *B) A* *C) 1* *D) 0*

(17) Calcular el determinante de:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES
ECUACIONES POLINOMIALES
CAPITULO 086

OBJETIVOS :

* *Exponer los diversos criterios y métodos para resolver sistemas lineales, y presentar los artificios diversos para analizar los sistemas de grado superior, así como los fraccionarios e irracionales.*

• *Presentar el análisis gráfico de los sistemas lineales y de algunos sistemas cuadráticos, es de vital importancia para entender a posteriori, los conceptos básicos del análisis funcional en el plano $\mathbb{R}^2$.*

* *Interpretar a través de sistemas de ecuaciones un problema de la vida diaria.*

• *Obtener las raíces de una ecuación de cualquier grado. Considerando que éstas raíces puedan ser simples o múltiples.*

• *Conocer el Teorema de Cardano – Viéte, en el que se establecerá las relaciones entre los coeficientes y las raíces de dicha ecuación polinomial.*

• *Construir una ecuación de grado arbitrario, conociendo todas sus raíces, sin interesar la naturaleza de las mismas.*

• *Conocer las propiedades sobre la naturaleza de las raíces de una ecuación polinomial de coeficientes racionales o reales, y los diversos artificios que nos permitirán reconstruir dichas ecuaciones a partir de estas raíces.*

SISTEMA DE ECUACIONES

Es aquel conjunto de dos o más ecuaciones que se verifican para los mismos valores de sus incognitas.

Por ejemplo, las ecuaciones:

$$3x+5y=13$$
$$7x-2y=3$$

Se verifican para $x=1$ e $y=2$

Otro ejemplo, las ecuaciones:

$$4x+y+z=12$$
$$3x-y-z=9$$

Se verifican para:

$$x=3;\quad y=1;\quad z=-1$$
$$x=3;\quad y=0;\quad z=0$$
$$x=3;\quad y=2;\quad z=-2$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

En este último puede observarse que existen infinitas soluciones.

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Es el conjunto "*S*" de pares, temas, cuaternas, etc. de valores que asumen las incógnitas de las ecuaciones, que tienen la propiedad de verificar simultáneamente a las mismas.

Tomando los ejemplos anteriores, se tiene:

• Del primer sistema :

$$3x+5y=13$$
$$7x-2y=3$$

El conjunto solución es :

$$S=\{(1;2)\}$$

• Del segundo sistema :

$$4x+y+z=12$$
$$3x-y-z=9$$

El conjunto solución admite infinitos pares ordenados en su extensión.

Veamos:

$$S=\{(3;1;-1),\ (3;0;0),\ (3;2;-2),\ ......\}$$

A continuación , se exponen tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales .

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Cuando sea necesario, se pueden multiplicar las ecuaciones dadas por números, de manera que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sea el mismo. Si los signos de los términos de igual coeficiente son distintos , se suman las ecuaciones; en caso contrario , se restan . Consideremos :

$$2x-y=4\ ....(I)$$
$$x+2y=-3\ ....(II)$$

* Para eliminar y, se multiplica *(I)* por *2* y se suman con *(II)*, obteniendo:

$$\begin{matrix} 2\times(I) \\ (II) \end{matrix}\begin{cases} 4x-2y=8 \\ x+2y=-3 \end{cases}$$

$$\overline{Suman\ \ 5x=5\ \Rightarrow\ x=1}$$

* Sustituyendo $x=1$ en *(I)* , se obtiene:

$$2-y=4\ \text{, o sea }\ y=-2$$

* Por tanto, la solución del sistema formado por *(I)* y *(II)* es:

$$x=1\ ;\ y=-2$$

COMPROBACIÓN :

Sustituyendo $x=1;\ y=-2$ en *(II)* se obtiene :

$$1+2(-2)=-3\ ;-3=-3$$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra .

POR EJEMPLO:

Consideremos el sistema formado por las ecuaciones *(I)* y *(II)* anteriores.

De *(I)* se obtiene $y = 2x - 4$ y sustituyendo este valor en *(II)* resulta $x + 2(2x - 4) = 3$, de la que deduce la solución $x = 1$. Sustituyendo $x = 1$ en *(I)*, o en *(II)*, se obtiene $y = -2$.

MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consiste en que de cada ecuación se despeja la misma incógnita para luego igualar. Sea el sistema:

$2x - y = 4$ ....*(I)*

$x + 2y = -3$ ....*(II)*

* De *(I)* despejamos x:

$x = \dfrac{y+4}{2}$ ....(α)

* De *(II)* despejamos x:

$x = -3 - 2y$ ....(β)

* Luego $(\alpha) = (\beta)$:

$$\frac{y+4}{2} = -3 - 2y$$

* Resolviendo:

$$y + 4 = -6 - 4y \Rightarrow 5y = -10$$
$$\Rightarrow y = -2$$

* Reemplazando en α: $x = 1$

SISTEMA EQUIVALENTES

Son aquellos sistemas de ecuaciones polinomiales que teniendo formas diferentes, aceptan el mismo conjunto solución.

Por ejemplo, los sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{matrix}\right\} < > \left.\begin{matrix} x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = 5 \end{matrix}\right\}$$

Son equivalentes, ya que ambos se verifican para un mismo conjunto solución, el cual es:

$$S = \{(3;2)\}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

De acuerdo al número de elementos de su conjunto solución *S*. Estos pueden ser:

1) SISTEMAS COMPATIBLES

Son aquellos que aceptan por lo menos un elemento en su conjunto solución. Debido a esto, se subdividen en:

A) DETERMINADOS:

Si admiten un número *FINITO* de elementos en su conjunto solución.

EJEMPLO:

Dado el sistema:

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$2x - 3y = 1$$

Su conjunto solución admite dos elementos, el cual es:

$$S = \left\{(2;1),\ \left(-\frac{22}{13};\ -\frac{19}{13}\right)\right\}$$

B) INDETERMINADOS:

Si admiten un número *INFINITO* de elementos en su conjunto solución.

EJEMPLO:

El sistema mostrado:

$$3x - 4y - 9z = 2$$
$$x + 2y - 3z = 4$$

Admite un conjunto solución de infinitos elementos, el cual es:

$$S = \{(2;1;0),\ (5;1;1),\ (-1;1;-1), \ldots\ldots\}$$

2) SISTEMAS INCOMPATIBLES

Son aquellos que *NO* aceptan elemento alguno en su conjunto solución; o en todo caso, su conjunto solución *S*, es el vacío ϕ.

EJEMPLO:

En el sistema racional:

$$4x + \frac{5}{4} = 12 + \frac{5}{y}$$
$$2x - y = 6$$

El conjunto solución, es el vacio. Es decir: $S = \phi$

Para la segunda forma de clasificar a los sistemas, establezcamos primero la siguiente definición:

ECUACIONES INDEPENDIENTES:

Son aquellas ecuaciones polinomiales; en la que los coeficientes de las mismas incógnitas, no son proporcionales entre sí.

Por ejemplo las ecuaciones polinómicas:

$$\left.\begin{matrix} x + 3y = 7 \\ x + 5y = 9 \end{matrix}\right\} \text{Son independientes}$$

ya que verifican: $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{3}{5}$

Otro ejemplo; las ecuaciones mostradas:

$$\left.\begin{matrix} 3x + 2y + 4z = 9 \\ 6x + 4y + 8z = 18 \end{matrix}\right\} \text{NO son independientes}$$

ya que se cumple:

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

De acuerdo al número de ecuaciones independientes y de incógnitas. Estos pueden ser:

1) SISTEMAS COMPATIBLES:

Son aquellas que admiten como conjunto solución, el conjunto NO vacío.

A) DETERMINADOS:

ecuaciones independientes = # incógnitas

Por ejemplo en el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3x + 4y = 11 \\ 2x - 5y = -8 \end{matrix}\right\} \text{Se cumple:}$$

(2) ecuaciones independientes = *(2)* incógnitas

B) INDETERMINADOS:

ecuaciones independientes < # incógnitas

Por ejemplo en el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 2x + y - z = 5 \\ 3x - y + z = 4 \end{matrix}\right\} \text{Se cumple:}$$

(2) ecuaciones independientes < *(3)* incógnitas

C) SOBREDETERMINADOS:

ecuaciones independientes > # incógnitas

Por ejemplo en el sistema:

$$\left.\begin{matrix} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{matrix}\right\} \text{Se cumple:}$$

(3) ecuaciones independientes > *(2)* incógnitas

2) SISTEMAS INCONSISTENTES

Son aquellos cuyo conjunto solución es el vacío. En este caso, no se puede establecer una relación explícita entre el número de ecuaciones INDEPENDIENTES y el número de incógnitas.

Por ejemplo: el sistema mostrado:

$$x+3y=5$$
$$2x+6y=7$$

Es INCONSISTENTE, pero teóricamente no se ajusta a esta forma de clasificación. Debido a que se verifica la proporcionalidad: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$.

Es decir, las ecuaciones no son independientes.

OTRO EJEMPLO:

El sistema sobredeterminado:

$$3x+y=7$$
$$2x-y=3$$
$$x+3y=4$$

También es INCONSISTENTE. Obsérvese que las ecuaciones son dos a dos, independientes.

RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Es el proceso de transformaciones sucesivas de las ecuaciones del sistema, en otras equivalentes que permitan despejar los valores de las incógnitas. Considerando que estas transformaciones son elementales y PERMISIBLES, expondremos a continuación tres propiedades de transformación.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE TRANSFORMACIÓN

1) Si en un sistema de ecuaciones, se sustituye una de ellas por la que resulta de sumarle o restarle miembro a miembro, con otra u otras cualquiera de las restantes, se obtiene un nuevo sistema que será EQUIVALENTE a la inicial. Veamos, los sitemas mostrados:

$$\left.\begin{matrix} A_1=B_1\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix} A_1\pm A_2=B_1\pm B_2\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\}$$

Son equivalentes.

2) Si en un sistema de ecuaciones, se sustituye una de ellas por la que resulta de multiplicarla por un número real cualquiera (distinto de cero) y sumarla con otra u otras, previamente multiplicadas por números cualesquiera, se obtiene un nuevo sistema, el cual sera EQUIVALENTE al inicial.

Veamos los sistemas expuestos:

$$\left.\begin{matrix} A_1=B_1\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix} m_1A_1+m_2A_2+\ldots+m_nA_n=m_1B_1+m_2B_2+\ldots+m_nB_n\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\}$$

Son equivalentes

3) Un sistema de ecuaciones se transforma en otro equivalente, cuando se reemplaza a una de las ecuaciones, por otra, obtenida multiplicando (o dividiendo) miembro a miembro por otra u otras del sistema, pero con la condición que ninguna de las soluciones del primero, anulan a los dos miembros de la(s) última(s) ecuacion(es).

Veamos, los sistemas dados:

$$\left.\begin{matrix} A_1=B_1\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\} \quad y \quad \left.\begin{matrix} A_1A_2=B_1B_2\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}\right\} \quad y \quad \begin{matrix} \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\\ A_2=B_2\\ \vdots\\ A_n=B_n \end{matrix}$$

Son equivalentes.

ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Denomínese sistema lineal a aquel cuyas ecuaciones conformantes son todas de primer grado.

Para resolver un sistema lineal, se utilizan varios procedimientos, tales como:

- ***El criterio de la sustitución***
- ***El criterio de la igualación***
- ***El criterio de la reducción***
- ***El criterio de las gráficas***

También; procedimientos mucho más prácticos:

- ***Regla de Bezout, de los coeficientes indeterminados.***
- ***Regla de Cramer, de los determinantes.***
- ***Regla de multiplicación en cruz, para sistema lineales especiales.***
- ***Y de los recursos de las matemáticas superiores:***
- ***El criterio analítico de las matrices.***

En esta oportunidad, utilizaremos solo los procedimientos elementales que el nivel de este texto lo exige. Para una próxima edición, expondremos un estudio amplio y detallado de todos los criterios y reglas mencionadas.

ESTUDIO DEL SISTEMA LINEAL DE 2 INCÓGNITAS REGLA DE CRAMER

Los valores de las incógnitas x e y del sistema lineal adjunto:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

Se obtienen a partir de:

$$\boxed{x=\frac{\Delta x}{\Delta S}} \quad e \quad \boxed{y=\frac{\Delta y}{\Delta S}}$$

Donde los determinantes Δ se definen así:

$$\Delta S=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1\\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

EJEMPLO :

Resolver el sistema lineal:

$$2x + 5y = 16$$
$$7x - 3y = 15$$

Calculemos por separado los determinantes:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3) - (7)(5) = -41$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = (16)(-3) - (15)(5) = -123$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 7 & 15 \end{vmatrix} = (2)(15) - (7)(16) = -82$$

Por Cramer se tiene:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta S} = \frac{-123}{-41} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta S} = \frac{-82}{-41} = 2$$

Por lo tanto, el conjunto solución será: $S = \{(3;2)\}$

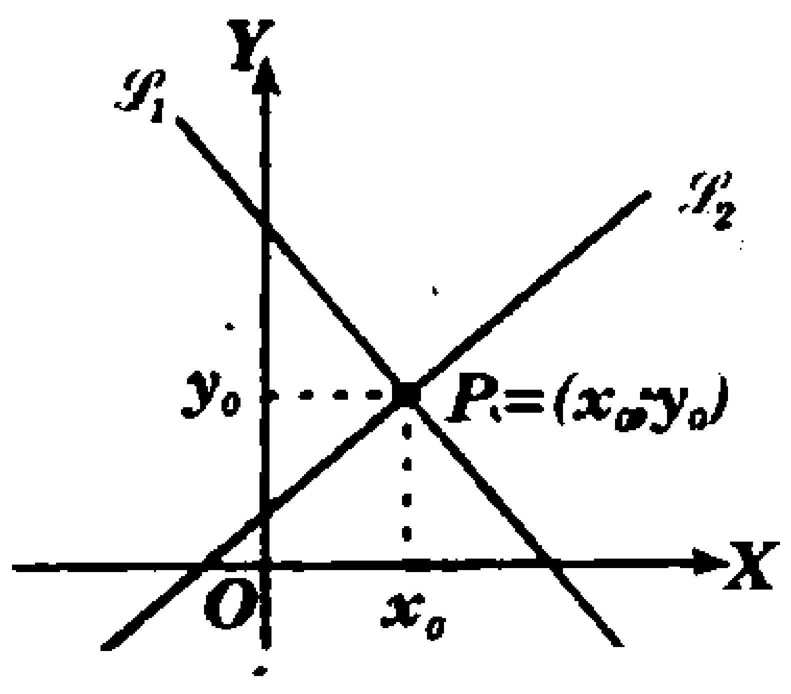
PROPIEDADES DE PROPORCIONALIDAD Y ANÁLISIS GRÁFICO DE LOS SISTEMAS LINEALES DE 2 INCÓGNITAS

Se tiene el sistema lineal:

$\mathscr{L}_1 : \ a_1x + b_1y = C_1$

$\mathscr{L}_2 : \ a_2x + b_2y = C_2$

Donde L_1 y L_2 son las ecuaciones cartesianas de dos rectas ubicadas en el plano XOY. Si éstas se intersectan se tiene :



Donde las coordenadas del punto de intersección P, nos representa la solución del sistema mencionado: $x=x_o$ e $y=y_o$.

Del mismo modo, por Cramer, la solución de dicho sistema lineal es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta S} = x_0 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta S} = y_0 \end{cases}$$

Por ello, se dirá que esta solución es ÚNICA, debido a que el conjunto solución:

$$S = \{(x_0; y_0)\} \text{ es unitario}$$

Pero existen casos en los cuales los determinantes Δx, Δy y ΔS son nulos, y al aplicar la Regla de Cramer, los valores de x e y resultan valores "incomprensibles". Para aclarar esto, estudiaremos tres casos importantes.

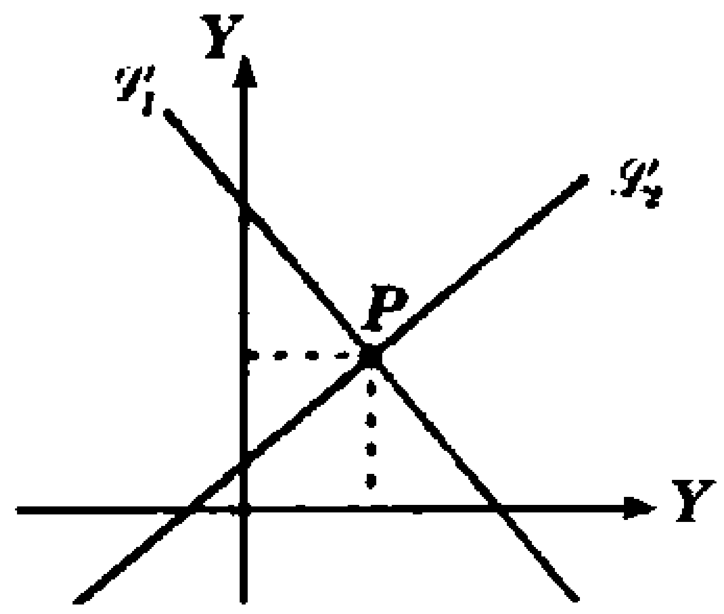
1°) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO :

Si el sistema lineal admite SOLUCIÓN ÚNICA.

Condición: $\Delta S \neq 0$

Se deduce que: $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Las rectas L_1 y L_2 son secantes.

$$L_1 \cap L_2 = P$$

2°) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO :

Si el sistema lineal admite INFINITAS soluciones.

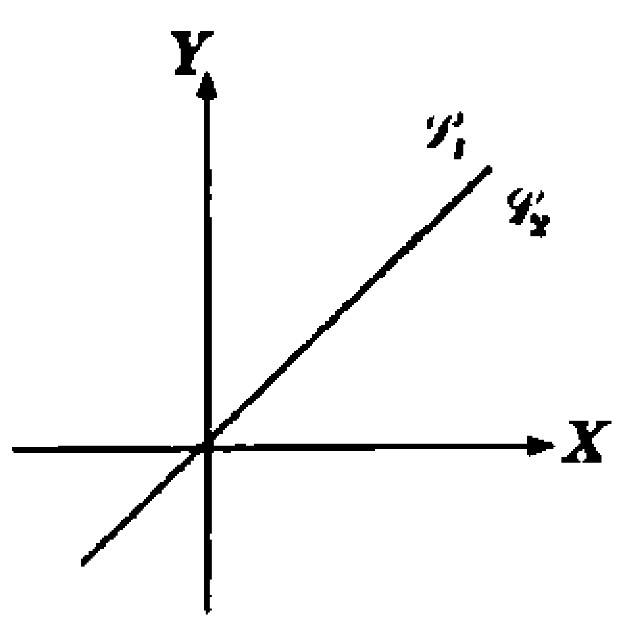
Condición:

$\Delta S = 0; \quad \Delta x = 0; \quad \Delta y = 0$

Se deduce que:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Las rectas L_1 y L_2 son coincidentes

$L_1 = L_2$

3) SISTEMA INCOMPATIBLE :

Si el sistema lineal NO admite solución alguna.

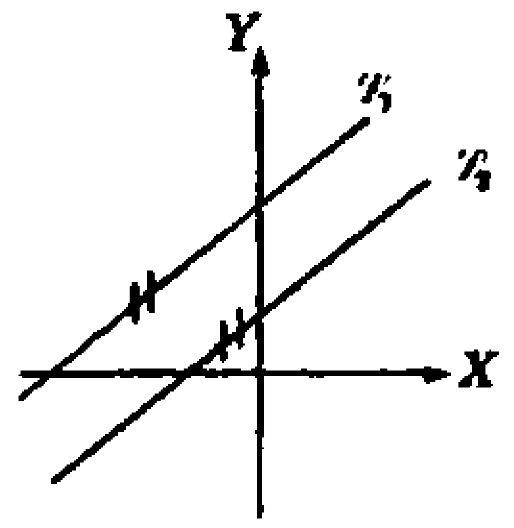
Condición:

$\Delta S = 0; \quad \Delta x \neq 0; \quad \Delta y \neq 0$

Se deduce que:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas
$L_1 // L_2$
Es decir: $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = f$

ANÁLISIS DE SISTEMAS SOBREDETERMINADOS DE 2 INCÓGNITAS

Dado el sistema lineal :

$$ax + by = C$$
$$mx + ny = p$$
$$rx + sy = t$$

y definamos el determinante del sistema ampliado ΔH, del siguiente modo:

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

Al discutir el sistema, se presentan dos casos:

1) Si el sistema lineal es COMPATIBLE

Condición: $\Delta H = 0$

2) Si el sistema lineal es INCOMPATIBLE

Condición: $\Delta H \neq 0$

El mismo criterio se aplicará al sistema lineal sobredeterminado de 3 incógnitas:

$$ax + by + cz = d$$
$$mx + ny + pz = q$$
$$rx + sy + tz = u$$
$$fx + gy + hz = k$$

SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO DE 2 INCÓGNITAS

El sistema lineal: $ax + by = 0$

$$mx + ny = 0$$

Se denomina homogéneo, debido a que los términos independientes de las ecuaciones son iguales a cero. Este sistema siempre es *COMPATIBLE*, ya que admite por lo menos la solución trivial o impropia $x=0$ e $y=0$.

De esto último, se deducen dos casos a estudiar:

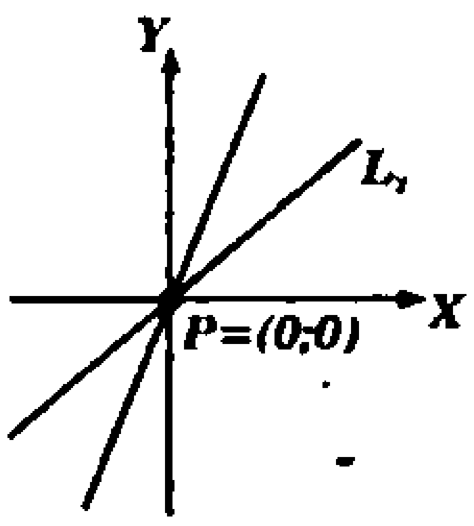
1) SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO :

El sistema homogéneo admite solución única, el cual, es la solución trivial: $x=0$ e $y=0$.

Condición: $\Delta S \neq 0$

Se deduce que: $\boxed{\dfrac{a}{m} \neq \dfrac{b}{n}}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son secantes, y su intersección se da en el origen (0;0)
$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P$

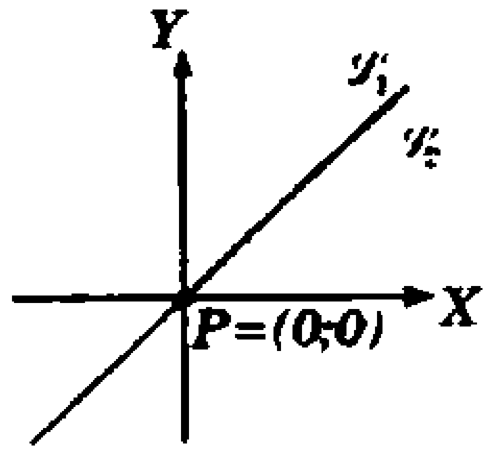
2) SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO :

El sistema homogéneo admite INFINITAS soluciones a parte de la trivial.

Condición: $\Delta S = 0$

Se deduce que: $\boxed{\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Las rectas L_1 y L_2 son coincidentes y pasan por el origen (0;0)
$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

El mismo criterio se aplicará al sistema lineal homogéneo de *3* incógnitas:

$$ax + by + cz = 0$$
$$mx + ny + pz = 0$$
$$rx + sy + tz = 0$$

El cual siempre es compatible, ya que admite por lo menos la solución trivial:

$$x = 0; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0$$

ESTUDIO DEL SISTEMA LINEAL DE 3 INCÓGNITAS

REGLA DE CRAMER :

Los valores de las incógnitas x, y y z del sistema lineal adjunto:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Se obtienen a partir de :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta s}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

Donde los determinantes Δ, se definen así:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO :

Resolver el sistema lineal:

$$3x + 2y + z = 14$$
$$4x - y + 2z = 12$$
$$x + 5y - 3z = 10$$

Mostrando por separado los determinantes y calculándolos por la regla de la estrella:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = +9 + 4 + 20 + 1 - 30 + 24 = 28$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 1 \\ 12 & -1 & 2 \\ 10 & 5 & -3 \end{vmatrix} = +42 + 40 + 60 + 10 - 140 + 72 = 84$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 14 & 1 \\ 4 & 12 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = -108 + 28 + 40 - 12 - 60 + 168 = 56$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 14 \\ 4 & -1 & 12 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -30 + 24 + 280 + 14 - 180 - 80 = 28$$

Por Cramer, se tiene:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta S} = \frac{84}{28} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta S} = \frac{56}{28} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{28}{28} = 1$$

Luego, el conjunto solución será:

$$S = \{(3;2;1)\}$$

ECUACIONES POLINOMIALES

Sabemos que una ecuación polinomial de grado n podemos representarla así:

$$P_{(x)} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \; ; \; a_0 \neq 0$$

Pero debido al manejo frecuente de esta ecuación, adoptaremos la siguiente notación:

$$\boxed{P_n(x) = 0 \;\; ; \;\; a_0 \neq 0}$$

donde el subíndice n nos indica el grado de la ecuación polinomial. Además, los coeficientes:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$$

los representaremos así:

a_i, donde $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots, (n-1), n$

De acuerdo a la naturaleza de los coeficientes a_i, una ecuación polinomial puede ser:

• Si $a_i \in \mathbb{Z}$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes enteros.

EJEMPLO:

$$P_5(x) = 4x^5 + 3x^4 - 6x^2 + x - 5 = 0$$

• Si $a_i \in \mathbb{Q}$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes racionales.

EJEMPLO :

$$P_4(x) = \frac{3}{5}x^4 + 7x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 6x + \frac{1}{2} = 0$$

• Si $a_i \in \mathbb{R}$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes reales.

EJEMPLO:

$P_7(x)=\sqrt{3}x^7+\frac{2}{3}x^5+x^4-\sqrt{2}x^3+x-\frac{\sqrt{6}}{6}=0$

• Si $a_i \in C$, se tendrá una ecuación polinomial con coeficientes complejos.

EJEMPLO:

$P_6(x)=3ix^6+\sqrt{2}ix^5+6x^3-\frac{\sqrt{2}}{3}x+5+i=0$

TEOREMA 1:

TEOREMA DEL FACTOR LINEAL DE UN POLINOMIO

Si r es una raíz compleja de la Ecuación polinomial $P_n(x)=0;\ n\geq 1$ y coeficientes complejos (es decir, verifica la igualdad numérica: $P_n(r)=0$), entonces $(x-r)$ es un factor lineal de $P_n(x)$.

Del enunciado anterior, siendo $(x-r)$ un factor de primer grado de $P_n(x)$, éste podrá expresarse así:

$$P_n(x)=(x-r)\,F_{n-1}(x)$$

COROLARIO 1 :

Todo polinomio $P_n(x)$, $n\geq 1$ y de coeficientes complejos, siempre admite un factor lineal de coeficientes complejos. Si éste factor es $(x-r)$, entonces "r" es una raíz compleja de $P_n(x)$.

De la igualdad: $P_n(x)=(x-r)\,F_{n-1}(x)$

Se sabe que "r" es una raíz de $P_n(x)$ y si existen más raíces de $P_n(x)$, éstas se obtendrán del polinomio $F_{n-1}(x)$.

Se debe notar que determinar las raíces del polinomio $P_n(x)$, equivale a calcular las raíces de la ecuación polinomial: $P_n(x)=0$

TEOREMA 2:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Toda ecuación polinomial $P_n(x)=0;\ n\geq 1$ y de coeficientes complejos, tiene por lo menos una raíz compleja. Cuestión que fue resuelta por *K. F.* GAUSS, cuya demostración no la expondremos, por estar fuera del propósito de este manuscrito.

COROLARIO 2 :

Todo ecuación polinomial de grado "n", $n\geq 1$ y de coeficientes complejos, admite "n" raíces complejas.

EJEMPLOS:

• La ecuación de 1er. grado:

$$P_1(x)=2x+1=0$$

admite una única raíz: $x=-\frac{1}{2}$

• La ecuación de 2do. grado:

$$P_2(x)=3x^2+2x-5=0$$

acepta solamente dos raíces: $x=1$ ó $x=-\frac{5}{3}$.

• La ecuación de 3er. grado:

$$P_3(x)=x^3-6x^2+11x-6=0$$

contiene tres raíces : $x=1$ ó $x=2$ ó $x=3$

COROLARIO 3 :

Si la ecuación polinomial :

$$P_n(x)=0;\ n\geq 1$$

de grado n, admite por lo menos $(n+1)$ raíces, entonces dicha ecuación será compatible indeterminada, es decir : $P_n(x)\equiv 0$ a la cual se le denomina también ECUACIÓN IDÉNTICA.

EJEMPLO:

La ecuación Polinomial :

$$(x-a)(x-b)-(x-b)(x-c)$$
$$=(c-a)(x-b)$$

es compatible indeterminada, ya que admite infinitas soluciones.

COROLARIO 4 :

Si la ecuación polinomial:
$P_n(x)=0;\ n\neq 2,\ a_0\neq 0$
admite "K" raíces iguales a r $(n\geq K)$, entonces se dice que r es una RAÍZ DE MULTIPLICIDAD "K" de dicha ecuación.

EJEMPLO:

Sea la ecuación :

$$P_3(x)=4x^3-3x+1=0$$

Factorizando, se obtiene :

$$P_3(x)=(2x-1)^2(x+1)=0$$

Luego, se dice que $(1/2)$ es una raíz de multiplicidad 2. En tanto que (-1) es una raíz simple.

En general, sean $r, s, t, \ldots, v$ raíces de la ecuación polinomial:

$P_n(x)=0;\ n\geq 2,\ a_0\neq 0 \ldots (1)$

donde : α de ellos iguales a ρ

β de ellos iguales a σ

γ de ellos iguales a τ

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

ϕ de ellos iguales a ϖ

Luego (1) se podrá escribir así:

$P_n(x)=a_0(x-r)^a(x-s)^b$

$(x-t)^g\ldots(x-v)^f=0$

Siendo: $a+b+g+\ldots.+f=n$

Se dice que:

ρ es una raíz de multiplicidad α ó $m(\alpha)$

s es una raíz de multiplicidad β ó $m(\beta)$

τ es una raíz de multiplicidad γ ó $m(\gamma)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

ϖ es una raíz de multiplicidad ϕ ó $m(\phi)$

EJEMPLO:

Sea la ecuación polinomial:

$P_{18}(x)=6x^5(x+1)^2(x-2)^4(x-3)^7=0$

se dice que :

"0" es una raíz de $m(5)$

"-1" es una raíz de $m(2)$

"2" es una raíz de $m(4)$

"3" es una raíz de $m(7)$

De lo anterior, la ecuación de grado 18, admite 18 raíces; pero el conjunto solución S de dicha ecuación, admite sólo 4 elementos, es decir:

$S = \{ 0; -1; 2; 3 \}$

RELACIONES ENTRE LOS COEFICIENTES Y LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

TEOREMA DE CARDANO – VIÉTE:

Se tiene la ecuación polinomial de grado "*n*" en su forma canónica, normalizada u ordinaria:

$$P_n(x)=x^n - S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} +.....+(-1)^nS_n=0$$

cuyas raíces son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ donde algunas de ellas pueden ser iguales (raíces múltiples).

Entre los coeficientes de dicha ecuación y sus raíces, se establecen la siguientes relaciones:

- **SUMA DE RAÍCES :**

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

- **SUMA DE LOS PRODUCTOS BINARIOS DE LAS RAÍCES**

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

- **SUMA DE LOS PRODUCTOS TERNARIOS DE LAS RAÍCES :**

$$S_3 =x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+.....+ x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

- **PRODUCTO DE RAÍCES :**

$$S_n = x_1x_2x_3 ..... x_{n-1}x_n$$

EJEMPLO 1 :

Sea la ecuación de *3er*. grado:

$$x^3 - 7x^2 + 5x - 4 = 0$$

cuyas raíces son x_1, x_2 y x_3; se cumplen:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 = 4$$

EJEMPLO 2 :

Dada la ecuación de *4to*. grado:

$$x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5x + 2 = 0$$

de raíces x_1, x_2, x_3 y x_4; se verifican:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 8$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 5$$
$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 = 2$$

EJEMPLO 3 :

Se tiene la ecuación cúbica no canónica:

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 7 = 0$$

de raíces x_1, x_2 y x_3

llevándolo a su forma canónica, se tiene:

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{2} = 0$$

por el teorema mencionado, se cumplen:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 5/2$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 = 7/2$$

EJEMPLO 4 :

Dada la ecuación cuártica incompleta:

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 1 = 0$$

de raíces x_1, x_2, x_3 y x_4.

Completando con cero el término cúbico y formando las relaciones de Viéte:

$$x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 6$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 8$$
$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 = 1$$

EJEMPLO 5 :

Veamos la ecuación cúbica no canónica e incompleta:

$$4x^3 + 6x^2 + 7 = 0$$

de raíces x_1, x_2 y x_3.

Expresándolo en su forma canónica y completando con cero el término Lineal faltante:

$$x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 0x + \frac{7}{4} = 0$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -3/2$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 = -7/4$$

EJEMPLO 6 :

Se tiene la ecuación de *5to*. grado:

$$x^5 + 6x^4 + 10x^3 + 8x^2 - 7x - 1 = 0$$

de raíces x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5. Aplicando el Teorema de Cardano– Viéte:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -6$$
$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + ...+ x_4x_5 = 10$$
$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + .. + x_3x_4x_5 = -8$$
$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 + ... + x_2x_3x_4x_5 = -7$$
$$S_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 = 1$$

EJEMPLO 7 :

Dada la ecuación de grado superior:

$$10x^{41} + 22x^{40} + 7x^{39} + 10 = 0$$

que admite *41* raíces. Expresándolo en su forma canónica, se tiene:

$$x^{41} + \frac{11}{5}x^{40} + \frac{7}{10}x^{39} + 0x^{38} + 0x^{37} + ... + 0x + 1 = 0$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{41} = -11/5$$
$$S_2 = x_1x_2 + ... + x_{40}x_{41} = 7/10$$
$$S_3 = S_4 = S_5 = ... = S_{40} = 0$$
$$S_{41} = x_1x_2x_3 .... x_{41} = -1$$

EJEMPLO 8 :

Se tiene la ecuación de grado superior:

$$x^{100} - 17x^{99} + 40 = 0$$

que acepta *100* raíces.

Extendiendolo para aplicarle el Teorema:

$$x^{100} - 17x^{99} + 0x^{98} + 0x^{97} + ... + 0x + 40 = 0$$

Se verifican las relaciones :

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... +0$$
$$S_{100} = x_1x_2x_3 ..... x_{100} = 40$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL A PARTIR DE SUS RAÍCES

Precisamente la ecuación polinomial canónica:

$$x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + ... + (-1)^n S_n = 0$$

Es la fórmula práctica que nos permite construir una ecuación de grado arbitrario a partir de sus raíces.

EJEMPLO:

Formar la ecuación de *3er*. grado cuyas raíces son:

$$-2\ ,\ \frac{3}{2}\ \text{ y }\ -1$$

Calculando separadamente S_1, S_2 y S_3, así:

$$S_1 = (-2) + \left(\frac{3}{2}\right) + (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$S_2 = (-2)\left(\frac{3}{2}\right) + (-2)(-1) + \left(\frac{3}{2}\right)(-1) = -\frac{5}{2}$$

$$S_3 = (-2)\left(\frac{3}{2}\right)\ (-1) = 3$$

Reemplazando en la fórmula de construcción:

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

Se tendrá:

$$x^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)\ x^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)\ x - \ (3) = 0$$

Eliminando denominadores, la ecuación será:

$$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 = 0$$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL $P_n(x) = 0$

TEOREMA 1 :

Un polinomio $P_n(z)$ de coeficientes reales y de variable compleja (es decir, la variable z toma valores complejos de la forma $a + bi$), verifica la siguiente relación:

$$\boxed{\overline{P_n(z)} = P_n(\ \overline{z}\ )}$$

donde : $\overline{z} = a - bi$, es el complejo conjugado de "z".

TEOREMA 2 :

Un polinomio $P_n(R)$ de coeficientes racionales y de variable real (es decir, la variables R toma valores reales de la forma $a + \sqrt{b}$), verifica la siguiente relación:

$$\boxed{\overline{P_n(R)} = P_n\left(\overline{R}\right)}$$

donde : $\overline{R} = a - \sqrt{b}$, es el irracional conjugado de R.

TEOREMA 3 :

PARIDAD DE LAS RAÍCES IMAGINARIAS

Si una ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes reales, admite la raíz imaginaria $(a+bi)$, entonces su conjugada $(a-bi)$ también es raíz de dicha ecuación.

COROLARIO (1) :

Todas las raíces imaginarias de una ecuación polinomial, con coeficientes reales, se presentan por PARES, las cuales son dos a dos números imaginarios y conjugados. Por ello, el número de raíces imaginarias de este tipo de ecuaciones es par.

COROLARIO (2) :

Una ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes reales y de grado impar, tiene por lo menos una raíz real.

TEOREMA 4 :

TETRARIDAD DE LAS RAÍCES IMAGINARIAS

Si una ecuación polinomial $P_n(x)=0$, con coeficientes racionales, admite la raíz imaginaria $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i\right)$, donde "$a$" y "$b$" son números racionales positivos no cuadrados perfectos, entonces su conjugado $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,i\right)$, su opuesto $\left(-\sqrt{a} - \sqrt{b}\,i\right)$ y el conjugado de su opuesto $\left(-\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i\right)$, también son raíces de dicha ecuación.

TEOREMA 5 :

PARIDAD DE LA RAÍCES IRRACIONALES

Si una ecuación polinomial $P_1(x)=0$, con coeficientes racionales, admite la raíz irracional $\left(a+\sqrt{b}\right)$, donde a y b son racionales y b positivo no cuadrado perfecto; entonces su irracional conjugado $\left(a - \sqrt{b}\right)$, también es raíz de dicha ecuación.

TEOREMA 6 :

TETRARIDAD DE LAS RAÍCES IRRACIONALES

Si una ecuación polinomial $P_n(x)=0$, con coeficientes racionales, admite la raíz irracional $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, donde a y b son racionales positivos no cuadrados perfectos; entonces, su irracional conjugado $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ su opuesto $\left(-\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ y el conjugado de su opuesto $\left(-\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, también son raíces de dicha ecuación.

TEOREMA 7 :

TERNARIDAD DE LAS RAÍCES COMPLEJAS

Si una ecuación polinomial $P_n(x)=0$, con coeficientes racionales, admite la raíz irracional $\sqrt[3]{a}$, donde a es un racional no cubo perfecto, entonces $\sqrt[3]{a}\ w$ y su conjugada $\sqrt[3]{a}\,w^2$, también son raíces de dicha ecuación; siendo w una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 2 :(TIPO UNMSM)

$$Si\begin{cases}3^{2x}-79(3^{x+y})=(9^{y+2})\\x^2+2xy+y^2-12x-12y+36=0\end{cases}$$

halle el valor de la expresión:

$$\sqrt{x^2-2y+2}\ .$$

A)3 B)$\sqrt{19}$ C)5 D)$\sqrt{14}$ E)$\sqrt{7}$

RESOLUCIÓN :

Para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales, generalmente, utilizamos la factorización y la propiedad siguiente:

Si

$x, y \in R: x^2+y^2=0 \leftrightarrow x=0 \wedge y=0$

Se tiene el sistema

$$\begin{cases}3^{x2}-79(3x^{+y})=2(9^{y+2})\text{.........}(I)\\x^2+2x\,y+y^2-12x-12y+36=0\text{...}(II)\end{cases}$$

De la ecuación *(II)* se obtiene:

$$(x+y)^2-12(x+y)+6^2=0$$

$\Rightarrow (x+y-6)^2=0$

$\Rightarrow x+y=6$ ....*(III)*

De la ecuación *(I)* se obtiene:

$(3^x-\ 79\times 3^x\times 3^y-2\times 81\times (3^y)2=0$

$3^x \qquad -81\times 3^y$

$3^x \qquad 2\times 3^y$

$(3x-81\times 3^y)(3^x+2\times 3^y)=0$

[Recuerde que $3^x+2\times 3^y>0$]

$\Rightarrow 3^x-81\times 3^y=0 \ \Rightarrow 3^x=3^{y+4}$

$x=y+4$............................... *(IV)*

De *(III)* y *(IV)* se tiene el sistema lineal.

$$\begin{cases}x+y=6\\x-y=4\end{cases}$$

donde $x=5 \ \wedge y=1$

Luego:

$$\sqrt{x^2-2y+2}=\sqrt{5^2-2\times 1+2}=5$$

RPTA: C

PROBLEMA 2 :

Halle todas las raíces del polinomio

$$P(x)=9x^3-36x^2+44x-16\cdot$$

Si una raíz del polinomio es igual a la suma de las otras dos, entonces :

A) $x_1=1/3\ ;x_2=2/3\ ;x_3=1$

B) $x_1=1/2\ ;x_2=1/2\ ;x_3=2$

C) $x_1=4/3\ ;x_2=1/3\ ;x_3=2$

D) $x_1=4/3\ ;x_2=2/3\ ;x_3=2$

E) $x_1=5/3\ ;x_2=1/3\ ;x_3=3$

RESOLUCIÓN :

Como $P(x)$ se anula para $x=2$

$\Rightarrow$Aplicamos Ruffini :

	9	−36	44	−16
x=2	↓	18	−36	16
	9	−18	8	0

* Luego:

$P(x)=(x-2)(9x^2-18x+18)=0$

$\Rightarrow P(x)=(x-2)(3x-4)(3x-2)=0$

$\Rightarrow \boxed{x_1=2}; \boxed{x_2=4/3}; \boxed{x_3=2/3}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-x_1+2x_2+x_3=-2$$
$$3x_1+6x_2+3x_1=6$$
$$3x_1-x_3=4$$

El resultado de $(x_1+x_2+x_3)$ es :

A) 3 B) 4 C) 7
D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Ordenando adecuadamente el sistema :

$-x_1+2x_2+x_3=-2$.................*(I)*

$-3x_1+6x_2+3x_3=-6$...............*(II)*

$-3x_1-x_3=4$..................*(III)*

* Al efectuar $3(I)-(II)$:

$$-6x_1=-12\Rightarrow x_1=2$$

* Reemplazando en *(III)*:

$$3\times 2-x_3=4\Rightarrow x_3=2$$

* Reemplazando en *(I)*:

$$-2+2x_2+2=-2\Rightarrow x_2=-1$$

*finalmente lo deseado:

$$x_1+x_2+x_3=3$$

RPTA : "A"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Resolver: $\begin{cases}2x-y=4\\x+y=5\end{cases}$ é indicar: "xy"

A) 4 B)12 C) 6 D) 8 E)10

02 Resolver: $\begin{cases}3x-y=7\\x+y=13\end{cases}$

hallar: xy

A)40 B)20 C)32 D)120 E)142

03 Resolver: $\begin{cases}5x+y=1\\2x+y=10\end{cases}$; hallar: $\dfrac{xy}{8}$

A)16 B)–6 C)–12 D)–8 E)–48

04 Resolver: $\begin{cases}2x-y=4\\x+2y=-3\end{cases}$; hallar: xy^2

A)–25 B)5 C)4 D)9 E)–16

05 Resolver: $\begin{cases}5x+2y=3\\2x+3y=-1\end{cases}$

hallar: $\dfrac{y}{x}$

A)2 B)$\dfrac{3}{4}$ C)$-\dfrac{3}{2}$ D)5 E)-1

06 Al resolver el sistema

$3(x+2)=2y$ .... *(I)*

$2(y+5)=7x$ .... *(II)*

calcular $(x+y)$

A)3 B)7 C)14 D)13 E)16

07 Calcular $x+2y$ del sistema:

$4y+3x=8$ .... *(I)*

$8x-9y=-77$ .... *(II)*

A)4 B)2 C)6 D)8 E)12

08 Calcular y/x del sistema:

$2(x+5)=4(y-4x)$ .... *(I)*

$10(y-x)=11y-2x$ .... *(II)*

A)– 1 B)– 2 C)– 4 D)– 8 E)– 16

09 Del siguiente sistema:

$ax+by=a^2+b^2$ ....*(I)*

$bx+ay=2ab$ ....*(II)*

Calcular: x/y

A)b B)a C)ab D)$a+b$ E)a/b

(10) Calcular $(x+2y+z)$ del sistema:

$2x+3y+z=1$ ....(I)

$6x-2y-z=-14$ ....(II)

$3x+y-z=1$ ....(III)

A) 1 B) 0 C) – 1 D) 2 E) 5

(11) Hallar m, para que el sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} mx+4y = -2m \\ x+(m+3)y=8 \end{cases}$$

A) 5 B) 6 C) 3 D) 4 E) –4

(12) Hallar: $x-y$ en:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=74 \end{cases}$$

A) 2 B) –2 C) ±2 D) –3 E) 3

(13) Resolver:

$$\begin{cases} x^3+y^3=5 \\ x^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

y dar el valor de: $(x\cdot y)$

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,8
D) 1,1 E) 1,2

(14) Determinar el valor de m para que el sistema:

$(m+3)x+(m-1)y=4$

$mx+y=2m-4$

sea indeterminado:

A) 3 B) –3 C) 3 y 1 D) –1 E) 1

(15) Calcular el valor de x:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=6 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=7 \end{cases}$$

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,3
D) 0,2 E) 0,1

(16) Si a, b, c son las raíces de la ecuación:

$$6x^3-11x^2-3x+2=0$$

Calcular el valor de: $Q=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

A) 1/2 B) 1 C) 3/2 D) 1/3 E) 2/3

(17) Siendo a , b , c las raíces de la ecuación:

$$2x^3+3x-10=0$$

Calcular: $Q=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$

A) –5 B) –10 C) –15 D) 5 E) 10

(18) Hallar la raiz imaginaria de mayor argumento en la ecuación:

$x^4-16=0$

A) i B) –i C) 2i D) 2i E) 4i

(19) La suma de las raíces de:

$x^3-3x^2+4x-5=0$ es:

A) 3 B) –3 C) 2
D) –2 E) 1

(20) Calcular: $Q=ab+bc+ac$

son las 3 raíces de la ecuación:

$$3x^3+2x^2-9x-10=0$$

A) 2/3 B) 3 C) –3
D) 10/3 E) –10/3

Resolver los siguientes sistemas

(21) $$\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{6} \\ x+z=\dfrac{3}{4} \\ y+z=\dfrac{7}{12} \end{cases}$$

(22) $$\begin{cases} x+y-z=7 \\ x-y+z=3 \\ 2x+y-3z=8 \end{cases}$$

(23) $$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+4z=7 \\ 3x+2y-6z=-6 \end{cases}$$

(24) $$\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{x+2y-1}=1 \\ \dfrac{2x+y-1}{x+y-3}=4 \end{cases}$$

(25) $$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}y+2 \\ y=\dfrac{1}{3}x+1 \end{cases}$$

(26) $$\begin{cases} x-y=8 \\ y-z=10 \\ x+z=6 \end{cases}$$

(27) $$\begin{cases} 3x+5y+z=34 \\ \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{18} \end{cases}$$

(28) $$\begin{cases} x+y-6z=9 \\ x-y+4z=-5 \\ 3y-2-z=5 \end{cases}$$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Marque verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) Si: una solución de:
$2x^3+ax+1=0$, es $(-2) \Rightarrow a=7,5$

( ) Si $(x-1)^3(x+2)=0 \Rightarrow CS=\{1;-2\}$

( ) Si: $3x^3-4x+1=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=4/3$

A) VVF B) VFF C) VVV
D) FVF E) FFF

(02) Resolver la siguiente ecuación:

$$2x^3-3x^2-11x+6=0$$

A) C.S={–2; –3; 1/2}

B) C.S={2; –3; –1/2)

C) C.S={–2; 3; 1/2}

D) C.S={2; 3; –1/2}

E) C.S={–2; 3}.

(03) Determine la suma de los productos binarios de la ecuación:

$$x^3-x^2-nx-8=0$$

si una solución es {– 2}

A) 6 B) –10 C) 12
D) –8 E) 16

(04) En la ecuación cúbica:

$$2x^3-(n^2-5)x^2+4x+n-7=0$$

se cumple que la suma de raíces es igual al producto de raíces, calcule "n".

A) –4 B) 3 C) –3 D) 6
E) Más de una es correcta

(05) Siendo x_1; x_2 y x_3, raíces de la siguiente ecuación:

$$3x^3-x^2+2x-5=0$$

calcular:

$$M=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)(x_1+x_2+x_3)^{-1}$$

A) 1,1 *B) 1,2* *C) 1,3*
D) 1,4 *E) 1,5*

06 Se tiene la ecuación cúbica:

$$2x^3-10x^2+nx-6=0$$

Si una raíz es la tercera parte de la suma de las otras dos, calcule el producto de las dos últimas.

A) 2,2 *B) 2,4* *C) 2,6*
D) 2,8 *E) 5*

07 Siendo x_o la única solución real de la ecuación:

$$x^3+2x^2+2x+15=0$$

calcular: $A=\left(\dfrac{x_1^2-x_1}{x_0+x_2^2-x^2}\right)^{-1}$

A) 1,6 *B) 2,5* *C) 3,5*
D) 4,5 *E) 5*

08 Siendo m, n y p raíces de la ecuación: $x^3-2x^2+3=0$

calcule el valor de:

$$\frac{m^3+3}{m}+\frac{n^3+3}{n}+\frac{p^3+3}{p}$$

A) 2 *B) 4* *C) 6*
D) –8 *E) 10*

09 Siendo x_1, x_2 y x_3 raíces de la ecuación: $3x^3+x-88=0$

calcular: $M=\dfrac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

A) –131 *B) –132* *C) –133*
D) –134 *E) –136*

10 La ecuación cúbica:

$$x^3+6x^2+nx-10=0$$

tiene por $C.S=\{a-r;\ a;\ a+r\}$

Calcular "an".

A) –2 *B) –4* *C) –6*
D) –8 *E) –1*

11 Dada la ecuación cúbica:

$x^3+ax^2-bx-14=0;\{a;b\}\subset Q$ calcule el valor de $(a-b)$, si admite como raíz: $3+\sqrt{2}$

A) 9 *B) 10* *C) 11*
D) 12 *E) 13*

12 Calcular el mayor valor de "n" tal que una de las raíces de la ecuación: $x^3-52x+n=0$

sea el triple de la otra raíz.

A) 99 *B) 98* *C) 97*
D) 96 *E) 95*

13 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

indique verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) El sistema será compatible determinado o tiene solución única, si y solo si: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$

( ) El sistema es compatible indeterminado o tiene infinitas soluciones, si y solo si: $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

( ) El sistema es incompatible o no tiene solución, si y solo si:

A) VVV *B) FVV* *C) FFV*
D) VFF *E) FFF*

14 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x+3y=9\\x-4y=-23\end{cases}$$

halle su conjunto solución.

A) C.S={(–5; 3)} *B) C.S={(5; –3)}*
C) C.S={(–5; –3)} *D) C.S={(3; –5)}*
E) C.S={(–3; 5)}

15 Para qué valor de "n" el sistema:

$$\begin{cases}(n+2)x+2y=5\\nx-3y=1\end{cases}$$

es compatible determinado.

A) $n\in R-\{0;1\}$ *B)* $n\in R-\{-1;0\}$
C) $n\in R=\{6/5\}$ *D)* $n\in R-\{-6/5\}$
E) $n\in R-\{-2\}$

16 Calcular m^2+n^3, para que el sistema sea indeterminado:

$$\begin{cases}(m+2)x+(4n)y=2\\(2n-1)x+my=1\end{cases}$$

A) 22 *B) 23* *C) 24*
D) 28 *E) 30*

17 Con respecto al sistema:

$$\begin{cases}2nx+9y=n\\(n-1)x+ny=1\end{cases}$$

indique verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) Si $n=3/2$ el sistema es compatible determinado

( ) Si $n=3$ el sistema es compatible indeterminado

( ) Si $n=2/3$ el sistema es incompatible

A) FFF *B) FFV* *C) VVV*
D) FVF *E) VVF*

18 Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}5x-2y=n\\x+9y=n\end{cases}$$

determine "n", de modo que "y" sea menor que "y" en 7 unidades.

A) 47 *B) 37* *C) 11*
D) 4 *E) 74*

19 Luego de resolver el sistema:

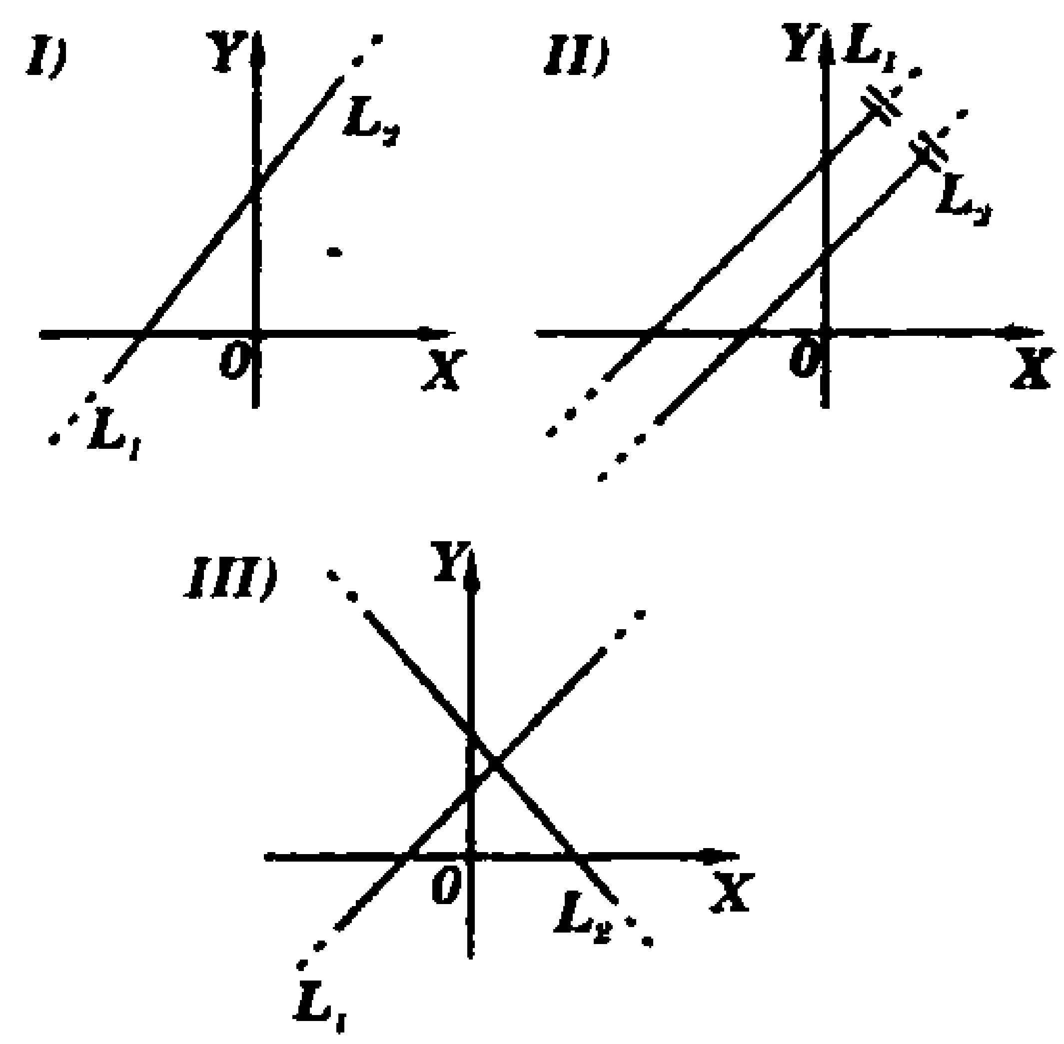
$$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y-1}=\dfrac{2}{x}\\[2mm]\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y-1}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

calcular $25x_o-y_o$, si: $C.S=\{(x_o;y_o)\}$

A) 38 *B) 39* *C) 40*
D) 41 *E) 42*

20 Relacione correctamente para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\dots\dots\dots\dots\dots(L_1)\\a_2x+b_2y=c_2\dots\dots\dots\dots\dots(L_2)\end{cases}$$



U: Sistema compatible determinado
N: Sistema compatible indeterminado
S: Sistema incompatible

A) IN; IIU; IIIS *B) IS; IIN; IIIU*
C) IN; IIS; IIIU *D) IU; IIN; IIIS*
E) IS; IIU; IIIN

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)C	3)B	4)E	5)B	6)B	7)A	8)B	9)B	10)C
11)C	12)D	13)B	14)E	15)D	16)C	17)D	18)A	19)D	20)C

DESIGUALDADES-INECUACIONES

CAPITULO 087

OBJETIVOS :

- *Al finalizar el estudio de este capítulo, el alumno será capaz de saber emplear las propiedades de las desigualdades para la resolución de un ejercicio.*
- *También saber utilizar la recta numérica real para definir las diferentes clases de intervalos y lo más importante trasladar todo este conocimiento para resolver inecuaciones de primer grado con una variable en los reales.*
- *Conocer como resolver las inecuaciones polinomiales, fraccionarias e irracionales utilizando la regla de los puntos críticos, será de gran ayuda para el análisis de las funciones algebraicas en el conjunto ℝ.*
- *El conocimiento del valor absoluto y de sus propiedades será de capital importancia para las demostraciones y la posterior resolución de ecuaciones e inecuaciones que involucra a este operador.*

INTRODUCCION:

Las desigualdades son tan importantes en las aplicaciones de las matemáticas como las ecuaciones. En efecto, en el grado en que nuestro conocimiento del mundo físico se obtiene midiendo (no meramente contando), ese conocimiento se describe por desigualdades más bien que por ecuaciones. Por ejemplo, si decimos que el diámetro **"d"** del planeta Venus es de ***12 103,6 km***, queremos decir que: ***12 000 km < d < 13 000 km.***

Un momento de reflexión muestra que una medición absolutamente exacta de cualquier cantidad física tal como una distancia, un peso, una velocidad, etc., es completamente imposible; la precisión depende de los instrumentos de medida, y tales instrumentos pueden hacerse solamente para medir dentro de ciertas tolerancias especificadas, nunca exactamente. Por estas razones es necesario un buen entendimiento básico de las desigualdades.

RELACIÓN DE ORDEN

Es la comparación que se establece entre dos elementos de un mismo conjunto .

DESIGUALDAD

Es una relación de orden que se establece entre dos números reales para ello usaremos los siguientes símbolos .

$$\left.\begin{array}{l} > \text{"mayor que"} \\ < \text{"menor que"} \end{array}\right\} \text{Estrictos}$$

$$\left.\begin{array}{l} \geq \text{"mayor igual que"} \\ \leq \text{"menor igual que"} \end{array}\right\} \text{No Estrictos}$$

EJEMPLO :

$$7 > 3 \;;\; 1 < 4 \;;\; -3 < 0 \;;\; \dots \text{etc}.$$

LEY DE TRICOTOMÍA

Dados dos números reales a y b se cumplirá una y tan sólo una de las siguientes relaciones:

$$\boxed{a > b \;\vee\; a = b \;\vee\; a < b}$$

EJEMPLO :

$(2;7) \in \mathbb{R}$

$$2 > 7 \;\vee\; 2 = 7 \;\vee\; 2 < 7$$

F F V

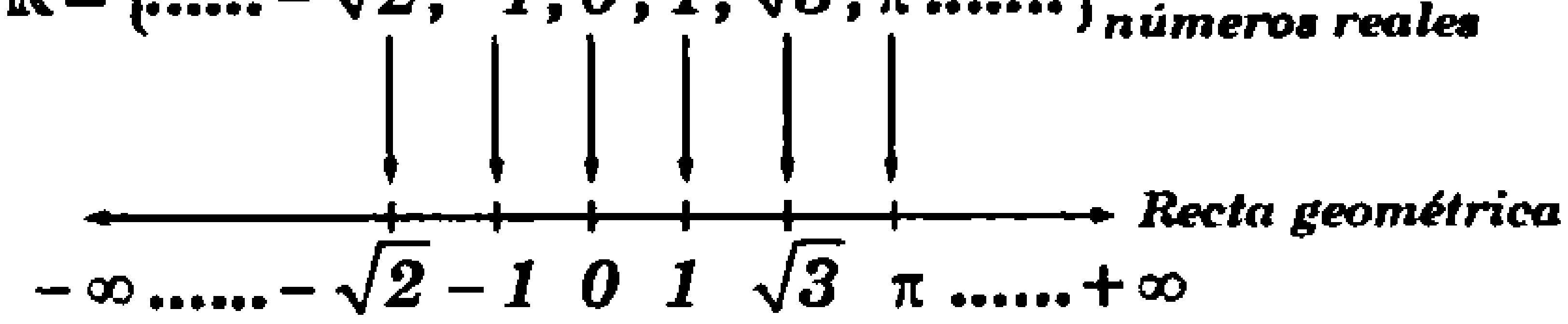
vemos que las dos primeras relaciones son falsas se cumplirá la tercera relación .

RECTA NUMÉRICA REAL

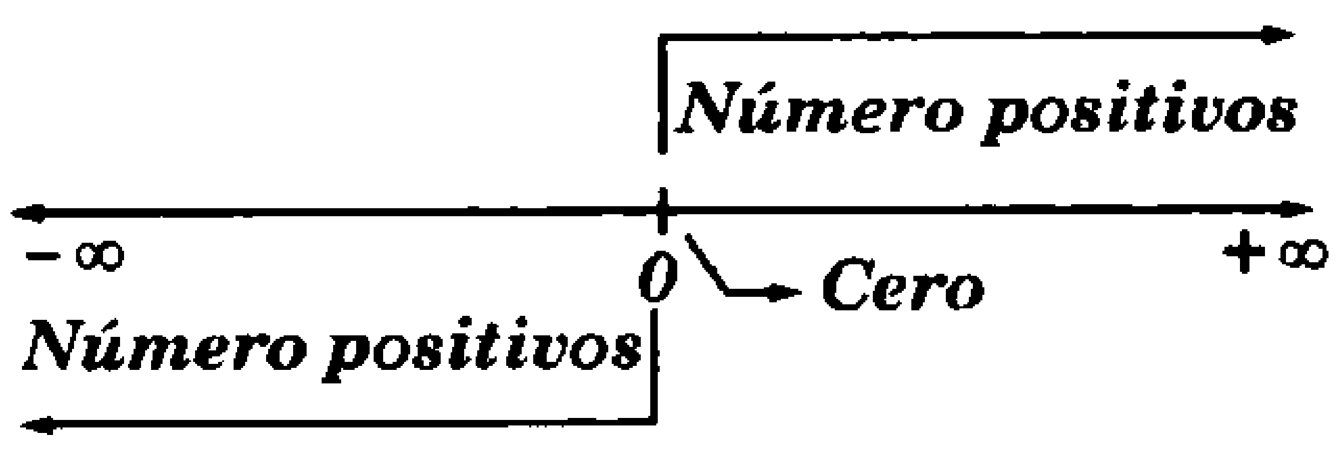
Es una forma geométrica que nos permite ordenar a los números reales .

"Para cada número real existe un único punto en esta recta y para cada punto de esta recta existe un único número real."

$$\mathbb{R} = \{\dots\dots -\sqrt{2}; -1; 0; 1; \sqrt{3}; \pi \dots\dots\}$$ *Conjunto de los números reales*



Mediante esta correspondencia se forma la recta numérica real que todos conocemos desde el colegio.



Esta disposición de números es por convención a nivel mundial.

OBSERVACIÓN :

El más infinito $(+\infty)$ y el menos infinito $(-\infty)$ en realidad sólo existe en nuestra imaginación y sirve para representar una cantidad muy grande o muy pequeña por ejemplo si : $x=3^{200920102011}$

decimos que x tiende al infinito y se escribe $x \to \infty$.

DEFINICIONES :

Sean: $\{a,b,c\} \subset R$

* $a \in R^+ \Leftrightarrow a>0\}$ "a" *es positivo*
* $a \in R^- \Leftrightarrow a<0\}$ "a" *es negativo*
* $a \geq b \Leftrightarrow a>b \ \vee \ a=b$
* $a < b < c \Leftrightarrow a<b \wedge b<c$
* $a > b \Leftrightarrow a-b>0$
* $a < b \Leftrightarrow a-b<0$
* $a > b \Leftrightarrow b<a$

EJEMPLOS :

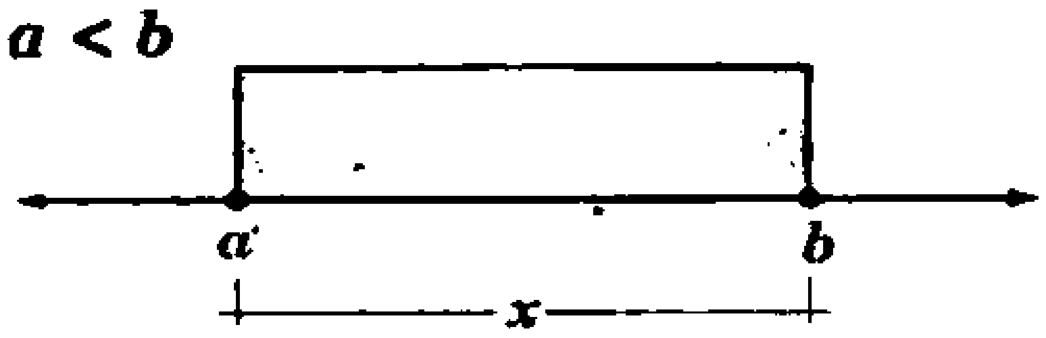
* Si $x \in R^+ \Leftrightarrow x>0$
* Si $(x+3) \in R^- \Leftrightarrow x+3<0$
* Si $x \geq 3 \Leftrightarrow x>3 \ \vee \ x=3$
* Si $2<x<5 \Leftrightarrow 2<x \wedge x<5$
* Si $x^3>x \Leftrightarrow x<x^3$

INTERVALO

Conjunto de infinitos elementos que representa a todos los números reales comprendidos entre dos extremos.

I) INTERVALO CERRADO[ ]:

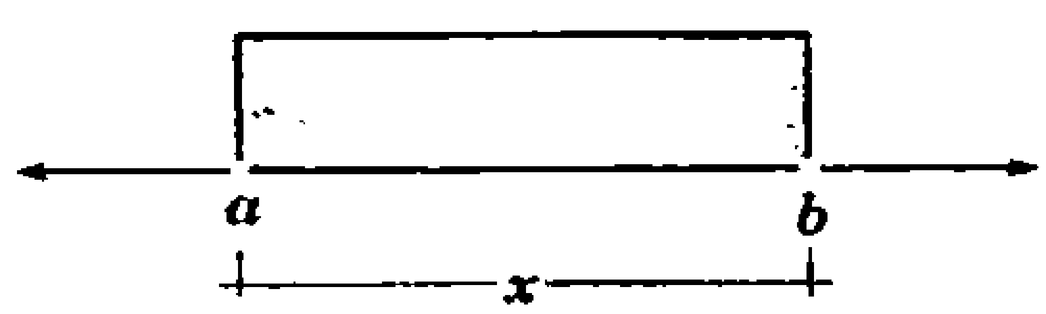
Cuando intervienen los extremos: $a<b$



Luego: $a \leq x \leq b$

II) INTERVALO ABIERTO] [:

Cuando no intervienen los extremos.

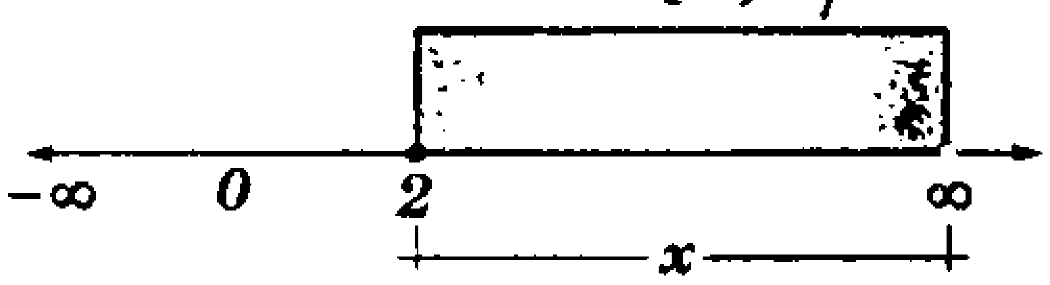


Luego : $a<x<b$

OBSERVACIÓN :

El $+\infty$ y el $-\infty$ se escribirán como intervalos abiertos por no conocer su valor.

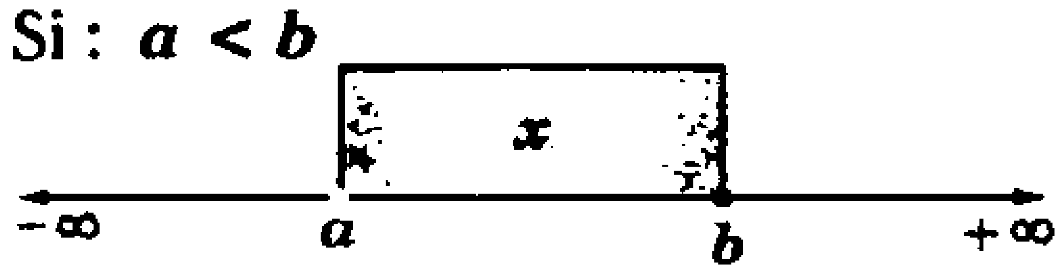
EJEMPLO : $x \in [2;\infty\rangle$



III) INTERVALO SEMIABIERTO O SEMICERRADO :

Teniendo a uno de los extremos abiertos y el otro cerrado.

Si : $a<b$



donde: $x \in \langle a;b] \Leftrightarrow a<x \leq b$

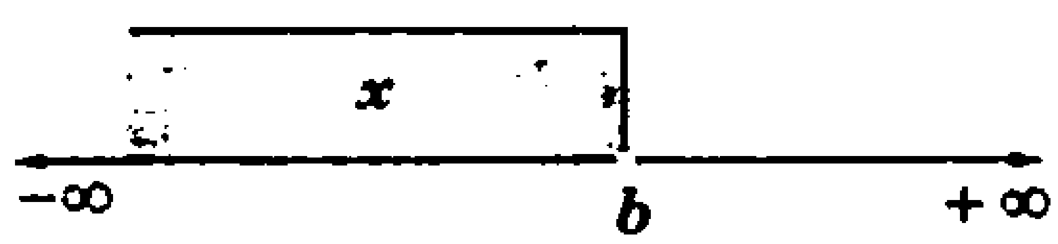
EJEMPLOS:

* Si $x \in \langle 2;5] \Leftrightarrow 2<x \leq 5$
* Si $x \in [-1;3\rangle \Leftrightarrow -1 \leq x<3$
* Si $x \in [-5;2\rangle \Leftrightarrow -5 \leq x<2$
* Si $x \in \langle 3;8] \Leftrightarrow 3<x \leq 8$

III) INTERVALOS NO ACOTADOS :

Llamándose así cuando por lo menos uno de los extremos son el $+\infty$ ó el $-\infty$. Así :

$x \geq a \Leftrightarrow x \in [a;+\infty\rangle$



$x<b \Leftrightarrow x \in \langle -\infty;b\rangle$

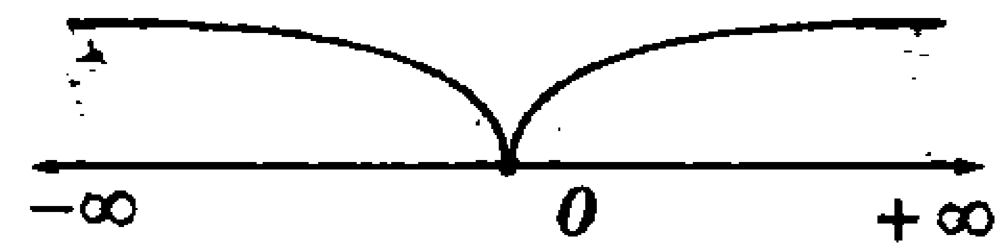
EJEMPLOS :

* Si: $x \geq 3$ entonces diremos que: $x \in [3;\infty\rangle$
* Si: $x<2$ entonces diremos que : $x \in \langle -\infty;2\rangle$
* Si: $x>5$ entonces diremos que : $x \in \langle 5;\infty\rangle$

OBSERVACIÓN:

Si: $x \in \langle -\infty;\infty\rangle \Leftrightarrow x \in R$

Es decir x toma cualquier valor real, gráficamente .



TEOREMAS DE LAS DESIGUALDADES

1) El sentido de una desigualdad no se modifica si se suma o se resta , un mismo número real a sus dos miembros . Por consiguiente , para pasar un término de un miembro a otro de una desigualdad, no hay más que cambiarle de signo .

POR EJEMPLO :

Si: $a>b \Rightarrow a+n>b+n$

$c>d \Rightarrow c-x>d-x$

2) El sentido de una desigualdad no se altera si se multiplica , o divide , por un mismo número real positivo sus dos miembros .

POR EJEMPLO :

Si $a>b$ y $k>0$; se tiene que:

$$ka>kb \ \text{ y } \ \frac{a}{k}>\frac{h}{k}$$

3) El sentido de una desigualdad se invierte cuando se multiplica o divide por un mismo número negativo sus dos miembros .

POR EJEMPLO:

Si $a>b$ y $k<0$, se tiene que:

$$ka<kb \ \text{ y } \ \frac{a}{k}<\frac{h}{k}$$

4) Si : $a>b$ y a, b, n son positivos se tiene: $a^n>b^n$. Pero $a^{-n}<b^{-n}$.

EJEMPLOS :

* $5>4$; se tiene $5^3>4^3$ ó $125>64$

$5^{-3}<4^{-3}$ ó $\frac{1}{125}<\frac{1}{64}$

5) LEY TRANSITIVA :

Si: $a<b \ \wedge \ b<c \Leftrightarrow a<c$

* R^+ = Reales positivos
* R^- = Reales negativos

PROPIEDADES:

5) Si $\begin{array}{r} a<b \\ c<d \\ \hline a+c<b+d \end{array}$ $+$

7) Si
$$\begin{array}{r} a<b \\ c>d \\ \hline a-c<b-d \end{array} \; (-)$$

8) Si
$$\begin{array}{r} a<b \\ c<d \\ \hline a\times c<b\times d \end{array} \; (\times ?) \; \forall a, b, c, d \; \mathbb{R}^+$$

9) Si
$$\begin{array}{r} a>b \\ c<d \\ \hline \frac{a}{c}>\frac{b}{d} \end{array} \; (\div ?) \; \forall a, b, c, d \; \mathbb{R}^+$$

10) Si : $x<y$ (donde x , y tienen el mismo signo) $\Rightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

EJEMPLO :

$$2<x<5 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{x}>\frac{1}{5}$$

11) Si : $0<x<y \Rightarrow 0<x^2<y^2$

EJEMPLO :

$$0<2<3 \Rightarrow 0<4<9$$

12) Si: $a<x<b$ (donde a, b tienen signos opuestos)

Entonces se cumple :

$$0 \le x^2 < máx\{a^2 ; b^2\}$$

EJEMPLOS :

$$-2<x<5 \Rightarrow 0 \le x^2 < 25$$

$$-7 \le x<2 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 49$$

$$-5<x \le 6 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 36$$

$$-1<x<4 \Rightarrow 0 \le x^2 < 16$$

OBSERVACIONES :

* Observar que dos desigualdades del mismo séntido se pueden sumar, pero no se pueden restar .

EJEMPLO :

$$\begin{array}{r} 6<7 \\ 2<5 \\ \hline 8<12 \end{array} \; (+) \textit{Sumando} \quad \textit{¡Verdadero!}$$

Pero si restamos tendríamos:

$$4<2 \quad \textit{¡Falso!}$$

* Observar que dos desigualdades del mismo sentido de elementos positivos se pueden multiplicar , pero no se pueden dividir :

EJEMPLO :

$$\begin{array}{r} 2<12 \\ 1<12 \\ \hline 2<144 \end{array} \; (\times) \textit{Multiplicando} \quad \textit{¡Verdadero!}$$

Pero si dividimos tendríamos:

$2<1$ lo cual es falso.

TEOREMAS ADICIONALES

Sean $a, b, c, d, \in R$

1) $a \in R ; a^2 \ge 0$

2) $0 \le a<b \wedge 0 \le c<d \Rightarrow 0 \le ac<bd$

3) $ab>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$

4) $ab<0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$

5) $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$

6) $a<0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}<0$

7) Si a y b tienen el mismo signo , entonces:

$$a<x<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{x}>\frac{1}{b}$$

8) $a<x<b$

$a^2<x^2<b^2$; Si $0<a<b$

$0 \le x^2 < máx\{a^2 ; b^2\}$; Si $a<0 \wedge a<b$

$b^2<x^2<a^2$; Si $a<b<0$

9) $a+\frac{1}{a} \ge 2$; $\forall a \in R^+$

10) $b+\frac{1}{b} \le 2$; $\forall b \in R^-$

11) $a^2+b^2 \ge 2ab$; $\forall a, b \in R$

12) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc ; \forall a, b, c \in R$

13) $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$ ó

$$\boxed{\overline{MA} \ge \overline{MG} \ge \overline{MH}}$$

INECUACIÓN

Es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que solo se verefica para determinar de las incógnitas o tal vez nunca se verifica.

POR EJEMPLO:

La desigualdad : $2x+3>x+5$ es una inecuación porque tiene una incógnita "x", y se verifica para valores de x mayores que 2.

SOLUCIÓN PARTICULAR :

Es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifica la inecuación .

POR EJEMPLO :

En la inecuación : $2x+3>x+5$ una solución particular es $x=4$, pues $2(5)+3>5+5$ es cierto .

CONJUNTO SOLUCIÓN :

Es aquel conjunto denotado por *C.S.* que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no tiene solución , entonces decimos que el *C.S.* es el conjunto solución vacío .

RESOLVER UNA INECUACIÓN :

Significa hallar su conjunto solución . La resolución se realiza sólo empleando pasos equivalentes , por ejemplo , si queremos resolver la inecuación: $2x+3>x+5$

Diremos:

$2x+3>x+5 \Leftrightarrow 2x+3+(-3)>x+5+(-3)$

$\Leftrightarrow 2x>x+2$

$\Leftrightarrow 2x+(-x)>x+(-x)+2$

$\Leftrightarrow x>2$

INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Son aquellas inecuaciones que presentan la siguiente forma

$$ax+b>0 \;\; ; \;\; (<; \ge ; \le)$$

Una inecuación de este tipo se resuelve agrupando los términos que contiene a la incógnita en un solo miembro y los términos que no lo contienen en el otro para luego realizar un despeje .

RESOLVER UNA INECUACIÓN:

Significa hallar su conjunto solución. La resolución se realiza sólo empleando pasos equivalentes, por ejemplo, si queremos resolver la inecuación: $3x+2>2x+7$ diremos :

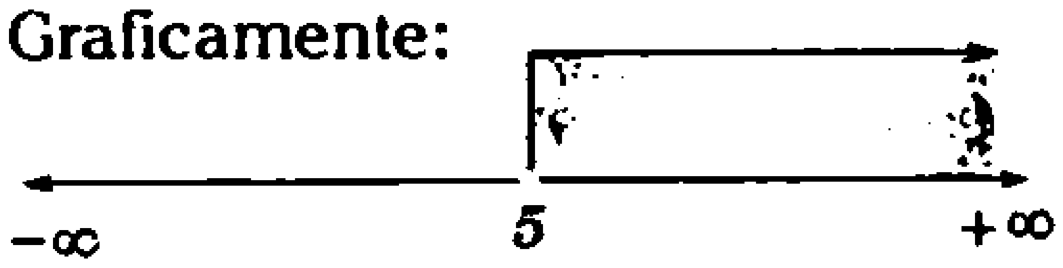
$3x+2>2x+7 \Leftrightarrow 3x+2+(-2)>2x+7+(-2)$

$\Leftrightarrow 3x>2x+5$

$\Leftrightarrow 3x+(-2x)>2x+5+(-2x)$

$\Leftrightarrow x>5$

Graficamente:



Luego: $C.S.=\{x \in R / x>5\}=\langle 5;+\infty \rangle$

OTRO EJEMPLO:

Resolver: $3x+7 \ge -2$

RESOLUCIÓN:

$3x \ge -9 \Rightarrow x \ge -3 \Rightarrow x \in [-3;+\infty\rangle$

INECUACIÓN DE 2DO. GRADO (CON UNA INCÓGNITA)

Forma:

$$ax^2+bx+c>0 \;\; ; \;\; (<;\geq;\leq)$$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

POR FACTORIZACIÓN : (Puntos Críticos)

I) Se factoriza el polinomio mediante un aspa simple

II) Se hallan los puntos críticos igualando cada factor a cero y se ubican en la recta numérica o eje lineal de coordenadas .

III) De derecha a izquierda se ubican los signos más *(+)* y menos *(–)* en forma alternada en cada intervalo

IV) Luego, si $P(x)\geq 0$ se tomarán los intervalos *(+)* positivos y si $P(x)\leq 0$ se tomarán los intervalos *(–)* negativos .

EJEMPLO :

Resolver: $x^2-x-6\leq 0$

PASO 1:

Factorizar: $x^2-x+6\leq 0$

$x \quad -3$

$x \quad\;\; 2$

$\Rightarrow (x-3)(x+2)\leq 0$

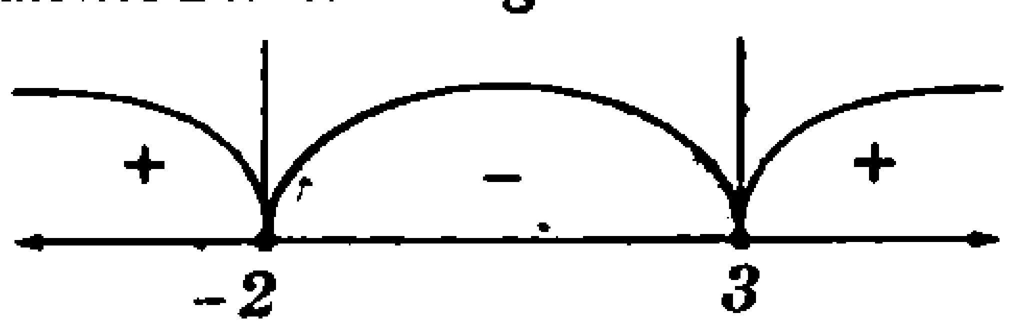
PASO 2:

Puntos Críticos $x-3=0 \wedge x+2=0$

$(3;-2)$

PASO 3:

Ubicamos los puntos críticos de la recta numérica y hacemos la distribución de signos .



PASO 4:

Como $P(x)\leq 0$ tomamos el intervalo negativo . $x\in[-2;3]$

RESOLUCIÓN GENERAL

Sea: $P(x)=ax^2+bx+c \lesseqgtr 0$

$\{a;b;c;x\}\subset R \,;\, a\neq 0$

RESOLUCIÓN :

Para resolver una inecuación cuadrática hay que analizar el discriminante $\Delta=b^2-4ac$ del polinomio ***P***.

Luego se tienen ***3*** casos:

1er. CASO: $\Delta=0$

Aquí el polinomio *:*

$P(x)=ax^2+bx+c$, es un trinomio cuadrado perfecto.

Resolver: $P(x)=x^2-4x+4\lesseqgtr 0$

$P(x)=(x-2)^2$; luego

$a)\,(x-2)^2\geq 0\Leftrightarrow C.S.=R$

$b)\,(x-2)^2>0\Leftrightarrow C.S.=R-\{2\}$

$c)\,(x-2)^2<0\Leftrightarrow C.S.=\phi$

$d)\,(x-2)^2\leq 0\Leftrightarrow C.S.=\{2\}$

2do. CASO: $\Delta>0$

Aquí el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ es factorizable sobre R . Es decir :

$$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

donde x_1 , x_2 son las raíces.

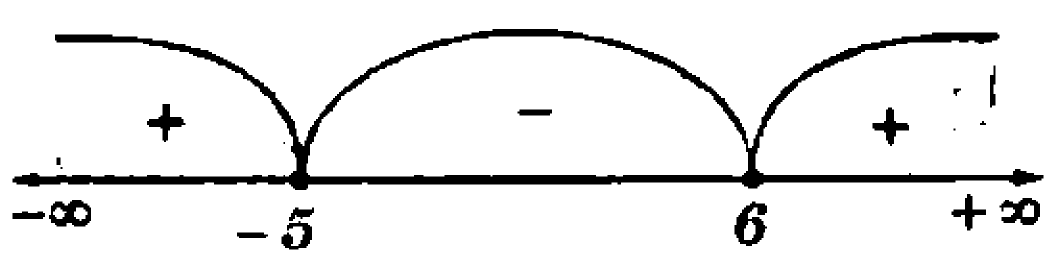
Luego para resolverlos $P(x)\lesseqgtr 0$ aplicamos el criterio de los puntos críticos.

EJEMPLO 1 :

Resolver :$P(x)=x^2-x-30>0$

Observamos que $\Delta>0$, luego factorizando:

$$P(x)=(x+5)(x-6)>0$$



$$\Rightarrow C.S.=\langle -\infty;-5\rangle\cup\langle 6;+\infty\rangle$$

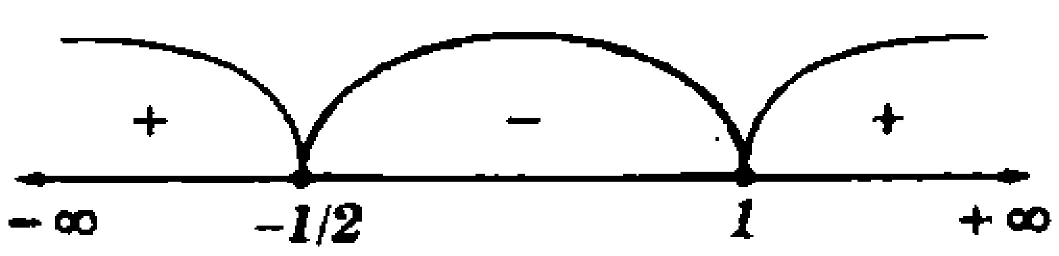
EJEMPLO 2 :

Resolver :

$$P(x)=2x^2-3x+\leq 0$$

Observamos que $\Delta>0$, luego factorizando:

$$P(x)=(2x-1)(x-1)\leq 0$$



$$\Rightarrow C.S.=\left[\frac{1}{2};1\right]$$

3er. CASO: $\Delta<0$

Aquí haremos uso del :

TEOREMA DEL TRINOMIO POSITIVO

Sea:

$$P(x)=ax^2+bx+c\,;\,a\neq 0.$$

Luego:

$$P(x)>0\,;\,\forall x\in R\Leftrightarrow a>0\wedge\Delta<0$$

EJEMPLO 3 :

Resolver el polinomio *:*

$P(x)=2x^2-3x+4$ tiene Coeficiente principal = $a=2>0$ y $\Delta=-23<0$

* Luego: $P(x)=2x^2-3x+4$ es siempre positivo para cada $x\in R$.

* Entonces:

$A)\;P(x)=2x^2-3x+4>0\Leftrightarrow C.S.=R$

$B)\;P(x)=2x^2-3x+4\geq 0\Leftrightarrow C.S.=R$

$C)\;P(x)=2x^2-3x+4<0\Leftrightarrow C.S.=\phi$

$D)\;P(x)=2x^2-3x+4\leq 0\Leftrightarrow C.S.=\phi$

INECUACIÓN RACIONAL

Son aquellas inecuaciones polinomiales de la forma:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n\gtrless 0;\,a_0\neq 0$$

e inecuaciones fraccionarias de la forma :

$$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m}{b_0x^p+b_1x^{p-1}+b_2x^{p-2}+\ldots+b_p}\gtrless 0\,;\,a_0b_0\neq 0$$

para resolverlos, existe un criterio práctico denominado ***REGLA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS***, cuyo procedimiento es como sigue:

REGLA DE PUNTOS O VALORES CRÍTICOS

1º) Se reduce la inecuación racional a la forma :

$$P_{(x)}\gtrless 0 \quad o \quad \frac{F_{(x)}}{G_{(x)}}\gtrless 0\;;\;G(x)\neq 0$$

donde *P*, *F* y *G* son polinomios de grado no nulo.

2º) Se factorizan los polinomios, buscando todos los factores lineales posibles. Para obtener los puntos críticos, se igualan a cero dichos factores y enseguida se despejan los valores de ***x*** ; ubicándolos posteriormente sobre la recta numérica real.

3°) Se analiza el signo del polinomio $P(x)$ en cada intervalo, obteniéndose así en forma alternada, signos $(+)$ y $(-)$, de derecha a izquierda.

4°) El conjunto solución de la inecuación vendrá dado por :

- Los intervalos $(+)$, si $P(x) > 0$.
- Los intervalos $(-)$, si $P(x) < 0$.

EJEMPLO 1 :

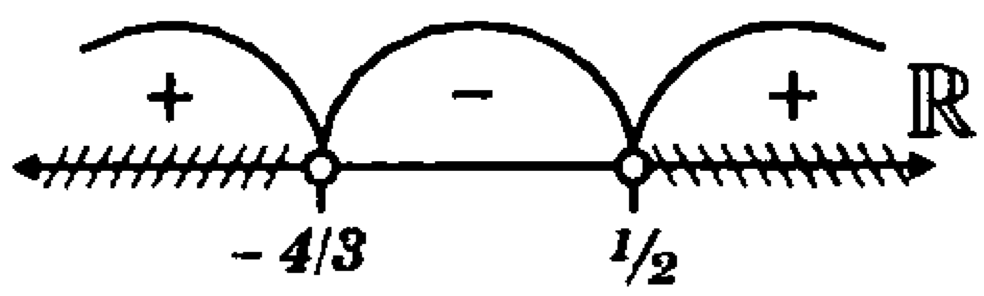
Resolver : $6x^2 + 5x - 4 > 0$

RESOLUCION :

$$\begin{matrix} 3x & & +4 \\ 2x & & -1 \end{matrix}$$

$$(3x + 4)(2x - 1) > 0$$

Ubicando los puntos críticos sobre la recta $\mathbb{R}$:



Como $P_{(x)} > 0$, tomamos los intervalos $(+)$.

luego :

$$x \in]-\infty; -4/3[\cup]1/2; \infty[$$

EJEMPLO 2 :

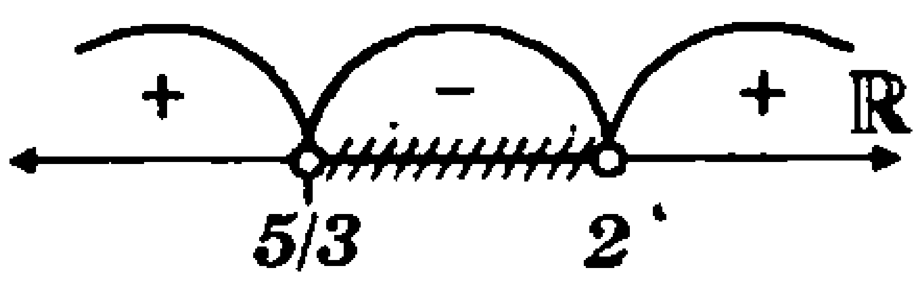
Resolver : $3x^2 - 11x + 10 < 0$

RESOLUCION :

$$\begin{matrix} 3x & & -5 \\ x & & -2 \end{matrix}$$

$$(3x - 5)(x - 2) < 0$$

Colocando los valores críticos sobre la recta $\mathbb{R}$.



Como $P_{(x)} < 0$, se toman los intervalos $(-)$.

finalmente : $x \in]5/3 ; 2[$

EJEMPLO 3 :

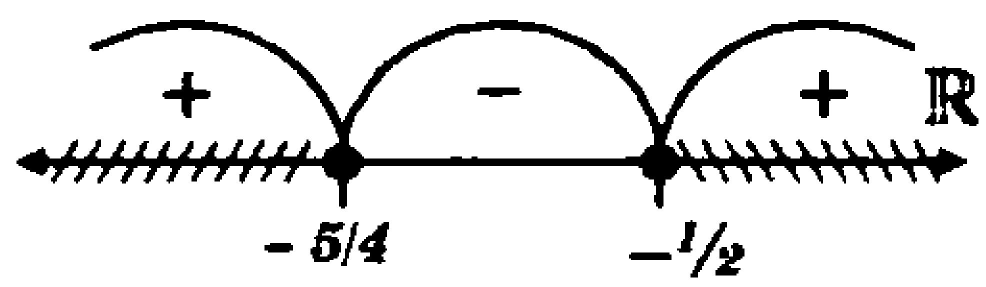
Resolver : $8x^2 + 14x + 5 \geq 0$

RESOLUCION :

$$\begin{matrix} 4x & & +5 \\ 2x & & +1 \end{matrix}$$

$$(4x + 5)(2x + 1) \geq 0$$

De igual modo :



OBSERVAR QUE :

$$P_{(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P_{(x)} > 0 \vee P_{(x)} = 0$$

Como: $P\left(-\dfrac{5}{4}\right) = 0$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

verifican la segunda igualdad, entonces $\left(\dfrac{-5}{4}\right)$ y $\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ son elementos del conjunto solución.

Por lo tanto: $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$

EJEMPLO 4 :

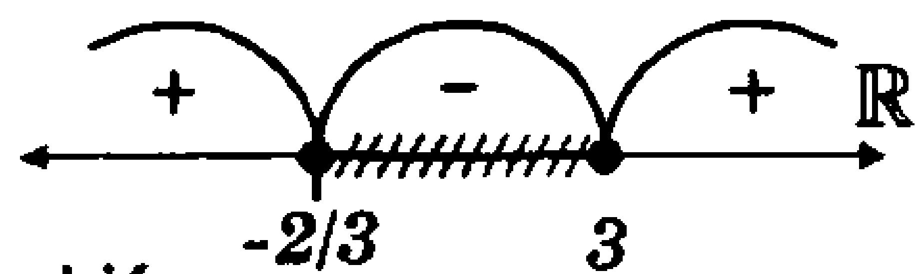
Resolver : $5x^2 - 13x - 6 \leq 0$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{matrix} 5x & & +2 \\ x & & -3 \end{matrix}$$

$$(5x + 2)(x - 3) \leq 0$$

De la misma manera:



también :

$$P\left(\frac{-2}{5}\right) = 0 ; P(3) = 0$$

luego, el intervalo solución será :

$$x \in \left[-\frac{2}{3}; \ 3\right]$$

EJEMPLO 5 :

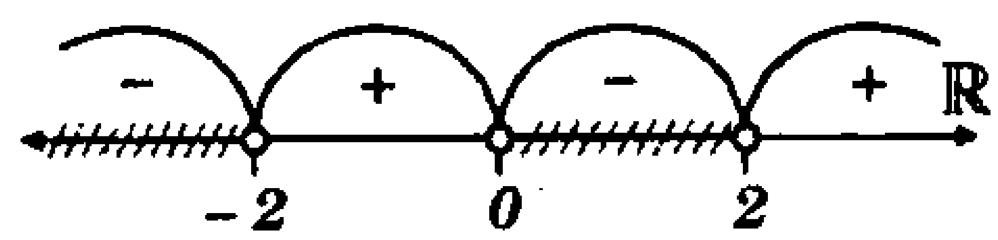
Resolver: $x^3 < 4x$

RESOLUCIÓN:

Transponiendo: $x^3 - 4x < 0$

factorizando: $x(x + 2)(x - 2) < 0$

Ubicando los tres puntos: -2, 0 y 2 sobre la recta numérica real :



Como $P(x) < 0$, tomamos los intervalos $(-)$, así :

$$x \in]-\infty; -2[\cup]0; 2[$$

EJEMPLO 6 :

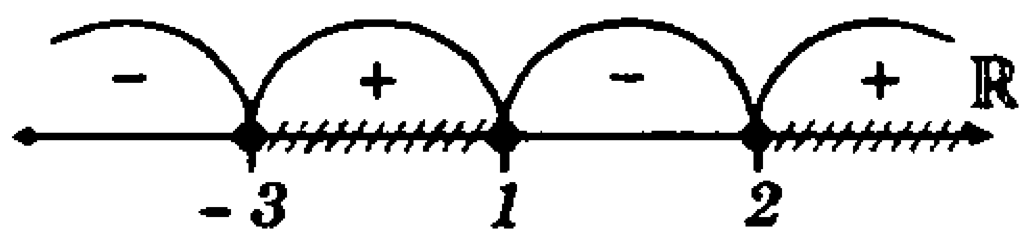
Resolver: $x^3 - 7x + 6 \neq 0$

RESOLUCIÓN:

Factorizando por divisiones binómicos, se tiene :

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) \geq 0$$

De igual forma :



como $P(x) \geq 0$, tomamos los intervalos $(+)$, y considerando que: $P(-3) = P(1) = P(2) = 0$

El intervalo solución, será :

$$x \in [-3; 1] \cup [2 ; \infty[$$

EJEMPLO 7 :

Resolver : $\dfrac{x + 7}{x - 5} > 0$ ......(α)

RESOLUCION :

Como $x \neq 5$, entonces $(x - 5)^2 > 0$. Luego al multiplicar miembro por $(x - 5)^2$, se obtiene :

$(x + 7)(x - 5) > 0$ .... (β)

es decir, las desigualdades (α) y (β), son equivalentes. Aplicando la regla de los puntos críticos :

Por lo tanto : $x \in]-\infty; -7[\cup]5; \infty[$

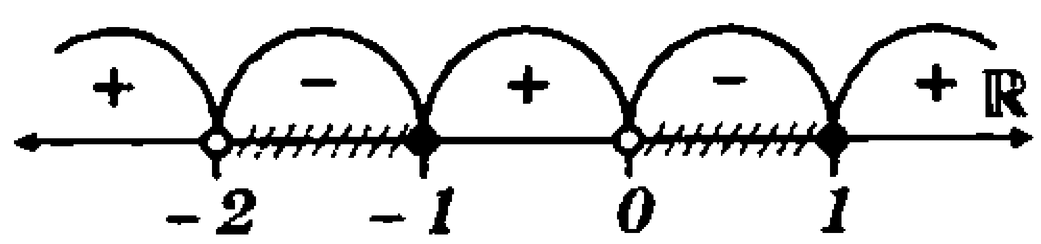
EJEMPLO 8 :

Resolver: $\dfrac{x^2 - 1}{x \ (x + 2)} \leq 0$

RESOLUCIÓN:

Es decir: $\dfrac{(x + 1) \ (x - 1)}{x \ (x + 2)} \leq 0$

Aplicando la regla de los puntos críticos :



Observar que, para $x = -1 \wedge x = 1$, la fracción es igual a cero.

Luego : $x \in \langle -2; -1] \cup \langle 0; 1]$

EJEMPLO 9 :

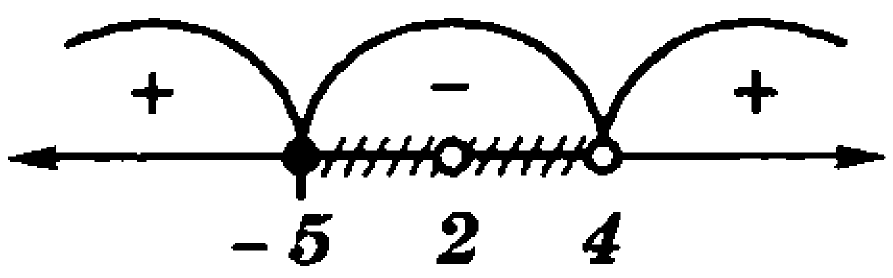
Resolver: $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 6x + 8} \leq 0$

RESOLUCIÓN:

Factorizando: $\dfrac{(x+5)\ (x-2)}{(x-4)\ (x-2)} \le 0$

Como $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$; se tiene:

$\dfrac{x+5}{x-4} \le 0$; por la regla :



Por lo tanto : $x \in [-5; 4\rangle - \{2\}$

EJEMPLO 10 :

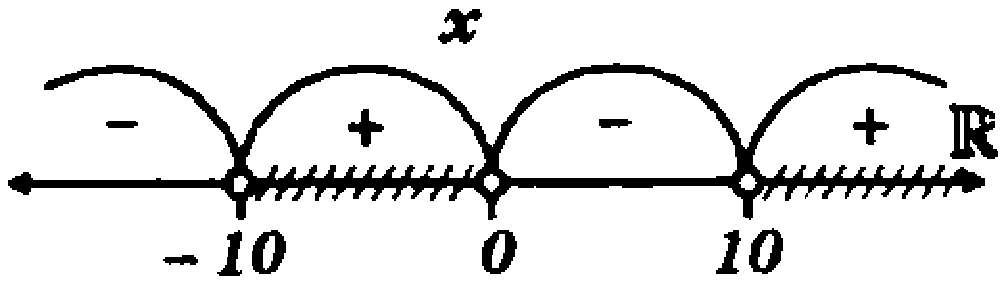
Resolver: $x > \dfrac{100}{x}$

RESOLUCIÓN :

Transponiendo: $x - \dfrac{100}{x} > 0$

Efectuando:

$$\frac{(x+10)\ (x-10)}{x} > 0$$



Finalmente : $x \in \langle -10; 0\rangle \cup \langle 10; \infty\rangle$

ESTUDIO DE LA INECUACIÓN CUADRÁTICA

FORMA GENERAL :

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \ ; \ a \neq 0$$

1er. CASO :

$$\text{Si } \Delta = b^2 - 4ac > 0$$

- Resolver : $x^2 - 3x - 10 > 0$

Discriminante :

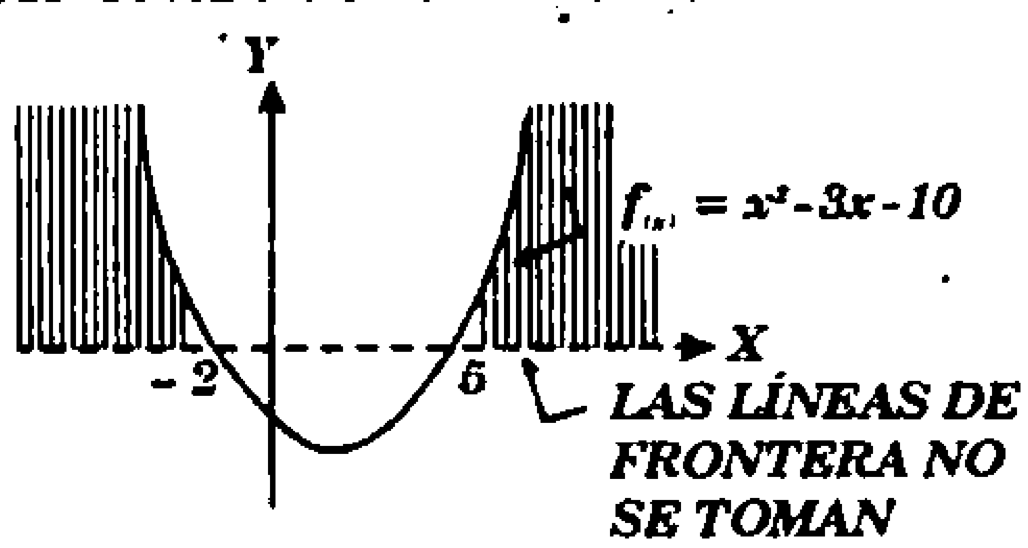
$\Delta = (-3)^2 - 4\ (1)\ (-10) = 49 > 0$

Factorizando : $(x + 2)\ (x - 5) > 0$

El intervalo solución es :

$x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 5; \infty\rangle$

ANÁLISIS GRÁFICO :



EJEMPLO :

- Resolver : $x^2 - 5x + 4 \le 0$

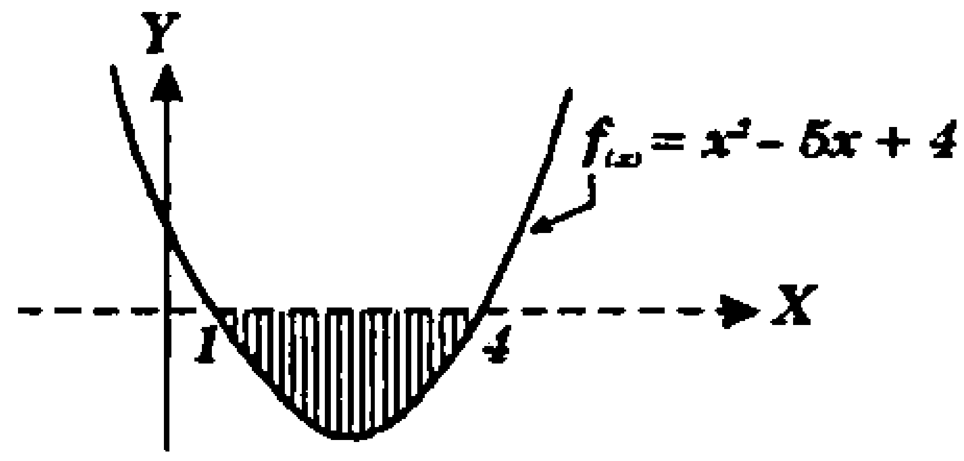
Discriminante :

$\Delta = (-5)^2 - 4\ (1)\ (4) = 9 > 0$

Factorizando : $(x - 1)\ (x - 4) \le 0$

cuyo intervalo solución es : $x \in [\ 1; 4\ ]$

ANÁLISIS GRÁFICO :



2do. CASO :

$$\text{Si } \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

EJEMPLO :

Resolver : $x^2 + 6x + 9 \ge 0$

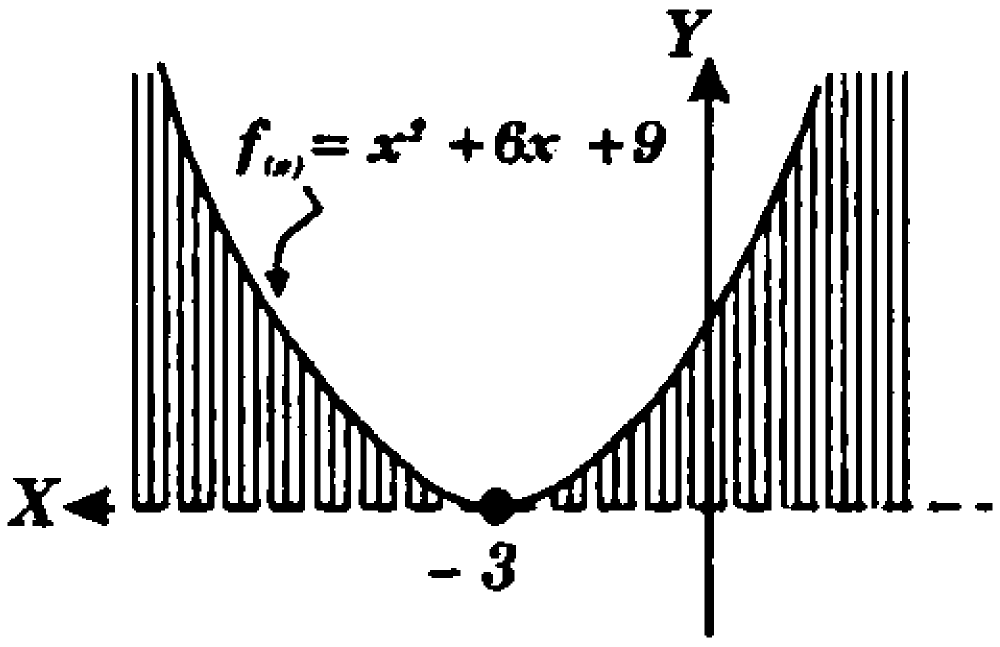
Discriminante :

$$\Delta = (6)^2 - 4(1)(9) = 0$$

cuyo equivalente es : $(x + 3)^2 \ge 0$

El cual se verifica : $\forall x \in \mathbb{R}$

ANÁLISIS GRÁFICO :



EJEMPLO :

- Resolver : $4x^2 - 12x + 9 < 0$

Discriminante :

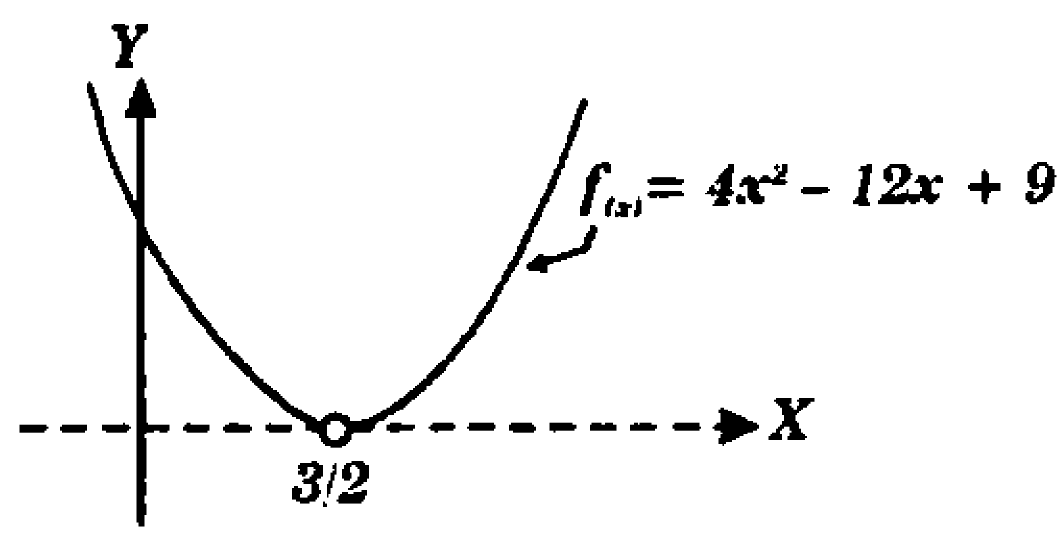
$$\Delta = (-12)^2 - 4\ (4)\ (9) = 0$$

cuyo equivalente es : $(2x - 3)^2 < 0$

Se observa que la desigualdad es absurda.

Por lo tanto : $x \in \phi$

ANÁLISIS GRÁFICO :



3er. CASO :

$$\text{Si } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

EJEMPLO :

Resolver : $x^2 + 4x + 7 > 0$

Discriminante :

$$\Delta = (4)^2 - 4\ (1)\ (7) = -12 < 0$$

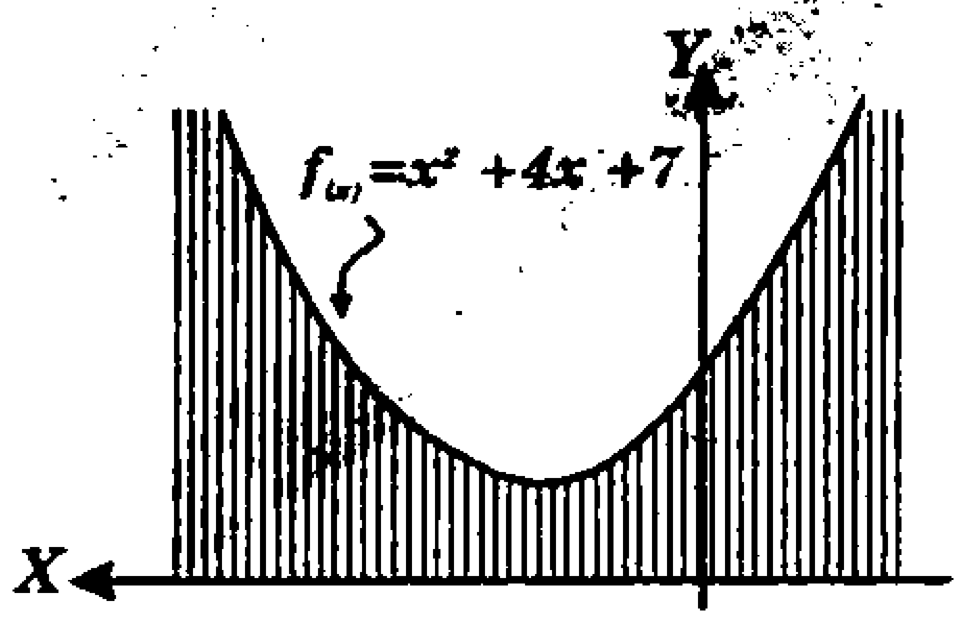
Transformando :

$$\underbrace{x^2 + 4x + 4}_{TCP} + 3 > 0$$

$$(x+2)^2 + 3 > 0$$

El cual se verifica : $\forall x \in \mathbb{R}$

ANÁLISIS GRÁFICO :



EJEMPLO :

Resolver: $9x^2 - 24x + 21 < 0$

Discriminante:

$$\Delta = (-24)^2 - 4\ (9)\ (21) = -180 < 0$$

Transformando:

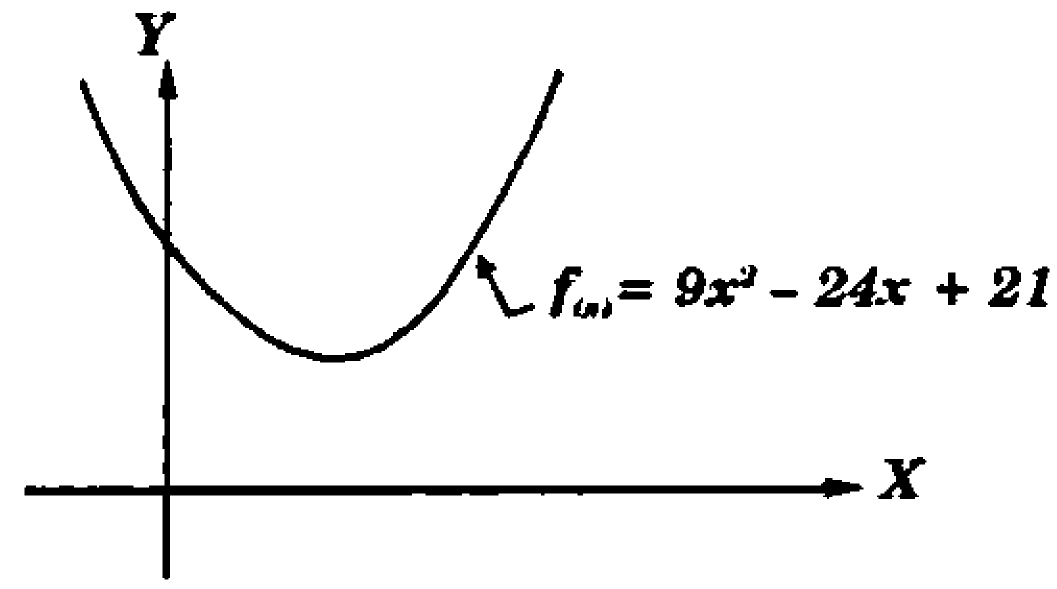
$$\underbrace{9x^2 - 24x + 16}_{TCP} + 5 < 0$$

$$(3x-4)^2 + 5 < 0$$

Desigualdad que es absurda.

Luego : $x \in \phi$

ANÁLISIS GRÁFICO :



PROPIEDADES DE LA INECUACIÓN CUADRÁTICA

Teorema 1

Para que $ax^2 + bx + x > 0$; $\forall x \in R$

Se deben cumplir dos condiciones mutuamente dependientes: $a > 0 \ \wedge \ \Delta = b^2 - 4ac < 0$

EJEMPLO :

Resolver : $3x^2 + 7x + 5 > 0$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad, se tiene :

$3>0 \wedge \Delta = (7)^2 - 4(3)(5) = -11 < 0$

Por lo tanto, el polinomio $(3x^2 + 7x + 5)$ es positivo, para cualquier valor real de x.

Finalmente : $x \in \mathbb{R}$.

EJEMPLO 2:

Resolver : $2x^2 - 8x + 11 < 0$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad se tiene :

$2>0 \wedge \Delta = (-8)^2 - 4(2)(11) = -24 < 0$

Esto implica que el polinomio $(2x^2 - 8x + 11)$ es positivo, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego, la desigualdad :

$\underbrace{2x^2 - 8x + 11}_{(+)} < 0$ ¡Es absurda!

Por lo tanto : $x \in \varnothing$

EJEMPLO 3 :

Resolver : $x^4 - 3x^3 - x^2 + 12x - 12 \leq 0$

RESOLUCIÓN:

Factorizando por aspa doble especial, resulta :

$\underbrace{(x^2 - 3x + 3)}_{(+)} (x^2 - 4) \leq 0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$

Se observa que el polinomio $(x^2 - 3x + 3)$ es POSITIVO para todo $x \in \mathbb{R}$, debido a que verifica la propiedad:

$1>0 \wedge \Delta = (-3)^2 - 4(1)(3) = -3 < 0$

La desigualdad (α), se reduce a :

$x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \leq 0$

Finalmente : $x \in [-2; 2]$

EJEMPLO 4 :

Entre que límites varía el parámetro m, para que la inecuación: $x^2 + 2mx + m > \dfrac{3}{16}$

RESOLUCIÓN:

Se verifique para todo valor real de x

Transponiendo:

$$x^2 + 2mx + \left(m - \frac{3}{16}\right) > 0$$

Aplicando la propiedad:

$1 > 0 \wedge \Delta = (2m)^2 - 4(1)\left(m - \dfrac{3}{16}\right) < 0$

Efectuando: $4m^2 - 4m + \dfrac{3}{4} < 0$

$$16m^2 - 16m + 3 < 0$$
$$(4m-1)(4m-3) < 0$$

Del cual : $m \in \left\langle \dfrac{1}{4}; \ \dfrac{3}{4} \right\rangle$

> **Teorema 2**
> Si $B > 0$; $A^2 > B \leftrightarrow A < -\sqrt{B} \vee A > \sqrt{B}$

EJEMPLO 1:

Resolver : $x^2 - 25 > 0$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad, se tiene :

$x^2 > 25 \Leftrightarrow x < -\sqrt{25} \vee x > \sqrt{25}$

$x < -5 \vee x > 5$

El intervalo solución, será :

$$x \in \langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 5; +\infty \rangle$$

EJEMPLO 2:

Resolver : $x^2 - 8x + 11 \geq 0$

RESOLUCIÓN:

Dándole forma : $\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{} - 5 \geq 0$

$$(x-4)^2 - 5 \geq 0$$

Aplicando la propiedad, se tiene :

$(x-4)^2 \leq 5 \Leftrightarrow x - 4 \leq -\sqrt{5} \vee x - 4 \geq \sqrt{5}$

$x \leq 4 - \sqrt{5} \vee x \geq 4 + \sqrt{5}$

El intervalo solución, será :

$x \in \langle -\infty ; 4 - \sqrt{5}] \cup [4 + \sqrt{5} ; \infty \rangle$

EJEMPLO 3:

Resolver: $2x^2 + 6x + 1 > 0$

Multiplicando por $\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2} > 0$$

transponiendo $\left(\dfrac{1}{2}\right)$, y completando cuadrados: $\underbrace{x^2 + 3x + \dfrac{9}{4}}_{TCP} > -\dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{4}$

$\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 > \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x + \dfrac{3}{2} < -\sqrt{\dfrac{7}{4}} \quad \vee \quad x + \dfrac{3}{2} > \sqrt{\dfrac{7}{4}}$

$x + \dfrac{3}{2} < -\sqrt{\dfrac{7}{2}} \quad \vee \quad x + \dfrac{3}{2} > \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$x < -\dfrac{\sqrt{7}+3}{2} \quad \vee \quad x > \dfrac{\sqrt{7}-3}{2}$

El intervalo solución, será :

$x \in \left\langle -\infty; \ -\dfrac{\sqrt{7}+3}{2} \right\rangle \cup \left\langle \dfrac{\sqrt{7}-3}{2}; \ \infty \right\rangle$

> **Teorema 3**
> Si $B > 0$; $A^2 < B \Leftrightarrow -\sqrt{B} < A < \sqrt{B}$

EJEMPLO 1:

Resolver : $x^2 - 36 < 0$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad, se tiene :

$x^2 < 36 \Leftrightarrow -\sqrt{36} < x < \sqrt{36}$

$$-6 < x < 6$$

El intervalo solución será :

$x \in \langle -6; 6 \rangle$

EJEMPLO 2:

Resolver : $x^2 + 6x - 2 < 0$

RESOLUCIÓN :

De igual modo: $\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{TCP} < 2 + 9$

Aplicando la propiedad, se tiene:

$(x+3)^2 < 11 \Leftrightarrow -\sqrt{11} < x + 3 < \sqrt{11}$

$$-\sqrt{11} - 3 < x < \sqrt{11} - 3$$

El intervalo solución, será:

$$x \in \left\langle -\sqrt{11} - 3; \ \sqrt{11} - 3 \right\rangle$$

EJEMPLO 3:

Resolver : $25x^2 - 30x - 11 \leq 0$

RESOLUCIÓN :

multiplicado por $\left(\dfrac{1}{25}\right)$:

$$x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{11}{25} \leq 0$$

completando cuadrados :

$\underbrace{x^2 - \dfrac{6}{5}x + \dfrac{9}{25}}_{TCP} \leq \dfrac{11}{25} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{4}{5}$

$\left(x - \dfrac{3}{5}\right)^2 \leq \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{4}{5}} \leq x - \dfrac{3}{5} \leq \sqrt{\dfrac{4}{5}}$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} \leq x - \frac{3}{5} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5} \leq x - \frac{3}{5} \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{3 - 2\sqrt{5}}{5} \leq x \leq \frac{3 + 2\sqrt{5}}{5}$$

Por lo tanto:

$$x \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{5}}{5}; \ \frac{3 + 2\sqrt{5}}{5}\right]$$

INECUACIÓN EXPONENCIAL

Teorema 4

Si $0<a<1 \; ; \quad a^m > a^n \Leftrightarrow m<n$

EJEMPLO 1:

Resolver:

$$\sqrt[5]{(0,125)^{x+1}} > \sqrt[3]{(0,0625)^{x-2}}$$

Efectuando:

$$\sqrt[5]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{x+1}} > \sqrt[3]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{x-2}}$$

Por exponente fraccionario, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3x+3}{5}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4x-8}{3}}$$

como $0<1/2<1$, aplicamos la propiedad:

$$\frac{3x+3}{5} < \frac{4x-8}{3}$$

$$9x + 9 < 20x - 40$$

Luego : $49 < 11x \Leftrightarrow x > \dfrac{49}{11}$

El intervalo solución, será:

$$x \in \left\langle \frac{49}{11}; \;\; \infty \right\rangle$$

Teorema 5

Si $a>1 \; ; \quad a^m > a^n \Leftrightarrow m>n$

EJEMPLO 2 :

Resolver: $\sqrt[4]{512^{x-3}} > \sqrt[5]{128^{x+2}}$

Efectuando: $\sqrt[4]{(2^9)^{x-3}} > \sqrt[5]{(2^7)^{x+2}}$

luego: $2^{\frac{9x-27}{4}} > 2^{\frac{7x+14}{5}}$

como $2>1$, aplicamos la propiedad: $\dfrac{9x-27}{4} > \dfrac{7x+14}{5}$

efectuando: $45x - 135 > 28x + 56$

$$17x > 191 \Leftrightarrow x > \frac{191}{17}$$

El intervalo solución es:

$$x \in \left\langle \frac{191}{17}; \;\; \infty \right\rangle$$

EJEMPLO 3:

Resolver: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}+1}} \geq \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x}{3}-1}}$

Efectuando:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}+1}} \geq \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{2x}{3}-1}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-5}}$$

Como $< \dfrac{1}{2} < 1$, aplicando sucesivamente la propiedad:

$$x + 2 \geq 2x - 5 \Leftrightarrow 7 \geq x$$

Es decir : $x \leq 7$; luego : $x \in \langle -\infty; 7]$

VALOR ABSOLUTO

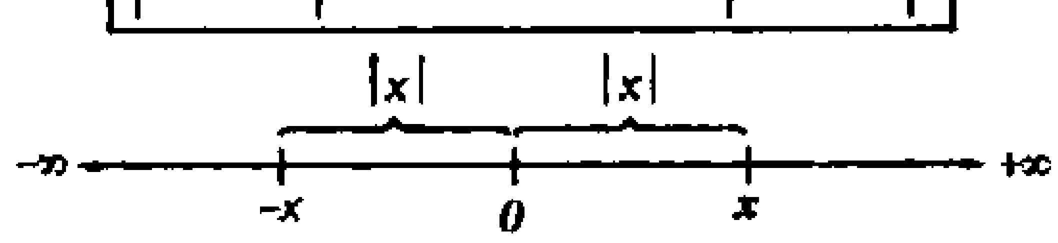
$\forall a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se define :

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| = \begin{cases} a & \textbf{Si} \; a>0 \\ 0 & \textbf{Si} \; a=0 \\ -a & \textbf{Si} \; a<0 \end{cases}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL VALOR ABSOLUTO.

El valor absoluto de x es la distancia del punto x de la recta real al origen, es decir al punto cero, asímismo la distancia entre dos puntos cualesquiera a y b viene a ser el valor absoluto:

$|a-b|$ ***o también*** $|b-a|$



PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

P1) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

P2) $|a.b| = |a| . |b|$

P3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \; ; \; b \neq 0$

P4) $|-a| = |a|$

P5) $||a|| = |a|$

P6) $|a^2| = |a|^2 = a^2$

P7) $|a^3| = |a|^3$

P8) $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$

P9) *Si* $b > 0 \; ; \; |a| = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

P10) $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

R1) $|a| \geq 0 \; ; \; \forall a \in \mathbb{R}$

R2) $-|a| \leq a \leq |a| \; ; \forall a \in \mathbb{R}$

R3) $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$

R4) $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

R5) *Si* $b > 0 ; \; |a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b$

R6) *Si* $b > 0 ; \; |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

R7) DESIGUALDAD TRIANGULAR :

$$|a + b| \leq |a| + |b| \; ; \forall a, b \in \mathbb{R}$$

• En general, se cumple la relación:

$$|a+b+c+.....+l| \leq |a|+|b|+|c|+....+|l|$$

Siendo a, b, c, ..., l reales cualesquiera.

R8) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$, se verifica la relación: $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$

En particular:

Si $a > 0$: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

Si $a < 0$: $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$

R9) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se cumple la desigualdad :

$$|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b| \leq ||a| + |b||$$

EJEMPLO 1:

Resolver : $|2x^2 + x - 1| = 0$

RESOLUCIÓN:

Por P1 : $2x^2 + x - 1 = 0$

$(x + 1)(2x - 1) = 0$

$x = -1 \;\; \vee \;\; x = 1/2$

EJEMPLO 2:

Resolver : $|4x + 3| = 11$

RESOLUCIÓN:

Por P9 : $4x+3=11 \vee 4x+3=-11$

$$x=2 \quad \vee \quad x=-7/2$$

EJEMPLO 3:

Resolver : $|2x+3|=|x-2|$

RESOLUCIÓN:

Por P8 : $(2x+3)^2=(x-2)^2$

$$(2x+3)^2-(x-2)^2=0$$

$$(3x+1)(x+5)=0$$

$$x=-1/3 \quad \vee \quad x=-5$$

EJEMPLO 4 :

Resolver : $|x^2-8x+16|=1$

$$|(x-4)^2|=1$$

Por P6 : $(x-4)^2=1$

$$x-4=1 \vee x-4=-1$$

$$x=5 \vee x=3$$

EJEMPLO 5 :

Resolver : $|x^2-4| \geq 0$

RESOLUCIÓN:

Por R1 : $x \in R$

La relación es una desigualdad absoluta

EJEMPLO 6 :

Resolver : $|9x^2-1|>0$

RESOLUCIÓN:

Es evidente que : $9x^2-1 \neq 0$

$$(3x+1)(3x-1) \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{3} \ \vee \ x \neq \frac{1}{3}$$

Por lo tanto: $x \in R-\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$

EJEMPLO 7 :

Resolver: $|2x+1|>7$.

RESOLUCIÓN:

Por R5:

$$2x+1<-7 \quad \vee \quad 2x+1>7$$

$$x<-4 \quad \vee \quad x>3$$

$$x \in \langle -\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \infty\rangle$$

EJEMPLO 8:

Resolver : $|5x-1|<9$

RESOLUCIÓN:

Por R6 : $-9<5x-1<9$

$$-8<5x<10$$

$$-8/5<x<2$$

Por lo tanto: $x \in \left\langle -\frac{8}{5};\ 2\right\rangle$

EJEMPLO 9 :

Resolver : $|3x+4|>|2x-5|$

RESOLUCIÓN:

Por R3 : $(3x+4)^2>(2x-5)^2$

$$(3x+4)^2-(2x-5)^2>0$$

$$(5x-1)(x+9)>0$$

Resolviendo, resulta :

$$x \in \langle -\infty; -9\rangle \cup \left\langle \frac{1}{5};\ \infty\right\rangle$$

EJEMPLO 10 :

Resolver : $|x^2-3x-6|<|x+6|$

RESOLUCIÓN:

Por R4 : $(x^2-3x-6)^2<(x+6)^2$

$$(x^2-3x-6)^2-(x+6)^2<0$$

Descomponiendo en factores, se tiene :

$$(x^2-2x)(x^2-4x-12)<0$$

$$x(x-2)(x-6)(x+2)<0$$

Luego : $x \in \langle -2; 0\rangle \cup \langle 2; 6\rangle$

EJEMPLO 11 :

Resolver:

$$|8x+9|+|7x-4| \leq 10$$

RESOLUCIÓN:

Aplicando la desigualdad triangular *(R7)*

$$|(8x+9)+(7x-4)| \leq |8x+9|+|7x-4| \leq 10$$

Por la propiedad transitiva :

$$|15x+5| \leq 10$$

Simplificando: $|3x+1| \leq 2$

Por R6 : $-2 \leq 3x+1 \leq 2$

Es decir : $-1 \leq x \leq 1/3$

finalmente : $x \in \left[-1;\ \frac{1}{3}\right]$

EJEMPLO 12 :

Resolver : $\left| x+\frac{1}{x-4}-4 \right| \geq 2$

RESOLUCIÓN:

Dándole forma :

$$\left|(x-4)+\frac{1}{x-4}\right| \geq 2$$

Por lo tanto : $x \in R-\{4\}$ *(por R8)*

INECUACIÓN IRRACIONAL

Es aquella desigualdad en el cual en uno de sus miembros, aparece una expresión irracional.

POR EJEMPLO:

- $\sqrt{3x+5}-\sqrt{2x-1}>3\sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{2x-7}+\sqrt[3]{x+4} \leq x+3$
- $\sqrt[6]{x+2\sqrt{2x-1}}>5+\sqrt{x-6}$

Para resolverlos, debemos tener en cuenta el valor del índice de los radicales.

A) SI LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES SON IMPARES :

Para la resolución de este tipo de inecuaciones no se requiere hacer restricciones a la incógnita.

EJEMPLO 1:

Resolver: $\sqrt[5]{x+\sqrt[3]{1-x^2}}<1$

RESOLUCIÓN:

* mam elevando a la quinta, resulta :

$$x+\sqrt[3]{1-x^2}<1$$

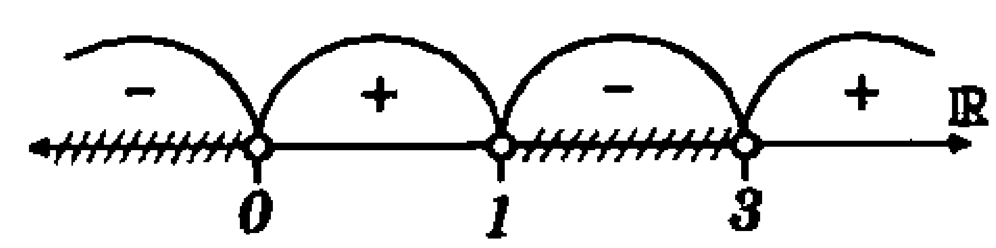
transponiendo : $\sqrt[3]{1-x^2}<1-x$

nuevamente elevando al cubo :

$$1-x^2<1-3x+3x^2-x^3$$

$$x^3-4x^2+3x<0$$

factorizando: $x(x-1)(x-3)<0$



Por lo tanto :

$$x \in \langle -\infty; 0\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$$

EJEMPLO 2:

Resolver :

$$(x^2+1)\sqrt[3]{1-x} \leq (x^2+1)\sqrt[5]{x-1} \ldots(\alpha)$$

RESOLUCIÓN:

como $x^2+1>0;\ \forall x\in \mathbb{R}$, la desigualdad (α) es equivalente a :

$$\sqrt[3]{1-x}\ \le\ \sqrt[5]{x-1}$$

Elevando mam a la quince, resulta: $(1-x)^5\le(x-1)^3$

$$-(x-1)^5\le(x-1)^3$$

Luego : $(x-1)^5+(x-1)^3\ge 0$

factorizando:

$$(x-1)^3\ \underbrace{\left[(x-1)^2+1\right]}_{(+)}\ge 0$$

simplificando : $(x-1)^3\ge 0$

Extrayendo raíz cúbica :

$$x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$$

finalmente : $x\in[1;\infty\rangle$

EJEMPLO 3:

Demuestre *Ud*. que al resolver :

$$\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-8}\ge\sqrt[3]{9}$$

RESOLUCIÓN :

se obtiene como intervalo solución:

$$x\in\left[-2\sqrt{2};\ \ 2\sqrt{2}\right]$$

B) SI LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES SON PARES :

Para la resolución de estas inecuaciones, se debe establecer restricciones a la incógnita.

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (C.V.A.):

Es el conjunto de valores reales, que hacen posible que la desigualdad esté definida en el conjunto $\mathbb{R}$.

COROLARIO :

El conjunto solución S de la inecuación irracional, está incluído en el conjunto de valores admisibles. Es decir :

$$\boxed{S\subset C.V.A.}$$

EJEMPLO 1:

Resolver : $\sqrt{4-x}<3$

RESOLUCIÓN :

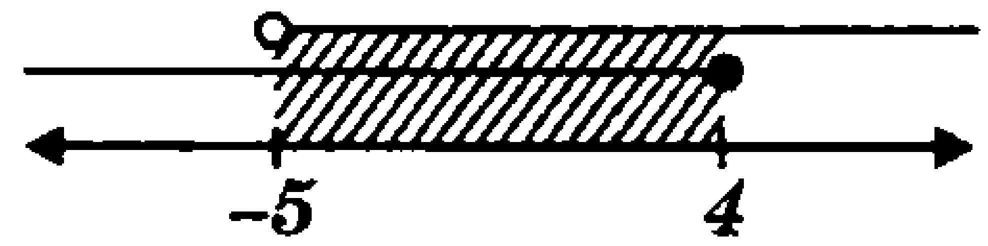
$C.V.A.: 4-x\ge 0\Leftrightarrow 4\ge x\ \Leftrightarrow x\le 4\ ...(\alpha)$

Luego : $\underbrace{\sqrt{4-x}}_{(+)}<\underbrace{3}_{(+)}$

Elevando mam al cuadrado, se tiene: $4-x<9$

$$-5<x\Leftrightarrow x>-5\ ......(\beta)$$

Para encontrar el conjunto de valores reales que, satisfagan las condiciones (α) y (β), debemos intersectar dichas relaciones :



EJEMPLO 2:

Resolver : $\sqrt{2x^2+x}\ge 1$

RESOLUCIÓN :

$CVA: 2x^2+x\ge 0\Leftrightarrow x\,(2x+1)\ge 0$

Del cual : $x\le -\dfrac{1}{2}\ \ \vee\ \ x\ge 0...(\alpha)$

luego : $\underbrace{\sqrt{2x^2+x}}_{(+)}\ge\underbrace{1}_{(+)}$

Elevando mam al cuadrado, se tiene : $2x^2+x\ \ge 1$

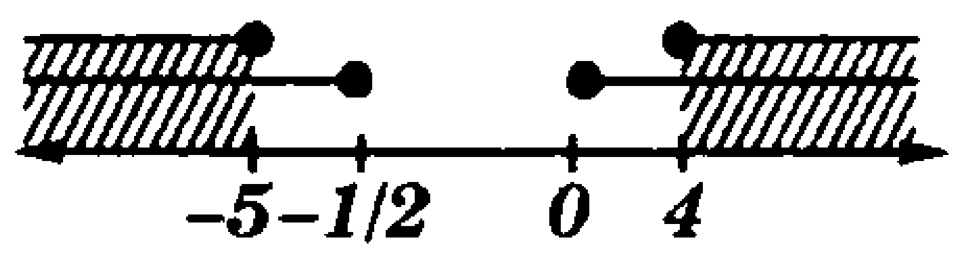
$$2x^2+x-1\ge 0$$

$$(2x-1)\ (x+1)\ge 0$$

Del cual:

$$x\le -1\ \ \vee\ \ x\ge 1/2\ ....\ (\beta)$$

Intersectando : (α) y (β), resulta :



Por lo tanto :

$$x\in[-\infty;-1\rangle\ \cup\ \langle 1/2;\infty\rangle$$

EJEMPLO 3:

Resolver : $\sqrt{25-x^2}<4$

RESOLUCIÓN :

$CVA: 25-x^2\ge 0\Leftrightarrow 25\ge x^2$

$x^2\le 25\Leftrightarrow -5\ \le\ x\ \le 5\ .....\ (\alpha)$

Luego : $\sqrt{25-x^2}<4$

al cuadrado: $25-x^2<16$

$$9<x^2\Leftrightarrow x^2>9$$

$$x<-3\ \ \vee\ \ x>3\ .....\ (\beta)$$

intersectando (α) y (β), se tiene :

finalmente : $x\in[-5;-3\rangle\ \cup\ \langle 3;5]$

EJEMPLO 4:

Resolver : $\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x}<2$

RESOLUCIÓN :

$CVA: 4x-1\ge\ 0\Leftrightarrow x\ge 1/4\ .....\ (\alpha)$

Es decir, los valores de x son POSITIVOS.

Por esto : $\underbrace{\sqrt{4x-1}}_{(+)}<\underbrace{2x}_{(+)}$

al cuadrado : $4x-1\ <\ 4x^2$

transponiendo :

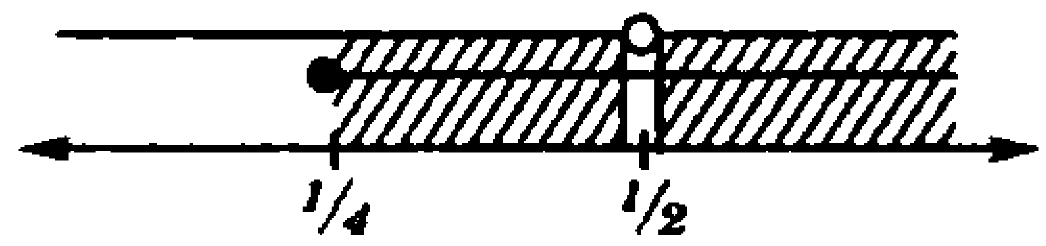
$$\underbrace{4x^2-4x+1}_{TCP}>0$$

$$(2x-1)^2>0$$

Del cual :

$$x\in\mathbb{R}-\{\ 1/2\ \}\ ......\ (\beta)$$

intersectando (α) y (β):



Por lo tanto : $x\in\left[\dfrac{1}{4};\infty\right\rangle-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

EJEMPLO 5:

Resolver : $\sqrt{x^2-4}>-5$

RESOLUCIÓN :

$$CVA: x^2-4\ \ge 0\Leftrightarrow x^2\ \ge 4$$

del cual : $x\le -2\ \vee\ x\ge 2\ ...\ (\alpha)$

Luego : $\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{(+)}>\underbrace{-5}_{(-)}$

Resulta una desigualdad que es correcta para todo $x\in\mathbb{R}$ que verifique la condición (α).

Debido a esto :

$$\boxed{CONJUNTO\ \ SOLUCIÓN=C.V.A}$$

Es decir : $x\in\langle-\infty;-2]\ \cup\ [2;\infty\rangle$

EJEMPLO 6:

Resolver : $\underbrace{\sqrt{2x+1}}_{(+)}<\underbrace{-10}_{(-)}$

RESOLUCIÓN :

Por simple inspección, la desigualdad es *ABSURDA*. Por esto, se deduce que : $x\in\phi$

EJEMPLO 7:

Resolver :

$\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-2}+\sqrt{7-x}\leq -x^2-1$

RESOLUCIÓN :

Del mismo modo, la relación es absurda : $x\in\phi$

INECUACIONES COMPUESTAS DE POTENCIAS MÚLTIPLES Y RADICALES SIMPLES

Para resolver inecuaciones algebraicas del tipo :

$$A^{2n}\cdot\sqrt[2n+1]{B}\cdot C^{2n-1}\cdot\sqrt[2n]{D}\ \gtrless 0$$

Se utilizan las siguientes propiedades :

T1) $n\in Z^+\ ;\ a^{2n}>0\Rightarrow a\in R-\{0\}$

T2) $n\in Z^+\ ;\Rightarrow \sqrt[2n]{a}>0\ \Rightarrow a>0$

T3) $n\in Z^+;\ \ a^{2n+1}>0\Rightarrow a>0$

T4) $n\in Z^+;\ \sqrt[2n+1]{a}>0\Leftrightarrow a>0$

EJEMPLO 1

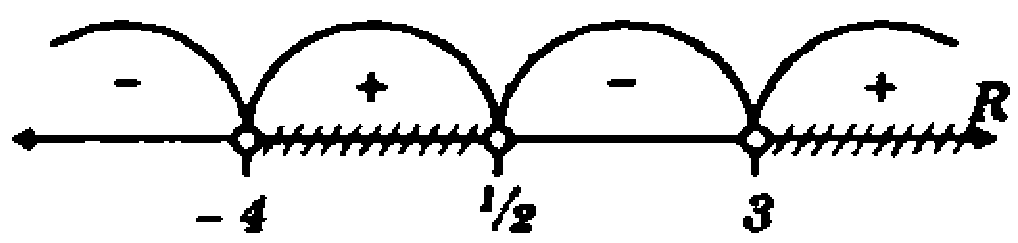
Resolver : $(x+4)^5(x-3)^7(2x-1)^3>0$

RESOLUCIÓN:

Por la propiedad *T3* :

$$(x+4)\ (x-3)\ (2x-1)>0$$

Aplicando puntos críticos :



luego : $x\in\langle -4;\ 1/2\rangle\ \cup\ \langle 3;\infty\rangle$

EJEMPLO 2 :

Resolver :

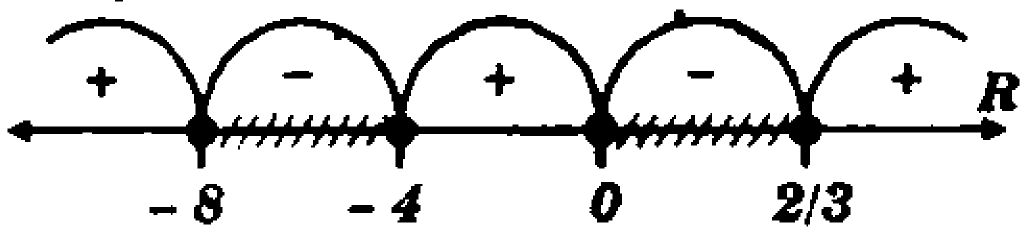
$\sqrt[3]{x+4}\ \sqrt[5]{3x-2}\ \sqrt[7]{x+8}\ \sqrt[9]{x}\ \leq 0$

RESOLUCIÓN:

Por la propiedad *T4* :

$(x+4)\ (3x-2)\ (x+8)\ (x)\leq 0$

Por puntos críticos :



finalmente :

$x\in[-8;-4]\cup[0;2/3]$

EJEMPLO 3:

Resolver :

$$\underset{(+)}{\underbrace{(x+3)^2}}\ \ (x+5)\ \ \underset{(+)}{\underbrace{\sqrt{7-x}}}>0$$

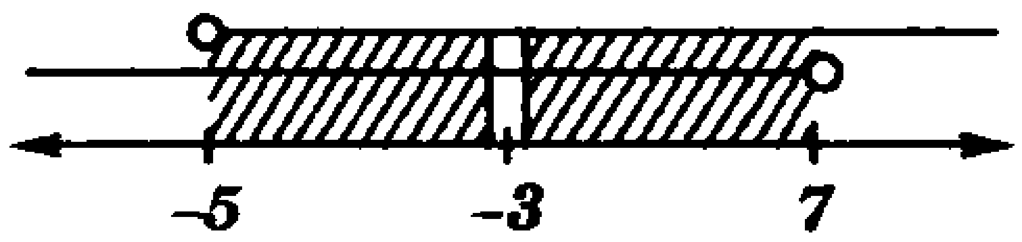
RESOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}7-x>0\ \ \Leftrightarrow\ \ x<7\\ x+3\neq 0\ \ \Leftrightarrow\ \ x\neq -3\end{array}\right\}\ (\alpha)$$

Cancelando los factores positivos, resulta :

$x+5>0\Leftrightarrow x>-5$ ..... (β)

Intersectando (α) y (β), se tiene :



Por lo tanto : $x\in\langle -5;\ 7\rangle\ \cup\ \{-3\}$

EJEMPLO 4 :

Resolver: $\dfrac{(x+6)^3}{\sqrt[5]{x-2}}\ \dfrac{(x-4)^6}{\sqrt[4]{x+3}}\leq 0$

RESOLUCIÓN:

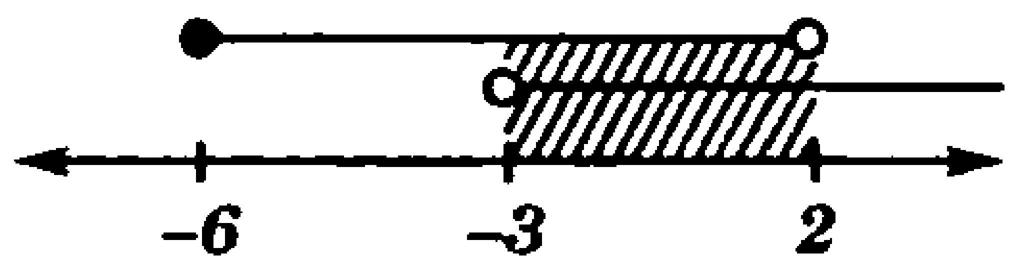
CVA : $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$ ..... (α)

$$(x-4)^6\geq 0\ ;\ \forall x\in R$$

Cancelando la parte positiva, resulta : $\dfrac{x+6}{x-2}\leq 0\ \ ;\ \ \ x\neq 2$

Del cual : $-6\leq x<2$ ..... (β)

Intersectando (α) y (β), se tiene:



finalmente: $x\in\langle -3;\ 2\rangle$

EJEMPLO 5 :

Resolver :

$$\frac{\sqrt{16-x^2}\ \ (x+3)^7\ \ \sqrt[9]{2x-1}}{\sqrt[3]{x+7}\ \ (x-2)^4\ \ (x^2+1)^5}\geq 0$$

RESOLUCIÓN:

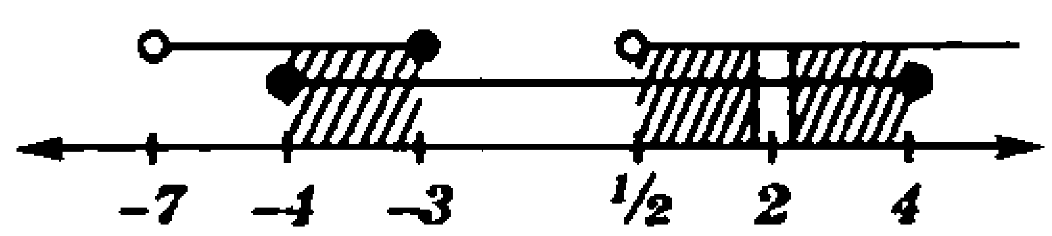
$$\left.\begin{array}{l}16-x^2\geq 0\ \ \Leftrightarrow\ \ -4\leq x\leq 4\\ x-2\neq 0\ \ \Leftrightarrow\ \ x\neq 2\\ (x^2+1)^5>0\ ;\ \ \forall x\in R\end{array}\right\}\ (\alpha)$$

Cancelando la parte positiva, resulta : $\dfrac{(x+3)\ \ (2x-1)}{x+7}\geq 0$

Del cual :

$-7<x\leq -3\ \ \vee\ \ x\geq 1/2$ ..... (β)

Intersectando (α) y (β) , resulta:



Por lo tanto :

$x\in[-4;-3]\ \cup\ \langle 1/2;\ 4]-\{2\}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Sean los intervalos:

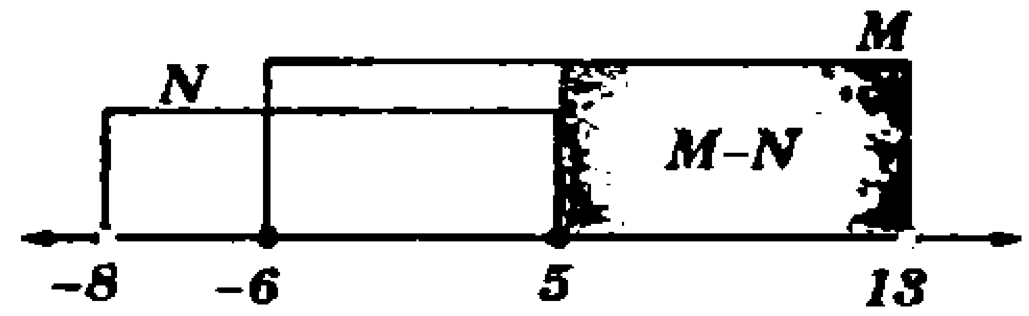
$$M=[-6\ ;\ 13[\ \ ;\ N=]-8;5]$$

hallar $M-N$, indicar la cantidad de números enteros que la verifica.

A) 9 B) 10 C) 7 D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN:

* Esquematizando:



Se puede apreciar que $M-N$ (los valores de *"M"* que no son de *"N"*) es igual a :

$$\langle 5\ ;13\rangle$$

donde los valores enteros son:

$$\underset{\text{"7 números"}}{\underline{\{6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9\ ;10\ ;\ 11\ ;12\}}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 2:

De las siguientes proposiciones :

I) $x^2>0\ \Rightarrow\ x\in R$

II) $(x-1)^2\geq 0\Rightarrow x\in R$

III) $(x+5)^2<0\Rightarrow x\in\varnothing$

¿Cuáles son verdaderas?

A) I B) II C) III
D) II y III E) I y II

RESOLUCIÓN :

I) FALSA: debido a que:

$$\underset{\text{Ya que "0" no es mayor que "0"}}{\underline{\text{Si: } x^2>0\longrightarrow x\in R-\{0\}}}$$

II) VERDADERA: ya que:

Si : $x^2\geq 0\longrightarrow x\in R$

Si : $(x-1)^2\geq 0\longrightarrow x\in R$

III) VERDADERO : ya que un cuadrado siempre es mayor igual que cero, y no menor que cero .

RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

Si *M* es el conjunto solución de:

$$2x-\frac{5}{3}>\frac{x}{3}+10$$

determine el número de valores enteros y positivos del complemento de *M*, menores que *15* .

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

RESOLUCIÓN :

* De la inecuación :

$$2x-\frac{x}{3}>10+\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{6x-x}{3}>\frac{30+5}{3}$$

$$\Rightarrow 5x>35$$

$$\Rightarrow x>7 \Rightarrow x\in\langle 7;+\infty\rangle$$

* Luego:

$$M=\langle 7;+\infty\rangle \longrightarrow M'=\langle -\infty;7]$$

Ahora los valores enteros del complemento de "M" y menores que 15 , serán :

$$\underbrace{\{1;2;3;4;5;6;7\}}_{\text{Son 7 valores}}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Si: $a\in]1;+\infty[$; resolver en "x"

$$ax+3<3a+x$$

A) $]1;+\infty[$ B) $]3;+\infty[$ C) $[1;+\infty[$
D) $[3;+\infty[$ E) $]-\infty;3[$

RESOLUCIÓN :

* Despejando "x":

$$ax-x<3a-3$$

* Como $a\in\langle 1;+\infty\rangle$
$\rightarrow a>1$
$\rightarrow a-1>0$

$$\longrightarrow x(a-1)<3(a-1)$$

$$\longrightarrow x<3 \longrightarrow x\in\langle -\infty;3\rangle$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 5:

Hallar el valor o conjunto de valores que satisfacen el sistema :

$$\frac{2x+3}{4}\le 1+\frac{x}{4}\ ;\ \frac{x+1}{2}\le x$$

A) $\{-1\}$ B) $x\le -1$ C) $[-1;+\infty[$
D) $\{1\}$ E) $[-1;1]$

RESOLUCIÓN:

* Llamando

$$\frac{2x+3}{4}\le 1+\frac{x}{4}\Rightarrow \frac{2x+3-x}{4}\le 1\Rightarrow x\le 1$$

$$\Rightarrow x\in\langle -\infty;1]$$

$$\frac{x+1}{2}\le x\Rightarrow x+1\le 2x\Rightarrow 1\le x$$

$$\Rightarrow x\in[1;+\infty\rangle$$

* Luego la solución del sistema, será la intersección de ambas soluciones parciales, entonces :

$$\langle -\infty;1]\cap[1;+\infty\rangle=\{1\}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 6:

Resolver: $-1<\frac{4-5x}{3}\le 7$ y determinar el mayor valor entero que lo verifica

A) –3 B) –2 C) 3 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN :

Multiplicando todo por 3:

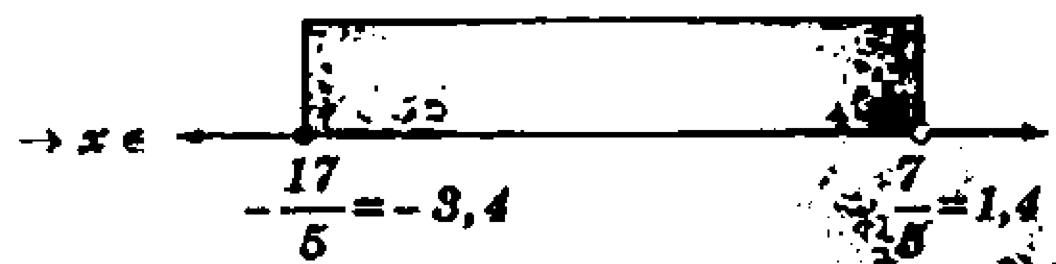
$$-3<4-5x\le 21$$

* Restando a todo 4:

$$-7<-5x\le 17$$

* Dividiendo todo por – 5:

$$\frac{7}{5}>x\ge -\frac{17}{5}$$



* Luego el mayor valor entero que lo verifica será: 1

RPTA: "E"

PROBLEMA 7 :

Si: $\frac{1}{2x-1}\in[1;8]$

Determinar el mayor valor de x :

A) 1 B) $\frac{-7}{16}$ C) 3 D) 0

RESOLUCIÓN :

* Planteando la inecuación:

$$\frac{1}{1}\le\frac{1}{2x+1}\le\frac{8}{1}\Rightarrow\frac{1}{1}\ge\frac{2x+1}{1}\ge\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 1\ge 2x+1\ge\frac{1}{8}\Rightarrow 8\ge 16x+8\ge 1$$

$$\Rightarrow 0\ge 16x\ge -\frac{7}{16}$$

Este es el menor valor de "x"

RPTA: "B"

PROBLEMA 8:

Indicar verdadero (V) o falso (F) a las siguientes proposiciones:

( ) $a\in\mathbb{R}$; $a^2>0$

( ) a es positivo $\Rightarrow a>0$

( ) $-a>0\Rightarrow a<0$

A) VFV B) FFV C) FFF
D) VVV E) FVV

RESOLUCIÓN :

I) FALSO: ya que

$$0>0$$

Esto no se cumple

II) VERDADERO: por teoría.

III) VERDADERO: ya que al multiplicar por (–1) $a-a>0$, el sentido de la desigualdad cambia.

RPTA: "E"

PROBLEMA 9:

Si: $a<b$, resolver :

$$\frac{ax+b}{2}+b<\frac{bx+a}{2}+a$$

A) $]-\infty;3[$ B) $]3;+\infty[$ C) $[3;\infty[$
D) $]-\infty;-3[$ E) $]-3;3[$

RESOLUCIÓN :

* Si: $a<b \longrightarrow 0<b-a$

* Luego en la inecuación :

$$b-a<\frac{bx+a}{2}-\frac{ax+b}{2}$$

$$\Rightarrow 2(b-a)<x(b-a)+\underbrace{a-b}_{-(b-a)}$$

$$\Rightarrow 2(b-a)<(x-1)(b-a)\ \left(\text{Se puede eliminar ya que } b-a>0\right)$$

$$\Rightarrow 2<x-1\Rightarrow 3<x\Rightarrow x\in]3;+\infty[$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Si : $0<a<b$, halle el mayor valor de "x" en: $\frac{x}{b}+\frac{b}{a^2}\ge\frac{x}{a}+\frac{a}{b^2}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

$$\frac{b}{a^2}-\frac{a}{b^2}\ge\frac{x}{a}-\frac{x}{b}$$

$$\frac{b^3-a^3}{a^2b^2}\ge\frac{x(b-a)}{ab}\ \left(\text{Simplificado denominadores}\right)$$

$$\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{ab}\ge x(b-a)\ \left(\text{Simplificado numeradores}\right)$$

$$\frac{b^2+ab+a^2}{ab}\ge x$$

$$\frac{b^2}{ab}+\frac{ab}{ab}+\frac{a}{ab}\ge x$$

Haciendo: $n=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{1}{n}$

* Por teoría se sabe que: $n+\frac{1}{n}\ge 2$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}\ge x$$

$$n\ +\ \frac{1}{n}\ge x-1$$

Su mayor será cuando: $x-1=2$ $\rightarrow x=3$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11:

Siendo: $a^2 \times b^3 \times c^5$ negativo, hallar al producto que siempre sea negativo.

A) a^2b *B)* b^2a *C)* bc
D) b^3a^2 *E)* a^2b^2

RESOLUCIÓN :

* Dato:

Debido a que: $a^2 \geq 0$

$a^2b^3c^5<0 \longrightarrow b^3c^5<0$

Se deduce que "b" y "c" son signos opuestos. entonces: bc<0

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

Si -1 es menor que a y a menor que cero, decir cual de las siguientes alternativas es mayor.

A) $\frac{a}{2}$ *B)* a^2 *C)* a^4 *D)* $2a$ *E)* a^8

RESOLUCIÓN:

Dato : $-1< a <0$

escogiendo el valor de "a", que puede ser: $a=-\frac{1}{2}$

* Lo colocamos en las alternativas, con lo que se obtendrá:

A) $-\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $\frac{1}{16}$ *D)* -1 *E)* $\frac{1}{256}$

Esta es la mayor (B)

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

Resolver el sistema siguiente:

$$\frac{x-4}{3} \geq \frac{x+5}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\frac{x-3}{5} \leq \frac{3-x}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

A) $]-\infty;-23[$ *B)* $]-\infty;3]$ *C)* $[3;+\infty[$
D) $[-23;3]$ *E)* $[-23;+\infty[$

RESOLUCIÓN:

* De (α):

$2x-8 \geq 3x+15-23 \geq x \Rightarrow x \in \langle \infty;-23]$

* De (β):

$4x-12 \leq 15-5x$

$\Rightarrow 9x \leq 27 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \langle -\infty;3]$

* Luego la solución del sistema será:

$\langle -\infty;-23] \cap \langle -\infty;3] = \langle -\infty;-23]$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14:

Resolver el siguiente sistema:

$$3x-4 \leq 5x+2 \leq -x+8$$

A) $1 \leq x \leq 3$ *B)* $-3 \leq x \leq 1$ *C)* $-3 \leq x \leq 1$
D) $x \leq -3$ *E)* $x \leq 1$

RESOLUCIÓN:

* Del sistema se obtendrá :

$\underline{3x-4 \leq 5x+2}$ y $\underline{5x+2 \leq -x+8}$

$-6 \leq 2x$ $\qquad 6x \leq 6$

$\Rightarrow -3 \leq x$ y $\Rightarrow x \leq 1$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 1$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

Resolver: $-1 \leq -3-3x<2$

dar como respuesta el intervalo donde se encuentra $-6x$.

A) $\left]-\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right]$ *B)* $\left]\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right]$ *C)* $[4;10[$
D) $]-10;-4]$ *E)* $[-10;-4[$

RESOLUCIÓN:

* Sumando 3 a todos los miembros:

$$2 \leq -3x<5$$

* Multiplicando por "2"

$$4 \leq -6x<10$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16:

Sea :

$$A=\left\{x \in Z^+ / \frac{x-3}{5}+\frac{x-6}{2}+\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{3}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}$$

Calcular el cardinal del conjunto A.

A) 7 *B)* 6 *C)* 10 *D)* 8 *E)* 9

RESOLUCIÓN:

$$A=\left\{x \in Z^+ / \frac{x-3}{5}+\frac{x-6}{2}+\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{3}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{5}+\frac{x-6}{2}+\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{3} \leq 4$$

$1+1+1+1$

* Agrupando adecuadamente:

$$\left(\frac{x-3}{5}-1\right)+\left(\frac{x-6}{2}-1\right)+\left(\frac{x-4}{4}-1\right)+\left(\frac{x-5}{3}-1\right)<0$$

$$\left(\frac{x-8}{5}\right)+\left(\frac{x-8}{2}\right)+\left(\frac{x-8}{4}\right)+\left(\frac{x-8}{3}\right)<0$$

$$(x-8)\overbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}^{(+)}<0$$

$\Leftrightarrow x-8<0$

$\Leftrightarrow x<8 \; ; \; x \in Z^+$

$1;2;3;4;5;6;7;8$

Luego: $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

$n(A)=8$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17:

Si:

$(-x+3) \in [-6;5\rangle \wedge (2x+5) \in \langle a+1;b+13]$

Calcular: $a^{20}+b^2$

A) 0 *B)* 1 *C)* 10 *D)* 100 *E)* 125

RESOLUCIÓN:

$(-x+3) \in [-6;5\rangle \Leftrightarrow -6 \leq -x+3<5$

$-2<x \leq 9$

* Hallando el intervalo para $(2x+5)$

$-2<x \leq 9 \Leftrightarrow 1<2x+5 \leq 23$

$\Leftrightarrow (2x+5) \in \langle 1;23]$

Pero: $(2x+5) \in \langle a+1;b+13]$

Comparando : $a=0$; $b=10$

Luego : $a^{20}+b^2=100$

RPTA: "D"

PROBLEMA 18:

Halle los valores de "a" de tal manera que la inecuación:

$$x^2-ax+4>0$$

se verifica para todo valor real de x.

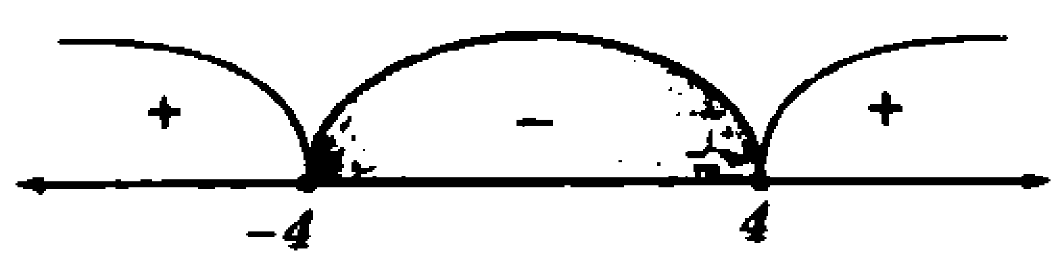
A) $[4;+\infty\rangle$ *B)* $\langle -\infty;-4\rangle$ *C)* $\langle -4;4\rangle$
D) $\langle -4;+\infty\rangle$ *E)* R

RESOLUCIÓN :

* Vemos que el coeficiente principal es $1>0$ y para que el trinomio sea siempre positivo se debe cumplir: $\Delta=a^2-4(4)<0$

* de donde: $a^2-16<0$

$$(a+4)(a-4)<0$$



$\Rightarrow a \in \langle -4;4\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 19:

Si: $a;b;c \in Z$; $c<0 \wedge a<b$

entonces se cumple :

A) $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ *B)* $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ *C)* $ca<cb$
D) $a+b+c>0$ *E)* $c+a>c+b$

RESOLUCIÓN :

* Por simple inspección de las alternativas y considerando la teoría, se tendrá que:

Si: $a<b \wedge c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 20:

Si x, y son números reales tales que: $x > 0 > y$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no son correctas?

A) $(y-x)(x-y)<0$ B) $x^2+y^2 \geq 0$
C) $(y-x)/y > 0$ D) $x^2-xy<0$
E) $xy<0$

RESOLUCIÓN :

* Analizando alternativas :

A) $(y-x)(x-y)=-(x-y)(x-y)=\underbrace{-(x-y)^2<0}_{Correcto}$

B) Como: $x^2 \geq 0 \wedge y^2 \geq 0 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2 \geq 0}_{Correcto}$

C) $\dfrac{y-x}{y}=1-\boxed{\dfrac{x}{y}}$ ← Esto siempre es negativo (ya que "x" e "y" son de signos opuesto)

$\Rightarrow 1+positivo>0$

D) $\underbrace{x^2-xy}_{Correcto}=x^2+Positivo>0$

⇒ La no correcta es la "D".

RPTA: "D"

PROBLEMA 21:

Si se sabe que: $-1 < x < 5$; entre qué valores va ría : $J = 3x + 2$.

A) $-1<J<15$ B) $-3<J<15$
C) $-1<J<17$ D) $-3<J<17$
E) $-1<J<21$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos: $J = 3x+2$
* Como: $-1<x<5$

I) Multiplico por 3:

$-1(3)<x(3)<5(3) \Rightarrow -3<3x<15$

II) Sumamos 2 :

$-3<3x<15 \Rightarrow -3+2<3x+2<15+2$

$\Rightarrow -1<J<17$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22:

Si se sabe que: $x \in [-2;3\rangle$; señale la variación de: $A=6-2x$.

A) $0<A\leq 10$ B) $1<A\leq 9$ C) $2\leq A<7$
D) $3\leq A\leq 17$ E) $0<A\leq 12$

RESOLUCIÓN :

* Piden: $A=6-2x=-2x+6$
* Como: $x \in [-2;3\rangle \Rightarrow -2\leq x<3$

I) Multiplicamos por (-2):

$-2(-2)\geq(-2)x>(-2)3$

$\Rightarrow 4\geq -2x>-6$

II) Sumando 6:

$4+6\geq \underbrace{-2x+6}_{A}>-6+6 \Rightarrow 10\geq A>0$

$\Rightarrow 0<A\leq 10$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23:

Señale el valor mínimo de :

$$C=x^2+3;\ x\in\mathbb{R}$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN:

Como: $x\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2\geq 0$ (teoría)

Ahora: $C=x^2+3$, como:

$C \longrightarrow mín \Rightarrow x^2 \Rightarrow mín$

Es decir:

$C=\underbrace{3}_{mín}+\underbrace{x^2}_{mín}$; pero : $(x^2)_{min}=0$

Luego : $C_{mín}=3+0 \longrightarrow C_{mín}=3$

RPTA: "C"

PROBLEMA 24:

Señale el valor mínimo de :

$$M=x^2+4x+8$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN:

* En estos casos, lo ideal es completar cuadrados; así :

$M=x^2+4x+8 \Rightarrow M=\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}+4$

* esto es: $M=(x+2)^2+4$

$M=4+(x+2)^2$

* como: $M \longrightarrow mín \Rightarrow (x+2)^2 \rightarrow mín$

es decir: 0

Luego: $\underbrace{M}_{mín}=4+\underbrace{(x+2)^2}_{mín=0} \Rightarrow M_{mín}=4$

RPTA: "B"

PROBLEMA 25:

Señale el valor máximo de:

$$J=7-x^2;\ x\in\mathbb{R}$$

A) 1 B) 0 C) 3 D) 5 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que : $J=7-x^2$
* Como J :

máx ⇒ le debo restar lo mínimo, es decir: $x^2 \longrightarrow mín$.

* Esto es: $\underbrace{J}_{mín}=7-\underbrace{x^2}_{mín=0} \Rightarrow J_{máx}=7$

RPTA: "E"

PROBLEMA 26:

Señale el valor máximo de :

$$A=5-4x-x^2;\ x\in\mathbb{R}$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

RESOLUCIÓN :

* Ordenamos la expresión:

$A=-(x^2+4x)+5$

* Completando cuadrados:

$A=-[\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}-4]+5$

* Tendríamos:

$A=-[(x+2)^2-4]+5=-(x+2)^2+4+5$

* Es decir:

$\underbrace{A}_{mín}=9-\underbrace{(x+2)^2}_{mín=0} \Rightarrow A_{máx}=9$

RPTA: "D"

PROBLEMA 27:

Sabiendo que : $x\in\langle 1;3]$

señale la variación de: $C=3x^2-1$

A) $\langle 1;26$ B) $\langle -1;13]$ C) $\langle 2;26]$
D) $\langle 1;13]$ E) $\langle 2;13]$

RESOLUCIÓN :

Nos piden : $C=3x^2-1$

Además : $x\in\langle 1;3] \Rightarrow 1<x\leq 3$;

Note que : $1 \wedge 3 \in\mathbb{R}^+$

I) Elevo al cuadrado :

$1^2<x^2\leq 3^2 \Rightarrow 1<x^2\leq 9$

II) Multiplico por 3:

$1<x^2\leq 9 \Rightarrow 1(3)<x^2(3)\leq 9(3)$

$\Rightarrow 3<3x^2\leq 27$

III) Restamos 1:

$3-1<\underbrace{3x^2-1}_{C}\leq 27-1$

$\Rightarrow 2<C\leq 26 \Rightarrow C\in\langle 2;26]$

RPTA: "C"

PROBLEMA 28:

Sabiendo que: $x\in[-3;-1\rangle$ señale la variación de:

$$M=3-2x^2$$

A) $[-15;3\rangle$ B) $[-12;1\rangle$ C) $[-15;1\rangle$
D) $\langle -15;1]$ E) $\langle -12;3]$

RESOLUCIÓN :

* Note que: $M=-2x^2+3$
* Como: $x\in[-3;-1\rangle \Rightarrow -3\leq x<-1$;

note que: (-3) y $(-1)\in R^+$

I) Elevo al cuadrado :

$(-3)^2\geq x^2>(-1)^2 \Rightarrow 9\geq x^2>1$

II) Multiplicamos por (-2):

$9(-2)\leq -2(x^2)<(-2)1 - 18\leq -2x^2<-2$

III) Sumamos 3:

$-18+3\leq -2x^2+3<-2+3$

$\Rightarrow -15 \le M < 1 \Rightarrow M \in [-15;1\rangle$

RPTA: "C"

PROBLEMA 29:

Sabiendo que: $x \in \langle -4;1]$; señale la suma del máximo y mínimo valor de: $J = x^2 + 4x + 7$

A) 3 B) 7 C) 9 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN:

* Ordenamos la expresión:

$$J = x^2 + 4x + 7$$

* Completando cuadrados:

$$J = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2} + 3$$

$$J = (x+2)^2 + 3$$

* Como: $x \in \langle -4;1] \Rightarrow -4 < x \le 1$

para formar "J" hacemos:

I) Sumar 2:

$$-4+2 < x+2 \le 1+2$$

$$\Rightarrow -2 < x+2 \le 3; -2 \in \mathbb{R}^- \wedge 3 \in \mathbb{R}^+$$

II) Elevamos al cuadrado :

$$0 \le (x+2)^2 \le 9 \quad (3^2)$$

III) Sumamos 3:

$$0+3 \le \underbrace{(x+2)^2+3}_{J} \ge 9+3$$

$$\Rightarrow 3 \le J \le 12$$

Tendríamos :

$$\left.\begin{array}{l} J_{mín}=3 \\ J_{máx}=12 \end{array}\right\} J_{mín} + J_{máx} = 15$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 30:

Sabiendo que: $x \in [-1;3\rangle$; señale la variación de : $A = \dfrac{2}{x^2+4}$

A) $\left[\frac{1}{13};2\right]$ B) $\left[\frac{1}{12};1\right]$ C) $\left[\frac{1}{13};1\right]$

D) $\left[\frac{2}{13};\frac{1}{2}\right]$ E) $\left[\frac{3}{13};2\right]$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que formar:

$$A = \frac{2}{x^2+4}$$

* Como: $x \in [-;3\rangle \Rightarrow -1 \le x < 3$

$$(-1) \in \mathbb{R}^- \wedge 3 \in \mathbb{R}^+$$

I) Elevamos al cuadrado :

$$0 \le x^2 \le 9$$

II) Sumamos 4:

$$0+4 \le x^2+4 \le 9+4$$

$$\Rightarrow 4 \le x^2+4 \le 13$$

III) Invertimos : $\dfrac{1}{4} \ge \dfrac{1}{x^2+4} \ge \dfrac{1}{13}$

IV) Multiplico por 2:

$$2\left(\frac{1}{4}\right) \ge \frac{2}{x^2+4} \ge 2\left(\frac{1}{13}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} \ge A \ge \frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow A \in \left[\frac{2}{13};\frac{1}{2}\right] \qquad \Rightarrow \frac{2}{13} \le A \le \frac{1}{2}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 31 :

Sabiendo que: $|2x-1| = 7$; halle la suma de los valores que puede tomar "x".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN:

* De la igualdad :

$$|2x-1| = 7 \Rightarrow 2x-1 = 7 \vee 2x-1 = -7$$

$$2x = 8 \vee 2x = -6$$

$$x = 4 \vee x = -3$$

* Luego sumamos: $4 + (-3) = 1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 32:

Sabiendo que: $x \in \langle -1;2\rangle$; hallar:

$$J = |x^2 - 5| + x^2$$

A) $2x^2 - 5$ B) $5 - 2x^2$ C) x^2

D) $2x^2$ E) 5

RESOLUCIÓN:

* Tenemos que averiguar el signo de: $x^2 - 5$

* Como: $-1 < x < 2$

I) Elevamos al cuadrado: $0 \le x^2 < 4$

II) Restamos 5:

$$0-5 \le x^2 - 5 < 4-5$$

$$\Rightarrow -5 \le \underbrace{x^2-5}_{(-)} < -1$$

* Como:

$$x^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow |x^2-5| = -(x^2-5) = 5 - x^2$$

* Luego en:

$$J = \underline{|x^2-5|} + x^2 \Rightarrow J = 5 - x^2 + x^2 \Rightarrow J = 5$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 33 :

Sabiendo que : $x \in \langle 1;2\rangle$, reducir:

$$A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1}$$

A) $2x-3$ B) 1 C) -1

D) $-2x+3$ E) $-2x$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos: $x \in \langle 1;2\rangle \Rightarrow 1 < x < 2$

*En la expresión:

$$A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1}$$

$$A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x-2| + |x-1|$$

* Pero:

$$-1 < x-2 < 0 \Rightarrow (x-2) \text{ es } (-)$$

$$0 < x-1 < 1 \Rightarrow (x-1) \text{ es } (+)$$

* Luego :

$$A = \underbrace{|x-2|}_{(-)} + \underbrace{|x-1|}_{(+)}$$

$$A = -(x-2) + (x-1) = -x+2+x-1$$

$$\Rightarrow A = 1$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 34:

Sabiendo que: $x \in [-1;3\rangle$; señale la variación de :

$$C = |x^2 - 4x + 1| + 2$$

A) [1;4] B) [2;6] C) [2;8]

D) [2;19] E) [2;12]

RESOLUCIÓN:

* En la expresión:

$$C = |x^2 - 4x + 1| + 2$$

$$C = |\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 3| + 2$$

$$C = |(x-2)^2 - 3| + 2$$

* Como: $x \in [-1;3\rangle \Rightarrow -1 \le x < 3$

I) Restando 2:

$$-1 - 2 \le x - 2 < 3 \le 2$$

$$\Rightarrow -3 \le x - 2 < 1$$

II) Elevando al cuadrado :

$$0 \le (x-2)^2 \le 9$$

III) Restando 3 :

$$0+3 \le (x-2)^2 - 3 \le 9-3$$

$$\Rightarrow -3 \le (x-2)^2 - 3 \le 6$$

IV) Tomamos valor absoluto:

$$0 \le |(x-2)^2 - 3| \le 6$$

V) Sumamos 2:

$$0+2 \le \underbrace{|(x-2)^2-3|+2}_{C} \le 6+2$$

$$\Rightarrow 2 \le C \le 8 \quad \Rightarrow C \in [2;8]$$

RPTA: "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01) Resolver la inecuación:

$$2x - 7 > x + 2$$

A) $x \in \langle -5; +\infty\rangle$ B) $x \in \langle 2; +\infty\rangle$
C) $x \in \langle 9; +\infty\rangle$ D) $x \in [-5; +\infty\rangle$
E) $x \in [9; +\infty\rangle$

02 Hallar el conjunto solución:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{5} \le 3$$

A) $x \in \langle -\infty; 5\rangle$ B) $x \in \langle -\infty; 10]$
C) $x \in \langle -\infty; 2]$ D) $x \in \langle -\infty; 10]$
E) $x \in \langle -\infty; 2]$

03 Resolver:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x+1}{4} \ge 3$$

A) $x \ge 5$ B) $x \le 3$ C) $x \ge 3$
D) $x \ge 8$ E) $x \le 8$

04 Si: $x \in \langle -5; 2\rangle$

Hallar el intervalo de: $3x+10$

A) $x \in \langle -5; 10\rangle$ B) $x \in \langle -15; 2\rangle$
C) $x \in \langle -5; 16\rangle$ D) $x \in [-5; 10]$
E) $x \in [5; 16]$

05 Resolver:

$(x+3)(x-4) \le (x-1)^2 - (x+11)$

A) $x \in \langle -\infty; 2\rangle$ B) $x \in \langle -\infty; 1]$
C) $x \in \langle 1; +\infty\rangle$ D) $x \in [2; +\infty\rangle$
E) $x \in [1; +\infty\rangle$

06 Resolver: $\dfrac{x}{x-5} \le 0$

A) $\langle 1; 5\rangle$ B) $[0; 5]$ C) $\langle 0; 5\rangle$
D) $\langle 1; 10\rangle$ E) $[5; +\infty\rangle$

07 Si $x \in \langle 2; 4\rangle$.

Calcular el intervalo de: $\dfrac{x-2}{2}$

A) $\langle 1; 2\rangle$ B) $\langle 0; 1\rangle$ C) $[1; 2]$
D) $\langle 0; 1]$ E) $[1; +\infty\rangle$

08 Si $x \in [-2; 3]$ calcular $(a+b)$ de modo que:

$$a \le x^2 - 1 \le b$$

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

09 Resolver:

$\dfrac{4x-1}{3} + 4 < \dfrac{7x-1}{2} + 2$..........(I)

$(x-1)(2x-3) > 0$............... (II)

A) $x > -1$ B) $x > 1,5$ C) $x < -1$
D) $x > 1$ E) $x > 5$

10 Dado el polinomio:

$P(x) = x^2 - 6x + 11$; donde $P(x) \le k$; tiene como conjunto solución $[0; r]$; calcular "$2k - 5r$"

A) 8 B) -9 C) 0 D) -8 E) 2

11 Calcular la suma de números naturales que satisfacen a la siguiente inecuación:

$$7x^2 + 3 \le 22x$$

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6 E) 7

12 Indicar el menor valor de "x"

en: $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-4}$

A) -3 B) -5 C) -4 D) -2 E) -6

13 Resolver: $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{x-1}{x}$

A) $\langle 0; 1\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$ C) $]-1; 0[$
D) $]-\infty; -1[$ E) $]0; +\infty[$

14 Al resolver:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 2x - 8} \ge 1$$

indicar la suma del mayor valor entero negativo con el menor entero positivo de "x".

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

15 Calcular "m" entero, si la ecuación:

$$x^2 - 2(m-1)x + 4m - 7 = 0$$

tiene raíces complejas.

A) $\langle -\infty; 2\rangle$ B) $\langle 4; +\infty\rangle$ C) $\langle 2; 4]$
D) $\langle 2; 4\rangle$ E) $[2; 4\rangle$

16 Hallar el valor de:

$$\frac{|n+2| - |3n-2|}{3n}$$

siendo: $n \in \langle -2, 0\rangle$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 3 D) 4 E) $\frac{5}{3}$

17 Resolver: $|3x-2| = 8$

A) $\left\{-2; \frac{10}{3}\right\}$ B) $\left\{-3; \frac{5}{3}\right\}$ C) $\left\{-4; \frac{7}{3}\right\}$
D) $\left\{-1; \frac{2}{5}\right\}$ E) $\left\{-2; \frac{3}{10}\right\}$

18 Resolver: $|2x-7| = x-5$

A) 2 B) 4 C) 6 D) $\frac{5}{3}$ E) ϕ

19 Resolver: $|2x+3| = |x-2|$ e indicar la suma de raíces.

A) $-\frac{16}{3}$ B) -5 C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{3}{16}$ E) $-\frac{5}{16}$

20 Resolver: $|5-3x| > 2x+6$

A) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{5}\right\rangle$ B) $\langle 11; +\infty\rangle$ C) $\left\langle -\infty; \frac{1}{5}\right\rangle \cup \langle 11; +\infty\rangle$
D) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{5}\right\rangle \cup \langle 11; +\infty\rangle$ E) ϕ

21 Resolver:

$(x-2)(x+3)(x-5)(x+1) \le 0$

A) $x \in [-3; -1] \cup [2; 5]$
B) $x \in \langle -3; 5]$
C) $x \in [-3; -1\rangle \cup; \langle -2; +\infty\rangle$
D) $x \in [-1; 2] \cup \{3\}$
E) $x \in \langle -3; 5]$

22 Resolver:

$$\frac{(x+2)(x-5)}{(x+1)(x-3)} \le 0$$

A) $x \in \langle -2; -1] \cup \langle 3; 5]$ B) $x \in \langle -2; -1\rangle$
C) $x \in \langle -2; -1\rangle \cup [3; 5\rangle$ D) $x \in [-2; 5\rangle$
E) $x \in [-1; 5\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$

23 Resolver $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x-5} \le 3$

A) $x \in \langle -3; 3]$ B) $x \in [-5; 14\rangle$
C) $x \in [-5; 14]$ D) $x \in [5; 14]$
E) $x \in \langle 5; +\infty\rangle$

24 Resolver: $\sqrt{x^2 - 4x} > 2 - x$

A) $x \in [2; 4]$ B) $x \in [-4; +\infty\rangle$ C) $x \in \varnothing$
D) $x \in \mathbb{R}$ E) $x \in [4; +\infty\rangle$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Dados los intervalos:

$A = \{x \in \mathbb{R} / x \ge -1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x < 6\}$

luego verdadero (V) o falso (F) segun corresponda:

( ) $A - B = [6; +\infty[$
( ) $A \cap B = [-1; 6[$
( ) $A^C =]-\infty; -1[$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) FVF

02 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si : $a > -1 \wedge b < 1$ entonces : $ab - a + b < 1$
( ) Si : $a > 1 > -b$ entonces : $a + b \ge 2\sqrt{(a-1)(b+1)}$
( ) Si : $n > 0$ entonces : $n + \dfrac{9}{n} \ge 6$

A) VFF ***B) VVF*** ***C) VVV***
D) FFF ***E) FVV***

03 Si: $-1<\dfrac{3x-2}{4}\leq 7$

halle el intervalo de: $(-x+2)$

A)$[-8;1/3]$ B)$[-8;8/3[$ C)$[-6;2/3]$
D)$]-6;2/3[$ E)$]-4;3/2[$

04 Indique el mayor valor entero de "n" que verifica la inecuación:

$$\frac{3n+2}{2}+5<\frac{4n-1}{3}-n$$

A) -2 B) – 3 C) – 4 D) – 5 E) -6

05 Si: $A=\left\{x\in R/-1<\dfrac{-x+1}{3}\leq 4\right\}$

determine la suma de los elementos enteros de $A\cap N$

A) 5 B) 6 C) 7 D)8 E) 9

06 Luego de resolver la inecuación:

$$\frac{2x+1+2\sqrt[6]{5}-2\sqrt[3]{3}}{4}-\frac{3x-1+3\sqrt[6]{5}-3\sqrt[3]{3}}{6}<-\frac{1}{3}$$

halle el complemento de su conjunto solución.

A)$]-8;+\infty[$ B)$]-8;8>$ C)Φ
C)R E)$]-\infty;2[$

07 Se define el conjunto "T" como:

$$T=\{x\in R/x<2\Leftrightarrow x>1\}$$

Halle "T":

A) $[1;2]$ B) $]1;2[$ C) $]-\infty;2[$
D) $]1;+\infty[$ E) $]0;2[$

08 Halle el conjunto solución de:

$$-x+3\leq 2x+6\leq x+9$$

A) $[-2;4]$ B)$[-1;3]$ C) $[-12;-2]$
D) $[0;2]$ E) $[-3;4]$

09 La suma de los enteros que verifican simultáneamente las inecuaciones:

$$\frac{4x-5}{7}<x+3;\ \frac{3x+8}{4}>2x-5$$

A) 25 B) -21 C)-36 D) -18 E)18

10 Sabiendo que se cumple:

$$0\leq m\leq 5\wedge 0\leq n\leq 2m$$

calcule el menor valor de $(m-n)$

A) 5 B) -10 C) -5 D) 10 E)0

11 Sabiendo que la ecuación de variable "x":

$$2x^2+(n+1)x+2-n=0$$

tiene dos raíces reales diferentes y positivas, entonces "n" varía en el intervalo:

A)$]-\infty;-1[$ B)$]-\infty;1[$
C)$]-\infty;-5-\sqrt{10}[$ D)$]-\infty;-5-2\sqrt{10}[$
E)$]-\infty;-5-\sqrt{5}[$

12 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Si $A=\{x\in R/x^2+2x-15<0\}$ entonces: $A^C=[-3;5]$

( ) Si $B=\{x-1/-x^2-7x+8>0\}$ entonces: $B=]-9;0[$

( ) Si $C=\{x\in R/-x^2-3x+18\leq 0\}$ entonces: $C=]-\infty;-6]\cup[3;+\infty[$

A) VVV B) VVF C) FFV
D) FVV E) FFF

13 Si A y B son dos conjuntos definidos por:

$$A=\left\{x\in R/-3<\frac{3x+1}{2}<4\right\}$$

$$B=\{x\in R/(x^2+2x)\in[-1;8]\}$$

entonces $A\cap B$ es:

A) $[7/3;4]$ B) $]7/3;4[$ C) $]-2;7/3[$
D) $]-7/3;4]$ E) $]-7/3;2]$

14 Si la inecuación: $x^2+mx+n>0$, tiene como $C.S=]-\infty;-5[\cup]3;+\infty[$ calcule: $7m+n$

A) -2 B) -1 C) -3 D) 4 E) 6

15 Calcule el menor valor entero de "n", tal que: $\forall x\in R$, se cumple: $4-2x-x^2\leq n$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

16 Si $n\in R$, calcule el menor valor de: $n^2+\dfrac{1}{n^2+2}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17 Resolver: $x^2+5x+4>2x(x+1)$

A)$\mathbb{R}$ B)Φ C)$]-1;4[$
D)$]1;4]$ E)$\mathbb{R}-]-1;4[$

18 Si: $x\in]0;6[\wedge(10x-x^2)\in]m;n]$

indique lo correcto:

A)$m+n=24$ B)$2m-n=23$ C)$mn<0$
D) *n es un cuadrado perfecto*
E) *m es par*

19 Si T^C es un conjunto definido por:

$$T^C=\left\{\begin{matrix}(n\in R/(n+1)x^2-2\sqrt{3}x+n-1>0\\ ;\forall x\in R\}\end{matrix}\right\}$$

entonces el conjunto T es:

A)$[-2;2]$ B)$[-1;2]$ C)$[-2;1]$
D)$]-\infty;2]$ E)$]-\infty;-1]$

20 Si: $A=\{x\in R/4x^2+2x+3<0\}$

halle el complemento de A.

A)Φ B)R C)$]-1;3[$
D)$]-1;0[$ E)$]-1;1[$

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 El C.S de la in ecuación :

$(x^2-x-6)(x+7)\leq 0$; es :

A)$[-7;-2]\cup[-3;+\infty[$ B)Φ
C)$]-\infty;-2]\cup[3;+\infty[$ D)R
E)$]-\infty;-7]\cup[-2;3]$

02 Resolver:

$$(x-2)^2(x-3)(x-1)^4(x-5)^3\leq 0$$

A) $[3;5]$ B) $\{1;6\}$ C) $]1;5]$
D) $[2;3]$ E) $[3;5]\cup\{1;2\}$

03 El conjunto solución de : $\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-7)}\leq 0$ es:

A) $[-3;2]$ B) $[4;7]$ C) $[-3;2]\cup[4;7]$
D) $]-3;2]\cup[4;7[$ E)$]-3;4]$

04 Si la siguiente desigualdad:

$$\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-5)^3}<0$$

admite por conjunto solución a:

$$]a;b[-\{c\}$$

calcule usted el valor de: $a+b+c$

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 6

05 Dar como respuesta un intervalo del conjunto solución de:

$$\frac{x^2-8}{x^2-2}\geq 0$$

A)$]-\infty;-\sqrt{2}[$ B)$]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$
C)$[\sqrt{2};+\infty[$ D)$[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]$
E)$]-2\sqrt{2};2\sqrt{2}[$

06 Resolver: $\dfrac{x-3}{x+2}\leq\dfrac{x+1}{x+4}$

indicar el menor número entero del conjunto solución

A) – 4 B) – 2 C) – 3 D) – 7 E) 1

07 Dada la inecuación:

$$\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b}$$

con $-a > -b > 0$ entonces uno de los intervalos solución es:

A) $]0;+\infty[$ *B)* $]a;b[$ *C)* $]a;0[$
D) $]-\infty;b[$ *E)* $]b;0[$

08 Resolver:

$$\frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{(x^2+1)(x^2+2x+3)} \geq 0$$

y dar como respuesta un intervalo del conjunto solución

A) $]-\infty;-2]$ *B)* $[-3;-1]$ *C)* $[-1;2]$
D) $[1;+\infty[$ *E)* $[3;+\infty[$

09 Los valores de "x" que verifican la inecuación:

$\sqrt{x-4} < 3$, son:

A) $[0;1[$ *B)* $[-3;2]$ *C)* $[4;13[$
D) $[-2;2[$ *E)* $]1;3]$

10 Resolver la inecuación:

$$2x+3 > \sqrt{4x^2-5x+1}$$

e indique el número de soluciones enteras menores que 7

A) 5 *B)* 7 *C)* 9 *D)* 11 *E)* 13

11 Al resolver: $\sqrt{x+6} > x$

se obtiene como conjunto solución: $[a;b[$. según esto indicar lo correcto:

A) $a+b=0$ *B)* $a+b^2=3$ *C)* $ab=1$
D) $a+2b=-3$ *E)* $a^2+b^2=7$

12 Resolver:

$$\sqrt{x^2-3x+2} > \sqrt{x^2-4x+3}$$

A) $]-\infty;1]\cup[2;\infty[$ *B)* $]-\infty;1]\cup[3;\infty[$
C) $]1;\infty[$ *D)* $[2;\infty[$. *E)* $[3;\infty[$

13 Con respecto a la desigualdad:

$$\frac{2x\sqrt{x-2}-4\sqrt{x-2}}{(x-4)\sqrt{x-2}} > 1$$

se afirma que:

I) Se verifica para $x > 16$

II) El menor valor entero par que la satisface es seis

III) Su conjunto solución es $[4;+\infty[$ entonces son falsas

A) I y III *B)* Sólo I *C)* Sólo III
D) Todas *E)* Sólo II

14 ¿Cuántas soluciones enteras admite el sistema de inecuaciones lineales?

$$2x+y>15$$
$$x-3y<4$$
$$y-4<0$$

A) 6 *B)* 3 *C)* 5 *D)* 9 *E)* 4

15 Resolver:

$$\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x^2-3x+2}+|x^2-4| \leq 0$$

A) $\mathbb{R}$ *B)* $\{0\}$ *C)* $\{2\}$
D) $\{-2\}$ *E)* $\{-3;-2;1;2\}$

16 Hallar el menor número "M" tal que:

$$\left|\frac{x+5}{x-2}\right| \leq M \text{ si; } x \in [1/2;3/2]$$

A) 10 *B)* 11 *C)* 12 *D)* 13 *E)* 14

17 Determine el producto de las soluciones luego de resolver.

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right| = 3$$

A) $-35/8$ *B)* $8/35$ *C)* $-8/35$
D) $-5/8$ *E)* $35/8$

18 ¿Para qué valor ó valores de x la siguiente igualdad $ax-c=b|x|$; es cierto?

Siendo $a>b$ y $a;b;c$ positivos

A) $\frac{c}{a-b}$ *B)* $\frac{c}{a+b}$ *C)* $\frac{a-b}{c}$
D) $\frac{a+b}{c}$ *E)* $\frac{c}{a+b}$ y $\frac{c}{a-b}$

19 Resolver:

$$|x^2-6x+8| \leq 4-x$$

e indicar el número de valores enteros que verifican la desigualdad

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5

20 Hallar el conjunto solución de la in ecuación:

$$\frac{|x|-1}{|x+1|-|x|} < 0$$

A) $]-\infty;-1[\cup]-1/2;1[$
B) $]-\infty;-1[\cup]1;\infty[$
C) $]-1/2;1/2[\cup]1;\infty[$
D) $\mathbb{R}$
E) $\mathbb{R}-[-1;-1/2[$

TAREA DOMICILIARIA

01 Si "x" es entero. ¿Qué valor no puede tomar "x" en:

$$\frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{5}$$

A) 1 *B)* -3 *C)* 0 *D)* -6 *E)* 11

02 Resolver : $-1 < \frac{4-5x}{3} \leq 7$ y determinar el mayor valor entero que lo verifica.

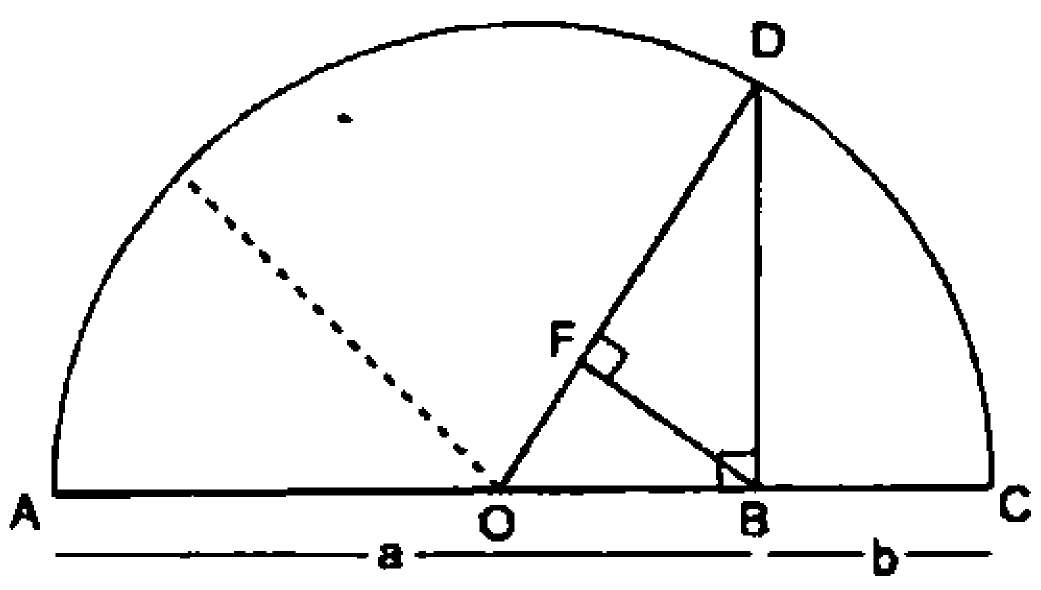
A) -3 *B)* -2 *C)* 3 *D)* 2 *E)* 1

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)A	2)C	3)B	4)E	5)B	6)D	7)B	8)B	9)B	10)C
11)D	12)D	13)E	14)B	15)C	16)A	17)C	18)E	19)A	20)B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)E	2)E	3)D	4)A	5)B	6)D	7)E	8)E	9)C	10)B
11)B	12)E	13)C	14)D	15)C	16)D	17)E	18)A	19)D	20)A

LAS MEDIAS

En Mesopotamia ya conocían las tres medias, aritmética , geométrica y armónica y es donde el famoso matemático griego Pitágoras aprendió. Después Pappus en su libro de geometría incluye la teoría de las medias y da una construcción geométrica muy elegante incluyendo las tres medias, dicha construcción se presenta en la siguiente figura:



donde:

OD: Es la media aritmética de los segmentos AB y *BC*

DB: Es la media geométrica de los segmentos *AB* y *BC*

DF: Es la media armónica de los segmentos *AB* y *BC*

$$\underset{\text{Media Aritmética}}{\frac{a+b}{2}} \geq \underset{\text{Media Geométrica}}{\sqrt{ab}} \geq \underset{\text{Media Armónica}}{\frac{2ab}{a+b}}$$

FUNCIONES

CAPÍTULO 088

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

- *Conocer la importancia y la definición de una función para la aplicación de análisis de datos.*
- *Conocer la dependencia que existe entre variables.*
- *Conocer la relación entre variables a través de las gráficas.*
- *Graficar correctamente una función elemental teniendo en cuenta el dominio y rango.*

INTRODUCCIÓN :

En nuestra vida cotidiana y práctica, el valor de una variable depende del valor de otra. Por ejemplo: el sueldo de una persona depende de la cantidad de horas que la persona trabaje, el pago de la mensualidad del uso de luz en Edelnor depende del consumo que realize el consumidor; el volumen del espacio ocupado por un gas a presión constante depende de su temperatura; la producción total de una fábrica puede depender del número de máquinas que se utilicen, etc. La relación entre este tipo de cantidades se expresan mediante una función; todas las cantidades que se utilizan en estas relaciones son números reales; de allí el estudio que se va a realizar entre los conceptos de correspondencia, relación y función; así como también la construcción de las gráficas de funciones partiendo de lo elemental.

PAR ORDENADO

Conjunto de dos elementos en donde el orden en que estén ubicados (los elementos), indica una característica de los mismos.

$$(a\,;\,b)$$

1ra. Componente (abcisa) — *2da. Componente (ordenada)*

Luego: Si $(a\,;\,b)=(m\,;\,n)$

Entonces: $a=m \ \wedge \ b=n$

PRODUCTO CARTESIANO

Es un conjunto que genera pares ordenados :

Si : A y B son conjuntos no vacíos :

$$A\times B=\{(a\,;b)/a\in A \wedge b\in B\}$$

Esta notación indica que en los pares ordenados generados las *1ras*. componentes pertenecen al conjunto A y l as *2das.* componentes al conjunto B.

EJEMPLO :

$A=\{1\,;\,2\,;\,3\}$ $\qquad B=\{7\,;\,8\}$

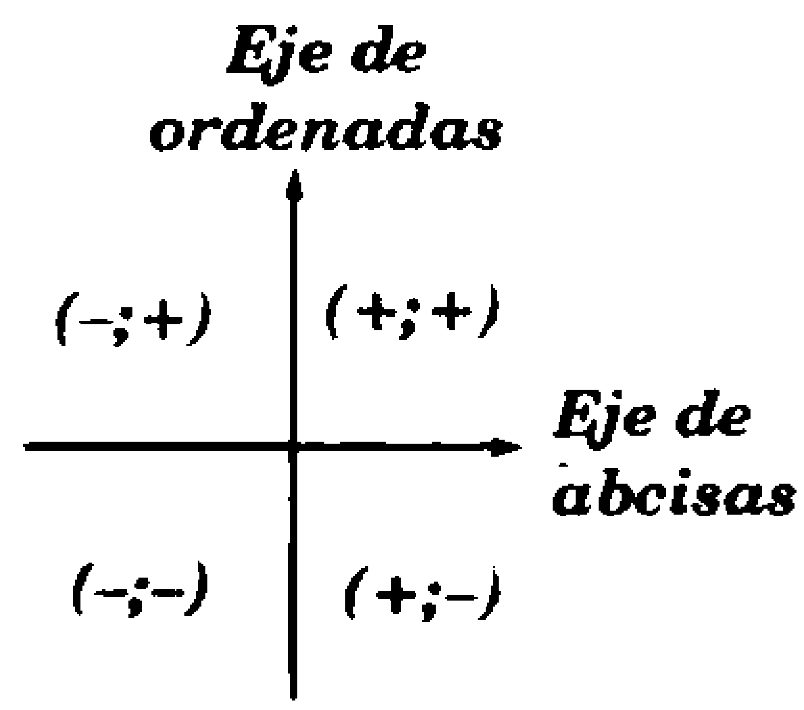
$A\times B=\{(1;7),(1;8),(2;7),(2;8),(3;7),(3;8)\}$

$B\times A=\{(7;1),(7;2),(7;3),(8;1),(8;2),(8;3)\}$

Luego : $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

PLANO CARTESIANO

Es aquel donde se ubican los puntos generados por los pares ordenados.



FUNCIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se llama función de A en B a aquel conjunto de pares ordenados $(x;y)$, tales que a cada elemento $x\in A$ le debe corresponder un único elemento y $\in B$ o también se puede decir que es un conjunto de pares ordenados $(x;y)$, en el cual 2 pares ordenados distintos no tienen la misma primera componente, es decir que a cada $x\in X$ le corresponde uno y sólo un $y\in Y$.

CONDICIÓN DE UNICIDAD :

Si : $\boxed{(x\,;y)\in f \wedge (x\,;z)\in f \Leftrightarrow y=z}$

Notación Funcional :

$$f: A\Rightarrow B \quad ó \quad A\Rightarrow B$$

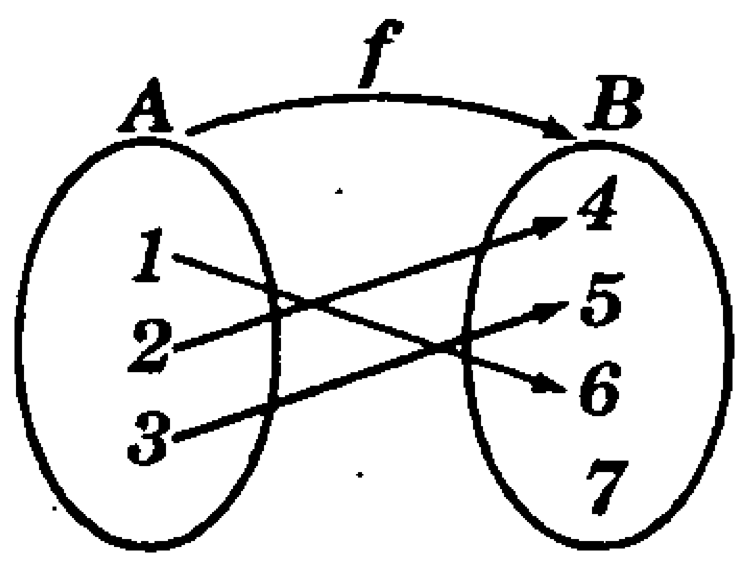
Se lee: Función de "*A*" en "*B*".

MATEMÁTICAMENTE :

f: $X\Rightarrow Y$ es una función $\Leftrightarrow \forall x\in X, \exists!\ y\in Y$ tal que $(x;y)\in f$

EJEMPLOS :

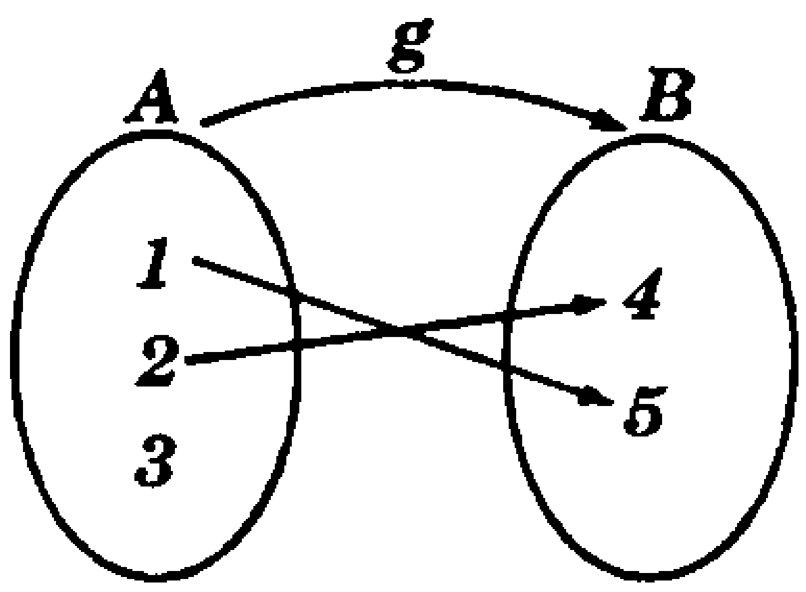
1)



$f=\{(1;6),(2;4),(3;5)\}$

Vemos que *"f"* representa una función ya que para cada $x \in A, \exists! \; y \in B$
└── *Existe un único*

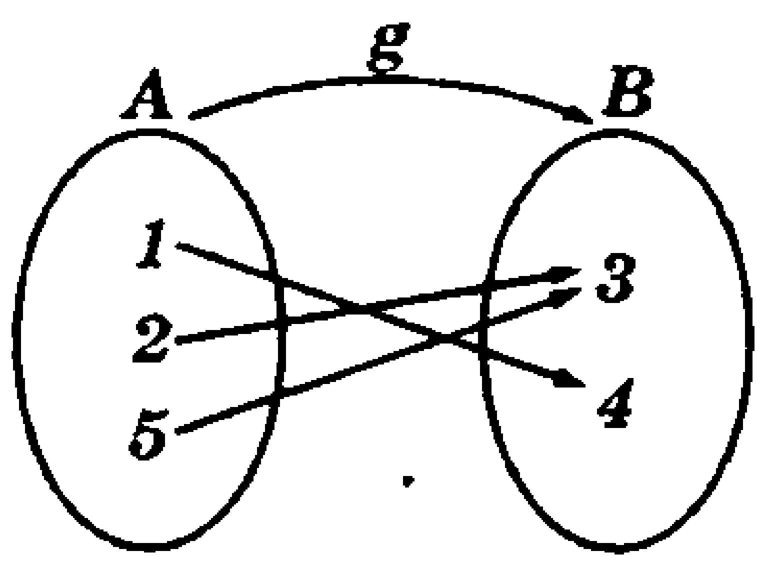
2)



$g=\{(1;5),(2;4)\}$

"g" no representa una función ya que el elemento *3* del conjunto *A* no tiene su correspondiente en *B*. *"g"* es una relación.

3)



$H=\{(1;4),(2;4),(5;3)\}$

Vemos que *"H"* también representa una función, ya que para cada $x \in A, \exists! \; y \in B$.

EJEMPLO :

$F=\{(2;3),(4;7),(8;9),(5;0)\}$ ***Función***

$G=\{(3;8),(5;1),(3;2),(7;-3)\}$ ***Relación***
No es función

$I=\{(1;6),(3;2),(4;5),(1;6)\}$ ***Función***
Es la misma

NOTA :

Si : $(a;b) \in F$ entonces $F(a)=b$. Es la imagen de *"a"* en *F*.

EJEMPLO :

$F=\{(4;0),(6;-1),(8;2)\}$

$F(4)=0 \; ; \; F(6)=-1 \; ; \; F(8)=2$

Regla de correspondencia :

$$y=F(x)$$

Variable dependiente ← y ; x → *Variable independiente*

EJEMPLO :

$y=2x+3$ ó $F(x)=2x+3$

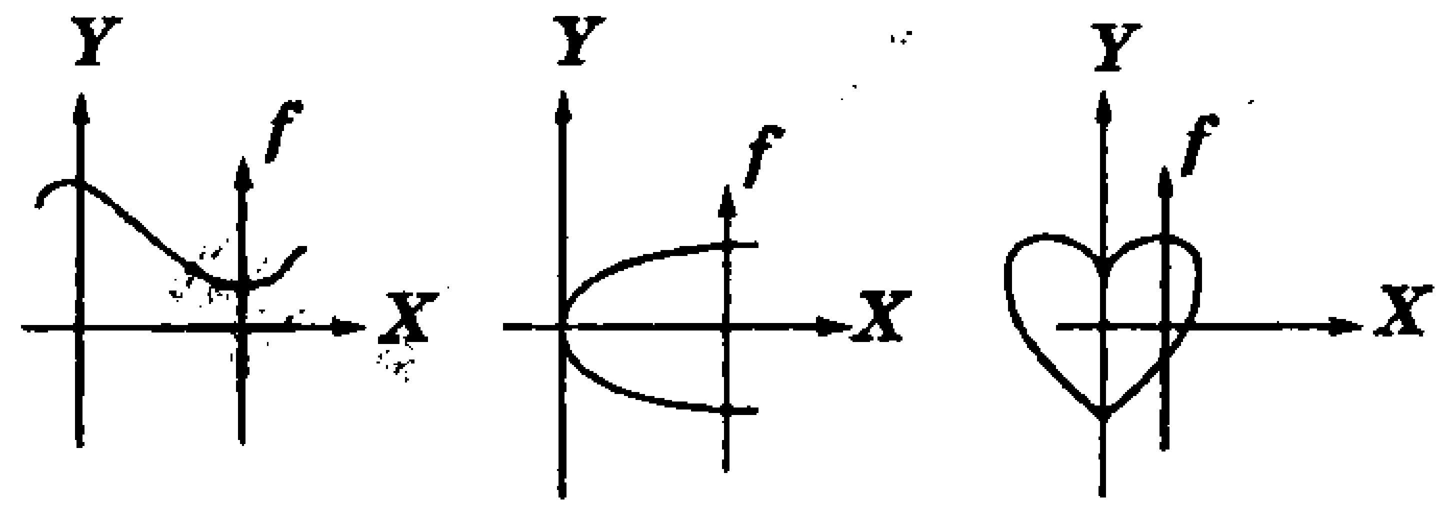
$F(1)=5 \quad F(3)=9 \quad F(5)=13 \quad F(0)=3$

$F=\{(1;5),(3;9),(5;13),(0;3)\}$

Del proceso anterior podemos decir que una relación algebraica entre la abcisa *(x)* y la ordenada *(y)* generan pares ordenados.

TEOREMA :

Si *f* es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ toda recta paralela al eje *«Y»* corta la gráfica a lo más en un punto.



Es función *No es función* *No es función*

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN :

Llamado también conjunto de preimágenes y está formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función *0*. Es el conjunto de valores que puede tomar la *1ra*. componente (abcisa) considerando las restricciones.

$$\sqrt[2n]{\geq 0} \; ; \; \frac{N}{D \neq 0}$$

NOTACIÓN :

* Sea : $f: A \to B$

$Df = Dom\, f = \{x \in A / \exists! \; ; y \in B / (x;y) \in f\}$

RANGO DE UNA FUNCIÓN :

Llamado también conjunto de imágenes y está dado por todas las segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función *0*. Es el conjunto de valores que asume la *2da*. componente (ordenada)., de acuerdo al dominio.

NOTACIÓN :

* Sea $f: A \to B$

$Rf = Ran\, f = \{y \in B / x \in A \wedge (x;y) \in f\}$

EJEMPLO :

Sea : $f=\{(1;2),(3;5),(7;6),(4;9)\}$

$Dom f=\{1;3;7;4\}$

$Ran\, f=\{2;5;6;9\}$

REGLA DE CORRESPONDENCIA :

Es la relación que existe entre los elementos del dominio y los del rango.

Sea $f: A \to B$, entonces : $y = f(x)$

denota la dependencia entre x e y.

$x \longrightarrow$ variable independiente

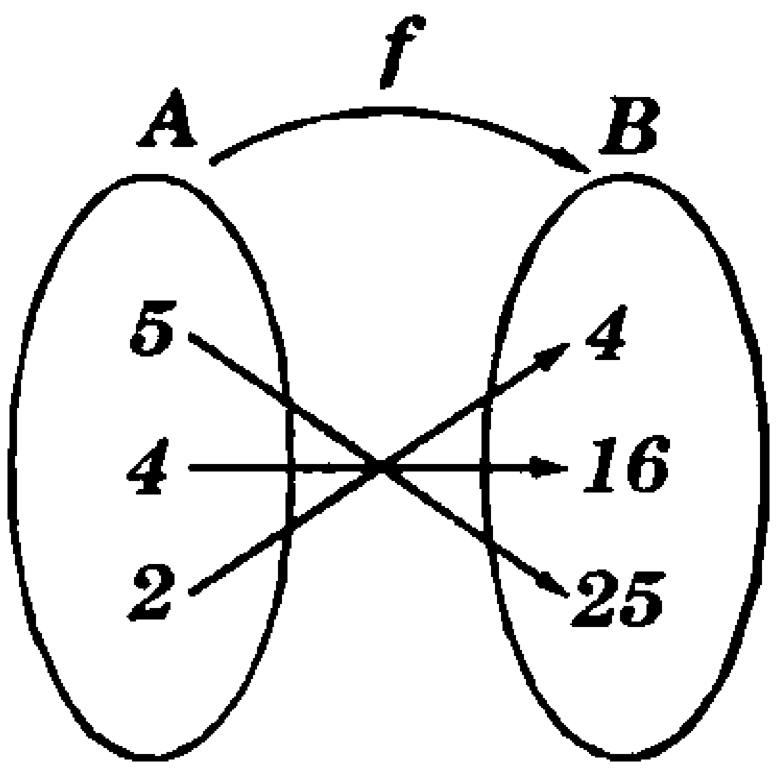
$y \longrightarrow$ variable dependiente

EJEMPLO :

$f(5) = 5^2$

$f(4) = 4^2$

$f(2) = 2^2$



Entonces : $f(x) = x^2 \; ; \; x \in \{2;4;5\}$

FUNCIÓN REAL EN VARIABLE REAL

Sea $f: A \to B$ diremos que «f» es una función real en variable real, si A, B son subconjuntos de los reales, es decir : $A \subseteq R \wedge B \subseteq R$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL EN VARIABLE REAL

La gráfica de una función «f» es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a la función.

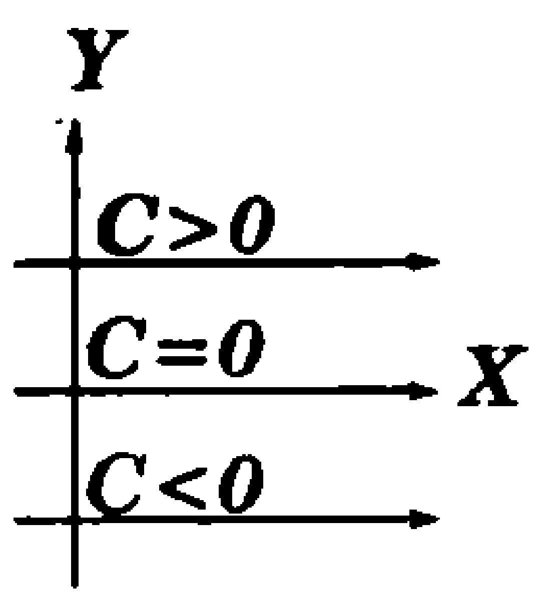
$$Gra(f) = \{(x;y) \in R^2 / y = f(x) \; ; \; x \in dom f\}$$

FUNCIONES ESPECIALES

1) FUNCIÓN CONSTANTE :

Regla de correspondencia :

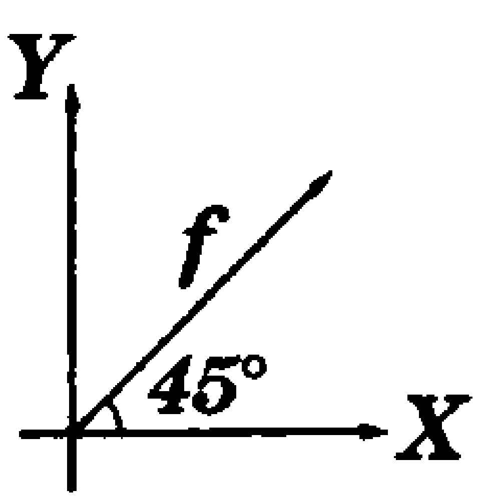
$$f(x) = C$$
$$Df = \mathbb{R} \; ; \; Rf = \{C\}$$



2) FUNCIÓN IDENTIDAD :

Regla de correspondencia:

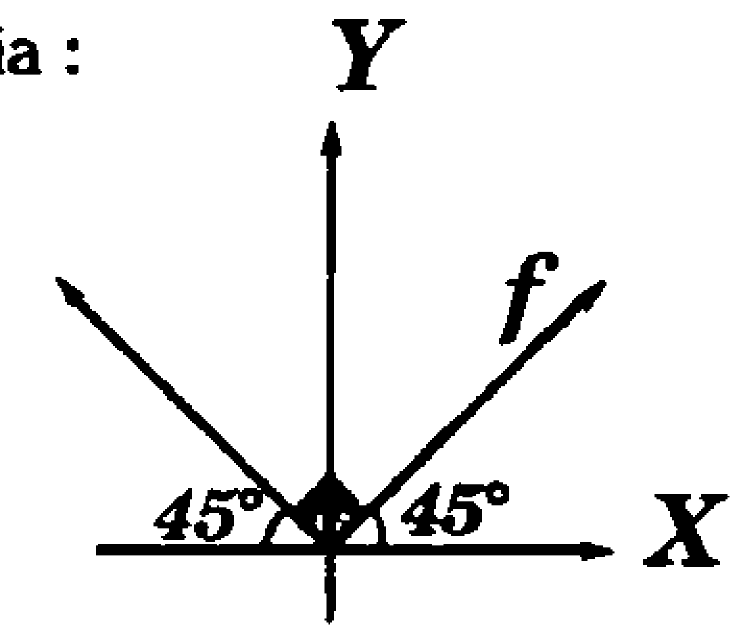
$$f(x) = x \;\; ó \;\; L(x) = x$$
$$Df = \mathbb{R} \; ; \; Rf = \mathbb{R}$$



3) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO :

Regla de correspondencia :

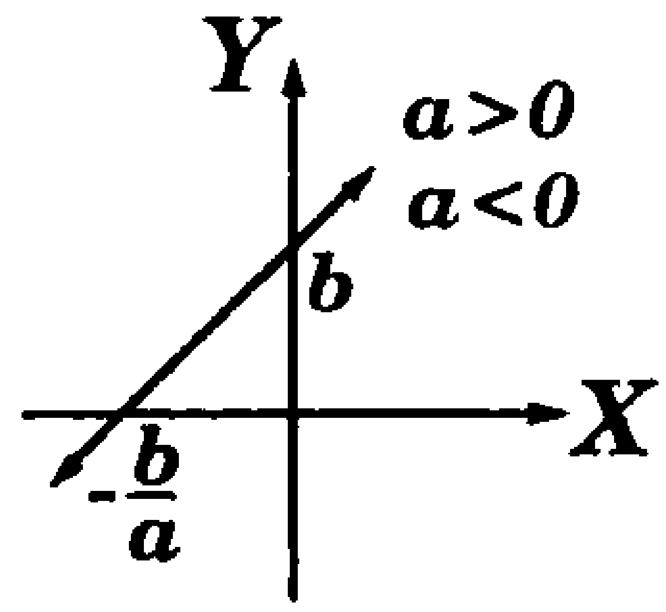
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



4) FUNCIÓN LINEAL :

Regla de correspondencia :

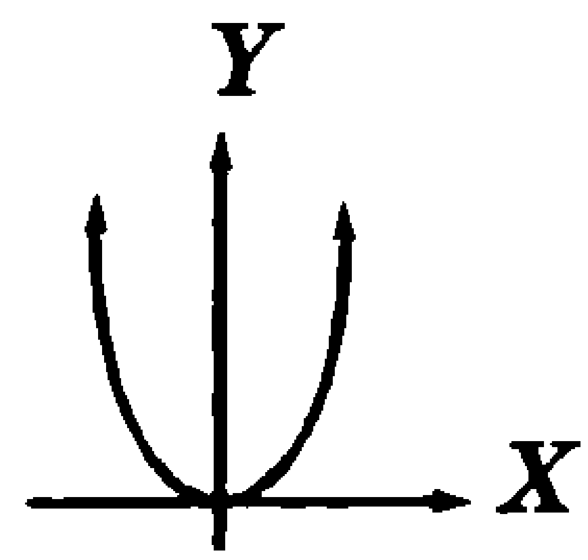
$$f(x) = ax + b \; ; \; a \neq 0$$
$$Df = R \; ; \; Rf = R$$



5) FUNCIÓN CUADRÁTICA :

Regla de correspondencia :

$$f(x) = x^2$$
$$Df = R \; ; \; Rf = R^+$$



EJEMPLO ILUSTRATIVO :

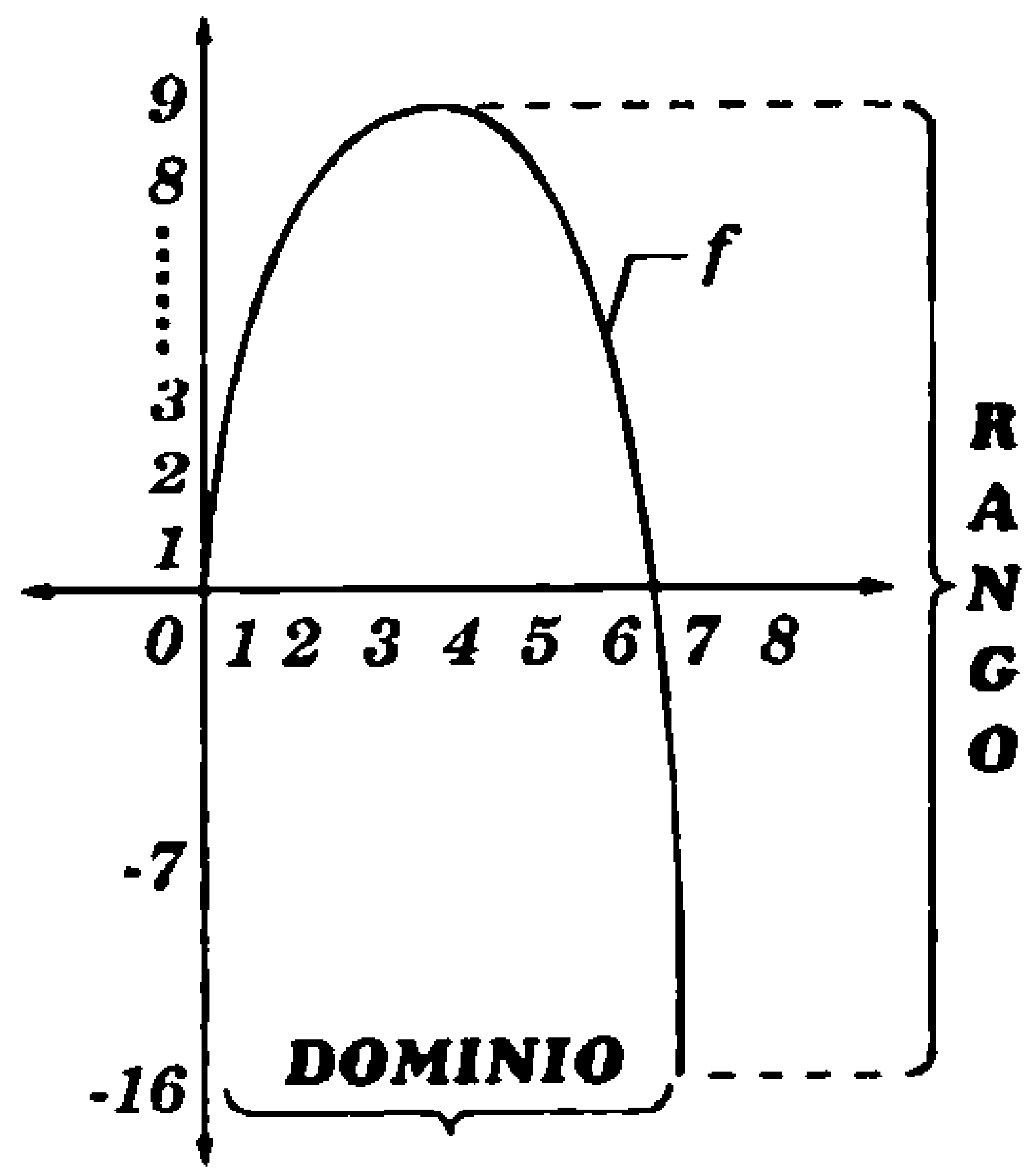
Dada la función f tal que :

$$f(x) = 6x - x^2 \; ; \; x \in [0;8\rangle$$

Grafique y determine su rango. $Dom(f) = [0;8]$

Para graficar la función f tabulamos algunos valores de $x \in Dom(f)$, donde $y = f(x) = 6x - x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	5	8	9	8	5	0	-7



De la gráfica : $Ran\, f = \langle -16;9]$

Otra Forma de Hallar el RANGO

$(f): y = 6x - x^2 \; ; x \in [0;8\rangle$

Se trata de hallar la variación de : $y = 6x - x^2$ a partir de $0 \leq x < 8$

Para ello transformamos :

$y = 6x - x^2$

$y = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -[(x-3)^2 - 9]$

$\Rightarrow y = 9 - (x-3)^2$

Luego como :

$0 \leq x < 8 \Rightarrow -3 \leq x - 3 < 5$

$\Rightarrow 0 \leq (x-3)^2 < 25$

$\Rightarrow -25 < -(x-3)^2 \leq 0$

$\Rightarrow -16 < 9 - (x-3)^2 \leq 9$

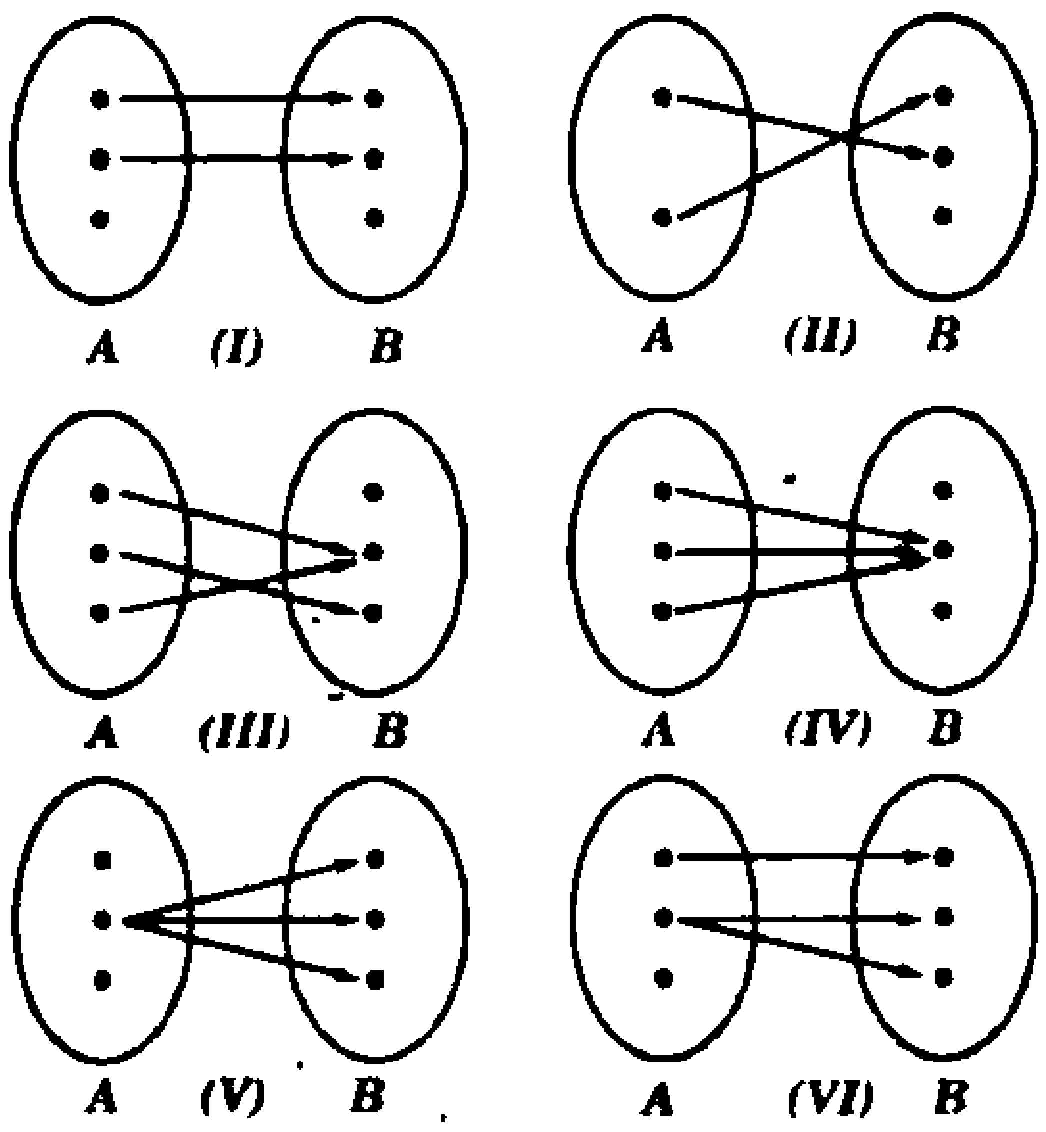
$\Rightarrow -16 < y \leq 9$

Luego : $Ran(f) = \langle -16 ; 9]$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

De las gráficas siguientes ¿Cuáles no corresponden a una función?



A) I , III y IV **B)** Sólo IV **C)** V y V **D)** IV y V **E)** I,V y VI

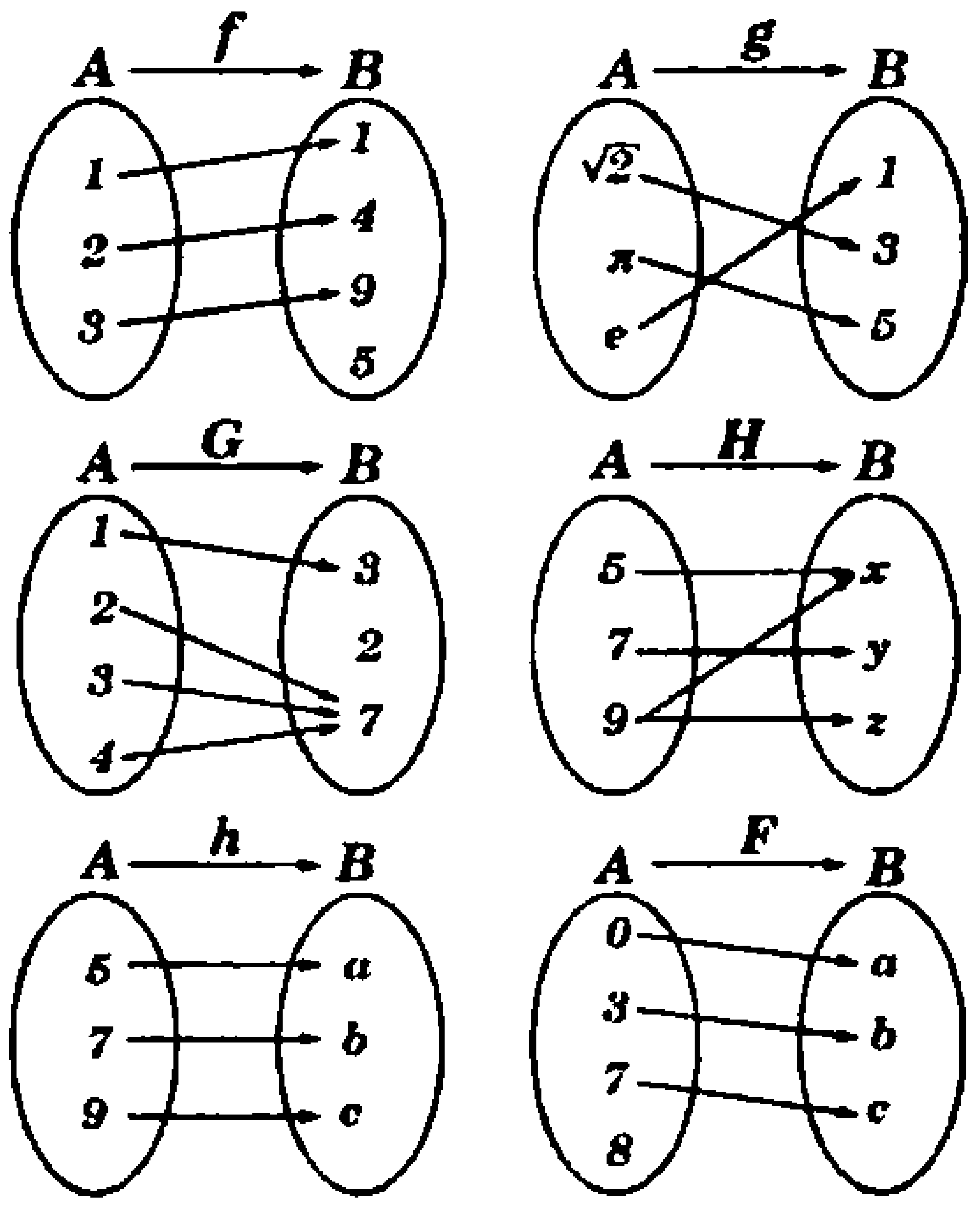
RESOLUCIÓN:

* *(I)* No es una función dado que del conjunto «*A*», hay un elemento que no es correspondido por un elemento de «*B*»; eso mismo ocurre con *(V)* y *(VI)*. Las restantes si son funciones.

RPTA : "E"

PROBLEMA 2:

¿Cuales de las relaciones (diagramas) sí representan funciones? ¿por qué?



A) F y H **B)** F y G **C)** F,H y G **D)** f,G, g y h **E)** Todas.

RESOLUCIÓN:

F no es función, pues a $8 \in A$ no le corresponde ningún elemento de *B*, es decir no tiene imagen. *H* no es función, pues $9 \in A$ tiene dos imágenes en *B*, y debe tener sólo una.

De los diagramas también podemos decir que *f, g, h* y *G* son funciones, pues de cada uno de sus elementos en *A* (conjunto de partida) sale únicamente una flecha hacia *B* (conjunto de llegada) lo que significa que cada elemento de *A* tendrá una sola imagen en *B*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 3:

De las siguientes relaciones. ¿Cuáles no son funciones?

I) $\{(4;4),(5;5),(6;6)\}$

II) $\{(3;4),(4;4),(5;4),(6;4)\}$

III) $\{(5;2),(5;3),(5;6)\}$

IV) $\{(4;3),(3;4),(5;2),(2;,5)\}$

V) $\{(3;6),(7;4),(3;8),(2;9)\}$

A) I y II **B)** II y III **C)** III,IV y V **D)** III y V **E)** Sólo III

RESOLUCIÓN:

* *(III)* no es función, dado que para la abscisa «*5*», tiene *2* imágenes diferentes, esto también ocurre con *(V)*.

RPTA : "D"

PROBLEMA 4:

Determine el valor de «*a+b*» si la relación :

$f = \{ (2;5) \;, (-1;3) \;, (2;2a-b) \;, (-1;b-a), (a+b^2;a)\}$

Es una función.

A) 0 **B)** 11 **C)** –7 **D)** 19 **E)** 8

RESOLUCIÓN:

* Como *f* es una función, entonces por unicidad :

$2a - b = 5 \wedge b - a = 3$

$\Rightarrow a = 8 \wedge b = 11 \Rightarrow a + b = 19$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5:

Sabiendo que :

$F = \{(1;2) \;, (2;x) \;, (3;x+y) \;, (1;x+1), (3;-y)\}$

es una función, calcular $5x+4y$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

RESOLUCIÓN :

* Por la condición de la unicidad.

$(1;2) = (1;x+1) \wedge (3;x+y) = (3;-y)$

$2 = x + 1 \qquad x + y = -y$

$x = 1 \qquad \Rightarrow 2y = -x$

$\Rightarrow 2y = -1$

* Piden :

$$5x + 4y = 5(1) + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6:

Calcule la suma de valores de «*x*» tal que la relación :

$f = \{(1;2),(2;3),(3;4),(4;5),(5;6),(x;5)\}$

no sea función :

A) 8 **B)** 13 **C)** 7 **D)** 20 **E)** 11

RESOLUCIÓN:

* Como no se debe cumplir la condición de la unicidad, entonces :

$x \in \{1;2;3;5\}$

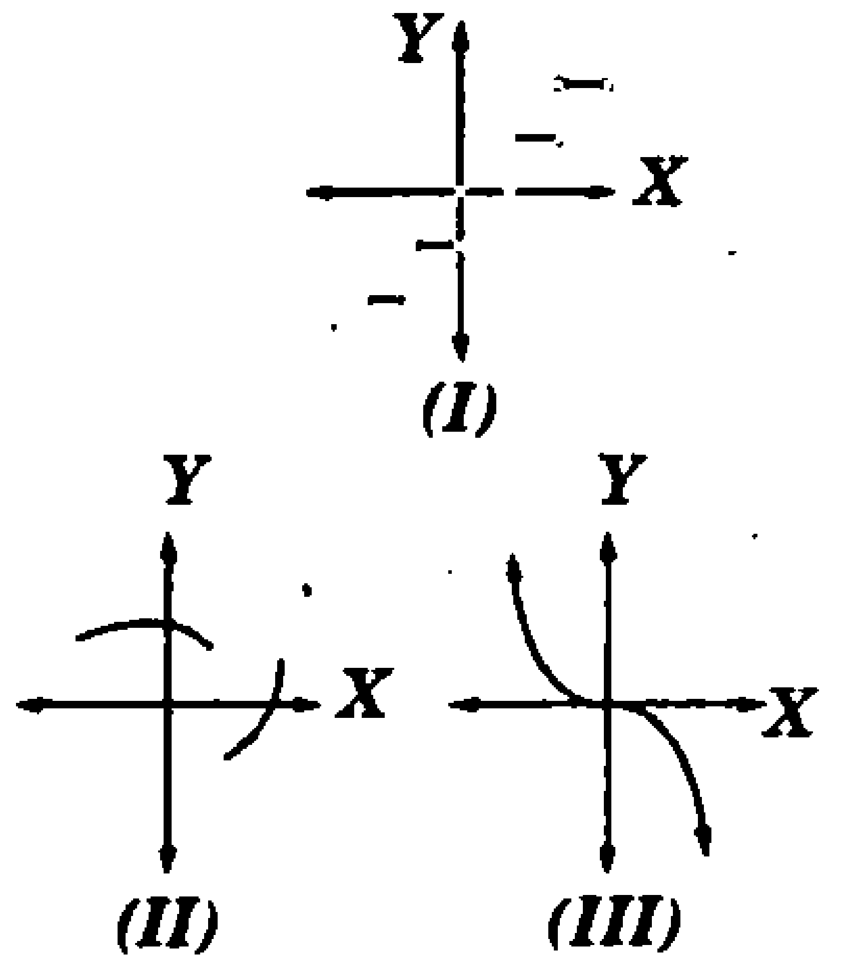
cuya suma de valores será :

$$1 + 2 + 3 + 5 = 11$$

RPTA : "E'

PROBLEMA 7:

En los siguientes diagramas cual es una función :



A)Sólo III B)I, II y III C)II y III
D)I y II E)I y III

RESOLUCIÓN:

* Al trazar una recta vertical paralela al eje «Y», no corta en ningún caso en más de 1 punto, entonces las tres gráficas son funciones.

RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

Sea :

$f = \{(x; f(x)) / f(x) = 2x + 2 ; 0 \leq x < 8\}$

Hallar el rango de *f*.

A)[2,18] B)⟨2,18⟩ C)[0,8⟩
D)[2,18⟩ E)[0,8⟩

RESOLUCIÓN:

* El rango es el conjunto de valores que puede asumir «f(x)», entonces trataremos de obtenerlo a partir de:

$0 \leq x < 8$

$\times 2 \Rightarrow 0 \leq 2x < 16$

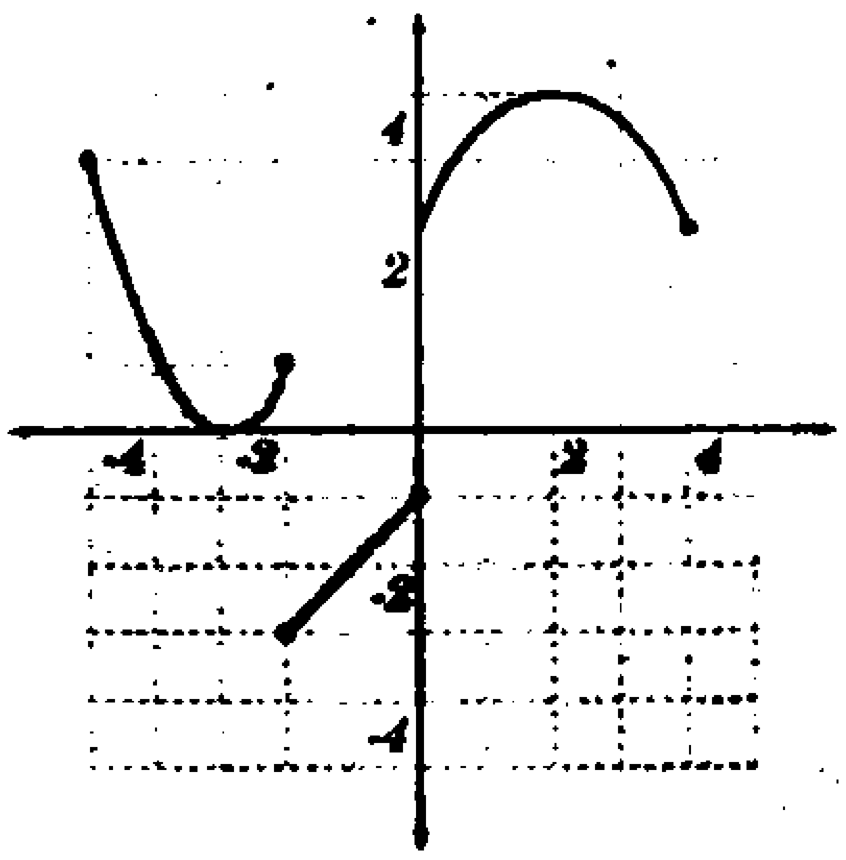
$+2 \Rightarrow 2 \leq 2x+2 < 18 \Rightarrow 2 \leq f(x) < 18$

$\Rightarrow f(x) \in [2;18\rangle$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9:

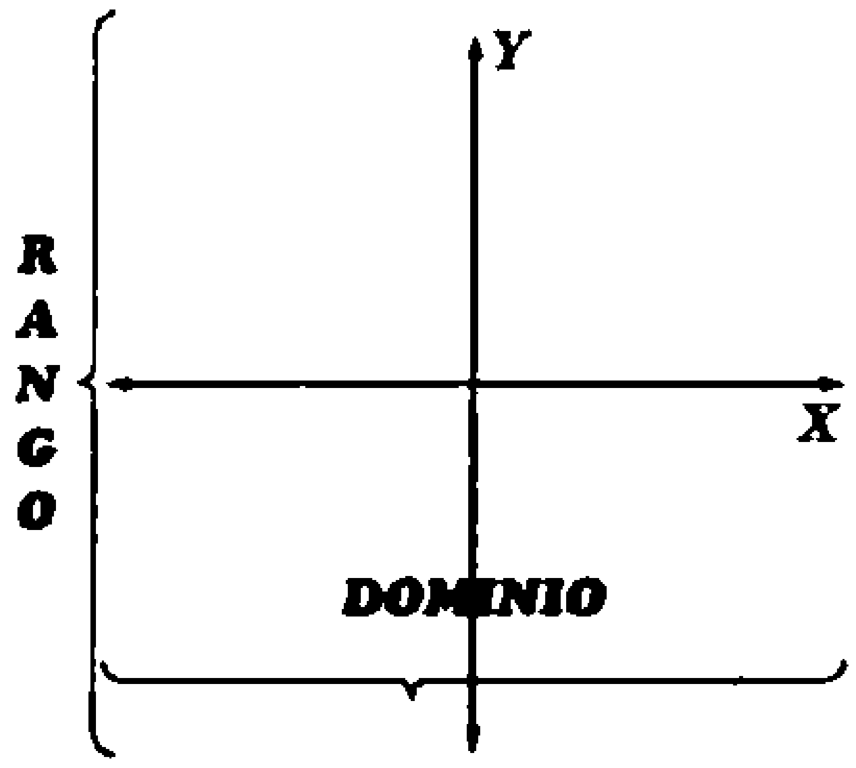
Dada la gráfica de la función. Hallar el dominio y rango de *t*.



A) Df = [–5;4] ; Rf = [–3;–1] ∪ [0;5]
B) Df = [–5;4] ; Rf = [–3;1] ∪ [0;5]
C) Df = [–5;4] ; Rf = [3;–1] ∪ [0;5]
D) Df = [–5;4] ; Rf = [–3;5]
E) Df = [5;4] ; Rf = [–3;–1] ∪ [0;5]

RESOLUCIÓN:

* El dominio es el conjunto de valores que se han considerado del eje «X», y el rango es el conjunto de valores que se han considerado del eje «Y», es decir :



* Observando lo dado se tendrá que : $Df = [-5;4]$

$$Rf = [-3;-1] \cup [0;5]$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

Sea *f* una función real, tal que :

$$f(x) = x^2 ; -2 \leq x \leq 3$$

El rango de *f* es :

A)[4;9] B)⟨4;9⟩ C)[– 4;9]
D)[0;4] E)[0;9]

RESOLUCIÓN:

* De : $-2 \leq x \leq 3$

Elevando al cuadrado $\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 9$ (3^2)

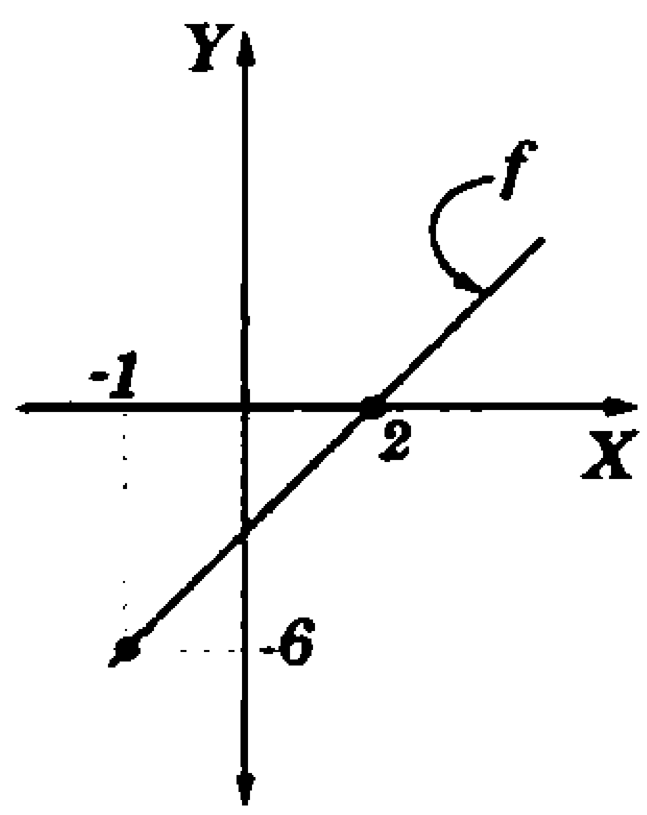
$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 9$

$\Rightarrow Rf = [0;9]$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11:

Dada la función : $f(x) = mx + n + 1$ cuya gráfica es :



Halle *mn*.

A)11 B)–13 C)–15 D)–10 E)–8

RESOLUCIÓN:

* De la gráfica se puede apreciar que : $f(2) = 0$ y $f(-1) = -6$

* Luego considerando :

$$f(x) = mx + n + 1$$

$\Rightarrow f(2) = 2m + n + 1 = 0$

$2m + n = -1$.........(I)

$\Rightarrow f(-1) = -m + n + 1 = -6$

$n - m = -7$........(II)

* Resolviendo de (I) y (II) se obtendrá que :

$$m = 2 \text{ y } n = -5 \Rightarrow mn = -10$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12:

Indicar el dominio de la función :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt[4]{3-x}$$

A){0} B)[– 2;0⟩ C)[0;2]
D)[– 2;3] – {0} E)⟨–2;3⟩ ∪ {0}

RESOLUCIÓN:

* El dominio es el conjunto de valores que puede asumir «x», considerando las restricciones de las operaciones como :

"la radicación": La cantidad subradical debe ser mayor que cero cuando el índice es par , la división: Denominador es diferente de cero.

* De lo dado se obtendrá :

$$f(x) = \frac{x+1}{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt[4]{3-x}$$

$x \neq 0 \wedge x + 2 \geq 0 \wedge 3 - x \geq 0$

$x \neq 0 \wedge x \geq -2 \wedge 3 \geq x$

$x \neq 0 \wedge 3 \geq x \geq -2$

$\Rightarrow x \in [-2;3] - \{0\}$ ó

$Df = [-2;3] - \{0\}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13:

Indicar el dominio de :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 4x}}$$

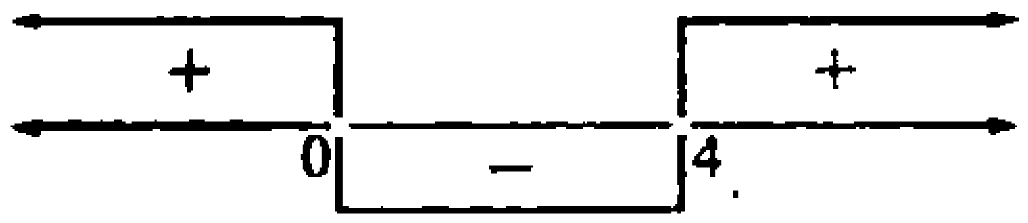
A)⟨–∞;0⟩ B)⟨–∞;4⟩ C)⟨–∞;2]
D)⟨–∞;0⟩∪⟨4 ;+∞⟩ E)⟨–∞;9]

RESOLUCIÓN:

* Se pude apreciar que :

$$x^2-4x>0 \Rightarrow x(x-4)>0$$

* Considerando criterios de los puntos críticos : $\{0;4\}$



$$\Rightarrow x \in \langle -\infty;0\rangle \cup \langle 4;+\infty\rangle$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14:

Si: $f(2x+3)=\sqrt{2x+2}$ entonces $f(2)$ es :

A) 1 B) 0 C) 2 D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

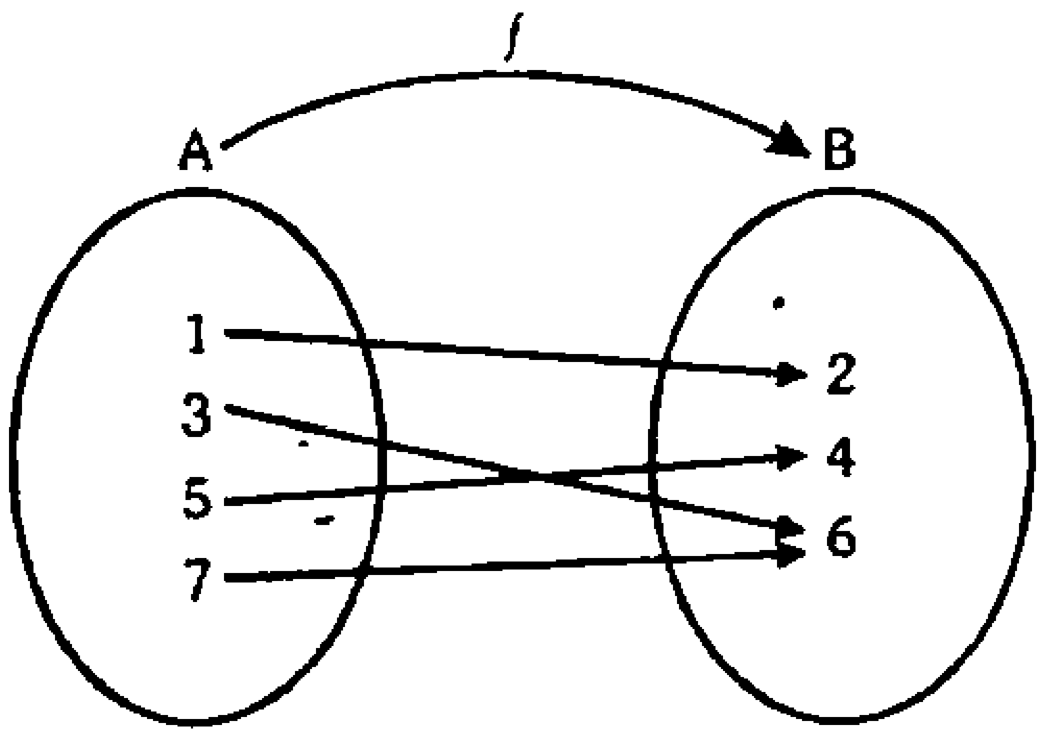
$$f(2x+3)=\sqrt{2x+2} \qquad \boxed{2x+3=2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}}$$

$$f(2)=\sqrt{2()+2}=\sqrt{2\left(-\frac{1}{2}+2\right)}=1$$

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En el diagrama :

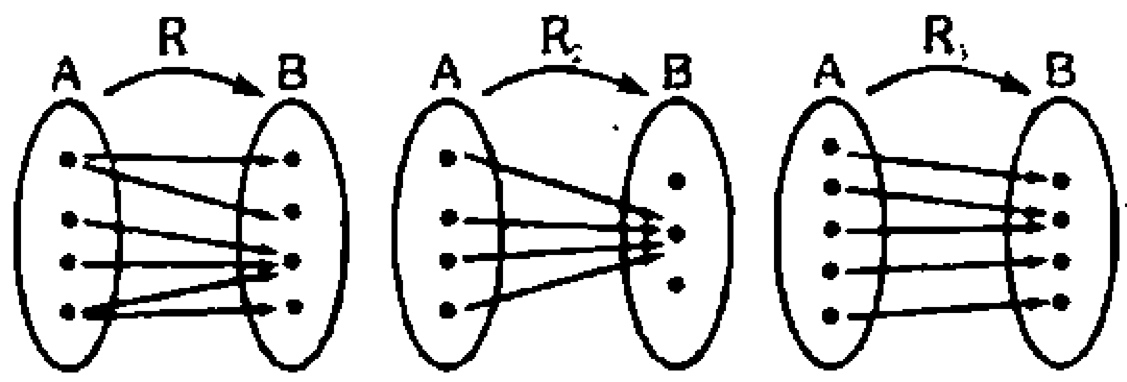


Calcular el valor de :

$$K=\frac{f(1)+f(5)+f(7)}{f(3)-f(1)}$$

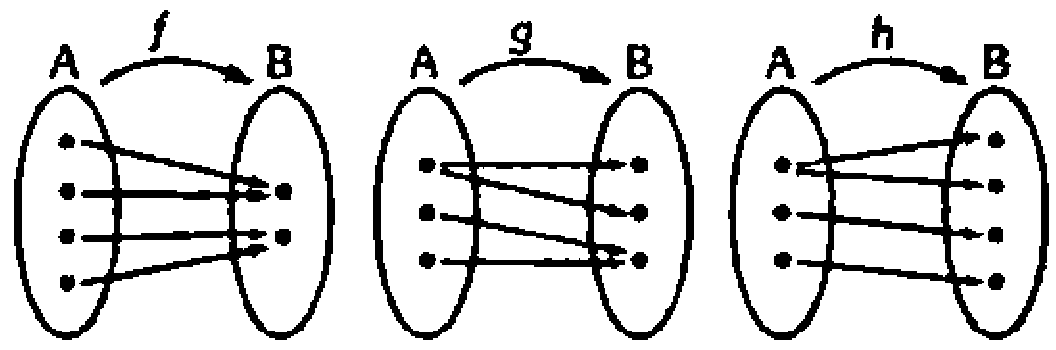
RPTA.: ....

02 Indicar cuáles de las siguientes relaciones son funciones :



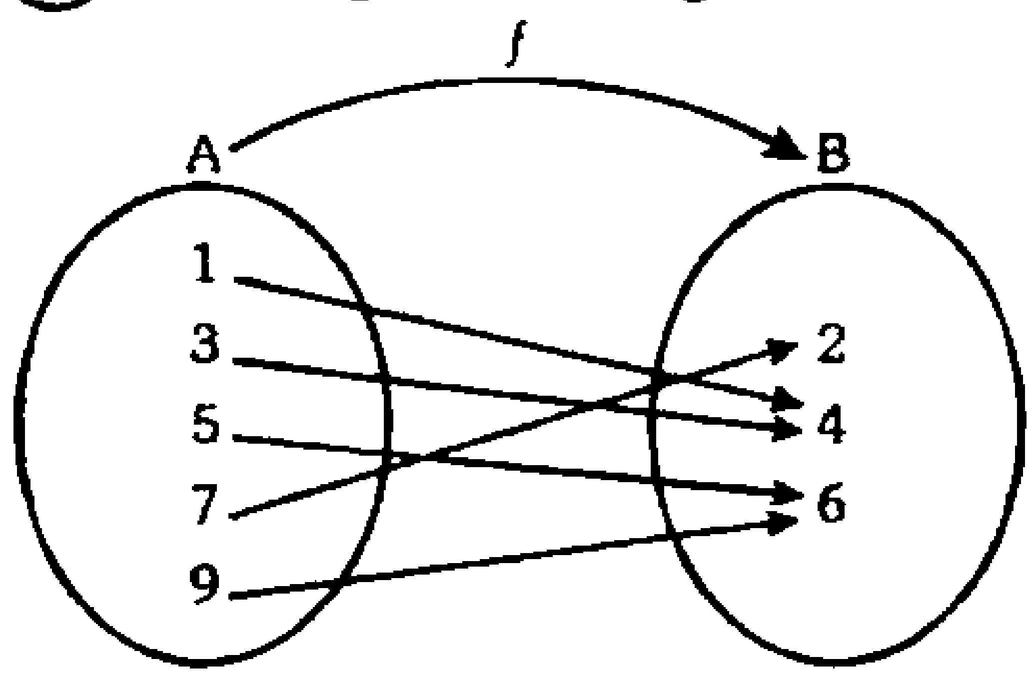
RPTA.: ....

03 Indicar cuáles de los siguientes gráficos representa a una función:



RPTA.: ....

04 En el siguiente diagrama :



Calcular los pares ordenados de la función de *A* en *B*.

A) $f=\{(1;4),(3;4),(5;6),(7;2),(9;6)\}$
B) $f=\{(1;4),(3;4),(5;6)\}$
C) $f=\{(1;2),(3;4),(5;2),(9;6)\}$
D) $f=\{(2;1),(4;3),(2;5),(6;9)\}$
E) $f=\{(4;1),(4;3),(6;5)\}$

05 Hallar el Dominio y Rango en el siguiente conjunto de pares ordenados :

$$H=\{(2;5),(3,a+2),(2;b-1),(a-3;b),(3;5)\}$$

si : "*H*" representa una función.

RPTA.: ....

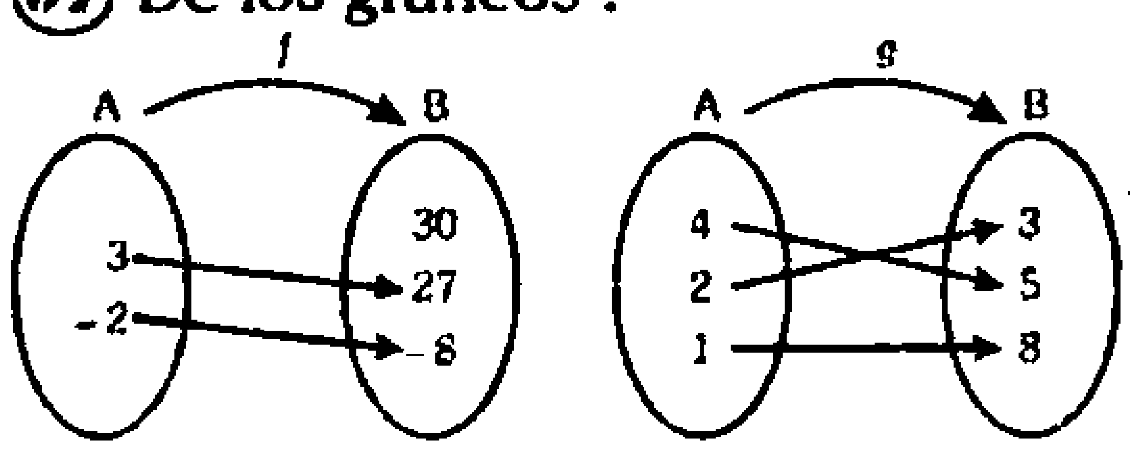
06 Hallar el Dominio y Rango en el siguiente conjunto de pares ordenados :

$$F=\{(1;-3),(2;2a-1),(a^2;b-1),(2;7),(1;b-4)\}$$

si "*F*" es una función.

RPTA.: ....

07 De los gráficos :

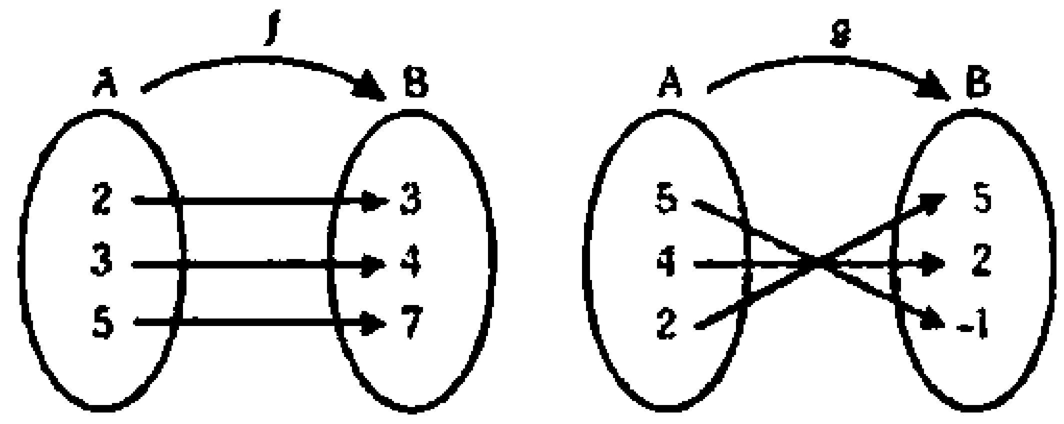


Calcular :

$$K=\frac{f(3)+g(3)}{f(-2)+g(4)}$$

RPTA.: ....

08 De los gráficos :



Calcular el valor de :

$$K=\frac{5f(2)-3g(5)}{f(g(2))+g(f(3))}$$

RPTA.: ....

09 Dado los conjuntos :

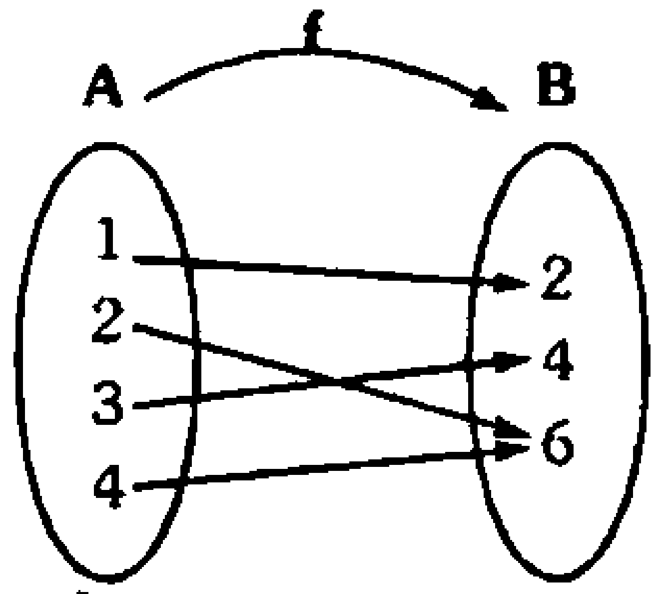
$$A=\{1;2;3\} \text{ y } B=\{2;4;6\}$$

¿Cuáles de las siguientes relaciones no es una función de *A* en *B*?

$R_1=\{(1;2),(2;4),(3;6)\}$
$R_2=\{(1;4),(2;6),(2;4)\}$
$R_3=\{(2;2),(2;4),(2;6)\}$

RPTA.: ....

10 En el diagrama :



Calcular el valor de :

$$\frac{f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(4)}}{f_{(2)}-f_{(3)}}$$

A) 5 B) 2 C) 7

11 Hallar el dominio y rango de la siguiente función :

$f=\{(2;5),(3;a+2),(2;b-1),(a-3;b),(3;5)\}$
A) $Dom(f)=\{2,3,5\}$ $Ran(f)=\{3,6\}$
B) $Dom(f)=\{1,2,3\}$ $Ran(f)=\{3,5,6\}$
C) $Dom(f)=\{0,2,3\}$ $Ran(f)=\{5,6\}$

12 Sea *A* el conjunto de partida y *B* el conjunto de llegada.

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$B=\{2,4,6,7,8\}$$

La función :

$$f: A\to B \text{ tal que } y=x+3$$

Hallar su dominio y rango

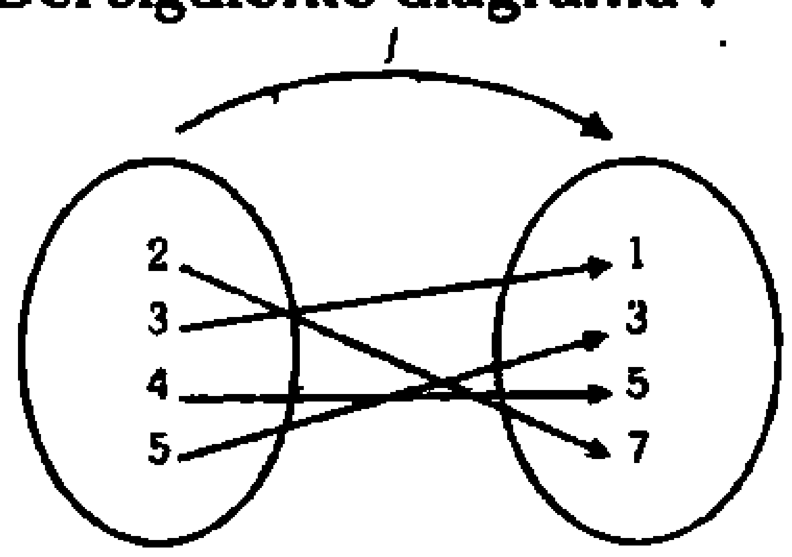
$Dom(f)=\{1,2,4\}$ $Ran(f)=\{4,6,7\}$
$Dom(f)=\{2,4\}$ $Ran(f)=\{2,6,8\}$
$Dom(f)=\{1,3,4\}$ $Ran(f)=\{4,6,7\}$

13 Hallar el valor de n en la función :

$f=\{(3;16),\ (n;5),\ (4;7),\ (3;n^2)\}$

A) 4 *B)* ±4 *C)* – 4

14 Del siguiente diagrama :



Calcular el valor de :

$$M=\frac{f(2)+f(4)-f(5)}{2f(5)+3f(3)}$$

A) 1 *B)* 3 *C)* 5 *D)* 7 *E)* 2

15 Si el siguiente conjunto de pares ordenados representa una función :

$F=\{(1;5),(3;7),(1;a+1),(5;2),(3;b-1)\}$

Calcular el valor de : $a+b$.

A) 10 *B)* 12 *C)* 15 *D)* 11 *E)* 13

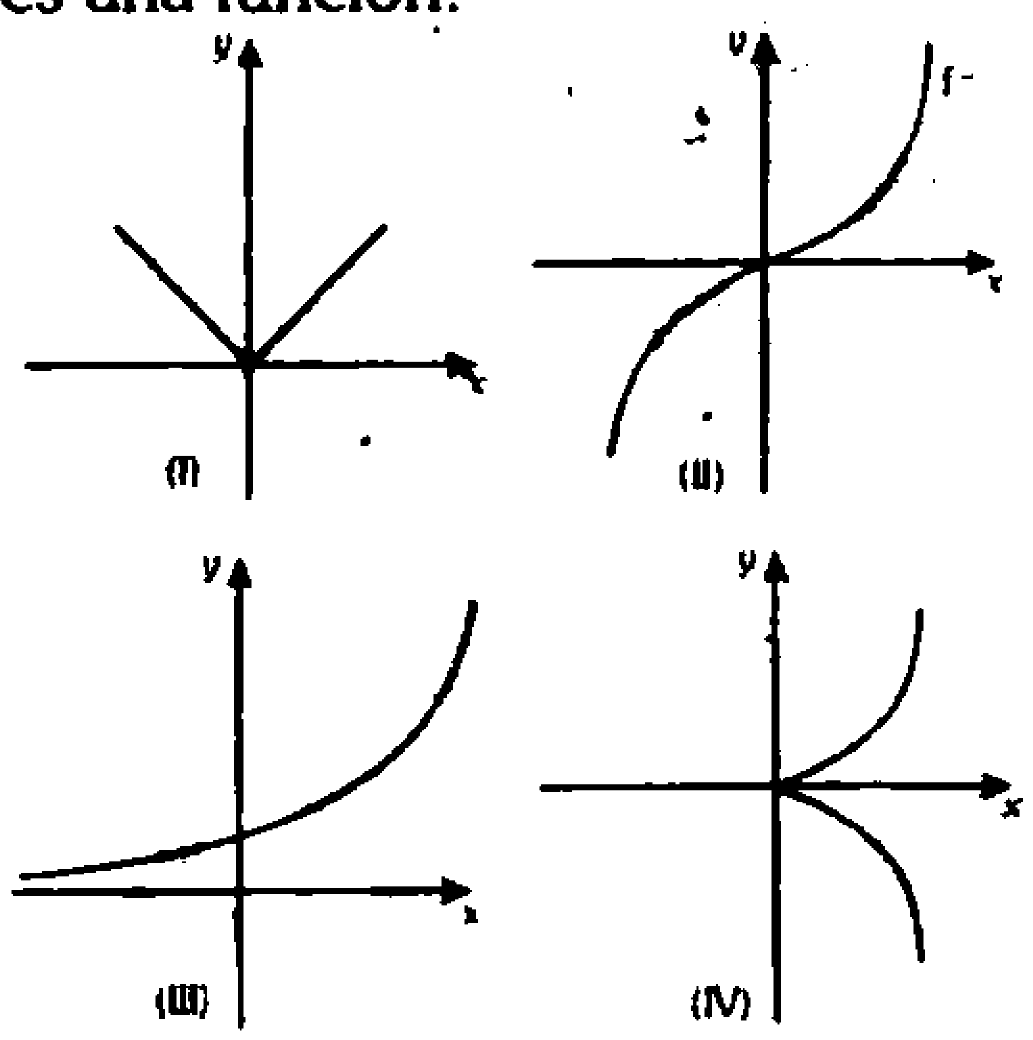
16 Si el siguiente conjunto representa una función :

$F=\{(2;5),(3;a),(2;a+2b),(3;1),(a;b^2)\}$

Calcular su Dominio :

A) $Dom(f)=\{1;3;5\}$
B) $Dom(f)=\{2;4;6\}$
C) $Dom(f)=\{1;2;3\}$
D) $Dom(f)=\{3;2;1\}$
E) $Dom(f)=\{6;4;2\}$

17 ¿Cuál de las siguientes gráficas es una función?



A) Sólo I *B)* I, II y III *C)* Sólo IV
D) II y III *E)* I y III

18 De la función:

$$F=\{(2;3),(3;4),(4;1)\}$$

Calcular :

$$A=F_{(F_{(2)})}+F_{(F_{(3)})}$$

A) 1 *B)* 5 *C)* 6 *D)* 7 *E)* 8

19 Dado : $F=\{(0;1),(1;2),(2;3)\}$

Hallar :

$$F_{(0)}^{\,F_{(1)}}+F_{(1)}^{\,F_{(2)}}+F_{(2)}^{\,F_{(0)}}$$

A) 6 *B)* 8 *C)* 10 *D)* 12 *E)* 16

20 Sea el costo de una tela en función de su medida «x» denotado por :

$$C_{(x)}=x+1 \text{ (en soles)}$$

para **3** metros de tela cuanto debe invertir. (en soles)

A) 1 *B)* 3 *C)* 4 *D)* 5 *E)* 6

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

FUNCIONES: DOMINIO-RANGO

01 Calcular $5a-b$ para que el conjunto :

$M=\{(10;5),\ (-7;-3),(10;2a-b),\ (-7;\ b-a),\ (3a+b;\ b)\}$ nos represente una función.

A) 8 *B)* 6 *C)* 17 *D)* 13 *E)* 11

02 Sean las funciones :

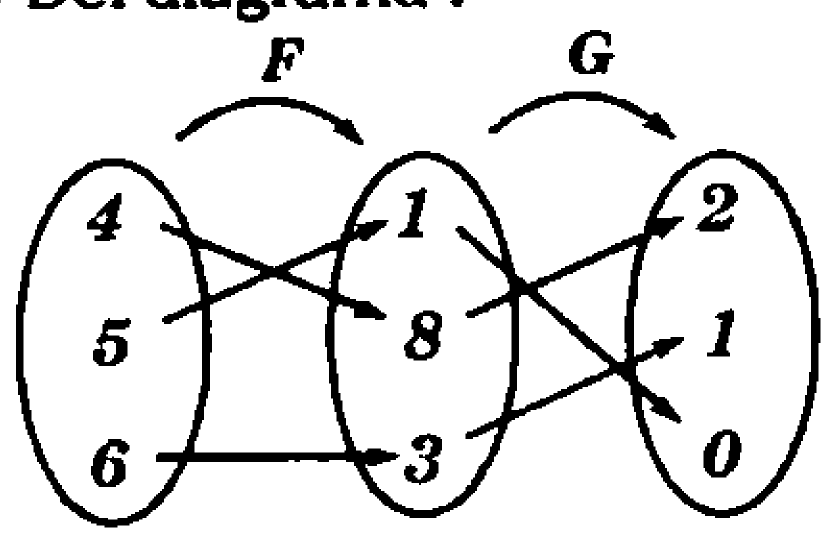
$G=\{(3;5),\ (8;-3),\ (4;12),\ (3;a+4),(4;n-5)\}$

$F=\{(1;9),(5;13),(-2;5),(17;7)\}$

calcular : $\sqrt{F(a)+F(n)}$

A) 4 *B)* 3 *C)* 5 *D)* 7 *E)* 8

03 Del diagrama :



calcular el valor de:

$$M=\frac{F(4)+G(F(6))}{F(5)+G(F(4))}$$

A) 3 *B)* 8/5 *C)* 6 *D)* 5/3 *E)* 2

04 Indicar la validez de las afirmaciones :

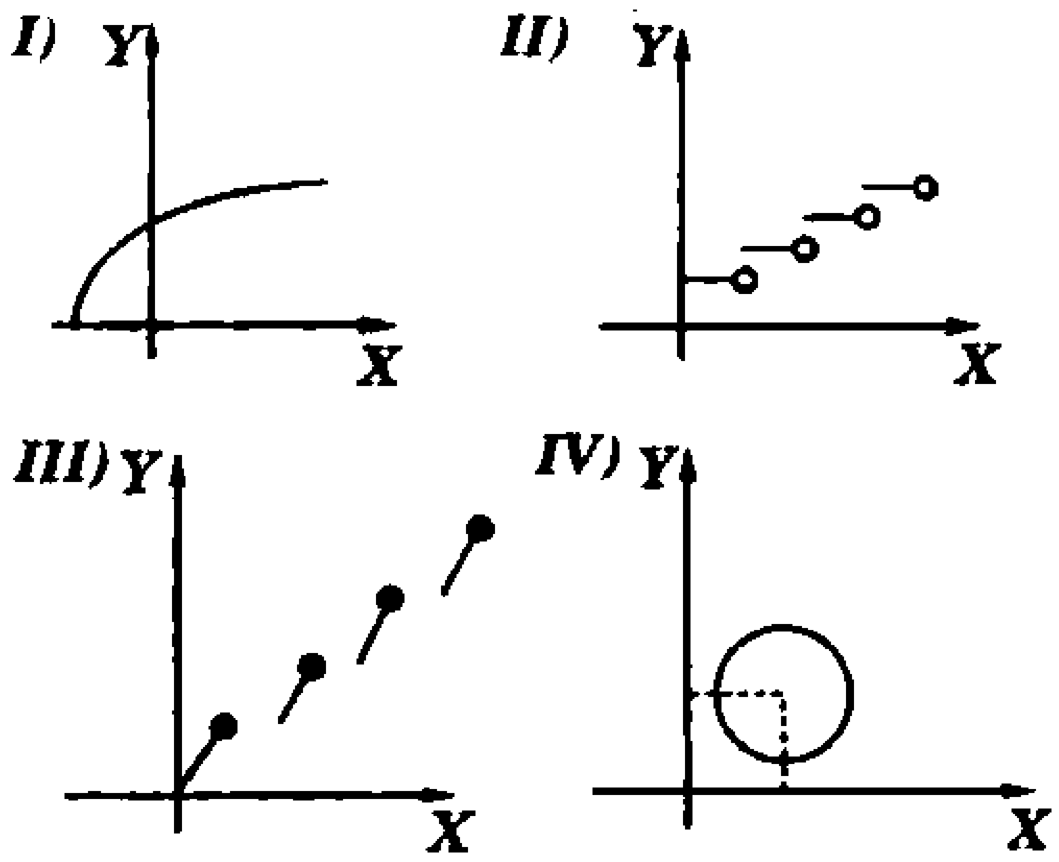
( ) Si $F(x)=x^2-7x+3 \Rightarrow Dom(F)=R$

( ) Si $G(x)=\dfrac{x^3+2}{3x-9} \Rightarrow Dom(G)=R-\{9\}$

( ) Si $H(x)=\sqrt{x-5} \Rightarrow Dom(H)=[5;+\infty[$

A) FVV *B)* VFF *C)* VFV
D) VVF *E)* FVF

05 ¿Cuál de los gráficos no representa una función?



A) Sólo I *B)* Sólo III *C)* III y IV
D) Sólo IV *E)* Sólo II

06 Sea F una función definida en R mediante $F(x)=x$. Si :

$F(a-3b)=5 \wedge F(a+b)=9$ calcular $F(a-b)$.

A) 5 *B)* 8 *C)* 6 *D)* 9 *E)* 7

07 Dada la función :

$$F(x)=\frac{5x-1}{x+3}$$

calcular : $Dom(F)\cap Ran(F)$

A) $R-\{-3\}$ *B)* $R-\{5\}$ *C)* $R-\{-5\}$
D) $R-\{-3;5\}$ *E)* $R-\{5;1\}$

08 Determinar el dominio de F :

$$F(x)=\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}}{2x-10}$$

A) $[3;8]$ *B)* $]3;8[-\{5\}$ *C)* $]3;8[$
D) $[3;5[\cup]5;8]$ *E)* $[3;0]\cup[0;8[$

09 Sea : $F:[-1;4] \Rightarrow R$

definida por : $F(x)=\dfrac{(x-3)^2}{8}-5$

encontrar su rango.

A) $]-3;5]$ *B)* $[-5;-3]$ *C)* $[-5;3)$
D) $[3;5]$ *E)* $]-5;-3[$

10 Dada la siguiente función :

$H(x)=x^2-4x \wedge 3x\in\ ]-6;21[$

además : $Ran(H)=[a;b[$

calcular : $M=7a+2b$

A) –12 *B)* 16 *C)* 14 *D)* 8 *E)* 13

11 Dada la función :

$$H(x)=\frac{3x}{2|x|}+\frac{5|x|}{2x}$$

determine su rango.

A) {4} *B)* {–4; 4} *C)* R–{0}
D) {–2; 2} *E)* –2}

12 Determinar el dominio de :

$$F(x)=\frac{(x^2-2x-15)(x^2-5x-14)}{(x^2-3x-10)(x-7)}$$

A) $\forall x\in R$ *B)* $\forall x\in R-\{5\}$
C) $\forall x\in R-\{7\}$ *D)* $\forall x\in R-\{-2;5\}$
E) $\forall x\in R-\{5;7;-2\}$

13 Determine el dominio de la función : $F(x)=\sqrt{8+\sqrt{3-x}}$

A) $]-\infty;3]$ *B)* $[3;+\infty[$ *C)* $]-\infty;-3]$
D) $]-3;+\infty]$ *E)* $]-3;3[$

14 Sea :

$F(x)=-x^2-4x+5;-1\le x\le 3$

donde : $Ran(F)=[a;b]$

calcular : $a+b$.

A) 8 *B)* 9 *C)* 10 *D)* –8 *E)* –9

15 Dada la función :

$$F(x)=\begin{cases}3x^2-16; -4\le x\le 2\\ 2x+7;\ 2<x\le 4\end{cases}$$

indicar su rango.

A) [–4; 16] *B)*]–4; 32] *C)* [–16;32]
D) [11; 32] *E)* [–16; 4]

16 Sea F la función lineal :

$$F(x)=ax+b$$

Si se cumple : $F(x+1)-2F(x)=x$

calcular : $\frac{a-b}{7}$

A) –1/2 *B)* 1 *C)* 0 *D)* –1 *E)* 2

17 Si F y G son funciones de variable real, definidas por :

$F(x)=3x+5a$

$G(x)=(b+2)x+7$

$F(G(x))=9x-4$

calcular : $F(b)$.

*A)*10 *B)*–13 *C)*–17 *D)*19 *E)*–22

18 Sean las funciones :

$F=\{(x;3x-1)/x^2-4<0\wedge x\in Z\}$

$G=\{(x;x^2)/x^2-5x+4<0\wedge x\in N\}$

calcular : $Ran(G)\cap Ran(F)$.

A) {2; 4} *B)*{2; 3; 4} *C)* {2}
D) {4} *E)* {3}

19 Dado :

$$P(x+1)=\begin{cases}x+5P(x); & x\ge 1\\ -x+3P(x+2); & x<1\end{cases}$$

calcular : $P(1)+P(2)$.

A) 1/14 *B)*–2/14 *C)* –3/14
D)–4/14 *E)* 4/14

20 Una fábrica produce lavadoras y se ha encontrado que cuando el precio por unidad es p dólares el ingreso I (en dólares) es:

$$I=-4p^2+4000p.$$

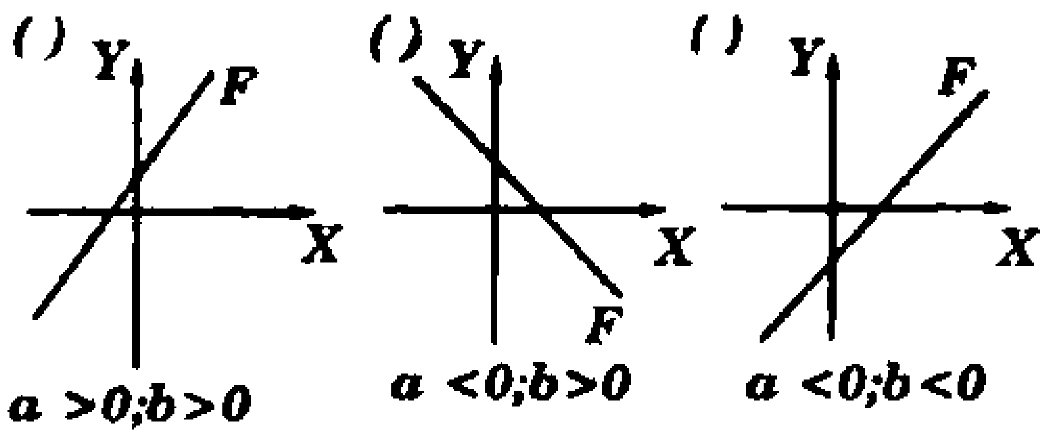
¿Cuál debe ser el precio de cada lavadora para maximizar el ingreso?

A) $ 400 *B)* $ 300 *C)* $ 500
D)$600 *E)* $455

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

FUNCIONES ESPECIALES

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda para : $F(x)=ax+b$

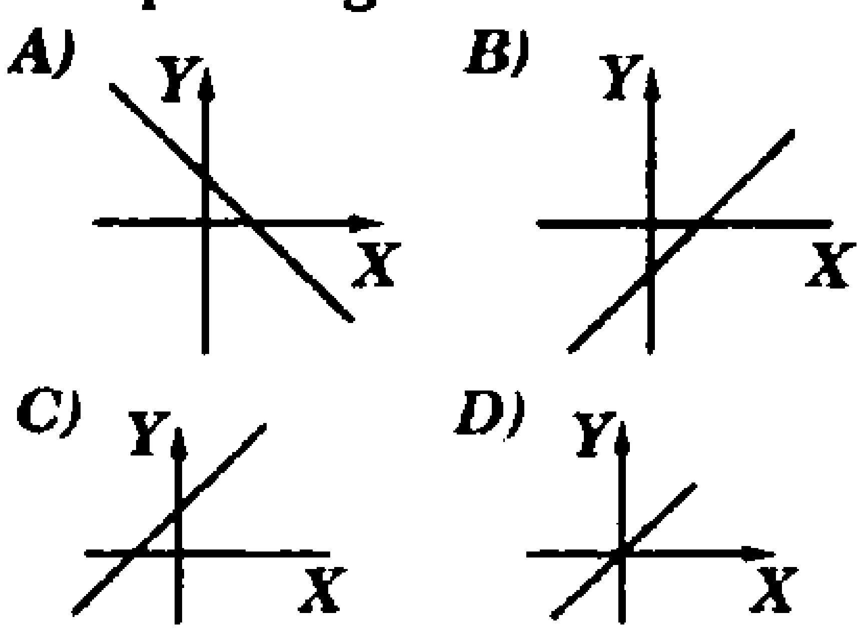


A) FVF *B)* FFV *C)* VVF
D) VVV *E)* FVV

02 Sea la función : $F: R\Rightarrow R$, tal que :

$$F(x)=(7^3-3^7)x+\sqrt[3]{2-\sqrt{7}}$$

Indique su gráfica.



03 Sea F la función tal que $F: R\Rightarrow\{n\}$ además :

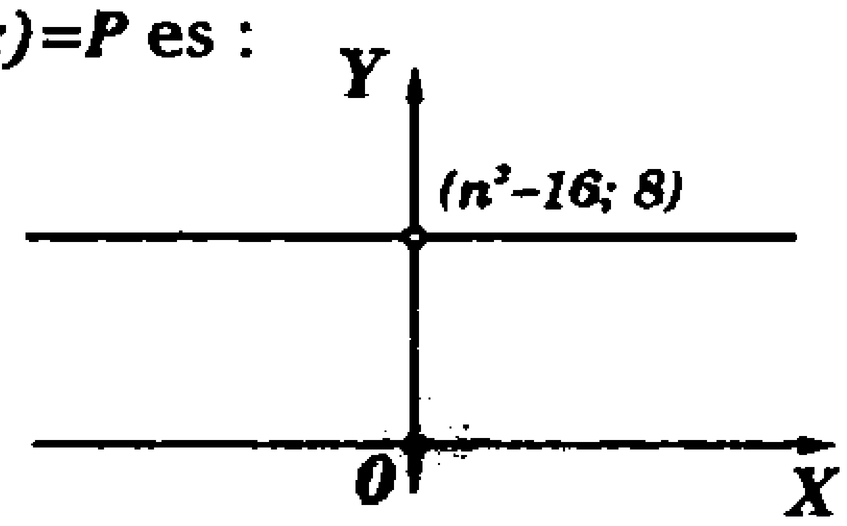
$$\frac{F(200)+F(500)}{2}=7$$

calcular:

$F(5)+F(10)+F(15)+F(20)+...+F(50)$

A) 20 *B)* 85 *C)* 50 *D)* 70 *E)* 35

04 Si la gráfica de la función $F(x)=P$ es :



calcular : $\frac{F(5)+n}{F(109)-2}$

A) 1/32 *B)* 2 *C)* 0 *D)* –1 *E)* 4

05 Sea la función :

$F=\{(x;y)\in R^2/ny=mx+p\}$

Si $(-2;5)\in F$, entonces es verdad que :

A) $5p+m=2n$ *B)* $5n+2m=p$
C) $5n+2p=m$ *D)* $2n+5m=p$
E) $2n+5p=m$

06 Dadas las funciones cuadráticas:

I) $F(x)=3x^2+10x-2$

II) $F(x)=x^2-6x+11$

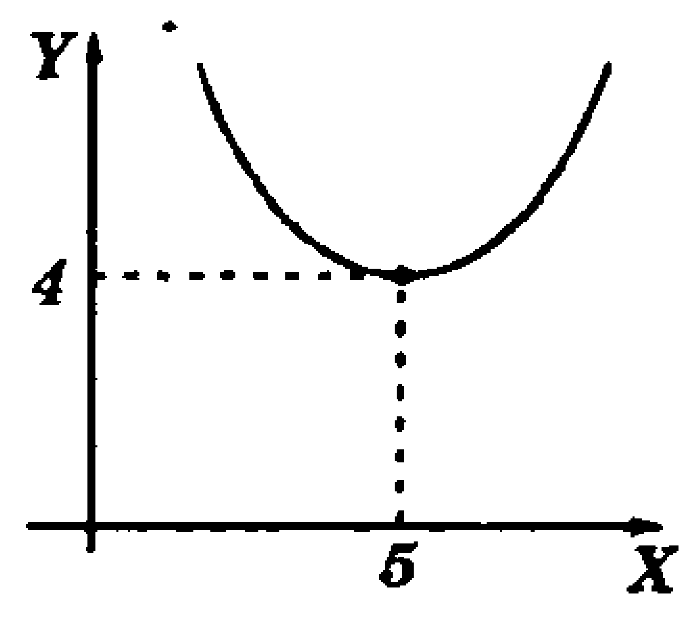
III) $F(x)=4x-3+2x^2$

¿cuántas de estas funciones tienen gráficas de manera que intersecte al eje x en 2 puntos diferentes?

A) Sólo I *B)* Sólo II *C)* II y III
D) I y III *E)* I, II y III

07 Calcular "n", si la gráfica de :

$P(x)=x^2-10x-n$; es:



A) – 25 *B)* –17 *C)* – 29
D) – 21 *E)* – 13

08 Cuál es el valor mínimo que puede asumir la función :

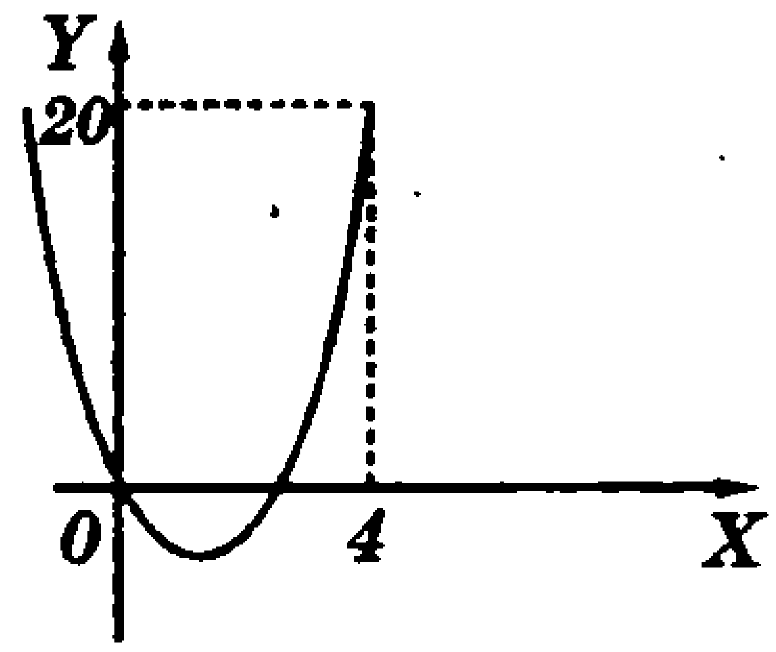
$$F(x)=x^2-6x+2$$

A) – 7 *B)* – 9 *C)* 2 *D)* 5 *E)*– 12

09 Una función cuadrática F tiene valor máximo 8 en el punto de abscisa 1. Determine la regla de correspondencia de $F(x)$ asumiendo que $F(0)=6$.

A) $F(x)=-x^2+4x+6$ *B)* $F(x)=-2x^2+4x+6$
C) $F(x)=-x^2+3x+6$ *D)* $F(x)=-3x^2+5x+6$
E) $F(x)=-3x^2+6$

10 A partir de la gráfica :



determine la regla de correspondencia de *F*, sabiendo que $(3;12)\wedge(4;20)\in F$.

A) $F(x)=2x^2-2x$ *B)* $F(x)=x^2+2x$
C) $F(x)=2x^2+2x$ *D)* $F(x)=2x^2+x$
E) $F(x)=x^2+x$

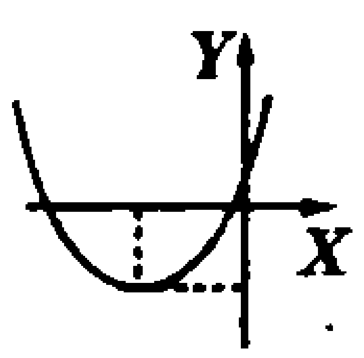
11 Un basquetbolista lanza una pelota desde su cancha hasta el aro de la cancha contraria con una trayectoria $F(x)=120x-x^2$. Calcular el punto máximo de altura que alcanza el balón en el lanzamiento.

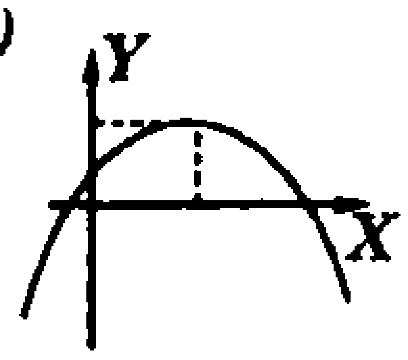
A) 1 800 *B)* 3 600 *C)* 2 400
D) 4 200 *E)* 3 000

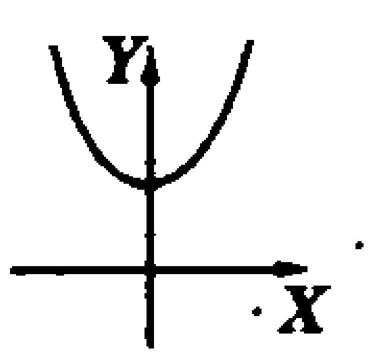
12 Sea la función : $F(x)=|x-5|+k$
Si $(-3;7)\in F$
calcular : $J=\dfrac{F(9)+F(3)}{F(2)}$

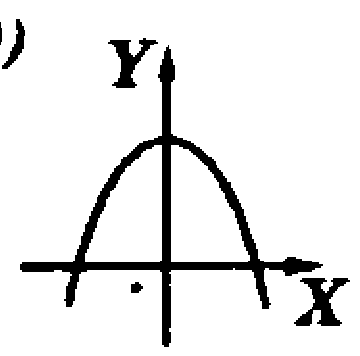
A) 2 *B)* 5 *C)* 4 *D)* 3 *E)* 1

13 Graficar : $F(x)=x^2+6x$

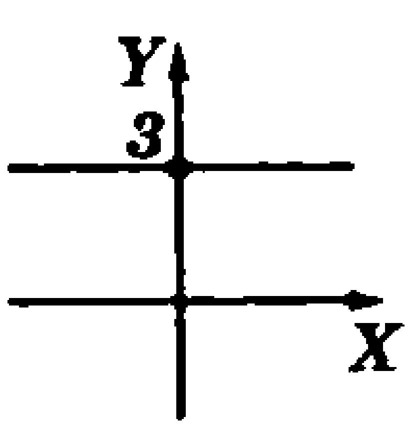
A)


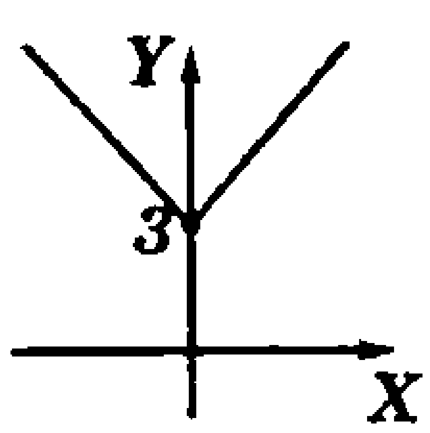
B)


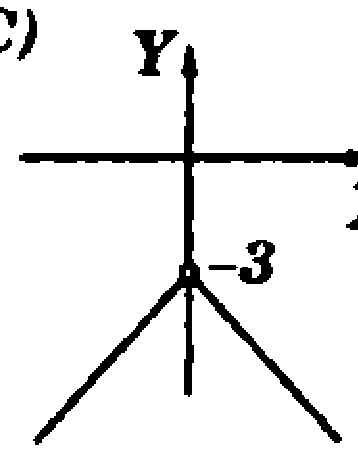
C)


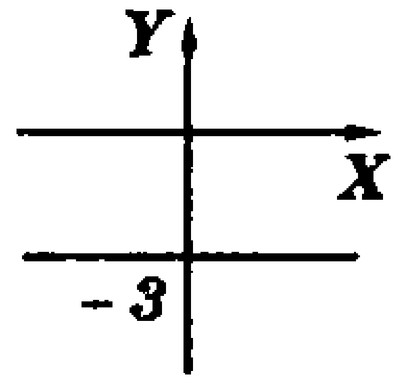
D)


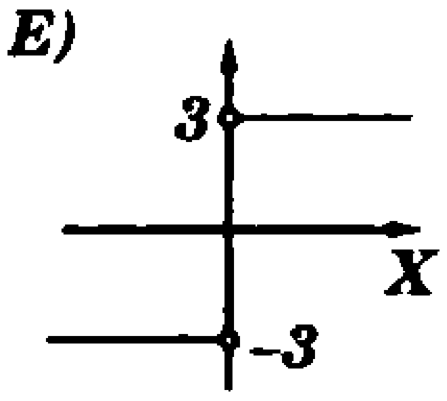
14 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a $y=\dfrac{6x}{|2x|}$?

A)


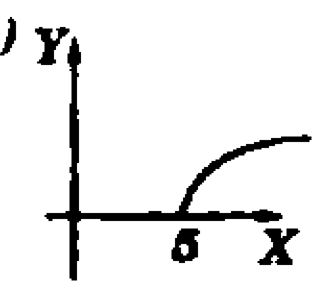
B)


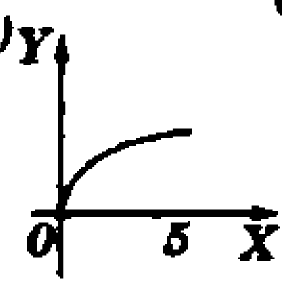
C)


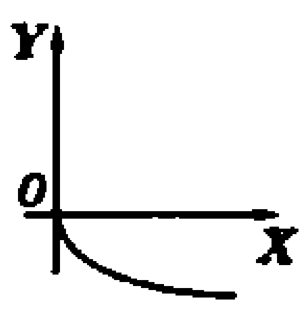
D)


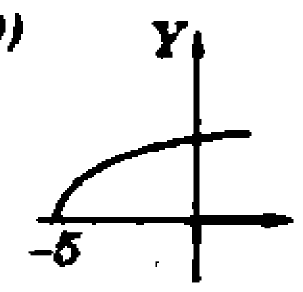
E)


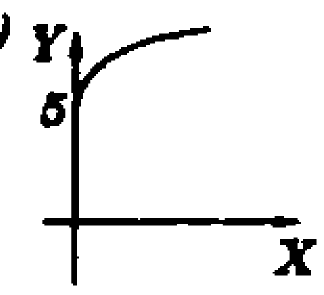
15 Bosquejar la función :
$$F(x)=\sqrt{x+5}$$

A)


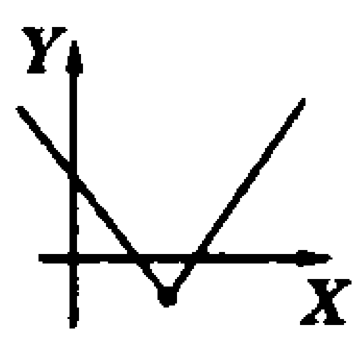
B)


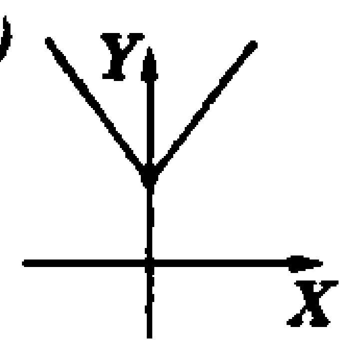
C)


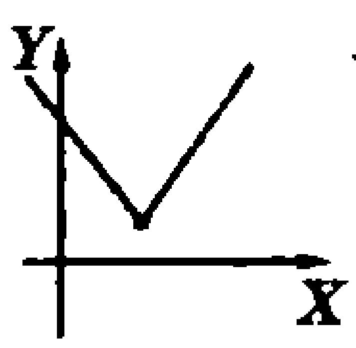
D)


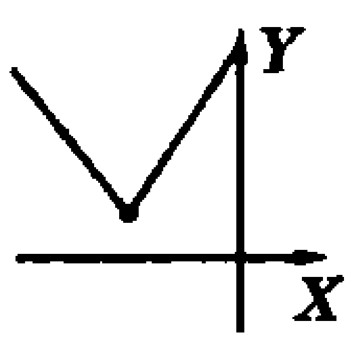
E)


16 Dada la función:
$$F(x+8)=|x+5|+2$$
entonces la gráfica de $F(x)$ es:

A)


B)


C)


D)


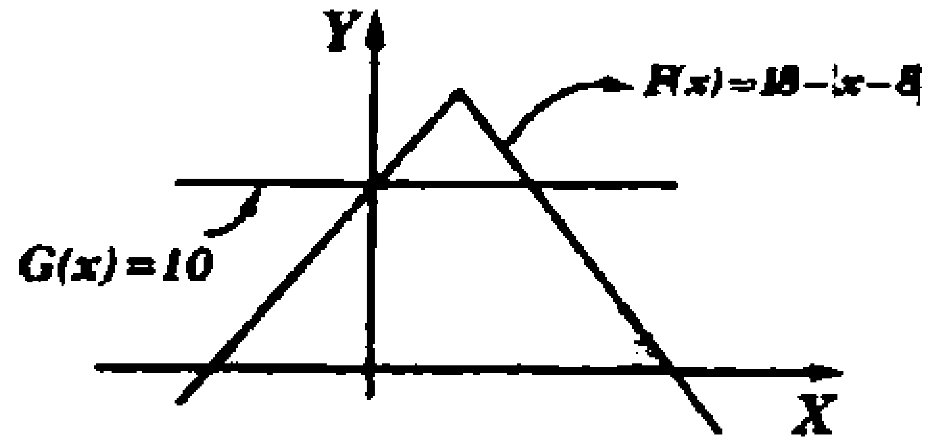
17 Calcular el área de la región limitada por el gráfico de la función: $F(x)=4-|x-1|$ y el eje de las abscisas.

A) $(9u)^2$ *B)* $(5u)^2$ *C)* $(4u)^2$
D) $(8u)^2$ *E)* $(16u)^2$

18 Calcular el área de la región formada por la función identidad, la función : $F(x)=12$ y el eje de las ordenadas.

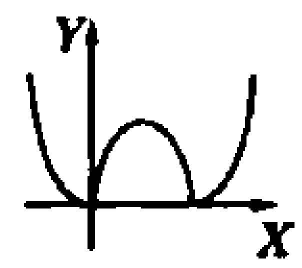
A) 36 u^2 *B)* 144 u^2 *C)* 48 u^2
D) 90 u^2 *E)* 72 u^2

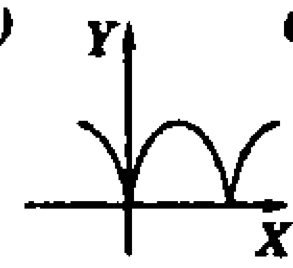
19 Calcular el área de la región sombreada limitada por las funciones indicadas.

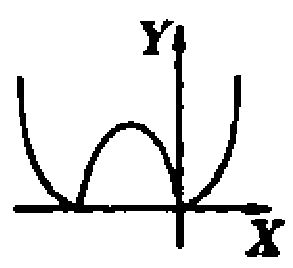


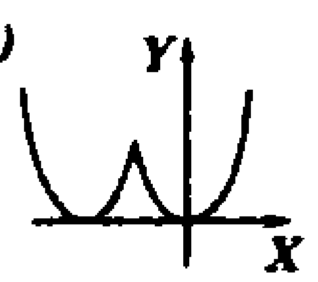
A) 150u^2 *B)* 200u^2 *C)* 75u^2
D) 125u^2 *E)* 260u^2

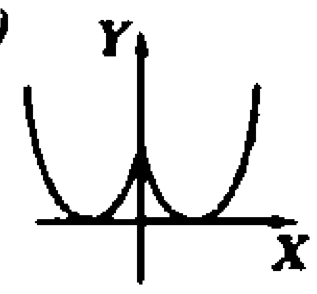
20 Graficar la función :
$$F(x)=|x^2-10x|$$

A)


B)


C)


D)


E)


TAREA DOMICILIARIA

01 Sea *f* una función $f: N\rightarrow N$, tal que : $f(x)=4x-1$
¿Cuántas de las afirmaciones son verdaderas?

1) $f_{(f(3))}=f_{(12)}-3$
2) $f_{(5)}=f_{(2)}+12$
3) $f_{(2a+3b)}=2f_{(a)}+f_{(b)}$
4) $f_{(f(2))}=27$

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5

02 Sea *f* la función definida en *R* por la ecuación $f_{(x+3)}=x+7$, calcular $f_{(3/2)}$

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{11}{2}$ *C)* $\frac{13}{2}$ *D)* $\frac{15}{2}$ *E)* $\frac{17}{2}$

03 Sea : $A=\{1;2;4\}$ y f una función definida en *A* por :
$$f=\{(1;3),(2;a),(a+1;2),(1;b-1)\}$$
Hallar : $f_{(1)}-f_{(2)}+f_{(4)}$

A) 6 *B)* 5 *C)* 4 *D)* 3 *E)* 2

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)E	2)A	3)A	4)C	5)D	6)E	7)D	8)D	9)B	10)C
11)B	12)E	13)A	14)D	15)C	16)C	17)E	18)B	19)D	20)C

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)C	2)E	3)D	4)B	5)B	6)D	7)C	8)A	9)B	10)E
11)B	12)A	13)A	14)E	15)D	16)C	17)C	18)E	19)E	20)A

LOGARITMOS

CAPITULO 089

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer la séptima operación de la matemática, su definición, sus propiedades y sus diversas aplicaciones en la física, química, biología, estadística, etc.*

* *Notar la trascendencia de los sistemas de logarimos más usuales:*

*Los logaritmos decimales, vulgares o de BRIGGS cuya base es el número real **10**.*

Los logaritmos naturales , hiperbólicos o de NEPER cuya base es el número trascendente "e".

INTRODUCCION :

Basándose en las propiedades de los logaritmos, se construyó una sencilla máquina de calcular: la regla de cálculo. Neper, descubridor de los logaritmos, fue el que concibió la idea de la regla de cálculo en el siglo *XVI*. En el año ***1 671***, Gunter construye la primera regla de cálculo con divisiones proporcionales a los logaritmos. La reglilla, en cambio, se debe a Seth Pastridge (***1 671***). Lenoir Granet elaboró en ***1 820*** el prototipo de las reglas de cálculo rectilínea, compuesto de una regla provista de ranura, en la que se puede deslizar una reglilla. En cambio, a Mannheim (***1 851***) se debe el funcionamiento de las escalas y la aplicación del cursor.

La regla de cálculo está basada en la propiedad de los logaritmos, sobre todo en la que expresa: «el logaritmo de un producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de esos factores». Con ella pueden efectuarse multiplicaciones, divisiones, proporciones, cuadrados, raíces cuadradas y cúbicas, superficies de círculos y cubos, potencias de orden superior, ecuaciones de primero, segundo, tercero, cuarto y quinto grado, además de las bicuadradas. Utilizando las escalas del revés de la regla móvil, pueden calcularles los logaritmos de los números y todas las líneas trigonométricas.

Sus aplicaciones son innumerables. Entre ellas, el contenido de un depósito cilíndrico, la escala de un dibujo, el peso de una viga cuadrada, el cálculo de una placa de cemento armado, de una columna de fundición, etcétera.

Este elemento matemático es de gran utilidad para comerciantes, contratistas de obras, carpinteros, contables, banqueros, técnicos electricistas e ingenieros.

EL LOGARITMO

El logaritmo de un número positivo *"N"* en una base *"b"* positiva y diferente de la unidad; es igual al exponente real *"x"* a que debe elevarse dicha base, para obtener el número dado inicialmente *("N")*.

$$Log_b N = x$$

- N → Número $(N>0)$
- x → Logaritmo o exponentes
- b → Base $(b>0$ y $b \neq 1)$

Por definición :

$$\boxed{Log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N}$$

EJEMPLOS :

* $Log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

* $Log_{\sqrt[3]{5}} 5 = 3$ porque $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$

NOTA :

Para hallar el logaritmo de ciertos números en forma práctica, hay que hacerse la siguiente pregunta: ***¿A qué exponente hay que elevar la base para obtener el número dado?***, ese exponente es el logaritmo.

EJEMPLO 1 :

Calcular : $Log_2 32$

RESOLUCIÓN :

¿A qué exponente hay que elevar la base ***2*** para obtener el número ***32***?, hay que elevar a la quinta o sea ***5***.

$$\Rightarrow Log_2 32 = 5$$

EJEMPLO 2 :

Calcular : $Log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{27}{8}\right)$

RESOLUCIÓN :

$$Log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{27}{8}\right) = y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \frac{27}{8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow y = -3$$

EJEMPLO 3 :

Calcular : $Log_{\sqrt[\sqrt{5}]{5}} \sqrt{5}^{\sqrt{5}}$

RESOLUCIÓN :

$$Log_{\sqrt[\sqrt{5}]{5}} \sqrt{5}^{\sqrt{5}} = y \Leftrightarrow \sqrt[\sqrt{5}]{5}^{\,y} = \sqrt{5}^{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{y}{\sqrt{5}}} = 5^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL

$$\boxed{b^{Log_b N} = N} \qquad * \; 7^{Log_7 7} = 7$$

$$\boxed{b^{Log_m n} = n^{Log_m b}} \qquad * \; 9^{Log_3 5} = 5^{Log_3 9} = 5^2 = 25$$

OBSERVACIONES :

I) El logaritmo de ***"1"*** en cualquier base vale ***"0"*** y el logaritmo de la base es igual a ***"1"***, en efecto :

$$\boxed{Log_b 1 = 0} \quad ; b>0 \text{ y } b \neq 1$$

$$\boxed{Log_b b = 1} \quad ; b>0 \text{ y } b \neq 1$$

II) El logaritmo de un producto dado es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\boxed{Log_b(MN) = Log_b M + Log_b N}$$

$* \; Log20 = Log2 \times 10 = Log2 + Log10$

III) El logaritmo de un cociente indicado es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, es decir :

$$\boxed{Log_b\left(\frac{M}{N}\right) = Log_b M - Log_b N}$$

$$* \; Log_2\left(\frac{8^5}{4^7}\right) = Log_2 8^5 - Log_2 4^7$$

IV) El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, es decir :

$$\boxed{\overset{\frown}{Log_b M^n} = n \, Log_b M \ldots \left(\begin{matrix}\text{PROPIEDAD}\\ \text{DEL SOMBRERO}\end{matrix}\right)}$$

$* \; Log_3 81^7 = 7 \, Log_3 81 = 7 \times 4 = 28$

V) $\boxed{Log_b N = \frac{1}{Log_N b}} \qquad * \; Log_3 5 = \frac{1}{Log_5 3}$

VI) $\boxed{Log_{b^n} a^m = \frac{m}{n} Log_b a} \qquad * \; Log_{3^5} 7^2 = \frac{2}{5} Log_3 7$

VII) $\boxed{Log_{b^n} b^m = \frac{m}{n}} \qquad * \; Log_{2^5} 2^{15} = \frac{15}{5} = 3$

VIII) $\boxed{Log_b a = Log_{b^m} a^m = Log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{a}}$

$Log_{\sqrt[3]{3}} 81 = Log_{\sqrt[3]{3}^3} 81^3 = 3 Log_3 81 = 3 \times 4 = 12$

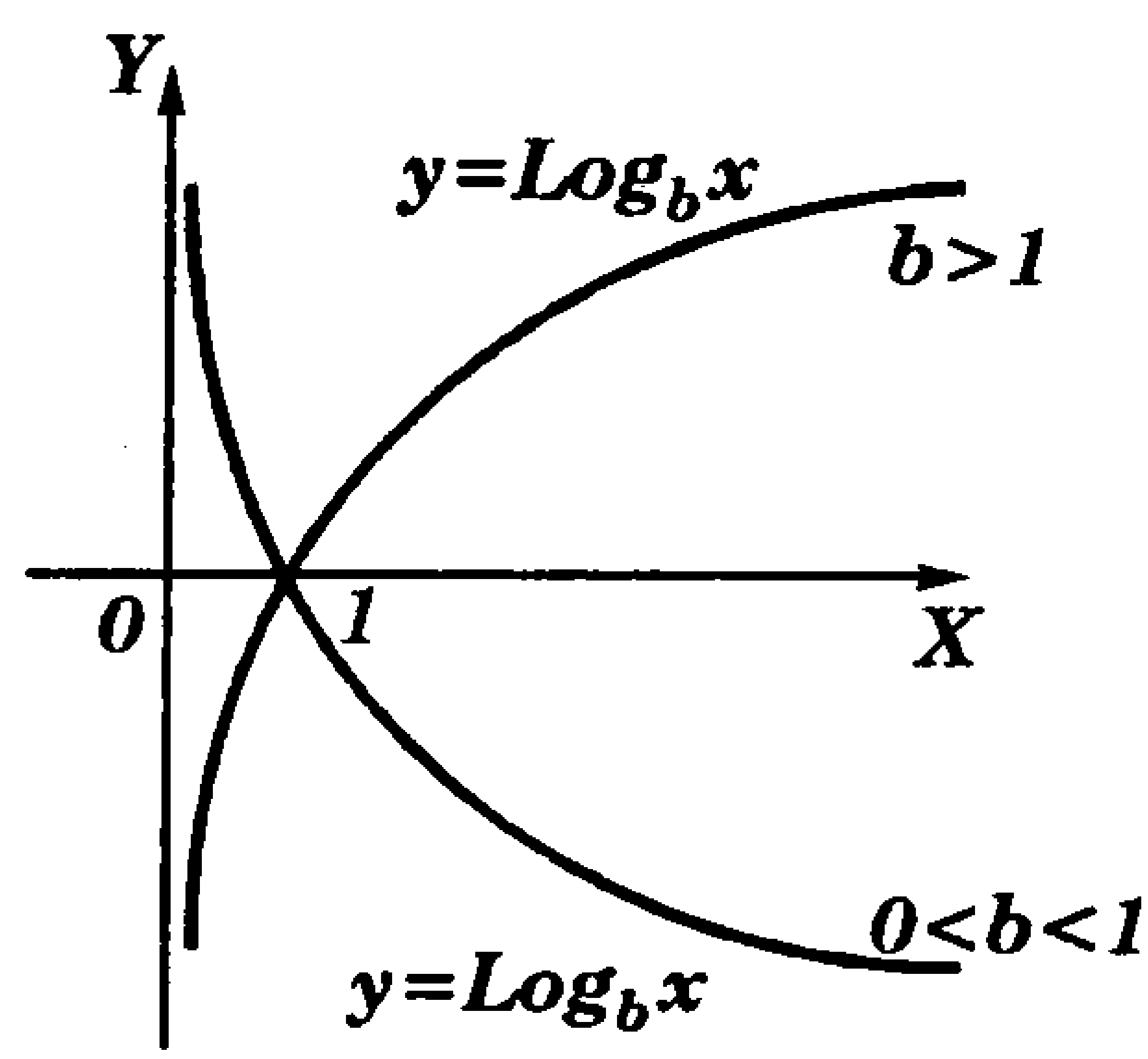
IX) $\boxed{CoLog_b N = -Log_b N}$

X) $\boxed{Anti \; Log_b N = b^N}$

XI) Cambio de Base : $\boxed{Log_b N = \frac{Log_a N}{Log_a b}}$

XII) Teniendo en cuenta las gráficas de la función logaritmo :

$$y = Log_b x \; ; (b>0 \wedge b \neq 1)$$



Deducimos las siguientes propiedades :

a) Existen infinitos sistemas, donde cada valor de b ***(b>0 ∧ b ≠ 1)*** es un sistema de logaritmos.

b) No existen logaritmos de números negativos en el campo de los números reales, pero sí en el campo de los números complejos.

XIII) REGLA DE LA CADENA :

$$\boxed{Log_b a Log_a c Log_c d Log_d e = Log_b e}$$

XIV) SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES :

El sistema de los logaritmos decimales es el más utilizado, sobre todo en múltiples cálculos aritméticos, y tiene como base al número ***10.*** Para el cálculo de los logaritmos en éste sistema se ha elaborado, desde hace mucho tiempo atrás, diferentes TABLAS LOGARÍTMICAS; las primeras con cuatro cifras decimales de aproximación y las últimas hasta con ocho cifras.

En la actualidad, éstas tablas logarítmicas han sido desplazadas y ampliamente aventajadas por las calculadoras electrónicas y computadoras personales; donde es posible calcular el logaritmo

decimal de cualquier número positivo y con una cantidad deseada de cifras decimales de aproximación.

También llamado sistema de logaritmos vulgares o de Briggs, aquí la base *"b"* es igual a *"10"*.

$$\boxed{Log_{10}N = LogN} \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} \text{CONVENCIÓN} \\ \text{MATEMÁTICA} \end{pmatrix}$$

* $Log_{10}2 = Log\,2 = 0,30103......$
* $Log3 = 0,477125......$
* $Log7 = 0,845098.....$

EN GENERAL :

$$LogN = \underbrace{\underline{\text{Parte Entera}}}_{\text{Característica}} \,,\, \underbrace{\underline{\text{Parte Decimal}}}_{\text{Mantisa}}$$

TEOREMA :

Sea todo $N>1$; el número de cifras es igual a la característica más uno.

Es decir :

$$\begin{pmatrix} \text{Número de} \\ \text{cifras } N \end{pmatrix} = \text{característica} + 1$$

SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES

También llamado sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos, aquí la base *"b"* es igual al número trascendente $e=2,7182...$

$$\boxed{Log_e x = Lnx}$$

ECUACIONES LOGARITMICAS

a) Si : $Log_b x = a$

Entonces : $x > 0 \wedge b>0 \wedge b \neq 1 \wedge b^a = x$

b) Si : $Log_b x_1 = Log_b x_2$

Entonces :

$$x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \wedge b>0 \wedge b \neq 1 \wedge x_1 = x_2$$

INECUACIONES LOGARITMICAS

a) Siendo : $0<b<1 \wedge x_1>0 \wedge x_2>0$

* Si : $Log_b x_1 > Log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$
* Si : $Log_b x_1 < Log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$
* Si : $Log_b x > a \Rightarrow x < b^a$

b) Siendo : $b>1 \wedge x_1>0 \wedge x_2>0$

* Si : $Log_b x_1 > Log_b x_2 \Rightarrow x_1 > x_2$
* Si : $Log_b x_1 < Log_b x_2 \Rightarrow x_1 < x_2$
* Si : $Log_b x > a \Rightarrow x > b^a$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Siendo, $a>0 \wedge a \neq 1$, se define la FUNCIÓN LOGARITMO así : $y = G(x) = Log_a x$

cuyo dominio de definición es :

$$Dom_{(Log)} = R^+ = \langle 0;+\infty \rangle$$

La gráfica cartesiana de la función *LOGARITMO* es la reflexión de la gráfica de la *EXPONENCIAL* con respecto a la recta $y=x$ (y viceversa). Generalizando, la función *LOGARITMO* : $y = G(x) = Log_a x$ es la *INVERSA* de la función *EXPONENCIAL* :

$$\boxed{y = F(x) = exp_a(x)} \text{ con } a>0 \wedge a \neq 1$$

de donde :

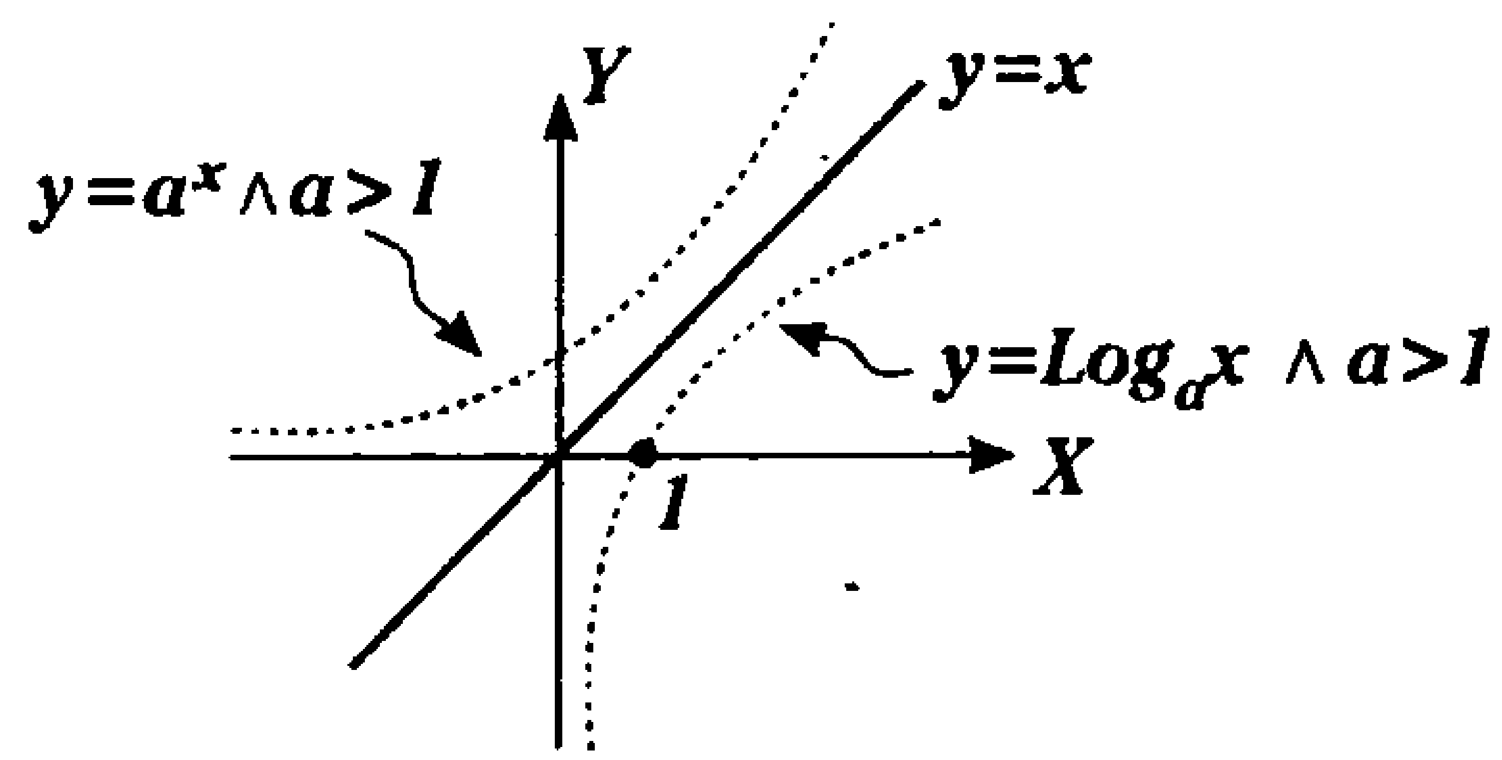
$$Dom_{(Log)} = Ran_{(exp)} = R^+ = \langle 0;+\infty \rangle$$
$$Ran_{(Log)} = Dom_{(exp)} = R$$

I) CASO : $a > 1$

Cuando $a > 1$, la gráfica cartesiana de la función LOGARITMO siempre guarda la misma forma que la exponencial.

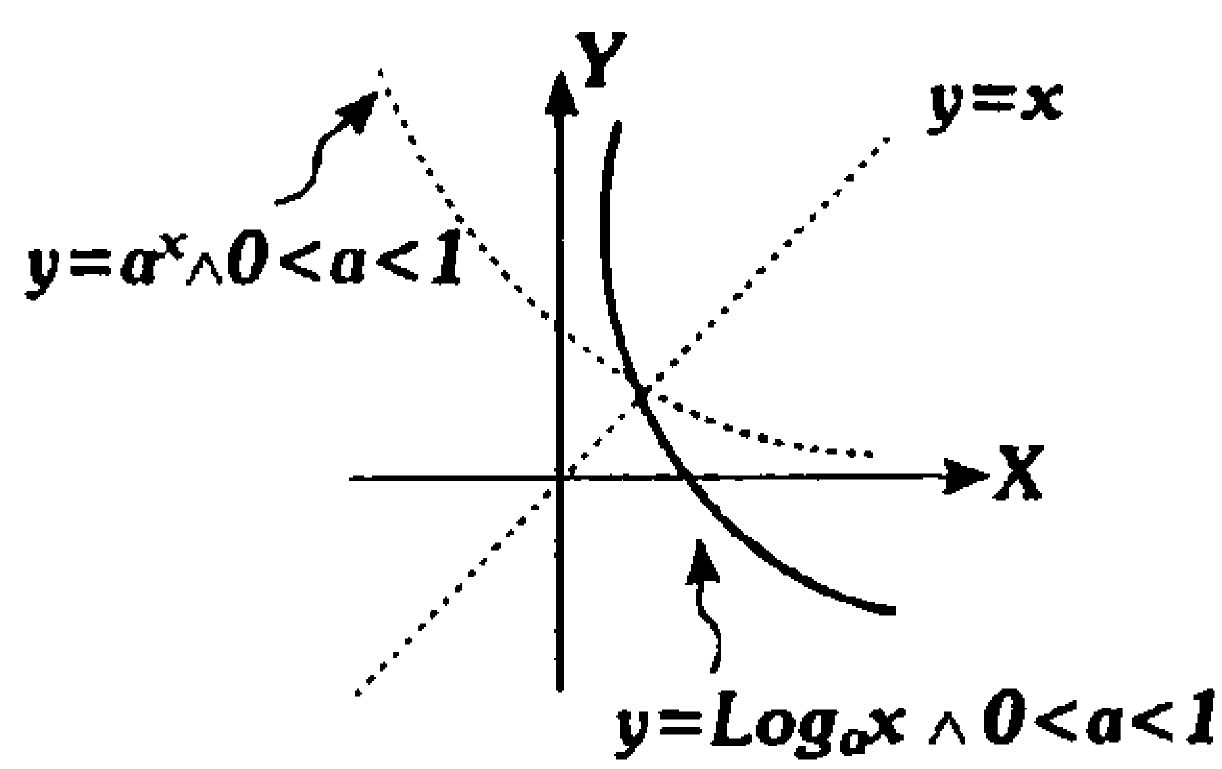
CARACTERÍSTICA :

- Es una función creciente, $\forall\, x \in Dom_{(Log)} = R^+$
- Es una función inyectiva (Posee inversa).



II) CASO : $0 < a < 1$

La gráfica se comporta de la siguiente forma :



CARACTERÍSTICAS :

- Es una función decreciente, $\forall\, x \in Dom_{(Log)} = R^+$
- Es una función inyectiva y posee inversa.

* En ambos casos se puede observar que la función LOGARITMO es continua, en todo su dominio.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

El valor de : $2^{2+Log_2 3}+3^{2+Log_3 4}$ es:

A) 48 B) 12 C) 27 D) 36 E) 63

RESOLUCIÓN:

Desarrollando cada término por separado :

$$2^2\times 2^{Log_2 3}+3^2\times 3^{Log_3 4}$$

Aplicando la propiedad *I* : $4\times 3+9\times 4=48$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2:

Reducir : $Log_{\sqrt[3]{3}}\sqrt[\sqrt{3}]{3}-3^{Log_4 2}$

A) 1 ***B)*** $\sqrt{3}$ ***C)*** $3\sqrt{3}$ ***D) 0*** ***E)*** $-\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

Aplicando la propiedad *VIII :*

$$Log_{\sqrt[3]{3}^3}\sqrt[\sqrt{3}]{3}^3-3^{Log_{\sqrt{4}}\sqrt{2}}=Log_3 3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}-3Log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando la propiedad *I :*

$$\frac{3}{\sqrt{3}}-3^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\frac{3-\sqrt{3}^{\;2}}{\sqrt{3}}=\frac{0}{\sqrt{3}}=0$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Calcular : $\frac{1+Log_2 3}{1-Log_2 3}+\frac{1+Log_2 3}{1-Log_2 3}$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN:

Cambiando todo a base *10* :

$$\frac{1+\frac{Log3}{Log2}}{1-\frac{Log3}{Log2}}+\frac{1+\frac{Log2}{Log3}}{1-\frac{Log2}{Log3}}$$

$$=\frac{\frac{Log2+Log3}{Log2}}{\frac{Log2-Log3}{Log2}}+\frac{\frac{Log3+Log2}{Log3}}{\frac{Log3-Log2}{Log3}}$$

$$=\frac{Log2+Log3}{Log2-Log3}+\frac{Log2+Log3}{-(Log2-Log3)}$$

$$=\frac{Log2+Log3}{Log2-Log3}-\frac{Log2+Log3}{Log2-Log3}=0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

Calcular : $343^{Log_7 81^{Log_{77}2}}$

A) 7 B) 49 C) 16 D) 25 E) 1

RESOLUCIÓN :

Transformando adecuadamente :

$$(7^3)^{Log_7 81^{Log_{27}2}}=\left(7^{Log_7 81^{Log_{27}2}}\right)^3$$

$$=\left(81^{Log_{27}2}\right)^3=\left(2^{Log_{27}81}\right)^3$$

$$=\left(2^{Log_{3^3}3^4}\right)^3=\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^3=2^4=16$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular : $\frac{1}{Log_a bc+1}+\frac{1}{Log_b ac+1}+\frac{1}{Log_c ab+1}$

A)abc B) 1 C) 0 D) a E) 3

RESOLUCIÓN :

Considerando la propiedad *II* :

$$\frac{1}{Log_a bc+Log_a a}+\frac{1}{Log_b ac+Log_b b}+\frac{1}{Log_c ab+Log_c c}$$

$$=\frac{1}{Log_a abc}+\frac{1}{Log_b abc}+\frac{1}{Log_c abc}$$

$$=Log_{abc}a+Log_{abc}b+Log_{abc}c$$

$$=Log_{abc}abc=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6:

$$Log_4 anti\,log_4 colo_4 log_2 Log_{\sqrt{3}}9$$

A) 1 ***B) 0*** ***C)*** $\frac{1}{2}$ ***D)*** $-\frac{1}{2}$ ***E) 23***

RESOLUCIÓN:

Por partes y empezando por la derecha :

* $Log_{\sqrt{3}}9=Log_{\sqrt{3}^2}9^2=Log_3 3^4=4$

Luego: $Log_4=anti\,log_4=co\,log_4=Log_2 4$ → 2

Ahora :

$$colog_4 2=-Log_4 2=-Log_{2^2}2^1=-\frac{1}{2}$$

Luego:

$$Log_4\,anti\,log_4\left(-\frac{1}{2}\right)=Log_4 4^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7:

Si : $Log2=0,30103$

¿Cuántas cifras tiene el producto: $5^{20}\times 2^{100}$?

A) 41 B) 42 C) 43 D) 44 E) 45

RESOLUCIÓN:

* Sea: $N = 5^{20} \times 2^{100}$

* Tomando logaritmos a los 2 miembros :

$Log\,N = Log\,5^{20} + Log\,2^{100}$

$\Rightarrow Log\,N = 20\,Log\,5 + 100\,Log\,2$

$\Rightarrow Log\,N = 20(Log10 - Log\,2) + 100\,Log\,2$

$\Rightarrow Log\,N = 20 - 20\,Log\,2 + 100\,Log\,2$

$\Rightarrow Log\,N = 20 + 80\,Log\,2$

$\Rightarrow Log\,N = 20 + 80(0,30103)$

$\Rightarrow Log\,N = 44,0824 \Rightarrow N = 10^{44,0824}$

* Se deduce que $N=5^{20}\times 2^{100}$ tiene $44+1=45$ cifras.

RPTA : "E"

PROBLEMA 8:

Si : $6^{Log_2 3}+10^{Logx}= 3^{Log_2 6}+Log_{\sqrt{x}}x$

El valor de x es :

A) 4 B) 5 C) 2 D) 1 E) 3

RESOLUCIÓN:

Aplicando propiedades :

$$3^{Log_2 6}+x=3^{Log_2 6}+Log_{\sqrt{x}^2}x^2$$

$$\Rightarrow x=Log_x x^2 \Rightarrow x=2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9:

El valor de :

$$a^{Log_a(0+1)}+a^{Log_a(1+2)}+a^{Log_a 5}+...+a^{Log_a(99+100)}$$

es :

A) 10000 B) 5050 C) 10100
D) 20000 E) 4950

RESOLUCIÓN:

Recordando : $b^{Log_b N}=N$

Luego :

$S=(0+1)+(1+2)+(2+3)+...+(99+100)$

$\Rightarrow S=\underbrace{1+3+5+.........}_{100\ términos}=100^2=10000$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

Dada la siguiente ecuación.

$$xLog\,4 + LogLog3 = LogLog\,81$$

El valor de x es :

A) 0 B) 1 C) 4 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:

$$Log4^x + Log\,Log3 = Log\,Log81$$

$\Rightarrow Log(4^x \times Log3) = Log(Log3^4)$

$\Rightarrow 4^x\,Log3 = 4\log 3$

$\Rightarrow 4^x = 4 \Rightarrow x = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 11:

Si : $\begin{cases} x-y=Logx \\ 10^x-10^y=x-1 \end{cases}$

Calcular : $10^x + 10^y$

A) $x-1$ B) $x+1$ C) x
D) y E) $x+y$

RESOLUCIÓN:

De la primera ecuación :

$$10^{x-y}=x \Rightarrow \frac{10^x}{10^y}=x \Rightarrow 10^x=x10^y$$

* Reemplazando en la segunda ecuación :

$x10^y-10^y = x-1 \Rightarrow 10^y(x-1) = x-1$

$\Rightarrow 10^y=1$ y $10^x = x$

* Luego: $10^x + 10^y = x + 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12:

Si :

$Log_2 4+Log_2 4^2+...+Log_2 4^n=Log_2 4^6$

El valor de "n" es :

A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

Aplicando la propiedad *III* :

$$Log_2 4^1\times 4^2\times 4^3...4^n=Log_2 4^6$$

$$\Rightarrow Log_2 4^{1+2+3+...+n}=Log_2 4^6$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=6 \Rightarrow n(n+1)=12=3\times 4$$

$n=3$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Hallar las raíces de la siguiente ecuación : $\sqrt{Logx}=Log\sqrt{x}$

A) $x_1=1$; $x_2=10^4$
B) $x_1=10^{-2}$; $x_2=10^2$
C) $x_1=10^{-10}$; $x_2=10^3$
D) $x_1=10^{-1}$; $x_2=10^2$
E) $x_1=1$; $x_2=10^5$

RESOLUCIÓN:

Transformando y elevando al cuadrado :

$$\sqrt{Logx}^2=\left(\frac{1}{2}Logx\right)^2 \Rightarrow Logx=\frac{1}{4}(Logx)^2$$

$\Rightarrow 0=(Logx)^2-4\,Logx$

$\Rightarrow 0=Logx\,(Logx-4)$

$\Rightarrow Log\,x=0$ ó $Log\,x=4$

$\Rightarrow x=10^0=1 \vee x=10^4$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14:

Si : $Logx^{Log\,x}+Logx-6=0$

Hallar el producto de las dos soluciones :

A)0,001 B)0,1 C)0,01 D)10 E)100

RESOLUCIÓN:

$(Log\,x)\,(Log\,x) + Log\,x - 6=0$

$(Log\,x)^2 + Log\,x - 6=0$

$Log\,x \quad +3$

$Log\,x \quad -2$

$(Log\,x + 3)\,(Log\,x-2)=0$

* $Log\,x=-3 \Rightarrow x=10^{-3}$ (1ra. solución)

* $Log\,x=2 \Rightarrow x=10^2$ (2da. solución)

Producto de solución es :

$$10^{-3}\times 10^2 = 10^{-1}=0,1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15:

Resolver :

$$\sqrt{x+Log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}=\sqrt{Log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

A) $\frac{2}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN:

Aplicando propiedades se tendrá:

$$x+Log_2 2^{\frac{3}{8}}=Log_2 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow x+\frac{3}{8}=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{8}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16:

Si z es una solución de la ecuación:

$$Log_4[Log_3(Log_2 x)]=0$$

entonces el valor de z^2+2z+1 es:

A) 70 B) 72 C) 80 D) 81 E) 84

RESOLUCIÓN:

Por definición :

$Log_3(Log_2 x)=4^0=1$

$\Rightarrow Log_2 x=3^1=3 \Rightarrow x=2^3=8$

Piden : $8^2+2(8)+1=81$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17:

Hallar un número tal que el doble de su logaritmo en base *10* exceda en una unidad al logaritmo en base *10* de dicho número aumentado en *11/10*.

A) 6 B) 11 C) 22 D) 33 E) 44

RESOLUCIÓN :

Sea "*x*" el número :

Por dato :

$$Log\,x^2 - Log\left(\frac{10x+11}{10}\right)=1$$

$$\Rightarrow Log\,x^2 - Log(10x+11)+\underbrace{Log10}_{1}=1$$

$$\Rightarrow Log\,x^2 - Log(10x+11)=0$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{x^2}{10x+11}\right)=0;\ \text{de la igualdad logarítmica}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{10x+11}=1$$

$$\Rightarrow x^2-10x-11=0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=11 \vee x=-1$$

Como : $x>0 \Rightarrow x=11$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18:

Dado el siguiente sistema :

$$\begin{cases} a^{Log(ax)}=b^{Log(by)};(x\neq y,\ a>0,\ b>0) \\ x^{Log\,x}=y^{Log\,y} \end{cases}$$

Determinar el valor de $x-y$:

A) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ *B)* $\frac{a^2-b^2}{ab}$ *C)* $\frac{b-a}{ab}$

D) $\frac{a-b}{ab}$ *E)* $\frac{b^2-a^2}{ab}$

RESOLUCIÓN:

Tomando logaritmo en base *10* a las ecuaciones dadas :

I) $(Log\,x)^2=(Log\,y)^2$; como $x\neq y$

$$\Rightarrow Log\,x=-Log\,y \Rightarrow x=\frac{1}{y}........(a)$$

II) $Log(ax)\,Log\,a=Log(by)\,Log\,b$

$$Log^2a+Log\,xLog\,a=Log^2b+Log\,yLog\,b$$

Por (a):

$$Log^2a-Log\,yLog\,a=Log^2b+Log\,yLog\,b$$

efectuando :

$$Log\,y=\frac{\cancel{(Loga+Logb)}(Loga-Logb)}{\cancel{(Loga+Logb)}}=Log\,\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow\left\{y=\frac{a}{b}\ \wedge\ x=\frac{b}{a}\right\}\Rightarrow x-y=\frac{b^2-a^2}{ab}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19:

Resolver : $x^{\frac{Log_a(Log_ax)}{Log_ax}}-b=0$; e indicar el valor de "*x*".

A) a B) a^a *C) b D)* a^b *E)* b^b

RESOLUCIÓN :

Transponiendo : $x^{\frac{Log_aLog_a^x}{Log_ax}}=b$

Es evidente, que para reducir esta expresión debemos "bajar" el exponente, esto se consigue aplicando logaritmo en ambos miembros. Escogeremos como base a "*a*" por ser esta la base que más se repite en el problema :

$$Log_ax^{\frac{Log_a(Log_ax)}{Log_ax}}=Log_ab$$

$$\Rightarrow\frac{Log_a(Log_ax)=}{Log_ax}Log_ax=Log_ab$$

$$Log_a(Log_ax)=Log_a\,b$$

$$\Rightarrow Log_ax=b\Rightarrow x=a^b$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20:

Resolver : $\left[\frac{b}{Log_xa}\right]^{Log_ax}=b^{2b}$

A) b^a *B)* $b^{\sqrt{a}}$ *C)* a^b *D)* $a^{\sqrt{b}}$ *E)* $a^{\sqrt{ab}}$

RESOLUCIÓN:

Por logaritmos recíprocos se sabe que : $\frac{1}{Log_ax}=Log_xa$

Lo cual nos permite transformar la ecuación en : $\left[b\,Log_ax\right]^{Log_ax}=b^{2b}$

Multiplicando por "*b*" los exponentes de ambos miembros de la ecuación con la finalidad de formar una ecuación reducible se tendrá :

$$\left[b\,Log_ax\right]^{b\,Log_ax}=b^{2b^2}=[b^2]^{b^2}$$

Por comparación :

$$b\,Log_ax=b^2\Rightarrow Log_ax=b\Rightarrow x=a^b$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21:

El mayor valor de "*x*" en :

$$Log_2(9^{x-1}+7)=Log_2 4+Log_2(3^{x-1}+1)$$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 0

RESOLUCIÓN:

$$Log_2((3^{x-1})^2+7)=Log_2(4(3^{x-1}+1))$$

$$\Rightarrow(3^{x-1})^2+7=4(3^{x-1}+1)$$

$$(3^{x-1})^2-4(3^{x-1})+3=0$$

$$\begin{matrix}3^{x-1} & -3\\ 3^{x-1} & -1\end{matrix}\ \Big\}\ \text{ASPA SIMPLE}$$

* $3^{x-1}=3\Rightarrow x-1=1\Rightarrow x=2$
* $3^{x-1}=1\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 22:

Resolver : $\frac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}=3$

A) 2 B) Log 3 C) Log 2

D) $Log\sqrt{2}$ *E) 1*

RESOLUCIÓN :

Aplicando razones y proporciones:

$$\frac{2\times10^x}{2\times10^{-x}}=\frac{3+1}{3-1}\Rightarrow10^{2x}=2$$

Transformando logaritmos decimales:

$$2x=Log2$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\,Log2\Rightarrow x=Log\sqrt{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 23:

Resolver : $Log_{\sqrt{6}}(x^2-5x)>2$

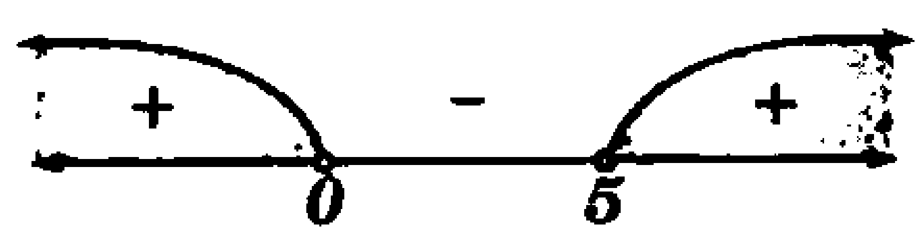
A) $x\in R$ *B)* $x\in\langle-\infty;1\rangle\cup\langle5;+\infty\rangle$

C) $x\in\varnothing$ *D)* $x\in\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle6;+\infty\rangle$

RESOLUCIÓN:

Por definición : $x^2-5x>0$

$$x(x-5)>0$$



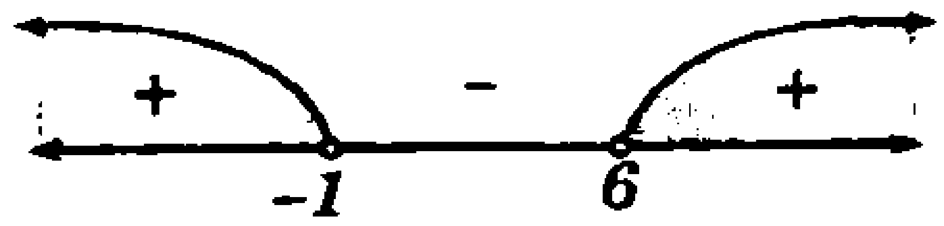
$x\in\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle5;+\infty\rangle$..............*(I)*

* Ahora como $\sqrt{6}>1$ (base >1)

$$\Rightarrow x^2-5x>\sqrt{6}^2$$

$$\Rightarrow x^2-5x-6>0$$

$$\Rightarrow(x-6)(x+1)>0$$



$x\in\langle-\infty;-1\rangle\cup\langle6;+\infty\rangle$............*(II)*

* Intersectando *(I)* y *(II)* se obtiene la solución :

$(I) \cap (II): x \in \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24:

Hallar "x" en : $e^{x+y}=18$

$$e^{x-y}=2$$

A) Ln 2 *B) Ln 3* *C) Ln 6*
D) Ln 5 *E) 1*

RESOLUCIÓN :

Tomado logaritmo neperianos en ambas ecuaciones :

$$\left.\begin{cases} x+y=Ln18 \\ x-y=Ln2 \end{cases}\right\}(+)$$

$$2x=Ln36 \Rightarrow 2x=Ln\ 6^2$$

$$\Rightarrow 2x=2Ln6 \Rightarrow x=Ln6$$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Determina los siguientes logaritmos.

A) $Log\ 10 =$ ....
B) $Log\ 30 =$ ....
C) $Log\dfrac{5}{2} =$ ....
D) $Log_2 4 =$ ....
E) $Log_3 9 =$ ....
F) $Log\ 36 =$ ....

01 Aplicando la identidad fundamental determinar el valor de las siguientes expresiones :

A) $3^{Log_3 5} =$ ....
B) $5^{Log_5 2} =$ ....
C) $7^{Log_7 4} =$ ....
D) $3^{4^{Log_4 5}} =$ ....
E) $3^{4^{5^{Log_5 2}}} =$ ....

02 Determinar el valor de :

$$E = Log10 + Log1000 + 1$$

A) 3 *B) 2* *C) 4* *D) 5* *E) 6*

03 Hallar «x» en cada uno de los siguientes logaritmos :

A) $Log_3 9 = x$
B) $Log_5 625 = x$
C) $Log_7 343 = x$
D) $Log_2 x = 3$
E) $Log_6 x = 2$
F) $Log_x 25 = 2$
G) $Log_x 36 = 2$
H) $Log_x 25 =$

04 Determinar el valor de :

$$A=Log10^4 + Log_e e^5 + Lne$$

A) 1 *B) 2* *C) 5* *D) 3* *E) 10*

05 Si : $Log2 = 0,3$

$$Log3 = 0,4$$

Hallar el valor de :

$$E = Log_3 9 + Log_2 4 + Log6$$

A) 1,4 *B) 4,3* *C) 4,7* *D) 4,9* *E) 5,3*

06 Reducir :

$$(Log_2 3 + Log_2 5).\ Log_{15} 2$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

07 Reducir :

$$A = Log_2 5^{Log_5 2^{Log_2 7^{Log_7 5^{Log_5 8}}}}$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

08 Calcular el logaritmo de *243* en base *27*.

A) 5 *B) 2* *C) 3/2* *D) 5/3* *E) 2/5*

09 El logaritmo de *0,0625* en base *2* es :

A) 0,025 *B) 0,25* *C) 5*
D) –4 *E) –2*

10 Hallar «x» de: $Log_x(x + 30)=2$

A) 4 *B) 5* *C) 6*
D) 7 *E) 6 y 5*

11 Hallar el valor de *x*.

$$log_4 16 = x$$

A)2 *B)3* *C)4* *D)5* *E)6*

12 El valor de : $Q = 10^{log\ 7}$

A)7 *B)9* *C)11* *D)8* *E)10*

13 Resolver : $Log_7(2x - 1) = 2$

A)25 *B)15* *C)10* *D)30* *E)5*

14 Indicar el producto de logaritmos :

A) $Log_2 3 \times Log_3 2 =$
B) $Log_5 2 \times Log_2 5 =$

15 Determinar las siguientes expresiones :

A) $Antilog_2 7 =$
B) $Antilog_6 3 =$
C) $Antilog_3 log_3 92 =$
D) $Log_6\ Antilog_6 8 =$
E) $Colog_6 216 =$

16 Evaluar : $A = Log_5 3 \,.\, Log_{27} 125$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

17 Hallar «x» en : $Logx = Log_2 5 \,.\, Log_5 2$

A) 1 *B) 0* *C) 10* *D) 100* *E) 1 000*

18 Luego de resolver :

$$1 + 2Logx - Log(x + 2) = 0$$

Indicar sus soluciones :

A) –2/5; 1/2 *B) 1/10* *C) 1/2*
D) –1/5; 1 *E) –3/5*

19 Resolver :

$$Log(2x+ 1) - Log(2x-1) = 2Log3 - 3Log2$$

A) 7,5 *B) 8* *C) 8,5* *D) 9* *E) 1*

20 Calcular «x» en la igualdad :

$$x^{Log_x x^3} + 27x^{Log_x x} = 9x^{Log_x x^2} + 27$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 5*

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indicar lo correcto *(c)* o incorrecto *(i)* en :

( ) $a^{Log_a b}=b; b>0 \wedge a \in \mathbb{R}$
( ) $Log_5 12 - Log_5 4=Log_5 8$
( ) $Log_4 6=Log_{64} 216$

A) ici *B) iic* *C) icc* *D) cci* *E) cic*

02 Indicar el valor de verdad *(V)* o falsedad *(F)* en :

( ) $Log_2 15=Log_2(-5)+Log_2(-3)$
( ) $Log_3 \sqrt{2}=2Log_3 2$
( ) $Log7 = \dfrac{1}{Log_7 5}$

A)FVF *B)VFV* *C)VVV*
D)FFV *E)FFF*

03 Encontrar el valor de :

$$Log_7 5^{Log_5 343} + Log_2 9^{Log_9 128} - Log_5 13^{Log_{13} 25}$$

A) 12 *B)10* *C)8* *D)5* *E)9*

04 Calcular :

$$M = Log_4 49 \times Log_3 2 \times Log_{27} 125 \times Log_{\sqrt{7}} 3$$

A) 7 *B)2* *C) 1* *D)14* *E)49*

05 Calcular «*x*» en la igualdad :

$$x^{Log_x x^3}+27x^{Log_x x}=9x^{Log_x x^2}+27$$

$(x>0 \wedge x \neq 1)$

A) 9 B) 6 C) 3 D) 1 E) 27

06 Calcular el valor de «*n*» que cumpla la ecuación :

$$Log_2 n+Log_2\left(1+\frac{5}{n}\right)+Log_2\left(1+\frac{3}{n+5}\right)+Log_2\left(1+\frac{4}{n+8}\right)=6$$

A) 62 B) 48 C) 52 D) 44 E) 56

07 Calcular E, si : $x=\sqrt[10]{3}$

$$E=Log_x\left(3^{Log_{\sqrt{3}}x}+4^{Log_2 x}+6^{Log_{\sqrt{6}}x}\right)$$

A) 11 B) 3 C) 10 D) 9 E) 12

08 Calcular «*x*», si :

$$3Log_x 16+7Log_x 8=22$$

A) $\sqrt{8}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

09 Luego de resolver :

$$3^{1+Logx}+3^{2+Logx}=2^{3+Logx}$$

indique lo correcto :

A) $x=0,04$ B) $x^2=x+1$ C) $10x-1=0$

D) $x=1$ E) $\frac{1}{x}=100$

10 Resolver :

$$\frac{1}{Log_{(x-2)}7}+\frac{1}{Log_{(x+1)}7}=Log_7 4$$

A) 3 B) –3 C) –2 D) –1 E) ϕ

11 Reducir :

$$F=\frac{Log_{\sqrt{3}}5\times Log_5 4\times Log_4\sqrt{27}}{Log_{ab}n+\dfrac{1}{Log_{\left(\frac{ab}{n}\right)}ab}}$$

A) 5 B) 4 C 3 D) 2 E) 1

12 Resolver : $Log_x Log_x \sqrt[7]{4}=7$

A) 2 B) 4 7 C) $\sqrt[7]{2}$ D) 7 E) 14

13 Si se sabe que :

$a = Log_2 b$ .... (1)
$b = Log_2 c$ .... (2)
$c = Log_2 d$ .... (3)
$bcd = 128$ .... (4)
$b + c = 6$.................. (5)

calcular : $J=\sqrt[a+b]{c\times d}$

A) 6 B) 2 C) 4 D) 3 E) 1

14 Si : $Loga=\sqrt{13}-\sqrt{7}$

$Logb=\sqrt{7}-\sqrt{11}$

$Logc=\sqrt{11}-\sqrt{13}$

calcular :

$$P=\frac{Log^3a+Log^3b+Log^3c}{Loga^{Logb^{Logc}}}$$

A) 3 B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) 0

15 Reducir: $Log_n\left\{Log_n\sqrt[n-1]{n^{-\sqrt[n]{n}}}\right\}$

siendo $n>1$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) n D) –1 E) –2

16 Si : $m,n\in R^+ \wedge Log_{mn}m=3$

calcular el valor de : $Log_{mn}\dfrac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{m^7}}$

A) –6 B) –10 C) 6 D) –7 E) 7

17 Resolver : $2^{Log_7(x^2-7x+21)}=3^{Log_7 4}$

Indicar el mayor valor.

A) 3 B) 4 C) 2 D) 7 E) 10

18 Resolver la siguiente ecuación:

$$Log(Logx)^{\frac{3Log(Logx)}{Log[Log(Logx)]}}=27$$

A) 10^2 B) 3 C) 10 D) 10^3 E) 12

19 $Log(|x|-1)=1+2Log_{\sqrt[3]{10}}\sqrt{2}$

se puede afirmar que : $\sqrt[4]{|x|}-1$

A) Es un número irracional.
B) Es un número negativo.
C) Es un número impar.
D) Es múltiplo de 4.
E) Es un número par.

20 Si : $Log_{(10+2\sqrt{21})}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^n=8$

resolver : $x^{x^x}=n$

A) 11 B) 3 C) 10 D) 9 E) 2

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda :

( ) $Colog_b N=Log_b N;\ \forall N>0 \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$
( ) $Colog_b N=Log_{\frac{1}{b}} N;\ \forall N>0 \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$
( ) $Colog_b N=-Log_b N;\ \forall N>0 \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$

A) VVV B) FFF C) VVF
D) FFV E) FVV

02 Señale verdadero *(V)* o falso *(F)* en las siguientes proposiciones:

( ) $Antilog_b N=b^N;\ \forall N\in R \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$
( ) $Antilog_b Log_b N=b^{b^N};\ \forall N\in R \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$
( ) $Log_b Antilog_b N=N;\ \forall N\in R \wedge (b>0 \wedge b\neq 1)$

A) VFV B) FVF C) VVV
D) FFF E) VFF

03 Señale la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las proposiciones:

( ) Si: $Log_2x>Log_2y \Rightarrow x>y$
( ) Si: $Log_{0,1}x>Log_{0,1}y \Rightarrow x<y$
( ) Si: $Log_3x>0=x>0$

A) VVV B) FFF C) VVF
D) FFV E) VFV

04 Calcular :

$$E=Colog_{\sqrt{10}}(5Log_{\sqrt{10}}10)$$

A) 2 B) –2 C) 5 D) –5 E) –1/2

05 Calcular :

$$E=Colog_2 Antilog_4 Log_{\sqrt[3]{5}}25$$

A) 12 B) 6 C) 24 D) –6 E) –12

06 Calcular el valor de :

$$E=Antilog_{\sqrt[3]{2}}Colog_{\sqrt[3]{2}}Antilog_{\sqrt[3]{2}}6$$

A) 0,5 B) 0,4 C) 0,05
D) 0,25 E) 0,125

07 Resolver :

$$Antilog_x Antilog_x 2=3\sqrt{3}$$

A) {3} B) $\{\sqrt[3]{3}\}$ C) $\{\sqrt{3}\}$ D) $\{\sqrt[6]{3}\}$ E) {27}

08 Calcular :

$$E=Antilog_5 2-Log_5 Antilog_5 7-Antilog_5 Log_5 8$$

A) –5 B) 5 C) –10 D) 10 E) 40

09 Calcular :

$$E=Colog_5 Antilog_{16}(Log_2 10-1)$$

A) –2 B) –4 C) 2 D) 4 E) –16

10 Resolver :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{Colog_2 x}+xColog_2 4=Colog10$$

A) {1/2} B) {2} C) {1/4}
D) {1} E) {4}

11 Luego de resolver :

$$Antilog_{\left(\frac{x}{2}\right)}4=4x$$

señale el valor de : $Colog_{\sqrt[4]{4}}x$

A) 4 B) 1/4 C) –4 D) –1/4 E) 1

12 Indicar la menor raíz si :

$$(Log x)(Colog 1/x)-(Colog x)=2$$

A) 0,1 B) 100 C) 1
D) 1 000 E) 0,01

13 Señale un intervalo solución de "x" luego de resolver :

$$Log_2(x^2+x) \geq Log_2(3-x)$$

A) $]-\infty;3[$ B) $[-3;-1[$ C) $[1;3[$
D) $]-1;0[$ E) $]0;1]$

14 Resolver :

$$Log_{0,5}(2-x) \geq Log_{0,25}(x+10)$$

A) $-10 \leq x < 2$ B) $-1 \leq x \leq 6$ C) $x \geq 2$
D) $-1 \leq x < 2$ E) $-1 \leq x < 6$

15 Si :

$$P(Log_{\sqrt[4]{12}}x) = Antilog_x(x-2)+Colog_{(x-2)}x$$

calcular $P(12)$.

A) 16 B) 18 C) 20 D) 12 E) 14

16 Luego de resolver :

$$(Colog_x 4x)(Colog_4 x)=1-Colog_x 2$$

señale el valor de : $\sqrt[\sqrt{2}]{x}$

A) 2 B) 1/2 C) $2^{\sqrt{2}}$
D) A y B E) A y C

17 Resolver :

$$3^{1-Colog x}+3^{2-Colog x}=2^{3-Colog x}$$

A) {10} B) {10^2} C) {10^{-1}}
D) {$\sqrt{2}$} E) {e/2}

18 Calcular :

$$E=Colog_6 Antilog_4(Log_2 3+1)$$

A) –1 B) –2 C) –3 D) 3 E) 6

19 Si :

$$(Antilog_3 a)(Antilog_3 b)(Antilog_3 c)=1$$

Calcular:

$$E=\frac{Antilog_a 3+Antilog_b 3+Antilog_c 3}{(Antilog_a 1)(Antilog_b 1)(Antilog_c 1)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/3

20 Si: $Colog_a e+Colog_b e=4Colog_{ab} e$

calcular : $E=Colog_a b+Colog_b a$

A) a B) b C) ab D) 2 E) –2

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular : $F=Log_{8\sqrt{8}}\sqrt[3]{16}$

A) 20 B) 9 C) $\frac{15}{4}$ D) $\frac{20}{9}$ E) $\frac{9}{20}$

02 El valor de : $R=Log_{\sqrt{3}}(Log_{\sqrt{3}}2)$ es:

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 2 D) 182 E) $\frac{2}{3}$

03 Señale el equivalente de :

$$I=Log_{\sqrt[4]{5}}(Log_2 Log_{\sqrt{2}}625+Log_3 9)$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

04 Encontrar : x

$$m^{Log_m(x+7)}=4x+1$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Calcular "x" en la ecuación :

$$(8-x)^{Log_6 7}=7$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) –8 E) 8

06 Reducir :

$$E=2^{Log_3 8^{Log_7 3}}$$

A) 7 B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 6

07 Resolver :

$$Log\,x=3\,Log\,6-2\,Log\,3+3Log\,2-3Log\,4$$

A) 2 B) 4 C) 5 D) 3 E) 1

08 Resolver :

$$Log_{(x+4)}(x^2-1)=Log_{(x+4)}(5-x)$$

A) –1 B) –3 C) 2 D) 3 E) 4

09 Para la ecuación :

$$1+2\,Log\,x-Log(x+2)=0$$

La suma del número de soluciones y la mayor solución es :

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{10}$

10 El valor de "x" en :

$$Log\sqrt{x+7}+Log\sqrt{x+14}=1+Log1,2$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

11 Resolver la siguiente ecuación:

$$4Log_6 N(3x)=4+Log_6(x^2/4)$$

A) 2 B) –2 C) 0 D) ±2 E) 3

EULER

A Euler le llamaban (con sarcasmo) el cíclope matemático porque, además de su poderío matemático, le faltaba la visión de un ojo. Se quedó ciego de un ojo en 1735, debido, indirectamente, a un premio que la Academia de París ofreció por la resolución de un problema astronómico. El problema era muy complejo y la Academia concedió varios meses para resolverlo, pero a Euler le bastaron tres días. Las malas condiciones de trabajo y el esfuerzo realizado le costó la pérdida de la visión de un ojo. Tenía 28 años.

Euler es tenido por el padre de la matemática rusa pues desarrolló la docencia en San Petersburgo desde 1733 a 1741. En 1741 se trasladó a Berlín, donde le habían ofrecido un puesto. Al principio el quería quedarse en San Petersburgo, pero por aquella época, los extranjeros tenían problemas en Rusia, además la mejora de la oferta de Berlín le acabó convenciendo.

Incluso mientras estuvo en Berlín, siguió cobrando parte del sueldo de San Petersburgo, por asesorar y educar a los príncipes rusos.

Cuando murió el presidente de la Academia de Berlín, Euler asumió la dirección de hecho de la Academia, pero no el título de Presidente, porque en aquella época, Euler no tenía buenas relaciones con Federico el Grande. Debido a este despecho, Euler, regresó a San Petersburgo en 1766, invitado por Catalina la Grande.

Debido a una catarata en el otro ojo se volvió ciego al poco tiempo de llegar a Rusia, pero no se rindió: antes de quedarse totalmente ciego, practicaba la escritura cerrando el ojo, pero esto no sirvió de mucho y con el tiempo su hijo Albert, hizo de amanuense de su padre. En 1776 le operaron la catarata, pero una infección en el ojo, impidió la recuperación. El 7 de septiembre de 1783, después de charlar sobre los asuntos del día, "cesó de calcular y de vivir".

Euler tenía una memoria prodigiosa; recordaba las potencias, hasta la sexta, de los 100 primeros números primos, y la Eneida entera. Realizaba cálculos mentalmente que otros matemáticos realizaban con dificultad sobre el papel.

La productividad matemática de Euler fue extraordinaria; escribió textos sobre mecánica, álgebra, analisis, geometría diferencial y analítica y sobre cálculo de variaciones que fueron obra clásicas durante mas de 100 años. No inicio nuevas ramas de la matemática pero fue muy prolífero. Nos encontramos su nombre en todas las ramas de las matemáticas: Hay fórmulas de Euler, polinomios de Euler, constantes de Euler, integrales eulerianas y líneas de Euler. A pesar de todo esto se casó y tuvo trece hijos, estando siempre atento al bienestar de familia; educó a sus hijos y nietos.

Una de las pocas cosas para las que no obtuvo ninguna solución en su vida fue para un problema que le planteó Christian Goldbach, en 1742. Goldbach había observado que los números pares mayores de 4 parecen ser suma de dos números primos. Goldbach le preguntaba si podía demostrarlo. Ni Euler lo consiguió entonces, ni nadie lo ha conseguido hasta ahora.

BINOMIO DE NEWTON

CAPITULO 090

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el Alumno estará en la capacidad de :

- *Aplicar en la resolución de problemas correctamente las propiedades de un factorial. Diferenciar el número combinatorio del coeficiente binomial.*
- *Desarrollar la potencia de un binomio elevado a un exponente natural.*
- *Calcular cualquier término en el desarrollo del binomio con exponente natural.*
- *El conocimiento de las múltiples propiedades de $(a+b)^n$, nos permitirá construir y demostrar problemas del análisis combinatorio y de los tópicos de introducción al análisis.*

INTRODUCCIÓN :

El desarrollo del binomio mal llamado de Newton es en realidad del gran matemático NICCOLA FONTANA apodado Tartaglia *(1 500 – 1557)*. Cien años antes de que naciera el tratado de Pascal, la tabla que hoy es conocida en forma triangular fue publicada en la forma rectangular en el libro Tratado General sobre el Número y la Medida *(1 556 – 1 560)* que también fue publicado despues de la muerte de su autor Tartaglia. Como mencionamos anteriormente Newton lo que hace es generalizar la fórmula de la potencia de un binomio para un exponente no entero pero fue nuestro ilustre compatriota Federico Villarreal *(1 850 – 1 923)* nacido en Túcume, Lambayeque, quien a la edad de *23* años descubrió el método para elevar ya no sólo un binomio, sino un polinomio cualquiera a un exponente cualquiera. Otro matemático peruano Cristóbal de Lozada y Puga, le dedicó profundos estudios a este descubrimiento e incluso lo llamó Polinomio de Villarreal donde el binomio de Newton viene a ser un caso particular.

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

El factorial de un número natural *"n"*, es el producto que resulta de multiplicar todos los números naturales consecutivos desde el *1*, hasta el número *"n"* inclusive.

Simbología : $n!$, $\lfloor\underline{n}$, $\underline{n}\rfloor$

Lectura : Factorial del número *"n"*

Axiomáticamente, $\forall n \in \mathbb{N}$, se define:

$$n! = \begin{cases} 1 & ; \ n=0 \ \vee \ n=1 \\ 1\times 2\times 3\times \ldots\times n & ; \ n \geq 2 \end{cases}$$

EJEMPLOS :

$6! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

$4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$

$\lfloor\underline{x+5} = 1\times 2\times 3 \ldots\ldots (x+3)(x+4)(x+5)$

$\lfloor\underline{2p-1} = 1\times 2\times 3 \ldots\ldots (2p-3)(2p-2)(2p-1)$

$(a^2)! = 1\times 2\times 3 \ldots\ldots (a^2-2)(a^2-1)(a^2)$

PROPIEDADES :

1°) Por definición :

$$\lfloor\underline{n} = \underbrace{1\times 2\times 3\times \ldots\ldots \times (n-1)}_{\lfloor\underline{n-1}} \times n$$

Ordenando : $\boxed{\lfloor\underline{n} = n\lfloor\underline{n-1}\ ;\ n \geq 2}$

EJEMPLOS:

- $\lfloor\underline{100} = 100\lfloor\underline{99}$
- $(x+1)! = (x+1)\,x!$

2°) Si $\lfloor\underline{n} = 1 \Rightarrow n=0$ *(Por convención)*
$\vee$
$n=1$ *(Por definición)*

EJEMPLO:

- Calcular la suma de los valores que puede adquirir la incógnita *"x"*, en la ecuación:

$$(2x^2-x)! = 1$$

$\Rightarrow 2x^2 - x = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - x = 1$

$\Rightarrow x(2x-1) = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x(2x-1) = 0 \quad \vee \quad (2x+1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x_3 = -\frac{1}{2} \vee x_4 = 1$

Nos piden : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

3°) $\forall a,b \in \mathbb{N}$, tal que $ab \neq 0$, se cumple:

$$\boxed{\text{Si } \lfloor\underline{a} = \lfloor\underline{b} \Rightarrow a = b}$$

EJEMPLO :

Resolver la ecuación: $\lfloor\underline{m(2m+1)} = 720$

Como : $\lfloor\underline{6} = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = 720$

Resulta : $\lfloor\underline{2m^2+m} = \lfloor\underline{6}$

Por la propiedad :

$$2m^2+m=6 \Rightarrow 2m^2+m-6=0$$

Factorizando : $(2m-3)(m+2)=0$

Entonces: $m=\dfrac{3}{2} \;\vee\; m=-2$

4°) DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL GENERAL :

Por definición :

$$\lfloor\underline{n} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\underbrace{(n-k)\ldots 3\times 2\times 1}_{\lfloor\underline{n-k}}$$

$$\boxed{\lfloor\underline{n} = n(n-1)(n-2)K(n-k+1)\lfloor\underline{n-k}\,;\; n>K}$$

EJEMPLOS :

- $\lfloor\underline{100} = 100\times 99\times 98\ldots\ldots 55\lfloor\underline{54}$
- $\lfloor\underline{78} = 78\times 77\times 76\ldots\ldots 24\lfloor\underline{23}$
- $\lfloor\underline{x+30} = (x+30)(x+29)(x+28)\ldots\ldots(x+1)\lfloor\underline{x}$
- $\lfloor\underline{3n-2} = (3n-2)(3n-3)(3n-4)\ldots\ldots(3n-11)\lfloor\underline{3n-12}$
- $\lfloor\underline{m^2} = (m^2)(m^2-1)(m^2-2)\ldots\ldots(m^2-n)\lfloor\underline{m^2-n-1}$

EJEMPLO:

Dar el valor de la expresión:

$$E=\frac{\lfloor\underline{12}}{\lfloor\underline{9}}+\frac{\lfloor\underline{10}}{\lfloor\underline{8}}+\frac{\lfloor\underline{11}}{\lfloor\underline{7}}$$

$$E=\frac{12\times 11\times 10\lfloor\underline{9}}{\lfloor\underline{9}}+\frac{10\times 9\lfloor\underline{8}}{\lfloor\underline{8}}+\frac{11\times 10\times 9\times 8\lfloor\underline{7}}{\lfloor\underline{7}}$$

$$E=1320+90+7920=9330$$

PROPIEDADES AUXILIARES :

A) $\forall n\in N,\;\; n\geq 1$ se cumple:

$$\boxed{\lfloor\underline{n}+\lfloor\underline{n+1}=(n+2)\lfloor\underline{n}}$$

EJEMPLOS :

- $\lfloor\underline{7}+\lfloor\underline{8}=9\lfloor\underline{7}$
- $\lfloor\underline{111}+\lfloor\underline{112}=113\lfloor\underline{111}$
- $(x-1)!+x!=(x+1)\times(x-1)!$

B) $\forall n\in N,\; n\geq 1$ se cumple:

$$\boxed{\lfloor\underline{n}+\lfloor\underline{n+1}+\lfloor\underline{n+2}=(n+2)^2\lfloor\underline{n}}$$

EJEMPLOS :

- $\lfloor\underline{7}+\lfloor\underline{8}+\lfloor\underline{9}=9^2\lfloor\underline{7}=81\lfloor\underline{7}$
- $\lfloor\underline{54}+\lfloor\underline{55}+\lfloor\underline{56}=56^2\lfloor\underline{54}$
- $(m-1)!+m!+(m+1)!=(m+1)^2(m-1)!$

C) DESCOMPOSICIÓN RACIONAL DE UNA FRACCIÓN

$$\boxed{\frac{n}{\lfloor\underline{n+1}}=\frac{1}{\lfloor\underline{n}}-\frac{1}{\lfloor\underline{n+1}};\; n\geq 1}$$

EJEMPLO:

Calcular la suma de la serie:

$$S=\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{3}{\lfloor\underline{4}}+\frac{4}{\lfloor\underline{5}}+\ldots+\frac{100}{\lfloor\underline{101}}$$

Descomponiendo cada una de las fracciones:

$$S=\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}-\frac{1}{\lfloor\underline{4}}+\ldots+\frac{1}{\lfloor\underline{100}}-\frac{1}{\lfloor\underline{101}}$$

resulta : $S=1-\dfrac{1}{\lfloor\underline{101}}$

SEMIFACTORIAL, COFACTORIAL O CUASIFACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

SIMBOLOGÍA : $\lfloor\!\lfloor\underline{n}$, $n!!$

Lectura : "Semifactorial del número n"

Axiomáticamente, $\forall n\in N^*$, se define:

$$\boxed{n!!=\begin{cases}2\times 4\times 6\times 8\ldots n; & \text{si } n \text{ es PAR}\\ 1\times 3\times 5\times 7\ldots n; & \text{si } n \text{ es IMPAR}\end{cases}}$$

EJEMPLOS:

* Para números pares, se tienen :

$6!! = 2\times 4\times 6=48$

$10!! = 2\times 4\times 6\times 8\times 10=3840$

$(2m)!! = 2\times 4\times 6\times 8\ldots\ldots(2m-4)(2m-2)(2m)$

$(8p+12)!! = 2\times 4\times 6\times 8\ldots.(8p+8)(8p+10)(8p+12)$

* Para números impares, se muestran :

$5!! = 1\times 3\times 5=15$

$9!! = 1\times 3\times 5\times 7\times 9=945$

$(2n+1)!! = 1\times 3\times 5\times 7\ldots\ldots(2n-3)(2n-1)(2n+1)$

$(6x-17)!! = 1\times 3\times 5\times 7\ldots\ldots(6x-21)(6x-19)(6x-17)$

También debemos observar que:

$$\boxed{(n!)! \neq n!!\,;\; n\in N}$$

FÓRMULAS GENERALES DEL SEMIFACTORIAL :

A) Si n es un número par

$$n!!=2\times 4\times 6\times 8\ldots\ldots n$$

$$n!!=(2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)(2\times 4)\ldots\ldots\left(2\times\frac{n}{2}\right)$$

$$n!!=\underbrace{2\times 2\times 2\ldots\ldots 2}_{\left(\frac{n}{2}\right)\text{ veces}}\left(1\times 2\times 3\times\ldots\ldots\times\frac{n}{2}\right)$$

Por lo tanto: $\boxed{n!!=2^{\frac{n}{2}}\lfloor\underline{\tfrac{n}{2}}}$

EJEMPLOS: $\;100!!=2^{50}\lfloor\underline{50}$

$(2m)!!=2^m\lfloor\underline{m}$

B) Si n es un número *IMPAR*

$$n!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \ldots\ldots\ldots n$$

Multiplicando y dividiendo por :

$$[2 \times 4 \times 6 \ldots (n-1)]$$

$$n!! = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 \ldots (n-1)(n)}{2\times 4\times 6 \ldots (n-1)}$$

$$n!! = \frac{\lfloor\underline{n}}{(2\times 1)\,(2\times 2)\,(2\times 3) \ldots \left[2\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]}$$

$$n!! = \frac{\lfloor\underline{n}}{\underbrace{2\times 2\times 2 \ldots 2}_{\left(\frac{n-1}{2}\right)\text{ veces}}\left[1\times 2\times 3 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)\right]}$$

Por lo tanto :

$$\boxed{n!! = \frac{\lfloor\underline{n}}{2^{\frac{n-1}{2}}\,\lfloor\underline{\frac{n-1}{2}}}}$$

EJEMPLOS :

- $255!! = \dfrac{\lfloor\underline{255}}{2^{127}\,\lfloor\underline{127}}$
- $(2m-1)!! = \dfrac{\lfloor\underline{2m-1}}{2^{m-1}\,\lfloor\underline{m-1}}$

NÚMERO COMBINATORIO

Combinaciones de "n" elementos, tomados de "k" en "k" $(n \geq k)$, es el número de maneras en que se pueden agrupar los "n" elementos en grupos de "k" elementos, de tal manera que cada grupo se diferencie por lo menos en un elemento, sin interesar el orden de sus elementos.

EJEMPLO :

De cuántas maneras se pueden agrupar *6* elementos tomados de dos en dos. Veamos :

Sean : ***a b c d e f***

Se obtienen :

ab ac ad ae af ⟶ 5

bc bd be bf ⟶ 4

cd ce cf ⟶ 3

de df ⟶ 2

ef ⟶ 1

N° Total de maneras = 15

En general , se trata de agrupar "n" elementos tomados de "k" en "k". El número de maneras se obtiene a partir de la fórmula matemática:

$$\boxed{C_k^n = \frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{k}\,\lfloor\underline{n-k}}\;;(n;k)\in N^2\;,\; n \geq k}$$

Donde:

n : Es el índice superior, el cual nos indica el número total de elementos.

k : Es el índice inferior, el cual nos muestra el número de elementos existentes en cada grupo.

Aplicándolo en el ejemplo anterior :

$$\#\ maneras = C_2^6 = \frac{\lfloor\underline{6}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{6-2}} = \frac{6\times 5\times \lfloor\underline{4}}{1\times 2\times \lfloor\underline{4}} = 15$$

REGLA PRÁCTICA

En la definición, aplicando la descomposición general :

$$C_k^n = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)\lfloor\underline{n-k}}{\lfloor\underline{k}\;\lfloor\underline{n-k}}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{C_k^n = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}^{\text{"k" FACTORES}}}{\underbrace{1\times 2\times 3 \ldots k}_{\text{"k" FACTORES}}}}$$

EJEMPLOS :

$\Rightarrow C_7^{11} = \dfrac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7} = 330$

$\Rightarrow C_6^{10} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6} = 210$

$\Rightarrow C_5^{n+2} = \dfrac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = \dfrac{n(n^2-1)(n^2-4)}{120}$

PROPIEDADES :

1°) COMBINACIONES COMPLEMENTARIAS:

$$\boxed{C_k^n = C_{n-k}^n\;;\; n \geq k}$$

EJEMPLOS :

- $C_7^{11} = C_4^{11} = \dfrac{11\times 10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3\times 4} = 330$
- $C_{97}^{100} = C_3^{100} = \dfrac{100\times 99\times 98}{1\times 2\times 3} = 161700$
- $C_{n-2}^{n+1} = C_3^{n+1} = \dfrac{(n+1)\,(n)\,(n-1)}{1\times 2\times 3} = \dfrac{n\;(n^2-1)}{6}$

Estamos observando que para ciertos números combinatorios, esta propiedad, nos permite reducir sus índices inferiores.

OBSERVACIÓN :

Al analizar C_k^n, en el conjunto N y aplicar la anterior propiedad para $k=n$, se obtiene: $C_n^n = C_{n-n}^n = C_0^n$

Por la teoría combinatoria se sabe que $C_n^n = 1$.

Por lo tanto : $C_0^n = 1$

Aplicando la definición del número combinatorio:

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{0}\,\lfloor\underline{n-0}} = 1$$

Simplificando : $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor 0 \lfloor n} = 1$

Resulta la relación : $\dfrac{\lfloor 1}{\lfloor 0} = 1$

Convencionalmente, para que esta igualdad este definida, se concluye que: $\boxed{\lfloor 0 = 1}$

Finalmente, será correcto afirmar lo siguiente :

- $C_{14}^{14} = C_0^{14} = 1$
- $C_{2m}^{2m} = C_0^{2m} = 1\ ;\quad \forall m \in N^*$
- $C_{x+5}^{x+5} = C_0^{x+5} = 1\ ;\quad \forall x \in N^*$
- $C_{n-p+1}^{n-p+1} = C_0^{n-p+1} = 1\ ;\ n > p-1,\ (n;p) \in N^2$

CONSECUENCIA DE LA PROPIEDAD

Si se tiene la igualdad : $C_r^n = C_p^n \ldots(\alpha)$

Se cumple : $r = p$

En (α), aplicando la propiedad : $C_r^n = C_{n-p}^n$

Se verifica : $r = n - p$, es decir: $r + p = n$

En síntesis :

$$\boxed{\text{Si}:\ C_r^n = C_p^n \Rightarrow r = p \vee r + p = n}$$

Debemos tener en cuenta, que las igualdades resultantes, son relaciones mutuamente excluyentes. Es decir, una de ellas es independiente de la otra.

Por ejemplo: Calcular el valor de $(m+p)$ en:

$$C_{10-p}^{2m} = C_{p-6}^{2m}$$

Se cumple: $10 - p = p - 6$ .... *(I)*

$16 = 2p \Rightarrow p = 8$

o también: $(10 - p) + (p - 6) = 2m$ .... *(II)*

$4 = 2m \Rightarrow m = 2$

Un valor resultante es : $m + p = 10$

observar que las ecuaciones *(I)* y *(II)*, no forman un sistema, ya que estas igualdades son completamente independientes.

2°) SUMA DE COMBINACIONES :

$$\boxed{C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}\ ;\ n \geq k}$$

EJEMPLOS :

- $C_3^{10} + C_4^{10} = C_4^{11}$
- $C_{20}^n + C_{21}^n = C_{21}^{n+1}$
- $C_{x-1}^{m-1} + C_x^{m-1} = C_x^m$

EJERCICIO:

Calcular la suma de la serie:

$$P = C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8$$

Sumando y restando C_0^4, resulta:

$$P = \underbrace{C_0^4 + C_1^4}_{C_1^5} + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 - C_0^4$$

$$C_1^5 + C_2^5 = C_2^6;\quad C_2^6 + C_3^6 = C_3^7;\quad C_3^7 + C_4^7 = C_4^8;\quad C_4^8 + C_5^8 = C_5^9$$

$$P = C_5^9 - 1 = C_4^9 - 1$$

$$P = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - 1 = 126 - 1 = 125$$

3°) DEGRADACIÓN DE ÍNDICES :

A) $\boxed{C_k^n = \left(\dfrac{n-k+1}{k}\right) C_{k-1}^n\ ;\ n \geq k \geq 1}$

B) $\boxed{C_k^n = \left(\dfrac{n}{k}\right) C_{k-1}^{n-1}\ ;\ n \geq k \geq 1}$

C) $\boxed{C_k^n = \left(\dfrac{n}{n-k}\right) C_k^{n-1}\ ;\ n \geq k \geq 0}$

EJEMPLOS :

1) Resolver : $20\,C_5^m = 3\,m\,C_3^{m-1}$

Descomponiendo el *20* y pasando a dividir uno de sus factores, resulta:

$$5\,C_5^m = 3\underbrace{\left(\frac{m}{4}\right) C_3^{m-1}}$$

Por la propiedad *(3B)*, se tiene:

$$5\,C_5^m = 3\,C_4^m$$

En el *1er.* miembro, degradando el índice inferior por *3a)*:

$$5\left(\frac{m-5+1}{5}\right) C_4^m = 3\,C_4^m$$

Simplificando: $m - 4 = 3 \Rightarrow m = 7$

2) Simplificar la expresión :

$$P = \frac{\left(\dfrac{x^3}{5}\right) C_4^{x-1} - (x+2)\,C_5^x}{\dfrac{x\,(x^2-1)}{20}\,C_3^{x-2}}\ ;\ x \geq 5$$

$$P = \frac{x^2\,\overline{\left(\dfrac{x}{5}\right) C_4^{x-1}} - (x+2)\,C_5^x}{\dfrac{x\,(x+1)}{5}\underbrace{\left(\dfrac{x-1}{4}\right) C_3^{x-2}}}\ ;\ \text{Por } 3B$$

$$P=\frac{x^2 C_5^x-(x+2)C_5^x}{\frac{x(x+1)}{5}C_4^{x-1}}=\frac{(x^2-x-2)C_5^x}{(x+1)\underbrace{\left(\frac{x}{5}\right)C_4^{x-1}}}$$

Factorizando el numerador y aplicando la propiedad *3b)* en el denominador:

$$P=\frac{(x+1)(x-2)C_5^x}{(x+1)C_5^x}=x-2\,;\forall x\geq 5$$

3) Qué valor de "n" verifica la igualdad:

$$C_1^{2n}+C_2^{2n+1}+C_3^{2n+2}=\frac{3}{4}C_3^{2n+4}-1$$

* Pasando la unidad al primer miembro, y expresandolo como un número combinatorio, así:

$$\underbrace{C_0^{2n}+C_1^{2n}}+C_2^{2n+1}+C_3^{2n+2}=\frac{3}{4}C_3^{2n+4}$$

$$\underbrace{C_1^{2n+1}+C_2^{2n+1}}+C_3^{2n+2}$$

$$\underbrace{C_2^{2n+2}+C_3^{2n+2}}$$

$$C_3^{2n+3}=\frac{3}{4}C_3^{2n+4}$$

En el *2do*. miembro, aplicando la propiedad *3c):*

$$C_3^{2n+3}=\left(\frac{3}{4}\right)\frac{(2n+4)}{(2n+4)-3}C_3^{2n+3}$$

$$\Rightarrow 4(2n+1)=3(2n+4)$$

$$\Rightarrow 8n+4=6n+12\Rightarrow 2n=8\Rightarrow n=4$$

BINOMIO DE NEWTON

1) TEOREMA DE NEWTON

El desarrollo polinomial de la potencia de $(a+b)^n$, siendo "n" un número natural, viene dada por la fórmula:

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\,a^{n-k}b^k\;;n\geq k\geq 0}$$

EXPANSIÓN DE LA POTENCIA DE $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n=\underbrace{C_0^n a^n+C_1^n a^{n-1}b+C_2^n a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^n b^n}_{(n+1)\ \text{términos}}$$

DEMOSTRACIÓN DEDUCTIVA DEL TEOREMA

Se tiene la multiplicación indicada general :

$$P=(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\ldots.(a+b_{n-2})(a+b_{n-1})(a+b_n)$$

Efectuemos aplicando la propiedad de Stevin:

$$P=a^n+S_1a^{n-1}+S_2a^{n-2}+S_3a^{n-3}+\ldots..+S_n\ \ldots(\alpha)$$

En el cual:

$$S_1=b_1+b_2+b_3+\ldots..+b_n$$

$$S_2=b_1b_2+b_1b_3+\ldots..+b_{n-1}b_n$$

$$S_3=b_1b_2b_3+b_1b_2b_4+\ldots..+b_{n-2}b_{n-1}b_n$$

$$\vdots$$

$$S_n=b_1b_2b_3\ldots..b_n$$

Haciendo:

$$b_1=b_2=b_3=\ldots..=b_{n-2}=b_{n-1}=b_n=b$$

Reemplazando en la multiplicación inicial:

$$P=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{"}n\text{" factores}}$$

resulta : $P=(a+b)^n;\ n\in N^*\ \ \ldots(\beta)$

Análogamente, sustituyendo en el polinomio de Stevin, los coeficientes $S_k\ (1\leq k\leq n)$, los cuales los reducimos por separado del siguiente modo:

$$S_1=\underbrace{b+b+b+\ldots..+b}_{\text{"}n\text{" veces}}=nb=C_1^n\,b$$

$$S_2=\underbrace{b^2+b^2+b^2+\ldots..+b^2}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ veces}}=\frac{n(n-1)}{2}b^2=C_2^n\,b^2$$

$$S_3=\underbrace{b^3+b^3+b^3+\ldots..+b^3}_{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\text{ veces}}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3=C_3^n\,b^3$$

$$\vdots$$

$$S_n=\underbrace{b\times b\times b\times\ldots..\times b}_{\text{"}n\text{" veces}}=b^n=C_n^n\,b^n$$

Reemplazando los equivalentes de los S_k en (α):

$$P=a^n+\left(C_1^n\,b\right)a^{n-1}+\left(C_2^n\,b^2\right)a^{n-2}+\left(C_3^n\,b^3\right)a^{n-3}+\ldots+\left(C_n^n\,b^n\right)$$

Ordenando, se tiene:

$$P=C_0^na^n+C_1^na^{n-1}b+C_2^na^{n-2}b^2+C_3^n\,a^{n-3}b^3+\ldots+C_n^nb^n$$

Igualando con (β), se concluye que:

$$\boxed{(a+b)^n=C_0^n\,a^n+C_1^n\,a^{n-1}b+C_2^n\,a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^n\,b^n}$$

con lo cual queda demostrado.

EJEMPLOS 1 :

• Desarrollar la potencia $(a+b)^4$.

Por el teorema: $(a+b)^4=\sum\limits_{k=0}^{4}C_k^4\,a^{4-k}b^k$

Evaluando sucesivamente para $k=0,1,2,3$ y 4:

$$(a+b)^4=C_0^4\,a^4+C_1^4\,a^3b^1+C_2^4\,a^4b^2+C_3^4\,a^1b^3+C_4^4\,b^4$$

Por lo tanto:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

EJEMPLOS 2 :

Expandir la potencia de $(a-b)^5$.

Por Newton:

$$(a-b)^5=\left[a+(-b)\right]^5=\sum_{k=0}^{5} C_k^5\, a^{5-k}(-b)^k$$

Del mismo modo, evaluando para $k = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4$ y 5:

$$(a-b)^5 = C_0^5a^5 + C_1^5a^4(-b)^1 + C_2^5a^3(-b)^2 + C_3^5a^2(-b)^3 + C_4^5a^1(-b)^4 + C_5^5(-b)^5$$

Efectuando:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

EJEMPLOS 3 :

Muestre el desarrollo polinomial de $(3x^3 + 2y^2)^3$

Por el teorema:

$$(3x^3+2y^2)^3=\sum_{k=0}^{3} C_k^3\,(3x^3)^{3-k}(2y^2)^k$$

Evaluando la forma genérica para $k = 0 ; 1 ; 2$ y 3

$$(3x^3+2y^2)^3 = C_0^3(3x^3)^3 + C_1^3(3x^3)^2(2y^2)^1 + C_2^3(3x^3)^1(2y^2)^2 + C_3^3(2y^2)^3$$

Efectuando operaciones elementales en el *2do.* miembro:

$$=1(27x^9)+\frac{3}{1}(9x^6)(2y^2)+\frac{3\times 2}{1\times 2}(3x^3)(4y^4)+\frac{3\times 2\times 1}{1\times 2\times 3}(8y^6)$$

finalmente se tiene:

$$(3x^3 + 2y^2)^3 = 27x^9 + 54x^6y^2 + 36x^3y^4 + 8y^6$$

CARACTERÍSTICAS DEL DESARROLLO DE $(a+b)^n$

En la potencia del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots C_{n-2}^n a^2b^{n-2} + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

(Números combinatorios complementarios)

Se observa las siguientes características:

1° El desarrollo de $(a+b)^n$ es un polinomio homégeneo de grado "n" y además es completo con respecto a las variables a y b.

2° El número de términos de la expansión de $(a+b)^n$ es igual a $(n+1)$.

3° Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son números combinatorios COMPLEMENTARIOS. Por tal razón, tendrán el mismo valor.

Algunos de estos son:

$$C_0^n = C_n^n \;;\quad C_1^n = C_{n-1}^n \;;\quad C_2^n = C_{n-2}^n ;\; \dots$$

4° En la potencia de $(a+b)^n$, los exponentes de "a" disminuyen de uno en uno (a partir de "n"), mientras los de "b" aumentan de uno en uno (hasta llegar a "n").

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

Este arreglo de números distribuido triangularmente, fue diseñado por NICCOLO FONTANA ***(1500–1557)***, matemático italiano apodado TARTAGLIA. Dicho triángulo aritmético presenta la siguiente estructura:

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

....

Donde cada número colocado en los lados del triángulo son iguales a 1, y cada número ubicado anteriormente es la suma de los dos números ubicados sobre él, en la línea horizontal anterior, la ampliación de dicho triángulo aritmético puede continuarse a voluntad, es decir, según la necesidad del estudiante.

Si observamos en detalle los elementos del triángulo, podemos deducir que, cada uno de ellos se puede expresar como un número combinatorio. Tal como sigue:

$$C_0^0 \longleftarrow \textit{Número Ficticio}$$

$$C_0^1\, C_1^1$$

$$C_0^2\, C_1^2\, C_2^2$$

$$C_0^3\, C_1^3\, C_2^3\, C_3^3$$

$$C_0^4\, C_1^4\, C_2^4\, C_3^4\, C_4^4$$

$$C_0^5\, C_1^5\, C_2^5\, C_3^5\, C_4^5\, C_5^5$$

$$C_0^6\, C_1^6\, C_2^6\, C_3^6\, C_4^6\, C_5^6\, C_6^6$$

$$C_0^7\, C_1^7\, C_2^7\, C_3^7\, C_4^7\, C_5^7\, C_6^7\, C_7^7$$

....

$$C_0^n\, C_1^n\, C_2^n\, C_3^n \cdots\cdots C_{n-3}^n\, C_{n-2}^n\, C_{n-1}^n\, C_n^n$$

Como la $(n+1)$ fila nos representa, los coeficientes de $(a+b)^n$, concluímos que los números combinatorios distribuídos horizontalmente en cada fila de dicho triángulo, nos expresa los coeficientes de la potencia de un cierto binomio.

EJEMPLO :

Desarrollar $(a+b)^6$

Se sabe que todos los términos son positivos. Luego, tomando los números combinatorios de la *7ma.* fila:

$$(a+b)^6 = C_0^6a^6 + C_1^6a^5b + C_2^6a^4b^2 + C_3^6a^3b^3 + C_4^6a^2b^4 + C_5^6ab^5 + C_6^6b^6$$

Luego:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

EJEMPLO 2 :

Expandir $(a-b)^7$

Considerando que los signos de los términos son alternadamente positivos y negativos, tomemos los números combinatorios de la ***8va***. fila:

$$(a+b)^7 = C_0^7a^7 + C_1^7a^6b + C_2^7a^5b^2 - C_3^7a^4b^3 + C_4^7a^3b^4 - C_5^7a^2b^5 + C_6^7ab^6 - C_7^7b^7$$

Finalmente:

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

TERMINO GENERAL (T_{k+1}) :

Cualquier término del desarrollo de $(a+b)^n$, siendo "n" un exponente natural, viene dado por la fórmula de recurrencia.

$$\boxed{T_{k+1} = C_k^n a^{n-k} b^k ;\ n \in \mathbb{N}^*}$$

Donde $(k+1)$ nos indica la posición que ocupa el término de dicho desarrollo.

REGLA PARA DETERMINAR EL SIGNO DE T_{k+1}

- Si $b>0$, todos los términos de la potencia de $(a+b)^n$ serán ***POSITIVOS***.
- Si $b>0$, los signos de los términos dependerá de la posición que ocupan. Tal como sigue:

– Términos de lugar impar son POSITIVOS.

– Términos de lugar par son NEGATIVOS.

EJEMPLOS EXPLICATIVOS :

1) Determinar el ***4to***. término del desarrollo de:

$$(x^4 + 2y^3)^5$$

En la fórmula general:

$$n=5;\ k+1=4 \Rightarrow k=3$$

$$\Rightarrow T_4 = C_3^5\ (x^4)^{5-3}(2y^3)^3$$

$$\Rightarrow T_4 = \frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}(x^8)\ (8y^9)$$

Por lo tanto: $T_4 = 80x^8y^9$

2) Señale el ***3er.*** y ***6to.*** término de la potencia de la expresión racional:

$$\left(x^5 - \frac{1}{x}\right)^8;\ x \neq 0$$

- Del mismo modo: $n = 8$

$$k+1=3 \Rightarrow k=2$$

$$T_3 = C_2^8\ (x^5)^{8-2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2$$

$$T_3 = \frac{8\times7}{1\times2}(x^{30})\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow T_3 = 28x^{28}$$

Se comprueba que el ***3er***. término es positivo.

- Análogamente: $n = 8$

$$k+1=6 \Rightarrow k=5$$

$$\Rightarrow T_6 = C_5^8\ (x^5)^{8-5}\ \left(-\frac{1}{x}\right)^5$$

$$\Rightarrow T_6 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5}(x^{15})\left(-\frac{1}{x^5}\right) \Rightarrow T_6 = -56x^{10}$$

El ***6to***. término resultó negativo como se esperaba.

3) Indique el término de lugar ***10***, en la expansión de:

$$\left(27x^5 + \frac{1}{3x}\right)^{12}$$

Aplicando directamente la fórmula general:

$$\Rightarrow T_{10} = C_9^{12}\ (27x^5)^{12-9}\ \left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\Rightarrow T_{10} = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 9\ \lfloor 3}(3^3x^5)^3\ \left(\frac{1}{3x}\right)^9$$

$$\Rightarrow T_{10} = \frac{12\times11\times10\ \lfloor 9}{\lfloor 9\times1\times2\times3}(3^9x^{15})\left(\frac{1}{3^9x^9}\right)$$

Finalmente : $T_{10} = 220x^6$

4) Calcular el sétimo término de la potencia de:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt{2x}\right)^9$$

Por la fórmula de recurrencia:

$$\Rightarrow T_7 = C_6^9\ \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^3\ \left(-\sqrt{2x}\right)^6$$

$$\Rightarrow T_7 = \frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\ \lfloor 3}\ \left(\frac{x}{8}\right)\ (2x)^3$$

$$\Rightarrow T_7 = \frac{9\times8\times7\times\lfloor 6}{\lfloor 6\times1\times2\times3}\ \left(\frac{x}{8}\right)(8x)^3 \Rightarrow T_7 = 84x^4$$

PROPIEDADES:

1°) La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de $(a+b)^n$ es igual a 2^n.

- Por el Teorema de Newton:

$$(a+b)^n = C_0^n\ a^n + C_1^n\ a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n$$

Evaluando para $a = 1$ y $b = 1$, se tiene:

$$(1+1)^n = \underbrace{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n}_{\text{Suma de coeficientes}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n;\ n \in N^*}$$

EJEMPLOS :

- $C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+....+C_{10}^{10}=2^{10}=1024$
- $C_0^{x+1}+C_1^{x+1}+C_2^{x+1}+C_3^{x+1}+....+C_{x+1}^{x+1}=2^{x+1}$
- $C_0^{3m}+C_1^{3m}+C_2^{3m}+C_3^{3m}+....+C_{3m}^{3m}=2^{3m}=8^m$

CONSECUENCIA IMPORTANTE

Analicemos el desarrollo de $(1+x)^n$; $n\in N^*$

Por el Teorema de Newton se tiene:

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_k^n\,(1)^{n-k}x^k \ ;\ n\geq k\geq 0$$

Expandiendo la sumatoria, resulta:

$$(1+x)^n=C_0^n\,x^0+C_1^n\,x^1+C_2^n\,x^2+....+C_n^n\,x^n$$

Mostrando explícitamente la propiedad:

$$\boxed{C_0^n+xC_1^n+x^2C_2^n+x^3C_3^n+...+x^nC_n^n=(1+x)^n}$$

EJEMPLOS :

- $C_0^n+3C_1^n+3^2C_2^n+3^3C_3^n+....+3^nC_n^n=(1+3)^n=4^n$
- $C_0^{10}-2C_1^{10}+2^2C_2^{10}-2^3C_3^{10}+....+2^{10}C_{10}^{10}=(1-2)^{10}=1$

ALGUNAS APLICACIONES ELEMENTALES

1) Sumar la serie:

$$P=C_0^m+2^2C_1^m+2^4C_2^m+2^6C_3^m+....(m+1)\ \textit{términos}$$

$$P=C_0^m+4C_1^m+4^2C_2^m+4^3C_3^m+....4^mC_m^m$$

Luego: $P=(1+4)^m=5^m$

2) Efectuar: $E=\dfrac{C_1^n}{3}+\dfrac{C_2^n}{9}+\dfrac{C_3^n}{27}+....+\dfrac{C_n^n}{3^n}$

Acomodando los coeficientes y sumando y restando el número , así:

$$E=C_0^n+\left(\frac{1}{3}\right)^1C_1^n+\left(\frac{1}{3}\right)^2C_2^n+\left(\frac{1}{3}\right)^3C_3^n+....+\left(\frac{1}{3}\right)^nC_n^n-C_0^n$$

Es decir: $E=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^n-1=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1$

3) Que se obtiene al sumar:

$$R=C_0^p-\left(\frac{x}{x+1}\right)C_1^p+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2C_2^p-\left(\frac{x}{x+1}\right)^3C_3^p+....(p+1)\ \textit{términos}$$

Es evidente que la sumatoria obedece la forma general de la propiedad. Por lo tanto:

$$R=\left[1-\frac{x}{x+1}\right]^p=\left(\frac{1}{x+1}\right)^p=(x+1)^{-p}\ ;\ p\in N^*$$

2°) La suma de los coeficientes de los términos de lugar impar es igual a la suma de los coeficientes de los términos de lugar par en la potencia de $(a+b)^n$.

- Por el teorema de Newton:

$$(a+b)^n=C_0^na^n+C_1^na^{n-1}b+C_2^na^{n-2}b^2+C_3^na^{n-3}b^3+....+C_n^nb^n$$

Evaluando para $a=1$ y $b=-1$, resulta:

$$(1-1)^n=C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+....(-1)^nC_n^n$$

$$0=C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+....(-1)^nC_n^n$$

$$\underbrace{C_1^n+C_3^n+C_5^n+K+\Delta}_{S_p}=\underbrace{C_0^n+C_2^n+C_4^n+K+\square}_{S_i}$$

Asumiendo que:

- S_p : Suma de coeficientes de términos de lugar par.
- S_i : Suma de coeficientes de términos de lugar impar.
- S_t : Suma total de coeficientes.

De la ***1ra***. propiedad: $S_t=S_i+S_p=2^n$ .... (α)

De la ***2da***. propiedad, se sabe que: $S_i=S_p$ .... (β)

Sustituyendo (β) en (α):

$$S_p+S_p=2^n$$

$$2S_p=2^n\Rightarrow S_p=2^{n-1}$$

Por lo tanto: $S_i=S_p=2^{n-1}$

Es decir:

$$\boxed{C_0^n+C_2^n+C_4^n+....+C_{...}^n=C_1^n+C_3^n+C_5^n+....+C_{...}^n=2^{n-1}}$$

Para calcular los últimos términos de ambos miembros, debemos considerar dos casos:

1er. Caso: Si "n" es PAR.

$$C_0^n+C_2^n+C_4^n+....+C_n^n=C_1^n+C_3^n+C_5^n+....+C_{n-1}^n=2^{n-1}$$

EJEMPLO 1 :

$$C_0^8+C_2^8+C_4^8+C_6^8+C_8^8=C_1^8+C_3^8+C_5^8+C_7^8=2^{8-1}=2^7$$

2do. Caso: Si "n" es IMPAR.

$$C_0^n+C_2^n+C_4^n+....+C_{n-1}^n=C_1^n+C_3^n+C_5^n+...+C_n^n=2^{n-1}$$

EJEMPLO 2 :

$$C_0^7+C_2^7+C_4^7+C_6^7=C_1^7+C_3^7+C_5^7+C_7^7=2^{7-1}=2^6$$

3°) La suma de los grados absolutos de todos los términos del desarrollo de $(ax^p+by^q)^n$.

$$\sum G.A.=GA(T_1)+GA(T_2)+GA(T_3)+....+GA(T_{n+1})$$

$$\boxed{\sum G.A.=\frac{n\,(n+1)}{2}(p+q)}$$

EJEMPLO :

Dado: $(3x^4+2y^5)^3$

Desarrollando, se tiene:

$$=(3x^4)^3+3(3x^4)^2\,(2y^5)+3(3x^4)\,(2y^5)^2+(2y^5)^3$$

$$=27x^{12}+54x^8y^5+36x^4y^{10}+8y^{15}$$

Luego:

$$\sum G.A.=12+13+14+15=54$$

Por la fórmula:

$$\sum G.A.=\frac{3\,(3+1)}{2}(4+5)=54$$

4°) Cálculo de un término cualquiera con todo a partir del extremo final en la potencia de $(a+b)^n$

$$\overleftarrow{T}_{k+1} = C_k^n \, a^k b^{n-k} \; ; n \in \mathbb{N}^*$$

EJEMPLO :

Determine el ***4to.*** término contado de derecha a izquierda, en la expansión de la expresión:

$$\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^4}{x}\right)^{10} \; ; \; xy \neq 0$$

Por la fórmula :

$$\Rightarrow \overleftarrow{T}_4 = C_3^{10}\left(\frac{x^3}{y}\right)^3\left(\frac{y^4}{x}\right)^{10-3}$$

$$\Rightarrow \overleftarrow{T}_4 = \frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}\left(\frac{x^9}{y^3}\right)\left(\frac{y^{28}}{x^7}\right)$$

Finalmente: $\overleftarrow{T}_4 = 120x^2y^{25}$

5°) Cálculo del término central en la potencia de $(a+b)n$

- Si "n" es un número PAR

El desarrollo de $(a+b)^n$ admite un sólo término central, cuya posición se calcula así:

$$\text{Lugar } (T_C) = \frac{n}{2}+1$$

- Si "n" es un número IMPAR

La expansión $(a+b)^n$ posee dos términos centrales, cuyas posiciones se calculan así:

$$\text{Lugar } (T_{c1}) = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{Lugar } (T_{c2}) = \frac{n+3}{2}$$

EJEMPLO 1 :

Muestre el término central en el desarrollo de:

$(x^5 + y^3)^6$

Por propiedad: Lugar $(T_c) = \dfrac{6}{2} + 1 = 4$

Luego:

$$\Rightarrow T_C = T_4 = C_3^6\,(x^5)^3\,(y^3)^3$$

$$\Rightarrow T_C = \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\,(x^{15})\,(y^9)$$

Por lo tanto: $T_c = 20x^{15}y^9$

EJEMPLO 2 :

Señale la suma de los grados absolutos de los términos centrales de la potencia de $(x^3 - y^4)^7$.

Por propiedad:

$$\text{Lugar } (T_{c1}) = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$\text{Lugar } (T_{c2}) = \frac{7+3}{2} = 5$$

Análogamente, los términos serán:

$$T_{C_1} = T_4 = C_3^7\,(x^3)^4\,(-y^4)^3 = -35x^{12}y^{12}$$

$$T_{C_2} = T_5 = C_4^7\,(x^3)^3\,(-y^4)^4 = -35x^9y^{16}$$

Nos piden:

$$S = GA\,(T_{c1}) + GA\,(T_{c2})$$

$$S = (12+12) + (9+16) = 49$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Halle el coeficiente de x^3 en el desarrollo del binomio $(2x + (2x)^{-1})^{11}$.

A) 330 B) 660 C) 1320 D) 2640 E) 5280

RESOLUCIÓN :

* Del binomio $(2x+(2x)^{-1})^{11}$ hallamos el término de lugar $k+1$

$$t_{k+1} = C_k^{11}(2x)^{11-k}.((2x)^{-1})^k$$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^{11}\,2^{11-k}.x^{11-k}.2^{-k}.x^{-k}$$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^{11}\,2^{11-2k}.\,x^{11-2k}$$

Se quiere el coeficiente de x^3, entonces :

$$11-2k=3 \Rightarrow 8=2k \Rightarrow k=4$$

El coeficiente será :

$$C_4^{11}\,2^{11-2(4)} = C_4^{11}\times2^3 = \frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4}\times2^3$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^3 es ***2640.***

RPTA:"D"

PROBLEMA 2:

Deeterminar el término independiente de x en la expansión de: $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

A) 72 B) 75 C) 84 D) 0 E) 52

RESOLUCIÓN :

De la expresión: $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

Sea T_{k+1} el término independiente de x

Luego por el término general:

$$\Rightarrow T_{k+1} = C_k^9(\sqrt{x})^{9-x}\times\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_k^9\,x^{\frac{9-k}{2}}\times\left(x^{-1/4}\right)^k$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = C_k^9\,x^{\frac{9-k}{2}}\times x^{\frac{-k}{4}} = C_k^9\,x^{\left[\frac{9-k}{2}-\frac{k}{4}\right]}$$

$$\Rightarrow T_{k+1} = C_k^9\,x^0 = C_k^9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Por dato:

Como el término es independiente de x nos indican que debe ser de grado nulo.

$$\Rightarrow \frac{9-k}{2}-\frac{k}{4}=0 \Rightarrow k=6$$

Luego: El término independiente será el término de lugar siete

Reemplazando en (α) se tiene:

Con $\boxed{k=6}$: $T_{k+1}=T_{6+1}$

$$\Rightarrow T_{k+1}=T_7=C_6^9 \Rightarrow T_{Indep.}=T_7=C_6^9=84$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 3 :

Teniendo en cuenta el desarrollo de la expresión:

$$\left[\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^{56}$$

¿Cuál de las proposiciones, al determinar su valor, es verdadero?

I) El número de términos irracionales es ***40***.

II) El número de términos fraccionarios es ***4***.

III) El término independiente de x ocupa el décimo tercer lugar.

RESOLUCIÓN :

De la fórmula de término general

$$\Rightarrow t_{k-1}=C_k^{56}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{56-k}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^k$$

$$\Rightarrow t_{k-1}=C_k^{56}\cdot x^{\frac{56-k}{2}-\frac{k}{3}}$$

Analizando el exponente: $\frac{56-k}{2}-\frac{k}{3}=28-\frac{k}{2}-\frac{k}{3}$

$=\boxed{28-\frac{5k}{6}} \Rightarrow$ son racionales, si $\boxed{k=\dot{6}}$

$\Rightarrow k=0;6;12;18;24;30;36;42;48;54$ es decir, ***10*** términos son racionales

I) Términos irracionales son $(56+1)-10=47$ (Falso)

II) Será fraccionario si $\left[28-\frac{5k}{6}\right]\in Z^-$ lo cual ocurre si k es $36;42;48;54$; es decir, 4 términos (verdadero).

III) Se tendrá término independiente de α.

Si $\left[28-\frac{5k}{6}\right]=0 \Rightarrow \nexists k\in N$

luego, no existe término independiente. (Falso)

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar la suma de los valores de x.

$$\left(x^2-x\right)!=720$$

A) 1 B) 3 C) -2 D) -1 E) 0

02 Hallar el valor de x: $\dfrac{(x+7)!(x+5)!}{(x+5)!+(x+6)!}=11!$

A) 5 B) 6 C) 8 D) 7 E) 11

03 Hallar m: $\dfrac{(m!+1)m!}{m!+6}=20$

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

04 Si $21C_n^{2n+1}=11C_n^{2n+2}$, el valor de n es:

A) 9 B) 10 C) 15 D) 20 E) 18

05 Si $40C_m^{18}=51C_m^{16}$, el valor de m es:

A) 2 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

06 Simplificar: $P=\left(\dfrac{40!+41!}{42!}\right)\left(\dfrac{83!}{81!+82!}\right)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 Calcular el valor de: $K=\sqrt{\dfrac{9!+10!+11!}{8!+9!+10!}}$

A) 3 B) 3,3 C) 3,5 D) 3,7 E) 3,9

08 Simplificar:

$$K=\left(\frac{4!+5!+6!}{4!+5!}\right)\left(\frac{26!+27!}{28!}\right)\left(\frac{55!}{53!+54!}\right)$$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

09 Reducir: $P=\dfrac{7C_{13}^{17}+4C_4^{17}+3C_{13}^{17}}{2C_4^{17}}$

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

10 Calcular de la siguiente suma:

$$C_5^8+C_6^8+C_7^9+C_8^{10}+C_9^{11}+C_{10}^{12}$$

A) 286 B) 296 C) 316 D) 326 E) 336

11 Hallar: $n+k$, si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x+2)^n$ es $80x^k$.

A) 7 B) 5 C) 3 D) 8 E) 2

12 Hallar el término independiente de "x" si existe en la expresión de: $\left[\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right]^9$

A) 84 B) 86 C) 48 D) 68 E) 82

13 En el término *28* del desarrollo de: $(x+3y)^n$ el exponente de la variable x es *3*. Calcular el valor de n.

A) 30 B) 20 C) 15 D) 25 E) 10

14 Si el desarrollo del binomio $\left(2x^3-3y^2\right)^n$ tiene *15* términos, hallar el grado absoluto del décimo tercer término.

A) 30 B) 40 C) 50 D) 20 E) 10

15 Hallar los valores de n, sabiendo que en la expresión de $(x+3)^n$, los términos de lugares *9* y *10* tienen coeficientes iguales.

A) 11 B) 13 C) 15 D) 19 E) 17

16 Calcular el tercer término en le desarrollo de:

$$\left(x^5+3y^2\right)^6$$

A) $120x^{12}y^9$ B) $135x^{20}y^4$ C) $155x^{21}y^6$
D) $165x^{12}y^9$ E) $175x^{10}y^4$

17 Determinar el noveno término en la expansión:

$$\left(x^5+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$$

A) $495x^{49}$ B) $295x^2$ C) $195x^{10}$ D) $485x^4$ E) $265x^2$

18 Calcular el término central en el desarrollo:

$$\left(x^4+\frac{1}{\sqrt[6]{3x}}\right)^{12}$$

A) $54x^{23}$ B) $108x^{24}$ C) $308x^{23}$ D) $304x^{23}$ E) $208x^{12}$

19 Calcular el término central en el desarrollo de:

$$\left(x^9-\frac{1}{x^3}\right)^{12}$$

A) $25x^{10}$ B) $70x^{16}$ C) $75x^{20}$ D) $65x^{10}$ E) $80x^{16}$

20 Determinar el término independiente de x en:

$$\left(x+\frac{2}{x^3}\right)^{12}$$

A) 210 B) 186 C) 220 D) 110 B) 196

21 Hallar el *5to* término de: $(x+2y^3)^7$

A) $480x^4y^{16}$ B) $560x^3y^{12}$ C) $440x^7y^{21}$
D) $210x^4y^{16}$ E) $320x^3y^{12}$

22 ¿Cuál es el término número *14* de $(3-x)^{15}$?

A) $150x^{12}$ B) -144^{13} C) $1\,000x^{15}$
D) $-945x^{13}$ E) $400x^{15}$

23 Indicar el valor "n" en: $(1-3a^n)^6$; si el término número *5* contiene el valor a^8.

A) 3 B) 4 C) 6 D) 2 E) 5

24 Encontrar el coeficiente de m^{16} en $(m^2-2m)^{10}$

A) 2 400 B) 1 020 C) 3 360 D) 1 600 E) 2 100

25 Hallar el término número *4* de $(a-5)^5$

A) $-45a^2$ B) $5\,050a^4$ C) $-640a^3$
D) $-3\,600a^5$ E) $-1\,250a^2$

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular $\left(x^2+x+5\right)$ en: $(x!)!=720$

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 21

02 Hallar x en: $\dfrac{(x+8)!}{(x+7)!}+\dfrac{(x+7)!}{(x+6)!}=21$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

03 Calcula la suma: $\dfrac{(n+3)!(n+5)!}{(n+3)!+(n+4)!}=120$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

04 Calcula la suma: $S=0!+\dfrac{3!}{2!}+\dfrac{5!}{4!}+\cdots+\dfrac{49!}{48!}$

A) 101 B) 550 C) 500 D) 625 E) 205

05 Simplifica: $E=\dfrac{n!+(n+1)!+(n+2)!}{n!+(n+1)!}$

A) n B) $n+1$ C) $n+2$ D) $n+3$ E) $n+4$

06 Calcular: $E=C_3^{10}+C_4^{10}+C_5^{11}$

A) 128 B) 256 C) 512 D) 840 E) 792

07 Hallar x en la siguiente igualdad:

$$\left(C_2^7\right)^{C_5^7}=(x)^x$$

A) 8 B) 41 C) 21 D) 25 E) 33

08 Calcular: $E=\dfrac{C_4^{19}+C_5^{19}}{C_6^{21}}$

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{21}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{1}{5}$

09 Reducir:

$$P=C_0^{20}+C_1^{100}-C_{30}^{30}-C_{99}^{100}+C_{27}^{28}$$

A) 26 B) 27 C) 28 D) 29 E) 30

10 Calcular x en: $C_4^{x+3}+C_{x-2}^{x+3}=C_6^{x+5}-1$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 14

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) $0! = 0$

( ) $Si: a! = a \Rightarrow a = 1 \vee a = 2$

( ) $Si: (a-1)! = 2 \Rightarrow a = 3$

A) FFF B) VVV C) FVV D) VFF E) FVF

02 Indicar la veracidad *(V)* o falsedad *(F)* de las siguientes proposiciones:

( ) $C_3^7 = C_4^7$

( ) $C_4^9 + C_5^9 = C_4^{10}$

( ) $C_6^{12} = 2C_5^{11}$

A) VVV B) FFF C) FVF D) VFF E) VFV

03 Dado el binomio: $(x+y)^8$ señale cuántas proposiciones son correctas:

( ) El número de términos es *9*.

( ) La suma de los coeficientes es *512*.

( ) El lugar del término central es *5*.

( ) El t_3 es $28x^6y^2$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ninguna

04 Calcular la suma de los valores de «*x*», si: $(x+2)! = x^3 + 3x^2 + 2x$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

05 Simplificar:

$$E = \frac{a! + (a+1)! + (a+2)!}{a! + (a+1)!}$$

A) a+1 B) 1 C) a D) a+2 E) 2

06 Calcular «*n*», si: $\dfrac{n!(n!-3)}{n!+4} = 18$

A) 6 B) 24 C) 3 D) 2 E) 4

07 Calcular «*x*», si: $C_{x-4}^{x} = 70$

A) 14 B) 18 C) 12 D) 8 E) 16

08 Reducir:

$$E = C_3^n + 4C_3^{n+1} + C_3^{n+2}$$

A) n^2+1 B) n^2-1 C) $n2$ D) n^3-1 E) n^3

09 Simplificar:

$$E = \frac{C_8^{21} + C_9^{21} + C_{10}^{22} + C_{11}^{23}}{C_{13}^{24} + C_{11}^{24}}$$

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) $\frac{1}{4}$

10 Calcular «*n*», si: $\dfrac{C_2^n + C_3^{n+1}}{C_4^{n+2}} = \dfrac{6}{7}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Calcular la suma de los coeficientes de los términos del desarrollo de : $(3x+y)^{10}$

A) 16^5 B) 3^{10} C) 2^{10} D) 8^5 E) 2^{11}

12 Indique el lugar que ocupa el término que tiene como grado absoluto 21 en el desarrollo de : $(x^2 + 2y)^{15}$.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

13 Un término del desarrollo de: $(x^2 - 5y^7)^n$ tiene como parte literal a x^6y^{35}. Calcular el coeficiente del segundo término.

A) -9 B) -40 C) -50 D) -60 E) -30

14 Calcular «*n*», si los coeficientes de los términos de lugares *5* y *17* son iguales en el desarrollo de: $(x+y)^n$.

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 24

15 Calcular el término lineal del desarrollo del binomio :

$$\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{11}$$

A) 300a B) 310a C) 320a D) 330a E) 340a

16 Si el noveno término del desarrollo de : $(x^2 + \sqrt{y})^{10}$ tiene la forma: $(8m+3n)x^{m+1}y^{n-3}$ calcular: $m+n$.

A) 8 B) 10 C) 3 D) 5 E) 7

17 Si el coeficiente del término central del desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{6x} + 3x^2\right)^{12}$$

es a/b, calcular: $a - b$.

A) 211 B) 212 C) 213 D) 214 E) 215

18 Si el penúltimo término del desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{x^{7^x}} - x^x\right)^9$$

toma el valor de 243, calcular «*x*».

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

19 Señale el número de términos de grado natural del desarrollo de:

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$$

A) 4 B) 6 C) 5 D) 10 E) 12

20 El término de lugar *11* del desarrollo de: $\left(\sqrt{x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)^n$ contiene x^{15}. Calcular «*n*».

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)E	3)C	4)B	5)D	6)E	7)B	8)E	9)C	10)E
11)A	12)C	13)B	14)B	15)D	16)B	17)E	18)[illegible]	19)B	20)D

PROGRESIONES

CAPÍTULO 091

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Reconocer las progresiones aritméticas y geométricas.*
* *Aplicar las propiedades en los diversos problemas de las progresiones.*

INTRODUCCION :

Una progresión aritmética es una serie de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante, cantidad llamada diferencia de la progresión o simplemente diferencia.

Por ejemplo, la sucesión ***3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11,...*** es una progresión aritmética de constante (o diferencia común) ***2***. Una ***progresión geométrica*** o *sucesión* geométrica está constituida por una secuencia de elementos en la que cada uno de ellos se obtiene multiplicando el anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión. Se suele reservar el término progresión cuando la secuencia tiene una cantidad finita de términos mientras que se usa sucesión cuando hay una cantidad infinita de términos, si bien, esta distinción no es estricta.

Así, ***5 ; 15 ; 45 ; 135 ; 405*** ; ... es una progresión geométrica con razón igual a ***3***, porque:

$15 = 5 \times 3$ $\quad 45 = 15 \times 3$ $\quad 135 = 45 \times 3$

$405 = 135 \times 3$ y así sucesivamente.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Se dice que una sucesión de números están en progresión aritmética cuando cada uno de ello es igual al anterior más una cantidad constante (diferencia de la progresión o Razón Aritmética).

$$\div a_1 \; ; \; a_2 \; ; \; a_3 \; ; \ldots\ldots ; u$$

(de cada término al siguiente: $+r$, $+r$; $u = a_n$)

ELEMENTOS :

* Inicio de la progresión : $\div$
* Primer término : a_1
* Último término : U
* Razón o diferencia : r
* Término de lugar n : a_n
* Número de términos : n
* Suma de términos : S

EJEMPLO :

$$\div 3 \; ; \; 7 \; ; \; 11 \; ; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(de cada término al siguiente: $+4$, $+4$)

$$\div 8 \; ; 2 \; ; -4 \; ; -10 \; ; \ldots\ldots\ldots$$

NOTA :

$$\div a \; ; a + d \; ; a + 2d \; ; \ldots\ldots$$

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1}$$

CLASE

1) CRECIENTE :

Cuando la razón es una cantidad positiva.

EJEMPLO :

$$\div 4 \; ; 9 \; ; 14 \; ; 19 \; ; 24 \; ; \ldots (r = 9 - 4 = 5)$$

2) DECRECIENTE :

Cuando la razón es una cantidad negativa.

EJEMPLO :

$$\div 25 \; ; 22 \; ; 19 \; ; 16 \; ; 13 \; ; \ldots (r = 22 - 25 = -3)$$

FORMAS DE REPRESENTAR UNA P.A.

I) Cuando no se conoce el número de términos :

$$\div a \; ; a + r \; ; \; a + 2r \; ; a + 3r \; ; \ldots$$

II) Cuando el número de términos es impar:

$$\ldots a - 3r \; ; a - 2r \; ; a - r \; ; a \; ; a + r \; ; a + 2r \; ; a + 3r \; ; \ldots$$

NOTA :

Se comienza por los dos términos marcados, luego se agregan en ambos lados la misma cantidad de términos hasta completar los términos requeridos.

III) Cuando el número de término es par:

$$\ldots ; a - 5r \; ; a - 3r \; ; (a - r) ; (a + r) ; a + 3r \; ; a + 5r \; ; \ldots$$

TÉRMINO GENERAL DE UNA P.A. (a_n)

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

a_n : Término de la posición «n».
n : Cantidad de términos.

ÚLTIMO TÉRMINO DE LA P.A.

Si la P.A. admite «n» términos, el último ocupa la posición «n», es decir : $a_n = U$; luego:

$$u = a + (n-1)r \Rightarrow \boxed{n = \frac{U - a_1}{r} + 1}$$

SUMA DE LOS «n» PRIMEROS TÉRMINOS DE UNA P.A.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

(de a_1 a a_2: $+r$; de a_2 a a_3: $+r$)

$$\Rightarrow S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \times n \quad ó$$

$$\boxed{S = \left[\frac{a_1 + U}{2}\right] n} \quad ó \quad \boxed{S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] n}$$

DEFINICIÓN :

Cuando tres cantidades están en P.A. se dice que la intermedia es la media aritmética de las otras dos.

Es decir : $\div \ldots\ldots ; a ; b ; c ; \ldots\ldots$

$$\boxed{b = \frac{a+c}{2}}$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS

Interpolar «m» medios aritméticos o diferenciales entre dos números dados a y b es formar una P.A. con $(m+2)$ términos cuyos extremos sean los números propuestos a y b. De lo expuesto se tiene :

$\div a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b$

"m" medios aritmeticos o diferenciales

$$\boxed{r = \frac{b-a}{m-1}} \quad ó \quad \boxed{r = \frac{U - a_1}{m+1}}$$

r : razón de interpolación.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Se dice que una sucesión de números están en progresión geométrica cuando cada término es igual al anterior multiplicado por un factor constante.

EJEMPLOS :

$\div\div 3 \; ; \; 6 \; ; \; 12 \; ; \; 24 \; ;\ldots\ldots\ldots$

$\div\div 1 \; ; -\frac{1}{3} \; ; \frac{1}{9} \; ; -\frac{1}{27} \; ;\ldots\ldots\ldots$

$\div\div a \; ; \; \underset{\times q}{aq} \; ; \; \underset{\times q}{aq^2} ; \; \underset{\times q}{aq^3}$

ELEMENTOS :

- Primer término : a
- Último término : U
- Razón o cociente : q
- Término de lugar k : T_k
- Número de términos : n
- Suma de términos : S
- Producto de términos : P

EN GENERAL :

$\div\div T_1 : \underset{\times q}{T_2} : \underset{\times q}{T_3} ; T_4 : \ldots\ldots : T_n$

$$\Rightarrow q = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \ldots\ldots = \frac{T_n}{T_{n-1}}$$

CLASES

1) CRECIENTES :

Aquellas cuya razón es mayor que la unidad.

EJEMPLO :

$\div 2 : \underset{\times 3}{6} : \underset{\times 3}{18} : \underset{\times 3}{54} : \ldots \left(q = \frac{6}{2} = 3\right)$

2) DECRECIENTE :

Cuando la razón es un número positivo menor que la unidad.

EJEMPLO :

$\div 48 : \underset{\times \frac{1}{2}}{24} : \underset{\times \frac{1}{2}}{12} : 6 : \ldots : \left(q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}\right)$

FORMAS DE REPRESENTAR UNA P.G.

1) Cuando no se conoce el número de términos.

$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \ldots\ldots$

2) Cuando el número de términos es impar.

$\ldots \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q} : a : aq : aq^2$

TÉRMINO GENERAL(T_n)

$$\boxed{T_n = T_1 q^{n-1}}$$

T_1 : 1er. término de la P.G.
T_n : Término de la posición "n".

$$\boxed{T_x = T_y \, q^{x-y}}$$

- Término del lugar "x".
- Término del lugar "y".

EJEMPLO :

$\div\div 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : 320$

(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7)

$T_7 = T_1 q^6 = 5(2)^6 = 320$

$T_5 = T_2 q^3 = 10(2)^3 = 80$

$T_6 = T_2 q^{6-2} = 10(2)^4 = 160$

3) Término Central (T_c) si "n" es impar :

$$\boxed{T_c^2 = T_1 T_n} \quad ó \quad \boxed{T_c = \sqrt{T_1 T_n}}$$

EJEMPLO :

$7 : 21 : \underset{T_c}{(63)} : 189 : 567$

$63^2 = 7(567)$

4) Término equidistante de los extremos :

Si:

$\div\div \underbrace{T_1 : \ldots : T_x}_{\text{"x" términos}} : \ldots : \underbrace{T_y : \ldots : T_n}_{\text{"x" términos}}$

Entonces se cumple : $\boxed{T_1 T_n = T_x T_y}$

EJEMPLO :

$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$

$2 \times 128 = 4 \times 64 = 8 \times 32 = 256$

INTERPOLACIÓN GEOMÉTRICA

Son aquellas que se pueden introducir entre dos extremos de tal manera que la sucesión formada este en progresión geométrica.

Así : $\div\div a \; \underbrace{: \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots :}_{\text{Medios geometricos}} b$

$$\boxed{q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$ q es la razón de interpolación

EJEMPLO :

Interpolar *3* medios geométricos entre *5* y *405*.

$$5 : \underbrace{..................}_{3\ \text{Medios geométricos}} : 405$$

$$m=3$$

$$q = \sqrt[3+1]{\frac{405}{5}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Entonces la sucesión geométrica será : $5 : 15 : 45 : 135 : 405$

SUMA DE LOS "n" PRIMEROS TÉRMINOS:

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = T_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)} \ ; \ q \neq 1$$

EJEMPLO :

$$3+6+12+24+48 = 3\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right) = 93$$

OBSERVACIÓN :

$$S_L = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + ...$$

$$\Rightarrow \boxed{S_L = \frac{T_1}{1-q}} \ ; |q| < 1$$

S_L → Suma límite

EJEMPLO S:

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

PRODUCTO DE LOS "n" TÉRMINOS.

$$P_n = T_1 \times T_2 \times T_3 \times ...... \times T_n$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = \sqrt{(T_1 \times T_n)^n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = T_c^n}$$

EJEMPLO :

$$2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

$$P_5 = \sqrt{(2 \times 32)^5}$$

$$\Rightarrow P_5 = 2^{15}$$

PROGRESIÓN ARMÓNICA

Una progresión armónica es una sucesión donde los recíprocos de sus términos forman una progresión aritmética.

Consideremos una progresión armónica cuyos términos son:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; .... ; a_k ; .... ; a_n$$

entonces los recíprocos de estos términos forman una progresión aritmética.

$$\frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; \frac{1}{a_3}; ...; \frac{1}{a_k}; ...; \frac{1}{a_n}$$

• ***Razón armónica :***

$$\boxed{h = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k-1}}}$$

• Término k – ésimo :

$$\boxed{\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + (k-1)h}$$

• ***Último término :***

$$\boxed{\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)h}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular : $S=2+9+16+...+37$

A)97 B)201 C)117 D)381 E)423

RESOLUCIÓN :

* Reconociendo los elementos que participan.

$$a_1 = 2 \ ; \quad r = 7 \ ; \quad U = 37$$

$$n = \frac{U-a_1}{r} + 1 = \frac{37-2}{7} + 1 = 6$$

* Piden :

$$S = \left[\frac{a_1+U}{2}\right]n = \left[\frac{2+37}{2}\right]6 = 117$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Calcular el término que ocupa el lugar 20, en :

$$\div -18 \ ; \ 33 \ ; \ 84 \ ; ....$$

A)867 B)903 C)1041 D)951

RESOLUCIÓN :

* Se puede apreciar que :

$$a_1 = -18 \ ; \ r = 33-(-18) = 51$$

* Se pide "a_{20}" , entonces $n=20$; cuando.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow a_{20} = -18 + (20-1)51 \Rightarrow a_{20} = 951$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Si la suma de 4 números enteros en progresión aritmética es 24 y su producto es 945. Indicar el segundo término de dicha progresión.

A) 5 B)9 C) 13 D) 17 E) 3

RESOLUCIÓN :

* Sea la progresión :

$$\div a-3r \ ; \ a-r \ ; a+r \ ; a+3r$$

(+2r, +2r)

* Según dato :

$$a-r+a-r+a+r+a+3r = 24$$

* Además : $4a=24 \Rightarrow a=6$

$$(a-3r)(a-r)(a+r)(a+3r) = 945$$

$$(a^2-9r^2)\ (a^2-r^2) = 945$$

$$\Rightarrow (36-9r^2)\ (36-r^2) = 945$$

Al resolver, resultará : $r = 1$

* Piden : $a-r = 6-1 = 5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 :

Al interpolar 5 medios aritméticos entre 32 y 80 el término de lugar 5 es :

A)12 B)63 C)64 D)72 E)66

RESOLUCIÓN :

$$\div 32 \ ; \underbrace{..................}_{5\ \text{medios aritméticos}} ; \ 80$$

$$\Rightarrow a = 32 \ ; \ b = 80 \ \text{y} \ m = 5$$

$$\Rightarrow r = \frac{b-a}{m+1} = \frac{80-32}{5+1} = 8$$

* Piden :

$$a_5 = a_1 + (5-1)r = 32 + (5-1)8 = 64$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5:

Calcular el número de términos de la siguiente progresión geométrica:

$$\div\div 96 : 48 : 24 : ...... : \frac{3}{8}$$

A)7 B)6 C)9 D)10 E)12

RESOLUCIÓN :

• Sabemos :

$$T_n = T_1\, q^{n-1} ....(I)$$

• Se puede apreciar que:

$$T_n = \frac{3}{8}; T_1 = 96 \ ; \ q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$$

• Al reemplazar en (I), se obtendrá:

$$\frac{3}{8} = 96\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{8} = 32 \times \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = 256 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^8$$

$$\Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Calcular la suma de los *10* primeros términos de la siguiente progresión geométrica: $2 : -4 : 8 : \ldots\ldots$

A) 824 *B) 1024* *C) –824*
D) –682 *E) 424*

RESOLUCIÓN :

• Reconozcamos los elementos:

$$T_1 = 2\ ;\ n = 10\ ;\ q = \frac{-4}{2} = -2$$

• Además:

$$S_n = T_1\left[\frac{q^n - 1}{q - 1}\right]$$

$$\Rightarrow S_{10} = 2\left[\frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1}\right] = -682$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 7 :

Si se interpola *5* medios geométricos en *8* y *5832*, luego el quinto término será:

A) 1944 *B) 648* *C) 729*
D) 2916 *E) 1456*

RESOLUCIÓN :

$$\div\div 8 : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : 5832$$

5 Medios geométricos

$$\Rightarrow a = 8\ ;\ b = 5832\ ;\ m = 5$$

$$\Rightarrow q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5+1]{\frac{5832}{8}}$$

$$= \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

* Ahora:

$$T_n = T_1 q^{n-1}$$

$$\Rightarrow T_5 = 8(3)^{5-1} = 8 \times 3^4 = 648$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 8 :

Calcular el noveno término de la progresión armónica:

$$\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{6} ; \ldots\ldots$$

$A)\frac{1}{24}$ $B)\frac{1}{36}$ $C)\frac{1}{72}$ $D)\frac{1}{18}$ $E)\frac{1}{81}$

RESOLUCIÓN :

• El noveno término es :

$$\frac{1}{a_9} = \frac{1}{a_1} + (9-1)h$$

• Donde:

$$a_1 = \frac{1}{2} ; h = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = 4 - 2 = 2$$

• Luego : $\frac{1}{a_9} = 2 + (8)(2) = 18 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{18}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 9:

Calcular el décimo término de la progresión armónica.

$$12\ ;\ 8\ ;\ 6\ ;\ \ldots\ldots$$

$A)\frac{1}{2}$ $B)2$ $C)\frac{11}{24}$ $D)\frac{24}{11}$ $E)\frac{12}{29}$

RESOLUCIÓN :

• El décimo término es :

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1} + (10-1)h$$

• Donde : $a_1 = 12$

$$h = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

• Luego :

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{12} + 9 \times \frac{1}{24} = \frac{11}{24} \Rightarrow a_{10} = \frac{24}{11}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 10 :

Si $\frac{3}{a-x} ; \frac{4}{x} ; \frac{5}{a+x}$ están en *P.A.* señalar la afirmación correcta.

A) $3x = 2a$ *B)* $3x = a$ *C)* $3x = \frac{a}{3}$

D) $3x = 4a$ *E)* $3x = \frac{a}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Ya que se trata de una progresión aritmética, entonces:

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{a-x} = \frac{5}{a+x} - \frac{4}{x}$$

* Al operar se obtendrá:

$$4a^2 - 4ax - 3x^2 = 0$$

$$\begin{array}{lll} 2a & -3x & \Rightarrow 2a - 3x = 0 \\ 2a & x & \Rightarrow 2a + x = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x = 2a \text{ ó } 2a = -x$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 11 :

La suma de los *20* términos de una *P.A.* creciente es *650*.

Si el producto de los términos extremos es *244*, hallar la razón.

A) 2 *B) 3* *C) 7* *D) 5* *E) 11*

RESOLUCIÓN :

• Dato: $t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_{20} = 650$

• Es decir:

$$\left(\frac{t_2 + t_{20}}{2}\right)20 = 650 \Rightarrow t_1 + t_{20} = 65$$

• Además : $t_1 \times t_{20} = 244 \ldots\ldots\ldots(2)$

• Resolviendo *(1)* y *(2)*:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_{20} = 61 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como :} \\ t_{20} = t_1 + 19r \\ \Rightarrow 61 = 4 + 19r \end{array}$$

$$\Rightarrow r = 3$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 12 :

En una *P.A.* el *4to.* término es *8* y el *7mo.* término es *14*.
Hallar el término de lugar *20*.

A) 26 *B) 31* *C) 50* *D) 40* *E) 43*

RESOLUCIÓN :

* En una progresión aritmética se cumple:

$$t_n = t_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow t_n = t_8 + (n-k)r\ ;\ 1 \leq k \leq n$$

* En nuestro problema:

$$\left.\begin{array}{l} t_7 = t_4 + (7-4)r \\ t_7 = t_4 + 3r \\ 14 = 8 + 3r \\ \Rightarrow r = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} t_{20} = t_7 + (20-7)r \\ t_{20} = t_7 + 13r \\ t_{20} = 14 + 13(2) \\ \Rightarrow t_{20} = 40 \end{array}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 13 :

En una *P.A.* la suma de todos los términos en función del número de términos es : $S_n = \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2}$

Halle el término *400*.

A) 905 *B) 1205* *C) 1325*
D) 482 *E) 2190*

RESOLUCIÓN :

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \Rightarrow S_1 = \frac{3(1)^2 + 12(1)}{2} = 8 = t_1 \\ n = 2 \Rightarrow S_2 = \frac{3(2)^2 + 13(2)}{2} = 19 = t_1 + t_2 \end{array}\right\} t_2 = 11$$

luego , la *P.A.* será :

$$t_1\ \ t_2\ \ t_3\ \ \ldots\ldots$$

$$8\ \underset{3}{;}\ 11\ \underset{3}{;}\ 14\ ;\ \ldots\ldots \Rightarrow t_n = 3n + 5$$

$$t_{400} = 3(400) + 5 = 1205$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 14 :

La siguiente es una progresión armónica:

$$\frac{1}{2x+3} ; \frac{1}{x+8} ; \frac{1}{3x+1} ; \frac{1}{y} ; \ldots$$

Calcule el valor de $x + y$.

A) 9 *B) 21* *C) 16* *D) 18* *E) 24*

RESOLUCIÓN :

* Como la inversa de los términos de una sucesión armónica forman una progresión aritmética

tendremos:

$2x+3\ ;\ x+8\ ;\ 3x+1\ ;\ y\ ;...$P.A.

* Luego: $x+8=\dfrac{2x+3+3x+1}{2}$

¿por qué?.

* Resolviendo : $x=4$
* La P.A. será: $11\ ;12\ ;13\ ;14\ ;...$

$\Rightarrow y=14\Rightarrow x+y=18$

RPTA: "D"

PROBLEMA 15 :

Tres términos consecutivos en una progresión aritmética creciente tienen como suma *69* y como producto *11 960*. Calcular el 3er. término.

A) 18 B) 26 C) 37 D) 48 E) 23

RESOLUCIÓN :

Sean : $a-r\ ;a\ ;a+r$

los tres términos en P.A.

Luego :

$a-r+a+a+r=\ 69\Rightarrow a=23$

$\Rightarrow (a-r)\ a\ (a+r)=11\ 960$

$\Rightarrow\ (a^2-r^2)\ a=11\ 960$

$\Rightarrow (23^2-r^2)23=11\ 960$

como : $r>0\ \ ;\ \ r=3$

* Piden: $a+r=23+3=26$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

Hallar el número de términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de sus "*n*" términos no varía al aumentar en *1* la razón y al mismo tiempo disminuir en *30* su primer término.

A) 58 B) 60 C) 61 D) 64 E) 71

RESOLUCIÓN :

* Según el enunciado :

$S_n=[2a_1+(n-1)r]\dfrac{n}{2}$..................(I)

$\Rightarrow S_n=[2(a_1-30)+(n-1)(r+1)]\dfrac{n}{2}$..(II)

* Igualando:

$2a_1+(n-1)r=2(a_1-30)+(n-1)(r+1)$

$\Rightarrow 2a_1+(n-1)r=2a_1-60+(n-1)r+n-1$

* Al despejar : $n=61$

RPTA: "C"

PROBLEMA 17 :

La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente e ilimitada es igual al doble de la suma de los *5* primeros términos. Hallar la razón.

A) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ B) $\sqrt[5]{\dfrac{2}{3}}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$

RESOLUCIÓN :

* Sea la P.G. decreciente ilimitada:

$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : ......$

* Donde : $0<q<1\wedge a\neq 0$.

$S_L=2S_5$

$\Rightarrow \dfrac{a}{1-q}=2(a)\left(\dfrac{q^5-1}{q-1}\right)$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{2}=q^5-1\Rightarrow q=\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 18 :

En una serie geométrica de números naturales de razón $q>1, q\in N$. La suma de los n primeros términos es $31(a>3)$. Si a_1 es el primer término de la serie. Hallar el valor de $(n+a_1)$.

A) 4 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Serie geométrica razón : $q>1\wedge q\in N$
* Primer término: $a_1\in N$

$\Rightarrow S_a=31=a_1\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right);\ n>3$

$\Rightarrow 1\times\left(\dfrac{32-1}{2-1}\right)=a_1\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$

* Comparando:

$a_1=1\ ;\ q=2\wedge n=5$

$\Rightarrow n+a_1=6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 19:

En una progresión geométrica se conoce el término de lugar *3* cuyo valor es *2* y el término de lugar *7* cuyo valor es *32*. ¿Cuál es el valor del término de lugar *10*?

A)64 B)–256 C)–128 D)–28 E)–64

RESOLUCIÓN :

* En una P.G.

$t_3=2\wedge t_7=32$

* $t_x=t_y\times q^{x-y}$; q: razón

$t_7=t_3\times q^{7-3}$

$\Rightarrow 32=2\times q^4\Rightarrow q=2\vee q=-2$

Para: $q=2$

$t_{10}=t_3\times q^{10-3}=2(-2)^7=-2^8=-256$

RPTA: "B"

PROBLEMA 20:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida por:

$a_1=3\ ;a_{16}=78\ ;a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$

Calcular: $a_{10}+a_{20}$

A)198 B)146 C)206 D)208 E) 186

RESOLUCIÓN :

* $\{a_n\}$ es una sucesión, con :

$a_1=3\ ;\ a_{16}=78$

* $a_{n+2}=2a_{n+1}-an\ ;n\in N$

$\Rightarrow a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

* La sucesión es una P.A.

$a_{16}=a_1+15r\Rightarrow 78=3+15r$

$\Rightarrow\ \ r=5$

$a_{10}=a_1+9r=3+9\times 5=48$

$a_{20}=a_1+19r=3+19\times 5=98$

$\Rightarrow a_{10}+a_{20}=48+98=146$

RPTA: "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS 31

(01) Si *2; 4* y *a*, están en progresión aritmética, ¿cuál es el valor de «*a*»?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 0

(02) Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética cuya razón es *10*. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de dichos ángulos?

A)40° B)20° C)10° D) 30° E) 100°

(03) El término central de una P.A es *4*. Si la progresión es de *21* términos, calcular la suma de dichos términos

A) 80 B) 84 C) 50 D) 60 E) 100

(04) Situar cinco medias aritméticas entre *8* y *26*, indicando la suma de ellas

A) 70 B) 85 C) 50 D) 60 E) 80

(05) Las edades de tres personas forman una progresión aritmética creciente, cuya suma es *63* y la suma de sus cuadrados *1 395*, entonces la edad de la menor es

A) 21 B) 20 C) 27 D) 15 E) 33

(06) ¿Cuántas medias aritméticas se pueden interpolar entre *8* y *48*, de tal manera que se forme una progresión cuya suma de términos sea *588*?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21

07 Tres números de una progresión aritmética creciente dan por producto 16 640, el menor es 20. ¿Cuál es su suma?

A) 70 B) 78 C) 80 D) 75 E) 90

08 ¿Cuántos términos de la progresión aritmética ÷ 3 . 7 . 11... deben tomarse para que la suma sea 89?

A) 20 B) 25 C) 15 D) 10 E) 30

09 La suma de los «n» primeros términos de una P.A está dada por $3n(n + 2)$. Calcular el quinto término de la progresión

A) 30 B) 31 C) 25 D) 33 E) 34

10 Un coronel que manda 3 003 hombres quiere formar sus soldados en triángulo de manera que la primera fila tenga un soldado, la segunda 2, la tercera 3, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas habrá?

A) 77 B) 50 C) 40 D) 70 E) 55

11 Dada las siguientes sucesiones. ¿Cuáles son P. G.?

I) 1; 1/2; 1/4
II) 1; 2; 4
III) 1; –1/2; 1/4

12 Dado los números 3 y 12 que número se debe intercalar entre ambos para obtener una P.G.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 10

13 El quincuagésimo múltiplo de 3 es :

A) 141 B) 144 C) 147
D) 150 E) 153

14 Si en una progresión geométrica: $a_1 = 2$ y $a_6 = 64$. Encuentre r, a_4

A) 2; 61 B) 3; 16 C) 2; 16
D) 3; 64 E) N.A.

15 Interpolar cuatro medios geométricos entre 1/9 y –27

A) 1/3, 1, 3 y 9 B) 1/3, –1, –3 y 9
C) –1/3, 1, –3 y 9 D) 1/3, –1, 3 y 9
E) N.A.

16 Calcular la razón y el primer término de una P. A. en el cual $a_3 = 3$ y el séptimo es 3/16

A) 12; –1/2 B) 12; 1/2 C) 1/2, 12
D) 1/2, –12 E) –1/2, 12

17 El segundo término de una P. G. es –18 y el quinto término es 16/3. Calcular el cuarto término.

A) 1 B) 3 C) 4 D) 8 E) N.A.

18 Encuentre cuatro números positivos que formen una P. G. de modo que $a_1 + a_2 = 15$ y $a_3 + a_4 = 60$. De cómo respuesta la razón.

A) 1 B) –1 C) 2 D) –2 E) 3

19 El producto de tres números en P. G. es 27. ¿Cuál es el término central?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 9 E) 18

20 Si el producto de tres números que están en P. G. es 1000 y la razón es 3. Los tres números son

A) 11/3 ; 4 ; 12 B) 2 ; 6 ; 18
C) 2 1/3 ; 7 ; 21 D) 3 ; 9 ; 27
E) 3 1/3 ; 10 ; 30

21 En una P. G. si $a_5 = 9$ y $a_7 = 1$ entonces a_6 vale :

A) 8 B) 5 C) 7 D) 3 E) 1

22 En una P.A. se cumple:

$$a_8 = 26$$
$$a_4 = 6$$

Hallar el término de lugar 12.

A) 32 B) 35 C) 46 D) 42 E) 39

23 En una P.A. se cumple:

$$a_1 + a_5 = 14$$
$$a_3 + a_6 = 20$$

Hallar: a_4

A) 3 B) 7 C) 5 D) 11 E) 9

24 Hallar el valor de "a" en la siguiente P.A.

$$\div a, a + \sqrt{a}, 2a, \ldots; a \neq 0$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25 En la P.G.:

$\div\div (x - 3) : x : 2x : 2x$. Hallar el valor de x : +

A) 3 B) 8 C) 12 D) 6 E) 10

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 El cuarto término de una Progresión Aritmética es 9 y el noveno término es –6, la razón "r", vale:

A) 3 B) –3 C) 2 D) –2 E) –1

02 $a + b ; 4a - 3b ; 5b + 3a$; son tres términos consecutivos de una progresión aritmética la relación entre a y b es:

A) $a = 3b$ B) $2a = 5b$ C) $b = 3a$
D) $b = \frac{2a}{3}$ E) $3a = 4b$

03 Un alumno de la Fleming tiene que pagar una deuda de S/.3600 en 40 pagos anuales que forman una P.A. cuando ya había pagado 30 de las anualidades convenidas, fallece dejando una tercera parte de la deuda sin pagar entonces el importe del primer pago es :

A) S/.41 B) S/.61 C) S/.51
D) S/.71 E) S/.31

04 Si: $\frac{1}{a-b}; \frac{1}{2a}; \frac{1}{a-c}$ están en progresión aritmética. ¿diga cuál de estas afirmaciones es correcta?

A) $a = b^2 c^2$ B) a,b,c están en P.A.
C) $a = b + c$ D) $a = bc$ E) $b = ac$

05 En una progresión aritmética de 25 términos el décimo tercero es igual a 30. La suma de todos los términos de la progresión es entonces:

A) 1000 B) 700 C) 750 D) 875 E) 1250

06 En una P.A. se sabe que $t_3 + t_6 = 57, t_5 + t_{10} = 99$, entonces la razón pertenece al conjunto:

A) $\left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{5}{2}; 4 \right\rangle$ C) $\langle 4; 6 \rangle$
D) $\left\langle \frac{13}{2}; 9 \right\rangle$ E) $\langle 9; 11 \rangle$

07 En una progresión aritmética creciente, de extremos 1 y x de $(x+1)$ términos, el cuadrado de la suma de sus términos es 18 veces el cubo del término central. Calcular la razón de la progresión.

A) 5 B) $\frac{5}{8}$ C) 9 D) 3 E) $\frac{7}{8}$

08 Un caracol desea escalar un monte de ***131,2*** metros; el primer día logró subir un metro y cada día posterior fue aumentando su recorrido en ***20cm***. ¿En cuántos días lo logrará?

A)649 días B)650 días C)652 días D)653 días E)700 días

09 Se han interpolado ***"m"*** medios aritméticos entre ***3*** y ***57*** y ***"m–2"*** entre ***5*** y ***19***. Si la razón de la primera ***P.A.*** es el triple de la segunda. Hallar:

$$\frac{\textit{Penultimo Término de la 1ra P.A.}}{\textit{Penultimo Término de la 2da P.A.}}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E)5

10 Un coronel manda ***5050*** soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 40

11 Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento ***10*** minutos cada día. ¿Cuánto tiempo deberá entrenar al cabo de ***15*** días? ¿Cuánto tiempo en total habrá dedicado al entrenamiento a lo largo de todo un mes de ***30*** días?.Dar como respuesta la suma de los dos resultados.

A)6000 B) 6450 C) 6500 D) 5400

12 En una salá de cine, la primera fila de butacas dista de la pantalla 86 dm, y la sexta, ***134 dm***. ¿En qué fila estará una persona si su distancia a la pantalla es de ***230 dm?***

A) 16 B) 22 C) 34 D) 16

13 Las edades de cuatro hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es ***32*** años. El mayor tiene ***6*** años más que el menor. Halla la edad del hermano mayor.

A) 11 B) 12 C) 14 D) 26

14 Calcula la suma de los ***20*** primeros términos de la sucesión

3 ; 7 ; 11 ; 15 ; 19...

A)820 B) 640 C) 670 D) 1000

15 Calcular la suma de los 30 primeros términos de una sucesión en la que $a_7=17$ y $a_2=2$.

A)1270 B) 2450 C) 1275 D) 500

16 Cuantos términos hay que escoger en una P.A en la que la diferencia es ***7*** y el primer término ***8*** para que su suma sea ***30690***.

A)91 B) 93 C) 74 D) 66

17 Calcula a_{10} en una P.A en la que el primer término es ***1*** y la suma de los ***40*** primeros términos es 140 veces el sexto término.

A)9/42 B) 45/9 C) 49/4 D) 6/23

18 La suma de los once primeros términos de una progresión aritmética es ***176*** y la diferencia de los extremos es ***30***. Halla los términos de la progresión.

RPTA. :......................................

19 Calcula tres términos de una P.A tales que su suma sea ***27*** y su producto ***693***

RPTA. :......................................

20 Los términos tercero y séptimo de una P.A suman ***46*** y la suma del segundo y el cuarto es ***26***. Calcula dichos términos

RPTA. :......................................

21 Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia ***3***.

RPTA. :......................................

22 Halla tres números que estén en progresión aritmética y tales que, aumentados en ***5; 4*** y ***7*** unidades respectivamente, sean proporcionales a ***5;6*** y ***9***.

RPTA. :......................................

23 Halla cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es ***22***, y la suma de sus cuadrados, ***166***.

RPTA. :......................................

24 Calcula la suma de los múltiplos de ***5*** mayores que ***100*** y menores que ***1000***.

RPTA. :......................................

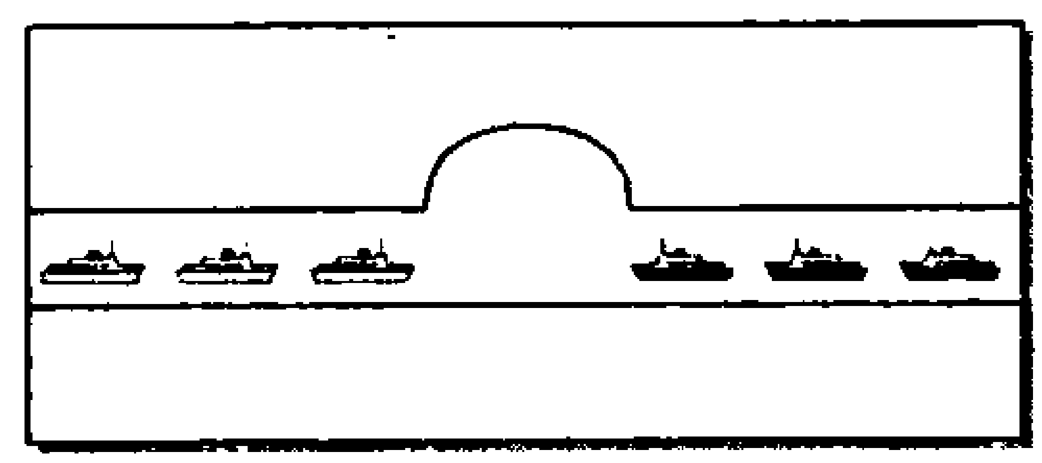
25 En una serie geométrica de números naturales de razón $q>1, q \in N$. La suma de los n primeros términos es ***31(a>3)***. Si a_1 es el primer término de la serie. Hallar el valor de $(n + a_1)$.

RPTA. :......................................

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)B	4)B	5)C	6)D	7)E	8)C	9)C	10)A
11)C	12)D	13)A	14)A	15)C	16)B	17)C			

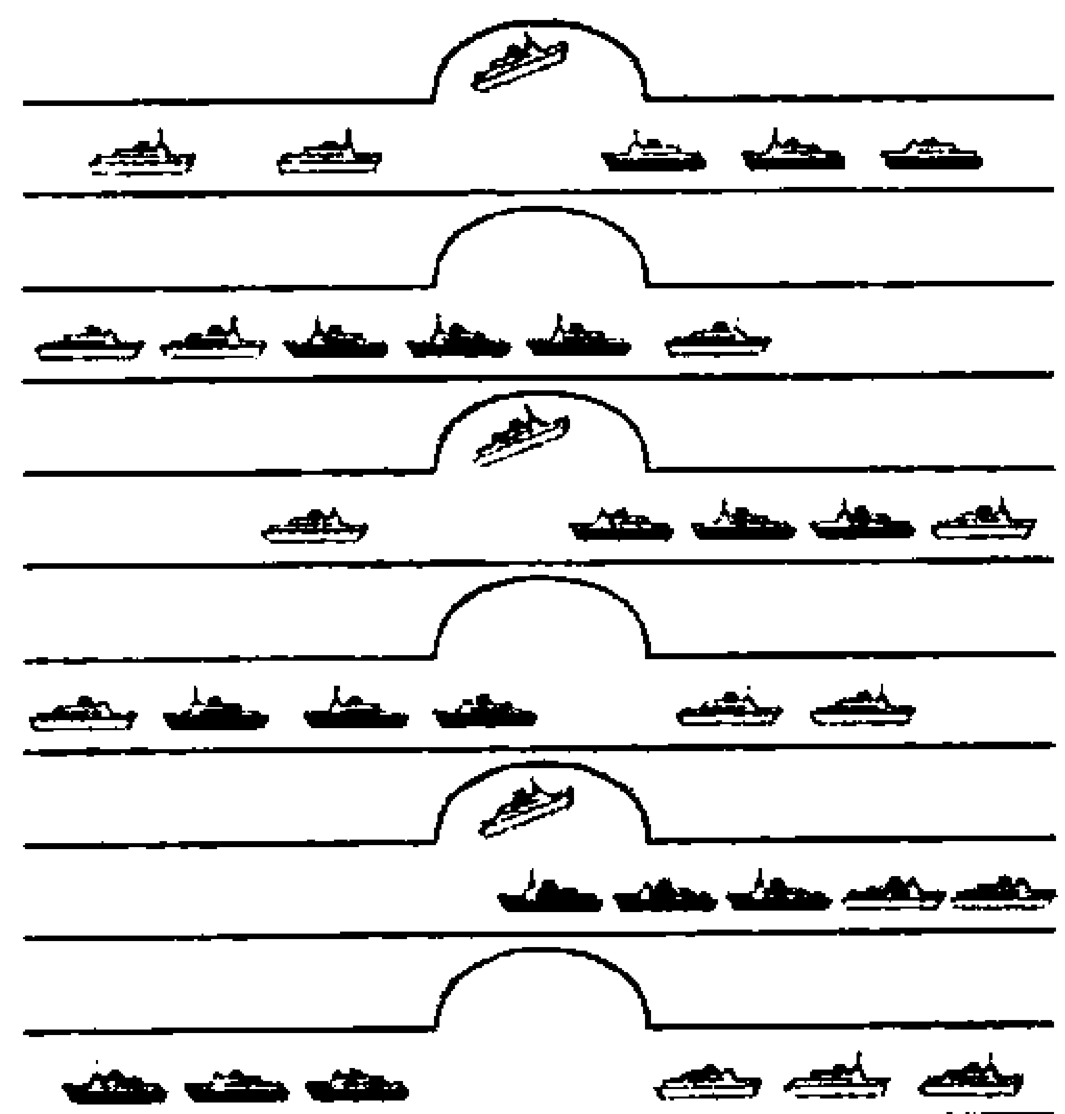
RETO LOGICO :

En una cierta isla del país de las maravillas de Alicia existe un pequeño canal por el cual sólo cabe un navío a lo ancho, pero existe en el mismo un pequeño desvío por el cual se puede estacionar un solo navío



Si la flotilla de navíos negros que se muestran debe pasar más allá de la flotilla de navíos blancos, ¿qué movimientos y desvíos se deben efectuar para lograrlo?

RESOLUCIÓN :



LINEAS y SEGMENTOS
CAPITULO 096

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Reconocer la importancia de la geometría como modelo matemático representativo de la realidad.*
* *Reconocer y diferenciar los entes geométricos fundamentales.*
* *Definir al segmento y familiarizarnos con las operaciones que se pueden realizar con su longitud.*
* *Establecer las diferencias existentes en línea recta, rayo y segmento.*
* *Conocer la definición de distancia entre dos puntos y entre un punto y una recta.*

ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA

El hombre mediante la observación de la naturaleza y todo cuanto lo rodea fue formando conceptos de formas, figuras , planas , cuerpos ,volúmenes , rectas y curvas. De esta manera , a la luna y al sol los veía proyectados como discos , el rayo de luz le dió la idea de línea recta, los bordes de algunas hojas y el arco iris la idea de curva . Los troncos de algunos árboles y las montañas le dieron idea de las formas más diversas , de la construcción de casas con paredes verticales y sus techos horizontales surgió la noción de perpendicularidad y paralelismo , llegando a descubrir que la distancia más corta entre dos ciudades es el camino recto . Si bien en Egipto surgieron los conceptos de Geometría en forma práctica , fue en Grecia donde estos conceptos adquirieron forma científica , alcanzando su máximo esplendor estrechamente ligado a la filosofía , de tal manera que para ingresar a la Escuela Filosófica de Platón debían tener conocimientos de Geometría.

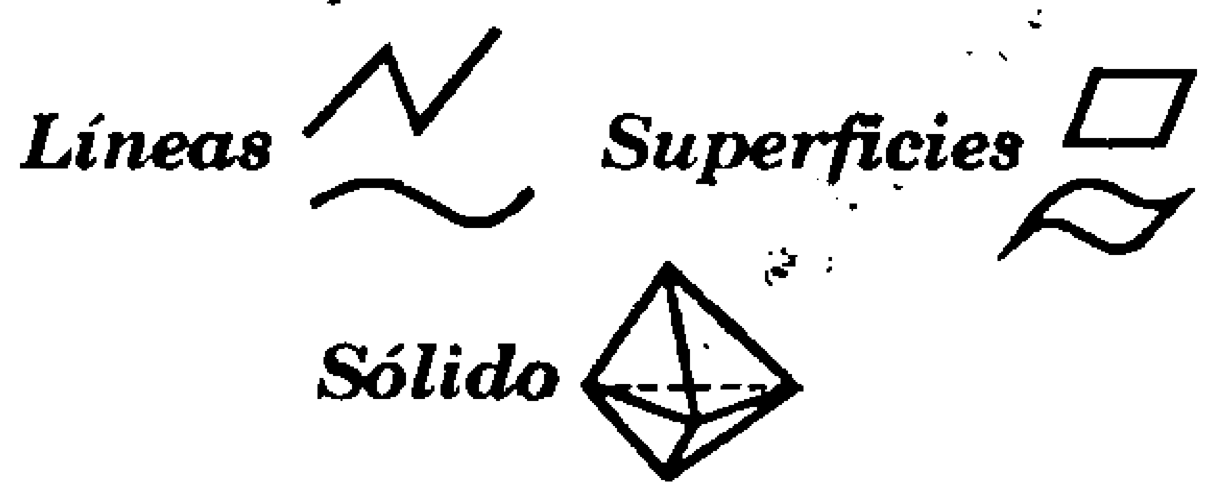
Se destacaron : Thales de Mileto , (uno de los siete sabios de Grecia). Pitágoras (famoso por el Teorema que lleva su nombre). Euclides , que dio origen a la geometría Euclidiana.

La palabra Geometría es un vocablo compuesto por *GEO* ; que significa tierra ; *METRÍA* , que significa medir , es decir medir la tierra .

Los elementos fundamentales de la geometría son: el punto , la recta y el plano , estos elementos carecen de definición , de ellas sólo tenemos una idea .

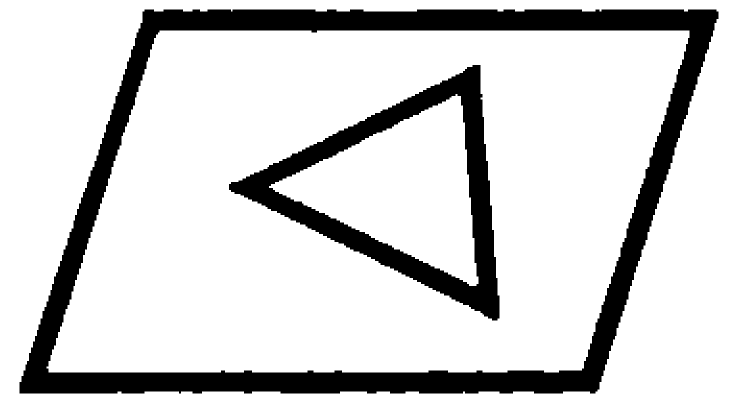
PUNTO A. *RECTA* ⟷ L *PLANO* P

* Una figura geométrica es una sucesión de puntos que adoptan una forma determinada , representando una línea, una superficie o un sólido.



* La geometría estudia las figuras geométricas según su forma, tamaño y las relaciones que existen entre sus partes .

* ***La geometría plana*** (planimetría) estudia a las figuras contenidas en un mismo plano.



* ***La geometría del espacio*** (estereometría) estudia a las figuras cuyos puntos no están contenidos en un mismo plano .

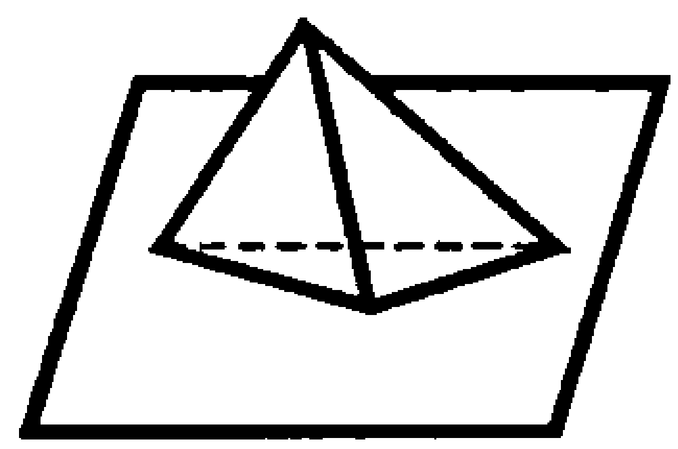
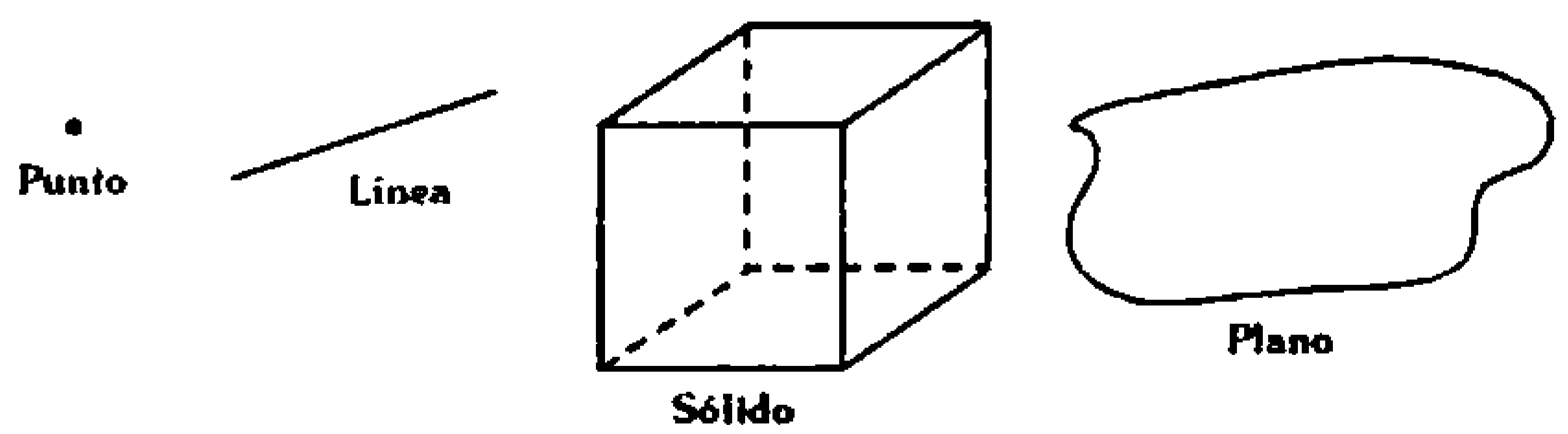


FIGURA GEOMÉTRICA

Se llamará así, a todo punto, línea, superficie o sólido, o en general, toda combinación.



TÉRMINOS USADOS EN LA GEOMETRÍA

1) PROPOSICIÓN :

Es un enunciado, el cual puede ser verdadero *(V)* o falso *(F)*, pero no ambas a la vez.

EJEMPLO:

Las medianas de un triángulo se intersectan un solo punto

2) DEFINICIÓN :

Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de un objeto material o inmaterial.

EJEMPLO:

Geometría es la ciencia que trata de las figuras y sus propiedades.

3) CONCEPTO :

Idea que coincide, forma el entendimiento o pensamiento expresado con palabras.

EJEMPLO:

El punto es aquel entre geométrico que carece de dimensiones.

4) AXIOMA :

Proposición tan clara y evidente que no necesita demostrarse *(*)*

EJEMPLO:

Sean ***A, B*** y ***C*** tres puntos diferentes, si ***B*** pertenece a $\overline{AC}$, todo punto de $\overline{AB}$ pertenece a $\overline{AC}$.

5) TEOREMA :

Es una proposición cuya verdad necesita ser demostrada.

EJEMPLO:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a ***180º***.

6) DEMOSTRACIÓN :

Razonamiento lógico que se sigue a partir de verdades evidentes (Axiomas). Fin y término del procedimiento deductivo.

7) COROLARIO :

Es una conclusión verdadera que se deduce de una demostración.

8) PROBLEMA :

Es una proposición que debe ser resuelta.

9) RESOLUCIÓN :

Procesos lógicos, mediante el cual se busca la solución a un problema.

10) SOLUCIÓN :

Es el valor numérico de un problema

11) LUGAR GEOMÉTRICO :

Es el conjunto de puntos que satisface una o más condiciones dadas.

EJEMPLO:

La circunferencia, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno dado que es su centro.

12) NOTACIÓN :

Representación por medio de símbolos

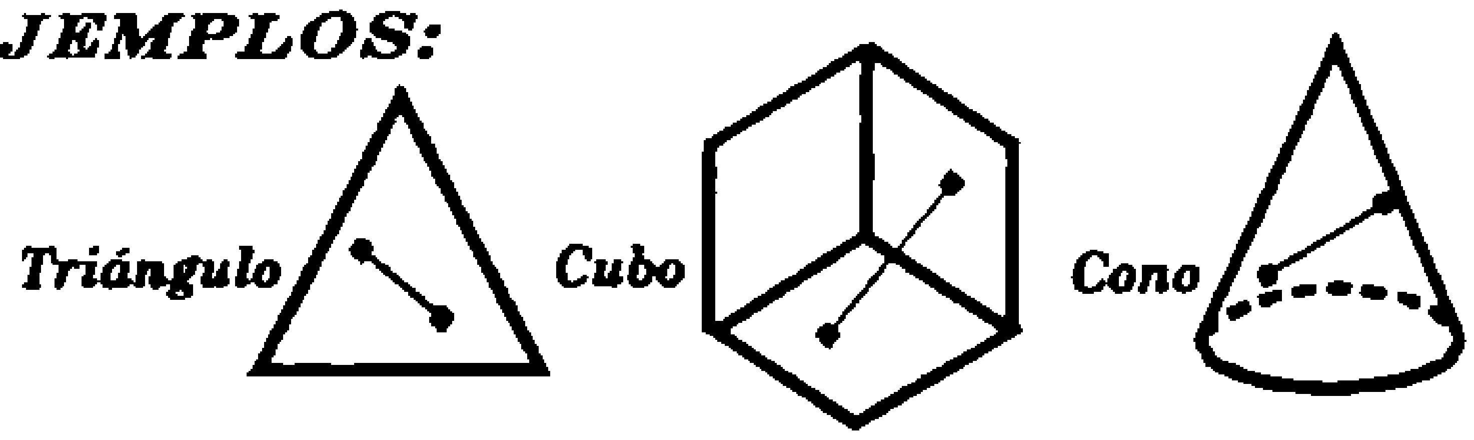
EJEMPLOS:

- Δ ***ABC***: El triángulo ***ABC***
- ⊿ ***ABC***: El triángulo rectángulo ***ABC***; recto en ***B***

CONJUNTOS CONVEXOS Y NO CONVEXOS

I) Un conjunto de puntos se llama ***convexo*** , si el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto, está contenido en él .

EJEMPLOS:

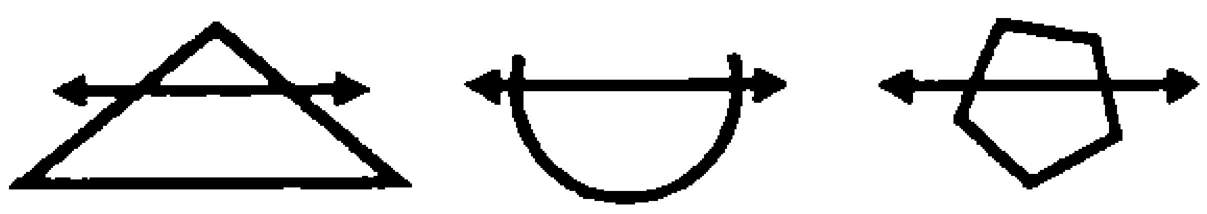


II) Un conjunto de puntos se llama ***no convexo***, si al menos existen dos puntos distintos de dicho conjunto, que determinan un segmento con algunos puntos no comunes al conjunto .

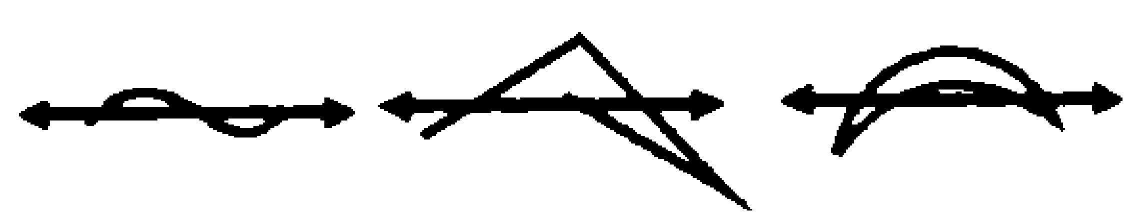
EJEMPLOS :

INTERSECCIÓN DE FIGURAS PLANAS

* ***Una línea es convexa*** si al intersectarse con cualquier recta, lo hace en un máximo de dos puntos.



* ***Una línea es no convexa*** si alguna recta determina sobre ella más de dos puntos. Se les llama cóncavas.

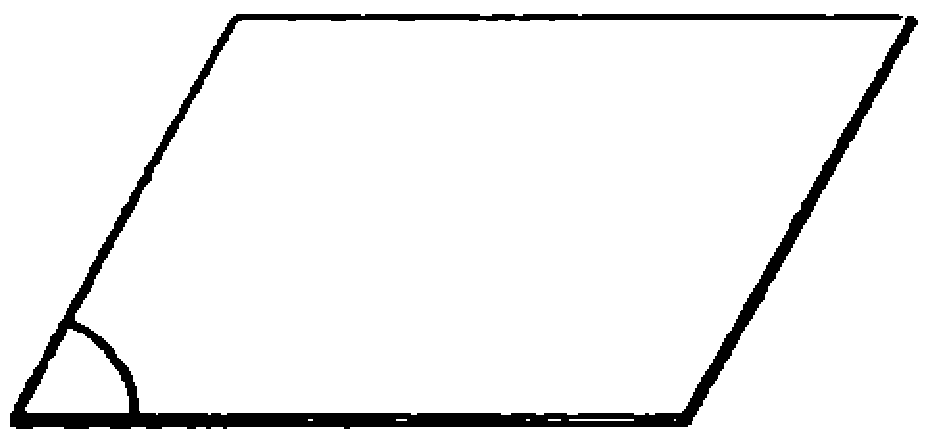


PUNTO , RECTA y PLANO

Para comenzar a desarrollar la geometría , debemos finar los entes fundamentales , los que se aceptan sin definición previa.

PLANO

El conjunto de puntos que forman un espacio de dos dimensiones nos da la idea de un plano y se le designa con una letra mayúscula o letra del alfabeto griego.



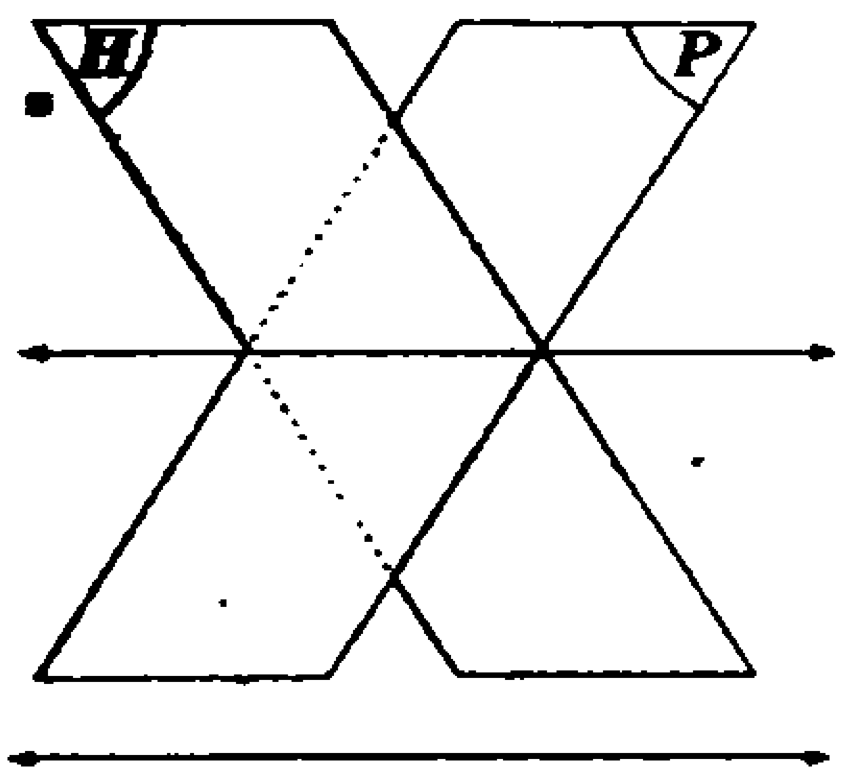
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN PLANO

NOTA :

Una región paralelográmica da la idea de un plano

RECTA

La intersección de dos planos es un conjunto de puntos que forman un espacio de una dimensión llamada línea recta.

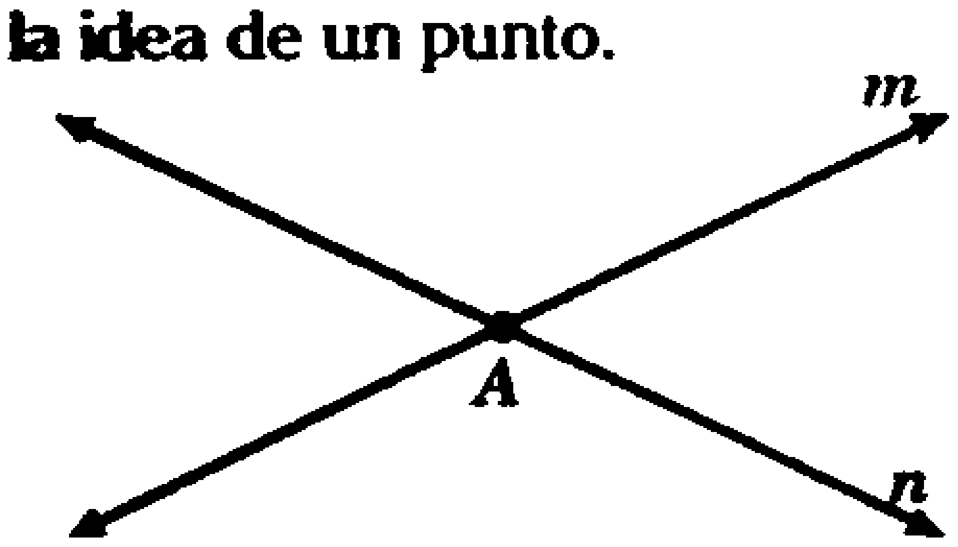


Notación : Recta ℓ: $\overleftrightarrow{\ell}$

Notación : Recta AB : $\overleftrightarrow{AB}$

PUNTO

La intersección de dos rectas nos da la idea de un punto.



$\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$

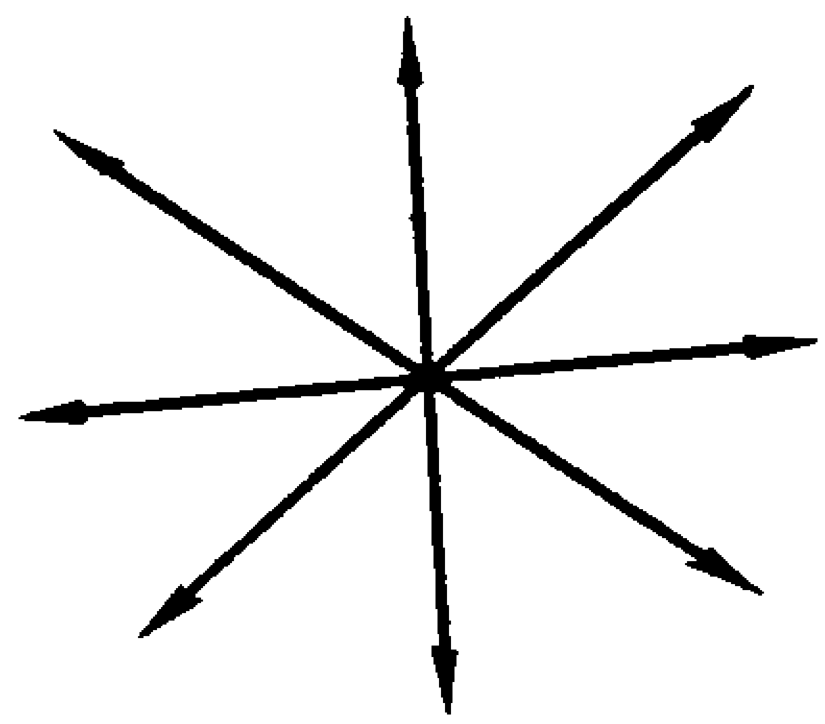
NOTA :

La intersección de $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ determina un punto A.

POSTULADOS DE LA RECTA

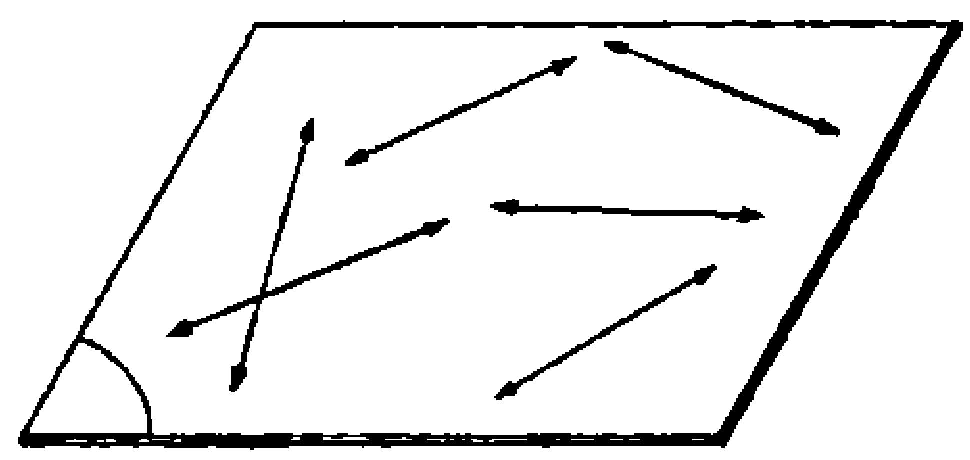
I) La recta es una línea indefinida.

II) Por un punto cualquiera pasan infinitas rectas.



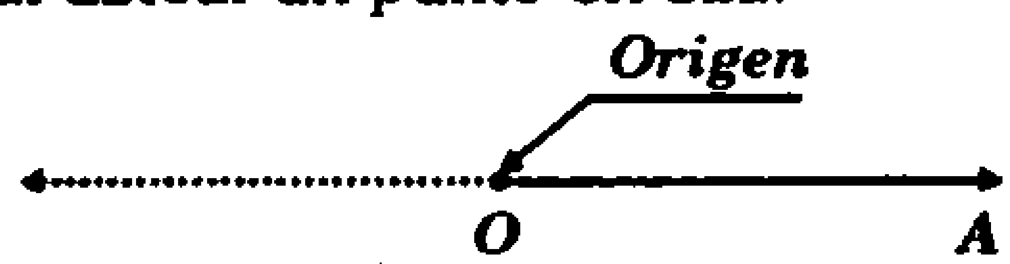
III) Dos puntos cualesquiera definen una recta.

IV) En un plano cualquiera existen infinitas rectas.



RAYO

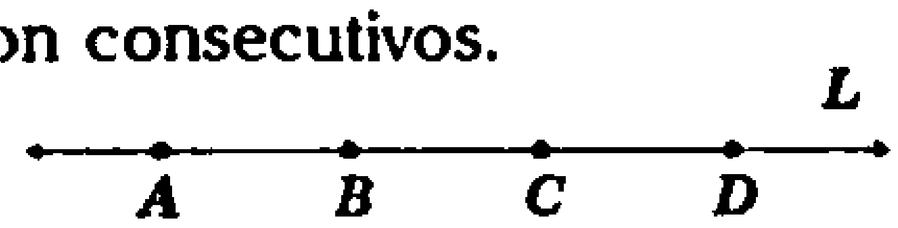
Porción de recta que se determina al ubicar un punto en ella.



NOTACIÓN :

* Rayo OA : $\overrightarrow{OA}$

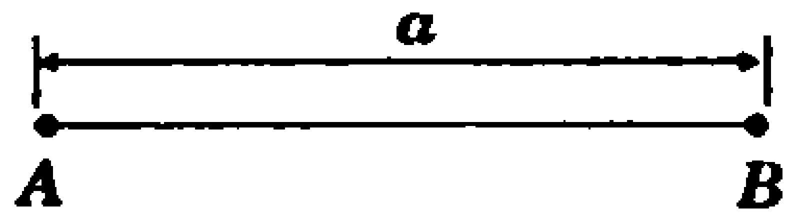
* Se llama puntos colineales a aquellos que pertenecen a una misma recta. Si se indica en un orden determinado , se dirá que son consecutivos.



A , B , C y ***D*** son puntos colineales (están en ***L***) y son consecutivos.

SEGMENTO

Es una parte de la recta comprendida entre dos puntos, a los cuales se le denominan extremos del segmento .



Así, en el gráfico se tiene el segmento de extremos ***A*** y ***B***.

NOTACIÓN :

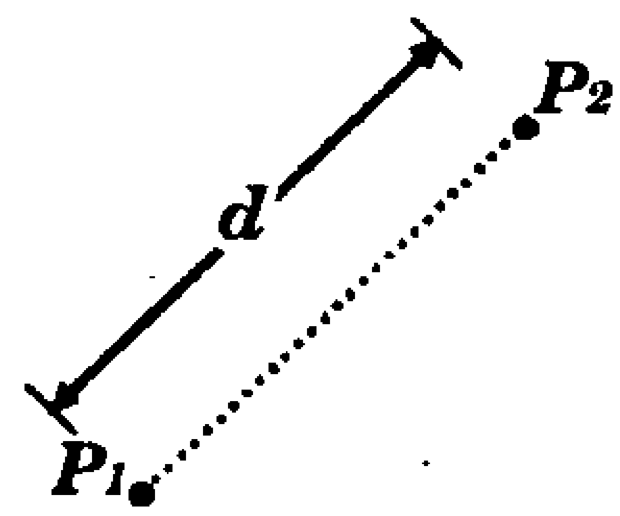
* Segmento AB: $\overline{AB}$

Longitud de segmento de recta ***AB : AB***

NOTA :

* La distancia entre dos puntos , es la longitud de segmento que tiene por extremos a dichos puntos.

Sean P_1 y P_2 dos puntos dados :

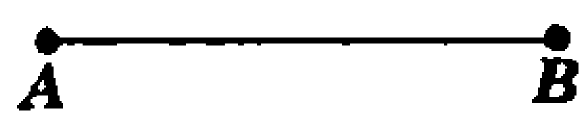


* Si : $P_1P_2 = d$

* Luego:

d : distancia entre P_1 y P_2

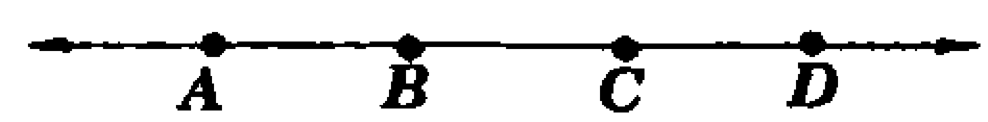
POSTULADO DE LA DISTANCIA



La distancia más corta entre dos puntos viene a ser el segmento de recta que los une.

PUNTOS COLINEALES :

Llamados también consecutivos , son aquellos puntos por los cuales puede pasar una línea recta.



EJEMPLO :

A, B, C y ***D*** son puntos colineales.

LONGITUD DE UN SEGMENTO

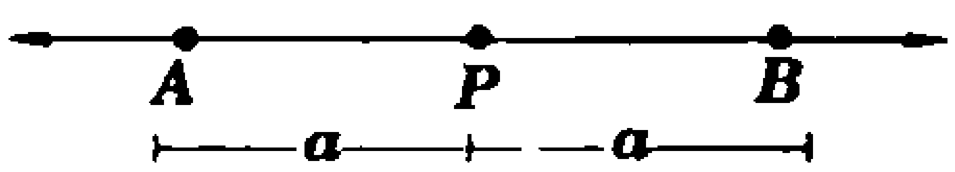
Expresa el tamaño o medida de un segmento y resulta de la comparación del segmento con otro, que es tomado como unidad (metro); por ejemplo: si un

segmento contiene *3* veces la unidad (metro) entonces dicho segmento tiene una longitud de *3 m.* Si la longitud de un segmento no se conoce , ésta convencionalmente se indicará con una letra latina minúscula. Así , del gráfico anterior a es la longitud del segmento *AB*; entonces $AB = a$

AB: se lee longitud del segmento *AB*"

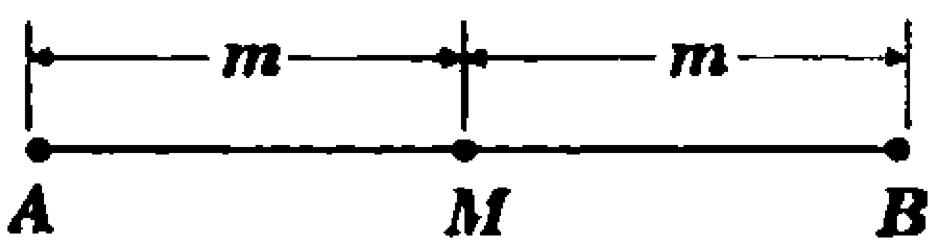
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Es aquel punto que pertenece al segmento y que lo divide en dos segmentos parciales de igual longitud.



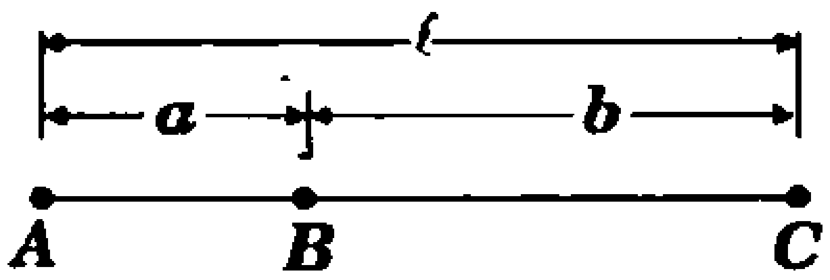
* Si *P* : es un punto medio

* Entonces : $AP = PB = a$



* Si: $M \in AB$ y $AM = MB$; entonces *M* es el punto medio de *AB*.

OPERACIONES CON LAS LONGITUDES DE SEGMENTOS



En la figura los puntos *A* , *B* y *C* son colineales y consecutivos, entonces, se establecen las siguientes operaciones con las longitudes de los segmentos.

ADICIÓN DE SEGMENTOS :

* Del gráfico anterior :

$AC = AB + BC \qquad \ell = a + b$

SUSTRACCIÓN DE SEGMENTOS:

* Del gráfico :

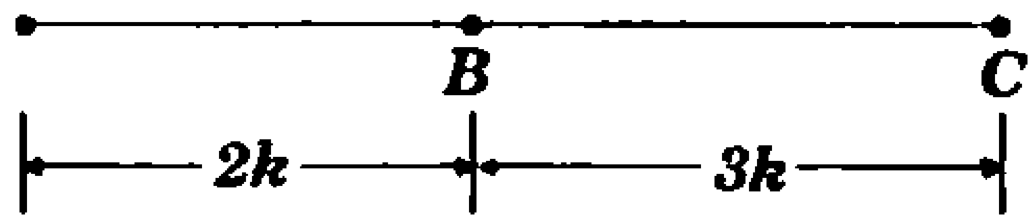
$AB = AC - BC \qquad a = \ell - b$

RELACIÓN DE SEGMENTOS :

* Si se cumple que :

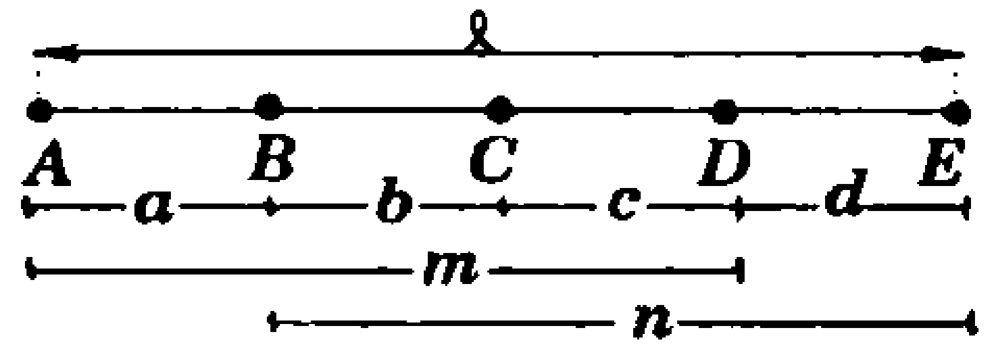
$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2k \\ BC = 3k \end{cases}$$

* Gráficamente :



OTRO EJEMPLO :

Se tienen los puntos colineales o consecutivos *A, B, C , D* y *E* , entonces se pueden efectuar las siguientes operaciones con las longitudes de los segmentos.



ADICIÓN DE SEGMENTOS :

Del gráfico :

$\ell = a+b+c+d \qquad m = a+b+c$

$n = b+c+d$

SUSTRACCIÓN DE SEGMENTOS:

Del gráfico :

$d = \ell - m \qquad a = \ell - n$

$b + c = \ell - a - d$

OBSERVACIÓNES :

1) DIVISIÓN ARMÓNICA:

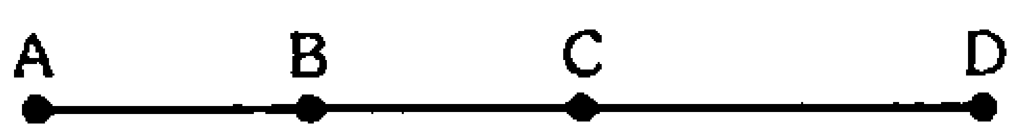
Si *A, B, C* y *D* están en una recta y constituyen una cuaterna armónica, cumplen la siguiente relación.

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}}$$

Los puntos *B* y *D* se llaman conjugados armónicos respecto de *A* y *C*

RELACIÓN DE DESCARTES

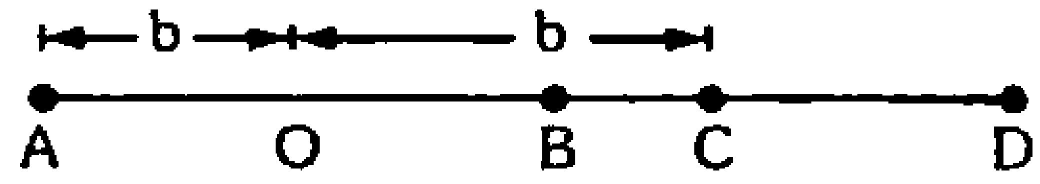
Si *A, B, C* y *D* están en cuaterna armónica cumplen lo siguiente.



$$\boxed{\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}}$$

RELACIÓN DE NEWTON

Si *A, B, C* y *D* están en cuaterna armónica siendo *"O"* punto *medio* de $\overline{AC}$, se cumple lo siguiente



$$\boxed{(AO)^2 = (OB)(OD)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

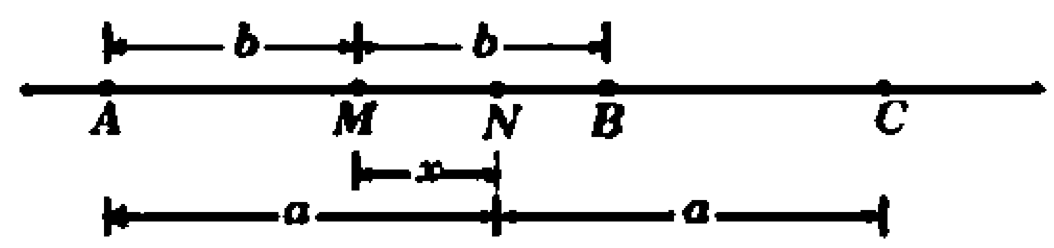
PROBLEMA 1:

En una recta se ubican los puntos consecutivos *A* , *B* y *C* . Si , $AB = 22$ y $BC = 16$, Calcular la medida de la longitud del segmento determinado por los puntos medios de los segmentos *AB* y *AC* .

A) 7 B) 6 C) 11 D) 8 E) 16

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



* Datos :

$$\begin{cases} 2a = 22 + 16 \rightarrow 2a = 38 \rightarrow a = 19 \\ 2b = 22 \rightarrow b = 11 \end{cases}$$

* Del esquema se puede apreciar que : $x = a - b = 19 - 11 = 8$

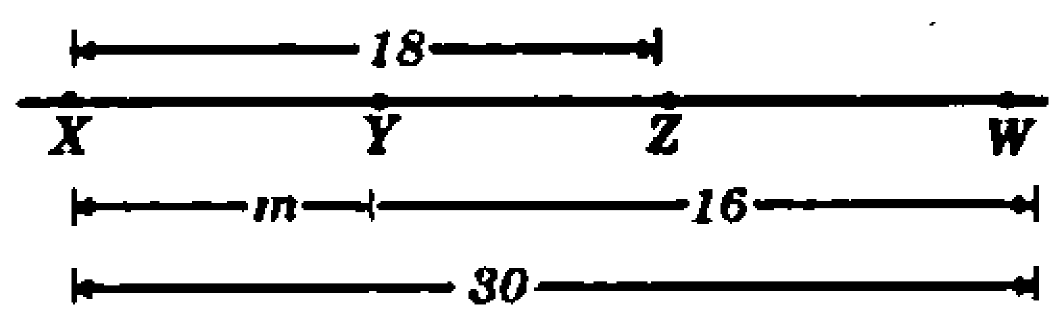
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Sobre una recta se toman los puntos *x, y , z, w* en forma consecutiva de modo que: $xz = 18$; $xw = 30$, calcular: *yz*

A) 2 B) 6 C) 4 D) 12 E) 8

RESOLUCIÓN:



* Se puede apreciar que :

$m + 16 = 30 \rightarrow m = 14$

* Ahora :

$m + yz = 18 \rightarrow 14 + yz = 18 \rightarrow yz = 4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

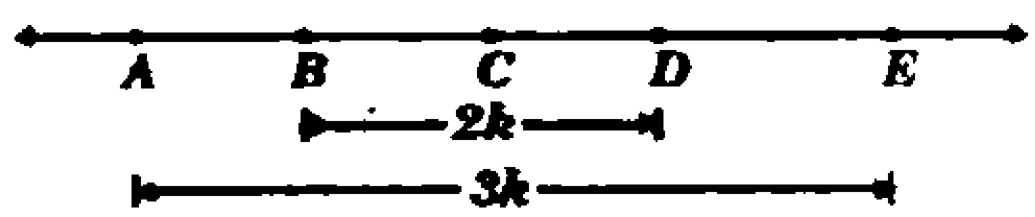
En una recta se ubican lo puntos consecutivos *A, B, C , D* y *E* ; de tal manera que :

$AC + BD + CE = 55$ y $\dfrac{BD}{AE} = \dfrac{2}{3}$

Calcular : *"AE"*

A) 21 B) 22 C) 11 D) 33 E) 45

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$\underbrace{AC+CE+BD}_{3k+2k} = \underbrace{55}_{=55} \rightarrow K=11$$

* Piden: $AE = 3k = 3(11) = 33$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos ***A,B*** y ***C;*** de tal manera que : $AB - BC = 10$, luego se ubica el punto ***"M"*** punto medio de $\overline{AC}$. Calcular ***MB***

A) 3 B) 4 C) 5 D) 10 E) 2

RESOLUCIÓN :

* Dato:

$$AB - BC = 10$$

$$\overbrace{a+x} - \overbrace{(a-x)} = 10$$

$$a+x-a+x = 10$$

$$2x = 10 \quad x = 5$$

RPTA : "C"

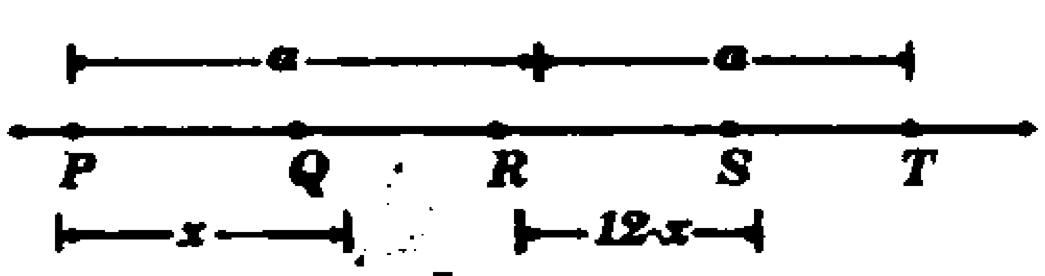
PROBLEMA 5 :

En una recta se ubican los puntos consecutivos ***P, Q, R, S*** y ***T***; tal que: $PR = R$; $PQ + RS = 12$ y $ST-QR=4$

Calcular : ***PQ***

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 5

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$\underbrace{ST}_{a-(12-x)} - \underbrace{QR}_{(a-x)} = 4$$

$$\Rightarrow 2x - 12 = 4 \Rightarrow x = 8$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

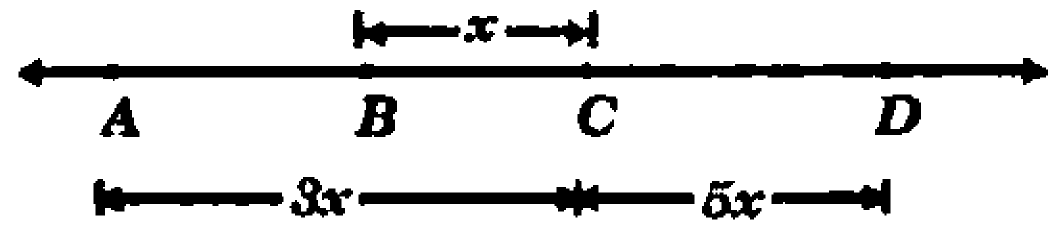
Sobre una recta se dan los puntos consecutivos ***A, B, C,*** y ***D*** ; de tal manera que :

$$\frac{AC}{3} = \frac{CD}{5} \text{ y } 3BD - 5AB = 72$$

Calcular ***"BC"***

A) 6 B) 12 C) 9 D) 8 E) 24

RESOLUCIÓN :



* Dato:

$$3BD - 5AB = 72$$

$$\Rightarrow \overline{3(x+5k)} - \overline{5(3k-x)} = 72$$

$$\Rightarrow 3x+15k-15k+5x = 72$$

$$\Rightarrow 8x = 72 \qquad \Rightarrow x = 9$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

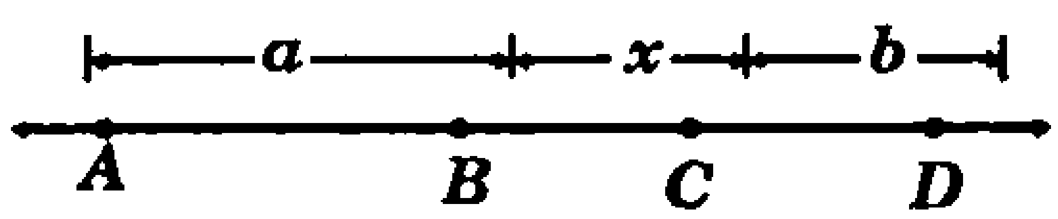
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos ***A, B, C*** y ***D;*** tal que :

$nAC = mCD$ y $mBD - nAB = m+n.$

Calcular ***"BC"***

A) 2 B) 1 C) 0,5 D) 3 E) 0

RESOLUCIÓN:



* Reemplazando en los datos :

$$n(a+x) = mb \quad \rightarrow na + nx = mb$$

$$m(x-b) - na = m+n \rightarrow mx + mb - na = m+n$$

$$mx + nx = m+n$$

$$\rightarrow x(m+n) = m+n$$

$$\longrightarrow x = \frac{m+n}{m+n} = 1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

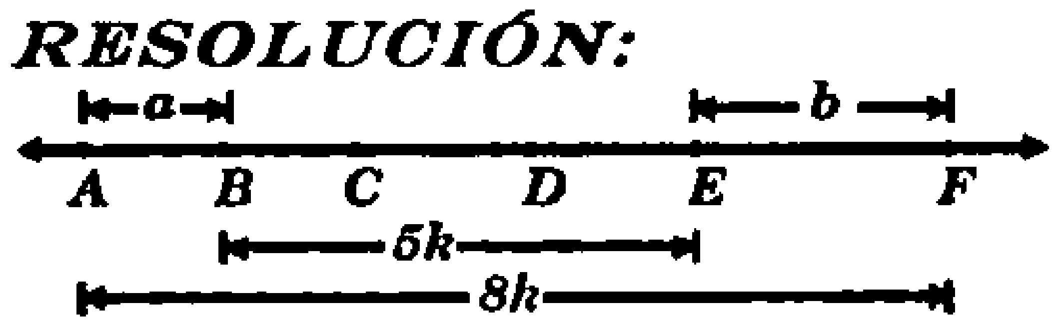
Una recta se toman los puntos consecutivos ***A, B, C, D, E*** y ***F*** de tal manera que:

$$AC+BD+CE+DF = 39 \text{ y } BE = \frac{5}{8}AF$$

Calcular ***"AF"***

A) 6 B) 12 C) 13 D) 8 E) 24

RESOLUCIÓN:



* Del primer dato :

$$AC + BD + CE + DF = 39$$

$$\underline{AC+CE} + \underline{BD+DF} = 39$$

$$a + 5k + 5k + b = 39$$

$$\underline{a+b} + 10k = 39$$

$$3k + 10k = 39 \Rightarrow k = 3$$

* Piden : $AF = 8k = 8(3) = 24$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

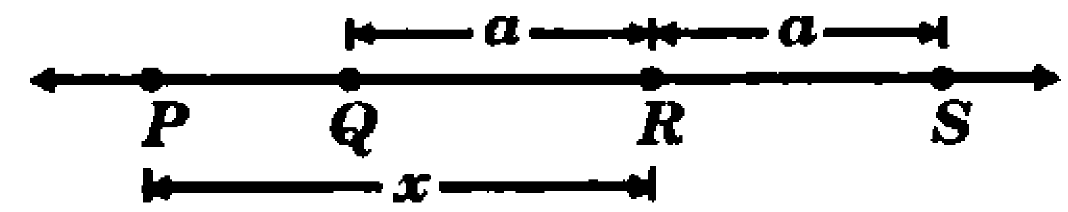
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos ***P, Q, R*** y ***S***; además :

$QR = RS$ y $PS^2 - PQ^2 = 12QS$

Calcular : ***"PR"***

A) 6 B) 4 C) 8 D) 12 E) 1

RESOLUCIÓN:



* Dato :

$$PS^2 - PQ^2 = 12QS$$

$$\overbrace{(x+a)^2} - \overbrace{(x-a)^2} = 12(2a)$$

Identidad de Legendre

$$\Rightarrow 4xa = 24a \Rightarrow x = 6$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

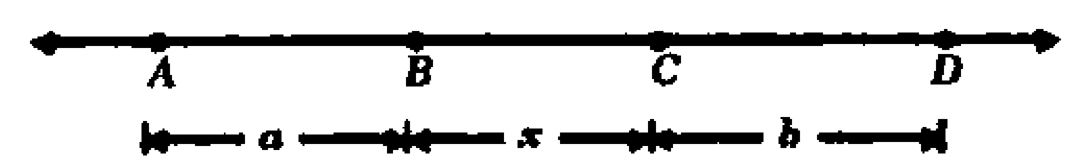
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos ***A, B , C*** y ***D ;*** de manera que :

$AB \times BD - AC \times CD = 96$ y $AB - CD = 8$

Calcular : **"BC"**

A) 8 B) 2 C) 6 D) 12 E) 3

RESOLUCIÓN :



* En los datos :

$$AB \times CD = 8 \Rightarrow a - b = 8......(I)$$

$$AB \times BD - AC \times CD = 96$$

$$\Rightarrow \underline{a(x+b) - (a+x)b = 96}$$

$$\underline{ax + ab - ab + xb = 96}$$

$$x(a-b) = 96................(II)$$

* Reemplazando ***(I)*** en ***(II)***:

$$x(8) = 96 \quad \Rightarrow x = 12$$

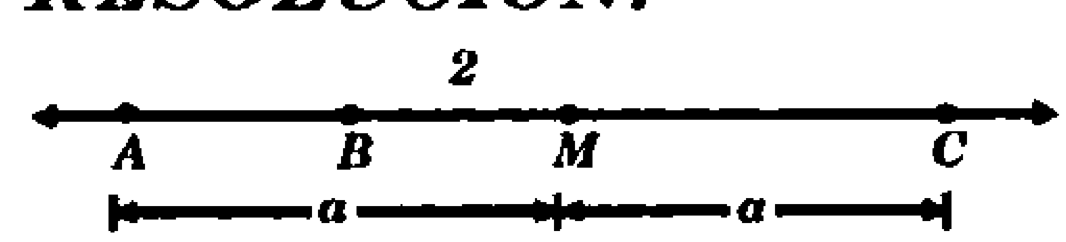
RPTA : "D"

PROBLEMA 11:

En una recta se ubican los puntos consecutivos ***A, B*** y ***C*** de modo que: $AB + AC = 2\,BC$. Si se ubica ***M*** punto medio de ***AC***, de modo que ***MB=2***, Calcular ***"AC"***

A) 4 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

RESOLUCIÓN:



* Dato :

$$AB + AC = 2BC$$

$$\overbrace{a-2} + \overbrace{2a} = 2(2+a)$$

$$\Rightarrow 3a - 2 = 4 + 2a \Rightarrow a = 6$$

* Piden: $AC = 2a = 2(6) = 12$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

En una recta se dan los puntos consecutivos A, B, y C, y los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Si $NB=2$ y $n\times MC=(n+1)\times MN$,

Calcular AC.

A) $2n$ B) $2(n-1)$ C) $4(n-1)$
D) $4n$ E) $4(n+1)$

RESOLUCIÓN:

*Del dato :

$$n(m+4)=(n+1)(m+2)$$

$$\Rightarrow nm+4n=nm+2n+2$$

$$\Rightarrow 2n=m+2$$

* Piden: $AC=2m+4=2(m+2)$

$$AC=2(2n)=4n$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

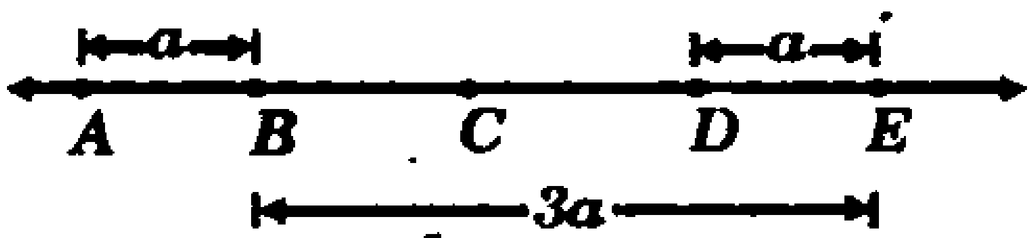
A,B,C,D y E son 5 puntos consecutivos y colineales, sabiendo que :

$AB=DE=\dfrac{BE}{3}$ y $BD+BC+CE=35$

Calcular "AD"

A) 32 B) 30 C) 28 D) 21 E) 25

RESOLUCIÓN :



* Ahora de :

$$BC+BD+CE=35$$

$$\underbrace{BC+CE}_{3a}+\underbrace{BD}_{2a}=35$$

$$3a+2a=35\Rightarrow a=7$$

*Piden: $AD=a+2a=3a=3(7)=21$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

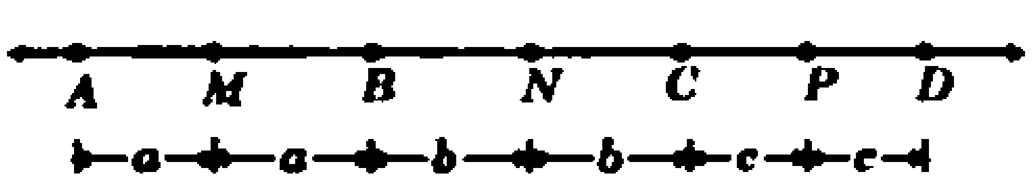
En una recta L, se dan los puntos consecutivos A,B,C y D y los puntos medios M, N, y P, de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente de modo que:

$$MN+MP+MD=2AD$$

Halle AD, si $MB+CP=6$

A) 6 B) 9 C) 12 D) 18 E) 24

RESOLUCIÓN :



* Del dato : $(a+b)+(a+2b+c)+(a+2b+2c)=2(2a+2b+2c)$

* Al reducir se obtiene que : $b=a+c$

*También :

$$MB+CP=a+c=6\Rightarrow b=6$$

* Se pide :

$$AD=2a+2b+2c=2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow AD=2(a+c+b)=2(b+b)$$

$$\Rightarrow AD=4b=4(6)=24$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

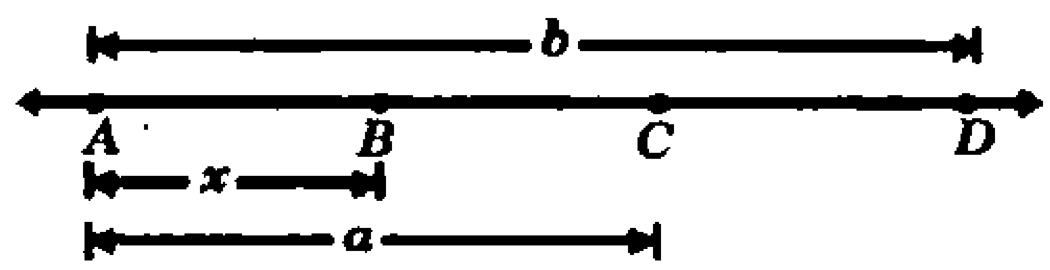
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A,B,C y D; tal que :

$$\frac{CA}{CB}+\frac{DA}{DB}=1 \text{ y } AC\times AD=529$$

Calcular "AB"

A) 46 B) 13 C) 19 D) 23 E) 69

RESOLUCIÓN :



* Reemplazando en los datos :

$$\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}=1......(I)\ ;\ ab=529$$

$$\Rightarrow \frac{a(b-x)+b(a-x)}{(a-x)(b-x)}=1$$

$$\Rightarrow ab-ax+ba-bx=ab-ax-xb+x^2$$

$$\Rightarrow ab=x^2\Rightarrow 529=x^2\Rightarrow 23=x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

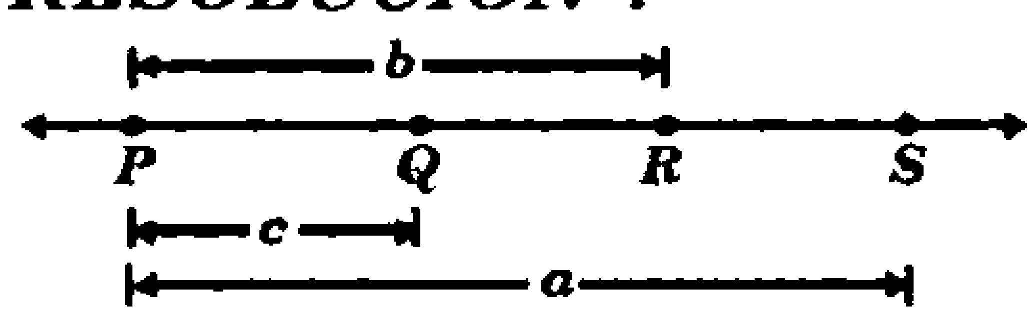
Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R y S; tal que :

$$m\left(\frac{PQ}{QR}\right)=n\left(\frac{PS}{RS}\right)\wedge\frac{8}{PR}=\frac{n}{PS}+\frac{3}{PQ}$$

Calcular : $m-n$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

RESOLUCIÓN :



* Reemplazando en los datos:

$$\frac{8}{b}=\frac{m}{a}+\frac{3}{c}......................(I)$$

$$m\left(\frac{c}{b-c}\right)=n\left(\frac{a}{a-b}\right)$$

$$\Rightarrow mca-mcb=nab\Rightarrow nac$$

$$\Rightarrow mca+nac=nab+mcb$$

$$\Rightarrow ac(m+n)=nab+mcb$$

$$\xrightarrow{\div(abc)}\frac{ac(m+n)}{abc}=\frac{nab}{abc}+\frac{mcb}{abc}$$

$$\frac{m+n}{b}=\frac{n}{c}+\frac{m}{a}................(II)$$

* Comparando (I) y (II), se tendrá que : $n=3$ y $m+n=8\Rightarrow m=5$

* Piden : $m-n=5-3=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Sobre una recta se tiene los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F,.. y así sucesivamente de tal forma que:

$AB=1$; $BC=1/3$; $CD=1/9$; $DE=1/27$; $EF=1/81$

y así sucesivamente, determinar el límite de la suma de todos los segmentos indicados.

RESOLUCIÓN :

* Por dato :

$$S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}......$$

* Multiplicamos por 3 a cada miembro :

$$3S=3+\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}.....}_{S}$$

$$\Rightarrow 3S=3+S\Rightarrow S=3/2$$

PROBLEMA 19 :

Se tienen consecutivamente sobre una recta los puntos A, M, B y N de tal manera que :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}\wedge\frac{x}{AB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}$$

Hallar «x».

RESOLUCIÓN :

Dato :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN}................(I)$$

$$\frac{x}{AB}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}.....(II)$$

* De (I) :

$$\frac{MB}{AM}=\frac{BN}{AN}\Rightarrow\frac{AB+AM}{AM}=\frac{AN-AB}{AN}$$

$$\frac{AB}{AM}-1=1-\frac{AB}{AN}\Rightarrow AB\left(\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}\right)=2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB} .....(III)$$

* Se observa que *(II) = (III)*

$$\Rightarrow \boxed{x=2}$$

* Relación de Descartes :

* Si:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{BN} \Rightarrow \frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{AB}$$

$$\frac{1}{BN}+\frac{1}{AN}=\frac{2}{MN}$$

PROBLEMA 20 :

Sobre una recta se dan los puntos consecutivos a ***A*** , ***B*** , ***C*** y ***D*** : determinados por la siguiente relación :

(AB)(CD) = x (BC)(AD) : además se cumple que :

Calcule el valor de *"x"*

RESOLUCIÓN :

Datos: ***(AB)(CD)=x(BC)(AD)... (I)*** , se pide *"x"*:

$$\frac{1}{AD}+\frac{x}{AB}=\frac{8}{AC} .....(II)$$

* De *(I)*:

$(AB)(CD)=x(BC)(AD)$

$(AB)(AD)-(AB)(AC)=x(AD)(AC)-x(AD)(AB)$

$(AB)(AD)-(AB)(AC)=x(AD)(AC)+(AB)(AC)$

$(AB)(AD)(1+x)=[x(AD)+AB](AC)$

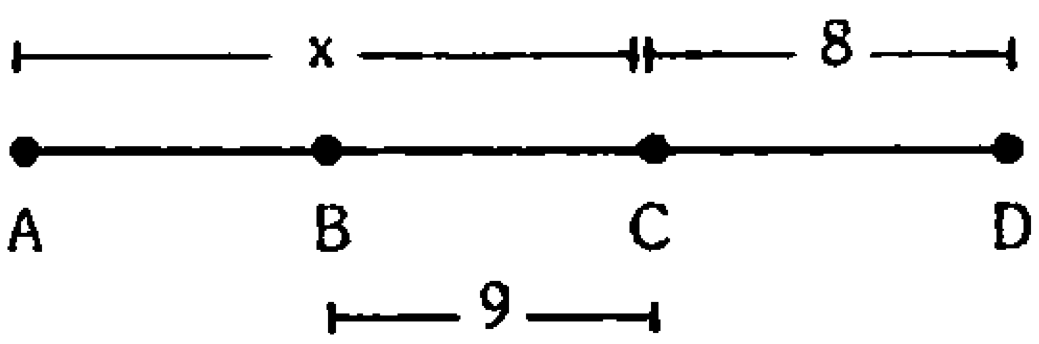
$$\Rightarrow \frac{1+x}{AC}=\frac{x(AD)+AB}{(AB)(AD)}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{AC}=\frac{x}{AB}+\frac{1}{AD} ......(III)$$

* De *(I)* y *(III)* : $x=7$

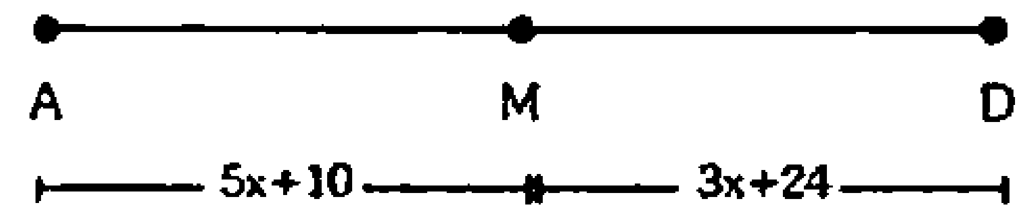
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura, calcular x, si : $AB=BC$



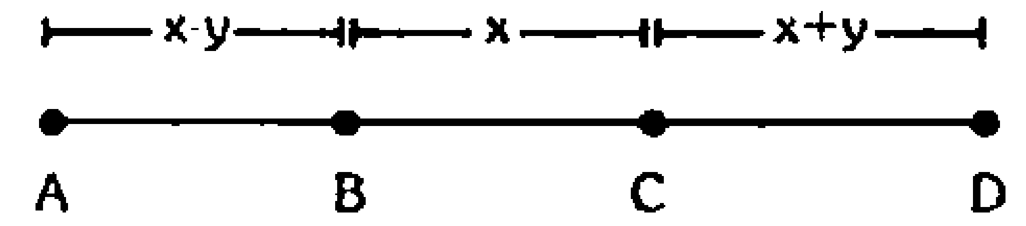
A)10 B)12 C)15 D)17 E)18

02 Si *"M"* es punto medio de $\overline{AB}$: calcular x.



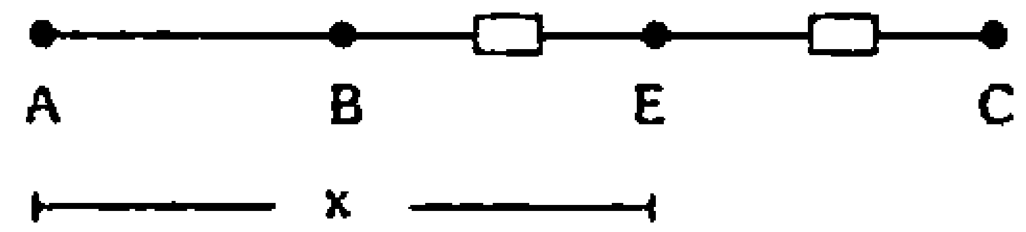
A)8 B)6 C)7 D)5 E)10

03 Si $AD=36$, Calcular x



A)12 B)16 C)18 D)20 E)15

04 Si: $AC+AB=28$. Calcular x



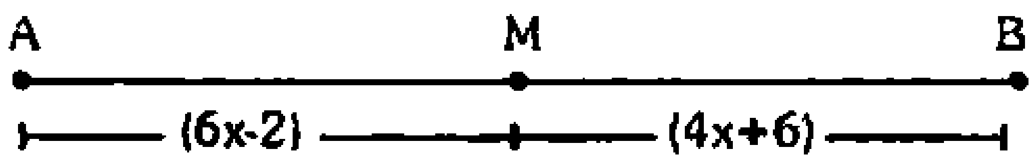
A)14 B)15 C)16 D)18 E)20

05 En una recta se ubican los puntos *A, B* y *C* de manera que $AC=18$ y $BC-AB=10$.

Calcular *AB*

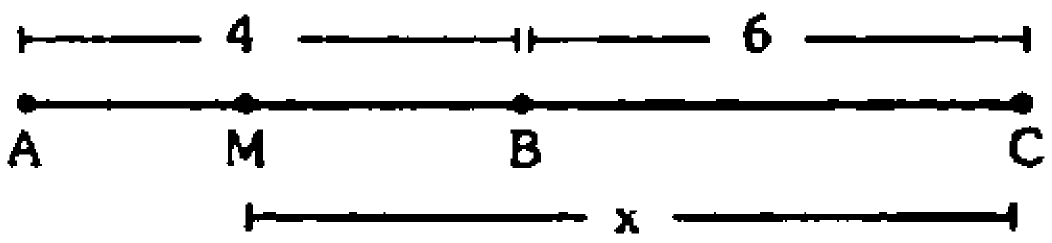
A)16 B)18 C)14 D)12 E)15

06 Calcular x, si *"M"* es punto medio de $\overline{AB}$.



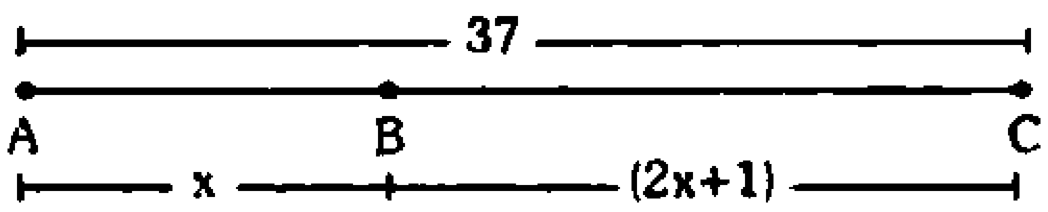
RPTA.: ....

07 Calcular x, si M es punto medio de $\overline{AB}$.



RPTA.: ....

08 Calcular x en la figura.

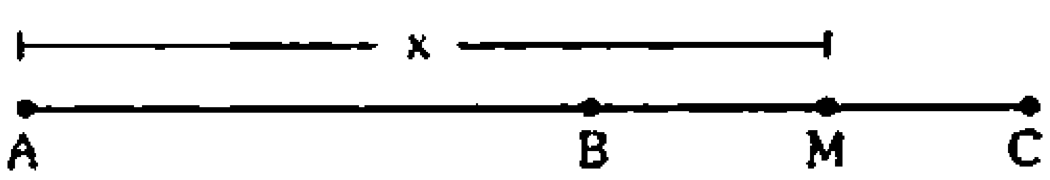


RPTA.: ....

09 Calcular x, si : $AD-BC=40$

RPTA.: ....

10 Calcular x, si M es punto medio de $\overline{BC}$, $AC+AB=40$.



RPTA.: ....

11 Los puntos colineales y consecutivos *A, B, C, D.* Son tales que: $AD=18$, $BD=13$, $AC=12$.

Hallar *BC*.

A)7 B)6 C)8 D)5 E)9

12 *P, Q, R*; son tres puntos colineales y consecutivos.

Si: $PQ=2(QR)+1$ y $PR=31$.

Hallar *QR*.

A)9 B)10 C)12 D)11 E)8

13 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Hallar *AB*, sabiendo que $AC=16m$, $BD=24m$ y $CD=2AB$.

A)8/3m B)40/3m C)40m D)8m E)5m

14 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Si $AC=2$ y $BD=3$, hallar $CD-AB$.

A)0,5 B)1 C)2 D)1,5 E)3

15 Los puntos colineales y consecutivos *A, M, B, C*. *"M"* es punto medio de $\overline{AC}$.

Hallar *MB*. Si: $AB-BC=32$.

A)32 B)17 C)16 D)18 E)19

16 En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B* y *C* siendo *M* punto medio del segmento *BC*.

Si : $(BA).(CA)+\frac{BC^2}{4}=100$. Calcular: *MA*

A)10 B)11 C)15 D)18 E)12

17 Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D* y *E* sobre los cuales se cumple que *"B"* es punto medio de $\overline{AD}$. *"C"* es punto medio de $\overline{AE}$ y *"D"* es punto medio de $\overline{BE}$.

Calcular el valor del segmento *AE* si $AC+BC=50\mu$

A)20 μ B)75μ C)50 μ D)100 μ E)60μ

18 Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y D. Calcular el valor de *AC*, sabiendo que el segmento $BD=8\mu$ y la longitud del segmento que une los

puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ mide 10μ.

A) 7μ *B)* 11μ *C)* 10μ *D)* 9μ *E)* 12μ

19 Sobre una línea recta se toma los puntos consecutivos *P, Q, R* y *S*. Calcular "*RS*" sabiendo que:

$PQ + RS = 20\mu$ y $QM = MR = 4\mu$

siendo "*M*" el punto medio de *PS*

A) 8μ *B)* 12μ *C)* 20μ *D)* 10μ *E)* 14μ

20 Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, E, F* y *G* tal que:

$AC + BD + CE + DF + EG = 45\mu$

Además: $8BF = 7AG$.

A) 24μ *B)* 45μ *C)* 20μ *D)* 18μ *E)* 30μ

21 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Si: $(AB)(BD)=(AC)(CD)$. Hallar la longitud del segmento BD si $AC=12\mu$.

A) $8\ \mu$ *B)* $10\ \mu$ *C)* $12\ \mu$ *D)* $14\ \mu$ *E)* $15{,}5\ \mu$

22 Sobre una recta se toman los puntos: *A, B, C* y *D* con la condición:

$(AC)(CD) = (BC)(BD);\ BC = a\mu$

Calcular: $(AB \cdot CD)$

A) $a\mu$ *B)* $2a\mu$ *C)* $3a\mu$ *D)* $\dfrac{a}{2\mu}$ *E)* $a^2\mu$

23 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* con la siguiente condición:

$(AB)(CD) = (BC)(AD)$, además: $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{8}$.

Hallar la longitud del segmento. *AC*.

A) $8\ \mu$ *B)* $10\ \mu$ *C)* $12\ \mu$ *D)* $14\ \mu$ *E)* $16\ \mu$

24 Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* con la condición: $(AB)(CD)=(BC)(AD)$. Hallar la longitud del segmento *AC*, si:

$$\frac{(BC)(CD)}{CD-BC}=4$$

A) 2μ *B)* 4μ *C)* 6μ *D)* 8μ *E)* 10μ

25 *A, B, C* y *D* son puntos situados en una recta tal que se cumple: $(AB)(CD) = k(BC)(AD)$, además se cumple que: $\dfrac{1}{AD}+\dfrac{k}{AB}=\dfrac{2k}{AC}$;

Hallar "*k*".

A) 1 *B)* 2 *C)* 1,3 *D)* 1,5 *E)* 3

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En $\overline{AC}$ se ubica al punto *B*, tal que: $(BC)-(AB)=16$. Hallar la distancia de *B* al punto medio del $\overline{AC}$.

A) 4 *B)* 8 *C)* 12 *D)* 16 *E)* 4,5

02 Sobre una recta se dan los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*; tal que: $AC = 19$ y $BD = 23$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) 21 *B)* 22 *C)* 24 *D)* 18 *E)* 19

03 Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Se cumple : $AB=3$, $AC=5$ y $4(AB)-(BD)-2(CD)=4$.

Hallar *AD*.

A) 3 *B)* 5 *C)* 7 *D)* 9 *E)* 11

04 En una recta se dan los puntos consecutivos *M, A, O* y *B*; siendo "*O*" punto medio de $\overline{AB}$. Hallar *MO*, sabiendo que: $(MA)(MB)=32$ y $AB = 4$.

A) 6 *B)* 16 *C)* 18 *D)* 15 *E)* 8

05 Sobre la línea recta se ubican consecutivamente los puntos *A, B, C* y *D* de tal manera que :

$$(AB)=\left(\frac{CD}{3}\right)$$

$AC = 18$ y $BD = 30$. Hallar *BC*.

A) 6 *B)* 12 *C)* 18 *D)* 20 *E)* 9

06 En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*, tal que *B* es punto medio del $\overline{AD}$ y $(AC) = 5(CD)$.

Hallar: $\dfrac{(BC)}{(AB)}$

A) 1/2 *B)* 2/3 *C)* 3/4 *D)* 1/4 *E)* 1/5

07 Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D* y *E*; de modo que: $(AC)=(BD)$, $(DE)=3(BC)$ y $(AB)+\dfrac{2}{3}(DE)=24$.

Hallar *AE*.

A) 24 *B)* 36 *C)* 30 *D)* 42 *E)* 48

08 Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *P, O, R* y *S*. Hallar *PR*. Sabiendo que:

$(QR)=(RS)$ y $(PS)^2-(PQ)^2=12(QS)$.

A) 4 *B)* 5 *C)* 6 *D)* 7 *E)* 8

09 Sobre una recta se ubican los puntos *A, B* y *C* consecutivamente de tal forma que :

$$AB=\frac{2[(AB)^2-(BC)^2]}{(AC)}$$

Hallar *AB*, si : $AC=3$.

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 2,5

10 En una recta se toman los puntos *O, A, B* y *C*; tal que: $(AB)=\dfrac{(BC)}{3}$. Hallar $E=3(OA)+(OC)$

A) $3(OB)$ *B)* $4(OB)$ *C)* $5(OB)$ *D)* $\dfrac{2}{3}(OB)$ *E)* $2(OB)$

11 Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Tal que :

$(AC)+2(CD)+(BD)=48$, $(CD)=\dfrac{(AB)}{3}$

Hallar *AC*.

A) 26 *B)* 12 *C)* 24 *D)* 20 *E)* 32

12 Se dan los puntos consecutivos y colineales *O, A, B* y *C*, tal que:

$\dfrac{AC}{m}=\dfrac{BC}{n}$ *Hallar* : $\dfrac{AB}{AC}$

A) $\dfrac{m}{m+n}$ *B)* $\dfrac{2n}{m+n}$ *C)* $\dfrac{m-n}{m}$ *D)* $\dfrac{m-n}{n}$ *E)* $\dfrac{m+n}{m}$

13 Sobre una recta se toman los puntos consecutivos: *P, X, Q, R* y *S*. Sabiendo que "*x*", es punto medio de *PR*. $(PQ) = 3(QR)$ y

$$(PS)(RS)+\left(\frac{PR}{4}\right)^2=196$$

Calcular la longitud de $\overline{XS}$.

A) 26 B) 52 C) 13 D) 14 E) 20

14) Los puntos *A, B, C* y *D* son colineales consecutivos de modo que se cumple :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \quad Si: \frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{k}$$

$(k \in Z^+)$. Hallar *AC*.

A) 2(k-1) B) 2(k+1) C) k+1 D) 2k E) 3k

15) Sobre una recta se ubican los puntos *A, B, C* y *D*, de tal manera que :

$$\frac{AB}{AC}+\frac{CD}{BD}=1. \text{ Hallar } BC$$

Si : $(AB)(CD) = 5$.

A) $\sqrt{2}$ *B)* $\sqrt{3}$ *C)* $\sqrt{5}$ *D)* $2\sqrt{5}$ *E)* $2\sqrt{2}$

16) En una linea recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D* y *E* ; luego se ubica el punto medio *M* de $\overline{DE}$. Si $AB=BC+DE$, $AD=10cm$ y $BM=6cm$, calcular *CD*.

A) 1 B) 1,5 C) 1,8 D) 2 E) 2,5

17) En una línea recta se ubican los puntos consecutivos *P, Q, R* y *S*; tal que: $17(PR)=5(RS)$ y $5(QS)-17(PQ)=88$. Calcular *QR*.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18) Se tienen los puntos colineales y consecutivos *A , B , C* y *D* tal que: $4(AB)=3(BC)=6(CD)$ y $3(BC-AB)=2(BC-CD)-2$. Calcular *BD*.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

19) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A , B , C* y *D*; si $AB = 9$; $CD = 4$ y $\frac{(AB)}{(AC)}+\frac{(CD)}{(BD)}=1$

Calcular *BC*.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

20) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*; si:

$3(CD)=2(AD)$ y $BD-2(AB)=18$, calcular *BC*.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

21) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D* de modo que $AC-BD=BC$.

Si $AB=4$, calcular *AD*.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

22) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C, D* y *E*; tal que $AB = BC$; $DE=3(CD)$ y $AE=40$. Calcular *BM*, si *M* es punto medio de $\overline{CE}$.

A) 12 B) 20 C) 16 D) 15 E) 10

23) Se tiene el segmento *PQ*, en el cual se ubican los puntos *A* y *B* ($A \in \overline{PB}$), si $2(PA)=3(AB)=(BQ)$ y $BQ - PA=9$ Calcular *PQ*.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 33

24) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B , C* y *D*; tal que:

$AB-BC=3cm$ y $AD+CD= 15\ cm$. Calcule *BD*

A) 6cm B) 5cm C) 4,5cm D) 6,5cm E) 7cm

25) En una recta se ubican los puntos consecutivos *M, N, P* y *Q* de modo que : $a(NP)=b(PQ)$, $NQ=a$ y $MQ=b$, $(a=b)$. Calcule *NP* en función de *a* y *b*.

A) $\frac{3(a+b)b}{a}$ *B)* $\frac{ab}{a+b}$ *C)* $\frac{2ab}{a+b}$ *D)* $\frac{3ab}{a+b}$ *E)* $\frac{5(a+b)a}{b}$

26) En una recta se ubican los puntos *A, B, C, D* y *E* de modo que *B* y *D* son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ respectivamente.

Si: $AC - DE=8$. Calcule *BC*.

A) 3,5 B) 5 C) 3 D) 4 E) 4,5

27) En una recta se ubican consecutivamente los puntos *A, B, O* y *C* de modo que *O* es punto medio de *BC*, calcule:

$(AB)^2+(AC)^2$ en función de *AO* y *BO*.

A) $2((AO)^2+(BO)^2)$

B) $(AO)2+2(BO)^2$

C) $(AO)^2+(BO)^2$

D) $3((AO)2+2(BO)^2)$

E) $2(AO)^2+(BO)^2$

28) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*, tal que :

$4(AB)-BD-2(CD)=4$, $AB=3$ y $AC=4$

Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$

A) 3,5 B) 1,5 C) 2,5 D) 3 E) 2

29) En una recta se ubican los puntos consecutivos *A, B, C* y *D*. Calcule: $a+b+c+d$ si: $(AB)(CD)=(BC)(AD)$ y

$$\frac{a}{AC}+\frac{b}{CD}=\frac{c}{BD}+\frac{d}{AB}$$

A) 6,5 B) 5 C) 6 D) 4 E) 4,5

30) Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos *A, P, B, T* y *C* respectivamente , tal que :

$$\frac{AB}{3}=\frac{AP}{1}$$

$BT = 2(TC)$; $AC=120\ m$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AT}$ y $\overline{CP}$ respectivamente.

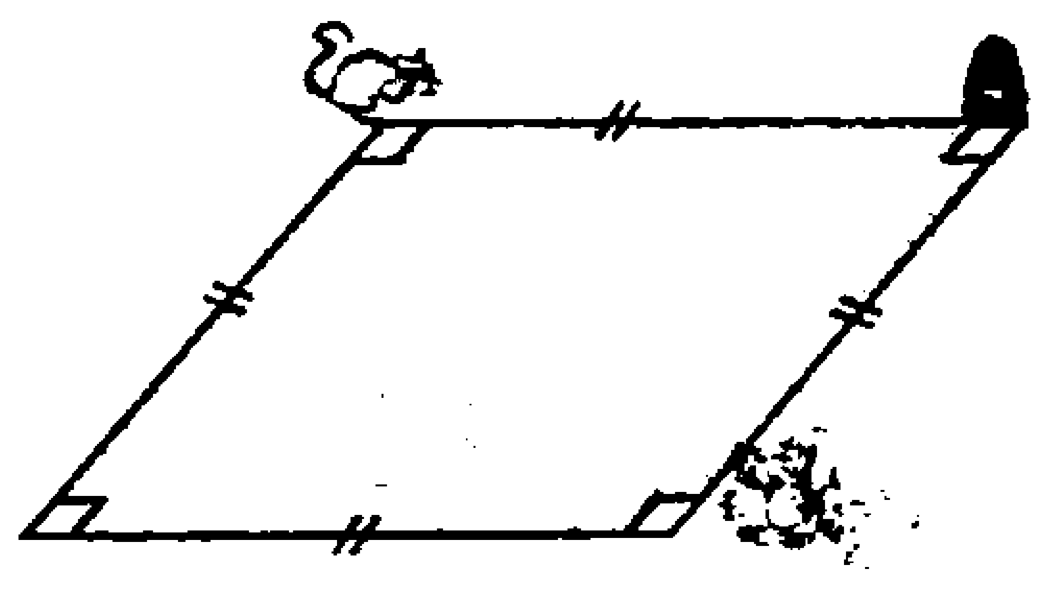
A) 13 B) 20 C) 16 D) 8 E) 3

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)[illegible]	2)A	3)C	4)A	5)B	6)B	7)E	8)C	9)[illegible]	10)B
11)C	12)C	13)D	14)B	15)C	16)[illegible]	17)D	18)[illegible]	19)E	20)[illegible]
21)A	22)B	23)E	24)A	25)B	26)D	27)A	28)E	29)[illegible]	30)[illegible]

RETO LOGICO :

El siguiente esquema muestra el piso de una habitación cuadrada. En las esquinas opuestas de dicha habitación aparecen un gato y un ratón que se divisan simultáneamente , tanto el gato como el ratón pueden correr con la misma rapidez ¿De qué animal es mas grande su trayectoria , si quisieran ambos llegar al escondite del ratón?



ÁNGULOS

CAPÍTULO 093

OBJETIVOS :

Al finalizar la presente unidad , el alumno estará en la capacidad de:

* *Definir el ángulo y conocer los tipos de ángulos que existen.*
* *Así mismo familiarizamos con las operaciones que pueden realizarse con su medida.*
* *Identificar y diferenciar el complemento y suplemento*
* *Desarrollar problemas sobre complemento y suplemento*

INTRODUCCIÓN :

Las primeras consideraciones geométricas del hombre son muy antiguas y parecería que tiene su origen en las observaciones simples que provienen de la habilidad humana para reconocer las formas y ejecutar comparaciones, teniendo como fuente la naturaleza y sus transformaciones.

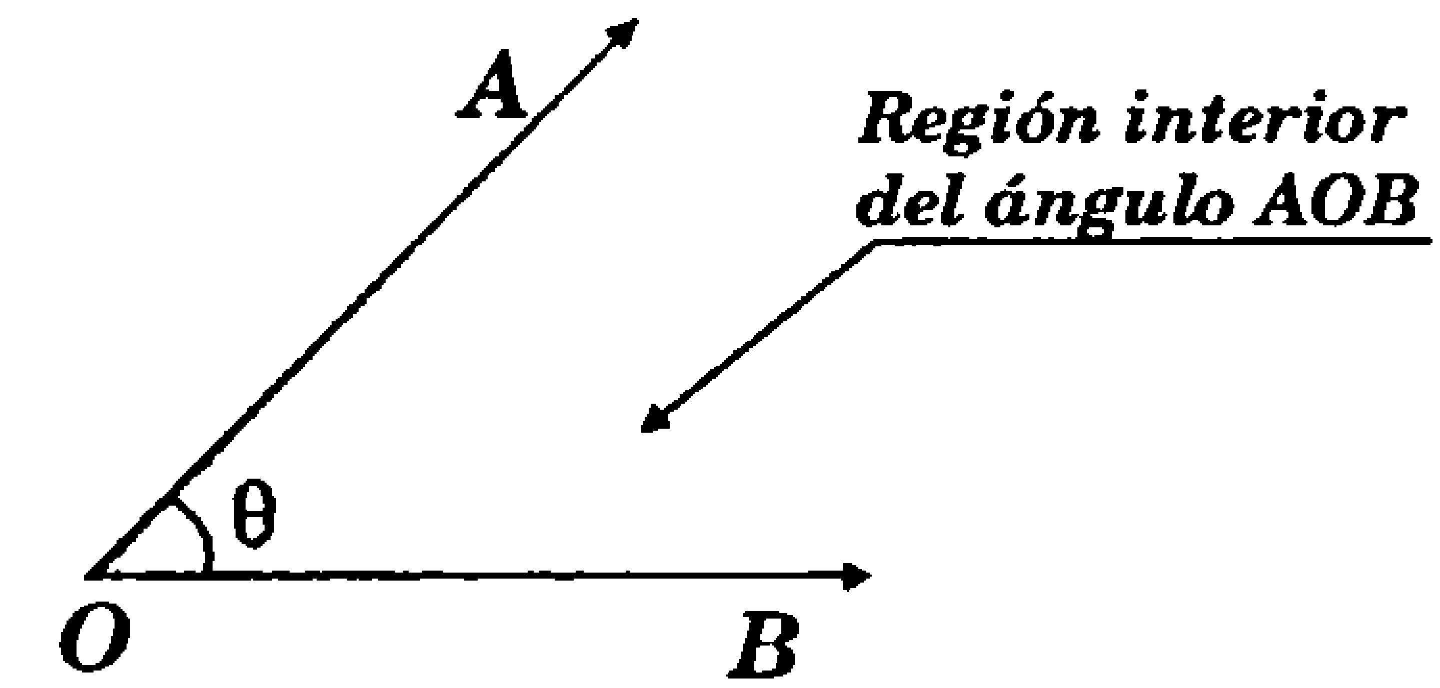
El sentido etimológico de la palabra geometría es el de "Medición de la tierra" lo que nos recuerda que el origen histórico de esta ciencia ha de buscarse en el desarrollo de la agrimensura y la construcción, en el marco de antiguas civilizaciones como la Egipcia, la Babilónica, la Hindú o la China. La cultura griega adoptó ese conjunto de conocimientos, aunque transformándolos hasta organizar el saber geométrico tradicional en forma de sistema deductivo. De hecho, esta naturaleza deductiva apareció por primera vez en Grecia hacia el siglo *V* a.C., alcanzando su formulación mas acabada en los elementos de Euclides.

"La dama geometría" representada en Margarita Philosophica (primera edición 1496).
La geometría era una de las cuatro ciencias del quadrivium de las artes liberales.

ÁNGULO

Es aquella figura geométrica formada por dos rayos que tienen el mismo origen.

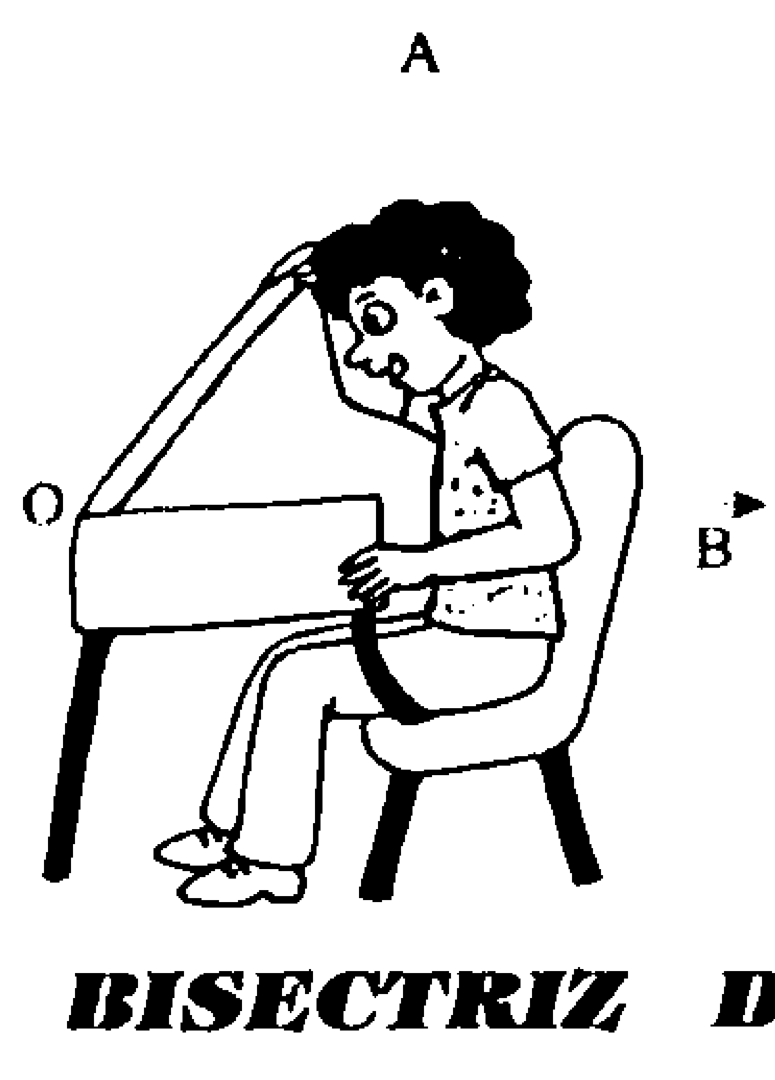
A dichos rayos se les denomina lados y al origen común vértices del ángulo.



ELEMENTOS :

* Lados : $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
* Vértice : *O*
* Notación : Ángulo *AOB* : $\measuredangle AOB$
* Medida del ángulo *AOB* : $m\measuredangle AOB$ $m\measuredangle AOB = \theta$

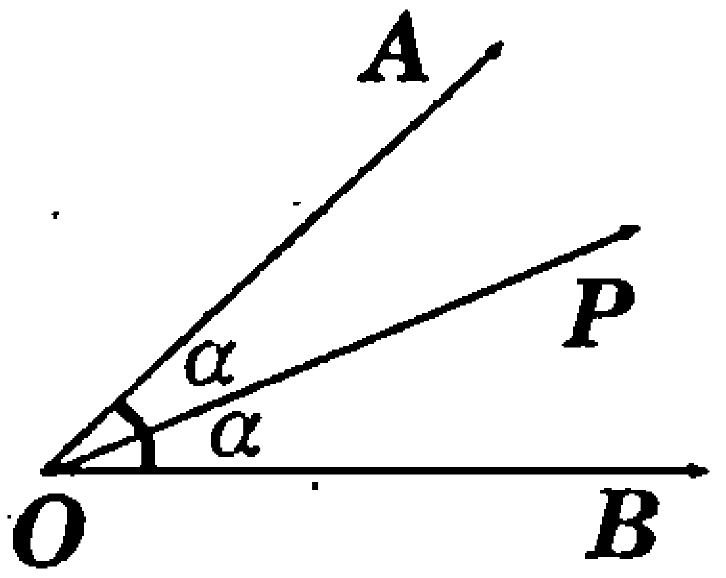
EJEMPLO :



En el gráfico se muestra como el alumno al levantar la tabla de la carpeta, va generando un ángulo, cuya medida depende de que tanto separe los lados del ángulo *AOB*. El vértice *O* sirve como punto de giro para separar los lados

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es aquel rayo ubicado en la región interior del ángulo cuyo origen es el vértice de dicho ángulo y que forma con sus lados, ángulos de igual medida.



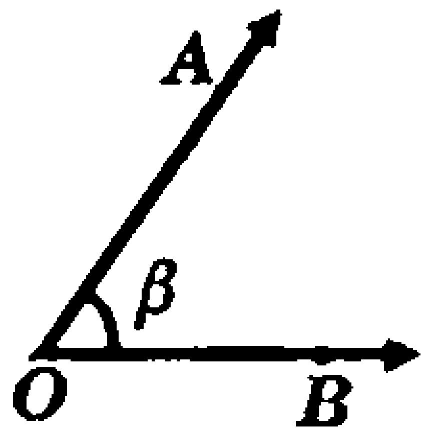
* En la figura $\overrightarrow{OP}$: bisectriz del ángulo *AOB*

* Entonces : $m\measuredangle AOP = m\measuredangle POB$

CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

I) SEGÚN SUS MEDIDAS :

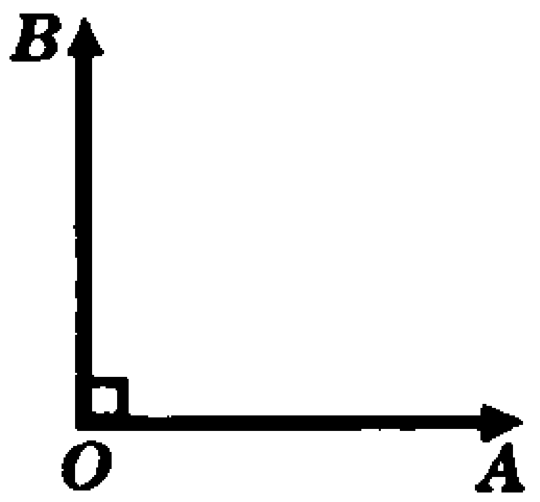
A) ÁNGULO AGUDO : Es aquel ángulo cuya medida es mayor que $0°$ y menor que $90°$.



En el gráfico el *AOB* es agudo; entonces

$$0° < \beta < 90°$$

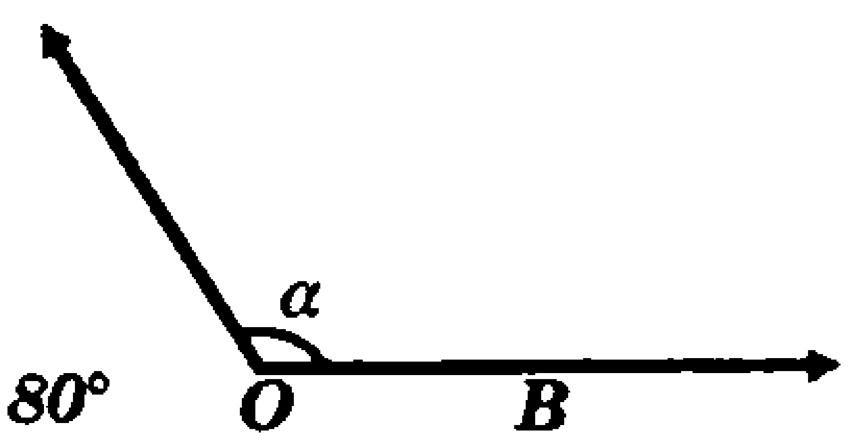
B) ÁNGULO RECTO : Es aquel cuya medida es $90°$



$$m\measuredangle AOB = 90°$$

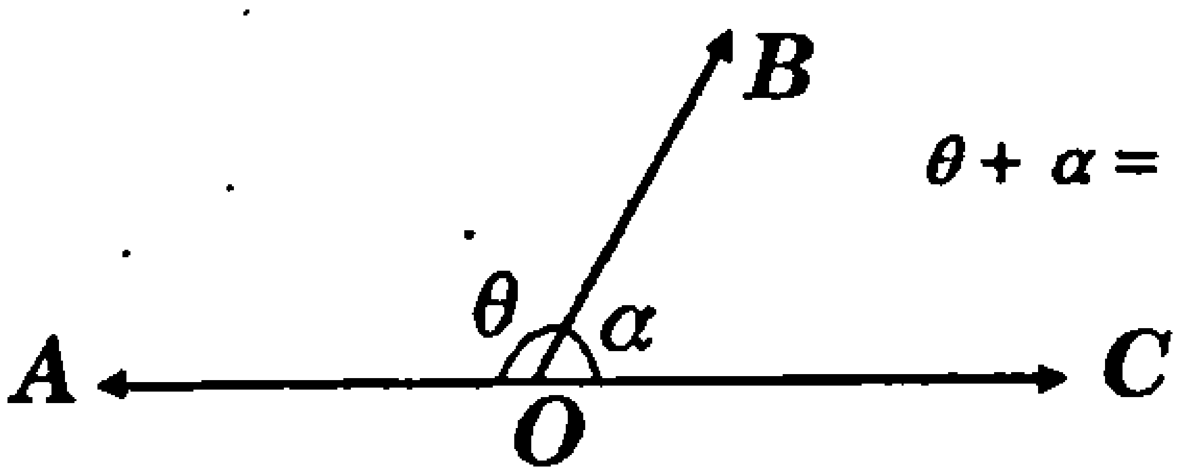
C) ÁNGULO OBTUSO :

* Es aquel cuya medida es mayor que $90°$ y menor que $180°$



$$90° < \alpha < 180°$$

OBSERVACIÓN :

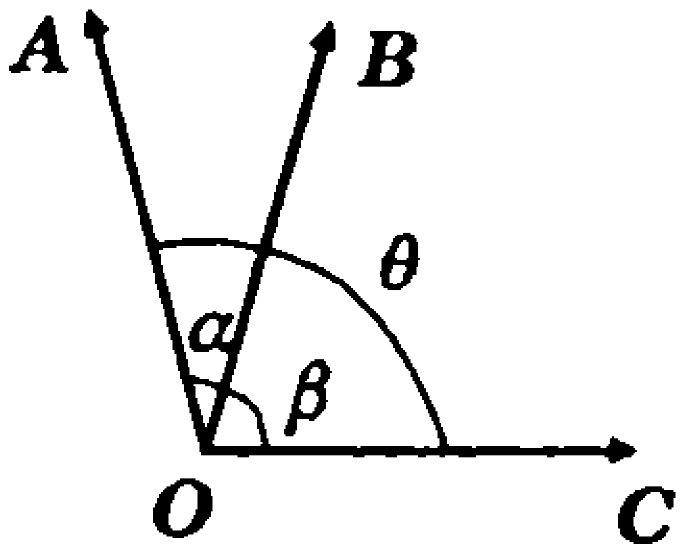


$$\theta + \alpha = 180°$$

II) SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS:

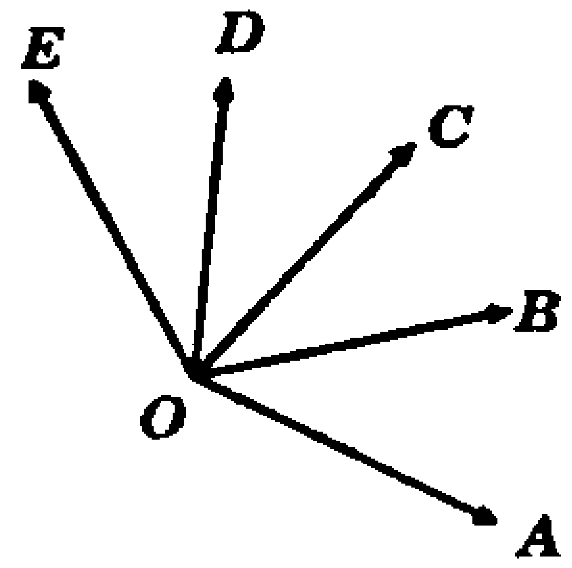
A) ÁNGULOS ADYACENTES :

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y además están situados a distinto lado de un lado común.



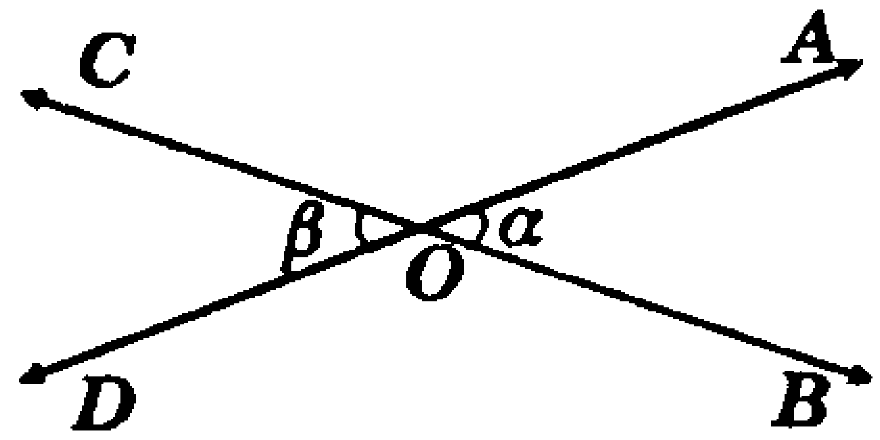
B) ÁNGULOS CONSECUTIVOS :

* En la figura , los ángulos : ***AOB, BOC, COD*** y ***DOE*** son consecutivos



C) ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE :

* En la figura los ángulos : ***AOB*** y ***COD*** son opuestos por el vértice.

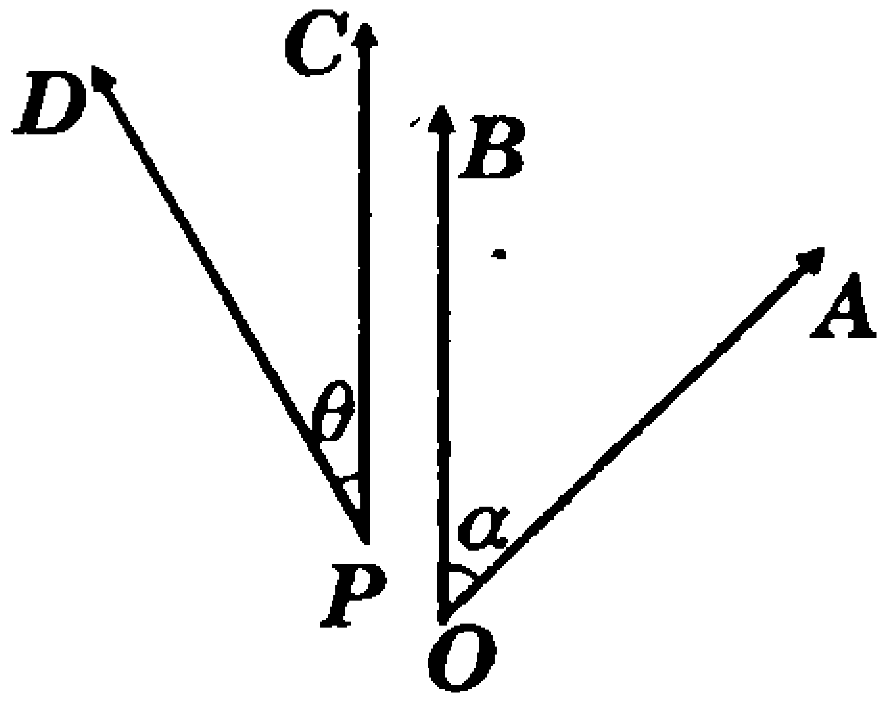


* Se cumple : $\alpha = \beta$

III) SEGÚN LA FORMA DE SUS MEDIDAS:

A) ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS :

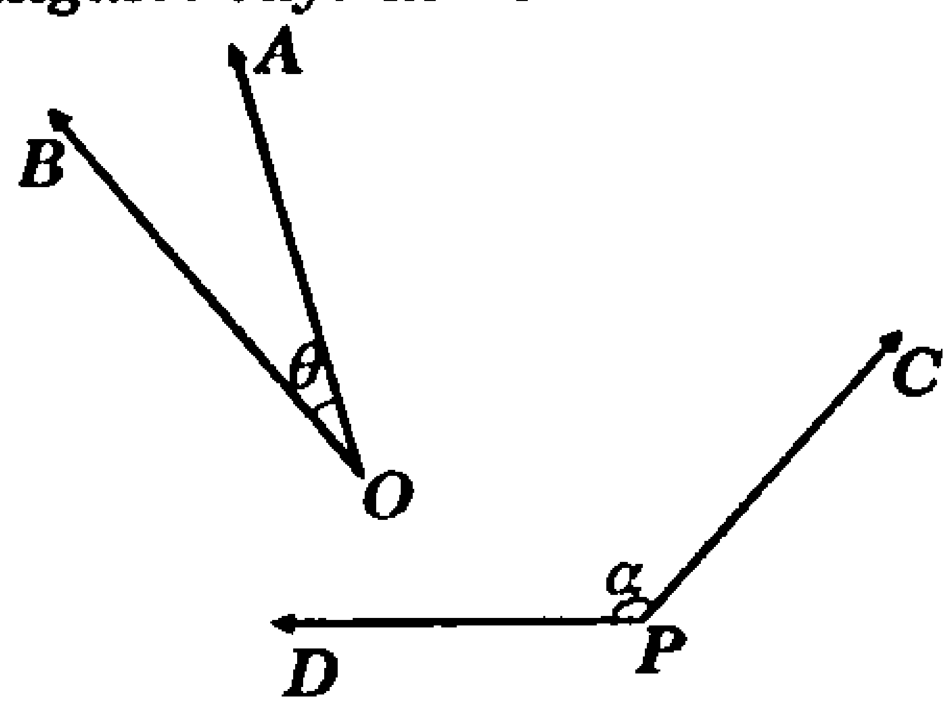
* Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es $90°$.



* Si los ángulos ***AOB*** y ***CPD*** son complementarios, entonces : $\alpha + \theta = 90°$

B) ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS :

* Son dos ángulos cuya medida es $180°$



* Si los ángulo ***AOB*** y ***CPD*** son suplementarios , entonces : $\alpha + \theta = 180°$

OBSERVACIÓN :

* *Complemento* (C_α):

* Es lo que le falta a un ángulo para que su medida llegue a ser *90°*

$$C_\alpha = 90° - \alpha$$

* *Suplemento* (S_α):

* Es lo que le falta a un ángulo para que su medida llegue a ser *180°*

$$S_\alpha = 180° - \alpha$$

PROPIEDADES:

S: Suplemento

C: Complemento

1) $SC_\alpha = (90° + \alpha)$.....$(0° < \alpha < 90°)$

2) $CS_\alpha = (\alpha - 90°)$.....$(90° < \alpha < 180°)$

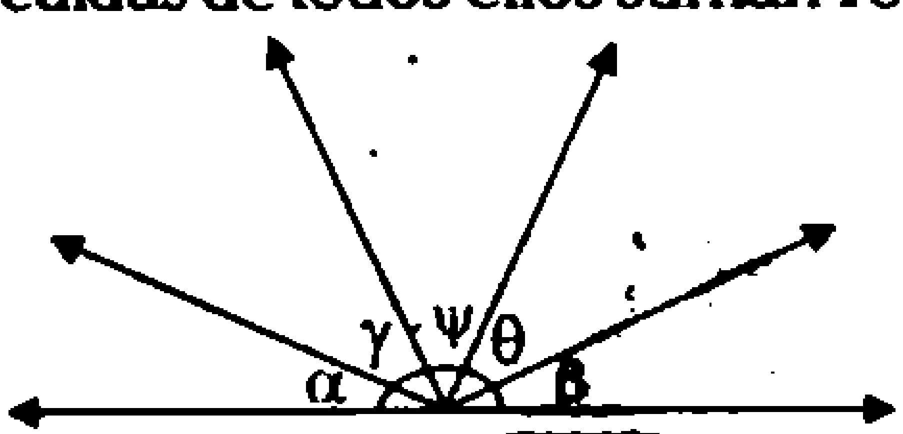
3) $SCS\alpha = (270° - \alpha)$....$(90° < \alpha < 180°)$

4) $\underbrace{CCC.......CCC}_{\text{"n" veces}}\, x = \begin{cases} x & ; \text{ si "n" es par} \\ 90° - x & ; \text{ si "n" es impar} \end{cases}$

5) $\underbrace{SSS.......SSS}_{\text{"n" veces}}\, x = \begin{cases} x & ; \text{ si "n" es par} \\ 180° - x & ; \text{ si "n" es impar} \end{cases}$

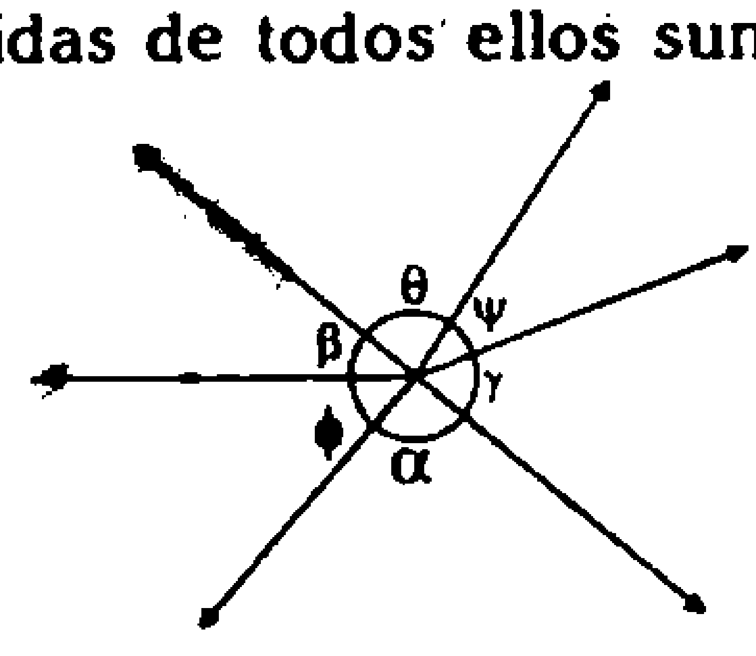
OBSERVACIÓN:

1) Cuando un conjunto de ángulos se agrupan de manera que están a un mismo lado de una recta, las medidas de todos ellos suman ***180°***



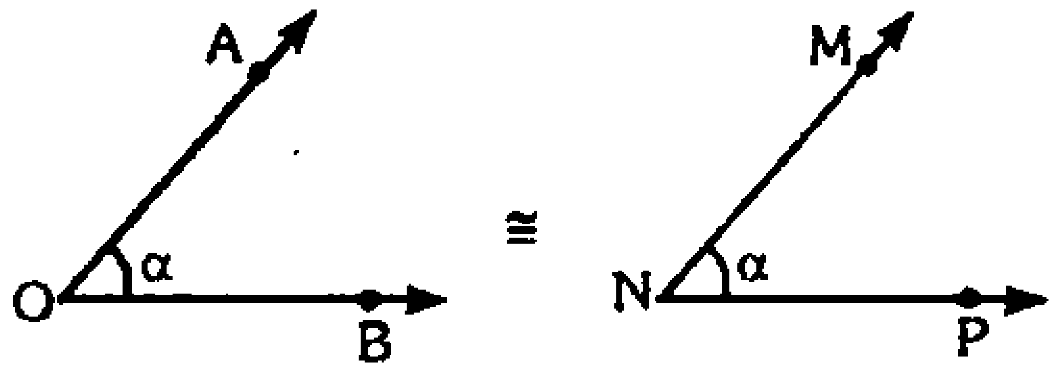
$\alpha + \gamma + \psi + \theta + \beta = 180°$

2) Cuando un conjunto de ángulos se agrupa de manera que están entorno a un punto, la suma de las medidas de todos ellos suman ***360°***.



$$\alpha + \gamma + \Psi + \theta + \beta + \phi = 360°$$

3) Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida. Así los ángulos ***AOB*** y ***MNP*** son congruentes y se escribe:



$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNP$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

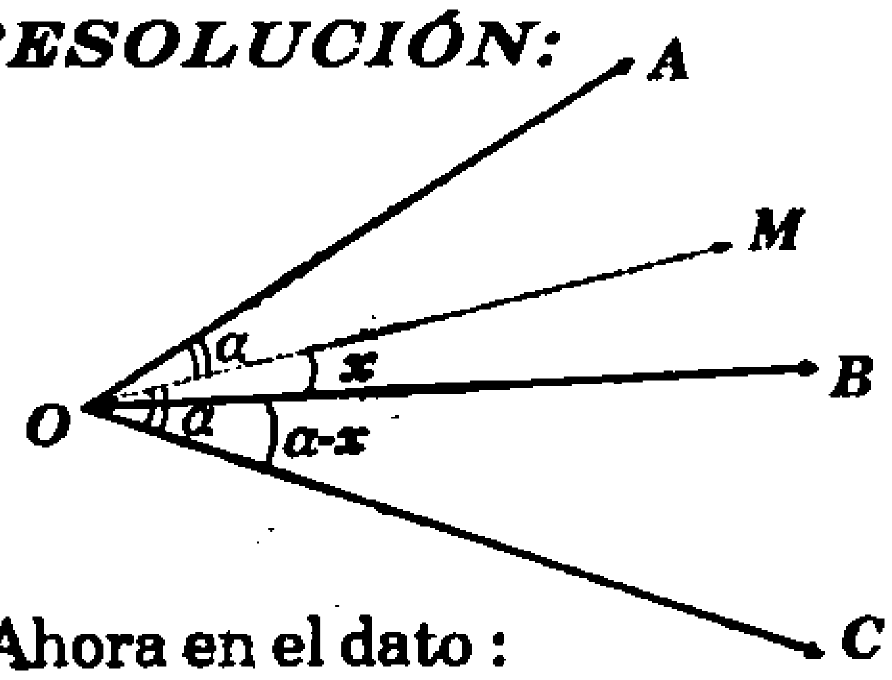
Se tienen los ángulos adyacentes ***AOB , BOC,*** luego se traza $\overrightarrow{OM}$ bisectriz del $\sphericalangle AOC$.

Calcular la medida del ángulo ***MOB***, sabiendo que:

$$m\sphericalangle AOB - m\sphericalangle BOC = 30°$$

A) 10° B) 15° C) 30° D) 6° E) 3°

RESOLUCIÓN:



* Ahora en el dato :

$m\sphericalangle AOB - m\sphericalangle BOC = 30°$

$(x + \alpha) - (\alpha - x) = 30°$

$x + \alpha - \alpha + x = 30°$

$\Rightarrow 2x = 30° \Rightarrow x = 15°$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

Calcular la medida de un ángulo, sabiendo que la suma de su suplemento con su complemento, es igual al cuádruple del complemento del mismo ángulo.

A)30° B)40° C)60° D)45° E)50°

RESOLUCIÓN :

* Sea "α" el ángulo deseado , luego.

$S_\alpha + C_\alpha = 4(C_\alpha)$

$180° - \alpha + 90° - \alpha = 4(90° - \alpha)$

$\Rightarrow 270° - 2\alpha = 360° - 4\alpha$

$\Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow = 45°$

RPTA : "D"

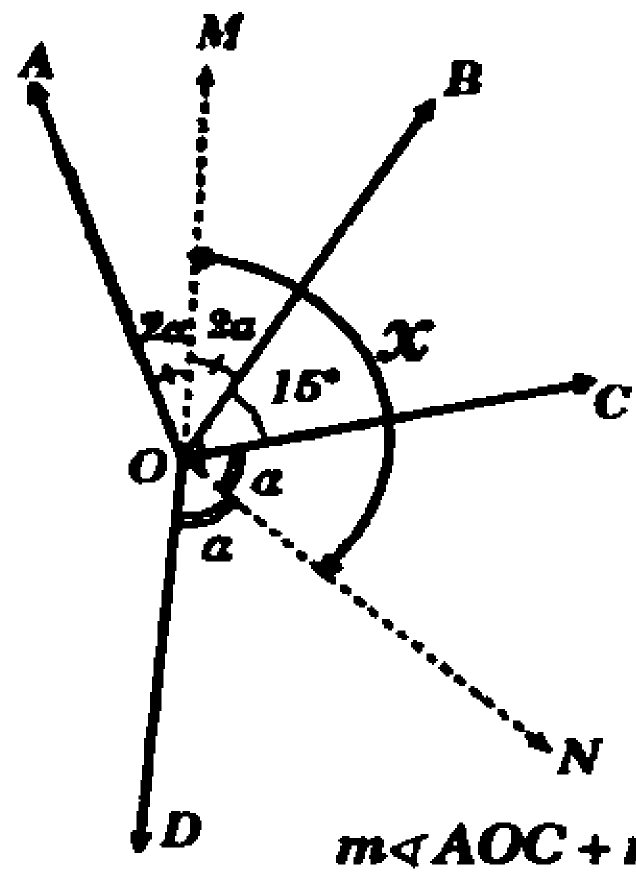
PROBLEMA 3 :

Se tienen los ángulos consecutivos ***AOB, BOC*** y ***COD,*** tal que los ángulos ***AOC*** y ***BOD*** son suplementarios. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos ***AOB*** y ***COD***, si $m\sphericalangle BOC = 15°$ y $m\sphericalangle AOB = 2(m\sphericalangle COD)$

A)50° B)100° C)90° D)80° E)70°

RESOLUCIÓN:

* Se sabe por dato :



$\underbrace{m\sphericalangle AOC}_{4\alpha + 15°} + \underbrace{m\sphericalangle BOD}_{2\alpha + 15°} = 180°$

$4\alpha + 15° + 2\alpha + 15° = 180$

$\Rightarrow \alpha = 25°$

* Se pide: $x = 3\alpha + 15°$

$x = 3(25°) + 15° = 90°$

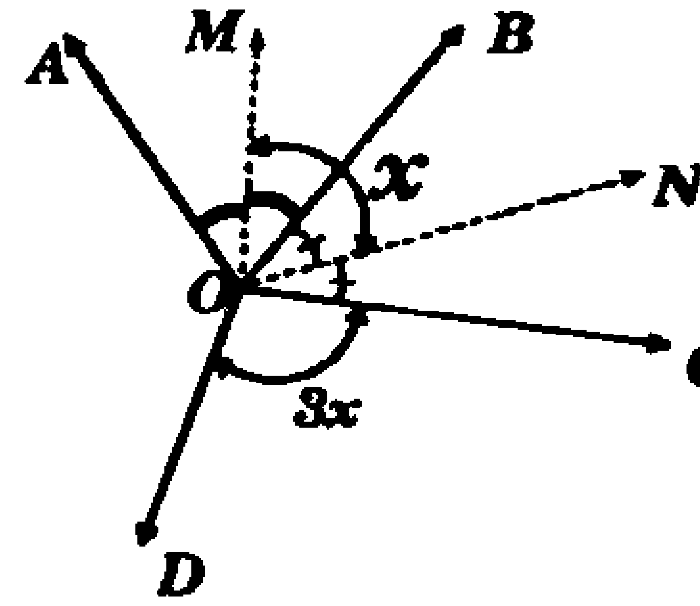
RPTA : "C"

PROBLEMA 4:

Se trazan los ángulos consecutivos ***AOB, BOC*** y ***COD***, luego las bisectrices de los ángulos ***AOB*** y ***BOC*** son $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ respectivamente. Calcular $m\sphericalangle MON$, si $m\sphericalangle COD = 3m\sphericalangle MON$ y $m\sphericalangle AOC + m\sphericalangle NOM + m\sphericalangle COD = 270°$

A)30° B)25° C)45° D)15° E)35°

RESOLUCIÓN :



* Se puede deducir que :

$$m\sphericalangle AOC = 2x$$

* Reemplazando en el último dato :

$2x + x + 3x = 270° \Rightarrow 6x = 270°$

$\Rightarrow x = 45°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

El complemento de la diferencia que existe entre el suplemento y el complemento de la medida de un ángulo es igual a 4/9 de la diferencia que existe entre el suplemento de la medida de dicho ángulo y el suplemento del suplemento de la medida de dicho ángulo. Indicar la medida de dicho ángulo

A) 45° B) 30° C) 60° D) 90° E) 130°

RESOLUCIÓN :

* Sea "α" la medida de dicho ángulo, luego:

$$90°-[(180°-\alpha)-(90°-\alpha)]=\frac{4}{9}[(180°-\alpha)-\{180°-(180°-\alpha)\}]$$

* Que al reducir la expresión, se obtendrá: $\alpha = 90°$

RPTA : "D"

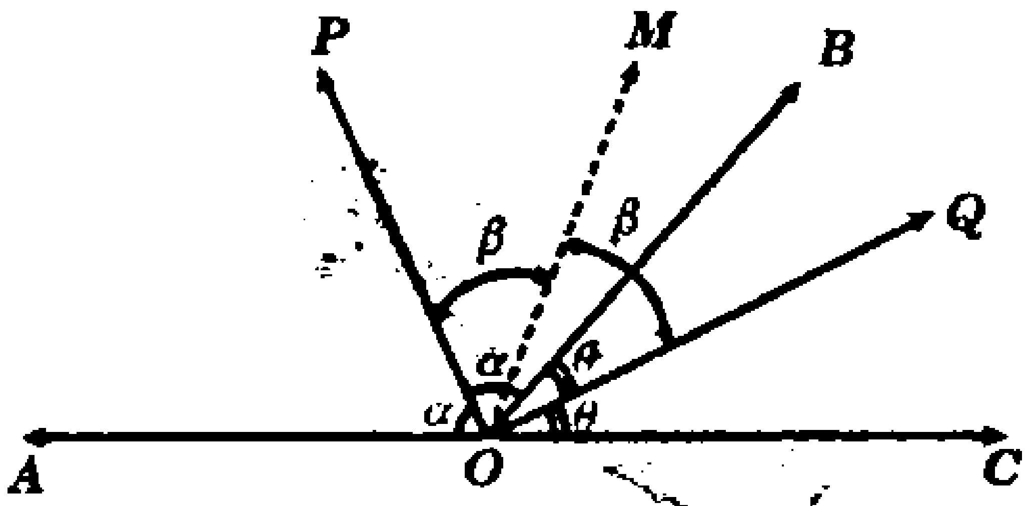
PROBLEMA 6 :

Se tienen los ángulos consecutivos y suplementarios *AOB* y *BOC* tal que $m\angle AOB - m\angle BOC = 120°$. Los rayos *OP, OQ* y *OM* son las bisectrices de los ángulos *AOB, BOC* y *POQ*.

Se trazan los rayos *OR* y *OS*, tal que $m\angle QOR = 2m\angle AOR$ y $m\angle POS = 2m\angle COS$. Calcular la medida del ángulo *MON*, si el rayo *ON* es la bisectriz del ángulo *ROS*.

A) 10° B) 20° C) 30° D) 50° E) 15°

RESOLUCIÓN:



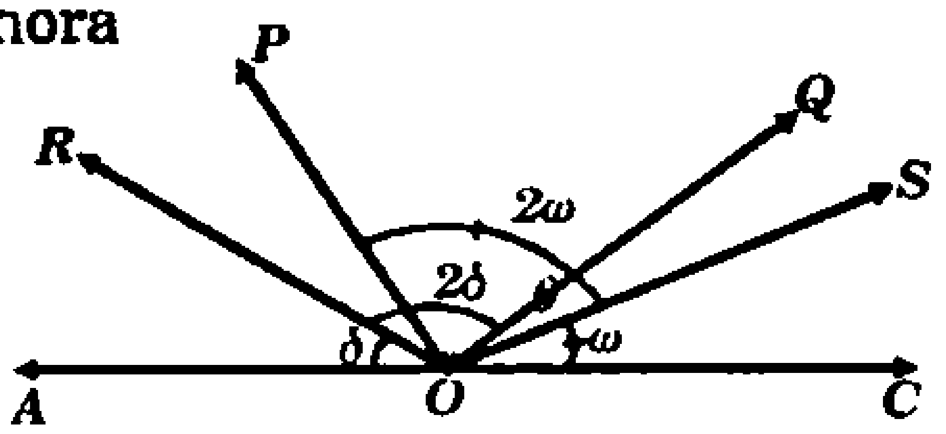
* Reemplazando en los dos primeros datos:

$$2\alpha + 2\theta = 180°$$
$$2\alpha - 2\theta = 120° \quad (+)$$

$$4\alpha = 300° \Rightarrow \alpha = 75° \Rightarrow \theta = 75°$$

$$\Rightarrow 2\beta = 75° + 15° \Rightarrow \beta = 45°$$

* Ahora



* Observando las 2 figuras se deduce que:

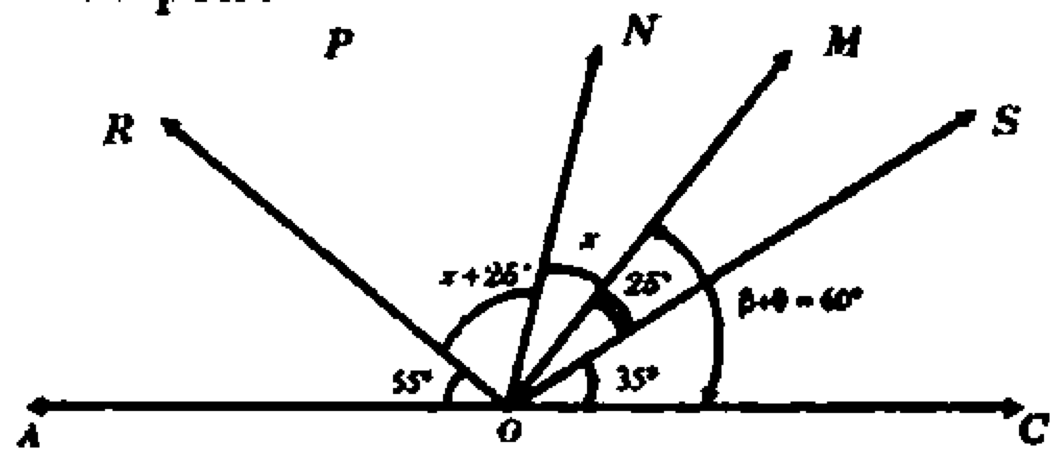
* $\delta + 2\delta = \alpha + 2\beta$

$3\delta = 75° + 2(45°) \Rightarrow \delta = 55°$

* $2\omega + \omega = \theta + 2\beta$

$3\omega = 15° + 2(45°) \Rightarrow \omega = 35°$

* Se pide :



* Se puede apreciar que :

$55° + 2(x + 25°) + 35 = 180°$

* Al despejar : $x = 20°$

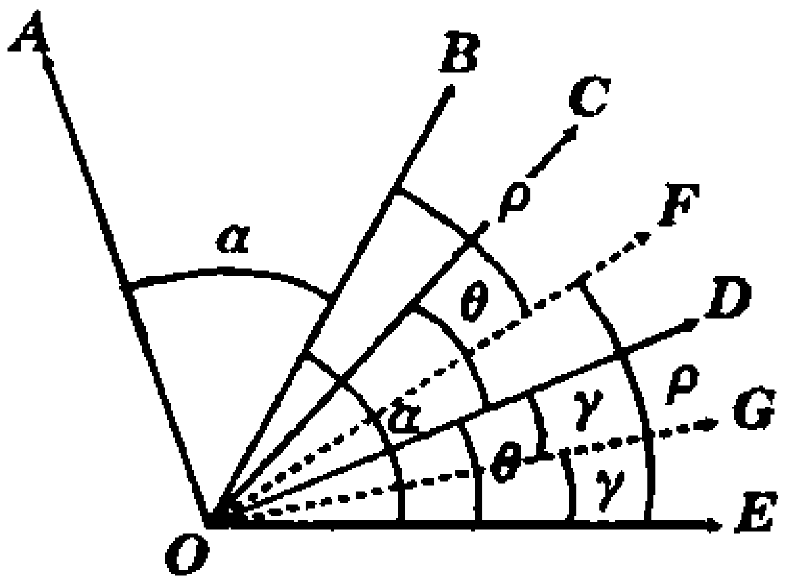
RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

Se tienen los ángulos consecutivos *AOB , BOC, COD* y *DOE* ; tal que los rayos *OB* y *OD* son las bisectrices de los ángulos *AOE* y *COE* ; y $mAOC = 100°$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *BOE* y *DOE*.

A) 20° B) 35° C) 25° D) 8° E) 17°

RESOLUCIÓN:



* Se sabe : $mAOC = 100°$

$2\alpha - 2\alpha = 100°$

$x - \theta = 50°$

$m\angle BOD = 50°$ ....(I)

* Se pide: $m\angle FOG = \rho - \gamma$.......(II)

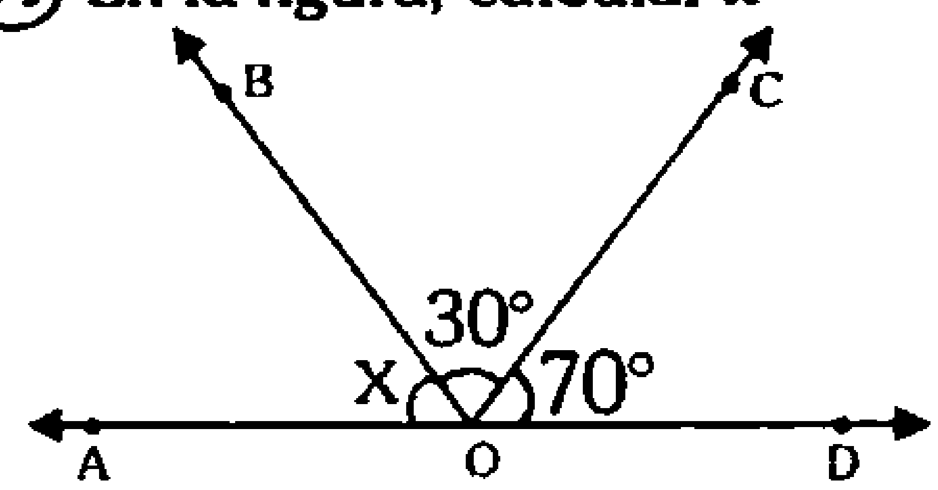
* Pero: $2\rho - 2\gamma = m\angle BOD$

$\Rightarrow \rho - \gamma = 25°$ (lo deseado)

RPTA : "C"

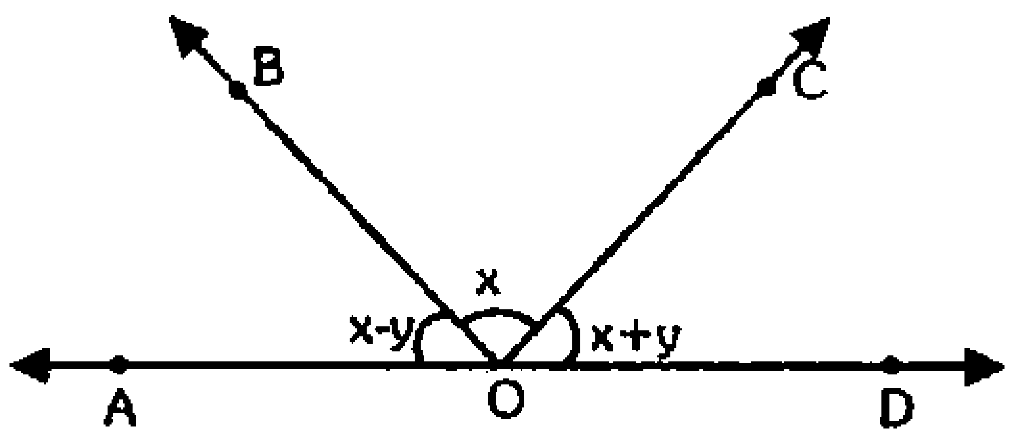
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura, calcular x



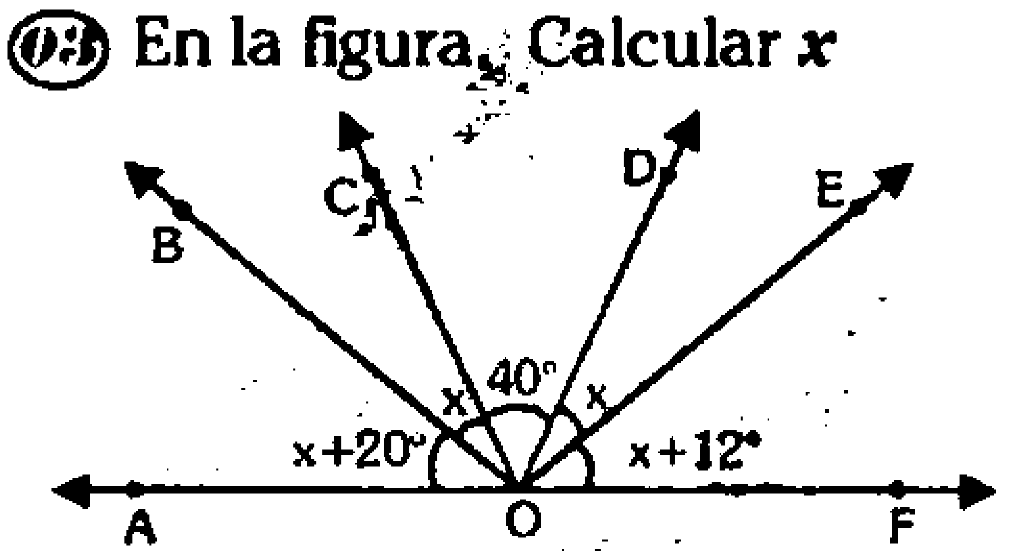
RPTA.: ....

02 En la figura, calcular x



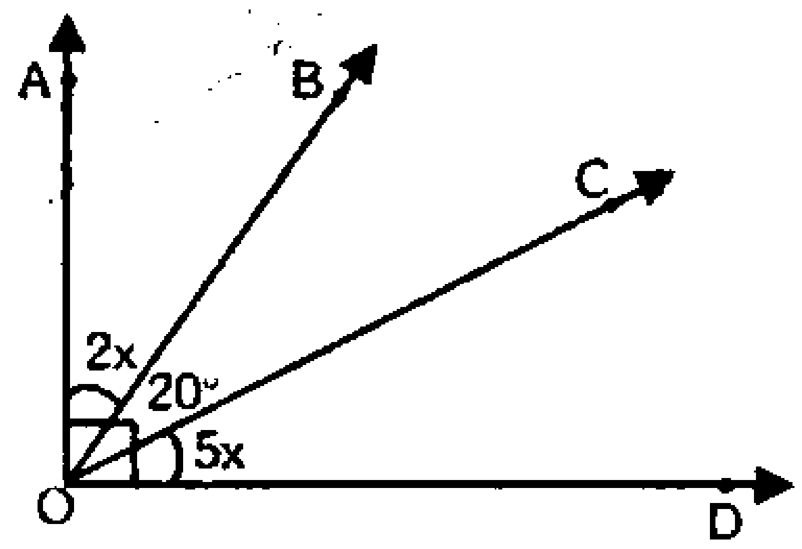
RPTA.: ....

03 En la figura, Calcular x



RPTA.: ....

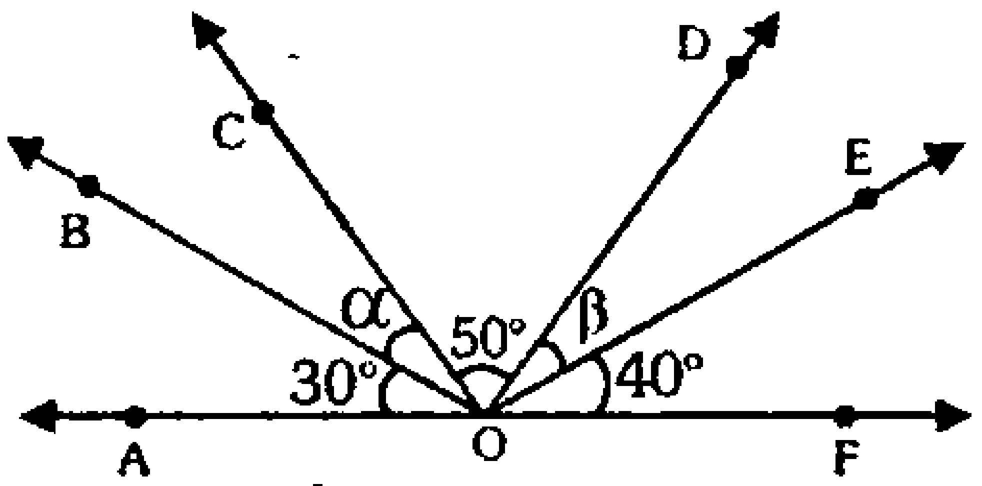
04 Calcular x



A) 20° B) 30° C) 10° D) 12° E) 18°

05 En la figura.

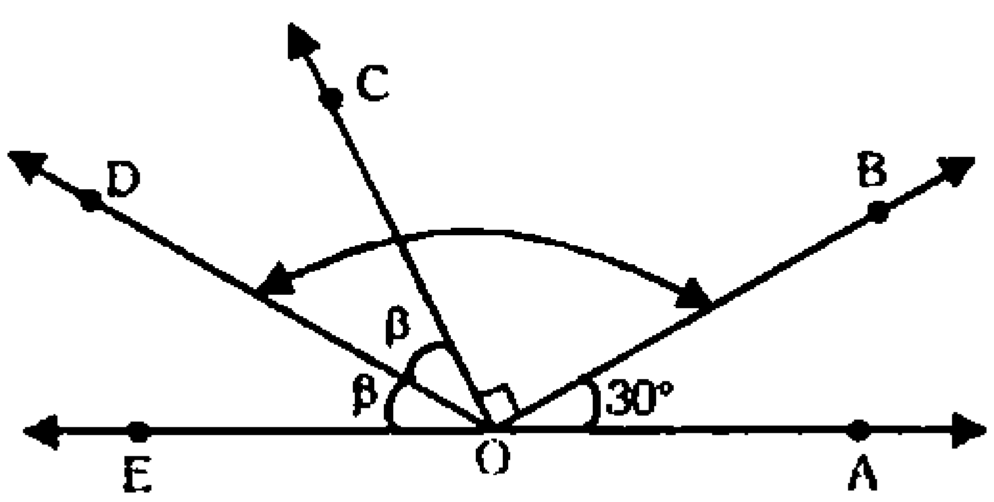
Calcular: $m\angle DOB$



A) 120° B) 110° C) 150°
D) 130° E) 140°

06 En la figura.

Calcular $m\angle DOB$



A) 100° B) 115° C) 118°
D) 110° E) 120°

07 El complemento de la medida de un ángulo es igual al suplemento de la medida del triple del ángulo. Calcular la medida de dicho ángulo.

A) 54° B) 30° C) 45° D) 60° E) 90°

08 Calcular la media de un ángulo sabiendo que su complemento es a su suplemento como uno es a diez.

A) 60° B) 70° C) 80° D) 90° E) 100°

09 Calcular la medida de un ángulo. Sabiendo que la suma de su complemento y suplemento es 110^c.

RPTA.: ....

10 Calcular la medida de un ángulo si se sabe que el complemento de su medida es el quíntuple de dicha medida.

RPTA.: ....

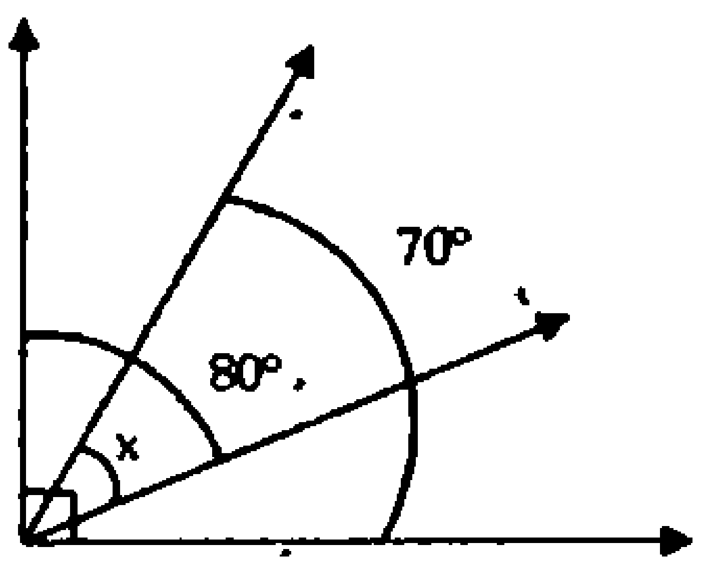
11 Si el suplemento de la medida de un ángulo más el complemento de la medida de dicho ángulo es igual al cuádruple de la medida del mismo ángulo. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

RPTA.: ....

12 Calcular la medida de un ángulo. Sabiendo que la diferencia entre el suplemento y el complemento de la medida de dicho ángulo es seis veces la medida del mismo ángulo.

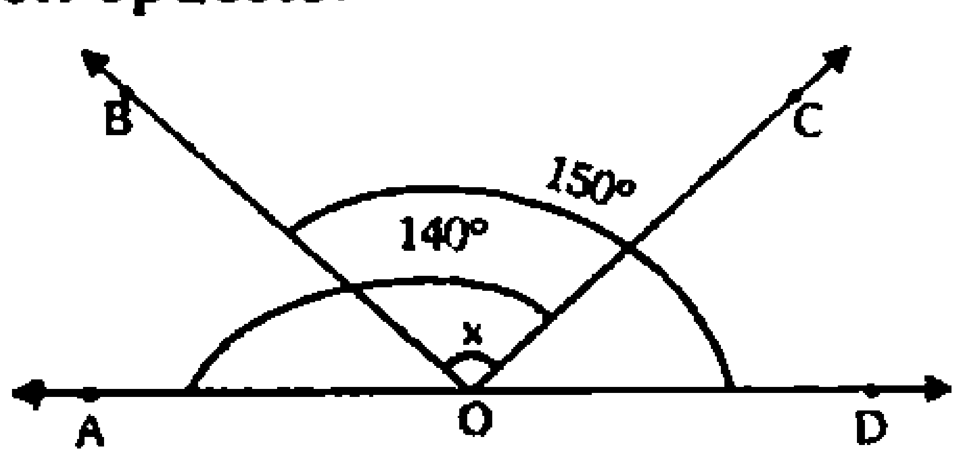
RPTA.: ....

13 Calcular x en la figura.



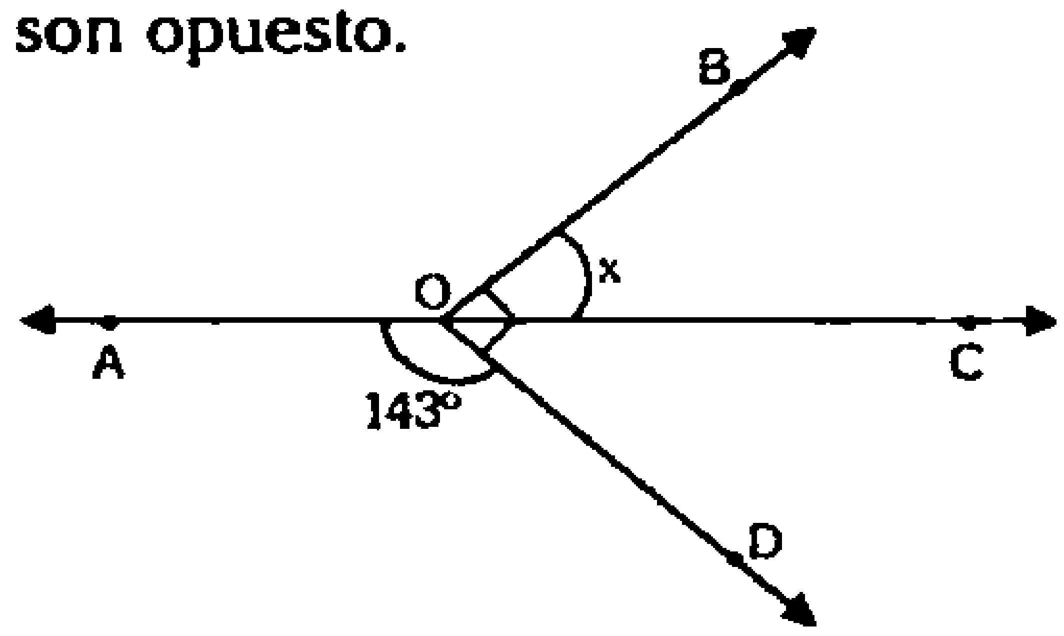
RPTA.: ....

14 Calcular x, si los rayos *OA* y *OD* son opuesto.



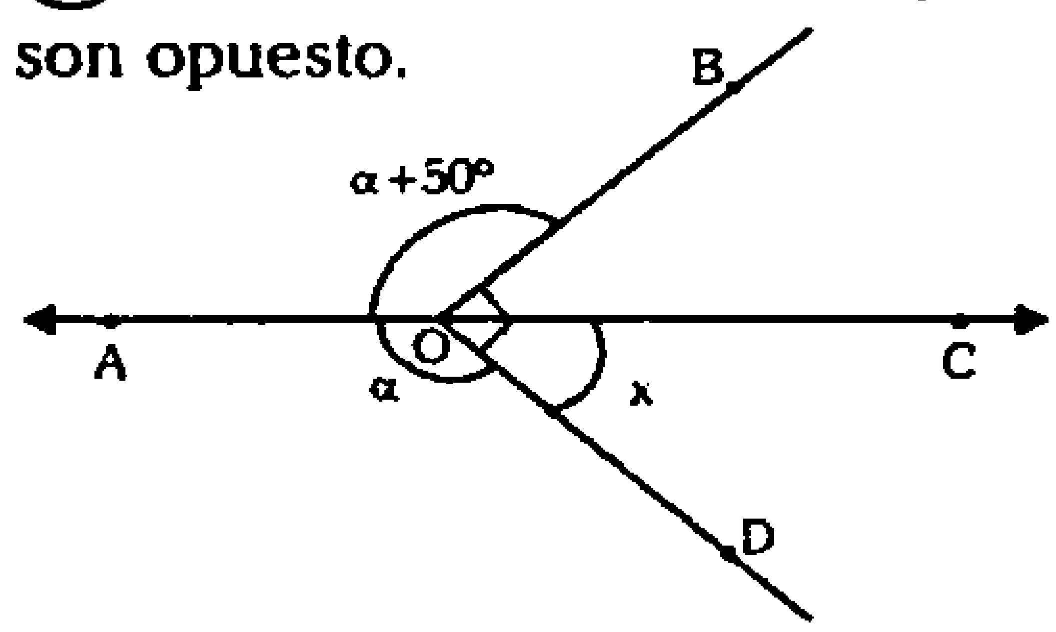
RPTA.: ....

15 Calcular x, si los rayos *OA* y *OC* son opuesto.



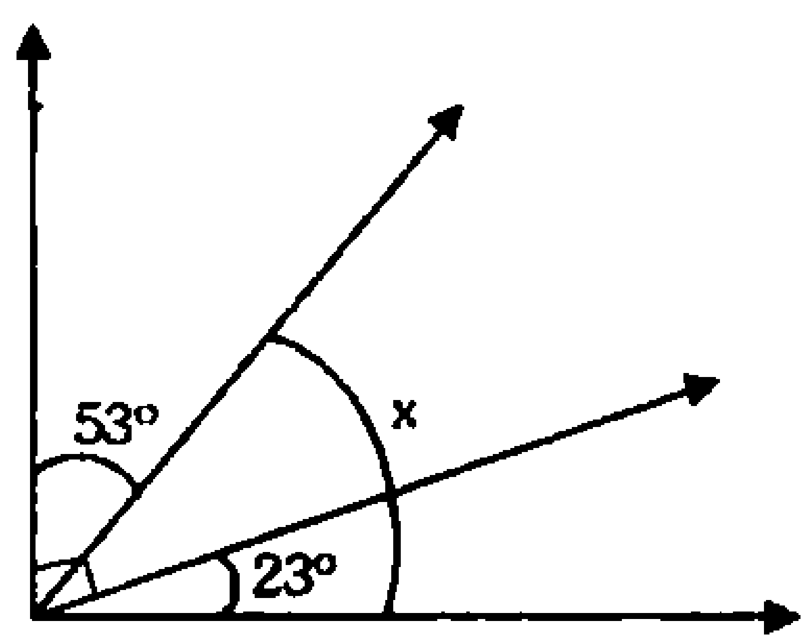
RPTA.: ....

16 Calcular x, si los rayos *OA* y *OC* son opuesto.



RPTA.: ....

17 Calcular x



RPTA.: ....

18 La relación de las medidas de dos ángulos complementarios es como *5* es a *4*. Calcule el complemento del menor.

RPTA.: ....

19 Si el complemento de la medida de un ángulo es igual al doble de la medida de dicho ángulo. Calcule el suplemento de la medida de dicho ángulo.

RPTA.: ....

20 La diferencia de las medidas de dos ángulos complementarios es *20°*. Calcule el suplemento de la medida del menor.

RPTA.: ....

21 Calcule la medida de un ángulo si se sabe que la suma de su complemento y suplemento es *130°*.

RPTA.: ....

22 Calcule la medida de un ángulo si se sabe que el complemento de su medida es el cuadruple de dicha medida.

RPTA.: ....

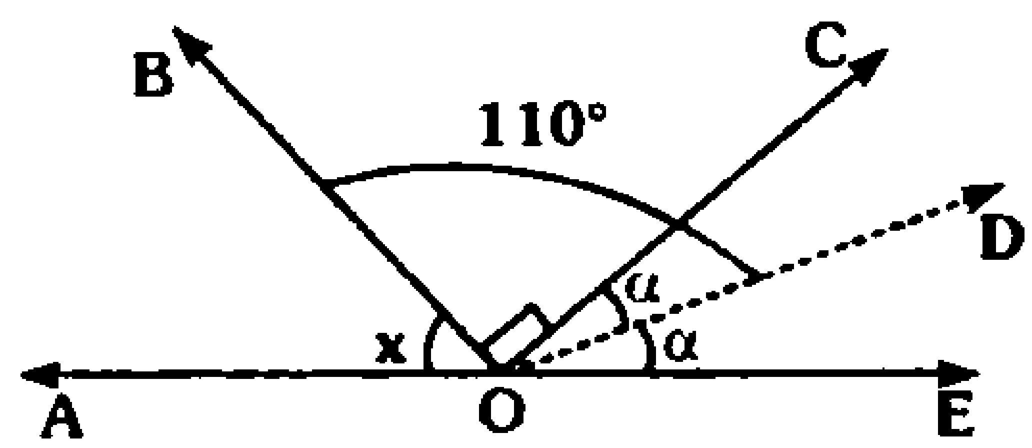
23 Se tienen dos ángulos adyacentes suplementarios cuya diferencia es *40°*. Hallar el suplemento del complemento del menor de ellos.

A) 90° B) 45° C) 37° D) 91° E) 92°

24 Se tienen los ángulos consecutivos *AOB, BOC, COD;* Siendo: $m\sphericalangle AOC = 47°$, $m\sphericalangle BOD = 51°$, $m\sphericalangle AOD = 80°$. Hallar la medida del $\sphericalangle BOC$.

A) 18° B) 12° C) 28° D) 38° E) 16°

25 En el gráfico. Hallar "x".

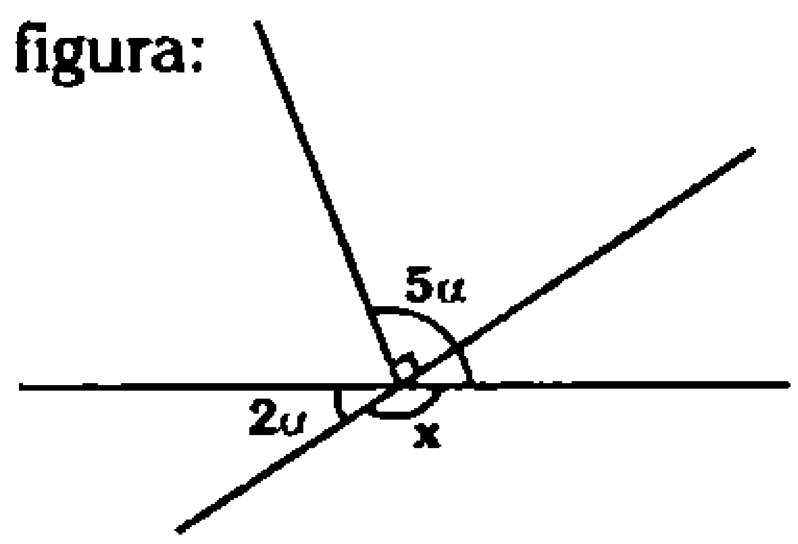


A) 50° B) 60° C) 59° D) 74° E) 16°

26 Si a un ángulo se le resta su complemento, resulta la cuarta parte de su suplemento. Hallar dicho ángulo.

A) 75° B) 80° C) 15° D) 45° E) 60°

27 Hallar la medida del ángulo "x" de la figura:



A) 100° B) 150° C) 90°
D) 110° E) 120°

28 Se tienene los ángulos adyacentes *PQR* y *RQS*, si la $m\sphericalangle PQR = a$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos *RQS* y *PQS*.

A) $\frac{a}{2}$ B) a C) $\frac{a}{3}$ D) $2a$ E) $\frac{2a}{3}$

OBJETIVOS :

Al finalizar la presente unidad , el lector estará en la capacidad de:

* *Establecer las posiciones relativas de dos rectas en el plano y conocer las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.*

INTRODUCCIÓN :

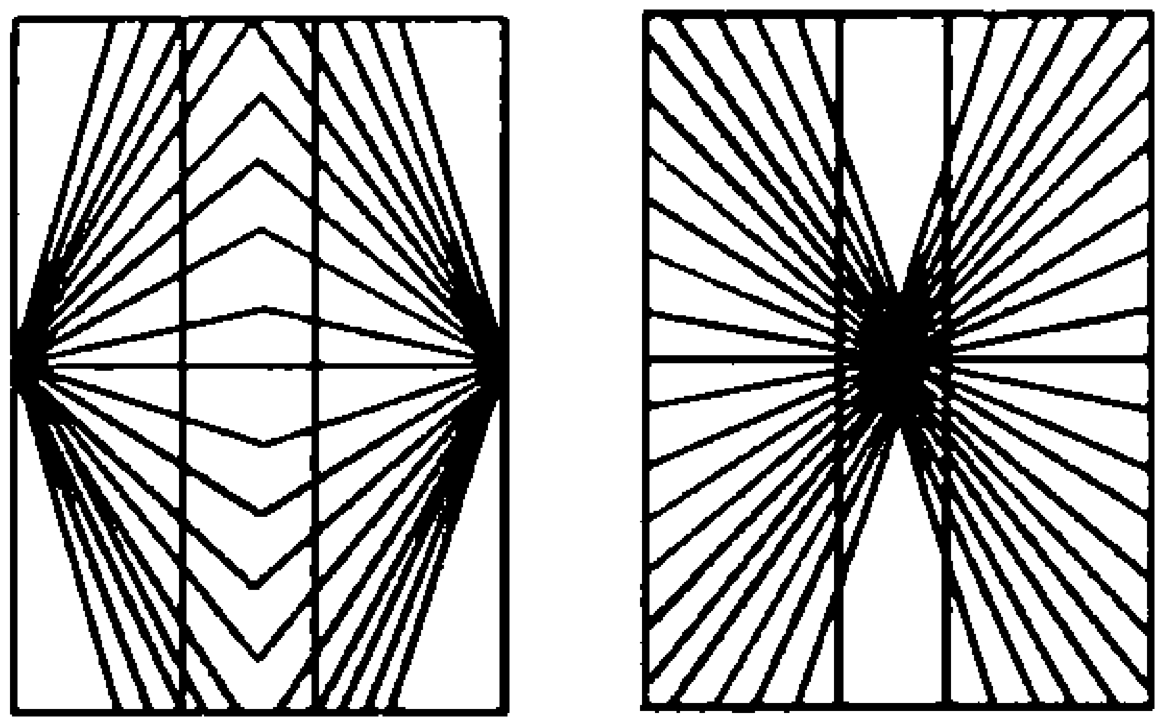
El ángulo es el resultado de comparar las formas de los objetos con esquinas, como esquinas de mesas, pizarras o de la ventana, cuando pensamos en estas formas de las esquinas, obtenemos la idea del ángulo. Los ángulos presentes en una figura geométrica, nos definen su forma. Euclides solía decir que el ángulo era la inclinación de una recta sobre otra.

La teoría de los ángulos tiene un estrecho vínculo con la teoría de los segmentos, y ambas son fundamentales para poder conocer la forma y el tamaño de un objeto. Esta figura es usada también para realizar las experiencias mostradas.

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Seguramente, vistas como las de la fotografía superior te son familiares. ¿Te has puesto a pensar que las vías del tren sugieren la idea de rectas paralelas? Recuerda que dos rectas son paralelas cuando, por más que se prolonguen, nunca se encuentran. Observa, sin embargo, que las vías del tren con los travesaños que las fijan al suelo, ilustran la idea de rectas perpendiculares, ya que forman ángulo recto.

Asimismo, en la fotografía observamos cómo una vía cruza las otras dos, lo que sugiere la idea de rectas oblicuas. El quinto postulado del libro Elemento de Euclides fue aceptado de forma inmediata por su evidencia frente a los sentidos; sin embargo, en ocasiones, nuestros sentidos nos encubren realidades muy diferentes. Un buen ejemplo lo puedes observar en las figuras siguientes:



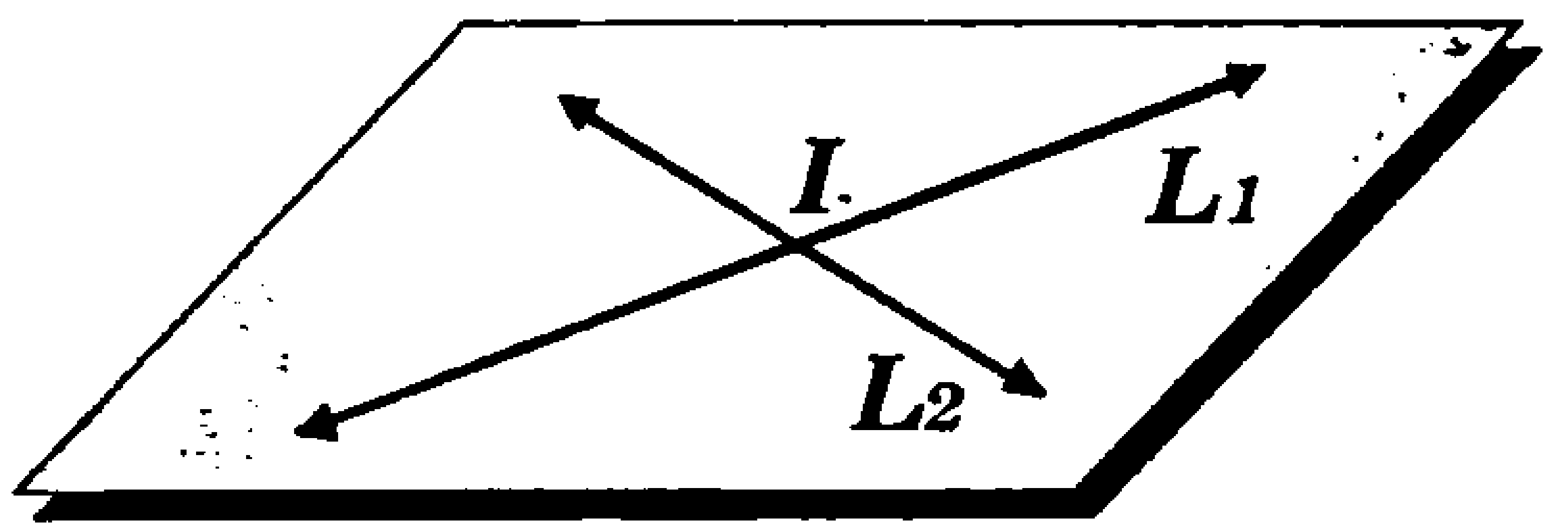
¿Son rectas las dos líneas verticales de cada una de las figuras?; ¿son paralelas?

Sirviéndote de una regla , mide a distintas alturas y confirma la veracidad o falsedad de tu respuesta.

Observa hasta qué punto los sentidos pueden llegar a traicionarnos, detalle que llevó a los geómetras del siglo *XIX* a descubrir las geometrías no euclidianas, al poner en entredicho el quinto postulado de Euclides.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

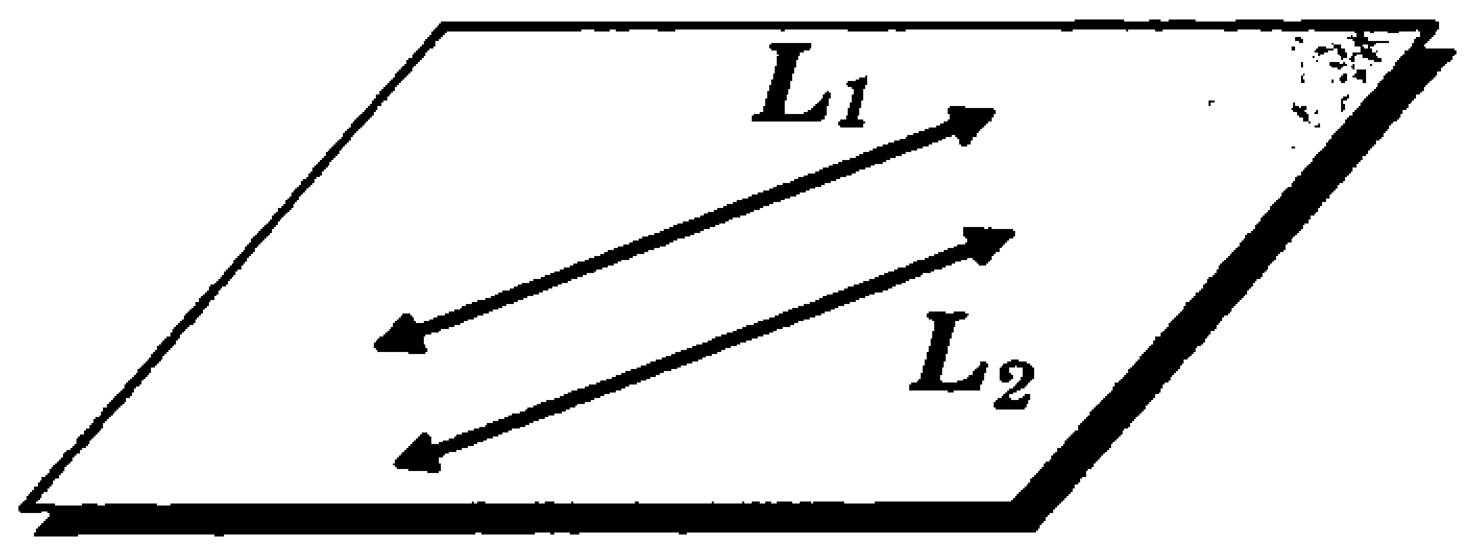
A) SECANTES :



* Si : $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{I\}$

* Entonces : $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son secantes

B) PARALELAS :



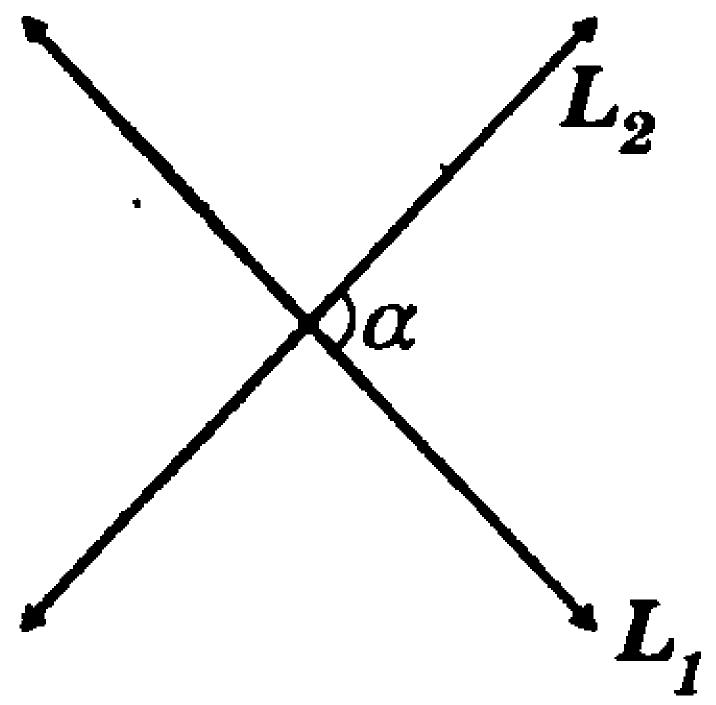
* Si: $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{\ \}$ ⇒ Conjunto vacío

* Entonces: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

* $\perp$: Se lee *"es paralela"*

C) RECTAS PERPENDICULARES :

Son aquellas que determinan ángulos cuyas medidas son $90°$



* Si : $\alpha = 90°$
* Entonces : $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
* Se lee *"es perpendicular"*

REGIÓN INTERIOR A DOS PARALELAS

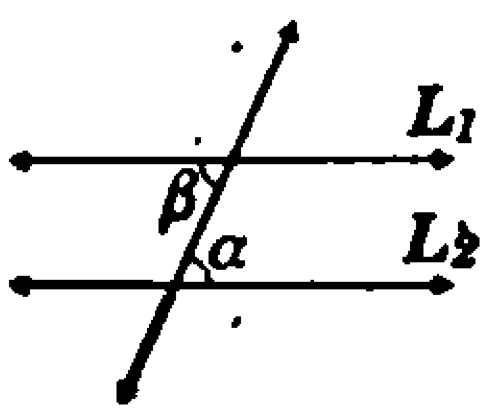
Es el conjunto formado por todos los puntos ubicados entre los puntos de las paralelas.

ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL

Al trazar una recta secante o transversal a dos rectas paralelas , se forman ocho ángulos cuyas medidas guardan ciertas relaciones, así tenemos:

A) ÁNGULOS ALTERNOS:

Internos

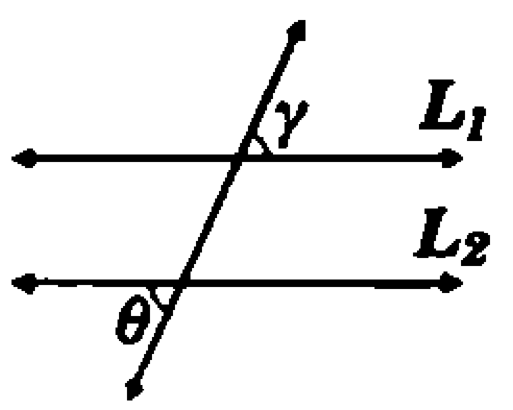


Si: $L_1 // L_2$

Entonces :

$\alpha = \beta$

Externos



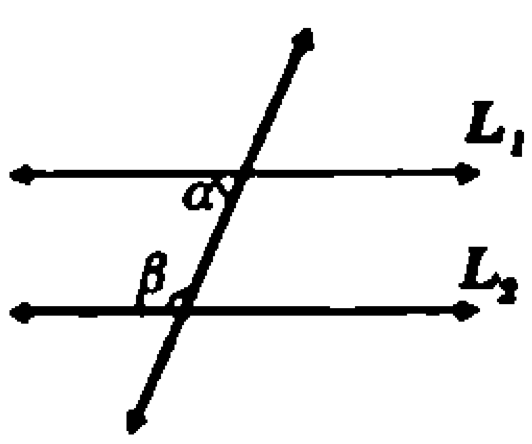
Si: $L_1 // L_2$

Entonces :

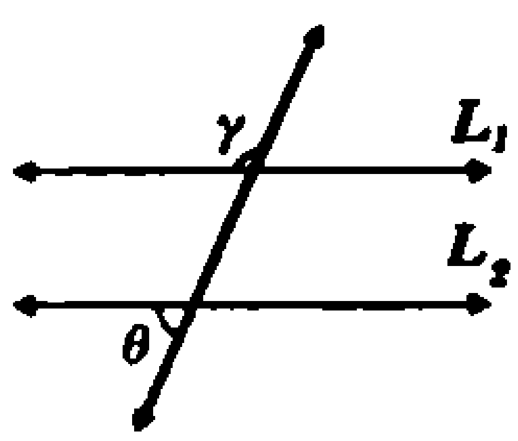
$\theta = \gamma$

B) ÁNGULOS CONJUGADOS :

Internos



Externos



Si: $L_1 // L_2$

Entonces :

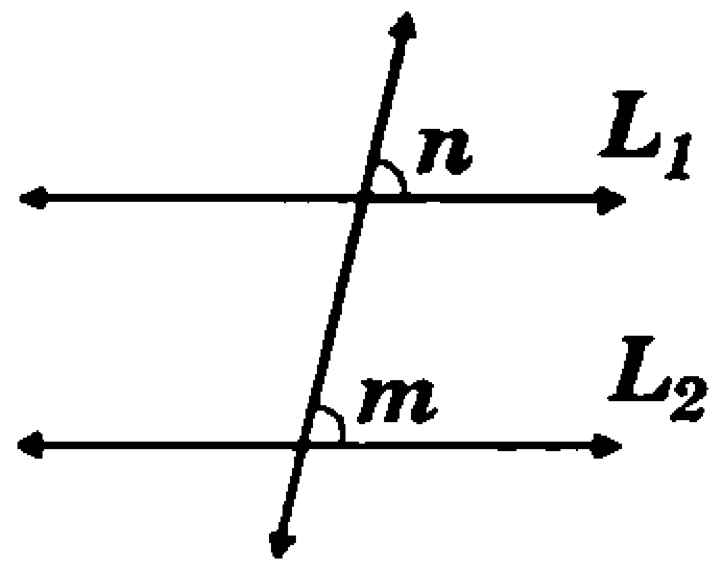
$\alpha + \beta = 180°$

Si : $L_1 // L_2$

Entonces :

$\theta + \gamma = 180°$

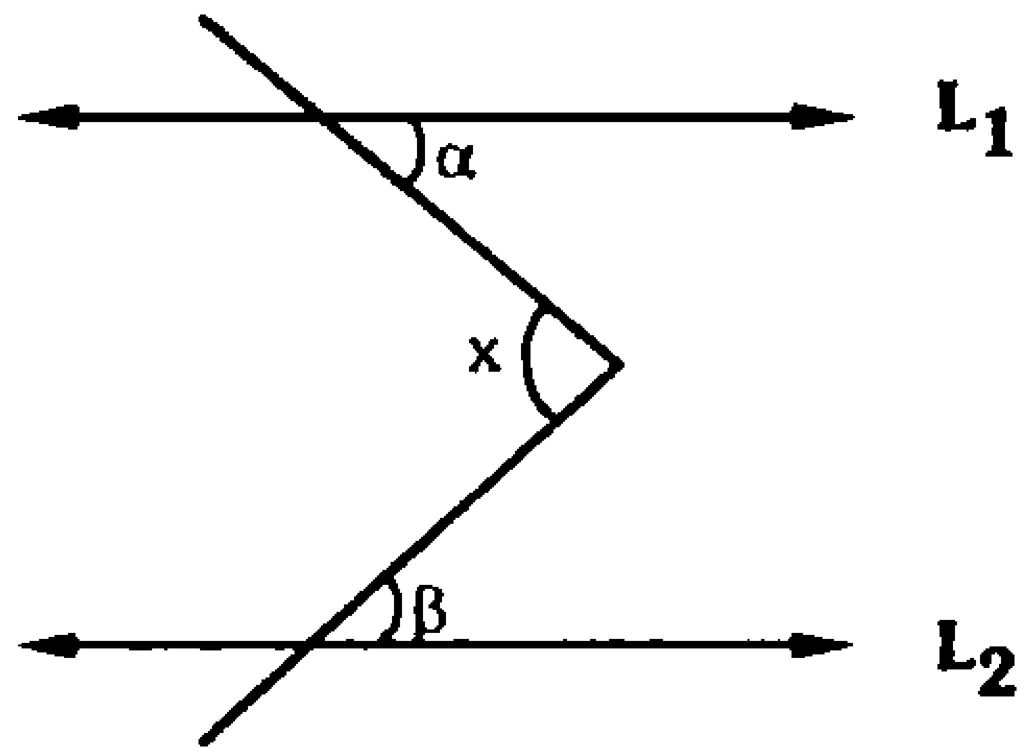
C) ÁNGULOS CORRESPONDIENTES :



* Sea $L_1 // L_2$, entonces m y n son las medidas de dos ángulos correspondientes.
* Se cumple que : $m = n$

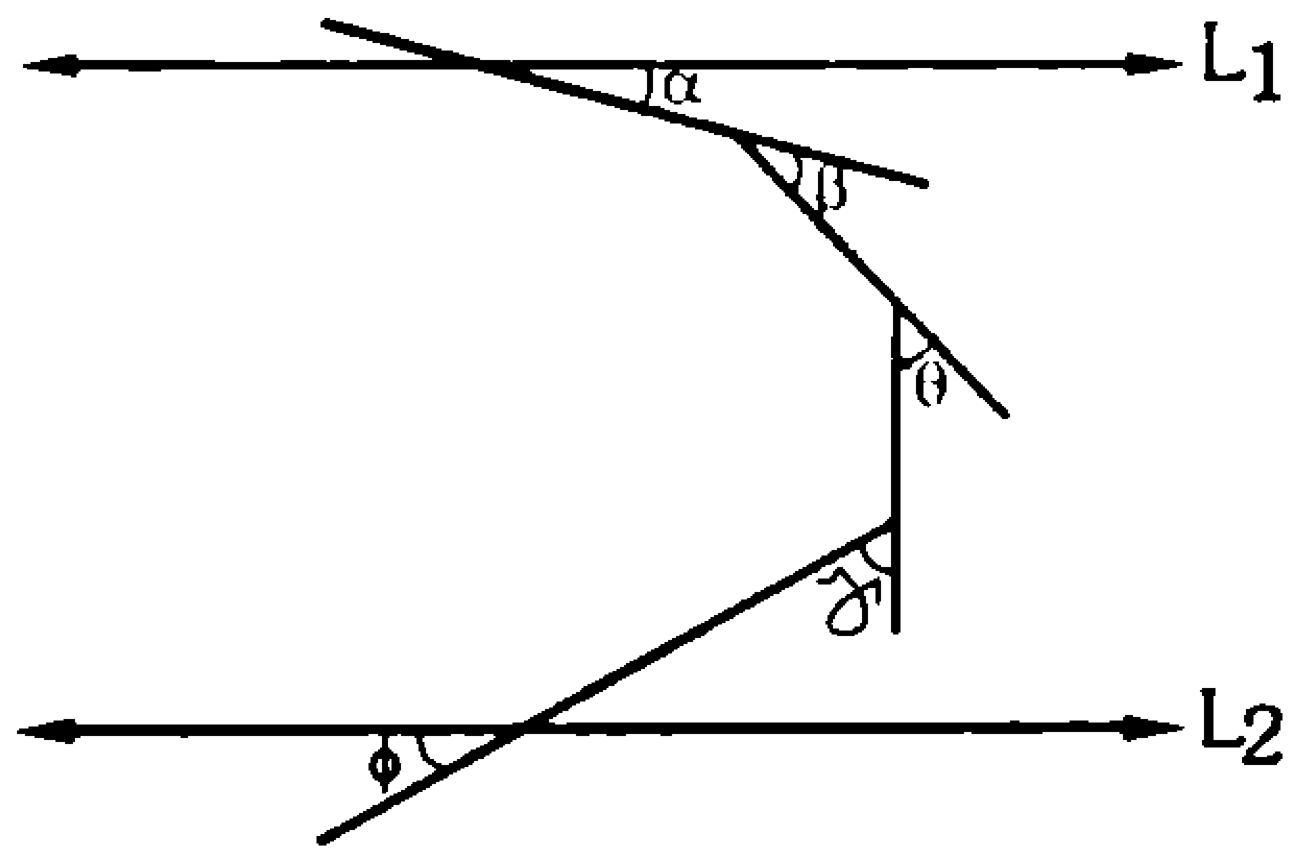
TEOREMAS

1)



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ $x = \alpha + \beta$

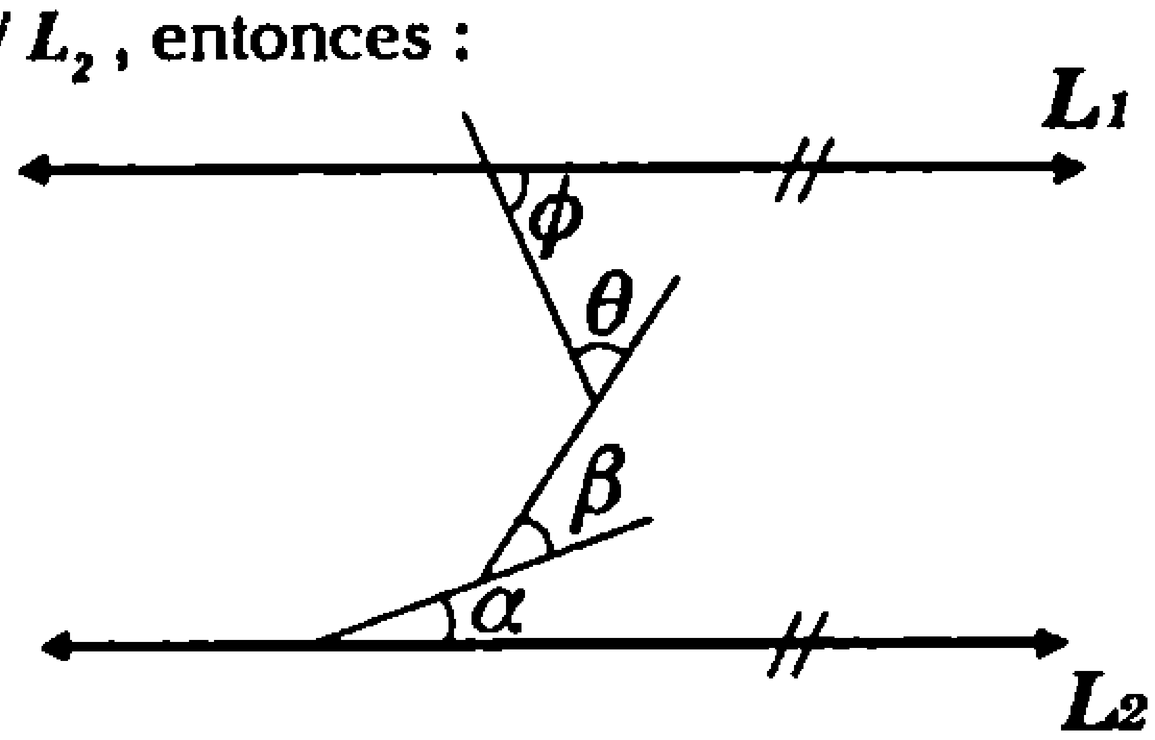
2)



Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ $\alpha+\beta+\theta+\gamma+\phi = 180°$

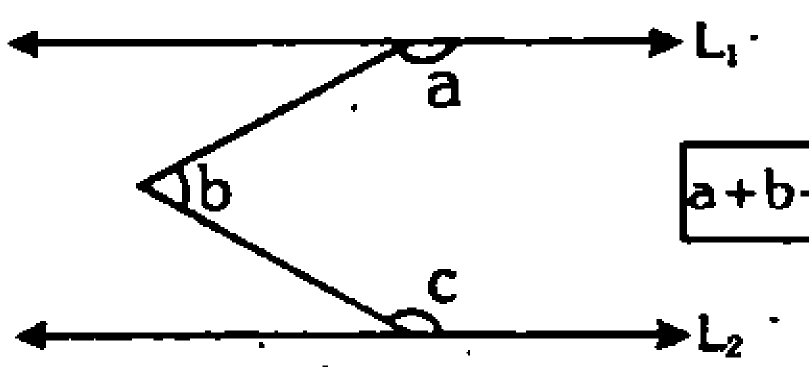
PROPIEDAD :

Si: $L_1 // L_2$, entonces :



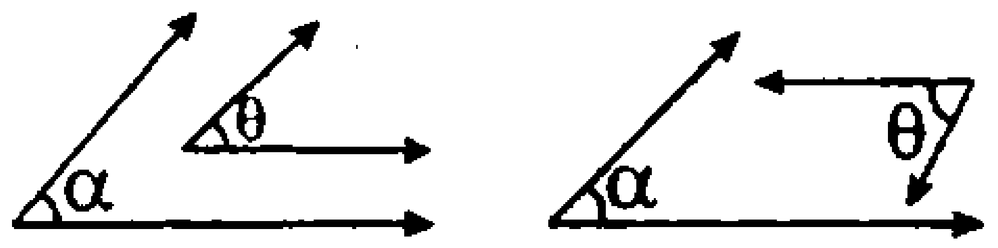
$\alpha + \beta + \theta + \phi = 180°$

3) Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



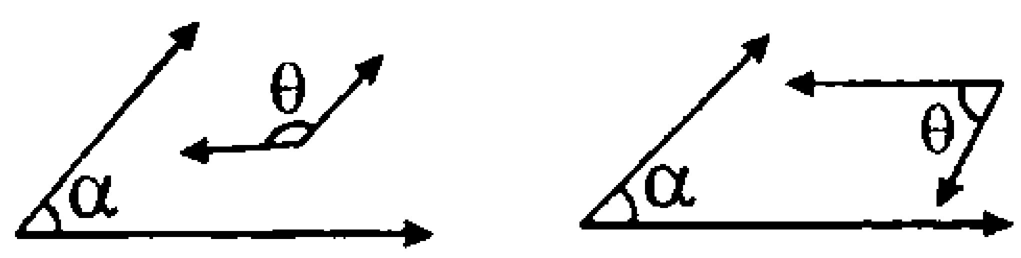
$a+b+c=360°$

4) Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son congruentes. Como se observa en la figura.



$\alpha=\theta$

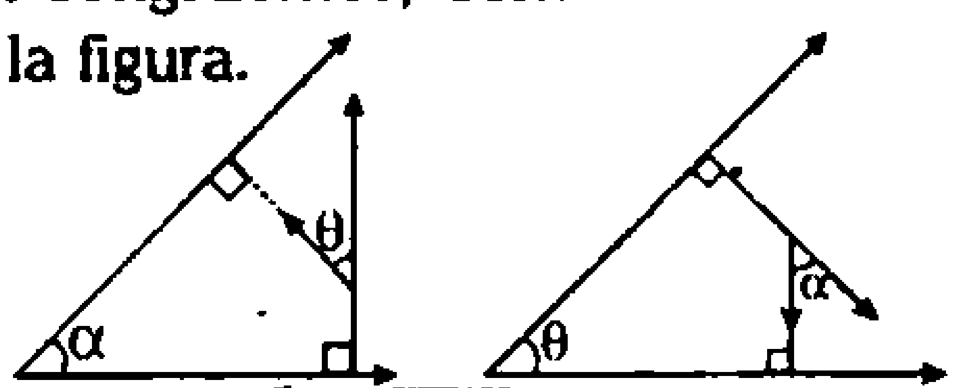
5) Dos ángulos que tienen sus lados paralelos, son suplementarios como se observa en la figura.



$\alpha+\theta=180°$

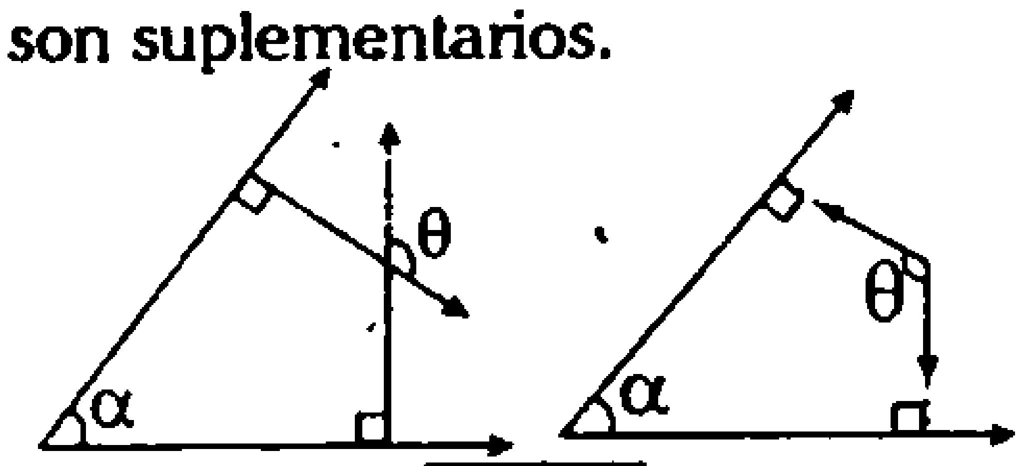
ÁNGULO DE LADOS PERPENDICULARES

a) Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son congruentes, como se observa en la figura.



$\alpha=\theta$

b) Los ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.

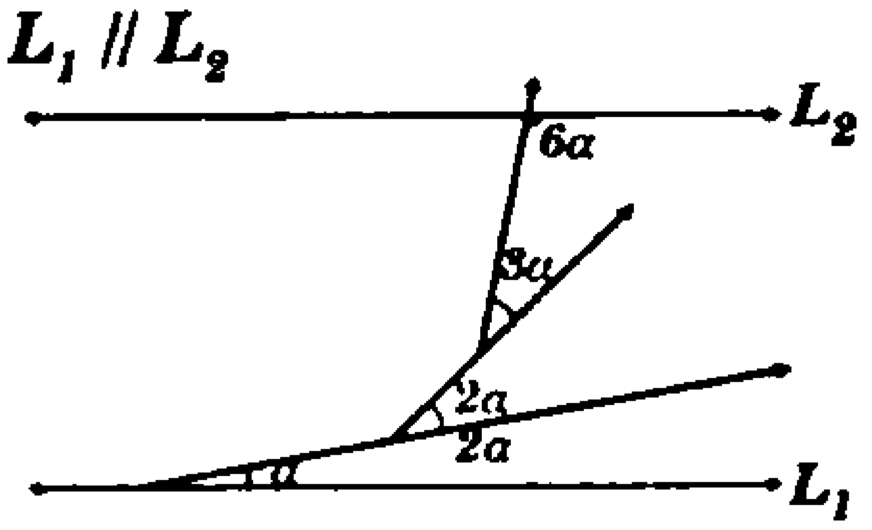


$\alpha+\theta=180°$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Si: $L_1 \parallel L_2$

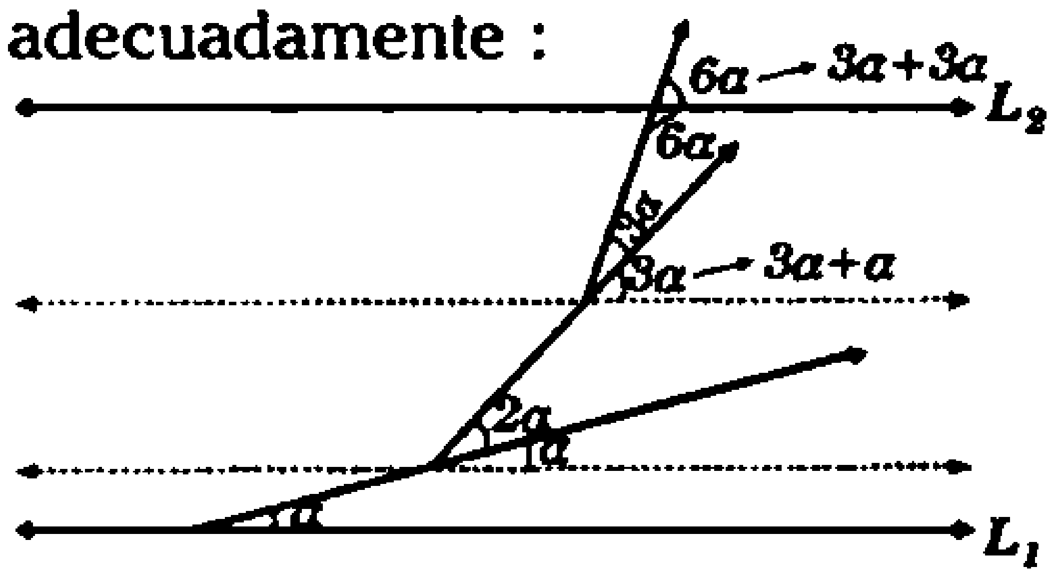


Calcular: "α"

A) 15° B) 10° C) 20° D) 9° E) 18°

RESOLUCIÓN:

* Trazando paralelas a L_2 y L_1, para luego trasladar los ángulos adecuadamente :

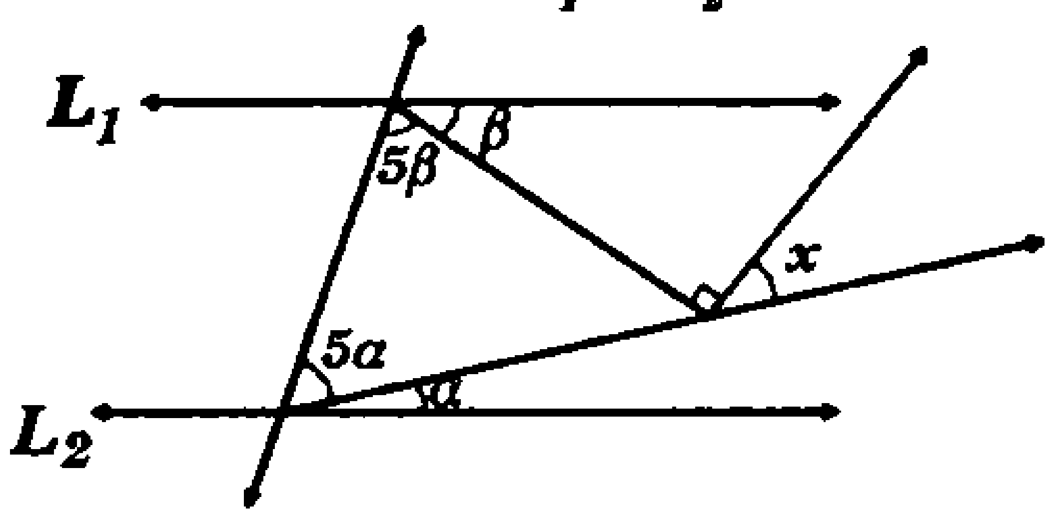


* De la figura , se puede apreciar que : $6\alpha + 6\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 15°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Calcular "x", si $L_1 \parallel L_2$



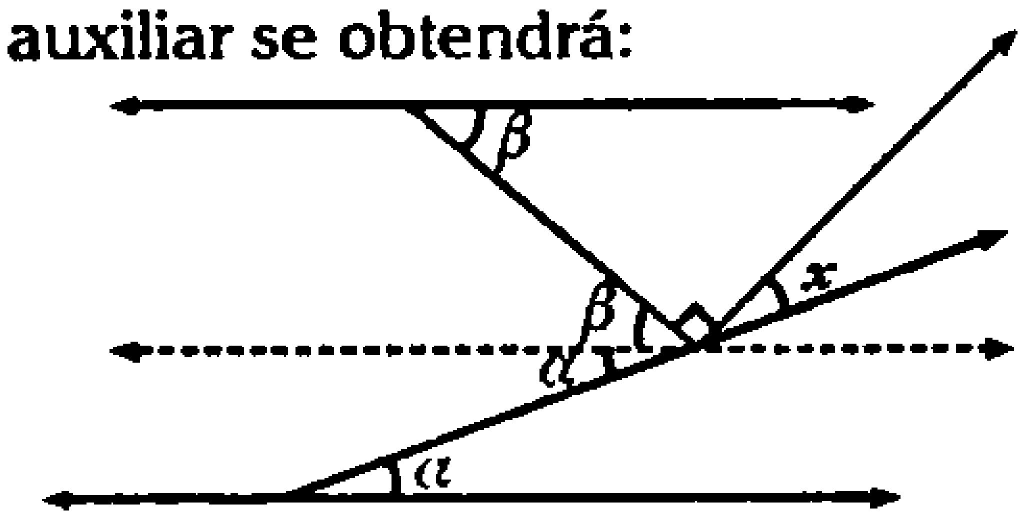
A) 30° B) 45° C) 50° D) 60° E) 75°

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico , por ángulos conjugados internos:

$\alpha + 5\alpha + 5\beta + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 30°$

* Luego trazando una paralela auxiliar se obtendrá:



* Del ángulo llano:

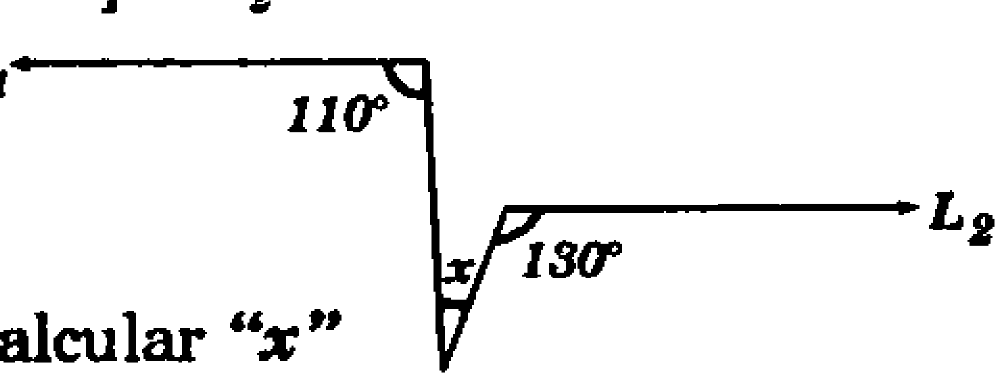
$\underbrace{\alpha + \beta} + 90° + x = 180°$

$30° + 90° + x = 180° \Rightarrow x = 60°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Si: $L_1 \parallel L_2$

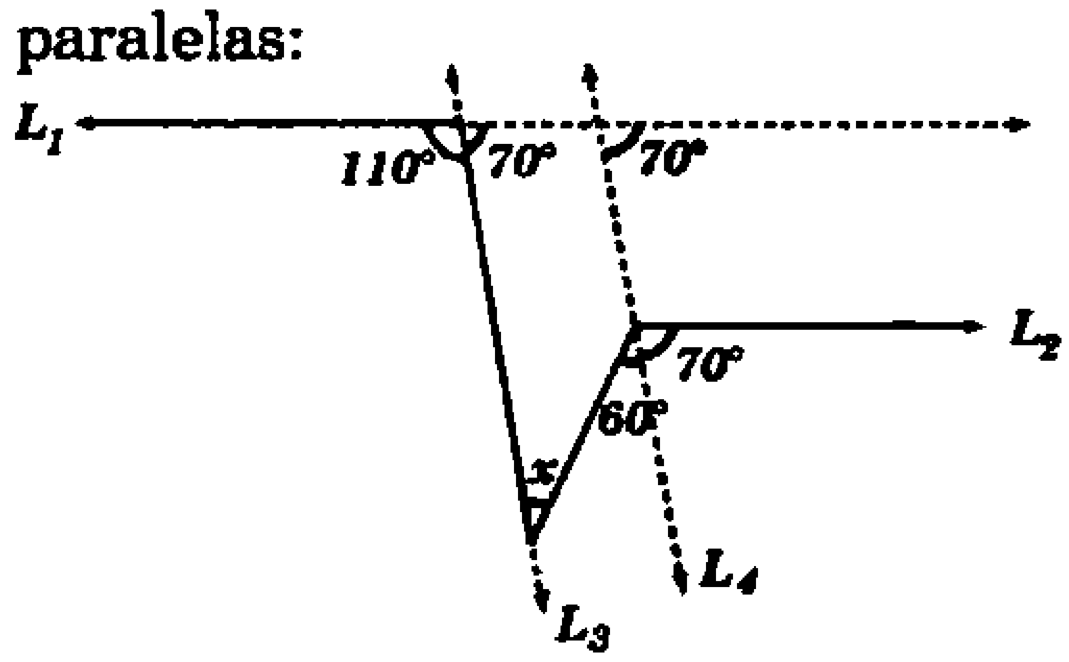


Calcular "x"

A)70° B)80° C)60° D)50° E)30°

RESOLUCIÓN :

* Trazando adecuadamente rectas paralelas:

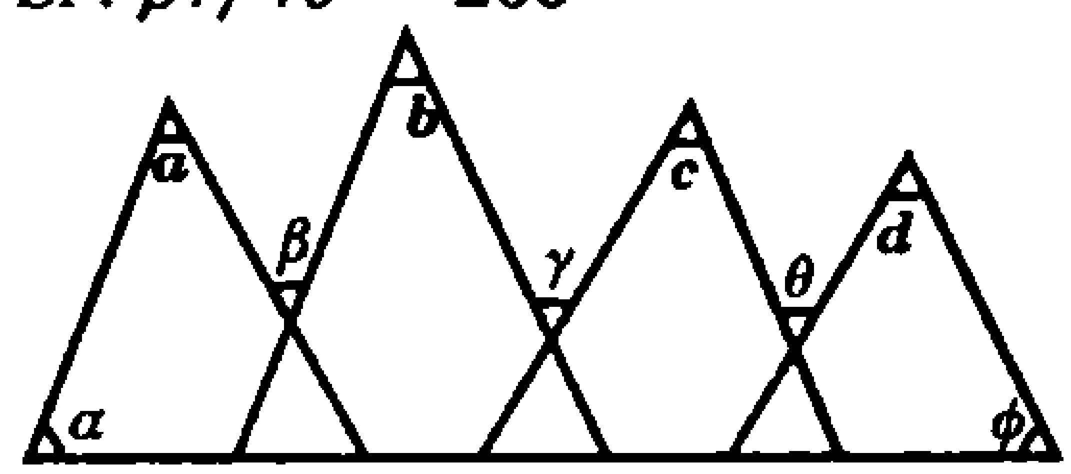


* Al trazar : $L_3 \parallel L_4$; se aprecia que $x = 60°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

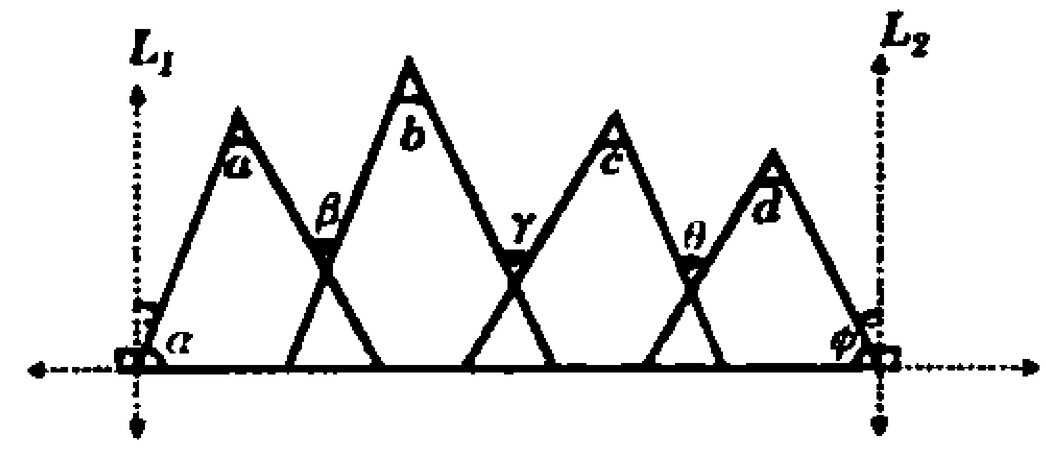
Si : $\beta+\gamma+\theta = 200°$



Calcular : $a+b+c+d+\alpha+\phi$

A) 360° B) 300° C) 400°
D) 380° E) 420°

RESOLUCIÓN:



* Al trazar las rectas paralelas L_1 y L_2, y aplicando la penúltima propiedad dada (en forma general), se obtendrá :

$a+b+c+d=90°-\alpha+\beta+\gamma+\theta+90°-\phi$

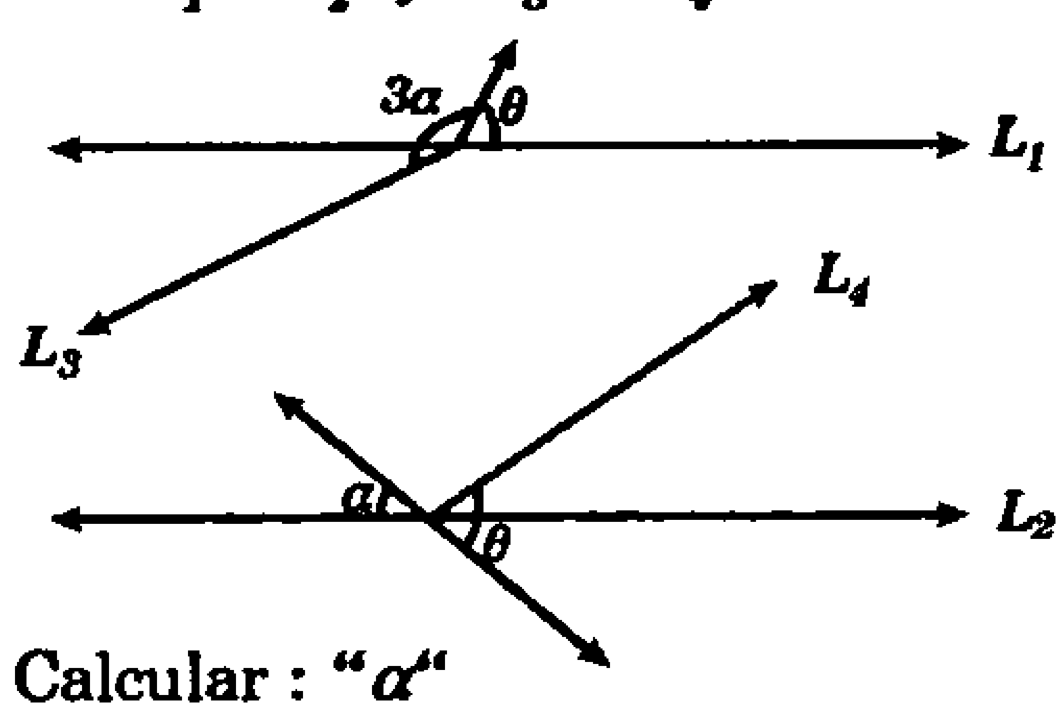
$a+b+c+d+\alpha+\phi=180°+\underbrace{\beta+\gamma+\theta}_{200°}$

$a+b+c+d+\alpha+\phi=380°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

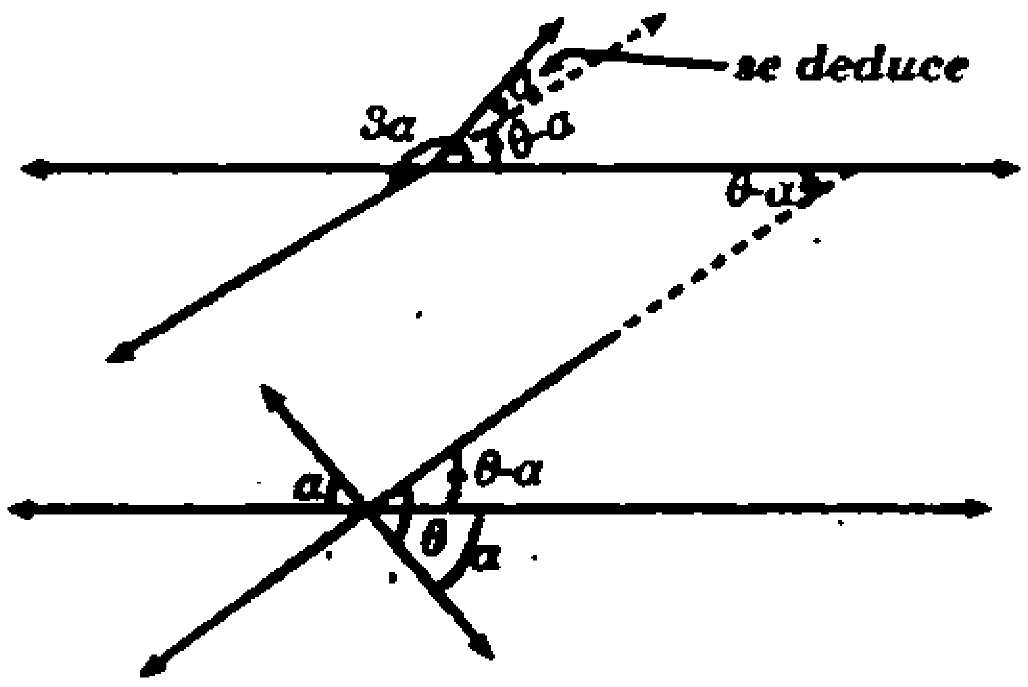
Si: $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$



Calcular : "α"

A)20° B)30° C)40°
D)45° E)60°

RESOLUCIÓN :



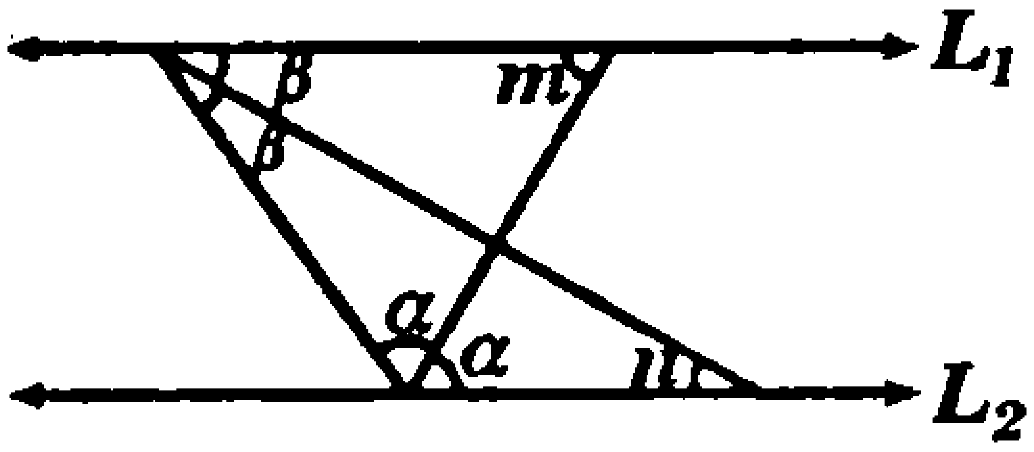
* De la parte superior, se puede apreciar que:

$3\alpha + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

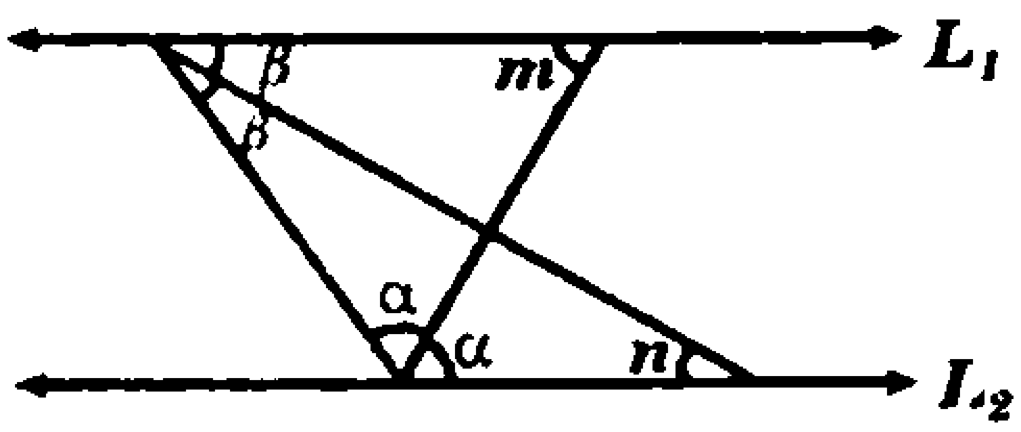
Del gráfico siguiente L_1 // L_2, Calcule el valor de $m+n$.



A) 60° B) 45° C) 90° D) 80° E) 100°

RESOLUCIÓN :

* Piden: $m+n$



* Del gráfico:
* Por ángulos conjugados internos.

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\Rightarrow a + b = 90°$

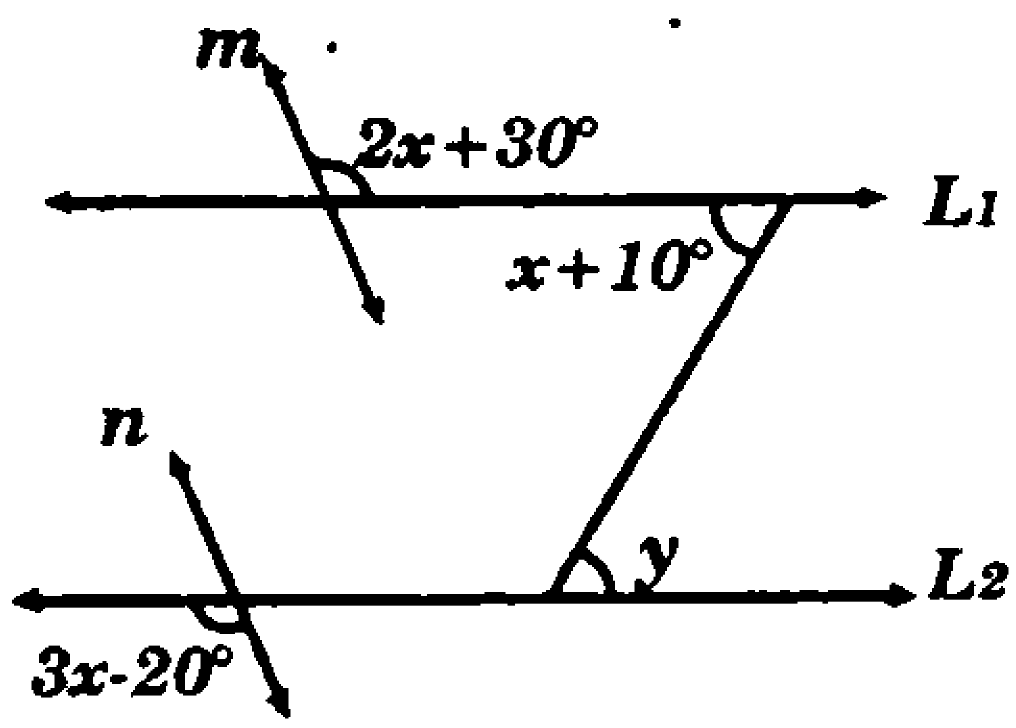
* También por ángulos conjugados internos: $\alpha = m$ y $\beta = n$

$\Rightarrow m + n = 90°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

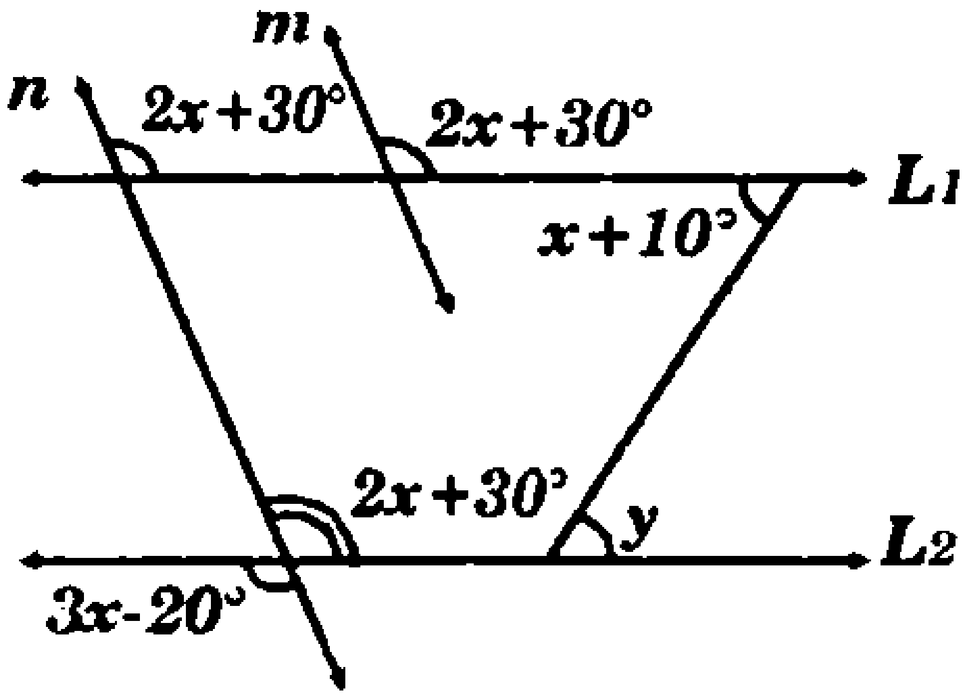
Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{n}$. Calcule el valor de y



A) 20° B) 30° C) 40° D) 60° E) 55°

RESOLUCIÓN:

* Piden y
* Prolongamos $\overrightarrow{n}$



* Utilizando los ángulos formados por rectas paralelas y una secante, se obtiene :

$3x - 20° = 2x + 30° \Rightarrow x = 50°$

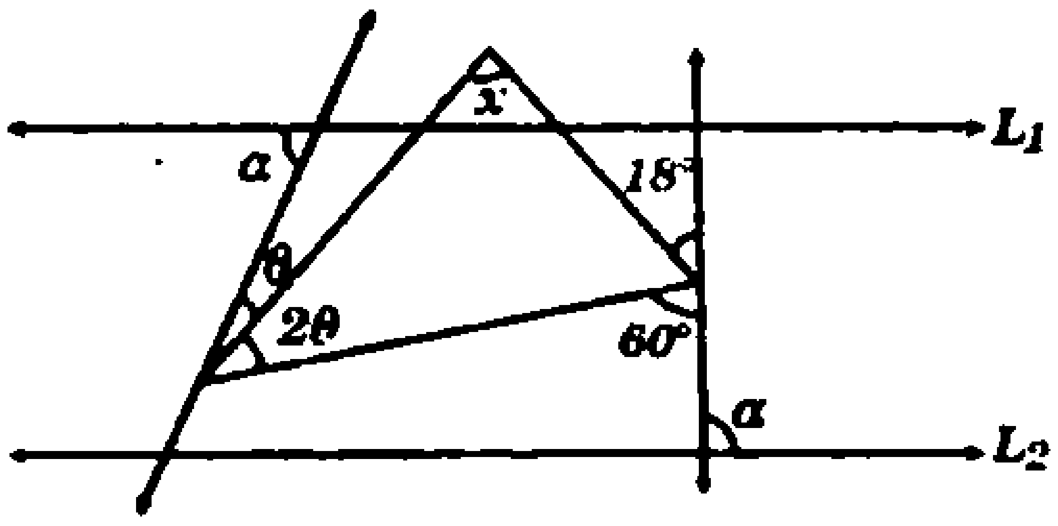
* También : $y = x + 10°$

$\Rightarrow y = 60°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 8 :

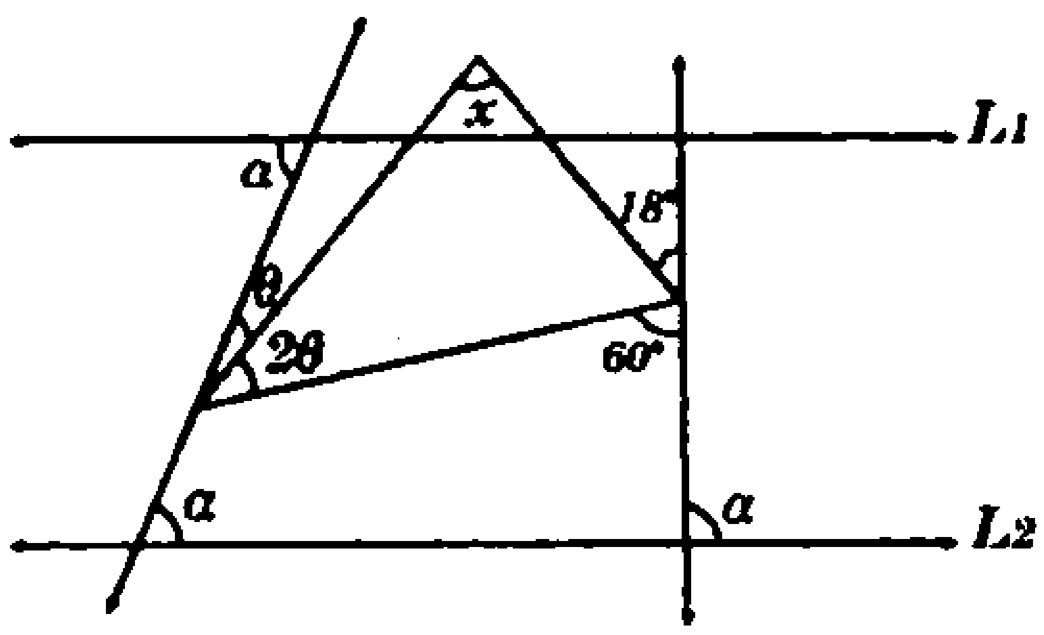
Si : L_1 // L_2



Calcular : "x"

A) 38° B) 32° C) 61° D) 42° E) 26°

RESOLUCIÓN:



* Como la recta L_2 forma con las rectas L_3 y L_4, dos ángulos correspondientes , entonces se deduce que: $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$

* Luego :

$3\theta = 60° \rightarrow \theta = 20°$

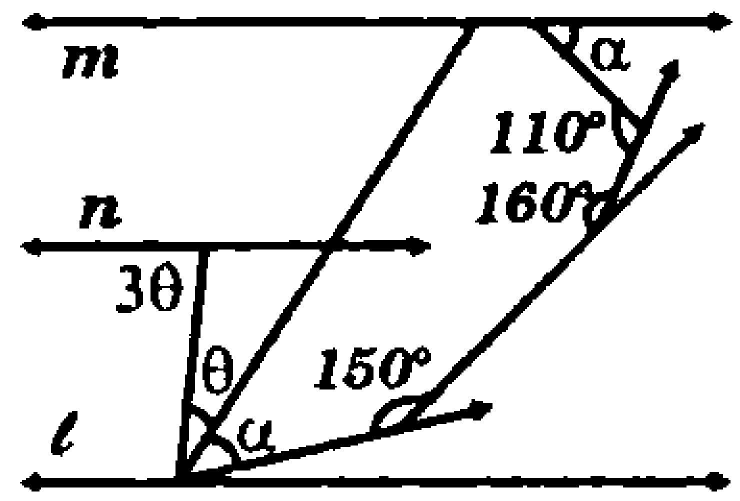
* Piden : $\underbrace{x = \theta + 18}_{Propiedad} = 38°$

RPTA : "A"

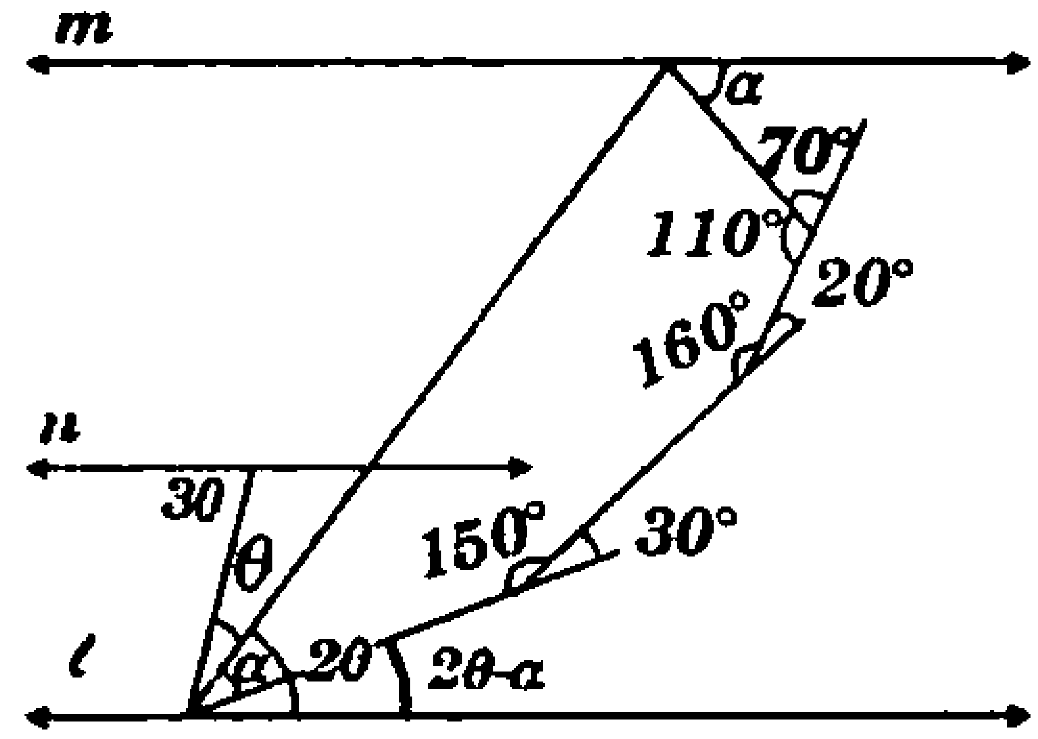
PROBLEMA 9 :

En la figura mostrada $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{n} // \overrightarrow{\ell}$ Calcular el valor de θ.

A) 35°
B) 30°
C) 40°
D) 25°
E) 20°



RESOLUCIÓN :



* Como $\overrightarrow{m} // \overrightarrow{n} // \overrightarrow{\ell}$
* Propiedad ($\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{\ell}$)

$(2\theta - \alpha) + 30° + 20° + 70° + \alpha = 180°$

$\Rightarrow \theta = 30°$

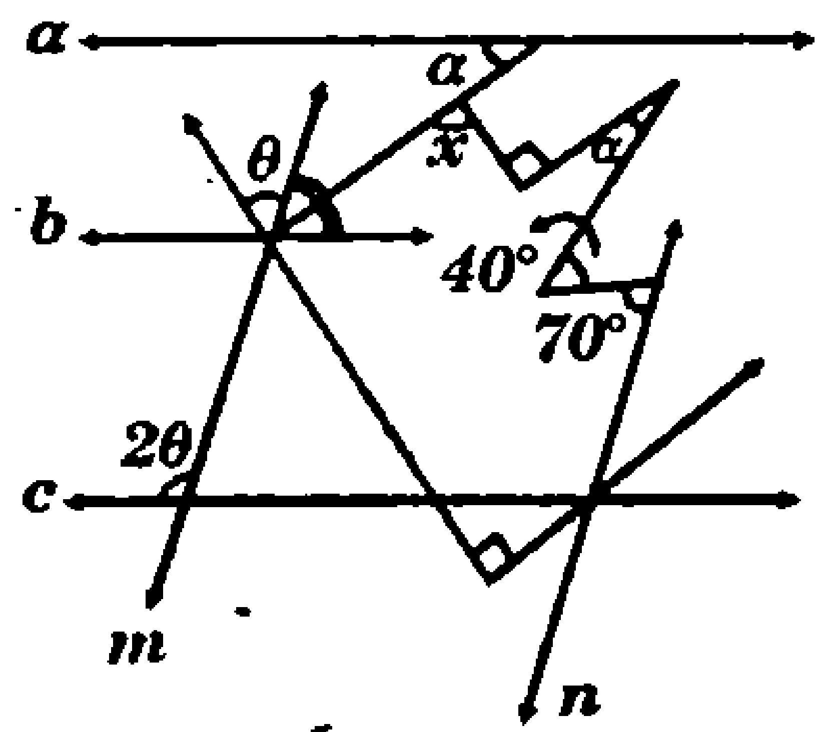
RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

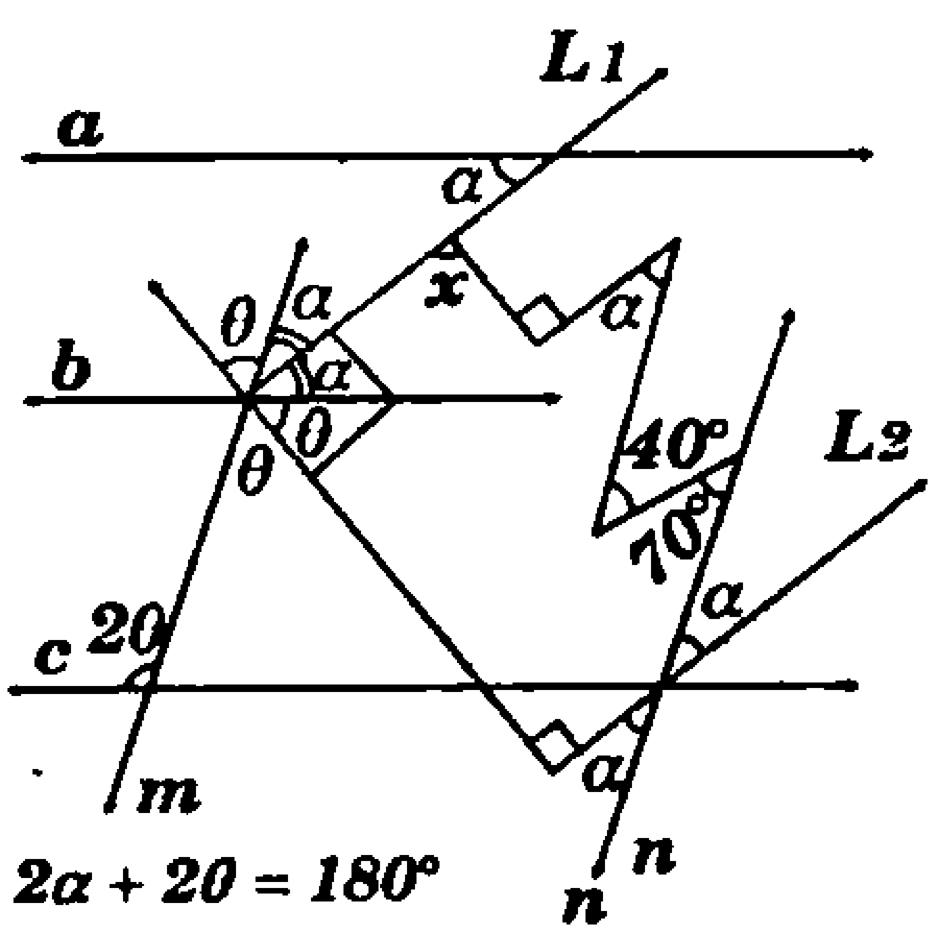
En la figura mostrada $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$ y $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$.

Calcular el valor de x.

A) 60°
B) 30°
C) 50°
D) 36°
E) 42°



RESOLUCIÓN :



* $2\alpha + 2\theta = 180°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 90°$

L_1 // L_2: Propiedad

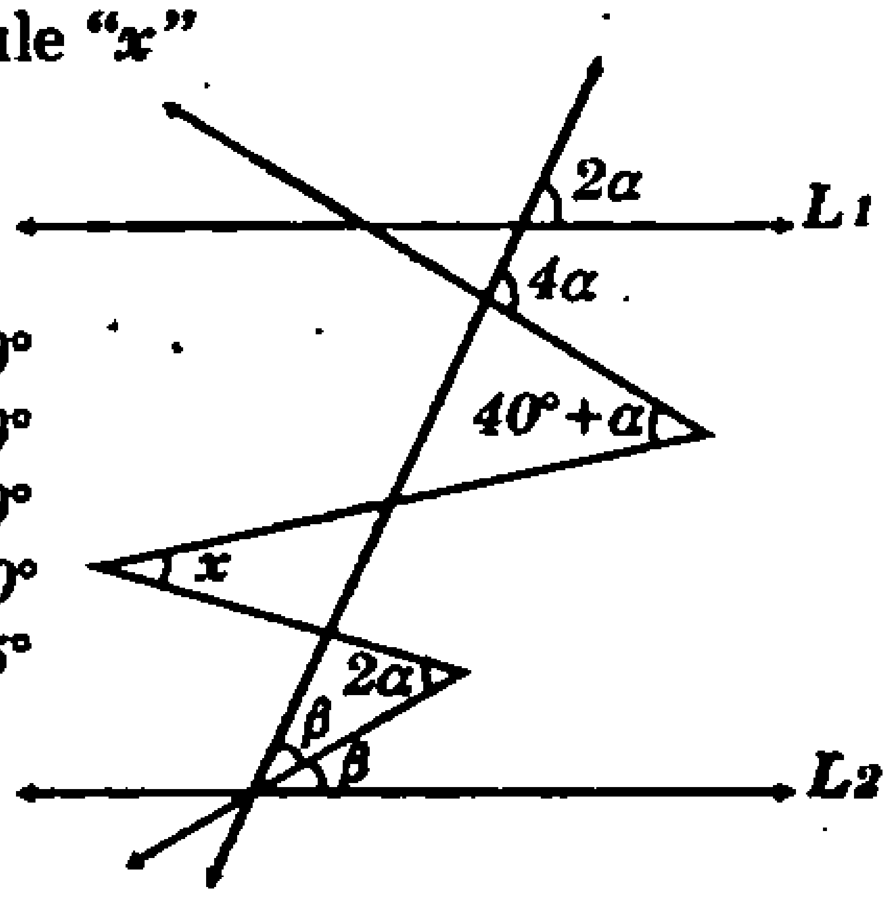
$\alpha + 40° + 90° = 70° + \alpha + x$

$\Rightarrow x = 60°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

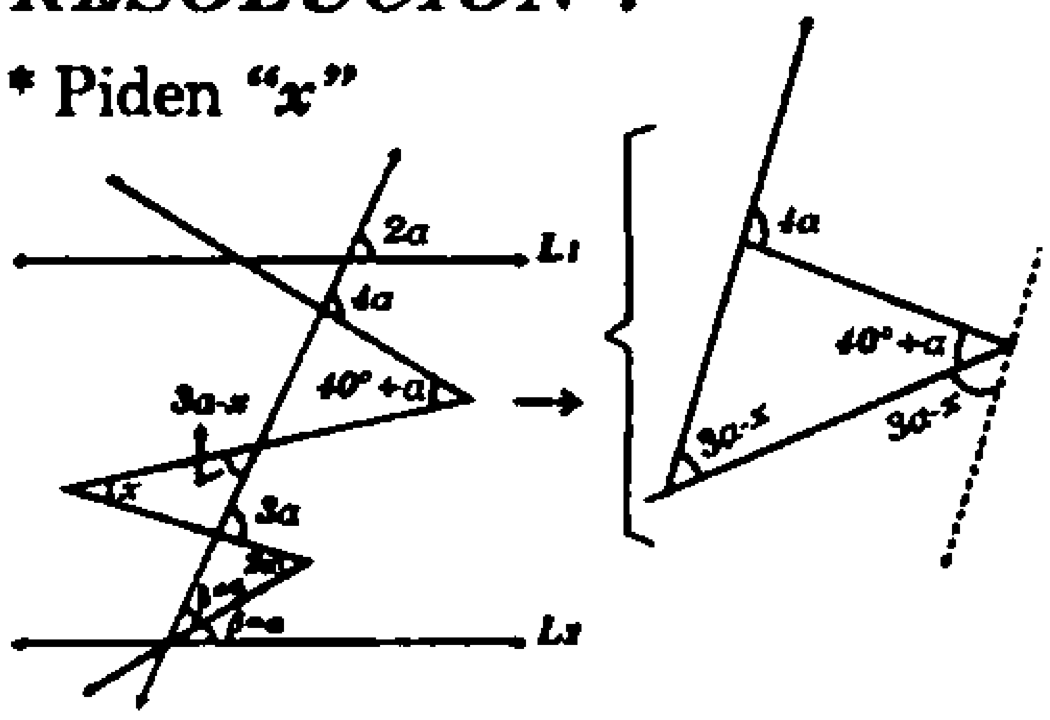
Según el gráfico $L_1 // L_2$. Calcule "x"



A) 20°
B) 30°
C) 50°
D) 40°
E) 35°

RESOLUCIÓN :

* Piden "x"



*Por ángulos correspondientes: $a=b$

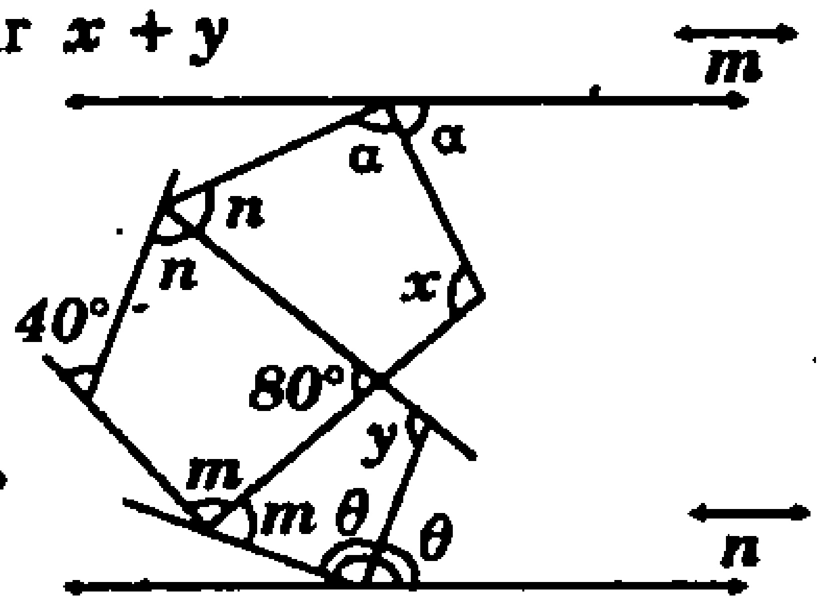
$40°+\alpha+3\alpha-x=4\alpha$

* Se deduce que: $x = 40°$

RPTA : "D"

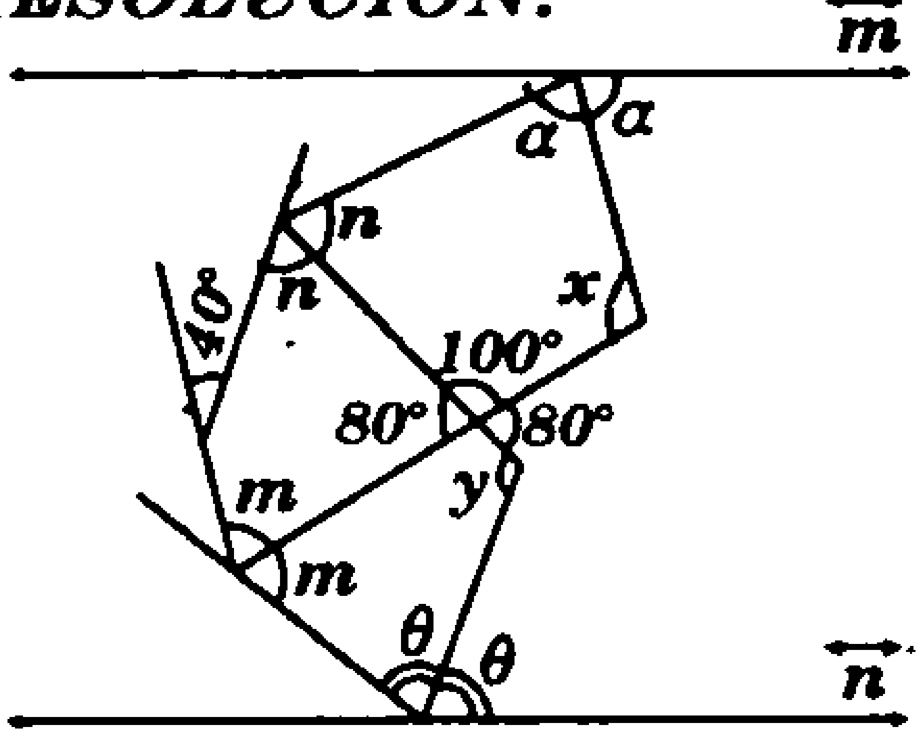
PROBLEMA 12 :

En la figura mostrada $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$. Calcular $x + y$



A) 140°
B) 200°
C) 190°
D) 270°
E) 230°

RESOLUCIÓN:



* Propiedad:

$x + y = \alpha + 80° + \theta$

$x + y = 80° + (\alpha+\theta)$ ....(I)

* $m + n = 40° + 100°$

$m + n = 140°$......................(II)

* $\theta + n = (180° - 2\alpha) + y$........(III)

$\alpha + m = (180° - 2\theta) + x$.........(IV)

* (III) + (IV):

$\alpha+\theta+m+n=360°-2(\alpha+\theta)+x+y$

$\Rightarrow 3(\alpha+\theta+80°)-3\times 80°+140°=360°+x+y$...(V)

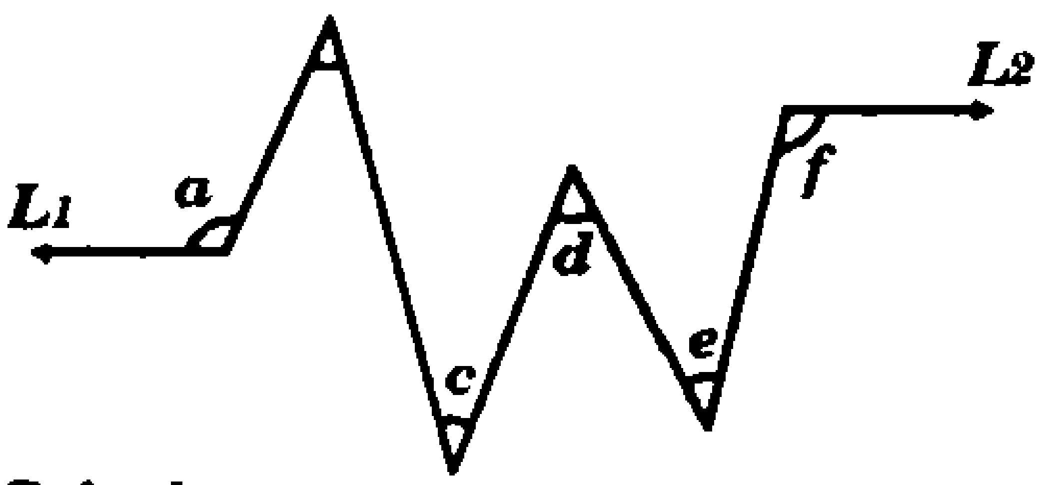
* (I) en (V):

$3(x+y)-240°+140°=360+x+y$

$\Rightarrow x+y=230°$ RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

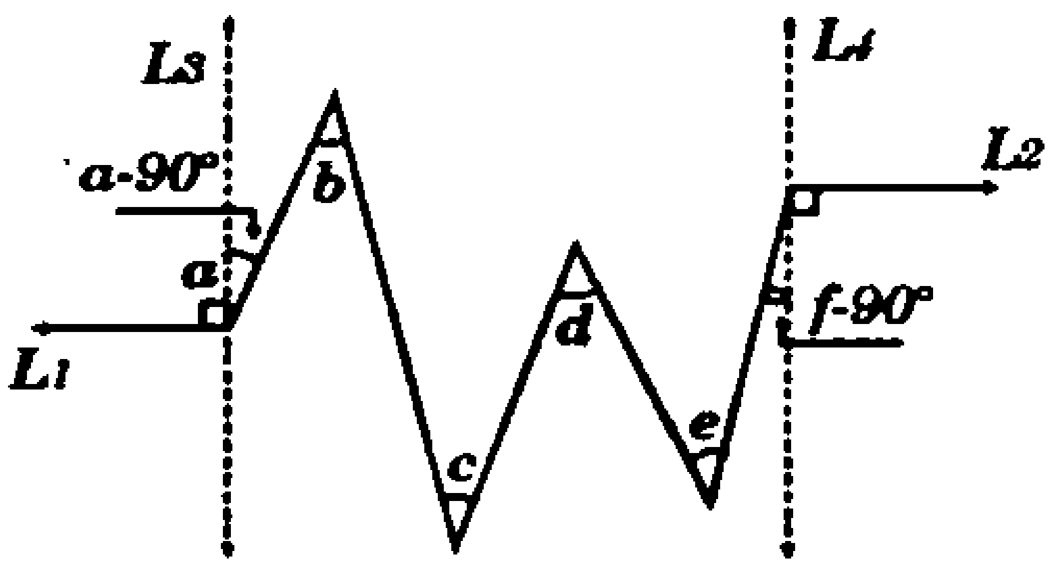
Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, y $b + d + f = 270°$



Calcular : $a + c + e$

A) 330° B) 160° C) 210°
D) 270° E) 95°

RESOLUCIÓN :



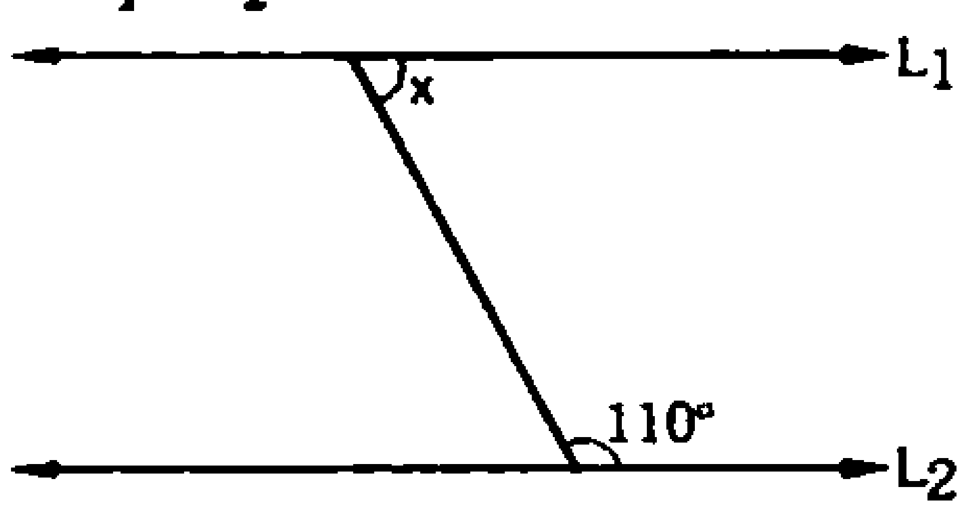
* Trazando $\overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ perpendiculares a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ y aplicando propiedad se obtendrá:

$a - 90° + c + e = \underbrace{b + d + f}_{270°} - 90°$

$\Rightarrow a + c + e = 270°$ RPTA : "D"

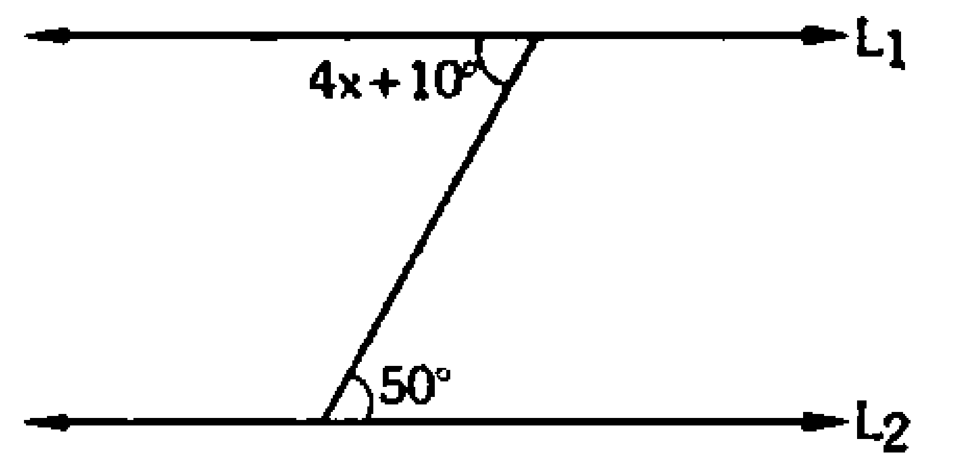
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura , calcular x, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



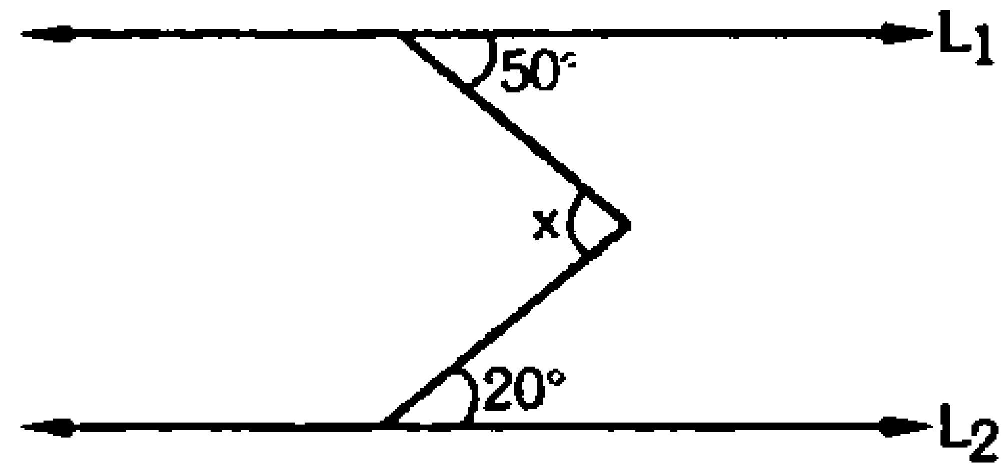
RPTA: ....

02 En la figura, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular x



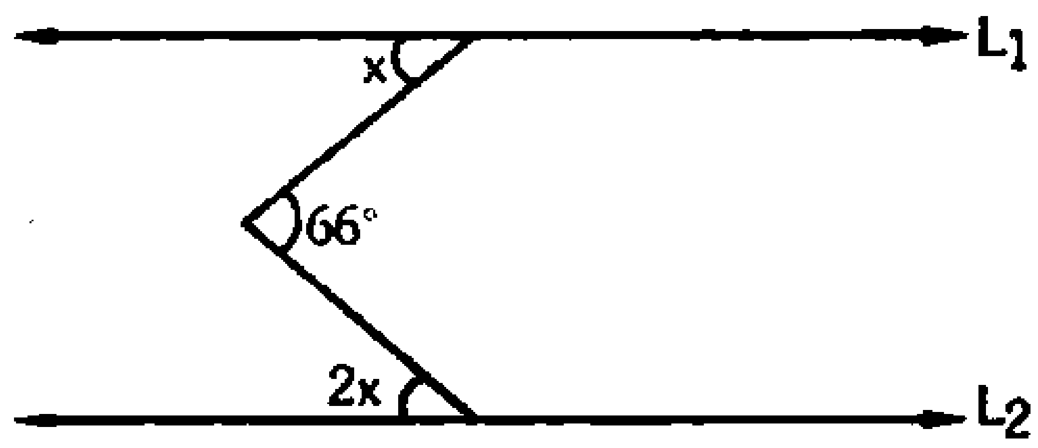
RPTA: ....

03 En la figura , si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcular x



RPTA: ....

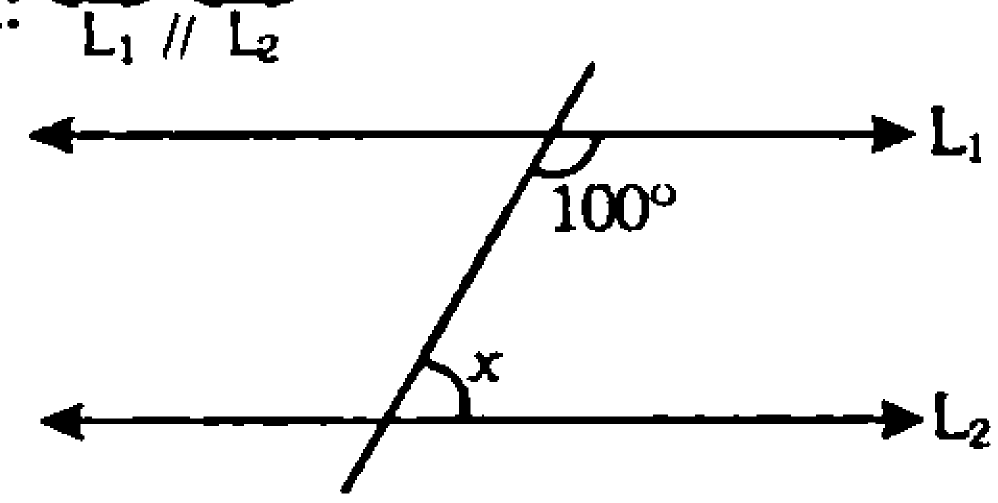
04 En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular x



A)24° B)30° C)22° D)25° E)26°

05 En la figura calcular x.

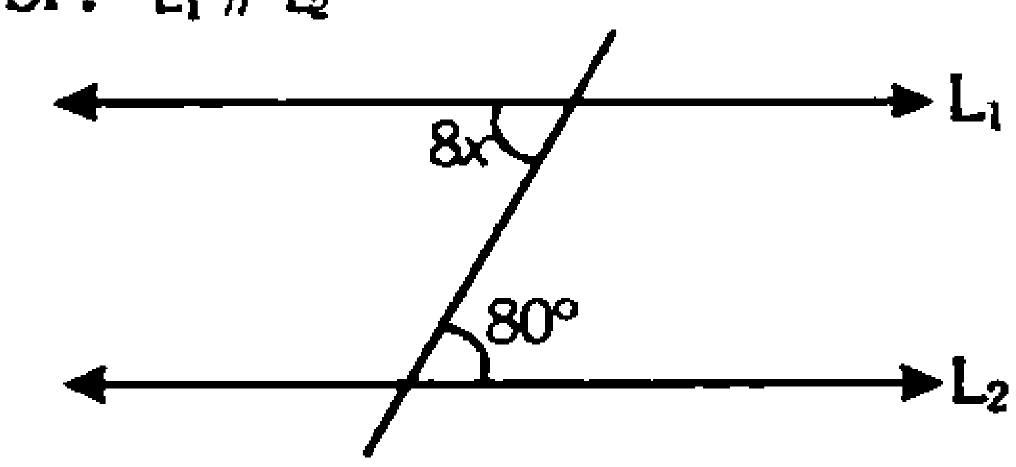
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



RPTA: ....

06 En la figura, calcular x.

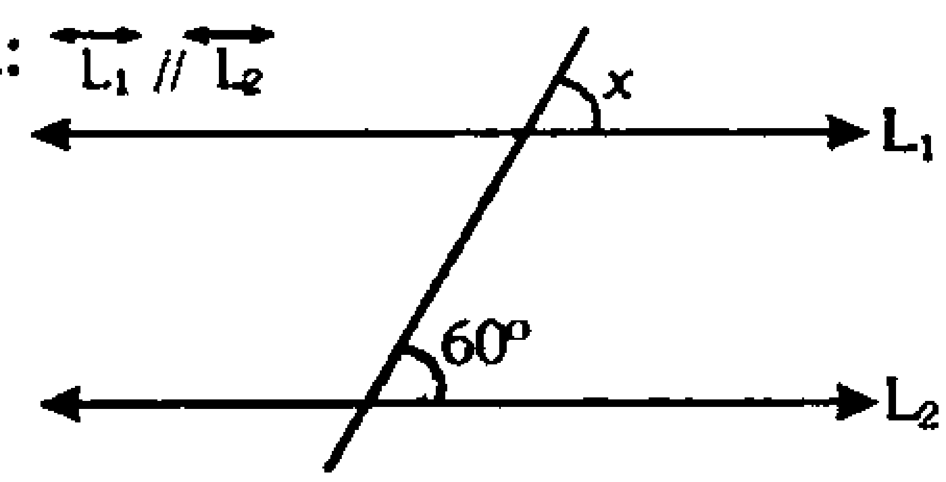
Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



RPTA: ....

07 En la figura, calcular x.

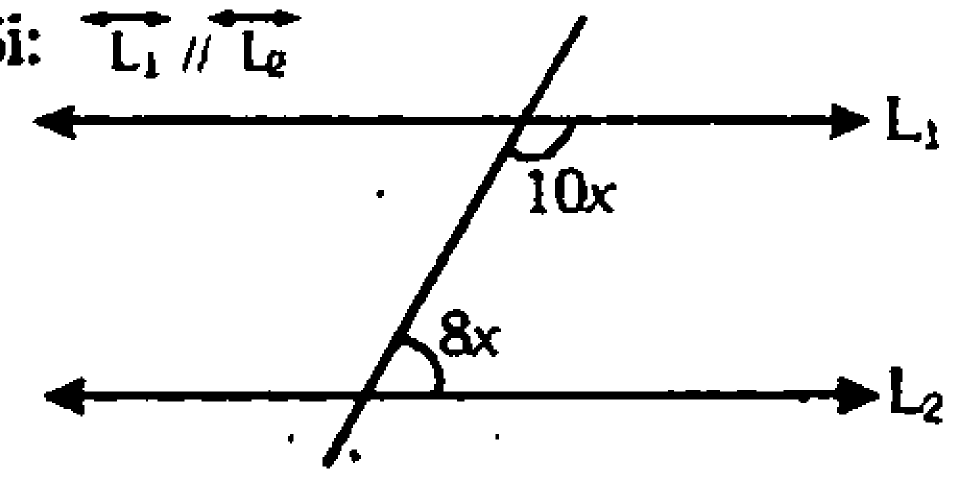
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



RPTA: ....

08 En la figura, calcular: x

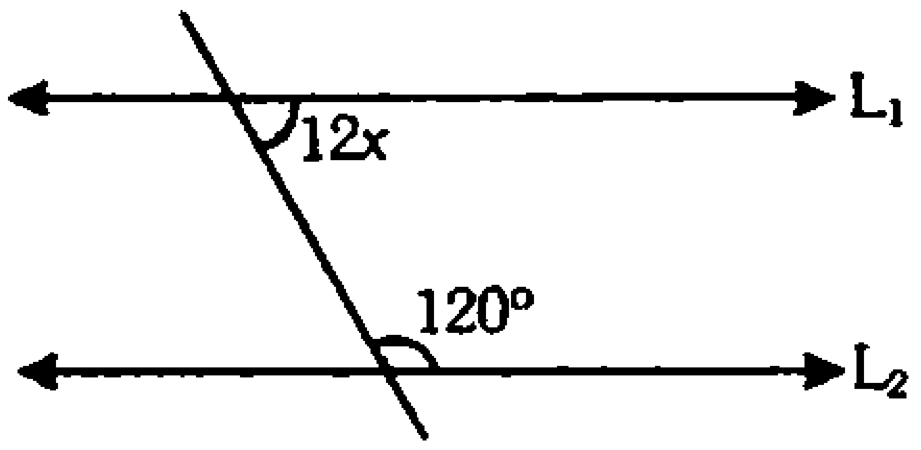
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



RPTA: ....

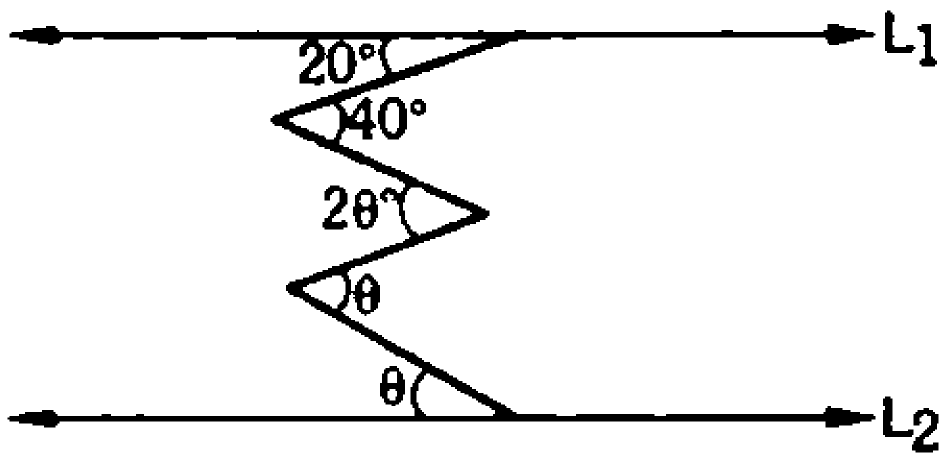
09 En la figura, calcular: x.

Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



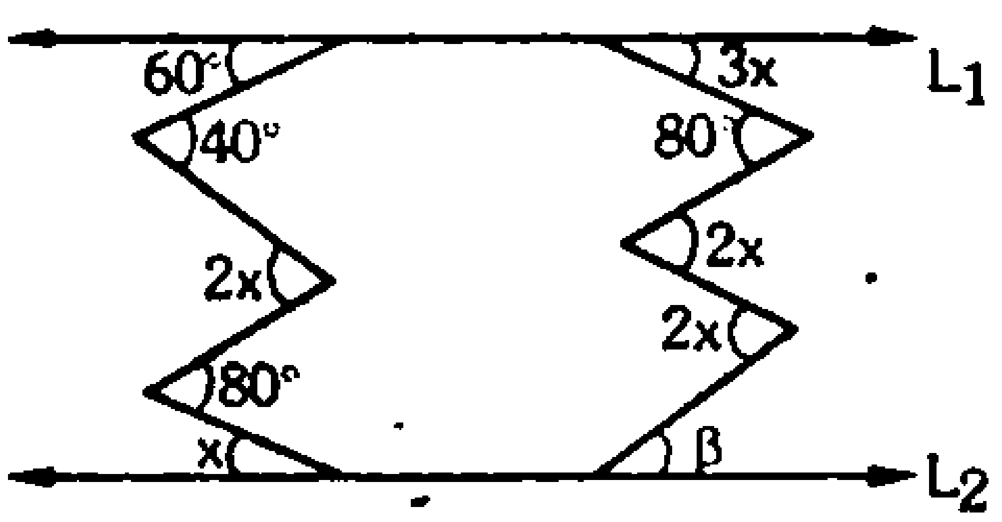
RPTA: ....

10 Del gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular θ.



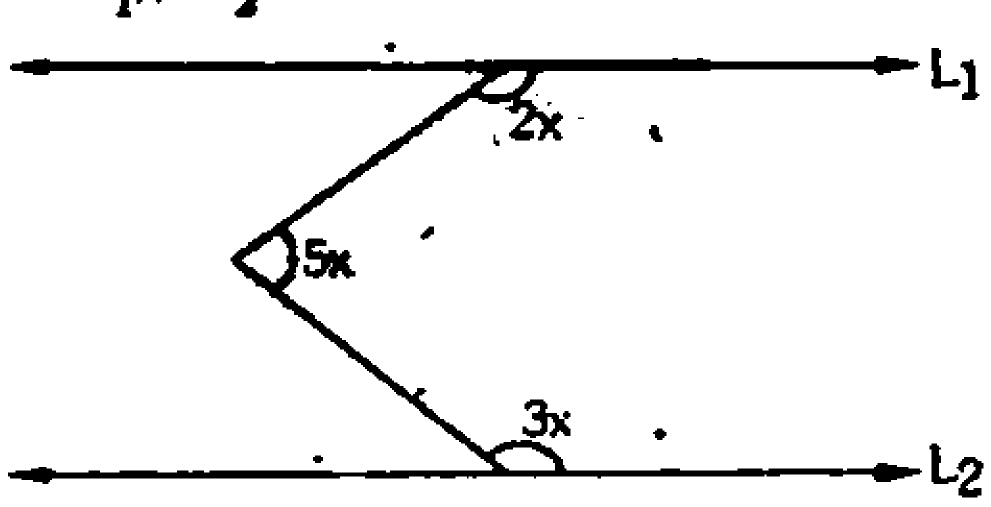
A)20° B)10° C)18° D)15° E)16°

11 Del gráfico $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular β.



A)40° B)30° C)20° D)10° E)25°

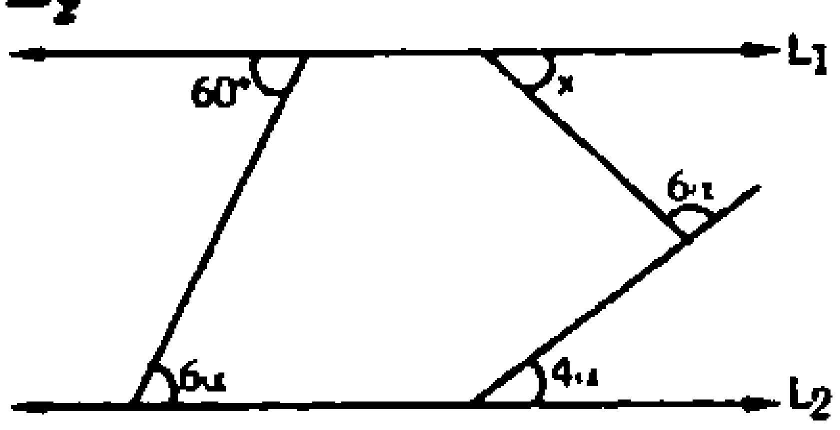
12 En la figura, calcular x, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



A)40° B)50° C)30° D)36° E)48°

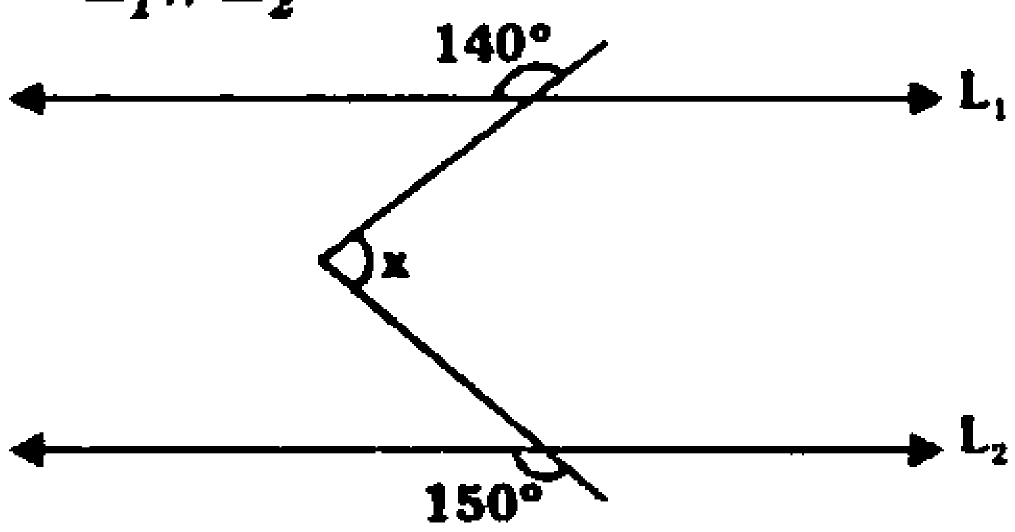
13 En la figura, calcular x.

Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



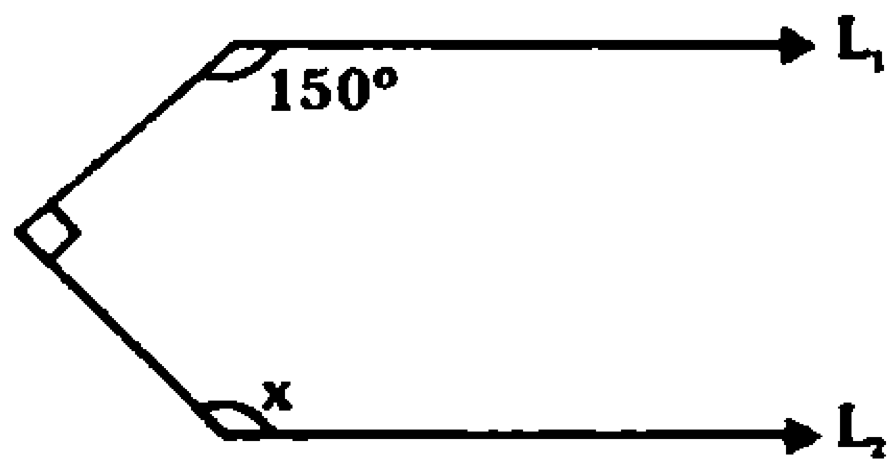
A)100° B)90° C)70° D)60° E)80°

14 Calcular el valor de x, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



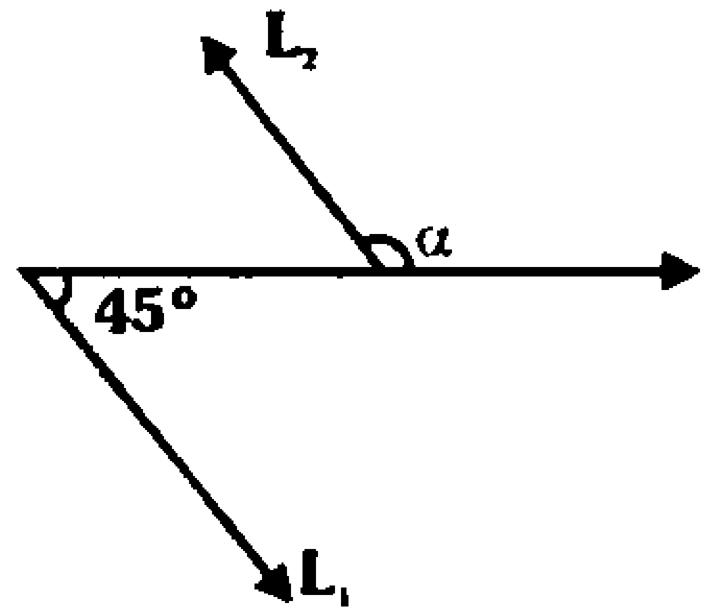
A)60° B)70° C)80° D)90° E)100°

15 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular x.



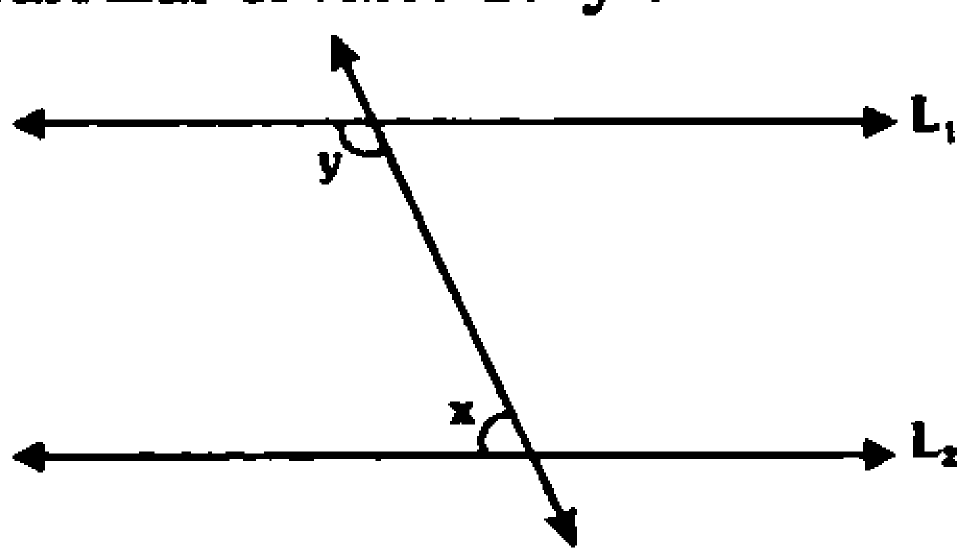
A)100° B)96° C)120° D)124° E)119°

16 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular x.



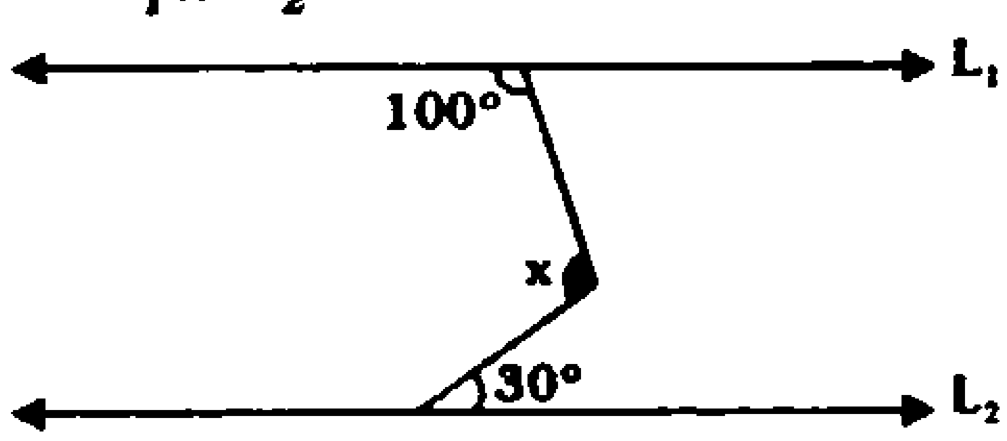
A)125° B)130° C)145° D)135° E)115°

17 En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y el complemento de "x" mide $18°$. Calcular el valor de "y".



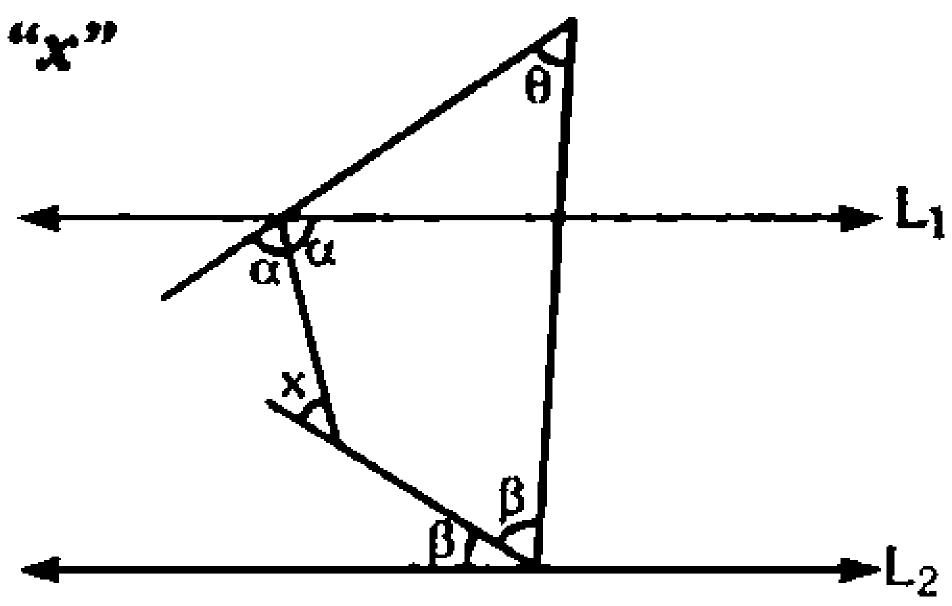
A)36° B)72° C)98° D)108° E)112°

18 Calcular el valor de x, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



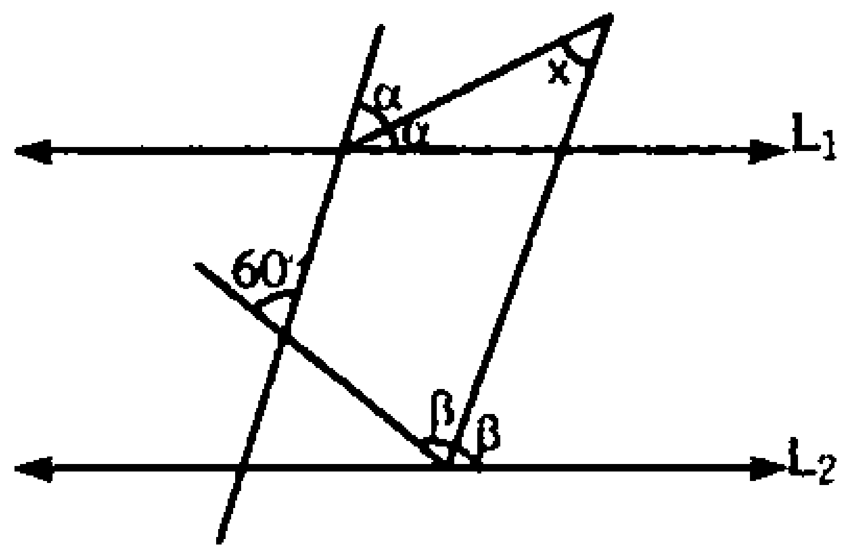
A)130° B)120° C)105° D)110° E)140°

19 Sean $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ si "θ" es agudo, hallar el máximo valor entero de "x"



A)30° B)44° C)45° D)46° E)60°

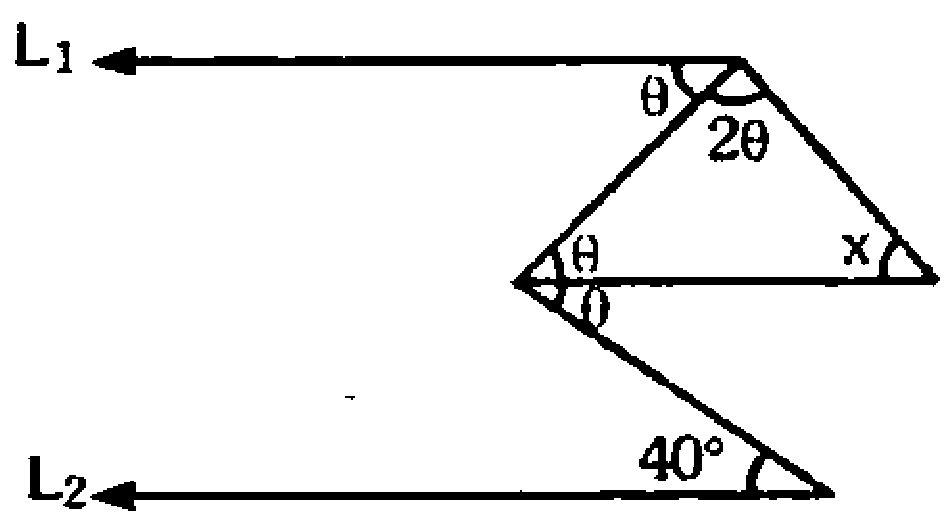
20 Calcular "x". $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



A)10° B)20° C)30° D)40° E)50°

21 Calcular valor de "x".

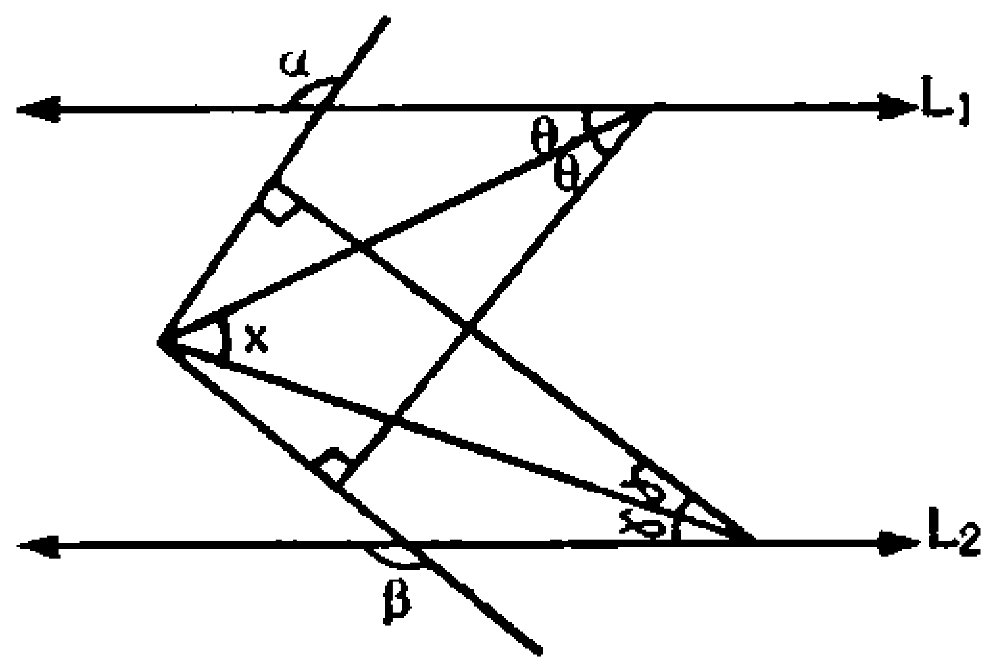
Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



A)60° B)61° C)69° D)59° E)44°

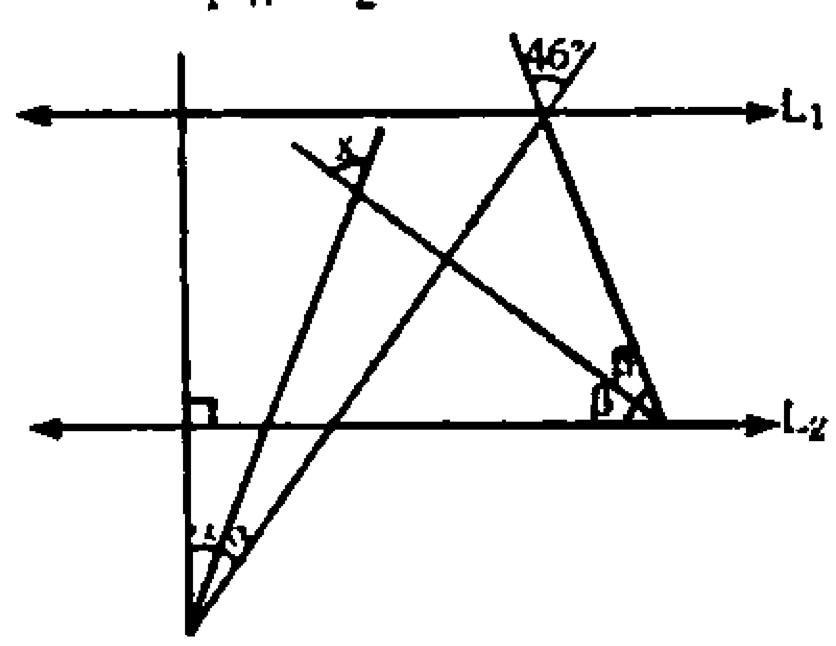
22 Calcular "x" si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$

Además $\alpha + \beta = 260°$



A)30° B)45° C)60° D)75° E)40°

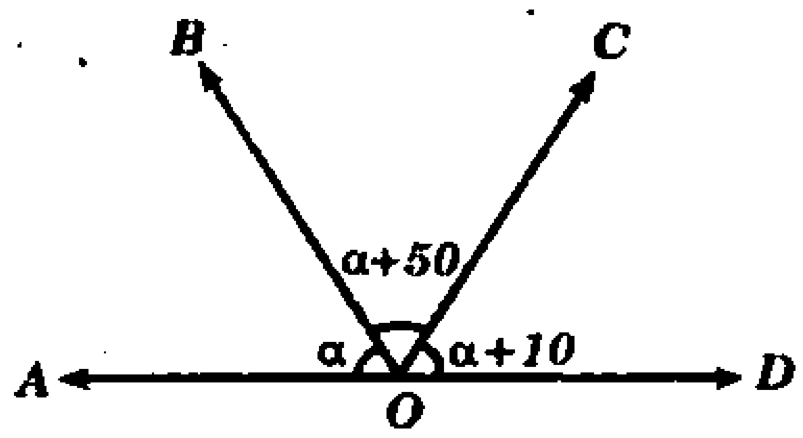
23 Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ Calcular "x".



A)48° B)58° C)68° D)78° E)108°

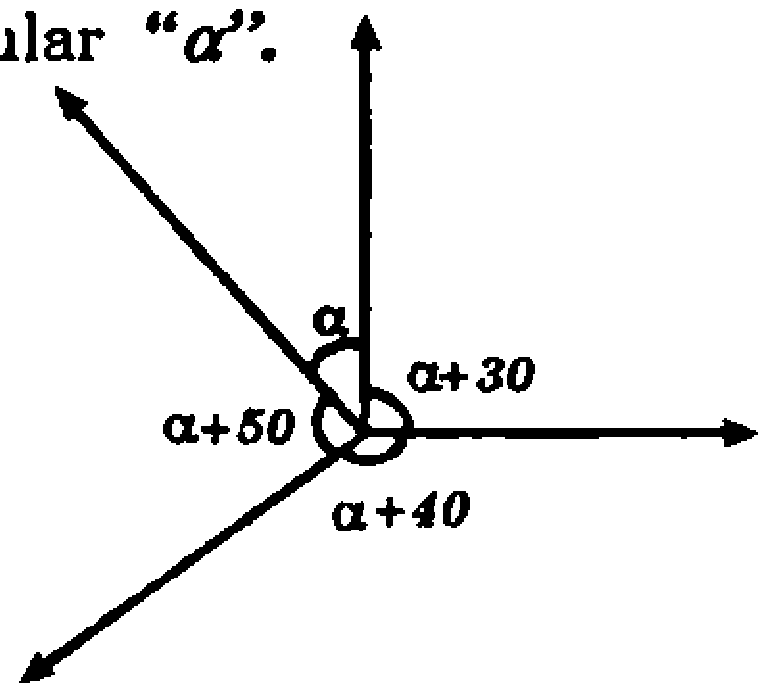
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular $m\angle AOC$.



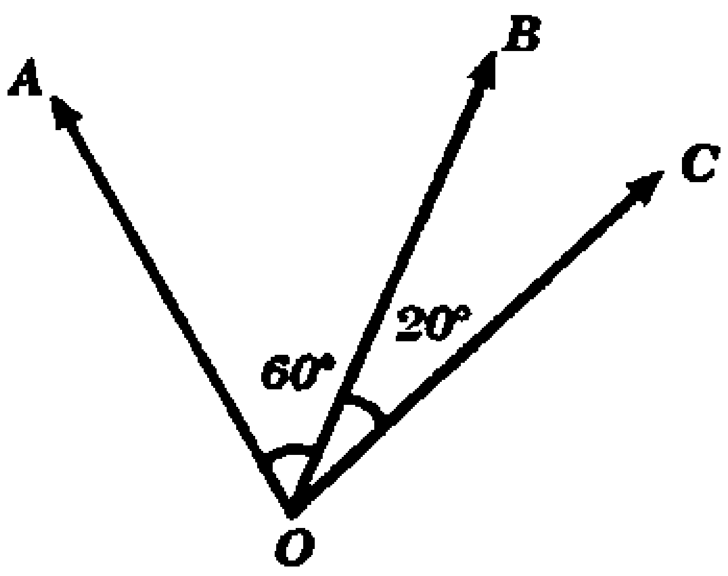
A) 110°
B) 130°
C) 150°
D) 135°
E) 120°

02 Calcular "α".



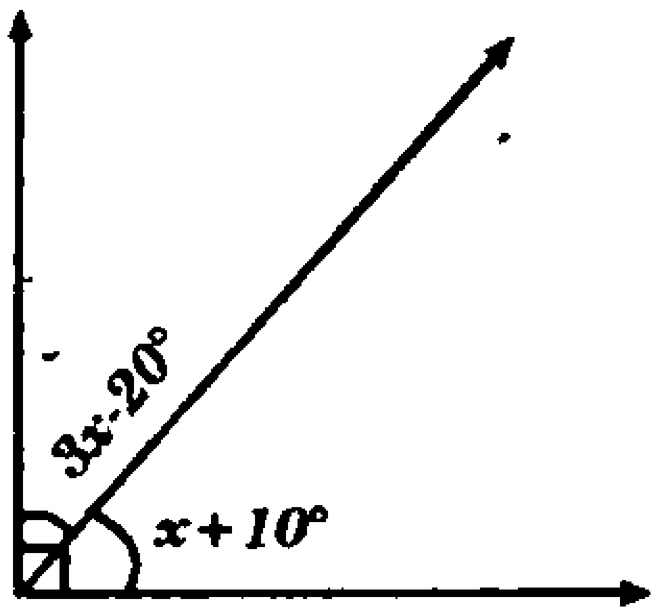
A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 75°

03 Calcular $B\widehat{O}M$, $\overline{OM}$ es bisectriz de *AOC*.



A) 20°
B) 30°
C) 25°
D) 35°
E) 40°

04 Calcular "x"



A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°

05 Dos ángulos están en relación de **2** a **3** ,si suman **70°**. Calcular el mayor.

A) 28° B) 36° C) 42° D) 58° E) 62°

06 Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$.

Si: $A\hat{O}C = 84°$

A) 28° B)42° C) 52° D)66° E)84°

07 Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$.

Si: $A\hat{O}B + B\hat{O}D = 64°$

A) 8° B) 12° C) 24° D) 30° E) 32°

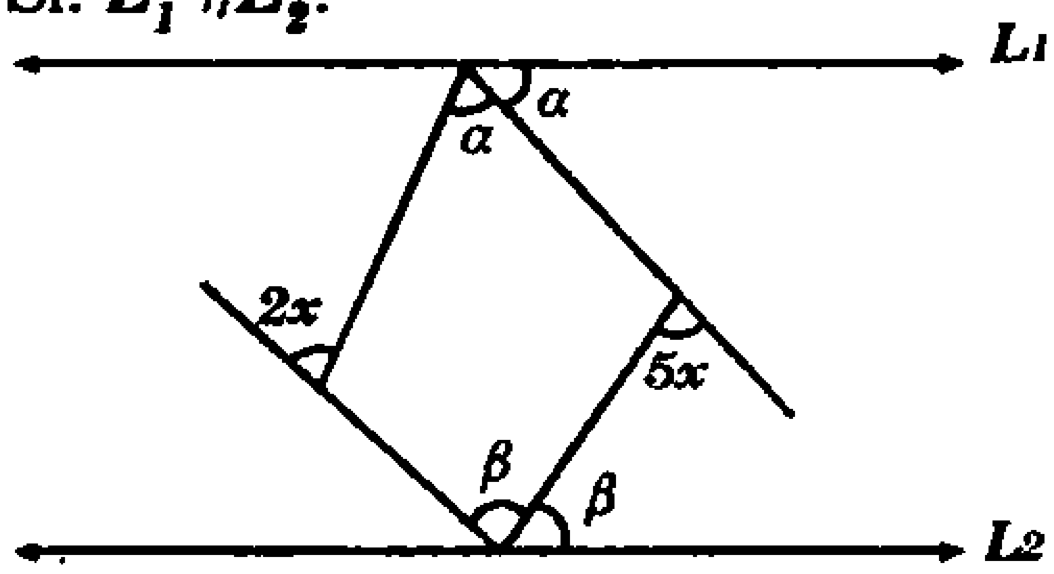
08 Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}C$. Calcular la medida del ángulos cuyos lados son $\overline{OB}$ y la bisectriz del $A\hat{O}C$, si: $B\hat{O}C - A\hat{O}B = 72°$

A) 18° B) 24° C) 36° D) 46° E) 60°

09 Calcular el suplemento del complemento de la tercera parte de la diferencia entre el suplemento y complemento de un mismo ángulo.

A)120° B)135° C)150° D)105° E)90°

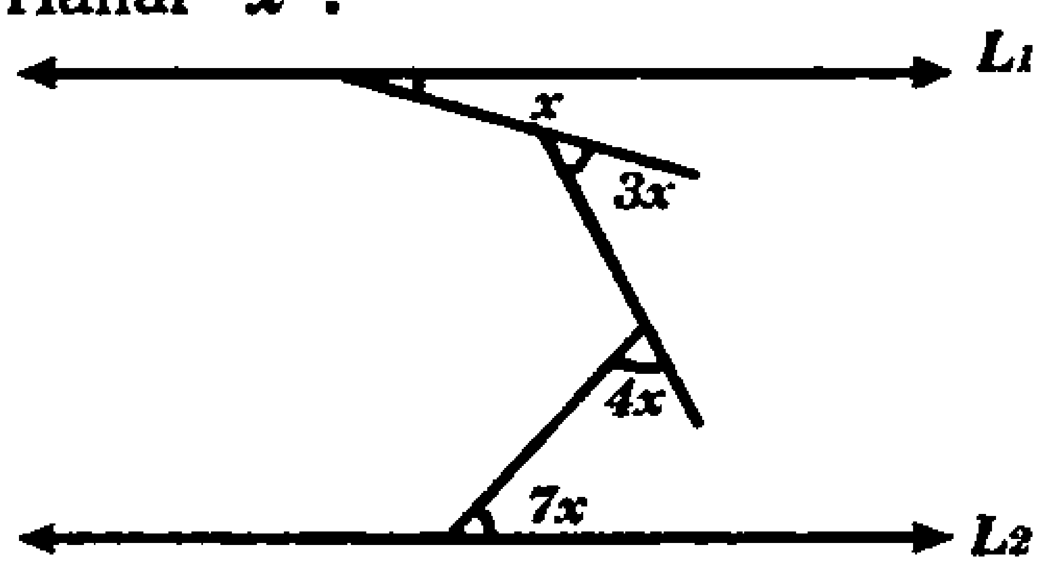
10 En la figura , hallar "x". Si: $L_1 // L_2$.



A)10° B)15° C) 18° D) 20° E) 30°

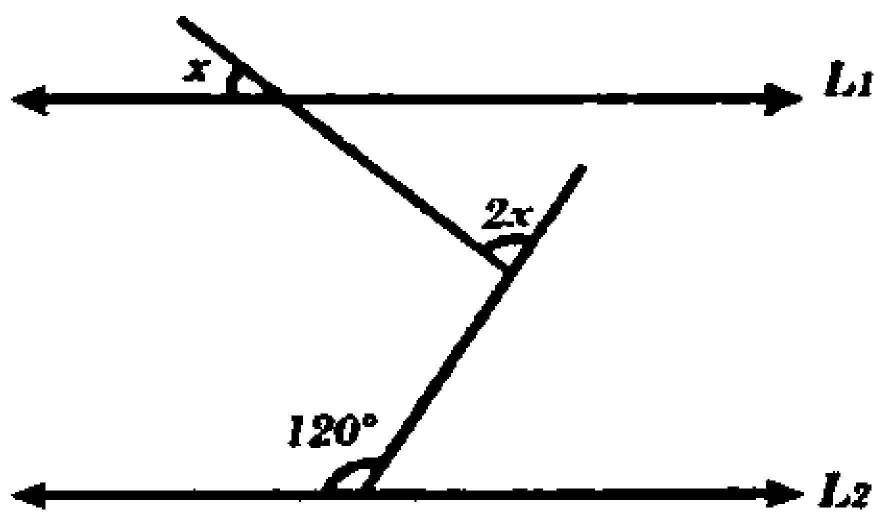
11 En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.

Hallar "x".



A) 10° B) 12° C) 15° D) 16° E) 18°

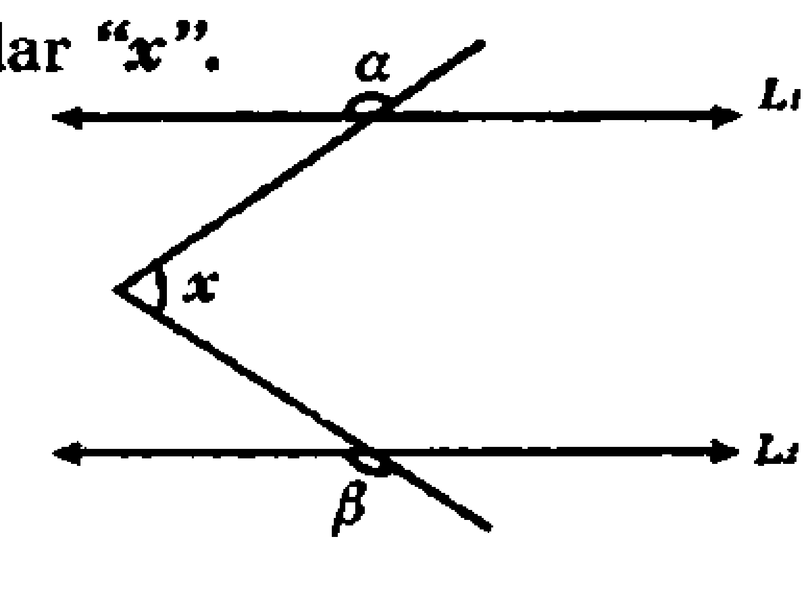
12 Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar "$x$"



A)20° B)30° C)40° D)50° E)60°

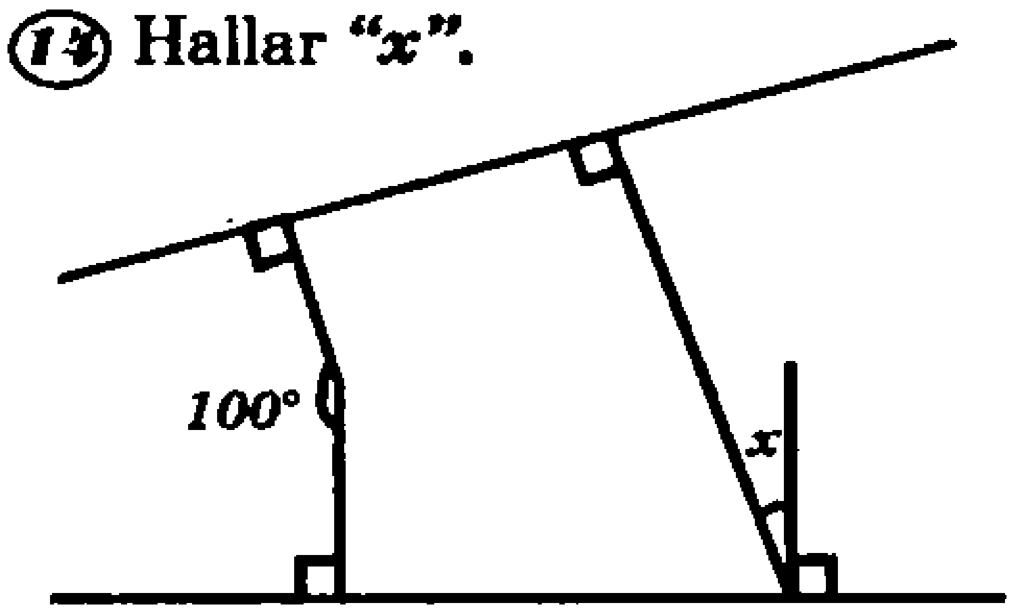
13 Si : $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$. $\alpha + \beta = 310°$.

Hallar "x".



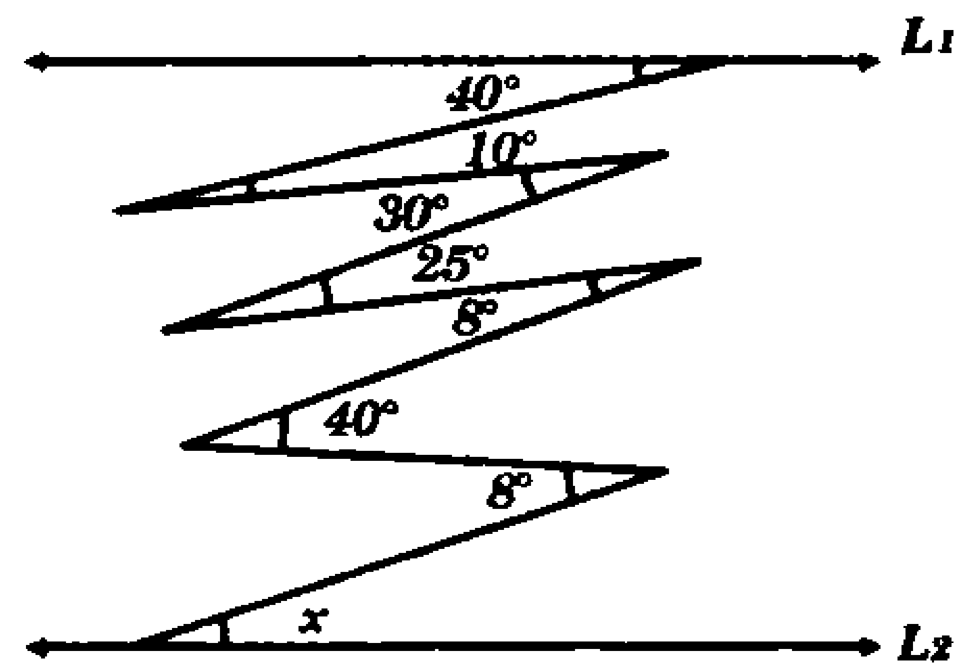
A) 30° B) 20° C) 50° D) 60° E) 70°

14 Hallar "x".



A) 10° B) 20° C) 40° D) 50° E) 80°

15 Si : $L_1 // L_2$. Hallar "x".



A) 80 ° B)10° C) 11° D) 12° E) 16°

16 Se tienen los ángulos consecutivos **AOB, BCO** y **COD**; de tal manera que :

$mA\hat{O}C = 32° + \beta$ y $mB\hat{O}D = 88° - \beta$

Calcular : $mB\hat{O}C$; si el ángulo $A\hat{O}D$ es recto.

A)22°+b B)30° C)68°–b
D) 40° E) $16° + \frac{b}{2}$

17 Se tienen los ángulos consecutivos **AOB, BOC** y **COD** ; de manera que el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos **AOC** y **BOD** mide **54°**. Calcular la suma de las medidas de los ángulos **AOB** y **COD**.

A)54° B)68° C)81° D)103° E)108°

18 Se tienen los ángulos consecutivos **AOB , BOC, COD, DOE** y **EOF** de tal manera que :

$5(mBOE) = 3(mAOF)$

$mA\hat{O}C + mB\hat{O}D + mC\hat{O}E + mD\hat{O}F = 240°$

Calcular : $mB\hat{O}E$

A)60° B)90° C)100° D)120° E)140°

19 Se tienen los ángulos consecutivos **AOB , BOC** y **COD.** Se trazan las bisectrices ***OX, OY, OM*** y ***ON*** de los ángulos ***AOC, BOD, AOB*** y ***COD*** respectivamente de manera que : $m\angle AOD = 160°$

Calcular : $mX\hat{O}Y + mM\hat{O}N$

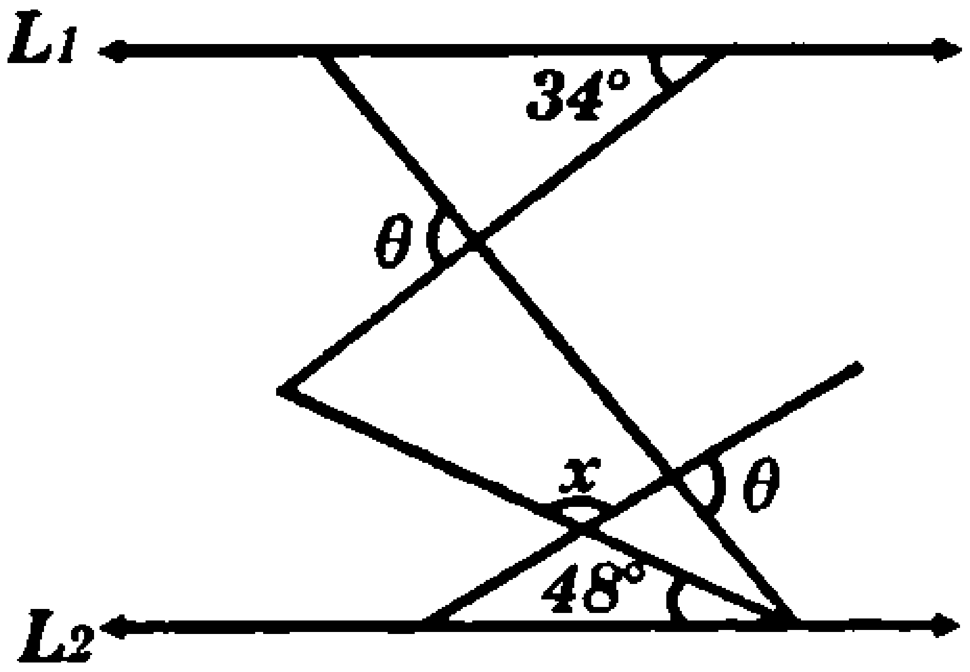
A) 80° *B) 120°* *C) 160°*
D) 200° *E)240°*

20 Se tienen los ángulos consecutivos **AOB, BOC, COD, DOE** y **EOF** de tal manera que:
$mA\hat{O}D = mB\hat{O}E = mC\hat{O}F$ y $mA\hat{O}F = 224°$.
Calcular la medida del ángulo formado por la bisectriz del ángulo **COD** y el rayo $\overline{OE}$, si:

$$mB\hat{O}C = 52°$$

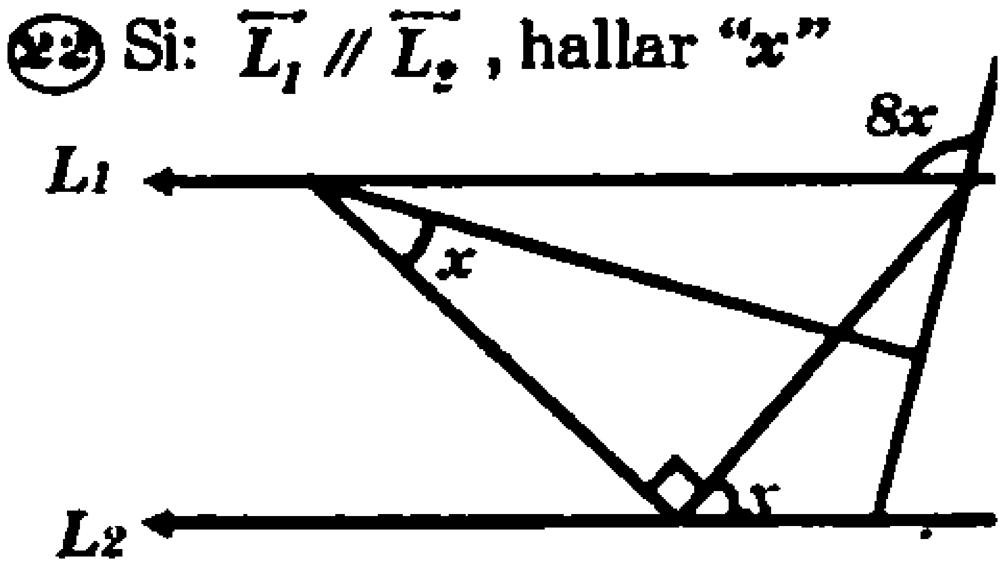
A)102° B)82° C)70° D)60° E)52°

21 Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, hallar "x"



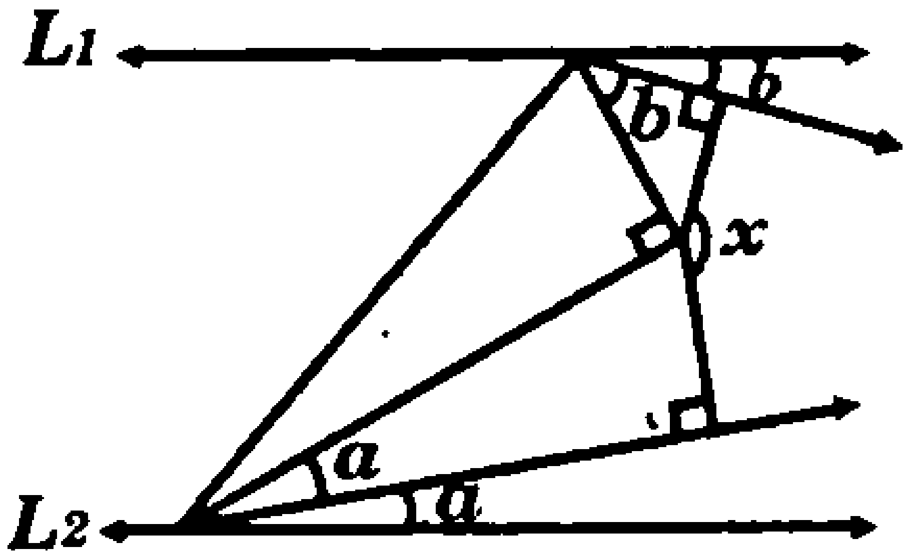
A)34° B)48° C)82° D)98° E)108°

22 Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, hallar "x"



A) 45° B) 20° C) 30° D) 25° E) 18°

23 Hallar x , Si : $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2}$



A) 60° *B) 75°* *C) 105°*
D) 135° *E)150°*

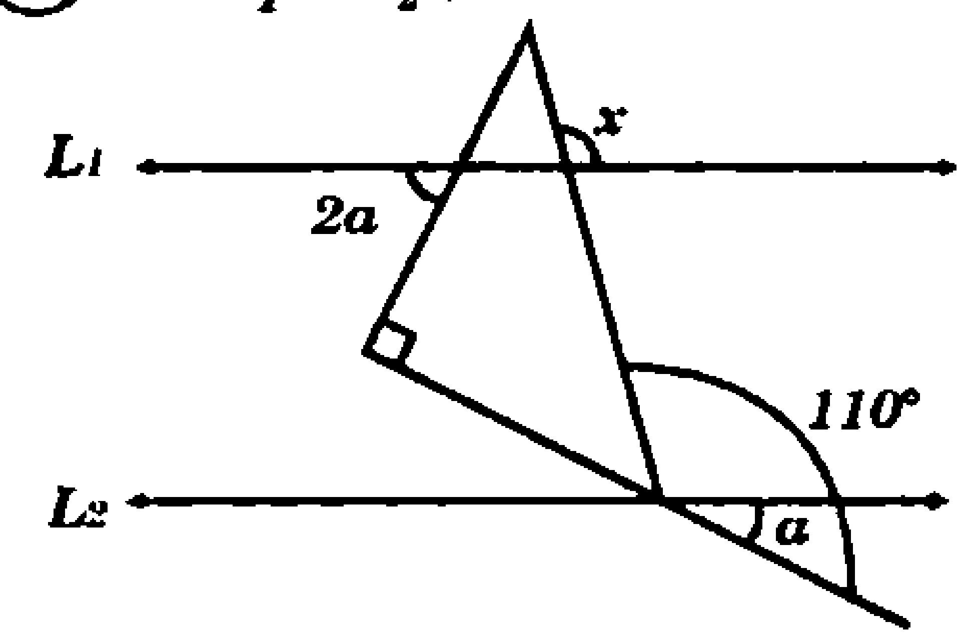
24 Se tiene un ángulo en el cual la suma de su complemento y el suplemento es tres veces el valor del ángulo. Calcular el complemento del mencionado ángulo.

A) 10° B) 24° C) 18° D) 36° E) 54°

25 Se grafica a los ángulos **AOB** y **BOC** de manera que la suma de los ángulos **AOB** y **AOC** sea **134°**. Se traza la bisectriz **OR** del $\measuredangle BOC$. Calcular el valor de $\measuredangle AOR$.

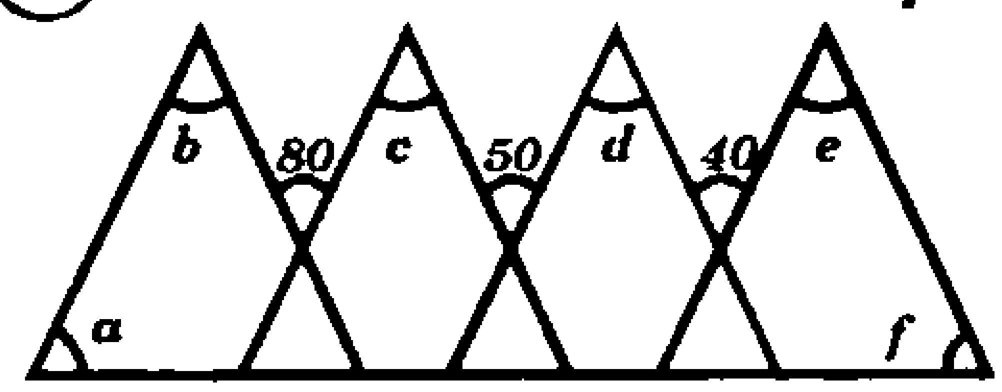
A) 37° B) 47° C) 67° D) 57° E) 17°

26 Si: $L_1 \parallel L_2$, hallar "x"



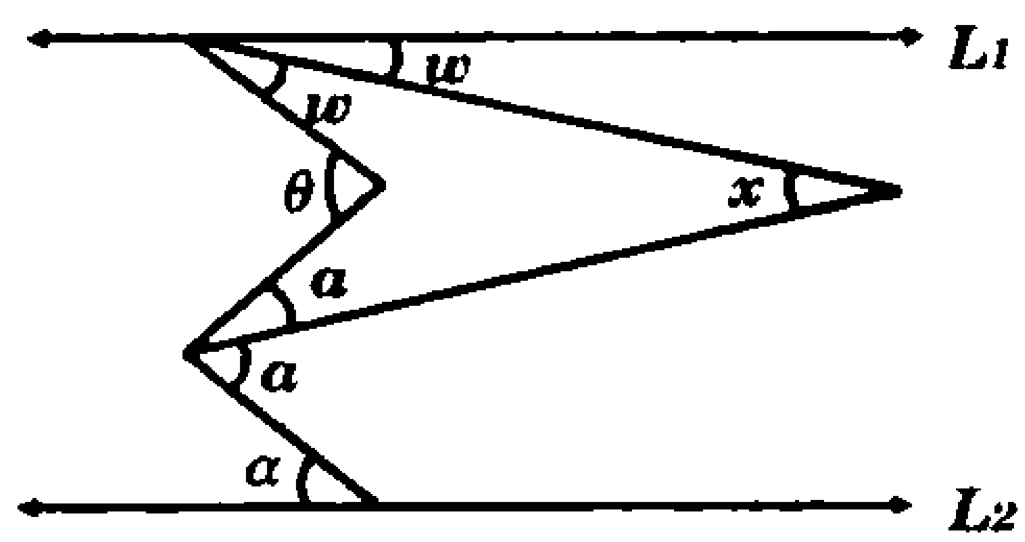
A)40° B)60° C)80° D)100° E)120°

27 Calcular : $a+b+c+d+e+f$



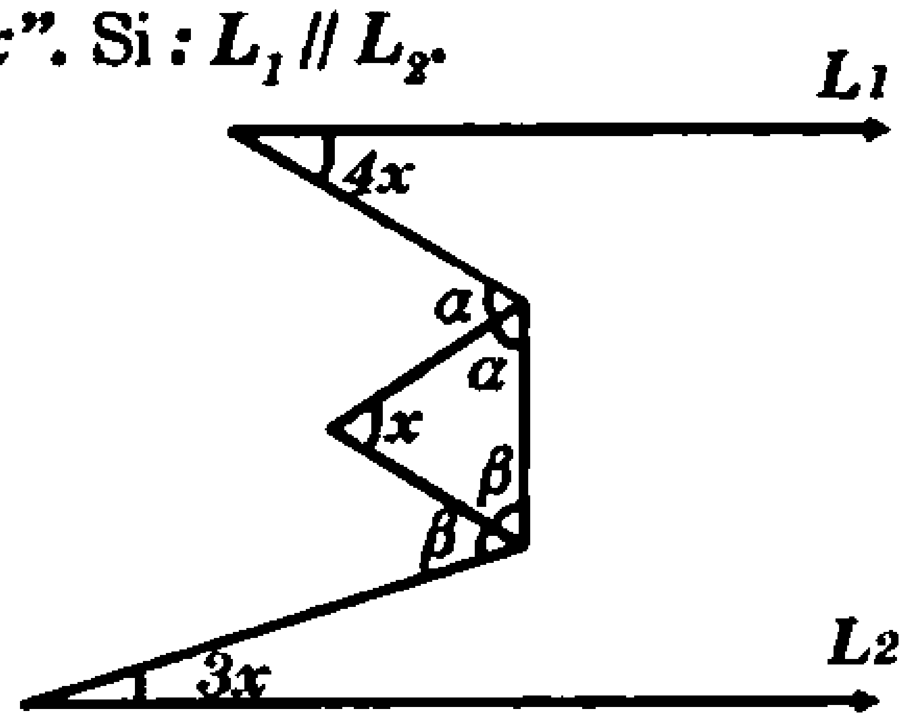
A) 180° *B) 270°* *C) 360°*
D) 300° *E)350°*

28 En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, Si:
$\theta - \alpha = \dfrac{x}{2} + 45$
Hallar x



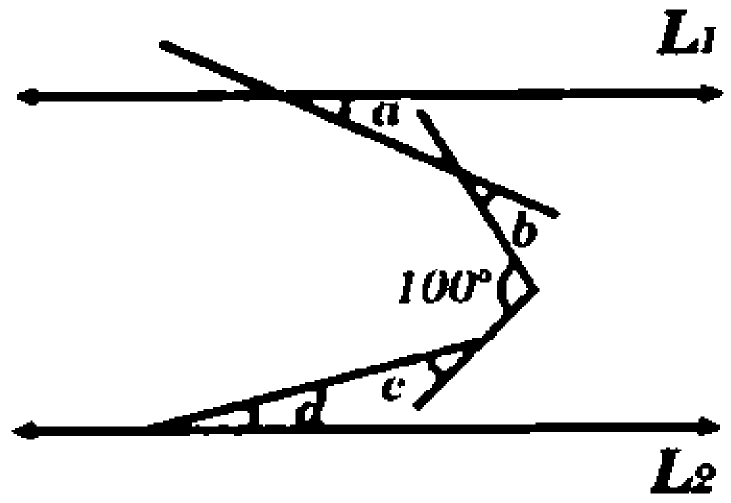
A) 20° B) 25° C) 30° D) 45° E) 60°

29 En la figura mostrada. Hallar "x". Si : $L_1 \parallel L_2$.



A)35° B)20° C)100° D)45° E) 37°

30 Si : $L_1 \parallel L_2$. Hallar: $a+b+c+d$.



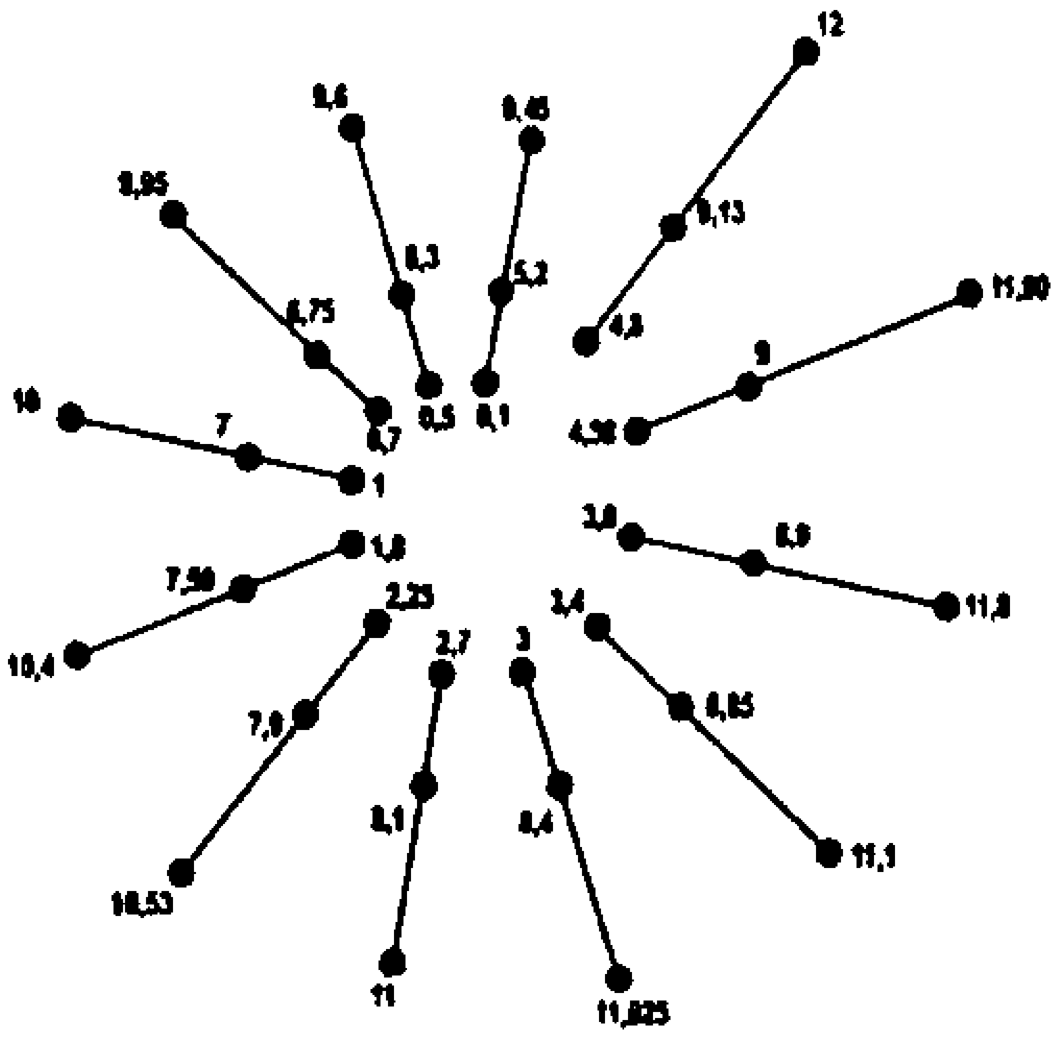
A) 50° *B) 150°* *C) 100°*
D) 120° *E) 90°*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)D	3)A	4)E	5)C	6)B	7)E	8)C	9)A	10)B
11)B	12)C	13)C	14)E	15)C	16)B	17)E	18)B	19)C	20)B
21)D	22)E	23)D	24)D	25)C	26)C	27)B	28)C	29)B	30)C

RETO 1 :

Para completar el dibujo, une con una línea los números del menor al mayor.



RETO 2 :

Hubo hace muchísimos años un rey tan caprichoso y cruel que se complacía en convocar frecuentemente a sus vasallos para someterlos a pruebas de ingenio. ¡Pobre de aquel que no acertara! La pena más leve no bajaba de los cien azotes. Una vez apareció en el reino cierto juglar habilidoso y listo. El monarca lo mandó llamar y le dijo: «Has entrado sin permiso en mis dominios. Te espera la muerte en la horca. Solamente te librarás de ella si encuentras la solución de estos tres acertijos». Asintió el pobre juglar encomendándose a Dios. El rey dijo su primer acertijo: «¿Cuánto valgo yo?»

El juglar: Veintinueve dinares, pues, a Jesús lo vendieron por treinta.

«¡Está bien! Ahora dime: ¿cuántos años, meses y días se tarda en dar la vuelta al mundo?».

El juglar: El que pueda montar en el carro del sol, tardará un día entero, ni más ni menos.

El rey aprobó la respuesta y enunció el tercero y último acertijo. «¿Cuántas estrellas hay en el cielo?».

¿Qué cree Ud. que contestó el juglar para librarse de la horca?

TRIÁNGULOS

CAPÍTULO 095

OBJETIVOS :

Al finalizar el capítulo, el alumno será capaz de:

* *Conocer las clases de triángulos, sus propiedades y aplicaciones*

* *Aplicar, correctamente los teoremas fundamentales de los triángulos de acuerdo a los condiciones de un problema.*

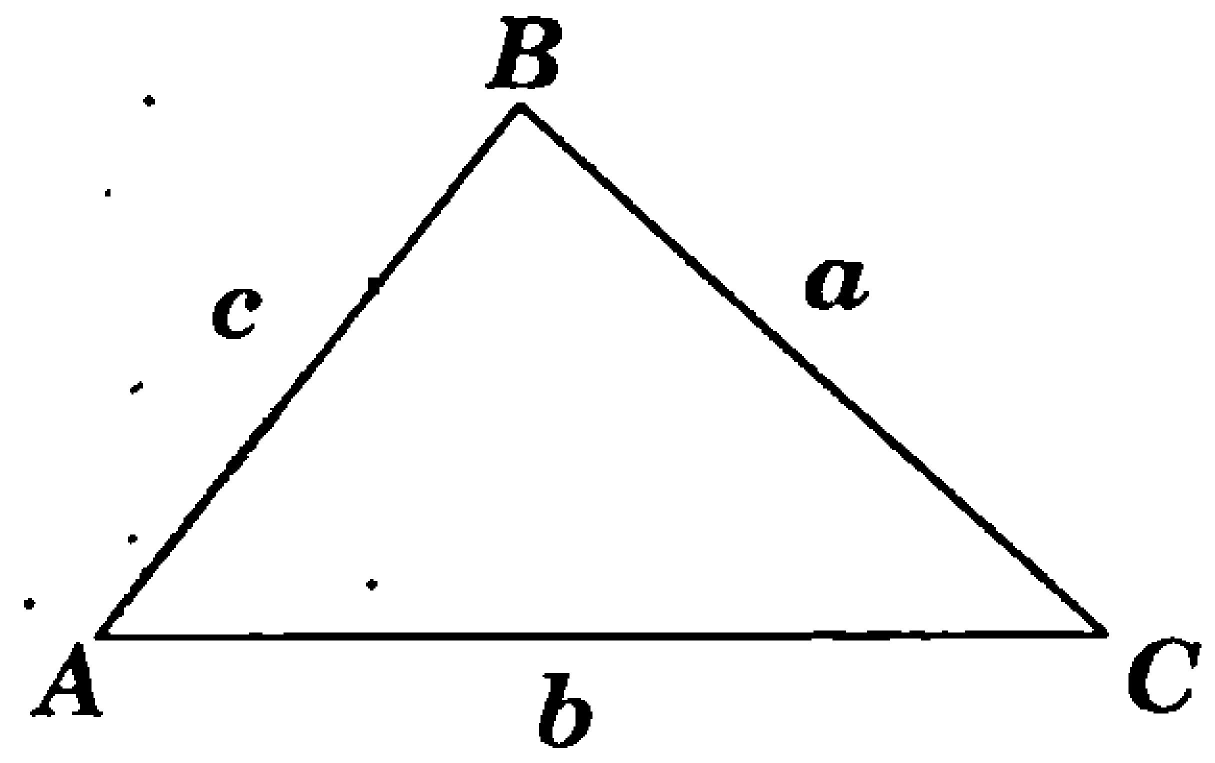
* *Desarrollar los problemas de triángulos adecuadamente.*

INTRODUCCIÓN :

Los triángulos son las figuras geométricas más importantes ya que cualquier polígono con un número mayor de lados puede reducirse a una sucesión de triángulos, trazando todas las diagonales a partir de un vértice, o uniendo todos los vértices con un punto interior del polígono. Entre todos los triángulos sobresale el triángulo rectángulo cuyos lados satisfacen la relación métrica conocida como Teorema de Pitágoras, que es la base de nuestro concepto de medida de las dimensiones espaciales.

TRIÁNGULO

Es la figura geométrica que se obtiene al unir tres puntos no colineales mediante segmentos de recta.



ELEMENTOS :

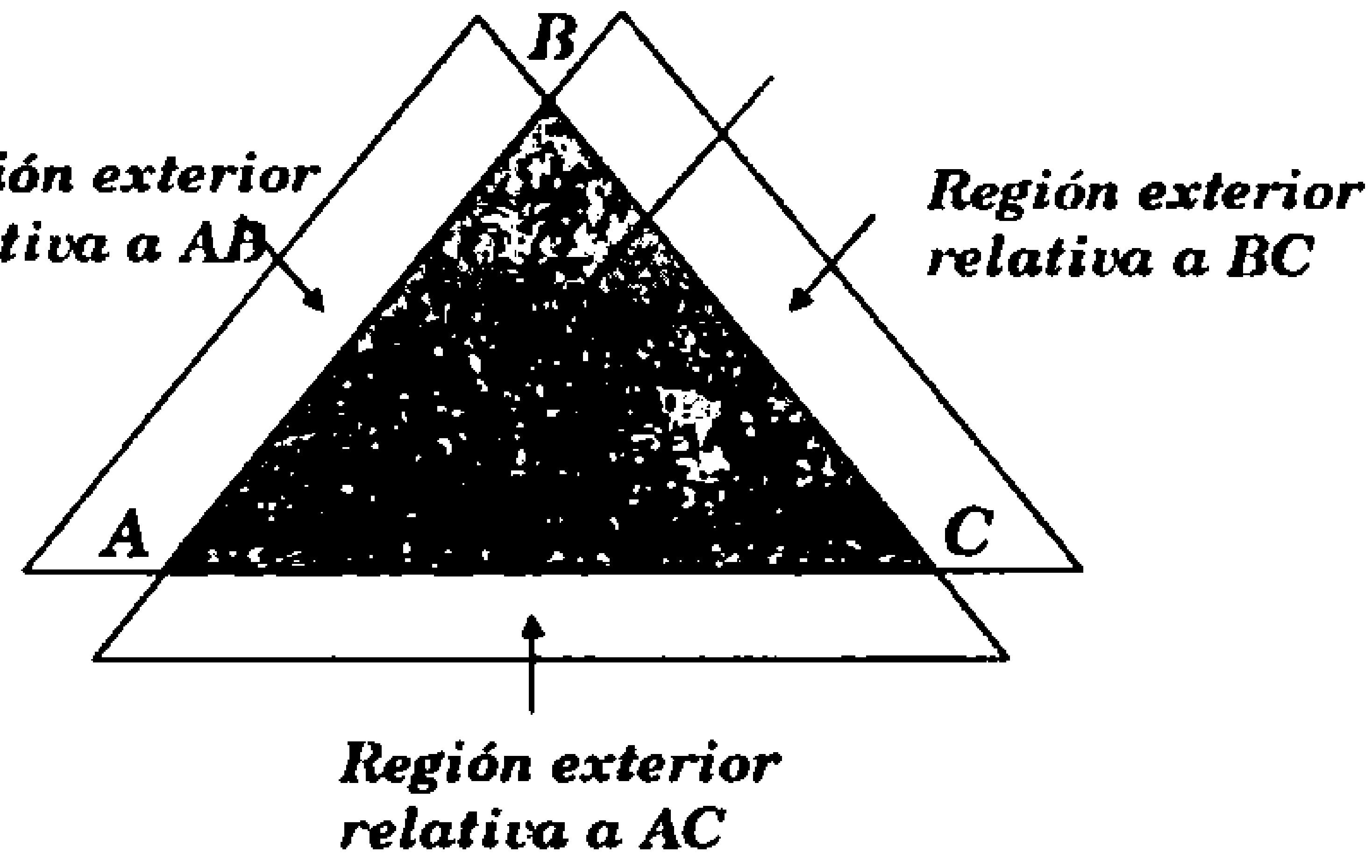
* Vértices : A, B y C

* Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

NOTACIÓN :

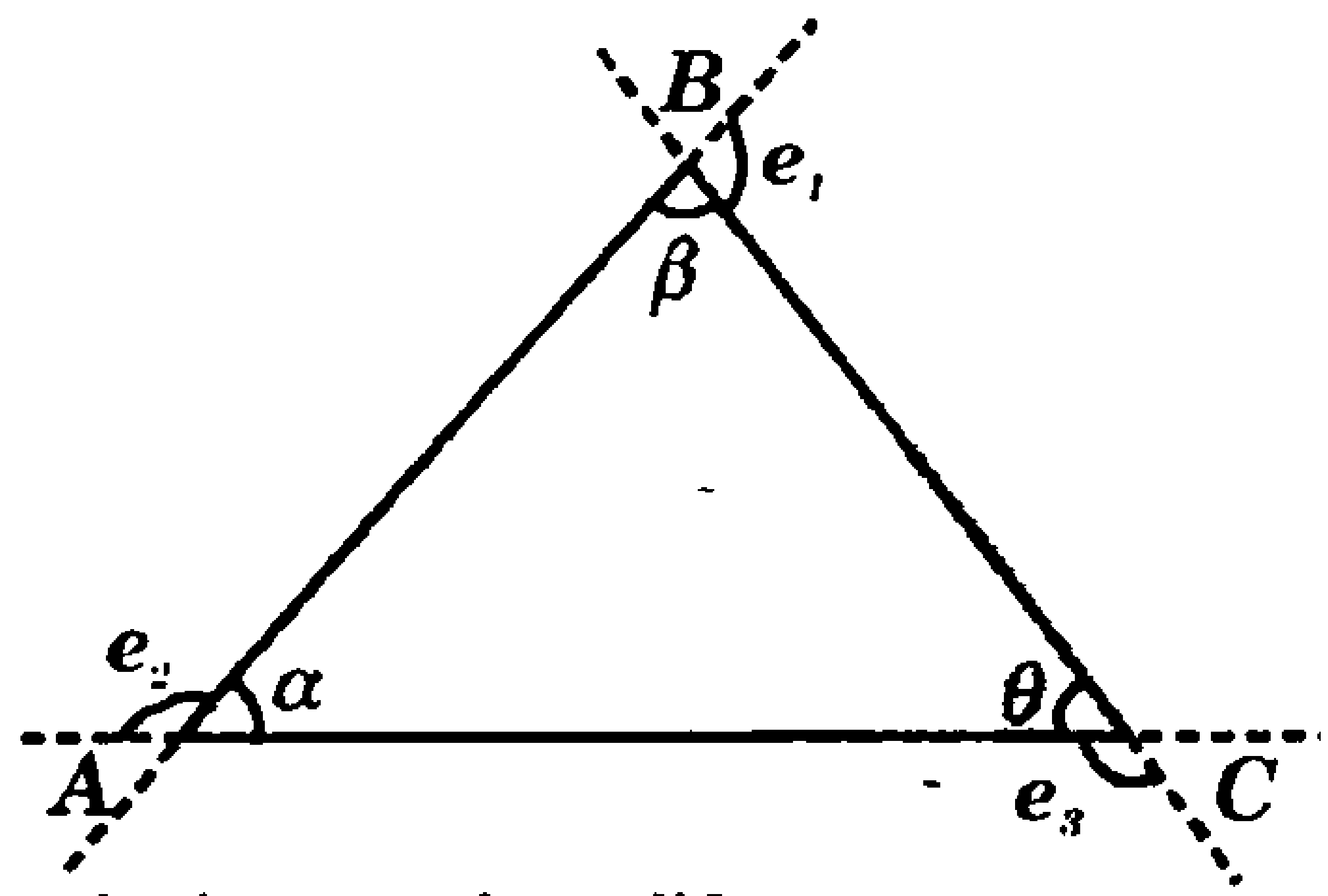
* Triángulo ABC : ΔABC

Regiones determinadas respecto al triángulo.



* En la figura anterior podemos observar las diferentes regiones que se determinan respecto al triángulo *ABC*.

ELEMENTOS ASOCIADOS :



* Ángulos internos de medidas : α, β y θ

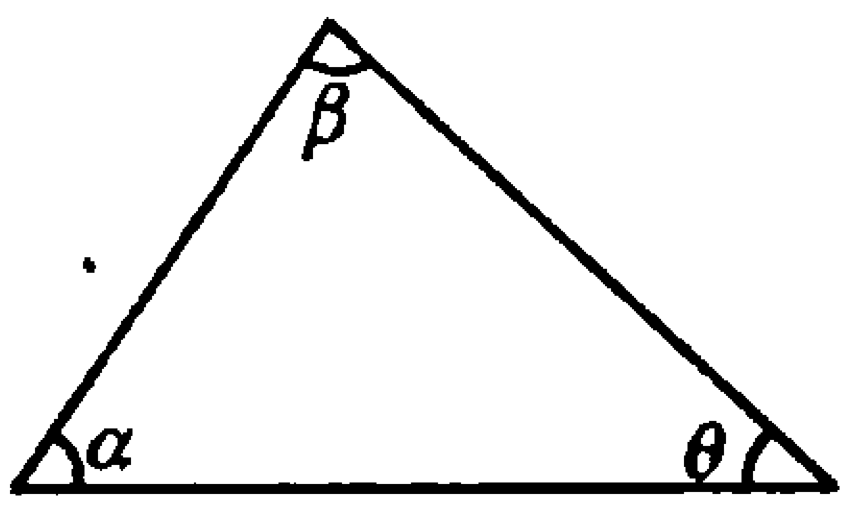
* Ángulos externos de medidas : e_1, e_2 y e_3

* Perímetro : $2p = a+b+c$

* Semi- perímetro : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

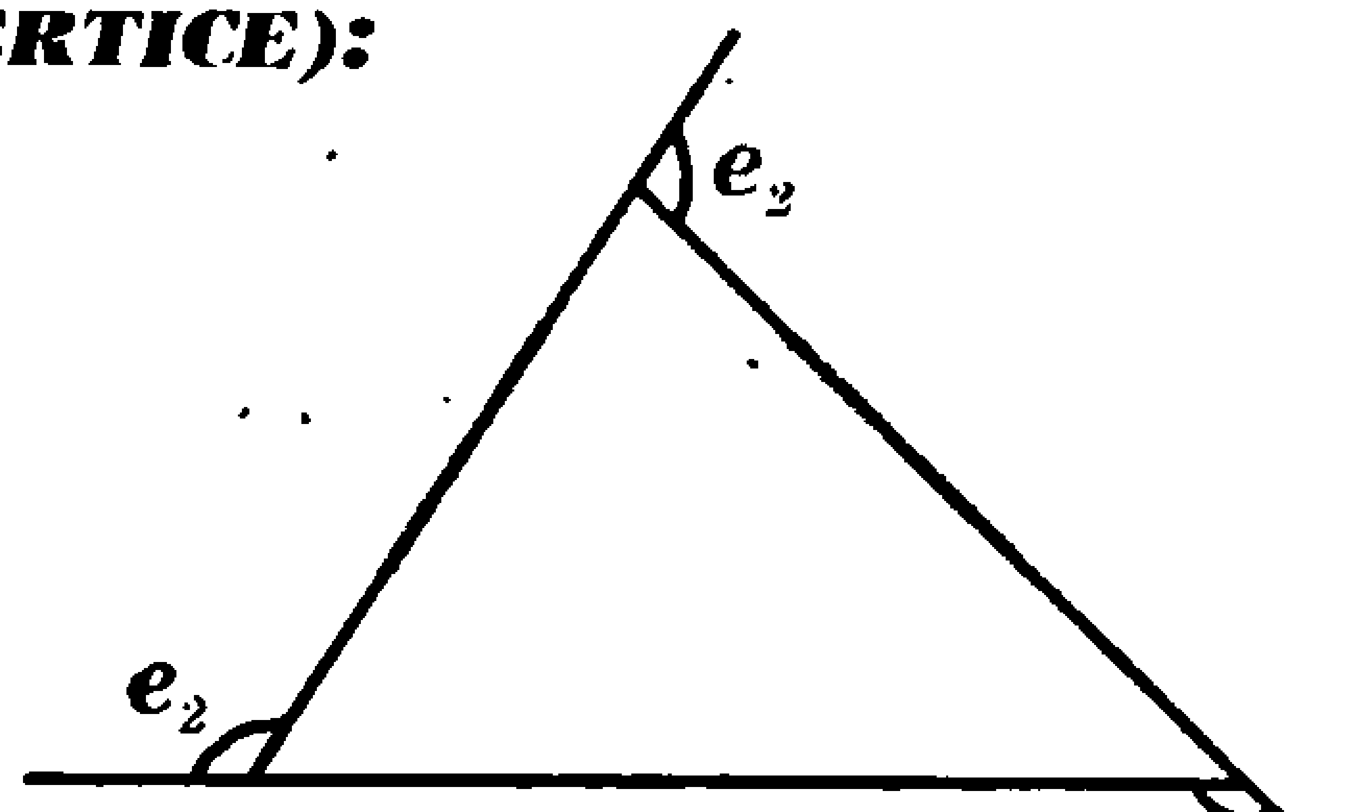
PROPIEDADES FUNDAMENTALES

A) SUMA DE MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS INTERNOS:



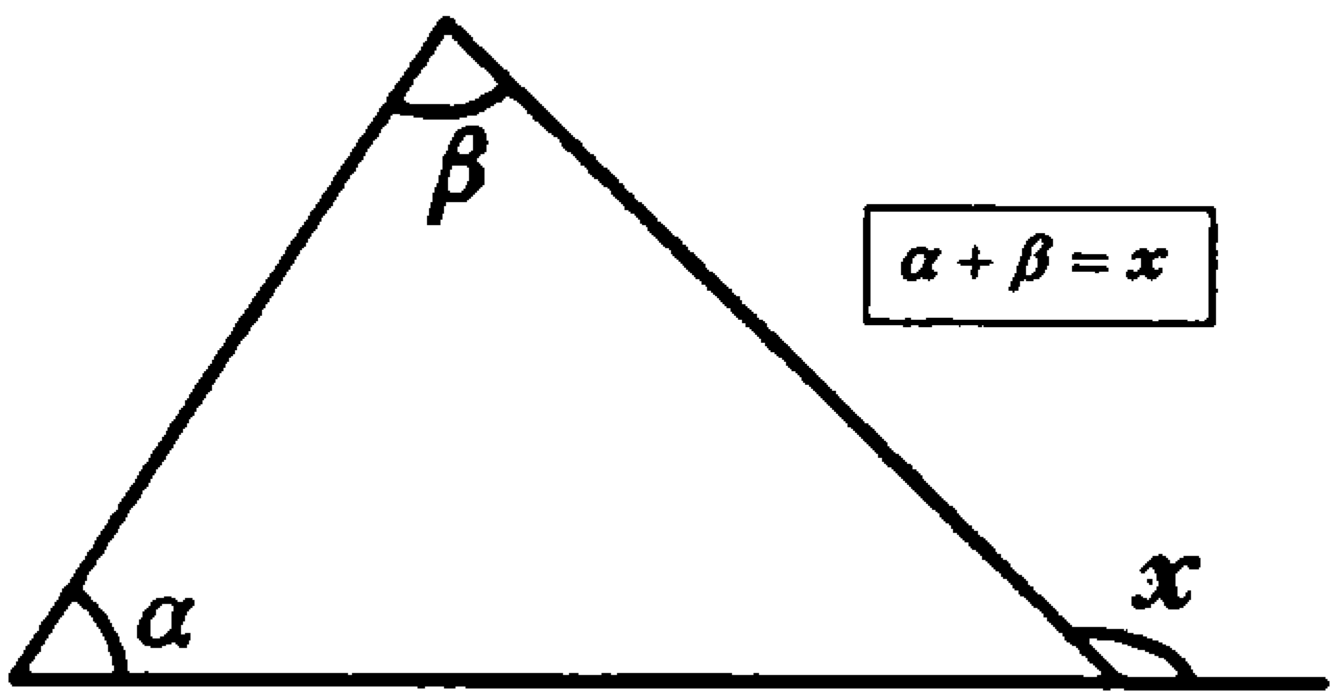
$$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 180°}$$

B) SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS (1 POR VÉRTICE):



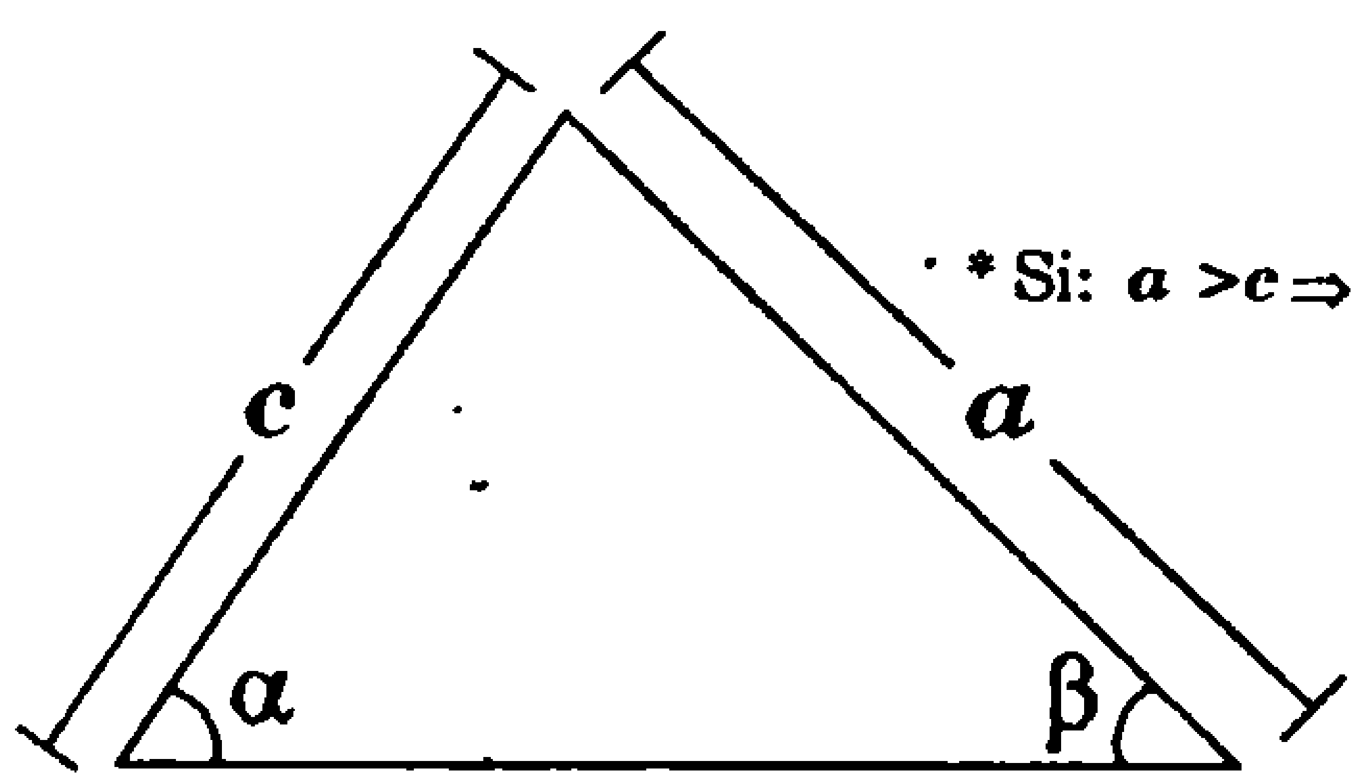
$e_1 + e_2 + e_3 = 360°$

C) MEDIDA DEL ÁNGULO EXTERIOR :



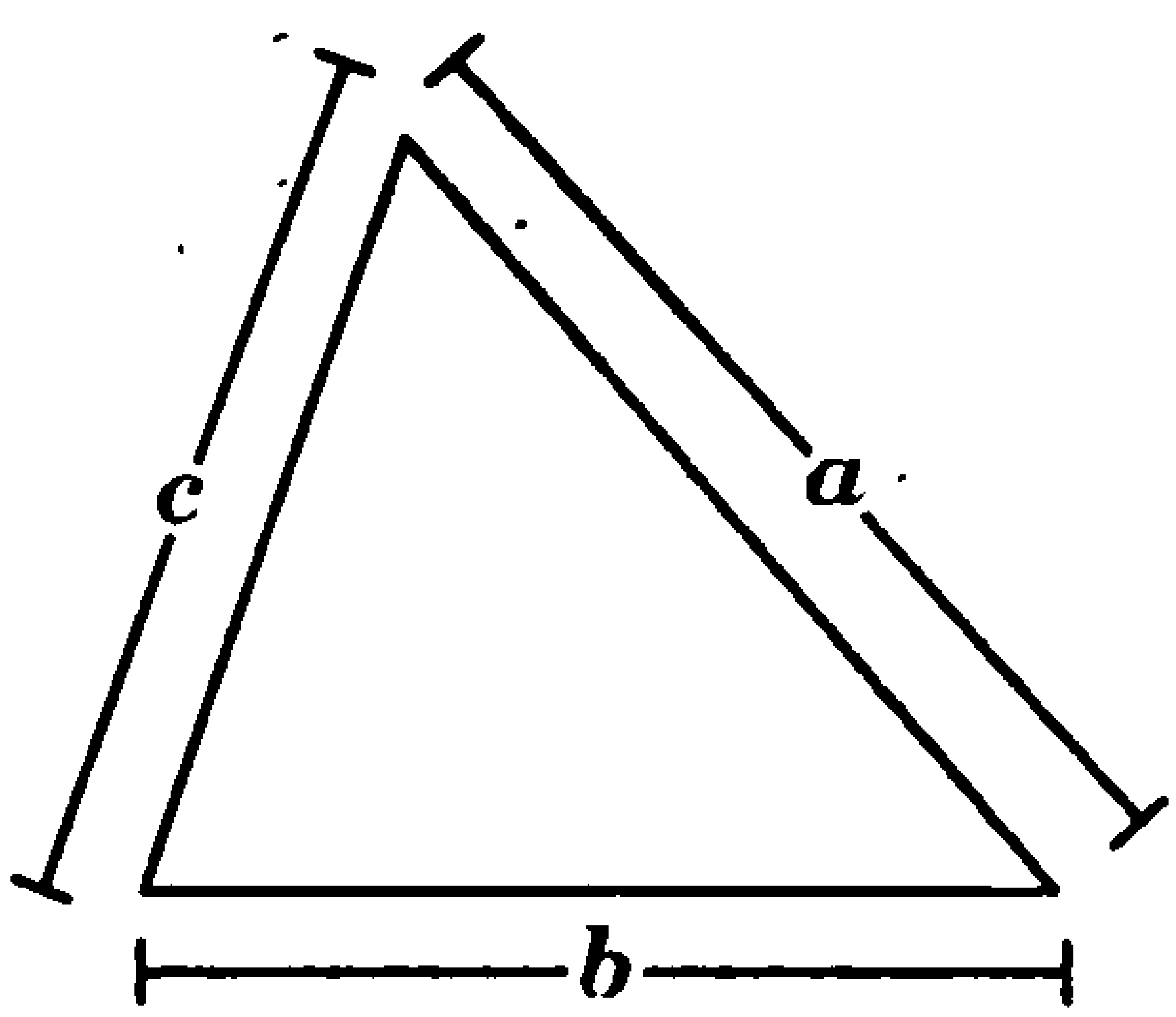
$\alpha + \beta = x$

D) PROPIEDAD DE CORRESPONDENCIA :



* Si: $a > c \Rightarrow \alpha > \beta$

E) RELACIÓN DE EXISTENCIA O DESIGUALDAD TRIANGULAR :

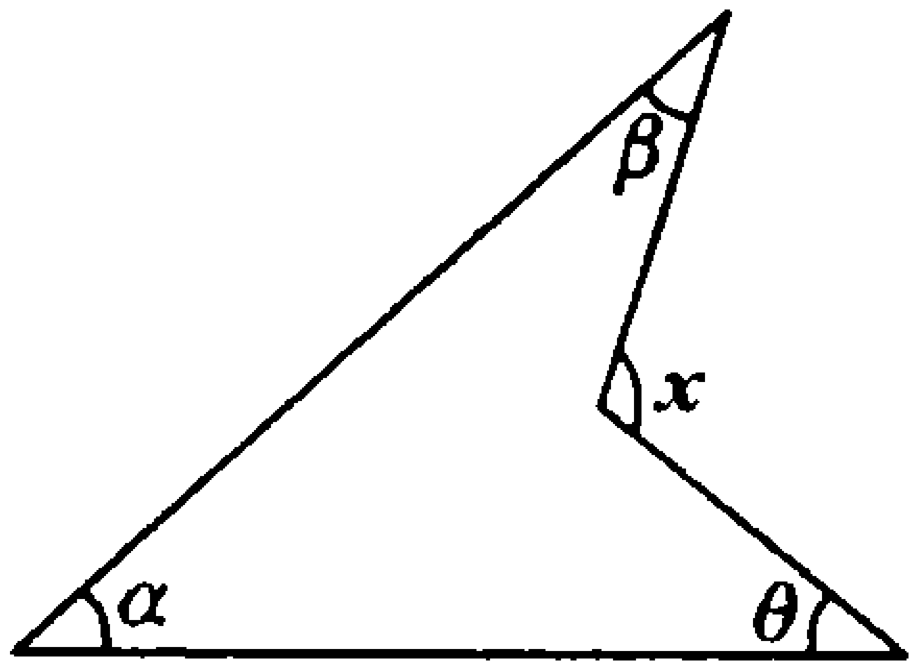


* Si $a \geq b \geq c$, se cumple :

$$b - c < a < b + c$$
$$a - c < b < a + c$$
$$a - b < c < a + b$$

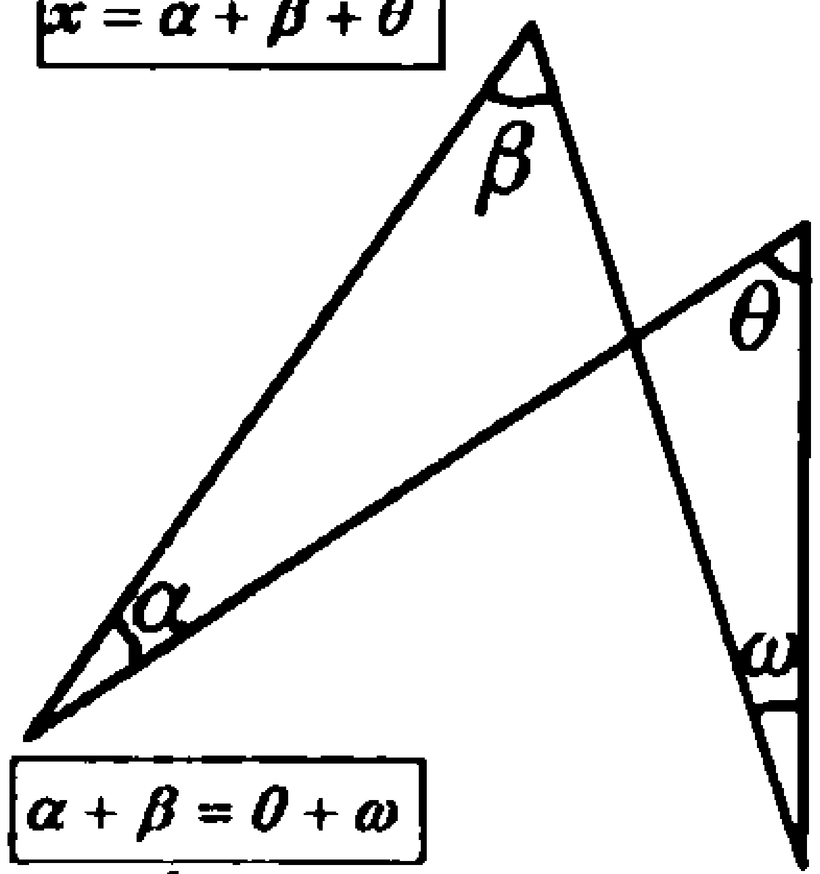
PROPIEDADES ADICIONALES :

I)



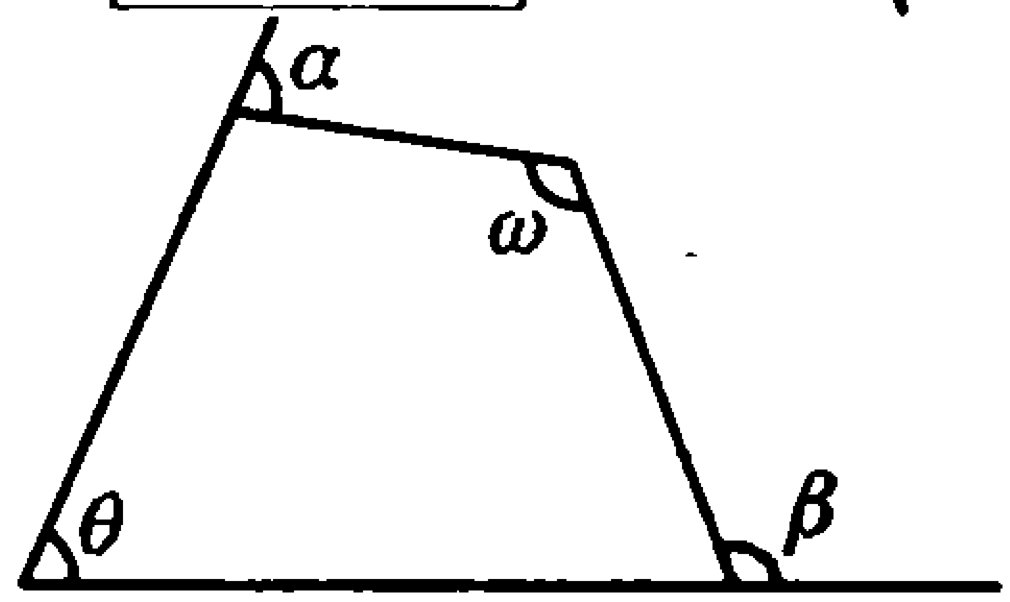
* Se cumple : $x = \alpha + \beta + \theta$

II)



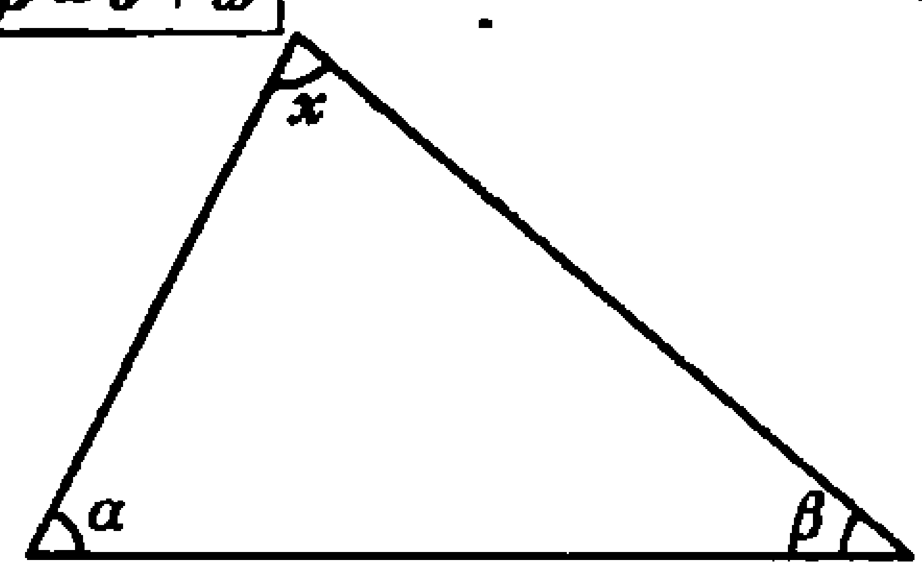
* Se cumple : $\alpha + \beta = \theta + \omega$

III)



* Se cumple : $\alpha + \beta = \theta + \omega$

IV)



* Se cumple : $x = 180° - (\alpha + \beta)$

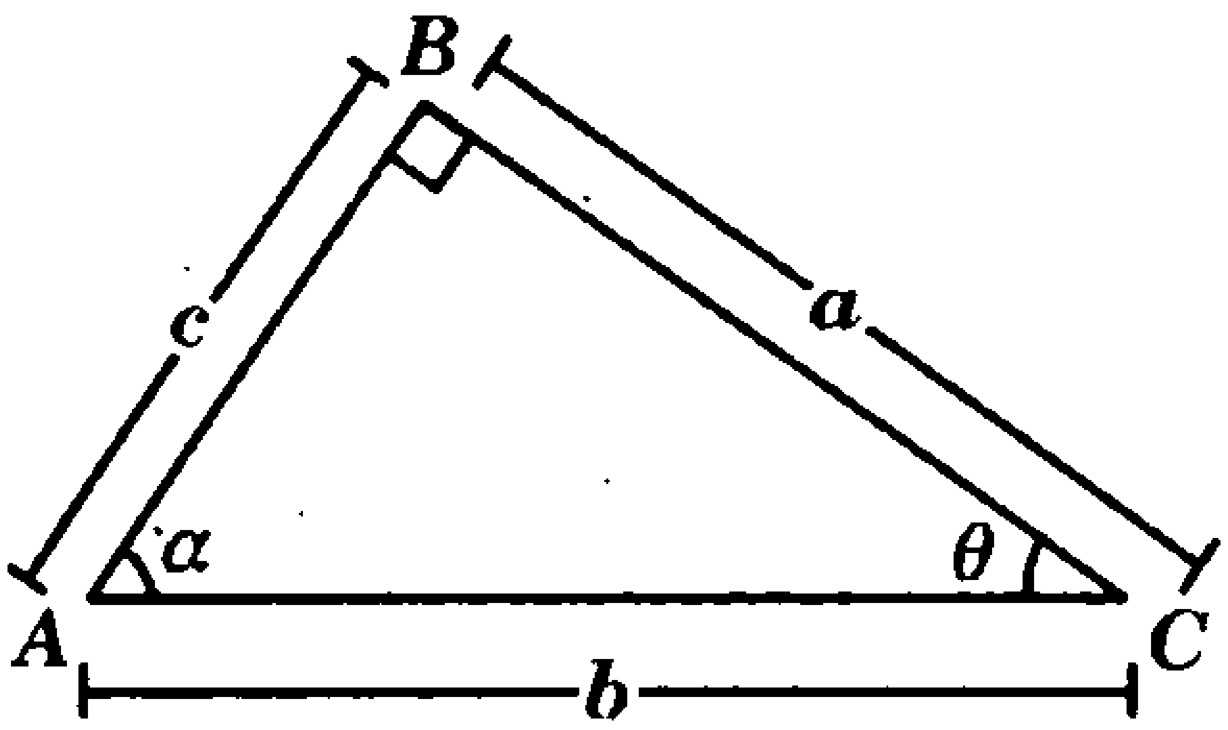
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Los triángulos son clasificados de acuerdo a las medidas de sus ángulos o la longitud de sus lados.

SEGÚN LA MEDIDA DE SUS ÁNGULOS :

A) TRIÁNGULO RECTÁNGULO :

Es aquel triángulo que tiene un ángulo recto.



* En la figura : $m\sphericalangle ABC = 90°$

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: catetos

$\overline{AC}$: hipotenusa

* Además : $\boxed{\alpha + \theta = 90°}$

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

En el ⊿ ABC se cumple : $\boxed{b^2 = a^2 + c^2}$

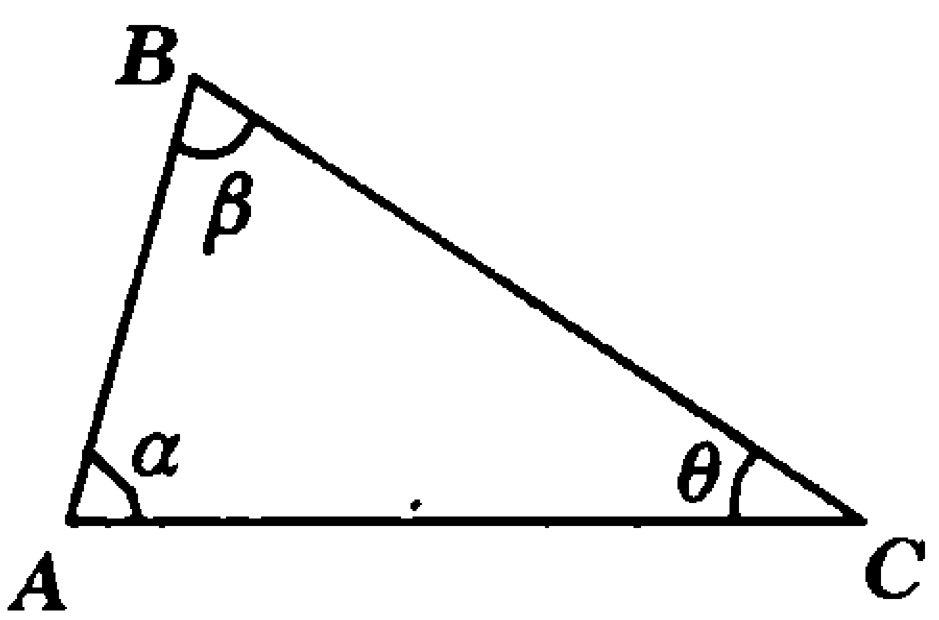
B) TRIÁNGULO ACUTÁNGULO :

Es aquel triángulo cuyos ángulos internos son agudos.

* Si : $\alpha < 90°$

$\beta < 90°$

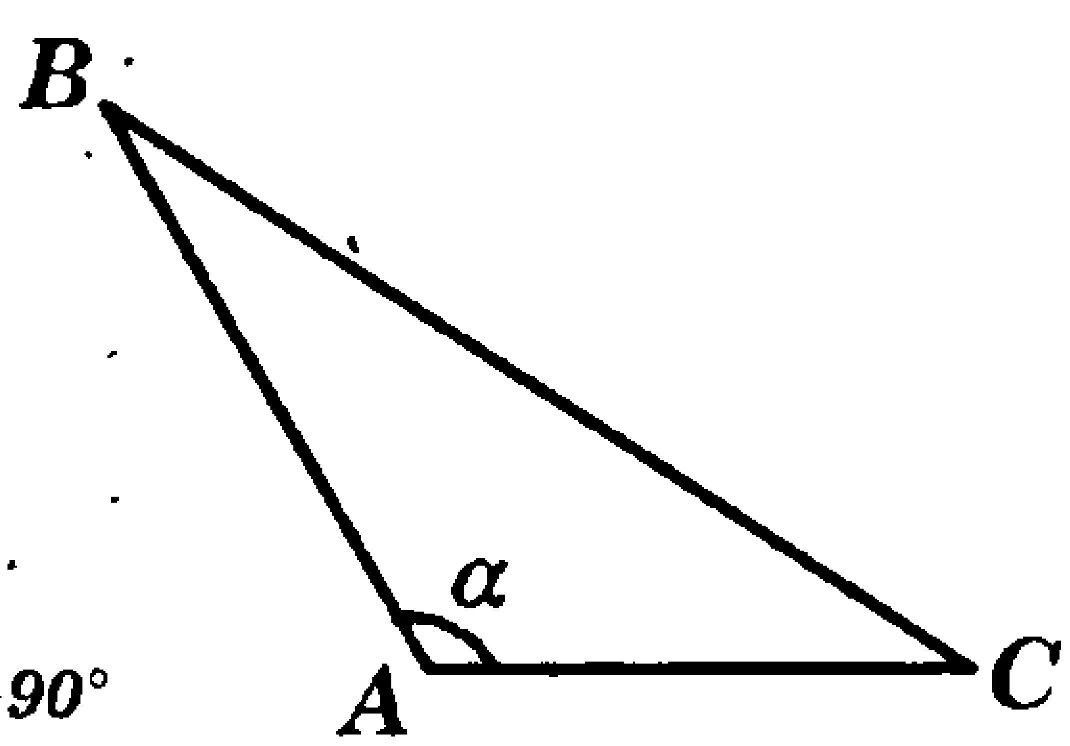
$\theta < 90°$



$\Rightarrow \Delta ABC$: Acutángulo

C) TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO :

Es aquel triángulo que tiene un ángulo interior obtuso.



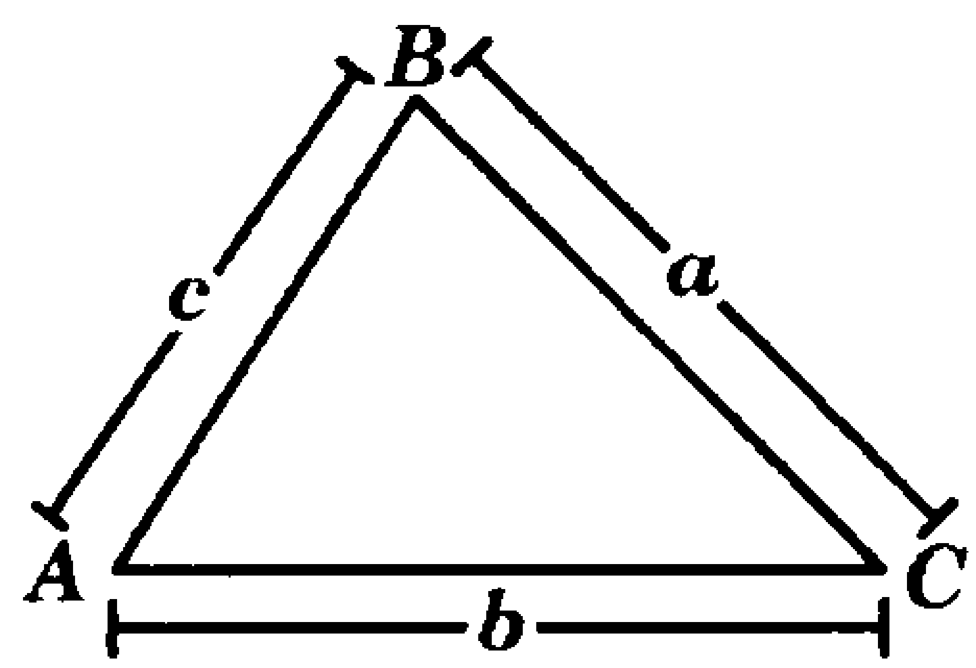
* Si: $\alpha > 90°$

$\Rightarrow \Delta ABC$: obtusángulo

SEGÚN LAS LONGITUDES DE SUS LADOS :

A) TRIÁNGULO ESCALENO :

Es aquel triángulo cuyos lados tienen diferente longitud

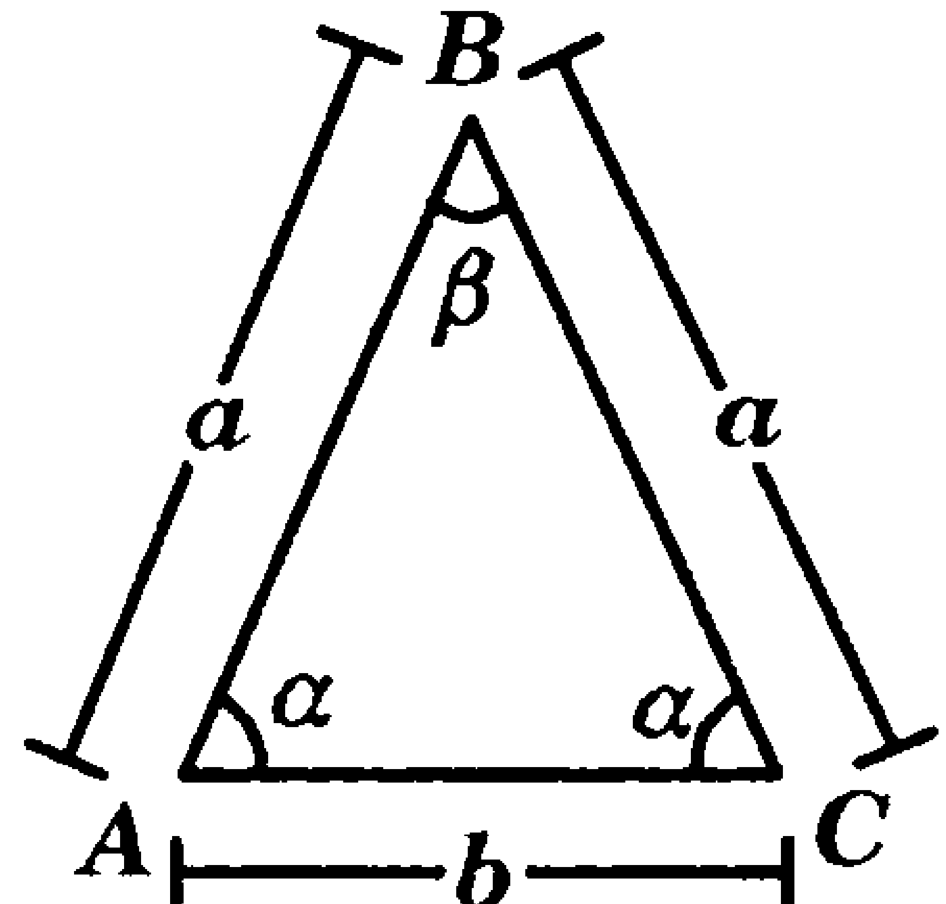


* Si : $\boxed{a \neq b,\ b \neq c \text{ y } a \neq c}$

$\Rightarrow \Delta ABC$: escaleno

B) TRIÁNGULO ISÓSCELES :

Es aquel triángulo que tiene dos lados de igual longitud.



* En la figura : si $AB = BC$

ΔABC : isósceles

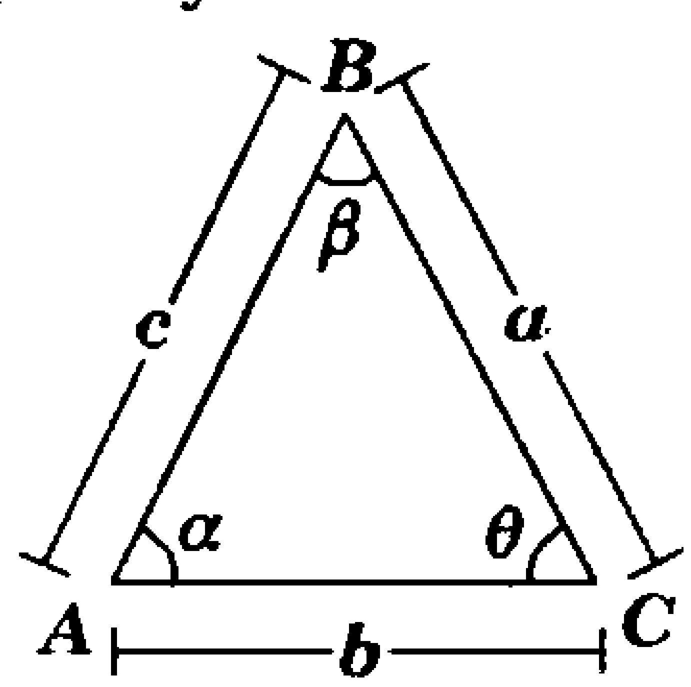
$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: laterales

$\overline{AC}$: base

* Se cumple : $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB$

C) TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

Es aquel triángulo cuyos lados son de igual longitud.



* En la figura : si $a = b = c$

$\Rightarrow \Delta ABC$ = equilátero

* Además : $\alpha = \beta = \theta = 60°$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior AD tal que $BA=BD$.

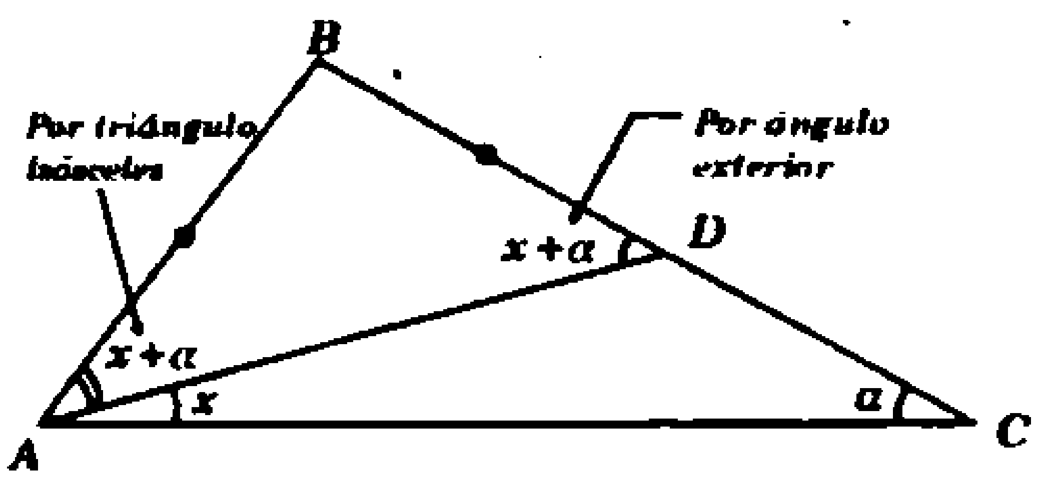
Calcular $m\sphericalangle DAC$

si $m\sphericalangle BAC - m\sphericalangle DCA = 36°$

A)20° B)54° C)18° D)10° E)24°

RESOLUCIÓN:

* Esquematizando:



* Del dato :

$$\overbrace{(x+\alpha+x)} - \overbrace{\alpha} = 36°$$

$$\Rightarrow 2x = 36° \Rightarrow x = 18°$$

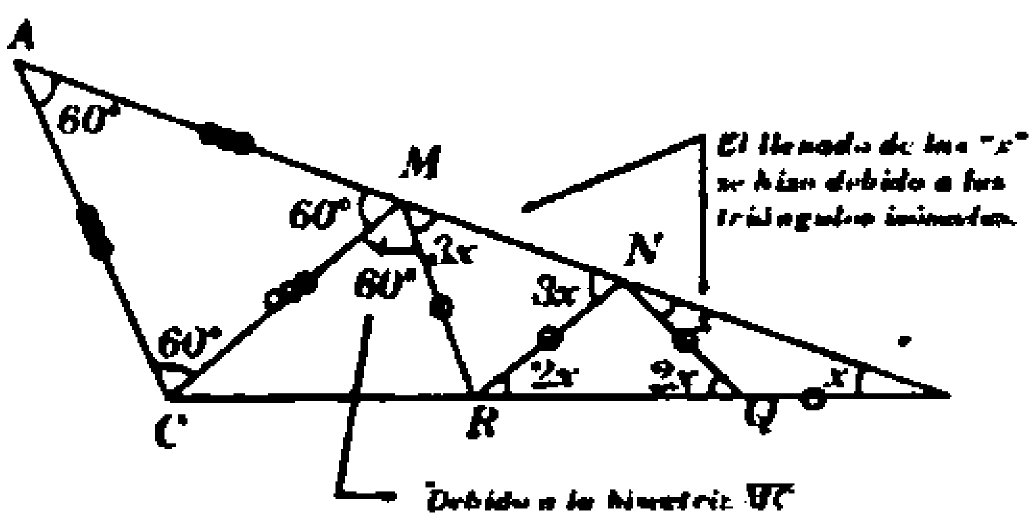
RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

En un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ se ubican los puntos consecutivos M y N, y en BC los puntos Q y R de modo que $BQ=QN=NR=RM$. Calcular $m\sphericalangle ABC$,si al trazar $\overline{MC}$ bisectriz de AMR se obtiene el triángulo equilátero AMC .

A) 30° B) 15° C) 10° D) 20° E) 25°

RESOLUCIÓN :



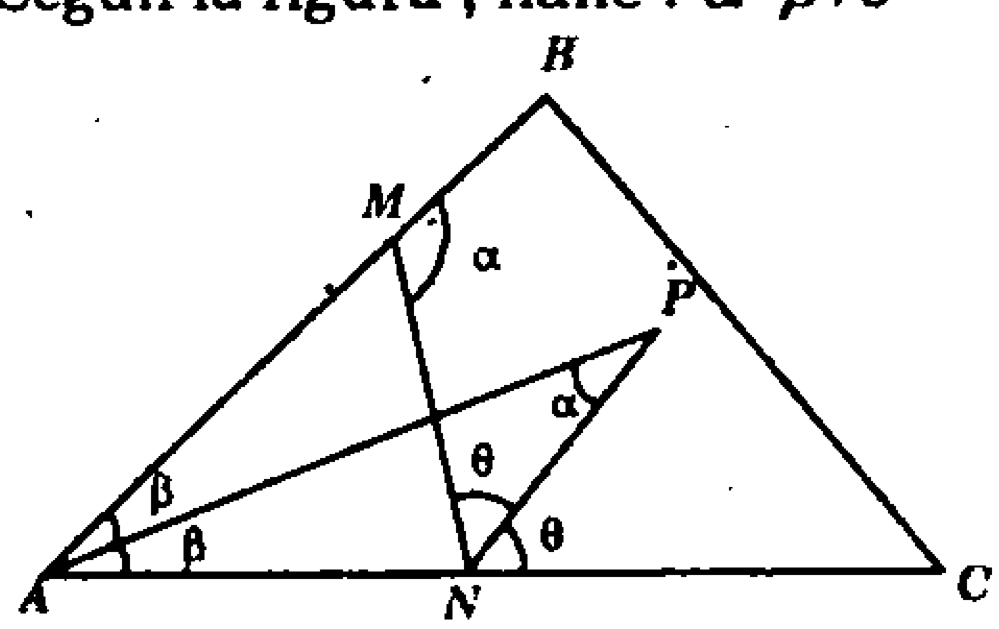
* Del punto "M", se puede apreciar que :

$$60°+60°+3x=180°$$

$$\Rightarrow x=20°$$ **RPTA : "D"**

PROBLEMA 3 :

Según la figura , halle : $\alpha-\beta+\theta$



A)70° B)80° C)100° D) 120° E)130°

RESOLUCIÓN :

* Por ángulo exterior:

$\underbrace{\beta+\alpha=\theta}$ y $\underbrace{2\beta+m\sphericalangle AMN=2\theta}$

$\alpha=\theta-\beta$ $\qquad 2\beta+180°-\alpha=2\theta$

* Al reemplazar:

$$2\beta+180°-\alpha=2(\beta+\alpha)\Rightarrow\alpha=60°$$

* Piden :

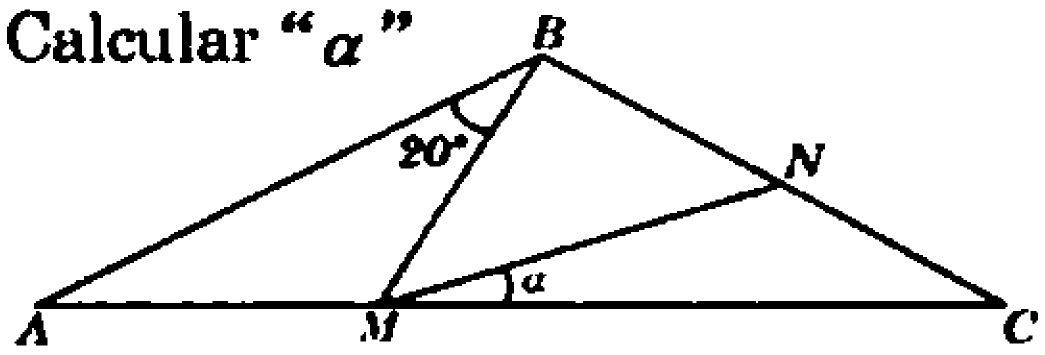
$$\alpha+\theta-\beta=\alpha+\alpha=2\alpha=2(60)°=120°$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

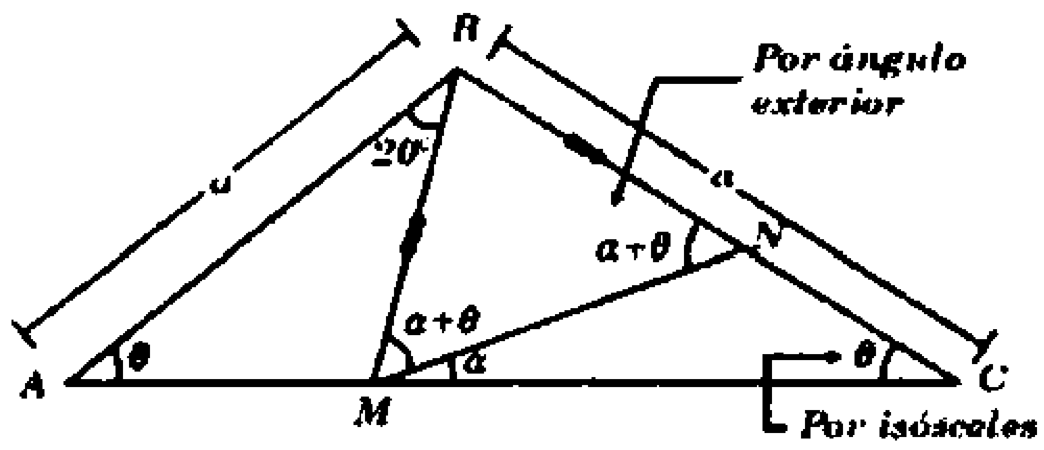
Si : $BM=BN$ y $AB=BC$.

Calcular "α"



A)8° B)5° C)20° D)10° E)15°

RESOLUCIÓN:



* Ahora en el triángulo sombreado, aplicando la propiedad del ángulo exterior

$$\theta+20°=\alpha+\theta+\alpha$$

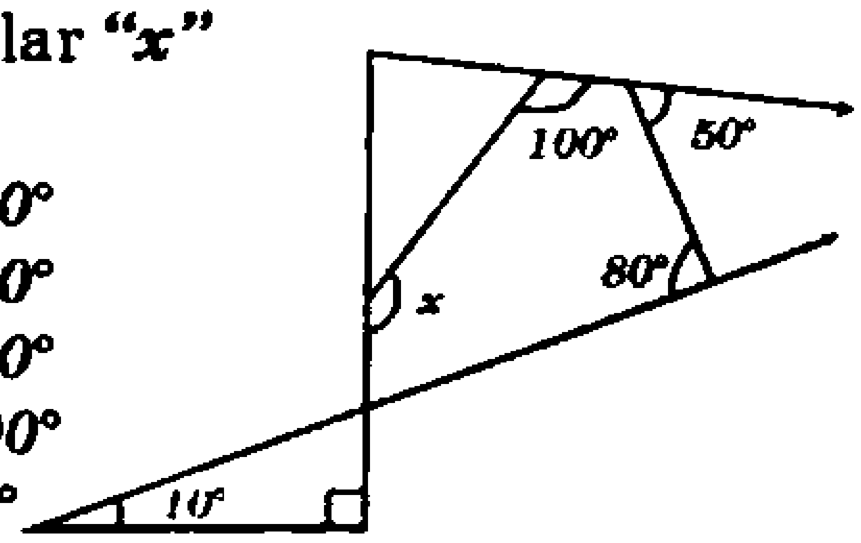
$$\Rightarrow 20°=2\alpha\Rightarrow 10°=\alpha$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

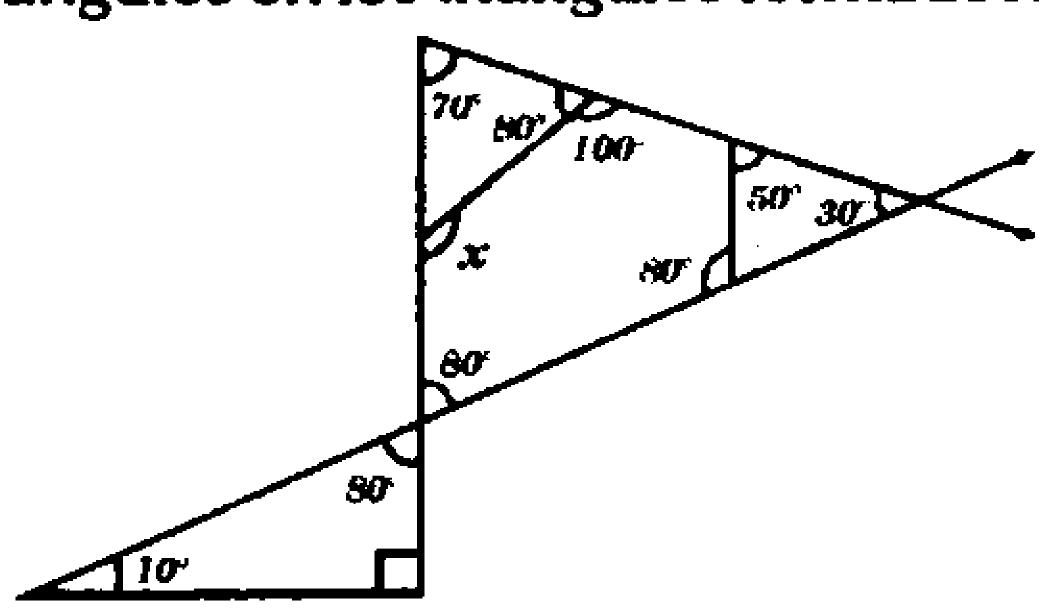
Calcular "x"

A) 150°
B) 140°
C) 130°
D) 100°
E) 80°



RESOLUCIÓN :

*Prolongando las rectas e indicando las medidas de los ángulos en los triángulos formados:



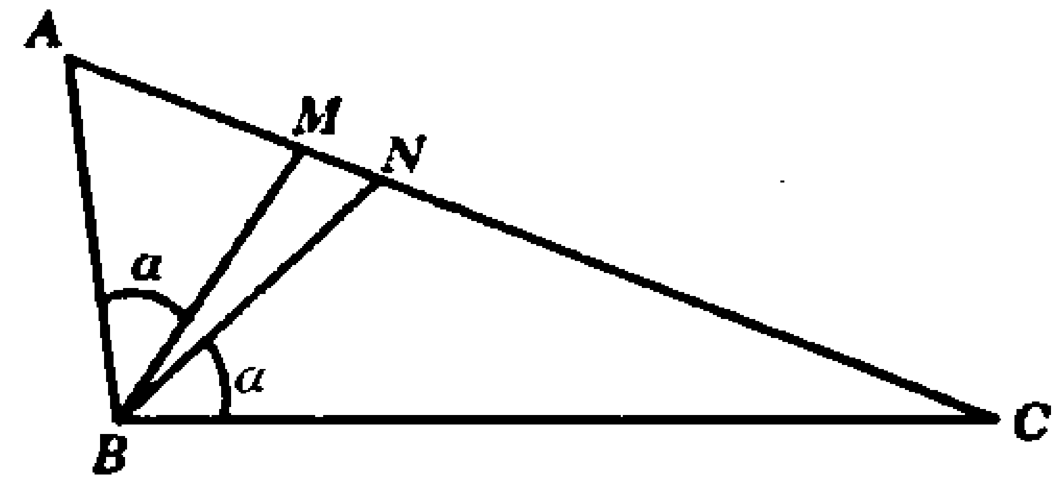
* Se puede apreciar que:

$$x=70°+80°=150°$$

RPTA : "A"

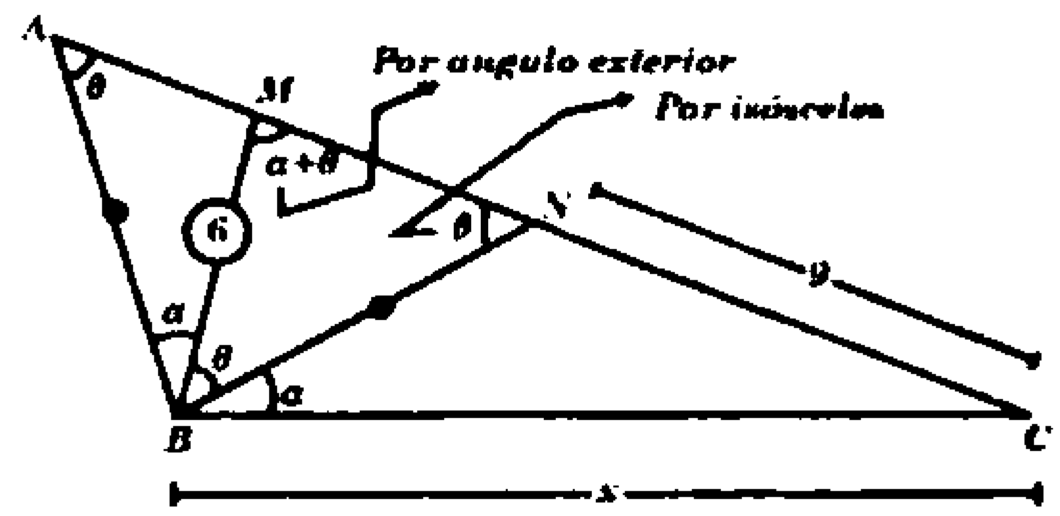
PROBLEMA 6 :

Calcular BC, de la figura mostrada, si $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle MBN$, también: $AB=BN$, $BM=6$ y $NC=9$.



A) 6 B) 7,5 C) 9 D) 12 E) 15

RESOLUCIÓN :



* También se aprecia que : $MN=6$

* Como que el ΔBCM es isósceles

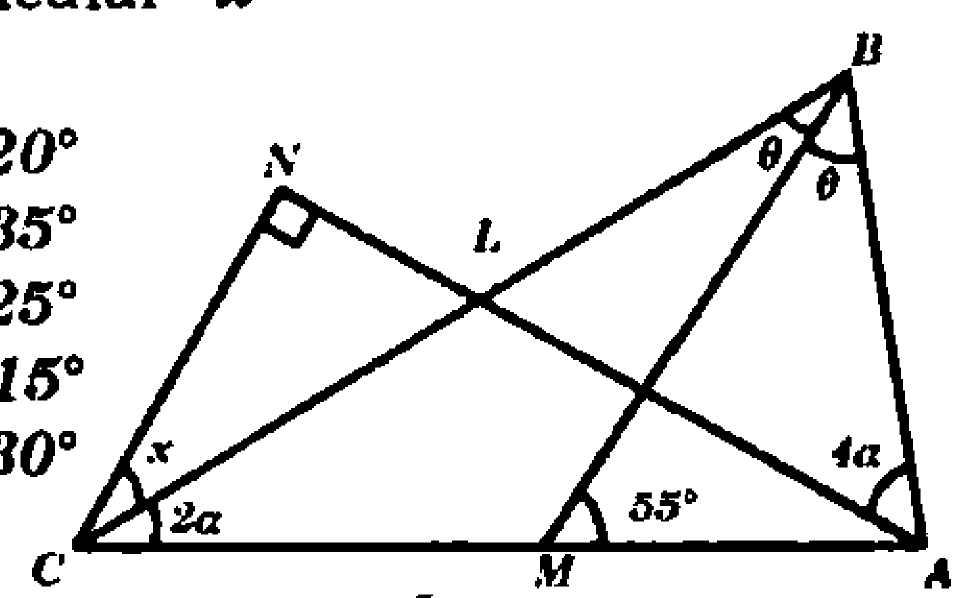
$$\Rightarrow x=MC=MN+NC=6+9=15$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

Calcular "x"

A)20°
B)35°
C)25°
D)15°
E)30°



RESOLUCIÓN :

* En el punto "L" (por opuestos por el vértice) , se deduce que:

$$x+90°=4\alpha+2\theta$$

$$\Rightarrow x=2(2\alpha+\theta)-90° \;\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

* Por ángulo exterior (ΔCBM):

$$2\alpha+\theta=55° \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

* Reemplazando (II) en (I):

$$x=2(55°)-90°=20°$$

RPTA : "A"

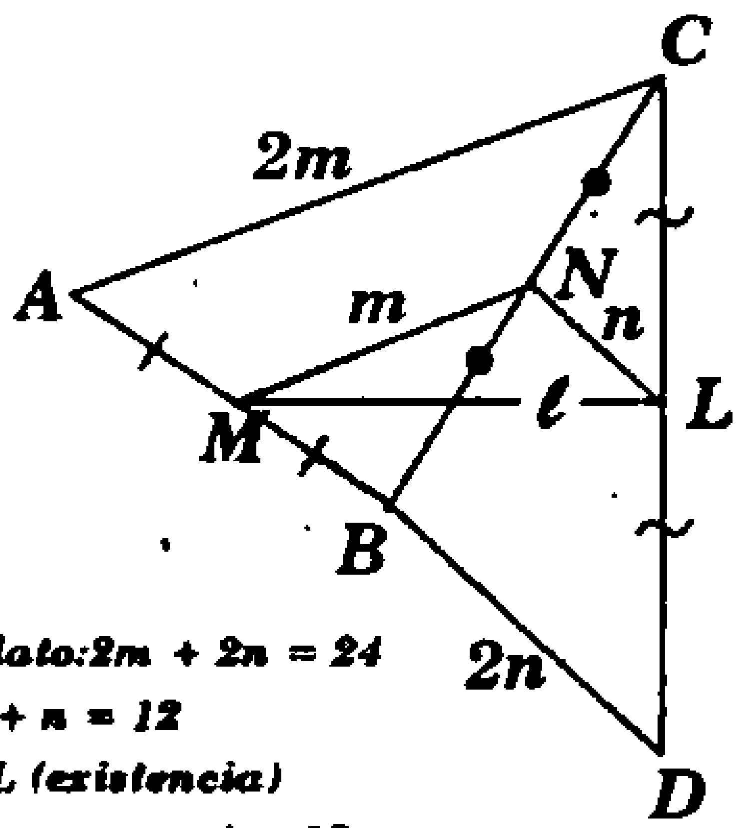
PROBLEMA 8 :

Se trazan los segmentos consecutivos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de tal forma que al unir sus puntos medios se forma un triángulo .

Si $\overline{AC}+\overline{BD}=24m$, entonces una posible medida de uno de los lados del triángulo es:

A) 15m B) 12m C) 16m
D) 11m E)14m

RESOLUCIÓN :

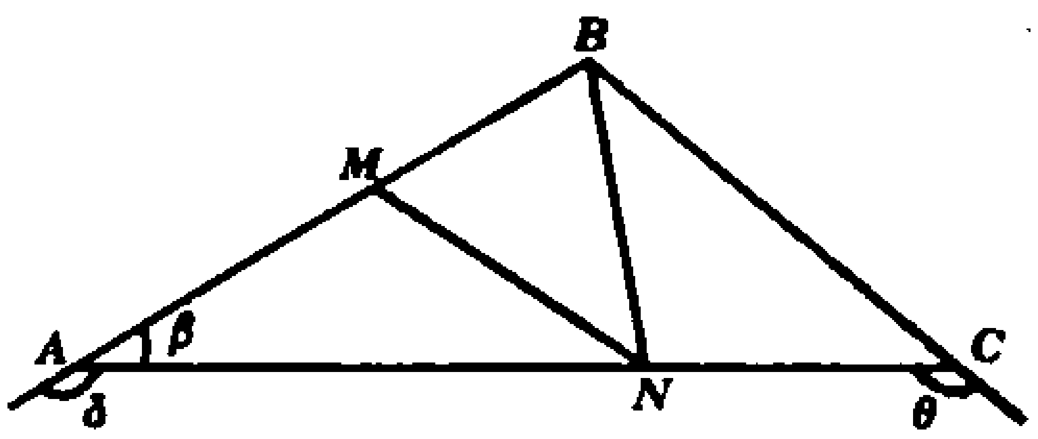


Por dato: $2m + 2n = 24$
$\Rightarrow m + n = 12$
ΔMNL (existencia)
$\Rightarrow \ell < m + n \Rightarrow \ell < 12$
una posible medida del lado ML es igual a 11
(descartando claves)

RPTA : "D"

PROBLEMA 9:

Si: $\delta + \theta = 220°$ y $AM = MN = NB = BC$.

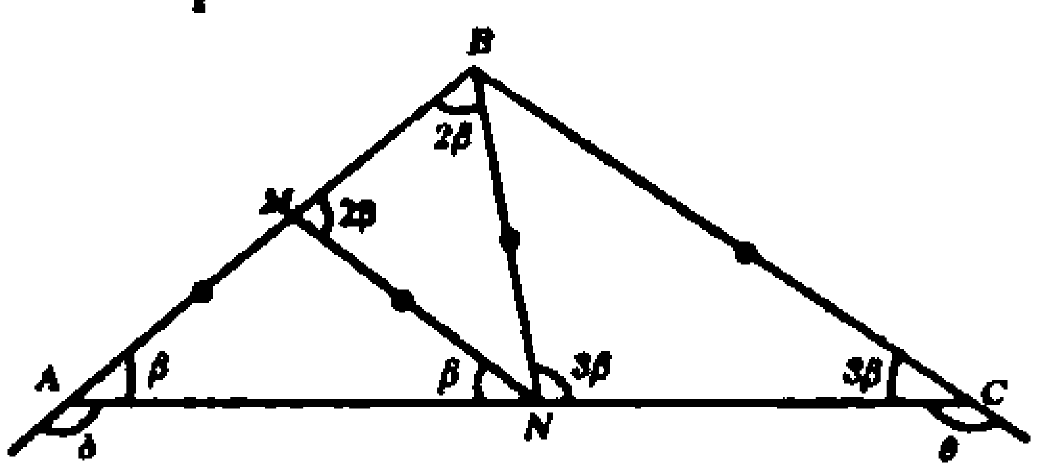


Calcular "β"

A) 20° B) 35° C) 45° D) 60° E) 32°

RESOLUCIÓN :

* Completando los datos :



* De la figura :

$\beta + \delta = 180°$
$3\beta + \theta = 180°$ (+)

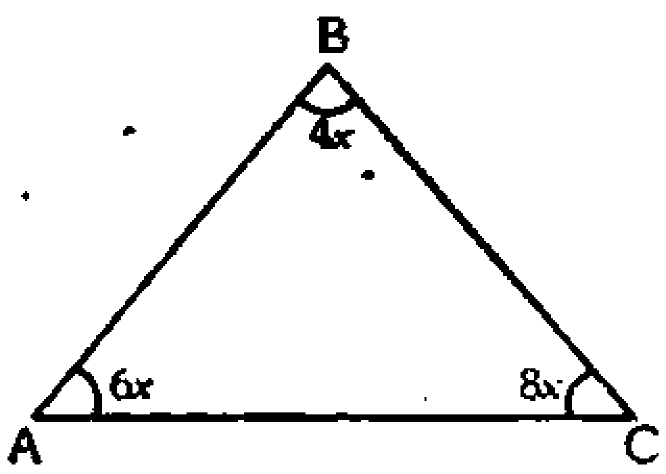
$4\beta + \delta + \theta = 360°$
$4\beta + 220° = 360° \longrightarrow \beta = 35°$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS 31

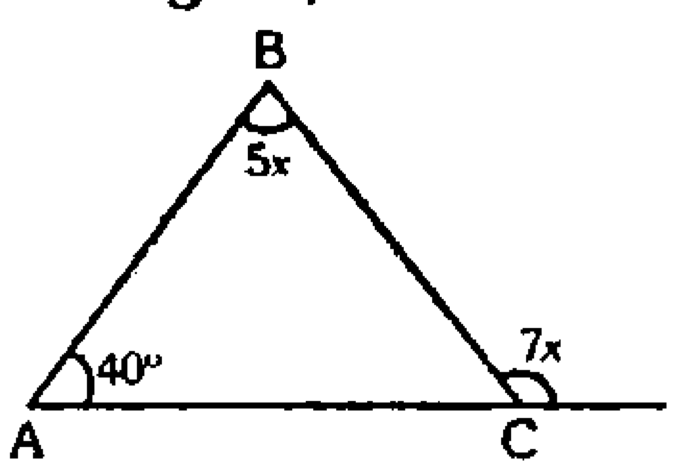
01 Según el gráfico, calcular x.

A) 12°
B) 20°
C) 10°
D) 16°
E) 18°



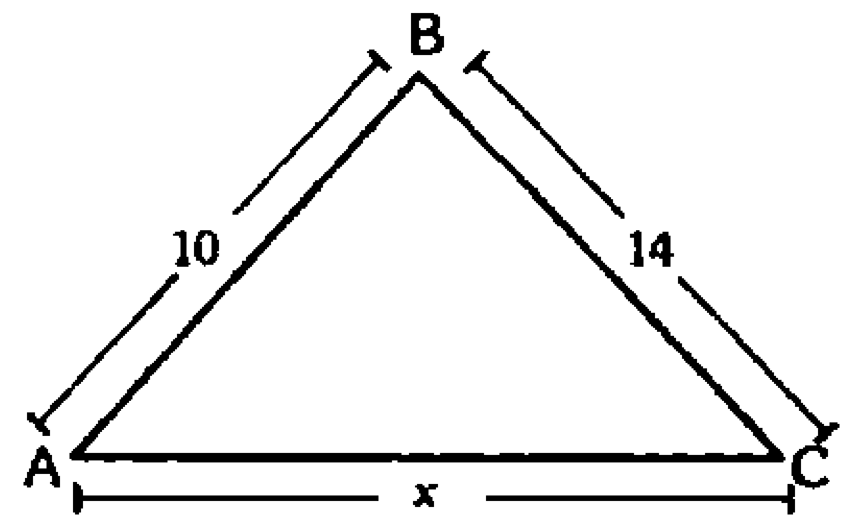
02 Según la figura, calcular x.

A) 50°
B) 40°
C) 10°
D) 20°
E) 30°

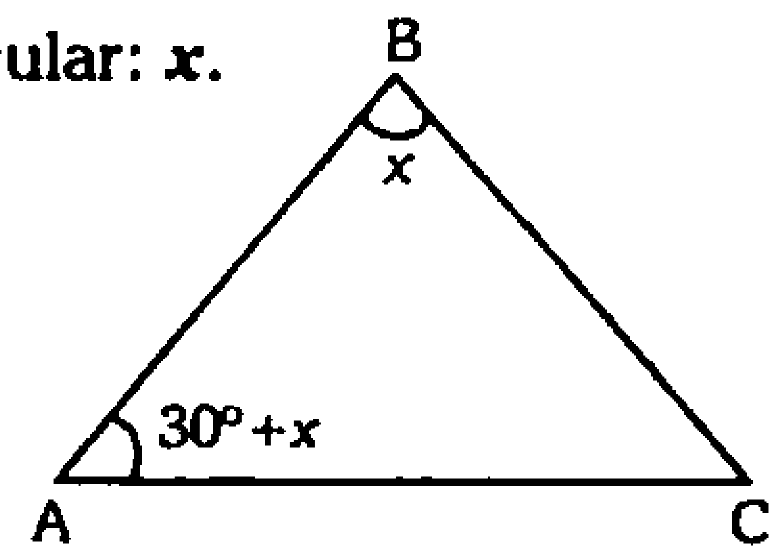


03 Según el gráfico, calcular el mayor valor entero de x.

A) 8
B) 7
C) 6
D) 5
E) 4

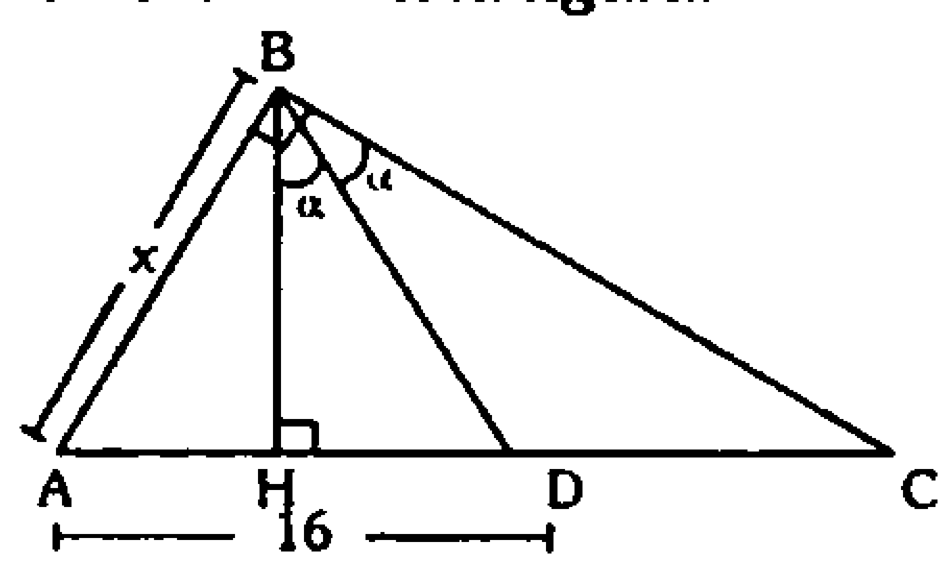


04 En el ΔABC, $AB = BC$, calcular: x.



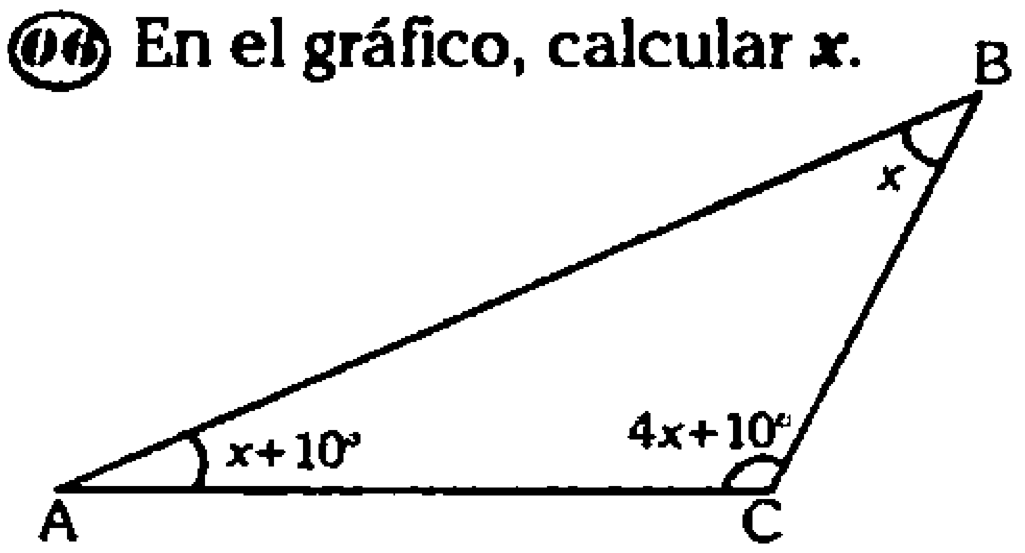
A) 40° B) 50° C) 60° D) 80° E) 70°

05 Calcular x en la figura:



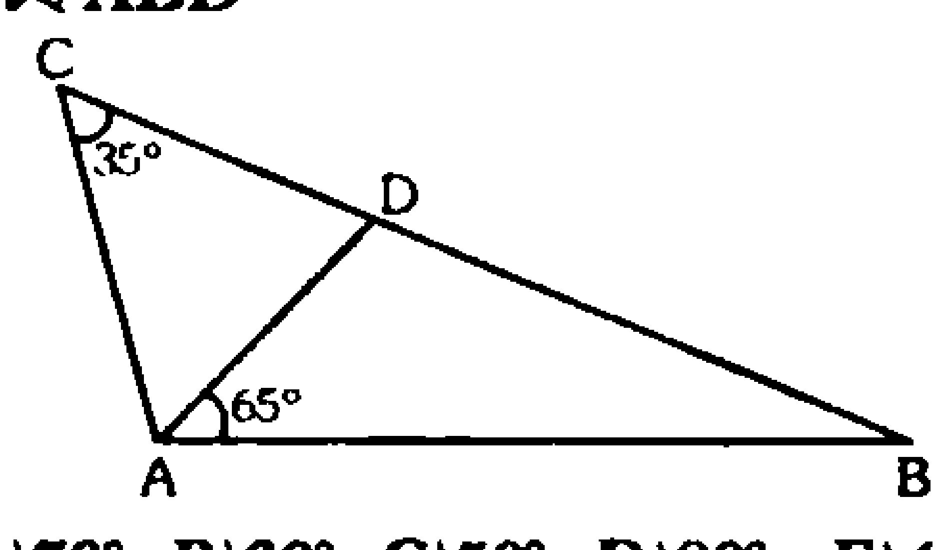
A) 16 B) 18 C) 8 D) 10 E) 12

06 En el gráfico, calcular x.



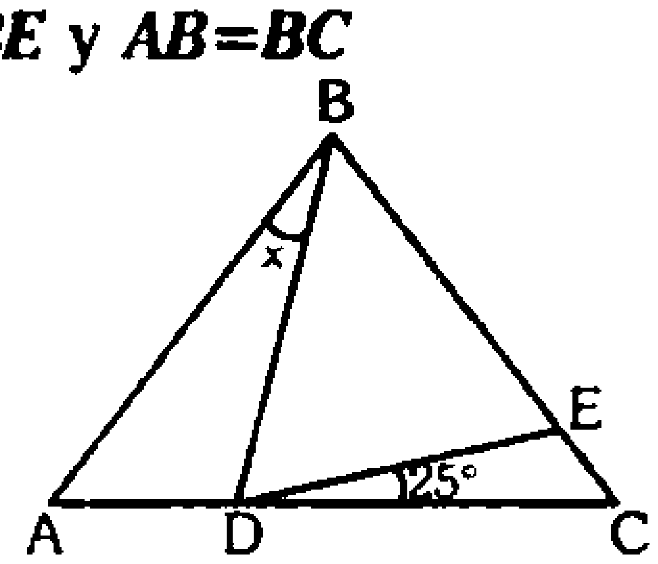
A) 48° B) 60° C) 30° D) 36° E) 54°

07 En la figura $CD = AD$. Calcular: $m\sphericalangle ABD$



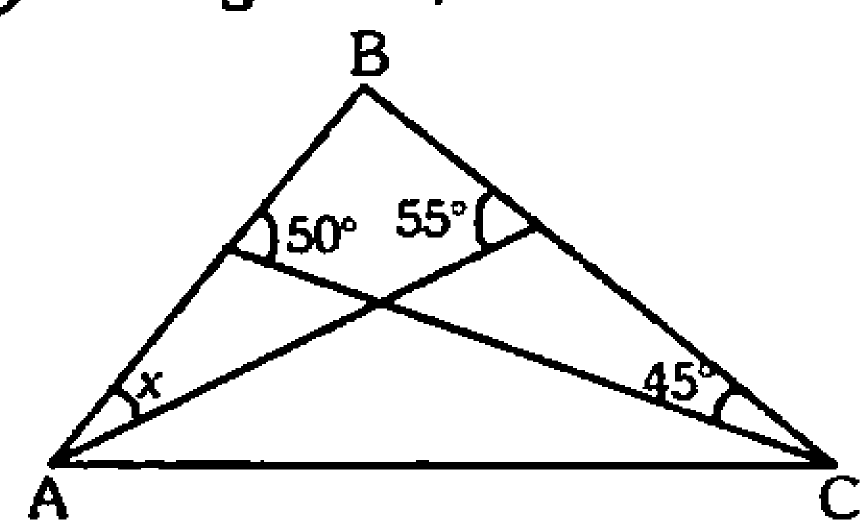
A) 70° B) 60° C) 50° D) 80° E) 40°

08 Según el gráfico calcular: x, si: $BD = BE$ y $AB = BC$



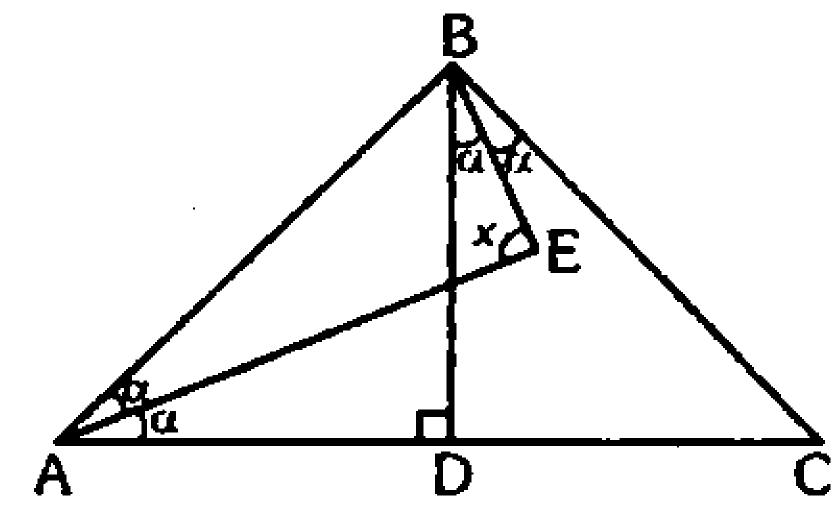
A) 60° B) 50° C) 40° D) 48° E) 42°

09 En el gráfico, calcular x.



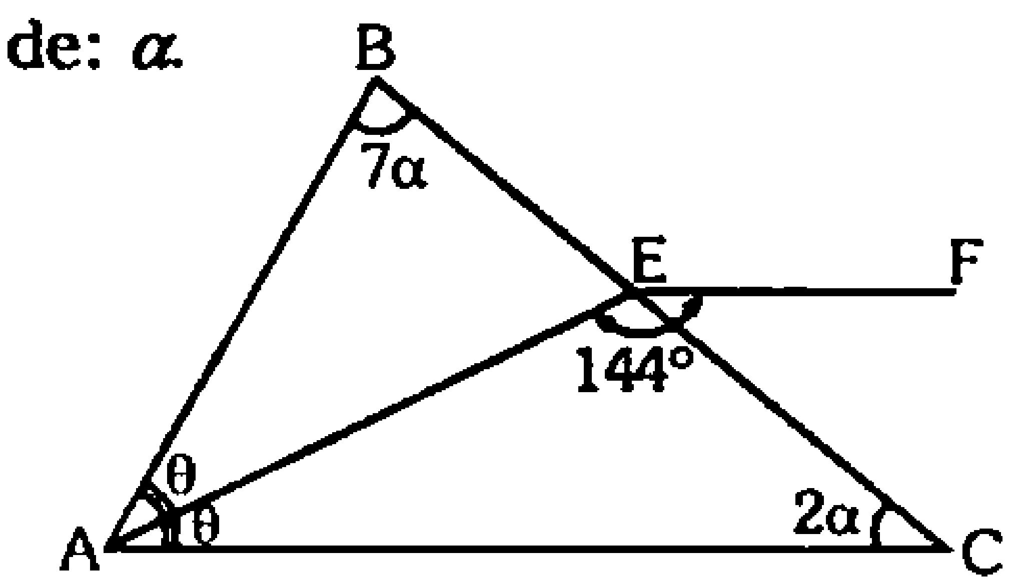
A) 45° B) 40° C) 30° D) 35° E) 50°

10 Del gráfico, calcular x.



A) 80° B) 72° C) 90° D) 100° E) 105°

11 Si $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, calcular el valor de: α.

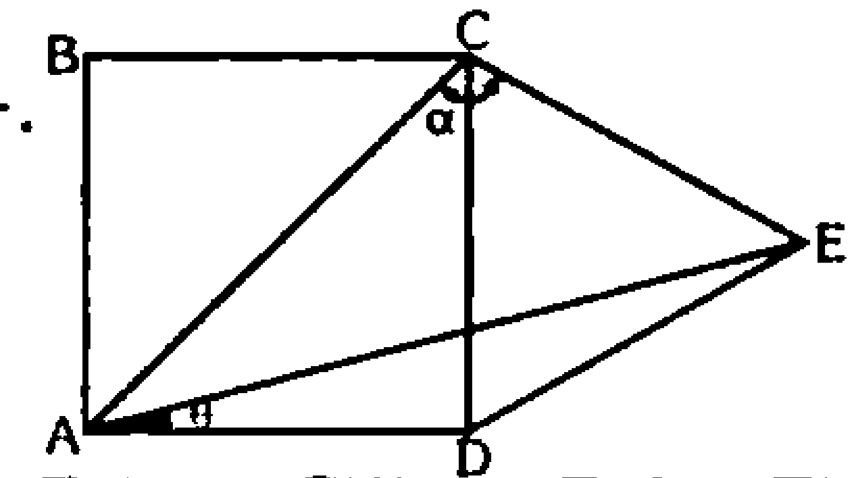


A) 10° B) 11° C) 12° D) 13° E) 14°

12 En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$, sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubica los puntos P y Q respectivamente, de modo que $AP = PQ = QB$. Si el ángulo C mide 62° entonces la medida del ángulo BAQ es:

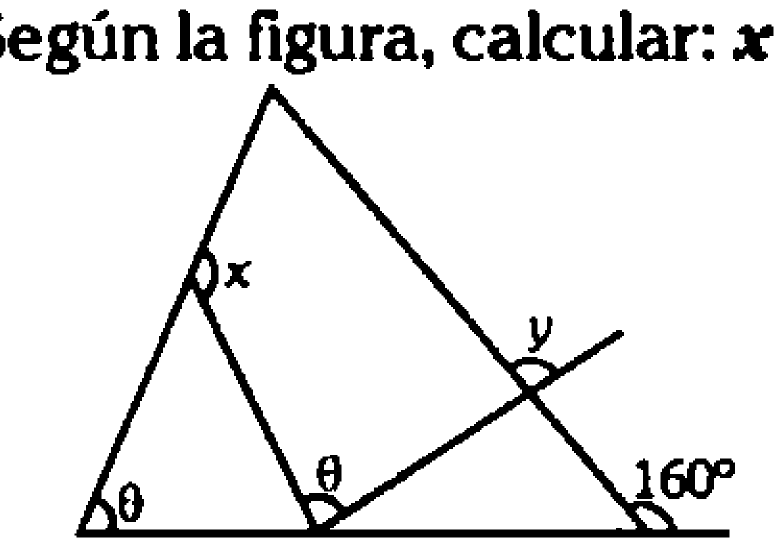
A) 22° B) 44° C) 31° D) 38° E) 28°

13 $ABCD$ es un cuadrado y el $DCED$, equilátero. Calcular el valor de: $\frac{\alpha}{\theta}$.



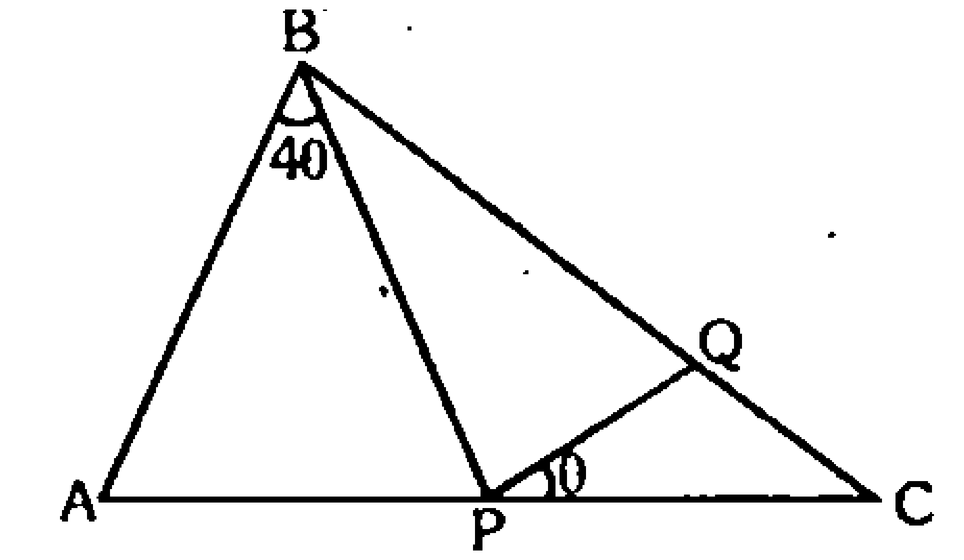
A) 3 B) 5 C) 7 D) 6 E) 8

14 Según la figura, calcular: $x - y$.



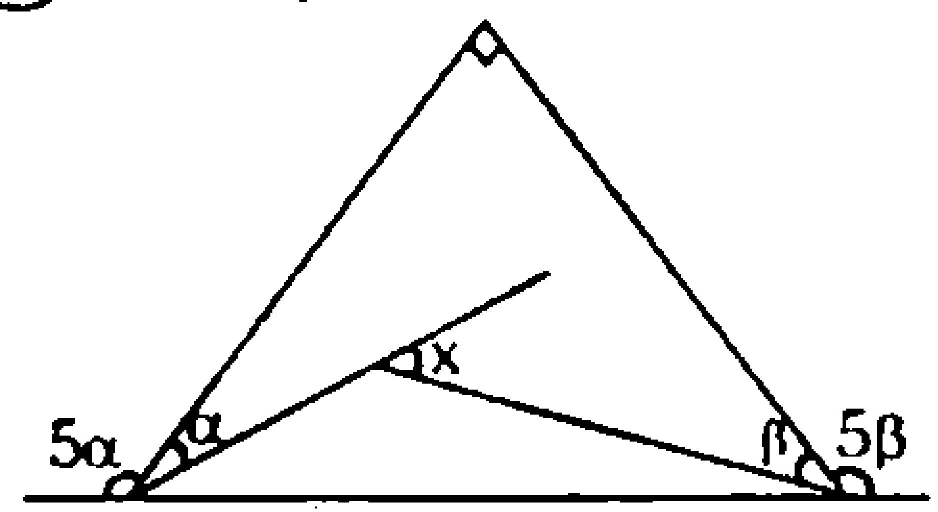
A)10° B)20° C)30° D)45° E)60°

(15) Del gráfico mostrado, calcular: θ. Si: $AB = BP = PQ = QC$.



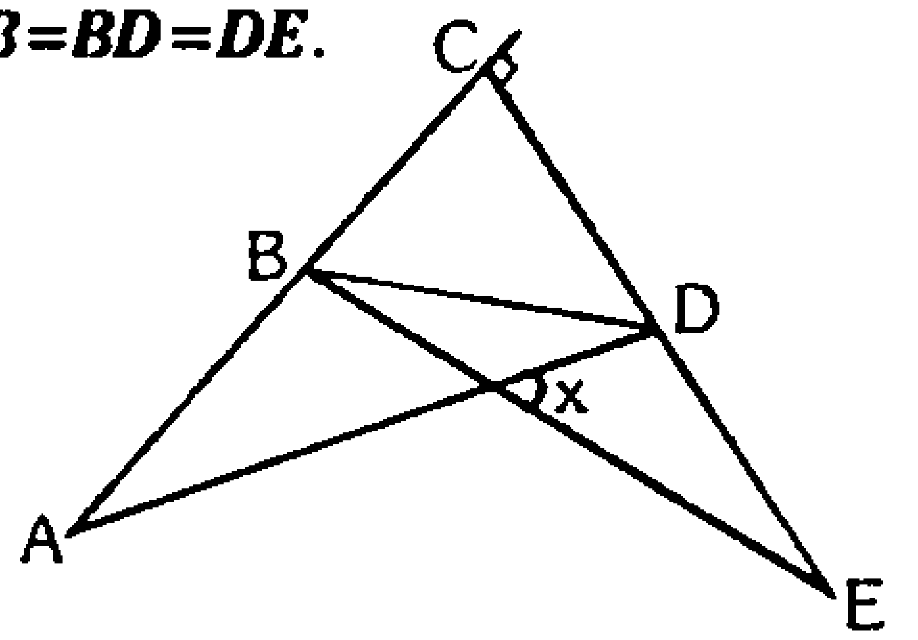
A)10° B)12° C)15° D)18° E)20°

(16) En la figura, calcule "x".



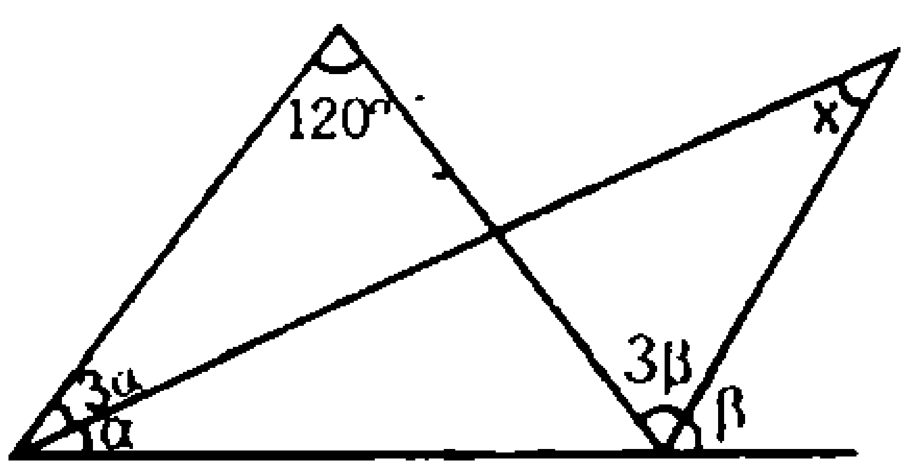
A)36° B)54° C)45° D)60° E)30°

(17) En la figura, calcule "x", si: $AB=BD=DE$.



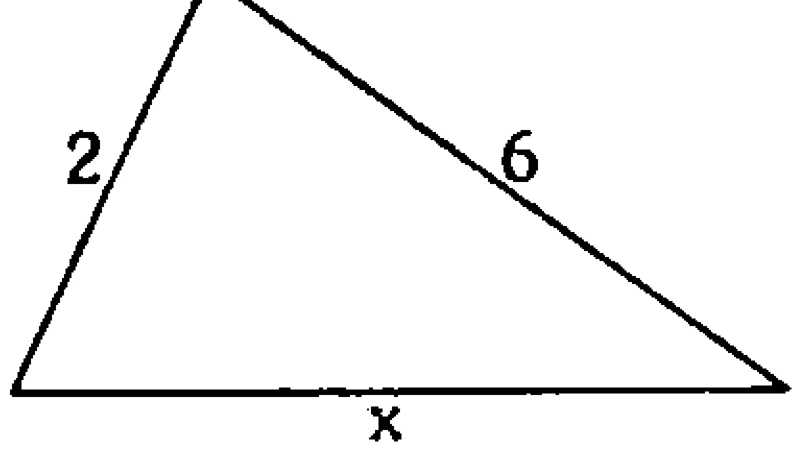
A)36° B)50° C)30° D)60° E)45°

(18) En la figura, calcule "x".



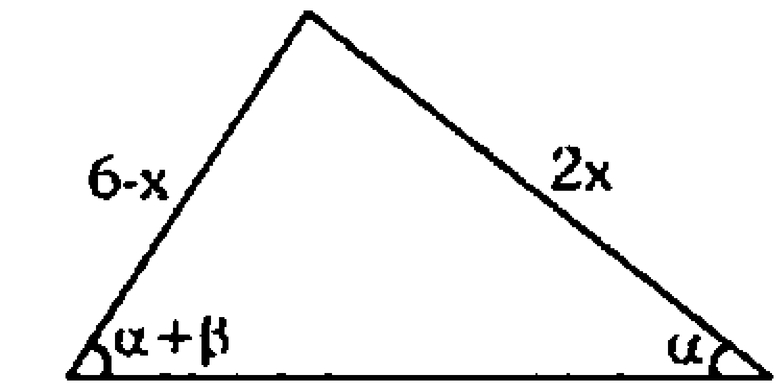
A)30° B)40° C)50°
D)60° E)24°

(19) En la figura, calcule la diferencia entre el mayor valor y el menor valor entero que puede tomar "x".



A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

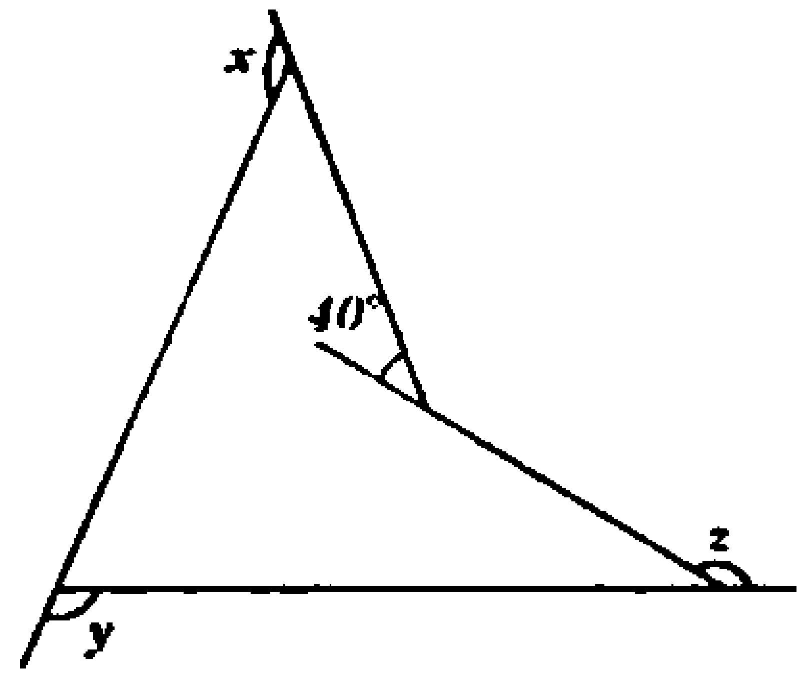
(20) En la figura, calcule el mínimo valor entero que puede tomar "x".



A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

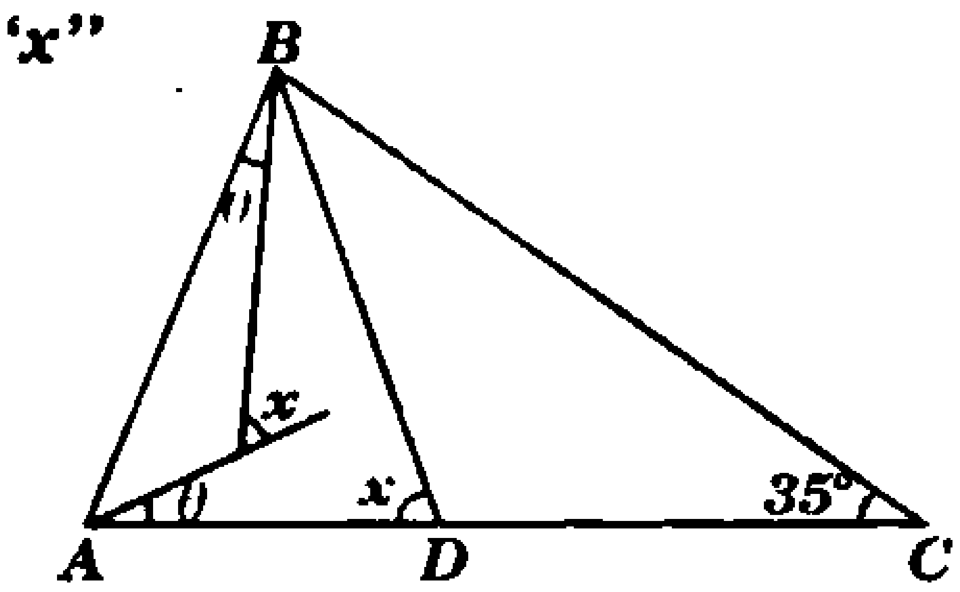
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) A partir del gráfico, calcular: $x+y+z$.



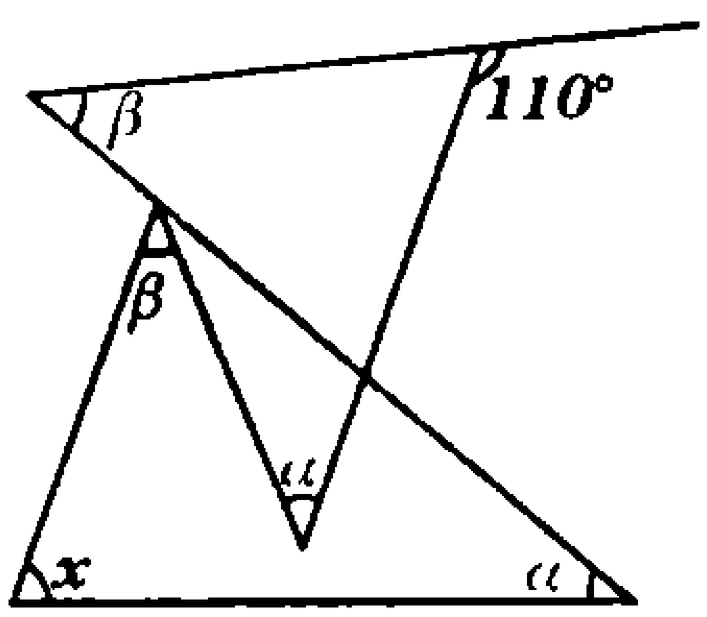
A)360° B)420° C)320° D)400° E)280°

(02) Si $AB=CD$, calcular el valor de "x"



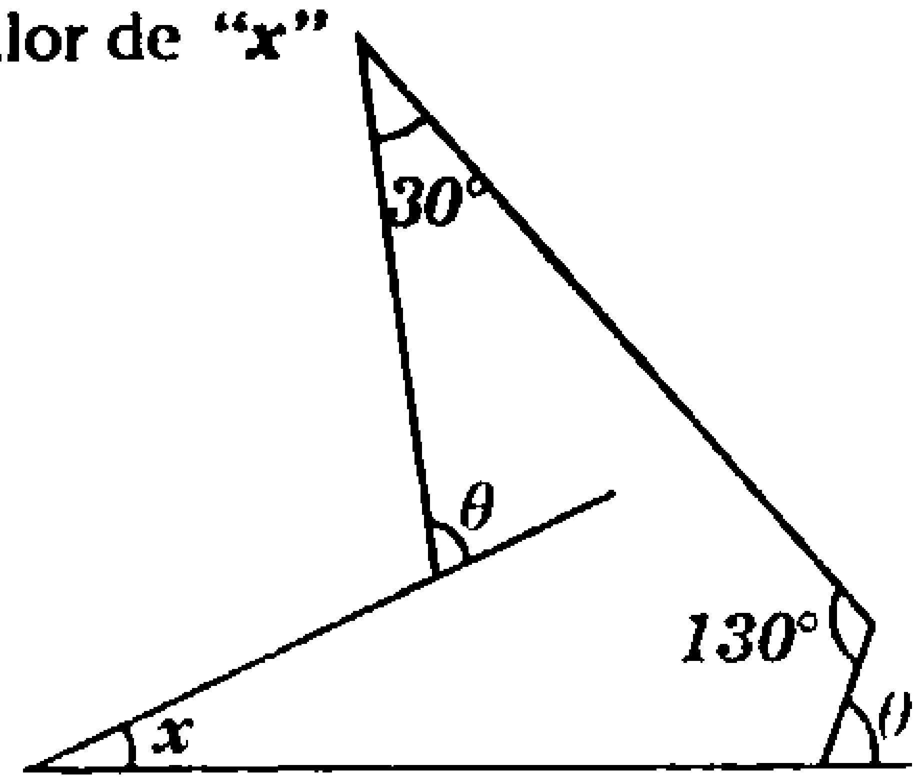
A)60° B)70° C)75° D)65° E)55°

(03) Calcular el valor de "x"



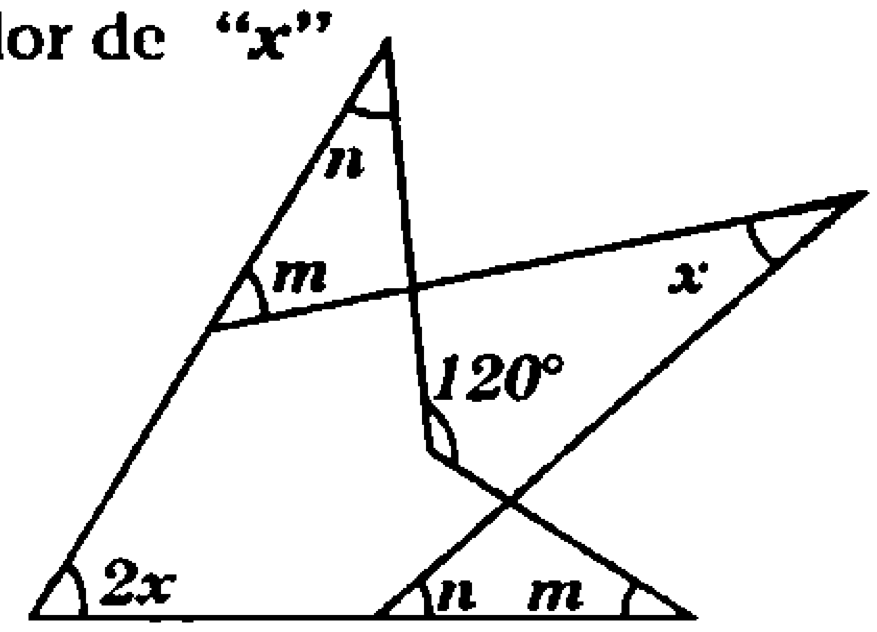
A)70° B)60° C)55° D)80° E)65°

(04) A partir del gráfico, calcular el valor de "x"



A)30° B)25° C)50° D)20° E)15°

(05) A partir del gráfico, calcular el valor de "x"



A)20° B)24° C)26° D)22,5° E)30°

(06) Se tiene un triángulo ABC, $m\sphericalangle A=80°$ en la recta BC se ubican los puntos P y Q; en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubican el punto "M" tal que $m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle QPM)$ y $m\sphericalangle ACB=2(m\sphericalangle PQM)$.
calcular $m\sphericalangle PMQ$.

A)130° B)120° C)160° D)125° E)150°

(07) Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en el interior se ubica el punto "P" y en la prolongación de $\overline{BP}$ se ubica el punto "R" tal que: $m\sphericalangle RPC=40°$;

$m\sphericalangle ABP=3(m\sphericalangle PBC)$ y

$m\sphericalangle PCA=3(m\sphericalangle PCB)$

Calcular $\sphericalangle ABC$.

A)110° B)150° C)160° D)130° E)140°

(08) Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* segun corresponda.

( ) Si dos lados de un triángulo escaleno miden *5* y *7*, entonces el tercer lado toma siete valores enteros.

( ) si dos lados de un triángulo Isosceles miden *5* y *12* entonces el tercer lado puede medir *5*

( ) Dado un triángulo ABC tal que $m\sphericalangle A=2(m\sphericalangle C)$ entonces $BC=2(AB)$

( ) Dados los segmentos BC y BA. si $m\sphericalangle ABC=60°$ entonces el triángulo ABC es equilátero.

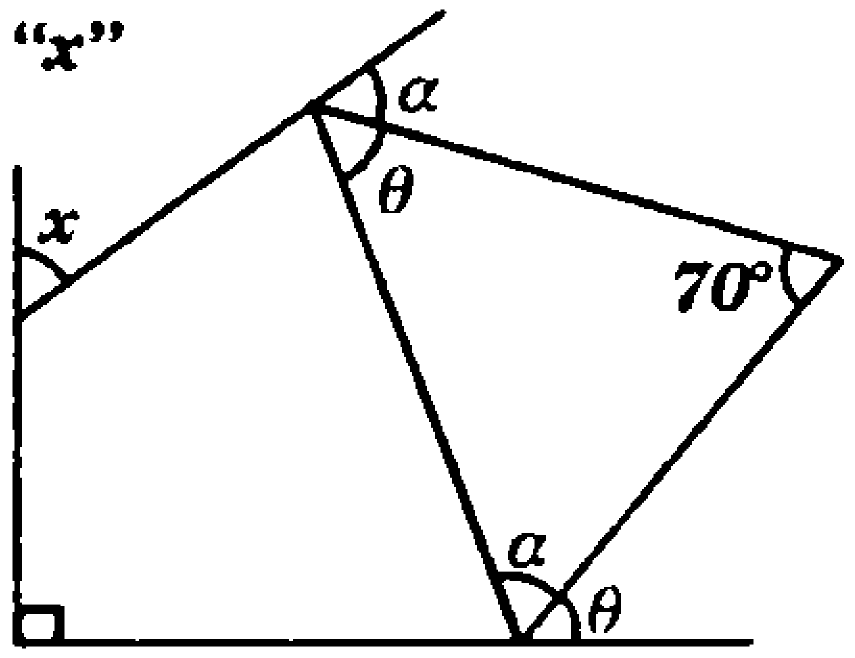
A)VFVV B)FVVF C)FFFF
D)VFFF E)VVFF

(09) Se tiene un triángulo acutángulo ABC tal que el ángulo

exterior en *"A"* mide $9x$ y el ángulo exterior en *"C"* mide $6x$ Calcular el máximo valor entero y el mínimo valor entero de x. Dar como respuesta la suma de dichos valores.

A)42 B)21 C)33 D)39 E)46

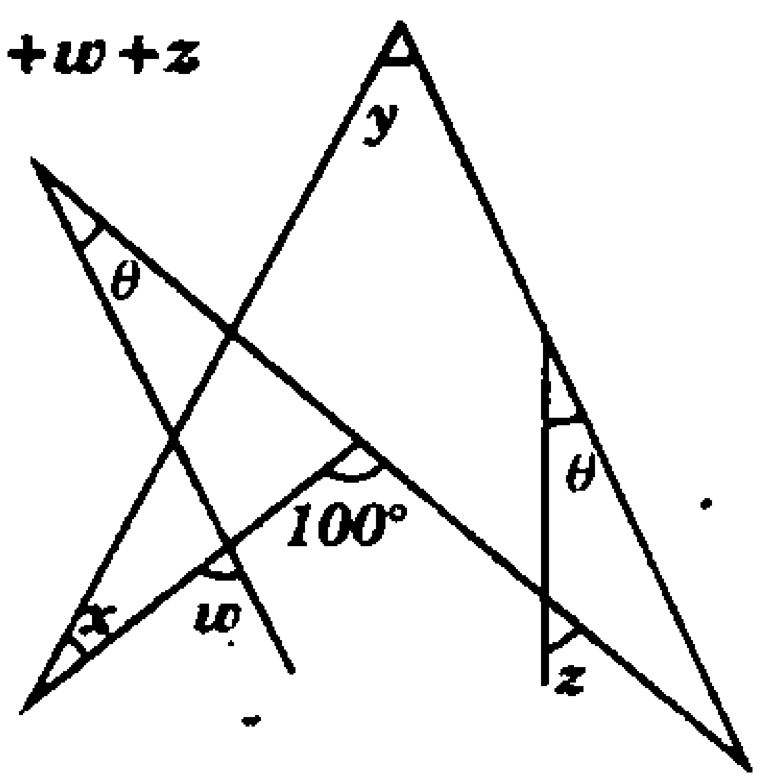
(10) Del gráfico ,calcular el valor de "x"



(11) Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto B, tal que $AB = BC = 12$;en el interior se ubica el punto *"P"* tal que $BP=5$ Determinar la cantidad de valores que puede tomar AP

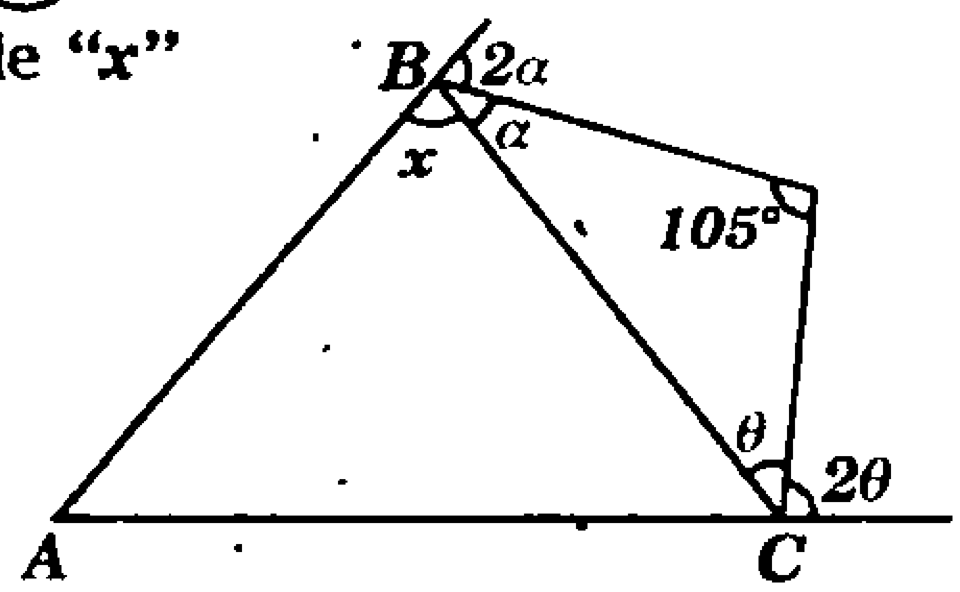
A)5 B)9 C)4 D)8 E)7

(12) A partir del gráfico, calcular: $x+y+w+z$



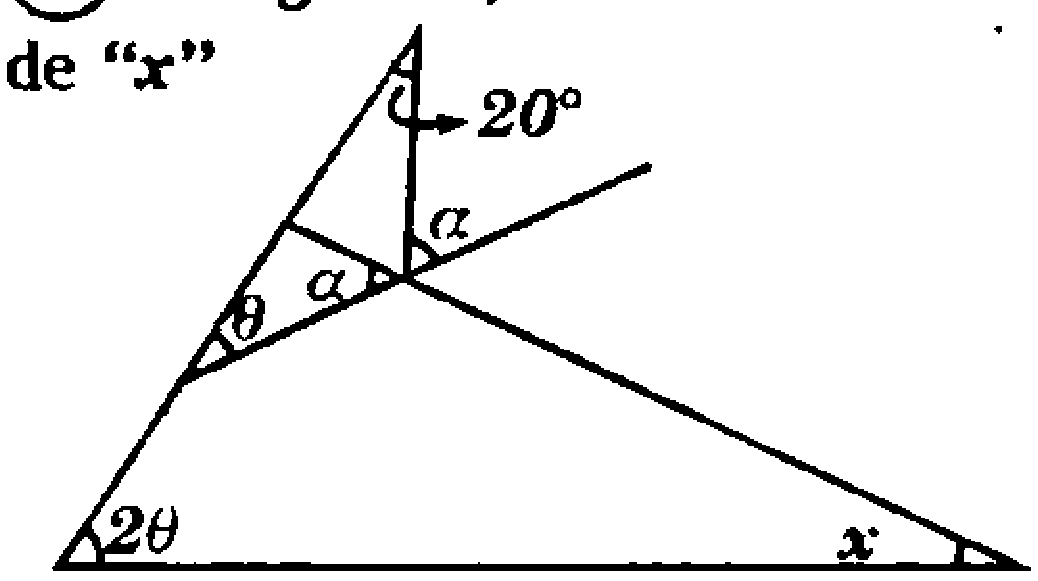
A)100° B)150° C)180° D)400° E)200°

(13) Si $AB = BC$, calcular el valor de "x"



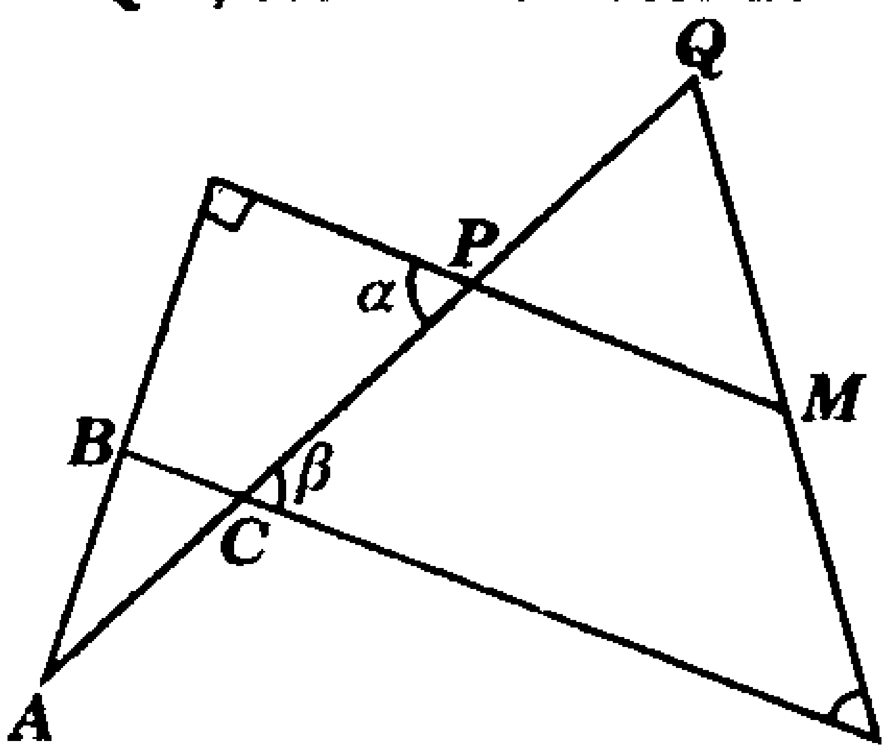
A)80° B)96° C)90° D)110° E)100°

(14) Del gráfico, calcular el valor de "x"



A)10° B)15° C)20° D)25° E)35°

(15) Si $\alpha+\beta = 140°$, $AB = AC$ y $PQ = QM$, calcular el valor de "x".



A)40° B)70° C)35° D)50° E)45°

(16) En la región exterior relativo al lado $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se ubica el punto *"P"* tal que el triángulo BPC es equilátero.

Si : $m\sphericalangle CAP = 3(m\sphericalangle APC)$, calcular $m\sphericalangle APB$.

A)45° B)50° C)37° D)55° E)40°

(17) Se tiene un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que $AP = PQ = QC$ y $m\sphericalangle QAC + m\sphericalangle PCA = 70°$. Calcular $m\sphericalangle B$.

A)40° B)50° C)35° D)45° E)20°

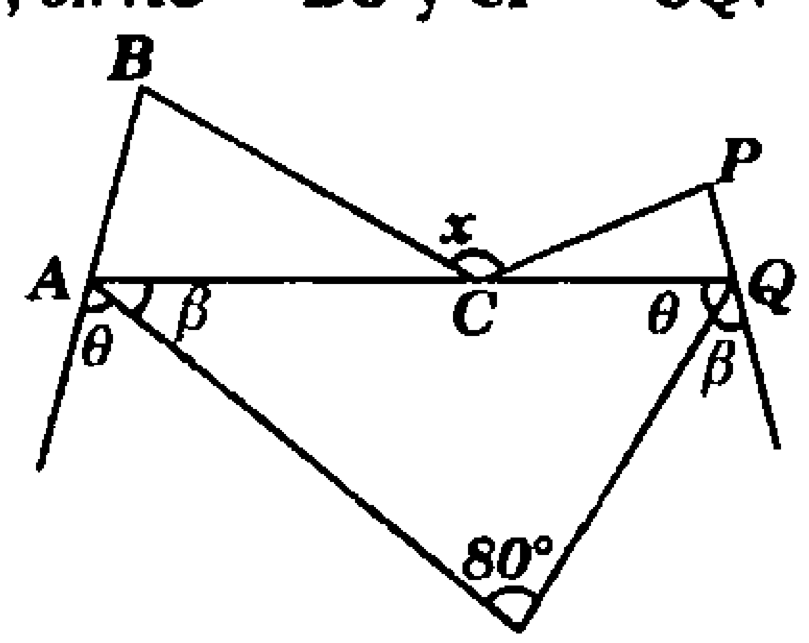
(18) Se tiene un cuadrilátero $ABCD$ tal que $m\sphericalangle B = 150°$, $m\sphericalangle C = 90°$ y $AB = BC = CD$. Calcular $m\sphericalangle A$.

A)30° B)40° C)15° D)45° E)22,5°

(19) En un triángulo ABC, recto en B, se traza exteriormente el triángulo rectángulo isósceles BCE recto en *"E"*; luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{EC}(H \in \overline{EC})$. Si $AB = 2\sqrt{2}$ y $AH = 6$, calcular BE.

A)4 B)$2\sqrt{2}$ C)5 D)8 E)$3\sqrt{2}$

(20) Del gráfico, calcular el valor de "x", si: $AC = BC$ y $CP = CQ$.

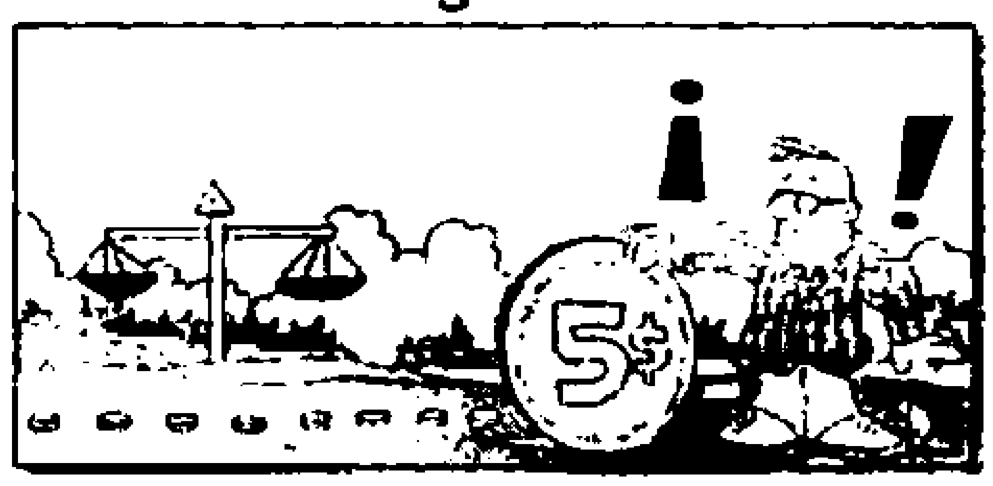


A)160° B)140° C)150° D)130° E)125

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)B	3)A	4)D	5)B	6)A	7)E	8)D	9)C	10)C
11)A	12)E	13)C	14)C	15)D	16)B	17)A	18)D	19)A	20)B

RETO LOGICO:

Se tienen nueve monedas idénticas excepto que entre ellas existe una cuyo defecto es conocido de antemano, por ejemplo, ser más pesada o más liviana que las demás. Queremos determinar cuál es la moneda defectuosa. Para ello contamos con una balanza con platillos de brazos iguales y sin más pesos que las propias monedas. Si necesitamos efectuar la operación en el menor número posible de pesadas, preguntamos , ¿cuál es este número y cuáles son las operaciones que se deben seguir?



RESOLUCIÓN :

* Primero observemos que si tuviéramos sólo 3^1 monedas, en una sola pesada determinamos cuál es la defectuosa conociendo previamente su defecto.

* Con cuatro monedas es necesario realizar dos pesadas para determinar cuál es la defectuosa. Para las $3^2=9$ monedas dividámoslas en dos grupos , uno de tres y otro de las restantes seis.

* Tomemos el grupo de las seis y coloquemos la mitad de éstas en un platillo de la balanza y la otra mitad en el otro: si hay equilibrio es que la defectuosa se encuentra entre las tres de afuera, y como sabemos, se determina con una pesada más. Si hay desequilibrio, el defecto se hace evidente para una de las tres que lo tenga, y en una pesada más, como sabemos, se determina la defectuosa.

* Por lo tanto, bastan **2** pesadas para determinar la defectuosa en un grupo de 3^2 monedas , si se conoce previamente el defecto.

LINEAS NOTABLES
CAPITULO 096

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Establecer la diferencia que existe entre las principales líneas notables asociadas al triángulo.*
* *Aplicar adecuadamente las fórmulas y propiedades de líneas, puntos notables de un triángulo, en los problemas.*
* *Reconocer, el incentro, excentro, ortocentro, baricentro, circuncentro.*

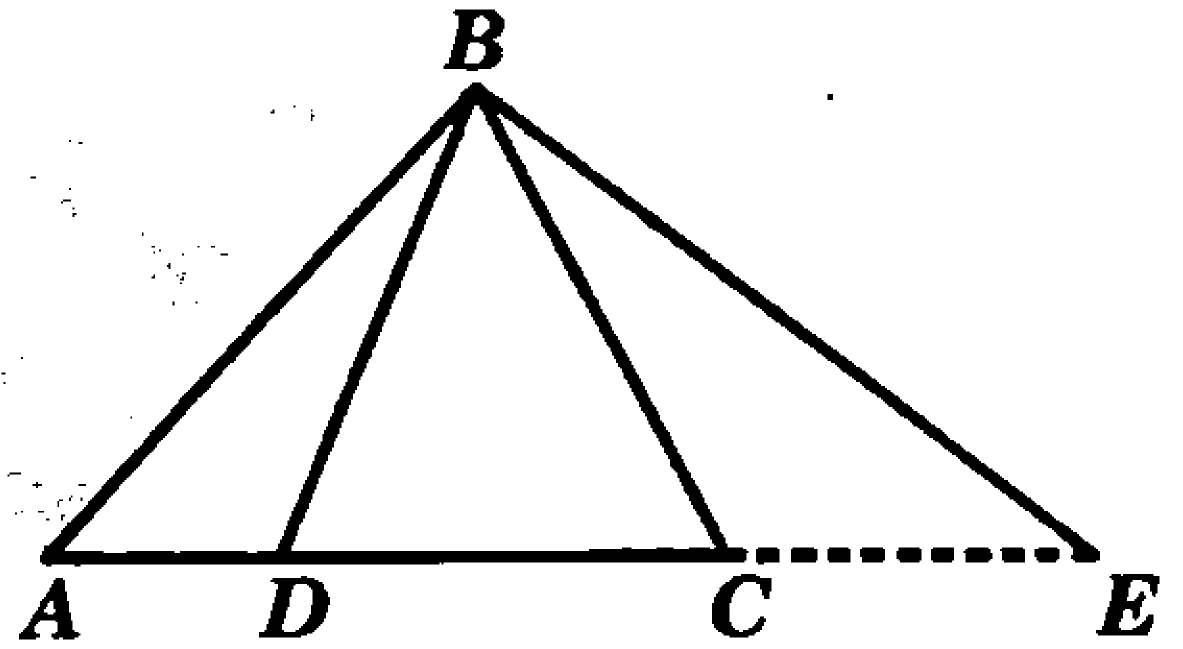
INTRODUCCIÓN :

El hecho de que el hombre de la prehistoria. al construir sus lanzas dándoles formas puntiagudas (triangulares) para poder lograr mayor facilidad en la caza. nos muestra las primeras nociones que se tenia con respecto a las formas. lo cual era algo netamente práctico. inclusive en algunos de los casos era casual (producto de su constante interacción con la naturaleza). Un conocimiento más profundo y ordenado del triángulo lo tuvieron los egipcios en la construcción de las pirámides. llegando a establecer la noción de igualdad de formas y tamaños,más adelante los geómetras de aquel entonces denominaron triángulos congruentes y los usaron para estudiar las propiedades del triángulo. Posteriormente serían usados para establecer medidas angulares y distancias. por ejemplo: el ancho de un río. la altura de las pirámides. etc.

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

I) CEVIANA :

Es aquel segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto o de su prolongación.



* En el ΔABC
* D pertenece a AC

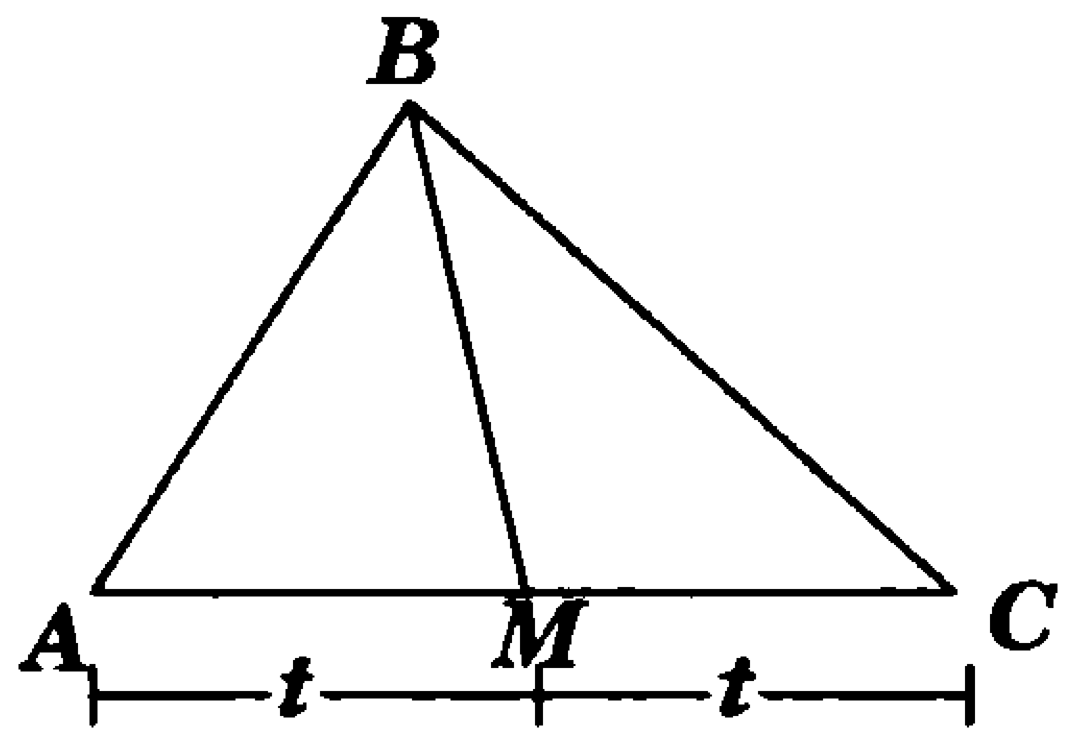
$\Rightarrow \overline{BD}$ ceviana interior relativa a $\overline{AC}$

* E pertenece a la prolongación de $\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{BE}$: ceviana exterior relativa a $\overline{AC}$

II) MEDIANA :

Es una ceviana que biseca el lado al cual es relativa.



* En el ΔABC

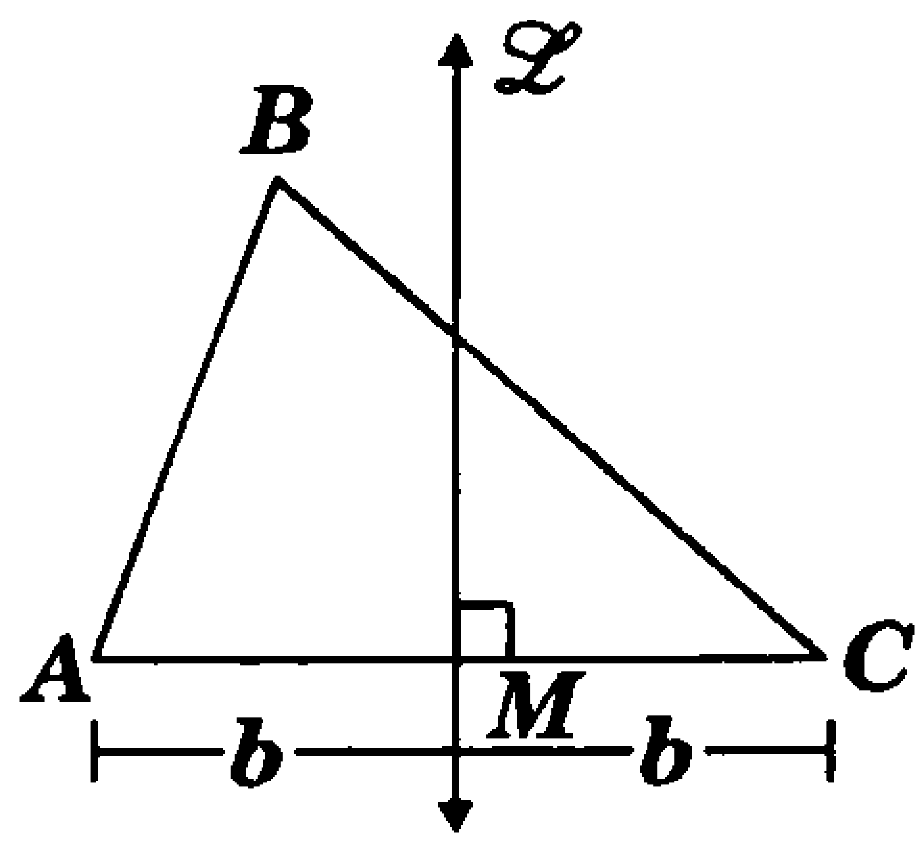
M es punto medio de $\overline{AC}$

$\Rightarrow \overline{BM}$: mediana relativa a $\overline{AC}$

III) MEDIATRIZ :

Es aquella recta perpendicular a un lado que biseca a dicho lado.

* La mediatriz de un lado de un triángulo debe considerarse coplanar al triángulo



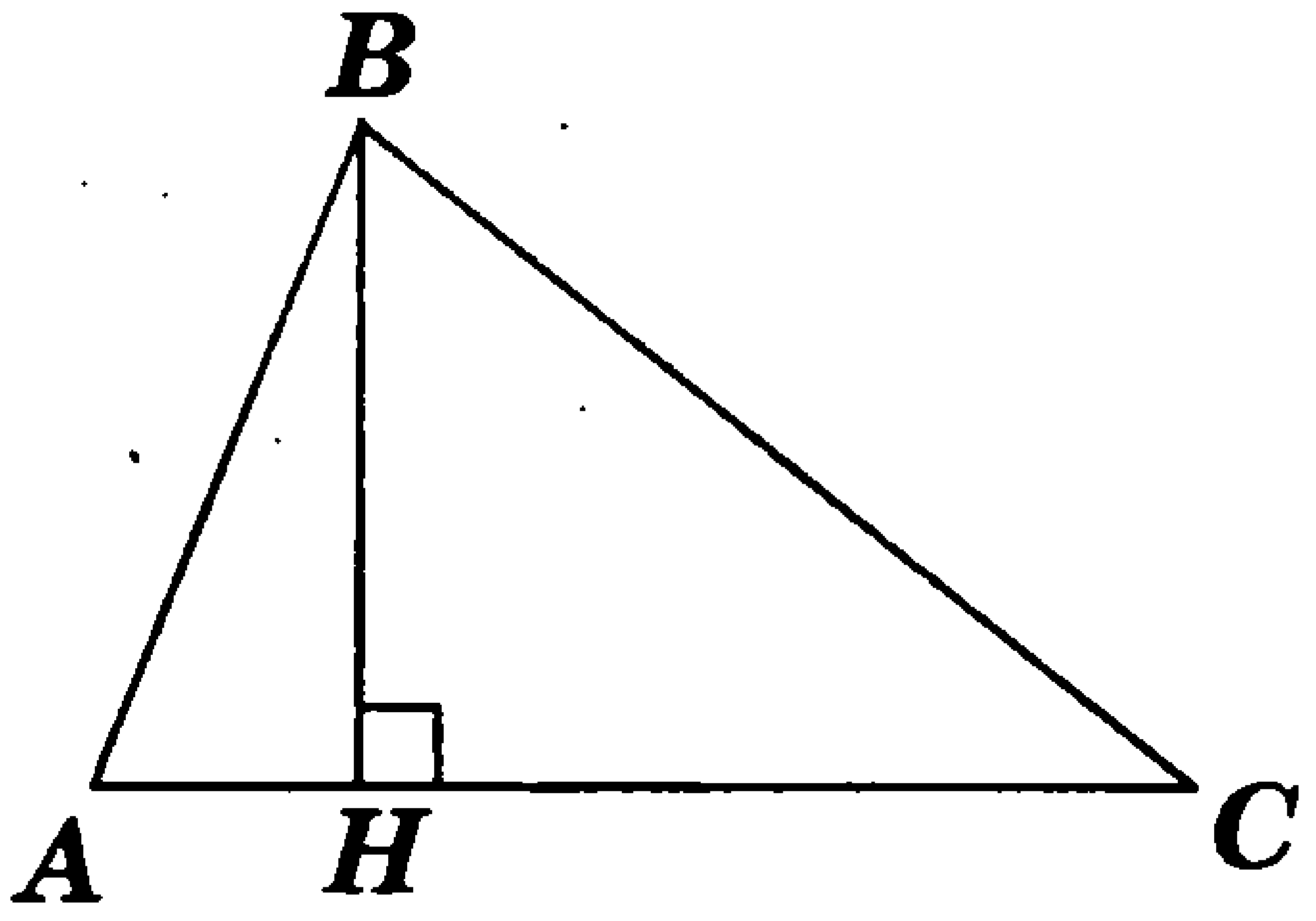
* En el ΔABC : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \perp AC$ y $AM=MC$

$\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$: mediatriz de $\overline{AC}$

IV) ALTURA :

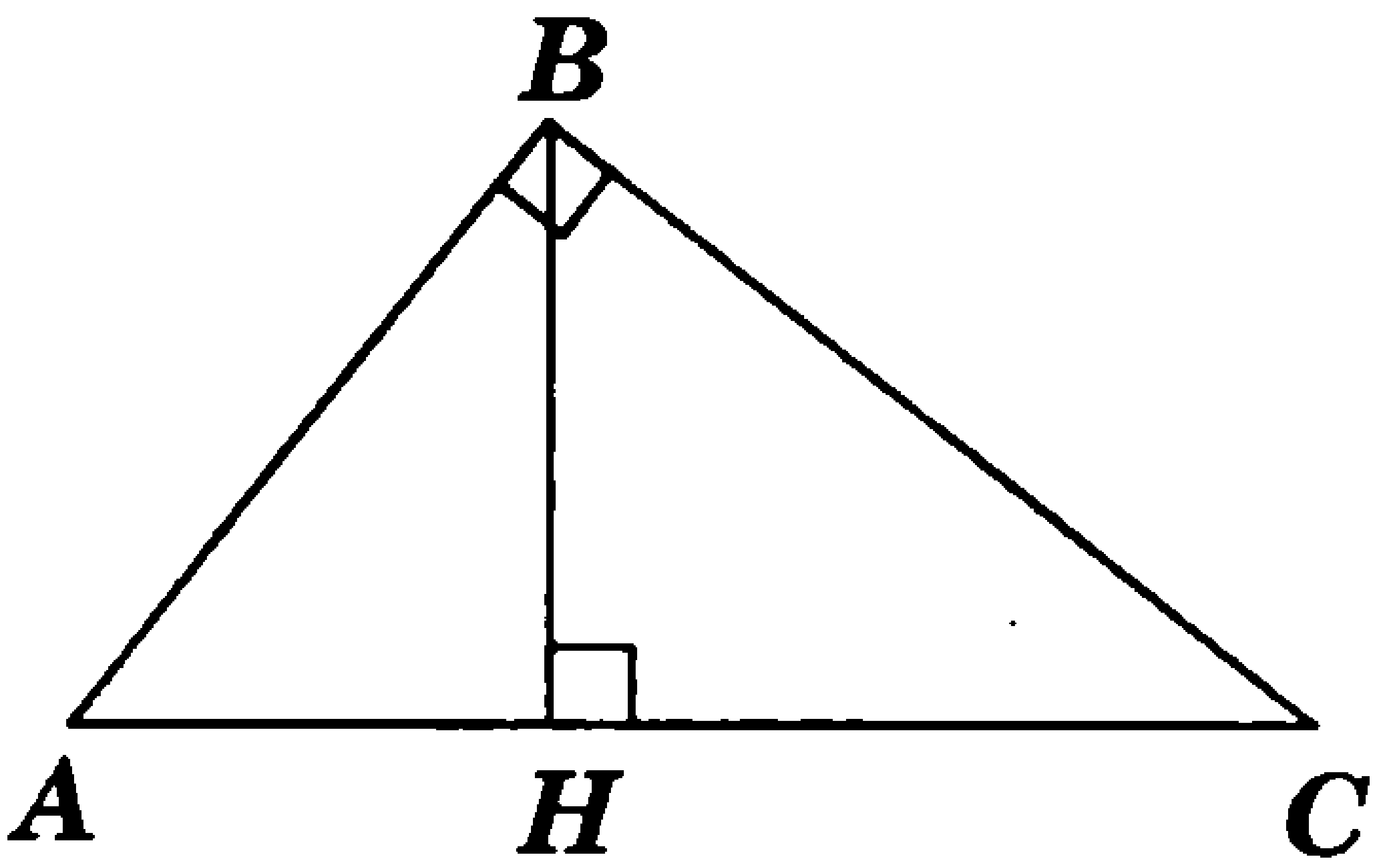
Es una ceviana perpendicular al lado , al cual es relativa; la posición de una altura respecto al triángulo

depende del tipo de triángulo .



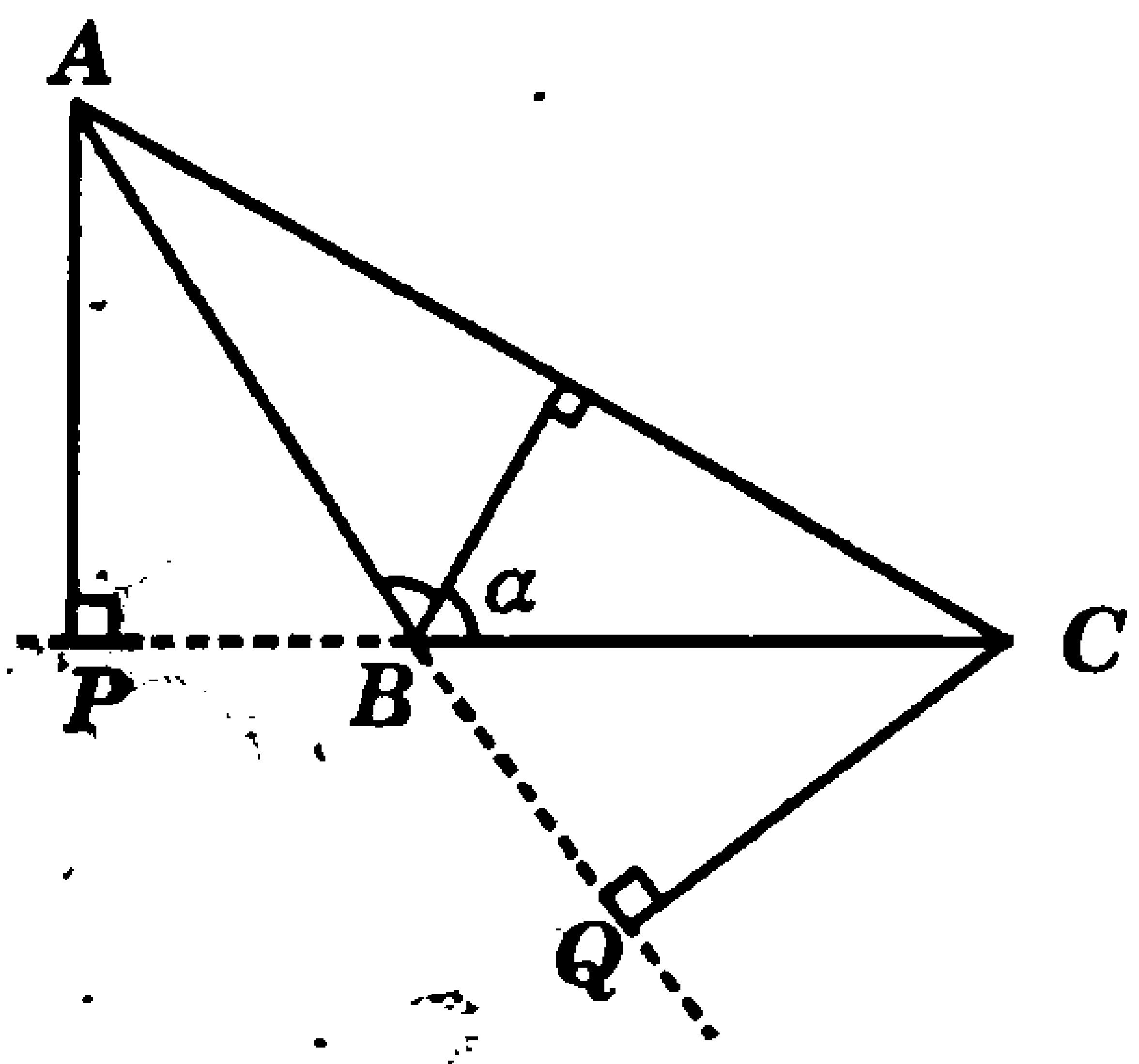
* En el ΔABC:

$\Rightarrow \overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$



* En el ⊿ ABC:

$\Rightarrow \overline{BH}$: altura relativa la hipotenusa $\overline{AC}$



* En el ΔABC : obtusángulo *($\alpha > 90°$)*

$\overline{AP}$: altura relativa a $\overline{BC}$

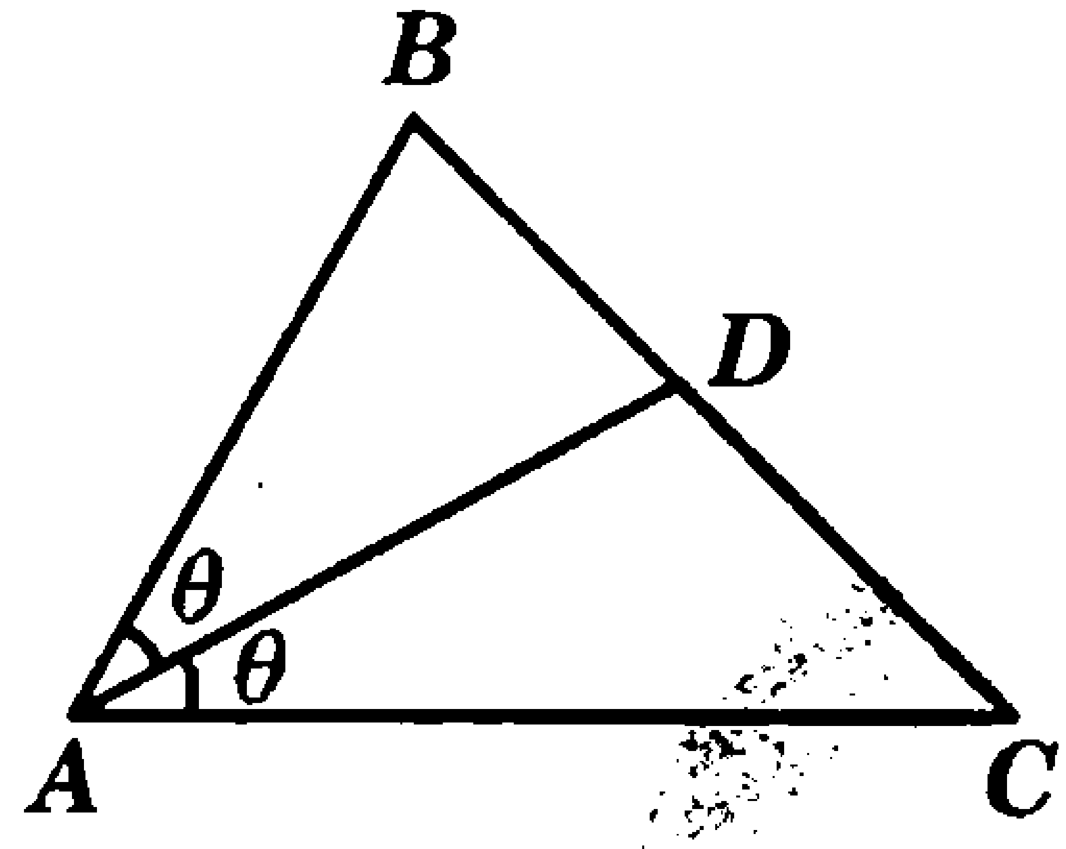
$\overline{CQ}$: altura relativa a $\overline{AB}$

$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$

V) BISECTRIZ :

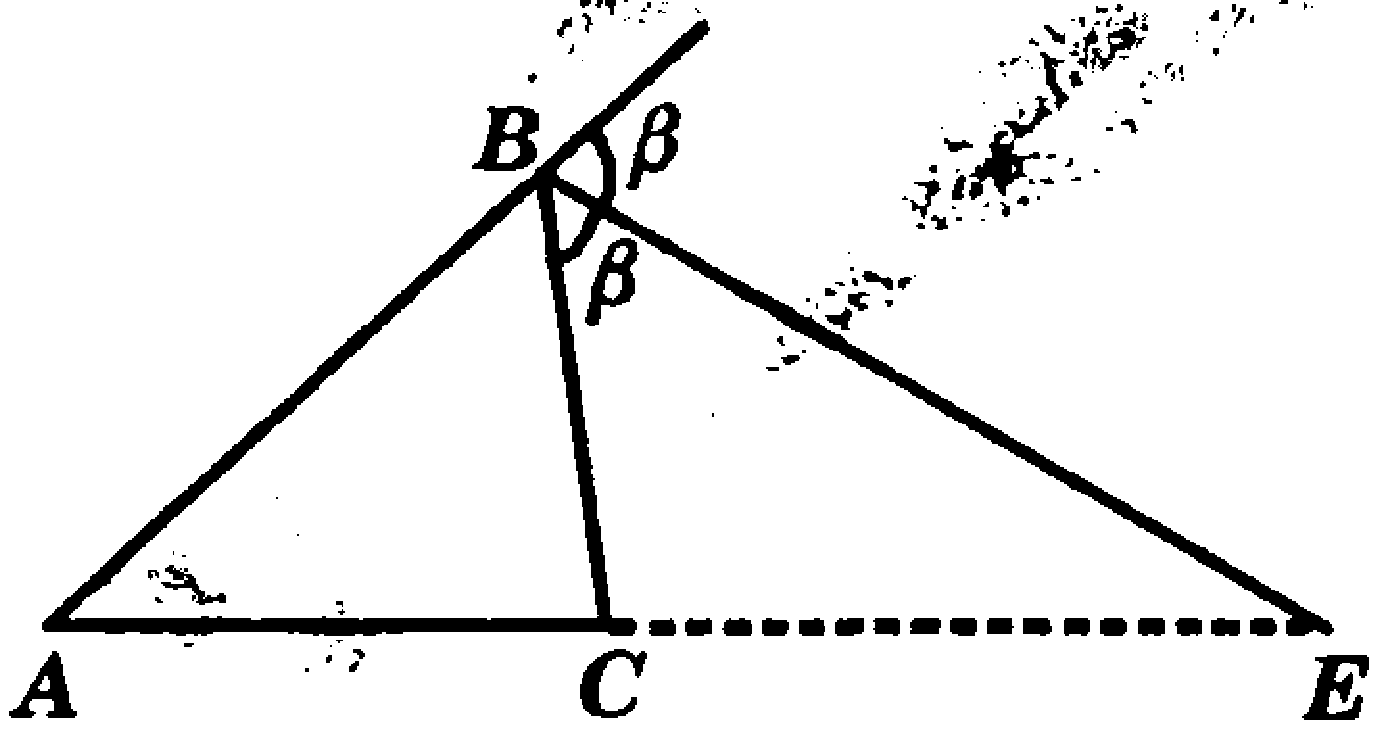
Es aquella ceviana interior o exterior que biseca a un ángulo interior o exterior respectivamente.

*** BISECTRIZ INTERIOR :**



* En el ΔABC : AD: bisectriz interior relativa a $\overline{BC}$

*** BISECTRIZ EXTERIOR :**



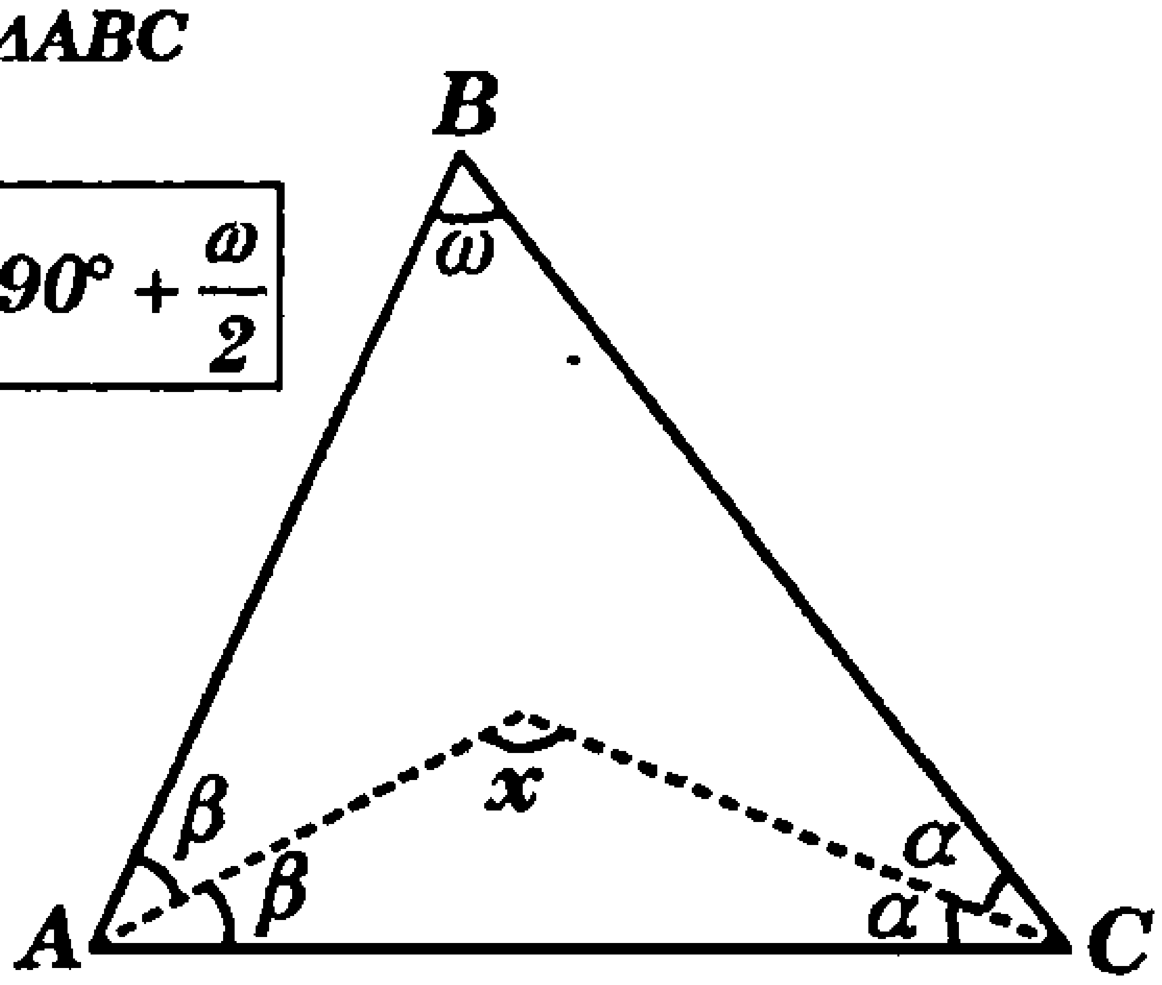
* En el ΔABC

$\overline{BE}$: bisectriz exterior relativa a $\overline{AC}$

ÁNGULO ENTRE BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO

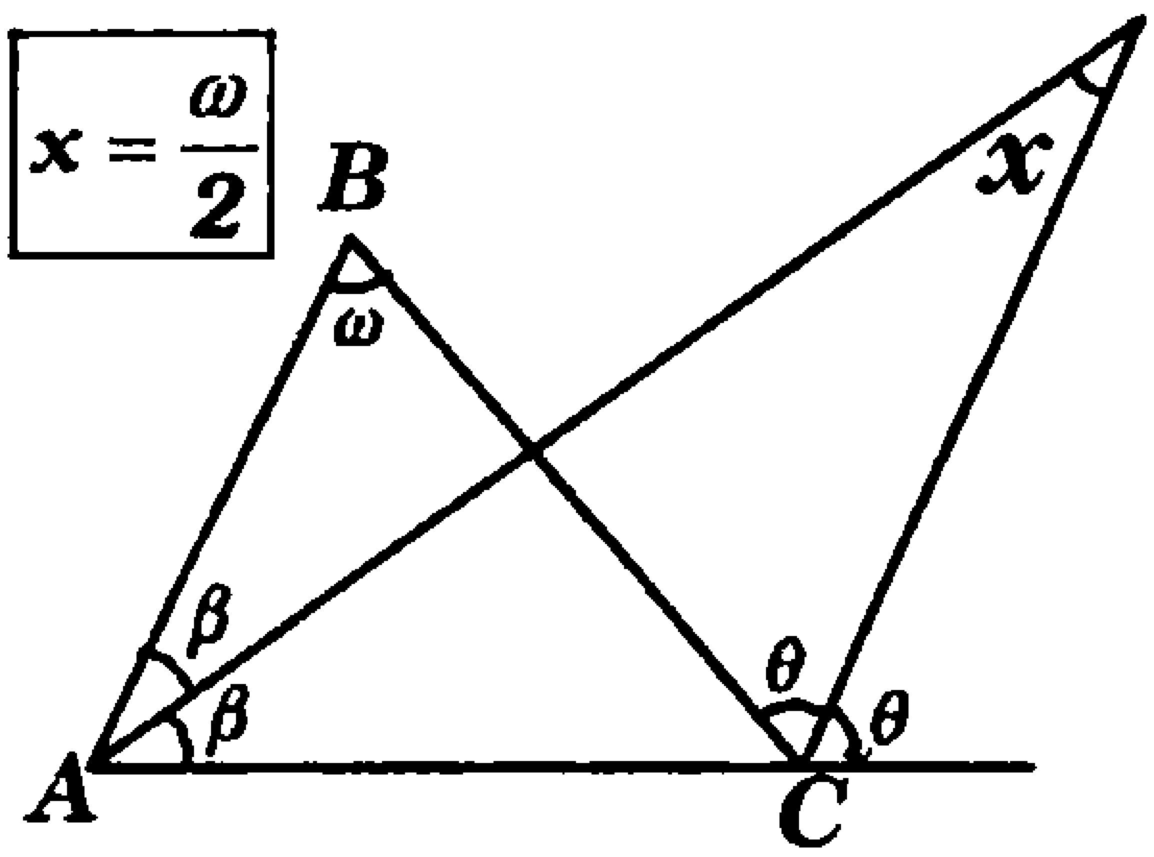
I) En el ΔABC

$$x = 90° + \frac{\omega}{2}$$



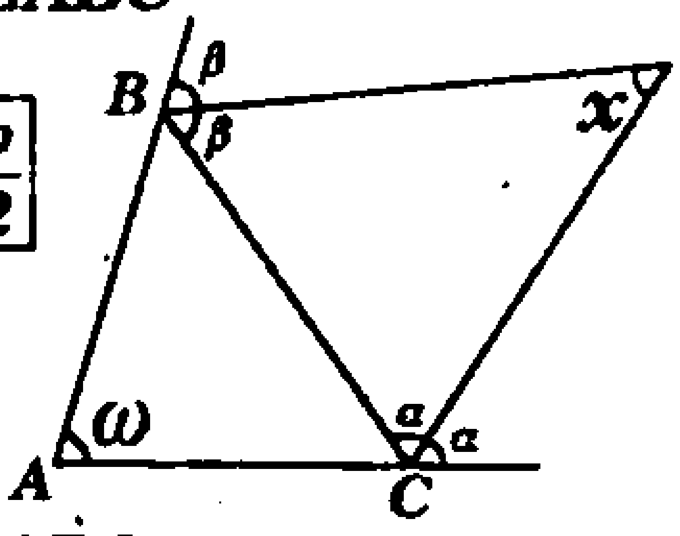
II) En el ΔABC

$$x = \frac{\omega}{2}$$



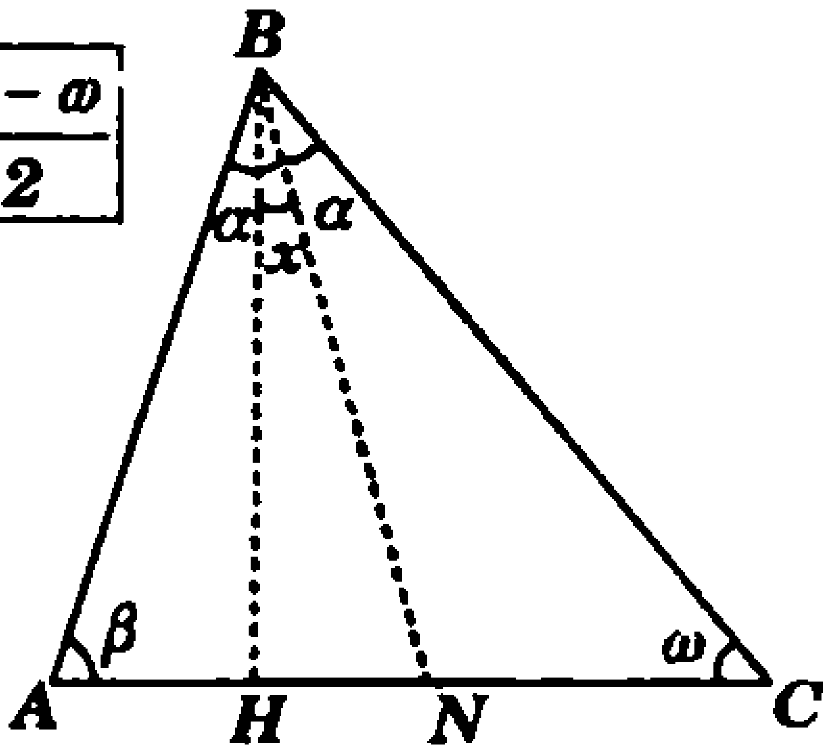
III) En el ΔABC

$$x = 90^\circ - \frac{\omega}{2}$$



IV) En el ΔABC

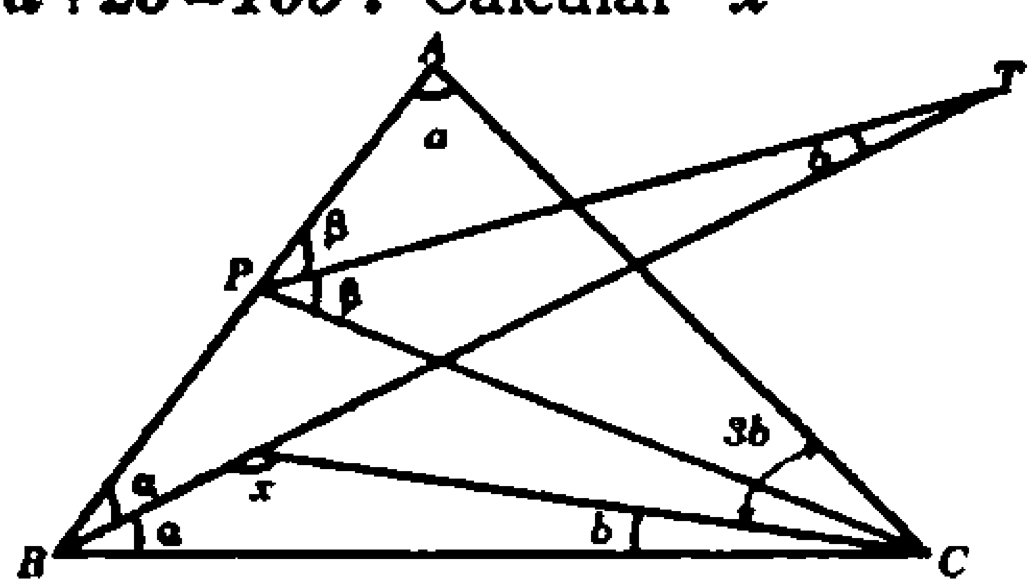
$$x = \frac{\beta - \omega}{2}$$



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En la figura se cumple $a+2b=100^\circ$. Calcular "x"



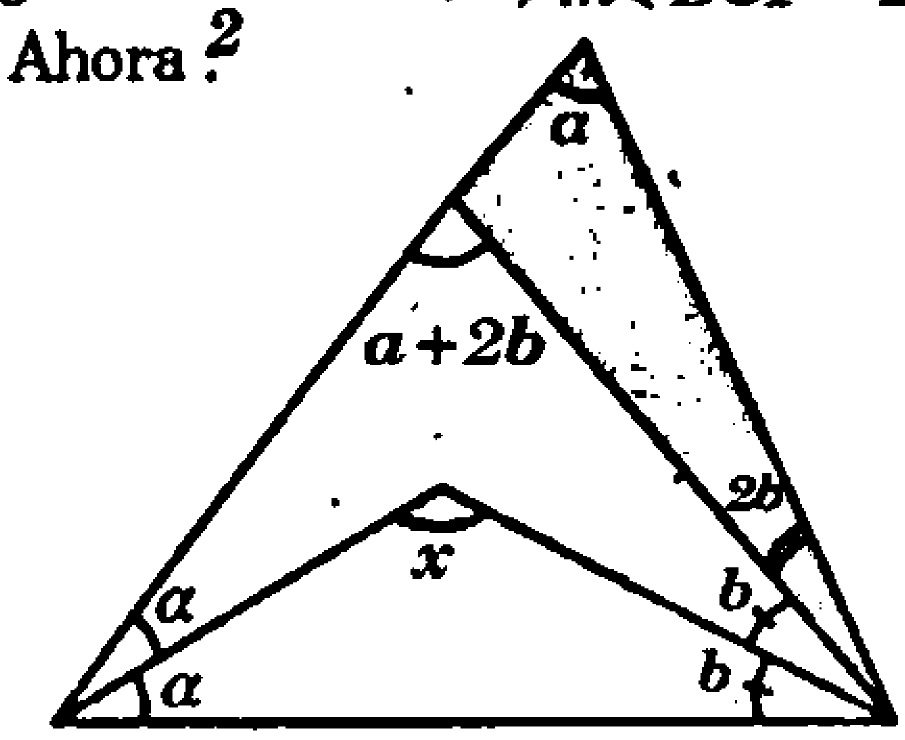
A) 140° *B)* 110° *C)* 120°
D) 130° *E)* 135°

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad de los ángulos entre bisectrices , se deduce que:

$$b = \frac{m\measuredangle BCP}{2} \longrightarrow m\measuredangle BCP = 2b$$

* Ahora :



* Por propiedad :

$$x = 90^\circ + \frac{a+2b}{2}$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ + \frac{100^\circ}{2} = 140^\circ$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

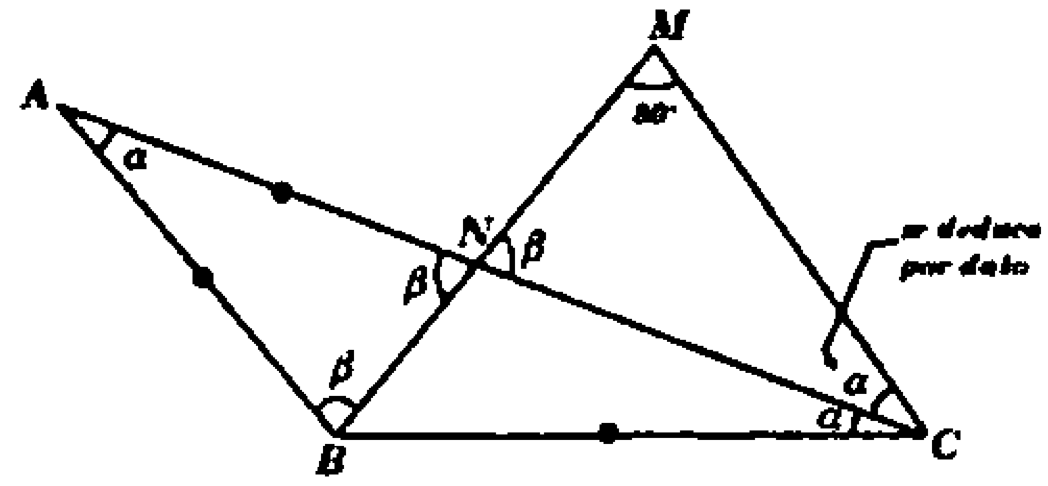
En un triángulo ABC , obtuso en B, se traza la ceviana interior $\overline{BN}$ en cuya prolongación se ubica el punto M tal que :

$m\measuredangle BMC = 80^\circ$, $m\measuredangle BCM = 2m\measuredangle BAN$

Halle $m\measuredangle ABC$ si : $AB = AN = BC$

A) 140° *B)* 135° *C)* 130°
D) 125° *E)* 120°

RESOLUCIÓN :



* Ahora observamos :

$\Delta ABN : \alpha + 2\beta = 180^\circ$
$\Delta MNC : \alpha + \beta = 100^\circ$ (−)
$\beta = 80^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

$\Delta ABC : m\measuredangle ABC + 2\alpha = 180^\circ$

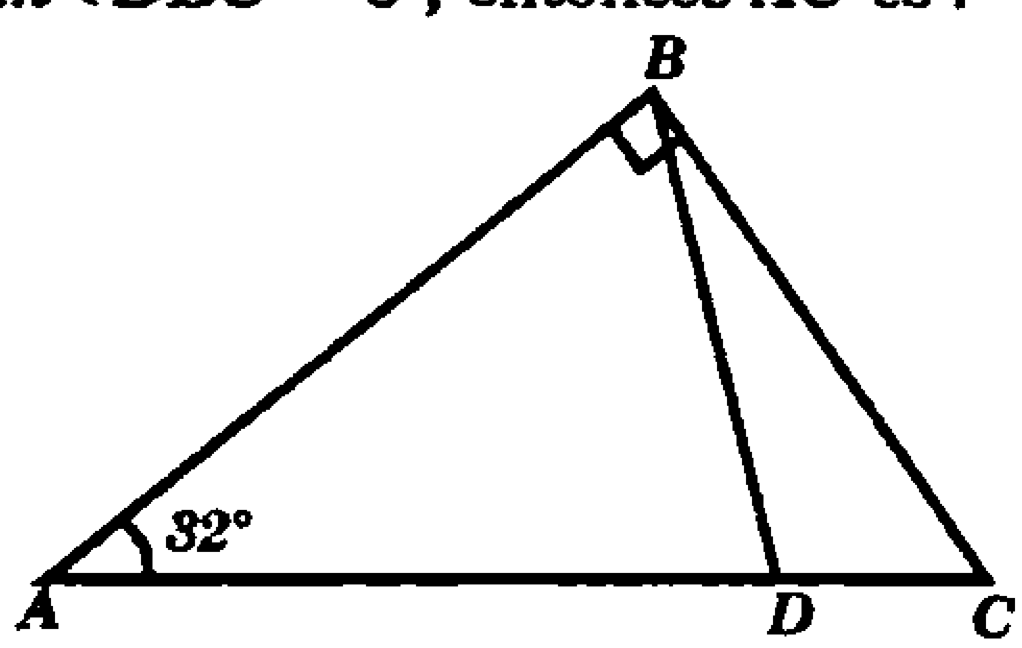
$\hookrightarrow m\measuredangle ABC + 2(20^\circ) = 180^\circ$

$\Rightarrow m\measuredangle ABC = 140^\circ$

RPTA : "A"

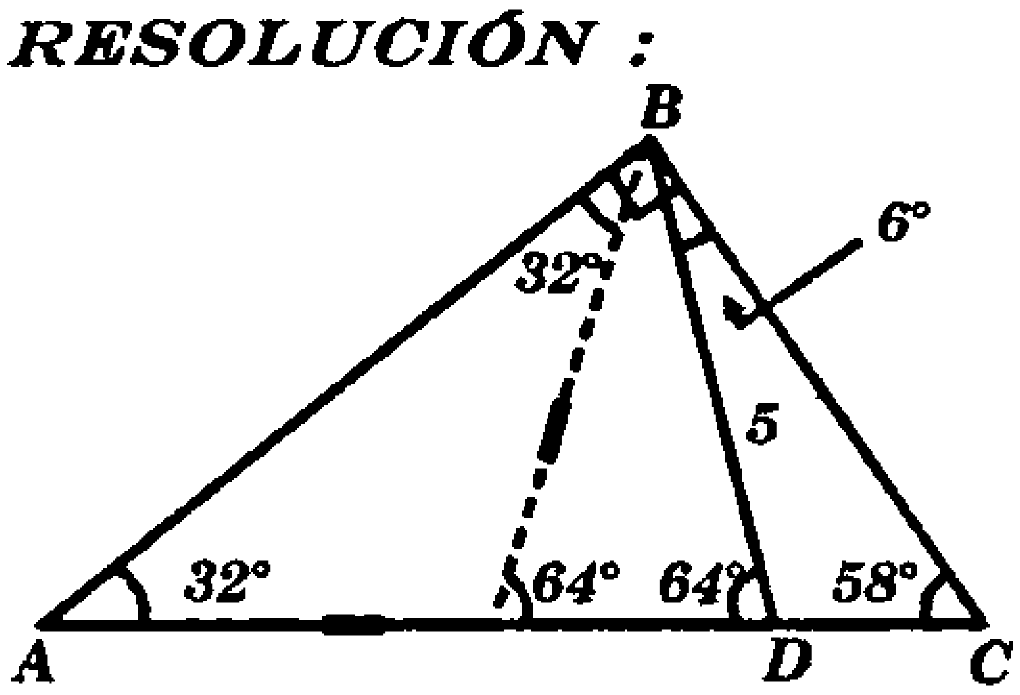
PROBLEMA 3 :

En el gráfico mostrado $BD=5$ y $m\measuredangle DBC = 6^\circ$, entonces AC es :



A) 7,5 *B)* 15 *C)* 5 *D)* 10 *E)* 12,5

RESOLUCIÓN :



* Piden : AC.

* Trazamos la mediana BM .

$\Rightarrow AM = MC = BM$

* ΔAMB es isósceles

$m\measuredangle BAM = m\measuredangle ABN = 32^\circ$

* Por ángulo exterior:

$m\measuredangle BMD = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$

$m\measuredangle BDM = 6^\circ + 58^\circ = 64^\circ$

* ΔMBD es isósceles

$BM = BD = 5$

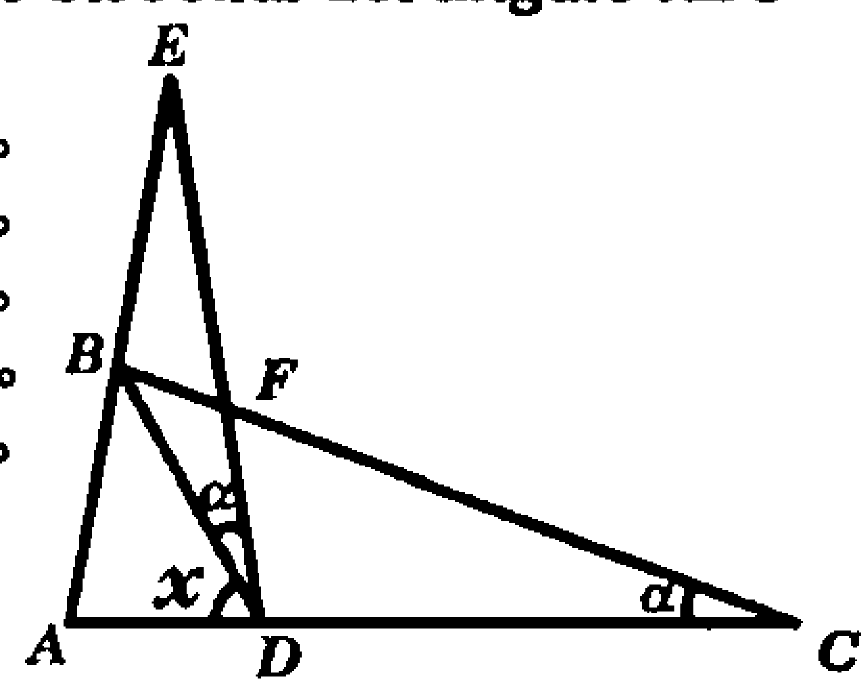
$\Rightarrow AC = AM + MC = 5 + 5 = 10$

RPTA : "D"

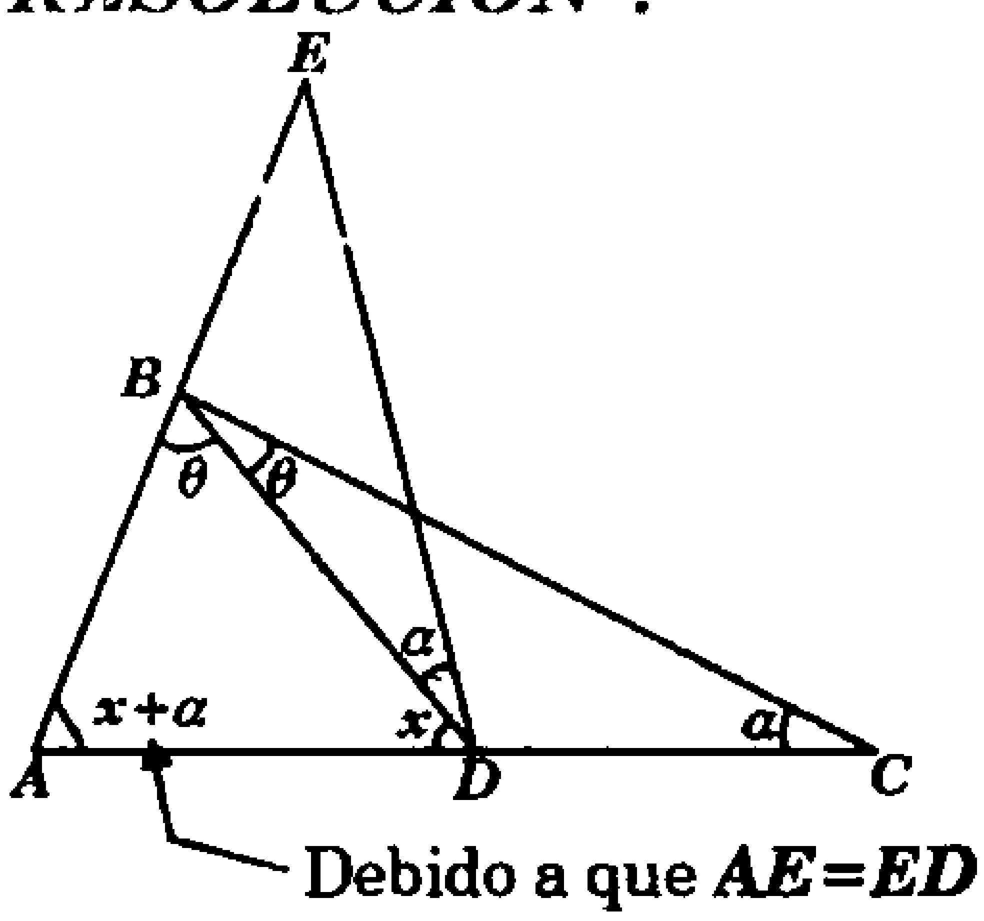
PROBLEMA 4:

Calcular el valor de x, si $AE=ED$ y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC

A) 64°
B) 60°
C) 56°
D) 54°
E) 46°



RESOLUCIÓN :



* Por ángulo exterior : $x = \theta + \alpha$

* Además en el ΔABD:

$x + \underline{\alpha + \theta} + x = 180^\circ$

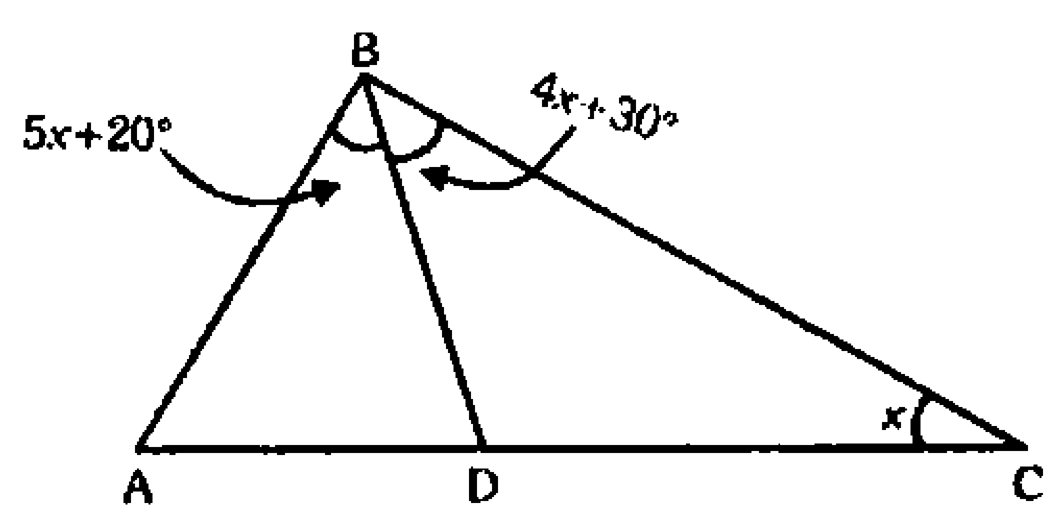
$x + x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

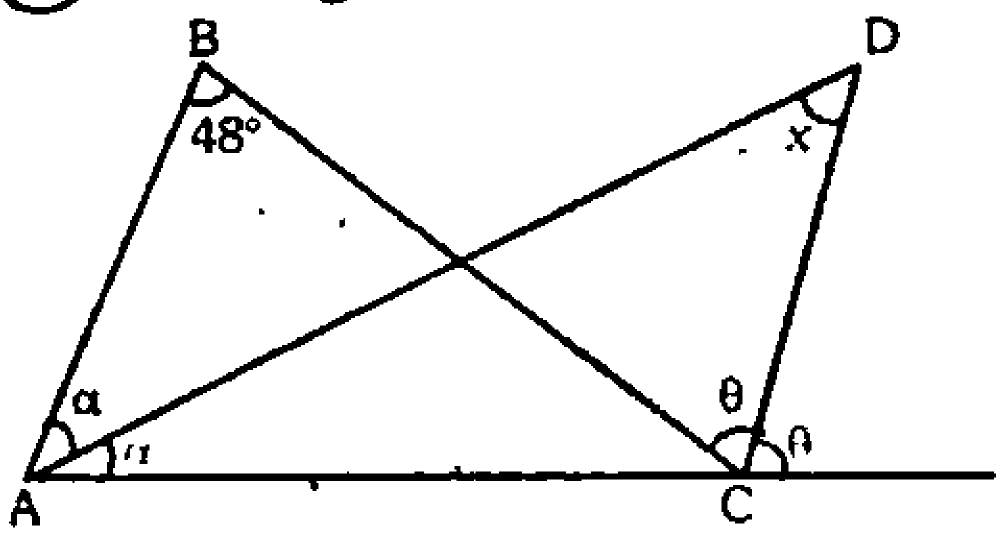
01) Del gráfico, $\overline{BD}$ es bisectriz de $\measuredangle ABC$.

Calcular: $m\measuredangle BAC$.



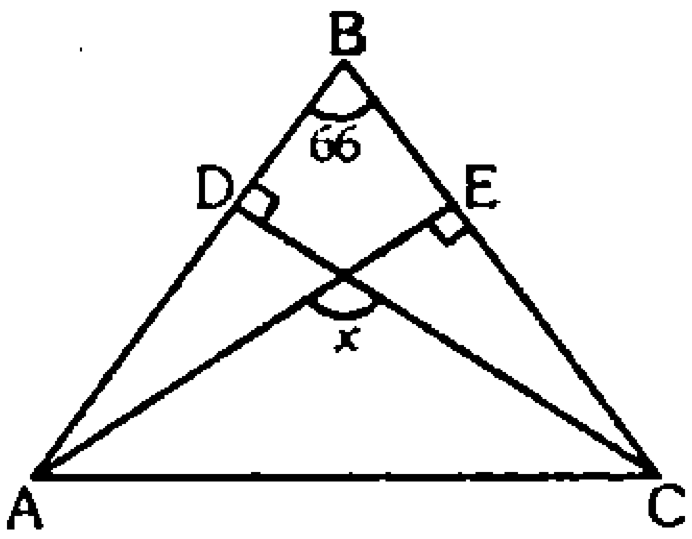
A) 18° *B)* 15° *C)* 10°
D) 12° *E)* 16°

02 De la figura, calcular x.



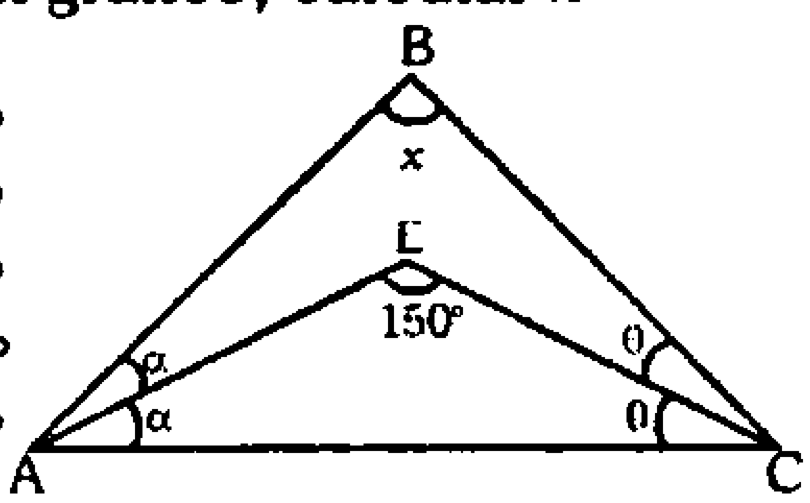
A)30° B)24° C)48° D)40° E)36°

03 De la figura, calcular x



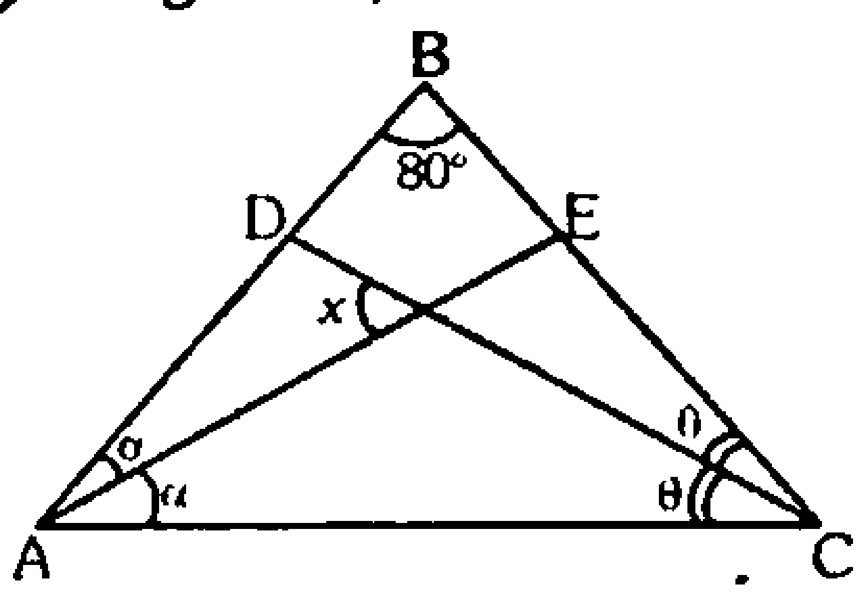
A)120°
B)114°
C)116°
D)118°
E)112°

04 Del gráfico, calcular x



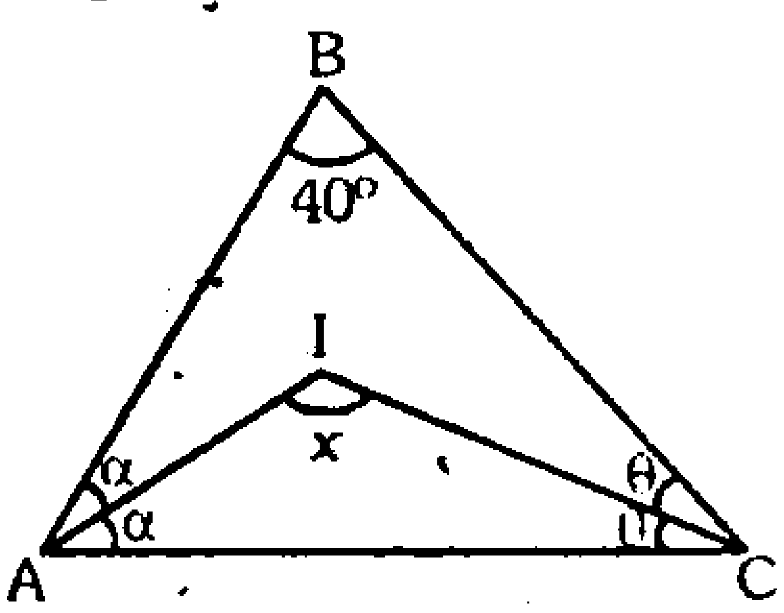
A)100°
B)130°
C)120°
D)140°
E)150°

05 Del gráfico, calcular x.



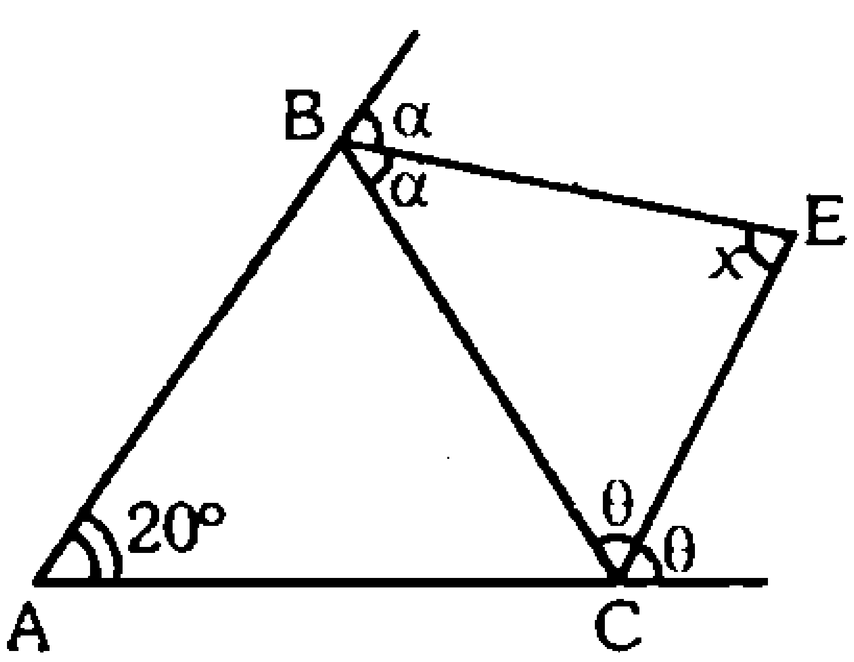
A)50° B)40° C)28 ° D)60° E)56°

06 Del gráfico, calcular x.



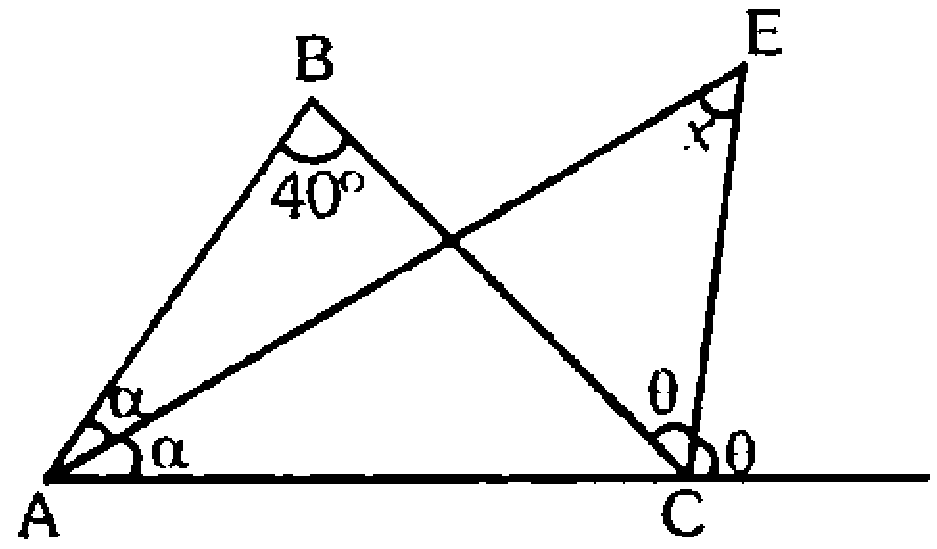
RPTA:..............................

07 Del gráfico, calcular x.



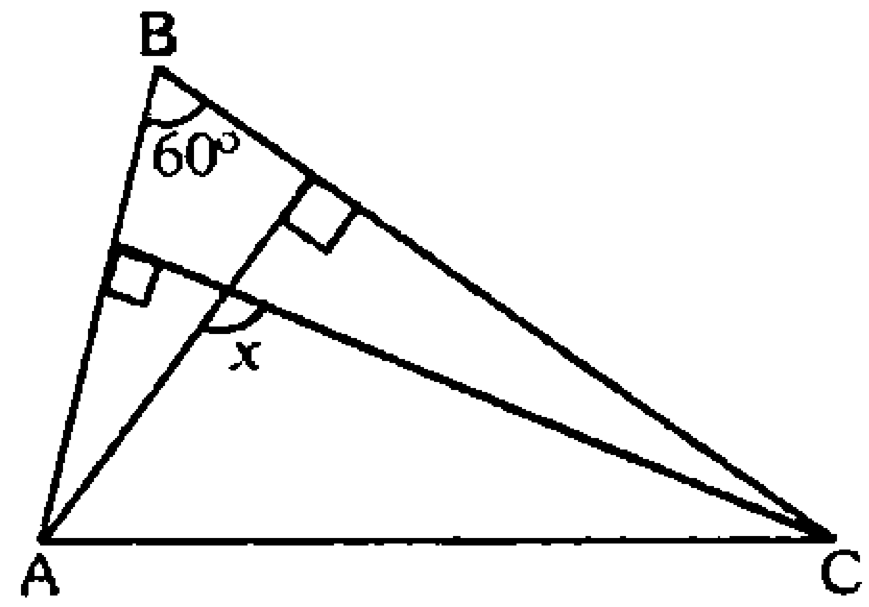
RPTA:..............................

08 Del gráfico, calcular x.



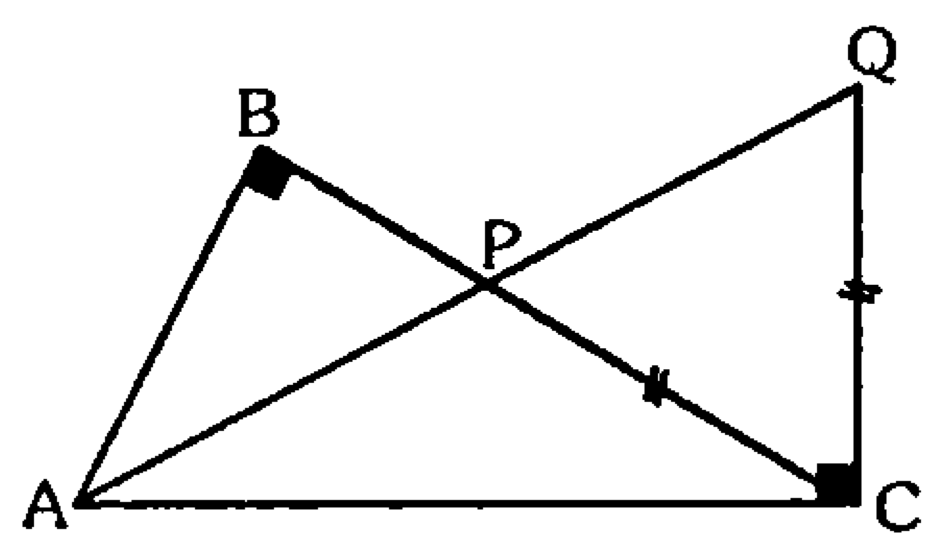
RPTA:..............................

09 Del gráfico, calcular x.



RPTA:..............................

10 Del gráfico adjunto deducir qué línea notable, representa $\overline{AP}$ para el triángulo *ABC*, si $PC = QC$.



A)Mediana B)Altura C)Bisectriz D)Mediatriz E)Ceviana

11 En un triángulo *ABC* se trazan las bisectrices de *A* y *C* que se intersecan formando un ángulo que es el triple de la $m\measuredangle B$. Hallar: $m\measuredangle A + m\measuredangle C$.

A)18° B)24° C)36° D)54° E)144°

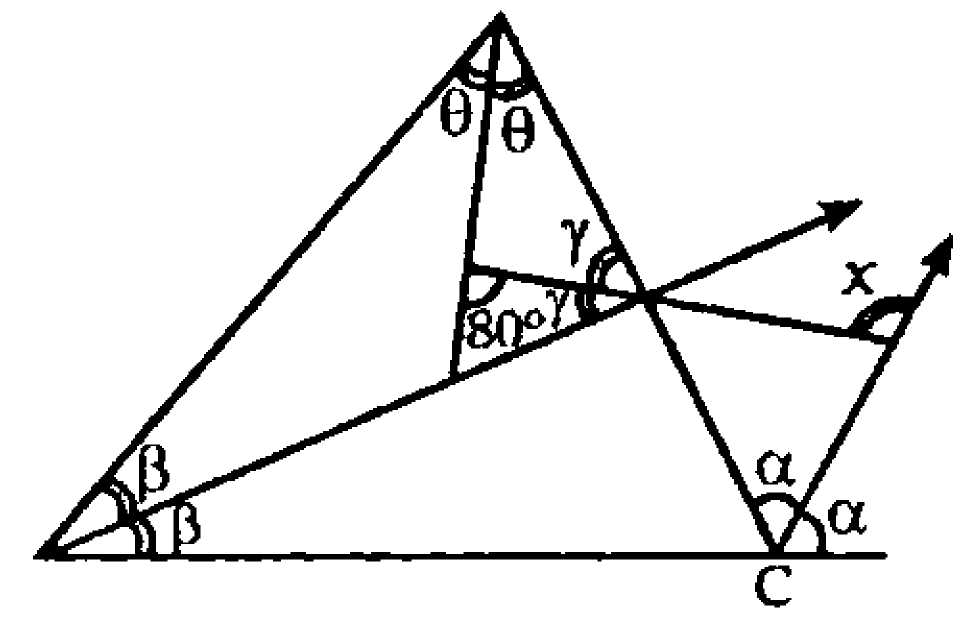
12 El ángulo exterior A de un triángulo *ABC* mide *44°*, calcular la medida del ángulo que forman las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

A)44° B)55° C)88° D)96° E)90°

13 En un triángulo rectángulo *ABC*, se traza la altura $\overline{BH}$. ¿Qué ángulo forman las bisectrices de los ángulos *A* y *HBC*?

A)45° B)60° C)75° D)90° E)120°

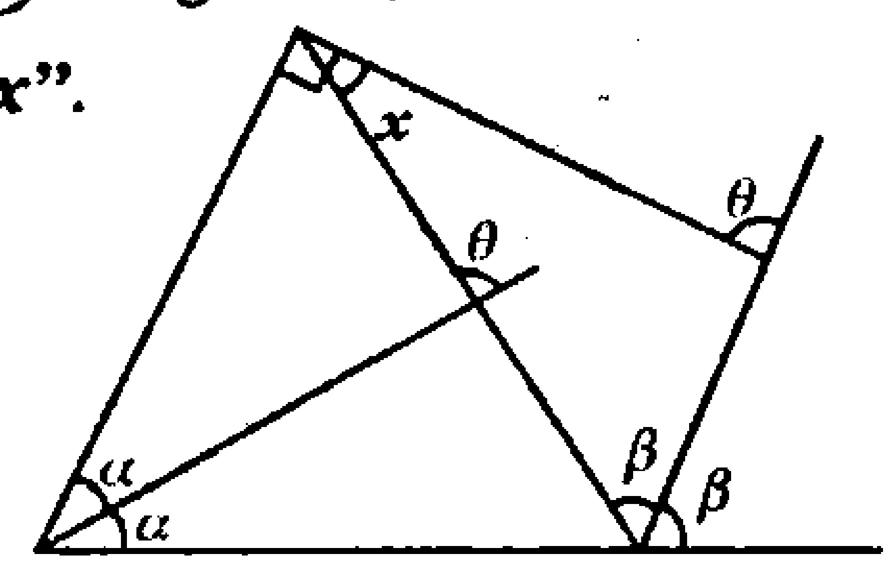
14 Según el gráfico, calcular el valor de x.



A)140° B)150° C)160°
D)135° E)100°

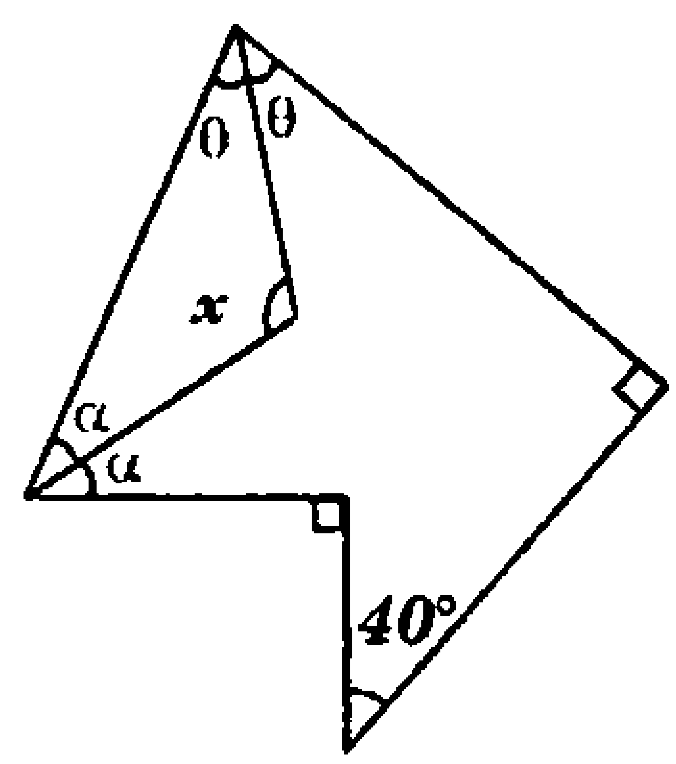
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Del gráfico, calcular el valor de "x".



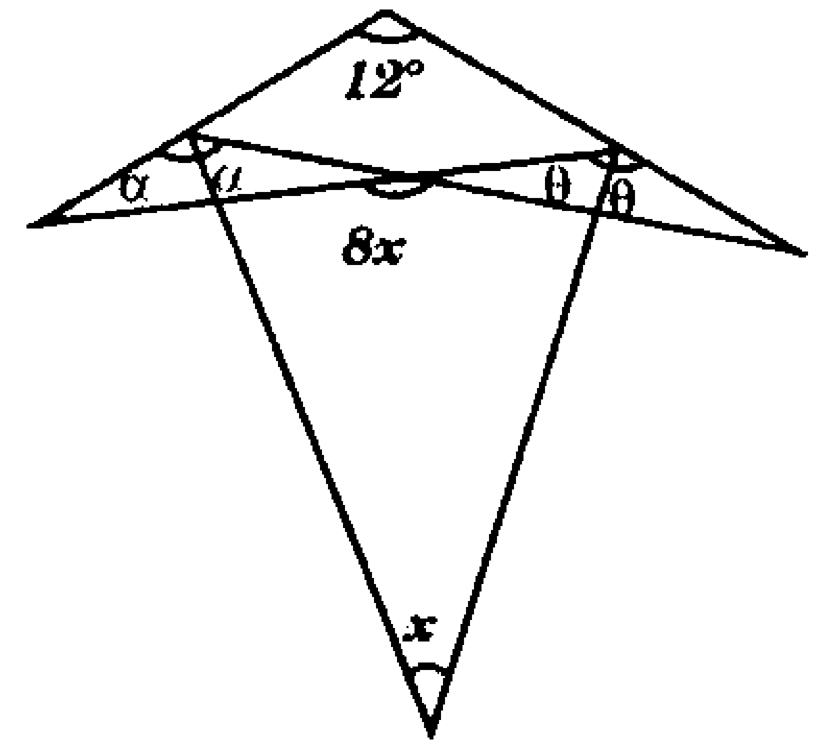
A) 20° B)36° C)30° D) 15° E) 22,5°

02 Calcular el valor de "x".



A)100° B)110° C)120° D)105° E) 140°

03 Calcular el valor de "x".

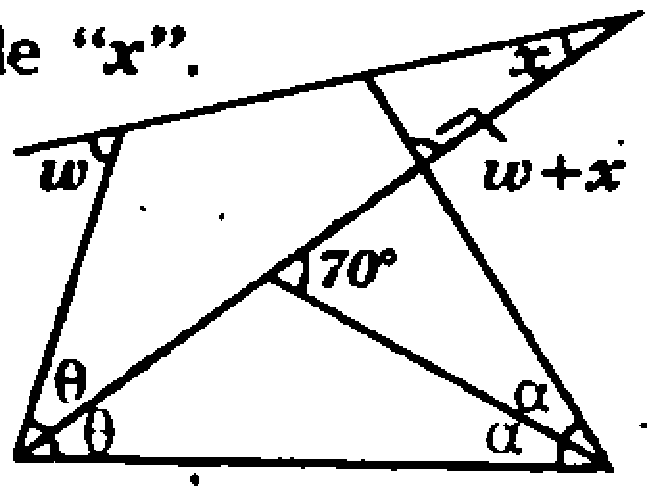


A)10° B)5° C) 20° D) 15° E) 14°

04 Se tiene un triángulo *ABC*, $m\measuredangle B=80°$, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular la medida del ángulo que determinan las bisectrices de los ángulos *BAC* y *HBC*.

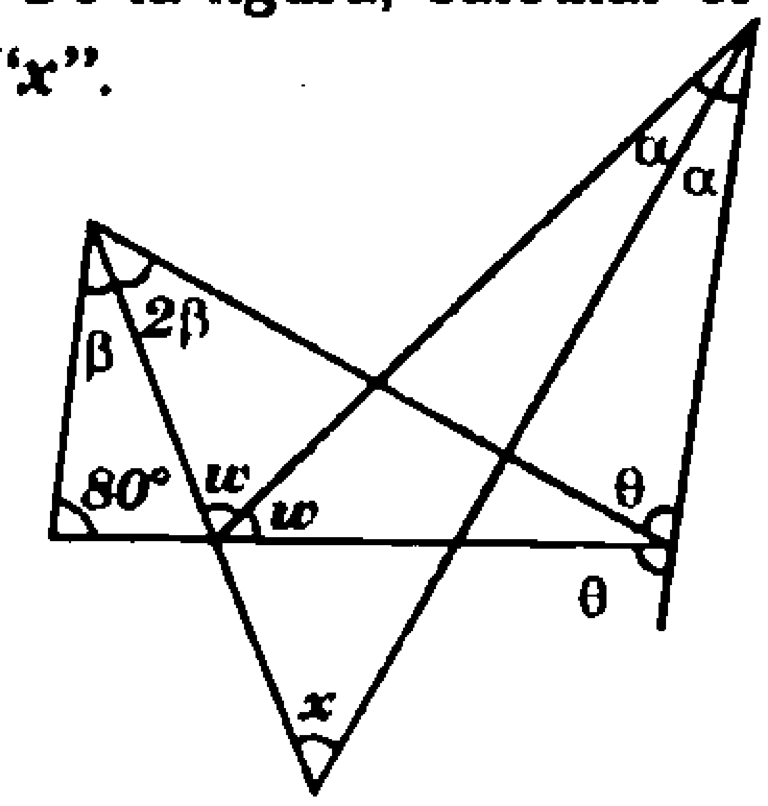
A) 95° B) 100° C)85 °
D) 105° E) 90°

03 Según el gráfico, calcular el valor de "*x*".



A)20° B) 15° C) 35° D) 17,5° E) 18°

06 De la figura, calcular el valor de "*x*".



A) 20° B)30° C) 40° D)50° E) 60°

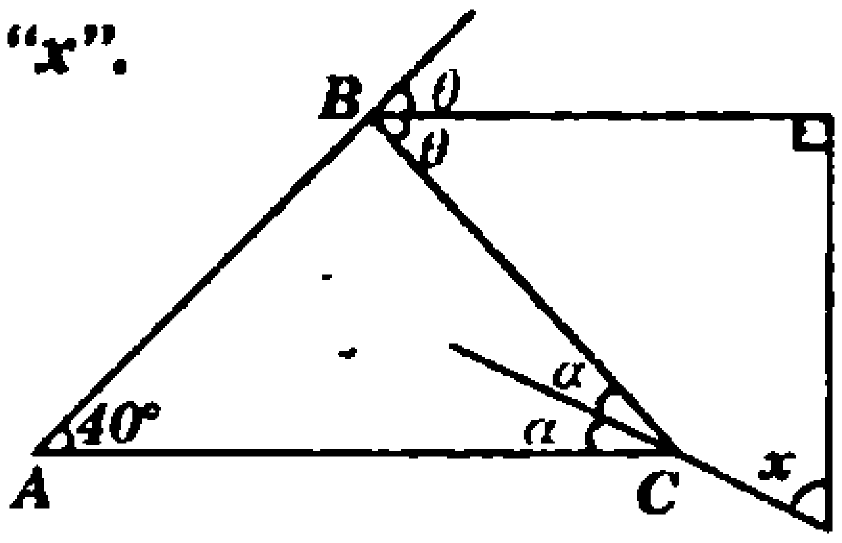
07 Se tiene un triángulo *ABC* tal que $m\sphericalangle B - m\sphericalangle A = 50°$; se traza la bisectriz interior $\overline{CD}$ y en $\overline{AC}$ se ubica el punto "*E*" tal que $\overline{AC}$

$m\sphericalangle EDC = 80°$.

Calcular $m\sphericalangle ADE$.

A) 20° B) 15° C) 25° D) 30° E)35°

08 Del gráfico, calcular el valor de "*x*".

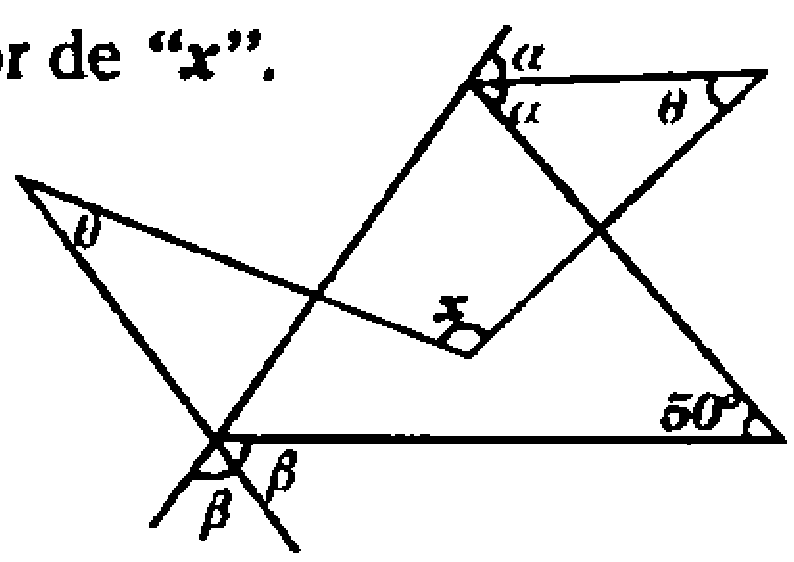


A)50° B)70° C)60° D)55° E)80°

09 Se tiene un triángulo *ABC* tal que $m\sphericalangle B = 100°$; se traza la ceviana interior $\overline{BM}$ y la bisectriz interior $\overline{CD}$ las cuales se cortan en *P*. Si *AB=AM*, calcular $m\angle QPB$.

A) 40° B) 50° C) 65° D) 60° E) 45°

10 Según el gráfico, calcular el valor de "*x*".



A) 10° B) 130° C) 125° D) 105° E)115°

11 Se tiene un triángulo *ABC*, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la ceviana $\overline{AQ}$ en cuya prolongación se ubica el punto "*T*" tal que

$m\sphericalangle ATC = 90°$; $m\sphericalangle ADB = 80°$ y

$m\sphericalangle BAQ = 2(m\sphericalangle BCA)$.

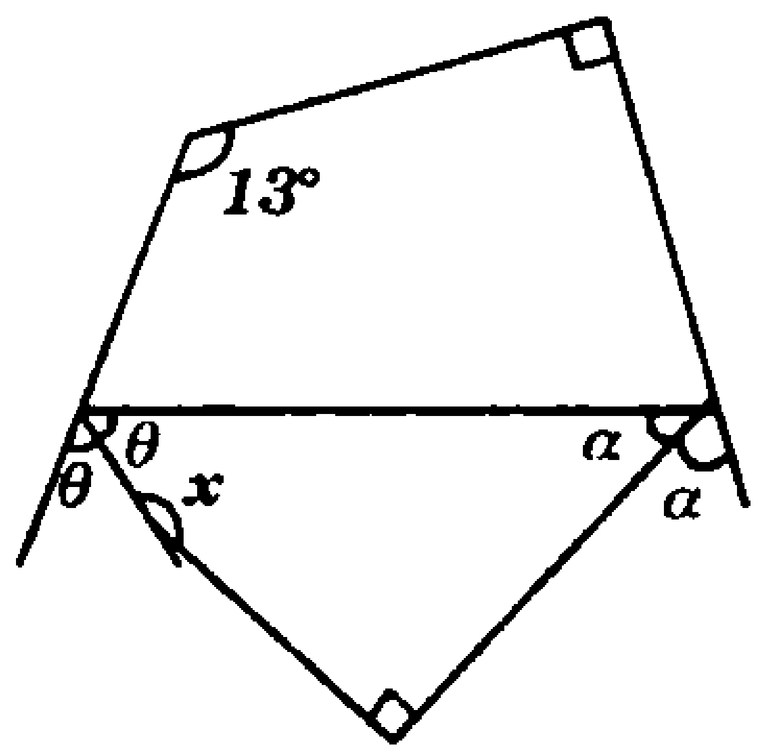
Calcular $m\sphericalangle BCT$.

A) 80° B)40° C)70° D)60° E) 50°

12 Se tiene un triángulo *ABC*, obtuso en *B* las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en *M* y *N* respectivamente. Si las bisectrices de los ángulos obtusos en *M* y en *N* se cortan en "*Q*" y $m\sphericalangle MQN = 55°$, calcular la medida del ángulo exterior en *B*.

A) 80° B) 70° C)50° D)55° E)85°

13 Calcular el valor de "*x*".



A)130° B)160° C)140° D)150° E)170°

14 Se tiene un triángulo *ABC* tal que $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle ACB)$ y $AC = AB(\sqrt{2}+1)$.

Calcular $m\sphericalangle ACB$.

A)22,5° B)26,5° C)30° D)45° E)15°

15 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B* en el cual se traza la ceviana interior $\overline{AN}$. Si *AB = BC = 4* y la longitud de $\overline{AN}$ es un número entero, calcular $m\sphericalangle ANB$.

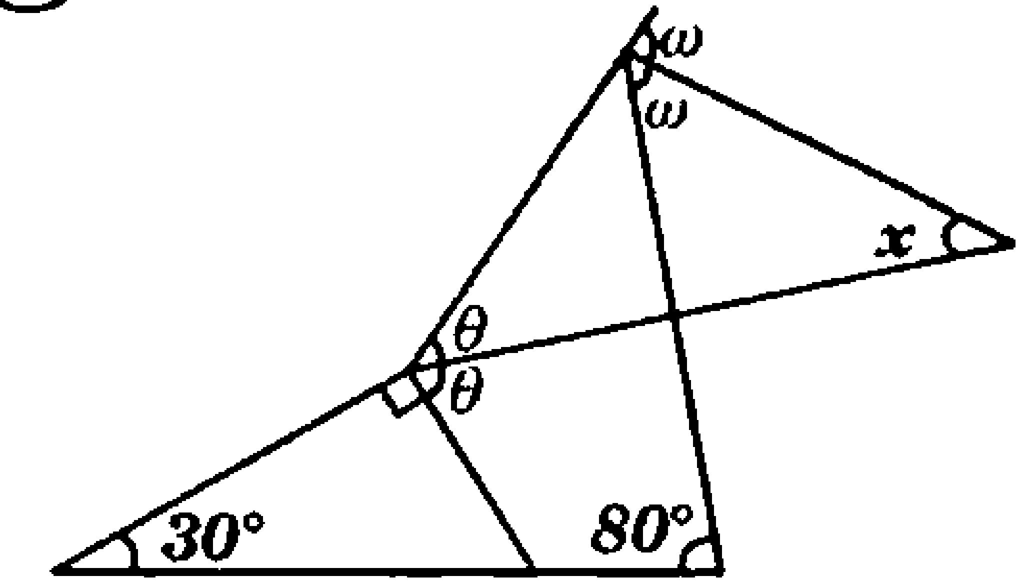
A)60° B)75° C)53° D)48° E)63,5°

16 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC* tal que *AC > BC > AB*, se traza la ceviana interior $\overline{AP}$ tal que $m\sphericalangle BAP = 2(m\sphericalangle PAC)$.

Si la $m\sphericalangle PAC$ toma su mínimo valor entero, calcular $m\sphericalangle BPA$.

A)60° B)45° C)47° D)58° E)62°

17 Calcular el valor de "*x*".



A)10° B)15° C)20° D)30° E)40°

18 Se tiene un triángulo *ABC*, se traza la ceviana interior $\overline{AP}$ tal que: *AC = AB + PC* y $2(m\sphericalangle BAP) = 6(m\sphericalangle PAC) = 3(m\sphericalangle PCA)$

Calcular $m\sphericalangle ABC$.

A)72° B)36° C)108° D)80° E)60°

19 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Si en un triángulo *ABC* la mediana $\overline{BM}$ mide igual a *AC/2*, entonces dicho triángulo tiene un ángulo recto.

( ) La mediatriz de un lado de un triángulo puede cortar a otro lado del triángulo perpendicularmente.

( ) Dado el triángulo *ABC*, la bisectriz del ángulo interior en "*B*" corta a $\overline{AC}$ en su punto medio.

( ) Al trazar la altura de un triángulo obtusángulo, necesariamente dicha altura se encuentra en el exterior del triángulo.

A)FVVF B)VFFV C)VVFV D)VFFF E)VFVF

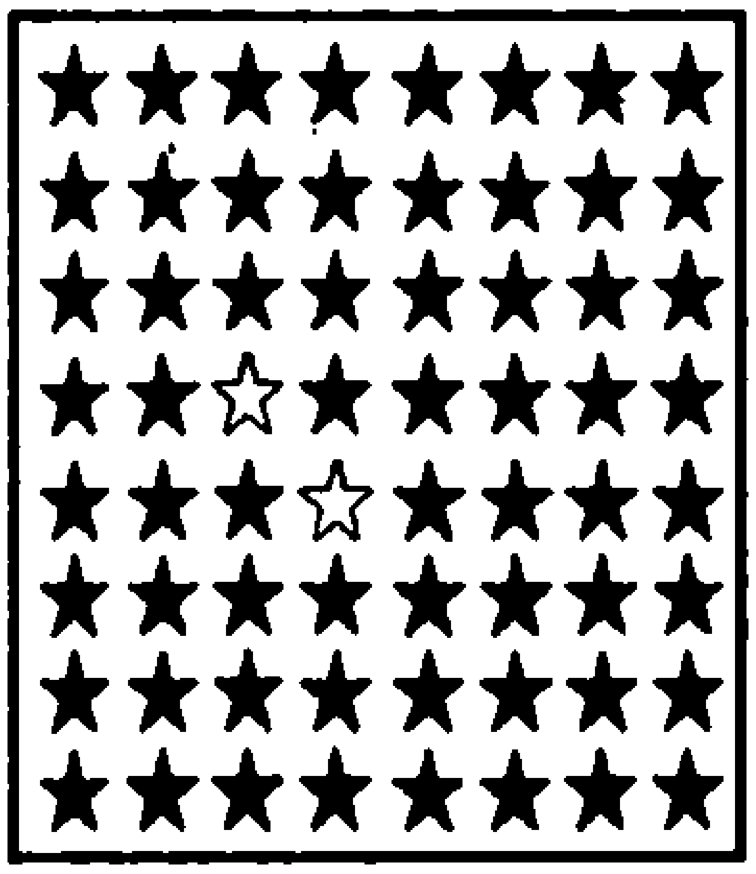
20 Se tiene un triángulo *ABC* en el cual se traza la bisectriz interior $\overline{AQ}$; en $\overline{AQ}$ se ubica el punto "*P*" tal que *BP=BQ*. Si $m\sphericalangle C = 50°$, calcular $m\sphericalangle ABP$.

A)50° B)40° C)30° D)25° E)35°

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)A	4)C	5)A	6)C	7)E	8)B	9)B	10)E
11)C	12)B	13)B	14)A	15)C	16)D	17)A	18)A	19)D	20)A

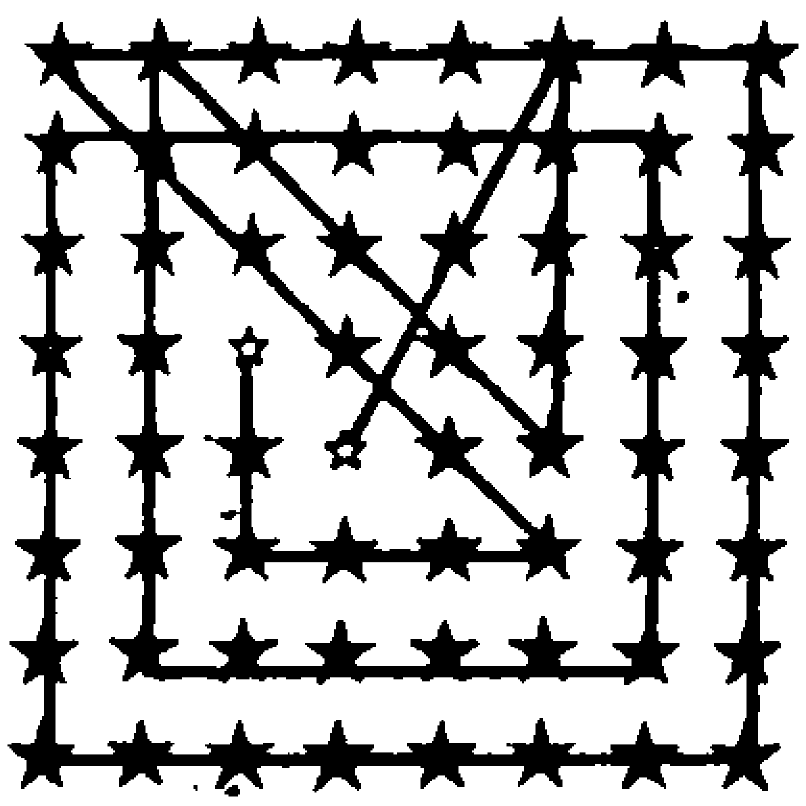
EL ACERTIJO ESTELAR

Apoye la punta del lápiz en cada una de las estrellas blancas y sin levantar el lápiz tache todas las estrellas en catorce trazos rectos y continuos que terminen en la segunda estrella.



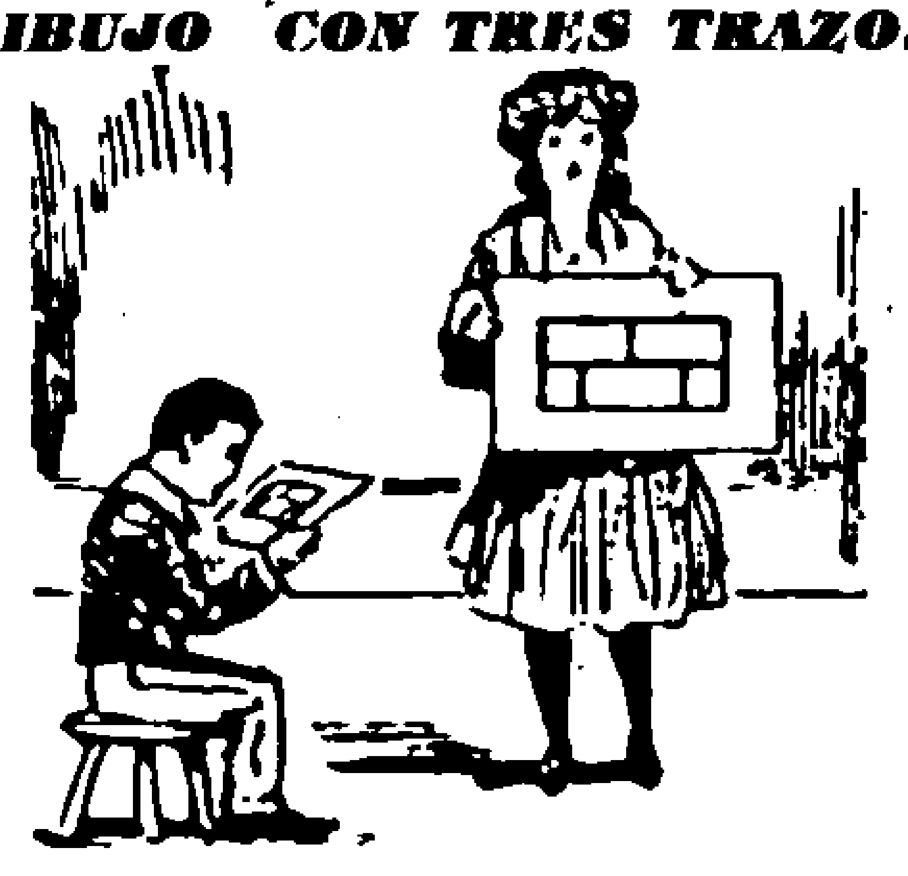
Los trazos deben ser rectos y pueden seguir cualquier dirección que usted guste, solo que cada giro se debe efectuar en una estrella. Se puede tachar cualquier estrella más de una vez. En este caso, en el que los puntos de partida y de llegada están situados incómodamente, no logrará una solución del tipo de El Paseo de la Torre, ni utilizando una dama, ni mediante ningún recorrido que consista exclusivamente en movimientos de dama (piezas de ajedrez). Pero se permite usar líneas rectas oblicuas, como la que une la estrella blanca superior con una estrella de una esquina.

RESOLUCIÓN :



La ilustración se explica por sí misma. Se tocan todas las estrellas en catorce trazos rectos que comienzan y terminan en una estrella blanca.

EL ACERTIJO DEL DIBUJO CON TRES TRAZOS



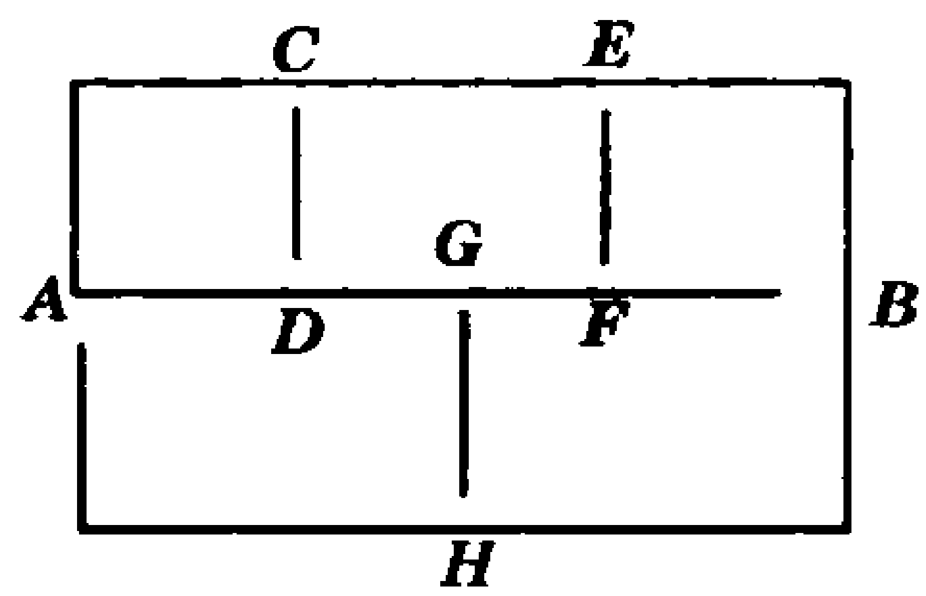
Durante años, ha surgido una intriga acerca de este pequeño acertijo. La mayoría de los niños parecen conocerlo, pero, extrañamente, se desconoce la respuesta. Siempre se busca aclarar si es posible. Houdini, el mago, gustaba de presentarlo a los pequeños amigos, pero no se sabe si él fue el inventor del acertijo. Sin duda, muchos lectores se alegrarán de que se aclare el misterio de la solución.

El acertijo consiste en dibujar con tres trazos de lápiz el diagrama que la niña exhibe en la ilustración. Desde luego, no se puede levantar el lápiz del papel durante un trazo ni pasar por la misma línea dos veces. Usted descubrirá que se puede dibujar buena parte de la figura con un trazo continuo, pero siempre parecerá que se necesitan cuatro trazos en total.

Otra forma del acertijo consiste en dibujar el diagrama en una pizarra y borrarlo en tres movimientos.

RESOLUCIÓN :

Según se entienden normalmente las condiciones, este acertijo no tiene solución. Esto es fácil de demostrar, así que tenemos que buscar algún artificio en la formulación.



Ahora bien, si plegamos el papel y luego pasamos la punta del lápiz en medio del pliegue, con un trazo podemos dibujar las líneas ***CD*** y ***EF*** de nuestro diagrama. Luego comenzamos en ***A*** y trazamos la línea que termina en ***B***. Por último, añadimos la línea ***GH*** y hemos cumplido estrictamente con las condiciones, pues plegar el papel no estaba prohibido. Desde luego, aquí las líneas se dejan sin unir por razones de claridad.

En el acertijo del borrado, primero borre de ***A*** a ***B*** con un solo dedo y en un trazo. Luego bore la línea ***GH*** con un dedo. Finalmente, borre las dos líneas verticales restantes con dos dedos al mismo tiempo. ¡ Ese es el viejo truco!

EL ACERTIJO DE LAS SEIS RANAS

Las seis ranas de la ilustración están entrenadas para invertir su orden, de manera que los números se lean ***6, 5, 4, 3, 2, 1,*** con el cuadrado blanco en su posición actual. Pueden saltar al cuadrado contiguo (si está vacío) o saltar por encima de una rana hasta el siguiente cuadrado (si está vacío), tal como se mueven las piezas en el juego de damas, y pueden ir hacia adelante o hacia atrás.

¿Puede usted mostrar cómo realizan su hazaña con la menor cantidad posible de movimientos? Es muy fácil, así que cuando lo haya conseguido añada una séptima rana a la derecha e inténtelo de nuevo. Luego añada más ranas hasta que pueda dar la solución más breve para cada número. Pues siempre se puede hacer, con un solo cuadrado libre, sin importar la cantidad de ranas.

RESOLUCIÓN :

Mueva las ranas en el siguiente orden: ***(2 ; 4 ; 6 ; 5 ; 3 ; 1)***; repita estas jugadas en el mismo orden dos veces más; finalmente, mueva ***2***; ***4***; ***6***. Esta es una solución en ***21*** jugadas, el menor número posible.

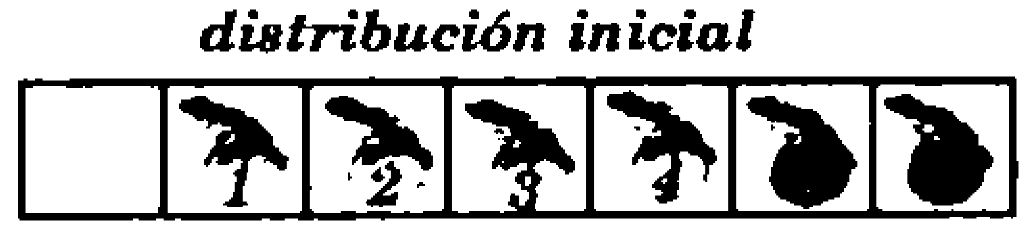
Si ***n***, el número de ranas, es par, necesitamos $(n^2+n)/2$ jugadas, de las cuales $(n^2-n)/2$ serán saltos y ***n*** movimientos simples. Si ***n*** es impar, necesitamos $(n^2+3n)/2-4$ jugadas , de las cuales $(n^2-n)/2$ serán saltos y $2n-4$ movimientos simples.

Para determinar las jugadas en los casos pares escriba todos los números pares en orden ascendente y a continuación, los impares en orden descendente. Esta serie se debe repetir ***n/2*** veces y ser finalizada por los números pares en orden ascendente una sola vez. Así, la solución para ***14*** ranas será ***(2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 13; 11; 9; 7; 5; 3; 1)*** repetida siete veces y seguida por ***2; 4; 6; 8; 10; 12; 14,*** lo que arroja ***105*** jugadas.

En los casos impares, escriba los números pares en orden ascendente y los impares en orden descendente , repita esta serie $1/2\,(n-1)$ veces; siga con los números pares en orden ascendente (omitiendo $n-1$), los números impares en orden descendente (omitiendo ***1***) y concluya con todos los números (pares e impares) en su orden natural (omitiendo ***1*** y ***n***).

Así, para ***11*** ranas será ***(2; 4; 6; 8; 10; 11; 9; 7; 5; 3; 1)*** repetido cinco veces: ***2; 4; 6; 8; 11; 9; 7; 5; 3*** y ***2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10;*** en total, ***73***, jugadas.

distribución inicial



distribución final

CONGRUENCIA DE TRIANGULOS
CAPITULO 097

OBJETIVOS :

Al finalizar esta unidad el alumno estará en capacidad de :

* *Reconocer e identificar la congruencia de triángulos a partir de los casos fundamentales.*

* *Aplicar correctamente los casos de la congruencia.*

* *Aplicar correctamente los teoremas relativos a la congruencia.*

* *Reconocer y diferenciar las relaciones que existen entre los teoremas .*

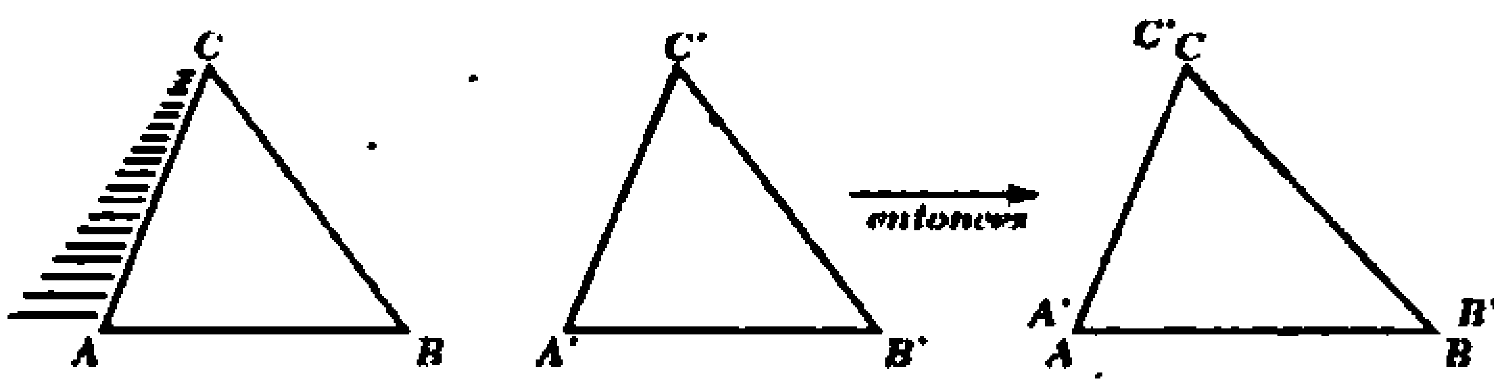
* *Utilizar adecuadamente las relaciones existentes entre longitudes de los lados del triángulo rectángulo notable.*

INTRODUCCIÓN :

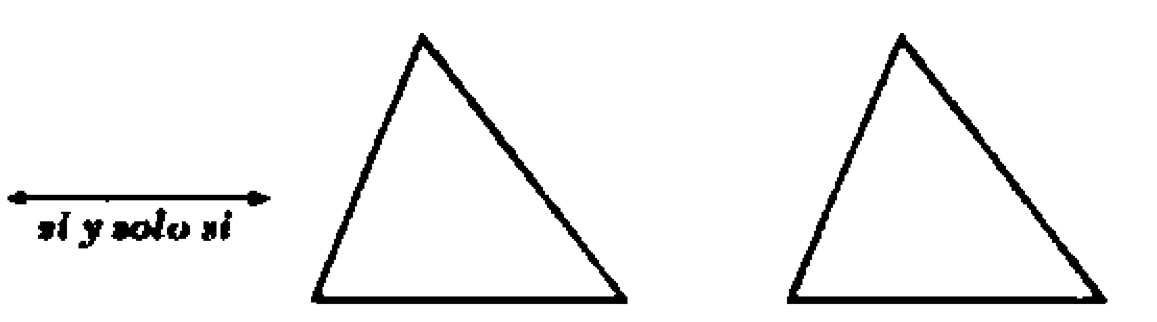
Intuitivamente, decimos a que dos figuras geométricas son congruentes si una de ellas puede ser trasladada de tal forma que coincida con la otra, punto por punto. En otras palabras, las figuras congruentes tienen la misma medida y forma.

Suponemos que al trasladar una figura geométrica no cambia ninguna de sus propiedades, excepto su localización en el espacio. Estas figuras son "rígidas"; esto es, no se doblan ni se deforman. Entonces, si movemos un triángulo de tal manera que coincida con el otro, la traslación no altera sus elementos, las longitudes de sus lados ni las medidas de sus ángulos.

Podemos observar ahora que las nociones de congruencia y medida estan estrachamente relacionados.



(Si trasladamos (movemos) el ΔABC sobre el ΔA'B'C') (Si Coinciden ambos triángulos punto por punto)

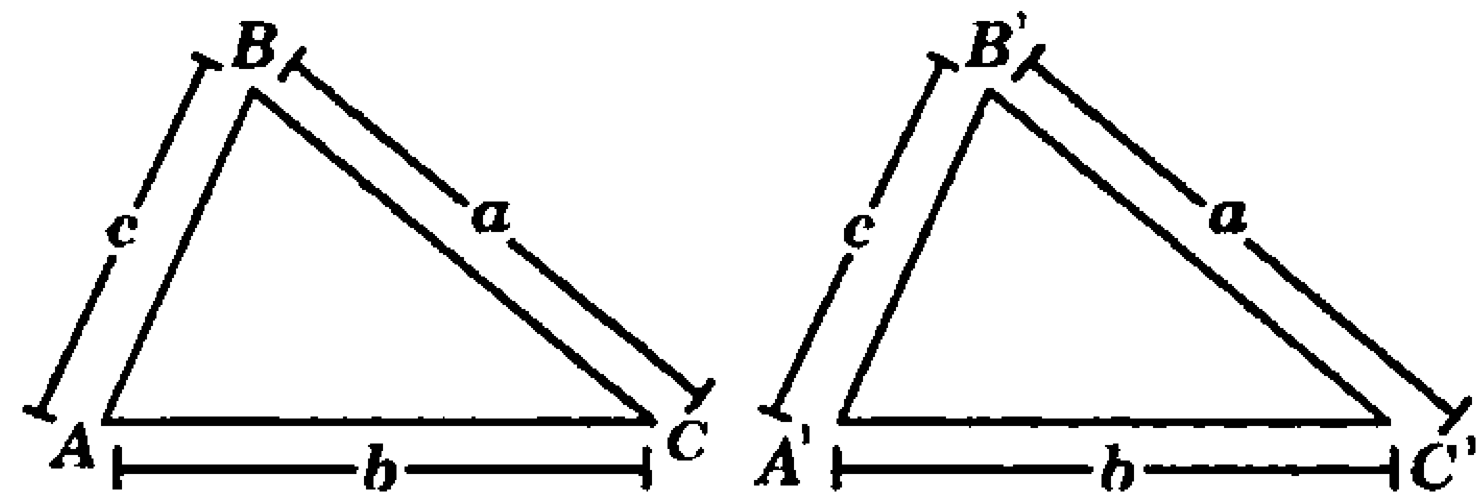


(El ΔABC es congruente con el ΔA'B'C')

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes cuando en dichos triángulos sus ángulos son respectivamente de igual medida y además sus lados correspondientes son de igual longitud.

* Es decir :



$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$

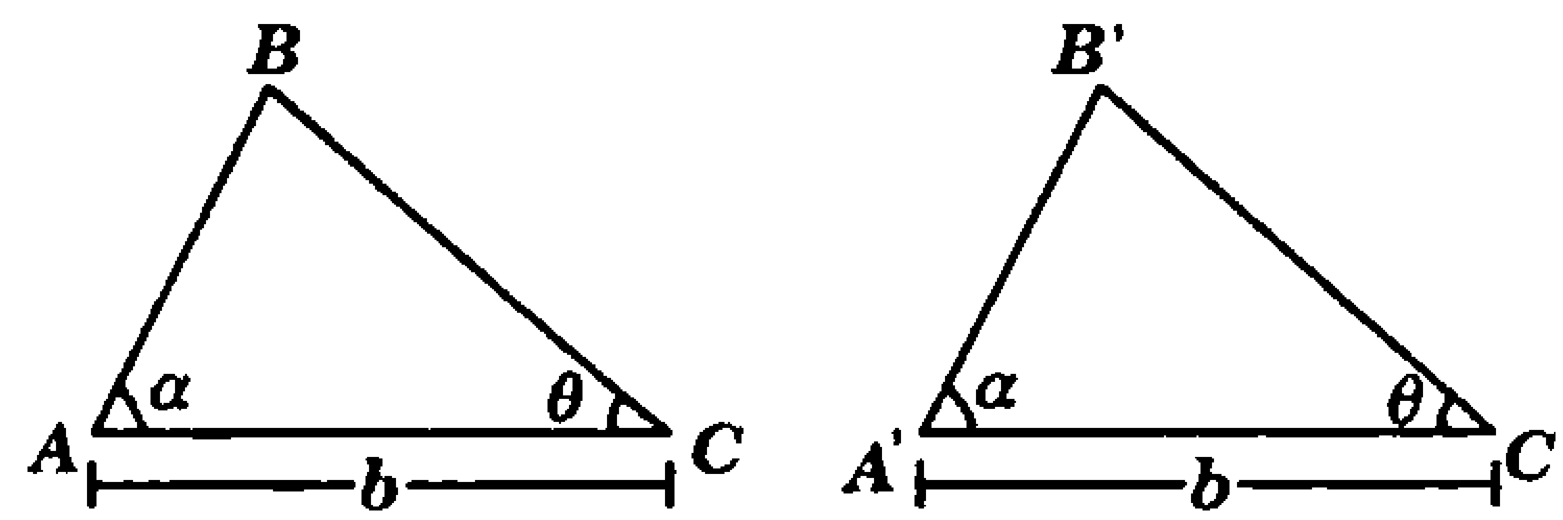
$\cong$: se lee "es congruente a"

CASOS DE CONGRUENCIA :

Dos triángulos serán congruentes cuando tres elementos en uno de ellos tengan igual medida que los tres elementos correspondientes en el otro , donde de esos tres elementos , por lo menos uno de ellos debe ser un lado .

I) CASO : ÁNGULO - LADO - ÁNGULO (ALA)

Dos triángulos serán congruentes si tienen un lado de igual longitud y además los ángulos adyacentes a dicho lado respectivamente de igual medida .



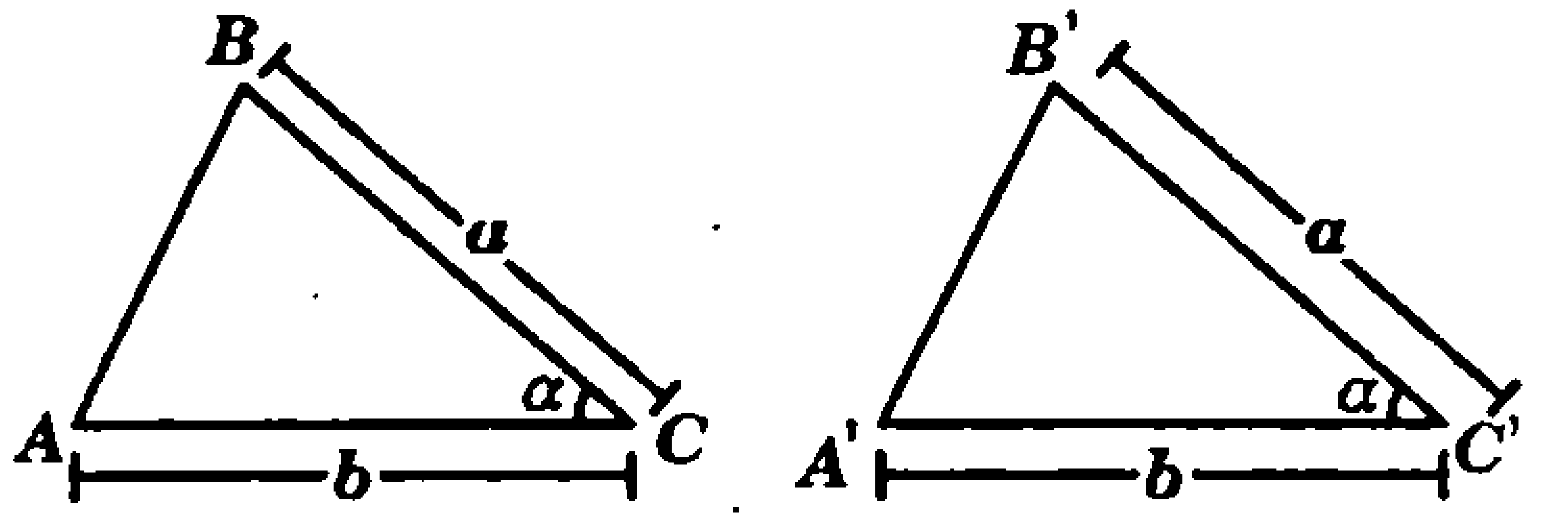
* Si : $AC = A'C'$

$m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle B'A'C'$ y $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle A'C'B'$

$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$

II) CASO : LADO - ÁNGULO - LADO (LAL)

Dos triángulos serán congruentes , si tienen un ángulo interior de igual medida , además los lados que determina a dicho ángulo son respectivamente de igual longitud , es decir:



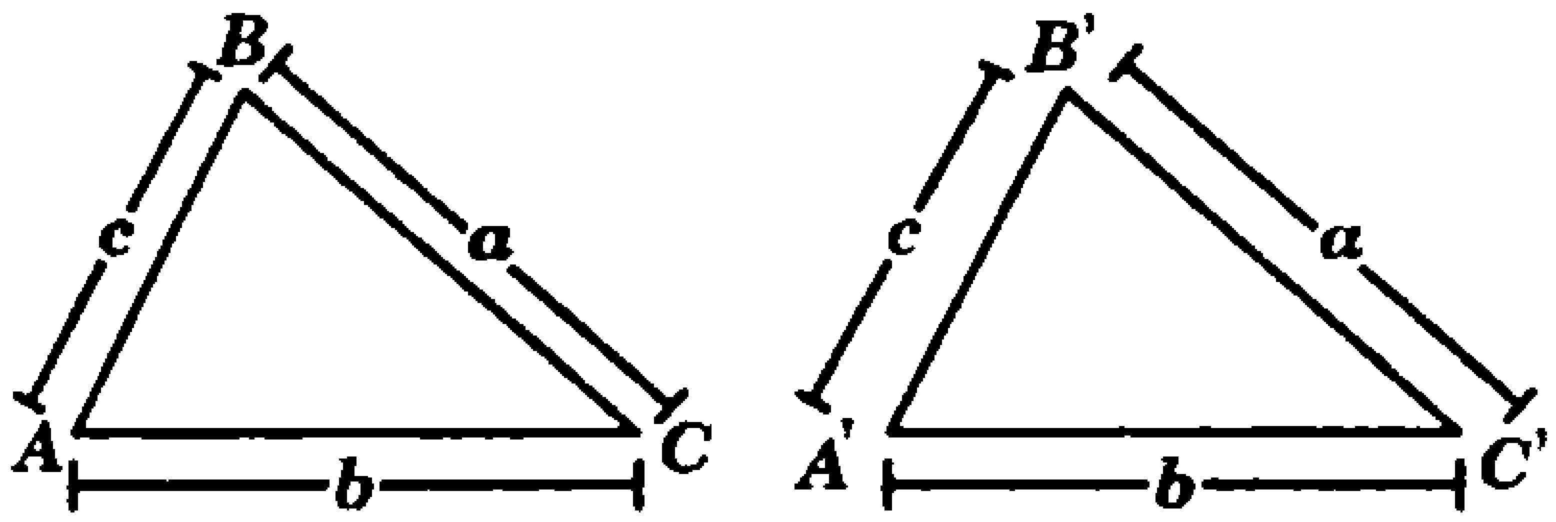
* Si : $AB = A'B'$

$BC = B'C'$ y $m\measuredangle ACB = m\measuredangle A'C'B'$

$$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$$

III) CASO : LADO - LADO - LADO (LLL)

Dos triángulos serán congruentes, si sus lados son respectivamente de igual longitud.



* Si : $AB = A'B'$

$BC = B'C'$

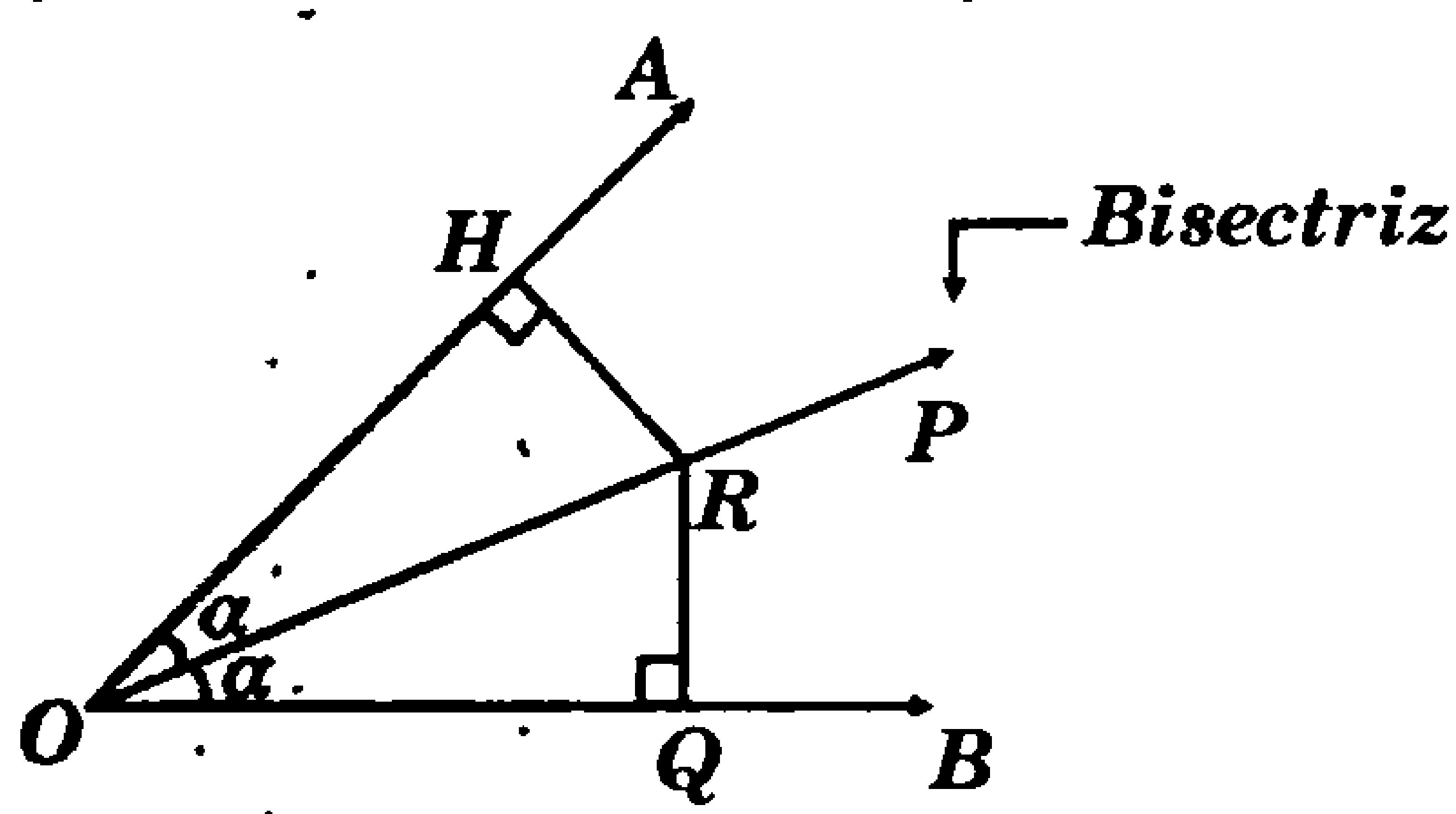
$AC = A'C'$

$$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$$

APLICACIONES DE CONGRUENCIA

TEOREMA DE LA BISECTRIZ :

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.



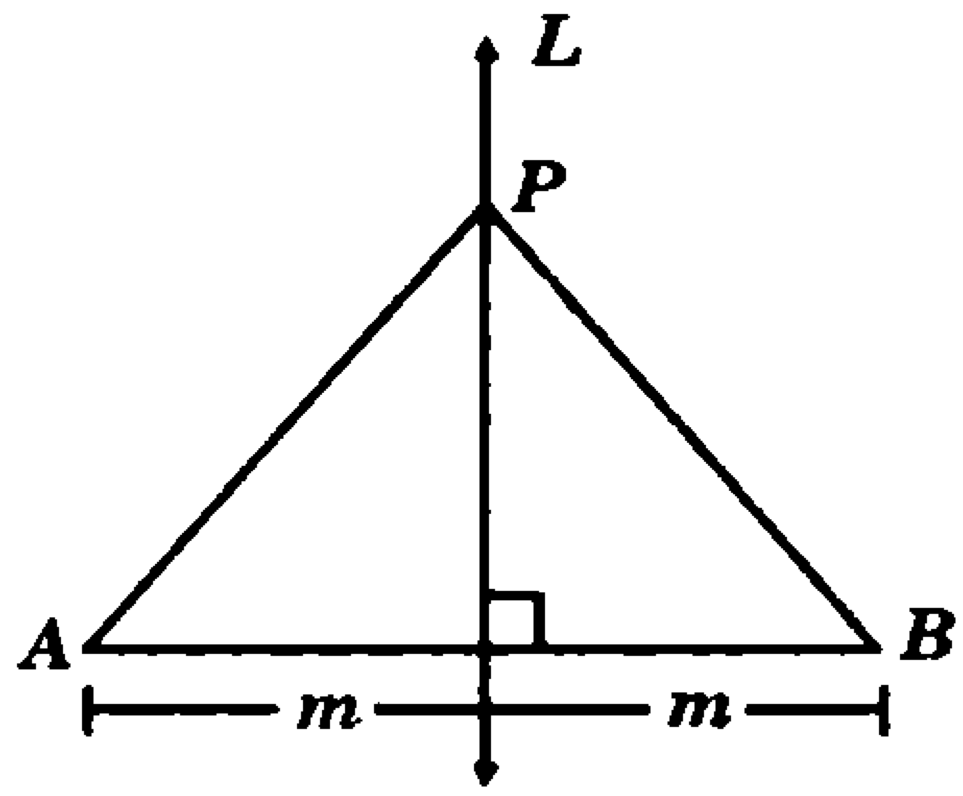
* Sea : $\overrightarrow{OP}$ bisectriz del $\measuredangle AOB$ y $\in R\overrightarrow{OP}$

$\Rightarrow RH = RQ$

y además : $OH = OQ$

TEOREMA DE LA MEDIATRIZ :

Todo punto que pertenece a la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

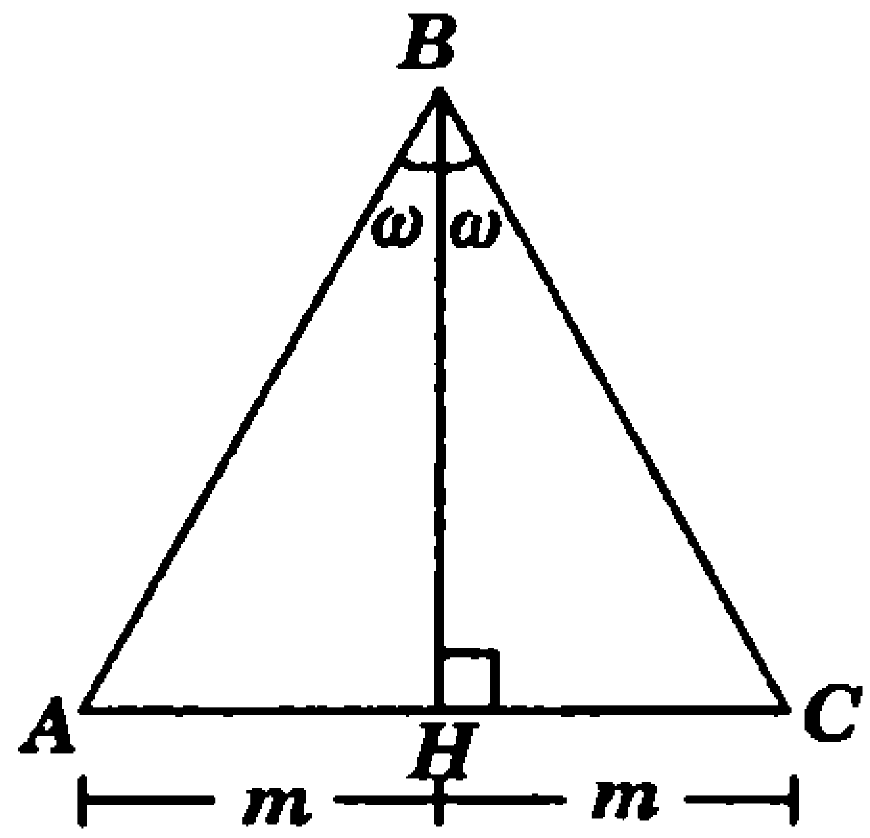


* Si $\overleftrightarrow{L}$: mediatriz de $\overline{AB}$ y $P \in \overleftrightarrow{L}$

$\Rightarrow AP = PB$

OBSERVACIÓN :

En todo triángulo isósceles , la altura relativa a la base es mediana y bisectriz relativa a la base.



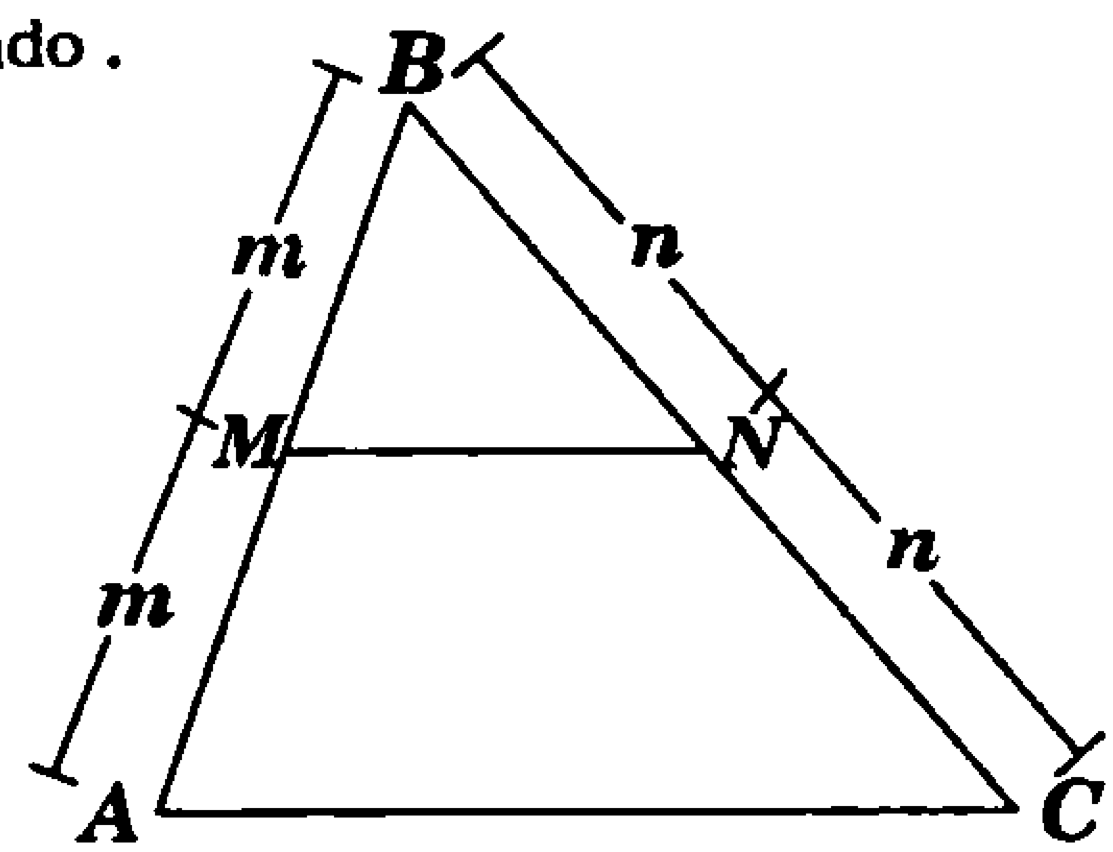
* El ΔABC es isósceles
* Si: $\overline{BH}$ es la altura relativa a la base AC
* Entonces: $\overline{BH}$: mediana $\overline{BH}$: bisectriz

BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Se denomina base media al segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

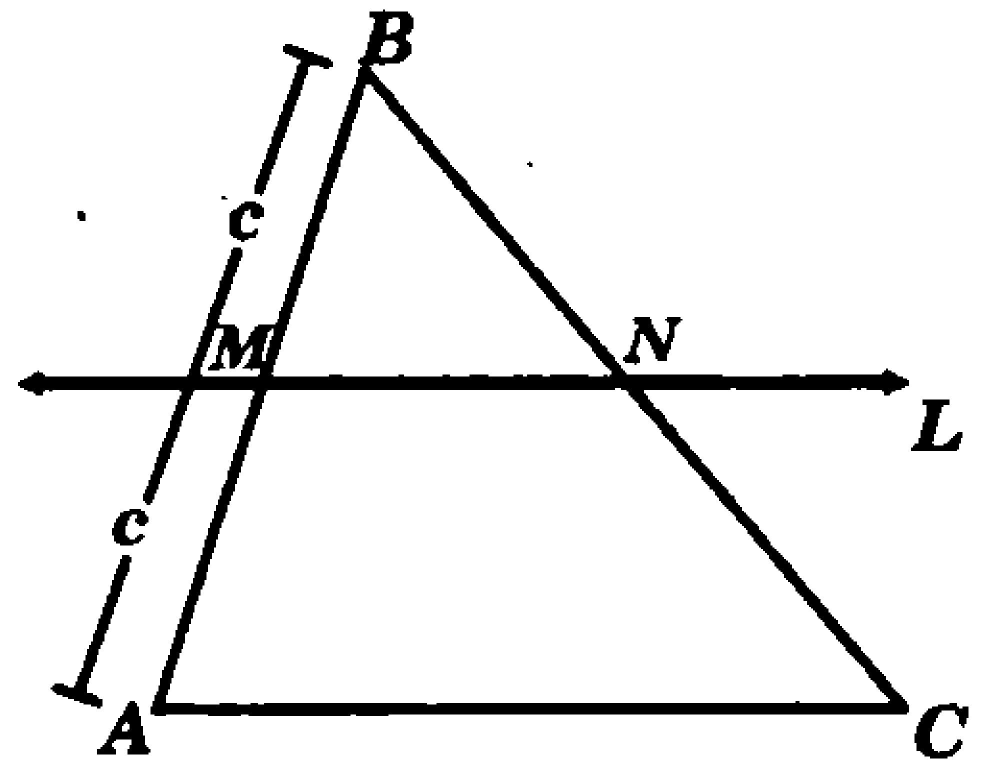
* En todo triángulo la base media es paralela a un lado y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado .



* $\overline{MN}$: base media del ΔABC.
* Se cumple : $MN // AC$ y $\boxed{MN = \dfrac{AC}{2}}$

OBSERVACIÓN:

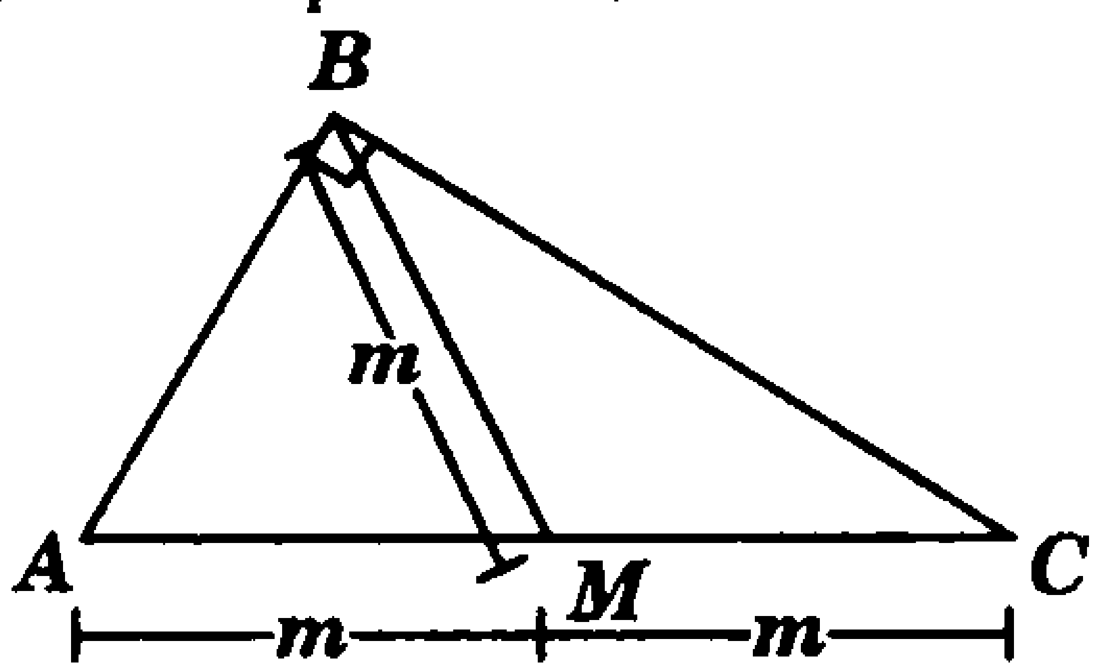
Al trazar por el punto medio de un lado de un triángulo una recta paralela a otro lado ; dicha recta interseca al tercer lado en su punto medio .



* Si : $AM = MB$ y $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AC}$
* Entonces : N : punto medio de BC
* Por lo tanto : $\overline{MN}$ es base media del ΔABC.

DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

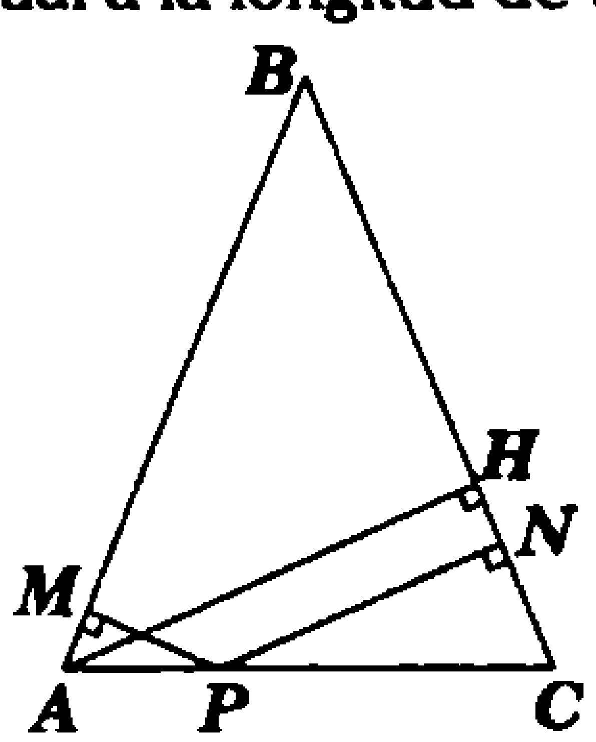
En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de dicha hipotenusa .



* En la figura :
* $\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa a AC del ⊿ABC
* Entonces : $BM = \dfrac{AC}{2}$

PROPIEDADES EN LOS TRIÁNGULOS ISÓSCELES Y EQUILÁTEROS

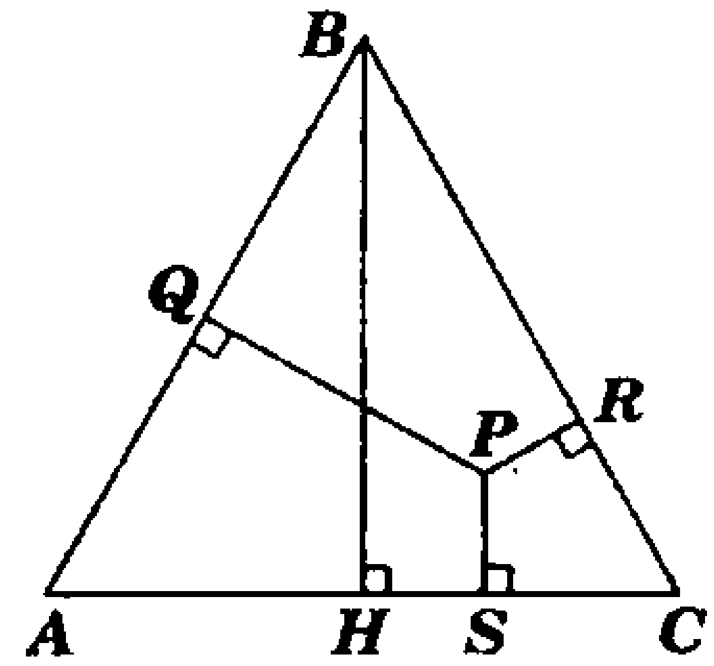
1) La suma de las distancias de un punto de la base de un triángulo isósceles a los lados congruentes es igual a la lóngitud de una de las alturas congruentes



Si : $AB = BC$

$\Rightarrow \boxed{AH = PM + PN}$

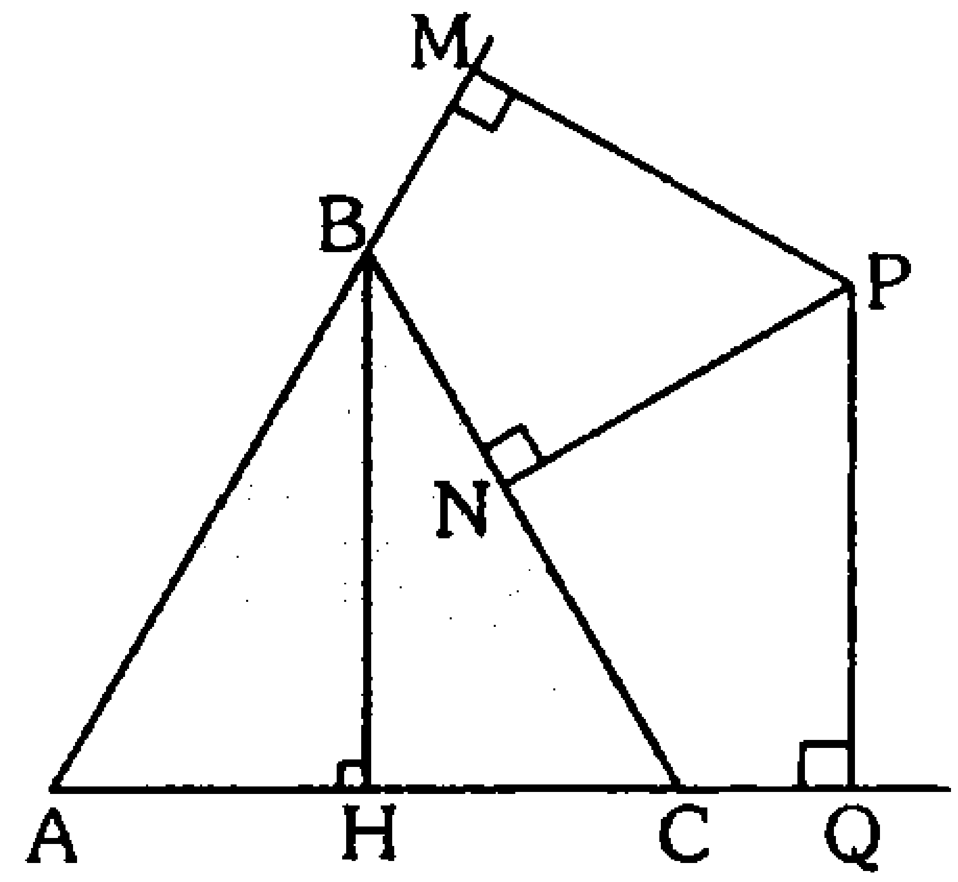
2) La suma de las longitudes de las perpendiculares trazadas desde un punto interior al triángulo equilátero es igual a la longitud de la altura del triángulo equilátero.



Si: $AB = BC = AC$

$\Rightarrow \boxed{BH = PQ + PR + PS}$

Si el punto "p" es exterior a uno de los lados del triángulo equilátero se cumple:



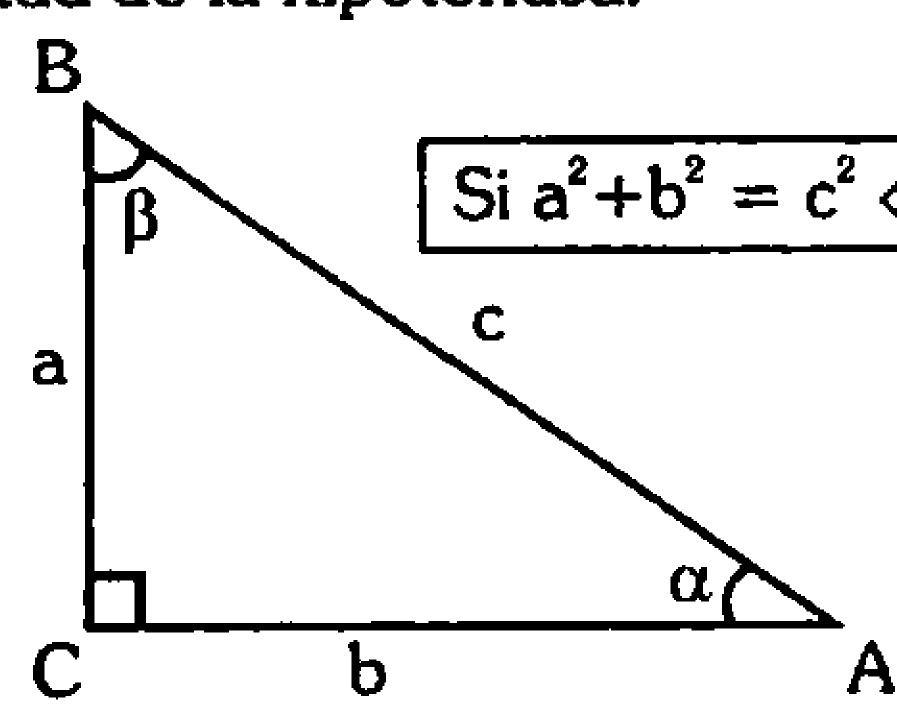
Si: $AB = BC = AC$

$\Rightarrow \boxed{BH = PM + PQ + PN}$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

I) TEOREMA DE PITÁGORAS:

En todo triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

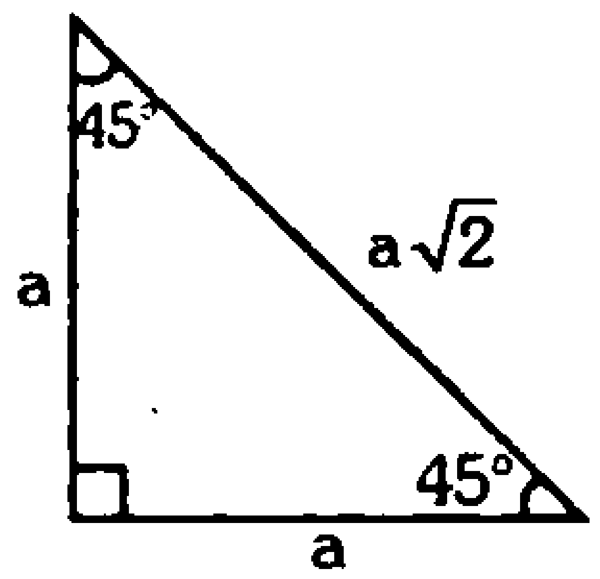


$\boxed{\text{Si } a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90°}$

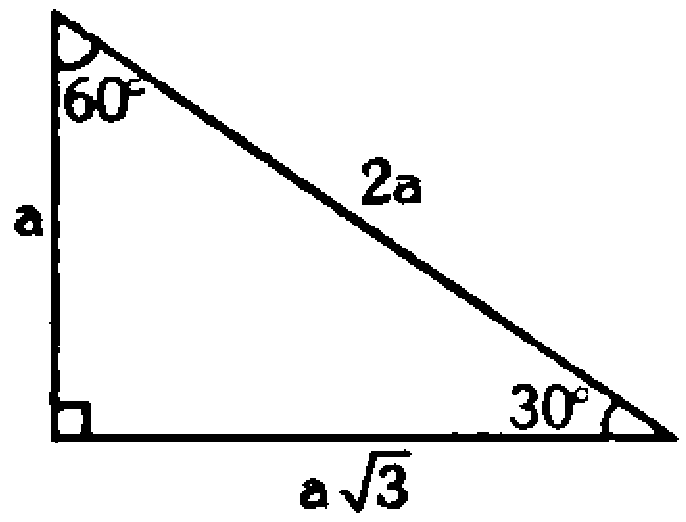
II) TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES:

Denominamos así a aquellos triángulos rectángulos en los cuales conociendo las medidas de sus ángulos internos (denominados ángulos notables) se establece una determinada relación entre las longitudes de sus lados y viceversa.

A) Triángulo Rectángulo Notable: (45° – 45°)

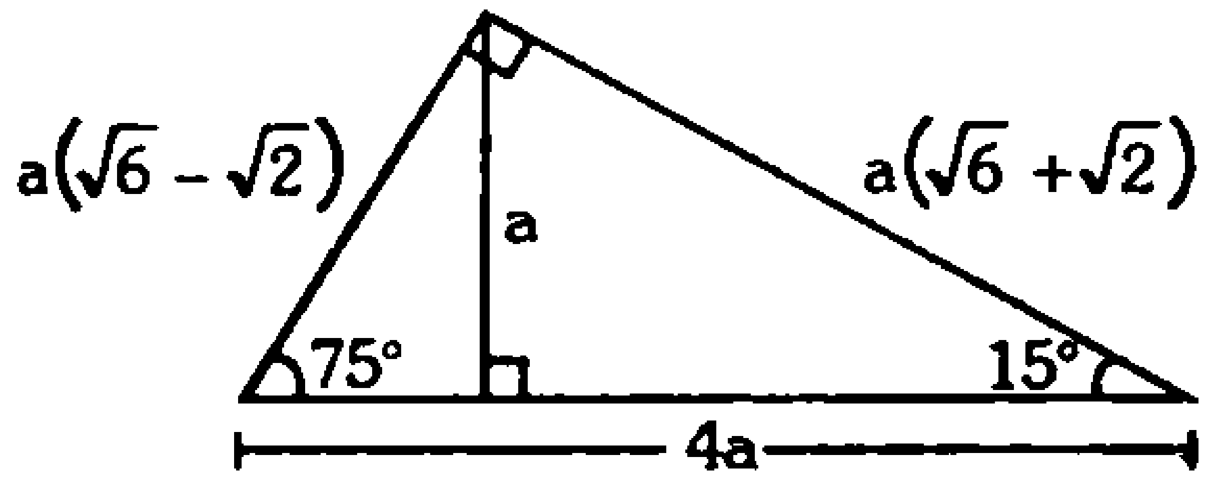


B) Triángulo Rectángulo Notable: (30°– 60°)

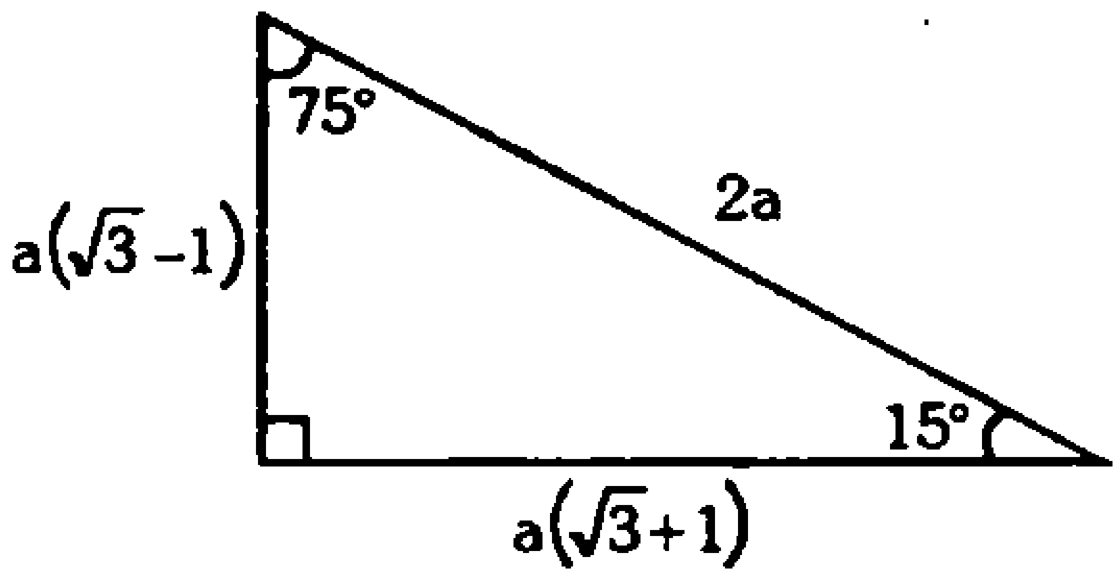


C)Triángulo Rectángulo Notable: (15°–75°)

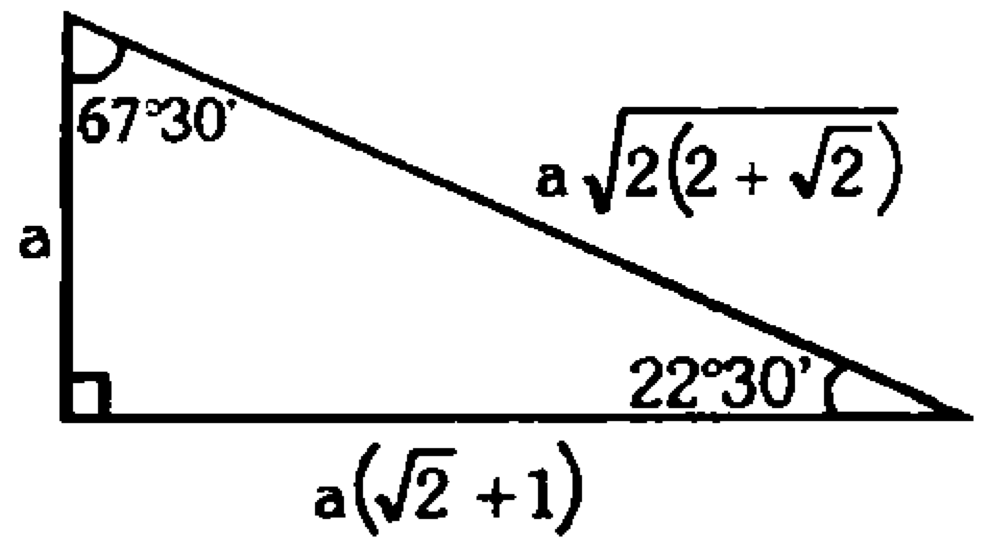
1)



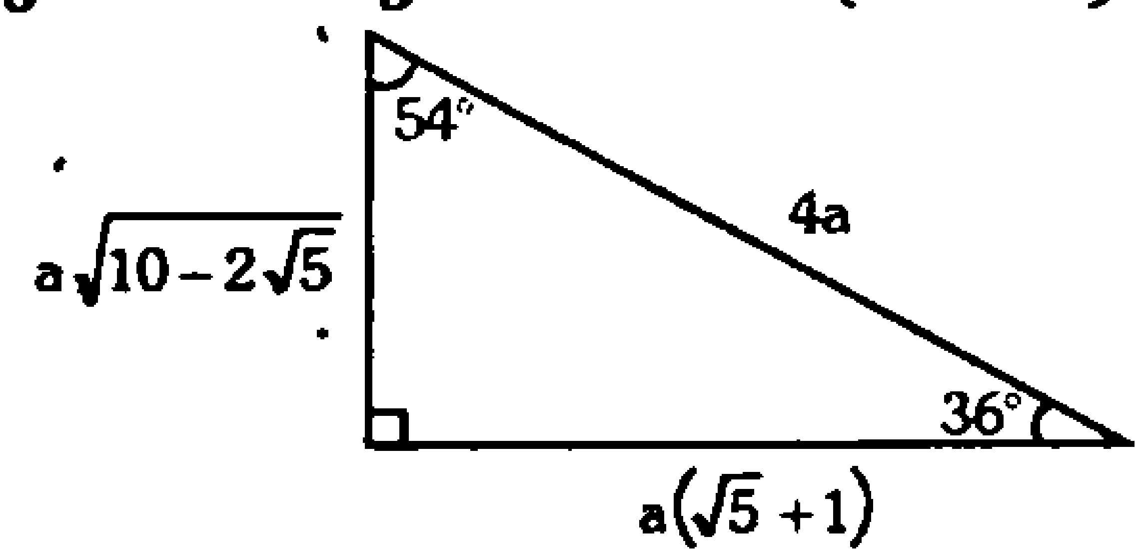
2)



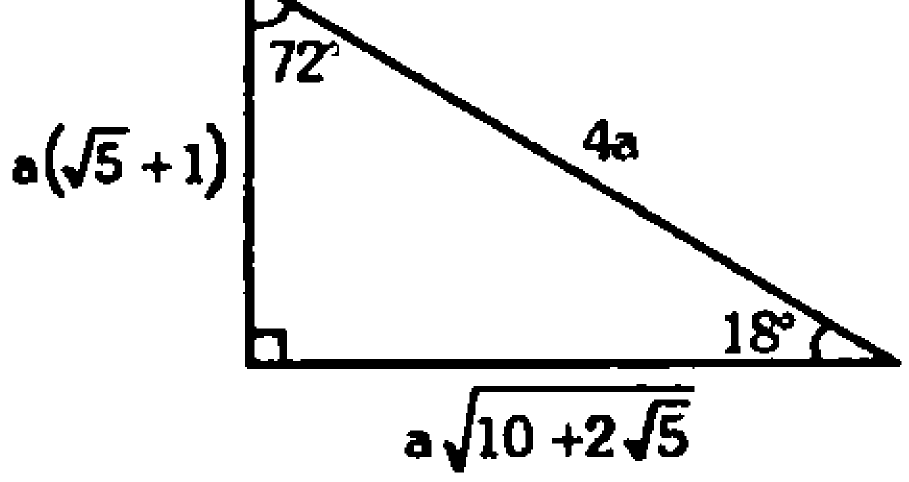
D) Triángulo Rectángulo Notable: (22°30'– 67°30')



E) Triángulo Rectángulo Notable: (36°–54°)

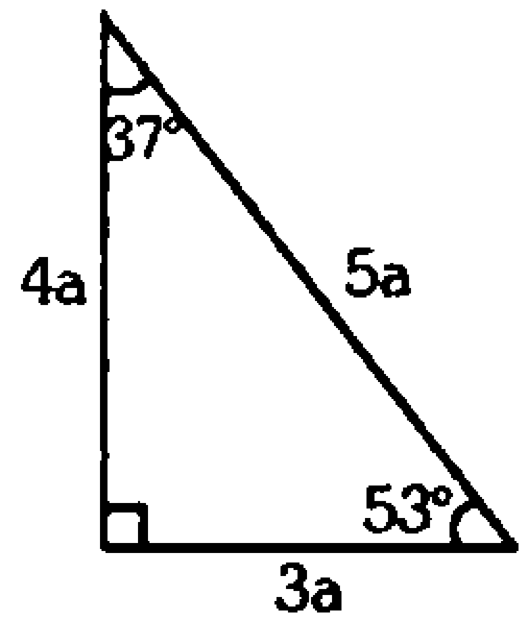


F) Triángulo Rectángulo Notable: (18°–72°)

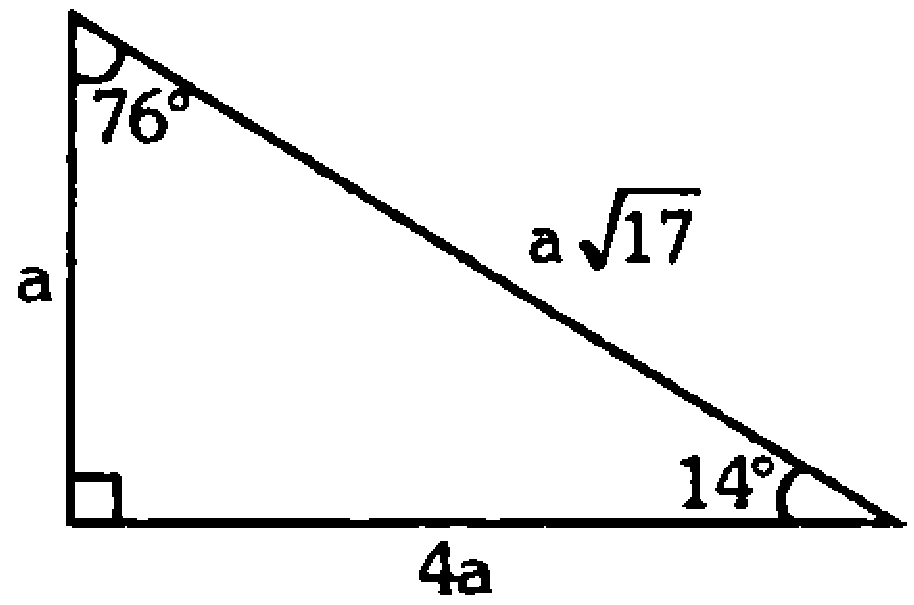


III) TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS:

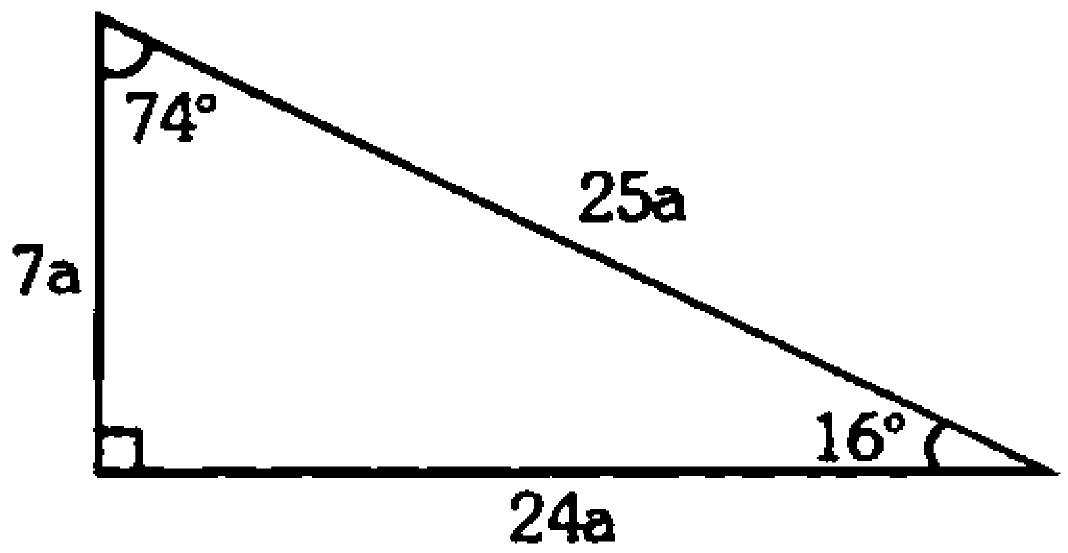
A) Triángulo Rectángulo Notable: (37°– 53°)



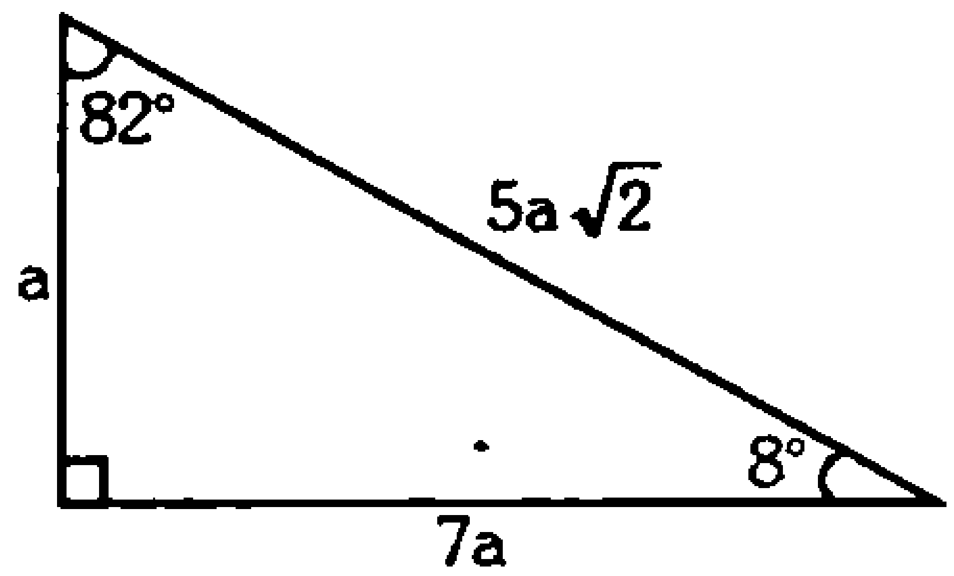
B) Triángulo Rectángulo Notable: (14° – 76°)



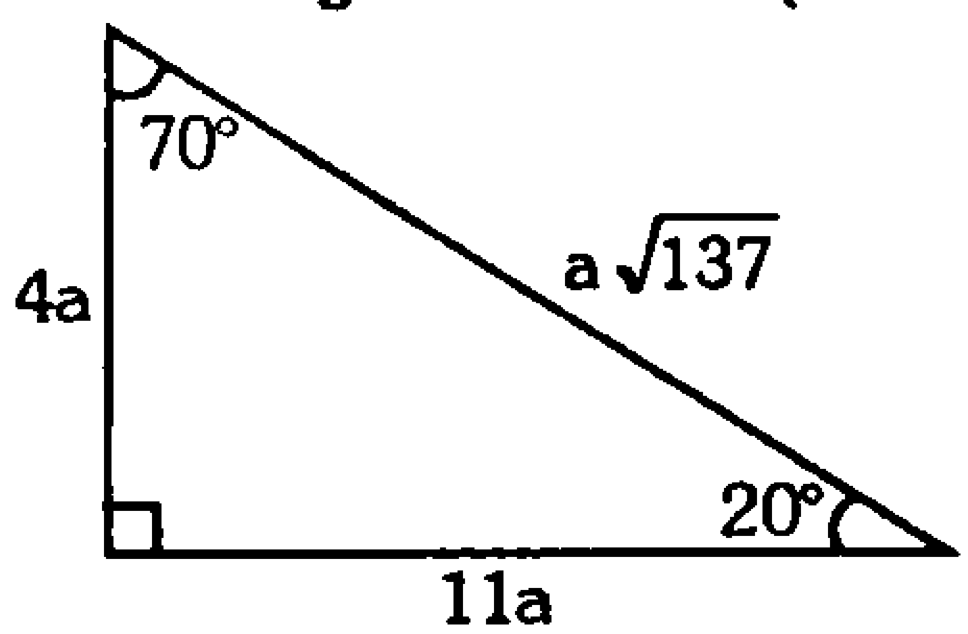
C) Triángulo Rectángulo Notable: (16°–74°)



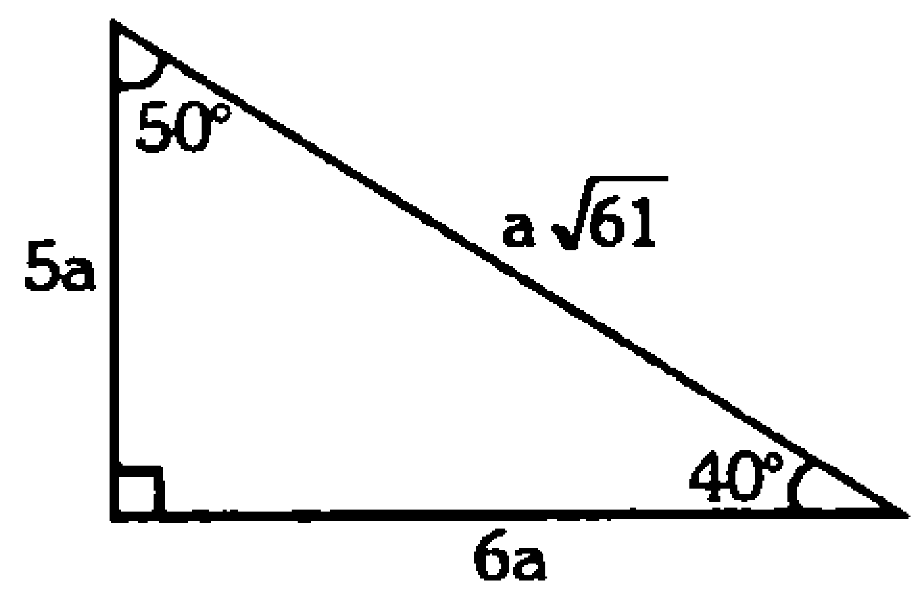
D) Triángulo Rectángulo Notable: (8°–82°)



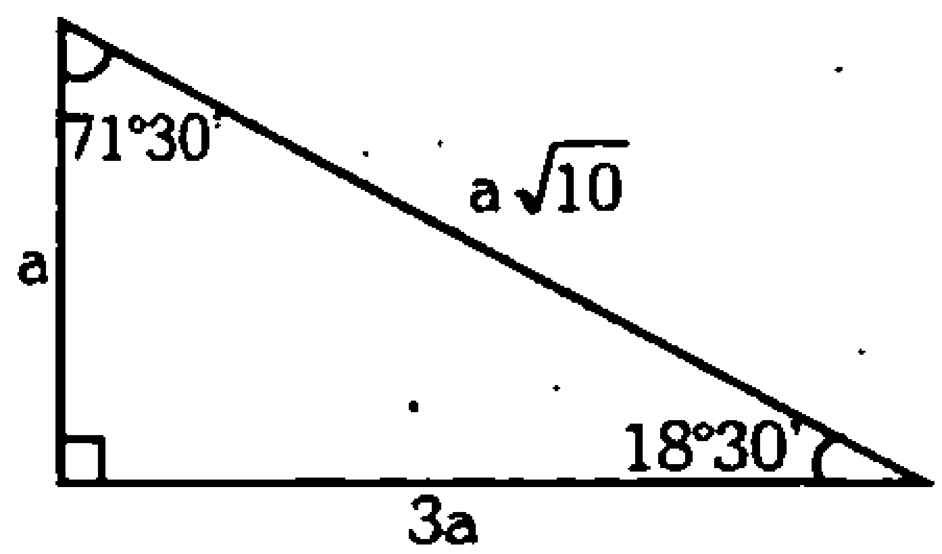
E) Triángulo Rectángulo Notable: (20°–70°)



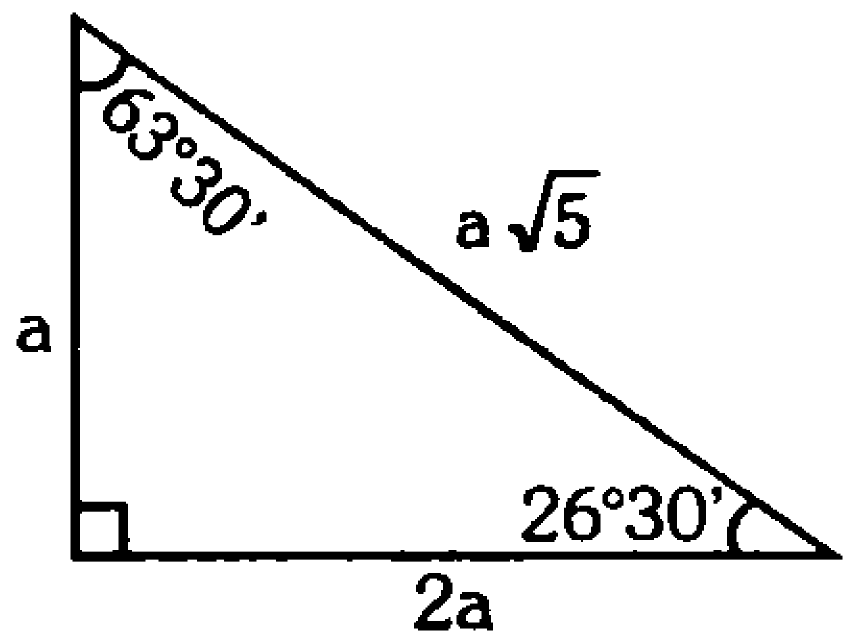
F) Triángulo Rectángulo Notable: (40°–50°)



G) Triángulo Rectángulo Notable: (18°30'–71°30')



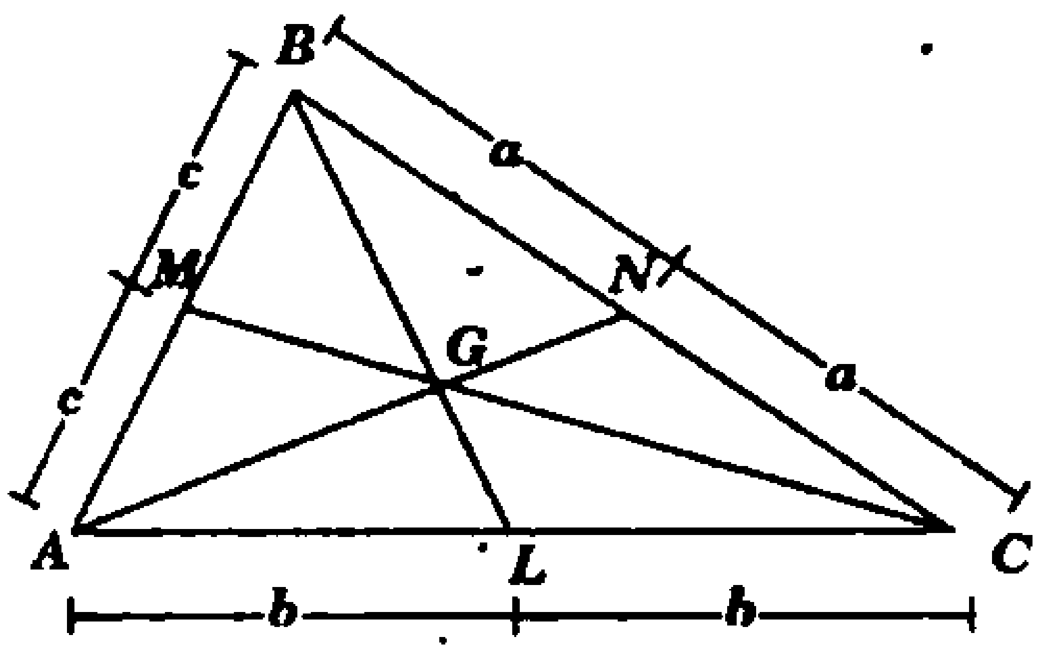
H) Triángulo Rectángulo Notable: (26°30'–63°30')



PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

I) BARICENTRO :

Es el punto de concurrencia de las medianas respecto a un triángulo. El baricentro o centro de gravedad de una región triangular divide a una mediana en la razón de *2* a *1* (midiendo desde el vértice).



* En la figura :

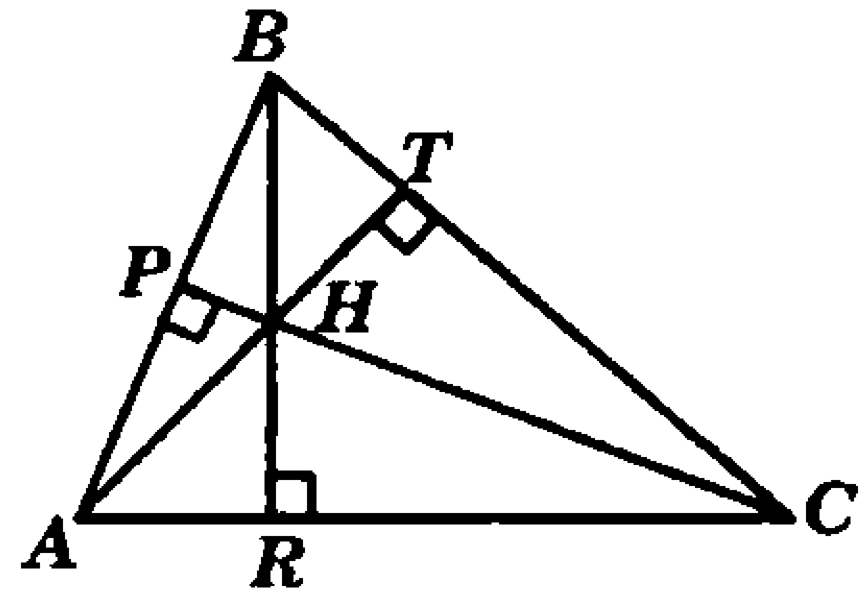
G : baricentro de la región triangular *ABC*.

* ***PROPIEDAD DEL BARICENTRO:***

$$AG = 2(GN) \qquad BG = 2(GL)$$
$$CG = 2(GM)$$

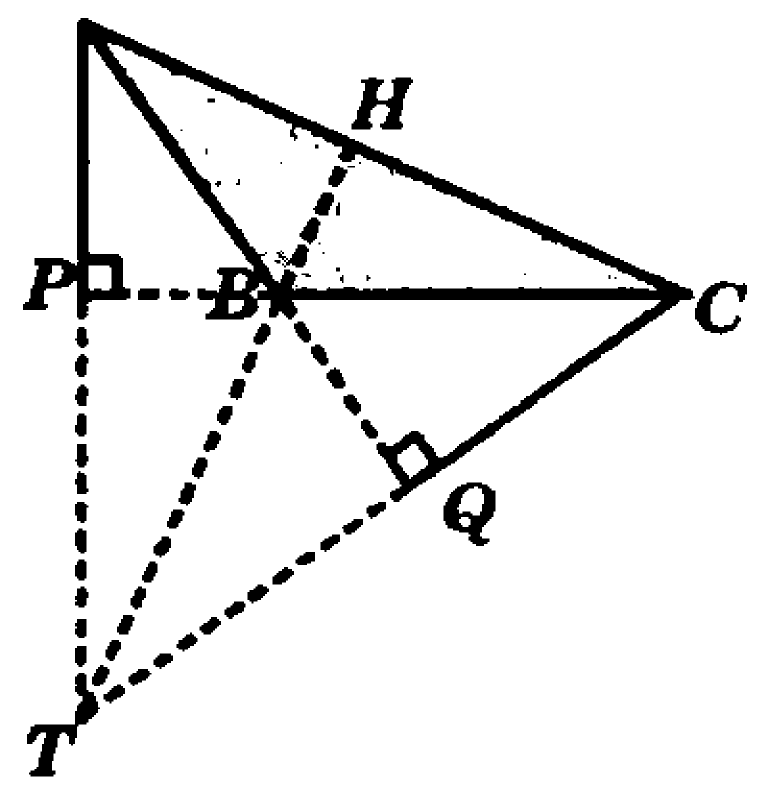
II) ORTOCENTRO:

Es el punto de concurrencia de las alturas o de sus prolongaciones , dicho punto tendrá una ubicación, dependiendo del tipo de triángulo que sea.



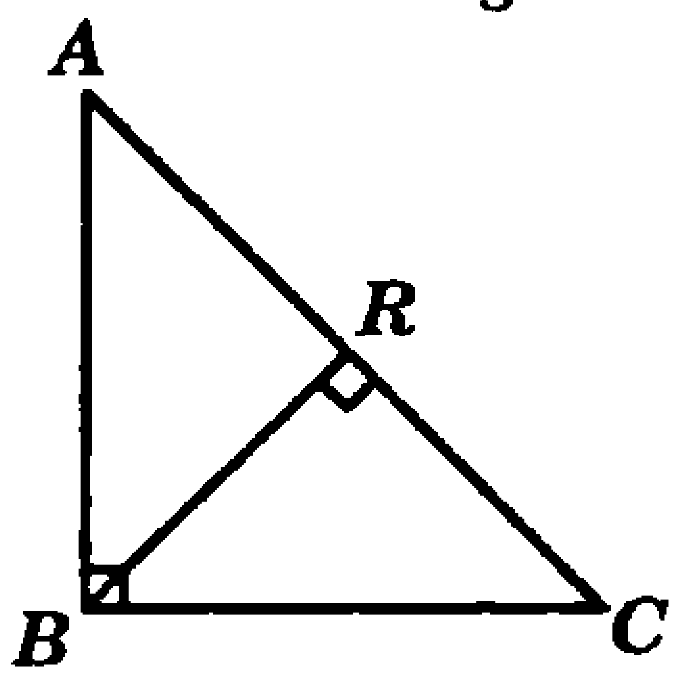
* El $\triangle ABC$ es acutángulo

H : ortocentro del triángulo *ABC*.



* El $\triangle ABC$ es obtusángulo , obtuso en ***B***.

T: ortocentro del triángulo *ABC*.

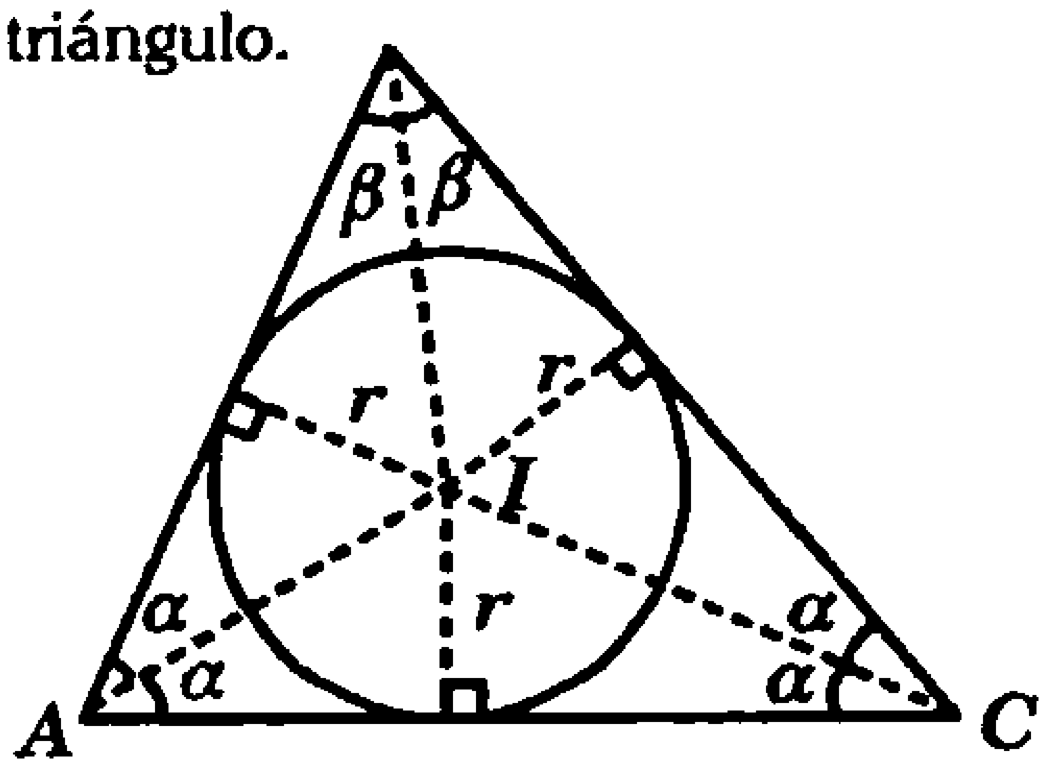


* El $\triangle ABC$ es rectángulo obtuso en ***B***.

B: ortocentro del triángulo *ABC*.

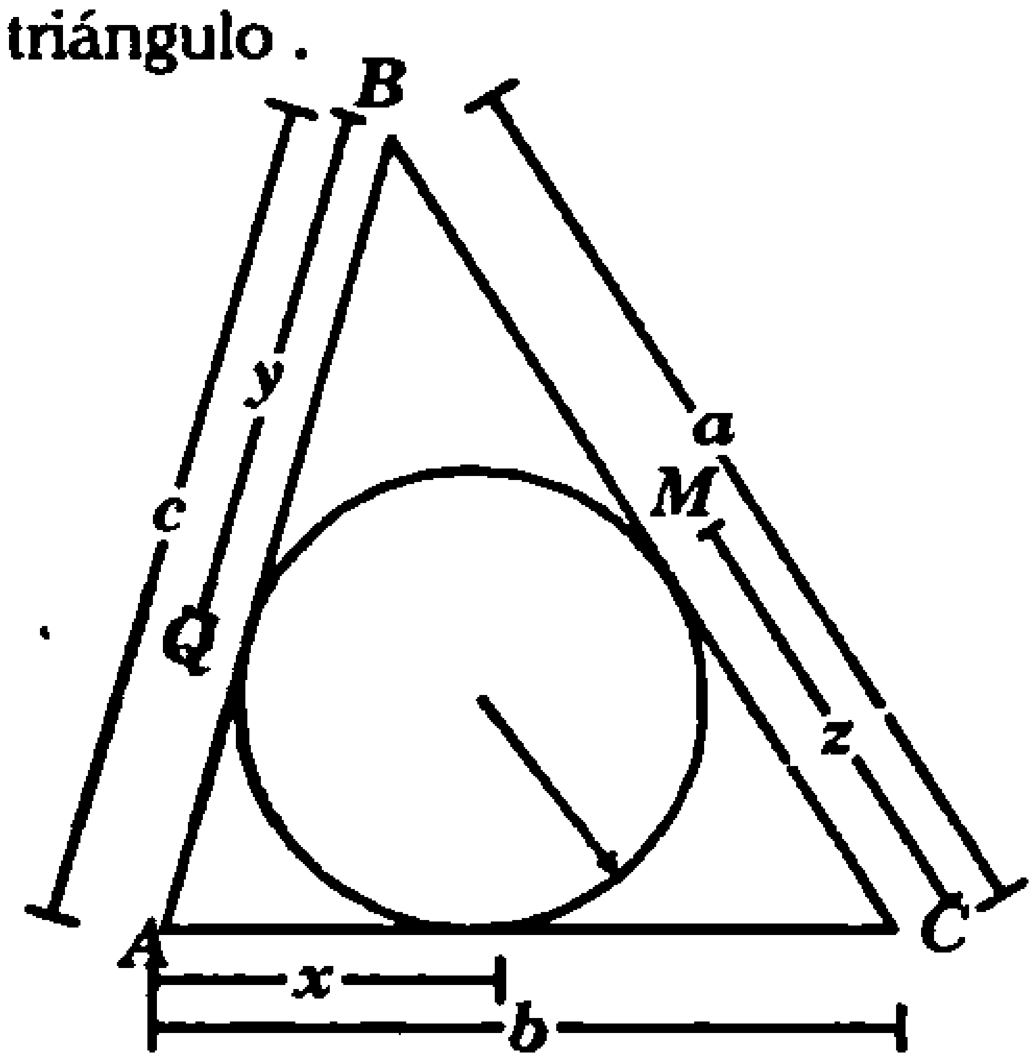
III) INCENTRO :

Es el punto de concurrencia de las bisectrices interiores de un triángulo . El incentro pertenece a la región triangular , equidista de los lados del triangulo, motivo por el cual es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.



* ***I***: incentro del $\triangle ABC$
* ***r***: inradio del $\triangle ABC$
* ***CIRCUNFERENCIA INSCRITA AL TRIÁNGULO***

Es aquella circunferencia cuyo centro es el incentro del triángulo y es tangente a los lados del triángulo .



* $\mathscr{C}$: Circunferencia inscrita en el triángulo *ABC*.
* ***M, Q*** y ***T***: puntos de tangencia .
* Se cumple: $x = p - a$

$$y = p - b$$
$$z = p - c$$

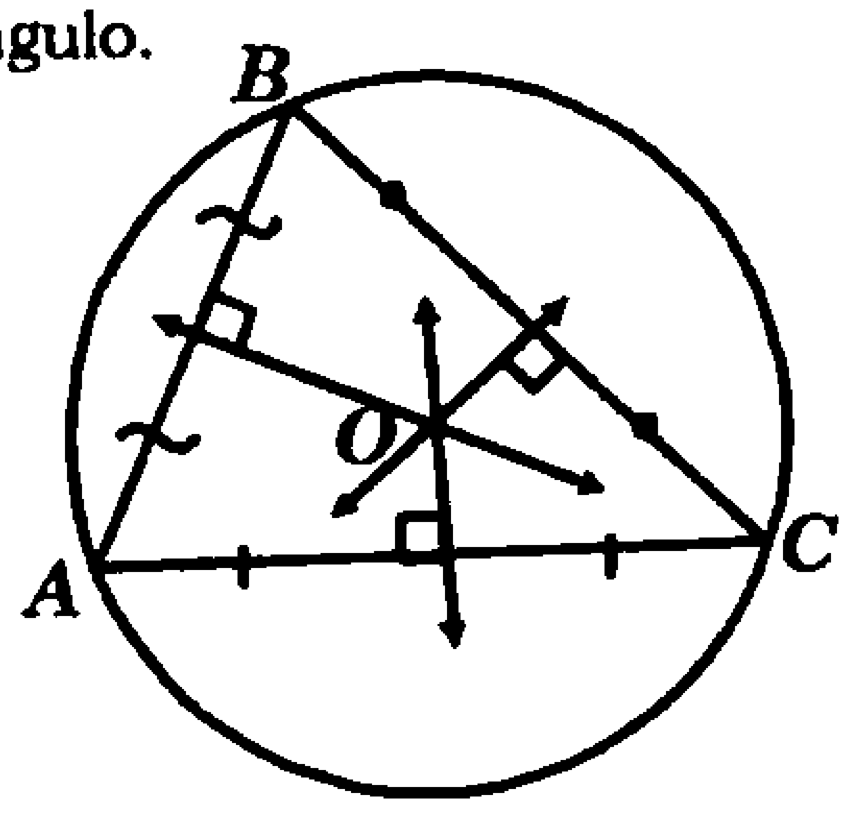
* Donde :

p: semiperímetro de la región triangular *ABC*.

IV) CIRCUNCENTRO:

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo , su ubicación respecto al triángulo , dependerá de la naturaleza de dicho triángulo.

El circuncentro equidista de los vértices del triángulo, motivo por el cual es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.

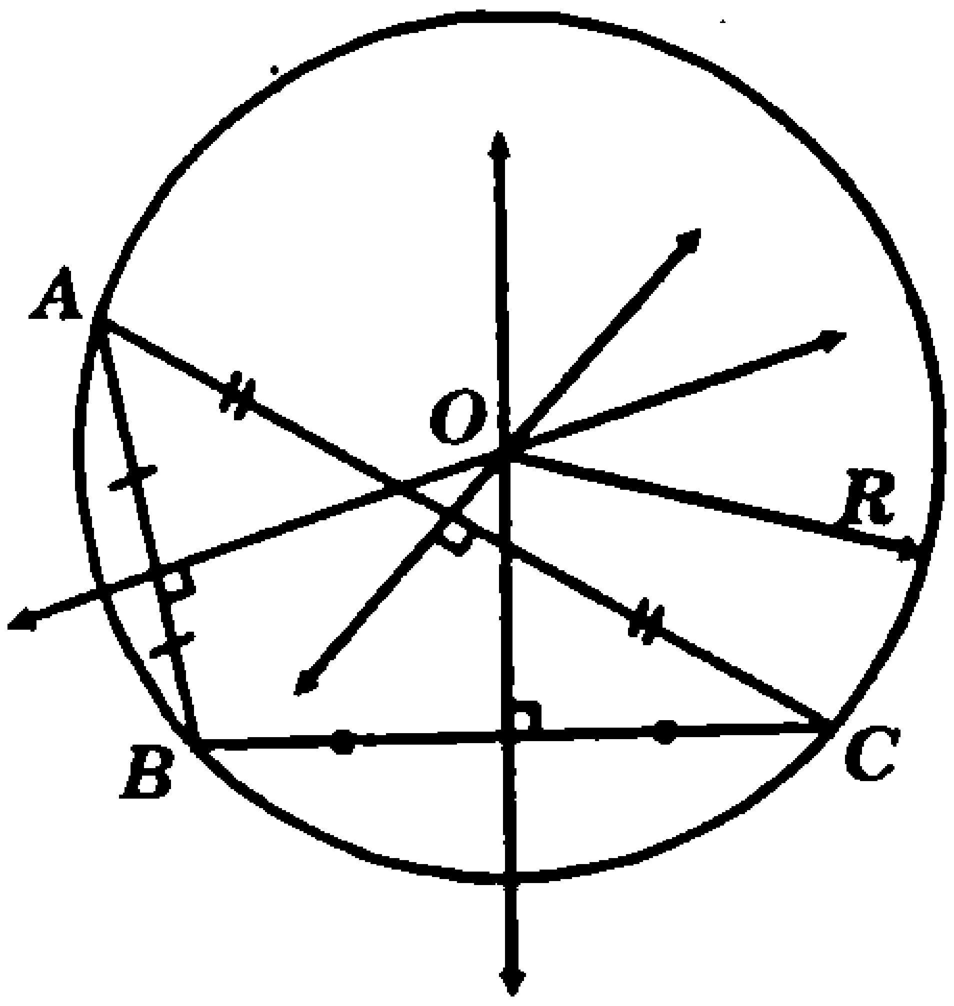


ΔABC : acutángulo

O: circuncentro del ΔABC

O: centro de la circunferencia circunscrita al ΔABC

R : circunradio del ΔABC

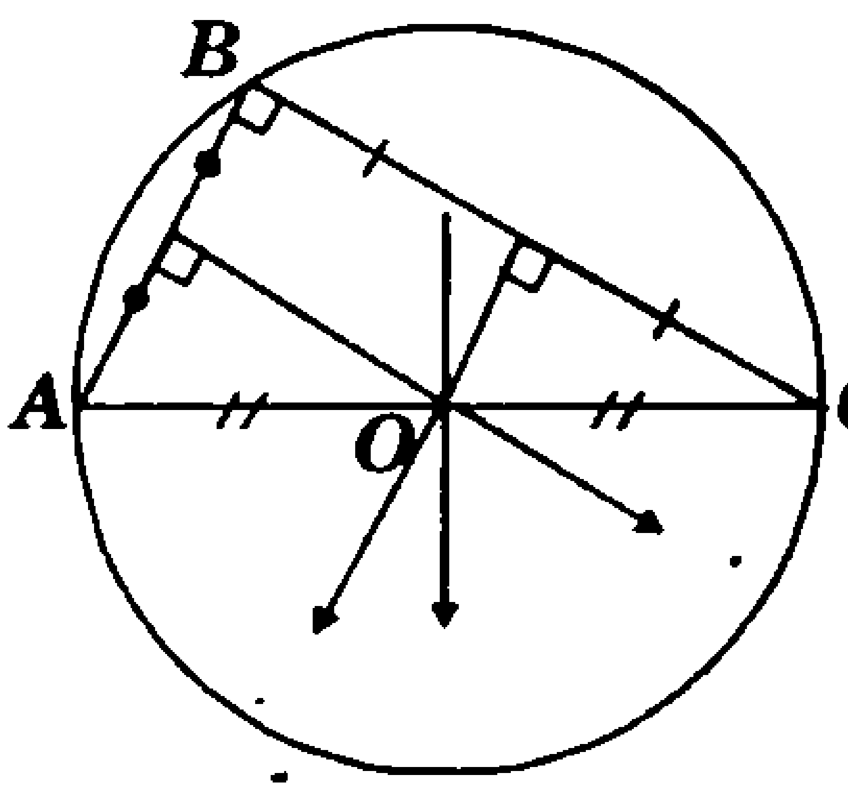


ΔABC: obtusángulo , obtuso en B

O : circuncentro del ΔABC

O : centro de la circunferencia circunscrita al ΔABC.

R : circunradio del ΔABC.



ΔABC: rectángulo , recto en B.

O:circuncentro del ΔABC

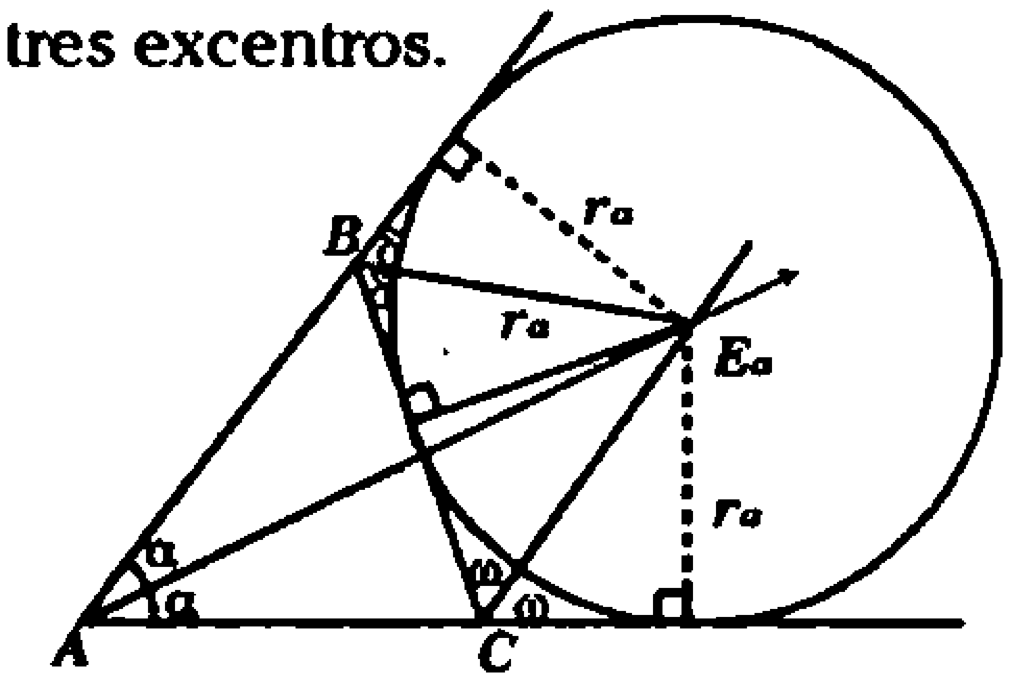
O:centro de la circunferencia cicunscrita al ΔABC.

R : circunradio del ΔABC.

V) EXCENTRO :

Es el punto de concurrencia de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior trazada desde el tercer vértice, el excentro pertenece a la región exterior equidista de los lados del triángulo motivo por el cual es el centro de la circunferencia ex inscrita a dicho triángulo .

El triangulo tiene un excentro relativo a cada lado , es decir tiene tres excentros.



* Circunferencia exinscrita al ΔABC, relativa a $\overline{BC}$

E_a: excentro del ΔABC , relativa al lado $\overline{BC}$.

r_a : exradio del ΔABC , relativo a $\overline{BC}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

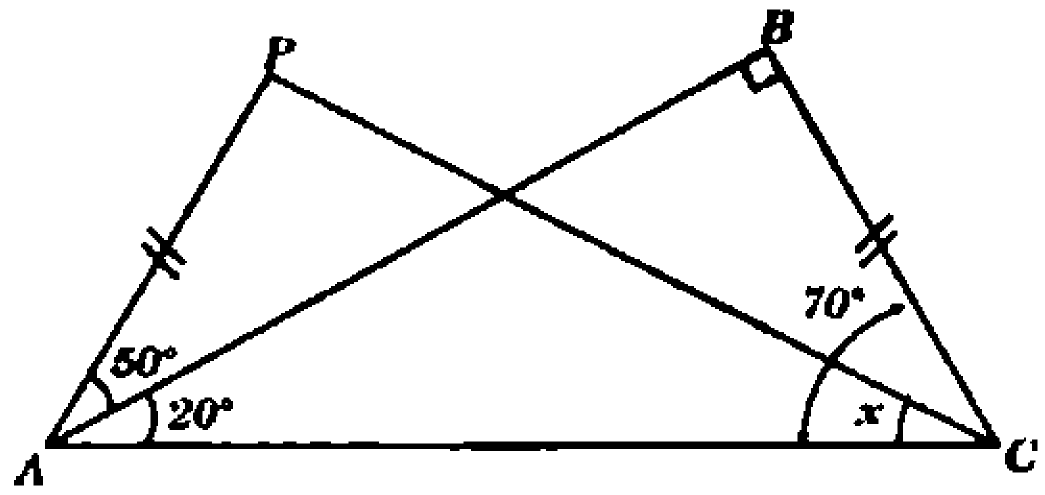
PROBLEMA 1 :

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubica un punto exterior *"P"* relativo a $\overline{AB}$, tal que: $m\sphericalangle PAB=50°$; $m\sphericalangle BAC=20°$ y $AP=BC$.

Calcular $m\sphericalangle PCA$.

A) 10° B) 30° C) 15° D) 20° E) 40°

RESOLUCIÓN:



* En el ⊿ABC;como $m\sphericalangle BAC=20°$, entonces : $m\sphericalangle ACB = 70°$

* Por dato : $AP=BC$

* Considerando la congruencia de triángulos

(caso *LAL)* , en ΔABC y ΔAPC

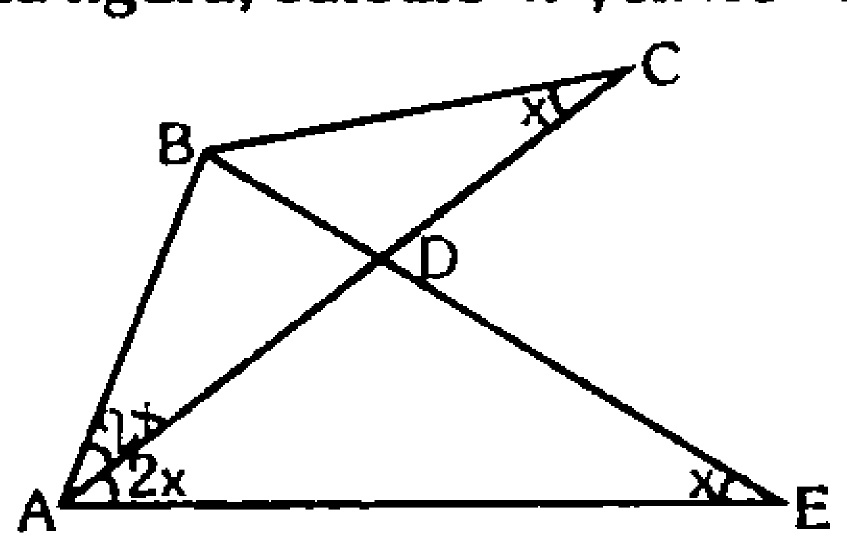
$\Delta ABC \cong \Delta APC \Rightarrow m\sphericalangle PCA = m\sphericalangle BAC$

$\Rightarrow x=20°$

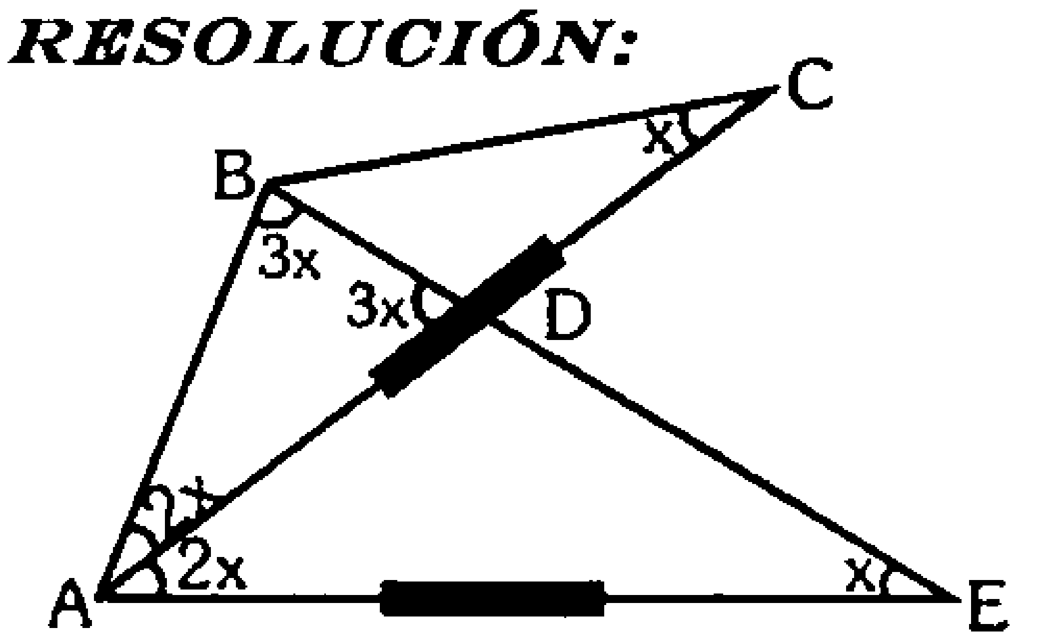
RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

En la figura, calcule "x", si: $AC=AE$.



RESOLUCIÓN:



1° El

$\Delta ABC \cong \Delta ADE$ *(Caso A.L.A.)*

2° Luego:

$AB=AD$

$\Rightarrow m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle ADB = 3x$

3° En el ΔABD:

$$3x+3x+2x=180°$$

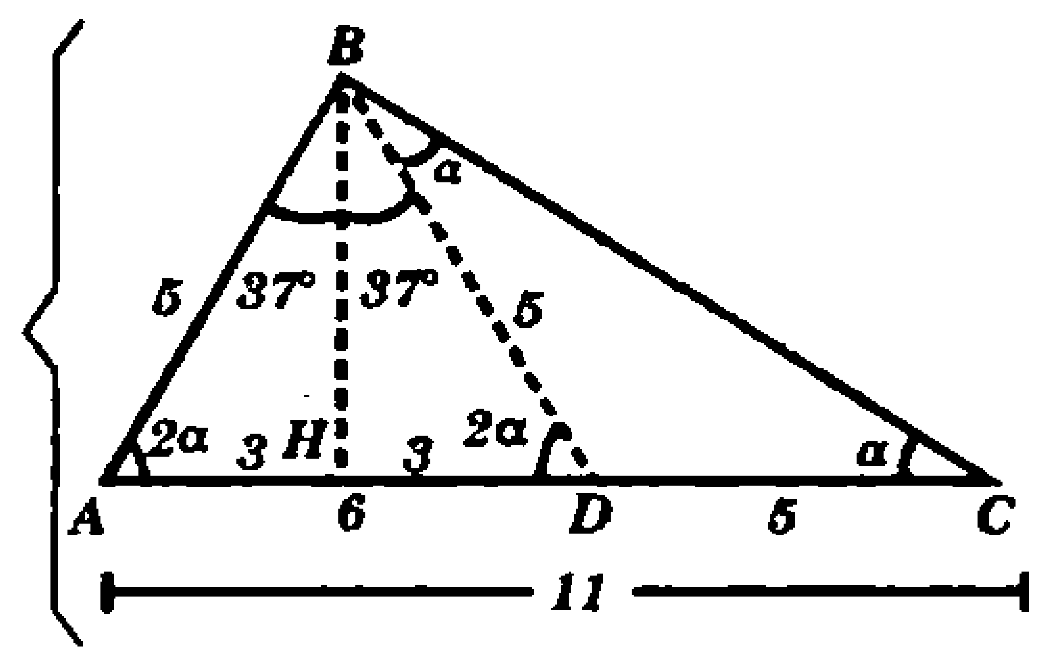
$$x=22,5°$$

PROBLEMA 3 :

En un triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle BAC =2m\ BCA$. $AB=5$ y $AC=11$. Calcular $m\sphericalangle ABC$.

A) 124°30' B) 120° C) 150° D) 90° E) 100°30'

RESOLUCIÓN:



* Nos piden $m\sphericalangle ABC$

Como : $m\sphericalangle BAC=2m\sphericalangle BCA$

se traza $BD=BA=5$

* Luego $AD = 6$

ΔABH= notable *(37° y 53°)*

$$\Rightarrow 2a = 53°$$

Luego : $m\sphericalangle ABC = 37+37+\dfrac{53°}{2}$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 100°30'$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 4 :

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, el ángulo C mide $40°$. Sobre AC se toma un punto M de modo que $m\sphericalangle ABM = 30°$. Hallar AC, si $BM=8$

A) 16 B) 14 C) 18 D)20 E) 24

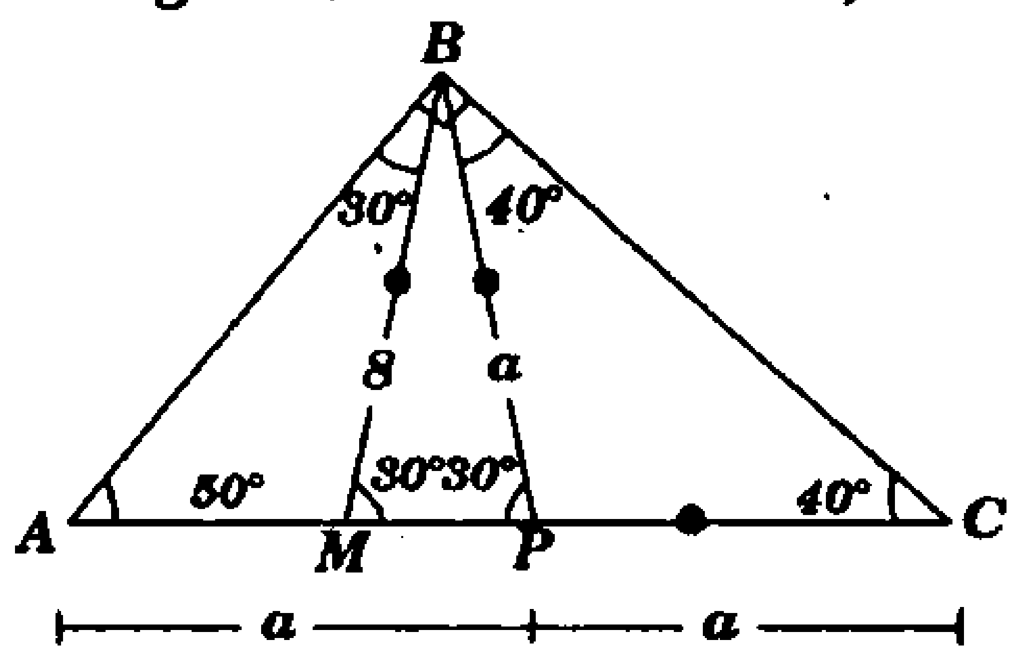
RESOLUCIÓN :

* Trazamos la mediana

$\overline{BP} \Rightarrow BP = \frac{AC}{2}$

(Propiedad en triángulo rectángulo)

* Luego : $BP = AP = PC = a$,

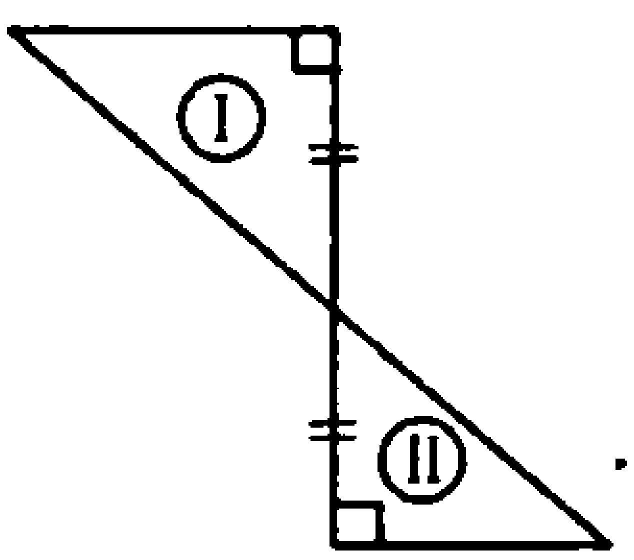


ΔBCP es isósceles $\Rightarrow m\angle PBC = 40°$, además en el ΔMBP : $m\angle BMP = m\angle BPM = 80°$ (ángulos exteriores a los ΔABM y BPC), de aquí decimos: ΔBMP es isósceles $\Rightarrow a = 8 \Rightarrow AC = 2a = 16$

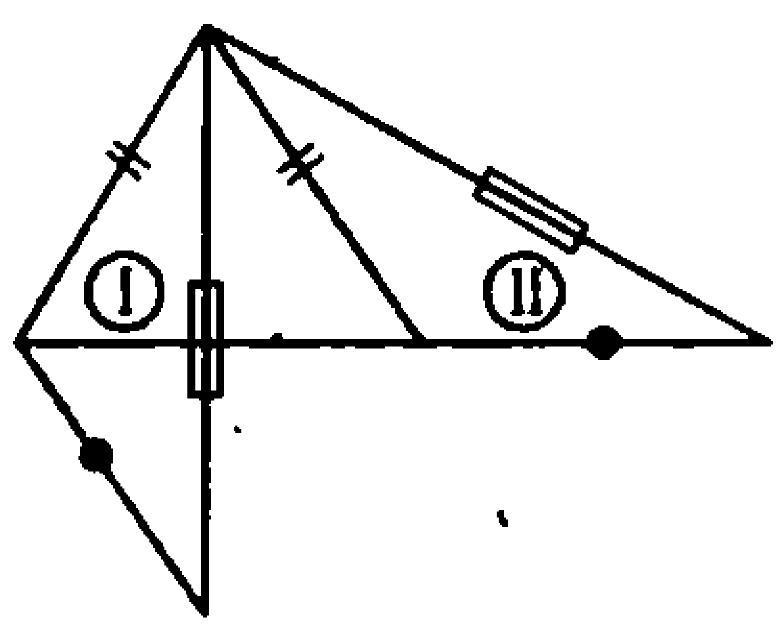
RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Los triángulos *I* y *II* son congruentes, indicar de que caso se trata.

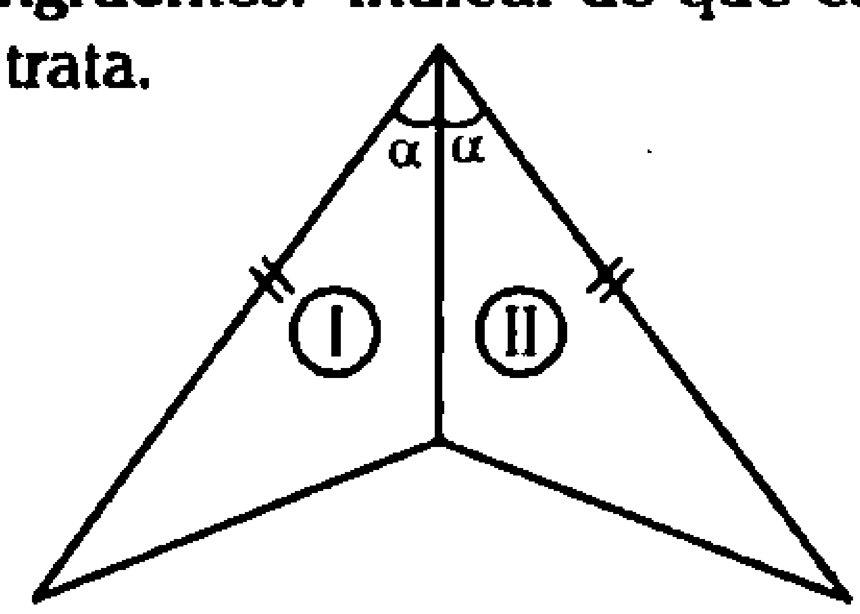


RPTA.: ....

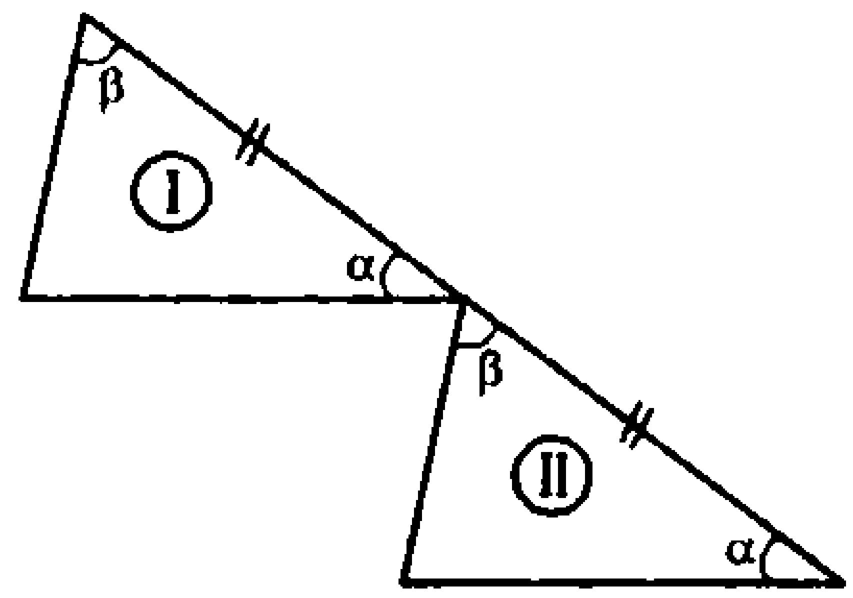


RPTA.: ....

02 Los triángulos *I* y *II* son congruentes. Indicar de que caso se trata.

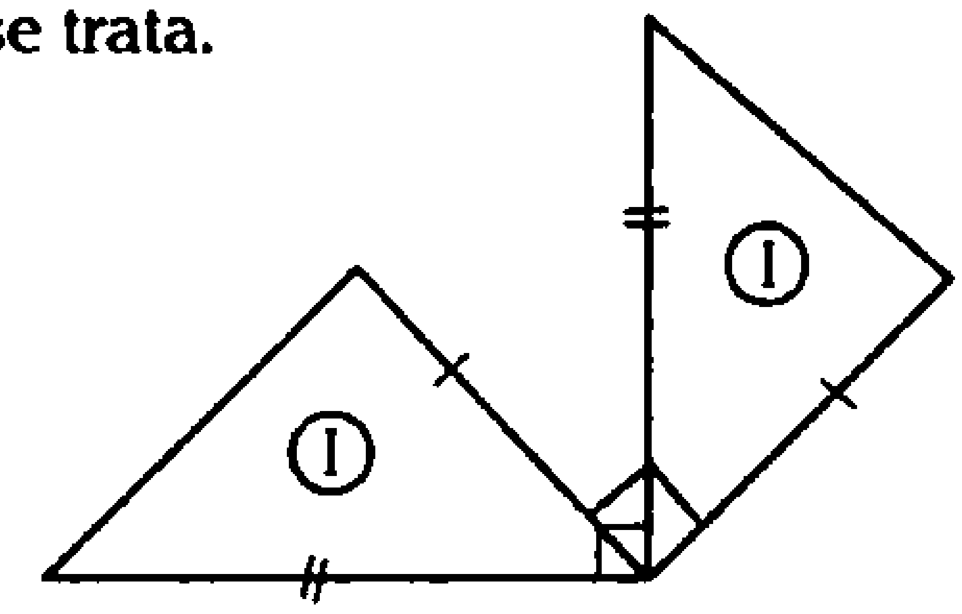


RPTA.: ....



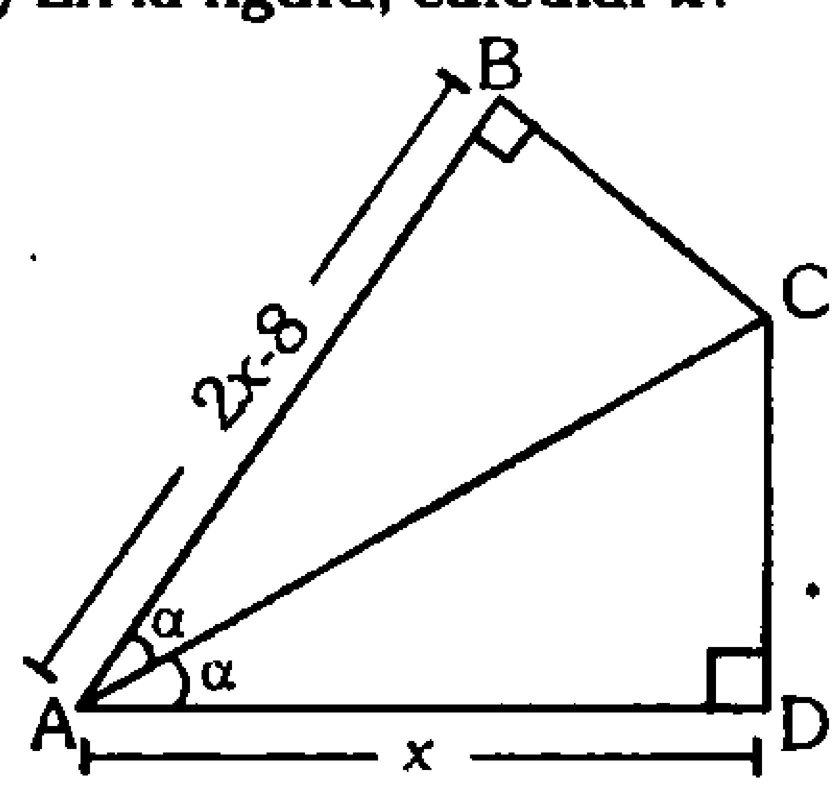
RPTA.: ....

03 Los triángulos *I* y *II* son congruentes, indicar de que caso se trata.



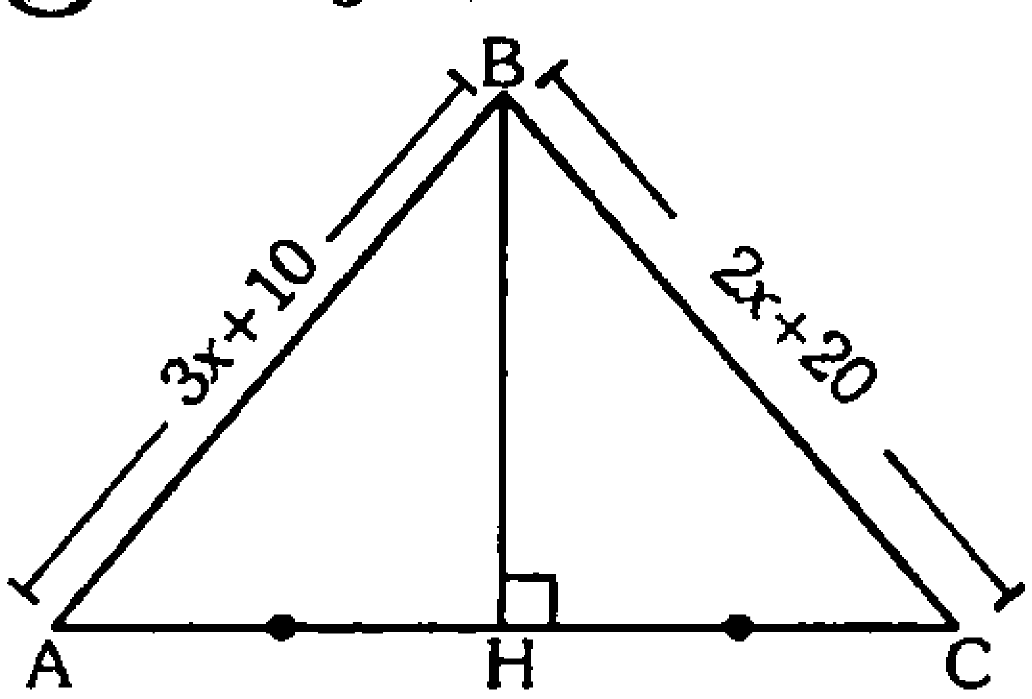
A) A – L – A B) L – L – L C) L – A – L

04 En la figura, calcular x.



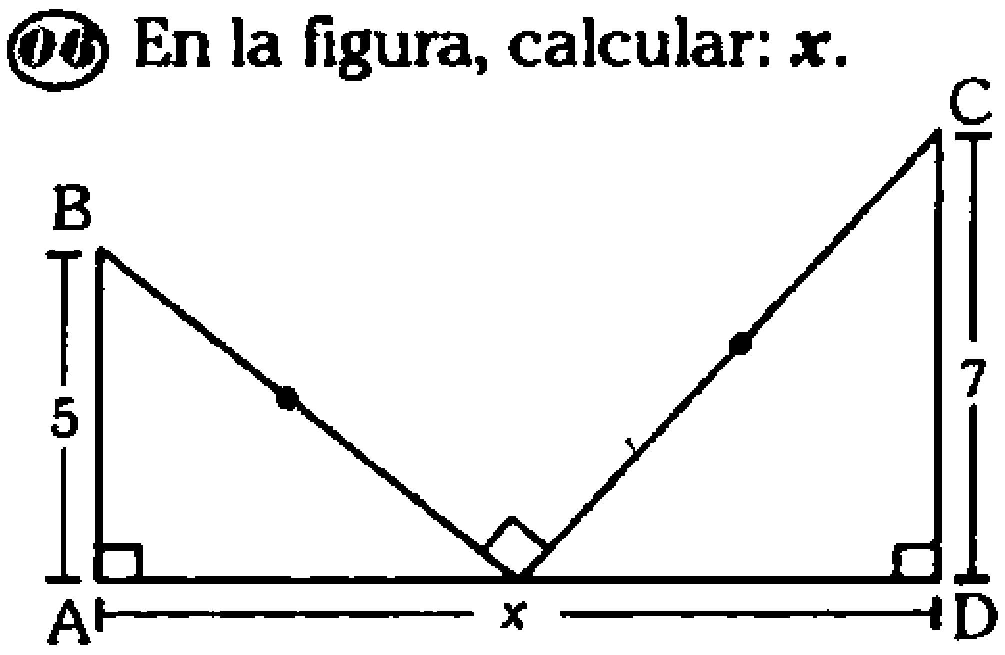
A) 6 B) 4 C) 5 D) 7 E) 8

05 En la figura, calcular "x"



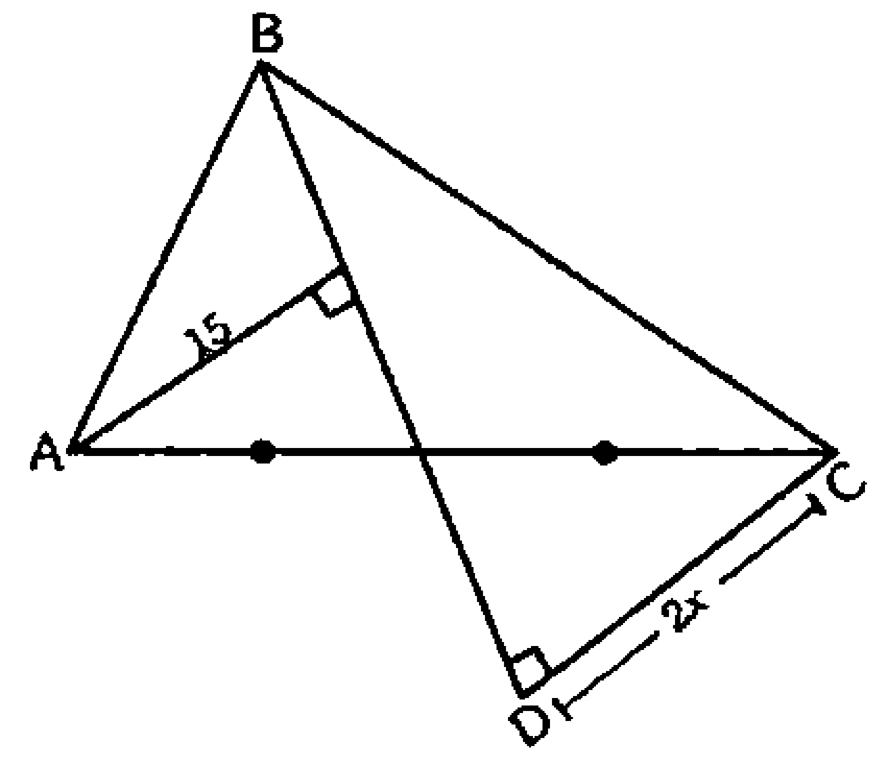
A) 10 B) 12 C) 15 D) 8 E) 14

06 En la figura, calcular: x.



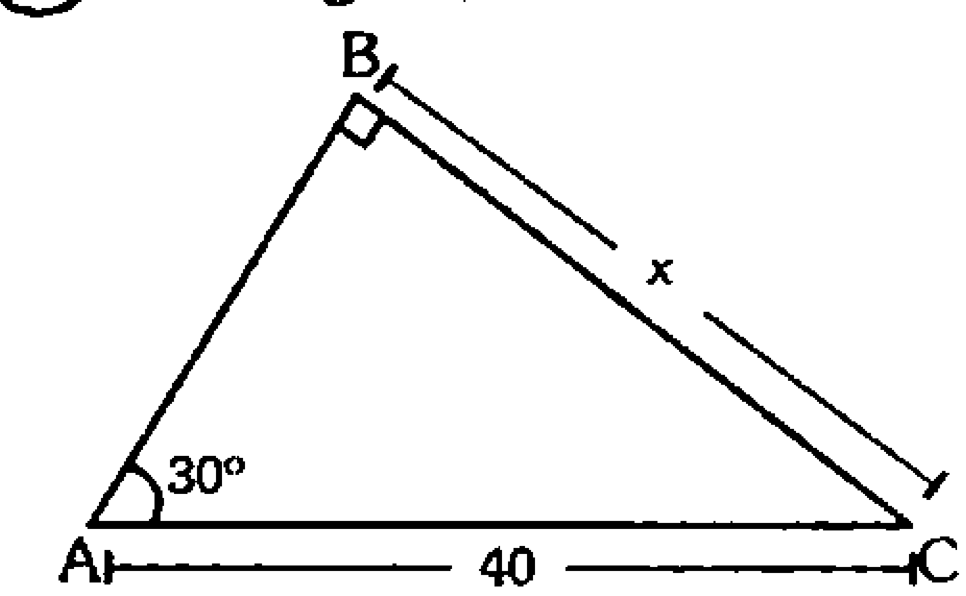
A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 13

07 Calcular x, en el gráfico.



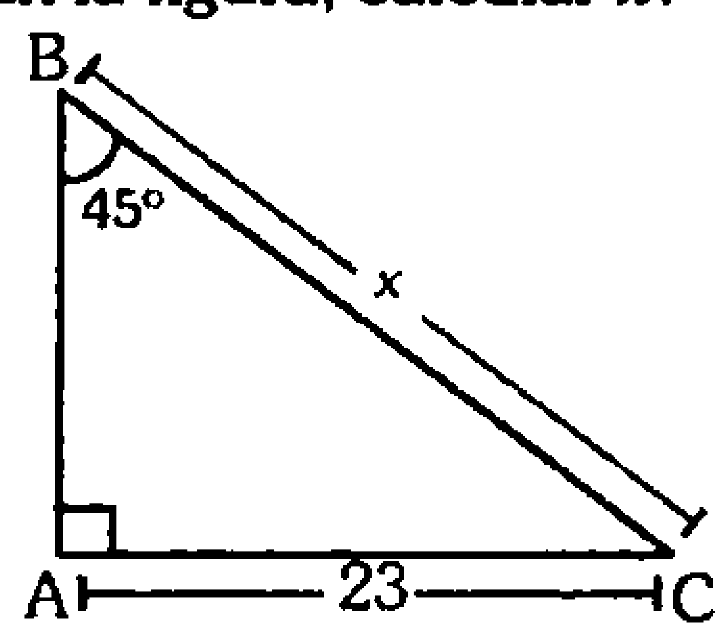
A) 8.5 B) 10 C) 8 D) 7.5 E) 5.5

08 En la figura, calcular x:



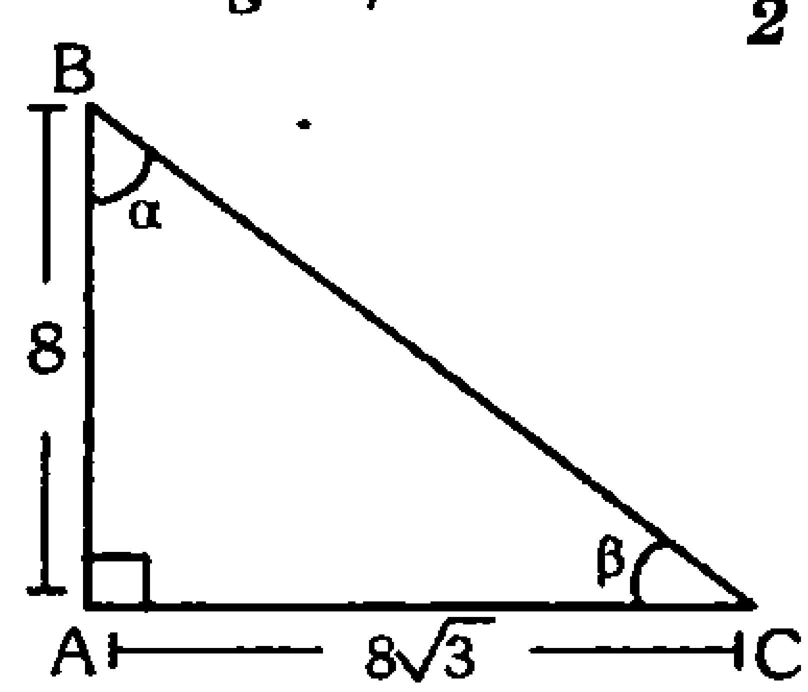
A) 15 B) 20 C) 30 D) 24 E) 32

09 En la figura, calcular x.



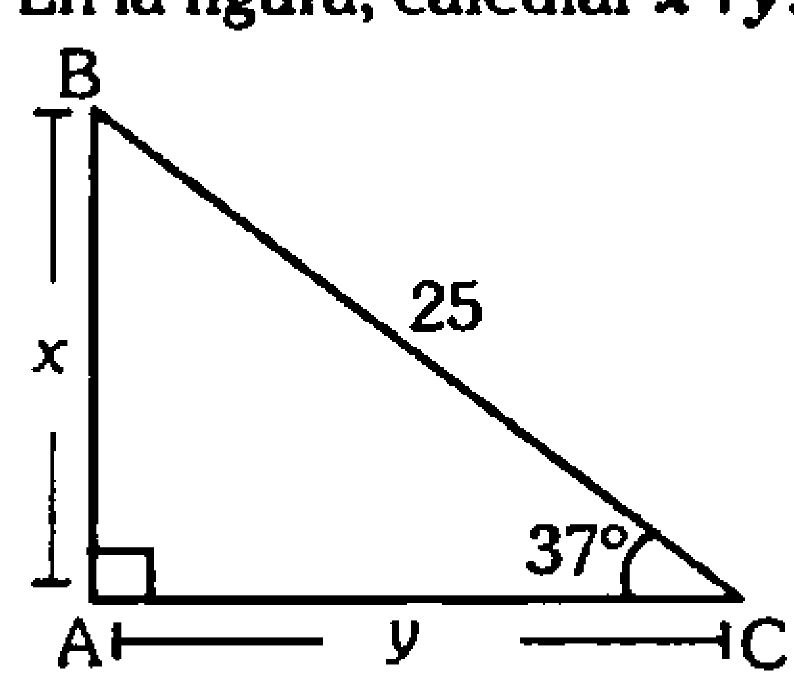
A) 46 B) $25\sqrt{2}$ C) $23\sqrt{2}$ D) $46\sqrt{2}$ E) $12\sqrt{2}$

10 En la figura, calcular $\frac{\alpha - \beta}{2}$



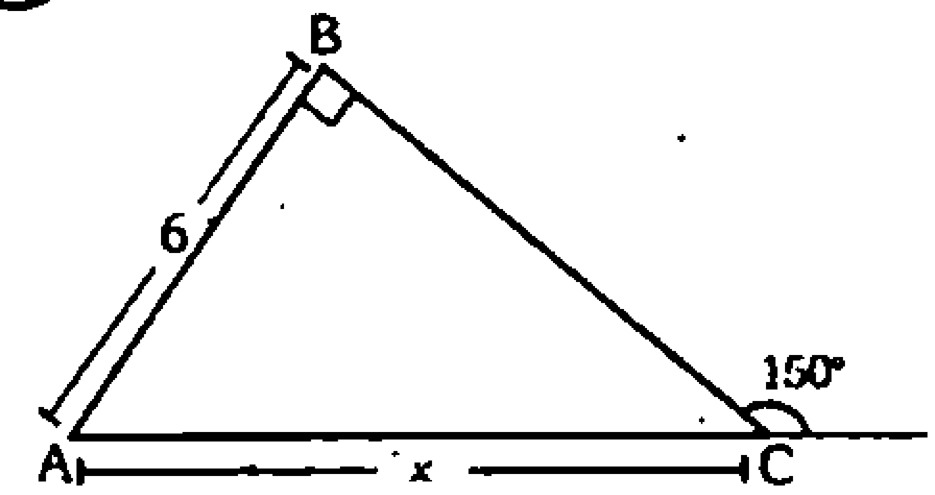
A) 30° B) 15° C) 20° D) 60° E) 18°

11 En la figura, calcular $x + y$.



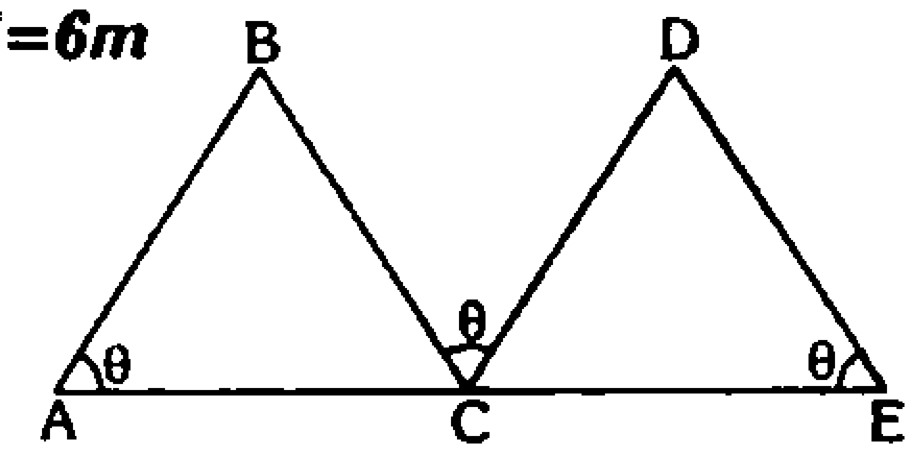
A) 25 B) 15 C) 35 D) 20 E) 40

12 Calcular x, en:



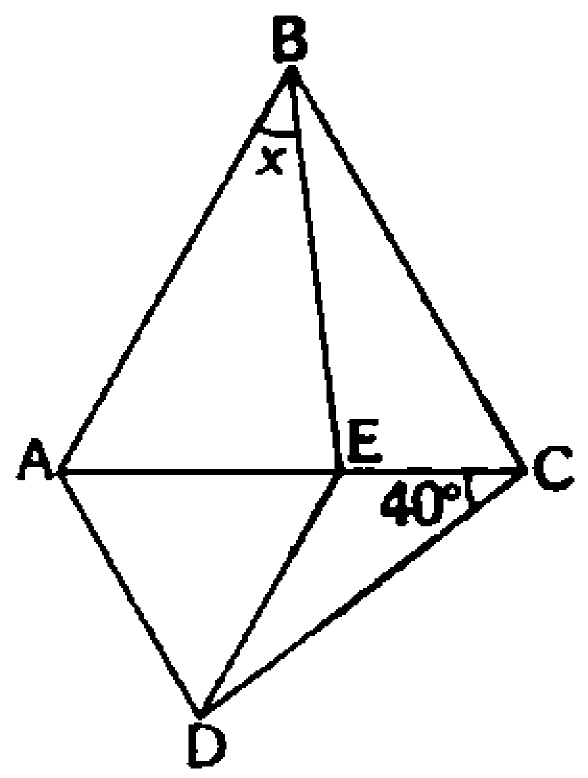
A) $6\sqrt{3}$ B) 18 C) 12 D) $6\sqrt{2}$ E) 15

13 Calcular AE, si: $AB=CE=9m$ y $DE=6m$



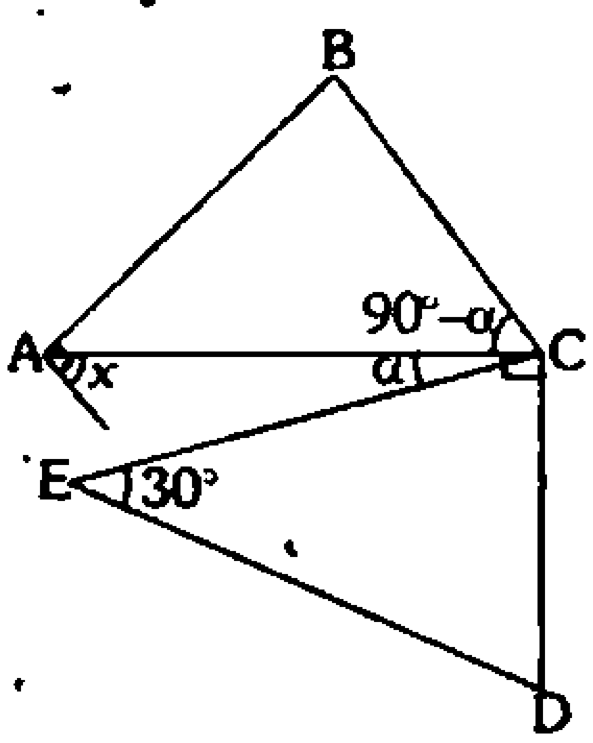
A) 6 m B) 9 m C) 12 m
D) 15 m E) 14 m

14 Calcular x, si los triángulos ABC y ADE son equiláteros.



A) 20° B) 40° C) 30° D) 50° E) 10°

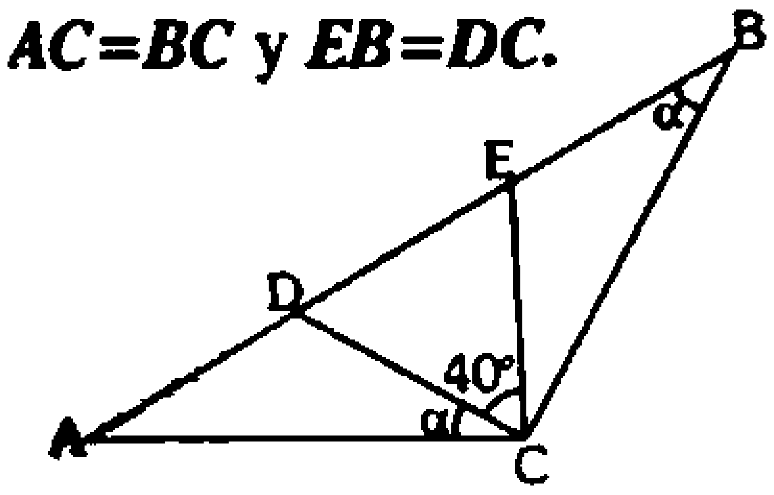
15 En el siguiente gráfico; calcular x, si: $AC=EC$ y $BC=CD$



A) 20° B) 30° C) 40° D) 40° E) 45°

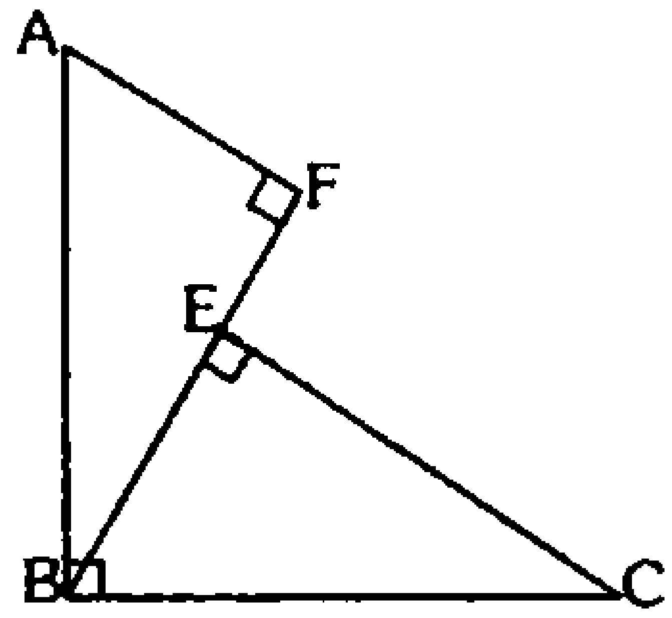
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 En el siguiente gráfico; calcular x, si: $AC=BC$ y $EB=DC$.



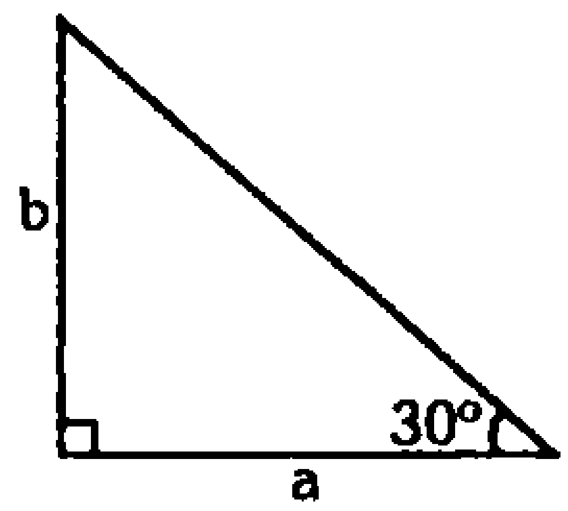
A) 30° B) 35° C) 40° D) 55° E) 20°

02 En el siguiente gráfico. Calcular BE, si: $AB=BC$.



A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) 2

03 En el gráfico b/a es:



A) $\sqrt{3}$ B) $1/\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{2}$ E) 2

04 La altura de un triángulo equilátero mide 3. El lado del triángulo mide:

A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C) $6/\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) 3/2

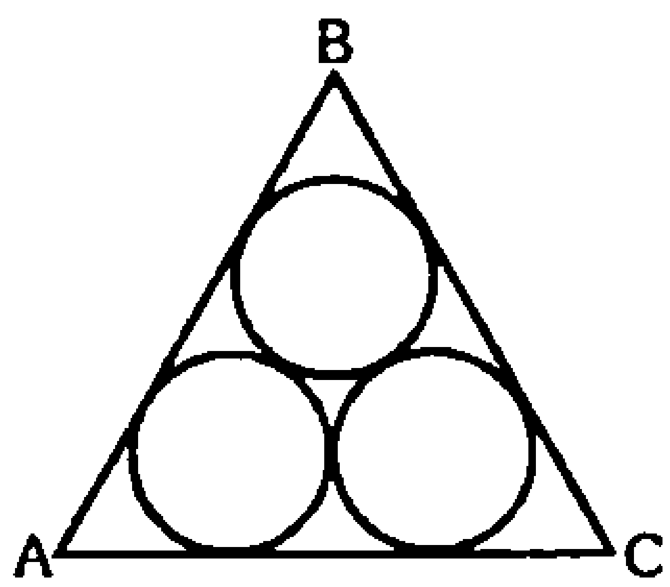
05 Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo si el menor ángulo agudo mide $37°$ y el mayor cateto $2m$.

A) 7μ B) 6μ C) 5μ D) 8μ E) 9μ

06 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle A = 60°$ y el cateto mayor mide $12m$. Calcular la suma de los otros dos lados.

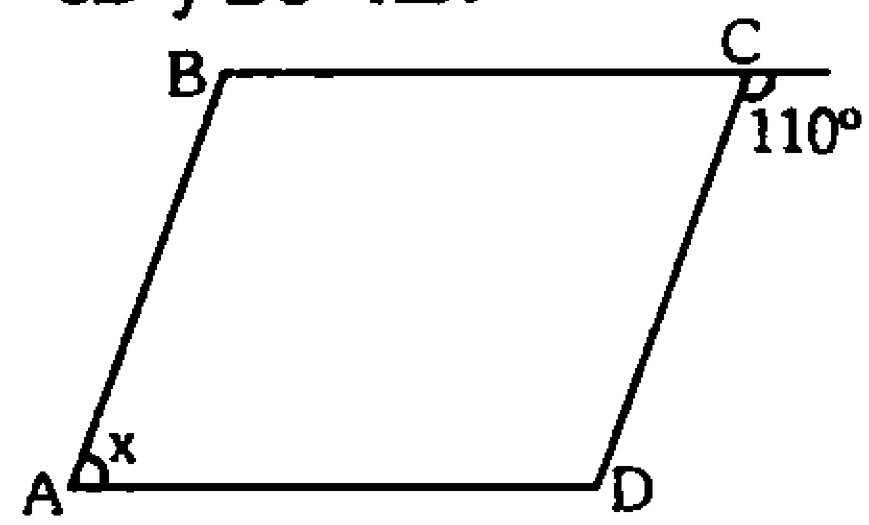
A) $12\sqrt{3}\ \mu$ B) $9\sqrt{3}\ \mu$ C) $14\sqrt{3}\ \mu$
D) $10\sqrt{3}\ \mu$ E) $8\sqrt{3}\ \mu$

07 El triángulo ABC es equilátero y los círculos son congruentes de radio R. Entonces la altura será:



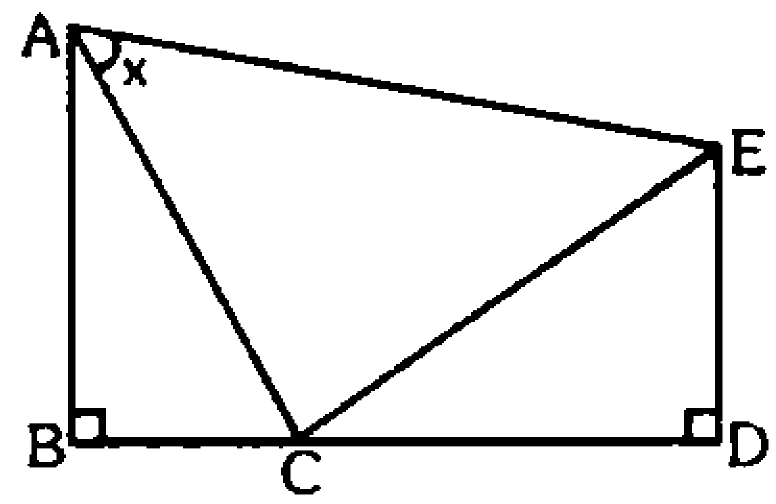
A) $4R$ B) $3R\sqrt{3}$ C) $4R\sqrt{3}$
D) $R(3+\sqrt{3})$ E) $R(3+2\sqrt{3})$

08 En la figura, calcule "x", si: $AB=CD$ y $BC=AD$.



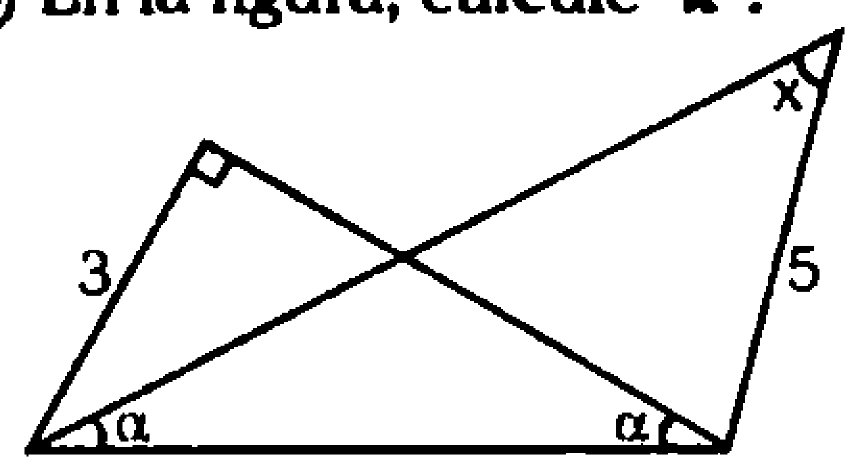
A) 80° B) 60° C) 70° D) 55° E) 110°

09 En la figura, calcule "x", si: $AB=CD$ y $BC=DE$.



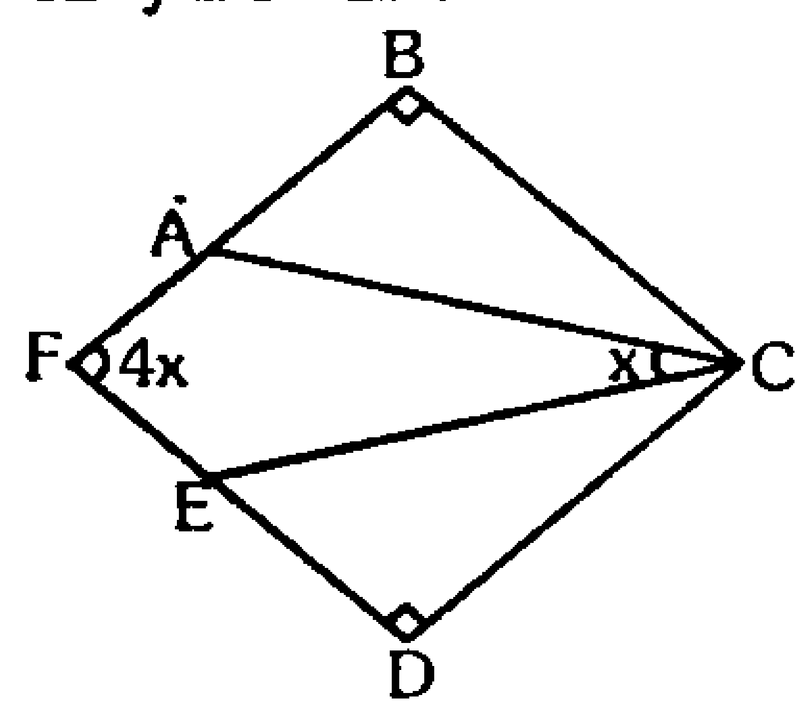
A) 30° B) 60° C) 37° D) 45° E) 53°

10 En la figura, calcule "x".



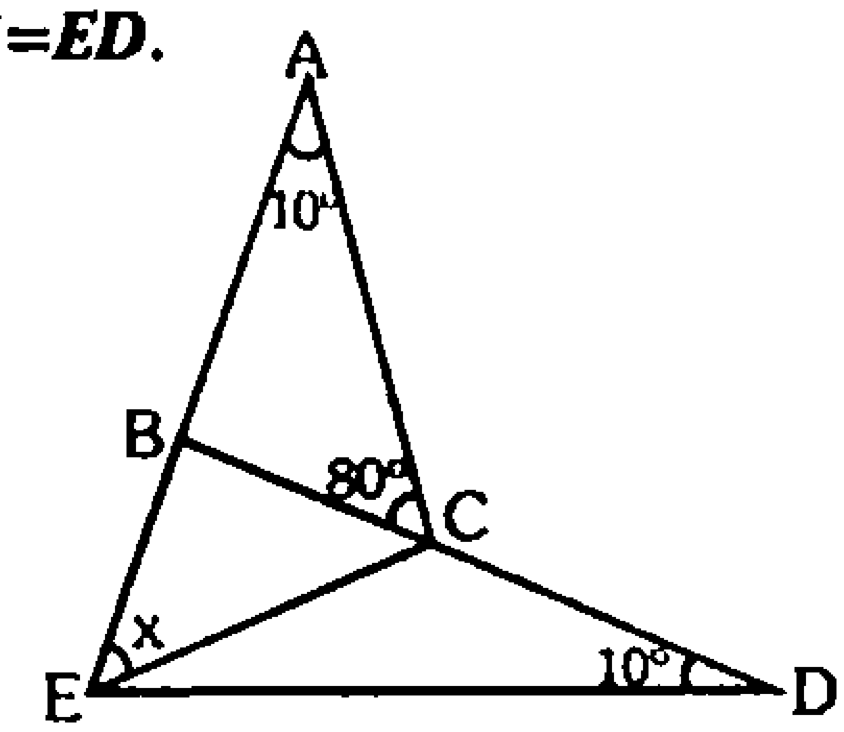
A) 30° B) 60° C) 37° D) 53° E) 45°

11 En la figura, calcule "x", si: $AB=CD$ y $BC=ED$.



A) 18° B) 15° C) 12° D) 10° E) 20°

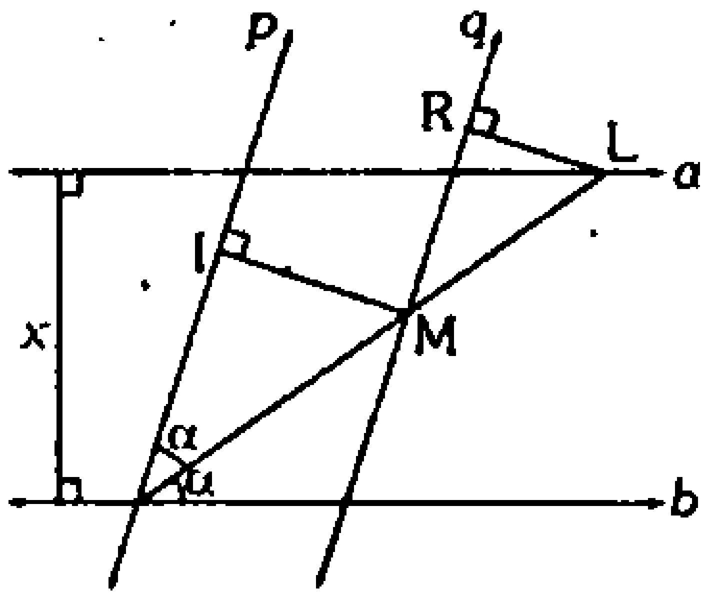
12 En la figura, calcule "x", si: $AC=ED$.



A) 30° B) 45° C) 60° D) 40° E) 50°

13 En la figura, las rectas a y b son paralelas lo mismo que las rectas p y q. Calcule x, si $LR = 2$ y $MI = 6$.

A) 8
B) 10
C) 12
D) 9
E) 14



14 En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se traza la mediana CM. $\overline{BE} // \overline{MC}$ (E en la prolongación de $\overline{AC}$), $\overline{MD} \perp \overline{AC}$ (D en AC) y $AD = 4$. Calcule $\overline{DE}$.

A) 20 B) 30 C) 24 D) 32 E) 28

15 En un triángulo ABC. $F \in \overline{AC}$ tal que $AF = 3FC$. En el triángulo ABF se traza la mediana $\overline{AM}$ cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N. Si $AM = 17$. Calcule MN.

A) 1 cm B) 9/5 cm C) 2 cm D) 17/7 cm E) 3/2 cm

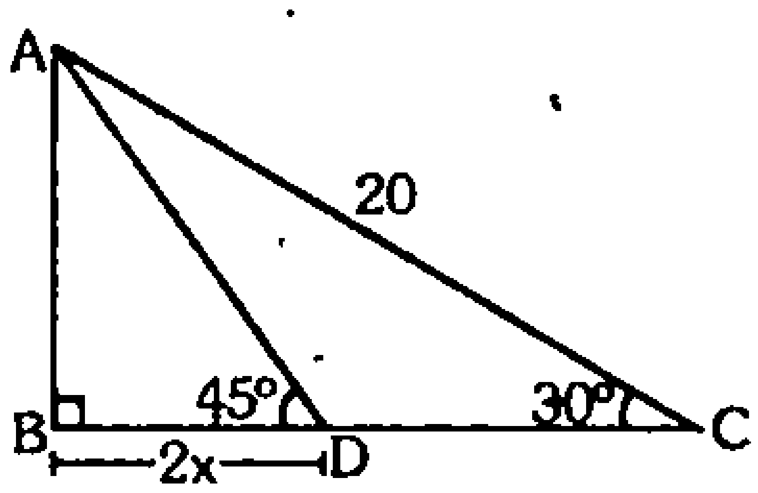
16 Calcule el máximo valor entero de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 12.

A) 4 B) 7 C) 3 D) 2 E) 5

17 En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza el punto F en $\overline{AC}$ se forma $AF = 2$. $BF = 4$ y $CF = 8$. Calcule $m\angle BCA$.

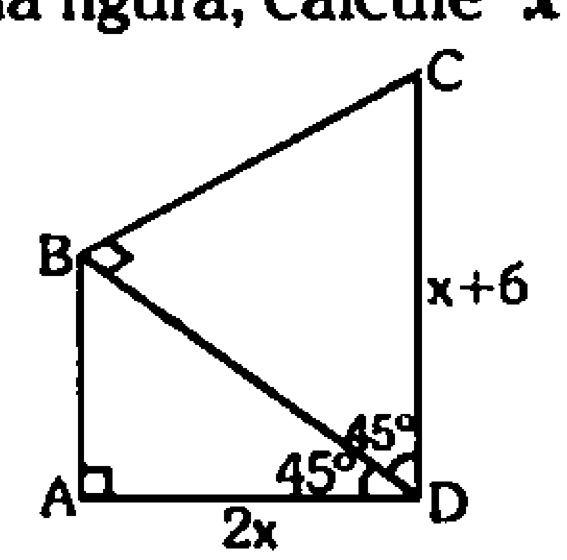
A) 30° B) 37° C) 18,5° D) 53° E) 26,5°

18 En la figura, calcule "x".



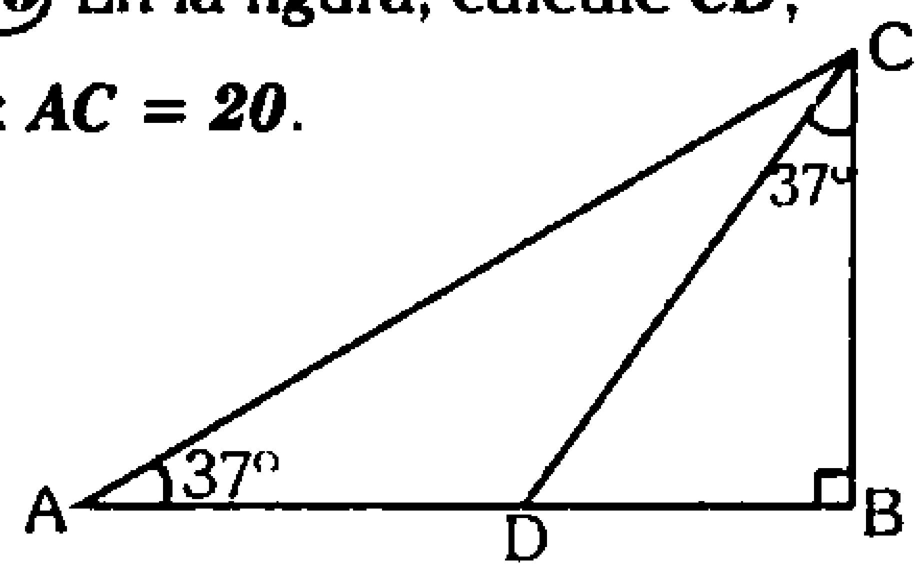
A) 3 B) 4 C) 5 D) 10 E) 6

19 En la figura, calcule "x".



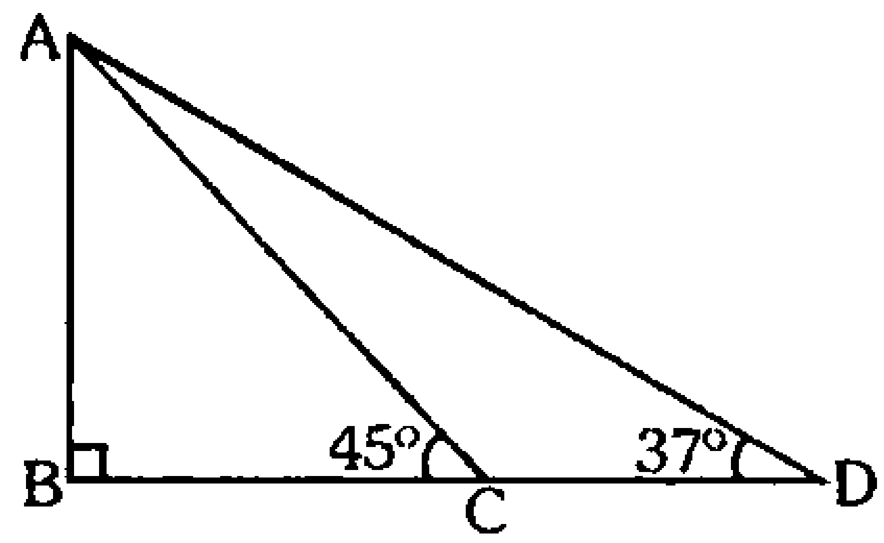
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 En la figura, calcule CD, si: $AC = 20$.



A) 10 B) 15 C) 7,5 D) 12 E) 9

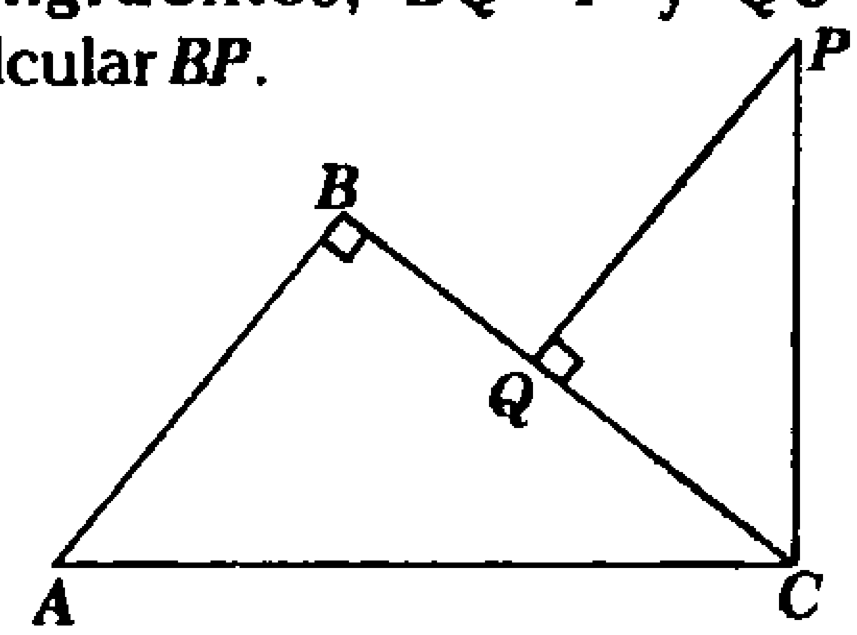
21 En la figura, calcule AD, si: $CD = 5$.



A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

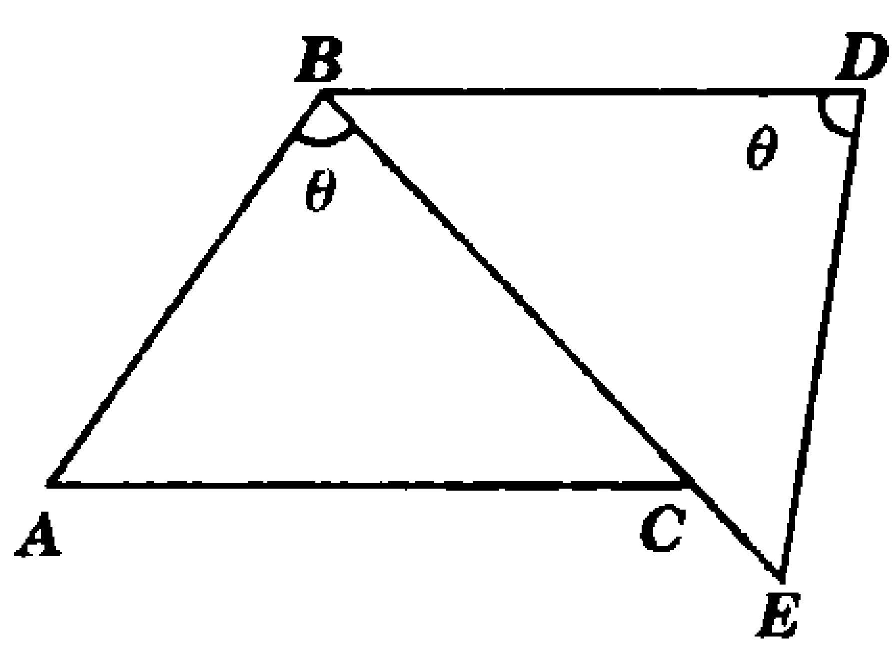
01 Si los triángulos mostrados son congruentes, $BQ = 1$ y $QC = 3$, calcular BP.



A) 5 B) $\sqrt{17}$ C) 4 D) 3 E) $\sqrt{13}$

02 Si el gráfico:

$AB = DE$, $\overline{BD} // \overline{AC}$, $AC = 8$ y $CE = 2$, calcular BD.



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

03 Se tiene un triángulo ABC tal que $m\angle B = 100°$; la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{BC}$ en "P" tal que $AB = BP$. Calcular $m\angle C$.

A) 10° B) 30° C) 15° D) 40° E) 20°

04 Se tiene un triángulo ABC en el cual se traza la bisectriz interior $\overline{AQ}$; luego se traza $\overline{BP} \perp \overline{AQ}$ $(P \in \overline{AQ})$.

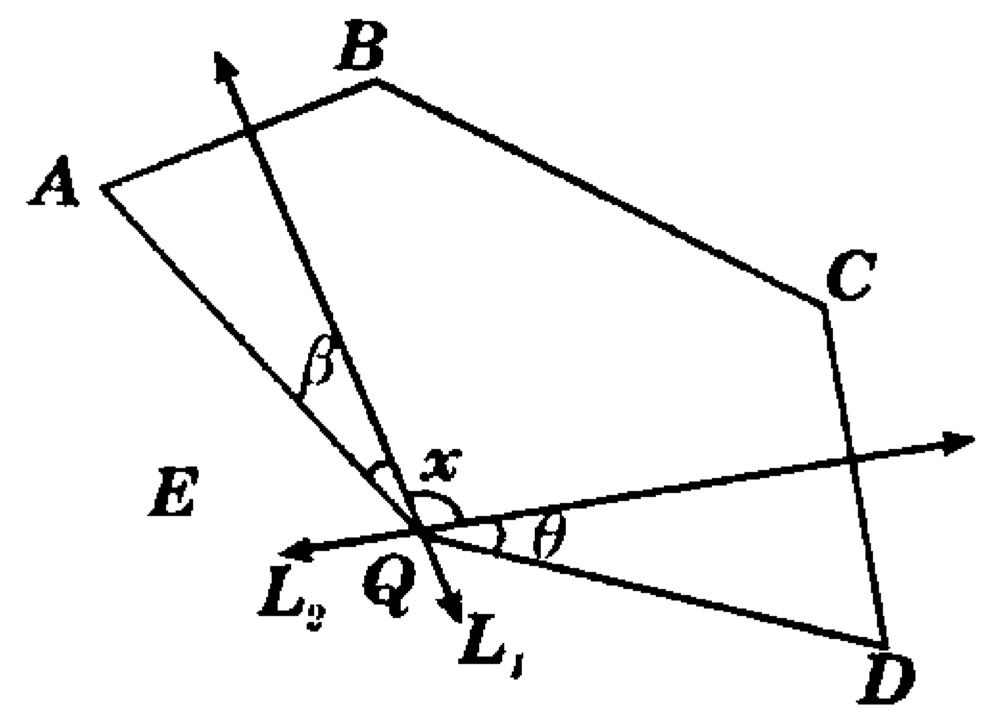
Si $AP = 9$ y $AC = 2(AB)$, calcular PQ.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4,5 E) 5

05 Se tiene un triángulo rectángulo APD, recto en P, "C" es punto medio de $\overline{AD}$ y en la prolongación de $\overline{AP}$ se ubica el punto "B" tal que $AB = BC$ y $AD = 2(BP)$. Calcular $m\angle D$.

A) 15° B) 18° C) 22,5° D) 18,5° E) 30°

06 Si L_1 y L_2 son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, además $AQ = BC = QD$ y $\theta + \beta = 40°$, calcular el valor de "x".



A) 130° B) 140° C) 80° D) 120° E) 100°

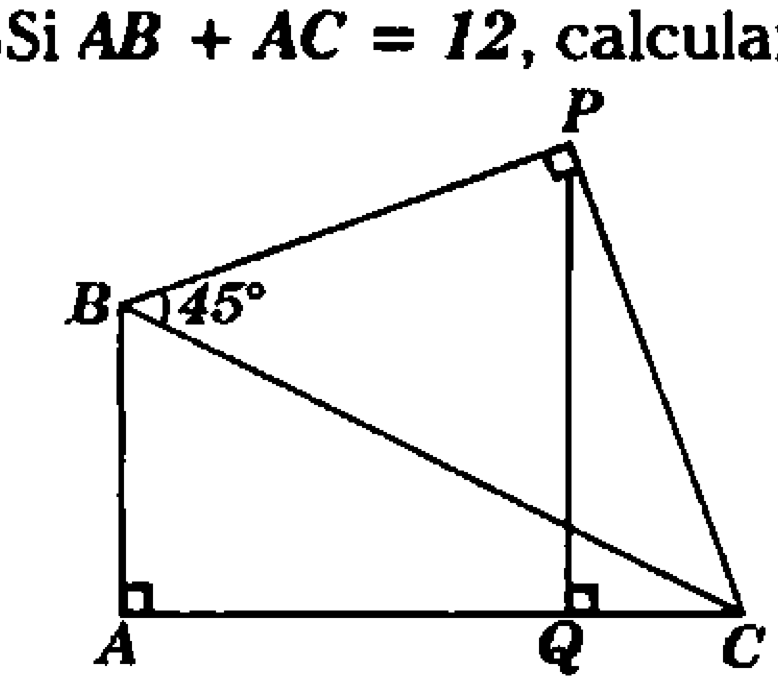
07 Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica al punto "Q" tal que $m\angle B = 2(m\angle AQC)$ y $m\angle QAC = 40°$. Calcular $m\angle BCQ$.

A) 50° B) 40° C) 60° D) 70° E) 80°

08 En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $m\angle DBC = 90°$; $DC = 2(AD)$ $m\angle ABD = m\angle C$. Calcular $m\angle C$.

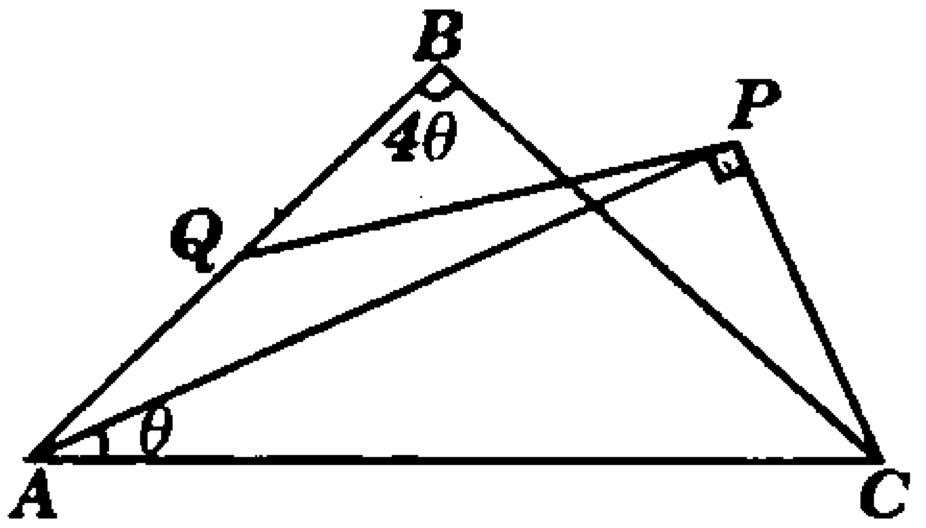
A) 30° B) 36° C) 26,5° D) 22,5° E) 42°

09 Si $AB + AC = 12$, calcular PQ.



A) $6\sqrt{2}$ *B)* $3\sqrt{6}$ *C)6 D)4 E)8*

(10) Si $AB = BC = 2(AQ) = 6$ y $AC = 8$, calcular QP.



A)5 B)7 C) $5\sqrt{2}$ *D)* $4\sqrt{6}$ *E)* $\sqrt{26}$

(11) Se tiene un triángulo ABC en el cual se traza la mediana $\overline{BM}$ y la ceviana $\overline{AQ}$, las cuales se cortan en "P" perpendicularmente.

Si $BC = 2(AP)$, calcular $m\sphericalangle BQA$.

A)30° B)37° C)45° D)53° E)60°

(12) En un triángulo ABC la mediatriz de $\overline{AB}$ corta a $\overline{AC}$ en "N" y la mediatriz de $\overline{NC}$ corta a $\overline{BC}$ en "P". Si $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C)$ y $AN = 7$, calcular el mínimo valor entero de BP.

A)7 B)8 C)9 D)10 E)13

(13) Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, en el exterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica el punto "Q" tal que $BC = CQ$; $m\sphericalangle A = m\sphericalangle BQC$; $BQ = 8$ y $AB = 5$. Calcular $m\sphericalangle ACB$.

A)30° B)37° C)26,5° D)22,5° E)54°

(14) En un triángulo ABC se ubican en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los puntos M y L tal que $BM = MC$; $AB = 8$; $LC = 5$ y $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle MLA = 60°$.

Calcular AL.

A)16 B)12 C)15 D)13 E)14

(15) Se tiene un triángulo ABC, obtuso en B, en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica el punto "Q" tal que $AQ = QB = 5$, $m\sphericalangle Q = 2(m\sphericalangle C)$ y $m\sphericalangle QAC = 90°$. Si $BC = 6$, calcular $m\sphericalangle C$.

A)30° B)37° C)26,5° D)22,5° E)15°

(16) Se tiene un triángulo ABC y se traza la mediana $\overline{BM}$. Si $AB = 8$; $BC = 5$ y $m\sphericalangle MBC = 53°$, calcular $m\sphericalangle ABM$.

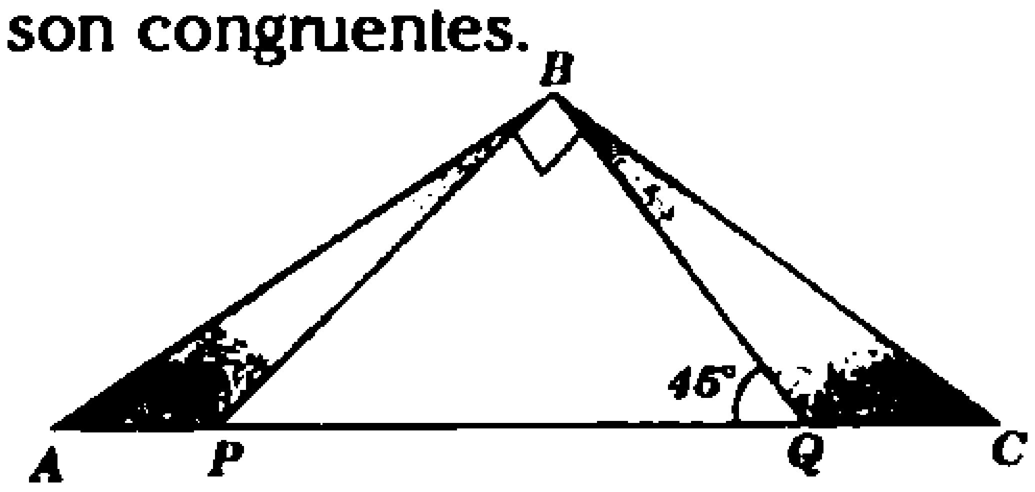
A)16° B)30° C)45° D)60° E)37°

(17) Se tiene un triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P y Q tal que $AP = QC$; $PQ = QB$; $m\sphericalangle A = 30°$ y $m\sphericalangle APQ = m\sphericalangle BQC$. Calcular $m\sphericalangle QBC$.

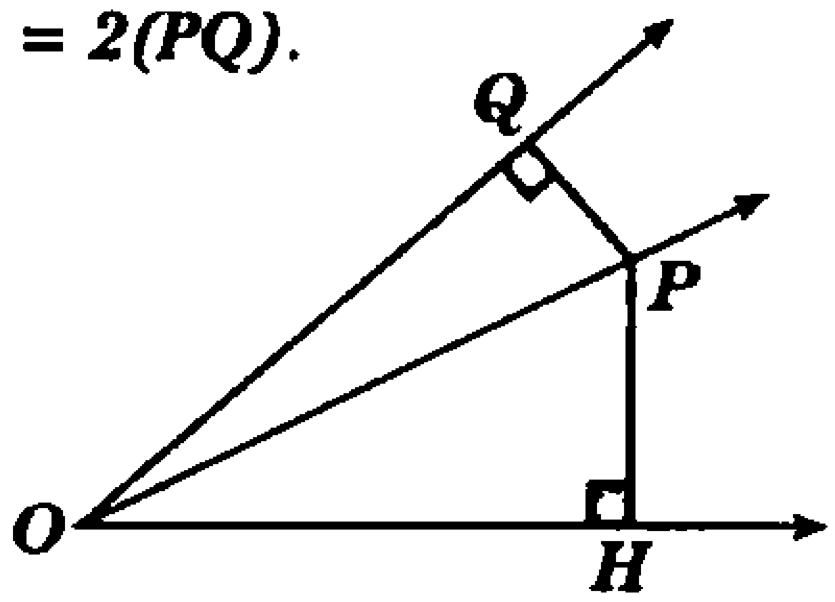
A)30° B)36° C)15° D)45° E)22,5°

(18) Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) En el gráfico mostrado si $AP = QC$, entonces los triángulos cuyo interior están sombreados son congruentes.

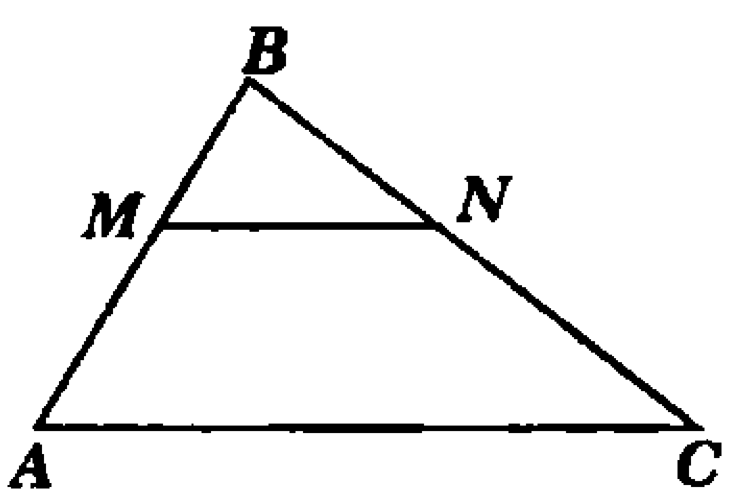


( ) Si en el gráfico: $m\sphericalangle POH = 2(m\sphericalangle POQ)$, entonces $PH = 2(PQ)$.



( ) Si una recta divide a un segmento en dos partes de igual longitud, entonces dicha recta es la mediatriz del segmento.

( ) Si en el gráfico: $AM = BM$, entonces $\overline{MN}$ es la base media.

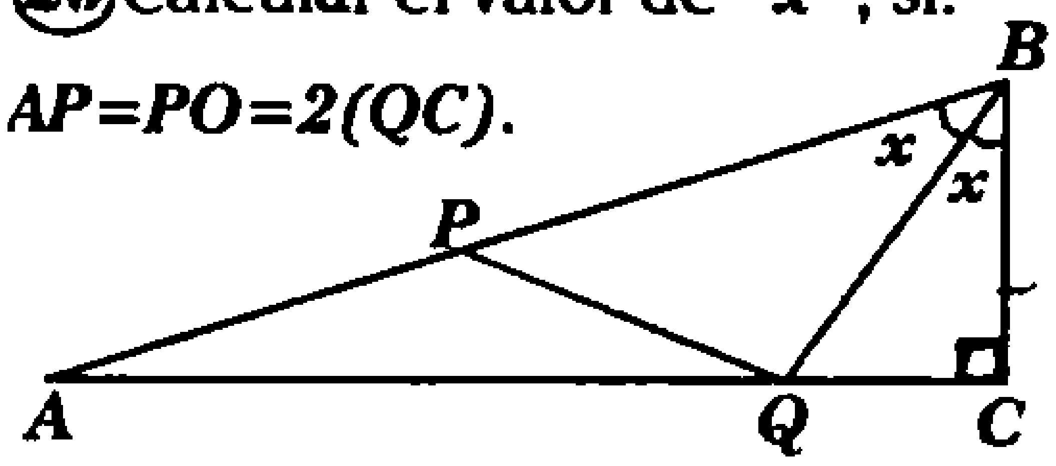


A)VVFV B)VFFV C)VFFF D)FVFF E)VFVF

(19) Se tiene un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubica los puntos P, Q y H respectivamente tal que $BP = BQ$; $m\sphericalangle QHC = 40°$ y $HA = HQ + HC$ Calcular $m\sphericalangle PHA$.

A)40° B)10° C)20° D)15° E)25°

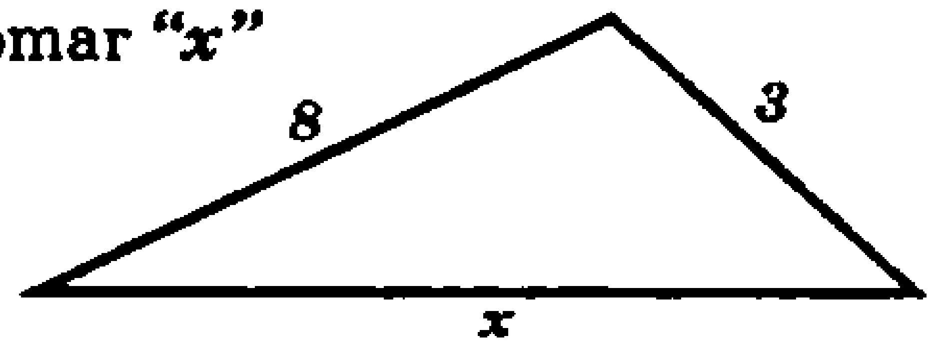
(20) Calcular el valor de "x", si: $AP = PO = 2(QC)$.



A)45° B)18° C)37,5° D)15° E)25°

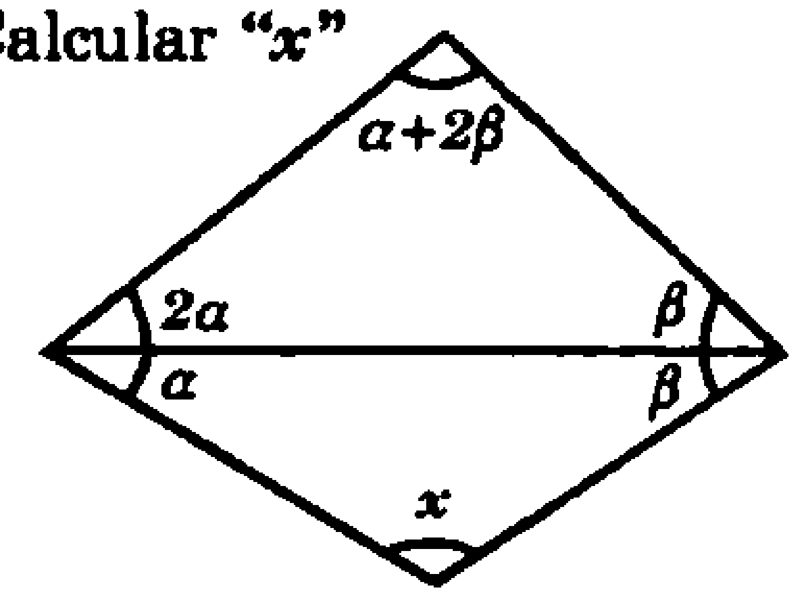
CUARTA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Del gráfico calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo valor entero que puede tomar "x"



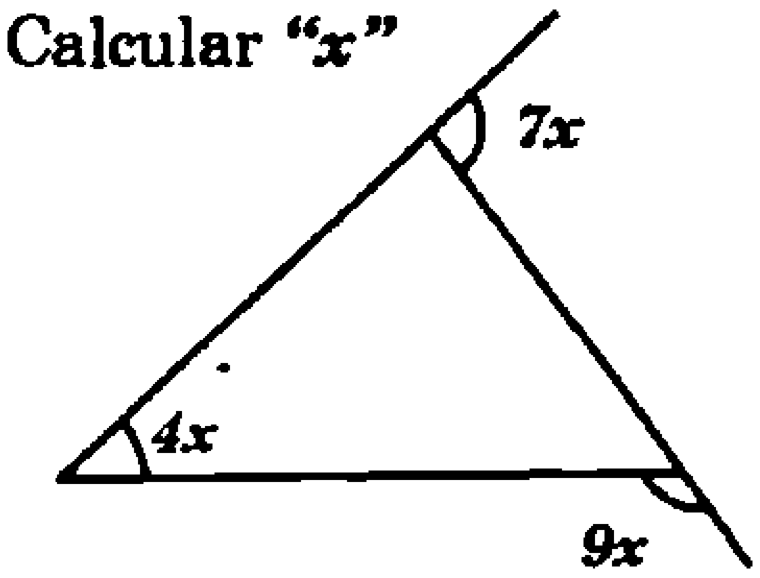
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(02) Calcular "x"



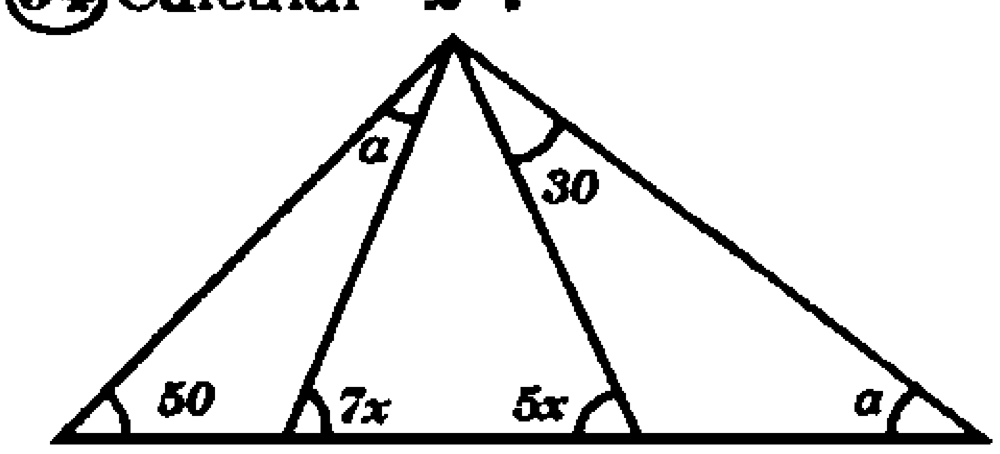
A)135° B)90° C)120° D)150° E)105°

(03) Calcular "x"



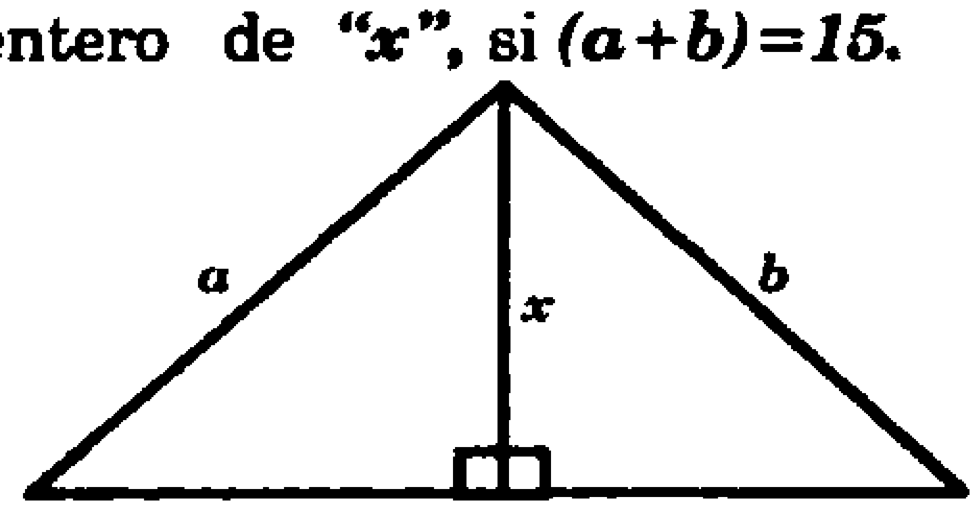
A) 15° B) 12° C) 18° D) 10° E) 20°

(04) Calcular "x".



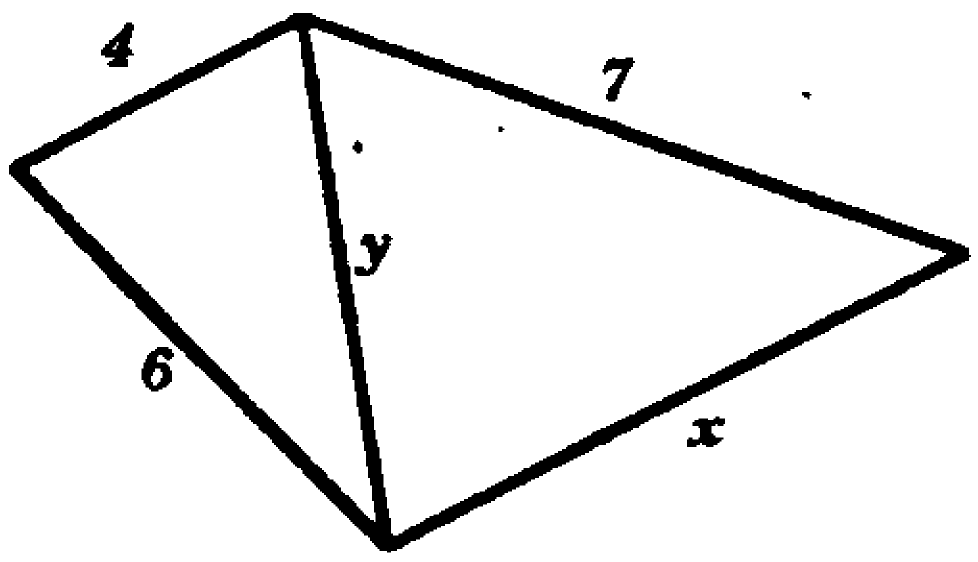
A)12° B) 25° C) 18° D) 15° E) 10°

(05) Calcular el máximo valor entero de "x", si $(a+b) = 15$.



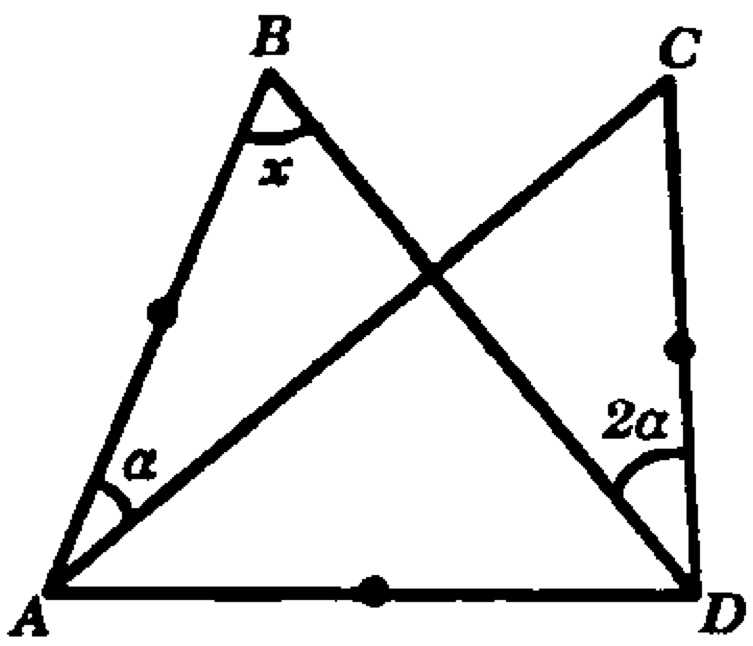
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

06 En la figura, calcular el máximo valor entero que puede tomar "x", cuando "y" toma su mínimo valor entero.



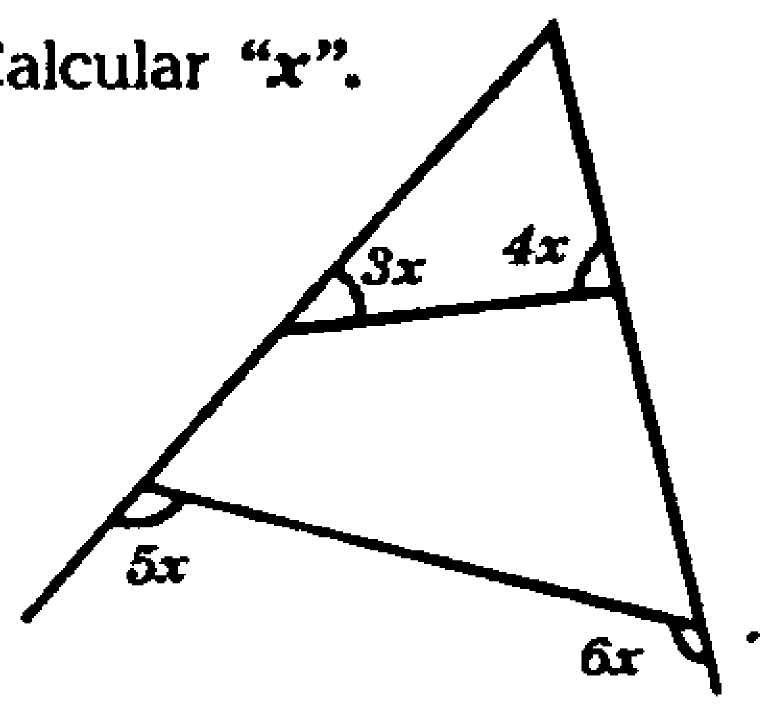
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

07 Calcular "x".



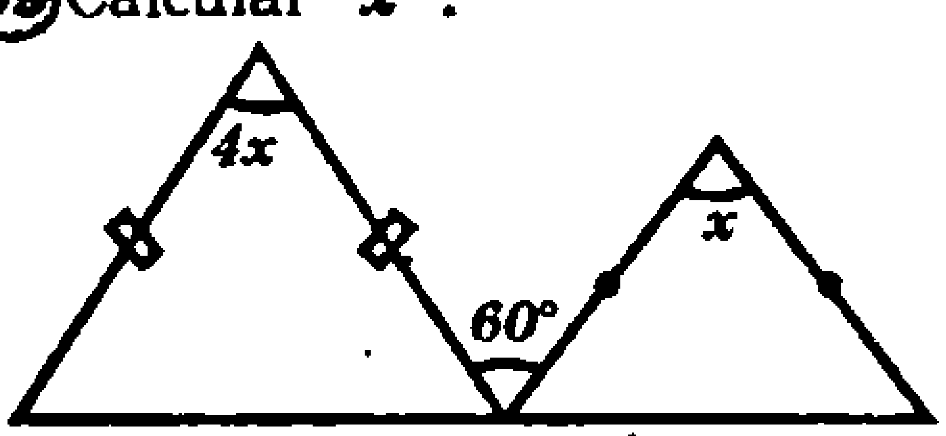
A) 75° B) 45° C) 60° D) 90° E) 50°

08 Calcular "x".



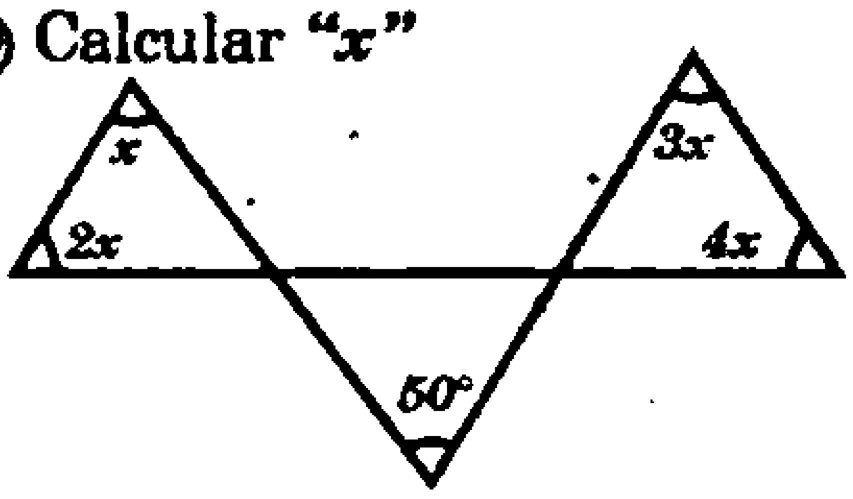
A) 20° B) 18° C) 24° D) 12° E) 15°

09 Calcular "x".



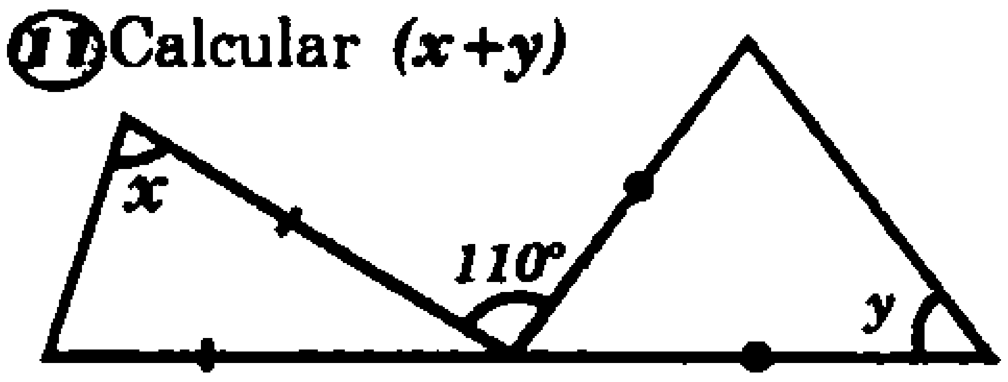
A) 18° B) 24° C) 26° D) 28° E) 32°

10 Calcular "x"



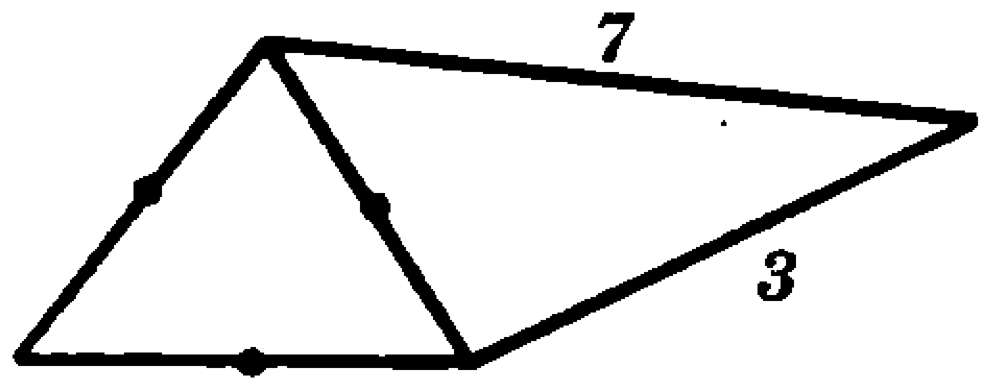
A) 13° B) 16° C) 19° D) 23° E) 27°

11 Calcular $(x+y)$



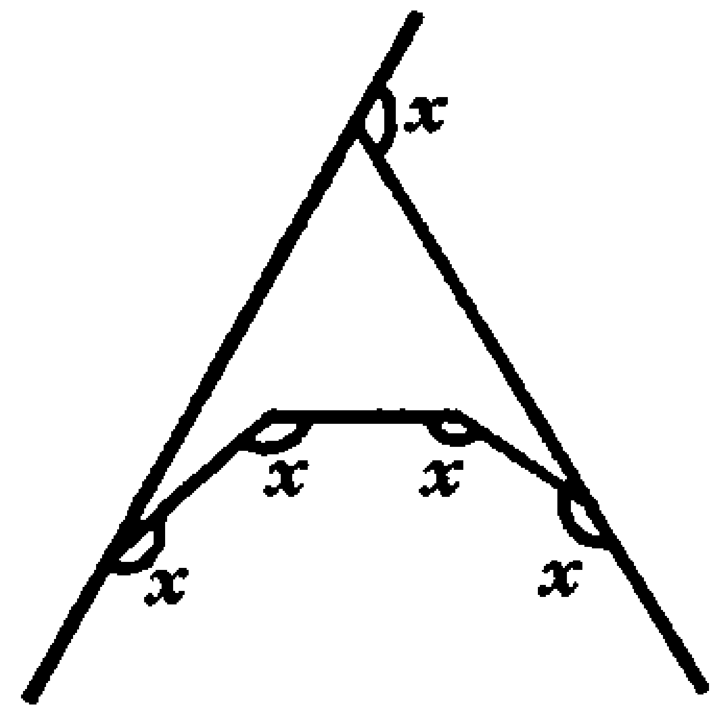
A) 160° B) 120° C) 150° D) 135° E) 145°

12 En la figura, calcular el mínimo valor entero que puede tomar el perímetro del triángulo equilátero.



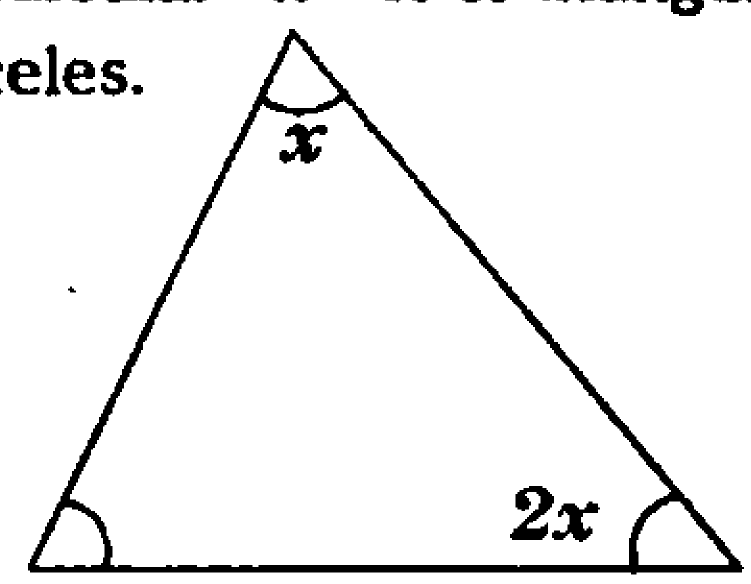
A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 17

13 Calcular "x".



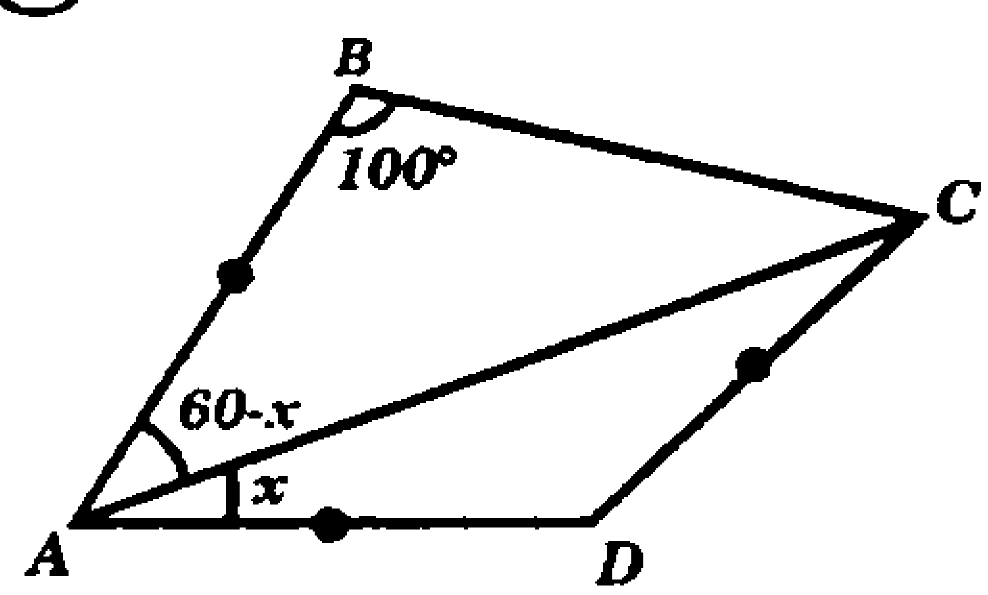
A) 150° B) 120° C) 135° D) 144° E) 165°

14 Calcular "x" sí el triángulo es isósceles.



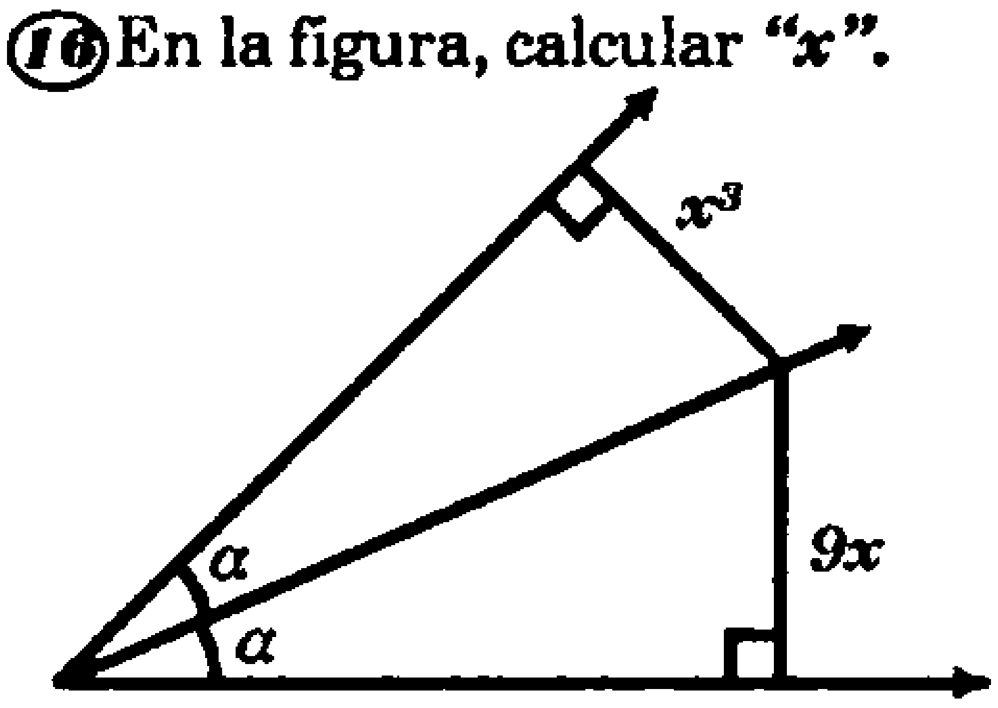
A) 36° B) 90° C) 45°
D) 30° ó 45° E) 45° ó 36°

15 Calcular "x"



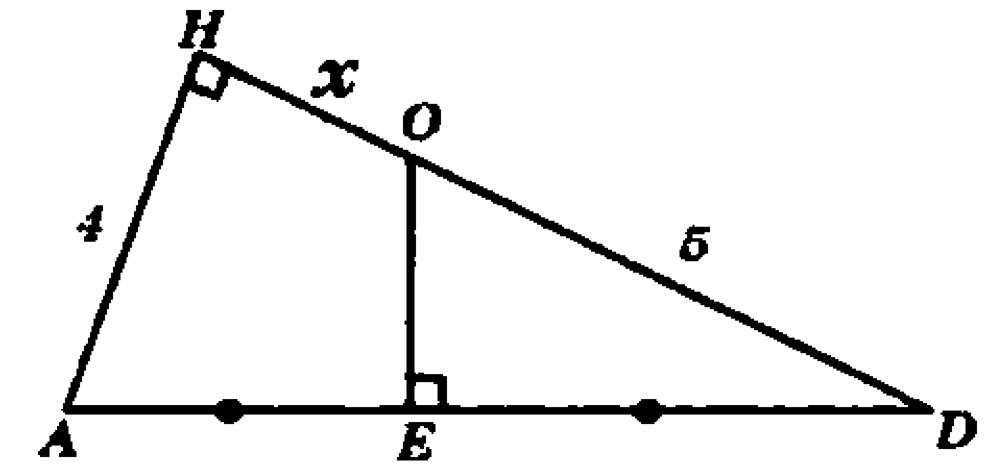
A) 10° B) 20° C) 15° D) 30° E) 25°

16 En la figura, calcular "x".



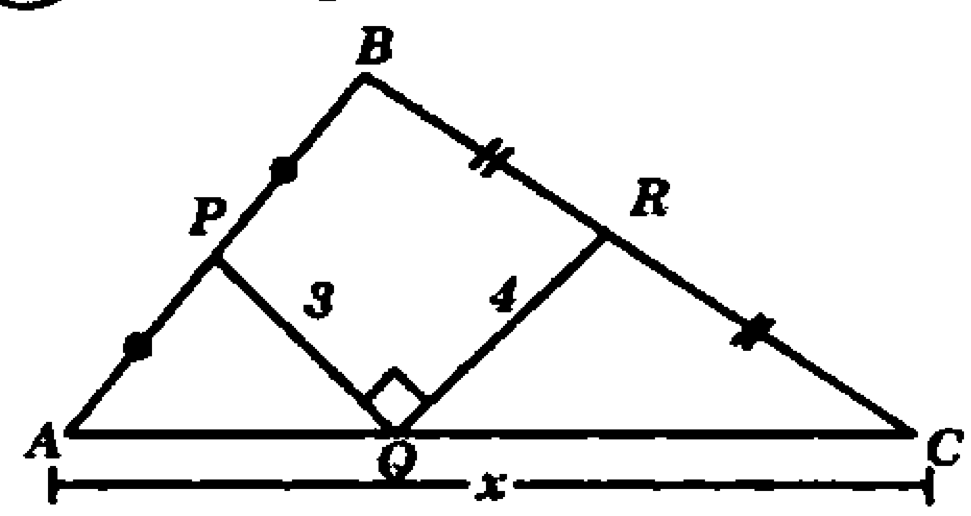
A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) 9 D) 6 E) 18

17 En la figura, calcular "x":



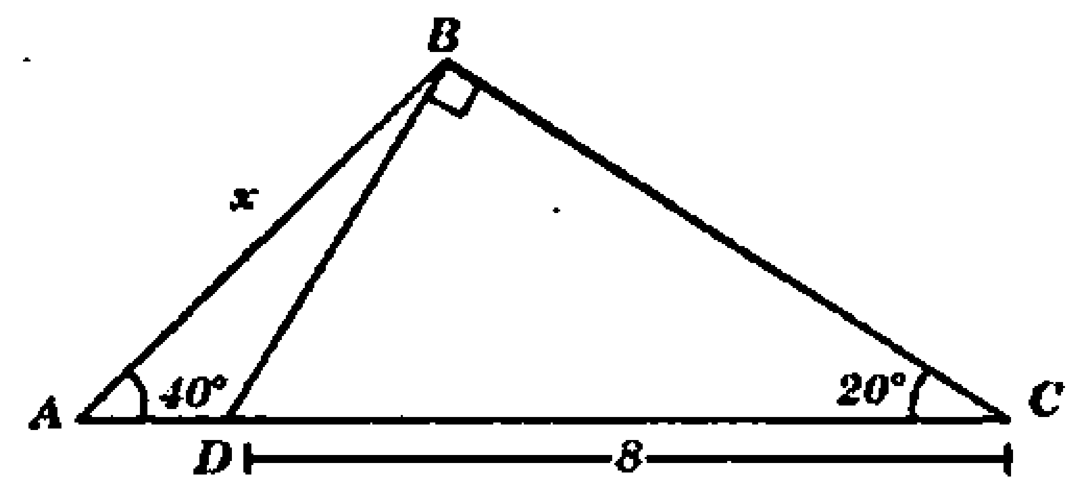
A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 3,5

18 En la figura, calcular "x":



A) 5 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

19 En la figura, calcular "x":



A) 8 B) 2 C) 4 D) 6 E) 5

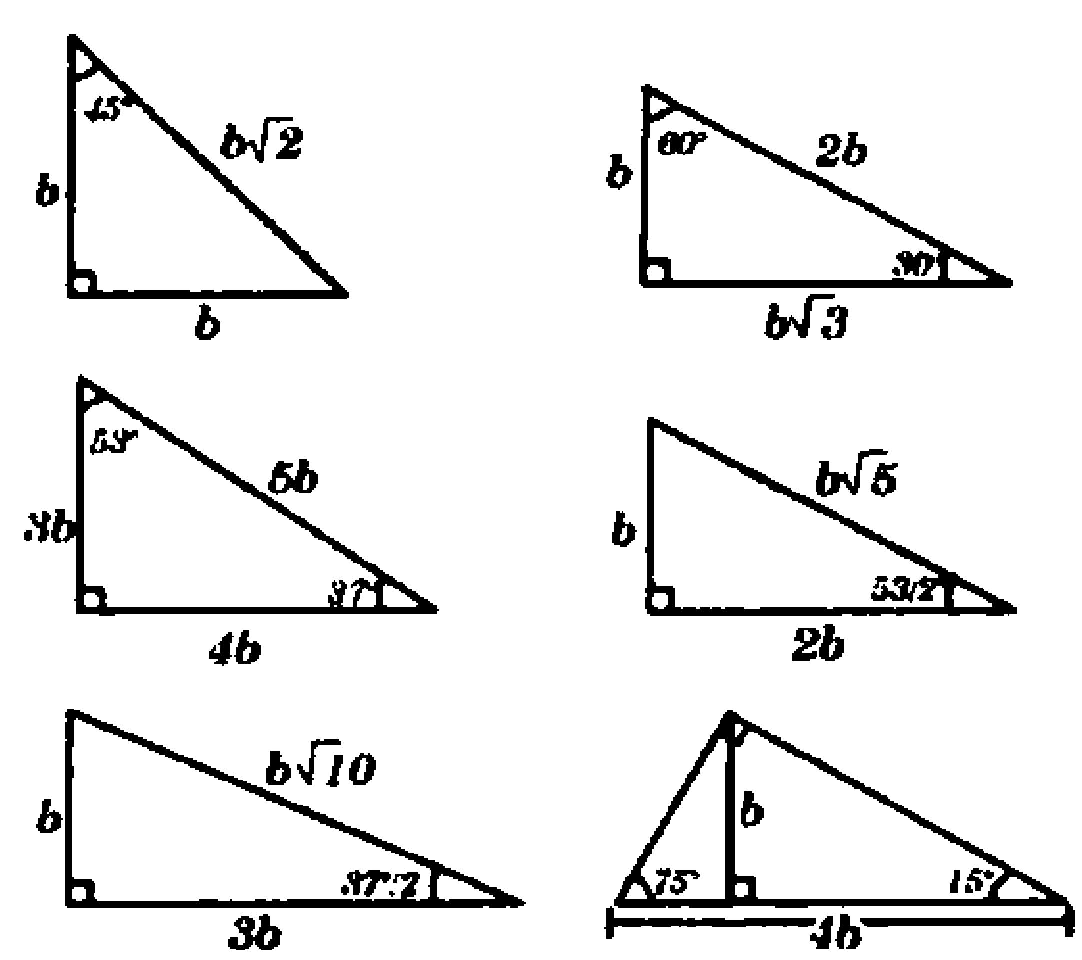
CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)D	3)E	4)C	5)B	6)E	7)A	8)A	9)C	10)A
11)E	12)B	13)B	14)B	15)B	16)B	17)D	18)C	19)C	20)C

CLAVES DE LA CUARTA PRACTICA

1)B	2)C	3)A	4)D	5)D	6)D	7)C	8)A	9)B	10)D
11)E	12)B	13)D	14)E	15)A	16)B	17)C	18)E	19)C	20)D
21)A	22)B	23)A	24)C	25)D	26)B	27)D	28)B	29)C	30)D

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES



POLIGONOS

CAPITULO 098

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno será capaz de:

* *Definir al polígono plano y conocer sus propiedades.*

* *Reconocer los polígonos por sus respectivas características.*

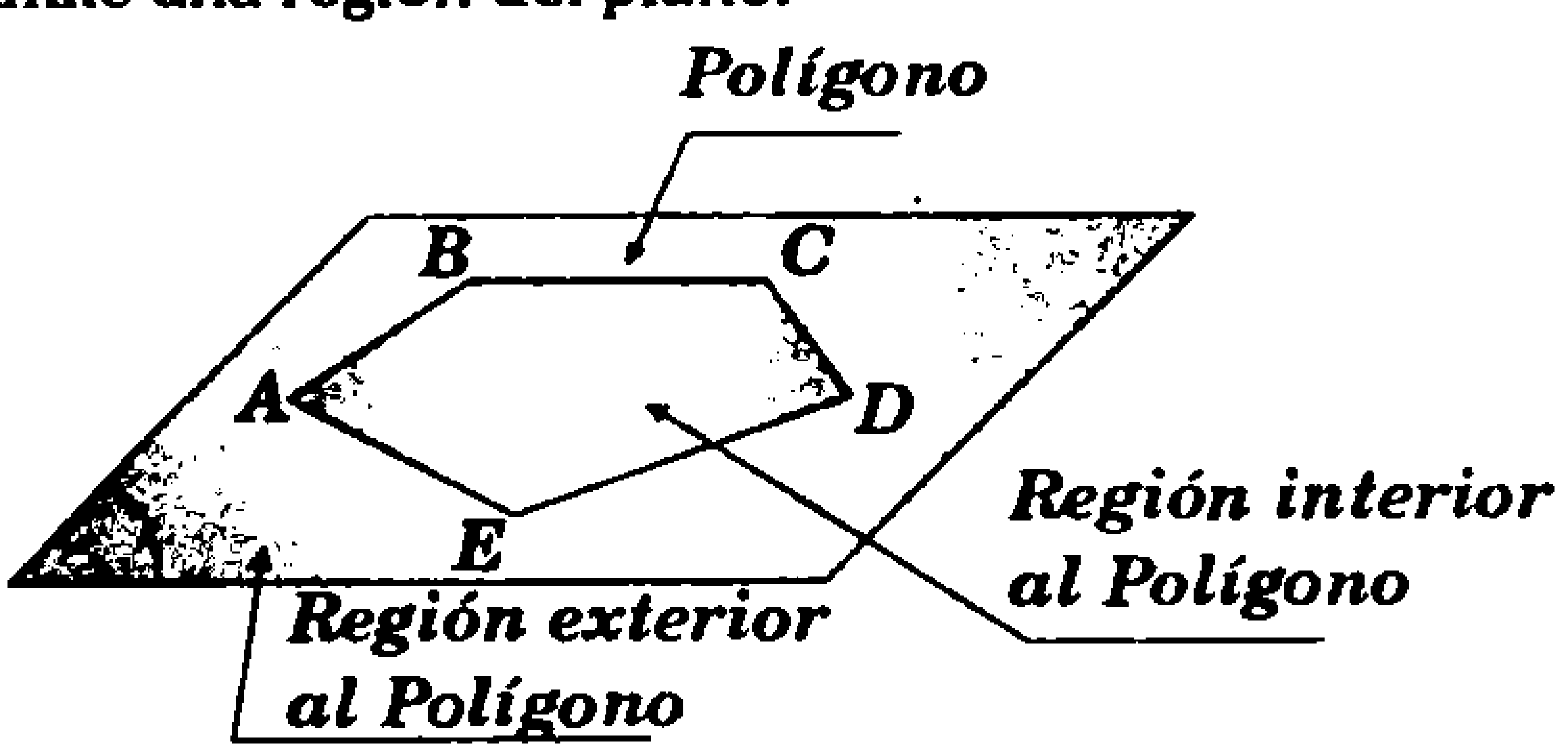
* *Establecer un uso simple y racional de la aplicación de fórmulas para la resolución de problemas con polígonos.*

INTRODUCCIÓN :

La relación de la geometría en sus orígenes con la agrimensura determinó seguramente la importancia que, desde siempre se ha concedido a configuraciones geométricas elementales como es el triángulo, el cuadrado, el rectángulo o el trapecio. Son los polígonos que más eficaces demostraron ser a la hora de calcular, por ejemplo, las superficies de los campos de cultivo. Pero estas figuras poligonales aparecieron tambien dentro de contextos como la ornamentacion y la arquitectura e inclusive en las prácticas mágicas. El pentágono por ejemplo, está presente en diversos simbologías místicas. Y no hay que olvidar que la naturaleza ha expresado tambien su preferencia por determinadas configuraciones poligonales, como el hexágono de las celdillas que fabrican la abejas.

POLIGONO

Es la figura geométrica cerrada , que se forma al unir consecutivamente tres o más puntos no colineales , mediante segmentos de tal modo que dicha figura limite una región del plano.



ELEMENTOS :

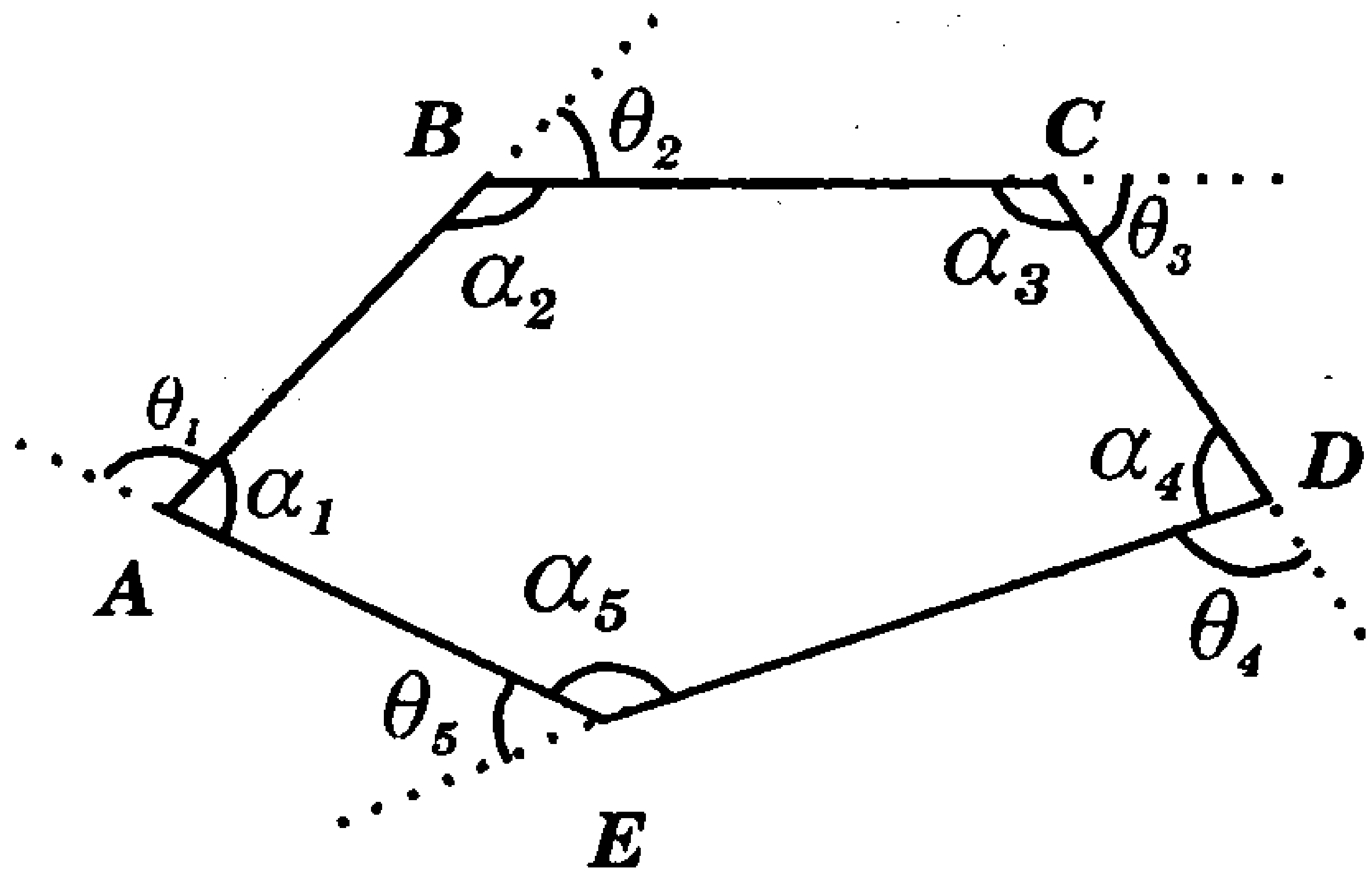
Vértices : ***A, B, C, D*** y ***E***

Lados : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ y $\overline{AE}$

NOTACIÓN :

Polígono ***ABCDE.***

Ángulos determinados :



En la figura se tiene el polígono ***ABCDE***

Medida de los ángulos interiores :

$$\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4 \text{ y } \alpha_5$$

Medida de los ángulos exteriores :

$$\theta_1;\theta_2;\theta_3;\theta_4 \text{ y } \theta_5$$

LÍNEAS ASOCIADAS AL POLÍGONO DIAGONAL :

Es el segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos

EJEMPLO :

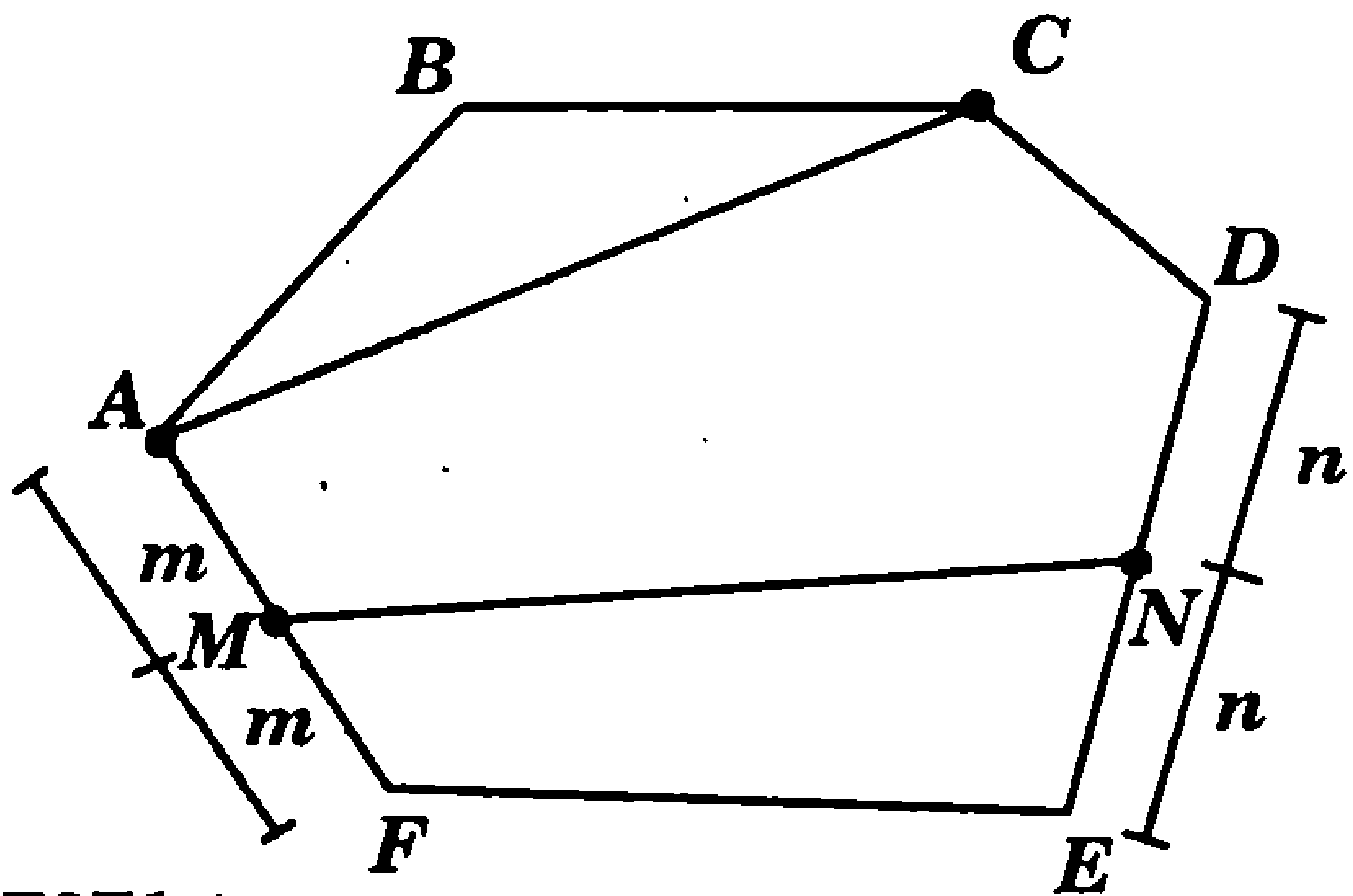
Para el polígono ***ABCDEF*** , mostrado en el gráfico; $\overline{AC}$ es una diagonal .

DIAGONAL MEDIA :

Es el segmento que cuyos extremos son los puntos medios de dos lados .

EJEMPLO :

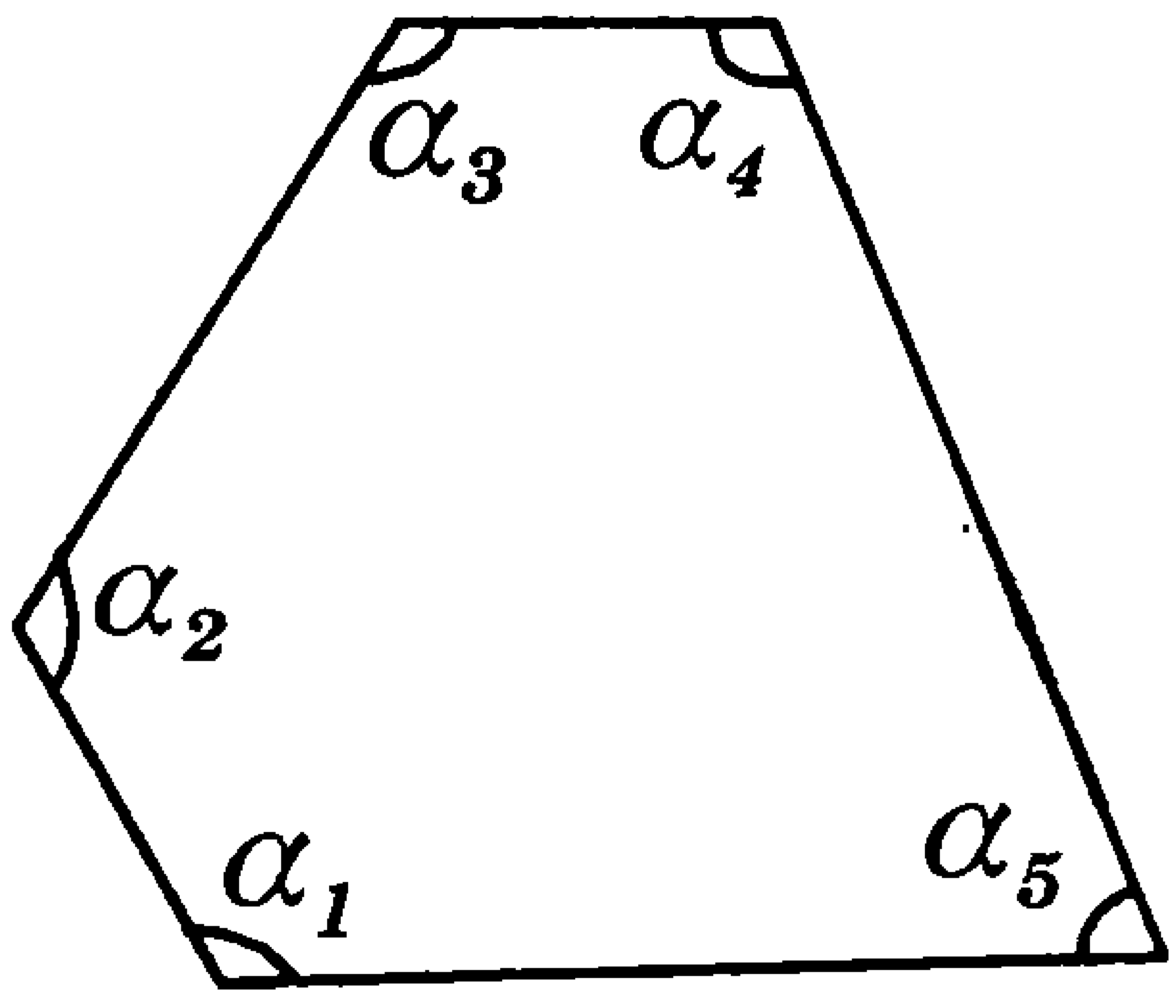
Para el polígono ***ABCDEF***, mostrado en el gráfico, si : M y ***N*** son puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{ED}$ respectivamente entonces $\overline{MN}$ es una diagonal media



NOTA :

Hay dos tipos de polígono , los cuales son :

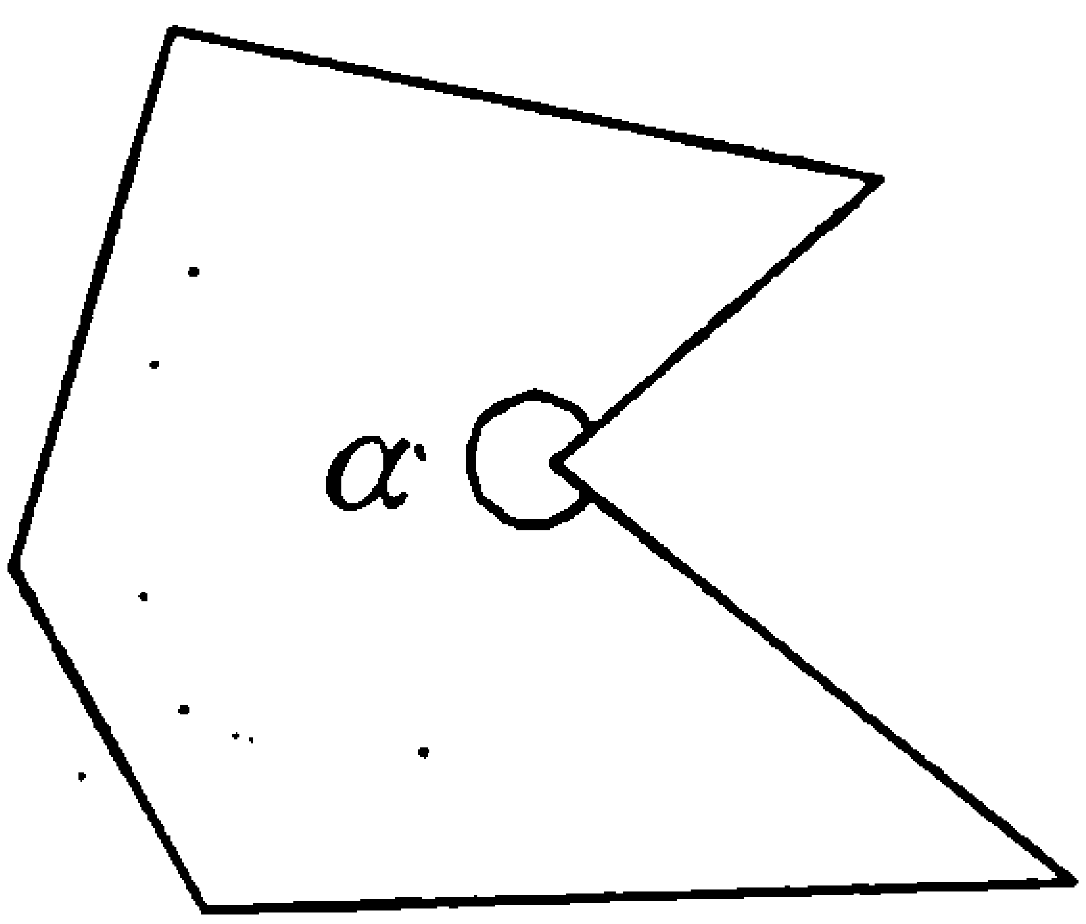
POLÍGONO CONVEXO :



Las medias de los ángulos interiores son menores *180°* osea :

$$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5 < 180°$$

Polígono no Convexo o Polígono concavo :



La medida de uno o más ángulos interiores es mayor a *180°* osea: $\alpha > 180°$

Otra manera de reconocer si un polígono es convexo o cóncavo es realizando lo siguiente: trazar una recta secante al polígono, si la recta puede intersecar a más de dos lados se trata de un polígono cóncavo ; caso contrario será un polígono convexo .

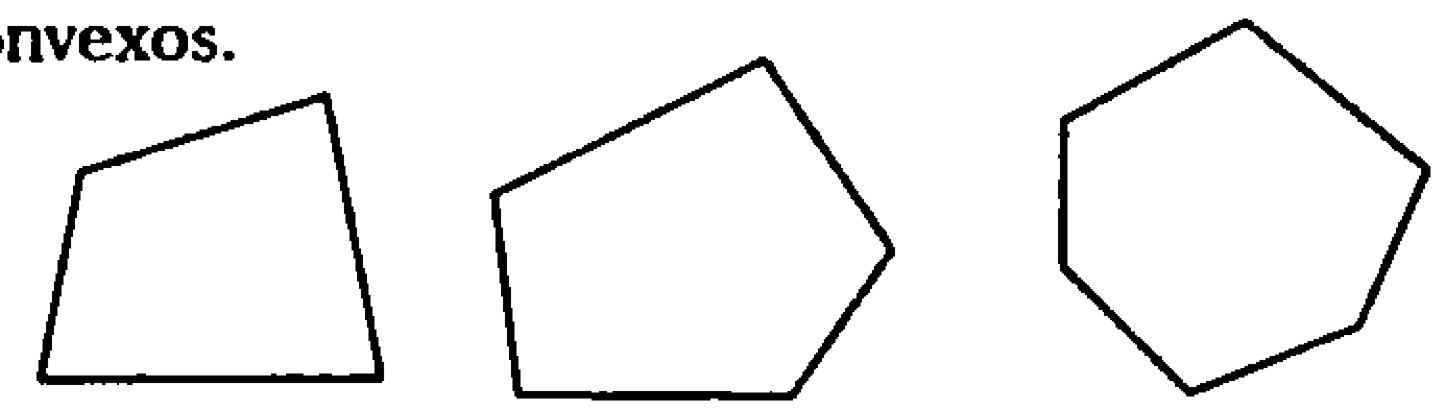
NOMBRE DE LOS POLÍGONOS

# DE LADOS	NOMBRE
3 lados	Triángulo
4 lados	Cuadrado
5 lados	Pentágono
6 lados	Hexágono
7 lados	Heptágono
8 lados	Octágono
9 lados	Nonágono
10 lados	Decágono
11 lados	Endecágono
12 lados	Dodecágono
15 lados	Pentadecágono
20 lados	Icoságono

CLASIFICACIÓN :

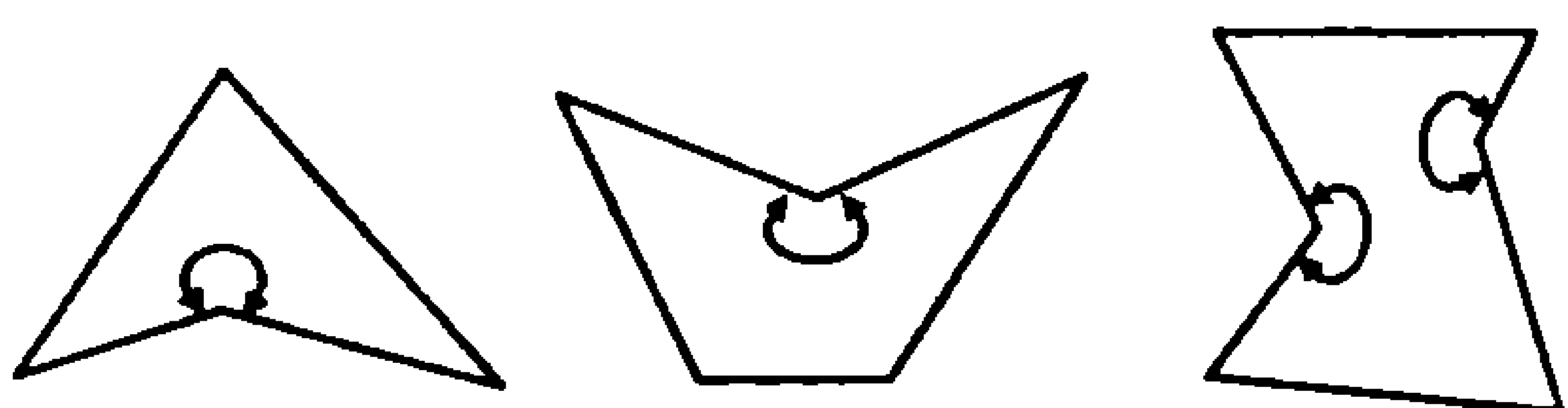
1) POLÍGONO CONVEXO :

Es aquel que tiene todos sus ángulos interiores convexos.



2) POLÍGONO CÓNCAVO :

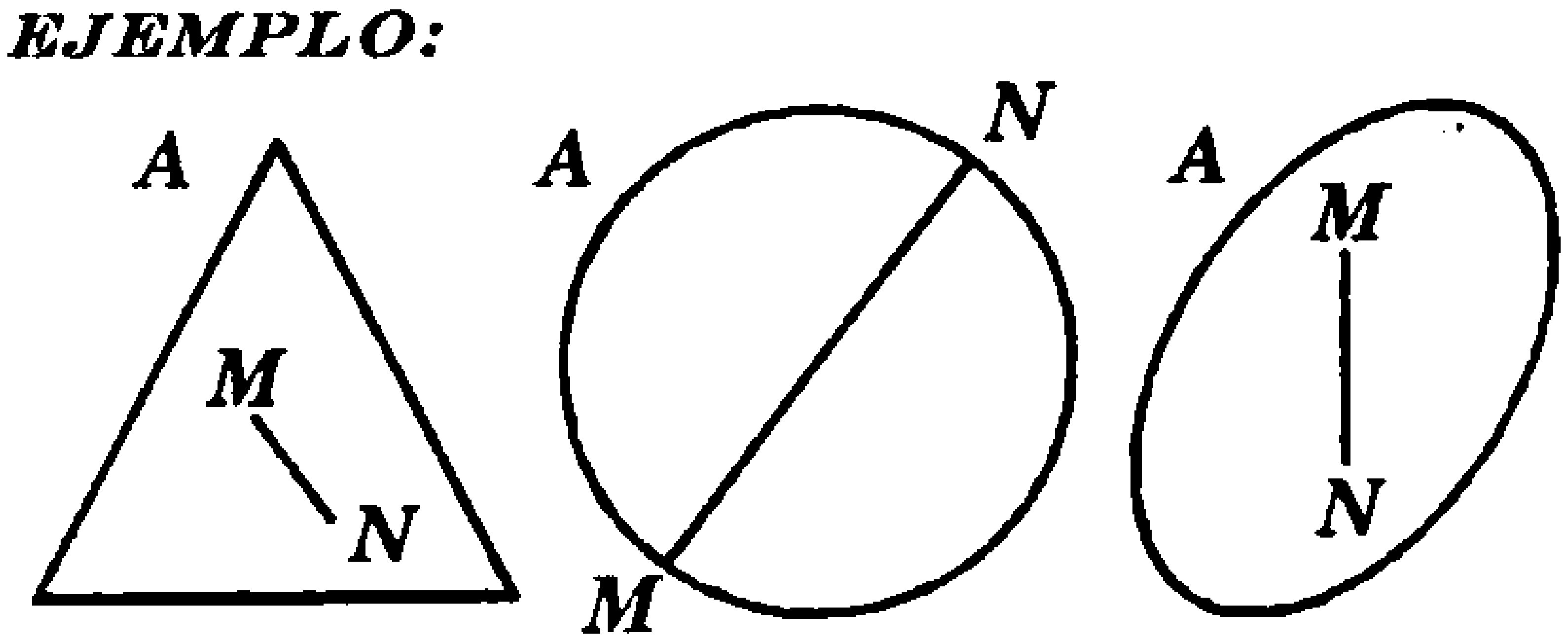
Es aquel que tiene uno más ángulos interiores cóncavos.



NOTA :

Conjunto convexo, un conjunto *A* se denomina convexo, si para cada dos puntos *M* y *N* del conjunto, todo el segmento $\overline{MN}$ está en *A*

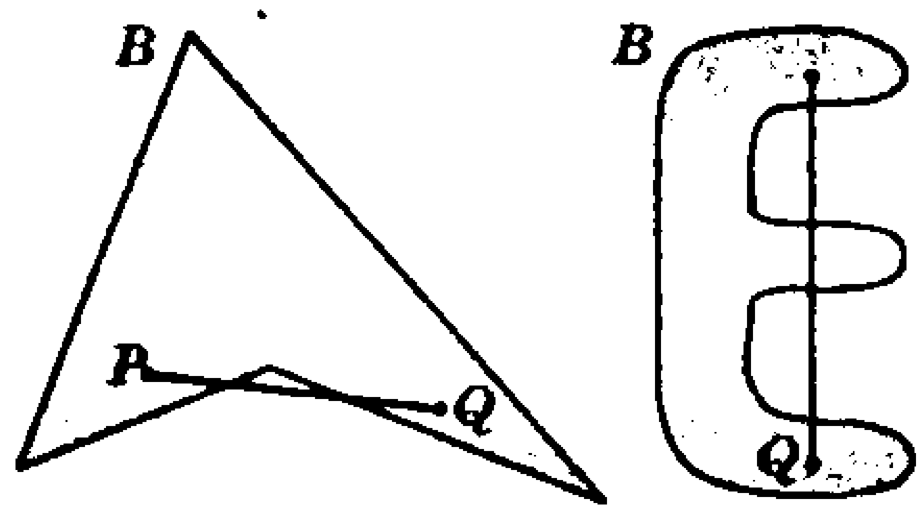
EJEMPLO:



Conjunto no convexo :

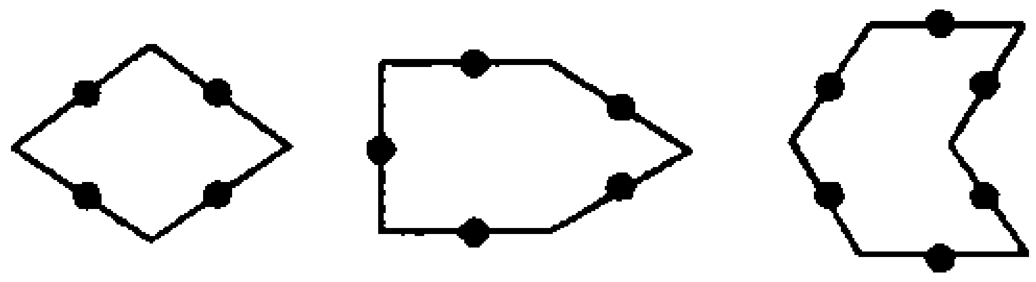
Un conjunto ***B*** se denomina no convexo, si para dos puntos ***P*** y ***Q***. del conjunto, parte del segmento PQ no está en ***B***.

EJEMPLO:



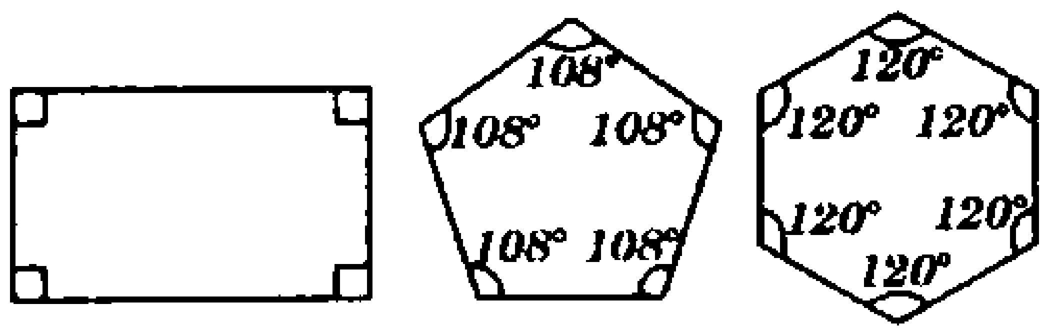
3)POLÍGONO EQUILÁTERO :

Es aquel que tiene todos sus lados de igual medida .



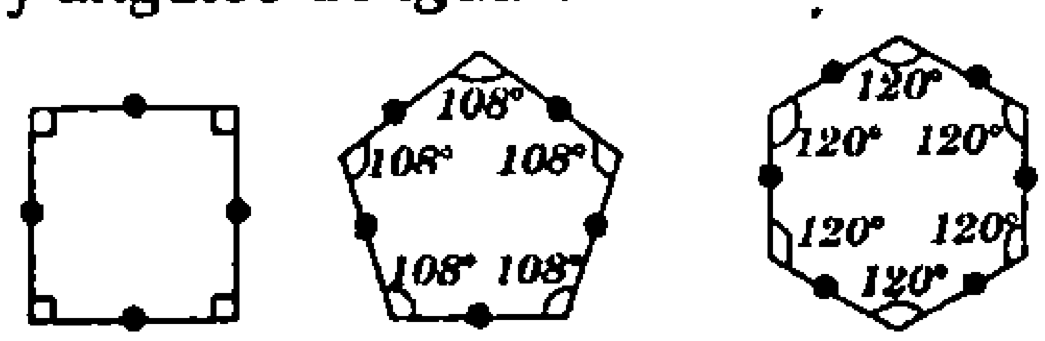
4)POLÍGONO EQUIÁNGULO:

Es aquel que tiene todos sus ángulos interiores de igual medida.



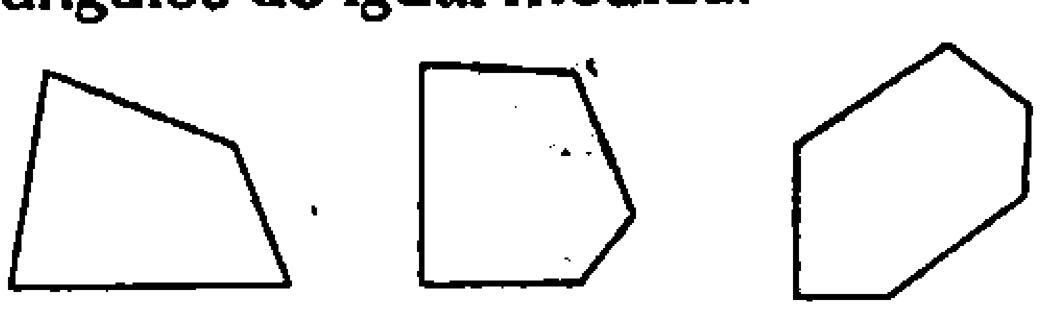
5) POLÍGONO REGULAR :

Es aquel que tiene todos sus lados y ángulos de igual medida.



6) POLÍGONO IRREGULAR :

Es aquel que no tiene sus lados y ángulos de igual medida.

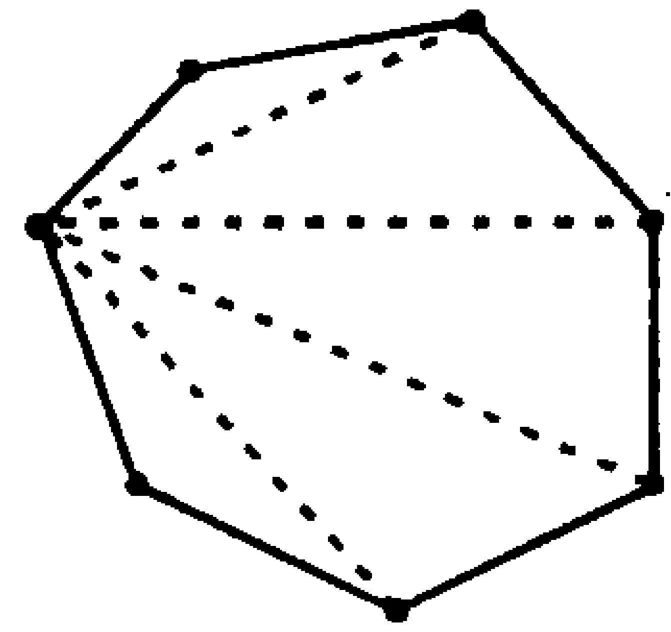


TEOREMAS EN UN POLÍGONO CONVEXO DE "n" LADOS

Donde: n = Número de lados = número de vértices = número de ángulos internos.

TEOREMA 1 :

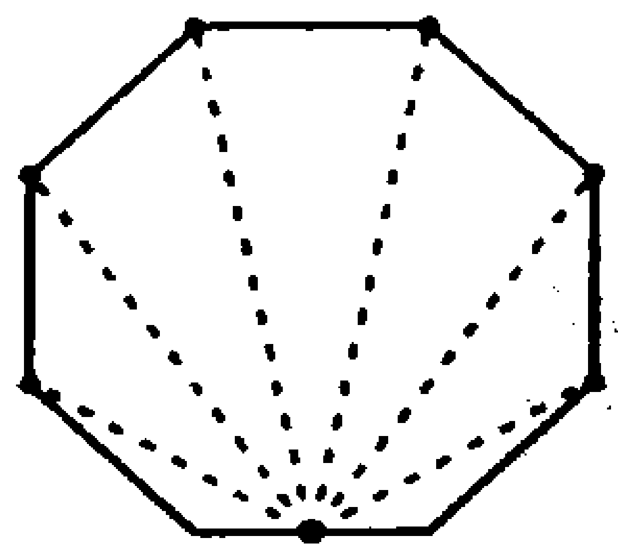
Si en un polígono de "*n*" lados se trazan todas las diagonales desde un vértice el polígono queda dividido en $(n-2)$ triángulos.



$\#$ *de triángulos* $= n - 2$

TEOREMA 2 :

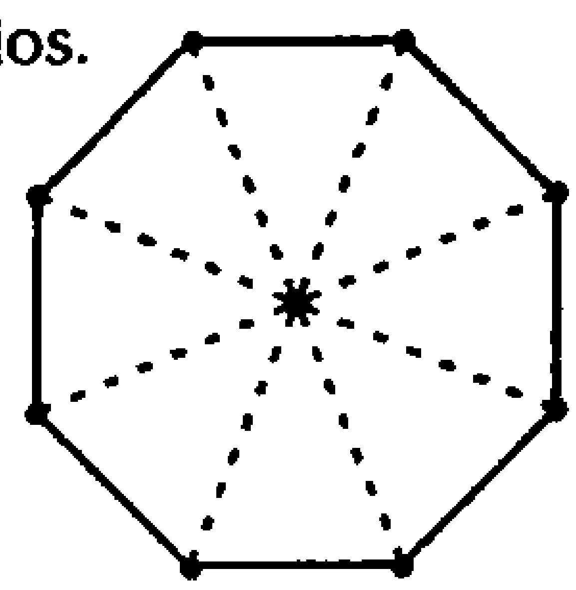
Si desde uno de los lados se trazan segmentos hacia todos los vértices, el polígono de "*n*" lados queda dividido en $(n-1)$ triángulos.



$\#$ *de triángulos* $= n - 1$

TEOREMA 3 :

Si un punto de la región interior, se une mediante segmentos de recta con todos los vértices del polígono de "*n*" lados se obtiene "*n*" triángulos.

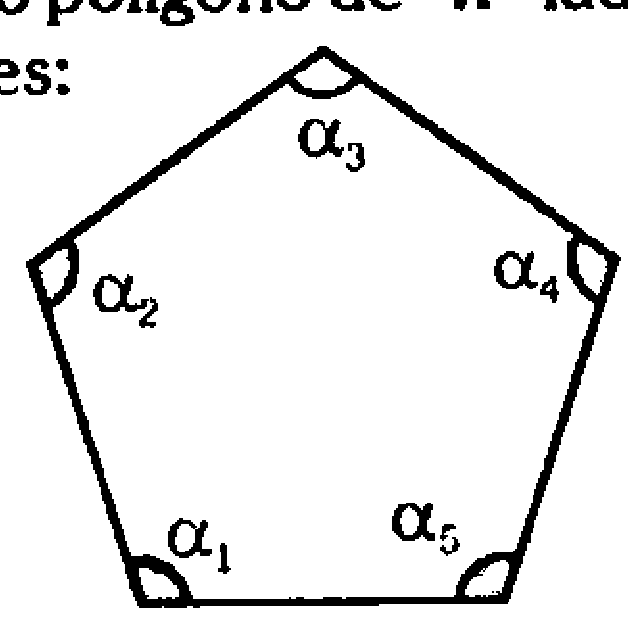


$\#$ *de triángulos* $= n$

TEOREMA 4 :

(***Suma de las medidas de los ángulos internos***)

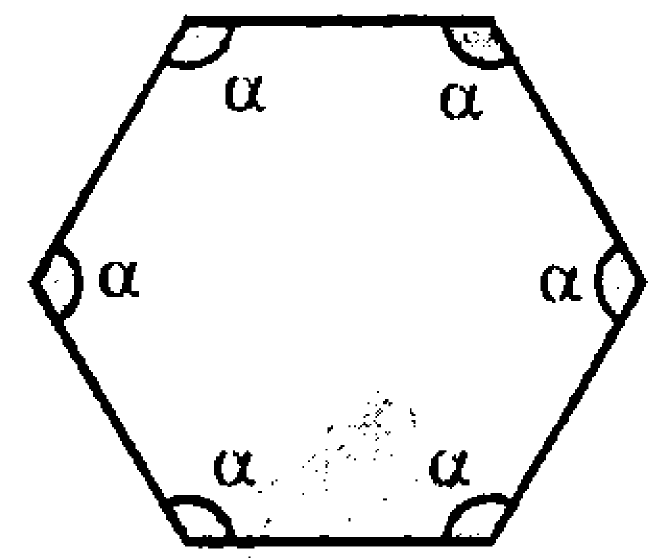
En todo polígono de "*n*" lados esta suma es:



$S_{\sphericalangle s\ internos} = 180°(n-2)$

TEOREMA 5:

(Medida de un ángulo interior de un polígono equiángulo)

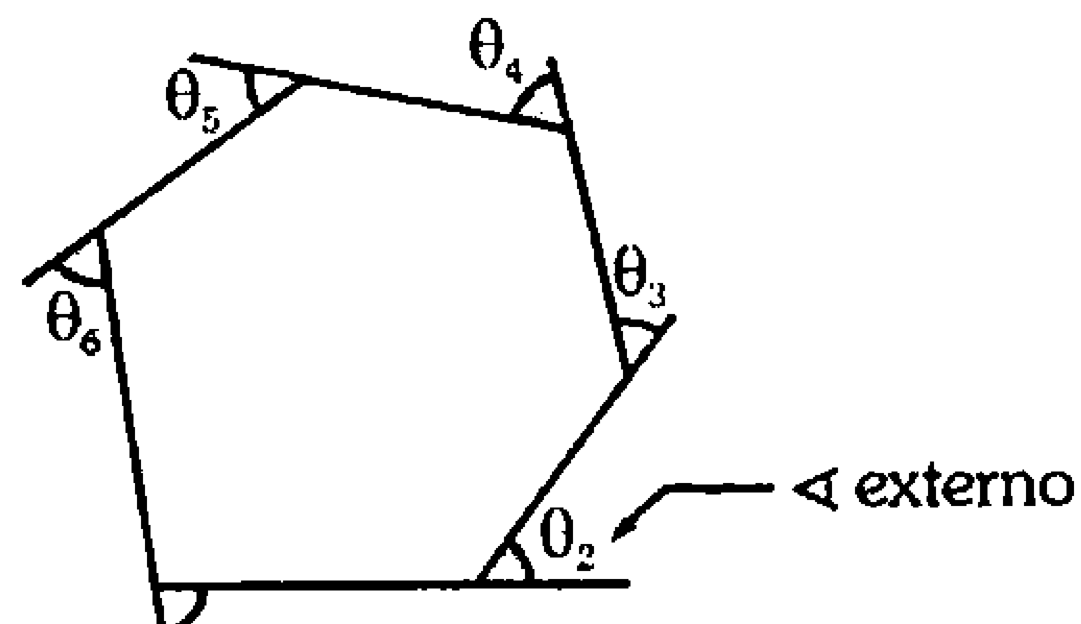


$$1\sphericalangle\ interior = \frac{180°(n-2)}{n}$$

TEOREMA 6 :

(Suma de las medida de los ángulos externos)

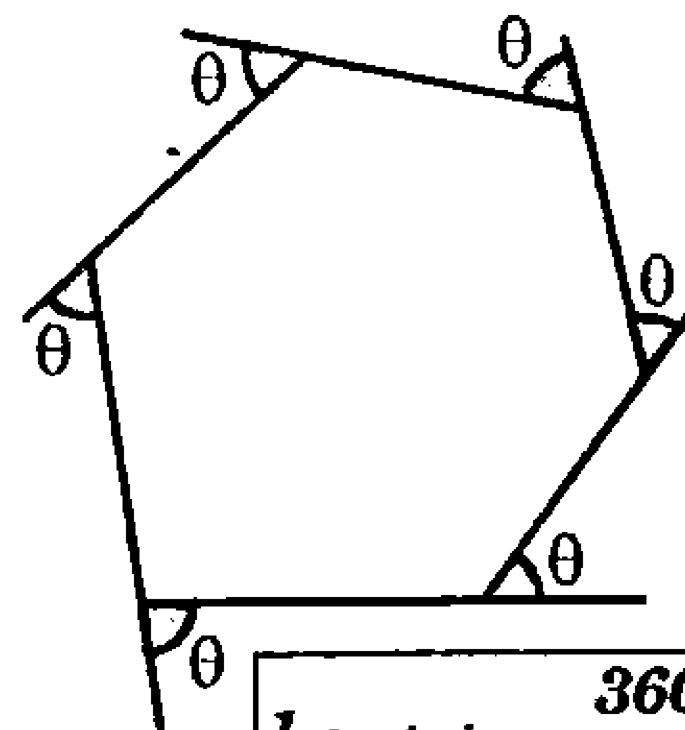
En todo polígono convexo, la suma de todos los ángulos externos (uno por vértice) es ***360°***.



$S_{\sphericalangle s\ externos} = 360°$

TEOREMA 7 :

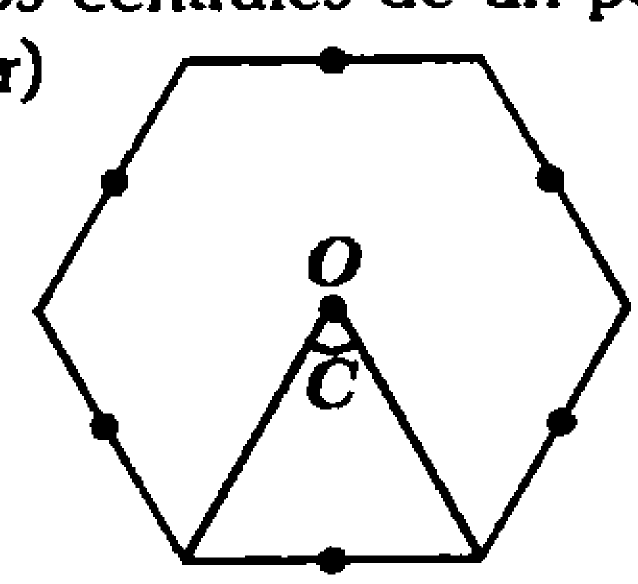
(Medida de un ángulo exterior de un polígono equiángulo)



$$1\sphericalangle\ exterior = \frac{360°}{n}$$

TEOREMA 8 :

(Suma de las medidas de los ángulos centrales de un polígono regular)



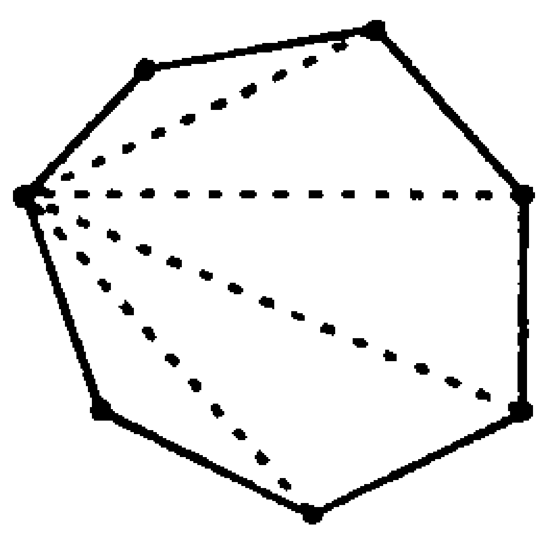
$$S\measuredangle_{s\ centrales} = 360°$$

$$1\measuredangle\ central = \frac{360°}{n}$$

TEOREMA 9 :

(Número de Diagonales desde *1* vértice)

En todo polígono de *"n"* lados el número total de diagonales que se pueden trazar desde un vértice es:

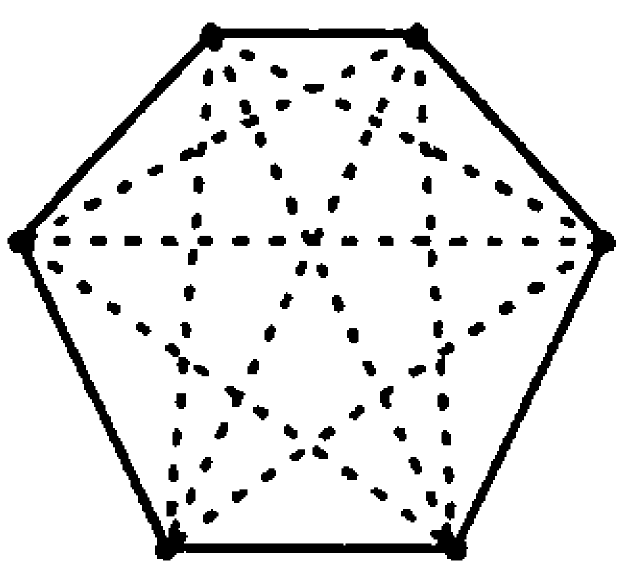


$$N^{ro}\ d = n - 3$$

TEOREMA 10 :

(Número Total de Diagonales)

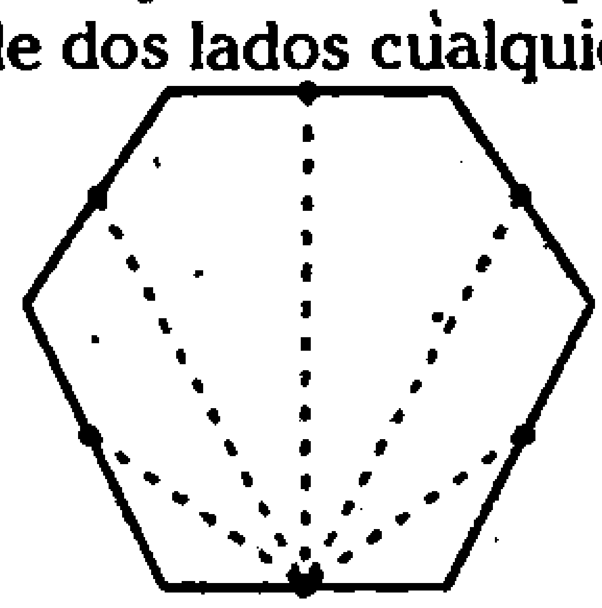
En todo polígono de *"n"* lados el número total de diagonales es:



$$N^{ro}\ D = \frac{n(n-3)}{2}$$

TEOREMA 11:

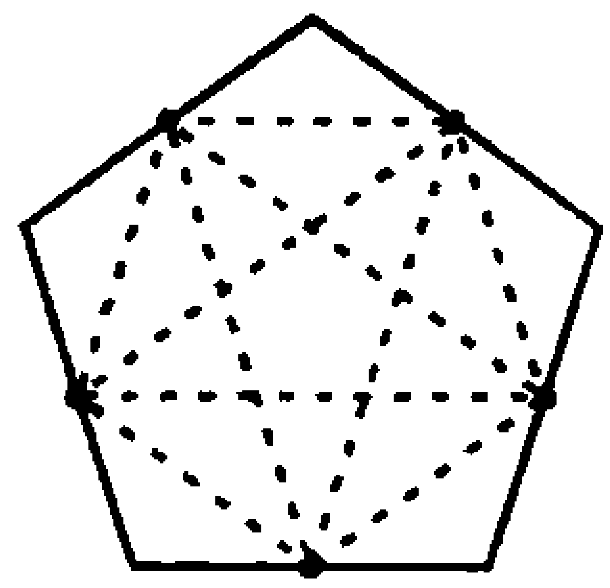
(Número de Diagonales medias desde el punto medio de un lado) Una diagonal media es un segmento que une los puntos medio de dos lados cualquiera.



$$N^{ro}\ d_m = n - 1$$

TEOREMA 12:

(Número total de diagonales medias) En un polígono de *"n"* lados el número total de diagonales medias es:



$$N^{ro}\ D_m = \frac{n(n-1)}{2}$$

TEOREMA 13 :

(Número de Diagonales desde cada vértice consecutivo)

N° de Orden del vértice		N^{ro} d
1°	vértice	$n-3$
2°	"	$n-3$
3°	"	$n-4$
4°	"	$n-5$
⋮		⋮
k^{mo}	"	$n-(k+1)$
⋮		⋮
Antepenúltimo	"	1
Penúltimo	"	0
Ultimo	"	0

FÓRMULA:

$$N^{ro}\ D_{(n,k)} = n \cdot k - \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\ ;\forall k < n$$

n = número de lados

k = número de vértices consecutivos

$N^{ro}\ D_{(n,k)}$ = número de diagonales desde *"k"* vértices consecutivos en un polígono de *"n"* lados.

TEOREMA 14:

(Número de Diagonales medias desde cada lado consecutivo)

N° de Orden del lado		$N^{ro}\ d_m$
1°	lado	$n-1$
2°	"	$n-2$
3°	"	$n-3$
⋮		⋮
k^{mo}	"	$n-k$
⋮		⋮
Penúltimo	"	1
Ultimo	"	0

FÓRMULA:

$$N^{ro}\ DM_{(n,k)} = n \cdot k - \frac{1}{2}k(k+1);\forall k \le n$$

n = número de lados

k = número de lados consecutivos

$N^{ro}\ DM_{(n,k)}$ = número de diagonales medias desde *"k"* lados consecutivos en un polígono de *"n"* lados.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

¿Cuántos lados tiene un polígono cuya suma de las medidas de sus ángulos internos y externos es *1980°*?

A)8 B)11 C)13 D)17 E)7

RESOLUCIÓN:

Dato : $\underbrace{Si}_{180°(n-2)} + \underbrace{Se}_{360°} = 1980$

$180°(n-2) + 360° = 1980°$

$180°n - 360° + 360° = 1980°$

$\rightarrow 180°n = 1980° \rightarrow n = 11$

RPTA:"B"

PROBLEMA 2 :

Al aumentar en *3* el número de lados de un polígono, el número de diagonales se duplica . Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos .

A)720° B)1440° C)1260° D)2160° E)360°

RESOLUCIÓN:

* Plantearemos :

$$\begin{pmatrix}\#\ de\ diagonales\\ del\ polígono\\ de\ n+3\ lados\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\#\ de\ diagonales\\ del\ polígono\\ de\ "n"\ lados\end{pmatrix}$$

$$\frac{(n+3)(n+3-3)}{2} = 2\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)$$

$\rightarrow n = 9$

* Piden : $S_i = 180°(n-2)$

$= 180°(9+2) = 1260°$

RPTA:"C"

PROBLEMA 3 :

15 veces el ángulo interior de un polígono regular equivale al cuadrado de su ángulo exterior. ¿Cuántos lados tiene dicho polígono?

A)4 B)6 C)8 D)9 E)13

RESOLUCIÓN:

* Según enunciado:

$$15\left(\begin{matrix}\text{medida del}\\ \text{ángulo interior}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\text{medida del}\\ \text{ángulo exterior}\end{matrix}\right)^2$$

$$\Rightarrow 15\left(\frac{180°(n-2)}{n}\right)=\left(\frac{360°}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow 15\times 180°(n-2)=\frac{360°\cdot 360°}{n}$$

$$n(n-2)=48=8\times 6\Rightarrow n=8$$

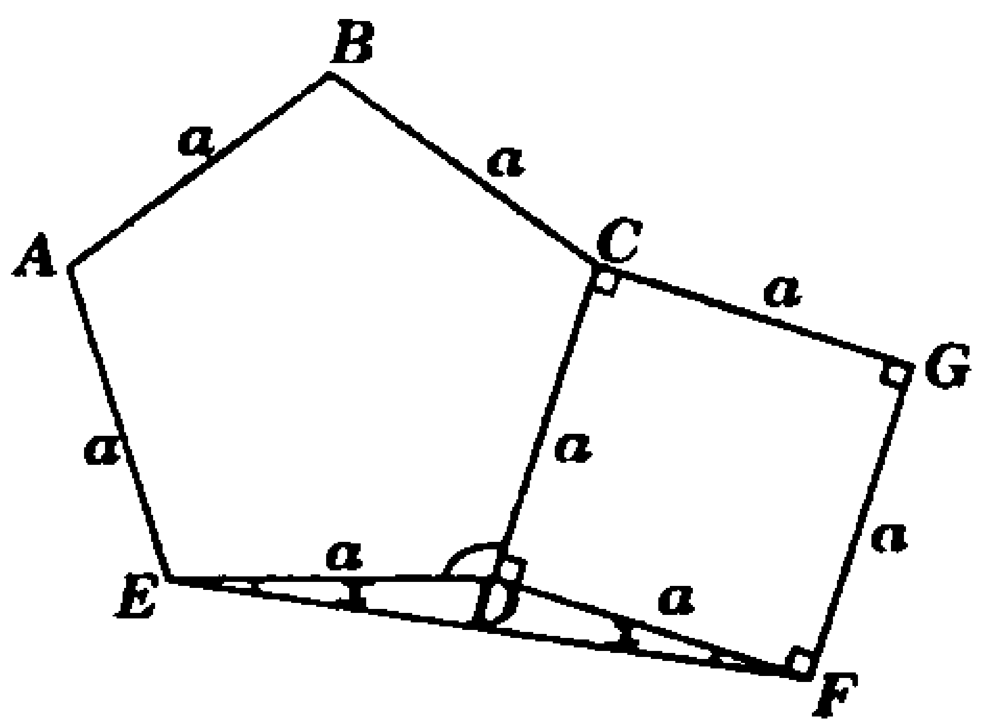
RPTA:"C"

PROBLEMA 4 :

En un pentágono regular *ABCDE*, sobre el lado *CD* se construye exteriormente el cuadrado *CDFG*. Calcular la medida del ángulo $D\widehat{F}E$.

A)12° B)15° C)6° D)9° E)18°

RESOLUCIÓN:



$$m\measuredangle i=\frac{180°(n-2)}{n}=\alpha\Rightarrow\frac{180°(5-2)}{5}=\alpha$$

$$\Rightarrow\alpha=108°$$

En el isósceles *EDF* tenemos :

$$m\measuredangle EDF=360°-(108°+90°)$$

$$\Rightarrow m\measuredangle EDF=162°$$

Finalmente en dicho triángulo tenemos: $2x+162°=180°\Rightarrow x=9°$

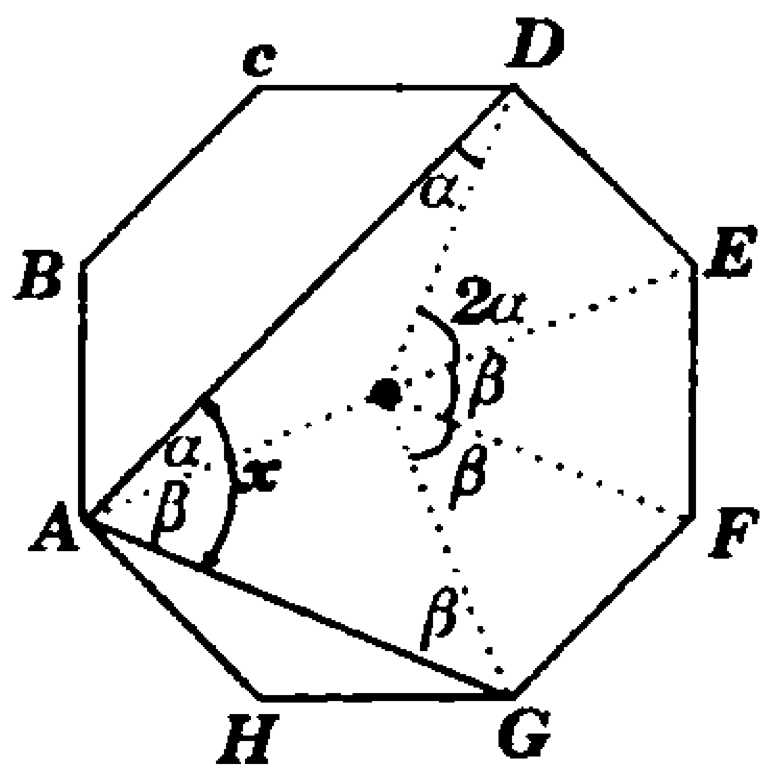
RPTA:"D"

PROBLEMA 5:

En una octógono regular *ABCDEFGH*, calcular la medida del ángulo formado por la diagonal *AD* y la diagonal *AG*.

A)60° B)75° C)53°30' D)67°30' E)82°

RESOLUCIÓN :



Para el octógono el ángulo central viene dado por:

$$m\measuredangle c=2\alpha=\beta=\frac{360°}{8}$$

$$\Rightarrow 2\alpha=\beta=45°$$

Donde: $\alpha=22°30'$; $\beta=45°$

Finalmente tendremos que:

$$\Rightarrow x=\alpha+\beta\Rightarrow x=22°30'+45°$$

$$\Rightarrow x=67°30'$$

RPTA:"D"

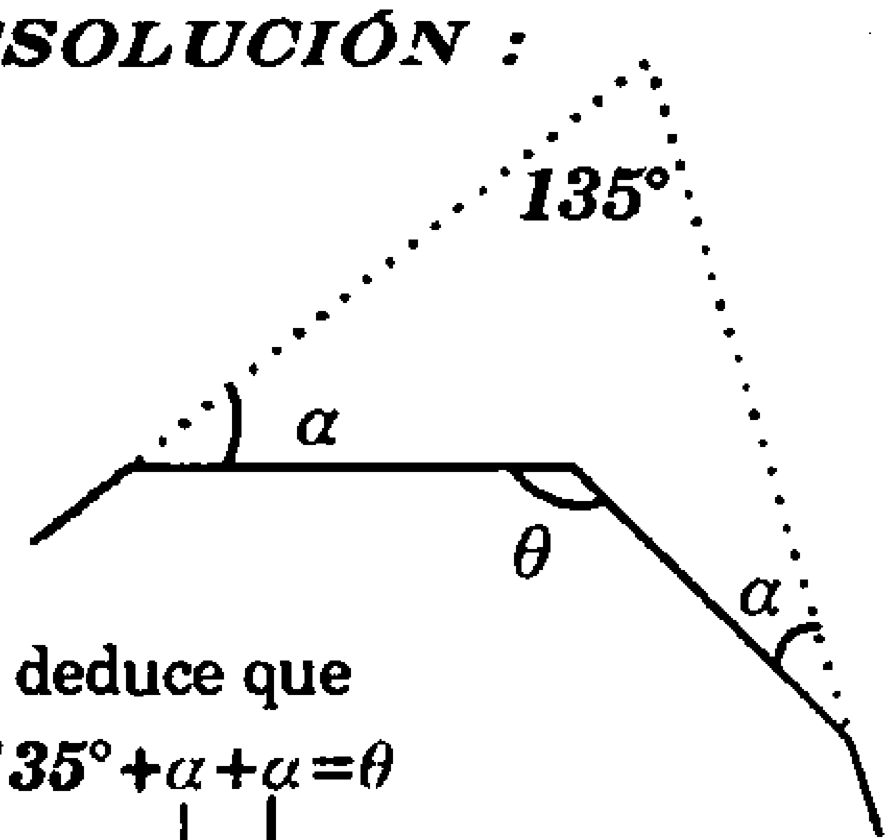
PROBLEMA 6:

En un polígono regular *ABCDEF*....., se prolongan los lados *AB* y *ED*, intersectándose en *P*.

Si $m\measuredangle BPD=135°$. ¿Cuál es el número de ángulos rectos cuya suma de valores es igual al suma de sus medidas de los ángulos internos?

A)22 B)34 C)42 D)44 E)52

RESOLUCIÓN :



* Se deduce que

$$135°+\alpha+\alpha=\theta$$

↳ *ángulo interior*

↳ *ángulo exterior*

$$\hookrightarrow 135°+2\left(\frac{360°}{n}\right)=\frac{180°(n-2)}{n}$$

Al resolver : $n=24$

* Ahora :

$$90°k=180°(n-2)$$

↳ #de ángulos rectos

$$\hookrightarrow k=\frac{180°(24-2)}{90°}=44$$

RPTA:"D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo de *25* lados.

A)4140° B)3960° C)3780° D)3600° E)4320°

02 Calcular el número total de diagonales de un endecágono regular.

A)40 B)44 C)50 D)30 E)45

03 Calcular la medida de un ángulo exterior de un pentadecágono regular.

A)30° B)24° C)36° D)45° E)48°

04 Calcular el número de diagonales de un polígono convexo, si la suma de sus ángulos interiores, es igual a *4,5* veces la suma de sus ángulos exteriores.

A)30 B)35 C)44 D)20 E)56

05 ¿En qué polígono se cumple que el número de sus diagonales excede al número de sus vértices en *7* ?

A)7 B)8 C)9 D)11 E)13

06 Hallar el número de diagonales de un polígono, cuya suma de sus ángulos interiores es *900°*.

A)20 B)35 C)27 D)9 E)14

07 Hallar el número de diagonales de un polígono regular cuyo ángulo externo mide *40°*.

A)20 B)35 C)9 D)27 E)14

08 La suma de los ángulos interiores de un polígono equivale a *56* ángulos rectos ¿cuántos lados tiene dicho polígono?

A)23 B)30 C)36 D)15 E) 53

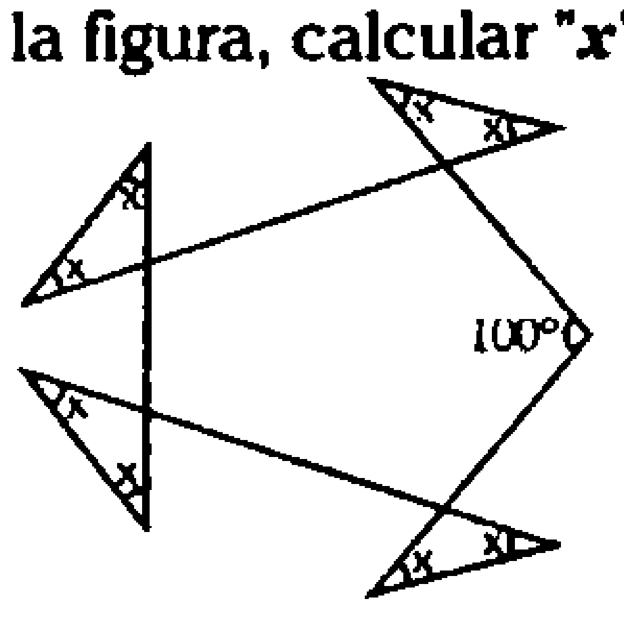
09 ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular si su ángulo interior es el triple de su ángulo central?

A)9 B)14 C)20 D)27 E)35

10 En un polígono convexo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es *3960°*. Calcular su número de lados.

A)20 B)24 C)25 D)27 E)30

11 En la figura, calcular "*x*".

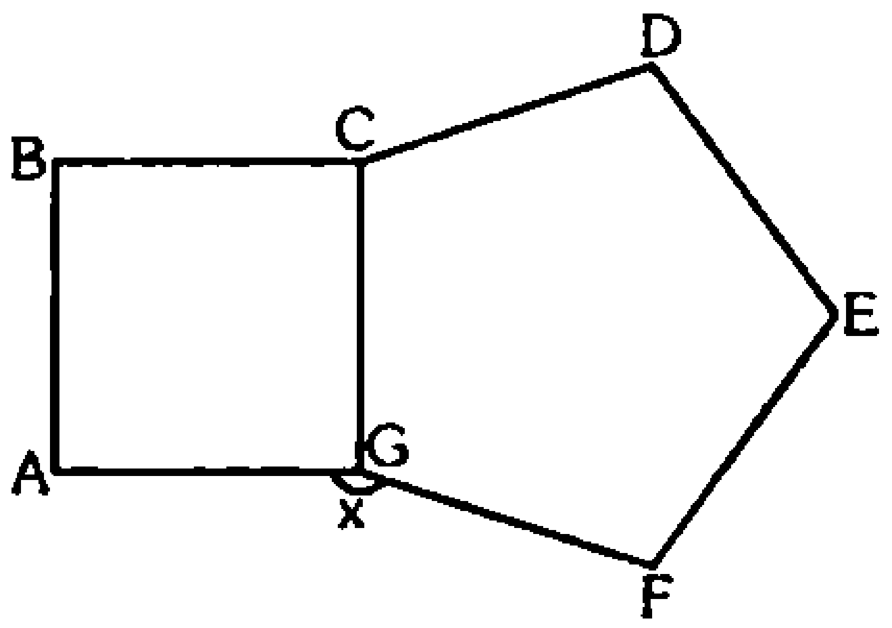


A)40 B)35 C)30 D)25 E)20

12 Calcular el número de lados de un polígono si la diferencia entre su número total de diagonales y su número de vértices, es igual a **75**.

A)10 B)12 C)15 D)20 E)9

13 En la figura, calcular "*x*", si los polígonos son regulares.

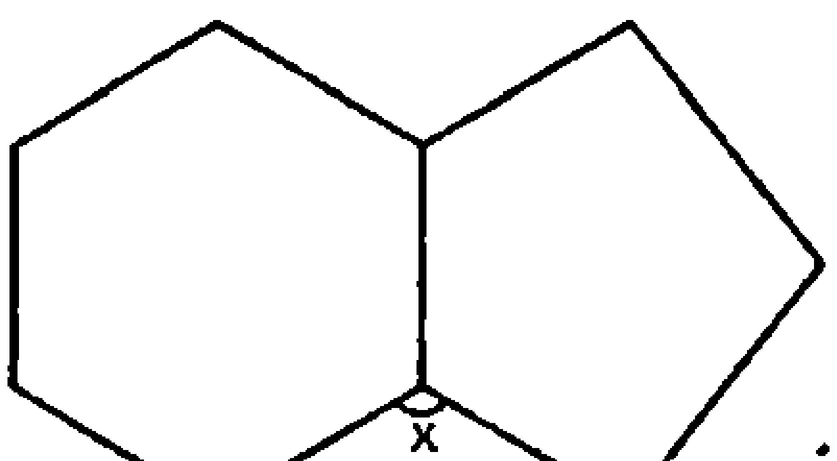


A)148 B)154 C)162 D)176 E)130

14 ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual su número total de diagonales es igual al cuádruple de su número de vértices?

A)10 B)11 C)12 D)9 E)8

15 En la figura, calcule "*x*", si los polígonos son regulares.

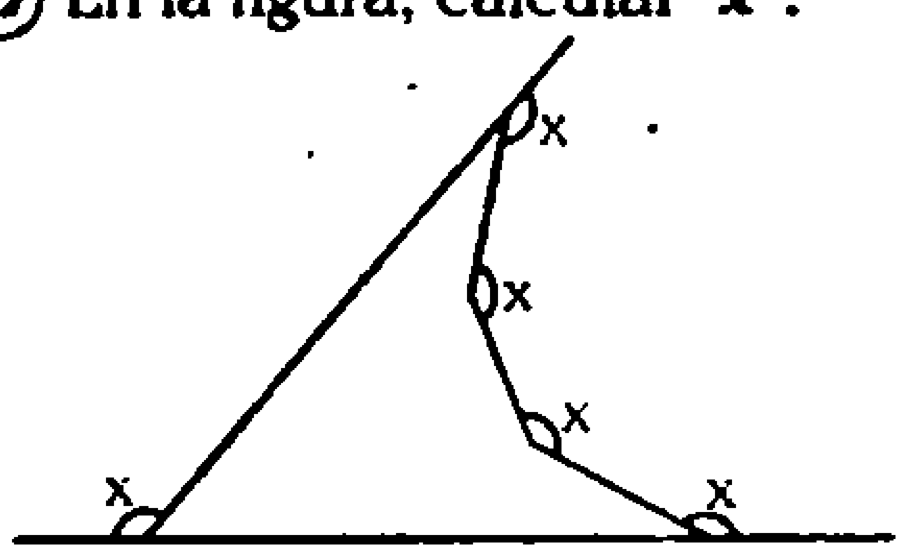


A)129 B)130 C)131 D)132 E)143

16 Calcule el número de lados de un polígono convexo si la suma de las medidas de sus ángulos internos es igual al quíntuplo de la suma de las medidas de sus ángulos externos.

A)12 B)10 C)9 D)8 E)15

17 En la figura, calcular "*x*".



A)120 B)108 C)144 D)150 E)135

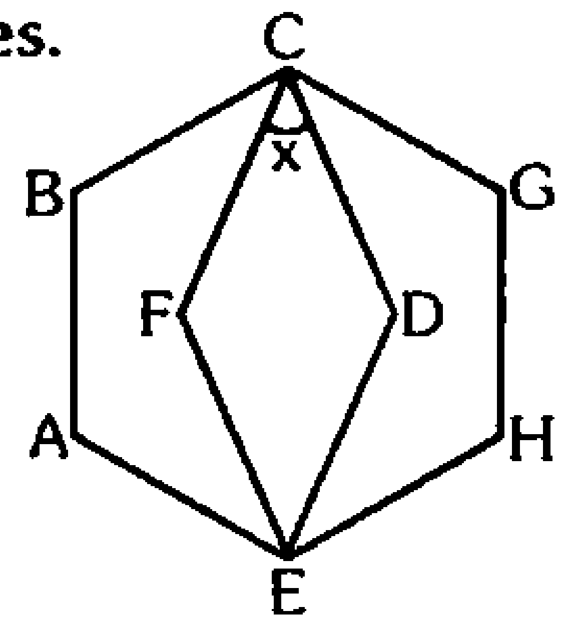
18 Calcular el número de lados de un polígono si desde *4* vértices consecutivos se han trazado *45* diagonales.

A)15 B)20 C)10 D)9 E)12

19 Calcular el número de lados de un polígono equiángulo si se sabe que la suma de las medidas de *5* de sus ángulos internos es igual a *750°*.

A)12 B)10 C)9 D)15 E)20

20 En la figura, calcule "*x*", si los pentágonos *ABCDE* y *EFCGH* son regulares.

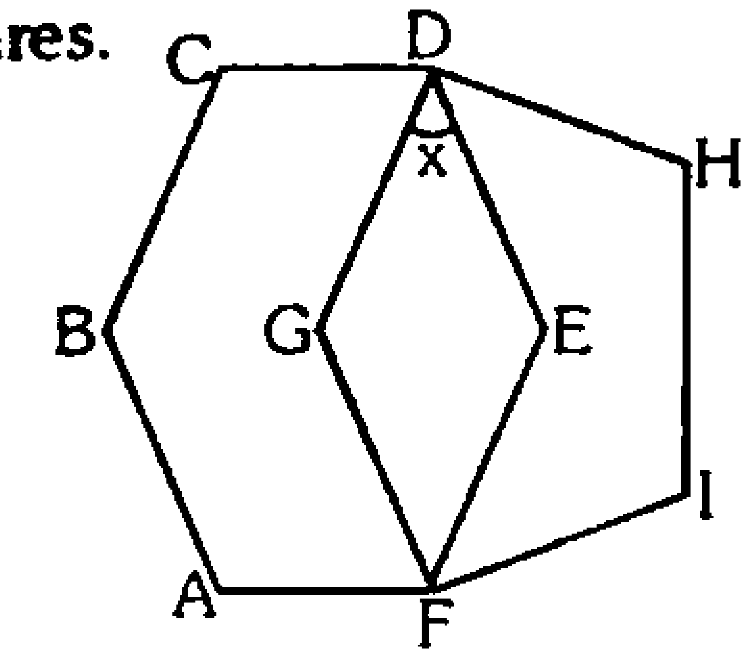


A)70 B)68 C)74 D)72 E)76

21 Calcular el número de lados de un polígono regular de lado *2* y su perímetro es numéricamente igual a su número total de diagonales.

A)6 B)8 C)9 D)10 E)12

22 En la figura, calcule "*x*", si los polígonos *ABCDEF* y *FGDHI* son regulares.

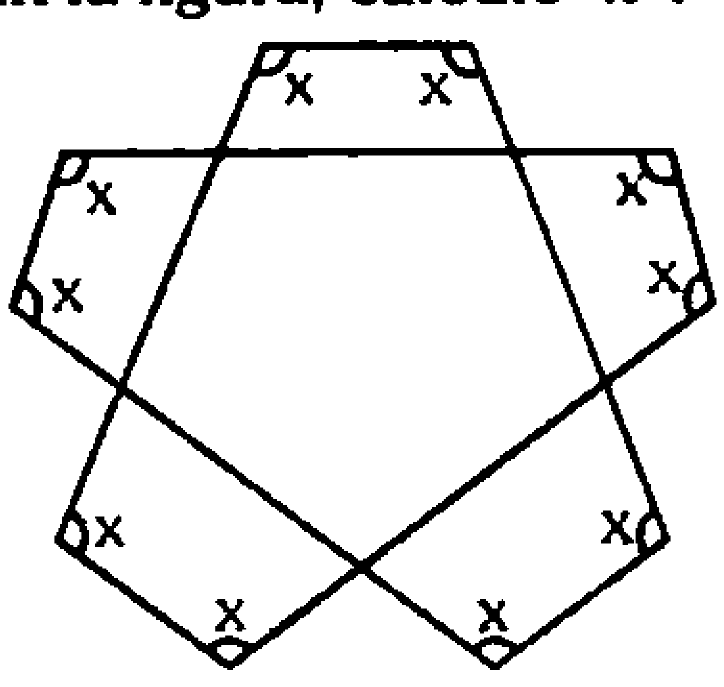


A)70 B)62 C)64 D)68 E)66

23 Calcular el número de lados de un polígono, si al aumentar en *3* su número de lados; su número total de diagonales aumenta en *33*.

A)11 B)10 C)12 D)13 E)14

24 En la figura, calcule "*x*".



A)120 B)108 C)144 D)135 E)150

PROPIEDADES

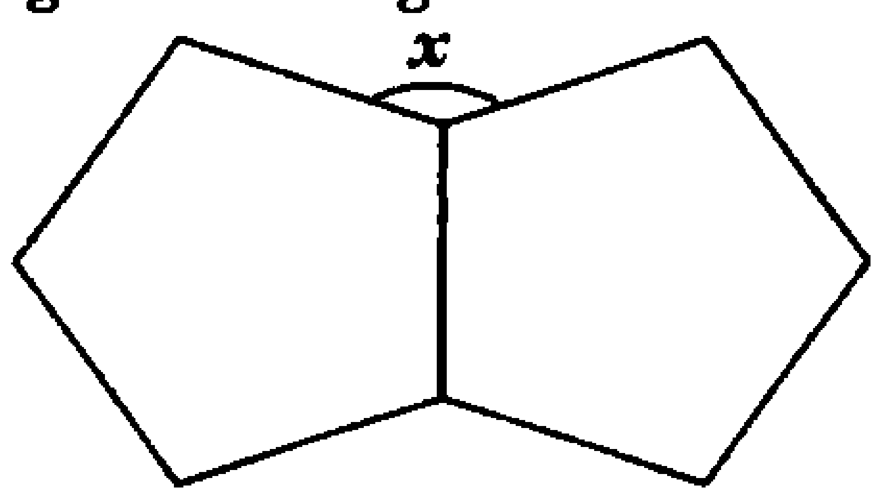
Suma de las medidas de los ángulos internos	→ 180° (n-2)
Suma de las medidas de los ángulos externos	→ 360°
Suma de las medidas de los ángulos centrales	→ 360°
Número de diagonales	→ $\frac{n(n-3)}{2}$
Diagonales de un vértice	→ (n-3)
Diagonales medias	→ $\frac{n(n-1)}{2}$

POLÍGONO REGULAR O EQUIÁNGULO

Medida de un ángulo Interno	→ $\frac{180(n-2)}{n}$
Medida de un ángulo Externo	→ $\frac{360}{n}$
Medida de un ángulo Central	→ $\frac{360}{n}$

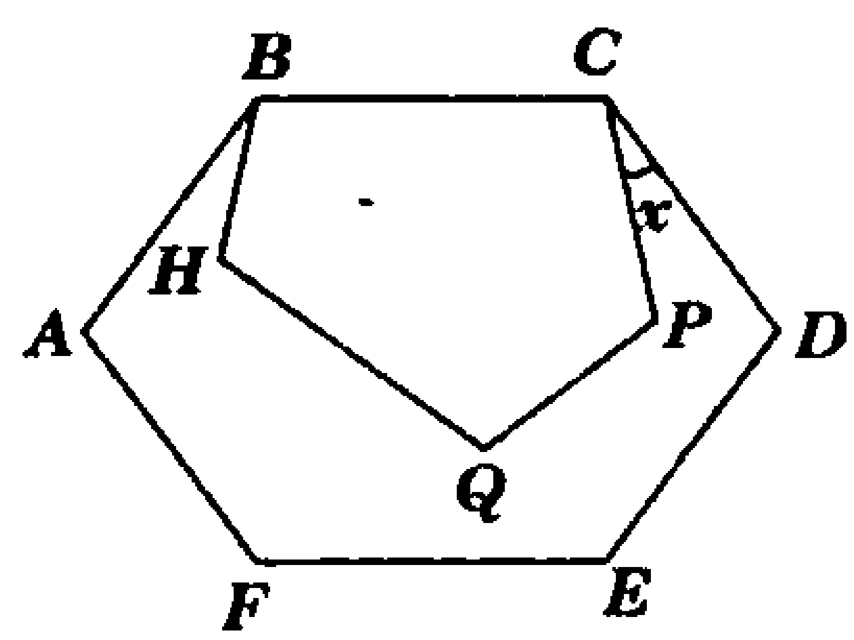
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular "*x*", si en la figura los polígonos son regulares



A)122 B)136 C)144 D)108 E)132

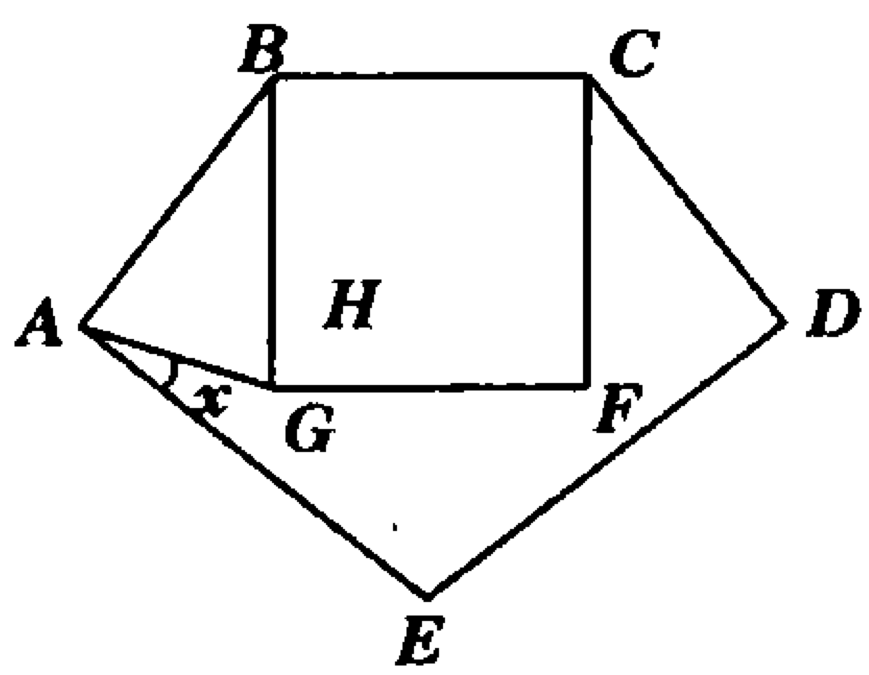
02 Según el gráfico, los polígonos *ABCDEF* y *HBCPQ* son equiángulos. Calcular "*x*".



A)15° B)12° C)18° D)20° E)30°

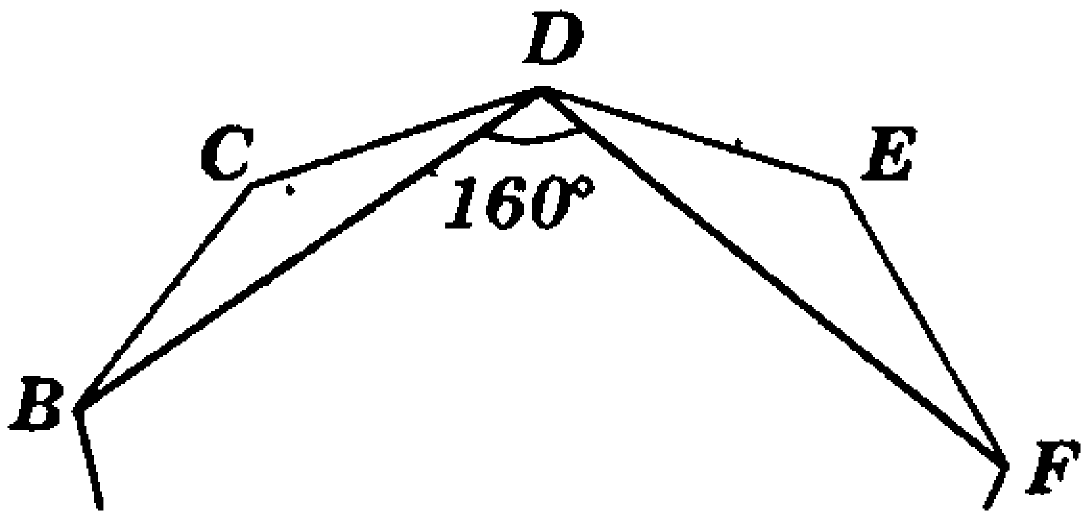
03 En la figura *ABCDE* y *BCFG* son polígonos regulares.

Calcular "*x*".



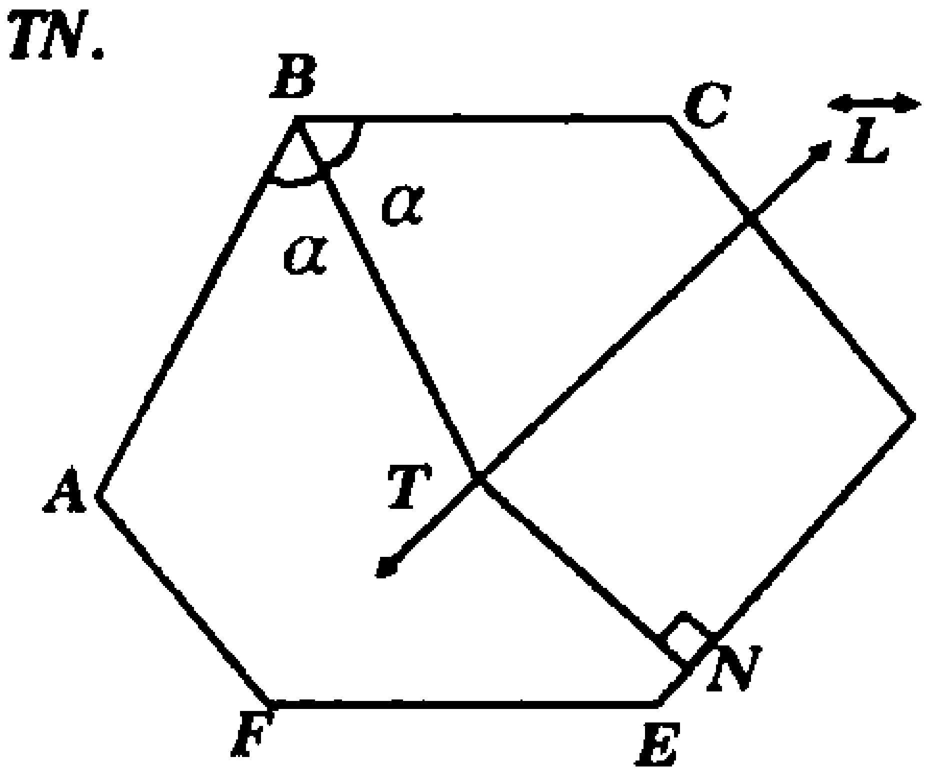
A)18° B)20° C)27° D)42° E)9°

04 En la figura se muestra parte de un polígono regular de "*n*" lados. Calcular "*n*"



A)24 B)30 C)36 D)18 E)45

05 En el gráfico *ABCDEF* es un polígono equiángulo ; $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{CD}$ y $BT=4$. Calcular *TN*.



A)2 B)5 C)$\sqrt{23}$ D)7 E)8

06 ¿Cuántos lados tiene aquel polígono convexo donde su número de vértices es igual a su número de diagonales?

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

07 ¿Cuántas diagonales tiene como máximo un polígono regular cuyo ángulo externo mide *40°*?

A)53 B)45 C)36 D)27 E)25

08 En un polígono regular la suma de las medidas de un ángulo interno, un ángulo central y un ángulo exterior es *210°*. Calcular su número de diagonales

A)35 B)27 C)77 D)90 E)54

09 ¿Cuántas diagonales como máximo se puede trazar desde un vértice en un polígono cuyo máximo número de diagonales es *6* veces el número de lados?

A)15 B)13 C)8 D)12 E)7

10 Calcular el número de diagonales de aquel polígono convexo en el cuál el número de triángulos que resulta al trazar todas las diagonales desde un sólo vértice es igual a *7*.

A)35 B)27 C)20 D)14 E)7

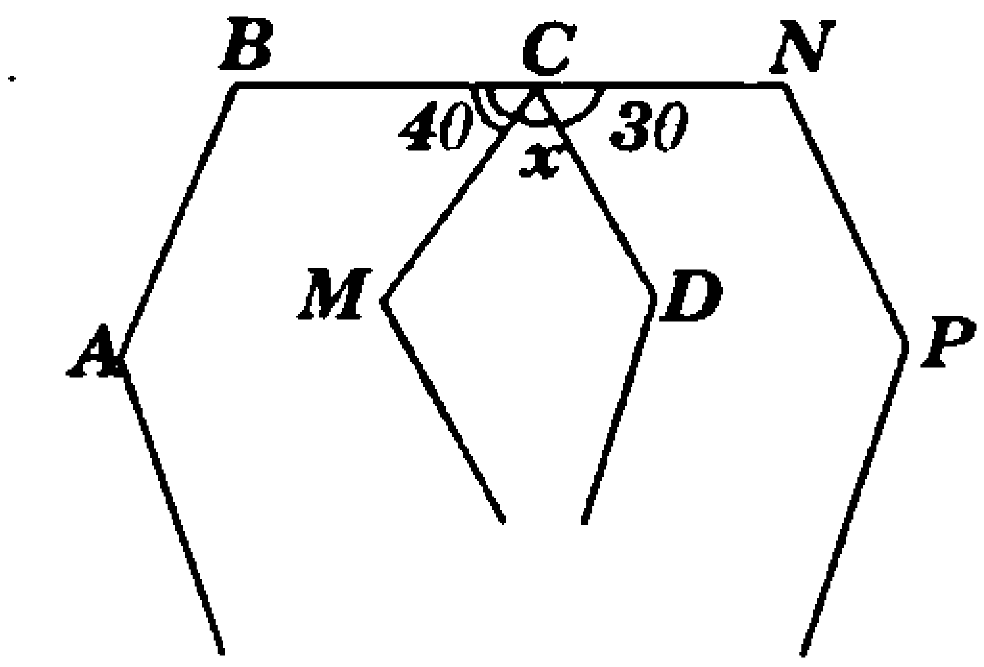
11 Un ángulo externo de un polígono regular mide *1°7 '30''*. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

A)300 B)310 C)315 D)317 E)320

12 Los ángulos externos de un polígono regular miden cada uno *1/ 5* del ángulo recto. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

A)5 B)8 C)10 D)12 E)20

13 Según el gráfico, calcular "*x*", si los polígonos *ABCD* ..... y *MCNP* .... son equiángulos; además el número de lados del segundo es mínimo.



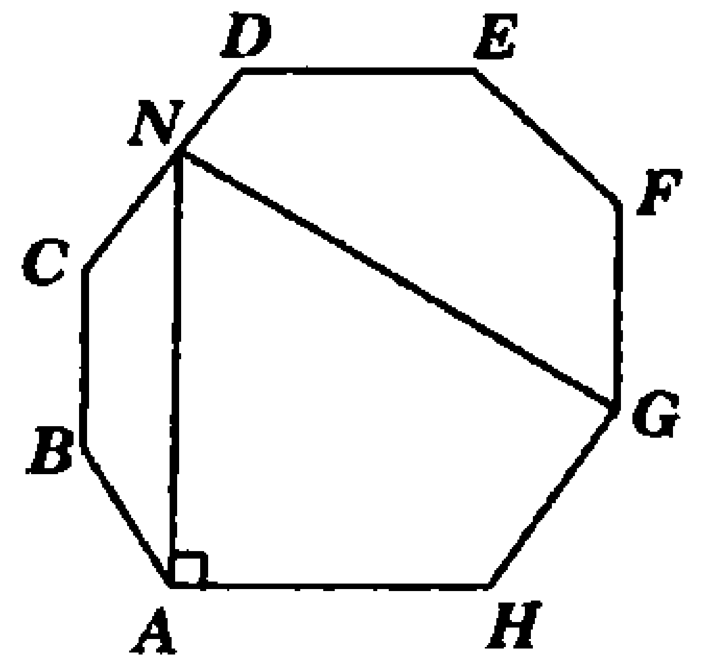
A)30 B)50 C)54 D)60 E)40

14 Se tiene un nonágono , en el cual las medidas de sus ángulos exteriores están en progresión aritmética. Si se cumple que el producto del número que representa la media del menor ángulo exterior y el valor de razón de dicha progresión es igual al número de diagonales medias del nonágono. Calcular la media del menor ángulo interior en dicho nonágono.

A)144° B)136° C)104°
D)80° E)120°

15 Del gráfico, calcular *NG*, si *ABCDEFGH* es un polígono equiángulo y además:
$DE=5$, $EF=4\sqrt{2}$, $HG=6\sqrt{2}$, $AH=4$ y $AB=2\sqrt{2}$.

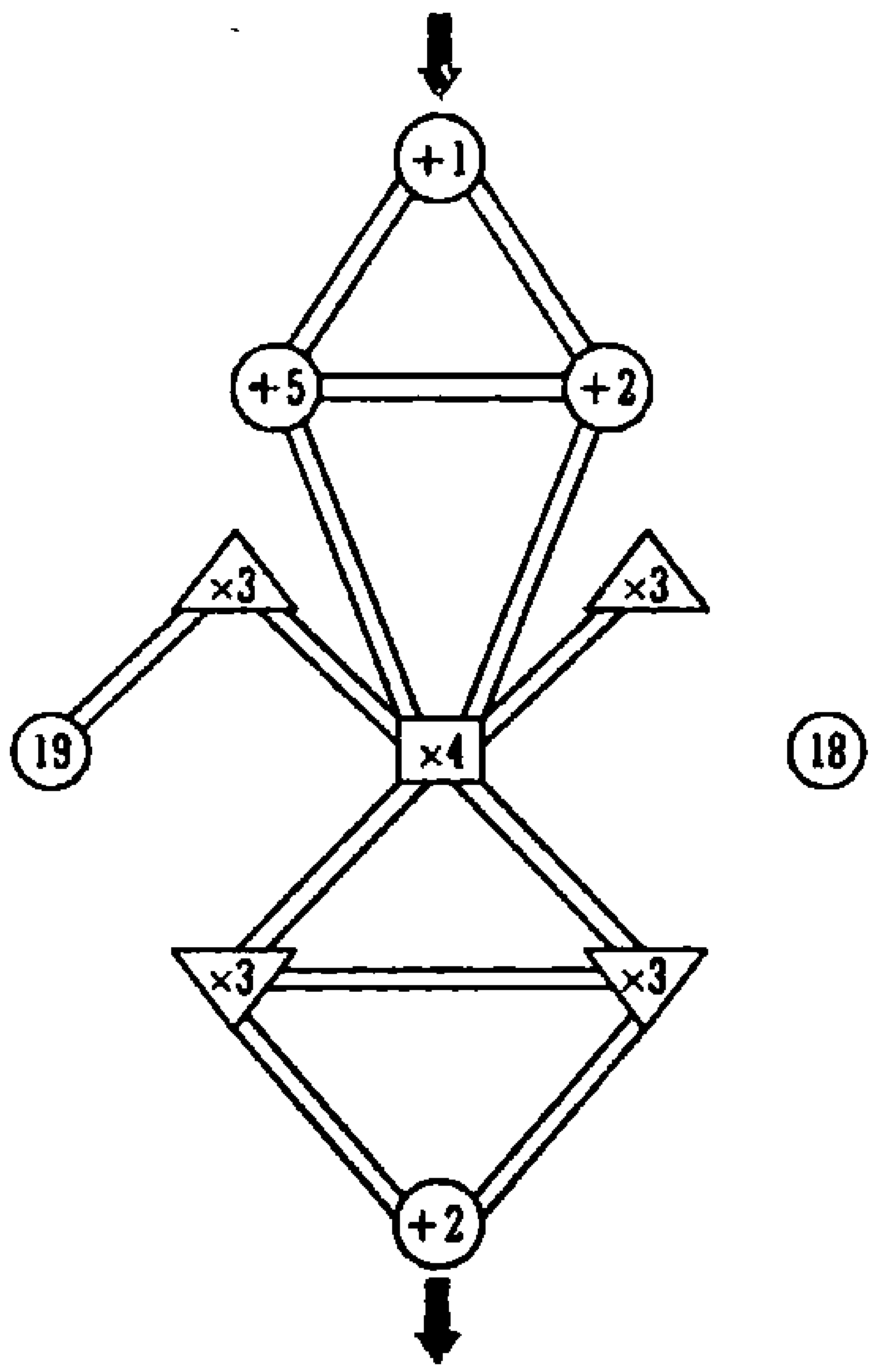
A)$2\sqrt{3}$
B)$2\sqrt{5}$
C)$5\sqrt{5}$
D)$6\sqrt{5}$
E)$6\sqrt{7}$



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)C	5)B	6)B	7)D	8)E	9)D	10)B
11)E	12)E	13)C	14)C	15)C					

RETO :

Aunque parezca inofensivo el sistema mostrado puede hacerle unir muchos puntos. Entre el círculo indicado por la flecha de la parte superior y pase de un número a otro aumentando puntos de acuerdo con las operaciones indicadas. Así podrá cruzar más de una vez por un mismo pero nunca por el mismo camino. Encuentre el mayor puntaje a obtener, como pistas le decimos que es mayor de *200 000.*



A) 373 122 B) 560 000
C)145 000 D) 431 240
E) 267 982

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Definir el cuadrilátero(trapezoides) y clasificar a los cuadriláteros convexos.*
* *Aplicar las propiedades adecuadas para la resolución de problemas con trapezoides.*
* *Conocer las propiedades de los trapecios.*
* *Aplicar las propiedades adecuadas para la resolución de problemas con trapecios.*

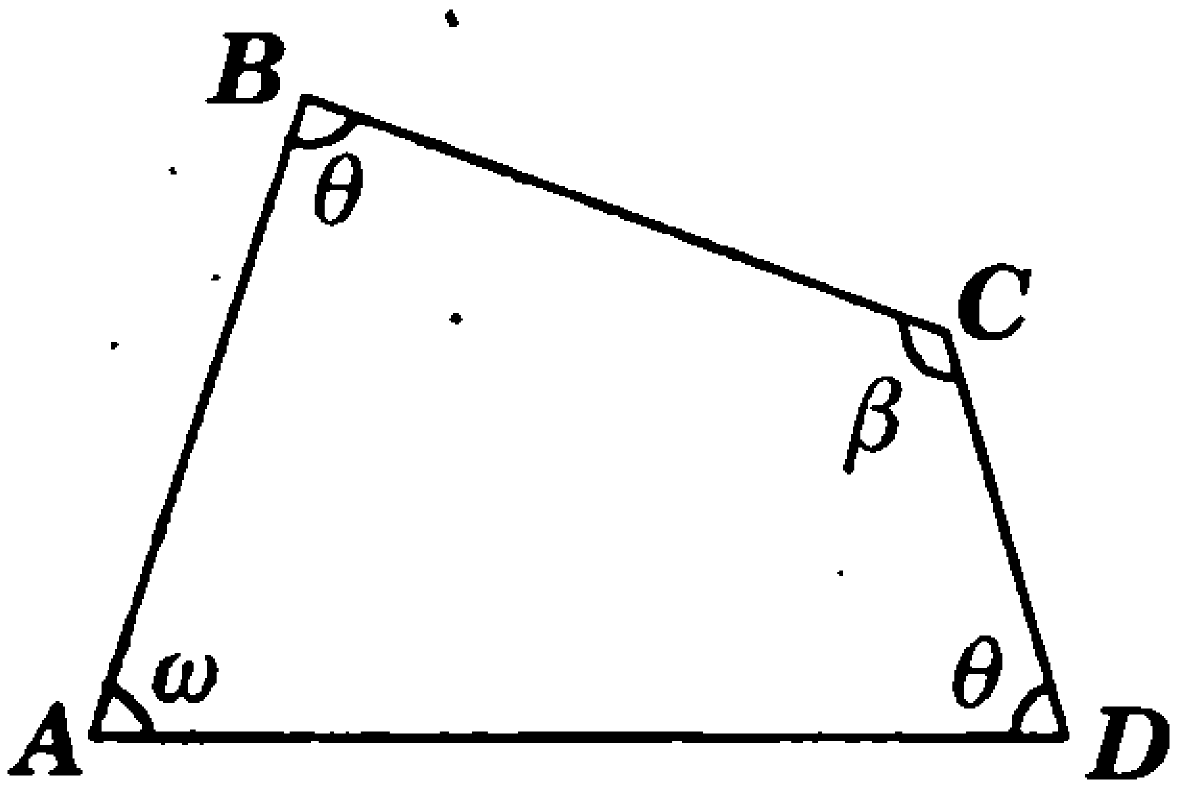
INTRODUCCION :

Generalmente en toda edificación la forma que más predomina es la de un ***cuadrilátero***, observa pisos, techos, fachadas de las viviendas, las formas de puertas y ventanas e incluso objetos de uso diario presentan esta forma como mesas, libros frazadas, etc. Recordemos que el surgimiento de la geometría en Egipto, nace de la necesidad de reponer los límites de las parcelas invadidas por las aguas del Nilo; y ¿de qué forma eran estas?, sin duda la mayoría de ellas eran y continúan siendo cuadriláteros.

CUADRILÁTERO

Es aquel polígono de cuatro lados . Los cuadriláteros pueden ser convexos o no convexos .

CUADRILÁTERO CONVEXO :



ELEMENTOS :

Vértices : ***A ; B ; C*** y ***D***

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; y $\overline{AD}$

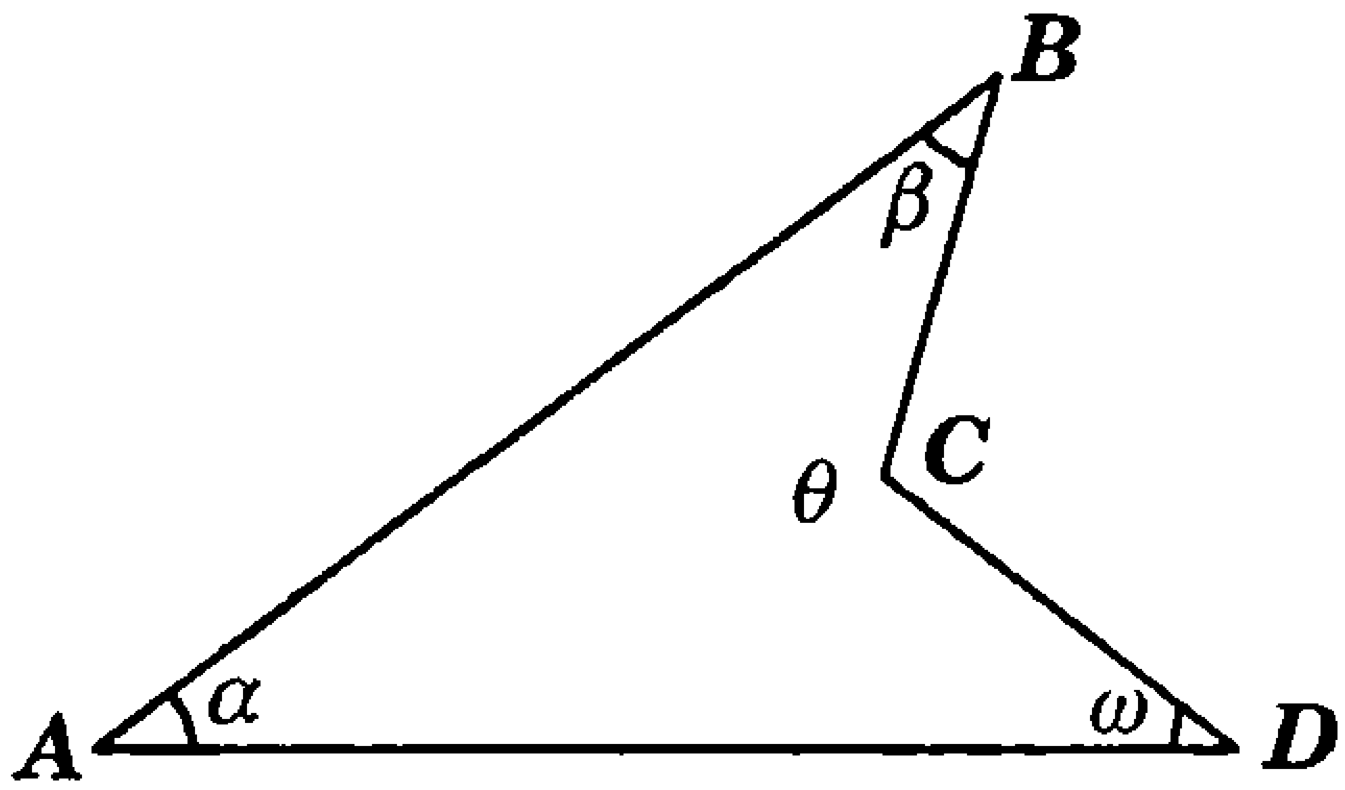
NOTACIÓN:

⏢***ABCD*** : se lee cuadrilátero de vértices ***A ; B ; C*** y ***D***.

PROPIEDAD :

$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$$

CUADRILÁTERO NO CONVEXO (CÓNCAVO):



ELEMENTOS :

Vértices : ***A ; B ; C*** y ***D***

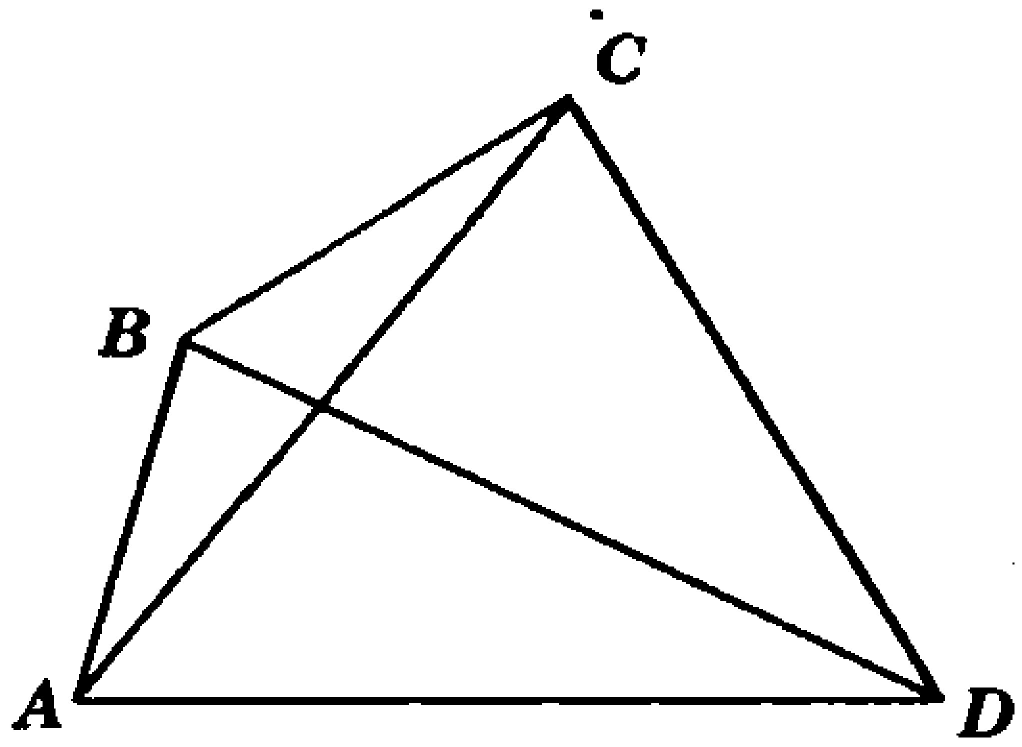
Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$

◿ ***ABCD*** : se lee cuadrilátero no convexo de vértices ***A ; B ; C*** y ***D***.

Propiedad : $\alpha + \beta + \theta + \omega = 360°$

Diagonal :

Es el segmento que tiene por extremos dos vértices opuestos .



Para el ⏢***ABCD*** : $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales .

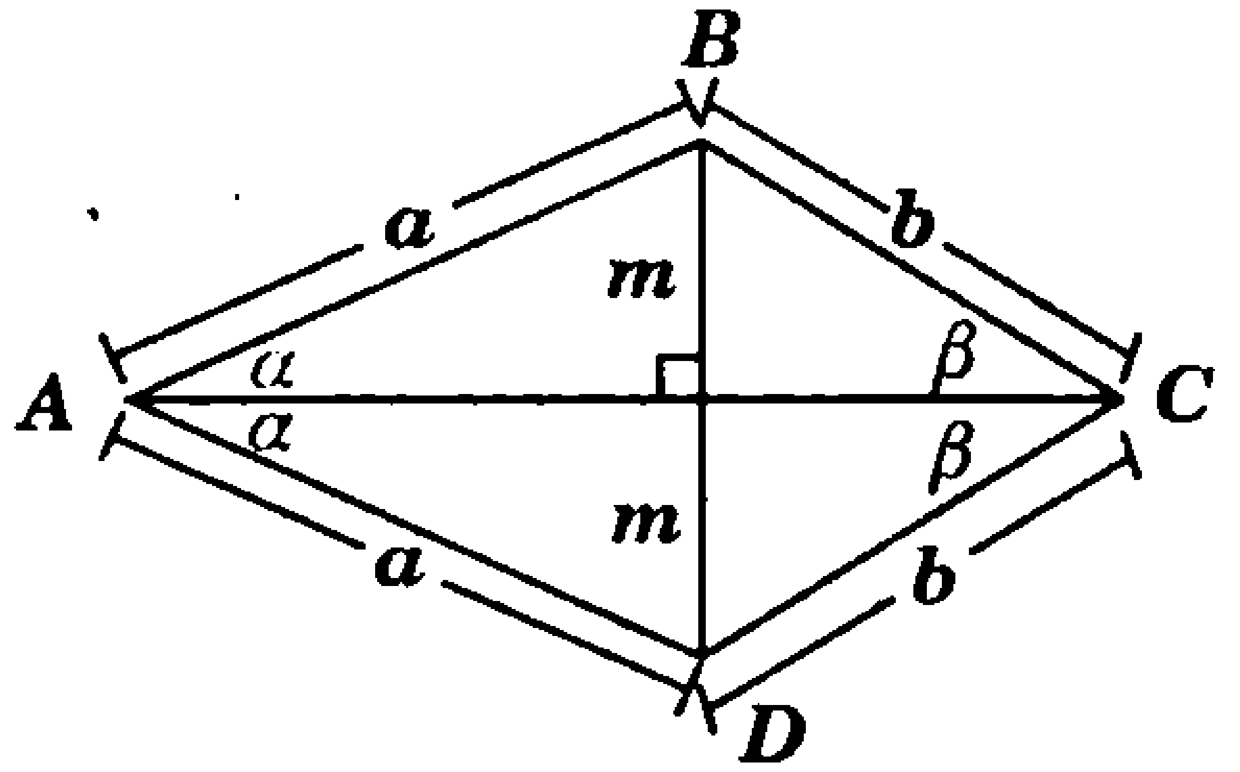
CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Los cuadriláteros convexos se clasifican según el paralelismo de sus lados opuestos , en :

A) TRAPEZOIDE :

Es aquel cuadrilátero convexo que no presenta lados opuestos paralelos .

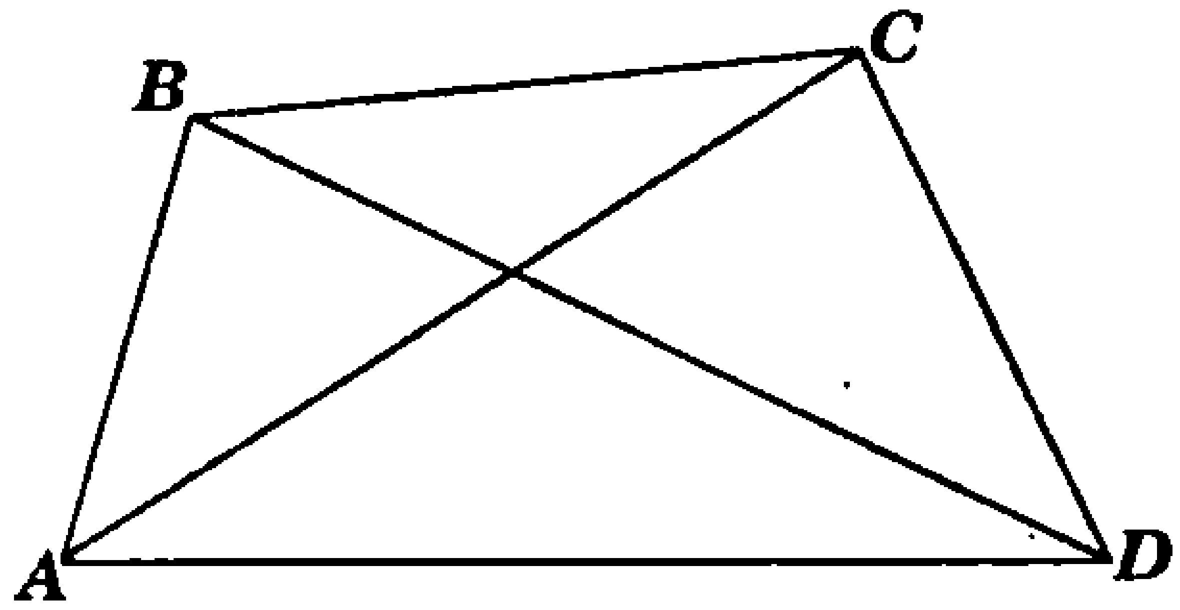
Un trapezoide puede ser simétrico (trapezoide donde una de las diagonales es parte de la mediatriz de la otra diagonal) o asimétrico (trapezoide que no cumple la condición del trapezoide simétrico).



En la figura , ⏢ *ABCD*: trapezoide simétrico.

Entonces : $\overline{AC}$ es parte de la mediatriz de $\overline{BD}$.

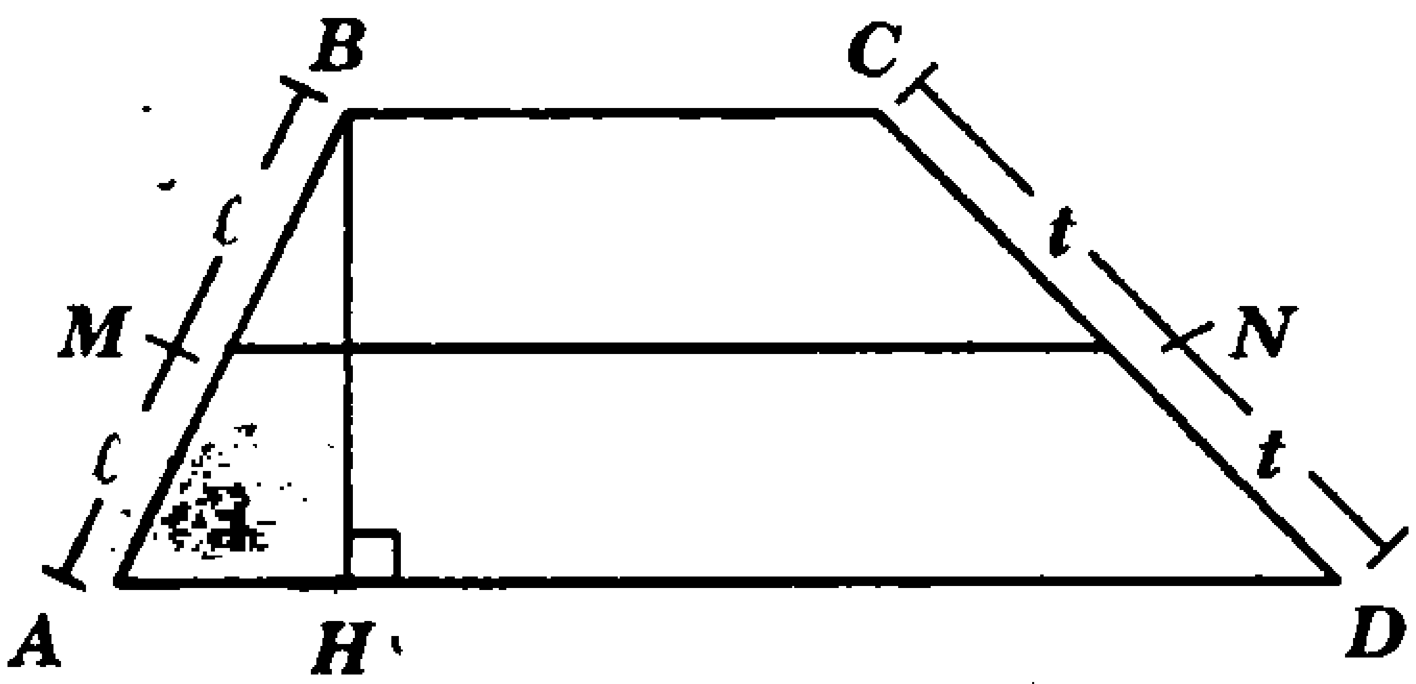
También se cumple que *AC* es eje de simetría del trapezoide . (recomendación, revisar tema de simetría).



En la figura , ⏢ *ABCD* : trapezoide asimétrico.

B) TRAPECIO :

Es aquel cuadrilátero convexo que sólo tiene un par de lados opuestos paralelos .



En la figura , si *BC//AD* , entonces ⏢ *ABCD* es trapecio

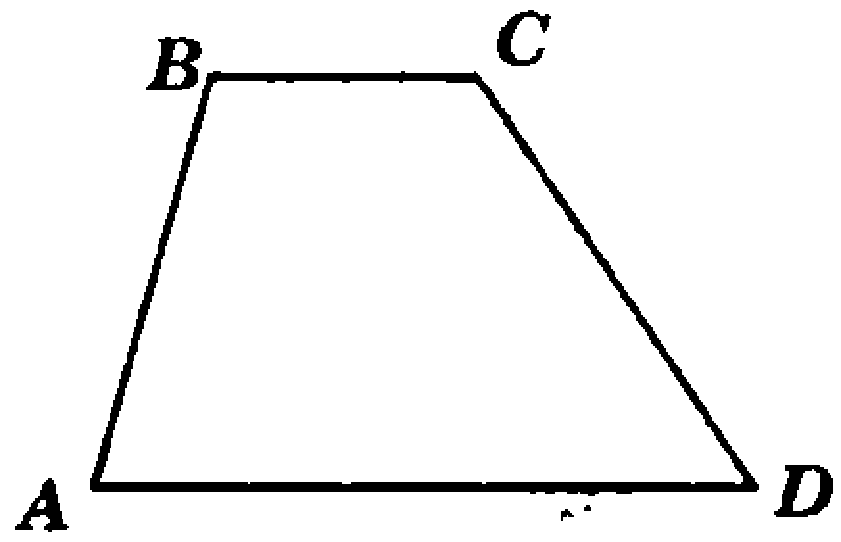
- ***Bases :*** $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.
- ***Laterales :*** $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.
- ***Altura :*** $\overline{BH}$
- ***Base media :*** $\overline{MN}$

CLASIFICACIÓN DE TRAPECIOS

Los trapecios se clasifican de acuerdo a la longitud de sus lados laterales en :

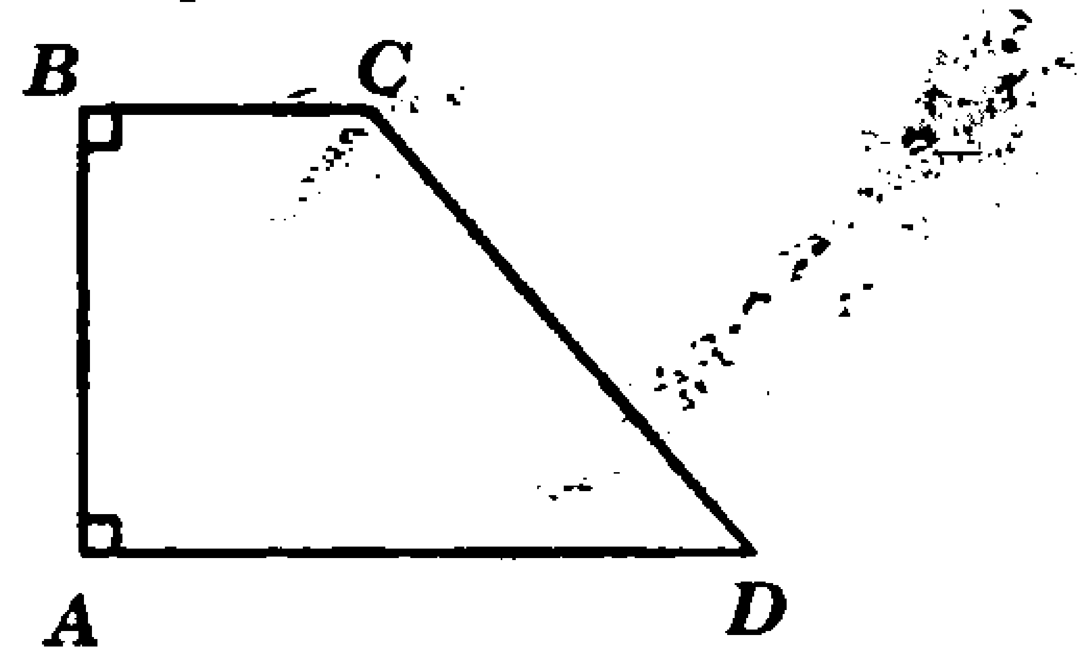
TRAPECIO ESCALENO :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales tiene diferente longitud.



En la figura , si : *BC//AD* y *AB* ≠ *CD*

⇒ ⏢ *ABCD* : trapecio escaleno



En la figura :

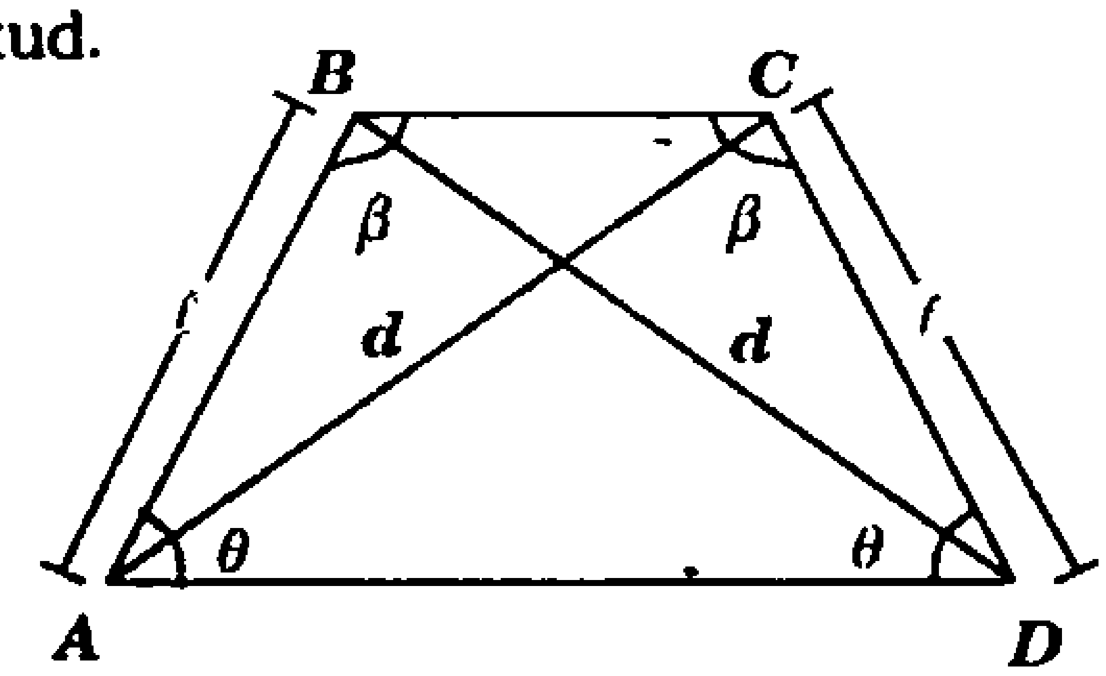
$$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BAD = 90°$$

⇒ ⏢ *ABCD* : trapecio rectángulo

Recto en *A* y *B*. También es un trapecio escaleno.

TRAPECIO ISÓSCELES :

Es aquel trapecio cuyos lados laterales son de igual longitud.



En la figura, si : $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y *AB=CD*

ABCD : trapecio isósceles

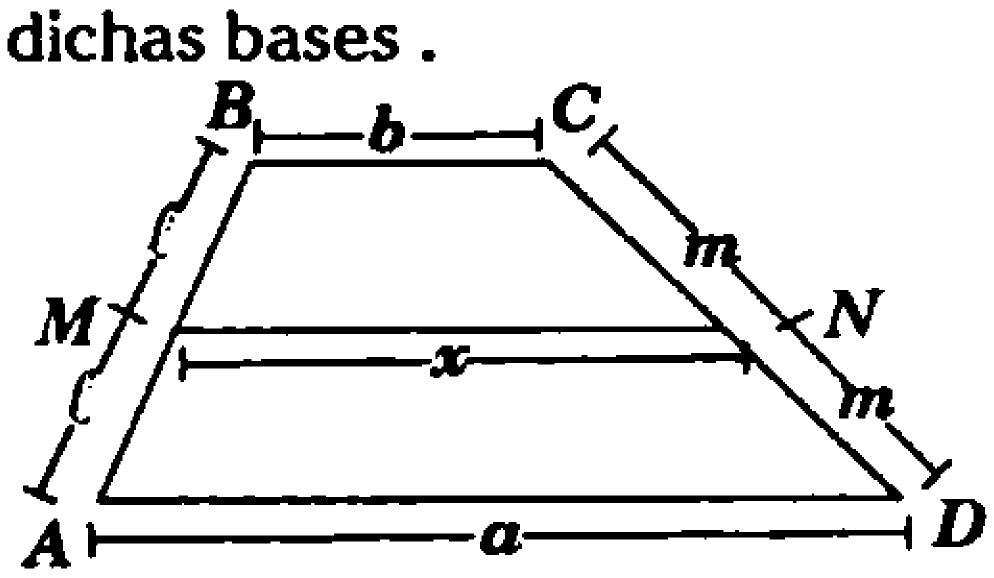
PROPIEDADES :

$$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle CDA \text{ y } AC = BC$$

PROPIEDADES EN TRAPECIOS

• ***TEOREMA 1 :***

En todo trapecio , la base media es paralela a sus bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de dichas bases .

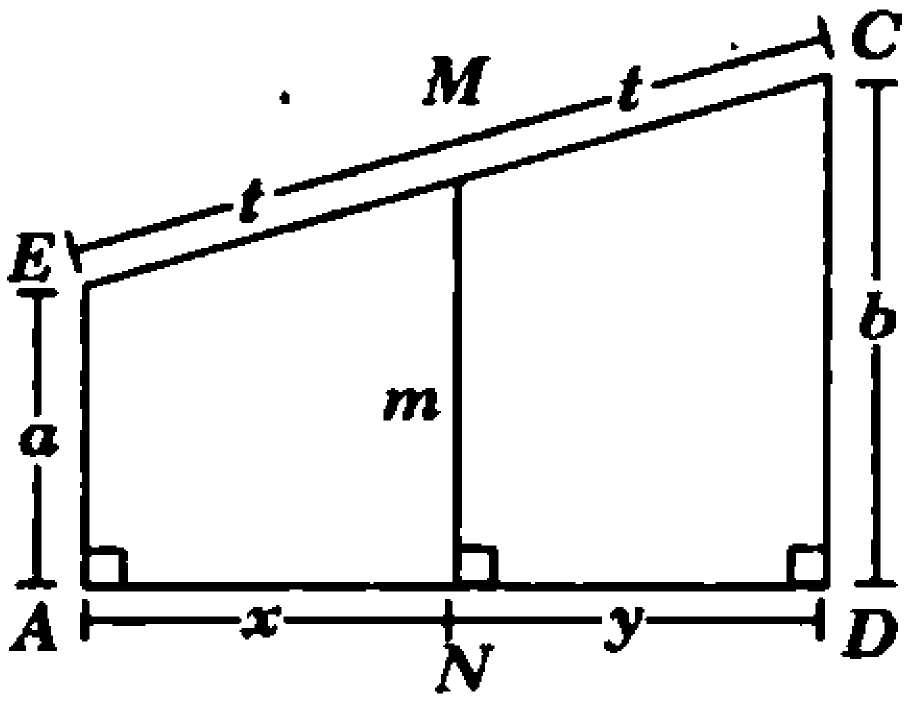


En la figura , $\overline{MN}$ es la base media del trapecio $ABCD$.

Se cumple que :

$$MN \parallel BC \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

OBSERVACIÓN :



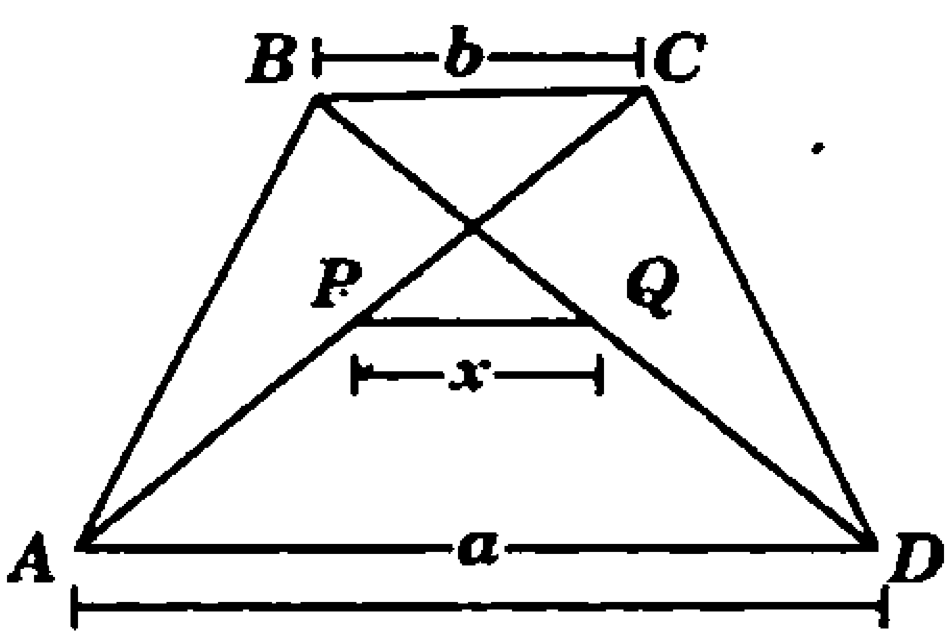
En la figura, $\triangle ABCD$: trapecio rectángulo

Si : M es punto medio de $\overline{BC}$ y $\overline{MN} \perp \overline{AD}$.

Se cumple: $x = y \Rightarrow \boxed{m = \frac{a+b}{2}}$

• TEOREMA 2 :

En todo trapecio el segmento que une los puntos medios de sus diagonales es paralelo a sus bases y su longitud es igual a la semidiferencia de las longitudes de dichas bases .



En la figura, P y Q son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente

Se cumple :

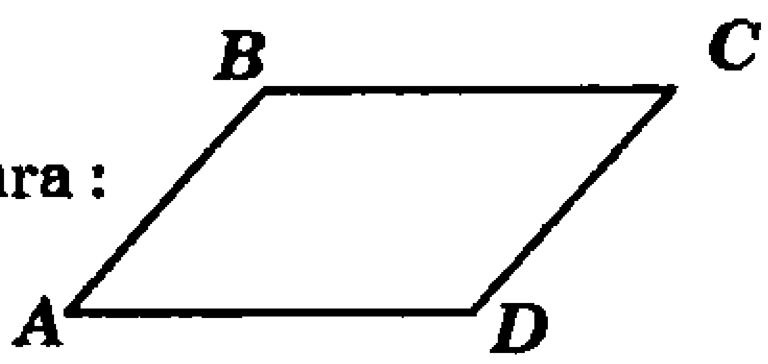
$$PQ \parallel BC \Rightarrow \boxed{x = \frac{a-b}{2}}$$

C) PARALELOGRAMO :

Es aquel cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos .

Es decir :

En la figura :



$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \wedge \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\Rightarrow \square ABCD$ es un paralelogramo.

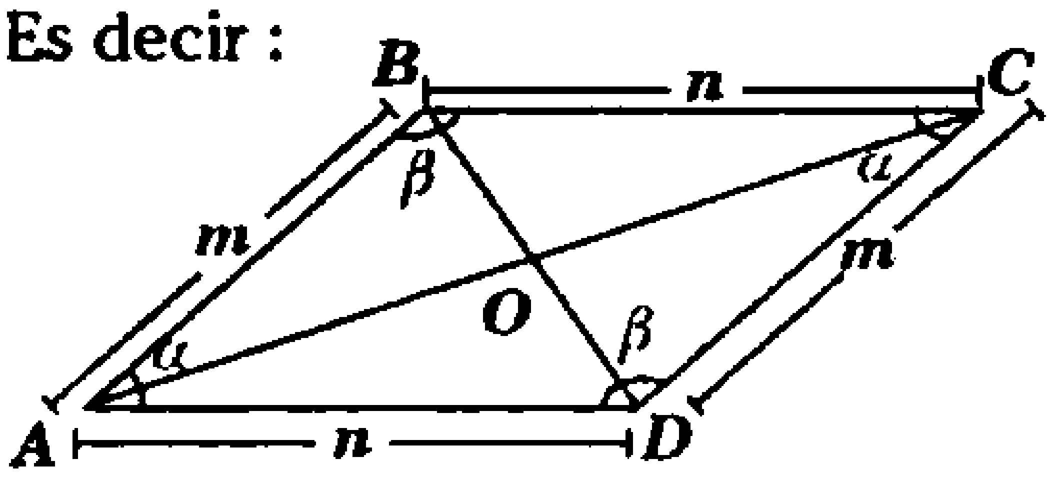
PROPIEDADES :

1) Los lados opuestos en un paralelogramo son de la misma longitud .

2) Los ángulos internos opuestos son de igual medida.

3) Las diagonales se intersecan en su punto medio.

Es decir :



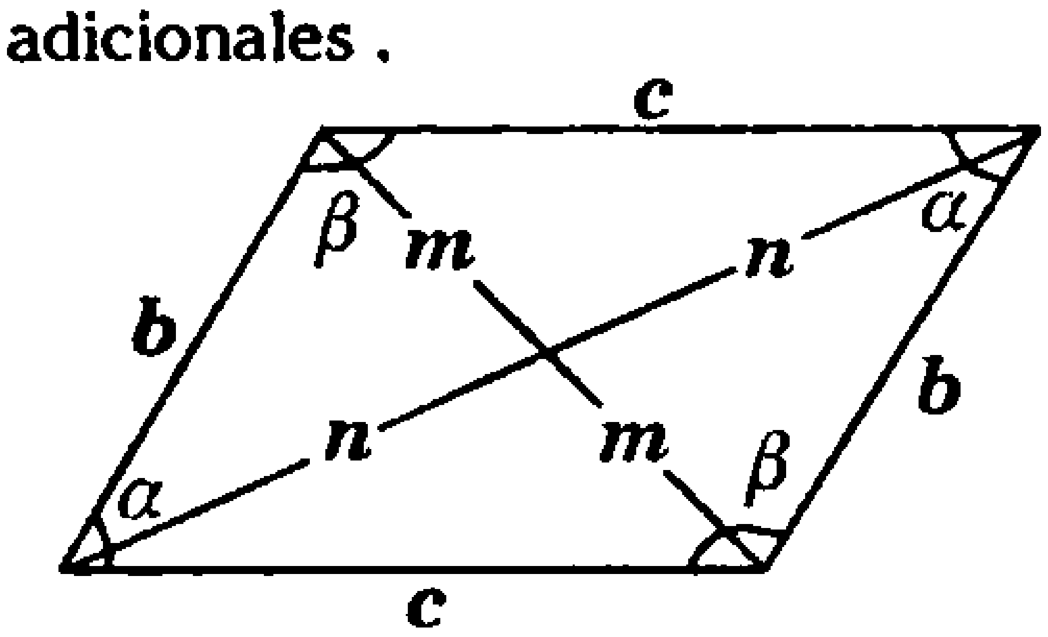
En la figura $\square$ $ABCD$ es paralelogramo.

$AB = CD$	$BC = AD$
$m\measuredangle BAD = M\measuredangle BCD$	
$m\measuredangle ABC = M\measuredangle ACD$	
$AO = OC$	$BO = CD$

CLASIFICACIÓN DE LOS PARALELOGRAMOS

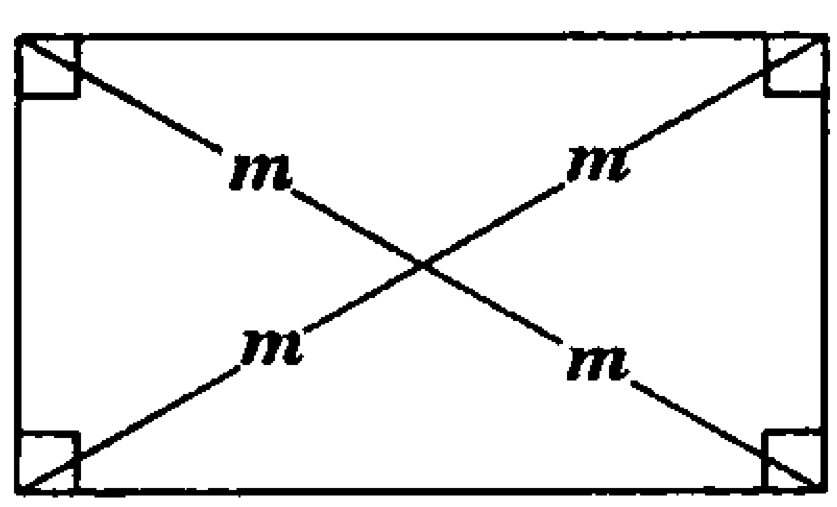
A) ROMBOIDE :

Es el paralelogramo propiamente dicho . No tiene propiedades adicionales .



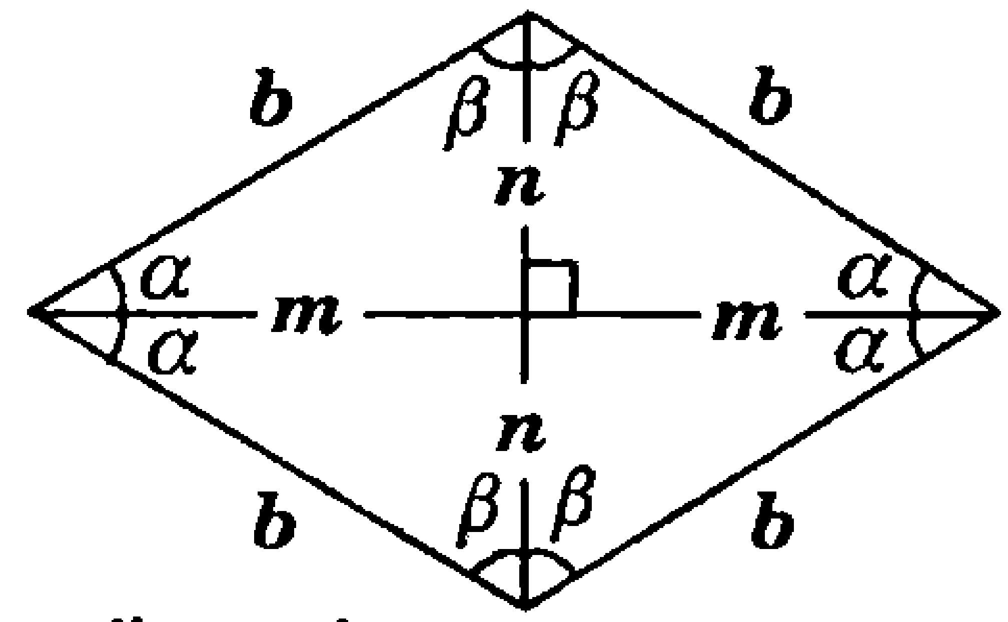
B) RECTÁNGULO :

Es el cuadrilátero cuyos ángulos interiores tienen medidas iguales (cuadrilátero equiángulo)
Sus diagonales tienen longitudes iguales.



C) ROMBO :

Es el cuadrilátero cuyos lados tienen longitudes iguales (cuadrilátero equilátero).

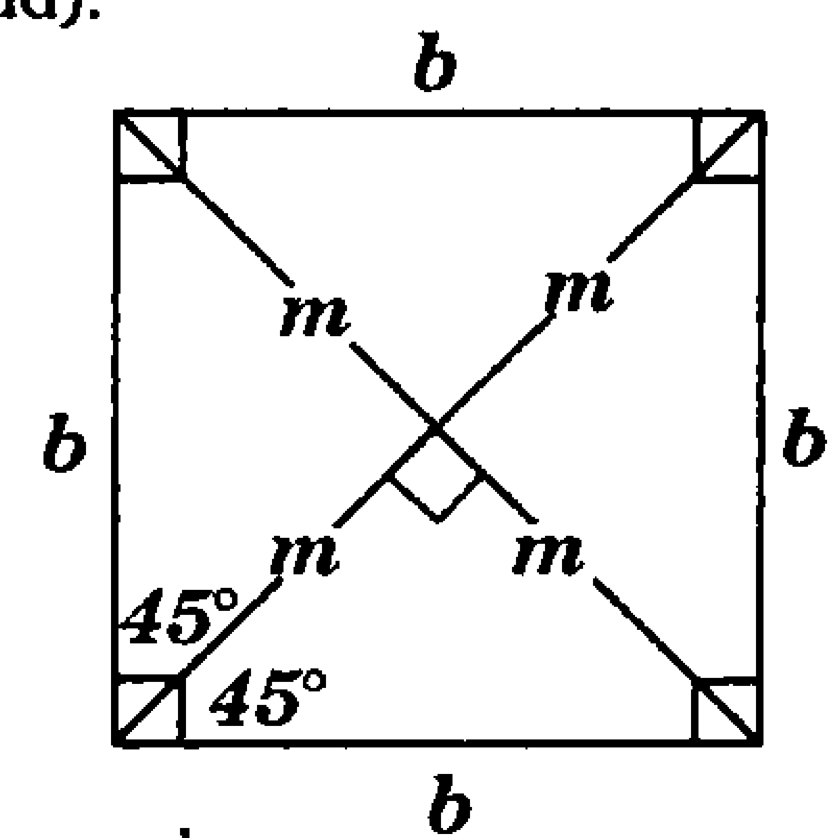


Sus diagonales :

* Son perpendiculares .
* Bisecan a sus ángulos internos .
* Tienen longitudes diferentes ,

D) CUADRADO :

Es el cuadrilátero regular (ángulos de igual medida y lados de igual longitud).

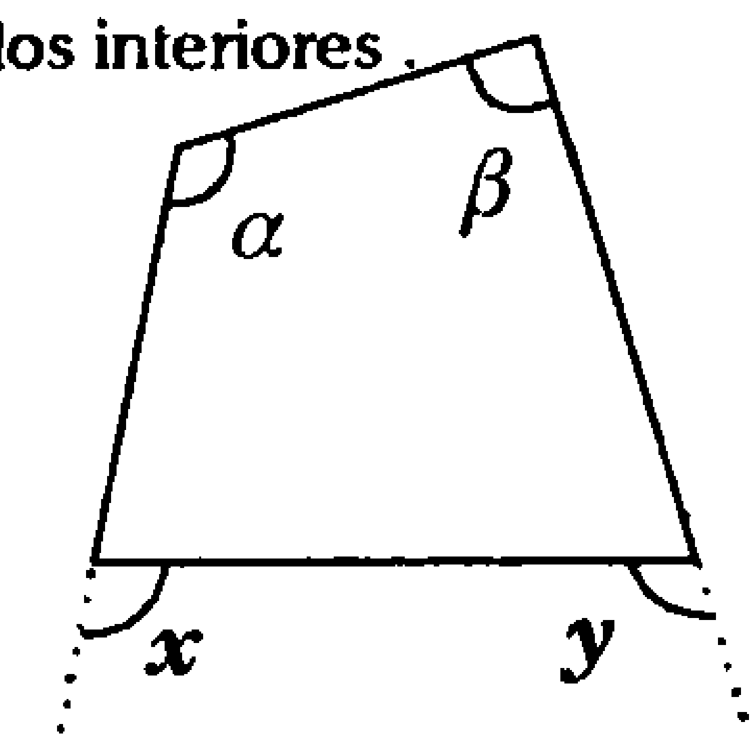


Sus diagonales :

* Tienen igual longitud
* Bisecan a sus ángulos internos
* Son perpendiculares .

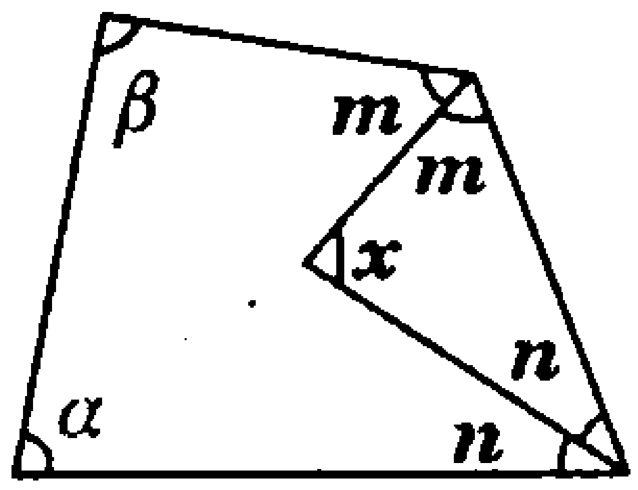
PROPIEDADES :

1) Para todo cuadrilátero : La suma de las medidas de dos ángulos exteriores es igual a la suma de las medidas de los otros ángulos interiores .



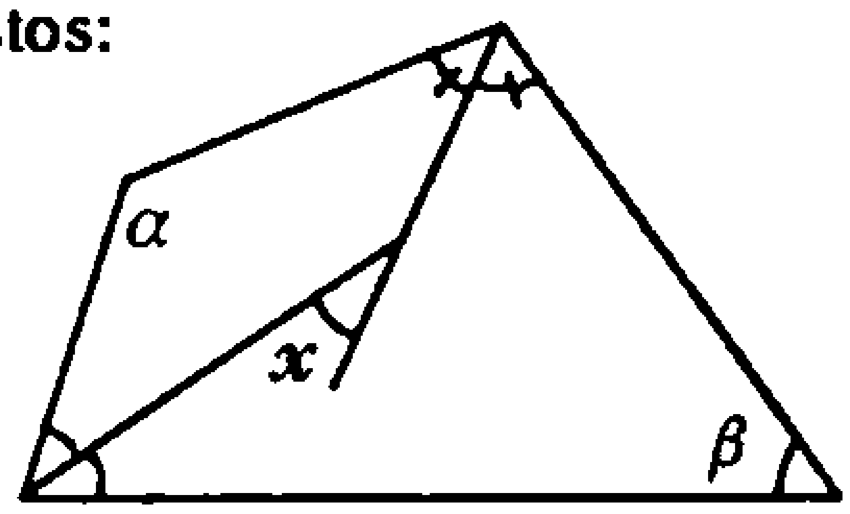
$$\boxed{\alpha + \beta = x + y}$$

2) Cálculos de la medida del ángulo que forman las bisectrices interiores de dos ángulos consecutivos.



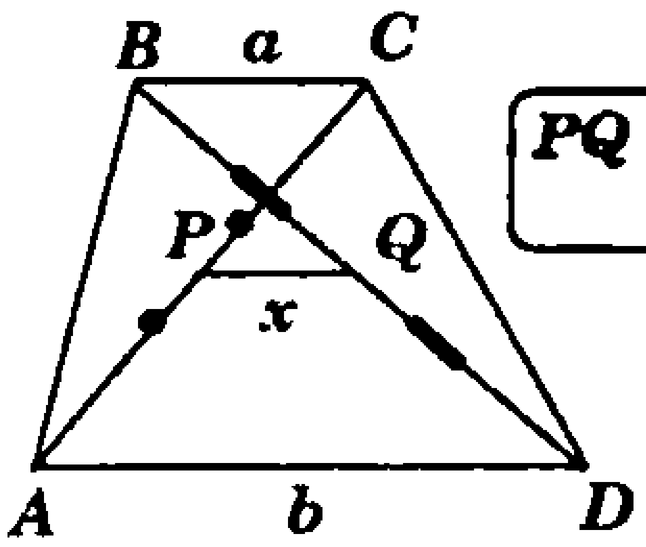
$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

3) Cálculo de la medida del menor ángulo que forman las bisectrices de dos ángulos opuestos:



$$x=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

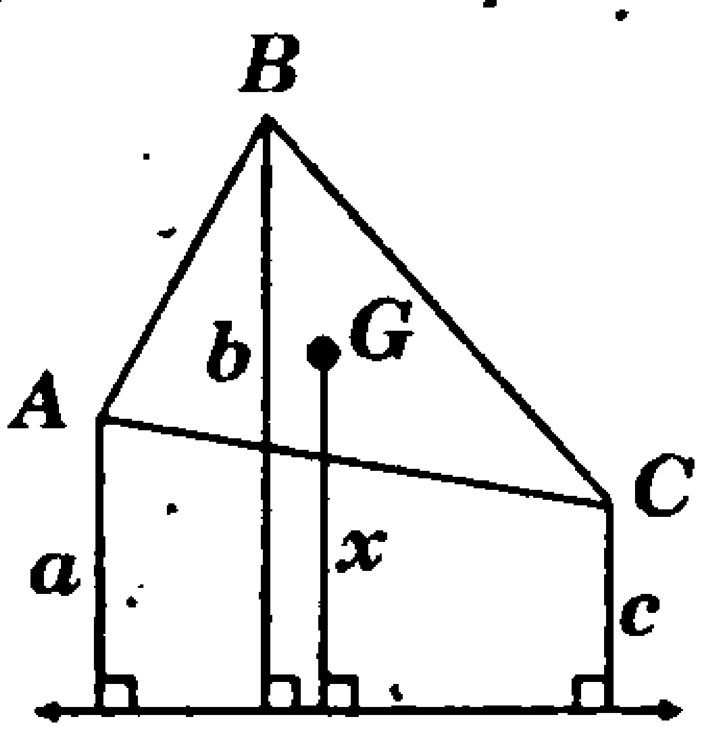
4) Si *"P" y "Q"* son puntos medios de las diagonales del trapecio *ABCD (BC//AD)*, entonces: *PQ*: mediana



$$PQ=\frac{AD-BC}{2}$$

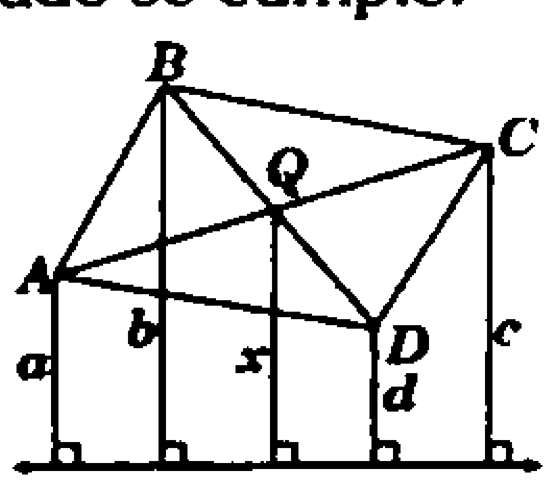
$$x=\frac{b-a}{2}$$

5) Si *"G"* es baricentro del triángulo *ABC* se cumple:



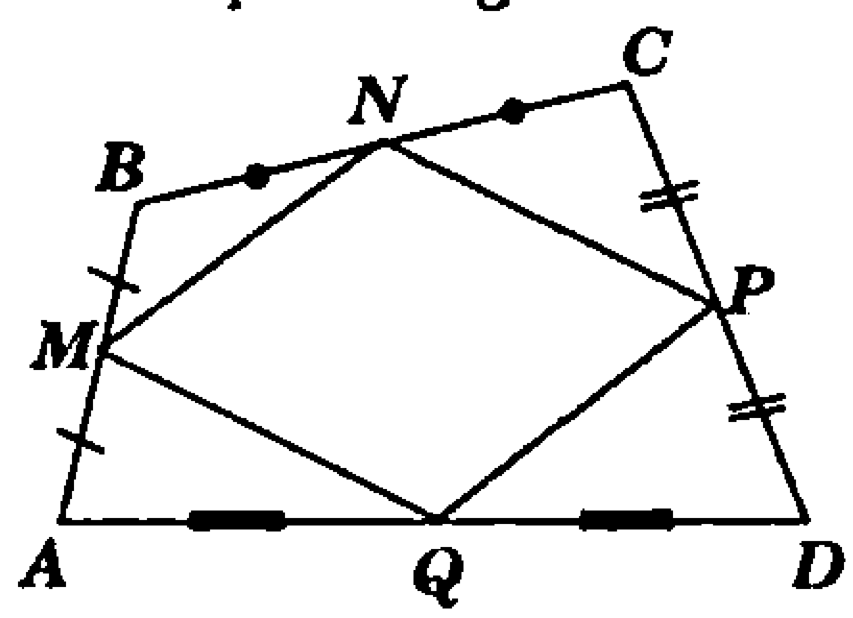
$$x=\frac{a+b+c}{3}$$

6) En el paralelogramo *ABCD* mostrado se cumple:



$$x=\frac{a+b+c+d}{4}$$

7) Al unir en forma consecutiva los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera se forma un paralelogramo .



* Si $AC=BD \Rightarrow$ Rombo

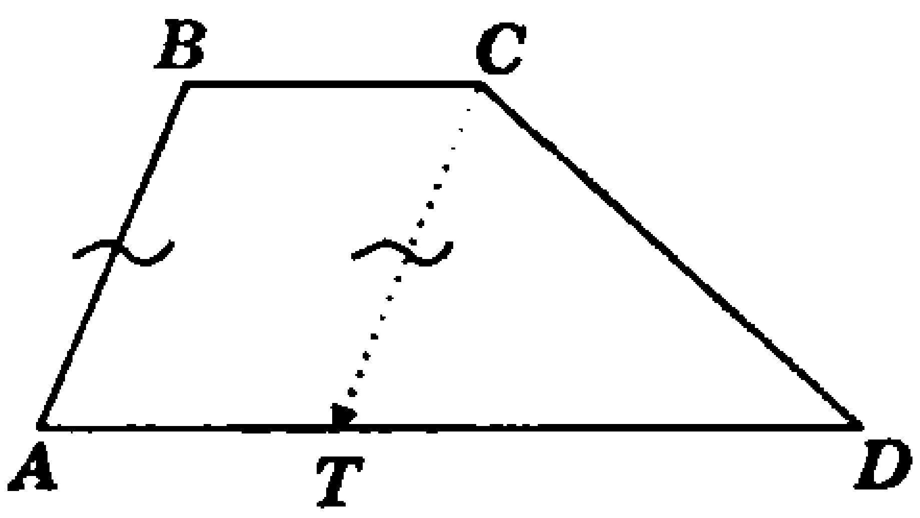
* Si $\overline{AC}\perp\overline{BD} \Rightarrow$ Rectángulo

*Si $AC=BD$ y $\overline{AC}\perp\overline{BD}\Rightarrow$Cuadrado

* ▭ *MNPQ* : Paralelogramo

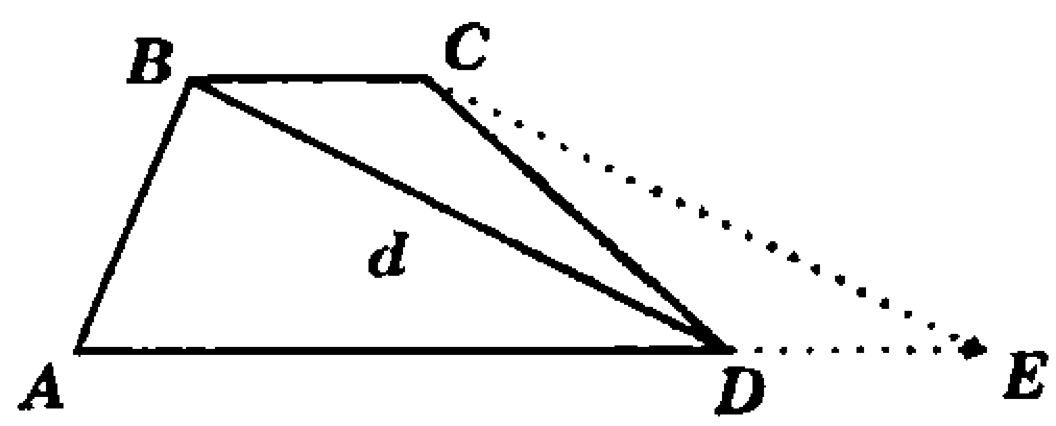
RECOMENDACIONES :

i) Si *BC//AD* se recomienda trazar $\overline{CT}\,//\,\overline{BA}$ para formar un paralelogramos *ABCT.*



▭*ABCT* : Paralelogramo

ii) El perímetro del cuadrilátero *MNPQ* es igual a: *AC+BD*, si $\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$. Si una diagonal es conocida se debe trazar *CE // BD*

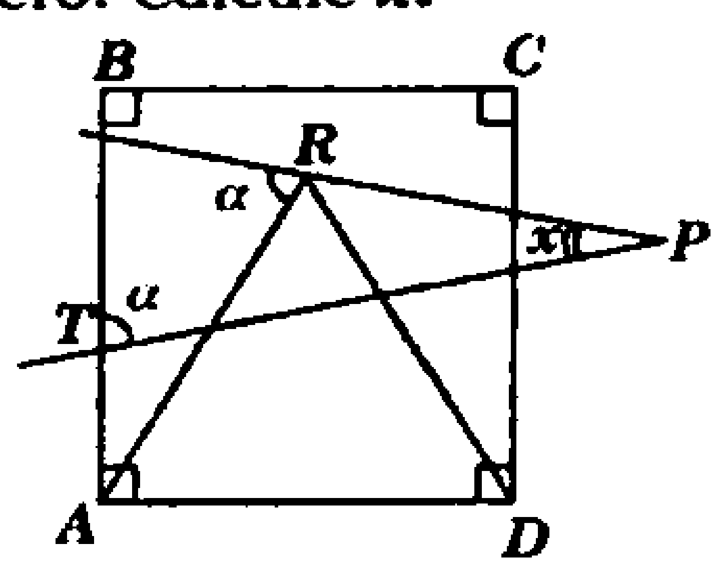


PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

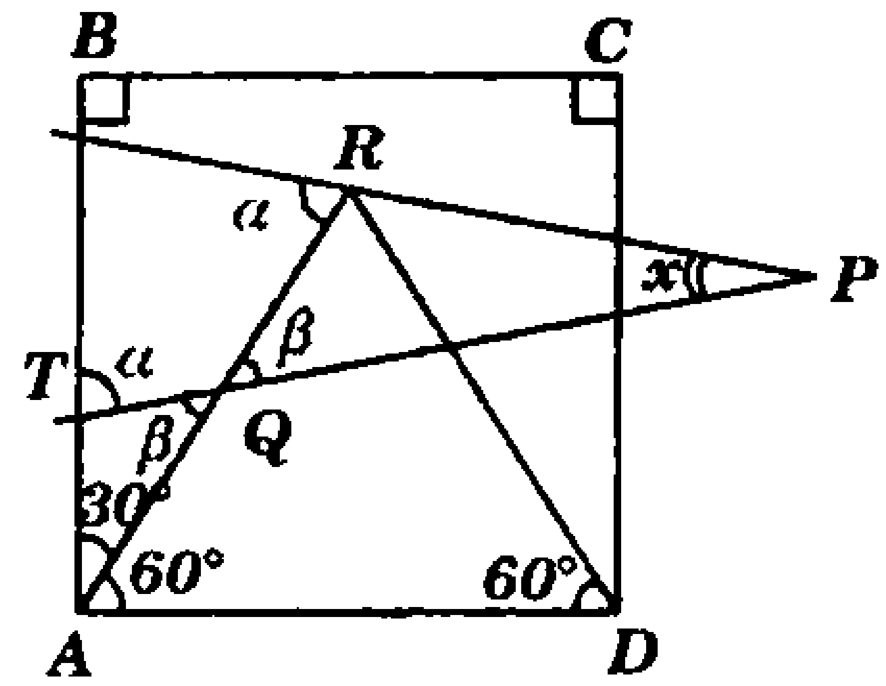
En la figura mostrada *ABCD* es un cuadrado y *ARD* es un triángulo equilátero. Calcule *x.*

A) 15°
B) 45°
C) 60°
D) 30°
E) 37°



RESOLUCIÓN :

Piden *x*



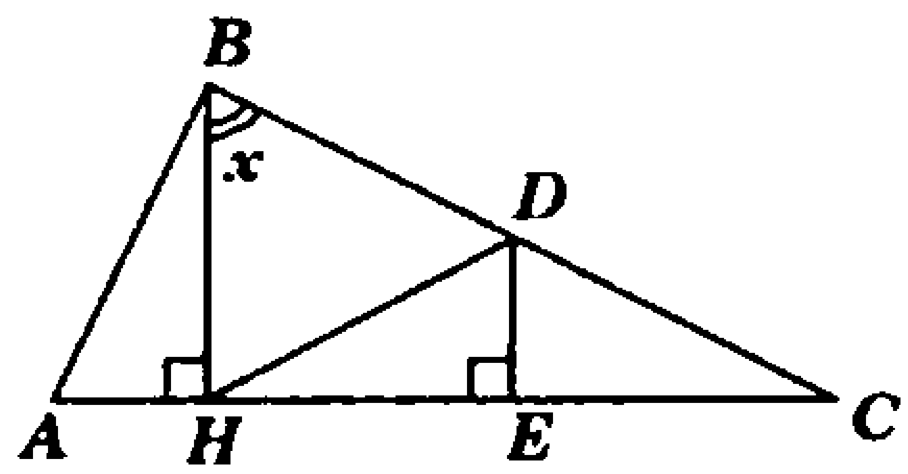
Por ángulo exterior :

$$ATQ:\ \alpha=30°+\beta$$
$$QRP:\ \alpha=x+\beta$$
$$0=30°-x$$
$$x=30°$$

RPTA:"D"

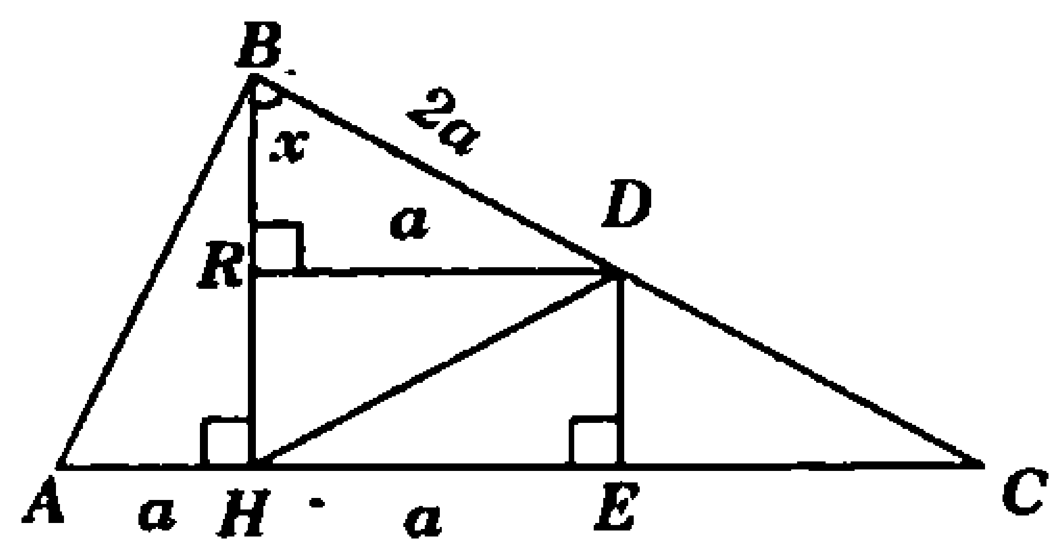
PROBLEMA 2 :

Según el gráfico , *BD=2AH = 2HE* , calcular *"x"*



A)45° B)30° C)37° D)60° E)53°

RESOLUCIÓN :



Trazamos

$DR\perp BH \Rightarrow DR=HE=a$

◺ *BRD* es notable *(60° y 30°)*

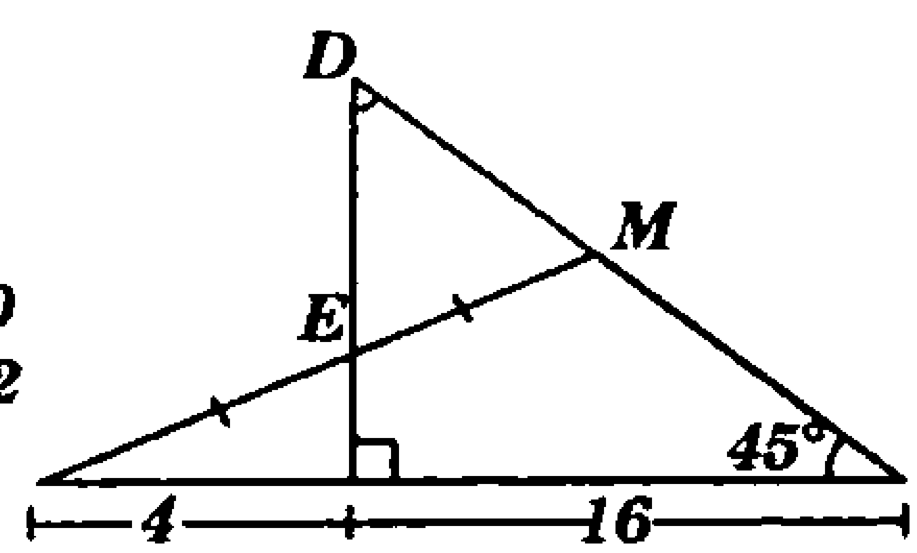
$$x=30°$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 3 :

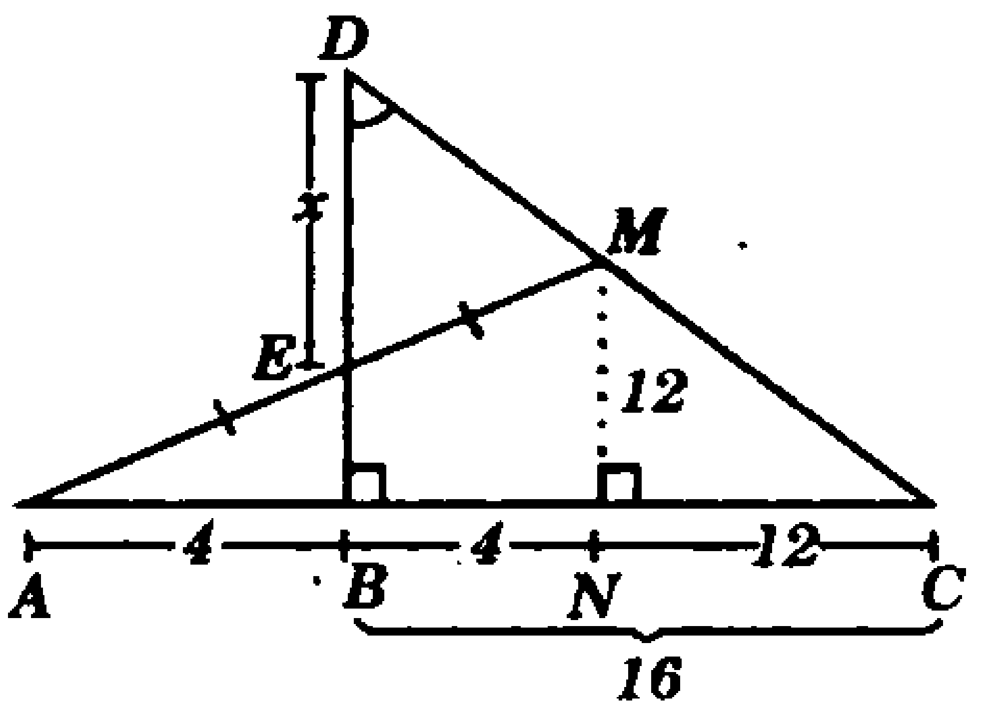
Del gráfico calcule *DE* , si *AE=EM*

A) 5
B)8
C)10
D)12
E) 9



RESOLUCIÓN :

Piden *x.*



* Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{AC}$,entonces $AB=BN=4$ y $NC=12$.

* Del dato de 45°, el triángulo DBC es isósceles : $BC=BD=16$

* Entonces $DMNC$ también debe ser isósceles: $MN=12$

* Por el Teorema de la Base Media

$$BE=\frac{MN}{2}=6$$

$\Rightarrow x=BD-BE=16-6=10$

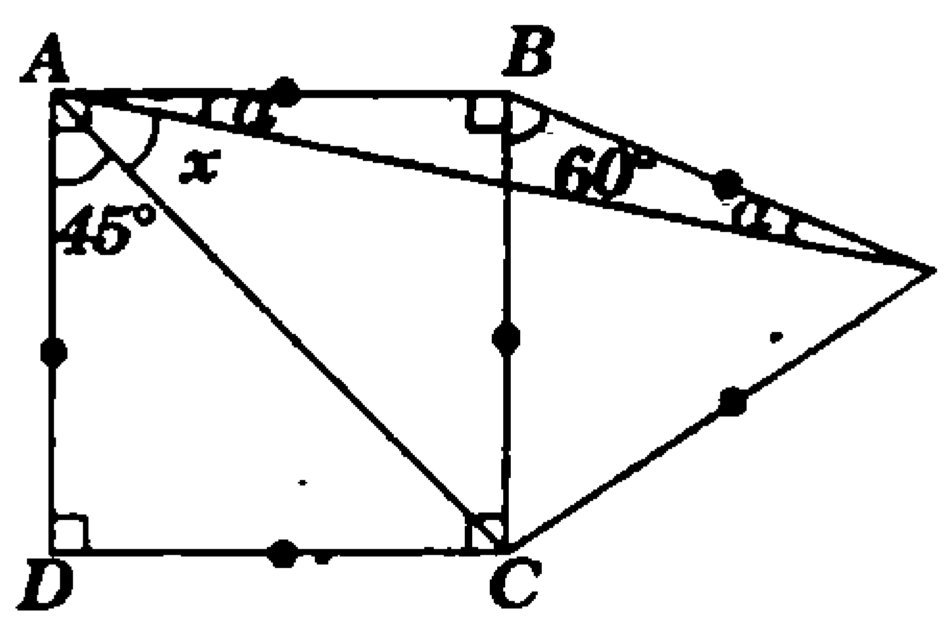
RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Se tiene un cuadrado $ABCD$ y se construye un triángulo equilátero BCP, calcular el ángulo PAC.

A)15° B)20° C)24° D)30° E)36°

RESOLUCIÓN:



* Se puede apreciar que :

$\alpha+90°+60°+\alpha=180° \Rightarrow \alpha=15°$

* Ahora : $\Rightarrow 45°+x+\alpha=90°$

$\Rightarrow 45°+x+15°=90°$

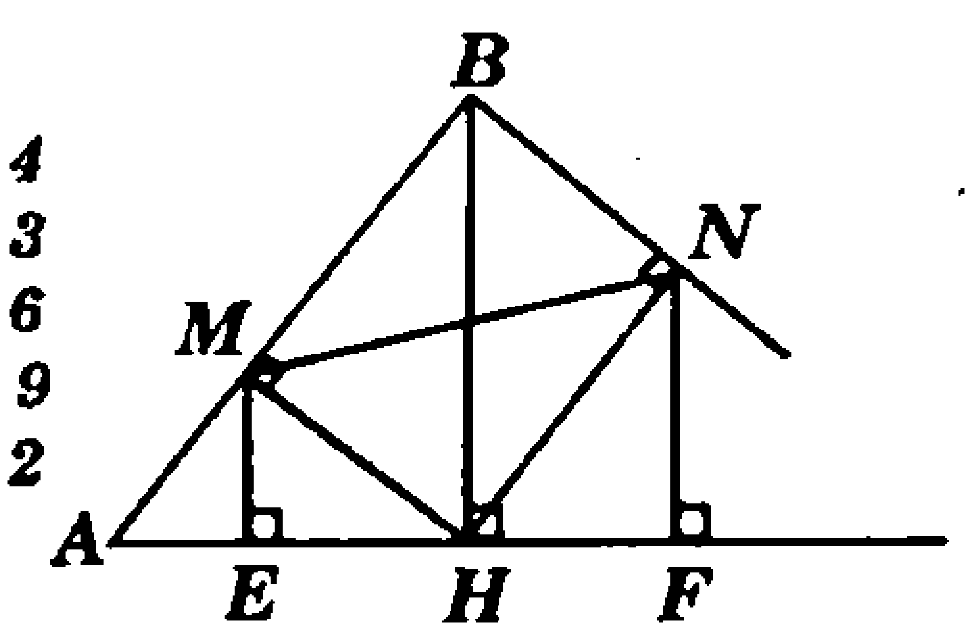
$\Rightarrow x=30°$

RPTA : "D"

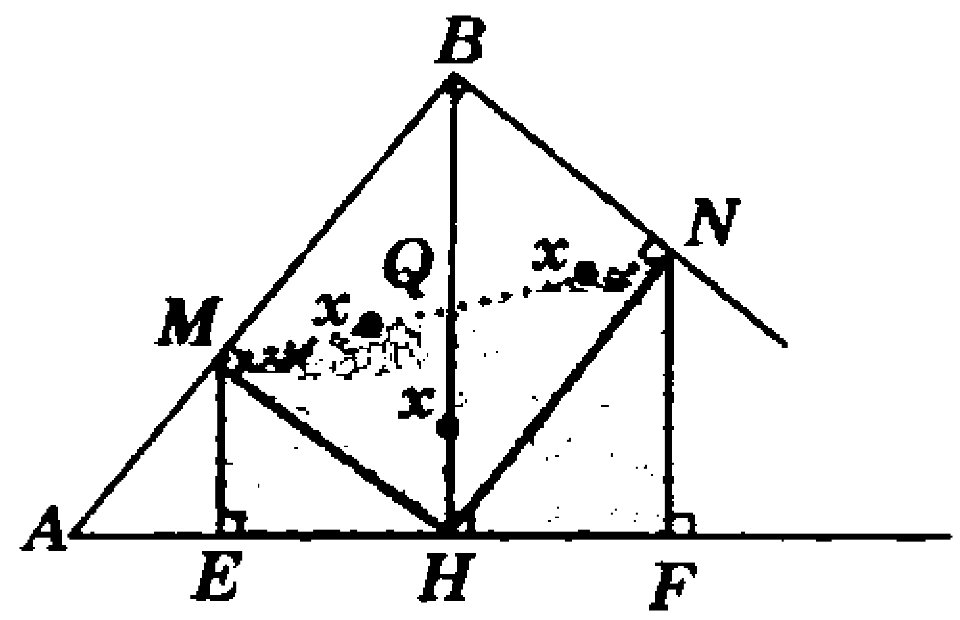
PROBLEMA 5 :

Si $ME+NF=12$. Calcular MN.

A) 4
B) 3
C) 6
D) 9
E) 2



RESOLUCIÓN :



* Dato: $ME+NF=12$

* Se pide: MN

* En el rectángulo $MBNH$:

$$MQ=QN=x$$

* En el trapecio rectángulo $MNFE$: QH es mediana , entonces por propiedad de la base media :

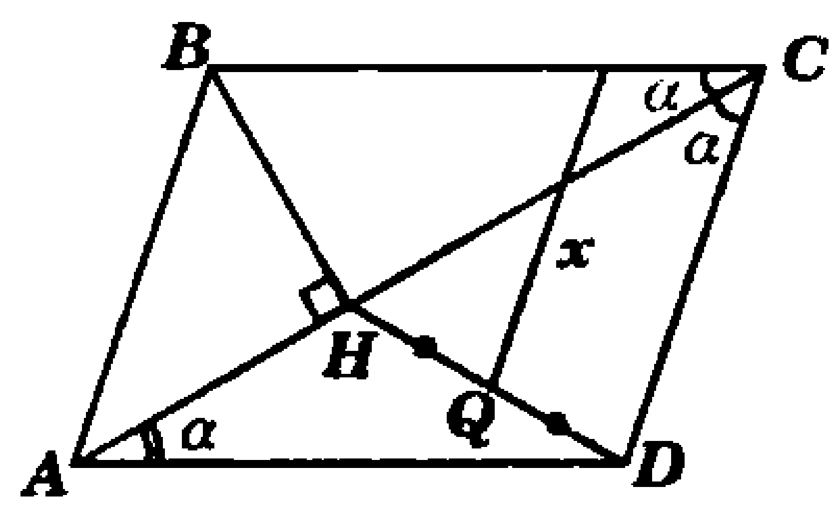
$$x=\frac{ME+NH}{2}=\frac{12}{2}=6$$

RPTA : "C"

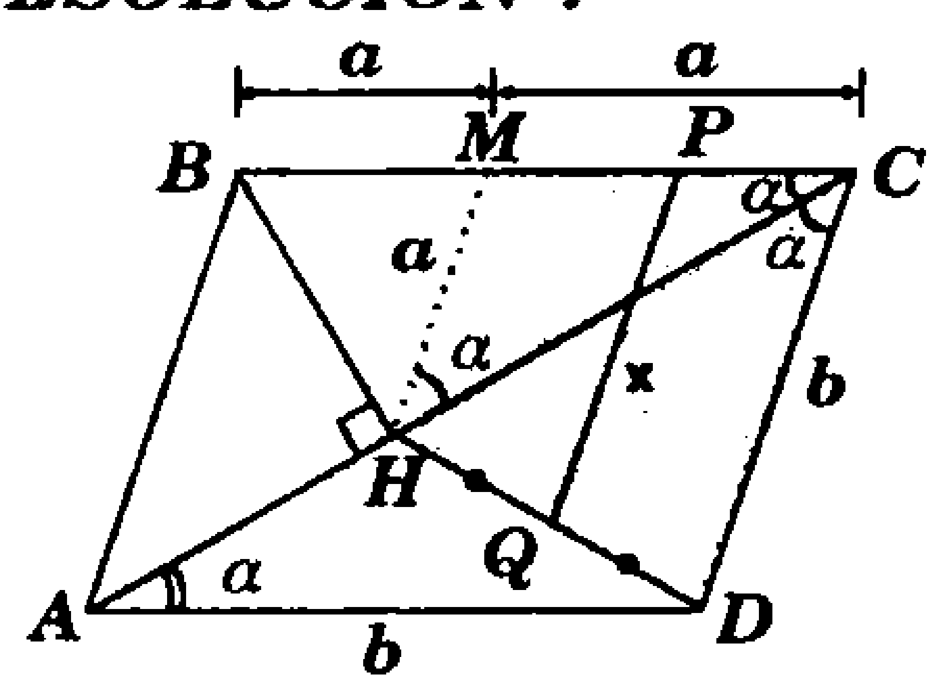
PROBLEMA 6 :

En la figura , calcular PQ, si $HQ=QD$, $\overline{PQ}\,//\,\overline{CD}$ y $BC+2AD=32$

A) 2
B) 4
C) 8
D) 6
E) 5



RESOLUCIÓN :



* Por dato : $2a+2b=32$

$$a+b=16$$

* Se traza $\overline{MH}\,//\,\overline{CD}$, entonces :

$$MH=BM=MC=a$$

* En el trapecio $HMCD$ (Por base media):

$$x=\frac{a+b}{2}\Rightarrow x=\frac{16}{2}=8$$

RPTA: "C"

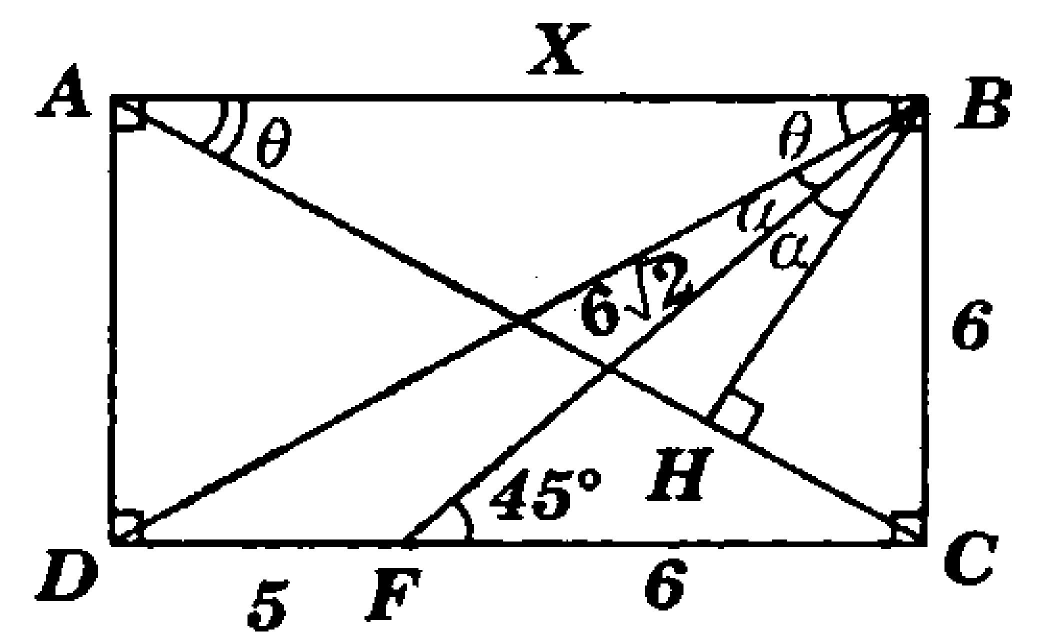
PROBLEMA 7 :

En el rectángulo $ABCD$ se traza $BH \perp AC$. La bisectriz del ángulo DBH intersecta en F a $\overline{CD}$.

Si $BF=6\sqrt{2}$ y $DF=5$. Calcular AB.

A)7 B)9 C)10 D)11 E)13

RESOLUCIÓN :



* En el ⊿ ABH: $2\alpha+2\theta=90°$

$$\alpha+\theta=45°$$

* Luego el ⊿ FBC es isósceles , entonces : $FC=BC=6$

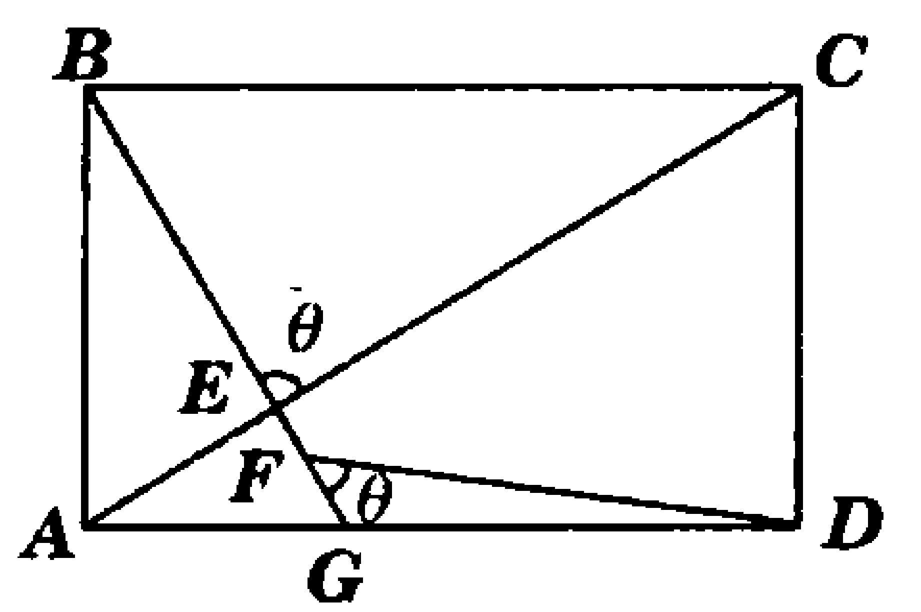
* En consecuencia :

$x=5+6 \Rightarrow x=11$

RPTA:"D"

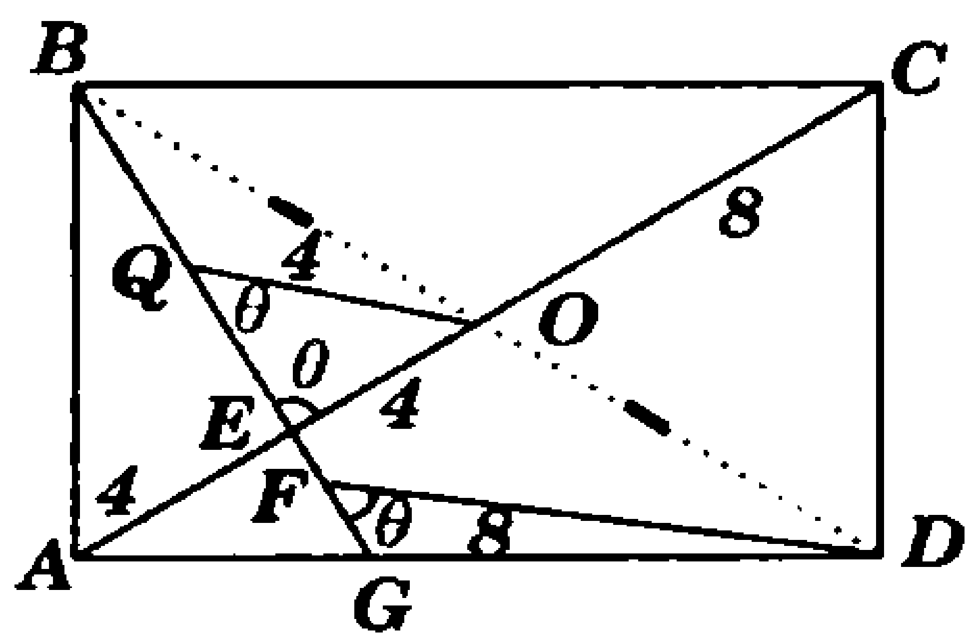
PROBLEMA 8 :

En la figura $ABCD$ es rectángulo, donde $AE=4$, $FD=8$. Calcule EC.



A)6 B)8 C)4 D)12 E)18

RESOLUCIÓN :



* Trazamos $BD \Rightarrow BO=OD$

* En el $\triangle BDF$: trazamos $\overline{OQ}\,//\,\overline{DF}$

$\Rightarrow OQ$ es base media del $\triangle BDF$, entonces :

$$OQ=\frac{FD}{2}=\frac{8}{2}=4$$

* Ahora $m\measuredangle OQE=m\measuredangle DFG=\theta$ (por paralelas)

entonces el ΔQEO es isósceles ,

$OQ = OE = 4$

* Luego $OC = OA = 8$ $EC = 12$

RPTA:"D"

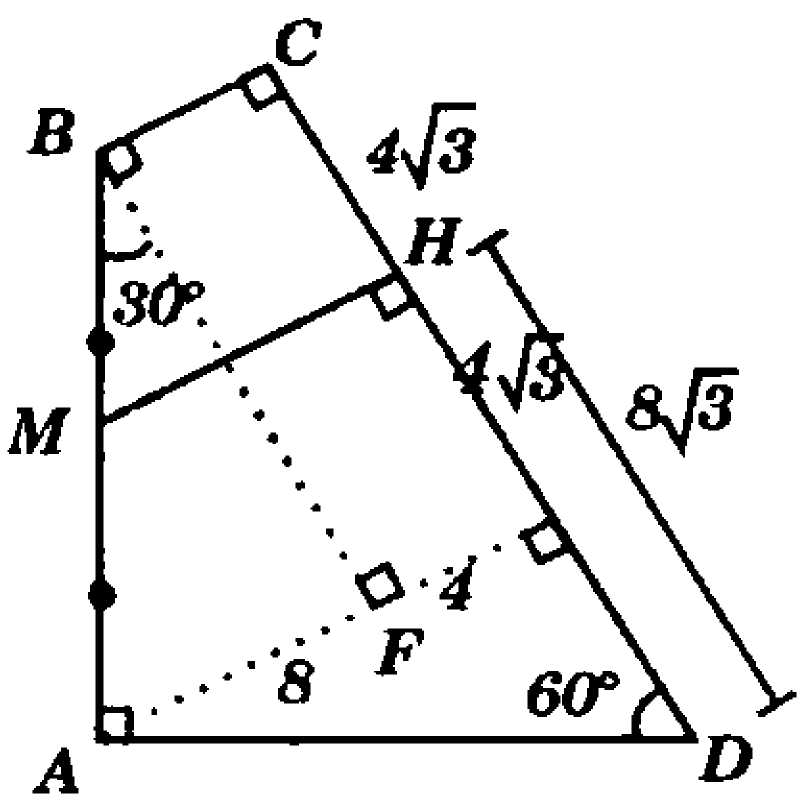
PROBLEMA 9 :

En un cuadrilátero *ABCD*, $m\sphericalangle A = m\sphericalangle C = 60°$, $m\sphericalangle D = 60°$, por el punto medio de "*M*" de $\overline{AB}$, se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{CD}$. Calcular *MH*.

Si $CH = 4\sqrt{3}$ y $MD = 8\sqrt{3}$.

A)4 B)8 C)12 D)16 E)6

RESOLUCIÓN :



* Se traza

$\overline{AE} \perp \overline{CD} \Rightarrow HE = ED = 4\sqrt{3}$

* Se traza también: $\overline{BF} \perp \overline{AE}$

$m\sphericalangle ABF = 30°$

* En el ◺ *ABF* notable :

$BF = 8\sqrt{3} \Rightarrow AF = 8$

* En el ◺ *AED:*

$AE = 12 \Rightarrow FE = 4$

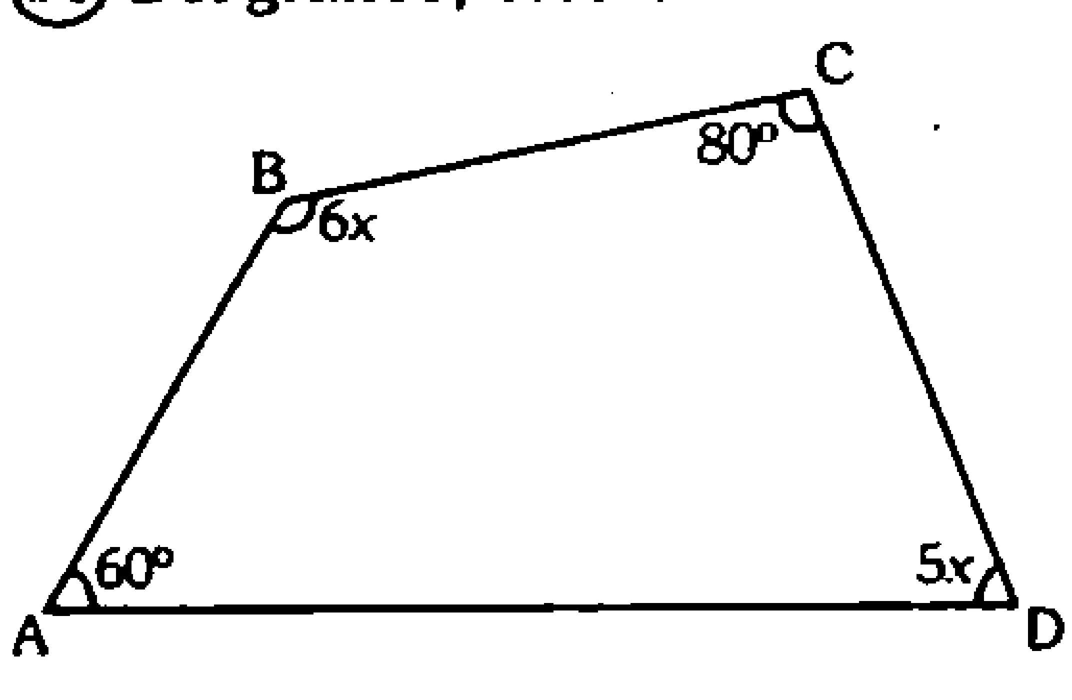
* Finalmente en el trapecio rectángulo *ABCE*

$$MH = \frac{BC + AE}{2} \quad MH = \frac{4 + 12}{2} = 8$$

RPTA:"B"

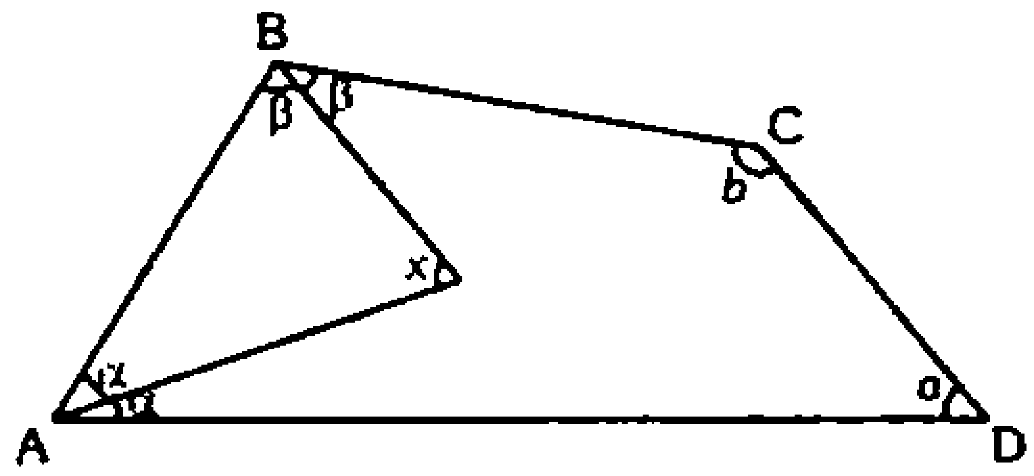
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Del gráfico, calcular *x*.



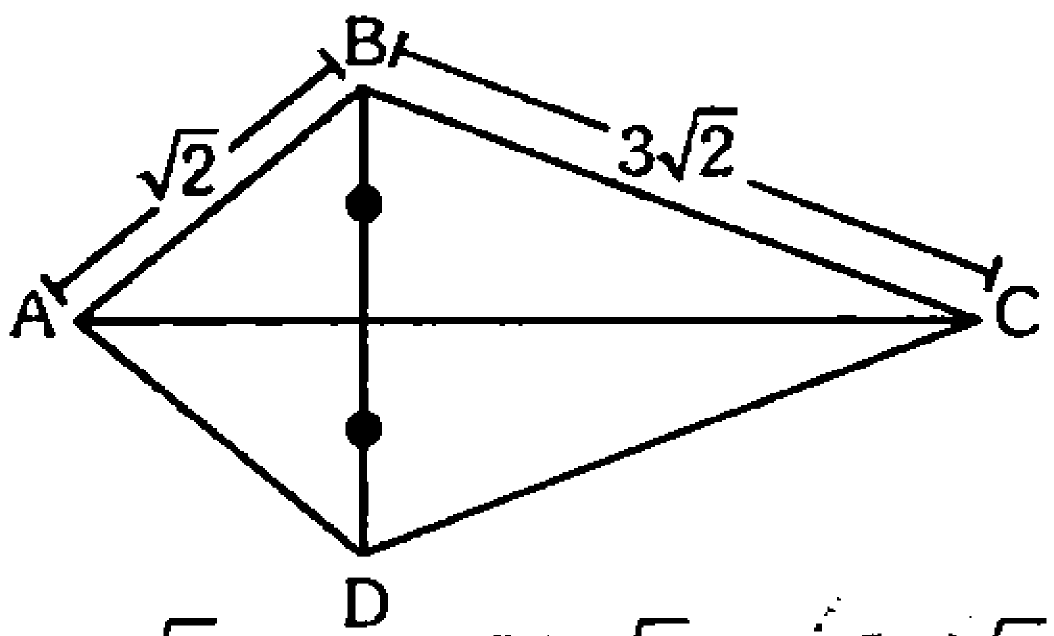
A)40° B)30° C)20° D)10° E)50°

02 En el gráfico, calcular *x*, si: $a + b = 200°$.



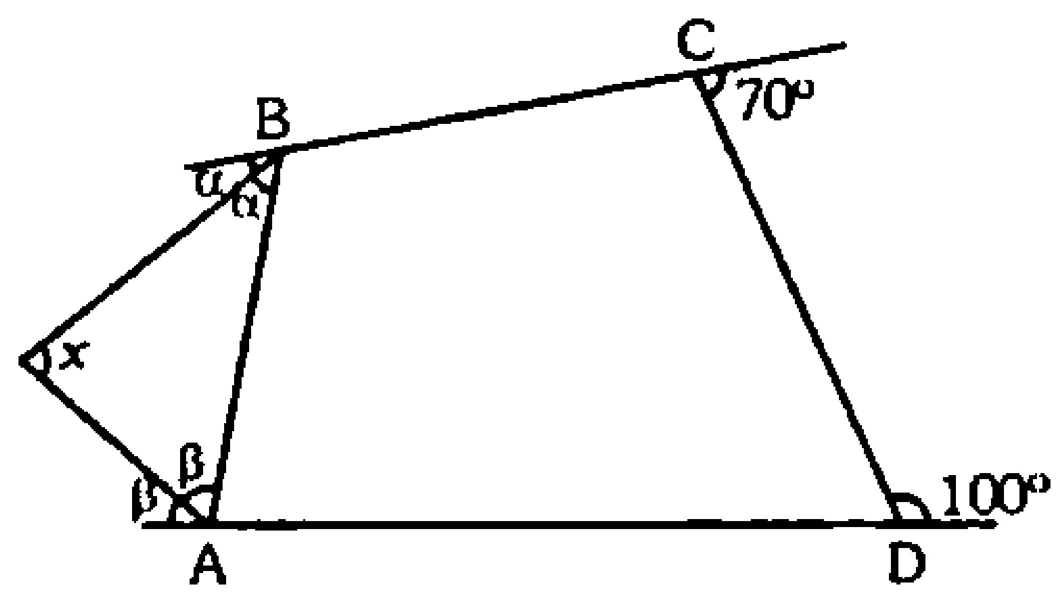
A)110° B)76° C)90° D)85° E)100°

03 Calcular el perímetro del trapezoide simétrico *ABCD*.



A)$6\sqrt{2}$ B)$8\sqrt{2}$ C)$4\sqrt{2}$ D)$10\sqrt{2}$ E)$9\sqrt{2}$

04 Del gráfico, calcular *x*.



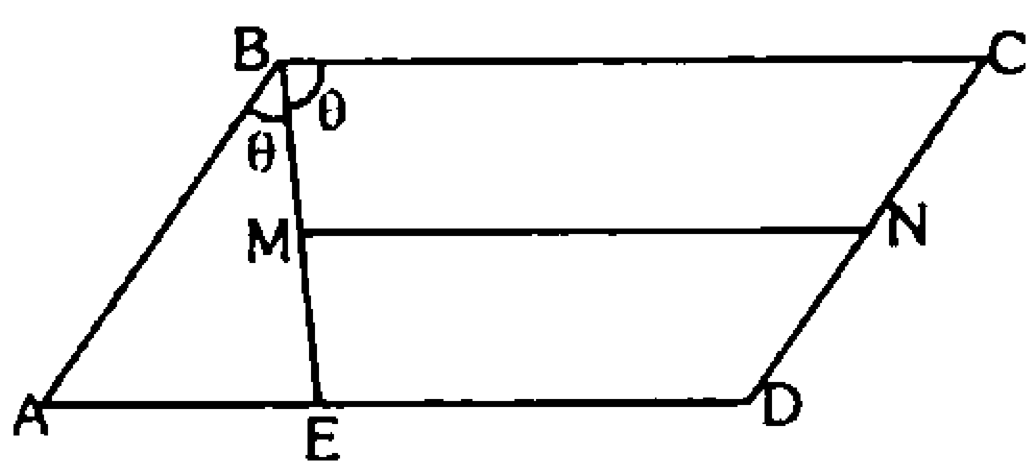
A)75° B)65° C)85° D)95° E)105°

05 En un trapezoide *ABCD* $m\sphericalangle A = 90°$, *AB=AD* y *BC=CD*. Si: $m\sphericalangle ABC = 115°$, calcular $m\sphericalangle BCD$.

A)50° B)40° C)60° D)45° E)55°

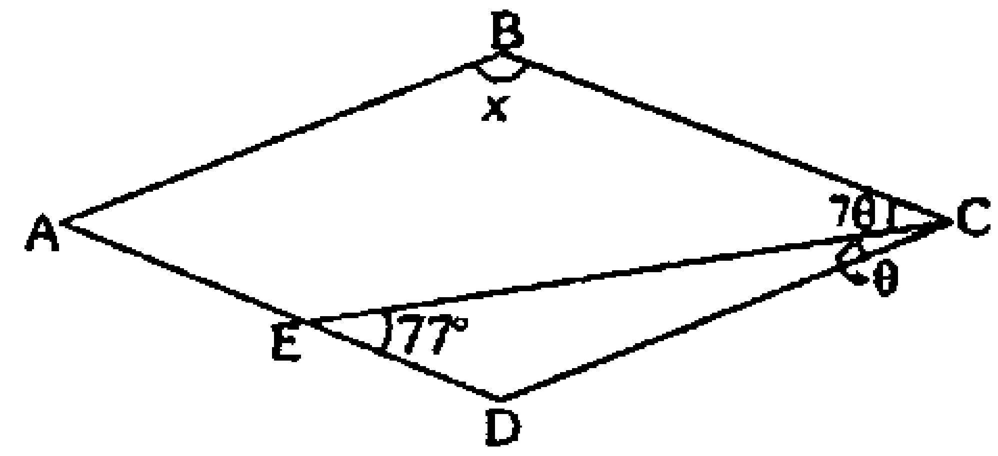
06 En la figura *ABCD* es un romboide, *BM=ME, CN=ND, BC=12, CD=4.*

Calcule *MN*.



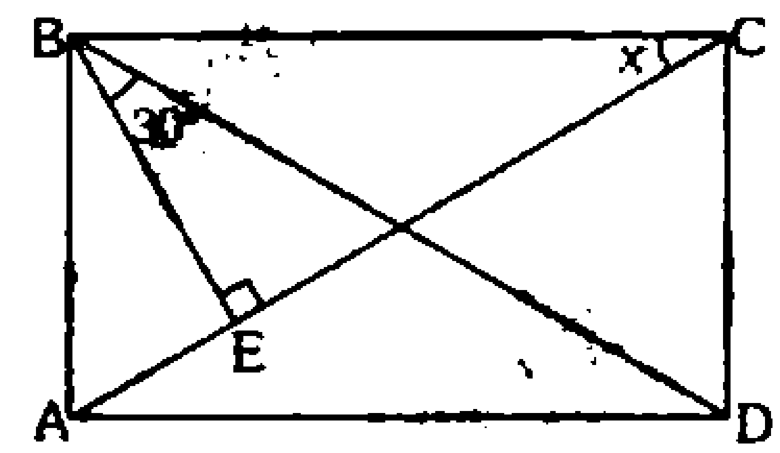
RPTA: ....

07 En la figura *ABCD* es un rombo. Calcule *x*.



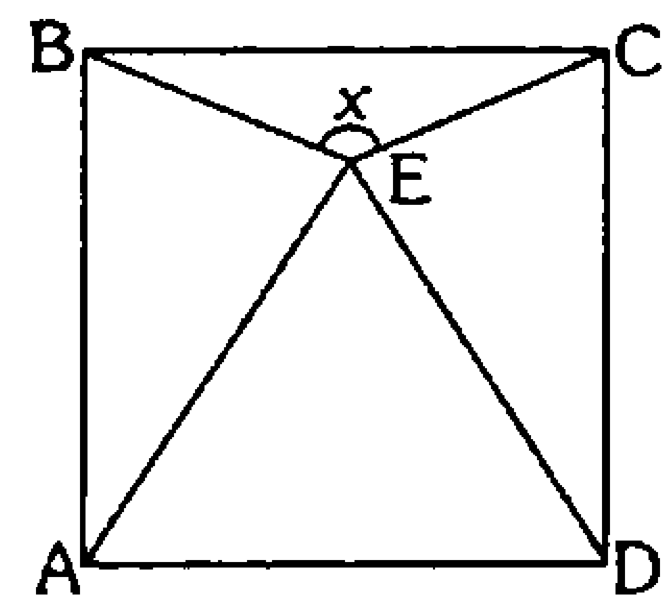
RPTA: ....

08 En la figura *ABCD* es un rectángulo. Calcule *x*.



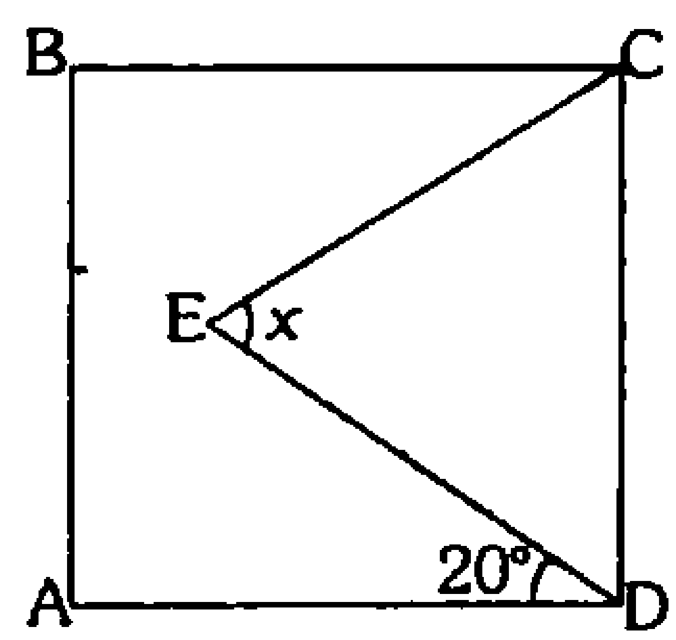
RPTA: ....

09 En la figura *ABCD* es un cuadrado y *AED* es un triángulo equilátero. Calcule *x*.



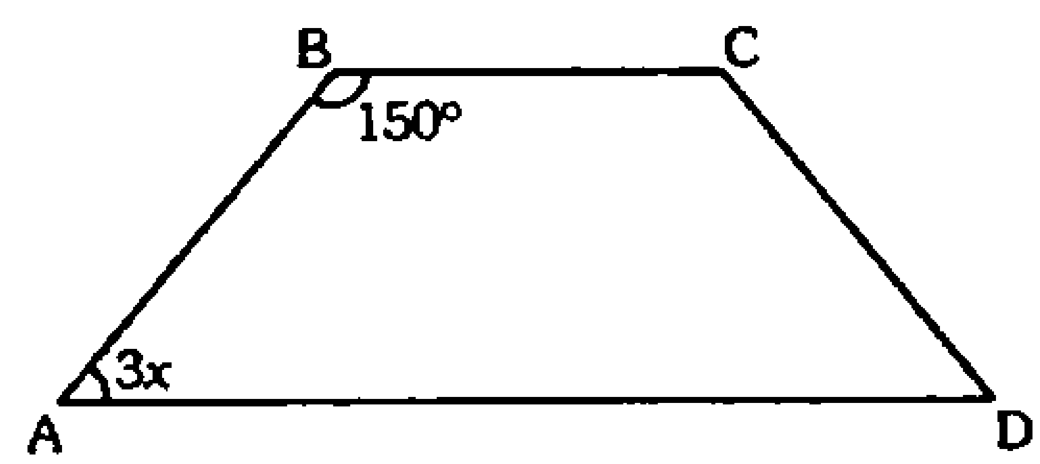
RPTA: ....

10 En la figura *ABCD* es un cuadrado, *AB=ED*. Calcule *x*.



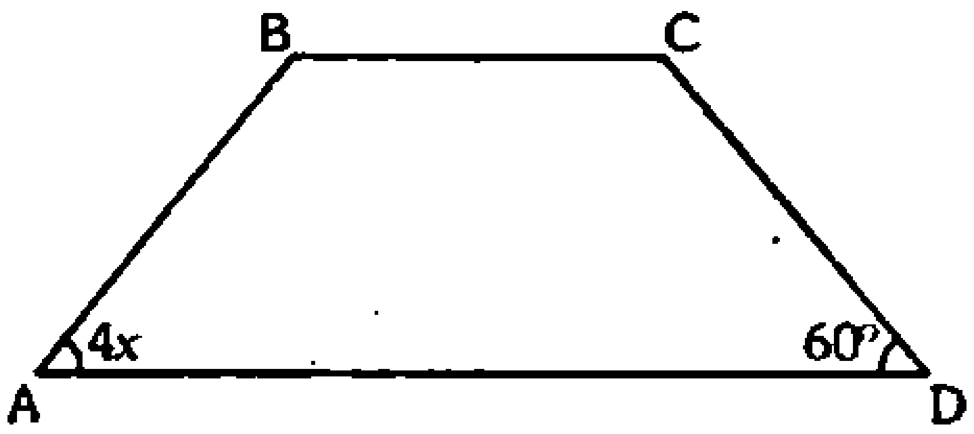
RPTA: ....

11 En el trapecio *ABCD*, calcular *x*, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$.



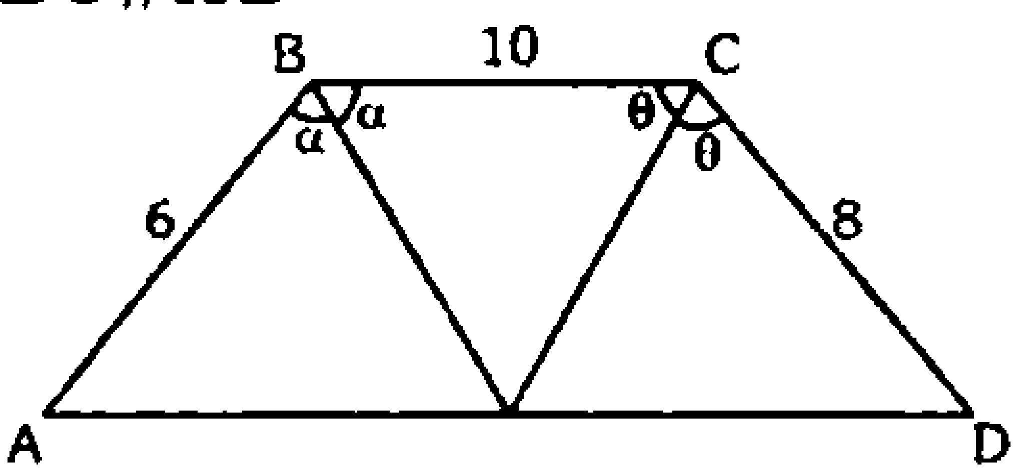
A)10° B)12° C)15° D)18° E)16°

12 En el trapecio isósceles *ABCD*, calcular *x*, si: $\overline{BC} // \overline{AD}$.



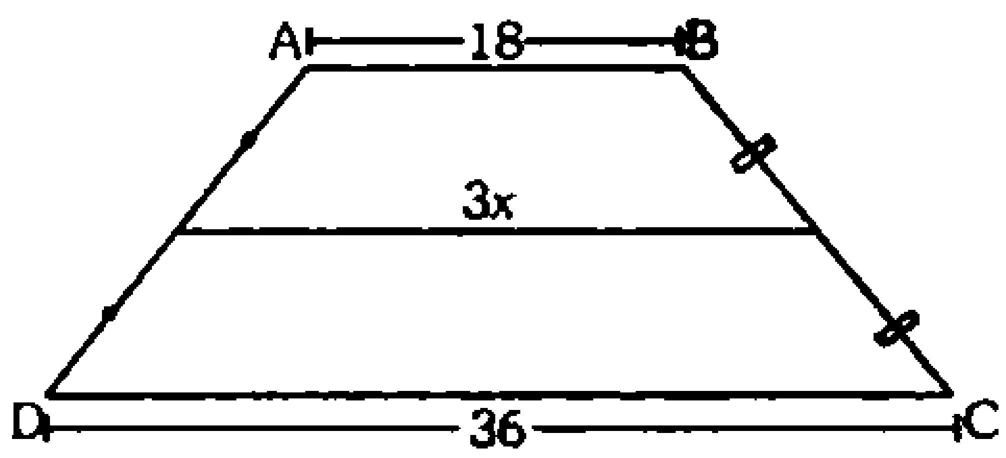
A)20° B)15° C)30° D)40° E)10°

13 Calcular la longitud de la base media del trapecio ***ABCD***, si: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



A)12 B)14 C)16 D)10 E)18

14 Calcular ***x***, si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

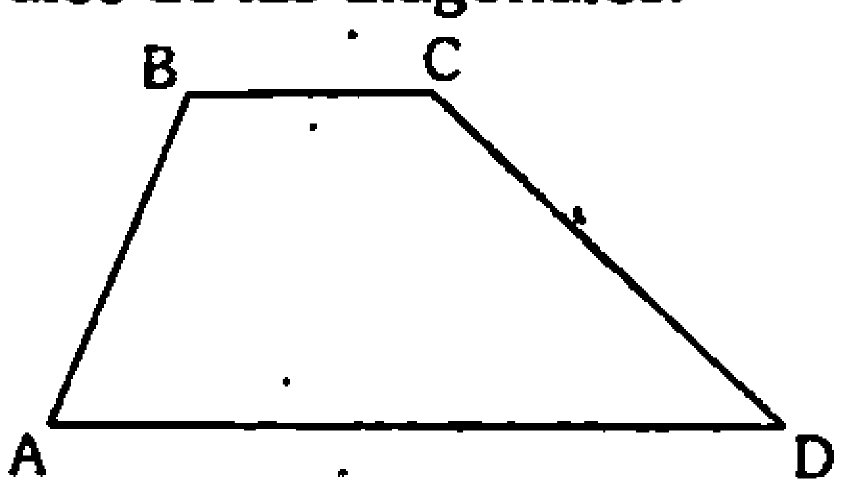


A)8 B)6 C)10 D)12 E)15

15 Las longitudes de las bases y de la base media de un trapecio suman ***60***. Calcular la longitud de la base media.

A)40 B)45 C)15 D)30 E)20

16 En el trapecio ***ABCD*** $(\overline{BC} \parallel \overline{AD})$ $m\sphericalangle B = 135°$; $m\sphericalangle C = 143°$ y $CD = 10\mu$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

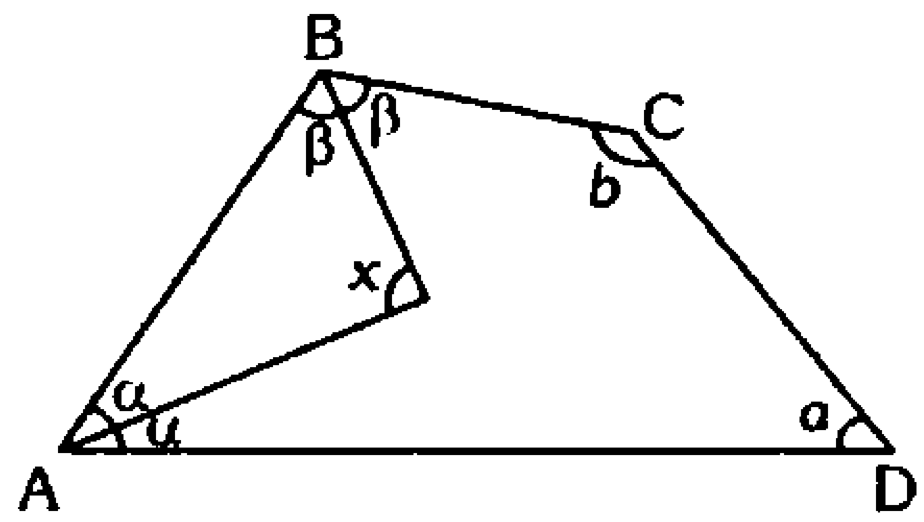


A)5μ B)7μ C)6,5μ D)9μ E)4μ

17 En un trapecio rectángulo ***ABCD***, recto en ***A*** y ***D***, se traza la bisectriz interior $\overline{BQ}$ (***Q*** en $\overline{DC}$). Si ***BQ = BC, BQ = 2*** y ***BQ = 6***, hallar la mediana del trapecio.

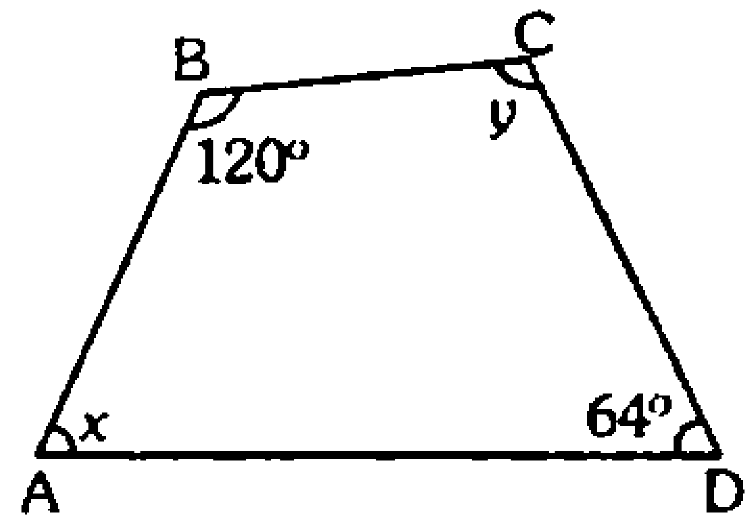
A)16 B)9 C)7 D)6 E)8

18 En el gráfico, calcular ***x***, si: ***a+b= 200°***.



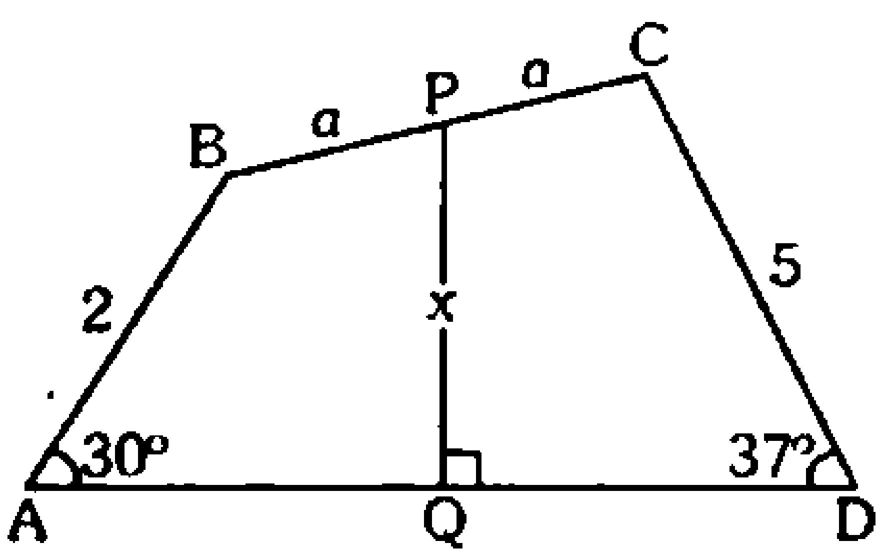
A)101° B)76° C)90° D)84° E)100°

19 En el gráfico, calcular ***x+y***:



A)100° B)176° C)99° D)170° E)144°

20 En el gráfico, calcular ***x***:

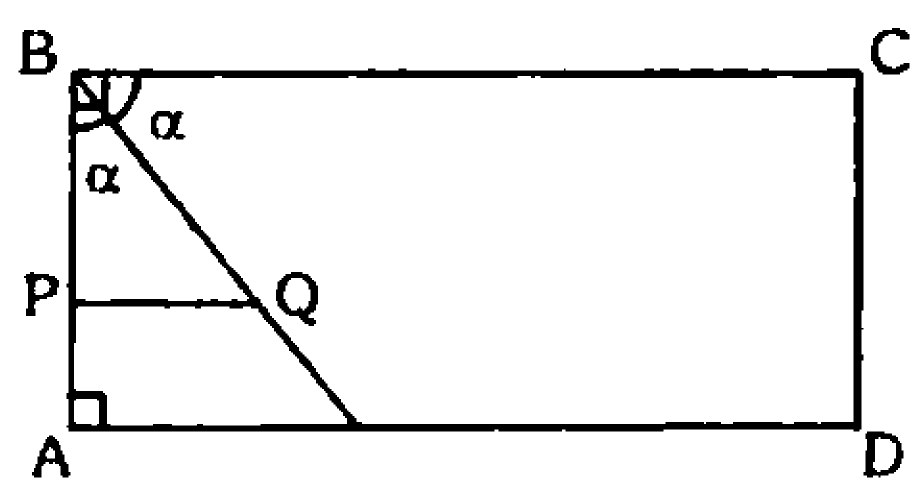


A)3 B)4 C)2 D)5 E)1

21 Los lados de un rectángulo miden ***6 m*** y ***8 m***, hallar el ángulo que forman sus diagonales.

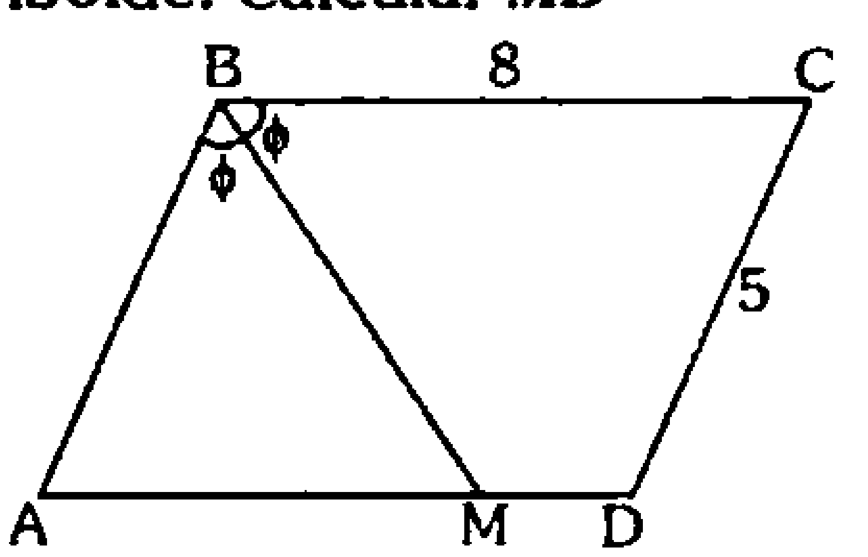
A)37° B)53° C)106° D)100° E)120°

22 En la figura ***ABCD*** es un rectángulo, ***P*** y ***Q*** son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BM}$. Si ***BC = 12*** y ***PQ = 2***. Hallar el perímetro de rectángulo.



A)24 B)20 C)1 D)30 E)32

23 En el gráfico: ***ABCD*** es un romboide. Calcular ***MD***



A)4 B)1 C)3 D)2,5 E)6

24 En un paralelogramo se trazan las bisectrices interiores de sus cuatro ángulos. Entonces al cortarse dichas bisectrices se determina un...

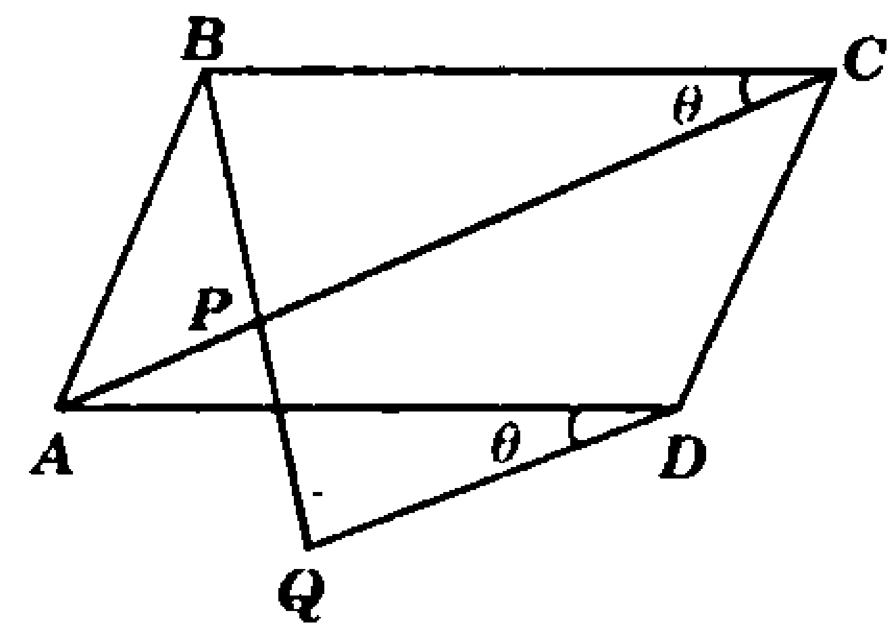
A)rectángulo B)rombo C)trapecio D)cuadrado E)trapezoide

25 Se tiene un paralelogramo ***ABCD*** $(\overline{AB} < \overline{BC})$. Se traza la bisectriz interior $\overrightarrow{BM}$ (***M*** sobre $\overline{AD}$). Calcular $\overline{MD}$, si ***BC = 12 m*** y ***CD = 4m***.

A)6 m B)7 m C)9 m D)8 m E)10 m

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si ***ABCD*** es un paralelogramo, ***AP =2*** y ***PC=6***, calcular ***QD***.



A)5 B)6 C)4 D)3 E)2

02 Se tiene un cuadrado ***ABCD***, de centro ***O***, en $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ se ubican los puntos ***E*** y ***S*** respectivamente tal que $O \in \overline{ES}$ y $m\sphericalangle ESD=53°$.

Si ***OE = 5***, calcular ***EC***.

A)2 B)3 C)1,5 D)1 E)$\sqrt{2}$

03 Se tiene un cuadrado ***ABCD***; en la región exterior relativa a $\overline{CD}$ se ubica el punto ***"P"*** tal que $\overline{CP} \parallel \overline{BD}$ y ***BO=3(CP)***. Calcular $m\sphericalangle PAD$.

A)37° B)18,5° C)36° D)30° E)26,5°

04 En los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo rectángulo ***ABC*** se ubican los puntos ***P*** y ***Q*** respectivamente

y en $\overline{AC}$ se ubica el punto "*R*" tal que *APQR* es un rombo; *AR* = *2* y *RC*=*4*. Calcular la longitud de la diagonal mayor del rombo.

A)$2\sqrt{3}$ *B)*$2\sqrt{2}$ *C)*$\sqrt{6}$ *D)4* *E)3*

05 Se tiene un trapecio isósceles *ABCD* de bases $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$; en su interior y en $\overline{AD}$ se ubican los puntos *P* y *Q* respectivamente tal que *QPCD* es un trapecio isósceles. Si $m\measuredangle A=70°$, calcular $m\measuredangle BCP$.

A)40° B)35° C)20° D)50° E)70°

06 Se tiene un trapecio *ABCD* de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$; *M* es punto medio de $\overline{AB}$. Si $m\measuredangle CMO=90°$; *BC* =*1* y *CD* =*10*, calcular *AD*.

A)9 B)5,5 C)8 D)7 E)11

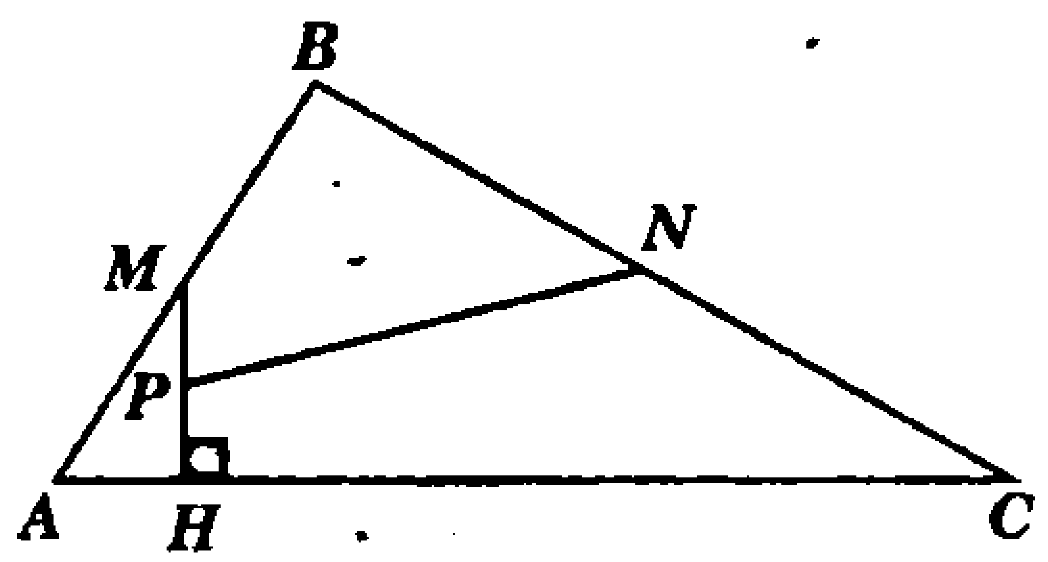
07 En el trapezoide *ABCD* se conoce que:

$AB=BC=5, CD=2, m\measuredangle A=37°$, $m\measuredangle B=127°$ y $m\measuredangle C=143°$.

Calcular *AD*

A)12 B)10 C)8 D)9 E)$5\sqrt{3}$

08 Si *AM* =*MB*, *NB*= *NC*, *MP* = *PH*, *AH* = *1* y *HC* = *7*, calcular el valor entero de *NP*.



A)6 B) 7 C)8 D)9 E)5

09 En un paralelogramo *ABCD*: "*O*" es el punto medio de $\overline{AC}$ y "*M*" un punto de $\overline{AD}$, tal que el cuadrilátero *MOND* es un rectángulo. Si *OM* = *2* y *MD* = *3*, calcular *BN*.

A)$2\sqrt{5}$ *B)10 C)*$\sqrt{14}$ *D)*$2\sqrt{10}$ *E)8*

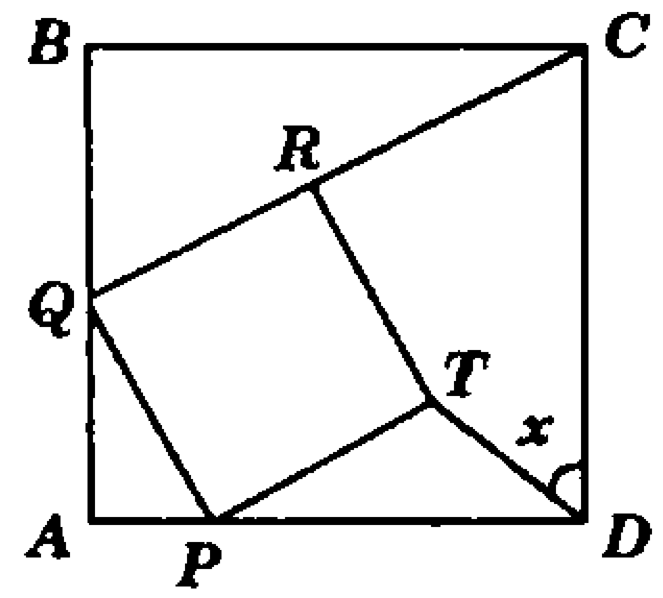
10 En un trapecio isóscèles *ABCD*: $\overline{BC} // \overline{AD}$ y. Si *AC*=*AD* y $m\measuredangle ABC=110°$, calcular $m\measuredangle BAC$.

A) 20° B)30° C)40°
D)50° E)60°

11 Se tiene un trapecio isósceles *ABCD* tal que *AB* = *CD* y $m\measuredangle ABD=90°$; en la prolongación de $\overline{CD}$ se ubica el punto *P* tal que *AP* = *2(BD)*. Calcular $m\measuredangle APC$.

A)36° B)37° C)45° D)53° E)30°

12 En la figura: *ABCD* y *PQRT* son cuadrados. Si *AQ*=*QB*, calcular el valor de "*x*".



A)30° B)37° C)36° D)45° E)53°

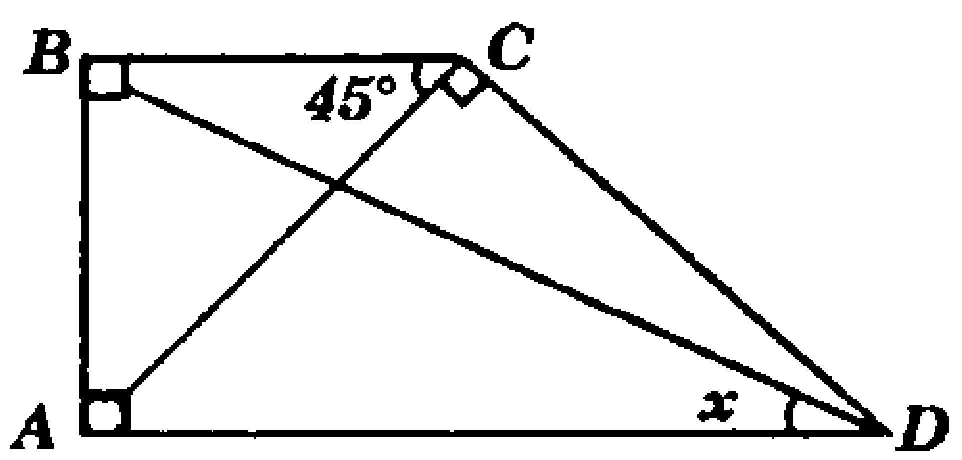
13 Se tiene un trapecio isósceles cuyas bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden *3* y *13* respectivamente y $m\measuredangle BCA=m\measuredangle ACD$. Calcular la longitud de la altura del trapecio.

A)10 B)8 C)13 D)15 E)12

14 Se tiene un paralelogramo *ABCD*, en $\overline{CD}$ se ubica un punto "*M*" y la bisectriz del $\measuredangle A$ corta a $\overline{BM}$ y $\overline{CB}$ en *Q* y *P* respectivamente tal que $m\measuredangle PQM=m\measuredangle QMC$ y *BP*=*3*. Calcular *AQ*.

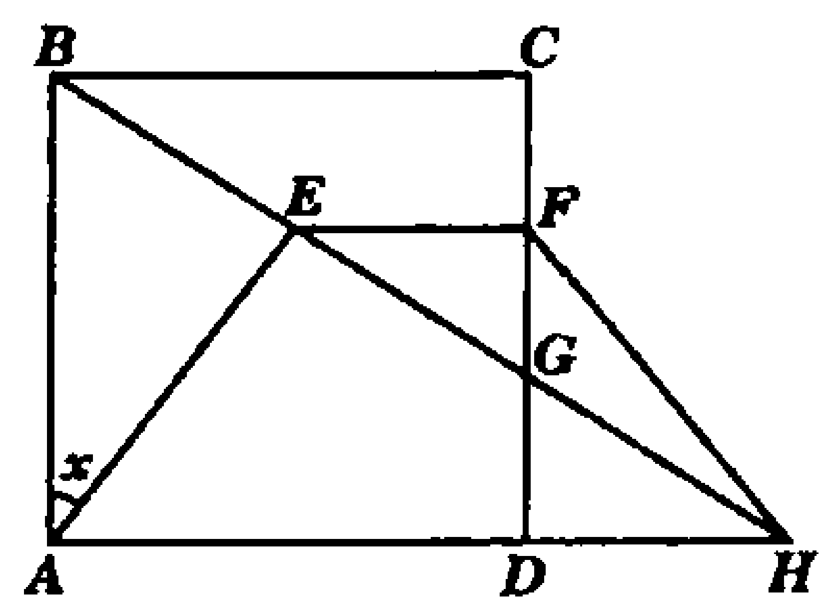
A)2 B)6 C)3 D)4 E)5

15 Calcular el valor de "*x*"



A)15° B)30° C)22,5° D)18,5° E)26,5°

16 Si *ABCD* es un cuadrado, *AEFH* es un trapecio isósceles y *CF* = *FG*, calcular el valor de "*x*"



A)30° B)37° C)36° D)22,5° E)26,5°

17 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) En el cuadrado y en el rombo las diagonales son perpendiculares.

( ) En el rectángulo las diagonal es son de igual longitud.

( ) El trapecio rectángulo es un trapecio escaleno.

( ) En un trapecio isósceles, las medidas de dos ángulos opuestos suman *180°*.

A)VFFV B)VVVV C)FFFV
D)FFVV E)VFVF

18 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Si las diagonales de un trapecio son perpendiculares, entonces el trapecio es isósceles.

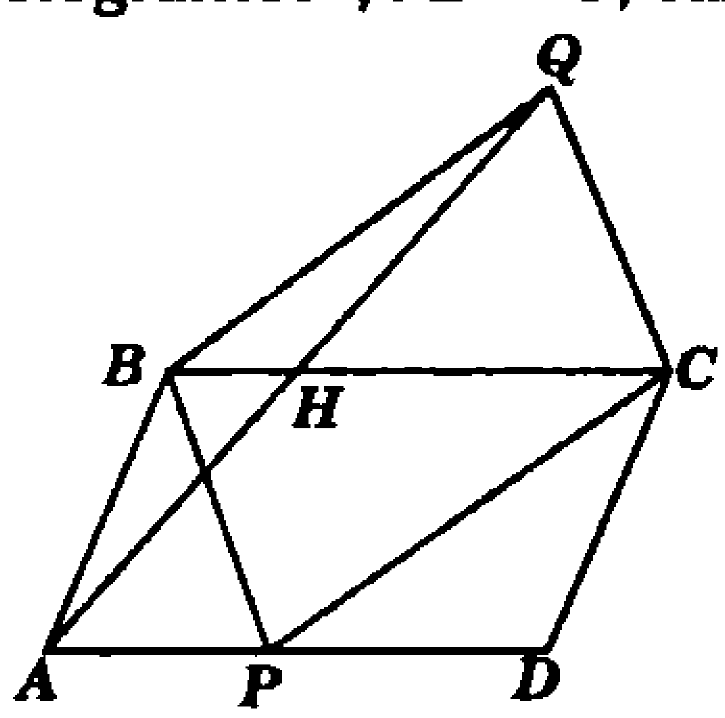
( ) Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan determinandose en cada diagonal segmentos de longitudes iguales, entonces dicho cuadrilátero es romboide.

( ) Sólo en el rombo las diagonales son bisectrices de sus respectivos ángulos.

( ) De todos los cuadriláteros sólo en el trapezoide las medidas de sus ángulos suman *360°*.

A)FVFF B)VFVV C)VVVF
D)VFVF E)VVFV

19 Si *ABCD* y *PBQC* son paralelogramos , *PD* = *6*, calcular *BH*.



A)3 B)2 C)4 D)$\sqrt{3}$ *E)1*

20 Se tiene un paralelogramo *ABCD*, en $\overline{BD}$ se ubica el punto

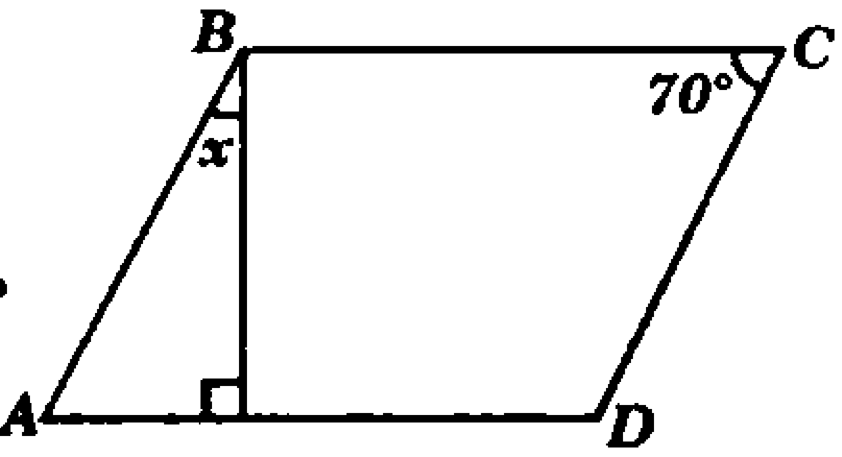
"P" tal que $m\angle BCP=10°$; $m\angle ABD=70°$ y $AB=PD$. Calcular $m\angle A$.

A)55° B)70° C)65° D)80° E)85°

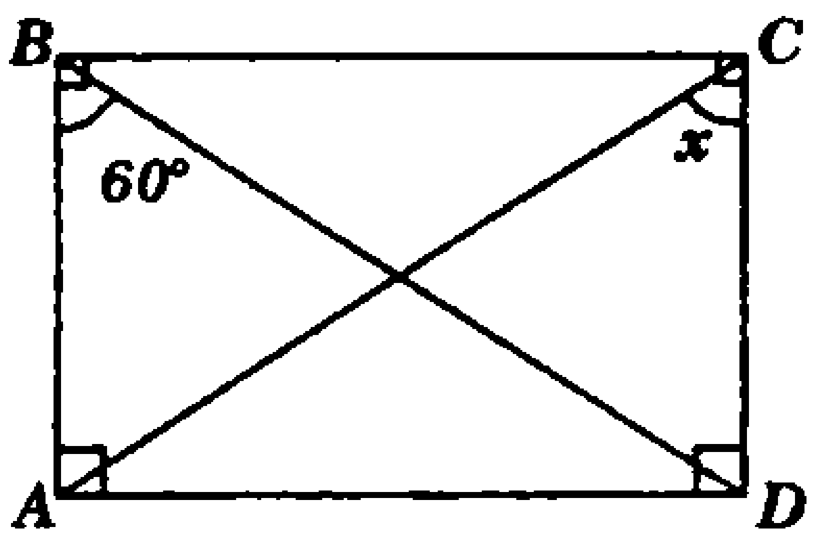
SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si *ABCD* es un romboide, calcular "*x*".

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 45°
E) 40°



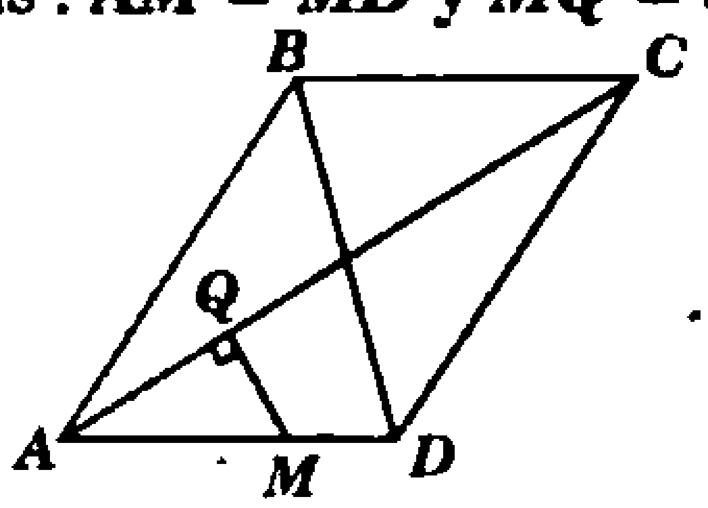
02 Si *ABCD* es un rectángulo, calcular "*x*"



A) 80° B) 70° C) 60° D) 30° E) 50°

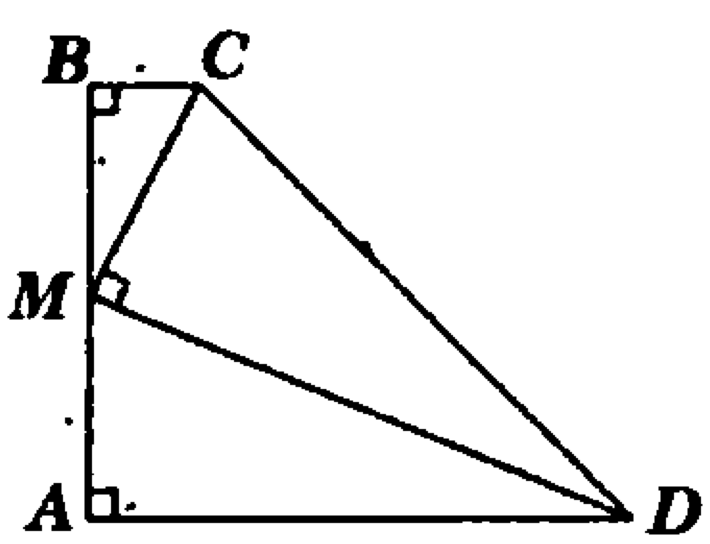
03 Si *ABCD* es un rombo *BD*, además: $AM = MD$ y $MQ = 3$

A) 10
B) 13
C) 12
D) 16
E) 14



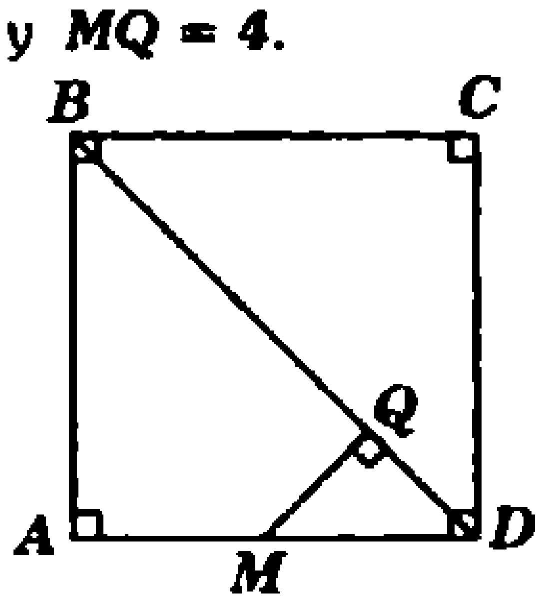
04 Si: $BC + AD = 12$. Hallar *CD* y $BM = MA$

A) 10
B) 13
C) 12
D) 16
E) 14



05 Si *ABCD* es un cuadrado, hallar *BQ* y además $MA = MD$ y $MQ = 4$.

A)10
B)12
C)13
D)15
E) 5



06 En un romboide *ABCD* la bisectriz del ángulo *BAD* corta a $\overline{BC}$ en "*E*". Si: $CD=8$ y $AD = 10$. Hallar *EC*.

A)2 B)3 C)4 D)1 E)1/2

07 En un romboide *ABCD* en $\overline{CD}$ se ubica el punto "*P*", si $\overline{AP}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto "*Q*". Hallar *DP*, si $AB = 24$ y $BQ = 3(QD)$.

A)6 B)8 C)10 D)12 E)15

08 En un cuadrilátero *ABCD* se sabe que $m\angle B=m\angle D=90°$ y $m\angle C=60°$.

Las distancias de *A* y *C* a la diagonal *BD* miden *4* y *16* respectivamente ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$?

A)10 B)12 C)14 D)16 E)18

09 Se tiene un paralelogramo *ABDC* $(AB<BC)$, se traza $\overline{PA}$ ("*P*" en *CD*), intersectando a $\overline{BD}$ en "*Q*". Hallar *DP*, si: $CD=18$ y $BQ= 3DQ$.

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

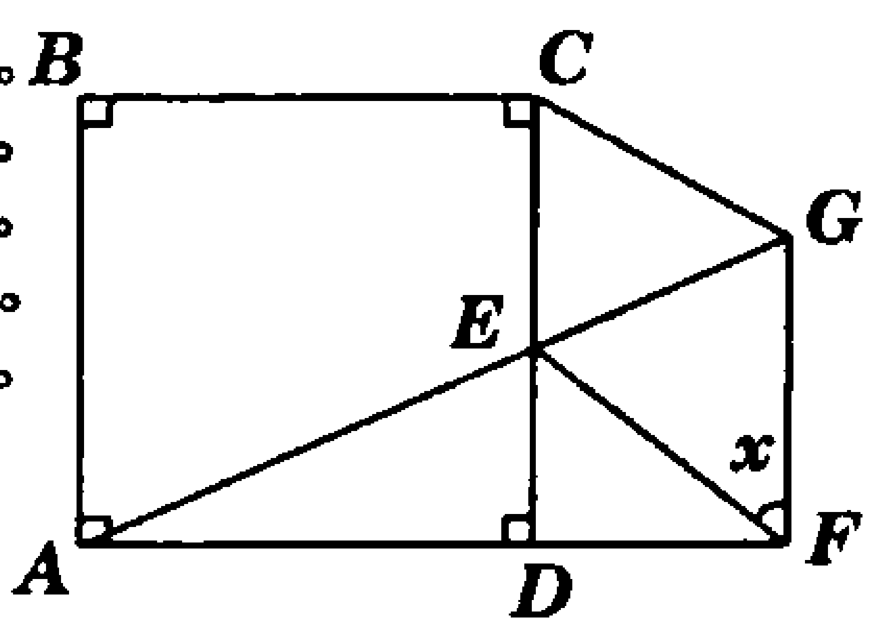
10 En un paralelogramo *ABCD*, en los triángulo *ABD* y *BCD* se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{DF}$.

Si : $BH = 2$, $HD = 12$ y $AH = DF$. Hallar *AC*.

A)$\sqrt{21}$ B)$2\sqrt{21}$ C)$3\sqrt{21}$ D)$4\sqrt{21}$ E)$5\sqrt{21}$

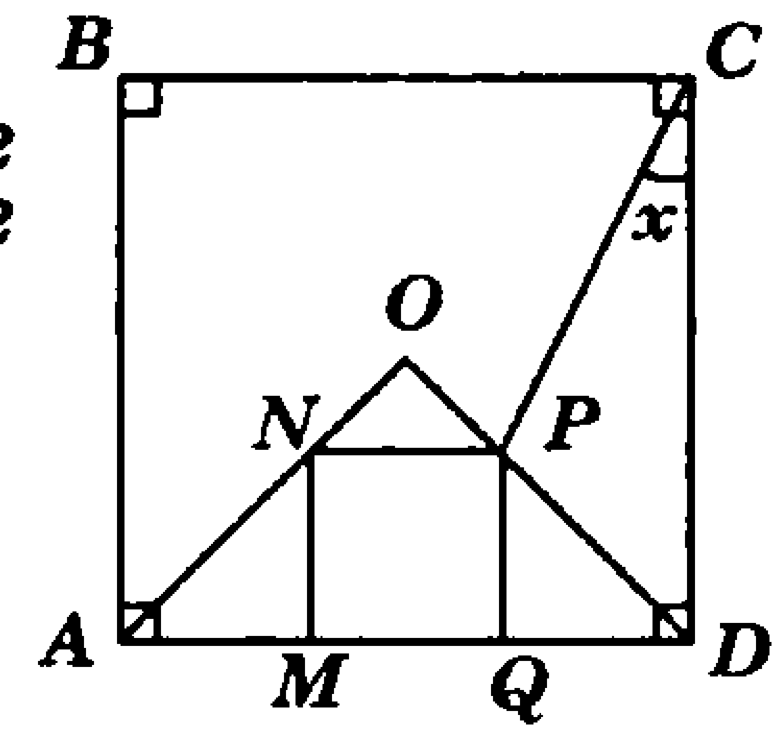
11 Si *ABCD* y *CEFG* son cuadrado y rombo respectivamente. Calcular "*x*".

A) 30°
B) 15°
C) 45°
D) 60°
E) 80°



12 Según el gráfico *ABCD*, *ABCD* y *MNPQ* son cuadrados, "*O*" es centro de *ABCD*. Calcule "*x*".

A)53/2
B)37/2
C)30
D)45
E)60



13 En un cuadrilátero cóncavo en *C*, $m\angle DAB=\theta$; $m\angle ABC=90°-\theta$; $BC=10$ y $AD=24$. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

A)5 B)12 C)10 D)13 E)15

14 En un trapecio *ABCD* $(\overline{AB} // \overline{CD})$, se sabe que: $AD - BD = 2(AB)$ y $m\angle ABC=4m\angle ACD$.

Hallar $m\angle BCD$.

A)160° B)150° C)143° D)127° E)135°

15 En un rombo *ABCD*, donde $AC=4$ y $BD=20$, se trazan las perpendiculares exteriores $\overline{BE}$ a $\overline{BC}$ y $\overline{BF}$ a $\overline{BA}$, siendo $B=BF=AB$.

Hallar la longitud del segmento que une los baricentros de las regiones triangulares *ABF* y *CBE*

A)2 B)4 C)6 D)8 E)10

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)D	3)E	4)A	5)A	6)A	7)B	8)E	9)D	10)B
11)E	12)B	13)E	14)C	15)E	16)B	17)B	18)A	19)C	20)A

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)A	3)C	4)B	5)B	6)A	7)B	8)B	9)C	10)B
11)C	12)B	13)D	14)B	15)D					

RETO :

Mostrar una figura donde se encuentre repartidas *6* personas, formando *4* filas de *3* personas cada una.

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo: el alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer la definición de Circunferencia* y *los elementos que se asocian a ella.*

* *Conocer sus propiedades* y *relacionarlas con otras figuras que han sido estudiadas tales como el ángulo.* el *triángulo* y el *cuadrilátero.*

* *Conocer las refiniciones de cuadriláteros inscrito e inscriptible. Utilizar sus principales propiedades en* la *solución de problemas.*

INTRODUCCION :

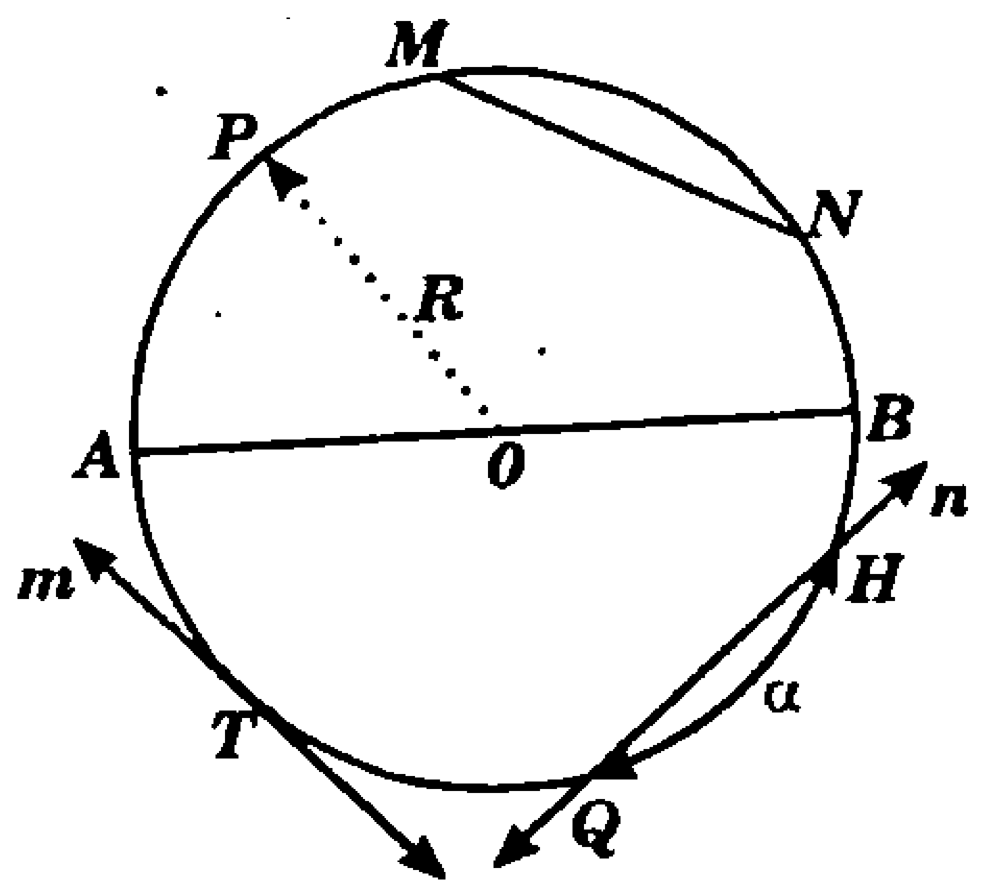
Una de las figuras más admiradas de todos los tiempos por su singular perfección es la circunferencia. Desde la antigüedad, el sol con su circularidad fue objeto de adoración por el hombre al constatar que influía de forma decisiva sobre la vida humana.

Asimismo, la invención de la rueda en la Edad de Bronce ha supuesto uno de los mayores avances técnicos del hombre, lo que muestra la gran transcendencia que encierra esta figura.

En la actualidad, la encontramos en todos los campos de la técnica. Concretamente en arquitectura, aparece en rosetones, columnas de sección circular y otros ornamentos, donde desempeña un papel importante. Nosotros mismos, en los temas que anteceden, hemos hecho uso del compás para el trazado de circunferencias. Sin embargo no es el único instrumento utilizado para tal fin.

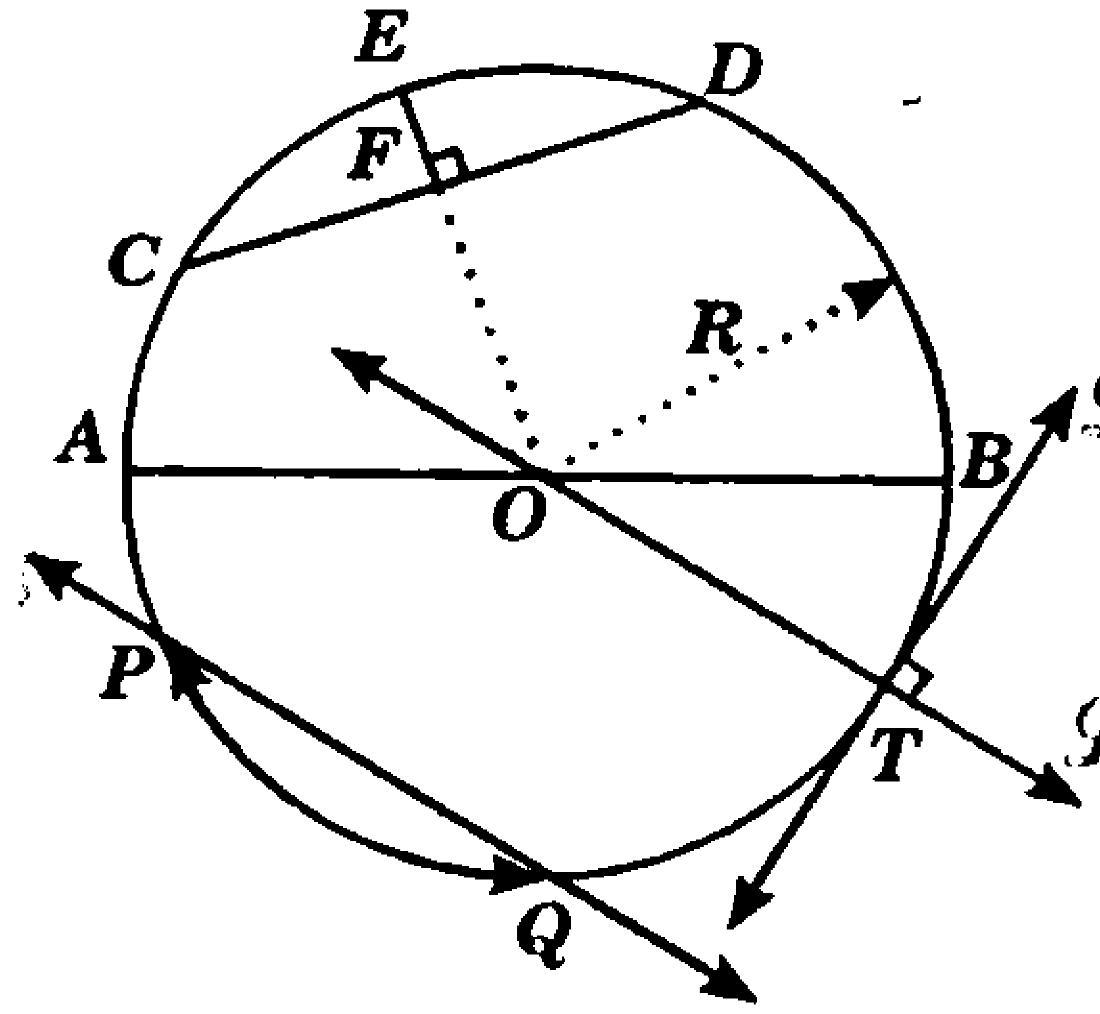
CIRCUNFERENCIA

Es la figura geométrica plana cuyos puntos equidistan de un punto fijo de un mismo plano.



Al punto del cual equidistan los puntos de una circunferencia se denomina centro y a la distancia entre él y un punto en la circunferencia se le denomina radio.

LÍNEAS ASOCIADAS A LA CIRCUNFERENCIA



En la figura , se tiene la circunferencia de centro ***O*** y radio ***R.***

* ***Cuerda :*** $\overline{CD}$

* ***Diámetro :*** $\overline{AB}$

* ***Flecha o sagita :*** $\overline{EF}$

* ***Recta secante :*** $\overleftrightarrow{PQ}$

* ***Recta tangente :*** $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_t}$ (***T***: punto de tangencia)

* Recta normal : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_N}$

* ARCO :

Es una porción cualquiera de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma, denominados extremos del arco , en la figura , por ejemplo: el arco ***PQ :*** $\overparen{PQ}$

EL CÍRCULO:

Es la porción del plano que comprende la circunferencia y su interior.

El perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia, entonces se cumple : $\boxed{L_o = 2\pi R}$

L_o : longitud de la circunferencia.

R : radio de la circunferencia.

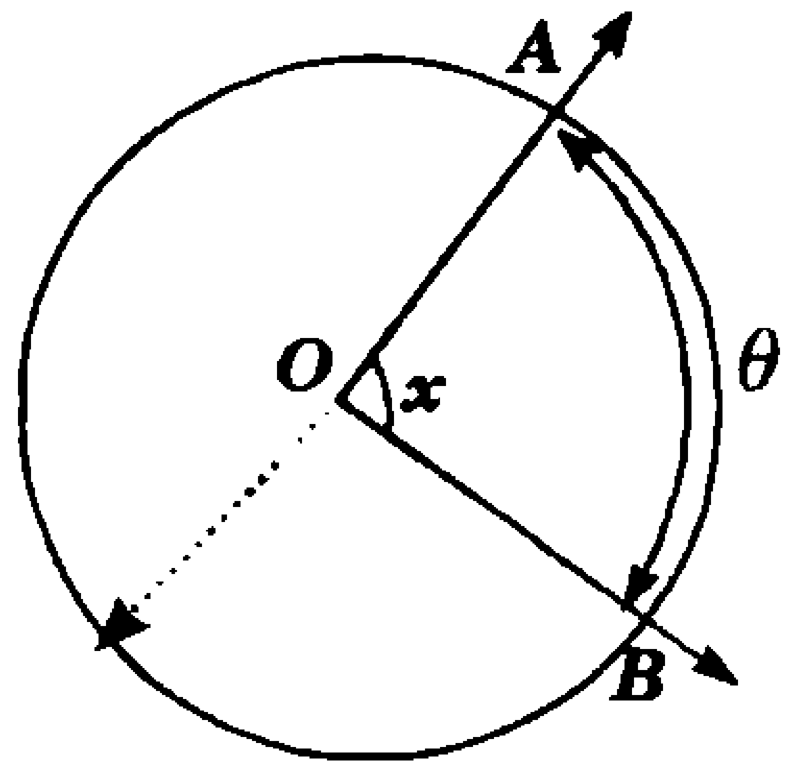
* La medida angular de una circunferencia es igual a *360°*

* Los arcos de circunferencia son líneas y como tales tienen una longitud. Sin embargo también se puede medir en grados, al igual que los ángulos.

Medida del $\widehat{QH}: m\widehat{QH} \Rightarrow m\widehat{QH} = \alpha$

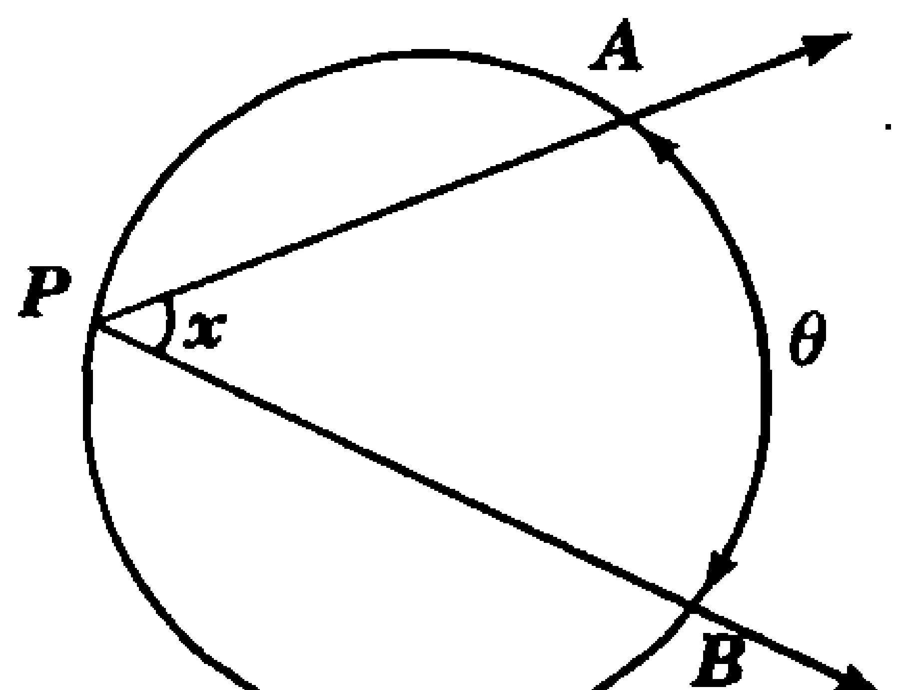
ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

• ÁNGULO CENTRAL :



En la figura, $\measuredangle AOB$: triángulo central se cumple: $\boxed{x = \theta}$

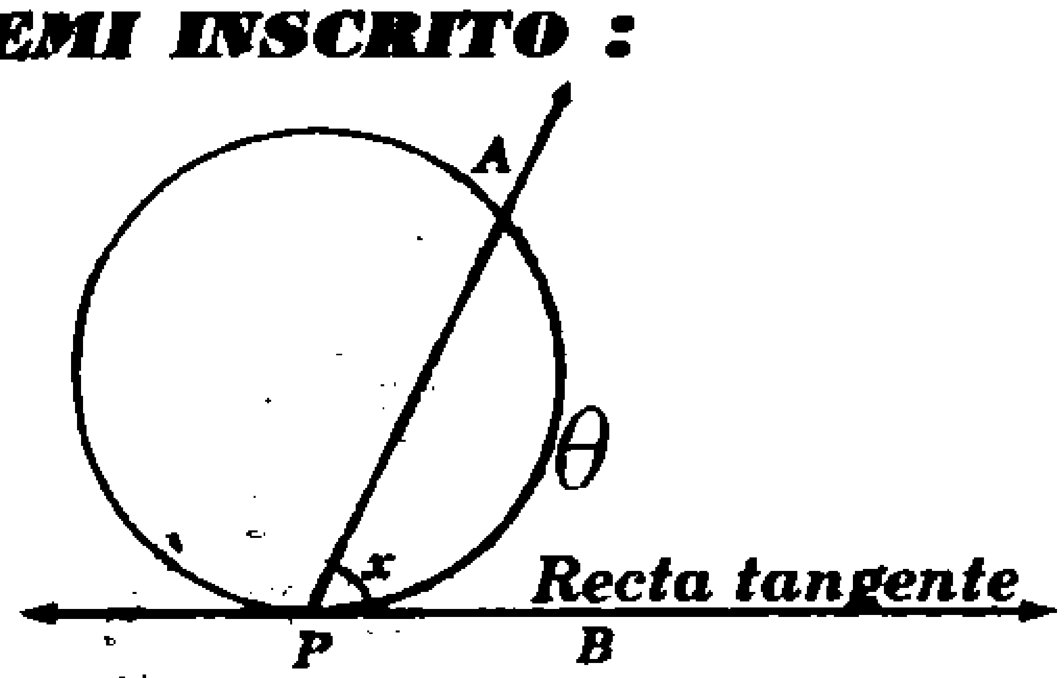
• ÁNGULO INSCRITO :



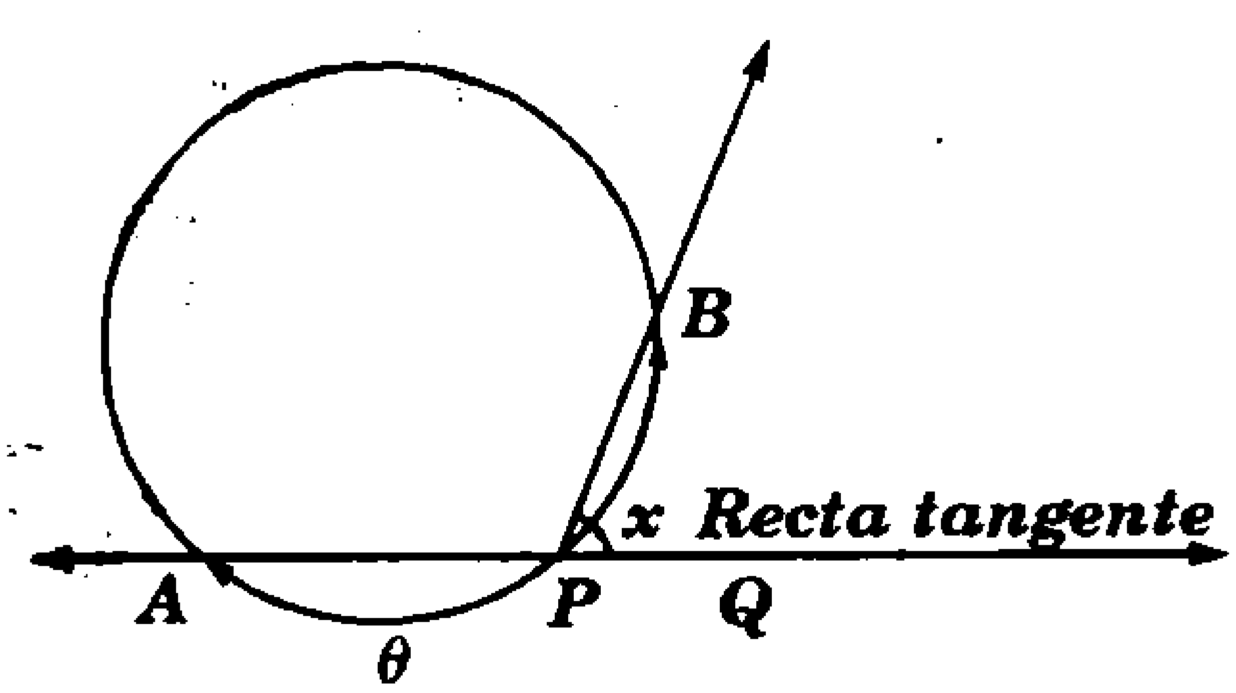
En la figura, $\measuredangle APB$: ángulo inscrito se cumple : $\boxed{x = \dfrac{\theta}{2}}$

• ÁNGULO SEMI INSCRITO :

En la figura, $\measuredangle APB$: ángulo semi inscrito se cumple: $\boxed{x = \dfrac{\theta}{2}}$



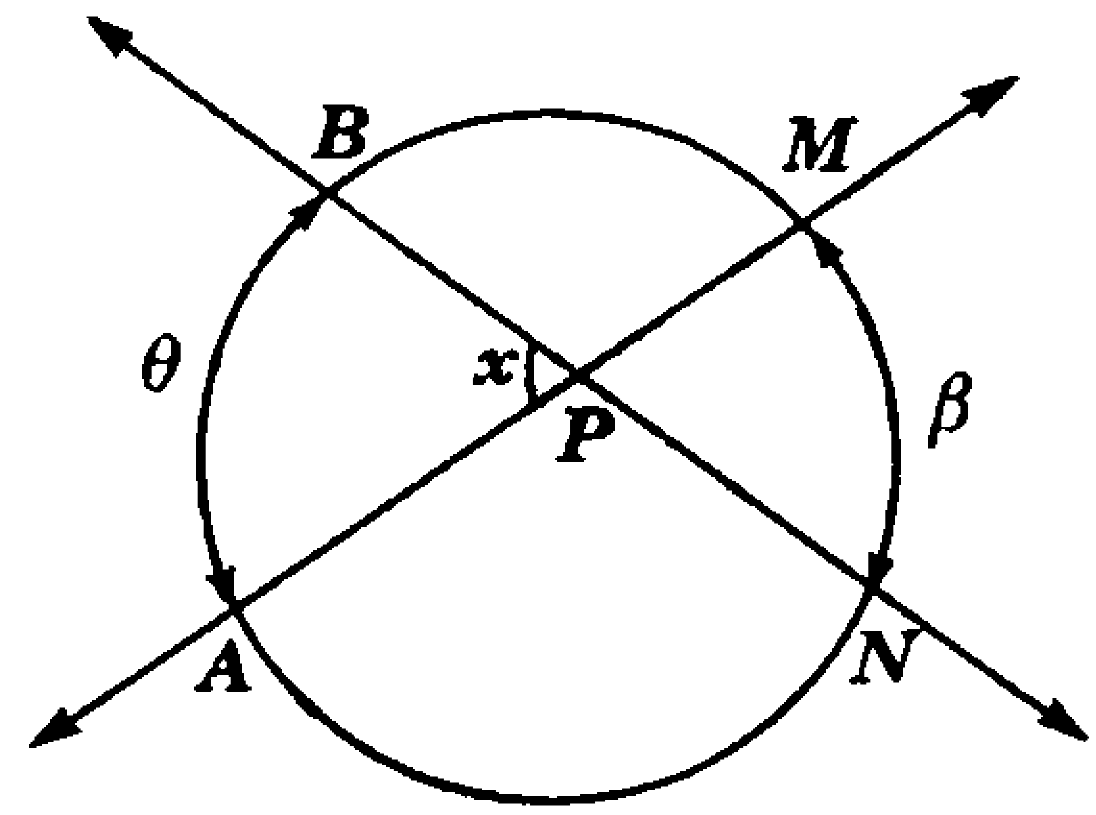
• ÁNGULO EXINSCRITO :



En la figura, $\measuredangle BPQ$: ángulo exinscrito se cumple:

$$\boxed{x = \frac{\theta}{2}}$$

• ÁNGULO INTERIOR :

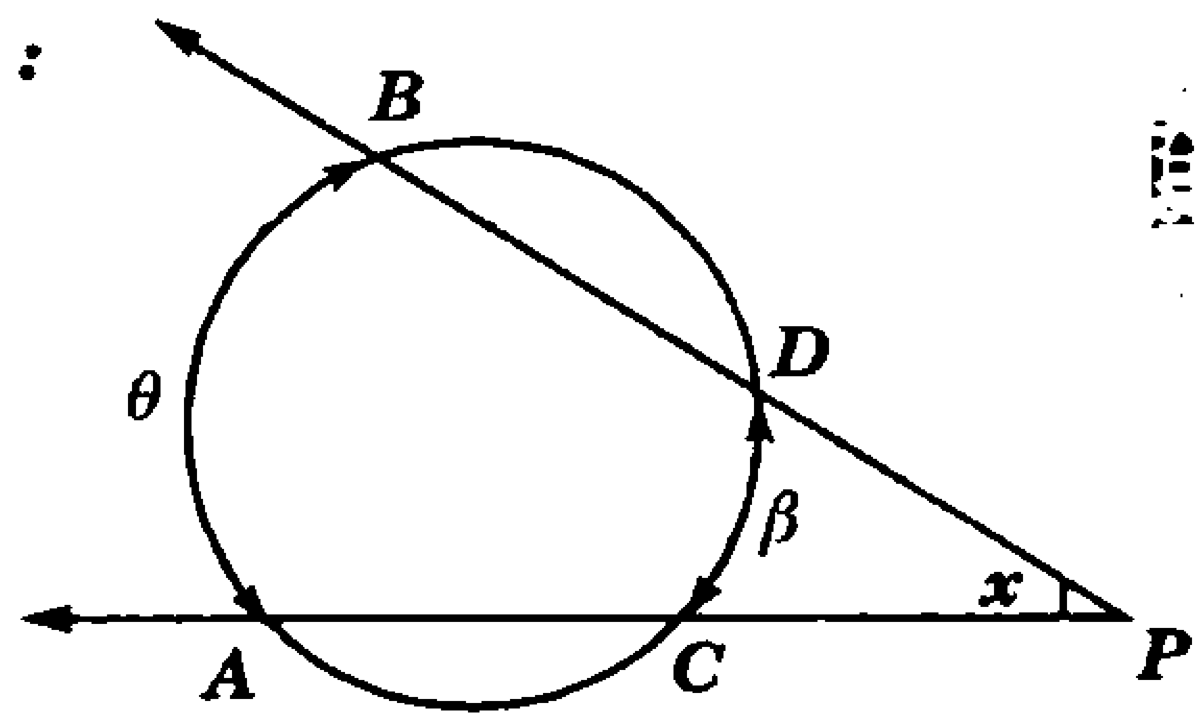


En la figura, $\measuredangle APB$: ángulo interior se cumple:

$$\boxed{x = \frac{\theta - \beta}{2}}$$

• ÁNGULO EXTERIOR :

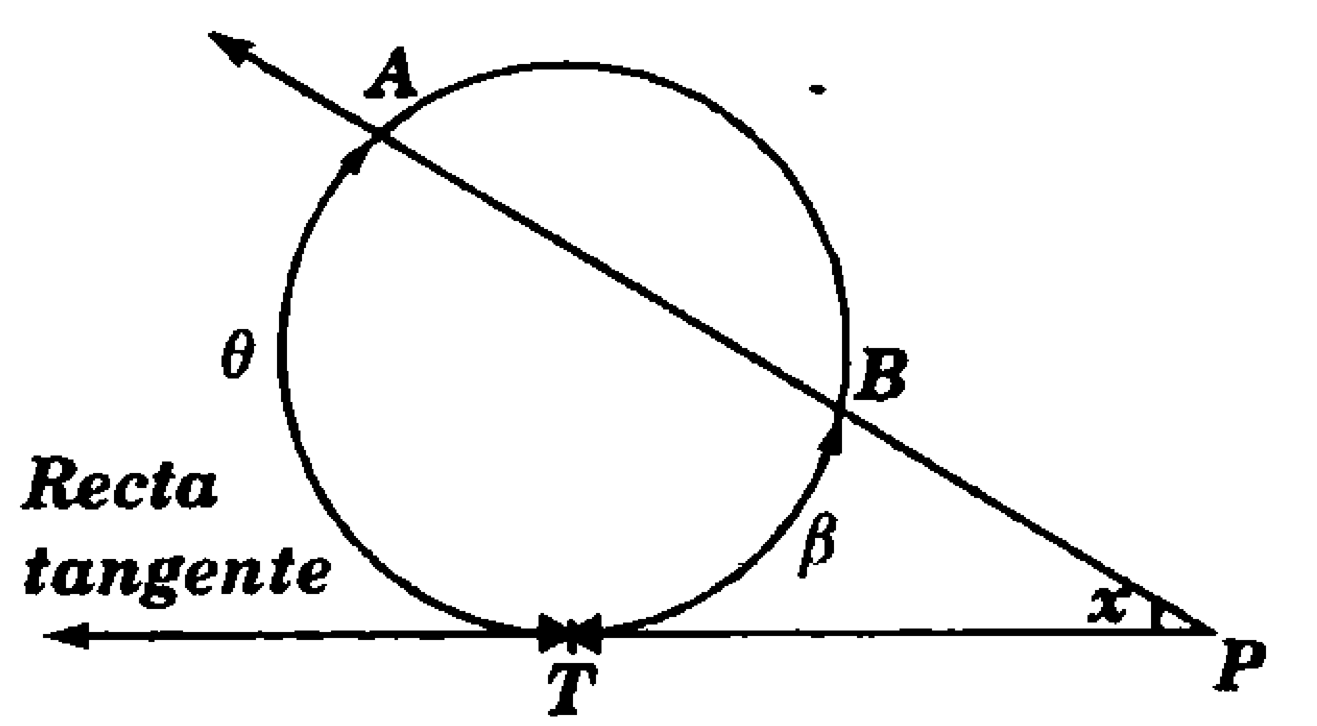
Primer caso :



En la figura: $\measuredangle APB$: ángulo exterior se cumple

$$\boxed{x = \frac{\theta - \beta}{2}}$$

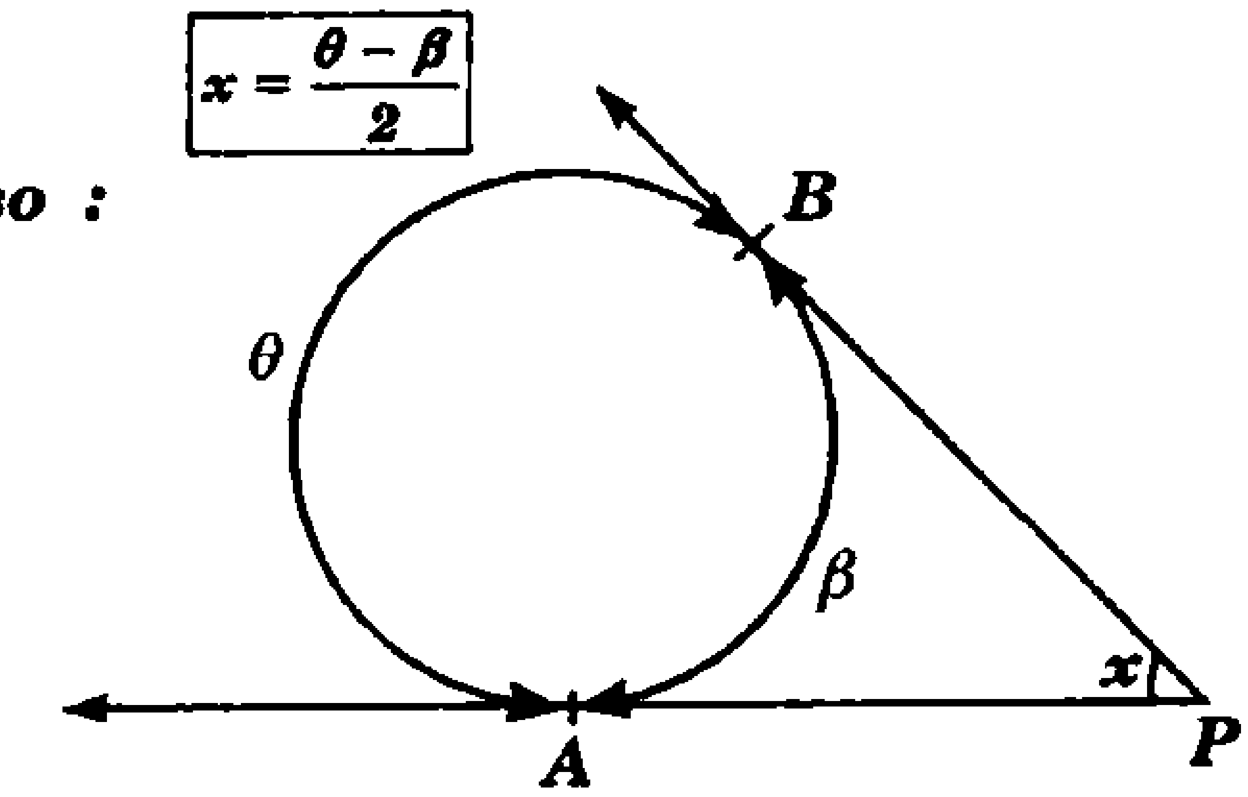
Segundo caso :



En la figura, $\measuredangle TPA$: ángulo exterior se cumple:

$$\boxed{x = \frac{\theta - \beta}{2}}$$

Tercer caso :

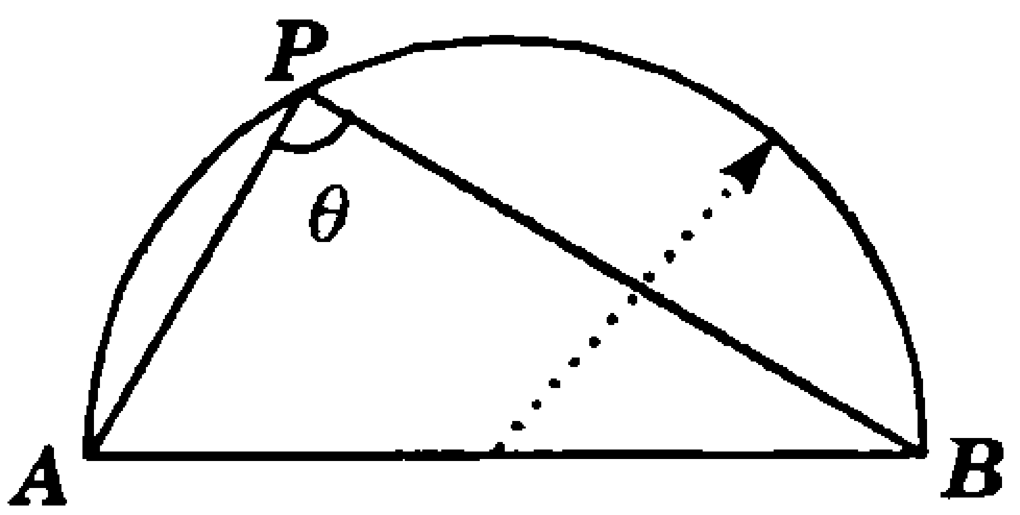


En la figura , $\measuredangle APB$: ángulo exterior

,se cumple $\boxed{x = \dfrac{\theta - \beta}{2}}$

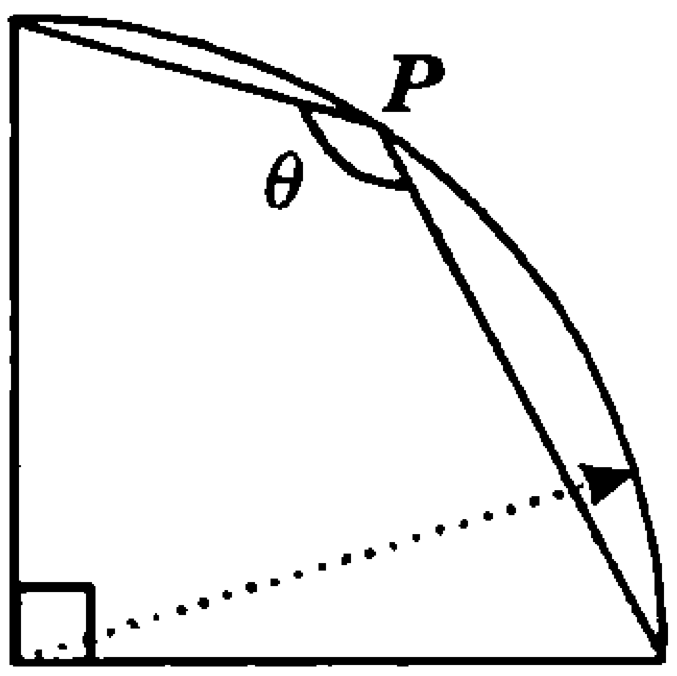
además : $x + \beta = 180°$ .....(sólo en el tercer caso)

OBSERVACIONES :



Si P es punto medio de la semicircunferencia $\overline{AB}$: diámetro , entonces : $\theta = 90°$

II)

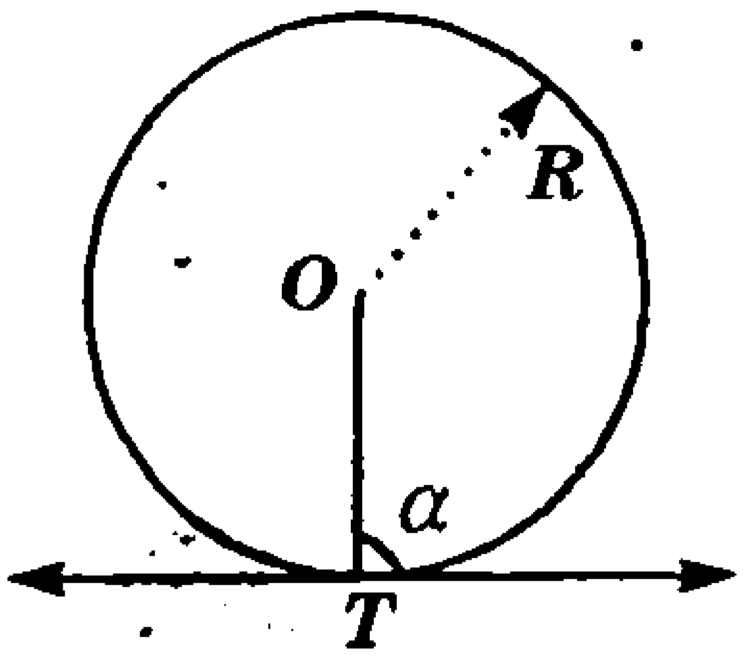


Si P es punto del cuadrante.

Entonces: $\theta = 135°$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES

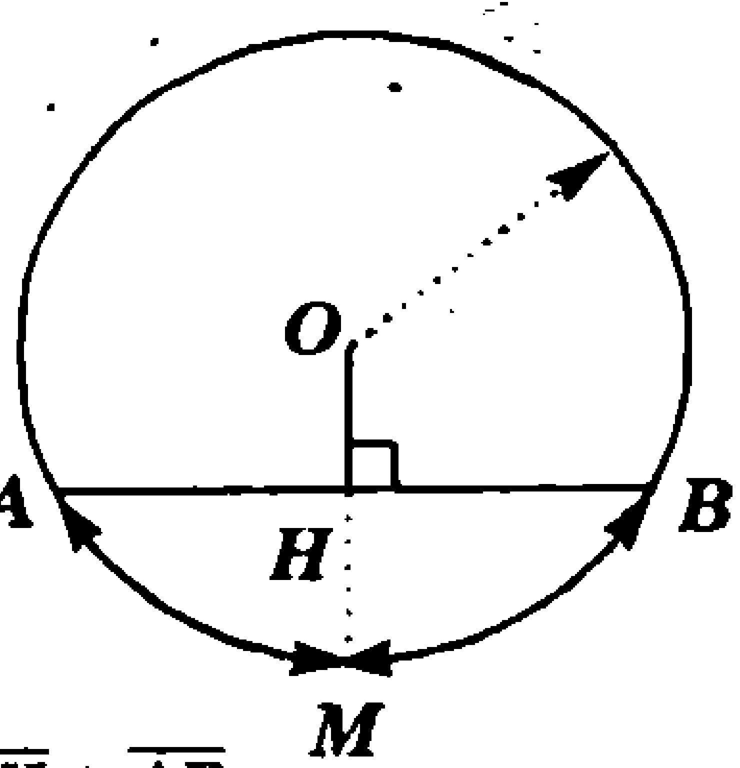
1)



* Si T es punto de tangencia entonces : $\boxed{\alpha = 90°}$

Además : $\boxed{OT = R}$

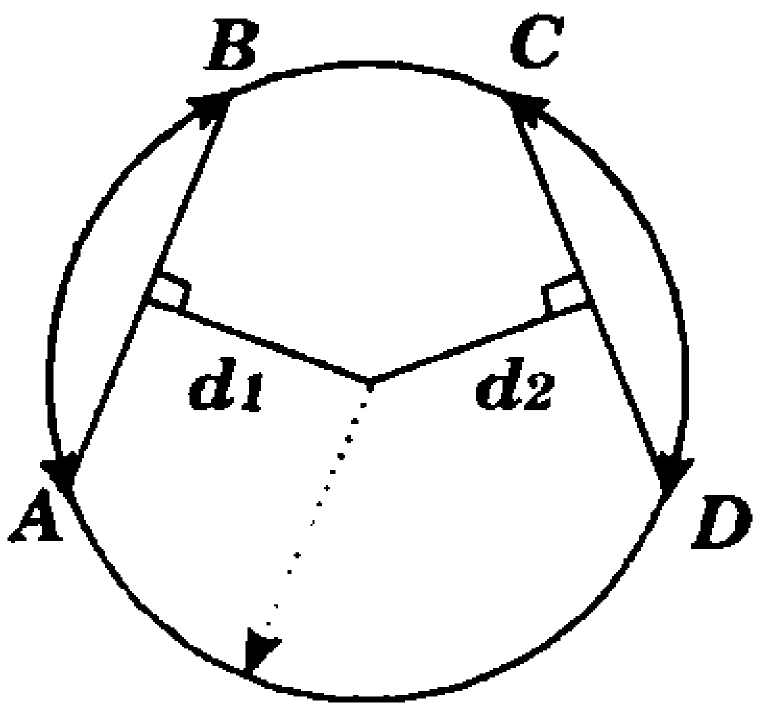
2)



Si: $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow AH = HB$ y $m\widehat{AM} = m\widehat{MB}$

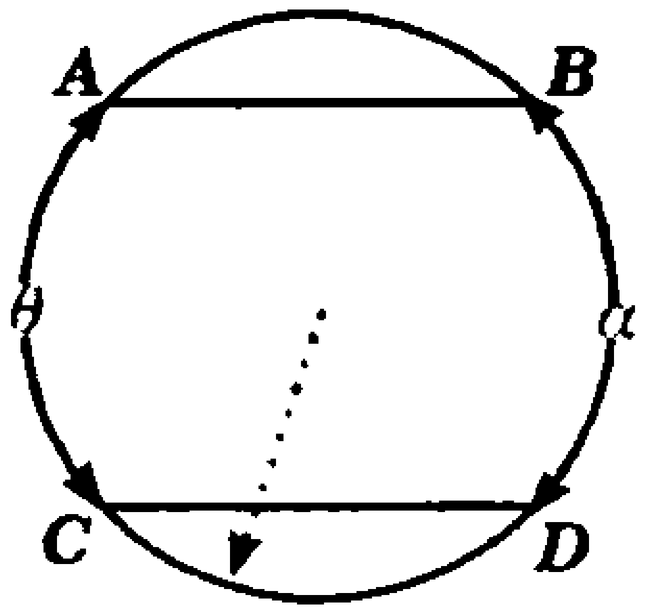
3)



* Si : $AB = CD$

$\Rightarrow \boxed{m\widehat{AB} = m\widehat{CD}}$ y $\boxed{d_1 = d_2}$

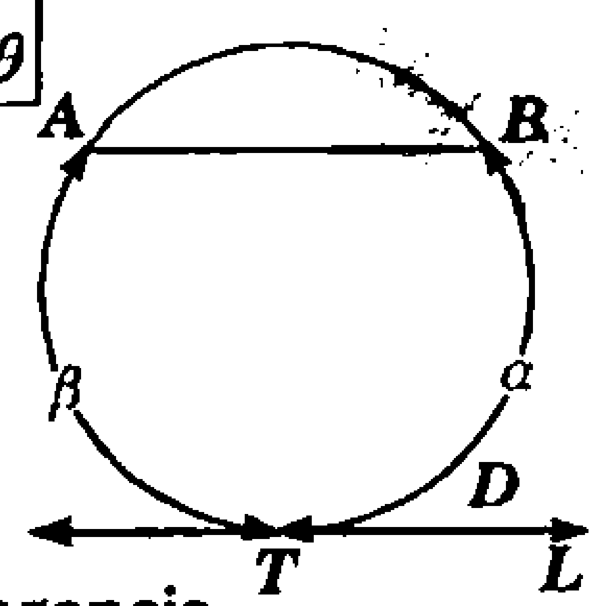
4)



* Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Entonces: $\alpha = \theta$

También :

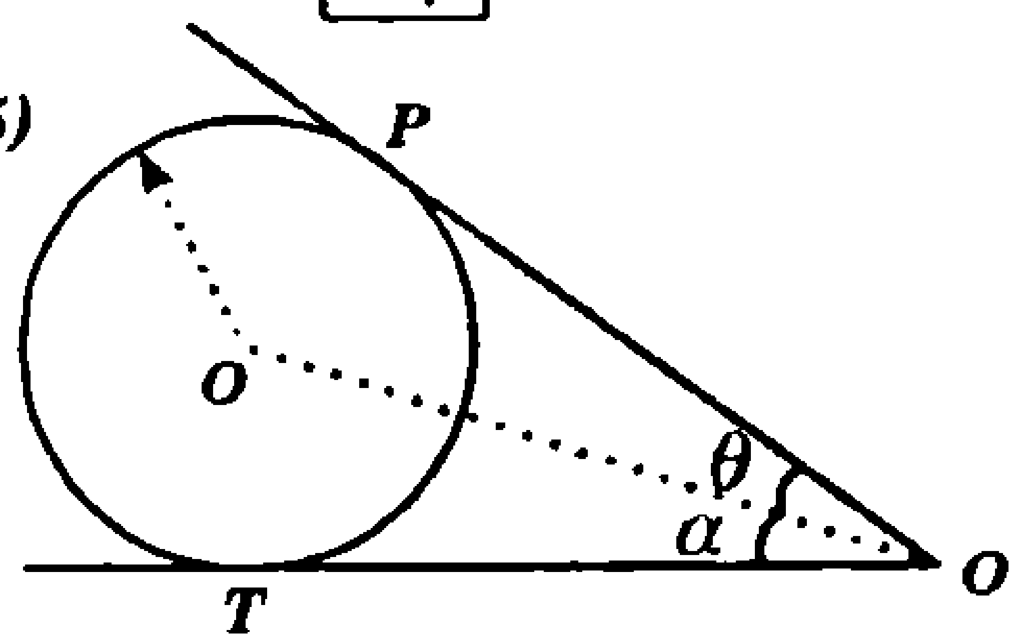


Si: $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{L}$

T, punto de tangencia

Entonces : $\boxed{\alpha = \beta}$

5)



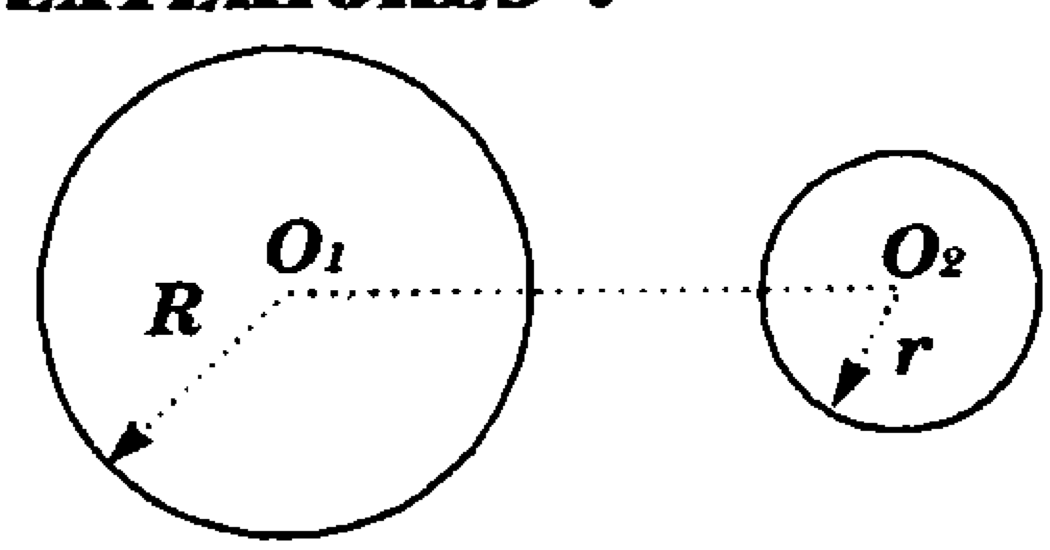
Si T y P son puntos de tangencia

Entonces : $OT = OP$

Además : $\alpha = \beta$

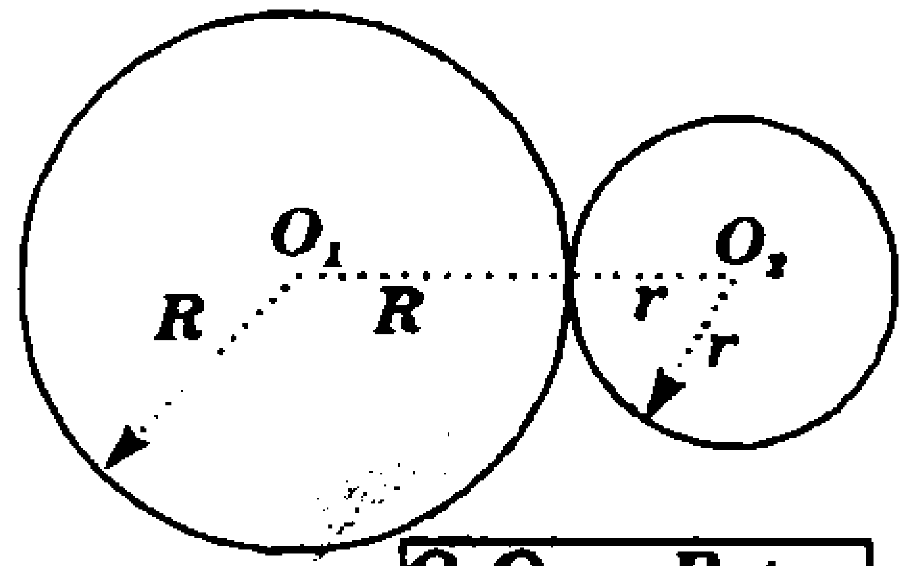
POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS COPLANARES

CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES :



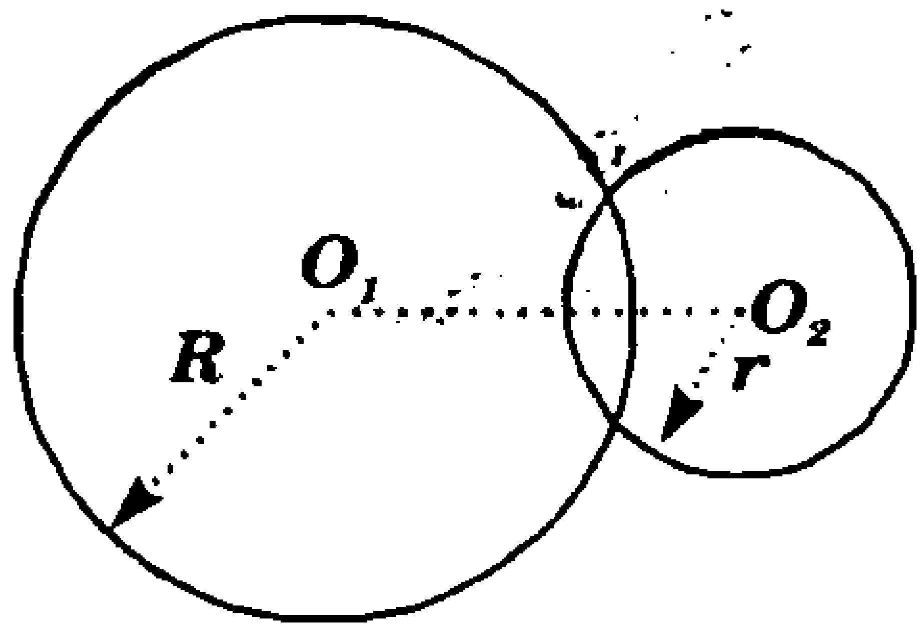
$\boxed{O_1O_2 > R + r}$

* ***Circunferencias tangentes exteriores :***



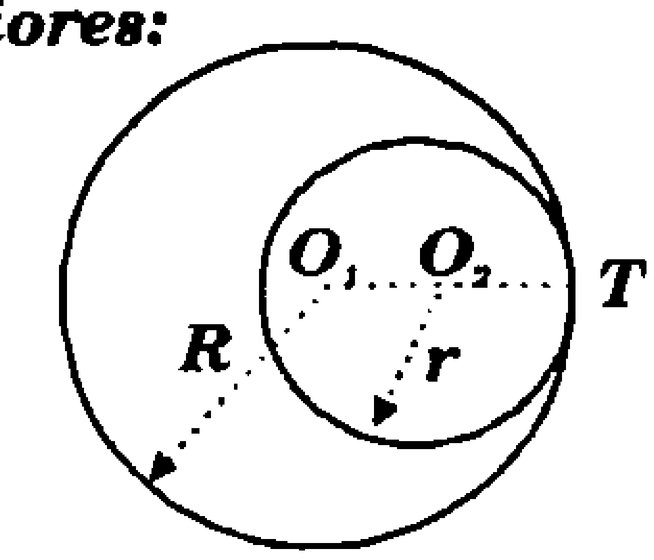
$\boxed{O_1O_2 = R + r}$

****Circunferencias secantes :***



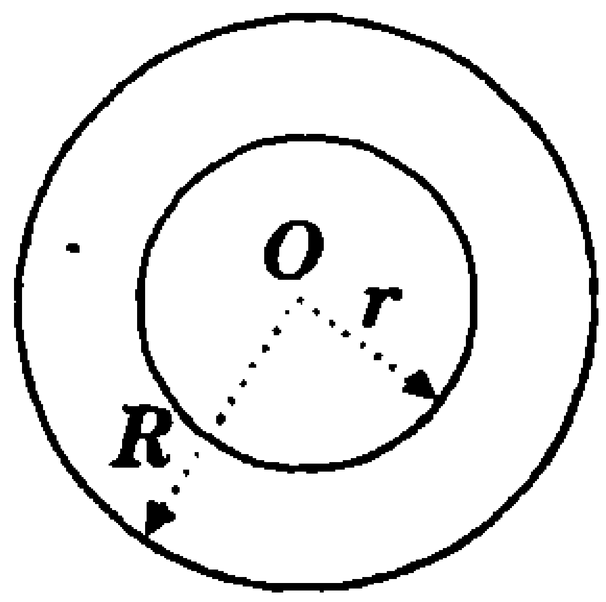
$\boxed{R - r < O_1O_2 < R + r}$

* ***Circunferencias tangentes interiores:***



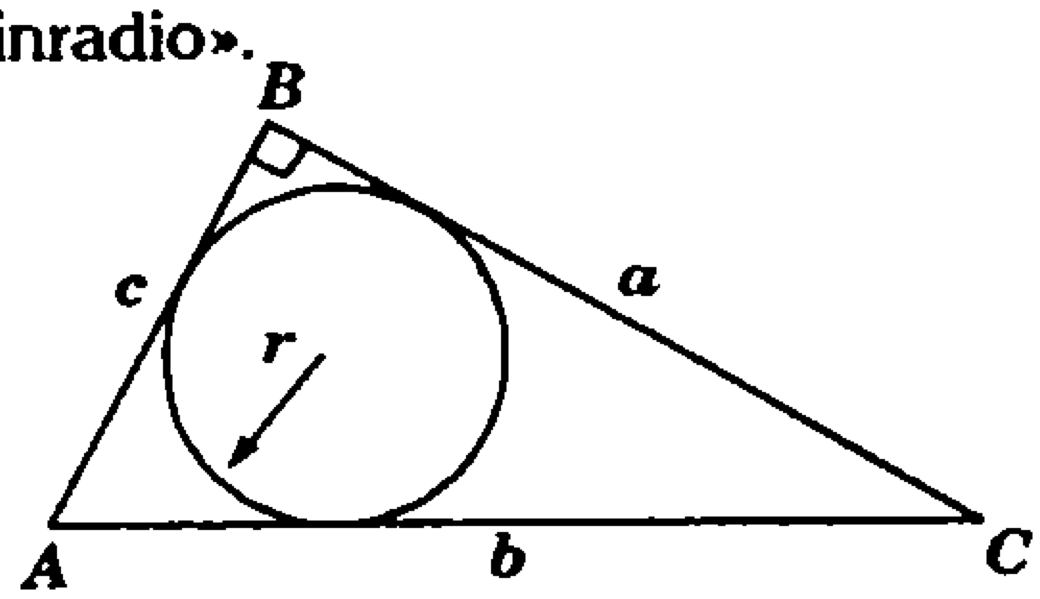
$\boxed{O_1O_2 = R - r}$

* ***Circunferencias concéntricas :***



TEOREMA DE PONCELET

"En todo triángulo rectángulo la suma de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa más el doble del inradio».

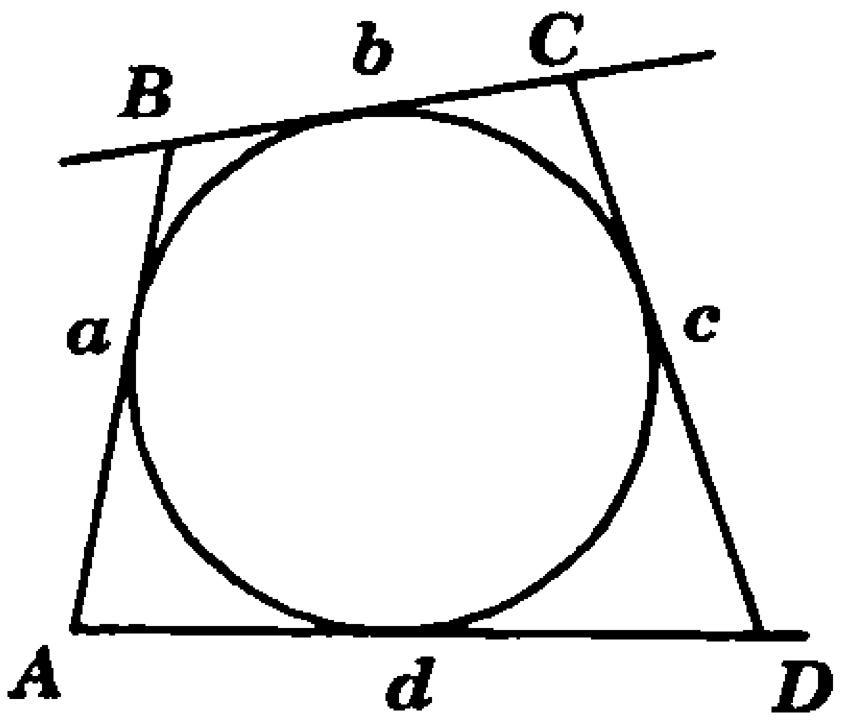


$AB + BC = AC + 2r$

$\Rightarrow$ $\boxed{c + a = b + 2r}$

TEOREMA DE PITOT

"En todo cuadrilátero circunscrito se cumple que la suma de las medidas de dos lados opuestos es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados".

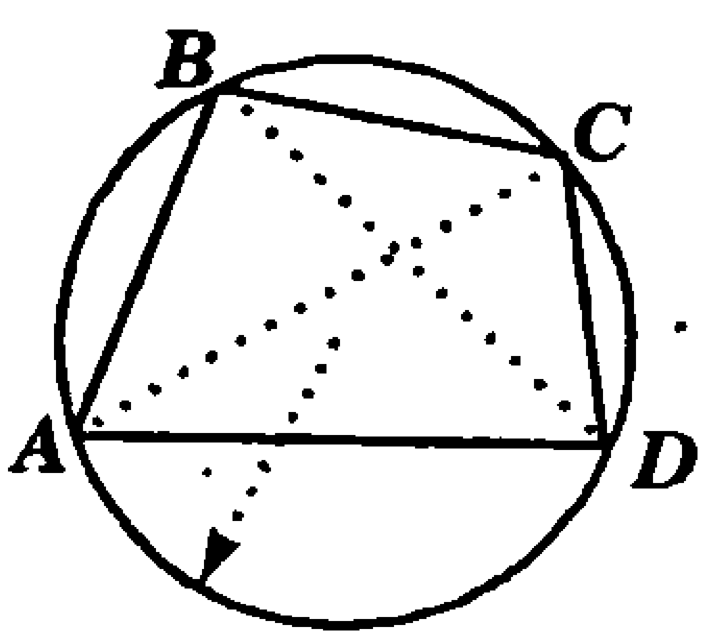


$AB + CD = BC + AD$

$\Rightarrow$ $\boxed{a + c = b + d}$

CUADRILÁTERO INSCRITO EN LA CIRCUNFERENCIA

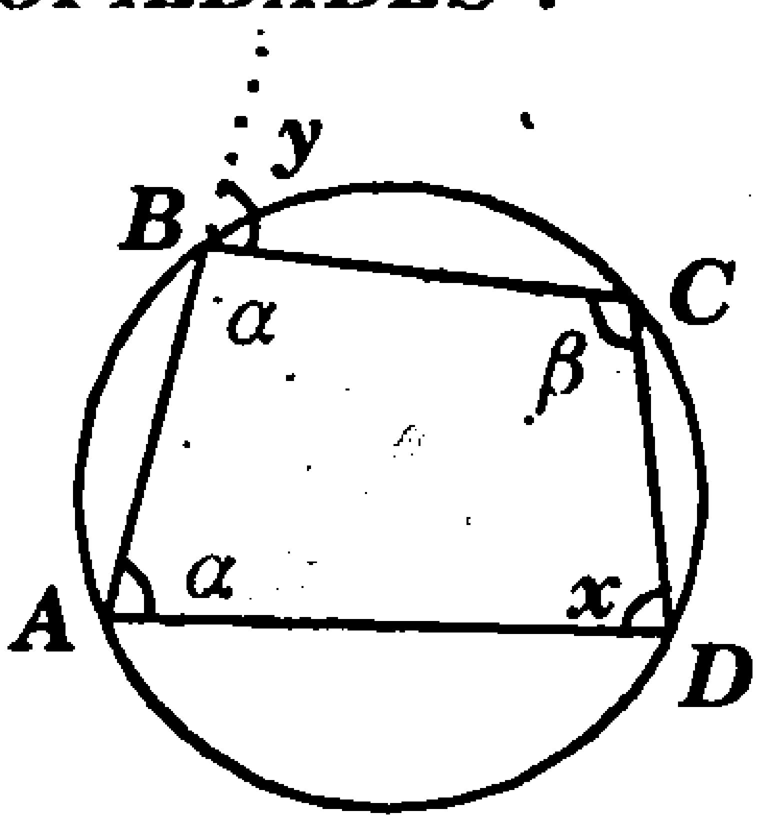
Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una circunferencia.



⏢$ABCD$ está inscrito en la circunferencia

PROPIEDADES :

1)

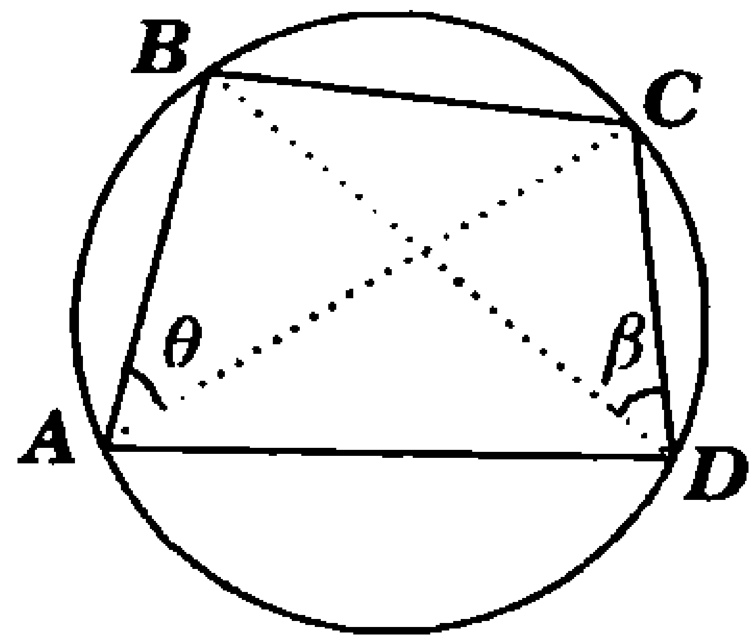


⏢$ABCD$: inscrito en al circunferencia

Se cumple : $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$

También : $x = y$

2)



⏢$ABCD$: inscrito en la circunferencia

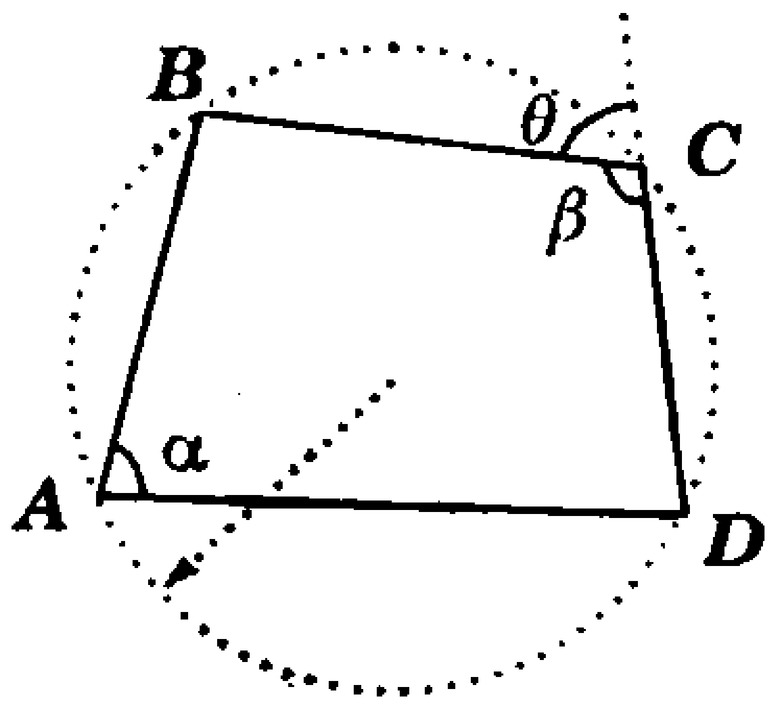
Se cumple : $\boxed{\theta = \beta}$

CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE EN UNA CIRCUNFERENCIA

Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pueden pertenecer a una circunferencia.

Un cuadrilátero será inscriptible si cumple una de las siguientes condiciones.

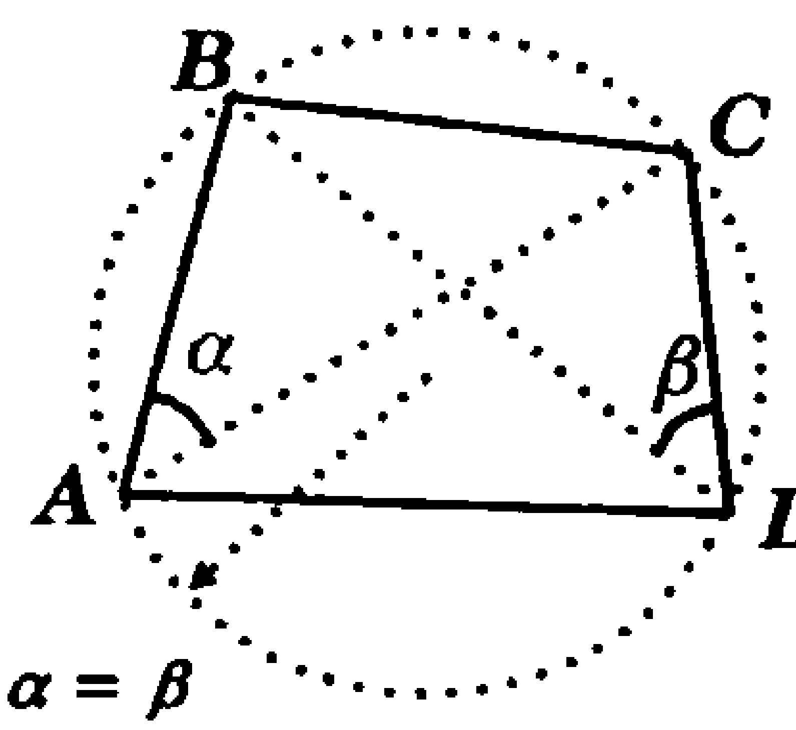
1)



Si: $\alpha + \beta = 180°$ ó $\alpha = \theta$

$\Rightarrow$ ⏢$ABCD$ es inscriptible

2)

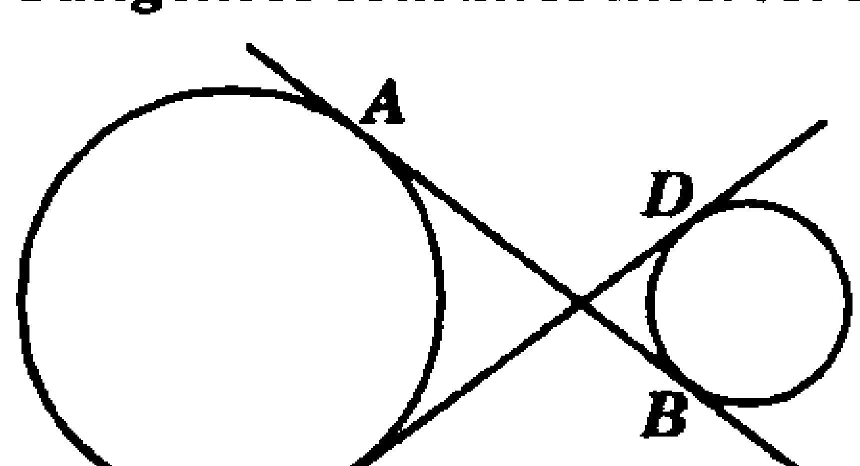


Si $\alpha = \beta$

$\Rightarrow$ ⏢ $ABCD$ es inscriptible

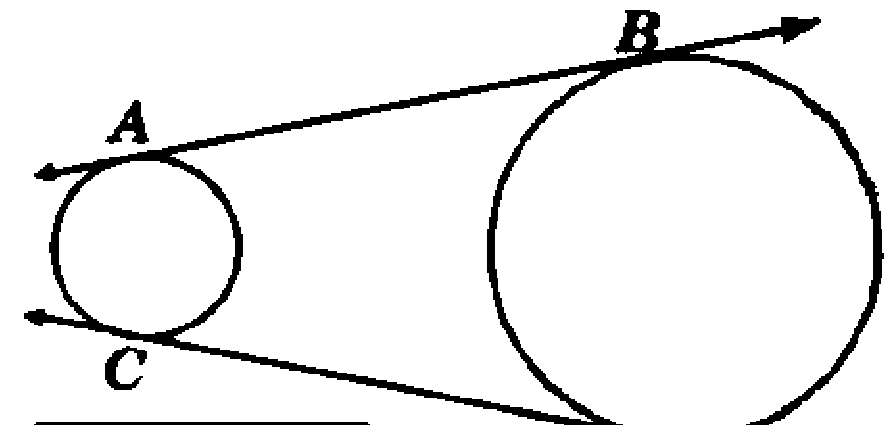
OBSERVACIONES :

I) Tangentes comunes interiores :



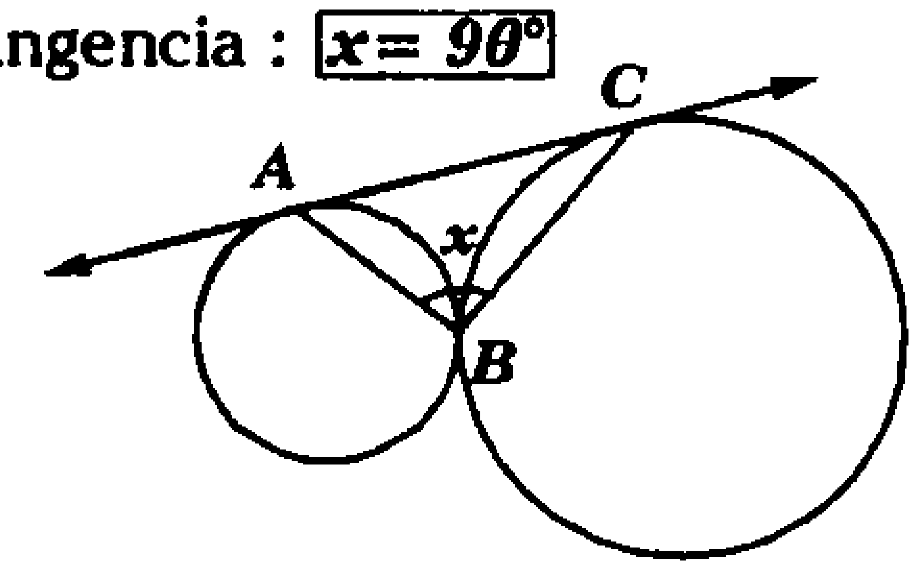
$\boxed{AB = CD}$

II) Tangentes comunes exteriores :

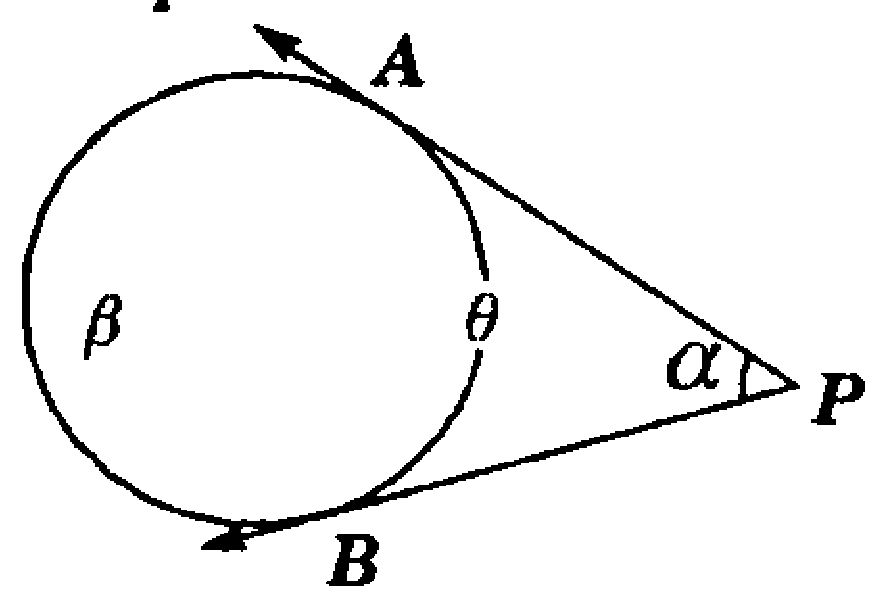


$\boxed{AB = CD}$

III) Si A , B y C son puntos de tangencia : $\boxed{x = 90°}$



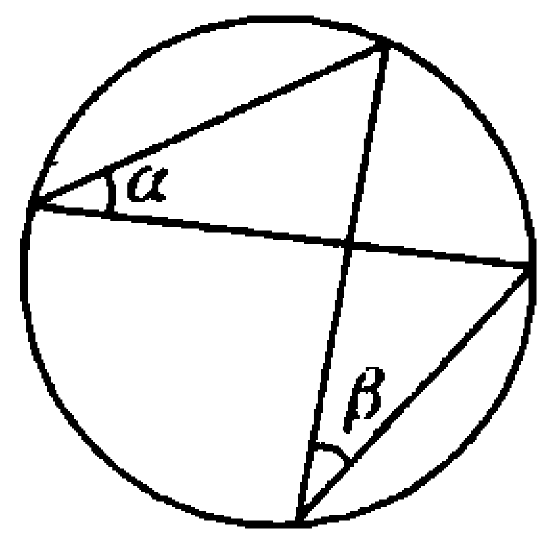
IV) Propiedad del sombrero :



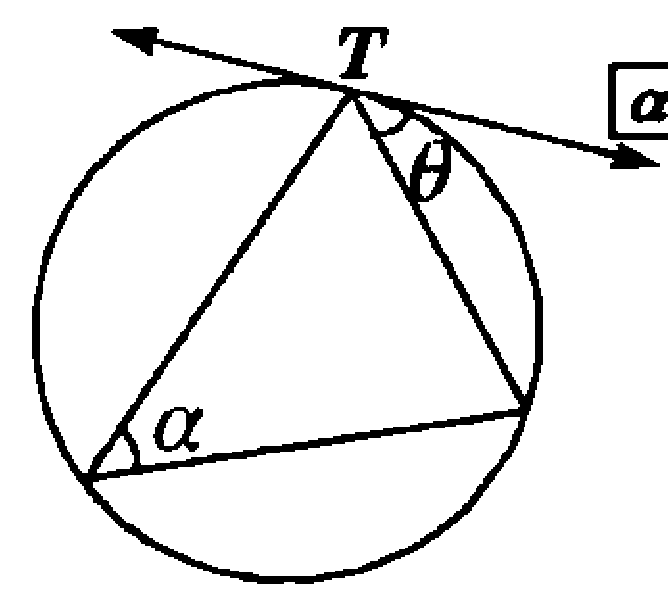
$\boxed{\alpha + \theta = 180°}$ y $\boxed{\beta - \alpha = 180°}$

V) Propiedad de los ángulos inscritos en un mismo arco:

$\boxed{\alpha = \beta}$



VI) Si "*T*" es punto de tangencia :



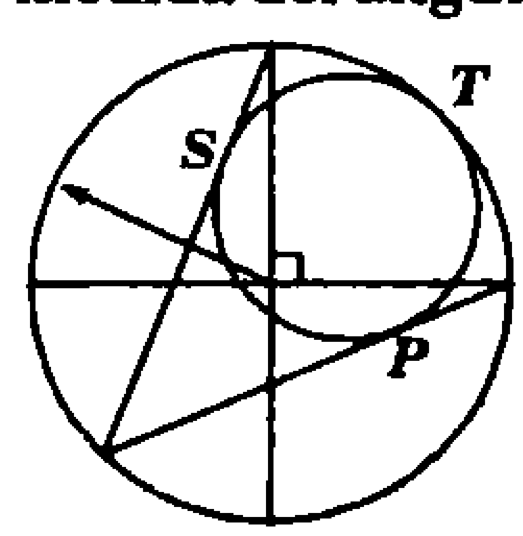
$\boxed{\alpha = \theta}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Calcular la medida del ángulo *STP*.

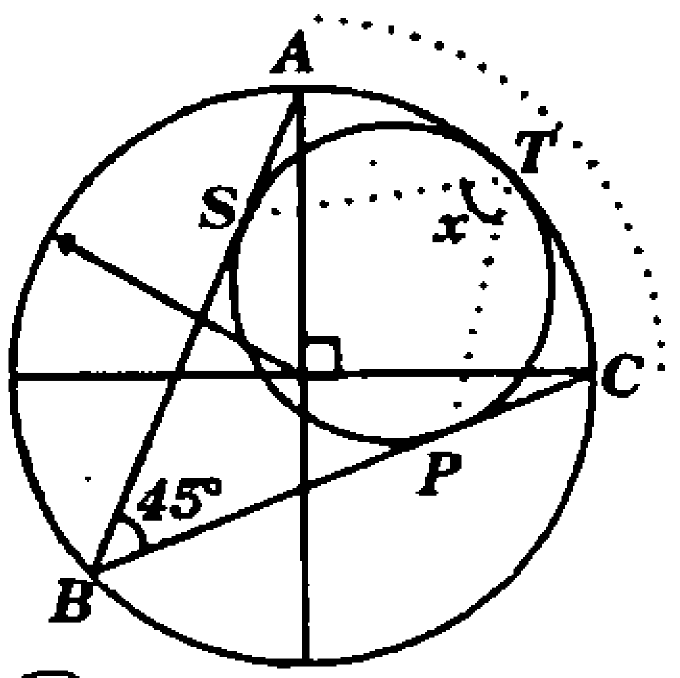
A) 60°
B) 72°
C) 67°
D) 67,5°
E) 50°



RESOLUCIÓN:

∢ inscrito:

$m\hat{ABC} = 45°$



$\Rightarrow m\hat{ABC} + m\widehat{SP} = 180°$

$\Rightarrow m\widehat{SP} = 135°$

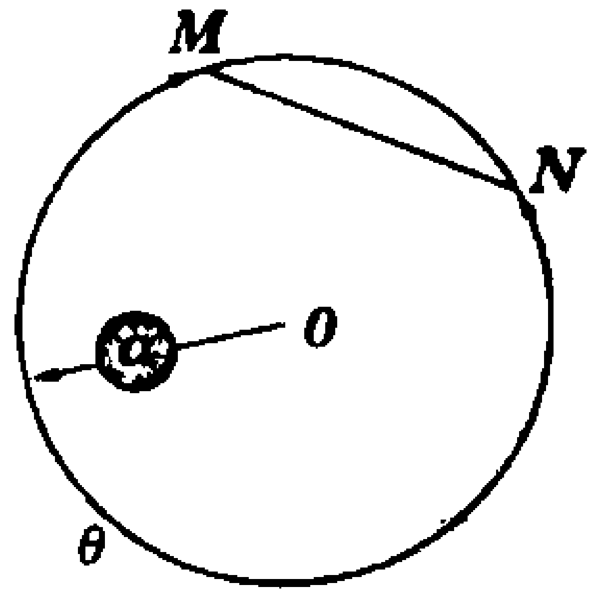
∢ inscrito: $x = \frac{1}{2}(135°) = 67{,}5°$

RPTA : "D"

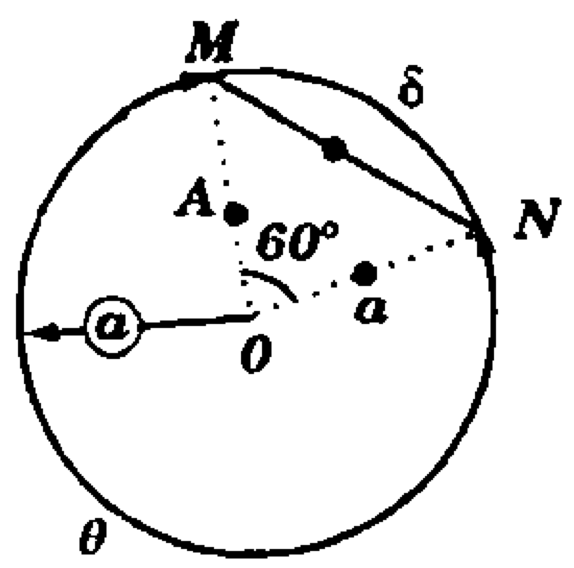
PROBLEMA 2:

Calcular "θ". Si $MN = a$

A) 270°
B) 300°
C) 333°
D) 242°
E) 240°



RESOLUCIÓN:



ΔMON: Equilátero

∢ central: $\delta = 60°$

$\theta + \delta = 360°$

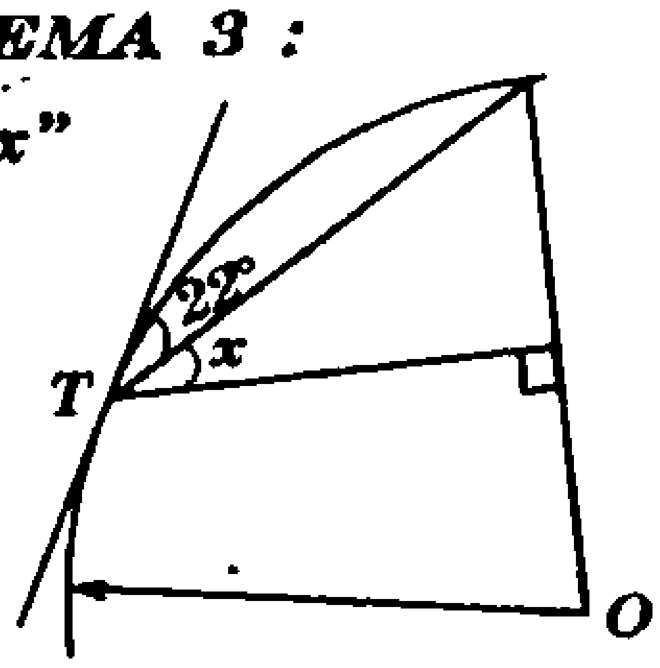
$\theta + 60° = 360° \Rightarrow \theta = 300°$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular "x"

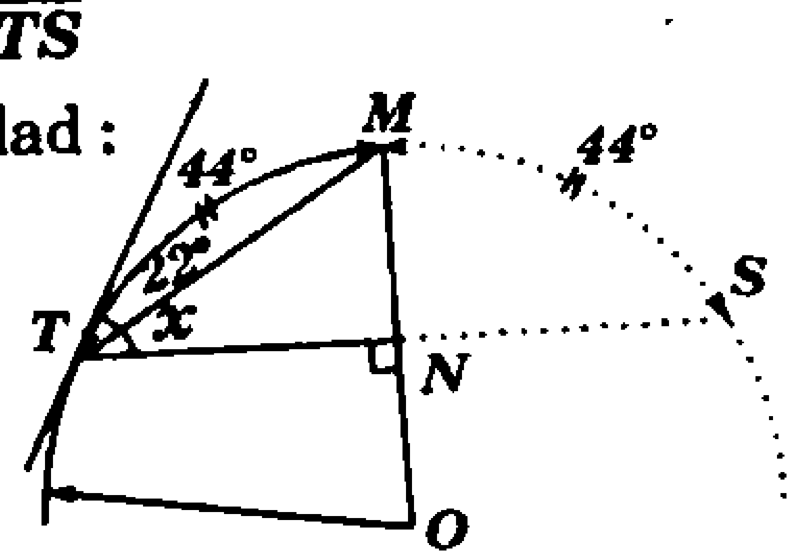
A) 11°
B) 33°
C) 22°
D) 30°
E) 28°



RESOLUCIÓN :

* $\overline{OM} \perp \overline{TS}$

*Propiedad :



$m\widehat{MS} = m\widehat{MT} = 44°$

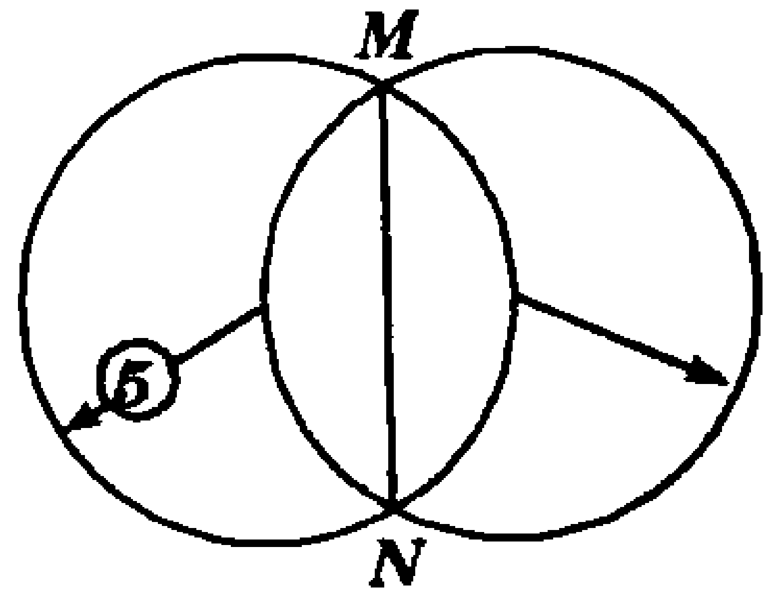
* Inscrito: $x = \frac{1}{2}(44°) = 22°$

RPTA:"C"

PROBLEMA 4 :

Calcular : MN

A) 5
B) $5\sqrt{2}$
C) $5\sqrt{3}$
D) 8
E) 10

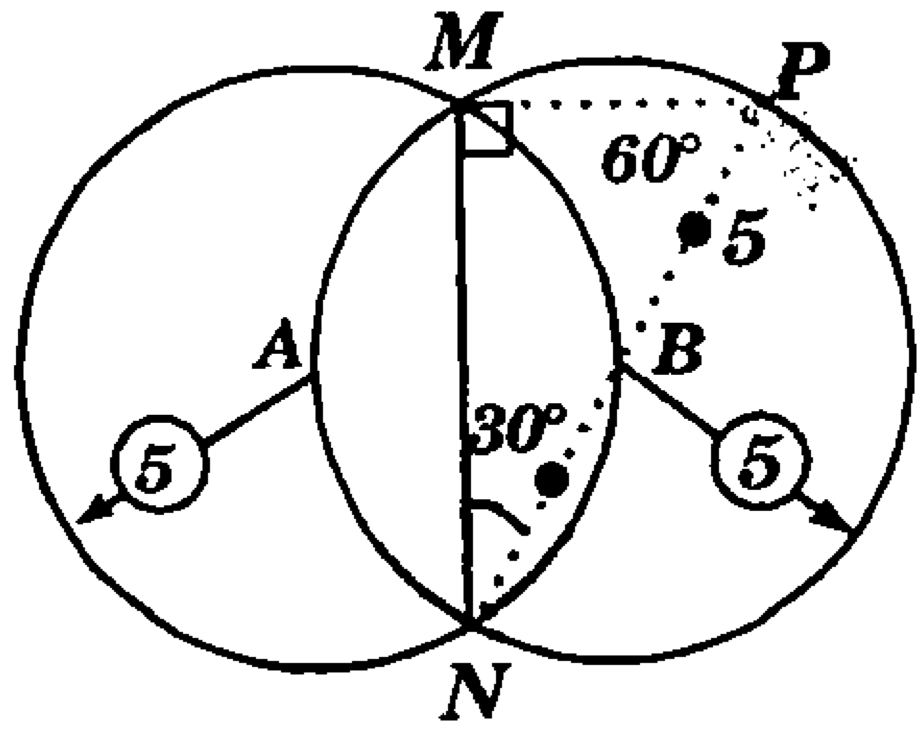


RESOLUCIÓN :

Se traza el diámetro NP

* $mN\hat{M}P = 90°$

◺ PMN: Notable de 30° y 60°



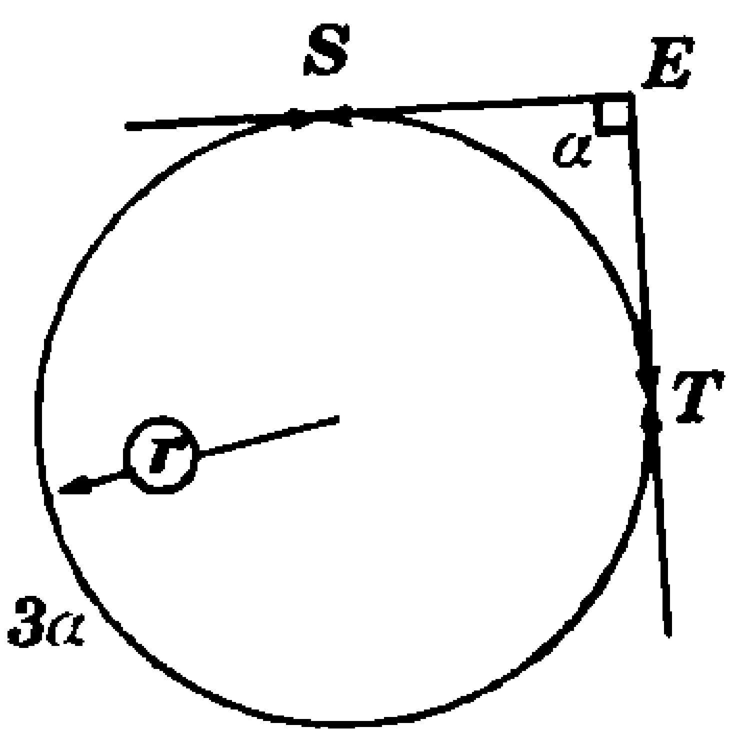
$\Rightarrow MN = 5\sqrt{3}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Calcular "r". Si $ES = 3$.

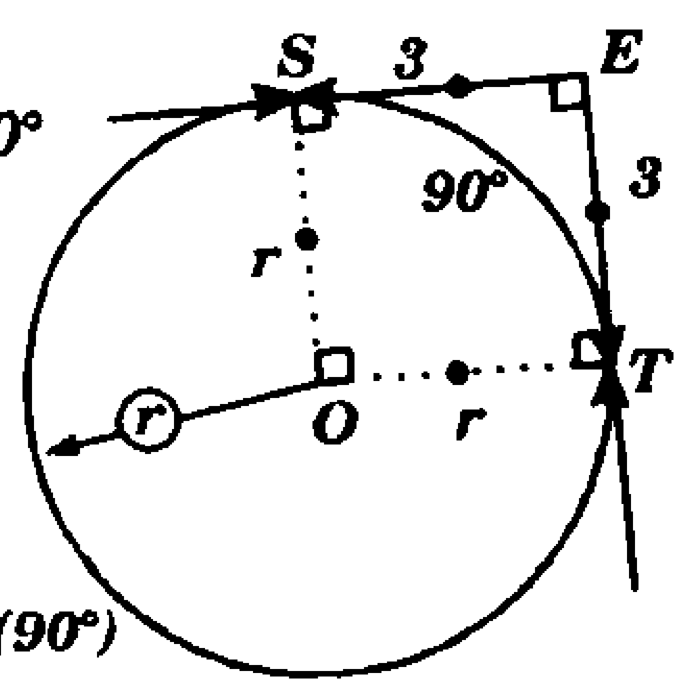
A) 4
B) 3
C) 5
D) 6
E) 2



RESOLUCIÓN :

$\alpha + 3\alpha = 360°$

$\Rightarrow \alpha = 90°$



* ▭$OSET$: Rectángulo

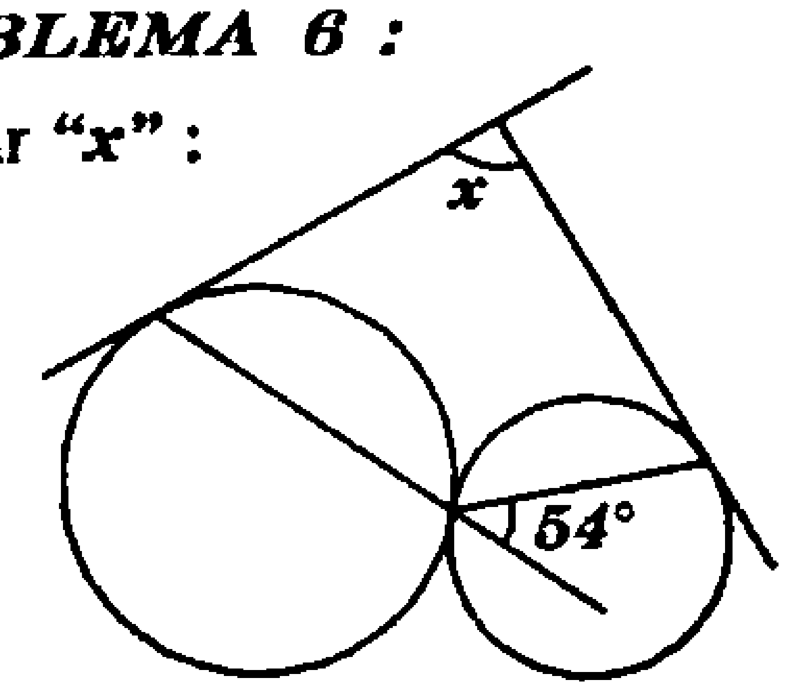
$\Rightarrow r = 3$

RPTA : "B"

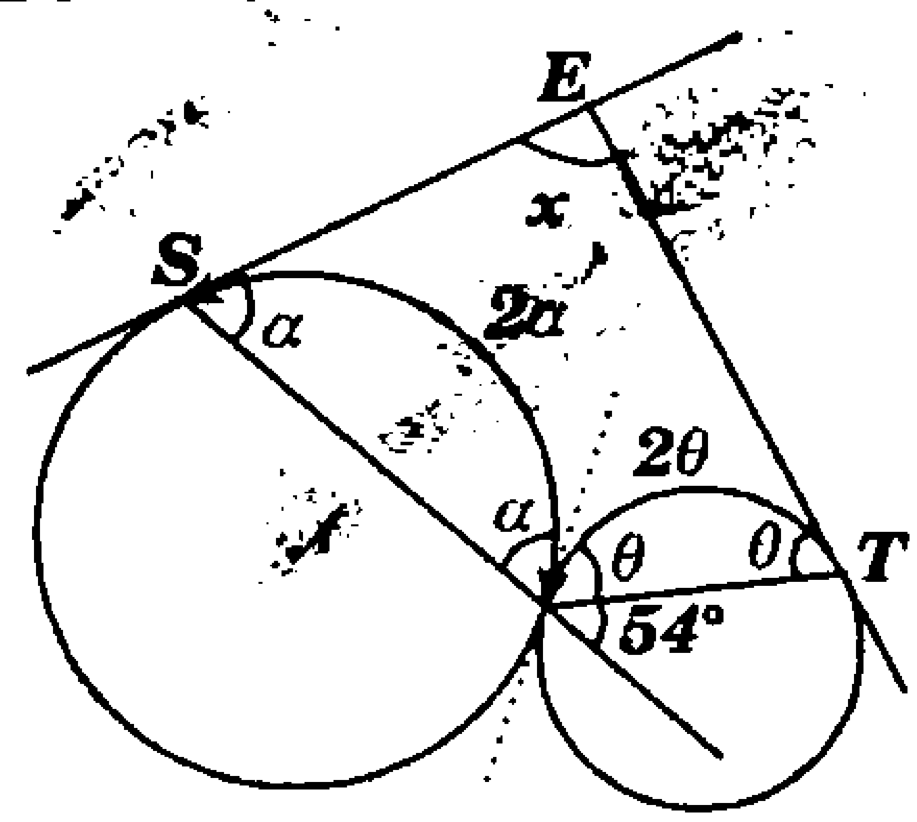
PROBLEMA 6 :

Calcular "x" :

A) 90°
B) 78°
C) 54°
D) 144°
E) 108°



RESOLUCIÓN :



* Sea : $m\widehat{SP} = 2\alpha$ y $m\widehat{PT} = 2\theta$

* Se traza la tangente común y se determinan ∢ semi – inscritos.

⏢ $SETP$: $x + 2\alpha + 2\theta = 360°$

$x = 360° - 2(\alpha + \theta)$ ....(I)

* Pero : $\alpha + \theta + 54° = 180°$

$\alpha + \theta = 126°$

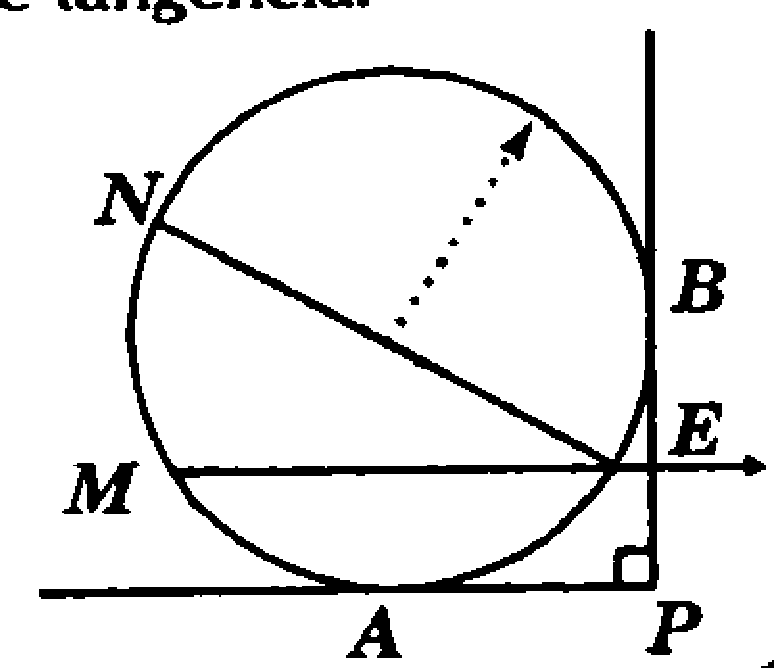
* En (I): $x = 360° - 2(126°) = 108°$

RPTA:"E"

PROBLEMA 7 :

En la figura , calcular la $m\widehat{MN}$ si : $BE = EP$, $\overline{EM} \parallel \overline{AP}$; A y B son puntos de tangencia.

A) 20°
B) 45°
C) 60°
D) 30°
E) 53°



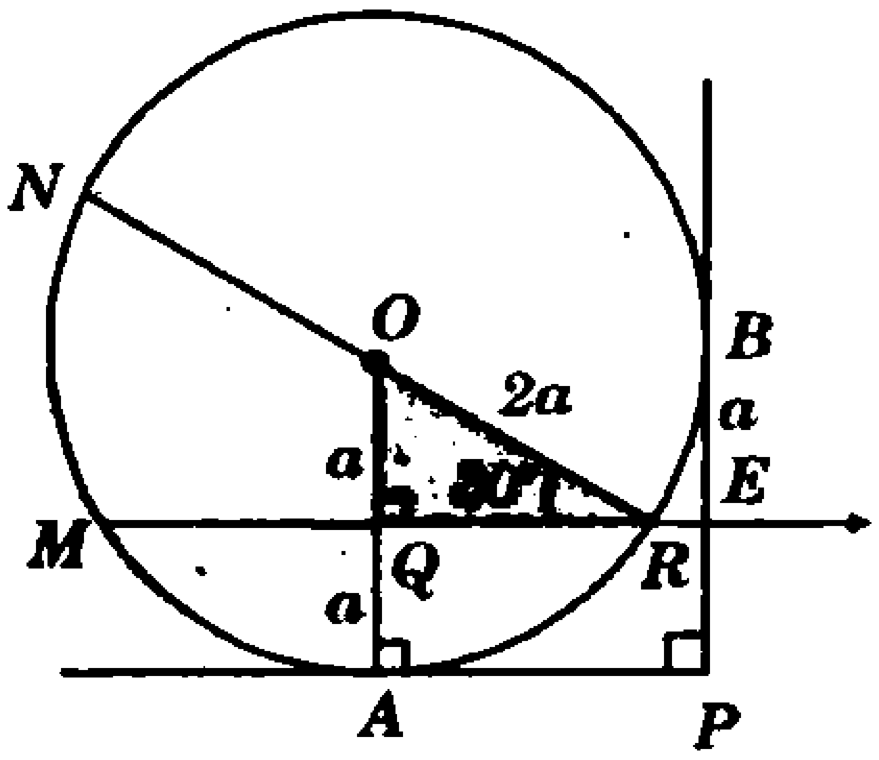
RESOLUCIÓN :

* Piden $m\widehat{MN}$

*Trazamos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

$\Rightarrow OQ = QA = BE = EP = a$

$\Rightarrow$ El radio es igual a $2a$



$\triangle$ *OQR* es notable *(30° y 60°)*

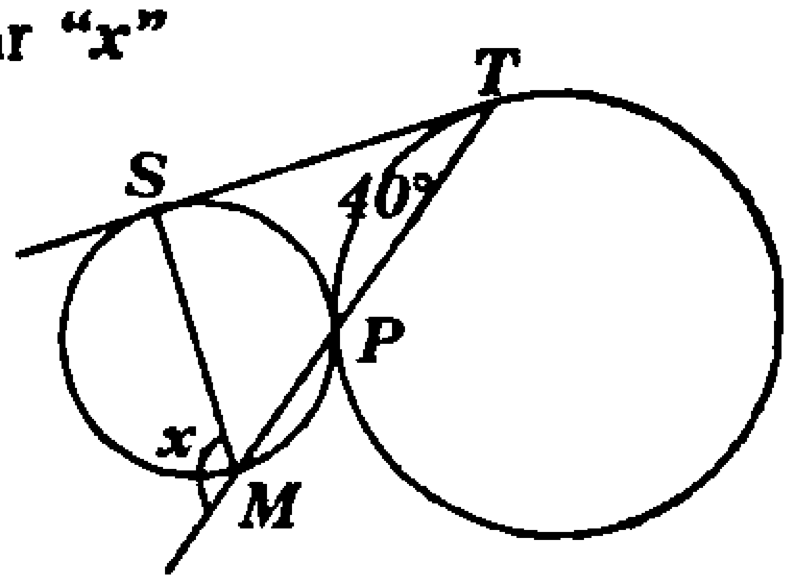
$m\sphericalangle ORQ = 30° \Rightarrow m\widehat{MN} = 60°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

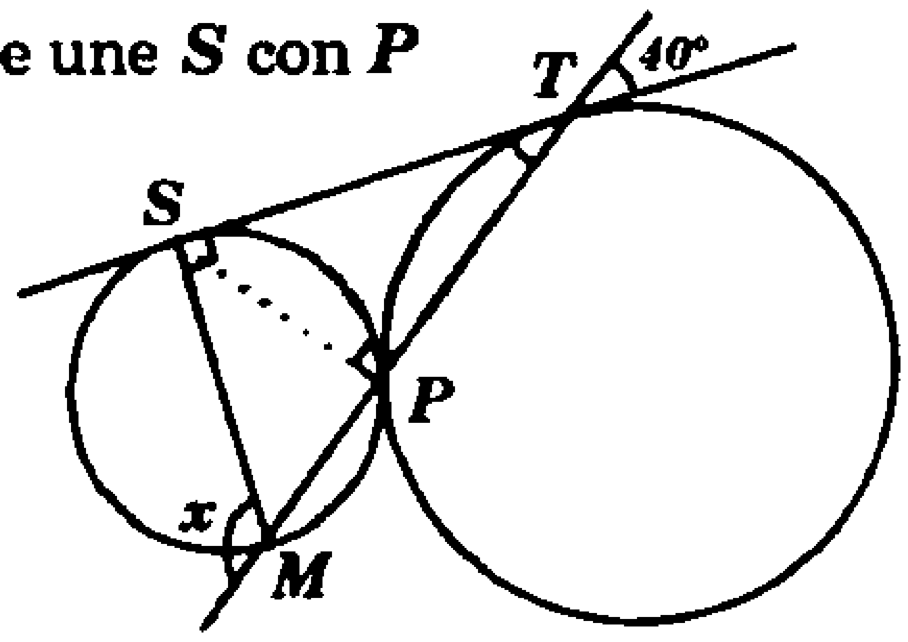
Calcular "*x*"

A) 120°
B) 115°
C) 140°
D) 130°
E) 135°



RESOLUCIÓN :

* Se une *S* con *P*



* Propiedad : $mS\widehat{P}T = 90°$ $\overline{MS}$ es diámetro $mM\widehat{S}T = 90°$

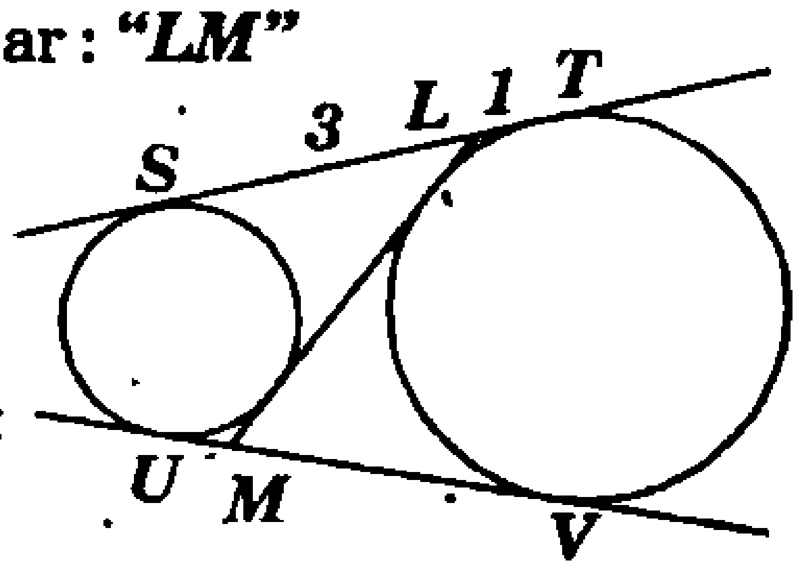
* Luego : $x = 90° + 40° = 130°$

RPTA : "D"

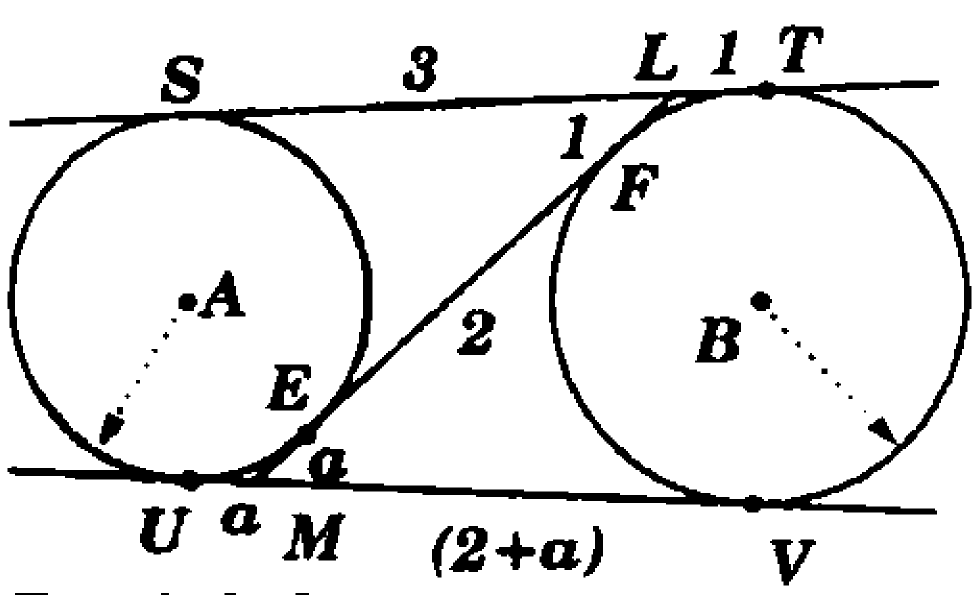
PROBLEMA 9 :

Calcular : "*LM*"

A) 2
B) 5
C) 4
D) 2,5
E) 6



RESOLUCIÓN :



* Propiedad :

* *A* : $SL = LE = 3$

* *B* : $FM = MV = 2 + a$

* Propiedad de la tangente común: $UV = ST$

$a + 2 + a = 3 + 1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow LM = 4$

RPTA: "C"

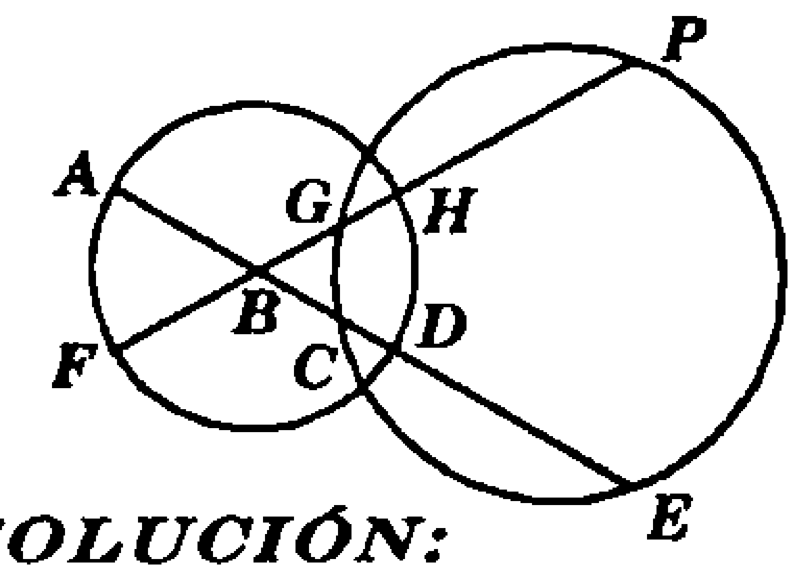
PROBLEMA 10

Según la figura, calcule :

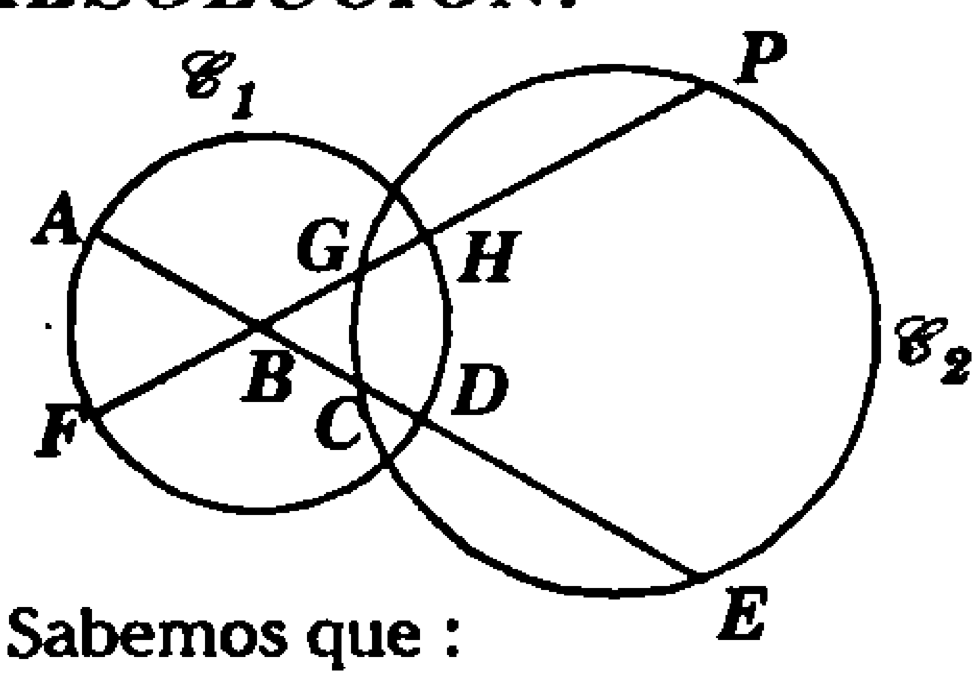
$$m\widehat{PE} - m\widehat{AF}$$

si: $m\widehat{HD} + m\widehat{GC} = 50°$

A) 25°
B) 50°
C) 10°
D) 20°
E) 5°



RESOLUCIÓN:



* Sabemos que :

Por ángulo exterior en $\mathscr{C}_2$

$$m\sphericalangle GBC = \frac{m\widehat{PE} - m\widehat{GC}}{2} \quad \text{............ (I)}$$

Por ángulo interior en $\mathscr{C}_1$

$$m\sphericalangle GBC = \frac{m\widehat{AF} + m\widehat{HD}}{2} \quad \text{............ (II)}$$

(I) = (II)

$m\widehat{PE} - m\widehat{GC} = m\widehat{AF} + m\widehat{HD}$

$\Rightarrow m\widehat{PE} - m\widehat{AF} = \underline{m\widehat{HD} + m\widehat{GC}}$

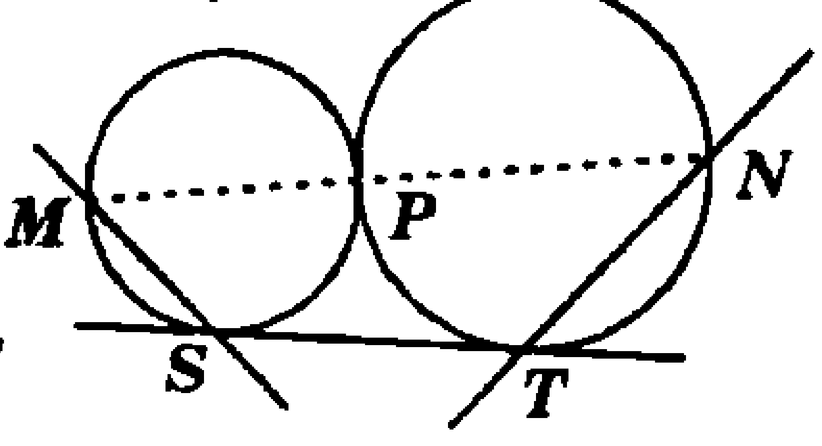
$\Rightarrow m\widehat{PE} - m\widehat{AF} = 50°$

RPTA: "B"

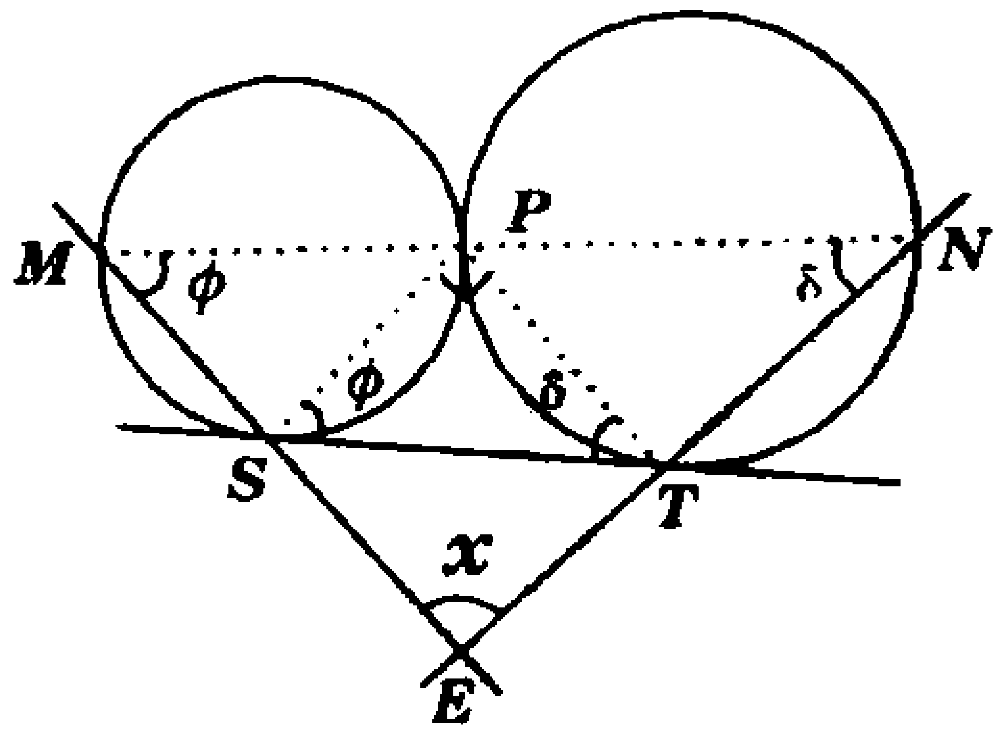
PROBLEMA 11:

Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{MS}$ y $\overline{NT}$. *S, T* y *P* son puntos de tangencia

A) 75°
B) 90°
C) 60°
D) 100°
E) 120°



RESOLUCIÓN :



* Propiedad : $mSPT = 90°$

$\triangle$ $S\widehat{P}T$: $\phi + \delta = 90°$ ....(I)

$\triangle MEN$: $x + \phi + \delta = 180°$ ..... (II)

* (I) en (II):

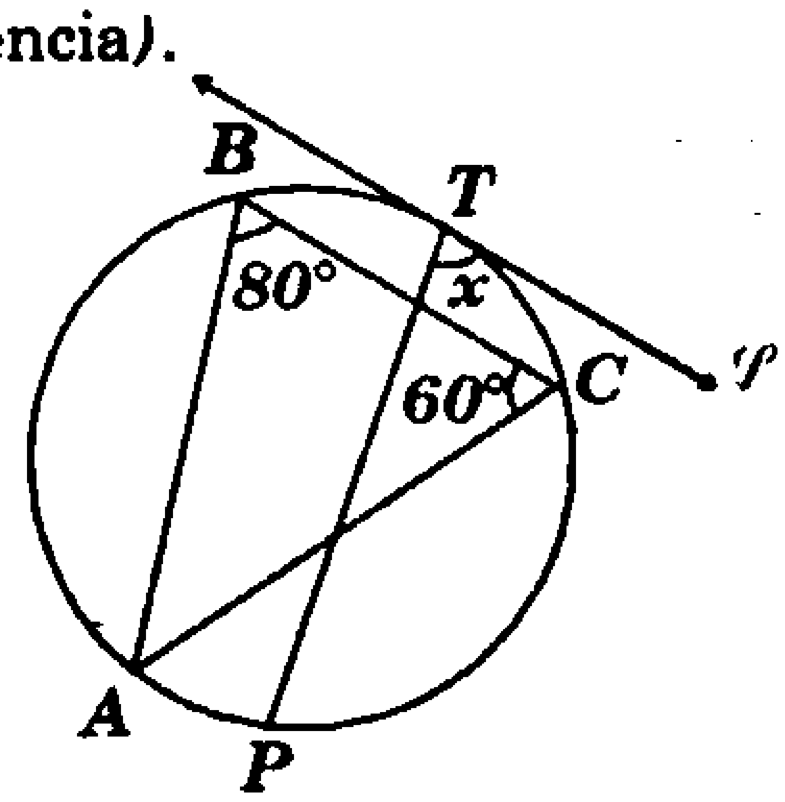
$x + 90° = 180° \Rightarrow x = 90°$

RPTA : "B"

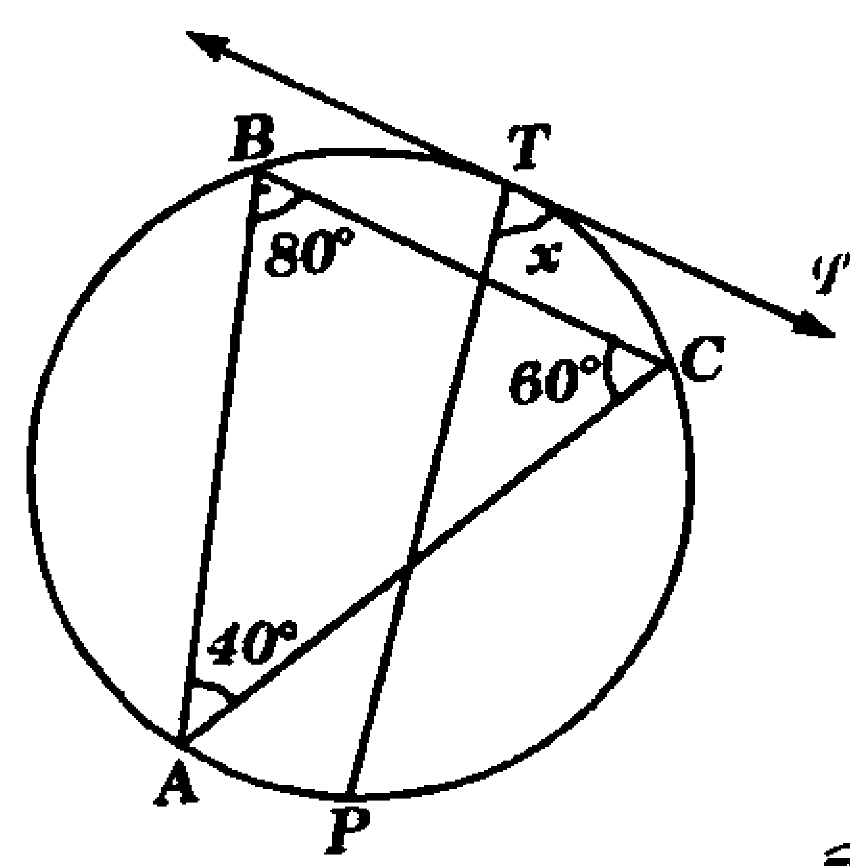
PROBLEMA 12:

En la figura , calcule x , si $m\widehat{AP} = 50°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}} \parallel \overline{BC}$ (*T* es punto de tangencia).

A) 30°
B) 45°
C) 60°
D) 75°
E) 53°



RESOLUCIÓN :



* Por ángulo semi inscrito: $x = \frac{m\widehat{TCP}}{2}$

* En el $\triangle ABC$, se deduce que :

$m\sphericalangle BAC = 40° \Rightarrow mBC = 80°$

($\sphericalangle$ inscrito)

* Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}\, BC \Rightarrow T$ es punto medio de $BC \Rightarrow m\widehat{BT} = m\widehat{TC} = 40°$

* Por ángulo inscrito :

$$m\widehat{APC} = 160°$$

* Del dato :

$m\widehat{AP}=50° \Rightarrow m\widehat{PC}=110°$

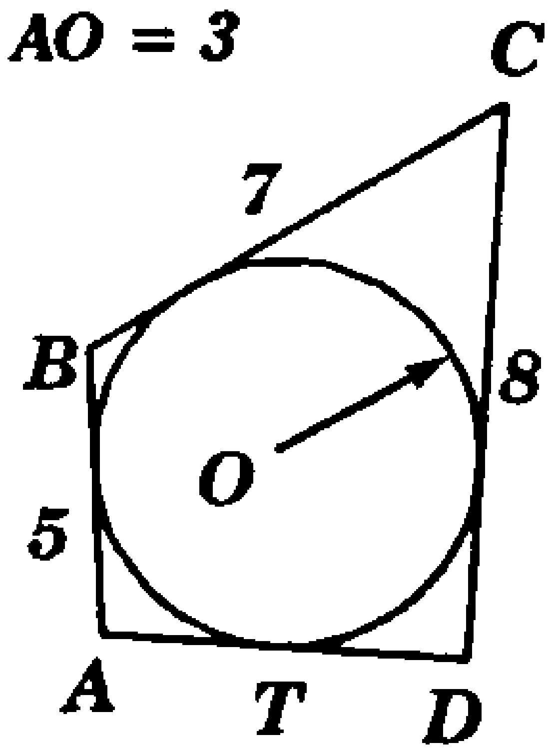
$$x=\frac{m\widehat{TC}+m\widehat{PC}}{2}=\frac{40°+110°}{2}=75$$

RPTA:"D"

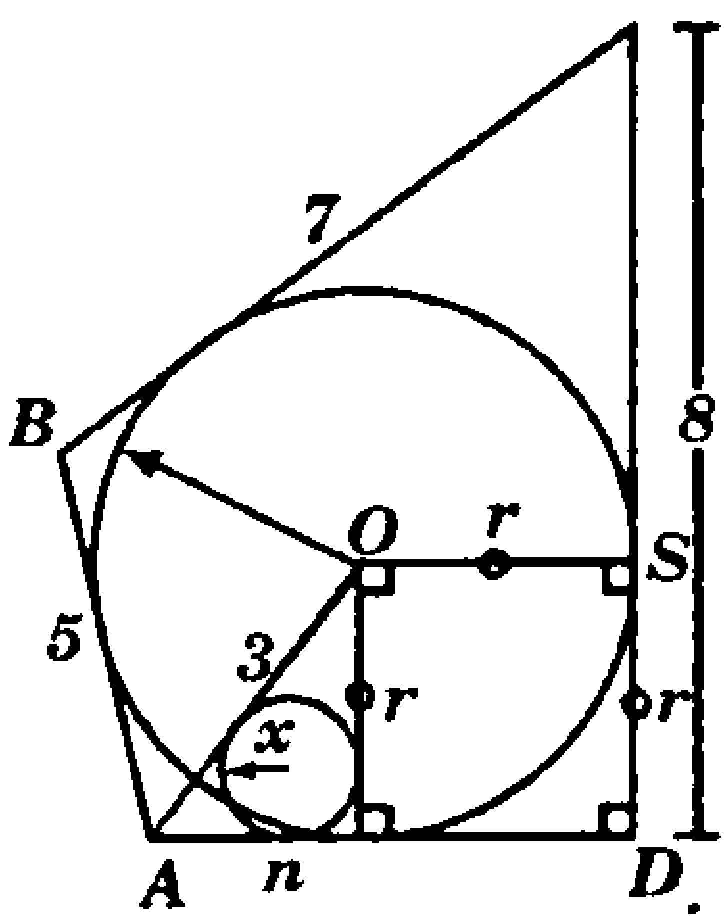
PROBLEMA 13:

Calcular el radio de la circunferencia inscrita al triángulo *ATO*. Si : $AO = 3$

A) 1
B) 2
c) 1,5
D) 3
E) 2,5



RESOLUCIÓN:



$\square TOSD$: Cuadrado

$\Rightarrow OT=TD=DS=SO=r$

* Teorema de Pittot :

$(n + r) + 7 = 5 + 8$

$\Rightarrow n + r = 6$ .... (I)

◺ *ATO* : Teorema de Poncelet

$n + r = 3 + 2x$ ....(II)

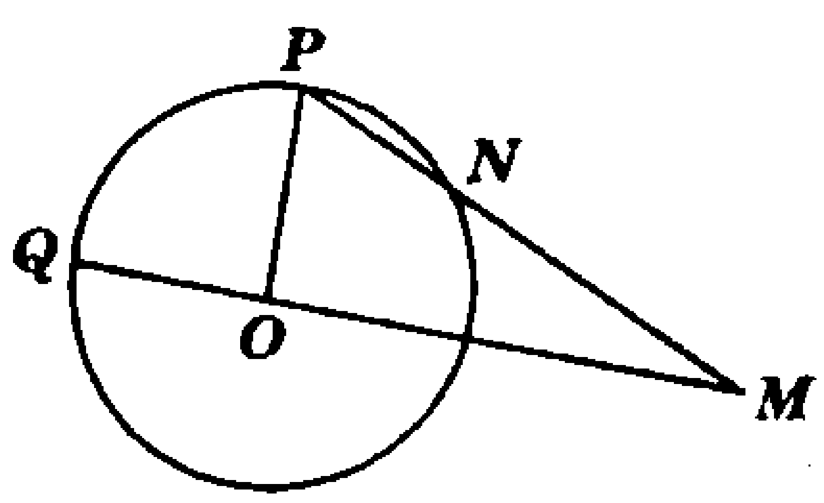
(I) en (II): $6 = 3 + 2x \Rightarrow x=1,5$

RPTA : "C"

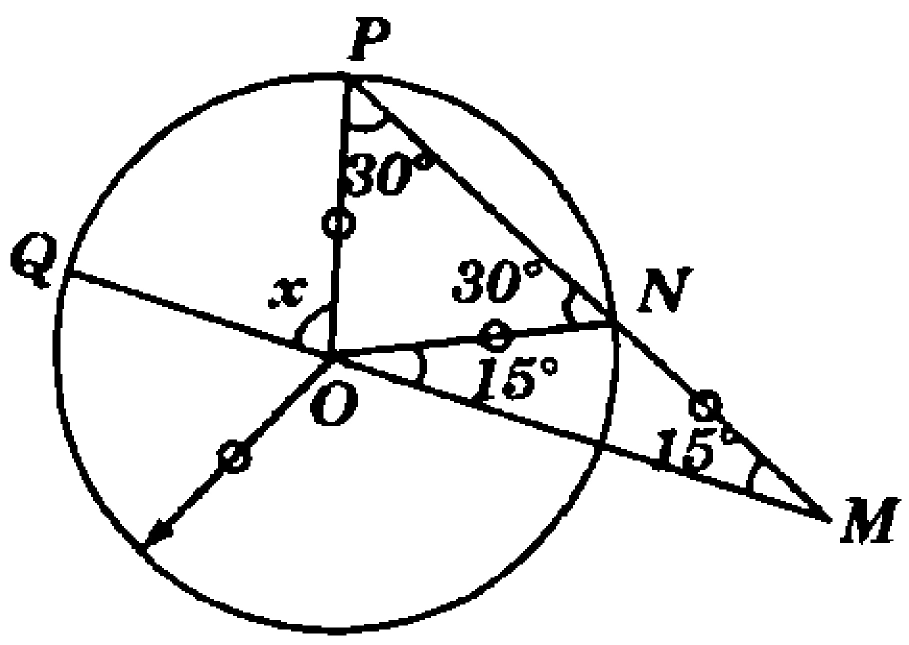
PROBLEMA 14 :

Sea la circunferencia de centro O y radio R, $MN = R$ y $m\,\widehat{OM}N=15°$. Calcular la medida del ángulo POQ.

A)30°
B)55°
C)40°
D)60°
E)45°



RESOLUCIÓN :



ΔONM : isósceles

$\Rightarrow mNOM=mO\widehat{M}N=15°$

ΔPON : isósceles

$\Rightarrow mQ\widehat{P}N=mO\widehat{N}P=30°$

* Luego: $x = 30° + 15° = 45°$

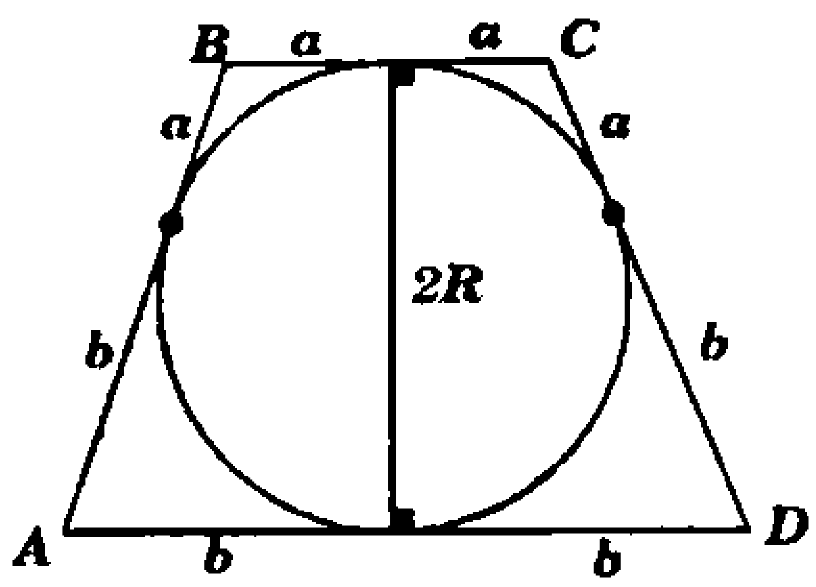
RPTA:"E"

PROBLEMA 15 :

El perímetro de un trapecio isósceles es $82m$, y el producto de su altura con uno de sus lados iguales es $410m^2$. Calcule el diámetro inscrito en el trapecio.

A)10 B)20 C)30 D)25 E)18

RESOLUCIÓN:



* En el trapecio isósceles mostrado tendremos :

$4(a+b)=82 \Rightarrow 2(a+b)=41$

* Del enunciado:

$2R(a + b) = 410$

$R\,.\,(41) = 410 \Rightarrow R = 10$

* Piden : $2R = 2(10) = 20$

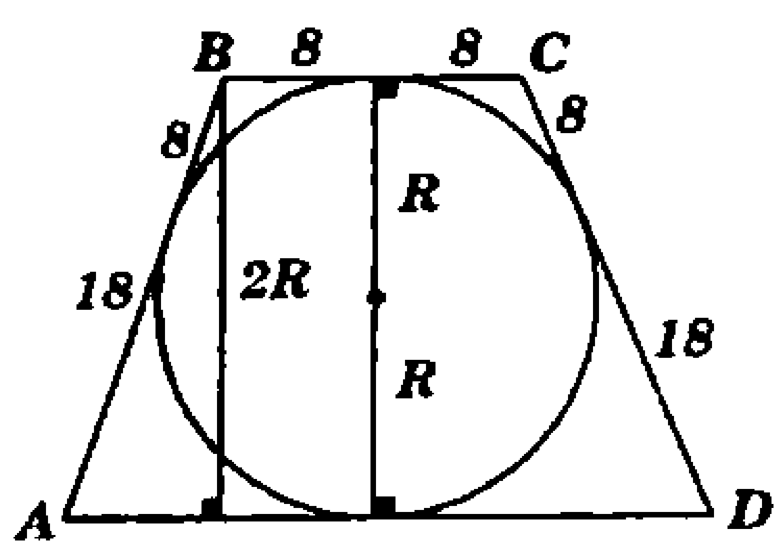
RPTA:"B"

PROBLEMA 16

Las bases de un trapecio isósceles miden $16m$ y $36m$, respectivamente , calcular el radio del círculo inscrito.

A)3m B)4 C)5 D)6 E)12

RESOLUCIÓN :



En el ◺ sombreado :

$(2R)^2 = 26^2 - 10^2$

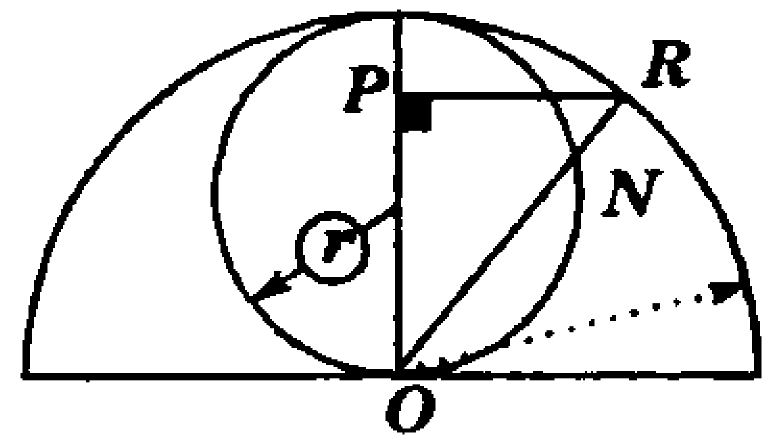
$\Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow R = 6$

RPTA: "D"

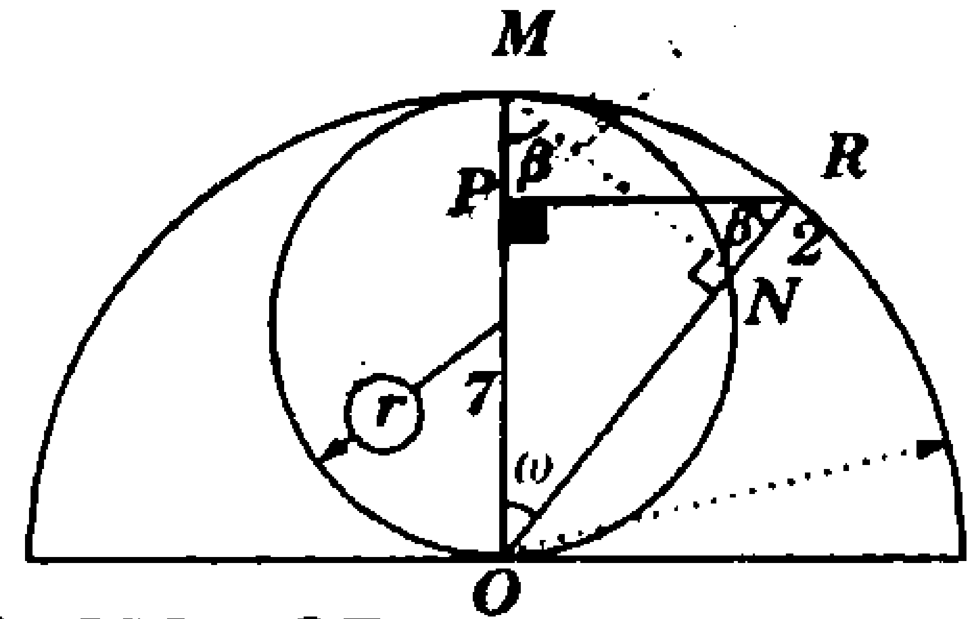
PROBLEMA 17:

Calcular "r". Si $OP = 7$ y $NR = 2$

A) 5
B) 6
C) 2,5
D) 4,5
E) 3



RESOLUCIÓN :



* $OM = OR$

$\Rightarrow 2r = ON + 2$......................(I)

◺ $OPR \cong$ ◺ ONM ...... (ALA)

$\Rightarrow ON = OP = 7$......................(II)

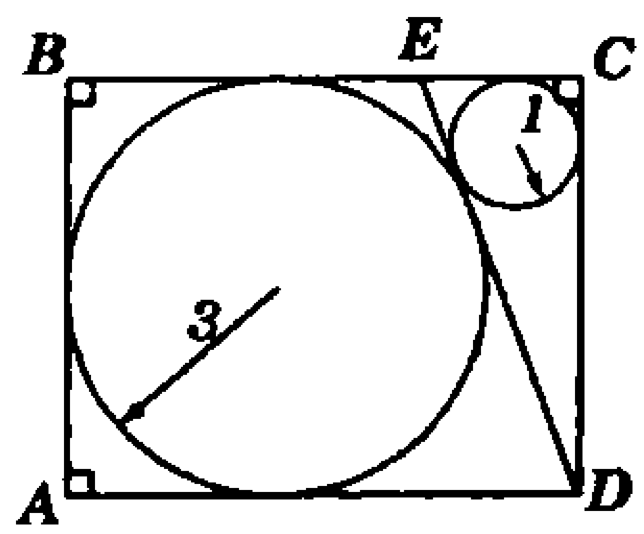
* (II) en (I) : $2r = 7 + 2 \Rightarrow r = 4,5$

RPTA:"D"

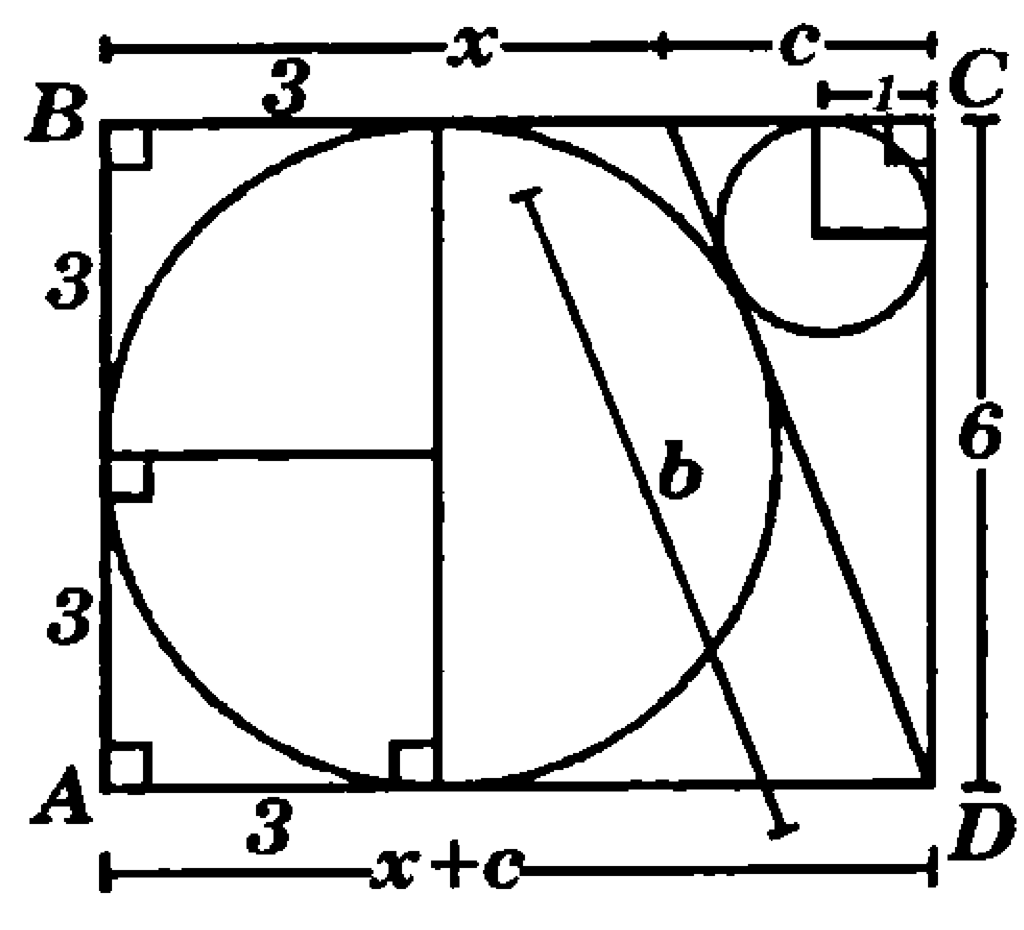
PROBLEMA 18:

Si los radios de las circunferencias inscritas en el cuadrilátero *BEDA* en el ΔECD son 3 y 1 respectivamente. Calcular BE

A) 4
B) 6
C) 5
D) 3,5
E) 7



RESOLUCIÓN :



* En el cuadrilátero *ABCD* por el *T.* de Pittot :

$2x + c = 6 + b$

$2x = 6 + b + c$ .... *(I)*

* En el ⊿ *ECD* por teorema de Poncelet :

$c + 6 = b + 2$ .... *(II)*

* De la relación *(I)* y *(II)* se concluye que:

$2x = 6 + 4 \Rightarrow x = 5$

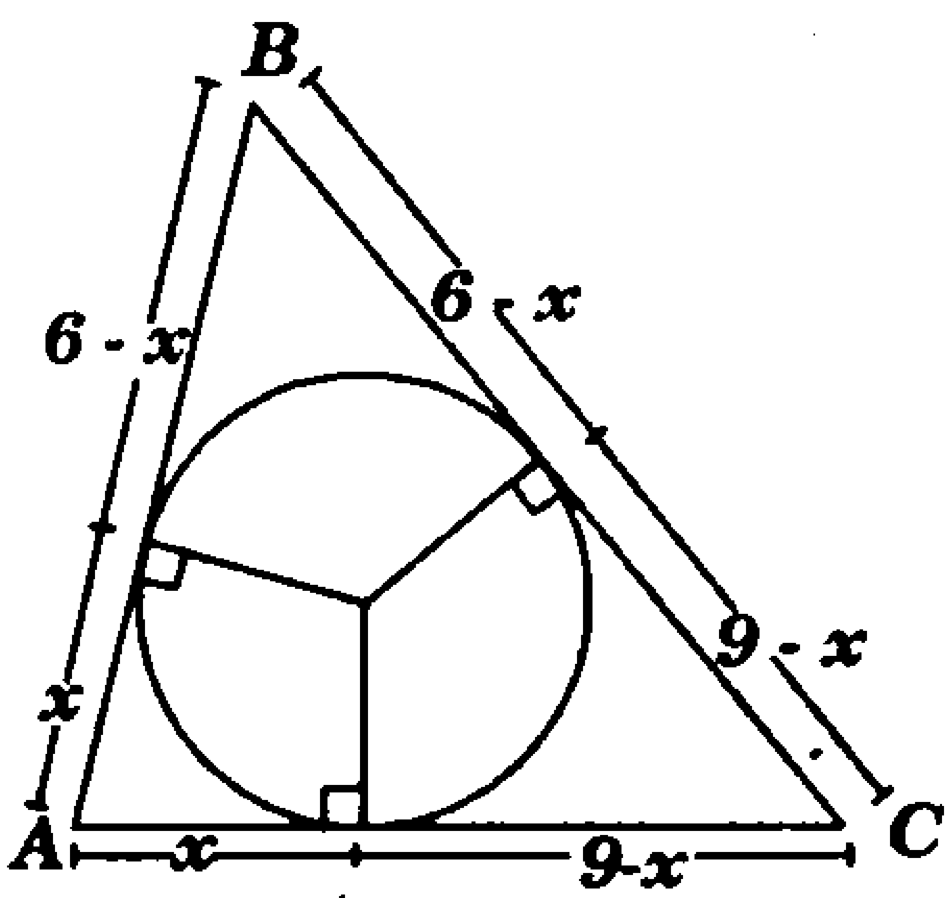
RPTA:"C"

PROBLEMA 19:

Los lados de un triángulo *ABC* son $AB = 6m$, $BC = 7m$ y $AC = 9m$. Calcular la distancia del vértice *A* al punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado *AC*.

A)6 B)10 C)12 D)15 E)9

RESOLUCIÓN :



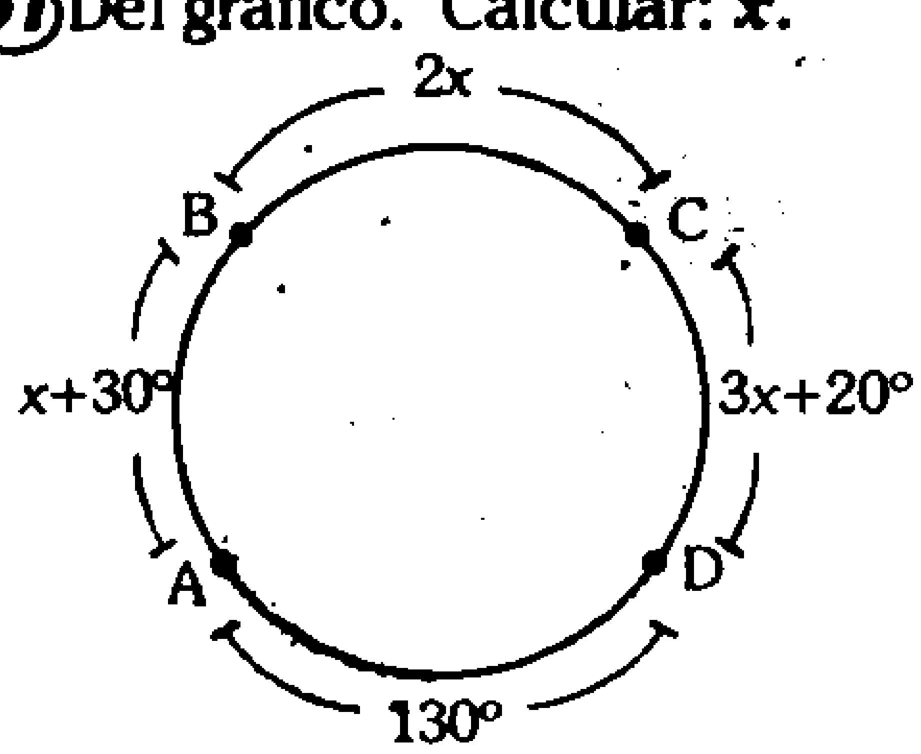
* Sabemos que:

$BC = 7 \Rightarrow 6 - x + 9 - x = 7$

$\Rightarrow x = 12$ **RPTA : "C"**

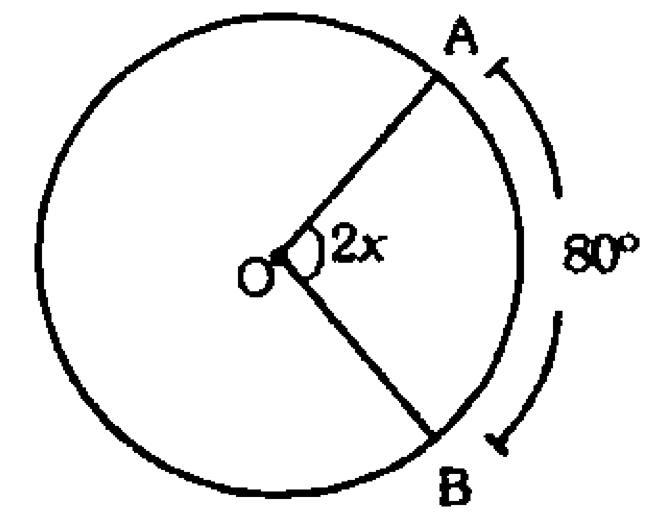
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Del gráfico. Calcular: *x*.



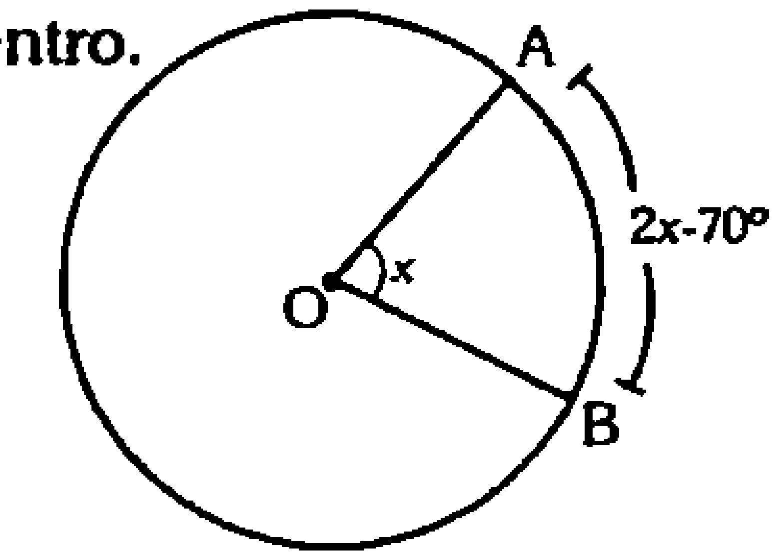
RPTA: ....

02 Del gráfico, calcular : *x*, si *O* es centro.



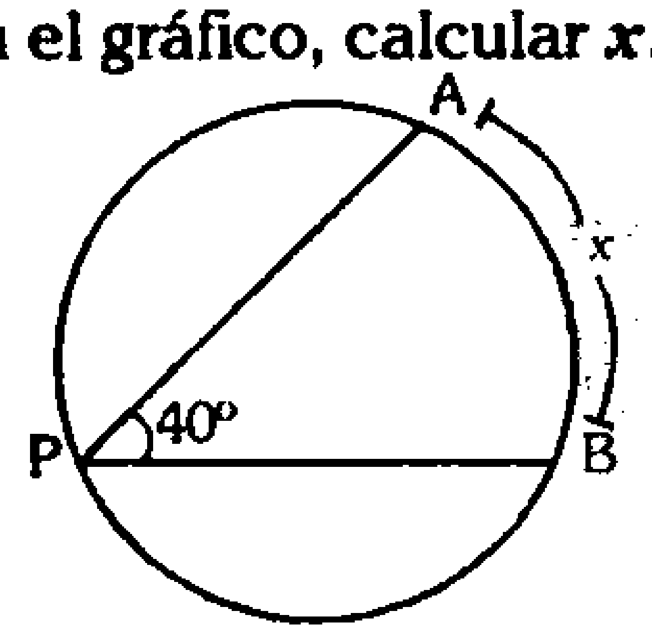
RPTA: ....

03 Del gráfico, calcular: *x* , si *O* es centro.



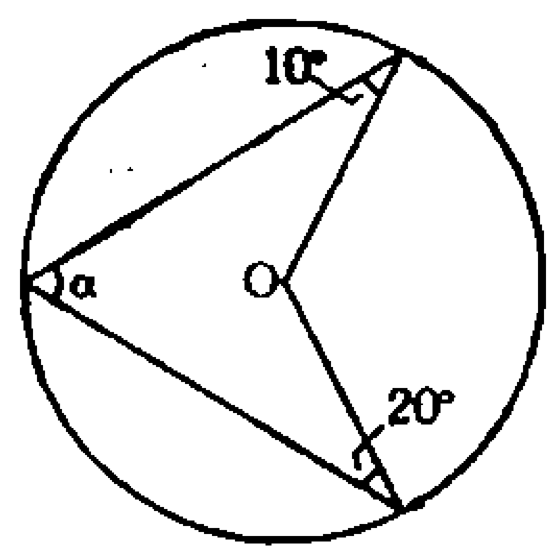
RPTA: ....

04 En el gráfico, calcular *x*.



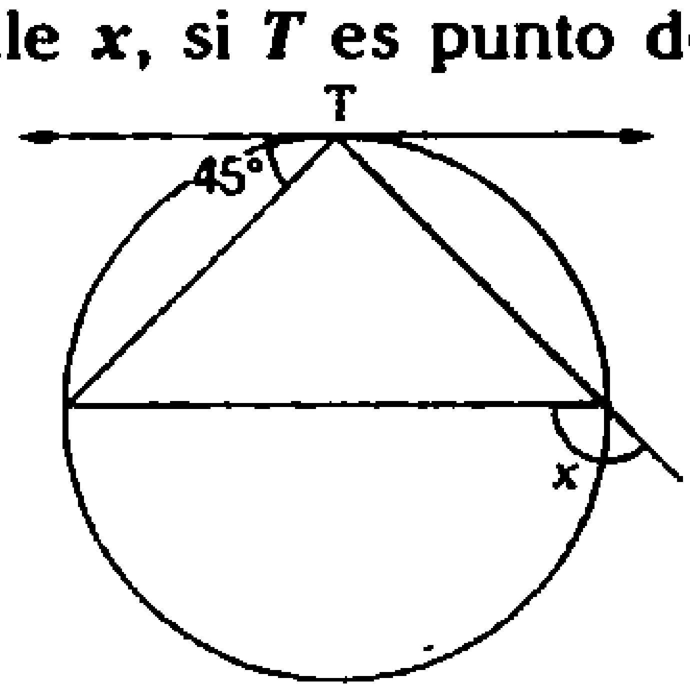
RPTA: ....

05 Si " es centro. Calcule α.



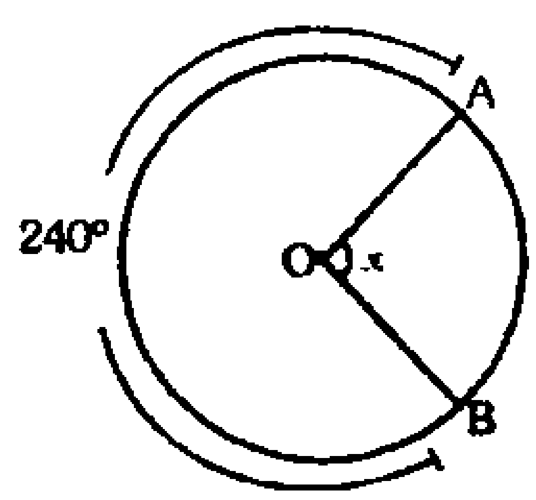
RPTA: ....

06 Calcule *x*, si *T* es punto de tangencia.



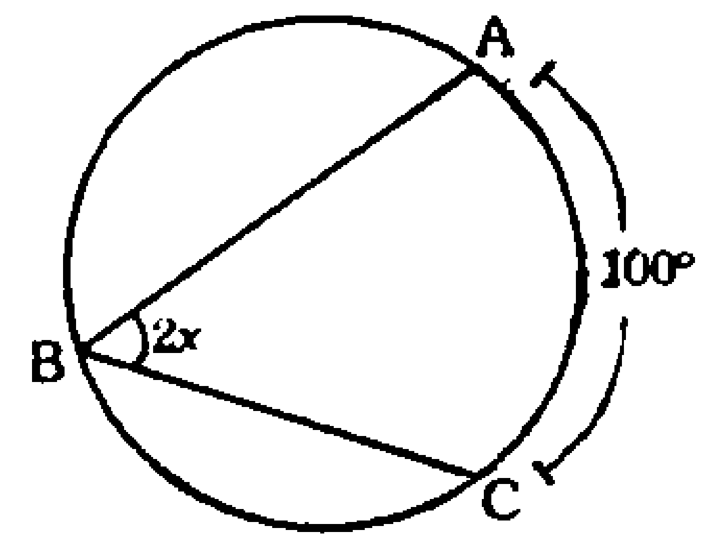
RPTA: ....

07 Si *O* es centro, calcular : *x*.



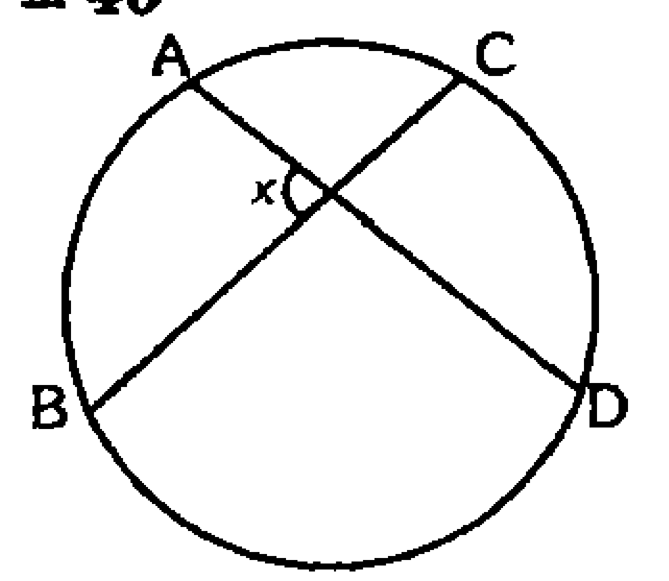
A)140° B)120° C)130°
D)100° E)150°

08 Del gráfico, calcular : *x*.



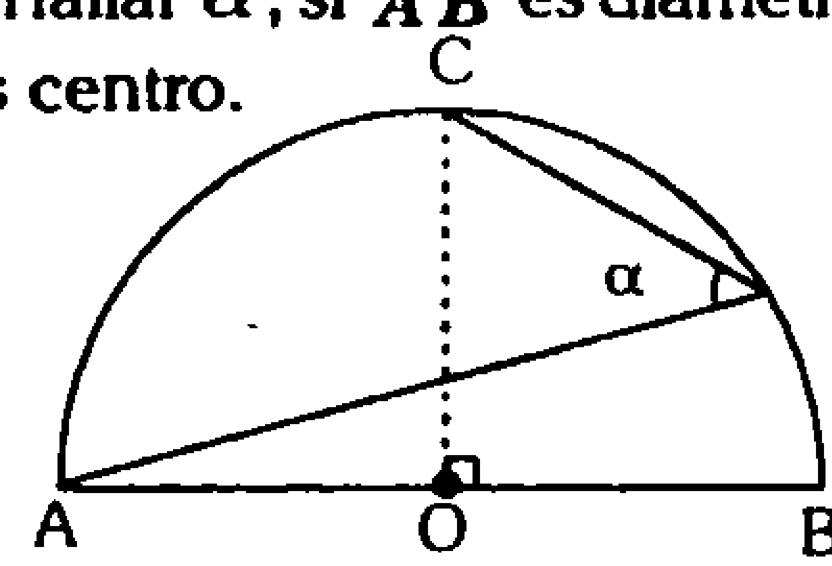
A)60° B)50° C)25°
D)100° E)80°

09 Del gráfico $m\widehat{AB} = 80°$, $m\widehat{CD} = 40°$. Calcular: *x*.



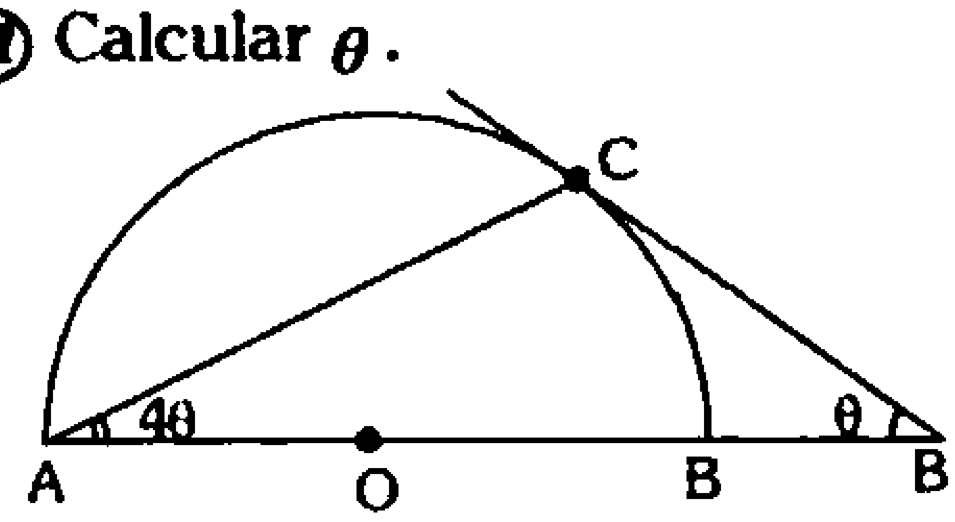
A)20° B)30° C)40°
D)50° E)60°

10 Hallar α, si $\overline{AB}$ es diámetro y O es centro.



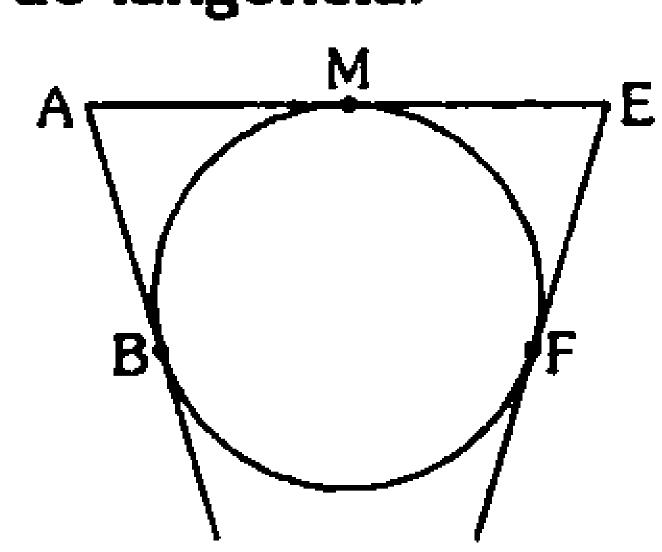
A)30° B)45° C)16°
D)37° E)60°

11 Calcular θ.



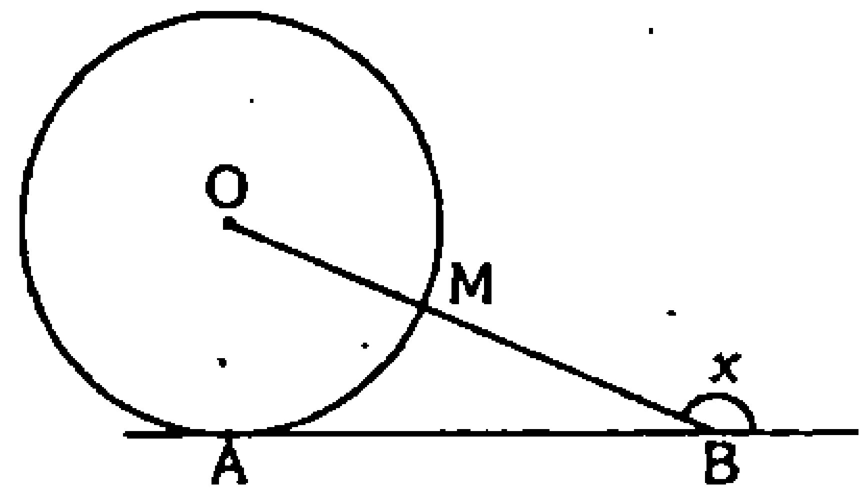
A)5° B)10° C)15° D)20° E)25°

12 En el gráfico: $AB = 6$ y $AE = 14$. Hallar *EF*. Además: *M, B, F* son puntos de tangencia.



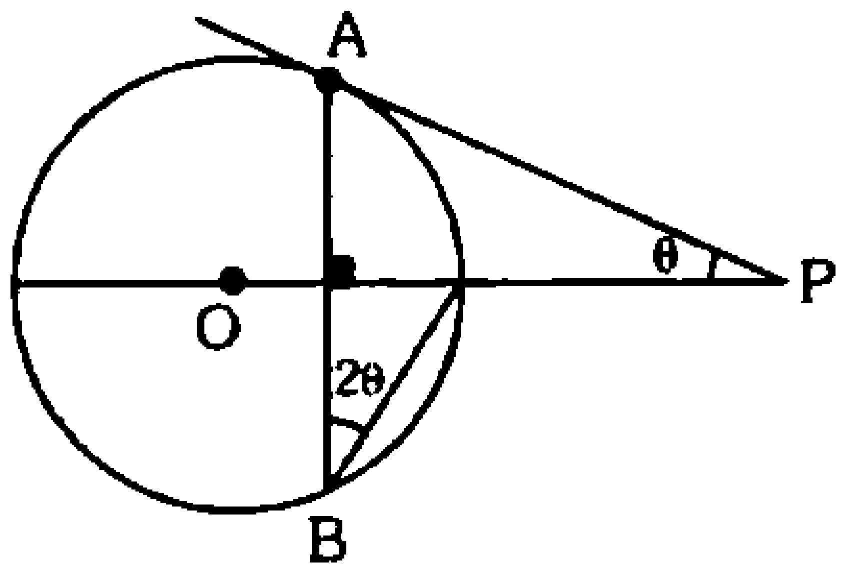
A)9 B)8 C)10 D)7 E)5

13 En el gráfico, calcular x, si: $OM=MB$



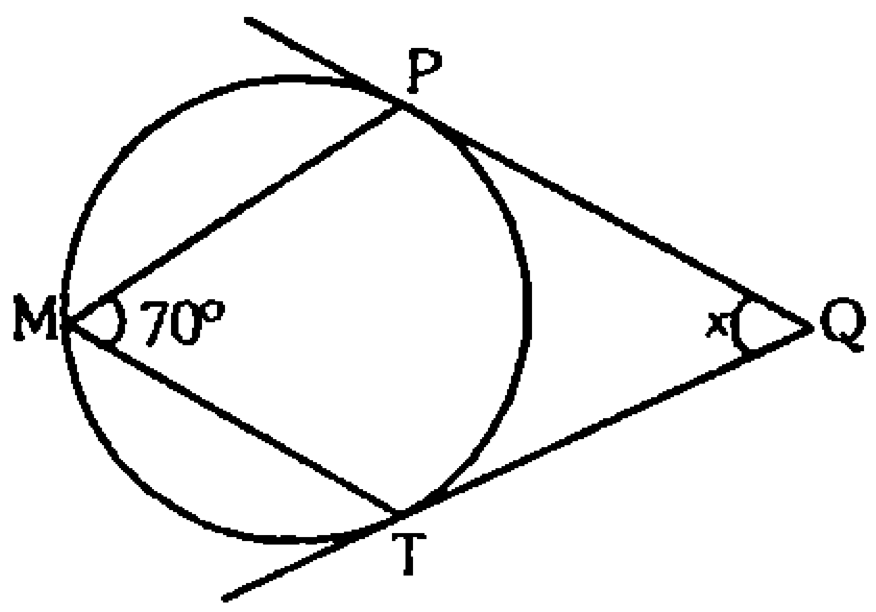
A) 130° B) 100° C) 145°
D) 150° E) 124°

14 En la figura calcular θ.



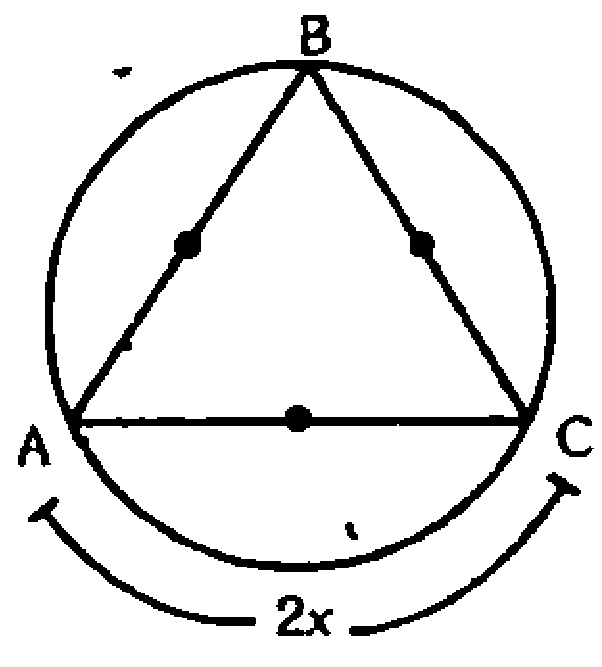
A) 9° B) 18° C) 36° D) 54° E) 20°

15 Del gráfico, calcule: x, si P y T son puntos de tangencia.



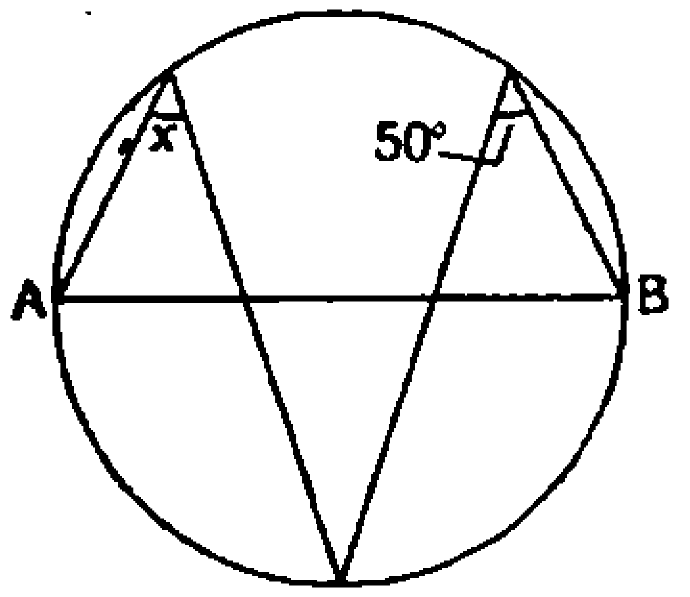
A) 80° B) 70° C) 50° D) 40° E) 60°

16 Del gráfico, calcular: x.



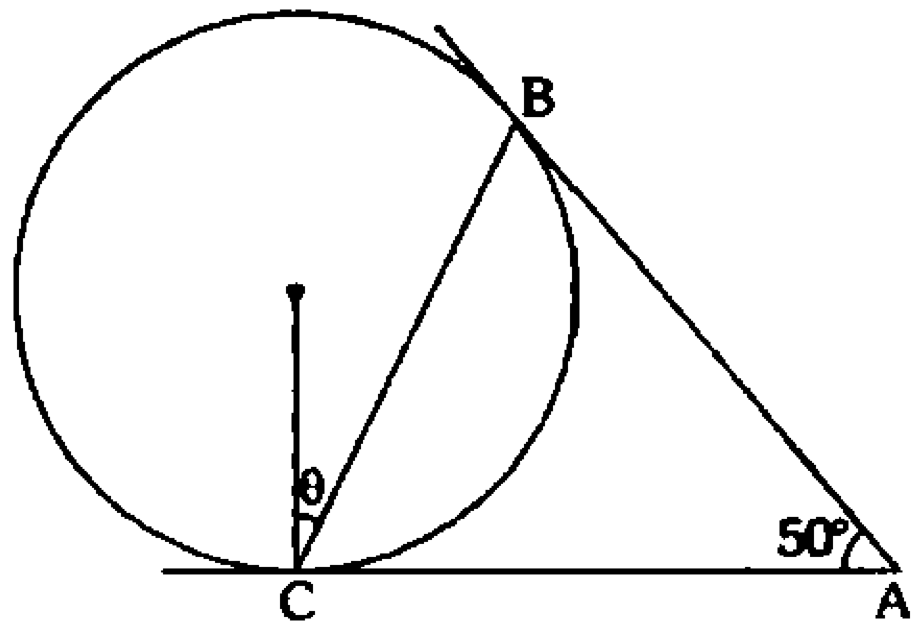
A) 120° B) 90° C) 60°
D) 80° E) 100°

17 Calcule x ; si $\overline{AB}$ es diámetro



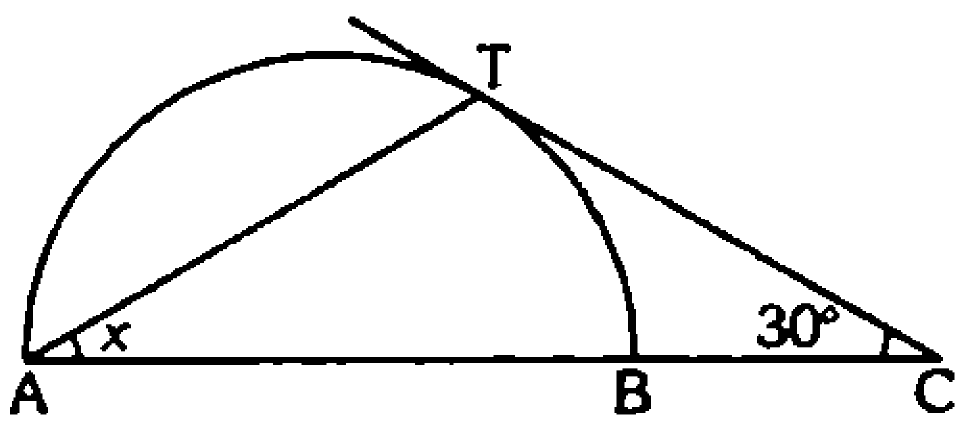
RPTA.: ....

18 Si B y C son puntos de tangencia. Calcule θ.



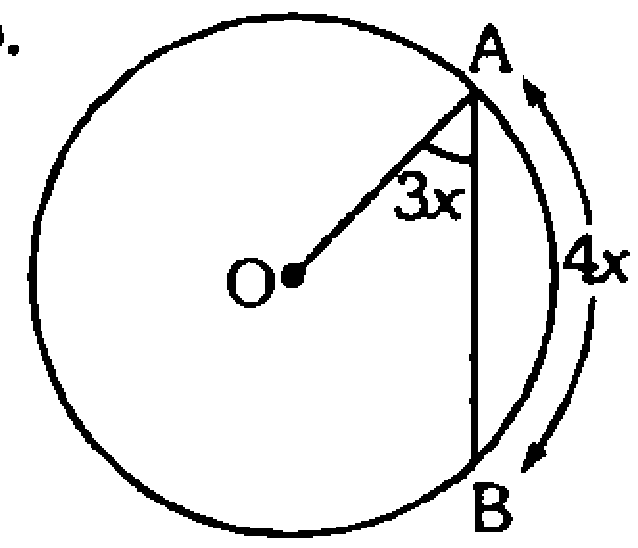
RPTA.: ....

19 Del gráfico, calcule x ; si T es punto de tangencia



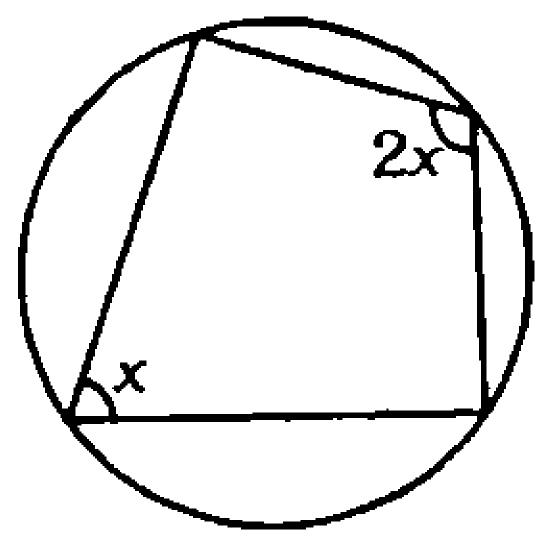
RPTA.: ....

20 En la figura, calcule x, si O es centro.



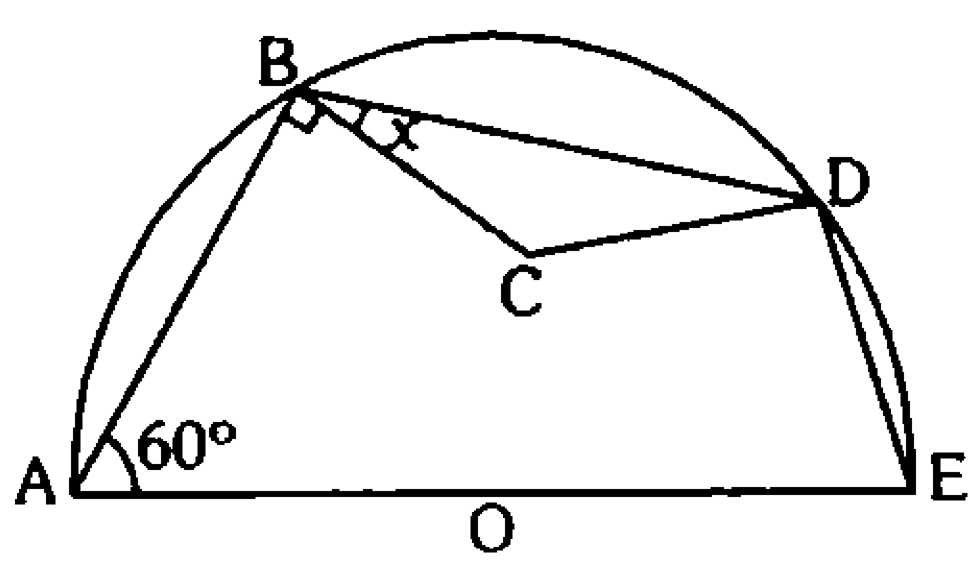
A) 12° B) 15° C) 18°
D) 20° E) 24°

21 En la figura, calcule x.



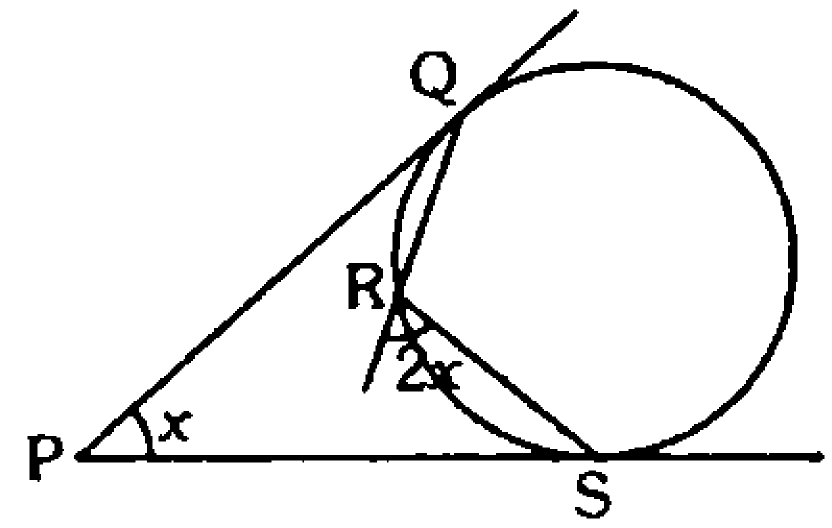
A) 50° B) 60° C) 40° D) 36° E) 45°

22 En la figura, calcular x, si O es centro y $BC = CD = DE$.



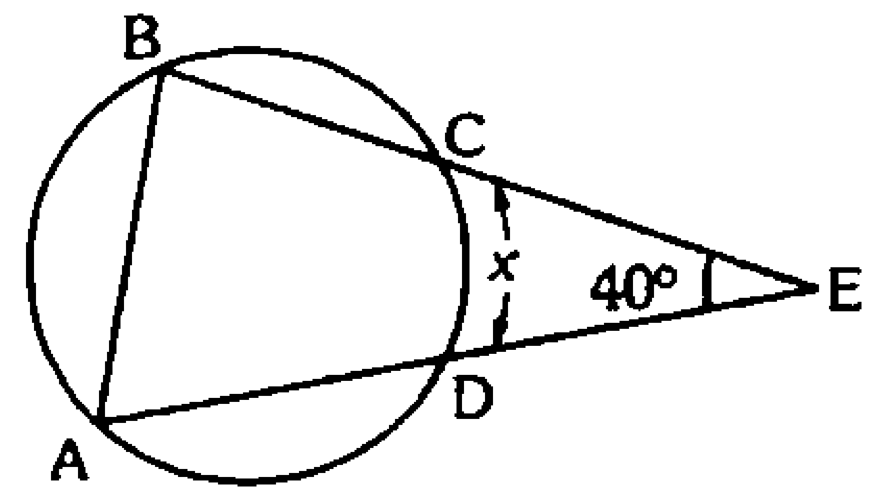
A) 15° B) 20° C) 30° D) 24° E) 36°

23 En la figura, calcule x, si Q y S son puntos de tangencia.



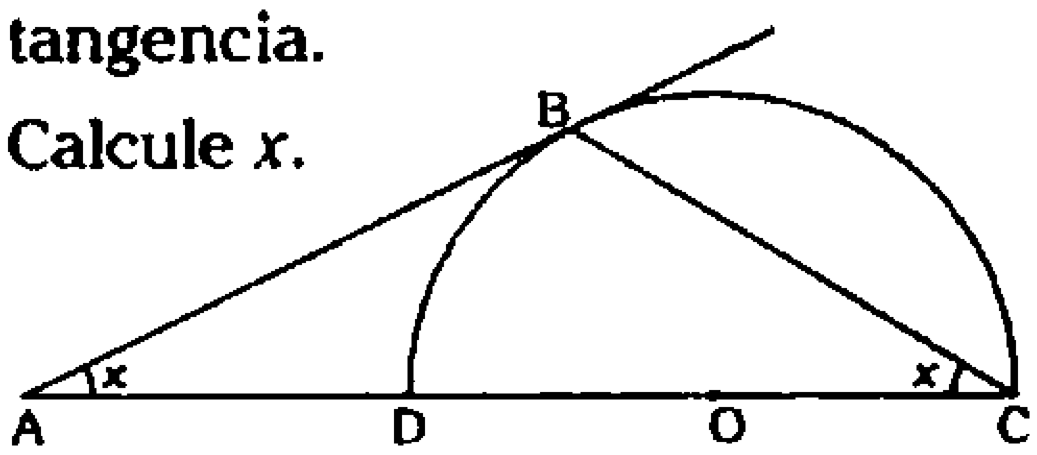
A) 18° B) 20° C) 36° D) 30° E) 40°

24 En la figura, calcule x.
Si $AB = BC = AD$.



A) 40° B) 20° C) 30° D) 36° E) 50°

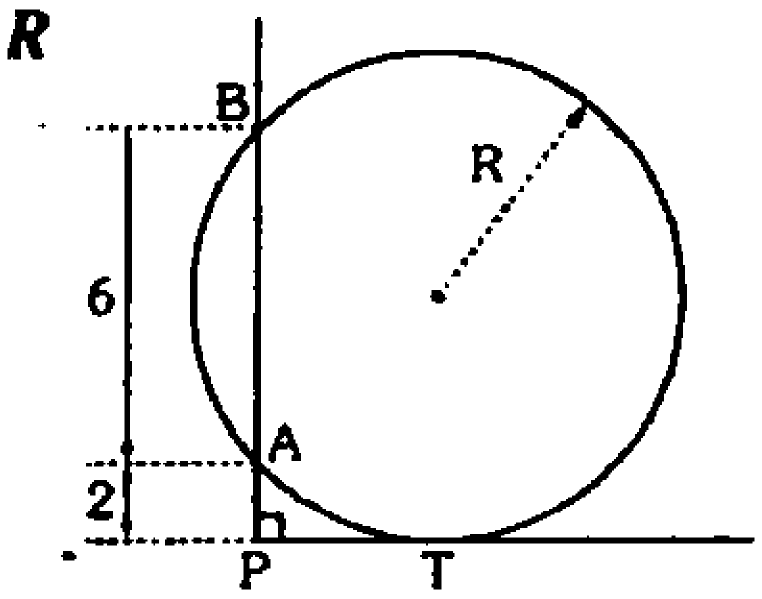
25 Si O es centro y B es punto de tangencia.
Calcule x.



A) 18° B) 37° C) 16° D) 45° E) 30°

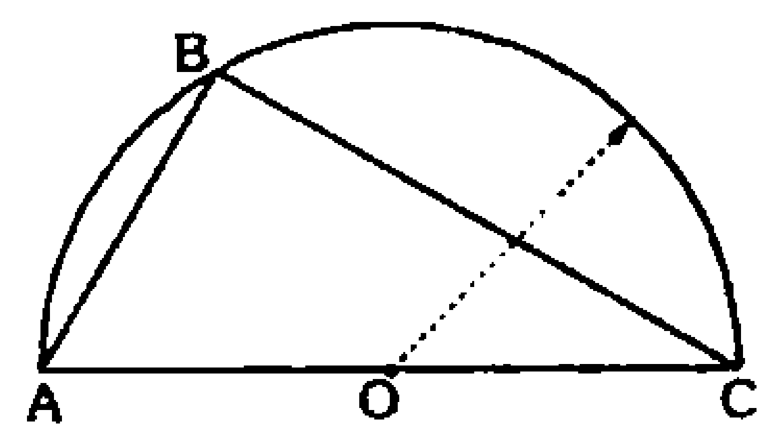
26 Si: $AP = 2$ m y $AB = 6$ m. Calcule R

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 3



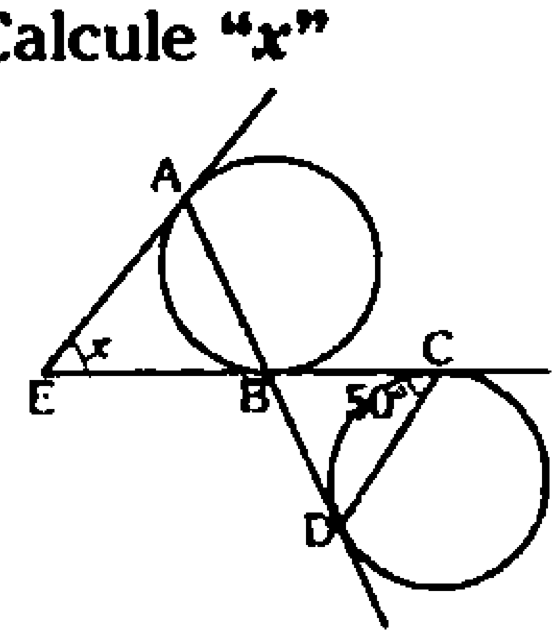
27 Calcule el inradio del triángulo ABC, si:
$AB = a + 1$; $BC = a + 3$, $AC = 2a$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



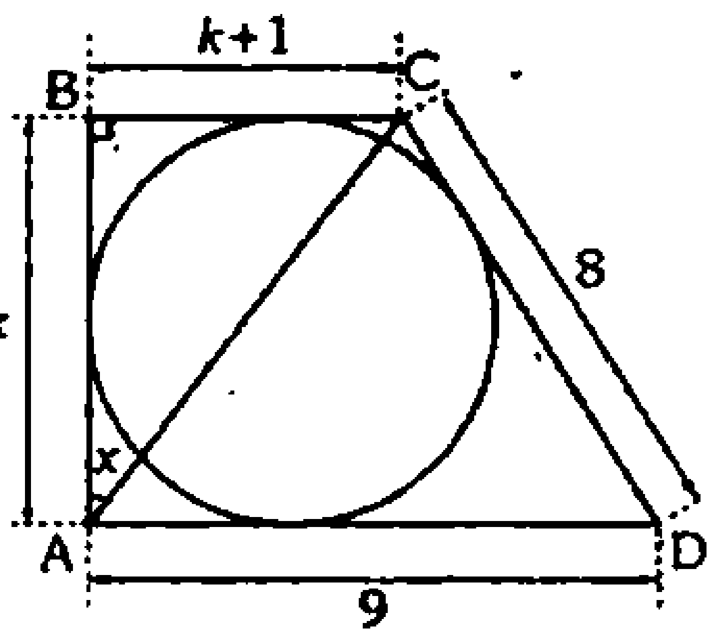
28 Si A, B, C y D son puntos de tangencia. Calcule "x"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 40°
E) 65°



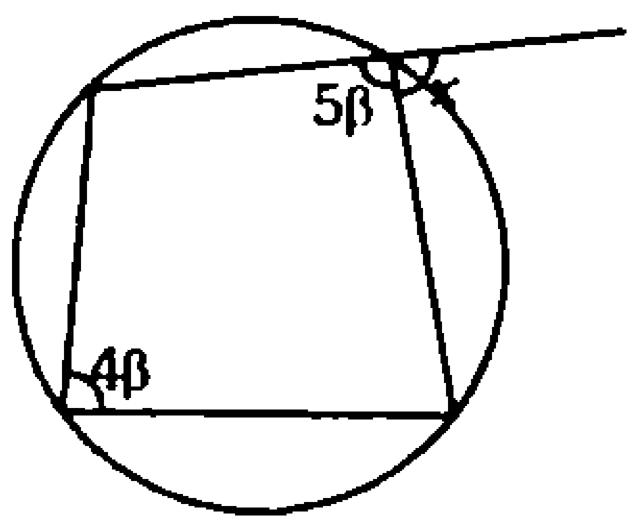
29 Si *ABCD* es un cuadrilátero circunscrito.

Calcule x.



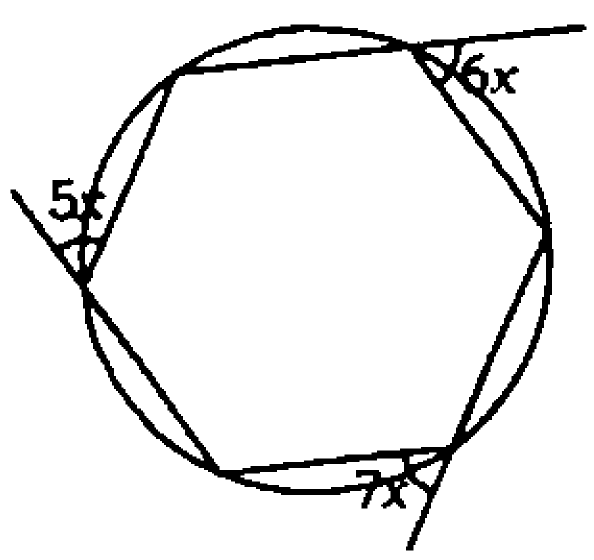
A) 45°
B) 53°
C) 30°
D) 60°
E) 37°

30 En la figura, calcule x.



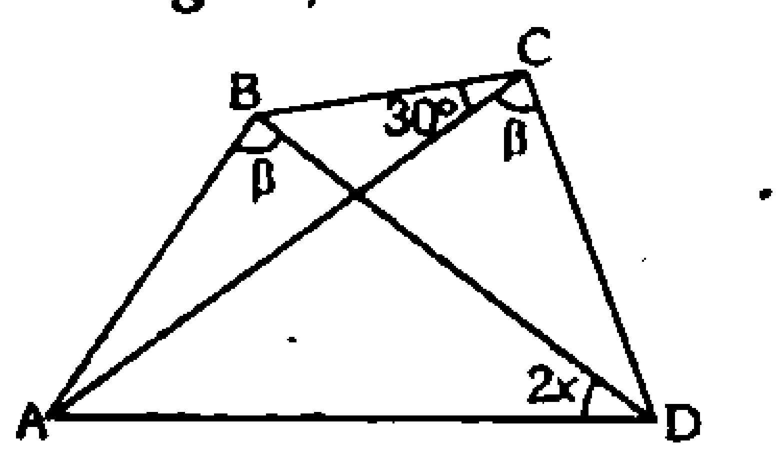
A) 20° B) 30° C) 60° D) 80° E) 90°

31 En la figura, calcule x.



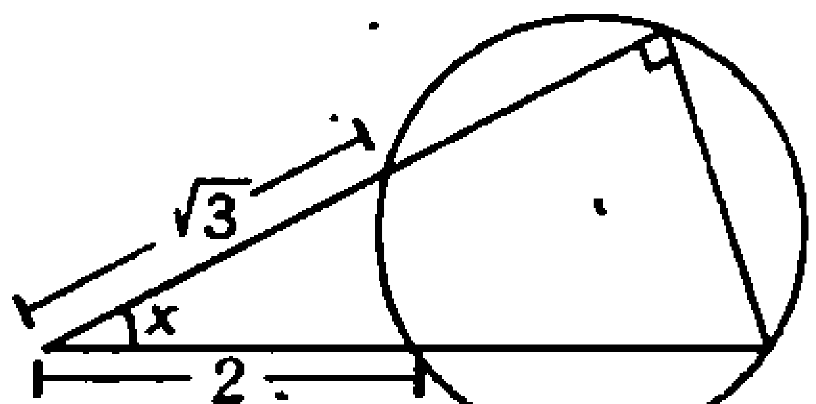
A) 20° B) 18° C) 30° D) 15° E) 24°

32 En la figura, calcule x.



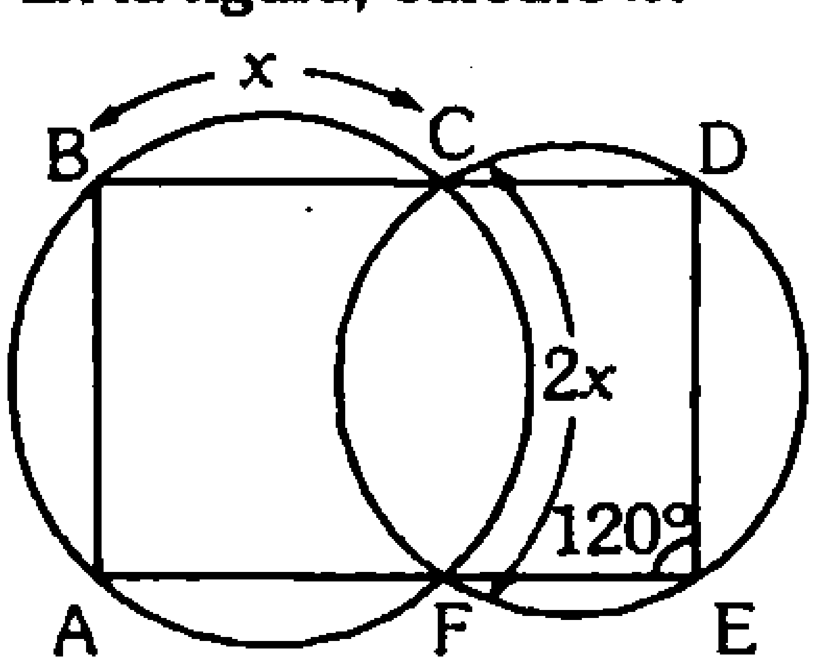
A) 20° B) 15° C) 10° D) 25° E) 5°

33 En la figura, calcule x.



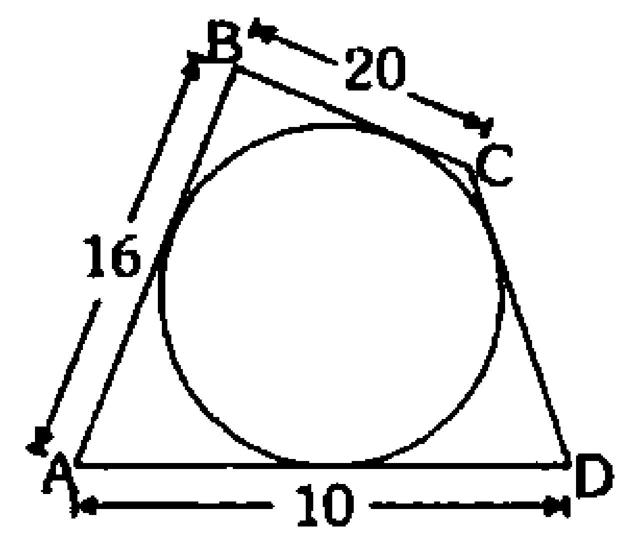
A) 60° B) 45° C) 37° D) 53° E) 30°

34 En la figura, calcule x.



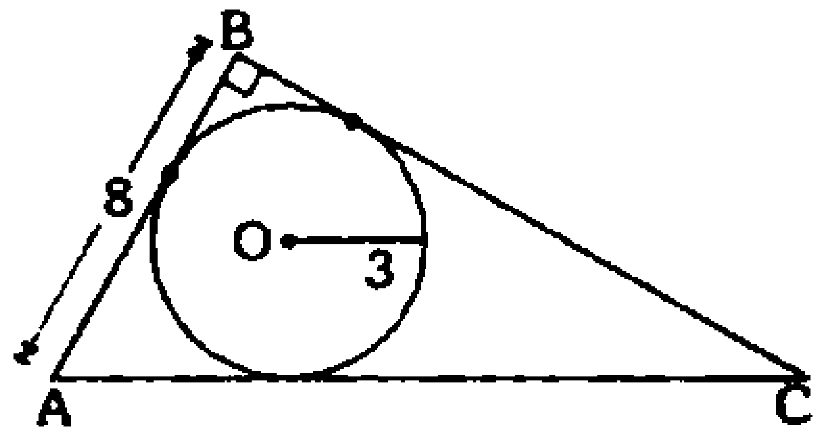
A) 50° B) 40° C) 30° D) 20° E) 25°

35 En el gráfico. Calcular *CD*



A) 16
B) 15
C) 14
D) 13
E) 12

36 En el triángulo rectángulo. Calcular la longitud de la hipotenusa



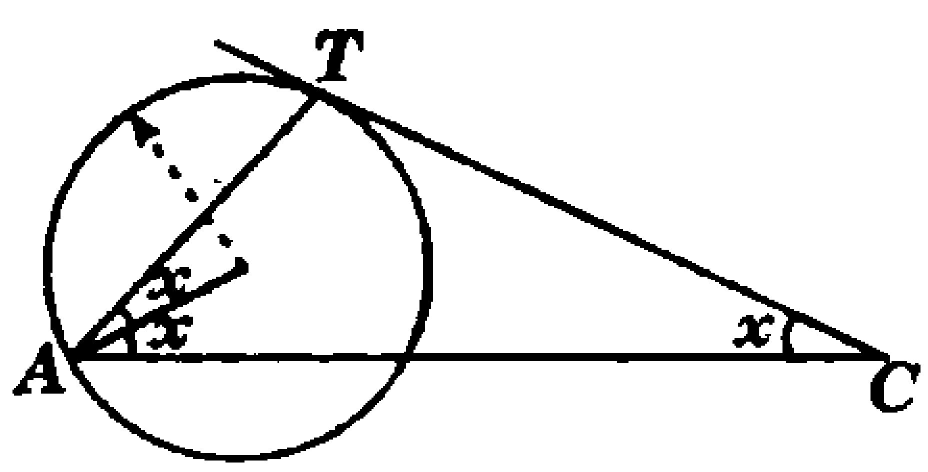
A) 16
B) 21
C) 19
D) 20
E) 10

38 La mediana de un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia mide *18 cm* y uno de los ángulos, *53°*. Calcular el radio de la circunferencia inscrita

A) 2 cm B) 8 cm C) 6 cm
D) 3 cm E) 5 cm

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

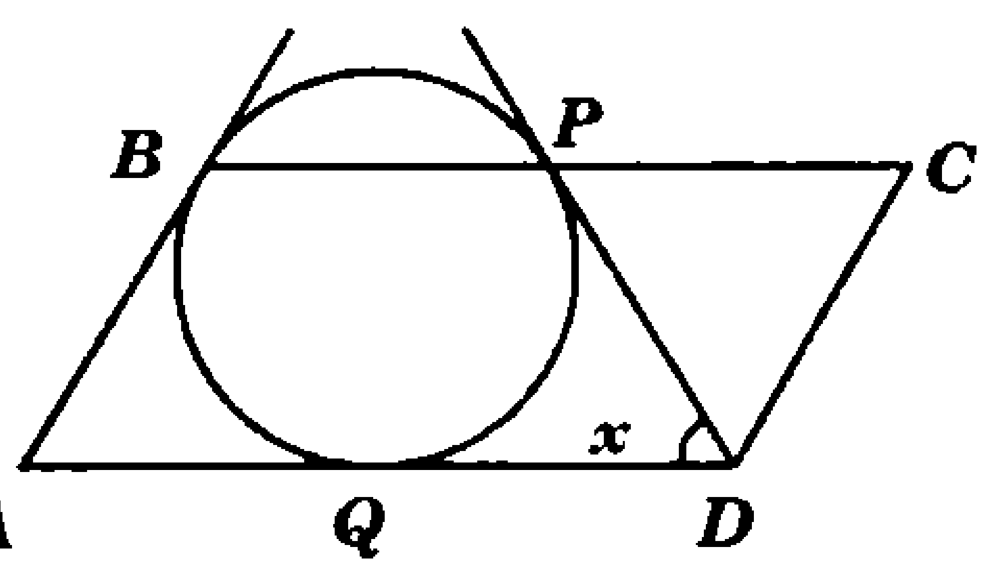
01 Si "*T*" es punto de tangencia, calcular el valor de "x"



A) 15° B) 30° C) 20° D) 25° E) 22,5°

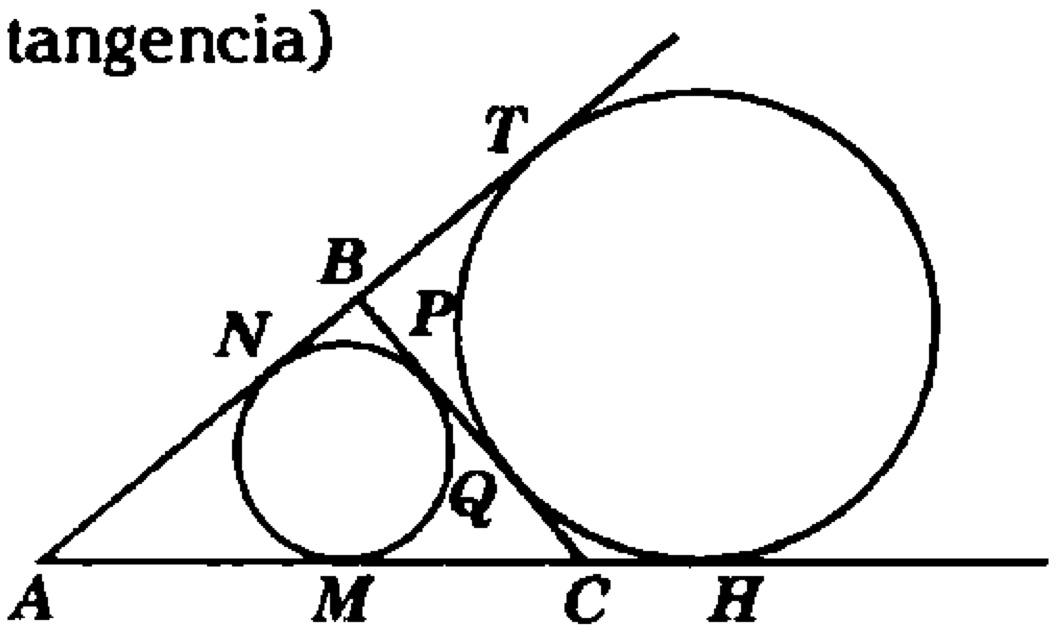
02 Si *ABCD* es un paralelogramo, *AB=PC*, calcular el valor de x

(*B*; *P* y *Q* son puntos de tangencia)



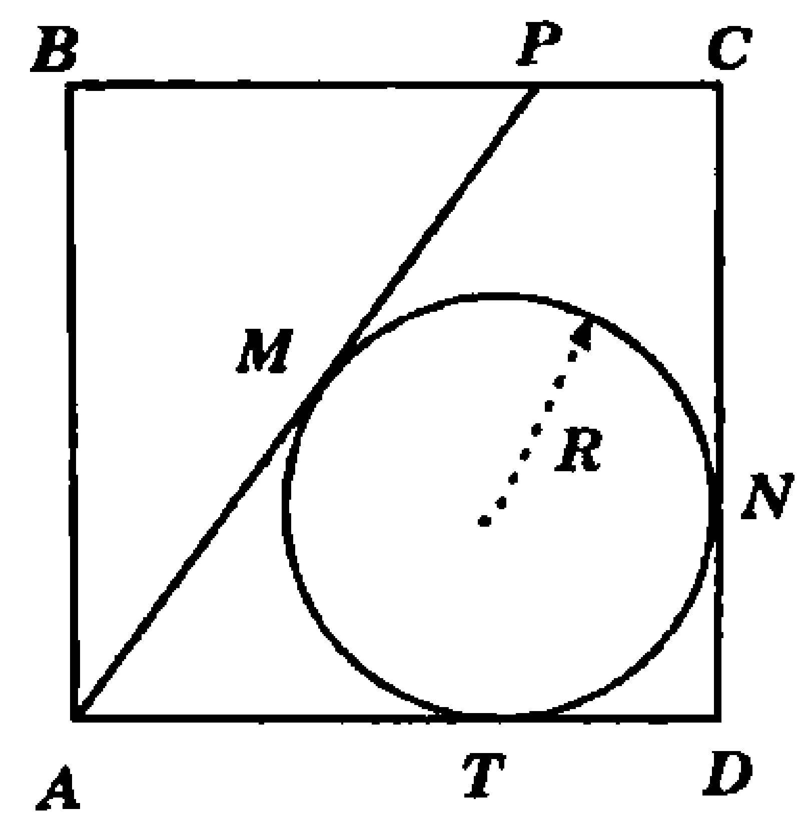
A) 60° B) 30° C) 50° D) 40°
E) 45°

03 Si $AC=8$ y $AB=6$, calcular *PQ* (*N,M,P,Q,T* y *H* son puntos de tangencia)



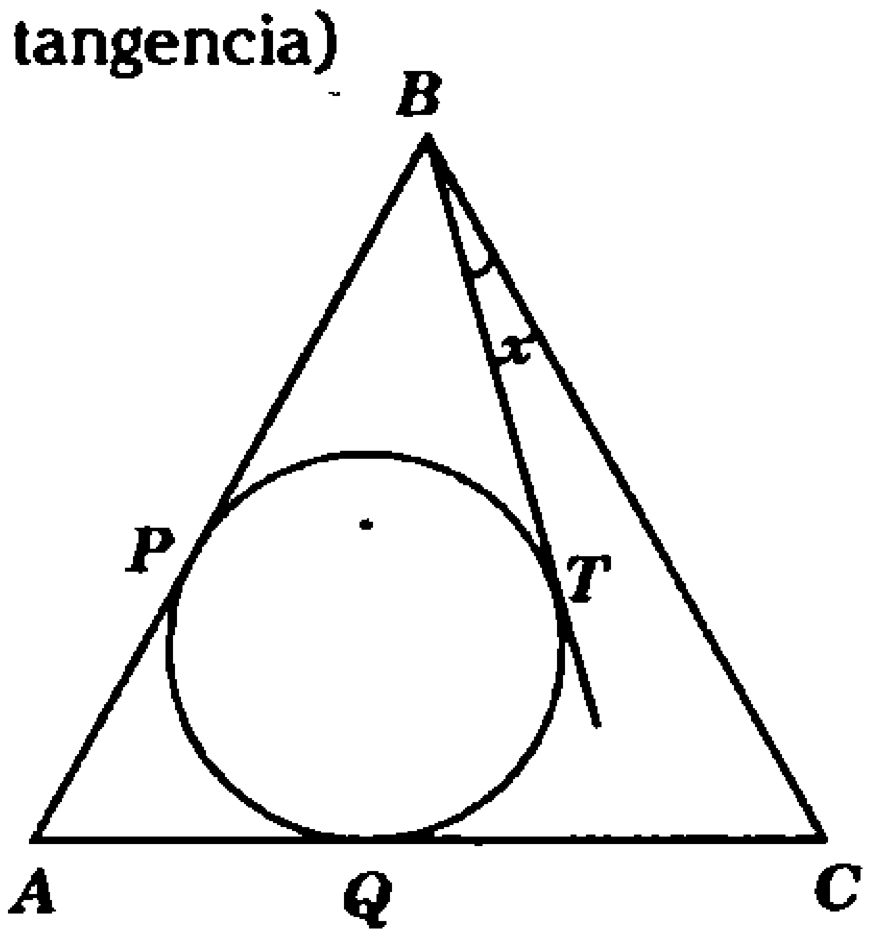
A) 2 B) 1,5 C) 2,5 D) 1 E) 4

04 Si *ABCD* es un cuadrado, $BP=9$ y $PC=3$ (*M*, *N* y *T* son puntos de tangecia), calcular *R*.



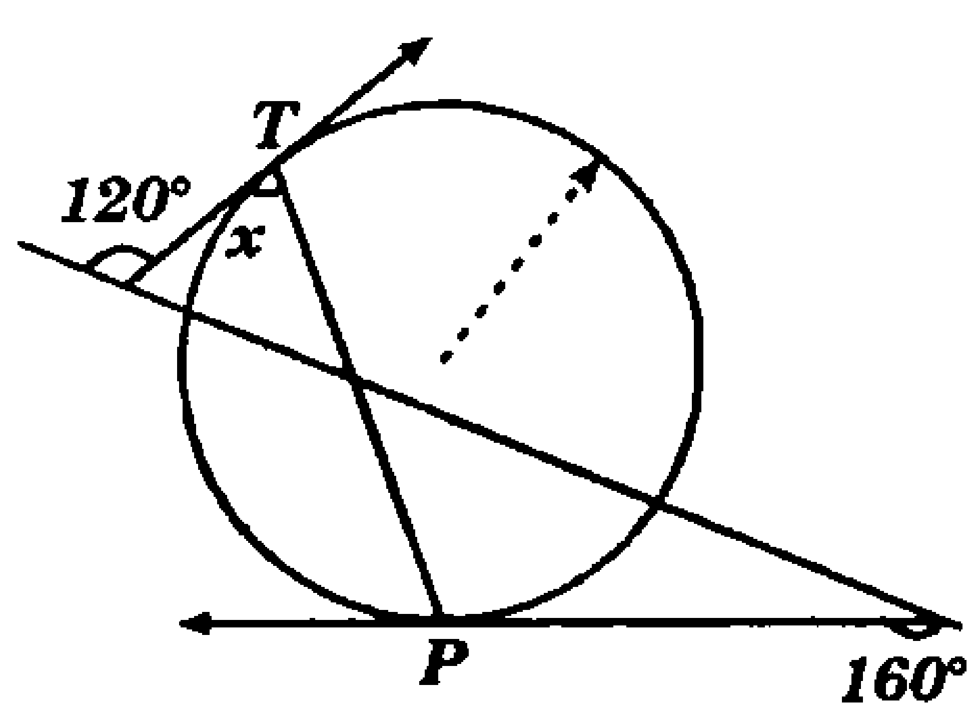
A) 4 B) 3 C) 2,5 D) $\sqrt{6}$ E) 3,5

05 Si el triángulo *ABC* es equilátero, $AQ=\sqrt{3}$ y $PB=2$, calcular el valor de "x" (*P*, *Q* y *T* son puntos de tangencia)



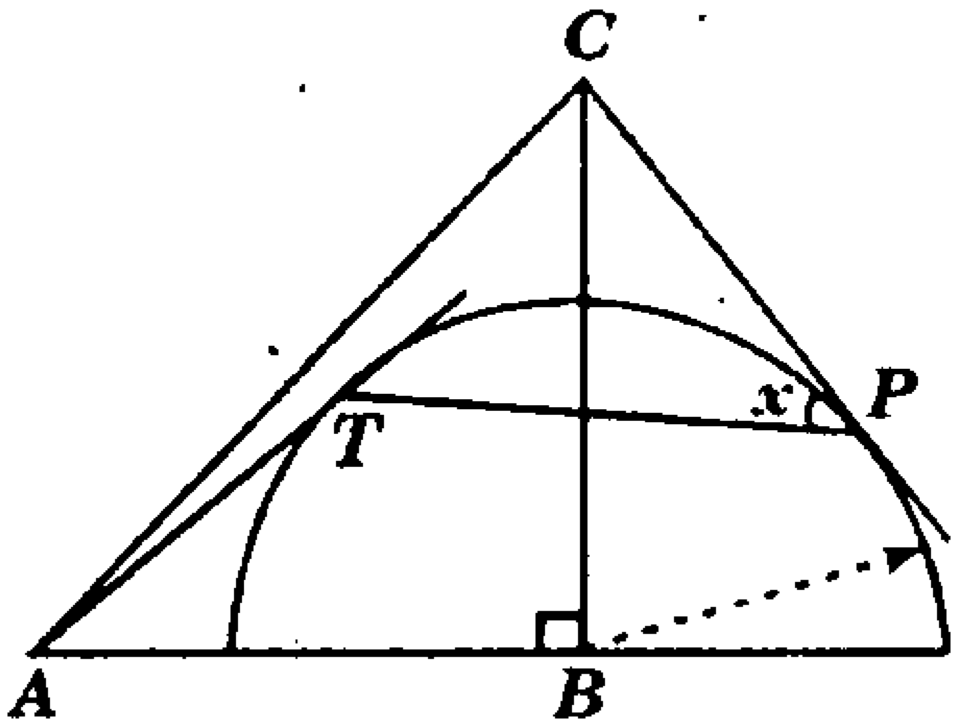
A) 6° B) 15° C) 20° D) 8° E) 7°

06 Calcular el valor de "x", si *T* y *P* son puntos de tangencia.



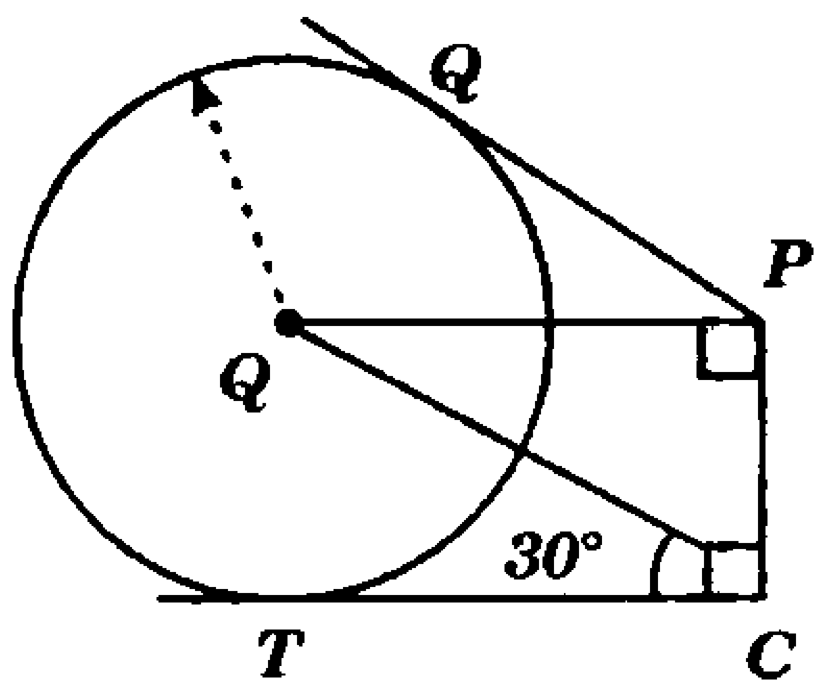
A) 70° B) 50° C) 75° D) 85° E) 80°

07 Si *T* y *P* son puntos de tangencia y $AB=BC$, calcular el valor de "x"



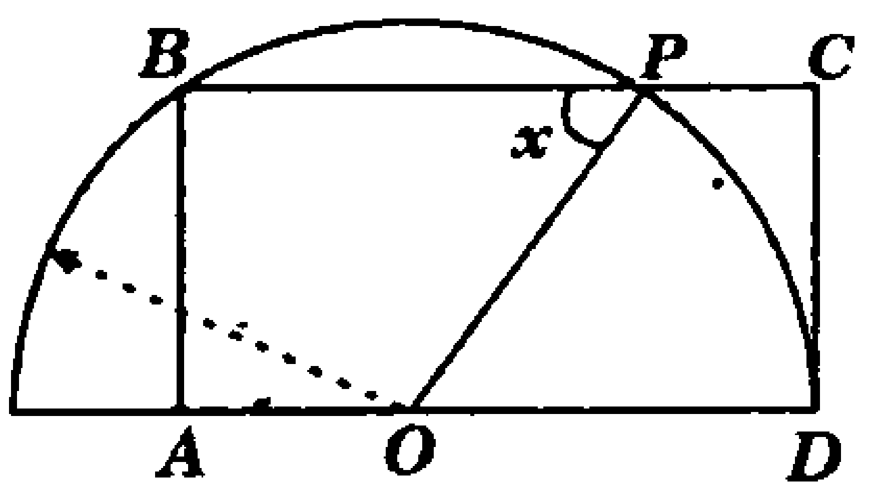
A) 60° B) 30° C) 45° D) 36° E) 54°

08 Si *T* y *Q* son puntos de tangencia, $OC=2$, calcular *QP*.



A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 1 D) $\sqrt{5}$ E) 1,5

09 Si $\overline{OP}$ contiene al centro del rectángulo *ABCD*, calcular el valor de "x".



A) 53° B) 60° C) 75° D) 72° E) 45°

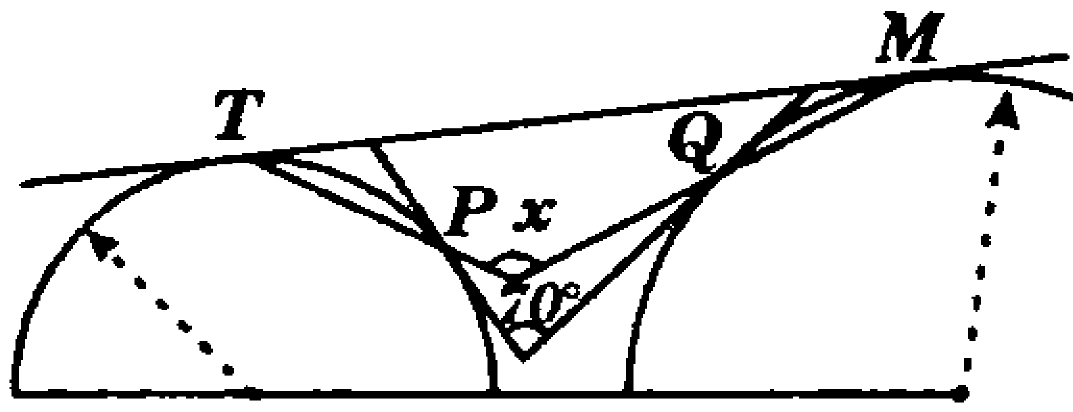
10 Los catetos de un triángulo rectángulo miden *10* y *24*. Calcular la distancia del centro de la circunferencia inscrita al punto medio de la hiponenusa.

A) $\sqrt{41}$ B) $\sqrt{65}$ C) $\sqrt{51}$ D) $\sqrt{35}$ E) $3\sqrt{5}$

11 Se tiene un trapecio isósceles *ABCD* de bases $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Si "*A*" es el centro de un arco que pasa por *C* y *D*, además $AB=AC$, calcular $m\sphericalangle D$.

A) 60° B) 53° C) 72° D) 80° E) 75°

12 Si *T*, *P*, *Q* y *M* son puntos de tangencia, calcular el valor de "x"



A) 140° B) 125° C) 130°
D) 110° E) 150°

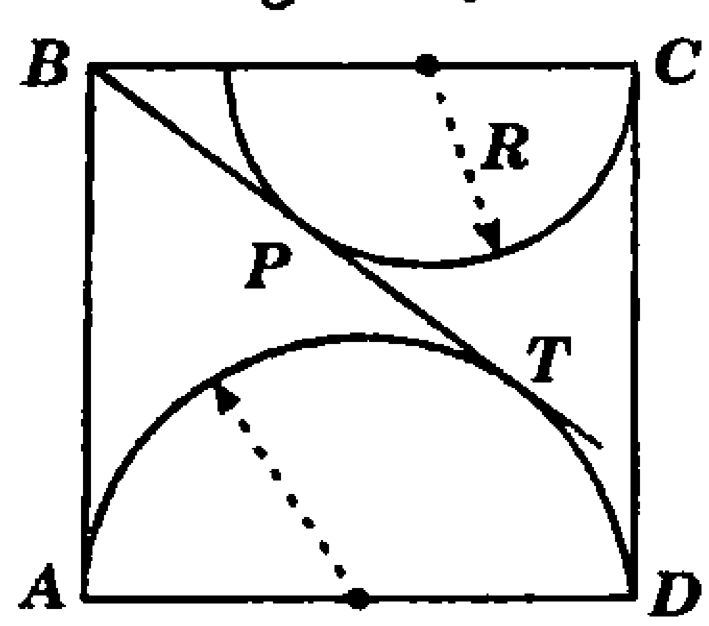
13 Desde un punto "*A*" exterior a una circunferencia, de centro "*O*", se trazan las tangentes $\overline{AT}$ y $\overline{AQ}$ (*T* y *Q* son puntos de tangencia); en $\overline{AT}$ se ubica el punto "*M*". Si $AM=4$; $MT=2$ y $\overline{OM} // \overline{AQ}$, calcular el radio de la circunferencia.

A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 1,5 E) $\sqrt{7}$

14 Se tiene un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, $AB=24$ y $BC=7$. Calcular la distancia de "*C*" hacia el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{30}$ C) $2\sqrt{6}$ D) 4 E) 5

15 Calcular *R*, si el lado del cuadrado *ABCD* mide *16* (*T* y *P* son puntos de tangencia)



A) 4 B) 5 C) 6 D) 4,5 E) 3,2

16 Se tiene un rectángulo *ABCD*, en $\overline{AD}$ se ubica el punto "*E*" de modo que los radios de las circunferencias inscritas en el triángulo *ABE* y en el cuadrilátero *BCDE* miden *1* y *3* respectivamente. Calcular *ED*.

A) 4 B) 5,2 C) 6 D) 5 E) 3,2

17 Indicar verdadero o falso según correspoda :

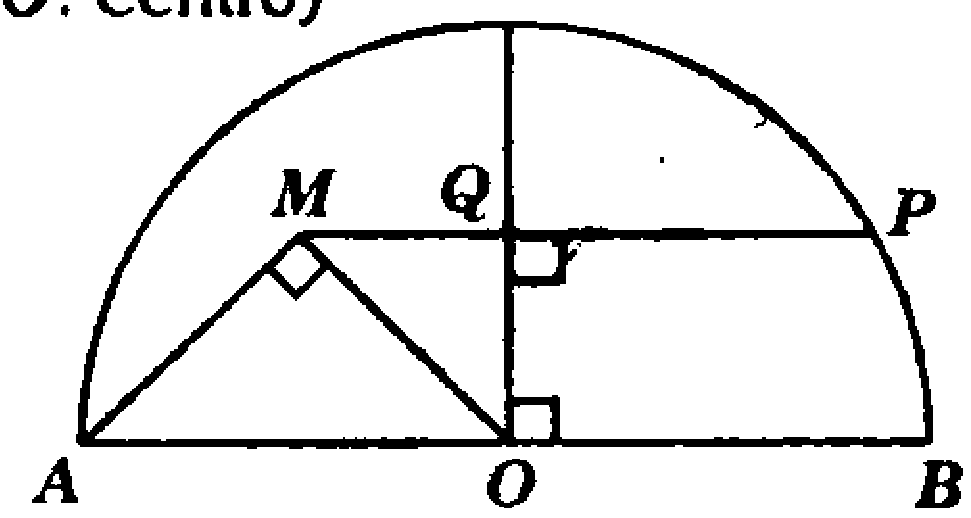
( ) Si el radio de una circunferencia mide *6*, entonces una cuerda no puede medir *14*.

( ) Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta coplanar es igual al radio, entonces dicha recta es tangente a la circunferencia.

( ) Dadas dos circuferencias secantes, entonces el segmento que une los centros es perpendicular a la cuerda común.

A) FVV B) VVV C) VFF
D) VVF E) VFV

18 Si $AM=MO=\sqrt{2}$, calcular *QP* (*O*: Centro)



A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

19 Se tiene una semicircuferencia de diámetro $\overline{AC}$, se traza la cuerda $\overline{AB}$; "*M*" es el punto medio del arco *AB*. Calcular *MB*, si $AC=26$ y $AB=24$.

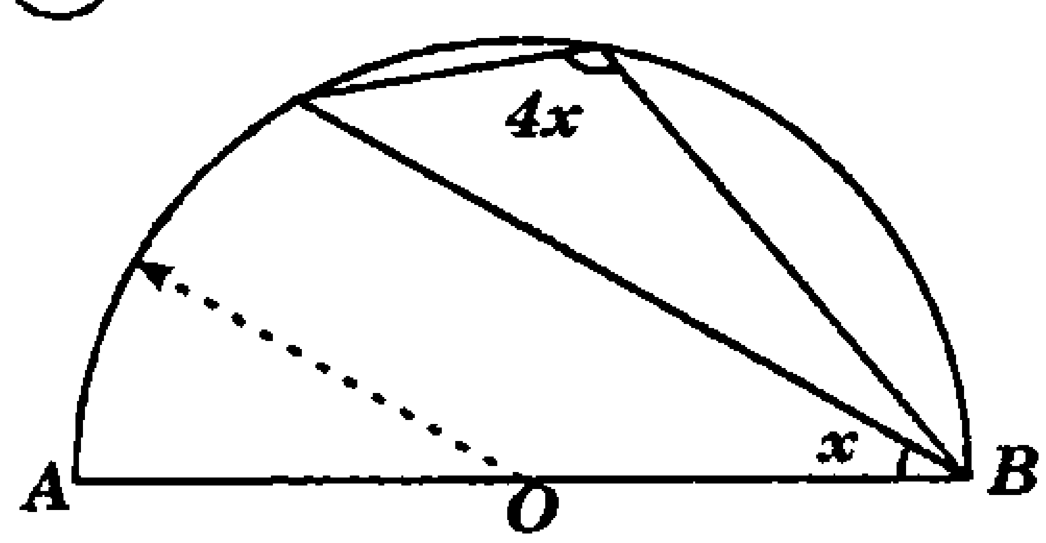
A) $4\sqrt{13}$ B) $6\sqrt{6}$ C) 8 D) 10 E) 14

20 En la prolongación del diámetro $\overline{PQ}$ de una semicircuferencia se ubica el punto "*C*" y se traza la secante *CBA* tal que $AB=BC=2$ y $m\sphericalangle C=45°$. Calcular el radio de la semicircuferencia.

A) $2\sqrt{2}$ B) 5 C) 4 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular "x"



A) 15° B) 18° C) 20° D) 22° E) 25°

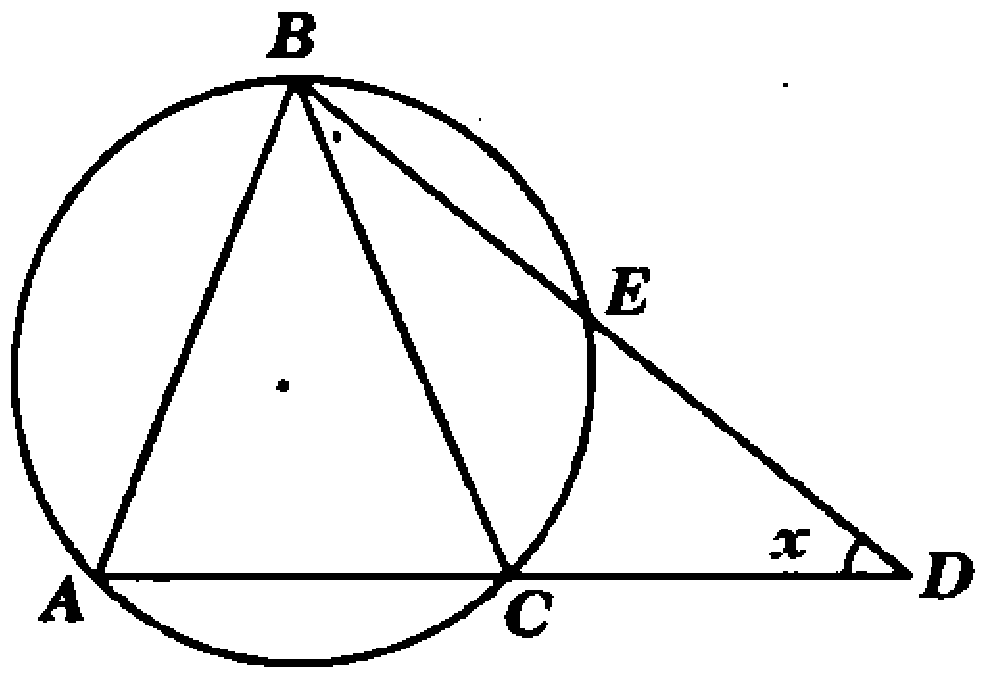
02 Se tiene un triángulo *ABC* insrito en una circunferencia. Si la $m\sphericalangle B=51°$; $m\sphericalangle C=71°$ y *M* es el punto medio del arco *BC*, calcular la $m\sphericalangle MCB$

A)27° B)28° C)29° D)30° E)31°

03 En el gráfico

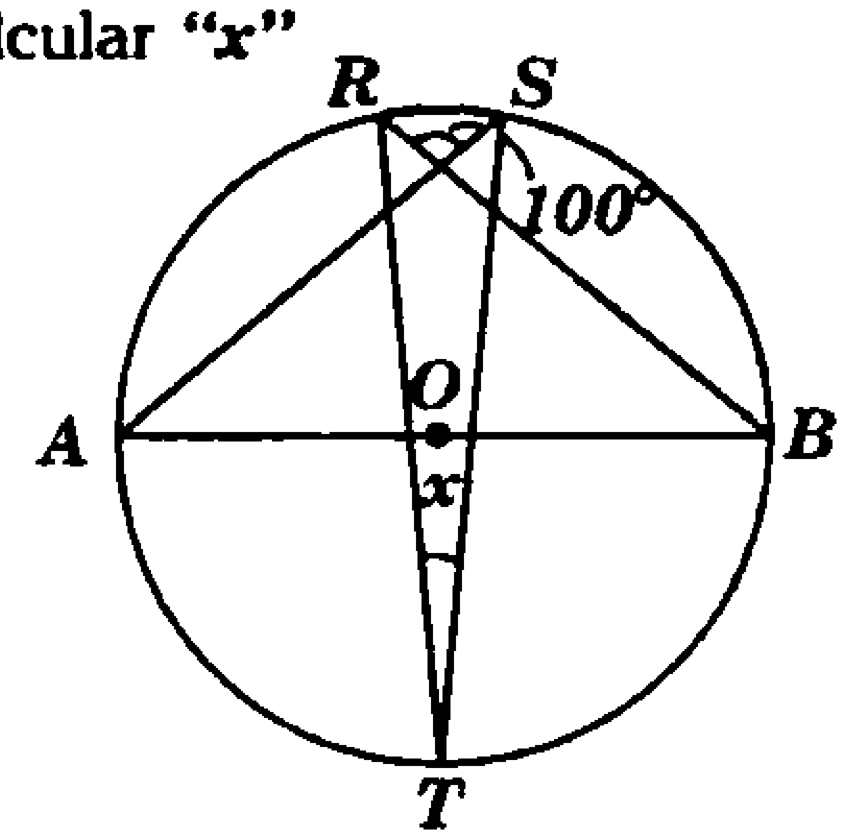
$AB=BC; m\widehat{BE}=80°$

Calcular "x".



A)40° B)20° C)30° D)50° E)35°

04 En el grafico "O" es centro, calcular "x"



A)20° B)10° C)15° D)25° E)12,5°

05 En un triángulo acutangulo *ABC* se trazan las alturas *AR* y *CQ*. Calcular la $m\sphericalangle BQR$, si la $m\sphericalangle RAC=40°$

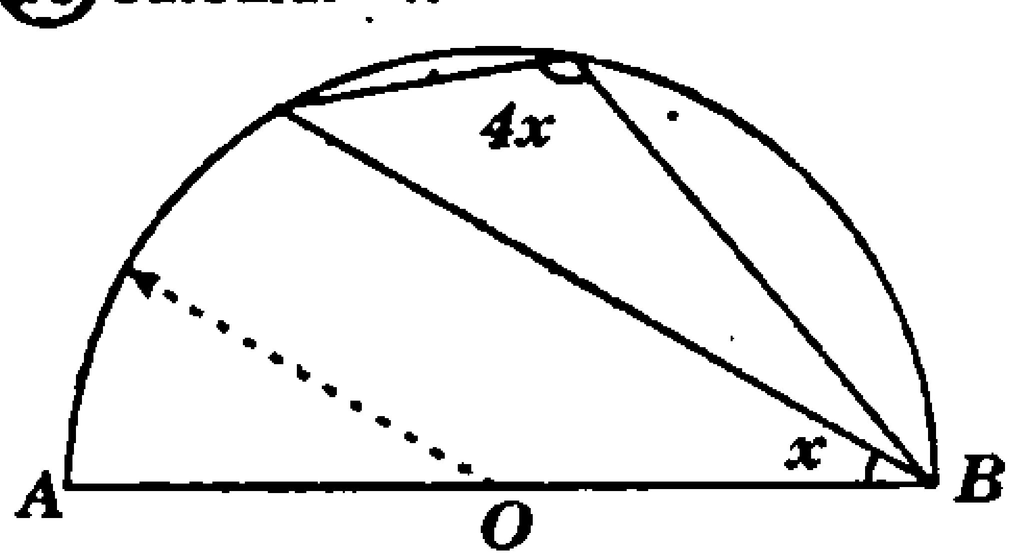
A)40° B)50° C)60° D)70° E)80°

06 En un triangulo *ABC* recto en *B*, sobre *AC* se construye exteriormente el cuadrado *ACRQ*. Calcular la $m\sphericalangle AOB$ si $m\sphericalangle BAC=32°$

(*O* es centro del cudrado)

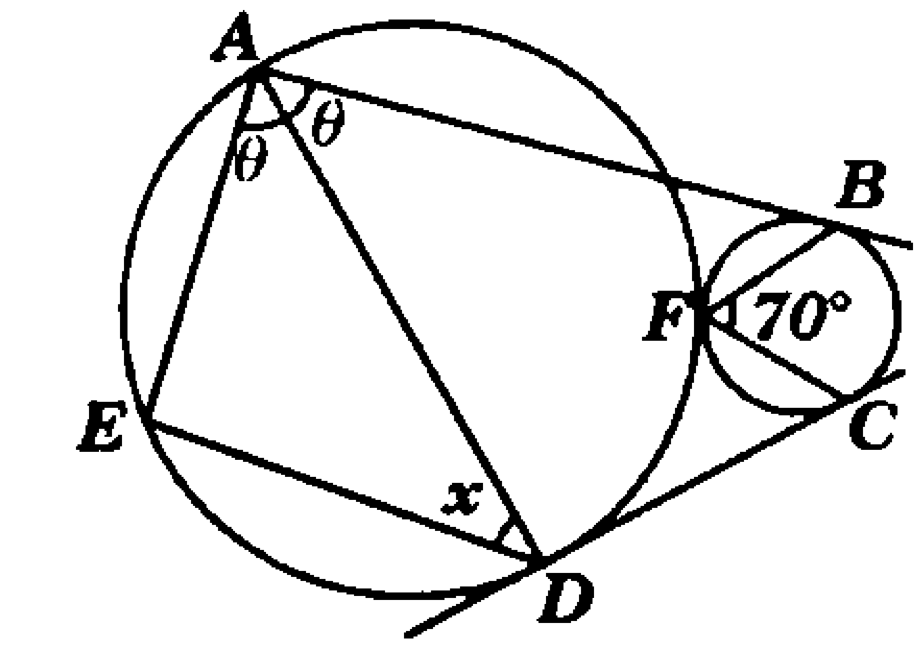
A)32° B)48° C)58° D)68 E)74°

07 Calcular "x"



A)18° B)24° C)30°
D)36° E)40°

08 Calcular "x" *B*, *C*, *D* y *F* son puntos de tangencia.

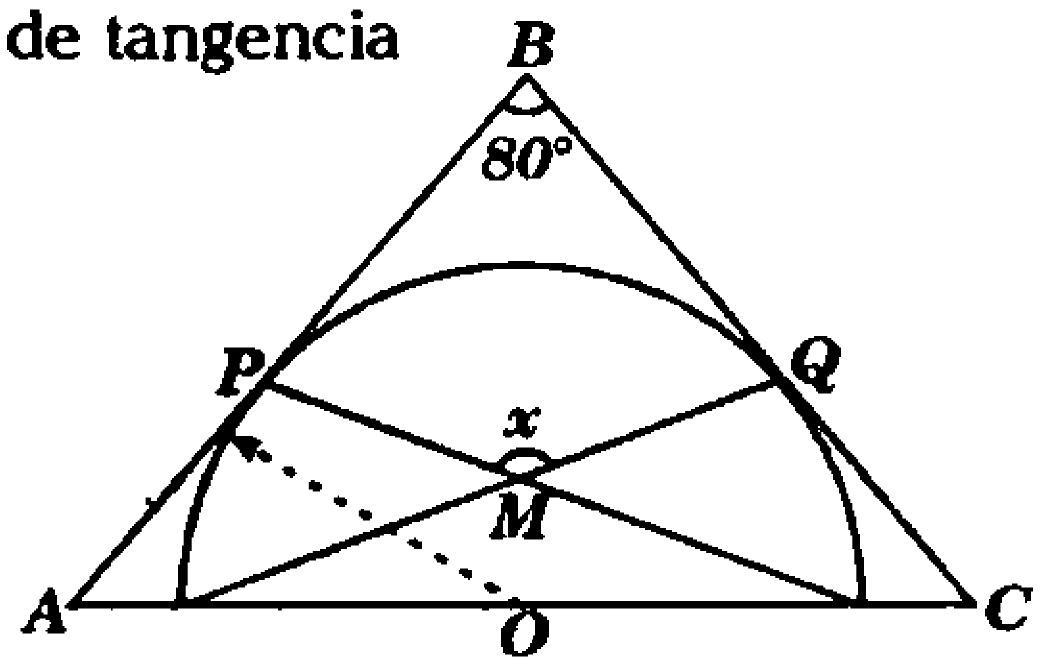


A)35° B) 40° C)60° D)70° E)45°

09 En una circunferencia de centro *O* se prolonga diármetro *AB* hasta el punto *C*, se traza la secante *CDE* tal que $AO=CD$ y la $m\widehat{AE}=63°$. Calcular la $m\sphericalangle ACE$.

A)18° B) 21° C)23° D)25° E)30°

10 Calcular "x". *P* y *Q* son puntos de tangencia



A)150° B)130° C)140° D)135° E)120°

11 En un triángulo isósceles *ABC* (*AB=BC*) en la región exterior relativa a $\overline{AB}$ se ubica el punto *P*. Si $m\sphericalangle PCA=20°$,

$m\sphericalangle ABC=2(m\sphericalangle CPA)$, calcular $m\sphericalangle PBA$.

A)10° B)15° C)18° D)20° E)40°

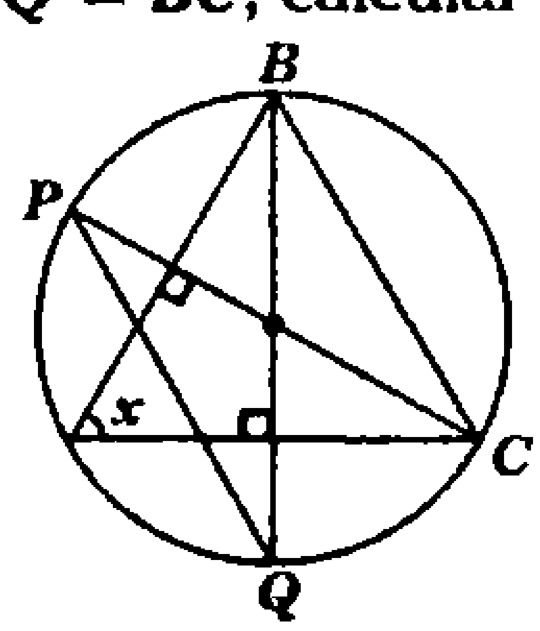
12 Dos circunferencias son secantes en *B* y *P*, sobre una de las circunferencias se ubica el punto *A* y sobre la otra el punto *C* tal que $B\in\widehat{AP}$, $B\in\widehat{PC}$.

Si $m\widehat{ABP}=40°$ y $m\widehat{PBC}=80°$,

calcular la $m\sphericalangle ABC$.

A)50° B)60° C)70° D)80° E)90°

13 Si: $PQ=BC$, calcular "x".

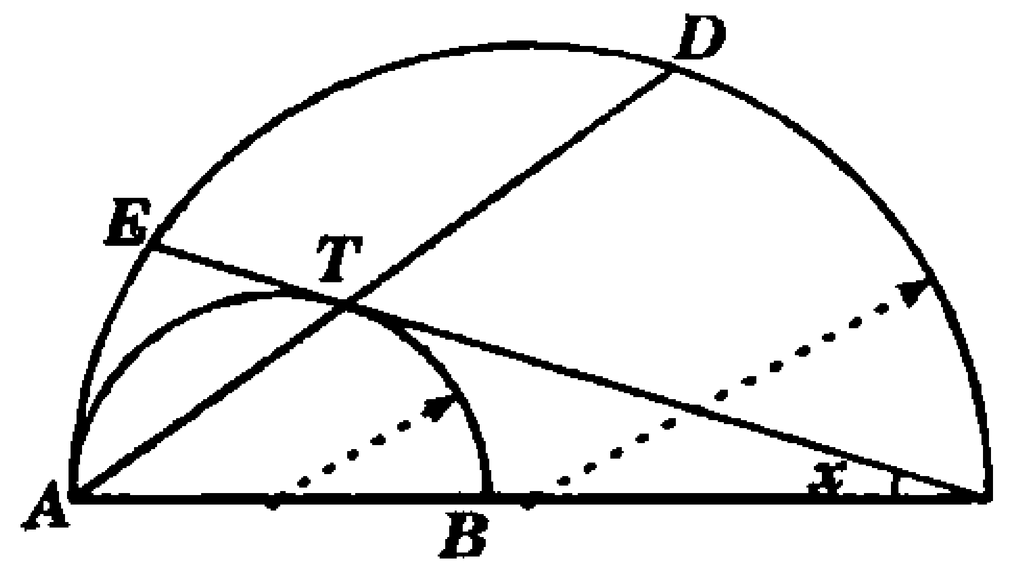


A)67,5° B)53° C)45° D)60° E)75°

14 En un cuadrilátero inscrito *ABCD*, las medidas de los ángulos interiores a *A*, *B* y *C* son proporcionales a *4*; *3* y *5* respectivamente. Calcular la medida del ángulo *D*.

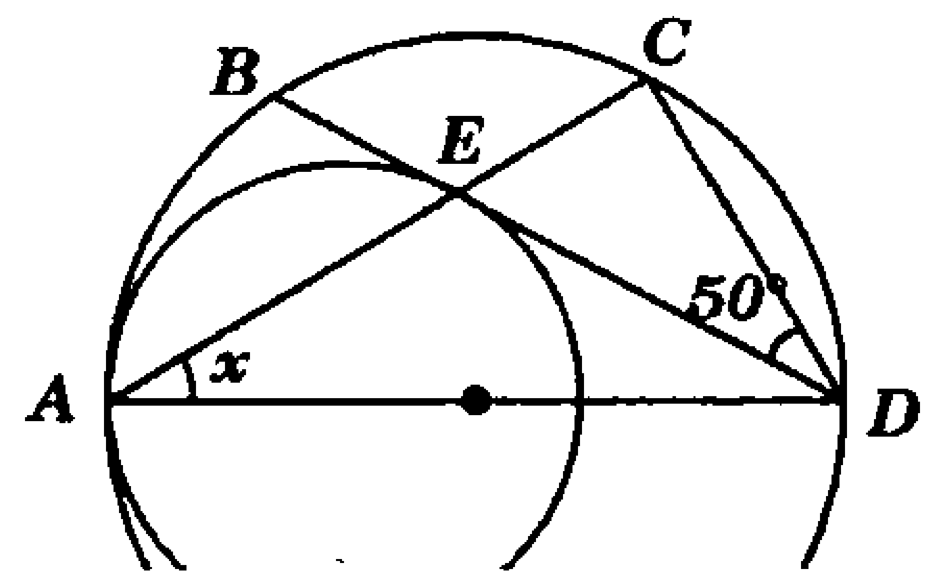
A)90° B)100° C)110° D)120° E)140°

15 Si: $m\widehat{ED}=70°$ y *T* es punto de tangencia, calcular "x".



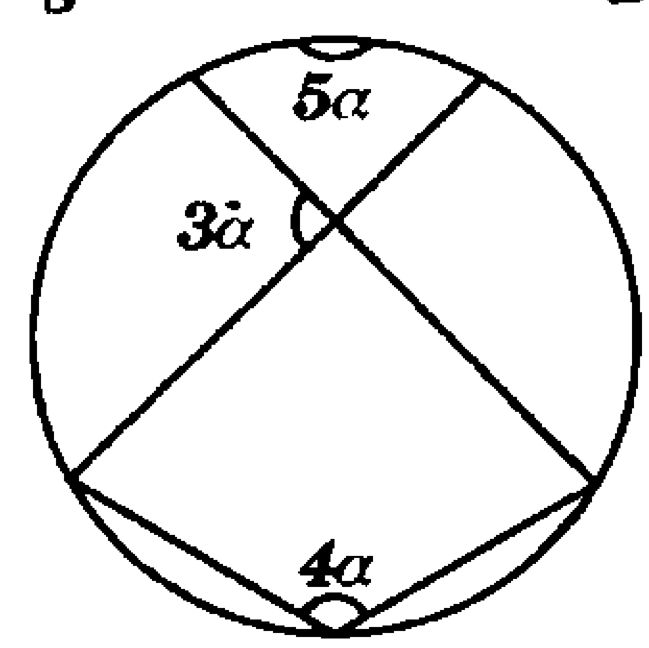
A)10° B)20° C)45° D)15° E)30°

16 Si: *A* y *E* son puntos de tangencia, calcular "x".



A)40° B)50° C)80° D)60° E)65°

17 Del gráfico: calcular "α".



A)20° B)35° C)45° D)25° E)30°

18 Responder verdadero (*V*) o falso (*F*) según corresponda:

( ) El ángulo inscrito en una semicircunferencia mide *90°*

( ) La medida de un ángulo central es igual a la mitad de la medida del arco comprendido entre sus lados

( ) El ángulo exterior es aquel cuyos lados son dos secantes a la circunferencia

A)VVV B)FFV C)VFV

D)VFF E)FFF

19 Responder verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( )El trapecio isósceles es inscriptible a una circunferencia

( )Todos los paralelogramos son inscriptibles a una circunferencia

( )Si un cuadrilátero cumple cualquiera de las propiedades del cuadrilátero inscrito, será inscriptible

A)VVV B)FFV C)VFV
D)VFF E)FFF

20 Responde verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Todo trapecio inscrito en una circunferencia es isósceles

( ) Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son complementarios .

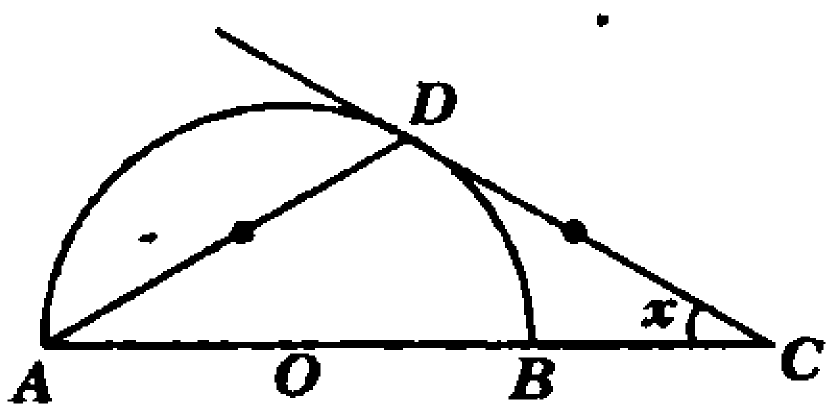
( ) Todo cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia

A)VVV B)FFV C)VFV
D)VFF E)FFF

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

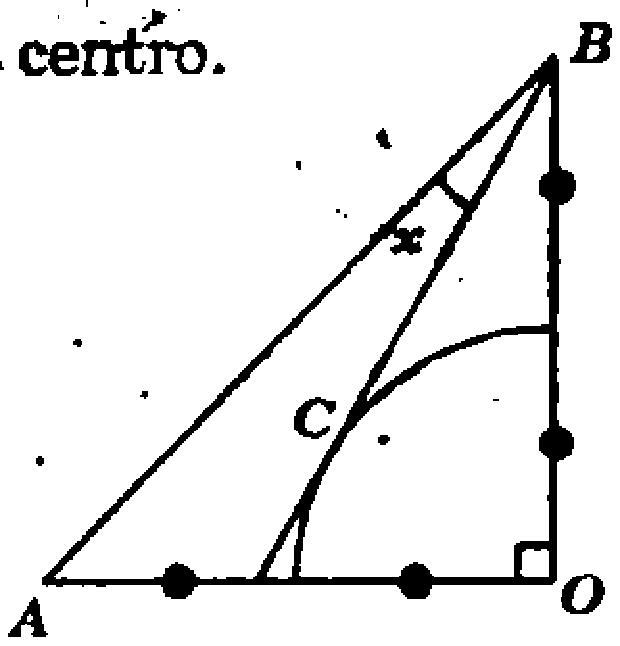
01 En la figura , calcular "*x*" si "*O*" es centro.

A) 45°
B) 30°
C) 15°
D) 37°
E) 20°

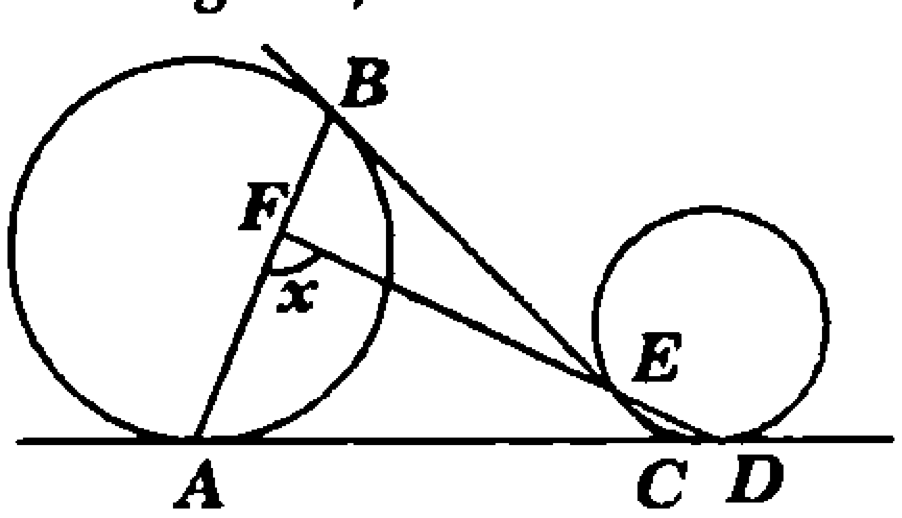


02 En la figura , calcular "*x*" si "*O*" es centro.

A) 10°
B) 16°
C) 8°
D) 15°
E) 30°



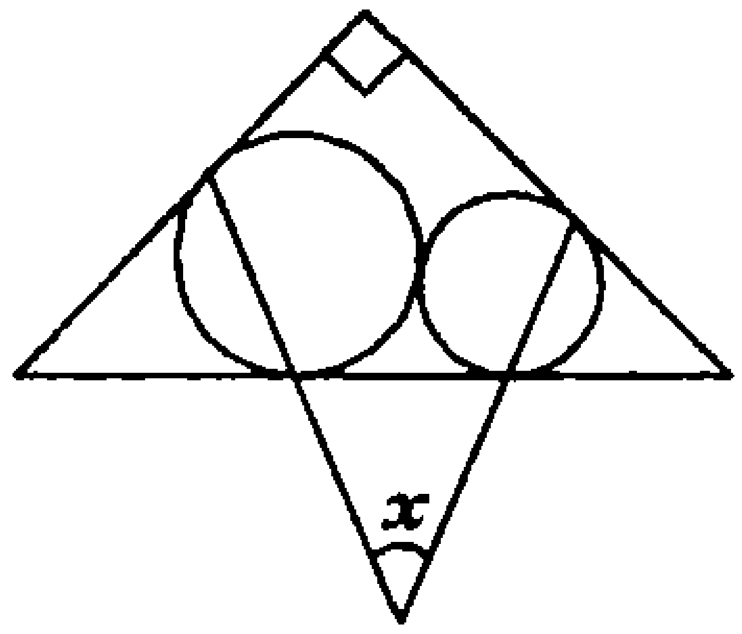
03 En la figura , calcular "*x*".



A) 60° B) 45° C) 90°
D) 75° E) 72°

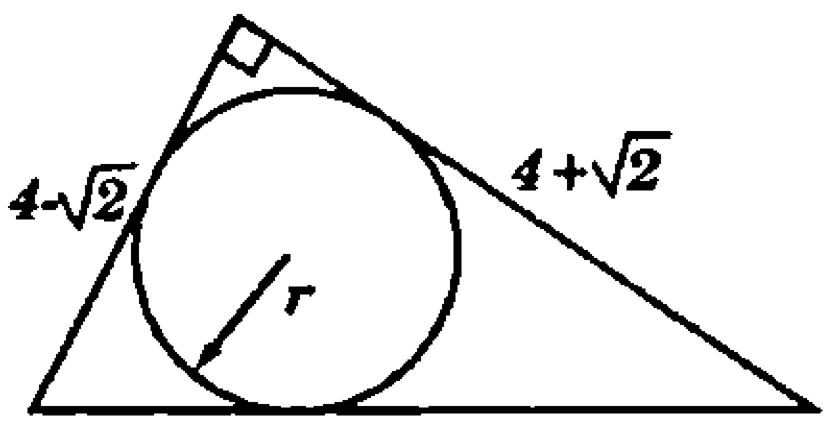
04 Calcular "*x*" del gráfico

A) 67,5°
B) 60°
C) 75°
D) 22,5°
E) 45°



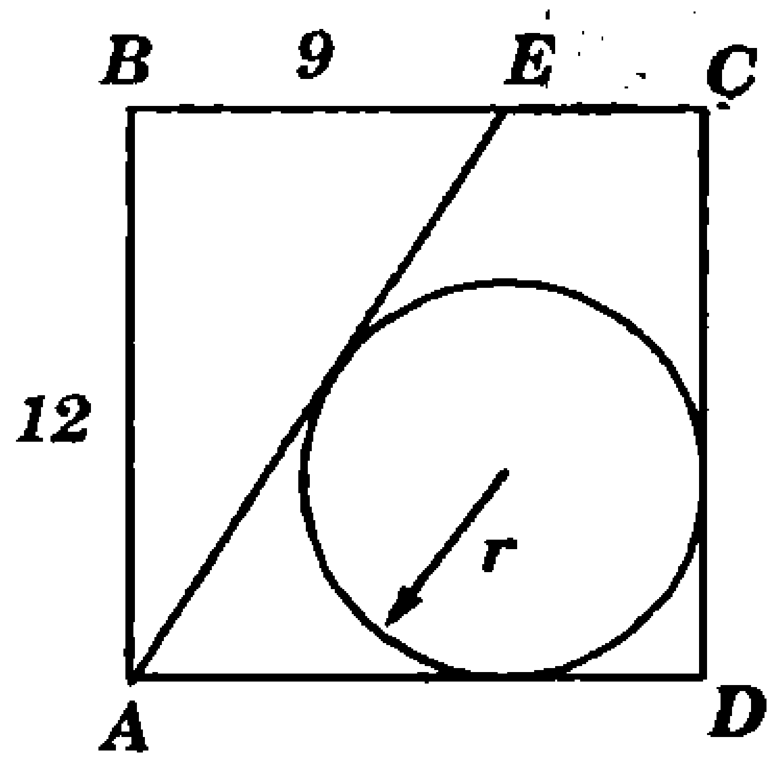
05 En la figura , calcular "*r*"

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 3
D) 4
E) 26



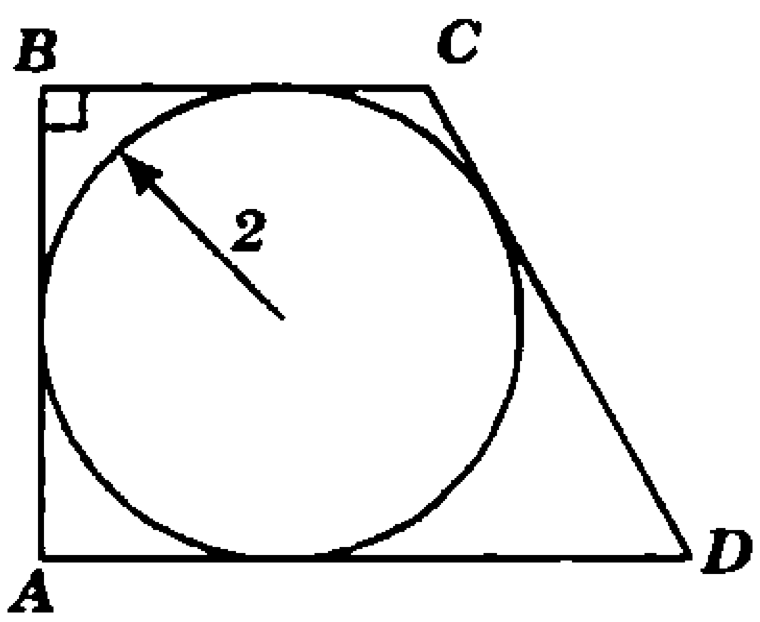
06 En el cuadrado *ABCD* , calcular "*r*".

A) 1
B) 2
C) 4
D) 3
E) 5



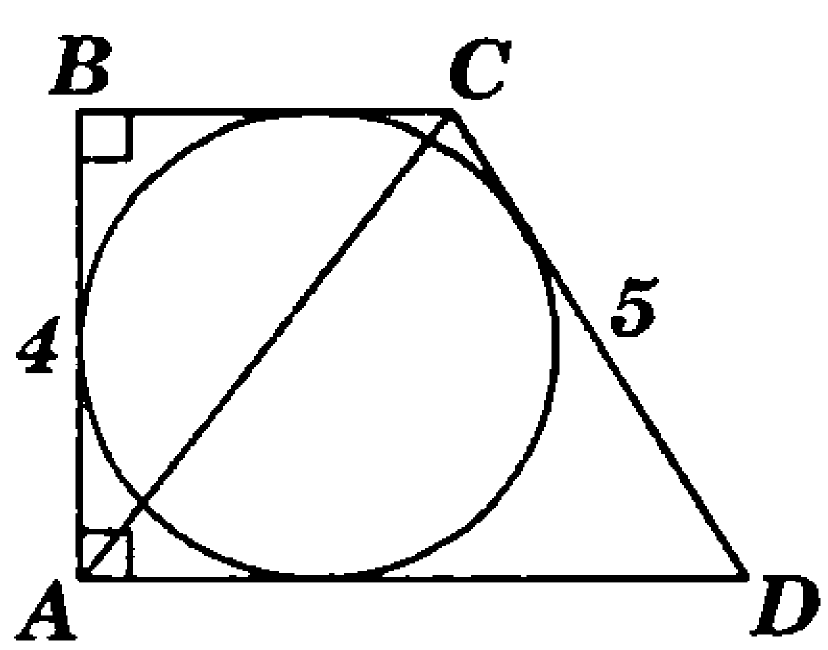
07 En la figura , calcular el perímetro del trapecio *ABCD*

A) 18
B) 12
C) 8
D) 24
E) 16



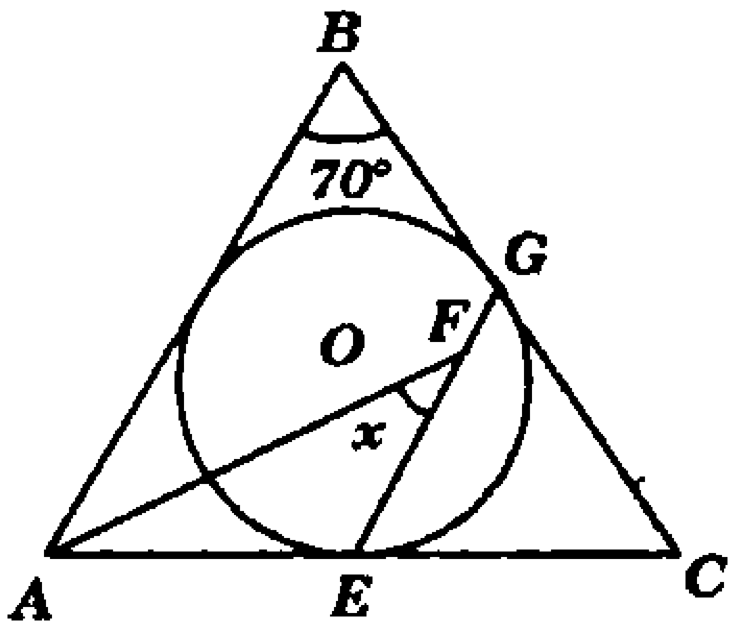
08 En el trapecio *ABCD*, calcular el perímetro del ΔABC.

A) 10
B) 12
C) 15
D) 18
E) 13



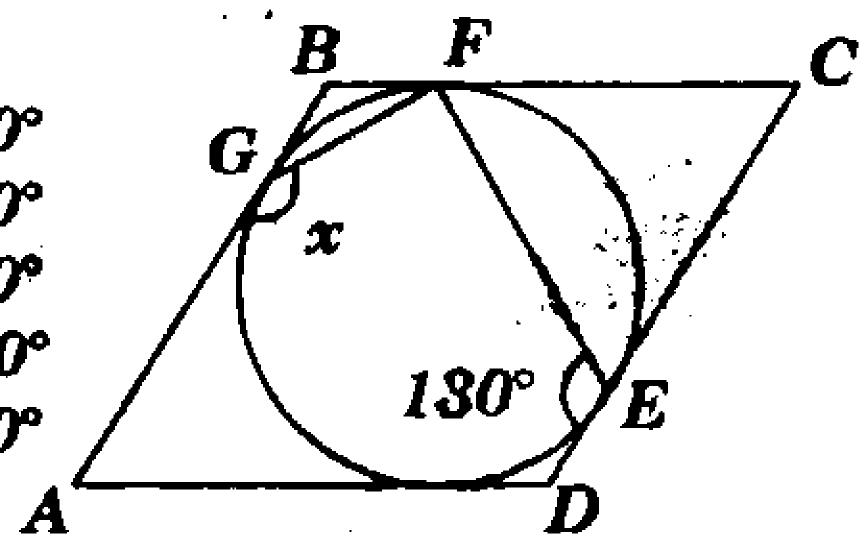
09 En la figura , calcular "*x*", si "*O*" es centro.

A) 30°
B) 35°
C) 45°
D) 70°
E) 40°



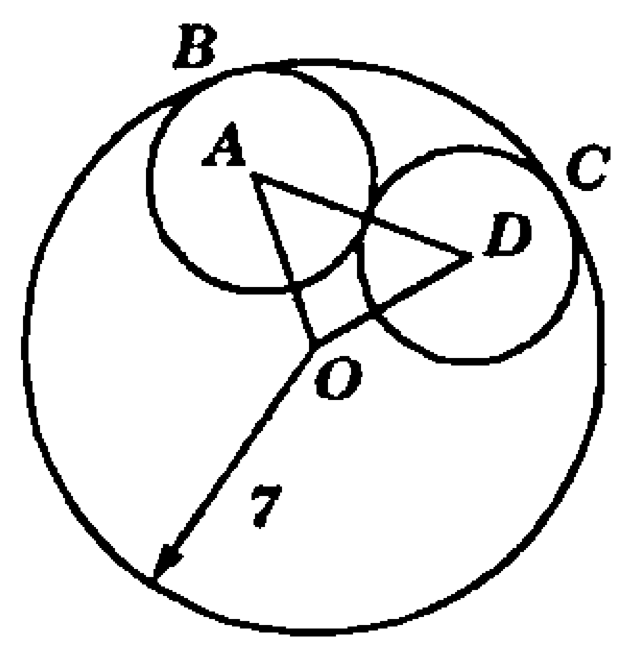
10 En la figura, si ABCD es un romboide , calcular "*x*".

A) 150°
B) 100°
C) 130°
D) 110°
E) 140°



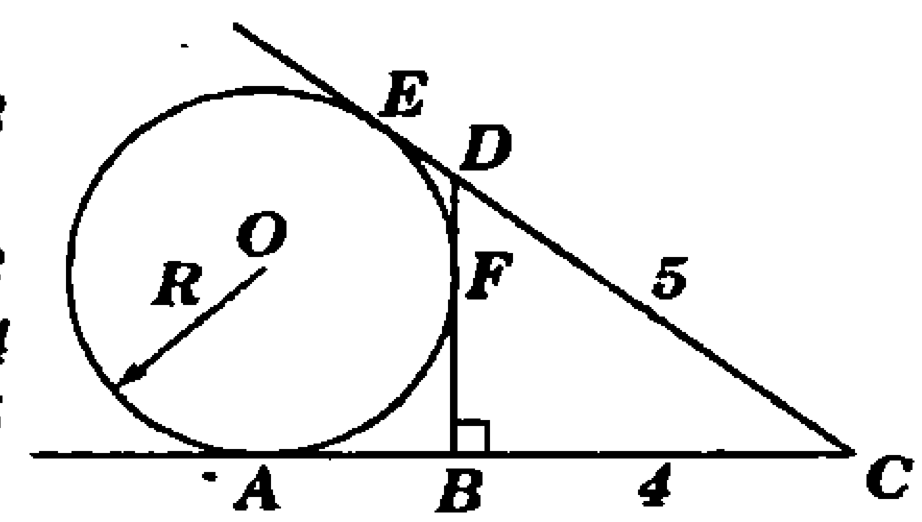
11 Calcular el perímetro del ΔAOD, si *A, O* y *D* son centros .

A) 14
B) 7
C) 21
D) 15
E) 12



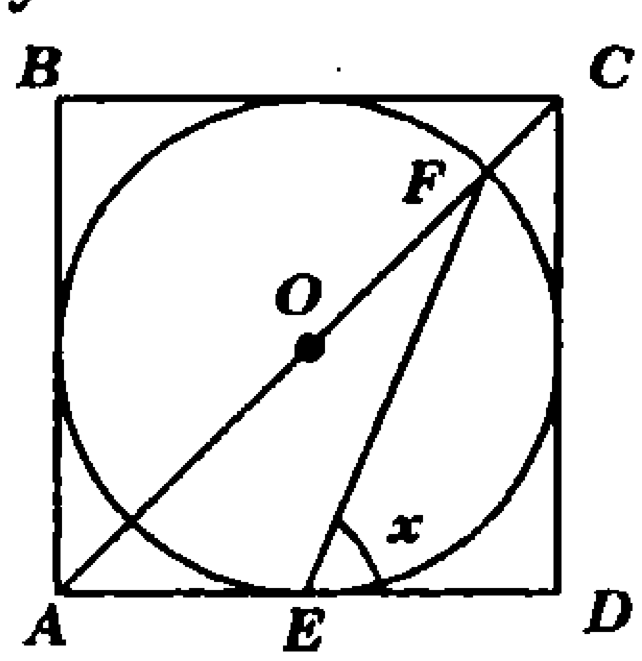
12 En la figura , calcular "*R*".

A) 3
B) 1
C) 2
D) 4
E) 5



13 Calcular "*x*" si *ABCD* es un cuadrado y "*O*" es centro.

A) 82,5°
B) 60°
C) 75°
D) 67,5°
E) 80°



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)E	2)A	3)A	4)A	5)E	6)A	7)C	8)B	9)B	10)B
11)C	12)B	13)C	14)E	15)C	16)D	17)B	18)E	19)A	20)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)A	2)C	3)A	4)B	5)B	6)C	7)C	8)B	9)B	10)C
11)E	12)B	13)D	14)B	15)B	16)E	17)D	18)D	19)C	20)D

PROPORCIONALIDAD y SEMEJANZA

CAPÍTULO 101

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer las principales figuras cuyos segmentos asociados a ellas guardan propiedad de proporcionalidad.*
* *Establecer la definición de razón de segmentos y segmentos proporcionales.*
* *Usar los conceptos y propiedades básicas para solucionar problemas y hacer demostraciones de teoremas*
* *Utilizar adecuadamente dichos conceptos en el desarrollo de ejercicios que involucren la comparación de 2 o más segmentos.*

INTRODUCCIÓN :

El hombre desde que empezó a tener las nociones de cantidad, número y medida; comenzó a realizar ciertas comparaciones con ellas. También observó que en la naturaleza se daban cambios de tamaños en una cierta proporción , por ejemplo , los animales y seres humanos mostraban crecimiento de sus extremidades y otras partes de su fisonomía de manera proporcional. Además, en otras ramas de la ciencia como la física y química los diversos fenómenos que se estudian hay presencia de la proporcionalidad por ejemplo: la variación espacio-tiempo, la proporción determinada de compuestos en una mezcla, etc; todo ello contribuyó al desarrollo.

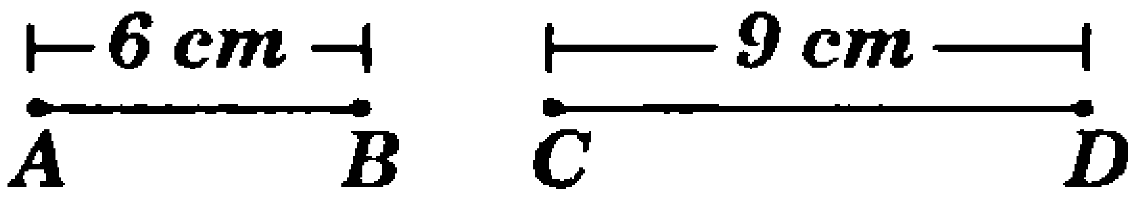
También, así como en la sociedad se da la semejanza de ideas , la semejanza de sucesos; la geometría toma estos conceptos y lo aplica a las formas geométricas, donde principalmente se da la comparación de líneas y es así como se logra el desarrollo de la agrimensura (distribución y medida de terrenos o medida de distancias inaccesibles), construcción, geodesia. astronomía. el arte, etc.

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

RAZÓN DE SEGMENTOS :

Es la relación que existe entre las longitudes de dos segmentos expresados en la misma unidad de medida.

Es decir :



En la figura la razón de AB y es $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{6cm}{9cm}=\dfrac{2}{3}$ es donde $\dfrac{2}{3}$ el valor de la razón.

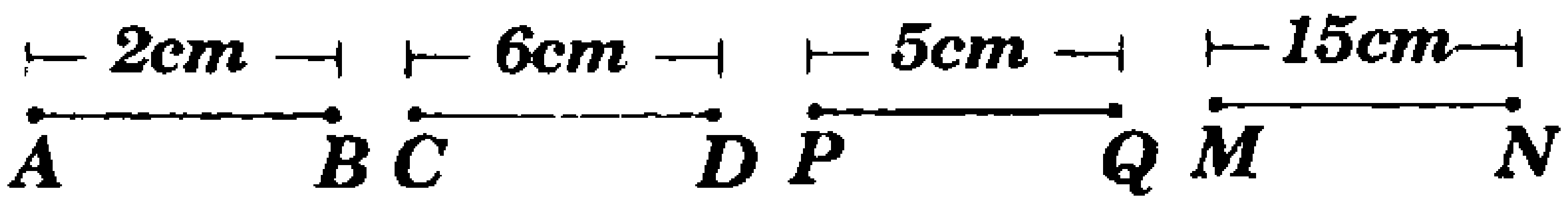
NOTA :

Dos cantidades son directamente proporcionales cuando la variación de una de ellas origina la variación del mismo orden y sentido de la otra, además si "*a*" es directamente proporcional a "*b*" , entonces: $a=kb$, donde k se denomina constante de proporcionalidad.

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos son proporcionales a otros dos segmentos, cuando la razón entre sus longitudes es la misma.

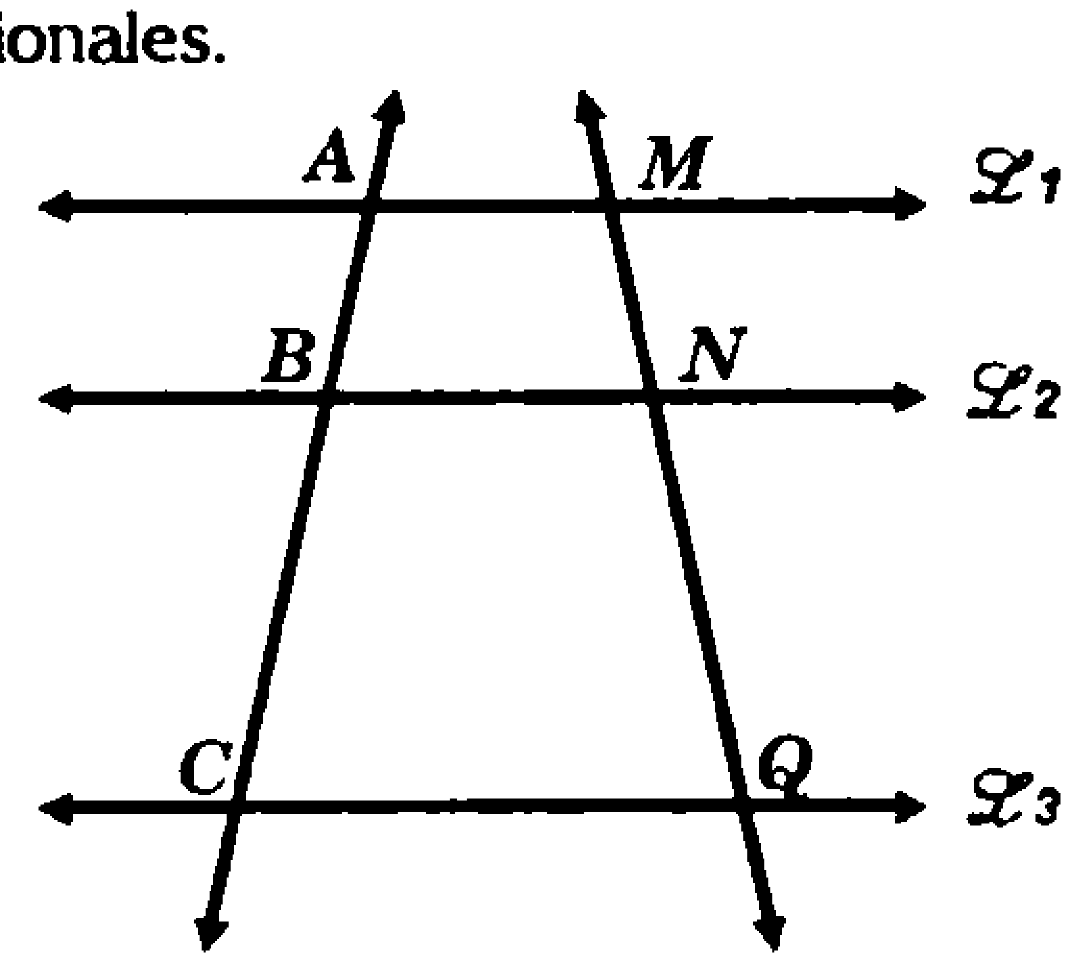
Es decir:



En la figura , $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{PQ}{MN}=\dfrac{1}{3}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$

TEOREMA DE THALES

Tres o más rectas paralelas desterminan en dos rectas transversales o secantes a ellas, segmentos proporcionales.

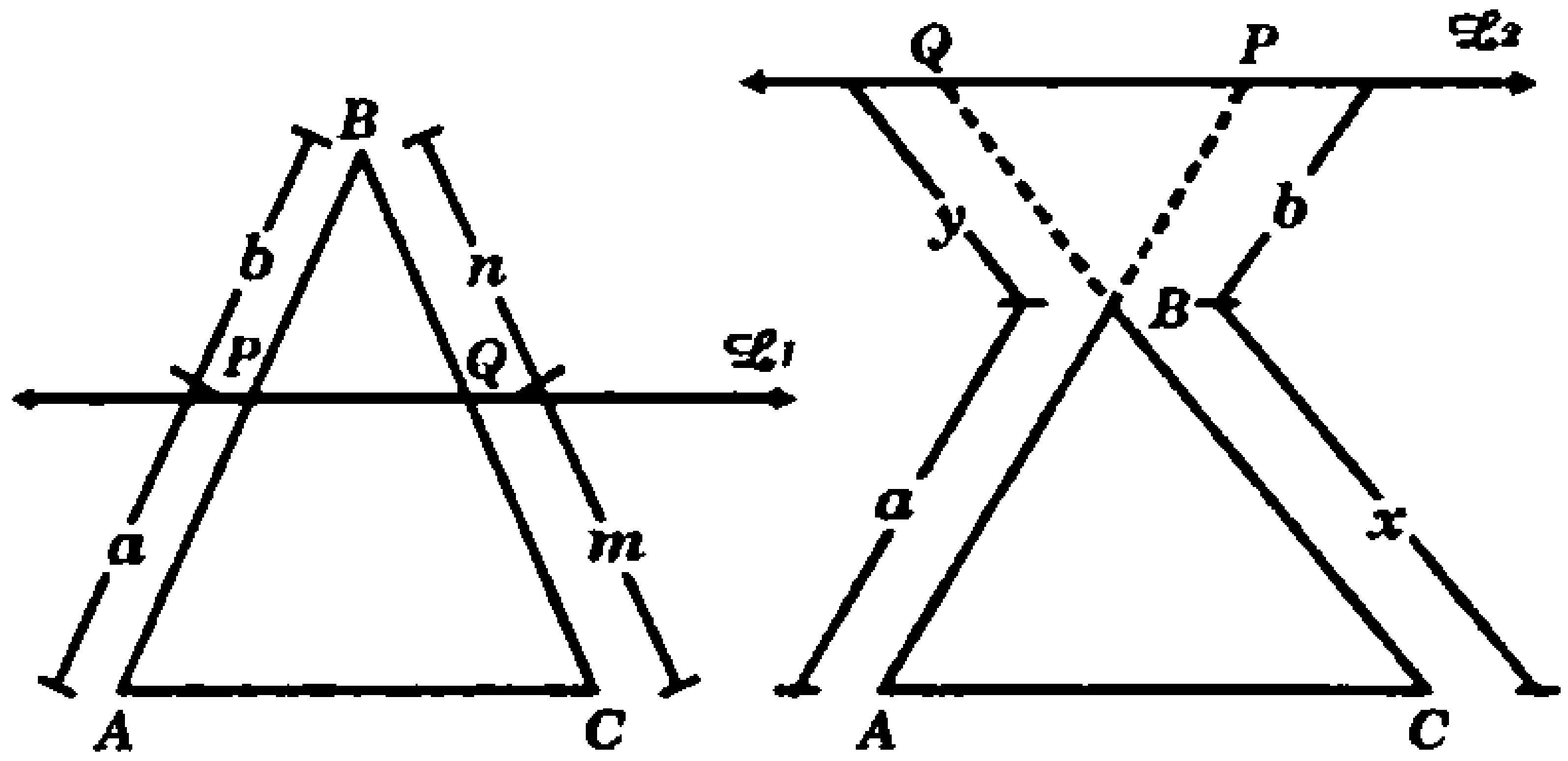


* En el gráfico :

Si : $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$, se cumple : $\boxed{\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{MN}{NQ}}$

COROLARIO DEL TEOREMA DE THALES

Una recta secante a un triángulo y paralela a un lado, determina en los otros dos lados o sus prolongaciones segmentos proporcionales.



* En el gráfico;

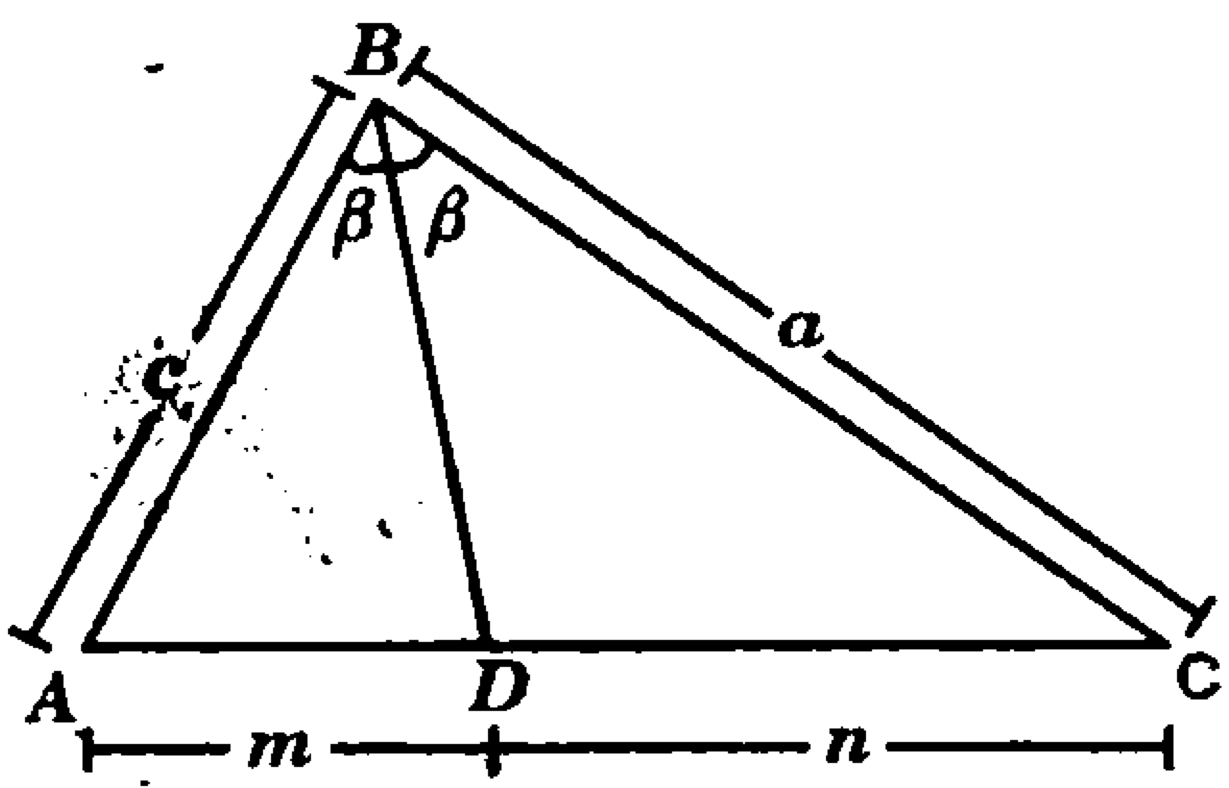
Si : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // AC$ se cumple : $\boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}}$

Si : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} // AC$ se cumple : $\boxed{\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}}$

* Lo recíproco de estos corolarios también se cumplen.

TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

En todo triángulo , una bisectriz interior determina en el lado al cual es relativa segmentos proporcionales a los adyacentes a dicha bisectriz.

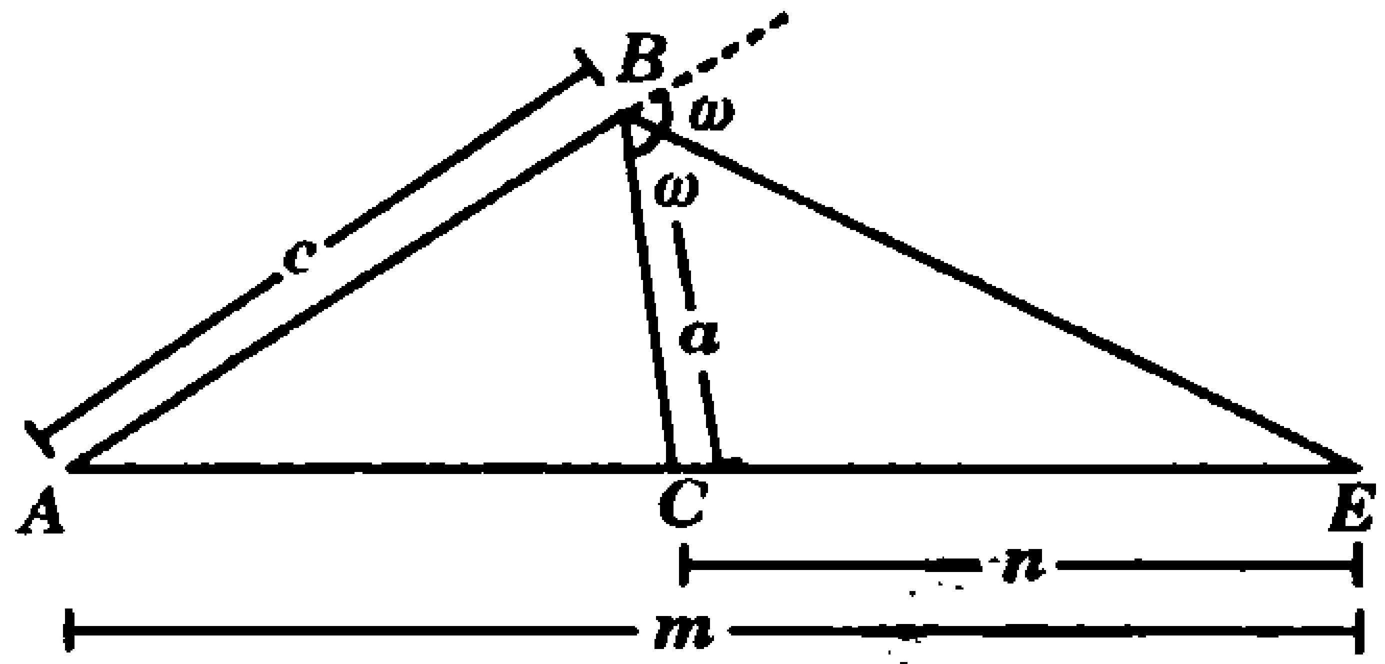


En el gráfico , BD: bisectriz interior del ΔABC

Se cumple : $\boxed{\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{n}}$ ó $\boxed{\dfrac{c}{m}=\dfrac{a}{n}}$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

En un triángulo , una bisectriz exterior cuyos lados adyacentes son de diferente longitud ; determina en el lado al cual es relativa segmentos proporcionales a lados adyacentes a dicha bisectriz.

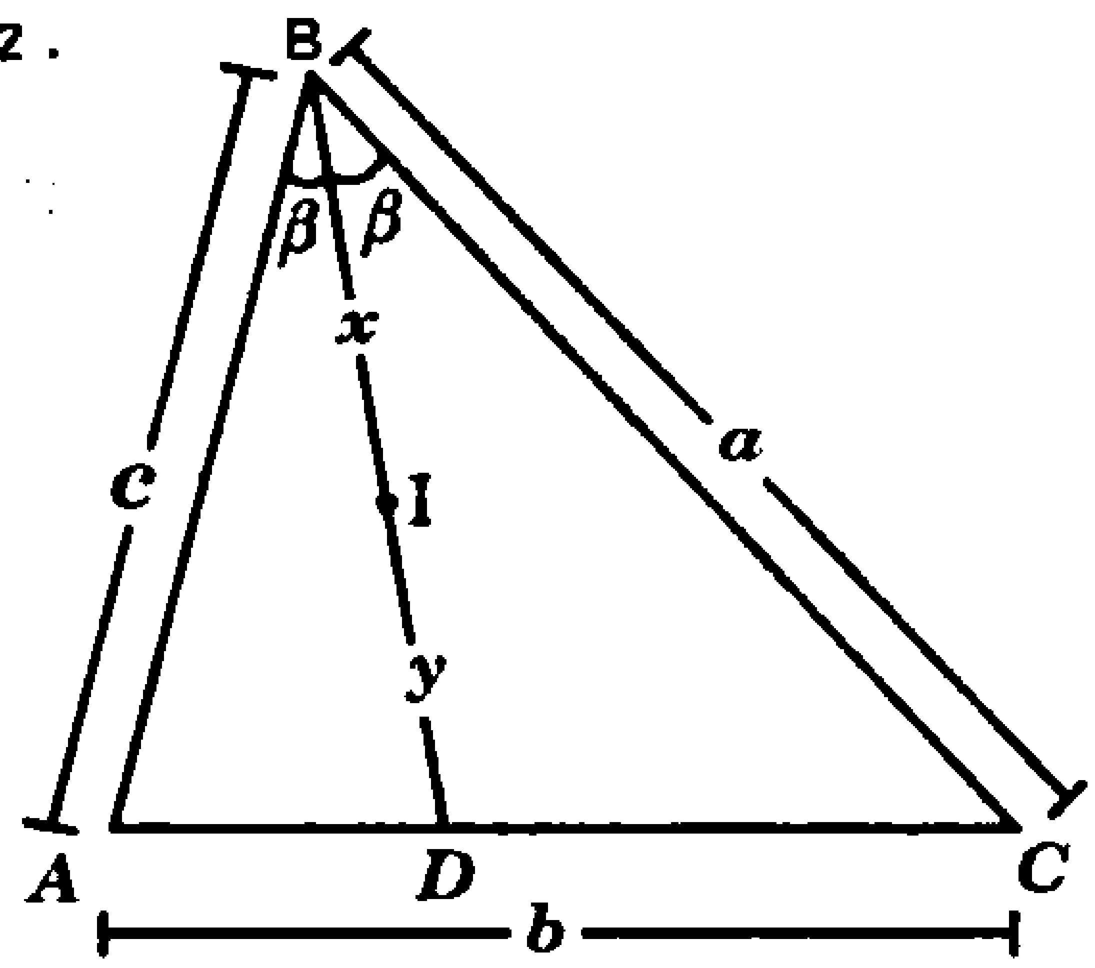


En el gráfico , $\overline{BE}$: bisectriz exterior del ΔABC

Se cumple: $\boxed{\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{n}}$ ó $\boxed{\dfrac{c}{m}=\dfrac{a}{n}}$

TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo el incentro divide a una bisectriz interior en dos segmentos que son proporcionales a la suma de las longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz y a la longitud del lado al cual es relativa dicha bisectriz .

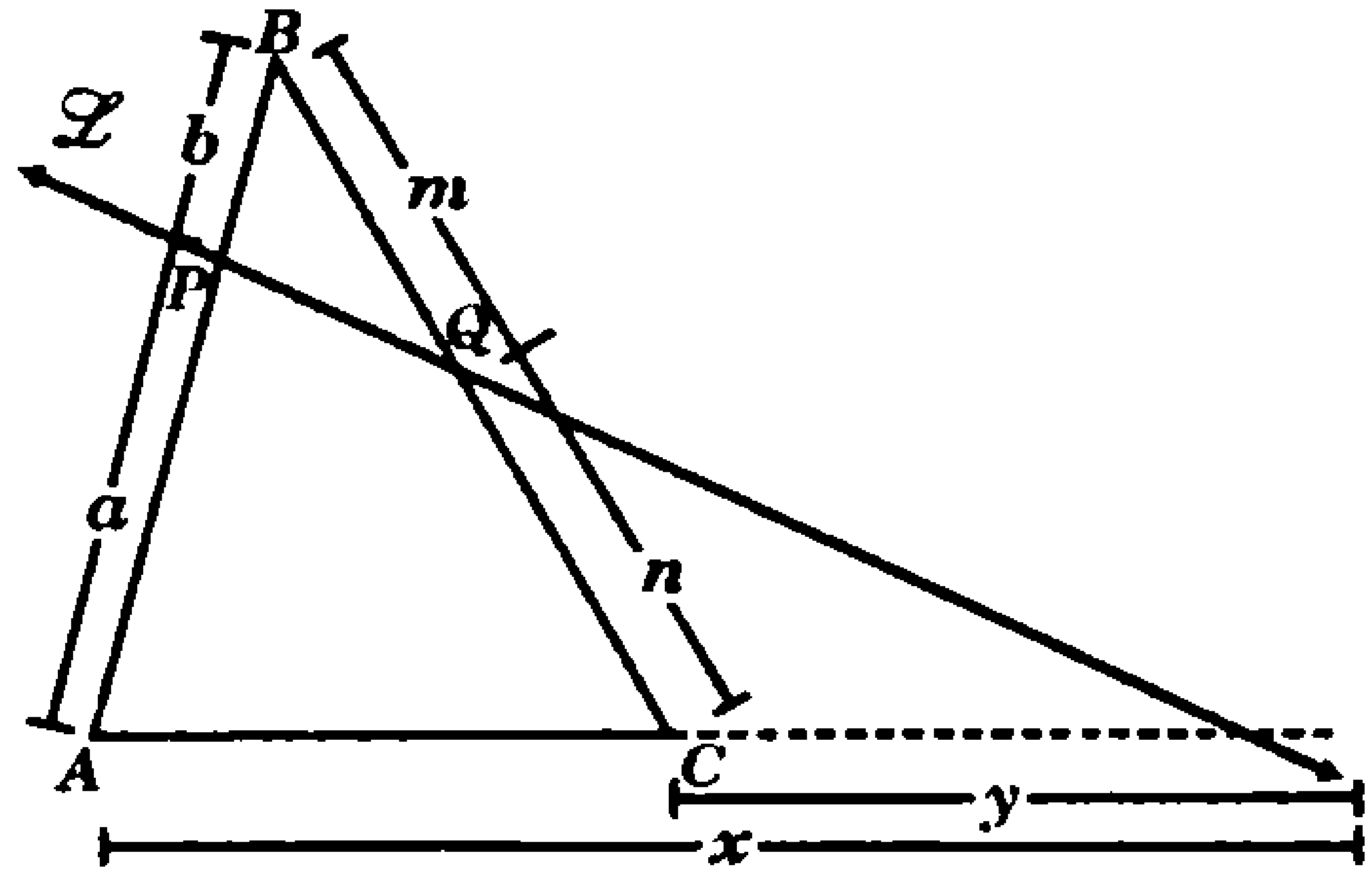


En el gráfico , I: incentro del ΔABC se cumple :

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{c+a}{b}}$$

TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante a un triángulo que interseca a dos lados y al tercero en la prolongación , determina en dichos lados segmentos , de modo que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

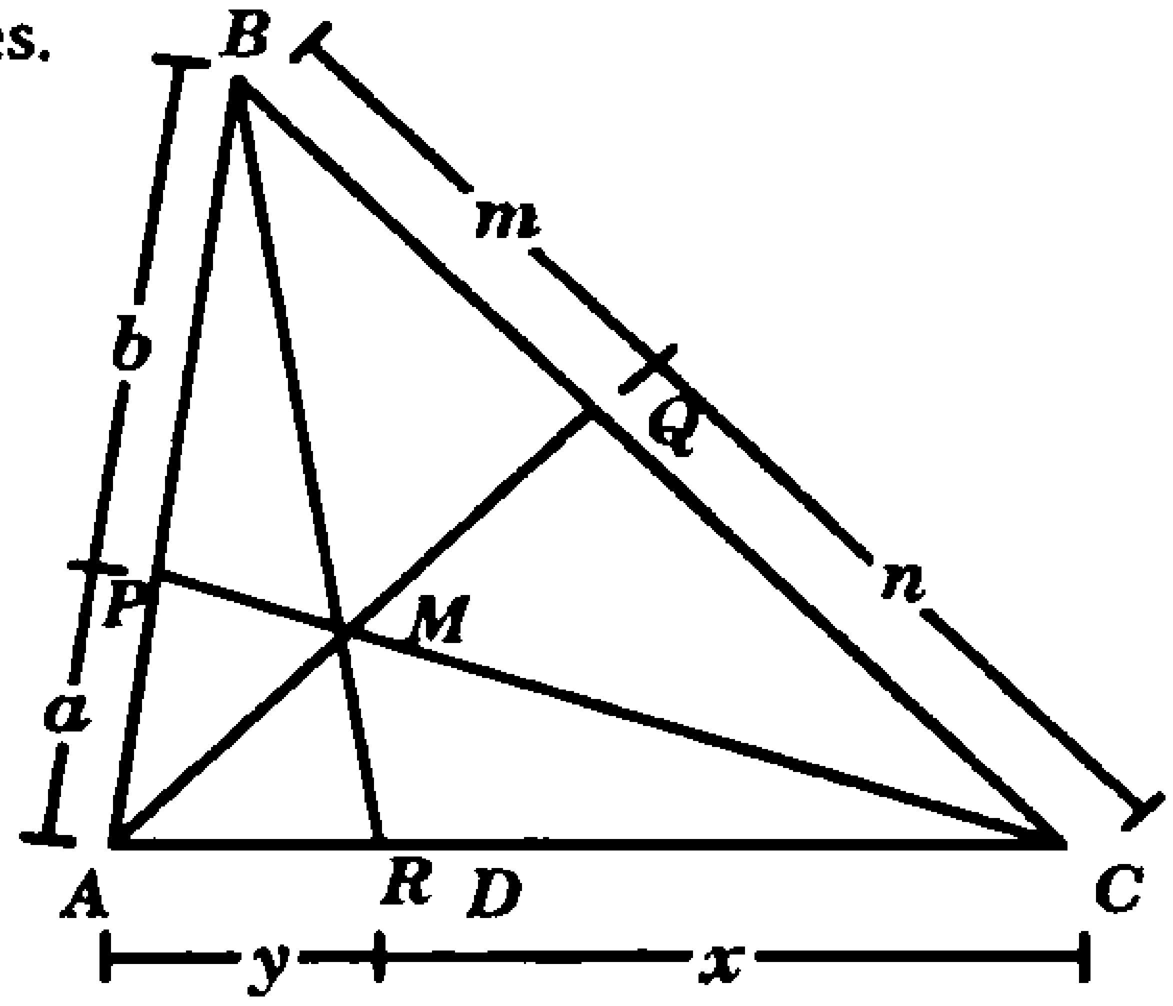


En el gráfico , $\overleftrightarrow{\mathcal{L}}$: secante el triángulo *ABC*

Se cumple : $a \times m \times y = b \times n \times x$

TEOREMA DE LA CEVA

En todo triángulo tres cevianas concurrentes, determinan en los lados segmentos, de modo que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de los otros tres.

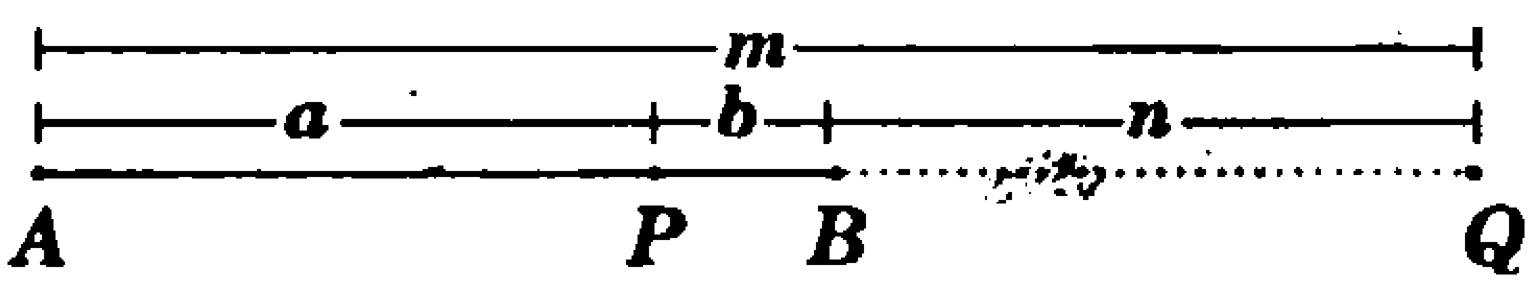


En el gráfico , las cevianas interiores *AQ, BR* y *CP* concurrentes en *M* , dividen internamente a los lados del *ABC*

Se cumple : $a \times m \times x = b \times n \times y$

DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Dos puntos dividen armónicamente a un segmento, si lo dividen internamente y externamente en la misma razón.



En el gráfico, P divide internamente a $\overline{AB}$ y Q divide externamente a $\overline{AB}$, si P y Q dividen armónicamente el segmento *AB*.

Se cumple , por definición : $\boxed{\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{BQ}}$

es decir (reemplazando longitudes)

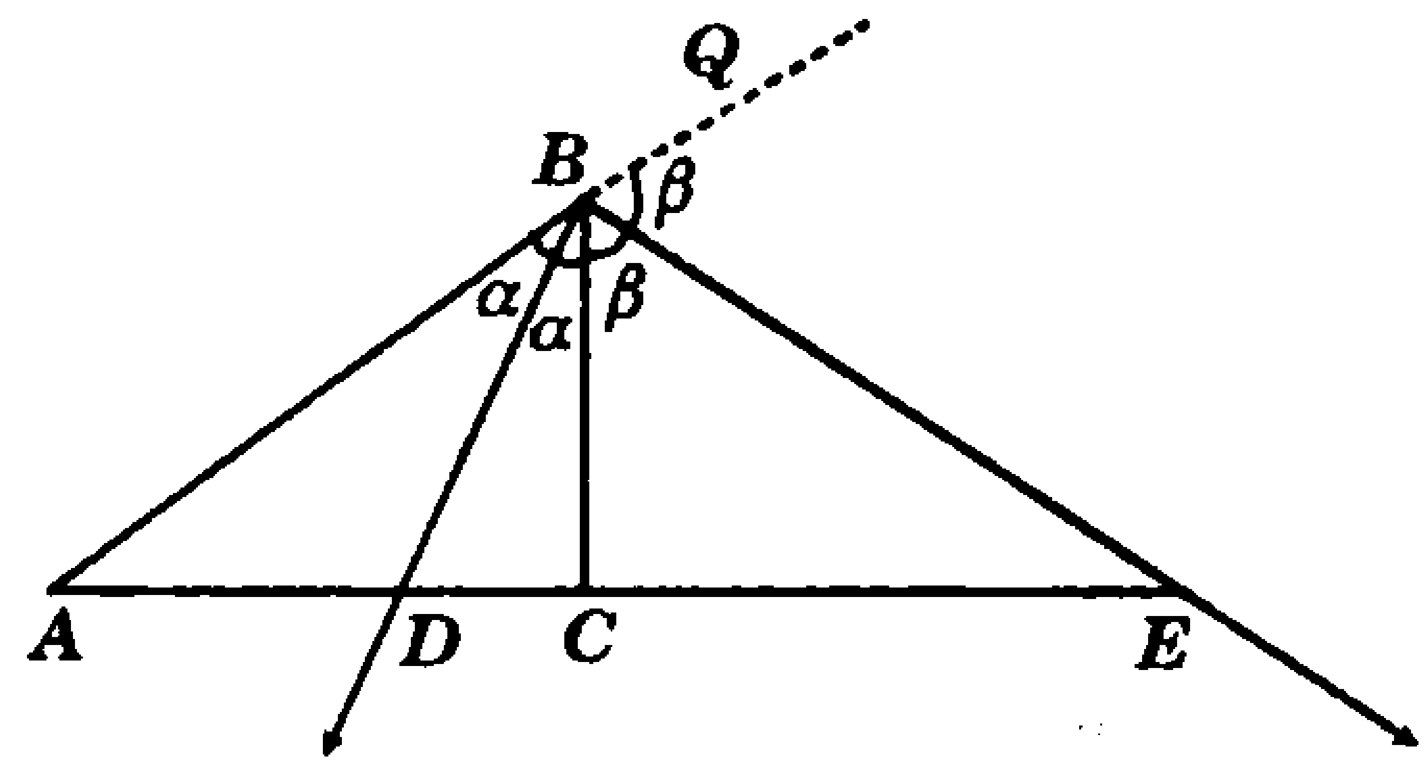
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow an = bn$$

De los anterior a los puntos *P* y *Q* se les denomina conjugados armónicos con respecto a A y *B*.

Además ; *A , P , B* y *Q* forman una cuaterna armónica.

TEOREMA :

En un triángulo , las bisectrices de un ángulo interior y de su correspondiente (o adyacente) ángulo exterior; dividen armónicamente al lado opuesto a dicho ángulo.



En el gráfico :

$\overrightarrow{BD}$: bisectriz del ángulo interior *ABC.*

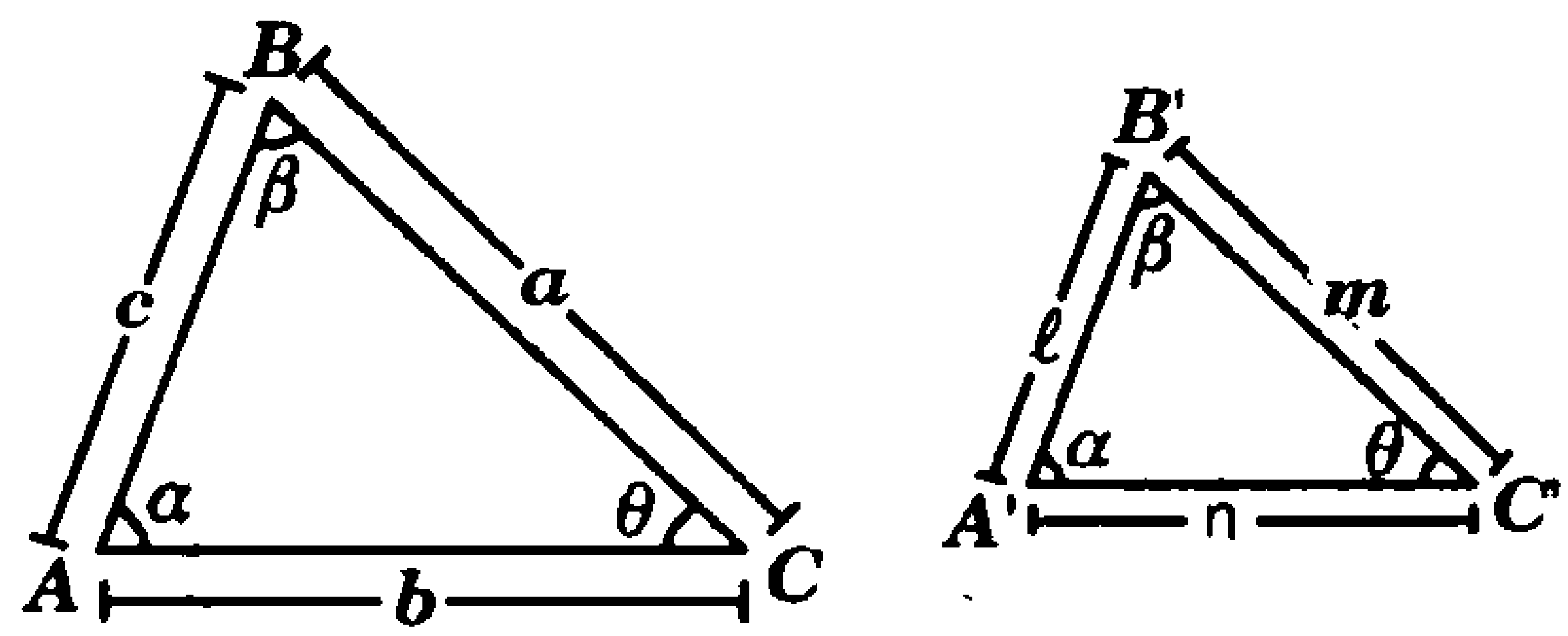
$\overrightarrow{BE}$: bisectriz del ángulo exterior *CBQ.*

Se cumple :

D y *E* : dividen armónicamente al lado *AC.*

TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Son dos triángulos que tienen sus ángulos respectivamente de igual medida (ángulos homólogos) y sus lados homólogos proporcionales.



En el gráfico, $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

Se cumple :

* Las medidas de sus ángulos son respectivamente iguales .

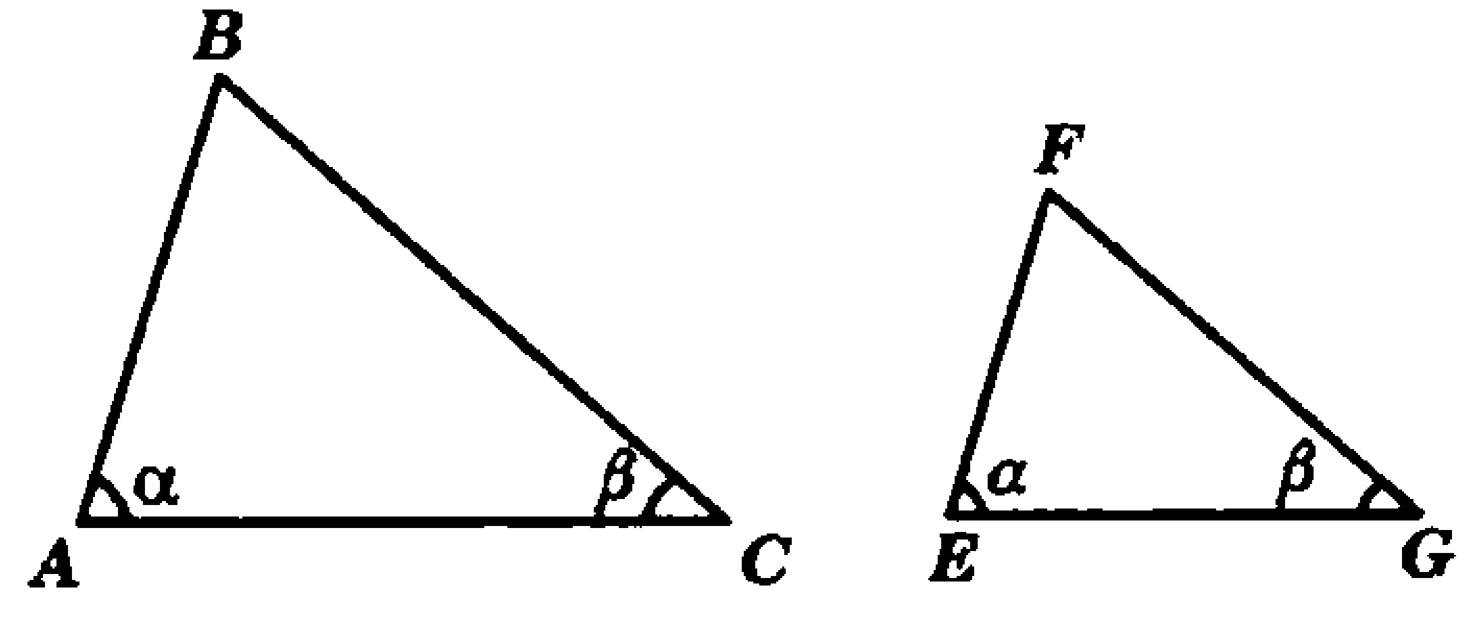
* Sus lados homólogos son proporcionales , es decir:

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell} = k}$$

CRITERIOS DE SEMEJANZA EN TRIÁNGULOS

* CASO I :

Dos triángulos son semejantes si tienen al menos dos ángulos respectivamente de igual medida.



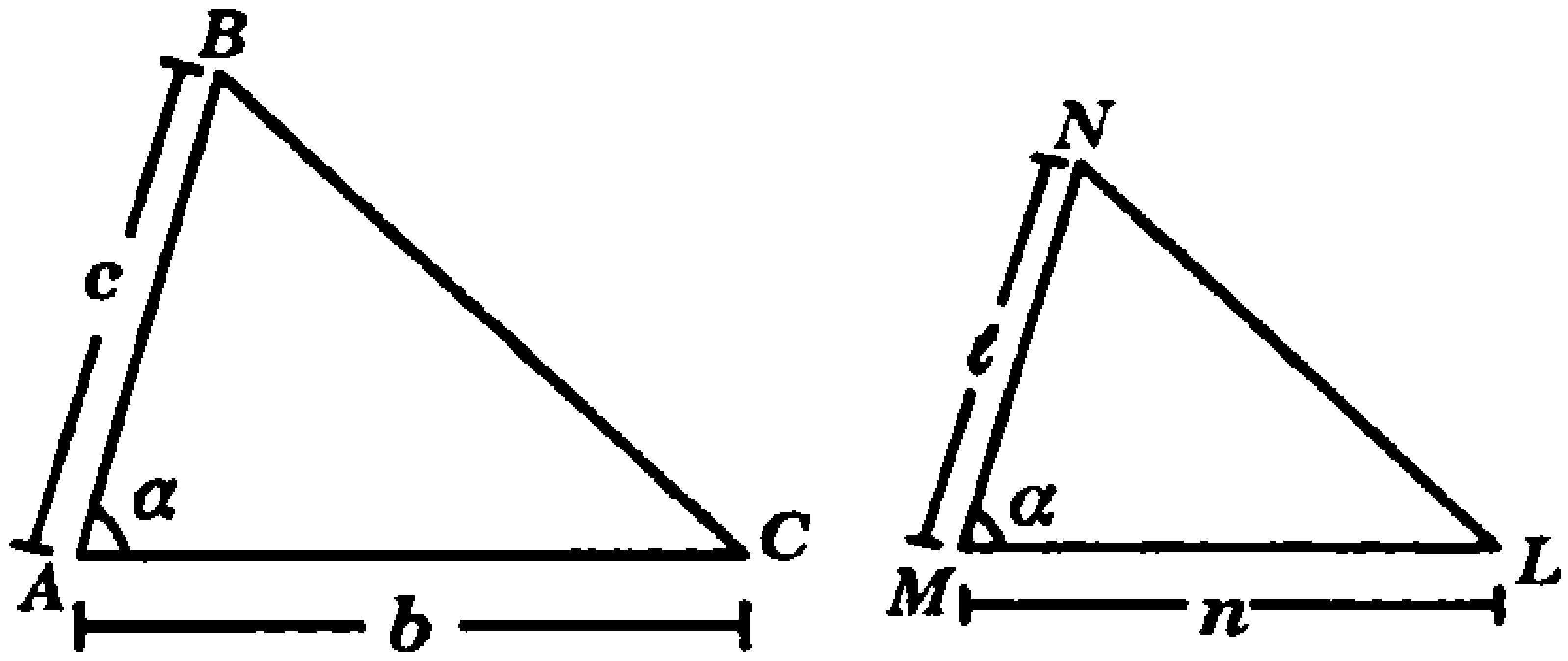
* En el gráfico :

Si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle FEG$ y $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle EGF$

Se cumple : $\Delta ABC \sim \Delta EFG$

* CASO II :

Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo de igual medida y los lados que determinan a dichos ángulos proporcionales.



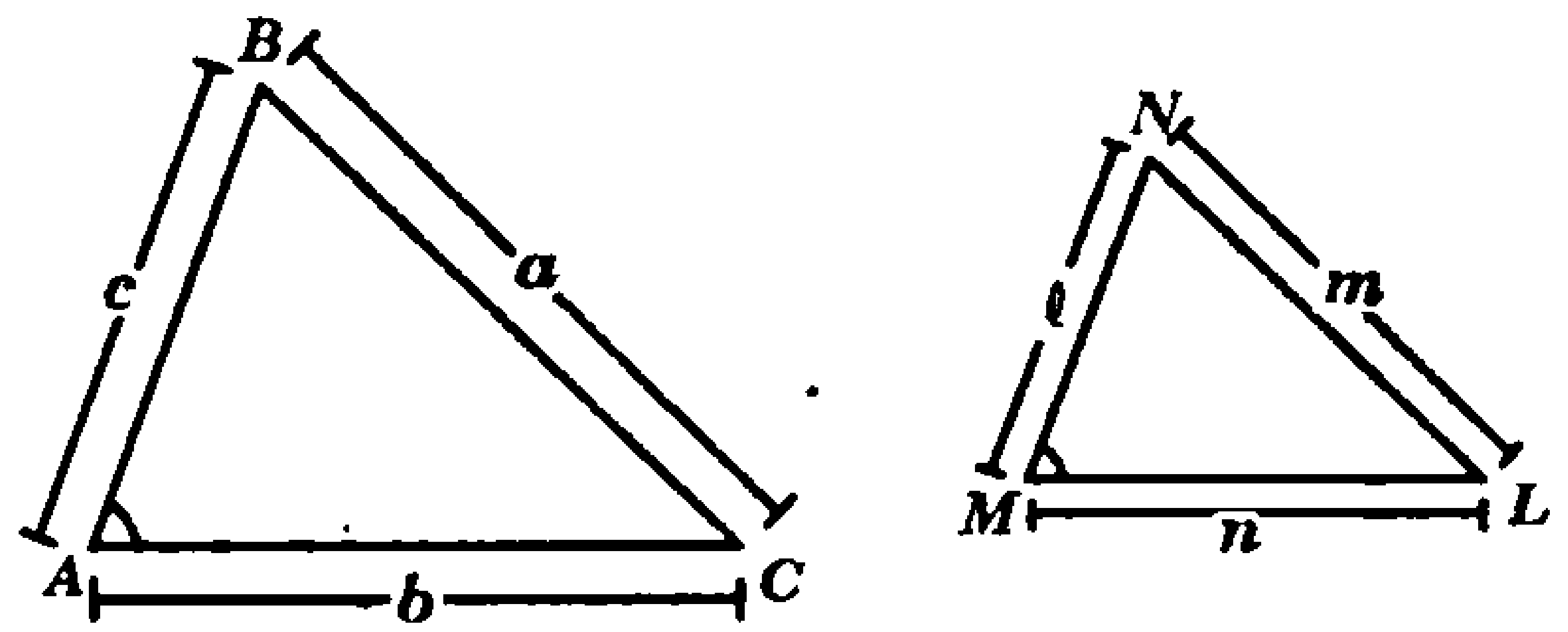
En el gráfico , si ; $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle MNL$

$$\frac{c}{\ell} = \frac{b}{n} = k$$

Se cumple : $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

CASO III :

Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

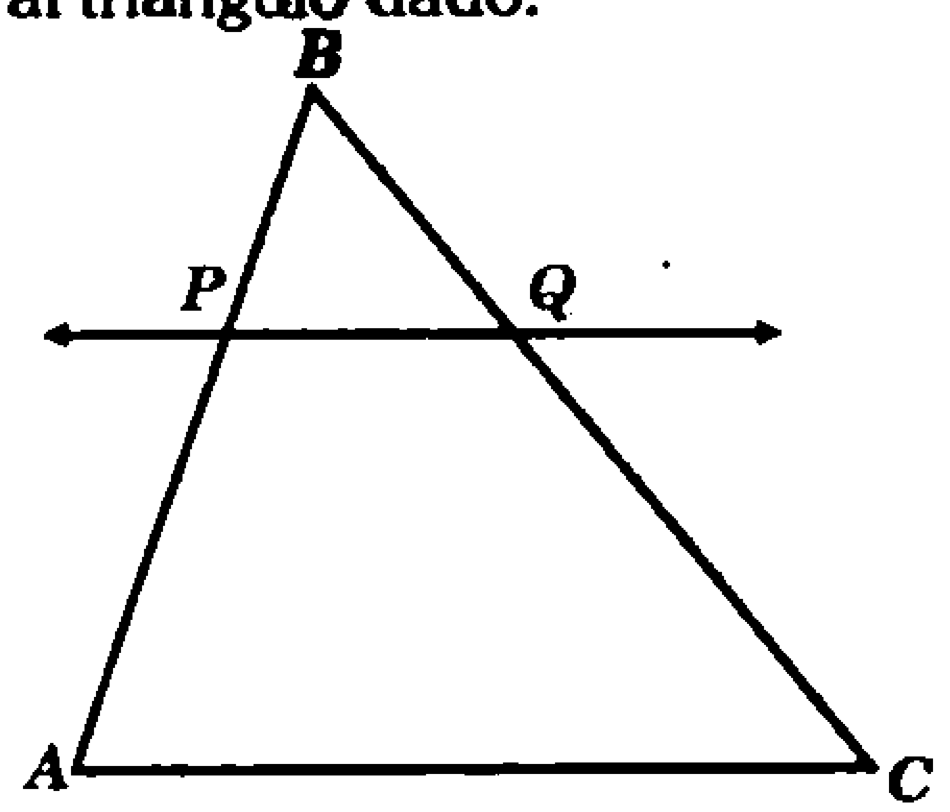


En el gráfico , si : $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell} = k$

Se cumple : $\Delta ABC \sim \Delta MNL$

PROPIEDADES :

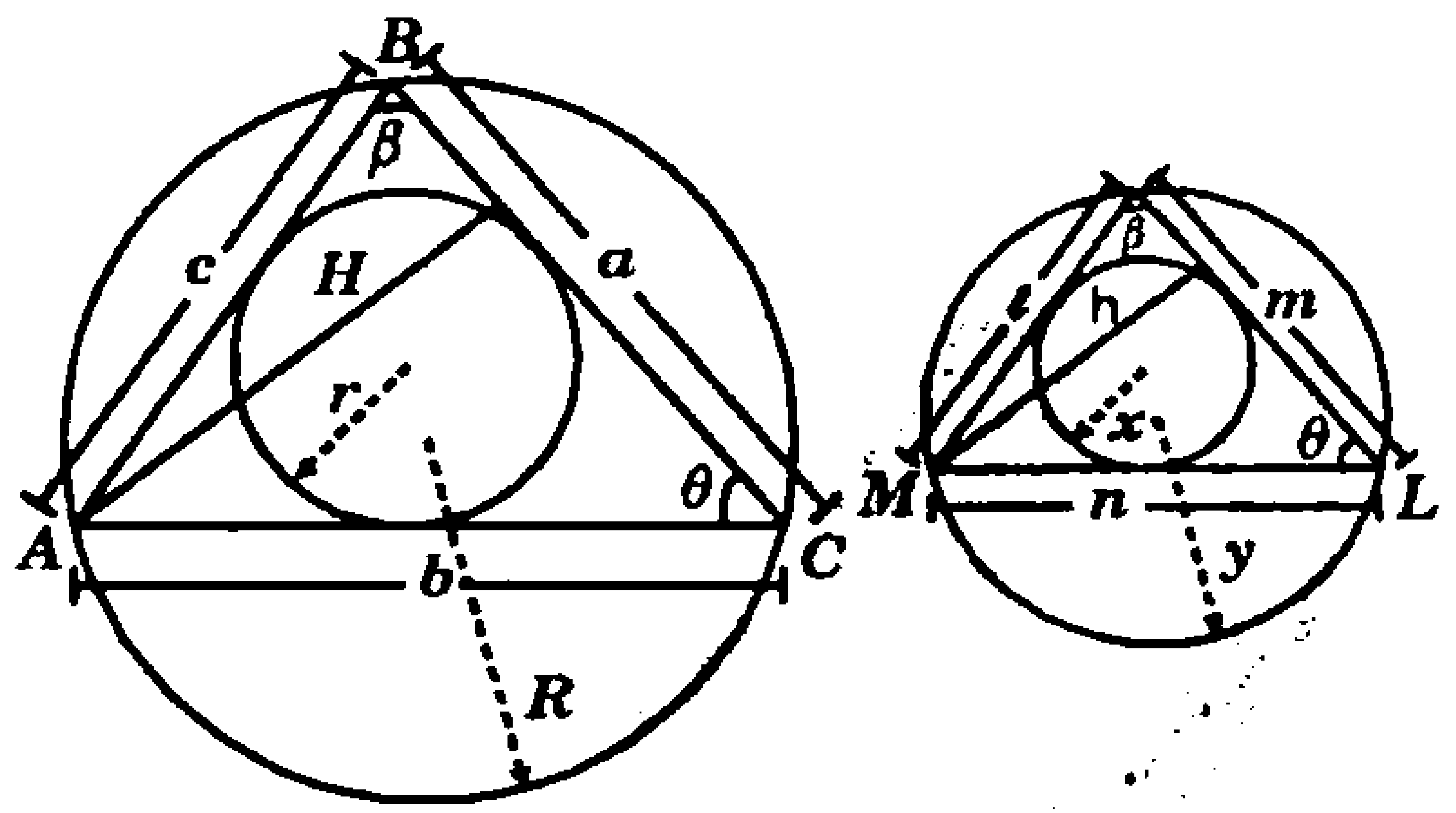
1) Una recta secante a un triángulo paralela a uno de sus lados , determina un triángulo parcial semejante al triángulo dado.



En el gráfico , si : $PQ \parallel AC$

Se cumple : $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$

2) En dos triángulos semejantes sus líneas homólogas son proporcionales.

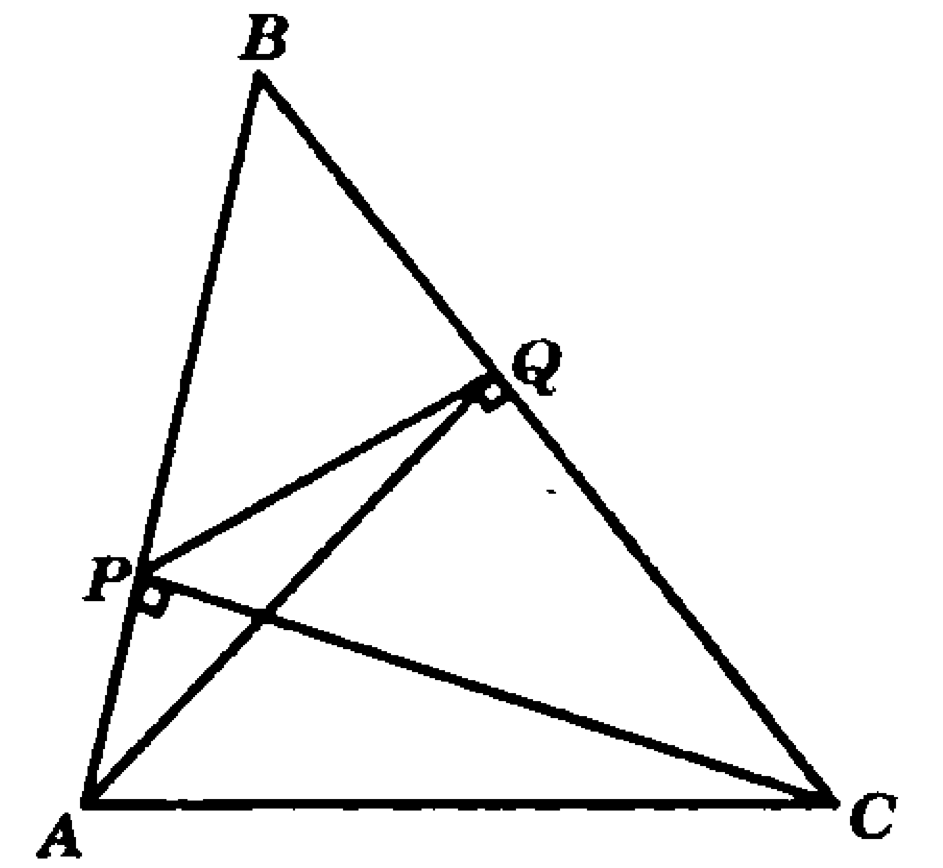


En el gráfico , ABC: MNL se cumple :

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{\ell} = \frac{H}{h} = \frac{r}{x} = \frac{R}{y} = \frac{2p_{\Delta ABC}}{2\,p_{\Delta MNL}} = k$$

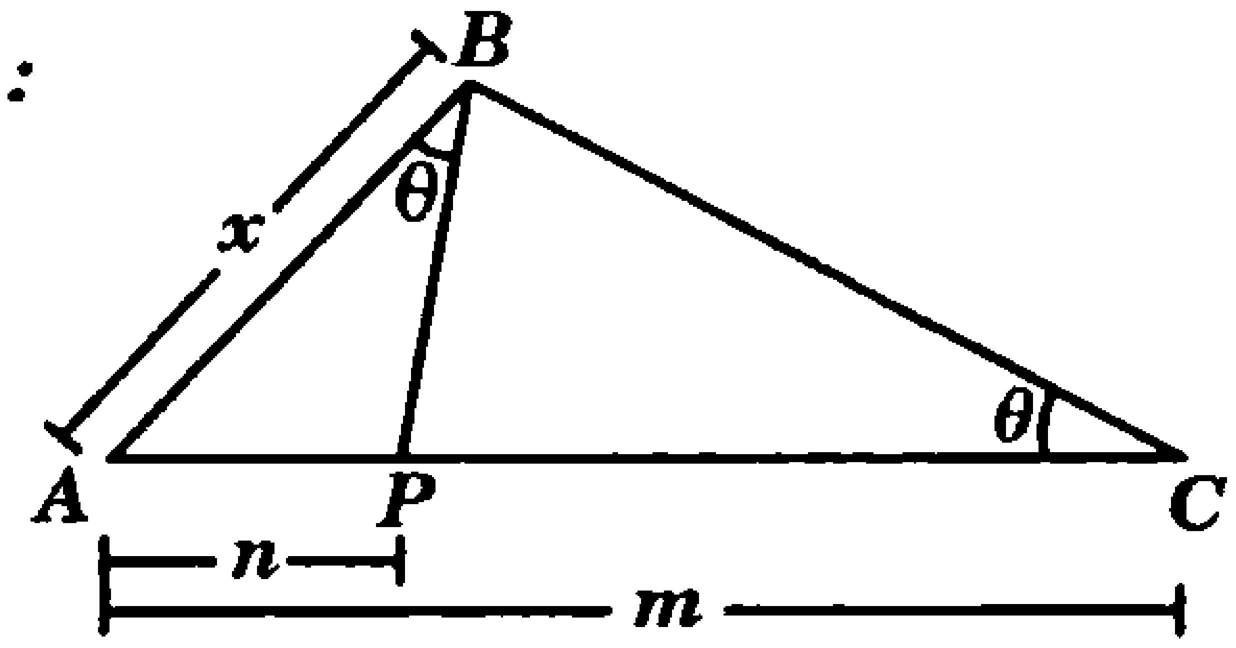
* $2p$: perímetro

3) En todo triángulo acutángulo, el segmento que une los pies de dos alturas determina un triángulo parcial semejante al triángulo dado.



En el gráfico , ABC : acutángulo se cumple: $\Delta QBP \sim \Delta ABC$

NOTA :



En el ΔABC, BP : ceviana interior

* Si: $m\sphericalangle ABP = m\sphericalangle ABC$

Se cumple : $x^2 = mn$

SEMEJANZA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

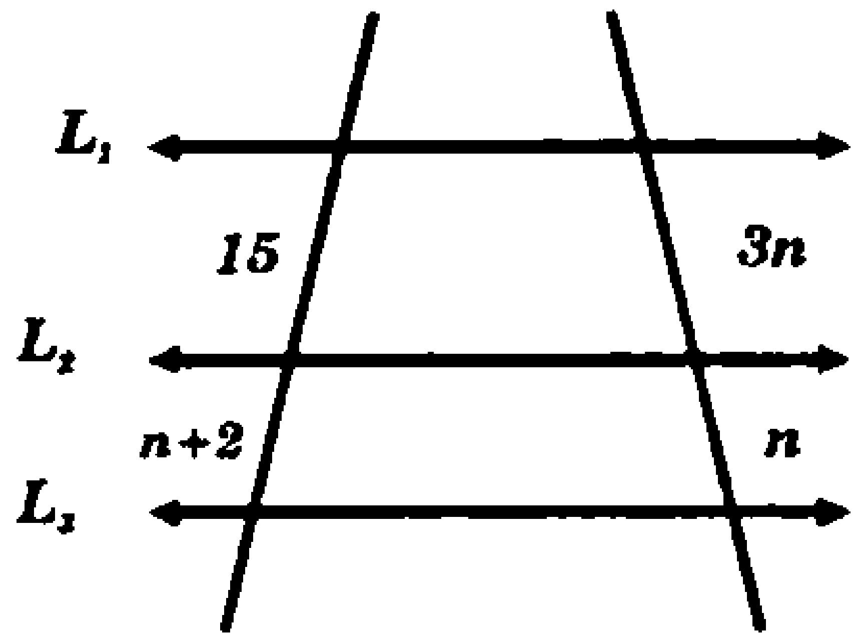
Dos figuras geométricas son semejantes si tienen igual forma y tamaños diferentes .

En dos figuras geométricas semejantes sus elementos homólogos son proporcionales.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

En la figura : $L_1 // L_2 // L_3$. Calcular "n"



A) 2 B) 5 C) 1 D) 3 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el teorema de Thales :

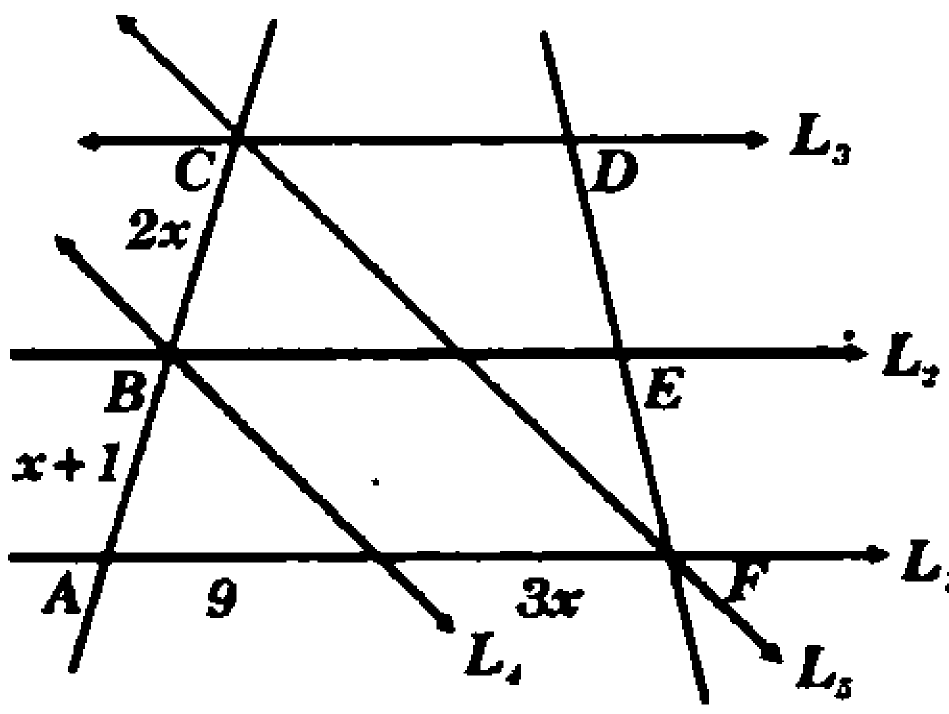
$$\frac{15}{n+2}=\frac{3n}{n} \Rightarrow 15=3n+6$$

$$\Rightarrow 9=3n \Rightarrow 3=n$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

En la figura : $L_1 // L_2 // L_3$ y $L_4 // L_5$. Calcular "x"



A) 3 B) 2 C) 5 D) 6 E) 2, 5

RESOLUCIÓN :

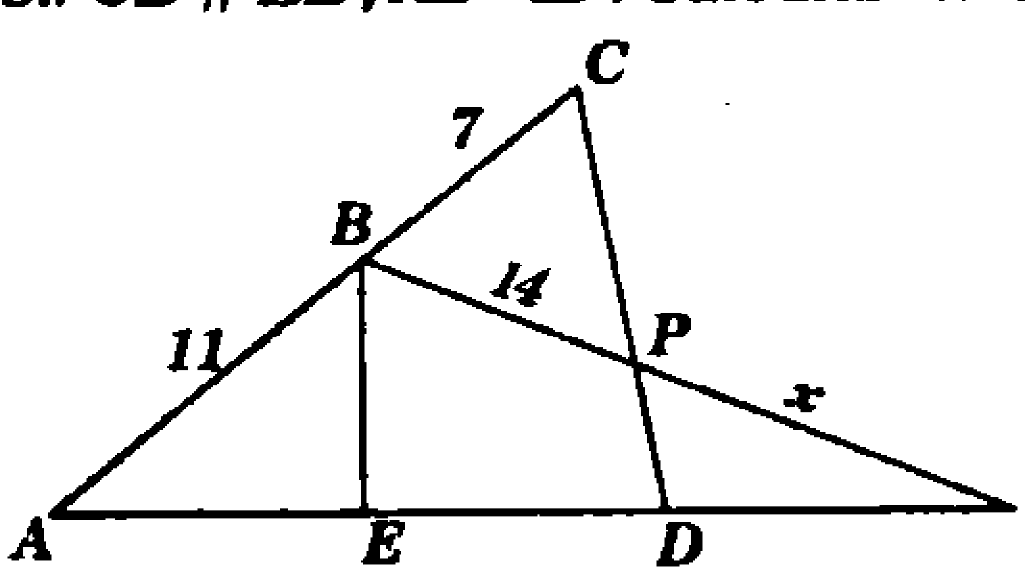
* Por el Teorema de Thales:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{x+1}{2x}=\frac{9}{3x} \Rightarrow \frac{x+1}{2}=3 \Rightarrow x=5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3:

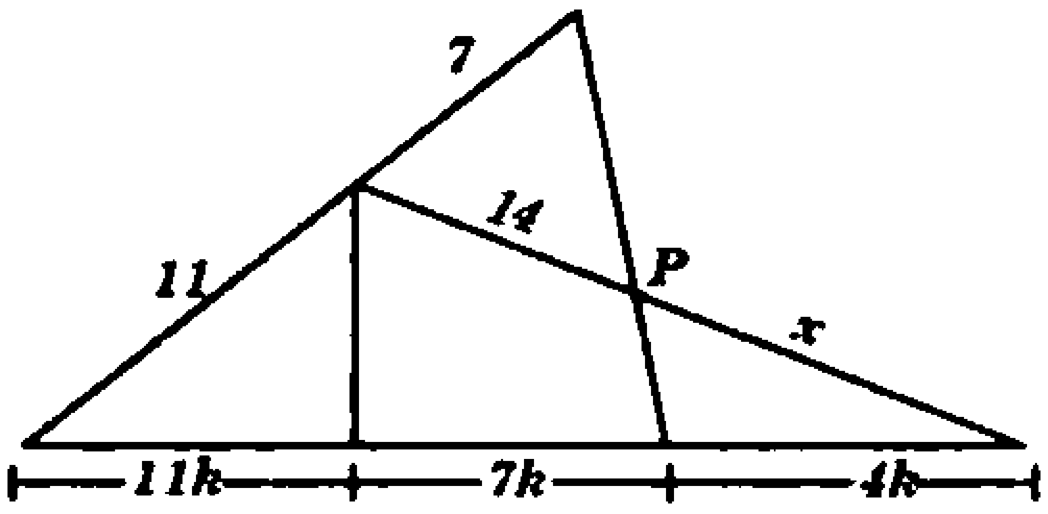
Si: $\overline{CD} // \overline{EB}$, $AE=EF$. Calcular "x".



A) 1 B) 4 C) 3 D) 8 E) 7

RESOLUCIÓN:

* Considerando la proporcionalidad se obtendrá:

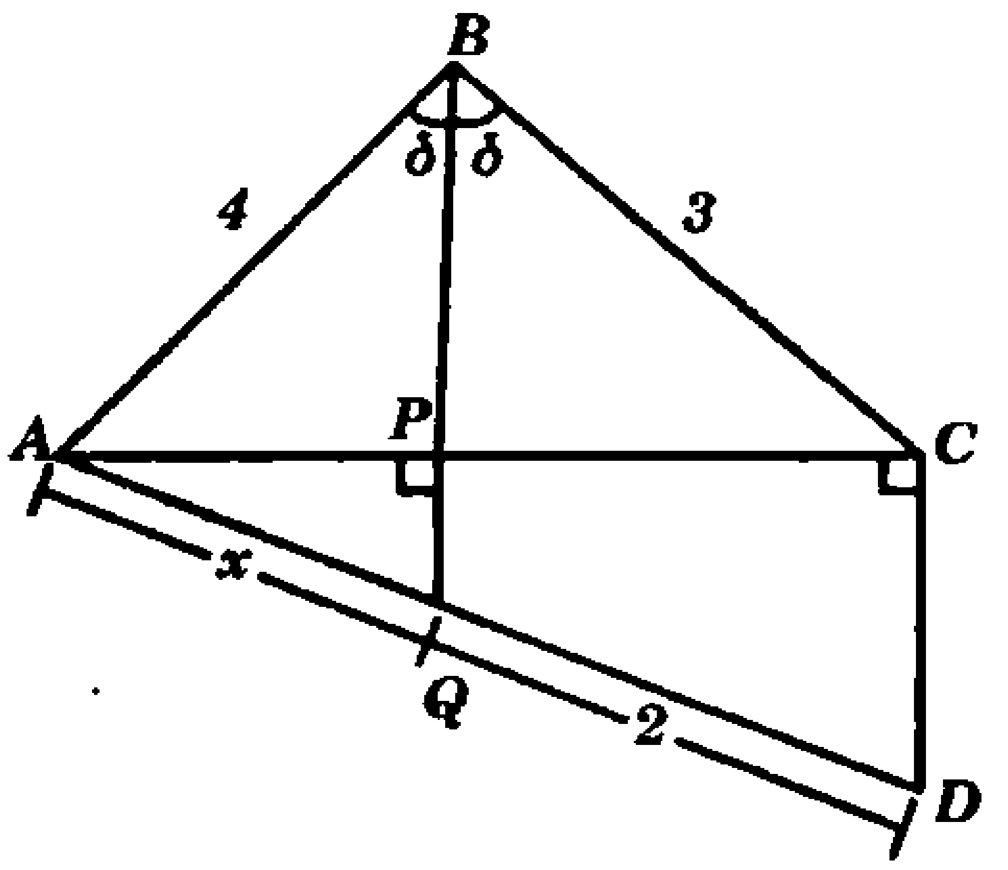


$$\frac{x}{14}=\frac{4k}{7k} \Rightarrow x=8$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4:

Calcular "x".



A) 2 B) 1 C) 1,5 D) 3 E) 8/3

RESOLUCIÓN :

* Por el Teorema de la Bisectriz :

$$\frac{AP}{AC}=\frac{4}{3} \text{ ....(I)}$$

* Por el Teorema de Thales:

$$\frac{AP}{AC}=\frac{x}{2} \text{ ....(II)}$$

* De (I) y (II), se obtiene :

$$\frac{4}{3}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

RPTA : "E"

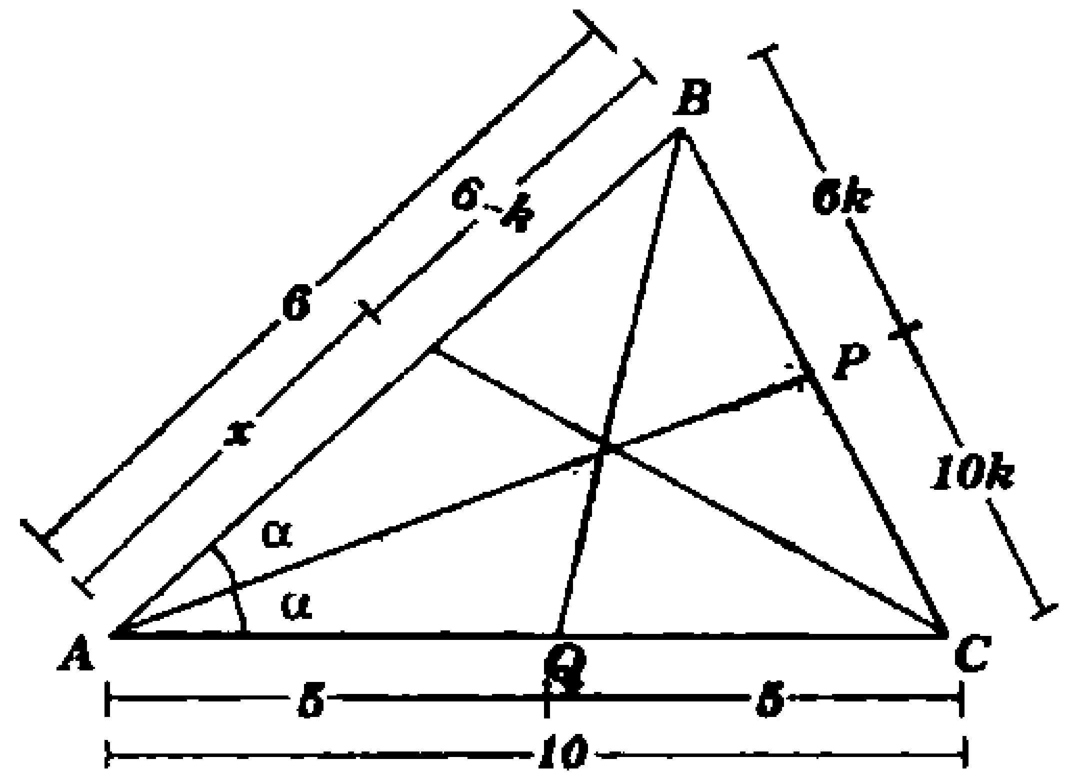
PROBLEMA 5:

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz AP, la mediana BQ y la ceviana CR las cuales son concurrentes, calcular AR, si $AB=6$ y $AC=10$

A) 3 B) 2,5 C) 3,5
D) 3,75 E) 4

RESOLUCIÓN

* "Se deduce por el Teorema de la Bisectriz"



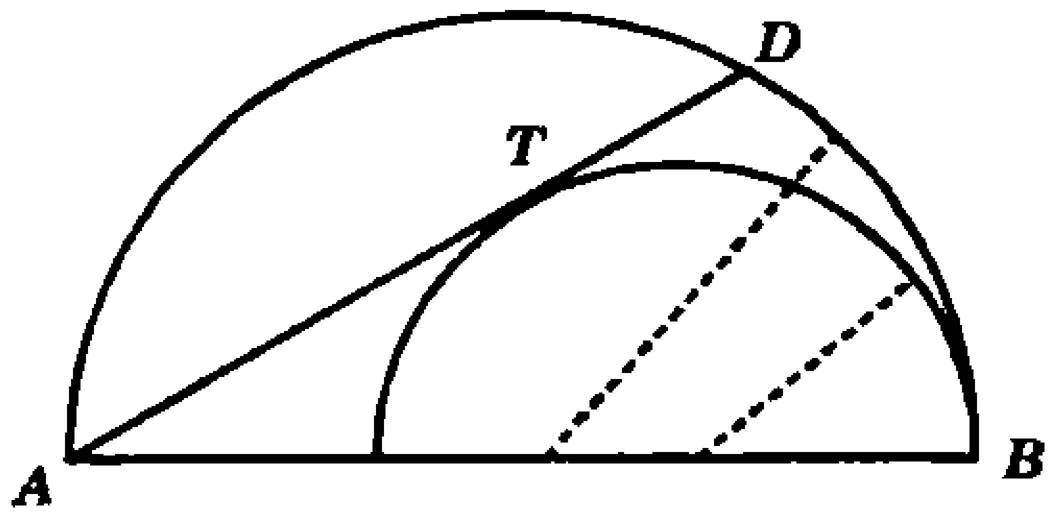
*Ahora apliquemos el Teorema de la Ceva : $x(6k)5=(6-x)(10k)5$

$$\Rightarrow x=\frac{15}{4}=3,75$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

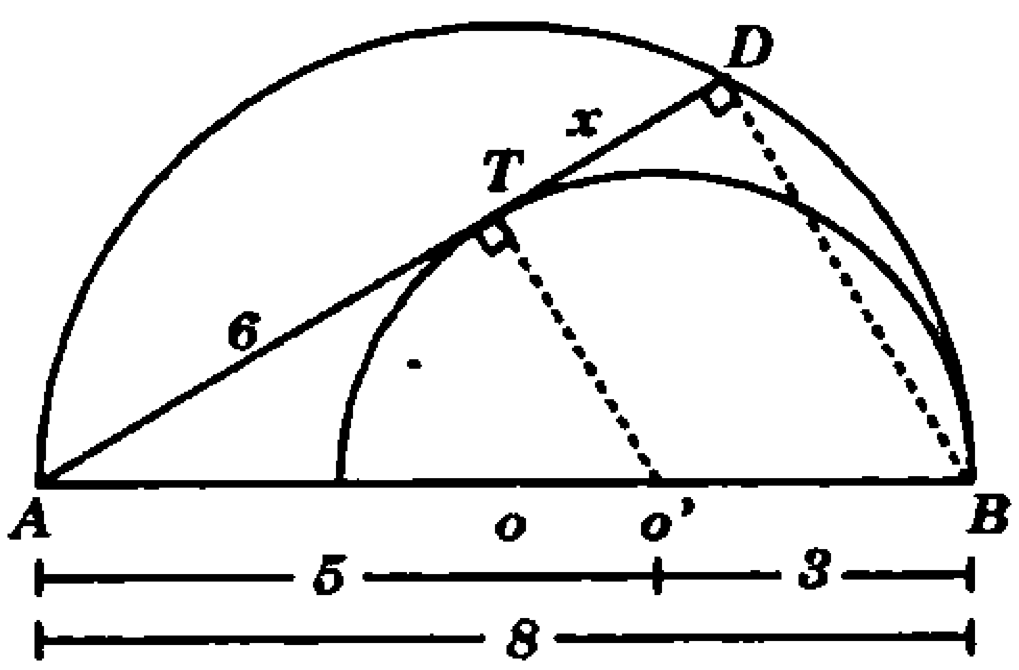
En la figura mostrada . Si los radios de las semicircunferencias miden 3 y 4 respectivamente. Hallar TD. Siendo $AT=6$



A) 3 B) 2,8 C) 3,6 D) 4

RESOLUCIÓN :

* Por el Teorema de Thales :



$$\frac{x}{6}=\frac{3}{5} \Rightarrow x=\frac{18}{5} \Rightarrow x=3,6$$

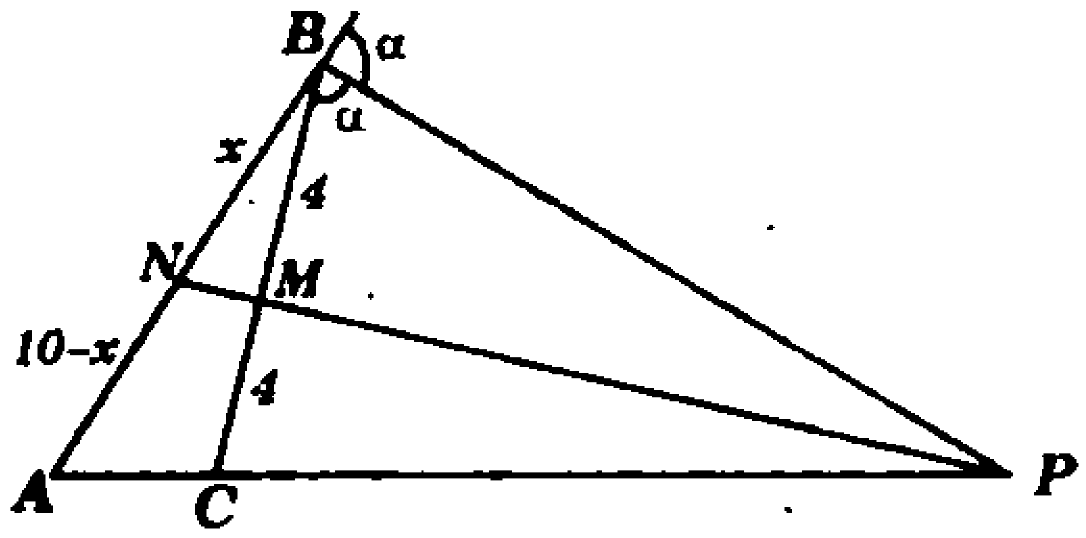
PROBLEMA 7 :

En un triángulo ABC se tiene que $AB=10$ y $BC=8$. Se traza la bisectriz exterior BP (P en la prolongación de AC). La recta que pasa por "P" y por el punto medio del lado BC intercepta al lado AB en el punto "N".

Calcular BN.

A) 6 B) 7 C) 41/8
D) 40/9 E) 6,5

RESOLUCIÓN :



* Por el Teorema de la Bisectriz exterior :

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}\Rightarrow\begin{matrix}AP=5k\\PC=4k\end{matrix}$$

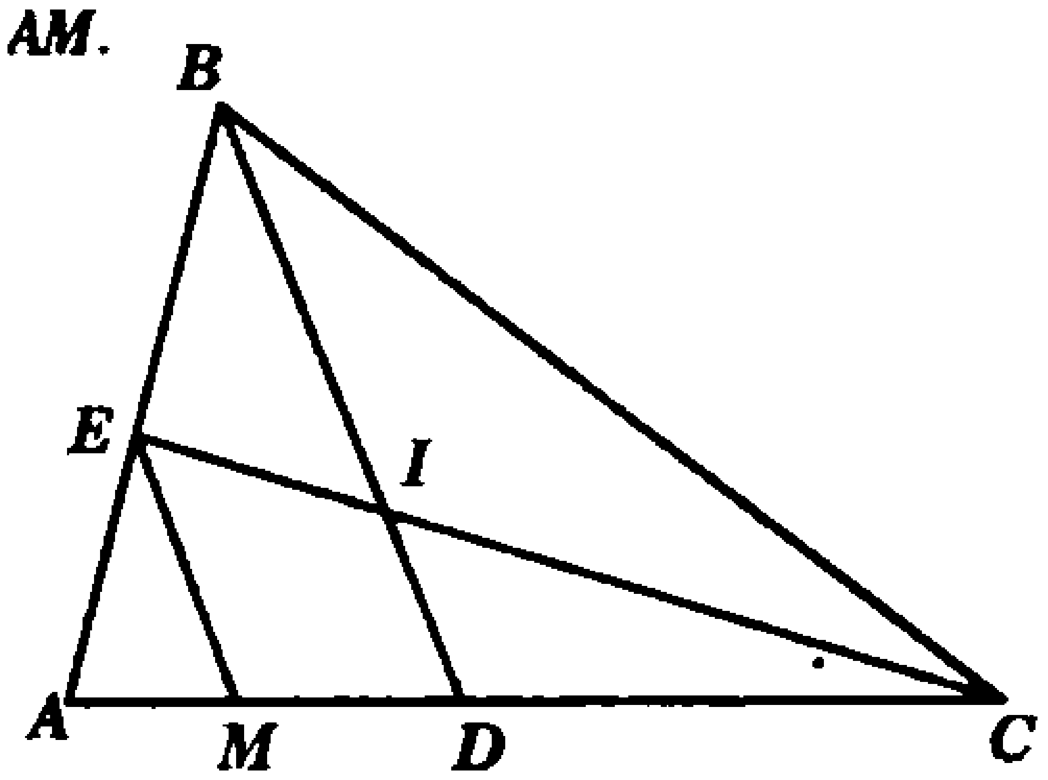
* Ahora por el Teorema de Menelao:

$$BN\times AP\times CM=NA\times PC\times MB\times x$$
$$(5k)\times(4)=(10-x)(4k)(4)$$
$$\Rightarrow x=\frac{40}{9}$$

RPTA : "D"

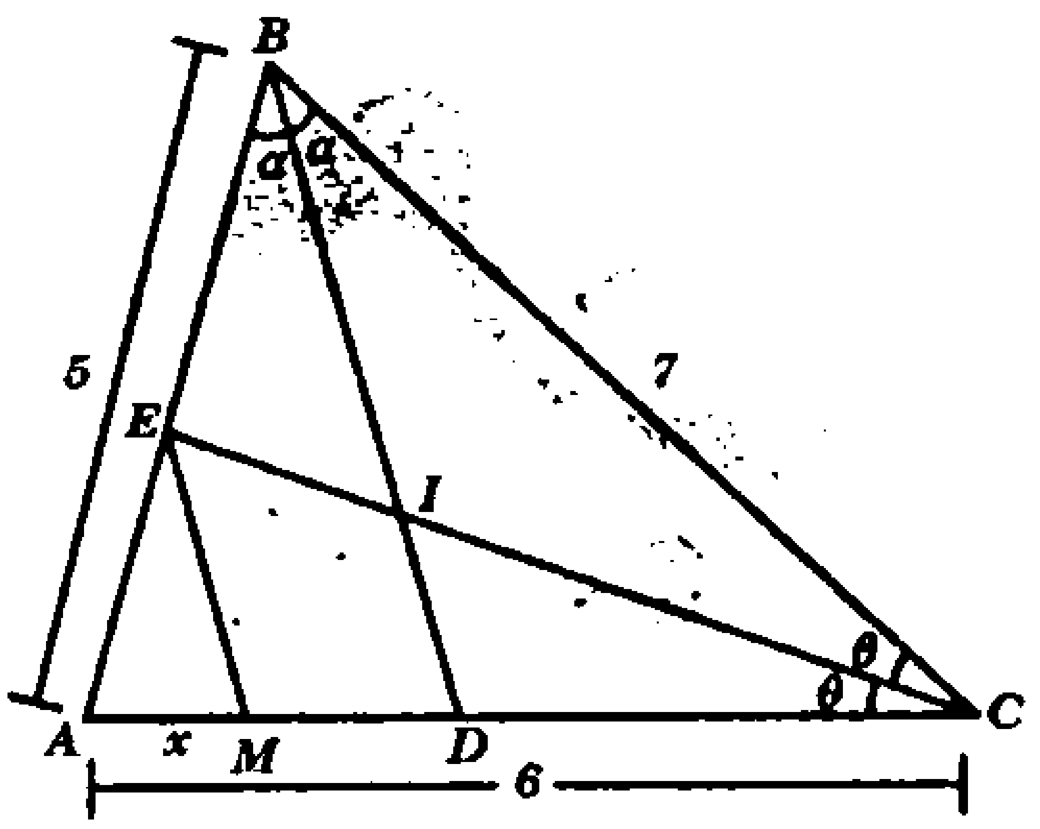
PROBLEMA 8 :

En la figura mostrada. Si: *I* Incentro del *DABC*. Además: *AB=5m* ; *BC=7m* ; *AC=6m* y $\overline{EM}//\overline{BD}$. Hallar *AM*.



A)15/13 B)16/15 C)17/16
D)18/17 E)20/17

RESOLUCIÓN:



* Por el Teorema de la Bisectriz:

$$\frac{AD}{5}=\frac{CD}{7}=\frac{AD+DC}{5+7}=\frac{6}{12}$$
$$\Rightarrow AD=5\left(\frac{1}{2}\right)=2,5$$

* Ahora por el Teorema de Thales y el Teorema de la Bisectriz:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{x}{2,5-x}=\frac{7}{6}\Rightarrow x=\frac{15}{13}$$

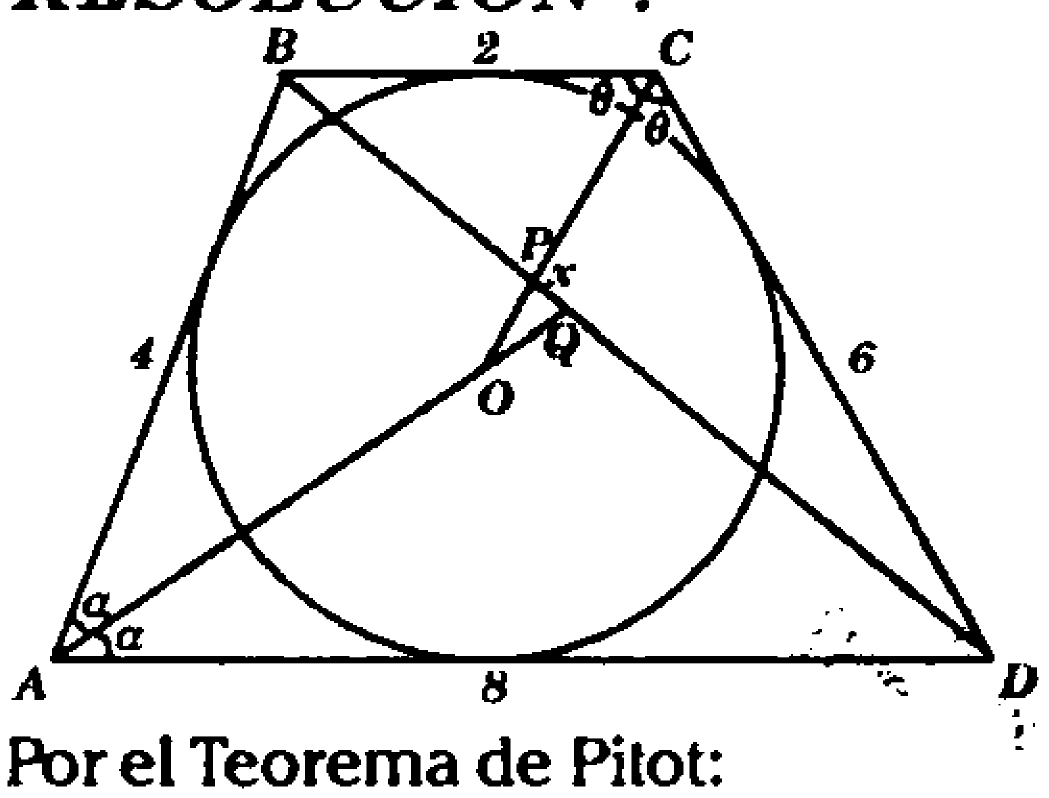
RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Un cuadrilátero *ABCD* está circunscrito a una circunferencia de centro **"O"**. Las rectas *AO* y *CO* interceptan a la diagonal *BD* en los puntos *P* y *Q* (*P* en *BQ*), calcular la relación entre *PQ* y *BD* sabiendo que *AB =4* , *BC = 2* y *CD = 6*

A) 1/6 B) 5/9 C) 1/12

RESOLUCIÓN :



Por el Teorema de Pitot:

$$AD+BC=AB+CD$$
$$\Rightarrow AD+2=4+6\Rightarrow AD=8$$

* Por el teorema de la Bisectriz :

$$\frac{BP}{PD}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow BP=k \text{ y } PD=3k$$

* Ahora en el triángulo *BAD* :

$$\frac{BQ}{QD}=\frac{4}{8}\quad\frac{x+k}{3k-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{k}{3}$$

* Piden: $\frac{PQ}{BD}=\frac{x}{4k}=\frac{\frac{k}{3}}{4k}=\frac{1}{12}$

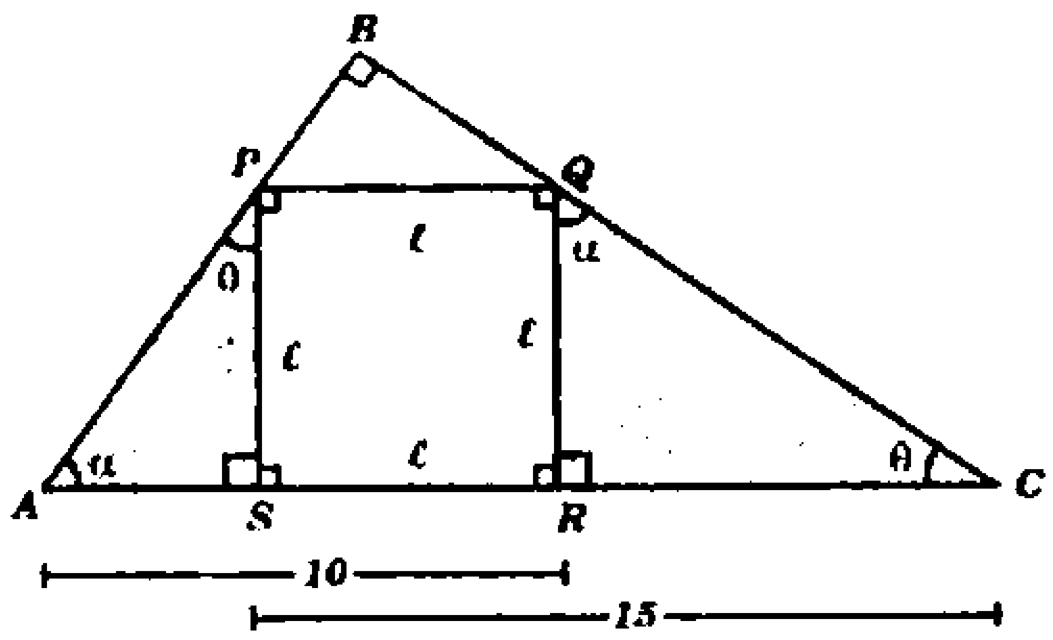
RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo *ABC* se inscribe un cuadrado *PQRS* (*P* en *AB* , *Q* en *BC* y *S* en *AC*). Calcular el lado del cuadrado, si *AR=10* y *CS=15*

A) 4 B) 2 C) 6 D) 8 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Como los ángulos α y θ son complementarios , se deduce que los triángulo *ASP* y *QRC* son semejantes, luego:

$$\frac{\ell}{15-\ell}=\frac{10-\ell}{\ell}\Rightarrow\ell=6$$

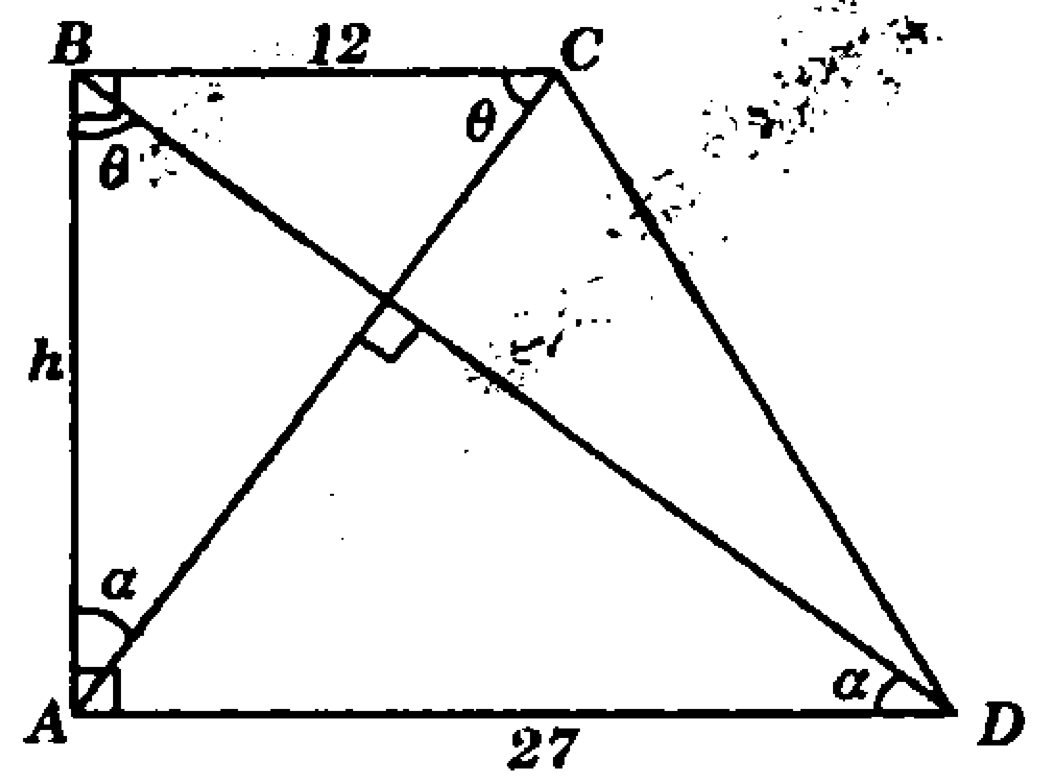
RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Calcular la altura de un trapecio rectángulo sabiendo que las diagonales son perpendiculares y que las bases miden *12* y *27 m.*

A) 16 B) 12 C) 18 D) 24 E)18,5

RESOLUCIÓN :



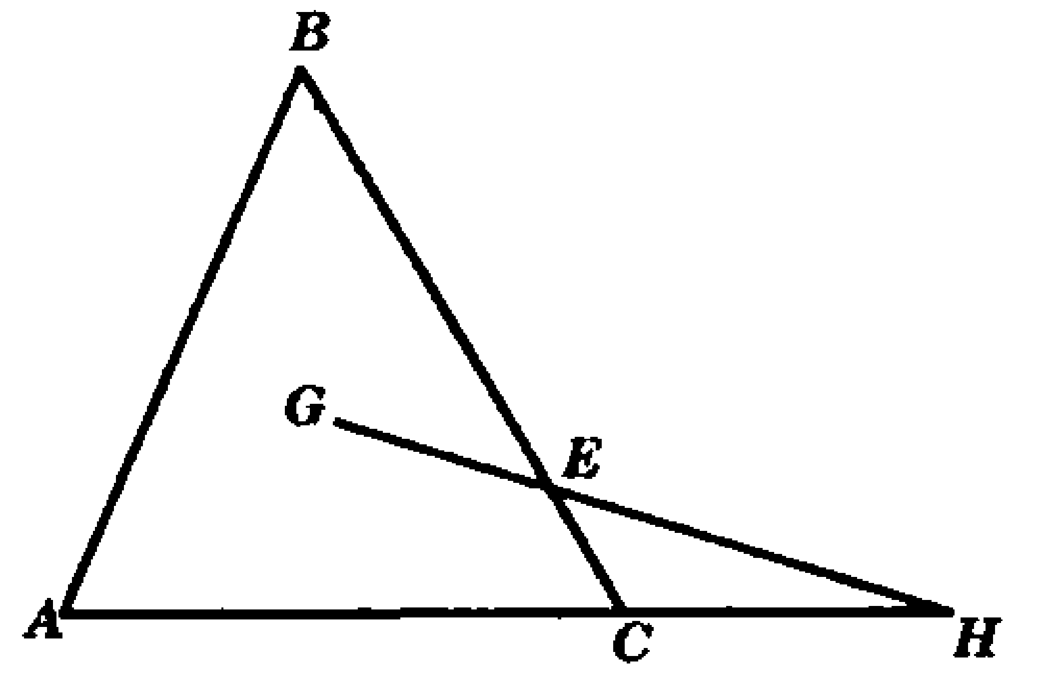
* Como los ángulos α y θ son complementarios, se deduce que los triángulos *ABC* y *BAD*, son semejantes , luego:

$$\frac{h}{27}=\frac{12}{h}\Rightarrow h=18$$

RPTA : "C"

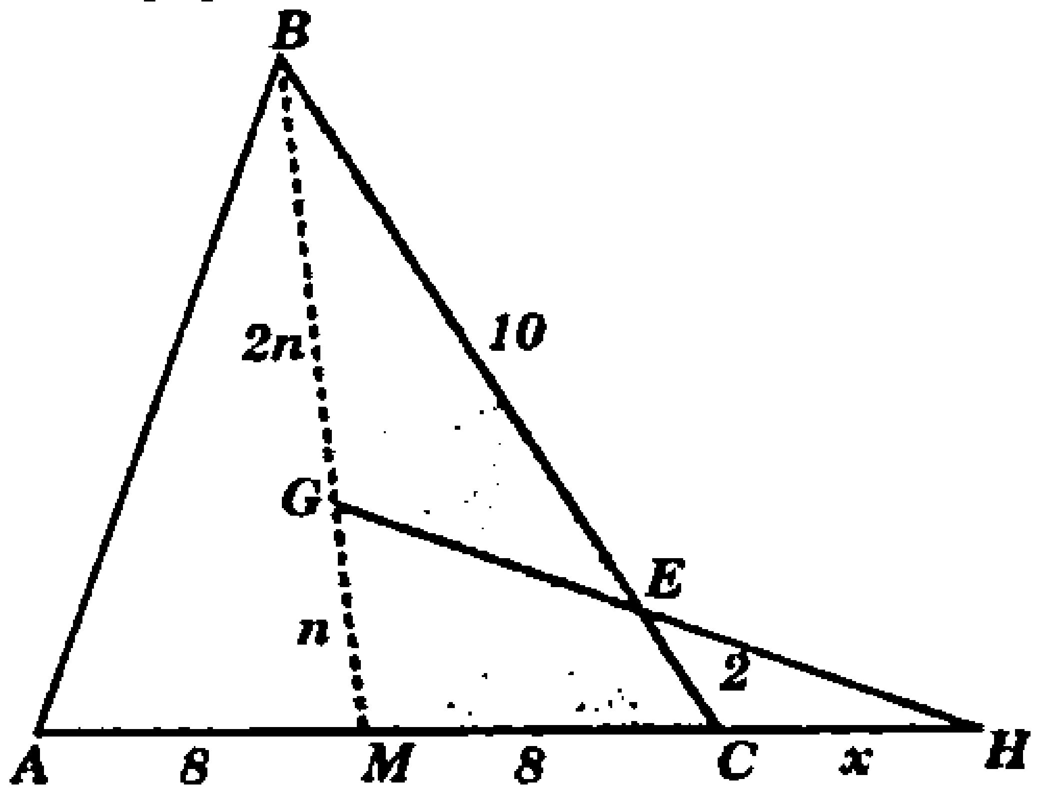
PROBLEMA 12 :

En la figura , Si **"G"** es el baricentro del *ΔABC, BE=10* , *EC=2* y *AC=16*. Hallar *CH.*



A) 4 B) 5 C) 16/3 D) 7,5 E) 7

RESOLUCIÓN :



* "2n" y "n", se colocaron, debido a que "G" es baricentro.

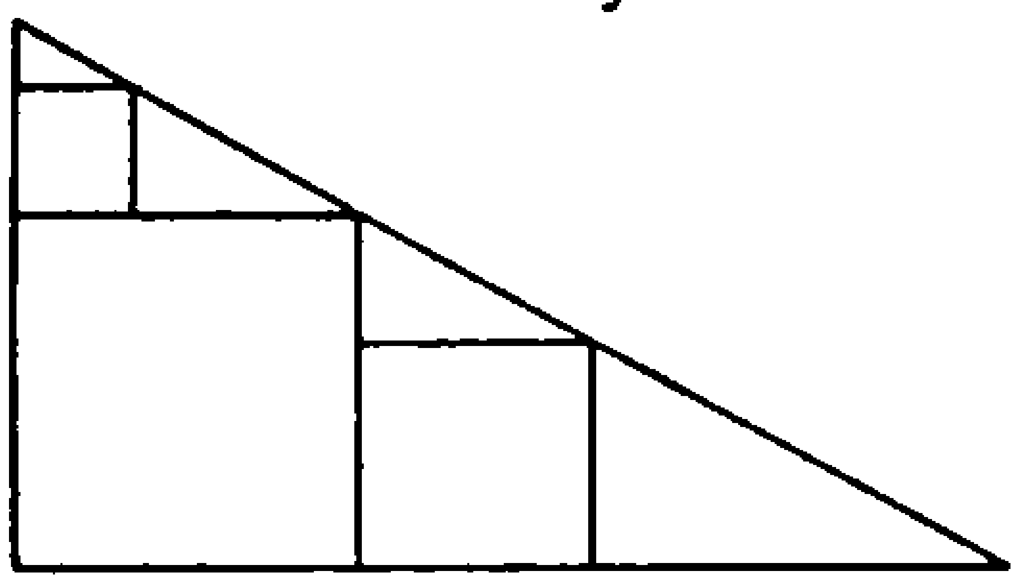
* Ahora por el Teorema de Menelao:

$$n \times 10 \times x = (2n) \times 2(x+8) \Rightarrow x = \frac{16}{3}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13:

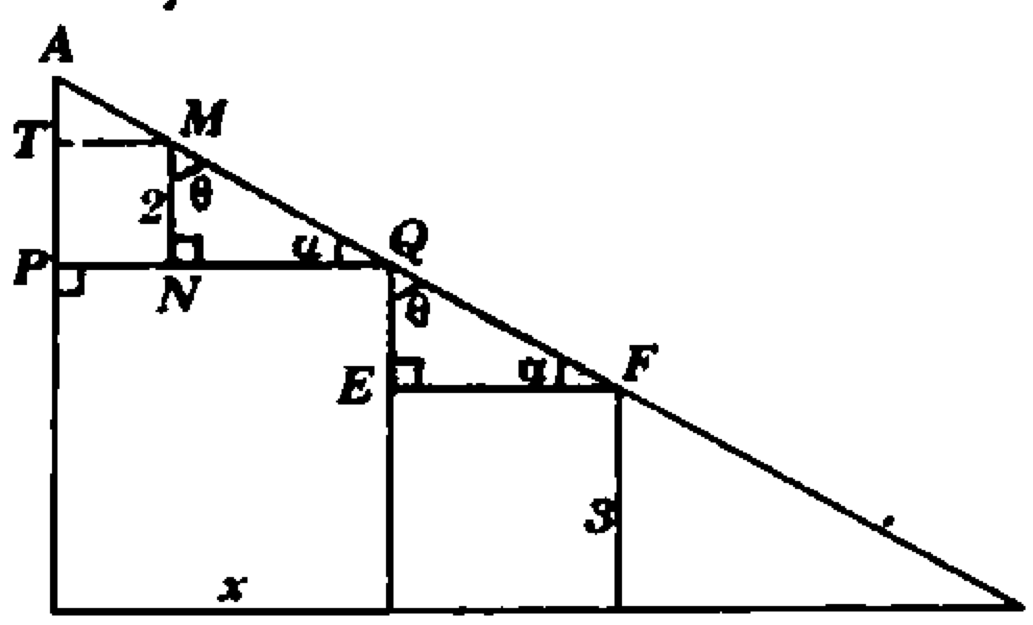
En la figura mostrada se pide el lado del cuadrado mayor sabiendo que los lados de los otros cuadrados miden *2* y *3 cm*.



A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

* Los triángulos *MNQ* y *QEF* son semejantes



* Luego : $\dfrac{NQ}{EF} = \dfrac{MN}{QE}$

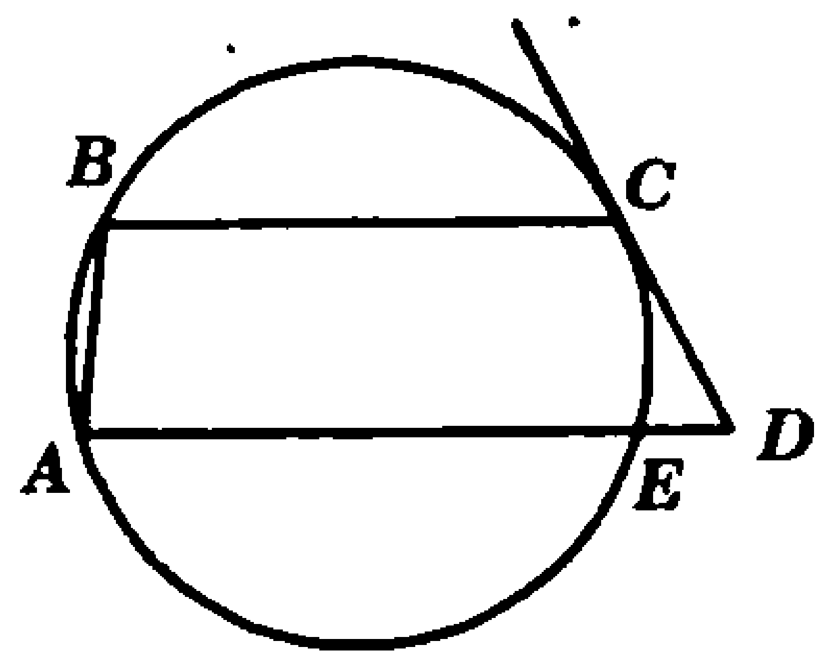
$$\frac{x-2}{3} = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x = 5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 :

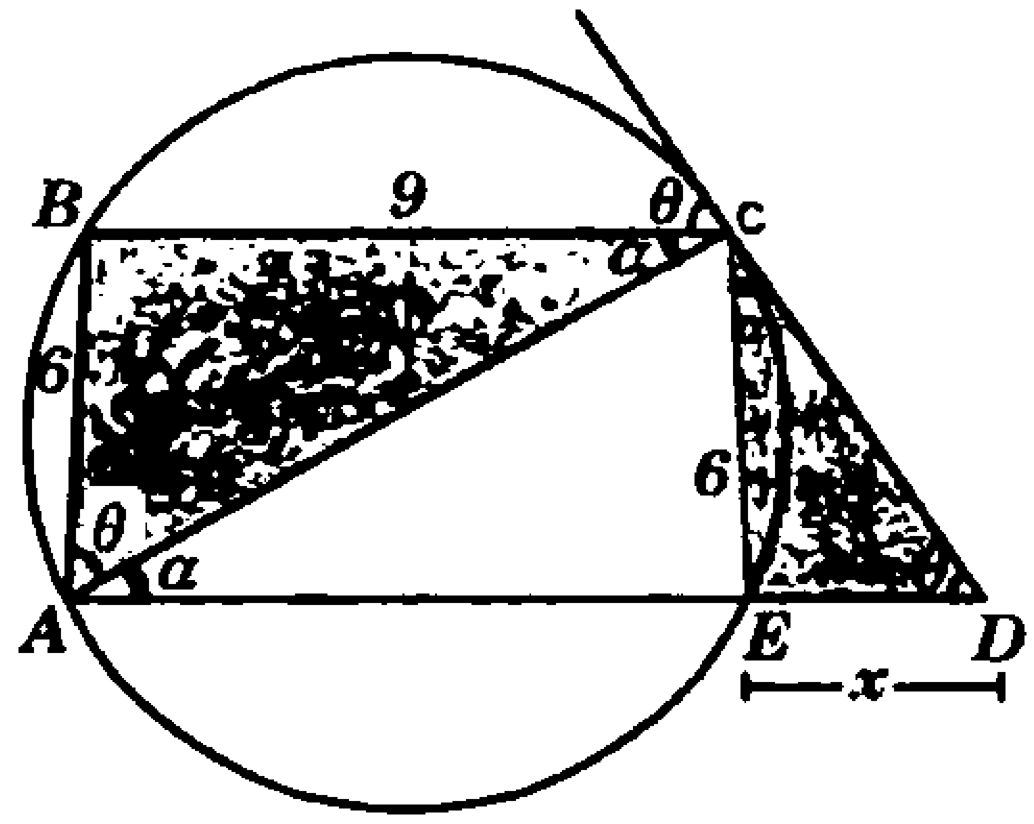
En la figura mostrada. Si $AB = 6$ y $BC = 9$.

Hallar *ED*. Siendo $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



A) 3 B) 6u C) 5u
D) 4u E) 8u

RESOLUCIÓN :



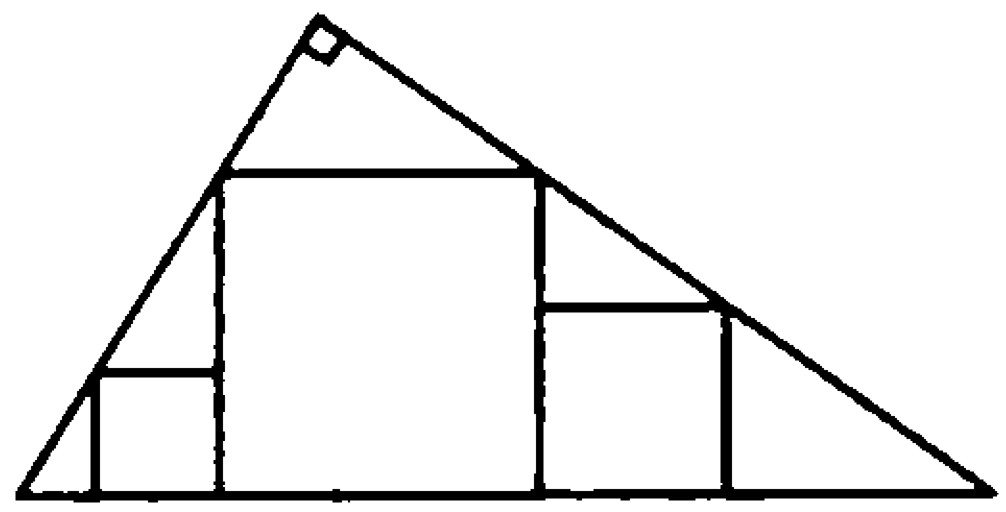
* Luego de trasladar medidas de los ángulos convenientemente, observamos que los triángulos *ABC* y *DEC* son semejantes , luego:

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{9} \Rightarrow x = 4$$

RPTA : "D"

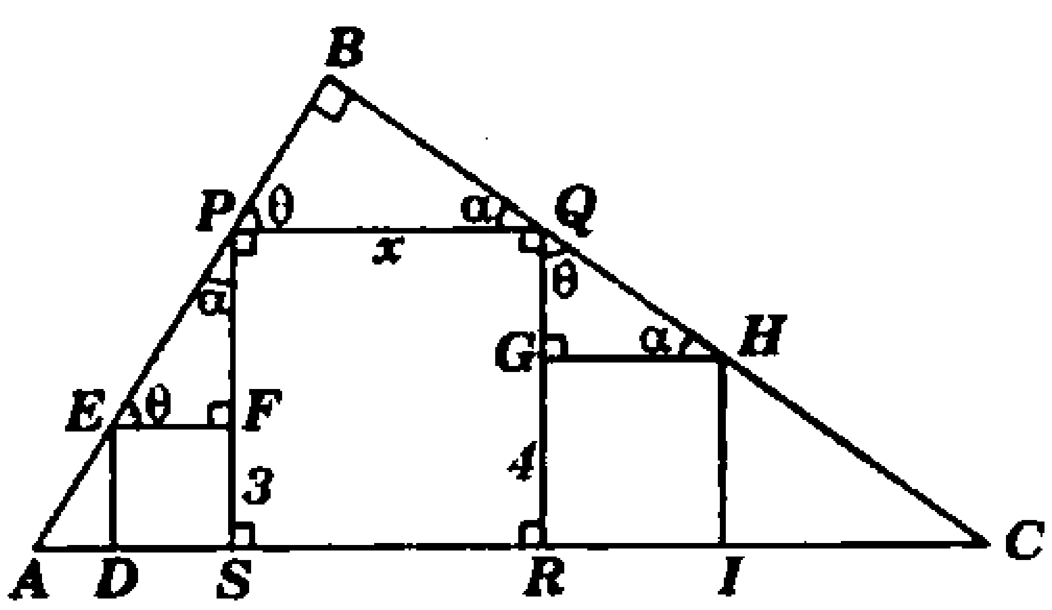
PROBLEMA 15 :

En la figura mostrada se pide el lado del cuadrado mayor sabiendo que los lados de los otros cuadrados miden *3* y *4 cm* .



A) 6 B) 7 C) 5
D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN :



* Los triángulos *EFP* y *QGH* son semejantes.

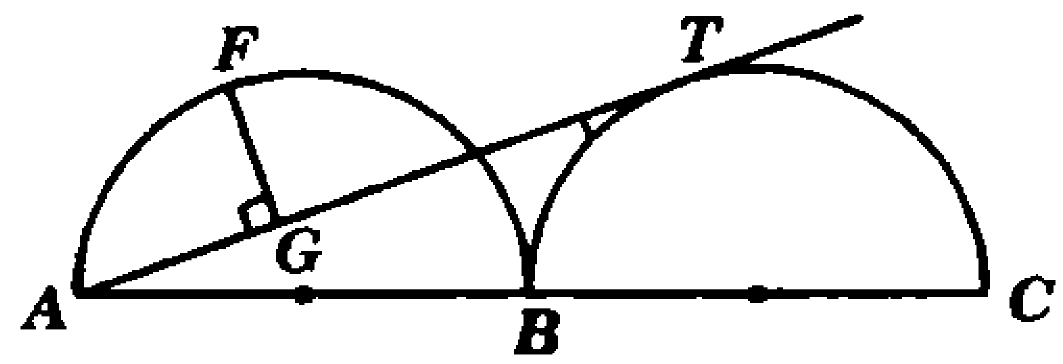
Luego :

$$\frac{PF}{GH} = \frac{EF}{QG} \Rightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{3}{x-4} \Rightarrow x = 7$$

RPTA : "B"

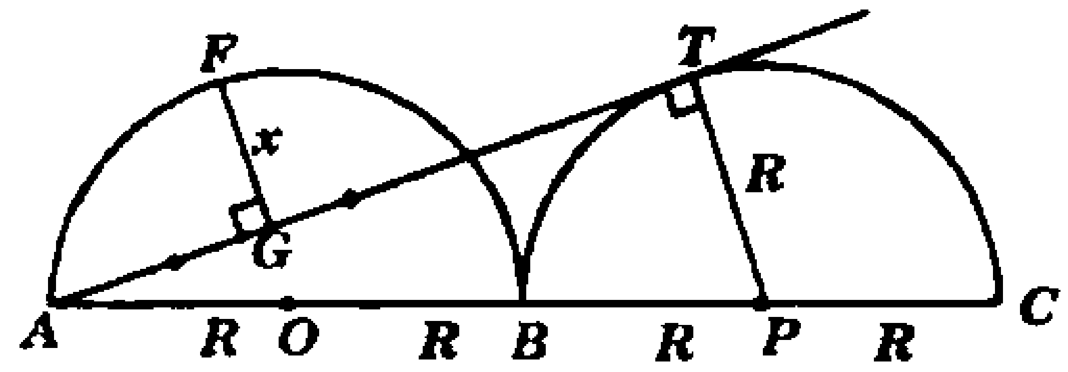
PROBLEMA 16 :

En la figura mostrada se pide la longitud de la flecha *FG* , si "*T*"es punto de tangencia y *AB=BC= 18cm*.



A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Se sabe que $R = 9$, se prolonga la flecha *FG* y se traza el radio *PT*, luego : $\Delta AGO \sim \Delta ATP$

$$\frac{GO}{TP} = \frac{AO}{AP} \Rightarrow \frac{R-x}{R} = \frac{R}{3R}$$

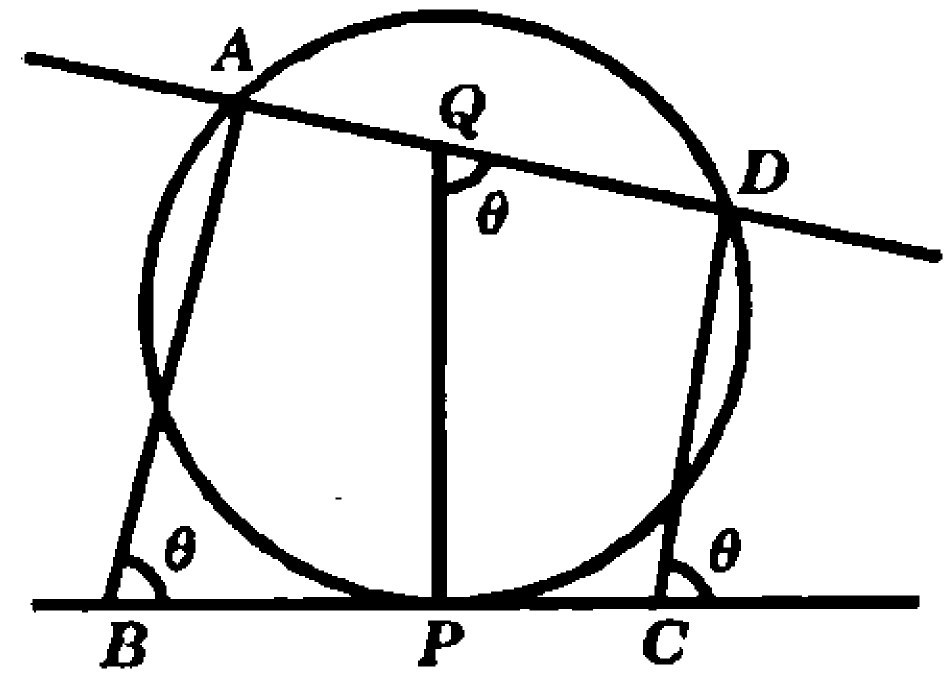
$$\Rightarrow x = \frac{2R}{3} \Rightarrow x = \frac{2(9)}{3} = 6$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

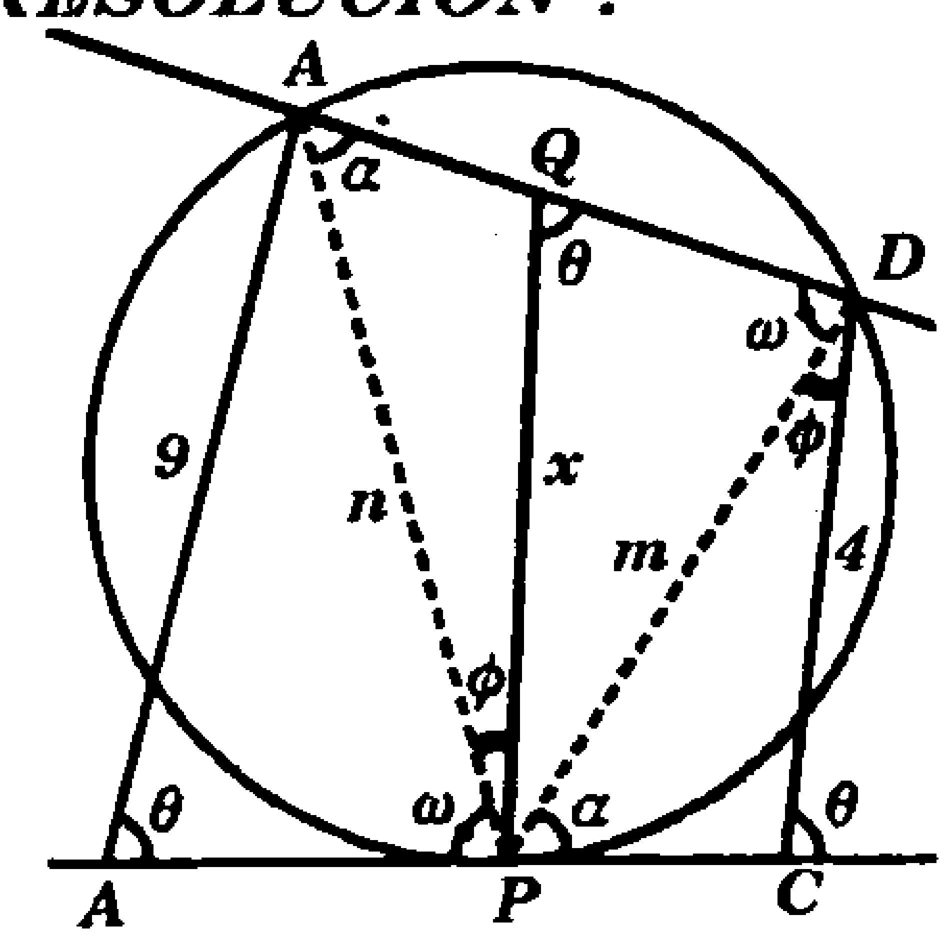
Si : $AB = 9m$ y $CD = 4m$.

Hallar *PQ*.



A) 2m B) 3m C) 4m D) 5m E) 6m

RESOLUCIÓN :



* Al trazar *AP* y *PD*, además al completar las medidas de los ángulos convenientemente , encontramos los pares de triángulos semejantes , ellos son:

* $\Delta BAP \sim \Delta QPD \Rightarrow \dfrac{x}{9} = \dfrac{m}{n}$ ......(I)

* $\Delta APQ \sim \Delta PDC \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{x}$ .....(II)

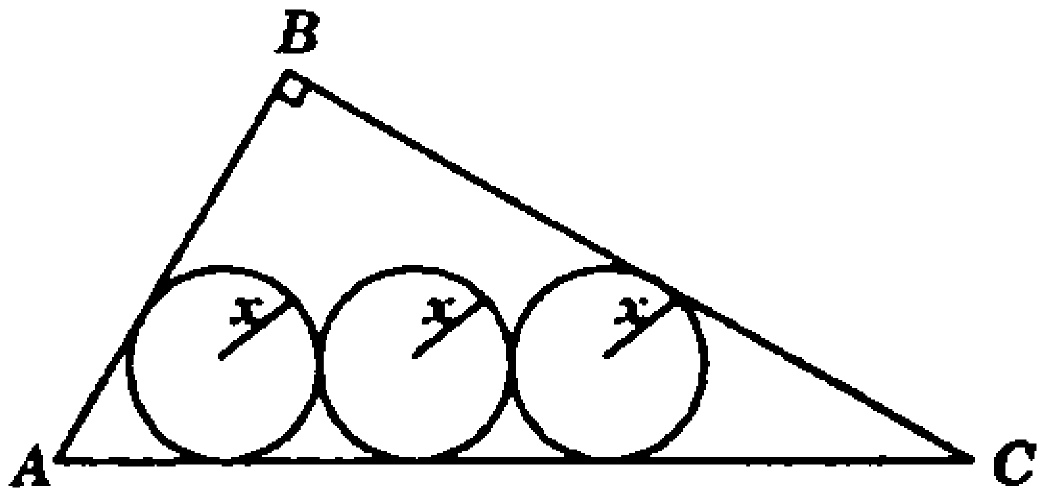
* Igualando *(I)* y *(II)*:

$$\frac{x}{9}=\frac{4}{x}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6$$

RPTA : "E"

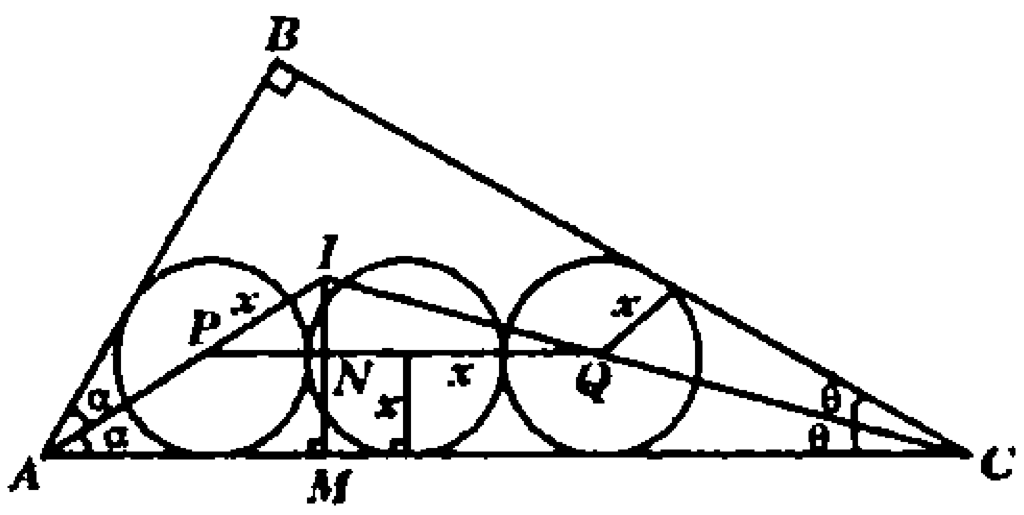
PROBLEMA 18:

En la figura mostrada se muestran tres circunferencias congruentes. Hallar "x" si $AB=5cm$ y $BC=12$ cm.



A) 13/11 **B)** 1/12 **C)** 2
D) 26/21 **E)** 13/9

RESOLUCIÓN :



* Se sabe que $AB=5$ y $BC=12$

$\Delta PIQ\sim\Delta AIC:\ \dfrac{PQ}{AC}=\dfrac{IN}{IM}$ ....(I)

* Aplicando el Teorema de Poncelet para calcular el inradio IM:

$$AB+BC=AC+2IM$$

$$\Rightarrow 5+12=13+2IM\Rightarrow IM=2$$

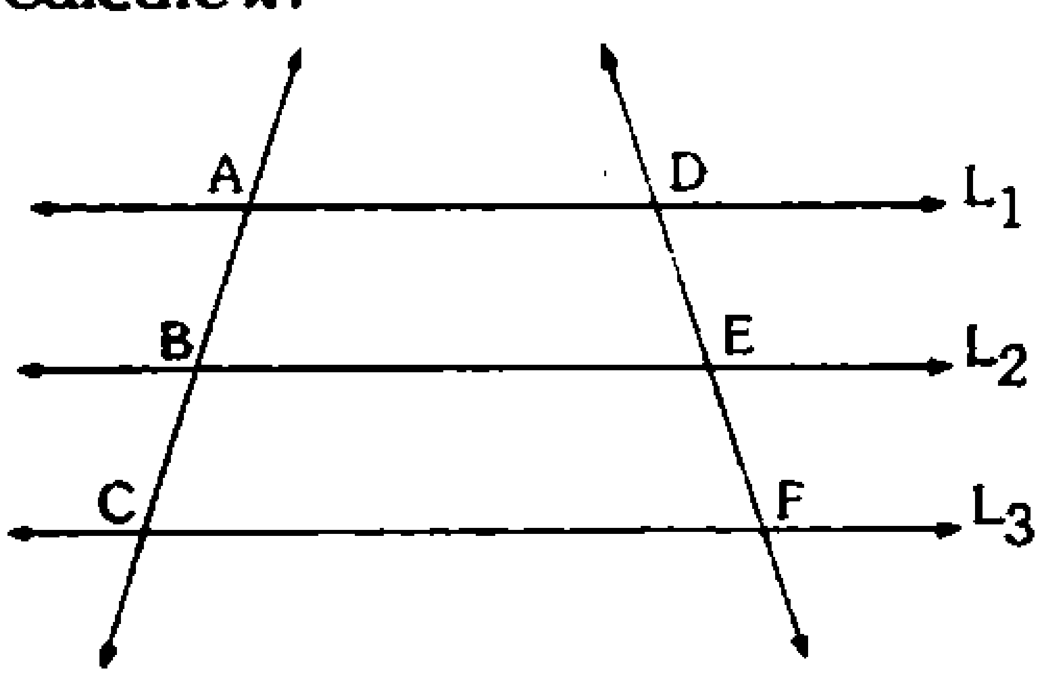
* Reemplazando en *(I)*:

$$\frac{4x}{13}=\frac{2-x}{2}\Rightarrow x=\frac{26}{21}$$

RPTA : "D"

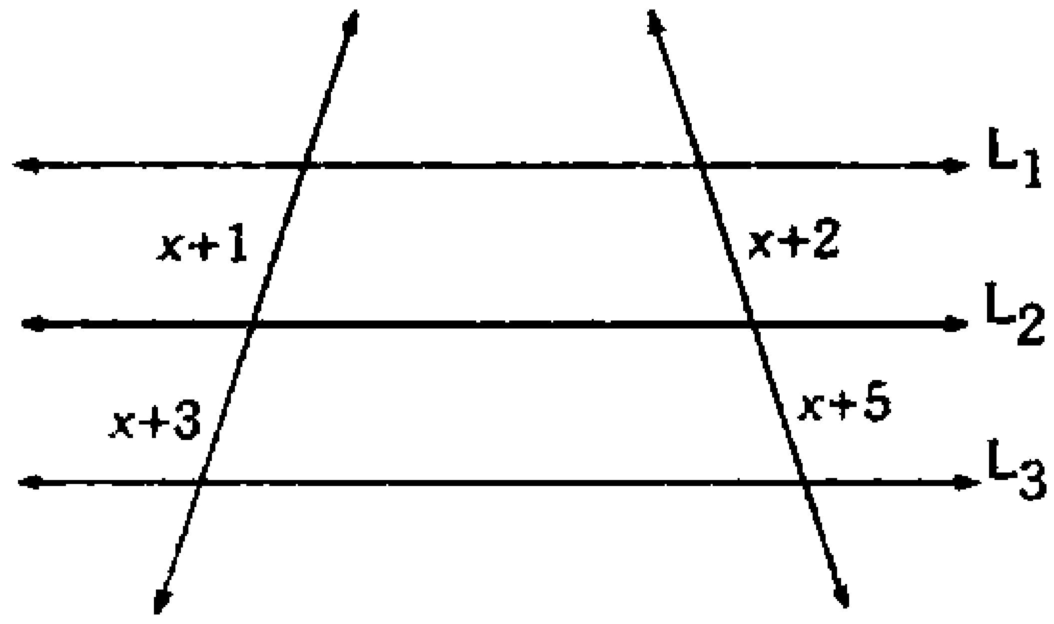
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$, $AB=3x-2$, $BC=6$, $DE=2$, $EF=3$. Calcule x.



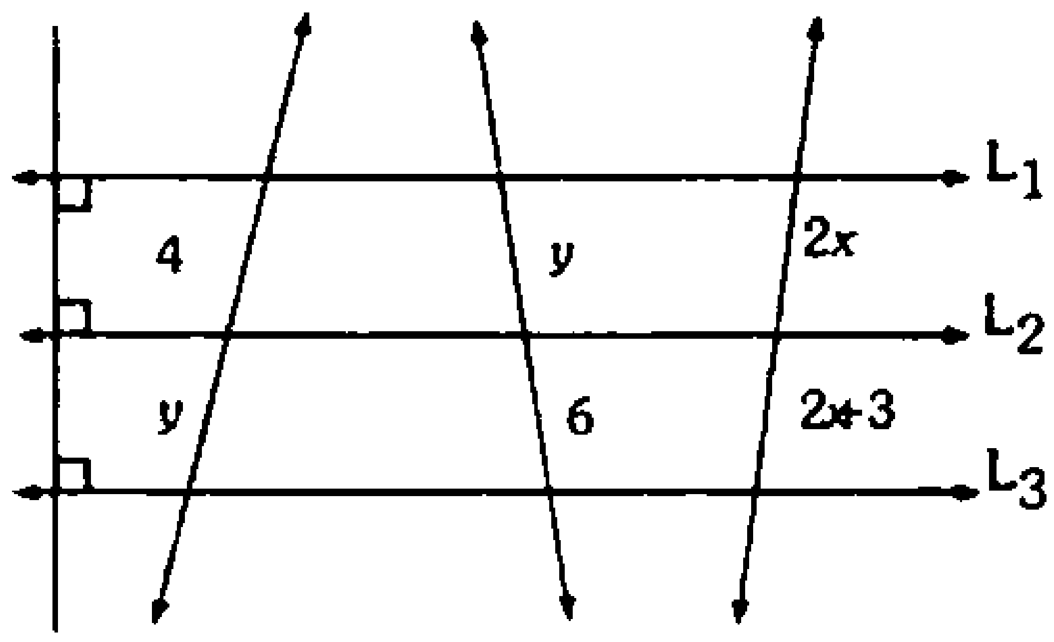
Rpta:..................................

02 En la figura $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$. Calcule x.



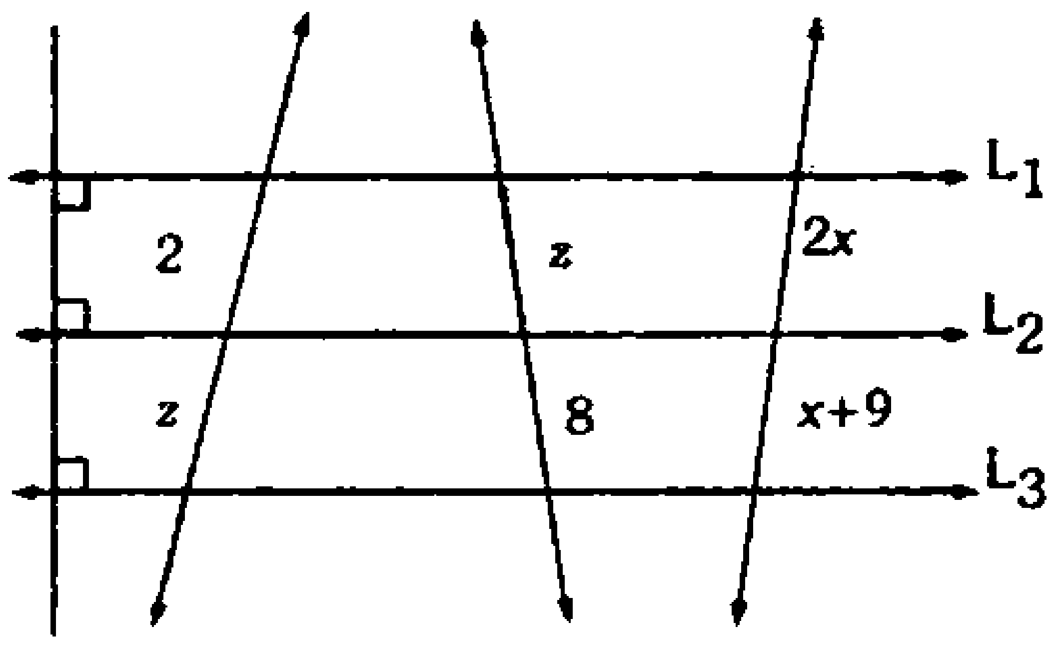
Rpta:..................................

03 En la figura calcule x.



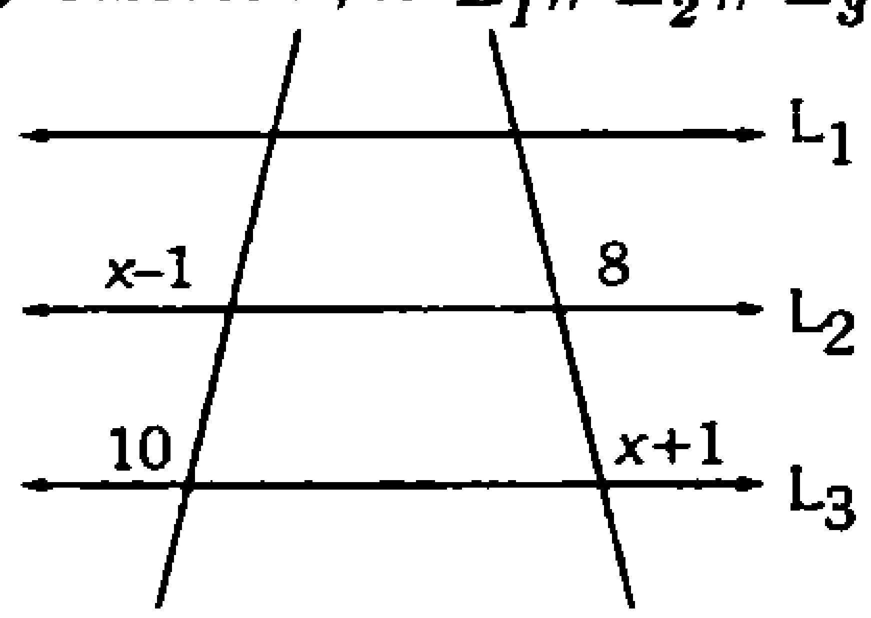
Rpta:..................................

04 En la figura calcule x.



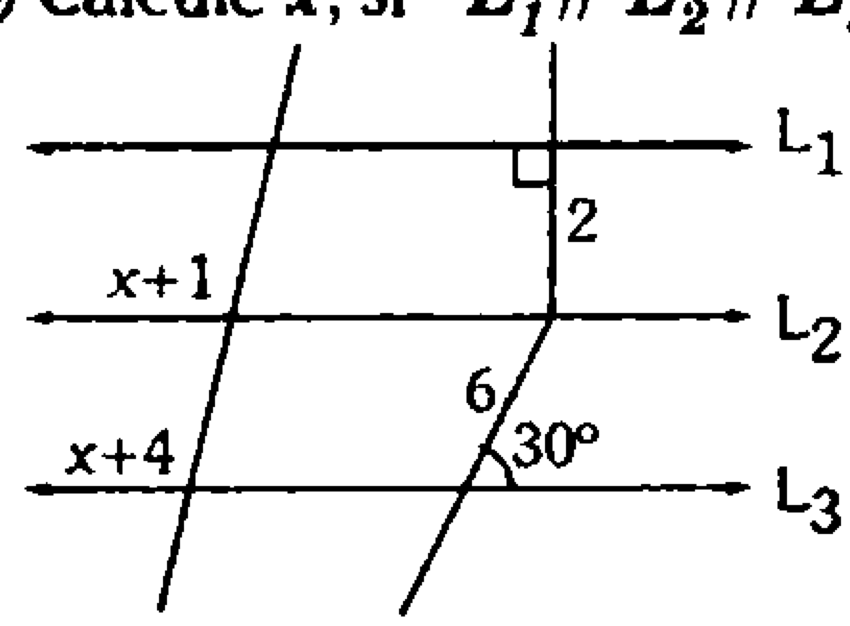
Rpta:..................................

05 Calcule x, si $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$



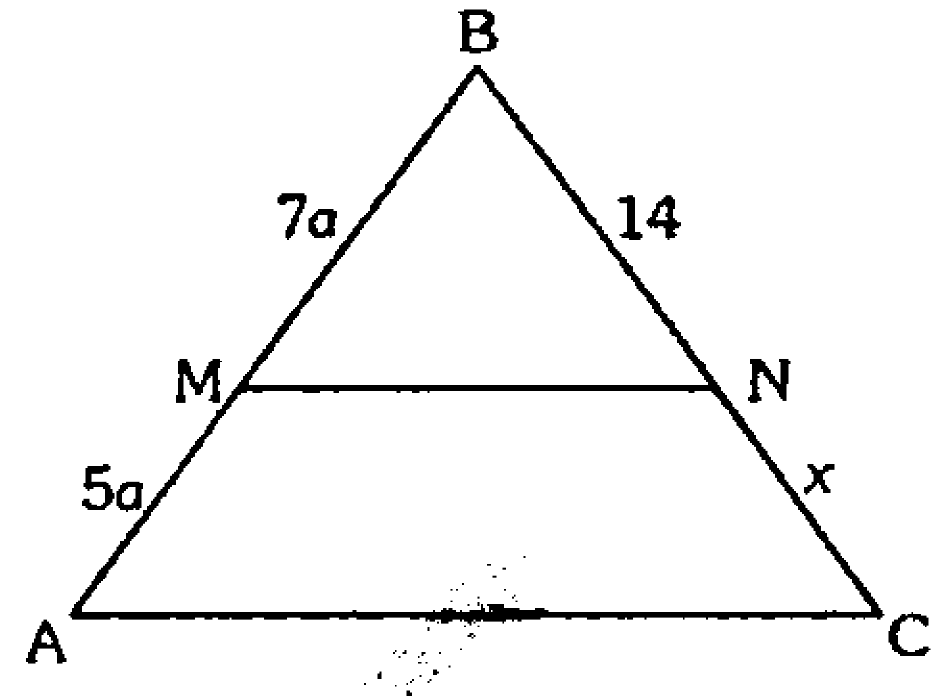
Rpta:..................................

06 Calcule x, si $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$



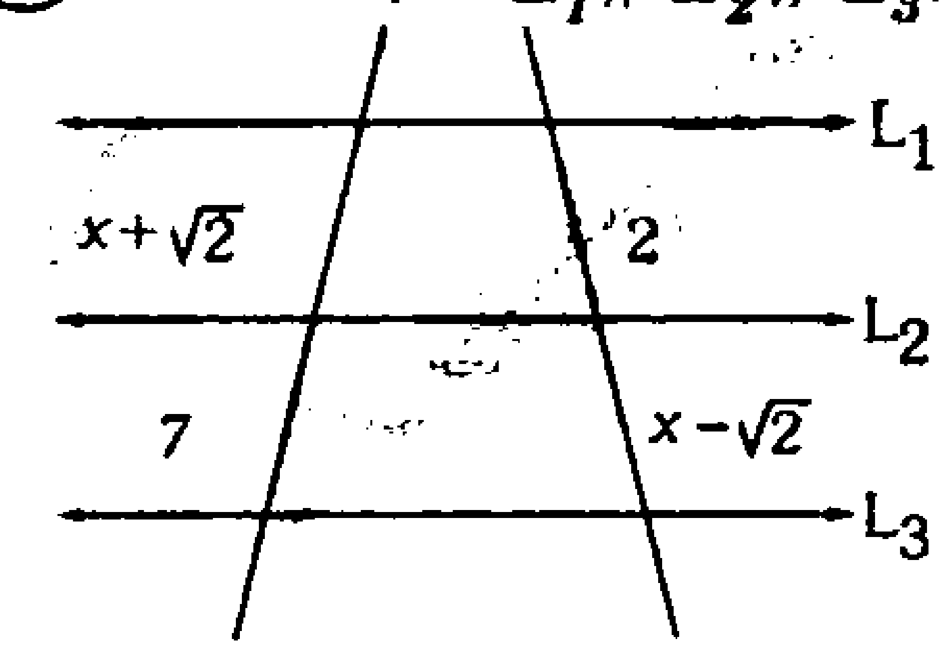
Rpta:..................................

07 Calcule x, si $\overline{MN}//\overline{AC}$.



Rpta:..................................

08 Calcule x, si $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$.

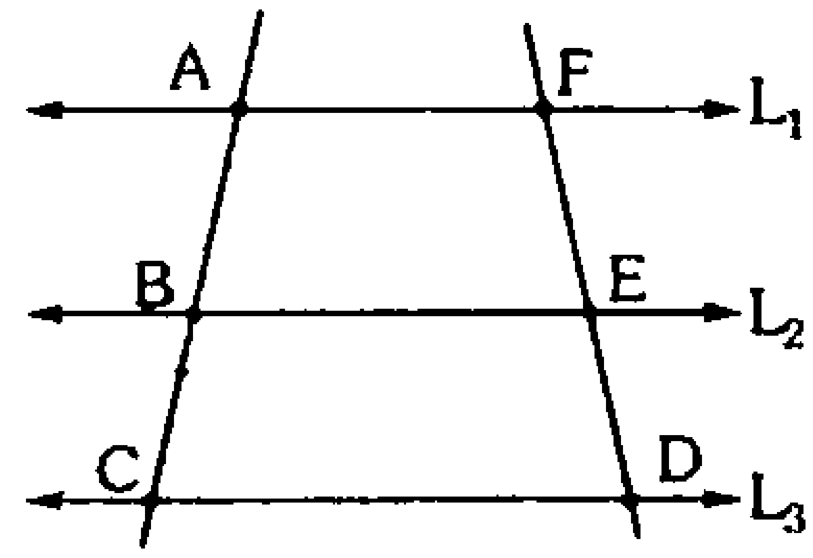


A) 5 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

09 Los lados de un triángulo ABC, miden $AB=9$, $BC=5$, $AC=7$. Se traza la bisectríz exterior BE. Calcular CE

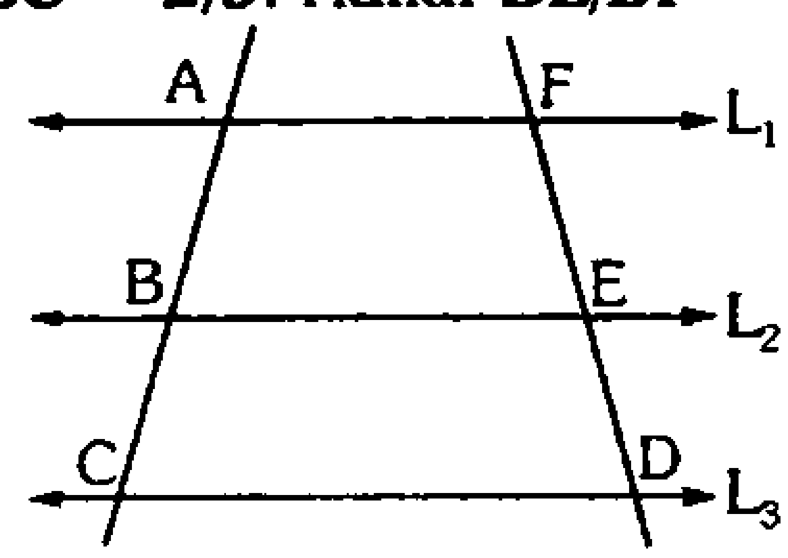
A) 8 **B)** 8,75 **C)** 4 **D)** 4,75 **E)** 3

10 En el gráfico: $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$, $ED=2EF$ y $AB=5$. Hallar BC.



A) 3 **B)** 4 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 25

11 En la figura: $\overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}//\overleftrightarrow{L_3}$. Si $AB/BC=2/3$. Hallar DE/DF

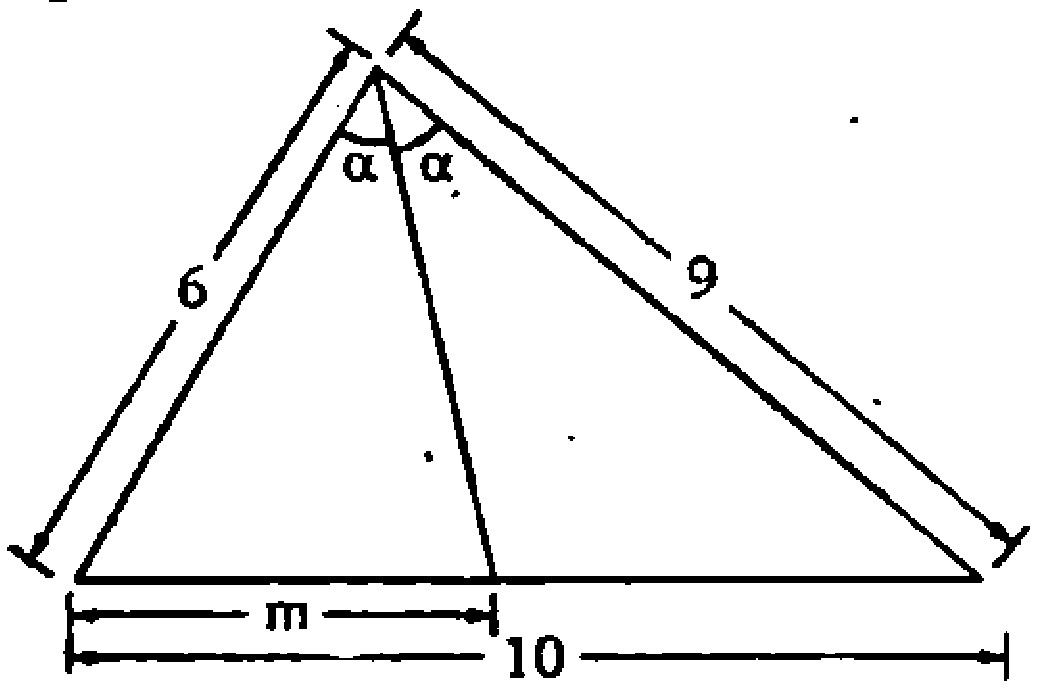


Rpta:..................................

12 En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BM, de tal manera que $AM=6$ y $MC=9$. Calcular AB. Si: $BC=12$

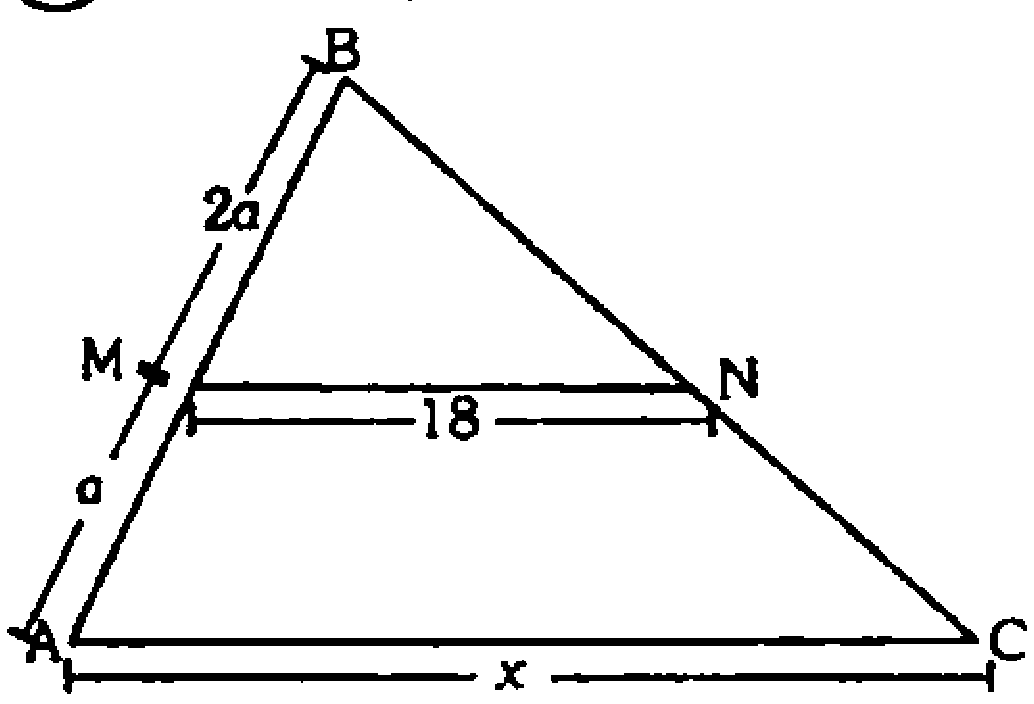
Rpta:..................................

13 Calcule m.



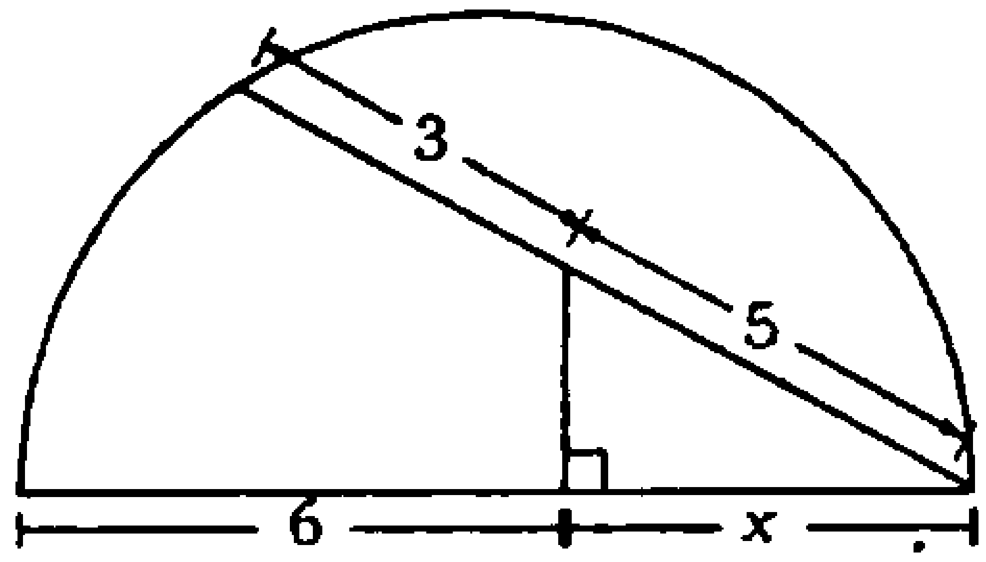
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

14 Calcule x, si $\overline{MN} // \overline{AC}$.



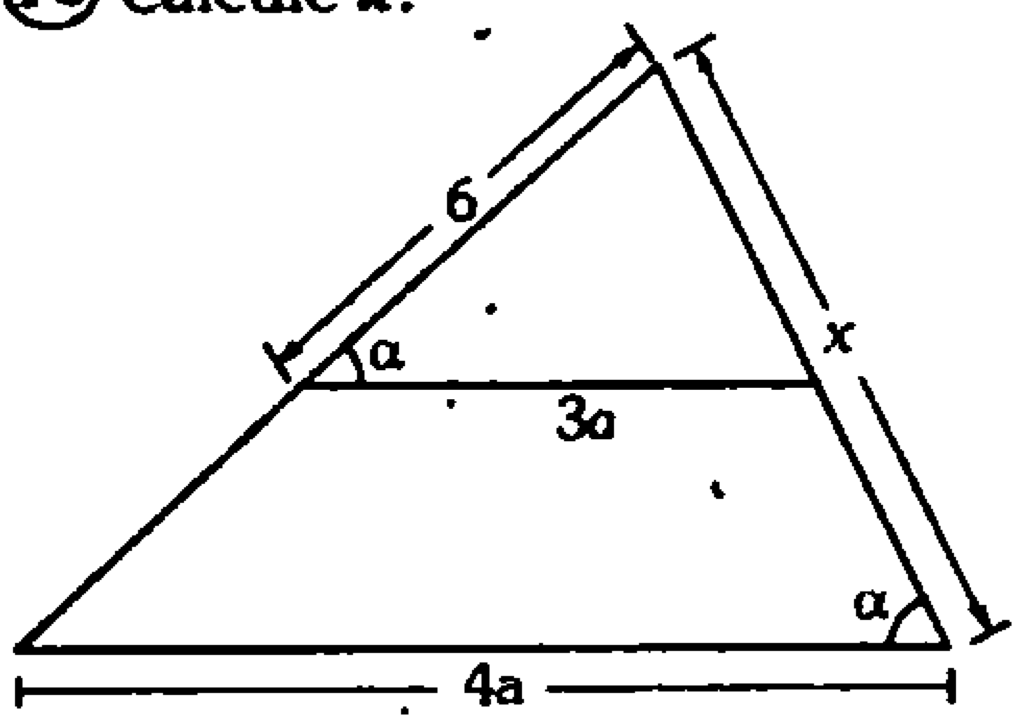
A) 10 B) 16 C) 12 D) 18 E) 27

15 Calcule x en la semicircunferencia.



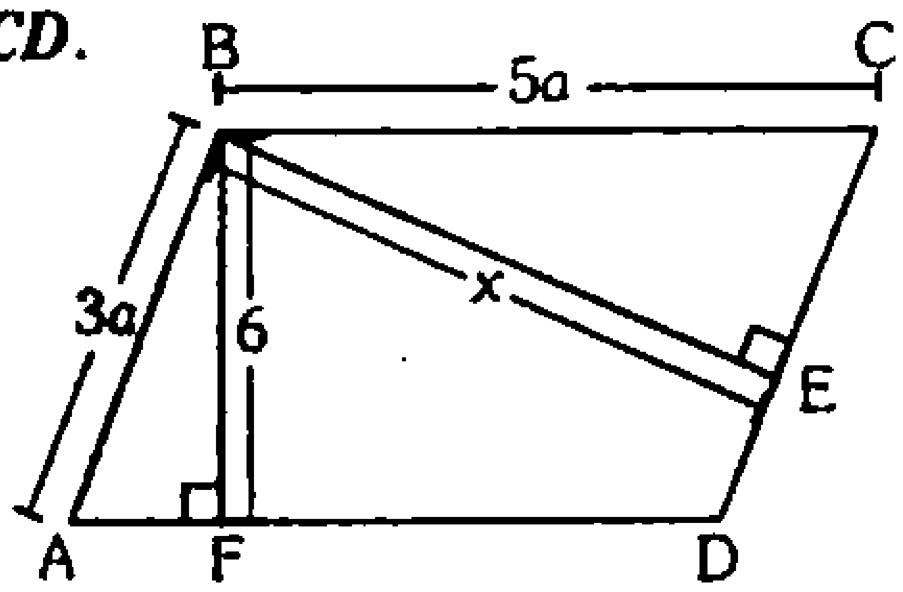
A) 3,5 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) 2

16 Calcule x.



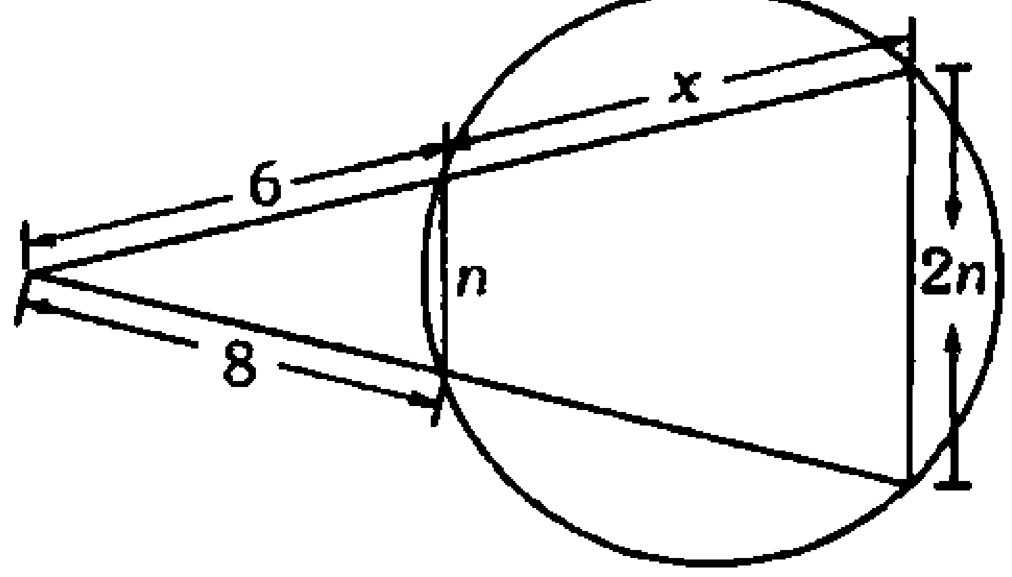
A) 8 B) 6 C) 9 D) 10 E) 12

17 Calcule x, en el romboide $ABCD$.



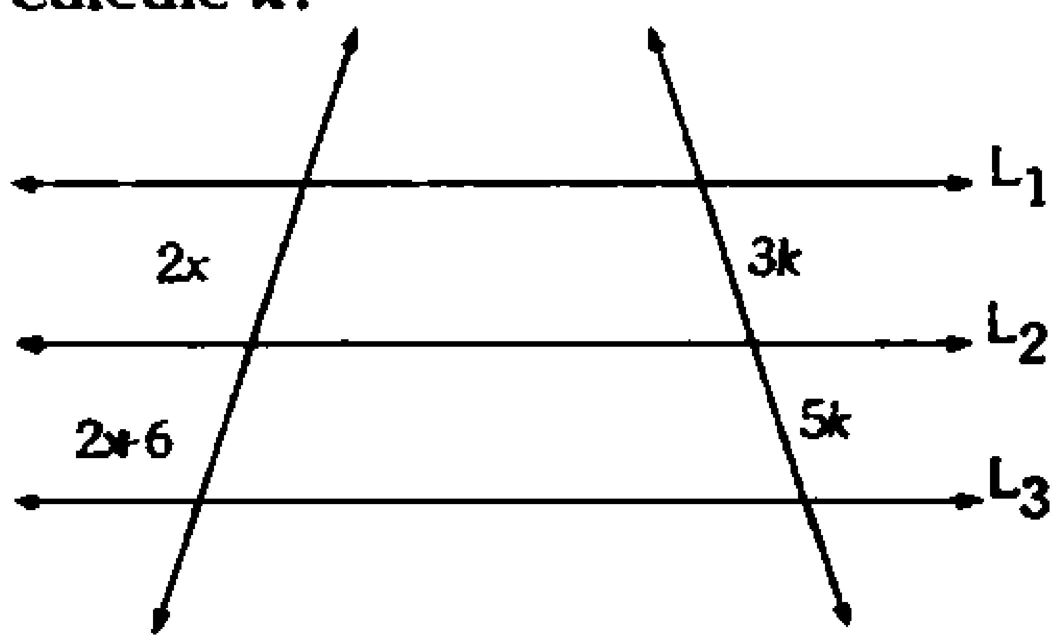
A) 10 B) 9 C) 8 D) 12 E) 11

18 Calcule x.



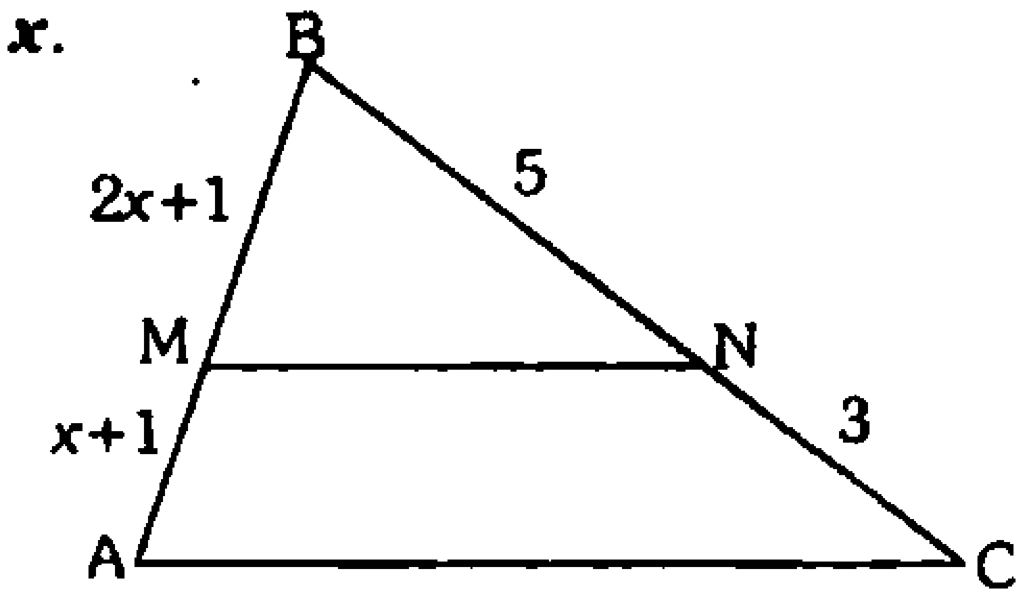
A) 7 B) 6 C) 9 D) 10 E) 5

19 En la figura $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$. Calcule x.



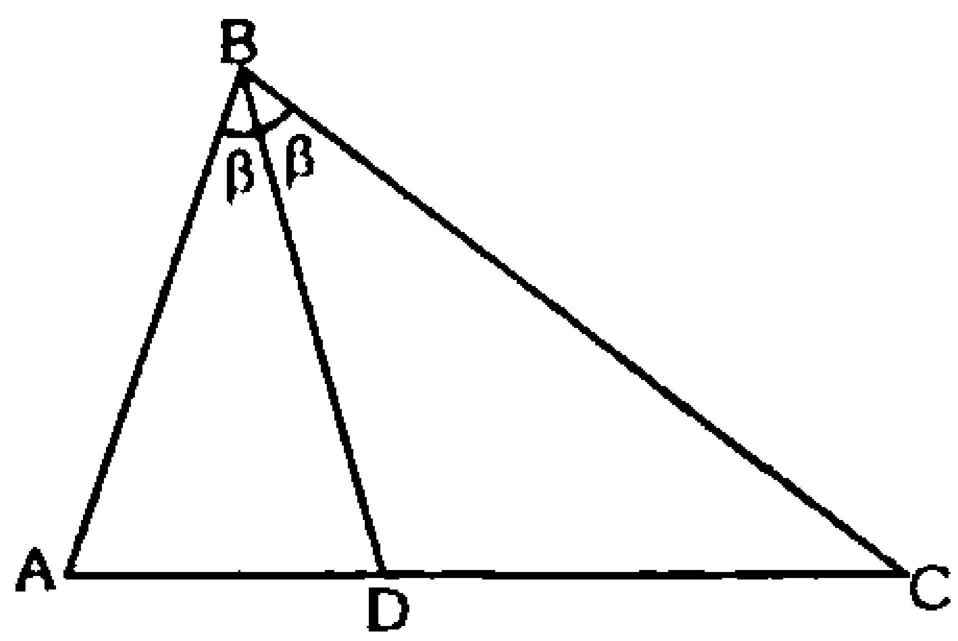
A) 3 B) 4 C) 4,5 D) 5,3 E) 4,8

20 En la figura $\overline{MN} // \overline{AC}$. Calcule x.



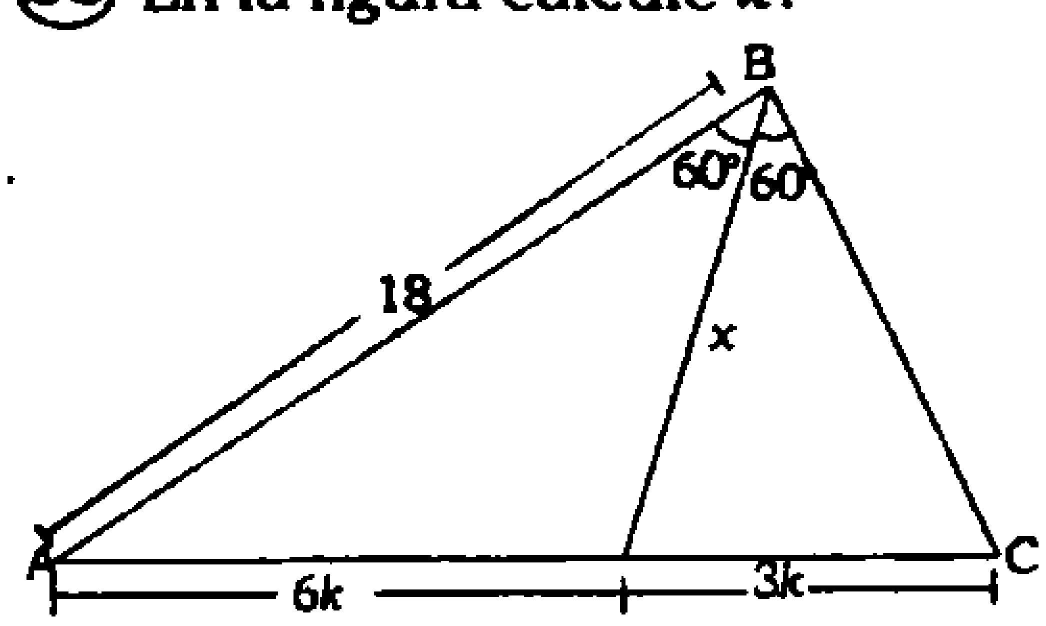
A) 5 B) 3 C) 4 D) 2 E) 6

21 En la figura: $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{BC}{6}$, $AC=22$. Calcule AD.



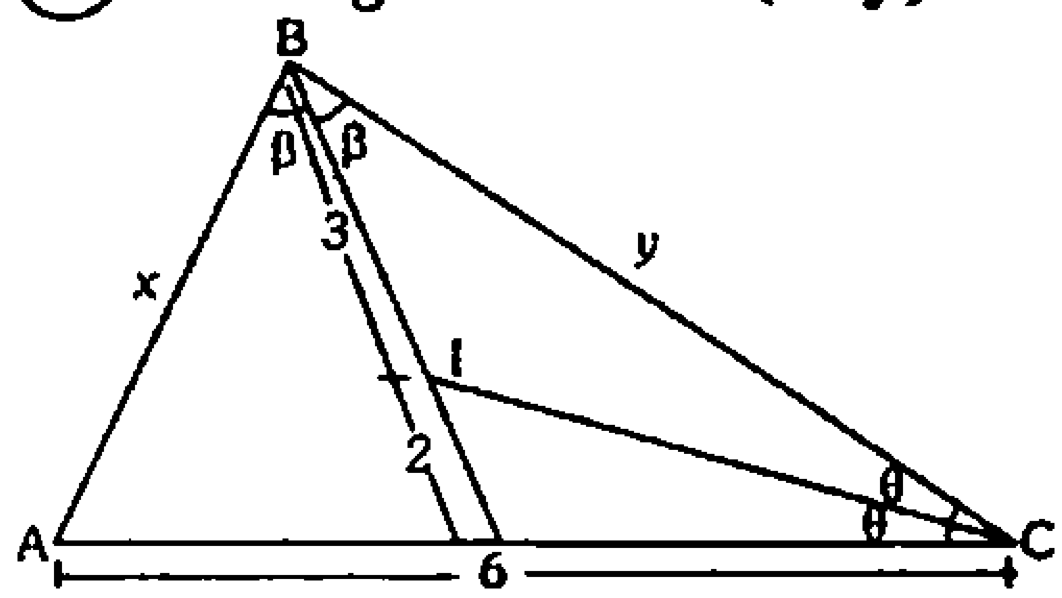
A) 10 B) 12 C) 15 D) 8 E) 13

22 En la figura calcule x.



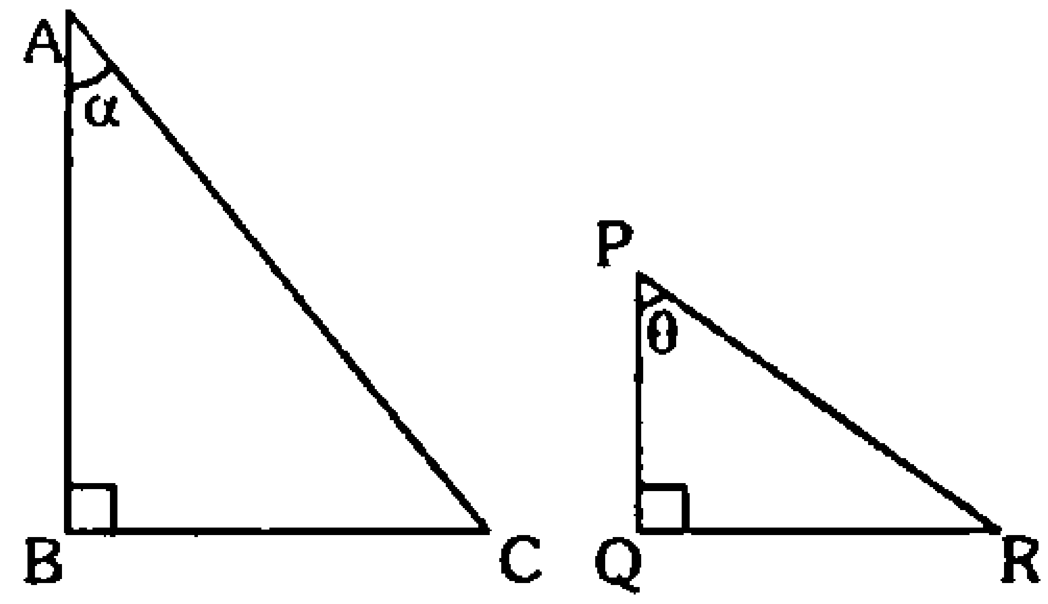
A) 5 B) 6 C) 8 D) 4 E) 3

23 En la figura calcule $(x+y)$.



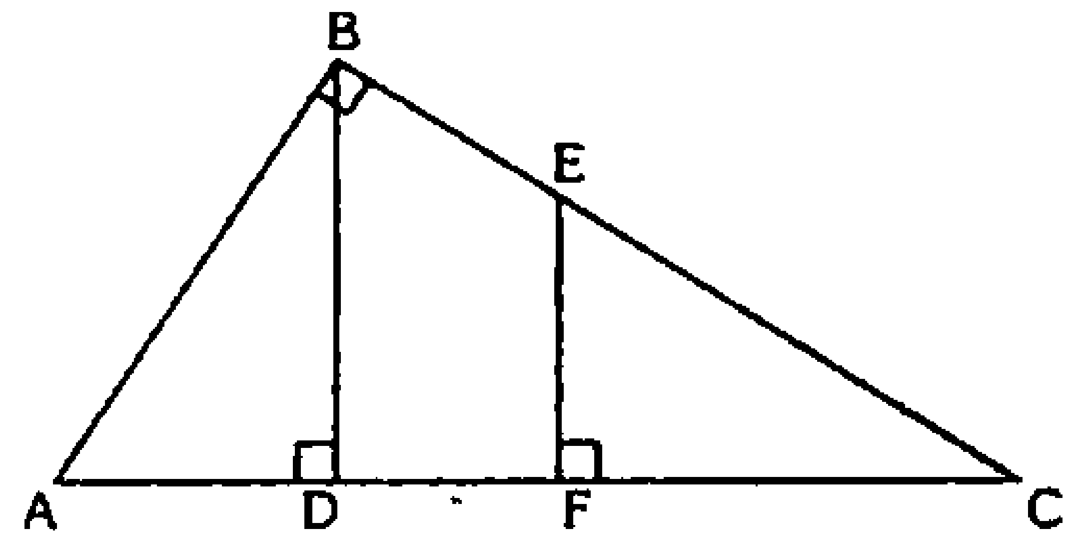
A) 7 B) 5 C) 8 D) 6 E) 9

24 En la figura: $\alpha+\theta=90°$, $BC=6$, $PQ=3$. $QR=4$. Calcule AB.



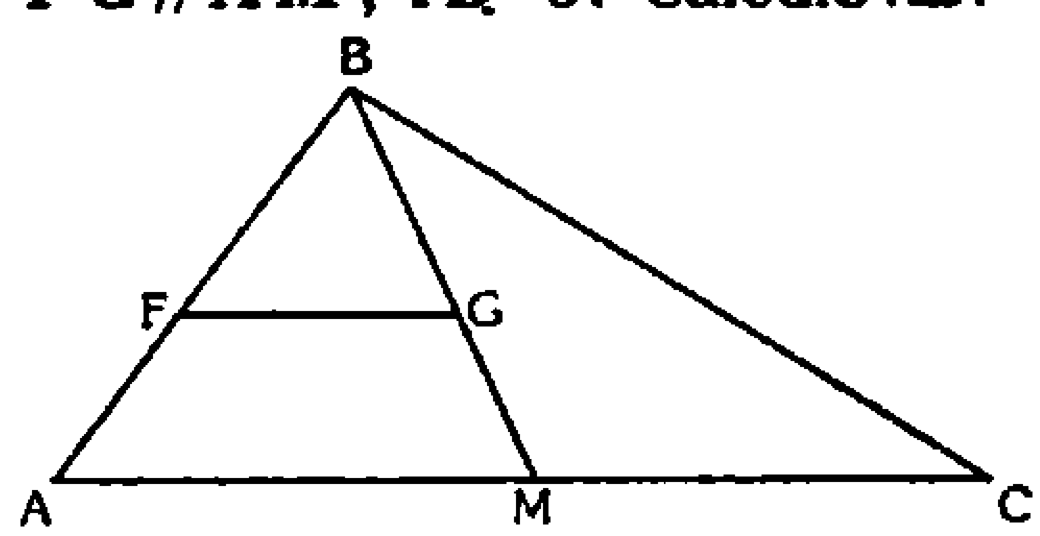
Rpta:..........

25 En la figura: $AD=4$, $DB=8$, $EF=6$. Calcule FC.



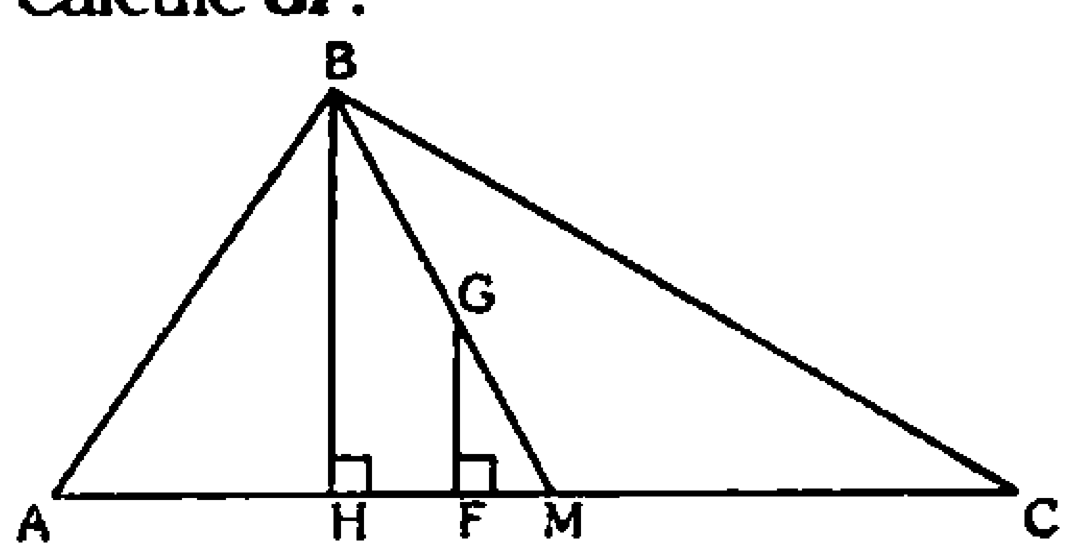
Rpta:..........

26 En la figura G es baricentro de la región triangular ABC, $\overline{FG} // \overline{AM}$, $FB=8$. Calcule AB.



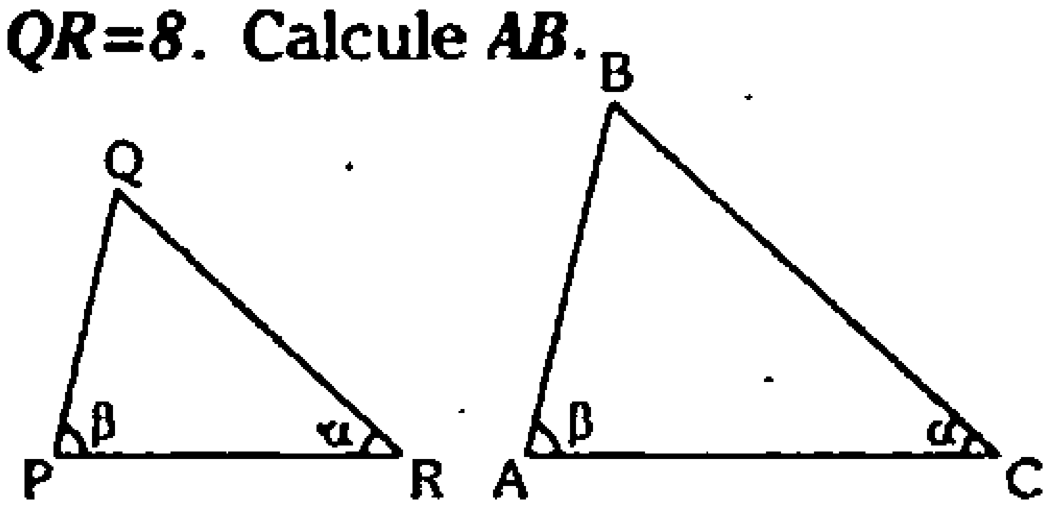
Rpta:..........

27 En la figura G es baricentro de la región triangular ABC, $BH=12$. Calcule GF.



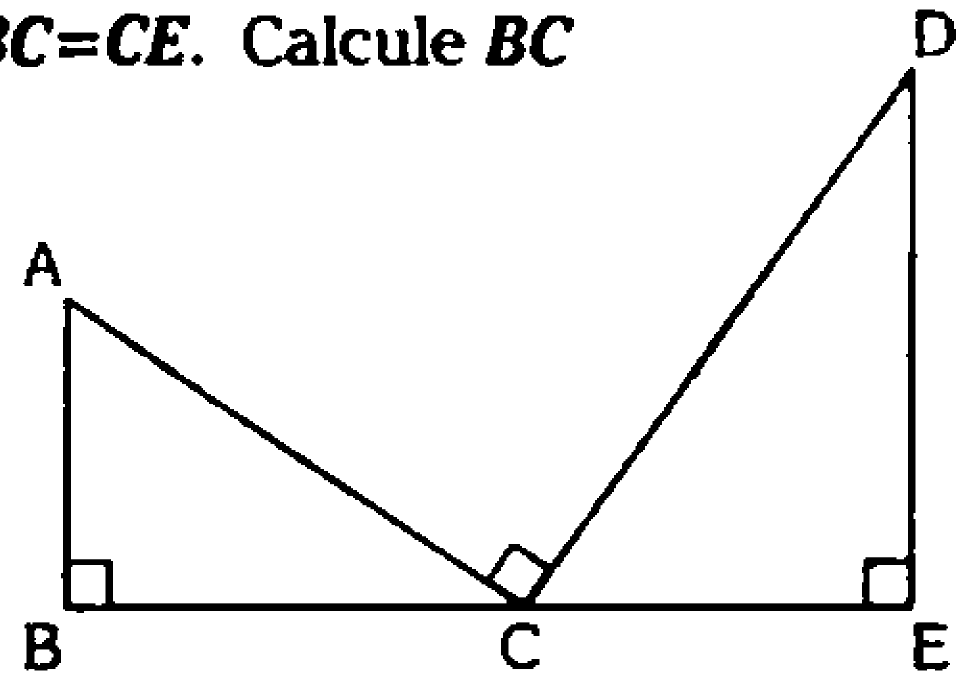
Rpta:..........

28 En la figura: $BC=24$, $PQ=6$, $QR=8$. Calcule AB.



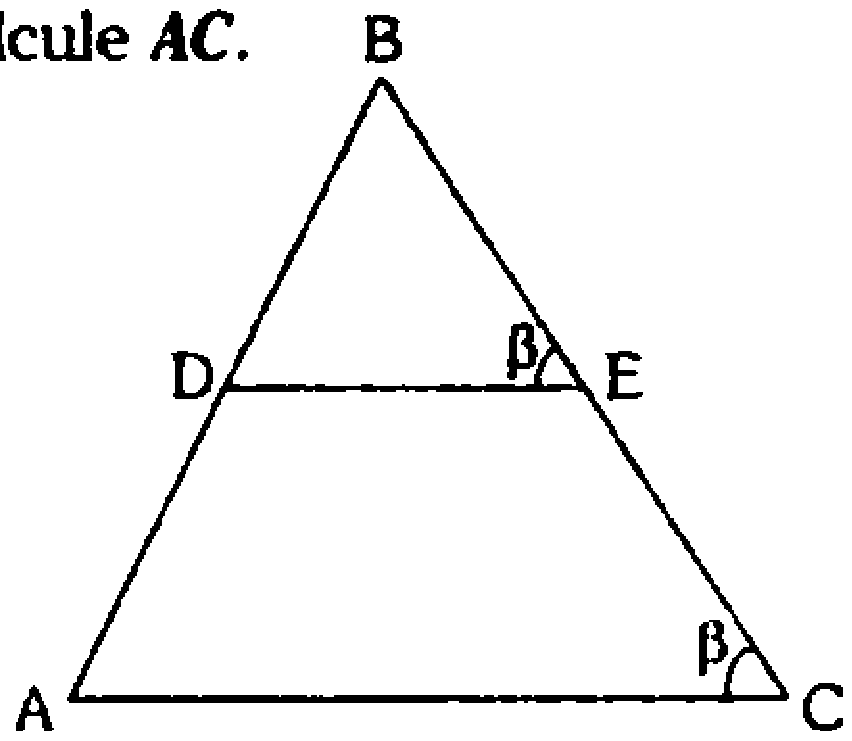
A) 12 B) 18 C) 15 D) 13 E) 16

29 En la figura: $AB=1$, $DE=4$, $BC=CE$. Calcule BC



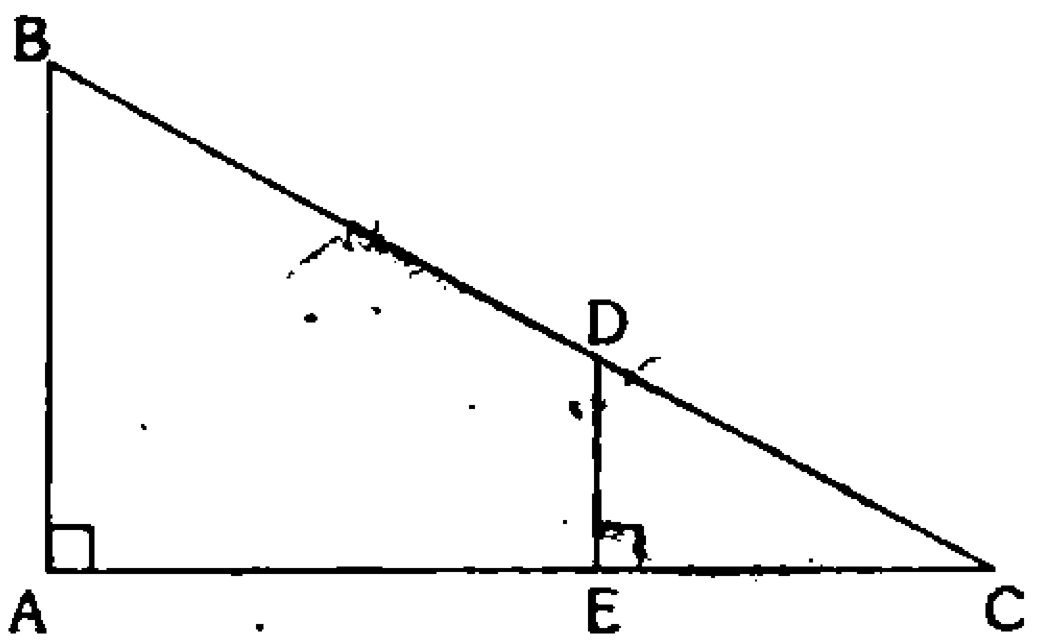
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

30 En la figura: $BE=6$, $DE=EC=4$. Calcule AC.



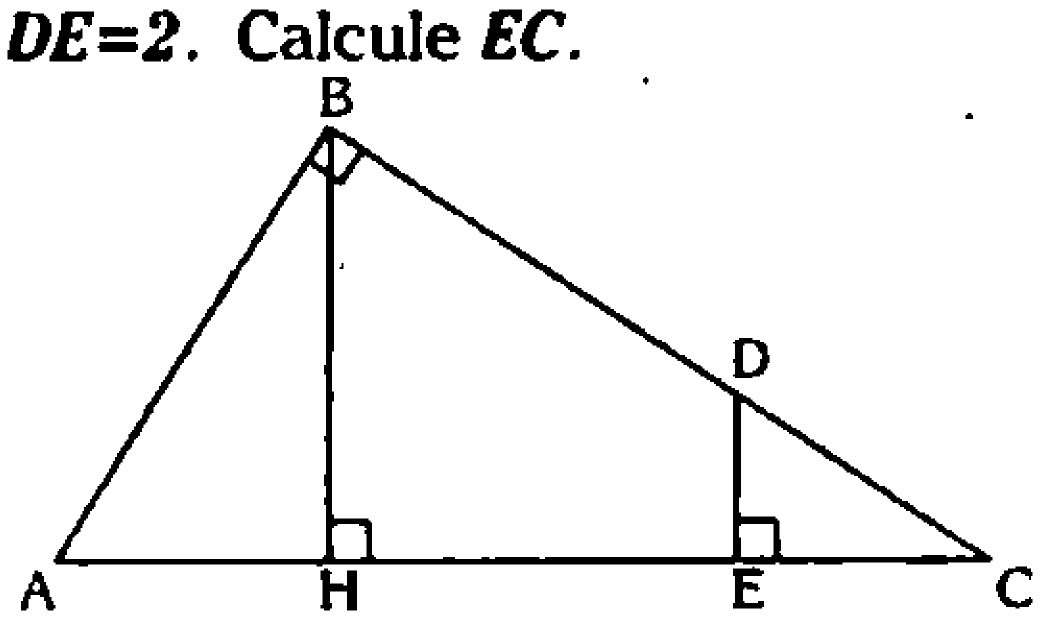
A) 20/3 B) 8/3 C) 15/2 D) 5/2 E) 17/3

31 En la figura: $AB=9$, $AE=4$, $EC=2$. Calcule DE.



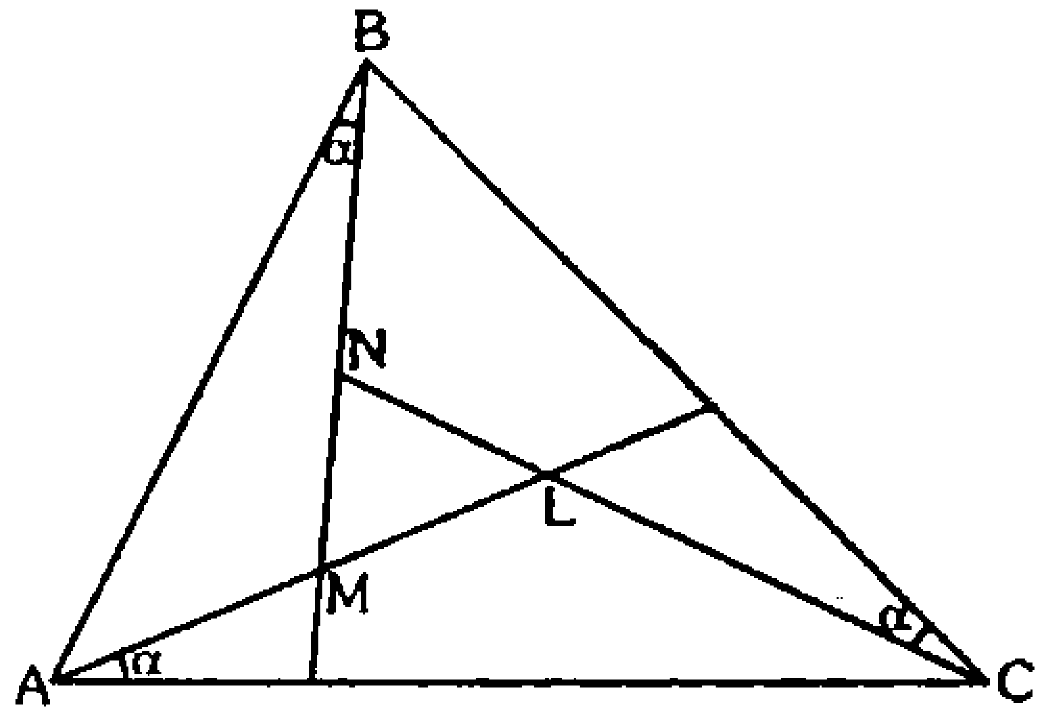
A) 6 B) 4 C) 5 D) 2 E) 3

32 En la figura: $AH=4$, $BH=6$, $DE=2$. Calcule EC.



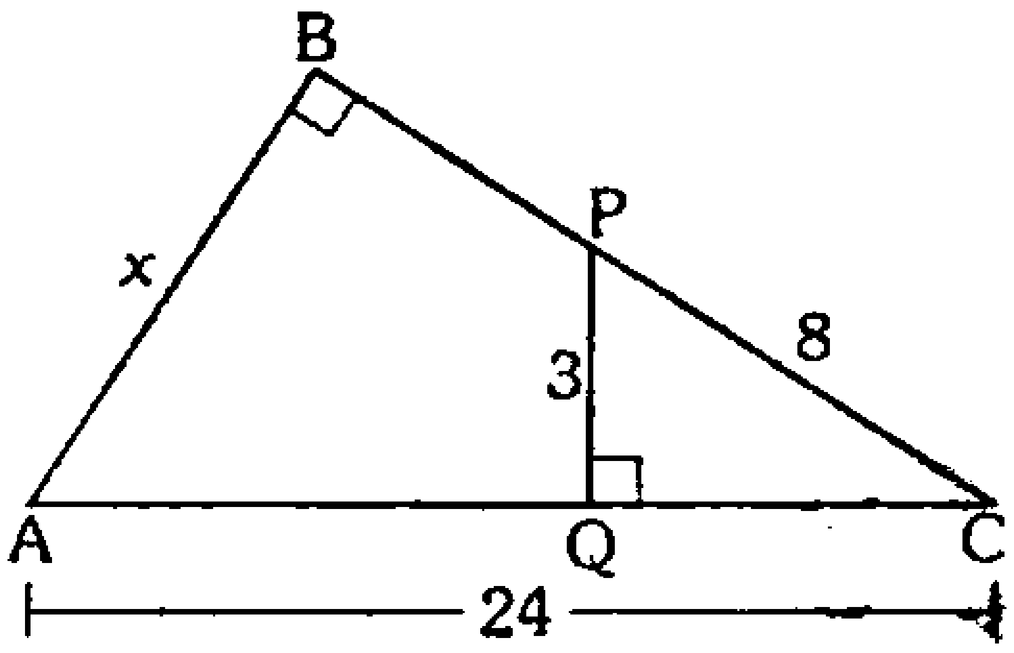
A) 2 B) 3 C) 5 D) 4 E) 6

33 En la figura, hallar ML, si $AB = c, MN = a, AC = b$.



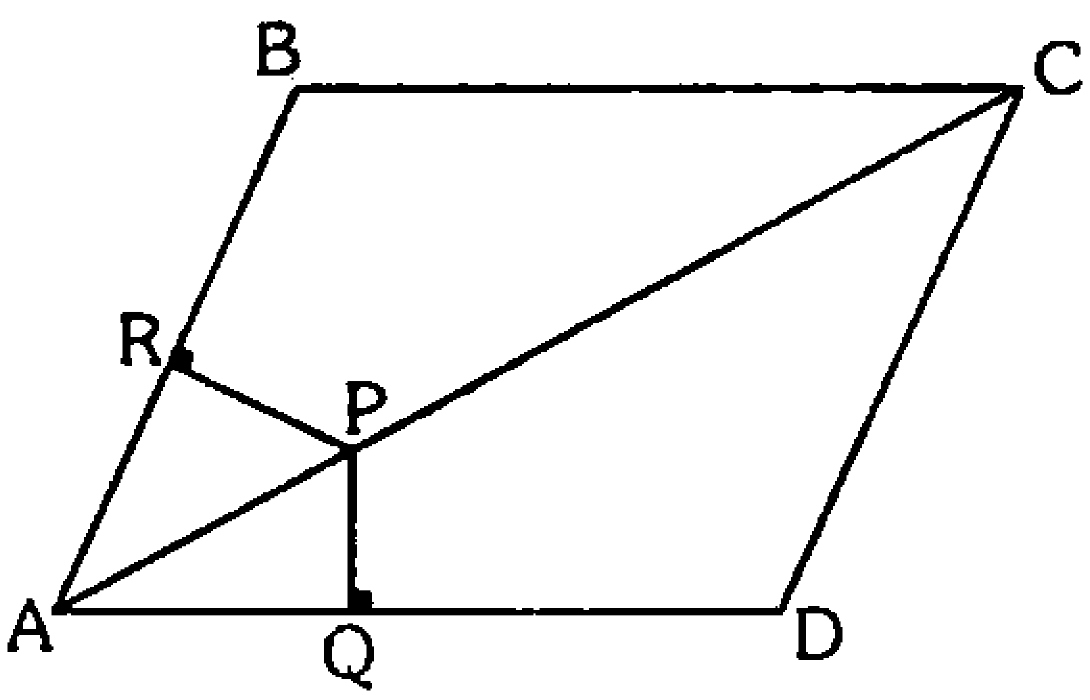
A) abc B) $\frac{ab}{c}$ C) $\frac{ac}{b}$ D) $\frac{bc}{a}$ E) $\frac{a+b}{c}$

34 En la figura: Calcular x



A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

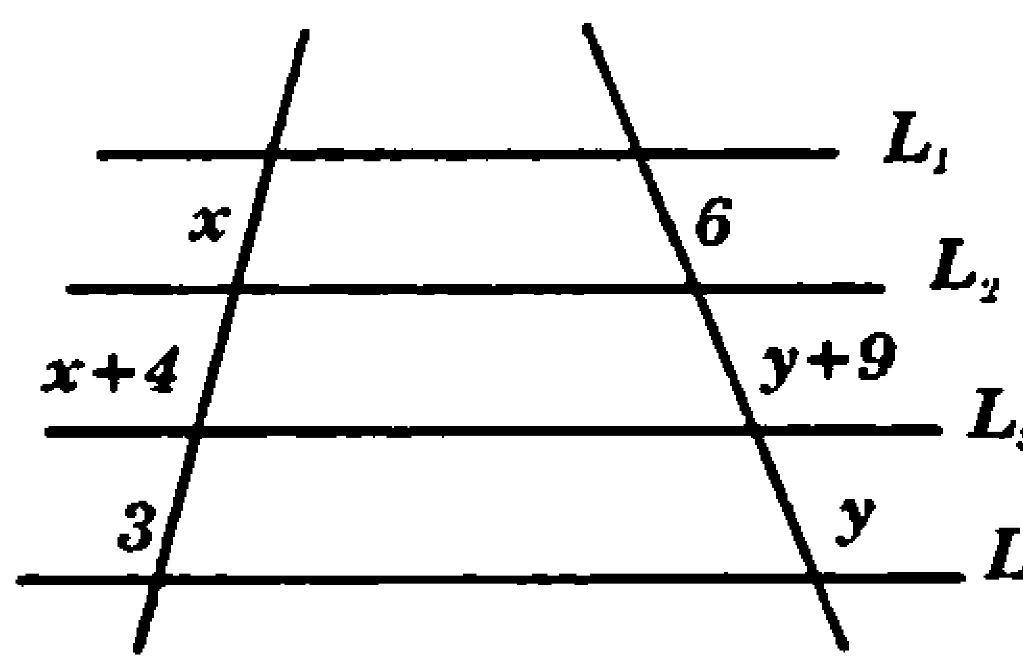
35 En la figura $ABCD$ es un paralelogramo. Si: $AB = 9$, $AD = 12$ y $PR = 6$, hallar PQ.



A) 1,5 B) 2 C) 3,5 D) 4,5 E) 6

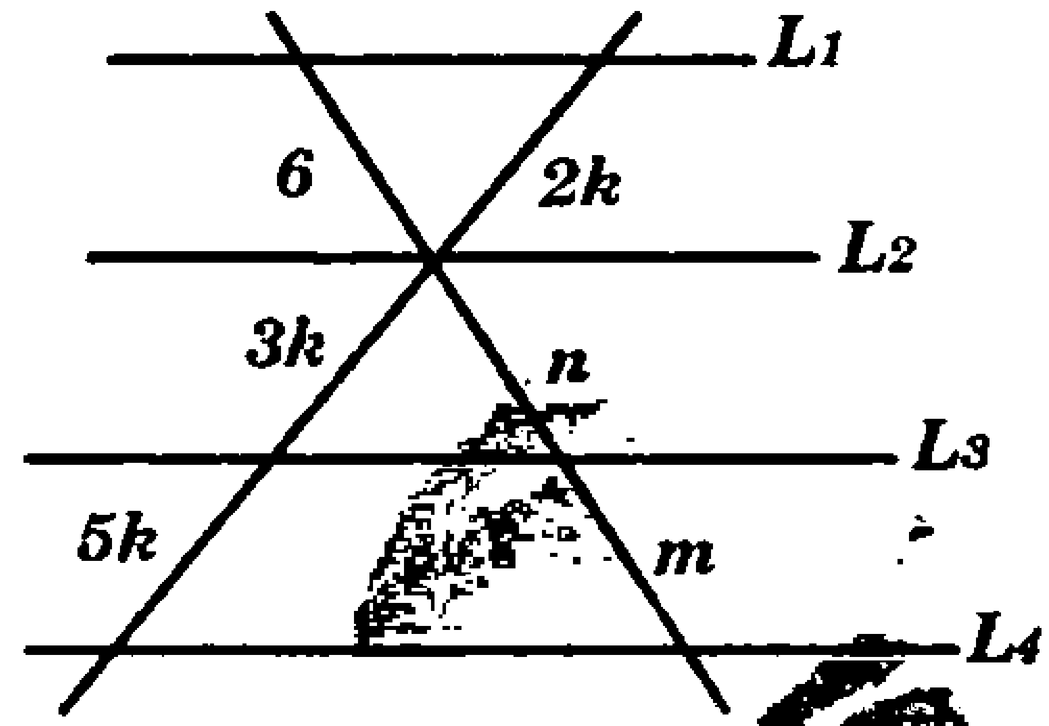
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular "x", si: $\overline{L_1}//\overline{L_2}//\overline{L_3}//\overline{L_4}$



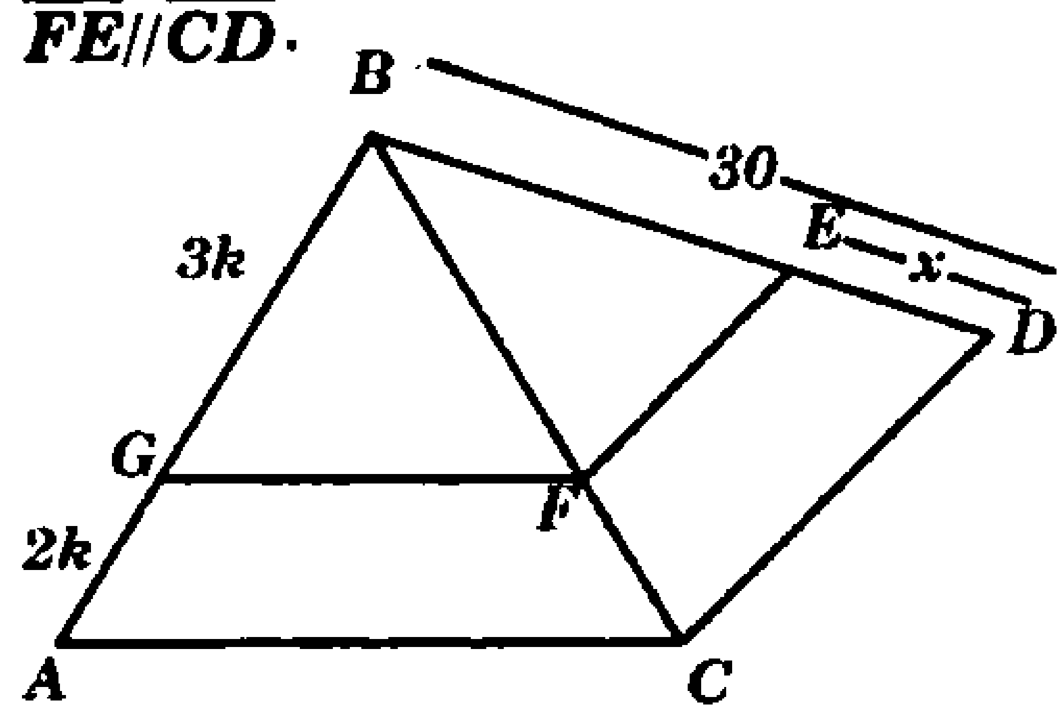
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 9

02 Calcular $(m-n)$, si $\overline{L_1} // \overline{L_2} // \overline{L_3} // \overline{L_4}$



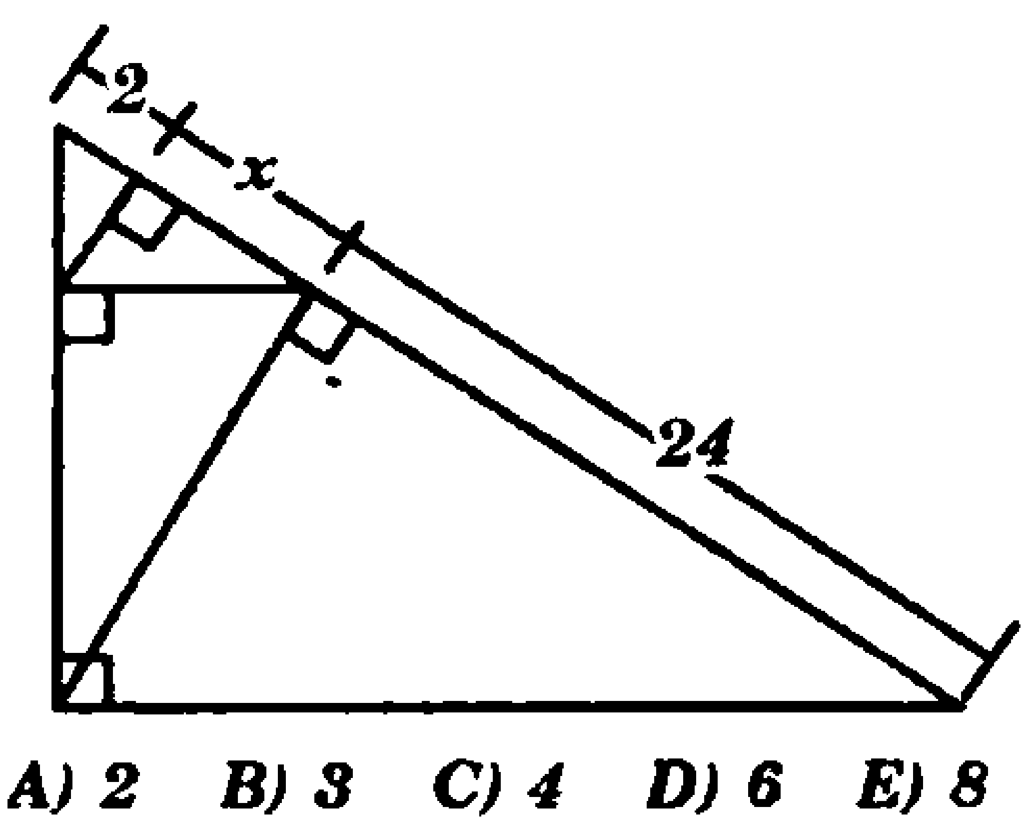
A) 12 B) 9 C) 8 D) 4 E) 6

03 Calcular "x", si $\overline{GF}//\overline{AC}$ y $\overline{FE}//\overline{CD}$.



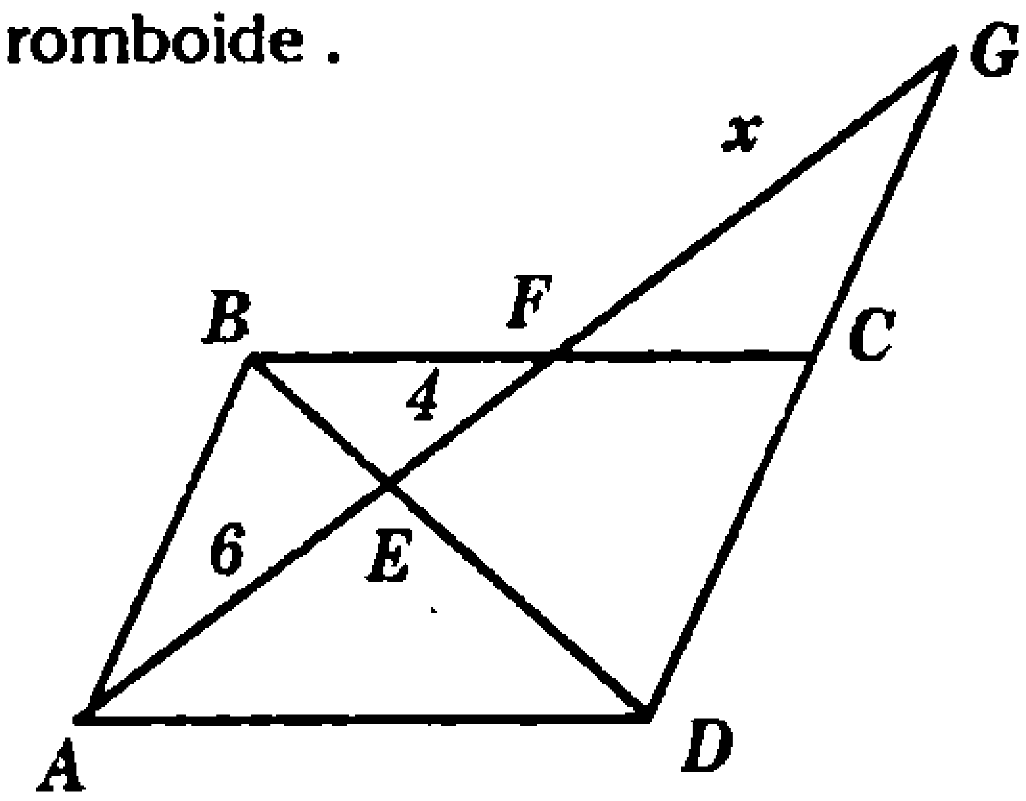
A) 16 B) 9 C) 12 D) 15 E) 10

04 Calcular "x".



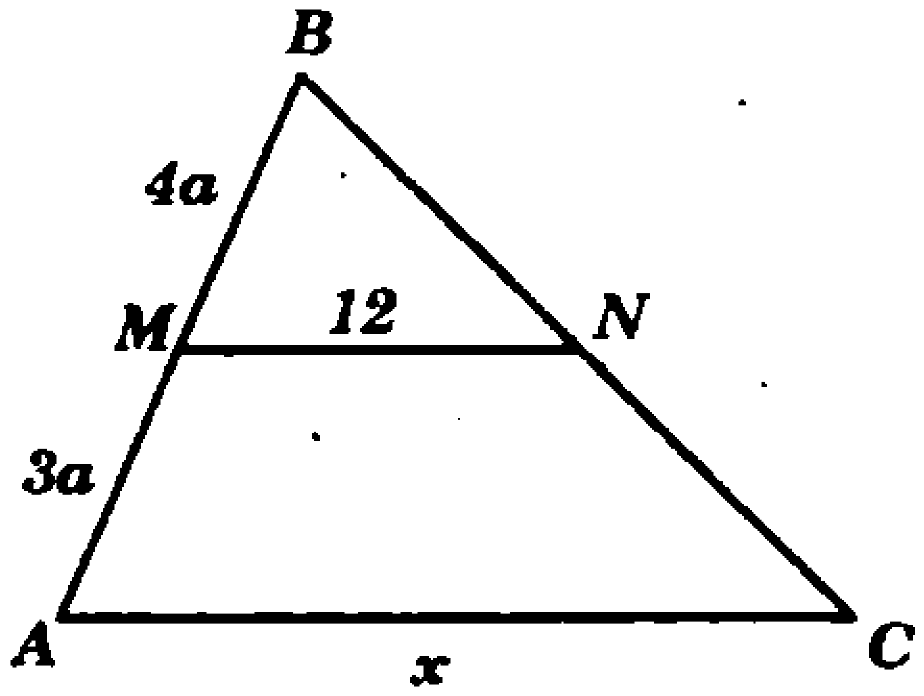
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

05 Calcular "x", si $ABCD$ es un romboide.



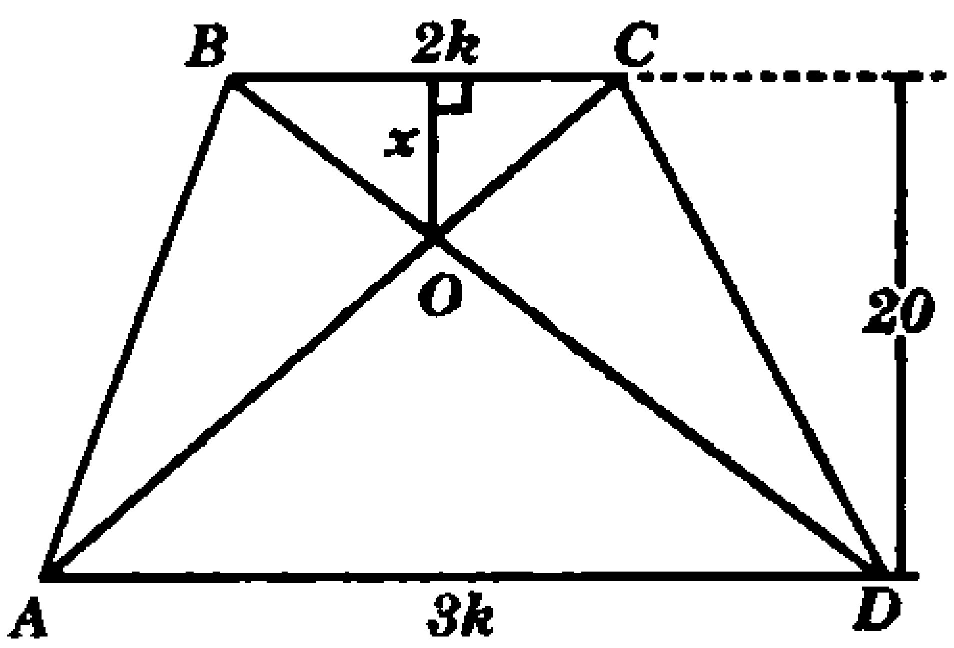
A) 5 B) 4 C) 6 D) 9 E) 3

06 Calcular "x", si $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$



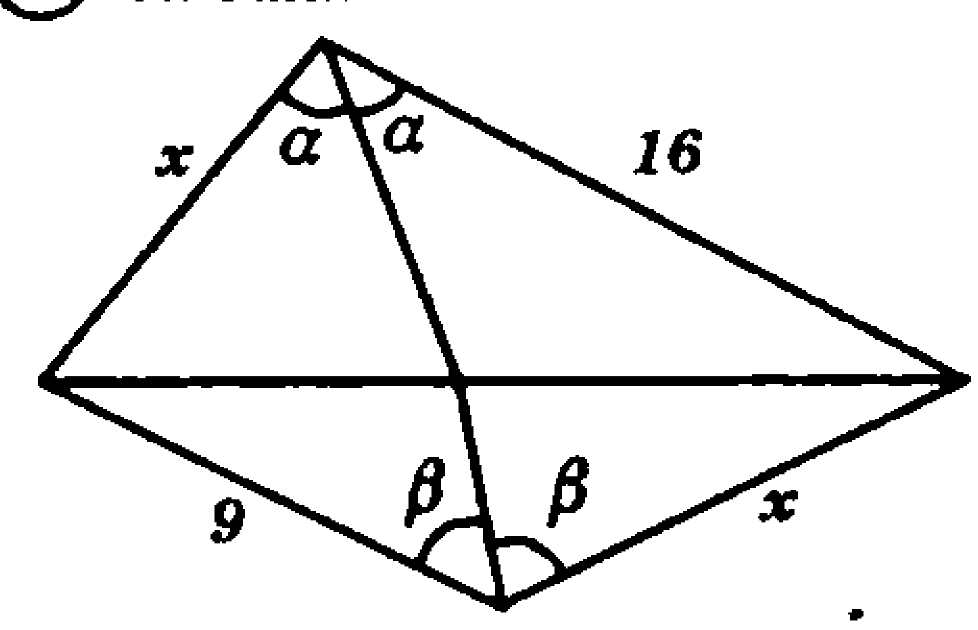
A) 18 B) 21 C) 24 D) 28 E) 16

07 Calcular "x", si $ABCD$ es un trapecio



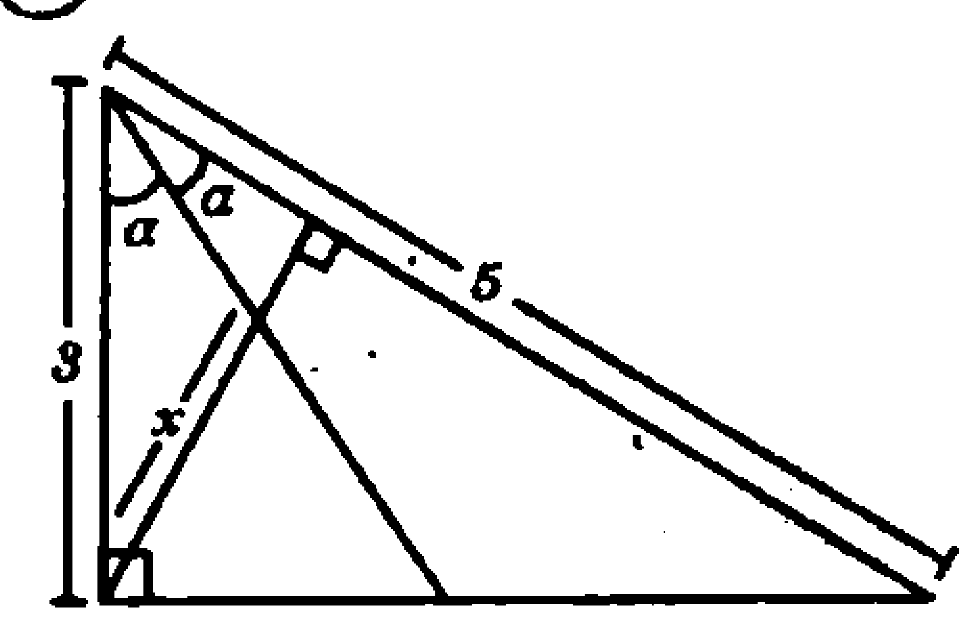
A) 12 B) 16 C) 10 D) 5 E) 8

08 Calcular "x"



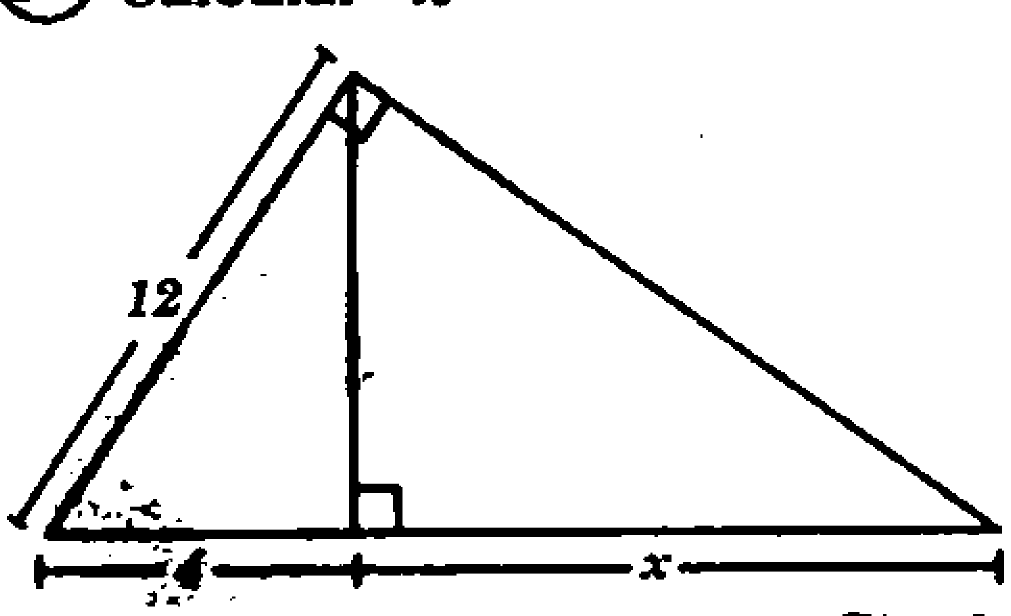
A) 16 B) 9 C) 12 D) 18 E) 15

09 Calcular "x"



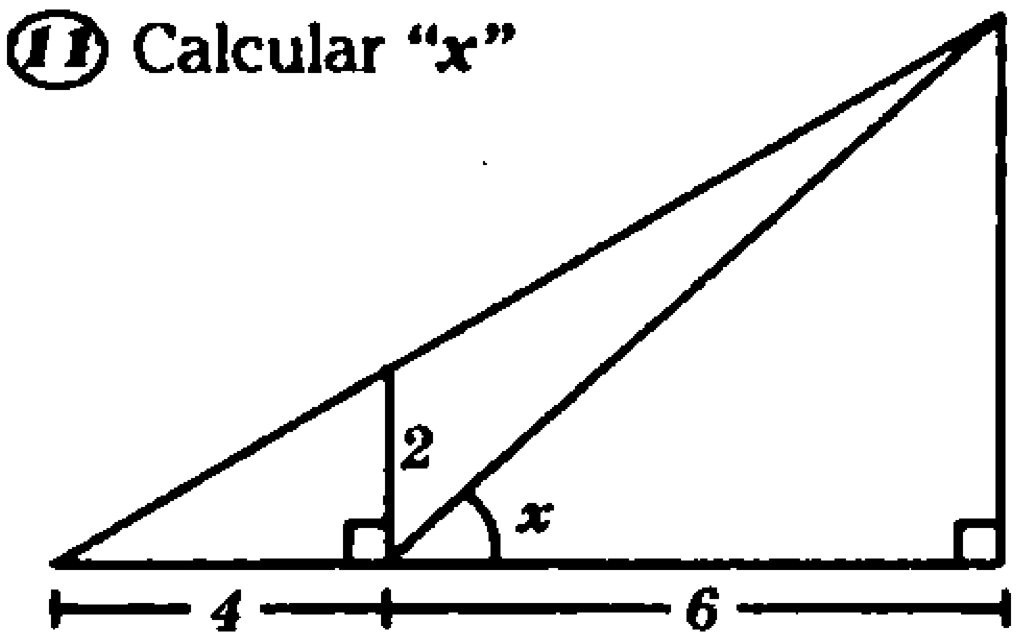
A) 2 B) 1,5 C) 1 D) 2,5 E) 0,5

10 Calcular "x"



A) 18 B) 12 C) 16
D) 36 E) 32

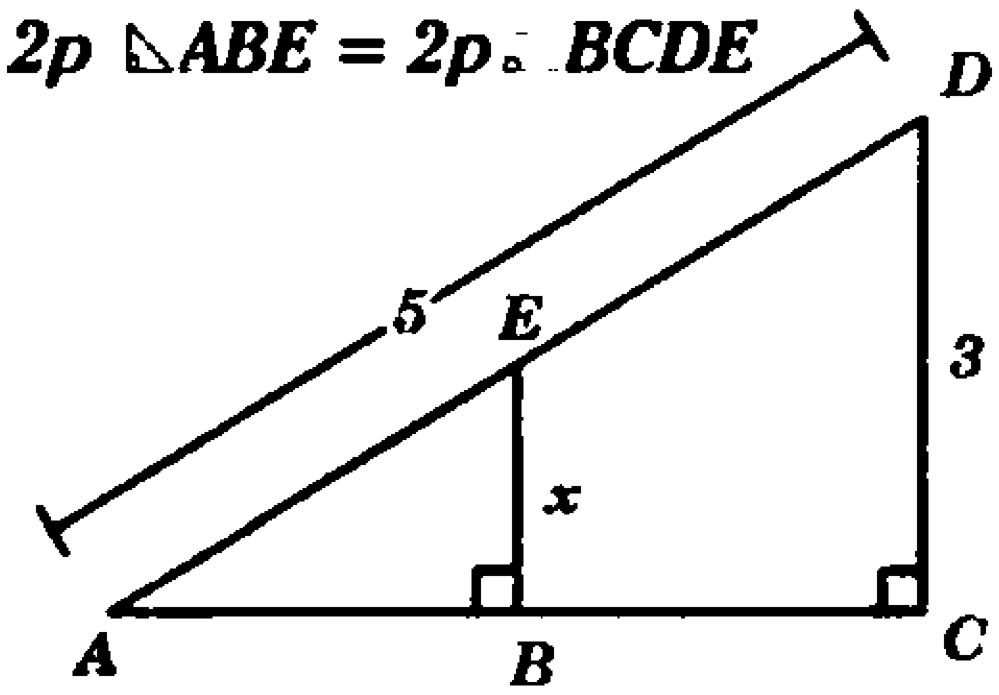
11 Calcular "x"



A) 30 B) 60 C) 45 D) 53 E) 37

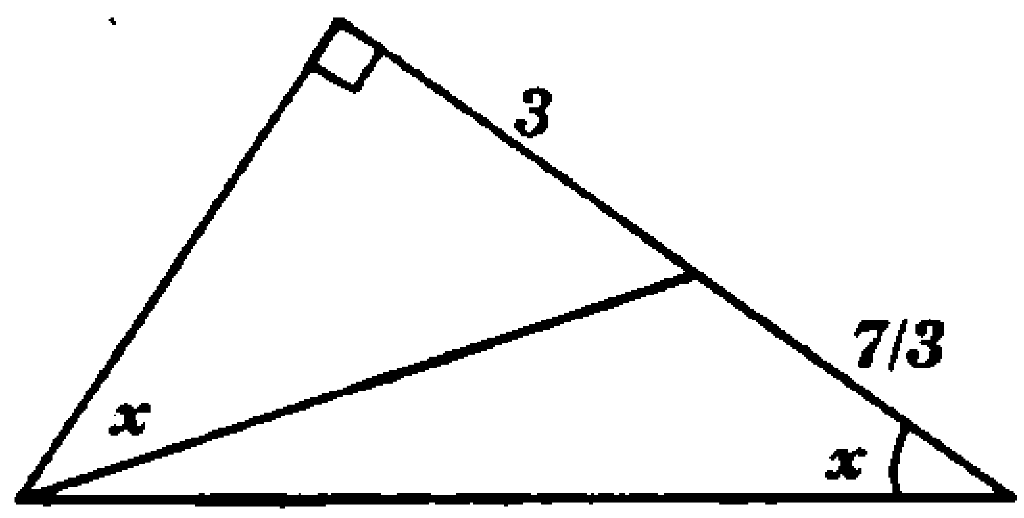
12 Calcular "x", si :

$2p \triangle ABE = 2p\ BCDE$



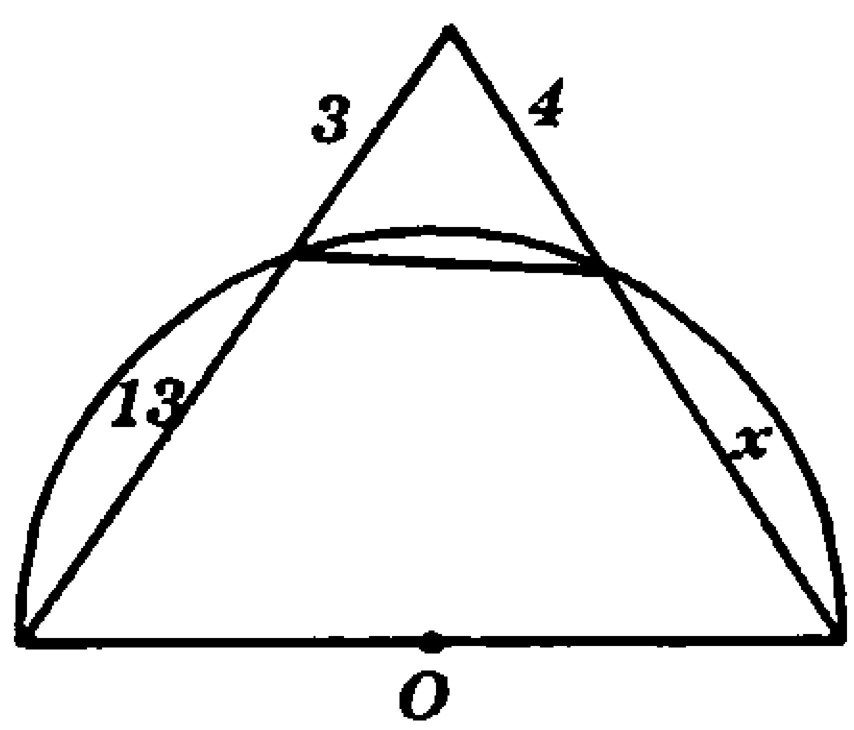
A) 1 B) 2 C) 1,5
D) 0,5 E) 0,75

13 Calcular "x"



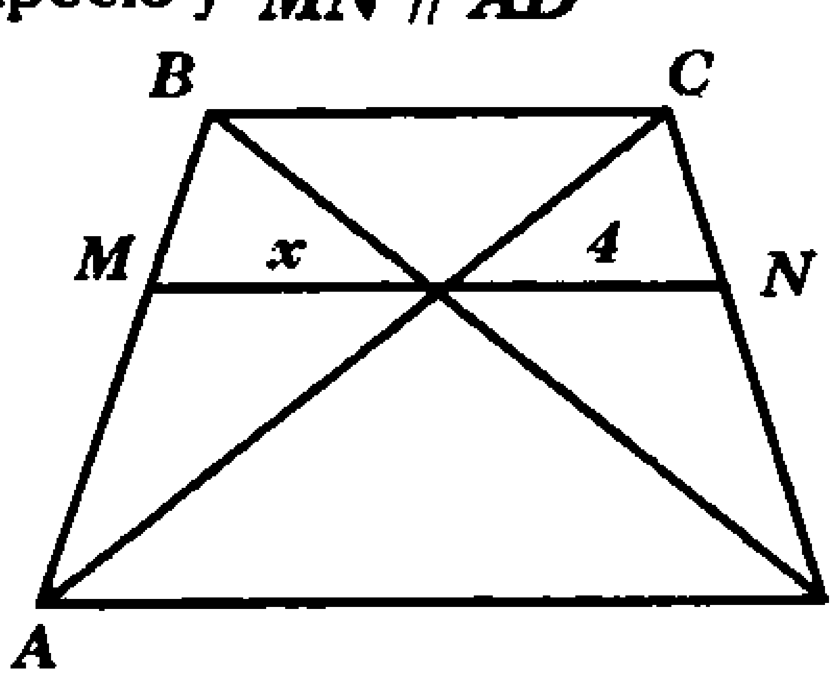
A) 45 B) 30 C) 60 D) 37 E) 53

14 Calcular "x", si "O" es centro



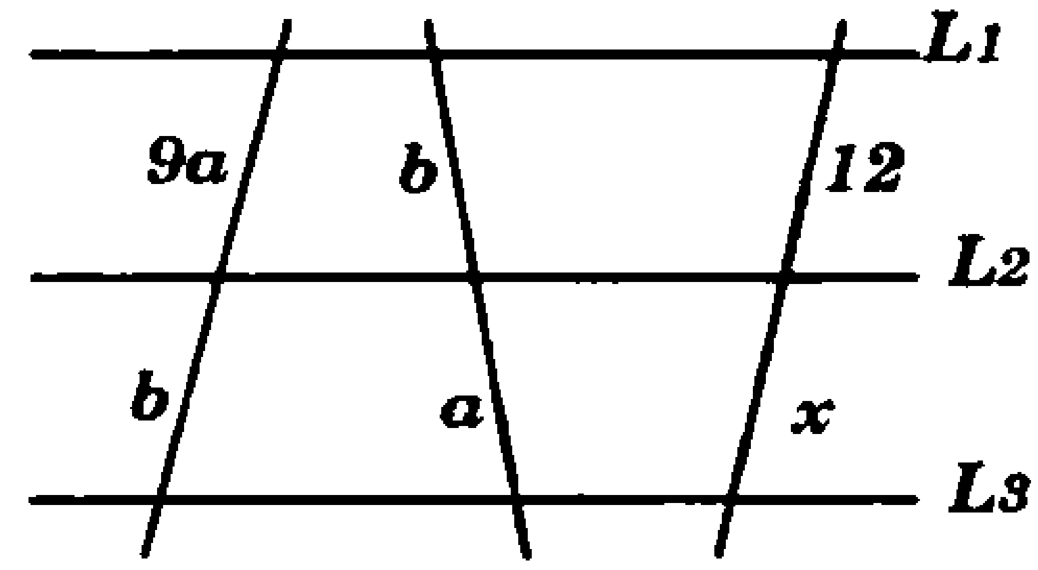
A) 8 B) 12 C) 10 D) 14 E) 9

15 Calcular "x", si $ABCD$ es un trapecio y $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$



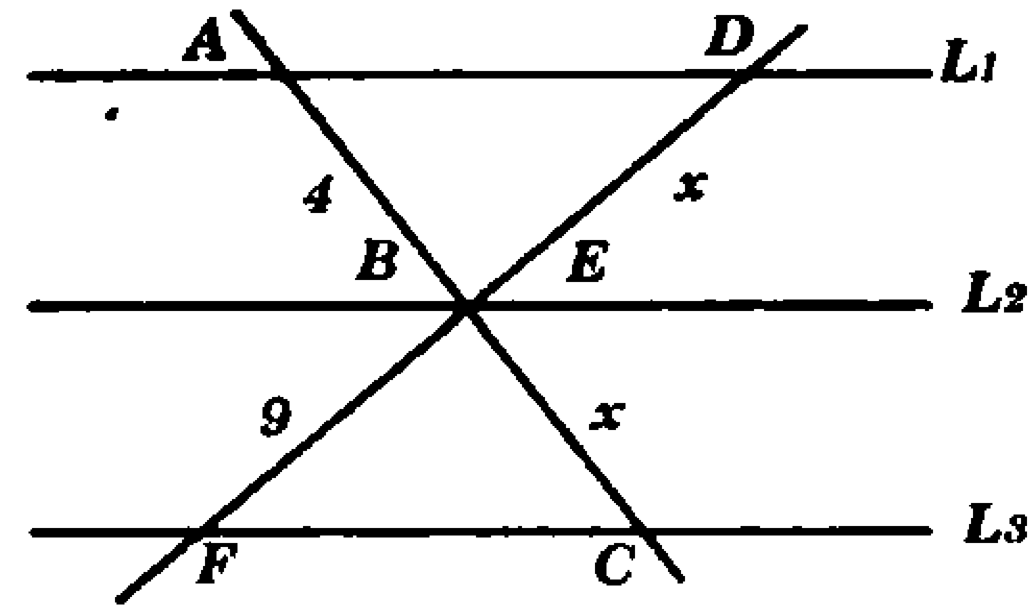
A) 6 B) 8 C) 2 D) 4 E) 3

16 Calcular "x", si $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \parallel \overline{L_3}$



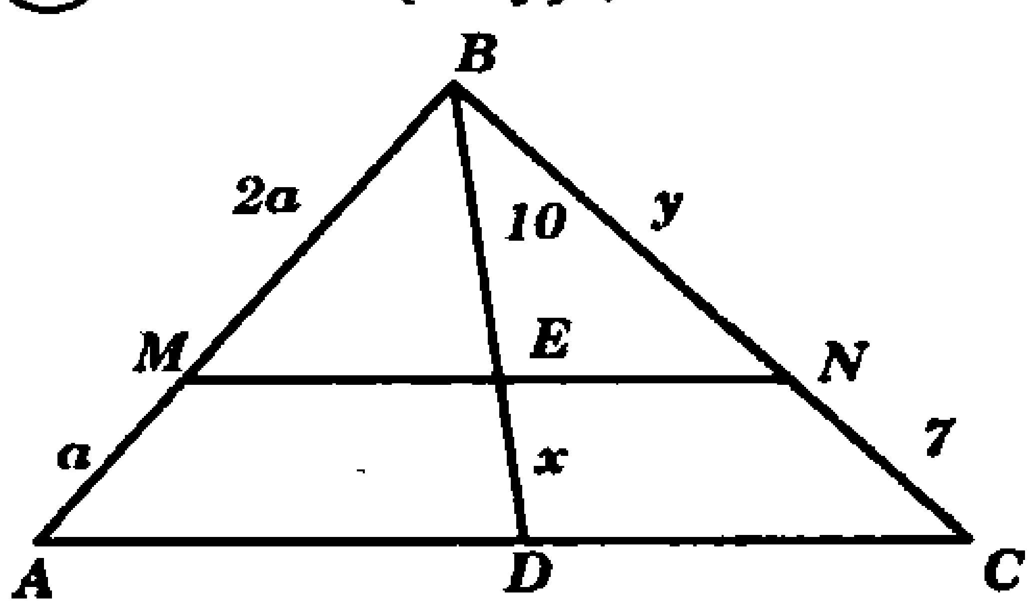
A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 9

17 Calcular "AC", si $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \parallel \overline{L_3}$.



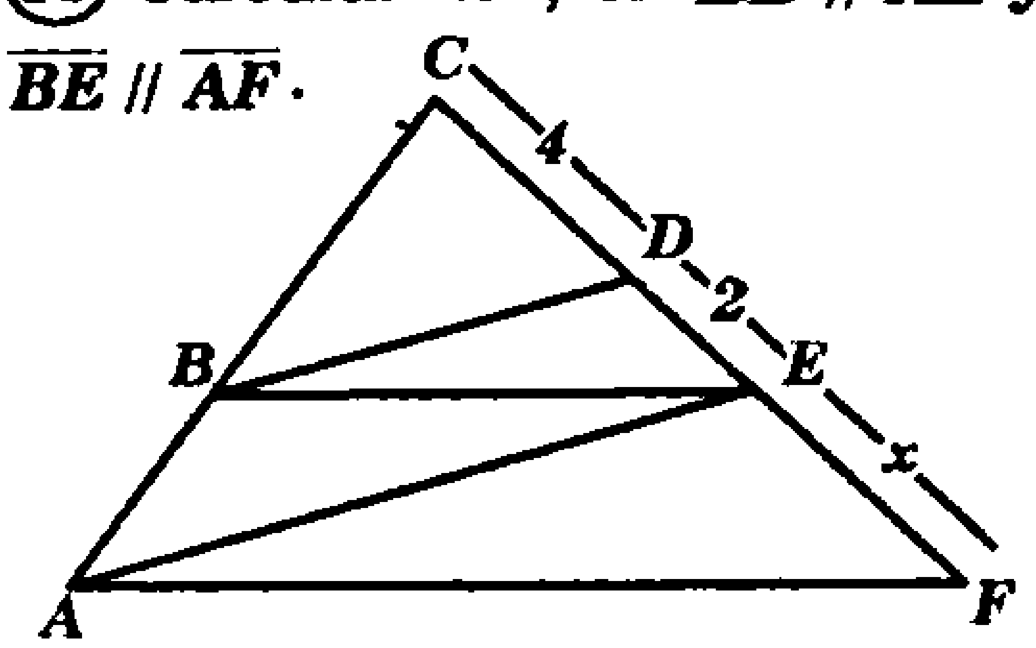
A) 6 B) 8 C) 10 D) 9 E) 15

18 Calcular $(x+y)$, si $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$.



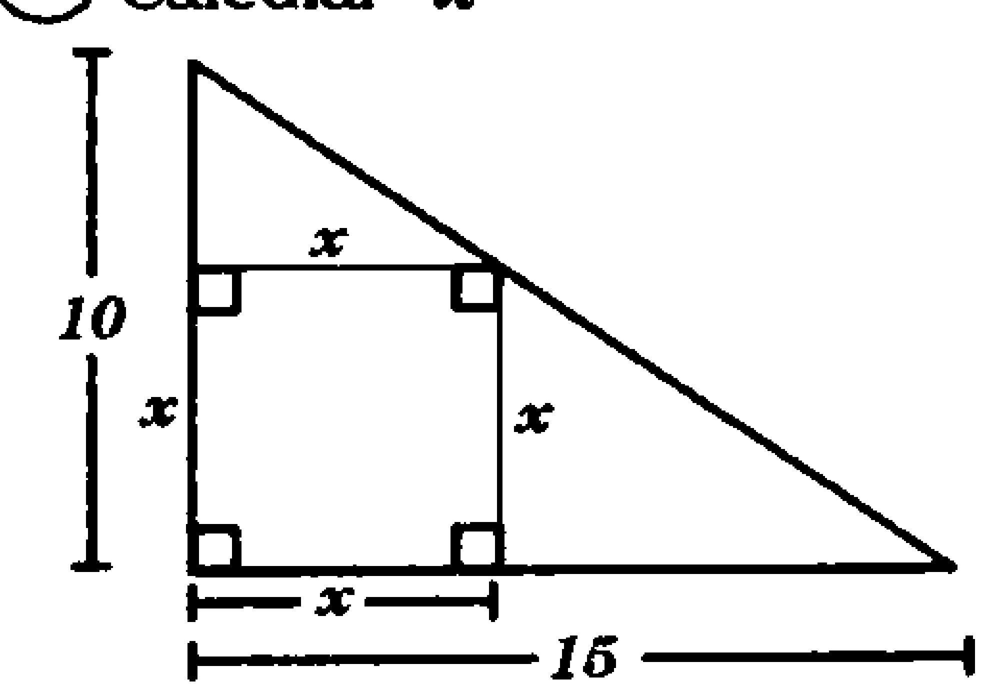
A) 16 B) 17 C) 18 D) 15 E) 19

19 Calcular "x", si $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ y $\overline{BE} \parallel \overline{AF}$.



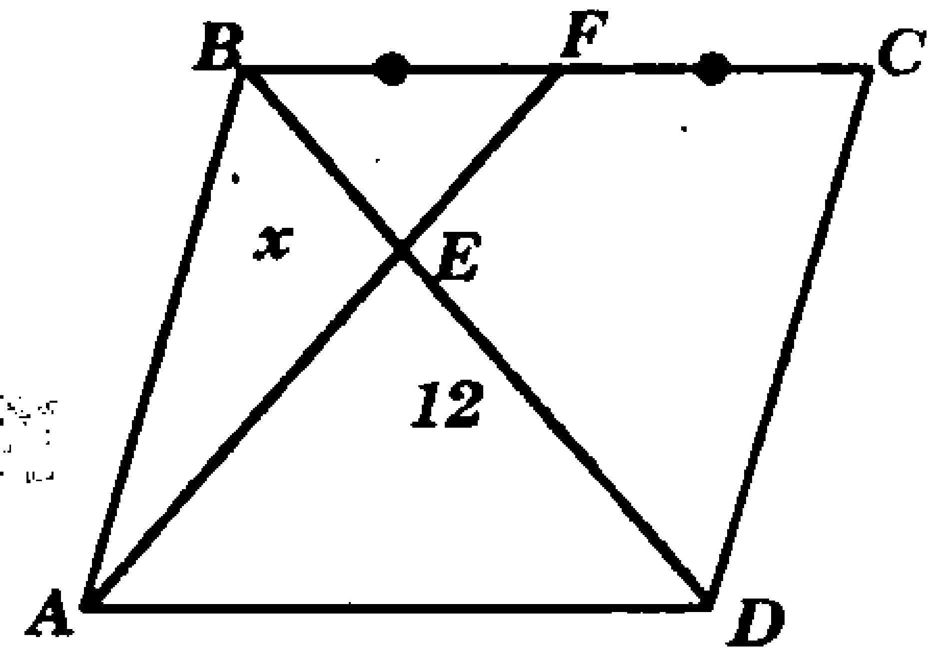
A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 2

20 Calcular "x"



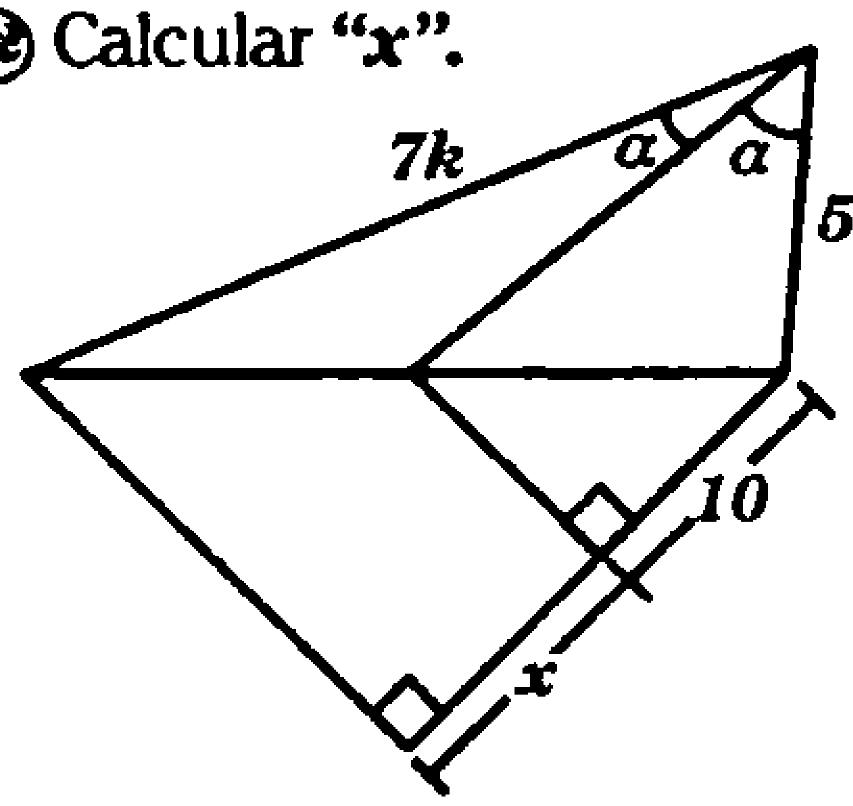
A) 8 B) 5 C) 6
D) 3 E) 9

21 Calcular "x", si $ABCD$ es un paralelogramo.



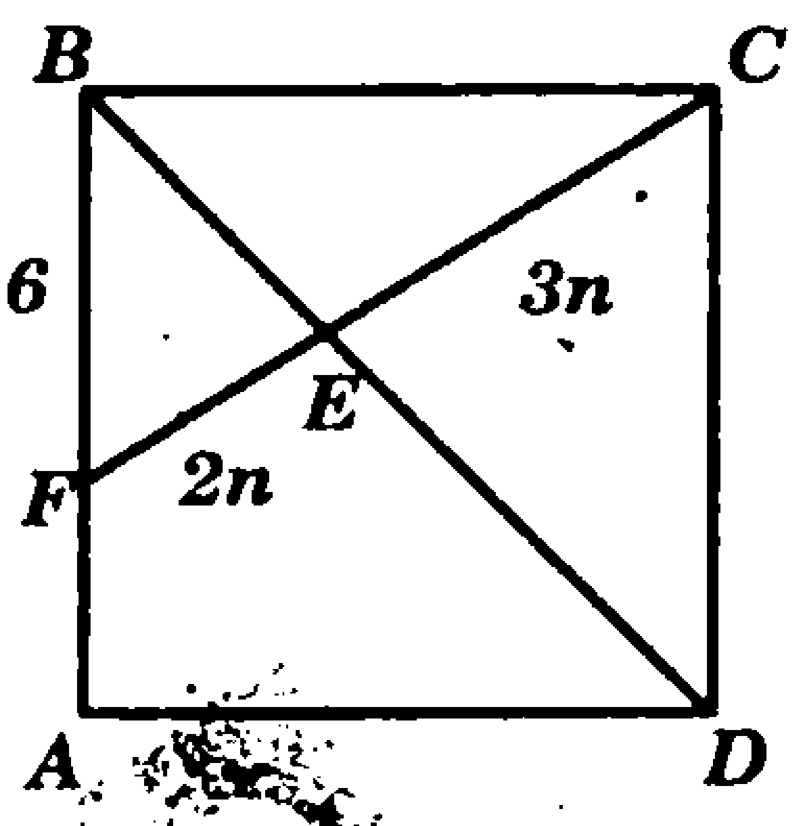
A) 8 B) 9 C) 4
D) 3 E) 6

22 Calcular "x".



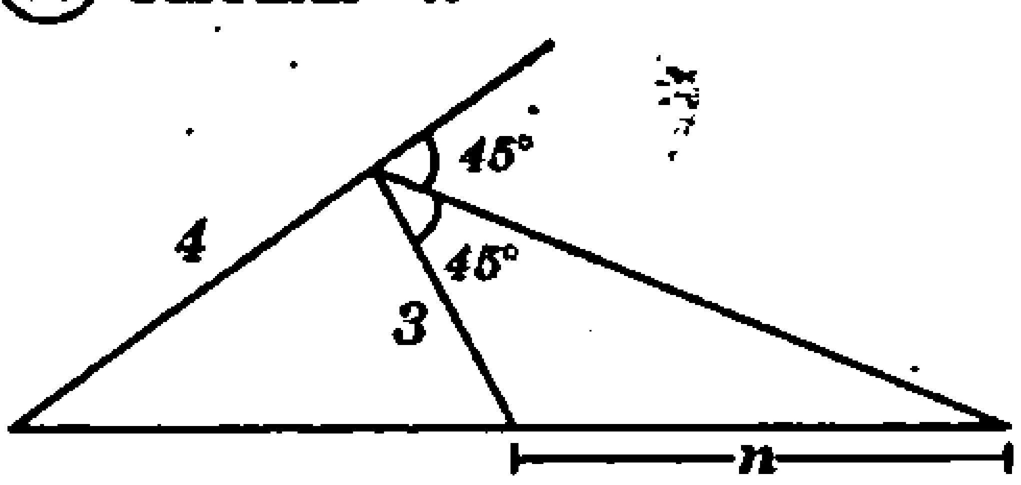
A) 12 B) 14 C) 13
D) 20 E) 15

23 Calcular el perímetro del cuadrado $ABCD$



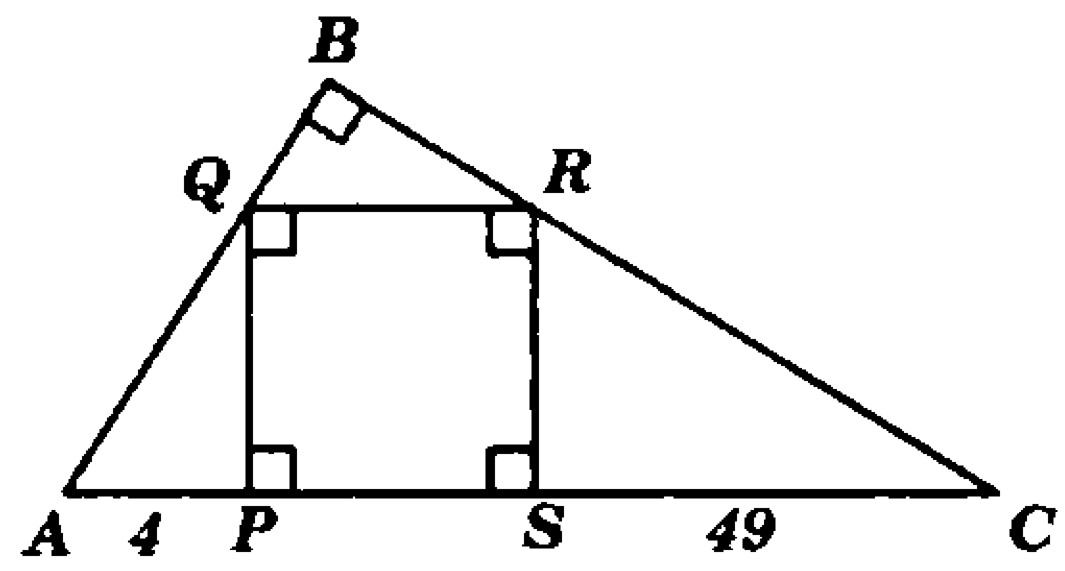
A) 24 B) 32 C) 36
D) 40 E) 48

24 Calcular "n"



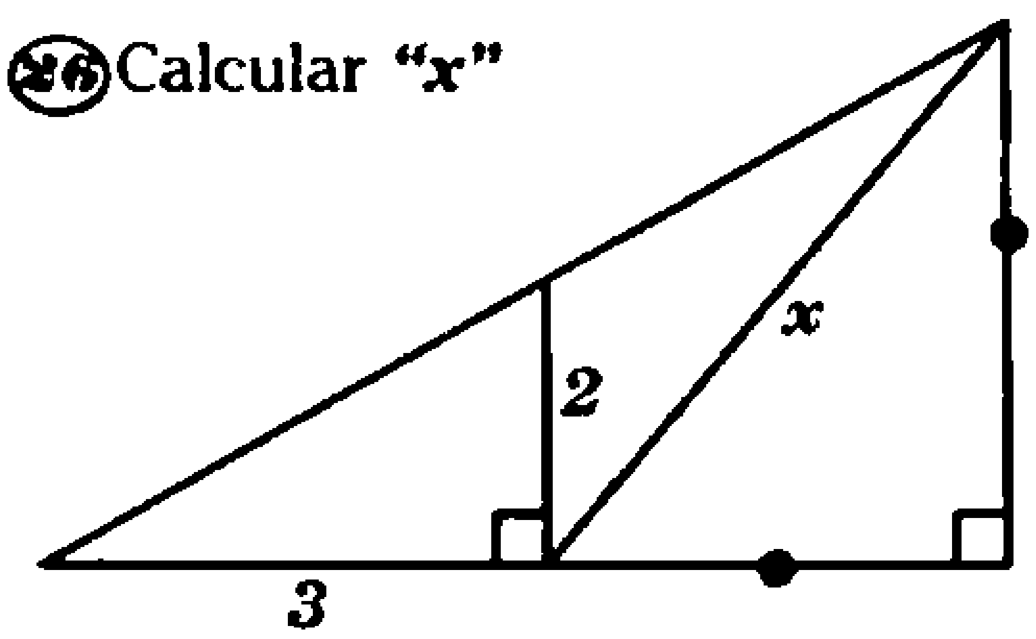
A) 5 B) 10 C) 20
D) 15 E) 6

25 Calcular la medida del lado del cuadrado $PQRS$.



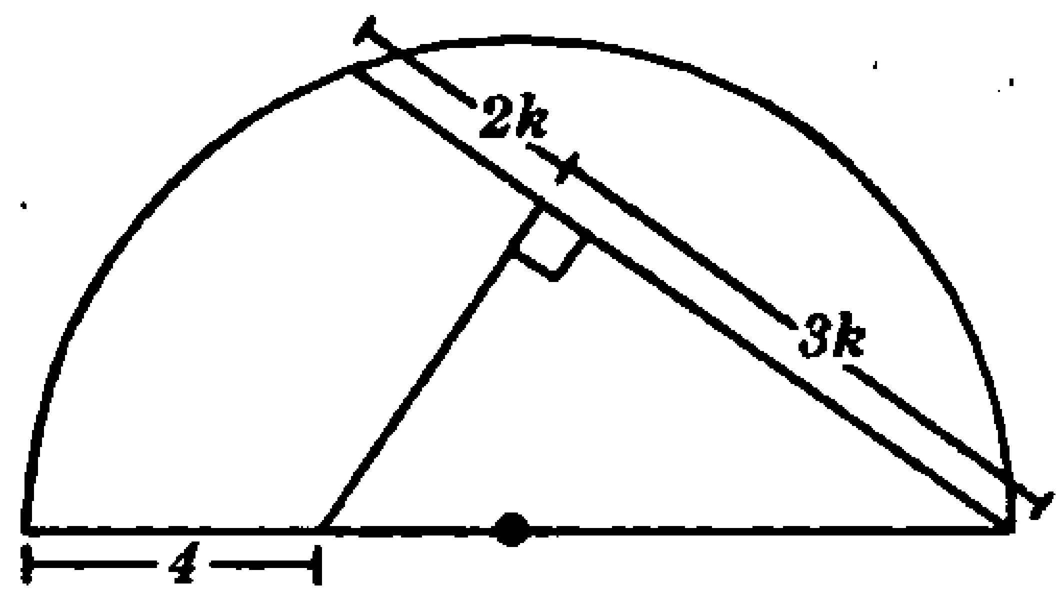
A) 14 B) 13 C) 12
D) 16 E) 11

26 Calcular "x"



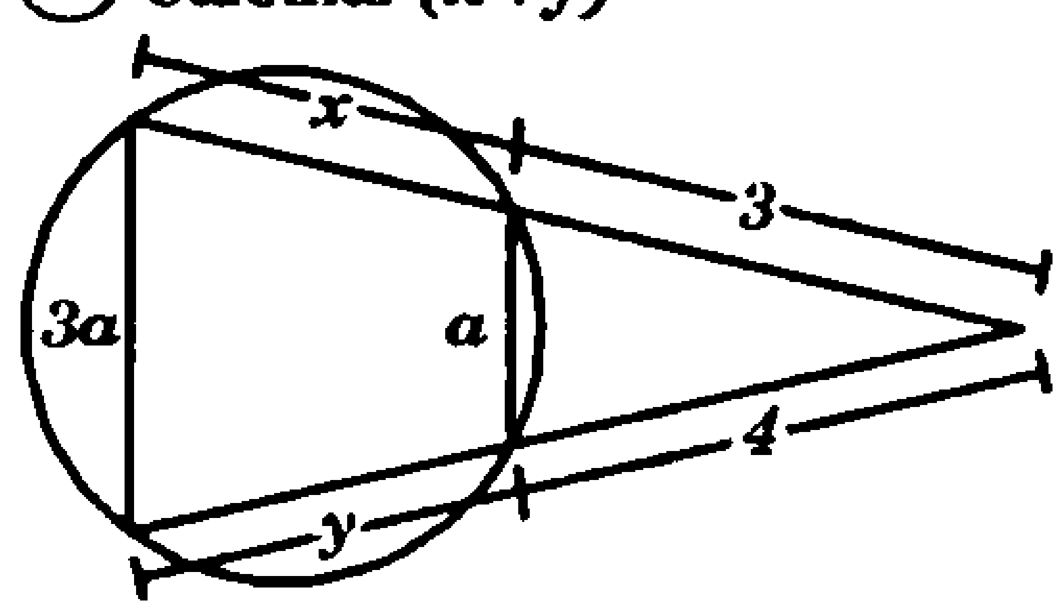
A) 6 B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

27 Calcular la medida del radio de la semicircunferencia.



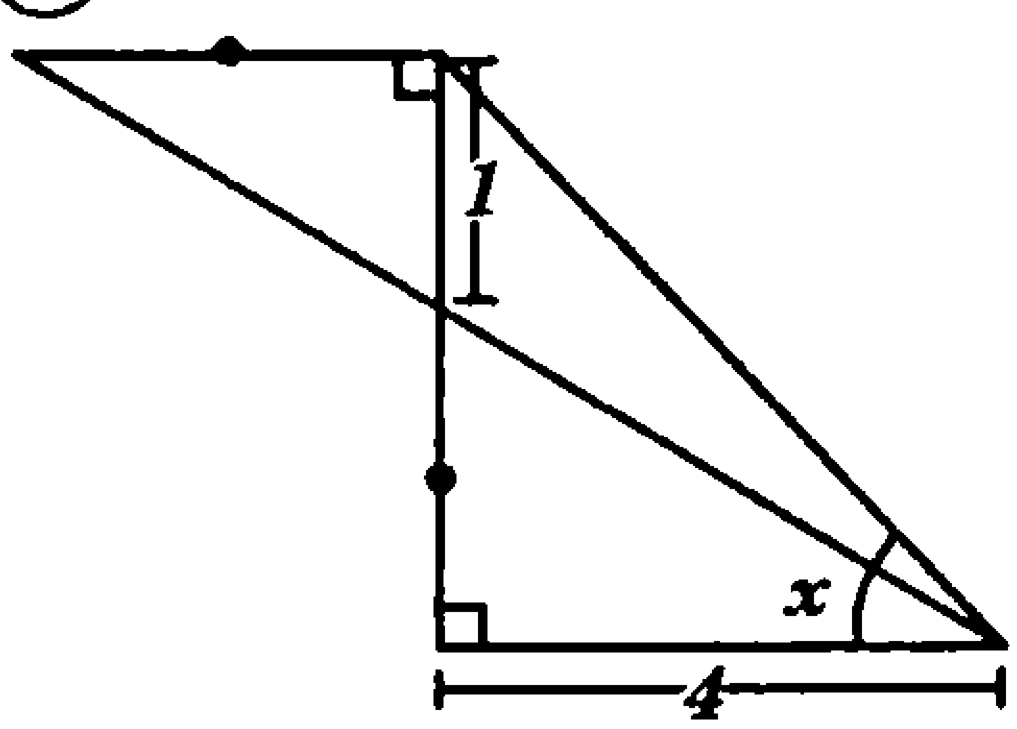
A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

28 Calcular $(x+y)$



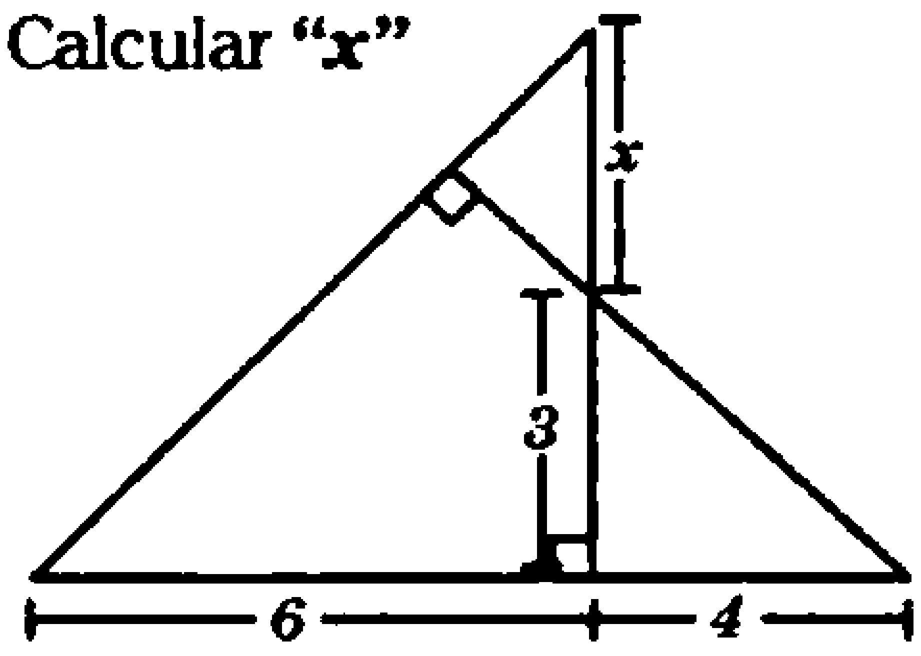
A) 14 B) 12 C) 11
D) 13 E) 15

29 Calcular "x"



A) 45 B) 30 C) 53
D) 37 E) 60

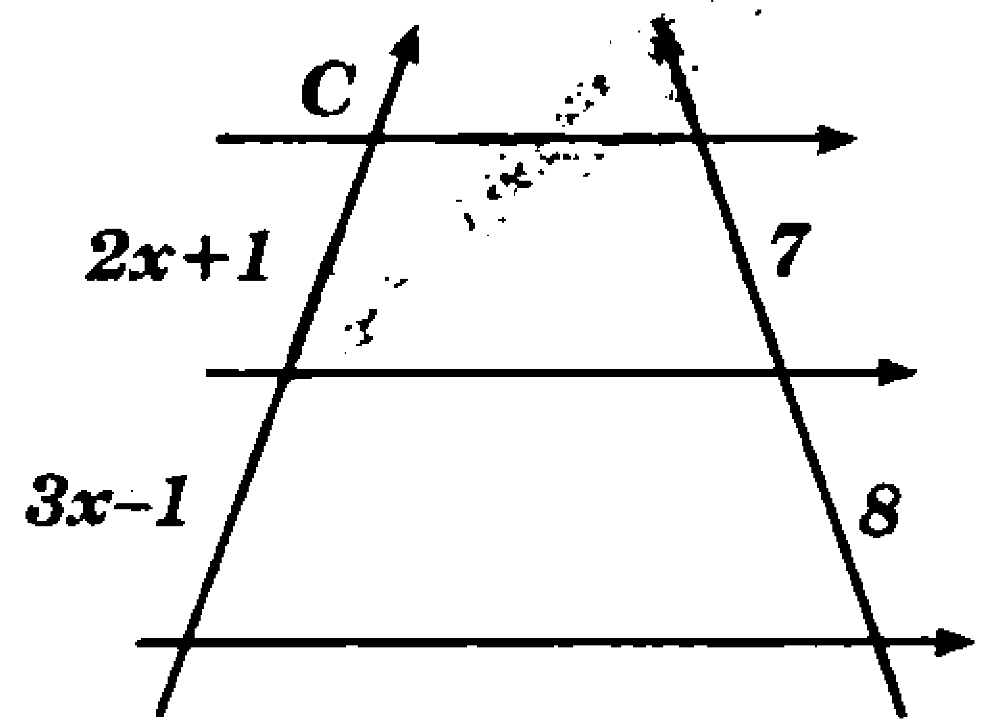
30 Calcular "x"



A) 6 B) 5 C) 8
D) 4 E) 3

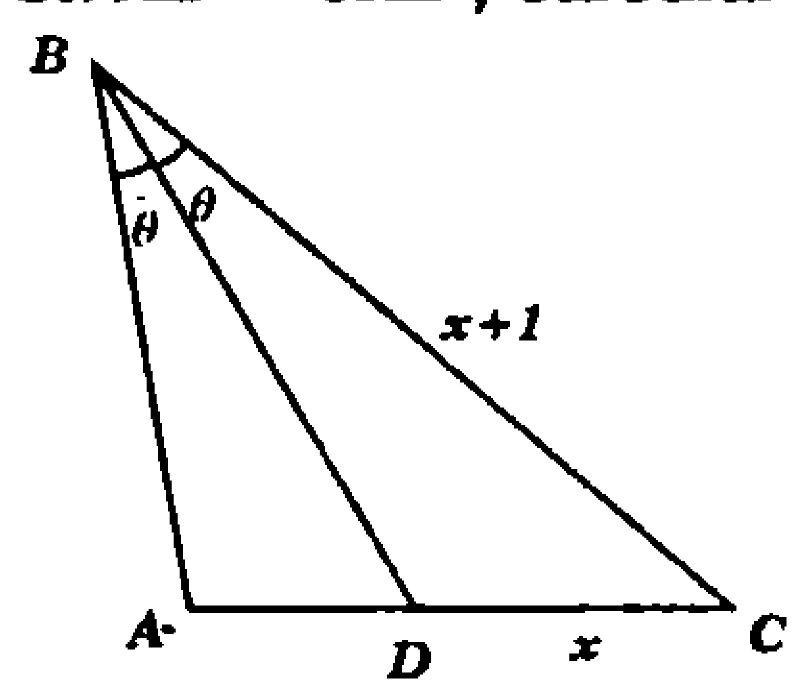
SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Calcular "x".



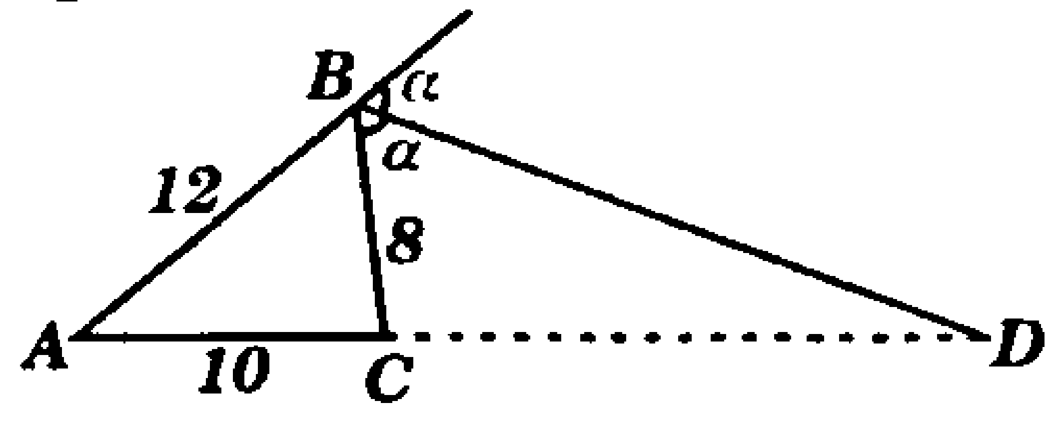
A) 2 B) 5 C) 3
D) 8 E) 6

02 Si: $AB = 5AD$; calcular "x"



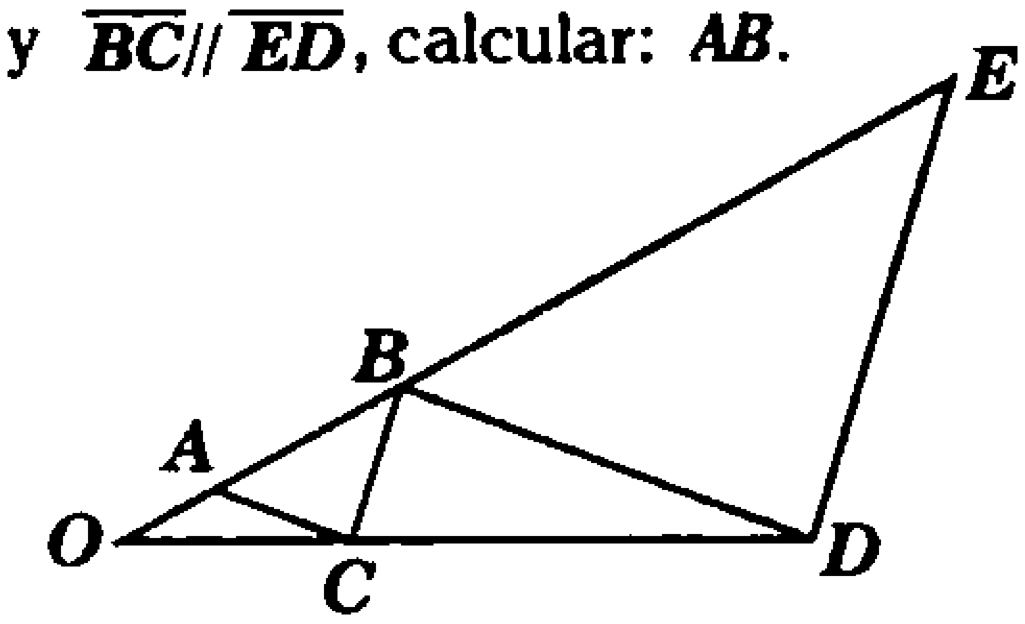
A) 3/2 B) 2/3 C) 1/4 D) 4/5 E) 2/5

03 Calcular CD.



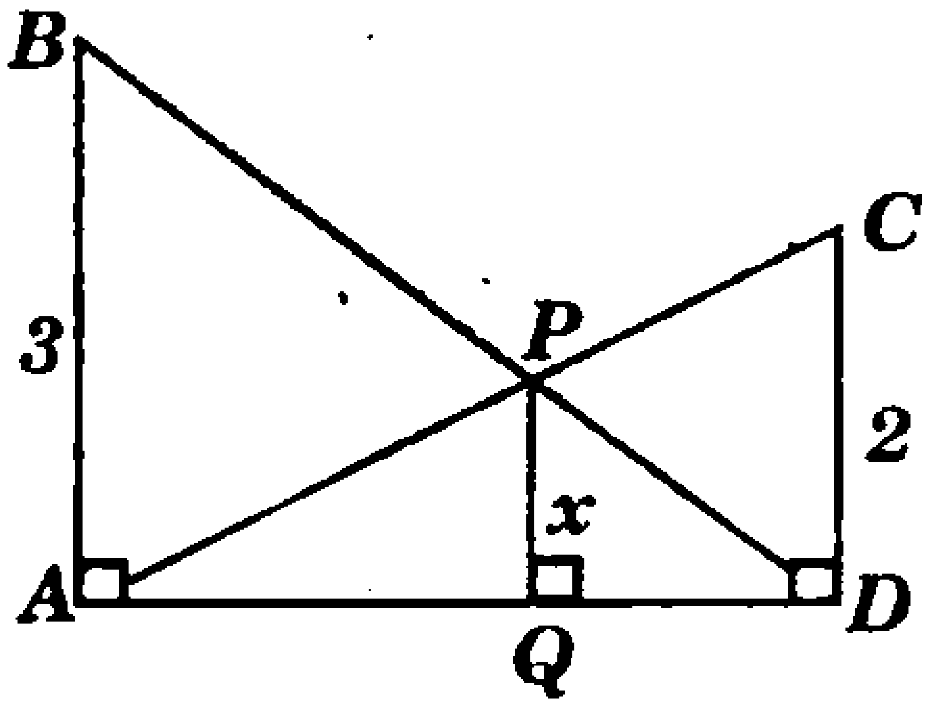
A) 20 B) 10 C) 15 D) 12 E) 8

04 Si: $OA = 2$; $OE = 18$; $\overline{AC} // \overline{BD}$ y $\overline{BC} // \overline{ED}$, calcular: AB.



A) 6 B) 4 C) 9 D) 12 E) 8

05 Calcular "x".



A)5/5 B)6/5 C)5/7 D)7/6 E)7/5

06 En un triángulo *ABC*, por el punto medio de $\overline{AB}$, se traza una recta perpendicular a la bisectriz interior *BD*, que interseca a $\overline{BC}$ en *Q*. Calcular *QC*, si:

$AB = 6, AD = 5$ y $DC = QC$.

A)10 B)11 C)12 D)13 E)15

07 Las bases de un trapecio miden *12* y *16*, su altura mide *9*. Calcular la distancia del punto de intersección de las diagonales a la base mayor.

A)5,14 B)6,2 C)5,8 D)6,4 E)7,2

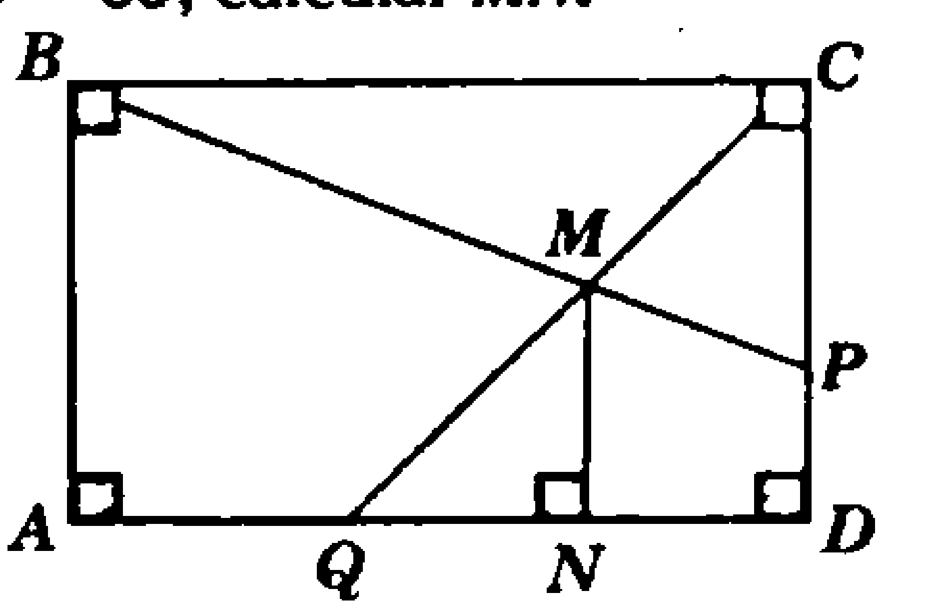
08 En un triángulo *ABC*; $m\measuredangle A = 2m\measuredangle C$, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en el pùnto "*F*". Si: $BF = 8$ y $FC = 10$, calcular *AB*.

A)16 B)12 C)24 D)9 E)8

09 En los lados *AB* y *BC* del triángulo *ABC* se ubican los puntos *M* y *N* respectivamente tal que $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$. En $\overline{BN}$ se ubica *Q*; $\overline{MQ} \parallel \overline{AN}$; si $BQ=4$; $QN=6$, calcular *NC*.

A)8 B)12 C)15 D)16 E)18

10 Si: $CP = 2PD$; $5AQ = 3QD$ y $AB = 85$, calcular *MN*.



A)55 B)45 C)37 D)40 E)35

11 En un triángulo *ABC* de baricentro *G* se ubica el punto *T* en $\overline{BC}$ tal que $\overline{GT} \parallel \overline{AC}$. Si $AB = 6$, $BC=8$ y $AC=7$, calcular el perímetro del romboide *MGTC*.

A)12 B)10 C)11 D)12 E)13

12 En un triángulo *ABC*, se traza la bisectriz interior *BD* y la bisectriz *DE* del ángulo *BDC*. Si $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{BD}$ en *M*, calcular *MD*, si: $AB = 16$, $BE = 4$ y $AD = 12$.

A)1,2 B)1,4 C)1,6 D)2,4 E)2,8

13 En un triángulo *ABC* recto en *B* se traza la altura *BH* y en el triángulo *BHC* la bisectriz interior *BM*. Si $AM=2$ y $MC = 3$, calcular *HM*.

A)1,2 B)1,4 C)1,5 D)1,6 E)1,8

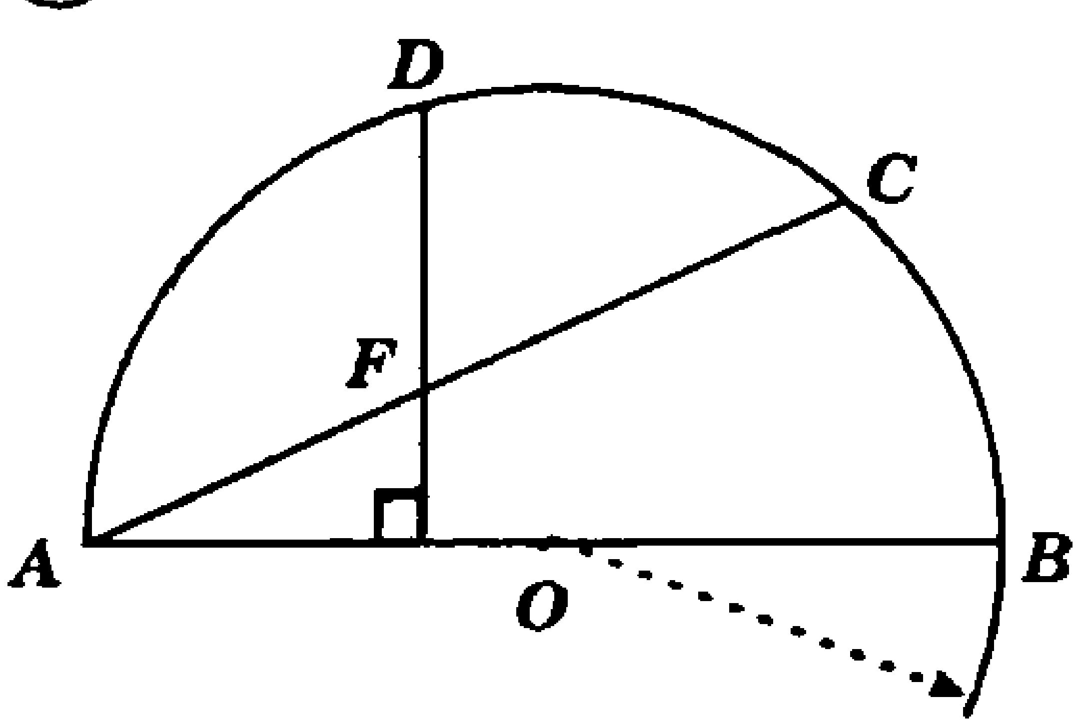
14 En un triángulo *ABC*: $AB = 5$, $BC = 6$ y *AC 8*, se traza la mediana *BM* y la bisectriz del ángulo *BAC*, las cuales se intersectan en *P*, por el cual se traza una paralela al lado *AC* que intersecta a en *Q*. Calcular *QC*.

A)4/3 B)7/3 C)8/3 D)4/9 E)5/9

15 Por el vértice *A* de un romboide *ABCD* se traza una recta secante que interseca a la diagonal en *M* al lado $\overline{CD}$ en *N* y a la prolongación de $\overline{BC}$ en *Q*, Si $MN = 4$ y $NQ = 12$, calcular *AM*.

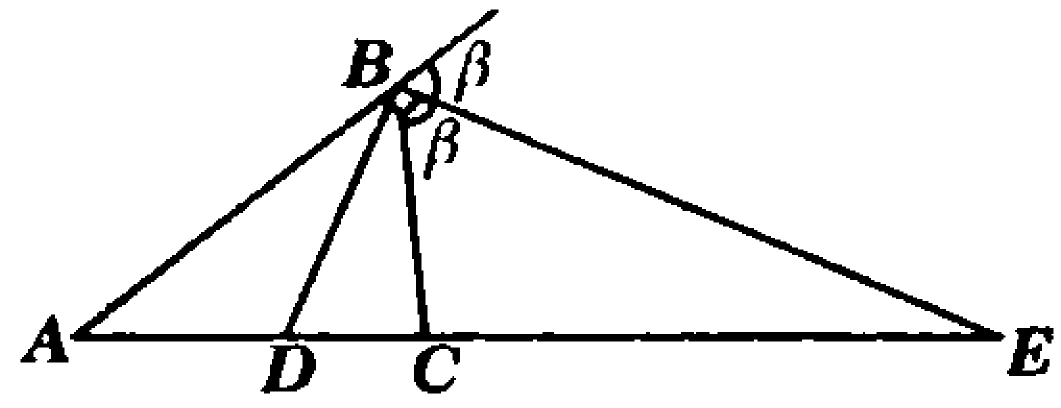
A)6 B)7 C)8 D)8,5 E)9

16 Si: $AF = 4$; $FC = 5$, calcular *AD*.



A)$2\sqrt{3}$ B)$3\sqrt{2}$ C)6 D)4 E)$6\sqrt{2}$

17 Si: $AD = 3$; $DC = 2$, calcular *CE*.



A)20 B)12 C)18 D)15 E)10

18 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) El Teorema de Tales es sólo para tres rectas paralelas y una secante .

( ) El Teorema de la bisectriz se cumple en todo triángulo

( ) Si en un triángulo se traza una bisectriz interior determinado dos segmentos congruentes, entonces el triángulo es equilátero

A)VVF B)FFF C)FVF
D)VVV E)VFV

19 En un triángulo *ABC* se inscribe el rombo *BMNT* . Si $AB = 6$ y $BC = 14$, calcular *BM*.

A)2,1 B)3,6 C)3,8 D)4 E)4,2

20 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

( ) Los triángulos congruentes son semejantes.

( ) En triángulos semejantes sus elementos homólogos son proporcionales .

( ) La razón de semejanza en dos triángulos semejantes es menor que *1* .

A) FFF B) FVF C) VVF
D) VFV E) VFF

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)E	3)C	4)D	5)A	6)B	7)E	8)C	9)B	10)E
11)C	12)B	13)C	14)A	15)D	16)B	17)C	18)E	19)A	20)C
21)E	22)B	23)C	24)D	25)A	26)E	27)C	28)A	29)D	30)B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)C	3)A	4)B	5)B	6)E	7)A	8)B	9)C	10)B
11)B	12)D	13)A	14)C	15)C	16)C	17)E	18)C	19)E	20)C

RELACIONES METRICAS
CAPITULO 102

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de :

* *Conocer las principales relaciones entre las longitudes de las lineas asociadas a las figuras geométricos*
* *Definir la proyección ortogonal.*
* *Aplicar correctamente cada teorema para solucionar los problemas.*
* *Conocer las diferentes maneras de medir las longitudes de proyecciones de segmentos.*
* *Entender que las relaciones métricas en triángulos oblicuángulos vienen a ser la generalización del Teorema de Pitágoras.*

INTRODUCCION :

Nos damos cuenta que en nuestro entorno ciertos fenómenos o sucesos están relacionados de alguna manera Por ejemplo en la naturaleza, la temperatura influye en los cambios de estados del agua, en la sociedad , todo cambio en lo político y económico esta relacionado con los cambios sociales.

Asi mismo al analizar u observar diversos objetos nos damos cuenta que sus dimensiones se relacionan entre sí de acuerdo a la forma que presentan dichos objetos.

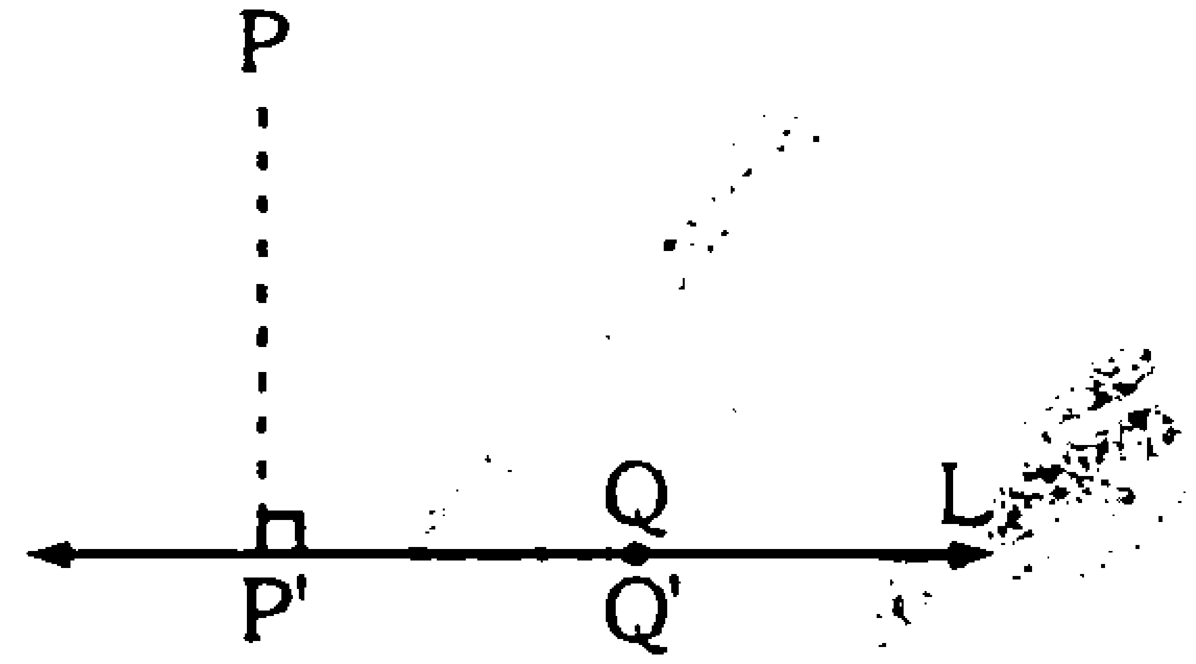
Es así , como en las figuras geométricas estudiaremos las principales relaciones entre las longitudes de las lineas que se asocian a ellas: las cuales también eran usados por el hombre en la antigüedad para poder hacer diversas medidas angulares o longitudinales relacionándolos con determinadas figuras

PROYECCIONES

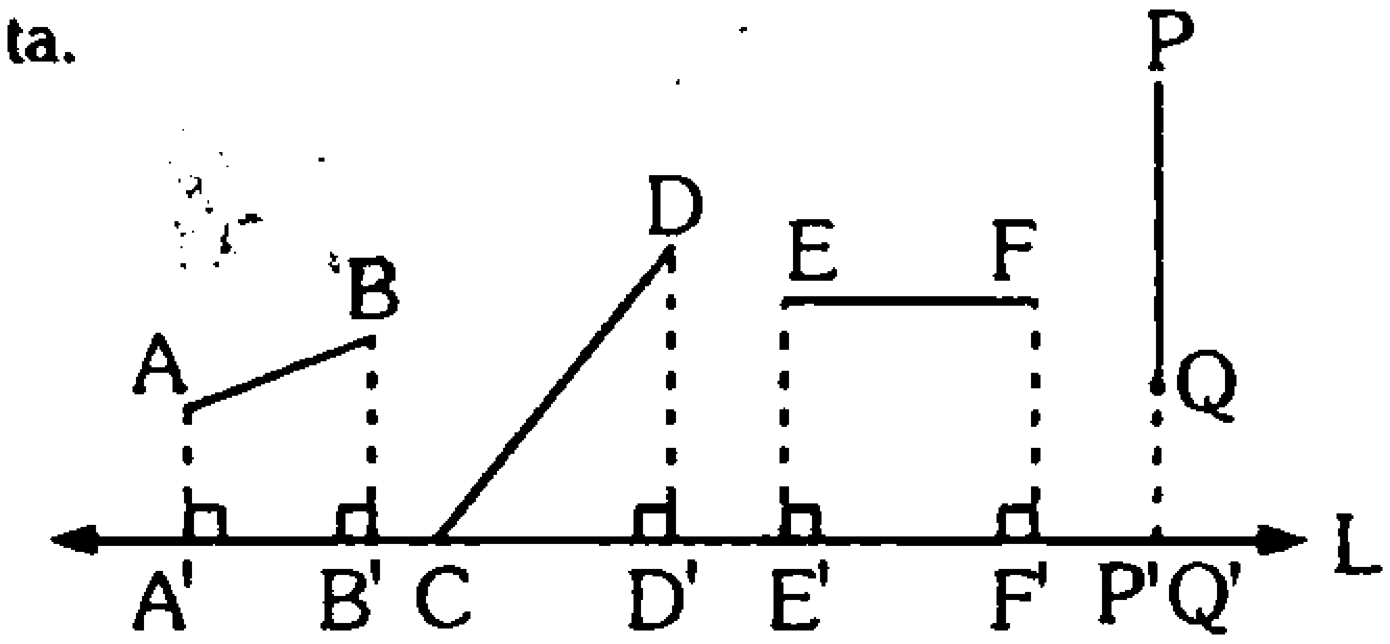
Proyección ortogonal de un punto sobre una recta es el pie de la perpendicular trazada del punto a la recta. Así la progresión ortogonal del punto "*P*" sobre la recta $\overleftrightarrow{L}$ es el punto *P'*.

La perpendicular $\overline{PP'}$, se llama proyectante. Si el punto pertenece a la recta su proyección sobre ella es el mismo punto.

Así la proyección de "*Q*" sobre $\overleftrightarrow{L}$ es *Q'(Q=Q')*



La proyección de un segmento sobre una recta es el conjunto de todos los puntos de la recta que son proyecciones de los puntos del segmento sobre la recta.



Si el segmento dado es oblicuo a la recta *L* la proyección es menor que el segmento, si el segmento es paralelo a la recta su proyección es congruente a él y si el segmento es perpendicular a la recta, su proyección se reduce a un punto.

En la figura :

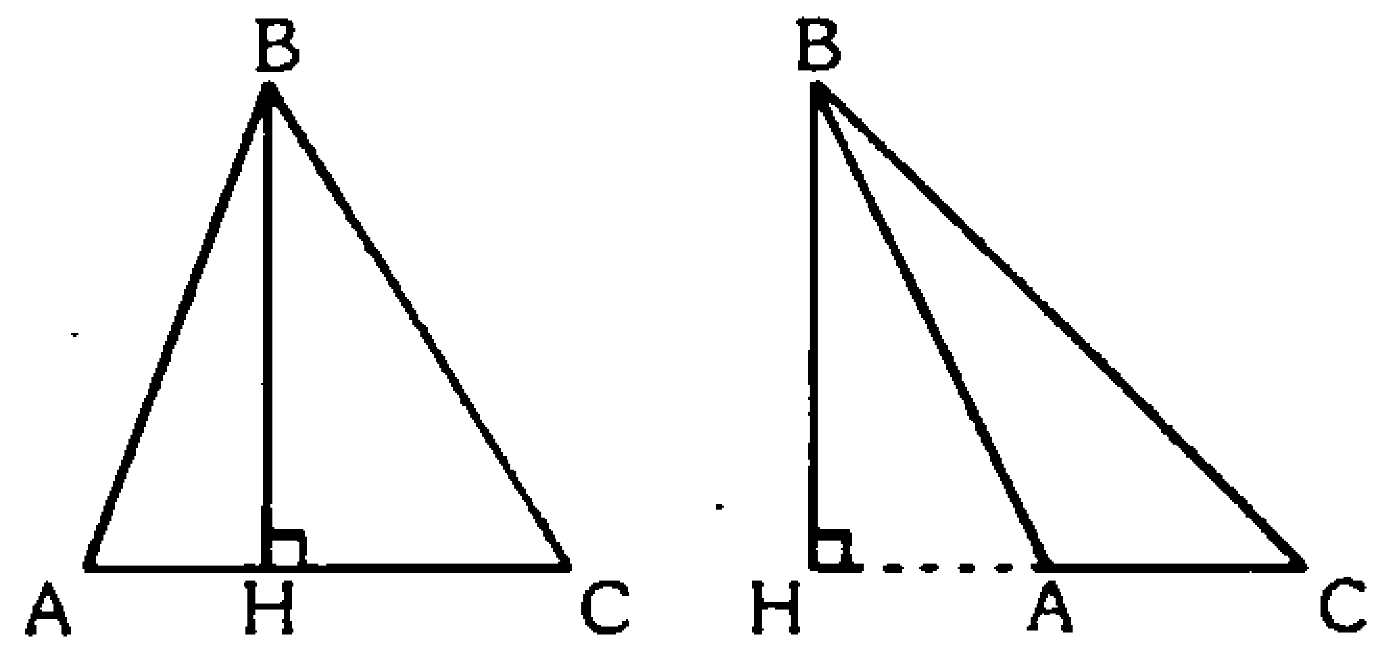
P' **:** Es la proyección ortogonal de *P* sobre $\overleftrightarrow{L}$

NOTACIÓN :

$$\boxed{P' = Proy_{\overleftrightarrow{L}}\, P}$$

* Así mismo: $\overline{A'B'}; \overline{CD'}; \overline{E'F'}$ son proyecciones ortogonales de $\overline{AB}; \overline{CD}$ y $\overline{EF}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$

EJEMPLOS :



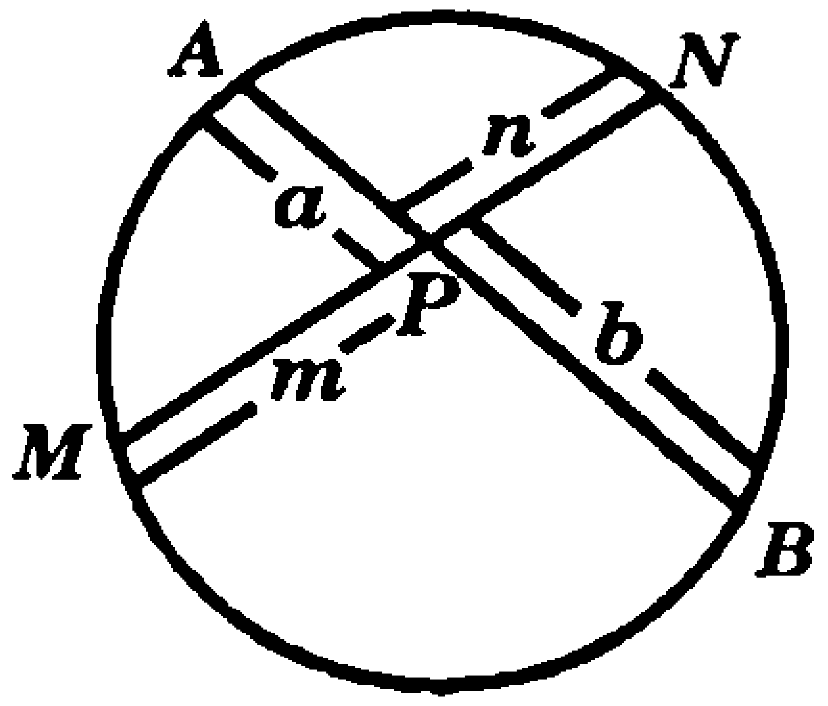
$\overline{AH} : Proy_{\overline{AC}}\, \overline{AB}$

$\overline{HC} : Proy_{\overline{AC}}\, \overline{BC}$

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS :

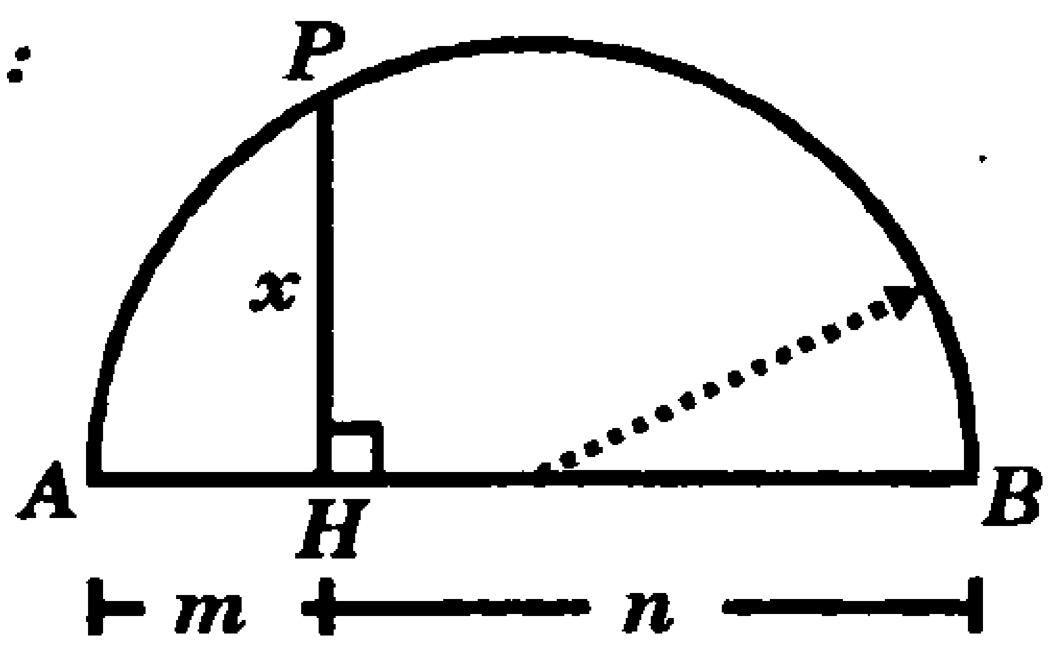
Al trazar una circunferencia dos cuerdas secantes en un punto interior , se cumple , que los productos de las longitudes de los segmentos determinados en cada cuerda son iguales.



Se cumple : $a \times b = m \times n$

En el gráfico , $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ son cuerdas secantes en el punto interior P .

NOTA :

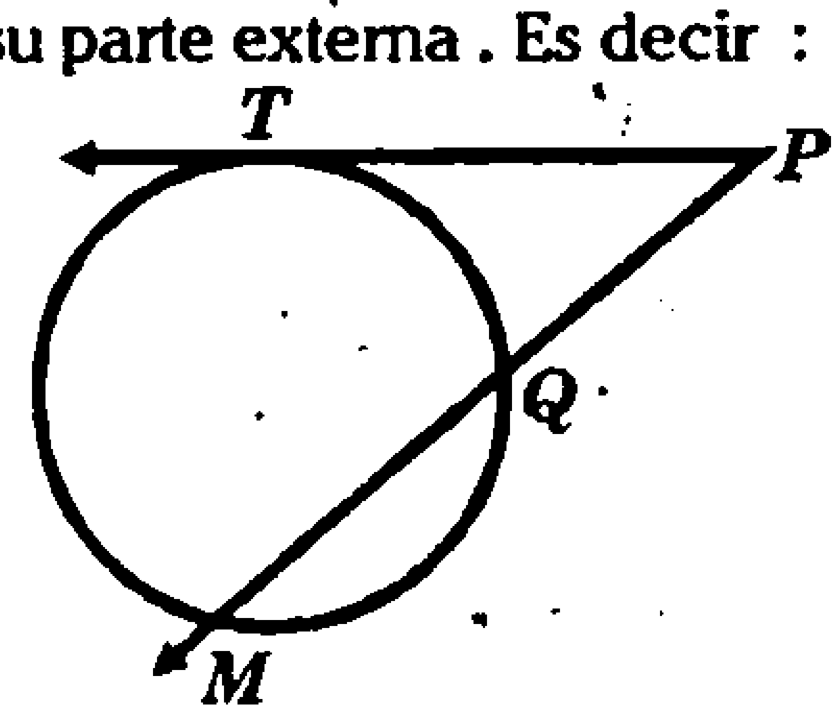


En el gráfico , $\overline{AB}$: diámetro y $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

Se cumple : $x^2 = mn$

TEOREMA DE LA TANGENTE :

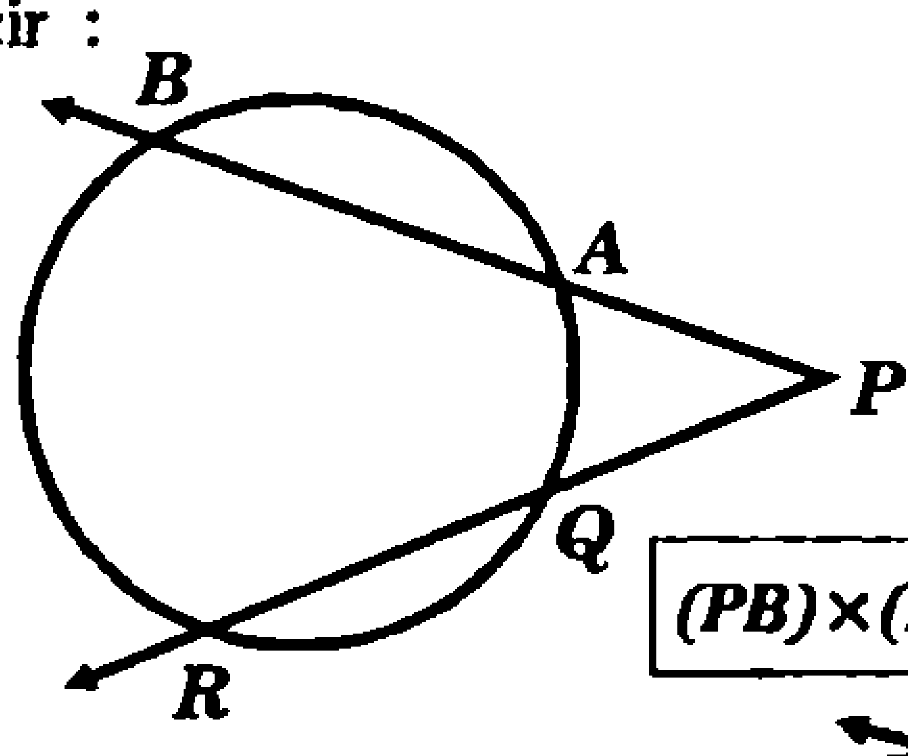
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una recta tangente y una recta secante a ella, entonces la longitud del segmento tangente es media proporcional entre las longitudes de la secante entera y su parte externa . Es decir :



$(PT)^2 = (PM)(PQ)$

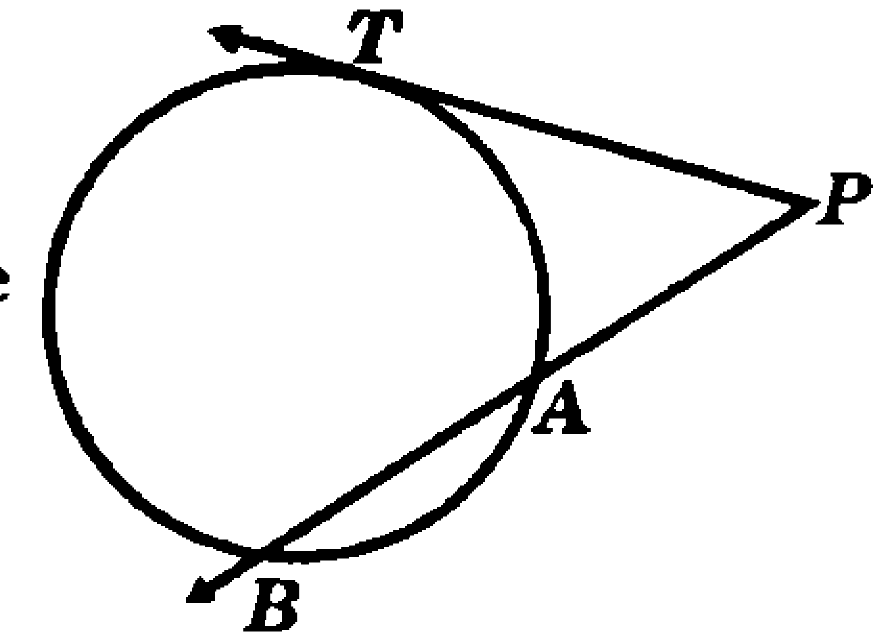
TEOREMA DE LAS SECANTES :

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos rectas secantes a ella , se cumple que los productos entre las longitudes de las secantes enteras con sus respectivas partes externas son iguales . Es decir :



$(PB) \times (PA) = (PR) \times (PQ)$

Tener presente :



$\overline{PT}$: segmento tangente

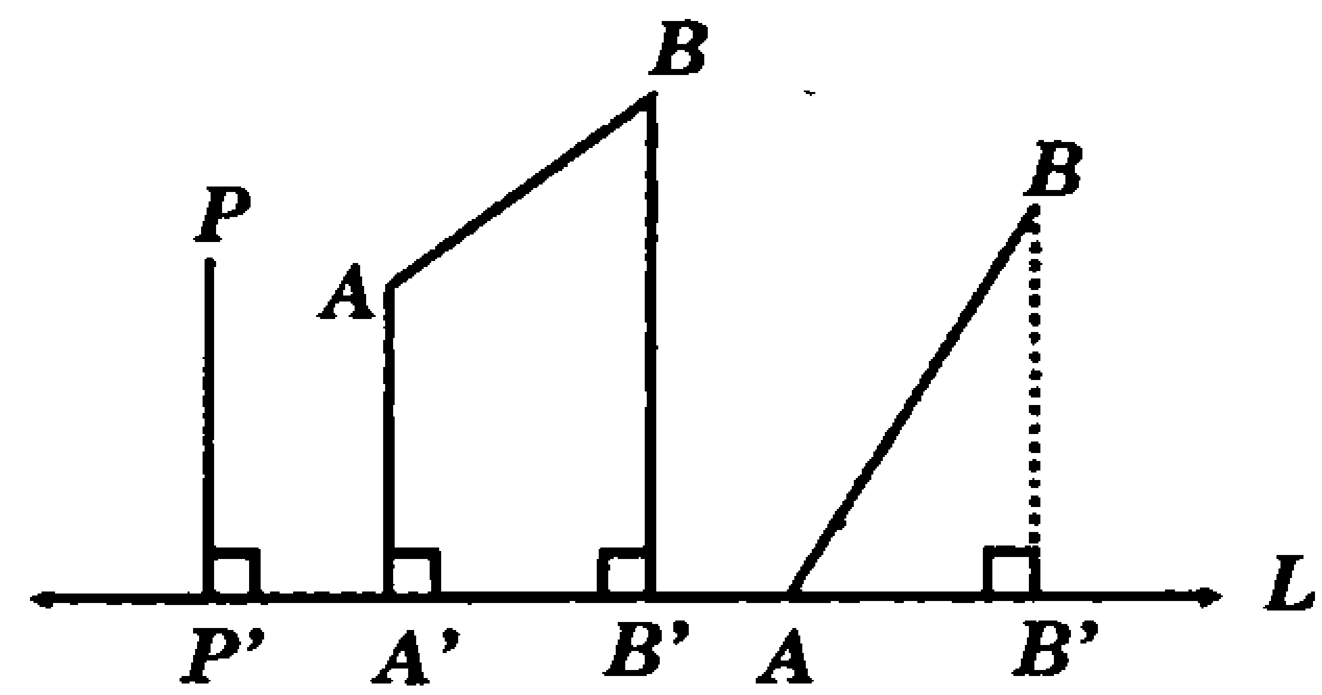
$\overline{PB}$: secante entera

$\overline{PA}$: parte externa

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RETÁNGULO

PROYECCIÓN ORTOGONAL :

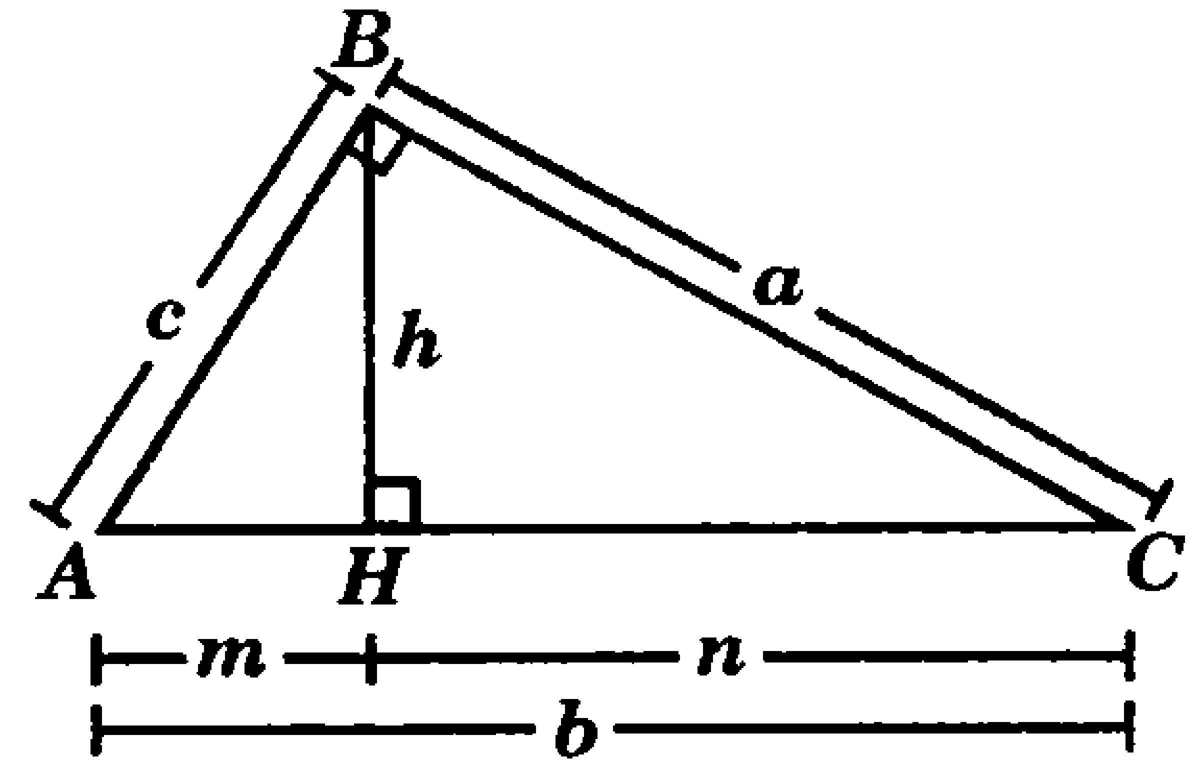
La proyección ortogonal es un punto sobre una recta, es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto hacia la recta. Asimismo , la proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento que une las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento dado .



P' : Proyección ortogonal de P sobre $\overleftrightarrow{L}$.

$\overline{A'B'}$: Proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L}$.

EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO :



$\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

$\overline{HC}$: proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

TEOREMAS :

A) En todo triángulo rectángulo , el cuadrado de la longitud de cada cateto es igual al producto entre las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa , es decir :

$$c^2=bm \qquad a^2=bn$$

B) En todo triángulo rectángulo , la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa , es decir :

$$a^2+c^2=b^2$$

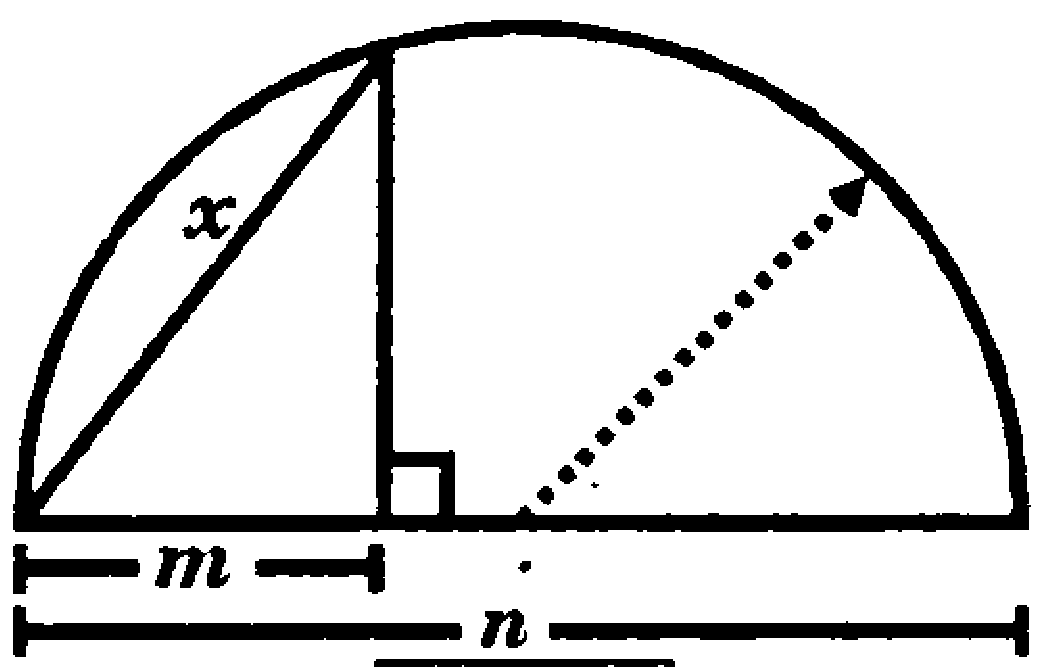
C) En todo triángulo rectángulo , la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las longitudes de los segmentos determinados por la altura en la hipotenusa , es decir :

$$h^2 = mn$$

D) En todo triángulo rectángulo , el producto entre las longitudes de los catetos es igual al producto entre las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a la hipotenusa , es decir :

$$ac = bh$$

OBSERVACIÓN :



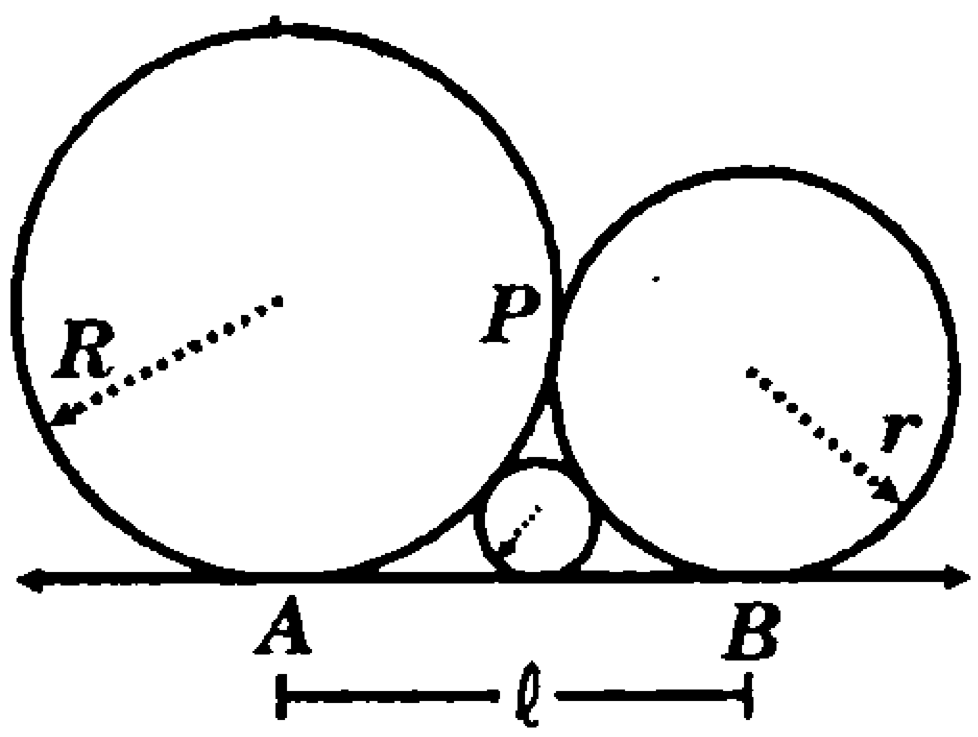
$$x^2 = mn$$

TEOREMA :

En todo triángulo rectángulo , la inversa del cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa es igual a la suma de las inversas de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

Del gráfico , se cumple : $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{a^2}$

OBSERVACIONES :



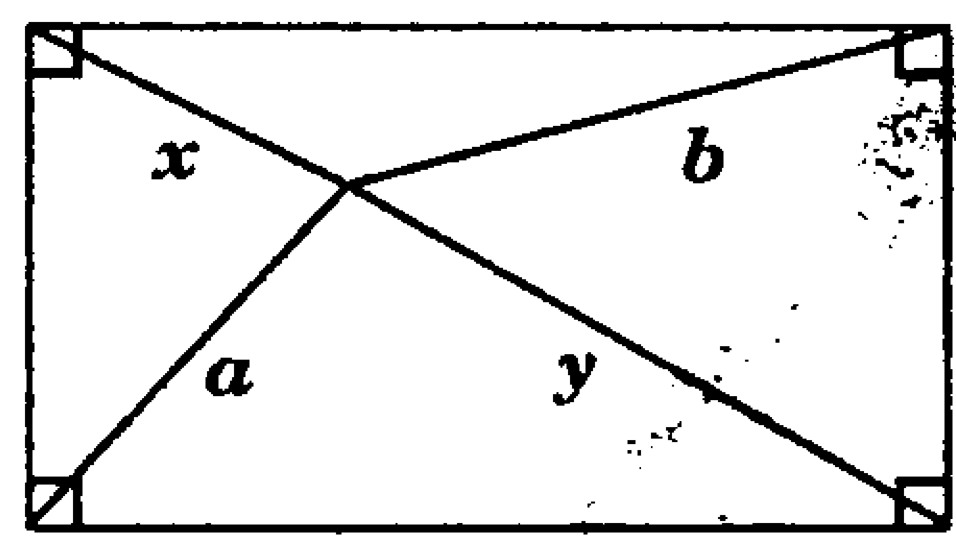
En el gráfico , AB : segmento tangente común exterior a las circunferencias tangentes exteriores.

Se cumple : $\ell = 2\sqrt{Rr}$

Además , si x es el radio de la circunferencia tangente a las dos circunferencias y a la recta AB .

Se cumple : $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{R}}+\dfrac{1}{\sqrt{r}}$

EN CUADRADOS O RECTÁNGULOS :



$$a^2+b^2 = x^2+y^2$$

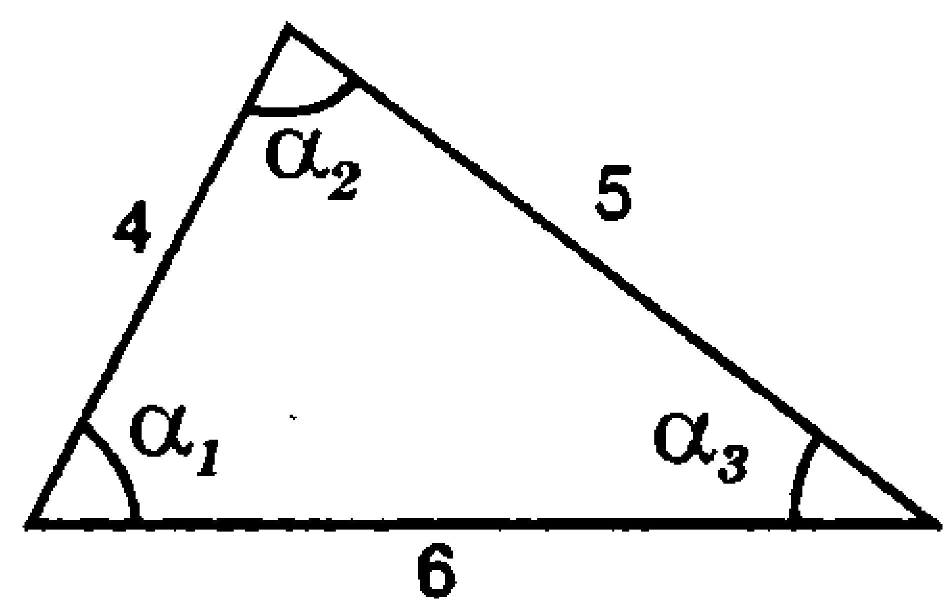
RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO :

I) Un triángulo es acutángulo si la suma de los cuadrados de las longitudes de los menores lados , es mayor que el cuadrado de la longitud del mayor lado .

EJEMPLO :

$4^2 + 5^2 > 6^2$
$16 + 25 > 36$
$41 > 36$

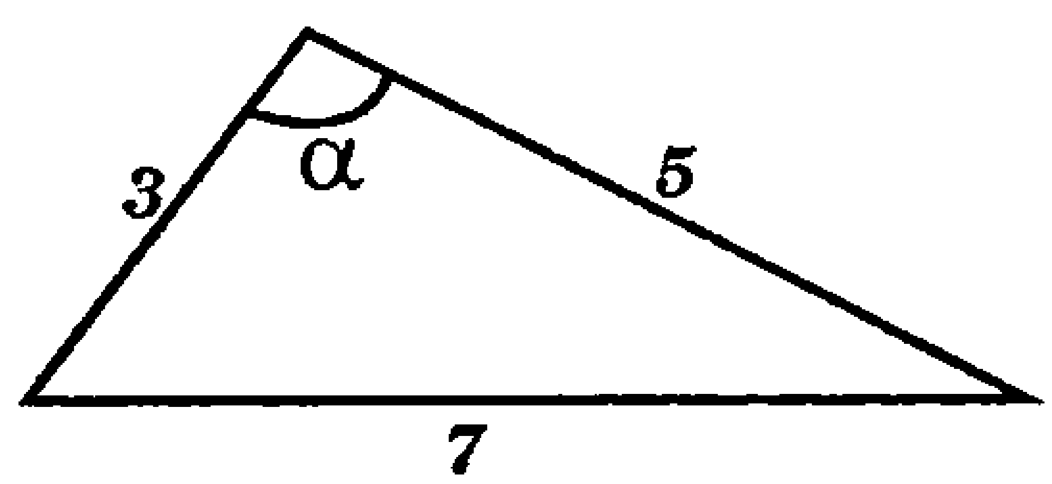


⇒ El triángulo es acutángulo y "α_n" es agudo .

II) Un triángulo es obtusángulo si la suma de los cuadrados de las longitudes de los menores lados , es menor que el cuadrado de la longitud del mayor lado .

EJEMPLO :

$3^2 + 5^2 < 7^2$
$9 + 25 < 49$
$34 < 49$

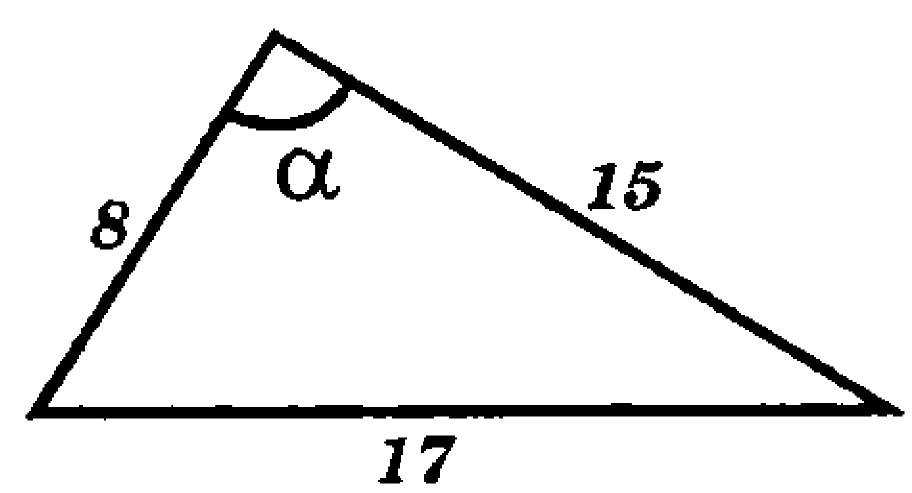


⇒ El triángulo es obtusángulo y "α" es obtuso.

III) Un triángulo es rectángulo si la suma de los cuadrados de las longitudes de los menores lados , es igual al cuadrado de la longitud del mayor lado.

EJEMPLO :

$8^2 + 15^2 = 17^2$
$64 + 225 = 28$
$289 = 289$

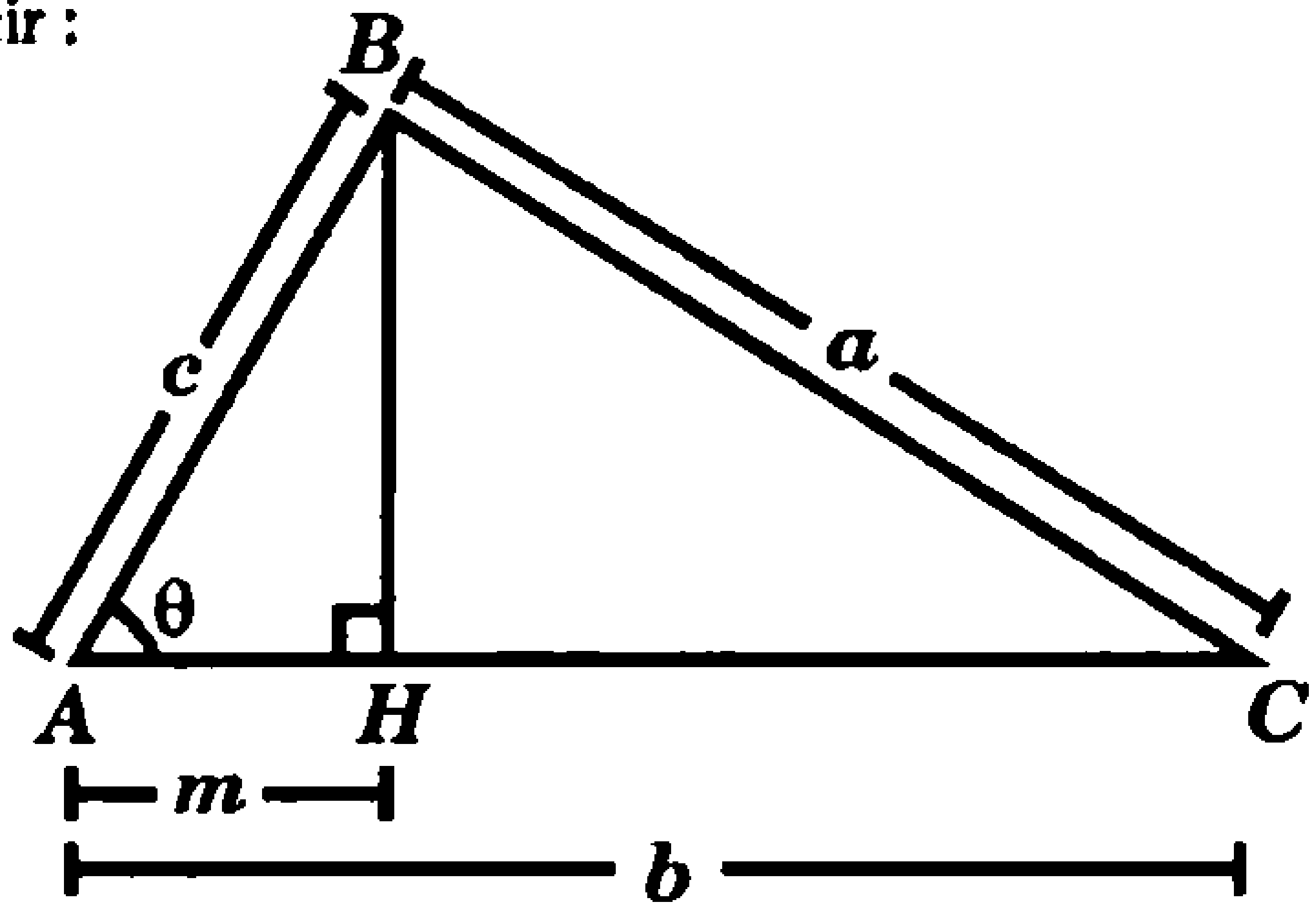


⇒ El triángulo es rectángulo y "α" es recto.

TEOREMA DE EUCLIDES

PRIMER CASO :

En todo triángulo , el cuadrado de la longitud del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de los otros dos, menos el doble del producto entre las longitudes de uno de ellos , con la proyección del otro sobre él , es decir :

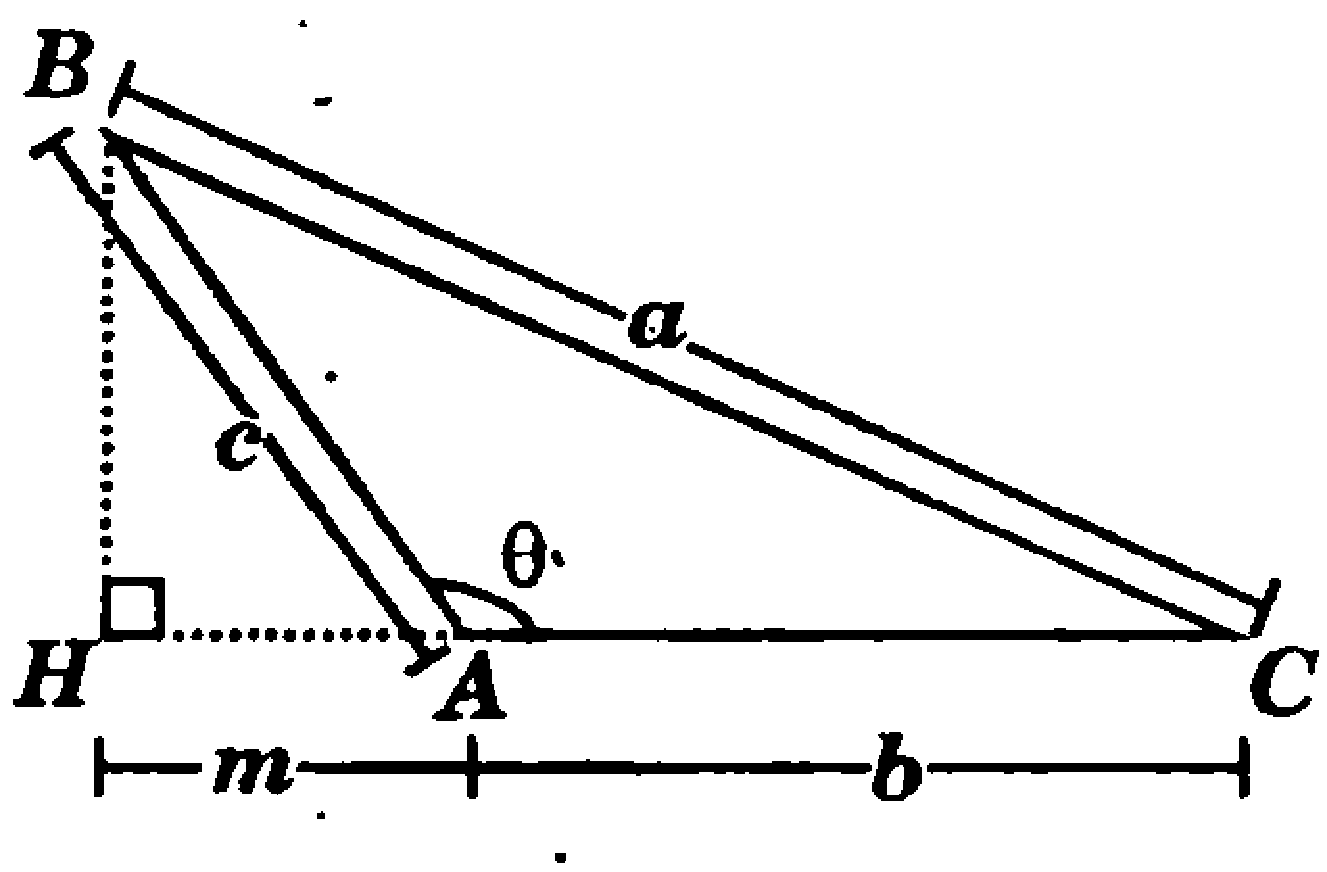


Para : $\theta<90°$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

SEGUNDO CASO :

En todo triángulo obtusángulo , el cuadrado de la longitud del lado que se opone al ángulo obtuso es igual a la suma de cuadrados , de las longitudes de los otros dos , más el doble del producto entre las longitudes de uno de ellos con la proyección del otro sobre él , es decir :

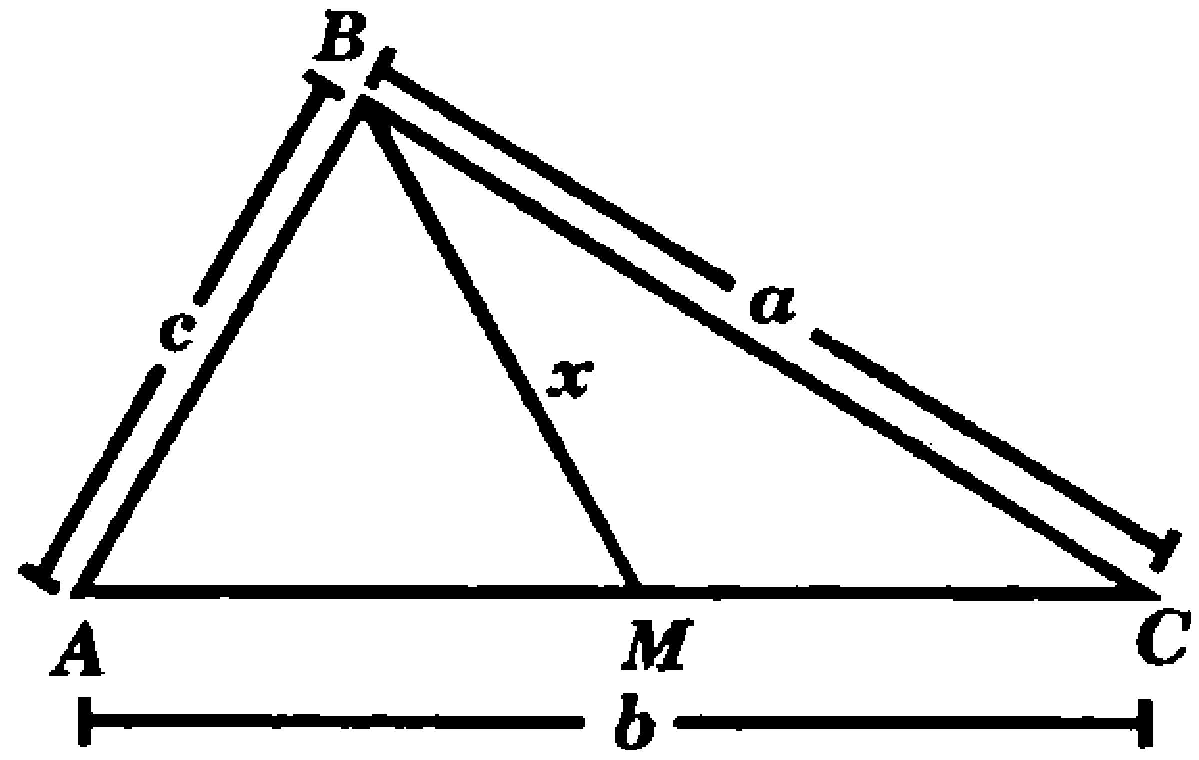


Para : $\theta>90°$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

TEOREMA DE LA MEDIANA

La suma de los cuadrados de las longitudes de dos lados de un triángulo , es igual al doble del cuadrado de la longitud de la mediana relativa al tercer lado , más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho tercer lado , es decir :

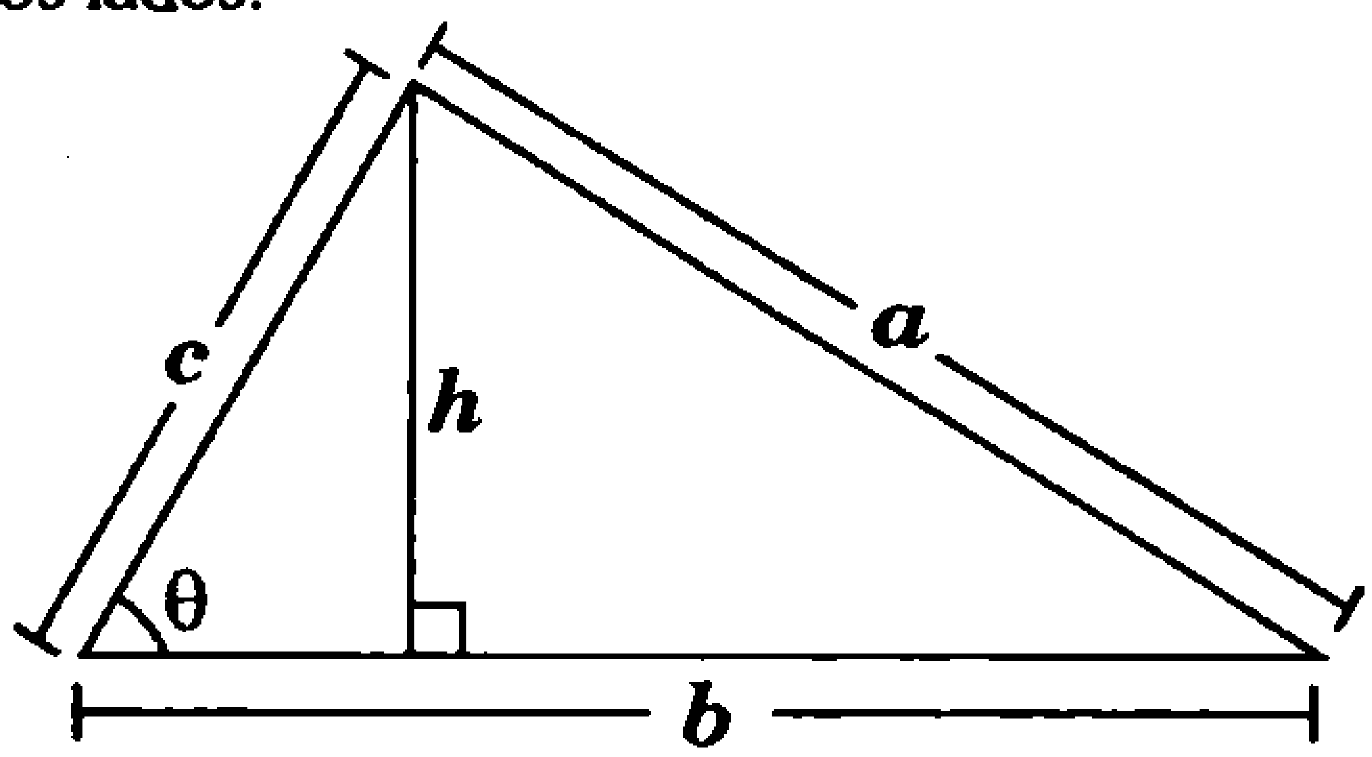


$\overline{BM}$: mediana

$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}$$

TEOREMA DE HERÓN

En todo triángulo , la longitud de una de sus alturas, es igual al producto entre el doble de la inversa de la longitud del lado al cual es relativo con la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y las diferencias de este con las longitudes de cada uno de los lados.

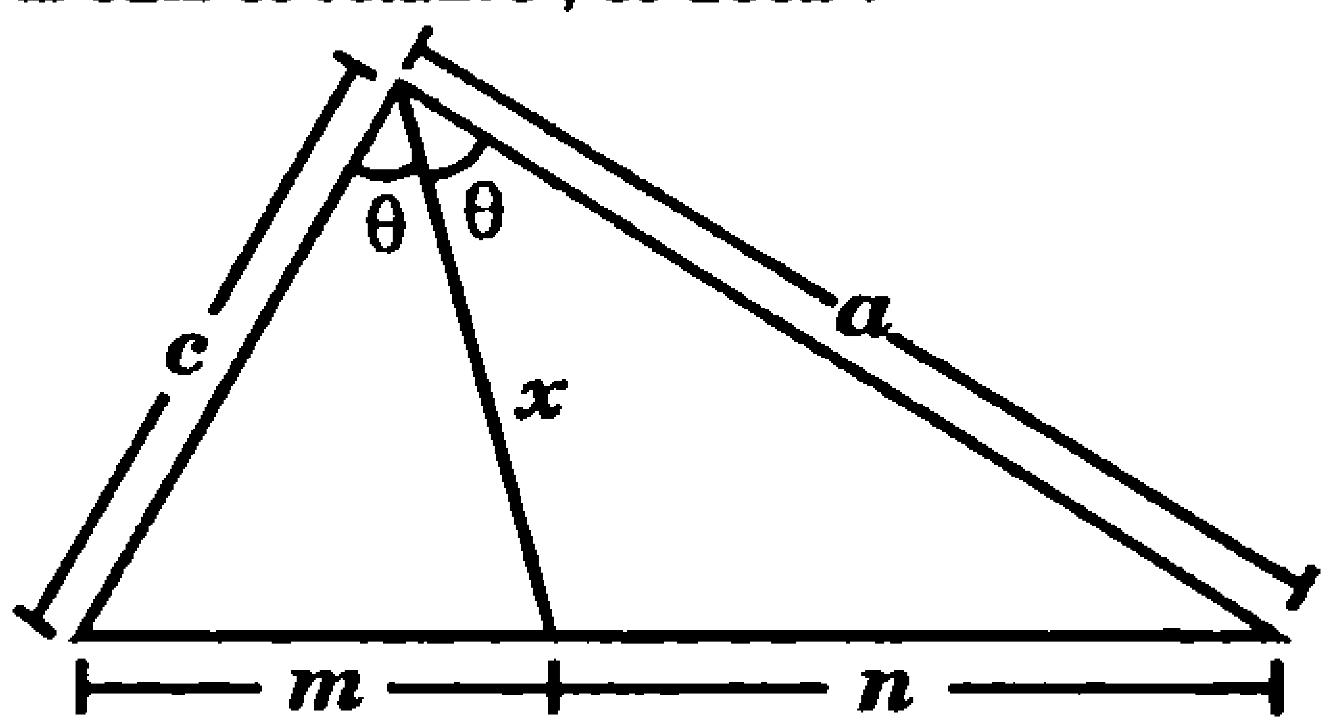


$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde : "p" es semiperímetro $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ INTERIOR

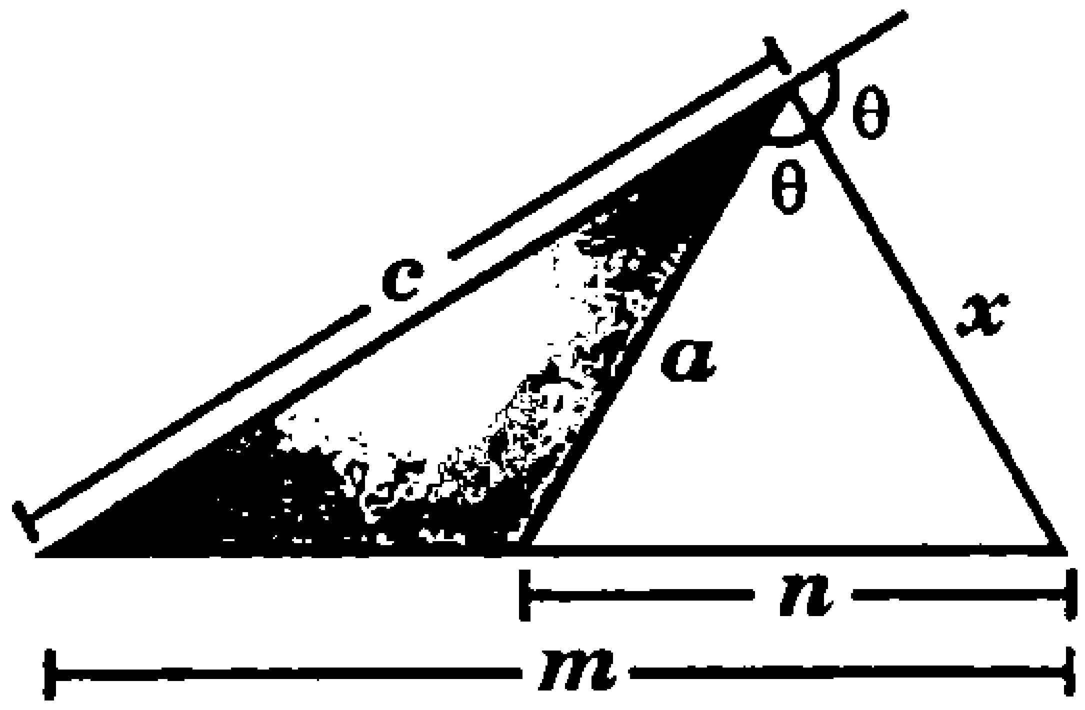
En todo triángulo , el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior , es igual a la diferencia entre , el producto de las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz y el producto entre las longitudes de los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado al cual es relativo , es decir :



$$x^2 = ac - mn$$

CÁLCULO DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

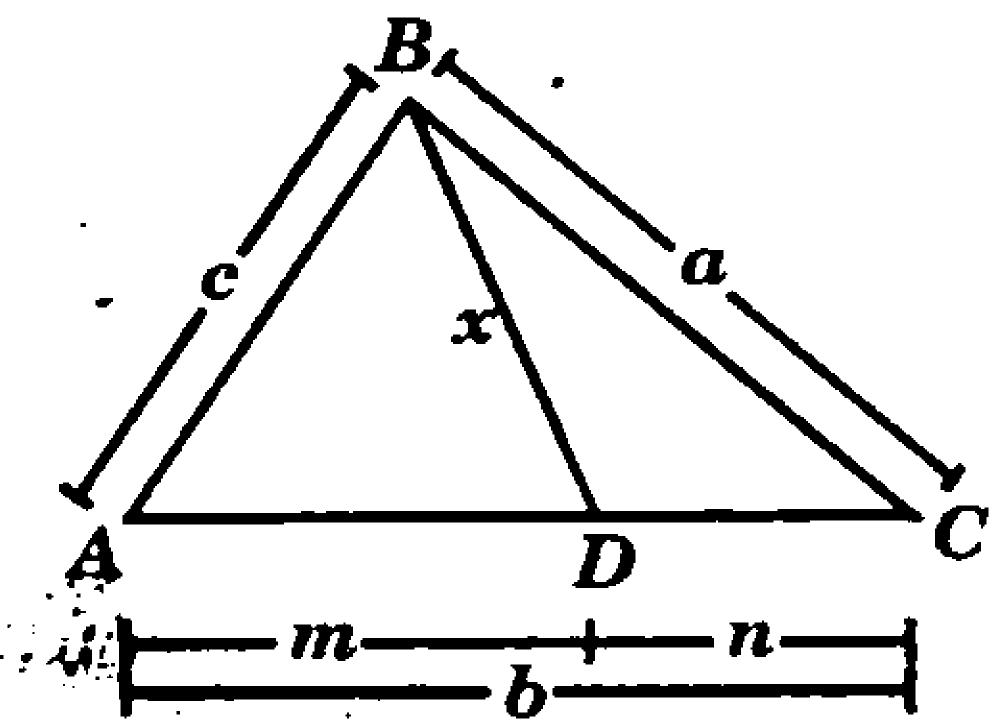
En todo triángulo ,el cuadrado de la longitud de una bisectriz exterior ,es igual a la diferencia entre, el producto de las longitudes de los segmentos que dicha bisectriz determina en el lado al cual es relativo, y el producto entre las longitudes de los lados adyacentes a dicha bisectriz , es decir :



$$x^2 = mn - ac$$

TEOREMA DE STEWARD

En todo triángulo , la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados adyacentes a una ceviana interior multiplicados con las longitudes de los segmentos opuestos a dichos lados determinados por la ceviana en el lado al cual es relativa es igual al producto del cuadrado de la longitud de dicha ceviana con la longitud del lado al cual es relativa más el producto de las longitudes dicho lado con los segmentos determinados por la ceviana en este .



En la figura , $\overline{BD}$: ceviana interior del $\triangle ABC$ relativa al lado $\overline{AC}$.

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: lados adyacentes a la ceviana interior BD.

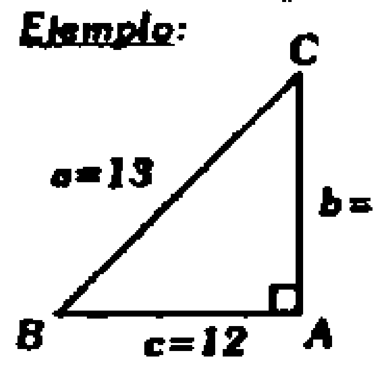
$\overline{AD}$ y $\overline{DC}$:segmentos determinados por la ceviana en $\overline{AC}$.

Se cumple : $c^2n + a^2m = x^2 b + bmn$

CÓMO RECONOCER SI UN TRIÁNGULO ES ACUTÁNGULO, OBTUSÁNGULO O RECTÁNGULO

Sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo, donde "*a*" es el mayor de ellos. Para conocer la naturaleza del triángulo se comparan a^2 con (b^2+c^2).

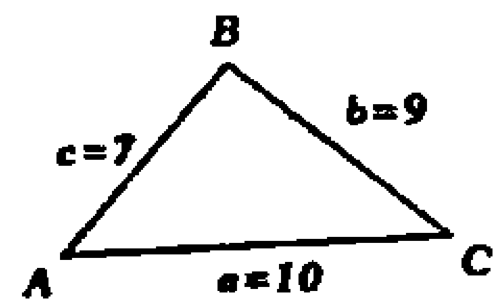
1. Si $a^2 = b^2 + c^2$
El $\triangle$ es rectángulo
Ejemplo:



$13^2 = 5^2 + 12^2$
$169 = 25 + 144$
$169 = 169$

El $\triangle ABC$ es rectángulo (recto en A).

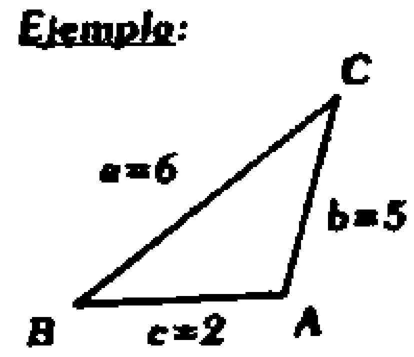
2. Si $a^2 < b^2 + c^2$
El $\triangle$ es acutángulo
Ejemplo:



$10^2 < 9^2 + 7^2$
$100 = 81 + 49$
$100 = 130$

$\Rightarrow$ El $\triangle ABC$ es acutángulo

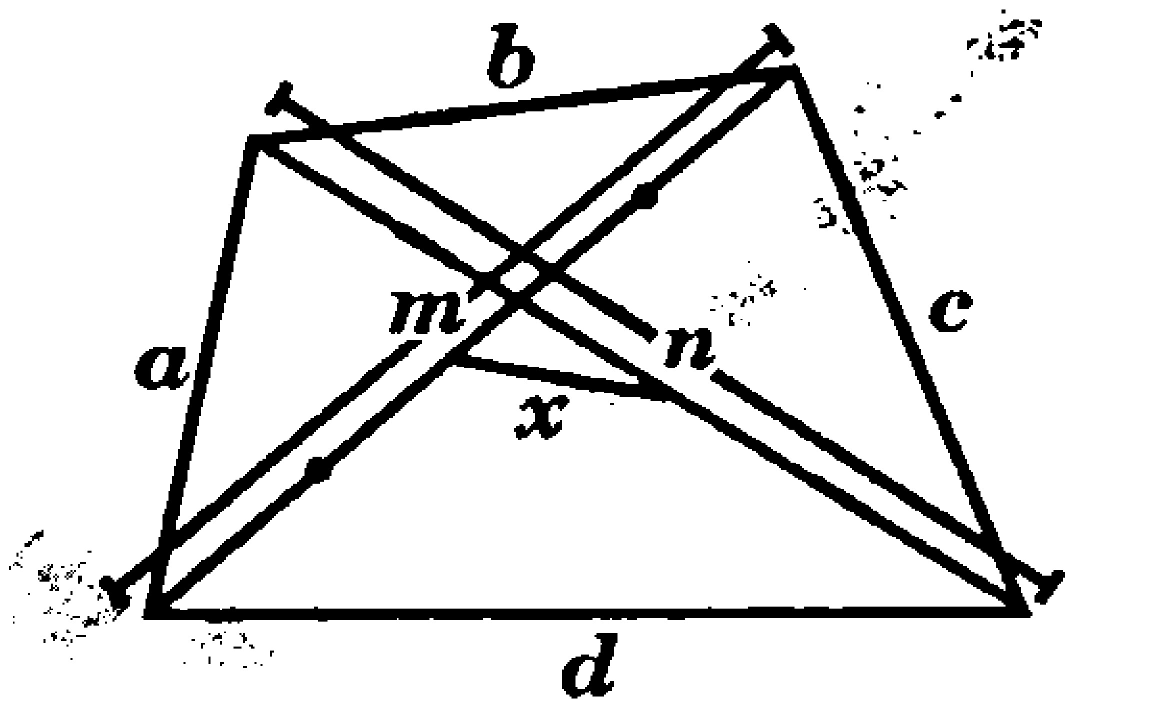
3. Si $a^2 > b^2 + c^2$
El $\triangle$ es obtusángulo
Ejemplo:



$6^2 > 5^2 + 2^2$
$36 > 25 + 4$
$36 > 29$

$\Rightarrow$ El $\triangle ABC$ es obtusángulo ($m\angle A > 90°$).

TEOREMA DE EULER

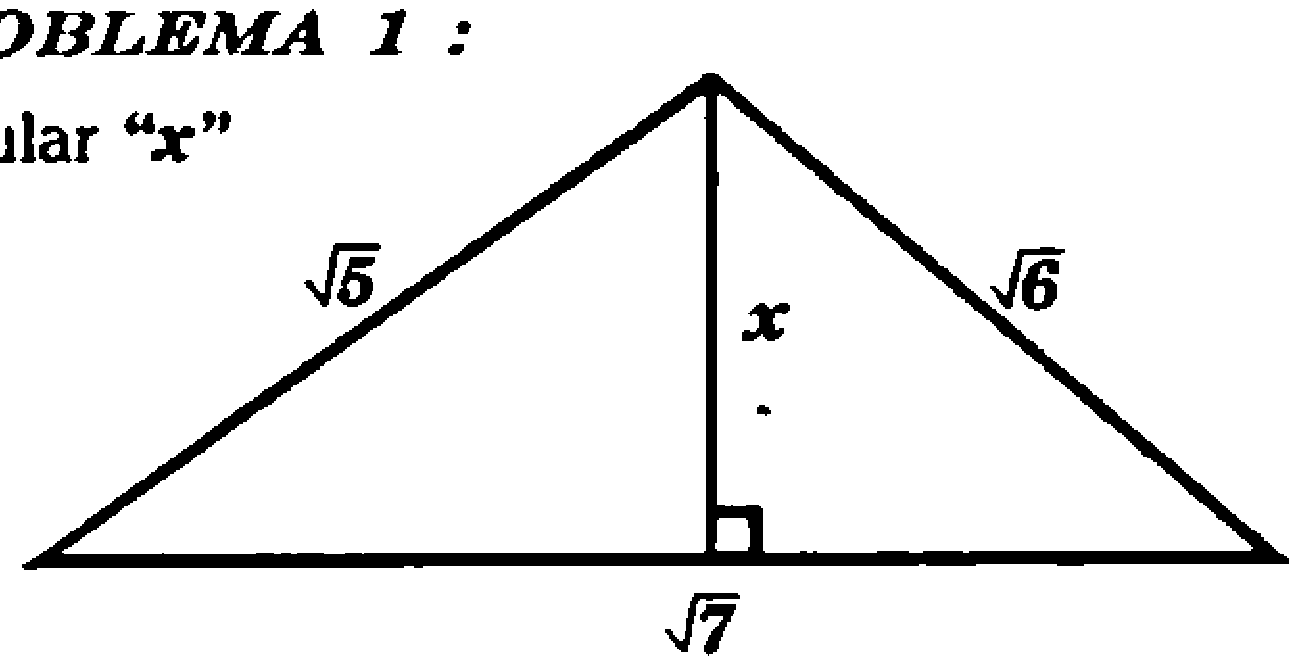


$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4x^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

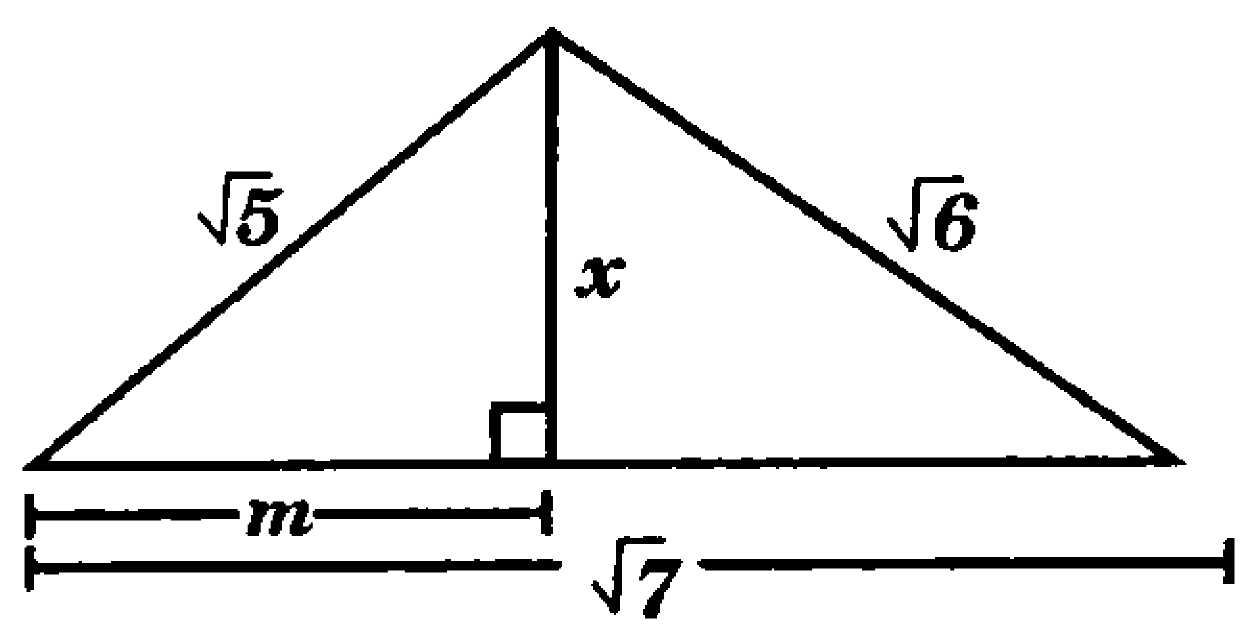
PROBLEMA 1 :

Calcular "*x*"



A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{\frac{13}{3}}$ D) $\sqrt{\frac{26}{7}}$ E) 1

RESOLUCIÓN :



* Por el teorema de Euclides ;

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{7})m$$

$$\longrightarrow m = \frac{3}{7}$$

* Ahora por el Teorema de Pitágoras :

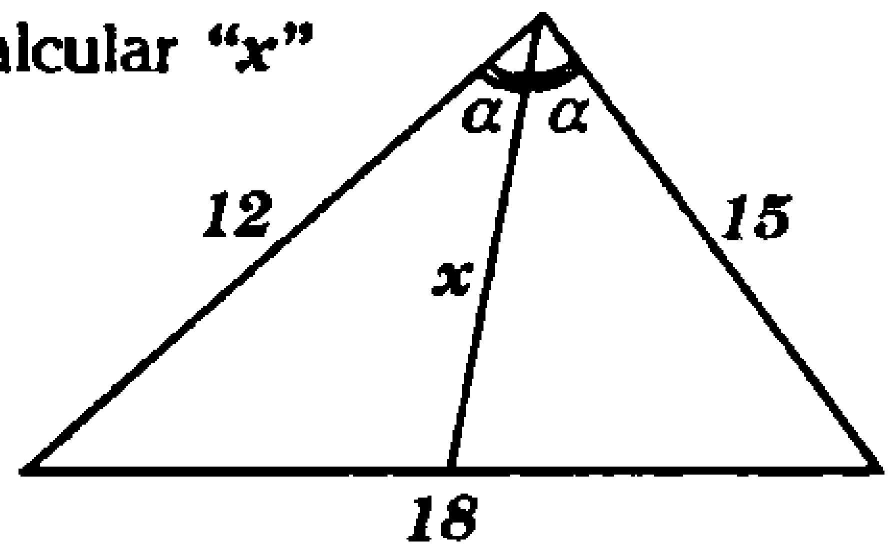
$m^2+x^2=\sqrt{5^2}$

$\quad \longrightarrow 3^2+x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{26}{7}}$

RPTA : "D"

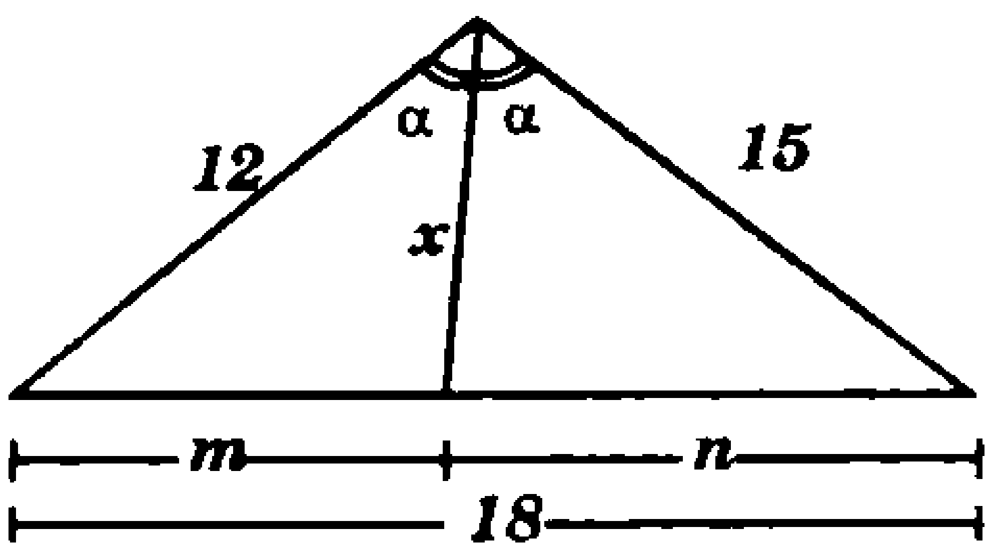
PROBLEMA 2 :

Calcular "x"



A)6m B)8 C)10 D)9 E)13

RESOLUCIÓN :



* Por el Teorema de la Bisectriz :

I) $\dfrac{m}{12}=\dfrac{n}{15}=\dfrac{m+n}{27}=\dfrac{18}{27}$

$\Rightarrow m=8$ y $n=10$

II) $x^2=(12)(15)-mn$

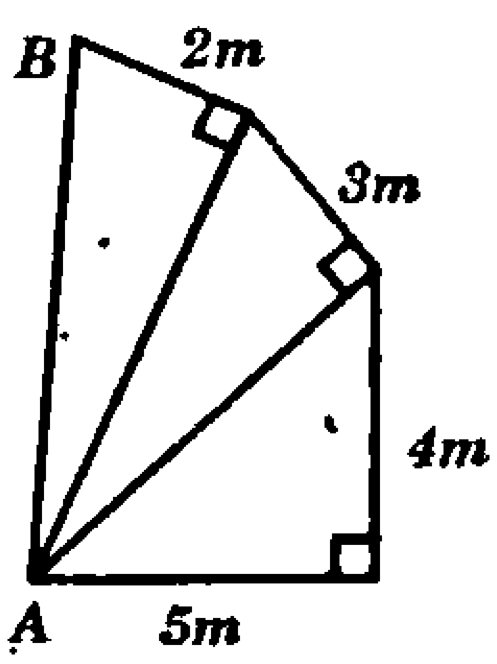
$\Rightarrow x^2=180-8\times10 \Rightarrow x=10$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

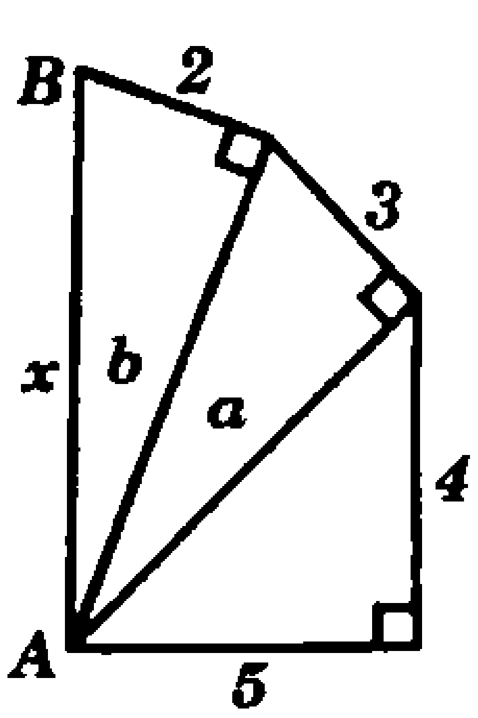
Del gráfico calcule *AB* .

A) $\sqrt{3}$
B) $\sqrt{31}$
C) $2\sqrt{7}$
D) $3\sqrt{6}$
E) $6\sqrt{3}$



RESOLUCIÓN :

* Piden *x*



* Por el Teorema de Pitágoras

$a^2=4^2+5^2$

$b^2=3^2+a^2 \Rightarrow b^2=3^2+4^2+5^2$

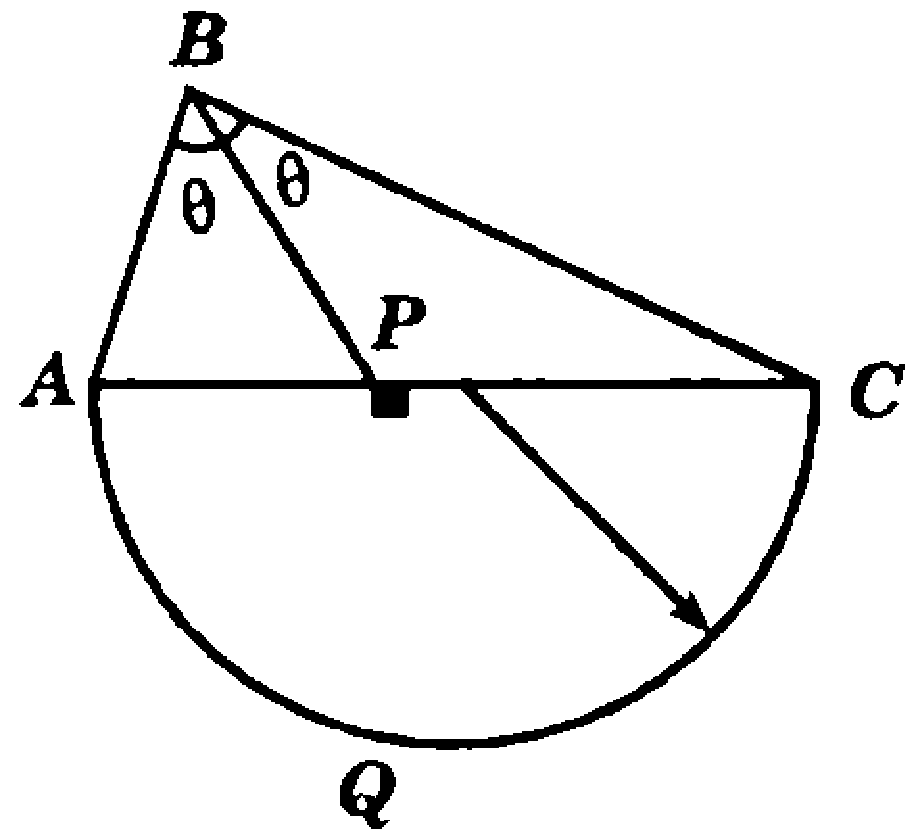
$\Rightarrow x^2=2^2+B^2 \Rightarrow x^2=2^2+3^2+4^2+5^2$

$\Rightarrow x^2=\sqrt{4+9+16+25}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

RPTA : "D"

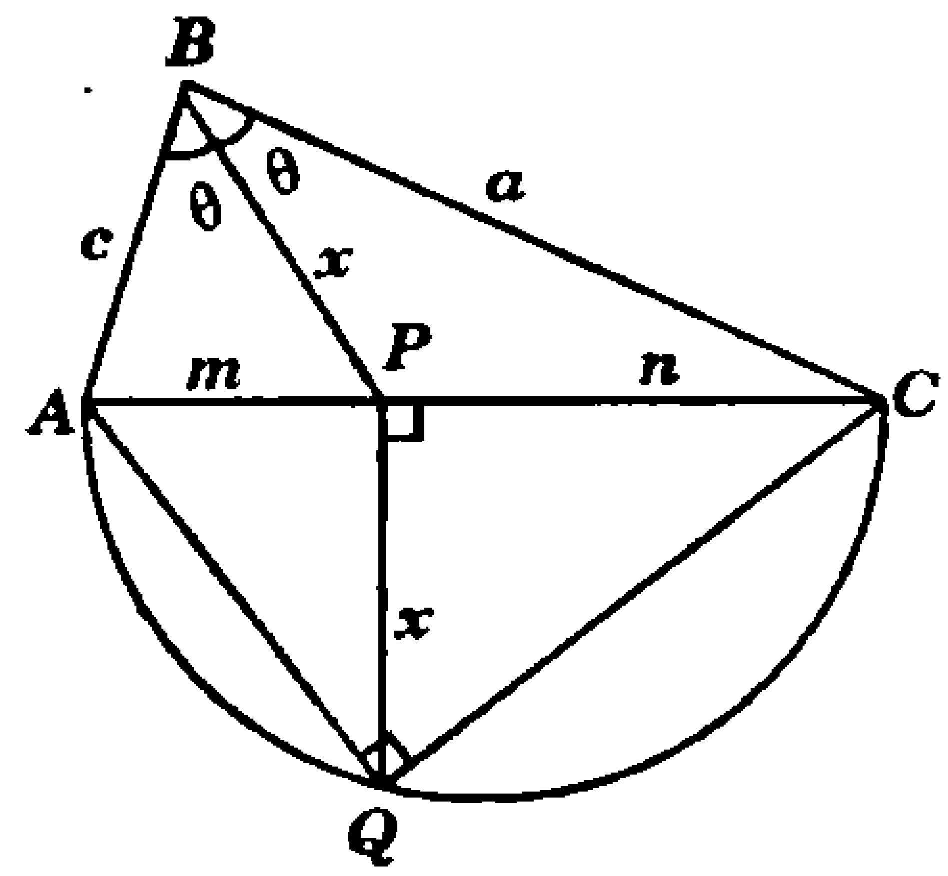
PROBLEMA 4 :

En la figura se pide *BP*, si $AB\times BC=32\ cm^2$ y $BP=PQ$



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 1

RESOLUCIÓN :



* Aplicando el Teoremas de la Bisectriz en el $\triangle ABC$:

$x^2=a\,c-mn$ ....(I)

* $\triangle AQC$: $x^2=mn$

* Además por dato : $ac=32$

* Reemplazando en (I) :

$x^2=32-x^2 \Rightarrow x=4$

RPTA : "C"

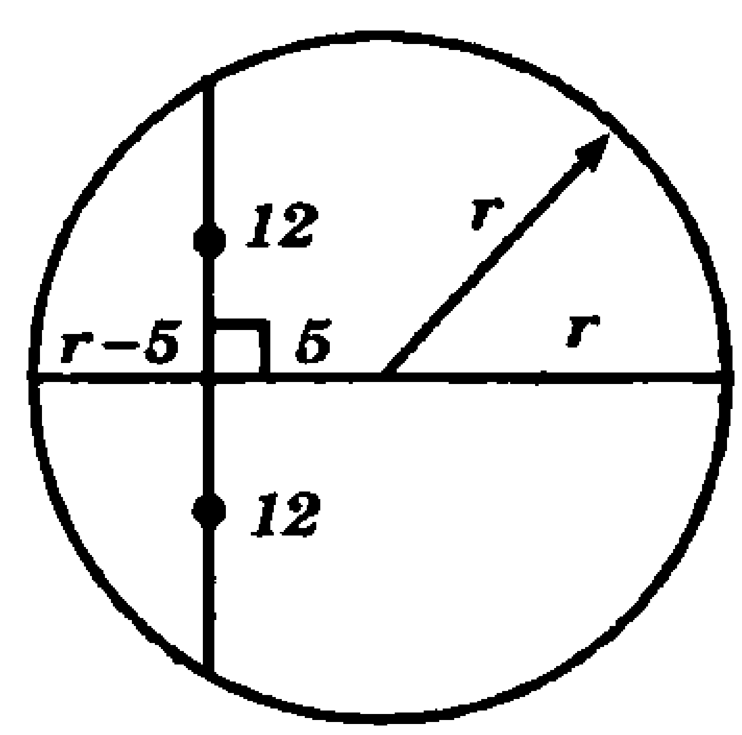
PROBLEMA 5 :

Una cuerda de *24 m* de longitud dista del centro de la circunferencia *5m*; hallar el radio de dicha circunferencia .

A)22m B)12 C)13 D)11 E)8

RESOLUCIÓN :

* Por el Teorema de las Cuerdas :



$(r-5)(r+5)=(12)(12)$

$\Rightarrow r^2-25=144$

$\Rightarrow r=13m$

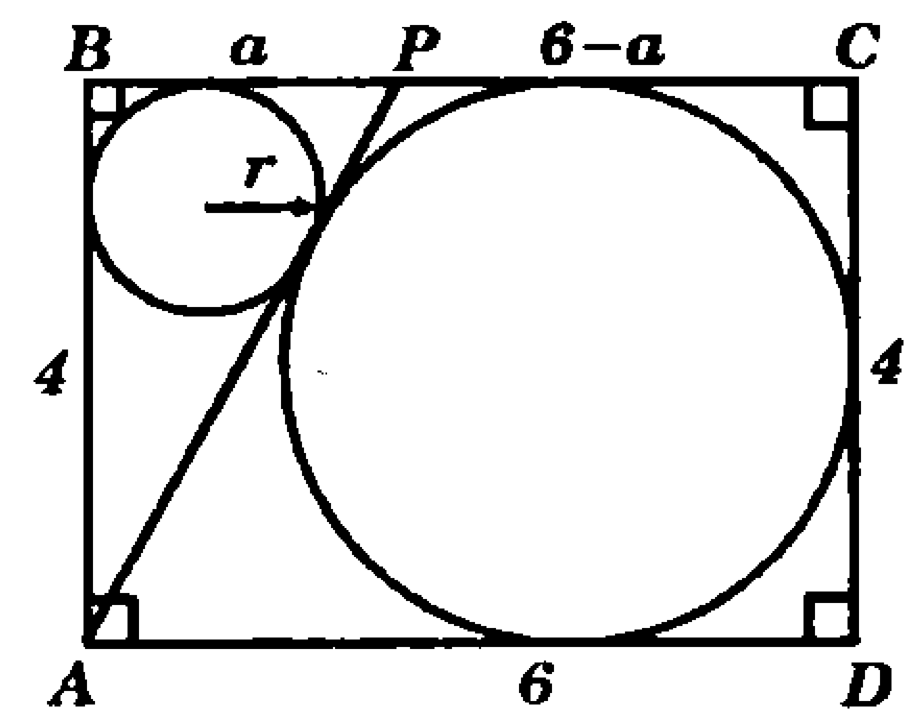
RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Se tiene el rectángulo *ABCD*, cuyos lados *AB* y *AD* miden *4* y *6* respectivamente. Sobre el lado *BC* se ubica el punto P, de tal manera que el cuadrilátero *APCD* es circunscriptible. Calcular la longitud del inradio del triángulo *ABP* .

A)3m B2,5 C)2 D)1,5 E)1

RESOLUCIÓN :



* ⏢ *APCD* : Teorema de Pitot

$AP+4=(6-a)+6 \Rightarrow AP=8-a$

* ⊿ *ABP* : Teorema de Pitágoras

$(8-a)^2=4^2+a^2 \Rightarrow a=3$

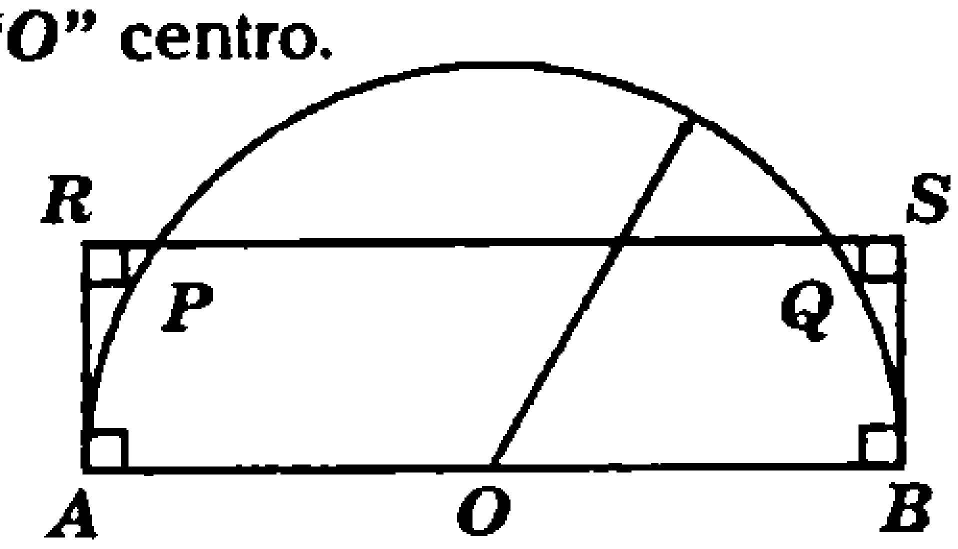
* ⊿ *ABP* : Teorema de Poncelet

$4+a=8-a+2r \Rightarrow r=1$

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

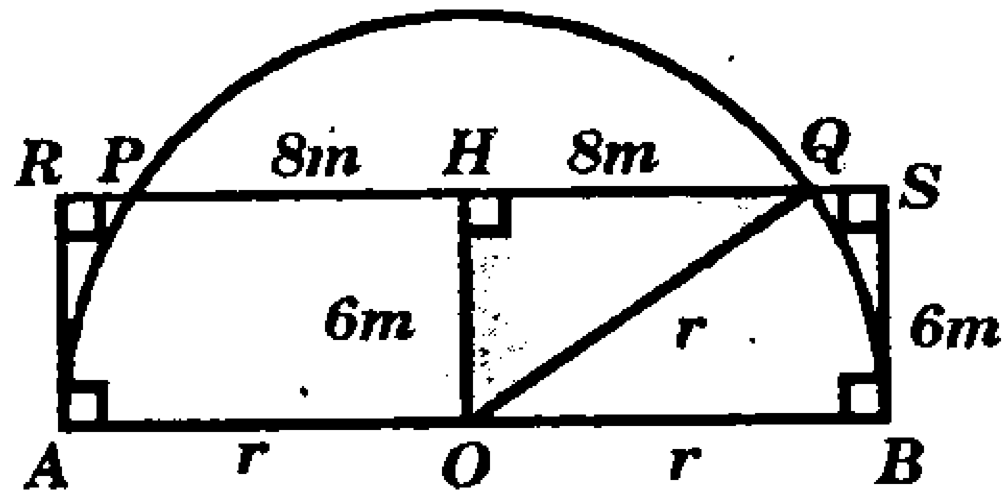
Calcule *AB* si *PQ=16m* y *SB=6m*. "*O*" centro.



A) 16m B) 20 C)18 D)24 E)15

RESOLUCIÓN :

* Piden $2r$.



* Trazamos $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$
* Por el Teorema de Pitágoras :

$r^2 = 6^2 + 8^2$

$\Rightarrow r = 10m$

$\Rightarrow AB = 2r = 2(10) = 20$

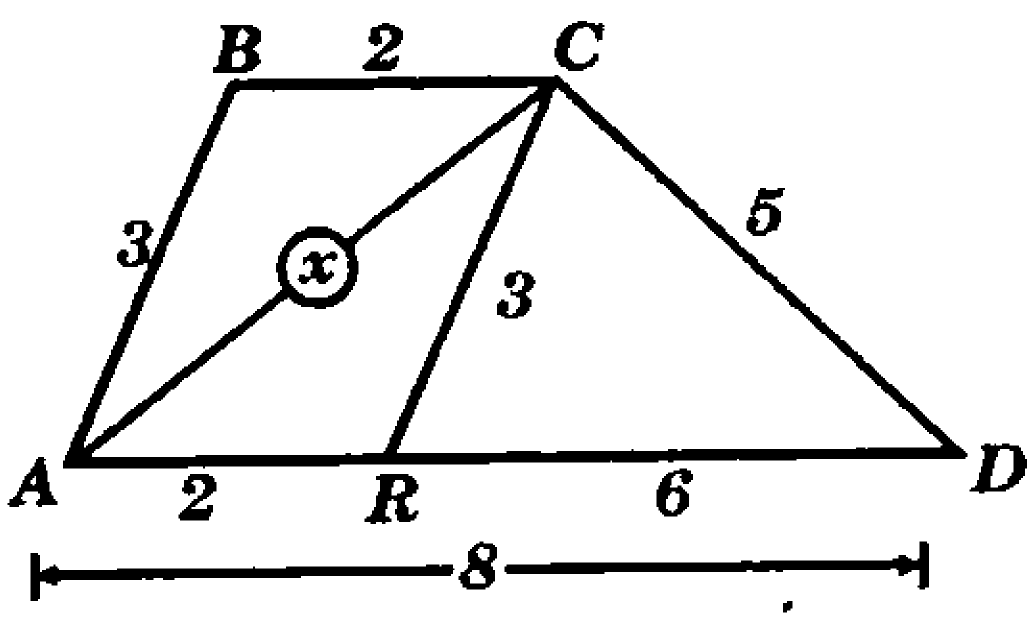
RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

La bases de un trapecio miden 2 y $8m$; y los lados laterales miden 3 y 5 m. Calcular la longitud de la menor diagonal .

A) 4 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{\dfrac{23}{7}}$ E) $\sqrt{\dfrac{59}{3}}$

RESOLUCIÓN :



* La menor diagonal es AC
* Se traza $\overline{CR} \parallel \overline{AB}$, luego :

$CR = AB = 3$ y $AR = BC = 2$

* Aplicando el *T.* de Steward en el ΔACD :

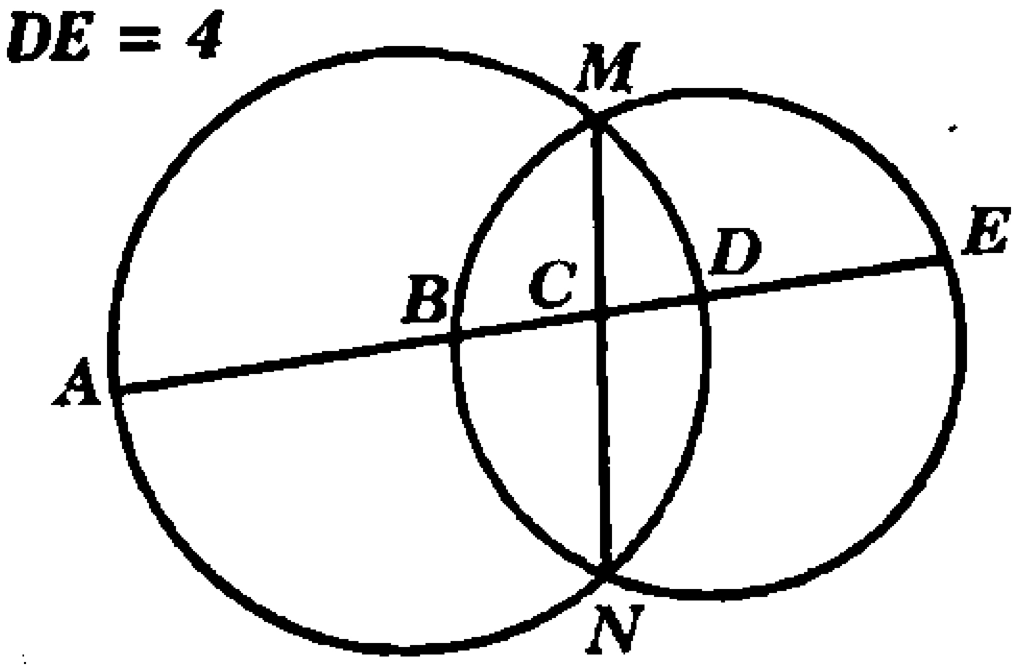
$8 \times 3^2 = x^2 \times 6 + 5^2 \times 2 - 2 \times 6 \times 8$

* Luego : $x = \sqrt{\dfrac{59}{3}}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9:

Calcular CD, si : $AB = 5$; $BC = 3$ y $DE = 4$



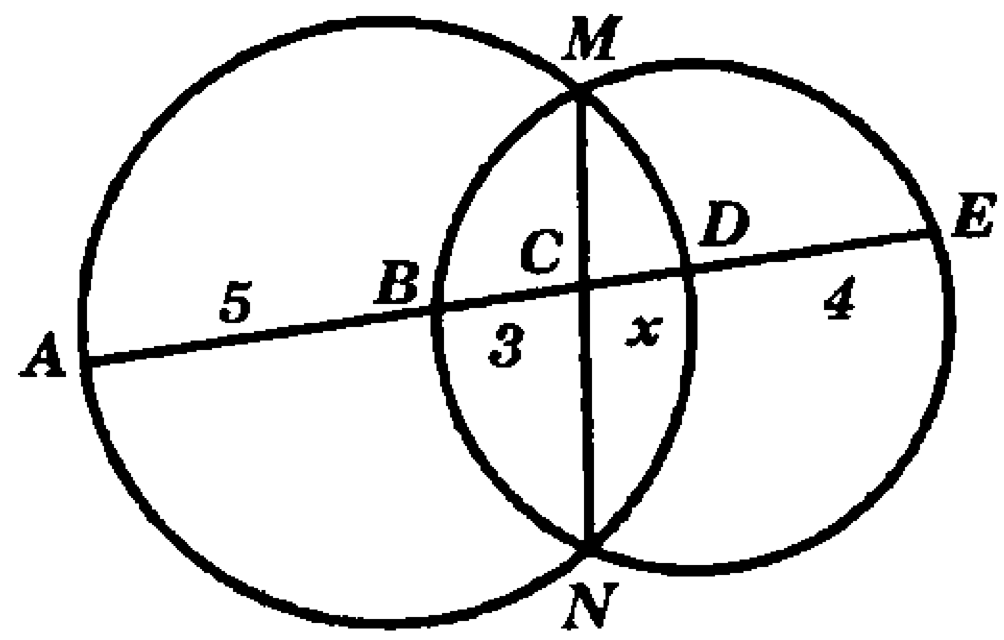
A) 2 B) 4 C) 2,5 D) 2,3 E) 2,4

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el Teorema de las Cuerdas en cada circunferencia :

$CM \times CN = AC \times CD$

$CM \times CN = CB \times CE$



* Luego :

$CA \times CD = CB \times CE$

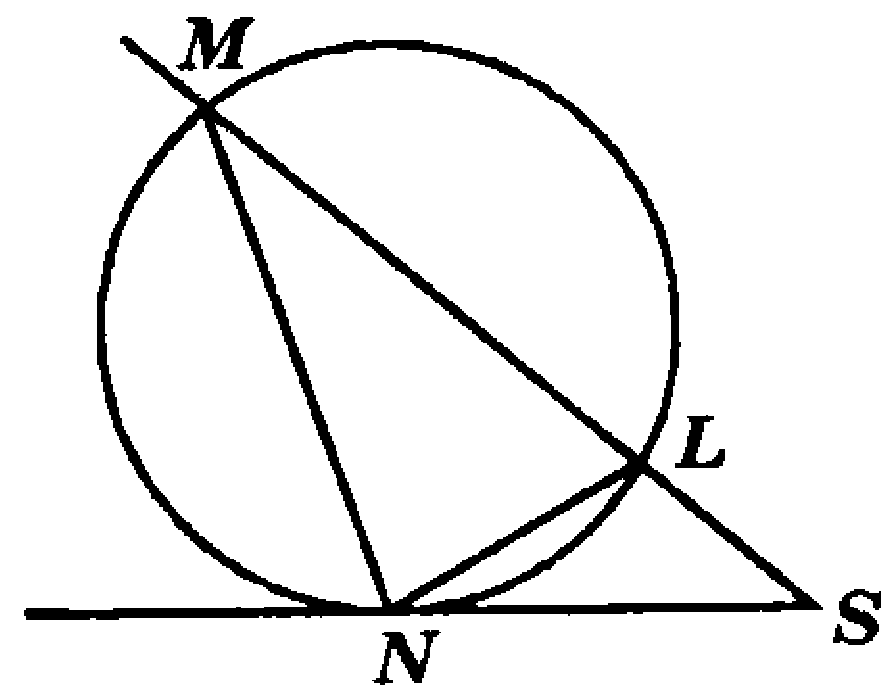
$(8) \quad (x) = (3)\ (x+4)$

$\Rightarrow x = 2,4$

RPTA : "E"

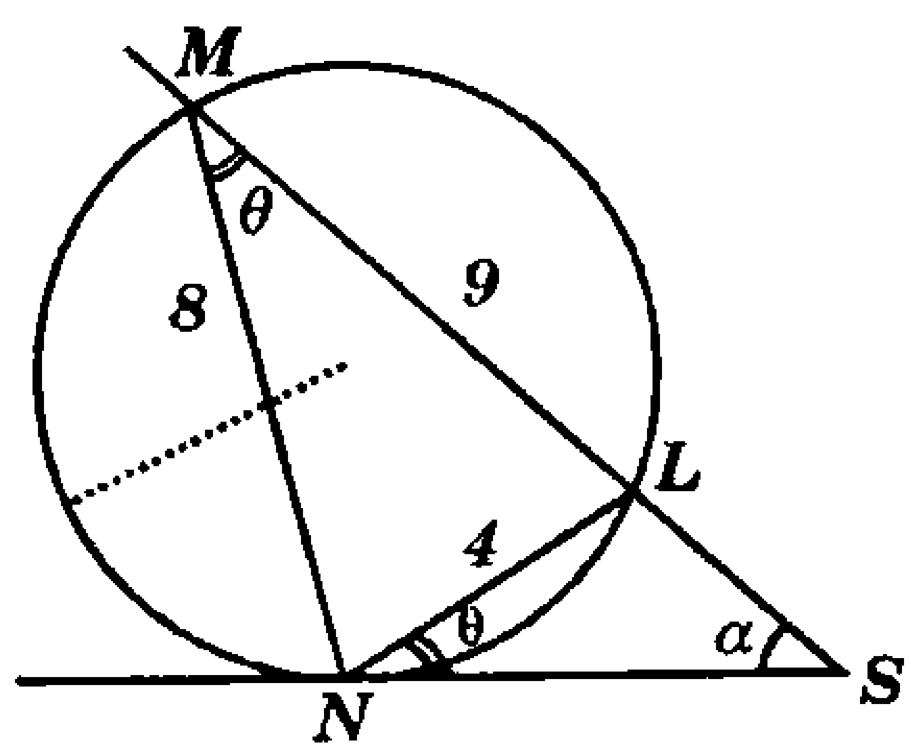
PROBLEMA 10 :

Calcular MS. Si $LN=4m$, $MN=8m$ y $LM = 9m$



A) 15m B) 17 C) 12 D) 21

RESOLUCIÓN :



$\Delta LNS \sim \Delta MNS$:

$$\Rightarrow \frac{NS}{MS} = \frac{4}{8} \Rightarrow \begin{cases} NS = k \\ MS = 2k \end{cases}$$

* Por el Teorema de la Tangente :

$(NS)^2 = (MS)\ (MS - 9)$

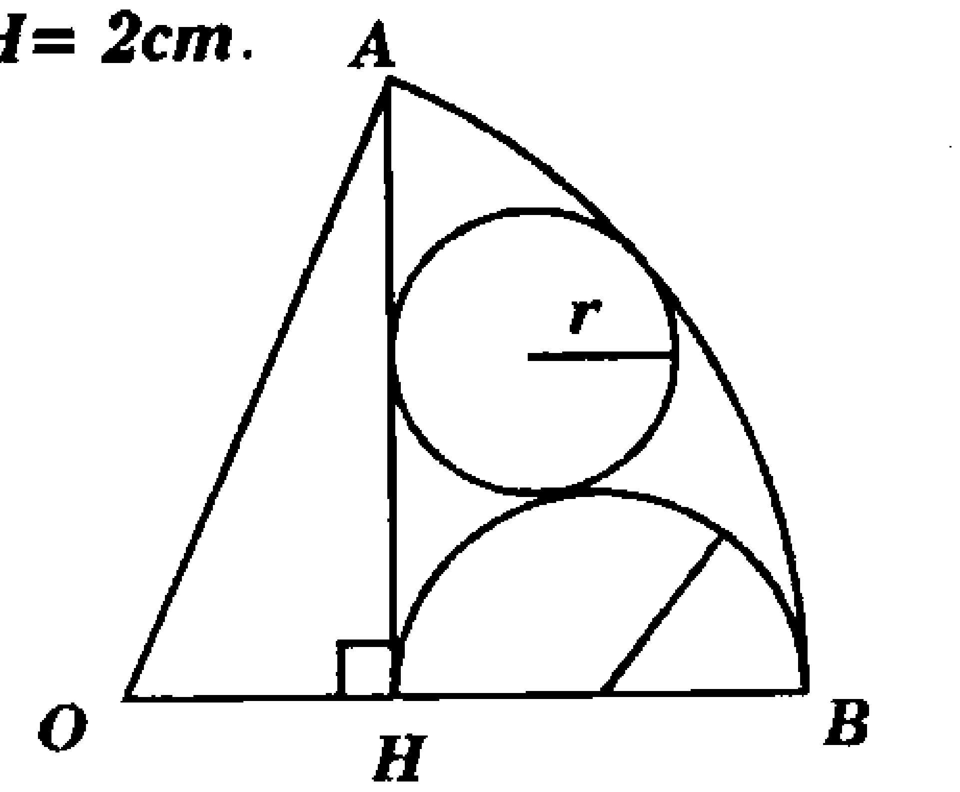
$\Rightarrow k^2 = 2k\ (2k - 9) \Rightarrow k = 6$

* Piden : $MS = 2k = 2(6) = 12$

RPTA : "C"

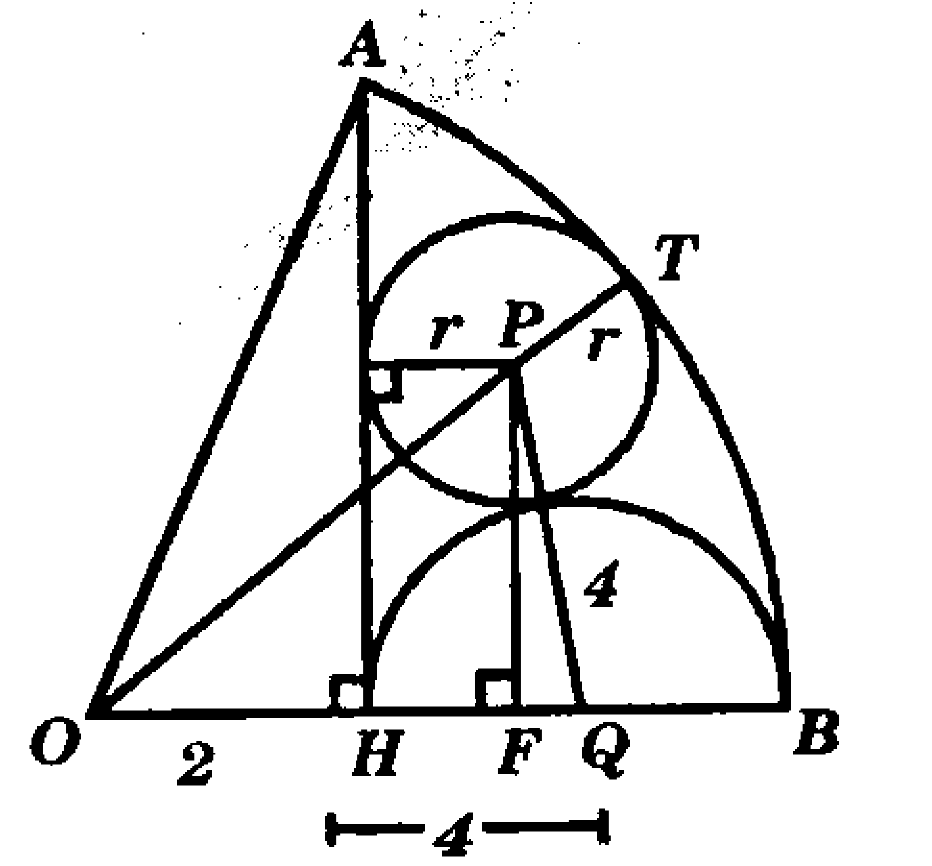
PROBLEMA 11 :

En la figura se pide r si el radio del sector circular AOB mide 10 cm y $OH = 2cm$.



A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 2,4 E) 3

RESOLUCIÓN :



* Se forma el triángulo OPQ al unir los centros de las circunferencias .
* Aplicando el Teorema de Euclides en el ΔOPQ :

$OP^2 = PQ^2 + OQ^2 - 2OQ \times FQ$

$(10 - r)^2 = (4 + r)^2 + 6^2 - 2(6)(4 - r)$

* Al resolver : $r = 2,4$

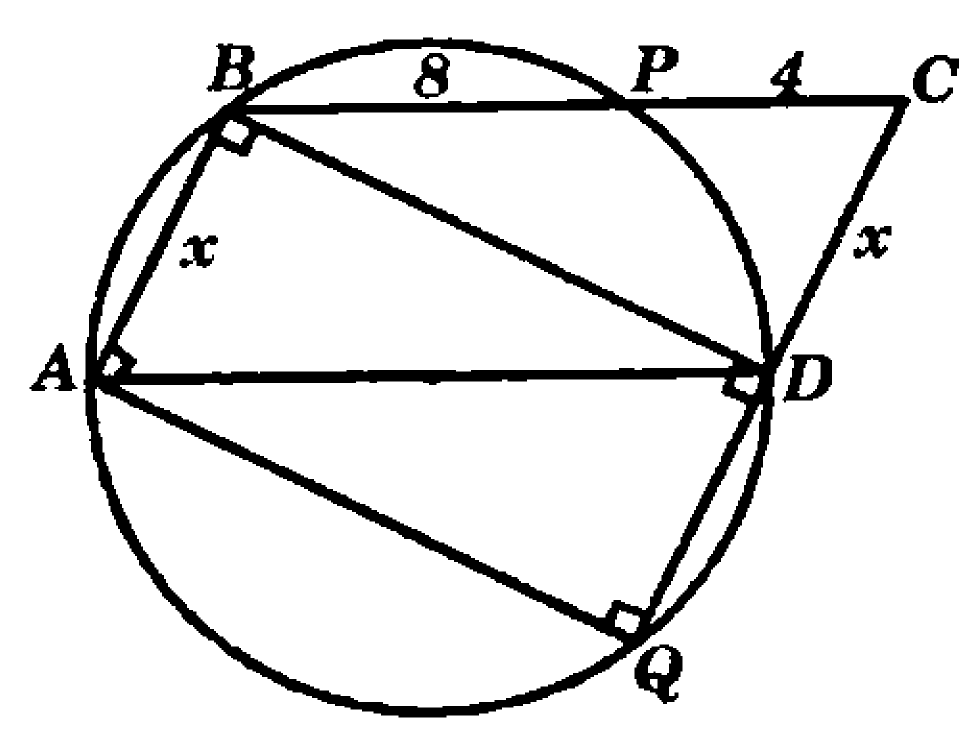
RPTA : "D"

PROBLEMA 12 :

Se tiene un paralelogramo, $ABCD$ y una circunferencia de diámetro AD, que contiene a B y es secante a $\overline{BC}$ en el punto P , tal que : $BP = 8$ y $CP = 4$; calcular : "AB"

A) $\sqrt{3}$ B) 5 C) 6 D) $3\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :



* Aplicando el Teorema de las Secantes :

$CQ \times CD = CB \times CP$ ....(I)

* En el rectángulo $ABDQ$ se tiene que : $DQ=AB=x$

* Luego en (I) :

$(x)(2x)=(12)(4) \Rightarrow x=2\sqrt{6}$

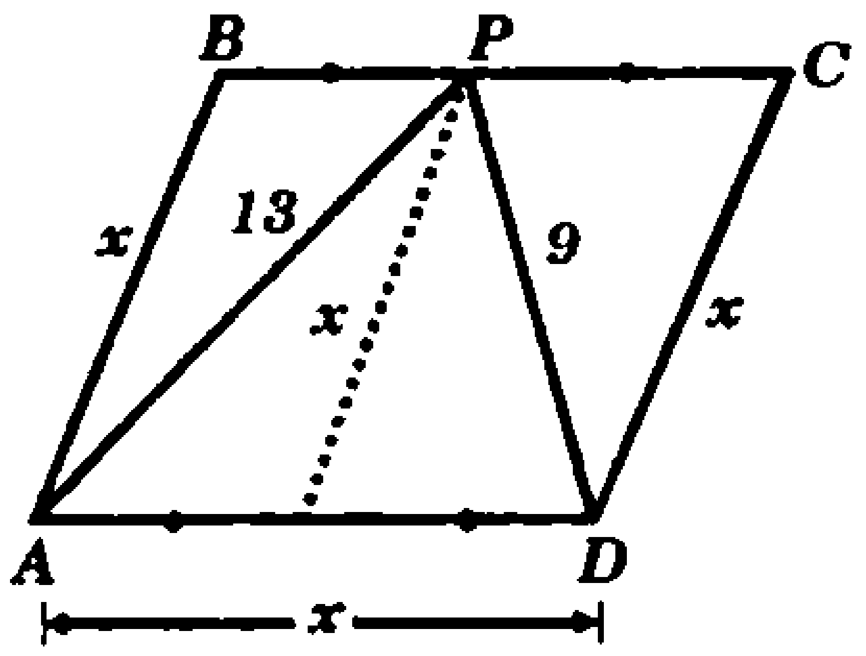
RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

Calcular el lado de un rombo sabiendo que el punto medio de un lado dista de los extremos del lado opuesto : 9 cm y 13 cm.

A) 8cm B) 10 C) 9 D) 4 E) 2

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{PQ} \,//\, \overline{AB}$.

* Luego : $PQ = AB = x$

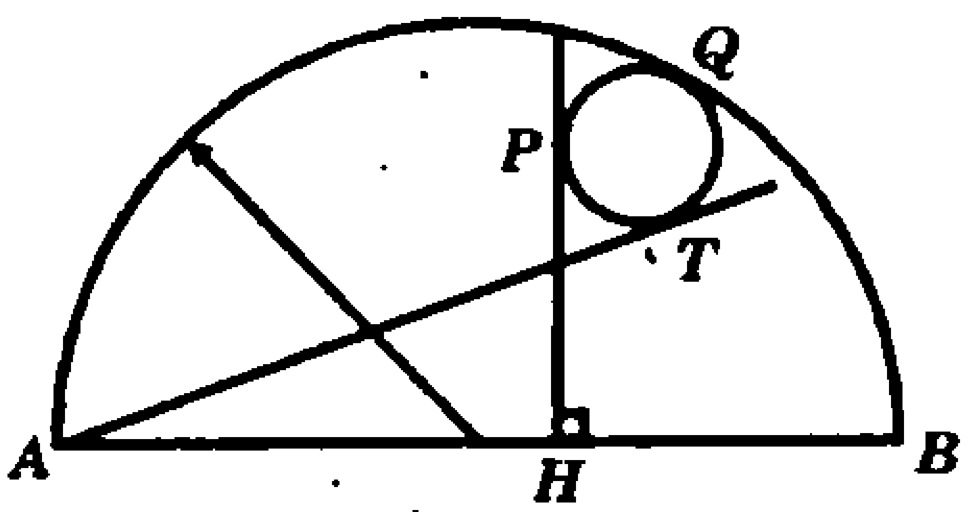
* Por el Teorema de la mediana :

$$13^2+9^2=2x^2+\frac{x^2}{2} \Rightarrow x=10$$

RPTA : "B"

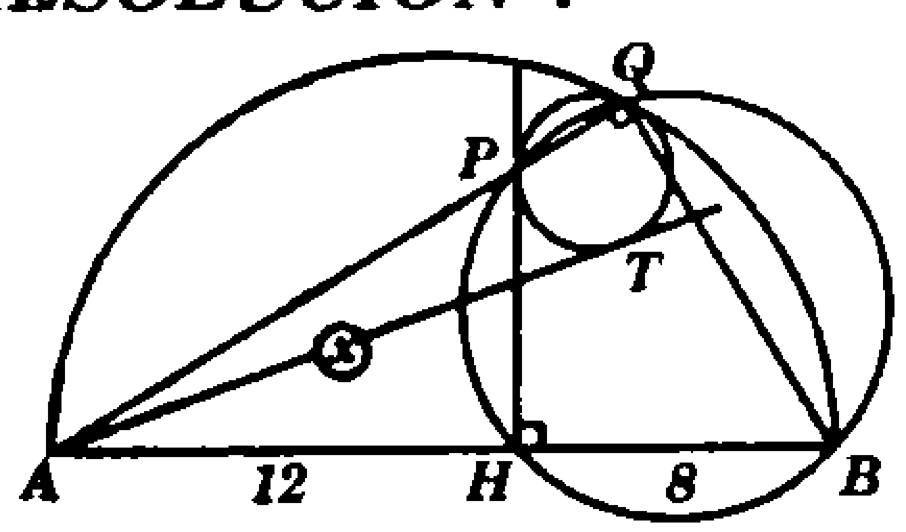
PROBLEMA 14 :

En la figura se pide AT, si $AH=12cm$ y $HB=8cm$. P, Q y T son puntos de tangencia



A)10 B)9 C)$3\sqrt{7}$ D)$4\sqrt{15}$ E)$\sqrt{31}$

RESOLUCIÓN :



* Los puntos A, P y Q son colineales (propiedad)

* Teorema de la tangente :

$x^2 = AQ \times AP$ ....(I)

* Teorema de las secantes :

$AQ \times AP = AB \times AH$ .....(II)

de (I) y (II) :

$x^2=(20)(12) \Rightarrow x=4\sqrt{15}$

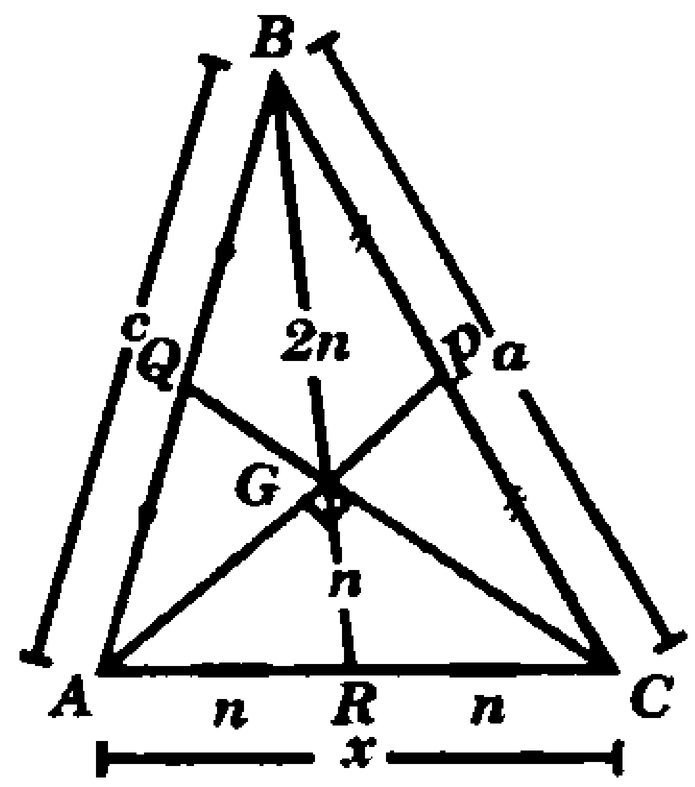
RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Calcular el lado de un triángulo, sabiendo que la suma de los cuadrados de los otros 2 lados, es igual a $125\ cm^2$, y que las medianas relativas a estos 2 lados son perpendiculares.

A) 3cm B) 4 C) 5 D) 6 E) $\sqrt{13}$

RESOLUCIÓN :



* Se sabe que : $a^2+c^2=125$; $\overline{AP} \perp \overline{CQ}$

* G es baricentro , luego : $GB=2n$ $GR=n$

* Aplicando el Teor. de la Mediana en el ΔABC :

$$a^2+c^2=2(3n)^2+\frac{(2n)^2}{2}$$

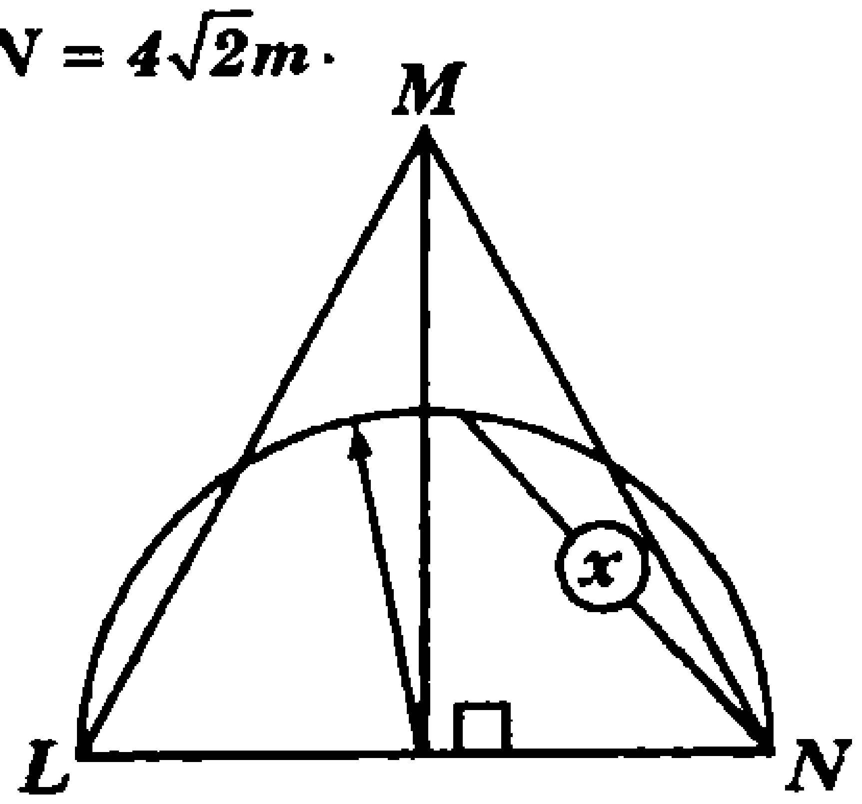
$\Rightarrow 125 = 20n^2$

$\Rightarrow 2n=5 \Rightarrow x=5$

RPTA : "C"

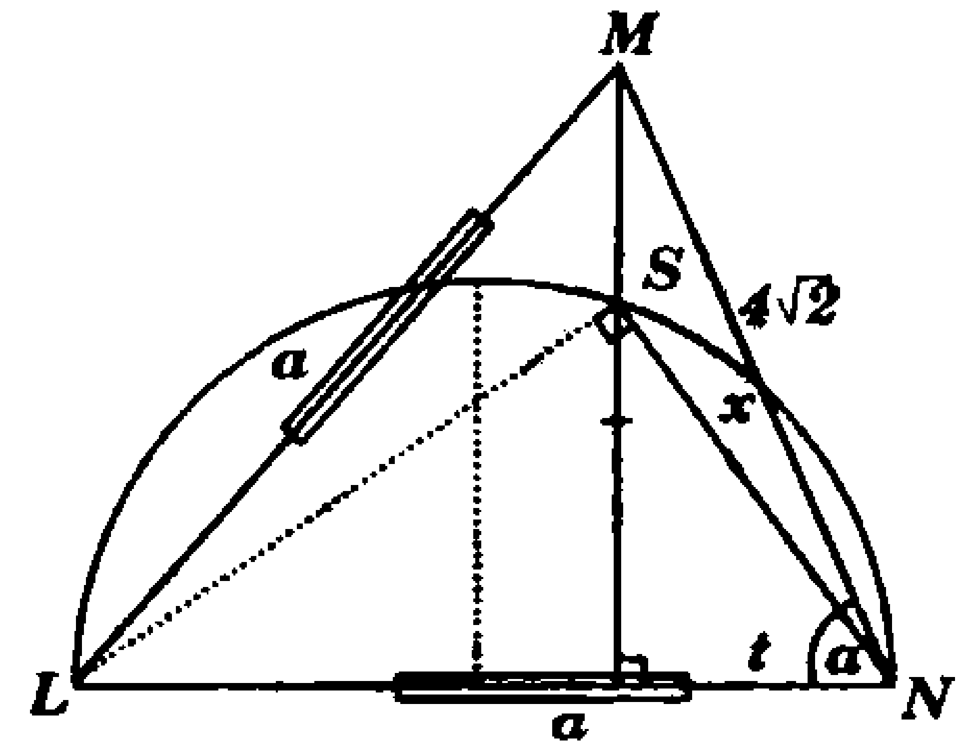
PROBLEMA 16 :

Calcular "x". Si : $LM = LN$ y $MN=4\sqrt{2}m$.



A)$2\sqrt{2}m$ B)$3\sqrt{3}$ C)4,5 D)4,2 E)4

RESOLUCIÓN :



* ⊾ LSN : Relaciones Métricas :

$x^2 = a.t$ .... (I)

* ⊾ MLN : Teorema de Euclides :

$a^2=a^2+(4\sqrt{2})^2-2at$

$\Rightarrow at=16$ ....(II)

* (II) en (I) :

$x^2=16 \Rightarrow x=4$

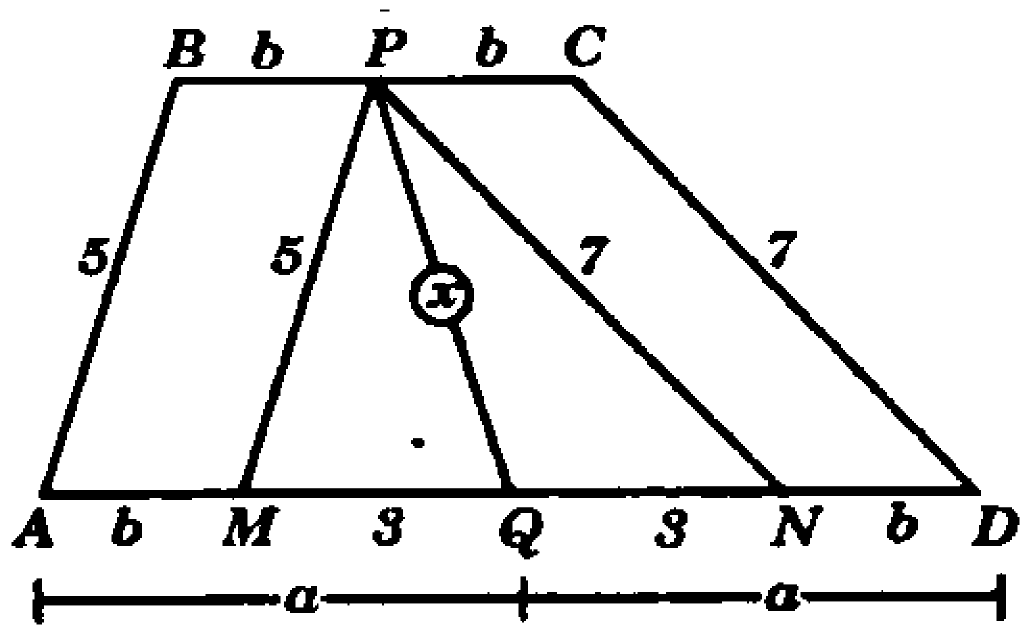
RPTA : "E"

PROBLEMA 17 :

Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases de un trapecio ; sabiendo que los lados laterales miden 5 y 7; y la s bases se diferencian en 6 .

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) 3 D) 1 E) 6

RESOLUCIÓN :



* Se sabe : $AB=5$, $CD=7$

$AD-BC=6$

$\Rightarrow 2a-2b=6$

$\Rightarrow a-b=3$

* Se trazan $\overline{PM} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{PN} \,//\, \overline{CD}$

* Luego : $PM = AB=5$

$PN = CD=7$

* Aplicando el Teor. de la mediana en el ΔMPN :

$$5^2+7^2=2x^2+\frac{6^2}{2} \Rightarrow x=2\sqrt{7}$$

RPTA : "B"

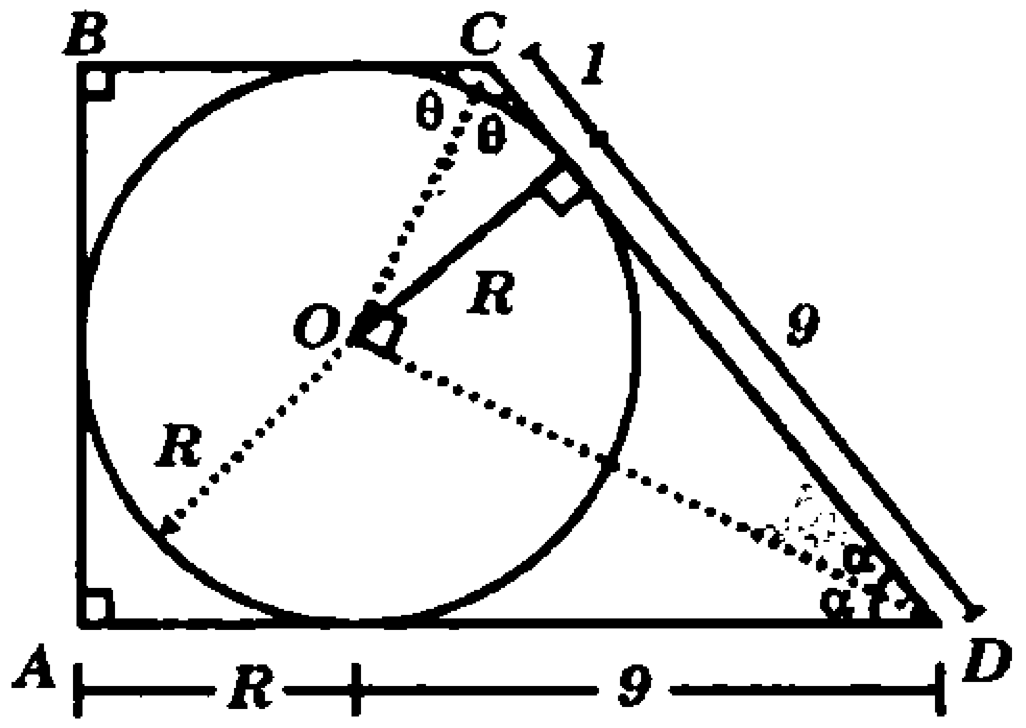
PROBLEMA 18 :

El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un

trapecio rectángulo , divide al mayor de los lados no paralelos en dos segmentos que miden *1m* y *9m* respectivamente. Luego la base mayor mide :

A)12m B)10m C)13m D)14m

RESOLUCIÓN :



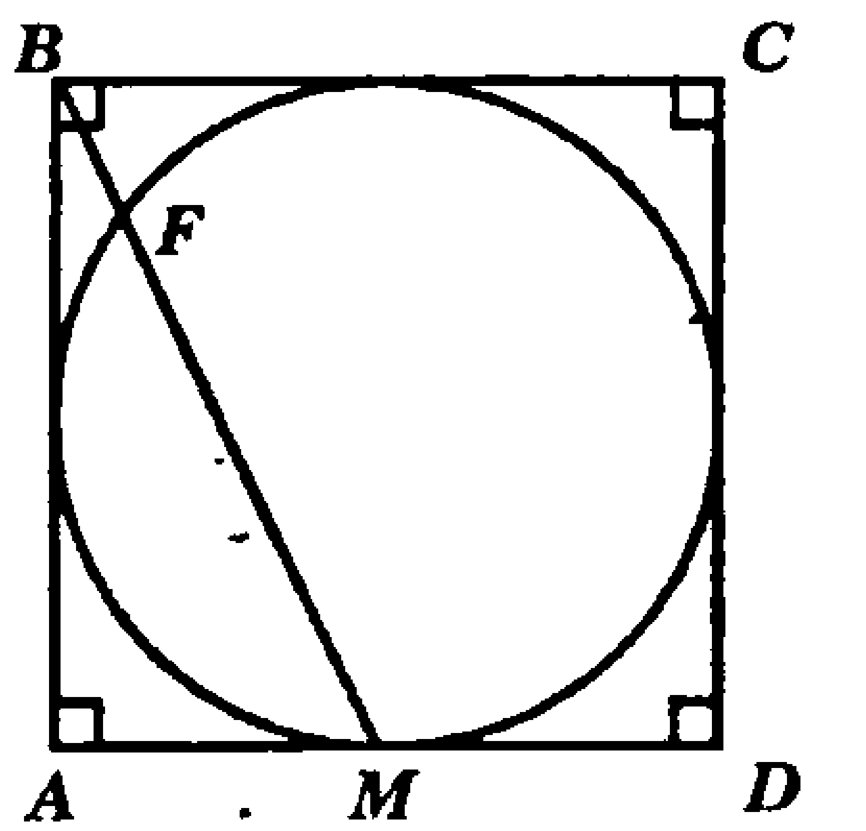
* Piden AD
* Se observa $AD = 9 + R$

  $\triangle COD : R^2 = (1)(9)$
* Luego : $R=3 \Rightarrow AD=12m$

RPTA : "A"

PROBLEMA 19 :

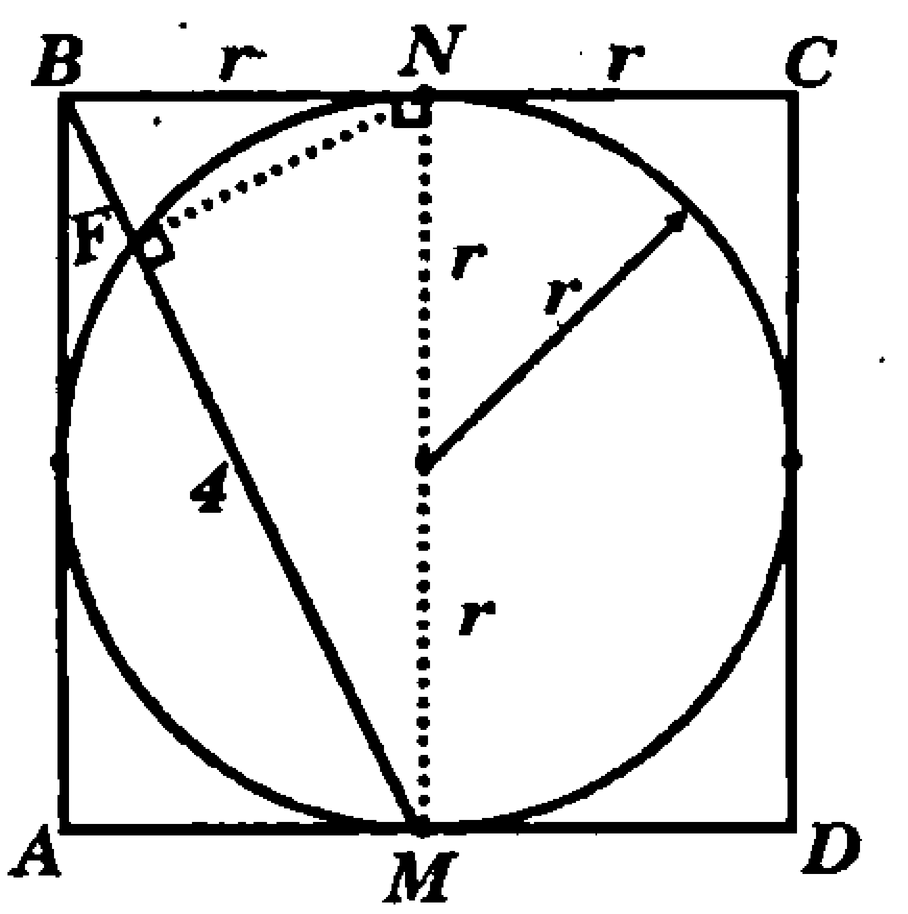
En la siguiente figura , *M* es el punto de tangencia. Si $FM = 4u$, entonces la longitud de la circunferencia es:



A) $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ *B)* 3π *C)* $2\sqrt{5}\pi$ *D)* π *E)* $\sqrt{5}\pi$

RESOLUCIÓN :

* Dato : $FM = 4u$



* Si "*r*" es la medida del radio , la longitud de la circunferencia es :

$$L = 2pr$$

* Uniendo *M* con N (puntos de tangencia) y *N* con *F* , resulta el triángulo rectángulo *BNM* (recto en *N*) cuya altura relativa a la hipotenusa es $\overline{NF}$.
* Entonces : $BN = r$, $MN=2r$ y por el Teorema de Pitágoras ,

$$BM = \sqrt{4r^2 + r^2} = r\sqrt{5}$$

* Según una relación métrica se cumple :

$$MN^2 = BM \times FM$$

* Por tanto :

$$(2r)^2 = (r\sqrt{5})(4)$$

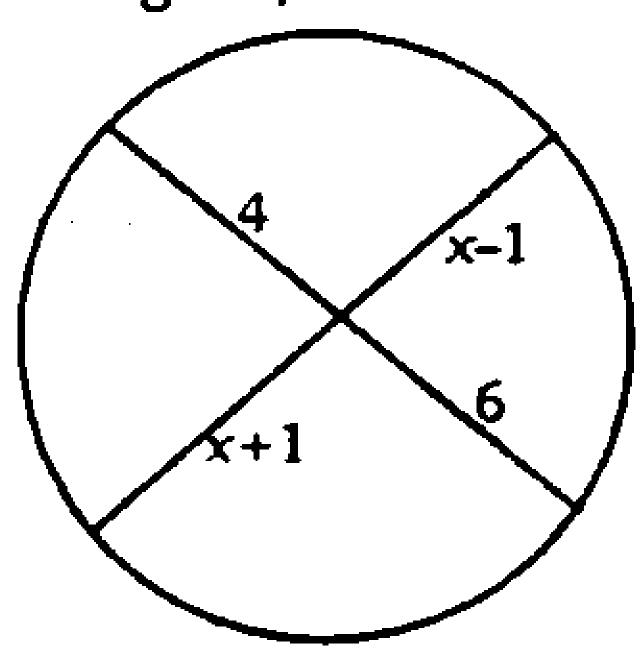
$$\Rightarrow 4r^2 = 4r\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{5}u \Rightarrow L = 2\pi\sqrt{5}$$

RPTA : "C"

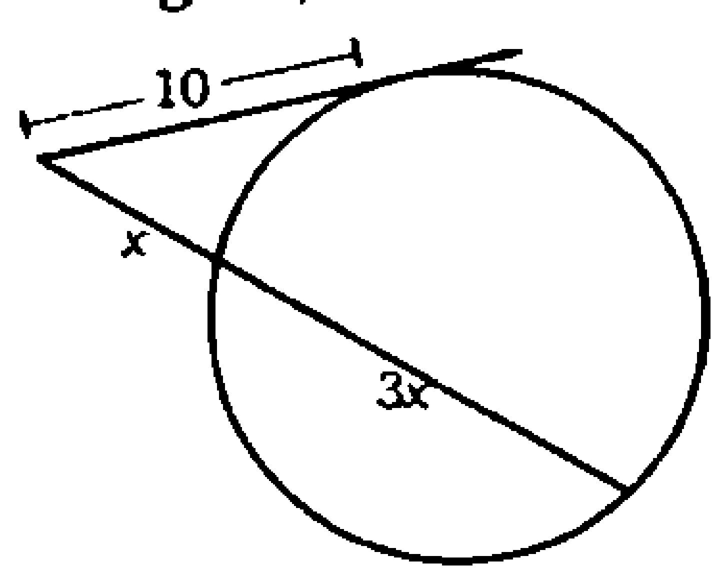
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En la figura, calcule *x*.



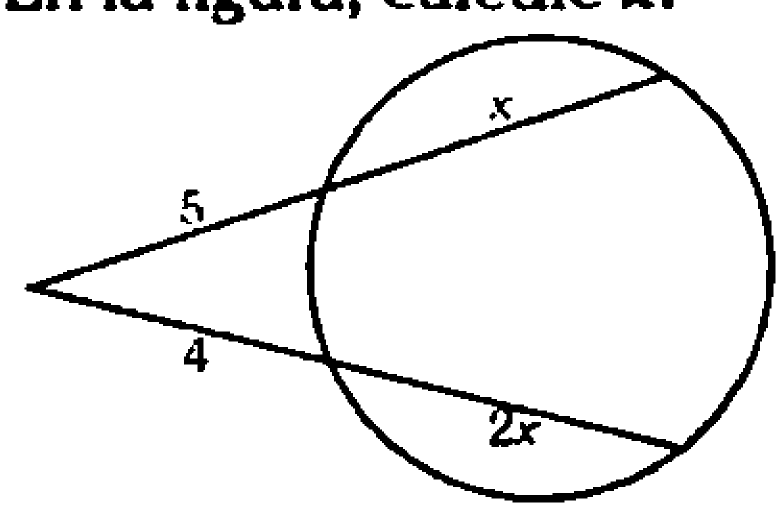
RPTA.: ....

02 En la figura, calcule *x*.



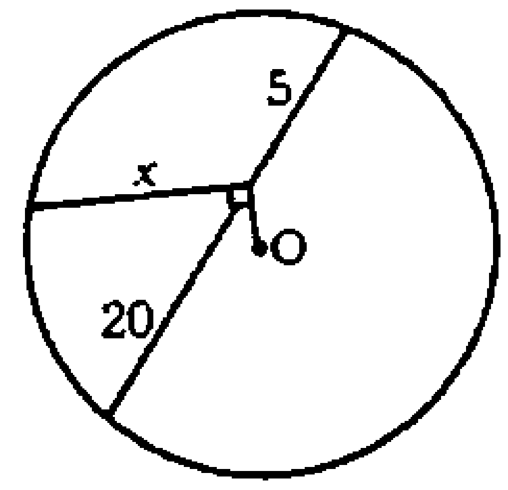
RPTA.: ....

03 En la figura, calcule *x*.



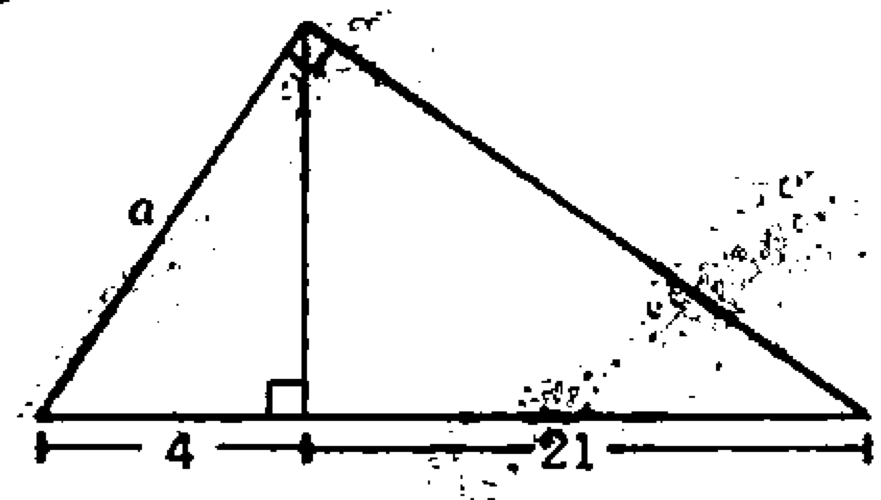
RPTA.: ....

04 Calcule *x*, si *O* es centro.



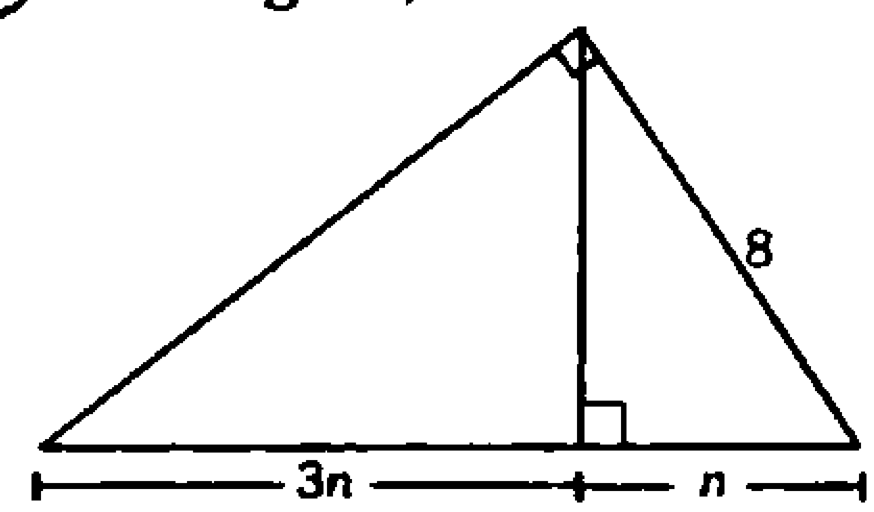
RPTA.: ....

05 En la figura, calcule *a*.



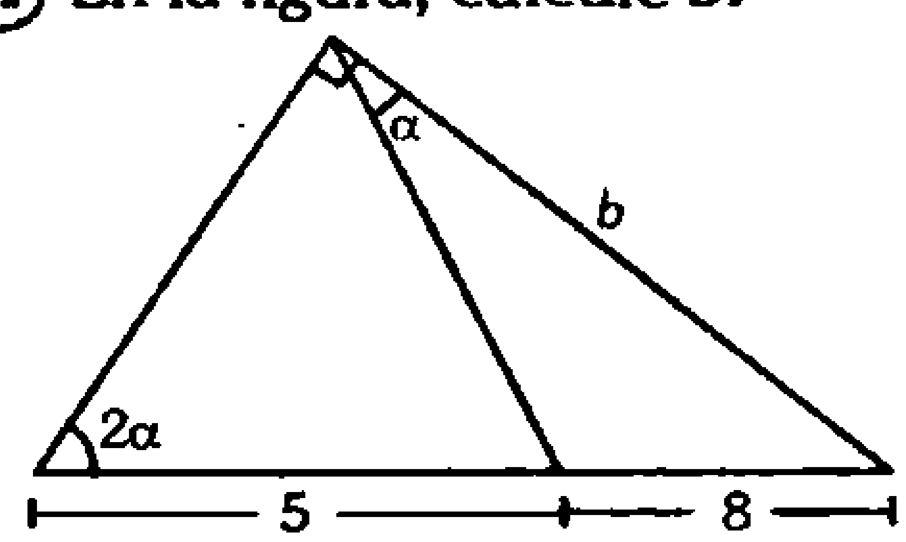
RPTA.: ....

06 En la figura, calcule *n*.



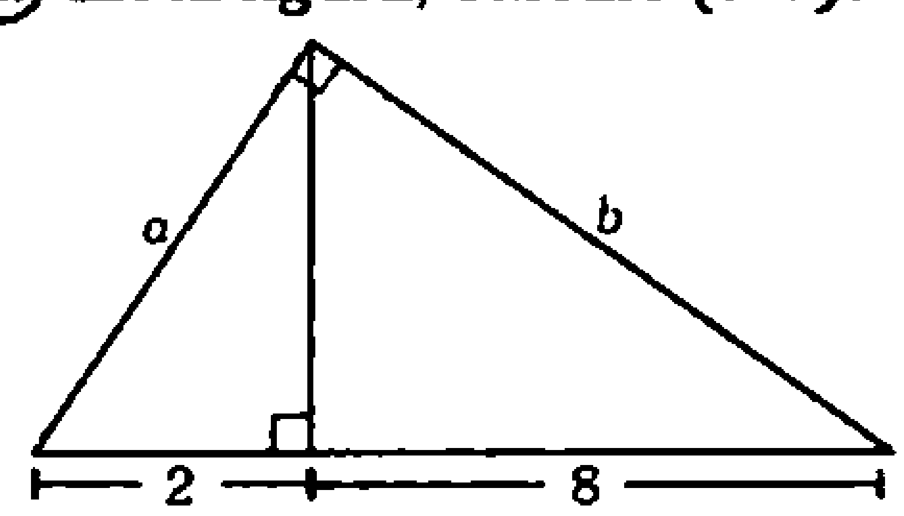
RPTA.: ....

07 En la figura, calcule *b*.



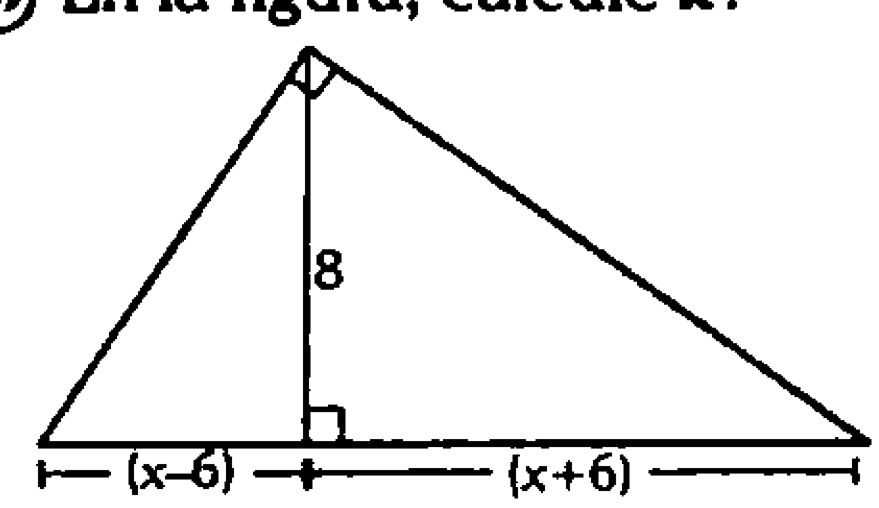
RPTA.: ....

08 En la figura, calcule *(a.b)*.



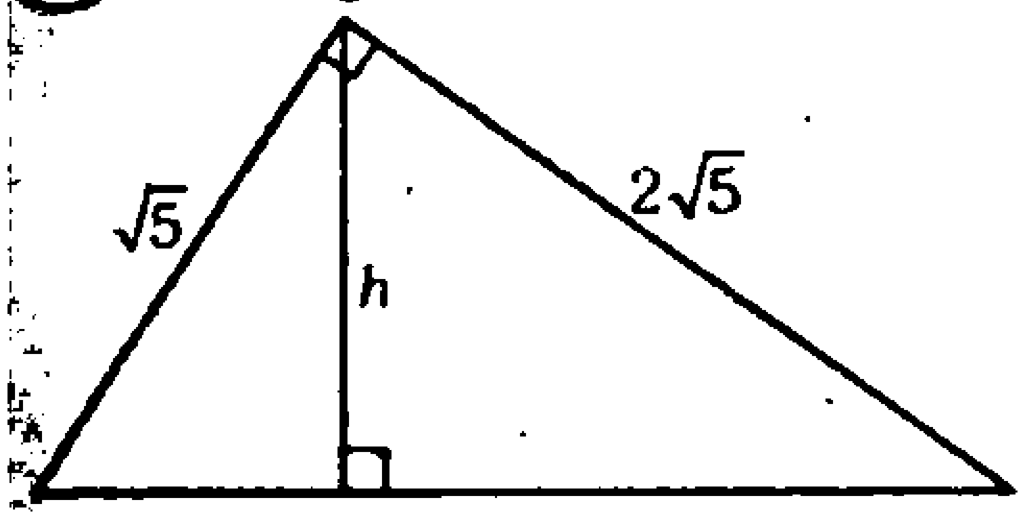
RPTA.: ....

09 En la figura, calcule *x*.



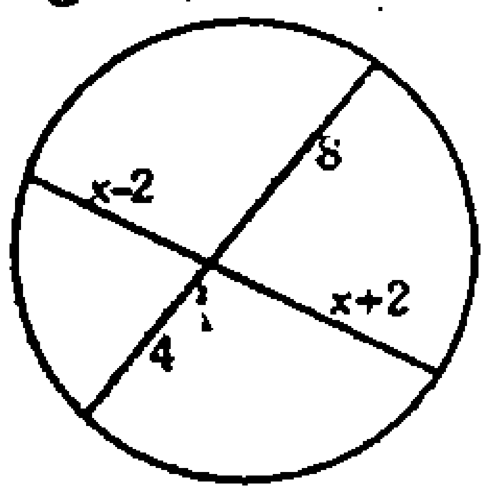
RPTA.: ....

10 En la figura, calcule *h*.



RPTA.: ....

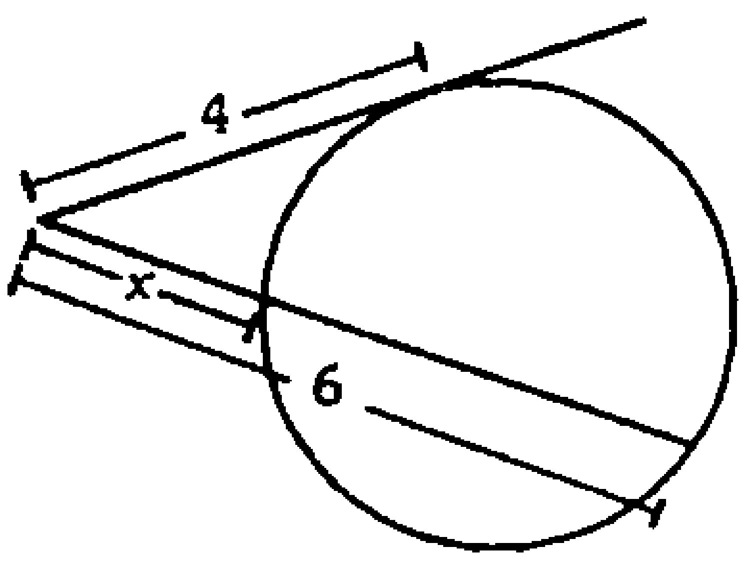
11 En la figura, calcule *x*.



A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

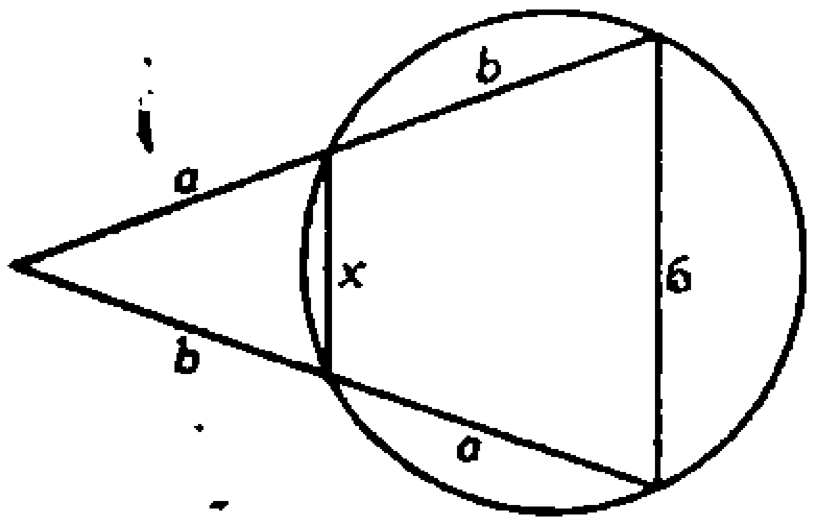
RPTA.: ....

12 En la figura, calcule *x*.



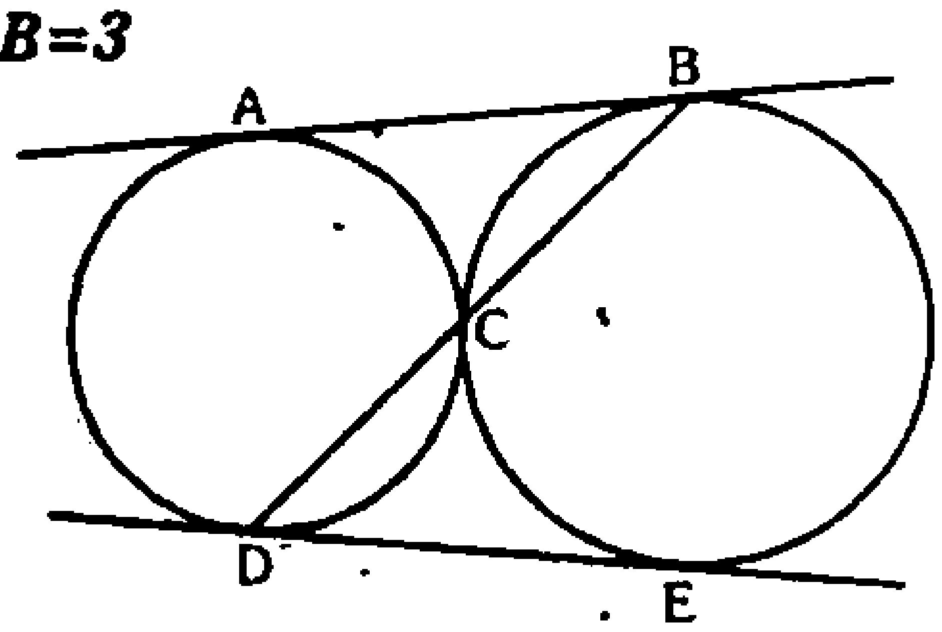
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

13 En la figura, calcule *x*.



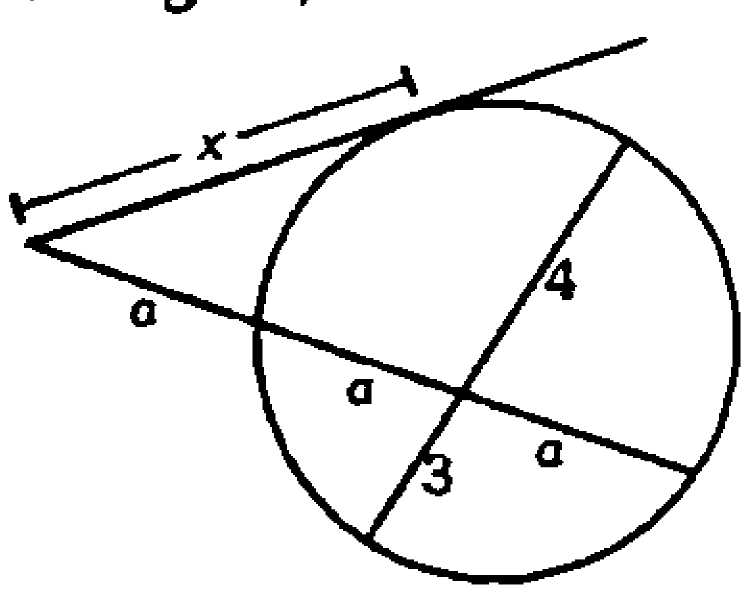
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

14 En la figura, calcule *BD* si: *AB=3*



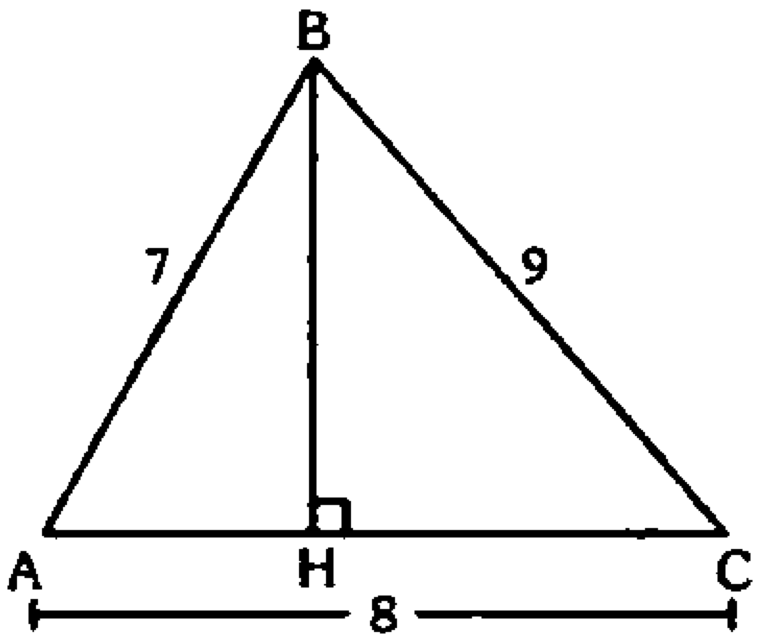
A) 7 B) 6 C) $3\sqrt{2}$ D) 4 E) 8

15 En la figura, calcule *x*.



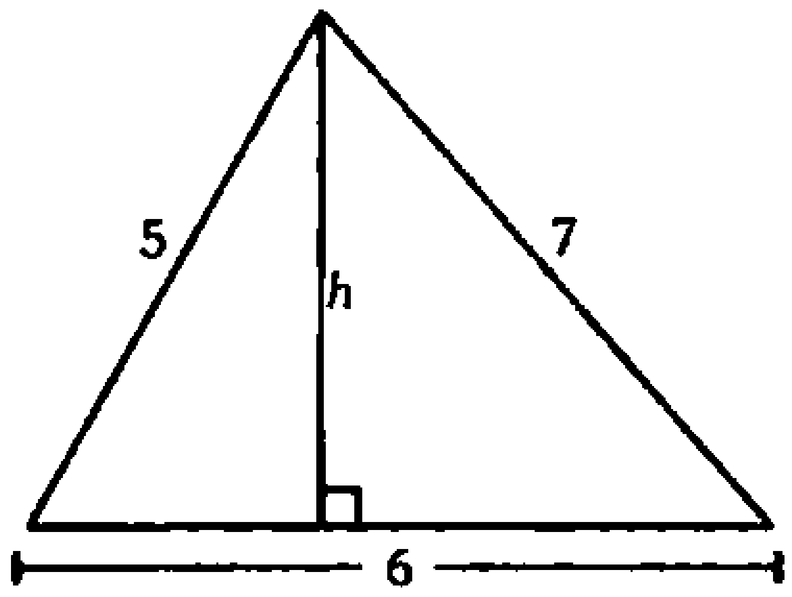
A) 4
B) 5
C) 8
D) 7
E) 6

16 En la figura, calcule *AH*.



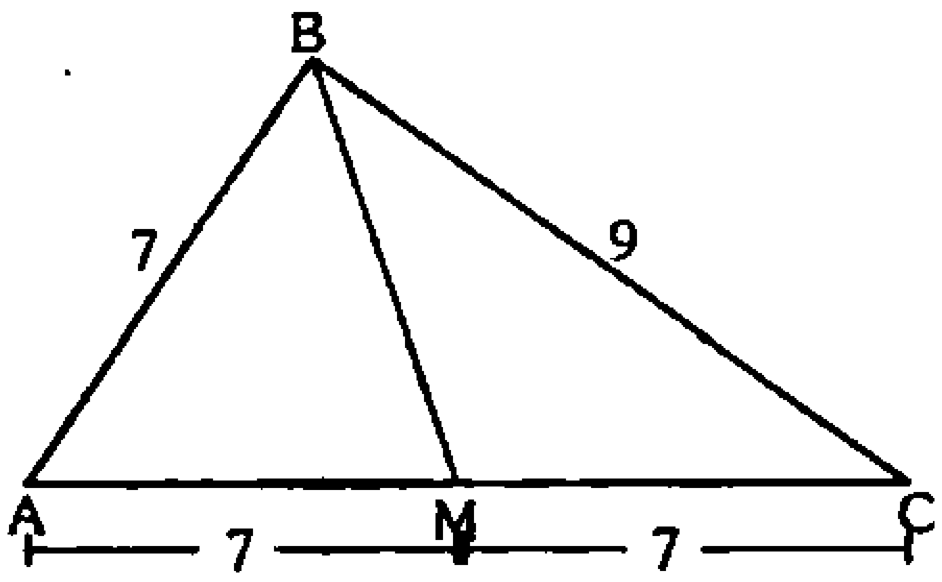
RPTA.: ....

17 En la figura, calcule *h*.



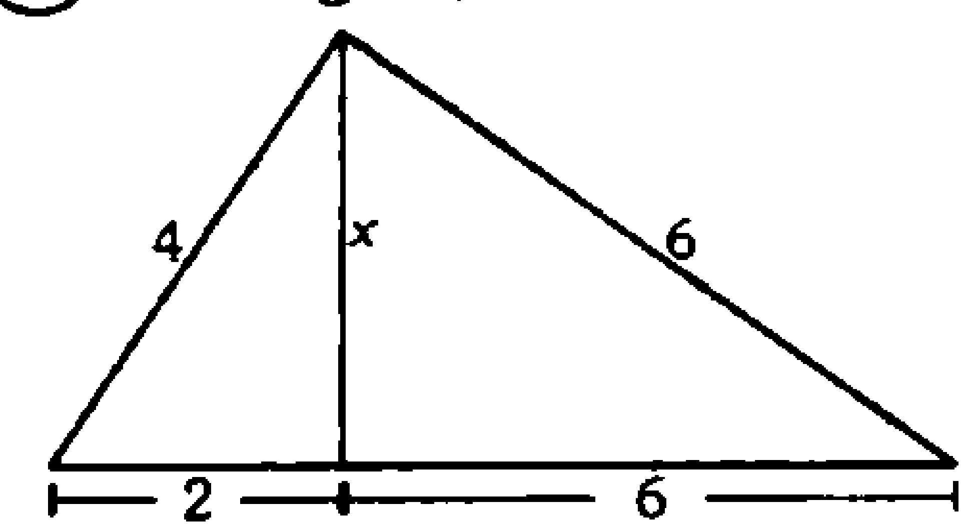
RPTA.: ....

18 En la figura, calcule *BM*.



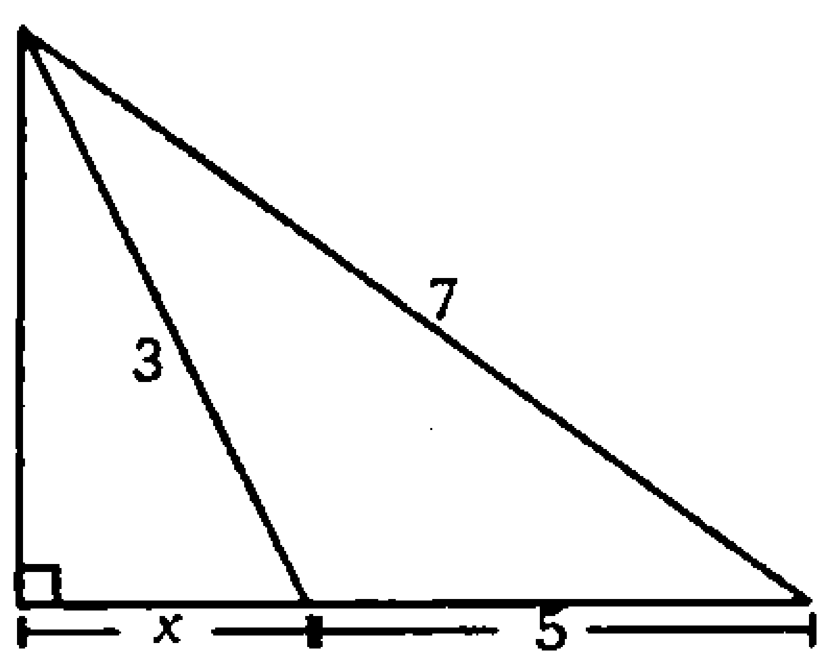
RPTA.: ....

19 En la figura, calcule *x*.



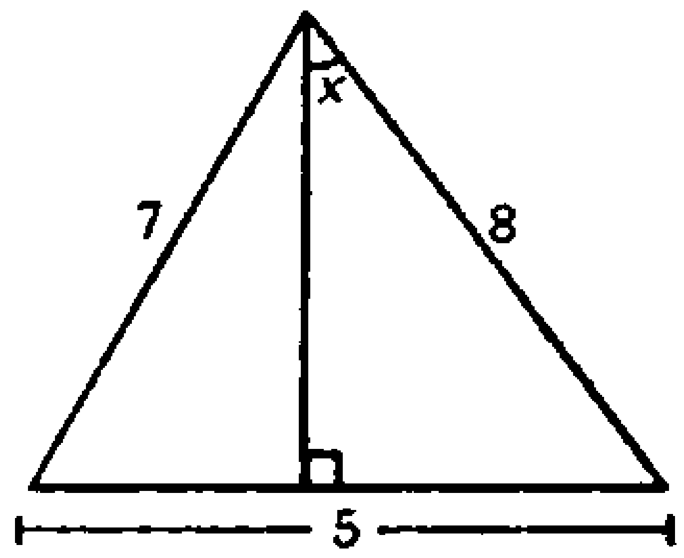
RPTA.: ....

20 En la figura, calcule *x*.



RPTA.: ....

21 En la figura, calcule x.



RPTA.: ....

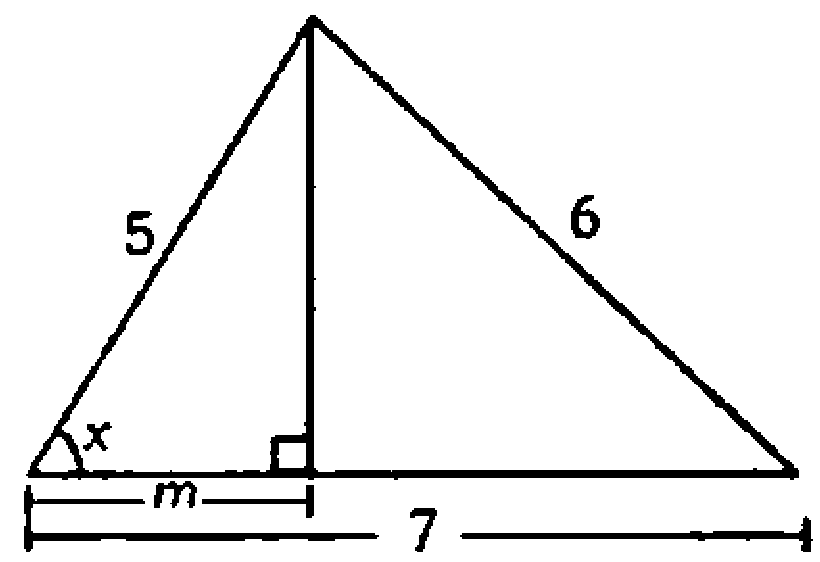
22 Los lados de un triángulo miden *3; 25* y *26*. Calcule la medida de la mayor altura

RPTA.: ....

23 Los lados de un triángulo miden $\sqrt{10}$*;4* y *6*. Calcule la medida de la menor mediana.

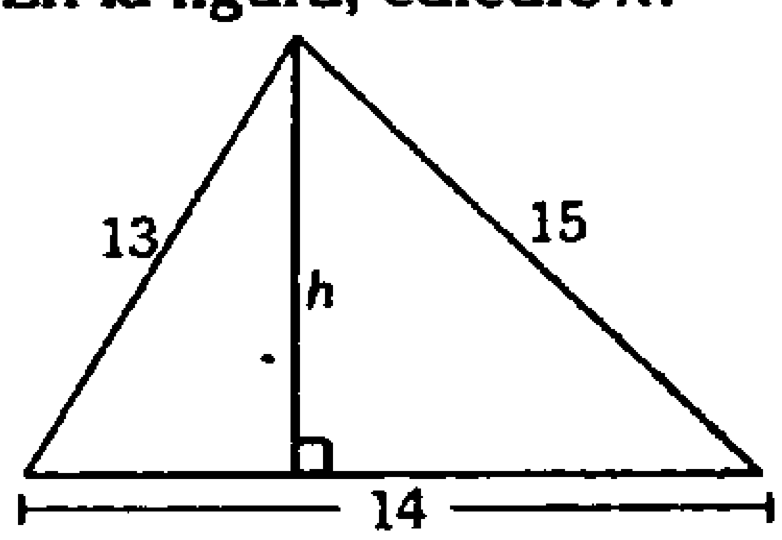
RPTA.: ....

24 En la figura, calcule *m*.



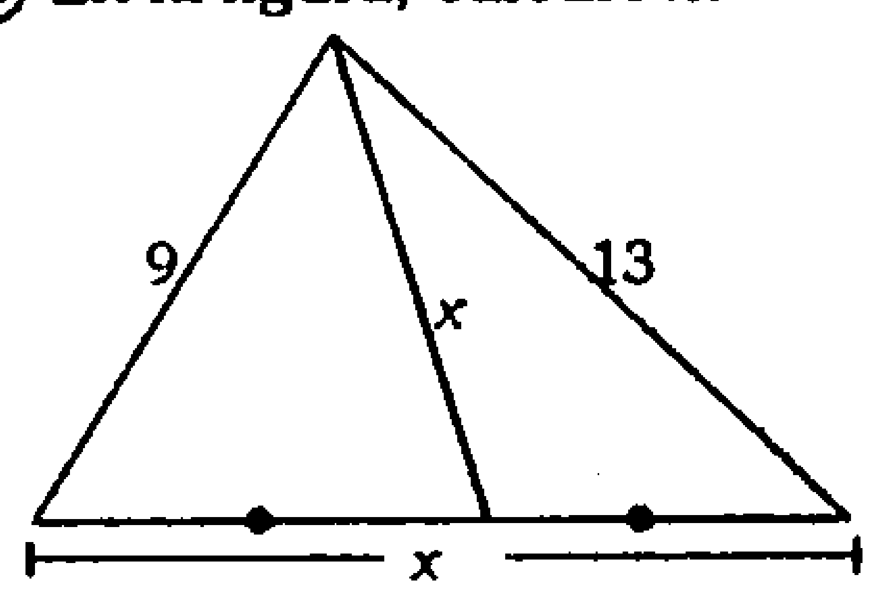
A) 18/5 B) 16/5 C) 19/7
D) 13/6 E) 17/3

25 En la figura, calcule *h*.



A) 5 B) 8 C) 7 D) 9 E) 12

26 En la figura, calcule *x*.



A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 10

27 En un triángulo los lados miden *3; 5* y *7*. Calcular la medida de su mayor ángulo interno.

A) 75 B) 45 C) 53 D) 120 E) 150

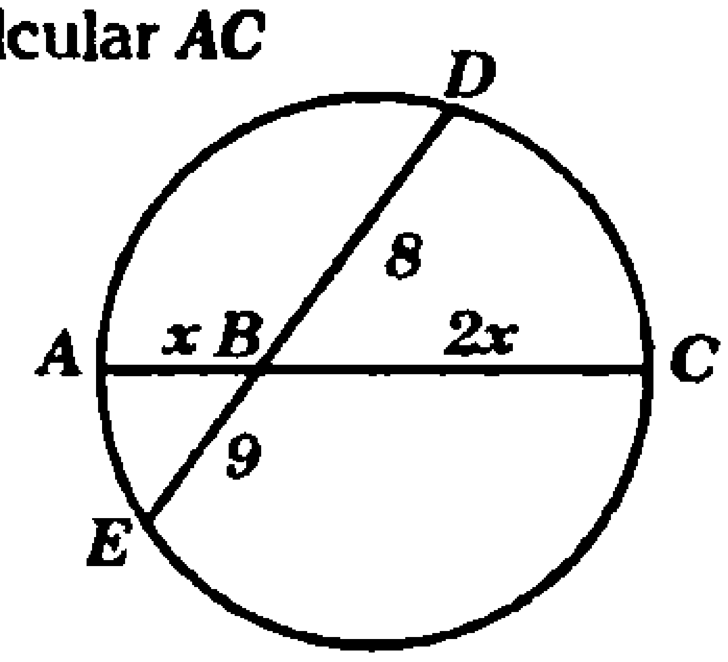
28 Dos lados de un triángulo

miden *6* y *8*. Si forman un ángulo agudo, calcule el máximo valor entero que puede tomar el tercer lado.

A)10 B)11 C)9 D)8 E)7

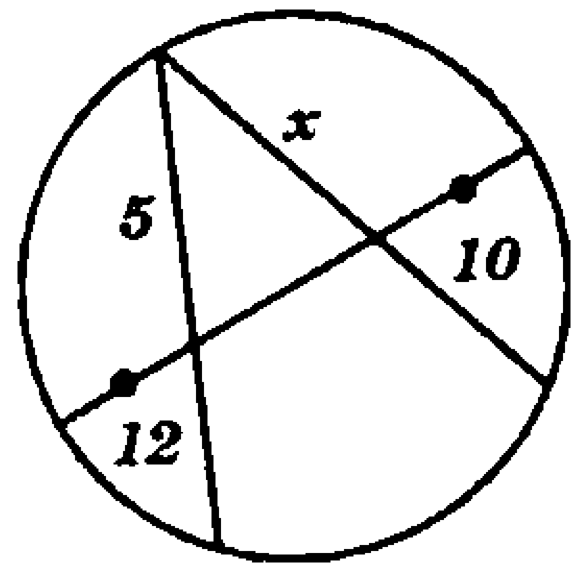
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular *AC*



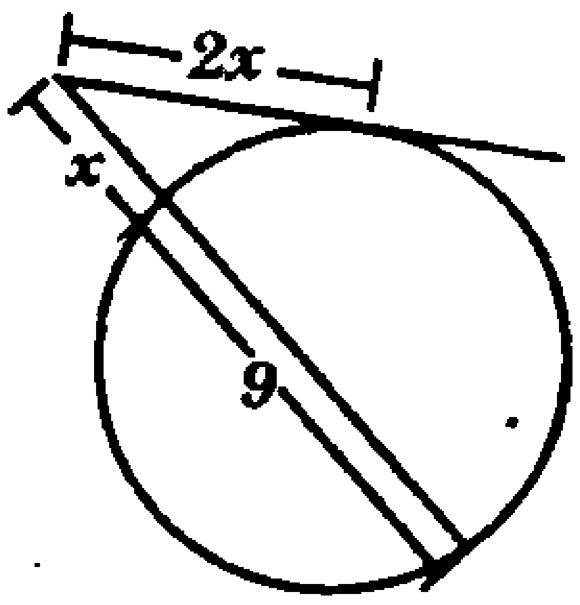
A) 4
B) 12
C) 18
D) 16
E) 20

02 Calcular "*x*"



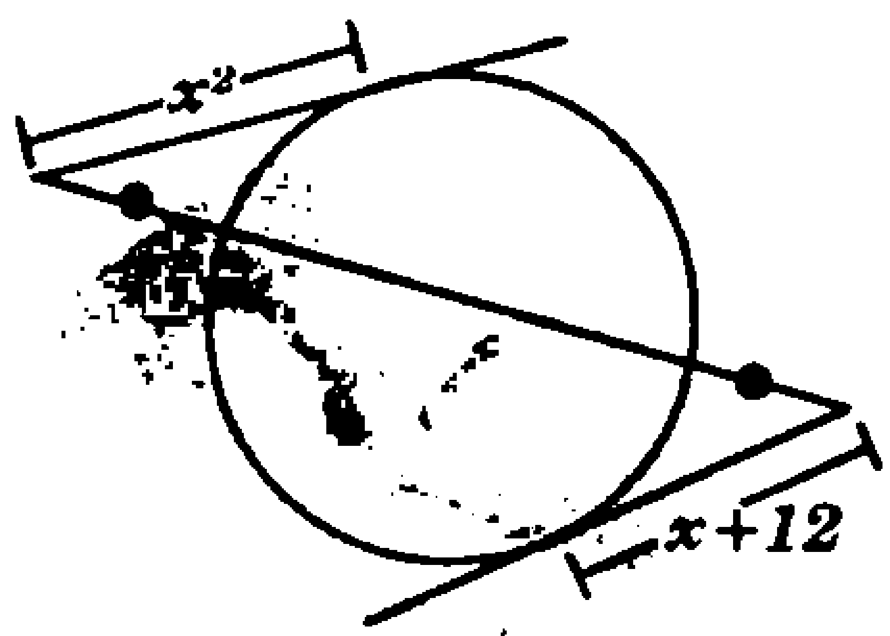
A) 6
B) 5
C) 7
D) 8
E) 9

03 Calcular "*x*"



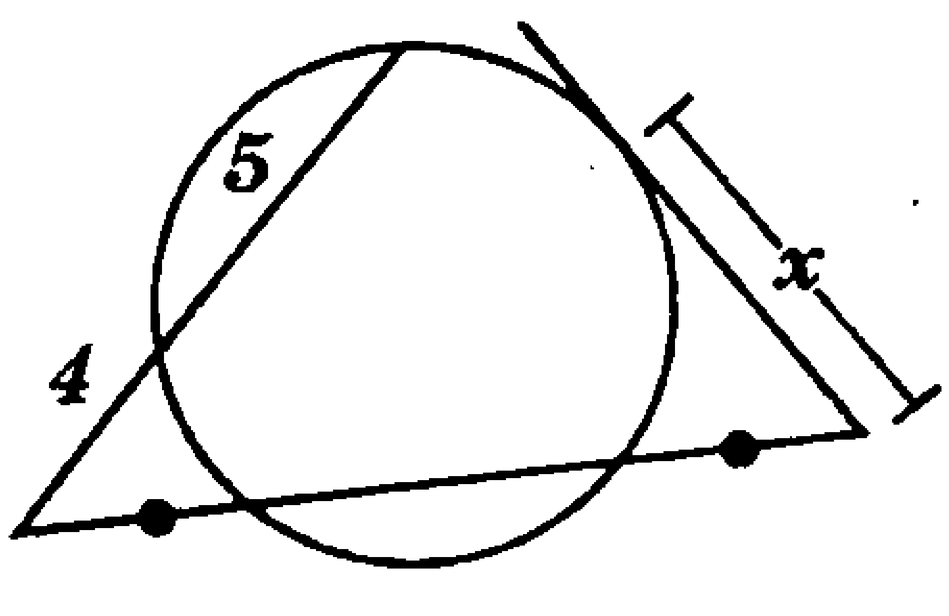
A) 3
B) 2
C) 4
D) 6
E) 8

04 Calcular "*x*"



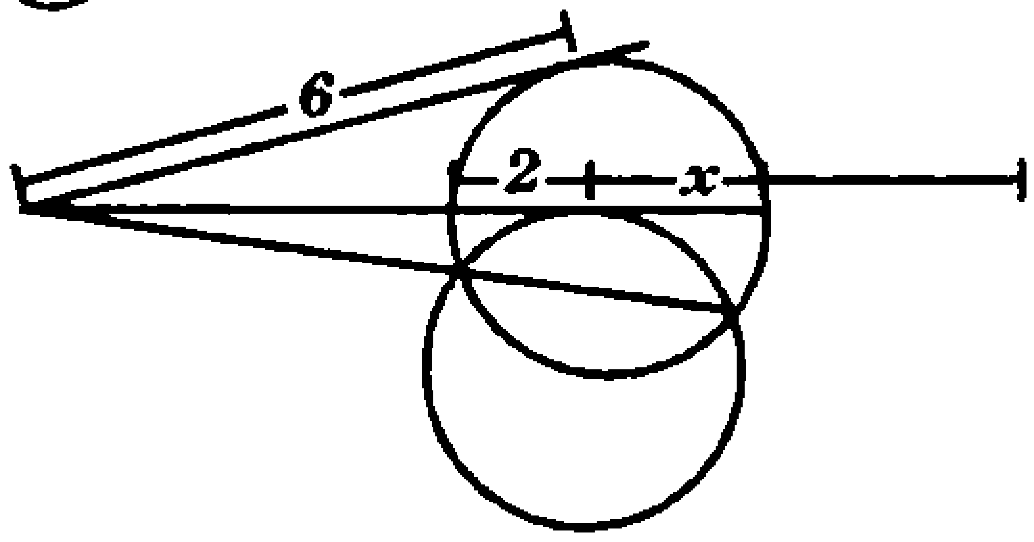
A) 3
B) 2
C) 4
D) 6
E) 5

05 Calcular "*x*".



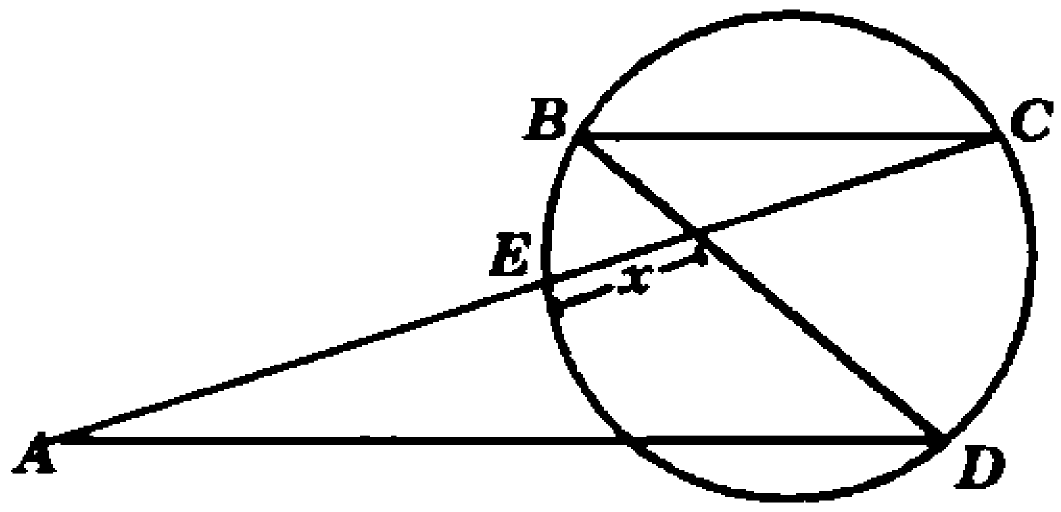
A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 8

06 Calcular "*x*".



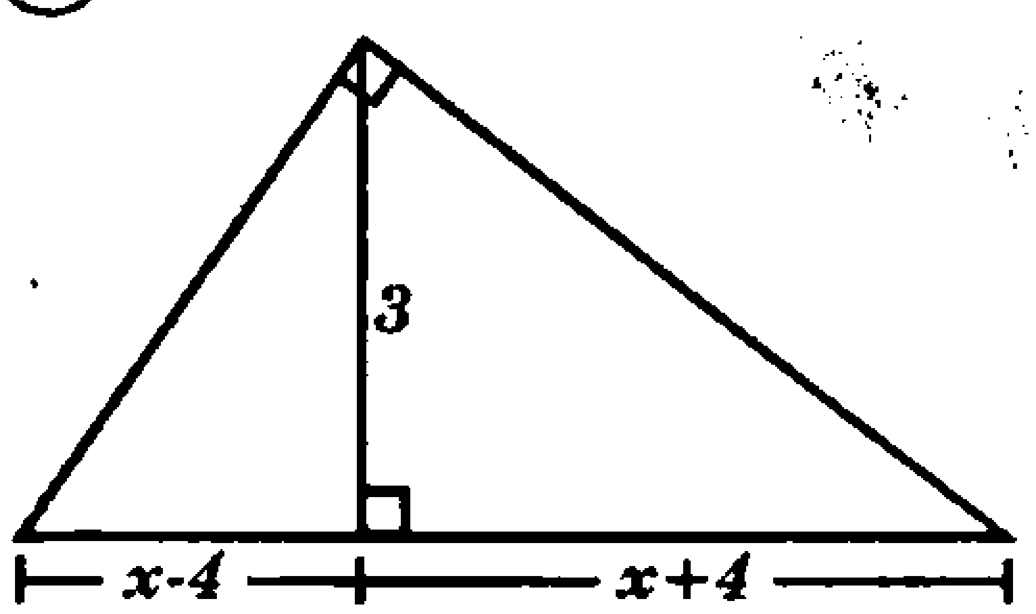
A) 2 B) 3 C) 4 D) 1,5 E) 2,5

07 Calcular "*x*", si $\overline{BC} // \overline{AD}$; *BF=3 ; FC = 4* y *AF = 16.*



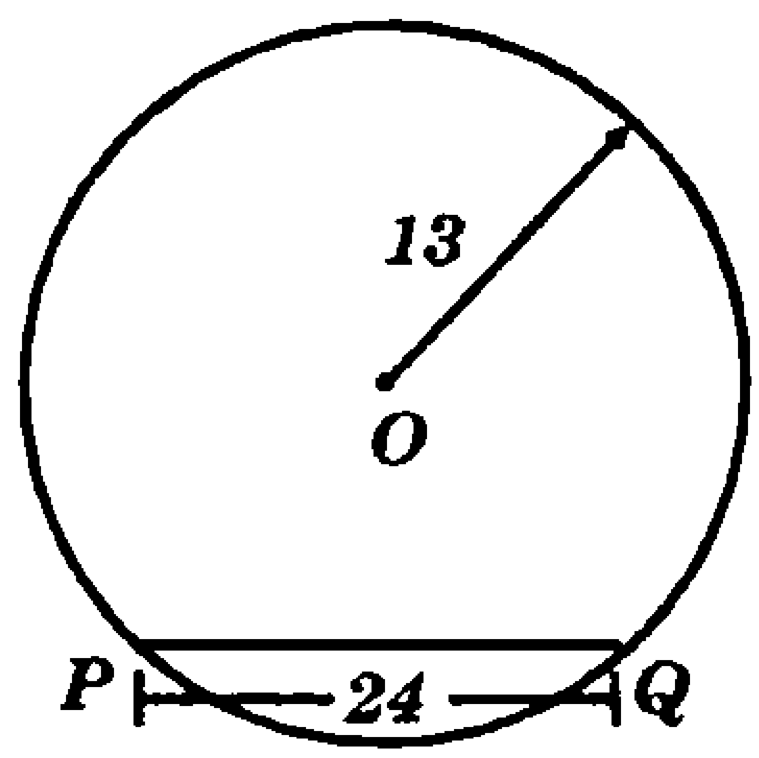
A) 6 B) 4 C) 8 D) 9 E) 12

08 Calcular "*x*".



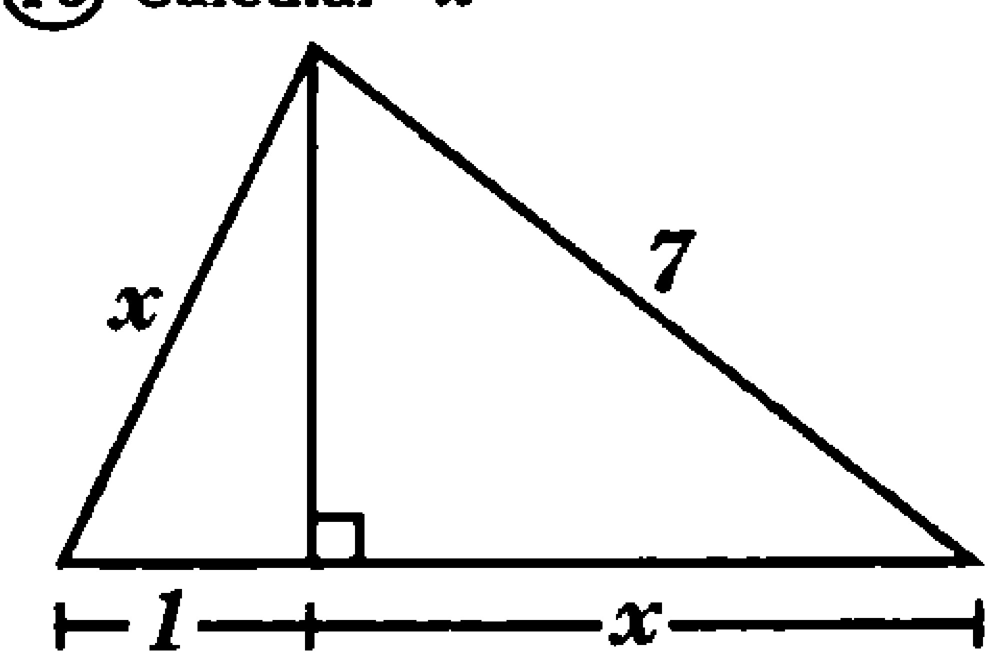
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

09 Calcular la distancia de "*O*" a la cuerda *PQ*.



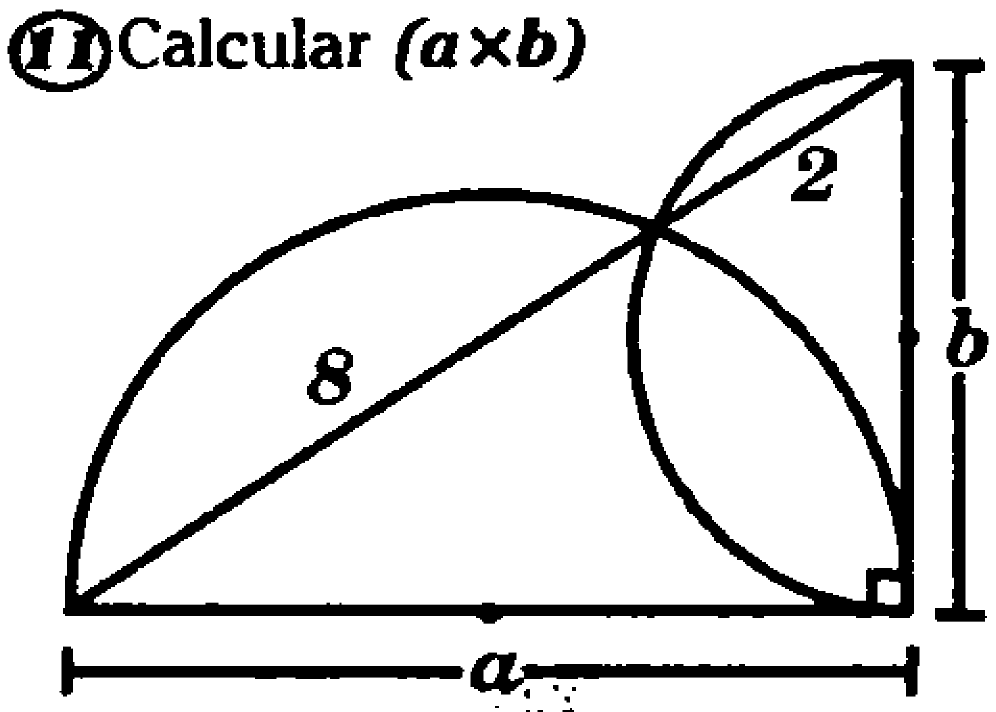
A) 8 B) 10 C) 6 D) 4 E) 5

10 Calcular "*x*"



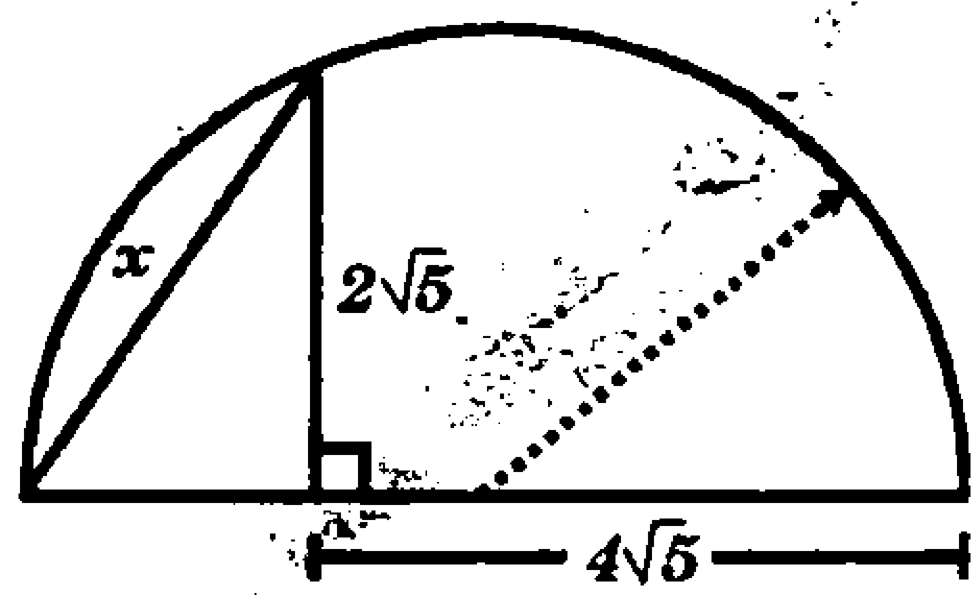
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

11 Calcular $(a \times b)$



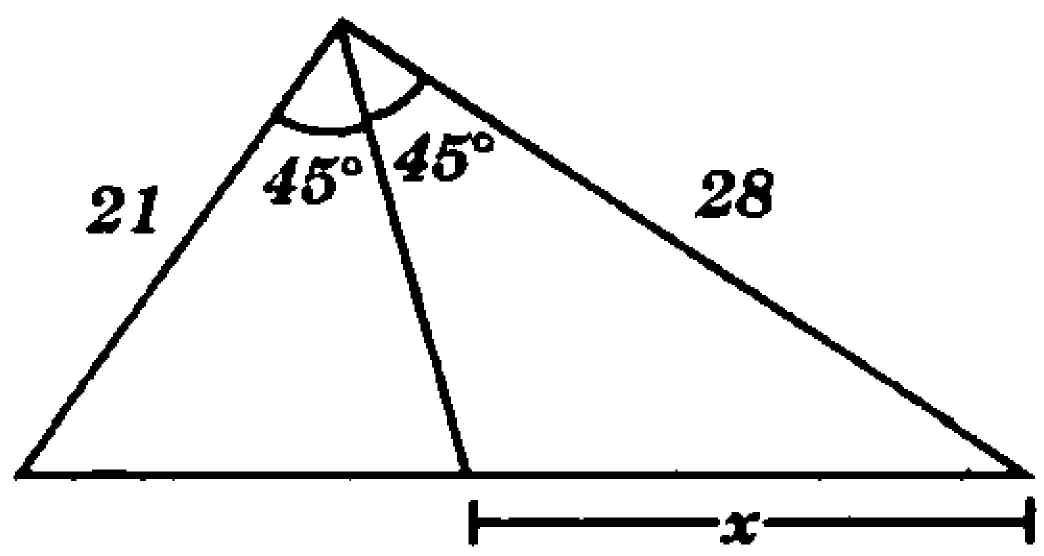
A) 16 B) 30 C) 40 D) 32 E) 64

12 Calcular "*x*"



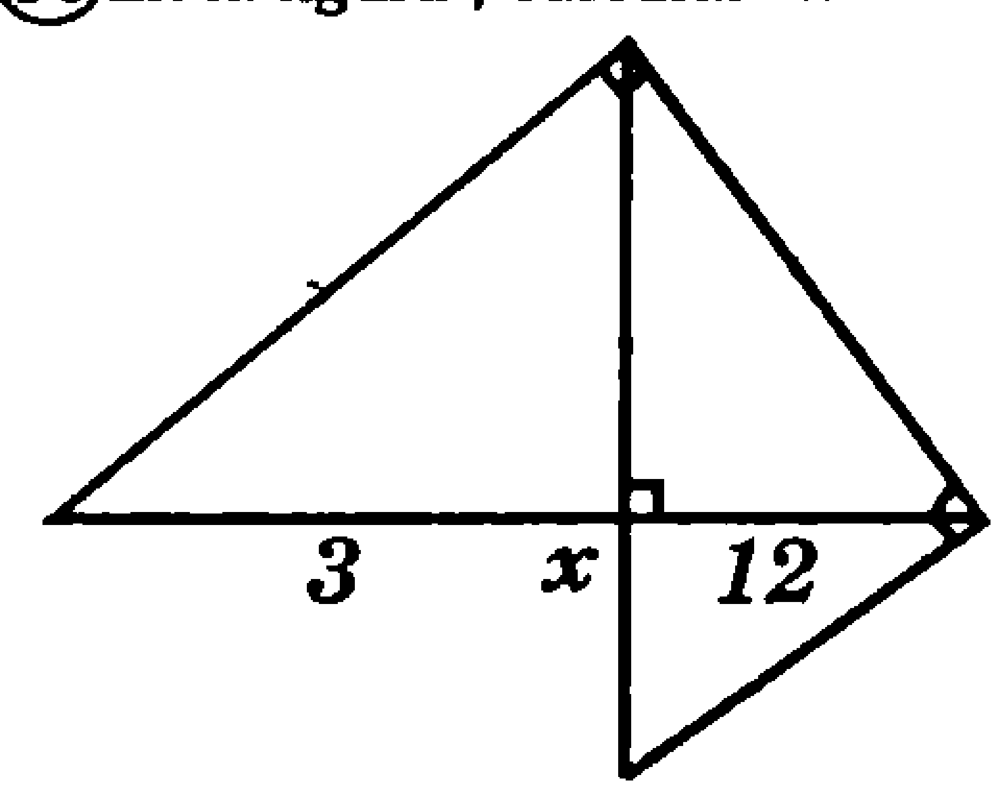
A)$3\sqrt{5}$ *B)* $5\sqrt{5}$ *C)10 D)5 E)15*

13 Calcular "*x*"



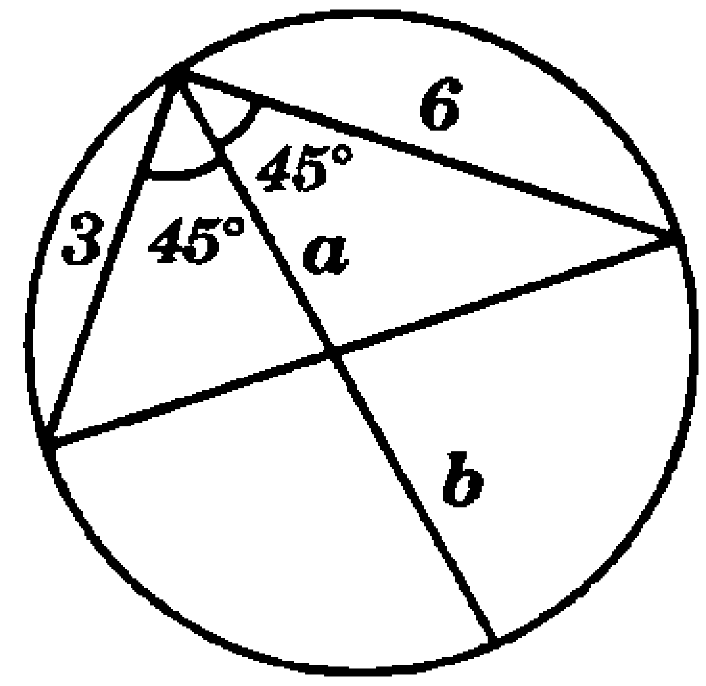
A) 15 B) 25 C) 20 D) 18 E) 16

14 En la figura , calcular "*x*"



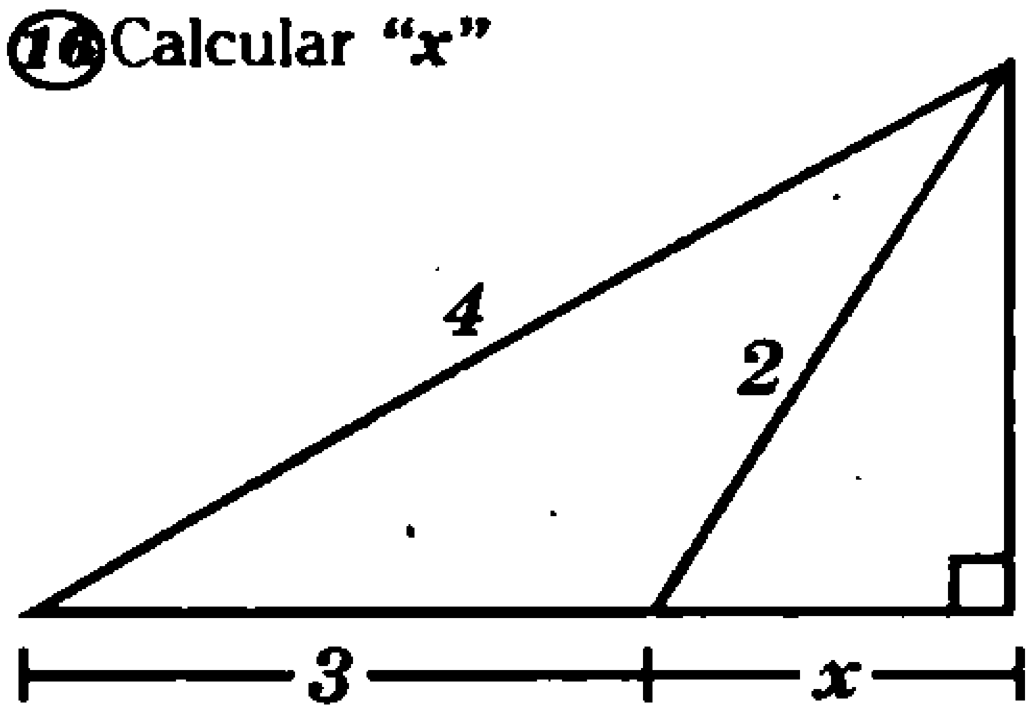
A) 12 B) 24 C) 18 D) 16 E) 36

15 Calcular *(a.b)*



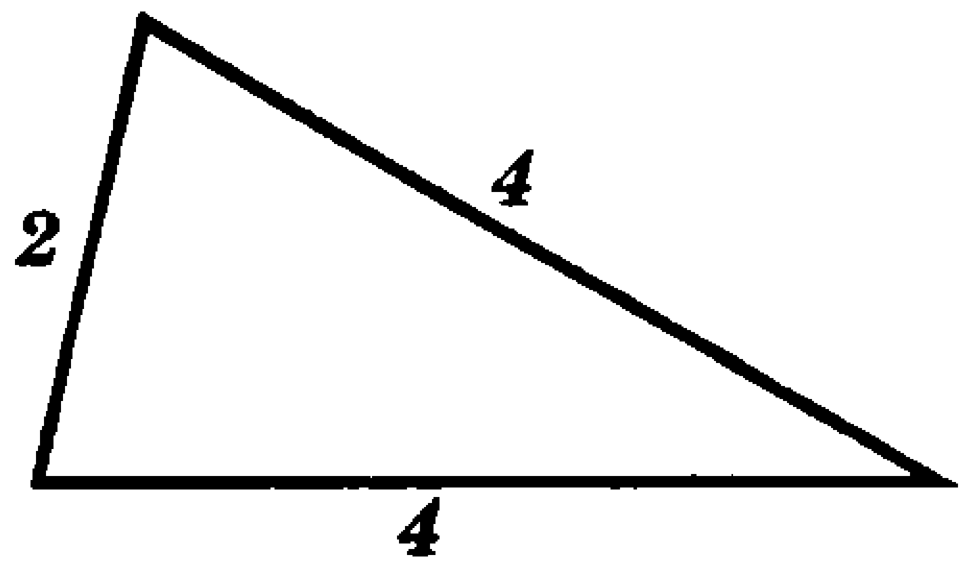
A) 18 B) 9 C) 12 D) 10 E) 15

16 Calcular "x"



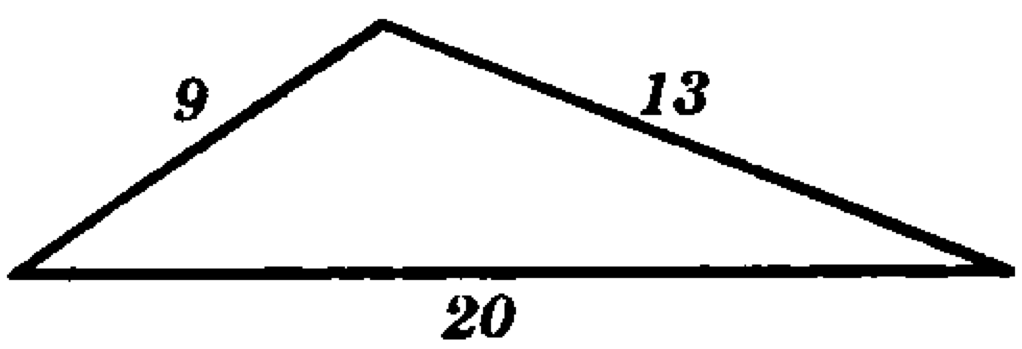
A) 1 B) 0,5 C) 0,75 D) 1,5 E) 1,2

17 Calcular la suma de las alturas congruentes.



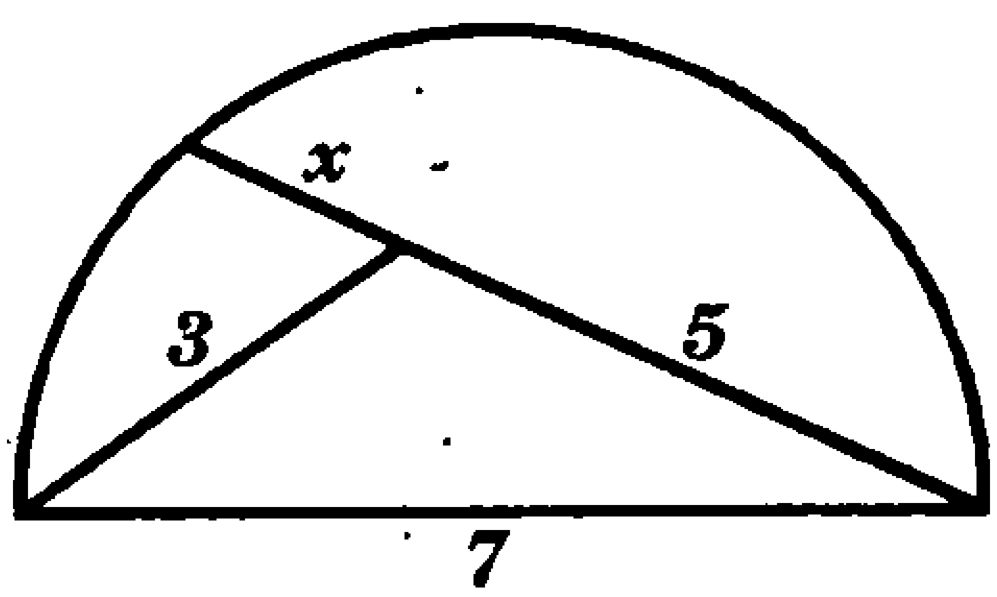
A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{10}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{6}$

18 En la figura, calcular la medida de la menor mediana.



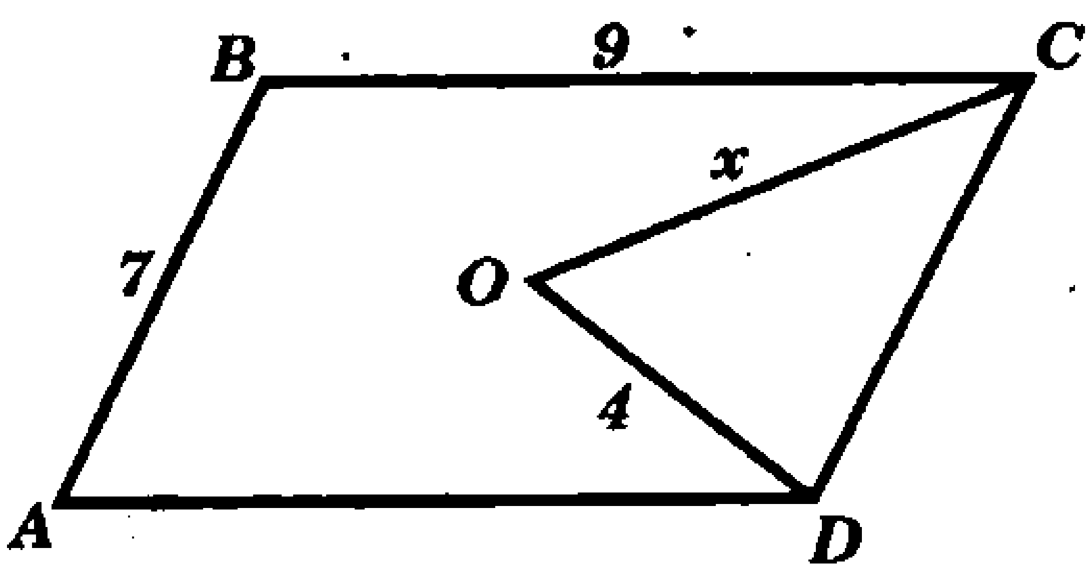
A) 15 B) 12 C) 10 D) 6 E) 5

19 En la semicircunferencia, calcular "x".



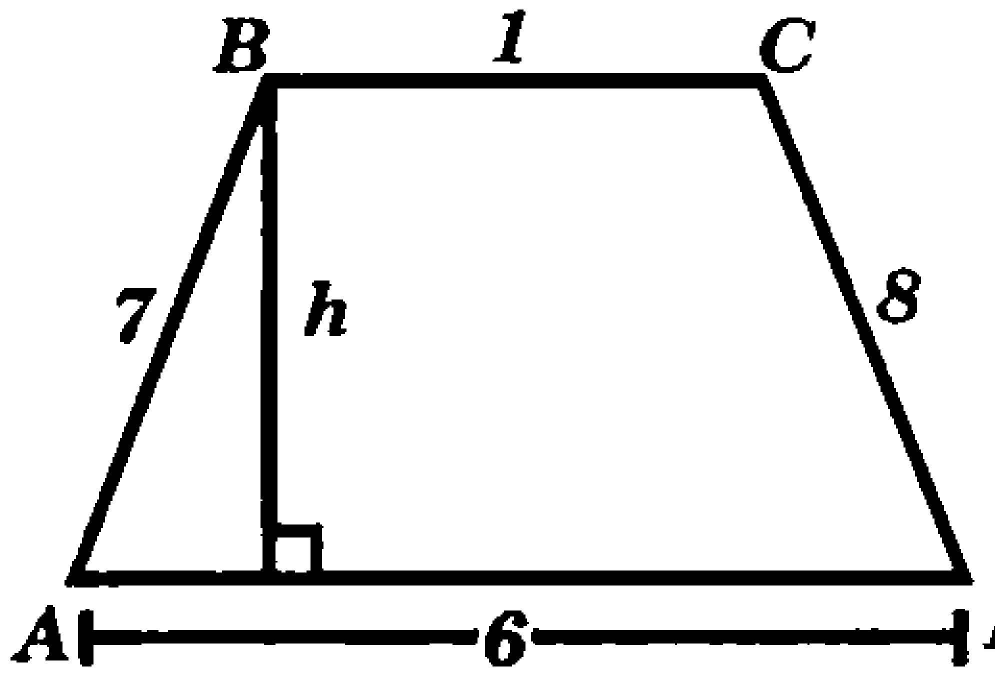
A) 2 B) 1 C) 2,5 D) 1,5 E) 0,5

20 Si "O" es centro del romboide, calcular "x".



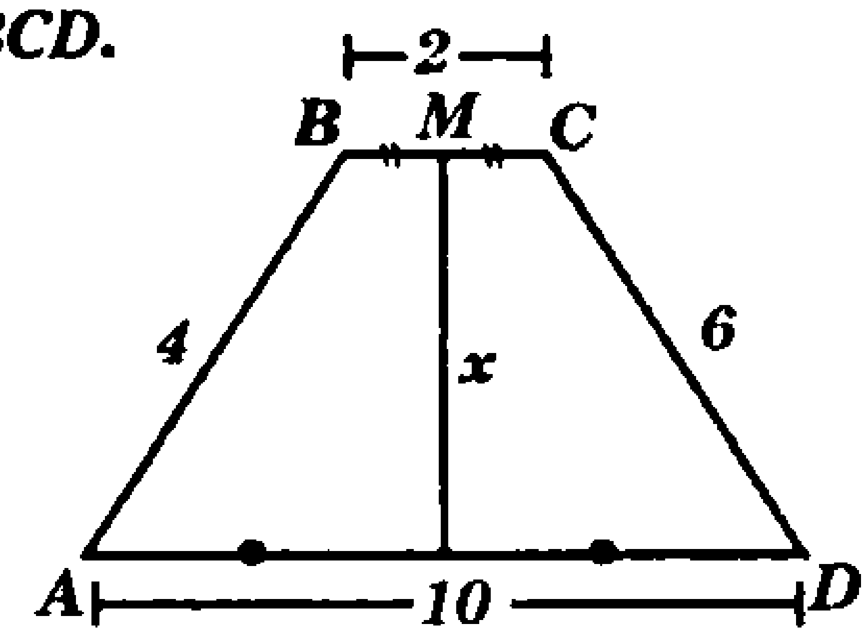
A) 7 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

21 Calcular "h" en el trapecio ABCD



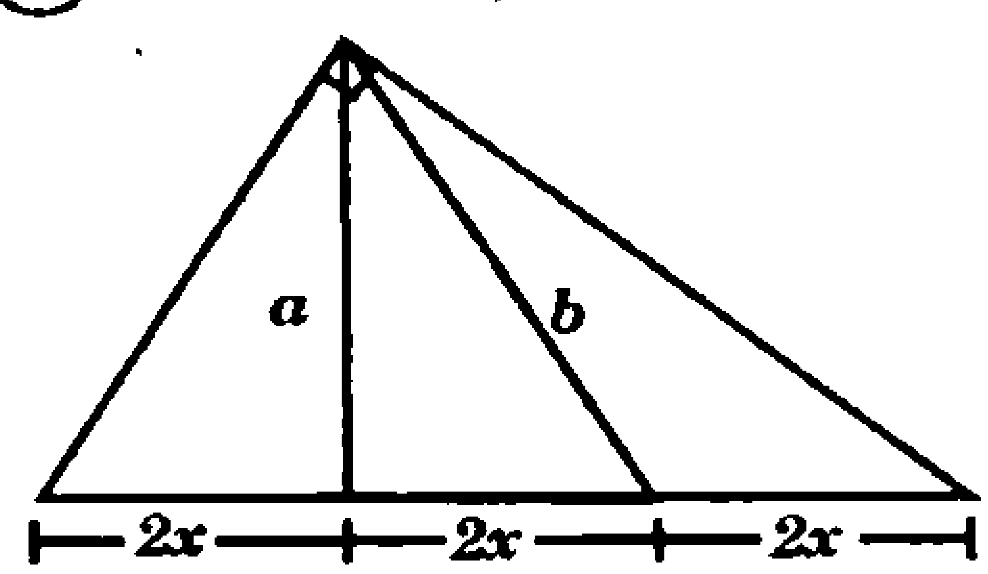
A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{15}$

22 Calcular "x" en el trapecio ABCD.



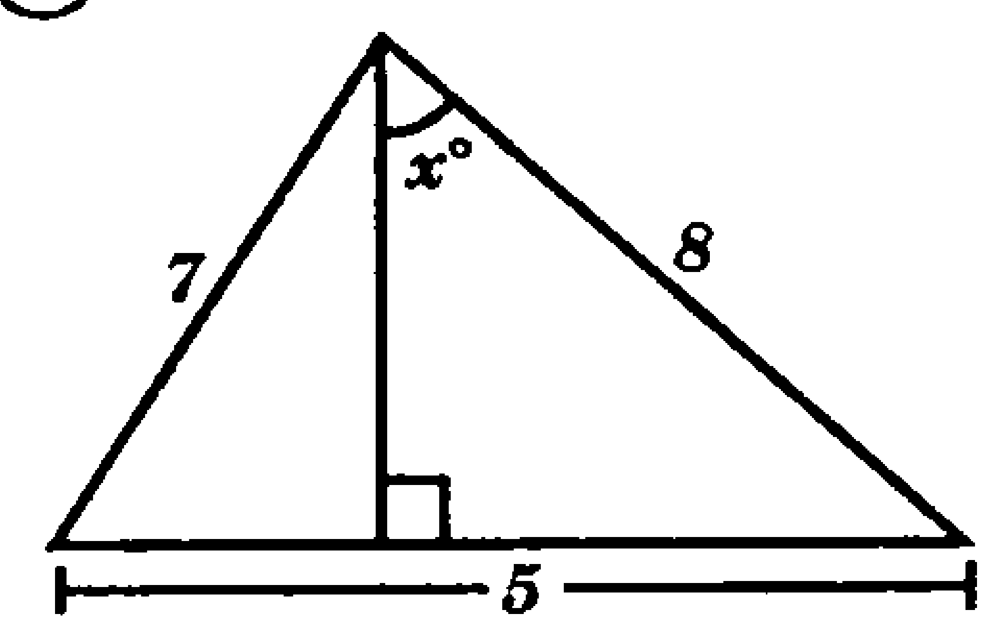
A) 6 B) 7 C) 13 D) 5 E) 10

23 Calcular "x", si: $a^2+b^2 = 80$



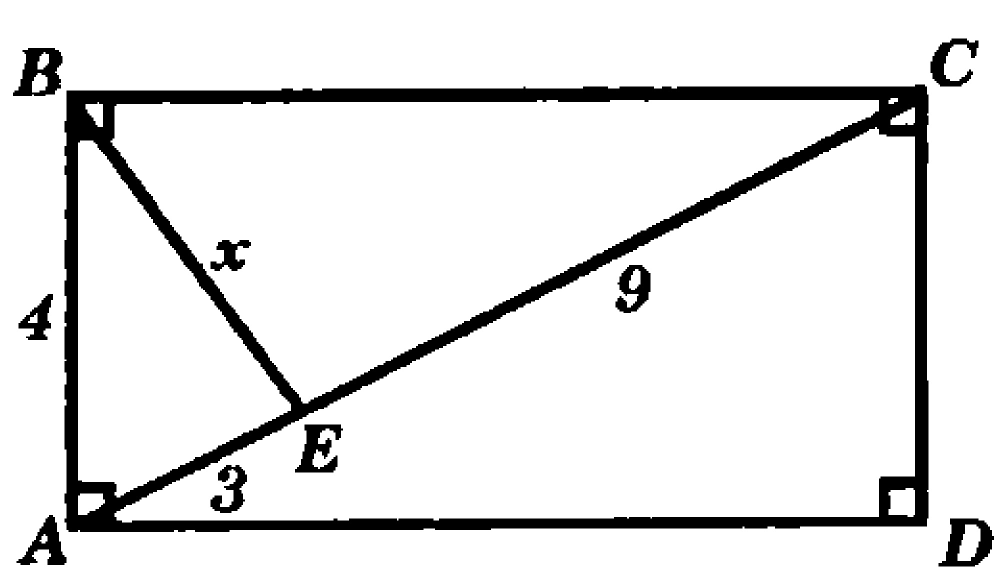
A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 6

24 Calcular "x"



A) 60 B) 45 C) 37 D) 30 E) 53

25 Calcular "x"



A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{15}$ C) $\sqrt{19}$ D) $\sqrt{13}$ E) $\sqrt{11}$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 La suma de los cuadrados de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es *1 250*.

Calcular la medida de la hipotenusa.

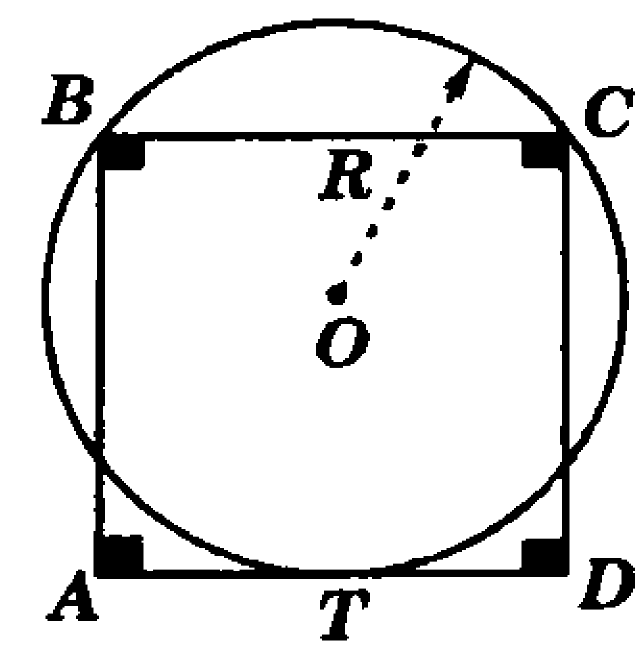
A) 20 B) 24 C) 25 D) 29 E) 30

02 Las bases de un trapecio, isósceles miden *7* y *25*. Determine la diagonal del trapecio, sabiendo además que los lados no paralelos miden *15*.

A) 25 B) 16 C) 18 D) 20 E) 17

03 *ABCD* : un cuadrado; *AB=8* y *T* es punto de tangencia, calcular *R*.

A) 4
B) 5
C) 6
D) $5\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{2}$



04 En un trapezoide tres lados consecutivos miden *6 m*, *8 m* y *10 m*. Si las diagonales se intersectan perpendicularmente, calcular la longitud del cuarto lado.

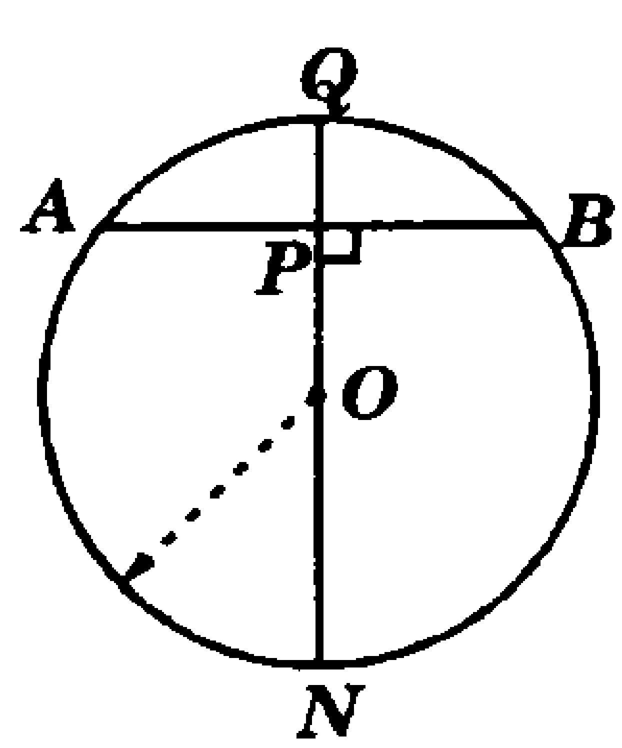
A) 2 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) $6\sqrt{2}$ m

05 Calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que la suma de los cuadrados de las medianas es igual a *54*.

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 7

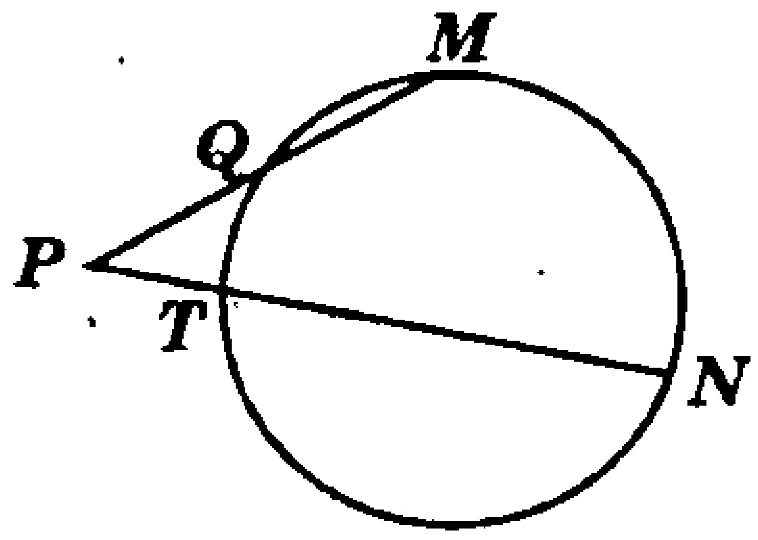
06 Si : *QN=10* y *QP=2*, calcular: *AB*

A) $4\sqrt{2}$
B) 8
C) $3\sqrt{2}$
D) 6
E) $7\sqrt{2}$

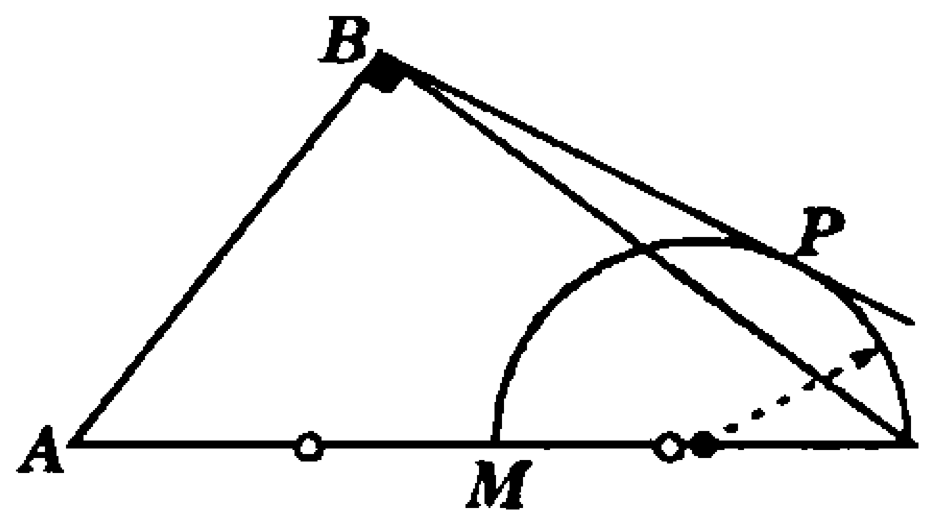


07 De la figura, calcular TN si: $PQ=4$, $QM=6$ y $TP=2$.

A) 16
B) 15
C) 18
D) 17
E) 15, 5



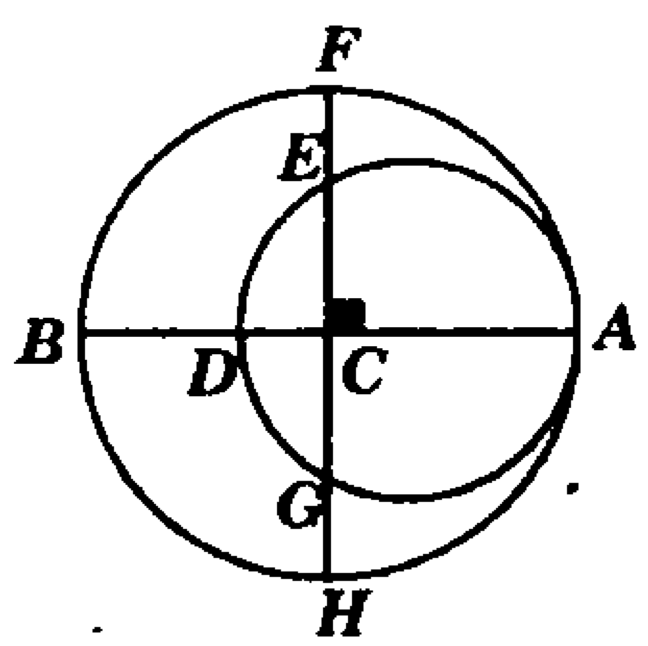
08 Calcular BP; si $AB=3$; $AC=5$ y P es punto de tangencia.



A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

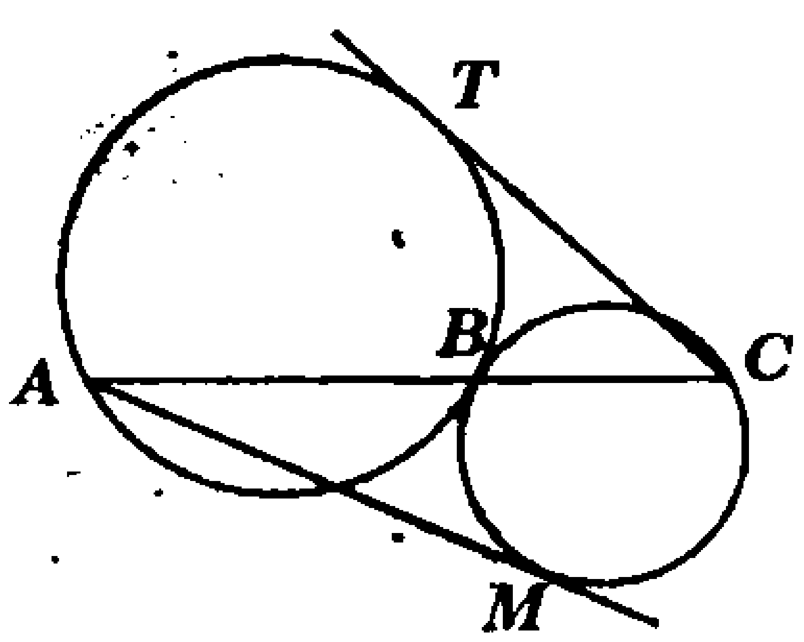
09 En el gráfico las 2 circunferencias son tangentes en "A", $\overline{AB}$ y $\overline{FH}$ son diámetros de la circunferencia mayor. Si: $BD=9$ y $EF=GH=5$, calcular AC.

A) 25
B) 27
C) 30
D) 36
E) 50

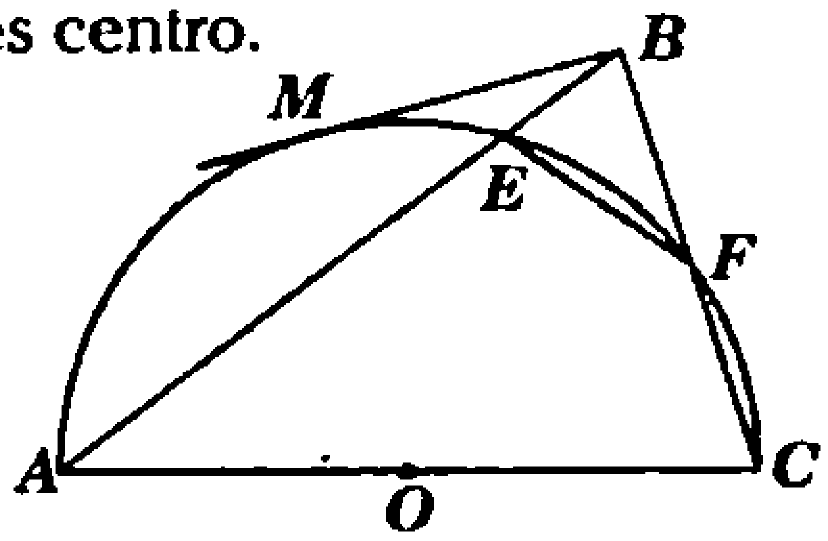


10 Calcular CT, si: $AM=12$, $AC=13$, B, M y T son puntos de tangencia.

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

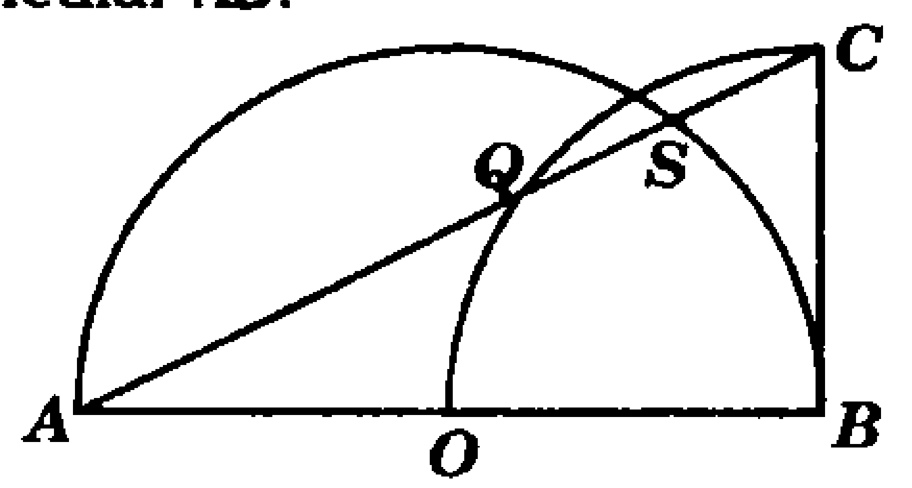


11 Calcular BM; si $AB = AC$; $EF= 4$; M es punto de tangencia y O es centro.



A) 8 B) $6\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

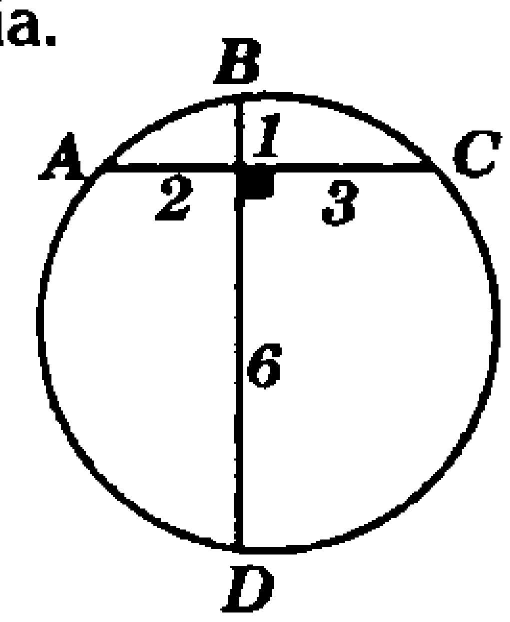
12 Si : O y B son centros ; $QS=\sqrt{5}$, calcular AB.



A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{10}$ C) 5 D) 10 E) $2\sqrt{10}$

13 Calcular el radio de la circunferencia.

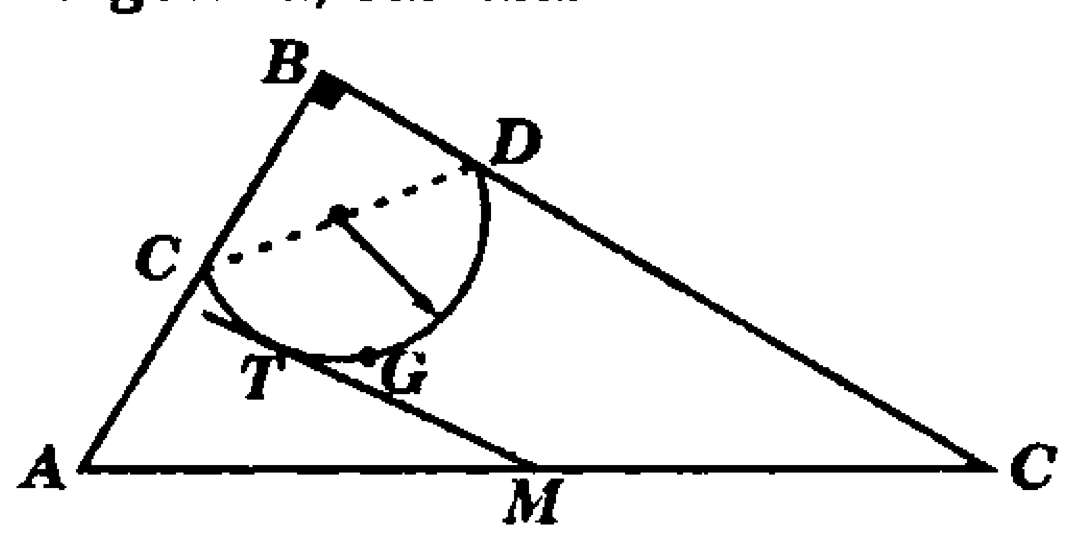
A) $5\sqrt{2}$
B) 2,5
C) 4
D) $0,5\sqrt{2}$
E) $2,5\sqrt{2}$



14 Se tiene una circunferencia tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y determina en los otros dos lados segmentos cuyas longitudes son 2 y 23. Calcular la longitud del radio de la circunferencia.

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 20

15 Según el gráfico G es baricentro de la región triangular ABC. Si $AM=MC=6$ y T es punto de tangencia, calcular MT.



A) $\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

16 En una circunferencia de diámetro AB y centro O, se ubica el punto P y en $\overline{AO}$ el punto M tal que $m\widehat{PB}=2m\sphericalangle PMA$. Si $OB=3$, calcular : $(PM)^2+(PB)^2$.

A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) 57

17 Desde el punto P exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante. La secante intersecta a la circunferencia en A y B tal es que $AB=3PA$, $m\widehat{AB}=120°$. Si el radio de la circunferencia mide 6, calcular la medida del segmento cuyos extremos son P y el punto de tangencia.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

18 En un trapecio isósceles, calcular la medida de la proyección de una de las diagonales sobre la base mayor, si la suma de las medidas de sus bases es 12.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

19 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

( ) En una circunferencia se trazan las cuerdas PQ y RS que se intersecan en M; entonces:

$$PQ\times MQ = RS\times MS$$

( ) En una circunferencia se trazan por el punto P exterior la tangente PT y la secante PQR; entonces:

$$(PT)^2 = PQ\times QR$$

( ) Si las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero inscriptible $ABCD$ se intersecan en P; entonces : $PA\times PB=PD\times PC$

A) FFF B) FFV C) FVV
D) VVF E) FVF

20 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

( ) La proyección de un segmento sobre una recta siempre es un segmento.

( ) La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

( ) El triángulo cuyos lados miden: $\sqrt{a-b}$, $\sqrt{a+b}$ y $\sqrt{2a}$ es un triángulo rectángulo.

A) VVV B) VVF C) FVV

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)A	3)A	4)C	5)C	6)B	7)D	8)C	9)E	10)D
11)C	12)D	13)C	14)B	15)D	16)B	17)E	18)E	19)D	20)A
21)B	22)E	23)C	24)D	25)A	26)B	27)E	28)C	29)E	30)E

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)D	3)B	4)E	5)B	6)B	7)C	8)B	9)A	10)B
11)D	12)[illegible]	13)E	14)C	15)D	16)C	17)D	18)D	19)B	20)C

POLIGONOS REGULARES

CAPITULO 103

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer los principalés polígonos regulares* y *su relación con la circunferencia.*

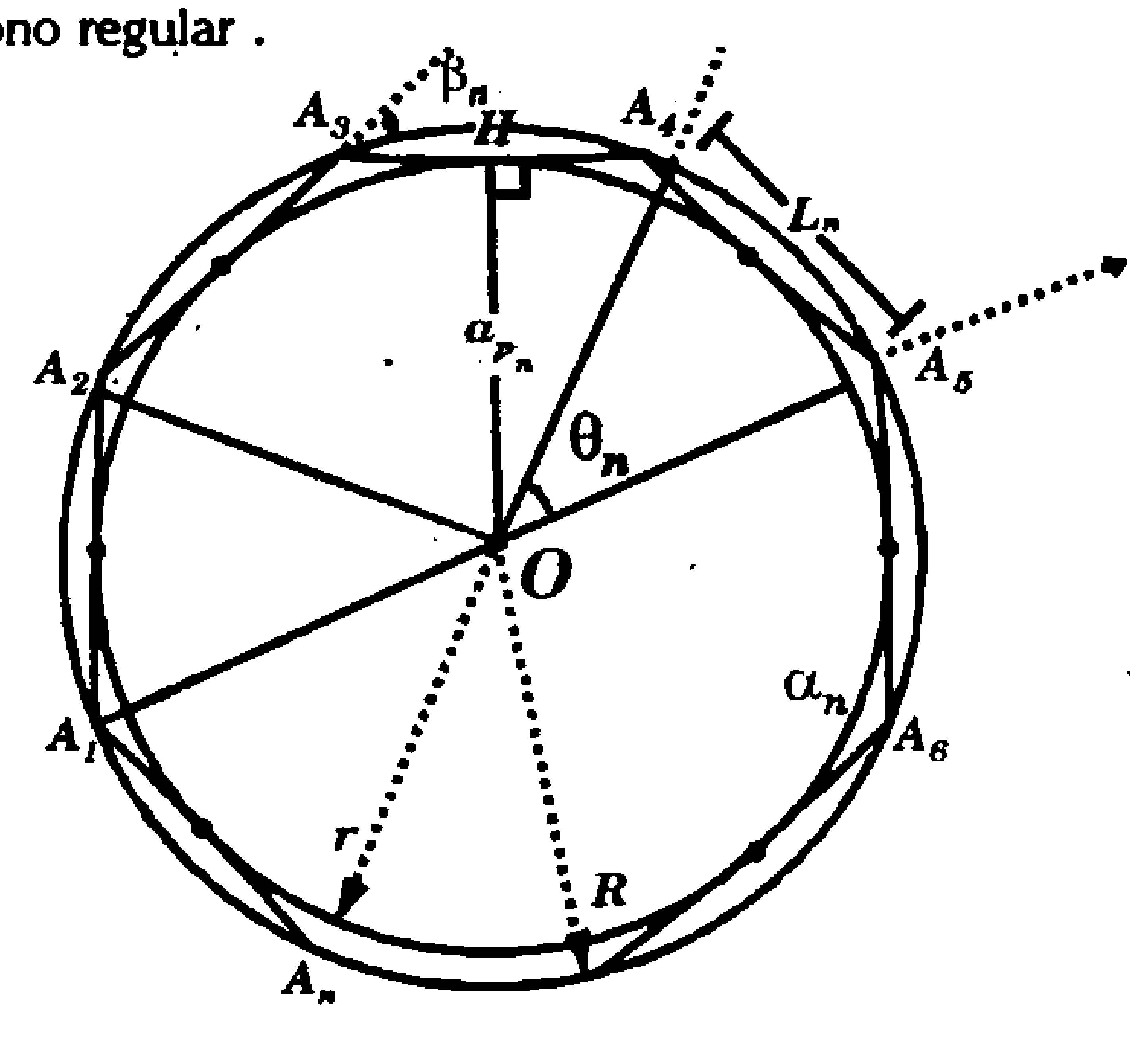
* *Conocer las relaciones métricas entre los principales elementos asociados* al *polígono regular* , *tales* como *circunradio* , *lados* , *apotemas, etc.*

INTRODUCCION :

Desde la antigüedad, se sabe que el hombre ha decorado sus viviendas con dibujos y ornamentos regulares. Estos gráficos repetitivos que nos dan la idea de propagarse indefinidamente en el espacio se encuentran, hoy en día , en los tapices , en los papeles pintados para empapelar paredes , en los enlosados y otros revestimientos del suelo , en los adornos arquitectónicos exteriores o interiores (mosaicos); también se usa las formas poligonales regulares en el diseño de las tuercas, en la distribucion de los terrenos, etc. Inclusive hay poblaciones en las cuales la distribución de sus manzanas tienen una forma poligonal regular. La naturaleza también nos brinda ejemplos de estas figuras y de esa armonia de proporciones que satisface los sentidos; por ejemplo : los cristales de nieve, las ondas en la superficie del agua. el panal de abejas. etc.

POLÍGONO REGULAR

Se llama polígono regular al polígono equiángulo y equilátero a la vez . Todo polígono regular se puede inscribir y circunscribir a circunferencias concentricas , siendo el centro de estas circunferencias el centro del polígono regular .



En el gráfico, se muestra el polígono regular $A_1A_2A_3A_4$ .... A_n inscrito en la circunferencia de radio R y circunscrito a una circunferencia de radio r.

* Del gráfico :

$$A_1A_2 = A_2A_3 = ...=A_nA_1=L_n$$

L_n: Longitud del lado de un polígono regular de n lados.

ELEMENTOS ASOCIADOS AL POLÍGONO REGULAR

CENTRO(O) :

Centro de circunferencia inscrita y circunscrita al polígono regular .

INRADIO (R) :

Radio de la circunferencia inscrita al polígono regular.

CIRCUNRADIO(R) :

Radio de la circunferencia circunscrita al polígono regular.

APOTEMA ($\overline{OH}$) :

Es el segmento perpendicular a un lado de un polígono regular, trazado desde centro .

$OH = a_{p_n}$: longitud de la apotema del polígono regular de n lados .

ÁNGULO CENTRAL ($\sphericalangle A_4OA_5$):

Es un ángulo que tiene su vértice en el centro del polígono regular , cuyos lados lo determinan que pasan por dos vértices consecutivos del polígono regular .

* θ_n : Medida del ángulo central de un polígono regular de n lados . $\boxed{\theta_n=\dfrac{360^\circ}{n}}$

* n : Número de lados de polígono regular

* Además , en todo polígono regular de n lados :

* Medida del ángulo interior (α_n): $\boxed{\alpha_n=\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}}$

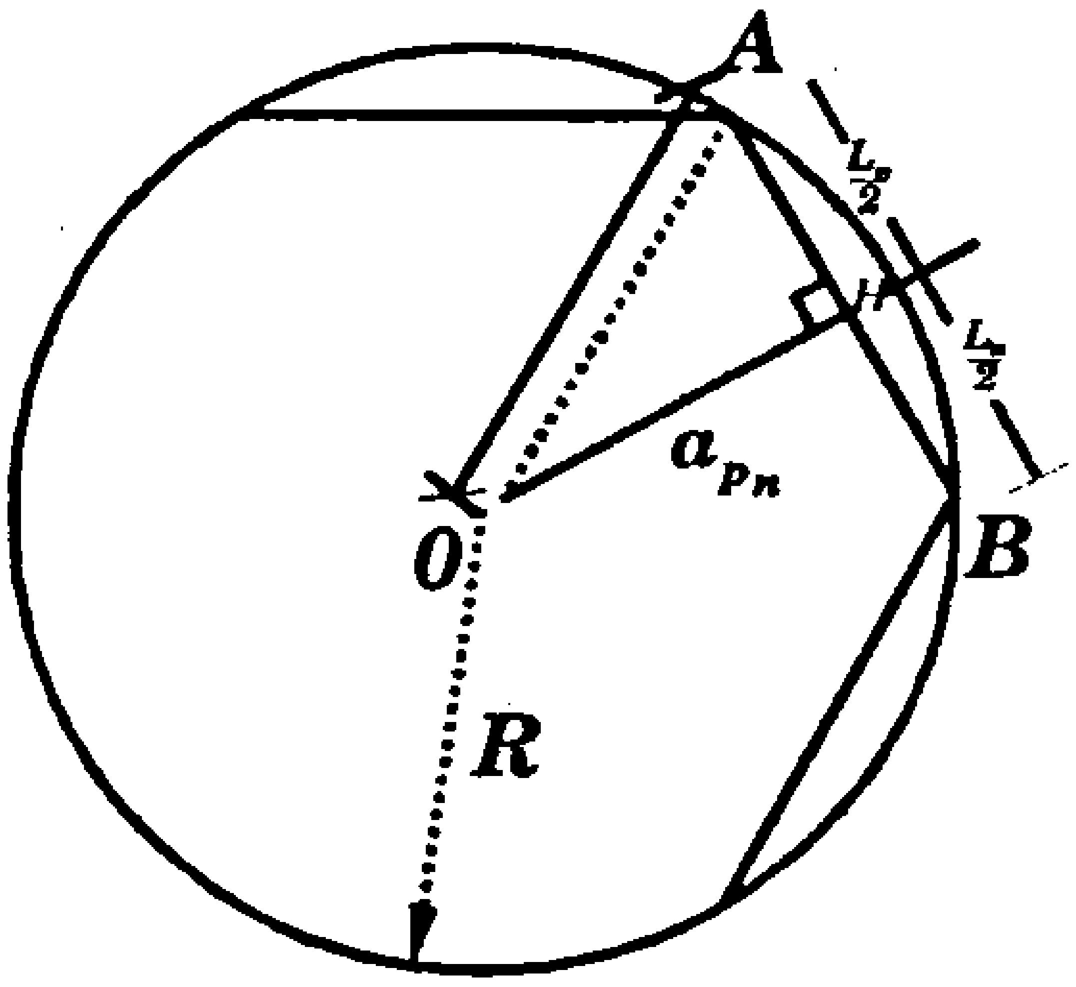
* Medida del ángulo exterior (b_n) : $\boxed{\beta_n=\dfrac{360^\circ}{n}}$

TRIÁNGULO ELEMENTAL (ΔA_1OA_2)

Es el triángulo determinado por dos vértices consecutivos y el centro de un polígono regular .

APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR

* En el $\triangle OHA$(Teorema de Pitágoras)

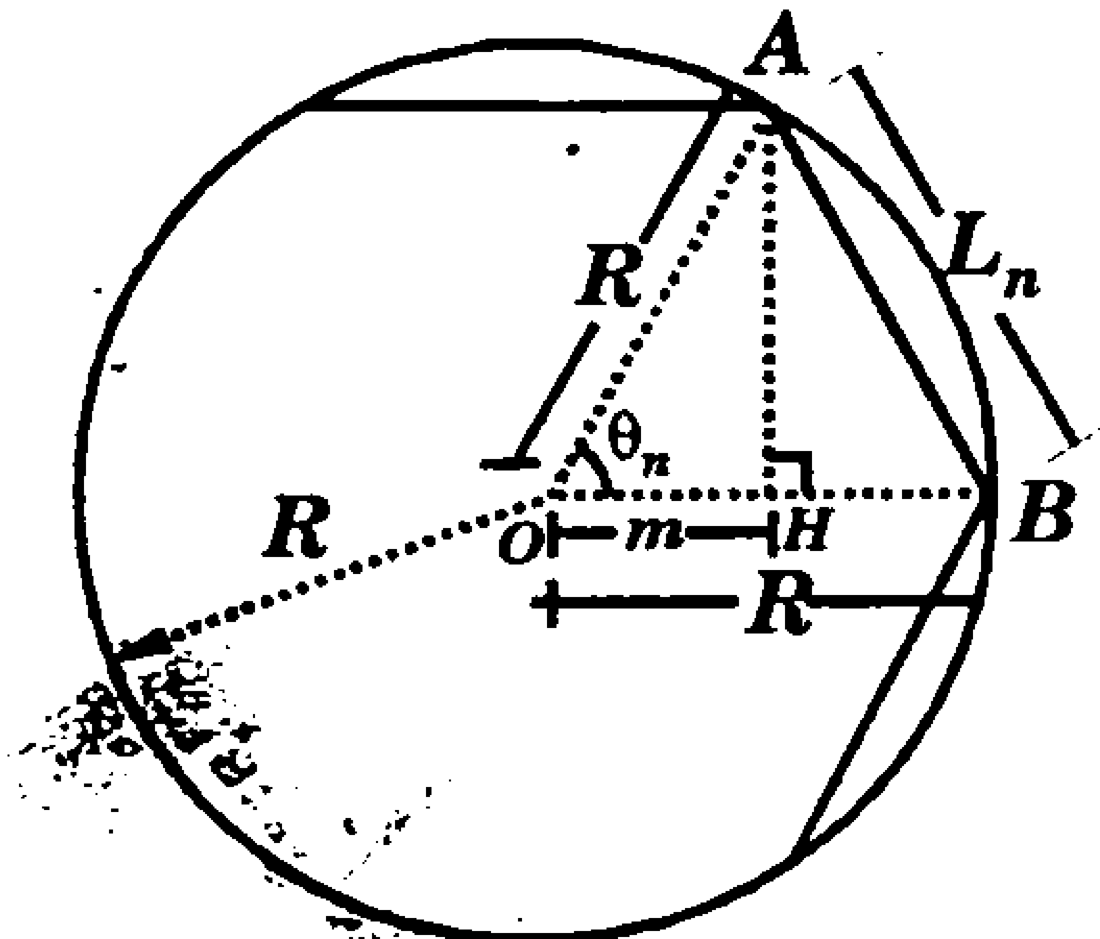


$$(a_{p_n})^2=R^2-\left(\frac{L_n}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L_n^2}}$$

CALCULO DEL LADO EN FUNCIÓN DEL "R" y "θ_n"

* En el ΔAOB(Teorema de Euclides)

$$(L_n)^2=R^2+R^2-2Rm$$



* pero , $\triangle AHO$: $OH=m=RCos\theta_n$

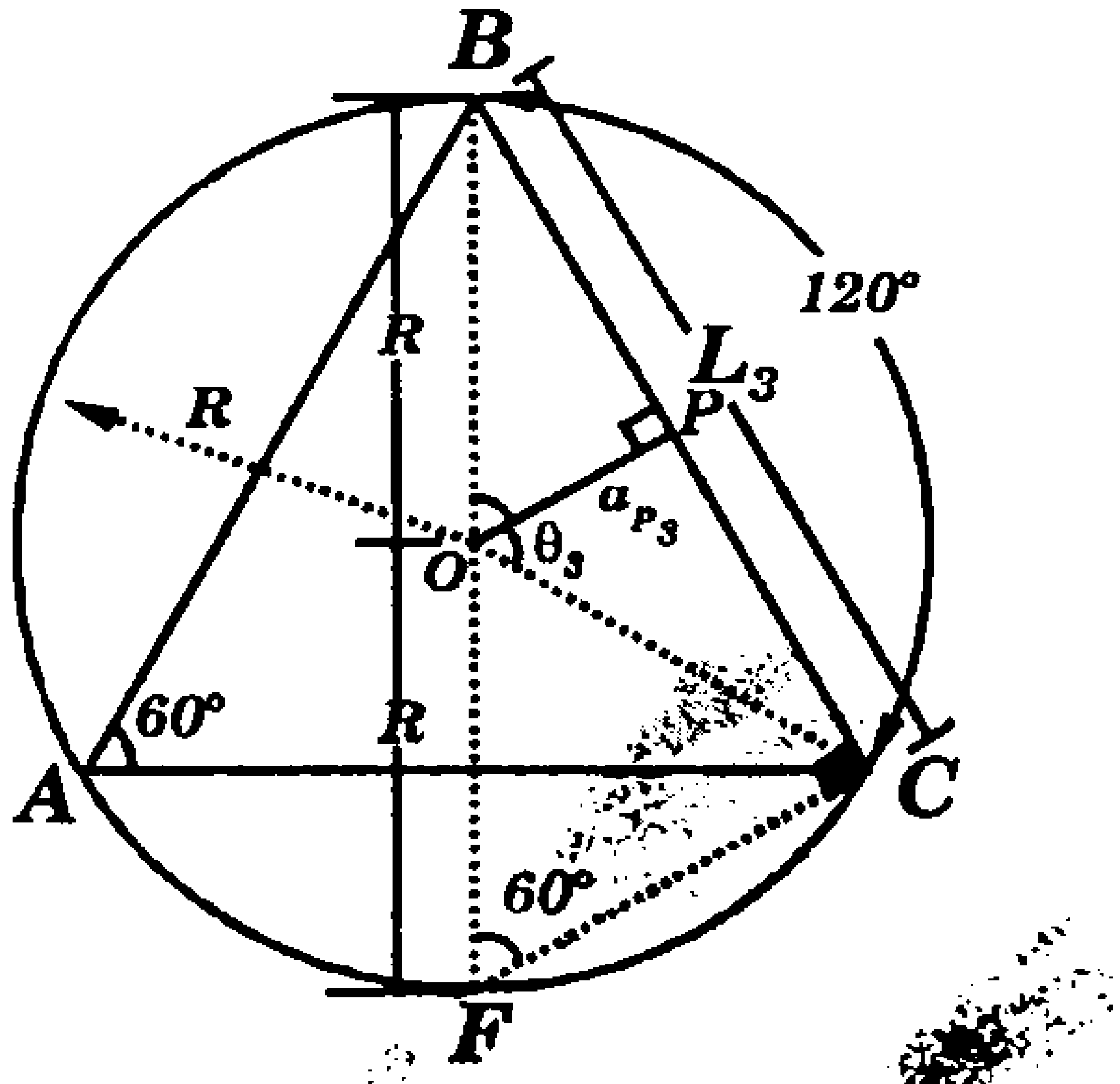
* Reemplazando: $(L_n)^2=2R^2-2R\times RCos\theta_n$

* Luego : $\boxed{L_n=R\sqrt{2(1-Cos\theta_n)}}$

ESTUDIO DE LOS PRINCIPALES POLÍGONO REGULARES

I) TRIÁNGULO EQUILÁTERO :

En el gráfico, R es el circunradio del triángulo equilátero ABC.



Ángulo Central : $\theta_3=\frac{360°}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_3=120°}$

LADO :

En el $\triangle BCF$ (Notable : $30° \wedge 60°$)

$$L_3=\frac{2R}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{L_3=R\sqrt{3}}$$

APOTEMA :

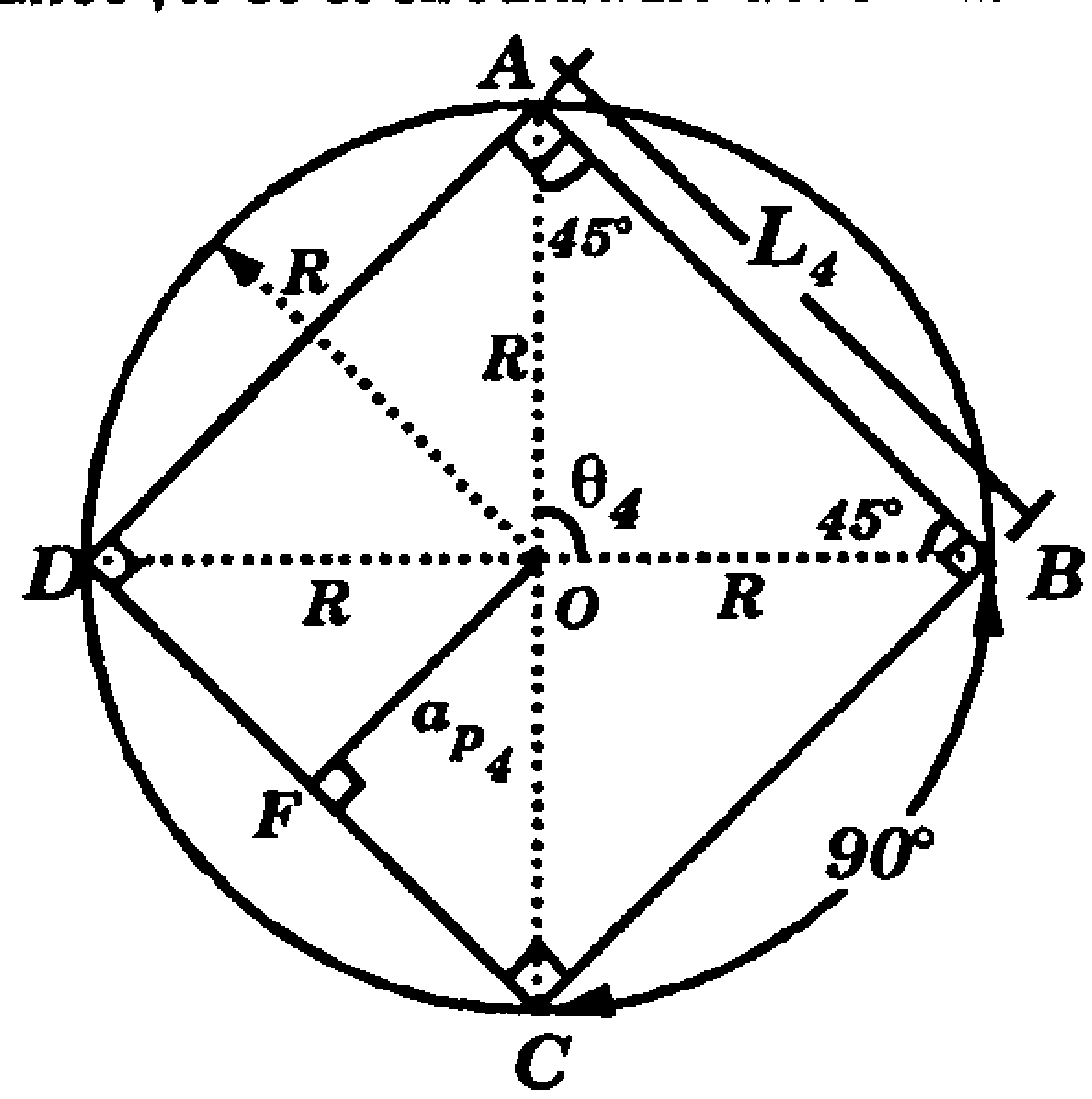
* En el $\triangle BCF$(notable : $30° \wedge 60°$)

$OP=a_{p_3}=\frac{FC}{2}$ ....(Teorema de la base media)

* pero : $FC=R$ | $\boxed{a_{p_3}=\frac{R}{2}}$

II) CUADRADO :

En el gráfico , R es el circunradio del cuadrado: $ABCD$



Ángulo Central : $\theta_4=\frac{360°}{4} \Rightarrow \boxed{\theta_4=90°}$

LADO :

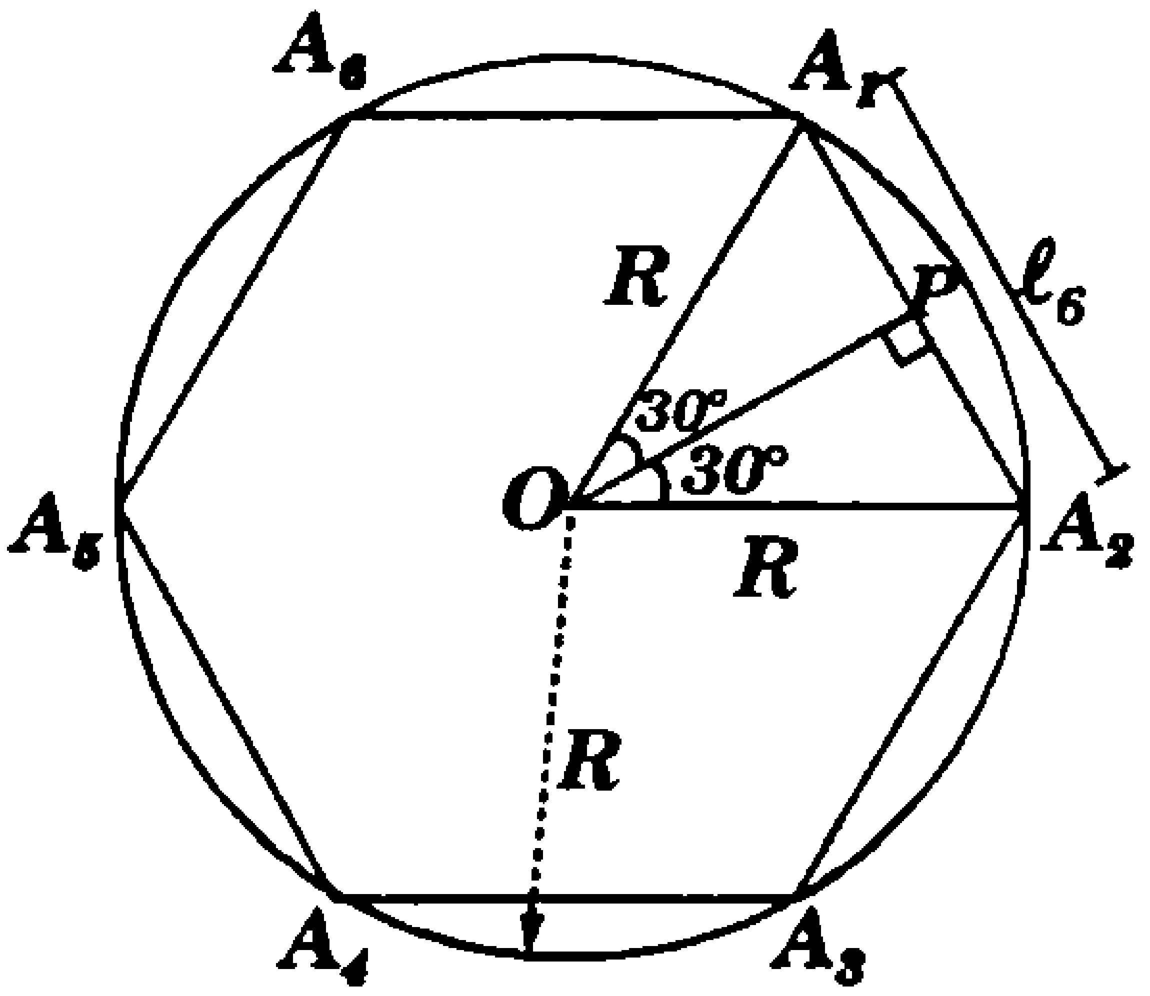
En el $\triangle AOB$ (notable de $45°$) $\boxed{L_4=R\sqrt{2}}$

APOTEMA :

En el ◣BCD(por teorema de la base media

$$OF = a_{P_4} = \frac{BC}{2} \Rightarrow \boxed{a_{P_4} = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

III) HEXÁGONO REGULAR :



Medida del ángulo central (θ_6): $m\sphericalangle A_1OA_2=\theta_6$

$$\theta_6=\frac{360°}{6} \Rightarrow \boxed{\theta_6=60°}$$

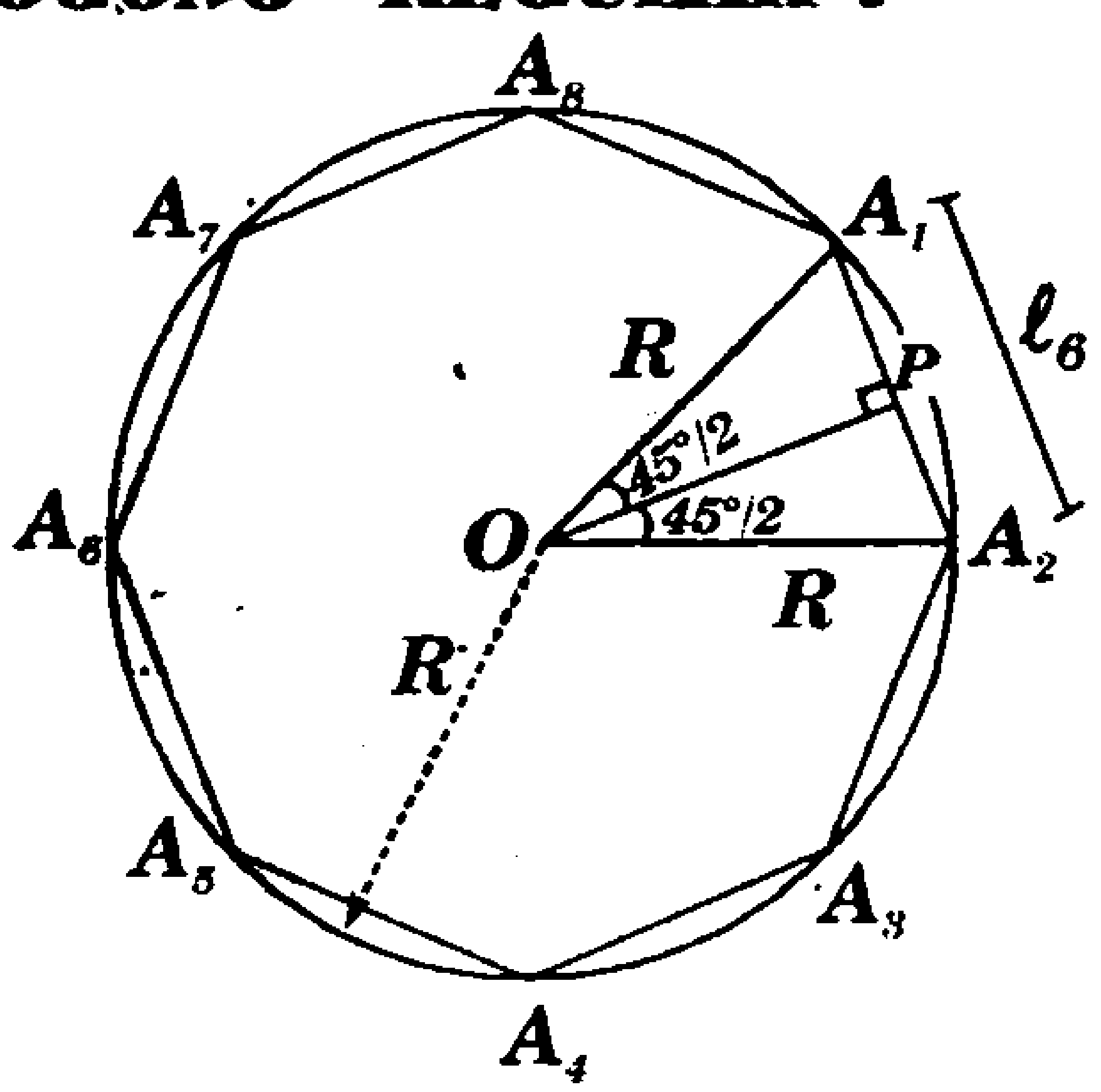
* Longitud del (ℓ_6),$\triangle A_1OA_2$ es equilátero : $\ell_6=R$

* Longitud del apotema a_{p_6} :

a_{p_6} = ◺OPA_2 el notable de $30°$ y $60°$:

$$\boxed{a_{p_6}=\frac{R}{2}\sqrt{3}}$$

IV) OCTÁGONO REGULAR U OCTÓGONO REGULAR :



Media del ángulo central (θ_8): $m\sphericalangle A_1OA_2=\theta_8$

$$\theta_8=\frac{360°}{8} \Rightarrow \boxed{\theta_8=45°}$$

* Longitud del lado (ℓ_8):

$\triangle A_1OA_2$: teorema de cosenos

$$(\ell_8)^2=R^2+R^2-2(R)(R)\cos 45°$$

Operando : $\ell_8=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

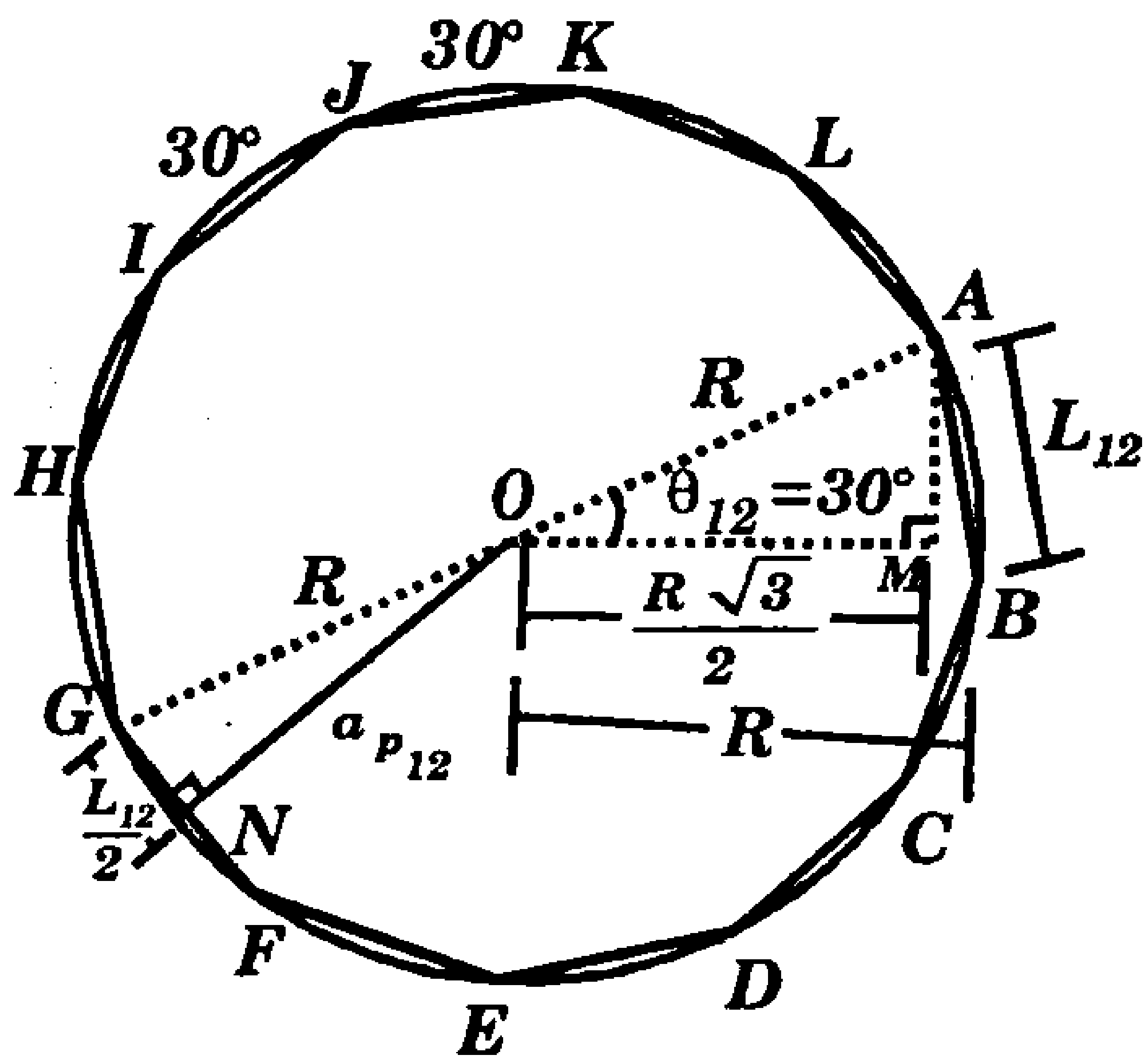
* Longitud del apotema a_{p_8} : $a_{p_8}=OP$

* Se sabe que:

$$a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2} \Rightarrow \boxed{a_{p_8}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_8^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{p_8}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

V) DODECAGONO REGULAR :



En el gráfico se tiene el dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$, de circunradio R.

Ángulo Central : $\theta_{12}=\frac{360°}{12} \Rightarrow \boxed{\theta_{12}=30°}$

LADO :

En el ΔAOB (Teorema de Euclides)

$$(L_{12})^2=R^2+R^2-(2R)(OM)$$

* Pero : $OM=\frac{R\sqrt{3}}{2}$

* Efectuando : $\boxed{L_{12}=R\sqrt{2-3}}$

APOTEMA :

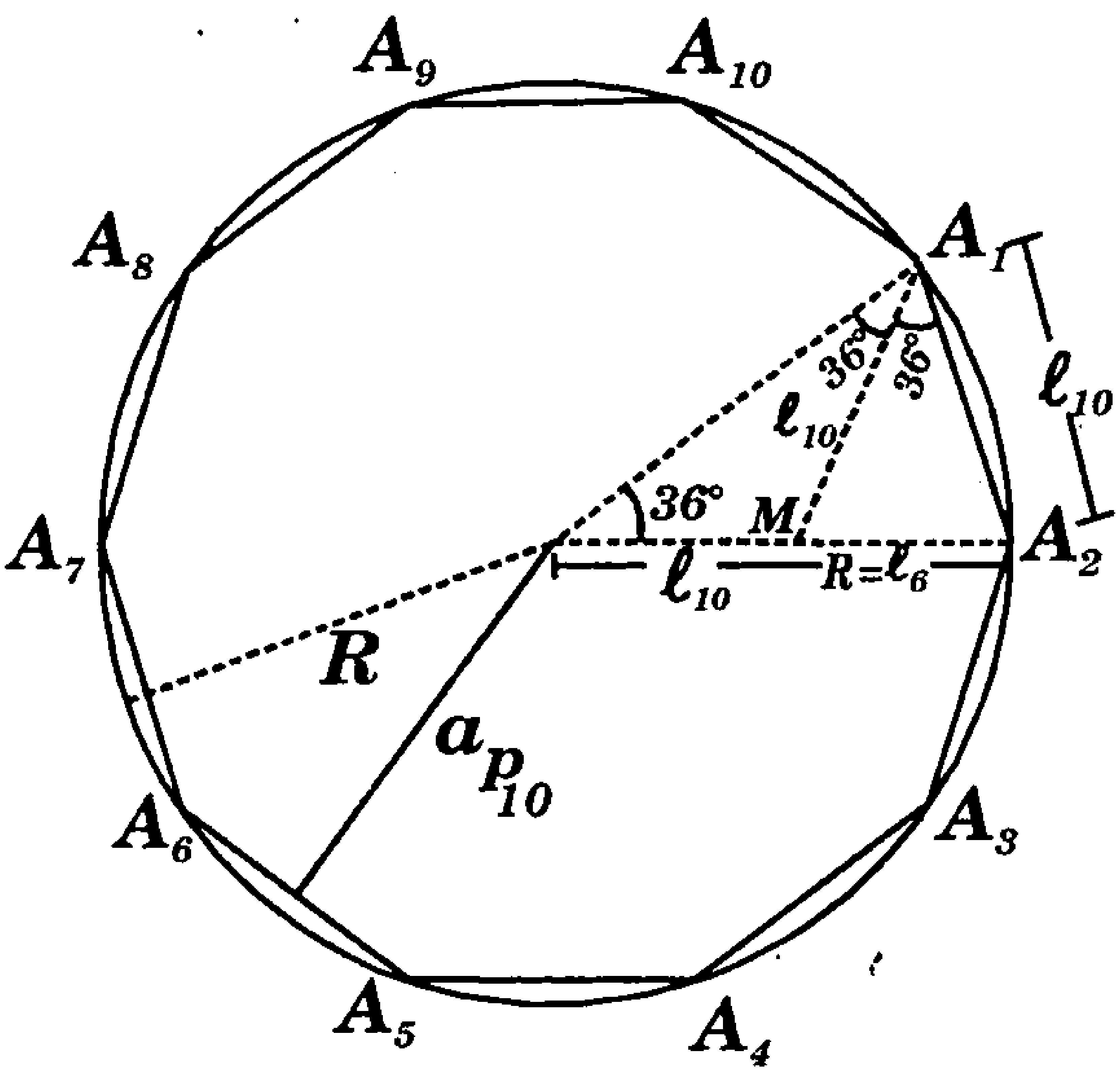
* En el ◣GNO (Teorema de Pitágoras)

$$\left(a_{p_{12}}\right)^2=R^2-\left(\frac{L_{12}}{2}\right)^2$$

* Reemplazando :

$$\left(a_{p_{12}}\right)^2=R^2-\left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{a_{p_{12}}=\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

VI)DECÁGONO REGULAR :



* *Medida del ángulo central* (θ_{10}) :

$$\theta_{10}=\frac{R}{\ell_{10}}=\frac{360°}{10} \Rightarrow \boxed{\theta_{10}=360°}$$

* *Longitud del lado* (ℓ_{10}):

En el $\triangle A_1OA_2$ se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$; así, los triángulos A_1MO y MA_1A_2 son isósceles, es decir:

$$A_1M=MO=\ell_{10} \Rightarrow MA_2=R-\ell_{10}$$

* En el $\triangle A_1OA_2$ se aplica el teorema de la bisectriz interior :

$$\frac{R}{\ell_{10}}=\frac{\ell_{10}}{R-\ell_{10}}$$

Operando :

$$\ell_{10}=R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

* Longitud del apotema $(a_{p(10)})$

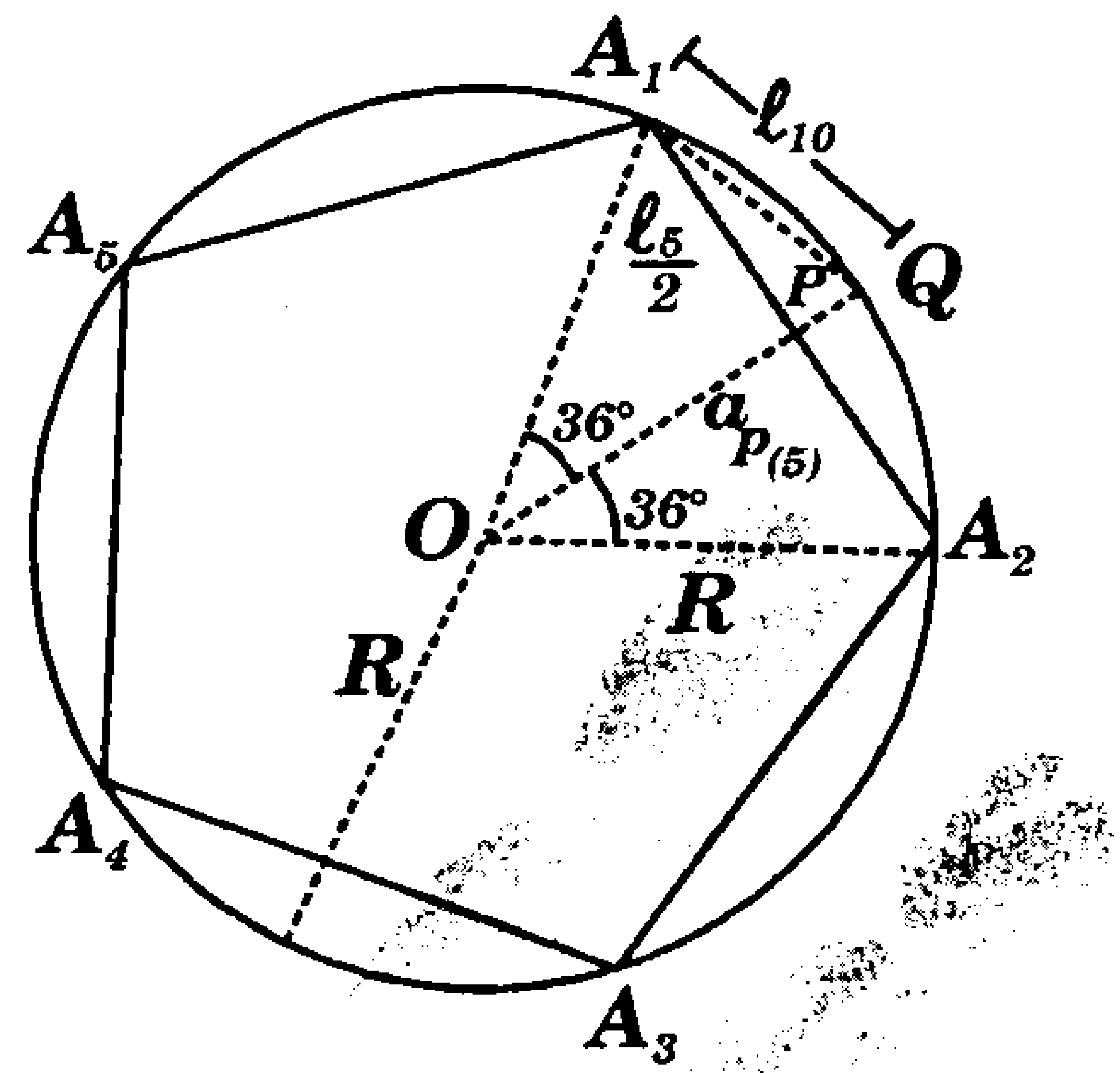
Se sabe :

$$a_{p_n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\ell_n^2}$$

* Reemplazando y operando:

$$\boxed{a_{p_{10}}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

VII) PENTAGONO REGULAR :



Medida del ángulo central (θ_5) : $\theta_5=\frac{360°}{5}=72°$

* *Longitud del apotema* (a_{p_5})

$$\triangle A_1QO: (\ell_{10})^2=R^2+R^2-2R(a_{p_5})..............(I)$$

* Reemplazando $\ell_{10}=R\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$ en *(I)* :

$$\left(\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^2=2R^2-2R(a_{p_5})$$

* Operando: $\boxed{a_{p_5}=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$

* *Longitud del lado* (ℓ_5):

$\triangle A_1PO$: por teorema de Pitágoras

$$\left(\frac{\ell_5}{2}\right)^2=R^2-(a_{p_5})^2 \Rightarrow \boxed{\ell_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

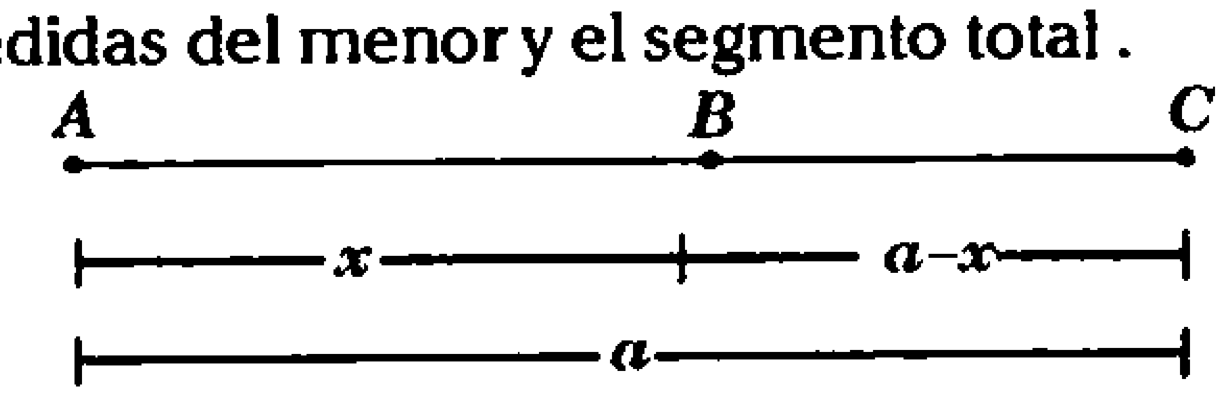
OBSERVACIONES :

I) Para un polígono regular cuyo número de lados es una potencia de *2* se tiene :

$$L_{2^K}=R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....}}}}}_{(k-1)\ \text{radicales}}$$

donde *"R"* es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono regular .

II) Se denomina sección aúrea de un segmento a la división de dicho segmento en dos partes tales que la medida del mayor sea media proporcional entre las medidas del menor y el segmento total .



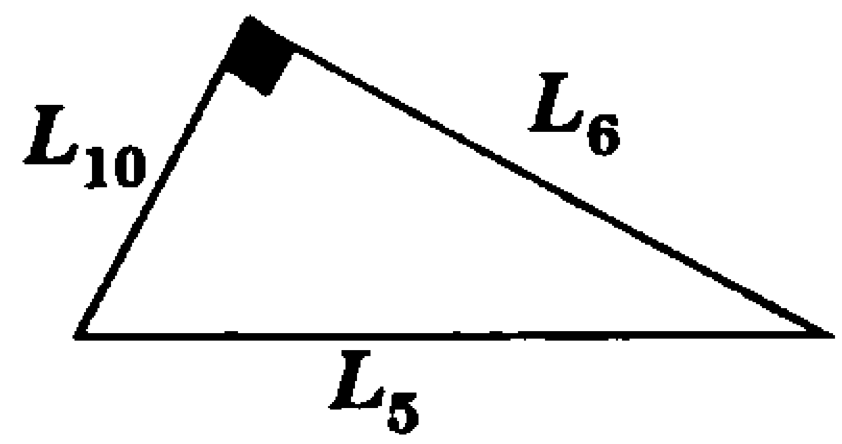
* Del gráfico :

$$x^2=(a-x)a \Rightarrow \boxed{x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

* Para el decágono regular se tiene que su lado es la sección aúrea de su circunradio.

$$\ell_{10}=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

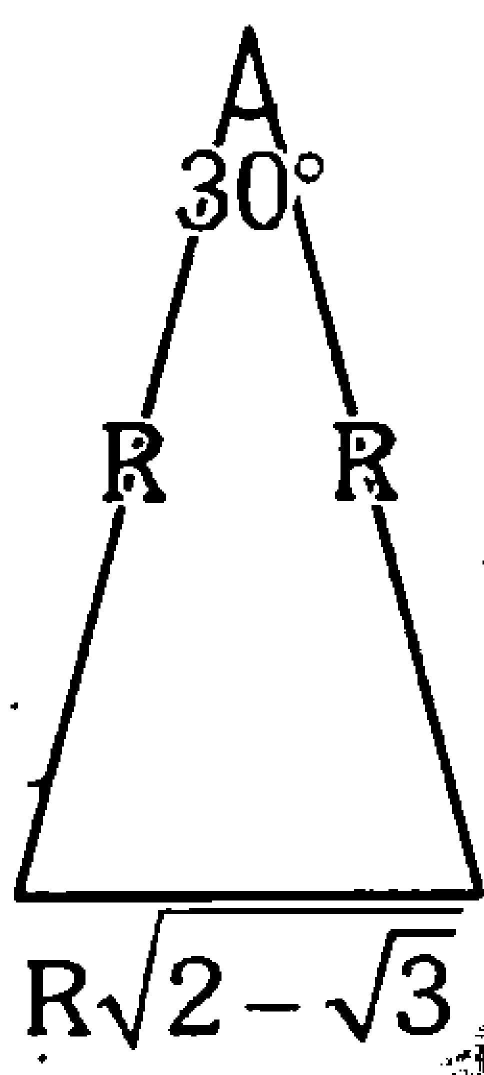
Los lados del pentágono regular, hexágono regular y decágono regular inscrito en la misma circunferencia, forman un triángulo rectángulo .



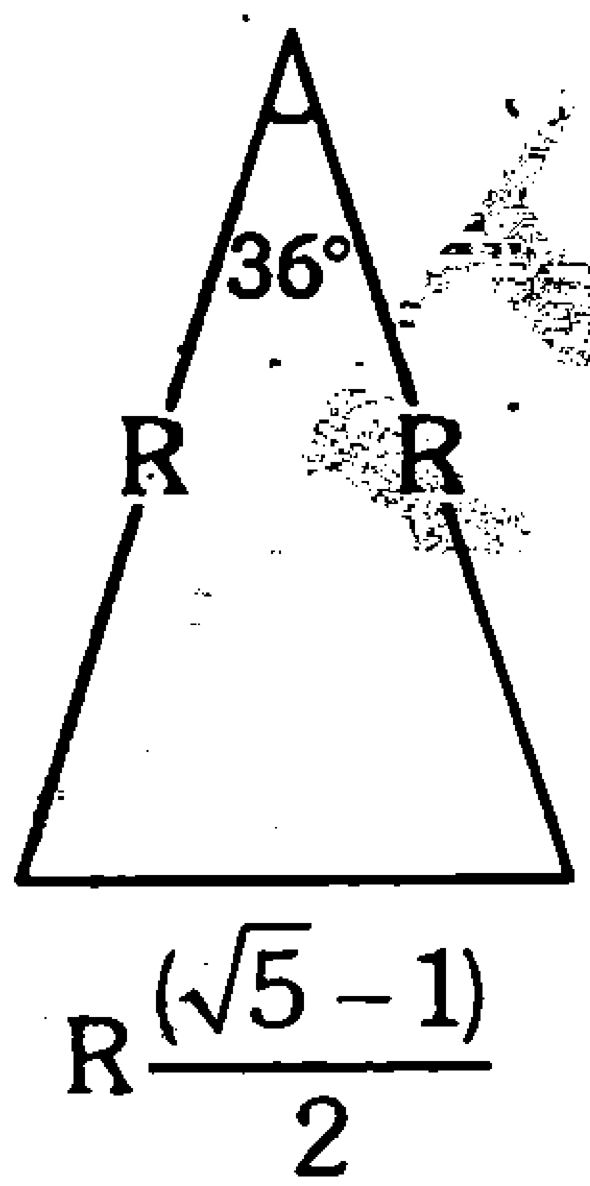
$$\Rightarrow \boxed{L^2_5=L^2_6+L^2_{10}}$$

TRIÁNGULOS ELEMENTALES

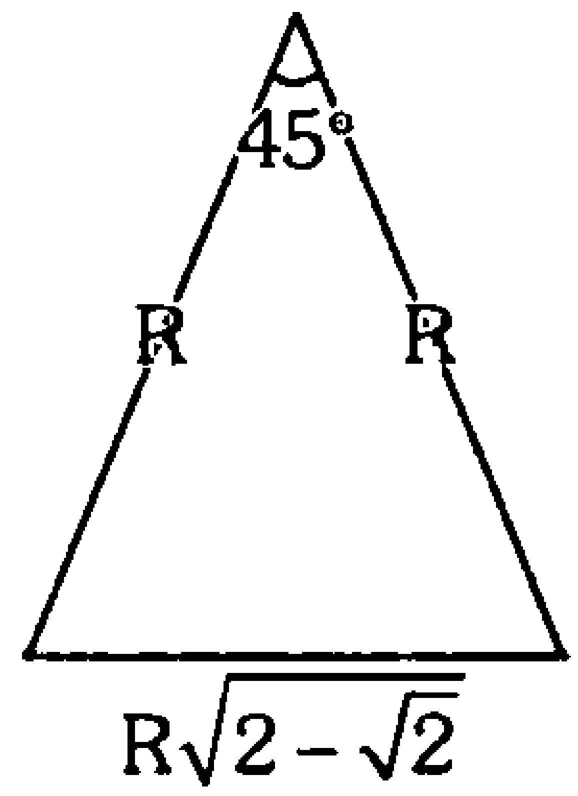
1)



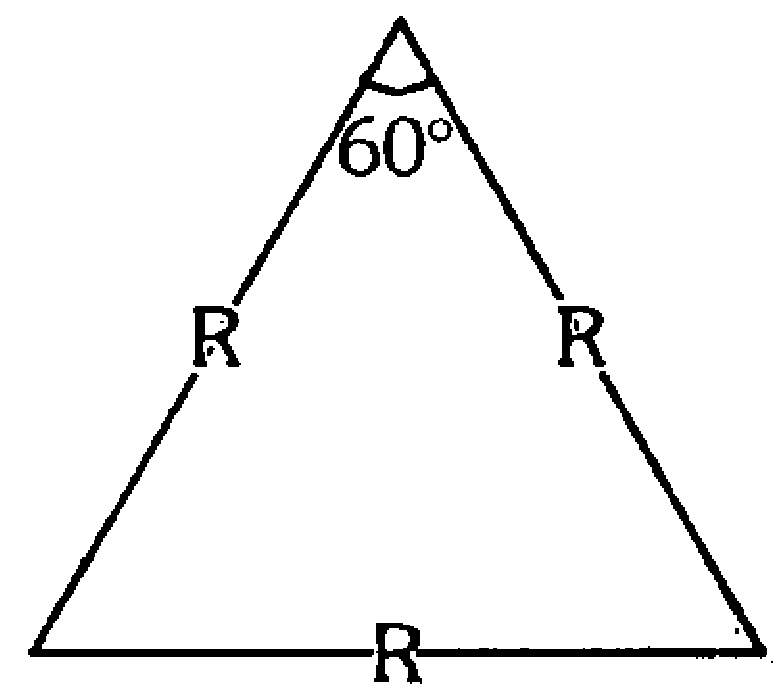
2)



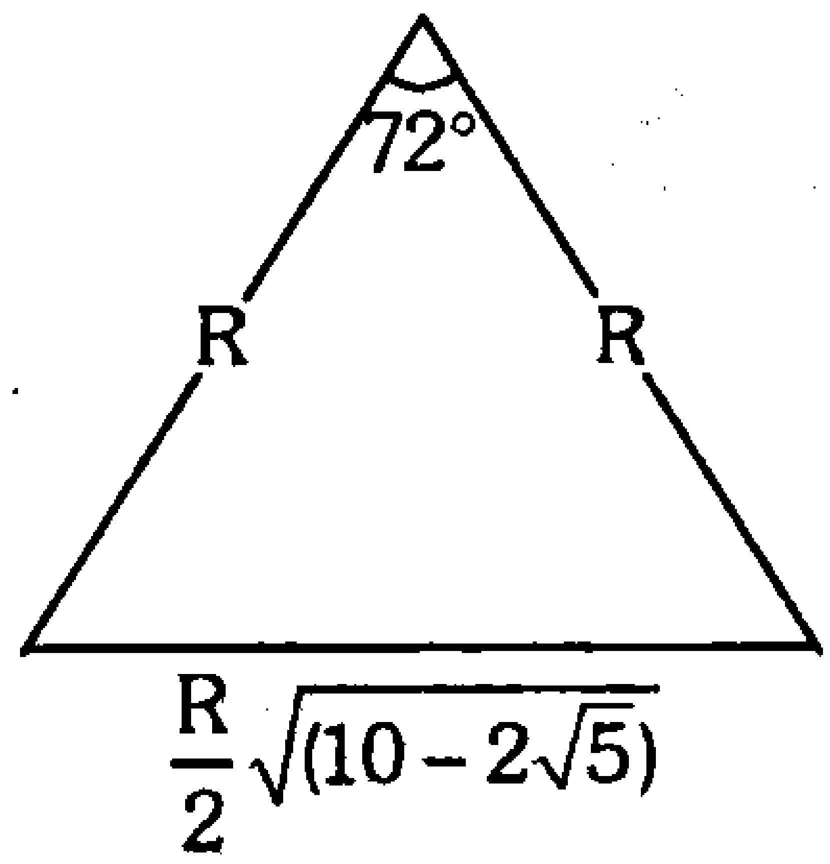
3)



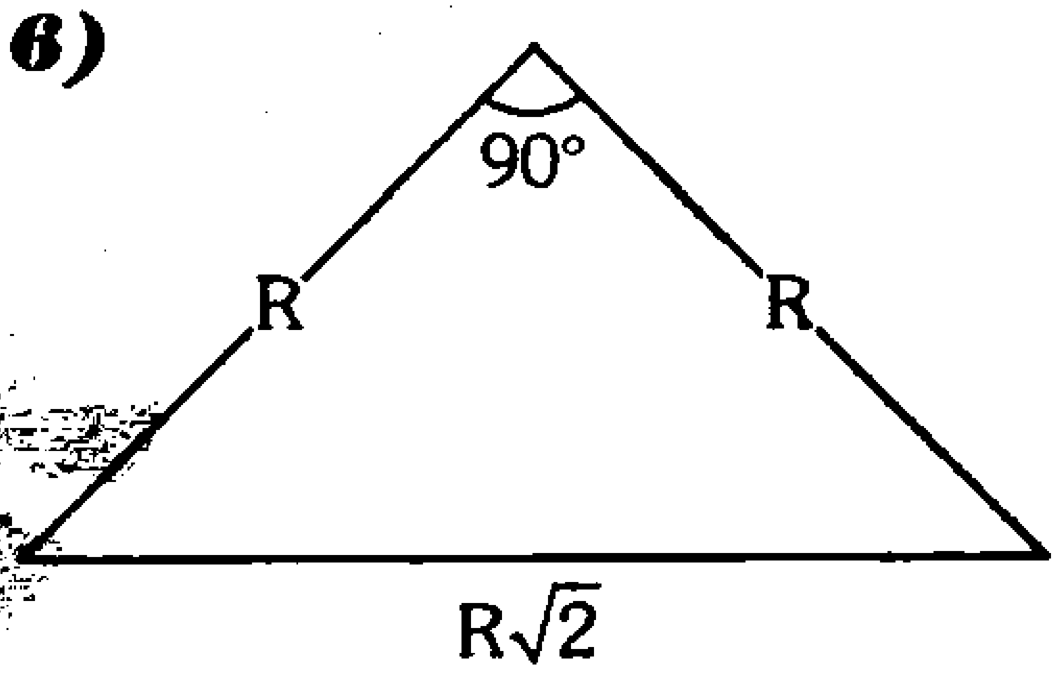
4)



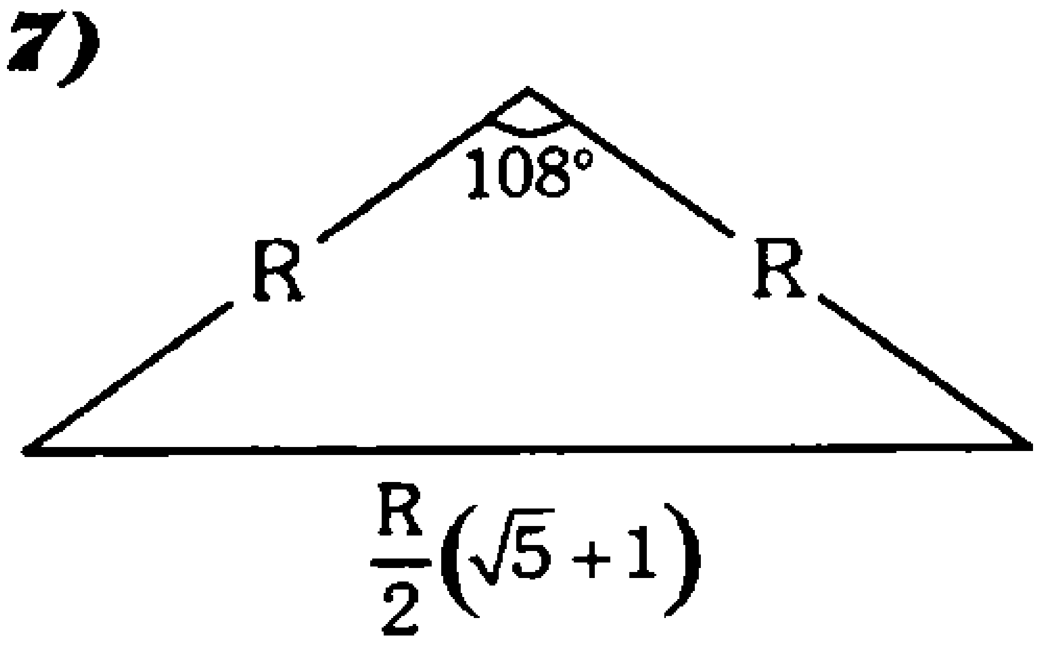
5)



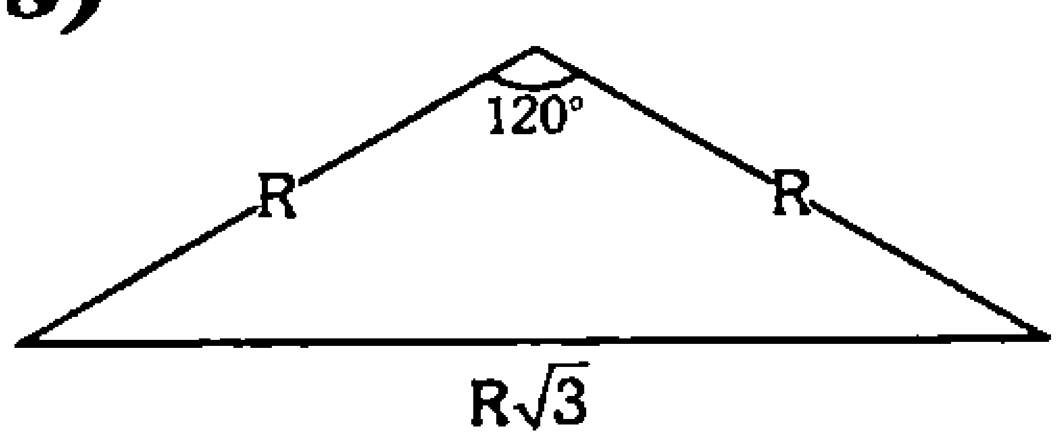
6)



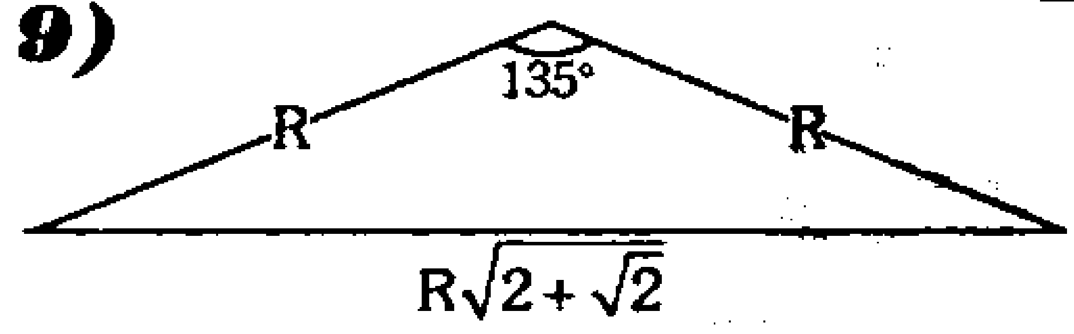
7)



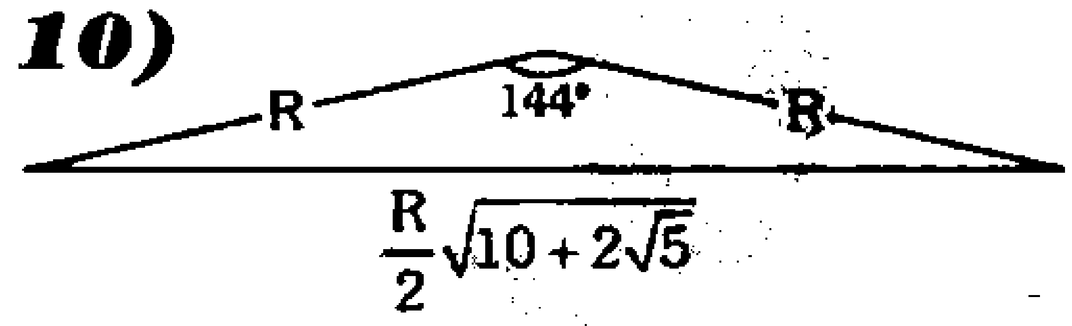
8)



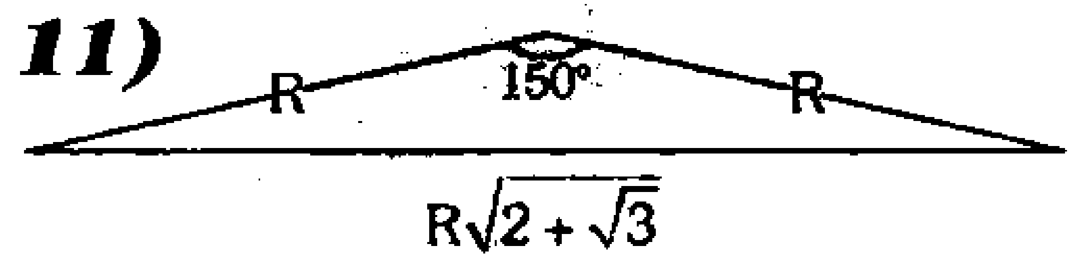
9)



10)



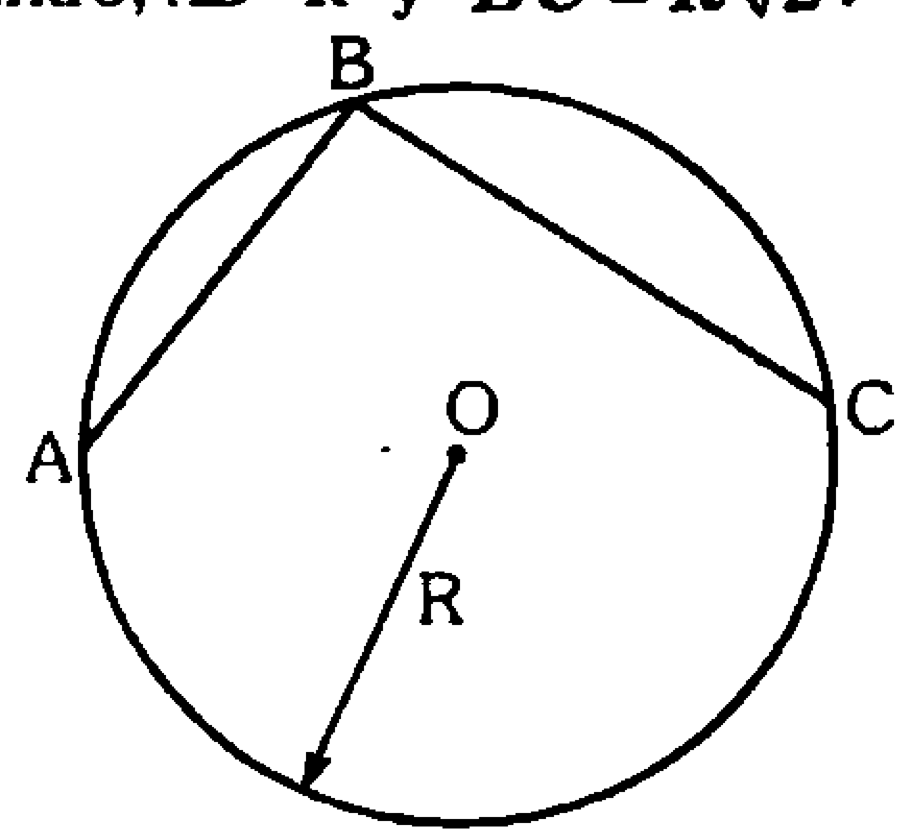
11)



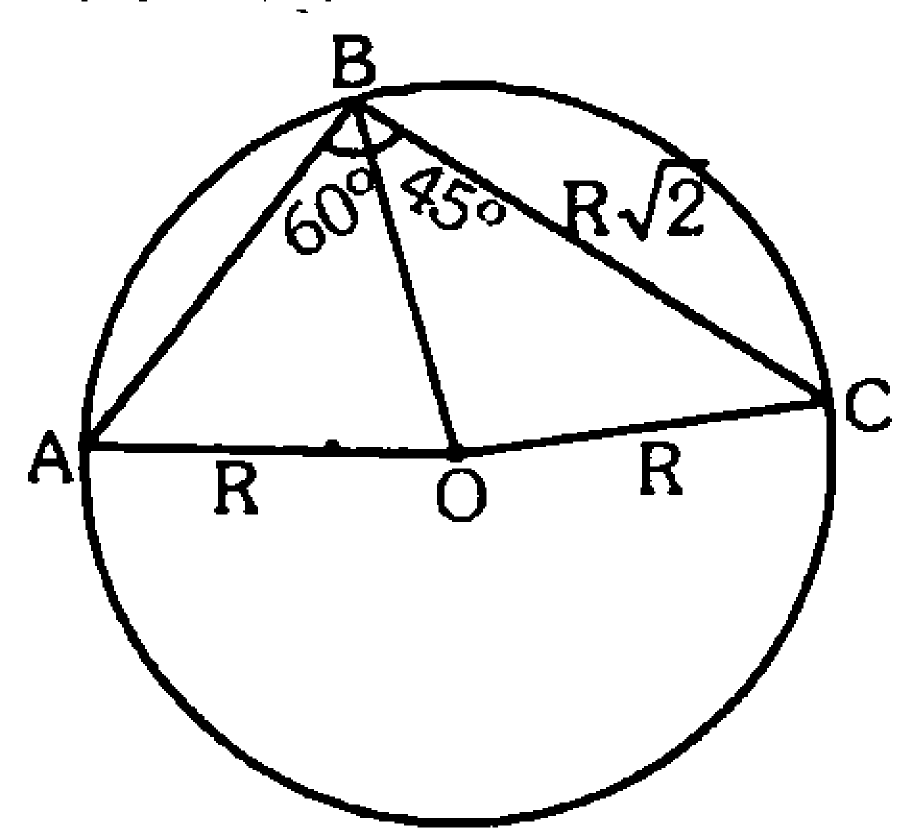
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En la figura, calcule x, si O es centro; $AB=R$ y $BC=R\sqrt{2}$.



RESOLUCIÓN :



* Se trazan los radios $\overline{OA}$; $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

* Se calculan las medidas de los ángulos notables *ABO* y *OBC*.

$$x=60°+45° \Rightarrow x=105°$$

PROBLEMA 2 :

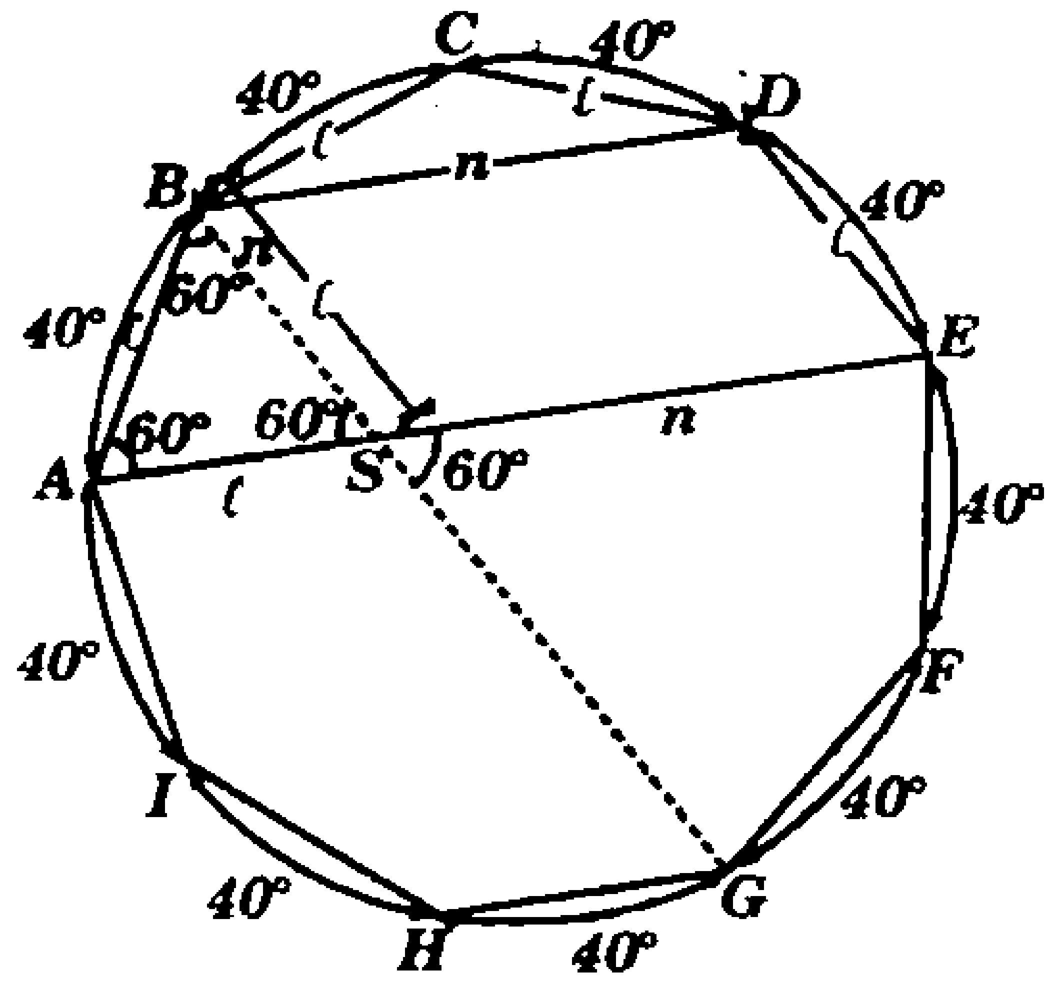
Un polígono regular de *9* lados está inscrito en una circunferencia. Si la suma de la longitud de un lado y la longitud de la menor diagonal de polígono es *20* , entonces la longitud de la mayor diagonal es :

A)10 *B)12* *C)15* *D)17* *E) 20*

RESOLUCIÓN :

* Se pide la longitud de la mayor diagonal: *AE*

* Se sabe que las medidas de todos los arcos es *40°*.



* La suma de longitud de un lado y la longitud de la menor diagonal del polígono es *20*.

* Trazamos BG, de lo cual se tiene ΔBAS: equilátero.

* Se aprecia que:

$$BC + BD = \ell + n = 20$$

* Como :

$$\overline{SB} // \overline{DE} \wedge BS = ED$$

$$\Rightarrow SE = BD \Rightarrow AE = \ell + n = 20$$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Si el lado de un cuadrado mide $6\sqrt{2}$. Calcular su apotema.

Rpta.: ....

02 El lado de un triángulo equilátero mide $6\sqrt{3}$. Calcular su apotema.

Rpta.: ....

03 Si el apotema de un hexágono regular mide $6\sqrt{2}$. Calcular su lado.

Rpta.: ....

04 Interiormente a un hexágono regular *ABCDEF*, se construye el cuadrado *ARTF*, calcular $m\measuredangle FTE$.

Rpta.: ....

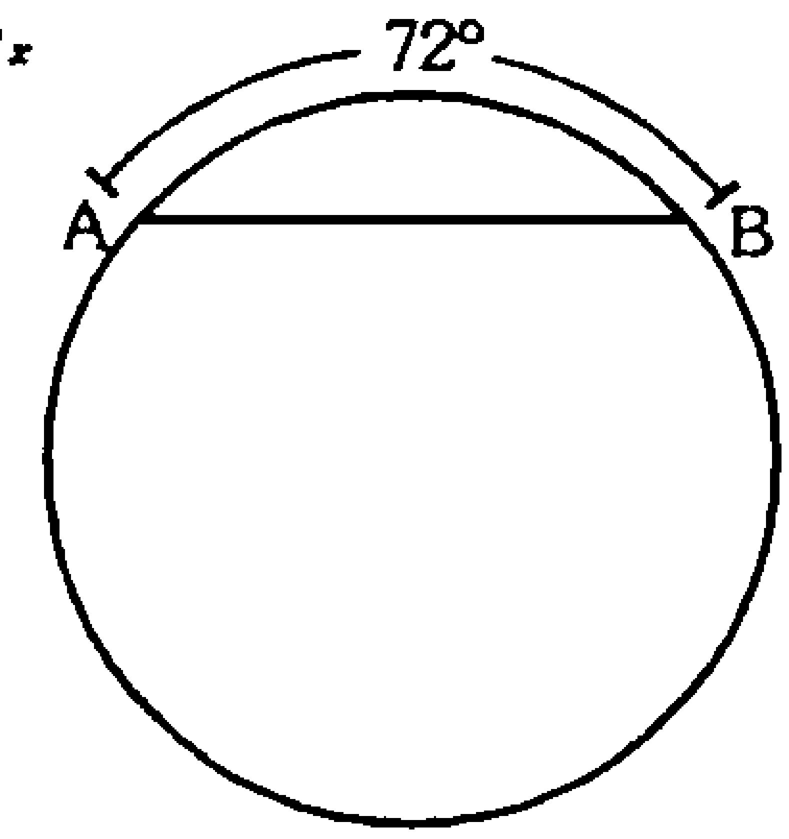
05 Se tiene un octógono regular *ABCD...*, $BC = \sqrt{2}$, calcular *AC*.

Rpta.: ....

06 Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de radio *R*. Calcular el perímetro del polígono que se forma al unir los puntos medios de los lados no consecutivos del hexágono regular.

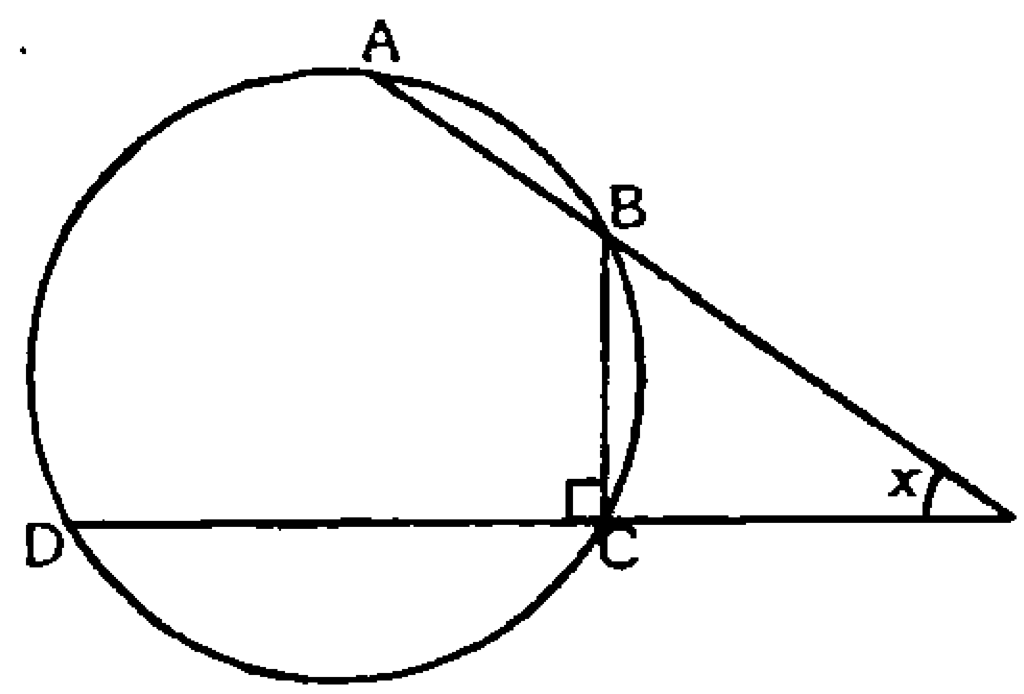
Rpta.: ....

07 En la figura, calcule *x*. Si $AB = L_x$



A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 9*

08 En la figura, calcule *x*. Si: $AB=BC=L_6$



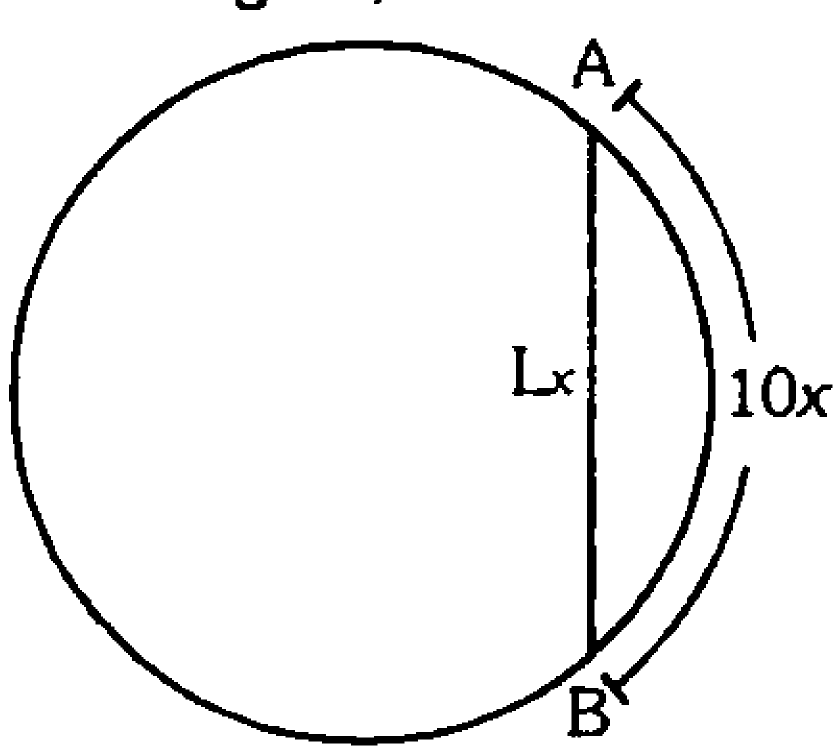
A) 54° *B) 36°* *C) 40°* *D) 30°* *E) 45°*

09 Si el perímetro de un hexágono regular es *12*, calcular el perímetro del triángulo formado al unir perímetro del triángulo formado al unir tres vértices no consecutivos de dicho hexágono.

A) $9\sqrt{3}$ *B)* $6\sqrt{3}$ *C)* $8\sqrt{3}$

D) $9\sqrt{3}$ *E)* $12\sqrt{3}$

10 En la figura, calcule *x*.



A) 3 *B) 4* *C) 5* *D) 6* *E) 8*

11 Calcule el perímetro de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

A) 12 *B)* 6 *C)* $6\sqrt{3}$ *D)* $12\sqrt{3}$ *E)* $9\sqrt{3}$

12 Calcular el número de lados de un polígono regular en el cual, el cuadrado de la medida de su ángulo central es igual a *15* veces la medida de su ángulo interior

Rpta.: ....

13 Se tiene un dodecágono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio mide *8*. Calcular el perímetro del polígono determinado al unir los puntos medios de los lados del dodecágono

Rpta.: ....

14 Si el lado de un octógono regular mide *2m*. Calcular su apotema

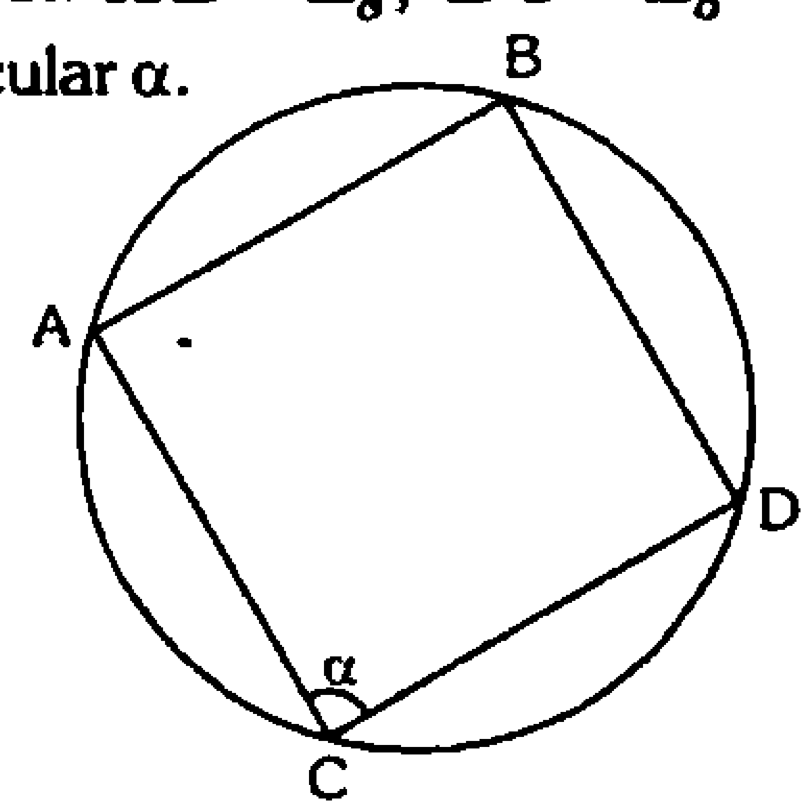
Rpta.: ....

15 Cuánto mide el lado de un polígono convexo de *24* lados, inscrito en una circunferencia de radio "*R*"

Rpta.: ....

16 Si: $AB = L_8$, $BC = L_6$

Calcular α.



Rpta.: ....

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 La suma de las medidas de los ángulos internos excede a la suma de las medidas de los ángulos externos en *900°*. Calcular el número de lados.

A) 6 *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

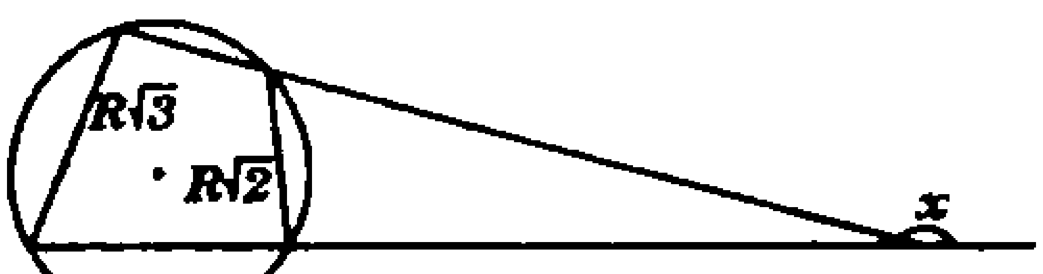
02 ¿Cuál es el polígono convexo, cuyo número de diagonales excede al número de vértices en *18*?

A) Hexágono
B) Polígono de 27 lados
C) Nonágono
D) Polígono de 15 lados

03 En un polígono equiángulo la relación entre las medidas de un ángulo interior y de un ángulo exterior es como de *5* a *1*. Calcular la suma de las medidas de sus ángulos internos.

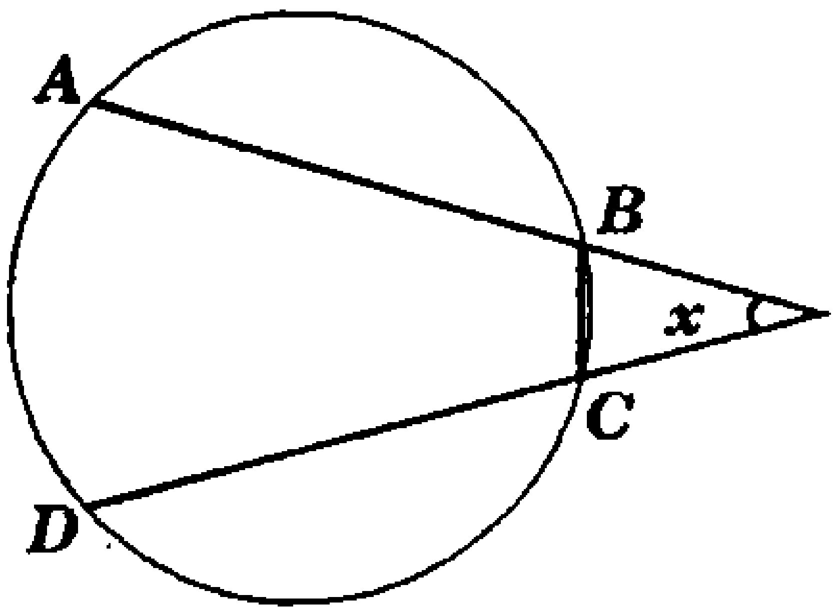
A) 1 800° B) 1 440° C) 1 200°
D) 1080° E) 1 560°

04 Calcular "*x*".



A)100° B)115° C)135°
D)155° E)165°

05 Calcular "*x*", si: $AB=L_3$; $BC=L_6$; $CD=L_4$.



A) 30° B) 15° C) 22,5°
D) 10° E) 45°

06 Al aumentar en tres el número de lados de un polígono, el número de diagonales se duplica. Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de dicho polígono.

A) 900° B) 1 080° C) 1 260°
D) 1 440° E) 1 620°

07 El perímetro de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia es *18*. Calcular la medida del lado del hexágono inscrito en la misma circunferencia.

A) $3\sqrt{3}$ *B)* $3\sqrt{2}$ *C)* $4\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ *E)* $2\sqrt{3}$

08 Se tiene un hexágono equiángulo *ABCDEF*, *BC=2*, *DE=1*, *CD=4* y *AF=3*. Calcular su perímetro.

A) 10 B) 11 C) 15 D) 16 E) 18

09 El lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia mide $3\sqrt{3}$. Calcular la medida del lado del cuadrado inscrito en la misma circunferencia.

A) $6\sqrt{3}$ *B)* $3\sqrt{3}$ *C)* $6\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ *E)6*

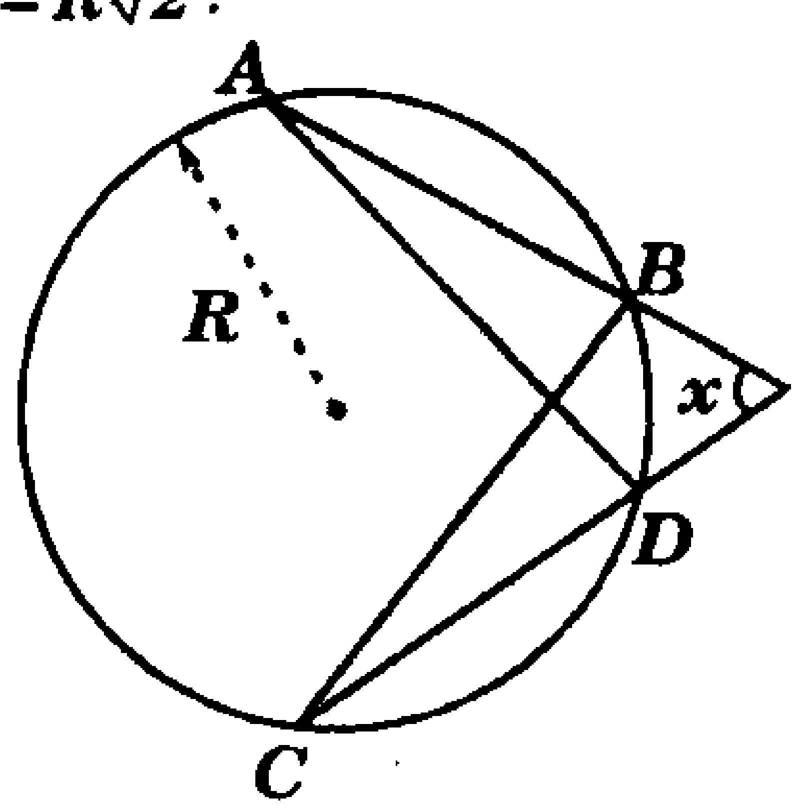
10 Un triángulo equilátero *ABC* está inscrito en una circunferencia de radio $2\sqrt{7}$. Calcular la longitud de $\overline{FM}$, siendo *F* punto medio del arco *AB* y *M* es punto medio de *AC*.

A) 10 B) 7 C) 21 D) $2\sqrt{7}$ *E) 4*

11 En un hexágono regular *ABCDEF* cuyo apotema mide $3\sqrt{3}$. Calcular la medida del apotema del triángulo *ACE*.

A) 3 B) 4 C) 6 D) $3\sqrt{2}$ *E)* $3\sqrt{3}$

12 Calcular "*x*", si: $AD=R\sqrt{3}$ y $BC=R\sqrt{2}$.



A)45° B) 30° C)60° D) 75° E)90°

13 ¿Cuál es el polígono regular en el cual al aumentar en *1* el número de lados, la medida de su ángulo central disminuye en *12*?

A) Cuadrado B) Pentágono
C) Hexágono D) Octógono

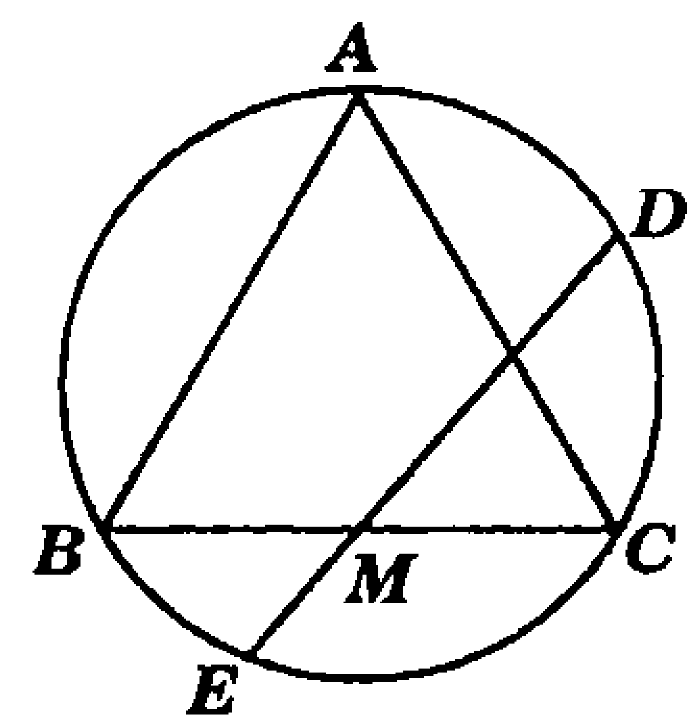
14 Calcular la medida del ángulo central de un polígono regular *MNPQRS...* si la $m\sphericalangle MNQ=135°$.

A) 15° B) 18° C) 14° D) 30° E) 27°

15 Se tiene un polígono equiángulo *ABCDE* .... tal que $\overline{AB} // \overline{DE}$. Calcular el número de diagonales del polígono.

A) 5 B) 9 C) 14 D) 20 E) 27

16 El triángulo *ABC* es equilátero, *BM=MC*. *D* es el punto medio del arco *AC*. Calcular *DM÷ME*.



A) 5/3 B) 2 C) 4 D) 8/3 E) 7/3

17 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

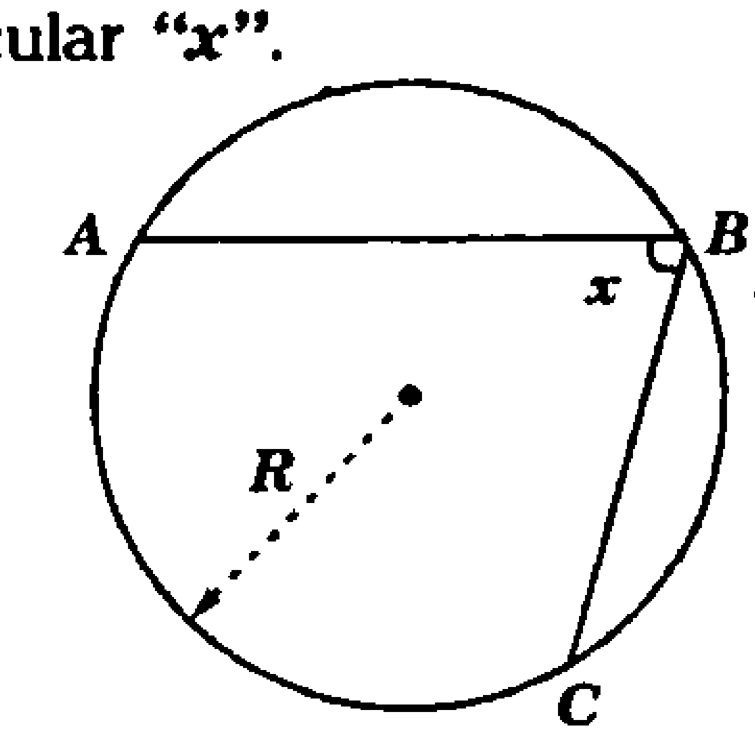
( ) El segmento perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a un lado se denomina apotema

( ) Las circunferencias inscrita y circunscrita de un polígono regula son concéntricas

( ) La medida del lado del hexágono regular es el doble de su apotema

A) VVF B) VVV C) VFF

18 Si: $AB=R\sqrt{3}$ y $BC=R\sqrt{2}$, calcular "*x*".



A) 60° B) 75° C) 90°
D) 67,5° E)45°

20 La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo es *1 800°*. Calcular el número de lados.

A) 12 B) 10 C) 20 D)18 E) 45

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)D	2)C	3)A	4)E	5)B	6)C	7)E	8)C	9)D	10)B
11)A	12)D	13)B	14)D	15)B	16)E	17)A	18)B	19)C	20)A

AREAS DE REGIONES TRIANGULARES

CAPITULO 104

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer el significado de área.*

Deducir las diferentes expresiones para calcular el área de las diferentes regiones triangulares.

* *Saber comparar las áreas de ciertas regiones, dependiendo de algunas características.*

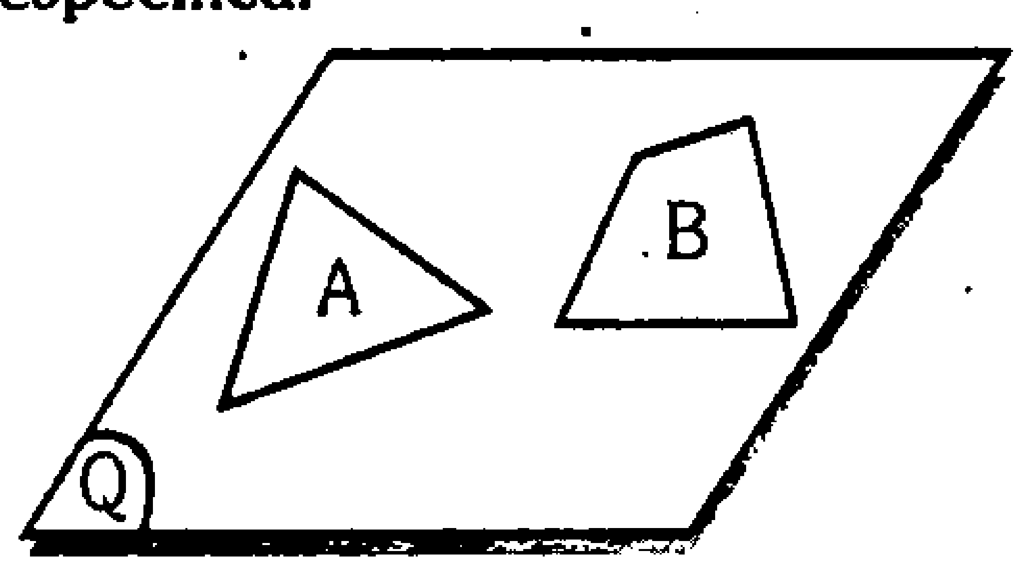
INTRODUCCIÓN :

Al observar una hoja de tu cuaderno puedes ver un determinado tamaño, así mismo, la pizarra o el piso de tu aula, tienen un tamaño que denominaremos área, es decir la medida de una determinada superficie en comparación con otro, no basta entonces saber las longitudes de los lados de las figuras, sino también conocer las superficies que encierran.

Dicho conocimiento permite una mayor utilidad de la geometría.

REGIÓN PLANA

Es la porción de plano que se encuentra limitada por cualquier línea cerrada, por tal motivo las regiones no tienen forma específica.



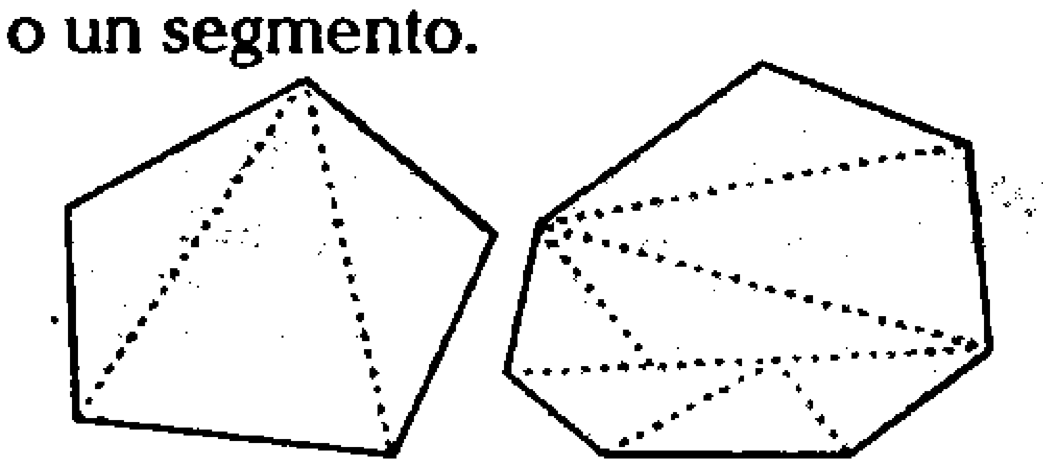
A : Región triangular.

B : Región cuadrangular.

REGIONES POLIGONALES

Una región triangular es un conjunto de puntos, reunión de un triángulo y su interior.

Una región poligonal es la reunión de un número finito de regiones triangulares que se encuentran en un plano dado, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.



Las líneas punteadas en las figuras anteriores indican cómo se podría representar cada una de las dos regiones poligonales mediante tal reunión. Las regiones triangulares de cualquier descomposición así se llaman regiones triangulares componentes de la región poligonal.

POSTULADOS :

I) Dada una unidad de área, a cada región le corresponde un número único, llamado área de la región.

II) El área de una región poligonal es la suma de las áreas de cualquier conjunto de regiones componentes en el cual puede dividirse.

III) Si dos polígonos son congruentes, entonces las regiones poligonales correspondientes tienen la misma área.

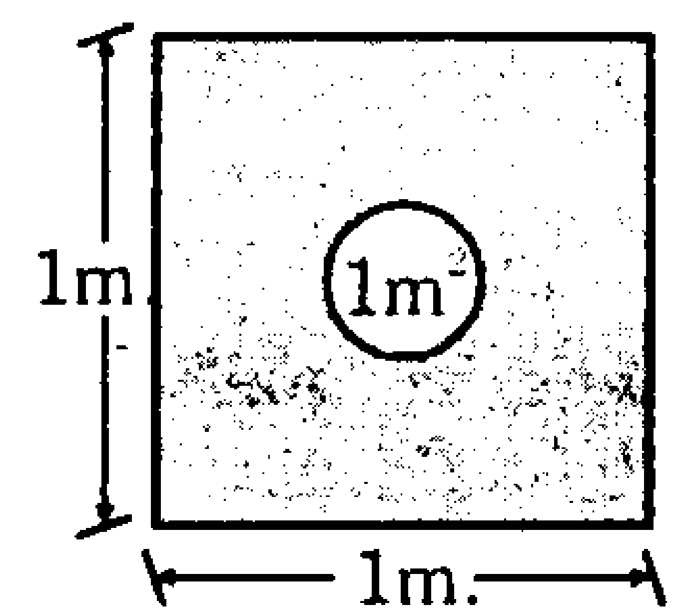
ÁREA

Es el número que indica la medida de una región, es decir es igual al número de veces que se utiliza la región unitaria.

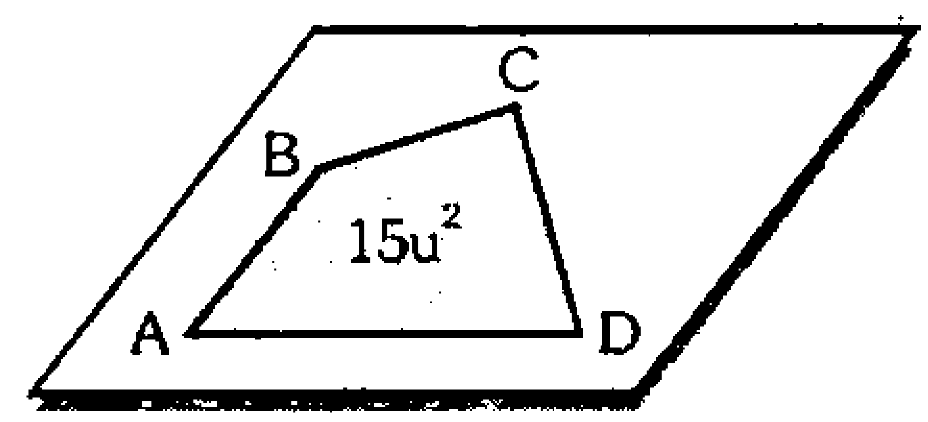
Es decir es la medida de la extensión de una porción de superficie. Para medir las áreas se toma como unidad, el área de una región poligonal determinada y entonces la medida del área será la relación de esta área con la unidad.

POSTULADO DE LA UNIDAD

El área de una superficie limitada por un cuadrado de lado una unidad es igual a una unidad cuadrada.



En general se toma como unidad de área el área de una región cuadrada cuyo lado sea la unidad de longitud.



En el gráfico : $S_{\triangle ABCD} = 15u^2$

ÁREA DE REGIONES TRIANGULARES

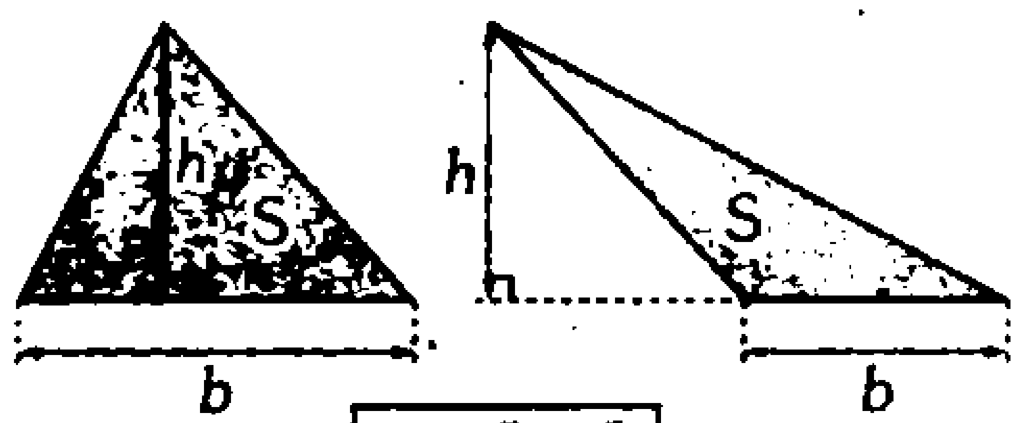
Es una región plana cuyo contorno es un triángulo.

Estudiaremos ,ahora las principales fórmulas para el cálculo de áreas de las regiones triangulares.

A continuación daremos una serie de fórmulas para calcular las áreas

de diversas regiones triangulares.

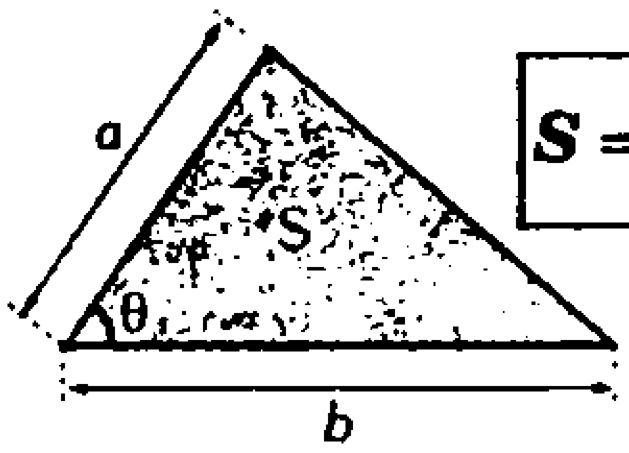
1) FÓRMULA BÁSICA :



$$S = \frac{b \times h}{2}$$

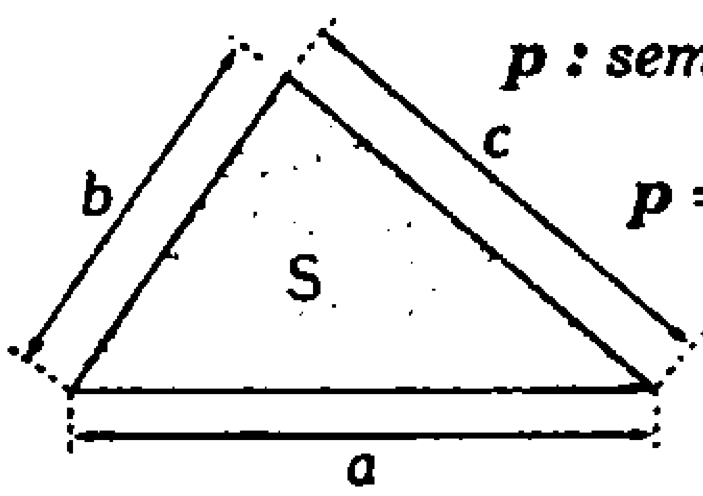
El área de una región tringular es igual al semiproducto de las longitudes de un lado y la altura relativa a dicho lado.

2) FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA



$$S = \frac{a \times b}{2} Sen\theta$$

3) FÓRMULA DE HERÓN

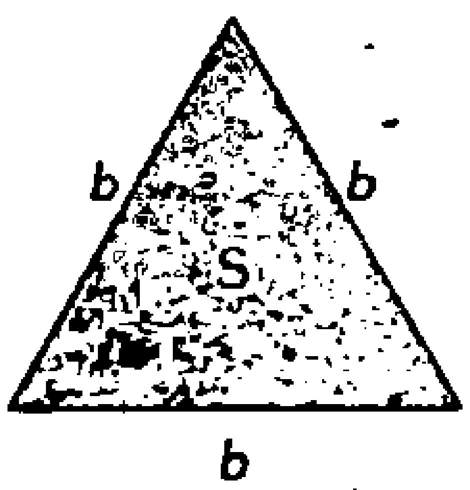


p : semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

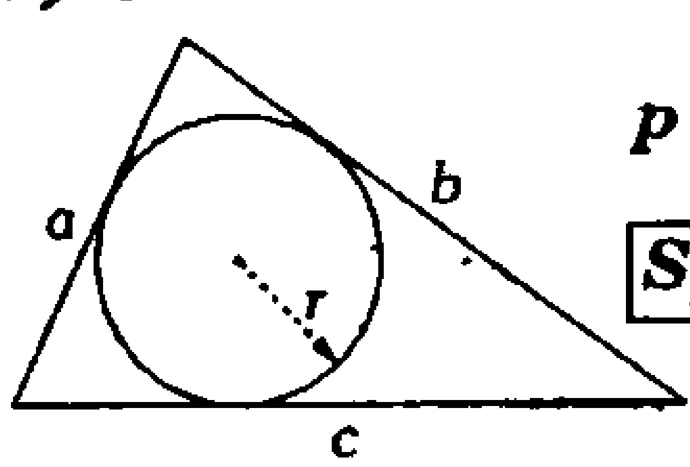
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

4)TRIÁNGULO EQUILÁTERO



$$S = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

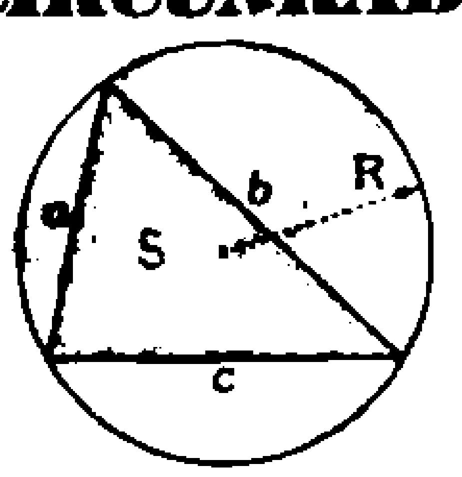
5) EN FUNCIÓN DEL INRADIO



$$p : \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_\Delta = p \times r$$

6) EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO :

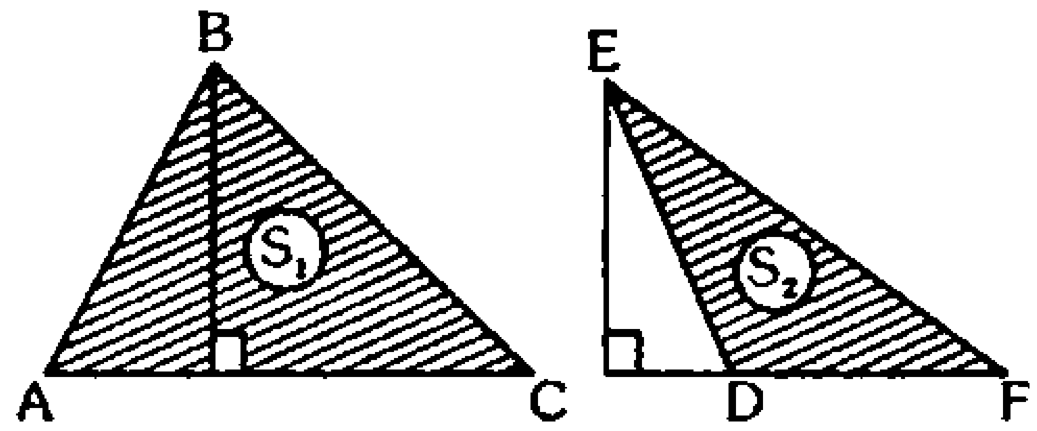


$$S = \frac{a \times b \times c}{4R}$$

PROPIEDADES :

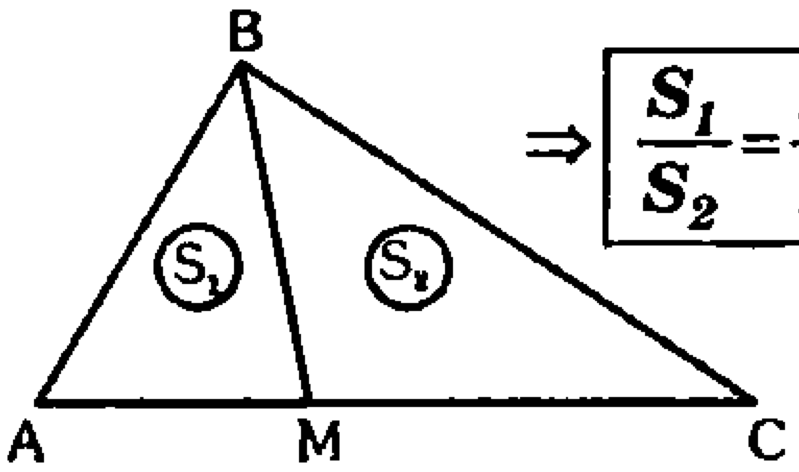
RELACIÓN DE ÁREAS ENTRE DOS TRIÁNGULOS:

I) Si dos triángulos tienen la misma altura, entonces la relación entre sus áreas será igual a la relación entre sus bases.



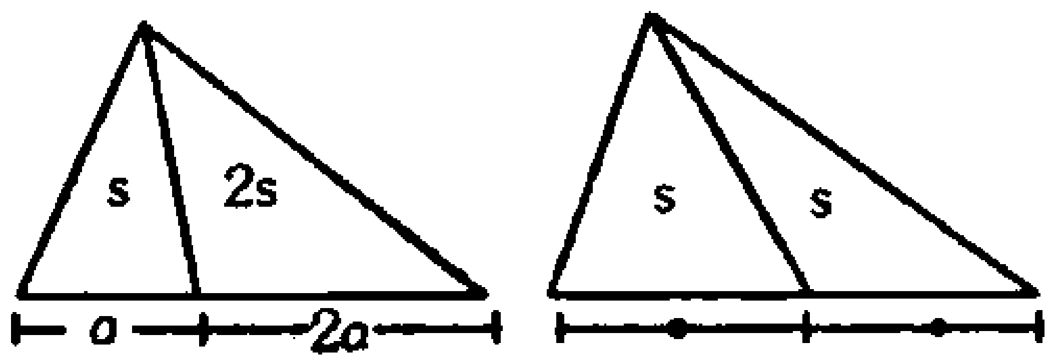
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AC}{DF}$$

CONSECUENCIA :



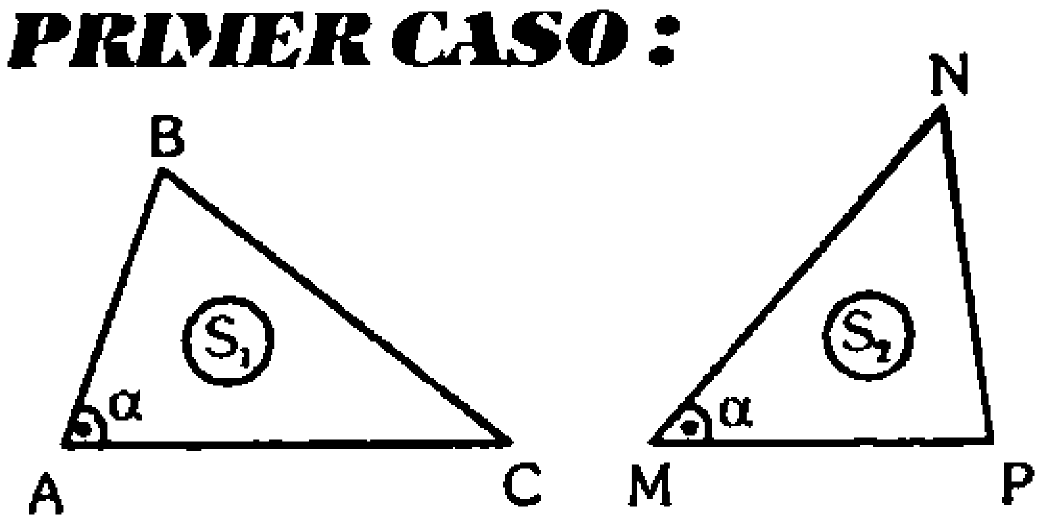
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{AM}{MC}$$

EJEMPLO :



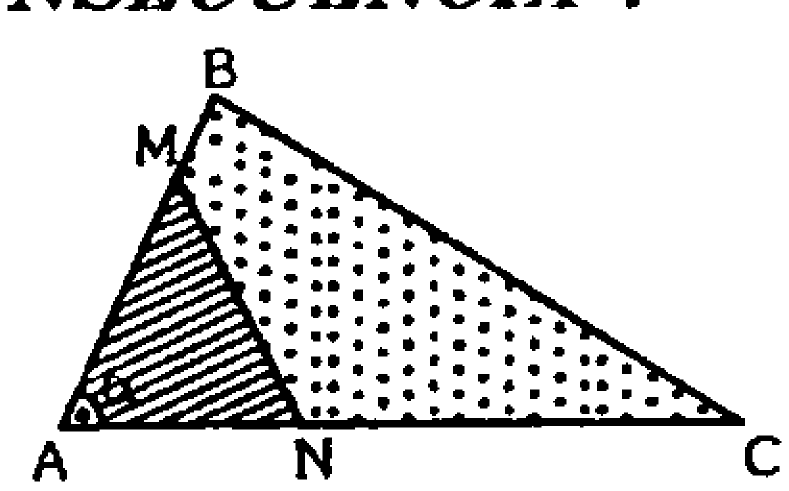
II) Si dos triángulos tienen un ángulo igual o suplementarios, entonces se cumple que la relación de sus áreas es igual a la relación del producto de los lados que forman dichos ángulos.

PRIMER CASO :



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(AB)(AC)}{(MN)(MP)}$$

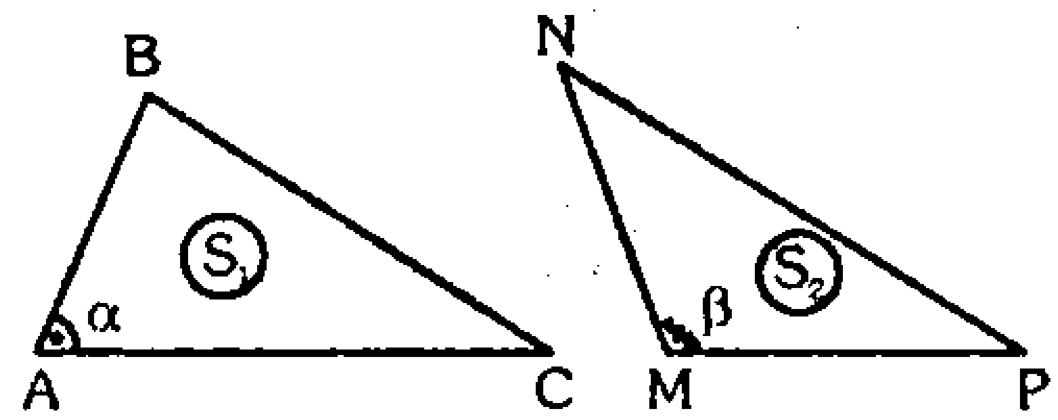
CONSECUENCIA :



$$\frac{S_{(AMN)}}{S_{(ABC)}} = \frac{(AM)(AN)}{(AB)(AC)}$$

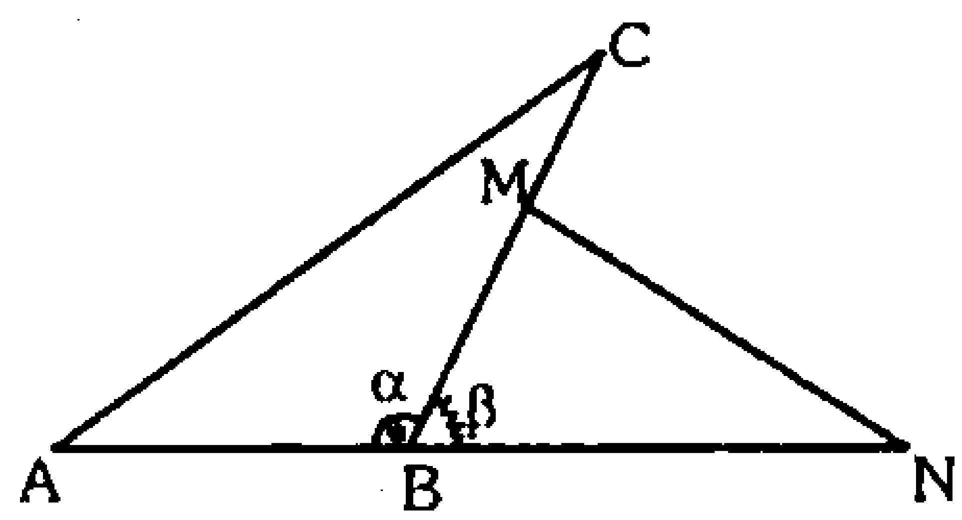
SEGUNDO CASO :

Si : $a + b = 180^o$



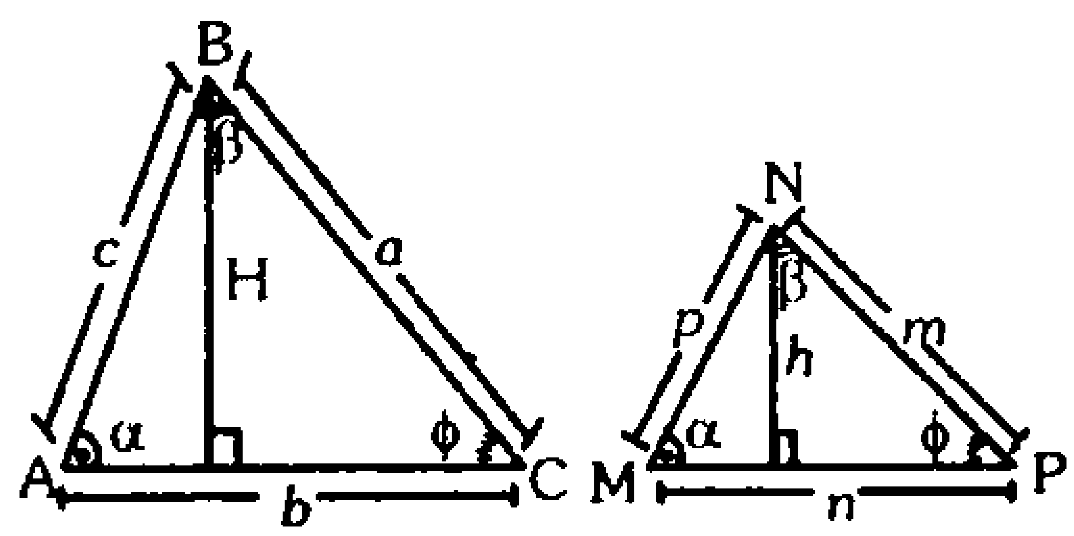
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(AB)(AC)}{(MN)(MP)}$$

CONSECUENCIA :



$$\frac{S_{(ABC)}}{S_{(MBN)}} = \frac{(AB)(BC)}{(BM)(BN)}$$

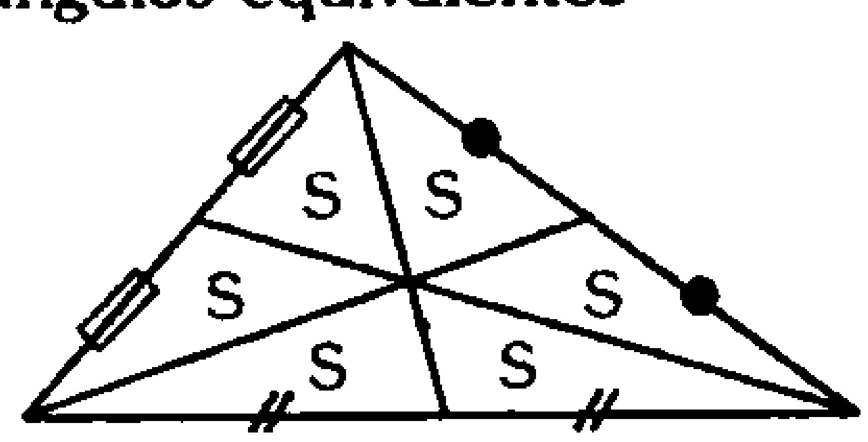
III) Si dos triángulos son semejantes entonces la relación entre sus áreas será igual a la relación entre los cuadrados de sus elementos homólogos.



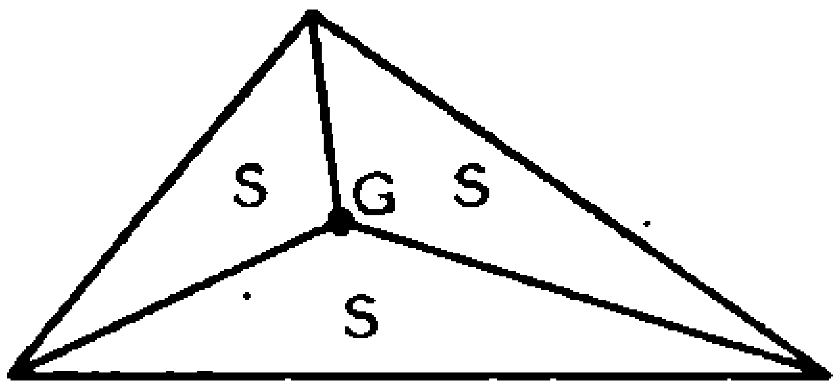
$$\frac{S_{(ABC)}}{S_{(MNP)}} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{p^2} = \frac{H^2}{h^2} = K^2$$

OBSERVACIONES :

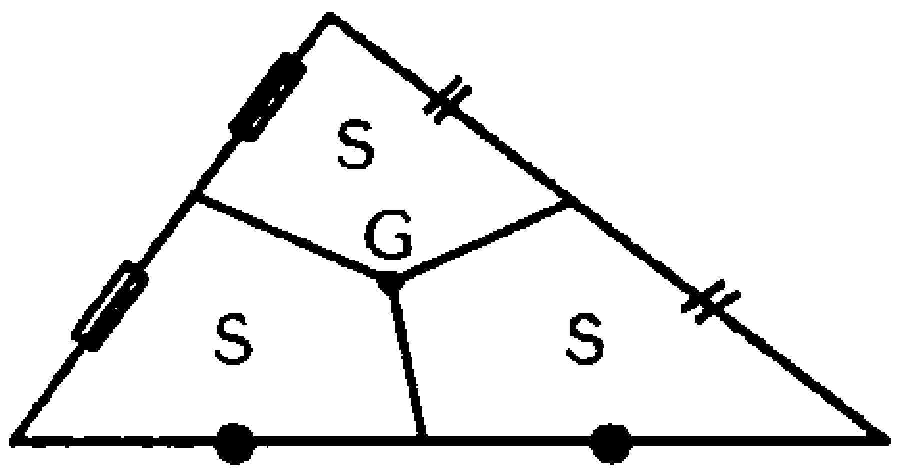
1) En todo triángulo se trazan las tres medianas, se determinan seis triángulos equivalentes



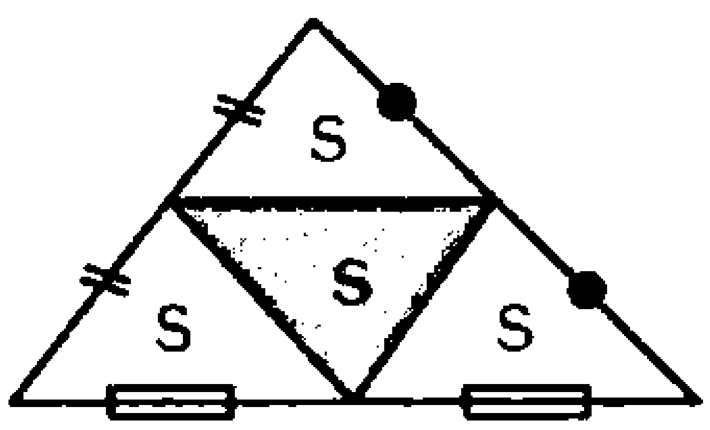
2) En todo triángulo si se une el baricentro con sus tres vértices, se determinan tres triángulos parciales equivalentes.



3) En todo triángulo si se une el baricentro con los puntos medios de los tres lados se generan tres regiones equivalentes.

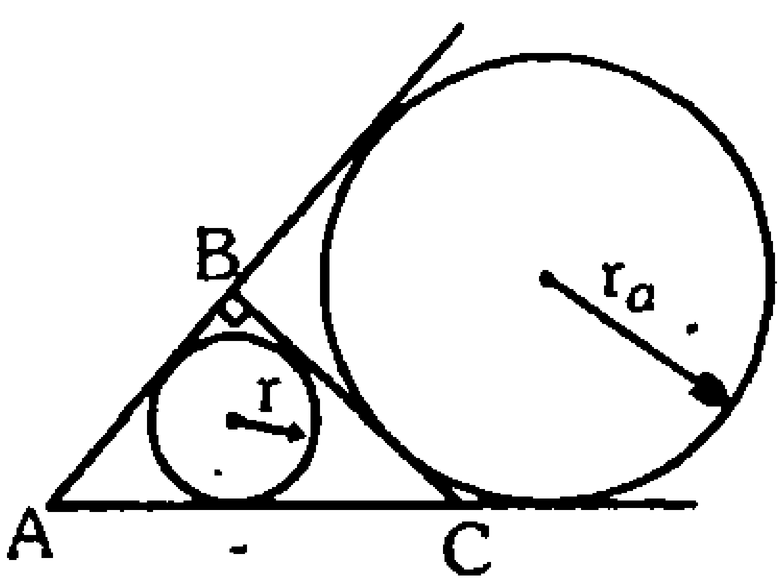


4) En todo triángulo si se unen los puntos medios de sus tres lados se determinan cuatro triángulos parciales equivalentes.



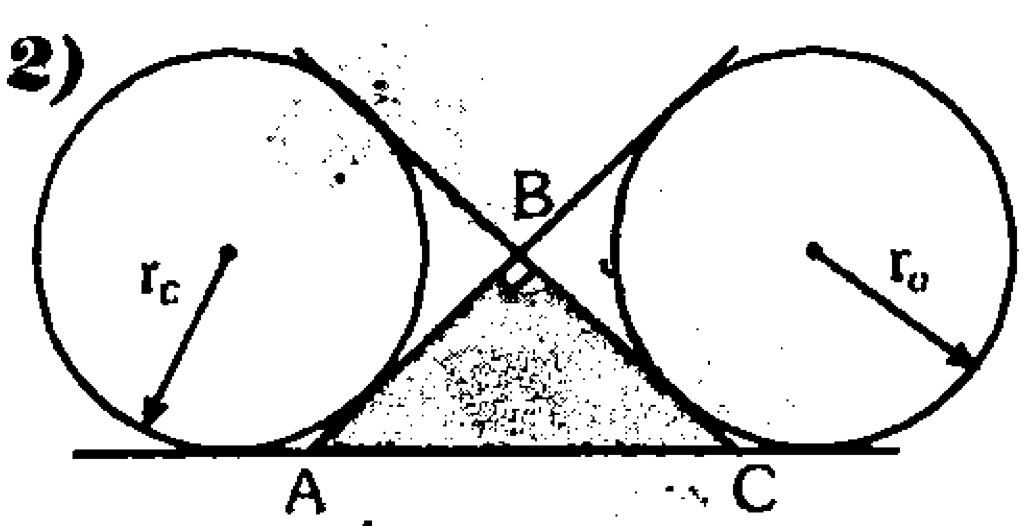
PROPIEDADES ADICIONALES

1)



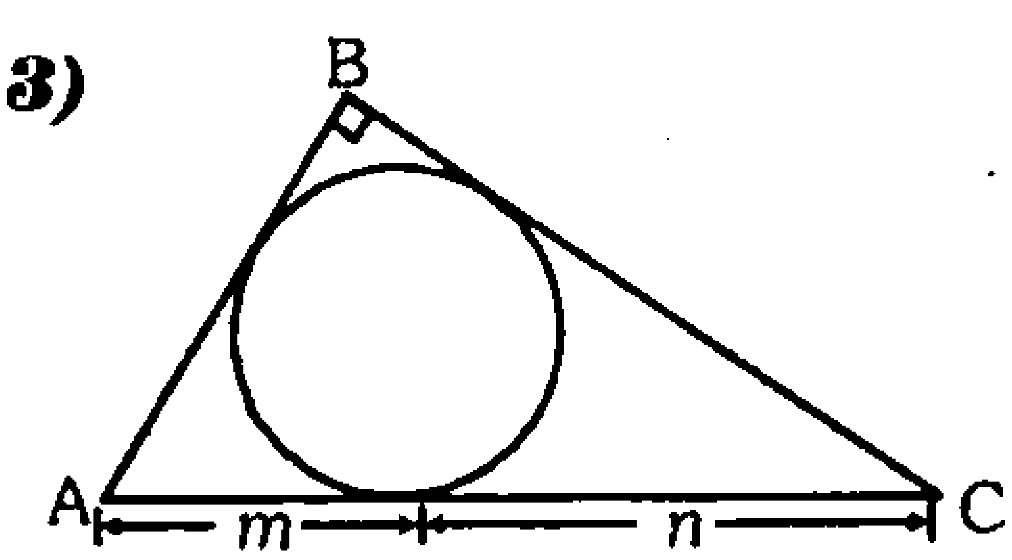
$S_{(ABC)}=r_a\times r$

2)



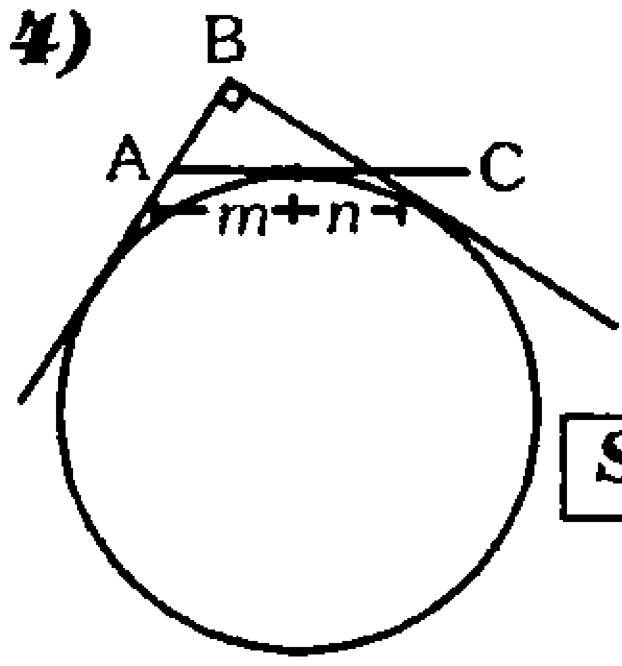
$S_{(ABC)}=r_a\times r_c$

3)



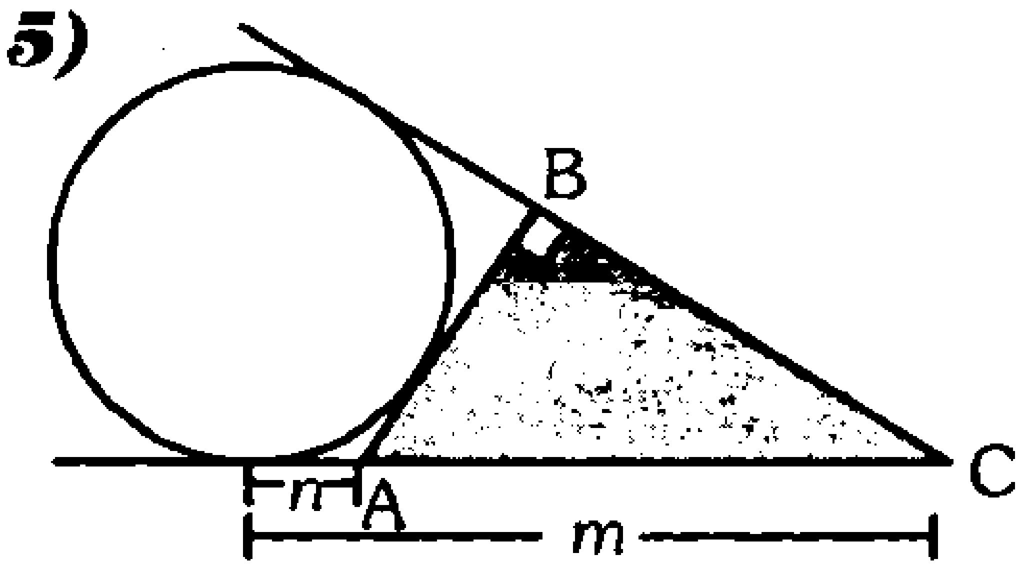
$S_{(ABC)}=m\times n$

4)



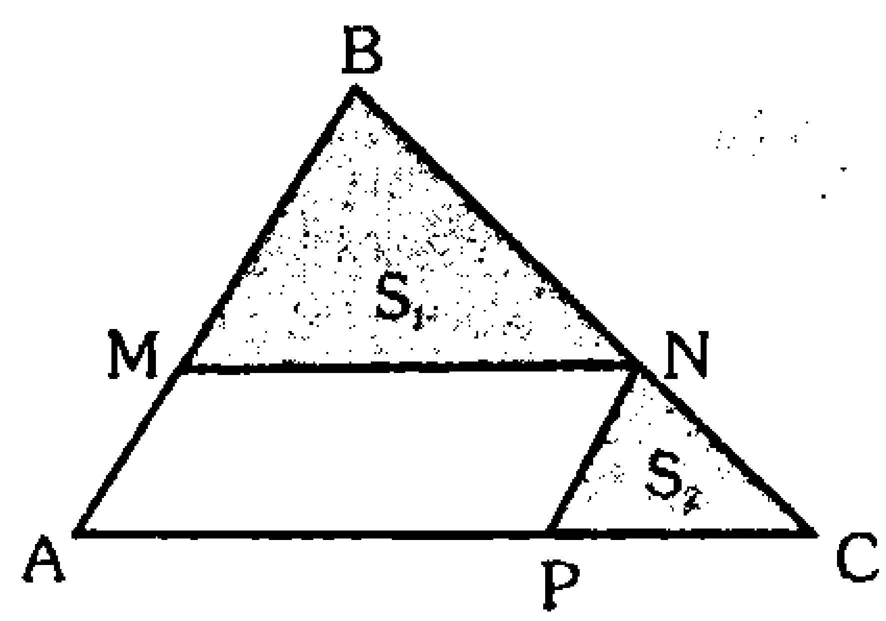
$S_{(ABC)}=m\times n$

5)



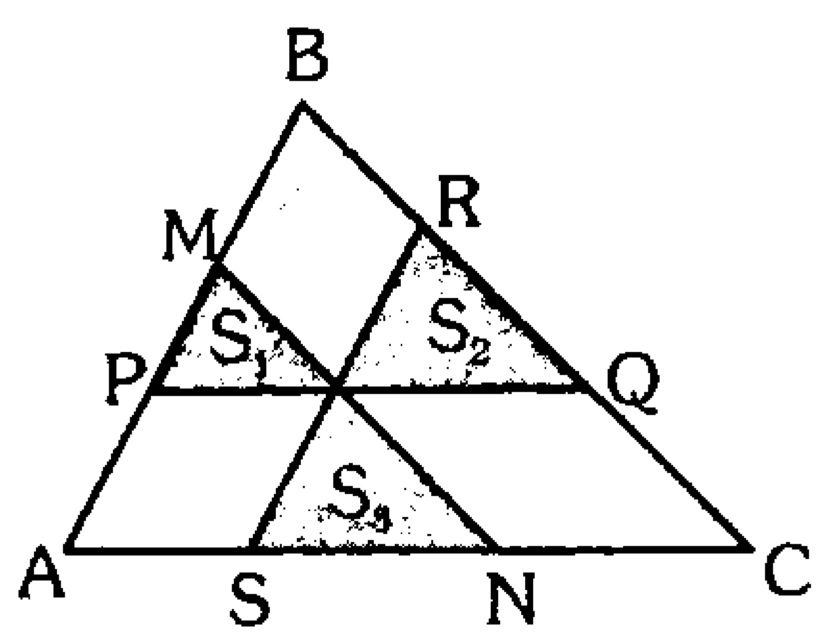
$S_{(ABC)}=m\times n$

6) Si: $\overline{MN}\parallel\overline{AC}$ y $\overline{NP}\parallel\overline{AB}$



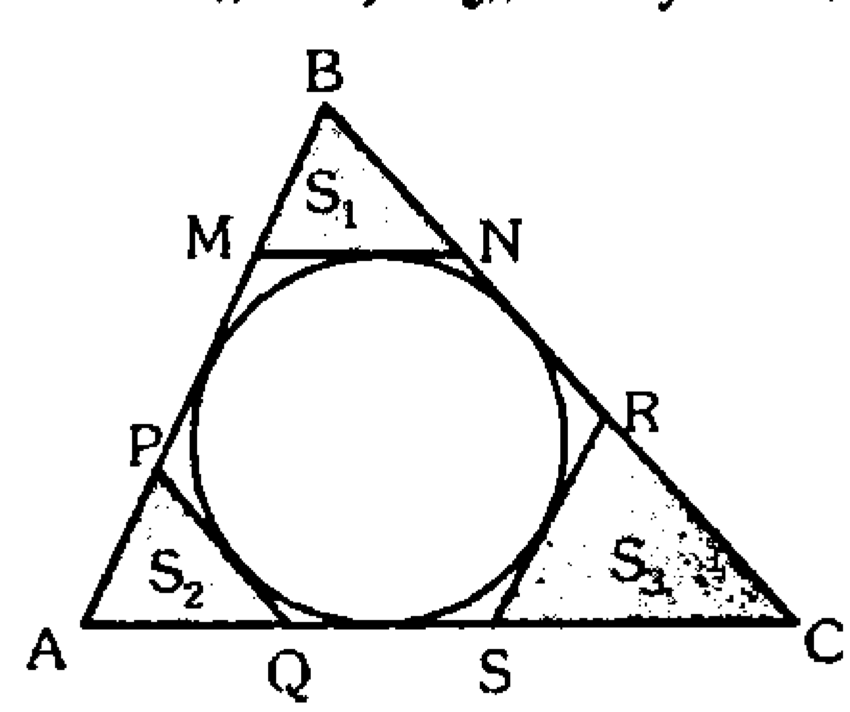
$\sqrt{S_{(ABC)}}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$

7) Si: $\overline{MN}\parallel\overline{BC};\overline{RS}\parallel\overline{AB}$ y $\overline{PQ}\parallel\overline{AC}$



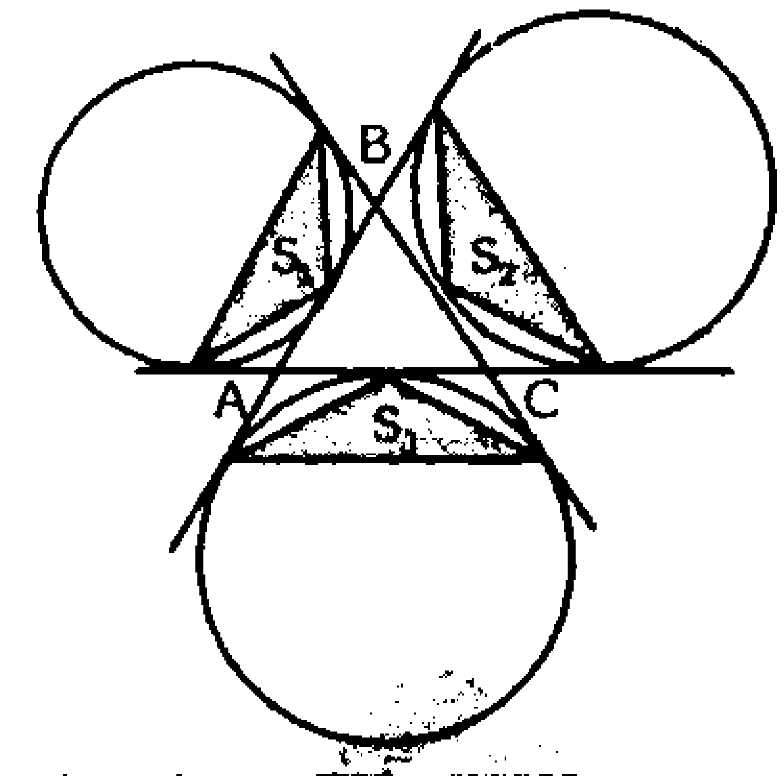
$\sqrt{S_{(ABC)}}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$

8) Si: $\overline{MN}\parallel\overline{AC};\overline{PQ}\parallel\overline{BC}$ y $\overline{RS}\parallel\overline{AB}$



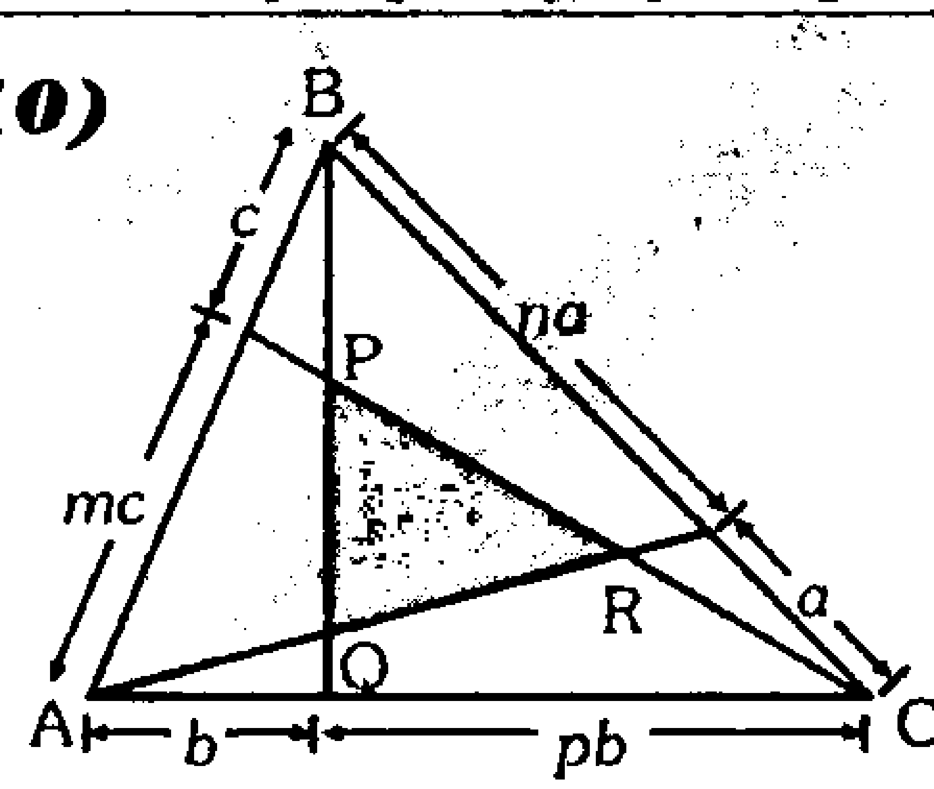
$\sqrt{S_{(ABC)}}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$

9)



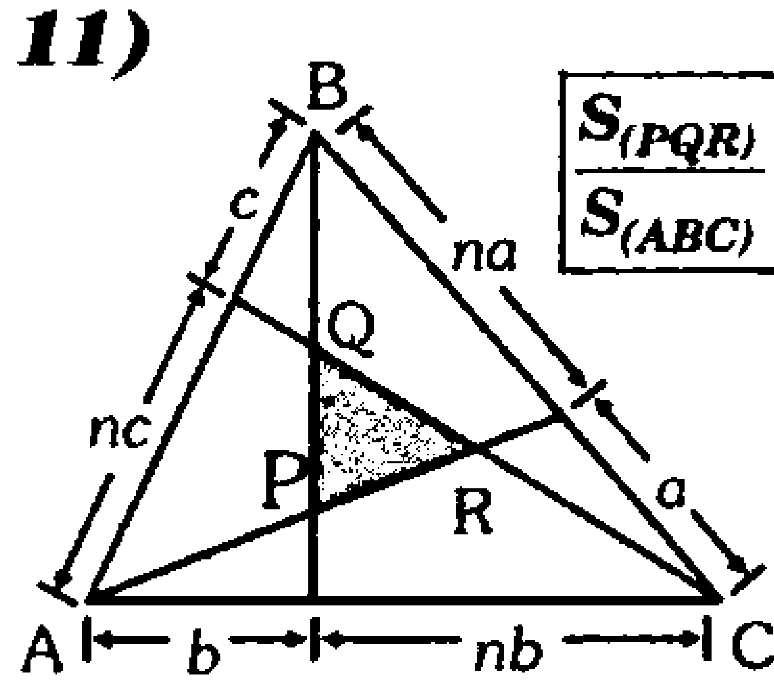
$$S_{(ABC)}=\frac{(S_1+S_2)\times(S_1+S_3)\times(S_2+S_3)}{S_1\;S_2+S_1\;S_3+S_2\;S_3}$$

10)



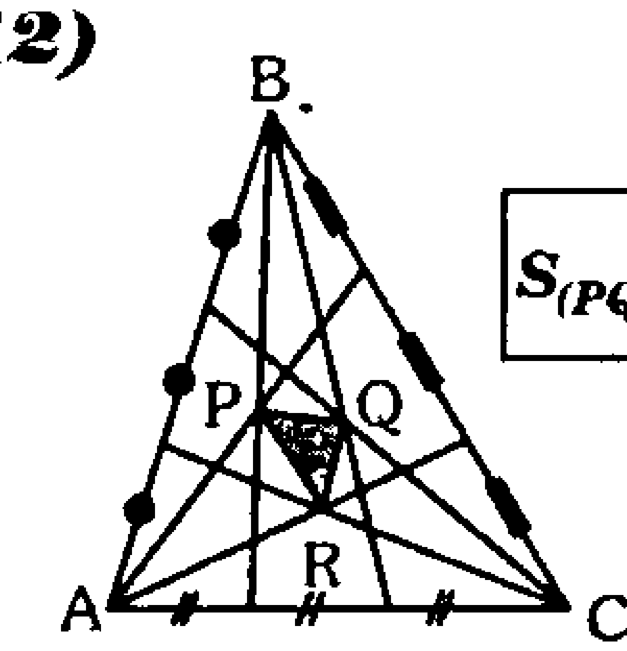
$$\frac{S_{(PQR)}}{S_{(ABC)}}=\frac{(m\times n\times p-1)^2}{(mp+p+1)\;(np+n+1)(mn+m+1)}$$

11)



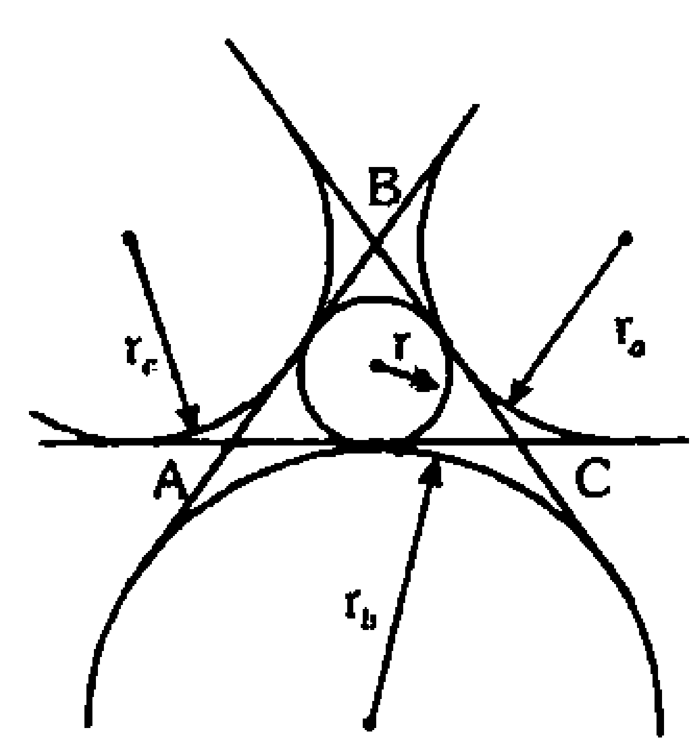
$$\frac{S_{(PQR)}}{S_{(ABC)}}=\frac{(n-t)^3}{(n^3-t)}$$

12)



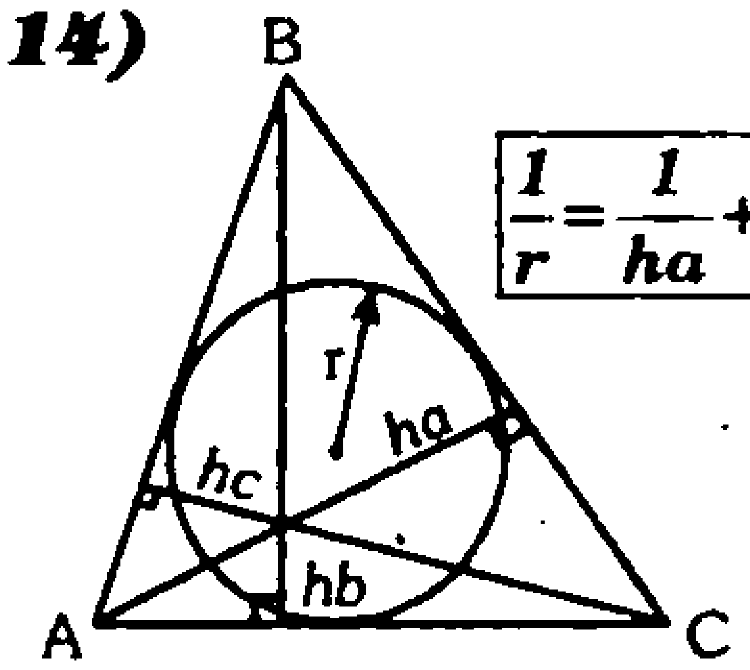
$$S_{(PQR)}=\frac{S_{(ABC)}}{25}$$

13)



$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

14)



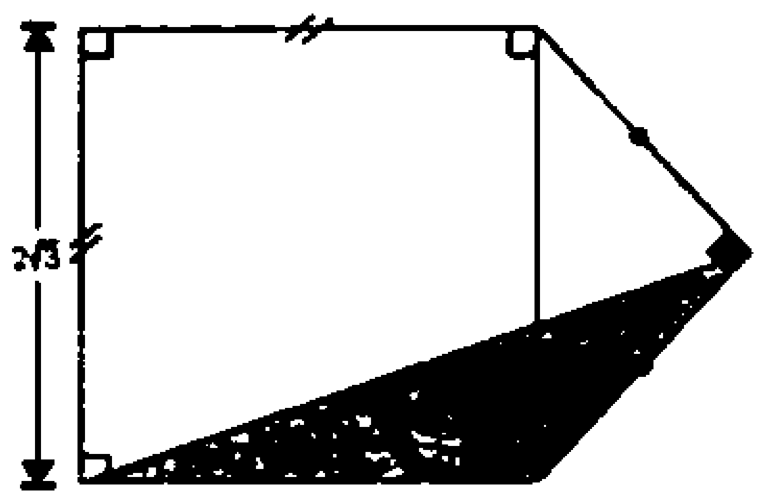
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

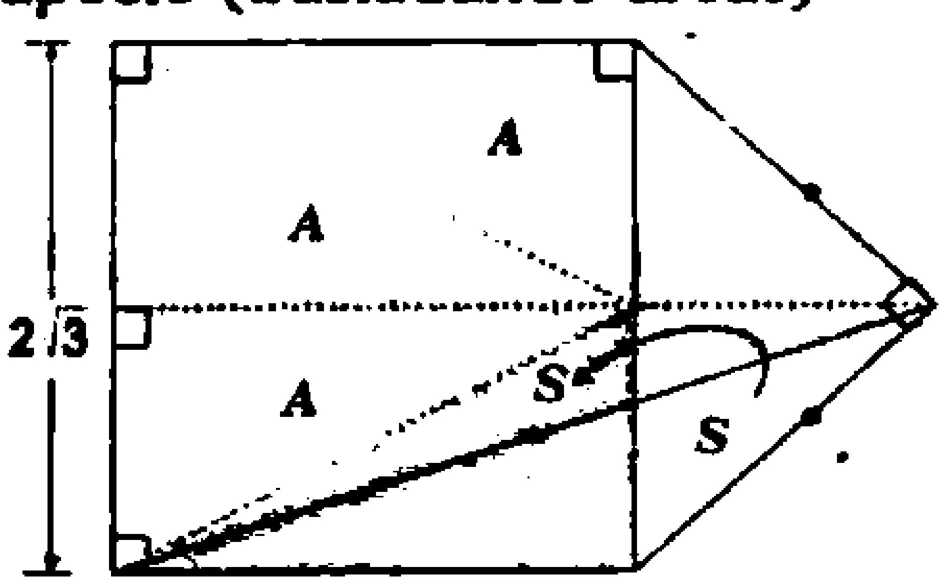
Calcular el área de la región sombreada.

A) $2u^2$
B) 3
C) 4
D) 2,5
E) 1,5



RESOLUCIÓN :

* Trazamos líneas auxiliares , para luego aplicar la propiedad del trapecio (trasladando áreas)



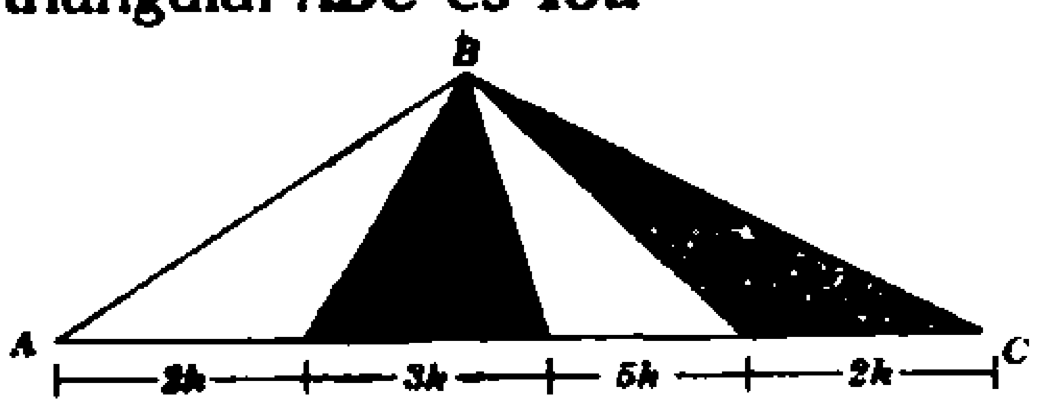
"Se puede deducir que el área de la región sombreada equivale a la cuarta parte del área del cuadrado."

$$S_{sombreada}=\frac{S_{cuadrado}}{4}=\frac{(2\sqrt{3})^2}{4}=3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

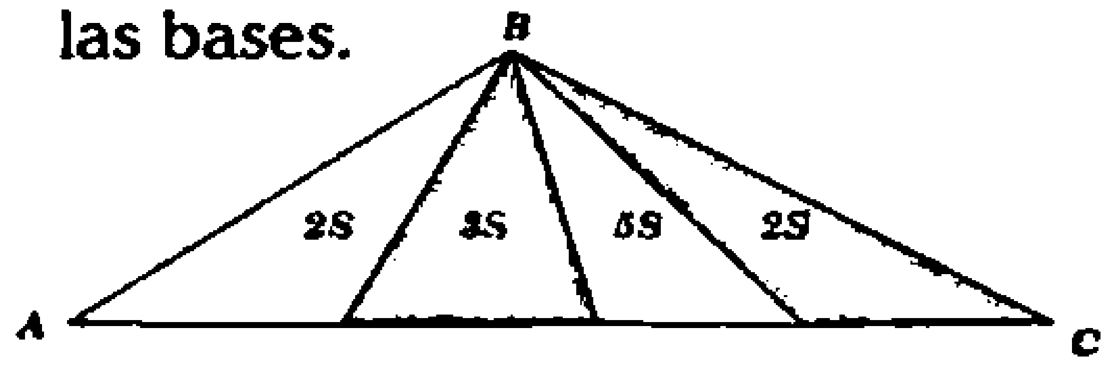
Calcular el área de la región sombreada, si el área de la región triangular *ABC* es $48u^2$



A) $25u^2$ B) 20 C) 24 D) 32 E) 36

RESOLUCIÓN :

* Por la propiedad de la ceviana colocaremos las áreas de los triángulo respectivos, considerando las bases.



* Por dato : $S_{ABC}=48$

$$2S + 3S + 5S + 2S = 48 \Rightarrow S=4$$

* Piden : $S_{sombreada}=5S = 5(4) = 20$

RPTA : "B"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el área de una región triangular si la base mide *14* y su altura correspondiente es igual a *9*

RPTA:...

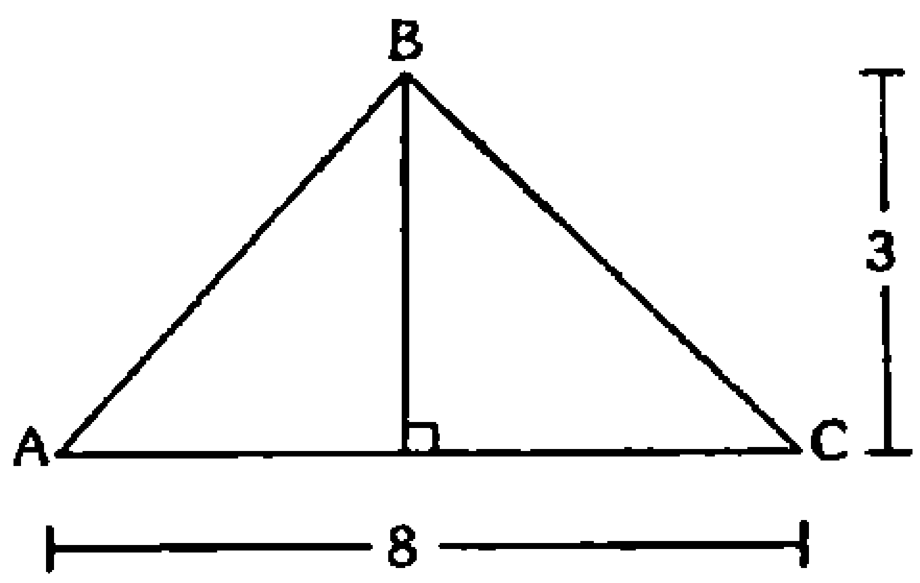
02 La base de un triángulo mide *25* y su altura correspondiente es *3/5* de su base. Calcular la medida de su región triangular.

RPTA:...

03 Calcular la medida de una región triangular de vértices *A, B* y *C*. Si : *AB= BC= 5 ; AC=8.*

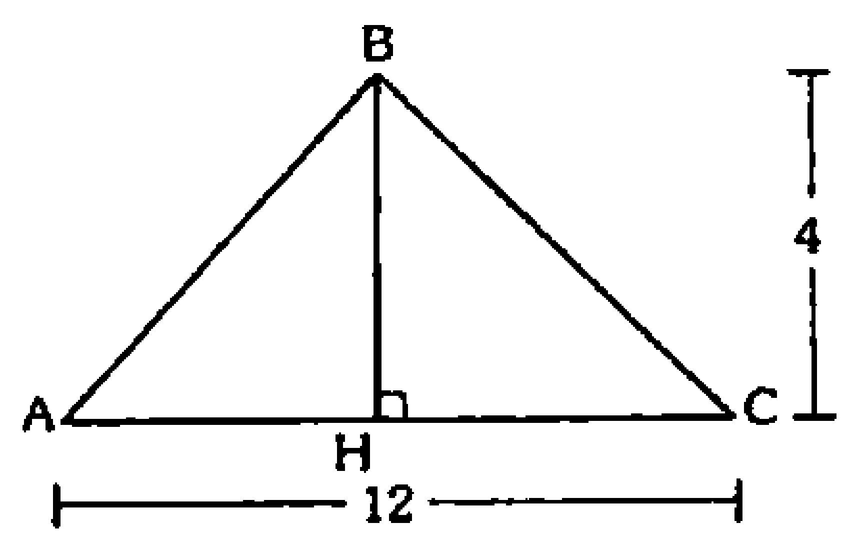
RPTA:...

04 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*



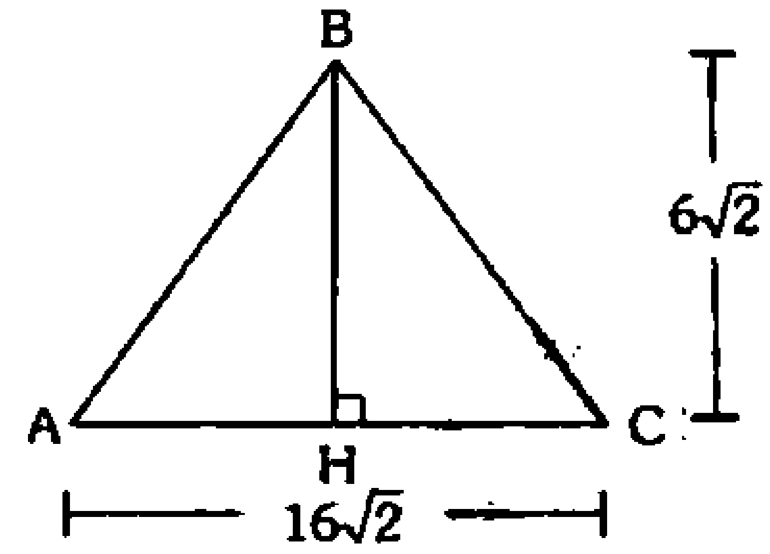
RPTA:...

05 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*



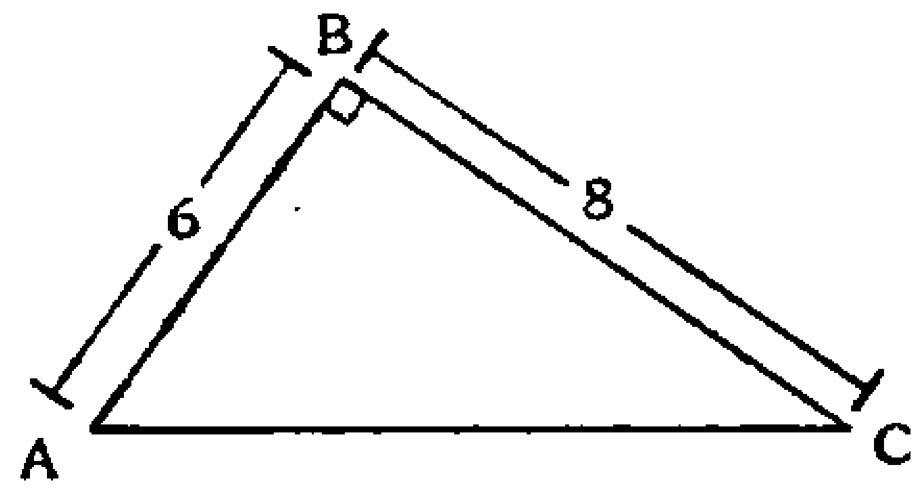
RPTA:...

06 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*



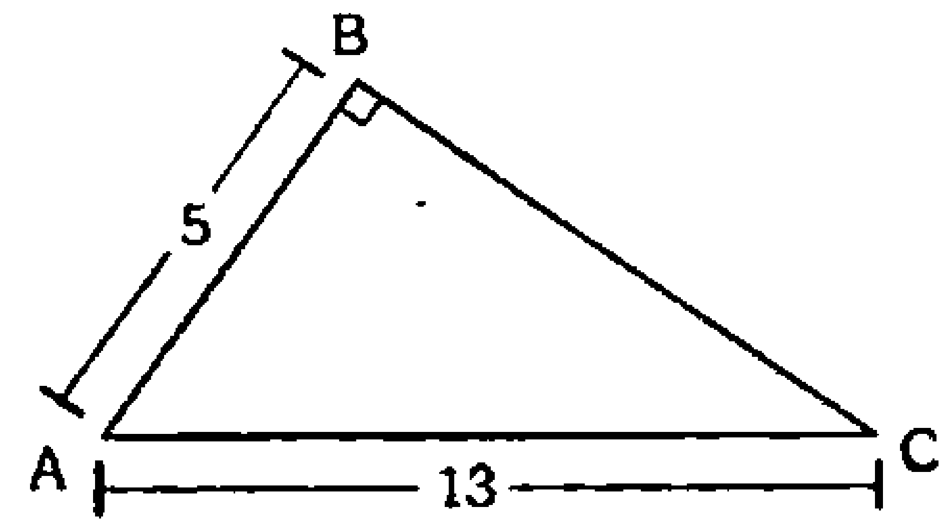
RPTA:...

07 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*



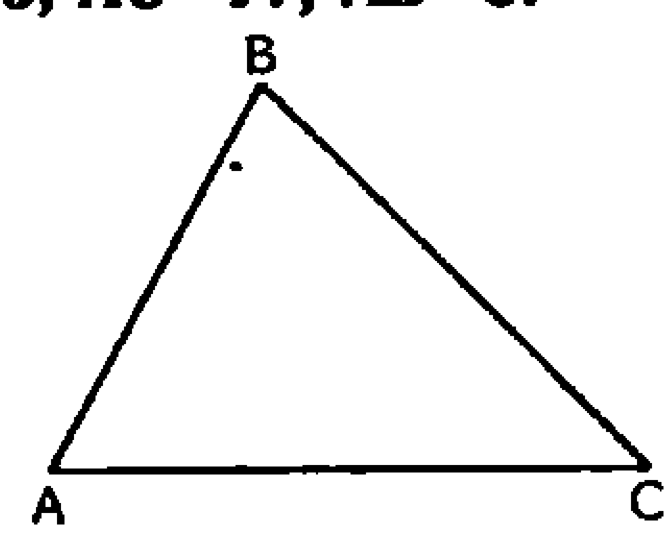
RPTA:...

08 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*



RPTA:...

09 En el gráfico. Calcular el área de la región triángular *ABC*, si: *BC=15, AC=17, AB=8.*



RPTA:...

10 Determine el área de una región triangular, sabiendo que la suma de su base y su respectiva altura es *24*, y las longitudes de la base y altura están en relación de *5* a *3*.

RPTA:...

11 En un triangulo rectángulo sus catetos miden *16* y *20*. Calcular el área de la región triangular.

RPTA:...

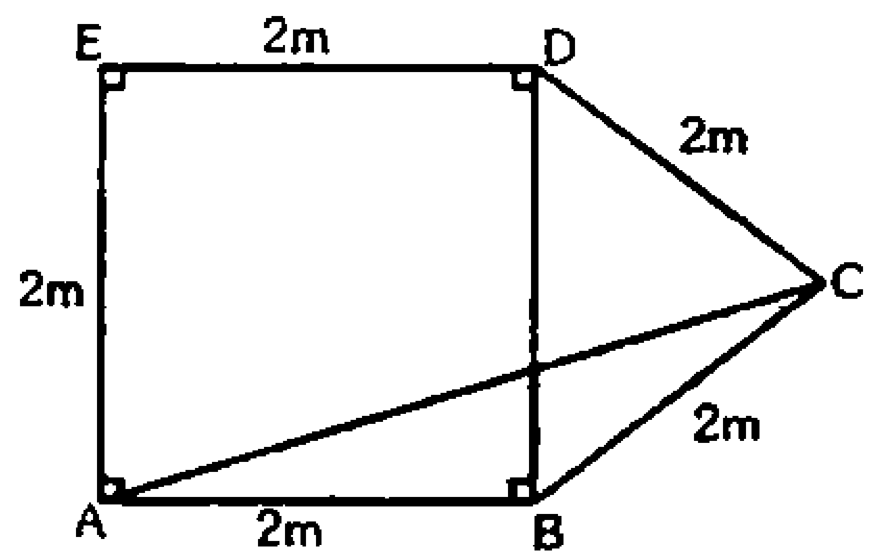
12 Si los lados en un triangulo miden *13 ; 14* y *15.* Calcular la medida de su región

RPTA:..

13 Calcular el área de una región triangular equilátera cuyo perímetro es *18.*

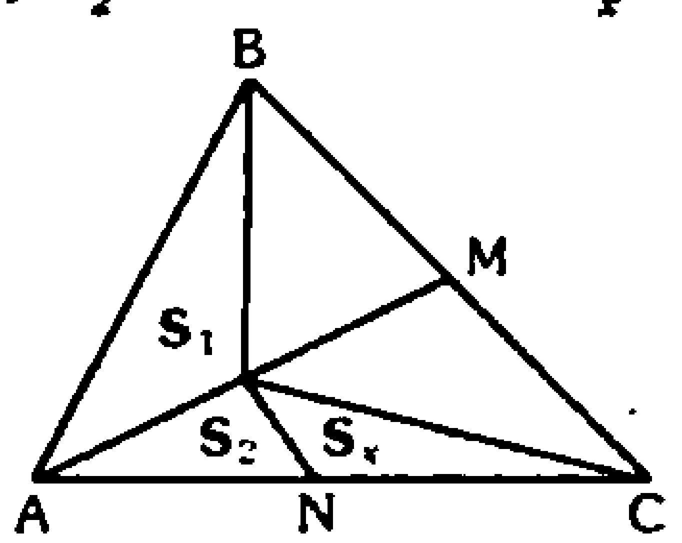
RPTA:..

14 En la figura. Calcular el área de la región triangular *ABC.*



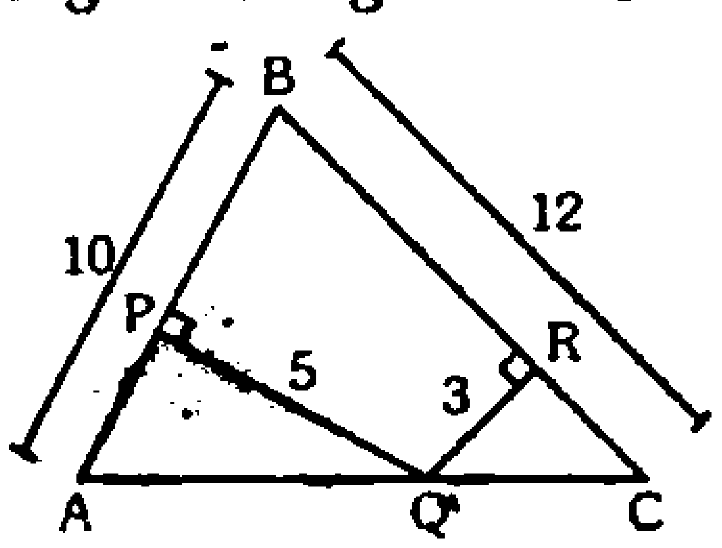
RPTA:..

15 En el gráfico : $\overline{AM}$ es mediana, $S_1=19$, $S_2=11$. Calcular S_x



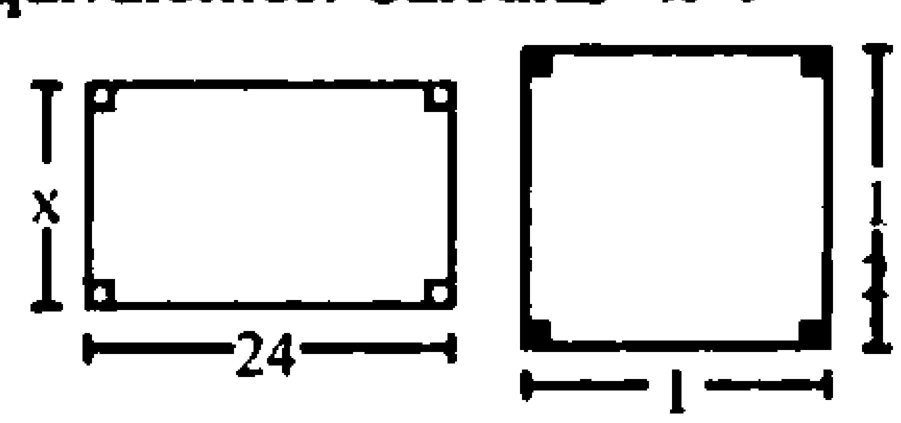
RPTA:..

16 En el gráfico : calcular el área de la región triángular *ABC.*



RPTA:..

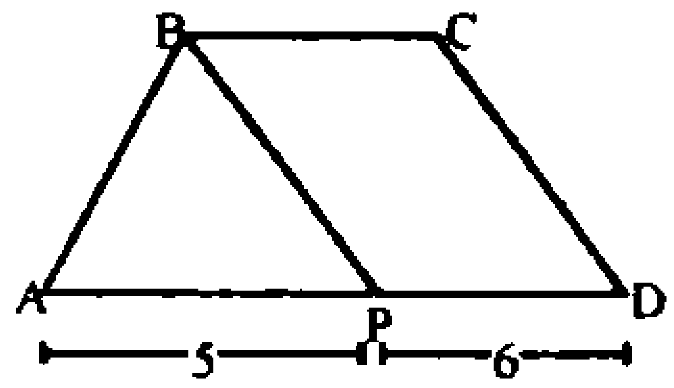
17 Si las regiones poligonales son equivalentes. Calcular «x».



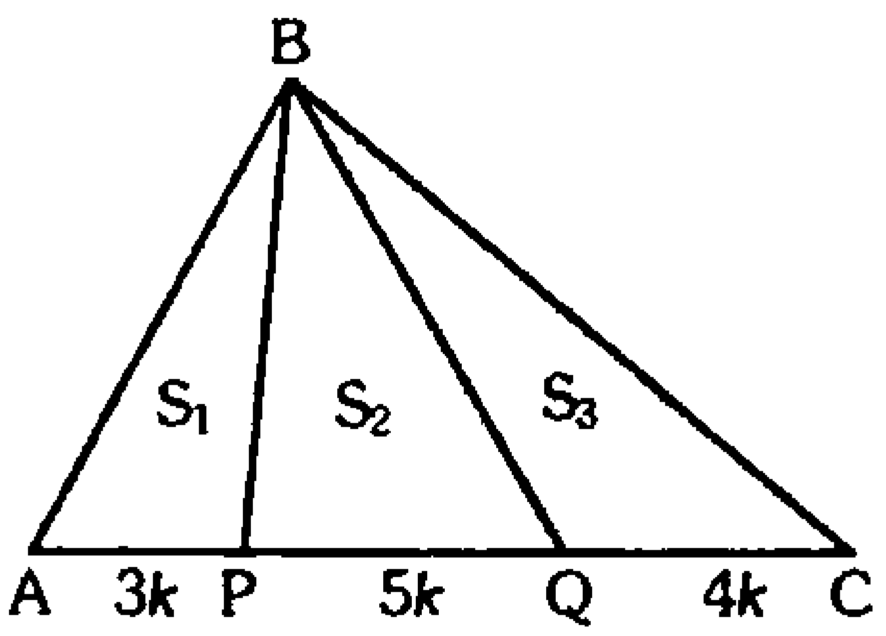
A) 24 B) 6 C) 24 D) 3 E) 8

18 Calcular el área del trapecio *ABCD*, si *PBCD* es un romboide de área *24 m^2.*

A) 24
B) 34
C) 14
D) 44
E) 30



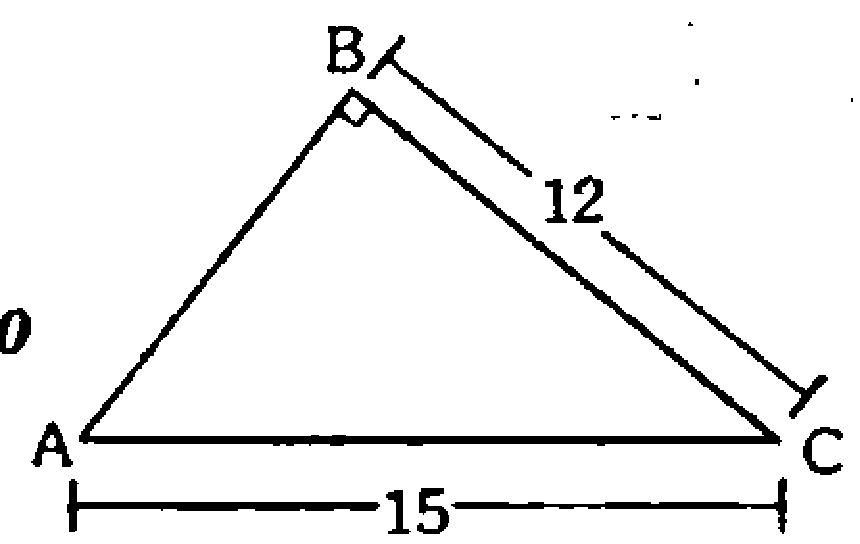
19 En el gráfico, calcular la relación entre las áreas de las regiones sombreadas y no sombreadas.



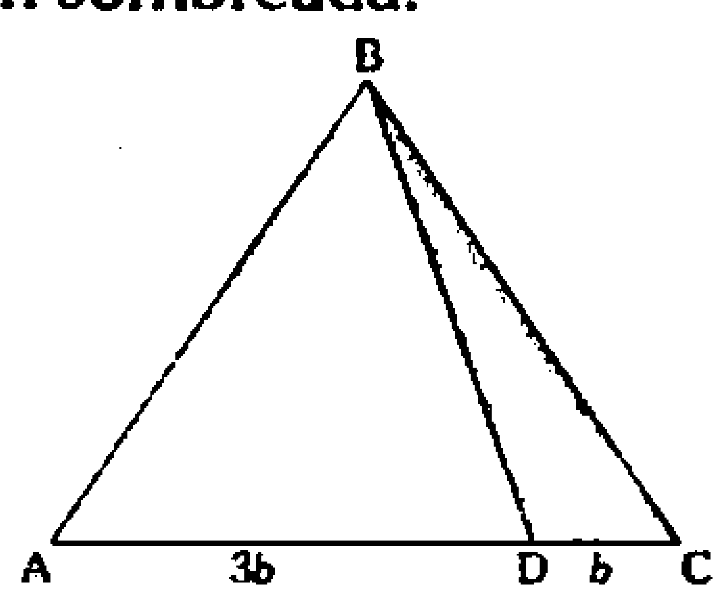
RPTA:..

20 Del gráfico, calcular el área de la región triangular *ABC.*

A) 54
B) 56
C) 63
D) 100
E) 81

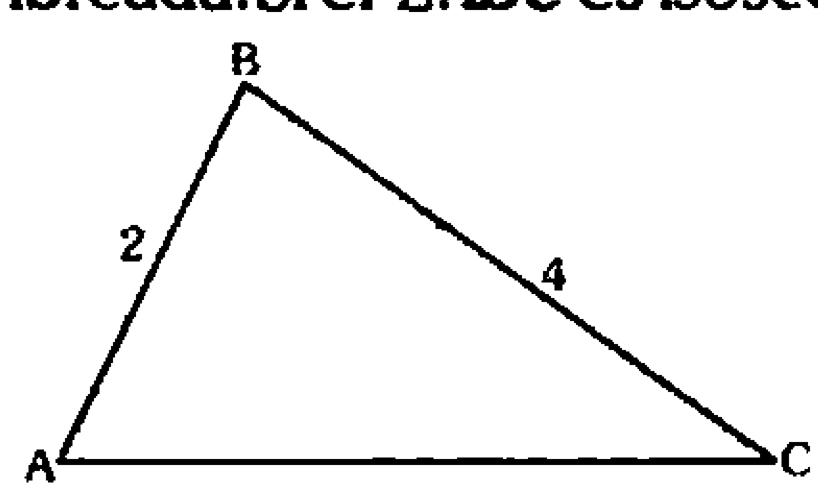


21 Si el área de la región triangular *ABC* es *80.* Calcule el área de la región sombreada.



RPTA:..

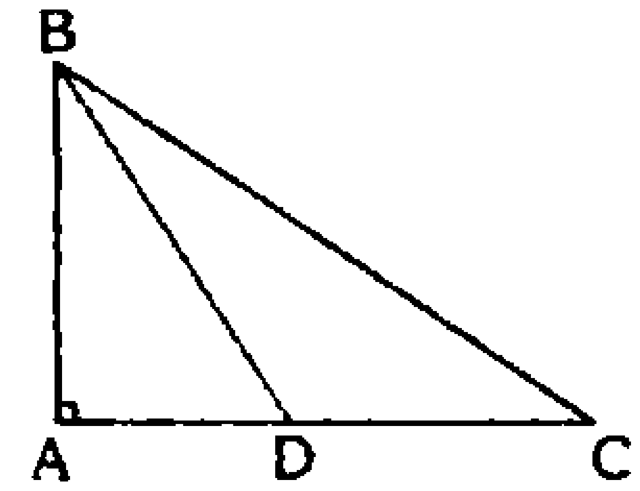
22 Calcule el área de la región sombreada. Si el $\triangle ABC$ es isósceles.



RPTA:..

23 Del gráfico, *AB=4, DC=6.* Calcular el área de la región triangular *BDC.*

A) 11
B) 10
C) 12
D) 20
E) 14

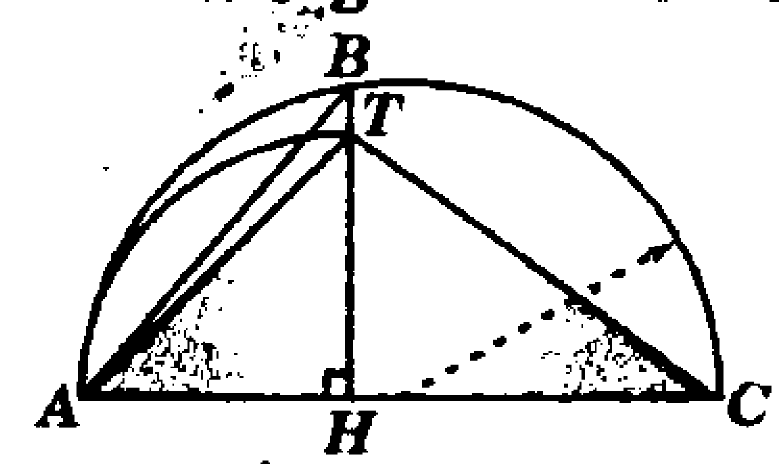


PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Una región triangular determinada por un triángulo rectángulo, tiene *36* de perímetro y *54* de área. Calcular la medida de la hipotenusa.

A) 12 B) 18 C) 15 D) 14 E) 7,5

02 Si *AB=4* y *H* es centro, calcular el área de la región sombreada.



A) 4 B) 8 C) 16 D) 9 E) 8,5

03 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

( ) El área es un número positivo que indica la medida de una superficie limitada

( ) Las regiones equivalentes tienen áreas iguales

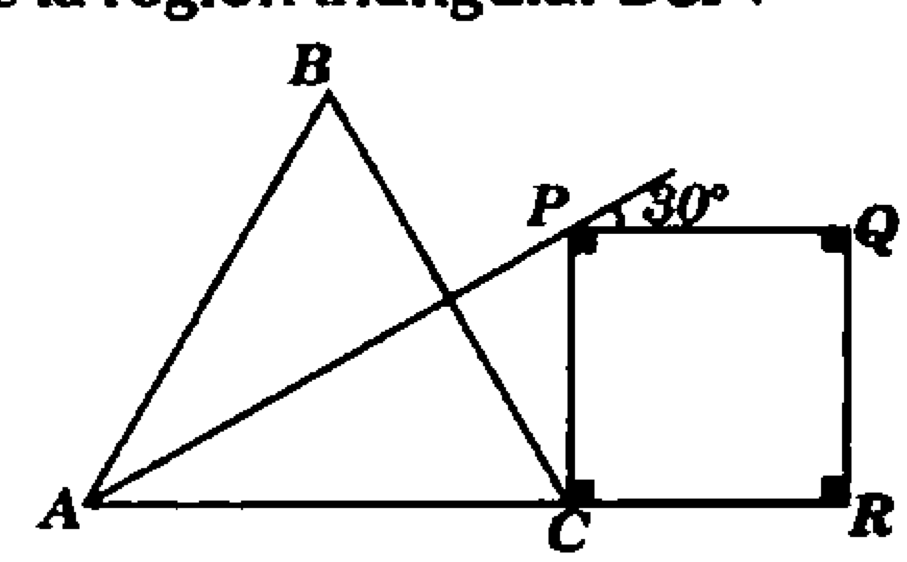
( ) En un triángulo equilátero cuyo radio mide "*r*" el área de su región triangular es $3\sqrt{3}r^2$

A) VVV B) FVV C) VVF
D) FFV E) VFF

04 En un triángulo *ABC, AB=10*; $m\sphericalangle A=37°$ y $m\sphericalangle C=45°$. Calcular el área de la región triangular *ABN*, si $CN=2(BN)$; $N \in \overline{BC}$.

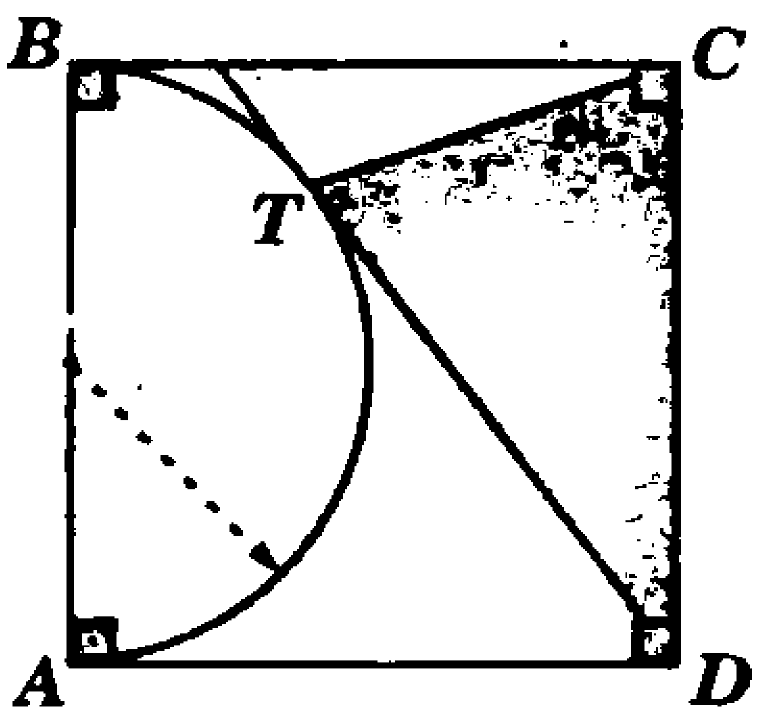
A) 10 B) 12 C) 14 D) 18 E) 28

05 Si $\triangle ABC$: equilátero; *CPQR*: cuadrado y *PQ=2*, calcular el área de la región triangular *BCP*.



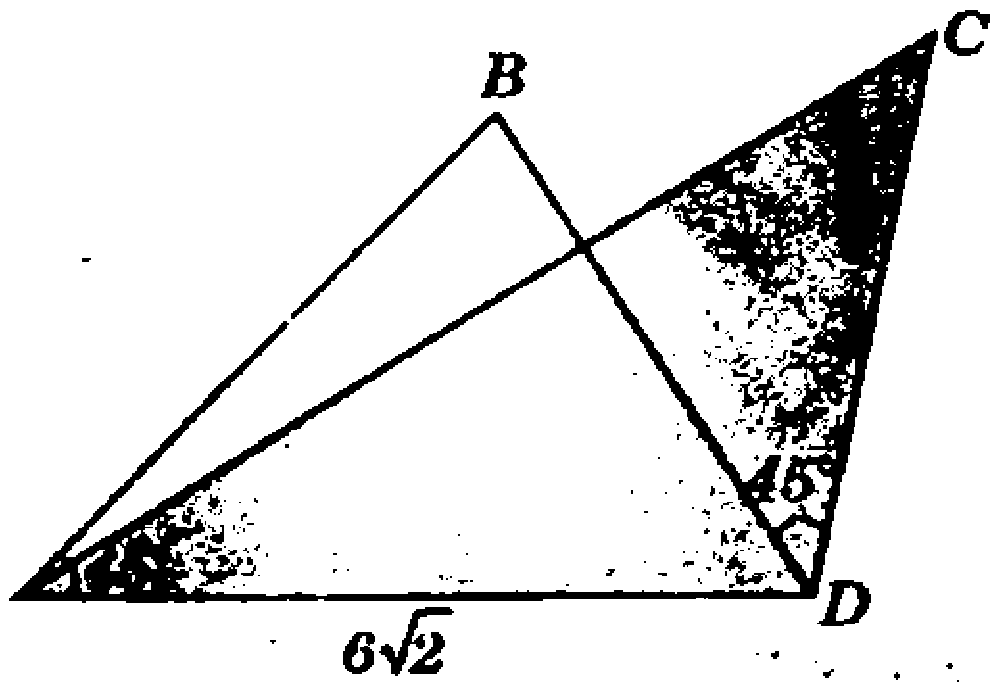
A) 1 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\sqrt{5}$

06 Calcular el área de la región triangular *TCD* si el lado del cuadrado mide *4* y *T* es punto de tangencia.



A) 24/5
B) 21/5
C) 4
D) 31/5
E) 6

07 De la figura : *BD=CD*, calcular el área de la región triangular *ACD*.



A) $9\sqrt{2}$ **B)** $16\sqrt{2}$ **C)** $24\sqrt{2}$
D) $18\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}$

08 En un triángulo isósceles *ABC*, *AB=AC*. las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ miden *9* y *7,5* respectivamente. Siendo "*G*" el baricentro, calcular el área de la región cuadrangular *ABCG*.

A) 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 60

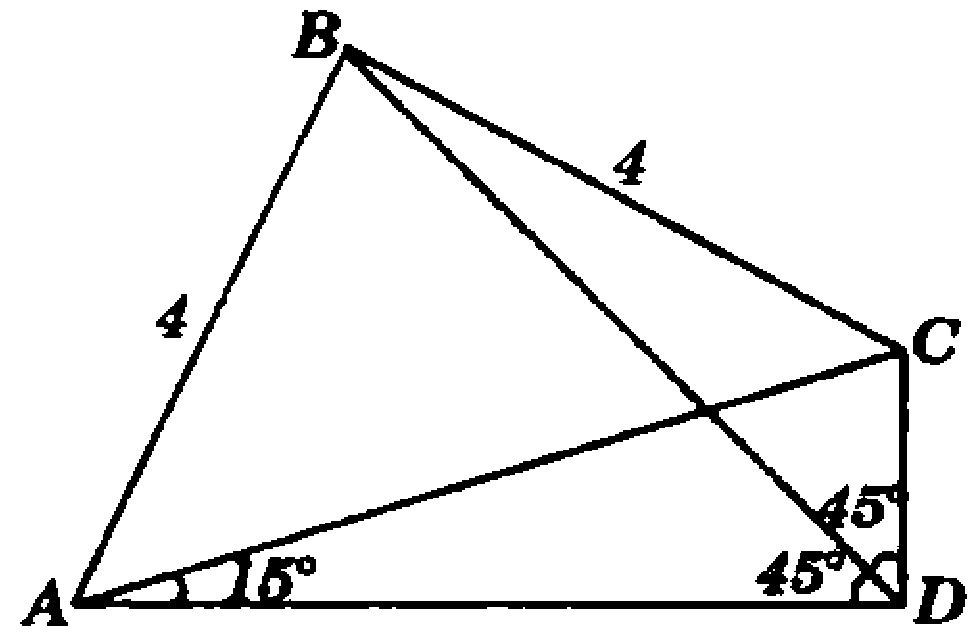
09 Se tiene un triángulo escaleno cuya área de su región triangular es *24*. Calcular el área de la región triangular determinada al unir los puntos medios de dos lados y el baricentro del triángulo original.

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1,5 **E)** 4,5

10 En un triángulo *ABC*, el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado *AC*. Calcular el área de la región triangular si *AC=12* y el inradio mide *4*.

A) 36 **B)** 48 **C)** 54 **D)** 66 **E)** 72

11 De la figura, calcular el área de la región triangular *ACD*.



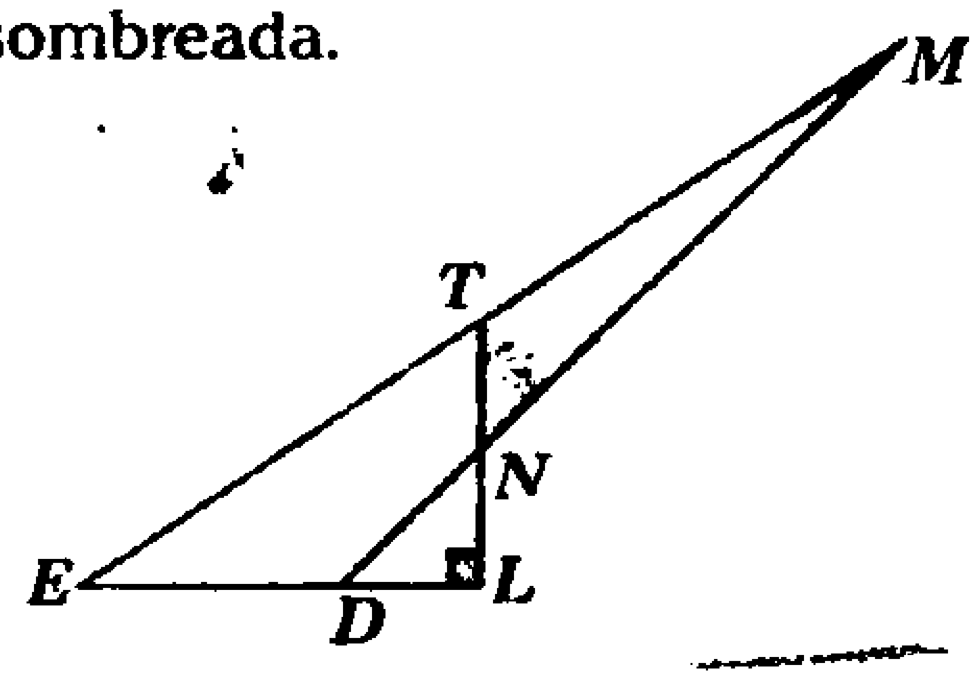
A) 8 **B)** 6 **C)** $4\sqrt{3}$ **D)** 4 **E)** $4\sqrt{2}$

12 En un cuadrado *ABCD* se traza $\overline{CE}(E \in \overline{AD})$; que interseca a $\overline{BD}$ en *P*. Si la relación de las áreas de las regiones triangulares *CPD* y *EPD* es de *3* a *2* y *AE=2*, calcular el área de la región triangular *BCD*.

A) 32 **B)** 24,5 **C)** 12,5
D) 25 **E)** 18

13 En el gráfico *TN=NL=4*, *5ED=7DL =35*.

Calcular el área de la región sombreada.

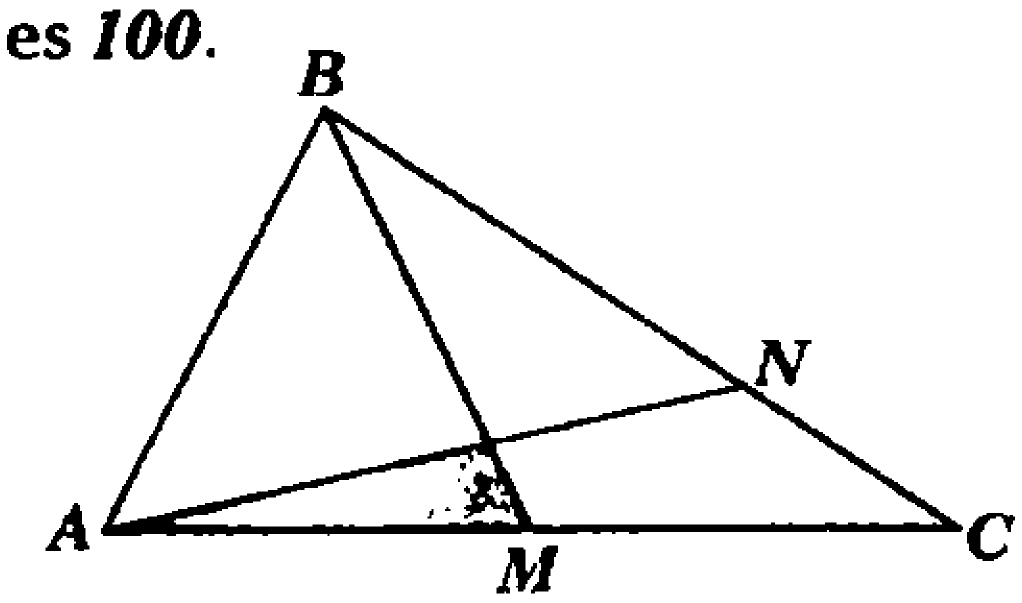


A) 30 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 70

14 Se tiene un triángulo equilátero *ABC* cuyo lado mide "*L*", se prolongan los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en longitudes tales como: "*L*" ; "*2L*" y "*3L*" limitados por los puntos *P*; *Q* y *R*. Calcular la relación de las áreas de las regiones triangulares *PQR* y *ABC*.

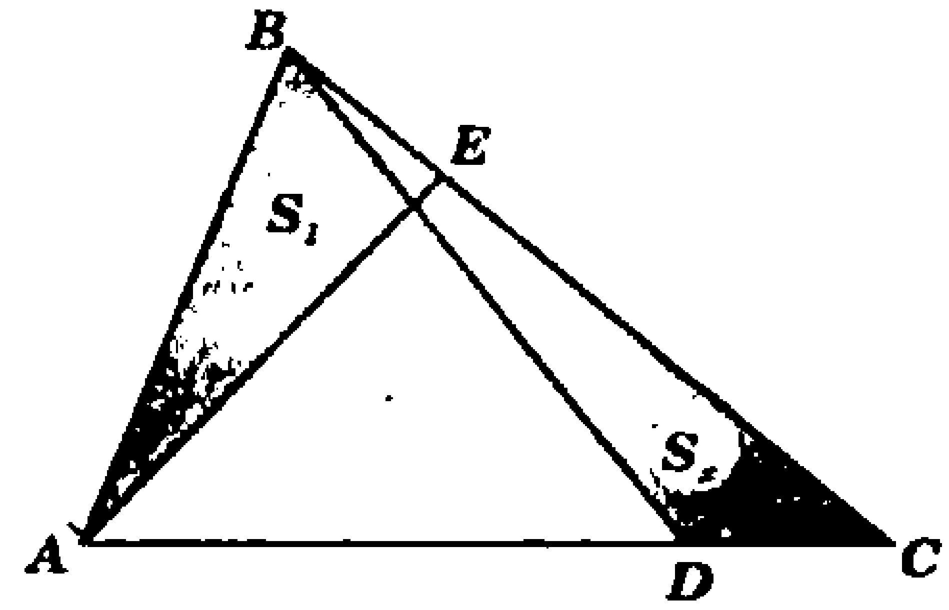
A) 12 **B)** 14 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 18

15 Calcular el área de la región sombreada si : *AM=MC ; BN=2NC* y el área de la región triangular *ABC* es *100*.



A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

16 De la figura : $S_1=18$, calcular S_x; *AD=3(DC)* y *CE=3(BE)*.



A) 18 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 16

17 En un triángulo *ABC* se traza la bisectriz interior *AN* y la mediana *BD*; las cuales se intersecan en *P*. Si *AB =9*; *AC =14* y el área de la región triangular *ABC* es *32*, calcular el área de la región triangular *BNP*.

A) 80/23 **B)** 81/23 **C)** 162/23
D) 4 **E)** 82/25

18 Dos lados de un triángulo miden *3* y *6* además una de sus alturas mide *4*. Calcular el área de su región triangular.

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

19 Si la distancia del excentro relativa al lado $\overline{BC}$ al vértice "*A*", de un triángulo equilátero *ABC* mide $4\sqrt{3}$, calcular el área de la región triangular *ABC*.

A) $8\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** $6\sqrt{3}$

20 Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

( ) Si dos triángulos tienen alturas congruentes ; la relación de sus áreas es igual a la relación entre sus bases.

( ) Si se trazan las medianas de un triángulo se forman *6* regiones equivalentes

( ) En triángulos semejantes sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus elementos homólogos

A) VVV **B)** FVV **C)** VVF
D) FFV **E)** VFF

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)C	5)C	6)A	7)D	8)B	9)C	10)E
11)D	12)E	13)D	14)E	15)B	16)A	17)B	18)A	19)D	20)A

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

CAPÍTULO 105

OBJETIVOS :

- Conocer las áreas de las diferentes regiones cuadrangulares.
- Relacionar las áreas de las diferentes regiones cuadrangulares.

INTRODUCCIÓN :

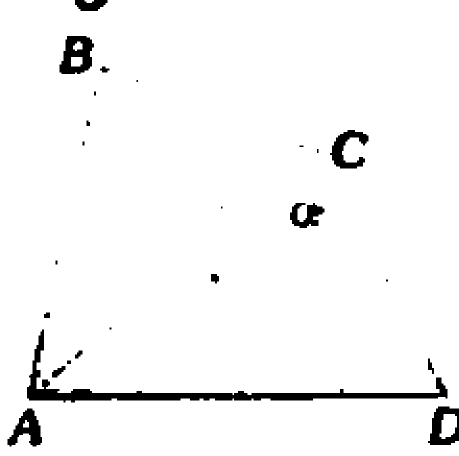
El hombre a través de la historia a tenido la necesidad de solucionar dificultades, en base a cierto análisis, como por ejemplo: establecer un sistema de numeración para expresar cantidades grandes, otra a necesidad, que es la que nos compete a nosotros en este capítulo, es de medir la extensión de una superficie de tierra, para ser utilizadas o repartidas en una proporción determinada.

Los campesinos por ejemplo usan las hectáreas para indicar o expresar su cantidad de terreno, ***80*** hectáreas, ***400*** hectáreas, etc.

FÓRMULA GENERAL :

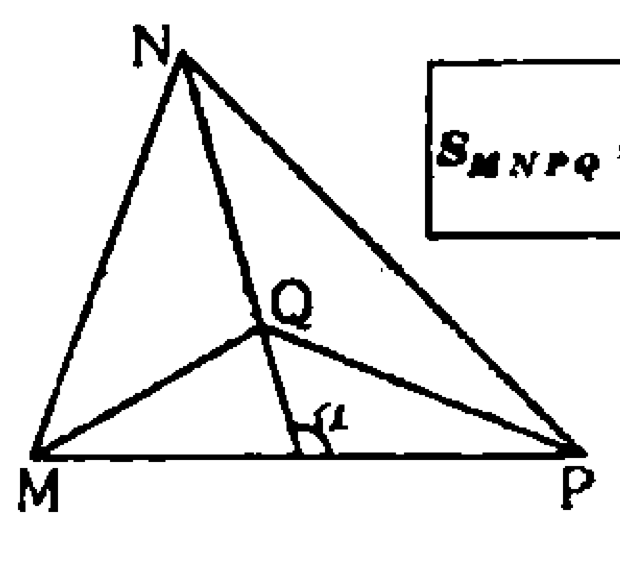
El área de una región cuadrangular es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales multiplicando con el seno de la medida del ángulo determinado por dichas diagonales.

Región Cuadrangular Convexa :



$$S_{ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2} \text{Sen}\alpha$$

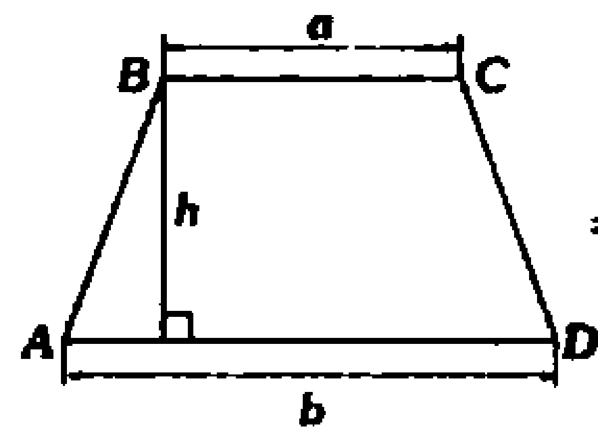
Región Cuadrangular no Convexa :



$$S_{MNPQ} = \frac{MP \times NQ}{2} \text{Sen}\alpha$$

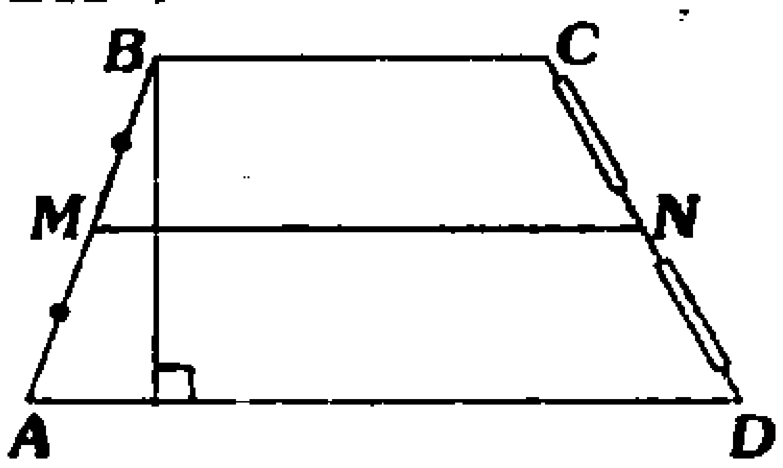
ÁREA DE UNA REGIÓN TRAPECIAL

El área de una región trapecial es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las bases con la longitud de la altura de dicho trapecio.



$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$$

NOTA :



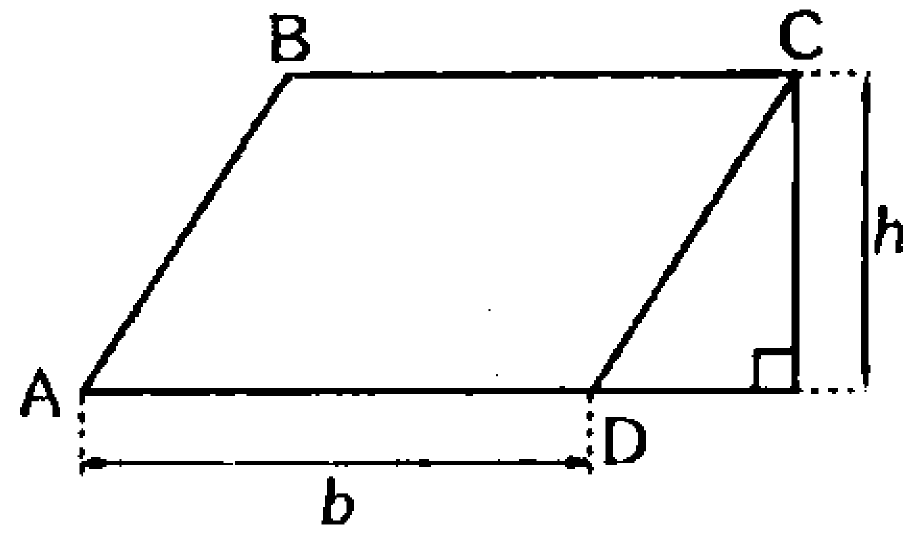
$$S_{ABCD} = (MN).h$$

$\overline{MN}$: Mediana del trapecio.

ÁREA DE UNA REGIÓN PARALELOGRÁMICA

ÁREA DE UNA REGIÓN ROMBOIDAL

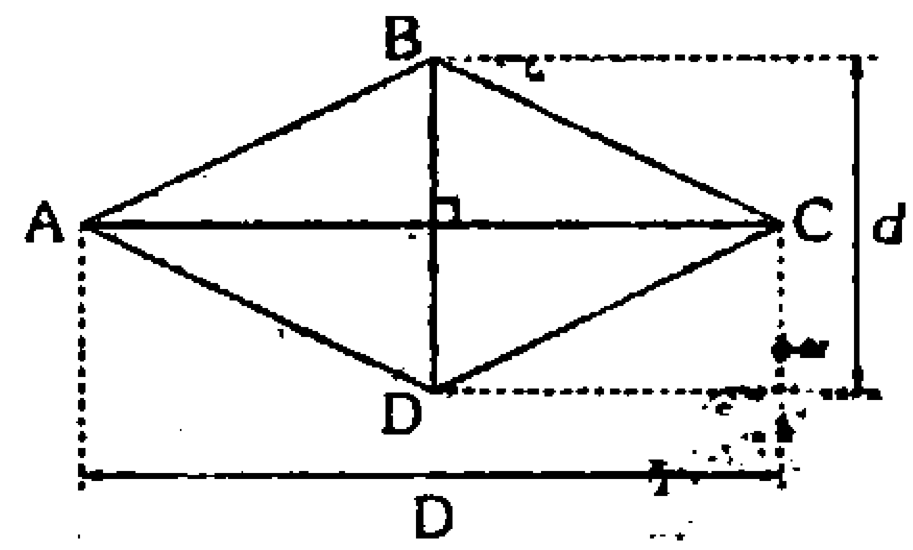
El área de una región romboidal es igual al producto de las longitudes de un lado y a la altura relativa a dicho lado.



$$S_{ABCD} = b.h$$

ÁREA DE UNA REGIÓN ROMBAL

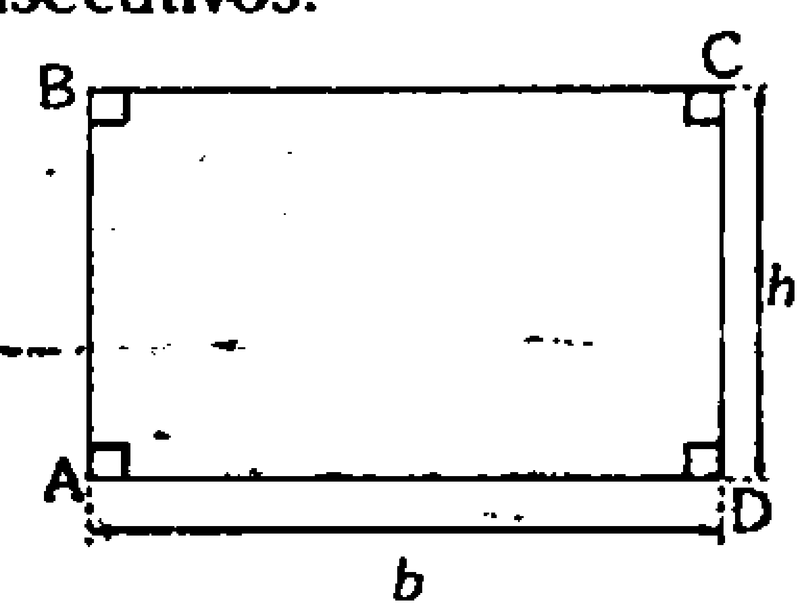
El área de una región rombal es igual al semiproducto de las longitudes de sus diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{D.d}{2}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN RECTANGULAR

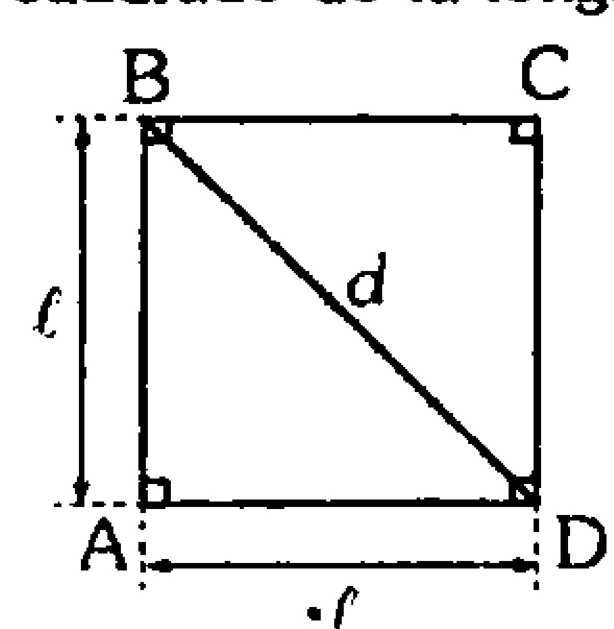
El área de una región rectangular es igual al producto de las longitudes de dos de sus lados consecutivos.



$$S_{ABCD} = b.h$$

ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRADA

El área de una región cuadrada es igual al cuadrado de la longitud de su lado.

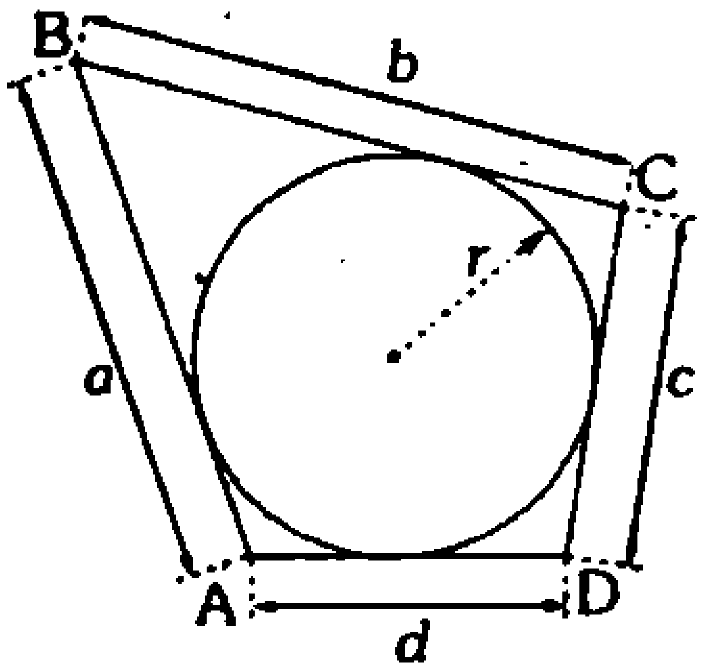


$$S_{ABCD} = \ell^2 \; ; \; S_{ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR CIRCUNSCRITA A UNA CIRCUNFERENCIA

El área de un cuadrilátero

circunscrito a una circunferencia es igual al semiperímetro multiplicado por el inradio.

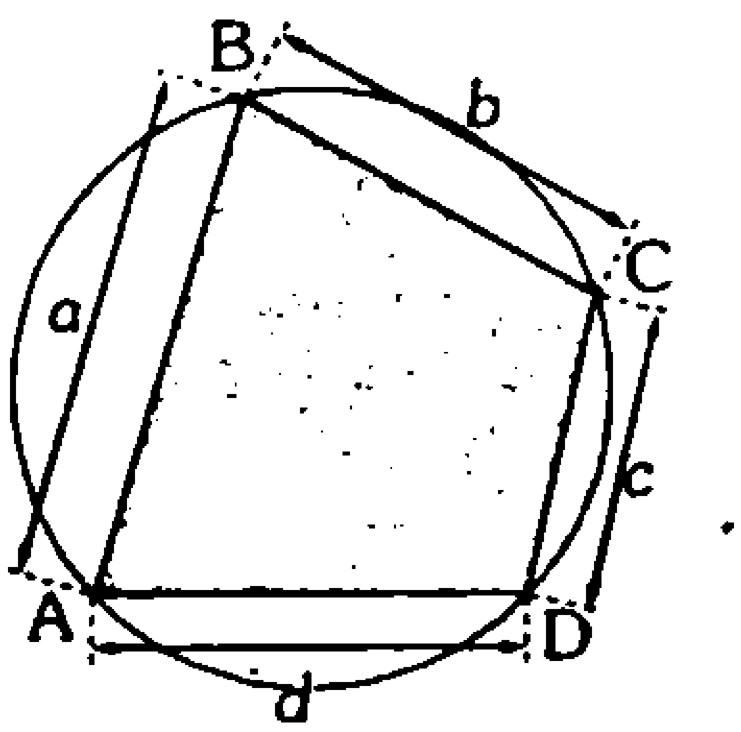


$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = P.r$

Donde : $p = \dfrac{a+c+b+d}{2}$

ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR INSCRITA EN UNA CIRCUNFERENCIA

El área de una región cuadrilátera inscrita en una circunferencia es igual a la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro de dicha región cuadrilátera con la longitud de cada uno de sus lados.

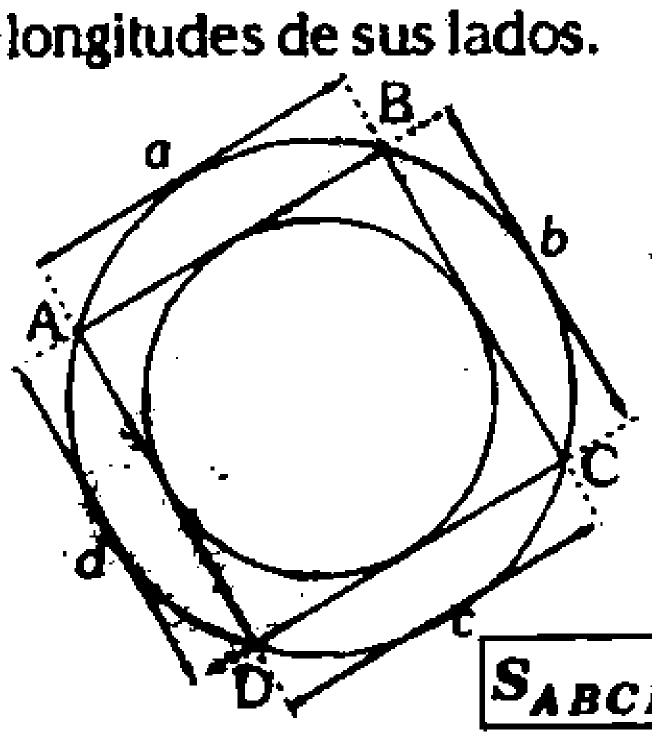


$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Donde : $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

ÁREA DE UNA REGIÓN CUADRANGULAR INSCRITA Y CIRCUNSCRITA A UNA CIRCUNFERENCIA:

El área de una región cuadrilátera inscrita y circunscrita a una circunferencia es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de sus lados.

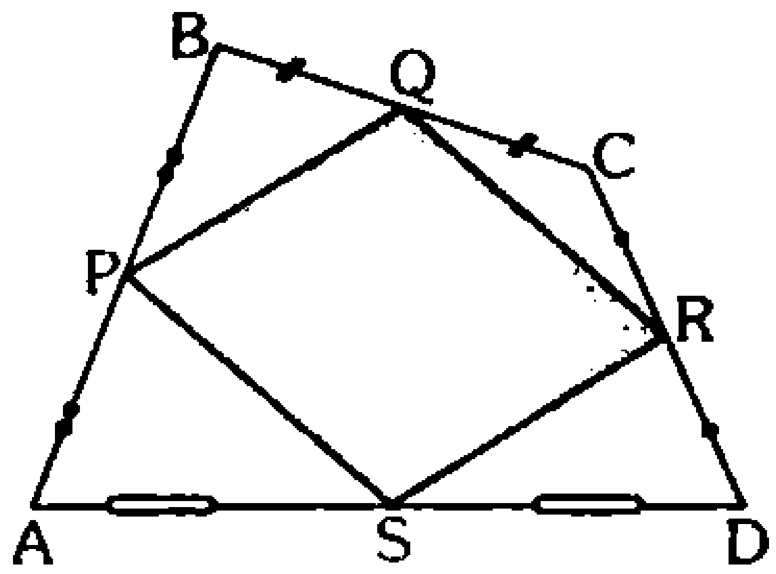


$S_{ABCD} = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$

PROPIEDADES DE ÁREAS EN REGIONES CUADRANGULARES

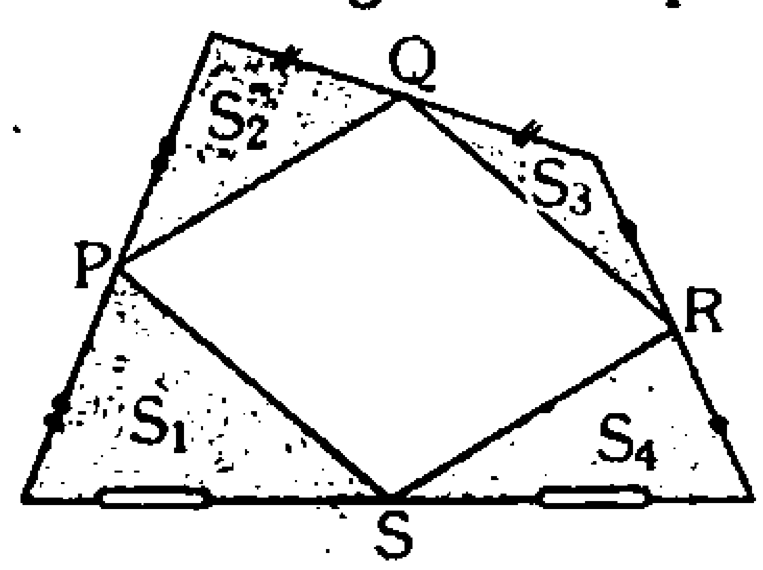
PROPIEDADES PARA TODA REGIÓN CUADRANGULAR

1) Si P, Q, R y S son puntos medios de los lados del cuadrilátero luego se cumple:



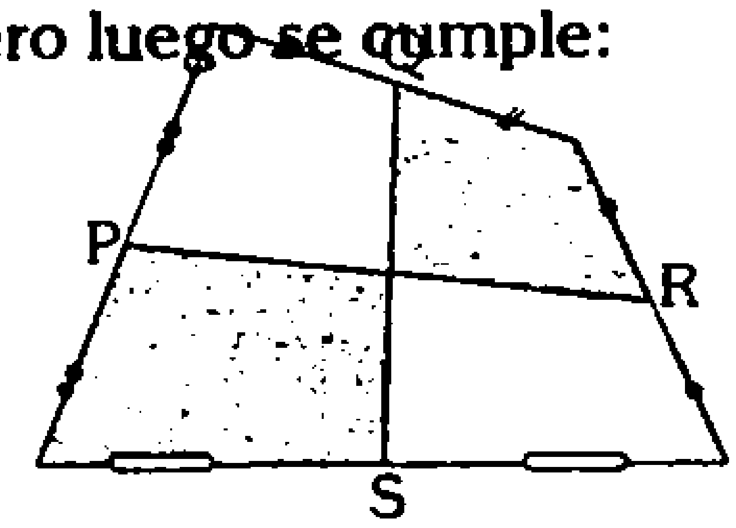
$$S_{PQRS} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

2) Si P, Q, R y S son puntos medios de los lados del cuadrilátero luego se cumple:



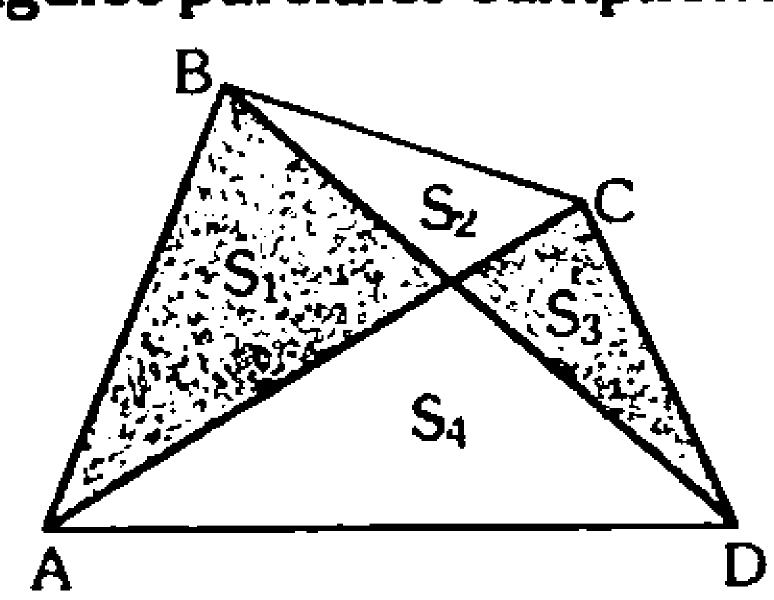
$\Rightarrow$ $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

3) Si P, Q, R y S son puntos medios de los lados del cuadrilátero luego se cumple:



$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

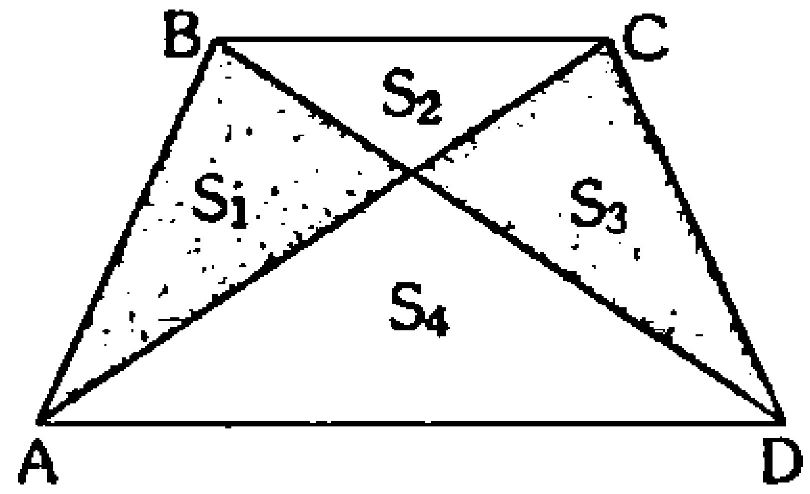
4) En todo cuadrilátero al trazar las diagonales se forman cuatro triángulos parciales cumpliéndose.



$\Rightarrow$ $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

PROPIEDADES PARA TRAPECIOS

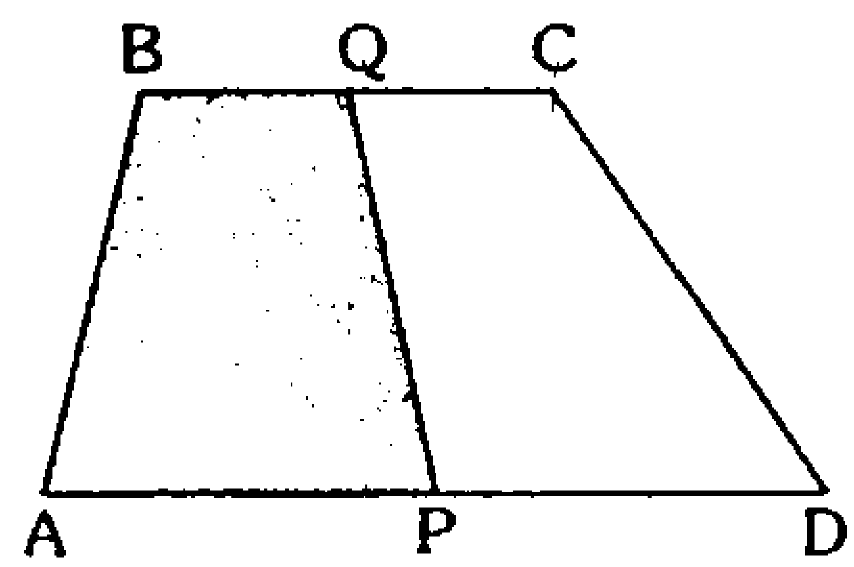
1) Si la figura mostrada es un trapecio se cumple:



$\Rightarrow$ $S_1 = S_3$

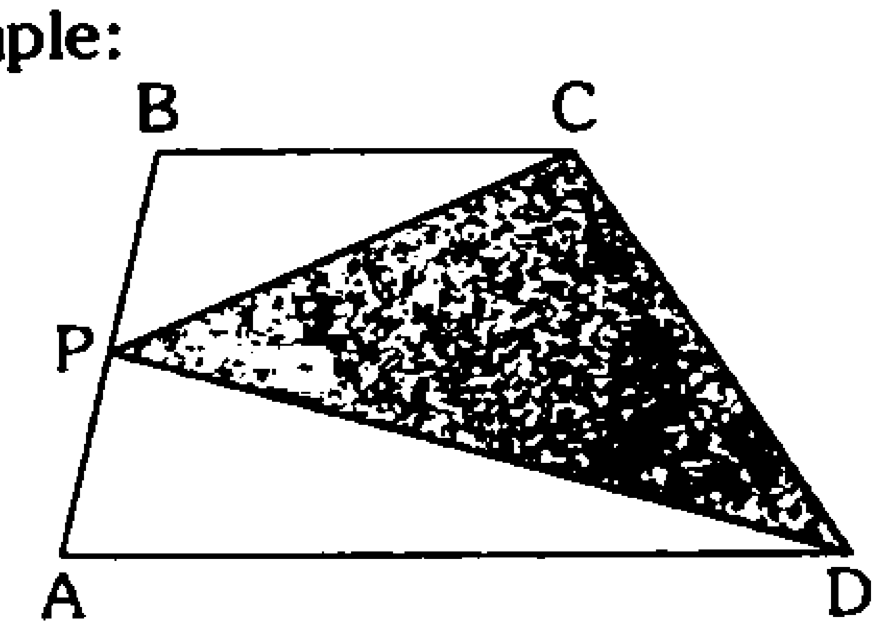
$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}\right)^2$

2) Si $ABCD$ es un trapecio y P, Q son puntos medios se cumple:



$\Rightarrow$ $S_{ABQP} = S_{QCDP}$

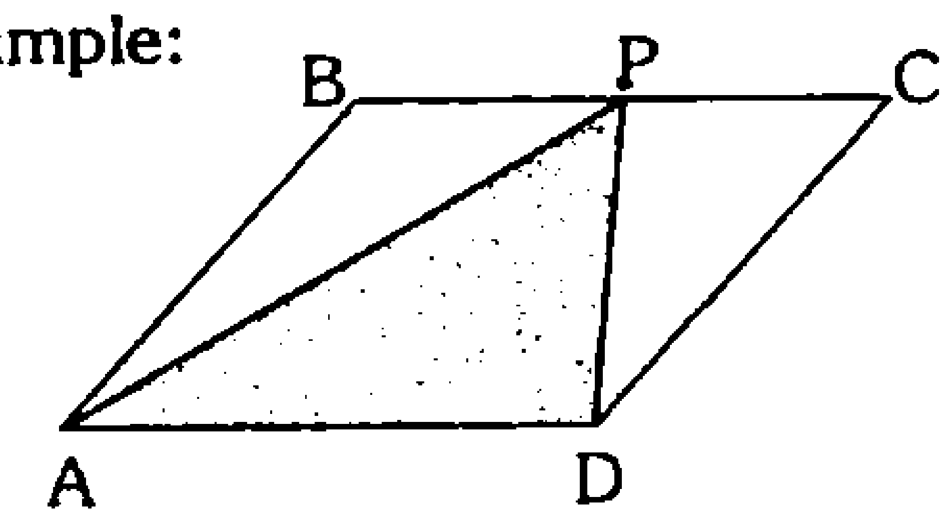
3) Si $ABCD$ es un trapecio y P es punto medio de $\overline{AB}$ luego se cumple:



$\Rightarrow$ $S_{PCD} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$

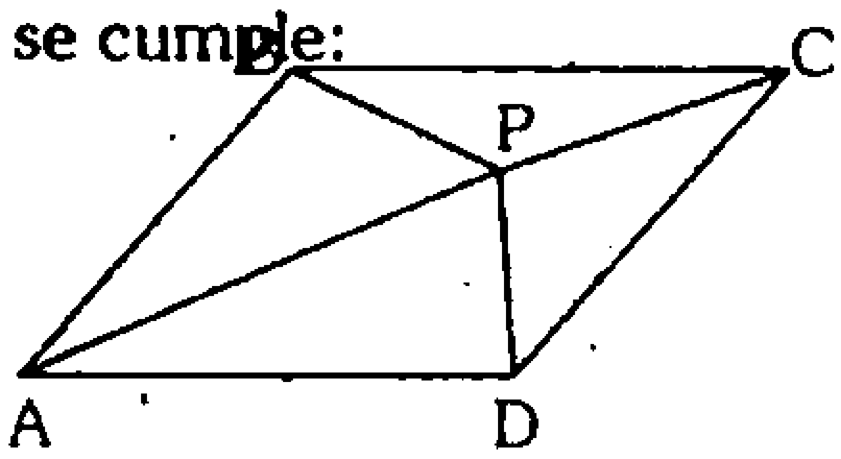
PROPIEDADES PARA PARALELOGRAMOS

1) Si $ABCD$ es un paralelogramo y P es un punto cualquiera se cumple:



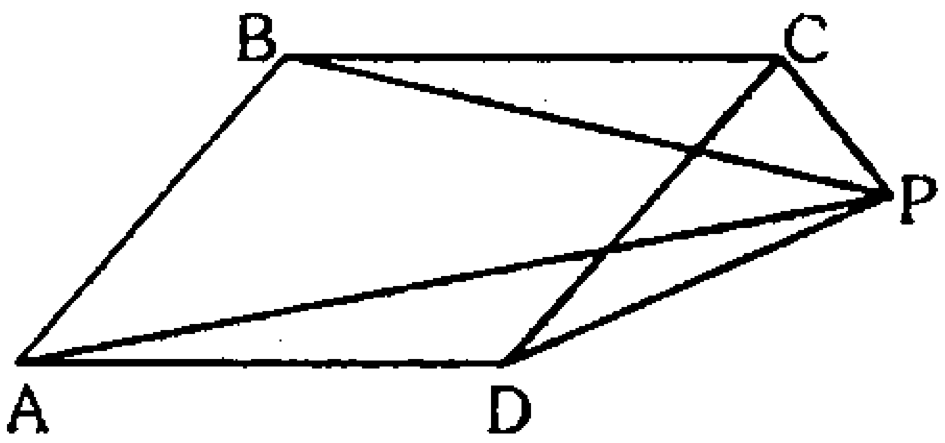
$$S_{APD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

2) Si $ABCD$ es un paralelogramo y P es un punto interior de la región se cumple:



$$\Rightarrow \boxed{S_{ABP}+S_{PCD}=S_{BPC}+S_{APD}}$$

3) Si $ABCD$ es un paralelogramo y P es un punto exterior al romboide se cumple:

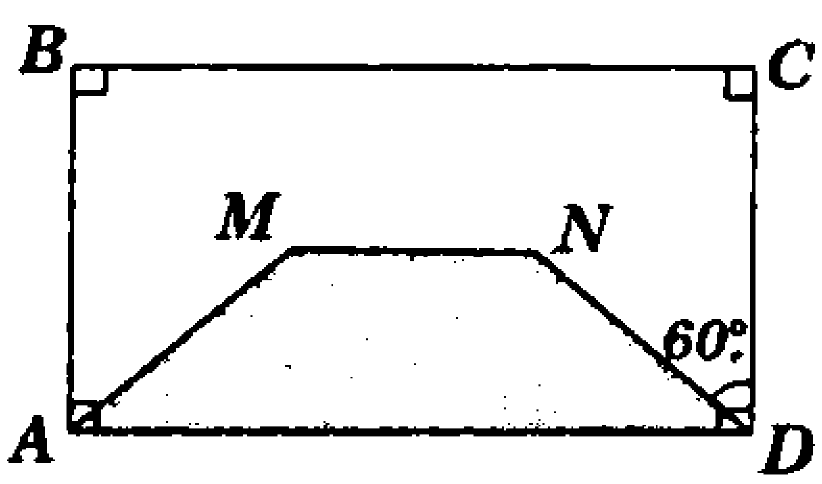


$$\boxed{S_{BPC}+S_{APD}=\frac{S_{ABCD}}{2}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

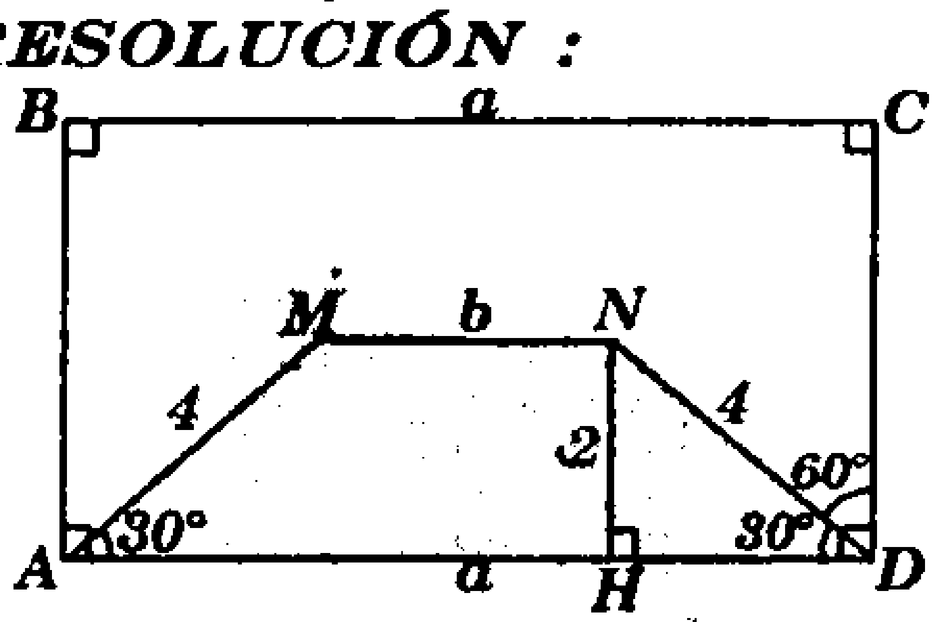
PROBLEMA 1 :

En el gráfico $BC+MN=10$ y $AM=4$, calcule el área de la región trapecial isósceles $AMND$.



A) 10 B) 8 C) 12 D) 12,5 E) 15

RESOLUCIÓN :



* Nos piden: área de la región trapecial . $AMND=A_x$
* Dato : $BC+MN=a+b=10$
* Se observa :

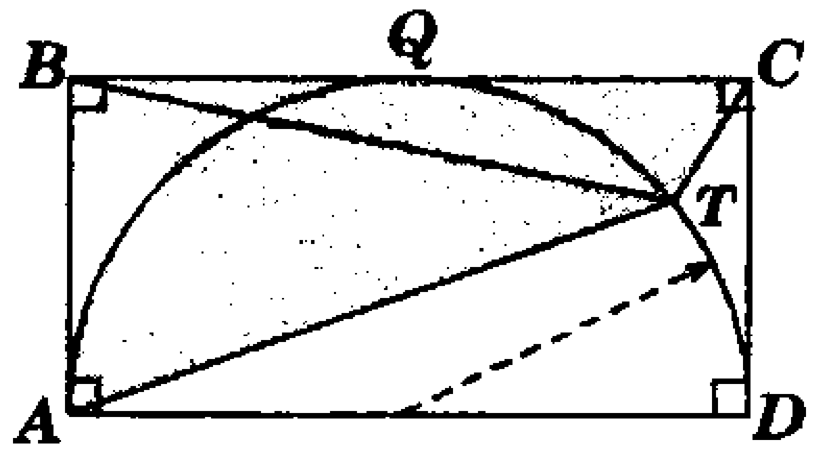
$AD=BC=a$ ⊿NHD notable de $30°$ y $60°$ $\Rightarrow$ $NH=2$

* Luego : $A_x=\left(\frac{b+a}{2}\right)(2)\Rightarrow A_x=b+a$
* Reemplazando $\Rightarrow A_x=10$

RPTA : "A"

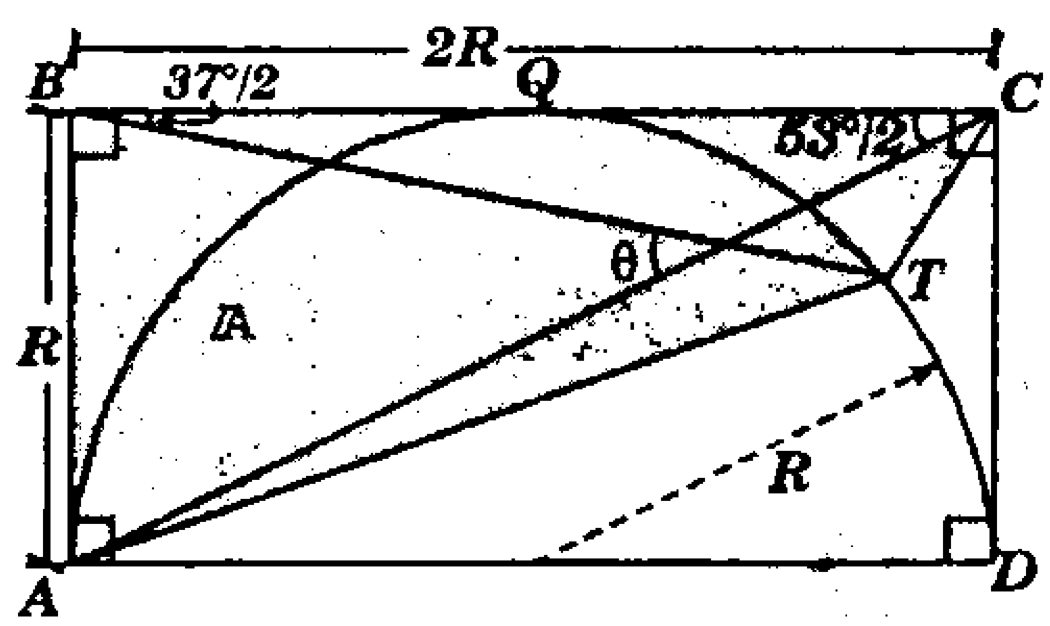
PROBLEMA 2 :

De la figura Q es punto de tangencia $(AD)(BT)=\sqrt{10}$ y $m\angle CBT+m\angle DAC=45°$. Calcule el área de la región $ABCT$.



A) 5/3 B) 4/3 C) 5/4 D) 6/5 E) 1

RESOLUCIÓN :



Nos piden :

$A_{\square ABCT}$: área de la región $ABCT$

* Por teorema :

$$A_{\square ABCT}=\frac{(AC)(BT)}{2}\,sen\,45° \quad ....(I)$$

* Pero del dato : $(2R)(BT)=\sqrt{10}$
* En (I) :

$$A_{\square ABCT}=\frac{(BT)(R\sqrt{5})}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_{\square ABCT}=\left(\frac{\sqrt{10}}{2R}\right)\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Efectuando : $A_{\square ABCT}=\dfrac{5}{4}$

RPTA :"C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el área de una región paralelogramica si la base es igual a $7cm$ y la altura tiene de longitud $4cm$

Rpta.: ....

02 Calcular el área de una región rombal, cuyas longitudes de sus diagonales son $8cm$ y $15\ cm$

Rpta.: ....

03 El área de una región rombal es $400cm^2$. Calcular la longitud de sus diagonales , si la mayor es el doble de la menor

Rpta.: ....

04 El área de una región paralelogramica es $972\ cm^2$; si la altura es igual a los $3/4$ de la base. Hallar la longitud de la base.

Rpta.: ....

05 El área de una región trapecial es igual a $45\ cm^2$, la suma de sus bases es $15\ cm$. Calcule la longitud de su altura

Rpta.: ....

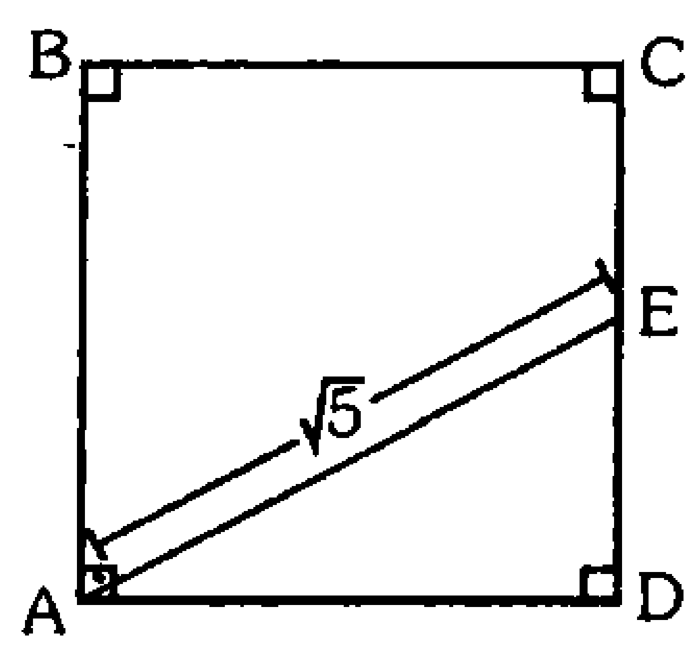
06 El área de una región rombal es $9m^2$ y su diagonal mayor es $9m$. Calcular la longitud de la diagonal menor.

Rpta.: ....

07 El área de una región cuadrada es numéricamente igual a 4 veces su perímetro. ¿Cuánto mide su diagonal?

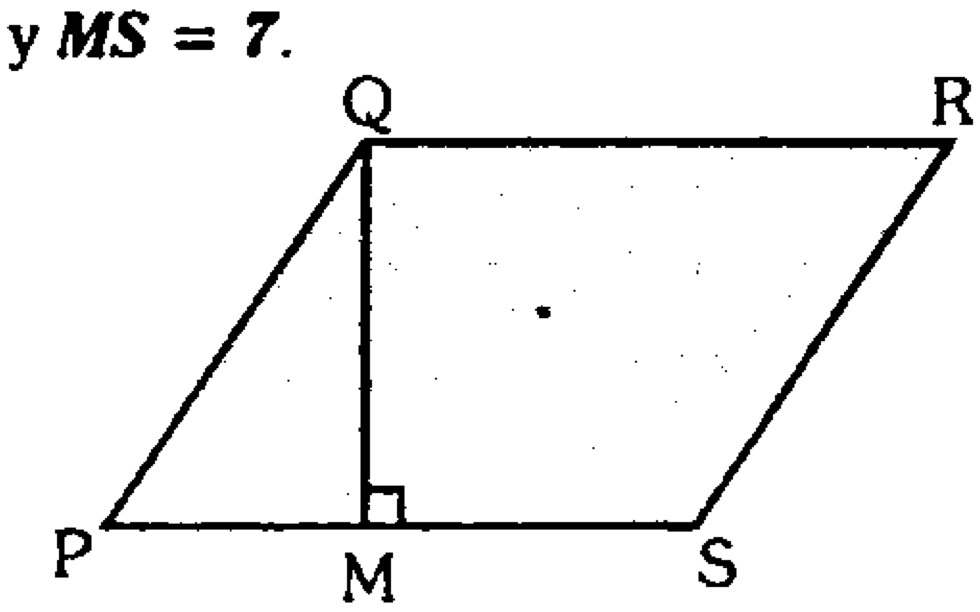
Rpta.: ....

08 En el gráfico. Calcular el área de la región cuadrada $ABCD$; si: $CE=ED$



Rpta.: ....

09 En el gráfico: calcular el área de la región romboidal si: $QR=9$, $RS=4$ y $MS=7$.

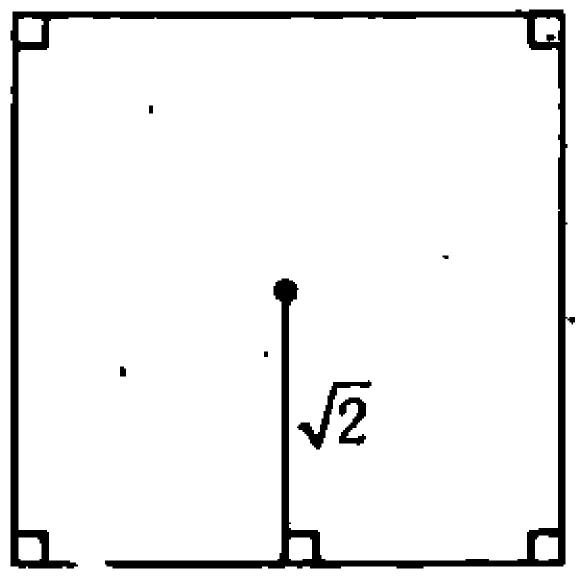


Rpta.: ....

10 Calcular el área de una región rombal sabiendo que la longitud de su lado es 13 y de su diagonal mayor es 24.

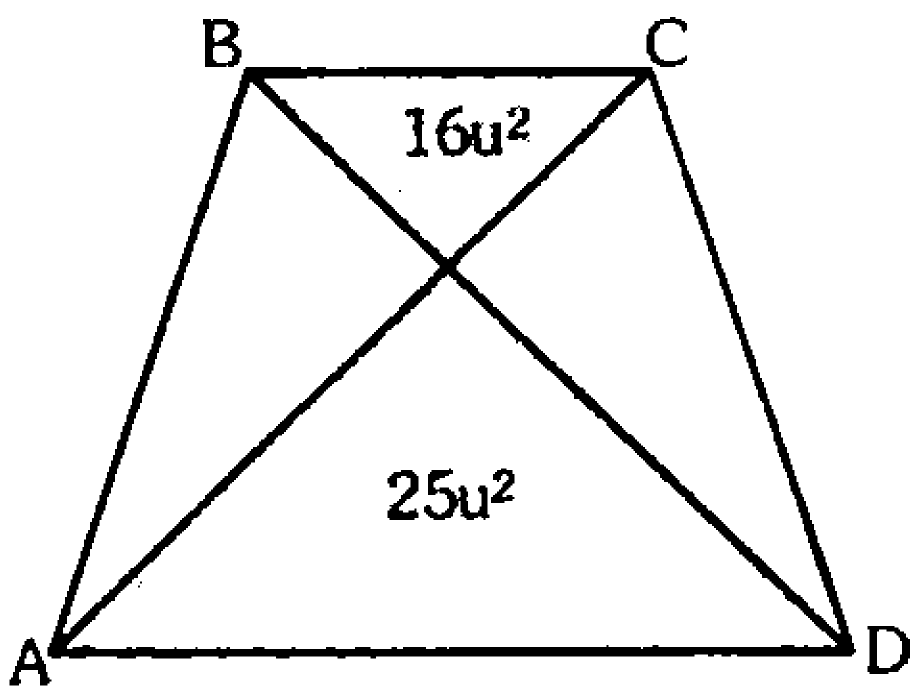
Rpta.: ....

⑪ En el grafico: calcular el área del cuadrado cuyo apotema es $\sqrt{2}$



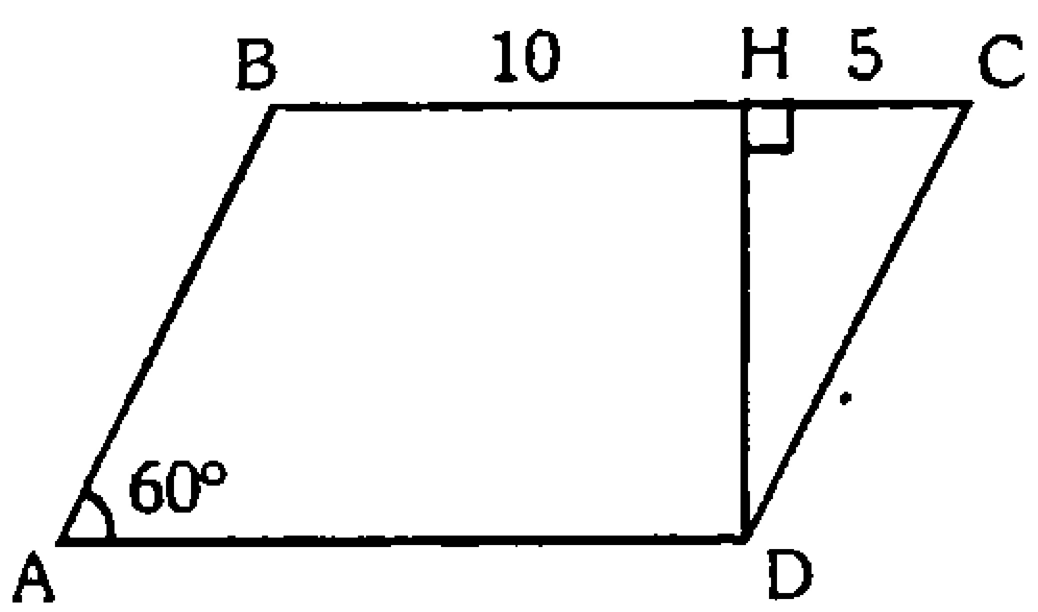
A) 2 B) 4 C) 8 D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

⑫ En el gráfico: calcular el área de la región trapecial *ABCD*.



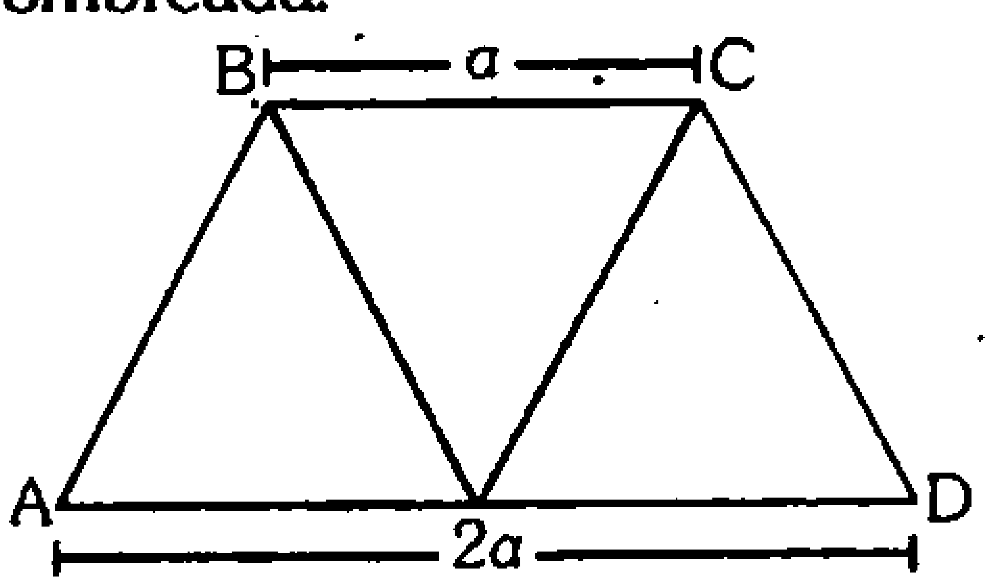
A) $72u^2$ B) $80u^2$ C) $81u^2$
D) $49u^2$ E) $25u^2$

⑬ En el gráfico: calcular el área de la región romboidal *ABCD*.



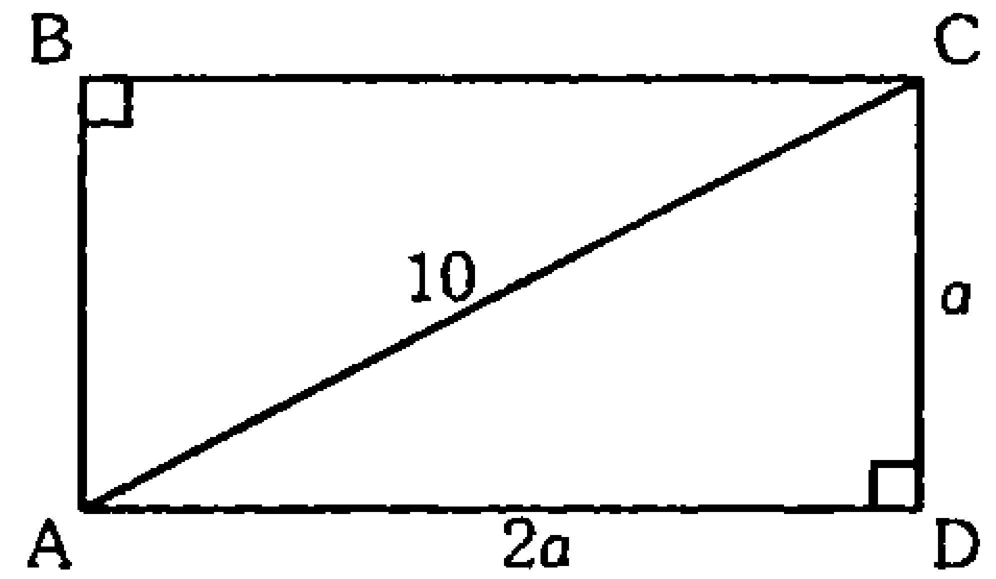
A) 75 B) $\sqrt{3}$ C) $75\sqrt{3}$
D) $45\sqrt{3}$ E) 15

⑭ En el gráfico: *ABCD* es un trapecio la base mayor es el doble de la menor. Encuentra la relación entre el área del trapecio y el área sombreada.



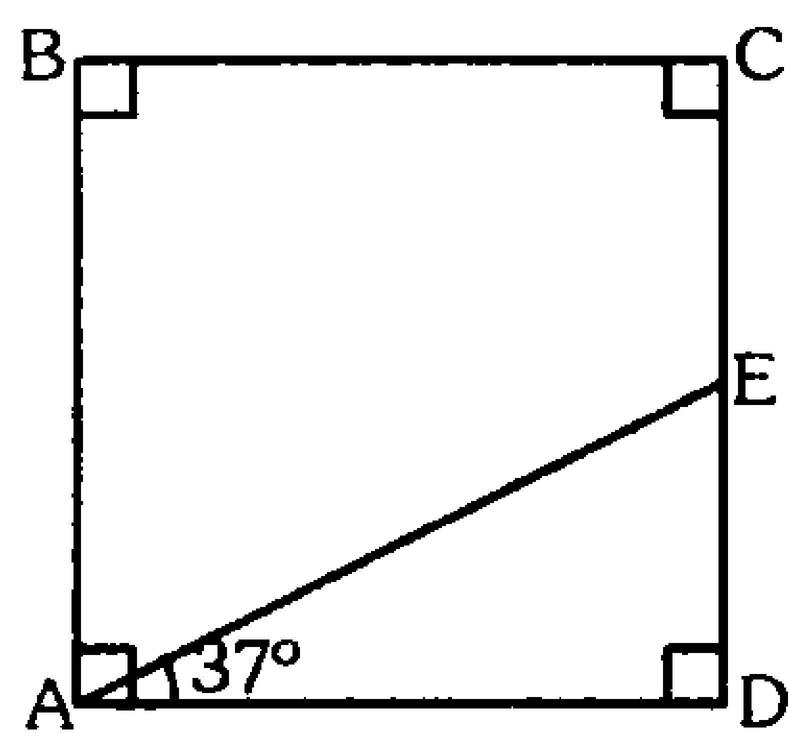
A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 1,75

⑮ En el gráfico: calcular el área de la región rectangular.



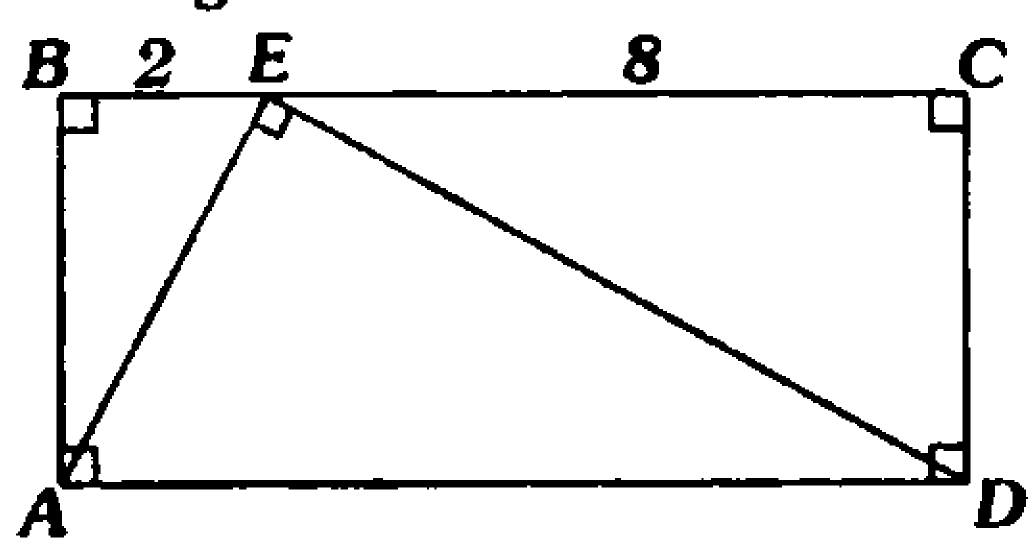
A) 20 B) 40 C) $2\sqrt{2}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 8

⑯ Calcular el área de la región cuadrada *ABCD*. Si *AE = 7,5* y $m\measuredangle EAD = 37°$.



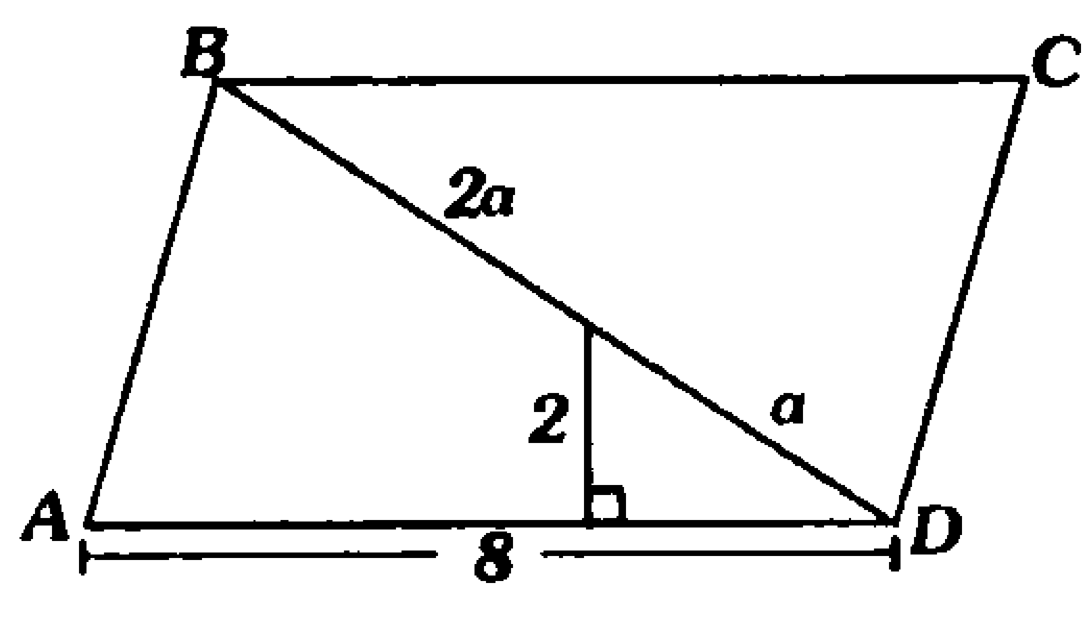
Rpta: ....

⑰ Calcular el área de la región rectangular *ABCD*.



Rpta: ....

⑱ Calcular el área de la región limitada por el romboide *ABCD*.

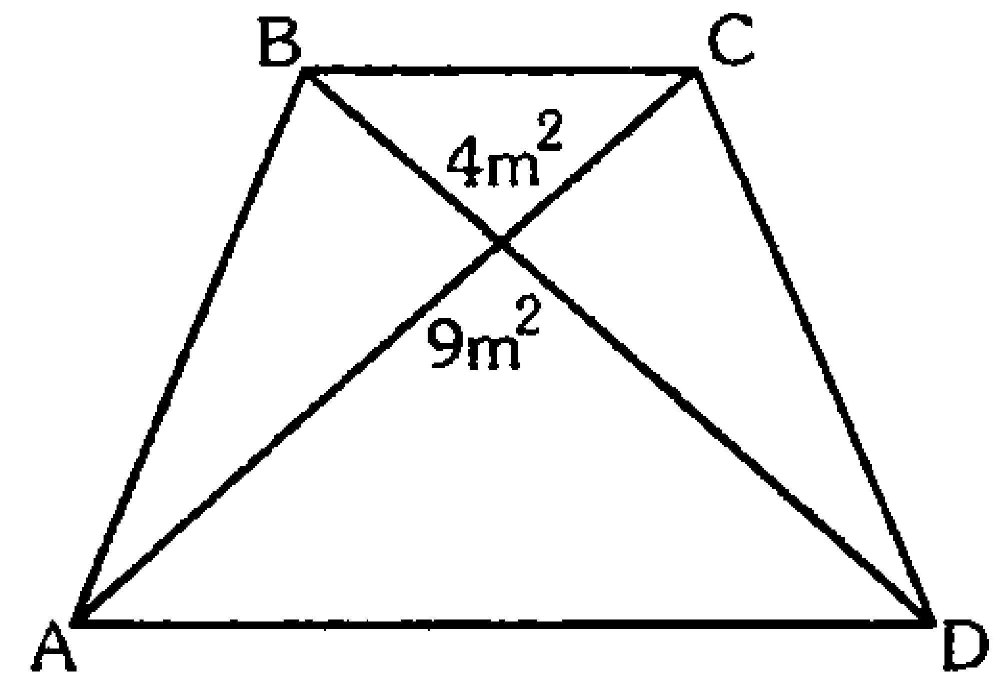


Rpta: ....

⑲ Las bases de un trapecio miden *2* y *6*. La distancia del punto de instersección de las diagonales a su base mayor mide *3*. Calcular el área de su región interior.

Rpta: ....

⑳ Calcular el área de la región limitada por el trapecio *ABCD*.



Rpta: ....

㉑ El perímetro de un rombo es igual a *40*. Una diagonal mide *12*. Calcule el área de la región rombal.

Rpta.: ....

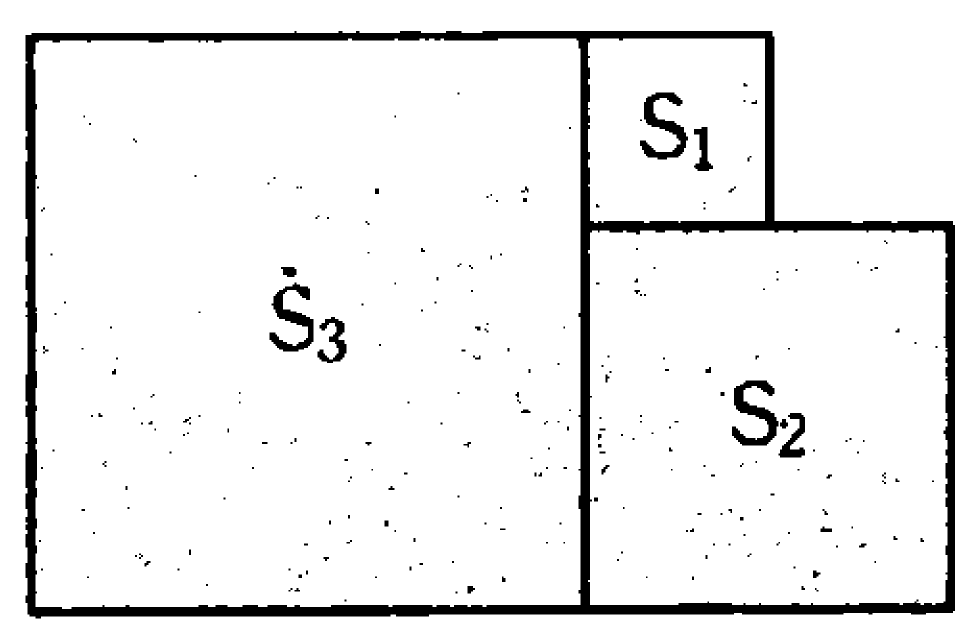
㉒ Las bases de un trapecio miden *4* y *10* la mediana es igual a la altura. Calcule el área de la región trapecial.

Rpta.: ....

㉓ Dos lados de un paralelogramo miden *6* y *8*, su altura mide *7*. Calcule el área de la región paralelográmica.

Rpta.: ....

㉔ En la figura se muestran cuadrados: $S_1 = 9$ y $S_2 = 16$, Calcule S_3.



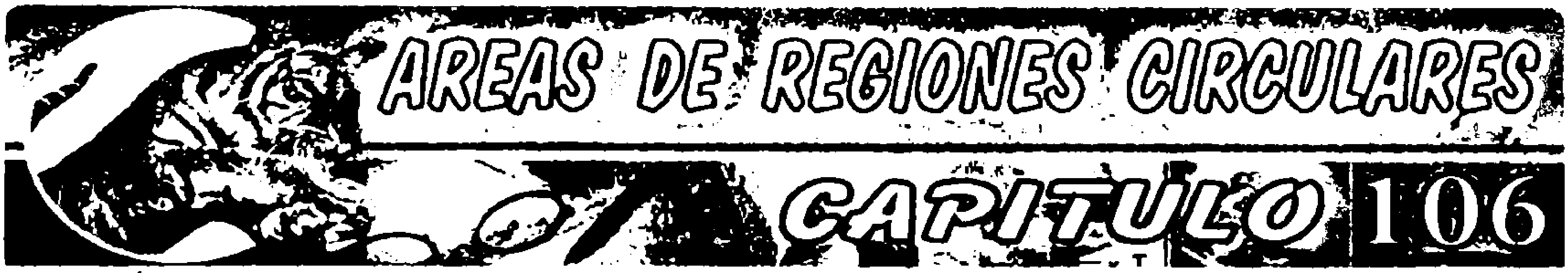
Rpta.: ....

㉕ Las diagonales de un trapecio miden *7* y *16*, son perpendiculares entre sí. Calcule el área de la región trapecial.

Rpta.: ....

㉖ Se tiene un trapecio *ABCD* ($\overline{BC}$: base menor) *BC = 2*; *AD = 8*; $mSA = mSD = 53°$. Calcule: S_{ABCD}

Rpta.: ....



OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de :

- *Conocer las áreas de las diferentes regiones ubicadas en el círculo*
- *Aplicar las propiedades principales de las regiones triangulares y cuadrangulares en el cálculo de las regiones circulares.*
- *Saber comparar las áreas de ciertas regiones, dependiendo de algunas características.*

INTRODUCCION :

Las formas circulares abundan principalmente en los paisajes naturales, podemos observar, semillas, huevos, troncos de arboles, hojas, flores, e incluso las formas circulares que se forman en sus cuerpos de agua. También existen edificaciones circulares como bóvedas, estadios, etc., es necesario conocer las fórmulas que nos permitan calcular las áreas circulares.

CIRCULO

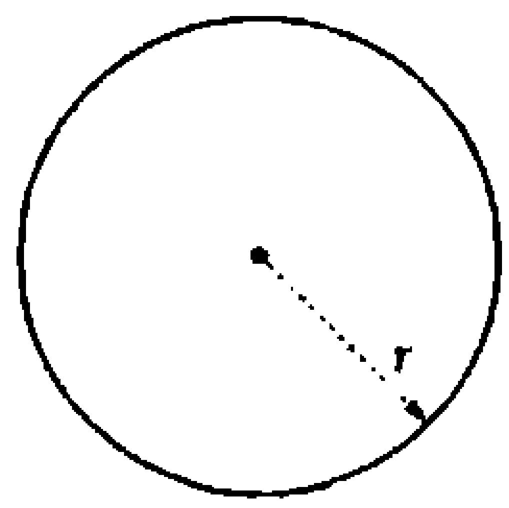
El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro, que se denomina ***centro***, es una ***circunferencia***

El segmento de recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia es el radio de la circunferencia.

La porción de plano limitada por una circunferencia (incluida la misma) se denomina ***círculo*** y el centro de la circunferencia es el centro del círculo.

ÁREA DE UN CÍRCULO

El área de un círculo es igual a π multiplicado por el cuadrado del radio.

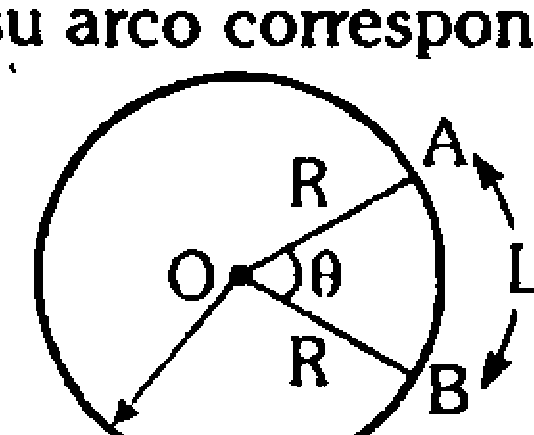


$$S_{O} = \pi r^2$$

r : radio del círculo

ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

Es aquella porción de círculo limitados por un ángulo central y su arco correspondiente.



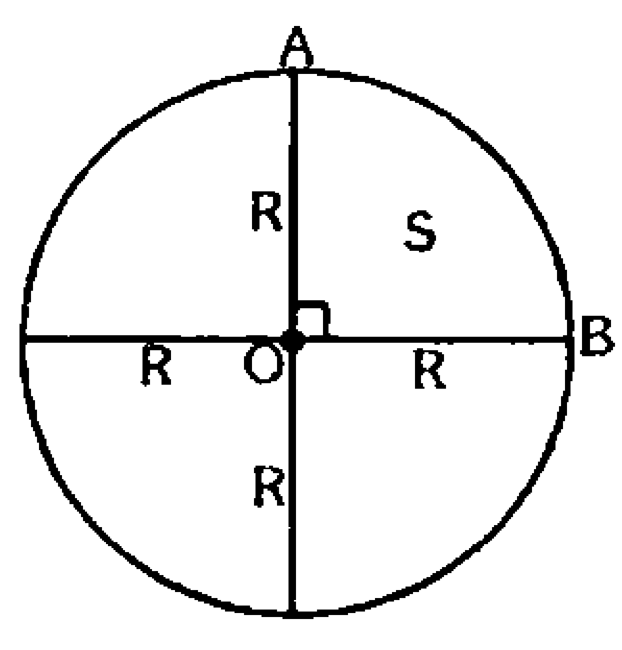
$$S_{\triangleleft} = \frac{\theta \pi r^2}{360°}$$

θ: Medida del ángulo central

$(\theta < 360°)$

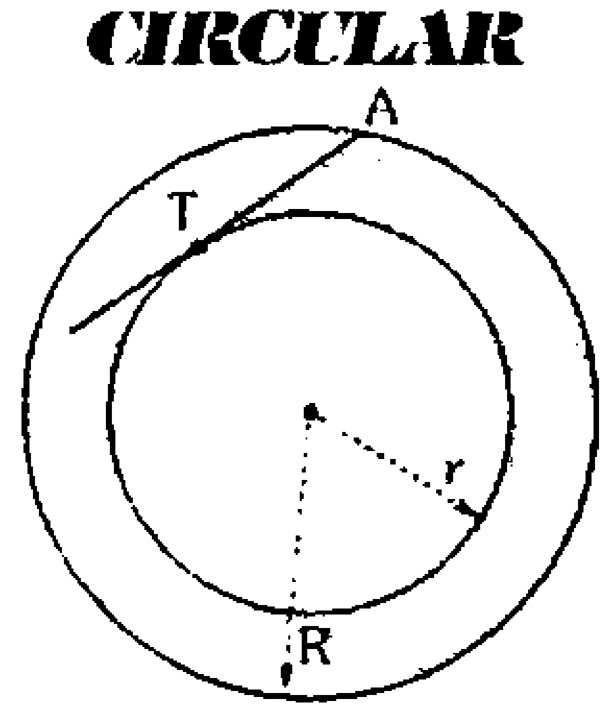
$$Área_{AOB}\triangleleft = \frac{LR}{2}$$

OBSERVACIÓN :



$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

ÁREA DE UNA CORONA CIRCULAR

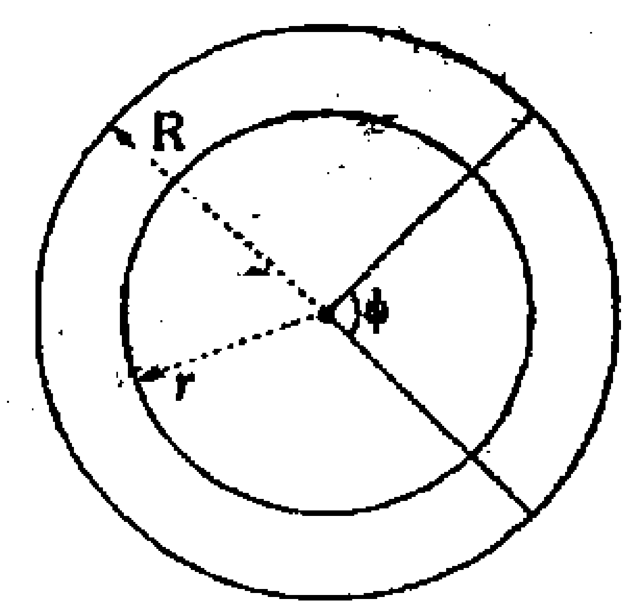


$$A_{Corona} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$A_{Corona} = \pi(AT)^2$$

T : Punto de tangencia.

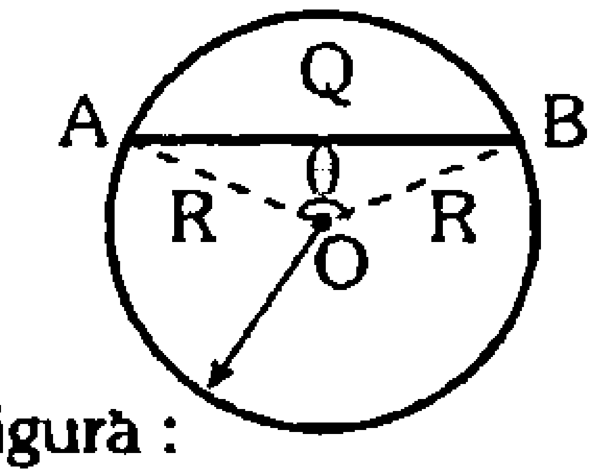
ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR



$$A_{\substack{Trapecio\\ Circular}} = \pi(R^2 - r^2)\frac{\phi}{360°}$$

SEGMENTO CIRCULAR

Es aquella porción de círculo determinada por una cuerda de dicho círculo.



De la figura :

$\frown AQB$: Segmento circular

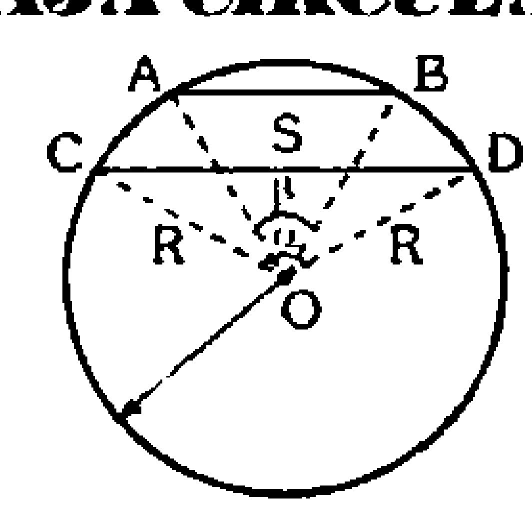
R : Radio

θ **:** Medida del ángulo central correspondiente al segmento circular.

$$Área_{\frown AQB} = Área\triangledown - Área\triangledown$$

$$\underset{AQB}{\frown} = \frac{\pi R^2\theta}{360} - \frac{1}{2}R^2 Sen\theta$$

FAJA CIRCULAR



De la figura adjunta $\overline{AB} // \overline{CD}$. La región sombreada es denominada faja circular $S \rightarrow$ Área de la faja.

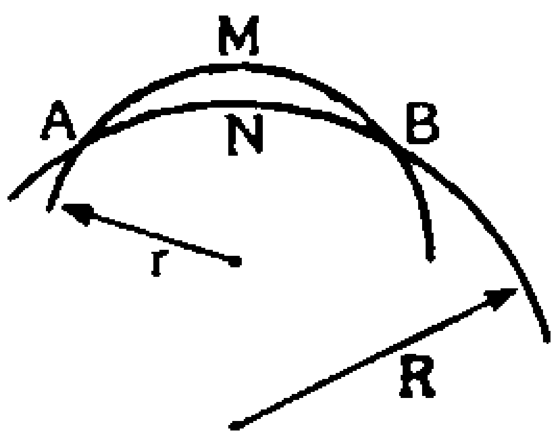
α y $\beta \rightarrow$ Medida de los ángulos centrales.

R : Radio de la circunferencia.

$$S=\left(\frac{\pi R^2\alpha}{360}-\frac{R^2}{2}Sen\alpha\right)-\left(\frac{\pi R^2\beta}{360}-\frac{1}{2}R^2\,Sen\beta\right)$$

LÚNULA

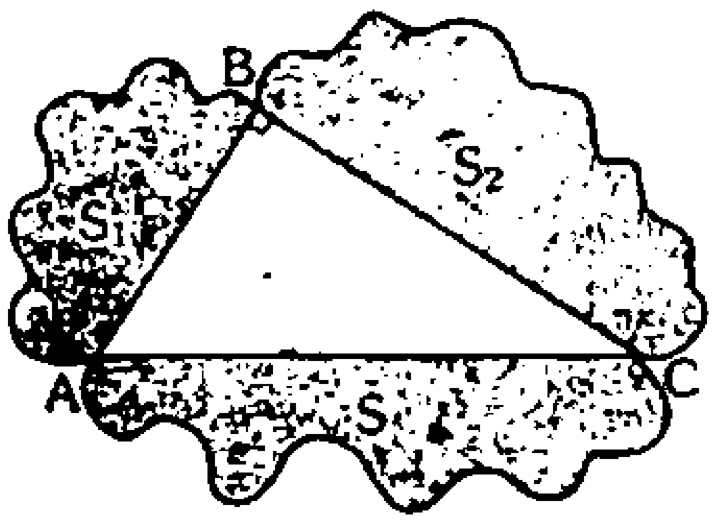
Es una región plana no convexa limitada por dos arcos de circunferencia secante.



De la figura adjunto la región sombreada es una lúnula, limitada por los arcos *AMB, ANB.*

PROPIEDAD 1 :

En todo triángulo rectángulo se cumple que la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los catetos es igual al área de la figura semejante construida sobre la hipotenusa.

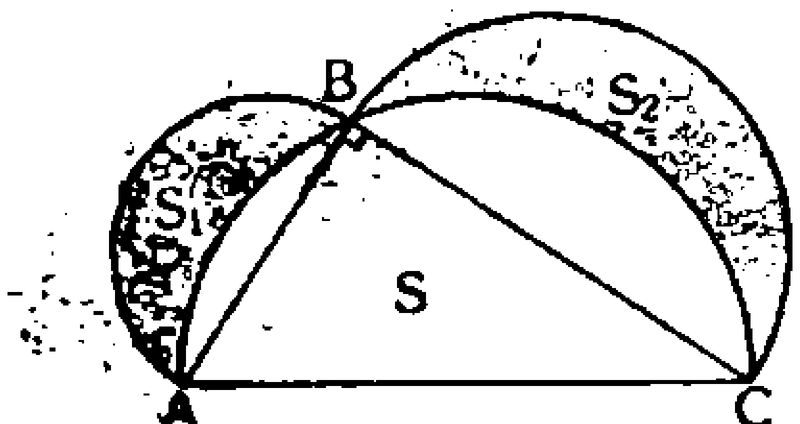


$$\Rightarrow \boxed{S = S_1 + S_2}$$

PROPIEDAD 2 :

Lúnulas de Hipocrates

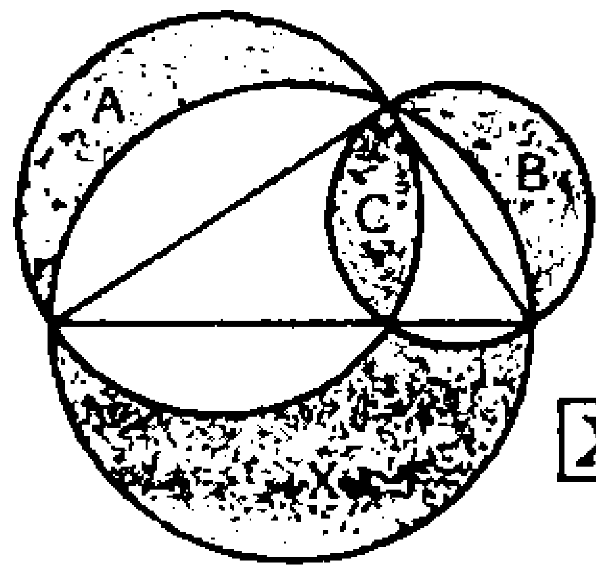
Si en un triángulo rectángulo sobre sus lados se construyen exteriormente semicircunferencia se cumple que la suma de las áreas de las lúnulas formadas es igual al área del triángulo rectángulo.



$$\boxed{x = S_1 + S_2}$$

PROPIEDAD 3 :

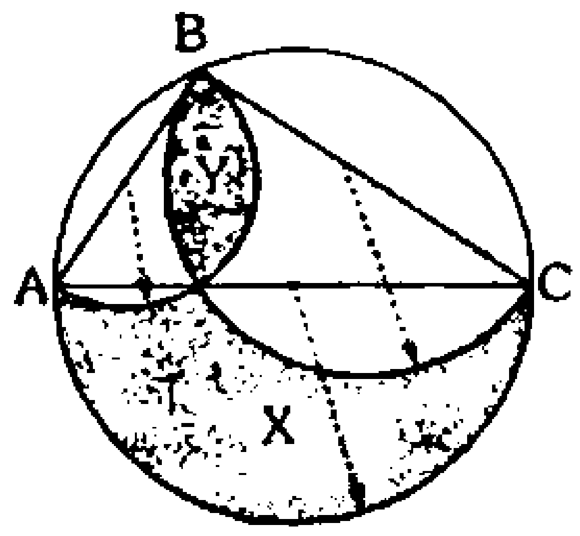
Si en un triángulo rectángulo tomando como diámetro sus lados se construyen circulos, se cumple:



$$\boxed{X = A + B + C}$$

PROPIEDAD 4 :

Si en un triángulo rectángulo se construyen semicírculos sobre sus lados, se cumple :

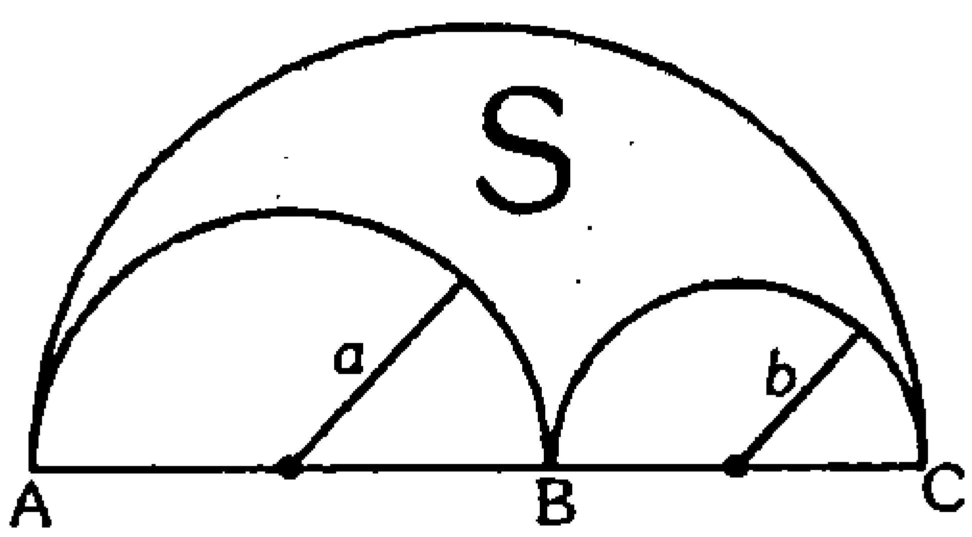


$$\boxed{S_{ABC} = X - Y}$$

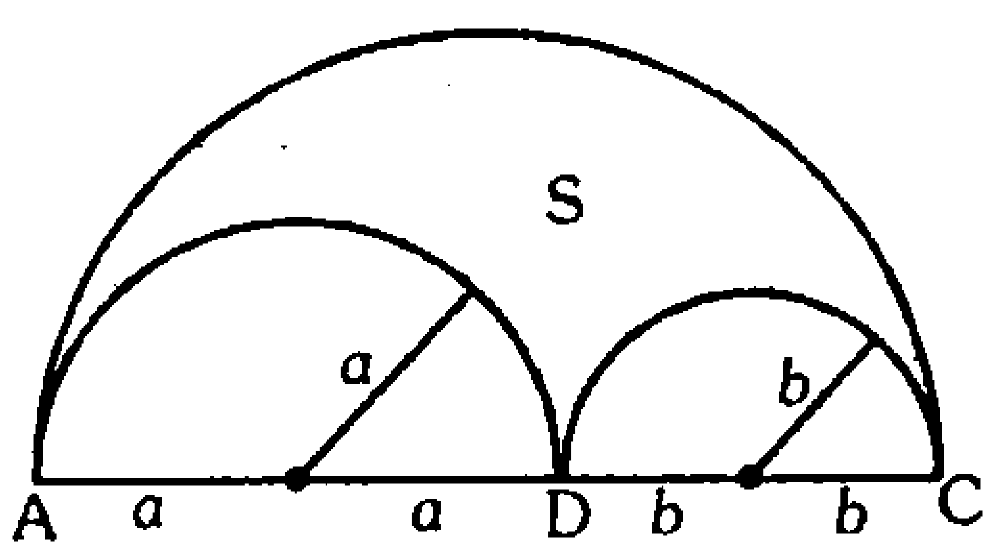
PROBLEMAS RESUELTOS

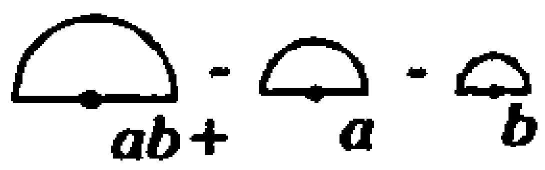
PROBLEMA 1 :

En el siguiente gráfico; demostrar que el área de la región sombreada es : $S = \pi a \cdot b$. Si : $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros.



RESOLUCIÓN :



* S= 

* Los radios de los semicírculos tienen longitudes : *(a+b), a* y *b*.

*

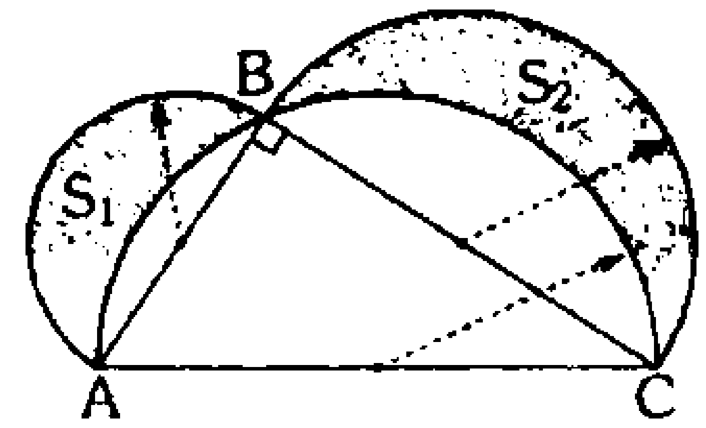
$$S = \frac{\pi(a+b)^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi b^2}{2}$$

$$S = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2)$$

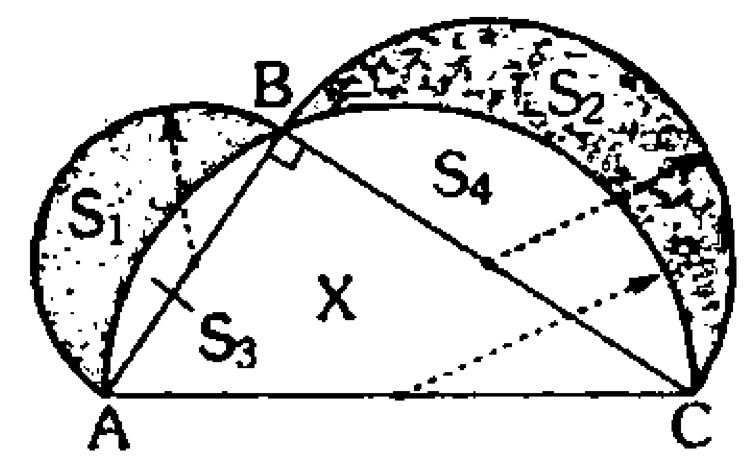
$$S = \frac{\pi}{\not 2}(\not 2ab) \Rightarrow S = \pi ab \qquad \textbf{L.q.q.d.}$$

PROBLEMA 2 :

Demostrar : $S_{ABC} = S_1 + S_2$



RESOLUCIÓN :



$\triangle\, ABC : AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S_3 &= \frac{\pi(AB)^2}{8} \\ S_2 + S_4 &= \frac{\pi(BC)^2}{8} \\ \pi\frac{(AC)^2}{8} &= S_3 + S_4 + X \end{aligned}\right\}(+)$$

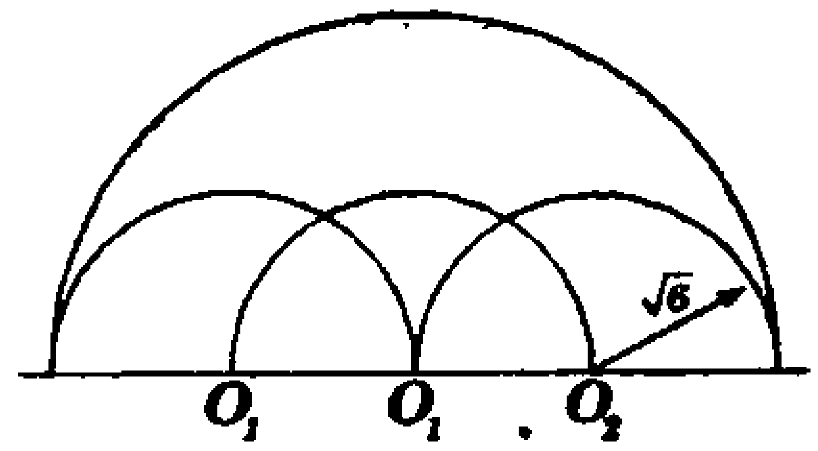
$$S_1 + S_2 + \frac{\pi}{8}(AC)^2 = \frac{\pi}{8}\underbrace{(AB^2 + BC^2)}_{AC^2} + X$$

Por lo tanto : $X = S_1 + S_2$

Entonces : $S_{ABC} = S_1 + S_2$ L.q.q.d.

PROBLEMA 3 :

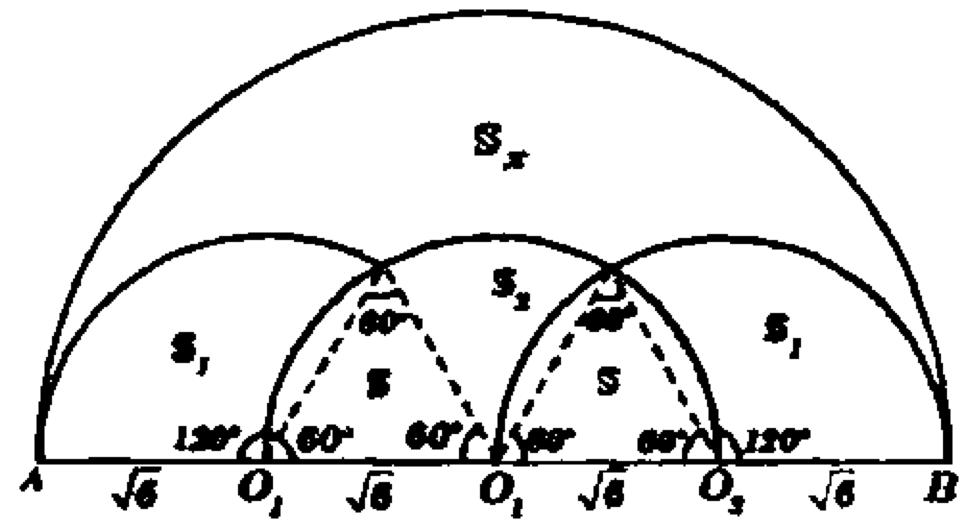
En la figura mostrada se tiene una semicircunferencia de centro *O* y otras tres semicircunferencias del mismo radio $\sqrt{6}$ y centro *O, O_1* y *O_2* El área de la región sombreada es :



A) $(3\pi - \sqrt{3})cm^2$ B) $(5\pi + \sqrt{3})cm^2$

C) $(7\pi + 3\sqrt{3})cm^2$

RESOLUCIÓN :



* Se pide el área de la región sombreada (S_x)

$S_x = S_{\widehat{AB}} - 2S_1 - S_2 - 2S$

$S_1 = \dfrac{\pi(120^\circ)}{360^\circ}(\sqrt{6})^2 = 2\pi$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{\pi(60^\circ)}{360^\circ}(\sqrt{6})^2 = \pi$

$\Rightarrow S_1 = (\sqrt{6})^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

$S_{\widehat{AB}} = \dfrac{\pi(2\sqrt{6})^2}{2} = 12\pi$

$\Rightarrow S_x = 12\pi - 2(2\pi) - (\pi) - 2\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow S_x = (7\pi - 3\sqrt{3})cm^2$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el área de un círculo, si la longitud del radio es *10 cm.*

RPTA.:..

02 El diámetro de un círculo es igual a **9.** Calcular el área de dicho circulo.

RPTA.:..

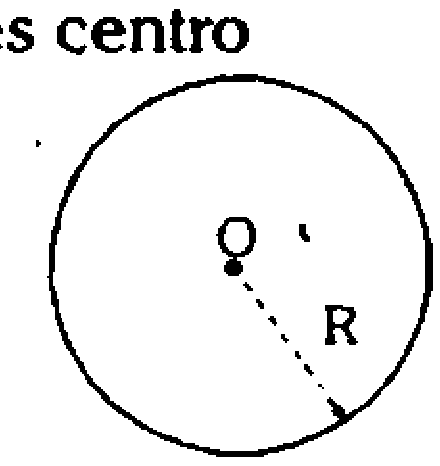
03 El área de un círculo es igual $36\pi cm^2$. Calcule su radio.

RPTA.:..

04 Si el diámetro de un semicírculo es igual a 2. Calcular el área de dicho semicírculo

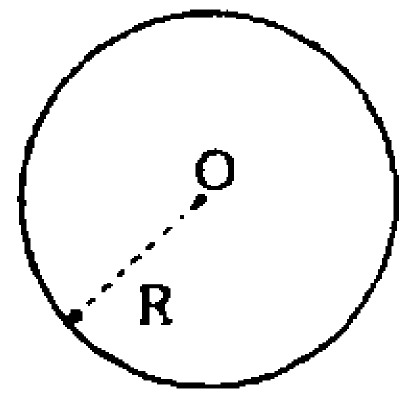
RPTA.:..

05 Calcular el área del círculo, si $R=8$. *O* es centro



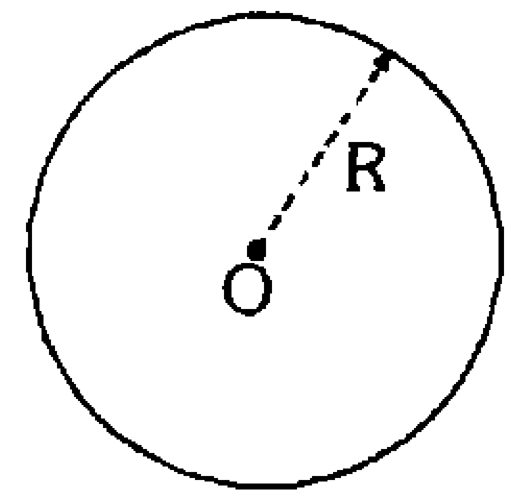
RPTA.:..

06 Calcular el área del círculo, si $R=5\sqrt{2}$. *O* es centro



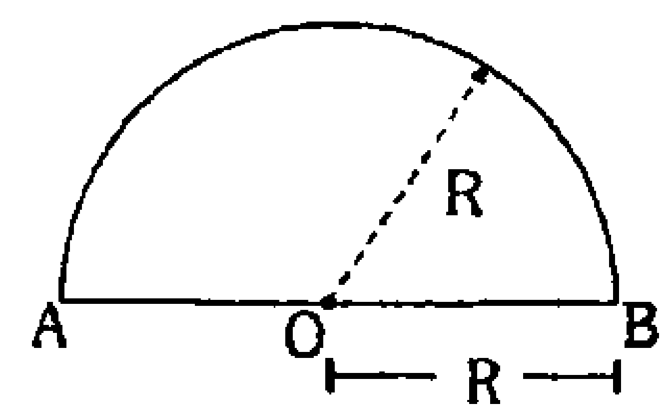
RPTA.:..

07 Calcular el área del círculo, si $R=\dfrac{3}{2}$. *O* es centro



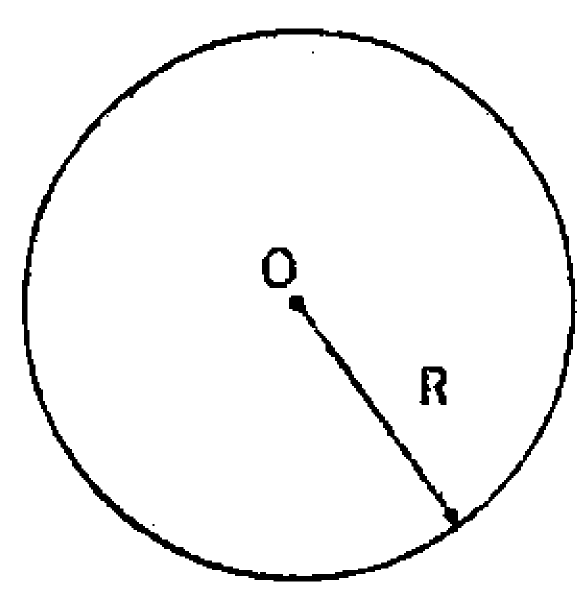
RPTA.:..

08 Calcular el área del semicírculo, si $R=6$. *O* es centro



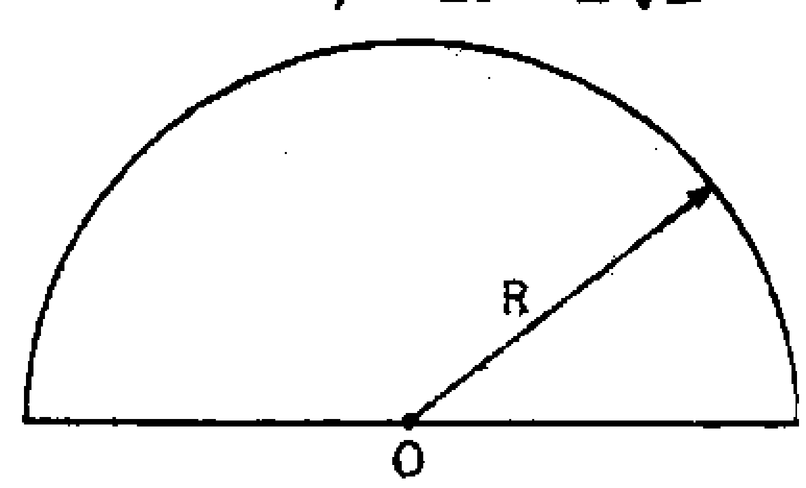
RPTA.:..

09 Calcular el área del círculo, si $R=12$ *cm. O* es centro.



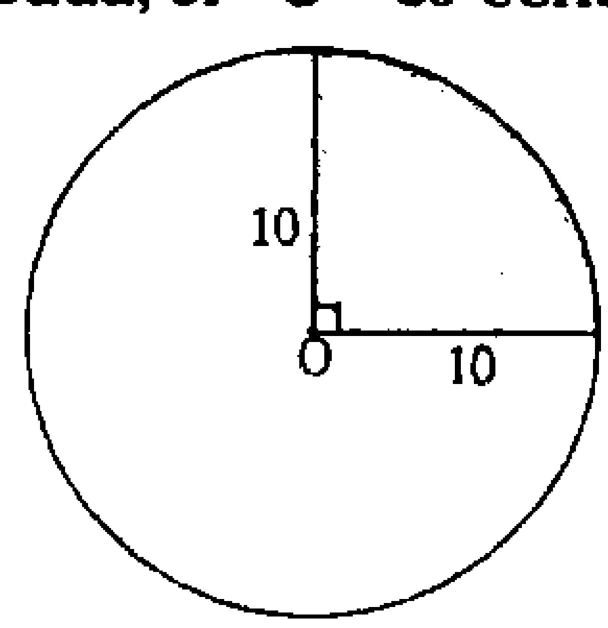
A) 100 B) 64 C) 81 D) 144 E) 121

10 Calcular el área del semicírculo de centro "*O*", si $R = 2\sqrt{2}$.



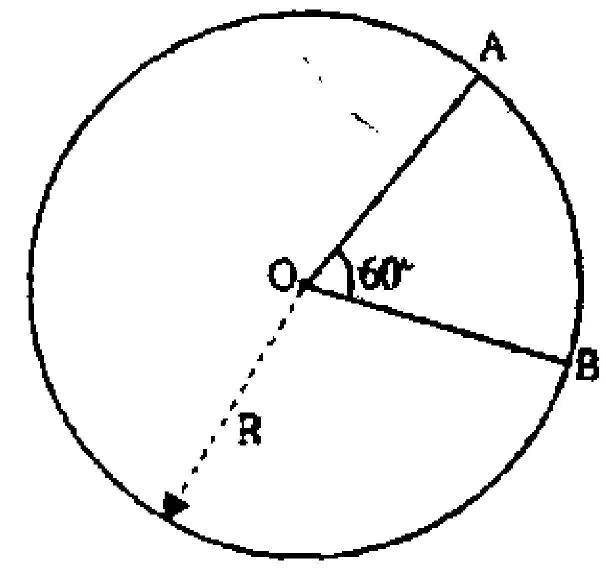
A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2}$ E) 16

11 Calcular el área de la región sombreada, si "*O*" es centro.



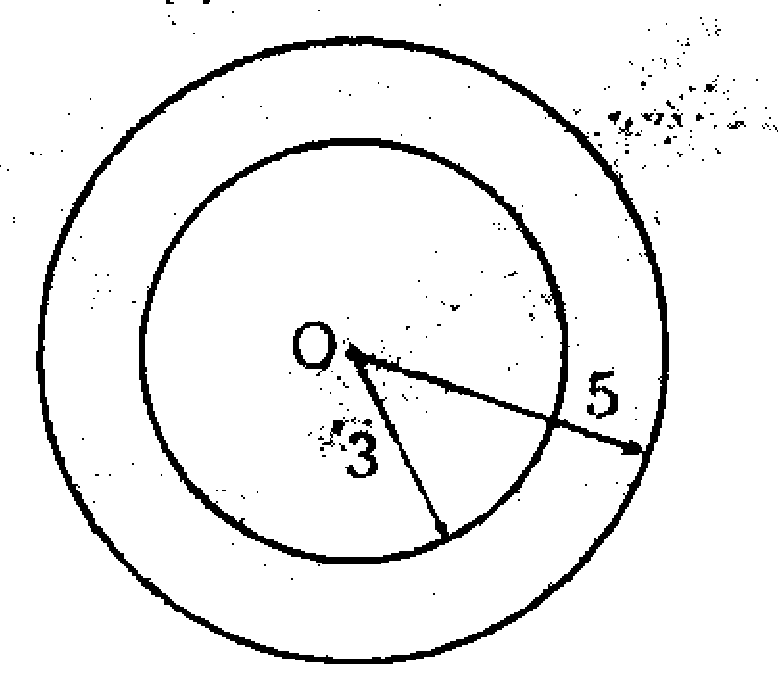
A) 80π B) 25π C) 50π D) 75π E) 60π

12 Del gráfico, calcular el área del sector circular *AOB,* si $R=16$.



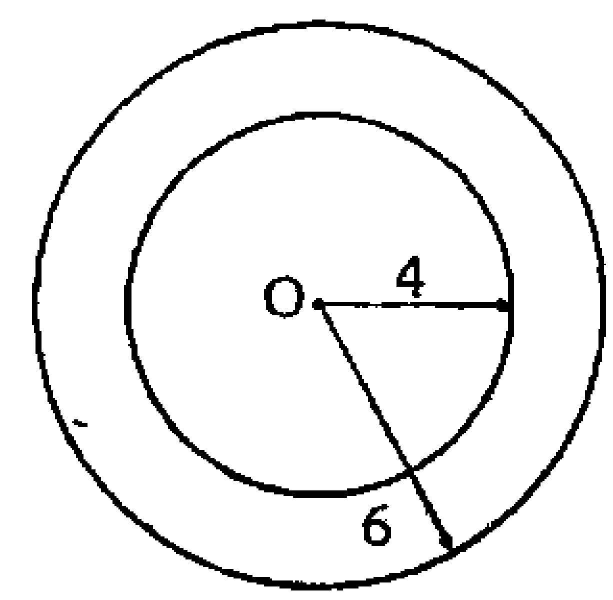
A) $\frac{64}{3}\pi$ B) 64π C) $\frac{61}{3}\pi$ D) $\frac{65}{3}\pi$ E) 81π

13 Calcular el área de la región sombreada ; si *O* es centro.



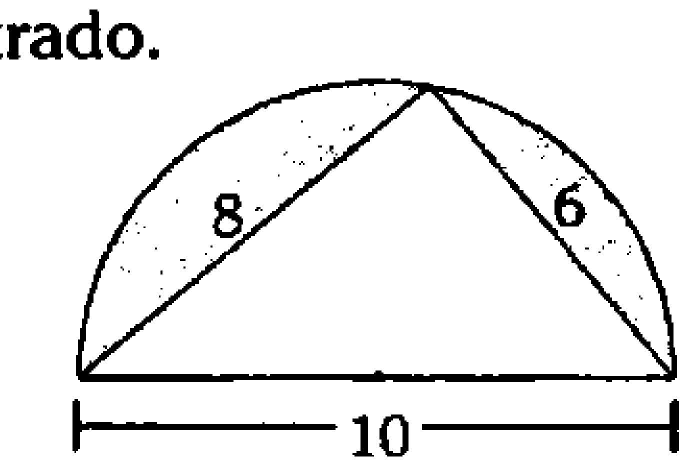
RPTA.:..

14 Calcular el área de la corona circular, si *O* es centro.



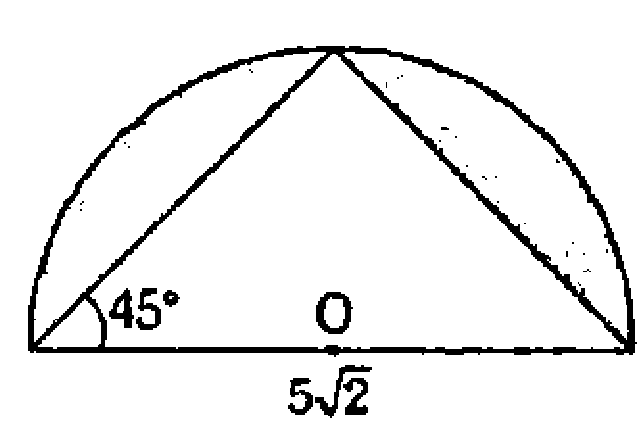
RPTA.:..

15 Calcular el área de la región sombreada en el semicírculo mostrado.



RPTA.:..

16 En el gráfico, calcular el área de la región sombreada , si "*O*" es centro del semicírculo.



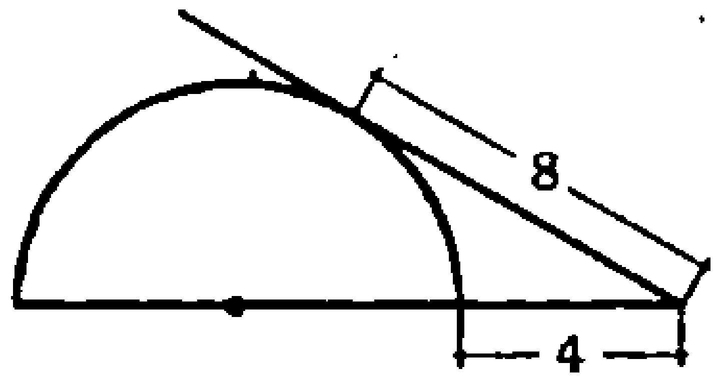
A) $50(2\pi-3)$
B) $50(2\pi-1)$
C) $25(\pi-2)$
D) $100(\pi-1)$
E) $50(\pi-1)$

17 Los catetos de un triángulo

rectángulo miden ***8*** y ***15.*** Calcular el área del círculo inscrito.

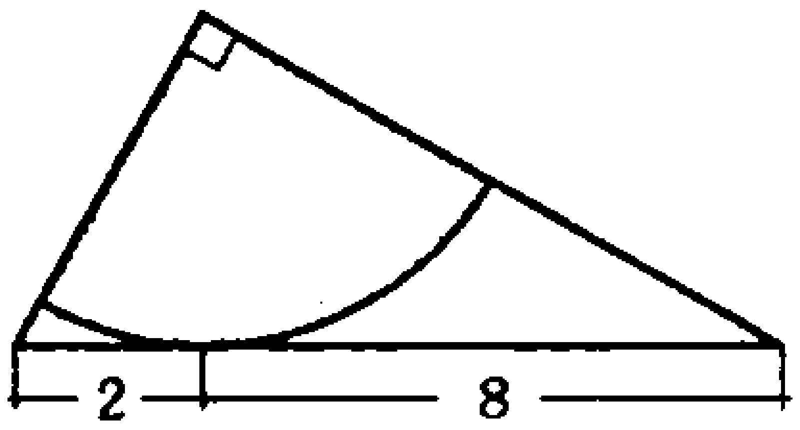
RPTA.:..

18 En la figura, calcular el área del semicírculo.



RPTA.:..

19 En la figura, calcular el área del cuadrante.



RPTA.:..

20 En el gráfico ***O*** es centro: calcular el área del sector circular sombreado.

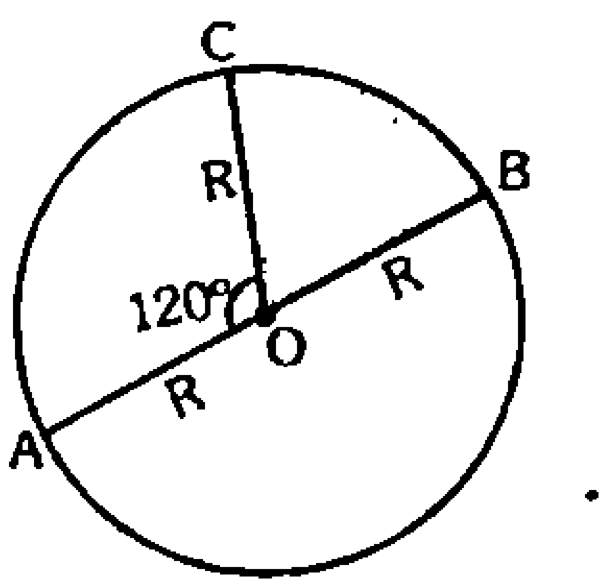
A) $\frac{\pi R^2}{2}$

B) $\frac{2\pi R^2}{3}$

C) $5\pi R^2$

D) $9\pi R^2$

E) $\frac{\pi R^2}{6}$



21 En el gráfico. Calcular el área de la región sombreda. Si : ***O*** es centro ($\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son diámetros).

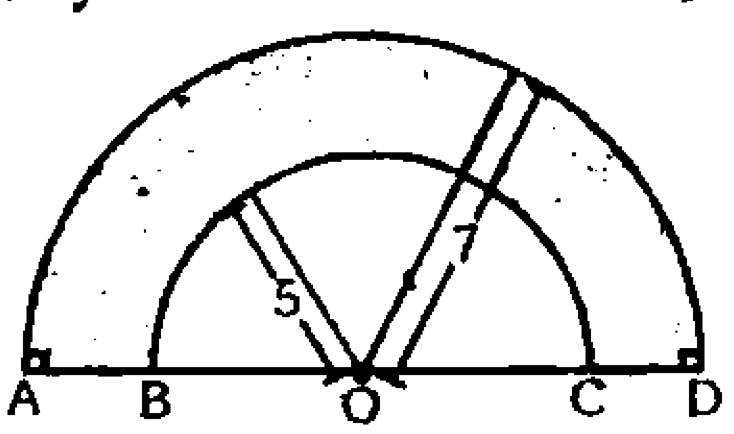
A) 12π

B) 14π

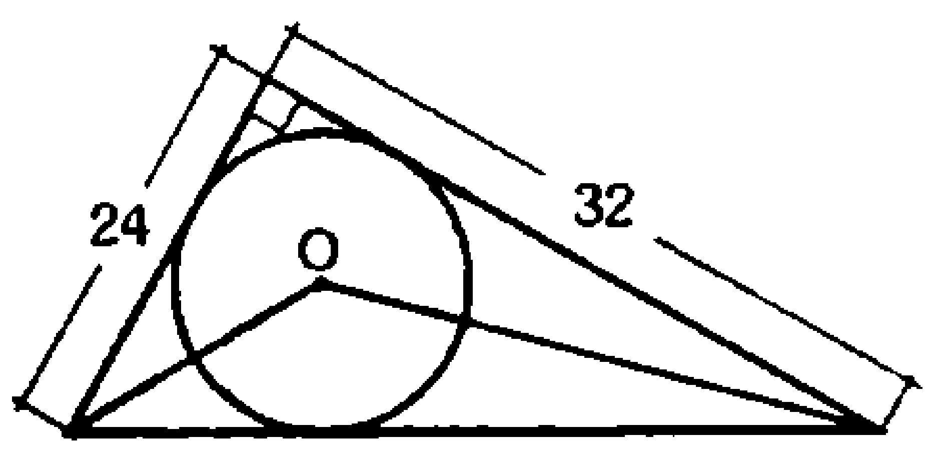
C) 9π

D) 25π

E) 49π

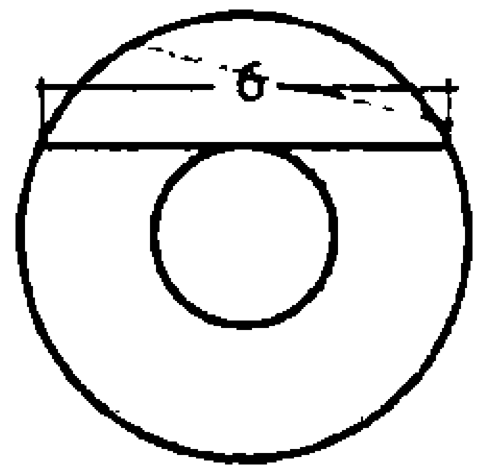


22 En la figura, calcular el área del sector circular si ***O*** es el centro.



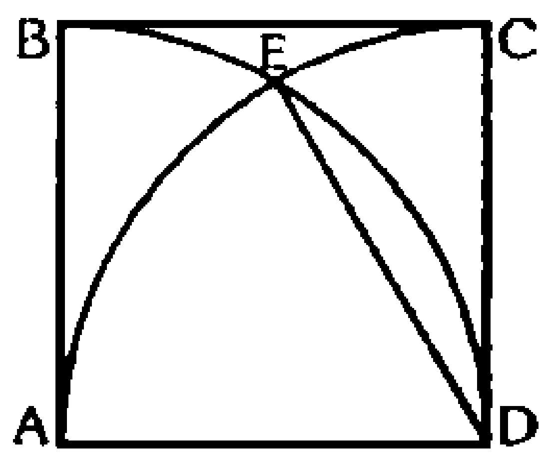
RPTA.:..

23 En la figura, calcular el área de la corona circular.



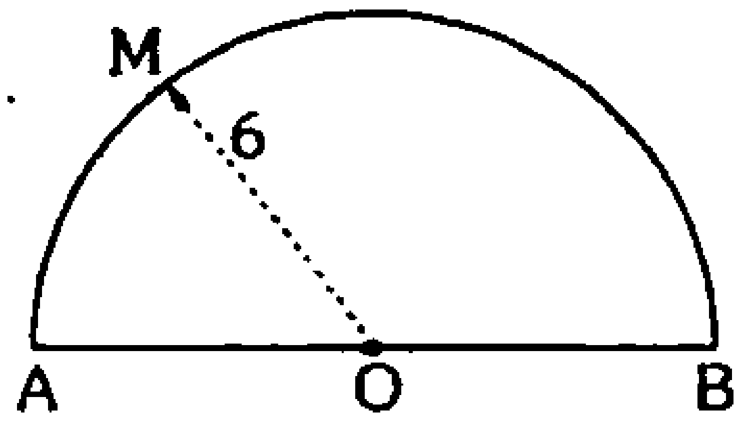
RPTA.:..

24 En la figura, ***ABCD*** es un cuadrado de lado ***6. A*** y ***D*** son centros de los arcos ***BD*** y ***AC***. Calcular el área del segmento circular.



RPTA.:..

25 En el gráfico; calcule el área del semicírculo, $\overline{AB}$ es diámetro.

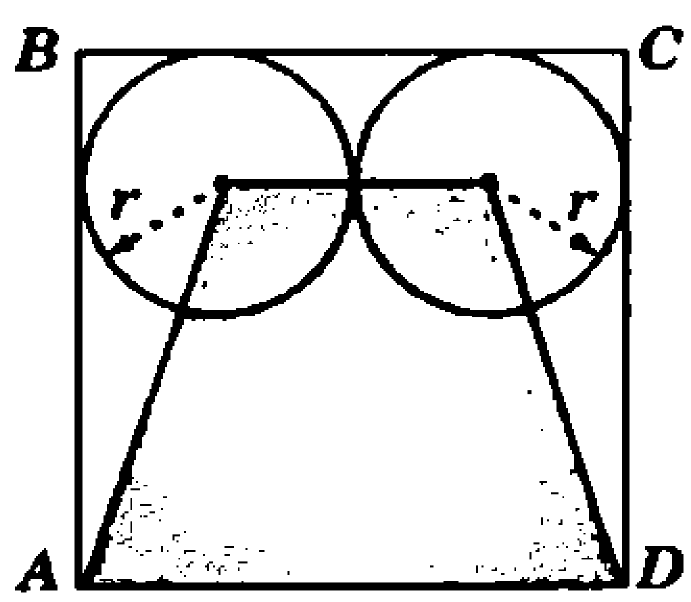


RPTA.:..

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

AREAS DE REGIONES CUADRANGULARES Y CIRCULARES

01 Si ***ABCD*** es un cuadrado cuyo lado mide ***8***; las circunferencias tienen igual radio, son tangentes y están en contacto con dos lados del cuadrado, calcular el área de la región sombreada.



A) 18 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48

02 Se tiene un trapecio isósceles ***ABCD*** en el cual se traza la altura $\overline{CH}$. Si el área de la región triangular ***ACH*** es ***12***, calcular el área de la región trapecial.

A) 12 B) 24 C) 18 D) 20 E) 15

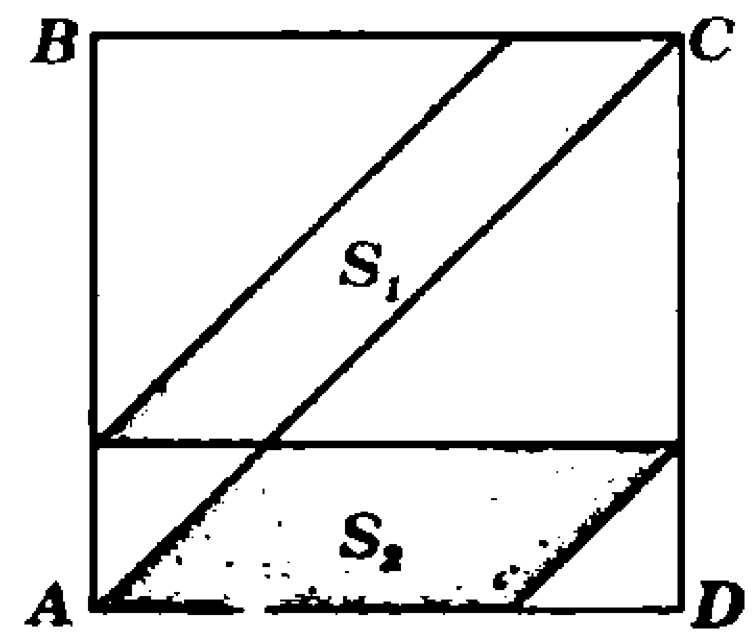
03 En el gráfico se muestra a un cuadrado ***ABCD*** y a dos regiones paralelográmicas cuyas áreas son: S_1 y S_2. Si $S_1=12$, calcular S_2.

A) 24

B) 18

C) 20

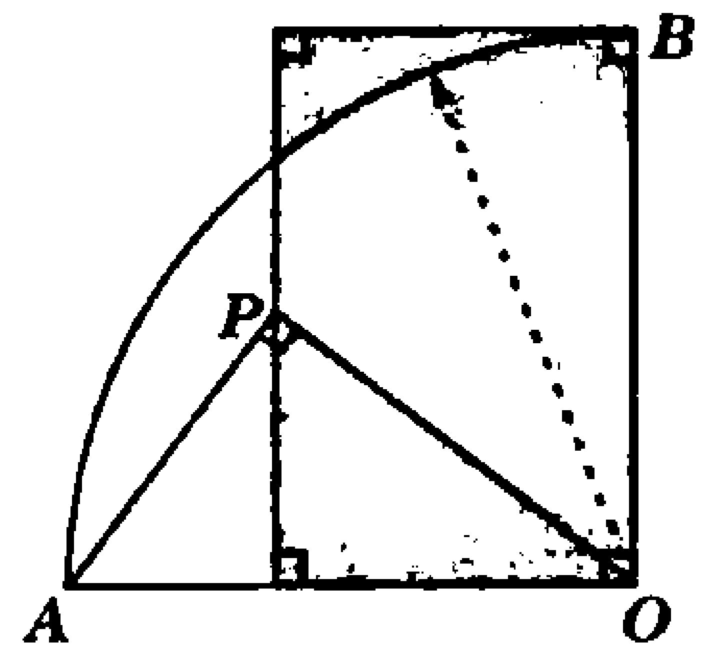
D) 12



04 Se tiene una región paralelográmica ***ABCD*** cuya área es ***24***; se traza la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AD}$). Si ***M*** es punto medio de $\overline{BH}$ y ***HD=2(AH)***, calcular el área de la región cuadrangular ***BMDC***.

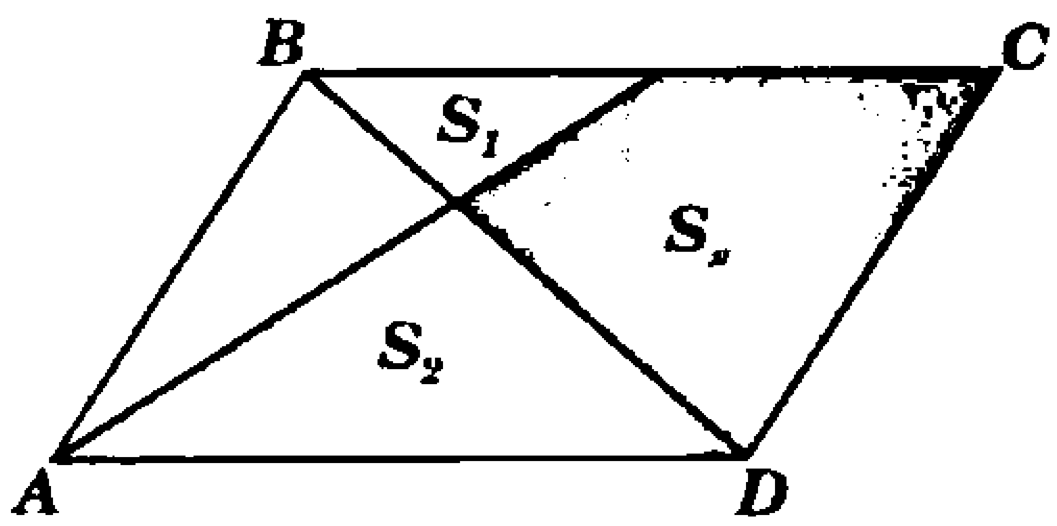
A)12 B)16 C)13 D)14 E)15

05 Calcular el área de la región sombreada, si ***OP=6***.



A)18 B)12 C)36 D)72 E)64

06 Si ***ABCD*** es un paralelogramo; $S_1=4$, $S_2=9$, calcular S_x (S_1, S_2, S_x son área de las regiones sombreadas)



A)9 B)10 C)11 D)12 E)13

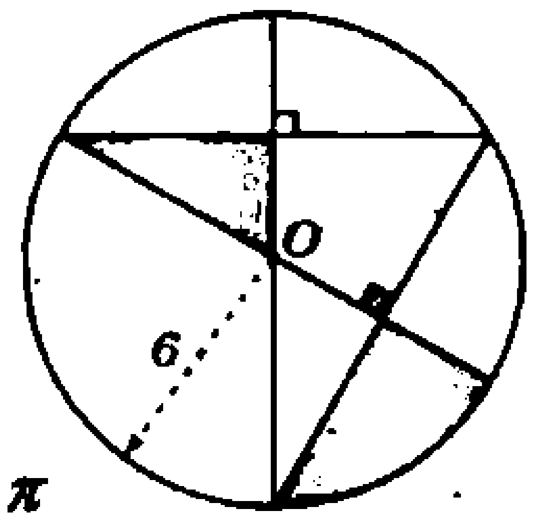
07 Del gráfico, calcular el área de la región sombreada.

A) 12π

B) 6π

C) 10π

D) 4π E) 9π



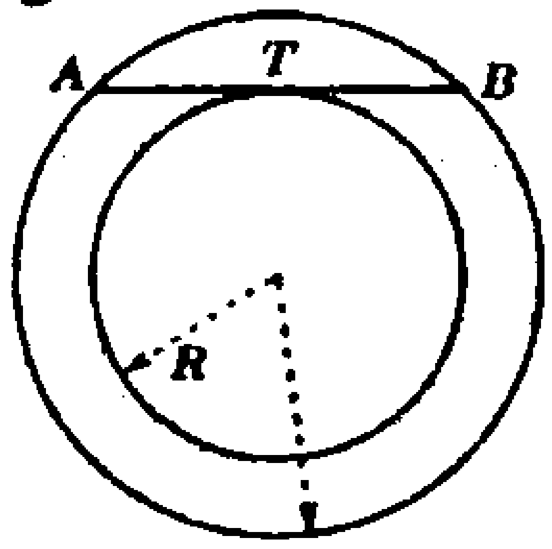
08 Si $m\widehat{AB}=106°$ y $R=3$. calcular el área de la región sombreada. (*T* es punto de tangencia)

A) 14π

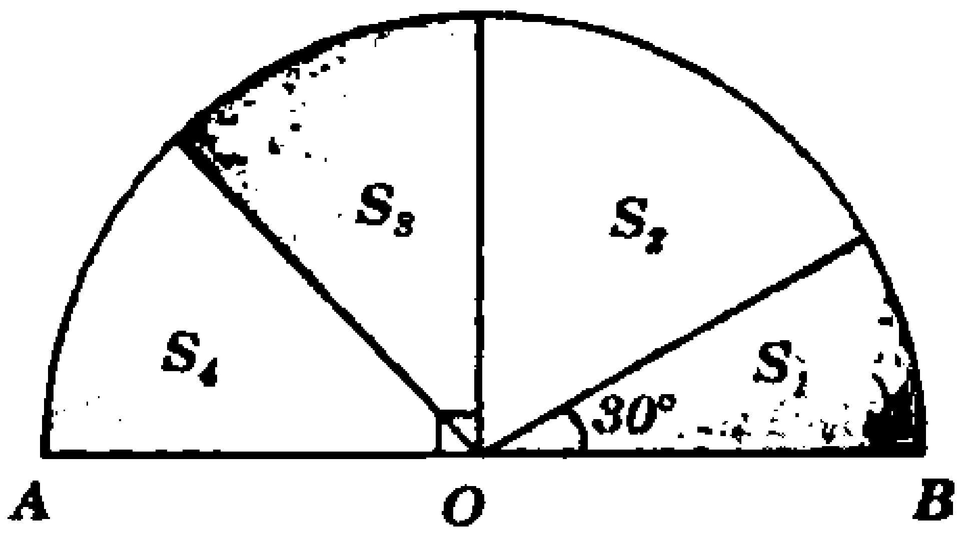
B) 15π

C) 16π

D) 17π E) 18π



09 Si *O* es centro; S_1, S_2, S_3 y S_4 son las áreas de las regiones sombreadas; la razón entre las áreas S_1 y S_4 es $\frac{5}{8}$, calcular la razón entre las áreas S_1 y S_3.



A) $\frac{10}{7}$ B) $\frac{9}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{12}{7}$ E) $\frac{13}{9}$

10 Si $AC=CO=6$, calcular el área de la región sombreada.

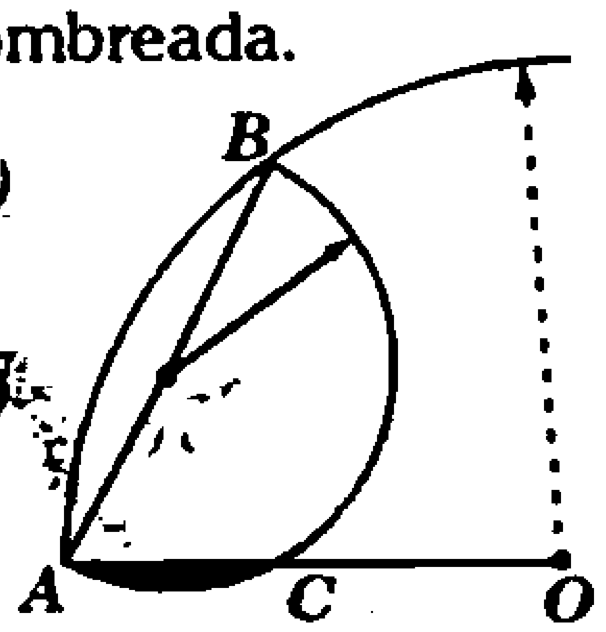
A) $3(2\pi-3\sqrt{3})$

B) $4(\pi-\sqrt{3})$

C) $2(2\pi-3\sqrt{3})$

C) $3(\pi-1)$

E) $6(2\pi-\sqrt{3})$



11 Calcular el área de la región sombreada, si : $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$; $AB=8$; $CD=6$ y $m\widehat{BD}=90°$.

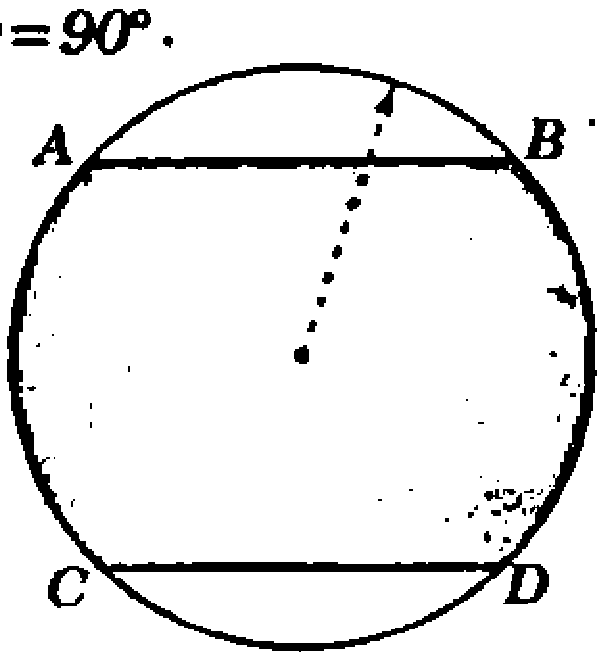
A) $\frac{36+23\pi}{3}$

B) $\frac{48+25\pi}{2}$

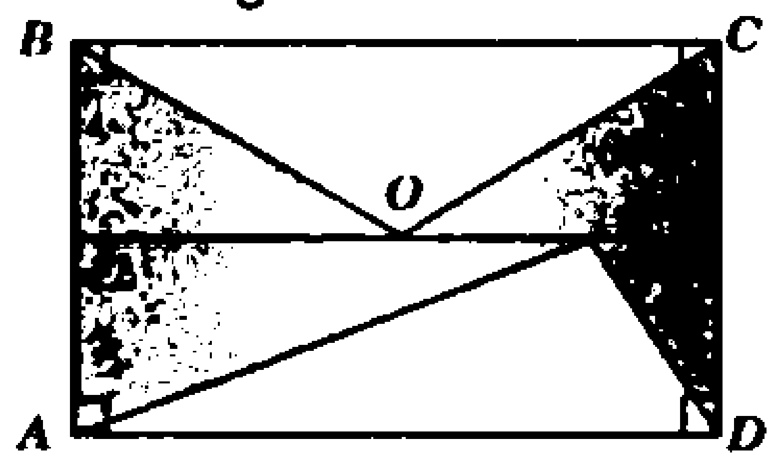
C) $\frac{64+20\pi}{3}$

D) $\frac{42+15\pi}{2}$

E) $12+25\pi$

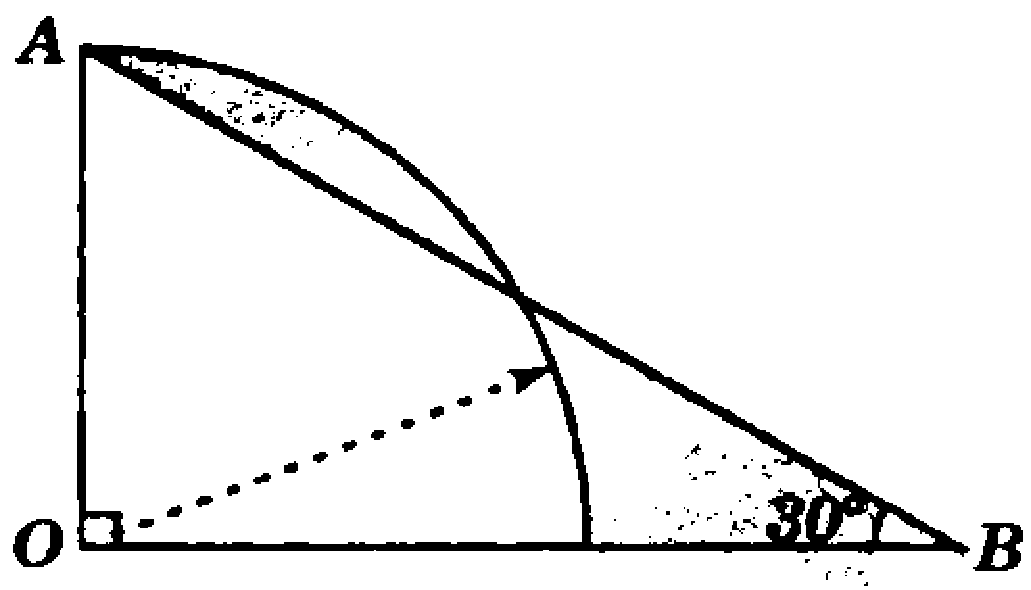


12 Si *O* es centro del rectángulo *ABCD* $CD=2\sqrt{2}$ y $OC=\sqrt{3}$, calcular el área de la región sombreada.



A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$

13 Calcular la diferencia entre las áreas de las regiones sombreadas. si $OA=2$ y $m\sphericalangle B=30°$.



A) 2 B) $2\sqrt{3}-\pi$ C) $\sqrt{3}-1$

D) $\pi-1$ E) $\pi-\sqrt{3}$

14 Se tiene cuatro círculos no secantes entre ellos y de igual radio; uniendo los centros se obtiene un cuadrilátero irregular convexo. Calcular la suma de áreas de las porciones de círculos que se encuentran en el interior del cuadrilátero, si el radio es *1,5*.

A) $2{,}25\pi$ B) $2{,}75\pi$ C) $4{,}30\pi$

D) 3π E) $3{,}25\pi$

15 Se tiene un hexágono regular *ABCDEF* cuyo lado mide *4; M* y *N* son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$. Calcular el área de la región cuadrangular *MCDN*.

A) $14\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{6}$

D) $15\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{6}$

16 Si $m\widehat{BD}=37°$ y $OA=10$, calcular la diferencia de las áreas de las regiones sombreadas.

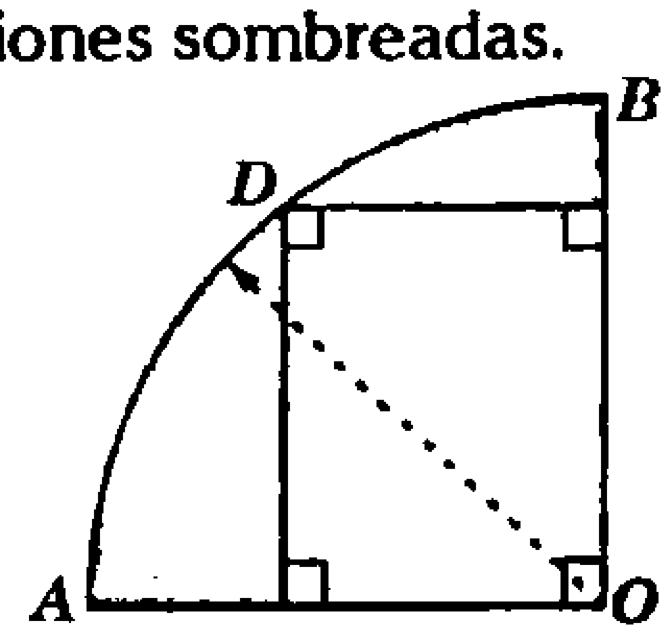
A) 3π

B) $\frac{10\pi}{3}$

C) $\frac{40\pi}{3}$

D) 6π

E) 7π



17 Se tiene una semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{AD}$; en $\widehat{AD}$ se ubican los puntos *B* y *C* tal que: $m\widehat{AB}=m\widehat{BC}=m\widehat{CD}$; luego se traza $\overline{BH}\perp\overline{AD}$. Si $AD=8$, calcular el área de la región limitada por: $\overline{BH}$, $\overline{HC}$ y $m\widehat{BC}$.

A) $\frac{8\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{3}$ C) 2π D) $\frac{9\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{5}$

18 Se tiene una región hexagonal regular *ABCDEF* cuya área es $6\sqrt{3}$. Calcular el área de la región cuadrangular cuyos vértices son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{AF}$.

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$

D) $5\sqrt{6}$ E) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$

19 En un trapecio *ABCD* sus diagonales se cortan en *O*; en $\overline{CD}$ y en la base $\overline{AD}$ se ubican los puntos *M* y *N* tal que $\overline{MN}\,//\,\overline{AC}$; $\overline{MN}$ corta a $\overline{BD}$ en *E*; $MD=2(CM)$ y las áreas de las regiones triangulares *BOC* y *ENO* son iguales a *4*. Calcular el área de la región trapecial.

A) 10 B) 30 C) 36 D) 54 E) 25

20 Si el área de la región rectangular sombreada es *32* y $AC=16$, calcular *QM*.

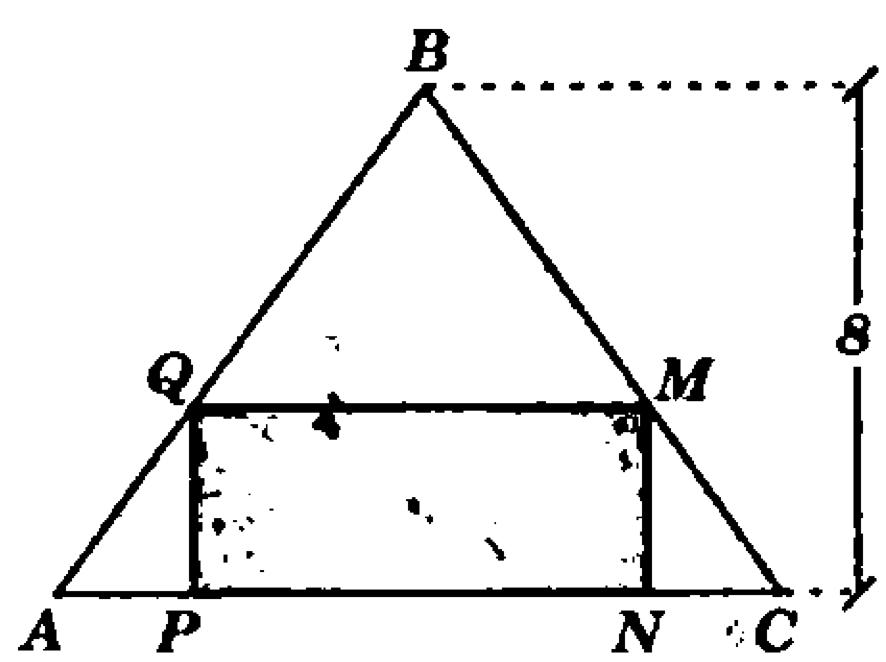
A) 5

B) 9

C) 6

D) 8

E) 7



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)B	3)D	4)B	5)C	6)C	7)B	8)C	9)A	10)A
11)B	12)A	13)B	14)A	15)D	16)C	17)A	18)B	19)E	20)D

GEOMETRIA DEL ESPACIO (RECTAS y PLANOS)

CAPITULO 107

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el lector estará en la capacidad de:

* *Comprender los conceptos básicos para el desarrollo de la geometria del espacio.*

* *Establecer las diferentes posiciones relativas que existen entre recta y plano en el espacio.*

* *Estudiar las figuras geométricas, en las que sus puntos no pertenezcan al mismo plano.*

Determinar la relación existente entre dos figuras en cuanto a su posición ya sea que pertenezcan a un solo plano o no.

INTRODUCCION :

Hasta el momento conocemos figuras geométricas ubicadas solo en un plano tales como el triángulo, el cuadrilátero, la circunferencia, etc. Sin embargo en nuestra vida cotidiana observamos que en nuestro entorno existen objetos que no están ubicados en un solo plano tales como una caja una columna, un edificio, etc, esto nos hace ver la necesidad de analizar la forma y extensión de los objetos ubicados en el espacio, lo cuál se puede hacer representándolos mediante figuras geométricas espaciales denominados sólidos geométricos para esto también será necesario tener un manejo adecuado de las rectas planos, ángulos diedros, etc. Y sobre todo paciencia, orden y perseverancia por parte del alumnado.

En geometría euclidiana se maneja el concepto de punto, recta y plano como términos no definidos.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO O ESTEREOMETRÍA

Estudia la forma y extensión de las figuras geométricas cuyos puntos no están en un mismo plano (espacio tridimensional).

ESPACIO

Extensión indefinida y sin limites conocidos , que es el medio en el cual se hallan cuantas cosas existen en el universo y tiene naturaleza material .

IDEA DE UN PLANO

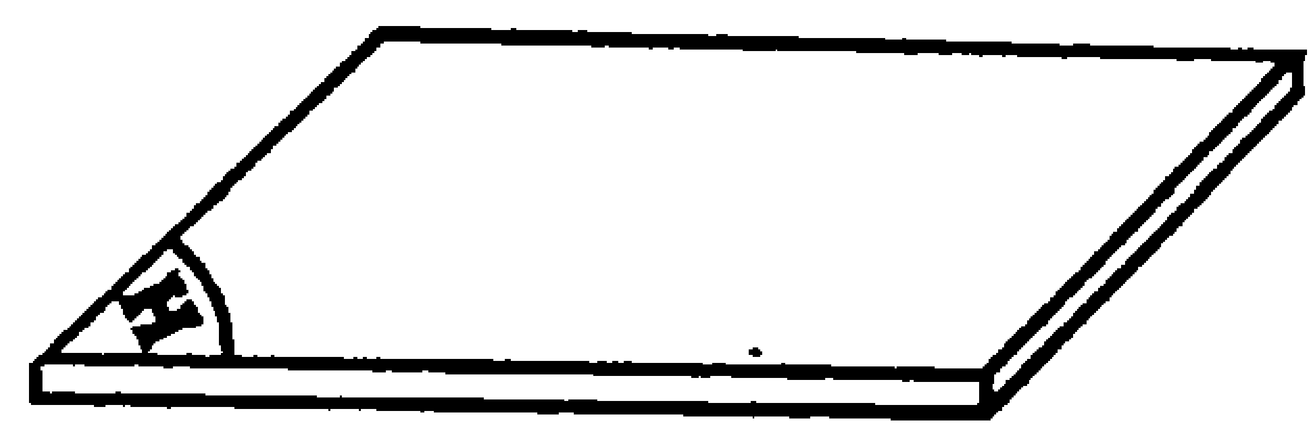
En algunas actividades cotidianas se utiliza intuitivamente la palabra plano , esto se puede apreciar cuando los niños o personas adultas eligen un lugar plano para practicar su deporte el fútbol, para apoyar ciertos objetos materiales de manera que permanezcan fijos , estos se eligen teniendo la intuición de horizontabilidad .

Los geómetras, consideran un plano como una superficie perfectamente lisa y de extensión ilimitada en todas sus direcciones , esto es ideal .

Pero desde el punto de vista físico un plano puede ser representado por diversos objetos, así tenemos, la pizarra , las paredes , el espejo , una plancha de triplay , una mesa , el tablero de dibujo , etc.

REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS DE UN PLANO

Un plano geométricamente es representado por cualquier región plana, convencionalmente se considera la región paralelográmica .



Para denotar un plano, se ubica una letra en una de sus esquinas, luego se identifica así:

Notación : Plano **H : ▱H**

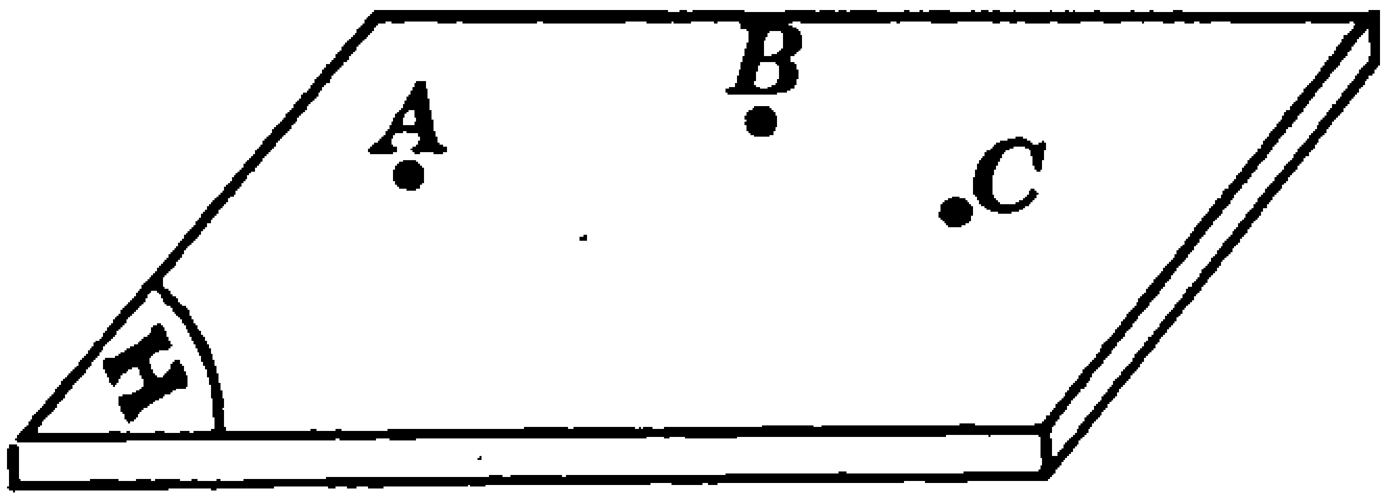
DETERMINACIÓN DE UN PLANO

Determinar un plano significa ubicarlo o fijarlo en un determinado lugar , así por ejemplo , como ubicar la pizarra en la pared de manera que quede fijo ; para ello es necesario clavar en tres de sus esquinas o vértices .

Entonces geométricamente ubicar tres puntos no colineales .

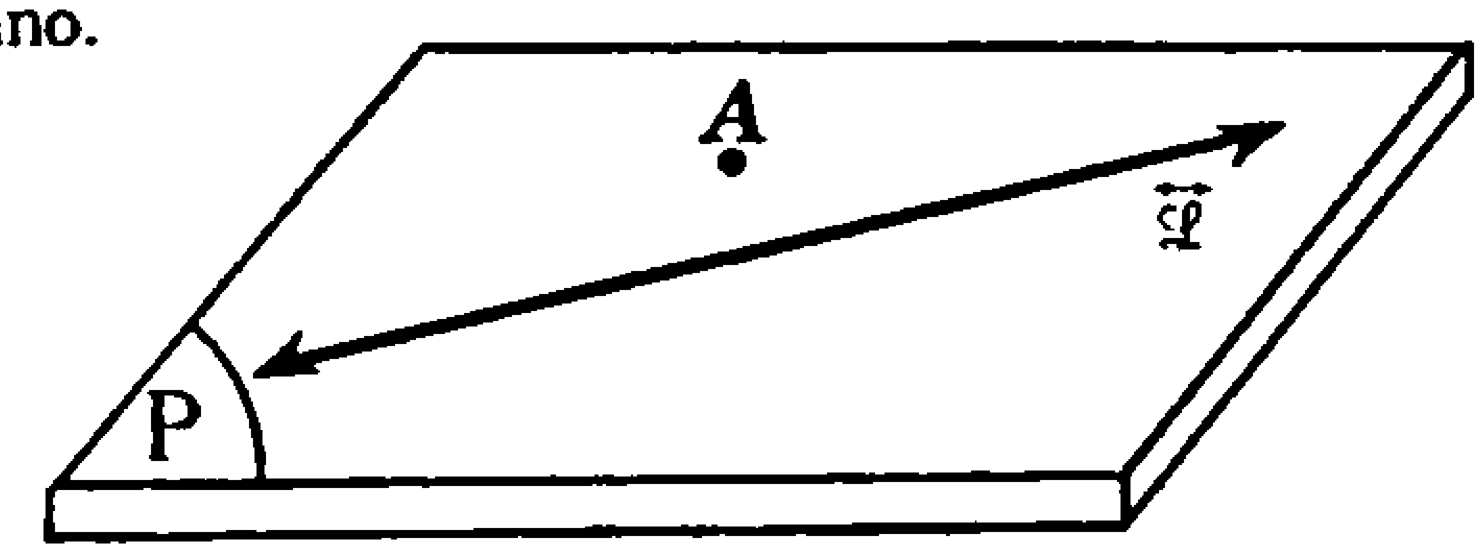
A continuación veamos los elementos necesarios para determinar un plano :

I) Tres puntos no colineales determinan un plano .



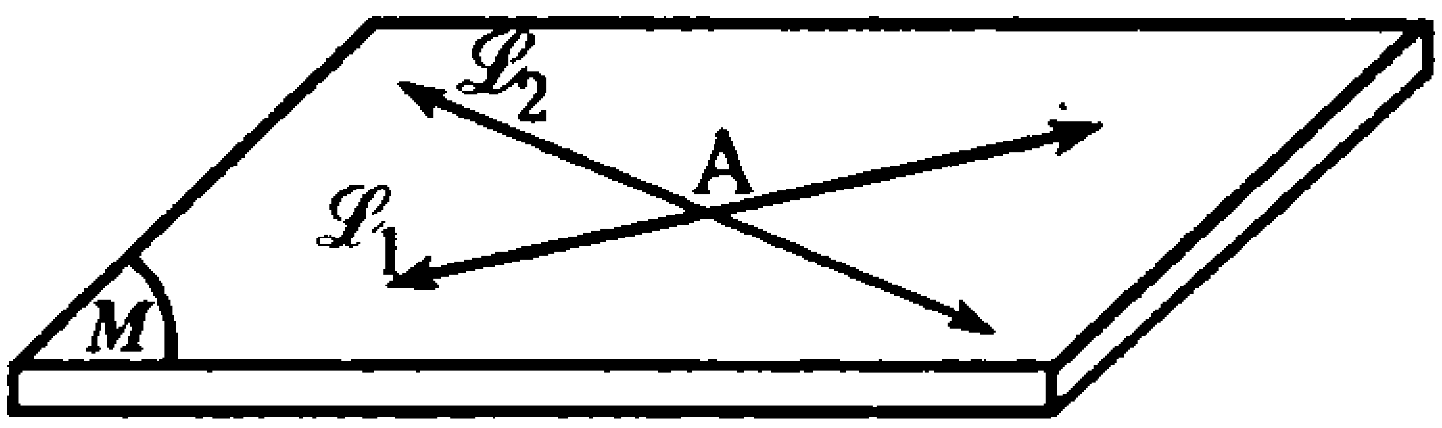
* Sea A, B y C puntos no colineales.
* Entonces con dichos puntos se determina el plano H.

II) Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.



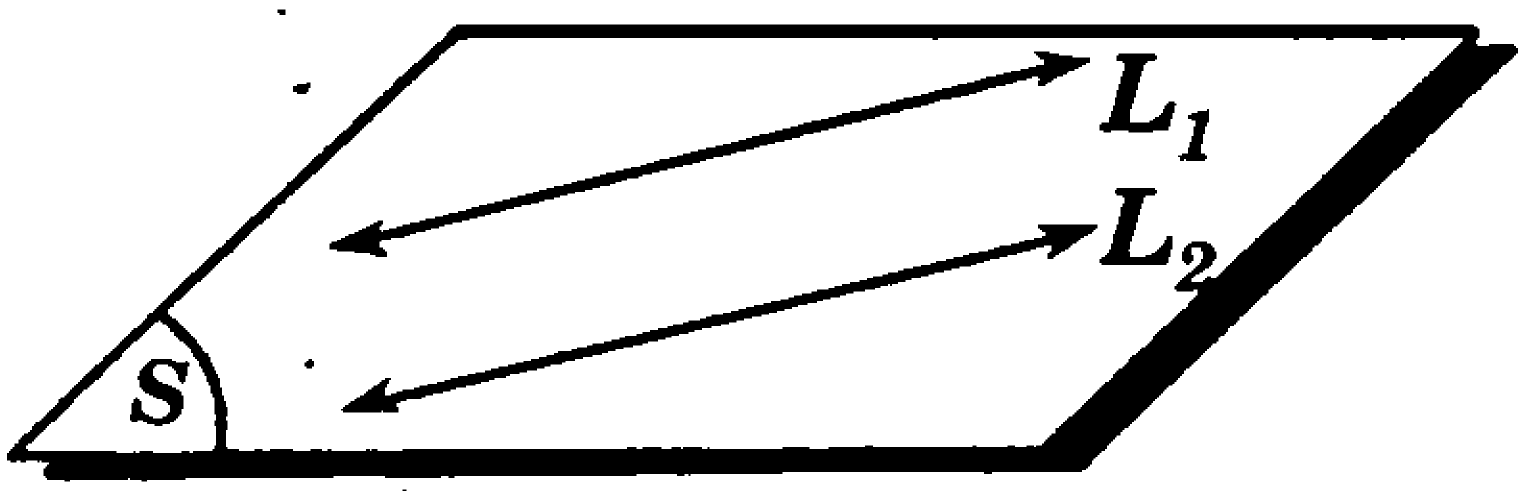
* Sea : $A \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
* Entonces A y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ se determinan el plano P.

III) Dos rectas secantes determinan un plano



* $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \cap \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} = \{A\}$
* Entonces $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ determina el plano M.

IV) Dos rectas paralelas determinan un plano

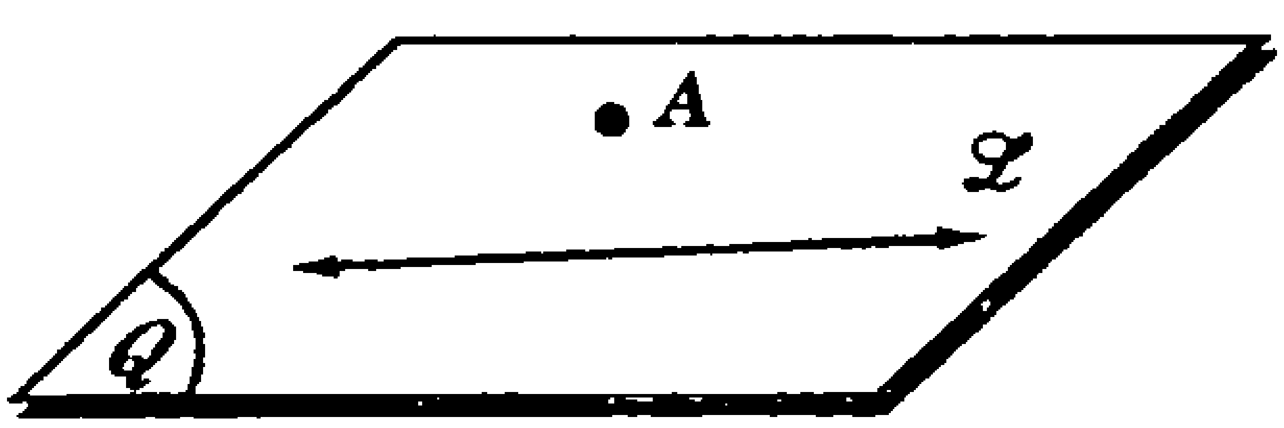


* Si :

$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ determinan $\square S$.

RECTA CONTENIDA EN UN PLANO

Una recta y un punto que no pertenece a ella determinan un plano .

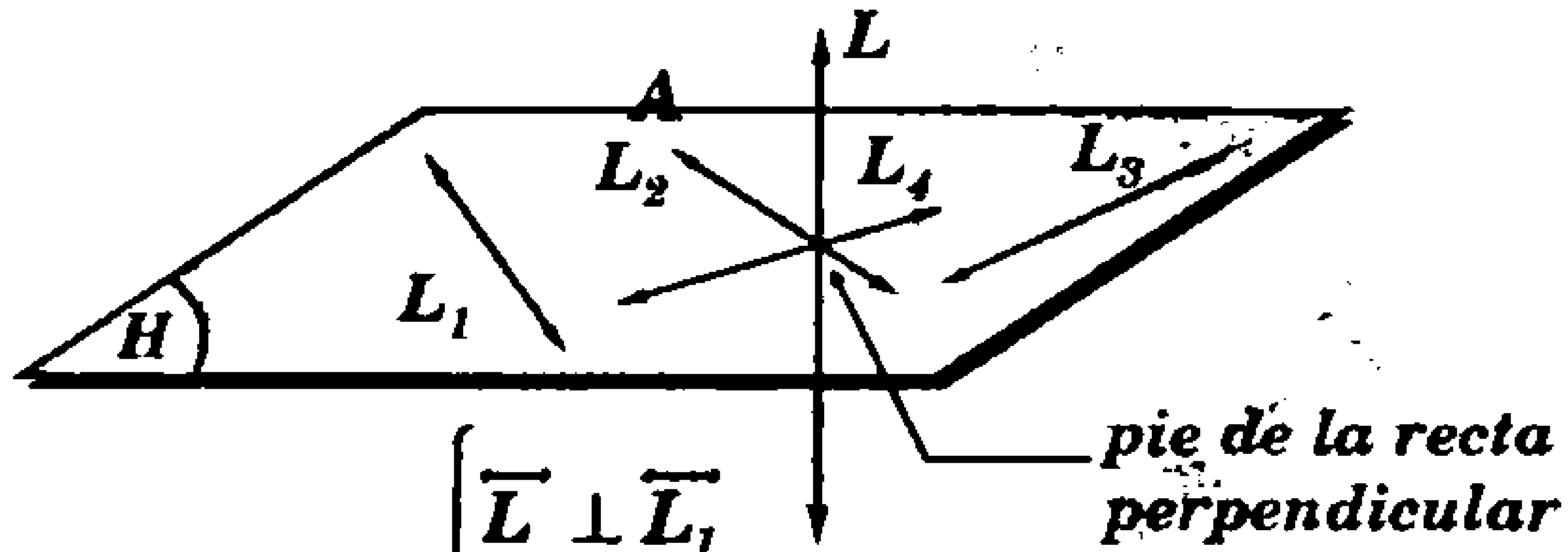


* Si: $A \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$

A y L determinan el plano Q

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

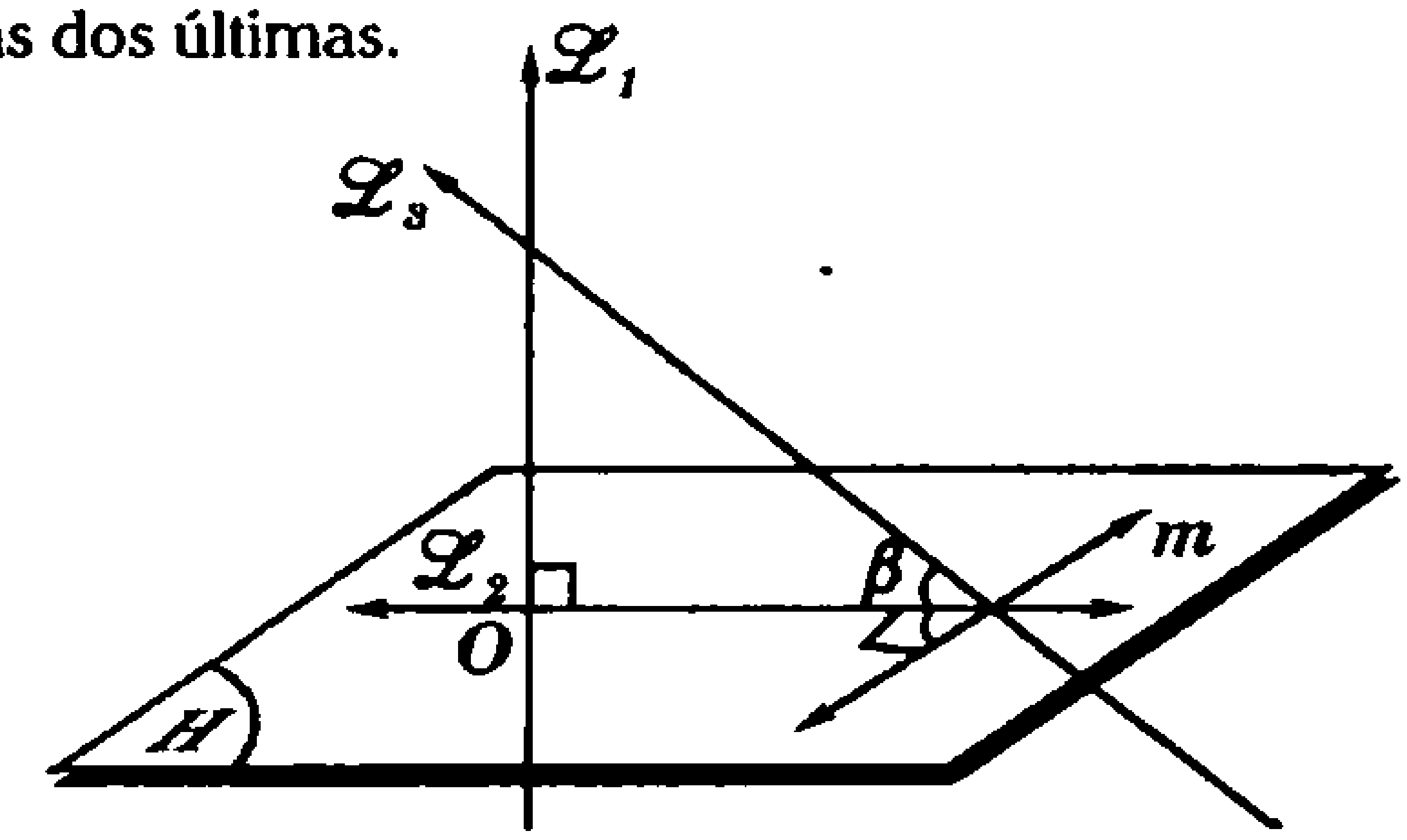
Por definición, una recta perpendicular a un plano es aquella recta secante al plano , perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano .



Si : $\overleftrightarrow{L} \perp \square H \begin{cases} \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1} \\ \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2} \\ \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_3} \\ \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_4} \\ \vdots \end{cases}$

TEOREMA DE LAS TRES RECTAS PERPENDICULARES

Si una recta es perpendicular a un plano y por el pie de dicha recta se traza otra recta perpendicular a una de las rectas contenidas en el plano , esta última recta es perpendicular a la recta determinada por un punto cualquiera de la primera y el punto de intersección las dos últimas.



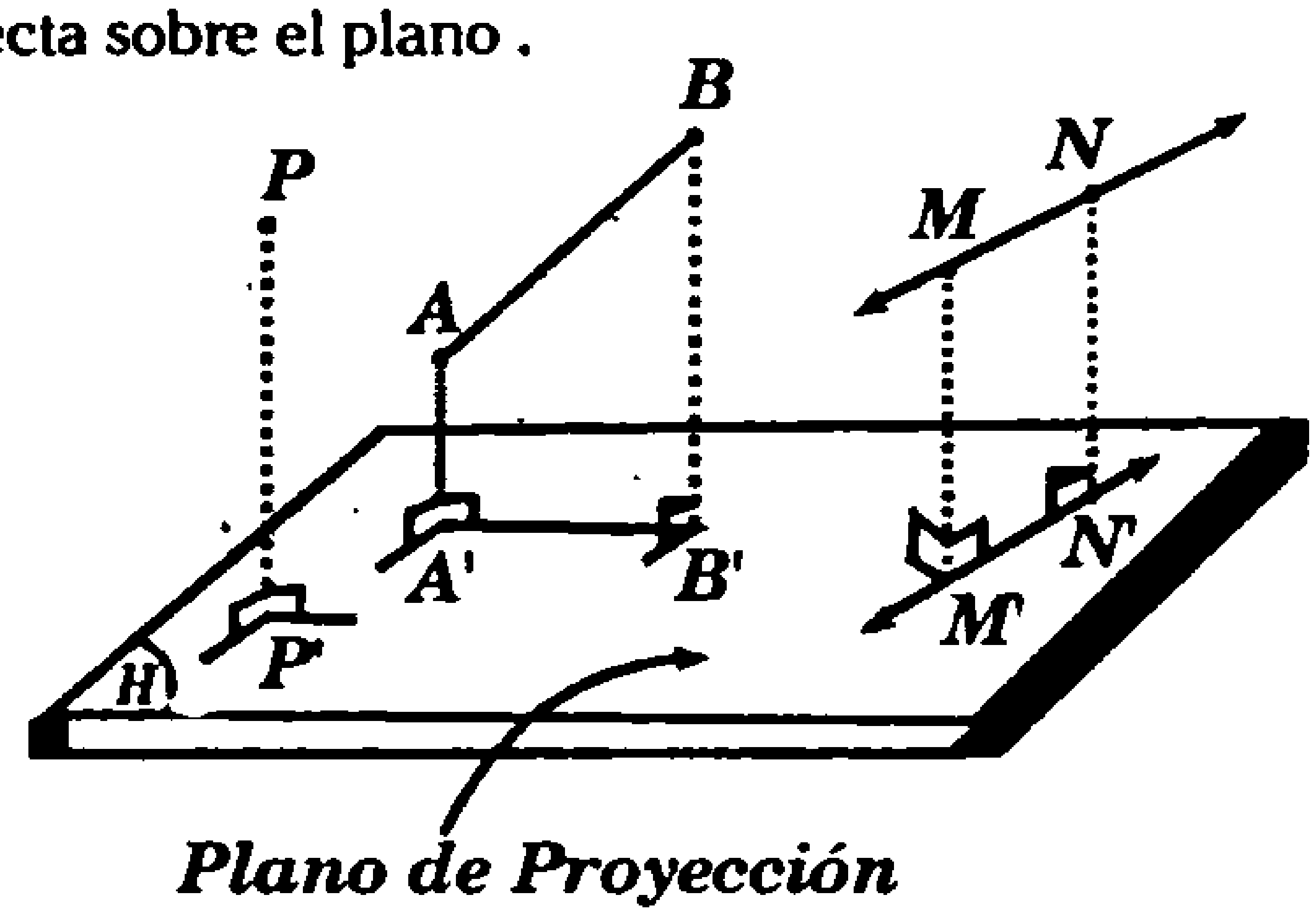
Si : $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} \perp \square H$ (O : pie de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$) y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \perp m$ ($m \subset H$)

$$\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}_3} \wedge \beta = 90°$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO Y UNA RECTA

La proyección ortogonal de un punto sobre un plano, es el pie de la perpendicular trazada de dicho punto hacia el plano. La proyección ortogonal de una recta no contenida en el plano es el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones de los puntos de

la recta sobre el plano .



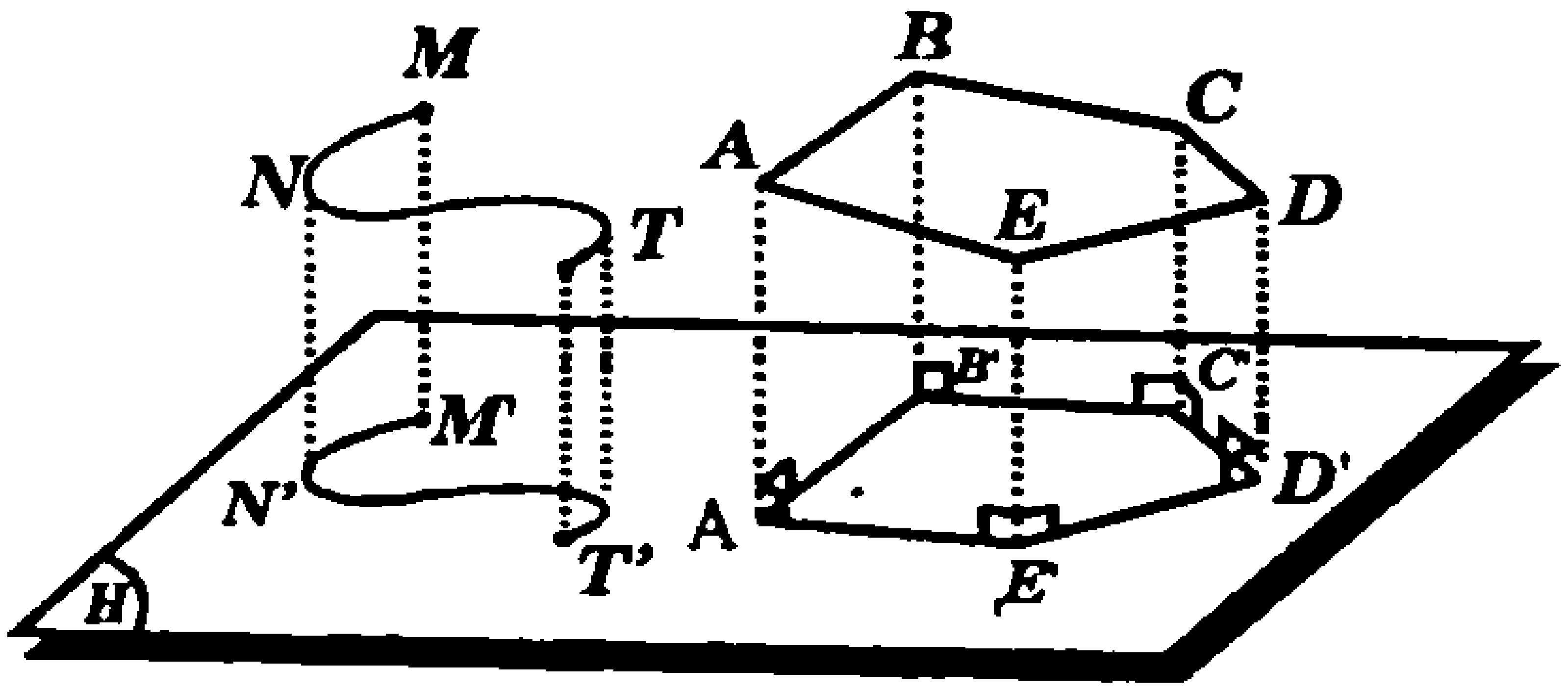
* P' : proyección de P sobre el plano $H(P \not\subset \square H)$

* $\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre el plano H. $(\overline{AB} \not\subset \square H)$.

* $\overleftrightarrow{M'N'}$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{MN}$ sobre el plano H. $(\overleftrightarrow{MN} \not\subset \square H)$

NOTA :

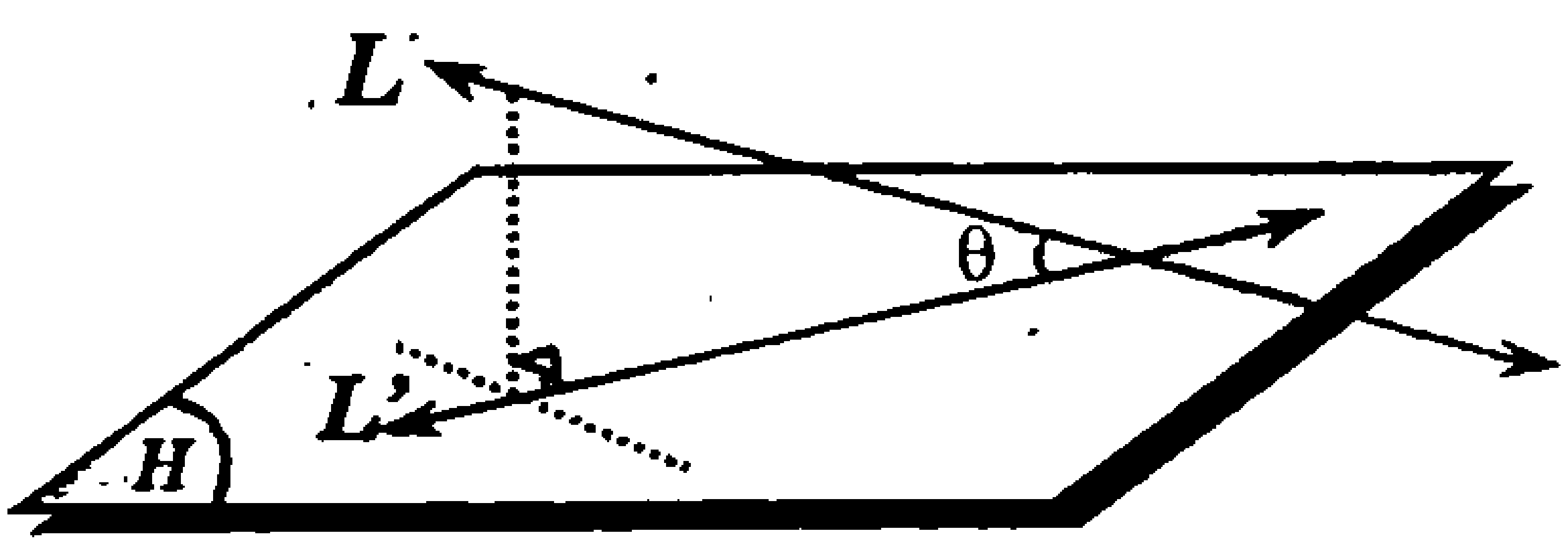
La proyección ortogonal de una figura sobre un plano es el conjunto de puntos del plano que son las proyecciones ortogonales de los puntos de la figura en dicho plano .



* Línea $M'N'T'$: es la proyección ortogonal de MNT sobre el plano H, así como $A'B'C'D'E'$ lo es de $ABCDE$

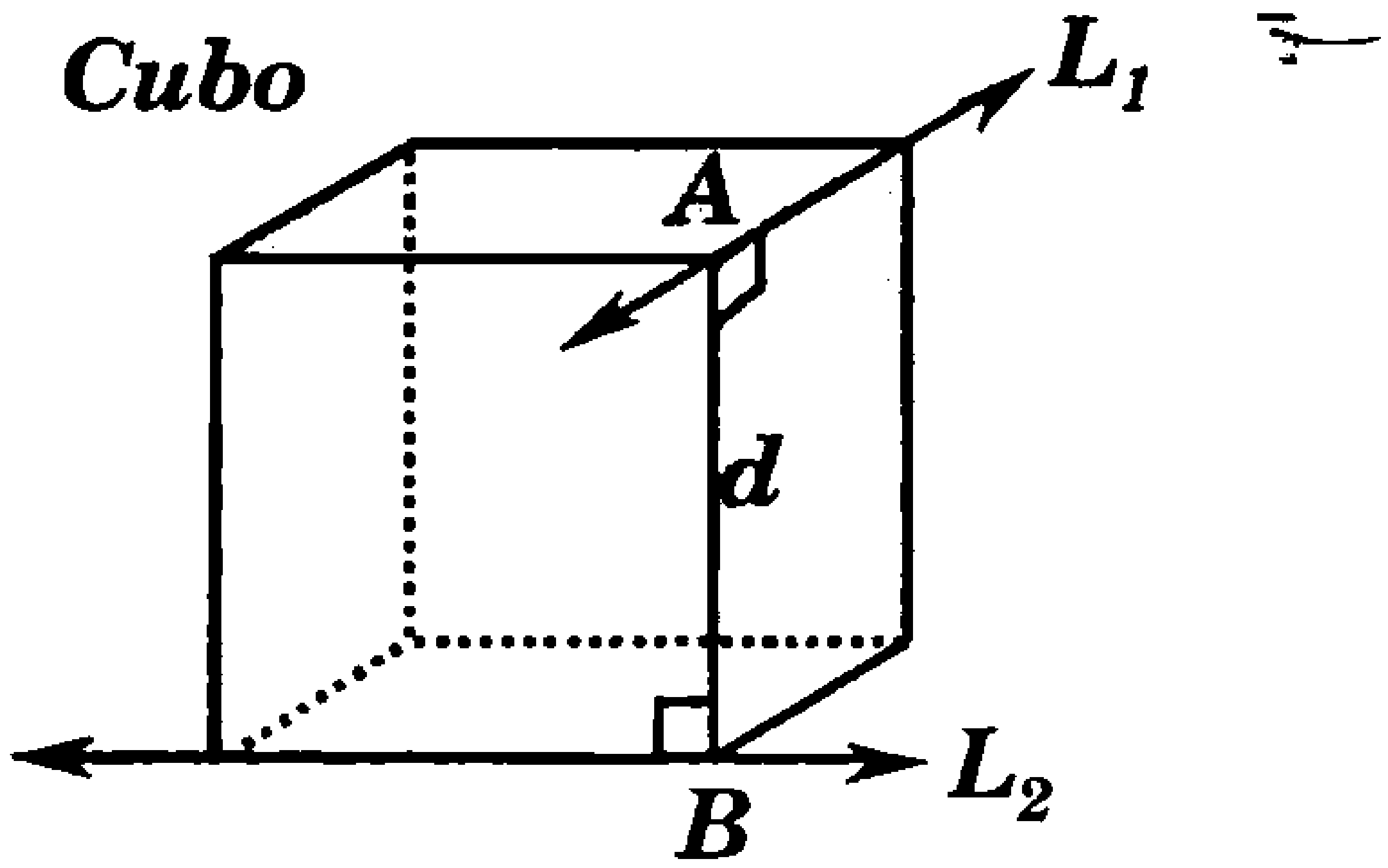
ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

El ángulo entre una recta y un plano es el ángulo determinado por dicha recta con su proyección ortogonal sobre el plano.



* L' : Proyección ortogonal de la L sobre el plano H.
* θ: Medida del ángulo entre la recta L y el plano H.

La distancia entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento que es perpendicular a ambas rectas y cuyo extremo están uno en cada recta.



* Si: $\overline{AB} \perp L_1 \wedge \overline{AB} \perp L_2$;

$A \in L_1$ y $B \in L_2$

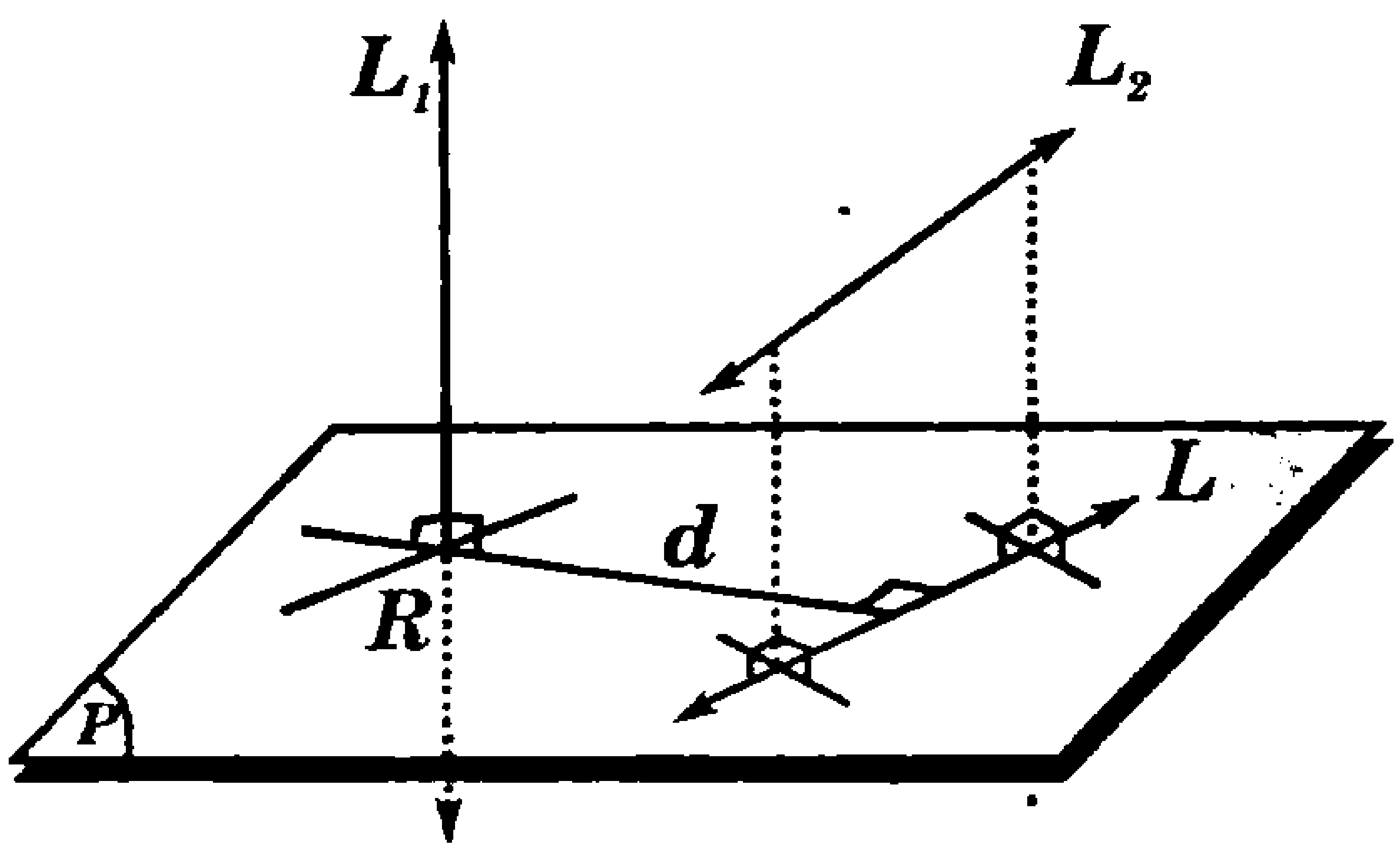
* Entonces:

$AB = d$: distancia entre L_1 y L_2

CRITERIO PARA CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

Para calcular la distancia entre dos rectas alabeadas es recomendable tomar en cuenta los siguientes criterios.

I) La distancia entre dos rectas alabeadas es igual a la distancia entre las proyecciones ortogonales de dicha rectas sobre un plano que es perpendicular a una de la rectas.



*Si $L_1 \perp$ al plano P

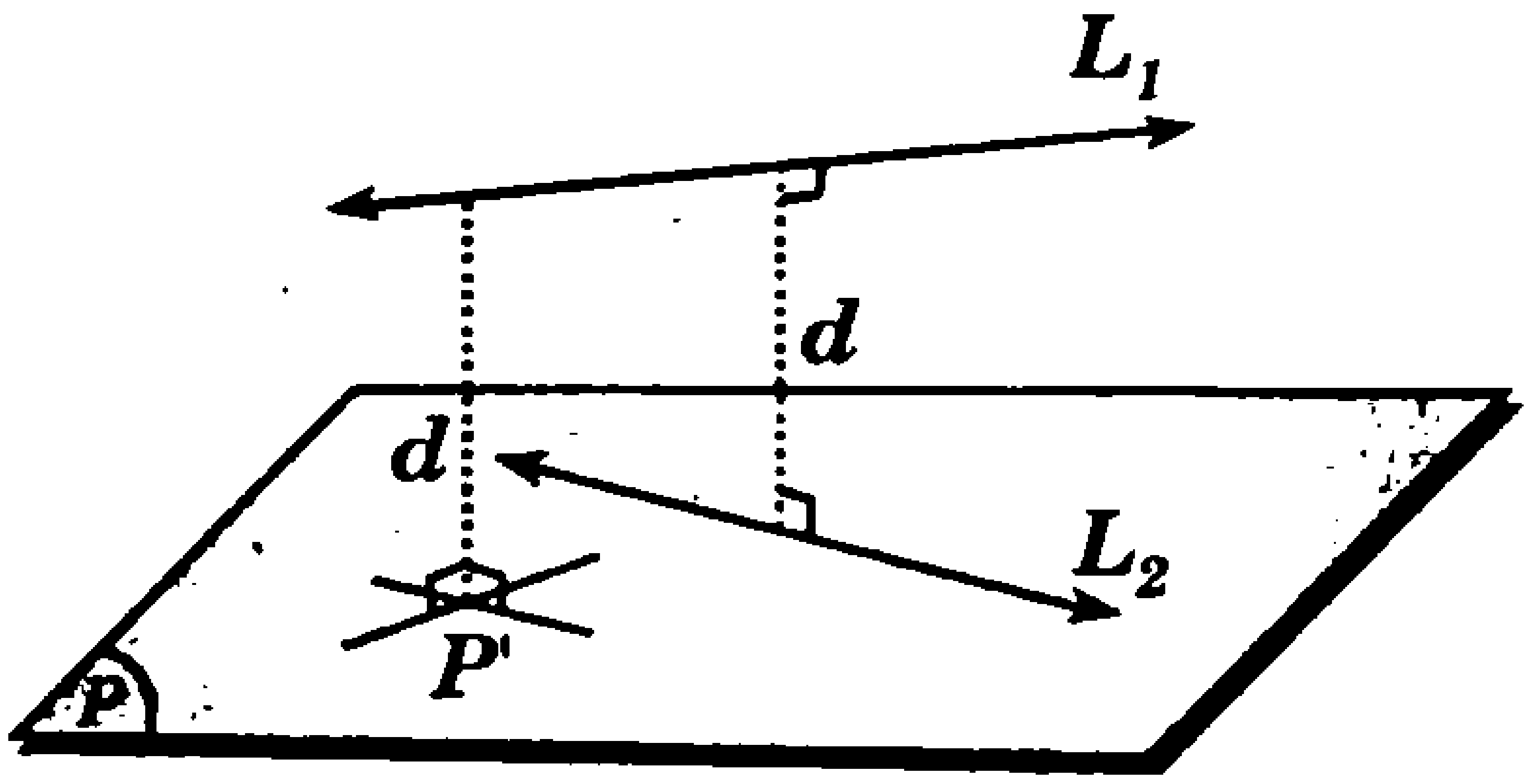
R : proyección ortogonal de L_1 sobre el plano P

L : proyección ortogonal de L_2 sobre el plano P

* Entonces:

d : distancia entre L_1 y L_2

II) La distancia entre dos rectas alabeadas es la distancia de un punto cualquiera de una de las rectas a un plano paralelo a ella que contenga a la otra recta.

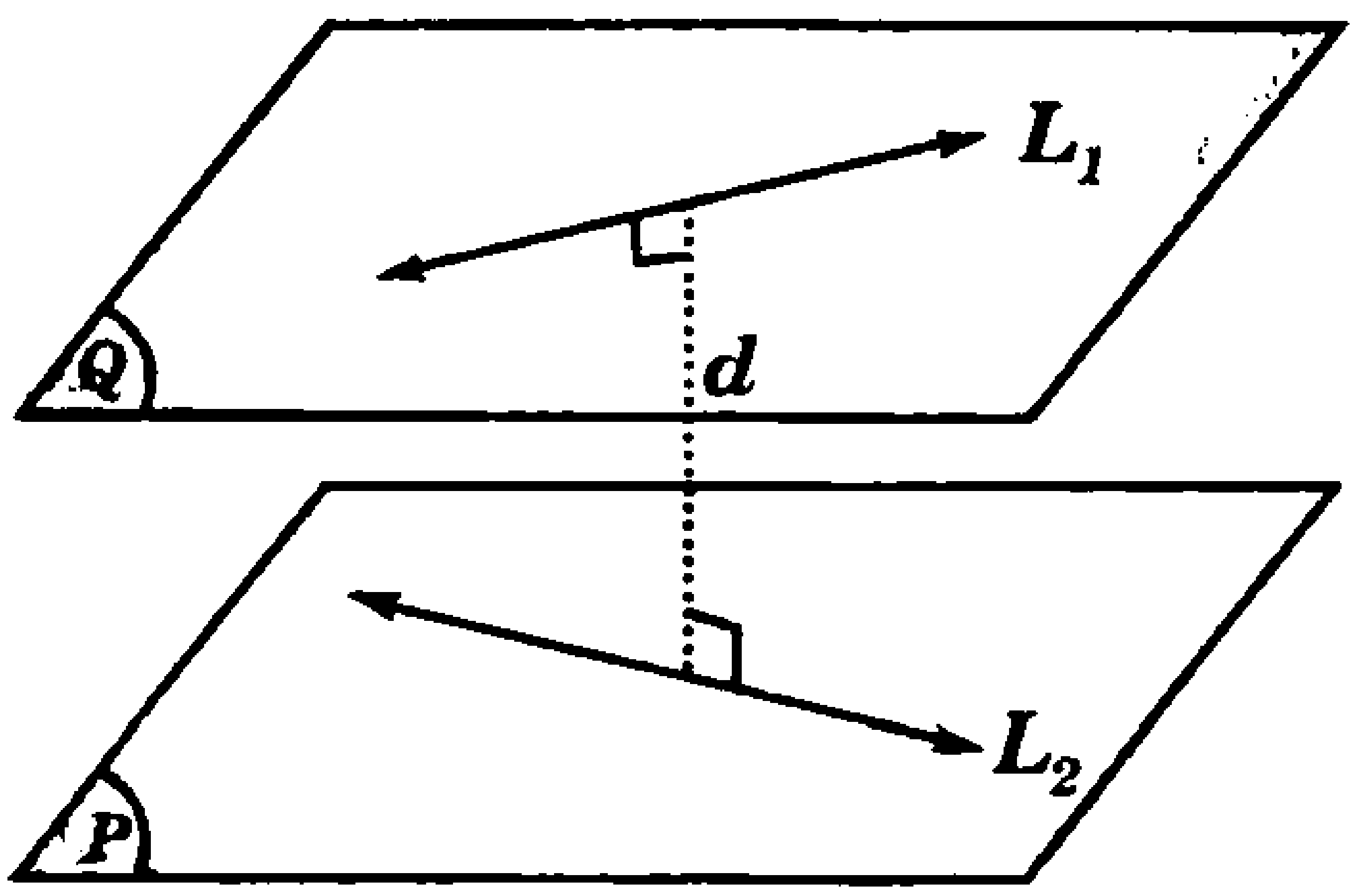


* Si: $L_1 // \square P$ y $L_2 \subset \square P$

* Entonces:

d : distancia entre L_1 y L_2

III) La distancia entre dos rectas alabeadas es la distancia entre los planos paralelos que contienen a dichas rectas.



*Si: $\square Q // P$;$L_1 \subset \square Q$ y $L_2 \subset \square P$

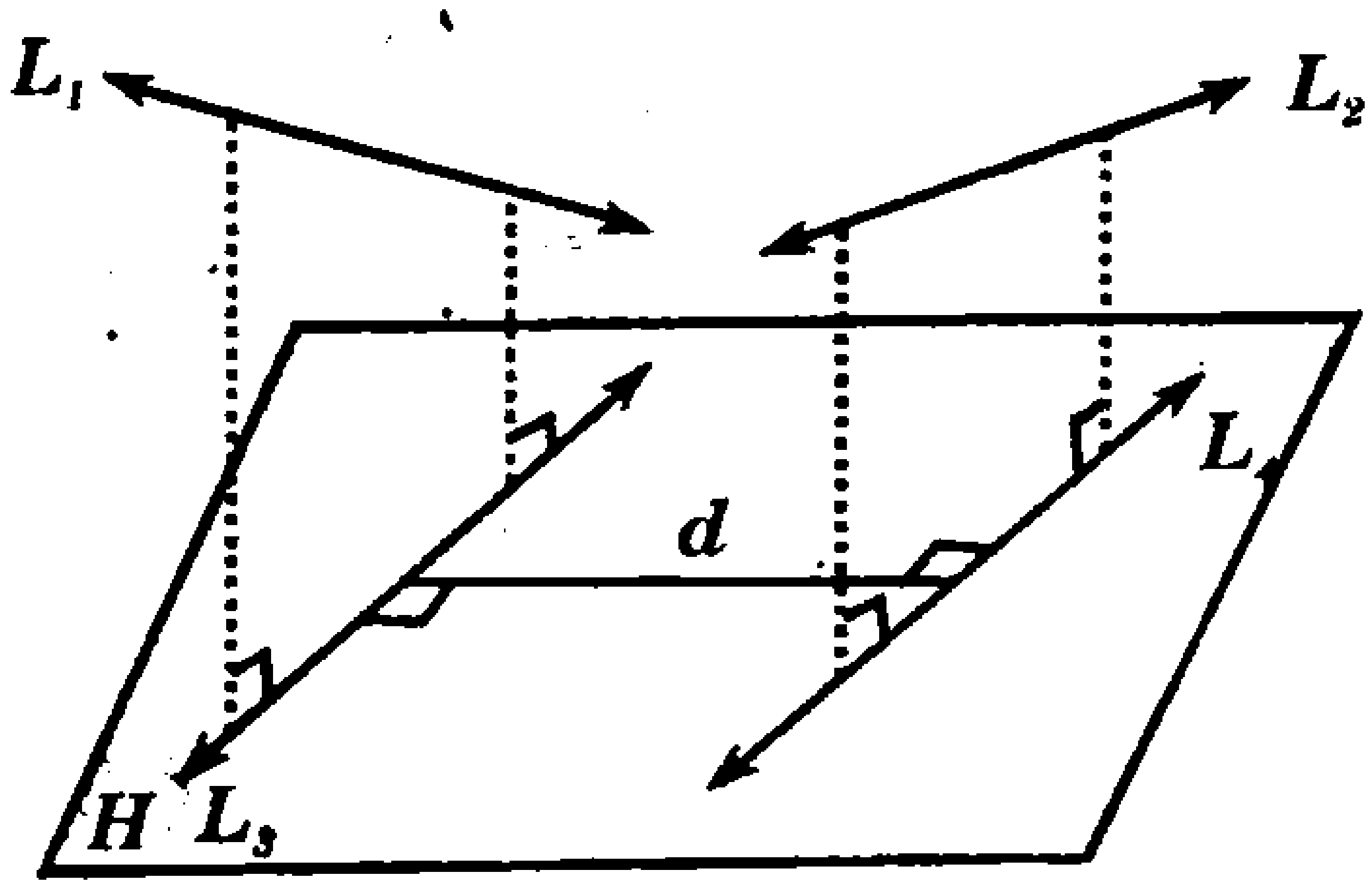
* Entonces:

d : distancia entre L_1 y L_2

IV) Es recomendable fijar un plano perpendicular a una de las rectas, el cual es denominado plano proyección.

EJEMPLO:

* Entre dos rectas paralelas.

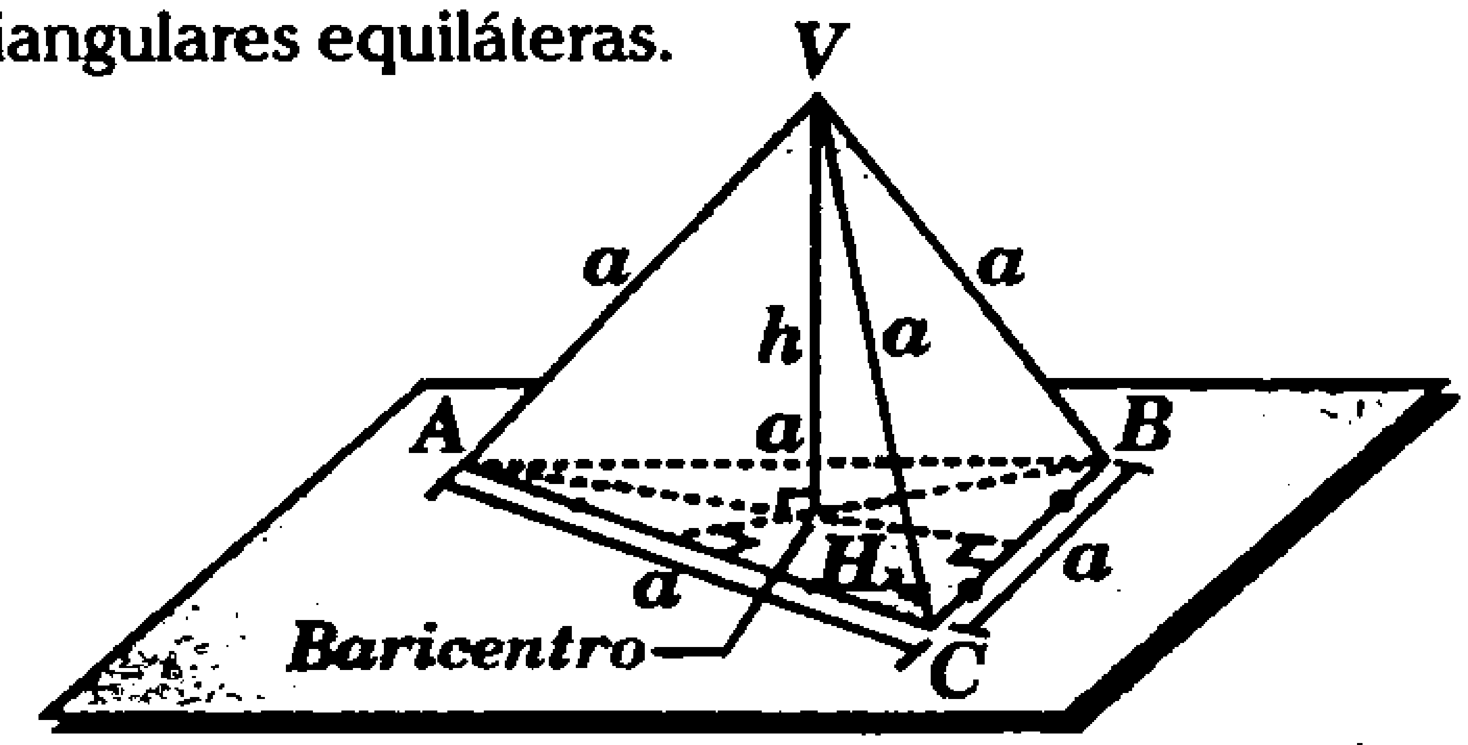


H : plano de proyección.

L_1 y L_2 : Rectas alabeadas.

TETRAEDRO REGULAR

Es la pirámide regular cuyas caras son cuatro regiones triangulares equiláteras.



Notación:

Tetraedro regular $V - ABC$

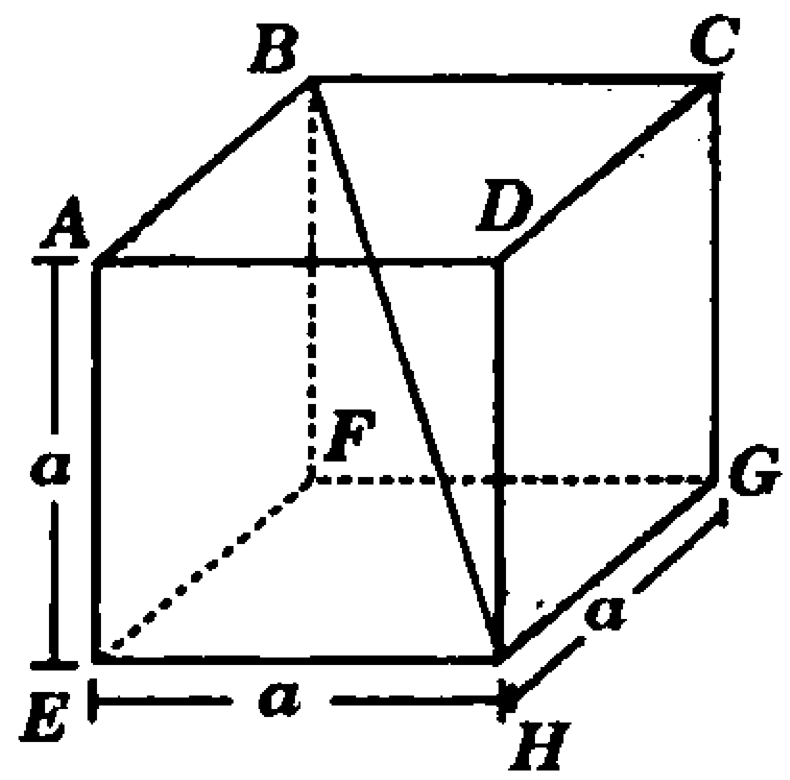
* Altura: VH $VH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

* Área de la superficie: $A_S = a^2\sqrt{3}$

* Volumen: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

HEXAEDRO REGULAR O CUBO

Es la prisma regular cuyas caras son regiones cuadradas



* ***Notación:***

Hexaedro regular $ABCD - EFGH$

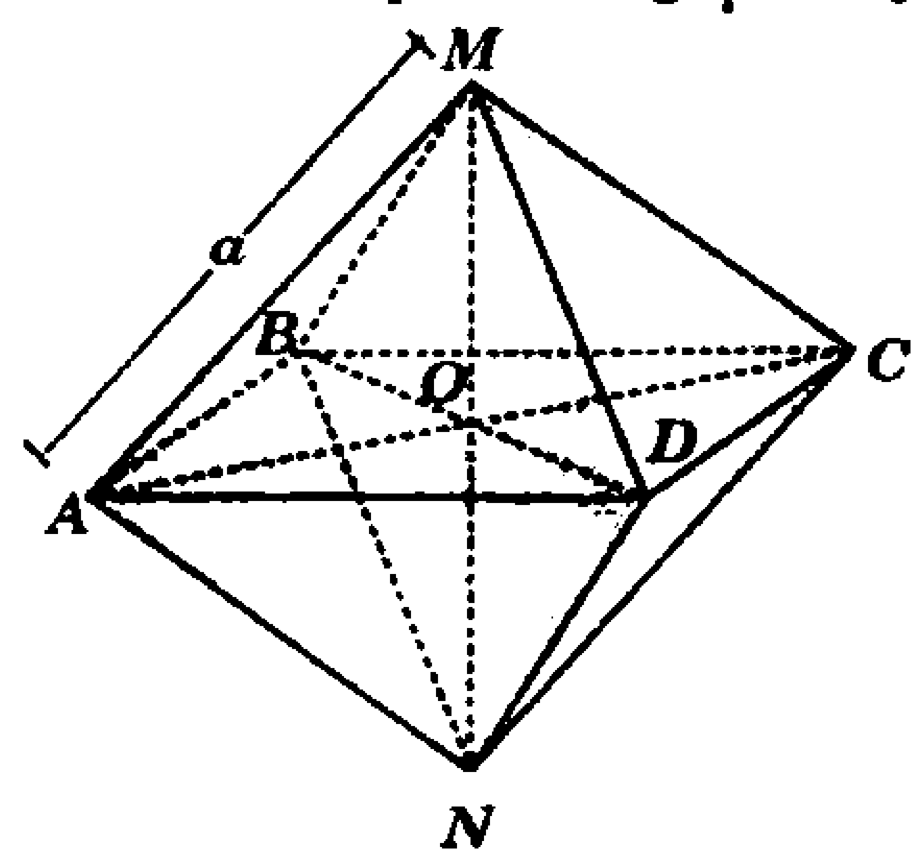
* Diagonal: BH $BH = a\sqrt{3}$

* Volumen: $V = a^3$

* Áreas lateral y total : $\boxed{A_{lat} = 4a^2}$ $\boxed{A_{tot} = 6a^2}$

OCTAEDRO REGULAR

Tiene 8 caras limitadas por triángulos equiláteros .



* ***Notación:***

Octaedro regular $M - ABCD - N$

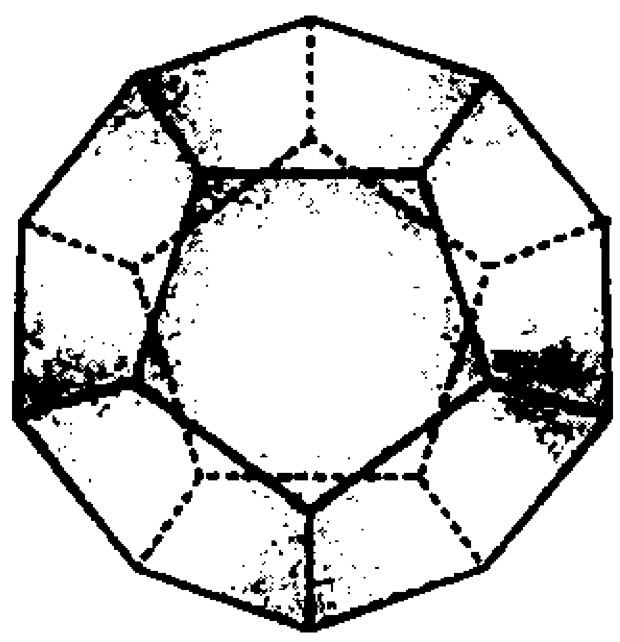
* Diagonal: $MN = a\sqrt{2}$
* Área superficie: $A_S = 2a^2\sqrt{3}$
* Volumen: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

$ABCD$; $AMCN$; $BMDN$: cuadrados

* O: Centro del octaedro regular

DODECAEDRO REGULAR

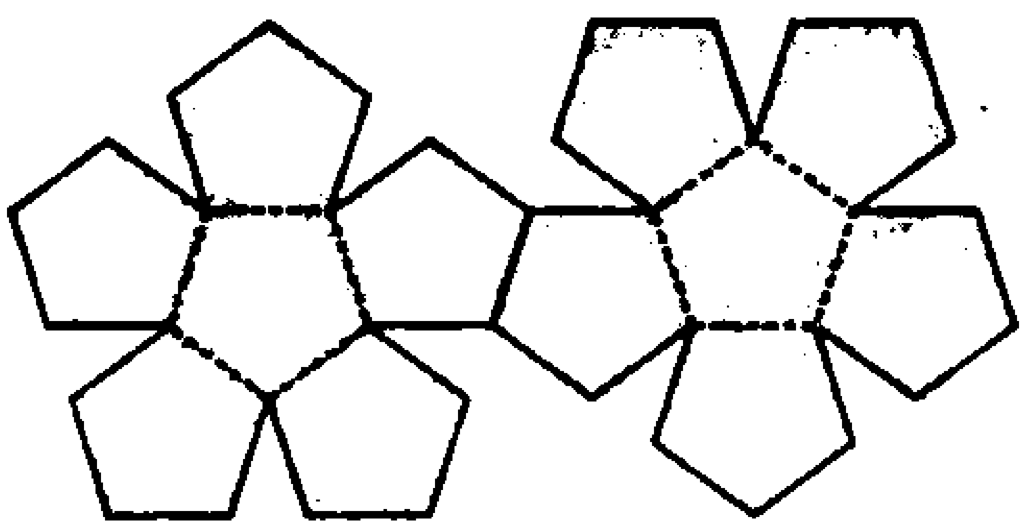
Tiene *12* caras limitadas por pentágonos regulares.



$$A = 15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

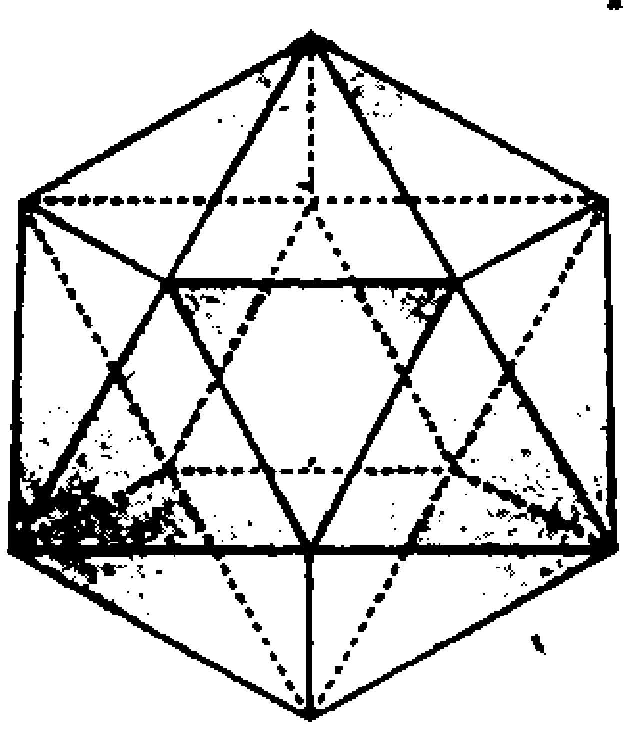
$$V = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$

Desarrollo de la superficie del Dodecaedro Regular



ICOSAEDRO REGULAR

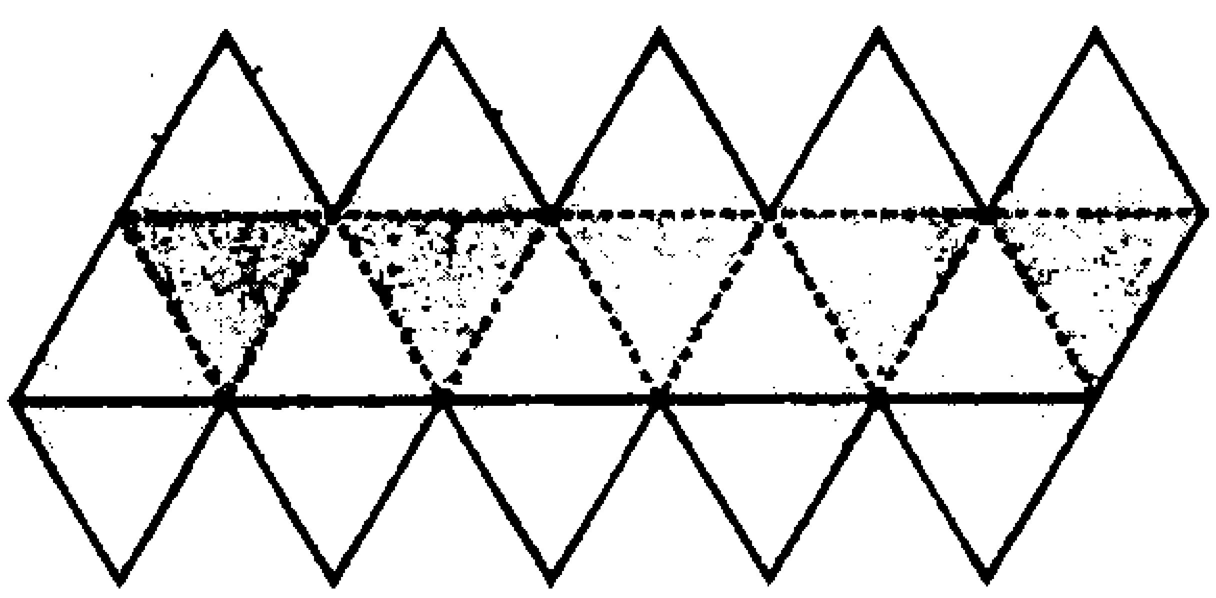
Tiene *20* caras limitadas por triángulos equiláteros.



$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

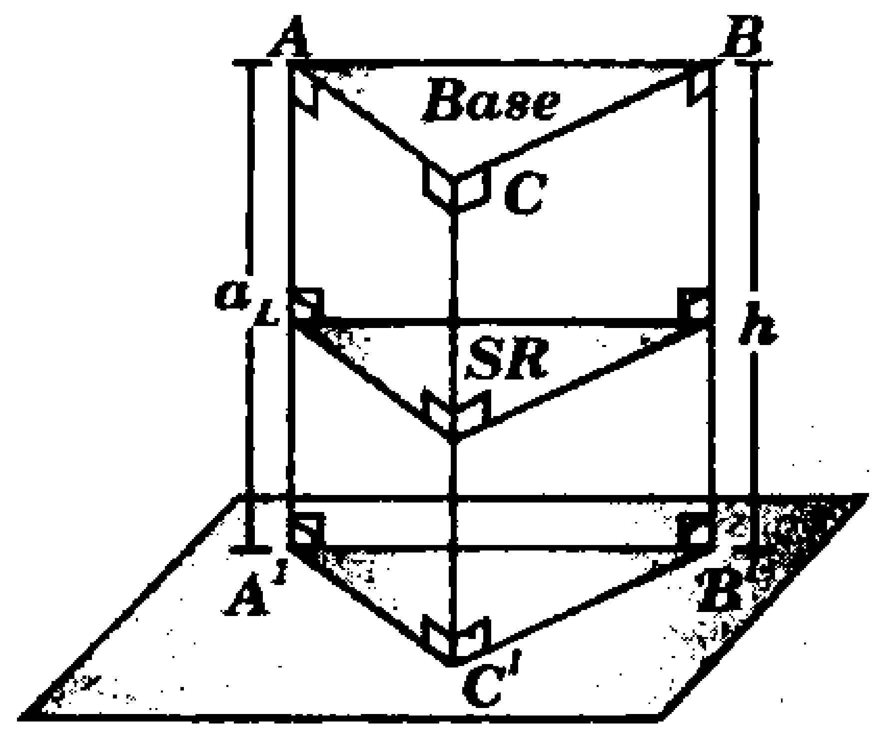
$$V = \frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

Desarrollo de la superficie del Icosaedro Regular



PRISMA RECTO

Es aquel sólido cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases , siendo entonces las caras laterales regiones rectangulares .



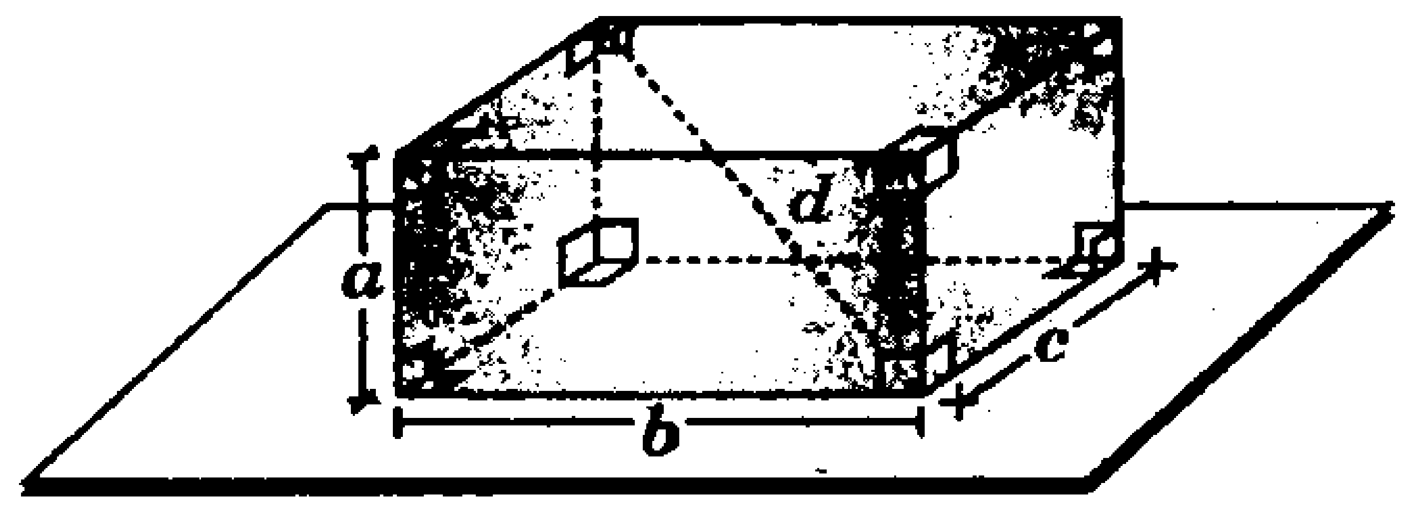
Prisma triangular recto: $ABC - A'B'C'$

* Área de la superficie Lateral: $A_{SL} = (2P_{base})h$
* Área de la superficie total : $A_{ST} = A_{SL} + 2A_{base}$
* Volumen : $V = (A_{base})h$
* En todo prisma recto se cumple :

$$a_L = h \; ; \quad A_{base} = A_{S.R.}$$

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR , RECTOEDRO U ORTOEDRO

Es el paralelepípedo donde todas sus caras son regiones rectangulares.



Área de la superficie total : $A_{ST} = 2(ab+bc+ac)$

Volumen: $V = abc$

Diagonal *(d)*: $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

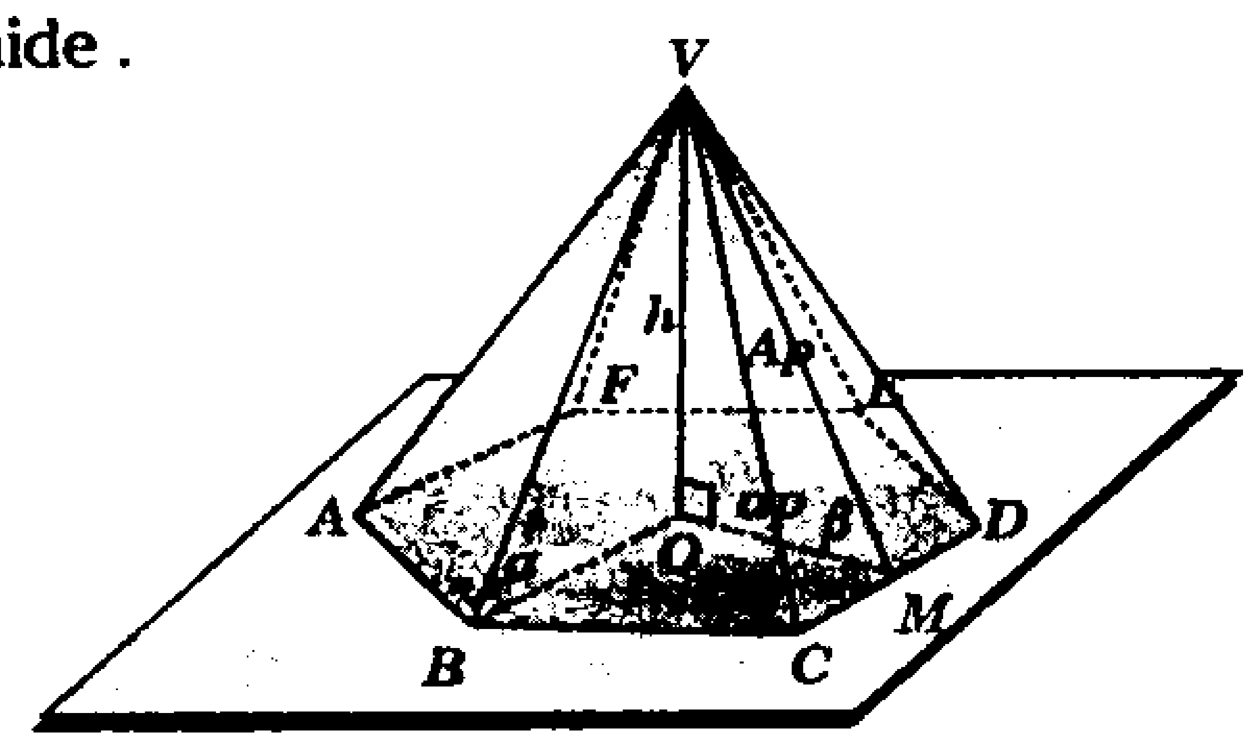
* En todo paralelepípedo rectangular sus diagonales son de igual longitud .

PIRÁMIDE REGULAR

Es aquella pirámide cuya base está limitada por un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro de la base .

APOTEMA DE LA PIRÁMIDE REGULAR (Ap)

Es la altura de la cara lateral trazada del vértice de la pirámide .



O: Centro de la base

Ap: Apotema de la pirámide regular .

ap: apotema del polígono regular $ABCDEF$

α : medida del ángulo formado por una arista lateral con la base.

β : medida del ángulo diedro formado por una cara lateral con la base .

* En toda pirámide regular se cumple :

Las caras laterales están limitadas por triángulos isósceles congruentes entre sí .

Las aristas laterales son de igual longitud y forma ángulos de igual medida con la base .

Las caras laterales y la base forman ángulos diedros de igual medida .

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL :

$$A_{SL} = (P_{base})\,Ap$$

P_{base}: semiperímetro de la base.

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL:

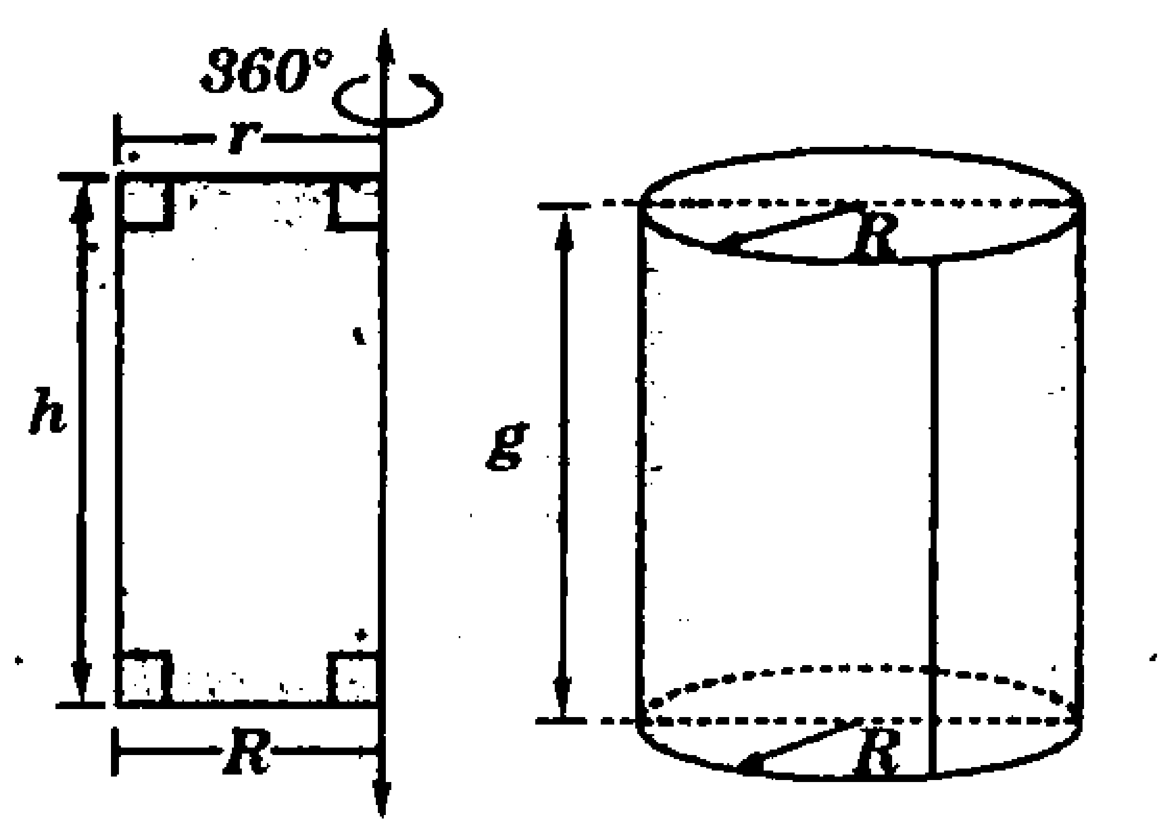
$$A_{s.t} = A_{S.L.} + A_{base}$$

* Volumen :

$$Vol = \frac{A_{Base} \times H}{3}$$

CILINDRO CIRCULAR RECTO O CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es aquel cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a las bases o es aquel cilindro que es generado por una región rectangular al girar $360°$ entorno a uno de sus lados.



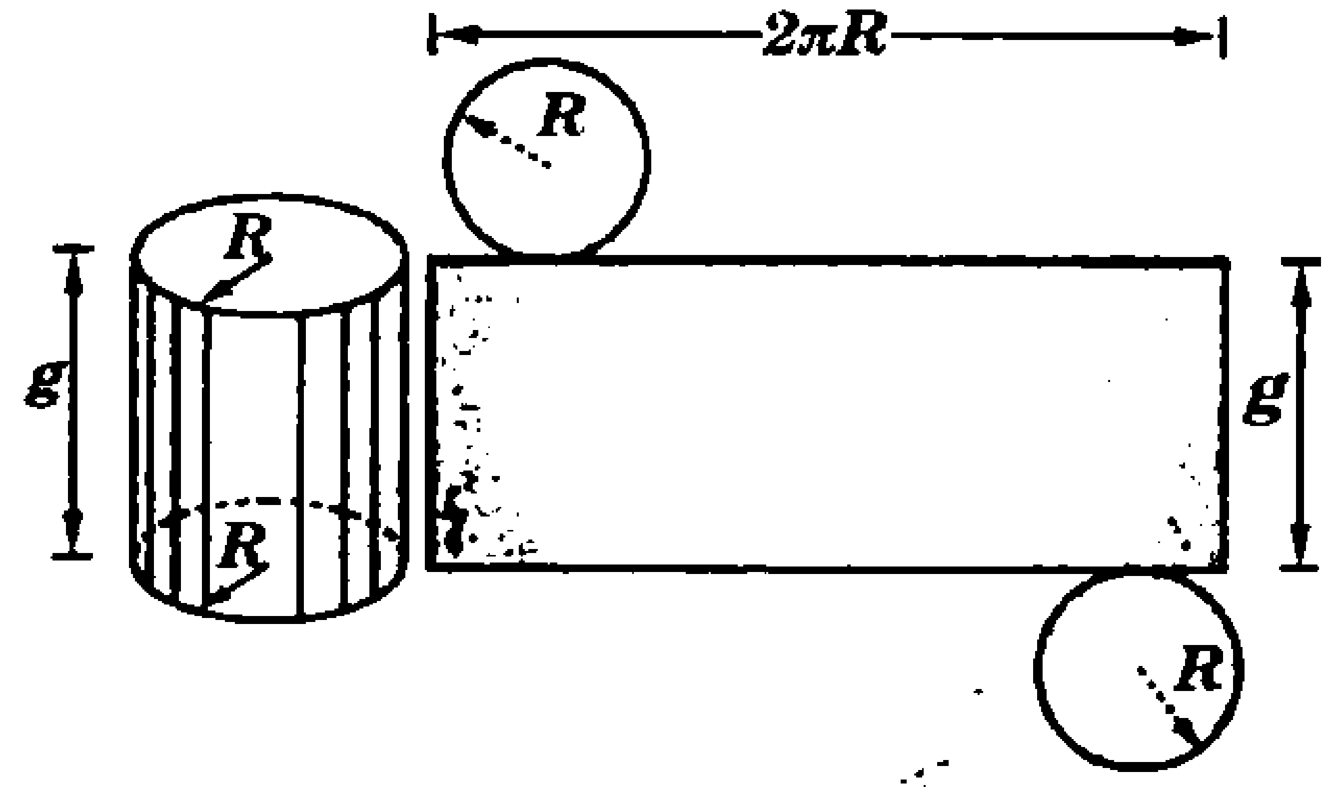
Área de la superficie lateral : $A_{SL} = 2\pi rg$

Área de la superficie total: $A_{ST} = A_{SL} + 2\pi R^2$

Volumen : $V = \pi R^2 h$

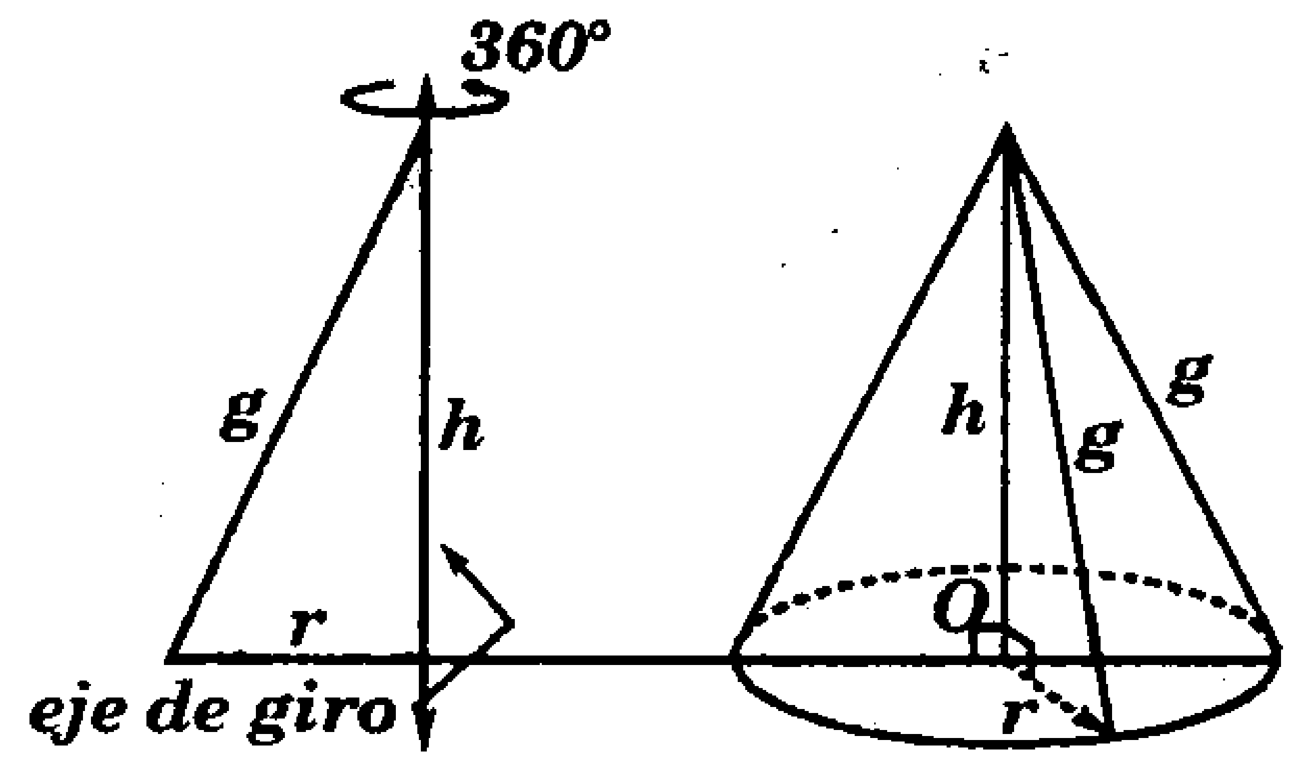
$$h = g = generatriz$$

Desarrollo de la superficie de un cilindro de revolución

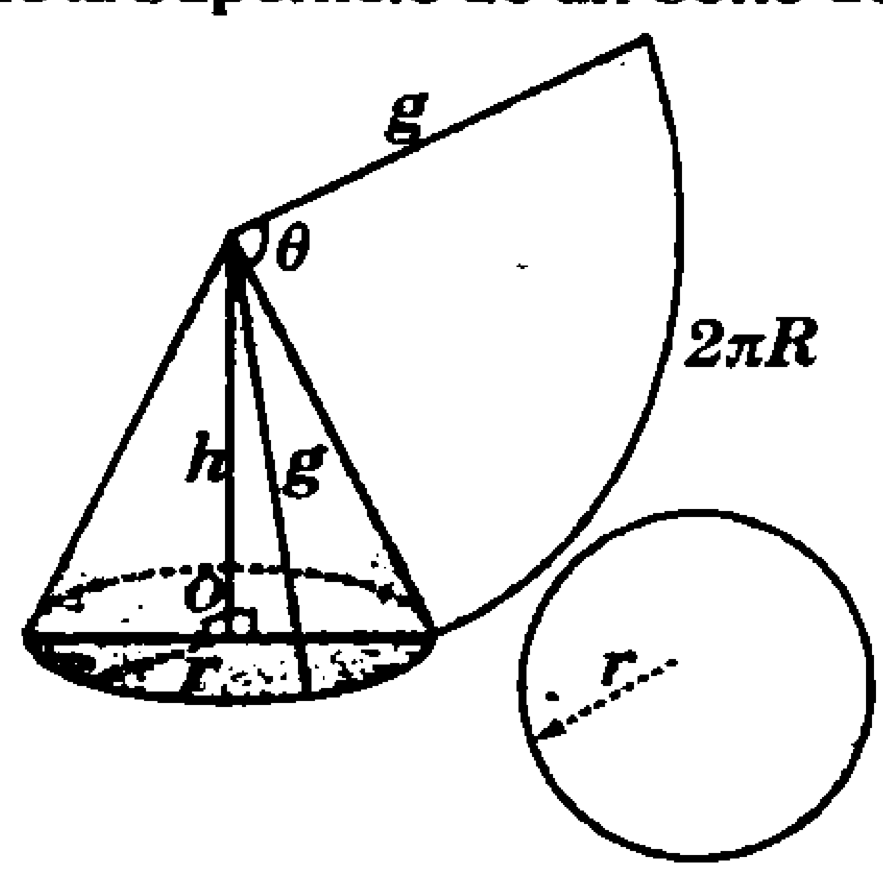


CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

Es aquel cono recto cuya base es un círculo. Dicho sólido se genera una región limitada por un triángulo rectángulo , gira $360°$ alrededor de la recta que contiene a uno de sus catetos .



Desarrollo de la Superficie de un Cono de Revolución



El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular, donde la medida del ángulo central correspondiente es :

$$\theta = 360° \times \frac{r}{g}$$

* ***Área de la Superficie lateral:*** $A_{SL} = \pi rg$

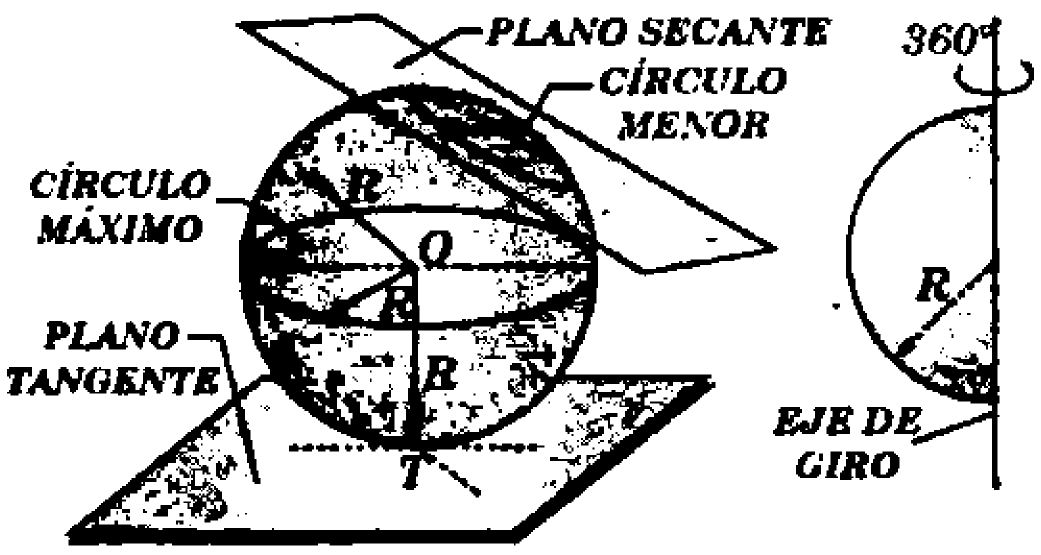
* ***Área Superficie Total:*** $A_{TOT} = \pi rg + \pi r^2$

* ***Volumen :*** $V = \frac{(\pi R^2)h}{3}$

ESFERA

Es el sólido geométrico generado por un semicírculo al girar $360°$ en torno a su diámetro.

A la superficie que limita a una esfera se le denomina superficie esférica .



Área de la superficie esférica

$$A_{SE}=4\pi R^2$$

Volumen de la esfera $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

POLIEDROS REGULARES

Nombre	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Exaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

PROPIEDADES :

I) TEOREMA DE EULER :

En todo poliedro se cumple:

$$\boxed{C+V=A+2}$$

Donde : **C :** número de caras
V : número de vértices
A : número de aristas

II) En todo poliedro la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras es igual a **360°** multiplicado con el número de vértices disminuido en dos .

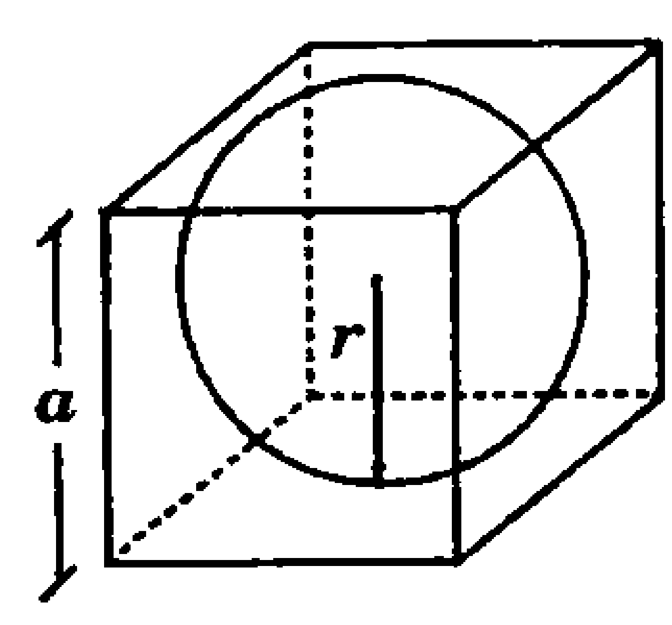
$$\boxed{\sum m\sphericalangle i=360°(V-2)}$$

* $\sum m\sphericalangle i$: suma de medidas de los ángulos internos de todas las caras.

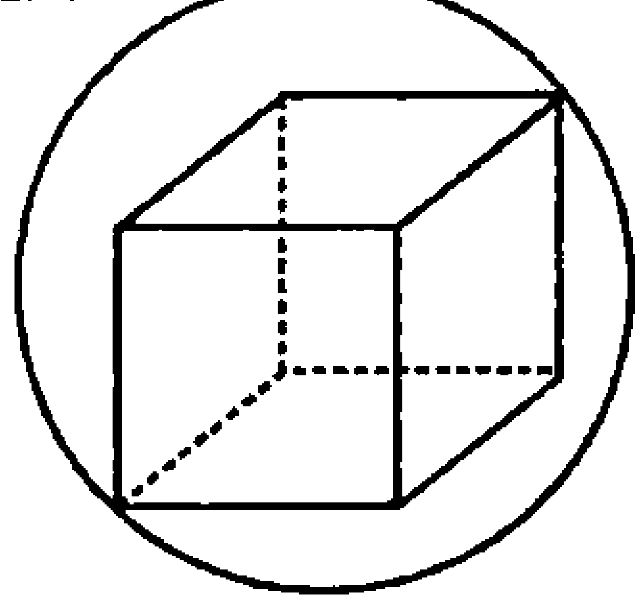
* *V*: número de vértices.

III) "ESFERA INSCRITA EN UN CUBO" :

$\boxed{a=2r}$



IV) "ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CUBO"



Diagonal cubo = diámetro de la esfera

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Se tiene el triángulo *ABC* en el plano *P*. Se trazan $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ perpendicularmente al plano *P*, el segmento $\overline{B'C'}$ no intercepta al plano *P*. Si $BB'=3$, $CC'=1$, $AC=\sqrt{17}$, $BC=\sqrt{14}$ y $m\sphericalangle BAB'=30°$, entonces el área del triángulo $AB'C'$ es :

RESOLUCIÓN :

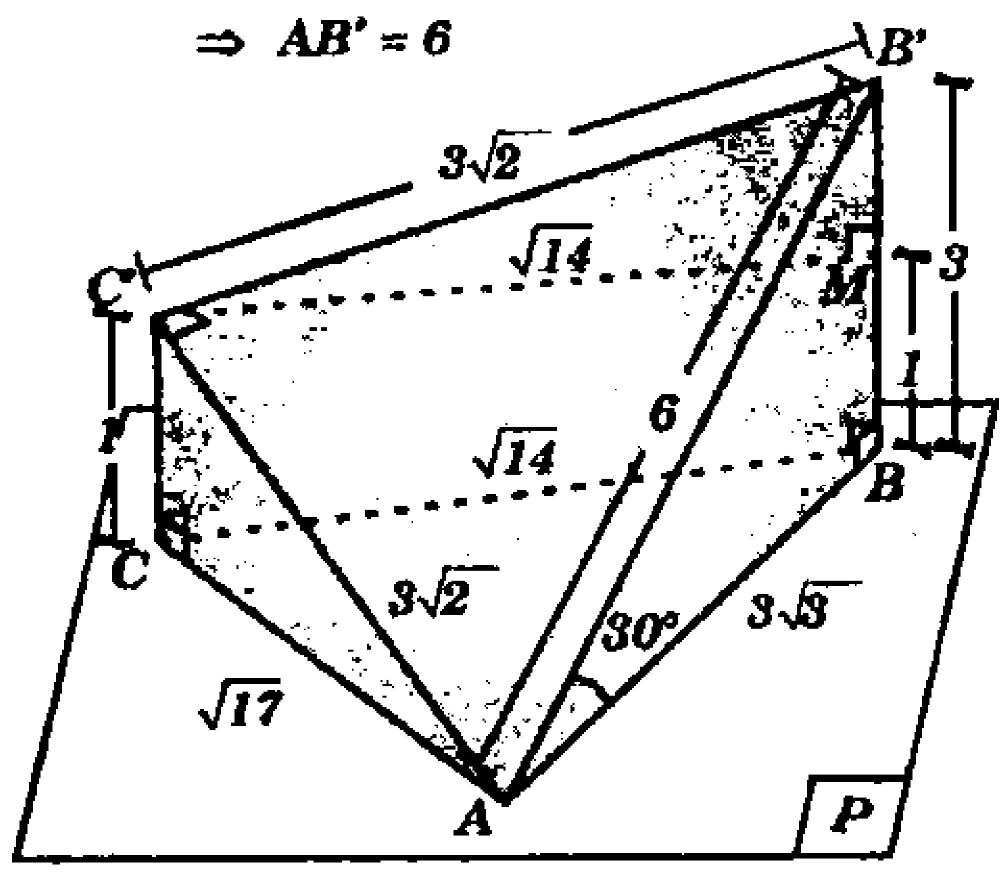
*Se pide : $S_{\Delta AB'C'}$

$\triangle CC'A:(AC')^2=1^2+\sqrt{17}^2$

$\Rightarrow AC'=3\sqrt{2}$

$\triangle ABB'$: notable de *30°* y *60°*

$\Rightarrow AB'=6$

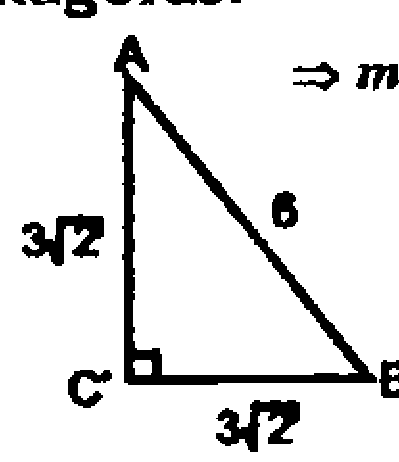


Se traza $\overline{C'M}\perp\overline{BB'}$; luego

$\triangle C'MB':(B'C')^2=\sqrt{14}^2+2^2$

$\Rightarrow B'C'=3\sqrt{2}$

* Se observa que $\Delta AC'B'$ es isóceles y cumple con el teorema de Pitágoras.



$\Rightarrow m\sphericalangle AC'B'=90°$

$S_{\Delta AB'C'}=\frac{(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})}{2}$

$S_{\Delta AB'C'}=9$

PROBLEMA 2 :

Un plano *H* contiene un segmento $\overline{AB}$ de longitud *16m* y *P* es un punto que dista de *H 8m*.

Si $AP=BP=2\sqrt{41}\,m$, entonces la medida del diedro $\overline{AB}$ es :

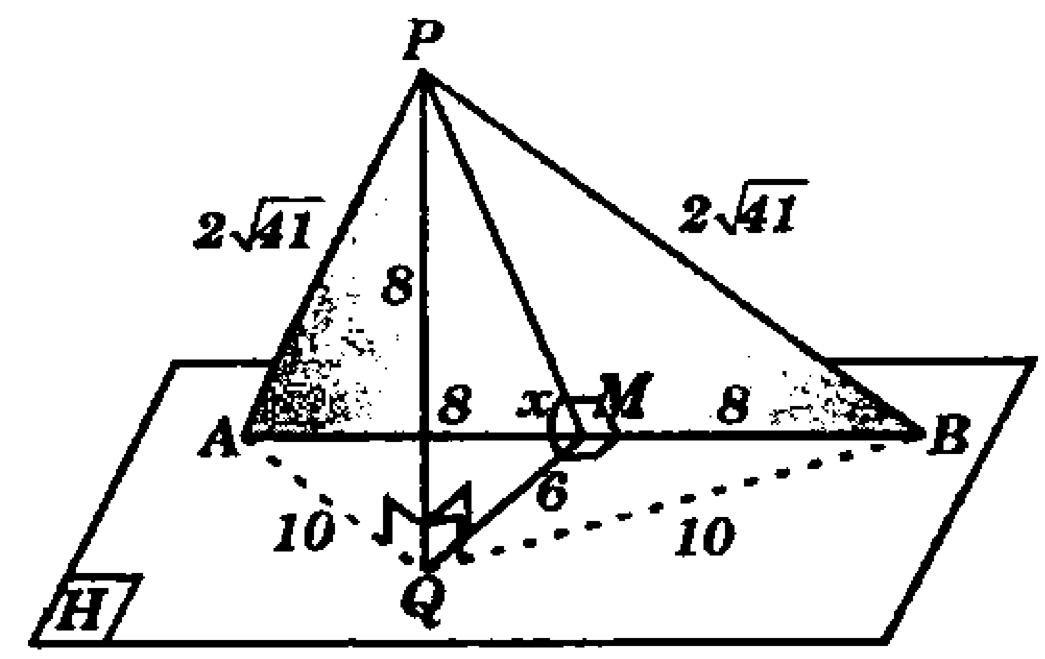
A)37° B)50° C)53° D)55° E)60°

RESOLUCIÓN :

* Piden la medida del diedro *AB=x*

* Sea *Q* proyección ortogonal de *P* es respecto al plano *H*.

* Por el teorema de las tres perpendiculares : $\overline{PM}\perp\overline{AB}$



* En los $\triangle AQP$ y $\triangle AMQ$: $AQ=10$ y $QM=6$

* En el $\triangle PQM$ (notable de *37°* y *53°*) $\Rightarrow x=53°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

I) Si dos planos son perpendiculares a dos rectas diferentes que se intersectan , entonces dichos planos también se intersectan.

II) El lugar geométrico que determinan los pies de los segmentos oblicuos de longitudes iguales trazadas desde un punto exterior a un plano es una circunferencia.

III) Toda recta es perpendicular a un plano, si es ortogonal a dos rectas diferentes no paralelas contenidas en dicho plano.

A)VVF B)VFV C)FFV
D)VVV E)FFF

RESOLUCIÓN:

* En este tipo de preguntas debemos hacer una comparación entre los conceptos teóricos y los casos posibles que plantean las proposiciones. De esta manera, determinamos la veracidad o falsedad de la proposición dada.

* Esta pregunta consta de tres proposiciones.

I) En el espacio, solo se admiten dos posiciones relativas entre dos planos: son paralelos o son secantes.

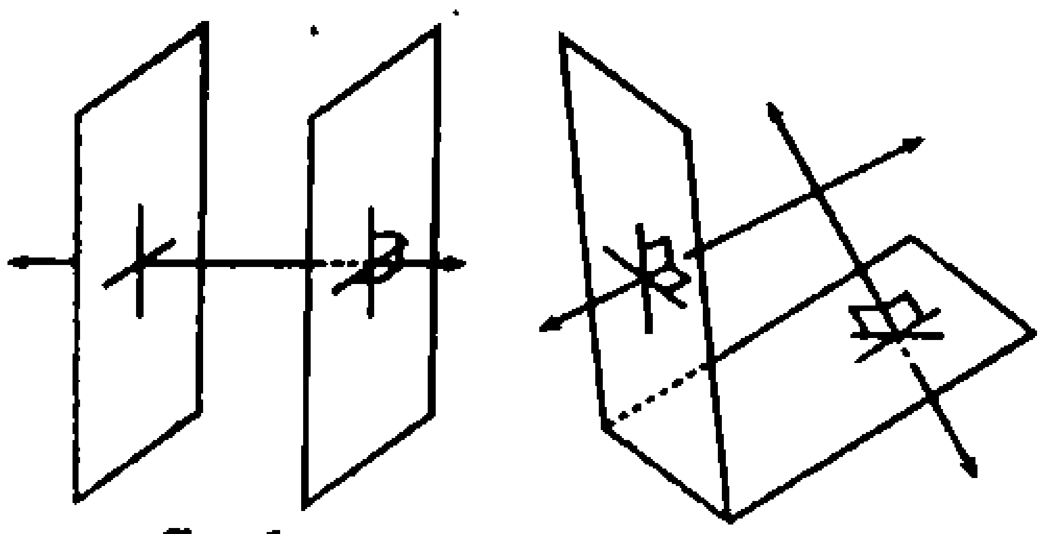
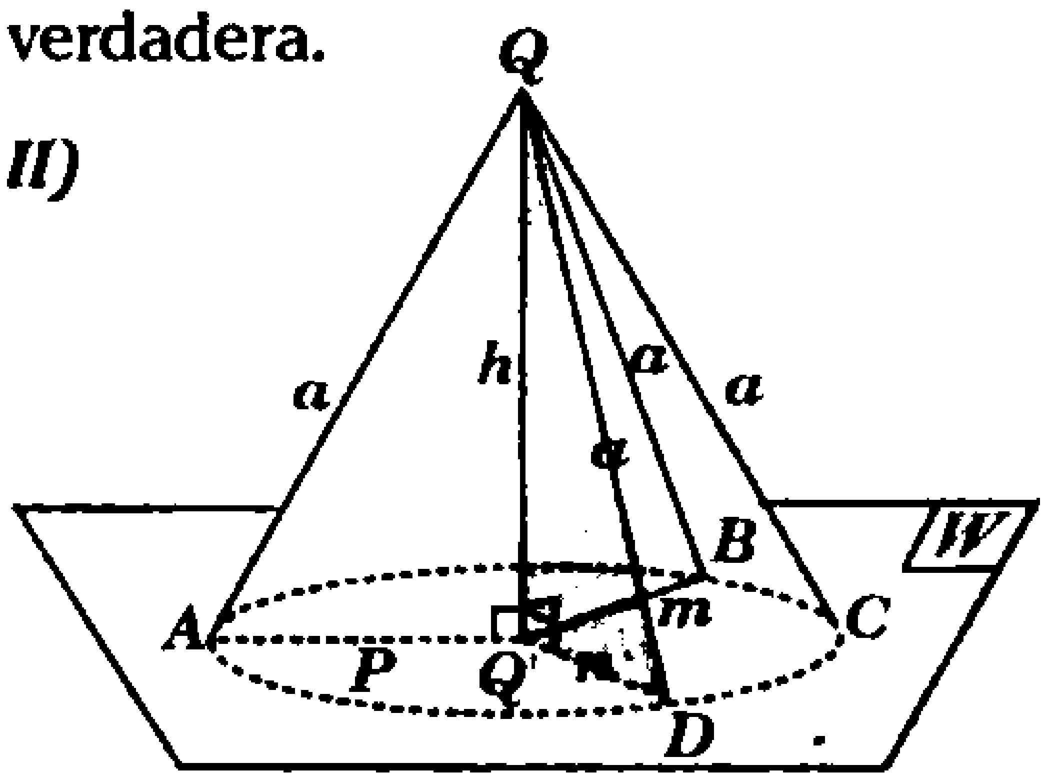


fig. 1 fig.2

• En la ***fig.1***, los planos son paralelos si son perpendiculares a una misma recta.

• En la ***fig. 2***, los planos son secantes si son perpendiculares a dos rectas que se intersecan (proposición de la pregunta). Entonces, la proposición es verdadera.

II)



• Como el punto ***Q*** es exterior al plano, trazamos $\overline{QQ'}$ de modo que ***Q'*** sea la proyección ortogonal de ***Q*** sobre el plano ***W***.

•En el gráfico, los triángulos rectángulos ***AQ'Q; BQ'Q*** y ***DQ'Q*** son congruentes entre sí.

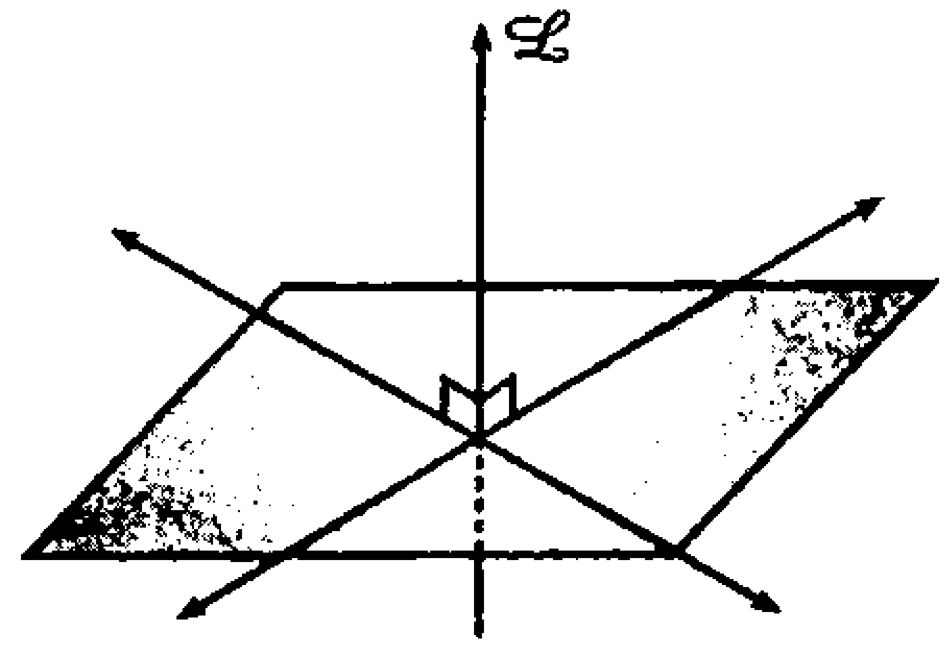
• Luego, $m=n=p=...$

• Además, el punto ***Q'*** equidista de ***A, B, C, D, ...***

Por lo tanto, el lugar geométrico que determinan ***A, B, C*** y ***D*** es una circunferencia de centro ***Q'***.

* Entonces, la proposición es verdadera.

III) En el gráfico, para que una recta sea perpendicular a un plano, debe ser perpendicular a dos rectas no paralelas contenidas en dicho plano.



Entonces, la proposición es verdadera.

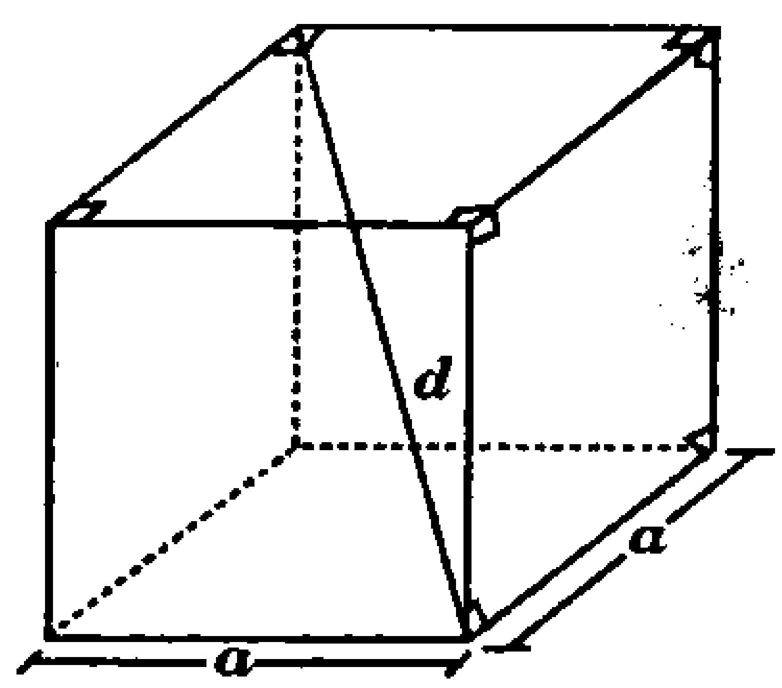
RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

La superficie total de un cubo es ***T***. Entonces la diagonal de dicho cubo es igual a :

A) $\sqrt{2T}$ B) $\sqrt{2T}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}T$ D) $2\sqrt{T}$ E) $\sqrt{3T}$

RESOLUCIÓN :



* Se pide d

* Se sabe :

$d=a\sqrt{3}$ ....(I)

* Dato :

Área de la superficie total :

$$A_{ST} = T$$

* Pero $A_{ST} = 6a^2 = T$

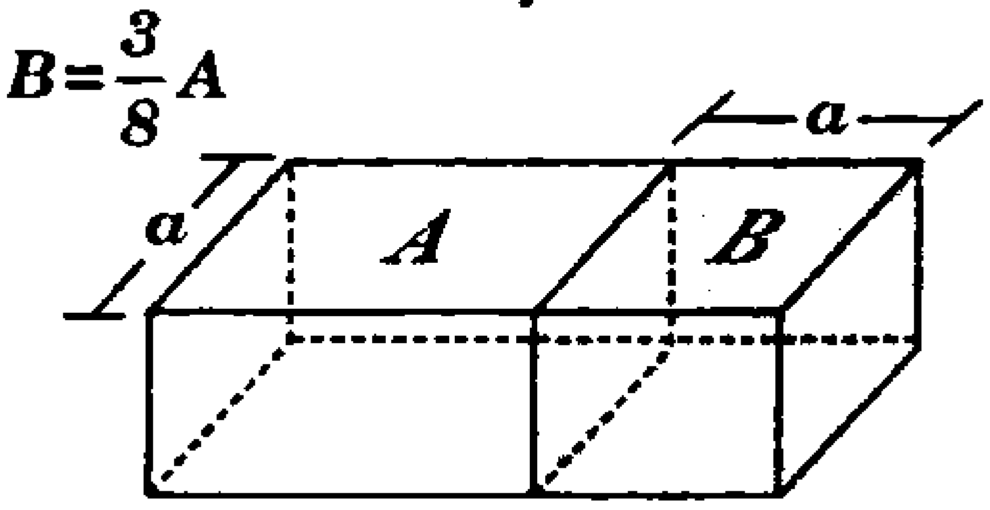
* Entonces $a = \sqrt{\frac{T}{6}}$

* Reemplazando en *(1)*: $d = \frac{\sqrt{2}T}{2}$

RPTA : "E"

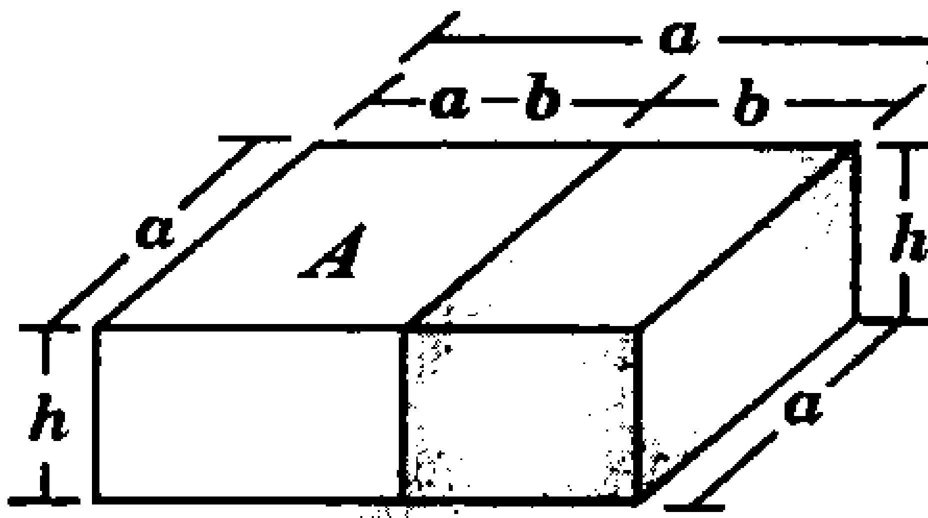
PROBLEMA 5 :

La figura muestra un paralelepípedo cuya base es un cuadrado de lado ***"a"***. Si ***A*** y ***B*** son los volúmenes de los sólidos, calcular la relación que existe entre ***"a"*** y ***"b"***. Además : $B=\frac{3}{8}A$



A) $3a + 11b=0$ B) $2a - 7b=0$
C) $3a - 11b=0$ D) $4a - 11b=0$
E) $11a - 3b=0$

RESOLUCIÓN :



* Considerando altura ***"h"*** :

$$A=a.h(a-b);\ B=a.h.b$$

$\Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{a-b}{b}$ ....(I)

* Por dato :

$B=\frac{3}{8}A \Rightarrow \frac{A}{B}=\frac{8}{3}$ ....(II)

* Luego *(II)* en *(I)*:

$$\frac{8}{3}=\frac{a-b}{b} \Rightarrow 3a-11b=0$$

RPTA : "C"

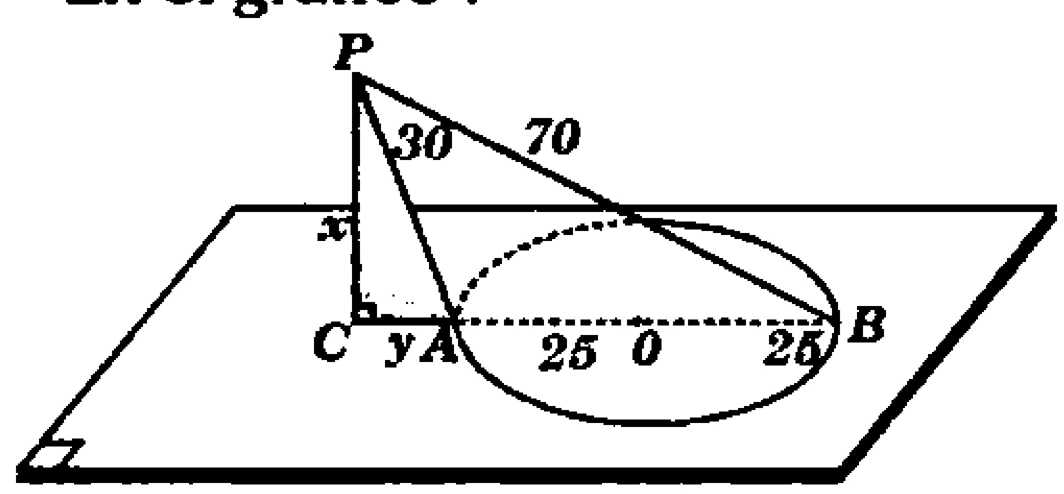
PROBLEMA 6 :

Se tiene un plano ***"ϕ"*** en el cual se halla una circunferencia de ***25 m*** de radio, de centro ***"O"*** y de diámetro ***AB***, en el espacio se toma el punto ***"P"*** cuya máxima distancia a la circunferencia es ***70 m*** y la mínima es ***30 m***. Hallar la distancia de ***"P"*** al plano ***"ϕ"***.

A) $12\sqrt{3}m$ B) 12 C) 15 D) $15\sqrt{3}$ E) 21

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico :



$\overline{PB}$ es la ***máxima*** distancia de ***"P"*** a la circunferencia $PB = 70$ $\overline{PB}$ es la ***mínima*** distancia de ***"P"*** a la circunferencia $PA = 30$

* Siendo: $AC = y$ tendremos que :

$\triangle PCB: x^2+(50+y)^2=70^2$

$\triangle APC: x^2+ y^2=30^2$

* Resolviendo se obtiene :

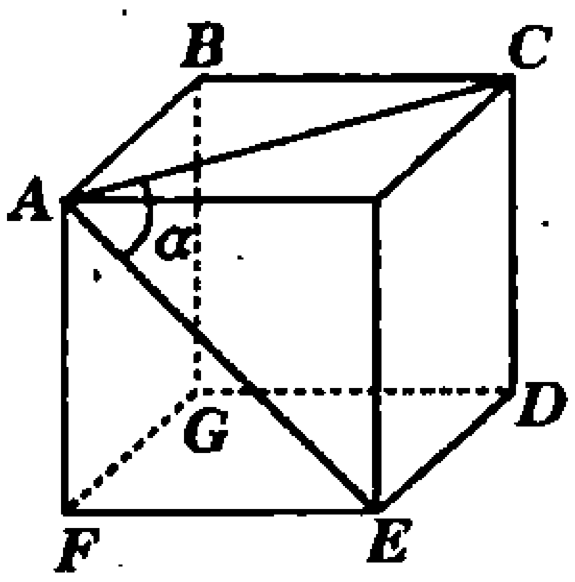
$y=15\ m$; $x=15\sqrt{3}\ m$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

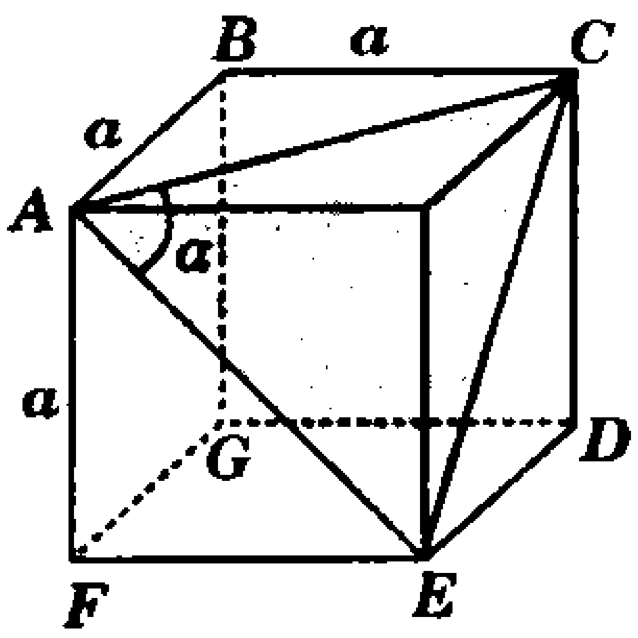
Calcule el valor del ángulo α, si la figura es un cubo.

A) 30°
B) 15°
C) 60°
D) 45°
E) 53°



RESOLUCIÓN :

* Piden α
* Trazamos $\overline{CE}$, luego $AC=CE=EA$ (por ser diagonales de los cuadrados)



* Entonces :

ΔACE es equilátero. $\alpha = 60°$

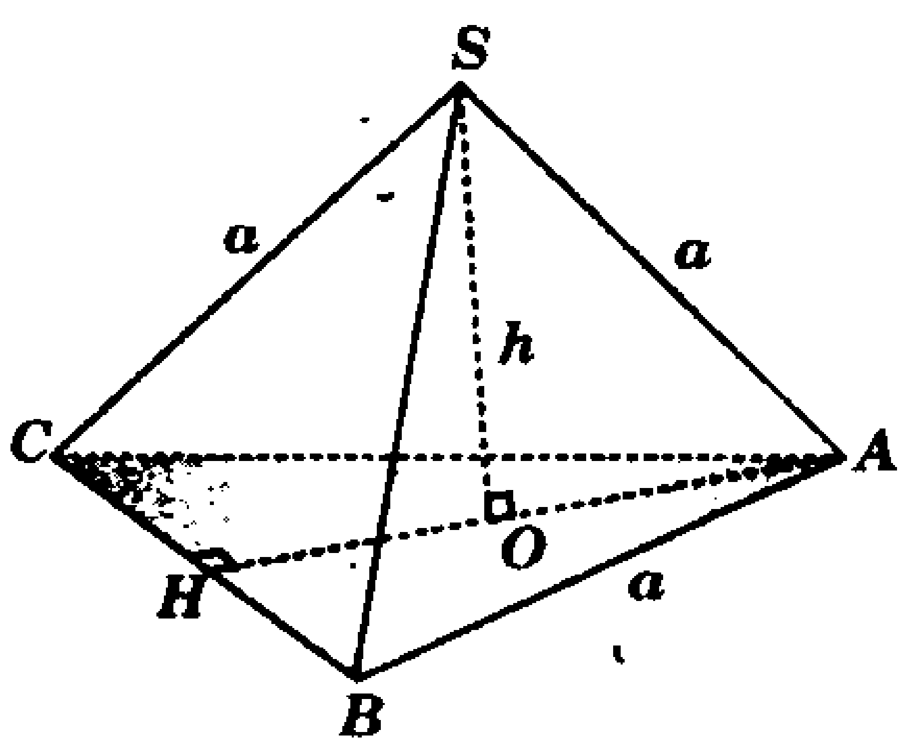
RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Calcular la longitud de la altura de un tetraedro regular de arista *"a"*

A) $2a$ B) $a\sqrt{6}$ C) $a\sqrt{3}$ D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

RESOLUCIÓN:



* El ángulo recto formado por la altura con la base nos proporciona un triángulo en el cual podemos aplicar el teorema de Pitágoras .

* Sea el $\triangle AOS$ en el cual:

$$h^2 = a^2 - OA^2$$

* Calculemos OA
* Siendo *"O"* el Baricentro del triángulo equilátero ABC:

$$OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

* Sustituyendo en *(2)*:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \text{ de donde } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

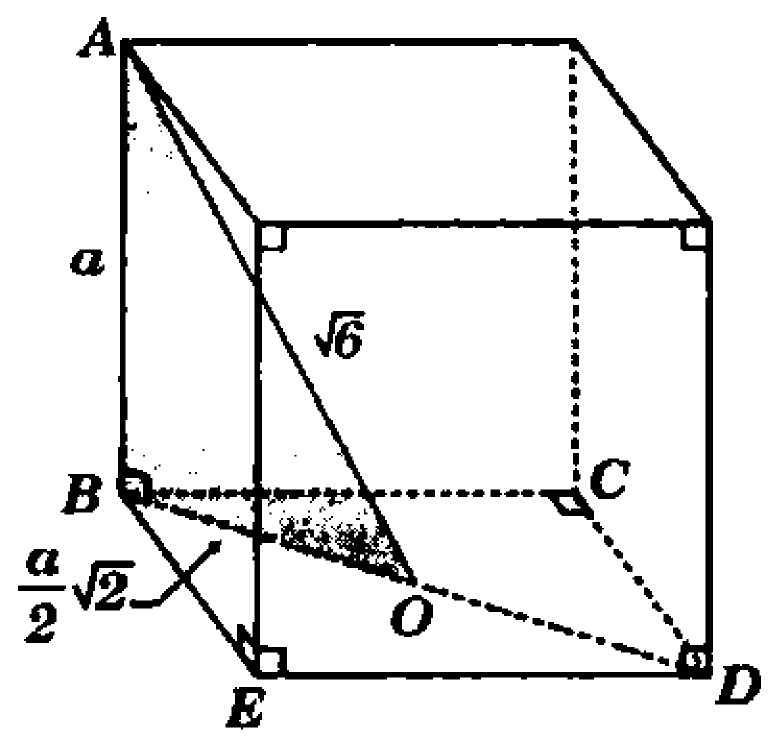
RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

Calcular la longitud de la arista del cubo donde la distancia del vértice al centro de la cara opuesta es $\sqrt{6}m$.

A) 1m B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 6

RESOLUCIÓN :



* Sea *"A"* el vértice mencionado y $BCDE$ la cara opuesta .

* Para localizar el centro de esta cara se trazan sus dos diagonales, y de donde se intersecten se halla este centro *"O"*.

* Entonces la distancia dada es :

$$AO = \sqrt{6}$$

* Nótese, ahora que $\overline{AB}$ es perpendicular al cuadrado $BCDE$, entonces también será perpendicular a BD.

* AOB: $(\sqrt{6})^2 = a^2 + BO^2$

$$(\sqrt{6})^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad a = 2\ m$$

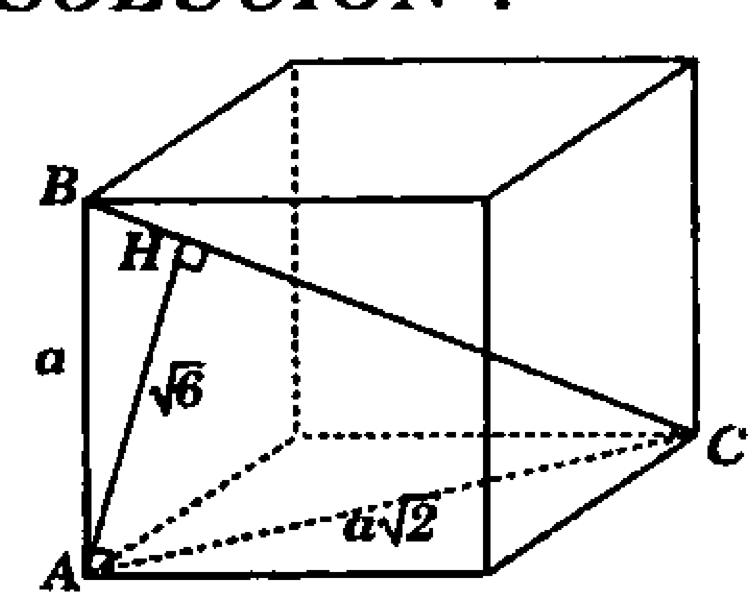
RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Calcular la longitud de la arista del cubo donde la distancia de un vértice a una diagonal del cubo es $\sqrt{6}m$.

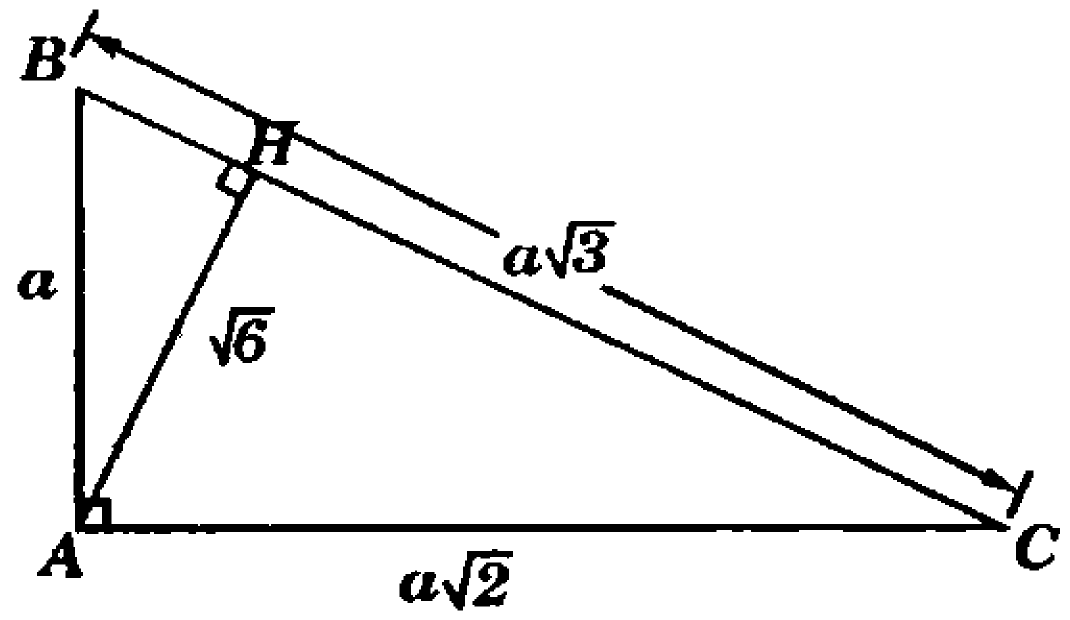
A) 2 m B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN :



* Sea BC la diagonal del cubo de arista *"a"*, sabemos que : $BC=a\sqrt{3}$ y $\overline{AH}$ es la distancia del vértice *"A"* a BC: $AH = \sqrt{6}$

* Para calcular *"a"* debemos formar un triángulo rectángulo, para esto trazo: $AC=a\sqrt{2}$ y se forma de $\triangle ABC$.



* Extraemos el triángulo para analizarlo convenientemente y observamos que el Teorema que debemos aplicar es el que dice que el producto de catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura:

$$a(a\sqrt{2}) = (a\sqrt{3})(\sqrt{6})$$

* De donde : $a = 3\ m$

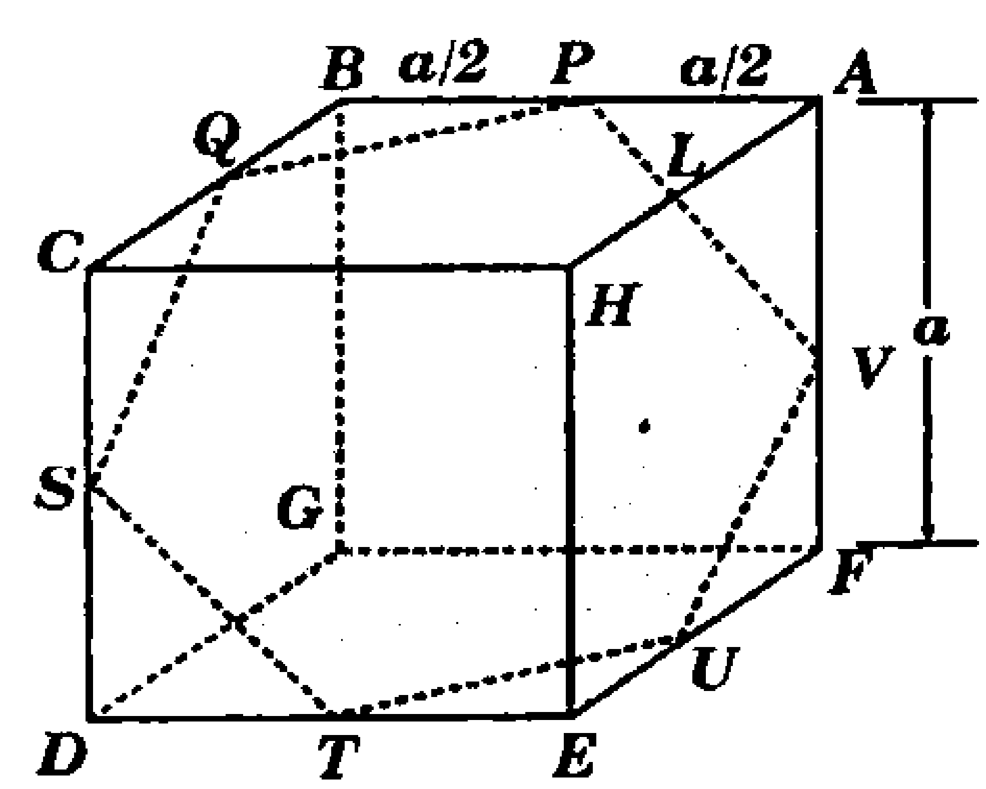
RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

En un cubo se unen consecutivamente los puntos medios de dos aristas consecutivas de cada cara, si el área de la figura obtenida es $3\sqrt{3}m^2$. Hallar la longitud de la arista del cubo .

A) 1m B) 2 C) 6 D) 3 E) 2

RESOLUCIÓN:



* Tenemos *"P"* y *"Q"* en la cara $ABCH$

"Q" y *"S"* en la cara $BCDG$

"S" y *"T"* en la cara $CDEH$

"T" y *"U"* en la cara $EFGD$

"U" y *"V"* en la cara *EFAH*

"V" y *"P"* en la cara *ABGF*

* Nótese entonces que se forma un exágono regular de área :

$S_{EXÁGONO}=\frac{3}{2}\sqrt{3}L^2$ siendo: $L=\frac{a}{2}\sqrt{2}$

* Por lo tanto :

$$3\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a=2m$$

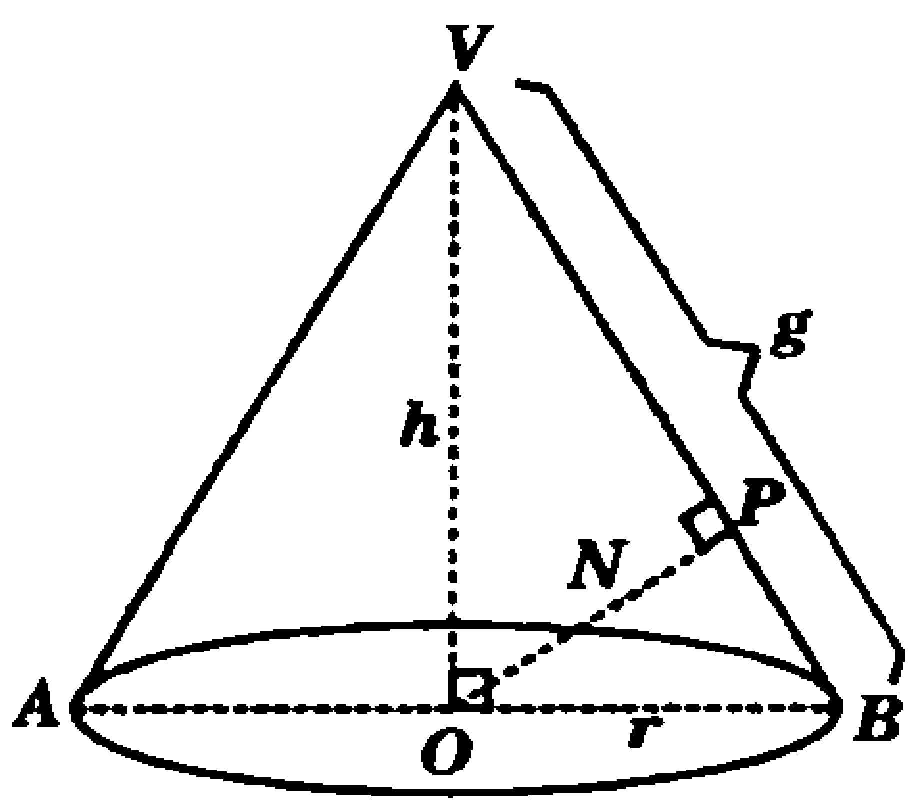
RPTA : "E"

PROBLEMA 12 :

El área lateral de un cono de revolución mide $M\,u^2$ y la distancia del centro de la base a una de sus generatrices mide $N\,u$, entonces el volumen de dicho cono es :

A) $\frac{MN}{4}u^3$ B) $\frac{MN}{3}u^3$ C) $\frac{MN^2}{1+N}u^3$

RESOLUCIÓN :



* Incógnita : Volumen del cono

* Datos:

Área lateral del cono $= Mu^2$

Distancia de O a $\overline{BV}=Nu$

El volumen del cono es:

$V=\frac{1}{3}\pi r\,(rh)$..............................(I)

En el ΔVOB: $rh=Ng$.............(II)

* Como el área lateral es igual a M, resulta:

$\pi rg=M$, de donde se obtiene:

$r=\frac{M}{\pi g}$..................................(III)

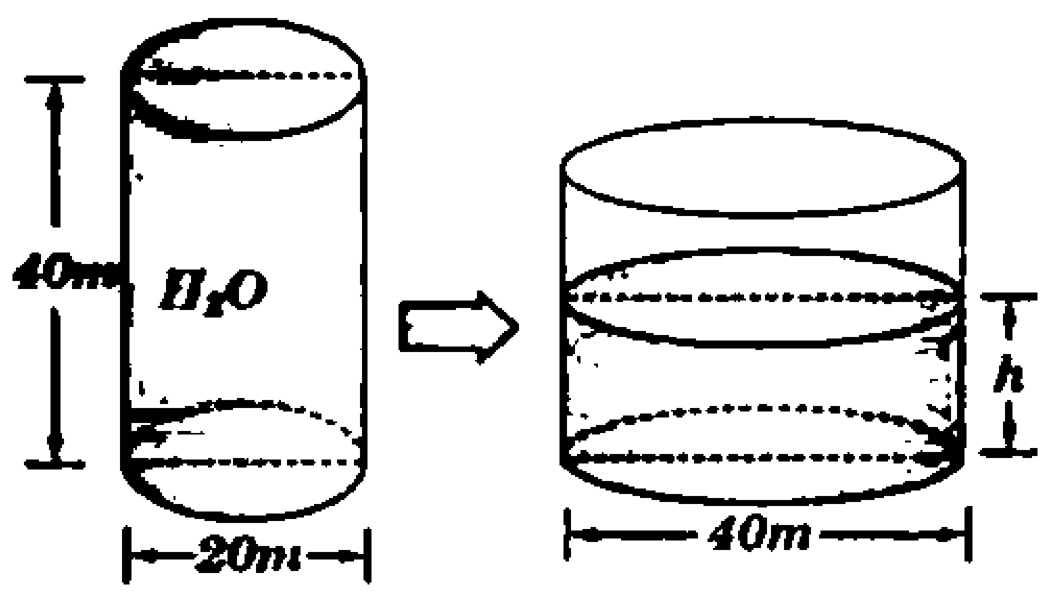
* Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{M}{\pi g}\times Ng=\frac{1}{3}MNu^3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Sabiendo que toda el agua contenida en el primer vaso de *40 m* de alto , se vierte en el segundo vaso. Indicar que altura ascenderá.



A) 10m B) 20 C) 30 D) 25 E) 45

RESOLUCIÓN :

Evidentemente que :

$$V_{1^{\circ}VASO}=V_{2^{\circ}VASO}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(20)^2}{4}\times 40=\frac{\pi\times 40^2}{4}\times h$$

De donde $h=10m$

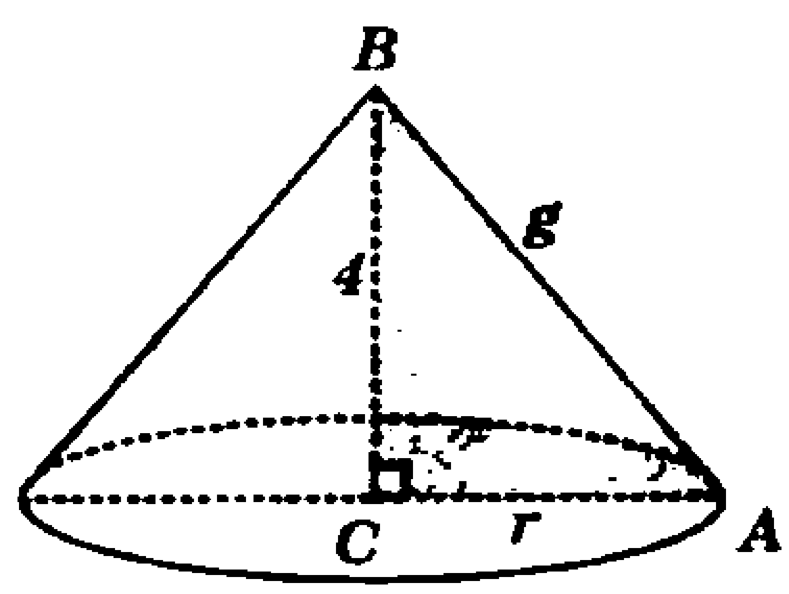
RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

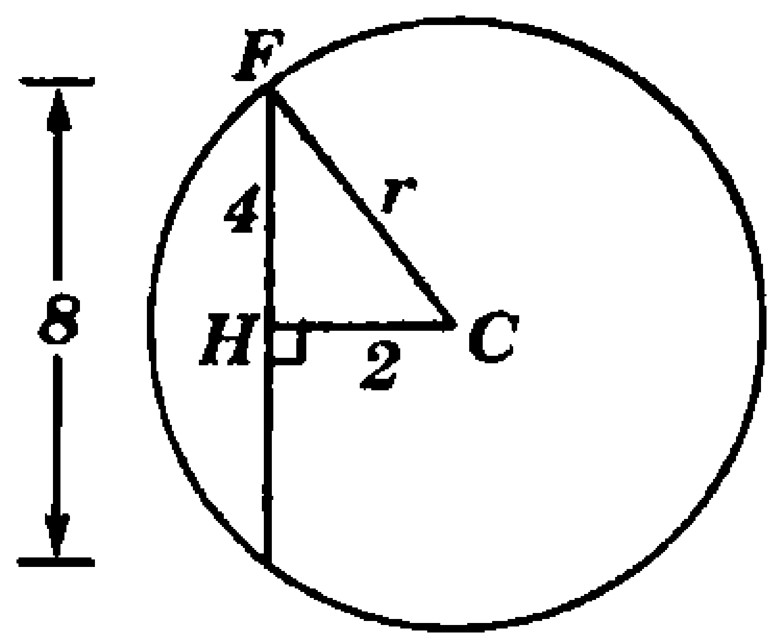
Una cuerda del círculo base de un cono recto de *4m*; de alto, mide. *8 m.* Si la distancia de la cuerda al centro del círculo de la base es de *2m*. Calcular la longitud de la generatriz.

A) 3 m B) 4 C) 5 D) 6 E) 9

RESOLUCIÓN :



* En el triángulo rectángulo *ACB*: $g^2=4^2+r^2$. Se necesita el radio *"r"* de la base.



* En el círculo de la base del cono se traza el radio *CF*. Triangulo rectángulo *CHF* : $r^2=4^2+2^2$

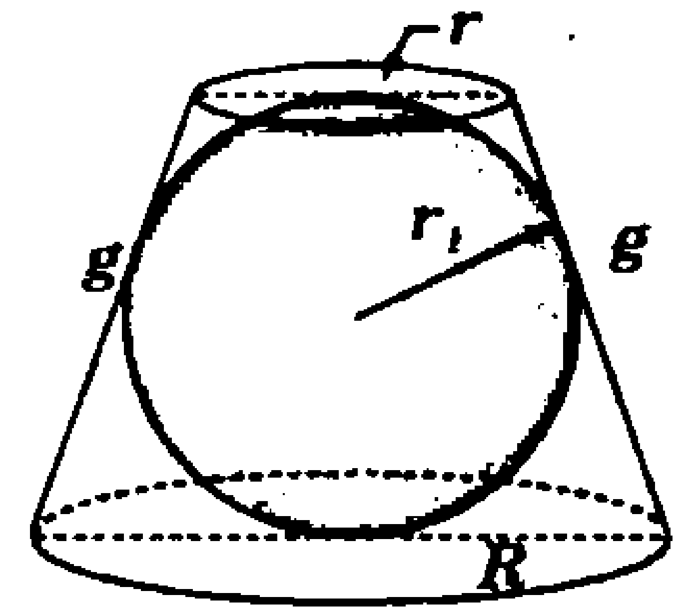
* Sustituyendo (II) en (I) se tiene :

$$g^2=4^2+4^2+2^2 \Rightarrow g=6\ m$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Calcular el radio *"r_1"* de la esfera inscrita en el tronco de cono mostrado, sabiendo que la suma de su diámetro y la generatriz es *25 m*. Además la suma de los radios *"R"* y *"r"* es *13 m*.



A) 3m

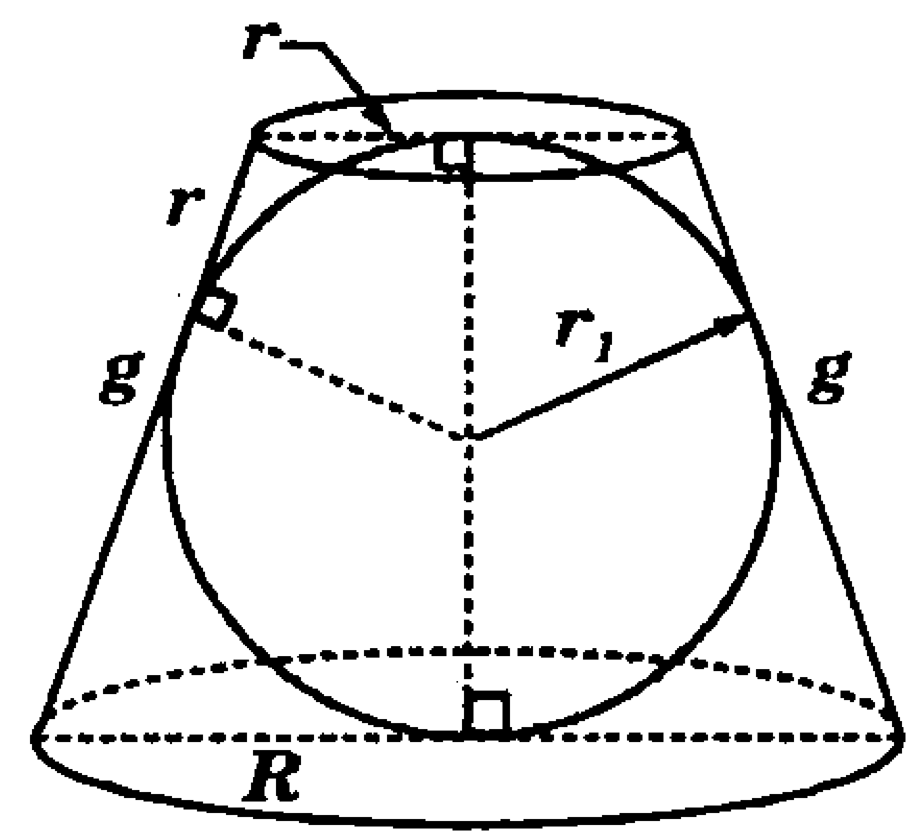
B) 6

C) 4

D) 12

E) 8

RESOLUCIÓN :



* Nótese que: $g=R+r$

* Entonces, por condición del problema se puede escribir que :

$2r_1+g=25 \Rightarrow 2r_1+(R+r)=25$

Luego: $2r_1+13=25 \Rightarrow r=6$

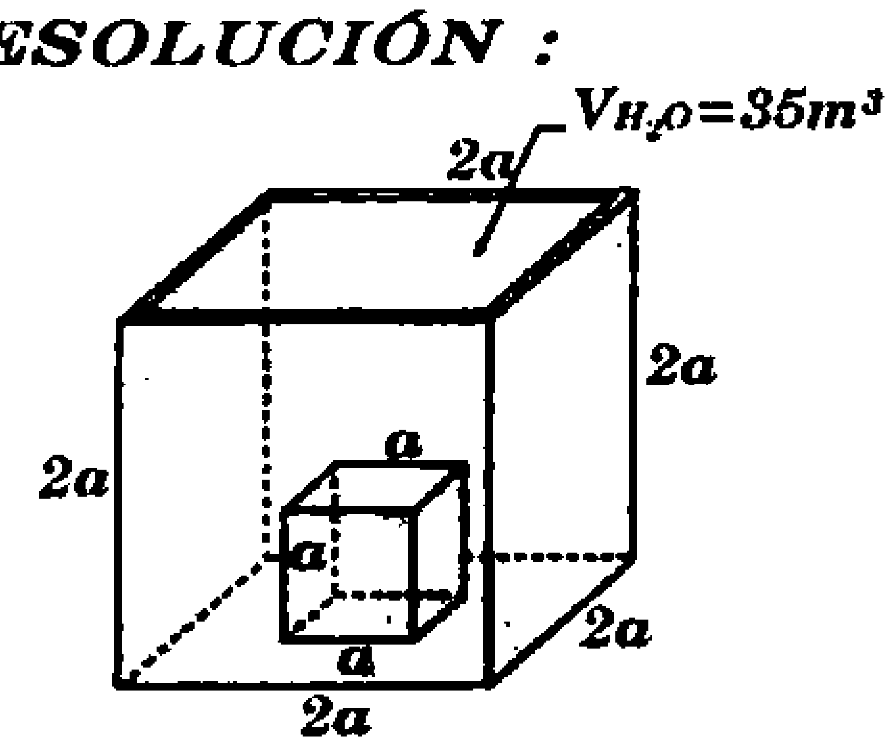
RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En un recipiente cúbico que contiene $35m^3$ de agua se introduce un cubo macizo de modo que el agua se eleva hasta alcanzar el nivel del recipiente. Si la arista del cubo macizo es la mitad de la arista del recipiente. Calcular el volumen del recipiente.

A) $32\ m^3$ B) 40 C) 60 D) 54 E) 36

RESOLUCIÓN :



* Que el cubo macizo produzca la elevación del nivel de H_2O, nos indica que la diferençia de volúmenes de los 2 cubos debe ser igual al volumen del H_2O contenido, puesto que no se ha derramado el líquido.

* Arista de cubo macizo: a, volumen: a^3

* Arista del recipiente: $2a$, volumen: $8a^3$

* Dato: $8a^3 - a = 35\ m^3 \Rightarrow a^3 = 5m^3$

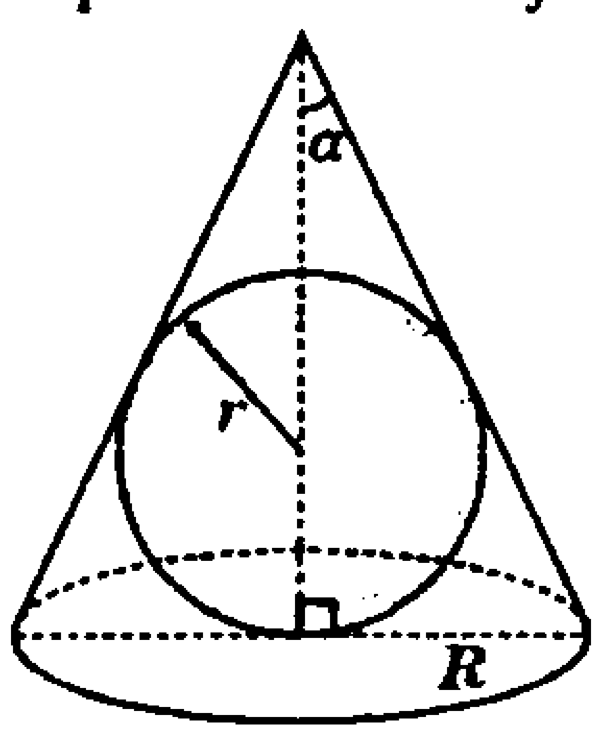
* Sustituyendo en el paso *(3)*:

$$V_{recipiente} = 8\ (5m^3) = 40\ m^3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

El área de la esfera es al área de la base del cono circunscrito como *4* es *3*. hallar la medida del ángulo "α", formado por la altura y la generatriz.

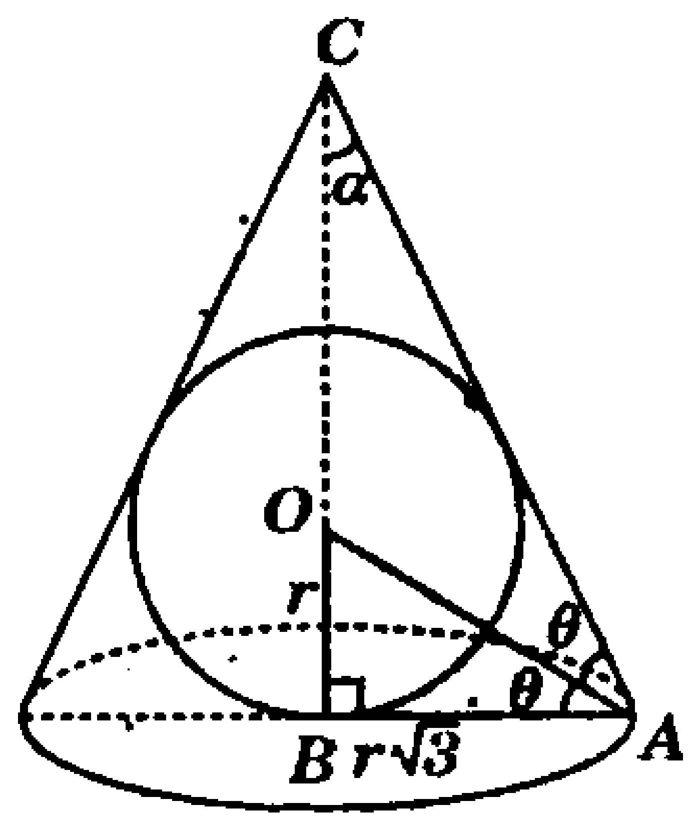


A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 16°
E) 22°30'

RESOLUCIÓN :

* Por condición del problema :

$$\frac{A_{esfera}}{A_{base}} = \frac{4}{3} \quad \frac{4\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow R = r\sqrt{3}$$



* Para aprovechar ésta relación se debe formar un triángulo rectángulo, tal como el *AOB*.

* Llamando "2θ" al $\sphericalangle BAC$ se puede afirmar que : $2\theta + \alpha = 90°$

luego: $\alpha = 90° - 2\theta$

*En el ⊿*ABO*, como: $AB = OB \times \sqrt{3}$

entonces: $\Rightarrow \theta = 30°$

* Sustituyendo en el paso *(3)*:

$\alpha = 90° - 2(30°)$

* Finalmente : $\alpha = 30°$

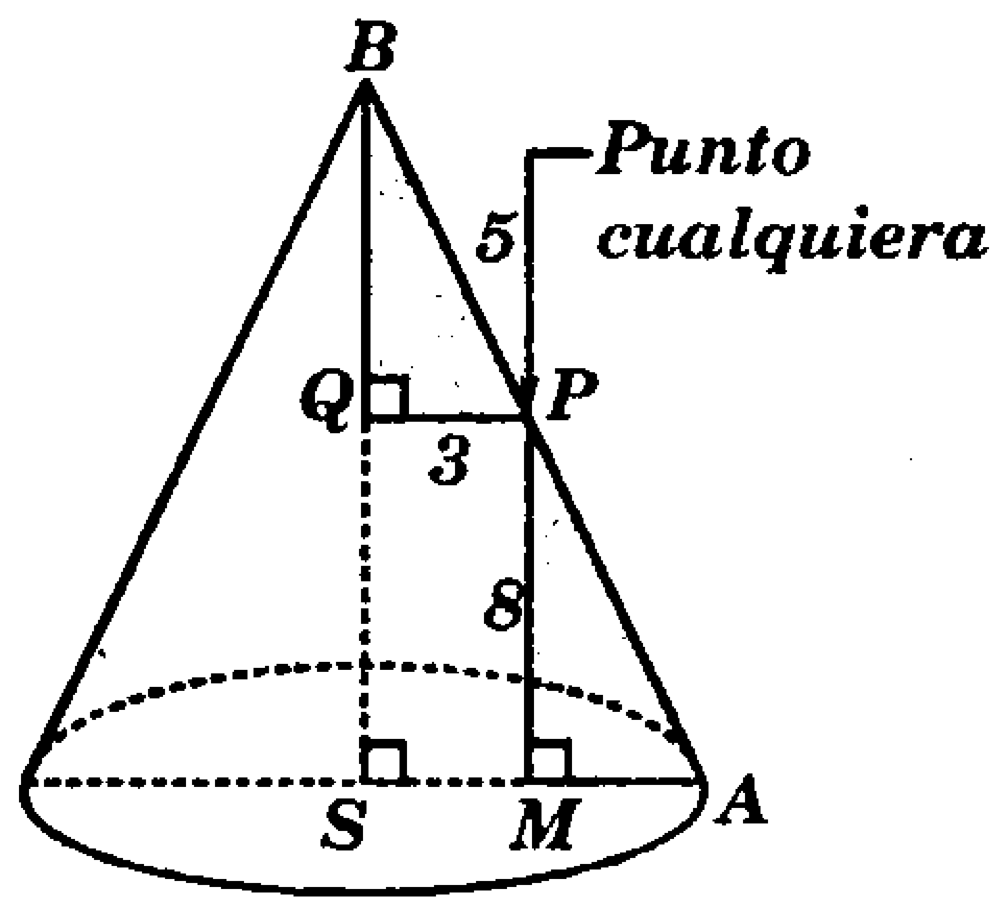
RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

Calcular el volumen del cono , en el cual un punto de su generatriz dista *5m* , *3m* y *8m* de la cúspide, de la altura y de la base respectivamente.

A) 127 πm^3 *B) 208 π* *C) 427 π*
D) 324 π *E) 300 π*

RESOLUCIÓN:



* Como: $V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$ se deben hallar el radio "*r*" y la altura "*h*".

* En el ⊿*BQP*: $BQ = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\ m$

Entonces: $h = 8 + 4 = 12\ m$

* Como: *PQ//AS* entonces los triángulos *BQP* y *AMP* serán semejantes , entonces :

$\frac{4m}{3m} = \frac{8}{AM} \Rightarrow AM = 6m$ por lo tanto $r = 9$

* Sustituyendo : finalmente en el paso *(1)* se tiene que :

$$V_{cono} = \frac{\pi \times 9^2 \times 12}{3} = 324\pi m^3$$

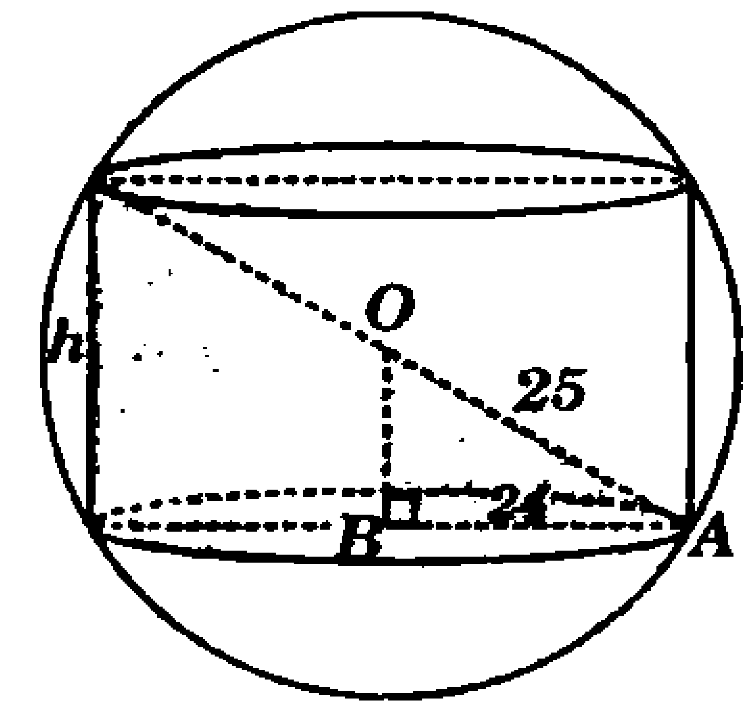
RPTA : "D"

PROBLEMA 19 :

Hallar el volumen del cilindro recto de *24 m* de radio de la base y que se halla inscrito en una esfera de *25 m* de radio (el centro de la esfera es interior al cilindro).

A) 7208 m^3 *B) 8000* *C) 9024*
D) 8064 *E) 9288*

RESOLUCIÓN:



* Se sabe que : $V_{cilindro} = \pi r^2 h$ donde, "*h*" es desconocido .

* Trazamos $\overline{AO}$, se forma un triángulo rectángulo en el cual :

$$OB = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7m \Rightarrow h = 14m$$

* Sustituyendo finalmente en el paso *(1)* :

$$V_{cilindro} = \pi (24)^2 (14) = 8064\ m^3$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 20 :

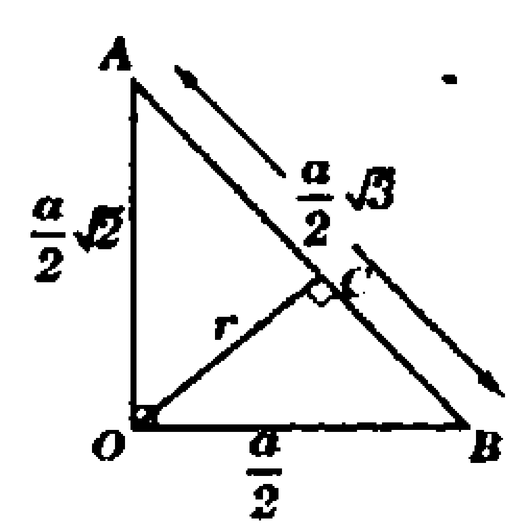
Calcular la longitud del radio de la esfera inscrita en un octaedro regular de arista "*a*".

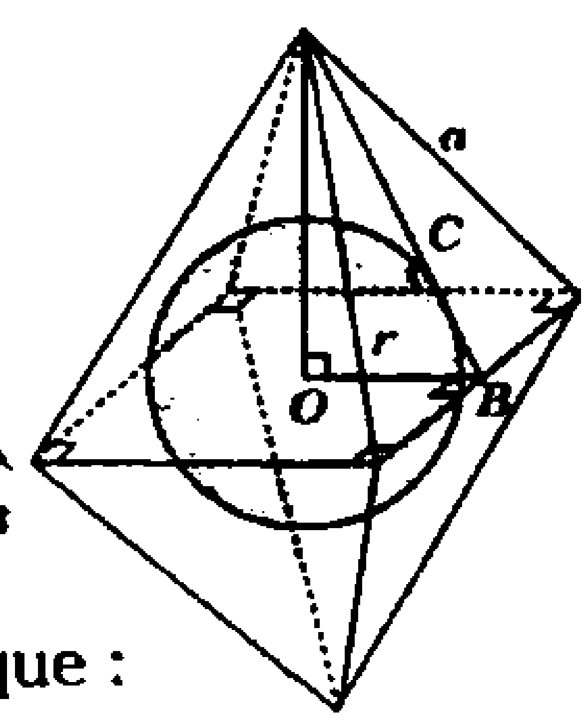
A) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ *B)* $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ *C)* $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ *D)* $2a$ *E)* $\frac{a}{3}$

RESOLUCIÓN :

* La esfera inscrita es tangente a cada cara o triángulo equilátero , en su baricentro "*C*".

* Por lo tanto , se calcular "*r*" en el ⊿*AOB,* considerando que es su altura.





* Recuérdese que :

a) *AO* es la mitad de la diagonal , entonces : $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) *AB* es la altura de un triángulo equilátero : $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) *OB* es el apotema del cuadrado: $OB = \frac{a}{2}$

* Entonces por relaciones métricas

se tendrá que:

$AO \times OB = AB \times OC$ entonces :

$$\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}(r) \Rightarrow r=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

RPTA : "A"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Indicar verdadero o falso.

I) Una recta y un punto que no pertenece a ella determina un plano.

II) Dos rectas secantes no forman un plano.

III) Dos rectas paralelas determinan un plano.

A) VFV *B) VVV* *C) FVF* *D) FFF* *E) VFF*

02 Indica verdadero o falso.

I) Tres puntos cualquiera determinan un plano.

II) Una recta y un punto determinan una plano.

III) Dos puntos no colineales forman un plano.

A) VVV *B) VFF* *C) FFF* *D) FVV* *E) VFV*

03 Indicar verdadero o falso.

I) La intersección de un plano y una esfera nos da un círculo.

II) Una recta esta contenida en un plano cuando todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano.

III) Todo plano tienen porciones limitadas

A) VFV *B) FFV* *C) VFF* *D) VVV* *E) VVF*

04 Calcular el máximo número de planos que determinan *5* puntos no colineales en el espacio.

A) 4 *B) 6* *C) 8* *D) 10* *E) 15*

05 ¿Cuántos planos como mínimo forman *6* rectas paralelas?

A) 5 *B) 10* *C) 15* *D) 20* *E) 25*

06 ¿Cuántos planos como máximo forman *15* rectas paralelas?

A) 35 *B) 55* *C) 85* *D) 105* *E) 120*

07 Con *10* puntos no colineales; ¿Cuántos planos como máximo se pueden determinar?

A) 100 *B) 110* *C) 120* *D) 130* *E) 140*

08 Con *14* puntos no colineales. ¿Cuántos planos como máximo se pueden determinar?

A) 364 *B) 286* *C) 324* *D) 484* *E) 268*

09 Se tiene *8* rectas paralelas en el espacio y *6* puntos cada cuatro no coplanares.

Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar

A) 96 *B) 68* *C) 108* *D) 136* *E) 54*

10 Se tiene en el espacio *6* puntos; *8* rectas paralelas y *10* rectas secantes. Calcular el máximo número de planos que se pueden determinar

A) 206 *B) 180* *C) 201* *D) 270* *E) 281*

11 Si una recta es paralela a un plano, entonces es cierto que:

I) La recta no está contenida en el plano

II) La recta es paralela a todas las rectas del plano

III) Por dicha recta pasan infinitos planos paralelos al plano dado

A) I *B) I y II* *C) I; II y III* *D) I y III* *E) II y III*

12 Cuál de las siguientes proposiciones no es verdadera?

A) Todos los planos paralelos a un plano dado son paralelos entre sí.

B) Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.

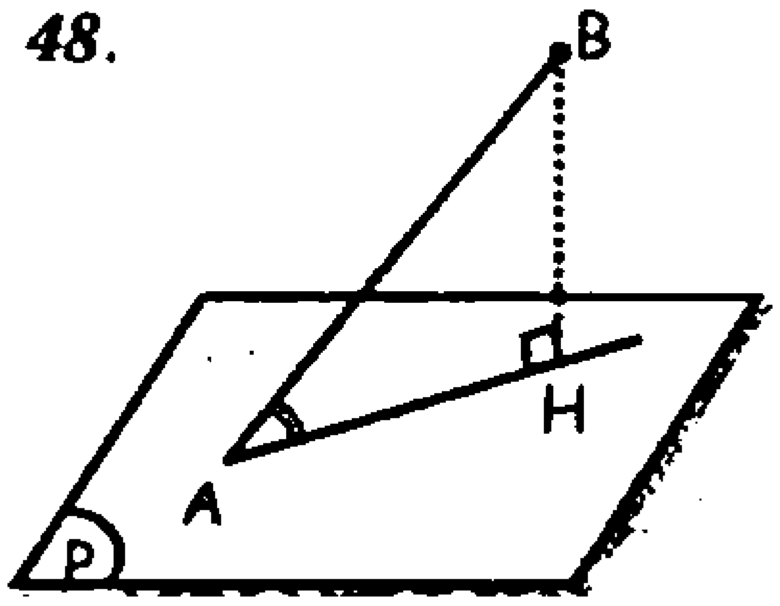
C) Si un plano interseca a una de tres rectas paralelas, también interseca a las otras dos

D) Si una recta es paralela a un plano la paralela trazada a dicha recta por un punto del plano, está contenida en el plano.

E) Por cualquier punto exterior de un plano sólo puede trazarse un plano paralelo al primero.

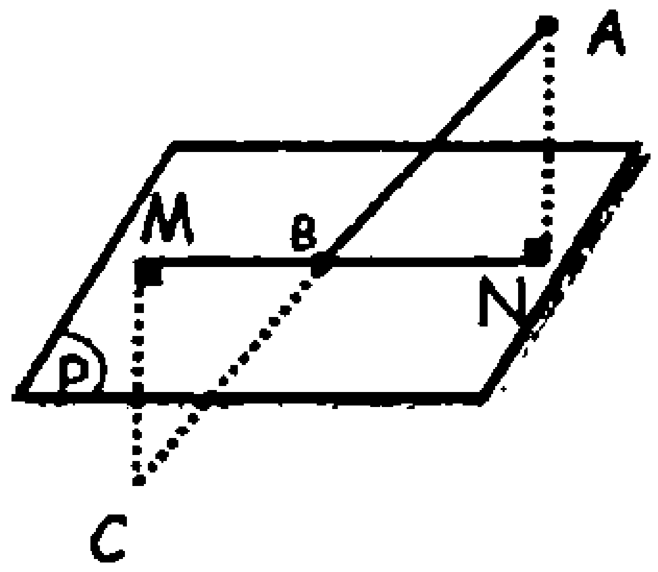
13 Calcular la proyección de $\overline{AB}$, sobre el plano «*P*»; si «*A*» pertenece al plano «*P*». $AB = 50$ y $BH = 48$.

A) 7 *B) 14* *C) 16* *D) 18* *E) 24*



14 Calcular la proyección de $\overline{AC}$ sobre el plano «*Q*», si «*B*» pertenece al plano «*Q*», si «*B*» pertenece al plano «*Q*», $AN = 4$, $MC = 6$ y $AC = 26$.

A) 12 *B) 24* *C) 13* *D) 26* *E) 10*



PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

RECTAS - PLANOS

01 Por el vértice *B* de un triángulo rectángulo *ABC*, recto en *B*, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano de dicho triángulo. Calcular la distancia de *P* al punto medio de $\overline{AC}$, si $PB=8$ y $AC=12$.

A) 15 *B) 14* *C) 9* *D) 10* *E)* $5\sqrt{2}$

02 Se tiene un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *ABQ* ubicados en planos perpendiculares. Si $AB=2$, calcular la distancia de *Q* al plano medio de $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{6}$ *B)* $\sqrt{5}$ *C)* $\sqrt{7}$ *D)* $2\sqrt{2}$ *E) 3*

03 Se tiene un triángulo rectángulo isósceles *ABC*, recto en *B*, se traza $\overline{BQ}$ perpendicular al plano que lo contiene. Calcular el área de la región triangular *AQC*, si

$AC=6$ y $BQ=4$.

A) 12 B) 15 C) 20 D) 24 E) 18

03 Se tiene un cuadrado *ABCD* y se traza $\overline{AQ}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $AQ=AD=2$, calcular la distancia de *A* hacia $\overline{QC}$.

A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{3}$

05 Se tiene un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *ABQ* ubicados en planos perpendiculares. Si $AD=6$, calcular la distancia entre los centros de dichos polígonos.

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{3}$

06 Se tiene un rectángulo *ABCD* y un triángulo equilátero *ABQ* ubicados en planos perpendiculares. Si el ángulo entre $\overline{QC}$ y el plano del rectángulo mide *30* y $QC=2\sqrt{3}$, calcular el área de la región rectangular *ABCD*.

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{5}$ E) $4\sqrt{3}$

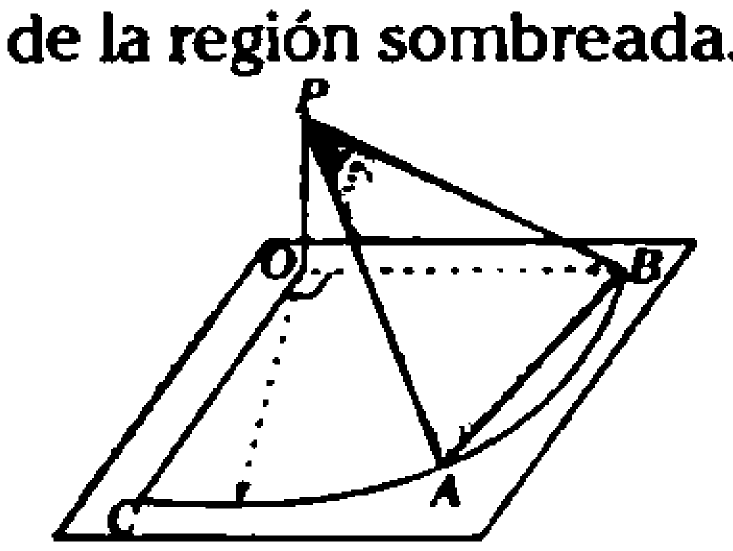
07 Se tiene un cuadrado *ABCD* cuyo lado mide *6*; a un mismo lado del plano que lo contiene se trazan $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a su plano. Si $AE=2$ y $CF=4$, calcular la distancia del punto medio de $\overline{EF}$ hacia *D*.

A) 5 B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{6}$

08 Por el baricentro *G* de un triángulo rectángulo, recto en *B*, se traza $\overline{GH}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo. Si $3(BH)=2(AC)$, calcular el ángulo entre $\overline{BH}$ y el plano del triángulo.

A) 60 B) 53 C) 75 D) 45 E) 36

09 Si $m\widehat{AC}=16$; $AB=6$; $OP=4$ y $\overline{OP}$ es perpendicular al plano que contiene al cuadrante, calcular el área de la región sombreada.



A) $12\sqrt{2}$ B) 16 C) 24 D) $3\sqrt{6}$ E) $5\sqrt{2}$

10 En un plano *H* están contenidos los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$; *A* es un punto exterior a dicho plano.

Si $\overline{AD}$ es perpendicular al plano dado, $AD=24$ y $BC=10$, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.

A) 13 B) 15 C) 11 D) 10 E) 12

11 Se tiene un triángulo *ABC* contenido en el plano *P*; se trazan $\overline{AD}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$ perpendiculares al plano *P* situados a un mismo lado del plano. Si $AD=1$, $BF=7$ y la mediana $\overline{EM}$ del triángulo *DEF* es paralela al plano *P*, calcular *CE*.

A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) $\sqrt{6}$ E) 4

12 Se tiene un cuadrado *ABCD* y se traza $\overline{MP}$ perpendicular al plano de dicho cuadrado siendo *M* punto medio de $\overline{AB}$. Si $AB=2$ y $MP=\sqrt{3}$, calcular *PC*.

A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

13 Se tiene un triángulo equilátero *ABC* y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ ubicados en planos perpendiculares; en $\widehat{AB}$ se ubica el punto *P* tal que $m\widehat{AP}=60°$ y $AB=4$. Calcular la distancia entre los puntos *P* y *C*.

A) 6 B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{5}$ E) 4

14 Se tiene un hexágono regular *ABCDEF*, de centro *O*, se traza $\overline{OP}$ perpendicular a su plano tal que $PD=2(AB)$. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{PD}$ y dicho plano.

A) 30° B) 60° C) 90° D) 37° E) 53°

15 Por el vértice *C* de un cuadrado *ABCD* se traza la perpendicular $\overline{CP}$ a su plano. Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{OP}$ con el plano que contiene al cuadrado, siendo *O* centro del cuadrado, además $AB=2$ y $PA=\sqrt{10}$.

A) 30° B) 37° C) 60° D) 53° E) 45°

16 Se tiene un cuadrado *ABCD* y un rectángulo *ABEF* ubicados en planos perpendiculares. Si $m\angle ECB=60°$ y $AD=4$, calcular el área de la región rectangular *FECD*.

A) 32 B) 36 C) $24\sqrt{3}$ D) $12\sqrt{6}$ E) $25\sqrt{2}$

17 Se tiene un cuadrado *ABCD*; se traza $\overline{PB}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado. Calcular el área de la región *PMC*, si $AB=2\sqrt{5}$ y $PB=3$. (*M* es punto medio de $\overline{AD}$).

A) 15 B) 17 C) 10 D) 12,5 E) 8,5

18 Se tiene un triángulo rectángulo *AOB*, recto en *O*, se traza $\overline{OM}$ perpendicular al plano que lo contiene.

Si $OA=OB=OM=2$, calcular el área de la región triangular *ABM*.

A) $3\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{7}$

19 Por el vértice *B* de un rectángulo *ABCD* se levanta una perpendicular $\overline{BP}$ al plano del rectángulo; $AC=10$; $m\angle AOD=127°$ (*O* es punto de intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$); $PB=4$. Calcular $S_{(OPC)}$

A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{3}$ D) 20 E) $10\sqrt{5}$

20 Dado un triángulo rectángulo $m\angle A=90°$; $AB=6$ y $AC=8$; $\overline{IH}$ es perpendicular al plano o *ABC* (*I* es incentro del $\triangle ABC$). $IH=3$. Calcular *HC*.

A) 3 B) 4 C) 9 D) 7 E) 8

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)[illegible]	2)C	3)B	4)C	5)C	6)A	7)C	8)A	9)[illegible]	10)[illegible]
11)E	12)[illegible]	13)E	14)B	15)E	16)A	17)D	18)[illegible]	19)B	20)[illegible]

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente acápite , el lector estará en la capacidad de:

* *Conocer el concepto y las características de los sólidos geométricos.*

* *Saber qué es un poliedro y cuáles son sus propiedades.*

* *Estudiar las características principales de los poliedros regulares , como es la forma , volumen y área de la superficie de los poliedros.*

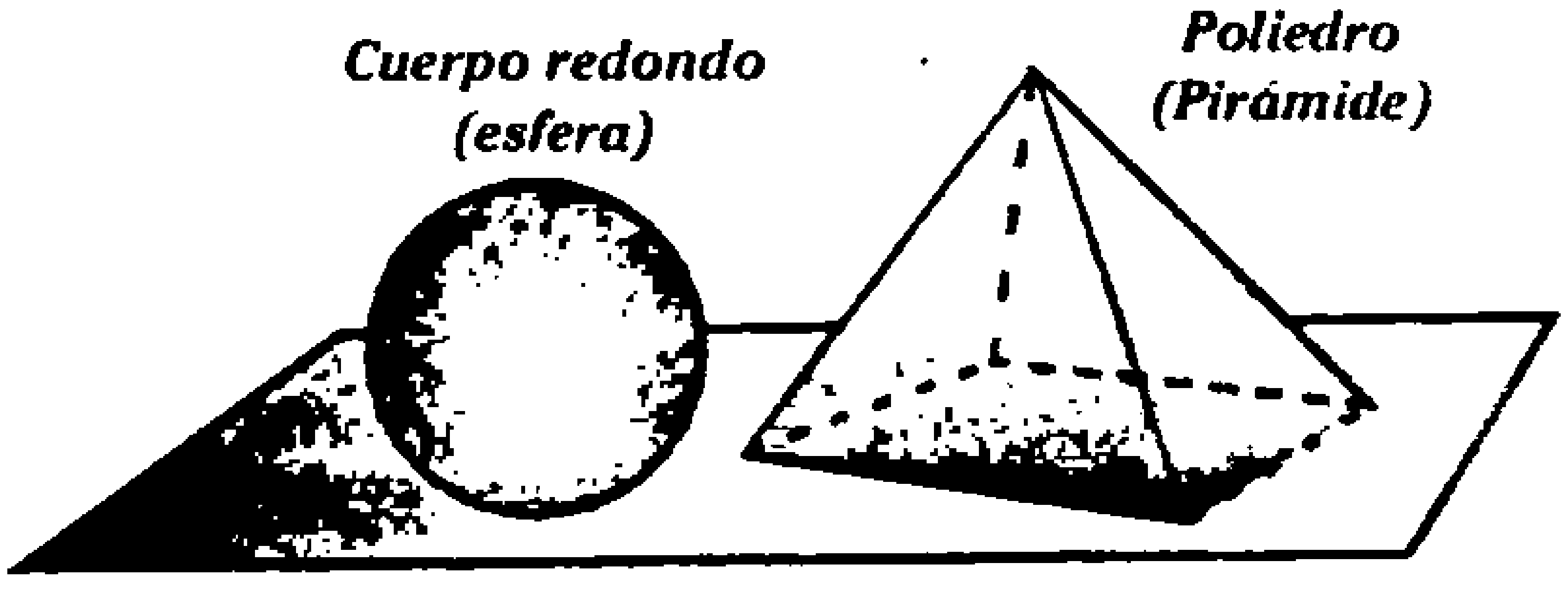
INTRODUCCIÓN :

La naturaleza nos muestra una variedad de formas que son representaciones geométricas como parte de su estructura o composición. Así tenemos a los minerales como la sal de cocina cuya forma es cúbica, el diamante cuya forma es tetraédrica: éstos son sólidos geométricos. Asimismo se puede observar ciertos objetos hechos por el hombre como es el adobe o el ladrillo de masa compacta.

Nuestro estudio en el presente capítulo. está orientado al análisis de las formas , tamaño y sus características de los sólidos geométricos.denominado poliedros que son la idealización o abstracción de objetos reales. Los sólidos geométricos fueron denominados poliedros regulares por el filósofo Aristóteles. Platón de Atenas los llamó cuerpos redondos.

SÓLIDO GEOMÉTRICO

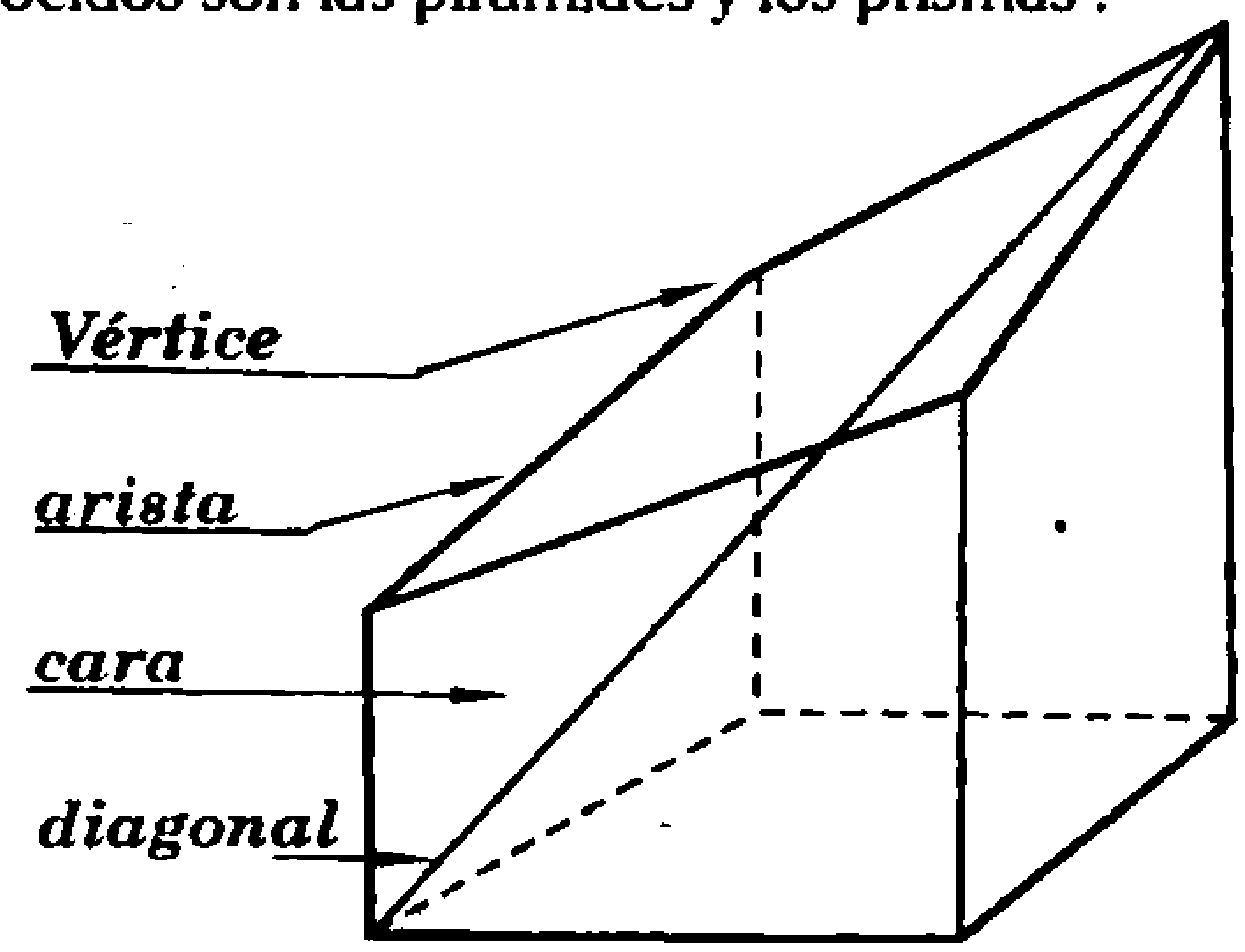
Es aquella porción del espacio separado del espacio inmediato por un conjunto de puntos que conforman la superficie del sólido. Un sólido de acuerdo a su superficie puede ser, poliedro(pirámide , prisma , etc) o cuerpo redondo (esfera , cilindro etc). La medida de la superficie de un sólido es el área de la superficie del sólido, y la medida de la porción de espacio correspondientes a un sólido es el volumen del sólido.



POLIEDRO

Es aquel sólido geométrico cuya superficie está formada por cuatro o más regiones poligonales planas a las cuales se les denomina caras del poliedro.

Al lado común a dos caras se le denomina arista y al punto de concurrencia de las aristas , vértice del poliedro. Es decir son aquellos sólidos limitados por cuatro o más planos secantes . Los poliedros mas conocidos son las pirámides y los prismas .



La intersección de cada uno de estos planos con todo los demás que con el cierran o limitan al poliedro determinan un poligono. Los polígonos que limitan el políedro se llaman ***caras***. Las intersecciones de estas se llaman ***aristas***, los puntos en que se cortan las aristas reciben el nombre de ***vértices*** .

DIAGONAL DEL POLIEDRO :

Es el segmento cuyos extremos son dos vértices ubicados en caras distintas.

SECCIÓN PLANA :

Es la intersección del sólido con un plano secante a él. Los poliedros se nombran de acuerdo a su número de caras y pueden ser: tetraedro, pentaedro, hexaedro,..... si tienen cuatro, cinco, seis,......, caras respectivamente.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

Los poliedros se clasifican de acuerdo al número de caras, y de acuerdo a la forma de los poliedros.

I) DE ACUERDO AL NÚMERO DE CARAS :

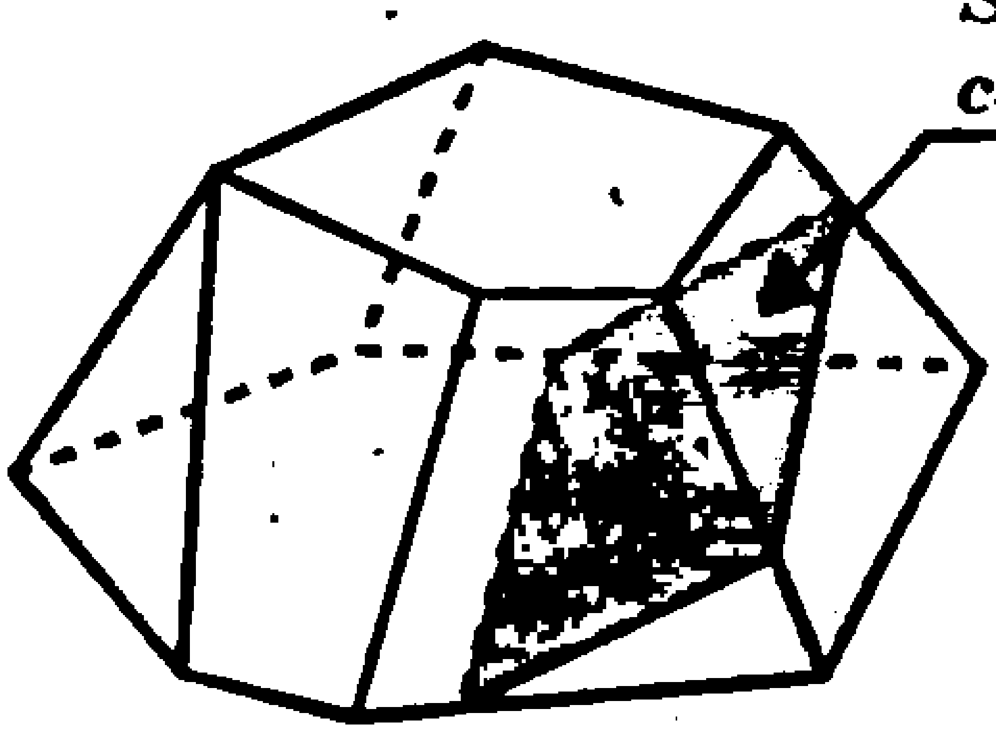
POLIEDRO	Nº CARAS
Tetraedro	4
Pentaedro	5
Exaedro	6
Heptaedro	7
Octaedro	8
Nonaedro	9
Decaedro	10
Dodecaedro	12
Pentadecaedro	15
Icosaedro	20

II) SEGÚN LA FORMA DE LOS POLIEDROS:

Un poliedro es convexo cuando todas sus secciones plana son convexas, en caso contrario será no convexo.

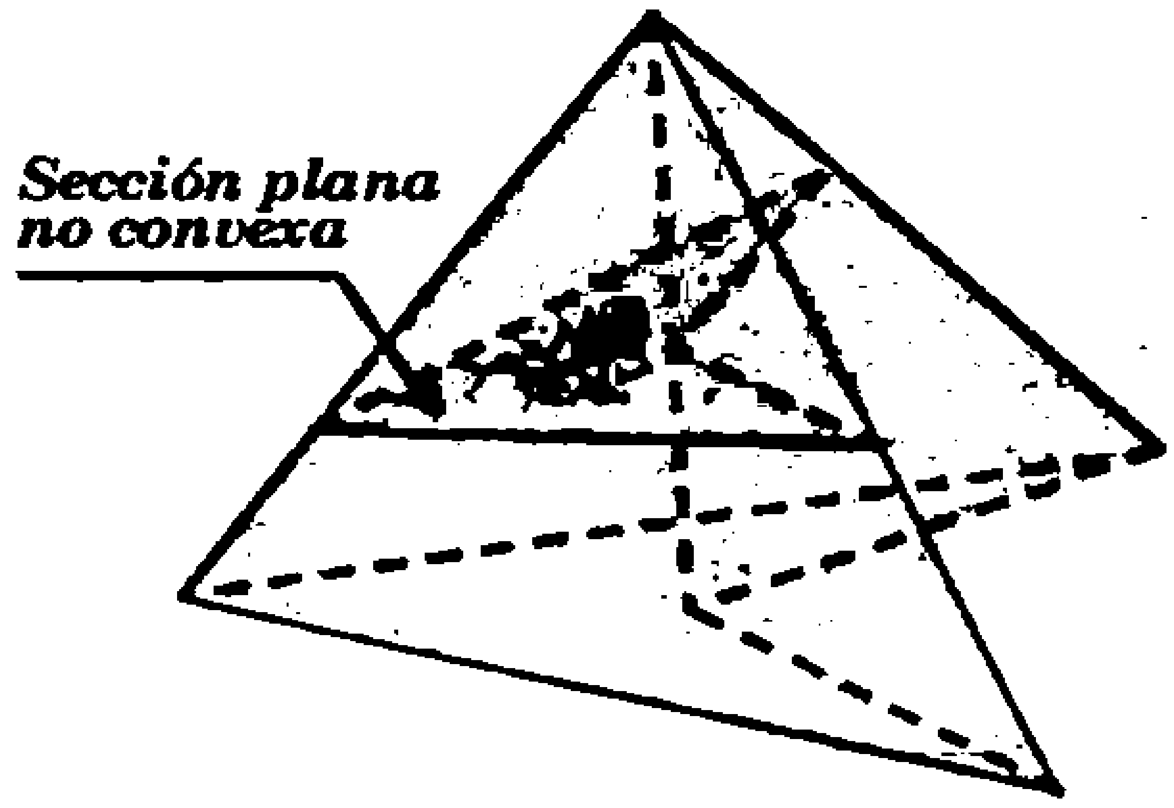
1) POLIEDRO CONVEXO :

Un poliedro se llama covexo , cuando todas sus caras están limitadas por polígonos covexos . También se dice poliedro covexo , cuando se traza una recta secante y en el poliedro se determina como máximo dos puntos de intersección , o cuando se prolonga una de las caras , el poliedro queda ubicado en un solo semiplano .



2)POLIEDRO NO CONVEXO Ó CÓNCAVO :

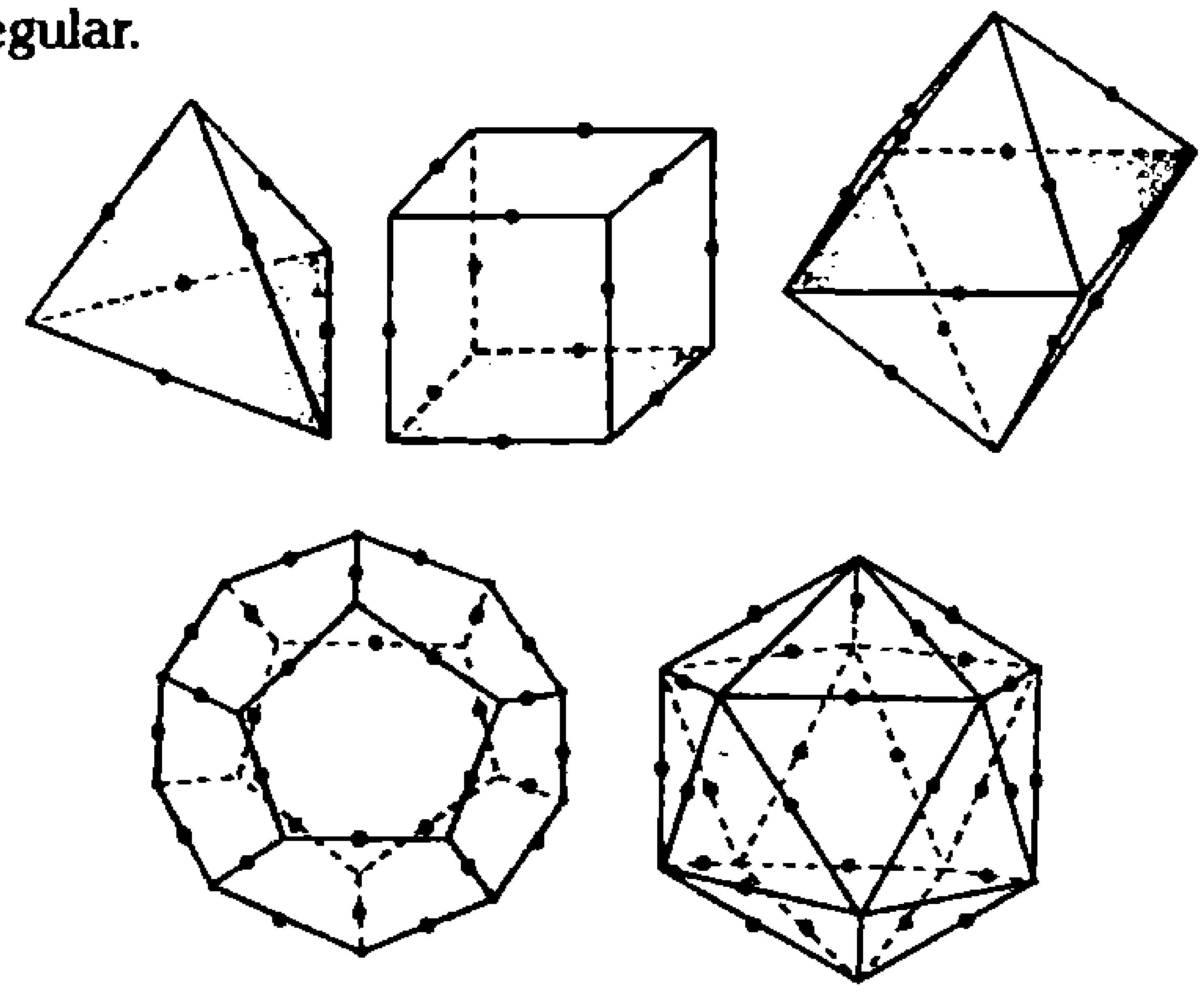
Un poliedro se llama no covexo , cuando las caras estan limitadas por polígonos no covexos , o al trazar una recta secante , el poliedro determina más de dos puntos de intersección , o al prolongar una de las caras , el poliedro queda ubicado en los dos semiplanos.



3) POLIEDRO REGULAR :

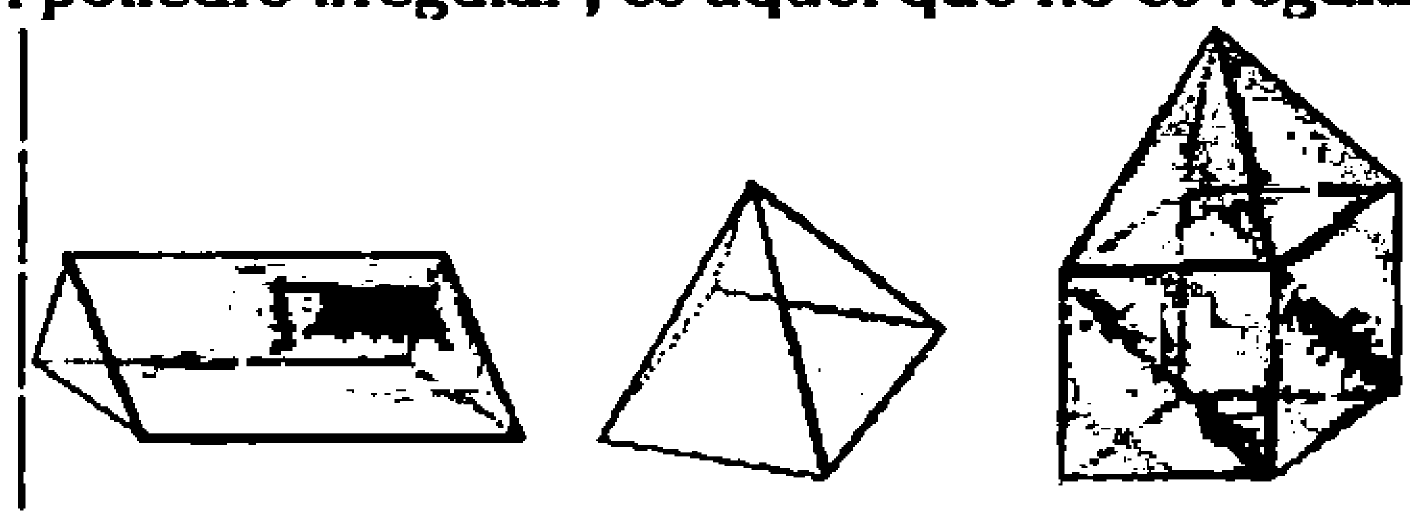
Un poliedro regular , es aquel que tiene por caras regiones poligonales regulares congruentes entre sí y en cada vértice concurren igual número de aristas.

* Solamente existen cinco poliedros regulares, los cuales son: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular y el icosaedro regular.



4) POLIEDRO IRREGULAR :

Un poliedro irregular , es aquel que no es regular .



TEOREMA DE EULER

I) En todo poliedro se cumple que el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más dos unidades .

$$C+V=A+2$$

donde :

V = números de vértices

C = Número de caras

A = Número de aristas

II) En todo poliedro la suma de las medidas de los

ángulos internos de todas sus caras es igual a *360°* multiplicado por el numero de vértices menos *2*

$$\sum_{caras} \sphericalangle = 360°(V-2)$$

donde *V*=número de vértices

* Además :

$$\sum_{caras} \sphericalangle = 360°(A-C)$$

donde : *A* = número de aristas

C = número de Caras

III) En todo poliedro cuyas caras tienen igual número de lados, el número de aristas es igual al semiproducto del número de caras y el número de lados de una cara

$$A=\frac{C\times N}{2}$$

* *A* : número de aristas
* *C* : número de caras.
* *N* : número de lados en común de todas las caras.

IV) En todo poliedro el número de diagonales es igual al valor de la combinación del número de vértices del poliedro tomados de dos en dos , menos el número de aristas y menos la suma de los números de diagonales de todas las caras de dicho poliedro.

Número $D=\frac{V(V-1)}{2}-A-$ Número *DC*

* Donde :

V = Número de vértices.

A = Número de aristas.

DC = Número de diagonales de todas las caras.

POLIEDROS REGULARES

Son aquellos poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí .

* Los ángulos poliedros y los diedros son respectivamente iguales

* Todo poliedro regular se puede inscribir o circunscribir en una esfera donde el centro de las esferas viene a hacer el centro del poliedro regular

TEOREMA :

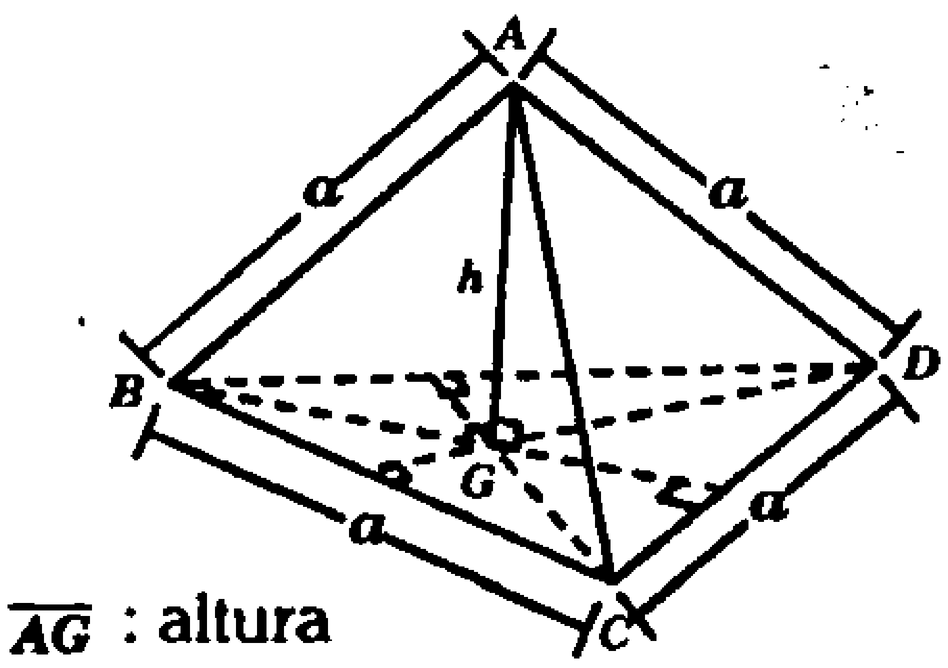
Solamente existen *5* poliedros regulares tetraedro regular, exaedro regular , octaedro regular, dodecaedro regular , icosaedro regular

TETRAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular, que se caracteriza por tener *4* caras que son regiones triangulares equiláteras.

NOTACIÓN :

Tetraedro regular *A – BCD*.



$\overline{AG}$: altura

G : Centro de la cara *BCD* .

a : longitud de la arista .

h : longitud de la altura .

Cálculo de la longitud de su altura: $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

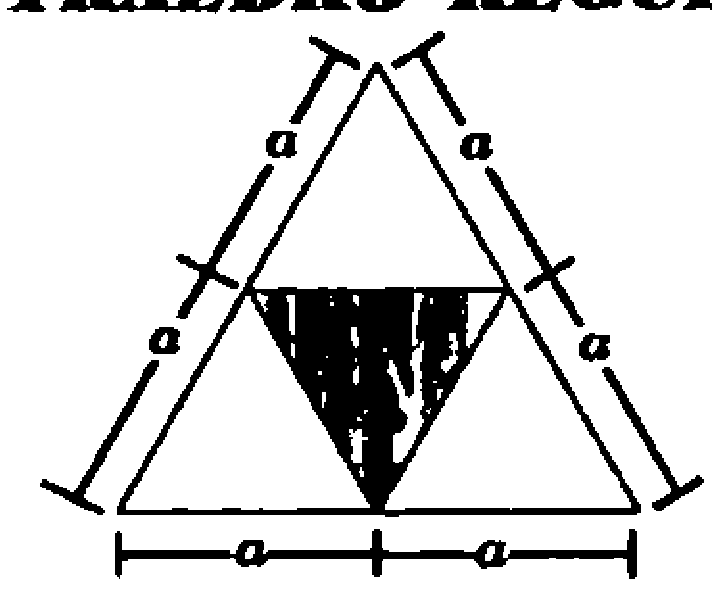
* ***G*** : baricentro de la región triangular *BCD*

Área de la superficie (A) :

$$A=a^2\sqrt{3}$$

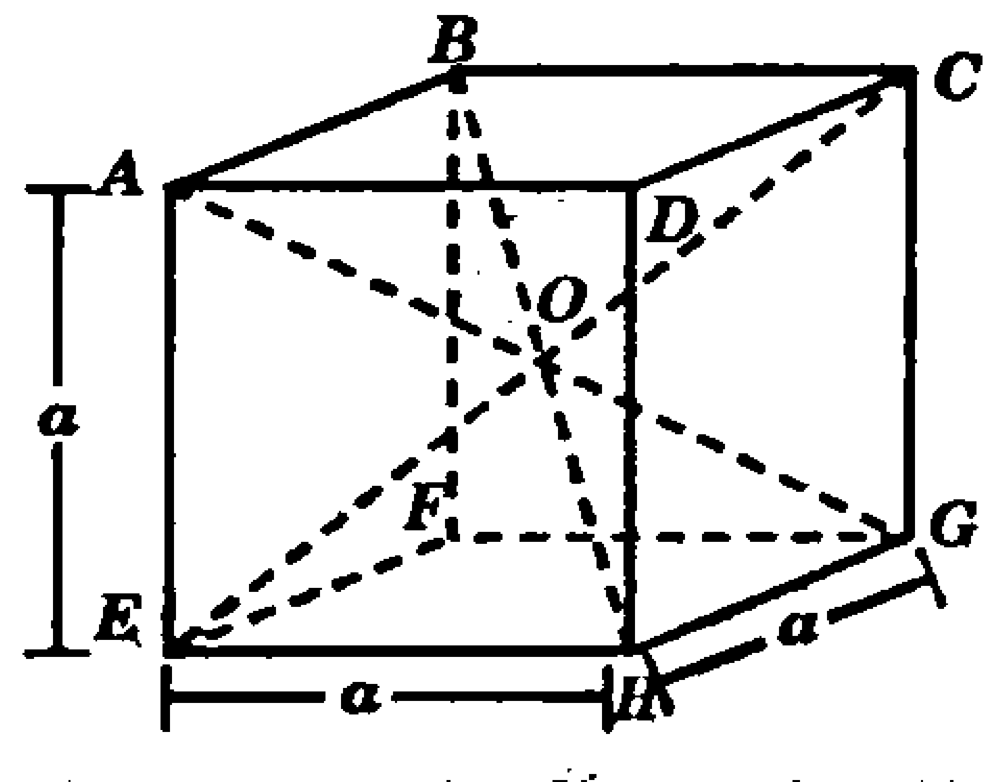
* ***Volumen(V) :*** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL TETRAEDRO REGULAR



HEXAEDRO REGULAR O CUBO

Es aquel poliedro regular que tiene por caras regiones cuadradas congruentes entre sí .



$V=8$; $C=6$; $A=12$

NOTACIÓN :

Hexaedro regular *ABCD - EFGH*

Diagonal del hexaedro :

$\overline{AO}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$

a : longitud de la arista .

O : centro del hexaedro regular.

* Luego : $AG=BH=CE=DF=a\sqrt{3}$

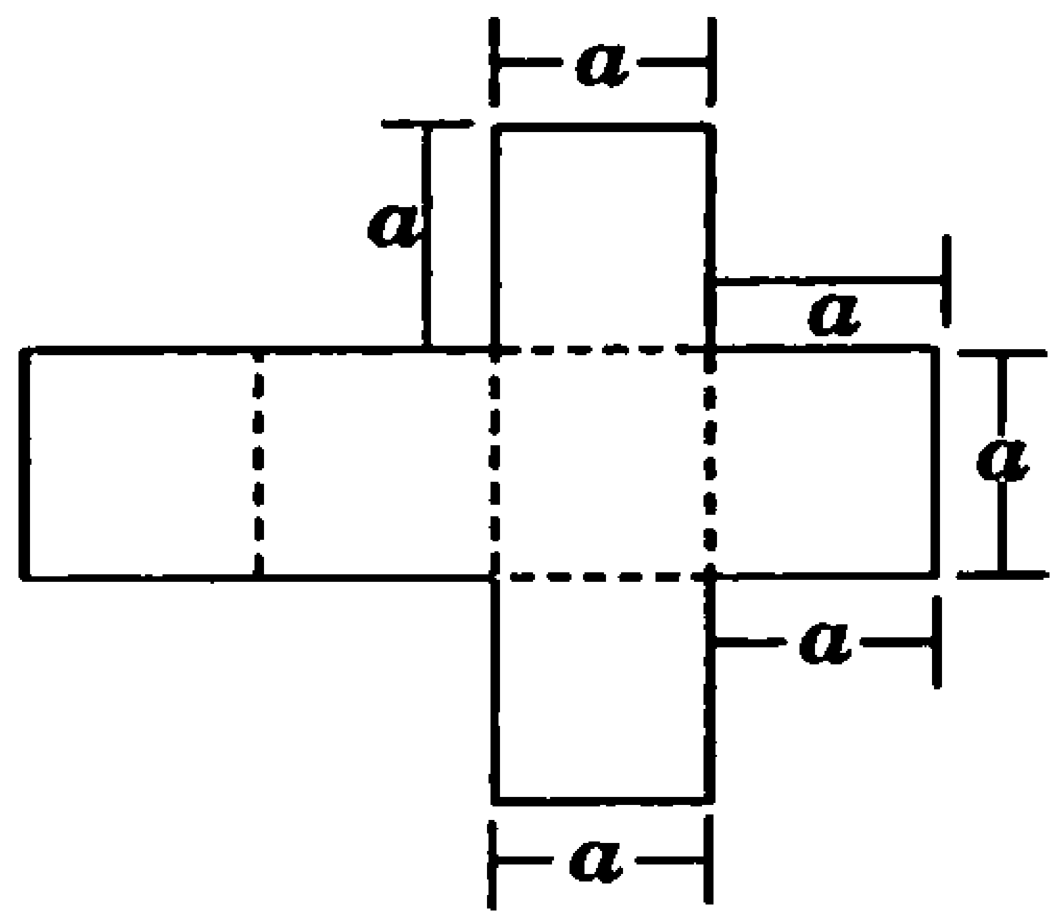
Diagonal : $AG=a\sqrt{3}$

Área de la superficie (A) :

$$A=6a^2$$

Volumen (V) : $V=a^3$

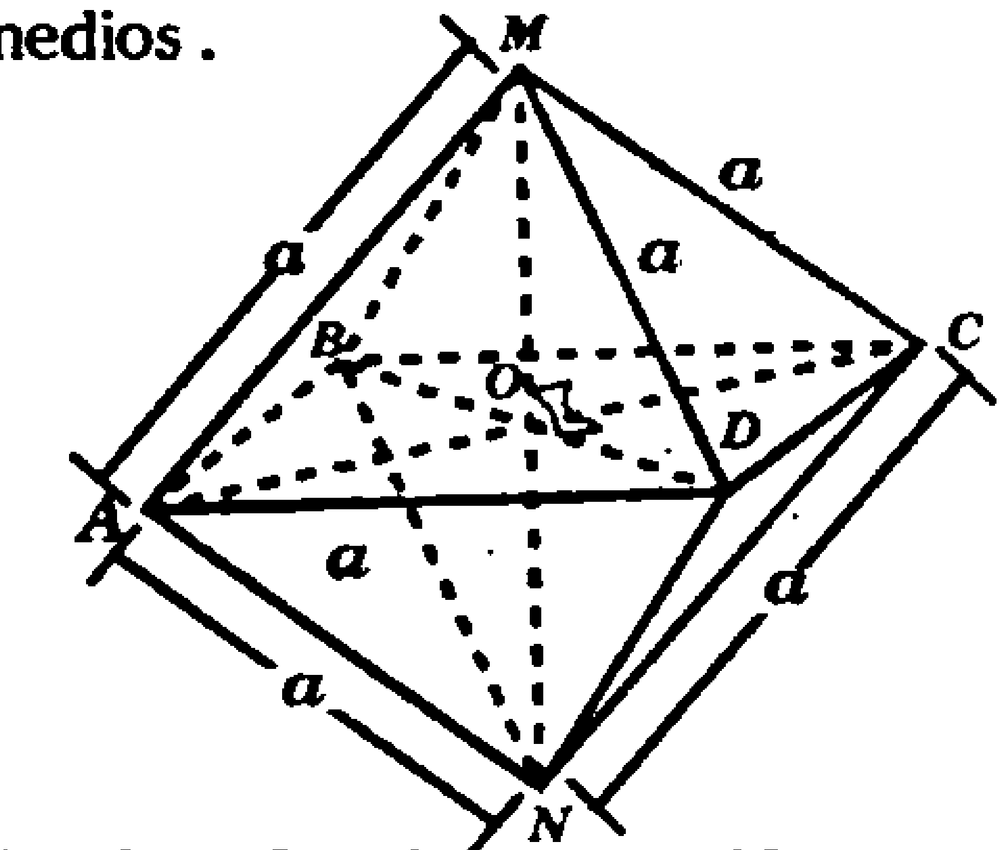
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL HEXAEDRO REGULAR



OCTAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por ocho regiones triangulares equiláteras. Tiene *3* diagonales, las cuales son de igual longitud y son perpendiculares en sus puntos

medios .



$V = 6$; $C = 8$; $A = 12$

Notación :

Octoedro regular $M - ABCD - N$

Diagonal : $\boxed{MN = a\sqrt{2}}$

Área de superficie (A):

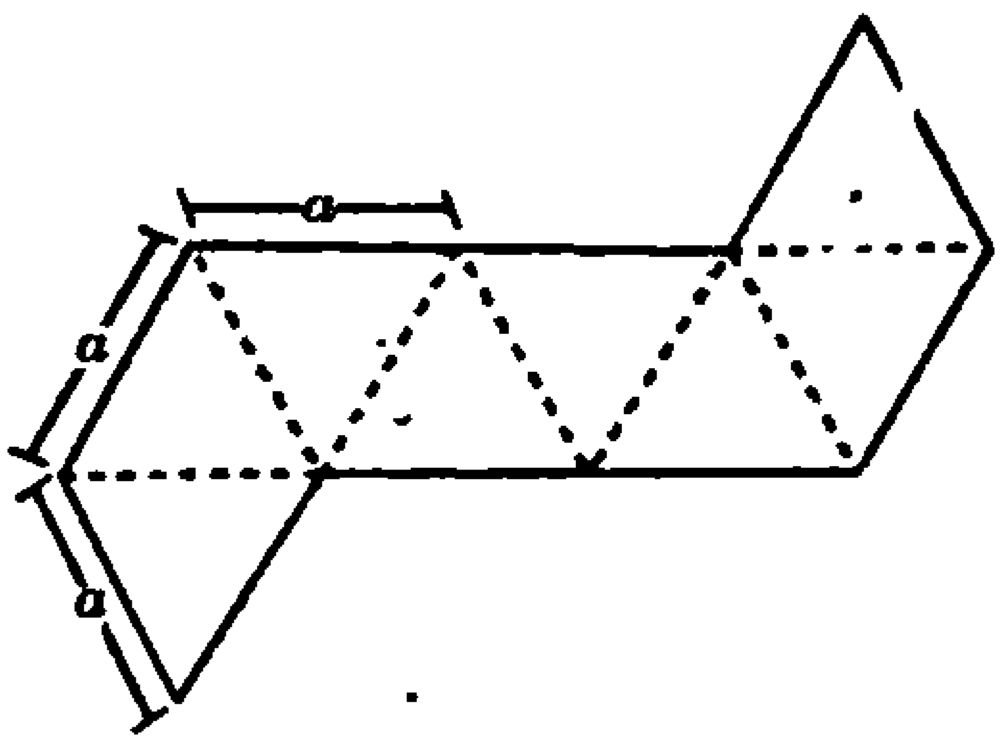
$$\boxed{A = 2a^2\sqrt{3}}$$

Volumen : $\boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

O : centro del octaedro regular.

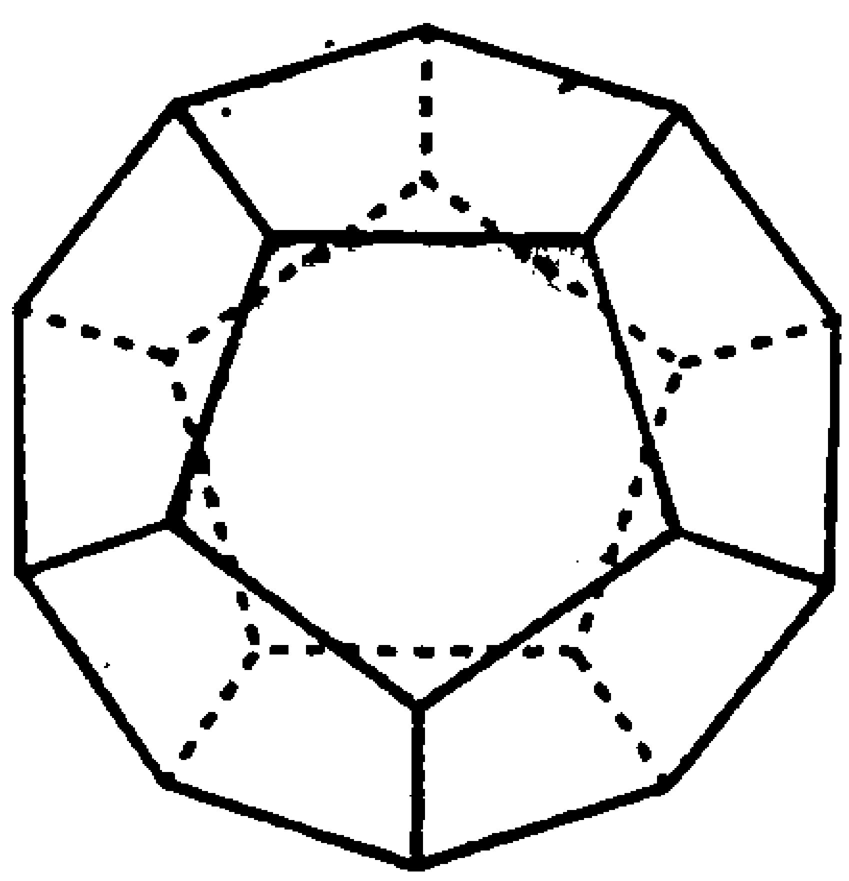
ABCD ; AMCN ; BMDN: son cuadrados.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL OCTAEDRO REGULAR



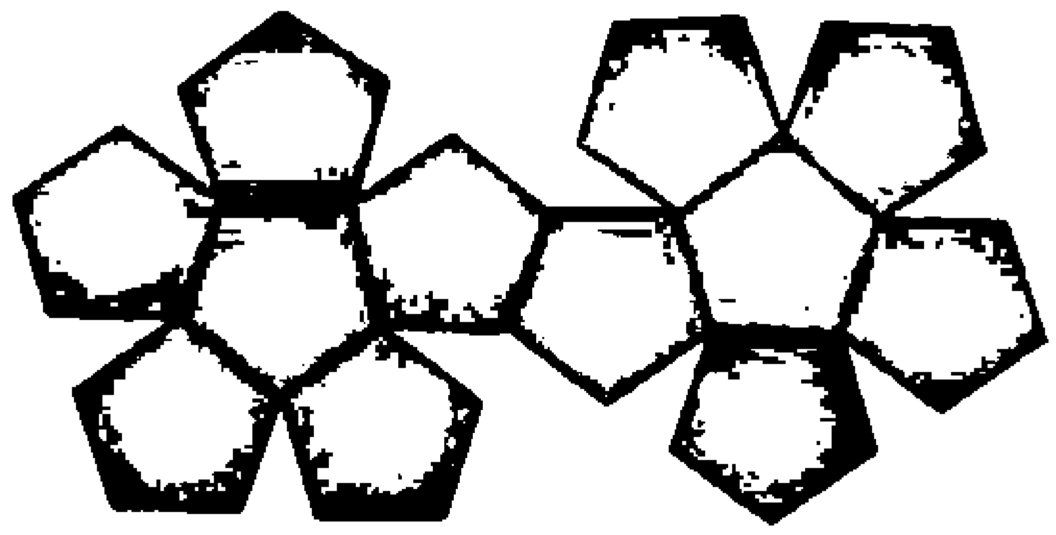
DODECAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por doce regiones pentagonales regulares. Tiene cien diagonales.



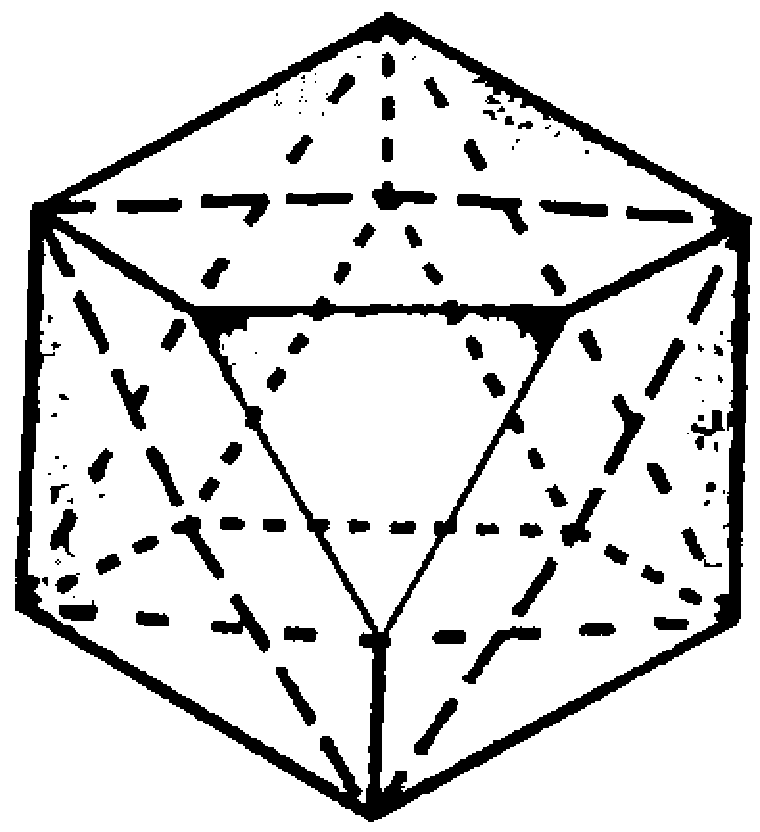
$V = 20$; $C = 12$; $A = 30$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL DODECAEDRO REGULAR



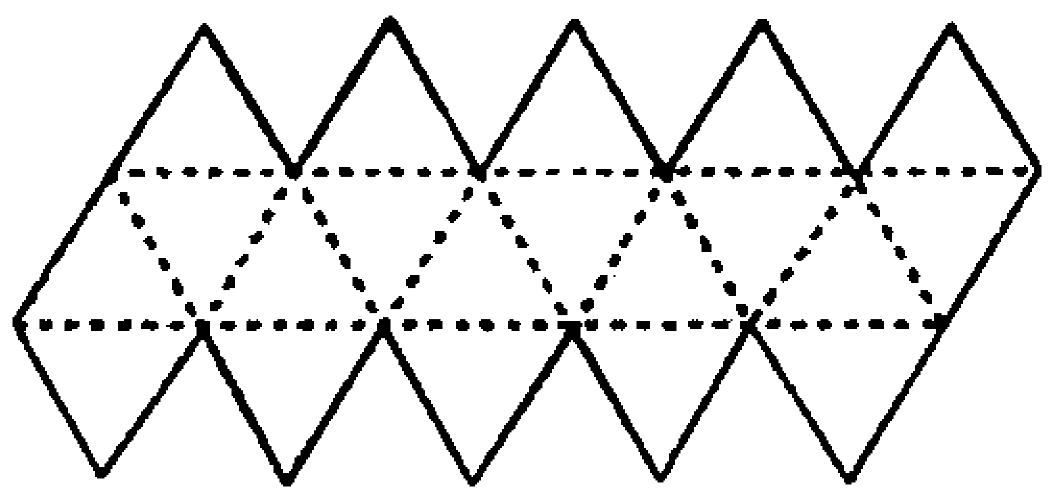
ICOSAEDRO REGULAR

Es aquel poliedro regular limitado por veinte regiones triangulares equiláteras. Tiene *36* diagonales.



$V = 12$; $C = 20$; $A = 30$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DEL ICOSAEDRO REGULAR



POLIEDROS CONJUGADOS (DUALIDAD)

Dos poliedros son conjugados o duales cuando el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro .

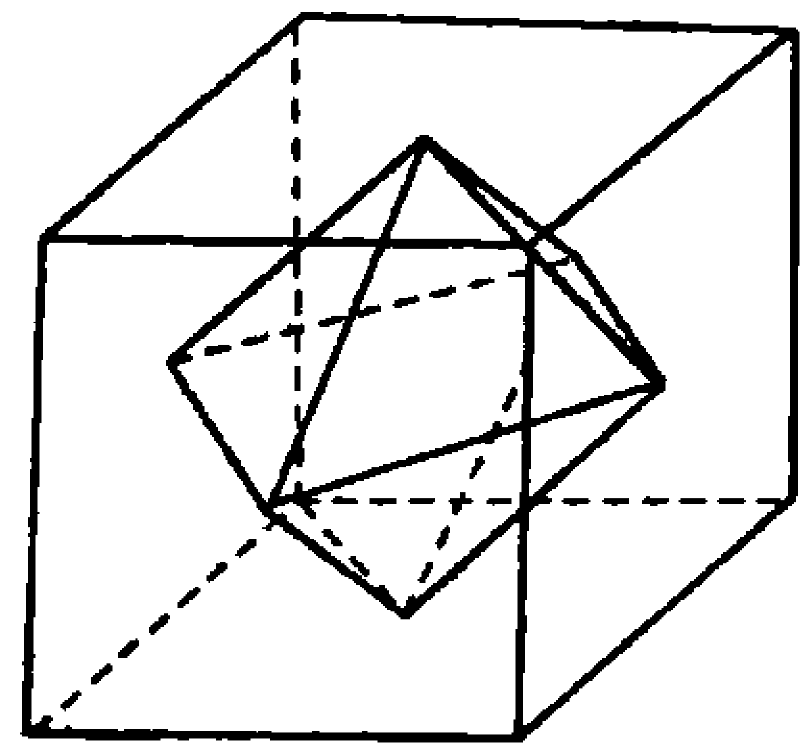
♠ Todo poliedro puede ser inscrito en su conjugado.

♠ El Tetraedro regular es conjugado consigo misma , es decir en un tetraedro regular solamente se puede inscribir una esfera y un tetraedro regular

♠ El exaedro regular y el octaedro regular son conjugados , es decir en el exaedro regular solamente se puede inscribir una esfera y el octaedro regular y viceversa .

♠ El dodecaedro regular y el icosaedro regular son conjugados

Los centros de las caras de un poliedro regular, son, los vértices de su poliedro conjugado inscrito en él.



PROBLEMAS RESUELTOS

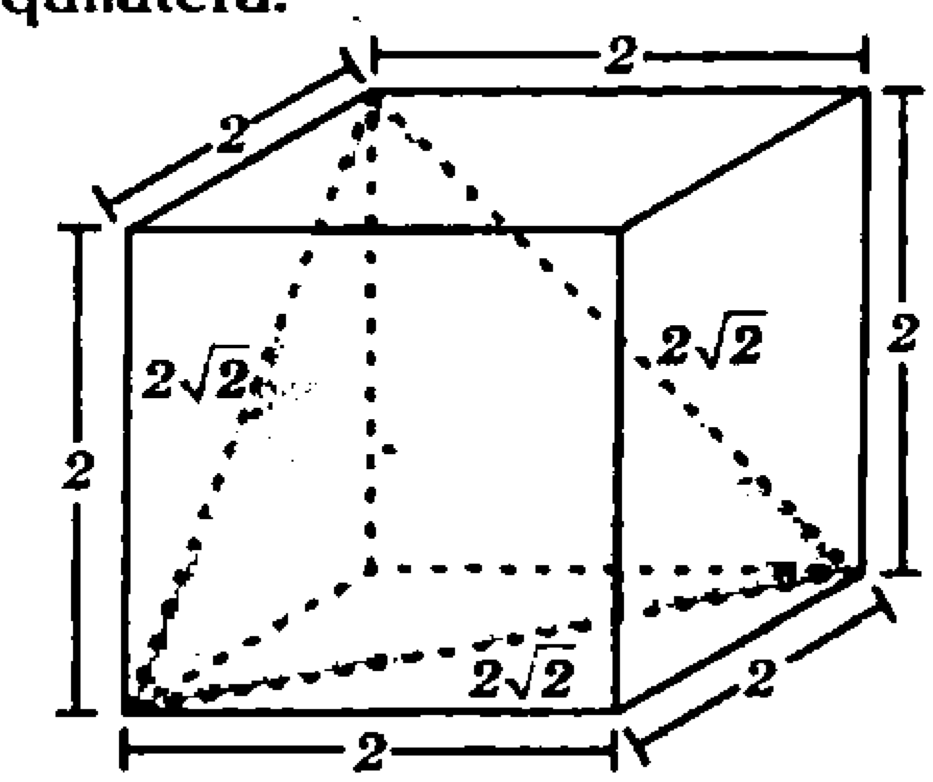
PROBLEMA 1 :

En un cubo de *2m* de arista, se unen *3* vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.

A) $4\sqrt{3}m^2$ B) $2\sqrt{3}m^2$ C) $3\sqrt{2}m^2$ D) $2\sqrt{2}m^2$ E) $6\sqrt{3}m^2$

RESOLUCIÓN :

Piden $\mathbb{A}_\triangle$: rea de la región equilátera.



En el gráfico mostrado, la región sombreada es equilátera.

Por lo cual :

$$\mathbb{A}_\triangle = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_\triangle = 2\sqrt{3}m^2$$

RPTA "B"

PROBLEMA 2 :

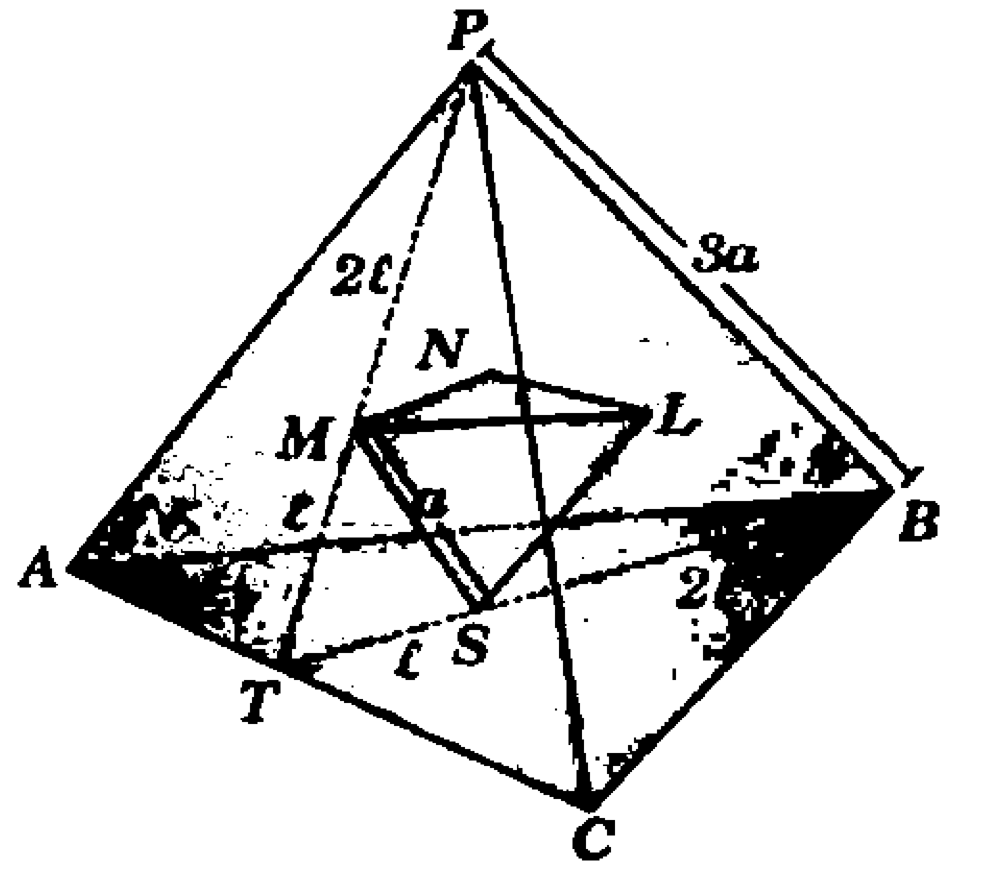
Uniendo todos los centros de las caras de un tetraedro regular se obtiene *otro* tetraedro regular. Si llamamos A_1 al área del primer tetraedro y A_2 al área del segundo tetraedro.

entonces $\frac{A_1}{A_2}$ es Igual a :

A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN:

* En la figura se muestra a los tetraedros regulares citados cuyas áreas totales son A_1 y A_2



* Según el enunciado :

A_1:Área de la superficie del tetraedro regular *PABC.*

A_2: Área de la superficie del tetraedro regular *MNLS.*

* Piden : $\frac{A_2}{A_1}$

* Como *M,N,L* y *S* son centros de las caras del tetraedro *PABC* entonces los tetraedros *MNSL* y *PABC* son semejantes.

* Luego las aristas $\overline{MS}$ y $\overline{PB}$ son homólogas.

* Por teorema : $\frac{A_2}{A_1}=\left(\frac{a}{3a}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{9}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Un poliedro convexo tiene como caras *12* triángulos , *16* cuadriláteros , *24* pentágonos y *13* exágonos. Halle su número de vértices.

A) 84 B) 85 C) 86 D) 87 E) 88

RESOLUCIÓN:

Piden V: número de vértice de un poliedro convexo. Según los datos , elaboramos la tabla.

Tipo de cara	*Número de dichas caras*
Triangular	*12*
Cuadrangular	*16*
Pentagonal	*24*
Hexagonal	*13*

Entonces , número total de caras

$$C=65$$

Por teorema , número total de aristas.

$$A=\frac{12\times 3+16\times 4+24\times 5+13\times 6}{2}=149$$

Por el teorema de Euler.

$$C+V=A+2 \Rightarrow 65+V=149+2 \Rightarrow V=86$$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS 01

01 Determine el número de caras laterales de un prisma que tiene un total de *11* caras.

RPTA.: ....

02 Determine la cantidad de aristas laterales de un prisma que tiene un total de *14* caras.

RPTA.: ....

03 Encuentre el área lateral de un cubo cuya arista lateral mide *8*

RPTA.: ....

04 Halle el área total de un cubo, sabiendo que la diagonal de cada una de sus caras mide *10*.

RPTA.: ....

05 Se sabe que un cubito de *6 cm* de arista pesa *40 g*. Determine el peso de un cubo hecho del mismo material y con una arista de *15 cm.* arista *3*.

RPTA.: ....

06 Calcular el volumen de un tetraedro regular si la suma de las longitudes de sus aristas es $18\sqrt{2}$.

RPTA.: ....

07 Calcular el volumen de un hexaedro regular si su diagonal mide $\sqrt{12}$.

RPTA.: ....

08 Calcular el área de la superficie total de un octaedro regular si su diagonal mide $2\sqrt{2}$.

RPTA.: ....

09 Calcular el área de una de las caras de un hexaedro regular si la suma de las longitudes de sus diagonales es $12\sqrt{3}$.

RPTA.: ....

10 Calcular el área de una de las caras de un tetraedro regular si la distancia entre los centros de dos caras es *2*.

RPTA.: ....

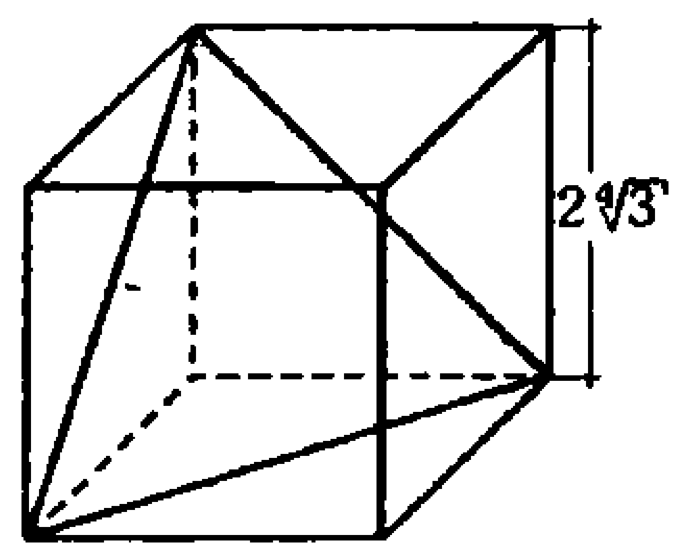
11 Se tiene un cubo de arista $3\sqrt{2}$. Calcular el volumen del poliedro regular formado al unir los centros de sus caras.

RPTA.: ....

12 Si la suma de las longitudes de las aristas de un icosaedro regular es *60*. Calcular el área de su superficie total.

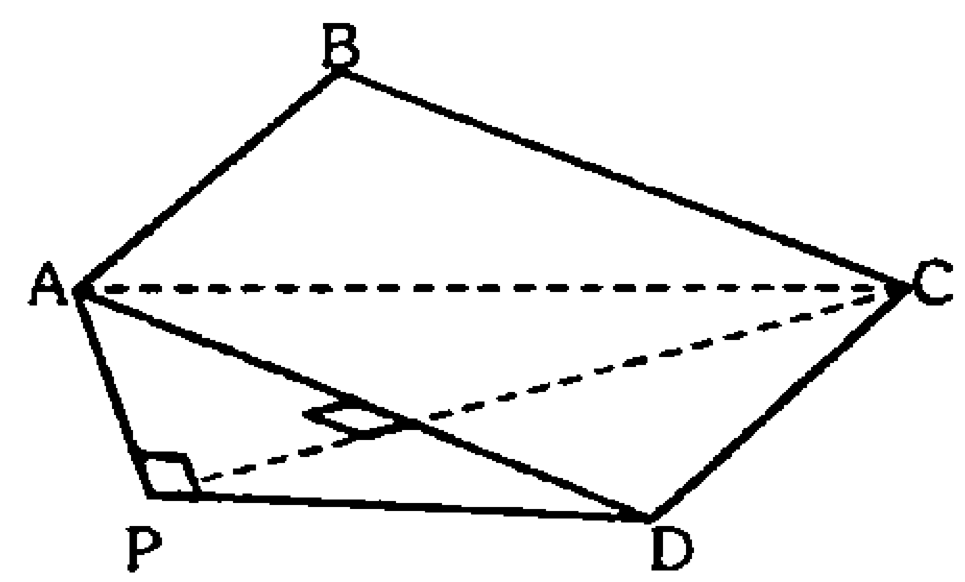
RPTA.: ....

13 En el cubo mostrado, calcular el área de la región sombreada.



RPTA.: ....

14 En la figura, calcular el volumen del tetraedro regular *ABCD*, si $PA=\sqrt{6}$



RPTA.: ....

15 Calcular el volumen de un tetraedro regular inscrito en un cubo de arista *1*.

RPTA.: ....

16 La suma de las longitudes de las aristas de un dodecaedro

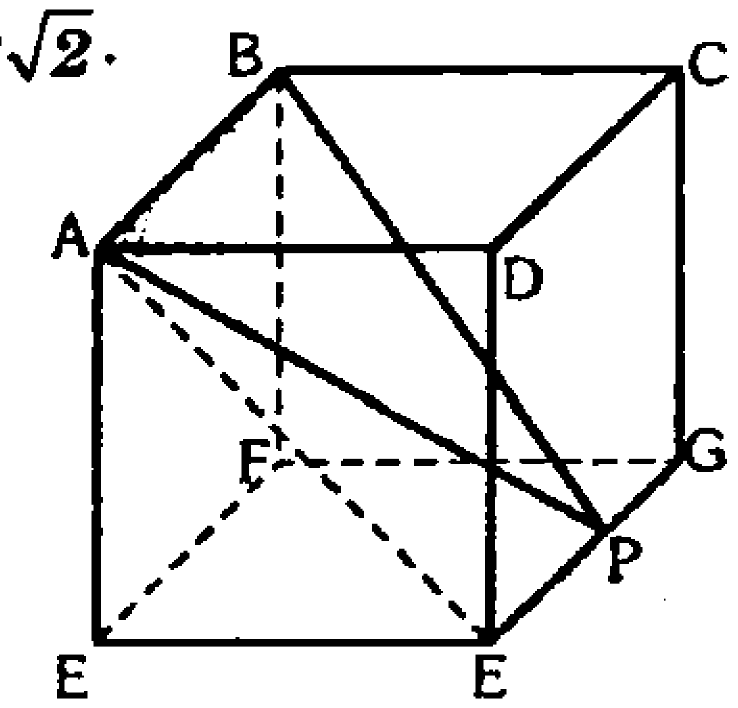
regular es *60*. Calcular el perímetro de una de sus caras.

RPTA.: ....

17 Se tiene un octaedro regular *M – ABCD – N*. Calcular el área de su superficie total si el área de la sección *ABCD* es *4*.

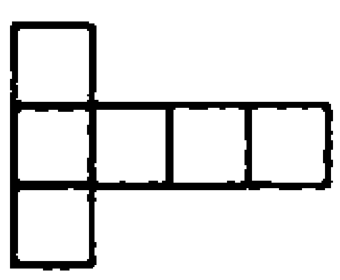
RPTA.: ....

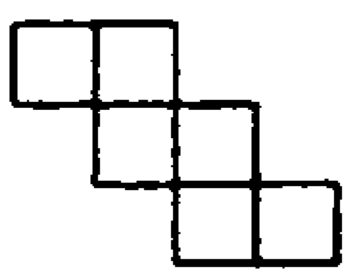
18 En el hexaedro *ABCD – EFGH*, regular mostrado, calcular su volumen si el área de la región *ABP* es $8\sqrt{2}$.

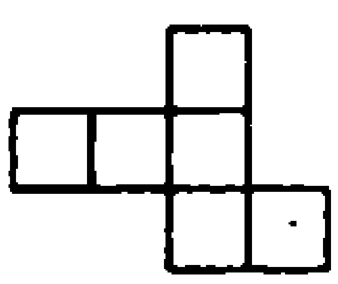


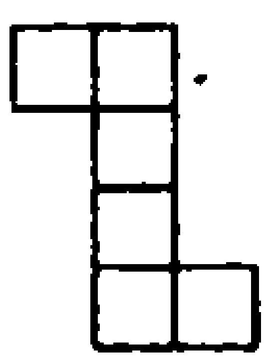
RPTA.: ....

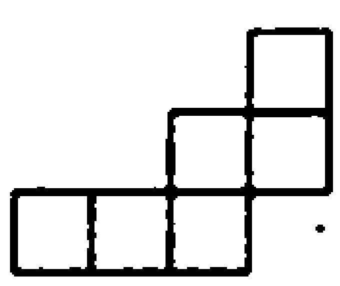
19 Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede construir un hexaedro regular.

A)


B)


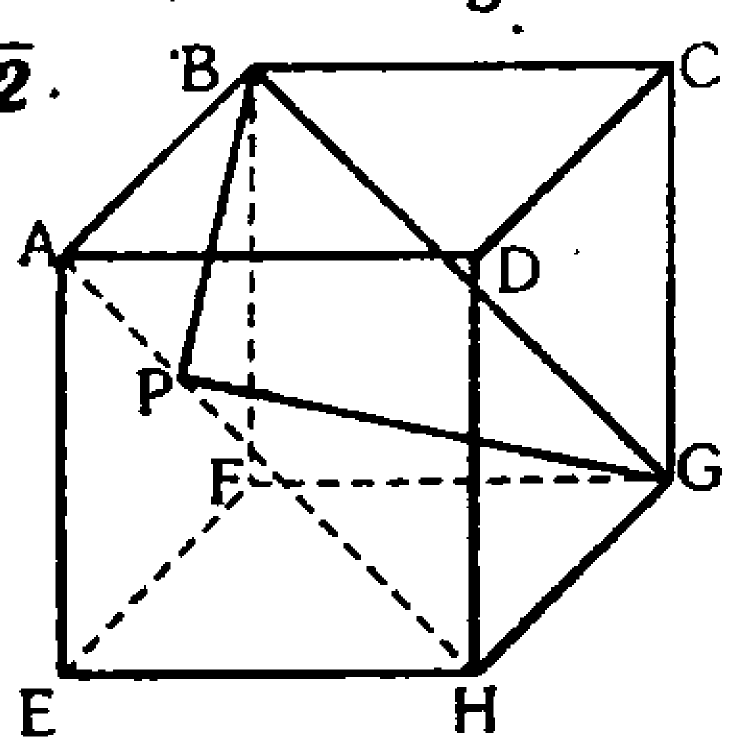
C)


D)


E)


RPTA.: ....

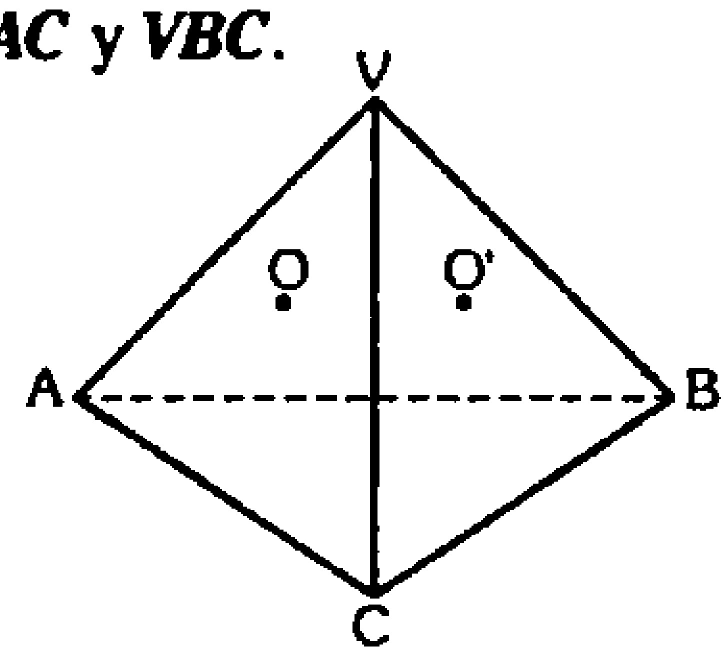
20 En el hexaedro regular *ABCD –EFGH*, calcular su volumen si el área de la región *BGP* es $18\sqrt{2}$.



A)125 B)64 C)216 D)81 E)144

21 En la figura calcular la arista del tetraedro regular *V – ABC* si, *OO'=6; O* y *O'* son centros de las caras *VAC* y *VBC*.

A)15
B)16
C)17
D)18
E)19



22 Calcular el volumen de un hexaedro regular si su diagonal mide $3\sqrt{3}$.

A)9 B)18 C)27 D)36 E)48

23 Calcular el volumen de un octaedro regular si su diagonal mide $\sqrt{6}$.

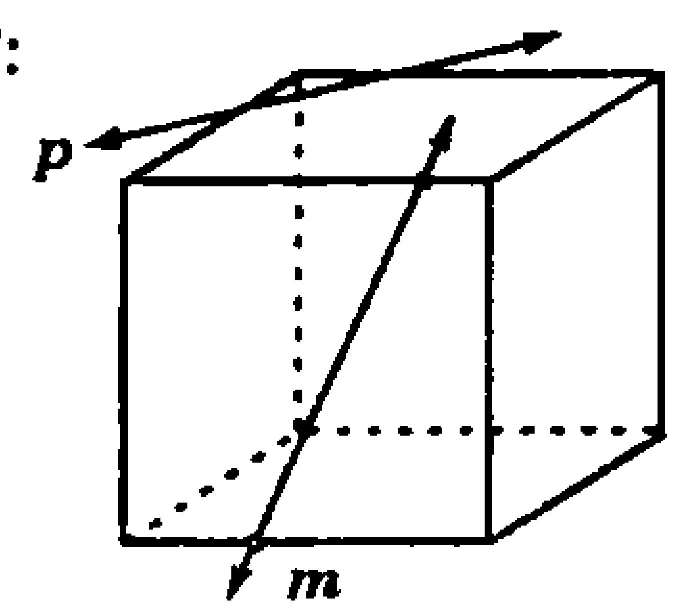
A)$3\sqrt{2}$ *B)*$2\sqrt{3}$ *C)6 D)*$\sqrt{6}$ *E)*$2\sqrt{6}$

24 Calcular el volumen de un tetraedro regular si el área de su superficie total es $6\sqrt{3}$.

A)$\sqrt{6}$ *B)12 C)6 D)*$2\sqrt{3}$ *E)*$\sqrt{3}$

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 La figura muestra un cubo, donde la recta *"p"* está en la cara superior y la recta *"m"* en la cara frontal. Entonces las rectas *"p"* y *"m"*:



A) Se cortan
B) No se cortan
C) Son paralelas
D) Son perpendiculares
E) Son colineales

02 Calcular el radio de la esfera inscrita en un cubo cuya área total es igual a *24*.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E)2,5

03 Si una de las diagonales de un hexaedro regular es igual a la diagonal de una de las caras de otro hexaedro regular, calcular la relación entre las áreas totales de estos dos cubos.

A) 2/3 B) 1/3 C) 4/3 D) 2 E) 3/4

04 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) Existen *5* poliedros regulares.

( ) Las caras de un tetraedro son triángulos equiláteros.

( ) El cubo tiene *6* diagonales

A) VVF B) VFF C) VVV
D) VFV E) FVF

05 El desarrollo de la superficie lateral de un cubo es una región rectangular cuya diagonal mide $\sqrt{17}$. Calcular el volumen del cubo.

A) 1 B) 8 C) 25 D) 36 E) 18

06 Las aristas de un hexaedro regular suman *S*. Hallar el volumen.

A) $\frac{S^3}{1528}$ *B)* $\frac{S^3}{1628}$ *C)* $\frac{S^3}{1728}$

D) $\frac{S^3}{828}$ *E)* $\frac{S^3}{1928}$

07 El radio de la superficie esférica circunscrita a un cubo es igual a $2\sqrt{3}$. Calcular el volumen del cubo.

A) 60 B) 62 C) 64 D) 66 E) 68

08 Se tiene un tanque cerrado en forma de un cubo de arista igual a *16 m*. El tanque se desea forrar con placas cuadradas de acero de lado igual a *4 m*. ¿Cuántas placas se necesitan?

A) 106 B) 72 C) 96 D)84 E) 90

09 Si la altura de un tetraedro regular es congruente con la diagonal de un octaedro regular, calcular la relación entre sus volúmenes.

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *B)* $\frac{3}{4}$ *C)* $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ *D)* $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *E)1*

10 Calcular la relación entre los volúmenes de un tetraedro regular y un cubo si los vértices del

tetraedro coinciden con las vértices del otro.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

11 Si la diagonal de un octaedro regular mide $3\sqrt{2}$, calcular su volumen.

A) $4,5\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{6}$ D) $9\sqrt{2}$ E) 12

12 Si se divide un octaedro regular en *2* pentaedros mediante un plano que pase por *4* de sus aristas, calcular el área total de un pentaedro. (El área total del octaedro es *600*)

A) $100(3+2\sqrt{3})$ B) 400 C) $100(3+\sqrt{3})$
D) $200(3-\sqrt{3})$ E) $200\sqrt{3}$

13 Se lima un metal en forma de cubo que pesa *18 kg*. ¿Cuánto pesa la viruta que se extrae como mínimo para que resulte un metal en forma de tetraedro regular.

A) 10 kg B) 12 kg C) 16 kg
D) 15 kg E) 18 kg

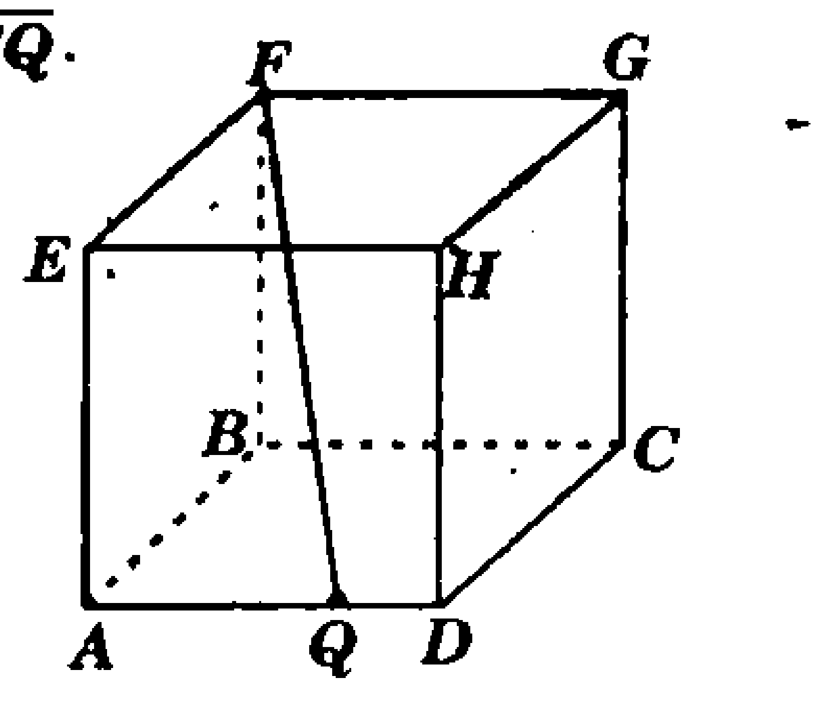
14 El área total de un hexaedro regular es $\sqrt[3]{3}$. Calcular el área total de un tetraedro regular equivalente.

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) 4 E) $\sqrt[3]{3}$

15 En un tetraedro regular *ABCD*, de arista *"a"*, se traza la altura $\overline{DH}$ y se toma *M* punto medio de $\overline{DH}$. Calcular la medida del ángulo *AMB*.

A) 60° B) 75° C) 90° D) 120° E) 135°

16 En el gráfico *ABCD–EFGH* es un hexaedro regular. Si: *AQ=3 m* y *QD=1 m*, calcular la distancia de *A* a $\overline{FQ}$.



A) $\frac{6\sqrt{41}}{41}$ B) $\frac{6\sqrt{43}}{43}$ C) $\frac{12\sqrt{82}}{41}$
D) $\frac{12\sqrt{41}}{41}$ E) $\frac{12\sqrt{43}}{43}$

17 Se tiene un cubo *ABCD–EFGH*. Si el segmento que une los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{DH}$ mide $2\sqrt{6}$, calcular el volumen del cubo.

A) 36 B) 82 C) 72 D) 64 E) 46

18 Se tiene un tetraedro regular *V–ABC*; la distancia del baricentro de la cara *ABC* hacia el punto medio de $\overline{VC}$ es *2*. Calcular el volumen del tetraedro.

A) $16\sqrt{6}$ B) $\frac{6}{5}\sqrt{10}$ C) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
D) $\frac{7}{2}\sqrt{6}$ E) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$

19 Se tiene un cubo *ABCD–EFGH*; en $\overline{AE}$ se ubica el punto *P* tal que $AP=\sqrt{3}$ y $m\measuredangle APB = m\measuredangle EPG$. Calcular *BH*.

A) $(\sqrt{3}+2)$ B) $\sqrt{6}$ C) $3(\sqrt{2}+1)$
D) $2(\sqrt{6}+1)$ E) 6

20 Se tiene un cubo tal que la distancia del centro de una cara a un vértice de la cara opuesta es *6*. Calcular el volumen del cubo.

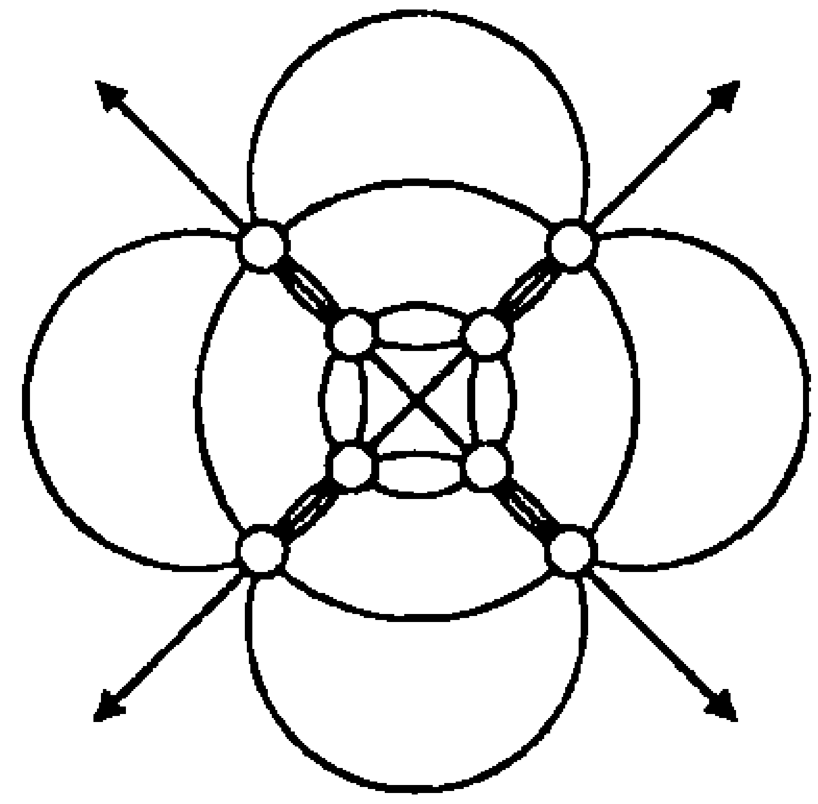
A) $15\sqrt{2}$ B) $48\sqrt{6}$ C) $6\sqrt{6}$
D) $24\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{6}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)B	3)A	4)B	5)A	6)C	7)C	8)C	9)C	10)B
11)D	12)C	13)B	14)A	15)C	16)C	17)D	18)E	19)C	20)B

PROBLEMAS RECREATIVOS

1 Colocar los números del *1* al *8* (sin repetir), de modo que cada circunferencia y cada diagonal sume lo mismo. (Los números, se colocan uno en cada círculo pequeño).

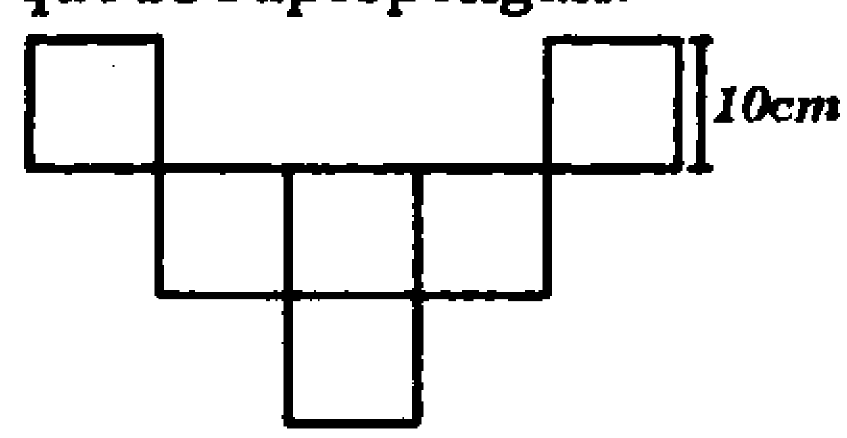


2 En un papel cuadrado se distribuyen los siguientes números, como en la figura ¿cuántos cortes rectos se deben realizar como mínimo, para dividir la hoja en *3* pedazos cuya suma de valores sean números pares consecutivos?

6	4	2
8	18	16
10	12	14

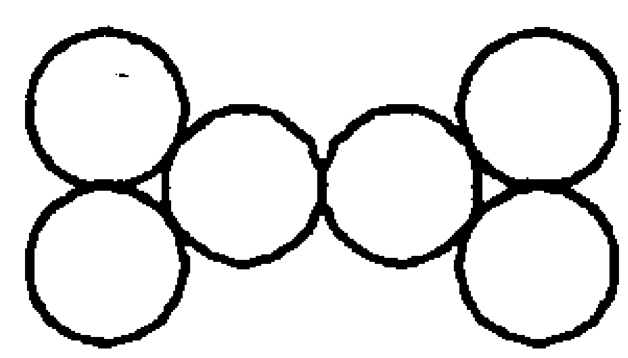
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3 Determine la figura de perímetro mínimo que se obtiene reagrupando de manera adecuada los cuadrados de la siguiente figura sin que se superpongan.



A) 100cm B) 70 C) 60 D) 90 E) 120

4 Si todas las monedas son del mismo tamaño :



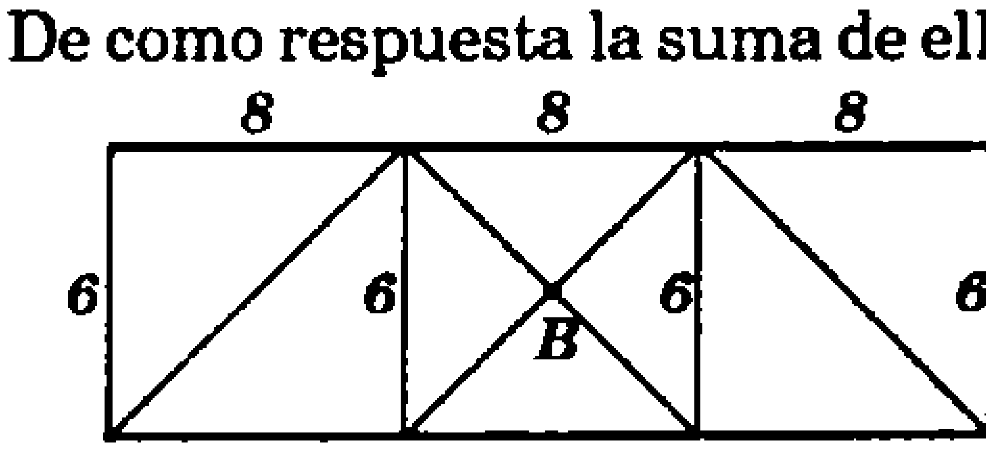
¿Cuántas monedas como máximo se pueden colocar tangencialmente alrededor de las monedas que se muestran?

A) 12 B) 8 C) 7 D) 15 E) 16

5 La figura muestra una autopista , se desea que un móvil recorra todas las líneas. ¿Cuál será la longitud del menor recorrido? Si

A) empieza en A
B) empieza y acaba en A
C) empieza en B
D) empieza y acaba en B

De como respuesta la suma de ellos



A) 511 B) 509 C) 512
D) 600 E) 506

PRISMA y PIRAMIDE

CAPITULO 109

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el Alumno estará en la capacidad de:

* *Deducir las características principales de prismas y piramides .*

* *Establecer las relaciones para el cálculo del área de estos sólidos.*

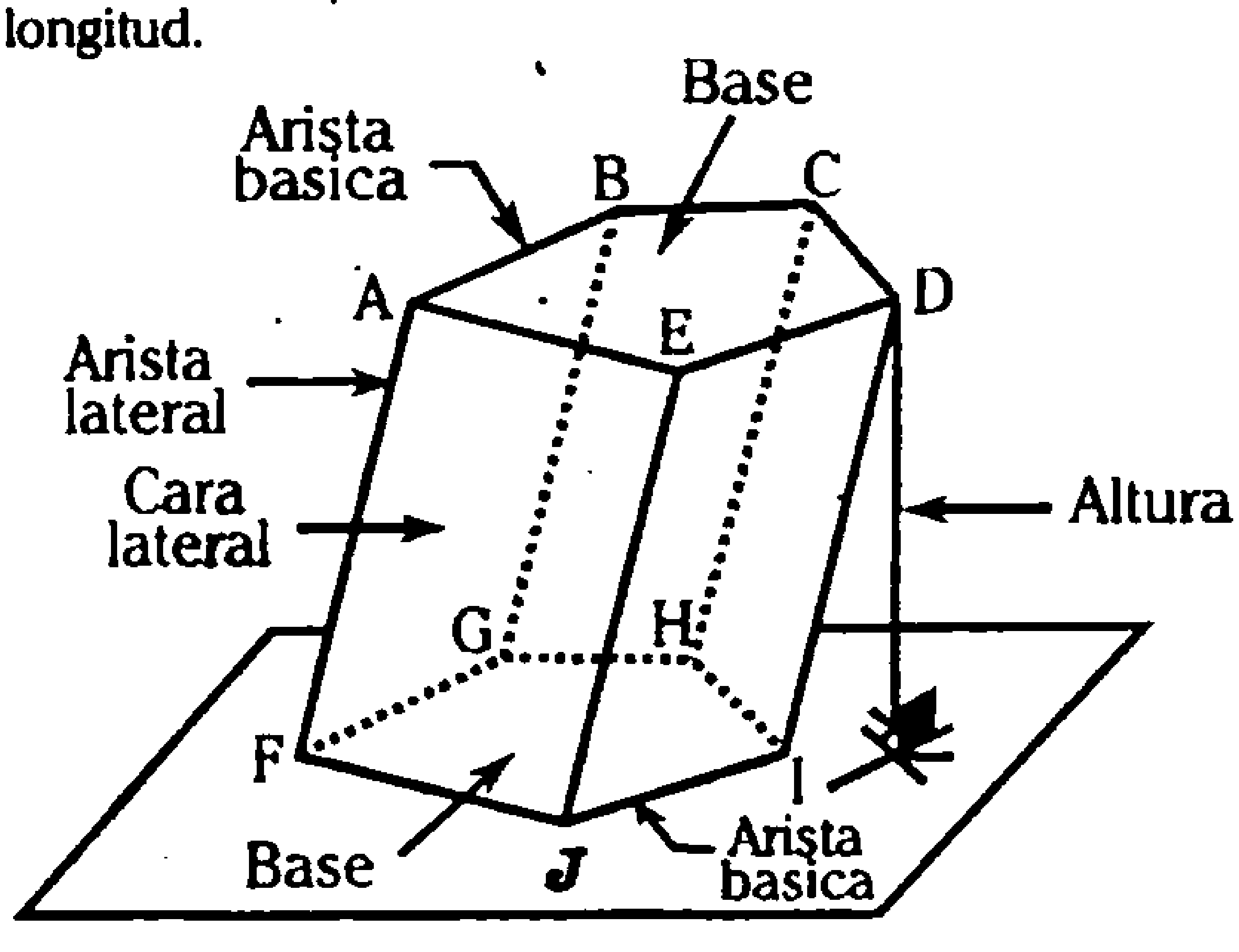
INTRODUCCION :

La palabra pirámide nos recuerda Egipto y los monumentos que ahí sirvieron de tumba a sus faraones. La más grande de éstas es la de Keops, que data del ***2600 a.J.C.*** aproximadamente, y es de base cuadrada y con unas dimensiones impresionantes: ***230 m*** de arista de la base y ***146 m*** de altura. Está formada por ***2,3*** millones de bloques de piedra, cada uno de los cuales pesa aproximadamente ***20*** toneladas.

PRISMA

Un prisma es un poliedro en el cual , dos de sus caras son regiones poligonales congruentes y paralelos denominados bases y el resto de caras son regiones paralelogramicas denominadas caras laterales .

Las aristas comunes entre las caras laterales y la bases se denominan aristas básicas y las aristas comunes entre las caras laterales se denominan aristas laterales, estas son paralelas y de igual longitud.



NOTACIÓN :

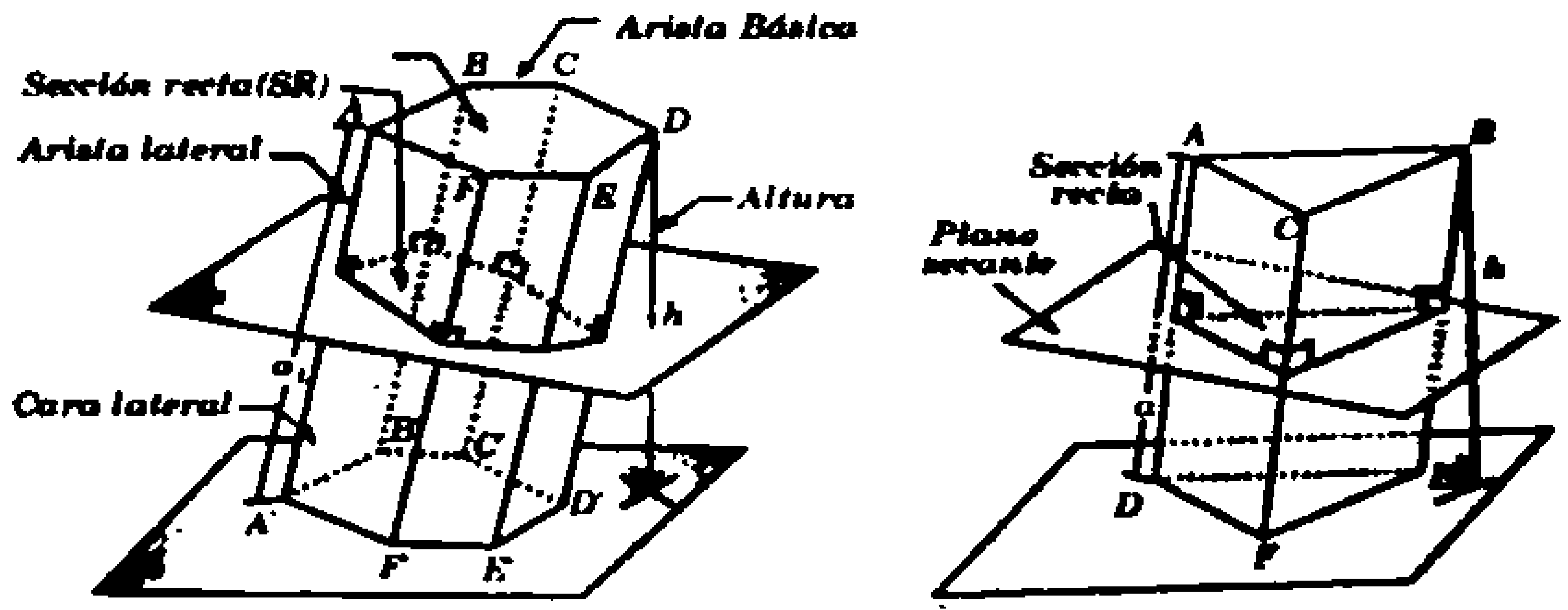
Prisma pentagonal *ABCDE – FGHIJ* ; un prisma es nombrado según él numero de lados que tenga su base, así tenemos por ejemplo , si la base tiene seis lados , se denomina prisma hexagonal.

SECCIÓN TRANSVERSAL :

Es la sección plana determinada en el prisma por un plano paralelo a su base.

SECCIÓN RECTA :

Es la sección determinada en el prisma por un plano perpendicular y secante a todas sus aristas laterales.



En todo prisma se realizan los siguientes cálculos.

ÁREA DE SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}) :

$$A_{SL}=\left(\begin{array}{l}\text{suma de áreas de}\\ \text{las caras laterales.}\end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A_{SL}=(2P_{SR})a_L}$$

$2P_{SR}$: Perímetro de la sección recta.

a_L : Longitud de la arista lateral.

AREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}):

$$\boxed{A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})} \ ; \ A_{base}=\left(\begin{array}{c}\text{área de}\\ \text{la base}\end{array}\right)$$

VOLUMEN (V) : $\boxed{V=(A_{base})h}$

h : longitud de la altura $\boxed{V=(A_{SR})h}$

A_{SR} : área de la sesión recta .

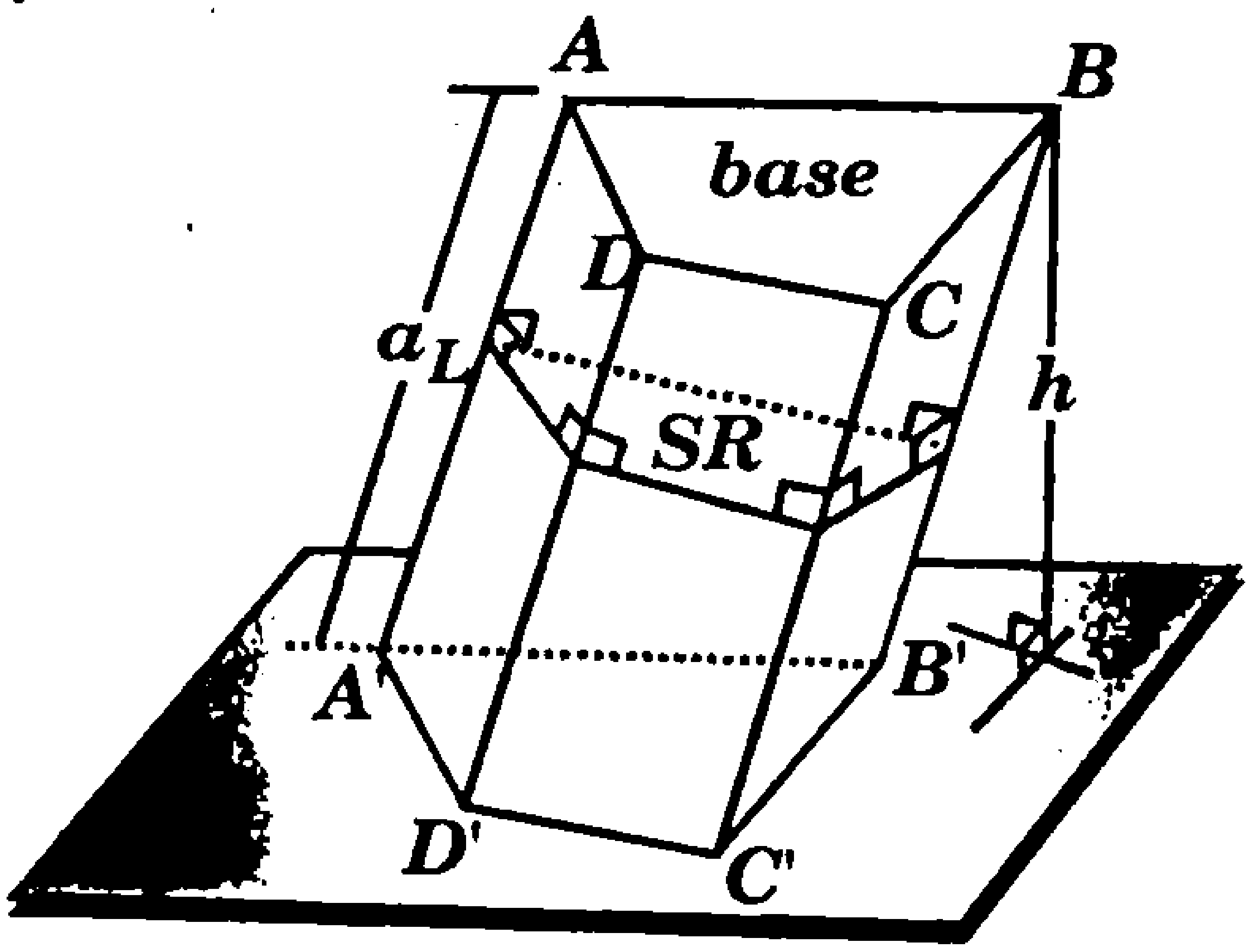
a_L : longitud de la arista lateral .

CLASIFICACIÓN

Los prismas se clasifican según la inclinación de su base, en:

PRISMA OBLICUO :

Es aquel prisma cuyas aristas laterales no son perpendiculares a las bases .

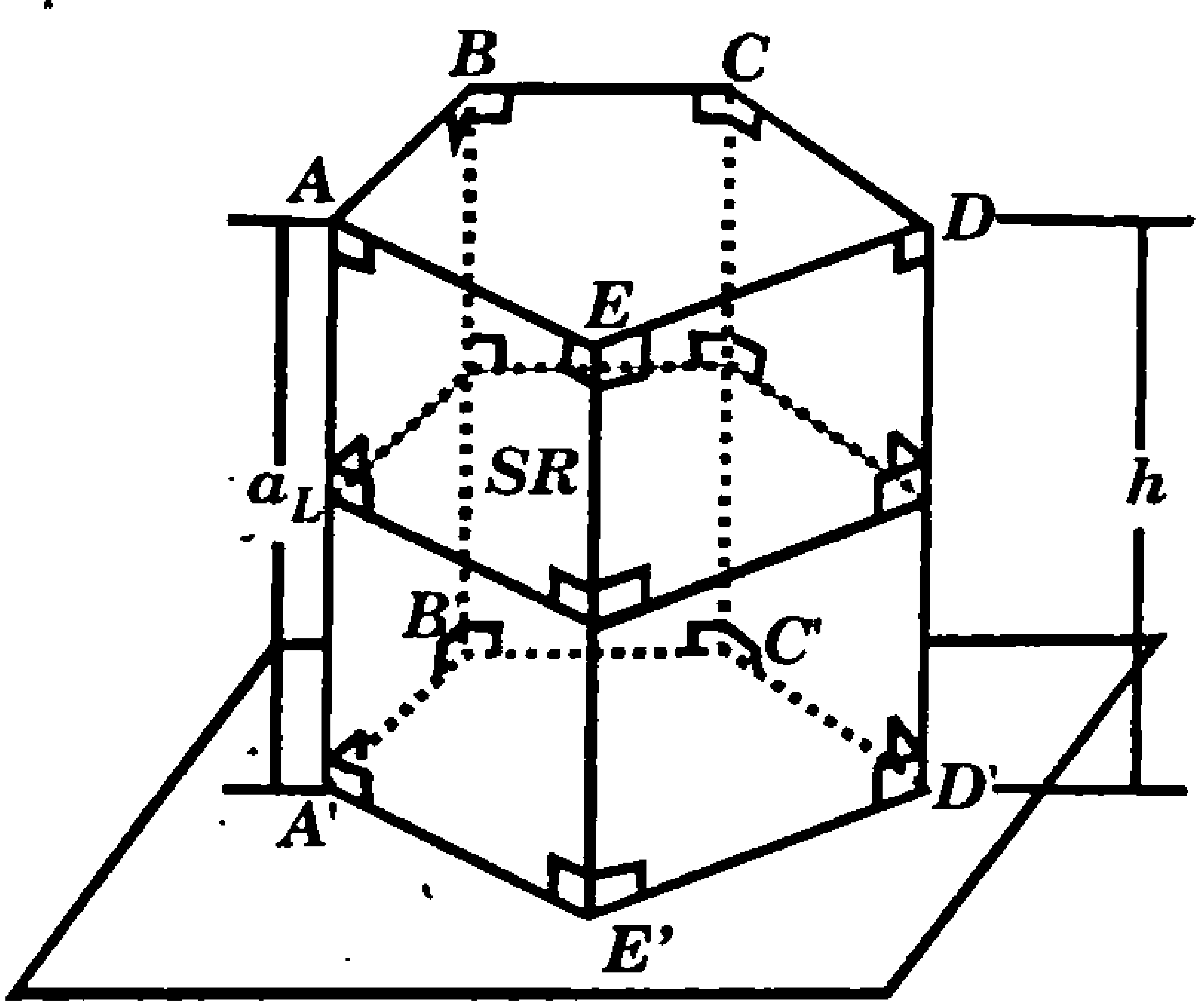


* En el gráfico , se tiene el prisma cuadrangular oblicuo *ABCD – A'B'C'D'*

Se cumple : $\boxed{h<a_L}$ ∧ $\boxed{A_{SR}<A_{base}}$

PRISMA RECTO :

Es aquel prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases .



* En el gráfico , se tiene el prisma pentagonal recto *ABCDE – A'B'C'D'E'*·

Se cumple : $\boxed{a_L=h}$ ∧ $\boxed{A_{SR}=A_{base}}$

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL}):

$$\boxed{A_{SL}=(2P_{base})\,a}$$

$2P_{base}$: perímetro de la base .

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}):

$$\boxed{A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})}$$

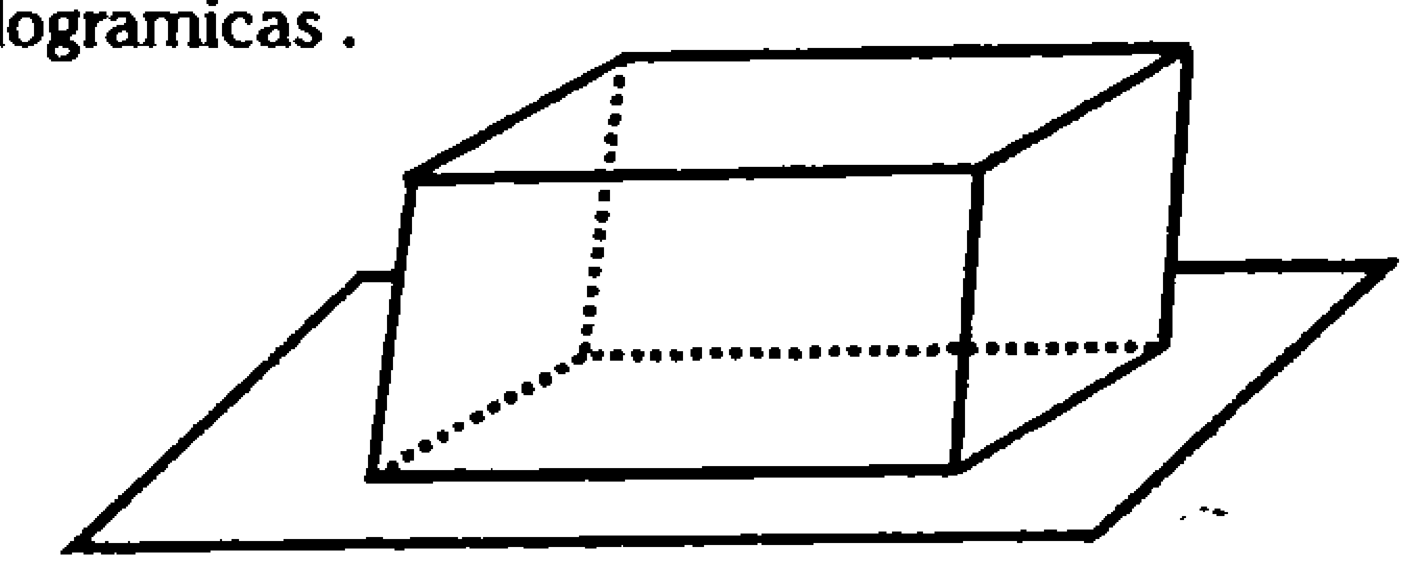
A_{base} : Área de la base .

VOLUMEN (V): $\boxed{V=(A_{base})h}$

h : longitud de la altura

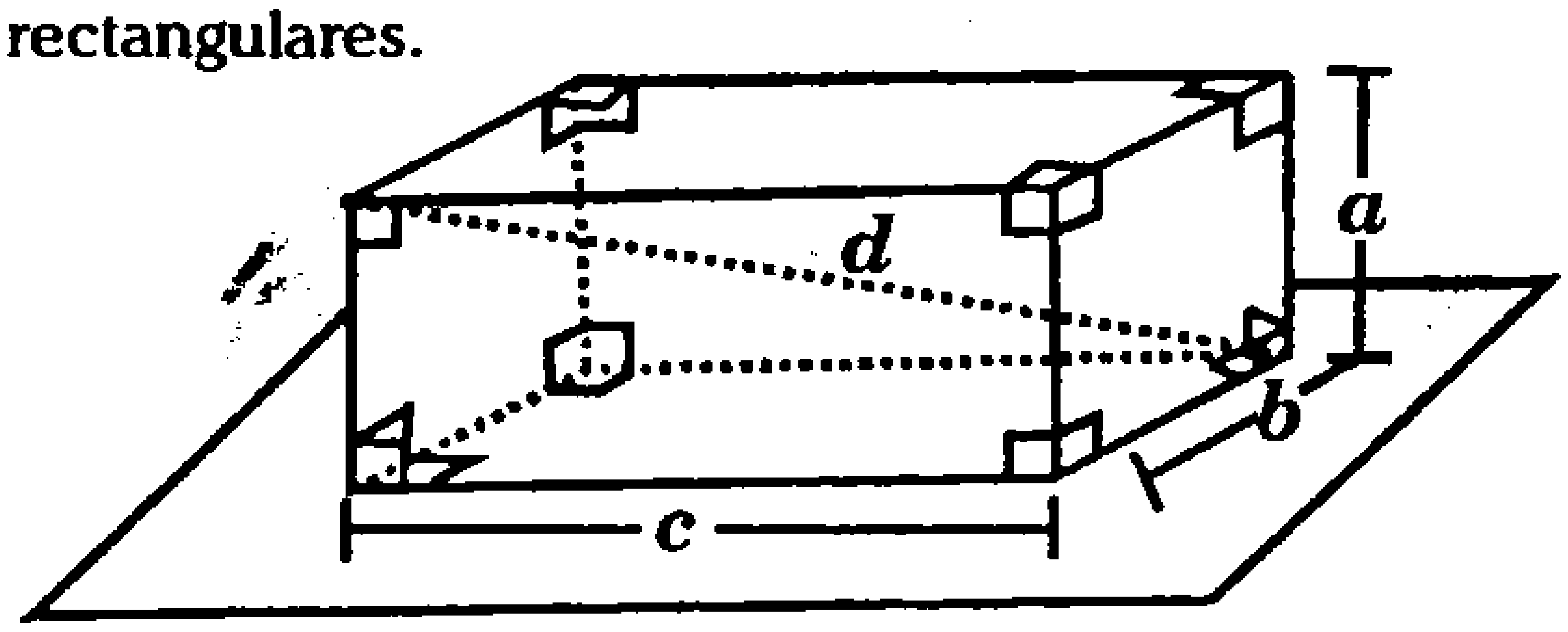
PARALELEPÍPEDO

Es aquel prisma cuya bases son regiones paralelogramicas .



PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR , RECTOEDRO U ORTOEDRO

Es aquel Paralelepípedo cuyas caras son regiones rectangulares.



a,b,c dimensiones del paralelepípedo rectangular

Tiene cuatro diagonales , las cuales son concurrentes y de igual longitud .

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

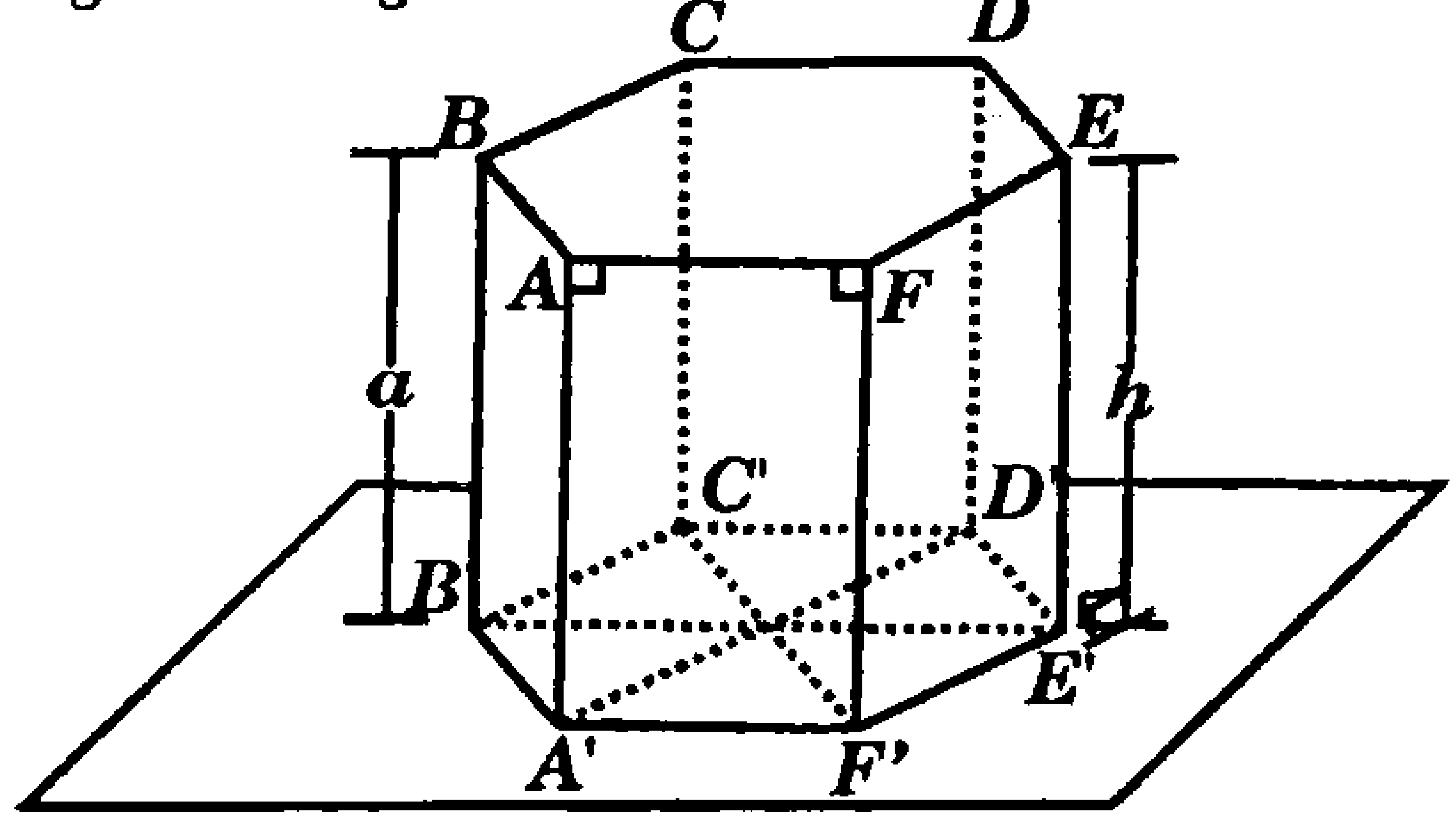
ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST}) :

$$\boxed{A_{ST}=2(ab+bc+ac)}$$

VOLUMEN (V) : $\boxed{V = abc}$

PRISMA REGULAR

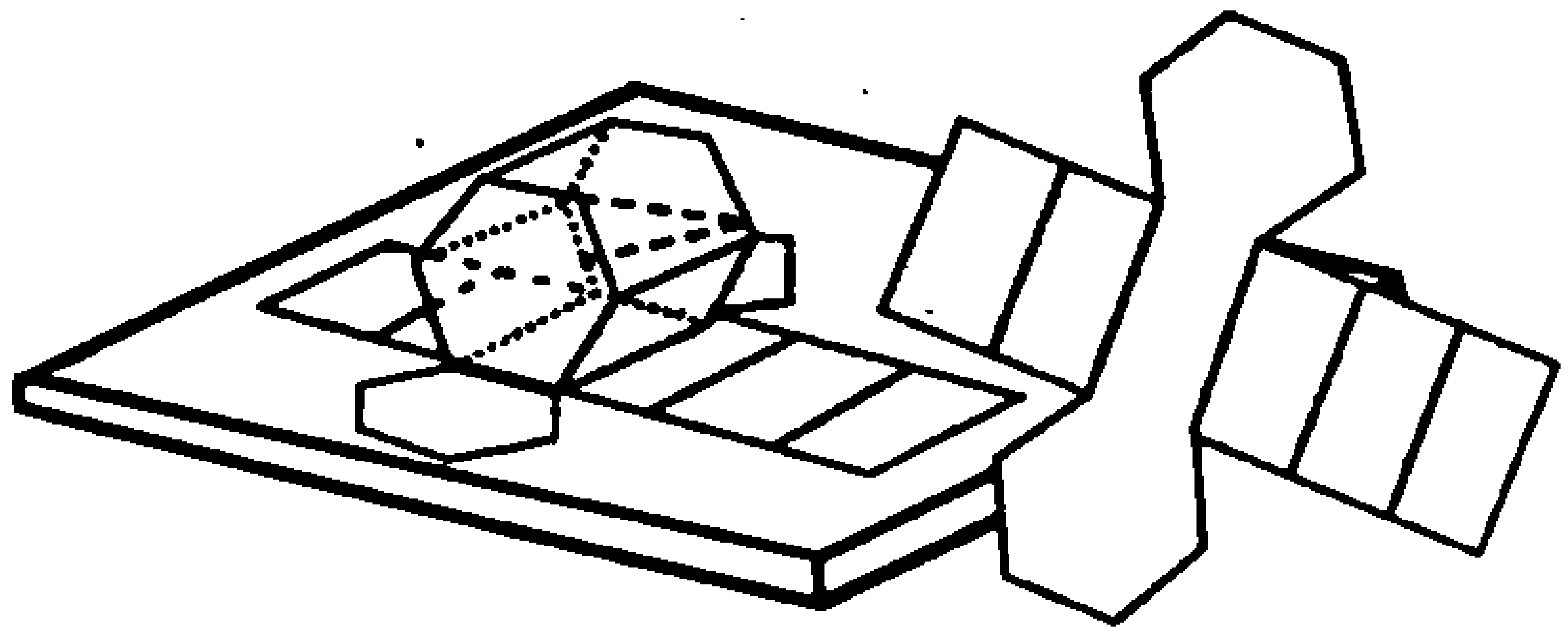
Es aquel prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares .



* En la figura, se muestra un prisma hexagonal regular *ABCDEF – A'B'C'D'E'F'*

$$a = h$$

Para construir cajas cubicas , hexagonales , para empaquetado de artefactos, es necesario realizar el diseño sobre una plancha de cartón y y luego realizar el corte correspondiente , tal como se muestra en la figura.

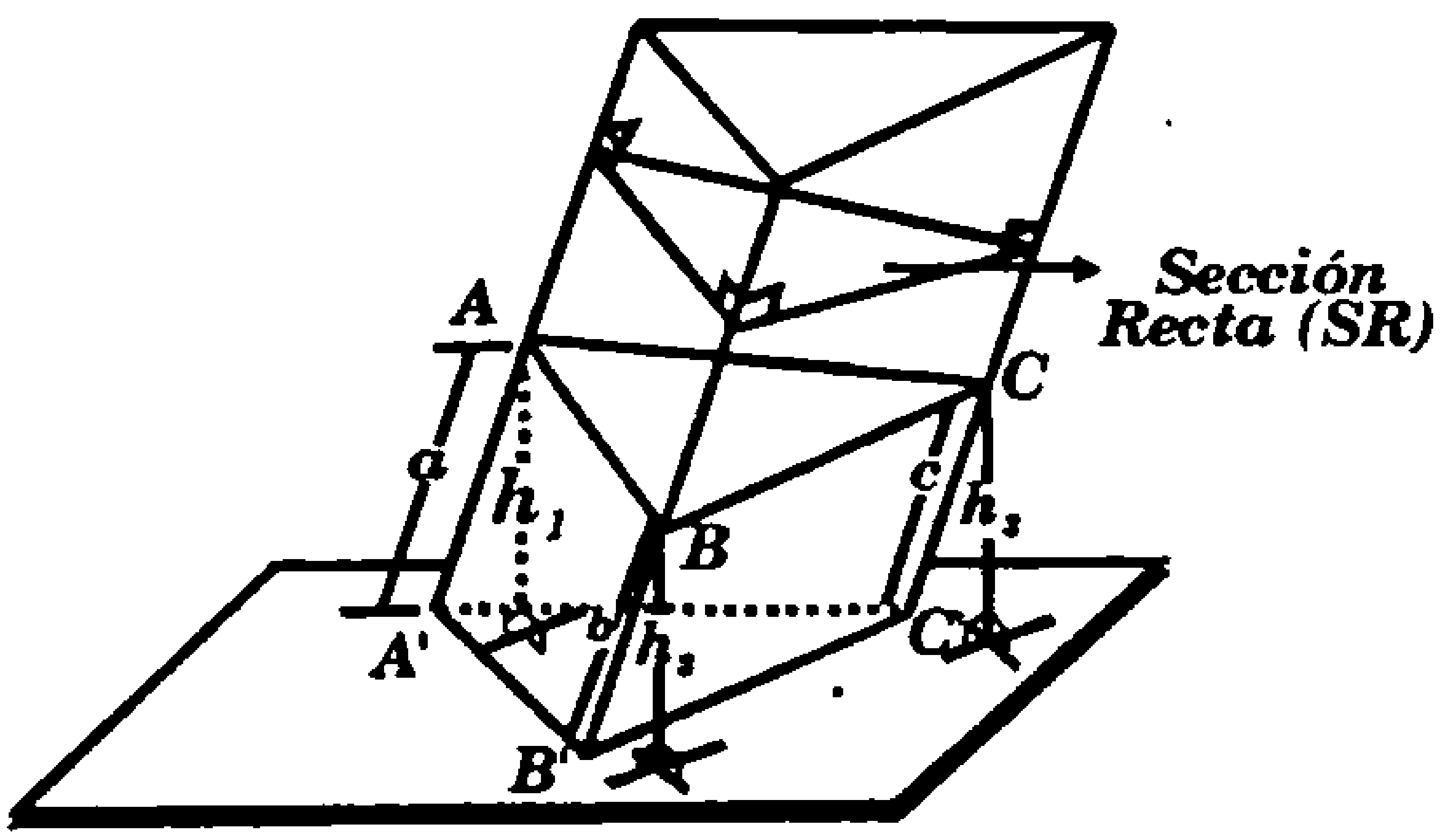


TRONCO DE PRISMA

Es una porción de prisma comprendida entre una de sus bases y un plano no paralelo a las bases secante a todas sus aristas laterales.

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR OBLICUO

Es aquel determinado en un prisma triangular.



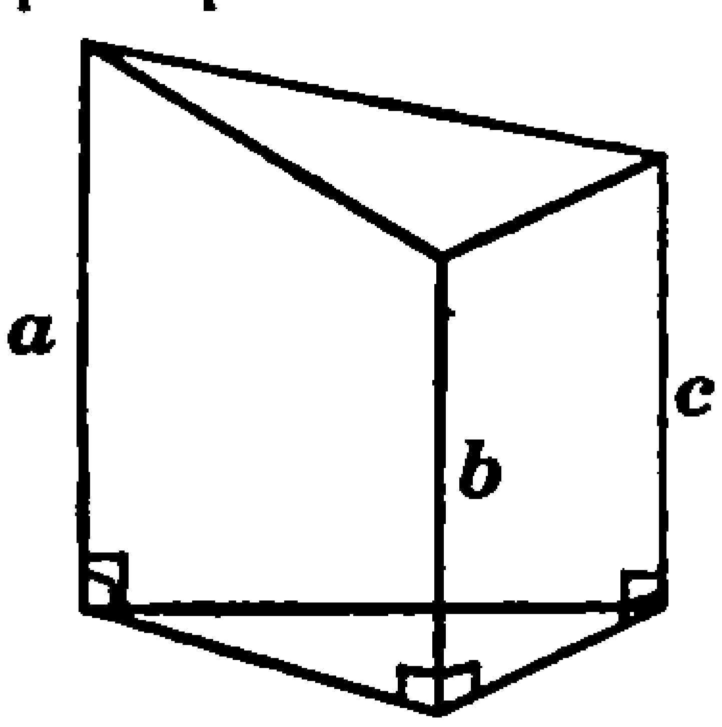
En el gráfico, se tiene el tronco de prisma $ABC - A'B'C'$

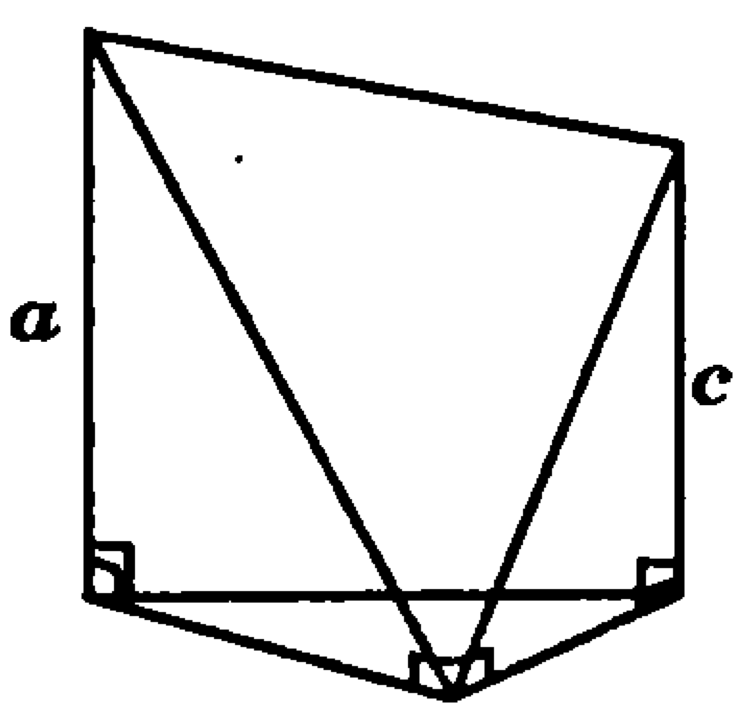
VOLUMEN (V) :

$$V=(A_{A'B'C'})\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right) \qquad V=(A_{SR})\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

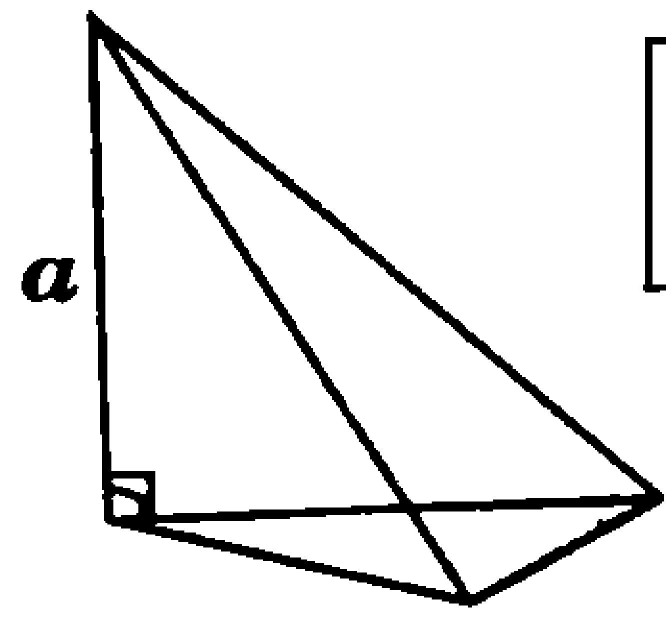
VOLUMEN DE UN TRONCO DE PRISMA RECTO TRIANGULAR

El volumen de un tronco de prisma recto de base triangular se calcula multiplicando el área de la base por el promedio de las longitudes de sus aristas





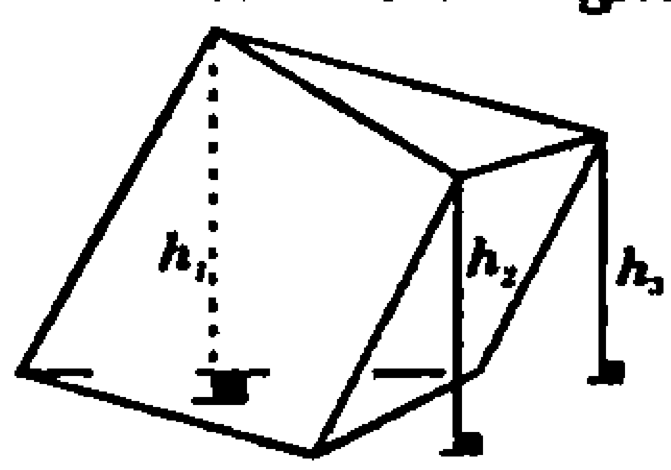
$$V=A_{(Base)}\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \qquad V=A_{(Base)}\left(\frac{a+c}{3}\right)$$



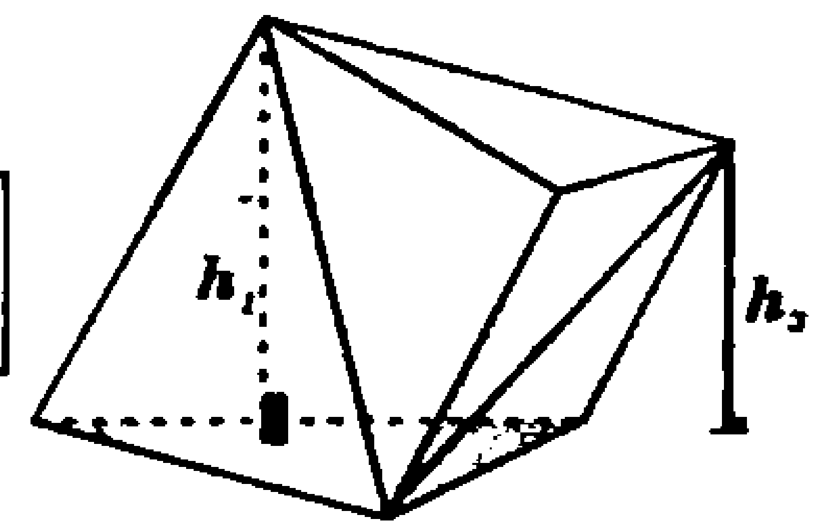
$$V=A_{(Base)}\left(\frac{a}{3}\right)$$

VOLUMEN DE UN TRONCO DE PRISMA OBLICUO TRIANGULAR

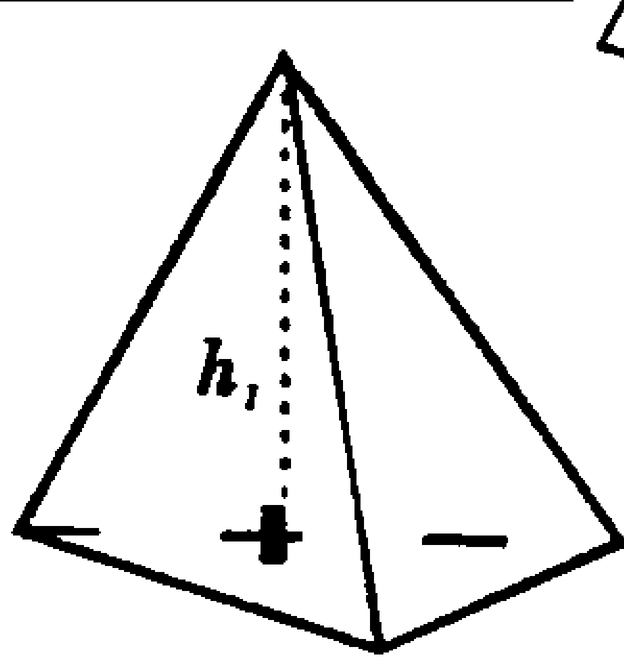
El volumen de un tronco oblicuo de base triangular se obtiene al multiplicar el área de su base por el promedio de las longitudes de sus alturas .



$$V = A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_2+h_3}{3}\right)$$



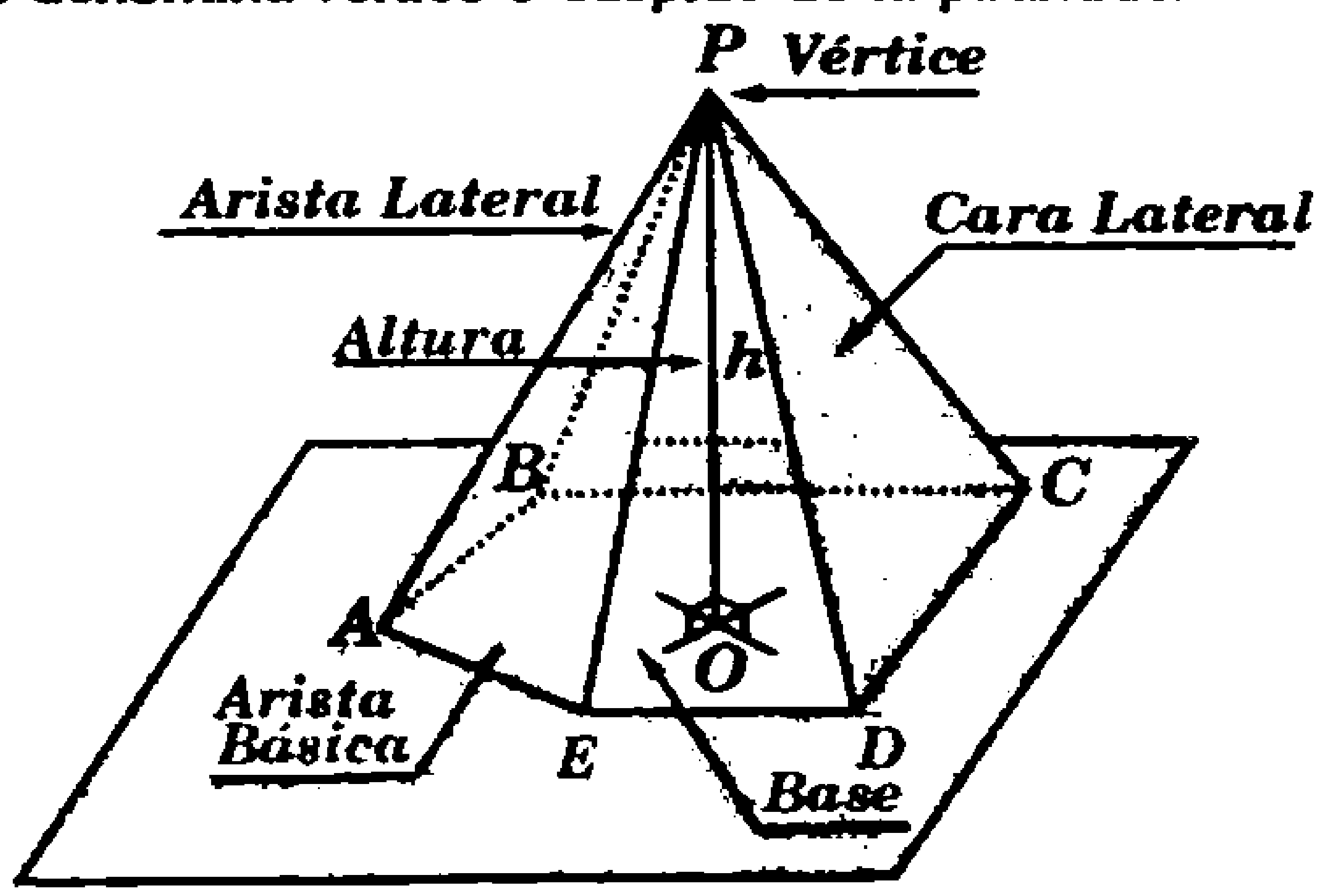
$$V = A_{(Base)}\left(\frac{h_1+h_3}{3}\right)$$



$$V = A_{(Base)}\left(\frac{h_1}{3}\right)$$

PIRÁMIDE

Es aquel poliedro en el cual una de sus caras es una región poligonal cualquiera denominada base y sus otras caras son regiones triangulares denominadas caras laterales , todas ellas tienen un vértice en común el cual se le denomina vértice o cúspide de la pirámide.



* En la figura se muestra una pirámide pentagonal $P - ABCDE$.

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

$$A_{SL}=\left(\begin{array}{l}\text{Suma de las áreas}\\\text{de las caras laterales}\end{array}\right)$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST})

$$A_{ST}=A_{SL}+A_{base}$$

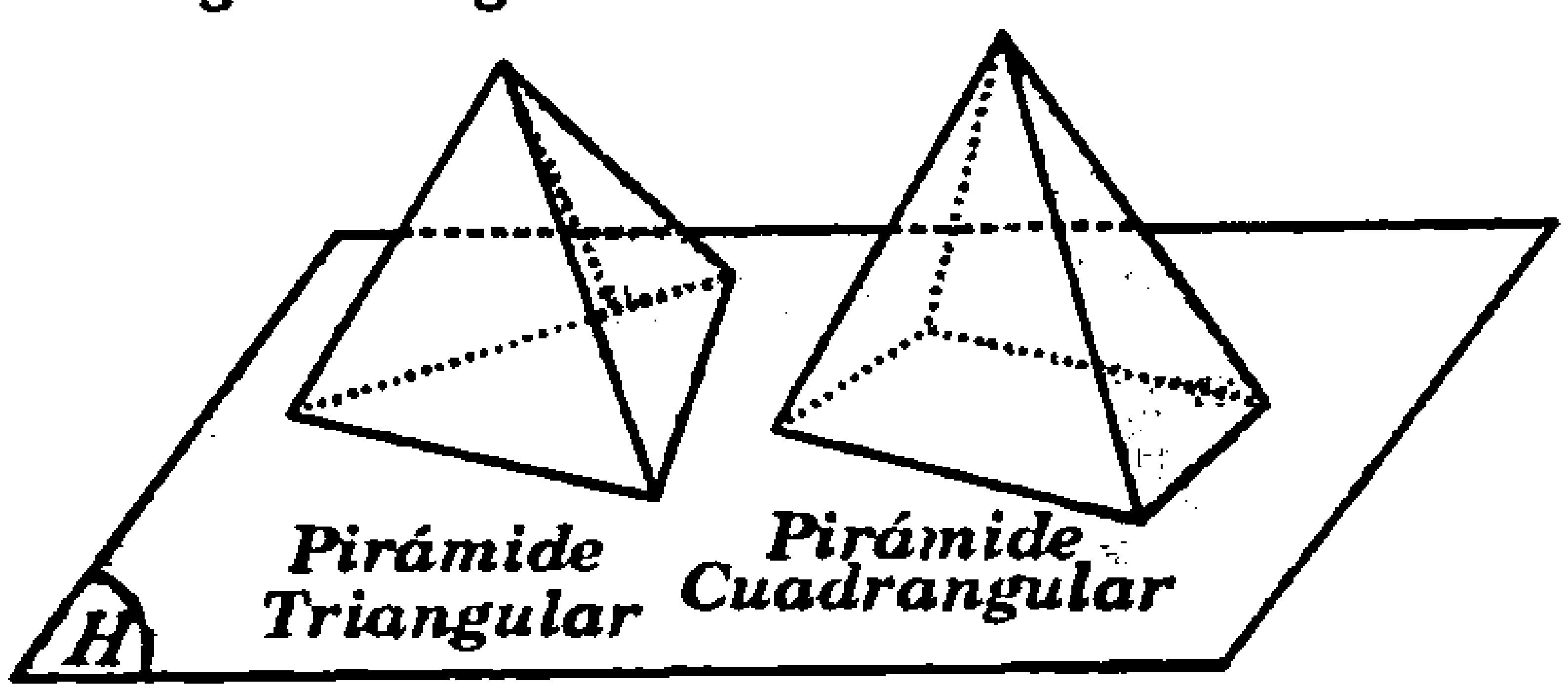
A_{base} : Área de la base

VOLUMEN (V) : $V=\frac{(A_{base})h}{3}$

h: longitud de la altura de la pirámide.

NOTA :

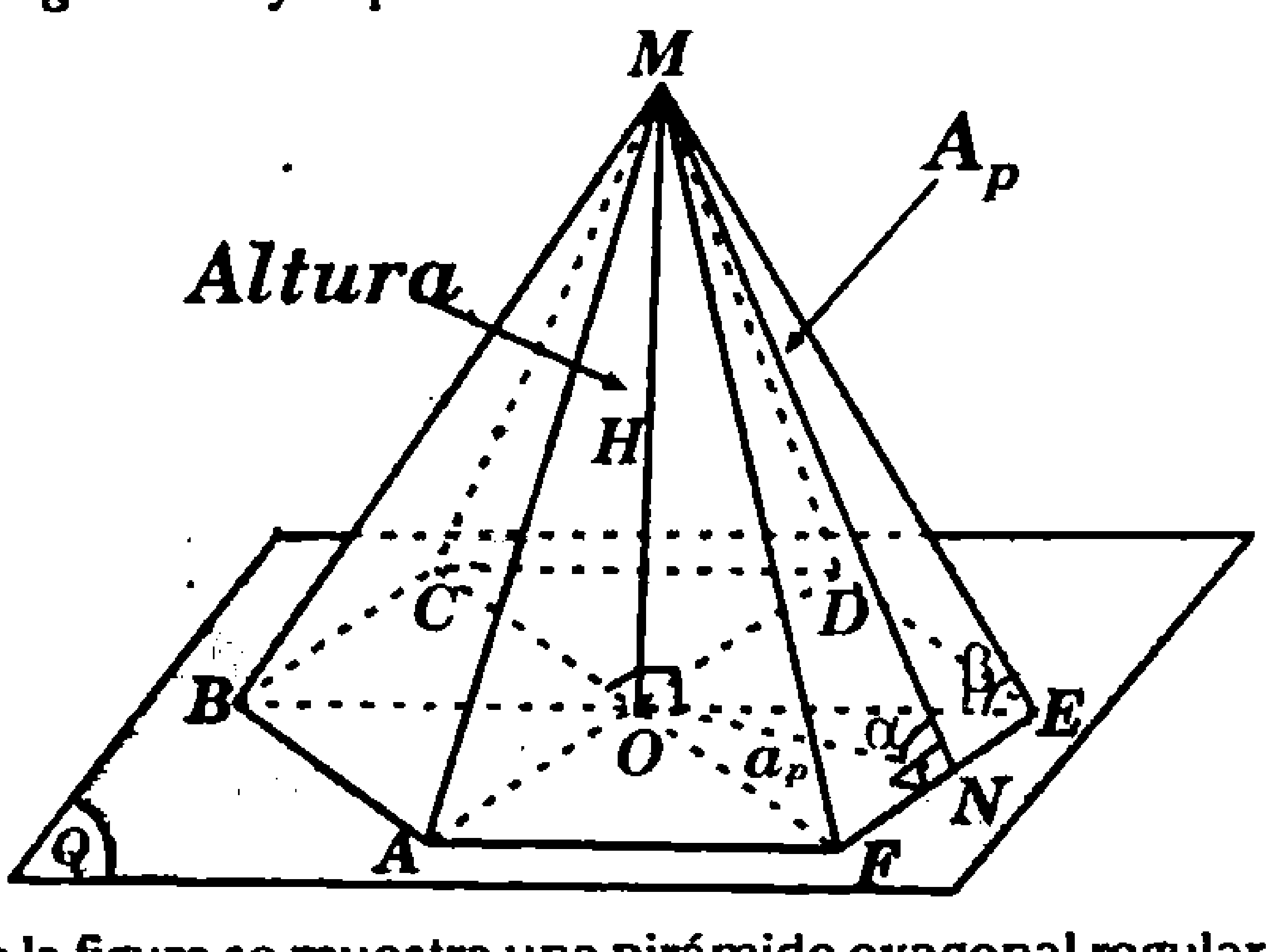
De acuerdo al número de lados de su base ; las pirámides pueden ser triangulares , cuadrangulares pentagonales ,......si su base tiene tres , cuatro , cinco..... lados respectivamente ; tal como se muestra en la siguiente figura.



PIRÁMIDE REGULAR

Es aquella pirámide cuya base está limitada por un polígono regular (triángulo equilátero , cuadrado , pentágono regular, etc.) y, Además, tiene todas sus aristas laterales de igual longitud.

En toda pirámide regular las caras laterales son congruentes y el pie de altura es el centro de la base



En la figura se muestra una pirámide exagonal regular ***M – ABCDEF***.

* A_p : apotema de la pirámide $(MN=A_p)$
* a_p : apotema del polígono regular ***ABCDEF*** .
* O : centro de la base.
* $\overline{MO}$: altura de la pirámide , O es el pie de la dicha altura .
* α : medida del diedro formado por una cara lateral con la base.
* β : medida del ángulo formado por una arista lateral con la base.

APOTEMA DE LA PIRÁMIDE REGULAR (A_p)

Es la perpendicular trazada del vértice de la pirámide hacia una arista básica .

En toda pirámide regular se cumple:

♠ Las caras laterales están limitados por triángulos isósceles congruentes entre sí.

♠ Las caras laterales y la base forman ángulos diedros de medidas iguales.

♠ Las aristas laterales forman con la base ángulos de medidas iguales.

♠ ∆ *MON* : aplicado por el teorema de Pitágoras.

$$(A_p)^2=(a_p)^2+H^2$$

H : longitud de la altura de la pirámide.

Área de la Superficie Lateral : $A_{SL}=P(A_p)$

p: semiperímetro de la base

Área de la Superficie Total : $A_{ST}=A_{SL}+A_{base}$

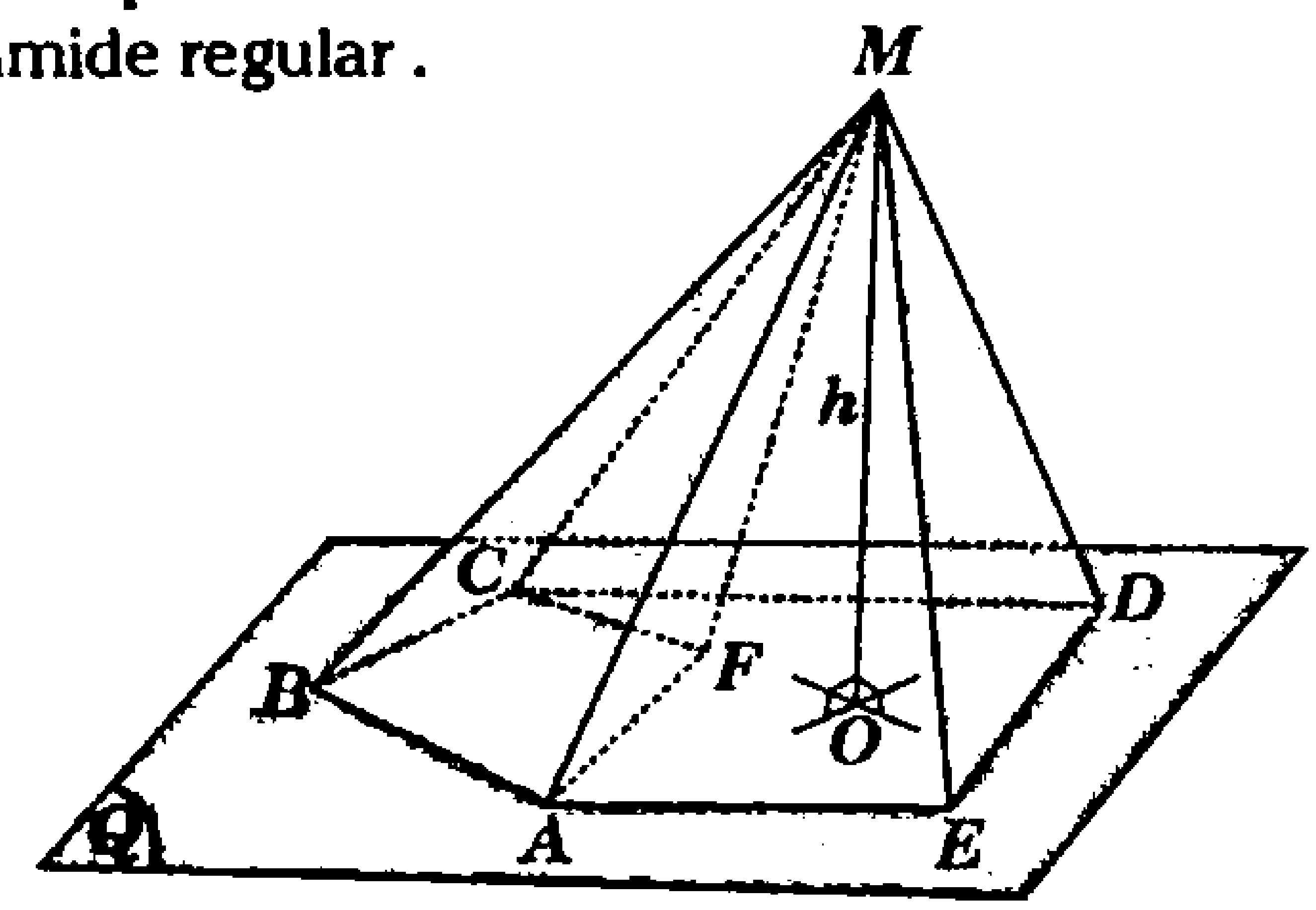
A_{base} : área de la base

VOLUMEN (V) : $V=\frac{(A_{base})\times H}{3}$

h : longitud de la altura de la pirámide.

PIRÁMIDE IRREGULAR

Es aquella que no tiene todas las características de una pirámide regular .



En el gráfico se muestra las siguientes pirámides irregulares:

* Pirámide pentagonal ***M – ABCDE***
* Pirámide cuadrangular ***M – ABCF***

* Pirámide pentagonal $M - AFCDE$

En cada una de las pirámides se aplica las siguientes fórmulas:

Área de la Superficie Lateral (A_{SL})

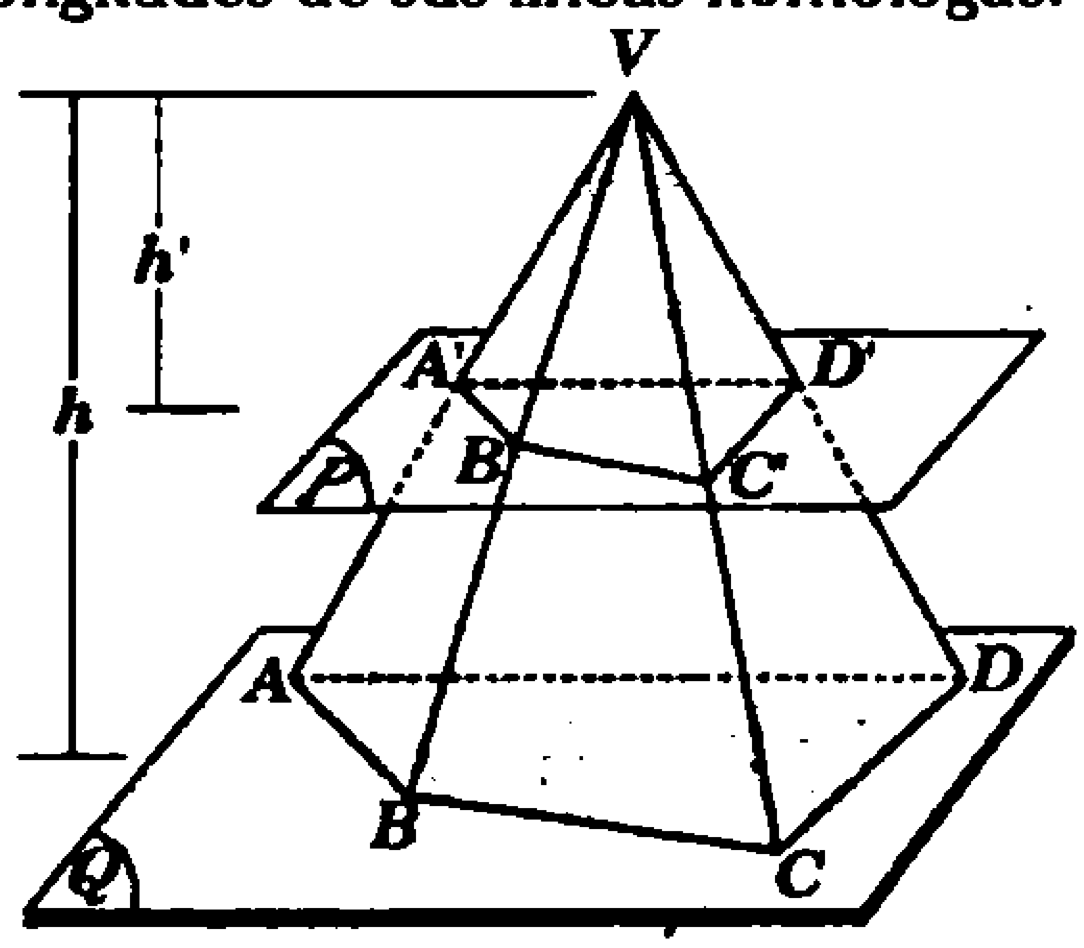
$$A_{SL} = \left(\begin{array}{c}\text{Suma de las áreas} \\ \text{de las caras laterales}\end{array}\right)$$

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Todo plano secante a una pirámide y paralelo a su base, determina una pirámide parcial semejante al total.

En dos pirámides semejantes se cumple:

- Sus líneas homólogas son proporcionales.
- Las áreas, de sus bases, de sus superficies totales; son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus líneas homólogas.
- Sus volúmenes son proporcionales a los cubos de las longitudes de sus líneas homólogas.



* En el gráfico, Si $\square P \parallel \square Q$

$\Rightarrow$ Pirámide $V - ABCD \sim$ pirámide $V - A'B'C'D'$

LÍNEAS HOMÓLOGAS PROPORCIONALES

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} = k$$

k : razón de semejanza.

RAZÓN DE ÁREAS :

$$\frac{A_{ST(V-A'B'C'D')}}{A_{ST(V-ABCD)}} = \frac{(VA')^2}{(VA)^2} = \frac{h'^2}{h^2} = k^2$$

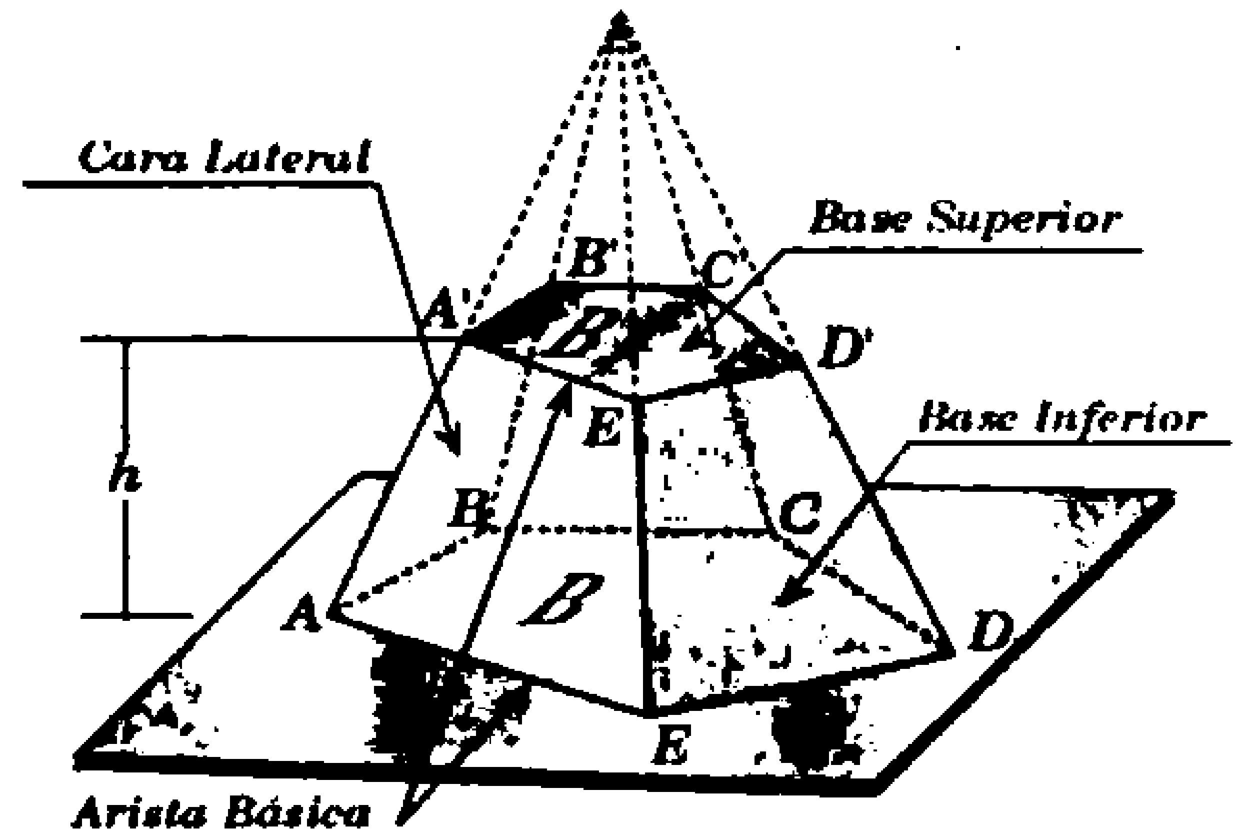
RAZÓN DE VOLUMEN :

$$\frac{A_{ST(V-A'B'C'D')}}{A_{ST(V-ABCD)}} = \frac{(VA')^3}{(VA)^3} = \frac{h'^3}{h^3} = k^3$$

TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la porción de pirámide comprendida entre la base y la sección plana determinada por un plano secante a la pirámide y paralelo a su base.

A la base y a dicha sección se le denomina base del tronco de pirámide; sus caras laterales son regiones trapeciales, sus bases son regiones poligonales semejantes y su altura es la distancia entre sus bases.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide pentagonal.

NOTACIÓN : ABCDE ; A'B'C'D'E'

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

$$A_{SL} = \sum(\text{áreas de las caras laterales})$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST})

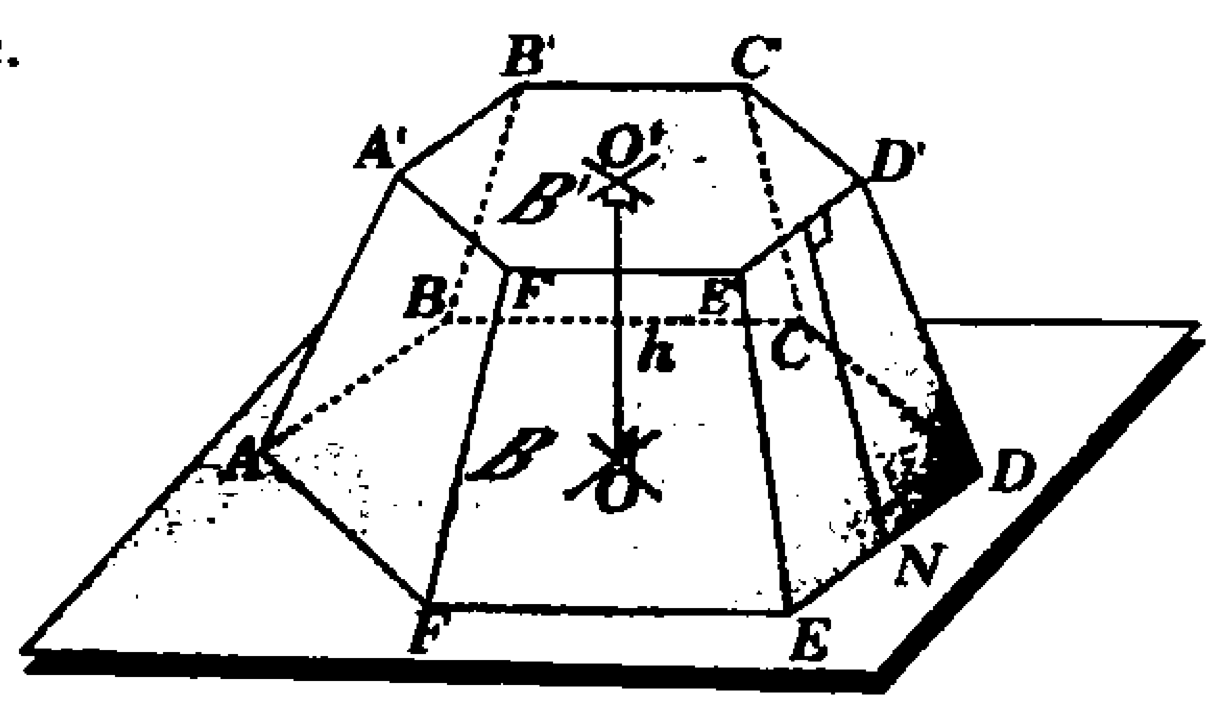
$$A_{ST} = A_{SL} + B + B'$$

VOLUMEN (V) : $V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$

* *B y B' : Área de las bases.*

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Es aquel tronco de pirámide cuyas bases son regionales poligonales regulares de modo que sus centros están sobre una misma recta perpendicular a dichas bases. Sus caras laterales son regionales trapeciales isósceles congruentes entre sí, la altura de cada una de ellas se denomina apotema del tronco de pirámide.



En el gráfico, se muestra un tronco de pirámide exagonal regular.

NOTACIÓN: ABCDEF – A'B'C'D'E'F'

* $\overline{MN}$: Apotema del tronco de pirámide regular ($MN = a_p$)
* O y O' : Centro de las bases ($OO' = h$)

Área de la Superficie Lateral (A_{SL}):

$$A_{SL} = (p+p')a_p$$

p : semiperímetro de la base **ABCDEF**

p': semiperímetro de la base **A'B'C'D'E'F'**

PROBLEMAS RESUELTOS

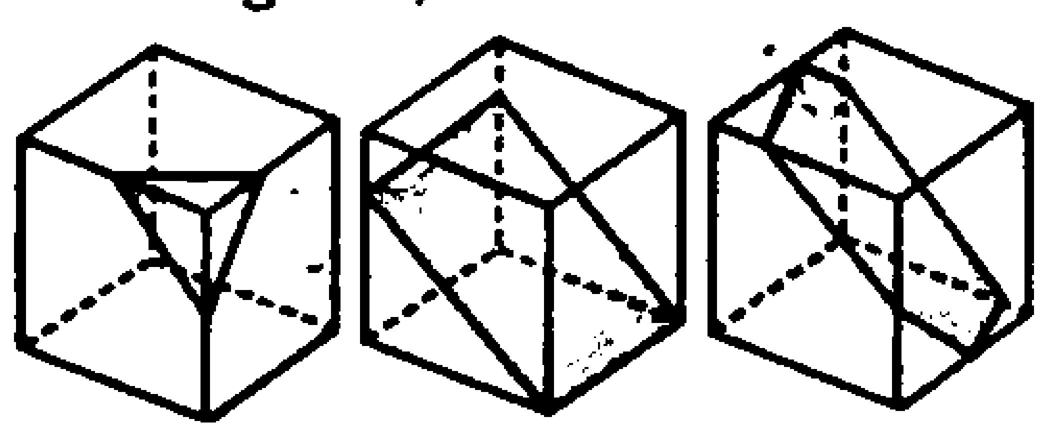
PROBLEMA 1 :

La altura de un prisma recto mide **1 u**, su base es una región limitada por un rombo cuyo lado mide **2 u** y su ángulo agudo mide **30°**. Por un lado de la base se traza un plano que interseca al prisma y está inclinado un ángulo de **60°** con respecto de la base luego el área de la sección (en u^2) que resulta en el prisma es:

A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ D) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

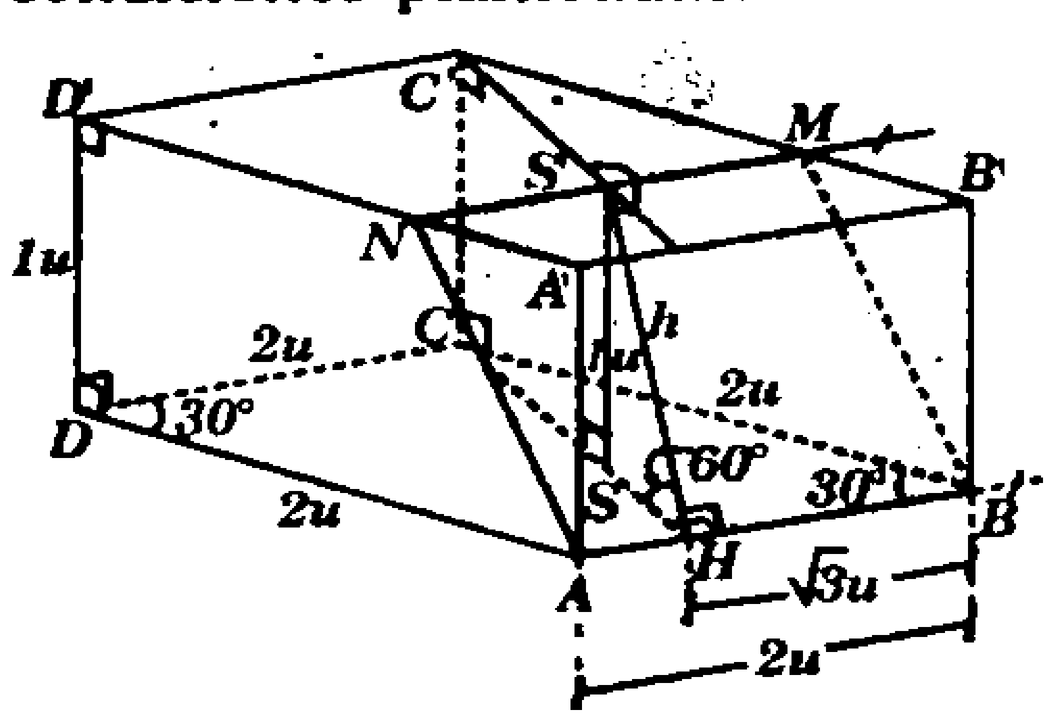
RESOLUCIÓN :

• Al trazar planos secantes a un sólido, este determina secciones planas, que varían de acuerdo al ángulo de inclinación y el lugar por donde interseca. Así, un plano secante en un prisma puede determinar una sección triangular, cuadrangular , ...



y para poder aprovechar el ángulo de inclinación es preciso asociarlo con el teorema de las tres perpendiculares.

Graficamos el prisma según las condiciones planteadas:



donde **ABCD** es un rombo de lado **2 u** y la $m\measuredangle ABC=30°$.

Si trazamos :

$\overline{CH} \perp \overline{AB} ... 1.^a \perp$

$\overline{SS'} \perp \overline{CH} ... 2.^a \perp \Rightarrow \overline{S'H} \perp \overline{AB} ... 3.^a \perp$

Sea **S'H=h**.

Como la altura del prisma es **1 u**

$$\Rightarrow S'S=1u$$

Luego, en el $\triangle S'SH$:

$$h\,sen60°=1u \Rightarrow h=\frac{2}{\sqrt{3}}u$$

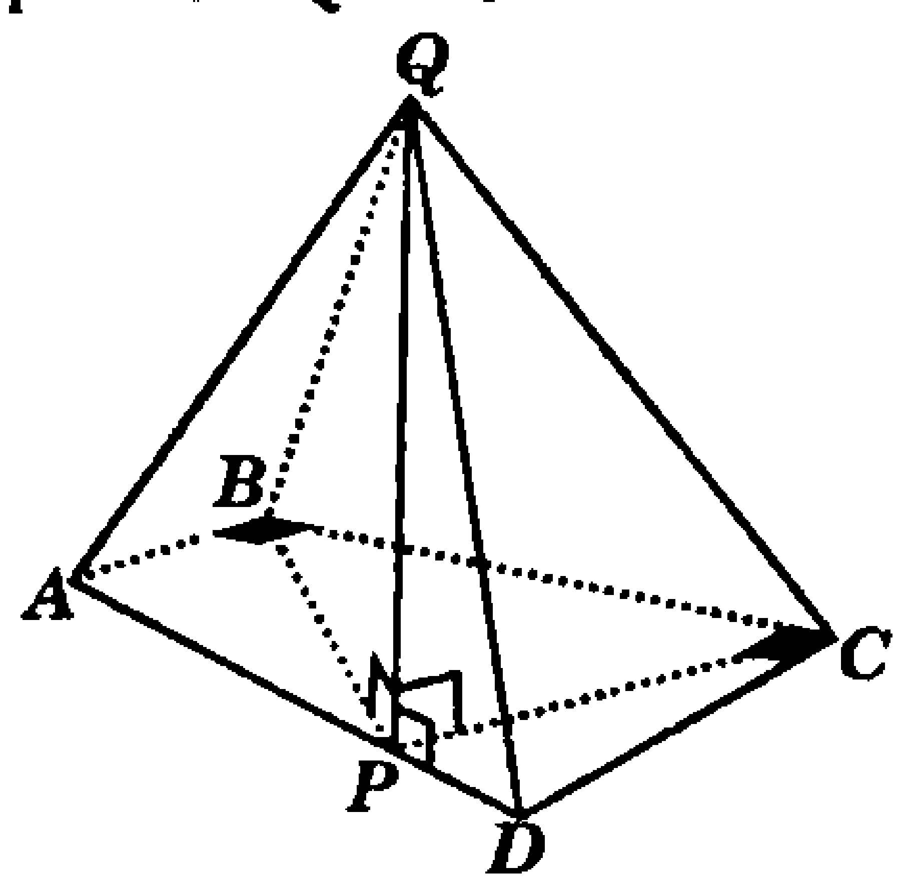
Luego, el área de la sección **ABMN**, que es una región paralelográmica, se calcula multiplicando **AB** y **h**.

$$A_{\square ABMN}=(AB)h=(2u)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}u^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

En la figura mostrada, **ABCD** es un trapecio rectángulo tal que $CD=BC=2AB=2a$. Si $\overline{PQ}$ es perpendicular al plano del trapecio tal que **PQ = a** y los volúmenes de las pirámides **Q – ABP** y **Q – CDP** son iguales, calcule el volumen de la pirámide **Q – BCP**.



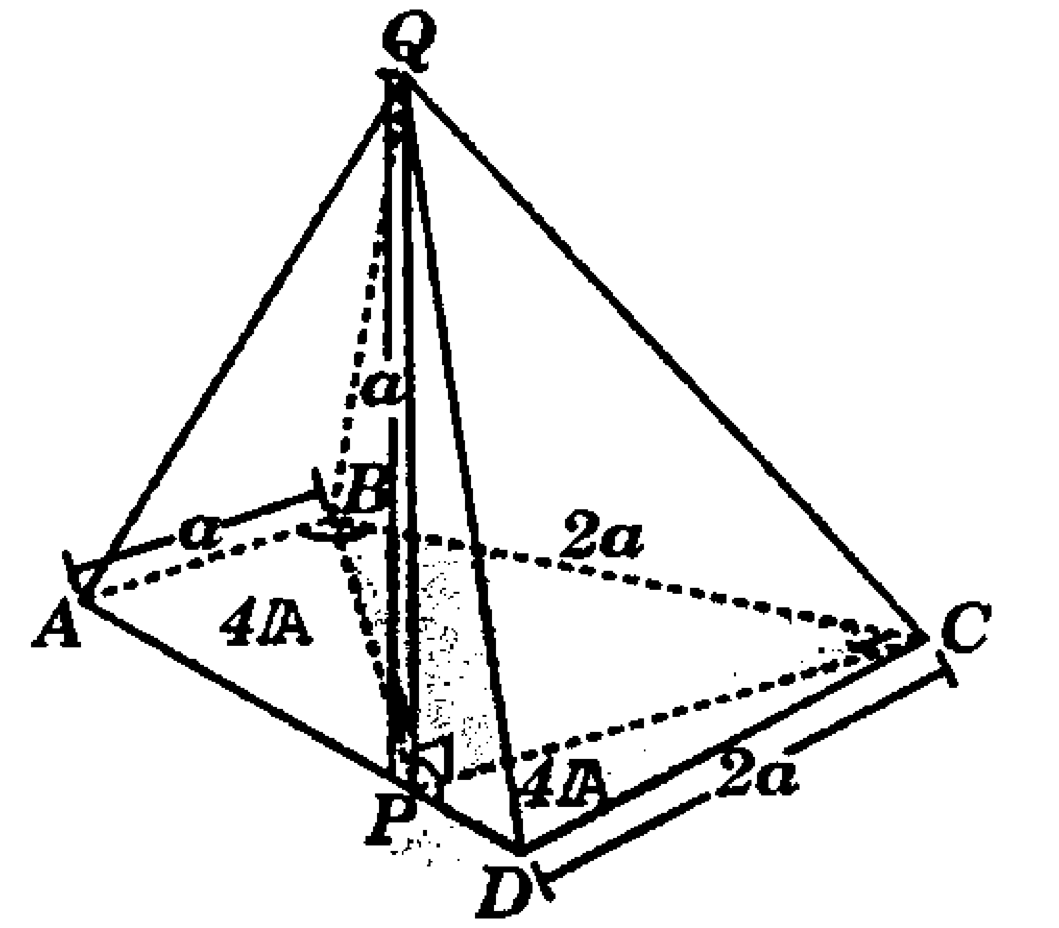
A) $\frac{1}{2}a^3$ B) $\frac{3}{8}a^3$ C) $\frac{4}{5}a^3$ D) $\frac{7}{8}a^3$ E) $\frac{5}{9}a^3$

RESOLUCIÓN:

• En preguntas donde piden el cálculo o la relación de volúmenes, conviene hacer un análisis de las longitudes de las alturas o de las relaciones de las bases. Generalmente, para el cálculo del área de la base se emplean capítulos anteriores de geometría plana.

• Piden volumen de la pirámide **Q – BCP:**

$$V_x = \frac{1}{3}[A_{BCP}][PQ] .....(I)$$

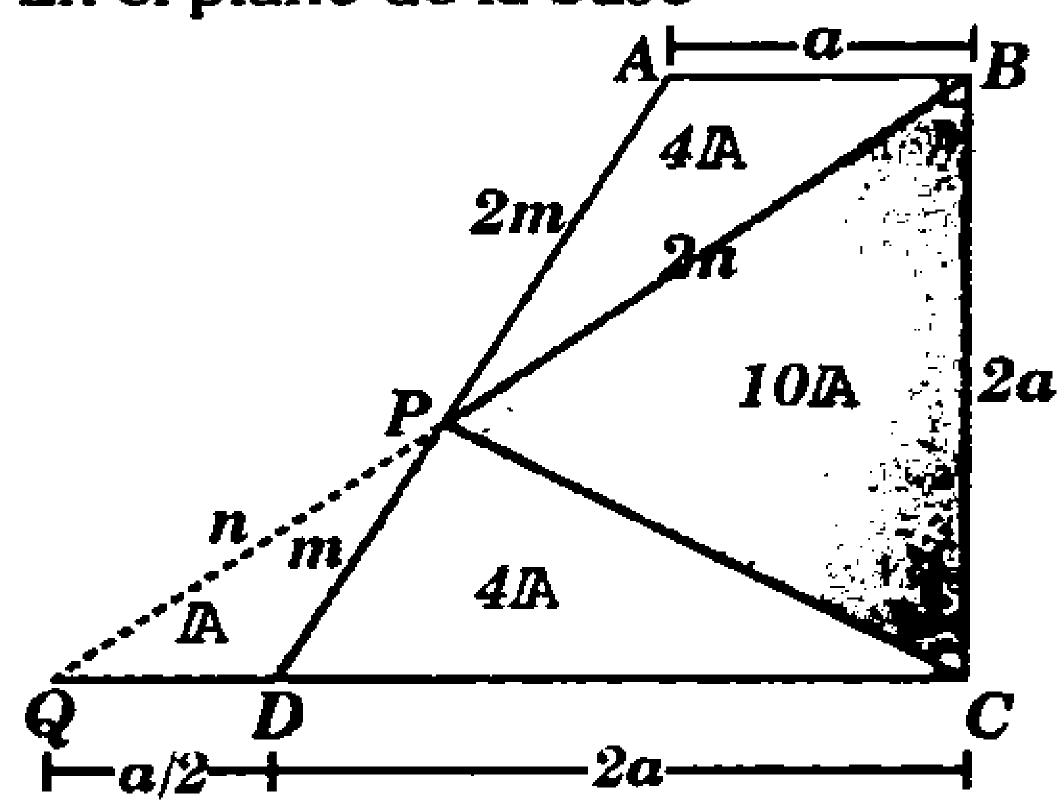


Del gráfico **PQ=a** .... **(II)**

Como los volúmenes de las pirámides **Q – ABP** y **Q – PCD** son iguales, al tener la misma altura, las áreas de sus bases son también iguales.

Entonces, $A_{ABP}=A_{CPD}=4A$.

En el plano de la base



Del dato de áreas iguales $\Rightarrow AP = 2(PD)$

Por relación de áreas, el área de la región trapecial:

$$18A=\left(\frac{a+2a}{2}\right)(2a) \Rightarrow A=\frac{a^2}{6}$$

$$\text{Luego, } A_{BCP}=10A=\frac{5a^2}{3} ....(III)$$

Reemplazamos **(II)** y **(III)** en **(I)**:

$$\Rightarrow V_x=\frac{1}{3}\left(\frac{5a^2}{3}\right)(a)=\frac{5a^2}{3}$$

RPTA : "E"

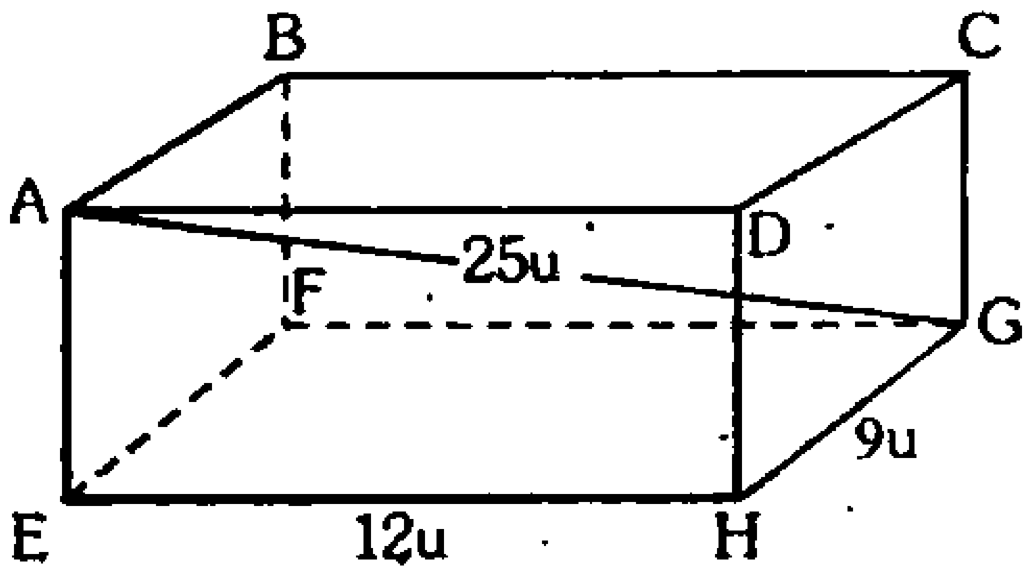
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 En el siguiente rectoedro , calcular:

i) El área de la superficie lateral

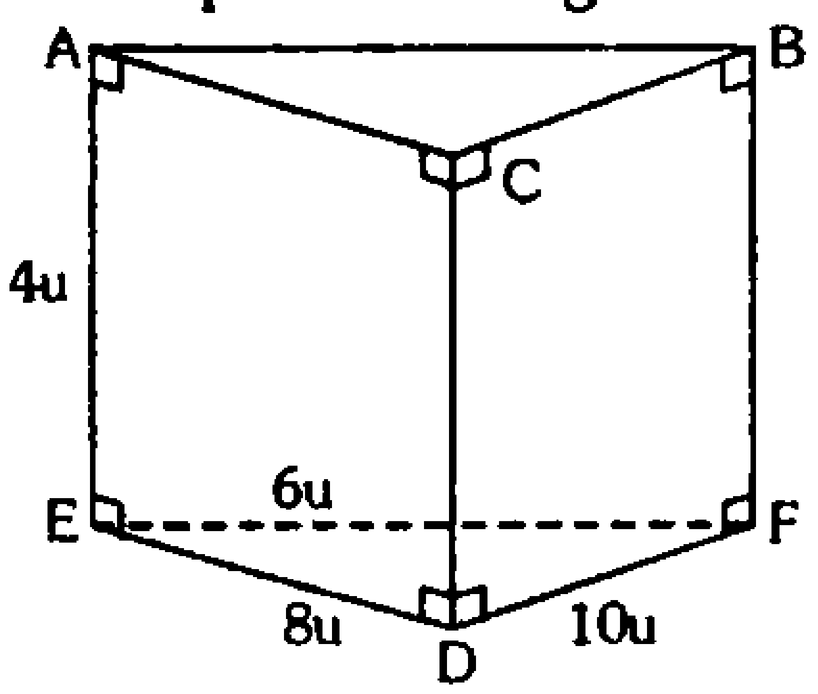
ii) El área de la superficie total

iii) Volumen



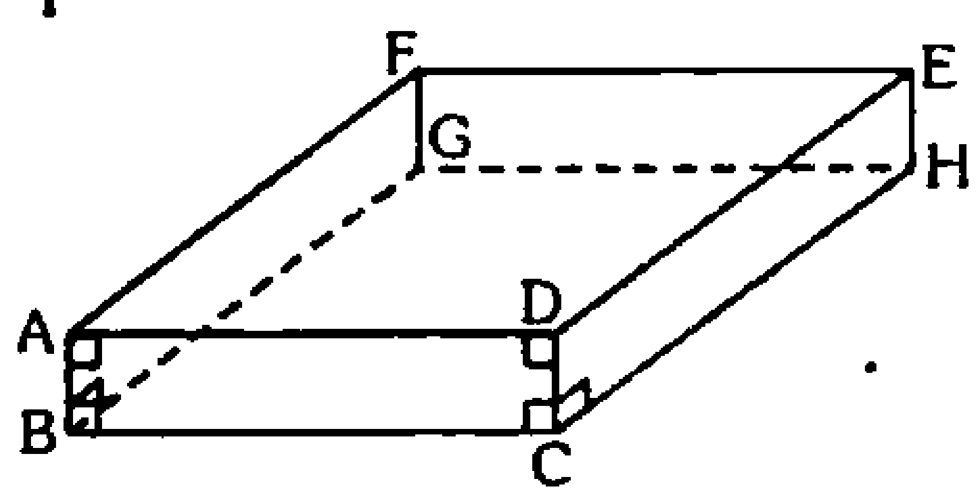
RPTA.: ....

02 En el gráfico calcular el volumen y el área de la superficie lateral del prisma triangular



RPTA.: ....

03 En el gráfico las longitudes de los lados del ortoedro están en la relación de *1, 2* y *3*. Si su volumen es $48u^3$, calcular el área de la superficie total



RPTA.: ....

04 Si un prisma tiene *36* aristas, ¿cuántas caras tiene?

RPTA.: ....

05 Hallar el área total de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que sus dimensiones son: $a = 4\ m$; $b = 5\ m$; $c = 6\ m$.

RPTA.: ....

06 Hallar el área de un cubo sabiendo que su arista es *1,2 m*.

RPTA.: ....

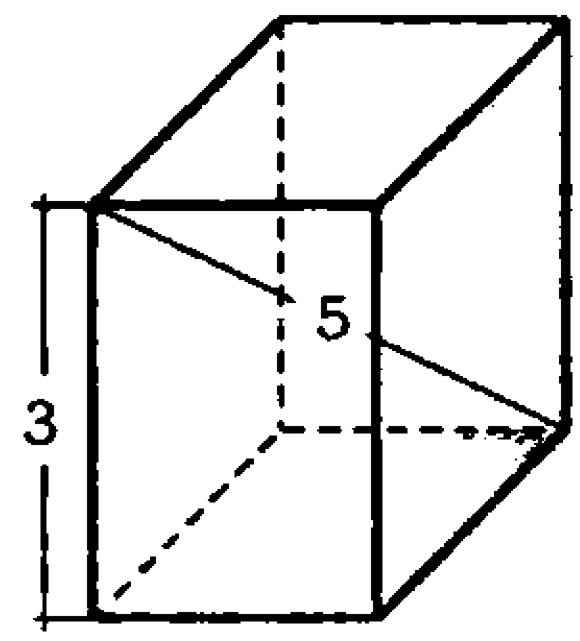
07 Calcular la altura h de un prisma sabiendo que el área lateral A_L y el perímetro de la base P son: $A_L = 520\ cm^2$; $P = 26\ cm$

RPTA.: ....

08 Calcular el perímetro P de la base de un prisma recto sabiendo que su área lateral es $270\ cm^2$ y su altura *18 cm*.

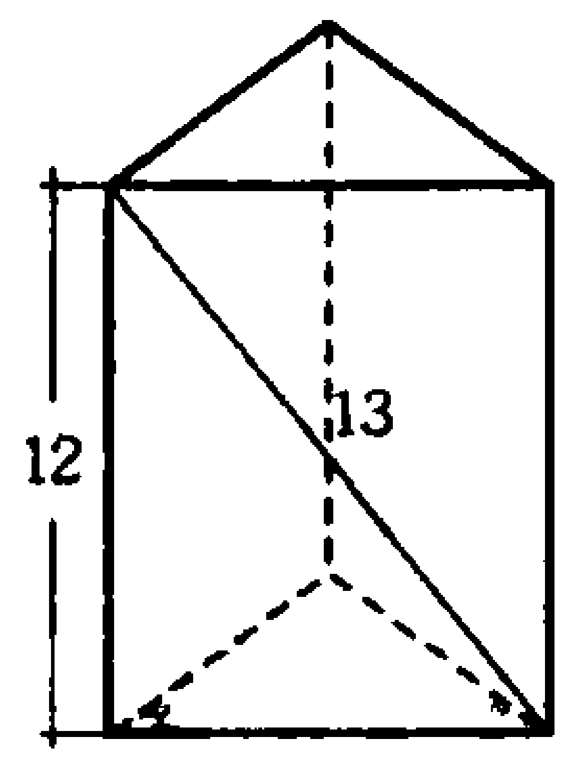
RPTA.: ....

09 Calcular el volumen del prisma regular mostrado.



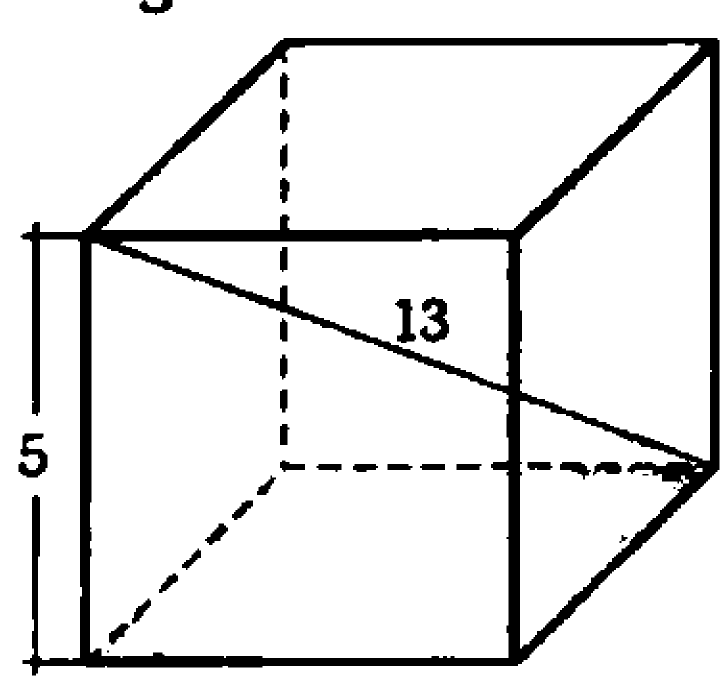
RPTA.: ....

10 En la figura, calcular el área de la superficie lateral del prisma regular mostrado.



RPTA.: ....

11 Calcular el volumen del prisma regular mostrado.

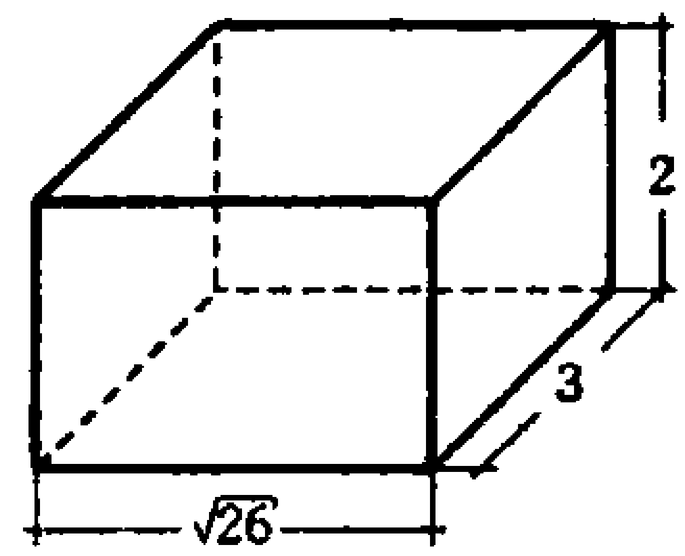


A) 320 *B) 640* *C) 540*
D) 480 *E) 360*

12 Calcular el número de caras de un prisma recto que tiene *60* aristas.

A) 60 *B) 30* *C) 20* *D) 22* *E) 21*

13 Calcular la diagonal del paralelepípedo rectangular mostrado.



A) 5 *B) 6* *C) 7* *D) 8* *E) 9*

14 ¿Cuántas caras tiene un prisma de *300* aristas?

RPTA.: ....

15 Determine el volumen de un prisma triangular regular cuya altura mide *4 m*. Si el desarrollo de la superficie prismática en un rectángulo cuya diagonal mide *5m*.

RPTA.: ....

16 El área total de un paralelepípedo rectángulo es $478\ m^2$; sus aristas están en progresión aritmética siendo la suma de ellos *27 m*. Calcule el volumen.

RPTA.: ....

17 ¿Cuál es el volumen de un prisma regular hexagonal de $14\sqrt{3}\ m$ de altura si el apotema de su base mide $7\sqrt{3}\ m$.

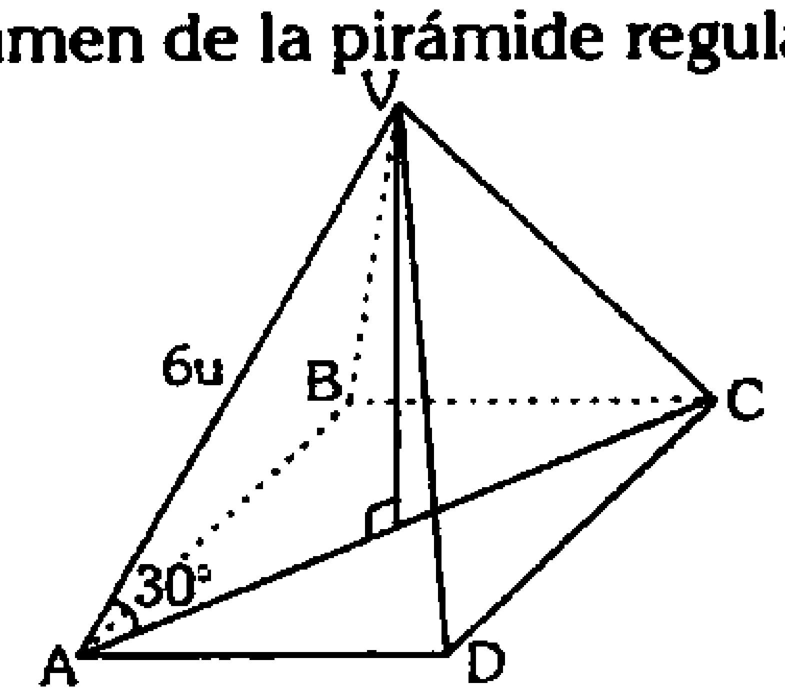
RPTA.: ....

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Calcular el volumen de una pirámide regular de altura *5*, si su base es un triángulo equilátero de perímetro *18*.

RPTA.: ....

02 En el gráfico: Calcular el volumen de la pirámide regular



RPTA.: ....

03 Hallar el área lateral de una pirámide regular sabiendo que el perímetro de la base mide *32 cm* y el apotema mide *4 cm*.

RPTA.: ....

04 Si el perímetro de la base de una pirámide regular mide *42* y la apotema mide *5 cm*, determine el área lateral de dicha pirámide.

RPTA.: ....

05 Hallar el área total de una pirámide regular cuadrada sabiendo que el lado de la base es *8 cm* y la apotema de la pirámide es *20 cm*.

RPTA.: ....

06 Determine el área total de una pirámide regular cuadrada sabiendo que el lado de la base y la apotema de la pirámide miden *14 cm*.

RPTA.: ....

07 Una pirámide tiene en total *22* vértices. ¿Cuántas caras tiene la pirámide?

RPTA.: ....

08 En una pirámide cuadrangular regular, su arista básica mide *15* y su apotema *25*. Calcular el área total de la pirámide.

RPTA.: ....

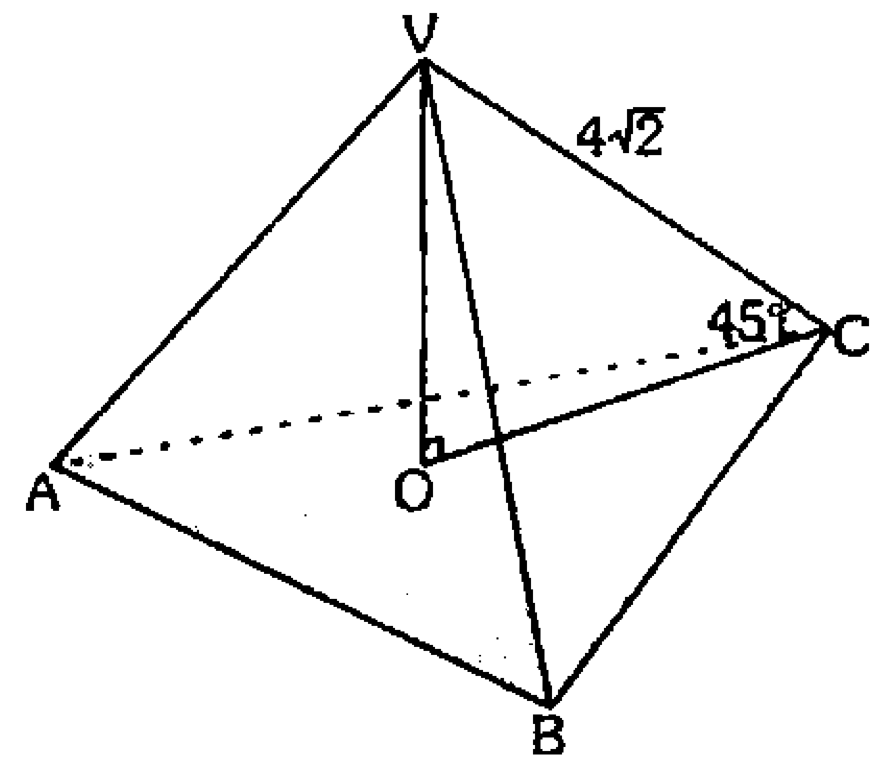
09 Calcular el volumen de una pirámide regular si su base es una región cuadrada que forma *30°* con un apotema que mide *6*.

RPTA.: ....

10 Calcular el área de la superficie total de una pirámide regular si sus caras laterales son regiones triangulares equiláteras y su base es una región cuadrada de diagonal *4*.

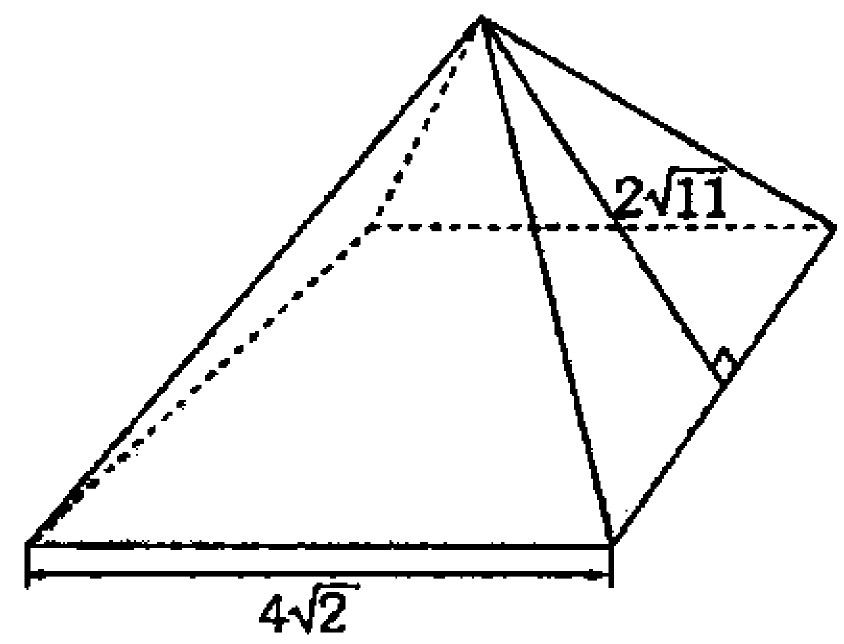
RPTA.: ....

11 Calcular el volumen de la pirámide regular mostrada *V – ABC*.



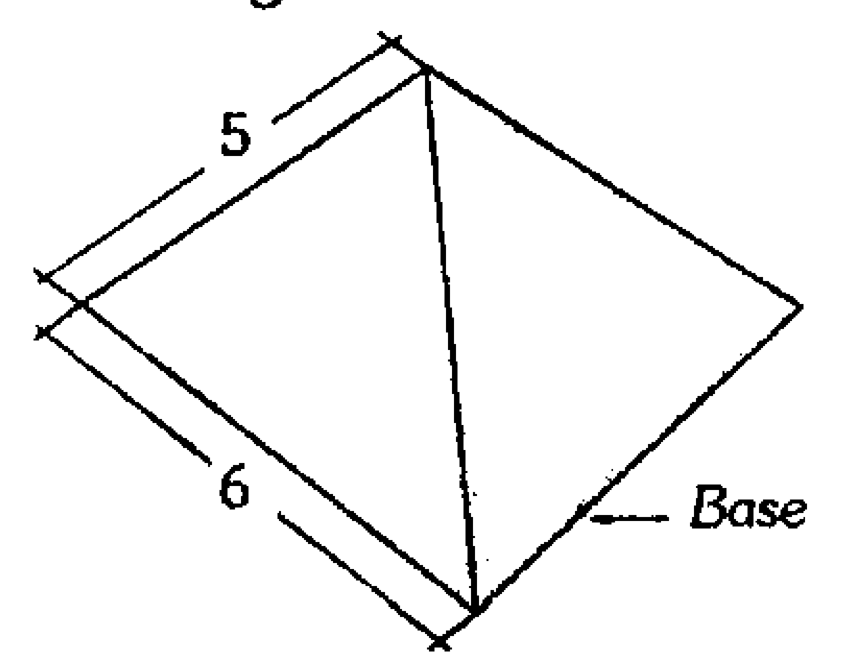
RPTA.: ....

12 Calcular el volumen de la pirámide regular mostrada.



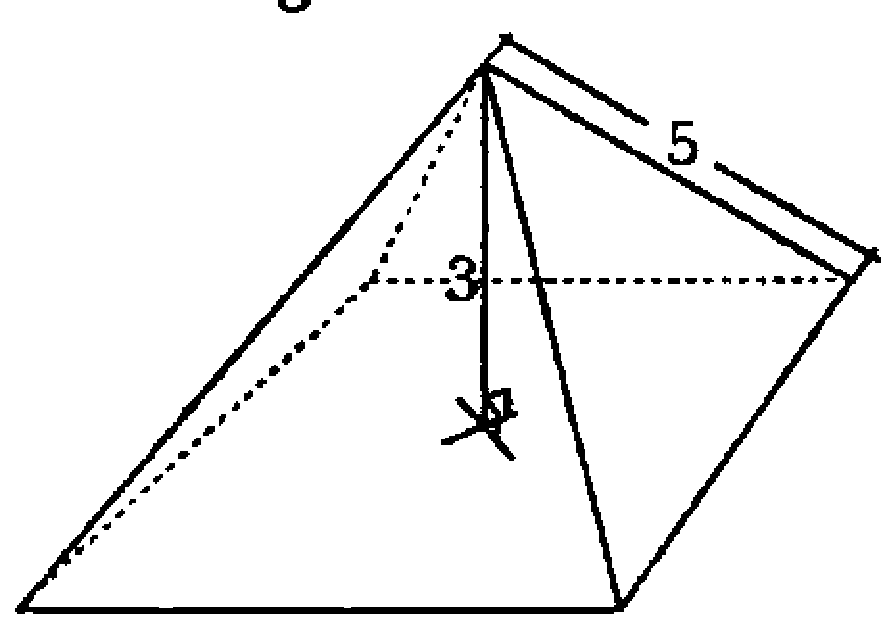
RPTA.: ....

13 Calcular el volumen de la pirámide regular mostrada.



A) $7(4+\sqrt{3})$ *B)* $4(8+\sqrt{3})$ *C)* $8(3+\sqrt{3})$
D) $9(4+\sqrt{3})$ *E)* $6(5+\sqrt{3})$

14 Calcular el volumen de la pirámide regular mostrada.



A) 24 B) 30 C) 36 D) 48 E) 32

15 ¿Cuántas caras laterales tiene una pirámide, si la suma de todos los ángulos de sus caras es igual a *24* ángulos rectos?

RPTA.: ....

16 La arista de la base de una pirámide cuadrangular regular mide *12cm*. El área lateral es *240cm²*. El apotema de la pirámide mide.

RPTA.: ....

17 En una pirámide regular hexagonal las aristas básicas miden *2m* y las aristas laterales miden *6m*. Calcule el área lateral.

RPTA.: ....

18 En una pirámide triangular regular la altura mide *15cm* y las aristas de la base miden *6cm*. Calcule el área de la sección paralela a la base, sabiendo que dista *5cm* del vértice de la pirámide.

RPTA.: ....

19 Las aristas laterales de una pirámide cuadrangular regular forman *60°* con el plano de la base; si su altura mide $\sqrt{6}\,m$, calcule el volumen.

RPTA.: ....

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un prisma regular de *6* caras, el segmento que une el centro de una base con un vértice de la otra mide *5* y forma con la base del prisma un ángulo cuya medida es *53*. Calcular el área de la superficie lateral del prisma.

A) 72 *B)* $36\sqrt{3}$ *C)* $48\sqrt{2}$
D) $64\sqrt{3}$ *E)* $24\sqrt{6}$

02 En un prisma triangular regular cuya arista lateral mide $\sqrt{3}$, el área de la superficie lateral es igual al área de su base. Calcular el volumen del prisma.

A) 100 *B) 108* *C)* $40\sqrt{3}$
D) $36\sqrt{6}$ *E) 75*

03 Calcular el número de caras de un prisma que tiene *360* aristas.

A)120 B)121 C)122 D)123 E)124

04 Se tiene un prisma y una pirámide cuyas bases tienen igual número de lados, siendo la cantidad de aristas en total entre ambos sólidos igual a *50*. ¿Cuántos lados tienen sus bases?

A) 8 B) 9 C) 12 D) 11 E) 10

05 En una pirámide cuadrangular regular *O – ABCD: OD = DA* y su altura mide *3*. Calcular su volumen.

A) 9 B) 16 C) 18 D) 24 E) 36

06 En una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales forman con la base un ángulo de medida *60* y tienen por longitud *4u*. Calcule el volumen de la piramide.

A) $12\sqrt{3}\ u^3$ B) $12\ u^3$ C) $16\ u^3$
D) $16\sqrt{3}\ u^3$ E) $15\ u^3$

07 Las bases de un prisma recto son triángulos rectángulos de catetos *6* y *8 m* de longitud respectivamente. Si el área lateral de dicho sólido es $144\ m^2$, entonces el doble de la altura del mencionado prisma es:

A) 24 m B) 6 m C) 12 m
D) 16 m E) 18 m

08 La arista lateral de un paralelepípedo rectangular mide *4* y las otras dos dimensiones están en la relación de *1* a *3*. Si el área de la superficie total es *88*; calcular el volumen del paralelepípedo.

A) 32 B) 60 C) 36 D) 24 E) 48

09 Se tiene un prisma recto *ABC – DEF* tal que $m\sphericalangle DEF=90°$; $m\sphericalangle DFE = m\sphericalangle DAF$; $DE=4$ y $AF=9$. Calcular el volumen del prisma.

A) 36 B) 72 C) 60 D) 45 E) $2\sqrt{23}$

10 Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular donde el área de su superficie lateral es igual al doble del área de la base y a su vez igual a *72*.

A) $18\sqrt{2}$ B) $24\sqrt{6}$ C) 30
D) $26\sqrt{6}$ E) $36\sqrt{3}$

11 Con una región rectangular *ABCD* se construye la superficie lateral de un prisma hexagonal regular tal que $\overline{AB}$ sea una arista lateral; $AB=5$ y $BC=24$.

Calcular el volumen del prisma correspondiente a dicha superficie.

A) $115\sqrt{2}$ B) $120\sqrt{2}$ C) $124\sqrt{2}$
D) $122\sqrt{3}$ E) $120\sqrt{3}$

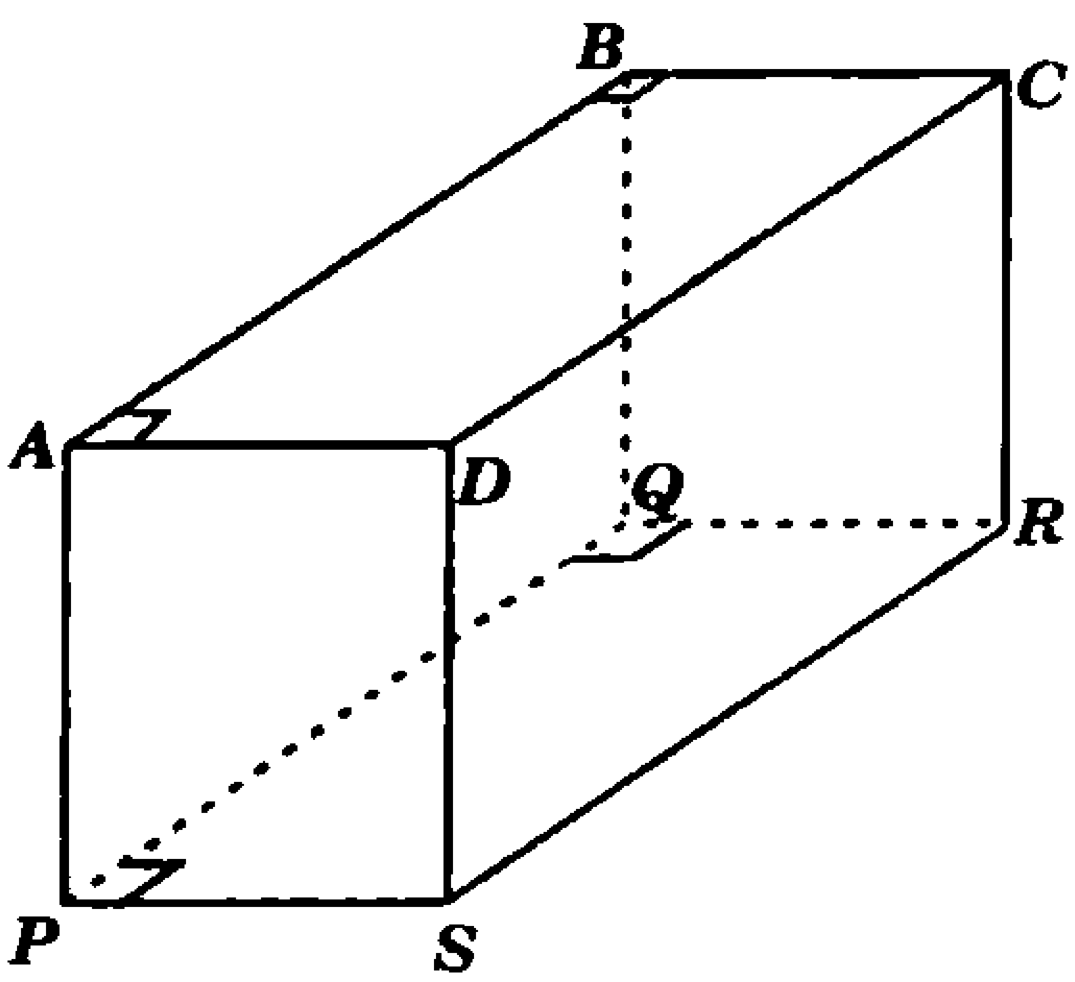
12 Calcular el volumen de una pirámide regular *O – ABCD* tal que $m\sphericalangle DOC=60°$ y $AB=6$.

A) $2\sqrt{6}$ B) $24\sqrt{3}$ C) $36\sqrt{2}$
D) $42\sqrt{2}$ E) $18\sqrt{6}$

13 Las bases de dos pirámides regulares son cuadrados de *3 m* de lado, tienen un lado común y están situados en el mismo plano. Calcular la distancia entre los vértices de las pirámides, sabiendo que la primera tiene *8 m* de altura y su volumen es el doble de la segunda .

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

14 En el gráfico se muestra a un prisma recto tal que *AB=3(AD)=3* y las áreas de las regiones *QBCR* y *SDCR* son iguales a *10* cada una. Calcular el volumen del prisma.



A) 16 B) 18 C) 15 D) 12 E) 10

15 Se tiene una pirámide regular *V – ABCD* tal que $m\sphericalangle DVC=53°$ y el área de su superficie es *12*. Calcular su volumen.

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

16 Calcular el volumen de un prisma regular *ABC – DEF*, si $AB=4$ y $m\sphericalangle AEC=53°$.

A) 30 B) 16 C) $10\sqrt{6}$ D) $8\sqrt{3}$ E) 12

17 En una pirámide regular *O – ABCD*, el pie de la altura dista de una cara *2*, mientras que la altura y la arista básica tienen igual longitud. Calcular el volumen de la pirámide.

A) $\frac{40\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{40\sqrt{5}}{7}$
D) $\frac{20\sqrt{6}}{5}$ E) $\frac{20\sqrt{5}}{5}$

18 En un prisma cuadrangular regular, la longitud de la arista lateral es el doble de la longitud de la arista básica y el volumen es *16*. Calcular la distancia de un vértice al centro de la otra base.

A) $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{3}$

19 En un prisma recto *ABC–DEF*, $m\sphericalangle ABC=90°$, el área de la región triangular equilátera *AEC* es $2\sqrt{3}$. Calcular el volumen de prisma.

A) 6 B) $3\sqrt{3}$ C) 4/3 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

20 El área total de una pirámide cuadrangular regular es los *3/2* de el área de la superficie lateral. Calcular el volumen de la pirámide si la arista básica mide *2 m*.

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}m^3$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}m^3$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}m^3$
D) $\frac{7\sqrt{5}}{5}m^3$ E) $3\,m^3$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)B	3)C	4)E	5)C	6)B	7)C	8)E	9)C	10)E
11)E	12)C	13)A	14)B	15)A	16)D	17)A	18)C	19)E	20)A

CILINDRO y CONO

CAPITULO 110

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de :

* *Identificar las características fundamentales de cada sólido.*

* *Conocer las principales relaciones métricas en los cilindros y conos con las longitudes de las líneas más conocidas como aristas , alturas , generatrices , radios,etc.*

* *Conocer los elementos básicos para el cálculo del área de la superficie lateral total y volumen de los sólidos.*

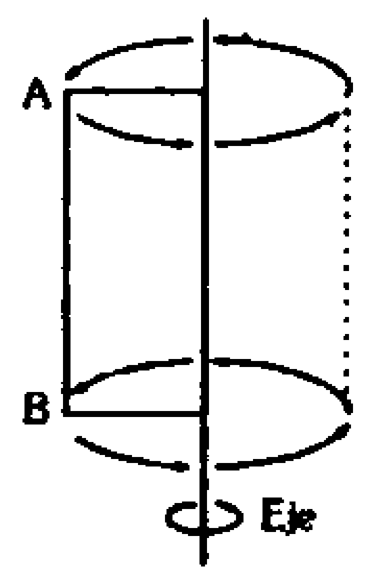
INTRODUCCIÓN

Así como en la geometría plana es muy frecuente el uso de triángulos y cuadriláteros. También en la geometría del espacio hay sólidos cuyo estudio y aplicación a la realidad son muy frecuentes. Por ejemplo en las construcciones de las casas , edificios, etc. Es muy común ver las columnas de forma cilíndricas también las paredes , los tanques de ciertas cisternas u otros objetos que son de nuestra utilidad.

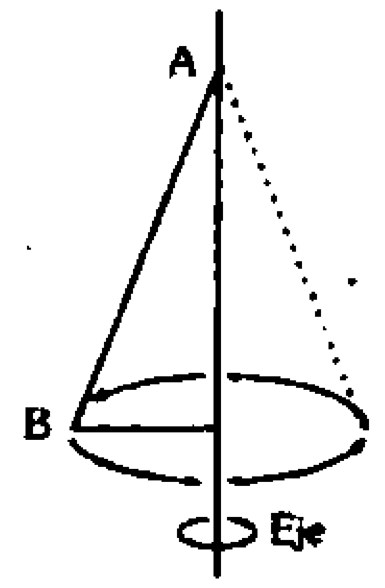
FIGURAS DE REVOLUCIÓN

En el tema anterior hemos estudiado los poliedros, sin embargo existen figuras geométricas que no pertenecen a tal familia. Efectivamente, si pensamos en un bote, en un embudo, una pelota o un huevo, estos representan figuras no poliédricas, ya que carecen de caras poligonales. Tales figuras pertenecen a una nueva familia: la de los cuerpos de revolución.

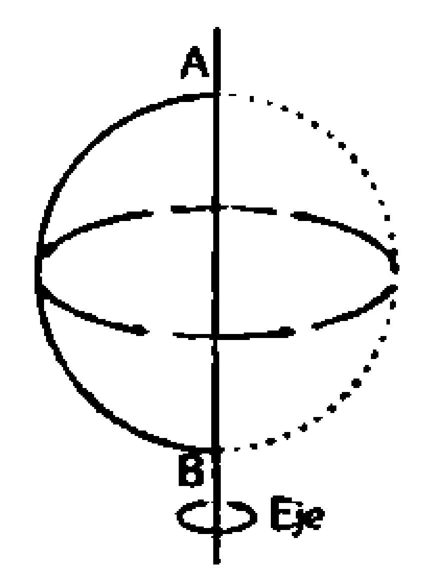
Son ***figuras de revolución*** las que se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje.



El cilindro como rotación de un rectángulo alrededor de un lado.



El cono como rotación de un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.



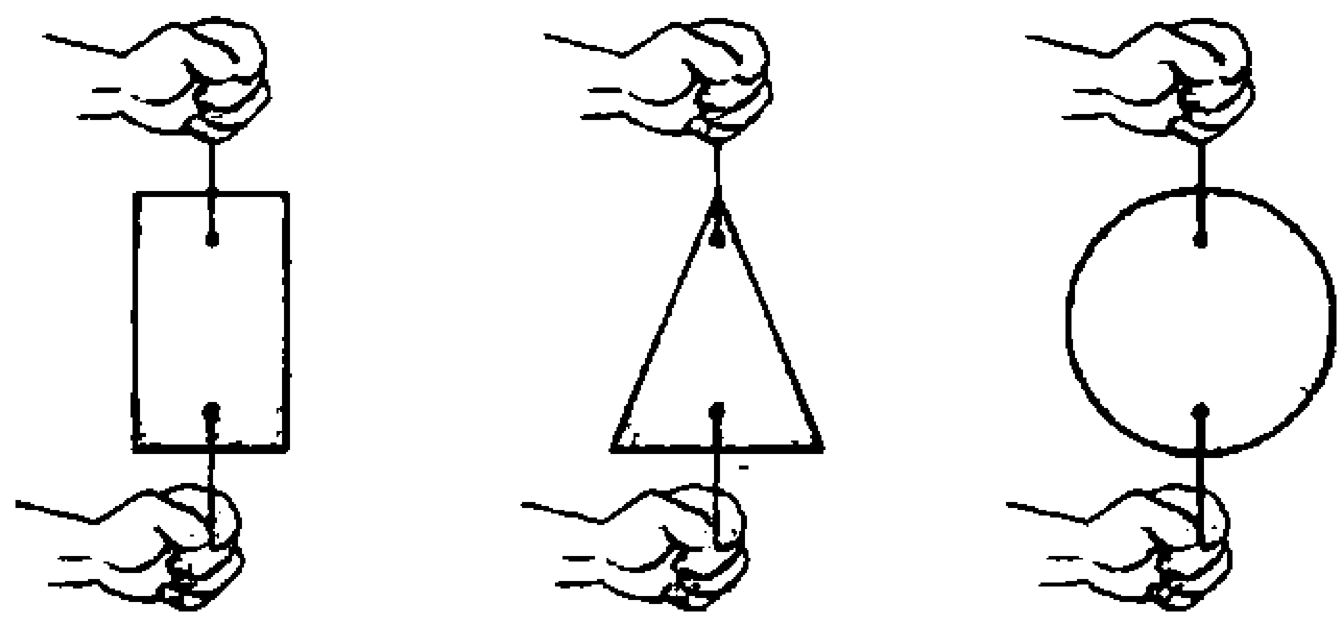
La esfera como rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

Los segmentos $\overline{AB}$ que generan las respectivas superficies de cilindro y el cono reciben el nombre de ***generatriz***, siendo en el caso del cilindro, equivalente a su altura.

Las tres figuras anteriores muestran los tres sólidos de revolución más conocidos: el cilindro, el cono y la esfera, sin embargo, no son las únicas, pues sabemos cómo los alfareros utilizan el torno para obtener bellas piezas que no son otra cosa que figuras de revolución.

GENERANDO FIGURAS DE REVOLUCIÓN

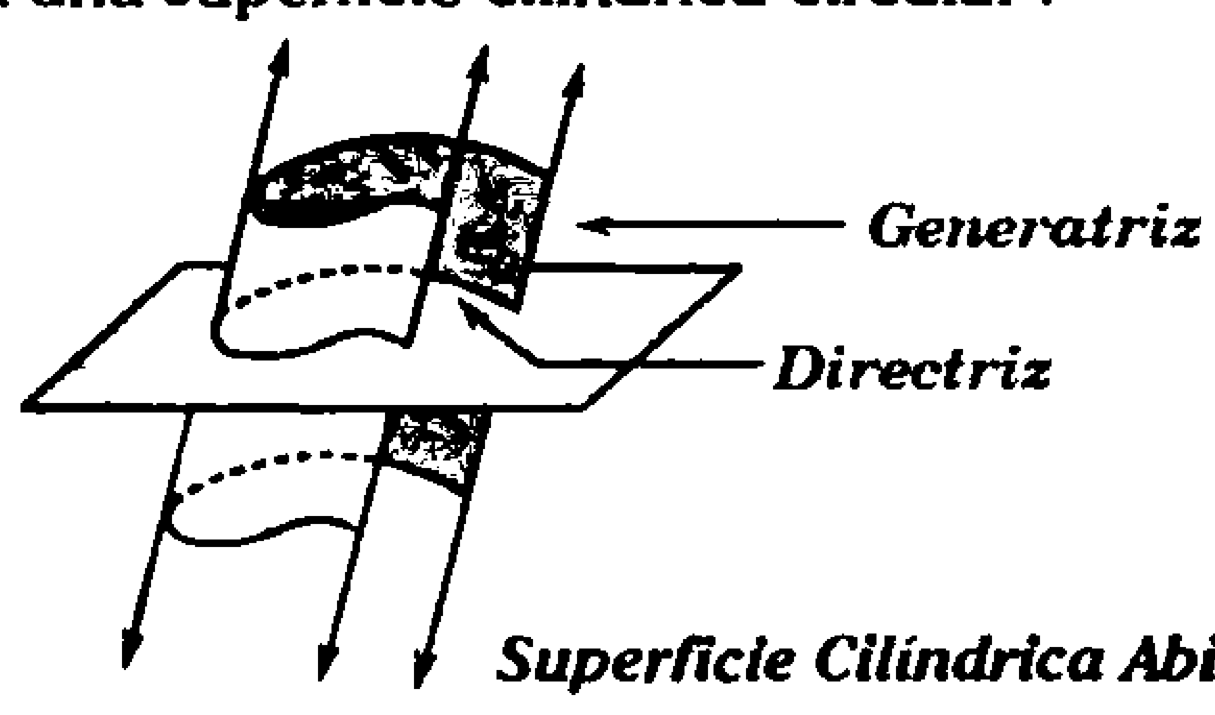
Recorta piezas de cartón con formas de rectángulo, triángulo isósceles y círculo, pasando después a perforarlas oportunamente como muestran las figuras.



Utiliza hilo elástico a fin de crear un eje de giro en cada una de ellas y observarás que al tomar los extremos y girar éstos con gran rapidez, producirás con dichas piezas el efecto óptico propio de las figuras de revolución. Identifica cada una de ellas.

SUPERFICIE CILINDRICA

Se llama superficie cilíndrica a aquella superficie generada por una recta que , apoyándose sobre una curva , se mueve paralelamente a una dirección dada. Las rectas que forman la superficie cilíndrica se llaman generatrices y la curva por cuyos puntos pasan se llama directriz . Si la directriz es una circunferencia, resulta una superficie cilíndrica circular .

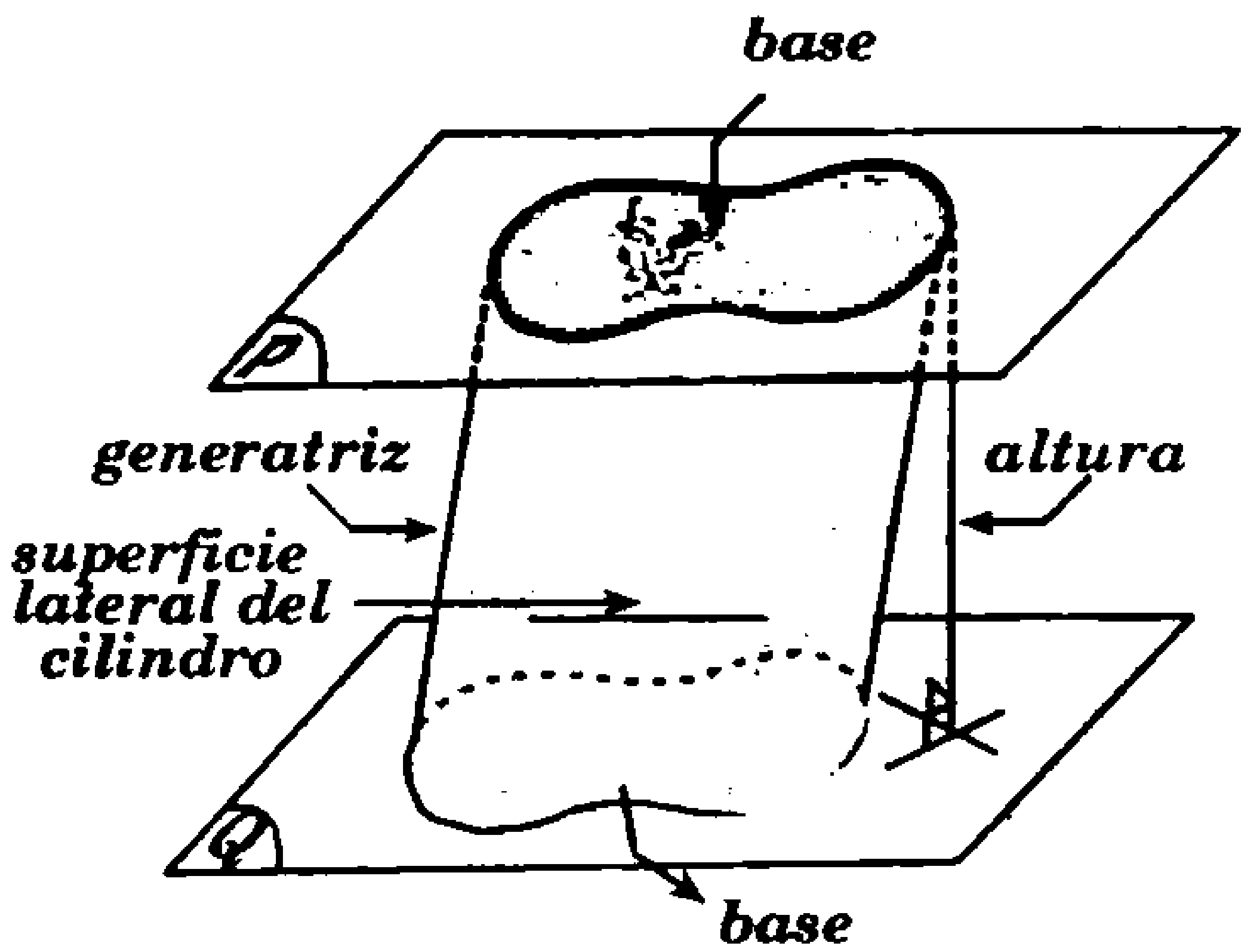


Superficie Cilíndrica Abierta

CILINDRO

Es aquel sólido geométrico comprendido entre dos planos paralelos entre si y secante a una superficie curva cerrada denominada superficie lateral del cilindro y en los planos paralelos se determinan secciones planas congruentes las cuales se denominan base del cilindro.

En la superficie lateral del cilindro se ubican segmentos paralelos entre si y congruentes, cuyos extremos son los puntos del contorno de las bases, dichos segmentos se denominan generatrices.



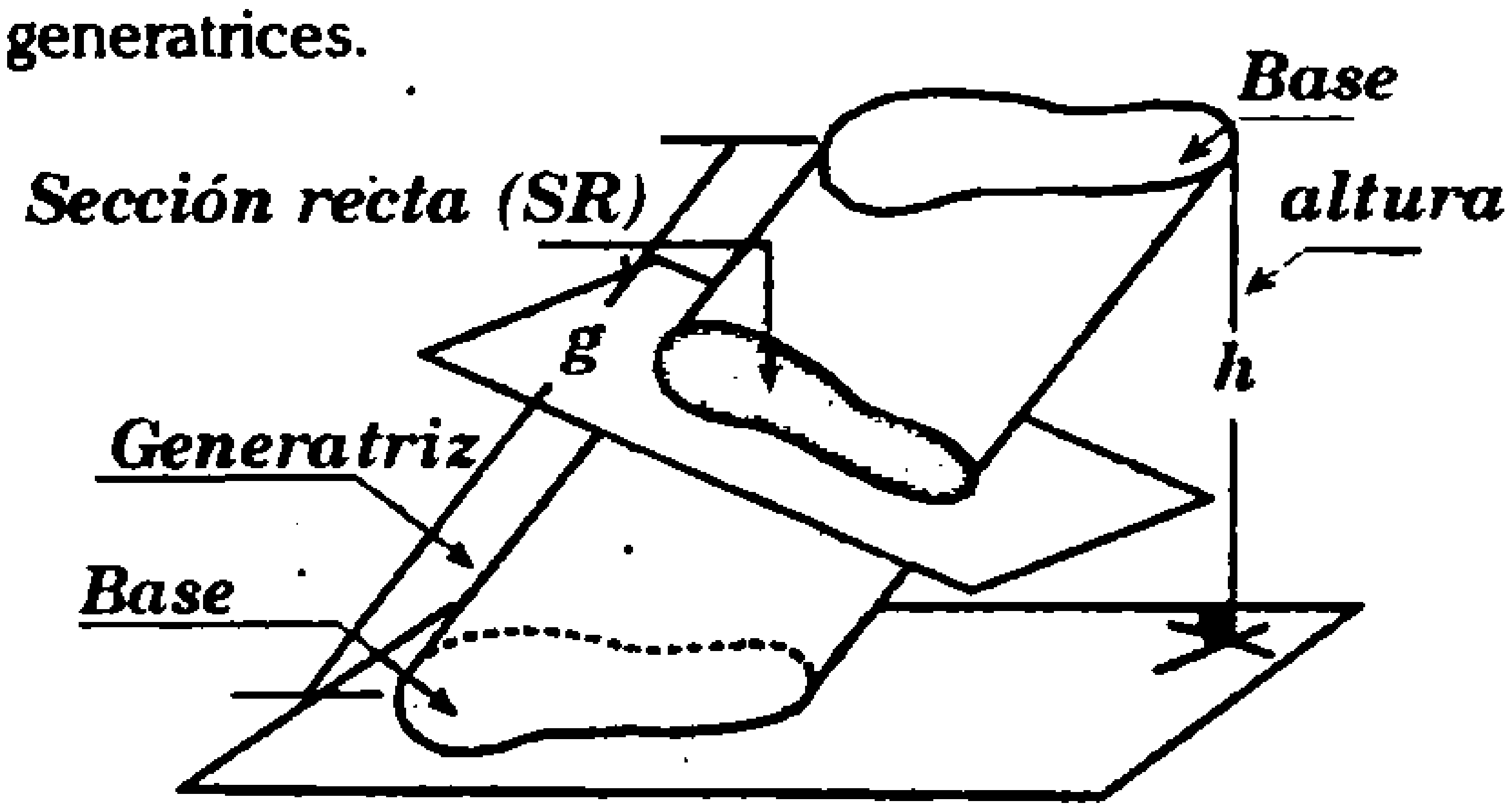
Los planos P y Q son paralelos.

SECCIÓN TRANSVERSAL DE UN CILINDRO :

Es la sección plana determinada en el cilindro por un plano paralelo a sus bases.

SECCIÓN RECTA DE UN CILÍNDRO :

Es la sección plana determinada en el cilindro por un plano perpendicular y secante a todas sus generatrices.



Área de la superficie lateral (A_{SL}) :

$$\boxed{A_{SL}=(2P_{SR})g}$$

Área de la superficie total (A_{ST}) :

$$\boxed{A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})}$$

Volumen (V) :

$$\boxed{V=(A_{base})h} \quad \boxed{V=(A_{SR})g}$$

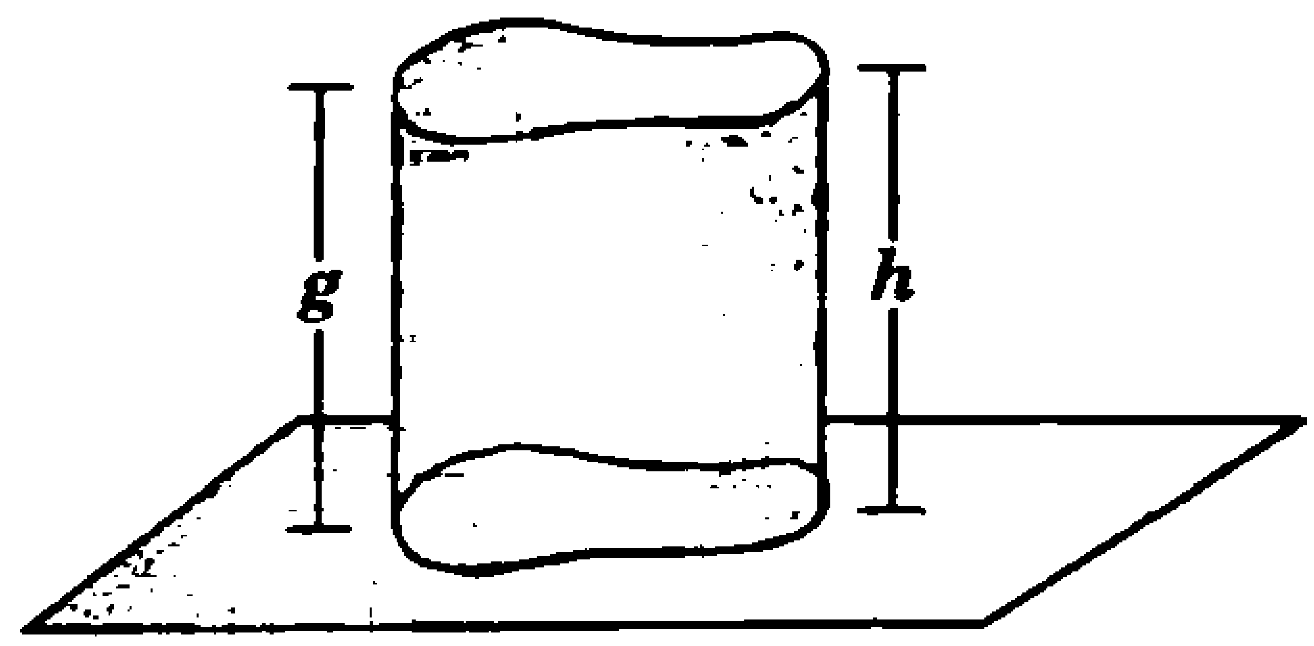
$2P_{SR}$: perímetro de la sección recta

A_{SR} : área de la sección recta

CLASIFICACIÓN

I) CILÍNDRO RECTO :

Es aquel cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a sus bases.



Área de la superficie Lateral (A_{SL}) :

$$\boxed{A_{SL}=(2P_{base})g}$$

$2P_{base}$: perímetro de la base

g : longitud de la generatríz

Área de la superficie (A_{ST}) :

$$\boxed{A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})}$$

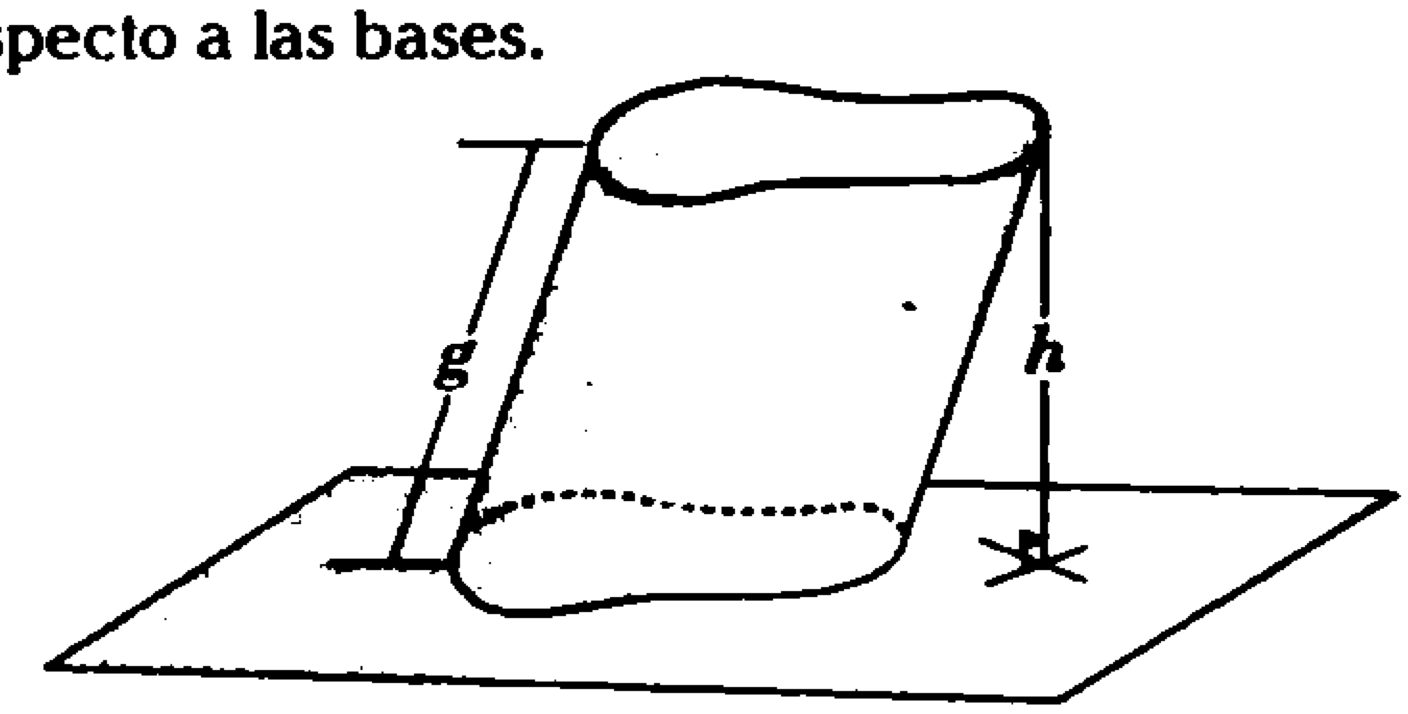
A_{base} : Área de la base

Volumen (V) : $V=(A_{base})\times h$

h : longitud de la altura del cilindro

II) CILINDRO OBLÍÇUO :

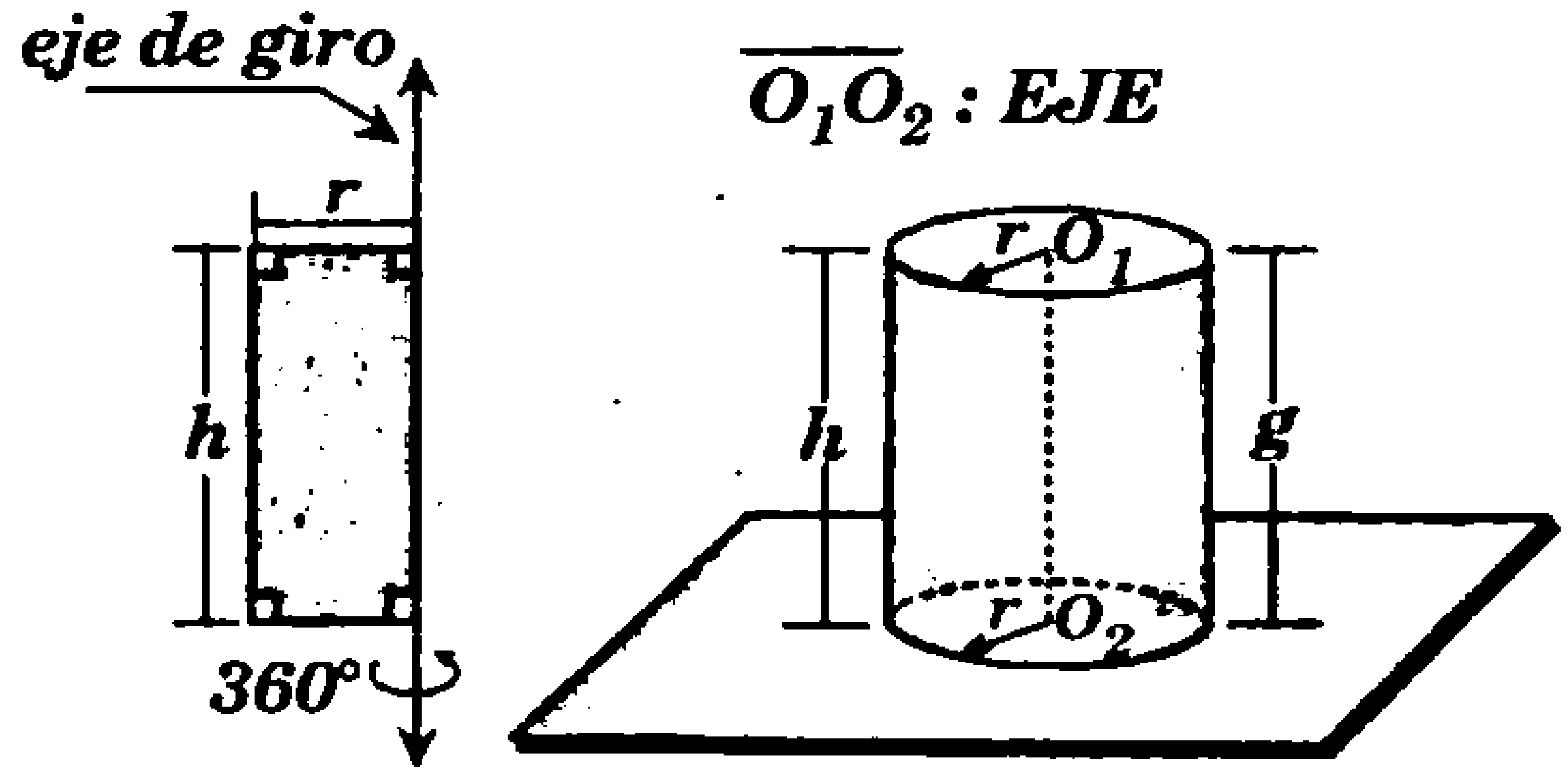
Es el cilindro cuyas generatrices son oblicuas con respecto a las bases.



* En el gráfico se muestra un cilindro oblicuo; se cumple : $h<g\,;A_{SR}<A_{base}$

III) CILÍNDRO CIRCULAR RECTO :

Es aquel cilindro recto cuyas bases son círculos, también es denominado ***cilindro de revolución*** porque es generado por una región rectangular al girar una vuelta en torno a uno de sus lados.

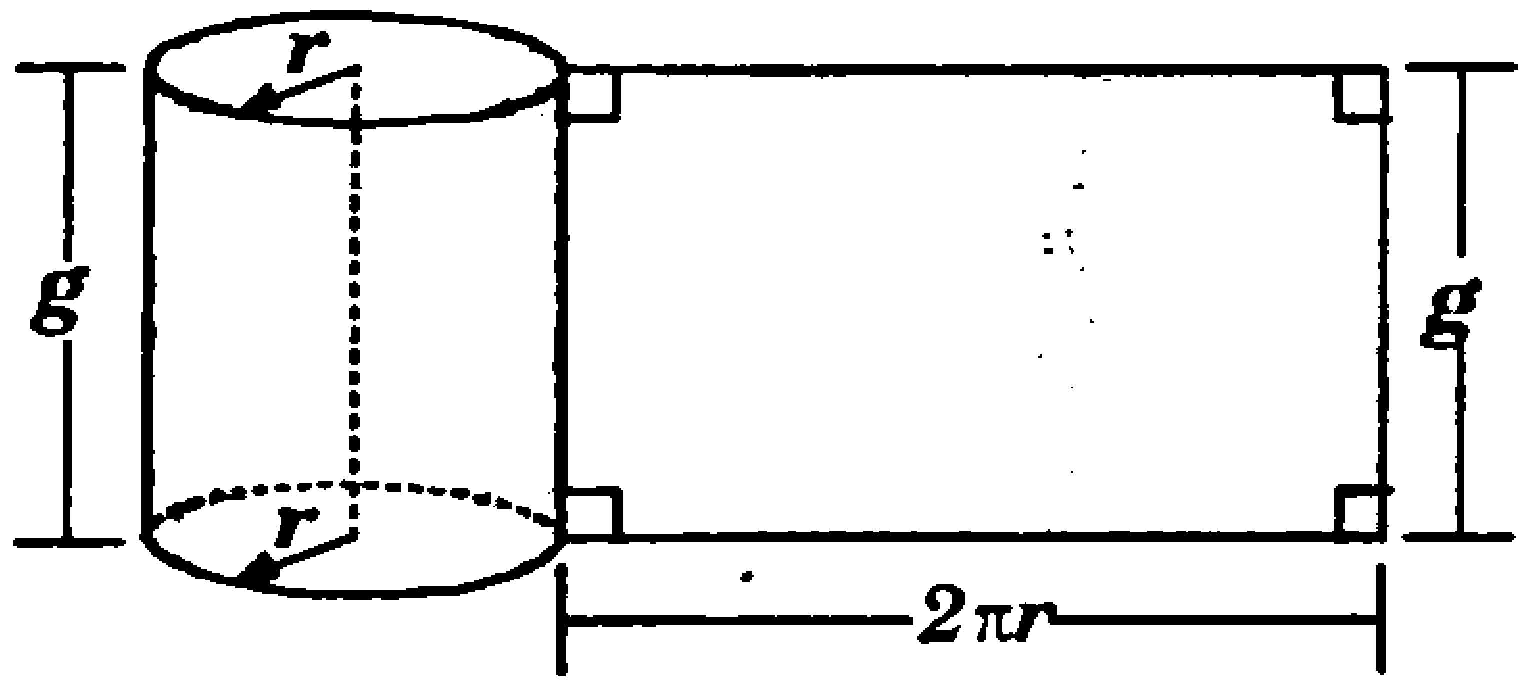


SECCIÓN AXIAL DE UN CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Es una sección plana determinada en el cilindro por un plano que contiene a su eje.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Resulta a una región rectangular en el cual uno de sus lados tiene igual longitud que la circunferencia de una base y el otro lado es de igual longitud que la generatriz del cilindro.



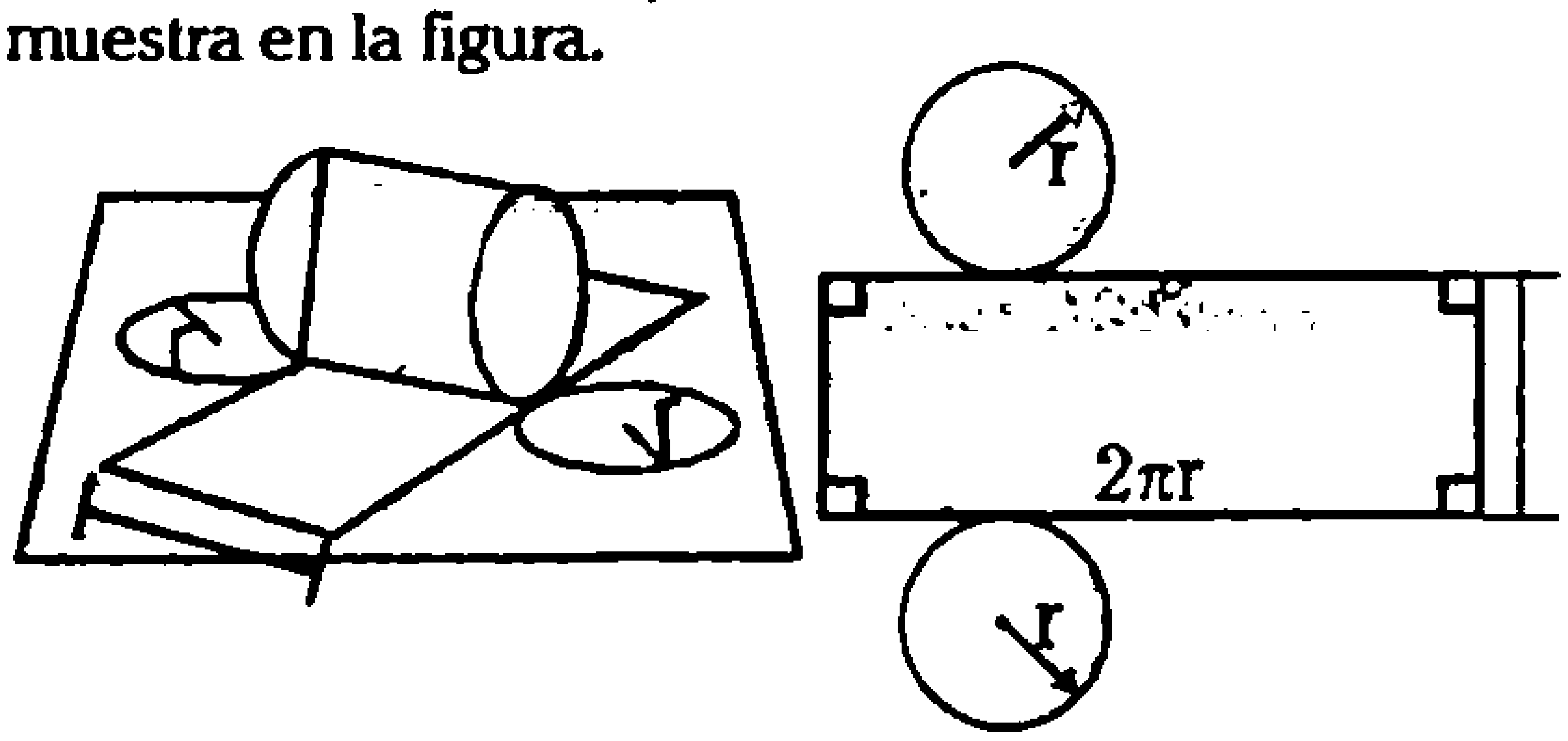
Área de la superficie lateral (S_{SL}) : $\boxed{A_{SL}=2\pi rg}$

Área de la superficie total (A_{ST}) : $\boxed{A_{ST}=2\pi r(g+r)}$

Volumen (V): $\boxed{V=\pi r^2 g}$

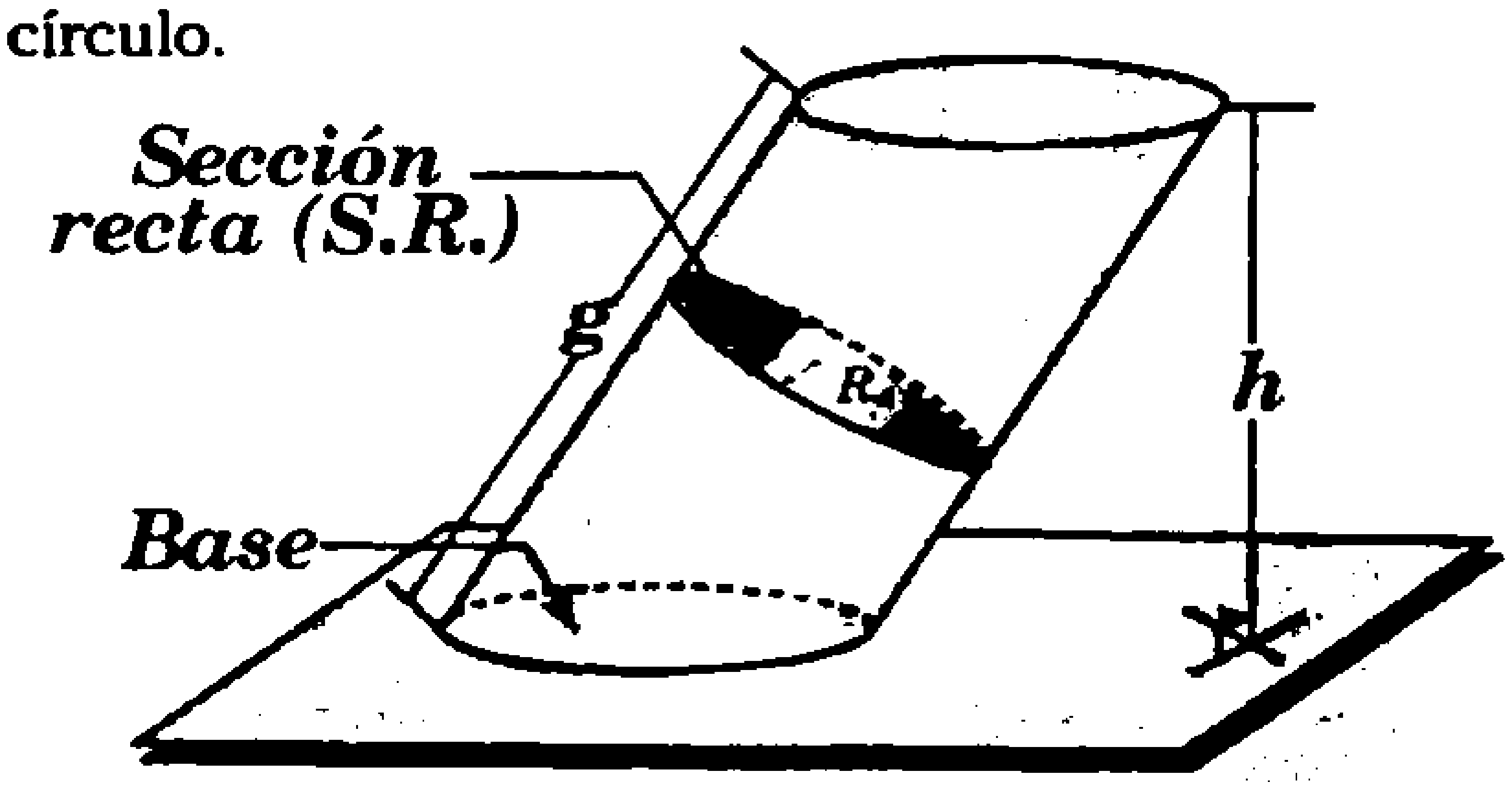
NOTA :

Para construir objetos cilindros (pote de conservas, tarros de leche, recipientes para pinturas), es necesario hacer el diseño en una plancha de latón y luego realizar el corte correspondiente. Tal como se muestra en la figura.



CILINDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR

Es aquel cilindro oblicuo cuya sección recta es un círculo.



Área de superficie lateral (A_{SL}) : $\boxed{A_{SL}=2\pi Rg}$

R : Radio de la sección recta

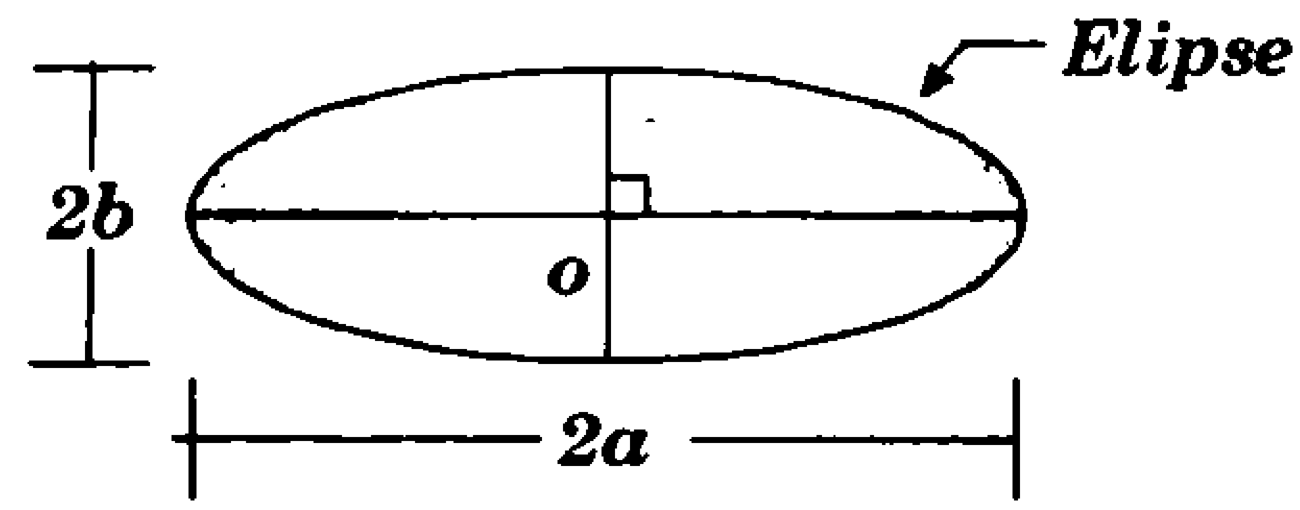
Área de la superficie total (A_{ST}): $\boxed{A_{ST}=A_{SL}+2(A_{base})}$

Volumen (V): $\boxed{V=(A_{base})h}$ $\wedge$ $\boxed{V=\pi R^2 g}$

NOTA :

Las bases del cilindro oblicuo de sección recta circular son regiones elípticas cuyas áreas se calculan en función de sus semiejes.

O : Centro de la elipse.



Área de la región elíptica

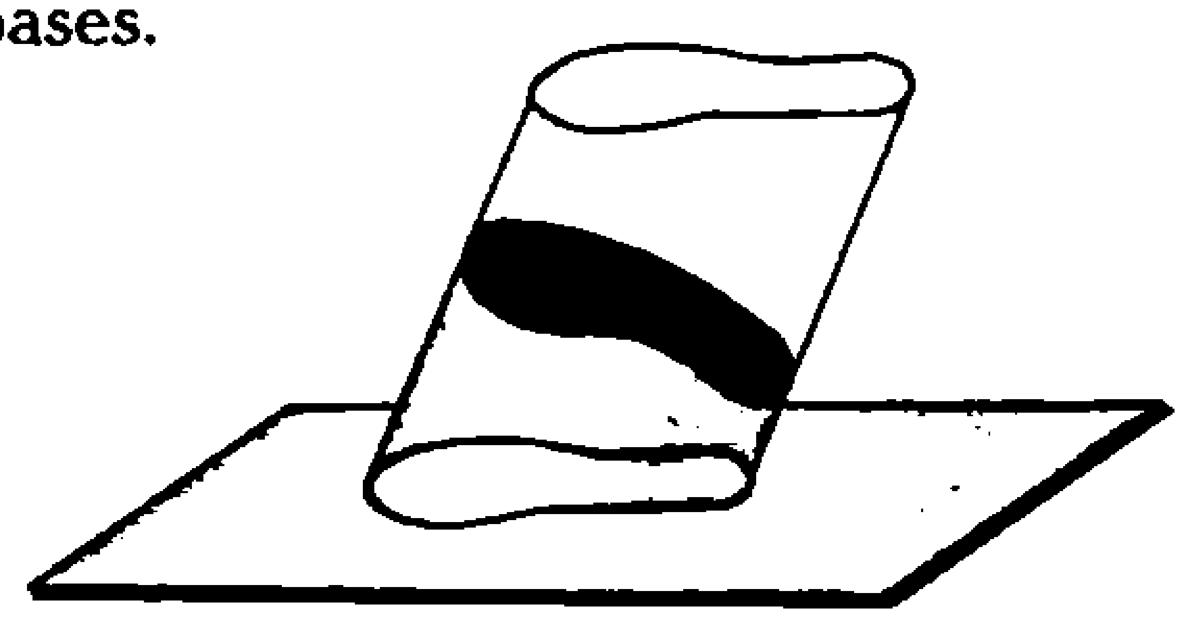
$(A_e=\pi ab)$

2a : Longitud del eje mayor

2b : Longitud del eje menor

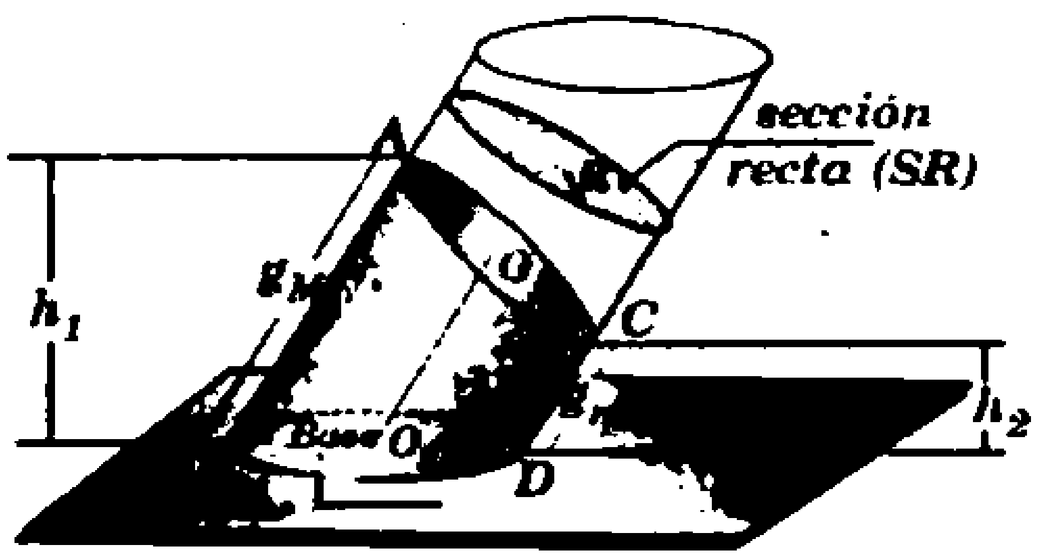
TRONCO DE CILINDRO

Es la porción del cilindro comprendida entre una base y un plano secante a todas sus generatrices no paralelo a sus bases.



* En el gráfico se muestra un tronco de cilindro oblicuo.

TRONCO DE CILÍNDRO OBLICUO DE SECCIÓN RECTA CIRCULAR



* $\overline{AB}$: generatriz mayor
* $\overline{CD}$: generatriz menor
* O_1 y O_2 : centro de las bases

$$O_1O_2=\frac{G_M+g_m}{2}$$

Área de la superficie lateral (A_{SL}):

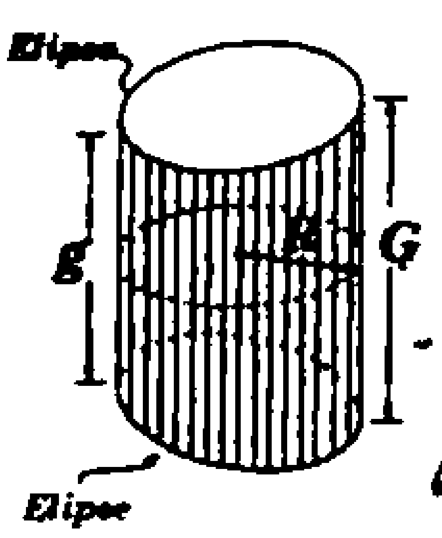
$$A_{SL}=(2p_{SR})\left(\frac{g_M+g_m}{2}\right)$$

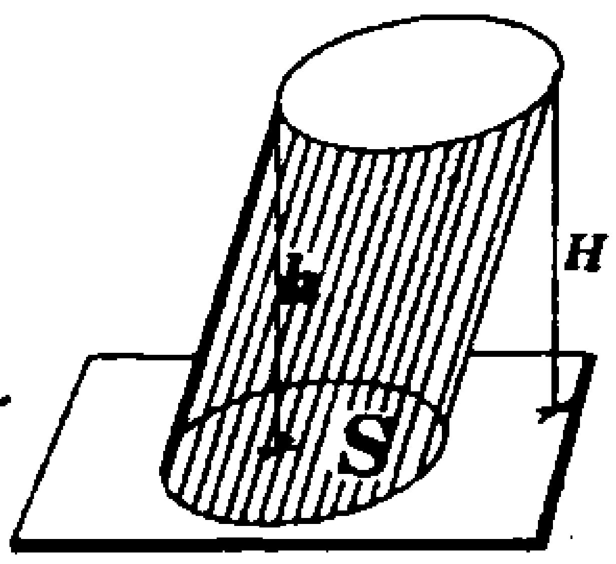
* Pero : $2p_{SR}=2\pi R$

Volumen (V) :

$$V=A_{base}\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)\quad\wedge\quad V=A_{SR}\left(\frac{g_M+g_m}{2}\right)$$

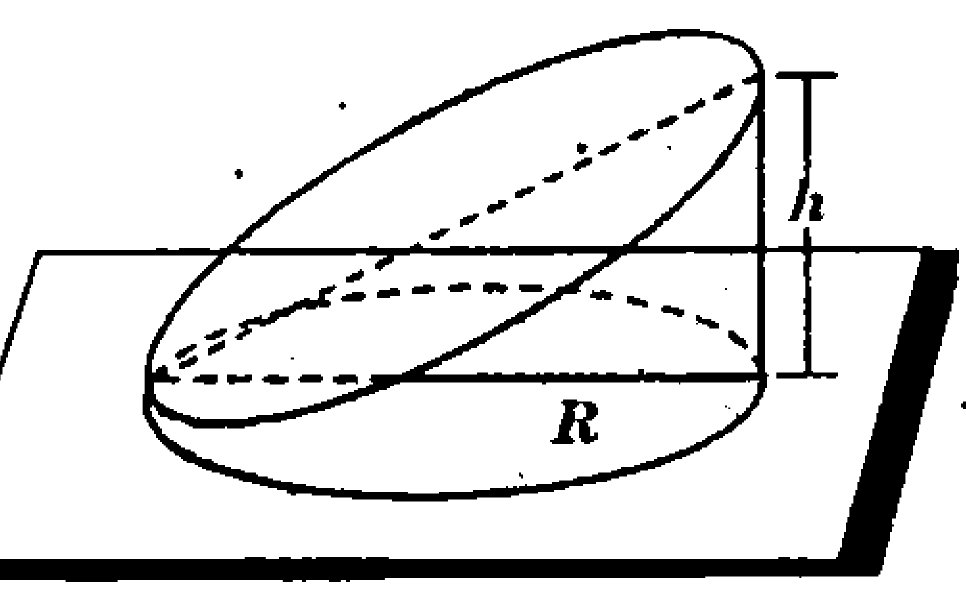
NOTA :





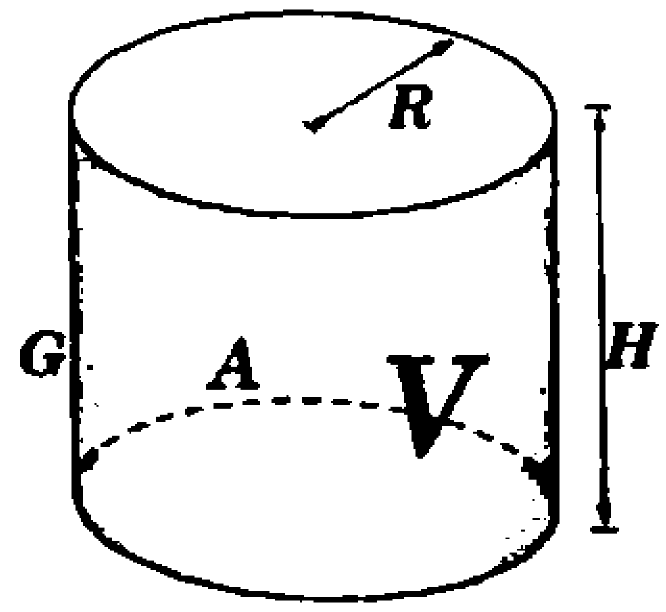
$$V=\pi R^2\left(\frac{g+G}{2}\right)\qquad V=S\left(\frac{h+H}{2}\right)$$

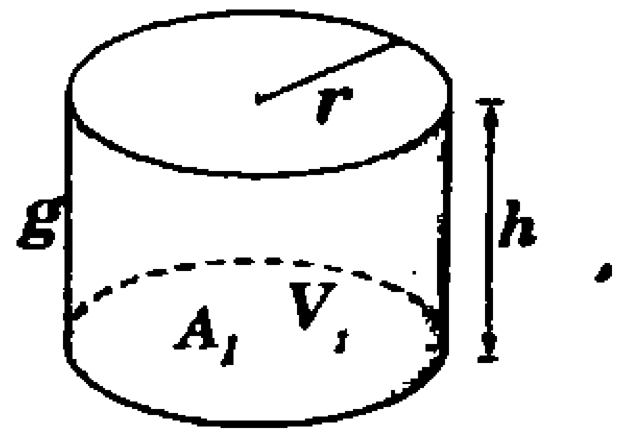
CUÑA CILINDRICA



$$V=\left(\frac{\pi R^2\times h}{2}\right)$$

CILINDROS SEMEJANTES





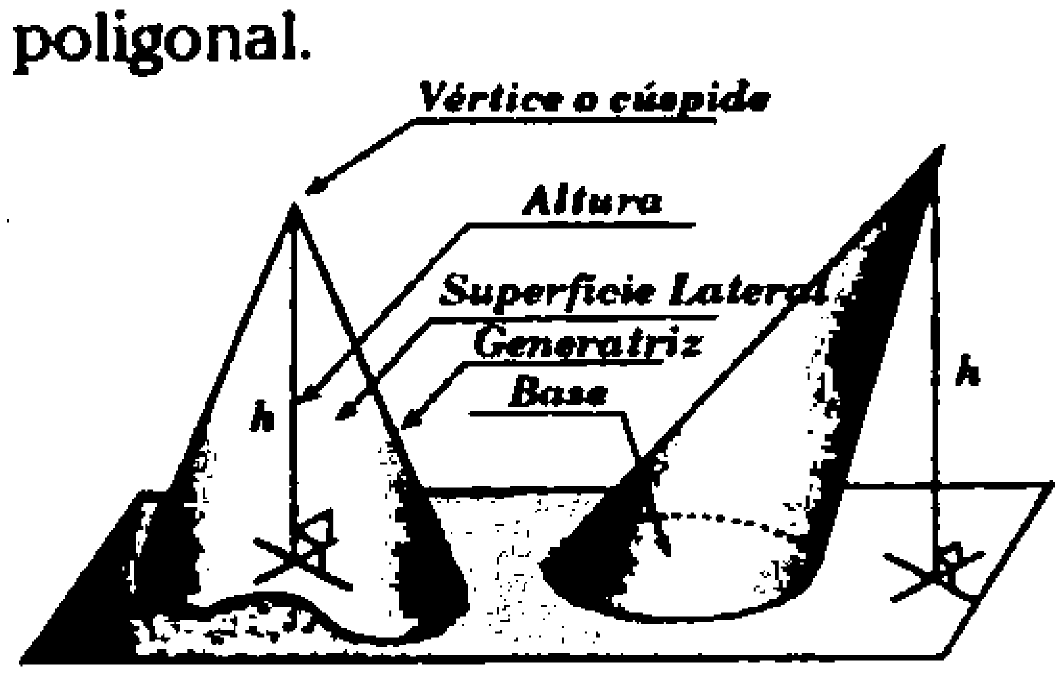
$$\frac{R}{r}=\frac{H}{h}=\frac{G}{g}$$

$$\frac{A}{A_1}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{H^2}{h^2}=\frac{G^2}{g^2}$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{R^3}{r^3}=\frac{H^3}{h^3}=\frac{G^3}{g^3}$$

CONO

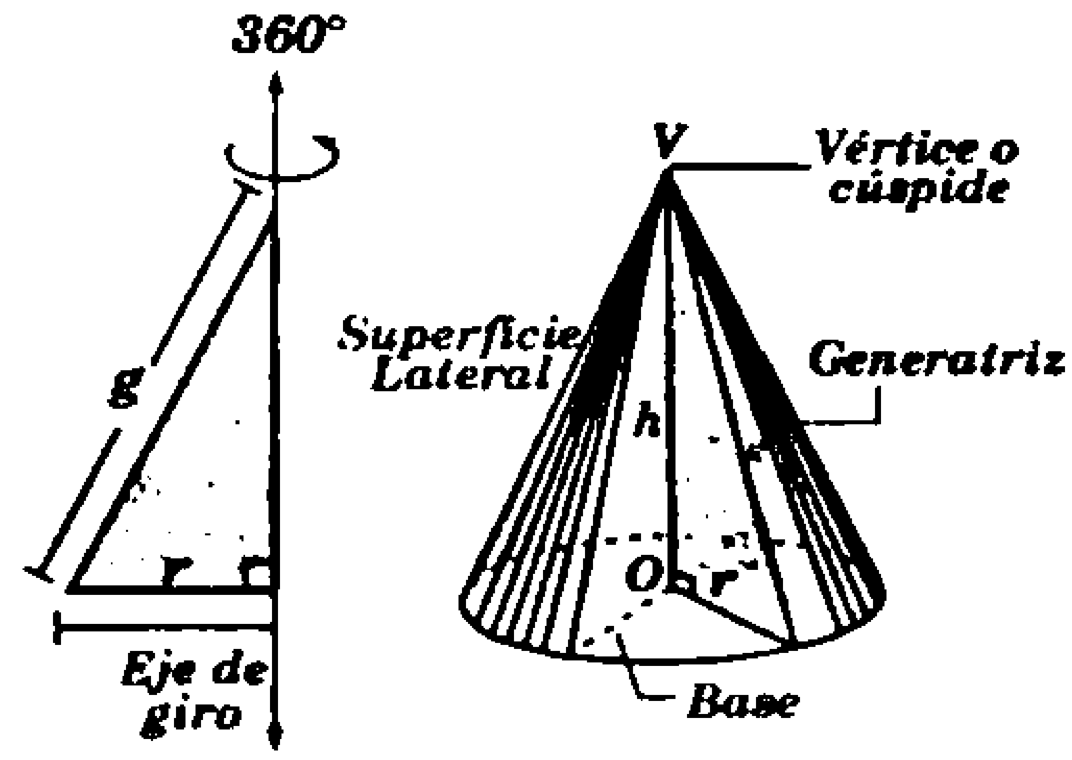
El estudio sistemático de las pirámides el conocimiento de la circunferencia y algunas otras líneas curvas , han conllevado a la obtención y subsiguiente estudio de otras figuras , entre las cuales destaca el cono , el cual es muy parecido a una pirámide , con la diferencia de que sus bases es una región curva en lugar de una poligonal.



Si el pie de la altura es el centroíde de la base, entonces el cono se denomina cono recto , caso contrario se denomina cono oblicuo.

CONO DE REVOLUCIÓN O CONO CIRCULAR RECTO

Es aquel sólido geométrico generado por una región triangular al girar *360°* en torno a uno de sus catetos.



Área de la Superficie Total (A_{ST})

$$A_{ST}=A_{SL}+A_{base}$$

A_{base} : área de la base

VOLUMEN (V) :

$$V=\frac{(A_{base})h}{3}$$

h: longitud de la altura de la pirámides irregulares .

O : centro de la base del cono .

r : radio de la base.

$$V=\left(\frac{\pi r^2}{3}\right)h$$

h:longitud de la altura de la pirámide

Área de la Superficie Lateral (A_{SL}) :

$$A_{SL}=\pi rg$$

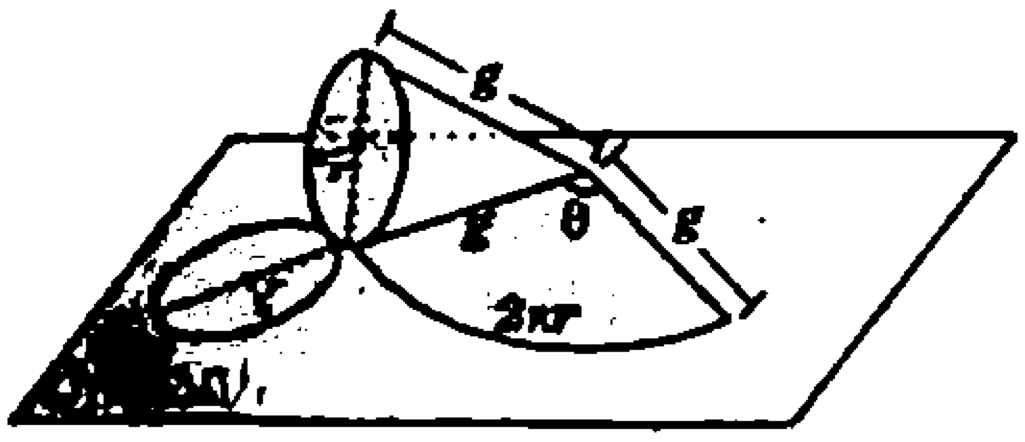
g : longitud de la generatriz.

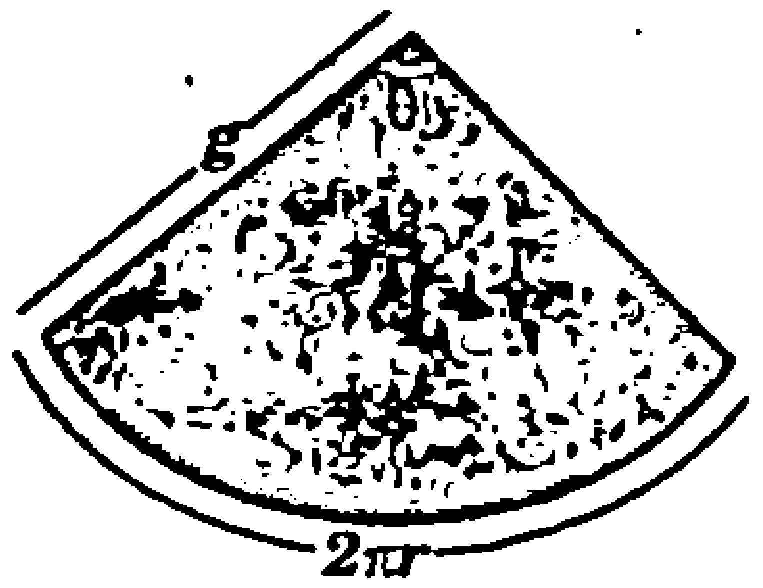
SECCIÓN AXIAL DE UN CONO

Es la sección plana determinada por un plano secante al cono que contiene a su eje.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular cuyo radio es igual a la longitud de la generatriz de dicho cono y cuyo arco tiene igual longitud que la circunferencia que limita la base.





* En el gráfico, se muestra un cono de revolución y el desarrollo de su superficie lateral.

θ: Medida del ángulo de desarrollo

$$\theta = \frac{r}{g}(360°)$$

ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL (A_{SL})

La superficie lateral es equivalente con su respectivo desarrollo, este un sector circular cuyo centro es el vértice del cono y tiene por radio a la generatriz.

A_{SL} <> Asector

$A_{SL} = \pi r g$

ÁREA DE LA SUPERFICIE TOTAL (A_{ST})

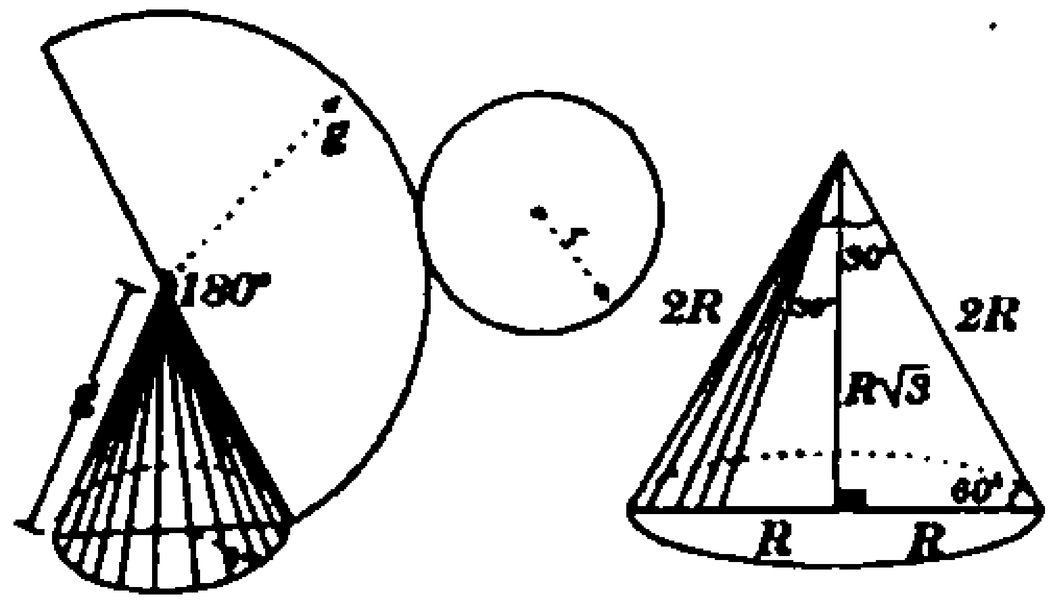
$A_{ST} = \pi r(g+r)$

CONO EQUILÁTERO

Es aquel cono de revolución cuyas generatrices tiene longitudes iguales a la del diámetro de la base $(g=2r)$.

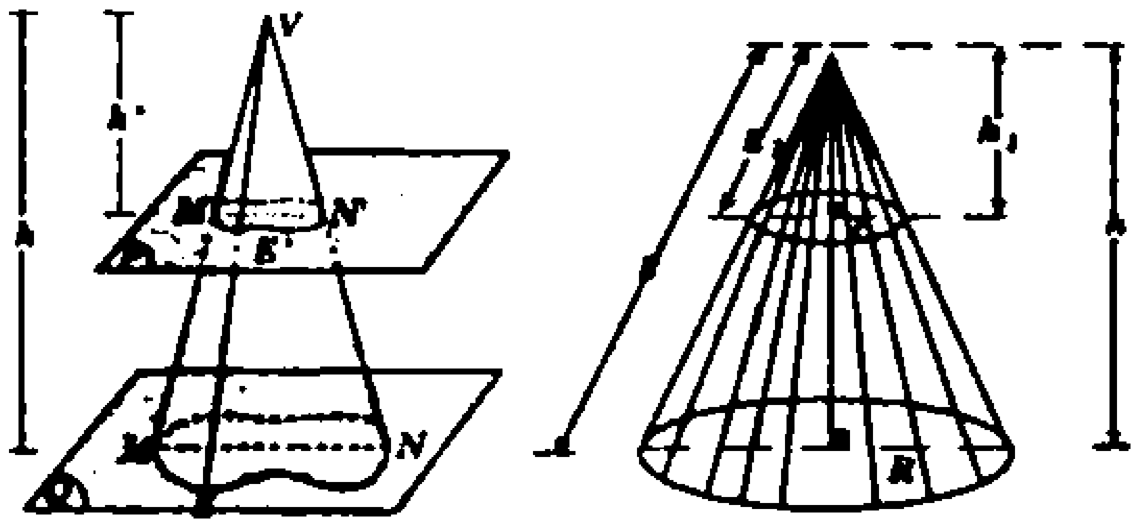
En la figura se muestran un cono equilátero y su respectivo desarrollo.

EJEMPLO :



SEMEJANZA DE CONOS

Todo plano secante a un cono paralelo; determina un cono parcial semejante al total.



* En el gráfico, si $\square P // \square Q$

$\Rightarrow$ Cono $V\text{-}M'N' \sim$ Cono $V\text{-}MN$

Si dos conos son generados por triángulos semejantes que giran alrededor de los lados homólogos, dichos conos son semejantes.

También si se intersecta a un cono por un plano paralelo a la base se obtiene un cono pequeño semejante al total, debiéndose cumplir :

• Las áreas de sus bases son entre sí como el cuadrado de las longitudes de sus elementos homólogos.

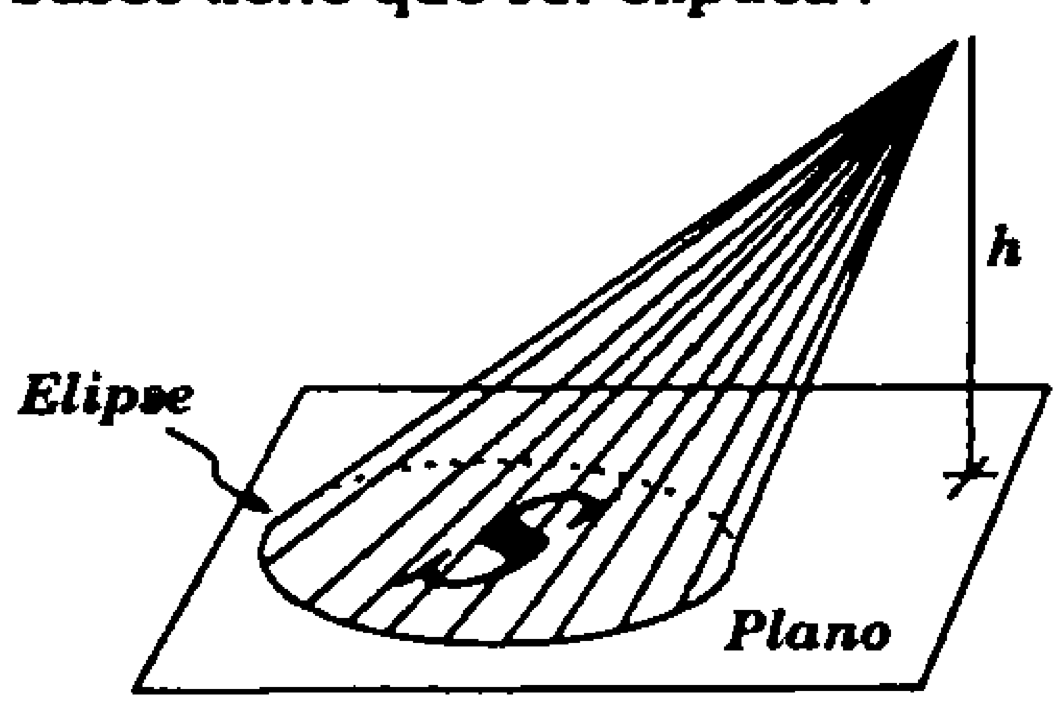
$$\frac{S_1}{S} = \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{g_1^2}{g^2}$$

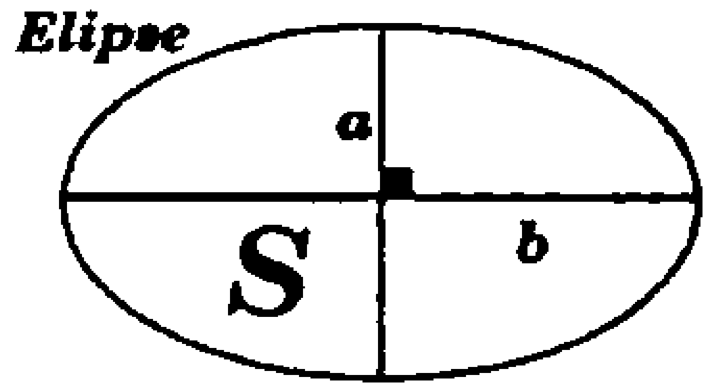
• los volúmenes son entre sí como el cubo de sus elementos homólogos

$$\frac{V_1}{V} = \frac{h_1^3}{h^3} = \frac{r_1^3}{r^3} = \frac{g_1^3}{g^3}$$

CONO OBLICUO

Si se intersecta a un cono recto por un plano no paralelo a la base se obtiene el cono oblicuo, cuyas bases tiene que ser elíptica.





a = Radio mínimo.

b = Radio máximo.

$S = \pi ab$

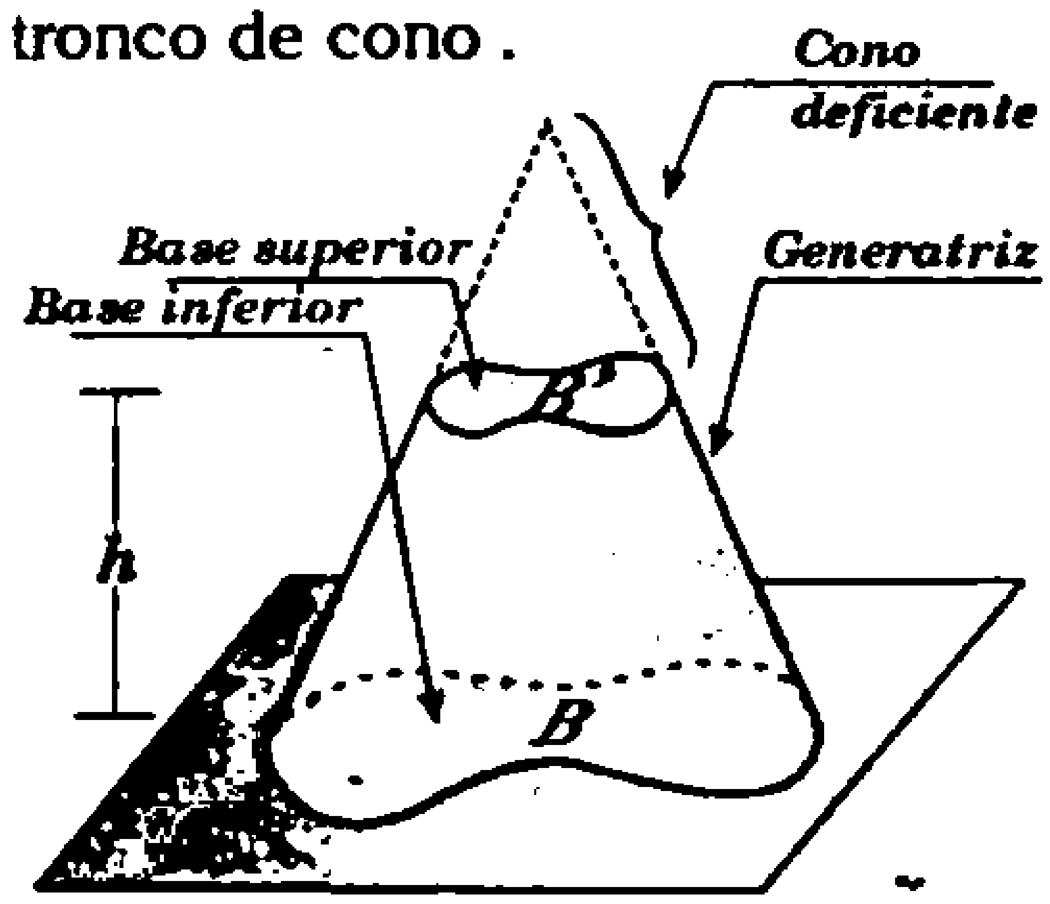
* Volumen del cono oblicuo :

$$V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow V = \frac{\pi abh}{3}$$

TRONCO DE CONO

Es la porción de cono comprendido entre su base y la sección plana determinada por un plano paralelo a dicha base.

A su base y a dicha sección se les denomina bases del tronco, la superficie cónica que la limita se denomina superficie lateral del tronco y a la distancia entre sus bases se le denomina altura del tronco de cono.



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono

VOLUMEN (V) :

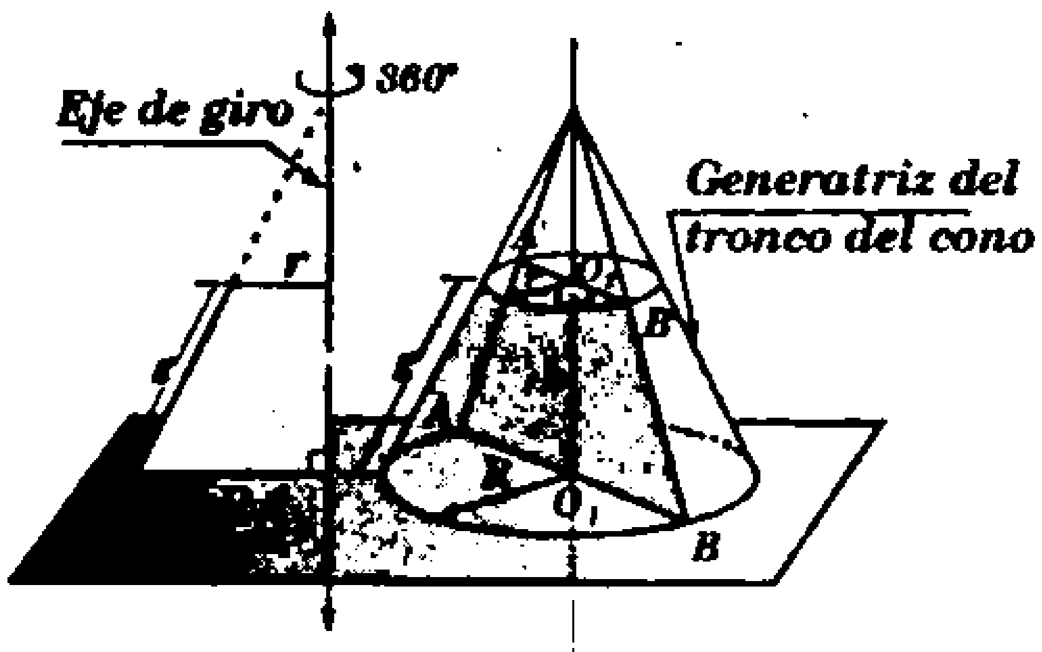
$$V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$$

* B y B' : área de las bases

TRONCO DE CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

Es un tronco de cono cuyas bases son círculos de modo que sus centros están sobre una misma recta perpendicular a dichas bases, también se denomina

tronco de cono de revolución porque se genera con una región trapecial rectangular al girar una vuelta en torno a su lado perpendicular a sus bases .



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono de revolución.

$\overline{O_1O_2}$: altura ;

$\overline{O_1O_2}$: eje del tronco de cono.

VOLUMEN (V) :

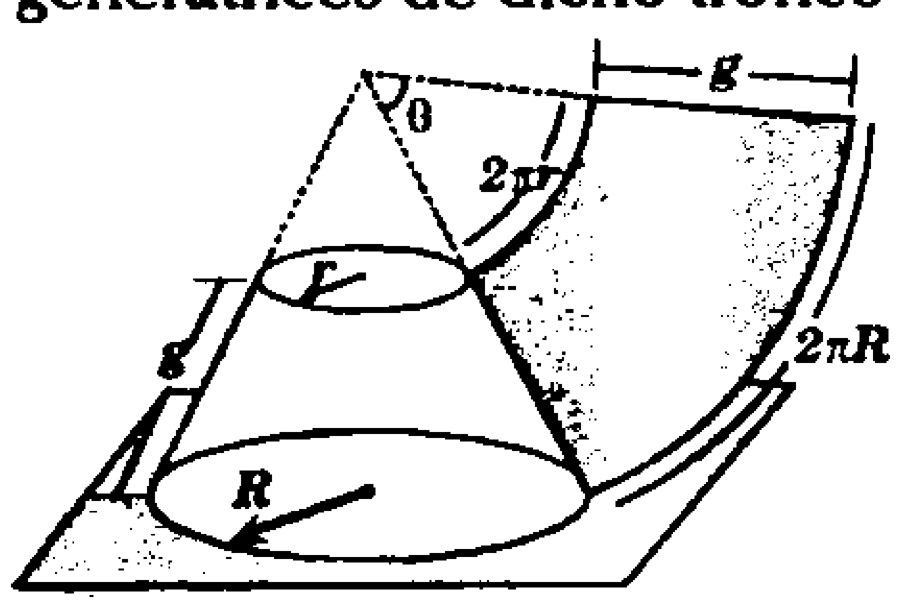
$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

¿Qué es la sección axial de un tronco de cono de revolución?

Es la sección plana determinada por un plano secante al tronco de cono que contiene a su eje. En el gráfico, la sección *AA'B'B* es una sección axial del tronco de cono de revolución.

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL DE UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular cuyos arcos correspondientes son de igual longitud que las circunferencias que limitan las bases del cono y cuyos lados laterales son de igual longitud que las generatrices de dicho tronco .



* En el gráfico, se muestra un tronco de cono de revolución y el desarrollo de su superficie lateral.

θ:medida del ángulo de desarrollo.

$$\theta=\left(\frac{R-r}{g}\right)360°$$

ÁREA LATERAL :

El área lateral de un tronco de cono de revolucion es igual a la suma de los semiperimetros de las bases multiplicado por la generatriz .

AL =(semiperimetro de la base mayor + semiperímetro de la menor menor) generatriz

$$AL=(\pi R+\pi r)\times g$$

$$AL=\pi g(R+r)$$

ÁREA TOTAL :

El área total de un tronco de cono revolución es igual a la suma del area lateral con las áreas de las bases

$$A_T=AL+\pi R^2+\pi r^2$$

$$\Rightarrow A_T=\pi g(r+R)+\pi R^2+\pi r^2$$

VOLUMEN :

El volumen de un tronco de cono de revolucion de altura *H* y cuyos radios de las bases son *R* y *r* esta dado por la suma de sus bases y la media proporcional entre dichas bases

$$V=\pi\frac{H}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

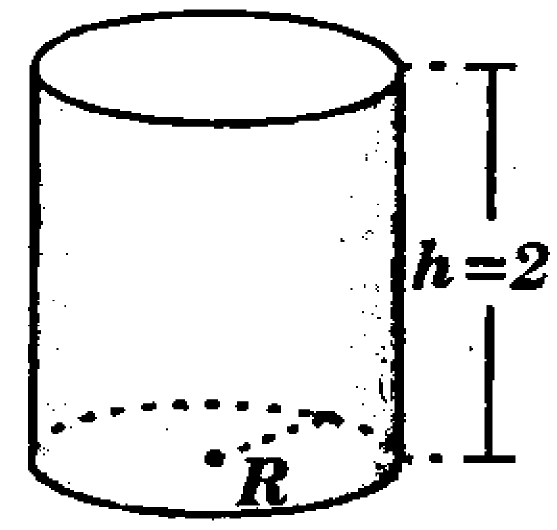
PROBLEMA 1 :

Al aumentar en **6** unidades el radio de un cilindro circular recto , su volumen se aumenta en "*x*" unidades cúbicas . Si la altura del cilindro original se aumenta en **6** unidades el volumen queda aumentado igualmente en "*x*" unidades cúbicas, Si la altura original es **2** unidades entonces el radio original es : (en unidades)

RESOLUCIÓN :

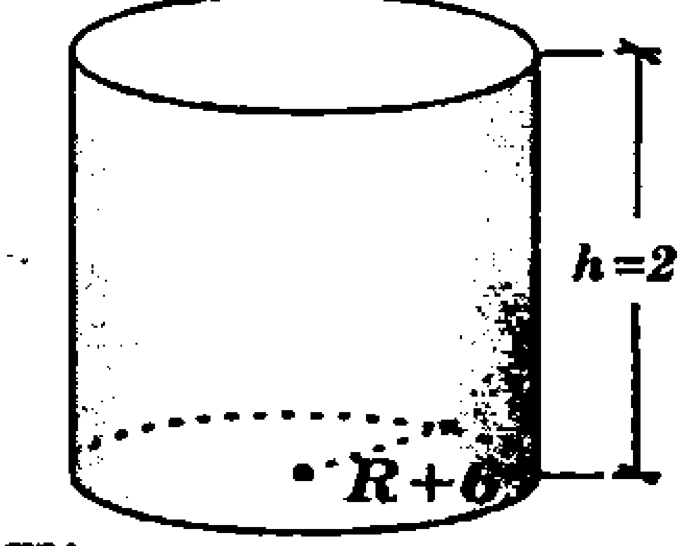
Piden *R* :

Dato : $h=2$



El volumen será : $V=\pi R^2\times 2=2\pi R^2$

El radio aumenta en **6** y el volumen aumenta en *x*.



El volumen V'

$V'=V+x$

$\Rightarrow \pi(R+6)^2\times 2=2\pi R^2+x$ ....(I)

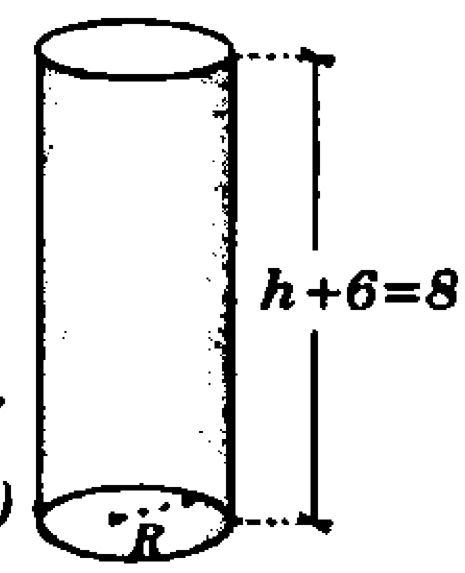
La altura aumenta en **6** y el volumen aumenta en *x*.

El volumen V''

$V''=V+x$

$\Rightarrow \pi R^2\times 8=2\pi R^2+x$

$\Rightarrow x=6\pi R^2$.........(II)



Reemplazamos *(II)* en *(I)* :

$2\pi(R+6)^2=2\pi R^2+6\pi R^2=8\pi R^2$

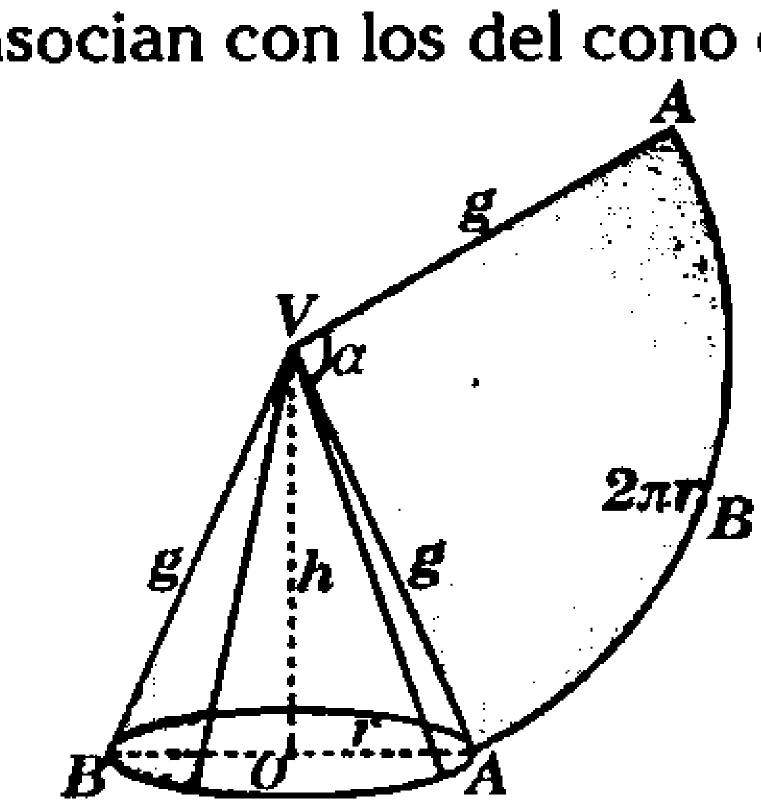
$\Rightarrow (R+6)^2=4R^2 \Rightarrow R=6$

PROBLEMA 2 :

El ángulo de desarrollo de un cono circular recto mide **120°**. Si la altura del cono mide **4** cm, entonces el radio (en cm) del cono es :

RESOLUCIÓN :

* Al desarrollar la superficie lateral de un cono circular recto, resulta un sector circular cuyos elementos se asocian con los del cono dado.



En el gráfico α es la medida del ángulo de desarrollo. Sea θ su medida en radianes.

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi\alpha}{180°}$$

Luego, la longitud del arco *ABA* se asocia con el radio de la base del cono.

$$\ell_{\widehat{ABA}}=2\pi r=\theta\times g \Rightarrow \theta=\frac{2\pi r}{g}$$

Nos dan como dato $\alpha=120°$ y $h=4$ *cm*; entonces, podemos calcular θ y encontrar una relación entre r y g.

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi(120°)}{180°}=\frac{2\pi}{3}$$

Luego : $\frac{r}{g}=\frac{1}{3}$ ó $g=3r$

Como nos piden el radio de la base en *cm*, recurrimos al teorema de Pitágoras para relacionar *r, g* y *h*.

En el ⊿ *AVO* : $g^2=r^2+h^2$

Reemplazamos valores :

$$(3r)^2=r^2+(4)^2 \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el área lateral de un cilindro circular recto, sabiendo que el radio de la base es *10 cm* la altura (generatríz) *20 cm*

RPTA.: ....

02 Halla el área total de un cilindro circular recto, sabiendo que su altura es *3m* y el radio de la base es *1m*.

RPTA.: ....

03 Halla el volumen de un cilindro circular recto, sabiendo que el radio de la base es *25cm* y la altura es *80cm*.

RPTA.: ....

04 Si el área de la superficie lateral de un cilindro es 24π y el radio de su base es "*3*", calcular su volumen.

RPTA.: ....

05 Un vaso cilíndrico de diámetro "*6*" y altura "*18*" está lleno de agua. Si se vierte el contenido en otro vaso de diámetro "*12*", hasta qué altura subirá el agua?

RPTA.: ....

06 El área de la superficie lateral de un cilindro de revolución de radio *R*, es igual al área de la base. Calcular la altura.

RPTA.: ....

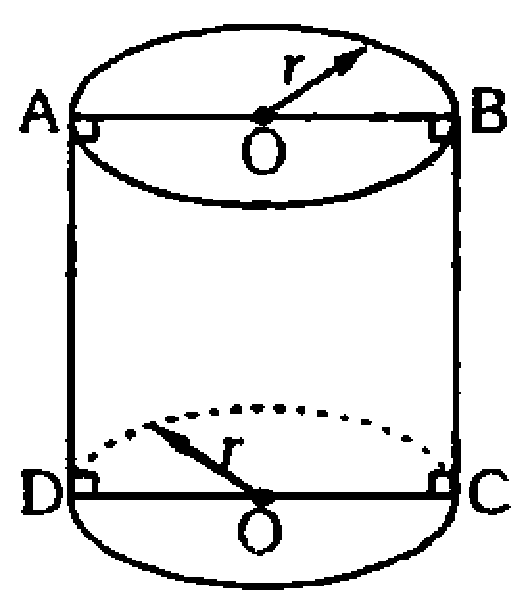
07 Hallar el área lateral y total de un cilindro recto de *39cm* de altura, cuyo radio es de *1/3* de la altura.

A) $\begin{matrix}735\\791\end{matrix}$ *B)* $\begin{matrix}200\\300\end{matrix}$ *C)* $\begin{matrix}400\\200\end{matrix}$
D) $\begin{matrix}500\\600\end{matrix}$ *E)* $\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$

08 Hallar los metros cuadrados de hojalata que se necesitan para hacer un tubo de *10cm* de diámetro y *9,60m* de longitud.

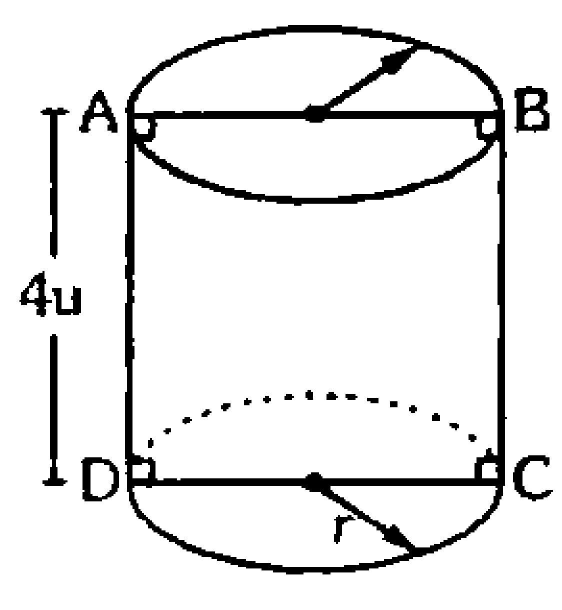
A) 1 m *B) 2* *C) 3*
D) 4 *E) NA.*

09 Calcular el volumen del cilindro recto, si el área de la base es $16\pi u^2$, $AD=4u$.



RPTA.: ....

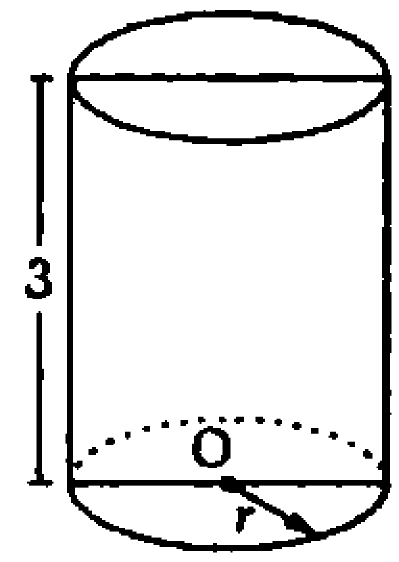
10 Si el diámetro de la base del cilindro recto mide *4u*. Calcular el área de la superficie total.



RPTA.: ....

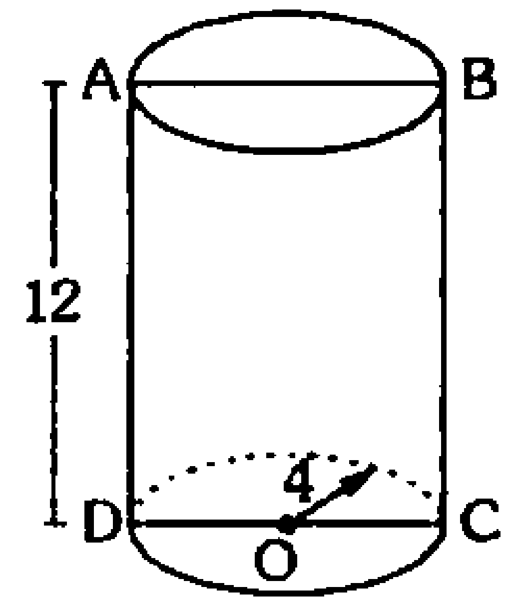
11 Calcular el volumen del cilindro, si el diámetro de la base mide *10*.

A) $75\pi u^3$
B) $70\pi u^3$
C) $73\pi u^3$
D) $72\pi u^3$
E) $40\pi u^3$



12 Calcular el área de la superficie lateral del cilindro mostrado.

A) $48\pi u^2$
B) $72\pi u^2$
C) $36\pi u^2$
D) $96\pi u^2$
E) $45\pi u^2$



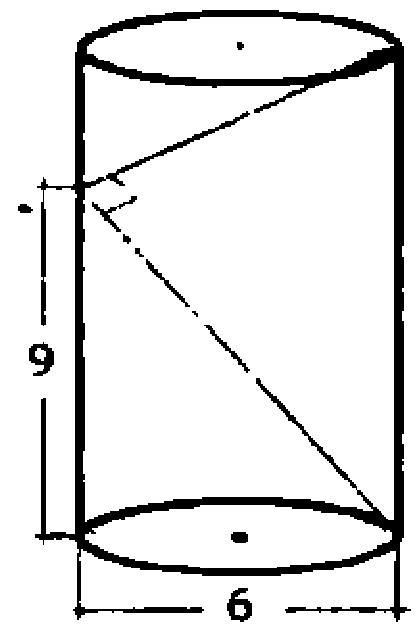
13 Calcular la longitud de la arista básica de una pirámide regular de base cuadrangular, cuya área de su superficie total es $360u^2$ y su apotema mide *13u*.

A)20u *B)15* *C)10* *D)50* *E)60*

14 Calcular la arista básica de una pirámide cuadrangular regular, si el área de su superficie total es $600u^2$ y su apotema mide $25u^2$.

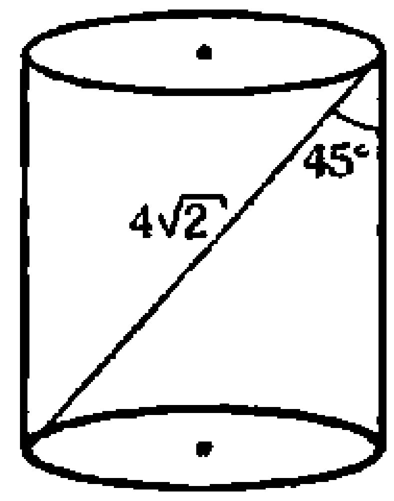
A)5u *B)10* *C)2,5* *D)7,5* *E)9*

15 En la figura, calcular el volumen del cilindro circular recto.



RPTA.: ....

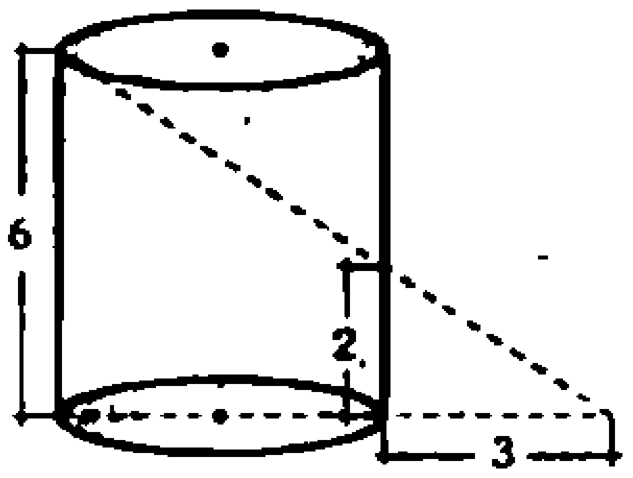
16 En la figura, calcular el área de la superficie total del cilindro circular recto.



RPTA.: ....

17 En la figura, calcular el área de

la superficie lateral del cilindro circular recto.



RPTA.: ....

⑱ Un cilindro recto se ubica verticalmente en una habitación, si las áreas de sus proyecciones sobre el techo y sobre una pared son $25\pi m^2$ y $80m^2$ respectivamente.

RPTA.: ....

⑲ El área lateral de un prisma triangular regular es *A*. Determine el área del cilindro recto circunscrito al prisma en función de *A*.

RPTA.: ....

⑳ En una vasija cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular de *300 cm* de largo, *25cm* de ancho y *22* metros de alto se vierten *6* litros de agua. ¿A qué distancia del borde llega el agua?

RPTA.: ....

㉑ El desarrollo de la superficie lateral de un prisma es un rectángulo cuya diagonal mide *15* metros si la altura es *12m*, determine el área lateral.

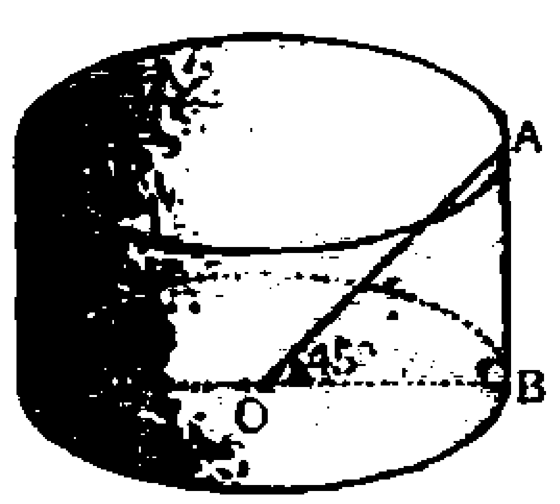
RPTA.: ....

㉒ Si el diámetro de la base de un cilindro recto mide *18u* y su altura *3u*. Calcule su volumen.

A) $222\pi u^3$ *B)* $220\pi u^3$ *C)* $242\pi u^3$
D) $242\pi u^3$ *E)* $250\pi u^3$

㉓ Calcule el volumen del cilindro recto ; si $OA = 2\sqrt{8}\,u$.

A) $61\pi u^3$
B) $60\pi u^3$
C) $62\pi u^3$
D) $64\pi u^3$
E) $50\pi u^3$



PRÁCTICA DE EJERCICIOS Nº2

⓪① Hallar el área lateral de un cono circular recto, sabiendo que el radio de la base es *12 cm* y la generatriz es *40 cm.*

RPTA.: ....

⓪② Determine el área lateral de un cono circular recto, sabiendo que el radio de la base es *1,5 m* y la generatriz es *2,5 m*

RPTA.: ....

⓪③ Hallar el área total de un cono circular recto, sabiendo que el radio mide *10 cm* y la generatriz *25 cm.*

RPTA.: ....

⓪④ Determine el área total de un cono circular recto, sabiendo que el radio mide *5cm* y la generatriz *13 cm*

RPTA.: ....

⓪⑤ Hallar el volumen de un cono circular recto, sabiendo que el radio de la base es *8cm* y la altura *16 cm.*

RPTA.: ....

⓪⑥ Se tiene un cono recto cuyo radio mide *30cm* y generatriz *50cm*. Calcular el área de la superficie lateral.

A) $1000\pi cm^2$ *B)* 1200π *C)* 1300π
D) 1400π *E)* 1500π

⓪⑦ Del problema anterior. Calcular el área de su superficie total.

A) $2000\pi cm^2$ *B)* 2200π *C)* 2400π
D) 2600π *E)* 2800π

⓪⑧ Del problema anterior, calcular el volumen de dicho sólido.

A) $10000\pi cm^3$ *B)* 12000π *C)* 13000π
D) 14000π *E)* 15000π

⓪⑨ Hallar el área lateral de un cono de revolución de *13cm* de generatriz y *12cm* de altura.

A) $30\pi cm^2$ *B)* 45π *C)* 55π
D) 90π *E)* 120π

⑩ Del problema anterior, calcular el volumen de dicho sólido.

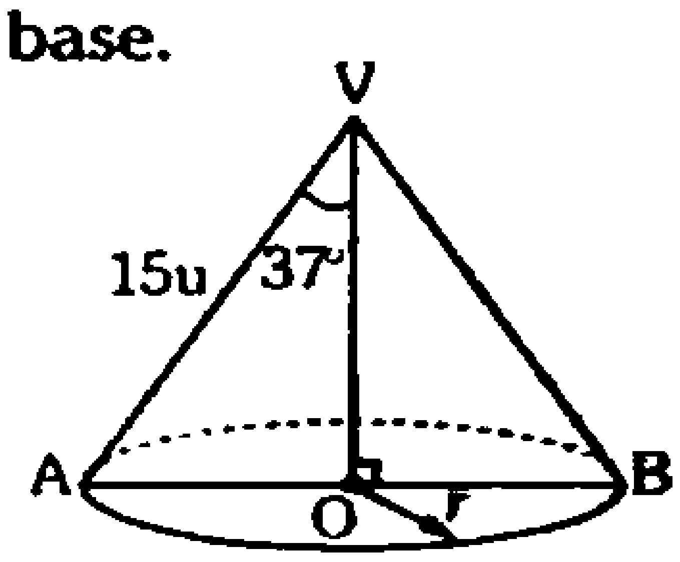
A) $90\pi cm^3$ *B)* 100π *C)* 120π
D) 130π *E)* 140π

⑪ El área lateral de un cono de revolución es el doble del área de la base. Calcular el ángulo que forman la generatriz con la base.

A) 30° *B)* 37° *C)* 45°
D) 53° *E)* 60°

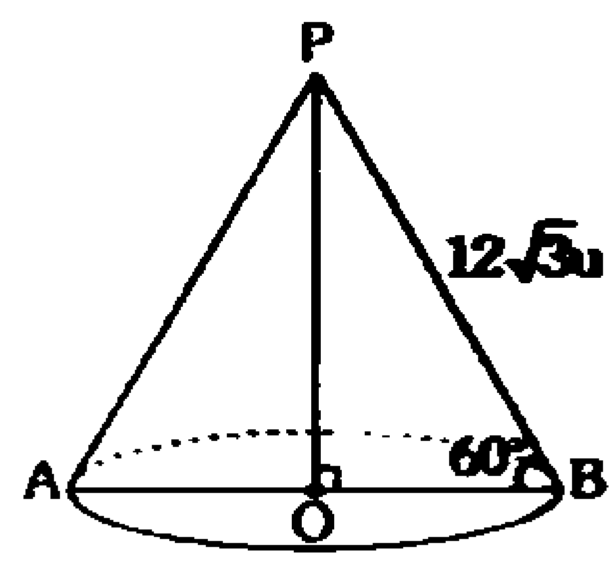
⑫ Calcular el volumen del cono que se muestra en el gráfico. "*O*" centro de la base.

A) $324\pi u^3$
B) $323\pi u^3$
C) $320\pi u^3$
D) $300\pi u^3$
E) $330\pi u^3$



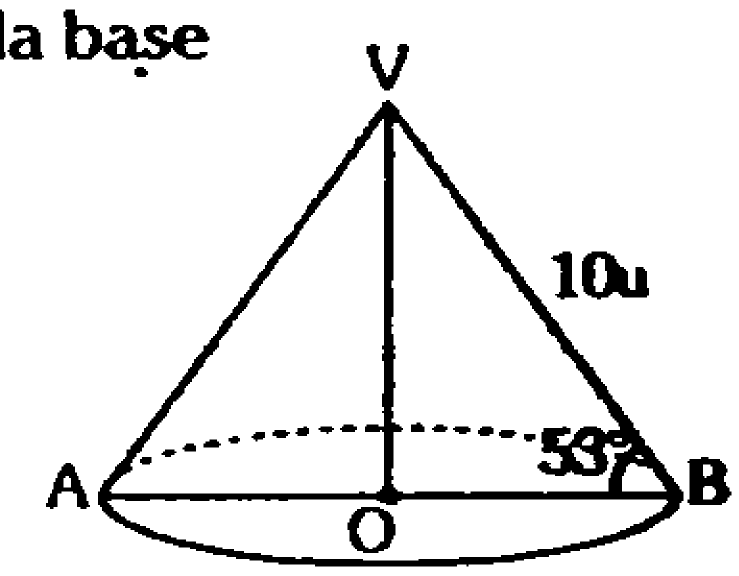
⑬ En el gráfico : Calcular el volumen del cono. "*O*" centro de la base.

A) $64\sqrt{3}\,\pi u^3$
B) $36\sqrt{3}\,\pi u^3$
C) $640\,\pi u^3$
D) $60\sqrt{3}\,\pi u^3$
E) $50\sqrt{3}\,\pi u^3$



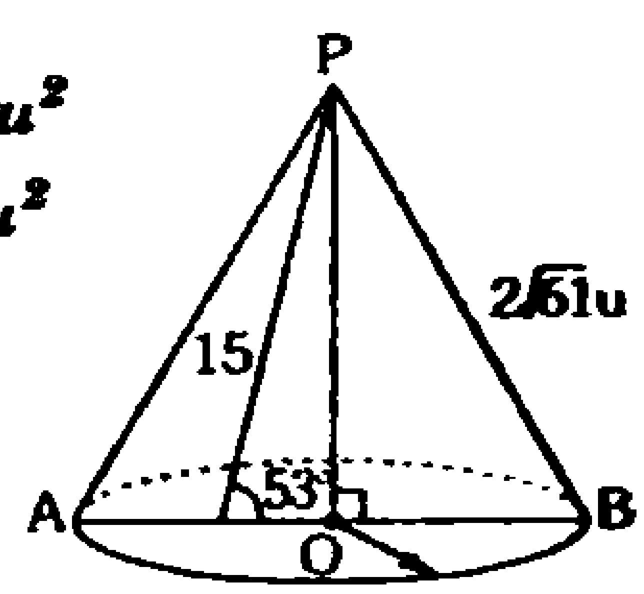
⑭ En el gráfico : Calcular el volumen del cono recto. "*O*" centro de la base

A) $86\pi u^3$
B) $40\pi u^3$
C) $90\pi u^3$
D) $60\pi u^3$
E) $96\pi u^3$



⑮ En el gráfico : Calcular el área de la superficie lateral del cono recto. "*O*" centro de la base.

A) $20\sqrt{61}\,\pi u^2$
B) $18\sqrt{61}\pi u^2$
C) $16\pi u^2$
D) $\sqrt{61}\,\pi u^2$
E) $10\pi u^2$



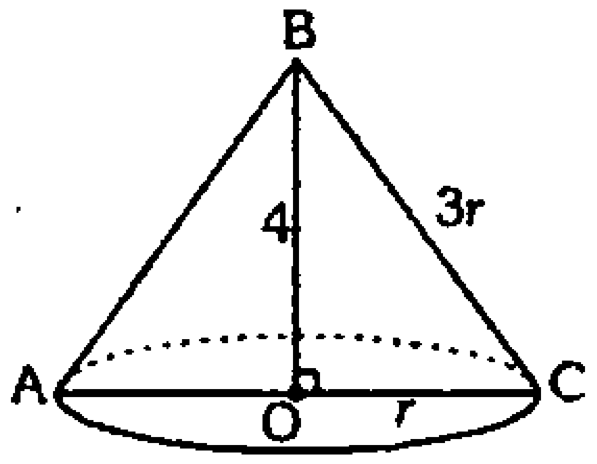
⑯ Calcular el área de la superficie lateral de un cono recto, si su

generatriz mide *6u* y el diámetro de su base *8u*.

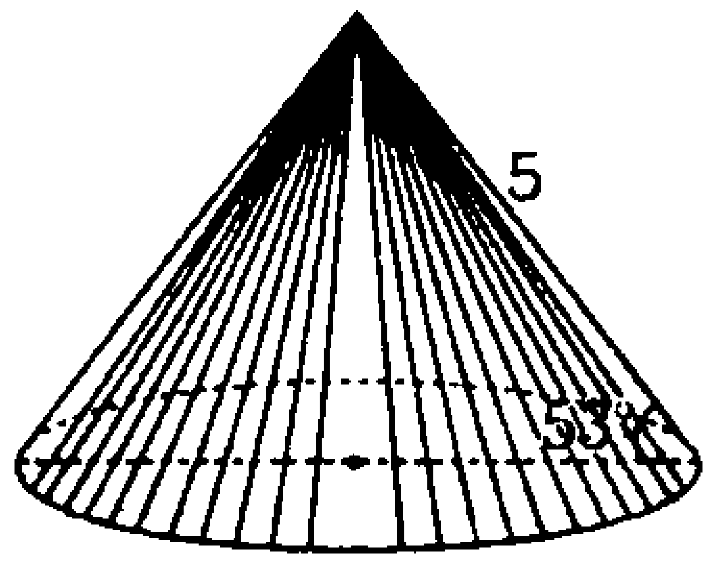
A) $12\pi u^2$ *B)* $24\pi u^2$ *C)* $18\pi u^2$
D) $48\pi u^2$ *E)* $32\pi u^2$

17 En el gráfico : Calcular el área de la superficie lateral del cono. *"O"* centro de la base.

A) 4π
B) 6π
C) 8π
D) 9π
E) 12π

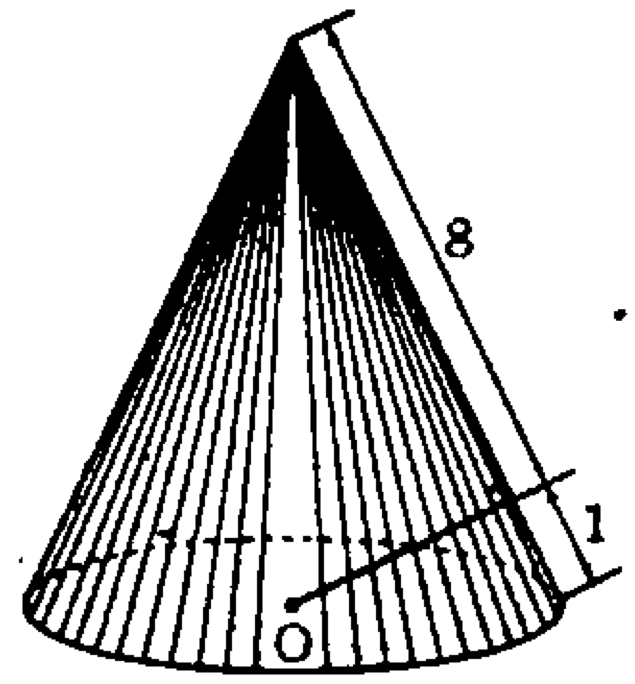


18 Calcular el volumen del cono recto circular mostrado.



RPTA.: ....

19 Calcular el área de la superficie lateral del cono circular recto mostrado. *O* es centro.



RPTA.: ....

20 Calcular el volumen de un cono equilátero de altura *6u*.

RPTA.: ....

21 El volumen de un cono recto es $320\pi cm^3$. Si el radio de la base mide 8cm, calcule la longitud de la generatriz.

RPTA.: ....

22 La altura de un cono recto es igual al diámetro de su base, calcule el área lateral en función de *h*, si su altura es *h*.

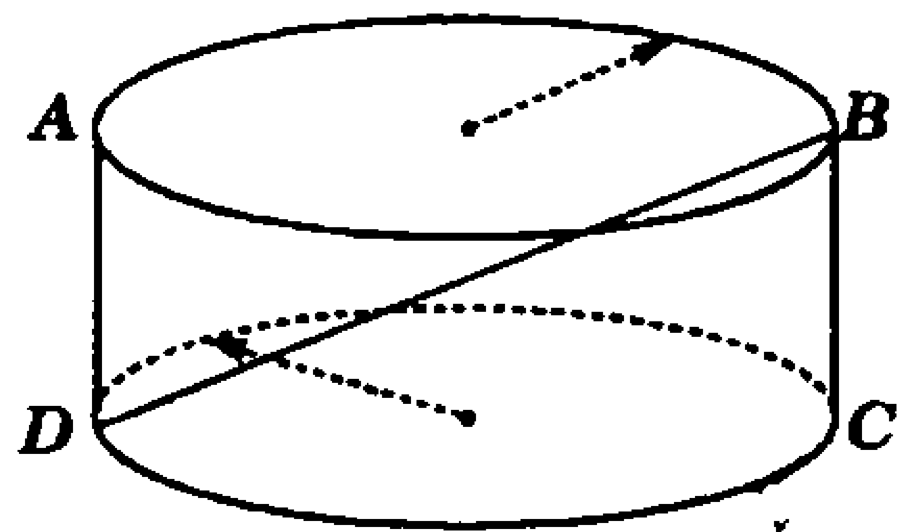
RPTA.: ....

23 Calcule el área de un cono equilátero de altura *h*, en función de *h*.

RPTA.: ....

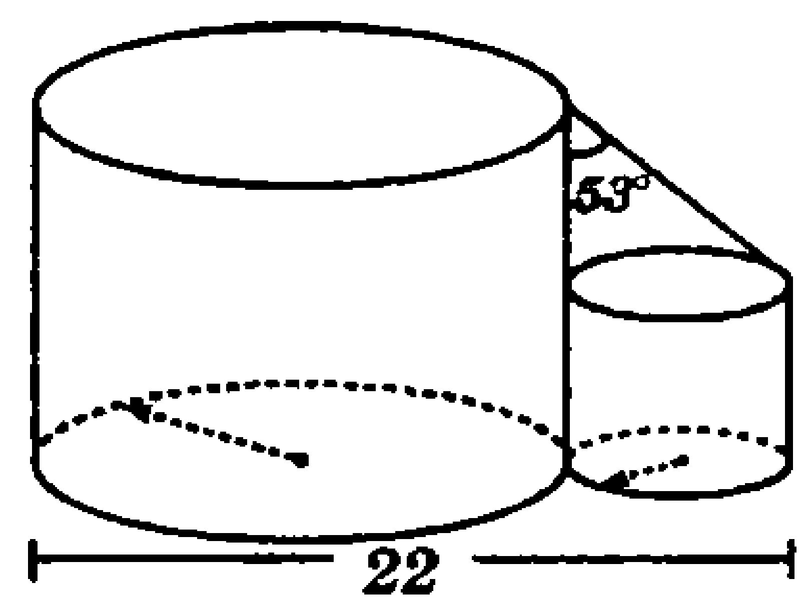
PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 En el gráfico se muestra a un cilindro de revolución tal que el área de su superficie lateral es igual a la suma de áreas de sus bases y $BD=\sqrt{5}$. Calcular el volumen del cilindro



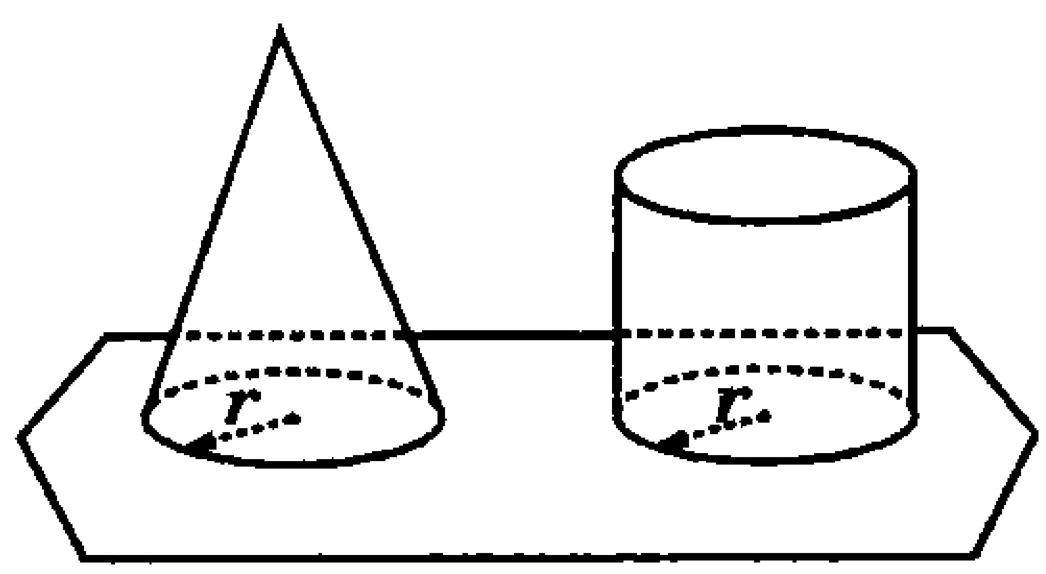
A) 2π *B)* $\sqrt{5}\pi$ *C)* π *D)* $\frac{2}{3}\pi$ *E)* 5π

02 En el gráfico se muestra a dos cilindros equiláteros. Calcular el área de la superficie lateral del menor de ellos.



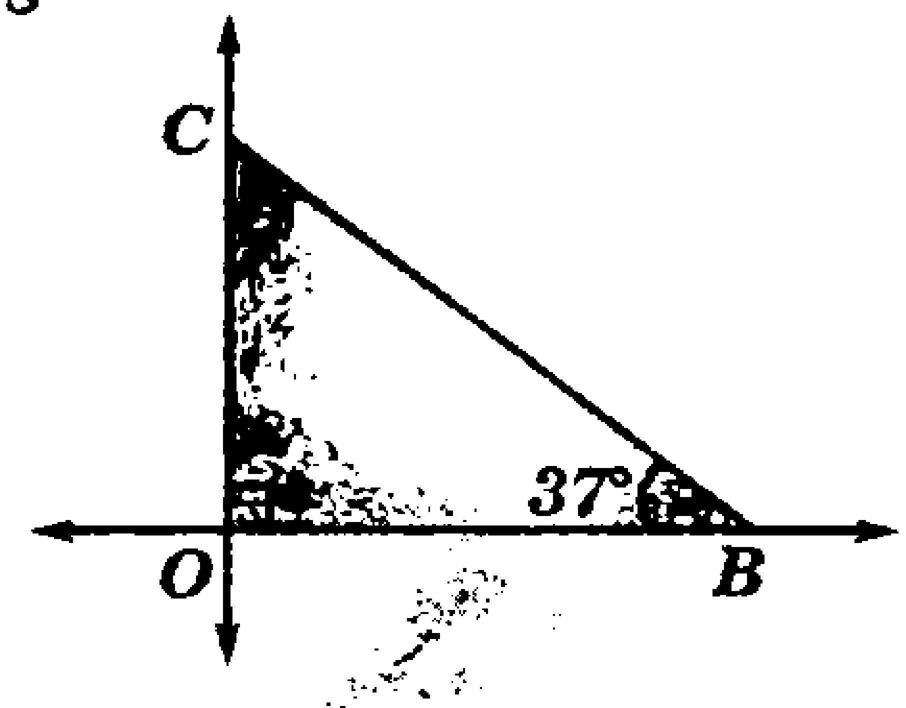
A) 36π *B)* 48π *C)* 80π
D) 64π *E)* 72π

03 En el gráfico se muestran a dos sólidos de revolución equivalentes. Calcular la razón entre sus alturas



A) 2 *B)* 3/2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 1

04 Si la diferencia de volúmenes de los sólidos generados por la región sombreada al girar una vuelta alrededor de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ es 108π, calcular el perímetro de la región.



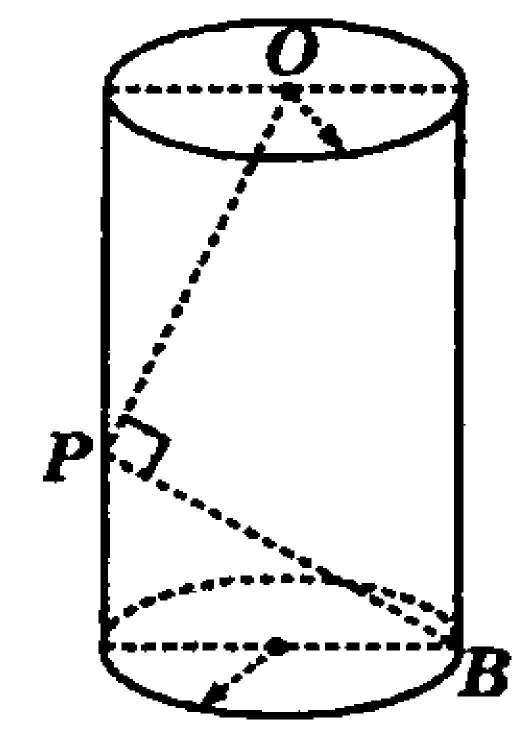
A) 18 *B)* 36 *C)* 24 *D)* 27 *E)* 54

05 El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un semicírculo de área 18π. Calcular el área de la superficie del cono mencionado.

A) 25π *B)* 27π *C)* 18π
D) 20π *E)* 24π

06 En la figura : $OP=PB=2\sqrt{5}$. Calcular el volumen del cilindro de revolución.

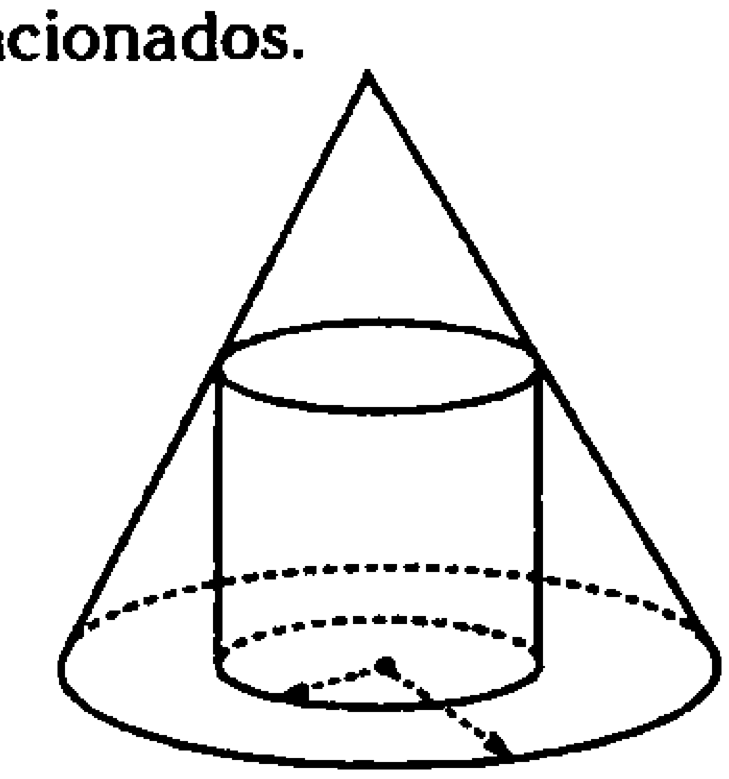
A) 18π
B) $9\sqrt{8}\pi$
C) $8\sqrt{3}\pi$
D) $6\sqrt{6}\pi$
E) 24π



07 El área de la superficie total de un cono de revolución es 24π y su generatriz mide *5*. Calcular su volumen.

A) 12π *B)* 11π *C)* 10π *D)* 7π *E)* 6π

08 En el gráfico se muestra a un cono de revolución y a un cilindro de revolución inscrito en él. Si el área de la base del cono es el cuádruplo del área de la base del cilindro, calcular la razón de los volúmenes de los sólidos mencionados.



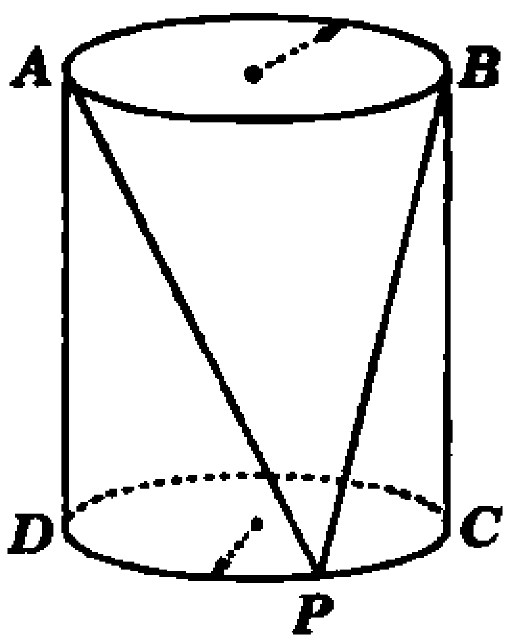
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{3}{22}$ E) $\frac{3}{8}$

09 En un cono de revolución dos generatrices diametralmente opuestas forman un ángulo de medida *74*. Calcular la medida del ángulo del desarrollo de la superficie lateral del cono

A) 228 B) 208 C) 250
D) 216 E) 224

10 En la figura mostrada: $AP=4\sqrt{2}$, $PB=5$ y $BC=4$. Calcular el volumen del cilindro circular recto.

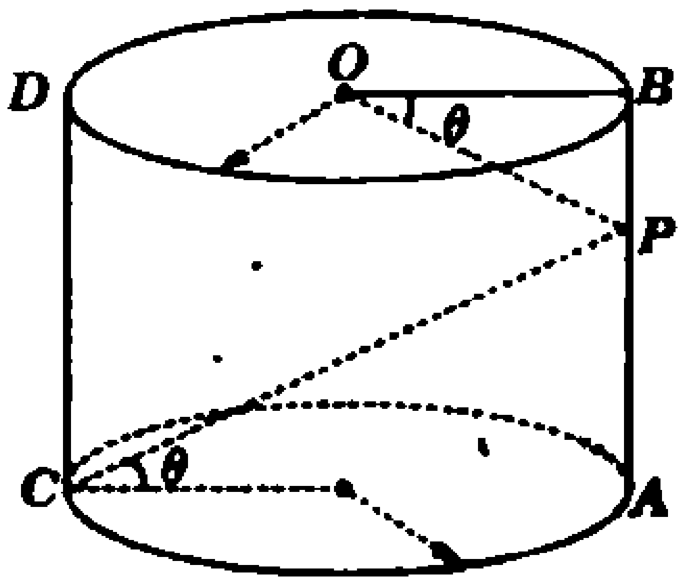
A) $6\sqrt{21}$
B) 25π
C) 16π
D) $8\sqrt{5}\pi$
E) $3\sqrt{6}\pi$



11 En un cubo, cuya arista mide *2*, se tiene en su interior un cono equilátero cuya base está inscrita en una cara del cubo. Calcular el volumen del cono.

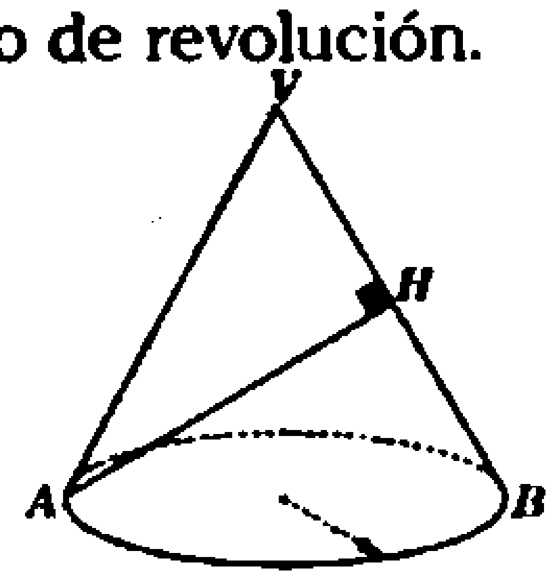
A) π B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ C) $\pi\sqrt{2}$ D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ E) 3π

12 En el gráfico se muestra a un cilindro de revolución tal que $CP+PO=12$ y $AB=6$. Calcular el volumen de dicho cilindro.



A) 64π B) 56π C) 84π
D) 100π E) 72π

13 En la figura: $AH=6\sqrt{10}$ y $VH=4(HB)$. Calcular el volumen del cono de revolución.

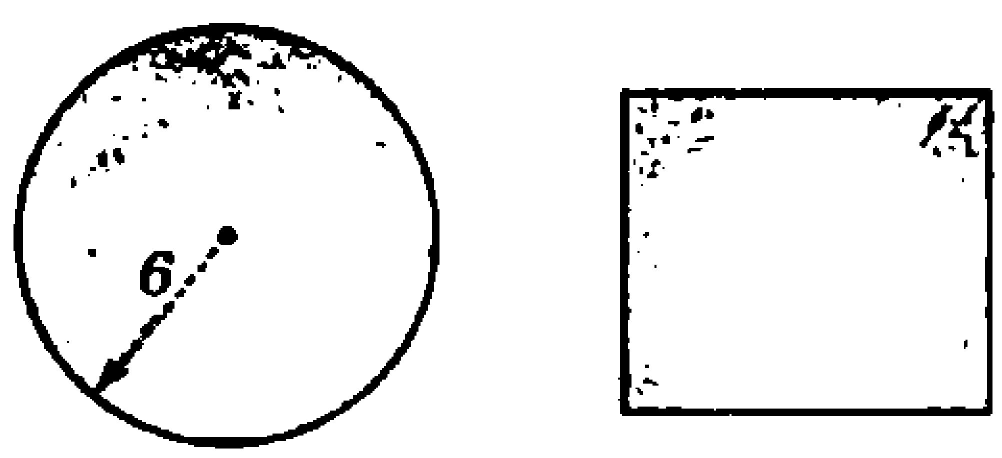


A) $1\,000\pi$ B) 900π C) 500π
D) $1\,100\pi$ E) 700π

14 En un cilindro de revolución, cuyo radio de la base es *2*, sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ generatrices diametralmente opuestas (*A* y *C* en distintas bases), además el desarrollo de la superficie lateral es una región cuadrada. Calcule la longitud del menor recorrido para ir de *A* hasta *C* por la superficie lateral.

A) $2\pi\sqrt{3}$ B) $\pi\sqrt{3}$ C) $\pi\sqrt{5}$
D) $\pi\sqrt{3}$ E) $2\pi\sqrt{5}$

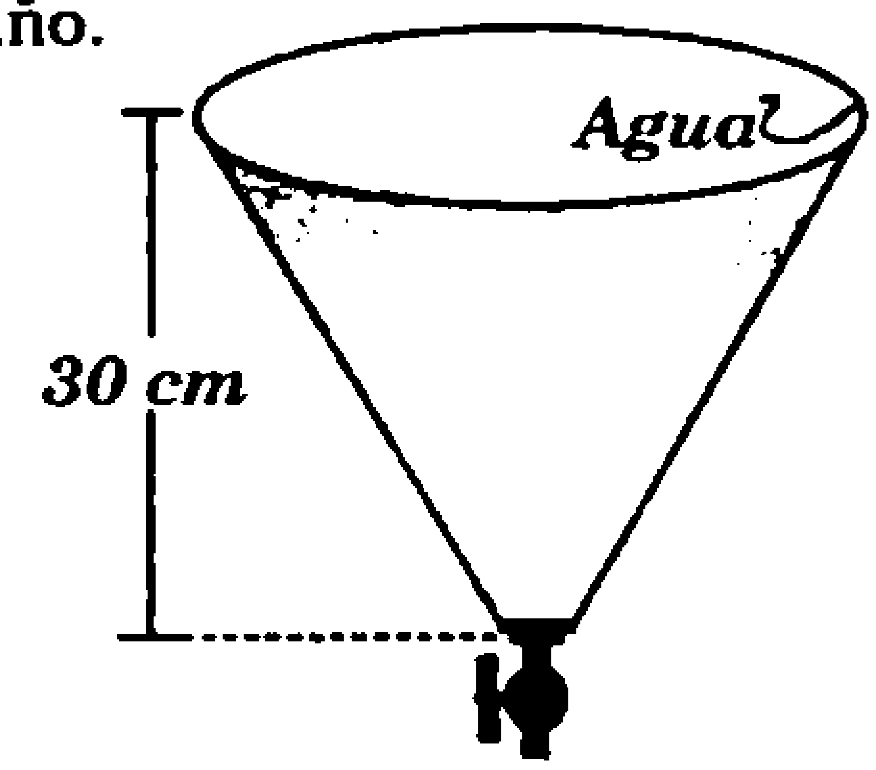
15 En el gráfico se muestra las vistas horizontal *(H)* y frontal *(F)* de un cilindro de revolución. Calcular el volumen de dicho cilindro, si las regiones mostradas son equivalentes.



(H) (F)

A) $108\pi^2$ B) 108π C) 216π
D) $90\pi^2$ E) 144π

16 Se tiene un recipiente cónico como se muestra en el gráfico, el cual está lleno con *1250 cm³* de agua. Si se abre el caño mostrado y se vierte sólo *1170 cm³* del contenido, calcular a qué distancia del vértice del recipiente queda la superficie del agua al cerrar el caño.



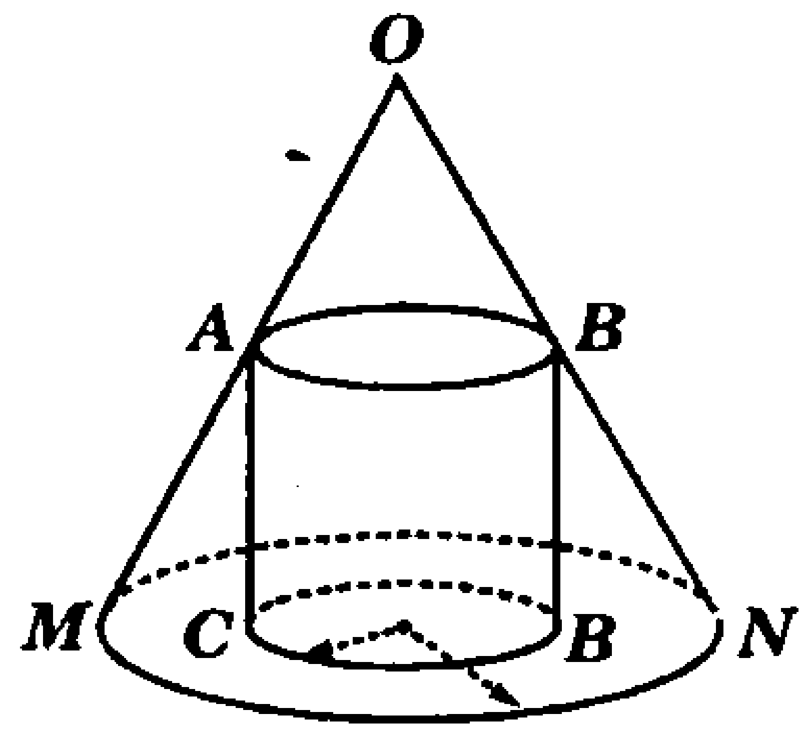
A) 10 cm B) 15 cm C) 12 cm
D) 18 cm E) 16 cm

17 Un cubo se encuentra inscrito en un cilindro de revolución tal que dos de sus caras están inscritas en las bases del cilindro. Si la diagonal del cubo mide *6*, calcular el volumen del cilindro.

A) 6π B) 12π C) $8\sqrt{3}\pi$
D) 10π E) $12\sqrt{3}\pi$

18 En el gráfico se muestra a un cono de revolución y a un cilindro de revolución ubicado en su interior. Calcular el área de la base del cilindro, si la superficie lateral del cilindro y la del menor cono son equivalentes, siendo $AC=2$ y $OA=AM$.

A) 10π
B) 12π
C) 16π
D) 20π
E) 18π



19 El plano que contiene a dos generatrices de un cilindro de revolución determina una región plana cuya área es $8\sqrt{3}$. El radio de la base y la altura del cilindro son *2* y *4* respectivamente. Calcular el área de la porción mayor de superficie lateral determinada en el cilindro.

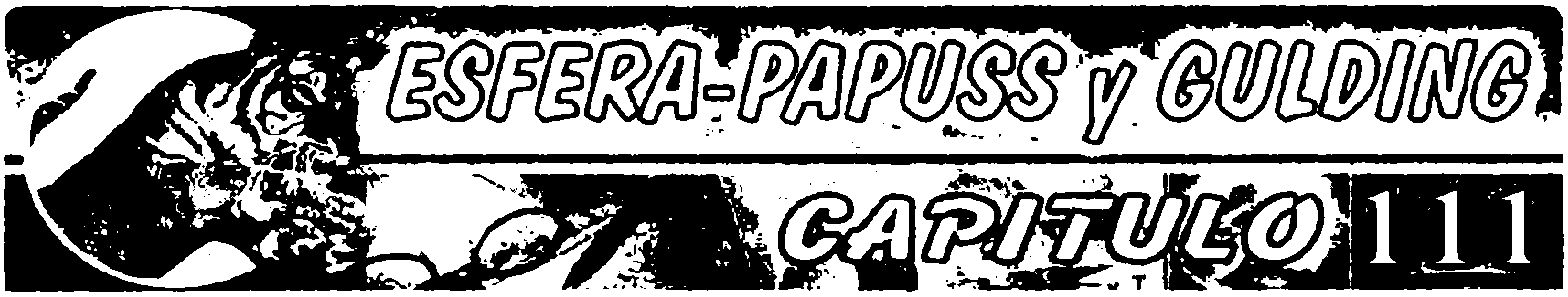
A) 16π B) $8\sqrt{3}\pi$ C) $\frac{42}{5}\pi$
D) $\frac{32}{3}\pi$ E) $\frac{24}{5}\pi$

20 Calcular el volumen de un cono de revolución, si un punto de una de sus generatrices dista de la base *6*; del vértice del cono *5* y de la altura *3*.

A) 200π B) 324π C) 250π
D) 432π E) $\frac{375}{2}\pi$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)D	3)C	4)B	5)B	6)E	7)A	8)E	9)D	10)B
11)B	12)E	13)A	14)E	15)A	16)C	17)E	18)B	19)D	20)E



OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo , el alumno estará en la capacidad de:

* *Tener presente* la *definición de superficie esférica* y *esfera y las partes notables correspondientes* a *ellas.*

* *Conocer las superficies* y *sólidos* de *revolución* y *aprender* a *determinar sus áreas* y *volúmenes. Conocer cómo se genera* la *esfera* y *sus elementos asociados.*

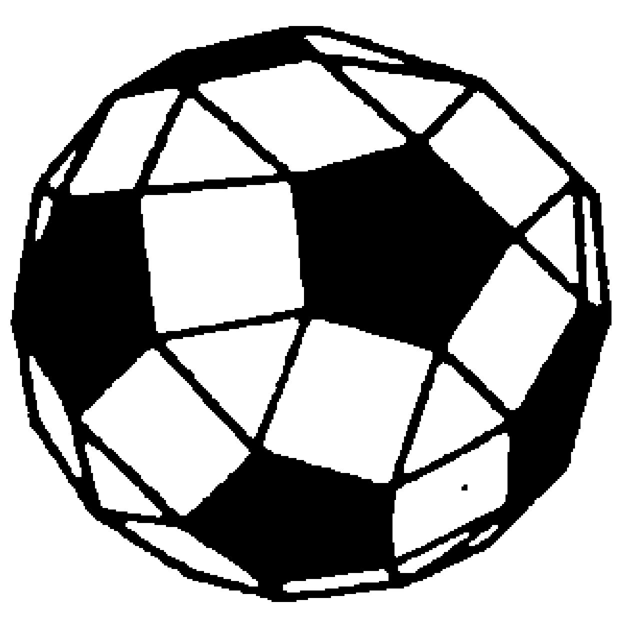
* *Relacionar* la *esfera con los demás sólidos anteriormente estudiados.*

* *Conocer las relaciones entre las posiciones relativas de las esferas rectas, planos* y *otros sólidos geométricos*

INTRODUCCIÓN :

Si los poliedros , *como los ortoedros* tienen un gran *interés* no *podremos decir menos de los cuerpos redondos como la esfera. Puesto que* en *todo lo que gira* y en *todo lo que rueda están presentes* una *y otra.*

El estudio de la *esfera y el círculo, sus longitudes superficies* y *volúmenes, interesaron a nuestros antepasados más remotos. Este interés es el mismo que nos lleva* en *este capítulo a completar el estudio ya iniciado* en *la parte de geometría plana, para así poder entender que* en *los piñones* o *ejes de las ruedas se usan villas esféricas para generar rodadura* o *girar. también entender como es que* en *los tomos se tallan piezas u objetos de forma» curva (tuercas, patas de las sillas. etc.) mediante* la *revolución alrededor de* un *eje.*



El rombicosidodecaedro, nuevo diseño de balón que ocupa el 94,32% de la esfera. Está formado por 12 pentágonos, 30 cuadrados y 20 triángulos.

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Una ***superficie de revolución*** es aquella que se genera mediante la rotación de una curva plana, o generatriz, alrededor de una recta directriz, llamada eje de rotación, la cual se halla en el mismo plano que la curva. Ejemplos comunes de una superficie de revolución son:

* ***Una superficie de revolución cilíndrica*** es generada por la rotación de una línea recta, paralela al eje de rotación, alrededor del mismo; esta superficie determina un volumen denominado cilindro, que se denomina sólido de revolución; la distancia entre el eje y la recta se denomina radio.

* ***Una superficie de revolución cónica*** es generada por la rotación de una recta alrededor de un eje al cual interseca en un punto, llamado vértice o ápice, de forma que el ángulo bajo el que la generatriz corta al eje es constante; la superficie cónica delimita al volumen denominado cono.

* ***Una superficie de revolución esférica*** está generada por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro; ésta encierra al sólido de revolución llamado esfera.

* ***Una superficie de revolución toroidal*** está generada por la rotación de una circunferencia alrededor de un eje que no la interseca en ningún punto; esta superficie se denomina toro.

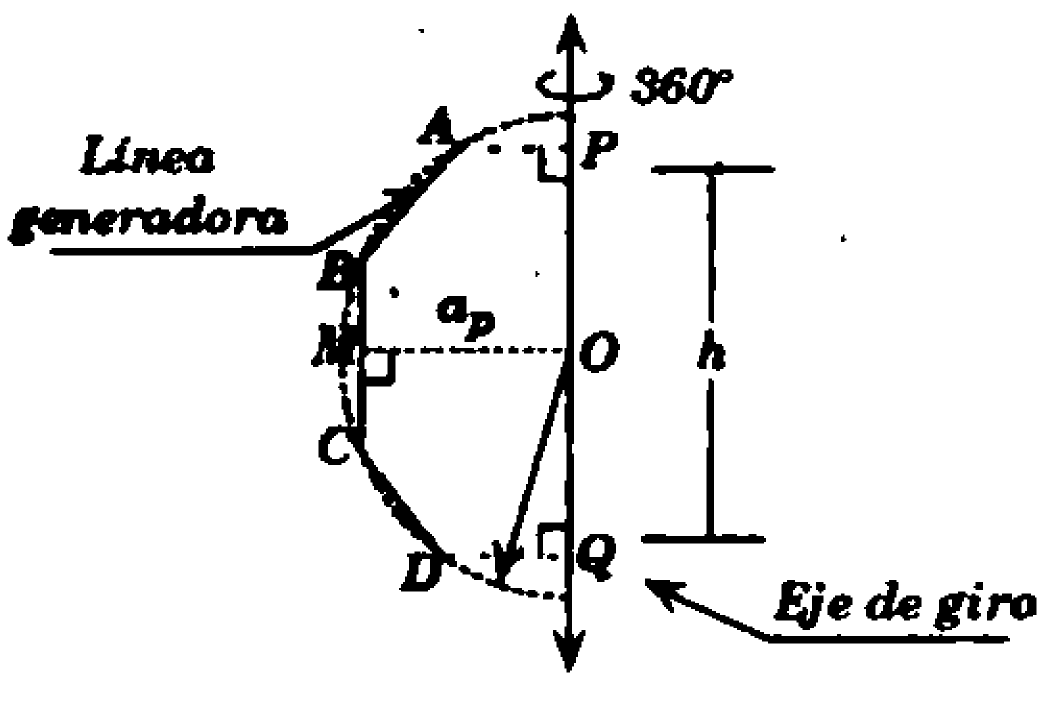
La utilización de superficies de revolución es esencial en diversos campos de la física y la ingeniería, así como en el diseño, cuando se dibujan objetos digitalmente, sus superficies pueden ser calculadas de este modo sin necesidad de medir la longitud o el radio del objeto.

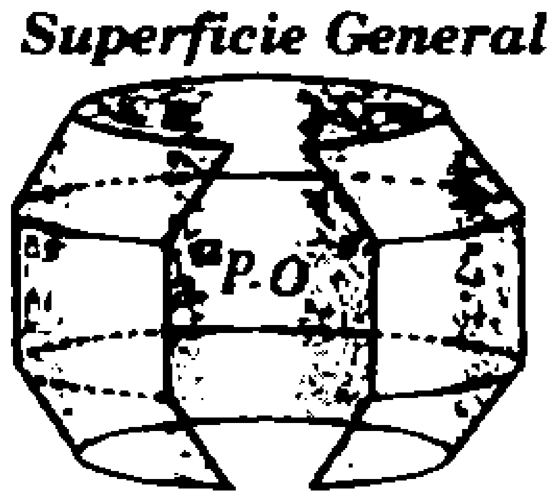
La alfarería, y el torneado industrial, moldean y modelan volúmenes con variadas superficies de revolución de gran utilidad y uso cotidiano.

TEOREMA DE ARQUIMEDES

El área de la superficie generada por una poligonal regular al girar ***360°*** entorno a un eje que contiene al centro de la poligonal regular , la cual está en un mismo semiplano respecto al eje , es igual al producto de la longitud de la circunferencia cuyo

radio es igual a la longitud del apotema de la poligonal regular con la longitud de la proyección ortogonal de la poligonal sobre el eje.



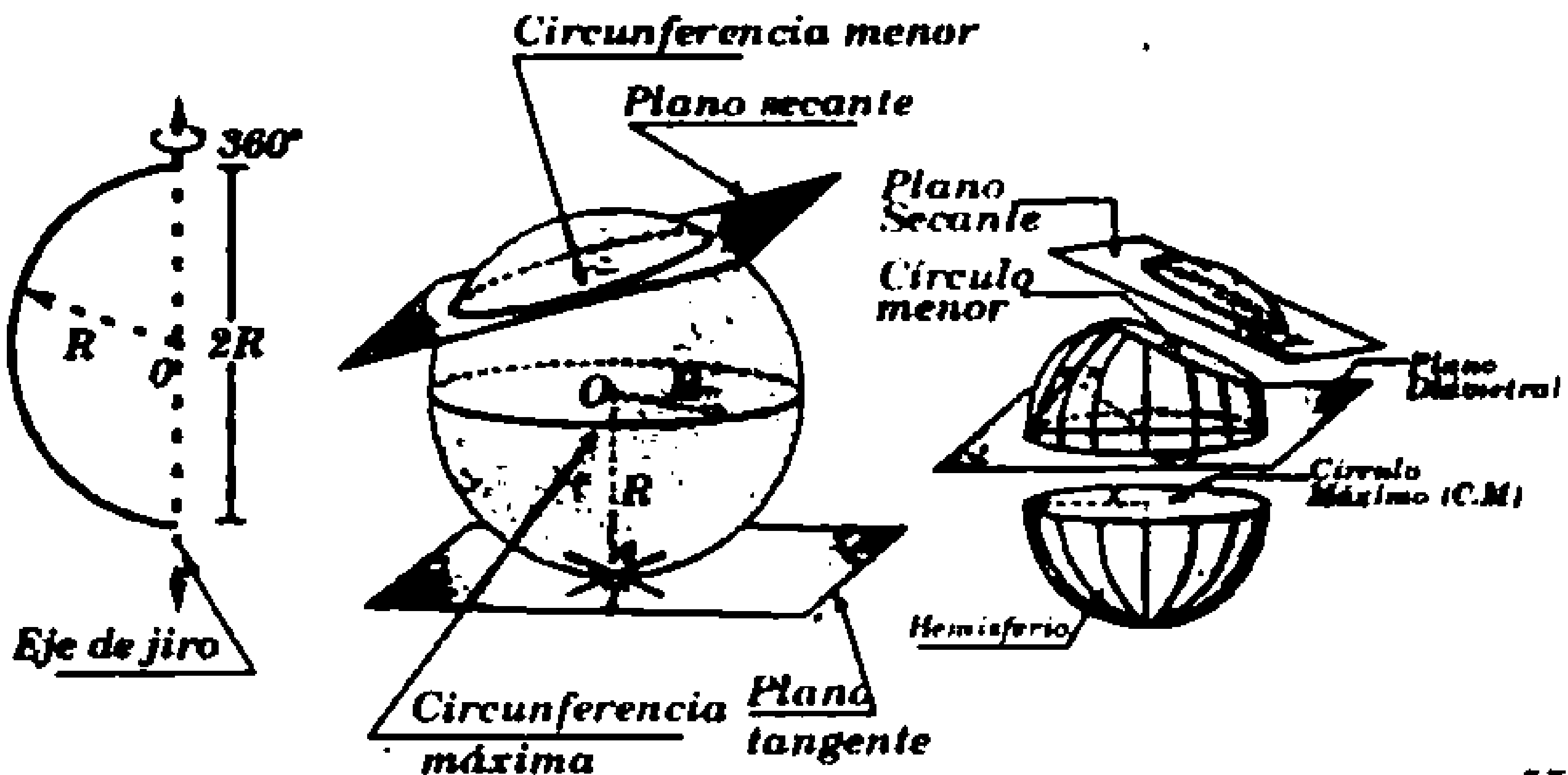


$$A_{SG} = (2\pi a_p)h$$

* $ABCD$:Poligonal regular de centro O y Apotema OM.
* $\overline{PQ}$: Proyección ortogonal de $ABCD$ sobre el eje.
* A_{SG} : Área de la Superficie Generada.

SUPERFICIE ESFÉRICA

Es aquella superficie generada por una semicircunferencia al girar *360°* en torno a su diámetro.



♠ ***ÁREA DEL CÍRCULO MÁXIMO (A_{CM}) :***

$$A_{CM} = \pi R^2$$

♠ ***ÁREA DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA (A_{SE}):***

$$A_{S.E.} = 4\pi R^2$$

♠ ***VOLUMEN DE LA ESFERA (V_E) :***

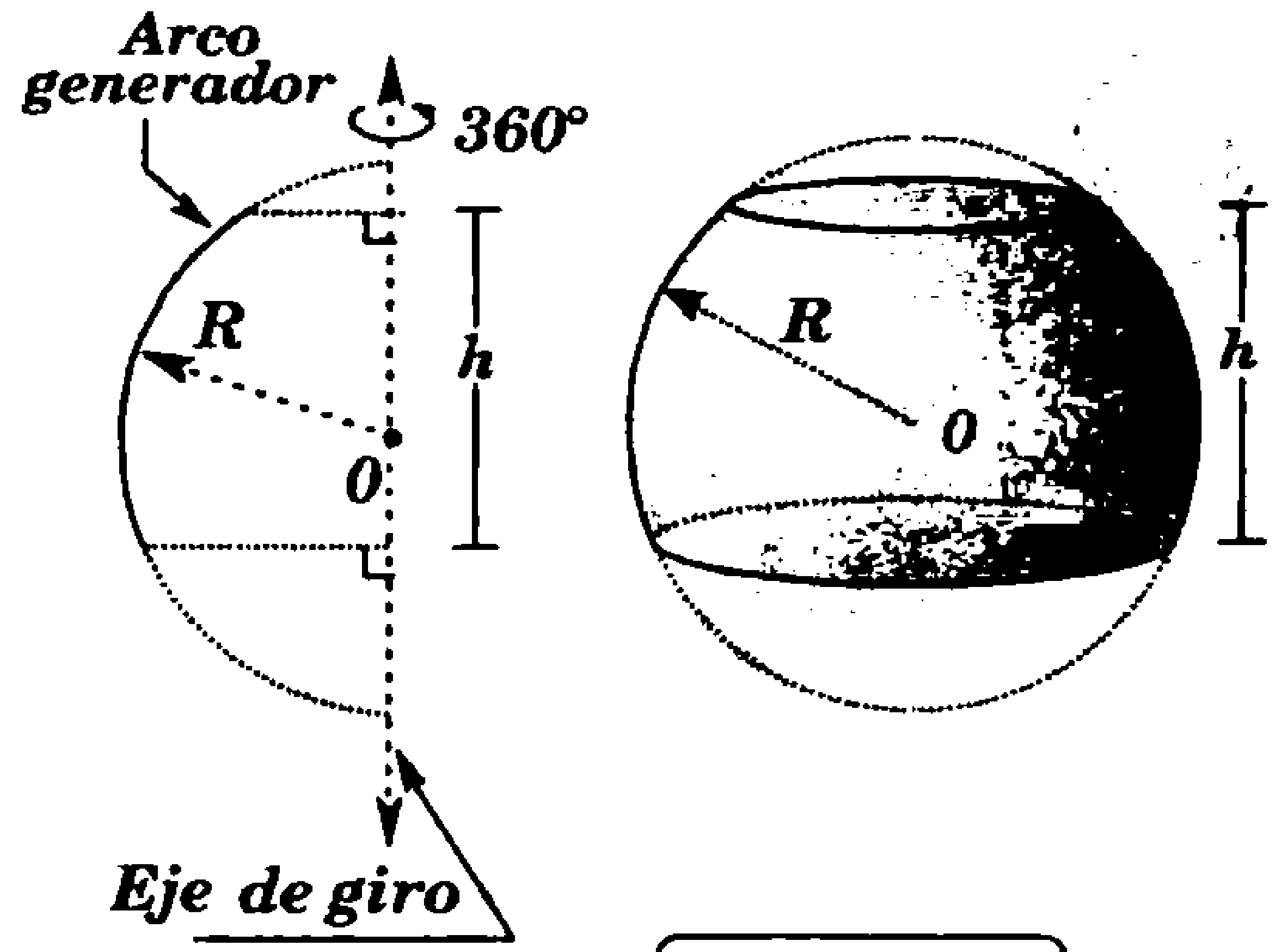
$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

NOTA:

El área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área de un círculo máximo.

ZONA ESFÉRICA

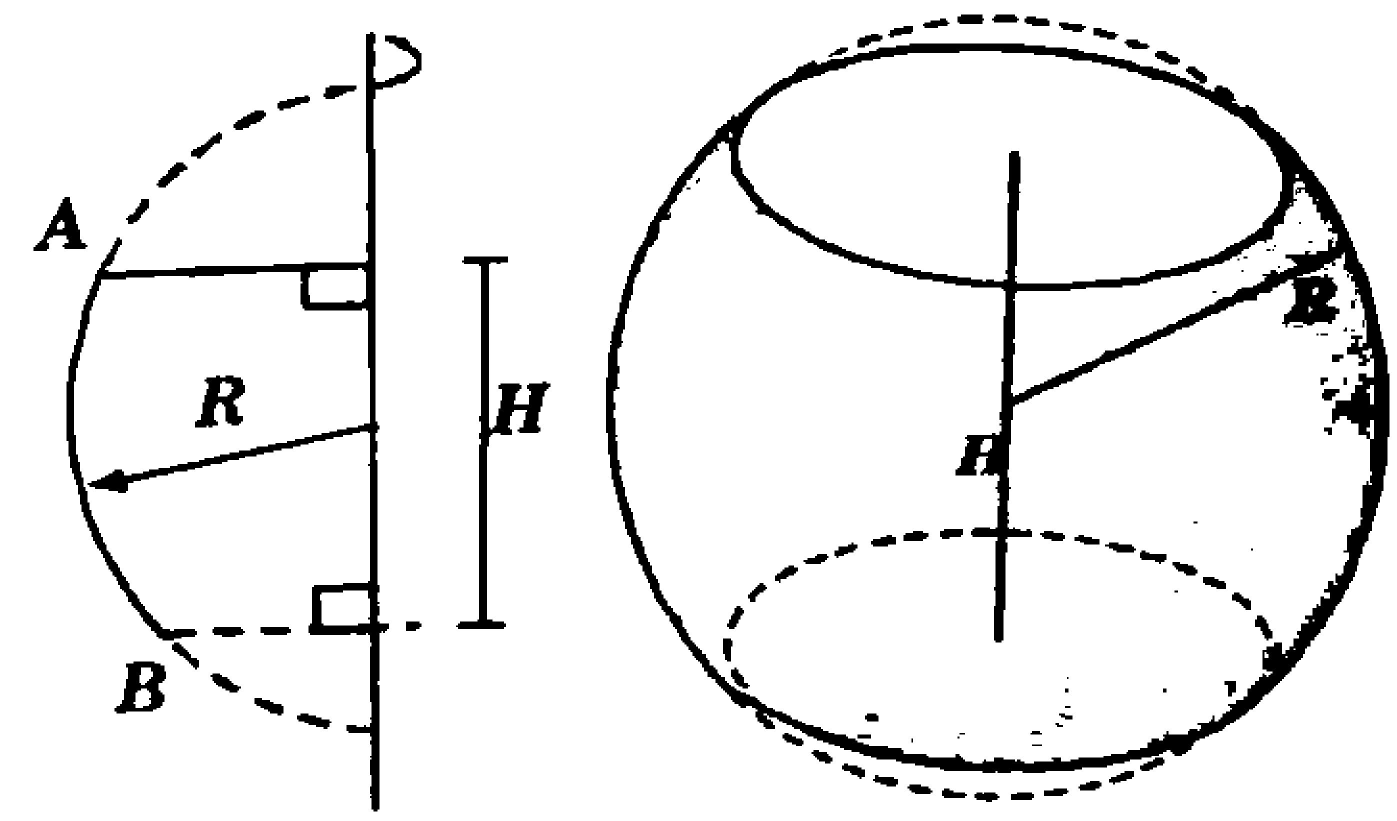
Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos circunferencias determinadas por dos planos paralelos y secantes a la superficie esférica.



$$A_{ZE} = 2\pi Rh$$

A_{ZE} **:** Área de la Zona Esférica.

Es decir la zona esférica es la porcion de superficie esferica generada por la rotacion completa de un arco alrededor del diametro

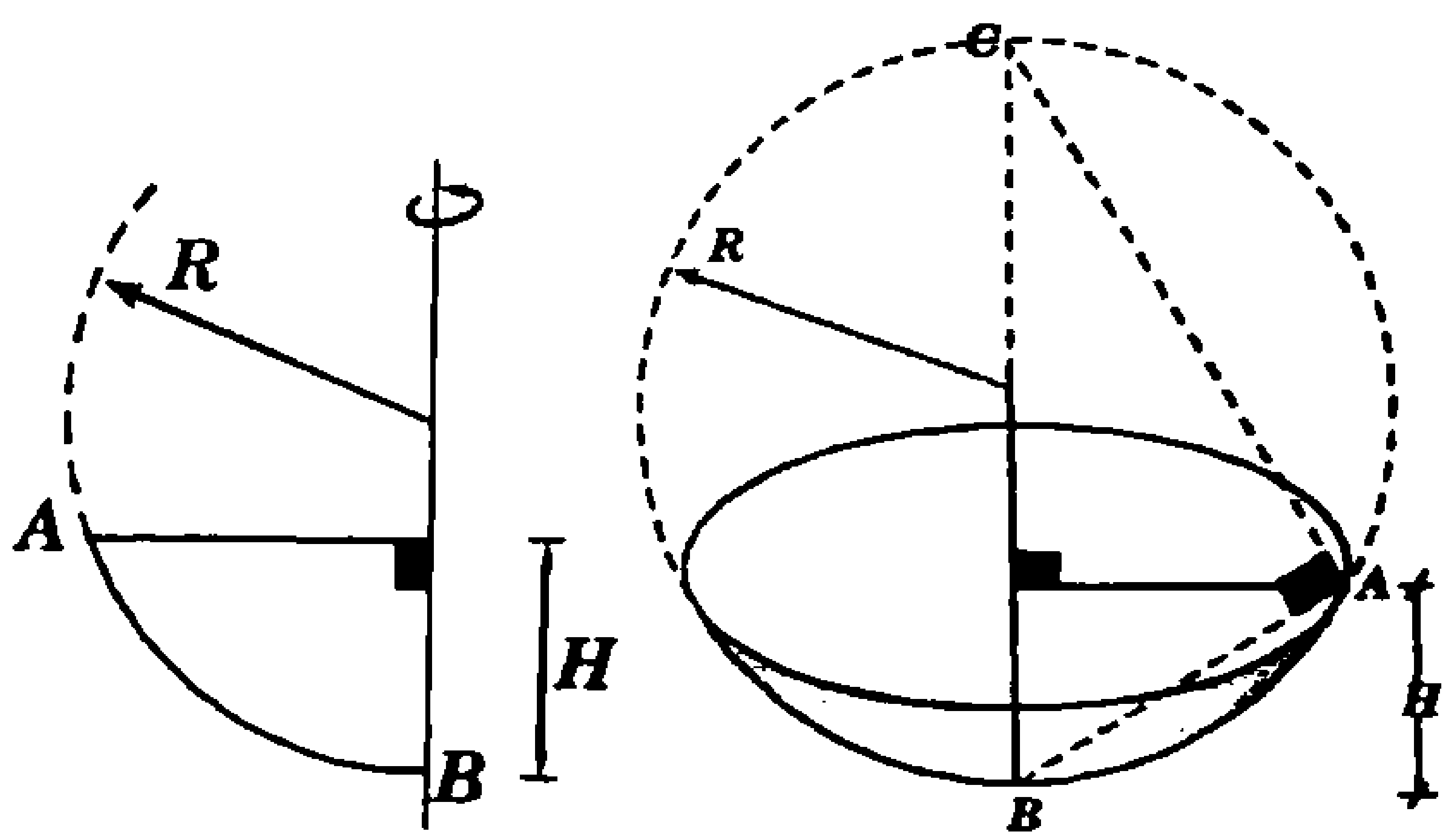


$$\text{área}_{generada} = 2\pi RH$$

H: altura de la zona

CASQUETE ESFÉRICO

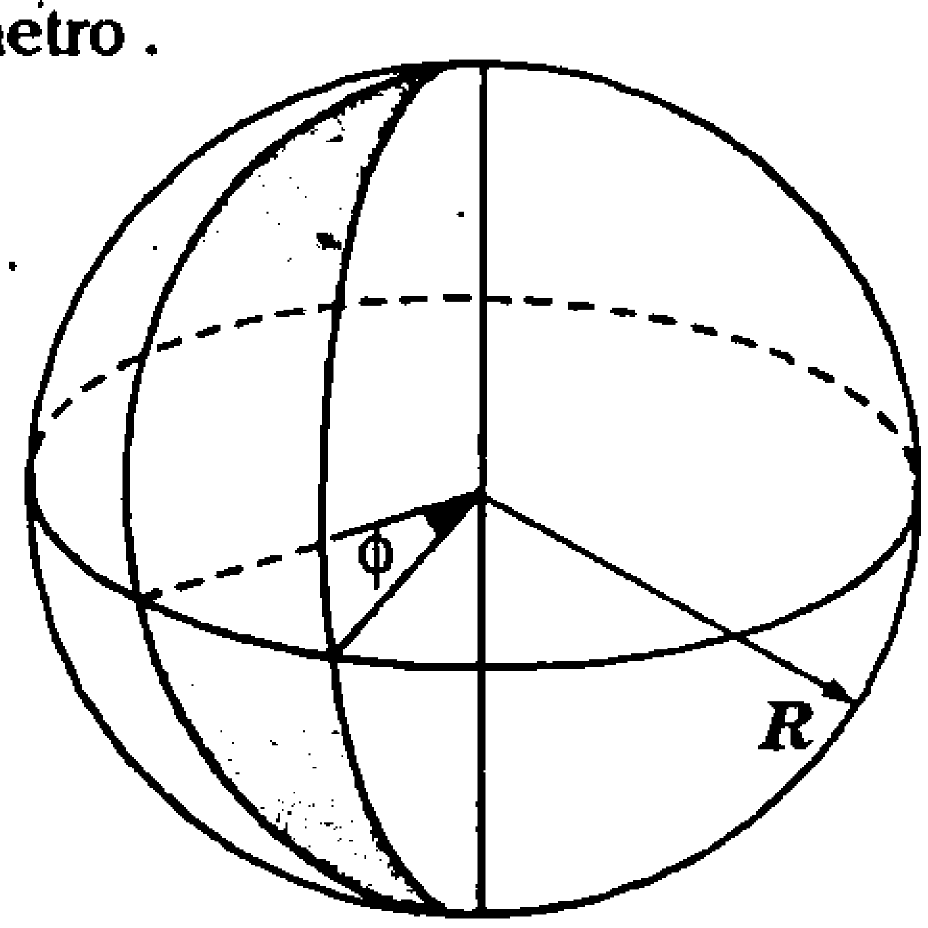
Es la porción de superficie esférica generada por la rotación completa de un arco alrededor del diametro que pasa por uno de los extremos del arco .



área generada$=2\pi RH \Rightarrow$ *área generada*$=\pi AB^2$

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie esferica generada por una semicircunferencia cuando gira un ángulo alrededor de su diámetro .



Si la semicircunferencia gira *360°* genera a la superficie de la esfera luego

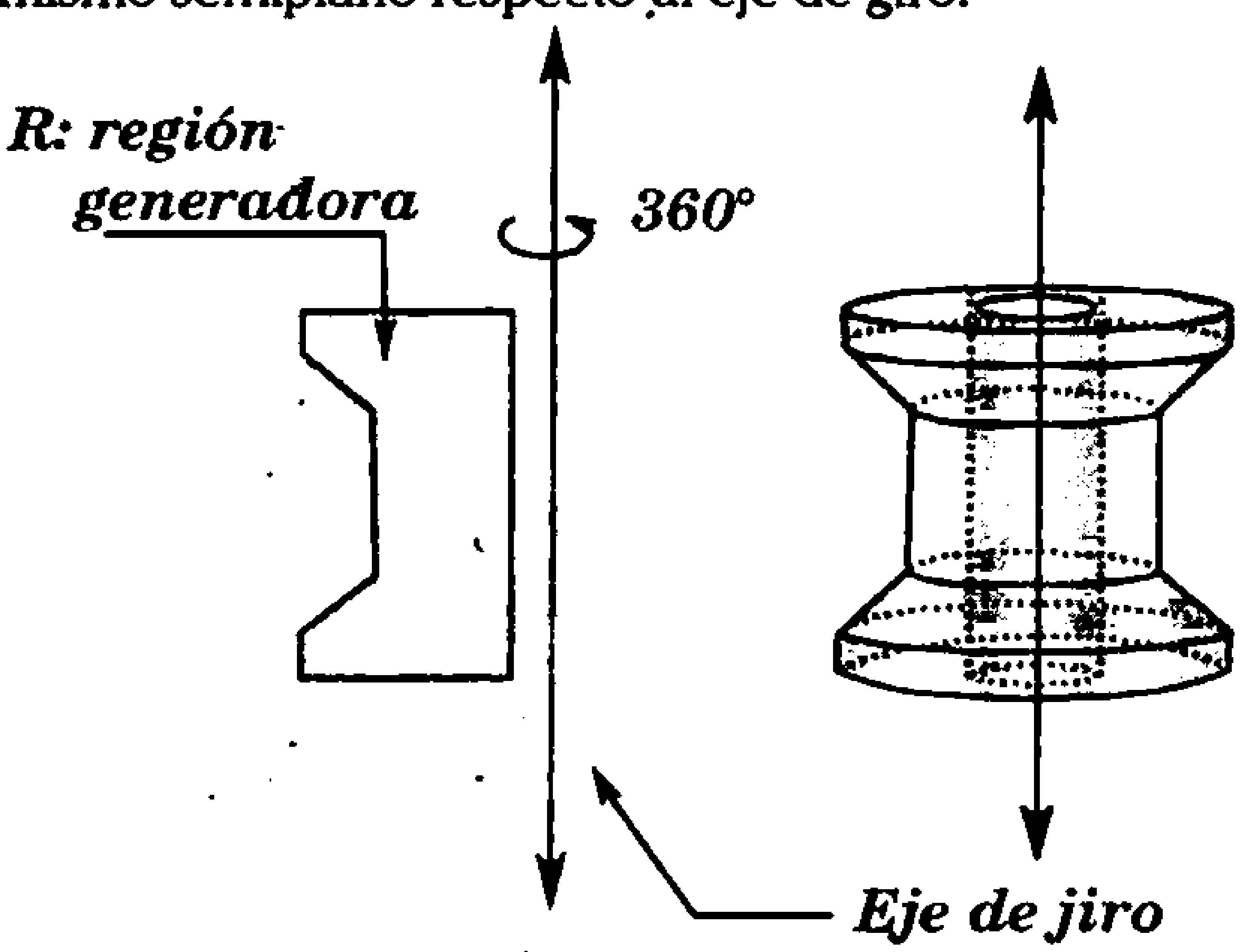
$$4\pi R^2 \longrightarrow 360°$$

$$área_{(huso)} \longrightarrow \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{área_{(huso)} = \pi R^2 \frac{\phi}{90°}}$$

SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

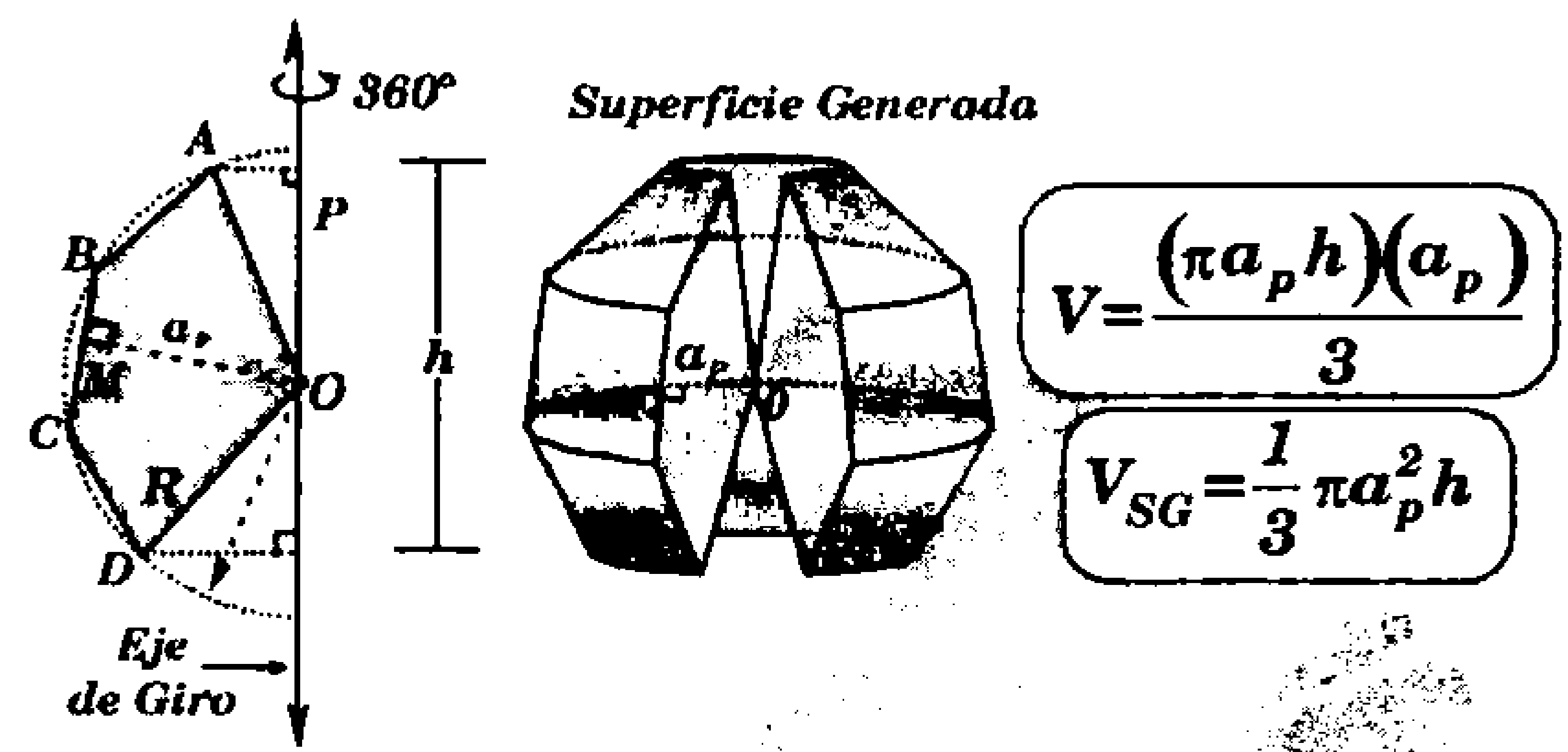
Es aquel sólido que se genera por la rotación de una región plana al girar en torno a un eje.
Estudiaremos a continuación sólidos de revolución generados por regiones planas contenidas en un mismo semiplano respecto al eje de giro.



En el gráfico se muestra el sólido de revolución generado por la región plana *R* al girar en torno al eje.

TEOREMA DE ARQUÍMEDES

El volumen del sólido generado por un sector poligonal regular al girar *360°* en torno a un eje que pasa por el centro del sector poligonal , el cual está en un mismo semiplano respecto del eje, es igual a la tercera parte del producto del área de la superficie generada por la correspondiente poligonal regular con la longitud su apotema.

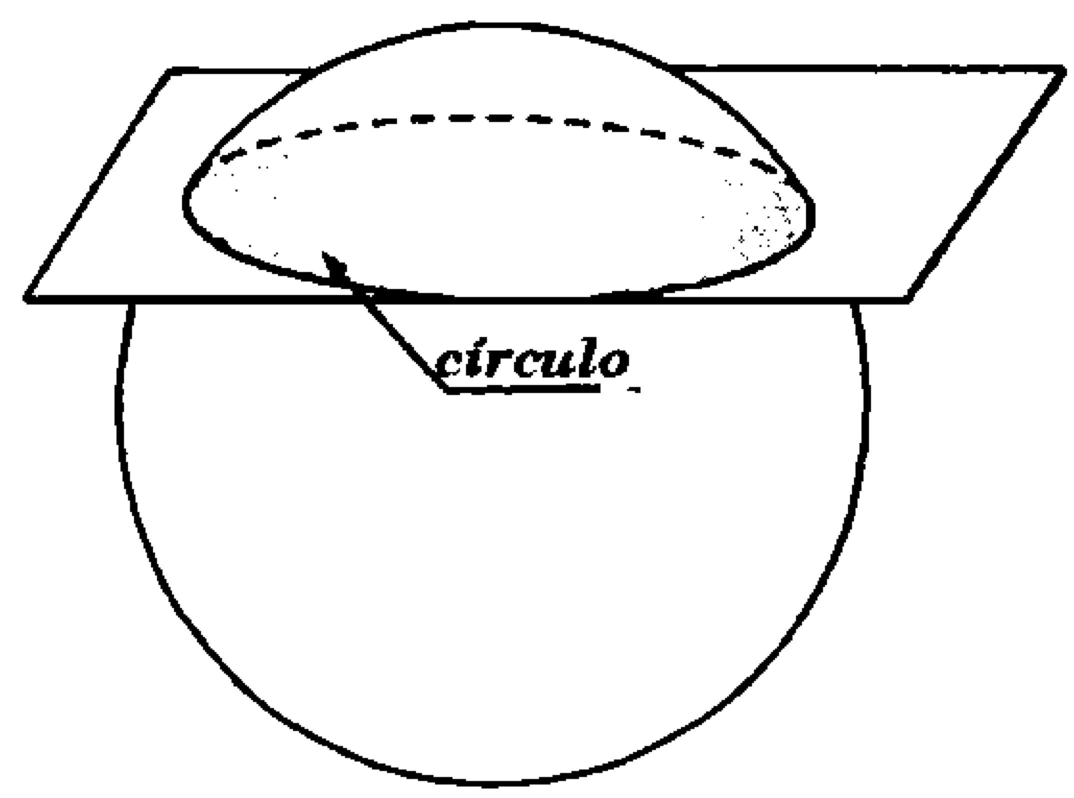


Región

* *OABCD* : Sector poligonal regular de centro *O* y apotema *OM*.
* *ABCD* : Poligonal regular.
* V_{SG} : Volumen del sólido generado por el sector poligonal regular al girar *360°* en torno al eje.

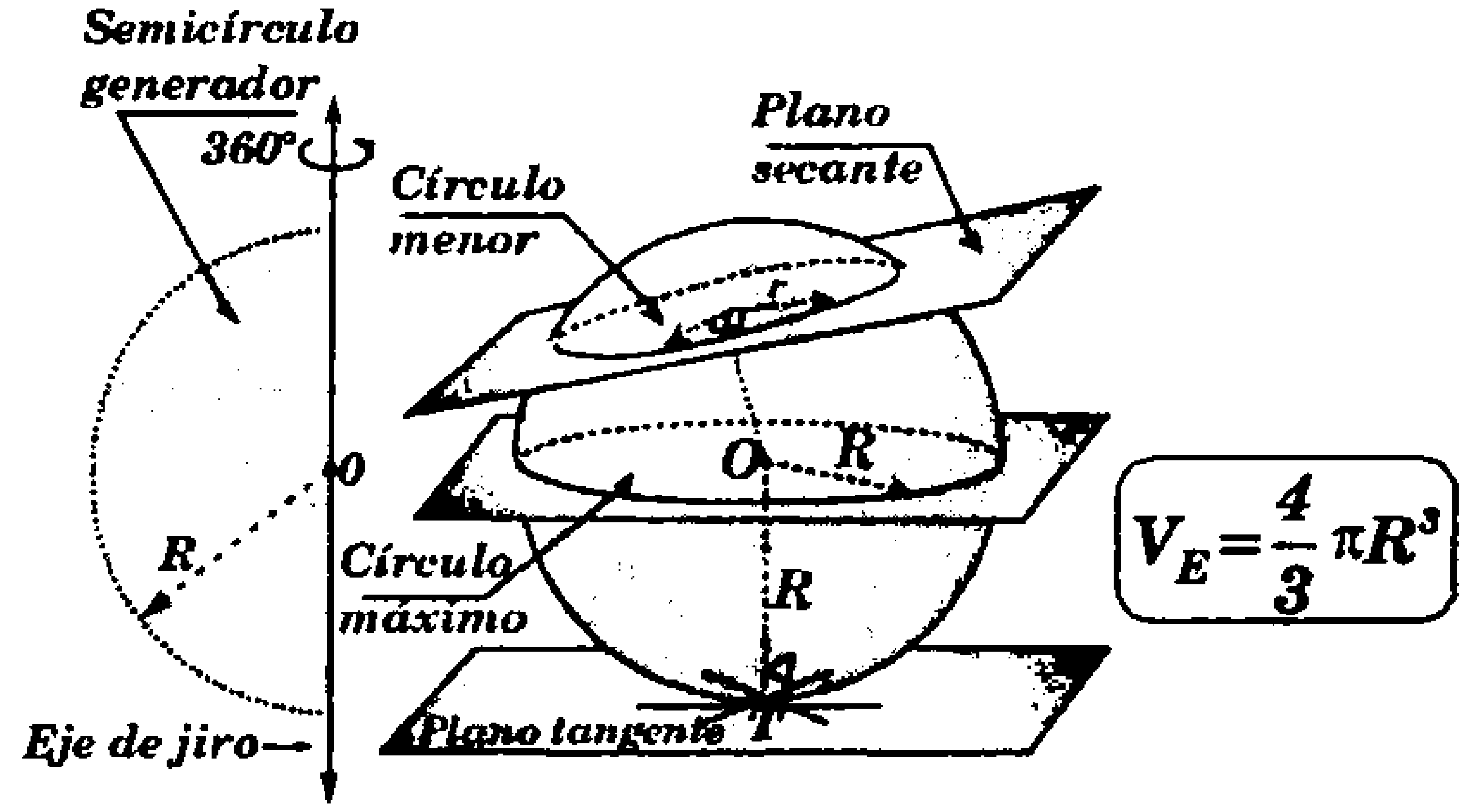
TEOREMA :

Todo plano secante a una esfera determina una seccion que es un círculo



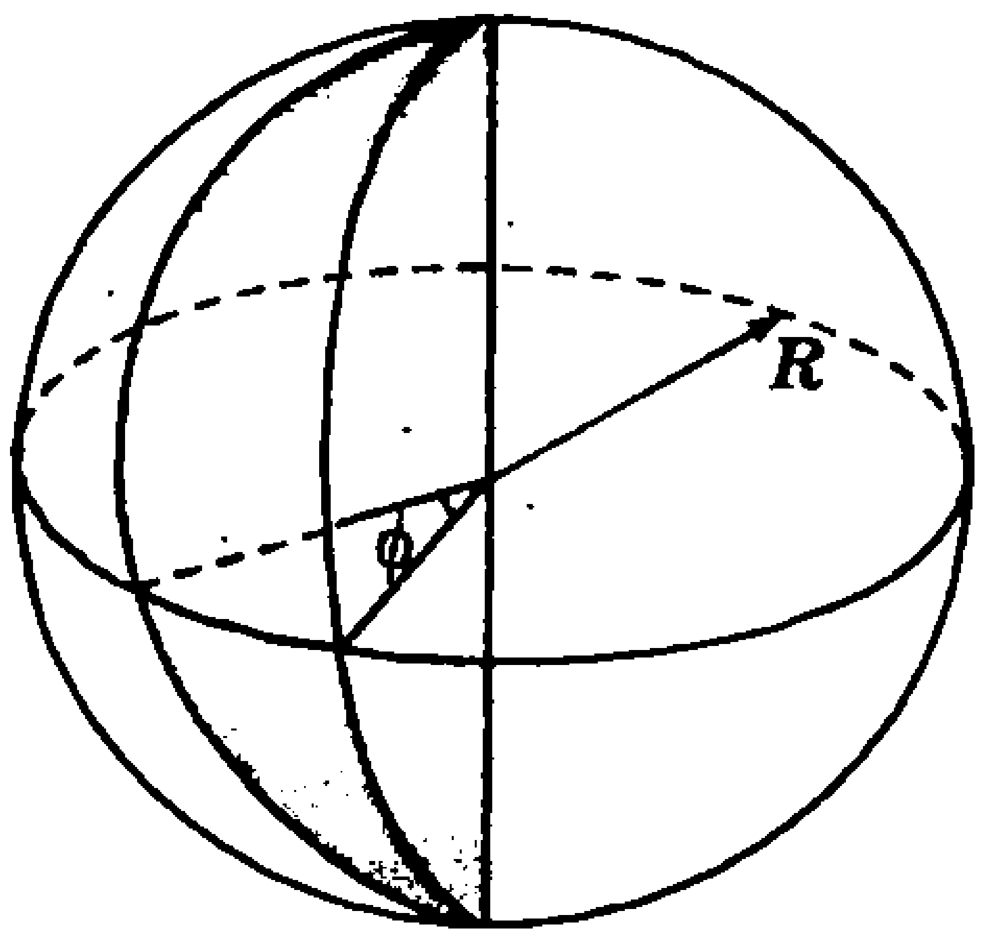
DEFINICIÓN DE ESFERA :

Es aquel sólido generado por un semicírculo al girar *360°*, en torno a su diámetro.



CUÑA ESFERICA

Es la porción de la esfera generada por un semicírculo cuando gira un ángulo alrededor de su diametro .

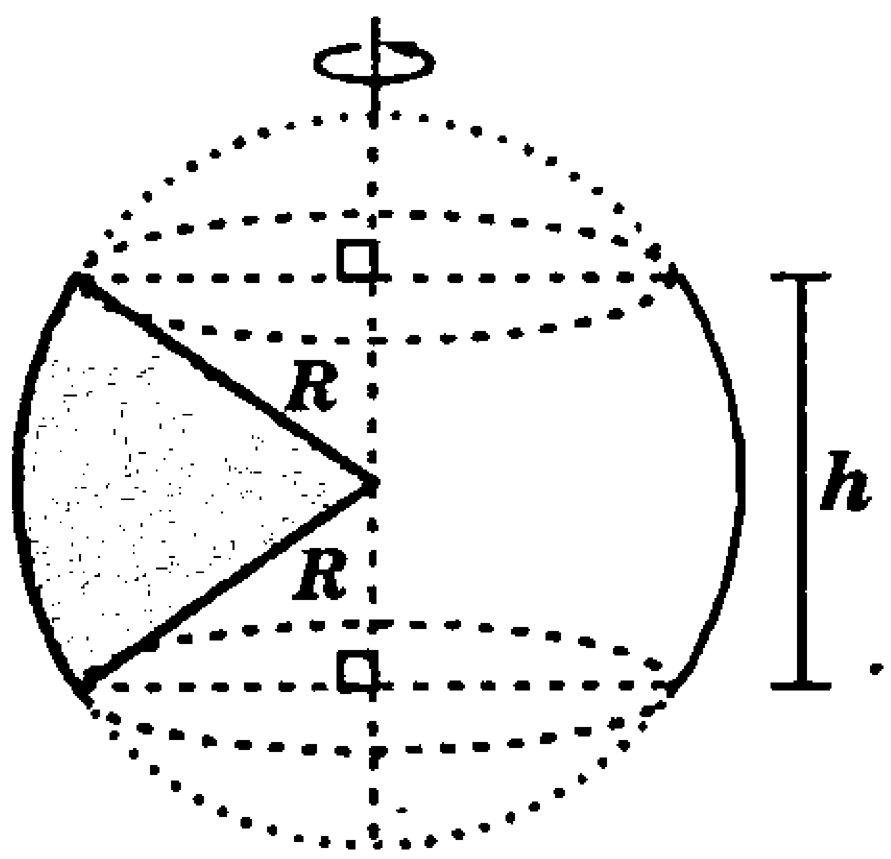


Si el semicirculo gira *360* alrededor de su diametro se genera el volumen de la esfera .

$$\left\{\begin{matrix} 360° \longrightarrow 4\pi R^3/3 \\ \phi \longrightarrow V_{cuña} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cuña\ esférica} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{\phi}{360°}}$$

SECTOR ESFÉRICO

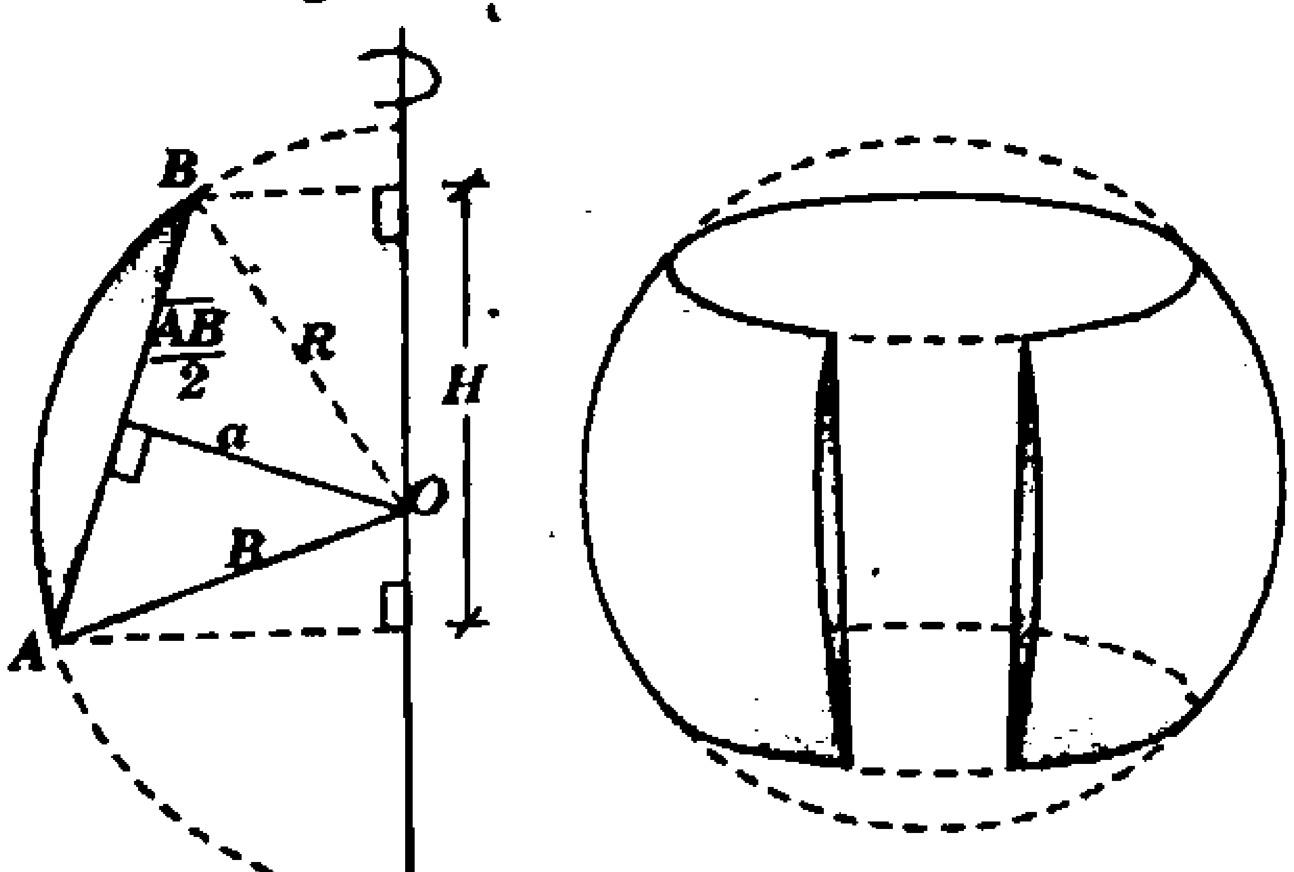
Es el sólido generado por un sector circular que gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su vértice sin cortarlo.



$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

ANILLO ESFÉRICO

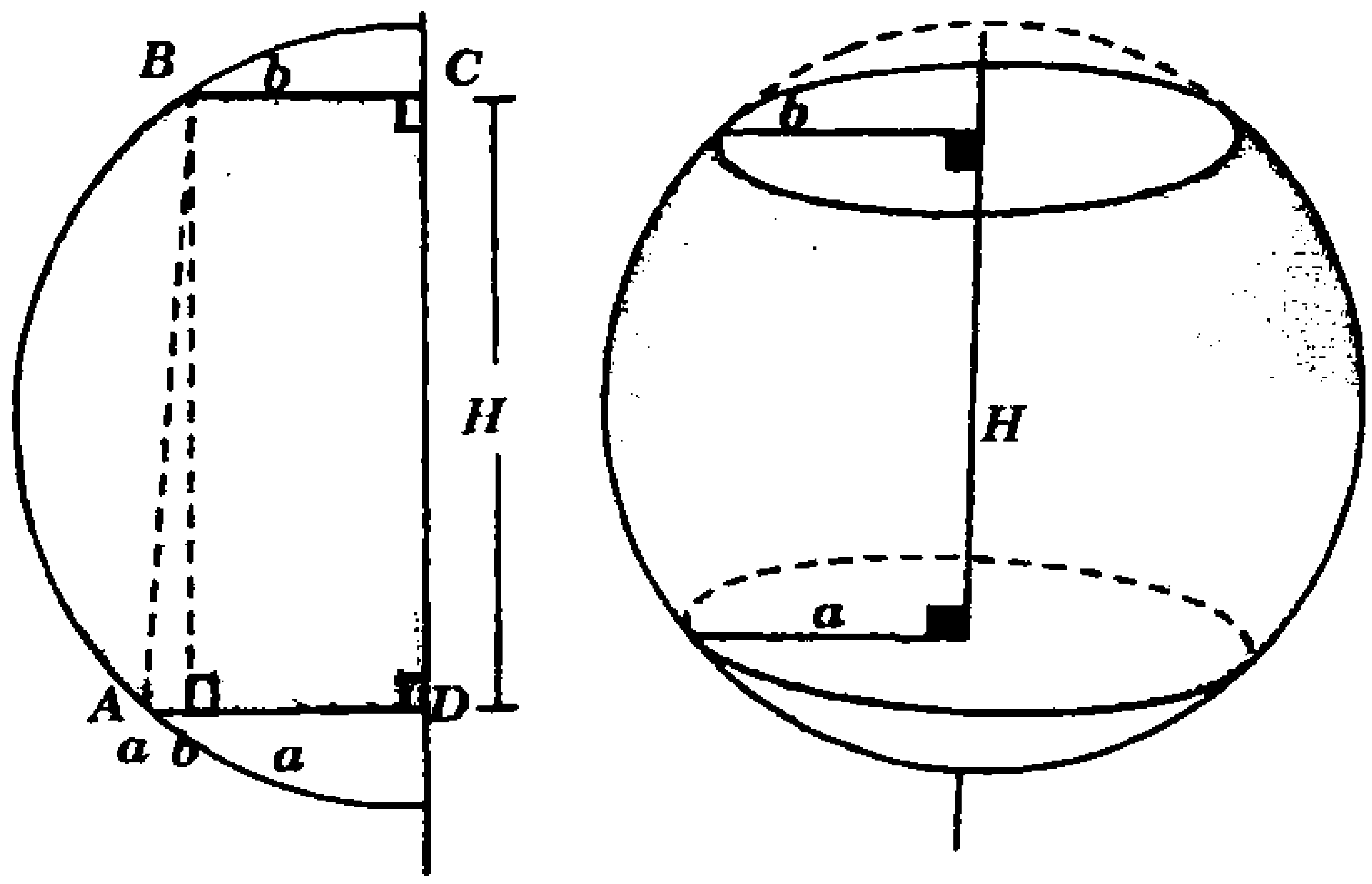
Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro de la circunferencia , a que pertenece el segmento circular .



$$\boxed{V_{anillo} = \pi \frac{AB^2}{6} H}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

Es la porcion una esfera sólida comprendida entre dos planos paralelos .

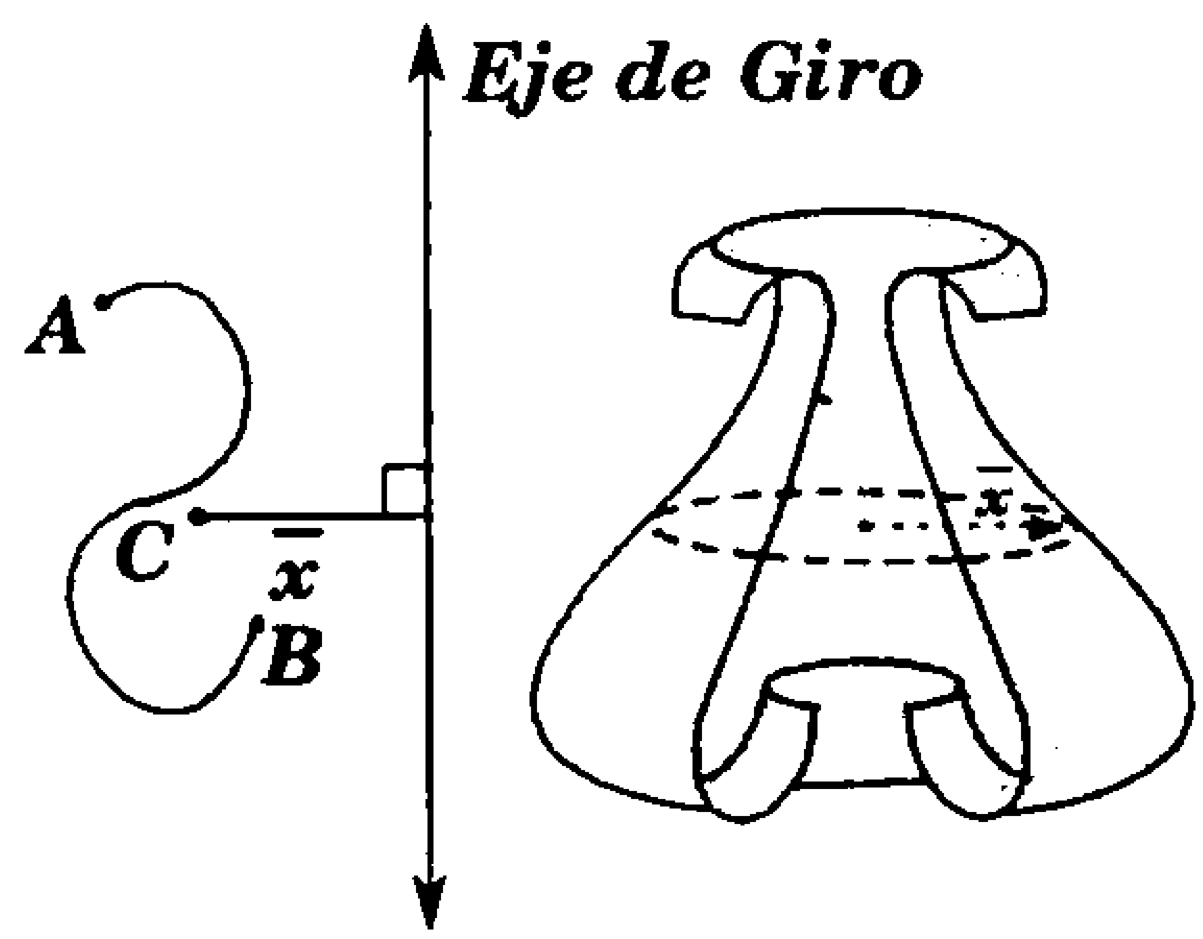


$$\boxed{V_{\substack{segmento \\ esferico}} = \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi H^3}{2}(a^2 + b^2)}$$

TEOREMA DE PAPPUS Y GULDING

PRIMER TEOREMA :

El área que genera una línea cuando gira alrededor de un eje es igual a la longitud de la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por la longitud de la línea.



Área de la Superficie Generada (ASG)

$$\boxed{A_{SG} = L \, . \, 2\pi \bar{x}}$$

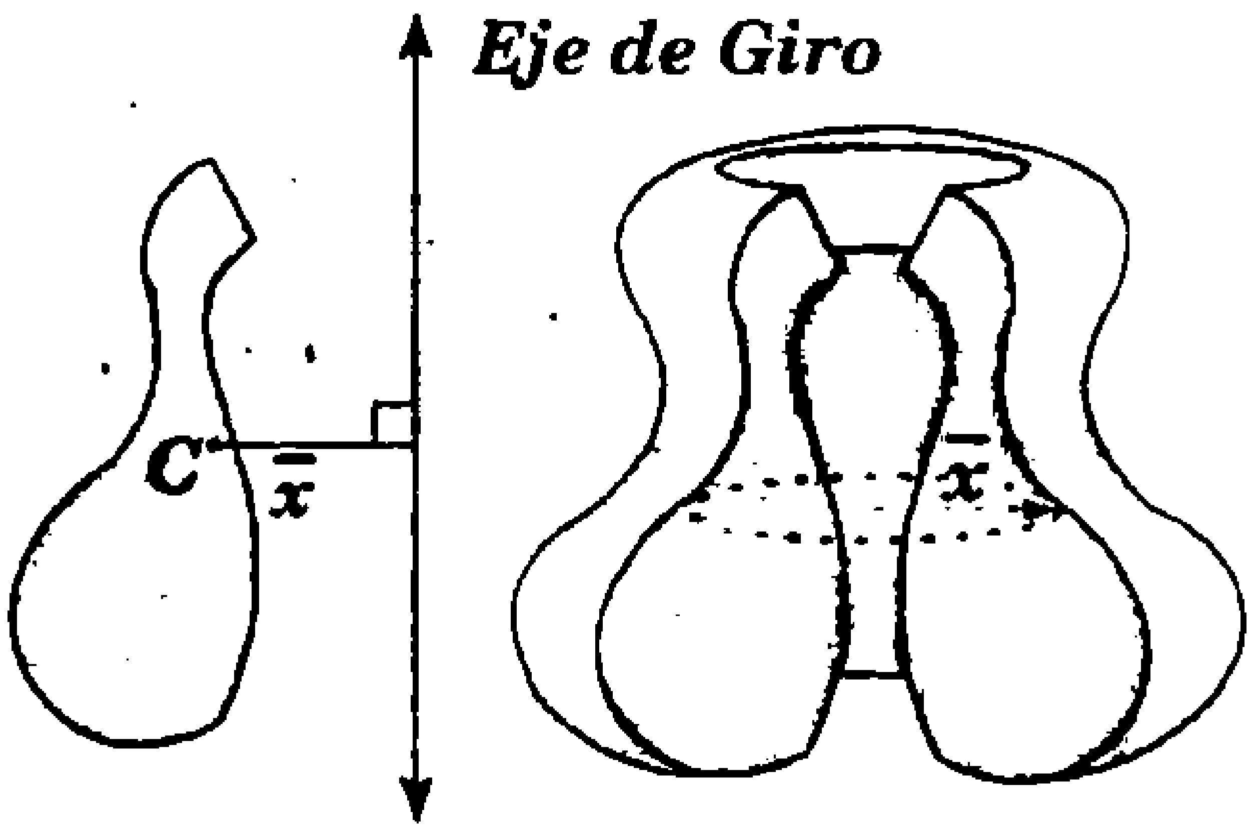
L : Longitud de la curva = L_{AB}

$\bar{x}$: Distancia del centroide ***(C)*** de la curva al eje de giro.

SEGUNDO TEOREMA :

El volumen que genera una superficie , cuando gira alrededor de un eje coplanar es igual a la longitud de

la circunferencia que recorre su centro de gravedad multiplicado por el área de la figura.



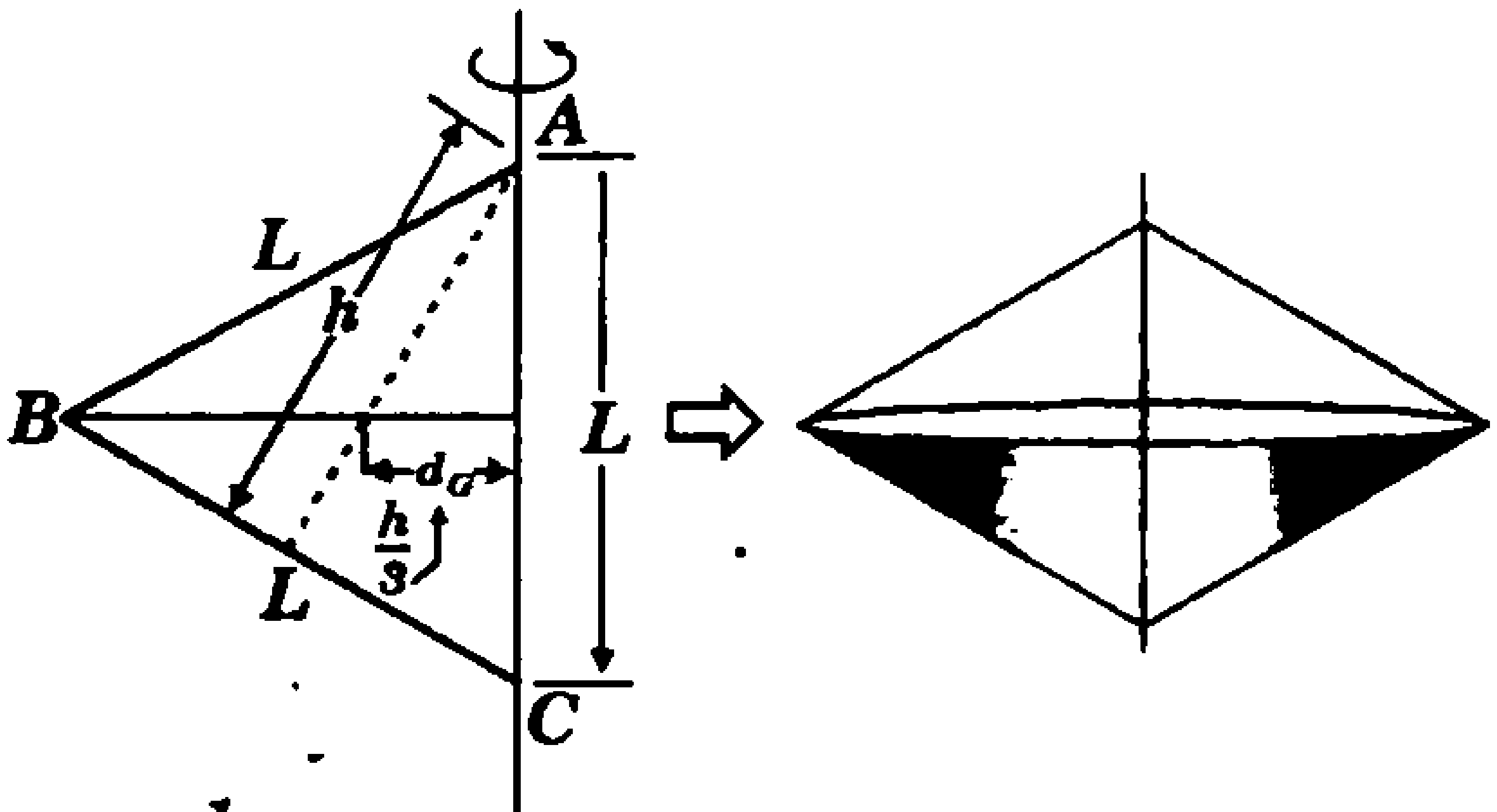
Volumen del Sólido Centrado (VSG)

$$VSG = A.\ 2\pi\bar{x}$$

A : Área de región.

$\bar{x}$: Distancia de centroide *(C)* de la región al eje de giro.

① *Volumen generado por rotación de triángulo equilátero alrededor de un lado.*



$$V = \frac{1}{3}S_{BC}\times h \;.....(I)$$

$$S_{BC} = 2\pi h\times\frac{L}{2}........(II)$$

*** (II) en (I) :**

$$V = \frac{1}{3}\left(2\pi h\frac{L}{2}h\right) = \frac{1}{3}\pi Lh$$

*** Pero:** $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$; ***luego:***

$$V = \frac{1}{3}\times 2\pi h\times\frac{L}{2}\times\frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi h}{3}\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{L_2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow V = 2\pi d_G S_{\Delta}$$

* Donde:

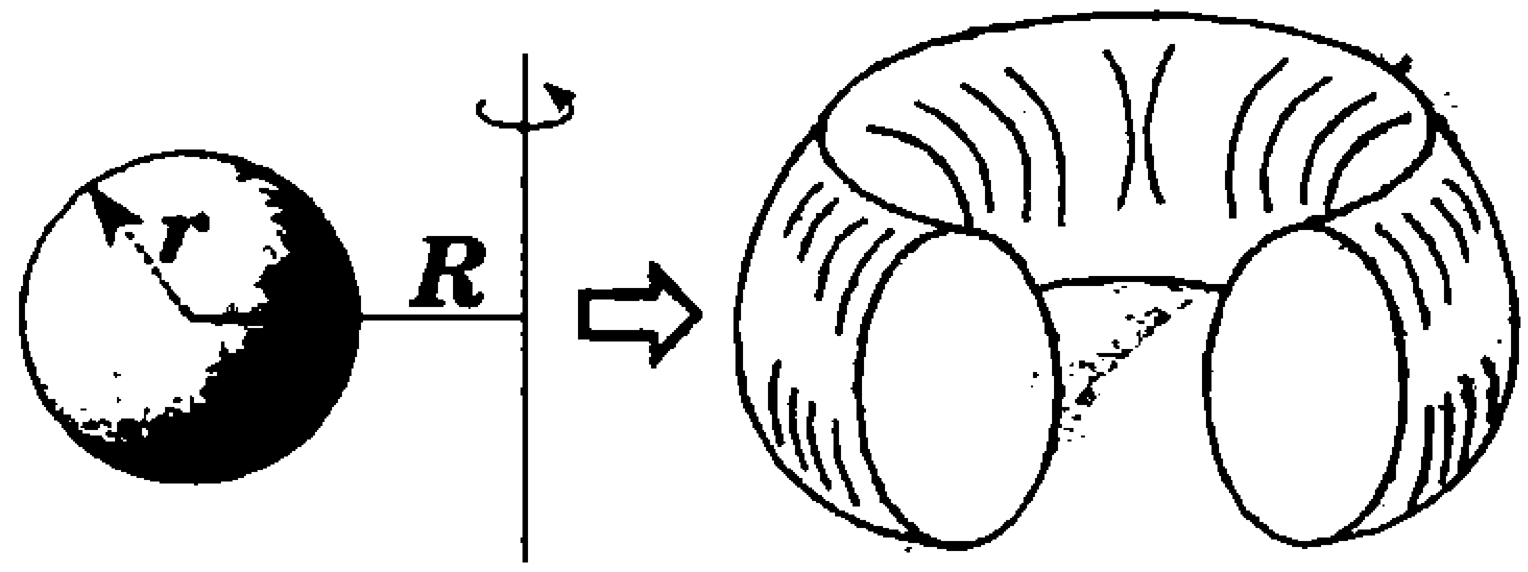
d_G : es la distancia al baricentro del triángulo.

S_{Δ} : Es el área del triángulo equilátero.

TOROIDE

Superficie generada por una curva cerrada cualquiera al girar alrededor de un eje contenido en su plano y que no la corta. Sólido limitado por esta superficie

VOLUMEN DE UN TOROIDE :



$$V = 2\pi r(2\pi r^2) \longrightarrow \boxed{V = 4\pi^2 Rr^3}$$

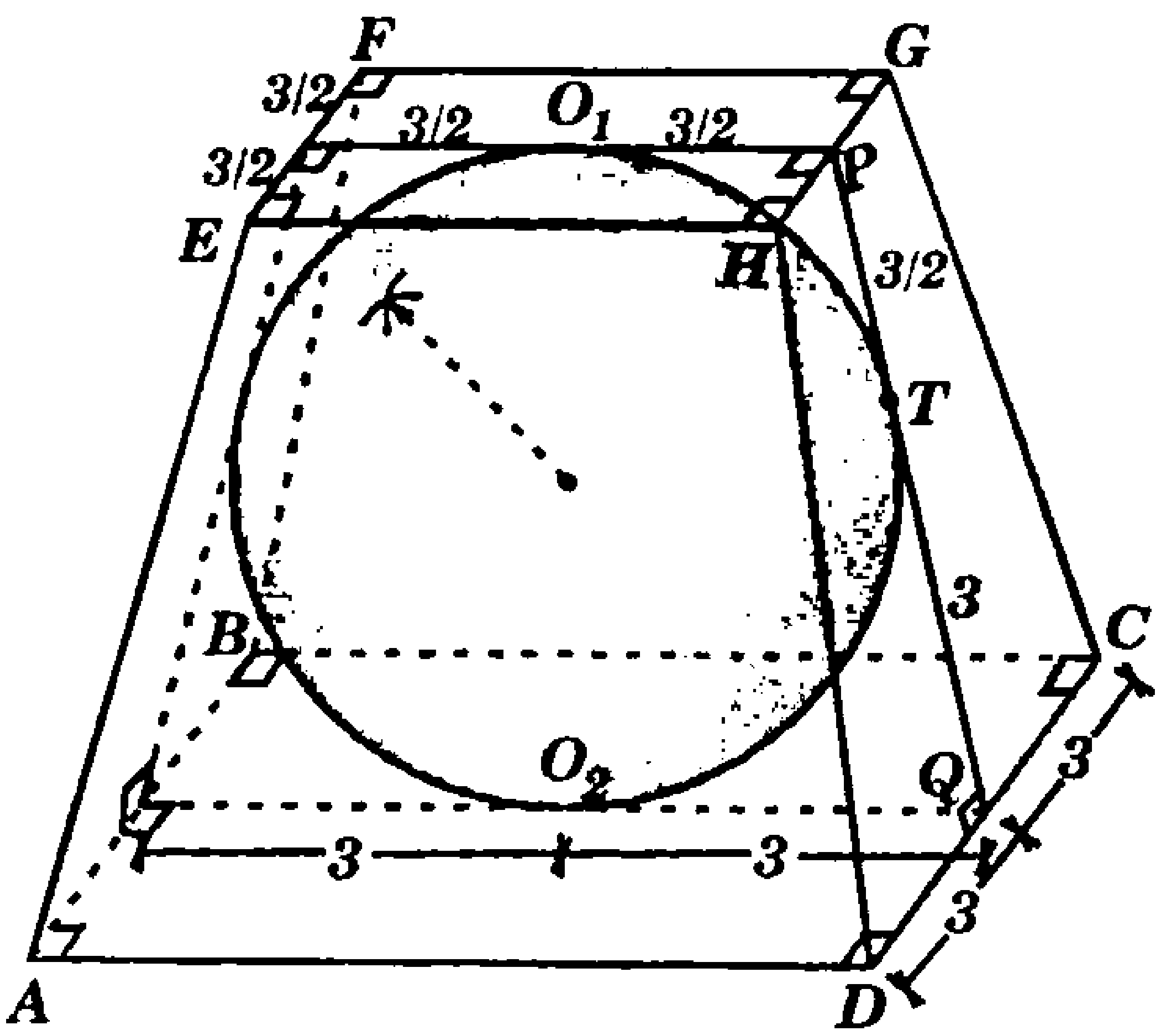
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Halle el área lateral, en m^2, de un tronco de pirámide cuadrangular regular circunscrita a una esfera, siendo las áreas de las bases del tronco *9* y *36*.

A) 78 *B) 79* *C) 80* *D) 81* *E) 82*

RESOLUCIÓN:



Piden:

A_{SL} : Área de la superfice lateral del tronco piramidal cuadrangular regular.

Como el tronco de pirámide cuadrangular es regular y está circunscrita a una esfera.

$\Rightarrow O_1$ y O_2 son centros de las bases
Además, se deduce que $EF=3$ y $AB=6$

$\overline{PQ}$ es tangente a la esfera en T.

$\Rightarrow PT=O_1P=3/2$ y $TQ=QO_2=3$
Luego, A_{SL}: Suma de las áreas de todos los conos laterales.

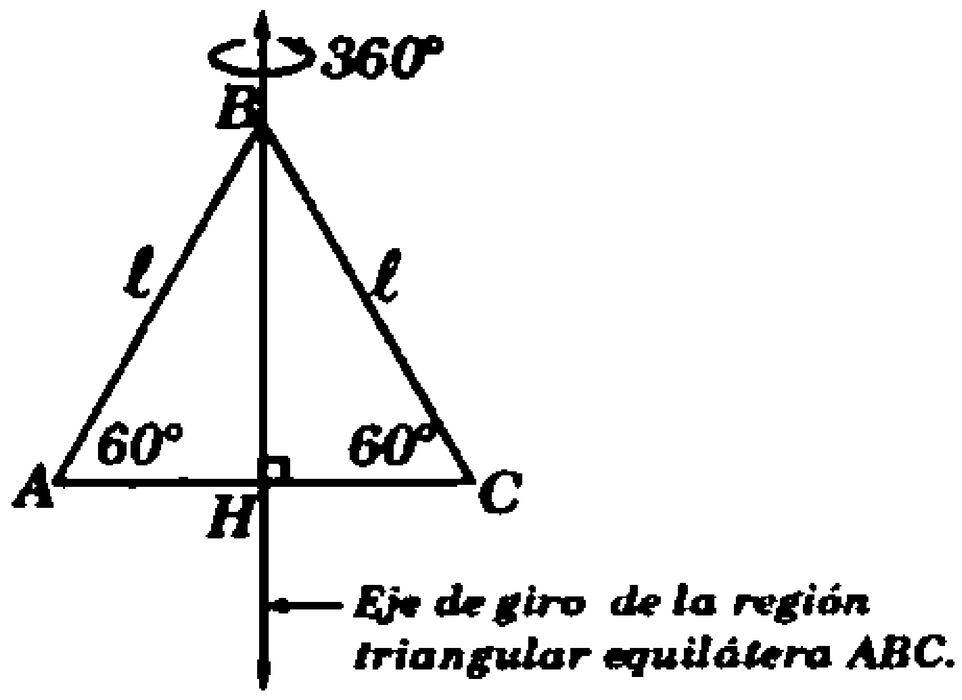
$$A_{SL}=4(A_{\triangle HGCD})=4\times\frac{(3+6)}{2}\times\frac{9}{2}\Rightarrow A_{SL}=81$$

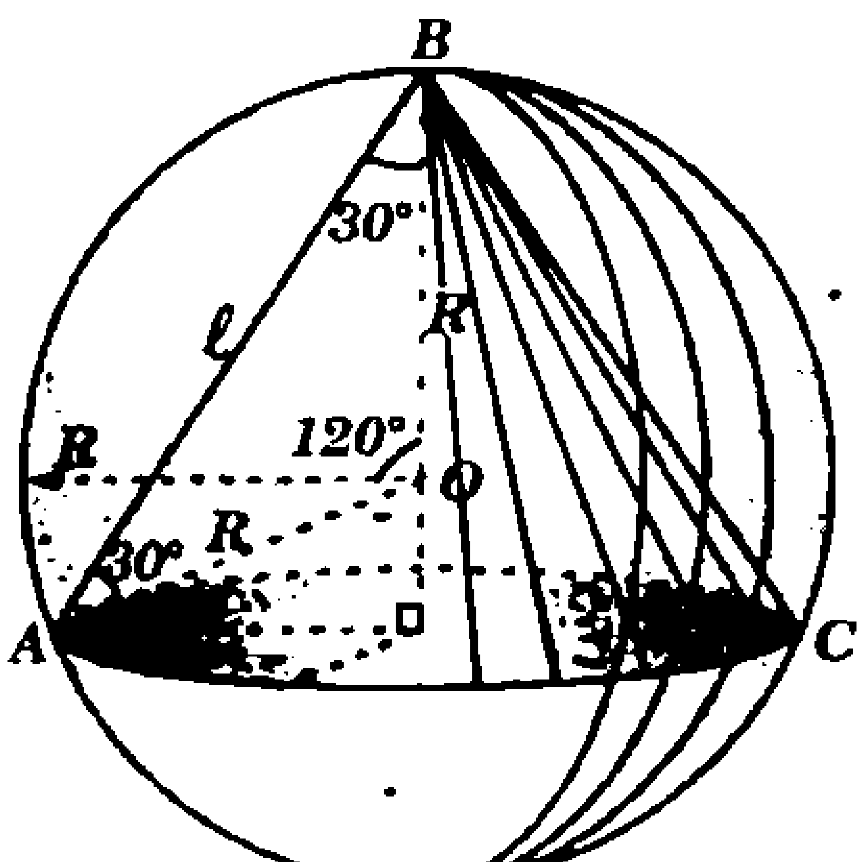
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Se obtiene un cono girando un triángulo equilátero de lado ℓ alrededor de una de sus alturas El volumen de la esfera circunscrita al cono es.

RESOLUCIÓN:





Piden

V_x: volumen de la esfera circunscrita al cono de revolución generado.

Del gráfico:

$V_x=\frac{4}{3}\pi R^3$ ....(I)

ΔAOB: $R=\frac{\ell}{\sqrt{3}}$ ....(II)

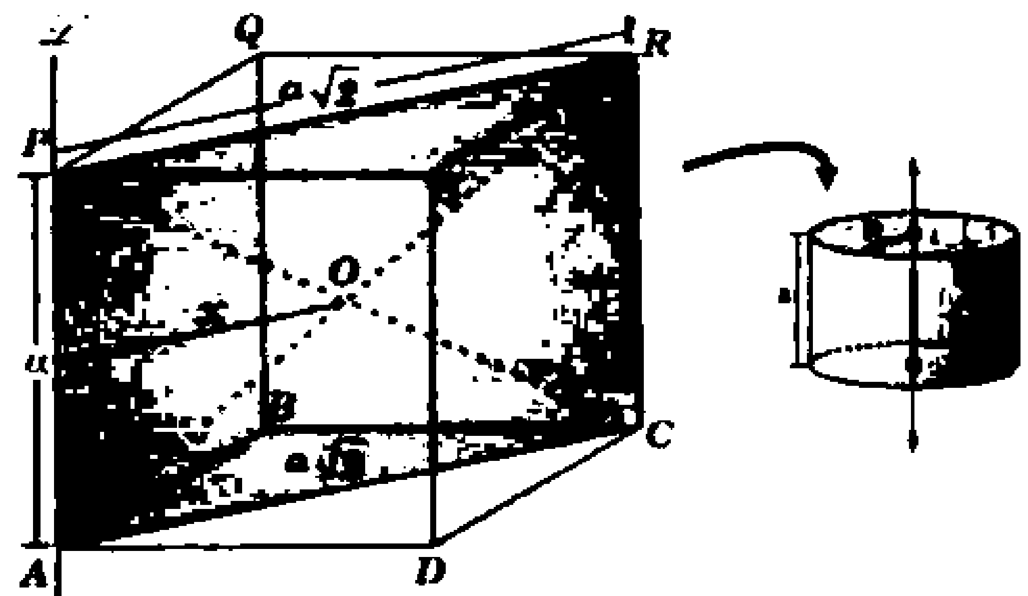
* De (II) y (I): $V_x=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)^3\Rightarrow V_x=\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}\ell^3$

PROBLEMA 39:

El volumen que genera un cubo de arista a ,cuando gira $360°$ alrededor de una de sus aristas es.

RESOLUCIÓN:

Al girar el cubo se genera un cilindro cuya base tiene radio «R» y su altura es «a»



* Piden : $V_{SG(cubo)}=x$.

V_{SG}: volumen del sólido generado por el cubo al girar en torno a $\mathscr{L}$.

Teorema de Pappus:

$$V_{SG}=2\pi\left(A_{\substack{sección\\máxima}}\right)\bar{x}$$

* Donde: $A_{\substack{sección\\máxima}}$, es el área de la mayor sección determinada en sólido, por el plano que contiene a $\mathscr{L}$. $A_{\substack{sección\\máxima}}=a(a\sqrt{2})=a^2\sqrt{2}$

* Como O es el centro de cubo:

$$\bar{x}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Reemplazando:

$$V_{SG(cubo)}=2\pi(a^2\sqrt{2})\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow V_{SG(cubo)}=2\pi a^3$$

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular el volumen de una esfera cuyo radio es de $3cm$.

A) $30\pi cm^3$ B) 32π C) 34π D) 36π E) 38π

02 Se tiene una esfera cuyo radio es de $2cm$. Calcular su superficie esférica.

A) $12\pi cm^2$ B) 14π C) 16π D) 18π E) 20π

03 Se tiene una esfera cuyo radio mide $4cm$. Calcular el área del círculo máximo.

A) $14\pi cm^2$ B) 15π C) 16π D) 18π E) 20π

04 Del problema anterior, calcular el área de la superficie esférica.

A) $60\pi cm^2$ B) 62π C) 63π D) 64π E) 65π

05 Determine el volumen de una esfera de radio 8 *cm*.

RPTA.: ....

06 Hallar el área de una esfera sabiendo que su radio mide **10 cm**.

RPTA.: ....

07 Determine el radio de una esfera donde su volumen y su área miden igual.

RPTA.: ....

08 Si el radio de una esfera aumenta en un **20%**, en qué porcentaje aumenta su área y su volumen?

RPTA.: ....

09 Si se desea que el área de una esfera aumente en un **44%** del área de la esfera inicial, en cuánto tiene que variar su radio?

RPTA.: ....

10 El área de una esfera es «S» . Si la cortamos por la mitad, determine el volumen la semiesfera.

RPTA.: ....

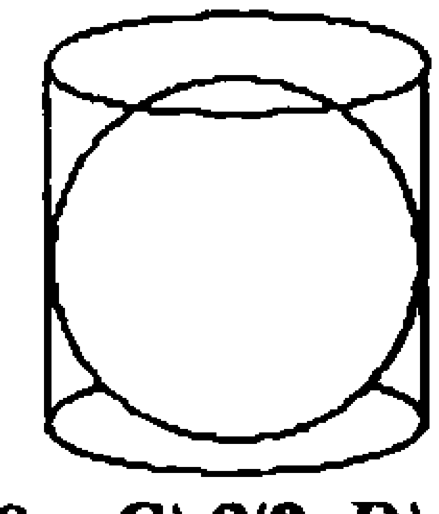
11 El radio de una esfera es igual a 5. Calcular el área de la superficie esférica.

RPTA.: ....

12 Se tiene un cubo de arista «2μ». Calcular el radio de la esfera circunscrita al cubo.

RPTA.: ....

13 En la figura, la esfera está inscrita en el cilindro. ¿En qué razón están los volúmenes de ambos cuerpos?



A) 1 B) 1/3 C) 2/3 D) 4/3 E) 1/6

14 Calcular el volumen de una esfera de radio $\sqrt[3]{3}$.

RPTA.: ....

15 Calcular el área de la superficie total de una esfera de radio $\sqrt{7}$.

RPTA.: ....

16 Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cubo de área total igual *72*.

RPTA.: ....

17 Calcular la relación entre el volumen de una esfera y el volumen de un cilindro circular recto circunscrito a la esfera.

RPTA.: ....

18 Calcular el volumen de una esfera inscrita en un cono equilátero de altura $3\sqrt{6}$.

RPTA.: ....

19 Calcular la altura de un cono circular recto de radio de base *6* equivalente a una esfera de radio *3*.

RPTA.: ....

20 Si el radio de una esfera mide 12π, A qué distancia del centro de la esfera está el centro de gravedad del semicírculo que la engendra?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

21 El volumen de una esfera es numéricamente igual al área de la superficie esférica. Calcular el radio de la esfera

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22 A 4μ del centro de una esfera, se traza un plano secante el cual determina una sección cuya área es igual a $9\pi\mu^2$. Calcular el radio de la esfera

A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 6

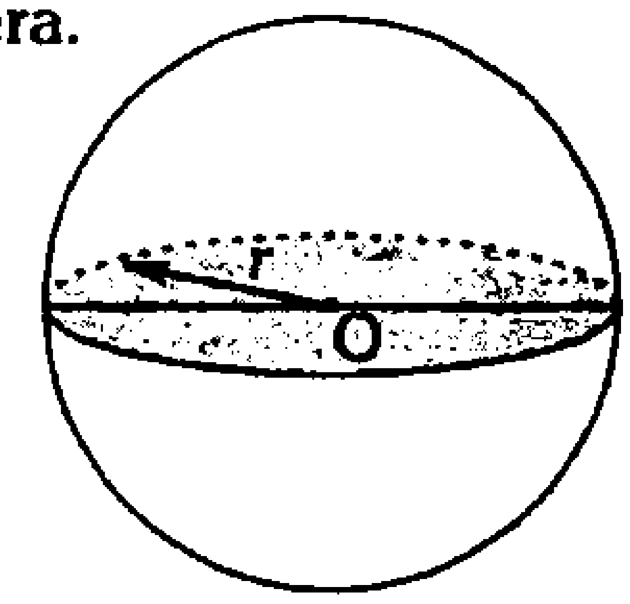
23 Calcular el área de la superficie esférica inscrita en un cilindro recto cuya área total es igual a $678,24\ \mu^2$

A) $452,16\ \mu^2$ B) $428,16\ \mu^2$
C) $430,16\ \mu^2$ D) $444,16\ \mu^2$

24 Calcular el volumen de la esfera inscrita en un cubo de arista igual a 6μ

A) $30\pi\ \mu^3$ B) $18\pi\ \mu^3$ C) $46\pi\ \mu^3$ D) $40\pi\ \mu^3$ E) $36\ \pi\ \mu^3$

25 Calcular el volumen de la esfera. Si el área de la región sombreada es $4\pi\mu^2$. "*O*" centro de la esfera.

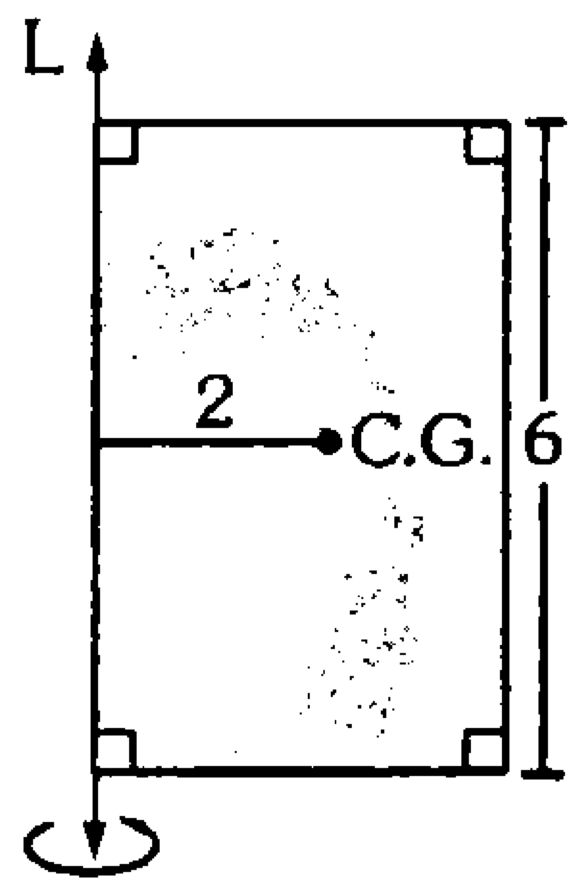


RPTA.: ....

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

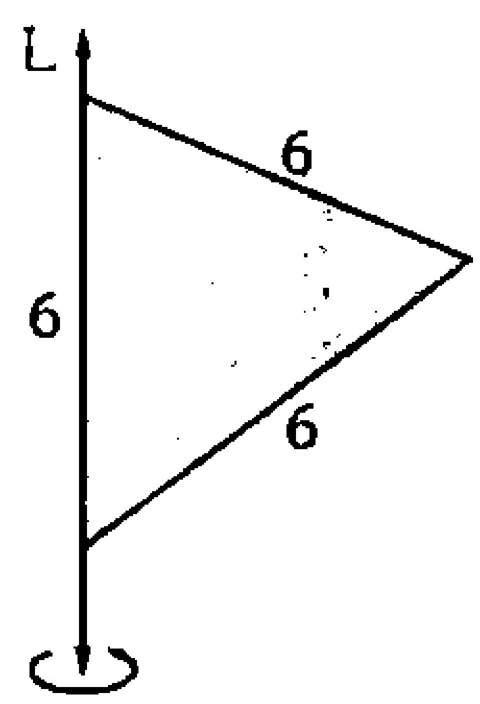
En cada una de las siguientes figuras, calcular el volumen generado por las regiones sombreadas al girar *360°* alrededor de la recta *L. (C.G.*=centro de gravedad)

01



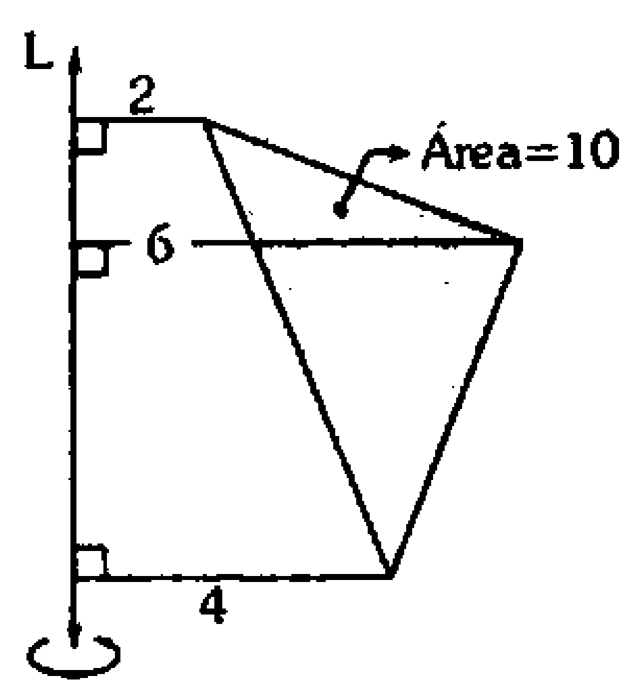
RPTA.: ....

02



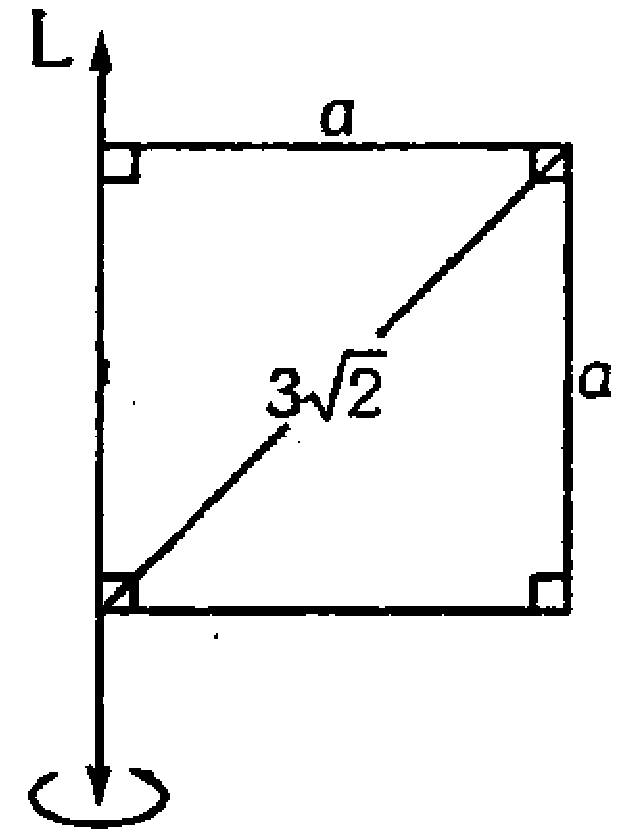
RPTA.: ....

03



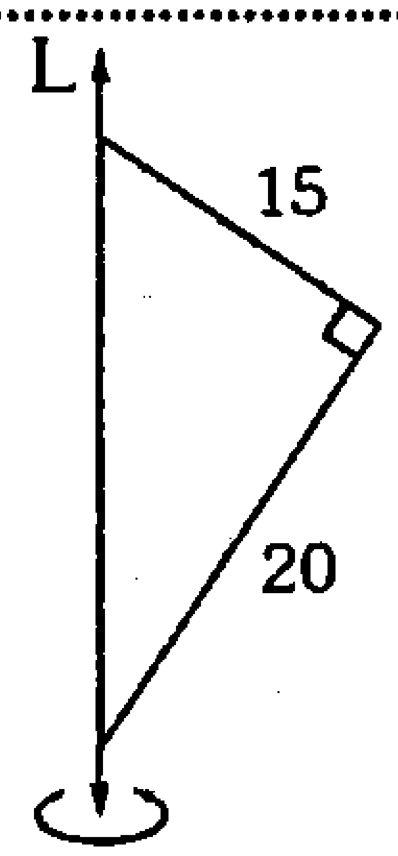
RPTA.: ....

04



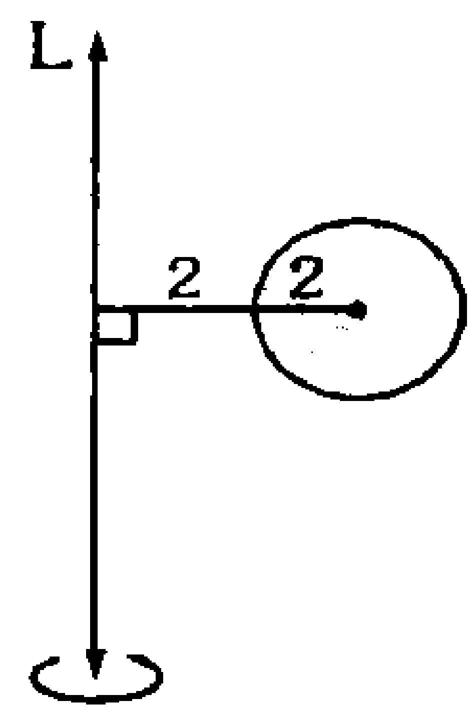
RPTA.: ....

05



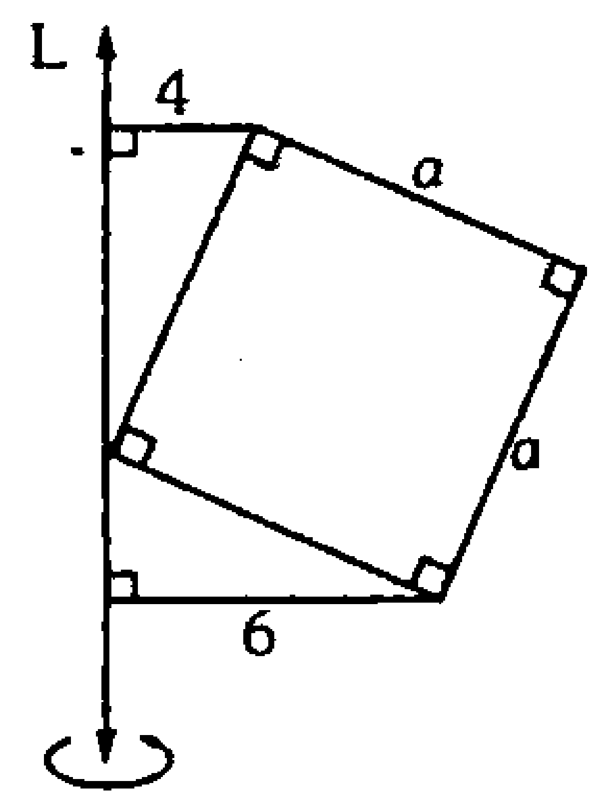
RPTA.: ....

06



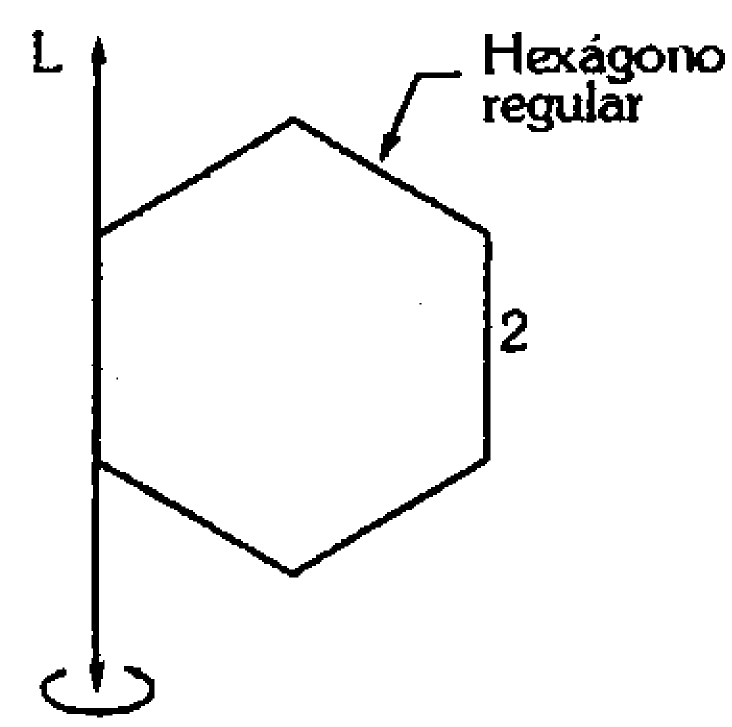
RPTA.: ....

07



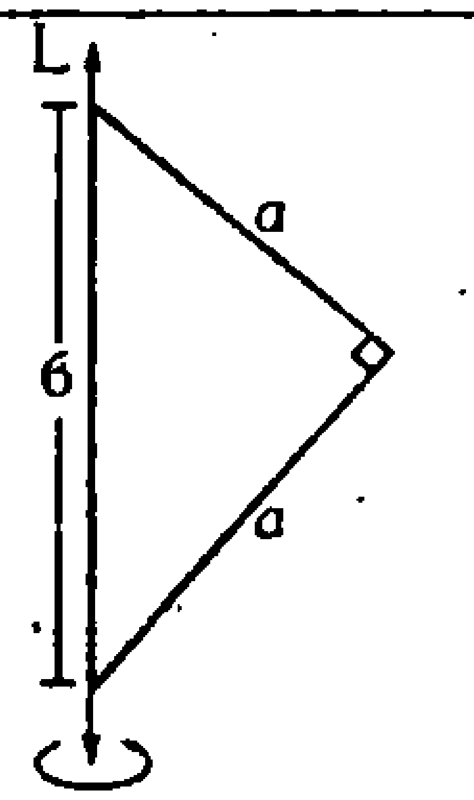
RPTA.: ....

08



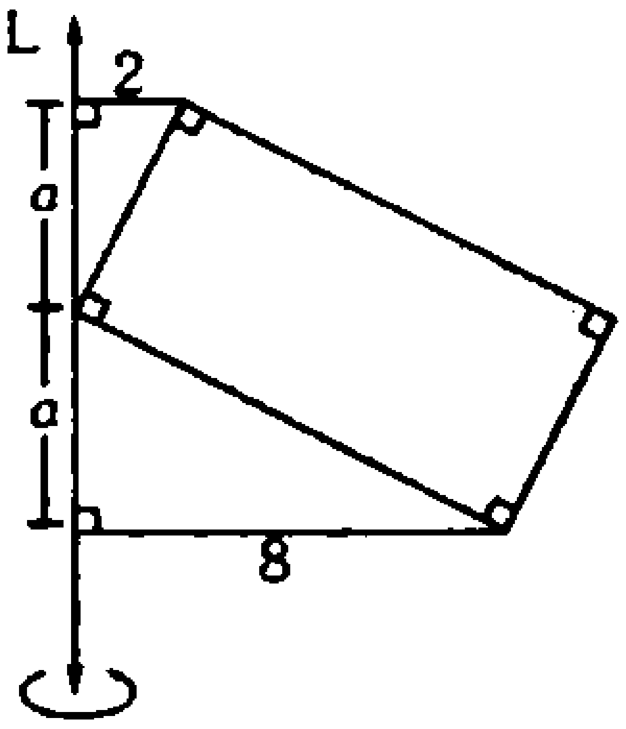
RPTA.: ....

09



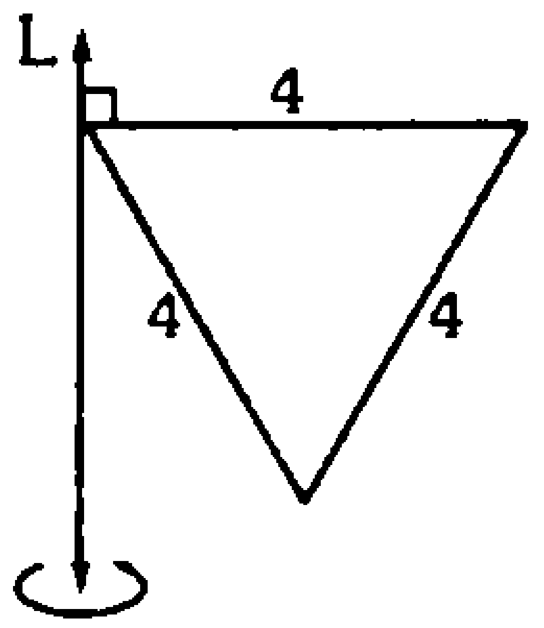
RPTA.: ....

10



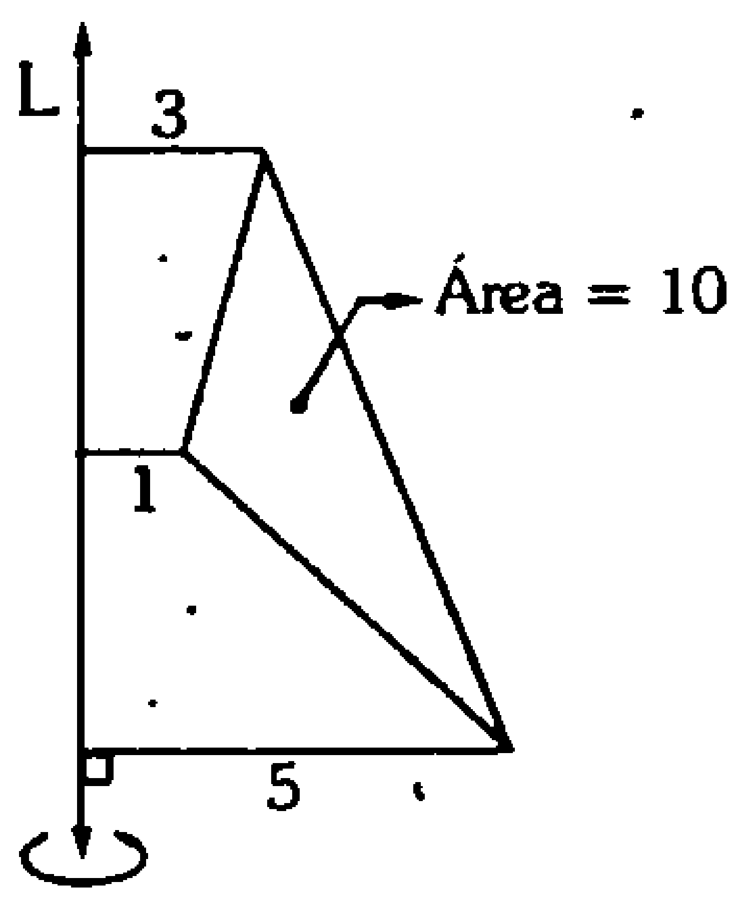
RPTA.: ....

11



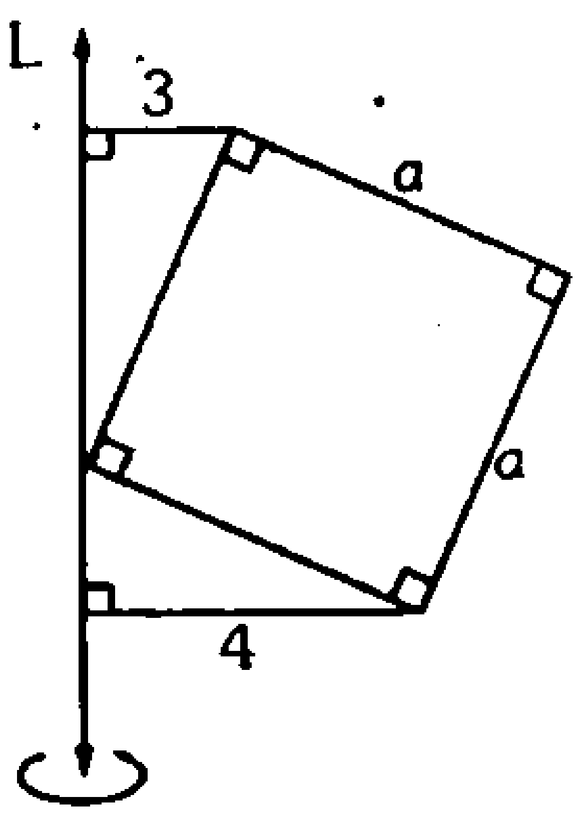
A) $24\sqrt{3}\pi$ B) $18\sqrt{3}\pi$ C) $16\sqrt{3}\pi$
D) $32\sqrt{3}\pi$ E) $36\sqrt{3}\pi$

12



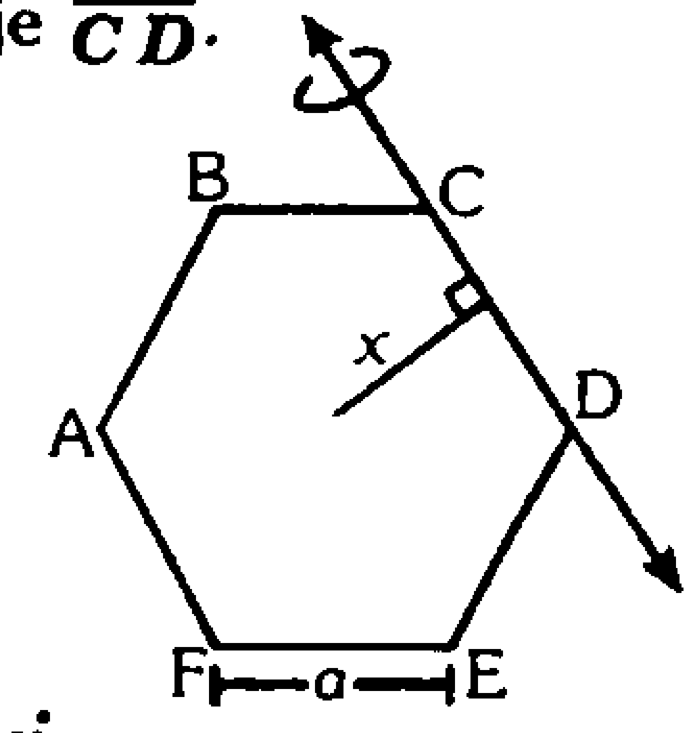
A) 64π B) 60π C) 48π D) 72π E) 96π

13



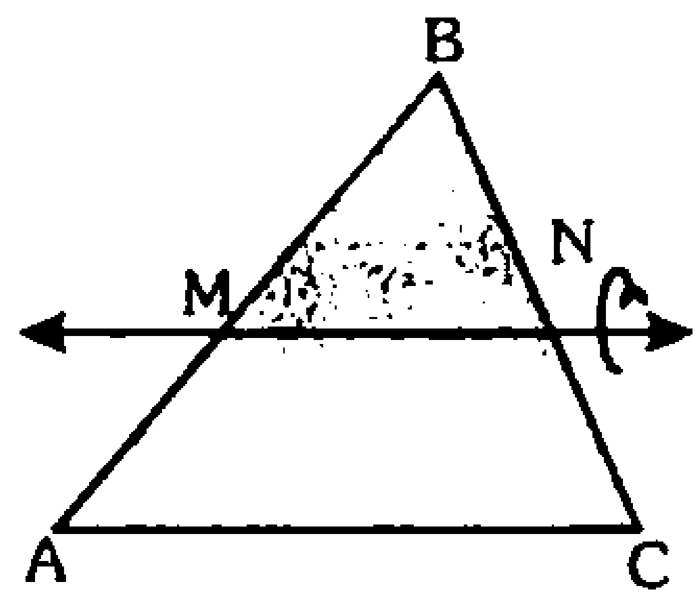
A) 125π B) 150π C) 200π D) 175π E) 225π

14 Hallar el volumen del sólido engendrado al girar el exágono regular *ABCDEF*, *360°* alrededor del eje $\overline{CD}$.



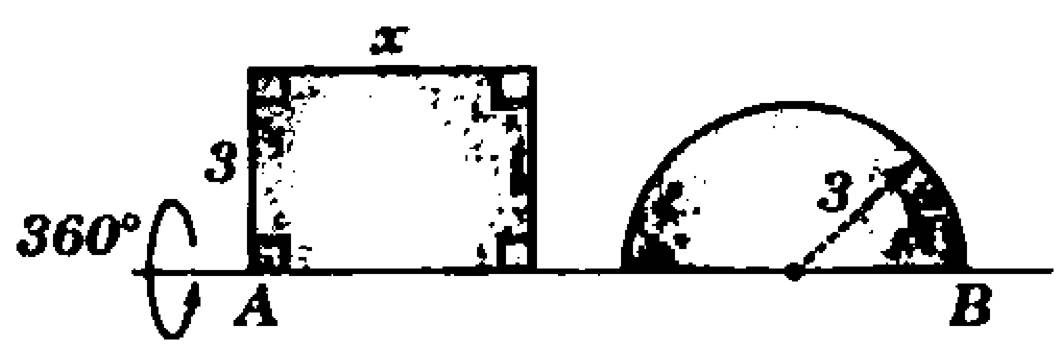
RPTA.: ....

15 Hallar la relación de volumen de los sólidos generados al girar las regiones *MBN* y *AMNC* alrededor del eje $\overline{MN}$ si *AM=MB* y *BN = NC*.



PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si los sólidos generados por las regiones al girar una vuelta en torno a $\overleftrightarrow{AB}$ son equivalentes, calcular el valor de "*x*".



A) $\frac{3}{2}$ B) 4 C) 2 D) 12/5 E) 3/2

02 Una bolita de oro de radio *2*, se funde y se transforma en un cilindro cuyo radio de la base es *2*. Calcular la altura del cilindro.

A) 1 B) 2 C) 3/2 D) 8/3 E) 5/2

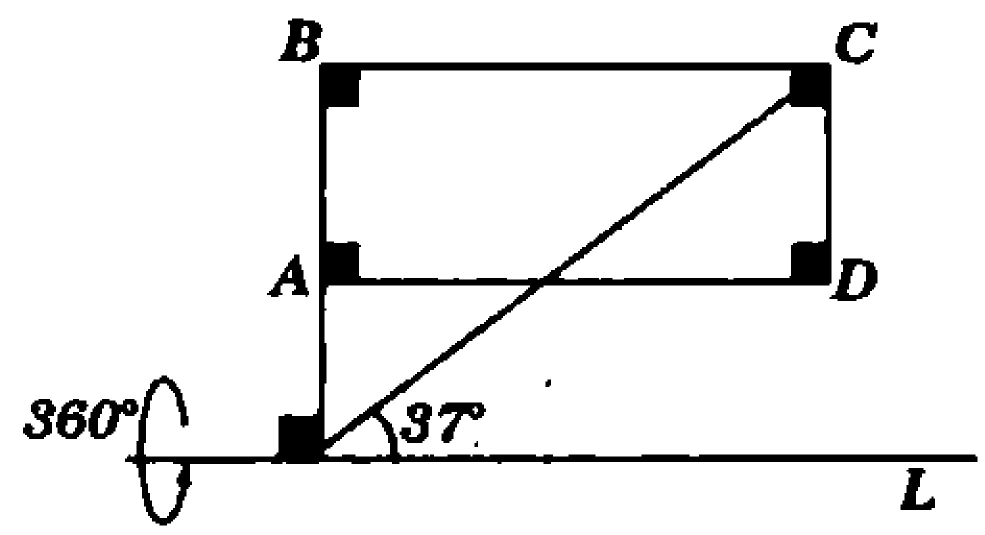
03 En un tubo cilíndrico, de *12* de altura, hay dos esferas colocadas una sobre la otra y tangentes a la superficie lateral del tubo y a las tapas del mismo. Calcular el volumen de la parte no ocupada por las esferas.

A) 36π B) 20π C) 28π
D) 40π E) 42π

04 Un sólido está formado por un cono de revolución y una semiesfera que tiene por círculo máximo la base del cono y es exterior al citado cono; el área de la superficie de este sólido es 115π y el radio de la semiesfera es *5*. Calcular la razón entre el volumen del cono y el de la semiesfera.

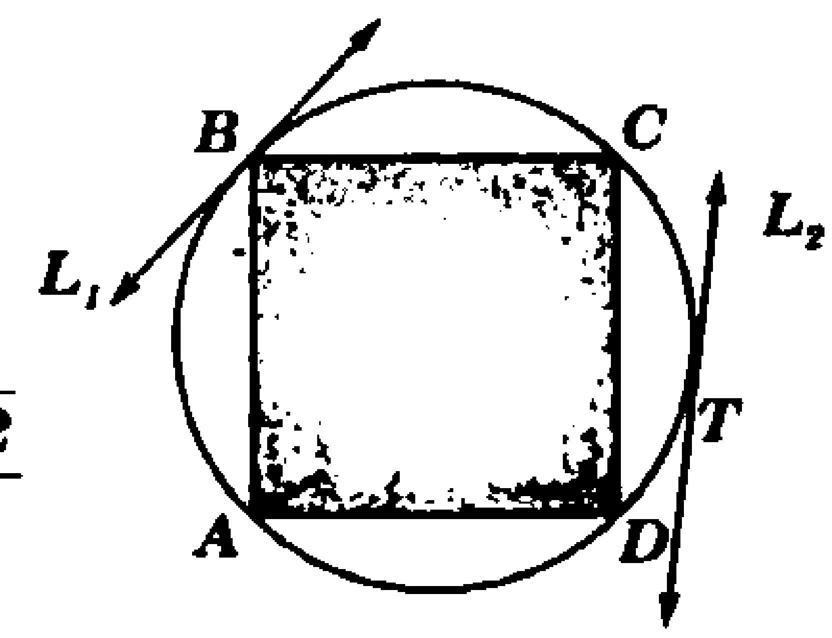
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{7}$

05 Calcular el área de la superficie generada por el rectángulo *ABCD* al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L}$, si *BC=4* y *AB=2*.



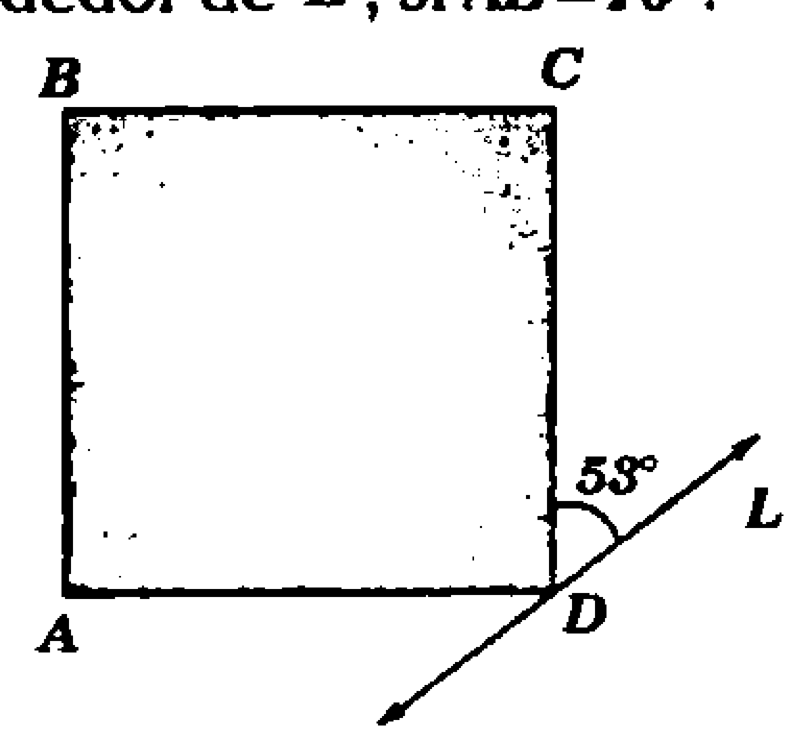
A) 24π B) 52π C) 48π
D) 36π E) 40π

06 Calcular la razón de volúmenes de los sólidos generados por la región cuadrada *ABCD* al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$, si *B* y *T* son puntos de tangencia.



A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) 3
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) 1

07 Calcular el volumen del sólido generado por la región cuadrada *ABCD* cuando gira una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L}$, si *AB=10*.

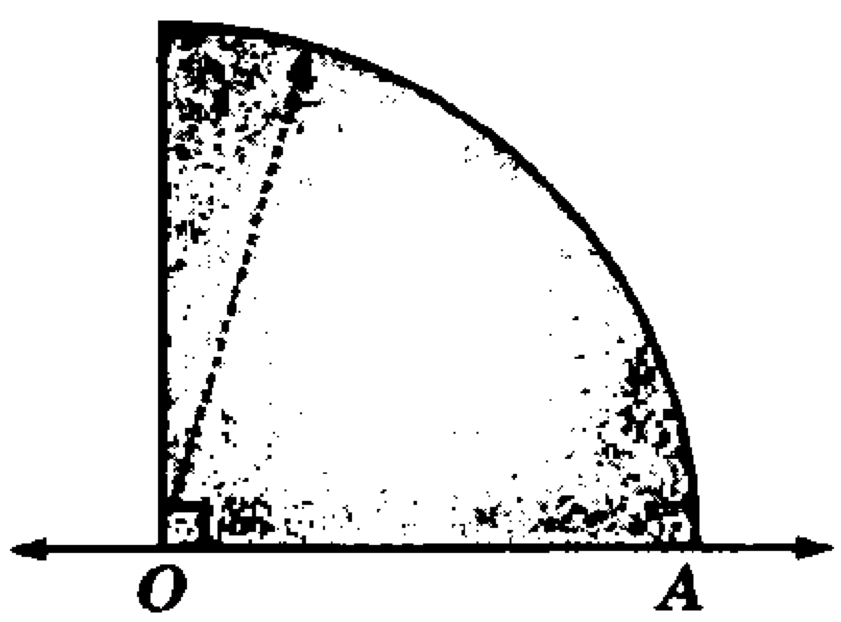


A) $800\sqrt{2}\pi$ B) 1400π C) $10\,000\pi$
D) $200\sqrt{2}\pi$ E) $600\sqrt{6}\pi$

08 En una esfera está inscrito un cilindro de revolución tal que el área de su superficie lateral es igual a $\sqrt{3}$ y el radio de su base es igual a la mitad del radio de la esfera. Calcular el área de la superficie esférica.

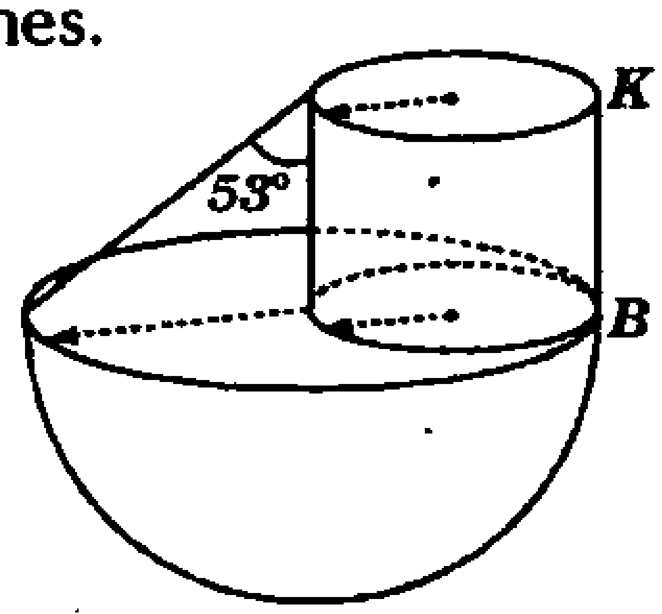
A) 4 B) 2 C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

09 Calcular la distancia del centro de gravedad de la región sombreada hacia $\overleftrightarrow{OA}$, si $OA=6$.



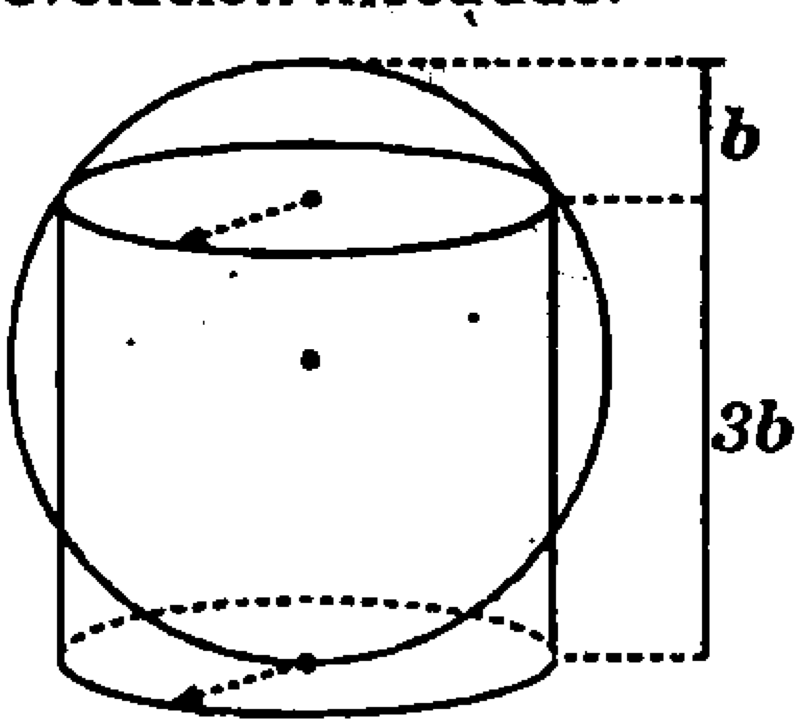
A) $\frac{8}{\pi}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{4}{\pi}$

10 En el gráfico se muestra a un cilindro de revolución y a una semiesfera. Calcular la razón entre sus volúmenes.



A) $\frac{8}{27}$ B) $\frac{9}{32}$
C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$
E) $\frac{3}{4}$

11 Calcular la razón de volúmenes de la esfera y el cilindro de revolución mostrado.

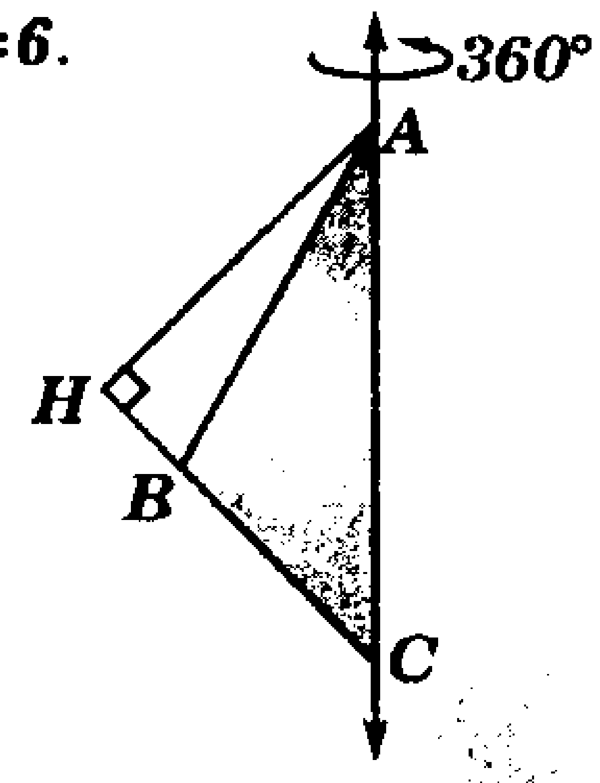


A) 2 B) 32/31 C) 32/27
D) 19/15 E) 1

12 Se tiene un esfera de radio r y un cilindro de revolución donde r es el radio de la base, además la razón de sus volúmenes es $2/3$ respectivamente. Calcule la razón de áreas de la superficie esférica y de la superficie lateral del cilindro.

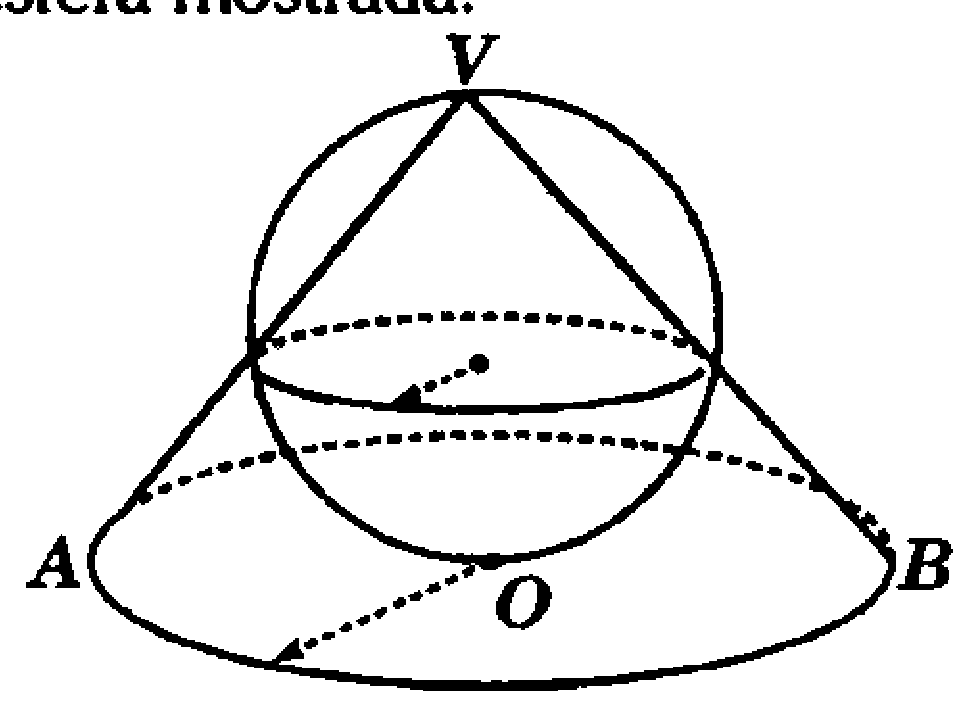
A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

13 Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{AC}$, si el área de la superficie generada por $\overline{BC}$ al hacer el giro es 20 y $AH=6$.



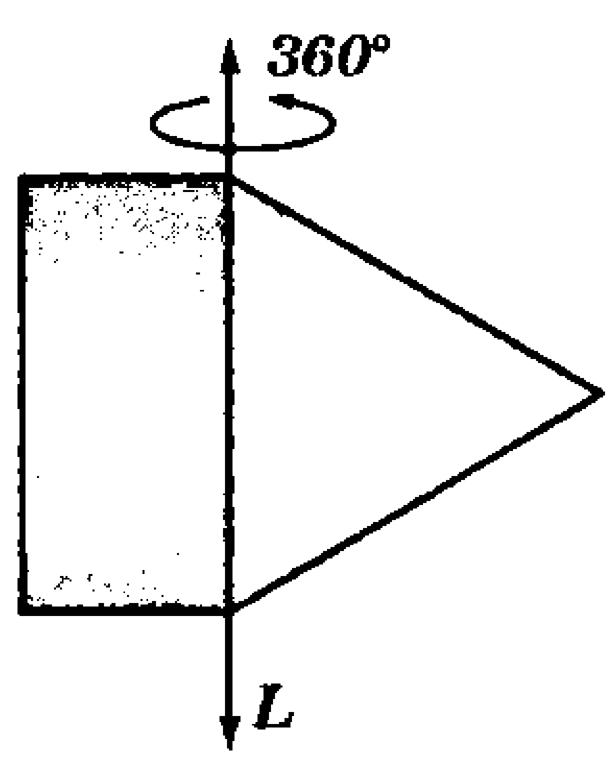
A) 10
B) 90
C) 80
D) 50
E) 40

14 Calcular la razón de volúmenes del mayor cono y la esfera mostrada.



A) 1 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$ D) $\sqrt{2}$ E) 2

15 En un cono equilátero se inscribe una esfera; luego se traza un plano tangente a la esfera y paralelo a la base del cono dichas regiones al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L}$.



A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{10}{3}$

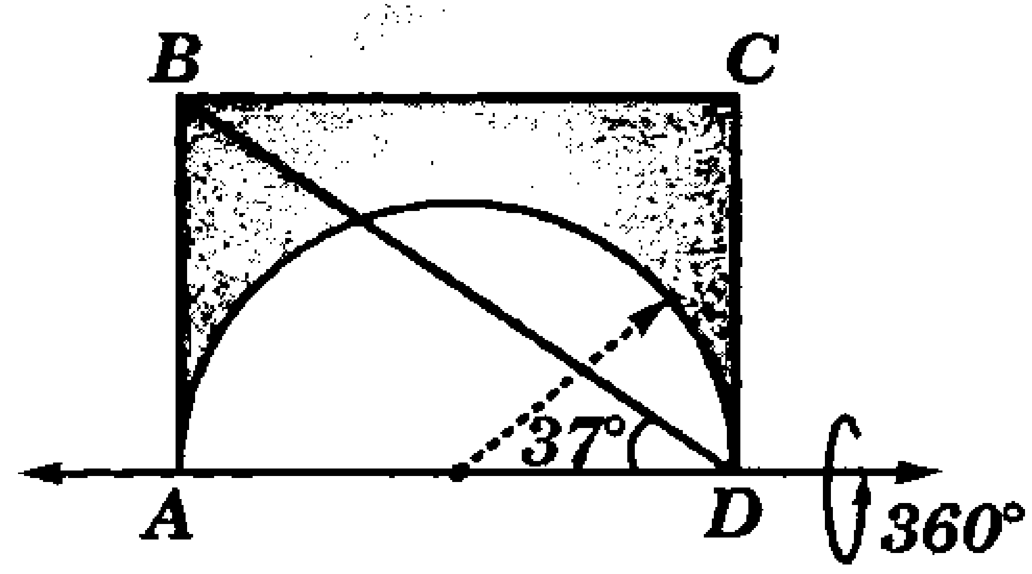
17 Se tiene un cono equilátero cuyo volumen es 9 y una esfera inscrita en él. Calcular el volumen de la esfera.

A) 18 B) $6\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{3}$ E) 4

18 Calcular la medida del ángulo entre la generatriz de un cono de revolución y su base, si el área de la superficie esférica inscrita en él es igual al área de la base del cono.

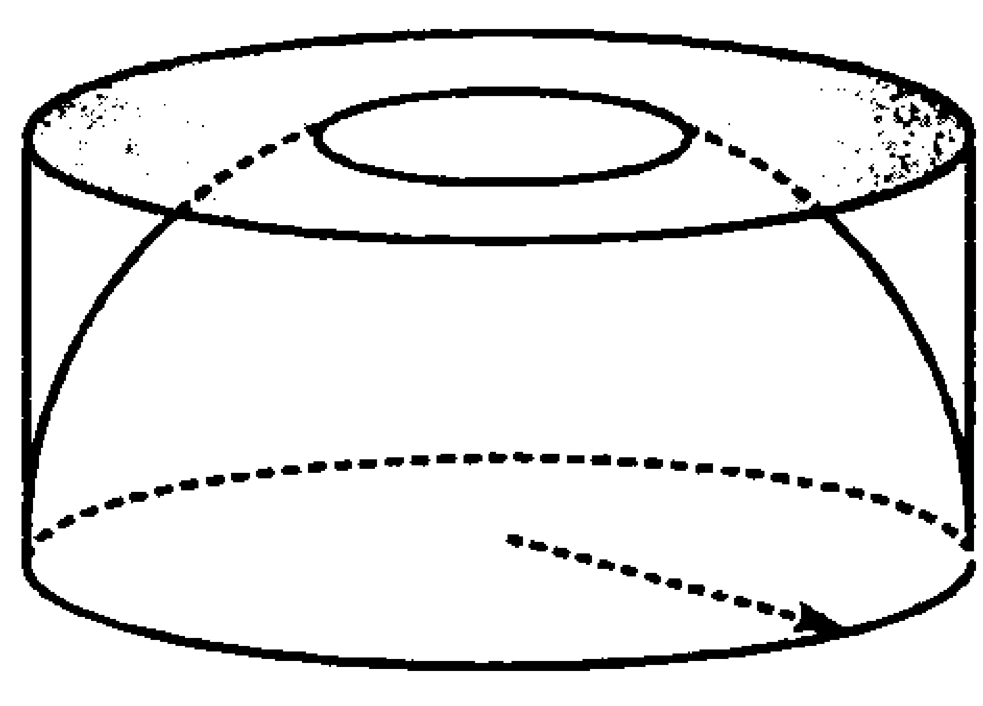
A) 45 B) 60 C) 53 D) 74 E) 36

19 Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar una vuelta alrededor de $\overleftrightarrow{L}$, si $BD=10$.



A) $\frac{608}{3}\pi$ B) 100π C) $\frac{1\,000}{3}\pi$
D) 30π E)C) $\frac{500}{3}\pi$

20 En la figura, el área de la corona circular sombreada es igual a 9π. Calcule la longitud de la generatriz del cilindro de revolución:



A) 3 B) 4 C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 9

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)D	3)A	4)C	5)C	6)E	7)B	8)A	9)A	10)B
11)C	12)E	13)E	14)E	15)B	16)A	17)E	18)C	19)A	20)A

INTRODUCCION A LA TRIGONOMETRIA

CAPITULO 112

OBJETIVOS :

* *Observar la evolución y desarrollo de la Trigonometría y el aporte que dieron los matemáticos y estudiosos, de acuerdo al avance de la historia.*

* *Analizar la Trigonometría como disciplina matemática y conocer en qué campos de acción puede actuar.*

INTRODUCCION :

La palabra trigonometría significa literalmente ***medida del triángulo***. Los origenes de la trigonometría se remonta a egipto.

La trigonometría se desarrolló muy estrechamente con la astronomía. La reducción de las observaciones astronómicas hizo que se necesitará la implementación del cálculo de las funciones trigonométricas.

Diferentes personajes hicieron uso de algunos conceptos matemáticos para la astronomía y esto fue motivo para hablar de la introducción a la Trigonometría y fue Hiparco quién sentó las bases para hacer de la Trigonometría una disciplina.

CONCEPTO :

La palabra «TRIGONOMETRÍA» proviene de las raíces griegas:

TRI ⟶ *Tres*

GONO ⟶ *Ángulo*

METRON ⟶ *Medida*

Así, etimológicamente la palabra Trigonometría se define como:

La ciencia del estudio de la medida de los tres ángulos que representan a un triángulo.

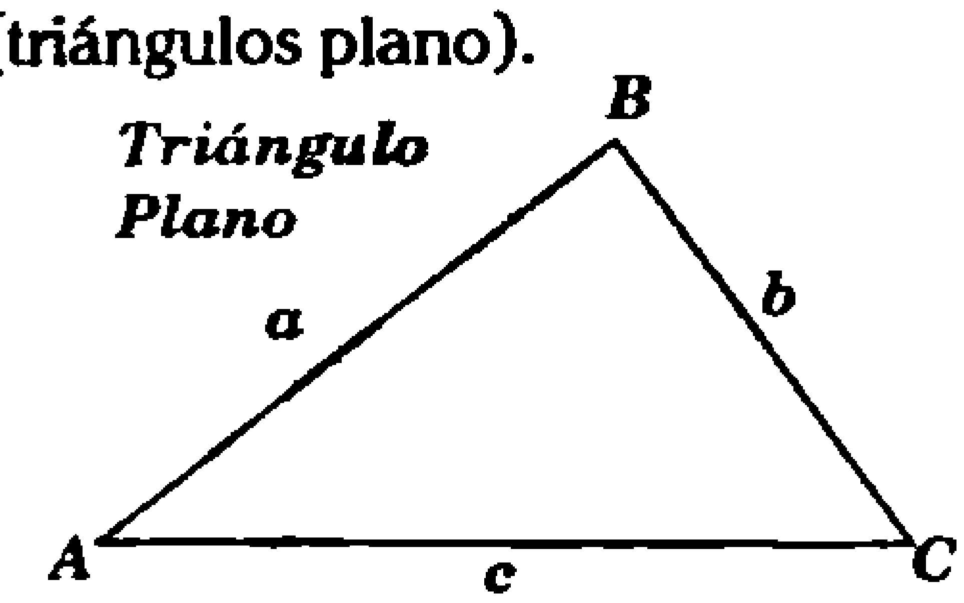
Actualmente la Trigonometría rebasó este concepto, ya que su aplicación se da en: Topografía. Astronomía, Geometría Analítica, Física y en el cálculo superior.

CLASIFICACIÓN :

La Trigononometría se clasifica en tres campos diferentes y cada uno de ellos tiene sus propiedades y sus aplicaciones específicas:

TRIGONOMETRÍA PLANA

Ciencia que se ocupa de la resolución de triángulos, ubicados en un sistema bidimensional (triángulos plano).

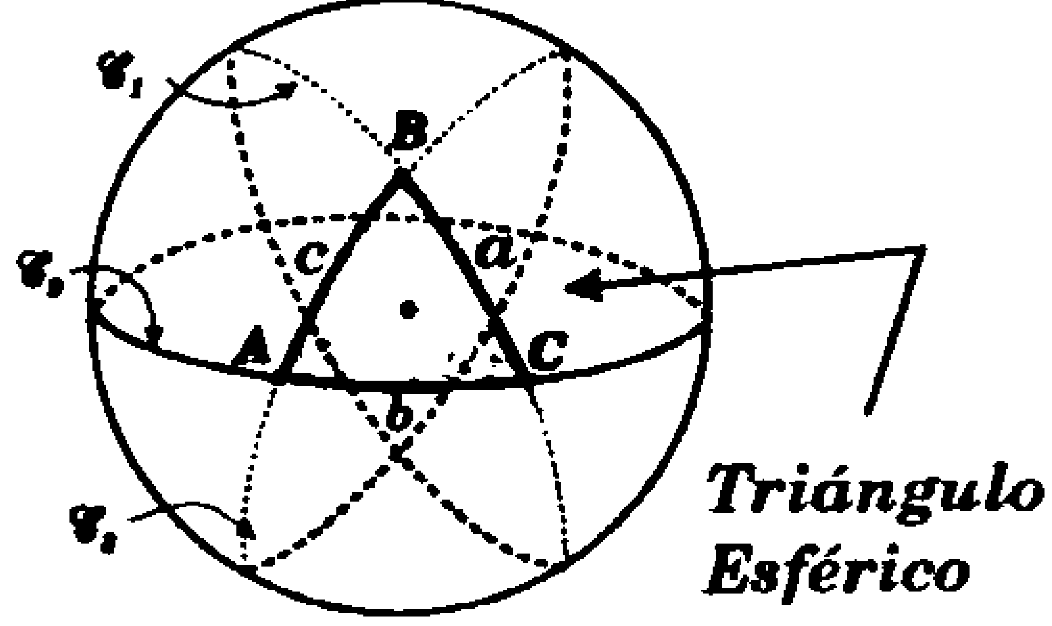


$$\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{Senc}$$

Teorema de Senos

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

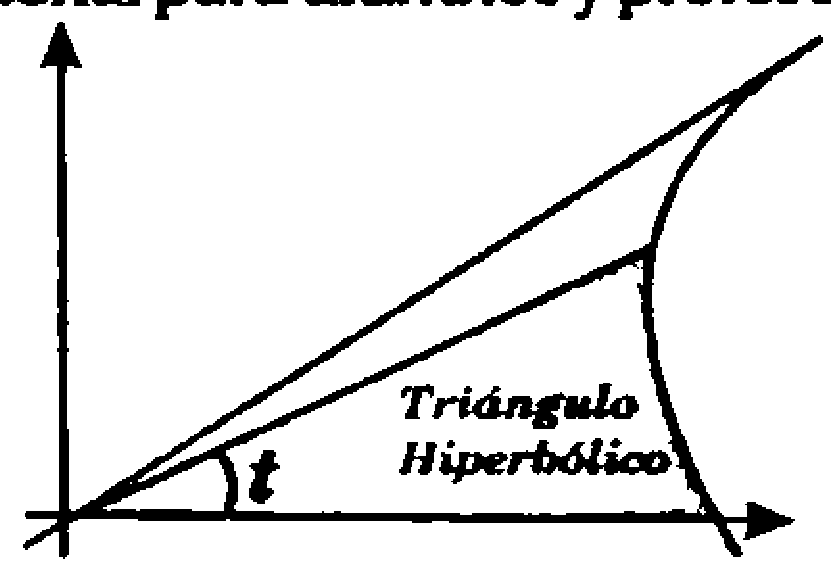
Ciencia que se ocupa de la resolución de los triángulos esféricos.



$$\frac{Sena}{SenA}=\frac{Senb}{SenB}=\frac{Senc}{Senc}$$

TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA

Ciencia que se ocupa de la resolución de triángulos hiperbólicos, que con frecuencia se utilizan en diversas investigaciones físicas y técnicas. Entre otros , su aplicación en la geometría no euclideana y su analogía con las funciones trigonométricas hacen de este estudio un interesante material para alumnos y profesores.



$$ch^2t - sh^2t = 1$$

HISTORIA

Hiparco de Nicea (Aprox. *190* a *125* a.C.) Fue uno de los más grandes astrónomos de la antigüedad, y además fue el inventor de la Trigonometría Plana y de la Trigonometría Esférica. No se conservan sus trabajos al respecto, pero puede asegurarse que su discusión sobre los triángulos estaba fundada en la consideración del círculo circunscrito; calculó una tabla de cuerdas de arcos de diferentes graduaciones para un mismo diámetro, dividiendo la circunferencia en ***360*** partes (grados), y el radio en ***60*** partes iguales.

A fines del siglo *I* de nuestra era, Menelao, discípulo de Hiparco, escribió un tratado de Trigonometría Esférica, que fue estudiada por los árabes. También escribió una obra sobre el cálculo

de las cuerdas, es decir, un tratado de Trigonometría Plana, pero éste se perdió.

El gran astrónomo Alejandro Ptolomeo (siglo ***II***) publicó su famosa obra en trece libros, titulada por los árabes ***«Alma Gesto»***, es decir: «El más grande de los libros» que comprende una compilación de conocimientos astronómicos de su tiempo, así como de Trigonometría y de Matemática en general. Ptolomeo funda su Trigonometría sobre un teorema clásico cuyo enunciado es así:

«El producto de sus diagonales de un cuadrilátero inscriptible es igual a la suma de los productos de los lados opuestos». En el *Alma Gesto* se propone una tabla de cuerdas como elementos indispensables para cálculos trigonométricos necesarios en la Astronomía práctica.

El paso decisivo que la Trigonometría necesitaba para su rápido desarrollo estuvo reservado a los hindúes, dado que ellos, apartándose de las limitaciones del Alma Gesto, pasaron de la Trigonometría de las cuerdas a las de los *senos*, o sea, la mitad de la cuerda del arco doble.

Desde los hindúes, la Trigonometría tiene una nueva orientación. Esto se evidencia en los trabajos de ***Aryabhata (475-550)***, donde ya aparecen las funciones de un ángulo. Además, encontramos una tabla de valores del seno. Hecha en grados, que es la primera en su género. Es digno de subrayarse la importancia que se concede al arco de longitud igual a la del radio, que ahora conocemos con el nombre de *radián*.

La Trigonometría, en los años comprendidos entre ***750*** y ***1300*** a. de J.C , aborda los triángulos oblicuángulos, generalizando las funciones trigonométricas al segundo cuadrante, todo esto gracias a los árabes; pero como el Álgebra no había aclarado aún el significado de los números negativos, no les fue posible completar un estudio sistemático. Hicieron uso finalmente de las seis *funciones trigonométricas* y mejoraron muchas fórmulas de la Trigonometría Esférica.

Con ***Alfonso X (1250)***, la Trigonometría adquiere un gran avance en España y él mismo propició que se computasen nuevas tablas, con el fundamental propósito de impulsar la Astronomía.

J. Müller (1436 - 1476), matemático y astrónomo alemán., más conocido como *Regiomontano,* quien por encargo de su maestro Von Peurbach. se dedicó al estudio del *«Alma Gesto»* y como producto de esto escribió el tratado completo de ***«De Triángulis»***, considerado por los críticos como la primera exposición sistemática y ordenada de la Trigonometría Moderna.

Posteriormente, ***N. Copernico (1473 - 1543)***, tiene el mérito de haber sido el primero en demostrar en forma rigurosa y clara las fórmulas que sirven de fundamento a la Trigonometría Esférica, enriqueciendo la obra de Regiomontano e introduciendo la *secante* hacia ***1 540.***

Jorge Joachim (1514 - 1576), fue el que calculó la primera tabla de valores naturales de los *senos y tangentes*, de 10" en 10" y de 0° a 90° con 16 cifras decimales.

Ludolf Van Ceulen (1540 - 1610), este matemático holandés fue quien introdujo la fórmula del *seno* y del *coseno*, del ángulo mitad y a él se debe también el cálculo del valor de pi *(π)* con ***35*** cifras decimales de aproximación.

El nombre de TRIGONOMETRÍA se debe a Pitiscus, quien en ***1595*** publicó un tratado completo y ordenado de esta parte de la matemática elemental.

Francisco Viéte (1540-1603), participó eficazmente del desarrollo de la Trigonometría y construyó tablas de líneas naturales con una extensión mayor de la que otros adoptaron para sus tablas. Enunció prolijamente las proposiciones trigonométricas y generalizó las fórmulas que aún usamos en nuestro tiempo. Todo su trabajo tuvo un gran desarrollo gracias al simbolismo algebraico que alcanzó y que favoreció sus procedimientos; y como consecuencia de ello se inicia una nueva etapa en el simbolismo trigonométrico.

Con la aparición de los logaritmos, la Trigonometría se pudo simplificar y ***Neper (1550 - 1617)*** tuvo la oportunidad de resolver los triángulos oblicuángulos y triángulos esféricos. Néper destaca en Trigonometría gracias a sus aportes en el trabajo *«Analogías de Néper»* y la fundamental *«Regla del Pentágono de Néper»* para la resolución de triángulos esféricos.

G. Oughtred (1575 - 1660), publica en ***1657*** su más importante obra: *«Trigonometría»;* que además de su impecable y didáctico desarrollo, tiene el novedoso empleo de abreviaturas como: sen y cos, entre otros.

Isaac Newton (1642 - 1727), desarrolla una serie de progresos importantes en el campo trigonométrico, como la deducción de las fórmulas generales para Sennx y ***Cosnx.***

No podemos dejar de mencionar a ***Thomas Fantet de Lagni (1710)***, quien establece en forma clara la periodicidad de las funciones trigonométricas, así como también es el primero en derivar las fórmulas generales para *Tan nx* y

secnx, directamente del triángulo rectángulo.

Abraham de Moivre (1667 - 1754), matemático francés que ideó el método para hallar las funciones trigonométricas de los múltiplos de un arco, a través de su fórmula denominada *fórmula de De Moivre*.

Leonard Euler (1707 - 1783), célebre matemático suizo. Se dedicó a todas las ramas de esta ciencia, estudió y enriqueció profundamente la Trigonometría Esférica, sin por eso descuidar la Trigonometría Plana. Con el sencillo recurso de poner las letras ***A, B*** y ***C*** en los vértices del triángulo rectángulo y las letras ***a, b*** y ***c*** en los correspondientes lados opuestos, simplificó y dio unidad a las fórmulas ya conocidas. En cuanto a la circunferencia trigonométrica, estableció el radio igual a la unidad. Considerando la *seis razones* como funciones del ángulo central de su correspondiente arco en una circunferencia unitaria, lo llevó a escoger las *«variaciones»* de las funciones trigonométricas con sus respectivos períodos. En su obra **«Introducto»** expone magistralmente la teoría de las funciones trigonométricas, dándole su aspecto moderno y analítico; en realidad le da la estructura que actualmente tiene.

A fines del siglo ***XVIII***, la Trigonometría se desarrolla aún más con ***Lambert (1728-1777)***, quien da una serie de fórmulas aproximadas y el uso de las funciones hiperbólicas. Posteriormente, ***Legendre*** demuestra que la Trigonometría Esférica se puede convertir en plana

Lagrange ***(1736 - 1813)***, consigue reducir toda la Trigonometría al *teorema de los cosenos*. Por esta época se puso de manifiesto la Geometría Analítica, y el Cálculo; que necesitaban organizarse y sistematizarse en forma lógica. En los siglos ***XIX*** y ***XX*** la generalización y la abstracción han permitido grandes descubrimientos en la Trigonometría de nuestros días.

D' Alambert. Gaüss y muchos otros anónimos han hecho que la Trigonometría y sus conceptos mejoren sus cimientos. Debemos reconocer que su aplicación es incalculable y podemos decir, sin temor a equivocamos, que es una poderosa herramienta auxiliar en la lucha por la conquista del espacio y la solución de las limitaciones que la matemática elemental presenta en el estudio de las figuras geométricas.

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 A la Trigonometría se le puede considerar como la ciencia del cálculo ...

A) directo B) práctico C) indirecto D) técnico E) lógico

02 La Trigonometría se clasifica en Trigonometría Hiperbólica, Trigonometría Esférica y en Trigonometría ....

A) Espacial B) Cartesiana C) Funcional D) Plana E) Esteriométrica

03 Se le puede considerar como el inventor de la Trigonometría a ...

A) Arquímedes B) Sócrates C) Hiparco D) Platón E) Thales de Mileto

04 Menelao discípulo de ...... escribió tanto de Trigonometría Plana, como de Esférica.

A) Aristoteles B) Sócrates C) Hiparco D) Platón E) Thales de Mileto

05 Indique verdadero (V) y falso (F), según corresponda:

I) Ptolomeo fue autor del *Alma Gesto*.

II) Los hindúes apoyándose en el Alma Gesto desarrollaron la Trigonometría.

III) Los árabes dan las pautas para la definición del radián.

A) VVV B) VVF C) VFV D) VFF E) FFV

06 Indique verdadero ***(V)*** o falso ***(F)***, según corresponda, respecto a los árabes.

I) Abordaron los triángulos oblicuángulos.

II) Usaron sólo cuatro funciones trigonométricas.

III) Mejoraron muchas fórmulas de la Trigonometría Esférica.

A) VVV B) VVF C) VFV D) VFF E) FFV

07 Los conocimientos se trasladan

a.... ......a través de conquistadores

A) Europa-Hindúes B) España-Árabes C) Europa-Arabes

08 Desarrolló la Trigonometría en España en el siglo ***XIII:***

A) Cristóbal Colón B) Alfonso XII C) Alfonso X D) Aryabhata E) Ptolomeo

09 Retornó el *Alma Gesto* para publicar textos sistemáticos y ordenados de la Trigonometría Plana y Esférica:

A) Ptolomeo B) Hiparco C) Menelao D) Regiomanto E) Von Peurbach

10 Indique verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I) N. Copémico introdujo la secante hacia ***1540.***

II) L. Van Ceulen determinó el valor de π con ***35*** cifras decimales de aproximación.

III) Pitiscus denomina Trigonometría a esta parte de la matemática elemental.

A) VVV B) VVF C) VFV D) VFF E) FFV

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

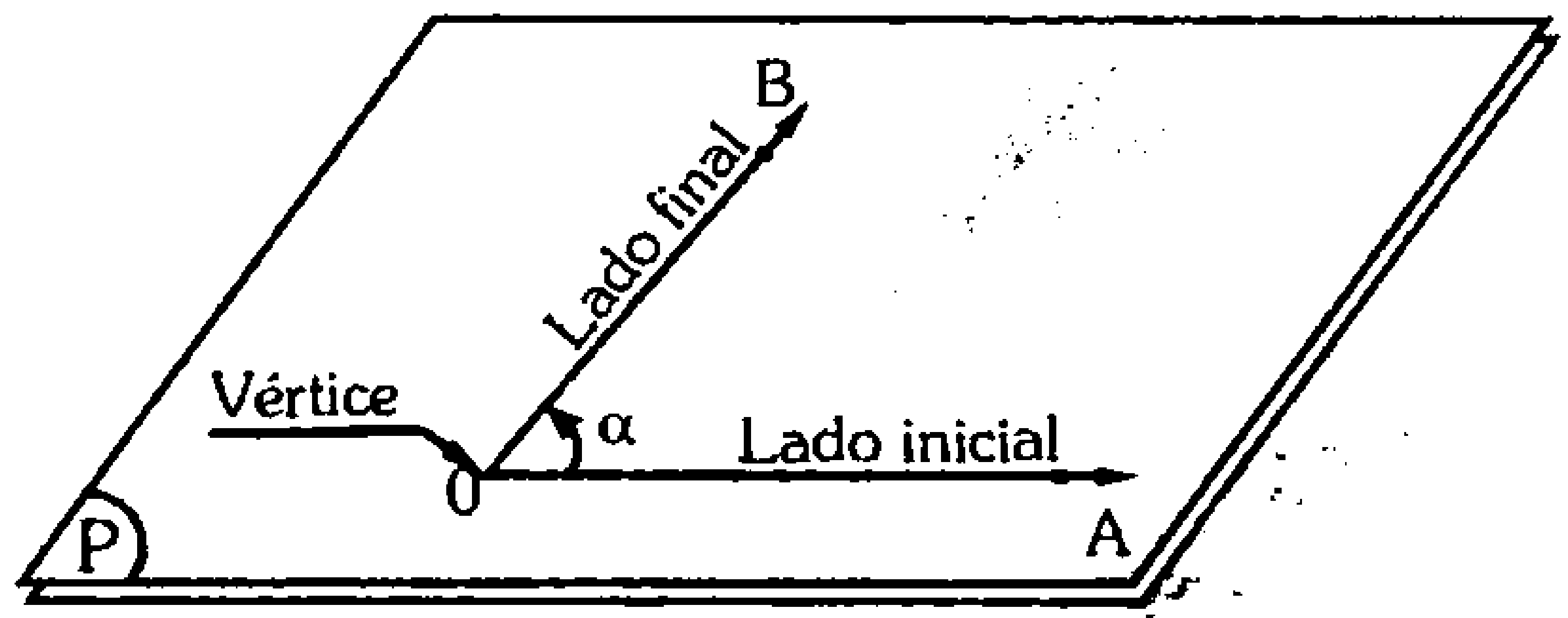
1)C	2)D	3)C	4)C	5)D	6)C	7)C	8)C	9)D	10)A

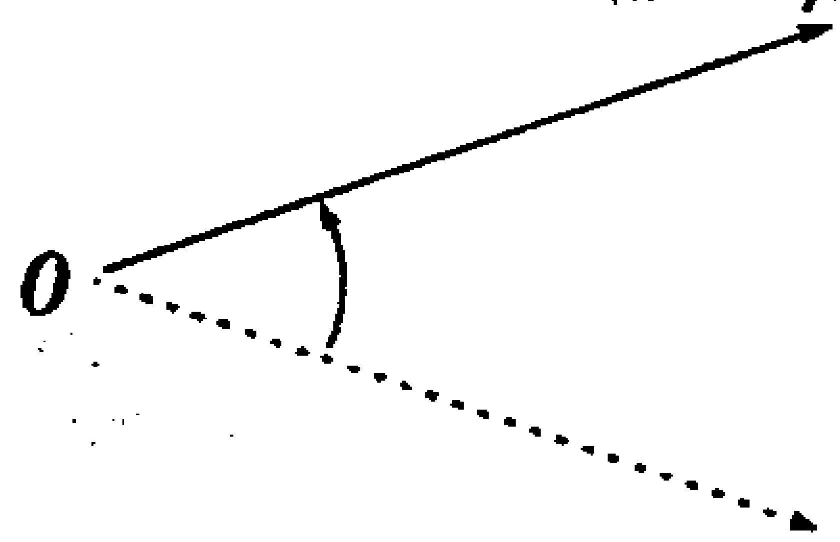
SISTEMAS DE MEDICION ANGULAR

CAPITULO 113

OBJETIVOS :

* *Reconocer un ángulo trigonométrico*
* *Conocer los sistemas de medidas angulares más usados y reconocer en que sistema fueron medidos observando sus unidades.*
* *Aplicar correctamente la conversión entre la unidad y las sub–unidades del sistema sexagesimal.*
* *Aprender a convertir la medida de un ángulo de un sistema a otro.*





INTRODUCCIÓN :

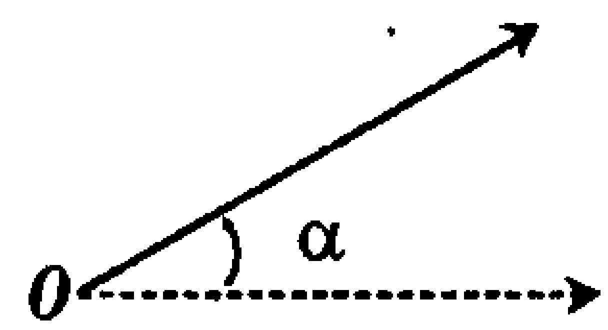
El origen de la palabra trigonometría proviene del griego. Es la composición de las palabras griegas trigonon: triángulo y metron: medida; trigonometría: medida de los triángulos.

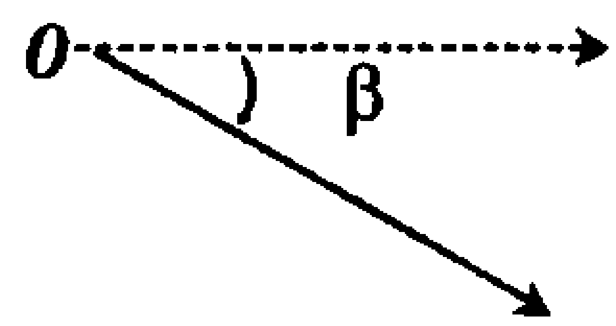
Originalmente, la trigonometría es la ciencia cuyo objeto es la resolución numérica (algebraica) de los triángulos. Los seis elementos principales en todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos. Cuando se conocen tres de estos elementos, con tal que al menos uno de ellos sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo, esto es, a encontrar los otros tres elementos. En este estado de la trigonometría se definen las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.), de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, como las razones entre dos de los lados del triángulo; el dominio de definición de estas funciones es el conjunto de los valores que puede tomar el ángulo *]0;180[*. Sin embargo, el estudio de la trigonometría no limita sus aplicaciones a los triángulos: geometría, navegación, agrimensura, astronomía; sino también, para el tratamiento matemático en el estudio del movimiento ondulatorio, las vibraciones, el sonido, la corriente alterna, termodinámica, investigación atómica, etc. Para lograr esto, se debe ampliar el concepto de función trigonométrica a una función de una variable real, en vez de limitarse a una función de ángulos.

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

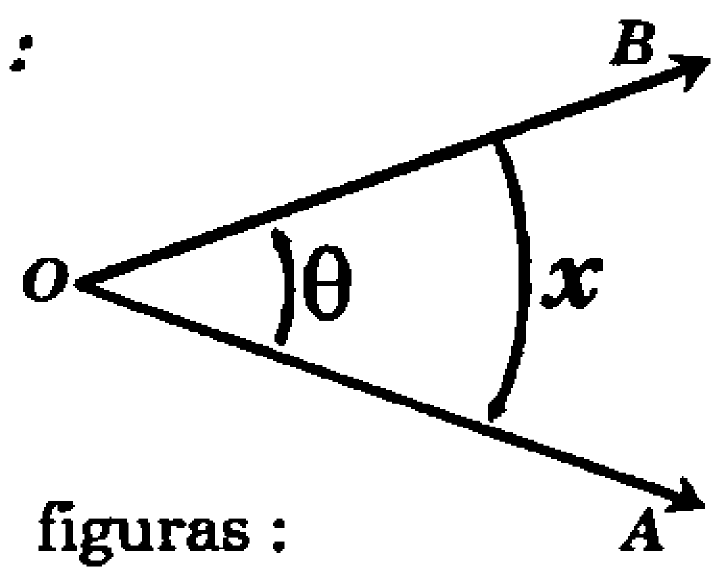
Es una figura generado por la rotación de un rayo, alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.

CONVENCIÓN	
ÁNGULO POSITIVO	*ÁNGULO NEGATIVO*
Si el rayo gira en sentido antihorario	Si el rayo gira en sentido horario





EJEMPLO :



Nótese en la figuras :

* "θ" es un ángulo trigonométrico de medidas positiva.
* "x" es un ángulo trigonométrico de una medida negativa. ⇒ se cumple : $x = -\theta$

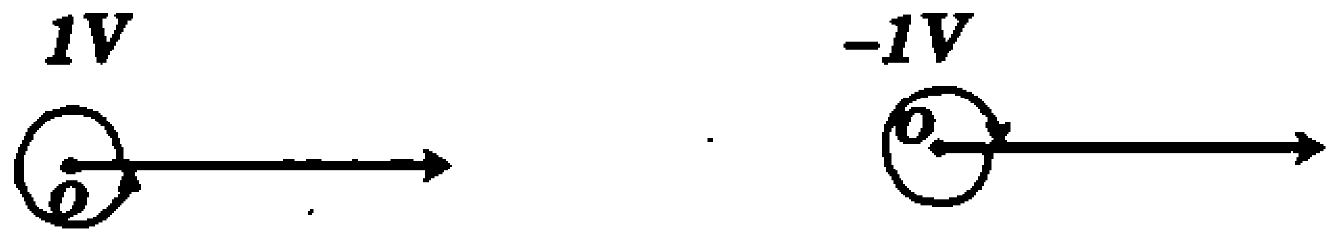
1) ÁNGULO NULO :

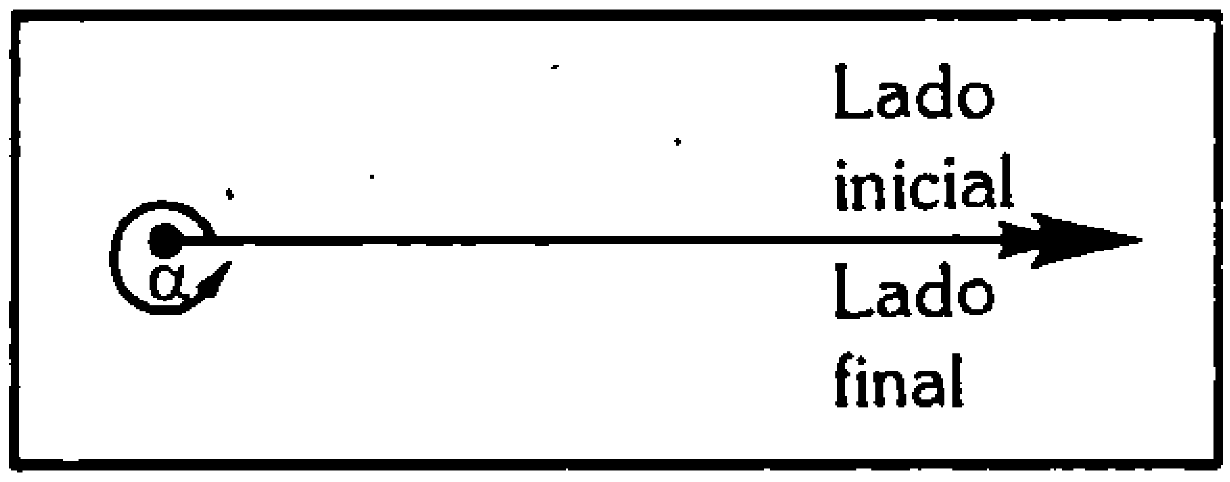
Si el rayo no gira, la medida del ángulo será cero.

2) ÁNGULO DE UNA VUELTA :

Se genera por la rotación completa de un rayo, es decir su lado final coincide con su lado inicial por primera

vez.





$\Rightarrow \alpha$ ángulo de una vuelta

MAGNITUD DE UN ÁNGULO

Los ángulos trigonométricos pueden ser de cualquier magnitud, ya que su rayo puede girar infinitas vueltas, en cualquiera de los sentidos.

EJEMPLO :

En la figura*(1)*, el ángulo trigonométrico mide "*3* vueltas", en la figura *(2)* el ángulo trigonométrico mide "*– 2* vueltas".

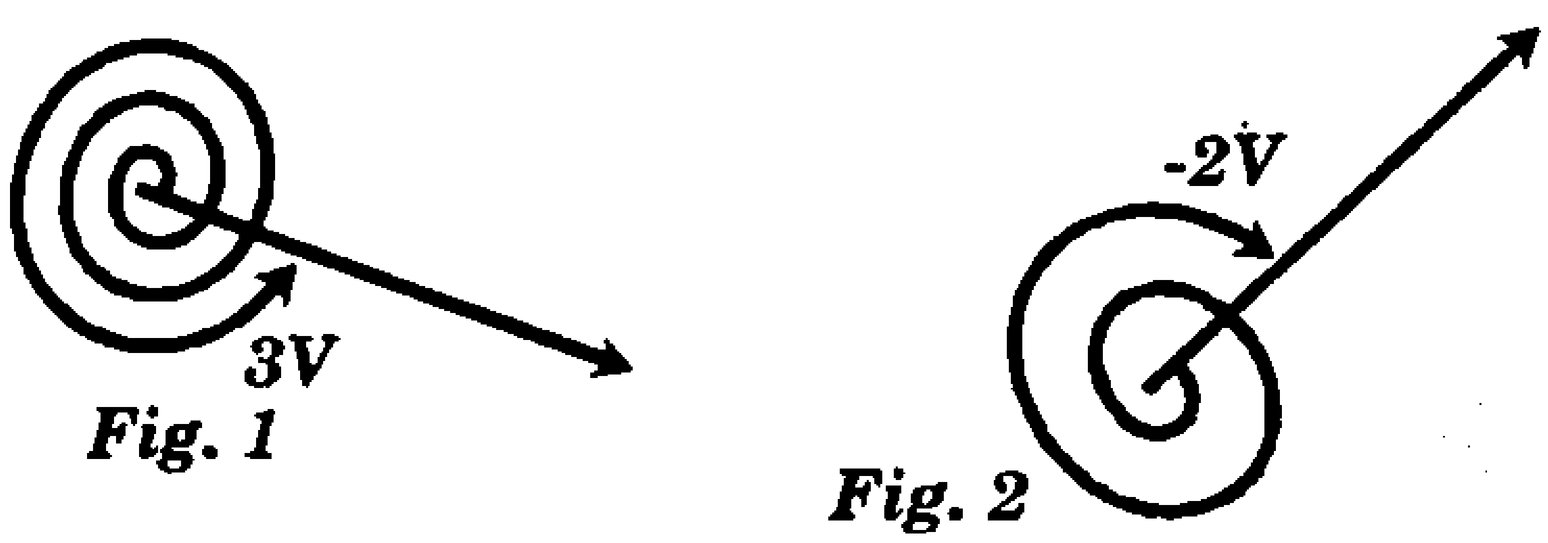


Fig. 1 *Fig. 2*

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Así como para medir segmentos se requiere de una unidad de longitud determinada (metros, pulgadas, etc.), para medir ángulos se necesita de otro como de medición.

SISTEMA SEXAGESIMAL (INGLÉS)

Su unidad angular es el "grado sexagesimal" (1°) ; el cual es equivale a la *360* ava parte del ángulo de una vuelta.

$$1^\circ = \frac{1v}{360} \Rightarrow \boxed{1v = 360^\circ}$$

EQUIVALENCIAS :

$$1^\circ = 60' \quad ; \quad 1' = 60'' \quad ; \quad 1^\circ = 3600''$$

SISTEMA CENTESIMAL (FRANCÉS)

Su unidad angular es el "grado centesimal" (1^g); el cual es equivalente a la *400* ava parte del ángulo de una vuelta.

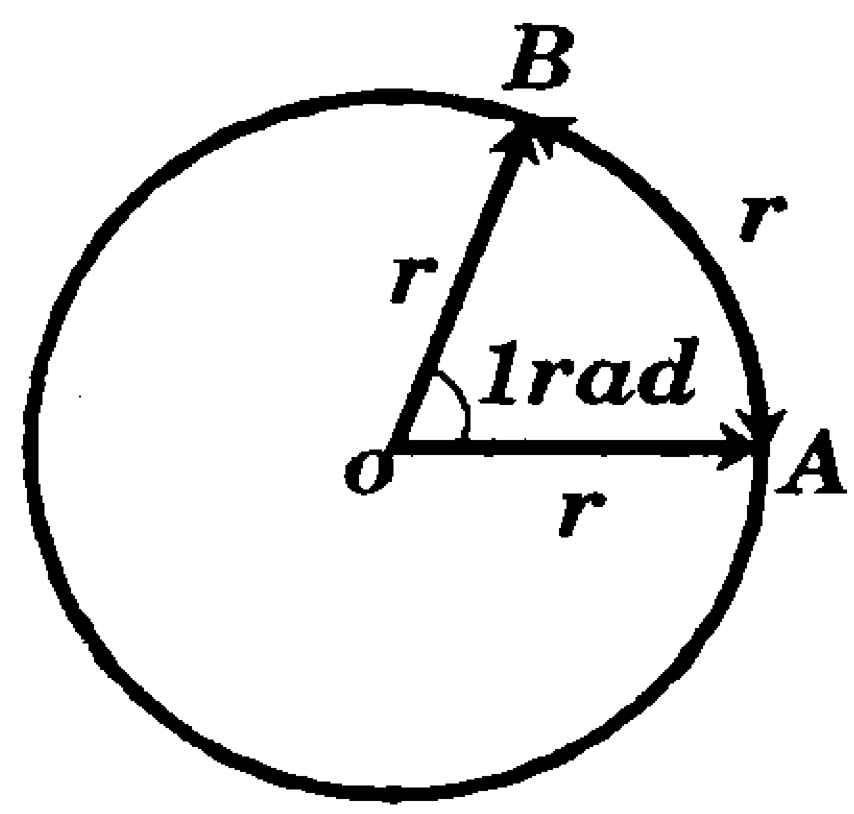
$$1^g = \frac{1v}{400} \Rightarrow \boxed{1v = 400^g}$$

EQUIVALENCIAS :

$$1^g = 100^m \quad ; \quad 1^m = 100^s \quad ; \quad 1^g = 10000^s$$

SISTEMA RADIAL O CIRCULAR (INTERNACIONAL)

Su unidad es el "radian", el cual es un ángulo central que subtiende un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva. $m\sphericalangle AOB = 1\ rad$



$$m\sphericalangle AOB = 1rad$$

$$1rad = \frac{1v}{2\pi} \Rightarrow \boxed{1v = 2\pi\ rad} \cong 6,2832rad$$

NOTA :

* Como: $\pi = 3,141592653$.........entonces

$$\pi \approx 3,1416 \approx \frac{22}{7} \approx \sqrt{10} \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\boxed{1^g < 1^\circ < 1\ rad}$$

Comentario: La palabra radián fue presentada por primera vez por el físico e ingeniero inglés James Thompson el *5* de junio de *1873.*

CONVERSIÓN DE SISTEMAS

**** FACTOR DE CONVERSIÓN :***

Es un cociente "conveniente" de dos magnitudes angulares equivalentes.

MAGNITUDES ANGULARES EQUIVALENTES

$\sphericalangle$ **1 vuelta : 1v** $\Rightarrow 360^\circ = 400g = 2\pi rad$

$\sphericalangle$ **Llano : 1/2v** $\Rightarrow 180^\circ = 200g = \pi rad$

Grados : $\Rightarrow 9^\circ = 10g$

$\sphericalangle$ **Recto : 1/4** $\Rightarrow 90^\circ = 100g = \pi/2rad$

Nótese que :

"Para convertir un ángulo de un sistema otro, multiplicaremos por el factor de conversión".

EJEMPLO 1 :

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular $\alpha = 12°$.

RESOLUCIÓN :

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi rad = 180°$	$\dfrac{\pi rad}{180°}$

$$\Rightarrow \alpha = 12° \times \frac{\pi rad}{180°} = \frac{\pi}{15} rad$$

EJEMPLO 2 :

Convertir a radianes la siguiente magnitud angular $\beta = 15^g$.

RESOLUCIÓN:

Magnitud equivalente   Factor de Conversión

Magnitud equivalente	Factor de Conversión
$\pi rad = 200^g$	$\dfrac{\pi rad}{200^g}$

$$\Rightarrow \beta = 15^g \times \frac{\pi rad}{200^g} = \frac{3\pi}{40} rad$$

EJEMPLO 3 :

Convertir a sexagesimales la siguiente magnitud angular $\theta = 24^g$.

Equivalencia	Factor de conversión
$9° = 10^g$	$\dfrac{9^g}{10°}$

$$\Rightarrow \theta = 24^g \times \frac{9°}{10^g} = \frac{108°}{5} = 21{,}6°$$

EJEMPLO 4 :

* Calcular : $E = \dfrac{1°}{1'} + \dfrac{1^g}{1^m} + \dfrac{9°}{5^g}$

RESOLUCIÓN:

* Recordemos $1° = 60'$

$1^g = 100^m$

$9° = 10^g$

* Reemplazando en :

$$E = \frac{60'}{1'} + \frac{100^m}{1^m} + \frac{10^g}{5^g}$$

$$\Rightarrow E = 60 + 100 + 2 = 162$$

EJEMPLO 5 :

Calcular : $a + b$ sabiendo que : $\dfrac{\pi}{8}\ rad = a°\, b'$

RESOLUCIÓN:

* equivalencia: $\pi\, rad = 180°$

$$\frac{\pi}{8} rad \times \underbrace{\frac{180°}{\pi rad}}_{\text{factor de conversión}} = \frac{180°}{8} = \frac{45°}{2} = \frac{44° + 1°}{2} = 22 + \frac{1°}{2} = 22° + 30'$$

* Luego: $\dfrac{\pi}{8} rad = 22°\, 30'$

* Comprobando: $a = 22$; $b = 30$

Entonces : $a + b = 52$

NÓTESE QUE :

"Para convertir de un ángulo de un sistema a otro; multiplicaremos por el factor de conversión".

EJEMPLO 6 :

Convertir a sexagesimal y radianes la siguiente magnitud angular $\alpha = 16^g$

RESOLUCIÓN:

A) $16^g \rightarrow$ sexagesimales $(°)$

Factor de conversión $= \dfrac{9°}{10^g}$

* Luego :

$$\alpha = 16^g \times \frac{9°}{10^g} = \frac{144°}{10} = \frac{72°}{5} = 14{,}4°$$

B) 16^g radianes?

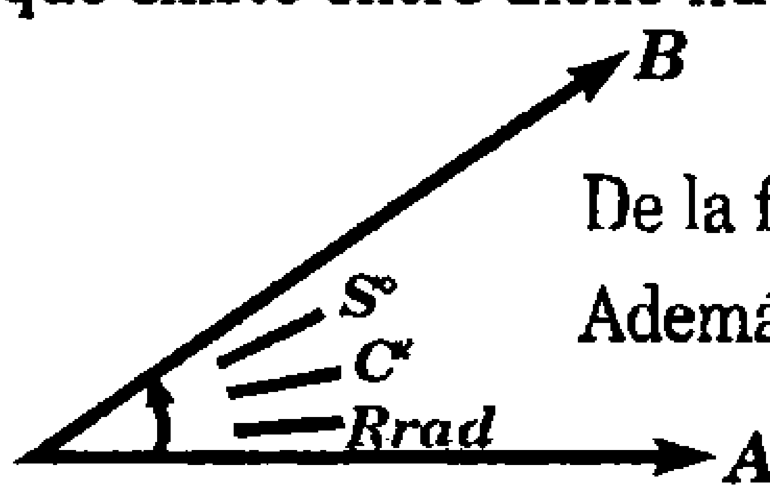
Factor de conversión $= \dfrac{\pi rad}{200^g}$

* Luego :

$$\alpha = 16^g \times \frac{\pi rad}{200^g} = \frac{16 \times prad}{200} = \frac{2\pi}{25} rad$$

FÓRMULA GENERAL DE CONVERSIÓN

Sean S, C y R los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial respectivamente, luego hallamos la relación que existe entre dicho números.



De la fig : $S° = C^g = R rad$....(*)

Además : $180° = 200^g = \pi rad$...(**)

* Dividiendo (*) entre (**) tenemos :

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}} \Leftarrow \text{" Fórmula o Relación de Conversión"}$$

FÓRMULAS PARTICULARES :

$$\boxed{\frac{S}{9}=\frac{C}{10}} \qquad \boxed{\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi}} \qquad \boxed{\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}}$$

EJEMPLO 1 :

Convertir $\frac{\pi}{5}$ rad a grados sexagesimales

RESOLUCIÓN :

$$\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{S}{180}=\frac{\pi/5}{\pi}\Rightarrow S=36$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{5}\,rad=36^\circ$$

EJEMPLO 2 :

Convertir 60^g a radianes

RESOLUCIÓN:

$$\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{60}{200}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{10}$$

$$\Rightarrow 60^g=\frac{3\pi}{10}\,rad$$

EJEMPLO 3 :

Convertir 27° a grados centesimales

RESOLUCIÓN :

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}\Rightarrow\frac{27}{9}=\frac{C}{10}\Rightarrow C=30$$

$$27^\circ=30^g$$

EJEMPLO 4 :

Seis veces el número de grados sexagesimales de un ángulo sumado a dos veces el número de sus grados centesimales es *222*. ¿Hallar el número de radianes de dicho ángulo?.

RESOLUCIÓN :

* Si S , C y R son los números que representan las medidas en grados sexagesimales, en grados centesimales y en radianes respectivamente; del enunciado afirmamos.

$$6S+2C=222\ ....\ (I)$$

* Sabemos :

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=k\begin{cases}S=180K\\C=200K\\R=pK=?\end{cases}$$

* Reemplazando en *(I)*:

$$\Rightarrow 6(180K)+2(200K)=222$$

$$1480\,K=222$$

$$\Rightarrow K=\frac{3}{20}\Rightarrow R=\pi K=\frac{3\pi}{20}$$

RELACIÓN ENTRE SEXAGESIMALES Y CENTESIMAL

Sabemos que: $\frac{S}{180}=\frac{C}{200}$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}$$

S : Números de grados sexagesimales

C : Números de grados centesimales

$$\frac{m}{27}=\frac{n}{50}$$

n : Número de minutos centesimales

m : Número de minutos sexagesimales

$$\frac{p}{81}=\frac{q}{250}$$

p: Número de segundos sexagesimales

q : Número de segundo centesimales

Para minutos y segundos tanto sexagesimales y centesimales se tiene: $\boxed{27'=50^m}$ $\boxed{81''=250^s}$

EQUIVALENCIAS USUALES :

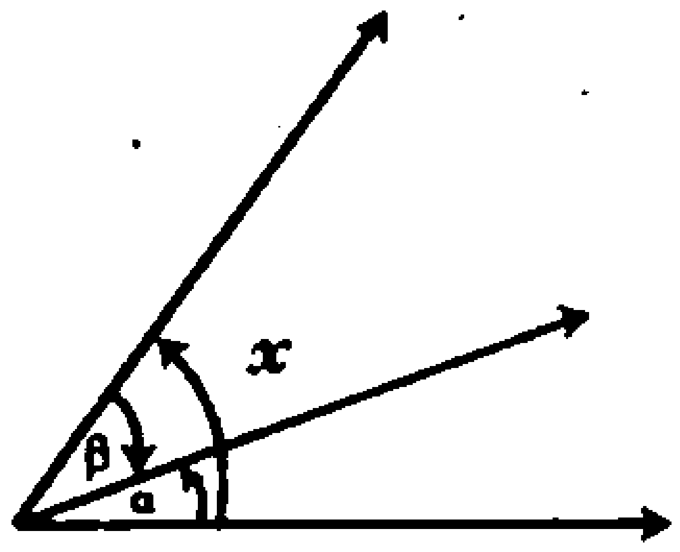
$15^\circ=\frac{\pi}{12}$ rad	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$ rad
$18^\circ=\frac{\pi}{10}$ rad	$54^\circ=\frac{3\pi}{10}$ rad
$22^\circ30'=\frac{\pi}{8}$ rad	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$ rad
$30^\circ=\frac{\pi}{6}$ rad	$67^\circ30'=\frac{3\pi}{8}$ rad
$36^\circ=\frac{\pi}{5}$ rad	$72^\circ=\frac{2\pi}{5}$ rad

$75^\circ=\frac{5\pi}{12}$ rad	$180^\circ=\pi$ rad
$90^\circ=\frac{\pi}{2}$ rad	$225^\circ=\frac{5\pi}{4}$ rad
$120^\circ=\frac{2\pi}{3}$ rad	$270^\circ=\frac{3\pi}{2}$ rad
$135^\circ=\frac{3\pi}{4}$ rad	$300^\circ=\frac{5\pi}{3}$ rad
$150^\circ=\frac{5\pi}{6}$ rad	$360^\circ=2\pi$ rad

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

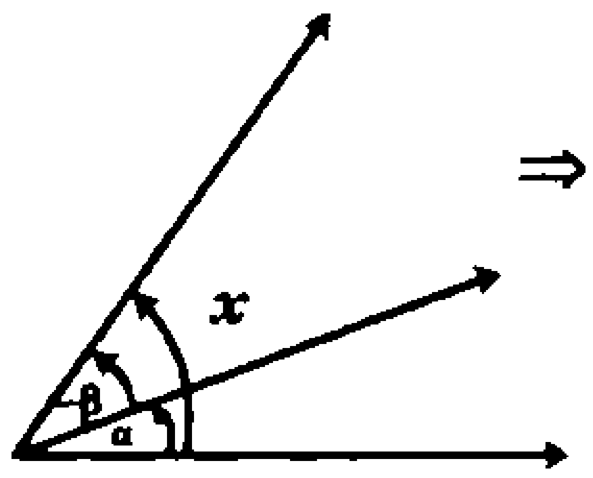
Hallar "x", en función de "α" y "β".



A) $\alpha+\beta$ *B)* $\alpha-\beta$ *C)* $\alpha-2\beta$
D) $\beta-\alpha$ *E)* $-\alpha-2\beta$

RESOLUCIÓN:

* Como "x" esta en sentido antihorario; vamos a procurar que todos los ángulos aparezcan en el mismo sentido; para ello sólo cambiamos "β"; quedando :



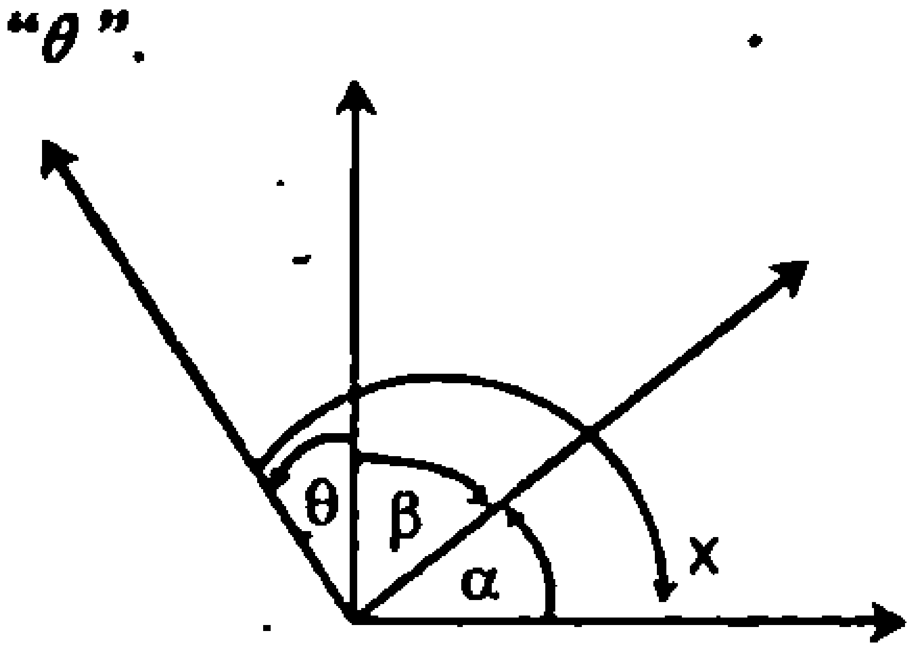
$$\alpha+(-\beta)=x$$

$$\Rightarrow x=\alpha-\beta$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

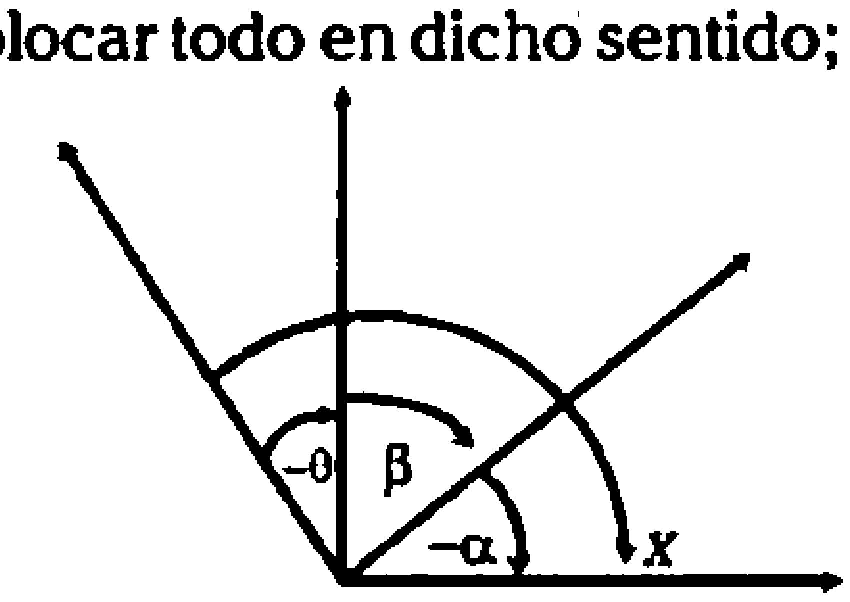
Halle "x", en función de "α", "β" y "θ".



A) $\alpha+\beta+\theta$ *B)* $\alpha-\beta+\theta$
C) $\alpha-\beta-\theta$ *D)* $\beta-\alpha-\theta$
E) $\beta-\alpha+\theta$

RESOLUCIÓN :

* Nota que el ángulo pedido está en sentido horario, así vamos a colocar todo en dicho sentido; así:



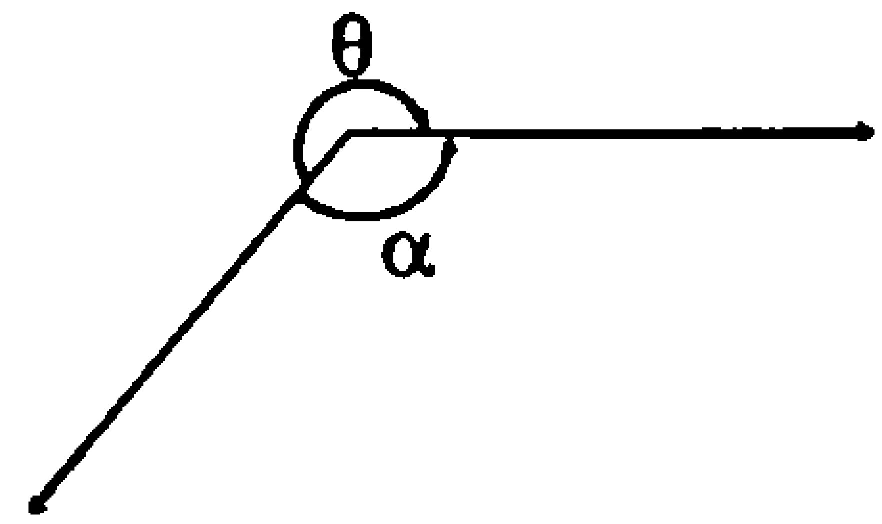
$$x=(-\theta)+\beta+(-\alpha)$$

* Ordenado : $x=\beta-\alpha-\theta$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

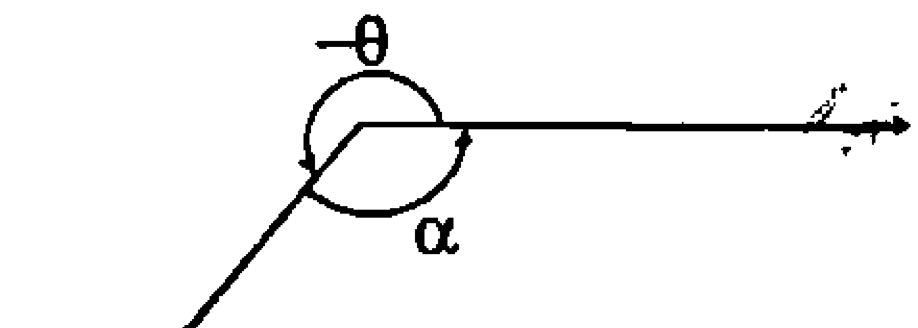
Del gráfico, se cumple :



A) $\alpha+\theta=1$ *vuelta* *B)* $\alpha-\theta=1$ *vuelta*
C) $\alpha+\theta=0°$ *D)* $\theta-\alpha=1$ *vuelta*
E) $\alpha+\theta=1/2$ *vuelta*

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico, colocamos todas las rotaciones en sentido antihorario :



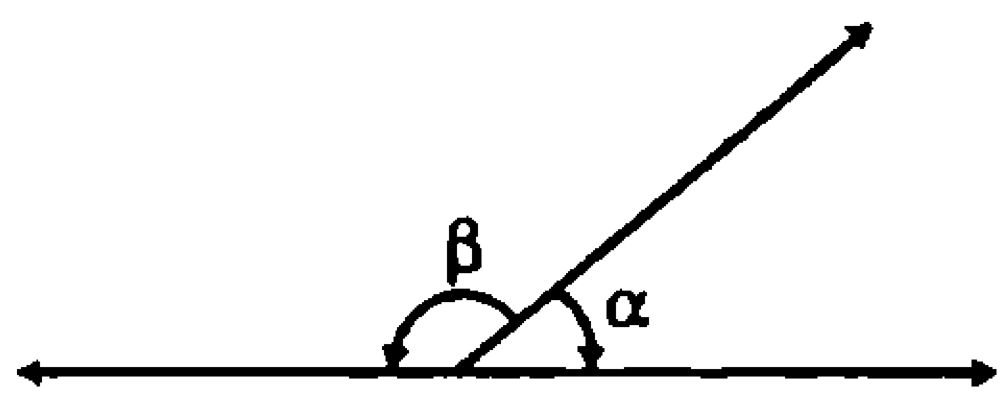
$$\alpha-(-\theta)=1\ vuelta$$

$$\Rightarrow \alpha-\theta=1\ vuelta$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4:

Del gráfico, se cumple :



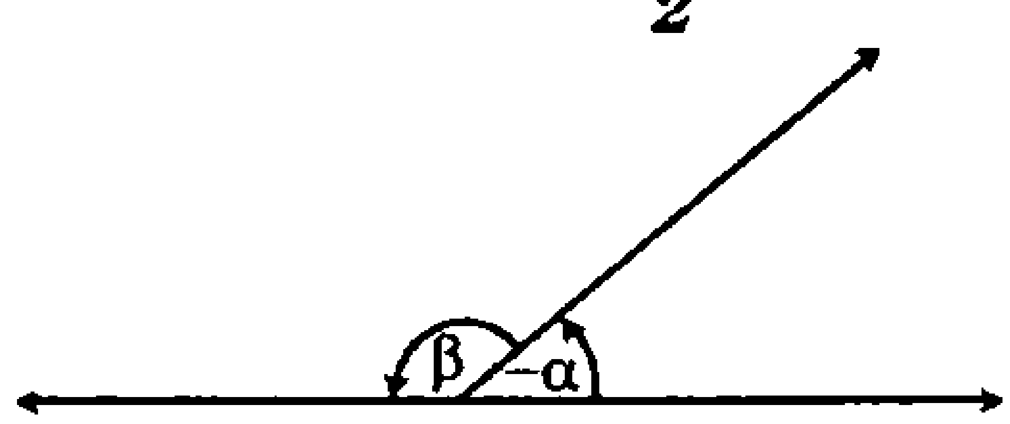
A) $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ *vuelta* *B)* $\alpha-\beta=\frac{1}{2}$ *vuelta*
C) $\beta-\alpha=\frac{1}{2}$ *vuelta* *D)* $\alpha+\beta=0°$
E) $-\alpha-\beta=\frac{1}{2}$ *vuelta*

RESOLUCIÓN :

* Colocando todo a sentido antihorario :

$$(-\alpha)+\beta=\frac{1}{2}vuelta$$

* Ordenado : $\beta-\alpha=\frac{1}{2}vuelta$



RPTA : "C"

PROBLEMA5 :

¿A cuánto equivale $\frac{1}{5}$ del ángulo de *1* vuelta en cada sistema?.

A) $30°; 50^g; \frac{\pi}{5}rad$ *B)* $60°; 70^g; \frac{3\pi}{5}rad$
B) $72°; 80^g; \frac{2\pi}{5}rad$ *C)* $64°; 70^g; \frac{\pi}{5}rad$
D) $36°; 40^g\ \frac{2\pi}{5}rad$

RESOLUCIÓN :

* Sistema sexagesimal :

$$\frac{1}{5}(vuelta)=\frac{1}{5}(360°)=72°$$

* Sistema centesimal :

$$\frac{1}{5}(1\,vuelta)=\frac{1}{5}(400^g)=80^g$$

* Sistema Radial :

$$\frac{1}{5}(\ vuelta)=\frac{1}{5}(2\pi rad)=\frac{2\pi}{5}rad$$

$$\Rightarrow 72°;\ 80^g;\ \frac{2\pi}{5}rad$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

¿A cuánto equivale $\frac{1}{9}$ del ángulo de *1* vuelta en el sistema sexagesimal?

A) $10°$ *B)* $18°$ *C)* $20°$
D) $40°$ *E)* $36°$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{9}(1\ vuelta)=\frac{1}{9}(360°)=40°$$

$$\Rightarrow \sphericalangle \frac{1}{9}\ vuelta=40°$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 :

¿A cuánto equivale un ángulo recto en cada sistema?

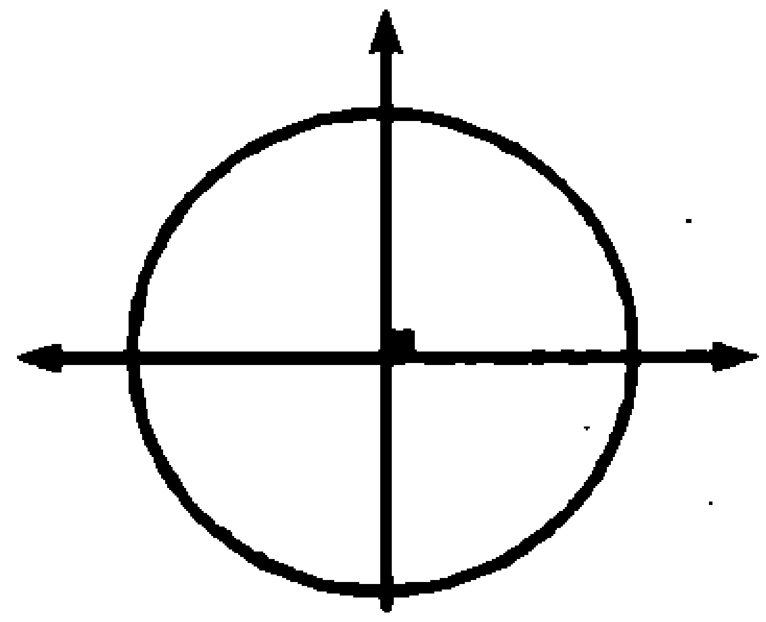
A) $45°; 100^g; \frac{\pi}{2}rad$ *B)* $50°; 100^g; \frac{\pi}{2}rad$
C) $90°; 100^g; \frac{\pi}{2}rad$ *D)* $90°; 200^g; \pi rad$
E) $45°; 50^g; \frac{\pi}{4}rad$

RESOLUCIÓN :

* Notese que el ángulo recto es la cuarta parte del ángulo de una vuelta. Entonces:

$$1\sphericalangle\ recto=\frac{1}{4}\sphericalangle\ 1\ vuelta,$$

luego :



$1 \measuredangle \text{ recto} = \frac{1}{4}(360°) = 90°$

$1 \measuredangle \text{ recto} = \frac{1}{4}(400^g) = 100^g$

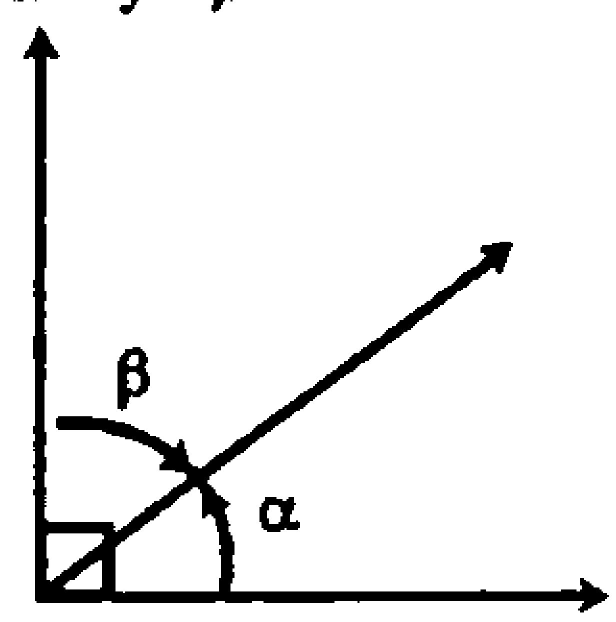
$1 \measuredangle \text{ recto} = \frac{1}{4}(2\pi rad) = \frac{\pi}{2} rad$

$\Rightarrow 90°;\ 100^g;\ \frac{\pi}{2} rad$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8 :

Del gráfico la relación correcta entre "α" y "β".



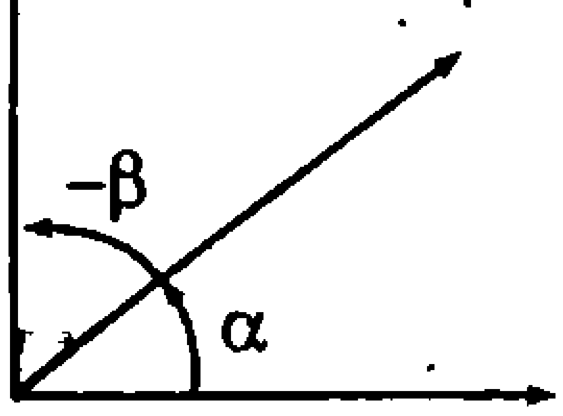
A) $\alpha + \beta = 90°$ B) $\alpha - \beta = 90°$
C) $\alpha + \beta = -90°$ D) $\alpha + \beta = 0°$
E) $\beta - \alpha = 90°$

RESOLUCIÓN:

* Colocando todos los ángulos en sentido antihorario, tenemos :

$\alpha + (-\beta) = 1 \text{ recto}$

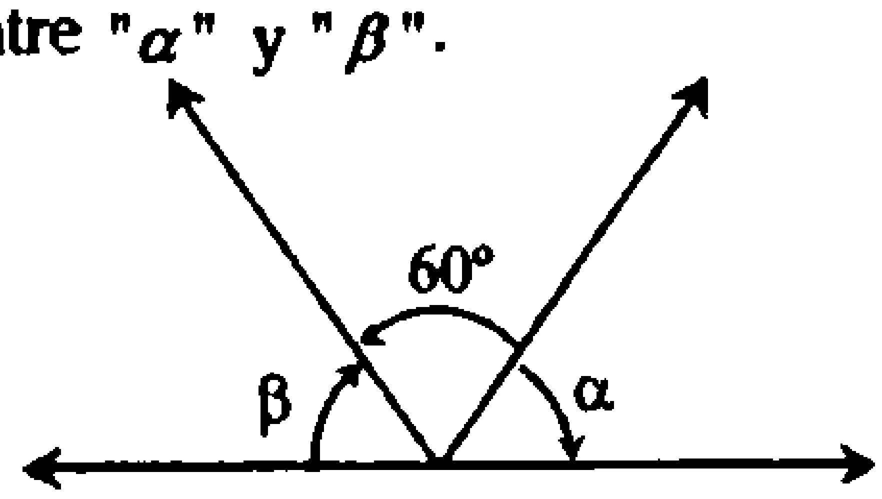
$\Rightarrow \alpha - \beta = 90°$



RPTA :"B"

PROBLEMA 9 :

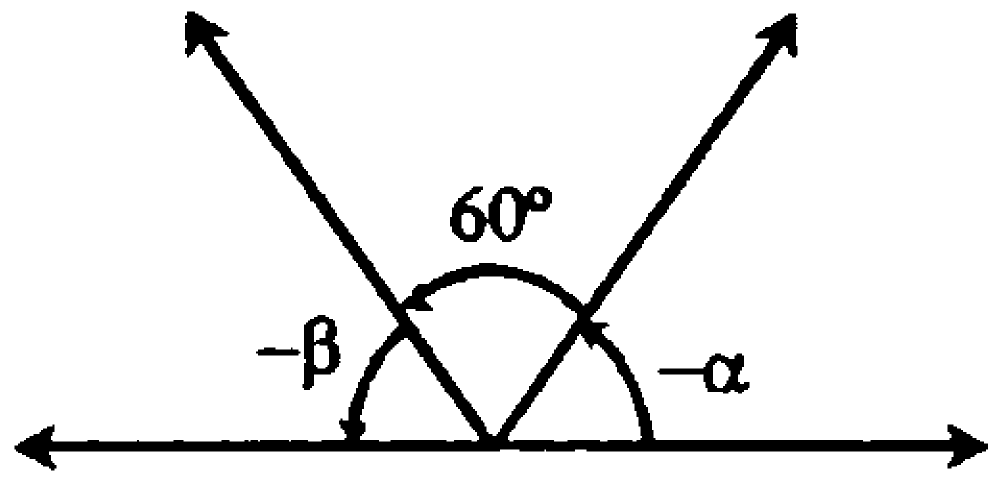
Del gráfico; hallar una relación entre "α" y "β".



A) $\alpha + \beta = -120°$ B) $\alpha - \beta = 120°$
C) $\beta - \alpha = 120°$ D) $\alpha + \beta = 120°$
E) $\alpha + \beta = 60°$

RESOLUCIÓN:

Colocando todos los ángulos en sentido antihorario, se tiene:



$(-\alpha) + 60° + (-\beta) = 1 \measuredangle \text{ llano}$

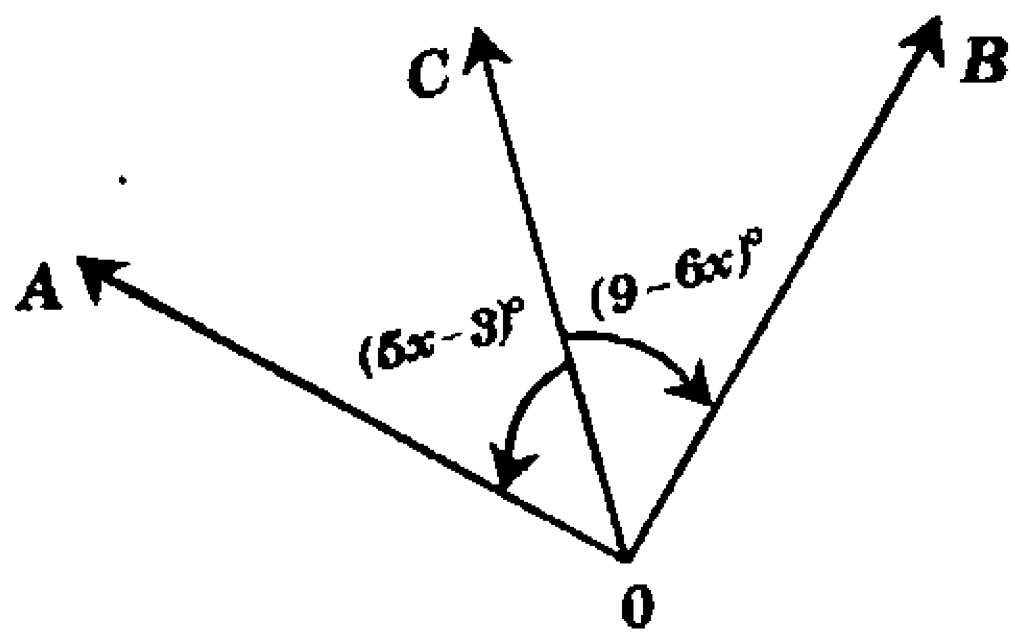
$-\alpha + 60° - \beta = 180°$

$\Rightarrow -\alpha - \beta = 120° \Rightarrow \alpha + \beta = 120°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10:

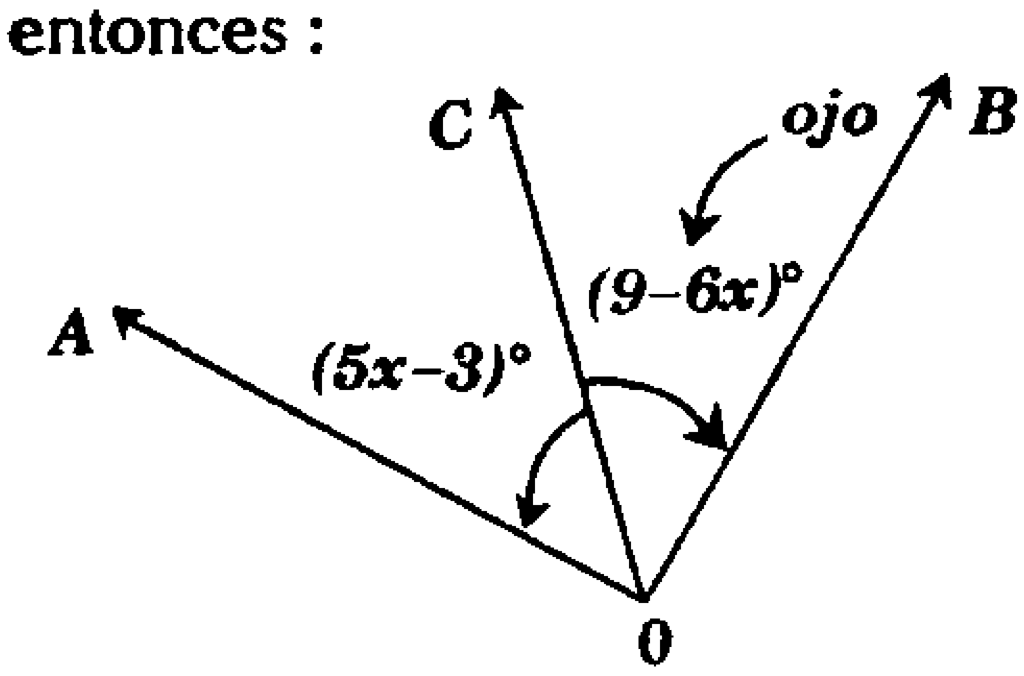
Del gráfico, hallar "x" si $\overline{OC}$ es bisectriz



A) 2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 18

RESOLUCIÓN :

Colocando los ángulos en sentido antihorario; como $\overline{OC}$ es bisectriz, entonces :



$(5x-3)° = (6x-9)°$

$5x - 3 = 6x - 9$

$-3 + 9 = 6x - 5x \Rightarrow x = 6$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Señale el valor de :

$$C = \frac{30^g + 13°}{\frac{\pi}{9} rad}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN :

$\alpha = 30_g \times \frac{9°}{10^g} = 27° \Rightarrow \left\{ C = \frac{27° + 13°}{20°} = \frac{40°}{20°} \right.$

$\beta = \frac{\pi}{9} rad \times \frac{180°}{\pi rad} = 20° \ \Rightarrow C = 2$

RPTA : "B"

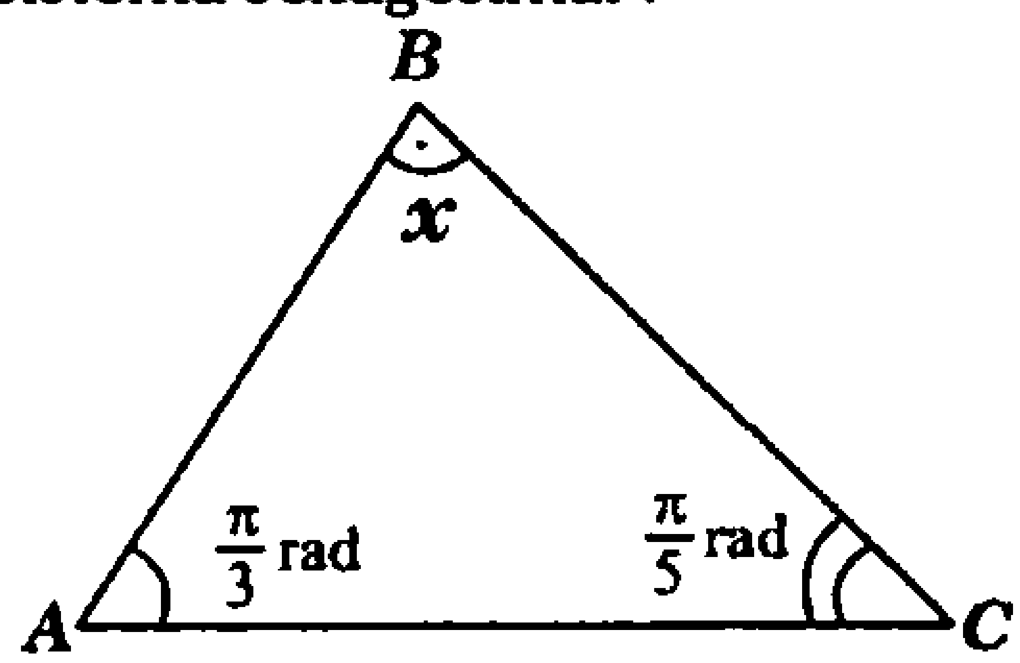
PROBLEMA 12 :

En un triángulo, dos de sus ángulos miden $\frac{\pi}{3}$ rad y $\frac{\pi}{5}$ rad. ¿Cuál es la medida sexagesimal del tercer ángulo?

A) 84° B) 74° C) 94° D) 64° E) 54°

RESOLUCIÓN :

* Graficando; se nota que sólo debemos sumar los ángulos e igualar dicha suma a *180°*, pero el primero convertiremos todo al sistema sexagesimal :



$A = \frac{\pi}{3} rad \times \frac{180°}{\pi rad} = 60°$

$C = \frac{\pi}{5} rad \times \frac{180°}{\pi rad} = 36°$

* Luego :

$A + B + C = 180° \Rightarrow 60° + x + 36° = 18°$

$\Rightarrow x = 84°$

RPTA : "A"

PROBLEMA 13 :

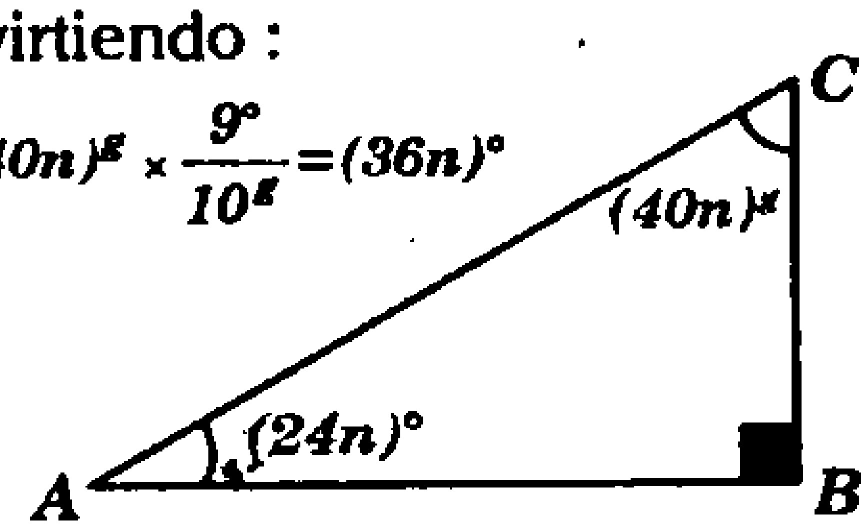
En un triángulo rectángulo, los ángulos miden $(40n)^g$ y $(24n)°$. ¿Cuál es el valor de "n"?.

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando la situación; note para poder operar los ángulos deben estar en las mismas unidades. Convirtiendo :

$C = (40n)^g \times \frac{9°}{10^g} = (36n)°$



* Luego, sabemos que : $A+C=90°$
* Esto es :

$(24n)°+(36n)°=90° \Rightarrow 60n=90 \Rightarrow n=\frac{3}{2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Calcular "x", en la igualdad:

$$\frac{\pi}{9}rad+(40x)^g=38°$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

* Para poder operar, convertimos todos al sistema sexagesimal ; sea

$$\alpha=\frac{\pi rad}{9}\times\frac{180°}{\pi rad}\Rightarrow\alpha=20°$$

$$\beta=(40x)^g\times\frac{9°}{10^g}\Rightarrow\beta=(36x)°$$

* Reemplazando :

$$20°+(36x)°=38°\Rightarrow(36x)°=18°$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15:

Simplificar : $C=\frac{3°4'}{4'}$

A) 36 B) 46 C) 56 D) 66 E) 76

RESOLUCIÓN:

* En la expresión :

$$C=\frac{3°4'}{4'}=\frac{3°+4'}{4'};$$

* Tenemos que expresar en minutos, para poder operar; como:

$$1°=60' \Rightarrow 3°=180'$$

Luego:

$$C=\frac{180'+4'}{4'}=\frac{184'}{4'}\Rightarrow C=46$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 ;

¿Cuántos segundos hay en:

$$\theta=2°3'4''?$$

A) 4 B) 384 C) 7384 D) 7944 E) 9426

RESOLUCIÓN:

* Pasaremos las unidades a segundos; así :

$$\theta=2°3'4''=2°+3'+4''$$

* Como :

$$1°=3600''\Rightarrow 2°=7200''$$

$$1'=60''\Rightarrow 3'=180''$$

* Luego:

$$\theta=7200''+180''+4''\Rightarrow\theta=7384''$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

¿Cuántos minutos centesimales hay en: $\theta=3^g45^m$?.

A) 45 C) 145 B) 245 D) 345 E) 445

RESOLUCIÓN:

* Convertimos todos a minutos :

$$\theta=3^g45^m=3^g+45^m$$

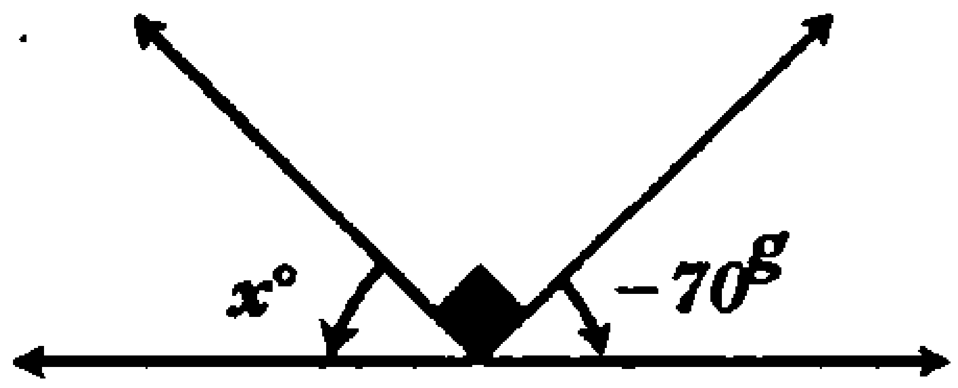
* Como: $1^g=100^m\Rightarrow 3^g=300^m$
* Luego:

$$\theta=300^m+45^m\Rightarrow\theta=345^m$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18:

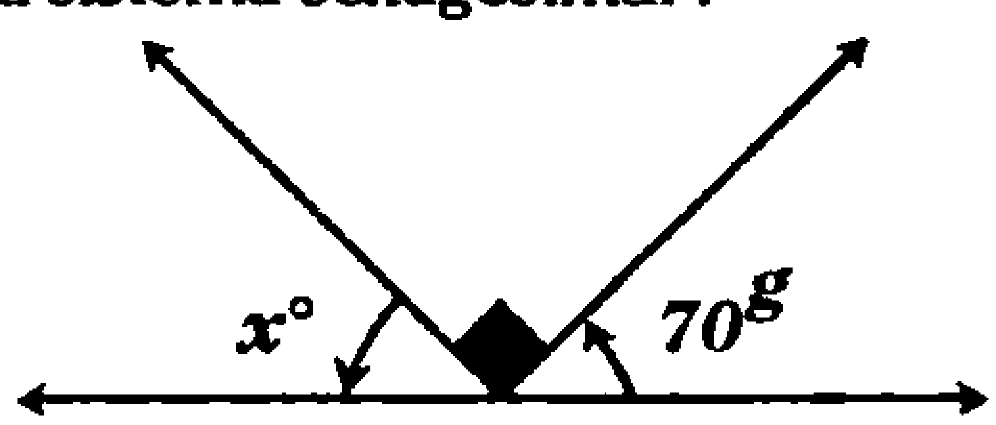
En el gráfico; hallar "x"



A) 17 B) 13 C) 27 D) 23 E) 43

RESOLUCIÓN :

* Colocando todos los ángulos en sentido antihorario y convirtiendo al sistema sexagesimal :



$$\theta=70^g\times\frac{9}{10^g}=63°$$

Luego :

$70^g+x°=90°$

$63°+x°=90°\Rightarrow x°=27°\Rightarrow x=27$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19:

Sabiendo que un ángulo se expresa como $(7n+1)°$ y también como $(8n)^g$. ¿Cuál es su medida radial?.

A) $\frac{\pi}{3}rad$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{9}$

RESOLUCIÓN :

* Sea "α" el ángulo ; luego :

$$\alpha=(7n+1)° \text{ y } \alpha=(8n)^g$$

* Pero para poder igualar y operar, lo expresamos en la misma unidad:

$$\alpha=(8n)^g\times\frac{9°}{10^g}\Rightarrow\alpha=\frac{(36n)°}{5}$$

* Ahora si; igualamos :

$$(7n+1)°=\frac{(36n)°}{5}$$

* Operando :

$$35n+5=36n\Rightarrow n=5$$

* Luego : $\alpha=(7n+1)°=36°$

Lo convertimos a radianes :

$$\alpha=36°\times\frac{\pi}{180}rad\times\alpha=\frac{\pi}{5}rad$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

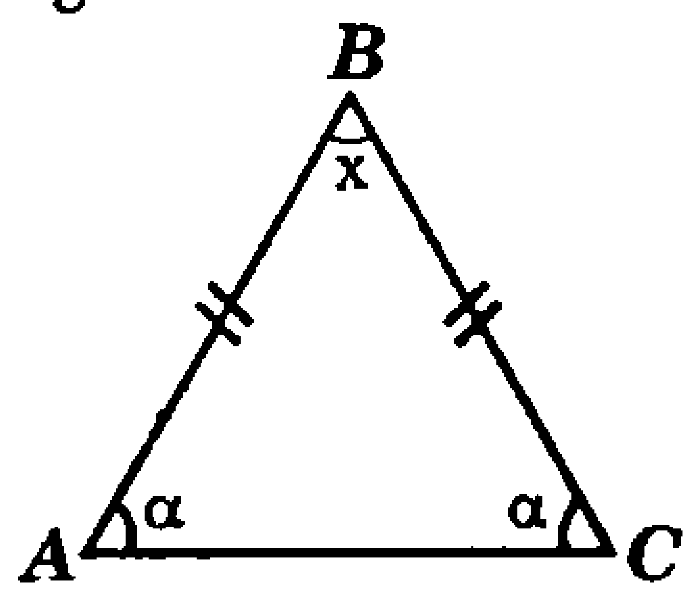
En un triángulo isósceles, los ángulos miden $(7n-2)°$ y $(7n+4)^g$. ¿Cuántos mide el ángulo desigual en el sistema sexagesimal?.

A) 60° B) 44° C) 36° D) 72° E) 54°

RESOLUCIÓN:

* Graficando; tenemos:

$A=(7n-2)°$ y $C=(7n+4)^g$, para poder igualar convertimos :



$$C=(7n+4)^g\times\frac{9°}{10g}=\frac{9}{10}(7n+4)°$$

Ahora si; igualando : $A=C$

$$(7n-2)°=\frac{9}{10}(7n+4)°$$

* Operando :

$$70n-20=63n+36$$

$$70n-63n=36+20$$

$$\Rightarrow 7n=56\Rightarrow n=8$$

* Luego : $A=(7n-2)°=54°$

$$C=A=54°$$

* Como : $A+B+C=180°$

$\Rightarrow 54°+x+54°=180°$

$$x+108°=180°\Rightarrow x=72$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21 :

Sabiendo que "S" y "C" son lo convencional para un mismo ángulo, no nulo; simplificar :

$$L=\sqrt{\frac{2C+S}{C-S}+7}$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN:

* Como sólo intervienen "S" y "C"; usamos :

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=K\begin{cases}S=9K\\C=10K\end{cases}$$

* En la expresión :

$$L=\sqrt{\frac{2C+S}{C-S}+7}$$

$$L=\sqrt{\frac{2(10K)+9K}{10K-9K}+7}=\sqrt{\frac{29K}{K}+7}$$

$$L=\sqrt{29+7}=\sqrt{36}\Rightarrow L=6$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22 :

Señale la medida sexagesimal de un ángulo que verifica : $C-S=3$; siendo "S" y "C" lo convencional.

A) 18° B) 27° C) 36° D) 45° E) 9°

RESOLUCIÓN:

* En la condición :

$$C-S=3\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

* Sabemos que :

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=K\begin{cases}S=9K\\C=10K\end{cases}$$

* Luego en (1):

$$10K-9K=3\Rightarrow K=3;\ S=27$$

⇒ El ángulo mide 27°

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Señale la medida centesimal de un ángulo que cumple : $2S-C=16$; siendo "S" y "C" lo conocido.

A) 10^g B) 15^g C) 20^g D) 25^g E) 30^g

RESOLUCIÓN :

* La condición :

$$2S-C=16\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

* Pero :

$$\frac{S}{9}=\frac{C}{10}=K\begin{cases}S=9K\\C=10K\end{cases}$$

* En (1) :

$$2(9K)-10K=16$$

$$8K=16\Rightarrow K=2\ \Rightarrow\ C=20$$

⇒ El ángulo mide 20^g

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Señale medida circular de un ángulo que verifica :

$$S+C+R=95+\frac{\pi}{4}$$

siendo "S", "C" y "R" lo conocido para dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{3}rad$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

RESOLUCIÓN:

* En la condición :

$$S+C+R=\frac{\pi}{4}+95\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

* Como piden la medida circular "R" del ángulo, colocaremos todo en función de "R"; para ello usaremos:

$$S=180\frac{R}{\pi};\ C=200\frac{R}{\pi}$$

* En (1)

$$180\frac{R}{\pi}+200\frac{R}{\pi}+R=95+\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 380\frac{R}{\pi}+R=95+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{380R+\pi R}{\pi}$$

$$=\frac{380+\pi}{4}=\frac{R(380+\pi)}{\pi}=\frac{380+\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{R}{\pi}=\frac{1}{4}\Rightarrow R=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \text{El ángulo mide } \frac{\pi}{4}rad$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25:

Halle la medida de un ángulo en radianes que cumple:

$$\frac{C}{10}=n+\frac{17}{\pi}\ \text{ y }\ \frac{S}{18}=n+\frac{7}{\pi}$$

siendo "S" y "C" lo convencional

A) 1rad B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

Tenemos :

$$\frac{C}{10}=n+\frac{17}{\pi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{S}{18}=n+\frac{7}{\pi}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De (1) – (2) :

$\frac{C}{10}-\frac{S}{18}=\frac{10}{\pi}$; como piden "R" ; hacemos $S=180\frac{R}{\pi}$; $C=200\frac{R}{\pi}$

$$\frac{200\frac{R}{\pi}}{10}-\frac{180\frac{R}{\pi}}{18}=\frac{10}{\pi}\Rightarrow 20\frac{R}{\pi}-10\frac{R}{\pi}$$

$$=\frac{10}{\pi}=10\frac{R}{\pi}=\frac{10}{\pi}\Rightarrow R=1$$

⇒ El ángulo mide 1 rad

RPTA : "A"

PROBLEMA 26 :

Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son número pares consecutivos, ¿Cuál es la medida radial del ángulo?.

A) $\frac{\pi}{6}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{20}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{8}$

RESOLUCIÓN :

* En estos casos se debe interpretar el enunciado. Tenemos un ángulo "α" medido en:

sexagesimales = S

centesimal = C

radianes = R

* Del enunciado :

"S" y "C" ⇒ pares consecutivos

* Es decir :

$$\left.\begin{matrix}S=n\\C=n+2\end{matrix}\right\}C-S=2$$

* Como piden "R" : $C-S=2$

$$200\frac{R}{\pi}-180\frac{R}{\pi}=2\Rightarrow 20\frac{R}{\pi}=2\Rightarrow R=\frac{\pi}{10}$$

⇒ El ángulo mide $\frac{\pi}{10}rad$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Determinar la medida radial de un ángulo tal que:

$$\frac{S}{4}+\frac{C}{5}+R=\frac{85+\pi}{3}$$

Siendo S, C y R los números convencionales para dicho ángulo.

A) π B) $\frac{3\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Por condición del problema.

$$\frac{S}{4}+\frac{C}{5}+R=\frac{85+\pi}{3}$$

* Sabemos :

$$\frac{S}{180}=\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}=k\ ;\ k: \text{constante},$$

* de donde :

$$S = 180k;\ C = 200k;\ R = \pi k$$

* Reemplazando en la condición

$$\frac{180k}{4}+\frac{200k}{5}+\pi k=\frac{85+\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 45k+40k+\pi k=\frac{85+\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 85k+\pi k=\frac{85+\pi}{3}=k(85+\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{85+\pi}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

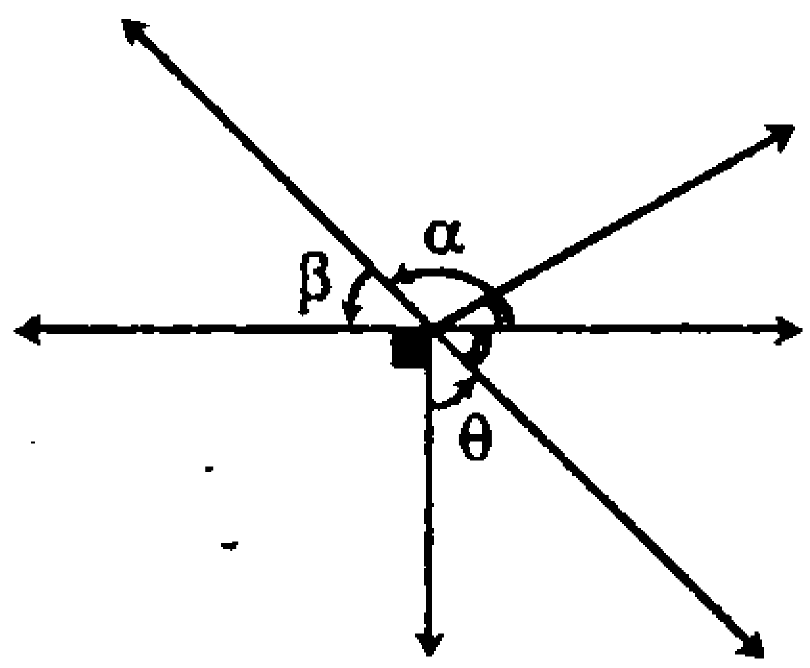
* Hallando el número de radianes, tenemos : $R=\pi k=\pi\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{3}$

* Por consiguiente la medida del ángulo en el sistema radial es : $\frac{\pi}{3}$ rad.

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

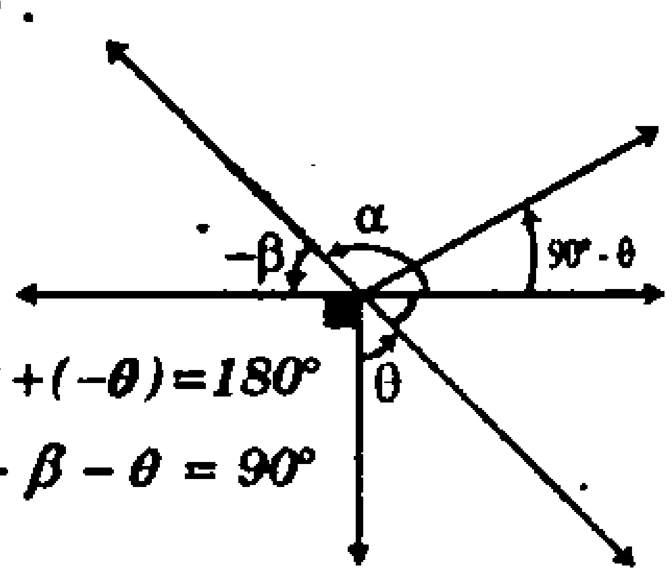
Del gráfico, hallar una relación entre α, β y θ



A) $\alpha+\beta+\theta=180°$ *B)* $\alpha-\beta-\theta=180°$
C) $\alpha-\beta-\theta=90°$ *D)* $\alpha-\beta-\theta=230°$
E) $\alpha+\beta+\theta=90°$

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico :



$$\Rightarrow (90°-\theta)+\alpha+(-\theta)=180°$$

$$\Rightarrow \alpha-\beta-\theta=90°$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 29 :

Sabiendo que S, C, R son el número del grados sexagesimales, centesimales y radianes de un mismo ángulo, además "a" y "b" son números primos. Calcular "R" si: $S = 3a$ y $C = a + b$

A) $\frac{\pi}{2}$ *B)* $\frac{\pi}{5}$ *C)* $\frac{\pi}{10}$ *D)* $\frac{\pi}{20}$ *E)* $\frac{\pi}{50}$

RESOLUCIÓN :

* Si : $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}\Rightarrow\frac{3a}{9}=\frac{a+b}{10}$

$$\Rightarrow 10a=3a+3b\Rightarrow 7a=3b$$

$$\Rightarrow a=3\ ;\ b=7$$

$$\Rightarrow S=9\Rightarrow\frac{9}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{\pi}{20}rad$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Determinar la medida de un ángulo en radianes, sabiendo que al medirlo en los sistemas sexagesimal, centesimal y radial se relacionan del modo siguiente: La diferencia de los dos mayores números, es igual a la mitad del décuplo del cuadradro del número menor.

A) $4/\pi$ *rad* *B)* $3/\pi$ *rad* *C)* $1/\pi$ *rad*
D) $2/\pi$ *rad* *E)* $1/\pi$ *rad*

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado : $C-S=\frac{10R^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{200R}{\pi}-\frac{180R}{\pi}=\frac{10R^2}{2}\Rightarrow R=\frac{4}{\pi}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 31 :

Hallar en minutos centesimales

$$a = 27(A + B)$$

Si: $A = 1'$; $B = 2^m$

A) 100 *B)*104 *C)*52 *D)*54 *E)*108

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que : $\boxed{\frac{a}{27}=\frac{b}{50}}$

* Donde:

$a = N°$ de minutos sexagesimales

$b = N°$ de minutos centesimales

* Entonces :

$$\frac{1}{27}=\frac{b}{50}\Rightarrow\quad b=\left(\frac{50}{27}\right)^m$$

* Reemplazando en "a"

$$a=27\left(\frac{50}{27}+2\right)=104$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32 :

En un cierto ángulo se cumple :

$$\sqrt[3]{S}+\sqrt{30\,C}=33$$

Calcular el complemento del ángulo en radianes.

A) $\frac{3\pi}{20}$*rad* *B)* $\frac{7\pi}{20}$*rad* *C)* $\frac{\pi}{4}$*rad*
D) $\frac{2\pi}{5}$*rad* *E)* $\frac{2\pi}{10}$*rad*

RESOLUCIÓN:

* Como : $\frac{S}{9}=\frac{C}{10}\Rightarrow\frac{S}{27}=\frac{C}{30}=k$

* En el enunciado :

$$\sqrt[3]{27K}+\sqrt{30\times30K}=33$$

$$3\sqrt[3]{k}+30\sqrt{K}=33$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{K}=\sqrt{K}=1\Rightarrow K=1\Rightarrow\measuredangle=27°$$

* Complemento del : $\measuredangle=63°$

* En radianes $=\frac{7\pi}{20}rad$

RPTA : "B"

PROBLEMA 33 :

Se tiene un nuevo sistema "*N*" en donde *7* grados *N* equivale a *12°*. Determinar una relación que nos permita convertir del sistema "*N*" a los sistemas conocidos y además *21* grados "*N*" a cuantos grados centesimales equivale.

A)$20^g n$ *B)*30^g *C)*40^g *D)*50^g *E)*60^g

RESOLUCIÓN:

* De la condición :

Por regla de tres $\begin{cases}7^N \text{ ———— } 12°\\ x^N \text{ ———— } 360°\end{cases}$

$$x<>\frac{7N\times360°}{12°}=210^N$$

* Luego *1* vuelta en el nuevo sistema equivale a *210 N*.

* Ahora :

$$\frac{C}{200}=\frac{N}{105^N}\Rightarrow C=\frac{200\times21^N}{105^N}=40^g$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 34 :

Hallar un ángulo en el sistema internacional, sabiendo que su número de segundos sexagesimales excede en **4800** a **30** veces el número de minutos centesimales.

A) $\frac{\pi}{2}rad$ B) $\frac{\pi}{5}rad$ C) $\frac{\pi}{10}rad$ D) $\frac{\pi}{15}rad$ E) $\frac{\pi}{20}rad$

RESOLUCIÓN:

a = segundos sexagesimales.

b = minutos centesimales.

$a = 4800 + 30b$

$$\frac{a}{60} - 30b = 4800 \text{ ....(I)}$$

* Si : $\frac{p}{27} = \frac{q}{50}$

$$\frac{\frac{a}{60}}{27} = \frac{b}{50} \Rightarrow a = \frac{162b}{5}$$

* En (I) se obtiene : $b = 2000$
* Entonces :

$$2000^m = 20^g = \frac{\pi}{10}rad$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 35 :

Si "S" representa la medida sexagesimal de un ángulo en la siguiente expresión :

$$\frac{6}{\sqrt[3]{S}} - \sqrt[3]{S} = 1$$

Determinar la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{25}$ B) $\frac{2\pi}{25}$ C) $\frac{\pi}{45}$ D) $\frac{2\pi}{45}$ E) $\frac{\pi}{90}$

RESOLUCIÓN :

Haciendo : $\sqrt[3]{S} = a$................(I)

* Reemplazando :

$\frac{6}{a} - a = 1 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0;$ osea:

$$\Rightarrow (a+3)(a-2) = 0$$

* De donde : $a = -3$............no

$a = 2$ ....en(I)

$$\sqrt[3]{S} = 2 \Rightarrow S = 8$$

* Como :

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{8\pi}{180} = \frac{2\pi}{45}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 36 :

Expresar en grados centesimales

$$x = 2(a - b + c)$$

Si : $a = 21°27'14''$

$b = 11°42'37''$

$c = 23''$

A) $21,\hat{6}^g$ B) $23,6^g$ C) $20,6^g$ D) $29,6^g$ E) $25,6^g$

RESOLUCIÓN :

$a = 21° + 27' + 14''$; $b = 11° + 42' + 37''$

$\Rightarrow a - b = 10° - 15' - 23''$

y como $c = 23''$

$\Rightarrow x = 2(a - b + c) = 2(10° - 15')$

$\Rightarrow x = 20° - 30' = 20° - 0,5° = 19,5°$

* A grados centesimales :

$$x = 19,5° \times \left(\frac{10^g}{9°}\right) = \frac{195^g}{9} = 21,\hat{6}^g$$

$\Rightarrow x = 21,\hat{6}^g$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 :

Si los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son los números pares consecutivos, el valor del complemento del ángulo, expresado en radianes, es:

A) $\frac{\pi}{10}$ B) $\frac{\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{20}$ D) $\frac{7\pi}{40}$ E) $\frac{2\pi}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$S = 2n \text{ y } C = 2n + 2,\ n \in \mathbb{Z}$$

* Sabemos que :

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

* Por propiedades, podemos decir que : $\frac{S - C}{180 - 200} = \frac{R}{\pi}$

$$\Rightarrow \frac{2n - (2n+2)}{-20} = \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{20} = \frac{\pi}{10} \Rightarrow R = \frac{\pi}{10}$$

* El complemento de este ángulo es:

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$

RPTA : "E"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Convertir a minutos sexagesimales :

A) $20°$ B) $30°$

RPTA:..

02 Convertir a segundos sexagesimales :

A) $5'$ B) $10'$

RPTA:..

03 Convertir a minutos sexagesimales

A) $5°4'$ B) $4°30'$

RPTA:..

04 Convertir a segundos sexagesimales :

A) $1°25''$ B) $3°10''$

RPTA:..

05 Convertir a grados sexagesimales :

A) $480'$ B) $1080'$

RPTA:..

06 Calcular las siguientes operaciones:

A) $20°25' + 25°20'$

B) $80°30' + 20°45'$

RPTA:..

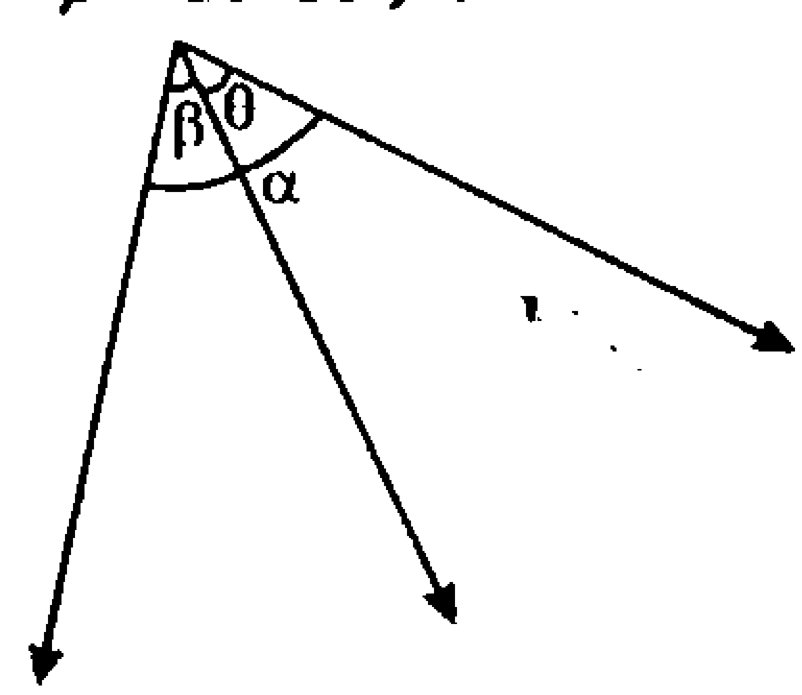
07 Calcular: $a°b' + b°a'$, Si:

A) $a+b=12$ B) $a+b=30$

RPTA:..

08 Calcular "α" si :

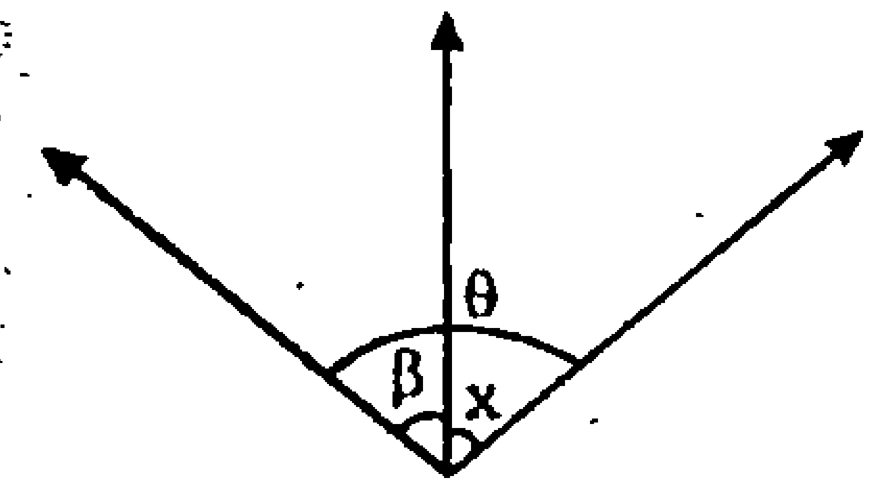
$\beta = 15°43'$; $\theta = 12°12'$



RPTA:..

09 Calcular "x" si:

$\beta = 45°43'$; $\theta = 85°23'$



RPTA:..

⑩ Señale falso *(F)* o verdadero *(V)*

$i)\ 30° = \frac{\pi}{6} rad$ ( )

$ii)\ 15° = \frac{5\pi}{12} rad$ ( )

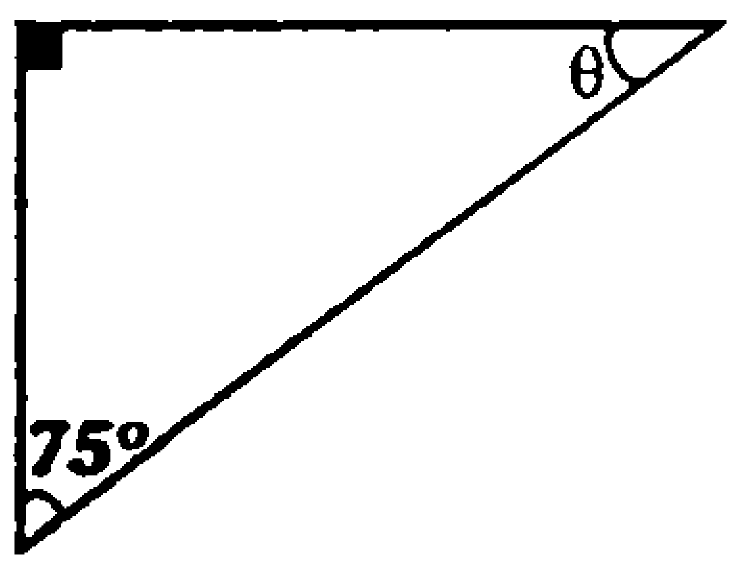
RPTA:..

⑪ Calcule $a+b$

$$\text{Si}: \frac{2\pi}{5} rad = (\overline{ab})°$$

RPTA:..

⑫ Calcule θ en radianes



RPTA:..

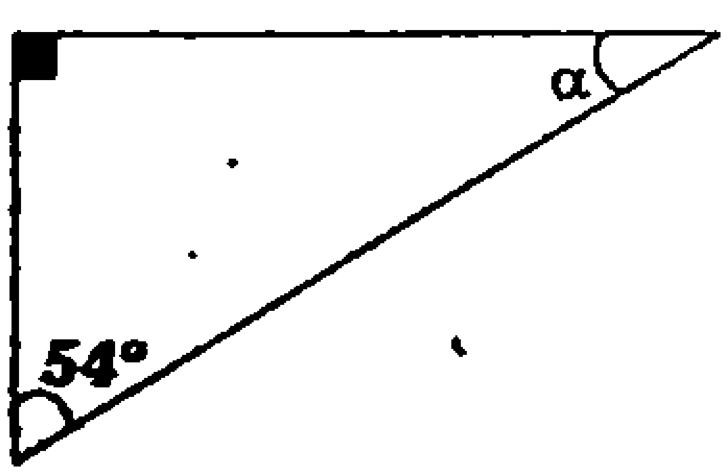
⑬ Convertir a minutos $9°\ 15'$

RPTA:..

⑭ Convertir a segundos $2°15'$

RPTA:..

⑮ Calcular α en radianes



RPTA:..

⑯ Si: $\frac{\pi}{48} rad = a°\overline{bc}'$

Calcule: $E = \sqrt[3]{a(b+c)}$

RPTA:..

⑰ Simplifique:

$$M = \frac{100^m}{27'} + \frac{750^s}{81''}$$

RPTA:..

⑱ Un ángulo mide en grados sexagesimales $\overline{1aa}$ pero en grados centesimales mide $\overline{1b0}$.

Calcule: $\frac{b}{a}$

RPTA:..

⑲ Si se cumple que:

$$15^A <> \frac{\pi}{12} rad \ \text{ y } \ 3^P <> 10^E$$

Calcule: $E = 3^A + 15^P$

RPTA:..

⑳ Señale la medida circular del ángulo agudo formado por el horario y el minutero a la *1:18pm*.

RPTA:..

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #2

01 Siendo *"S"* y *"C"* lo conocido para un ángulo no nulo, ¿a qué es igual *"E"*? $E = \frac{C}{S}$

RPTA:..

02 Siendo "S" y "C" lo convencional para un ángulo no nulo; reducir:

$$L = \frac{C+S}{C-S}$$

RPTA:..

03 Señale la medida sexagesimal de un ángulo, que verifica: $S + C = 19$, siendo *"S"* y *"C"* lo conocido para dicho ángulo.

RPTA:..

04 Halle la medida sexagesimal de un ángulo que cumple: $C - S = 2$; donde *"S"* y *"C"* son lo conocido para dicho ángulo.

RPTA:..

05 Siendo *"S"* y *"C"* lo conocido para un ángulo no nulo, reducir:

$$K = \sqrt{\frac{2S-C}{C-S}}$$

RPTA:..

06 Siendo *"S"* y *"C"* lo conocido para un ángulo no nulo; calcule el ángulo en radianes si se cumple:

$$S = x^x + 1$$
$$C = x^x + 3$$

RPTA:..

07 Calcule la medida de un ángulo en radianes que cumple:

$$\frac{C}{10} = n + \frac{17}{\pi} \quad \wedge \quad \frac{S}{18} = n + \frac{7}{\pi}$$

Siendo *"S"* y *"C"* lo convencional.

RPTA:..

08 Señale la medida de un ángulo en radianes sabiendo que la diferencia de sus números de grados centesimales y sexagesimales es *5*.

RPTA:..

09 Sabiendo que el doble del número de grados centesimales de un ángulo excede a su número de grados sexagesimales en *22*, calcule la medida centesimal del ángulo.

RPTA:..

10 Calcule la medida circular de un ángulo que cumple:

$$S + C + R = 380 + \pi$$

Siendo *"S"*, *"C"* y *"R"* lo conocido.

RPTA:..

11 Señale la medida radial de un ángulo que cumple:

$$C - S + R = 20 + \pi$$

RPTA:..

12 Sabiendo que: $(S + C)\pi = 4nR$, donde *"S"*, *"C"* y *"R"* son lo conocido para un mismo ángulo. ¿Cuánto vale *"R"*?

RPTA:..

13 Calcule la medida circular de un ángulo que cumple:

$$\frac{S}{180} + \frac{C}{200} + \frac{R}{\pi} = 6$$

Siendo *"S"*, *"C"* y *"R"* lo conocido.

RPTA:..

14 Siendo "S", "C" y "R" lo convencional para un mismo ángulo. Calcule el valor de "a"; si se cumple que:

$S = ax - 1;\ C = (a+1)x - 5;\ R = \frac{\pi}{20}$

RPTA:..

15 Siendo "S", "C" y "R" lo conocido para un mismo ángulo. Calcule la medida circular de dicho ángulo, si se cumple: $S + C + R = 383{,}1416$

RPTA:..

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar lo correcto :

I) Sistema sexagesimal

< > sistema Inglés

II) Sistema centesimal

< > sistema Francés

III) $1° > 1^g$

IV) $1^g > 1\ rad$

A) Sólo I B) Sólo II C) Sólo III D) Sólo IV E) III y IV

02 Si $a°\, b' = 750'$

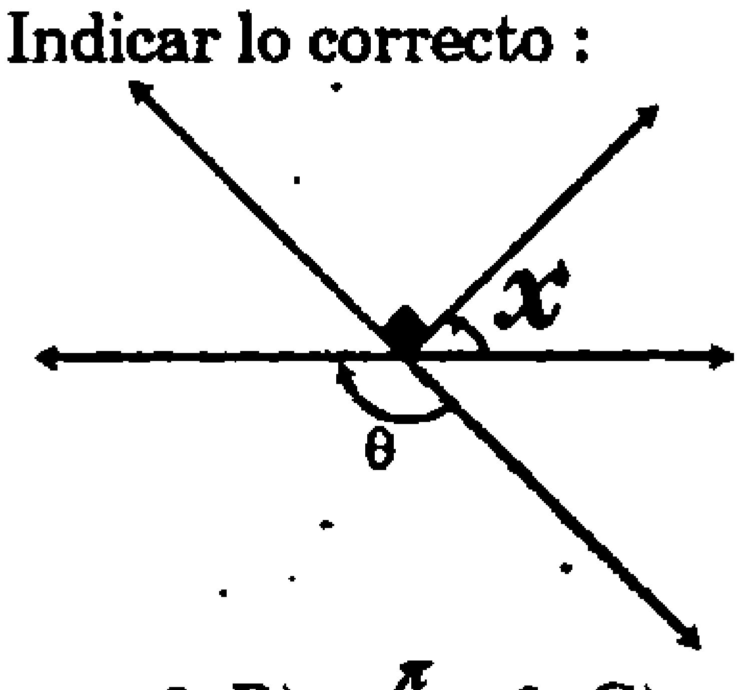
Calcular : $K = a + b$

A) 30 B) 18 C) 50 D) 42 E) 12

04 Reducir : $E = \dfrac{20^g + 12°}{\frac{\pi}{36}\ rad}$

A) 1 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

03 Indicar lo correcto :



A) $x = \pi - \theta$ B) $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ C) $x = \theta - \pi$

D) $x = \theta - \pi$ E) $x = -\ \theta - \frac{\pi}{2}$

05 Un alumno al copiar $30°$ escribió 30^g. ¿Qué error comete en radianes?

A) $\frac{3\pi}{70}$ B) $\frac{\pi}{50}$ C) $\frac{\pi}{60}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) N.A.

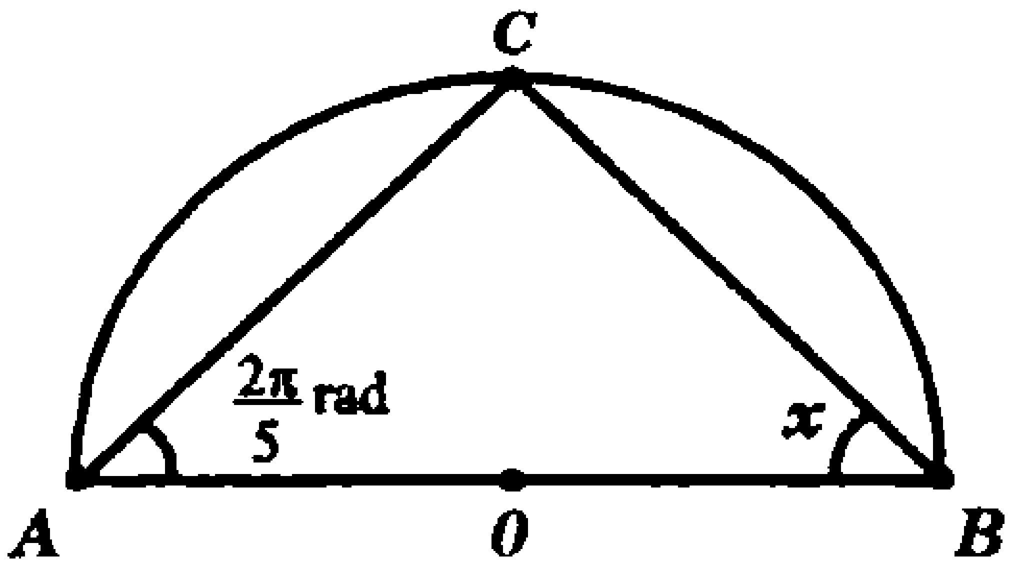
06 Si : $170^g = \overline{abc}°$,

Determine $(a+b+c)°$ en radianes.

A) $\frac{\pi}{5}rad$ B) $\frac{\pi}{10}rad$ C) $\frac{\pi}{15}rad$

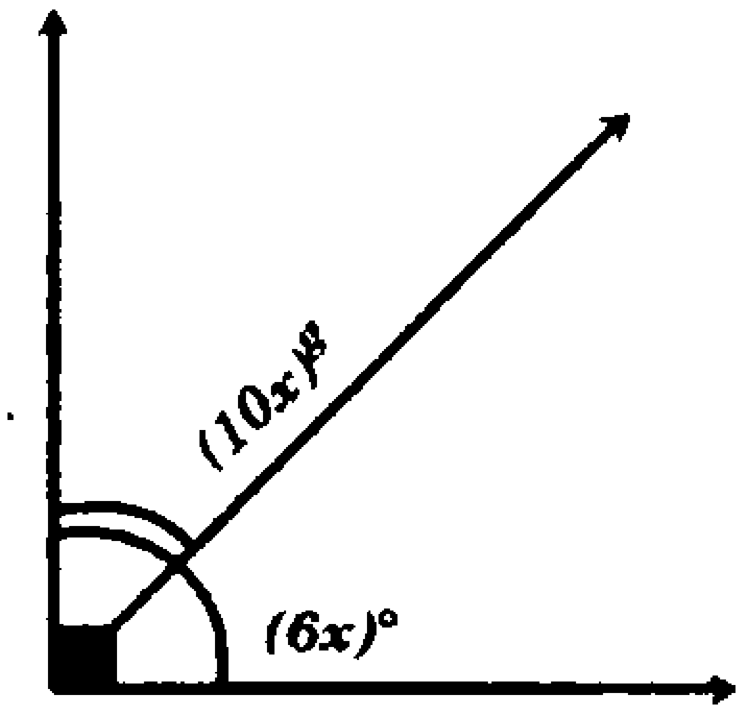
D) $\frac{\pi}{20}\ rad$ E) $\frac{\pi}{30}rad$

07 Calcular "x" en el sistema sexagesimal (O centro)



A) 10g B) 15g C) 25g D) 20g E) 18g

08 Del gráfico, calcular "x"



A) 3 B) 1 C) 4 D) 6 E) 5

09 Calcular "x"

Si : $(x+2)° = \frac{\pi}{20}$

A) 7 B) 6 C) 5 D) 9 E) N.A.

10 Calcular "x" en.

$$(3x + 9)° = (4x + 2)^g$$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

11 Determinar x, si :

$$5(2x+1)° = \frac{\pi}{x}rad$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 La medida de un ángulo se puede expresar como $(7n+1)°$ o como $(7n+5)^g$. Cuál es el valor de $\theta = (n^2 - 1)°$ en

A) $\frac{\pi}{15}rad$ B) $\frac{2\pi}{15}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{3}$

13 Señale la medida circular de un ángulo cuyos números de grados convencionales se relacionan del siguiente modo:

$$S = 3n + 3\ ;\ C = 4n - 2$$

A) $\frac{3\pi}{20}rad$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{3\pi}{10}$ D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{3}$

14 Siendo S, C y R convencional simplificar

$$E = \frac{2S + C}{2S - C} + \frac{5S}{C}$$

A) 2 B) 22 C) 8 D) 24 E) 25

15 Determina la medida circular de un ángulo que cumple :

$$\frac{S}{4} + \frac{C}{40} = 25$$

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{10}$

16 Simplificar :

$$E = \frac{3\pi C - 2\pi S + 10R}{\pi C - \pi S - 15R}$$

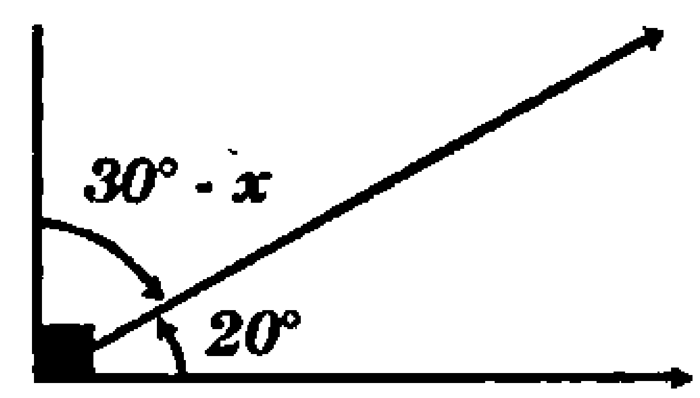
A) 5 B) 15 C) 25 D) 50 E) 75

17 Determine un ángulo radianes si se cumple :

$$\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{C}\right)^2 = \frac{R}{S.C}$$

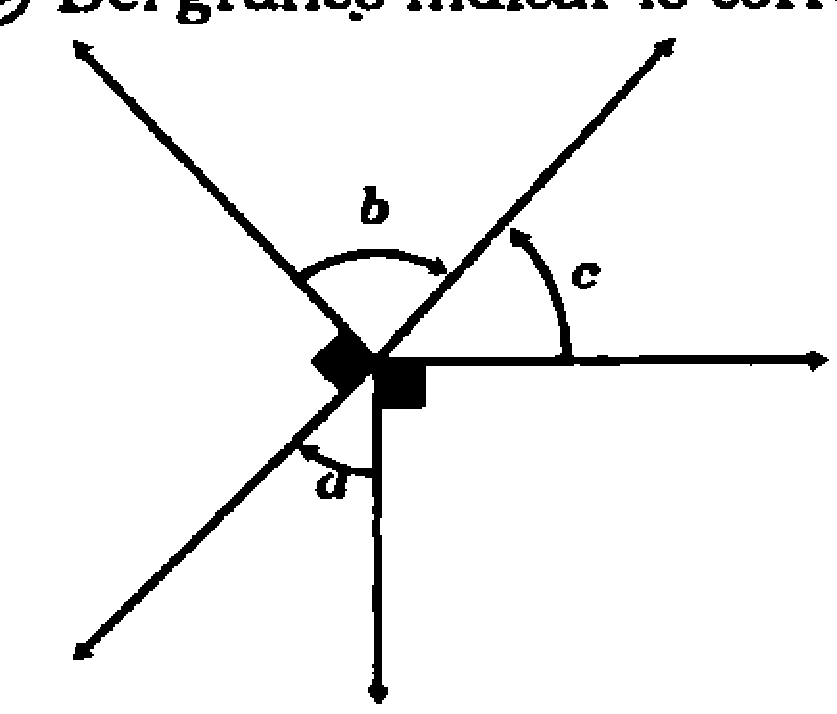
A) 90 rad B) $\frac{1}{9}$ C) $\frac{1}{90}$ D) $\frac{10}{9}$ E) $\frac{9}{10}$

18 Del gráfico mostrado determine el valor de x :



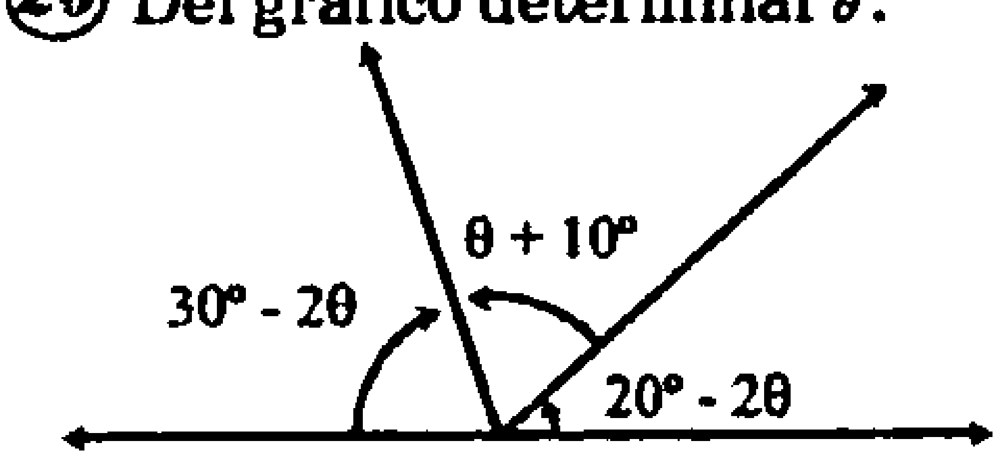
A) 50 B) 100 C) 150 D) 75 E) 25

19 Del gráfico indicar lo correcto



A) $a+b+c = p$ B) $a-b-c = p$
C) $b-a-c = p$ D) $c-a-b = p$
E) $c-a-b = p$

20 Del gráfico determinar θ.



A) 21° B) 32° C) 44° D) 11° E) 22°

TAREA DOMICILIARIA

21 Convertir a sexagesimales $\frac{2\pi}{5}rad$.

A) 45° B) 54° C) 72° D) 80° E) 91°

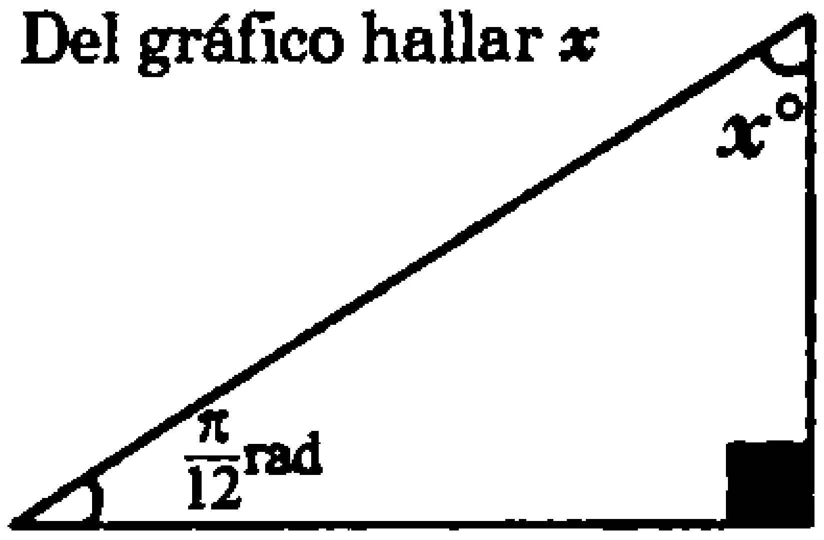
22 Convertir a radianes 80^g

A) $\frac{\pi}{6}rad$ B) $\frac{5\pi}{12}rad$ C) $\frac{2\pi}{5}$ D) $\frac{3\pi}{4}$

23 Convertir a centesimales $54°$

A) 50^g B) 60^g C) 70^g D) 72^g E) 56^g

24 Del gráfico hallar x



A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 81

25 Simplificar :

$$E=\frac{42^g+\frac{\pi}{15}\ rad\ +2°}{\frac{\pi}{18}rad}$$

A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 10

26 Determine "$a+b+c$", si :

$$\frac{3\pi}{4}rad=\overline{abc}\,°$$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 13

27 Calcular "$a+b+c$", si :

$$a°\,b'c''=2°\,34'45''+3°\,42'32''$$

A) 20 B) 30 C) 40 D) 50 E) 60

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 La diferencia de dos ángulos suplementarios es de $\left(\frac{80}{3}\right)^g$.

Calcular la medida radial del complemento del menor.

A) $\frac{\pi}{3}rad$ B) $\frac{\pi}{5}rad$ C) $\frac{\pi}{9}rad$

D) $\frac{\pi}{15}rad$ C) $\frac{\pi}{24}rad$

02 Se tiene que:

$$\left(\frac{1°10'}{10'}\right)^{\circ}\left(\frac{7^g10^m}{10^m}\right)=a°b'\,;\ a>7$$

calcule $a+b$.

A) 8 B) 11 C) 13 D) 19 E) 24

03 Si se cumple que:

$$x^{\,g}-\left(\frac{x^g x^m}{x^m}\right)^m=99^m$$

calcule "x".

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Se ha creado un nuevo sistema de medida angular, cuya unidad es el grado "x"; el cual equivale a los tres quintos del ángulo recto.

Simplifique:

$$E=\frac{4^x-\frac{2\pi}{3}rad}{32°}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2/3 E) 3/2

05 Si se cumple que:

$$(S+C)°=\frac{19\pi}{45}\ rad$$

siendo S y C lo convencional para un ángulo, calcule la medida radial de dicho ángulo.

A) $\frac{\pi}{10}rad$ B) $\frac{\pi}{12}rad$ C) $\frac{\pi}{15}rad$

D) $\frac{\pi}{5}rad$ E) $\frac{\pi}{3}rad$

06 La suma de los números que representan el suplemento de un ángulo en grados centesimales y el complemento en sexagesimales del mismo ángulo es igual a 5. Calcule el ángulo en radianes.

A) $\pi/2$ B) $\pi/3$ C) $\pi/4$ D) $\pi/6$ E) $3\pi/4$

07 Para cierto ángulo se cumple que:

$$\left(\frac{C}{5}\right)^{\circ}-\left(\frac{S}{9}\right)^g=22°$$

Siendo S y C lo convencional, calcule su número de radianes.

A) $\pi/2$ B) π C) $3\pi/2$ D) 2π E) $5\pi/2$

08 Hallar la medida de un ángulo en radianes sabiendo que la diferencia de los números de grados centesimal y sexagesimal es a su suma como dos veces su número de radianes es de 57π.

A) $3\pi/2rad$ B) $2\pi/3rad$ C) $\pi/2rad$

D) $3\pi/4rad$ E) $\pi/6rad$

09 Para un cierto ángulo se cumple que: $S=x^3-\frac{1}{38}\wedge C=x^3+\frac{1}{38}$

Calcule la medida circular de dicho ángulo, siendo S y C lo convencional para un ángulo.

A) $\frac{\pi}{19}rad$ B) $\frac{\pi}{38}rad$ C) $\frac{\pi}{190}rad$

D) $\frac{\pi}{380}rad$ E) $\frac{\pi}{1900}rad$

10 Señale la medida sexagesimal del ángulo que satisface la relación siguiente:

$$\frac{S}{\sqrt{C}}-\frac{\sqrt{C}}{C}=\frac{C}{\sqrt{C}}-\frac{\sqrt{C}}{S}$$

siendo S y C lo convencional para un ángulo .

A) 1° B) 2° C) 3° D) 9° E) 10°

11 Se crea un nuevo sistema de medida angular, cuya unidad es el grado "A" (1^A), además:

$133^A <> 105°$. Indique la relación entre el número de grados "A" y el número de radianes para un ángulo.

A) $\frac{A}{19}=\frac{R}{15}$ B) $\frac{A}{15}=\frac{R}{19}$ C) $\frac{A}{133}=\frac{R}{\pi}$

D) $\frac{A}{238}=\frac{R}{\pi}$ E) $\frac{A}{228}=\frac{R}{\pi}$

12 Si: $19^g <> x°y'$, calcule: $x-y$

A) 6 B) 11 C) 9 D) 13 E) 17

13 Si para un ángulo se tiene que:

$$\overline{aa(b+1)}° <> \overline{a(a+2)0}^g$$

calcule el suplemento de dicho ángulo.

A) 17° B) 23° C) 37° D) 53° E) 63°

14 Si al número de grados centesimales de un ángulo le agregamos el triple de su número de grados sexagesimales y el quíntuple de su número de radianes, resulta $(444+3\pi)$, calcular la medida sexagesimal de dicho ángulo.

A) 18° B) 36° C) 72° D) 108° E) 120°

15 Calcular la medida radial del

ángulo que cumple con:

$$\frac{\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{2R+\sqrt{\pi}}}+\sqrt{\frac{2R}{\sqrt{\pi}}+1}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

siendo "*R*" lo convencional.

A) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ *B)* $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ *C)* $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *D)* $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ *E)* $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$

16 Si las medidas de los ángulos de un triángulo están en progresión geométrica de razón *4*; indique la medida del mayor, en un sistema cuya unidad es 1^x (un grado *x*) y que es equivalente a la *420* ava parte del ángulo de una vuelta.

A) 40^x *B)* 80^x *C)* 120^x
D) 160^x *E)* 240^x

17 Se crea un nuevo sistema de medida angular tal que su unidad es el grado Pitágoras (1^P), de modo que: $163^P <> 50^g$. Calcule el equivalente en radianes de "α", si:

$$\alpha=\left[\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right)a\right]^P$$

A) $\frac{\pi}{4}rad$ *B)* $\frac{\pi}{8}rad$ *C)* $\frac{\pi}{2}rad$

D) $\frac{\pi}{6}rad$ *E)* $\frac{\pi}{3}rad$

18 Determinar la medida circular de un ángulo para el cual la media aritmética de los cubos de sus números de grados centesimales y sexagesimales, es igual *182* veces la semidiferencia de los cuadrados de los mismos números

A) $\frac{\pi}{10}rad$ *B)* $\frac{\pi}{20}rad$ *C)* $\frac{\pi}{25}rad$

D) $\frac{\pi}{30}rad$ *E)* $\frac{\pi}{40}rad$

19 Si se cumple que.

$$\frac{CR+S\sqrt{R}}{C+2S}=\frac{CR-S\sqrt{R}}{C-2S}$$

siendo *S*, *C* y *R* lo convencional para un ángulo, calcule la medida circular de dicho ángulo.

A)0,25rad B)0,5 rad C) 0,75 rad E)1,25 rad D)1rad

20 Indicar en el sistema radial, el menor ángulo positivo que satisface:

$$C+C=\frac{x^2+36xy+y^2}{xy}$$

S y *C* es lo convencional.

A) $\frac{\pi}{50}rad$ *B)* $\frac{\pi}{40}rad$ *C)* $\frac{\pi}{30}rad$

D) $\frac{\pi}{20}rad$ *E)* $\frac{\pi}{10}rad$

TAREA DOMICILIARIA

01 Sabiendo que "*S*" y "*C*" son lo conocido para un ángulo no nulo, reducir: $L=\frac{4C+S}{C-S}$

A)19 B)29 C)39 D)49 B)59

02 Para un ángulo se verifica : $C+2S=84$, siendo "*S*" y "*C*" lo conocido, calcular "$C+S$".

A)17 B)27 C)37 D)47 E)57

03 Sabiendo que :

x : Número de grados sexagesimales.

y : Número de grados centesimales de un mismo ángulo.

Calcular: $L=\frac{y}{x}$

A) $\frac{10}{9}$ *B)* $\frac{9}{10}$ *C)* $\frac{16}{5}$ *D)* $\frac{5}{16}$ *E)1*

04 Sabiendo que:

C : Número de grados centesimales.

I : Número de minutos sexagesimales para un mismo ángulo.

Calcular : $V=\frac{I}{C}$

A)16 B)27 C)36 D)54 E)72

05 Sabiendo que "*S*" y "*C*" son lo conocido para un ángulo no nulo,

reducir: $L=\frac{C^2-S^2}{(C+S)^2}$

A)1 *B)* $\frac{1}{9}$ *C)* $\frac{1}{19}$ *D)* $\frac{1}{91}$ *E)9*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

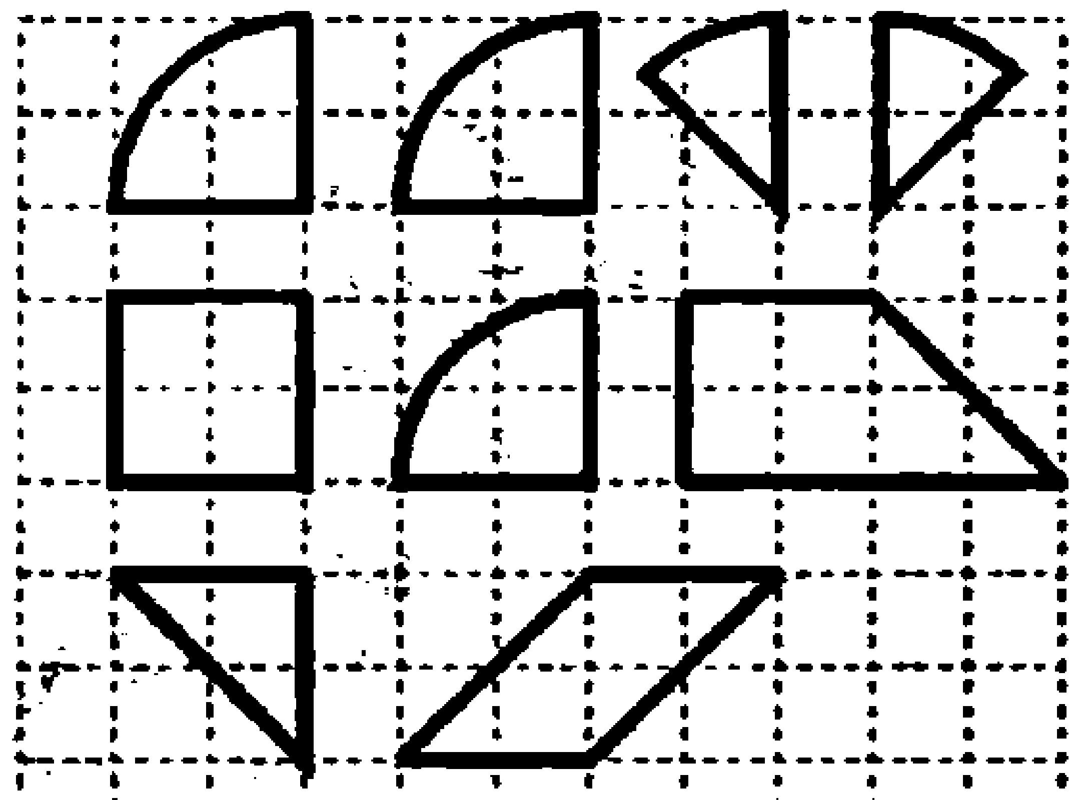
1)D	2)D	3)C	4)E	5)C	6)D	7)[illegible]	8)D	9)[illegible]	10)D
11)D	12)B	13)A	14)C	15)B	16)[illegible]	17)C	18)[illegible]	19)D	20)[illegible]
21)C	22)C	23)B	24)D	25)C	26)B	27)E			

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)D	2)D	3)B	4)C	5)B	6)E	7)B	8)A	9)D	10)D
11)E	12)B	13)E	14)D	15)C	16)[illegible]	17)C	18)[illegible]	19)A	20)[illegible]

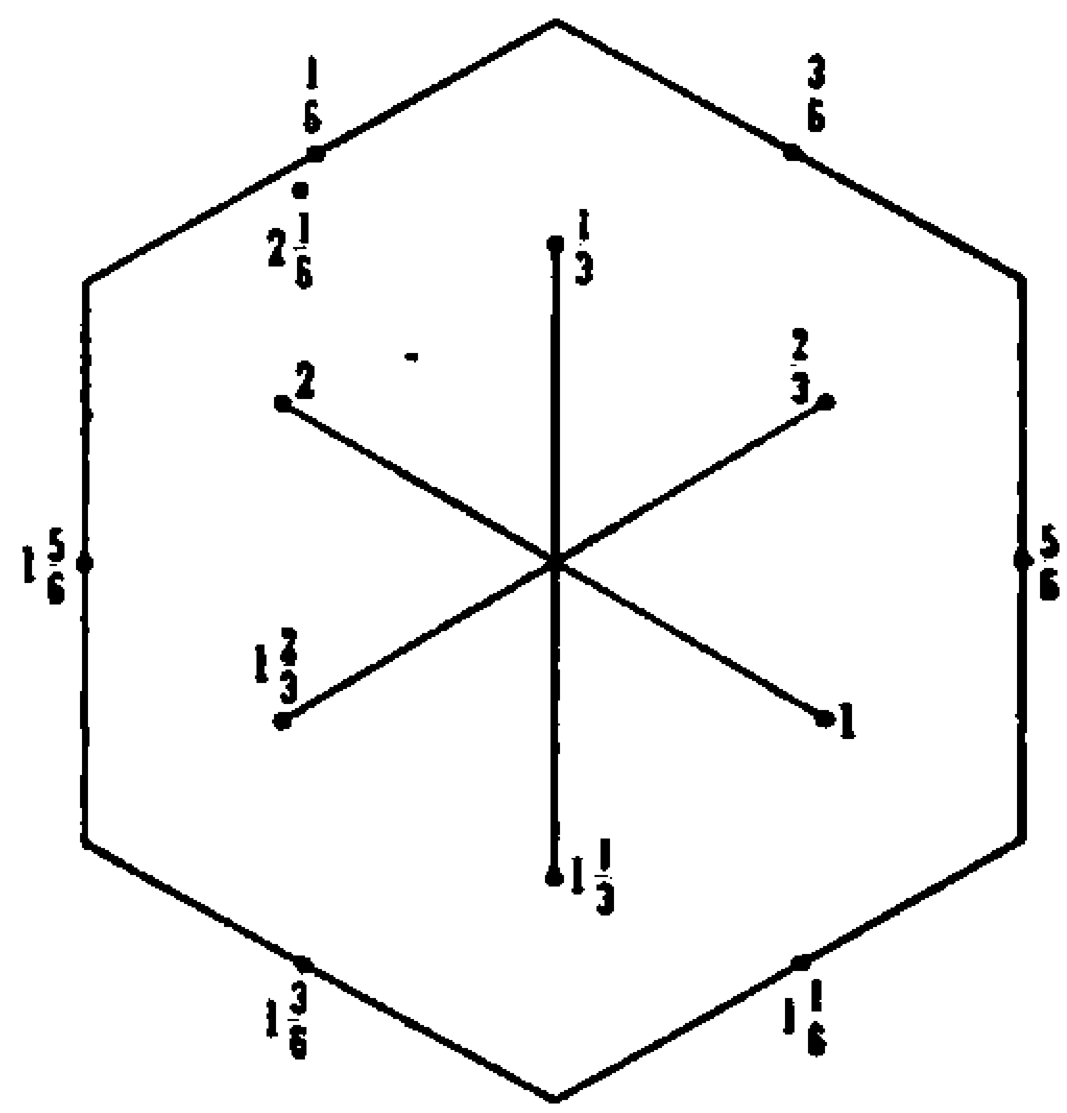
RETO 1 :

Acomode las fichas de modo de formar un corazón, como muestra la figura en forma de corazón. Las piezas pueden rotarse



RETO 2 :

Una con una línea los números, del menor al mayor. Utiliza tu regla.



Una vez que hayas terminado de unir con una línea todos los puntos; mira durante cierto tiempo la figura, te parecerá que sobresalen ya sea dos cubos hacia arriba o dos cubos hacia abajo. Haciendo un esfuerzo podrás provocar una u otra imagen a voluntad.

ARCOS y SECTOR CIRCULAR

CAPITULO 114

OBJETIVOS :

- *Identificar una longitud de arco.*
- *Calcular la longitud de arco mediante una fórmula.*
- *Aplicar las propiedades de la longitud de arco.*
- *Identificar un sector circular y calcular su área.*

INTRODUCCION :

Se dice que la Trigonometría es una ciencia antigua con aplicaciones ultramodernas. El punto de partida para su estudio detenido se debió a su gran utilidad en la medida indirecta de ángulos y distancias. Sin embargo, hoy en día juega un papel importante en la investigación atómica, en la electricidad, en la termodinámica, en el estudio de las vibraciones mecánicas y en todo aquello donde existen fenómenos con características periódicas.

En la metemática pura, sus aspectos teóricos son indispensables, sobre todo por el papel que juegan las funciones trigonométricas. Asimismo, esta ciencia es de gran utilidad en la navegación aérea y marítima, en las ciencias físicas e ingeniería. En la ciencia militar, su conocimiento es indispensable en aspectos vitales como la teoría del lanzamiento de bombas, la dirección del juego de artillería, el lanzamiento de cohetes dirigidos, etc.

ARCO

Una porción cualquiera de una circunferencia , recibe el nombre de "*Arco*" de la circunferencia.

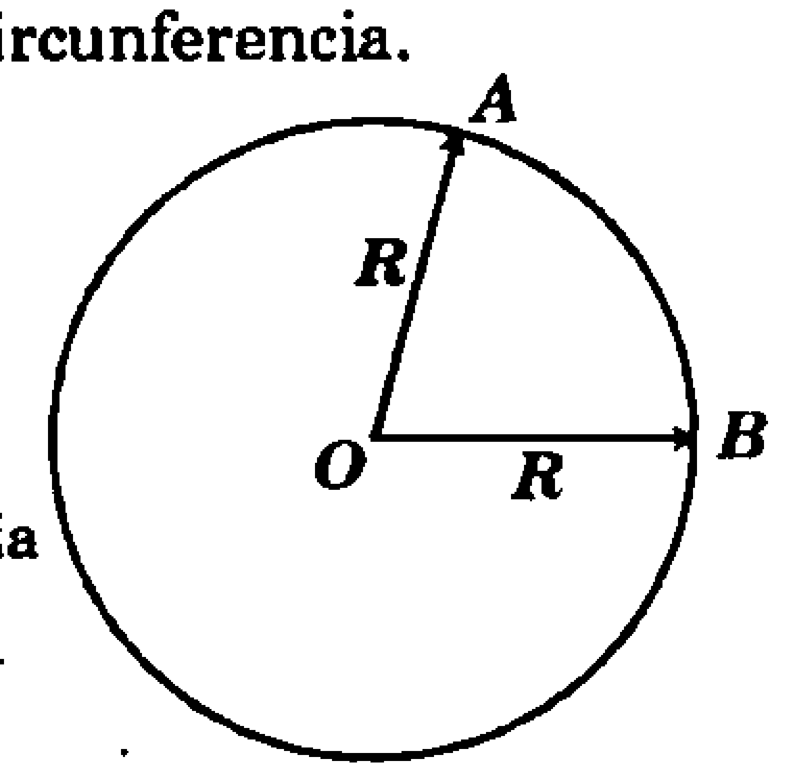
$\widehat{AB}$: Arco ***AB***

A : Origen del Arco ***AB***

B : Extremo del Arco ***AB***

O : Centro de la circunferencia

R : Radio de la circunferencia



AMPLITUD :

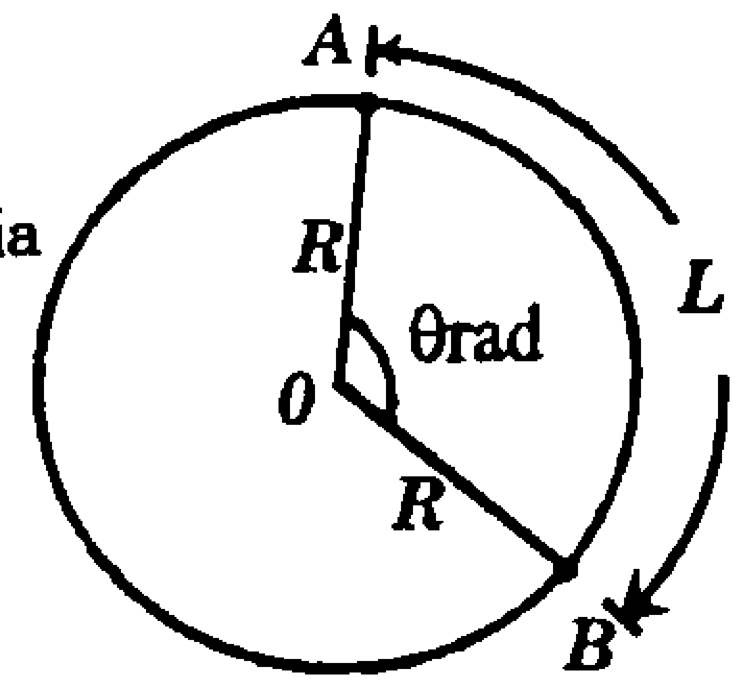
Dada por medida del ángulo central que subtiene el arco.

LONGITUD DE ARCO :

En una circunferencia de radio "***R***" un ángulo central de "θ" radianes determina una longitud de arco "***L***", que se calcula multiplicando el número de radianes "θ" y el radio de la circunferencia "***R***".

L : Longitud del Arco ***AB***

R : Radio de la circunferencia



θ: Número de radianes del ángulo central $(0 < \theta < 2\pi)$

$$L = R \times \theta$$

EJEMPLO :

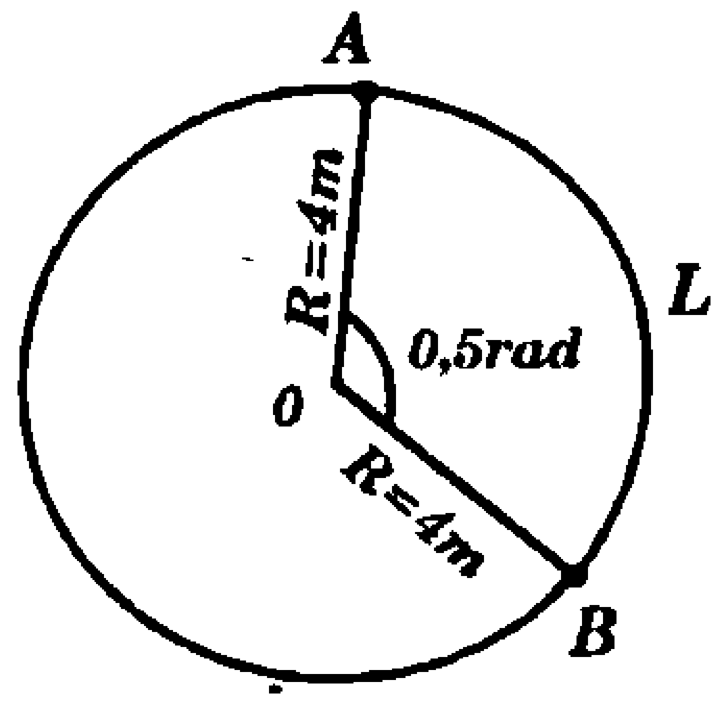
Determinar el perímetro de un sector circular ***AOB*** cuyo radio tiene por longitud ***4m*** , y la amplitud del ángulo central es ***0,5*** radianes.

RESOLUCIÓN :

$L = R \times \theta$

$\Rightarrow L = 4 \times 0{,}5$

$\Rightarrow L = 2$



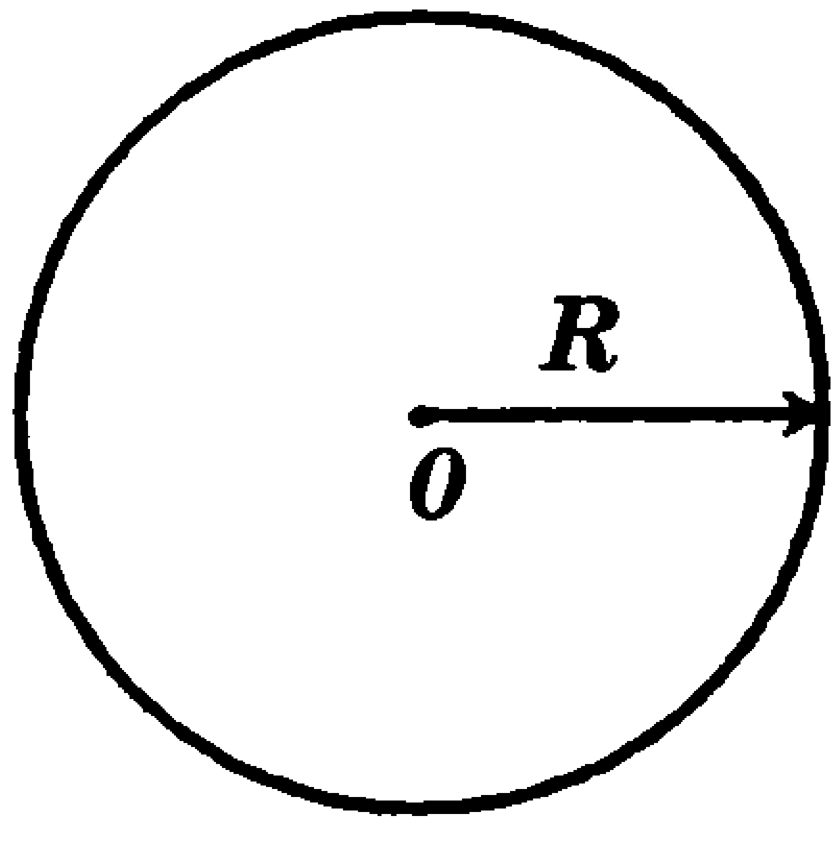
* El perímetro del sector ***AOB*** será

$$R + R + L$$

$$\Rightarrow 4m + 4m + 2m = 10m$$

NOTA :

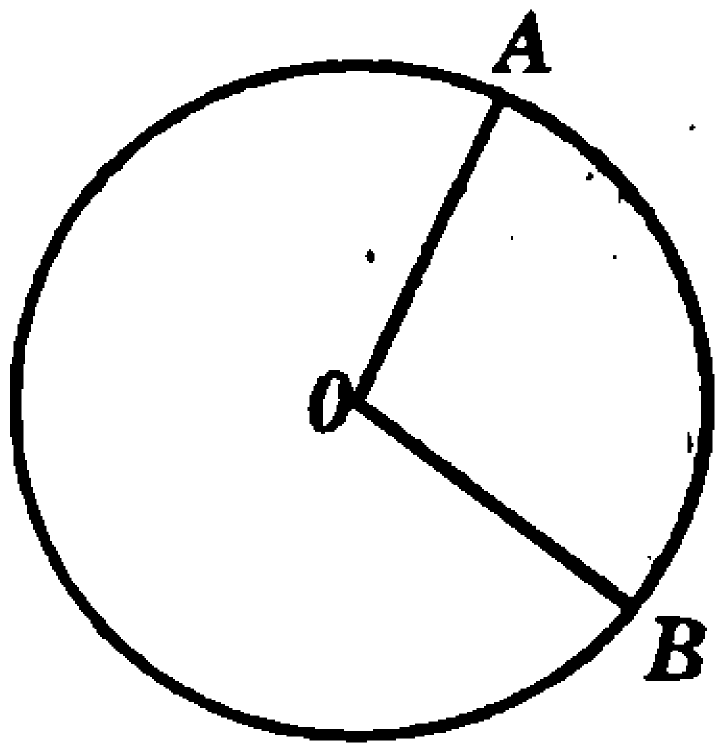
* La longitud de la circunferencia se calcula multiplicando 2π por el radio "***R***" de la circunferencia $(2\pi R)$



$$L_C = 2\pi R$$

SECTOR CIRCULAR

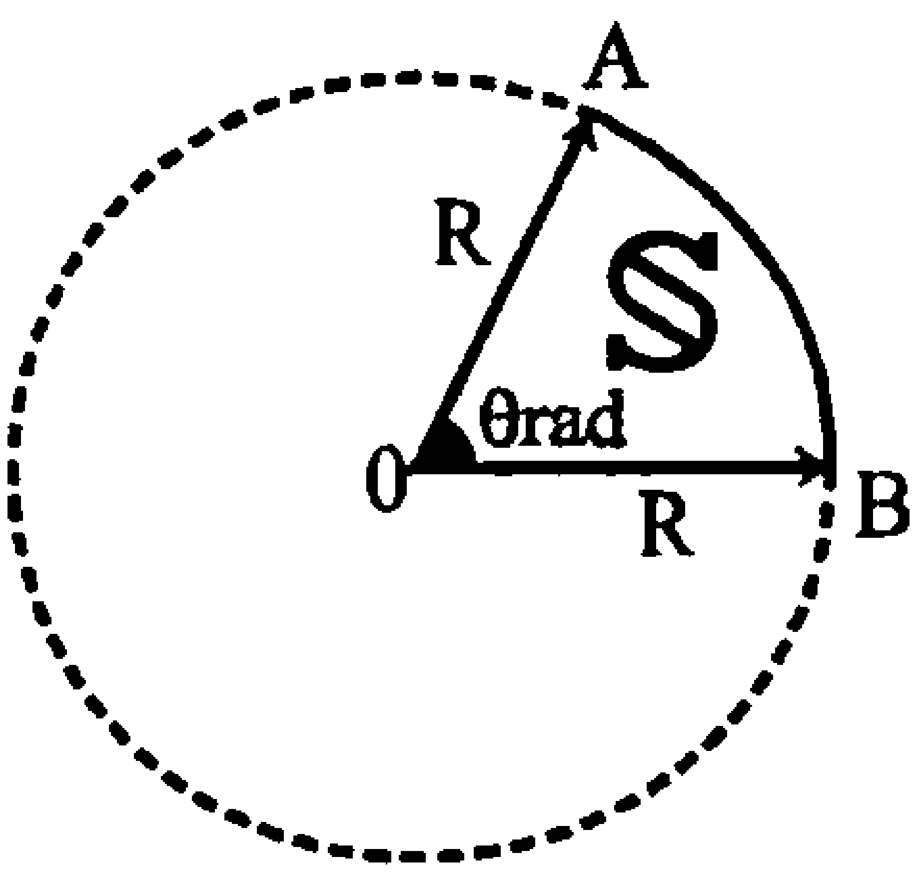
Se llama sector circular a la región circular limitada por dos radios y el arco correspondiente .



◁ *AOB: Sector Circular AOB*

ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

El área de un sector circular es igual al semiproducto de la longitud de su radio elevado al cuadrado y la medida de su ángulo central , en radianes ; es decir :

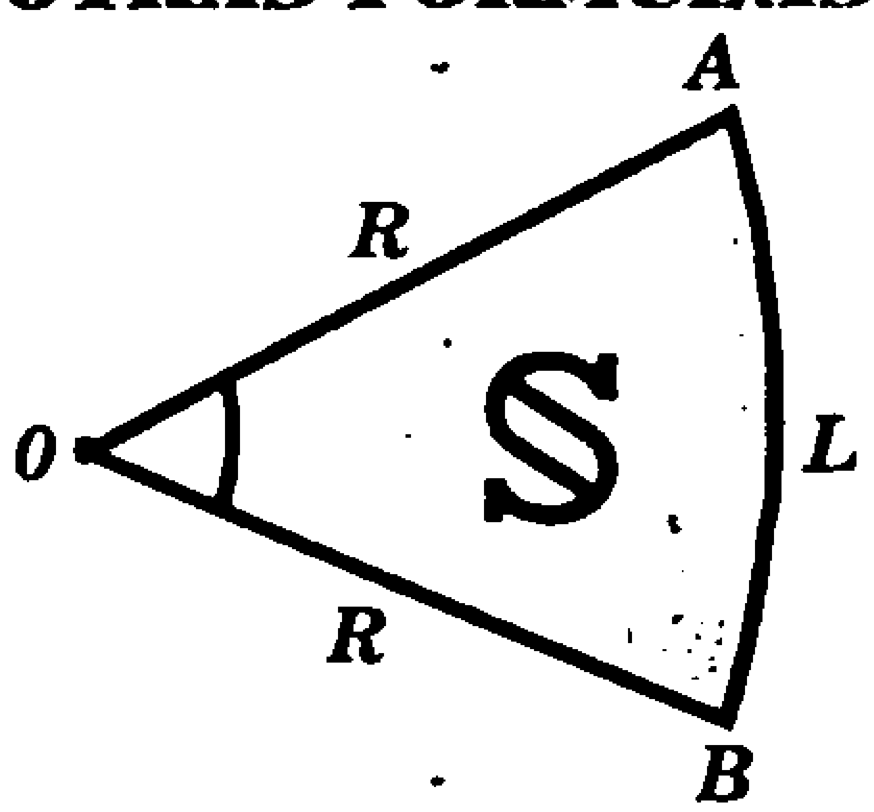


$$S = \frac{R^2\theta}{2}$$

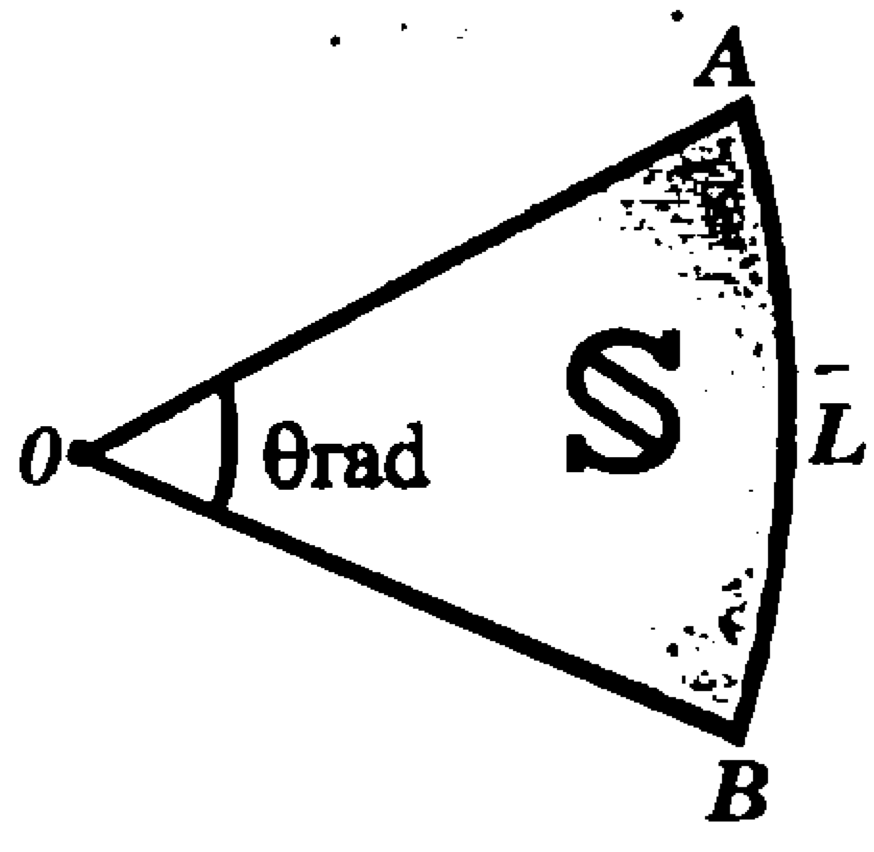
Donde :

S: área del sector circular *AOB*

OTRAS FÓRMULAS



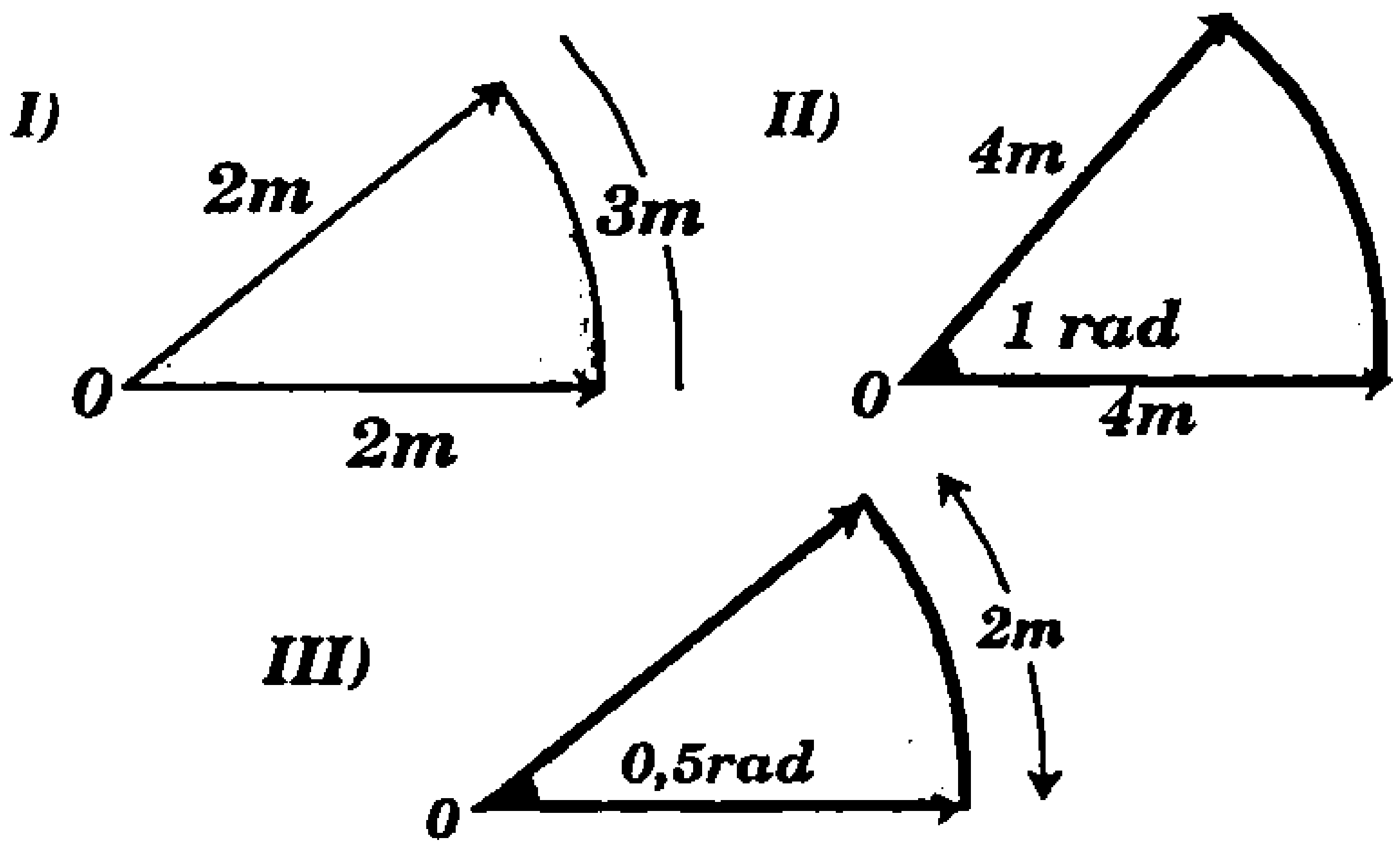
$$S = \frac{L \times R}{2}$$



$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

EJEMPLOS APLICATIVOS :

Calcular el valor del área de los sectores circulares mostrados en cada caso :

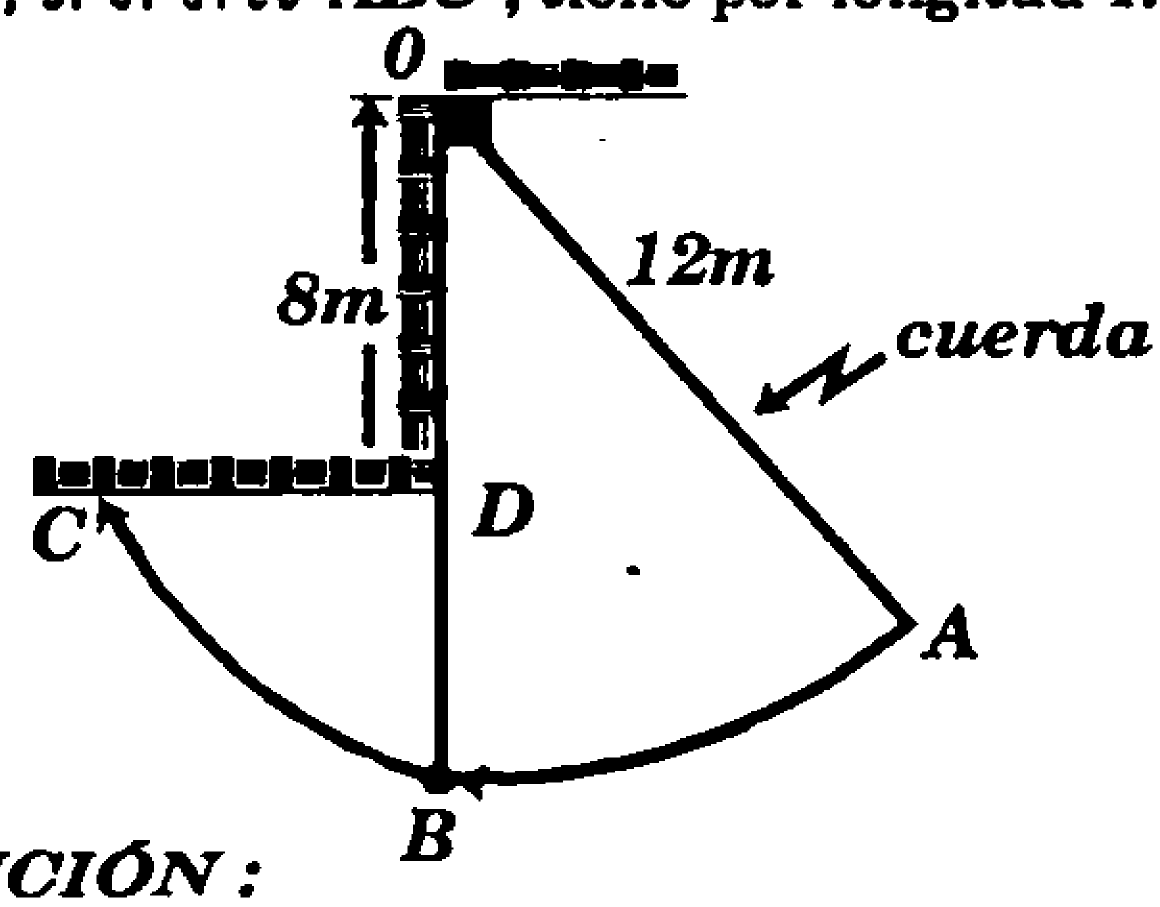


RESOLUCIÓN :

Caso I	Caso II	Caso III
$S_I = \frac{L \times R}{2}$	$S_{II} = \frac{R^2\theta}{2}$	$S_{III} = \frac{L^2}{2\theta}$
$S_I = \frac{(3m)\times(2m)}{2} = 3m^2$	$S_{II} = \frac{(4m)^2\times 1}{2} = 8m^2$	$= \frac{(2m)^2}{2\times 0,5} = 4m^2$

EJEMPLO 2 :

De la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada , si el arco *ABC* , tiene por longitud $4\pi m$



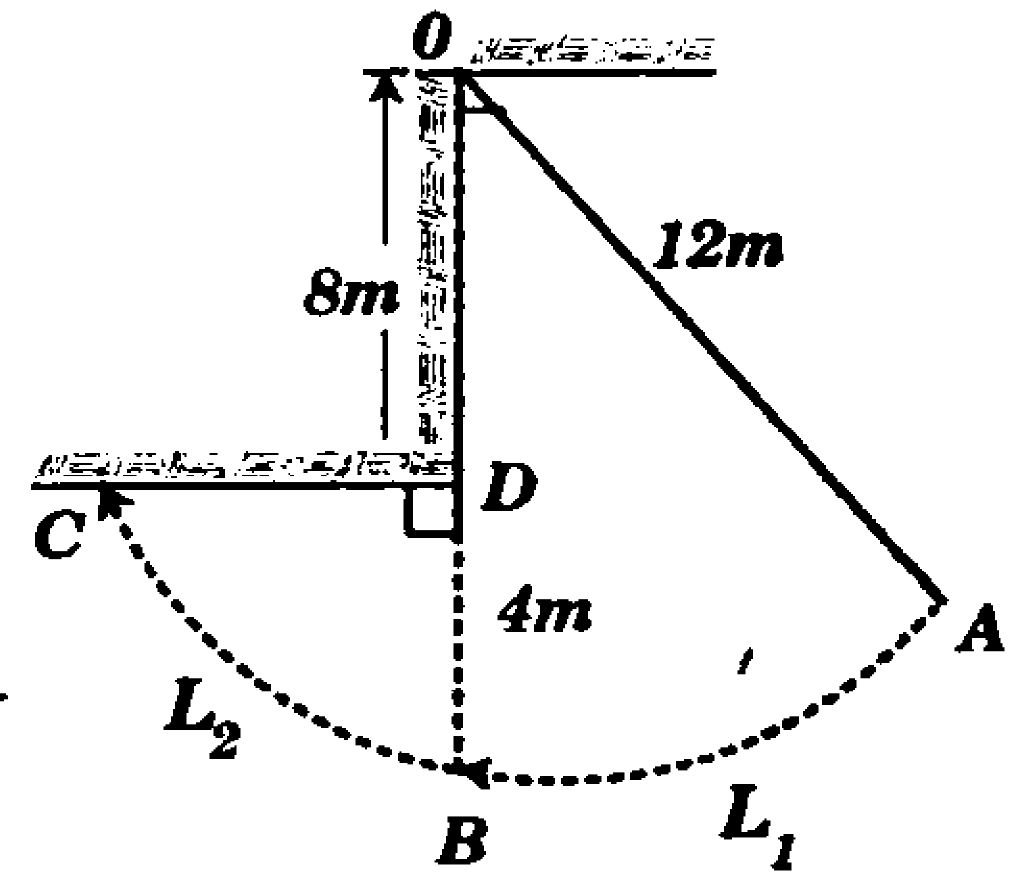
RESOLUCIÓN :

* Denotamos por :

L_1 : Longitud del Arco $\overset{\frown}{AB}$, el radio $R_1 = 12m$

L_2 : Longitud del Arco $\overset{\frown}{BC}$, de radio $R_2 = 4m$

* De la figura :



$L_2 = R_2 \times \theta_2 = 4m \times \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow L_2 = 2\pi m$

* Según el dato :

$$L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{BC}} = 4\pi m \Rightarrow L_1 + L_2 = 4\pi m$$
$$\Rightarrow L_1 + 2\pi = 4\pi m \Rightarrow L_1 = 2\pi m$$

* El área del sector ***AOB*** será :

$$S_1 = \frac{L_1 \times R_1}{2} = \frac{2\pi m \times 12m}{2} = 12\pi m^2$$

OBSERVACIONES :

1) El incremento de un mismo radio "***R***" en un sector circular inicial de área "***S***" (figura ***1***) produce un incremento de área proporcional a los números impares de "***S***", que el estudiante podría comprobarlo (figura ***2***) .

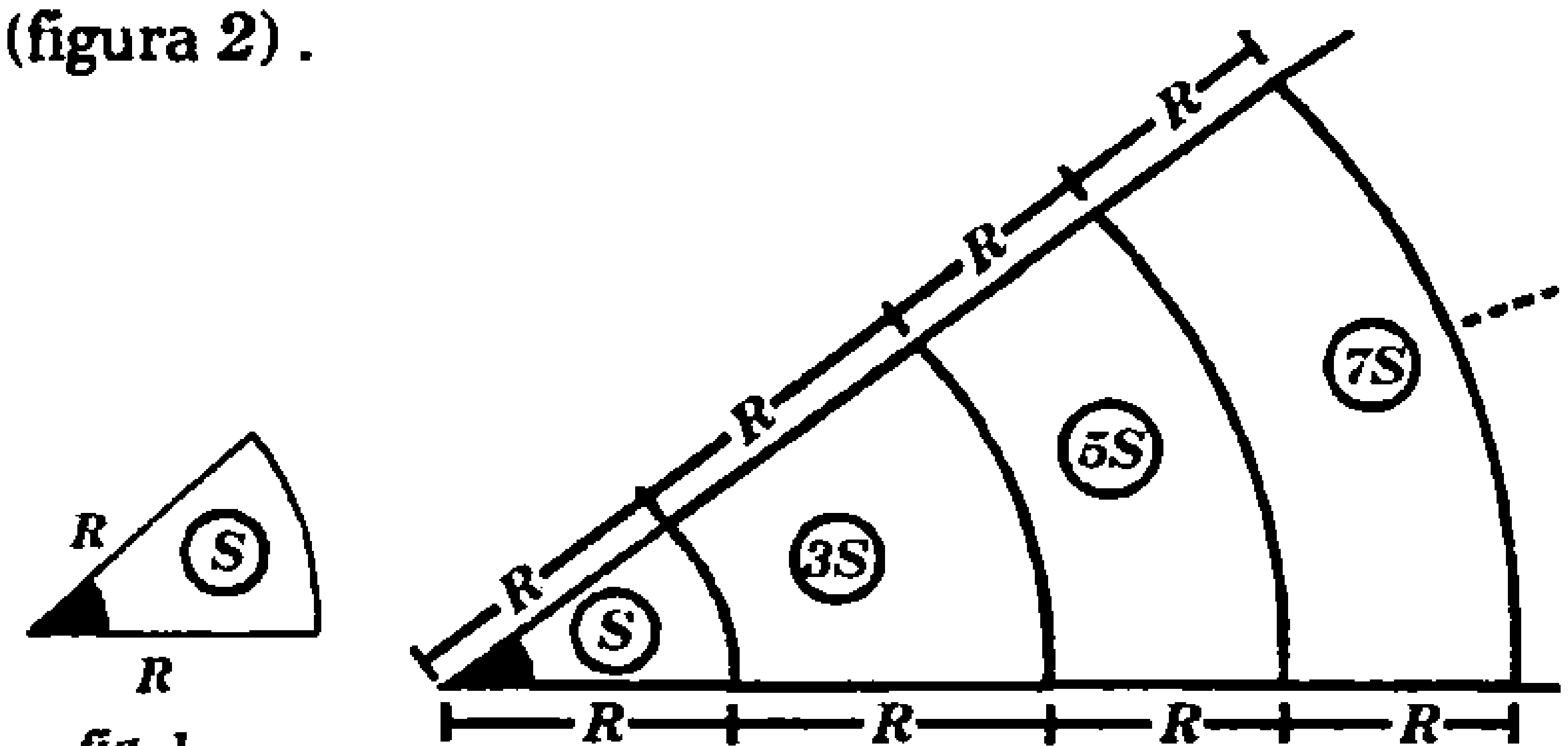
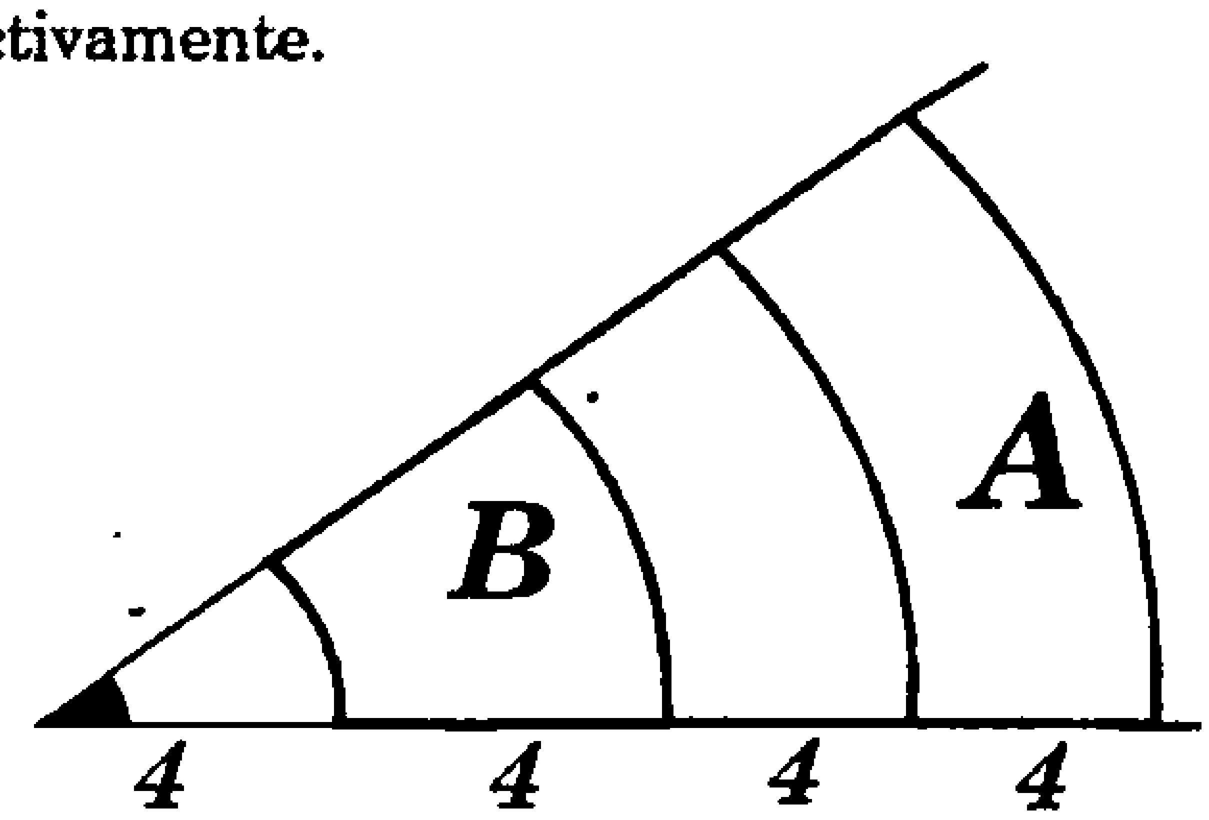


fig. 1 *fig. 2*

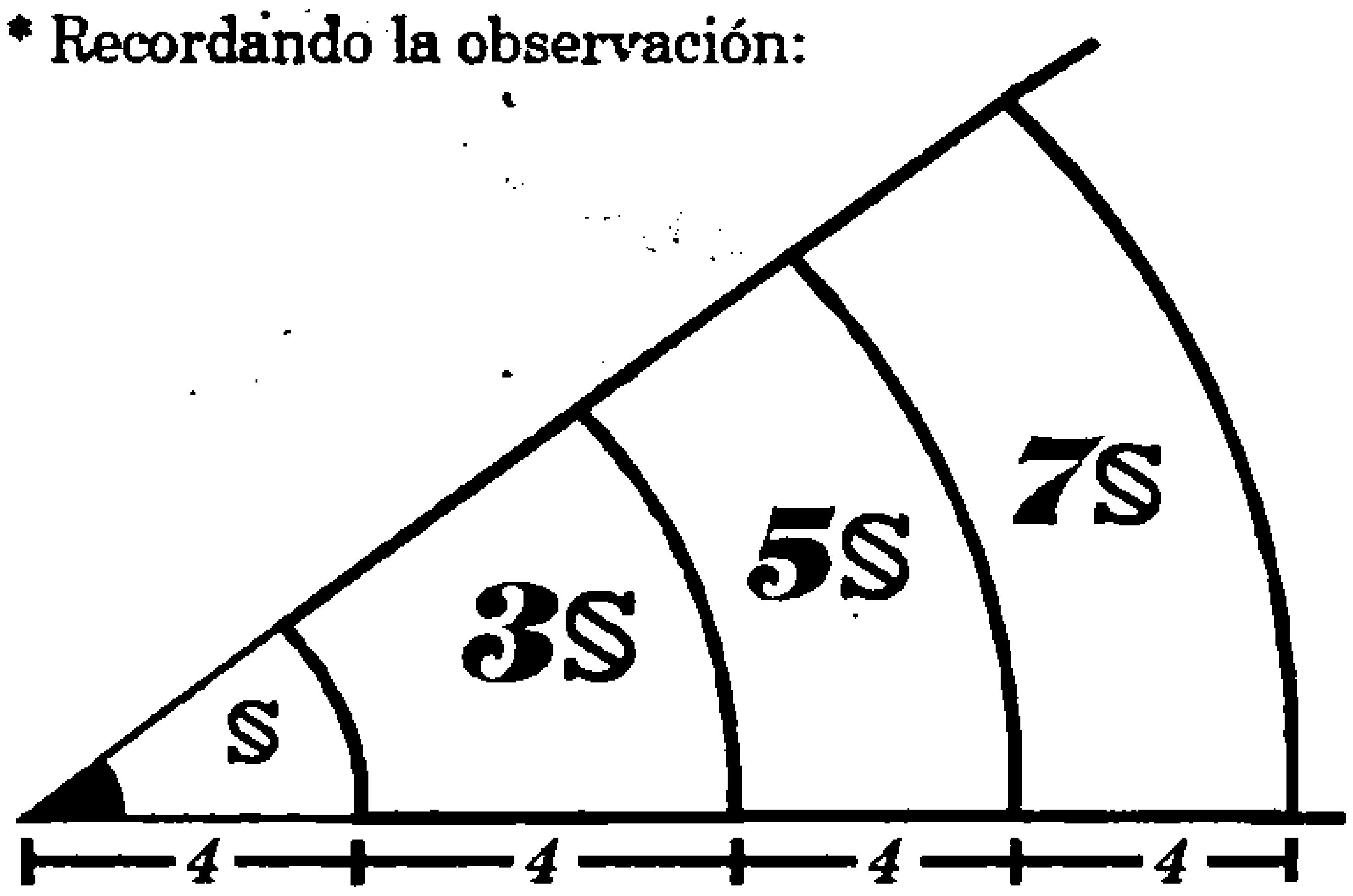
EJEMPLO :

Hallar el cociente de las áreas sombreadas "***A***" y "***B***" respectivamente.



RESOLUCIÓN :

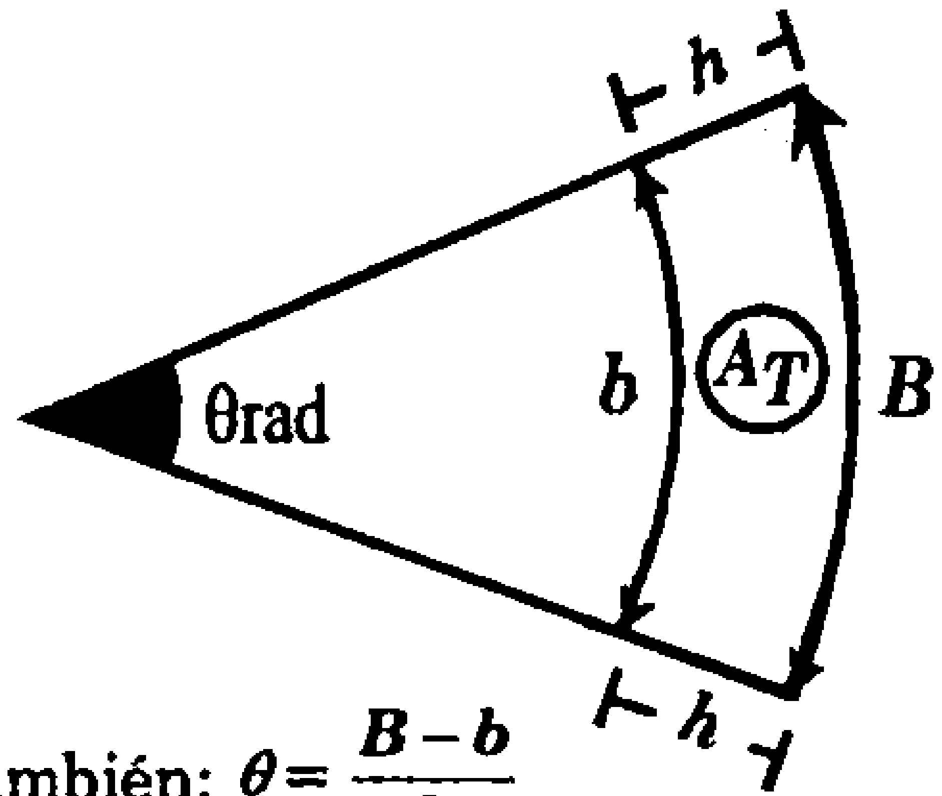
* Recordando la observación:



A = 7S ***B = 3S***

ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR

Se llama trapecio circular a aquella región formada por la diferencia de dos sectores circulares concéntricos . El área de un trapecio circular es igual a la semisuma de la longitudes de arcos que conforman al trapecio circular, multiplicada por su espaciamiento, es decir :



Donde :

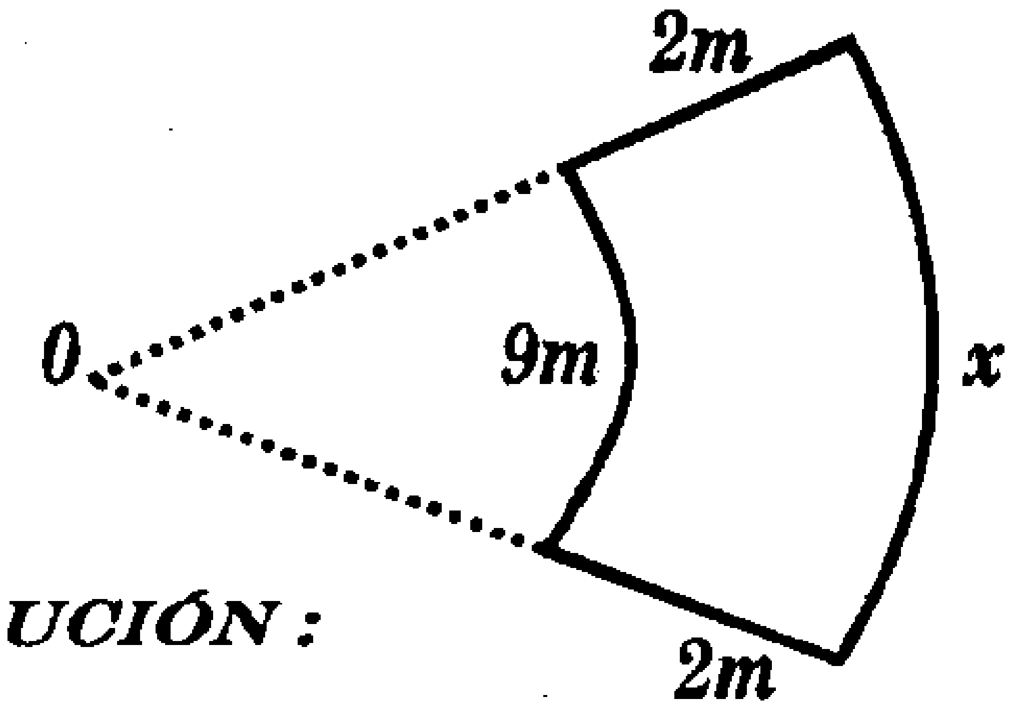
A_T = Área del trapecio circular

$$A_T = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

También: $\theta = \dfrac{B-b}{h}$

EJEMPLO :

Hallar "***x***" si el área del trapecio circular es ***21m²***



RESOLUCIÓN :

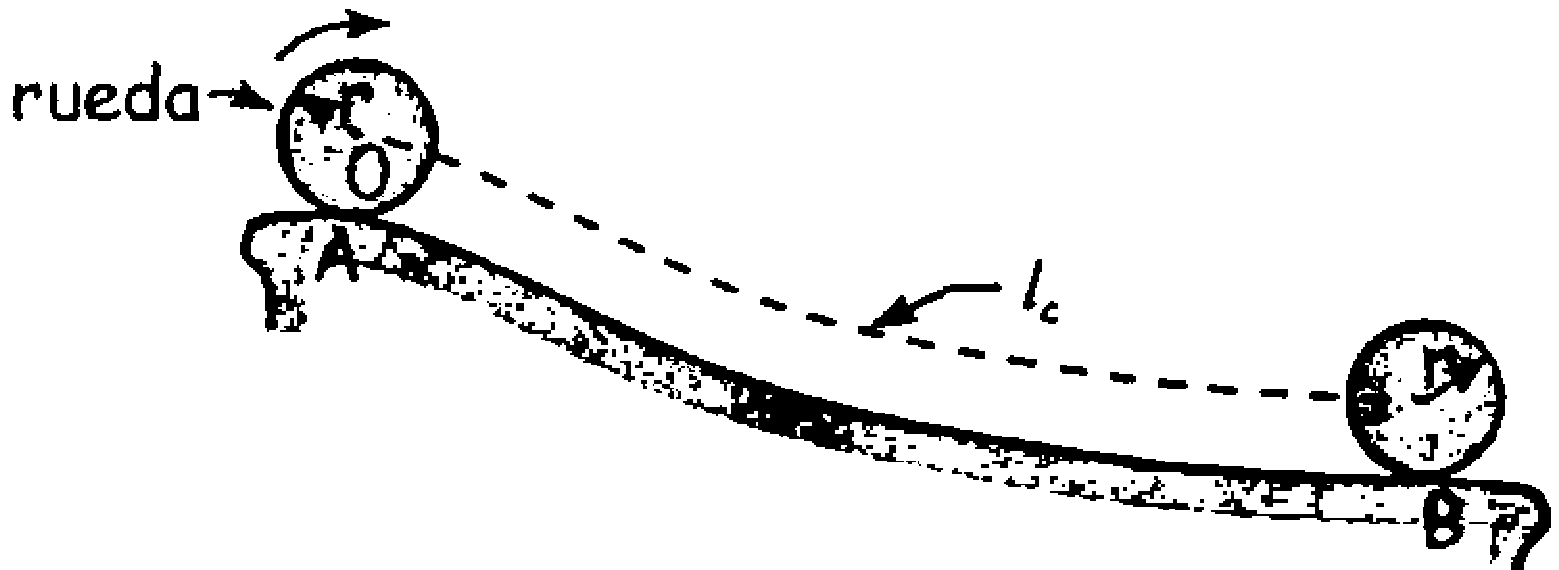
* Por datos : $A_T = 21$

* Por Fórmula : $A_T = \dfrac{(x+9)}{2} \times 2 = x + 9$

* Igualamos : $x + 9 = 21 \Rightarrow x = 12$

NUMERO DE VUELTAS (N_v)

El número de vueltas que da una rueda de radio ***«r»*** al desplazarse (sin resbalar) se calcula mediante el cociente de la longitud que describe el centro de la rueda dividido entre $2\pi r$. (perímetro de la rueda).



En esta figura el número de vueltas que da la rueda de radio ***(r)*** al desplazarse desde ***«A»*** hasta ***«B»*** se calcula: $n_v = \dfrac{l_c}{2\pi r}$ (l_c : longitud descrita por el centro de la rueda). (perímetro de la rueda).

PROBLEMAS RESUELTOS

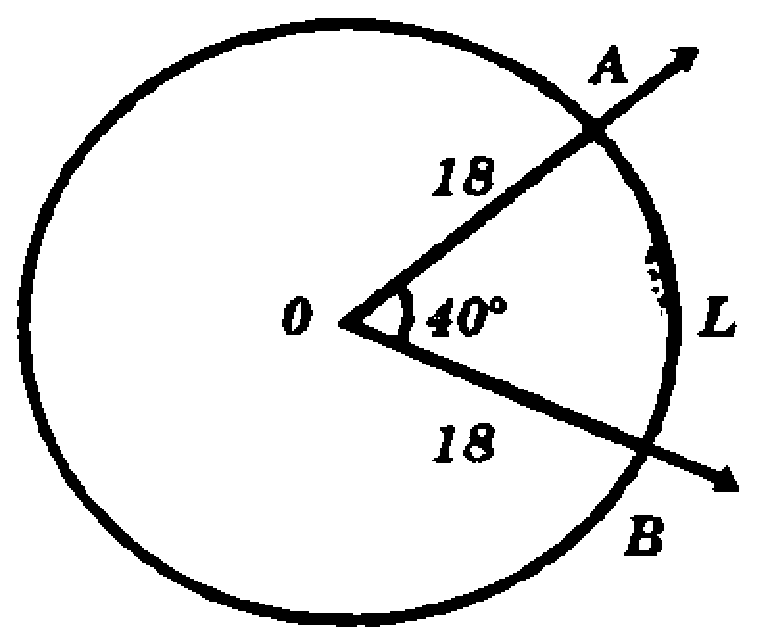
PROBLEMA 1 :

Calcular la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de *40°* en una circunferencia de *18m* de radio.

A) π *m* *B)* 2π *C)* 3π *D)* 4π *E)* 8π

RESOLUCIÓN :

* Graficando ; tenemos que convertir primero el ángulo central a radianes:



I) $\theta = 40^\circ \times \frac{\pi rad}{180^\circ} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{9} rad$

II) Calculamos la longitud :

$$L = \theta R = \frac{2\pi}{9} \times 18$$

* Operenado: $L = 4\pi m$

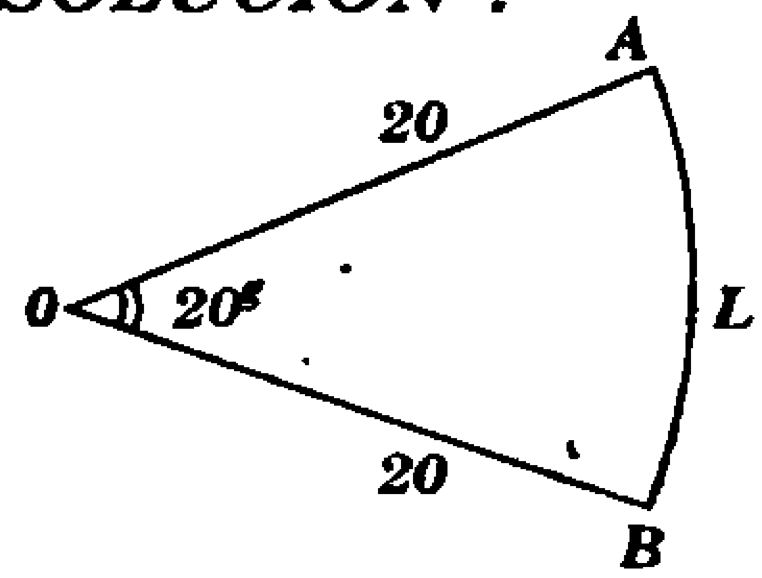
RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Calcular la longitud de un arco cuyo ángulo central correspondiente mide 20^g y el radio del sector mide *20m.*

A) π*m* *B)* 2π *C)* 3π *D)* 4π *E)* 8π

RESOLUCIÓN :



I) $\theta = 20^g \times \frac{\pi rad}{200^g} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{10} rad$

II) $L = \theta R$

$$L = \frac{\pi}{10} \times 20 \Rightarrow L = 2\pi m$$

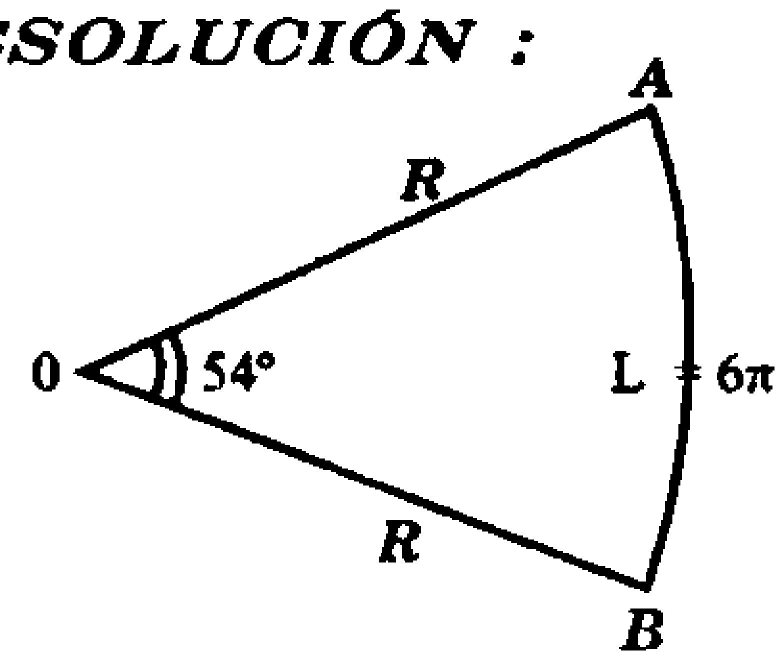
RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

En un sector circular, el ángulo central mide *54°* y el arco correspondiente mide $6\pi m$. ¿Cuál es la longitud del radio de dicho sector ?

A)10m *B)20* *C)30* *D)15* *E)5*

RESOLUCIÓN :



I) Convertimos el ángulo central :

$$\theta = 54^\circ \times \frac{\pi rad}{180^\circ} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{10} rad$$

II) Aplicamos la fórmula:

$$L = \frac{\theta R}{10} \Rightarrow 6\pi = \frac{3\pi}{10} \times R$$

* Despejando: $R = 20m$

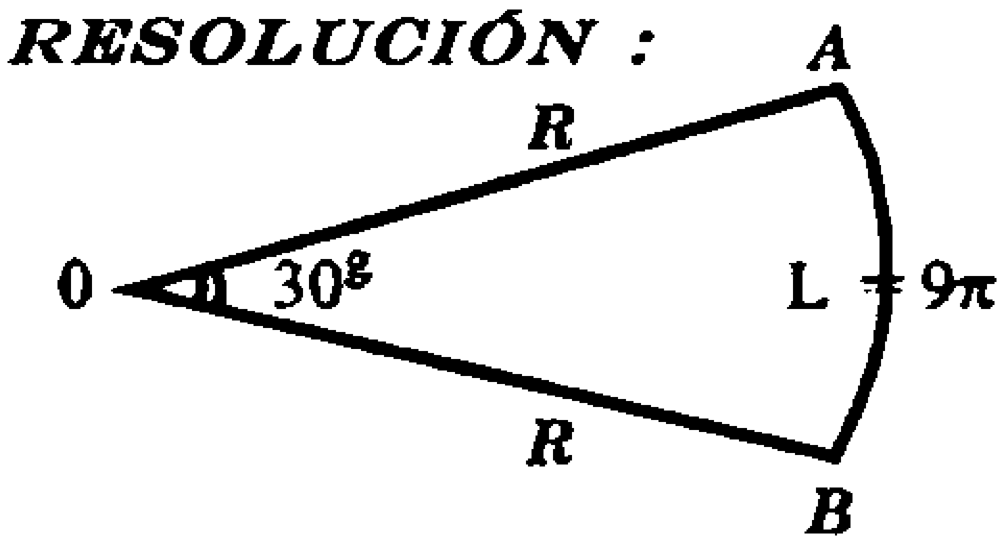
RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

En un sector , el ángulo central mide 30^g y el arco correspondiente mide 9π. ¿Cuánto mide el radio del sector ? .

A) 10 *B) 20* *C) 30* *D) 40* *E) 60*

RESOLUCIÓN :



I) Convirtiendo el ángulo :

$$\theta = 30^g \times \frac{\pi rad}{200^g} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{20} rad$$

II) Aplicamos la fórmula :

$$L = \theta R \Rightarrow 9\pi = \frac{3\pi}{20} \times R$$

* Operando : $R = 60$

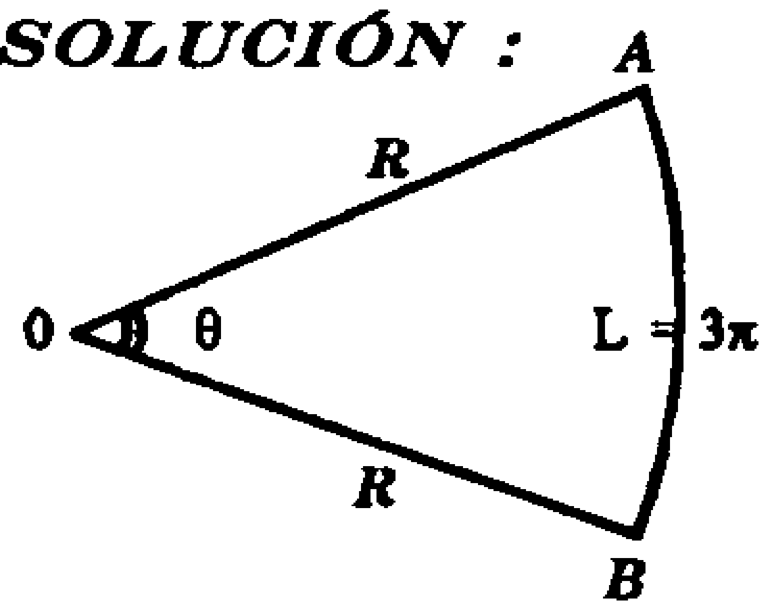
RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

En un sector ; se cumple que el arco mide 3π y el radio mide *9*. ¿Cuál es la medida sexagesimal del ángulo central?.

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 60°

RESOLUCIÓN :



* En el gráfico aplicamos fórmula :

$$L = \theta R \Rightarrow 3\pi = \theta.9$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} rad$$

* Convirtiendo al sistema sexagesimal :

$$\theta = \frac{\pi rad}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi rad} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

RPTA : "E"

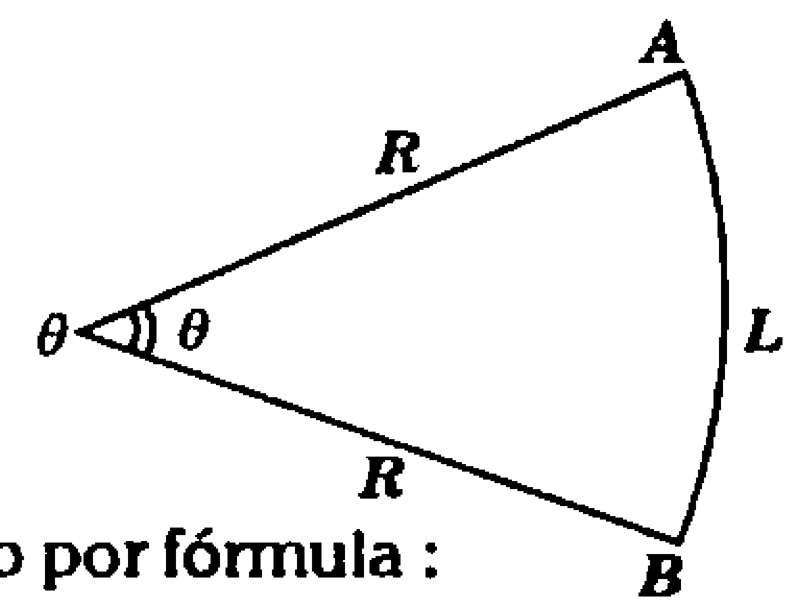
PROBLEMA 6 :

En un sector circular ; se cumple que el arco es el doble del radio ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente ?.

A)1rad *B)2* *C)* $\frac{1}{2}$ *D) 4* *E)* $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

En el gráfico , por dato: $L = 2R$



pero por fórmula :

$$\underbrace{L} = \theta R$$

$$2R = \theta R \Rightarrow \theta = 2rad.$$

RPTA : "B"

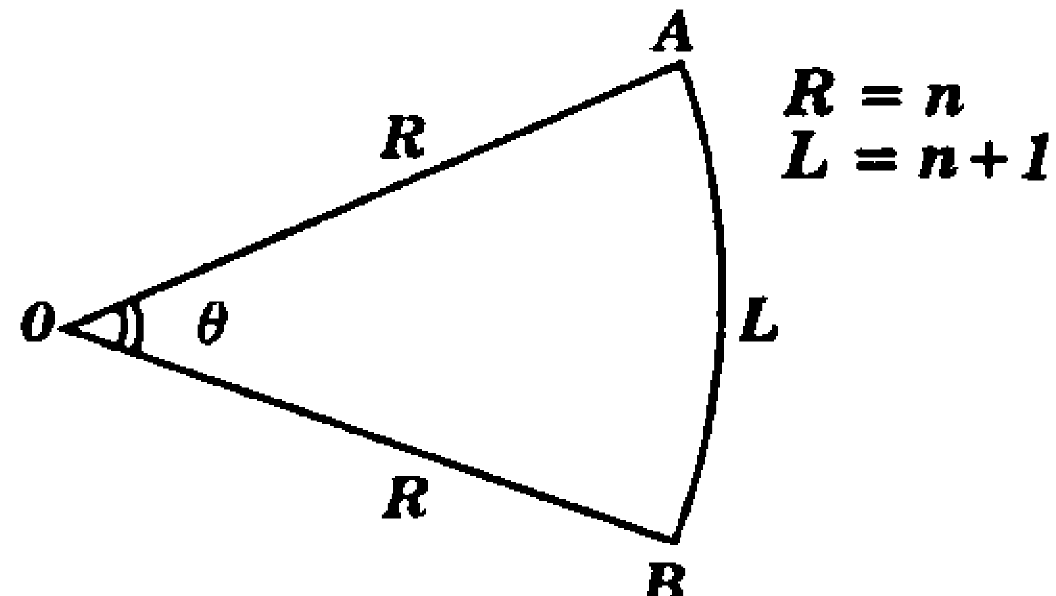
PROBLEMA 7 :

En un sector , se cumple que el radio y el arco son dos números consecutivos . Si el perímetro del sector es *16cm*, ¿Cuánto mide el ángulo central de dicho sector circular?.

A)1,1rad B)1,2 C)1,3 D)1,4 E)1,5

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico; por ser "*R*" y "*L*" enteros consecutivos; se cumple :



* Luego, por dato :

$$R + L + R = 16$$

$$n + n + 1 + n = 16 \Rightarrow 3n = 5$$

$$n = 5 \begin{cases} \rightarrow R = 5 \\ \rightarrow L = 6 \end{cases}$$

Luego ; también sabemos que :

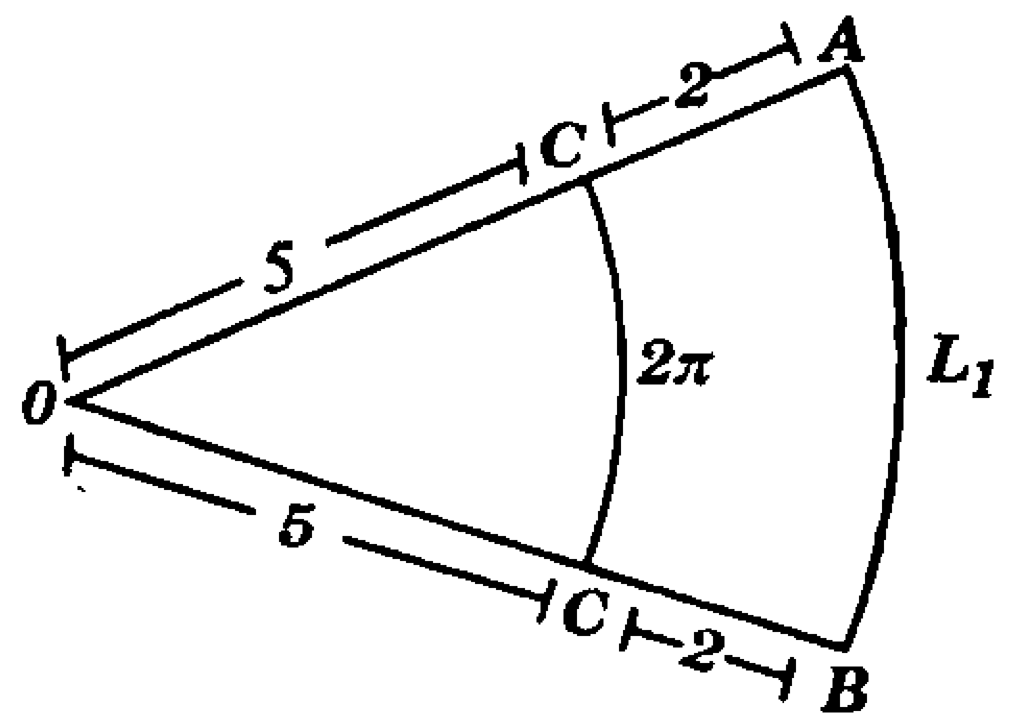
$$L = \theta R \Rightarrow 6 = \theta .5$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{6}{5} \Rightarrow \theta = 1{,}2rad$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

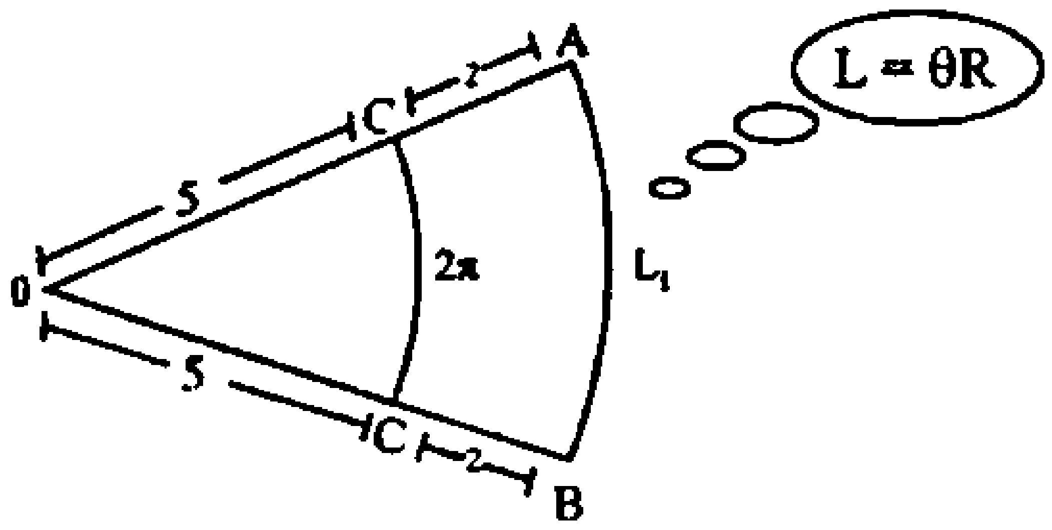
Del gráfico ; calcular "L_1"



A) $\frac{7\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{5}$ C) $\frac{14\pi}{3}$ D) $\frac{14\pi}{5}$ E) $\frac{12\pi}{5}$

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico adjunto :



I) Sector COD : $L = \theta R$

$$2\pi = \theta .5 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{5}$$

II) Sector AOB : $L = \theta R$

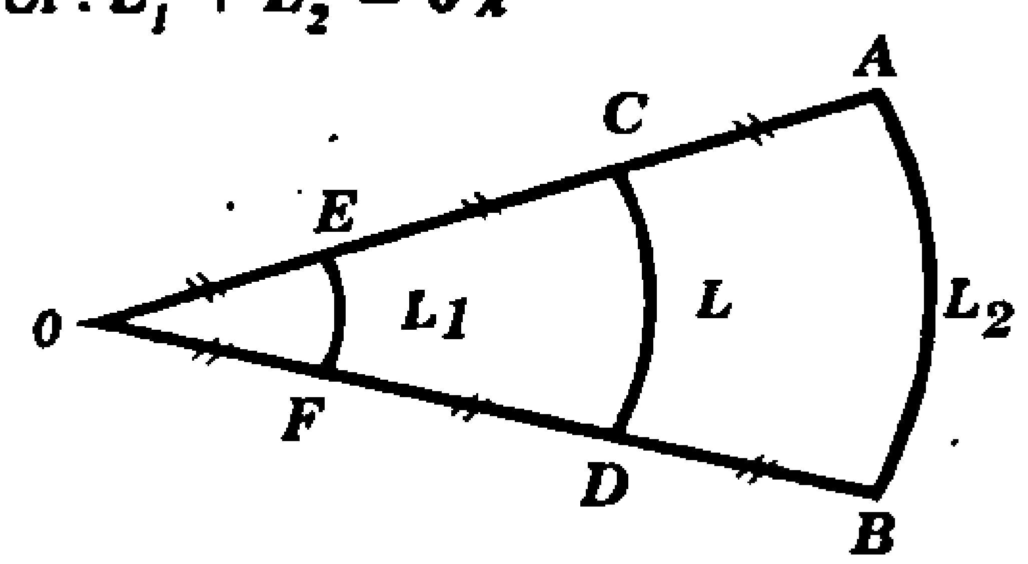
$$L_1 = \frac{2\pi}{5} \times 7 \Rightarrow L_1 = \frac{14\pi}{5}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Del gráfico; calcular "L" ;

Si : $L_1 + L_2 = 6\pi$

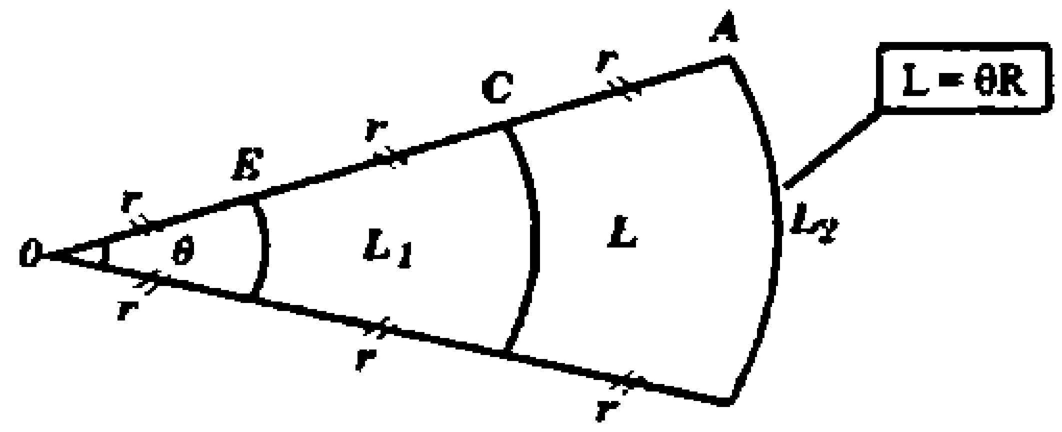


A) π B) 2π C) 3π D) $2{,}5\pi$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico ; sea :

$\sphericalangle AOB = \theta$ y $OE = CA = r$



I) Sector EOF : $L = \theta R$

$$L_1 = \pi r$$

II) Sector COD : $L = \theta r$

$$L = \theta \times 2r \Rightarrow L = 2r$$

III) Sector AOB : $L = \theta R$

$$L_2 = \theta(3r) \Rightarrow L_2 = 3\theta r$$

Por dato :

$$L_1 + L_2 = 6\pi \Rightarrow \theta r + 3\theta r = 6\pi \Rightarrow 4\theta r = 6\pi$$

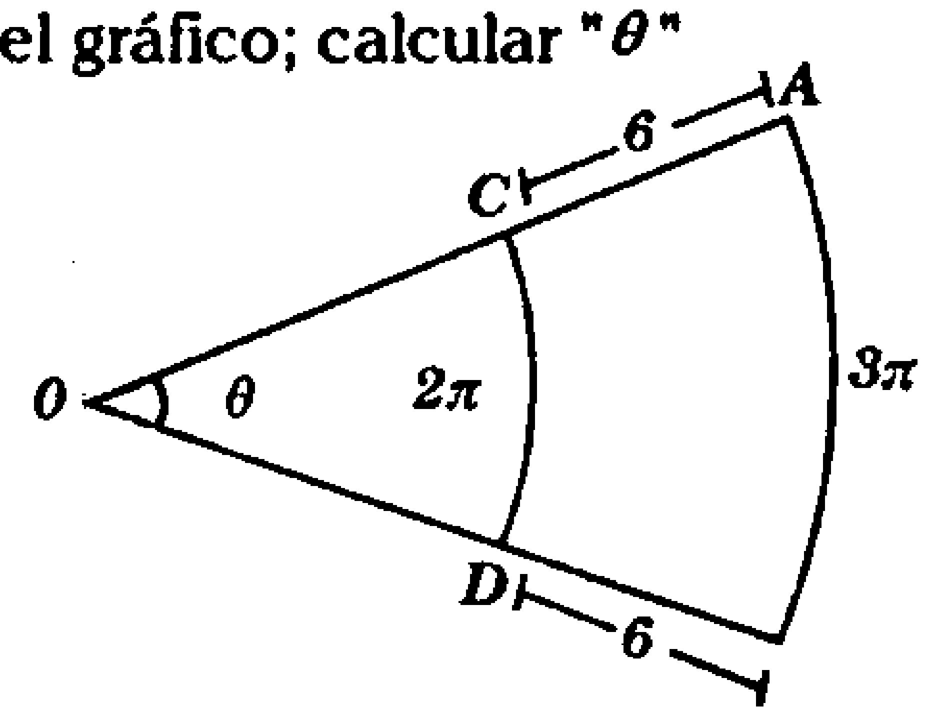
$$\underbrace{2\theta r}_{} = 3\pi$$

$$L = 3\pi$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

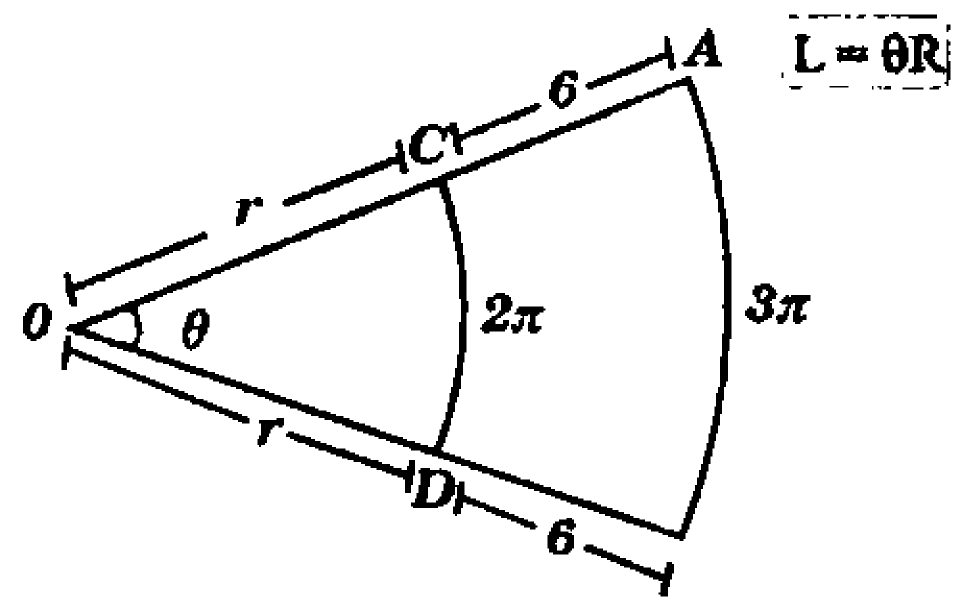
Del gráfico; calcular "θ"



A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{9}$ D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{15}$

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico; sea $OC = r$



I) Sector COD : $L = \theta R$

$$2\pi = \theta r$$

II) Sector AOB : $L = \theta R$

$$3\pi = \theta(r+6)$$

$$\Rightarrow 3\pi = \underbrace{\theta r}_{2\pi} + 6\theta$$

* Operando :

$$\pi = 6\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

RPTA : "B"

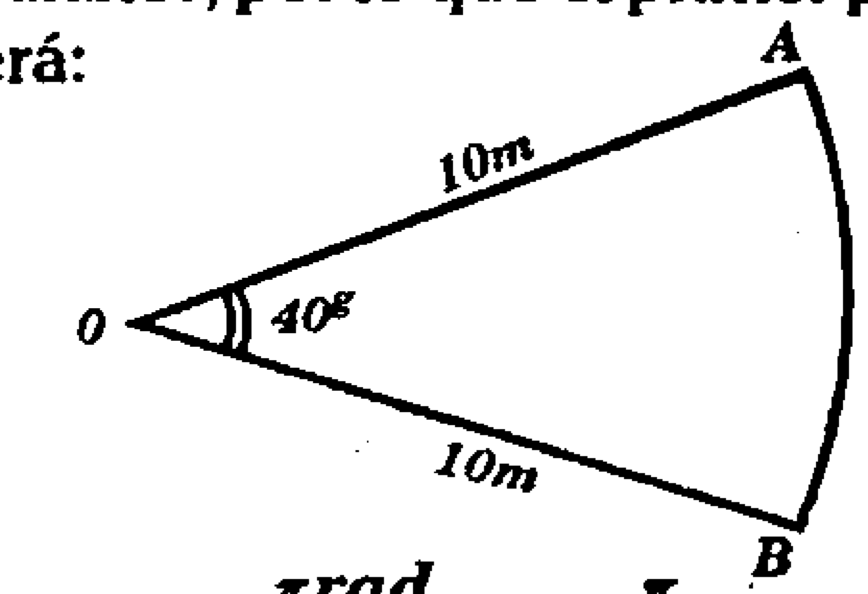
PROBLEMA 11 :

Calcular el área de un sector circular cuyo ángulo central mide 40^g y su radio mide 10^m.

A) $8\pi m^2$ B) 10π C) 40π D) 6π E) 4π

RESOLUCIÓN :

* Graficando , notamos que el ángulo no esta expresado en radianes, por lo que el primer paso será:



I) $\theta = 40g \times \frac{\pi rad}{200^g} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} rad$

II) Reconociendo datos :

$$\theta = \frac{\pi}{5} \; ; \; R = 10$$

* Luego usamos :

$$S = \frac{\theta R^2}{2} \Rightarrow S = \frac{\frac{\pi}{5} \times (10)^2}{2} = \frac{100\pi}{10}$$

$$\Rightarrow S = 10\pi m^2$$

RPTA : "B"

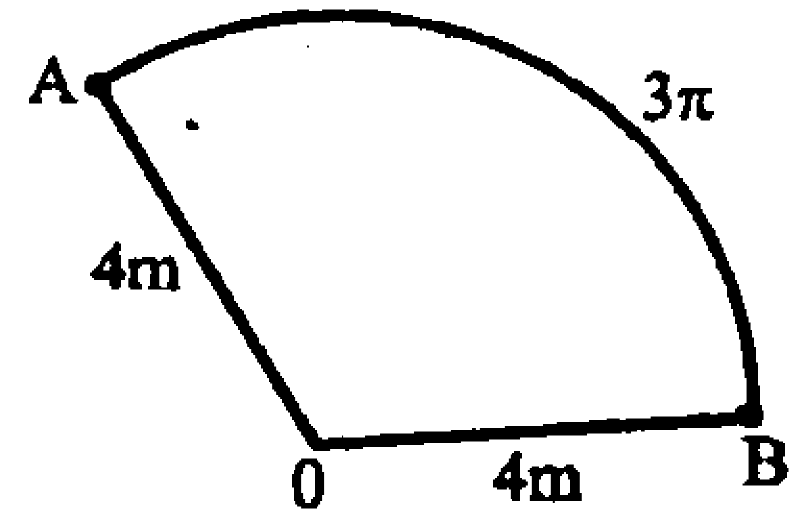
PROBLEMA 12 :

En un sector circular el radio mide $4m$ y el arco correspondiente mide $3\pi m$. ¿Cuál es el área del sector ?.

A) $6\pi m^2$ B) 8π C) 10π D) 12π E) 14π

RESOLUCIÓN :

* Graficando, reconocemos los siguientes datos : $R = 4m; L = 3\pi m$



* Luego, usamos : $S = \frac{LR}{2}$

* Reemplazando : $S = \frac{3\pi \times 4}{2}$

$$\Rightarrow S = 6\pi m^2$$

RPTA : "A"

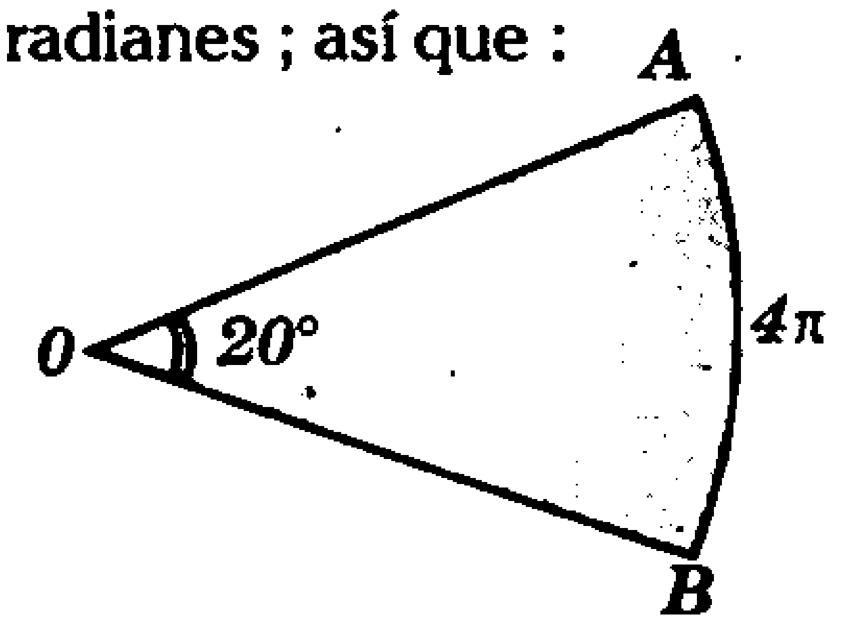
PROBLEMA 13 :

En un sector el ángulo central mide $20°$ y el arco correspondiente mide 4π. ¿Cuál es el área del sector circular?.

A) 24π B) 36π C) 48π D) 72π E) 96π

RESOLUCIÓN :

* Graficando, notamos que el ángulo central no está expresado en radianes ; así que :



$I)\ \theta = 20° \times \frac{\pi rad}{180°} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{9} rad$

II) Reconociendo datos :

$$\theta = \frac{\pi}{9} \qquad L = 4\pi$$

* Usaremos entonces la fórmula :

$$S = \frac{L^2}{2\theta} \Rightarrow S = \frac{(4\pi)^2}{2 \times \frac{\pi}{9}} = \frac{16\pi^2}{2\frac{\pi}{9}}$$

* Reduciendo, queda :

$$S = 72\pi$$

RPTA : "D"

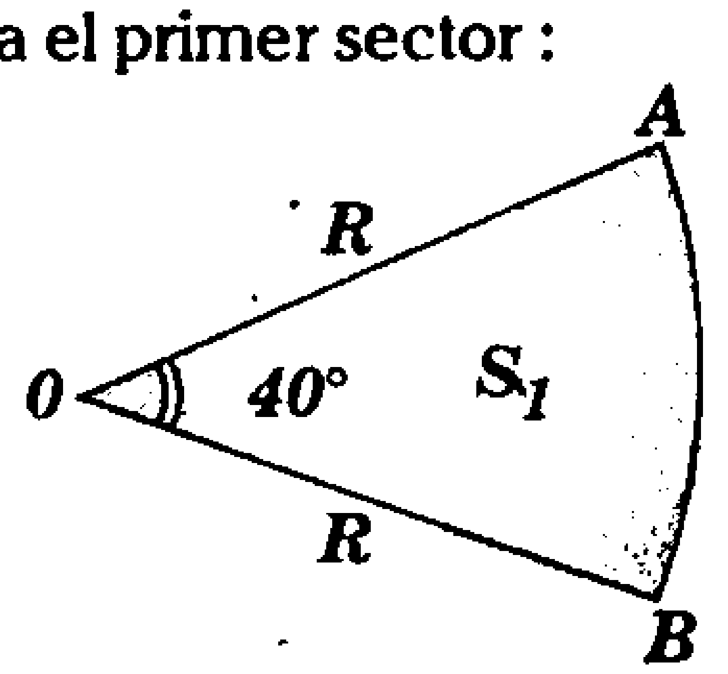
PROBLEMA 14 :

En un sector circular el ángulo central mide $40°$ y en otro sector circular del mismo radio, el ángulo central mide $36°$. Siendo "S_1" y "S_2" las áreas de los sectores circulares mencionados, respectivamente, calcular : $K = \frac{S_1}{S_2}$

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{10}{9}$ D) $\frac{9}{10}$ E) $\frac{9}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Para el primer sector :



$$\theta = 40° \times \frac{\pi rad}{180°} \Rightarrow \theta = 2\frac{\pi}{9} rad$$

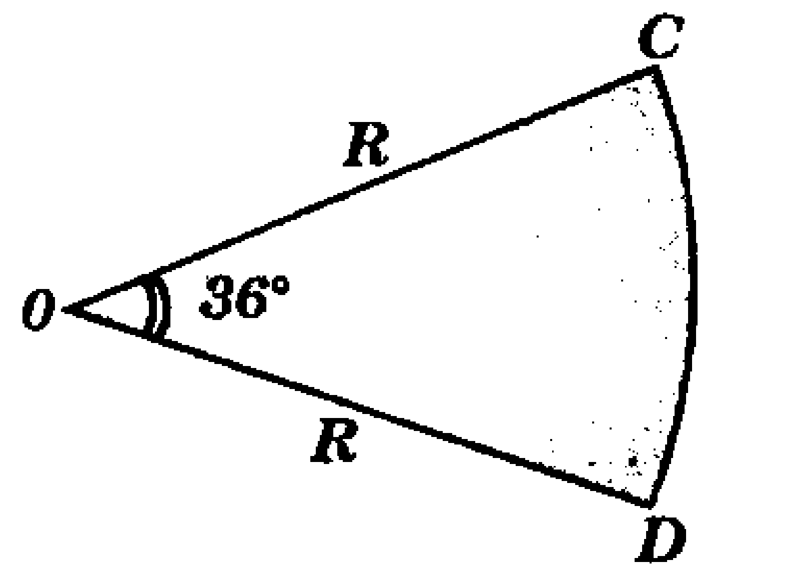
* Usamos la fórmula :

$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{2\frac{\pi}{9} \times R^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\theta R^2}{9}$$

* Para el segundo sector :



$$\theta = 36° \times \frac{\pi rad}{180°} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} rad$$

Usamos la fórmula :

$$S = \frac{\theta R^2}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{\theta R^2}{2} = \frac{\frac{\pi}{5} \times R^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\pi R^2}{10}$$

* Luego piden:

$$K = \frac{S^1}{S_2} = \frac{\frac{\pi}{9} R^2}{\frac{\pi R^2}{10}} \Rightarrow K = \frac{10}{9}$$

RPTA : "C"

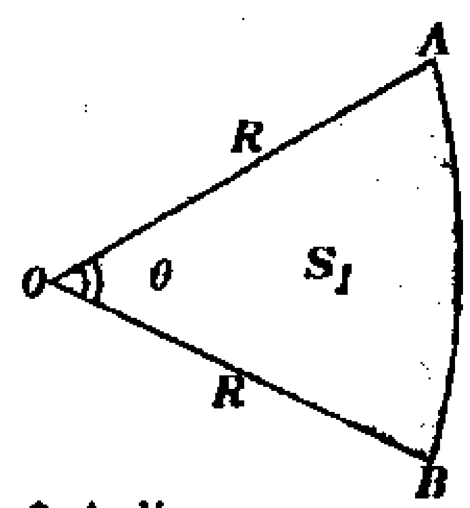
PROBLEMA 15 :

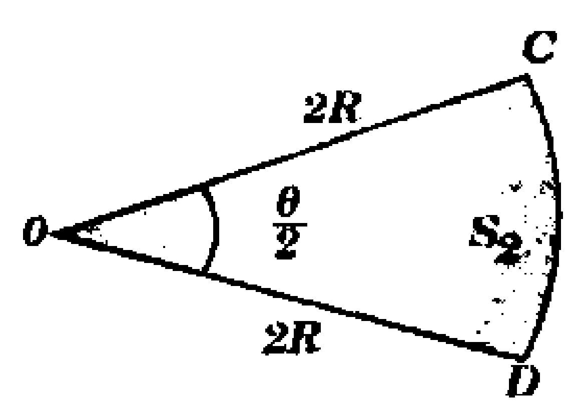
En un sector del área 100π, se reduce el ángulo a sus mitad y el radio se duplica, obteniéndose un nuevo sector circular cuya área es:

A) 100π B) 200π C) 50π
D) 25π E) 400π

RESOLUCIÓN :

* Situación inicial * Situación final





* Aplicamos:

$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$S_1 = \frac{\theta R^2}{2} = 100\pi$$

* Aplicamos:

$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$S_2 = \frac{\frac{\theta}{2}(2R)^2}{2} = \frac{\theta \times 4R^2}{4} = \theta R^2$$

$$\Rightarrow \theta R^2 = 200\pi \Rightarrow S_2 = 200\pi$$

RPTA: "B"

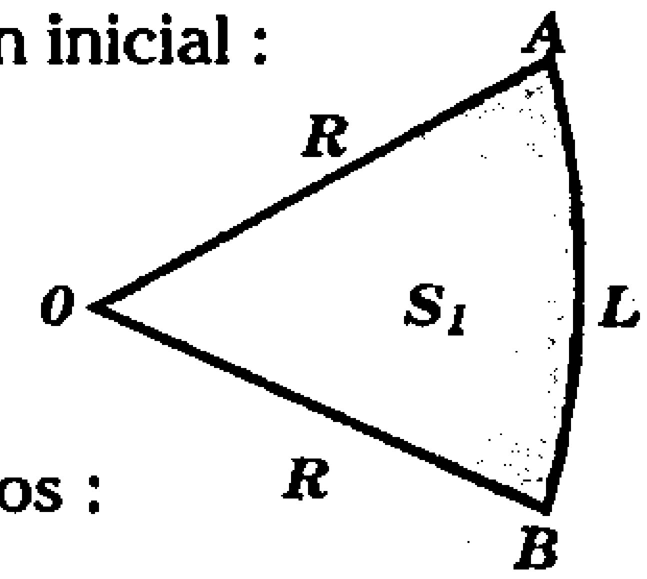
PROBLEMA 16 :

En un sector de área 120π, se reduce el arco a la mitad y se triplica el radio, obteniéndose un nuevo sector circular, cuya área es:

A) 120π B) 150π C) 180π
D) 210π E) 240π

RESOLUCIÓN :

* Situación inicial :

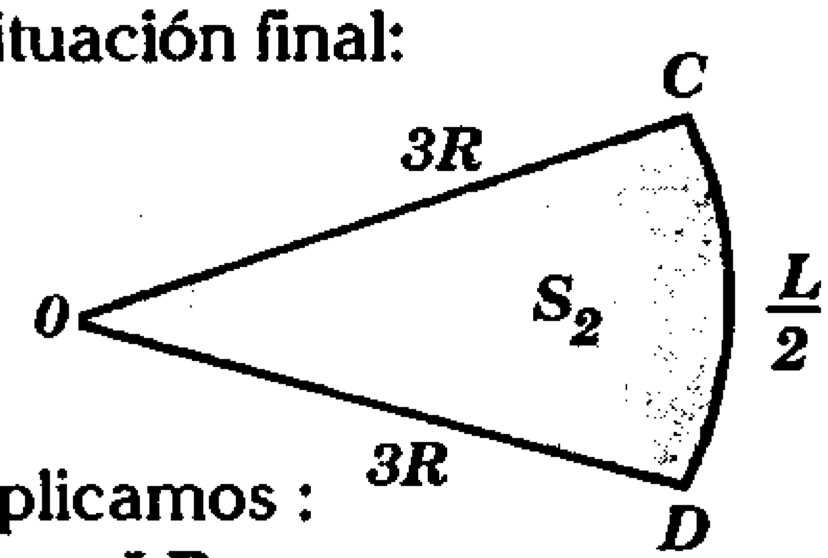


* Aplicamos :

$$S = \frac{LR}{2}$$

$$S_1 = 120\pi = \frac{LR}{2} \Rightarrow LR = 240\pi$$

* Situación final:



* Aplicamos :

$$S = \frac{LR}{2}$$

$$S_2 = \frac{\frac{L}{2}(3R)}{2} = \frac{3LR}{4} = \frac{3(240\pi)}{4}$$

$$\Rightarrow S_2 = 180\pi$$

RPTA : "C"

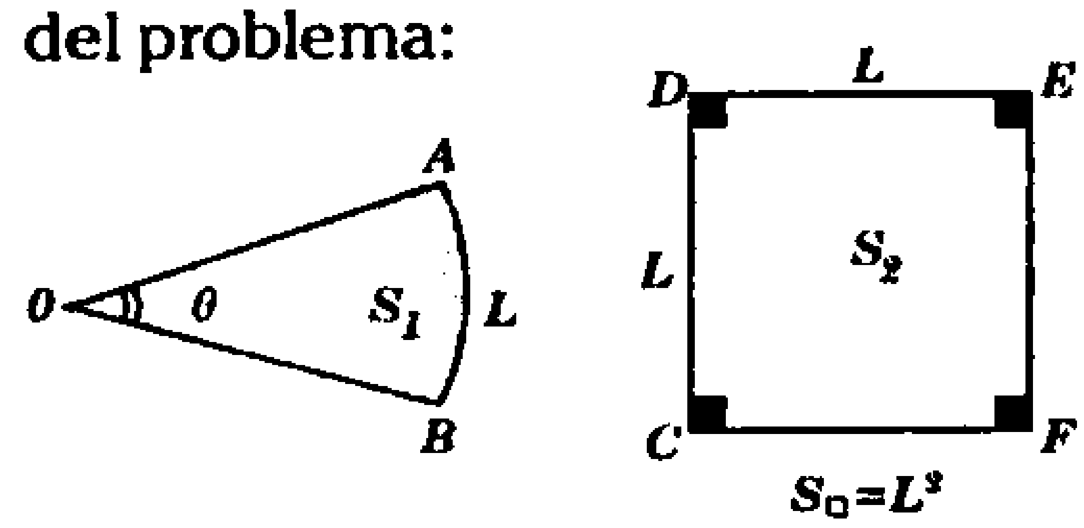
PROBLEMA 17 :

Se tiene un sector circular cuyo arco es igual al lado de un cuadrado, cuya área es igual a la del sector indicado. Se pide calcular la medida del ángulo del sector circular.

A) 1rad B) 2 C) 0,5 D) 4 E) 0,25

RESOLUCIÓN :

* Graficando e indicando los datos del problema:



* Como debemos relacionar arco y ángulo central; usaremos para el área del sector circular :

$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

* Luego, como: $S_1 = S_2$ (condición del problema)

$$\frac{L^2}{2\theta} = L^2 \Rightarrow \frac{1}{2\theta} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}$$

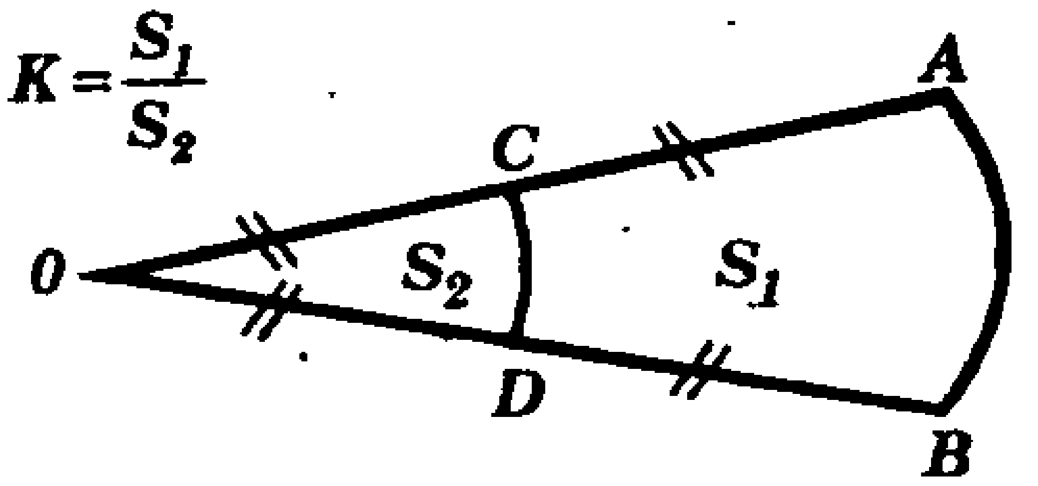
$$\Rightarrow \theta = 0{,}5 rad$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 18 :

En el gráfico mostrado, calcular :

$K=\dfrac{S_1}{S_2}$

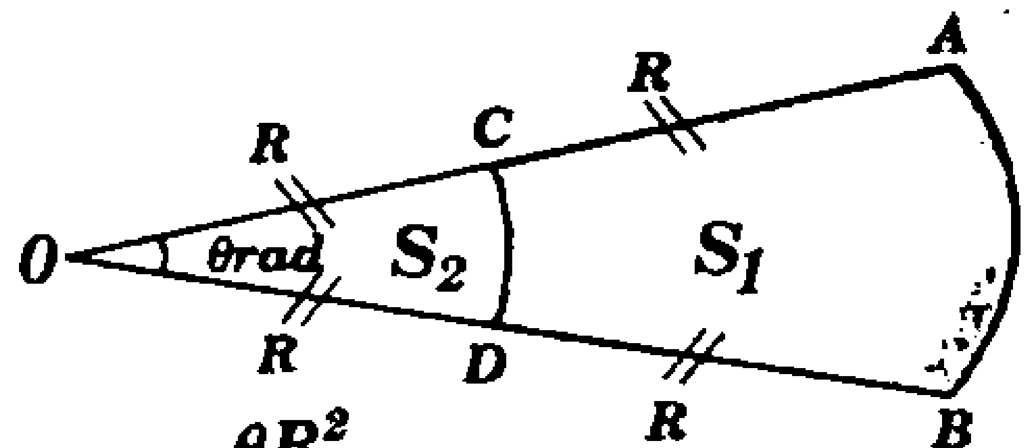


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN :

* En el gráfico, sea :

$OC=CA=R \wedge \measuredangle AOB=\theta rad$



I) $S_2=\dfrac{\theta R^2}{2}$

II) Para hallar "S_1" restamos el área del sector AOB con el área del sector COD.

* Esto es : $S_1=S_{\underset{AOB}{\triangleleft}}-S_{\underset{COD}{\triangleleft}}$

$\Rightarrow S_1=\dfrac{\theta(2R)^2}{2}-\dfrac{\theta R^2}{2}=\dfrac{4\theta R^2}{2}-\dfrac{\theta R^2}{2}$

$\Rightarrow S_1=\dfrac{3\theta R^2}{2}$

* Luego piden : $K=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\dfrac{3\theta R^2}{2}}{\dfrac{\theta R^2}{2}}$;

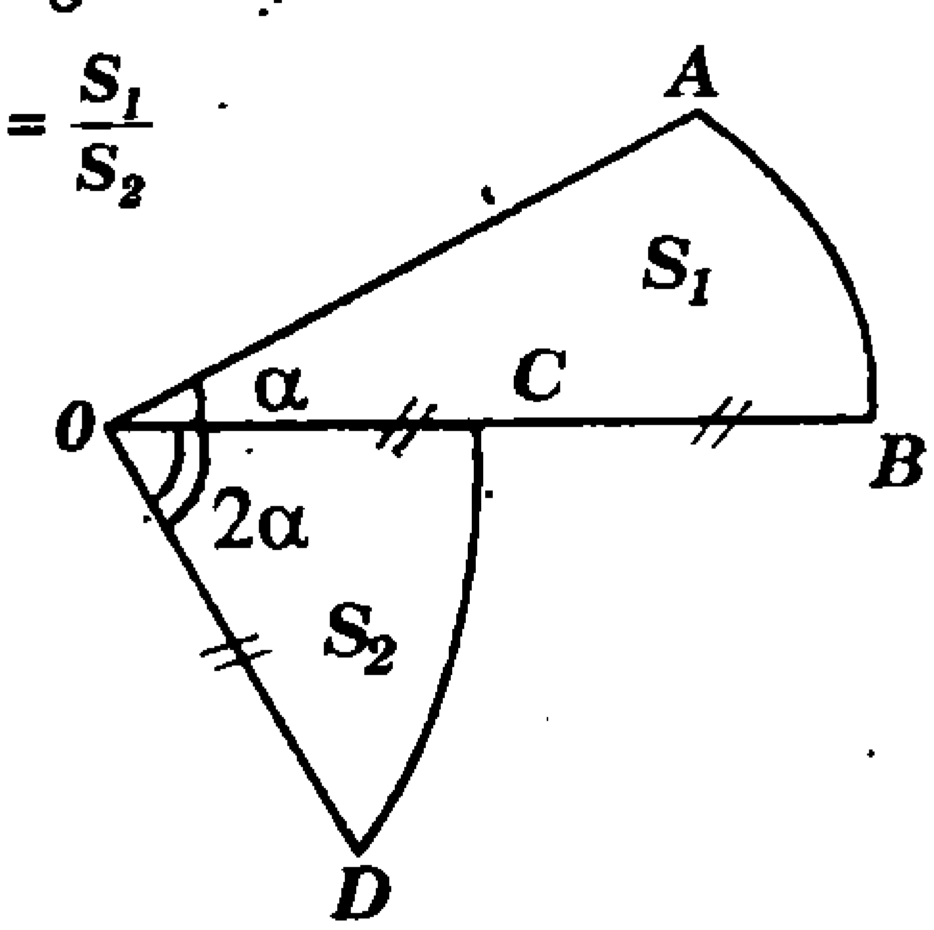
* Operando : $K=3$.

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Del gráfico , obtener :

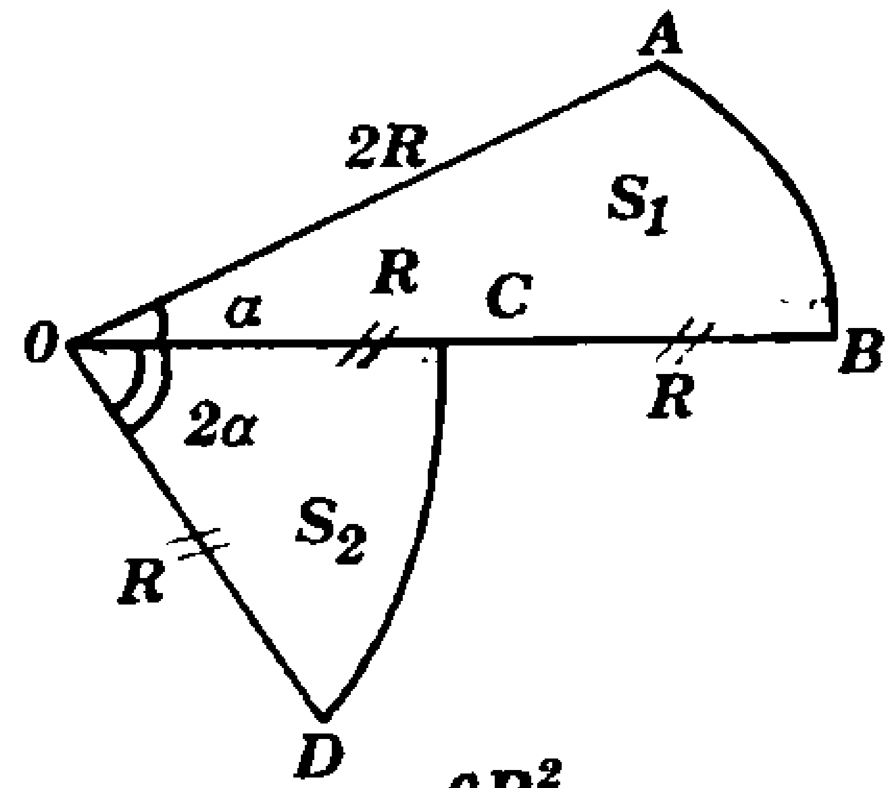
$K=\dfrac{S_1}{S_2}$



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 4 E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico, sea: $OC=CB=R$



* Usaremos: $S=\dfrac{\theta R^2}{2}$

I) $S_1=\dfrac{\alpha(2R)^2}{2}=\dfrac{4\alpha R^2}{2}$

$\Rightarrow S_1=2\alpha R^2$

II) $S_2=\dfrac{2\alpha(R)^2}{2}=\dfrac{2\alpha R^2}{2}$

$\Rightarrow S_2=\alpha R^2$

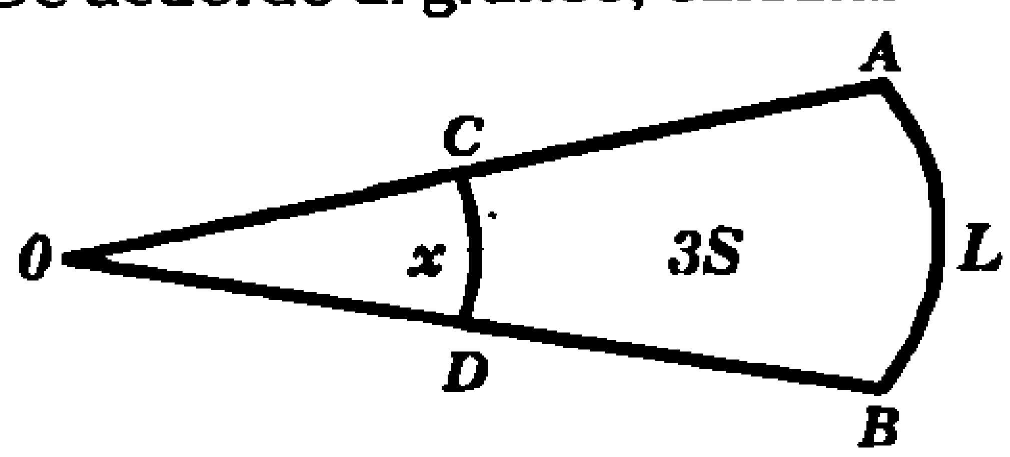
* Luego nos piden :

$K=\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\alpha R^2}{\alpha R^2}\Rightarrow K=2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 :

De acuerdo al gráfico, calcular "x".



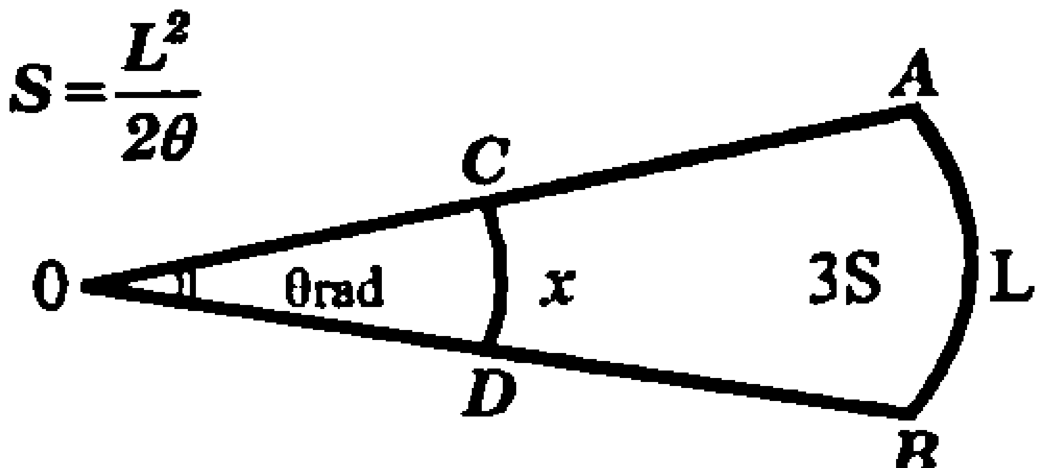
A) $\frac{L}{2}$ B) $\frac{L}{3}$ C) $\frac{L}{4}$ D) $\frac{L}{5}$ E) $\frac{L}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico, sea : $\measuredangle AOB=\theta rad$.

Como se debe asociar áreas y ángulo central, usaremos:

$S=\dfrac{L^2}{2\theta}$



I) $S_{\underset{COD}{\triangleleft}}=S=\dfrac{x^2}{2\theta}$ ....(I)

II) $S_{\underset{COD}{\triangleleft}}=4S=\dfrac{L^2}{2\theta}$ ....(II)

* Dividiendo (I) ÷ (II) :

$$\frac{S}{4S}=\frac{\dfrac{x^2}{2\theta}}{\dfrac{L^2}{2\theta}}$$

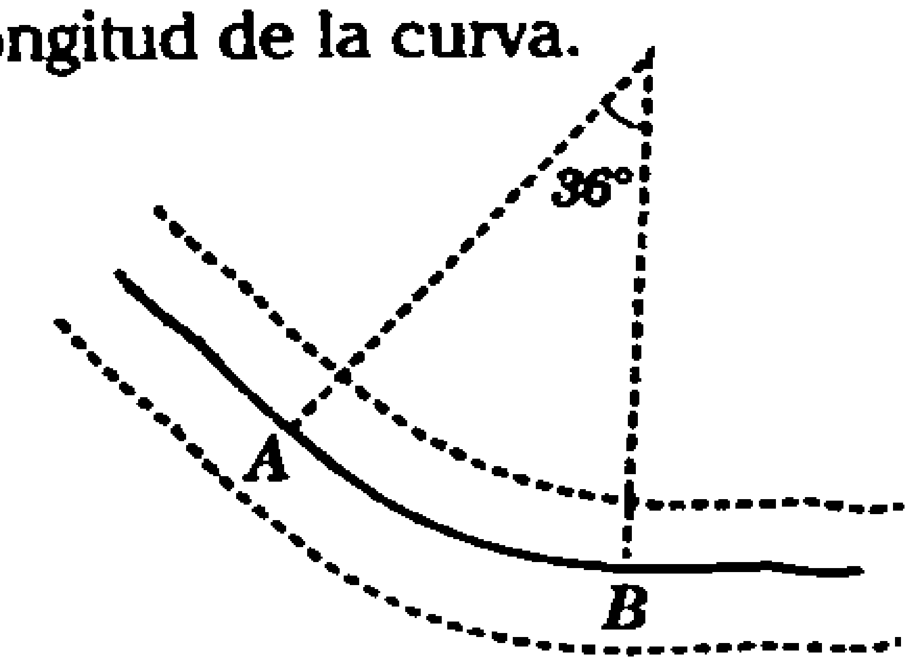
* Reduciendo :

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{x^2}{L^2}\Rightarrow x^2=\dfrac{L^2}{4}\Rightarrow x=\dfrac{L}{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

La figura muestra la linea central de una curva de una autopista, como arco de una circunferencia de $65m$ de radio. Si el ángulo central es de $36°$, determínese la longitud de la curva.



A) 37,6m B) 40,82 C)51
D)41,44 E)43,96

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico AOB, es un sector circular con centro en O, se tiene como datos : $OA=OB=65m$.

* Nos piden : longitud del arco AB: ℓ En primer lugar expresamos $36°$, es decir :

$36°=36°\times\dfrac{\pi rad}{180°}$

$36°=\dfrac{\pi rad}{5}$

* Aplicando : $\ell=\theta\times r$, tenemos :

$\ell=\dfrac{\pi}{5}\times 65m \Rightarrow \ell=13\pi m$

* Si consideramos : $\pi\sim 3,14$

* Entonces:

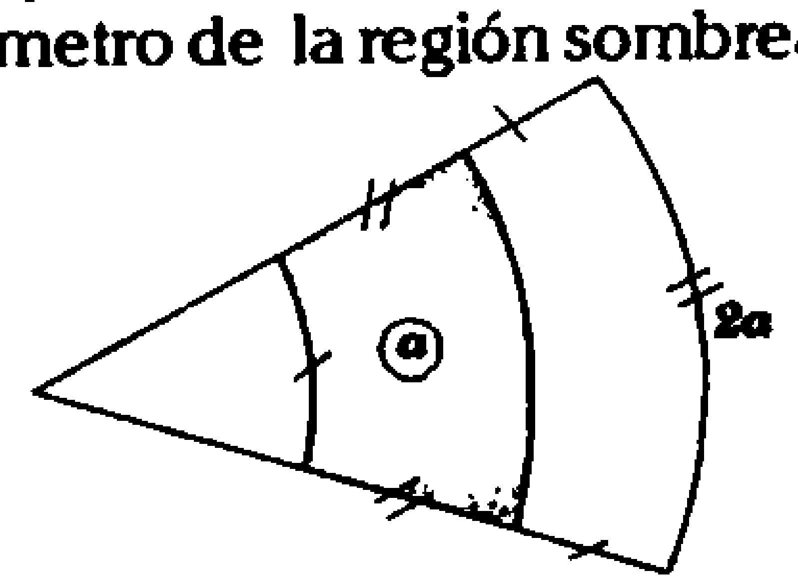
$\ell=13(3,14)m=40,82m$

* Por consiguiente, longitud de la curva $=40,82m$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

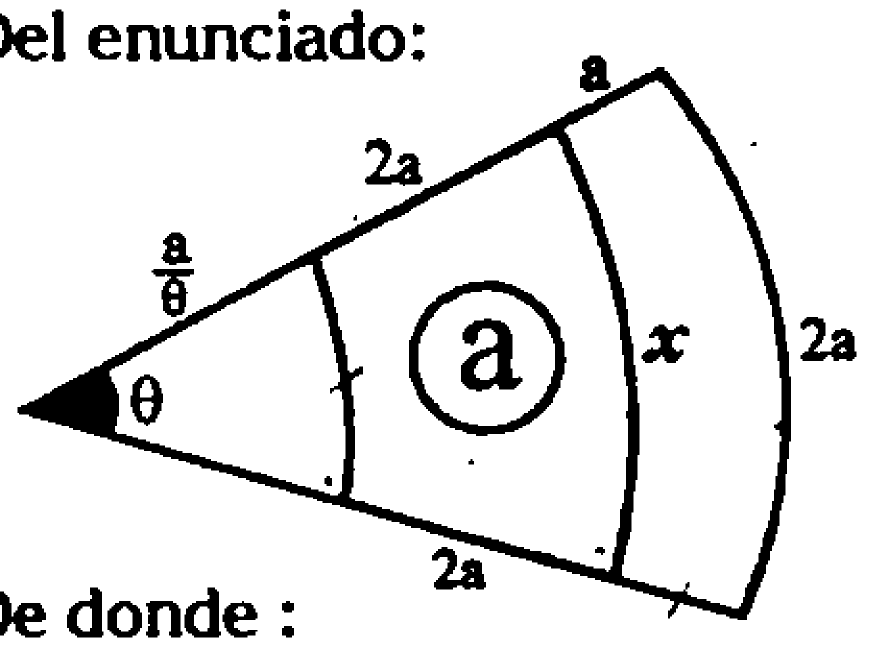
Del gráfico, hallar el valor del perímetro de la región sombreada.



A) 10 a/3 B) 20 a/3 C) 1,5 a
D) 35 a/3 E) 3,8a

RESOLUCIÓN:

* Del enunciado:



* De donde :

$$2a=\theta\left(2a+a+\frac{a}{\theta}\right)\Rightarrow\theta=\frac{1}{3}$$

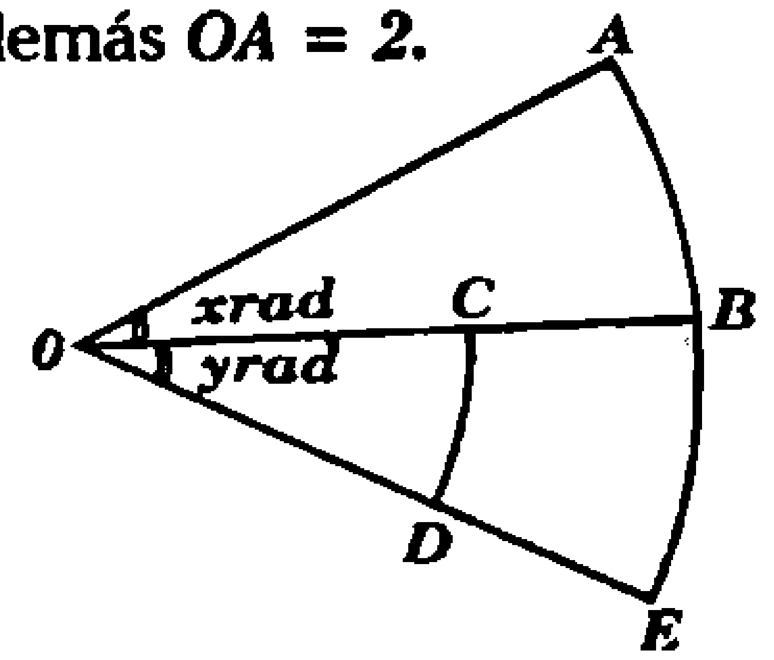
$$\Rightarrow x=\theta\left(\frac{a}{\theta}+2a\right)=\frac{1}{3}(3a+2a)=\frac{5a}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Perímetro}\ (a) = a+4a+\frac{5a}{3}=\frac{20\,a}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 :

Hallar el área de la región sombreada, si los sectores *AOB* y *COD*, tienen igual área; además *OA* = *2*.



A) x–y *B) 2(x–y)* *C) 2(y–x)* *D) 4(x–y)* *E) 3(x–y)*

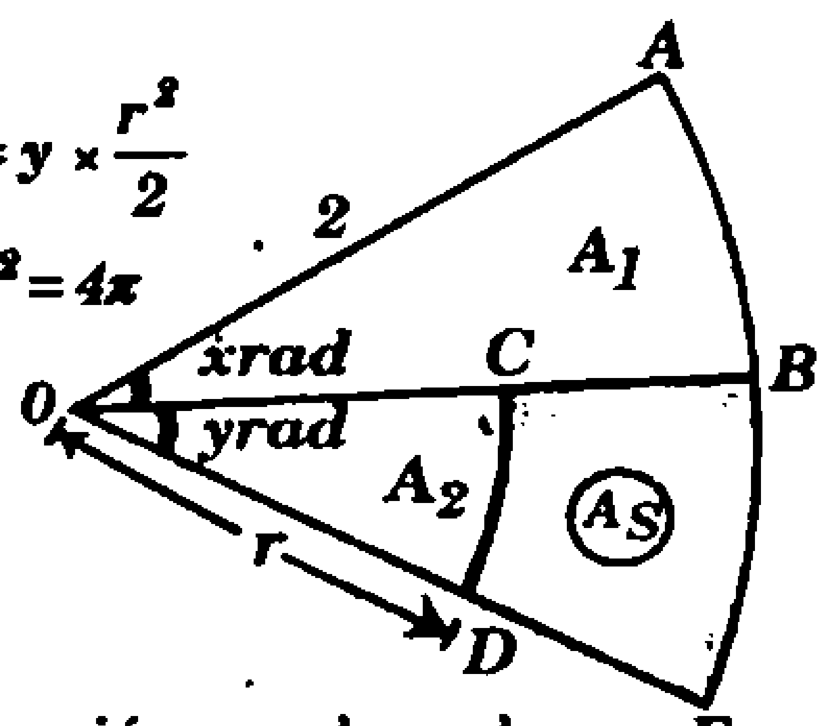
RESOLUCIÓN :

* Datos :

$A_1 = A_2$

$$x\times\frac{2^2}{2}=y\times\frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow y\times r^2=4x$$



* En la región sombreada

$$A_s=A_{BCE}-A_2$$

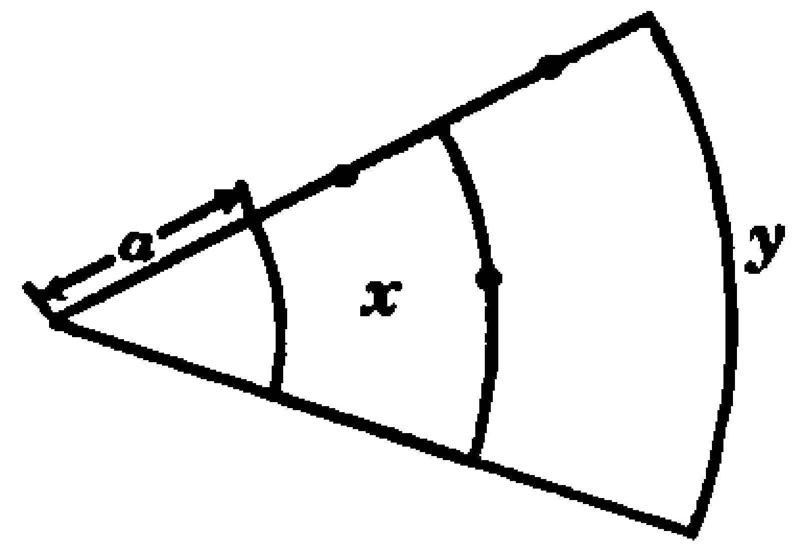
$$A_s=y\times\frac{2^2}{2}-y\times\frac{r^2}{2}$$

$$\Rightarrow A_s=\frac{1}{2}(4y-y\underset{4x}{\underbrace{r^2}})\Rightarrow 2(y-x)$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 24 :

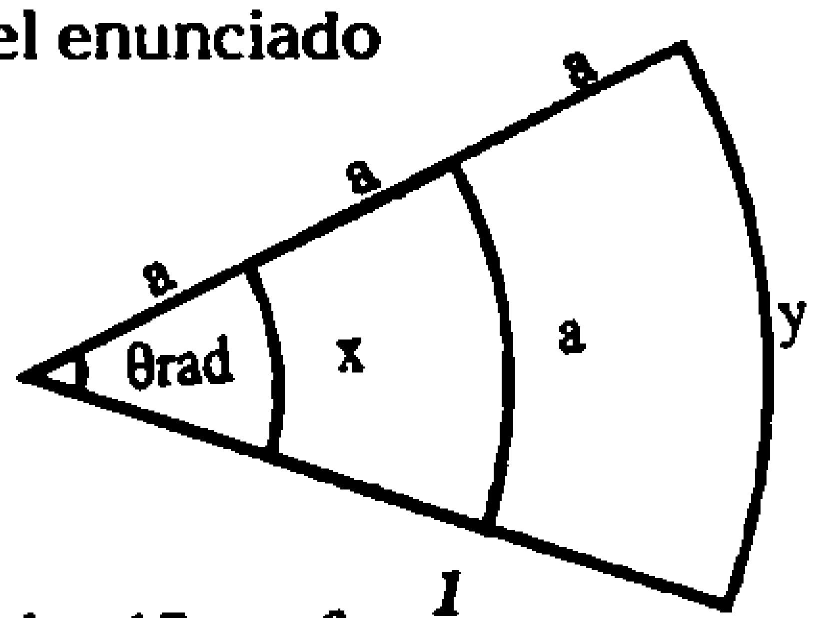
Del gráfico, calcular: "*x + y*"



A) a *B) 2a* *C) 3a* *D) 4a* *E) 5a*

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado



* Del gráfico: $\theta=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{2}\ ;\ y=\frac{3a}{2}$$

$$\Rightarrow x+y=2a$$

RPTA : "B"

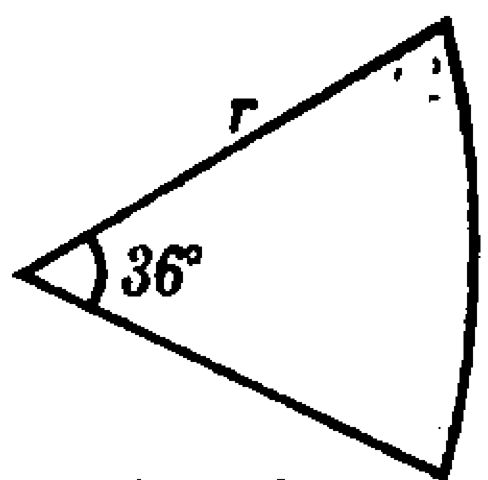
PROBLEMA 25 :

Se tiene un sector circular del radio "*r*" y ángulo central *36°*. ¿Cuánto hay que aumentar al ángulo central de dicho sector para que su área no varíe, si su radio disminuye en un cuarto del anterior?.

A) 64° *B) 36°* *C) 28°* *D) 100°* *E) 20°*

RESOLUCIÓN :

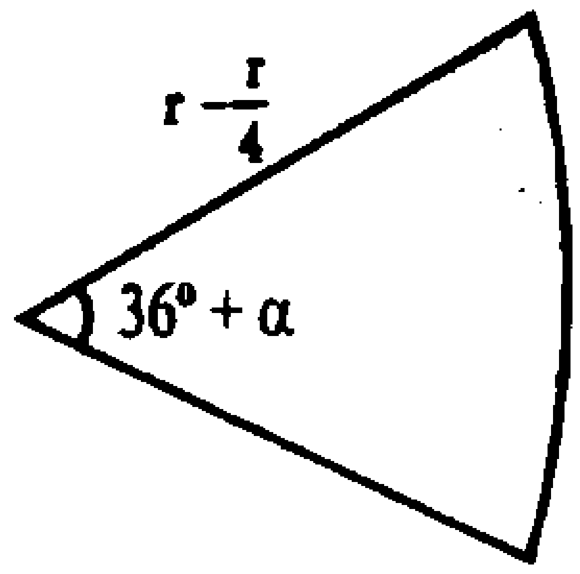
* Sector inicial (inicialmente)



$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{36\pi}{180}\right)r^2\ ....(I)$$

(*S* = área del sector)

* Sector circular (después)



* Observar que el radio *(por dato)*, del nuevo sector es igual a *3r/4;* pero el área no varía.

$$S=\frac{1}{2}(36+\alpha)\frac{\pi}{180}\left(\frac{3r}{4}\right)^2\ ....(II)$$

* Como el área es la misma; entonces igualamos *(I)* y *(II)*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{36\pi}{180}\right)r^2=\frac{1}{2}(36+\alpha)\frac{\pi}{180}\left(\frac{3r}{4}\right)^2$$

* Simplificando:

$$36=(36+\alpha)\frac{9}{16}$$

* Operando, tenemos: $\alpha = 28°$

RPTA : "C"

PROBLEMA 26 :

Siendo θ el ángulo central de un sector circular cuya longitud de arco es 2π metros , calcular su radio , en metros , si :

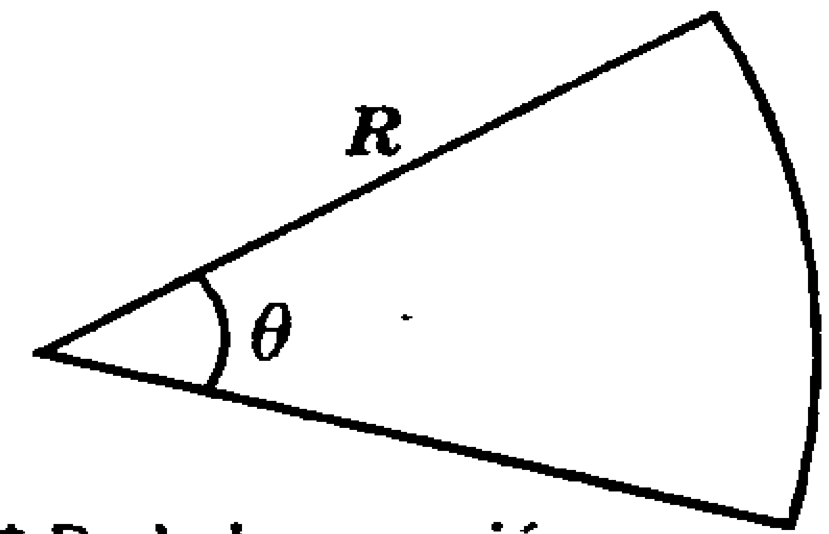
$$3\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}+7\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}=10$$

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 2,5*

RESOLUCIÓN :

* Del primer dato :

$$2\pi\Rightarrow\boxed{\theta R=2\pi}...(I)$$



* Dada la ecuación :

$$3\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}+7\sqrt{\frac{\pi}{\theta}}=10$$

* Hacemos el siguiente cambio

$$\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}=x$$

$$\Rightarrow 3(x)+7\left(\frac{1}{x}\right)=10$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2+7}{x}=10\Rightarrow 3x^2+7=10x$$

$$\left.\begin{array}{l}3x2-10+7=0\\3x\quad\quad 7\\x\quad\quad -1\end{array}\right\}(3x+7)(x-1)=0$$

* Del primer factor :

$$3x-7=\frac{0}{3}\Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

* Luego :

$$\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{\theta}{\pi}=\frac{49}{9}$$

$\Rightarrow \theta=\frac{49}{9}\pi$ ..esto es imposible ya que :

* θ es el ángulo central de un sector circular , por lo tanto no puede ser mayor de 2π.
* Del segundo factor :

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

* Luego :

$$\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}=1 \Rightarrow \frac{\theta}{\pi}=1 \Rightarrow \theta=\pi$$

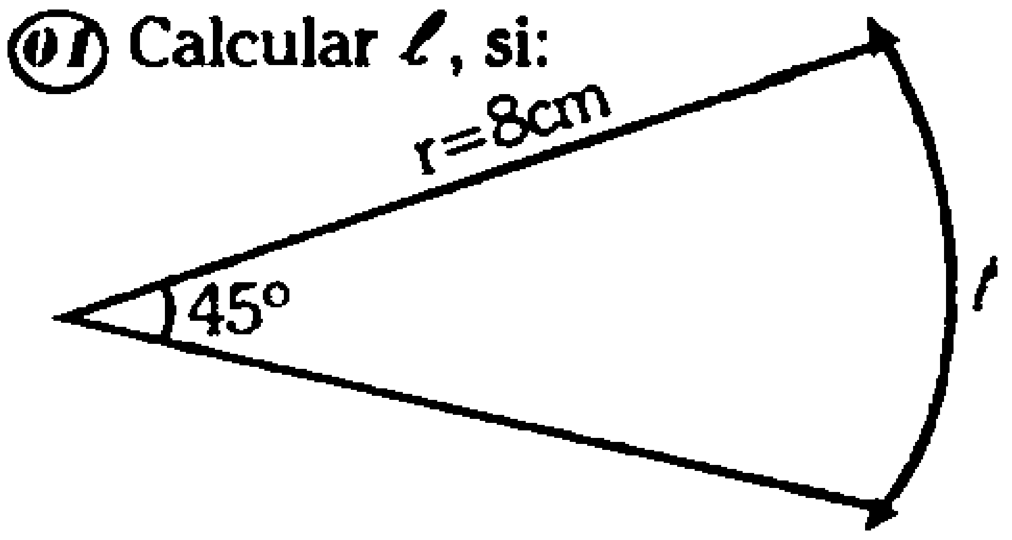
* Reemplazando en *(I)*:

$$\pi R=2\pi \Rightarrow R=2$$

RPTA : "B"

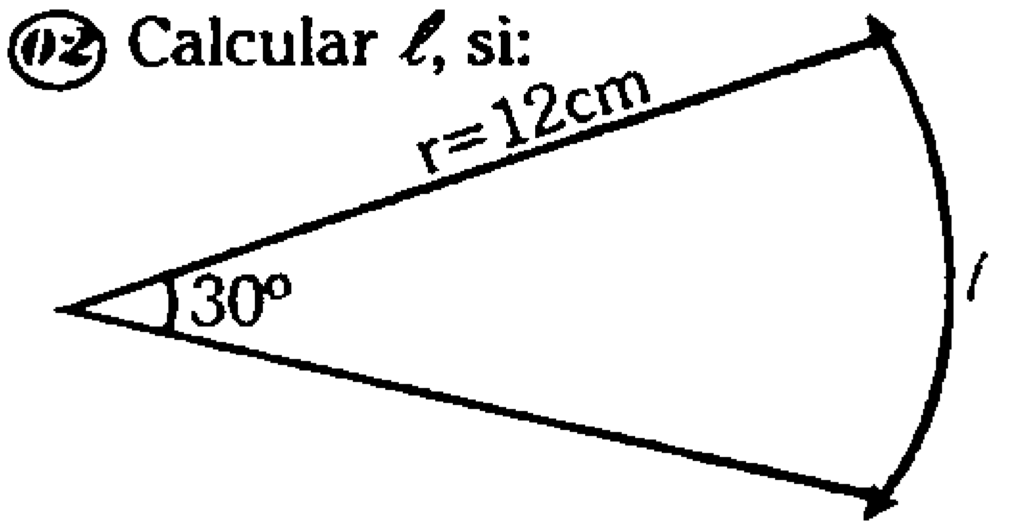
PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular ℓ, si:



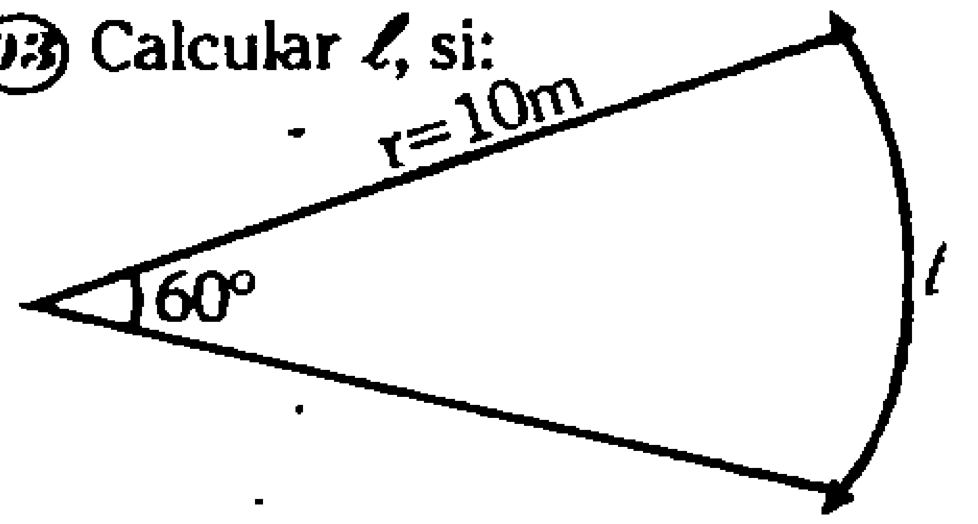
RPTA: ....

02 Calcular ℓ, si:



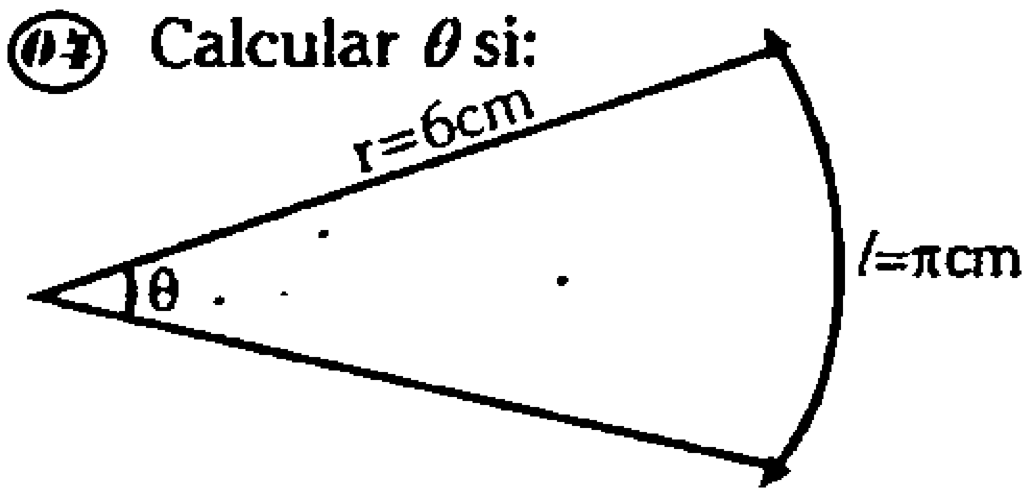
RPTA: ....

03 Calcular ℓ, si:



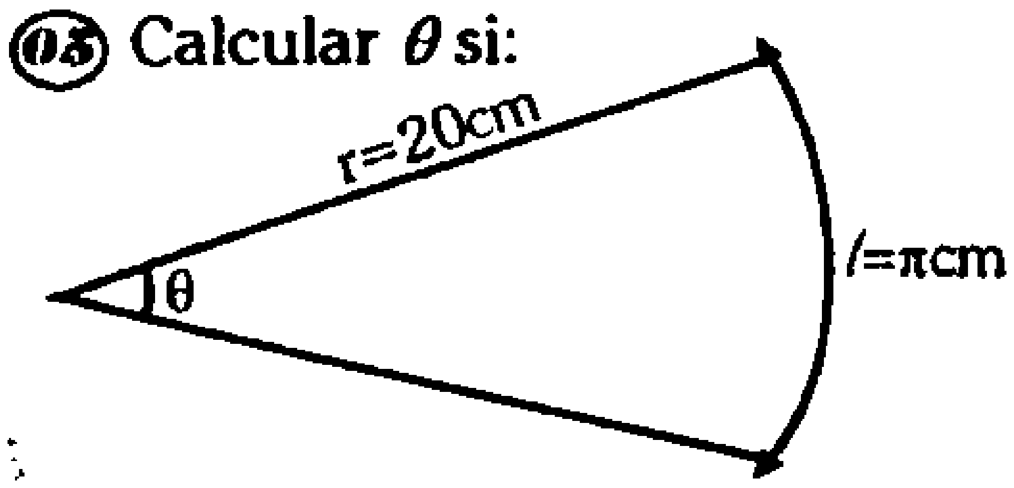
RPTA: ....

04 Calcular θ si:



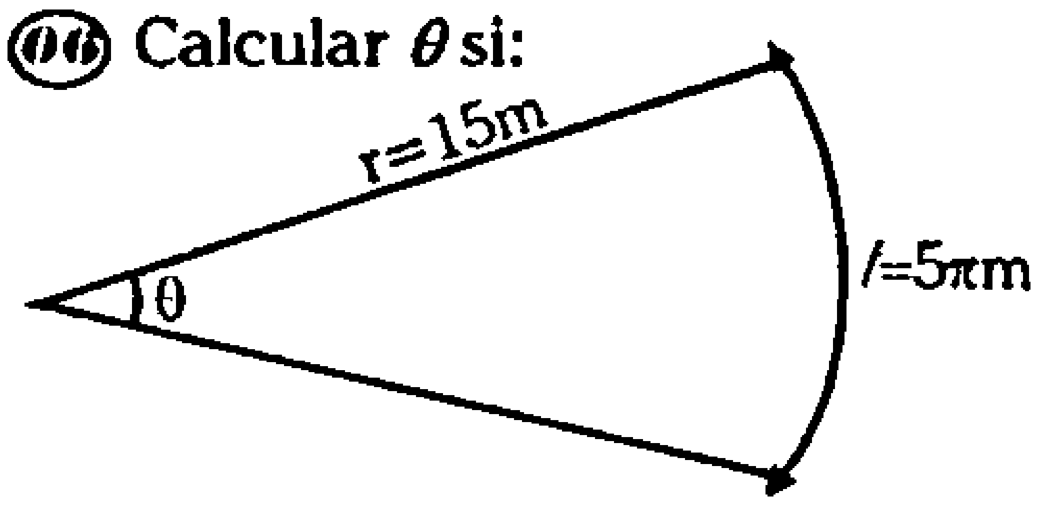
RPTA: ....

05 Calcular θ si:



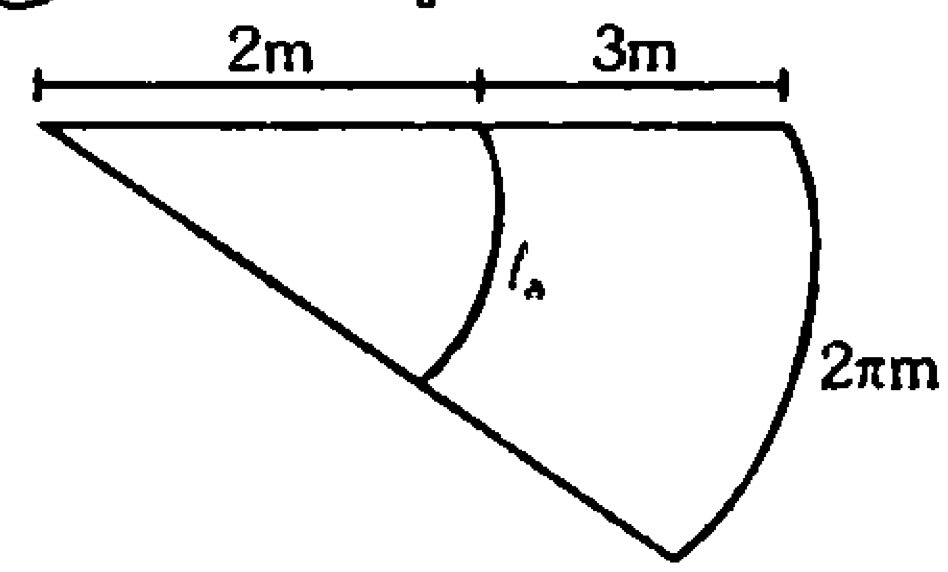
RPTA: ....

06 Calcular θ si:



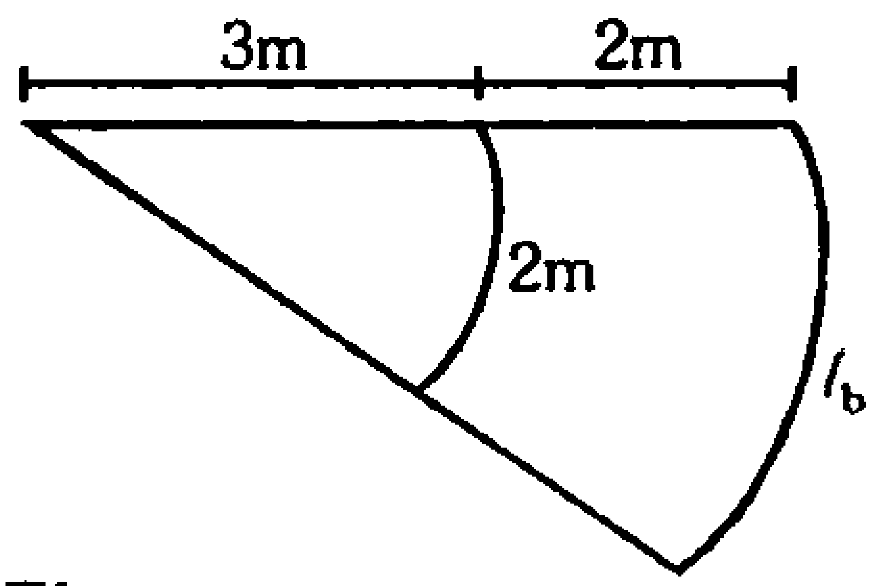
RPTA: ....

07 Calcular ℓ_a si:



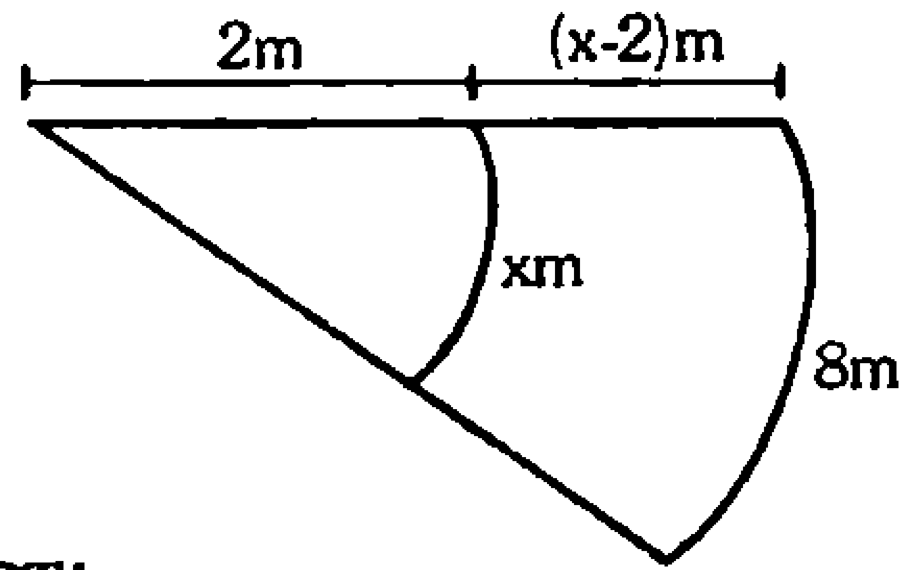
RPTA: ....

08 Calcular ℓ_b si:



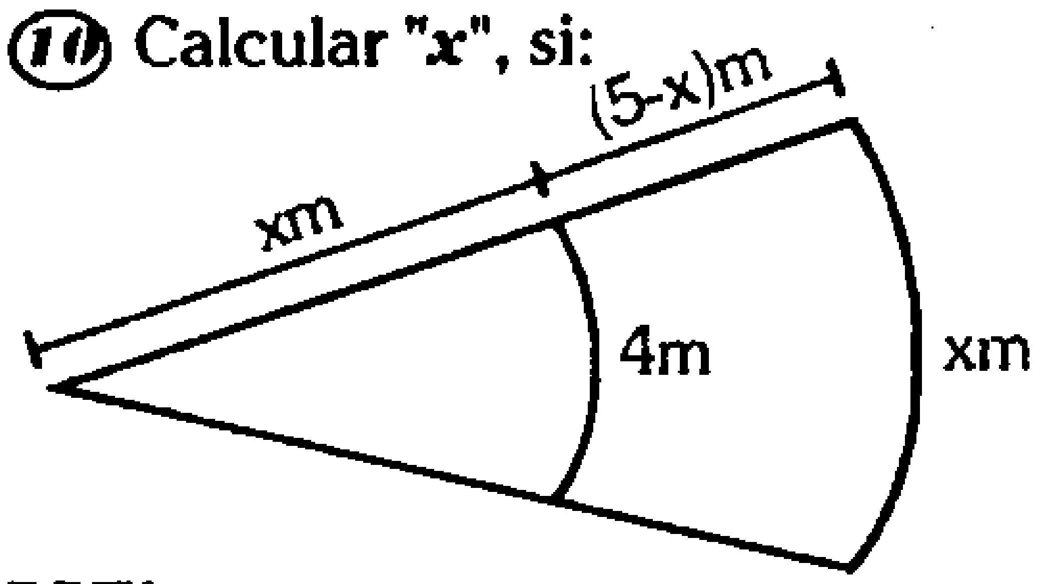
RPTA: ....

09 Calcular "x", si:



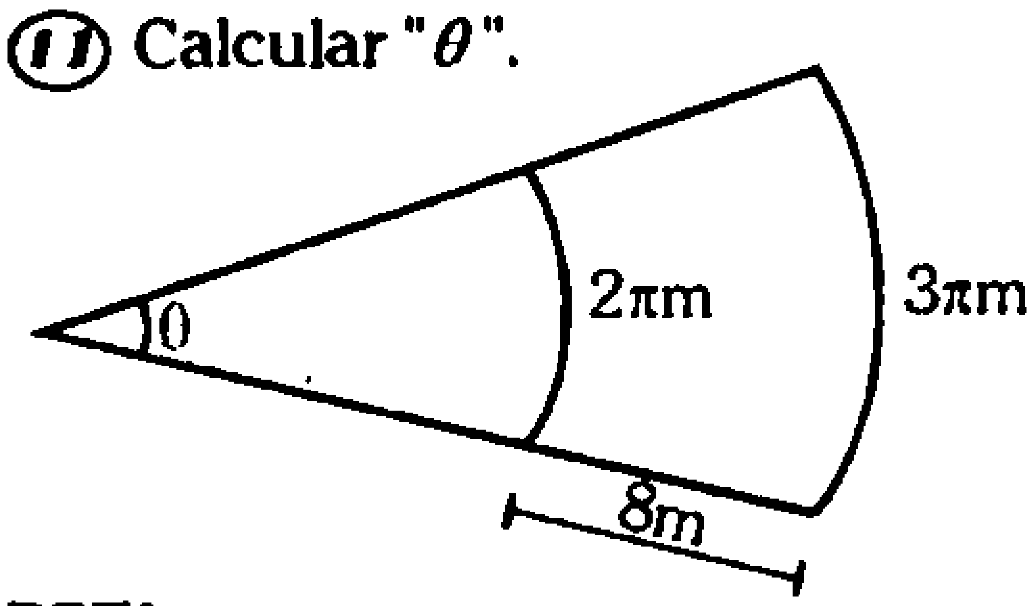
RPTA: ....

10 Calcular "x", si:



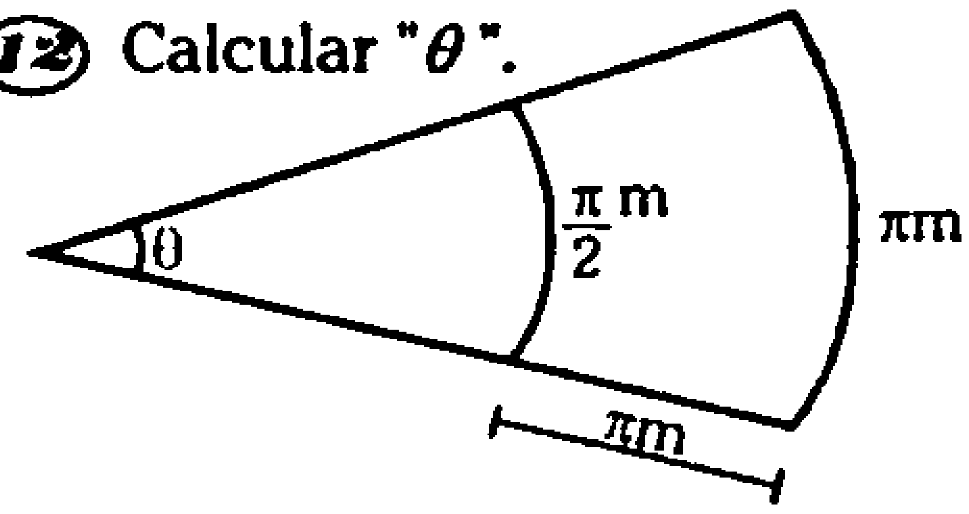
RPTA: ....

11 Calcular "θ".



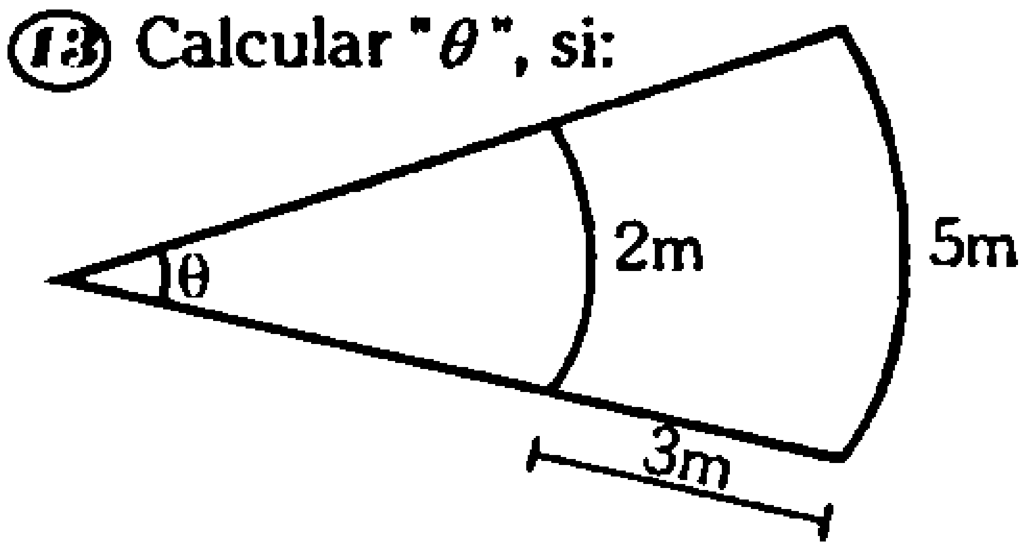
RPTA: ....

12 Calcular "θ".



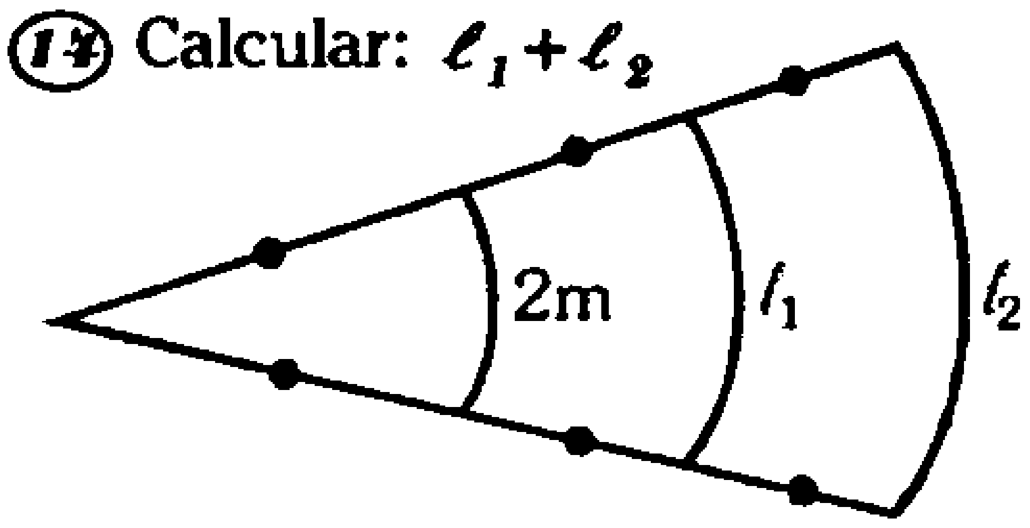
RPTA: ....

13 Calcular "θ", si:



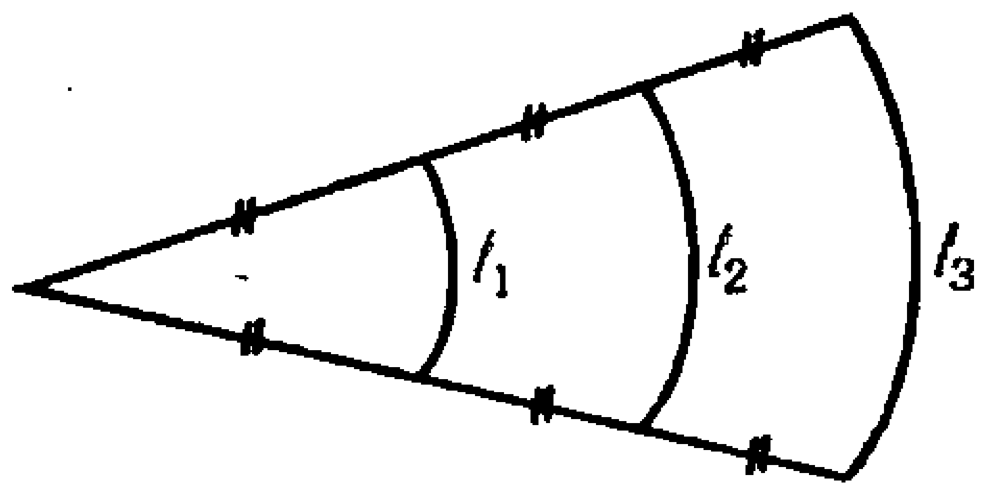
RPTA: ....

14 Calcular: $\ell_1+\ell_2$



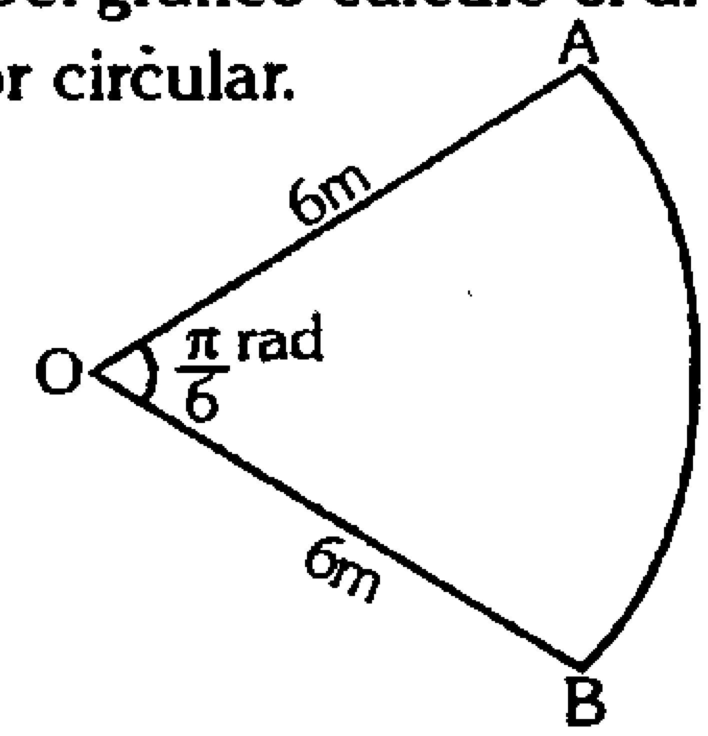
RPTA: ....

15 Calcular: $E=\frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_3-\ell_2}$



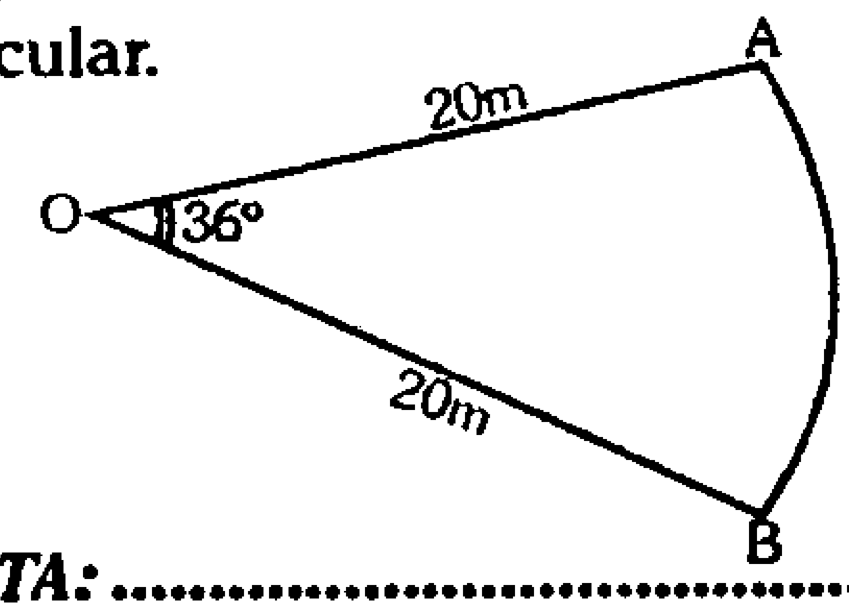
RPTA: ....

16 Del gráfico calcule el área del sector circular.



RPTA: ....

17 Calcule el área del sector circular.



RPTA: ....

(18) Calcule el área de un sector circular cuyo ángulo central mide 40^g y su radio mide $10m$.

RPTA:.......................................

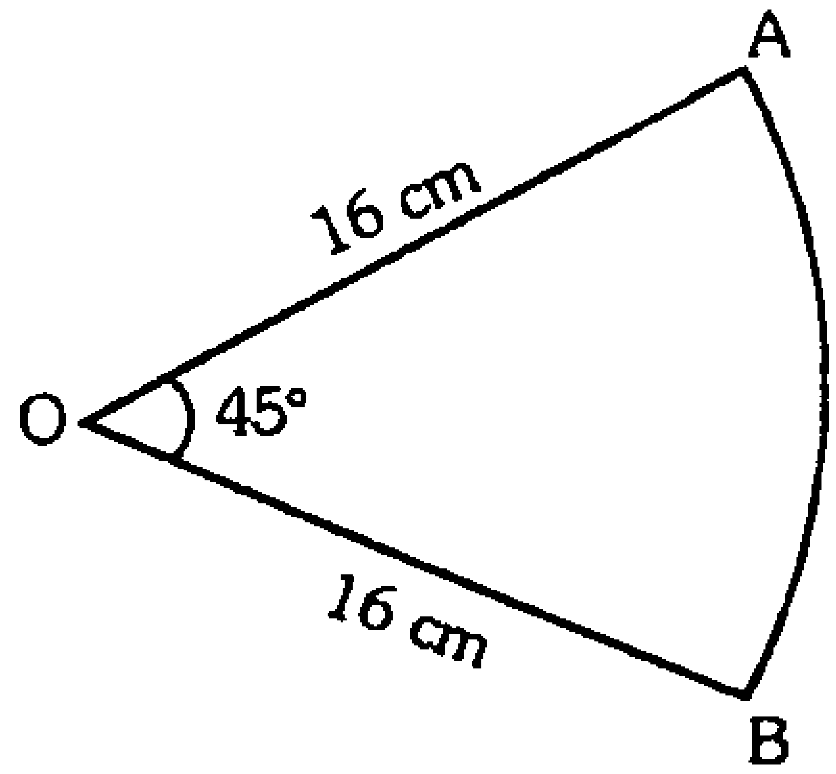
(19) En un sector circular el radio mide $4m$ y el arco correspondiente mide $3\pi m$, ¿cuál es el área del sector?

RPTA:.......................................

(20) En un sector circular el ángulo central mide $20°$ y el arco correspondiente mide $4\pi m$. ¿Cuál es el área del sector circular?

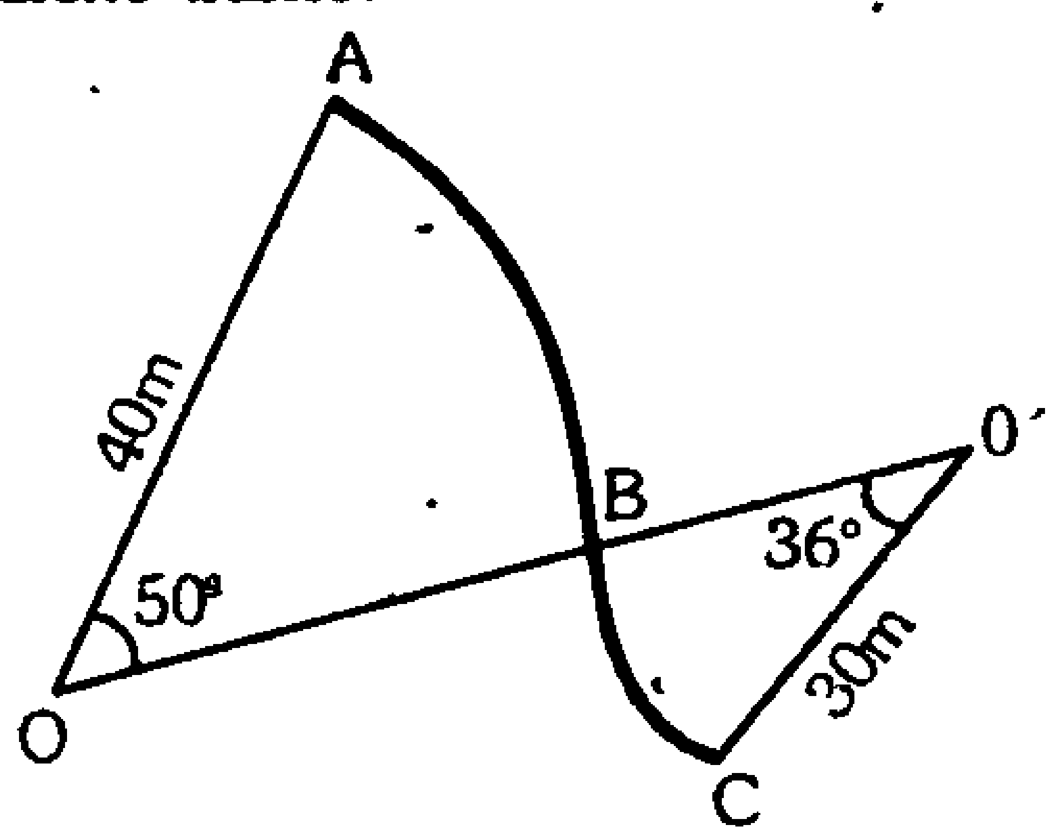
RPTA:.......................................

(21) Hallar la longitud de arco *AB* en:



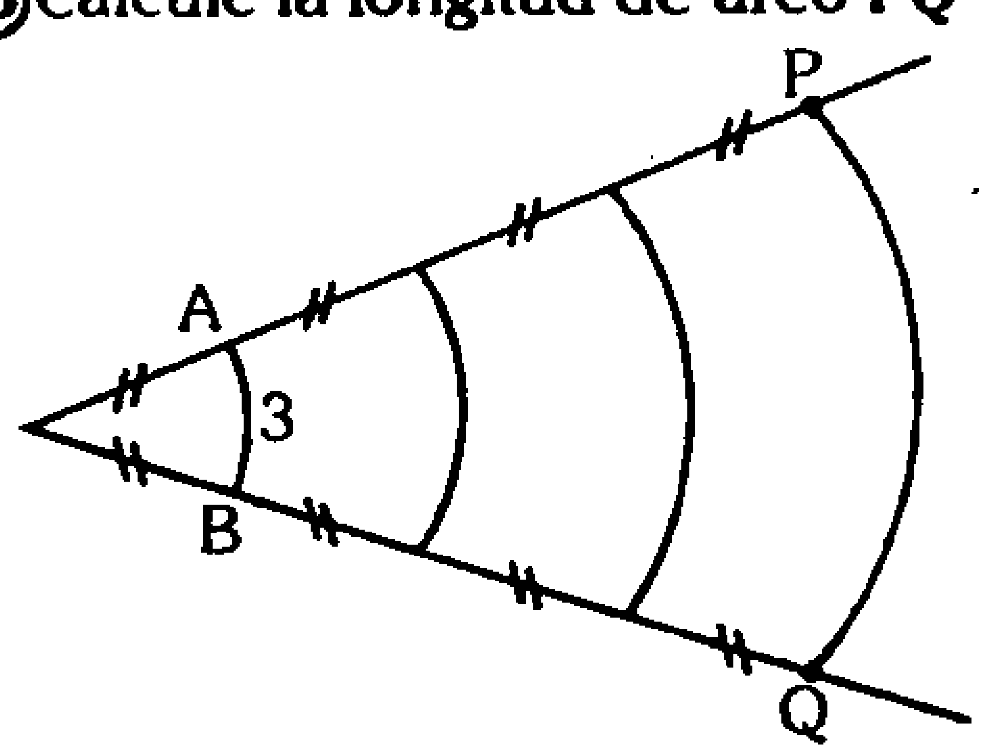
RPTA:.......................................

(22) El tramo de una carretera *ABC* está construido como muestra el gráfico, calcule la longitud de dicho tramo:



RPTA:.......................................

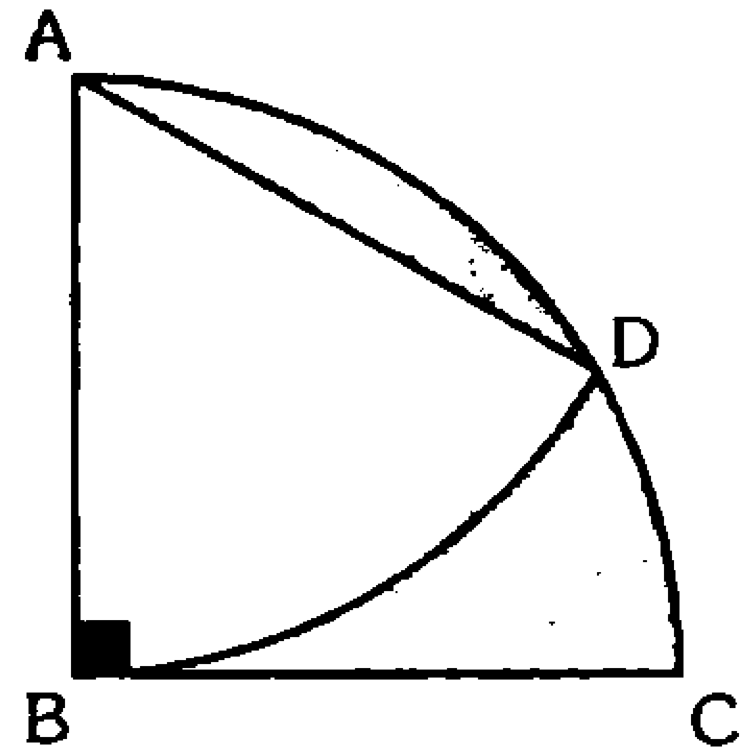
(23) Calcule la longitud de arco *PQ* si:



Longitud de arco *AB* igual a *3*.

RPTA:.......................................

(24) Del gráfico mostrado calcule el perímetro de la región sombreada si *ABC* y *DAB* son sectores circulares con centro en B y A respectivamente además $AB=6m$.



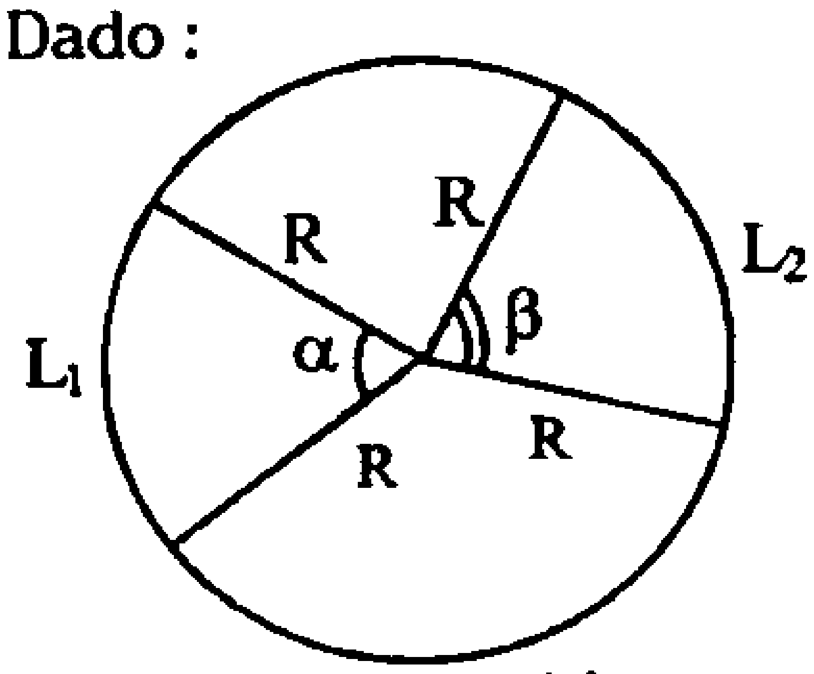
RPTA:.......................................

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Se tiene un sector circular cuyo ángulo central mide 40^g. Si el radio mide $15m$. Calcular la longitud de arco que subtiende.

A) πm B) $2\pi m$ C) $3\pi m$
D) $4\pi m$ E) $5\pi m$

(02) Dado :

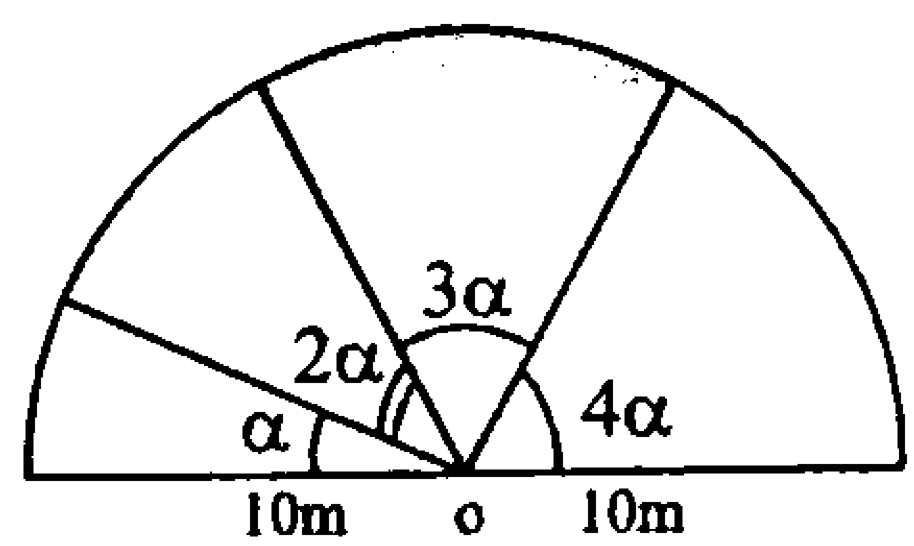


$$L_1 + L_2 = \frac{14\pi}{3}$$
$$\alpha + \beta = 120°$$

Calcular "*R*"

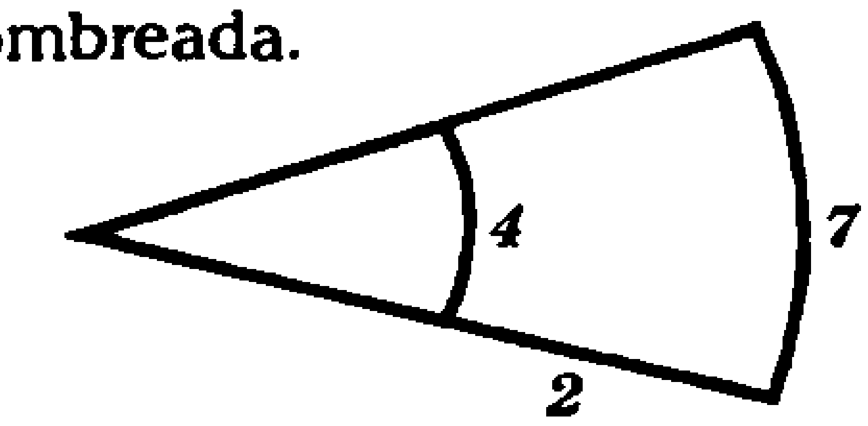
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(03) Calcular el área de la región sombreada.



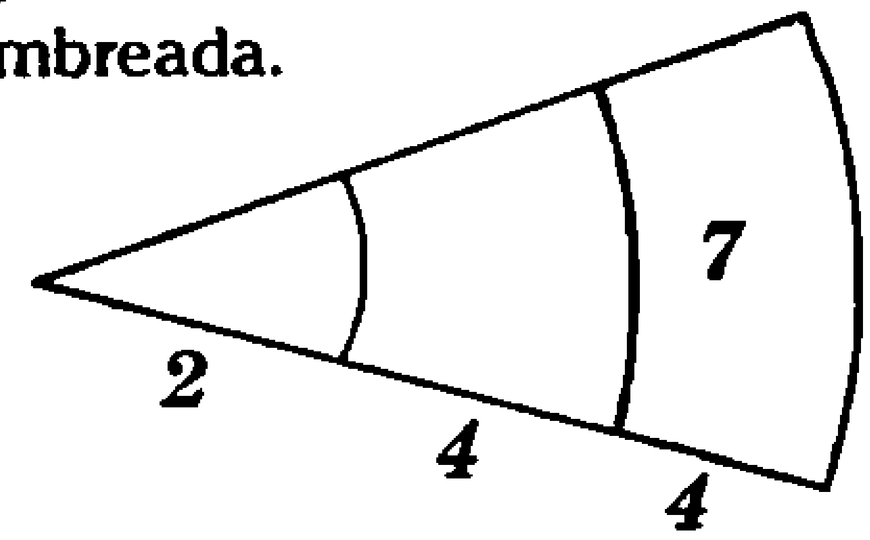
A) $10\pi m^2$ B) $5\pi m^2$ C) $20\pi m^2$
D) $25\pi m^2$ E) $30\pi m^2$

(04) Calcular el área de la región sombreada.



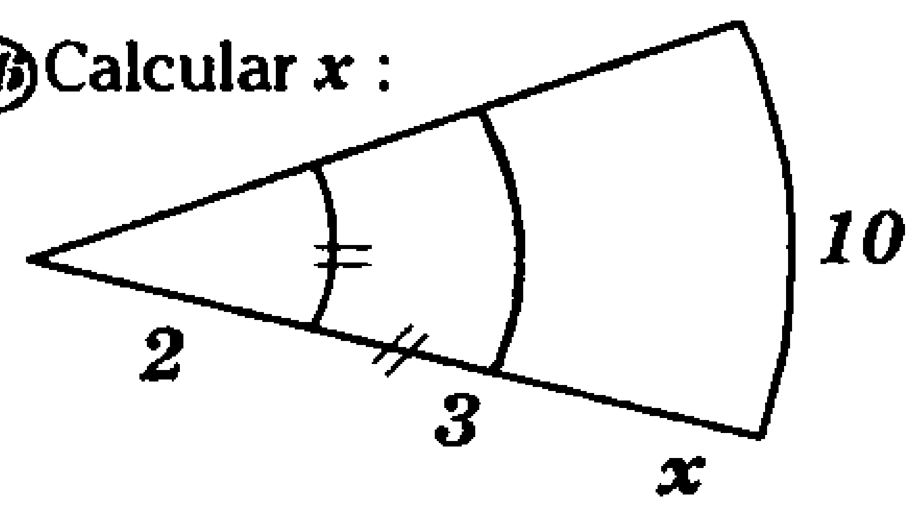
A) $\frac{11\mu^2}{3}$ B) $\frac{12\mu^2}{3}$ C) $\frac{14\mu^2}{3}$
D) $\frac{16\mu^2}{3}$ E) $\frac{17\mu^2}{3}$

(05) Calcular el área de la región sombreada.



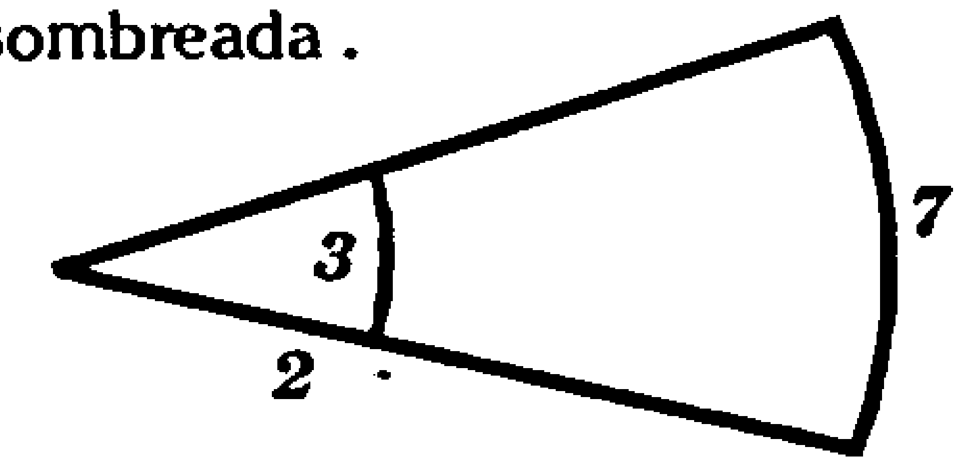
A) $36\mu^2$ B) $36\mu^2$ C) $34\mu^2$
D) $33\mu^2$ E) $32\mu^2$

(06) Calcular *x* :



A) 1/3 B) 1 C) 4/3 D) 5/3 E) 2

(07) Calcular el área de la región sombreada .

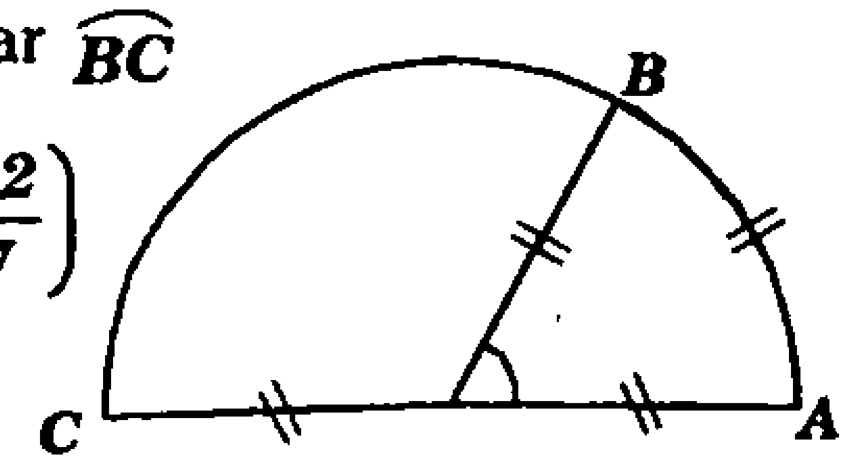


A) $\frac{10\mu^2}{3}$ B) $\frac{20\mu^2}{3}$ C) $\frac{40\mu^2}{3}$
D) $\frac{50\mu^2}{3}$ E) $\frac{70\mu^2}{3}$

(08) *Si* : $\widehat{AB} = 14m$

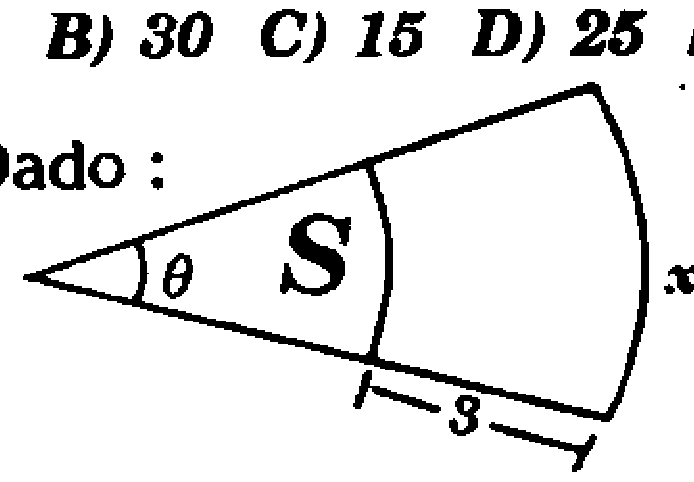
Calcular $\widehat{BC}$

$\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



A) 10 B) 30 C) 15 D) 25 E) 35

(09) Dado :



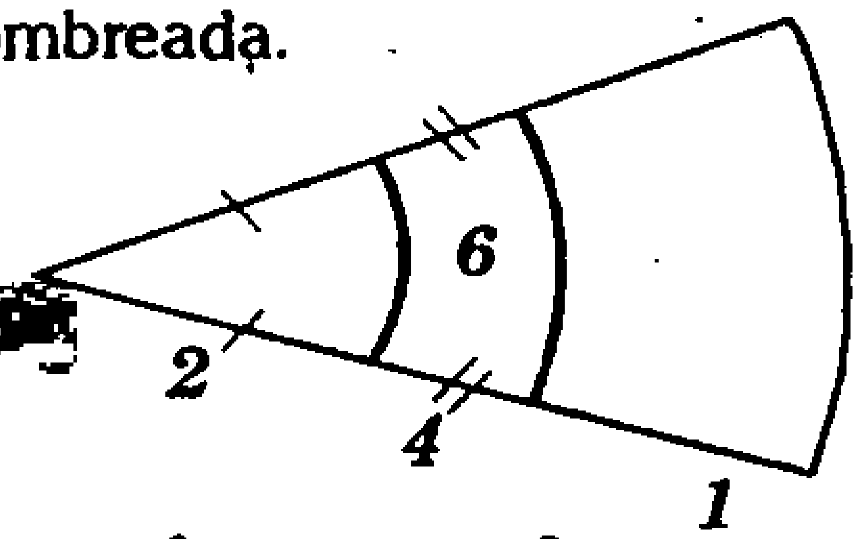
$\theta = 60°$; $S = Área$

$S = 6\pi\mu^2$

Hallar x

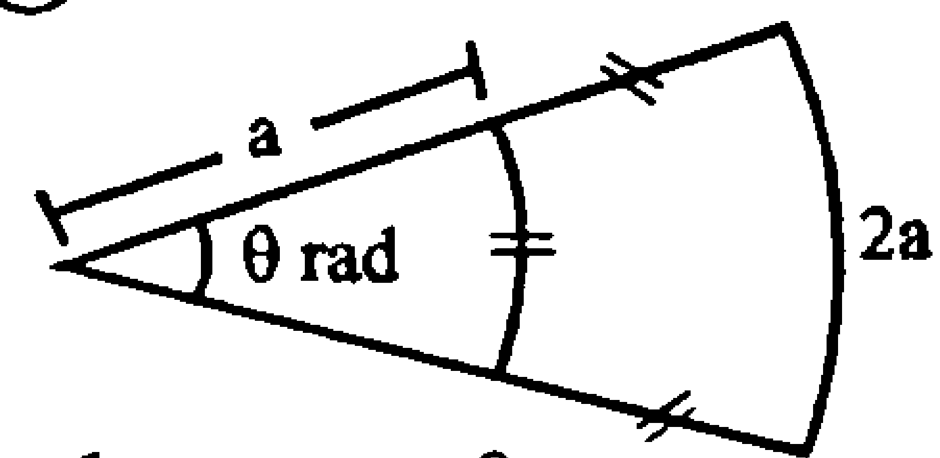
A) $3\pi\mu$ B) $4\pi\mu$ C) $5\pi\mu$
D) $3{,}5\pi\mu$ E) $2{,}5\pi\mu$

10 Calcular el área de la región sombreada.



A) $\frac{11\mu^2}{2}$ B) $\frac{13\mu^2}{2}$ C) $\frac{15\mu^2}{2}$
D) $\frac{17\mu^2}{2}$ E) $\frac{19\mu^2}{2}$

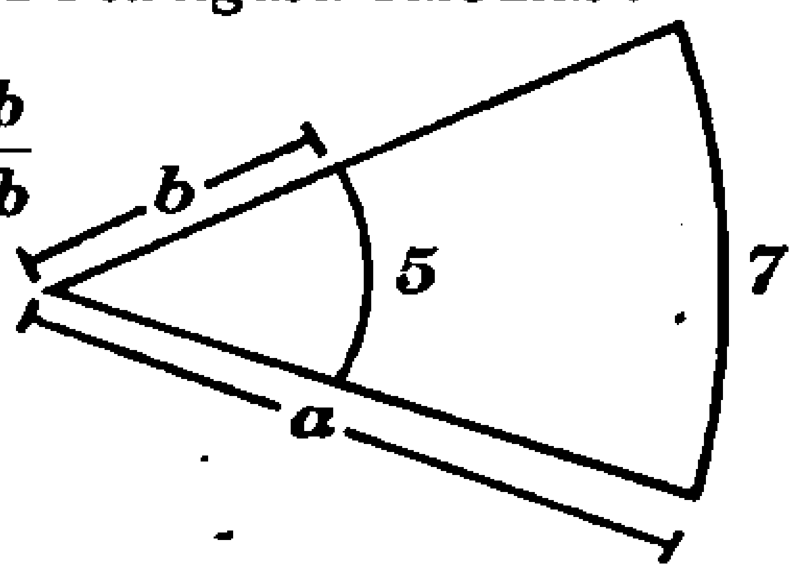
11 Calcular "θ" :



A) $\frac{1}{2}rad$ B) $\frac{3}{2}rad$ C) $3\,rad$
D) $2rad$ E) $1rad$

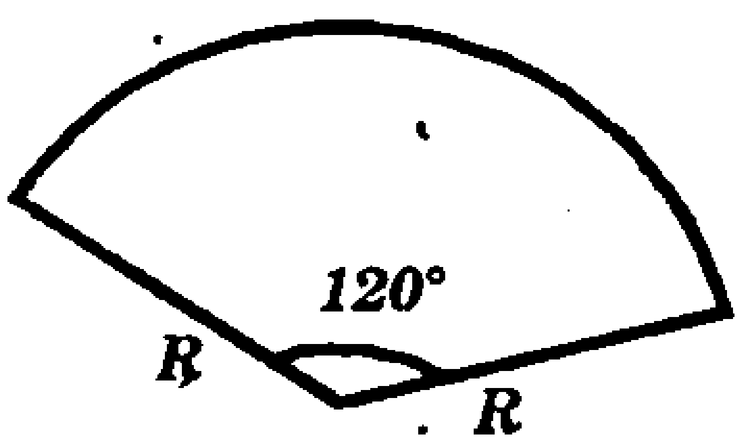
12 De la figura calcular :

$\frac{a+b}{a-b}$



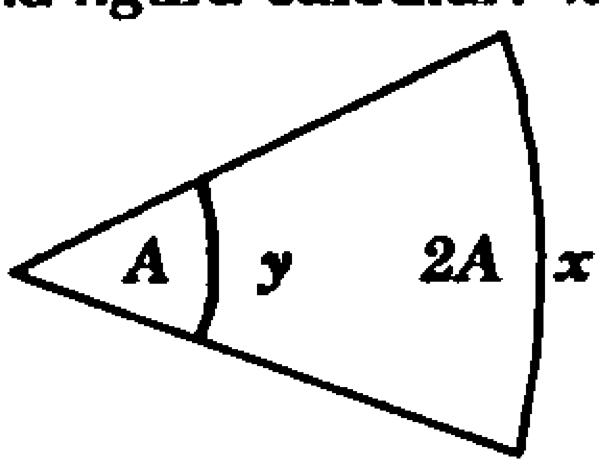
A) 1 B) 3 C) 6 D) 5 E) 4

13 Calcular el área de la región sombreada.; $R = 6m$.



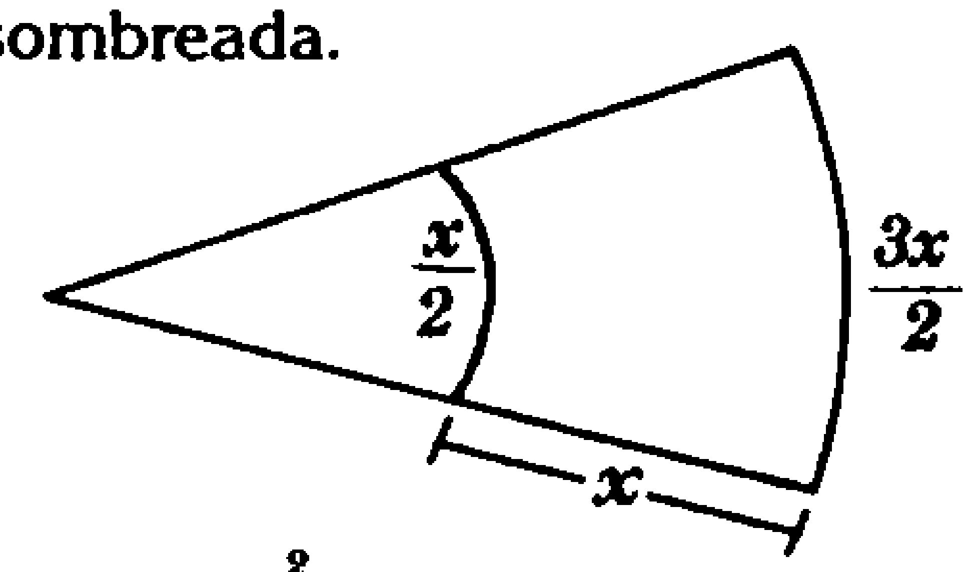
A) $12\pi m^2$ B) $14\pi m^2$ C) $15\pi m^2$
D) $16\pi m^2$ E) $17\pi m^2$

14 De la figura calcular: x/y



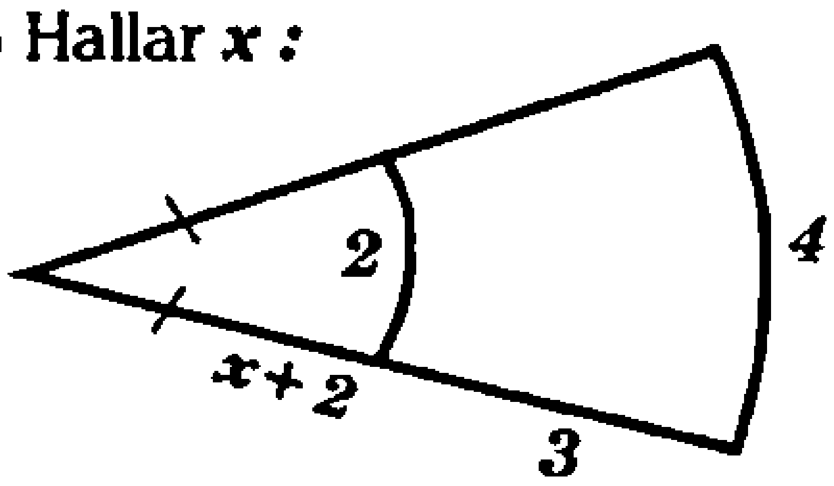
A) 1 B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

15 Calcular el área de la región sombreada.



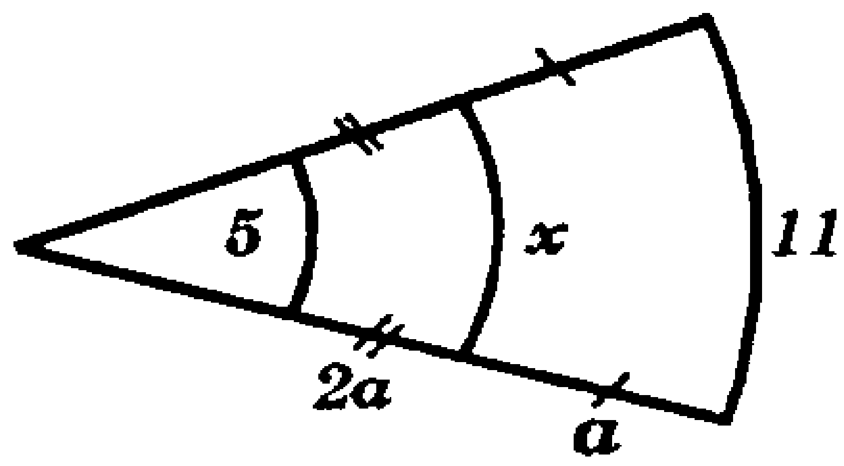
A) x^2 B) $\frac{x^2}{2}$ C) x^2 D) x^2+1 E) x^2-1

16 Hallar x :



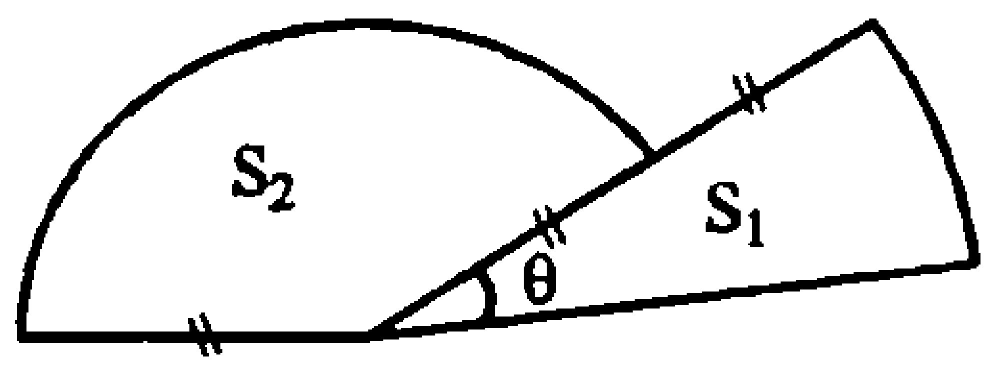
A) 1 B) 1/2 C) 1/3 D) 2 E) 3

17 Calcular el valor de "x"



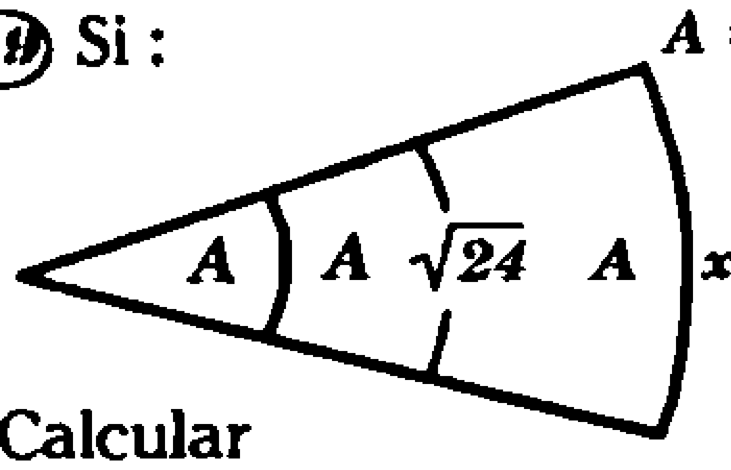
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

18 Calcular "θ"



A) $\frac{\theta}{10}rad$ B) $\frac{\pi}{9}rad$ C) $\frac{\pi}{6}rad$
D) $\frac{\pi}{5}rad$ E) $\frac{\pi}{4}rad$

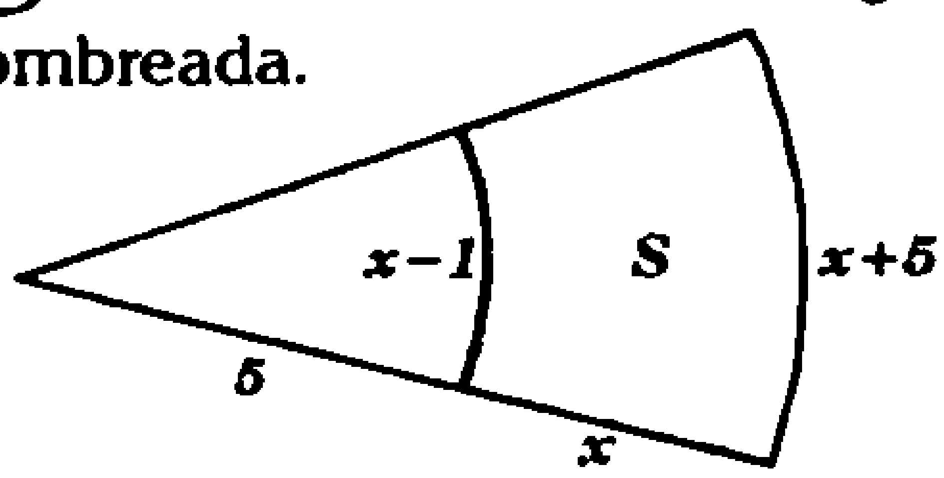
19 Si : $A = Área$



* Calcular

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

20 Calcular el área de la región sombreada.



A) $48\mu^2$ B) $44\mu^2$ C) $40\mu^2$
D) $46\mu^2$ E) $43\mu^2$

21 Hallar la longitud de un arco que subtiene un ángulo central de $45°$, si la longitud del radio de la circunferencia es $8m$.

(usar $\pi = \sqrt{3}+\sqrt{2}$)

A) $3\pi m$ B) $180\pi m$ C) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})m$
D) $\frac{\pi}{4}m$ E) $\frac{22}{7}m$

22 Calcular la longitud del radio de una circunferencia de $48m$ de longitud de arco que subtiene un ángulo central de 4 radianes .

A) 24m B) 14m C) 12m D) 33m E) 22m

23 Hallar la medida del ángulo central cuyo arco correspondiente mide $110cm$ y radio $70cm$.

(usar $\pi = 22/7$)

A) πrad B) $\frac{\pi}{4}rad$ C) $\frac{3\pi}{4}rad$
D) $\frac{\pi}{2}rad$ E) $\frac{\pi}{6}rad$

24 Dado un sector circular de arco $12m$; de radio $(x+3)m$ y ángulo central 2 radianes. Calcular "x".

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 10

25 Hallar el área de un sector circular cuyo ángulo central mide $30°$ y su radio $6cm$.

A) πcm^2 B) $2\pi cm^2$ C) $3\pi cm^2$
D) $4\pi cm^2$ E) $5\pi cm^2$

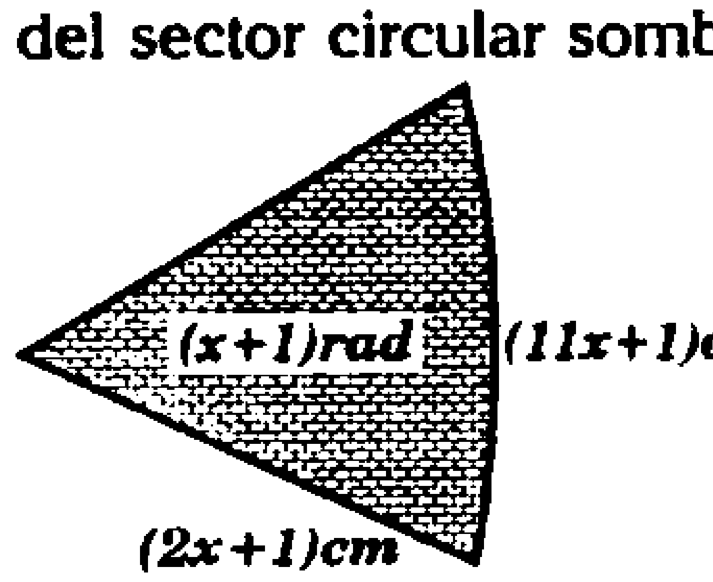
26 Hallar el área de un sector circular cuya longitud de arco es $12cm$ y radio $6cm$.

A) $12\ cm^2$ B) $36cm^2$ C) $72\ cm^2$
D) $46cm^2$ E) $16\ cm^2$

27 El ángulo central de un sector circular es $3rad$ y tiene como longitud de arco $6cm$. Calcular su área.

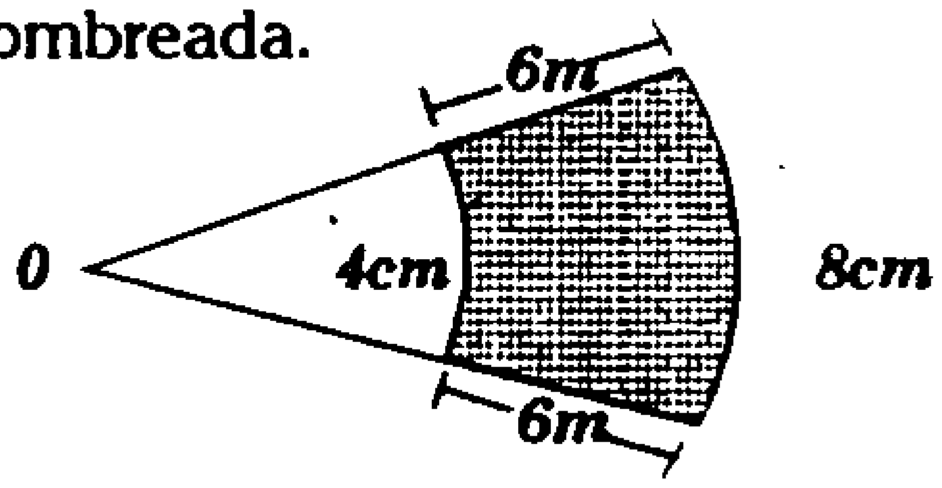
A) $2cm^2$ B) $4cm^2$ C) $6cm^2$
D) $8cm^2$ E) $10cm^2$

28 Del gráfico mostrado. Hallar el área del sector circular sombreado.



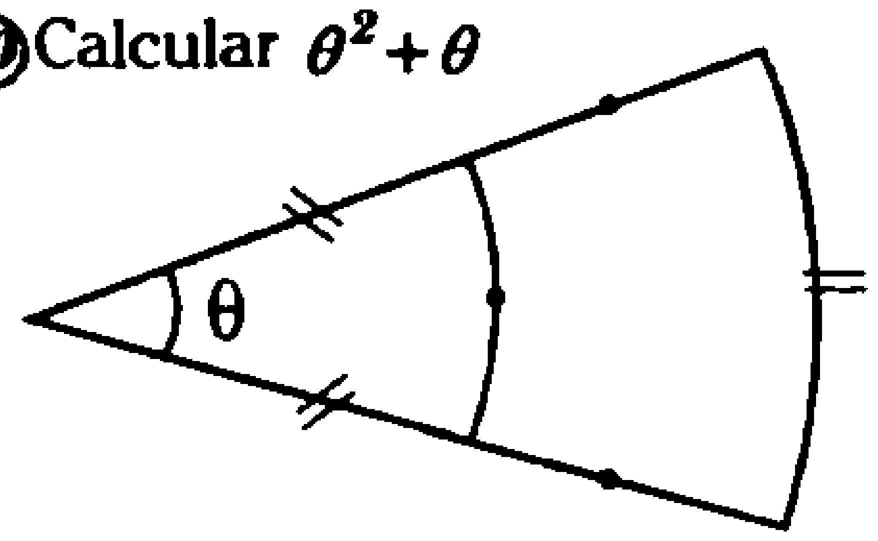
A)302,5 cm² *B)402,4cm²* *C)202,5cm²*
D) 100cm² *E) 200cm²*

29 Del sector circular mostrado. Calcular el área de la figura sombreada.



A) 24m² *B) 63m²* *C) 81m²*
D) 36m² *E) 16m²*

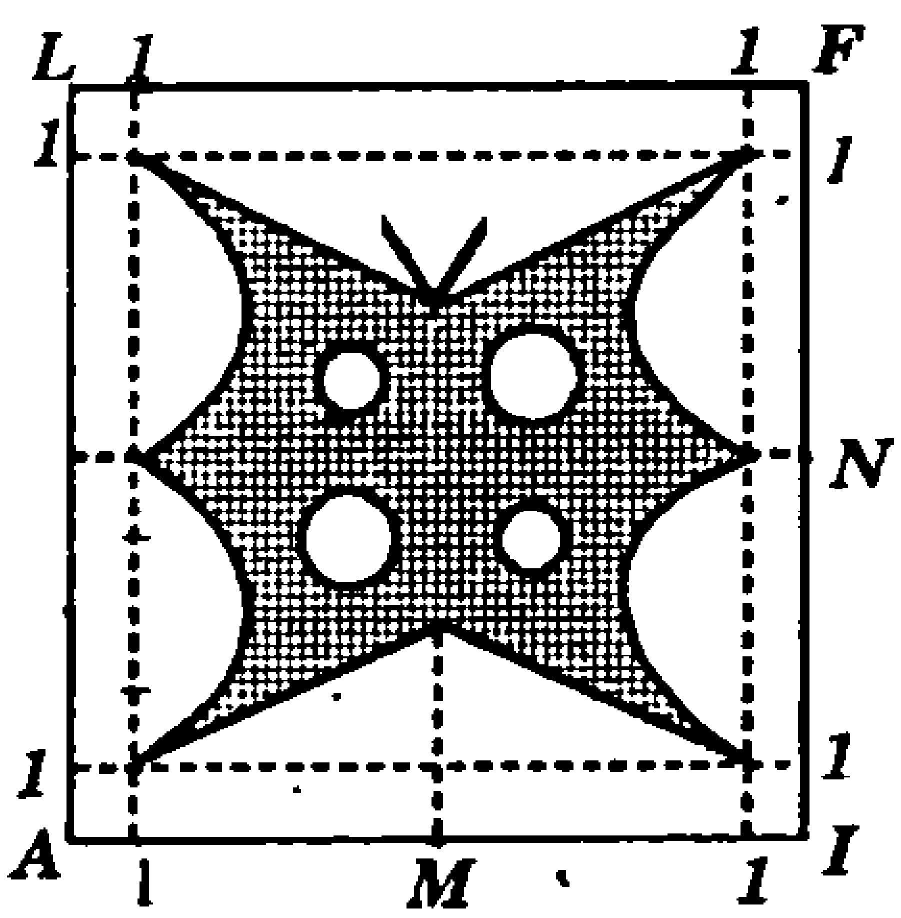
30 Calcular $\theta^2+\theta$



A) 1 *B) 2* *C) 3* *D)* $\frac{1}{2}$ *E)* $\frac{1}{3}$

EL CUADRO DE LA MARIPOSA

Hallar el área aproximada de la región sombreada, si el cuadrado tiene *14m* de lado y las circunferencias tiene radio, *1*, además *M* y *N* son puntos medios.



A)72 –13π *B)24(4 –π* *C)4(27– 5π)*
D) 8(9 –3π) *E) 7(12 – 4π)*

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Calcular la longitud de arco de un sector circular de radio *20m* y ángulo central de *72°*.

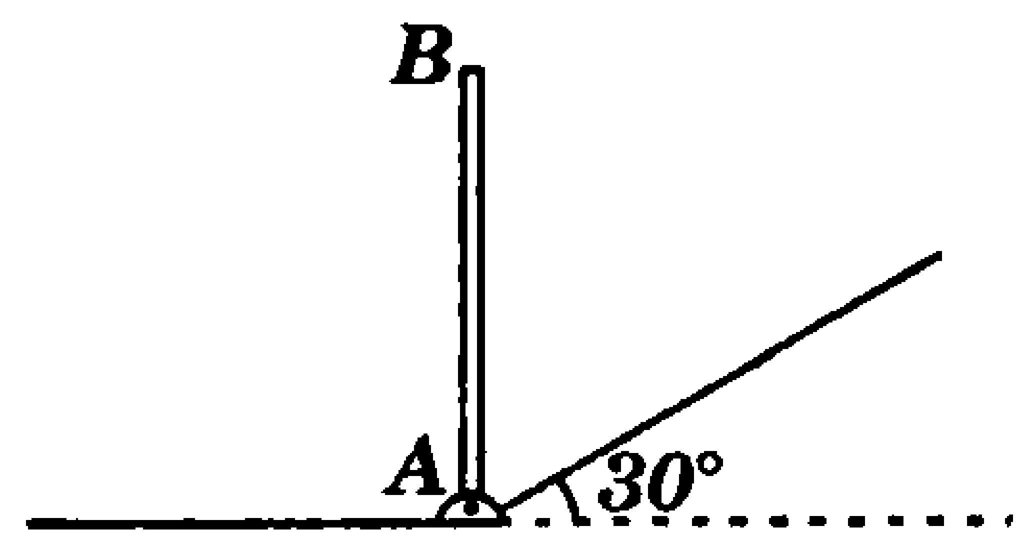
A)6,28 m *B)8,42 m* *C)9,54 m*
D)10,86 m *E)25,12 m*

02 Calcular la longitud de un puente en forma de un arco de circunferencia de ángulo central *20°* y radio *63 m*. (Considere $\pi = 22/7$)

A)18 m *B)22 m* *C)24 m*
D)26 m *É)30 m*

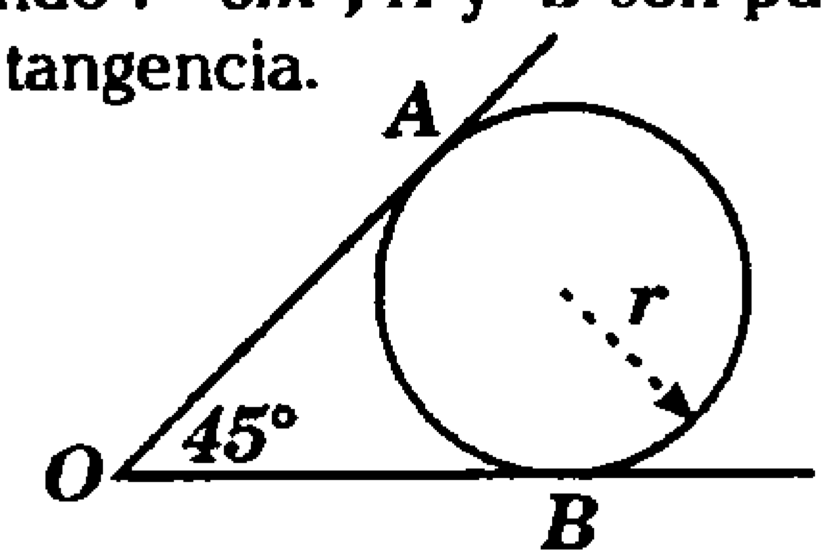
03 En la figura se muestra una barra vertical *AB* (articulada en el punto *A*). Si la longitud de la barra es *42cm*, calcular la longitud recorrida por el extremo *B* para llegar al plano inclinado.

Considerar: $\pi = 22/7$



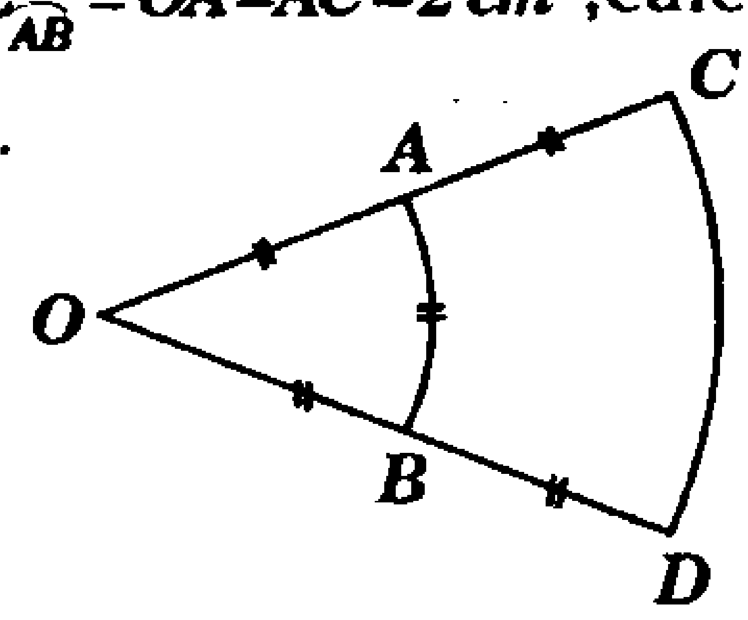
A)34 cm *B)42 cm* *C)52 cm*
D)38 cm *E)444 cm*

04 Del gráfico mostrado, calcular la mayor longitud del arco $\widehat{AB}$ siendo *r=8m* , *A* y *B* son puntos de tangencia.



A)4πm *B)6πm* *C)8πm*
D)10πm *E)12πm*

05 De la figura mostrada, si $L_{\widehat{AB}} = OA = AC = 2\,cm$,calcular: $L_{\widehat{CD}}$.



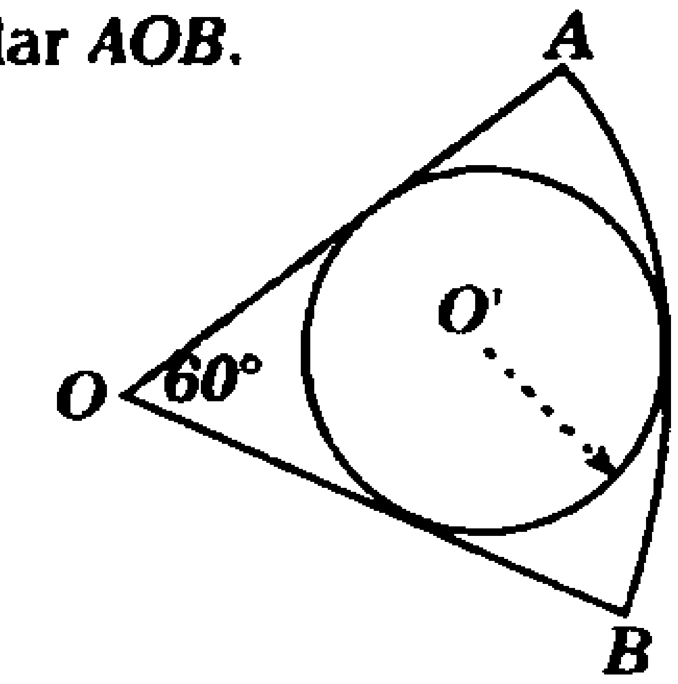
A) 3 cm *B) 4 cm* *C) πcm*
D) 2 πcm *E) 5 cm*

06 Dadas dos circunferencias concéntricas de centro común *O*, se trazan dos rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ que cortan las circunferencias menor y mayor respectivamente en *A, B; C* y *D*, formándose un trapecio circular.

Si $AB = 4m; L_{\widehat{AC}} = 9m, L_{\widehat{BD}} = 12m$ calcular $m\sphericalangle AOC$.

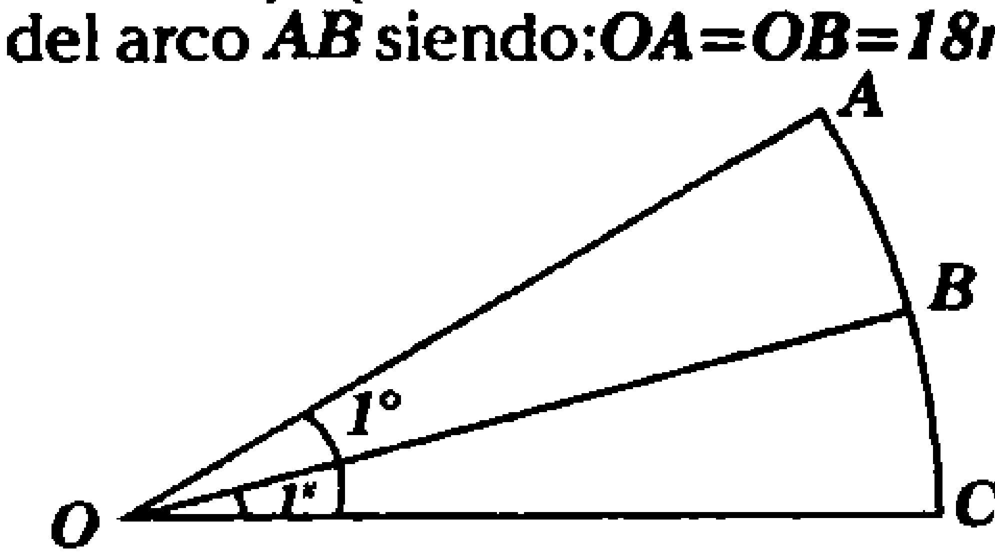
A)25 rad *B)0,75 rad* *C)1rad*
D)1,5 rad *E)2 rad*

07 Del gráfico mostrado, calcular la razón entre la longitud de la circunferencia de centro *"O"* y la longitud del arco *AB* del sector circular *AOB*.



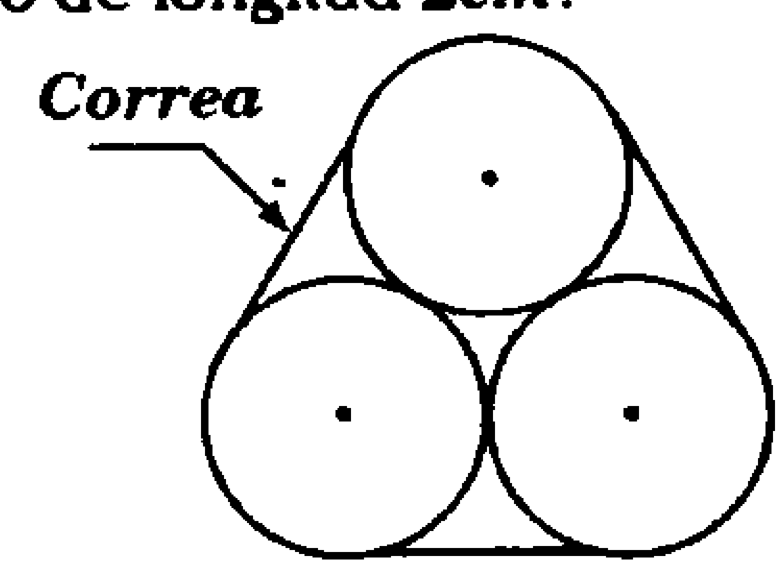
A)$\sqrt{2}$ *B)*$\sqrt{3}$ *C)2* *D)*$2\sqrt{2}$ *E)*$2\sqrt{3}$

08 Del gráfico, calcular la longitud del arco $\widehat{AB}$ siendo: *OA=OB=18m*.



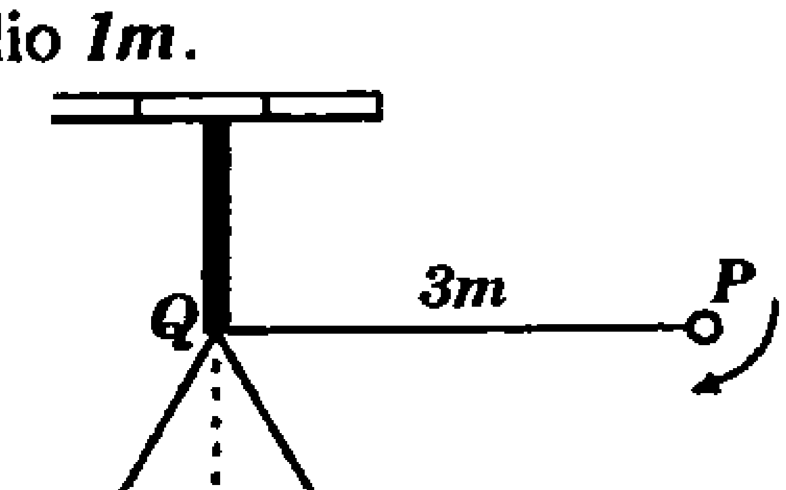
A)3,14m *B)0,314 m* *C)0,0314 m*
D)0,157m *E)0,0157 m*

09 Calcular la longitud de la correa, si los tres discos tienen igual radio de longitud *2cm*.



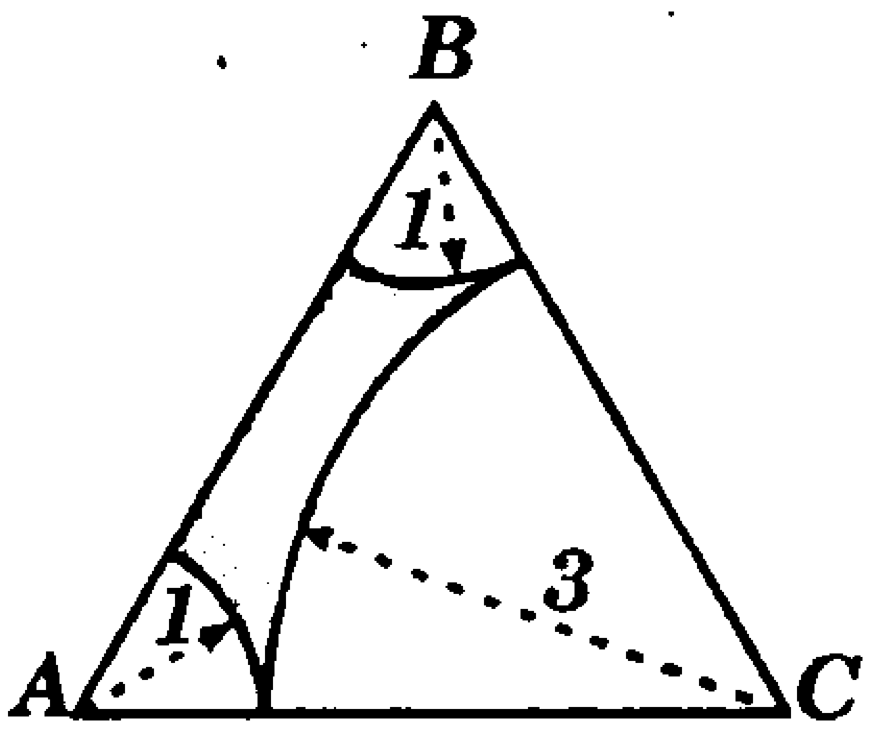
A)2(3+π)cm *B)4(3+π)cm* *C)8(3+π)cm*
D)2($\sqrt{3}$*+π)cm* *E)4(*$\sqrt{3}$*+π)cm*

10 En la figura que se muestra, ¿qué longitud recorrerá la bolita *"P"* una vez soltada de la posición indicada hasta que llegue al punto *"Q"*? El triángulo *QRS* es equilátero de radio *1m*.



A)$3\pi m$ B)$4\pi m$ C)$5\pi m$
D)$6\pi m$ E)$8\pi m$

(11) Del gráfico, calcular el perímetro de la región sombreada, si *A, B* y *C*, son: centros y *ABC* es un triángulo equilátero.

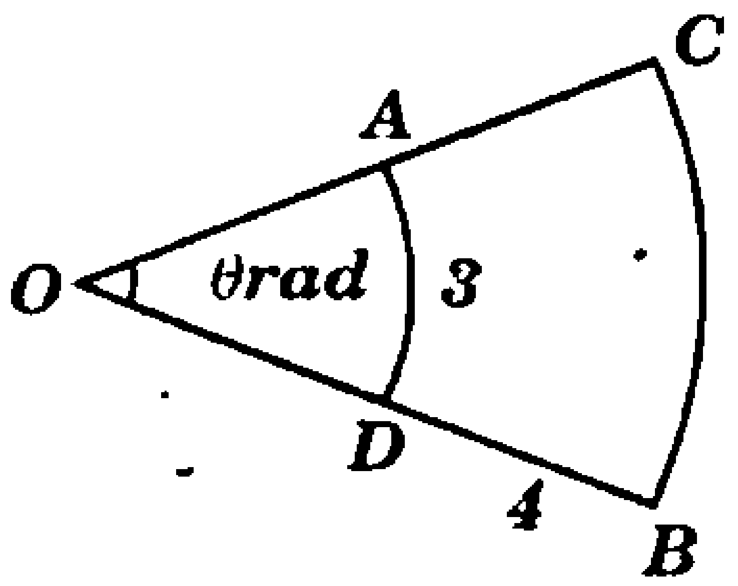


A)π B)$\frac{4\pi}{3}$ C)$\frac{5\pi}{3}+2$ D)2π E)$\frac{7\pi}{3}-1$

(12) En una circunferencia de radio igual a *6 m* se inscribe un triángulo *ABC* en la cual los ángulos *"A"* y *"B"* miden *80°* y *40°* respectivamente. Calcular la longitud del arco *AB*.

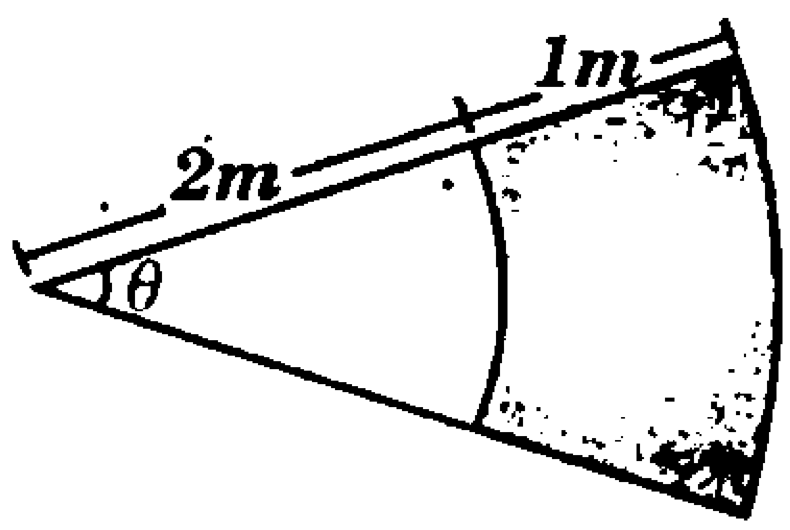
A)$2\pi m$ B)$3\pi m$ C)$5\pi m$
D)$5\pi m$ E)$8\pi m$

(13) La figura muestra los sectores circulares *AOB* y *COD*. Calcular "θ".



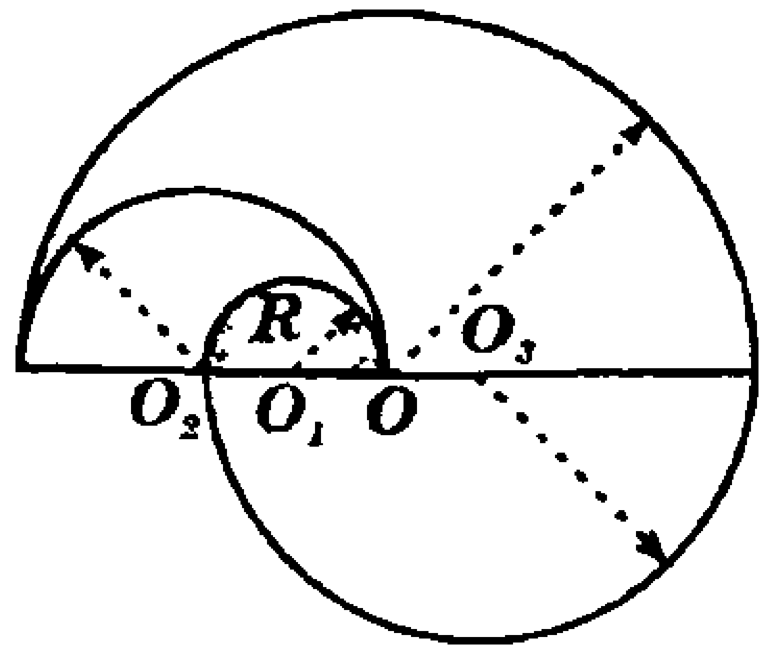
A)0,5 B)0,25 C)0,75 D)1 E)1,5

(14) De la figura, si el perímetro de la parte sombreada es igual al de la parte no sombreada, calcular "θ" aproximadamente.



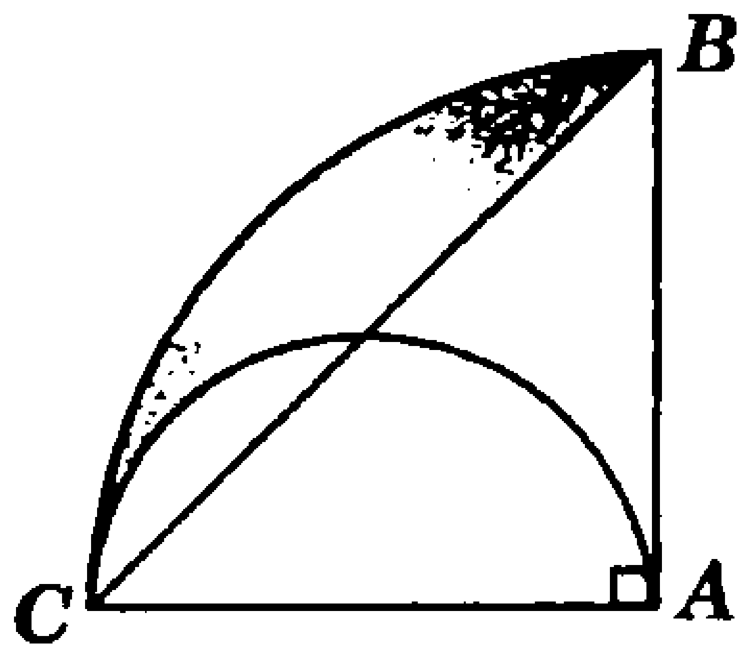
A)1 rad B)0,95 rad C)0,77 rad
D)0,66 rad E) 0,5 rad

(15) Determine el perímetro de la región sombreada, siendo *O*, O_1, O_2, O_3 centros.



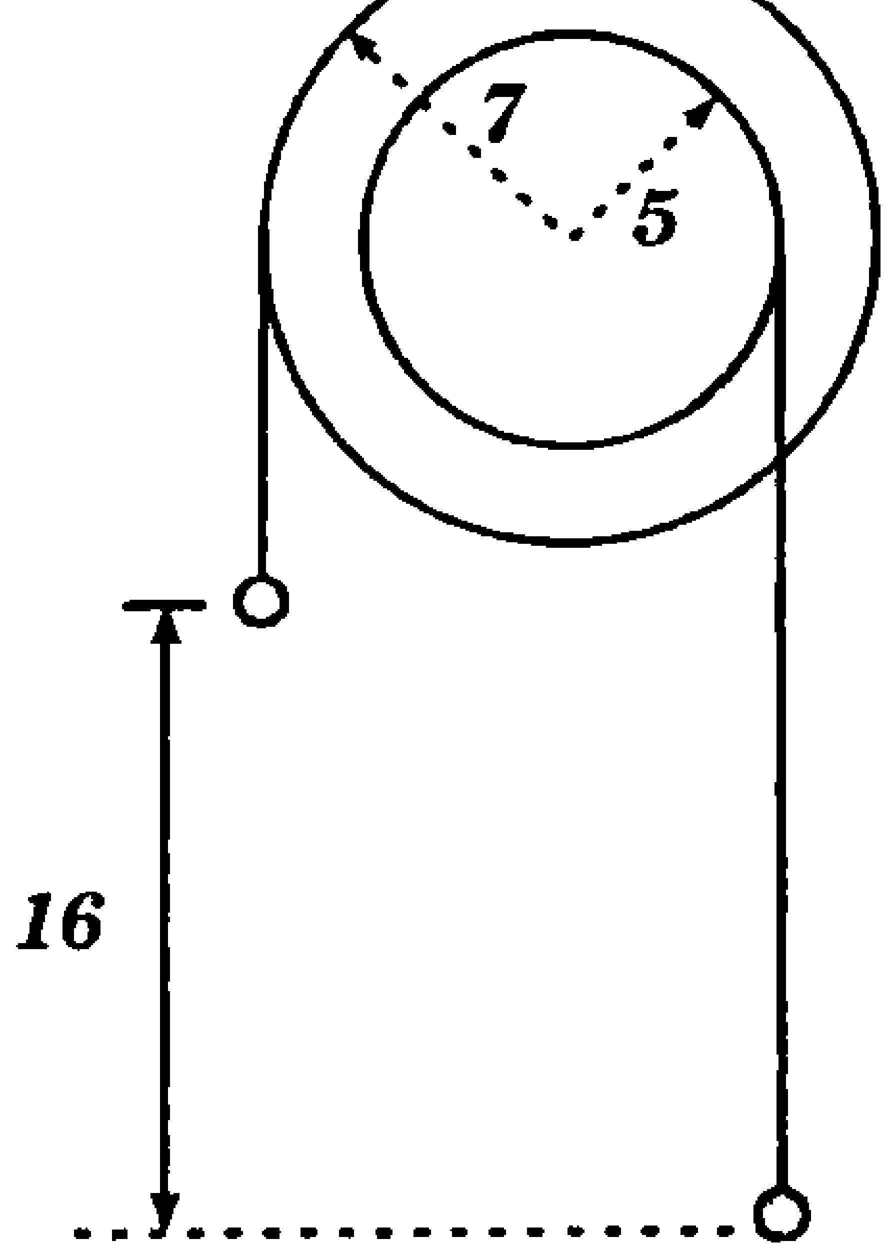
A)$4\pi R$ B)$6\pi R$ C)$8\pi R$
D)$10\pi R$ E)$12\pi R$

(16) De la figura mostrada, calcular el perímetro de la región sombreada, además $BC=4\sqrt{2}\,u$.



A)$(\pi+1\sqrt{2})u$ B)$(2\pi+\sqrt{2})u$
C)$(3\pi+2\sqrt{2})u$ D)$(4\pi-2\sqrt{2})u$
E)$(5\pi-2\pi)u$

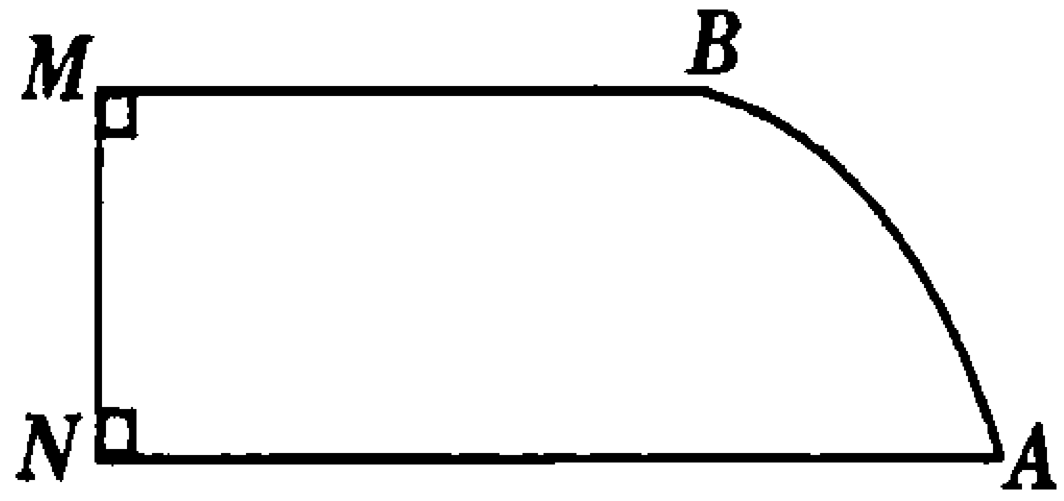
(17) ¿Qué ángulo deben girar el sistema de poleas para que las esferas se encuentren a una misma altura?



A)1 rad B)2 rad C)0,75 rad
D)1,5 rad E)1,33 rad

(18) Calcular aproximadamente la longitud del arco $\widehat{AB}$, sabiendo que su centro se encuentra en la prolongación del lado $\overline{MN}$.

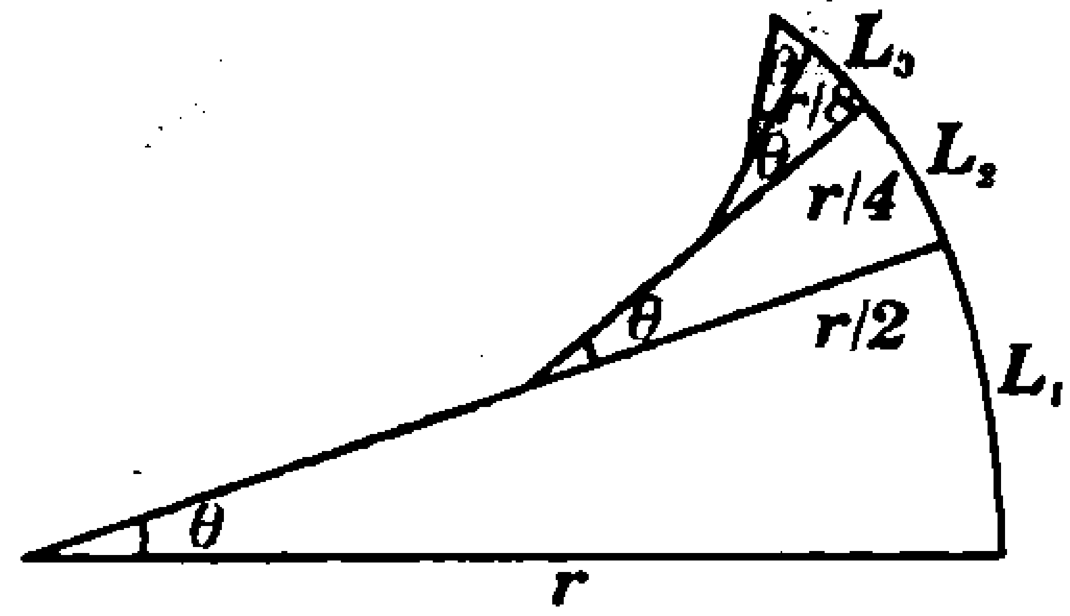
Dato: *BM = 3; AN = 4; MN= 1*



A)$\frac{4\pi}{9}$ B)$\frac{2\pi}{7}$ C)$\frac{3\pi}{5}$ D)$\frac{4\pi}{11}$ E)$\frac{5\pi}{6}$

(19) Del gráfico, reducir:

$S = L_1 + L_2 + L_3 + ...$



A)θr B)$2\theta r$ C)$4\theta r$ D)$\frac{\theta r}{2}$ E)$\frac{\theta r}{4}$

(20) Un molinete de riego tiene un alcance de *14 m* y un ángulo de giro de *135°*. Calcular el área (en m^2) del sector circular usado por el molinete. (Considerar: $\pi=2217$)

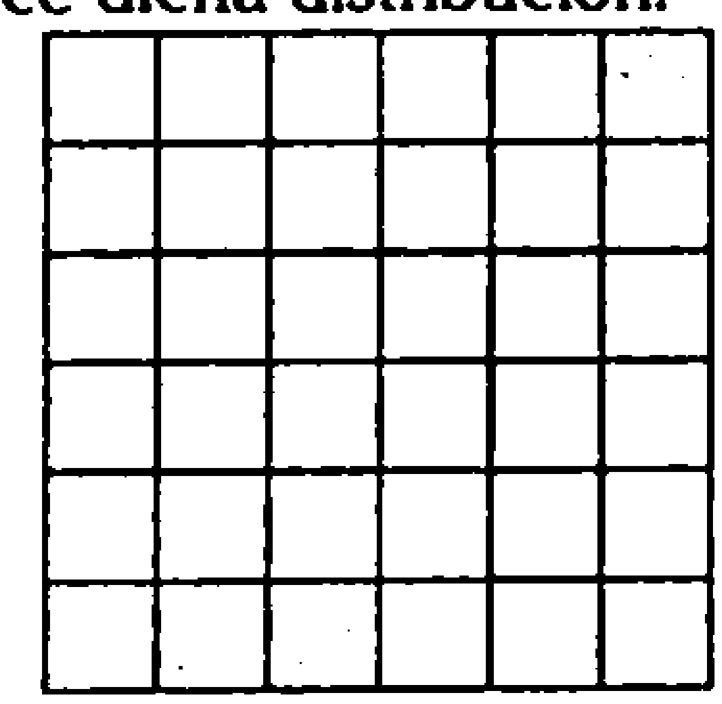
A)231 B)194 C)156 D)353 E)264

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)D	3)B	4)D	5)A	6)D	7)C	8)B	9)A	10)E
11)B	12)C	13)A	14)E	15)A	16)A	17)D	18)B	19)E	20)A
21)C	22)C	23)D	24)B	25)C	26)B	27)C	28)C	29)D	30)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)E	2)B	3)E	4)D	5)B	6)B	7)C	8)C	9)B	10)A
11)C	12)B	13)A	14)B	15)D	16)C	17)E	18)A	19)B	20)A

RETO :

Se tiene un tablero de ajedrez de *6×6*. se quiere distribuir *6* reinas de modo que no se coman entre ellas. Realice dicha distribución.



RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS

CAPITULO 115

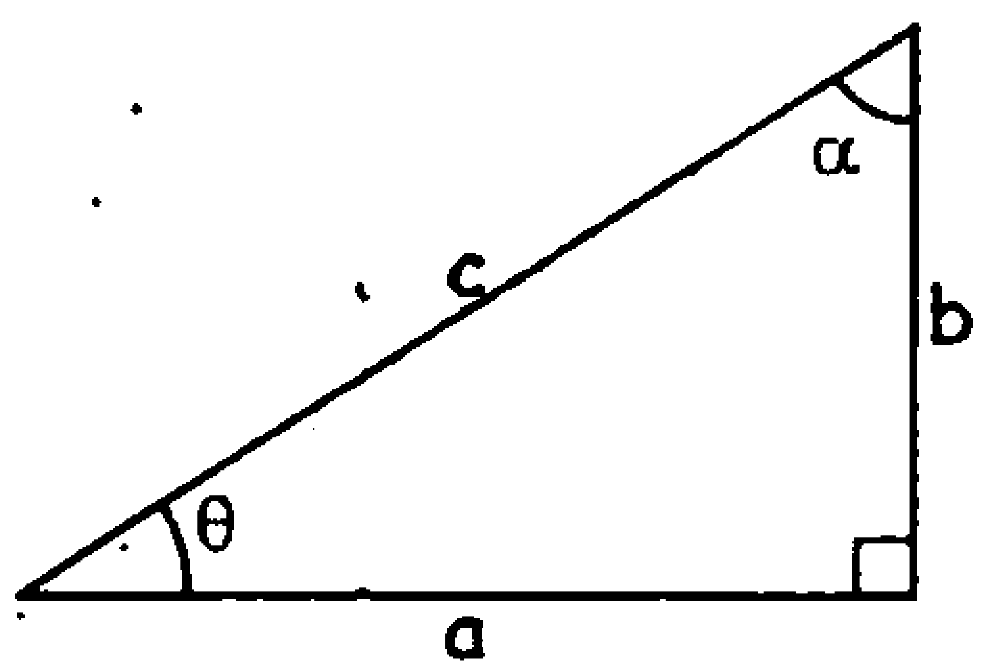
OBJETIVOS :

Al finalizar el tema el alumno será capaz de:

* *Aplicar el Teorema de Pitágoras.*
* *Identificar los elementos para definir una razón trigonométrica.*
* *Definir una razón trigonométrica.*
* *Identificar la proporción de las longitudes de los lados de los triángulos rectángulos notables*
* *Calcular las razones trigonométricas de ángulos notables*
* *Resolver un triángulo rectángulo desde el punto de vista trigonométrico*
* *Demostrar y aplicar la fórmula trigonométrica del área de una región triangular*
* *Definir e identificar las razones trigonométricas en triángulos rectángulos especiales.*
* *Reconocer la propiedad de las razones recíprocas*
* *Identificar la propiedad de las razones complementarias (co-razones)*

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Se llama triángulo rectángulo al triángulo donde uno de sus ángulos es recto *(90°)*, además recuerde que el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los dos lados restantes catetos.



c : hipotenusa

$a \wedge b$: catetos

$\theta \wedge \alpha$: son ángulos agudos

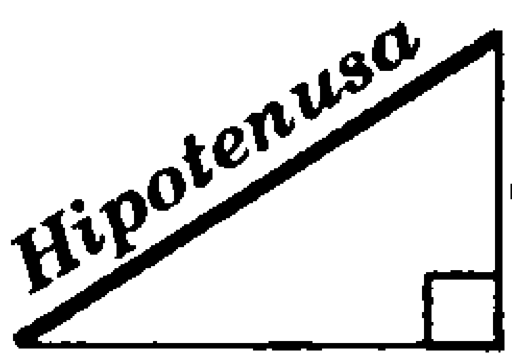
* La hipotenusa siempre es mayor que los catetos

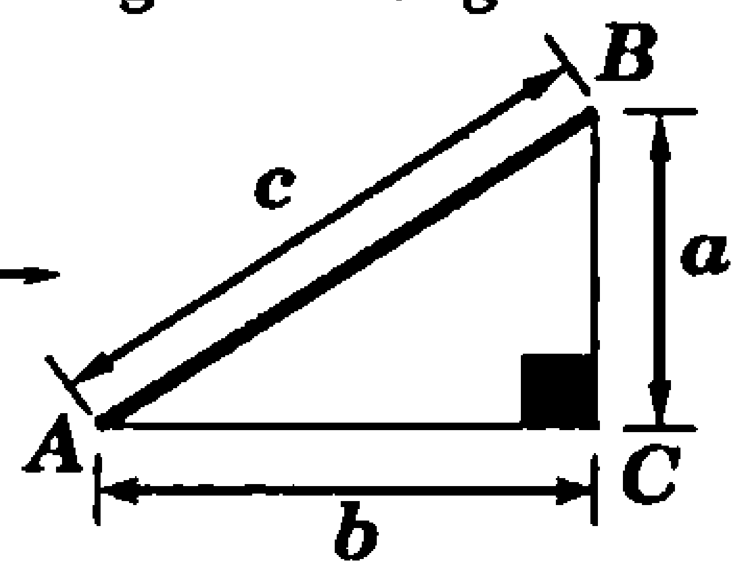
$$c > a \wedge c > b$$

La razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como el cociente que se obtiene al dividir las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo con respecto del ángulo agudo.

RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Son aquellos números que resultan de dividir la longitud de los lados de un triángulo rectángulo.





Si el triángulo anterior nos referimos a las longitudes de los lados del triángulo con los nombres hipotenusa *(c)*, cateto opuesto *(b)*, cateto adyacente *(a)*.

TEOREMA DE PITÁGORAS

"La suma de cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

$$a^2 + b^2 = c^2$$

TEOREMA :

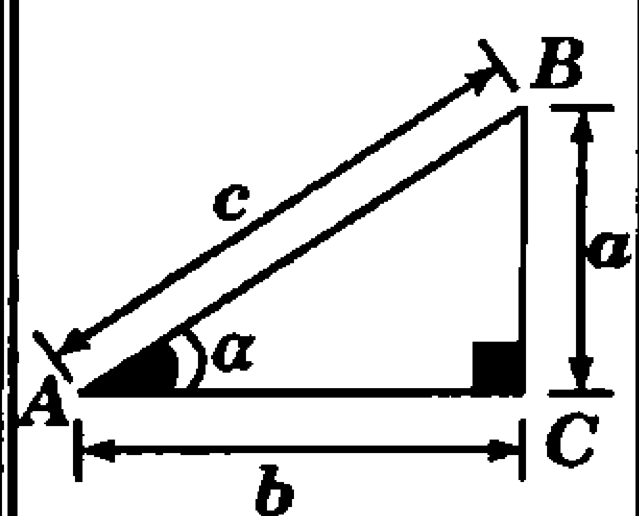
"Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios"

$$\hat{A} + \hat{B} = 90°$$

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN ÁNGULO AGUDO

Dado el triángulo *ABC*, recto en *"C"*, según la figura *(1)*, se establecen las siguientes definiciones:

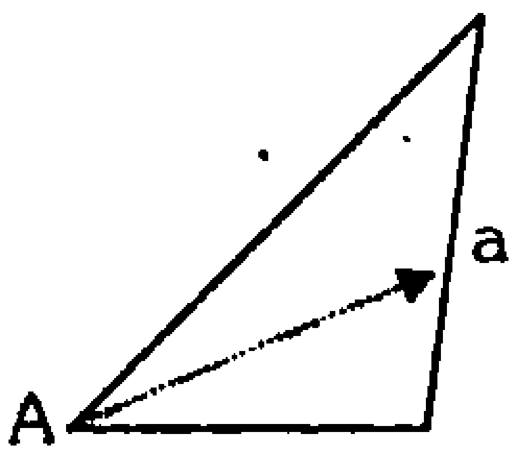
Definición
$Sen\alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
$Cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
$Tan\alpha = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} = \dfrac{a}{b}$
$Cot\alpha = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} = \dfrac{b}{a}$
$Sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} = \dfrac{c}{b}$
$Csc\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}} = \dfrac{c}{a}$

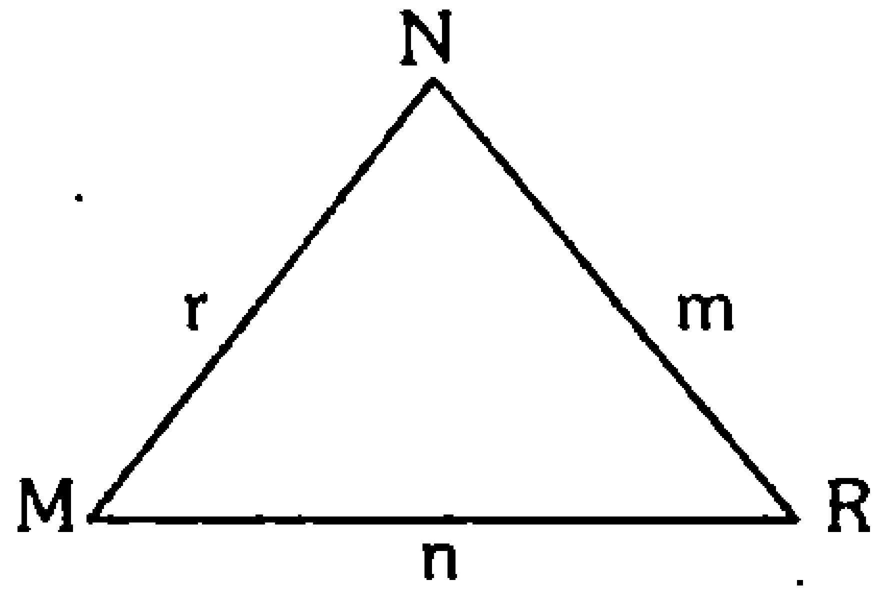


Fig#1

OBSERVACIONES :

* En los vértices de los triángulos siempre se colocan letras mayúsculas y a los lados que se oponen se colocan sus respectivas letras minúsculas.





* Una razón trigonométrica indica la proporción en que se encuentran los lados.

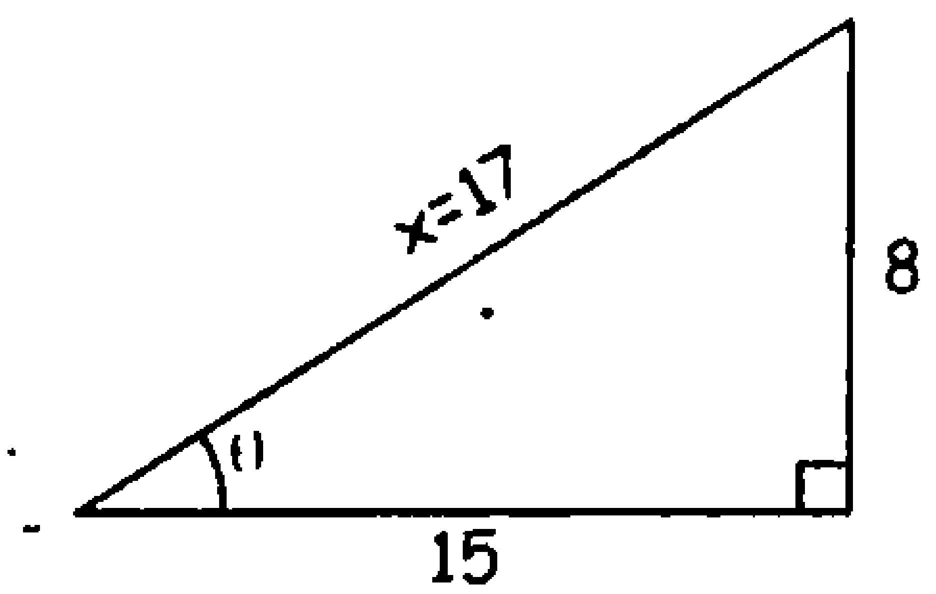
- $(Sen\ \alpha)^2 = Sen^2\alpha \neq Sen\,\alpha^2$
- $Sen\,\alpha + Sen\,\beta \neq Sen(\alpha + \beta)$
- $\dfrac{Sen\alpha}{Sen\beta} \neq \dfrac{\alpha}{\beta}$

(Lo mismo sucede con las otras razones trigonométricas).

EJEMPLO 1 :

Calcule los valores de las seis razones trigonométricas del menor ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden *8* y *15* unidades.

RESOLUCIÓN :



Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$(8)^2 + (15)^2 = x^2 \Rightarrow 289 = x^2 \Rightarrow x = 17$

Luego :
$$Sen\theta = \frac{8}{17} \qquad Cot\theta = \frac{15}{8}$$
$$Cos\theta = \frac{15}{17} \qquad Sec\theta = \frac{17}{15}$$
$$Tan\theta = \frac{8}{15} \qquad Csc\theta = \frac{15}{8}$$

EJEMPLO 2:

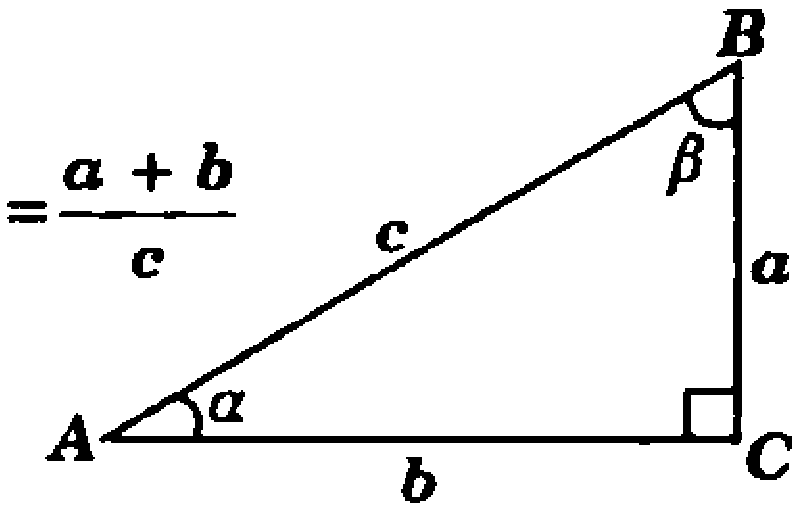
En un triángulo rectángulo *ABC (C=90°)*, se sabe que la suma de catetos es igual *"k"* veces la hipotenusa. Calcular la suma de los senos de los ángulos agudos del triángulo.

RESOLUCIÓN :

* Nótese que en el enunciado del problema tenemos:

$$a + b = k\,c$$

* Se pide calcular:



$$Sen\alpha + Sen\beta = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Luego: $Sen\alpha + Sen\beta = \dfrac{kc}{c} = k$

EJEMPLO 3 :

Los tres lados de un triángulo rectángulo se hallan en progresión aritmética , hallar la tangente del mayor ángulo de dicho triángulo.

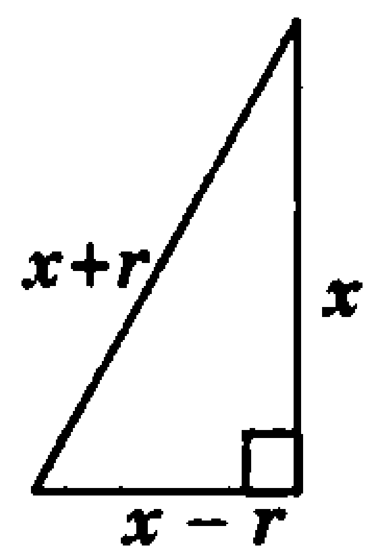
RESOLUCIÓN :

* Nótese que dado el enunciado, los lados del triángulo estan en progresión, de razón *"r"*, asumanos entonces:

Cateto Menor $= x - r$

Cateto Mayor $= x$

Hipotenusa $= x + r$



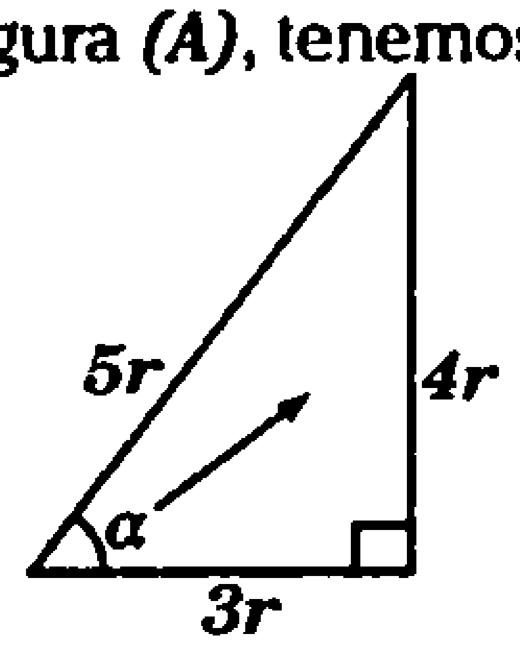
* Por el Teorema De Pitágoras :

$$(x-r)^2 + x^2 = (x+r)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xr + r^2 + x^2 = x^2 + 2xr + r^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2xr = 2xr$$
$$\Rightarrow x^2 = 4xr \Rightarrow x = 4r$$

IMPORTANTE :

"A mayor cateto, se opone mayor ángulo agudo", Luego, reemplazando en la figura *(A)*, tenemos:

* Nos piden: $Tan\alpha = \dfrac{4r}{3r} = \dfrac{4}{3}$



EJEMPLO 4 :

Calcular el cateto de un triángulo rectángulo de *330m* de perímetro, si la tangente de uno de sus ángulos agudos es *2,4.*

RESOLUCIÓN :

* Sea "α" ángulo del triángulo que cumpla con la condición :

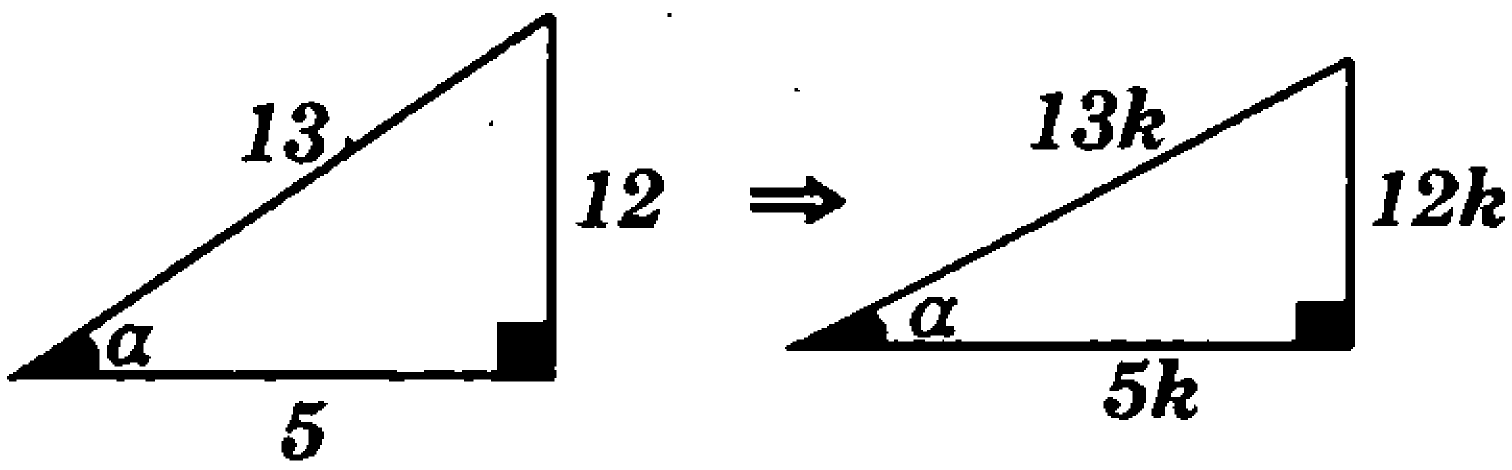
$$Tan\alpha = 2{,}4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

* Ubicamos "α" en un triángulo rectángulo, cuya

relación de catetos guardan la relación de *12* a *5*.

* La hipotenusa se calcula por Pitágoras

Triángulo Rectángulo Particular ***Triángulo Rectángulo General***



* El perímetro del triángulo rectángulo es:

Según la figura $5k + 12k + 13k = 30k$

Según datos del enunciado $= 330m$

Luego : $30k = 330 \Rightarrow k = 11$

* La pregunta es calcular la longitud del menor cateto es decir:

Cateto $= 5k = 5 \times 11m = 55m$

PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECIPROCAS :

Al comparar las seis razones trigonométricas de un mismo ángulo agudo , notemos que tres pares de ellas al multiplicarse nos producen la unidad".

La pareja de las *R.T.* reciprocas son entonces :

Seno y Cosecante :	$Sen\alpha Csc\alpha = 1$
Coseno y Secánte :	$Cos\alpha Sec\alpha = 1$
Tangente y Cotangente :	$Tan\alpha Cot\alpha = 1$

Nótese " ***ángulos iguales*** "

EJEMPLO 4:

Indicar la verdad de las siguiente proposiciones

I) $Sen20° Csc10° = 1$

II) $Tan35° Cot50° = 1$

III) $Cos40° Sec40° = 1$

RESOLUCIÓN:

*Nótese en las parejas de razones trigonométricas reciprocas el producto es *"1"*, siempre que sean ángulos iguales.

* Luego :

$Sen20° Csc10° \neq 1$: Sus ángulos <u>NO</u> son iguales.

$Tan30° Cot50° \neq 1$: ángulo <u>NO</u> son iguales.

$Cos40° Sec40° = 1$: Sus ángulos <u>SI</u> son iguales.

$\Rightarrow$ ***I) F*** ***II) F*** ***III) V***

EJEMPLO 5 :

Calcular un *"x"* agudo que verifique:

$$Tan(3x + 10° + \alpha) \times Cot(x + 70° + \alpha) = 1$$

RESOLUCIÓN :

* Notese que en la ecuación intervienen, razones trigonométricas recíprocas, luego los ángulos son iguales.

$$\underbrace{Tan(3x + 10° + \alpha) \cdot Cot(x + 70° + \alpha)}_{\text{ángulos iguales}} = 1$$

$3x + 10° + \alpha = x + 70 + \alpha$

$\Rightarrow 2x = 60° \Rightarrow x = 30°$

EJEMPLO 6 :

Se sabe:

$$Sen\theta \times Cos\theta \times Tan\theta \times Cot\theta \times Sec\theta = \frac{3}{7}$$

Calcular:

$$E = Cos\theta \times Tan\theta \times Cot\theta \times Sec\theta \times Csc\theta$$

RESOLUCIÓN :

* Recordar : $Cos\theta Sec\theta = 1$
$Tan\theta Cot\theta = 1$
$Sen\theta Csc\theta = 1$

*Luego; reemplazando en la condición del problema:

$$Sen\theta \times \underbrace{Cos\theta \times Tan\theta \times Cot\theta \times Sec\theta}_{"1"} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow Sen\theta = \frac{3}{7} \text{..........................(I)}$$

* Nos piden calcular :

$$E = \underbrace{Cos\theta \times Tan\theta \times Cot\theta \times Sec\theta}_{1} \times Csc\theta$$

$$E = Csc\theta = \frac{1}{Sen\theta}, \text{ pero de } (I) \text{ tenemos :}$$

$$\Rightarrow Sen\theta = \frac{3}{7} \Rightarrow E = \frac{7}{3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

"Al comparar las seis razones trigonométricas de ángulos agudos, notamos que para tres pares de ellas producen el mismo número, siempre que su ángulos sean complementarios".

NOTA :

"Una razón trigonométrica de un ángulo es igual a la co-razón del ángulo complementario".

RAZÓN	CO - RAZÓN
Seno	Coseno
Tangente	Cotangente
Secante	Cosecante

Dado $\alpha+\beta=90°$, entonces se verifica:

$$\left.\begin{aligned} Sen\alpha &= Cos\beta \\ Tan\alpha &= Cot\beta \\ Sec\alpha &= Csc\beta \end{aligned}\right\} \text{Nótese: "ángulos que suman } 90°\text{"}$$

POR EJEMPLO:

A) $Sen20°=Cos70°$ (Suman 90°)

B) $Tan50°=Cot40°$ (Ángulos complementarios)

C) $Sec80°=Csc10°$ (Suman 90°)

EJEMPLO 7:

Indicar el valor de verdad las proposiciones :

I) $Sen80°=Cos20°$ II) $Tan45°=Cot45°$

III) $Sec(80°-x)=Csc(10°+x)$

RESOLUCIÓN:

* Nótase que dado una función y co-función serán iguales al evaluar que sus ángulos sean iguales.

I) $sen80° \neq Cos20°$; sin embargo (Porque suman 100°)

$Sen80°=Cos10°$ (Suman 90°)

II) $Tan45°=Cot45°$ (Suman 90°)

II) $Sec(80°-x)=Csc\ (10°+x)$ (Suman 90°)

EJEMPLO 8:

Resolver e indicar el menor valor de "x" que verifique

$$Sen5x=Cosx$$

RESOLUCIÓN:

* Dada la ecuación $Sen5x=Cosx$; luego los ángulos deben sumar $90°$ entonces :

$$5x+x=90°$$
$$\Rightarrow 6x=90° \Rightarrow x=15°$$

EJEMPLO 9:

Resolver "x" el menor positivo que verifique:

$$Sen3x-Cosy=0$$
$$Tan2y \times Cot30°-1=0$$

RESOLUCIÓN:

* Nótese que el sistema planteado es equivalente a:

$$Sen3x=Cosy \Rightarrow 3x+y=90°$$
(R.T.ángulos complementarios)

$$Tan2y \times Cot30°=1 \Rightarrow 2y=30° \text{ (R.T. recíprocas)}$$

* De la segunda igualdad: $y=15°$
* Reemplazando en la primera igualdad:

$$3x+15°=90$$
$$\Rightarrow 3x=75° \Rightarrow x=25°$$

EJEMPLO 10:

Se sabe que "x" e "y" son ángulos complementarios, además: $Senx=2t+3$

$$Cosy=3t+4,1$$

RESOLUCIÓN:

* Dado : $x+y=90° \Rightarrow Senx=Cosy$
* Reemplazando:

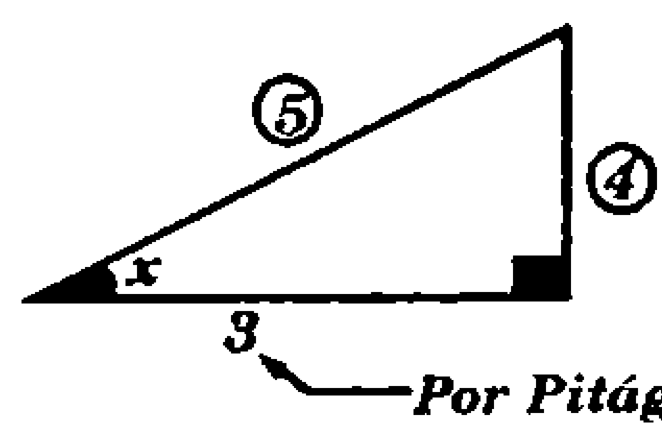
$$2t+3=3t+4,1 \Rightarrow -1,1=t$$

* Conocido "t" calcularemos

$$Senx=2(-1,1)+3$$
$$\Rightarrow Sen=0,8$$
$$\Rightarrow Senx=\frac{4}{5}\text{..........................(I)}$$

NOTA :

Conocida una razón trigonométrica. luego hallaremos las diferentes ; gráficando la condición *(I)* de un triángulo rectángulo , tenemos:

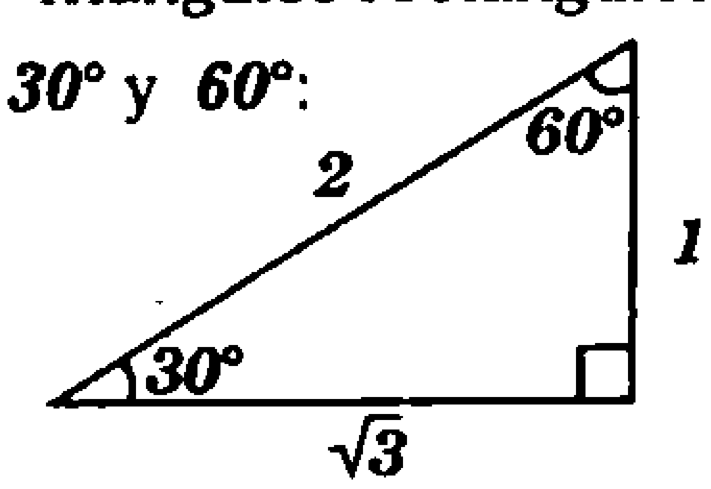


$$\longrightarrow Tanx=\frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}=\frac{4}{3}$$

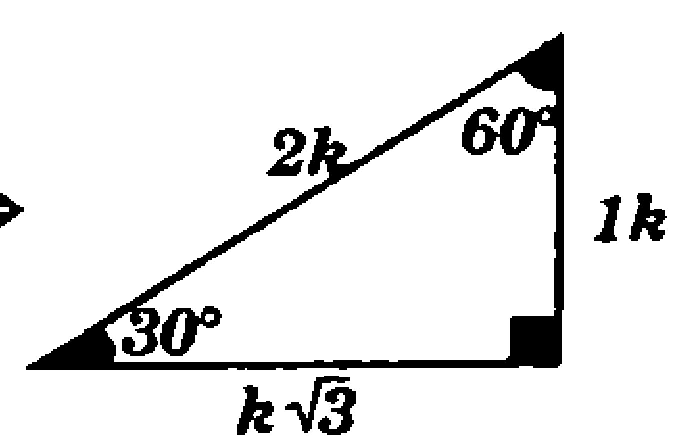
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN ÁNGULOS NOTABLES

I) Triángulos rectángulos notables exactos

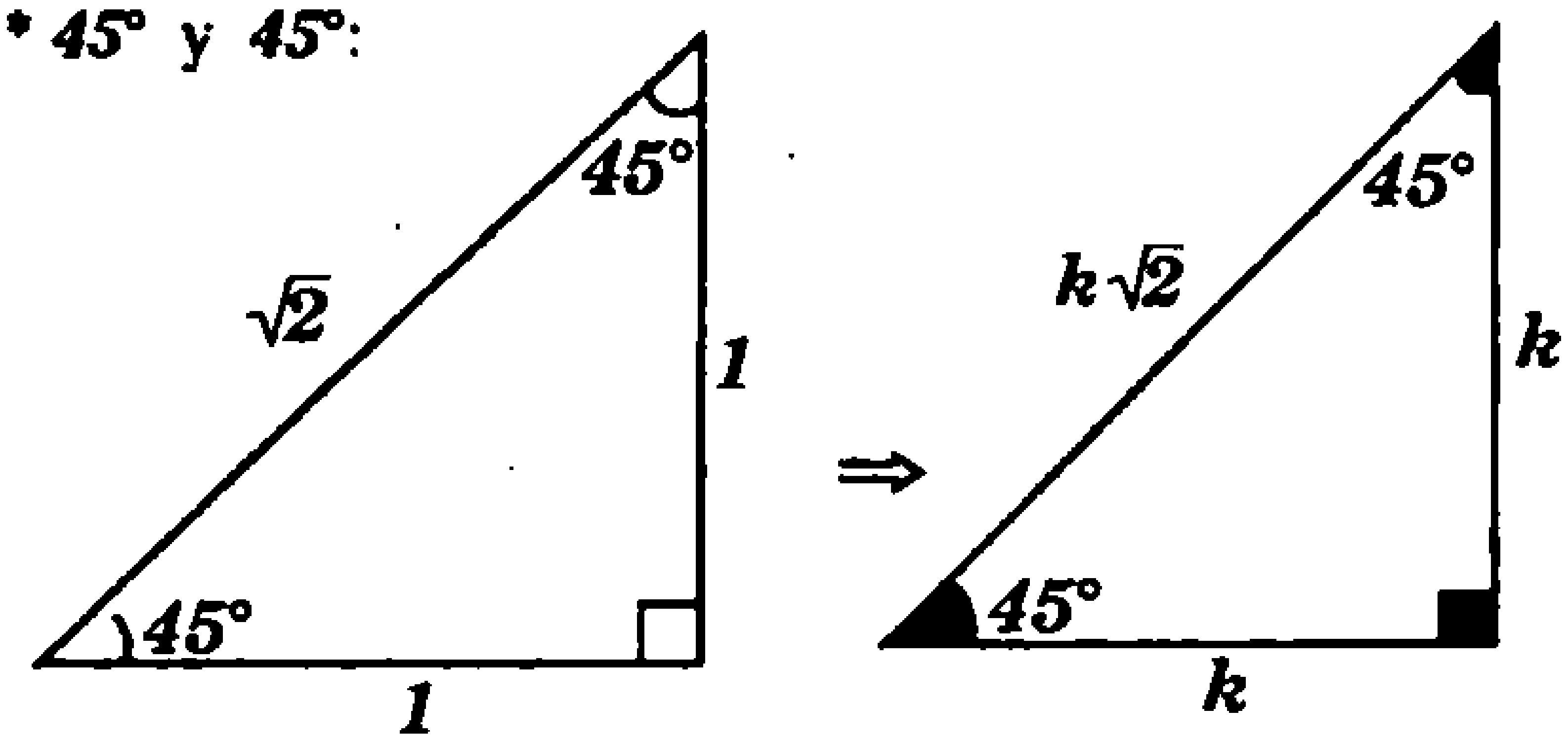
* $30°$ y $60°$:



$\Rightarrow$

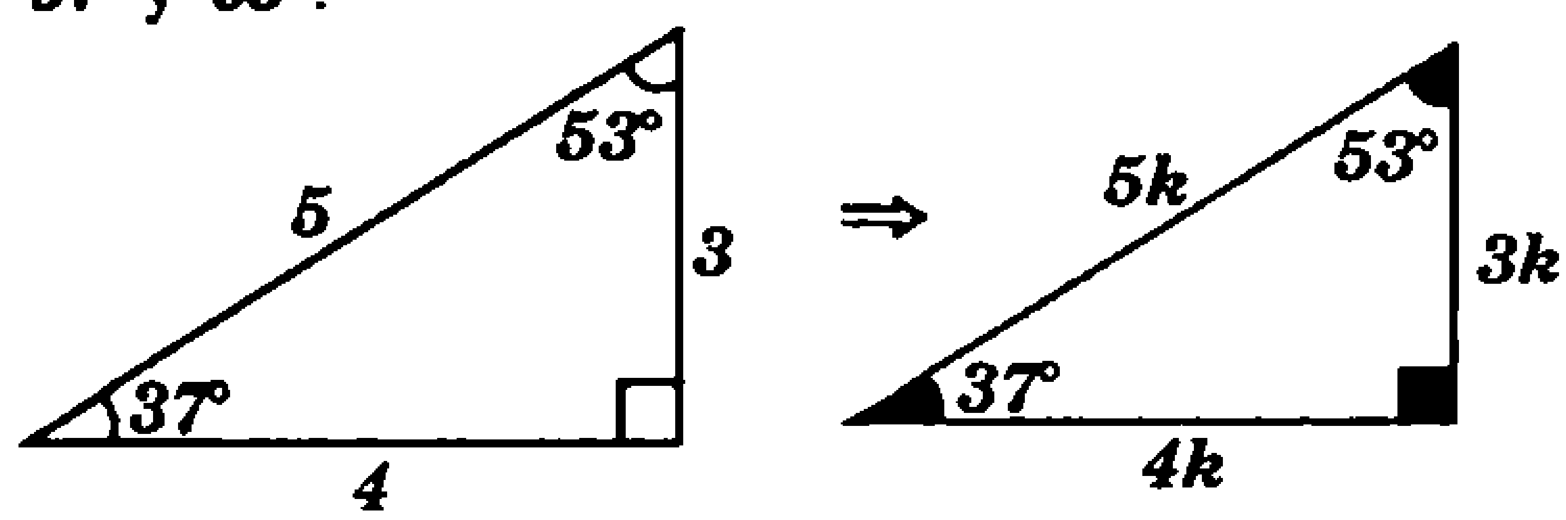


* $45°$ y $45°$:



II) Triángulos rectángulos notables aproximados

* $37°$ y $53°$:



* $16°$ y $74°$:

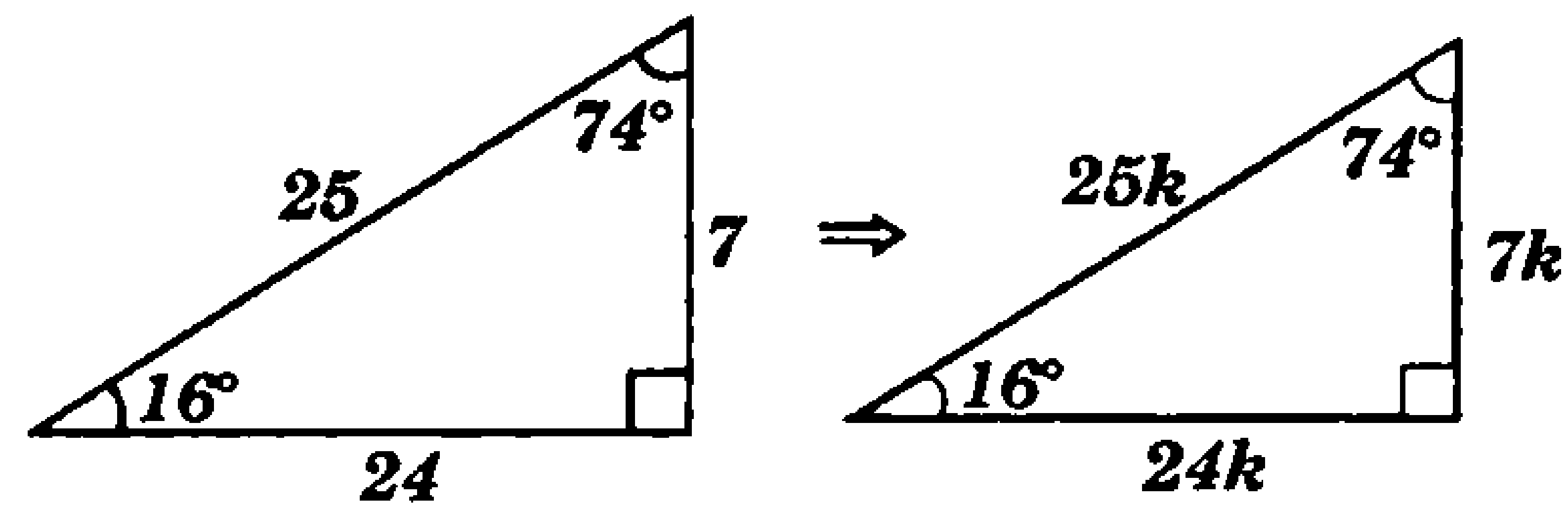


TABLA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

RT \ K	30°	60°	45°	37°	53°	16°	74°
Sen∢	½	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	3/5	4/5	7/25	24/25
Cos∢	$\sqrt{3}/2$	½	$\sqrt{2}/2$	4/5	3/5	24/25	7/25
Tan∢	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	1	3/4	4/3	7/25	24/7
Cot∢	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	1	4/3	¾	24/7	7/24
Sec∢	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{2}$	5/4	5/4	25/24	25/7
Csc∢	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	5/3	5/3	25/7	25/24

EJEMPLO 11 :

Calcular : $F=\dfrac{4\times Sen30°+\sqrt{3}\times Tan60°}{10\times Cos37°+\sqrt{2}\times Sec45°}$

RESOLUCIÓN :

* Según la tabla mostrada notamos:

$$F=\frac{4\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{10\times\frac{4}{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2+3}{8+2}=\frac{1}{2}$$

EJEMPLO 12 :

Sea : $F(\theta)=\dfrac{Sen3\theta\times Cos6\theta\times Csc\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{Tan3\theta\times Sec6\theta\times Cot\left(\frac{9\theta}{2}\right)}$

Evaluar para $\theta=10°$

RESOLUCIÓN :

* Reemplazando $\theta=10°$ en "$F(\theta)$ tenemos:

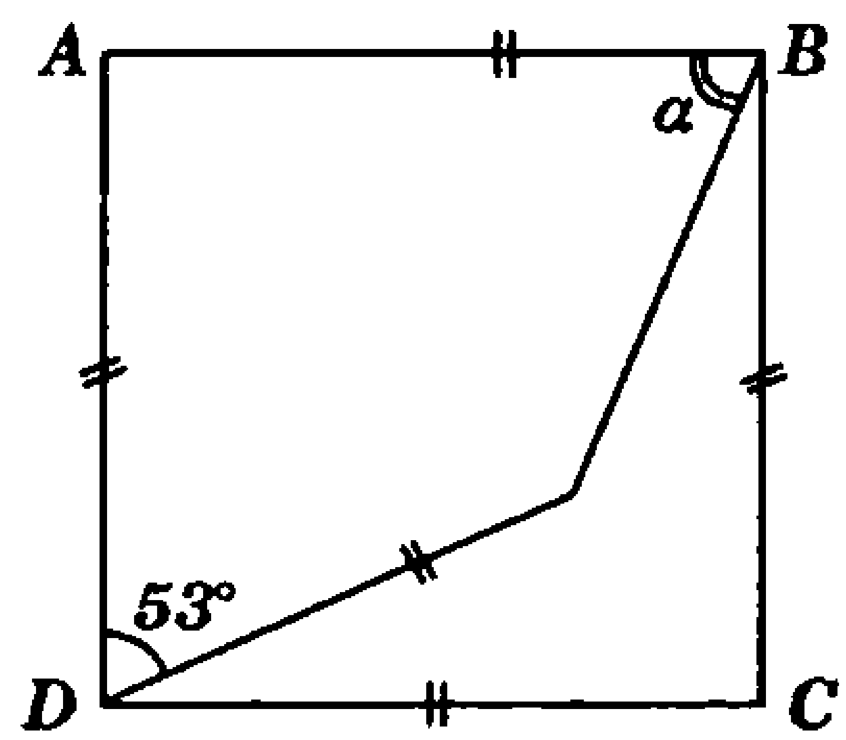
$$F(10°)=\frac{Sen30°\,Cos60°\,Csc45°}{Tan30°\,Sec60°\,Cot45°}$$

* Reemplazando sus valores notables tenemos

$$F(10°)=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\times 1}=\frac{\sqrt{6}}{8}$$

EJEMPLO 13 :

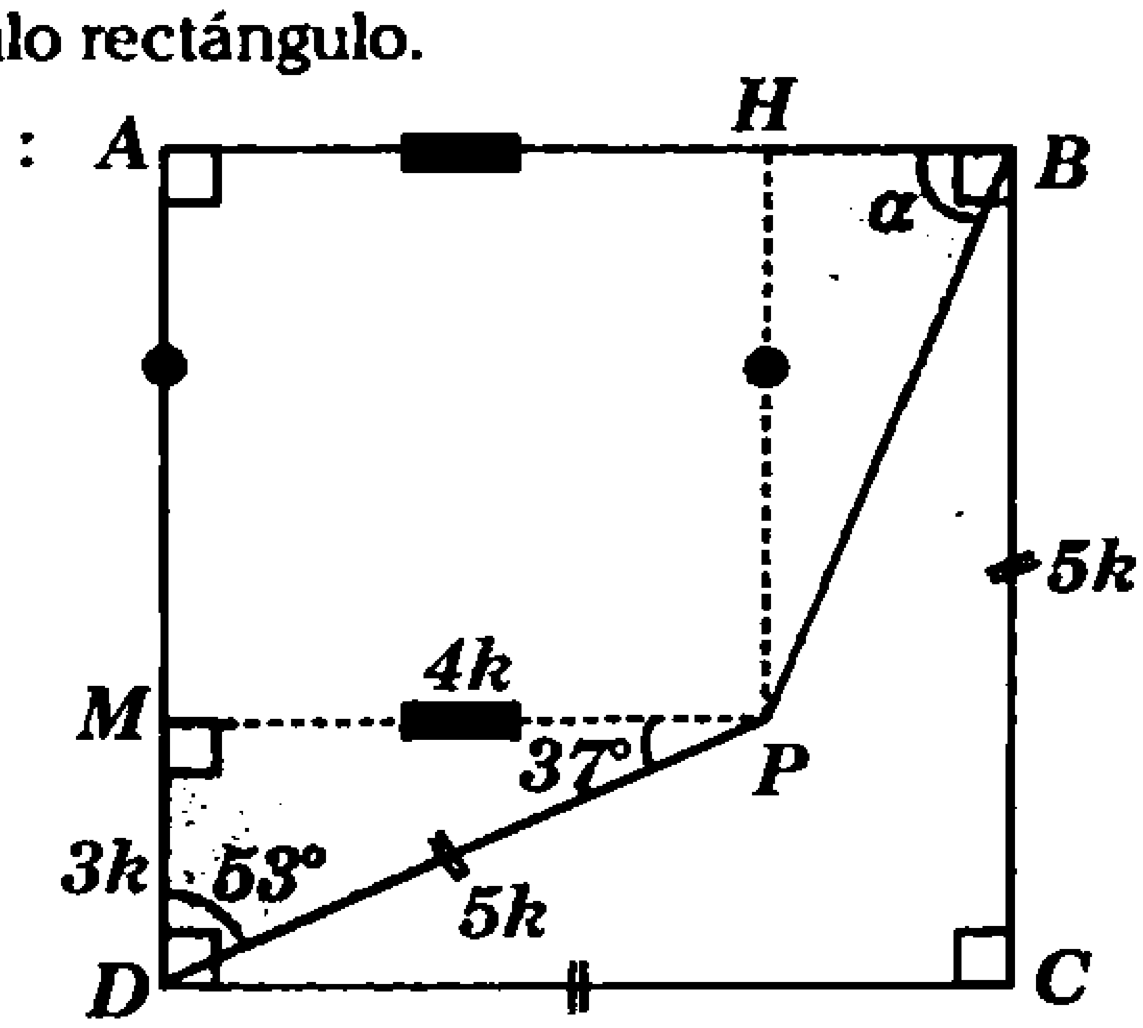
Si $ABCD$ es un cuadrado calcular "$Tan\alpha$"



RESOLUCIÓN :

* Como "α" no esta en un triángulo rectángulo: Luego, efectuaremos trazos de modo que "α" y $53°$ estén en un triángulo rectángulo.

* De la figura :



* $\triangle PMD$: Notable $37°$ y $53°$

Luego suponemos $DP=5k$

* Como $DP=BC=5k$

Luego el lado del cuadrado mide $5k$

* Sumando $PH+MD=AD$

  $PH+3k=5k\Rightarrow PH=2k$

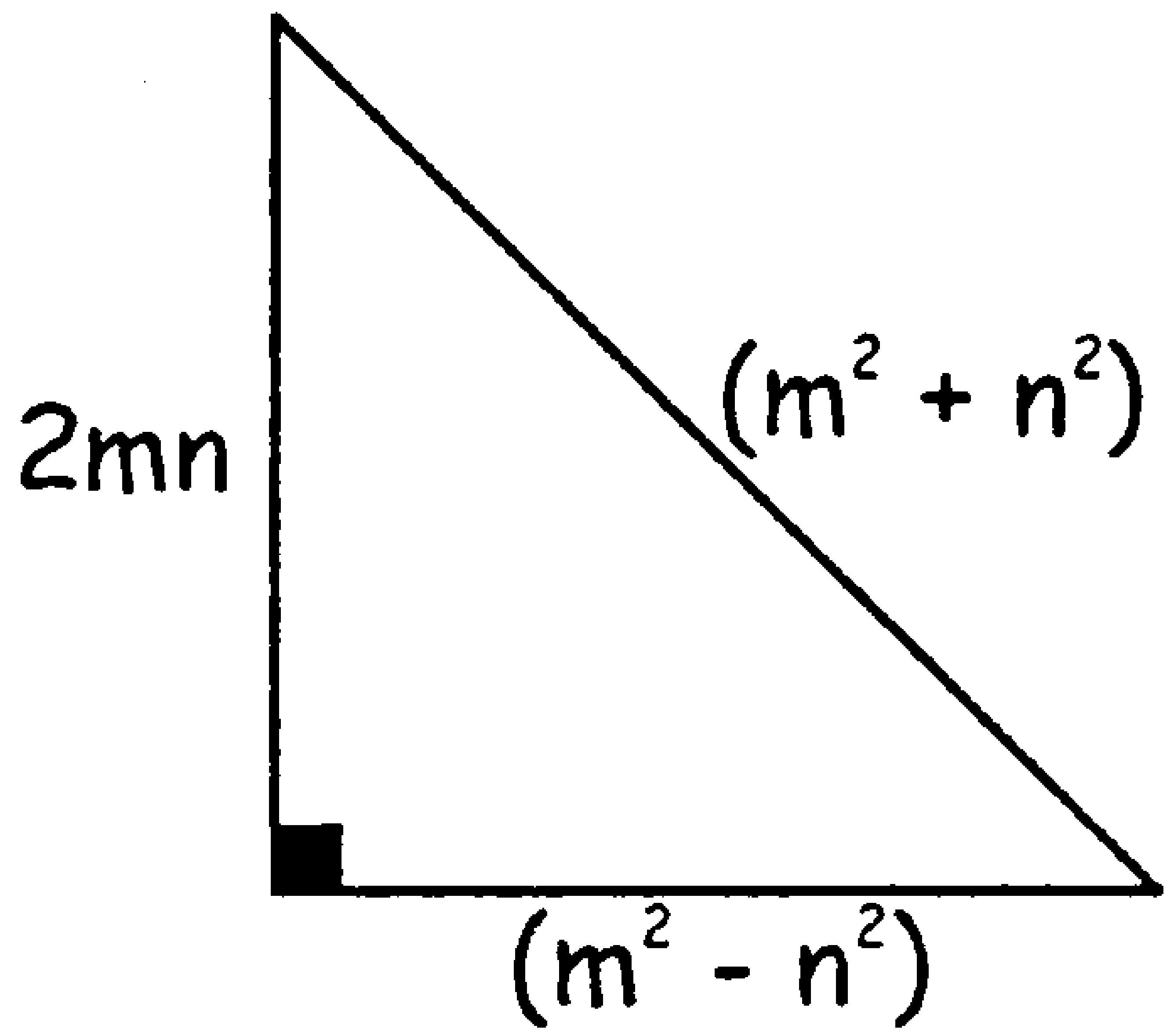
* Sumando $PM+HB=AB$

$4K + HB = 5K \Rightarrow HB = K$

* Finalmente: $Tan\alpha = \dfrac{PH}{HB} = \dfrac{2K}{K} = 2$

ESTUDIO DEL TRIÁNGULO PITAGÓRICO

Todo triángulo pitagórico tiene sus lados expresados por números enteros positivos. Dichos lados tiene la siguiente forma:



Siendo: *«m»* y *«n»* números enteros positivos.

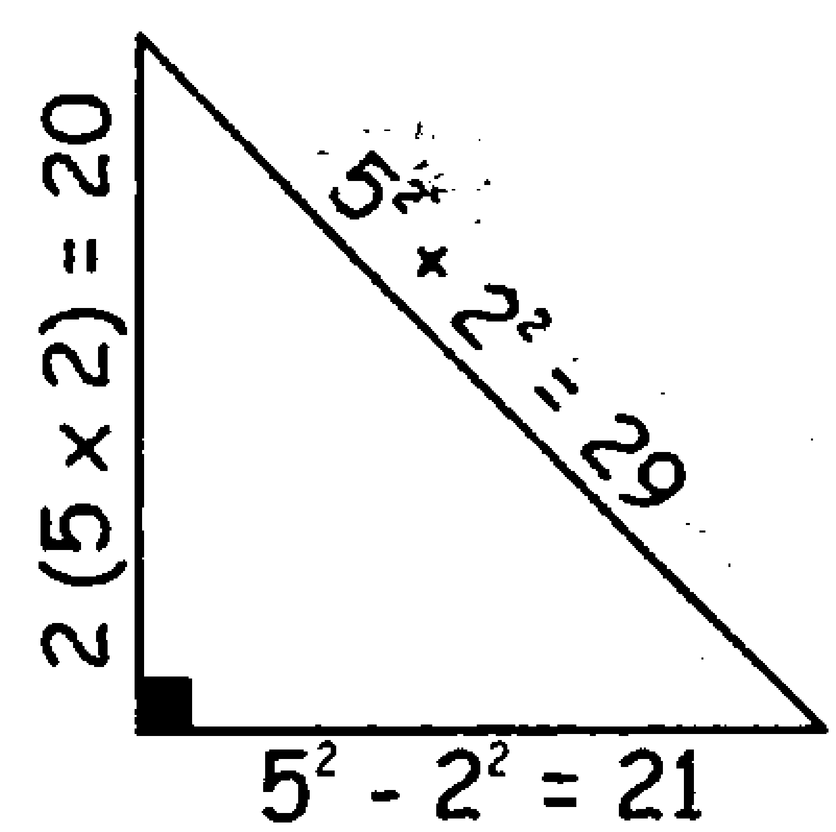
Además : $m > n$.

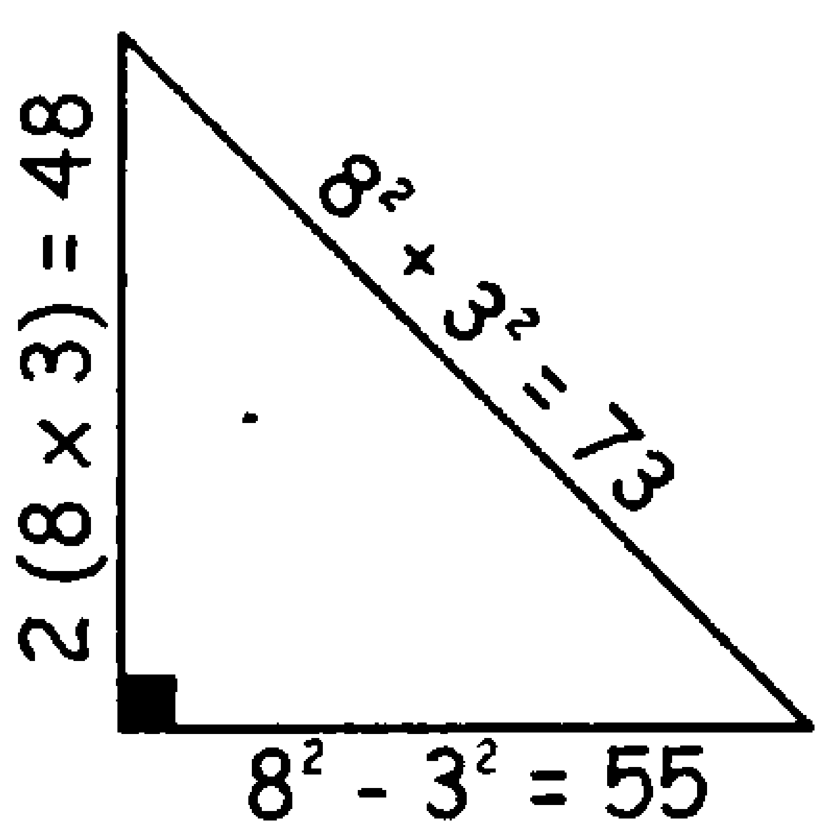
OBSERVACIONES :

* Si elegimos valores de *«m»* y *«n»* (números primos enteros entre sí) tal que $(m + n)$ resulte un número impar, se obtienen triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados también son números primos entre sí.

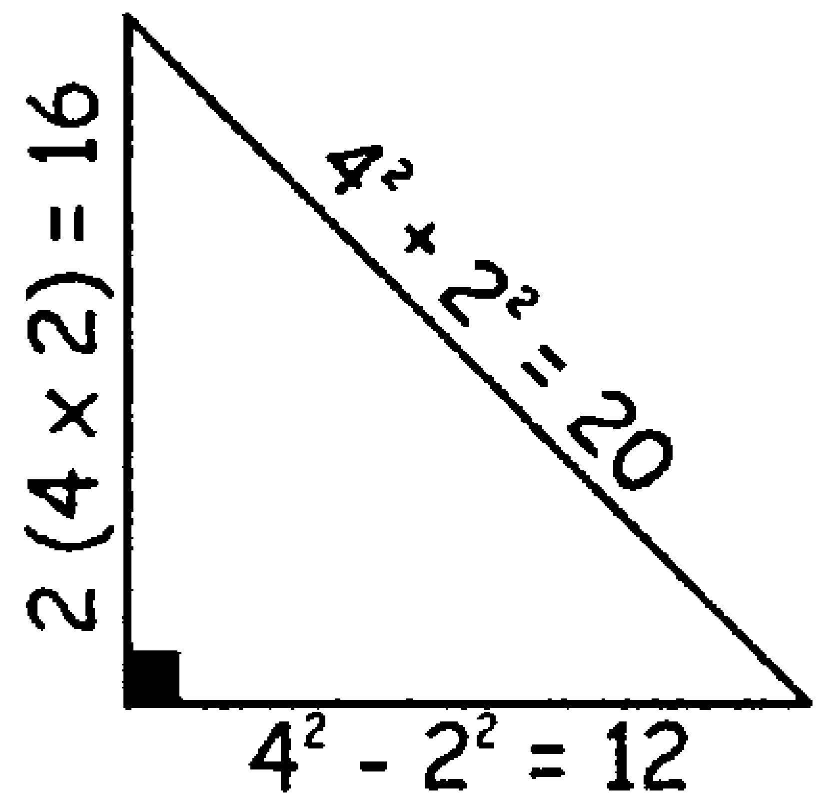
EJEMPLOS :

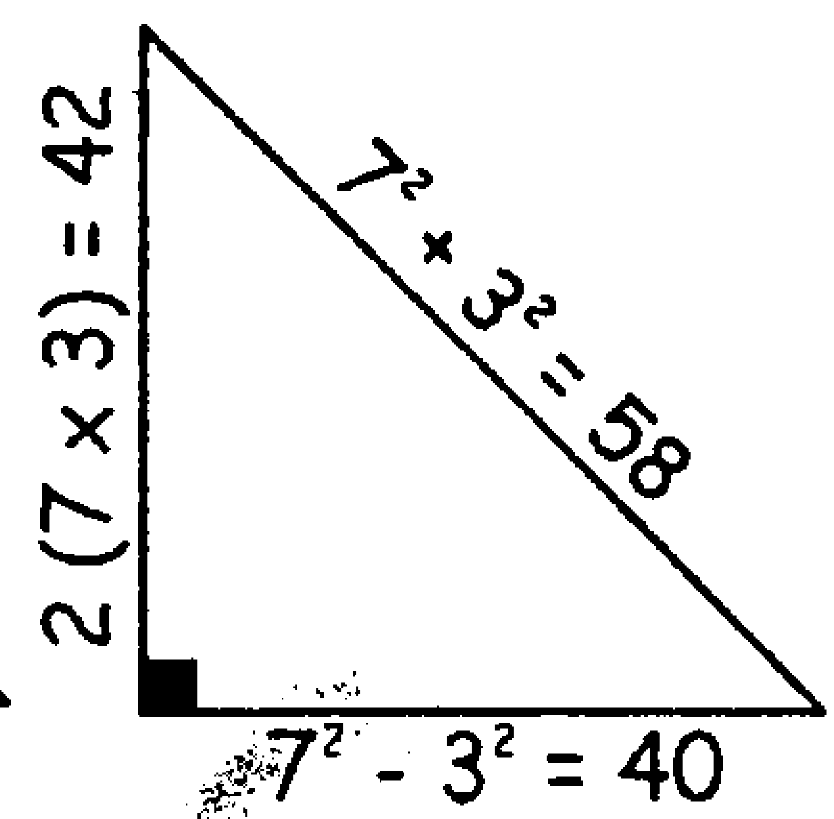
Cuando: $m = 5$ y $n = 2$ Cuando: $m = 8$ y $n = 3$



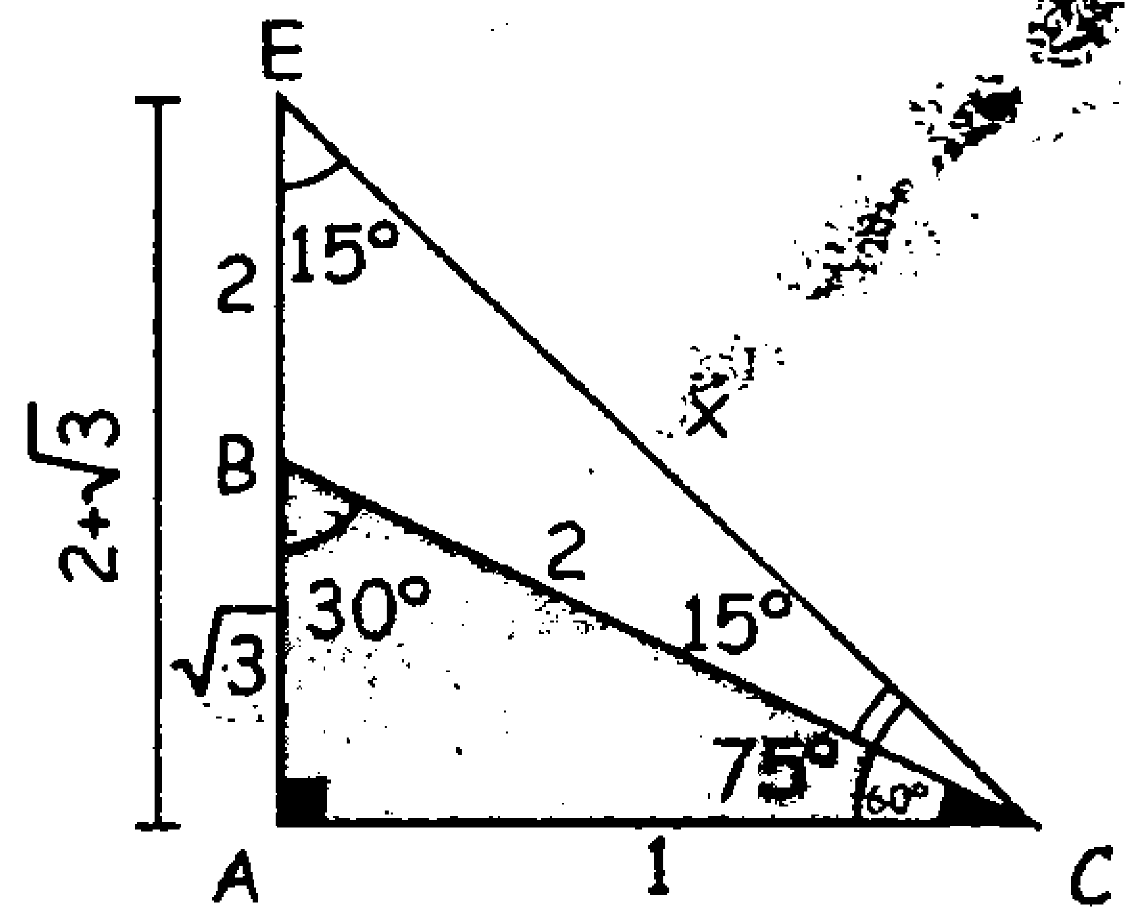


* Cuando los valores de *«m»* y *«n»* (no son primos entre sí) o cuya suma de *m* y *n* sea un número par se obtiene triángulos pitagóricos cuyas medidas de sus lados está expresada por números que tienen un divisor común.





RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 15 y 75°



Para hallar las razones trigonométricas de los ángulos de $15°$ y $75°$ tomamos como referencia el triángulo rectángulo notable de $30°$ y $60°$, luego prolongamos $\overline{AB}$ (como se muestra en la figura), hasta obtener un isósceles EBC, siendo: $EB = BC = 2$.

En el triángulo rectángulo EAC: Calculamos el valor de «x» por medio del teorema de Pitágoras:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2$$

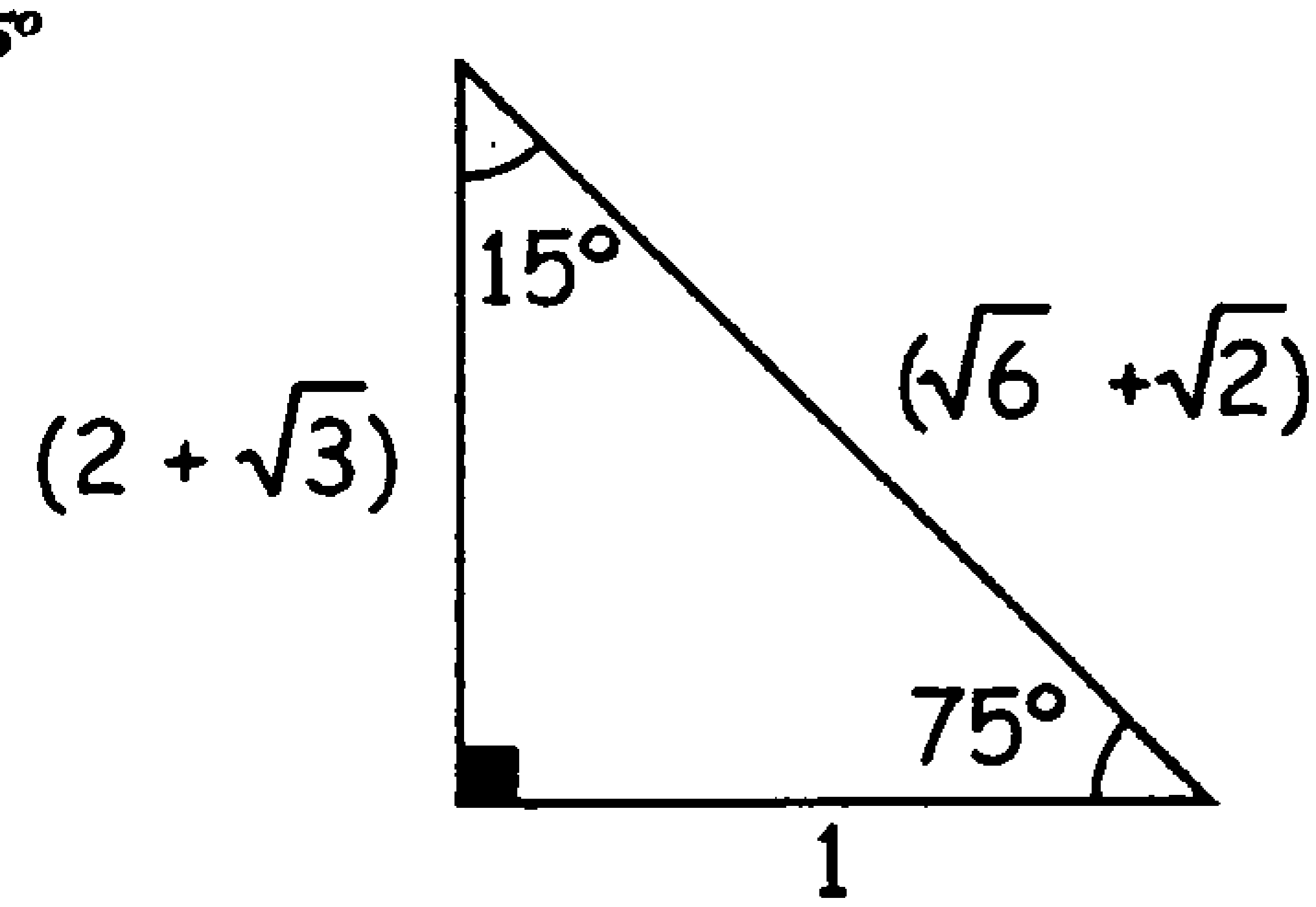
$$x^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 + 1 \Rightarrow x^2 = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$$

* ***Aplicamos radicales dobles :*** $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

Luego, calculamos las razones trigonométricas de $15°$ y $75°$



$\text{sen } 15° = \dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \rightarrow \text{sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \rightarrow \cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

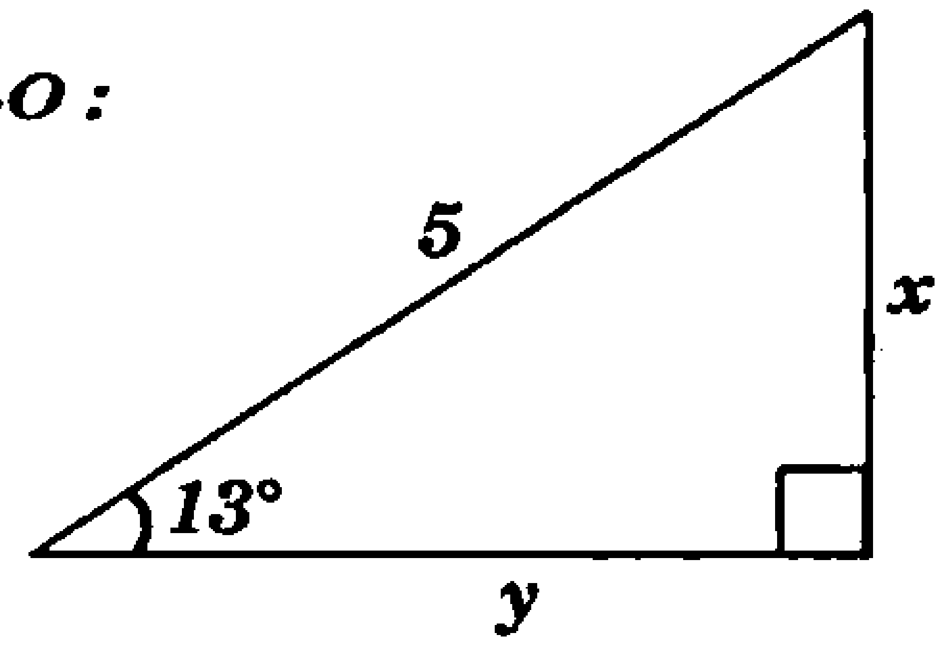
$\text{tg } 15° = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \boxed{2-\sqrt{3}} \rightarrow \text{tg } 75° = 2+\sqrt{3}$

$\text{ctg } 15° = \dfrac{2+\sqrt{3}}{1} = \boxed{2+\sqrt{3}} \rightarrow \text{ctg } 75° = 2-\sqrt{3}$

$\sec 15° = \dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \rightarrow \sec 75° = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\csc 15° = \dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \rightarrow \csc 75° = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

EJEMPLO :



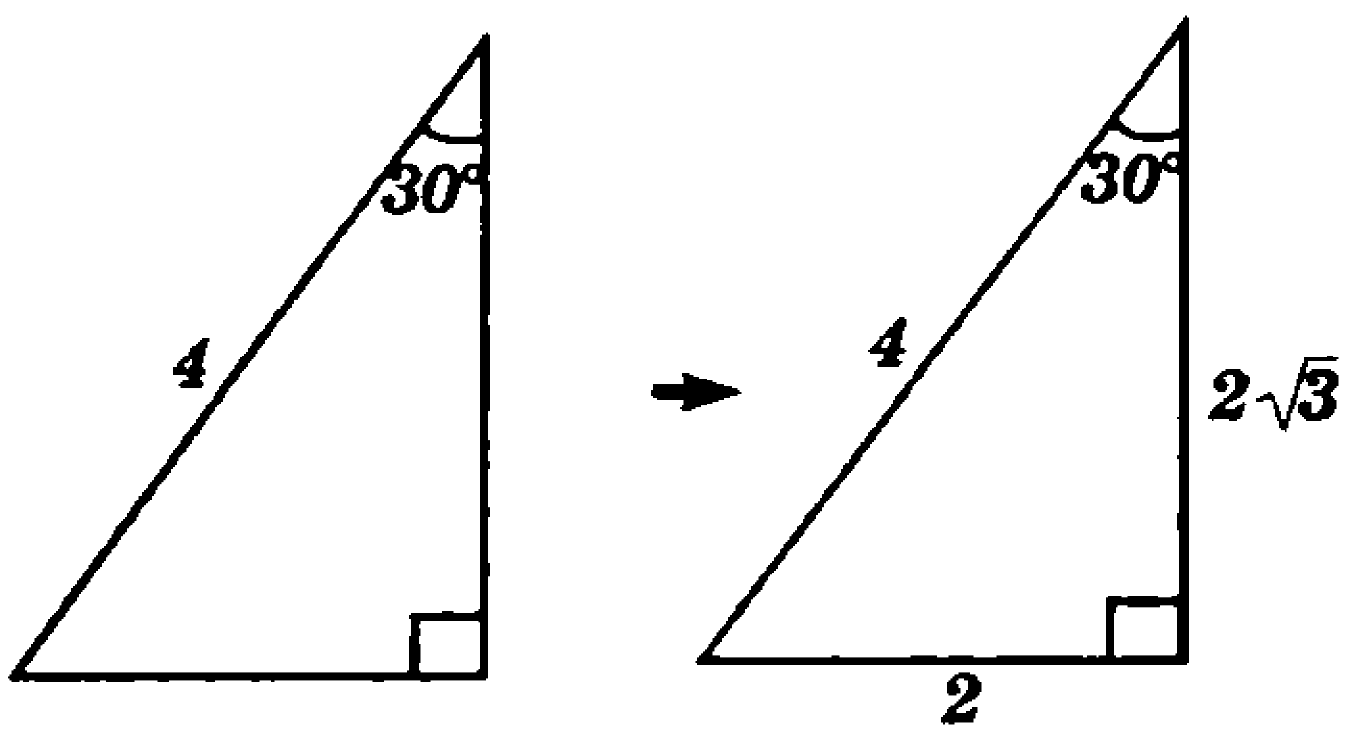
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Cateto Opuesto} = x = 5\,\text{Sen}13° \\ \text{Cateto Adyacente} = y = 5\,\text{Cos}13° \end{cases}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Las aplicaciones de la trigonometría en campos como topografía y navegación requieren resolver triángulos rectángulos. La expresión «Resolver un triángulo» significa encontrar la longitud de cada lado y la medida de cada ángulo del triángulo.

EJEMPLO :

RESOLVER ⇒ *RESOLUCIÓN*



Resolver un triángulo rectángulo es calcular sus lados si se conocen un lado y un ángulo agudo

CÁLCULO DE LADOS

Para calcular lados, vamos aplicar *3* propiedades que a continuación lo deducimos:

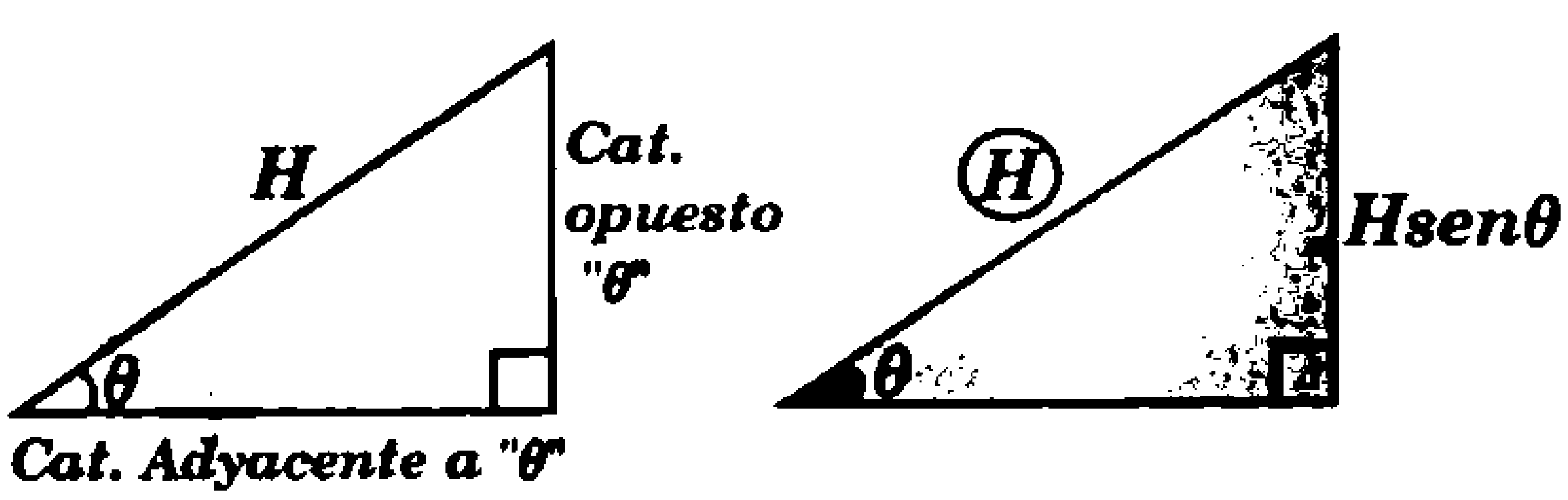
CONOCIDA LA HIPOTENUSA (H) Y UN ÁNGULO AGUDO (θ):

I) $\text{Sen}\theta = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Cateto opuesto} = \text{Hipotenusa} \times \text{Sen}\theta}$

II) $\text{Cos}\theta = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Cateto Adyacente} = \text{Hipotenusa} \times \text{Cos}\theta}$



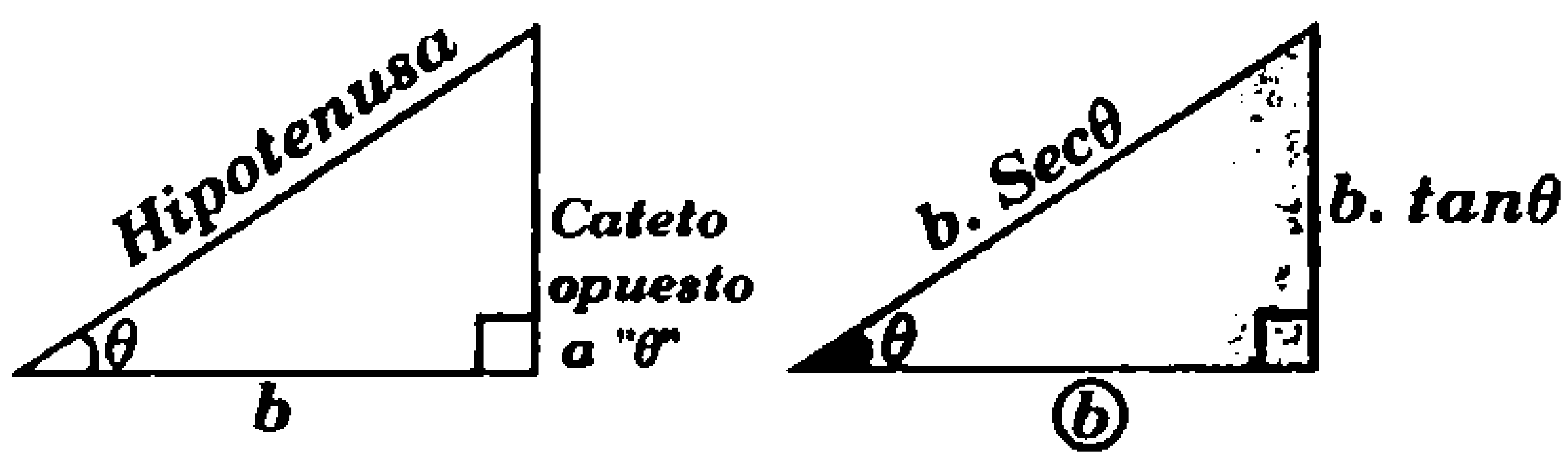
CONOCIENDO UN CATETO ADYACENTE (b) Y UN ÁNGULO AGUDO (θ):

I) $\text{Tan}\theta = \dfrac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}$

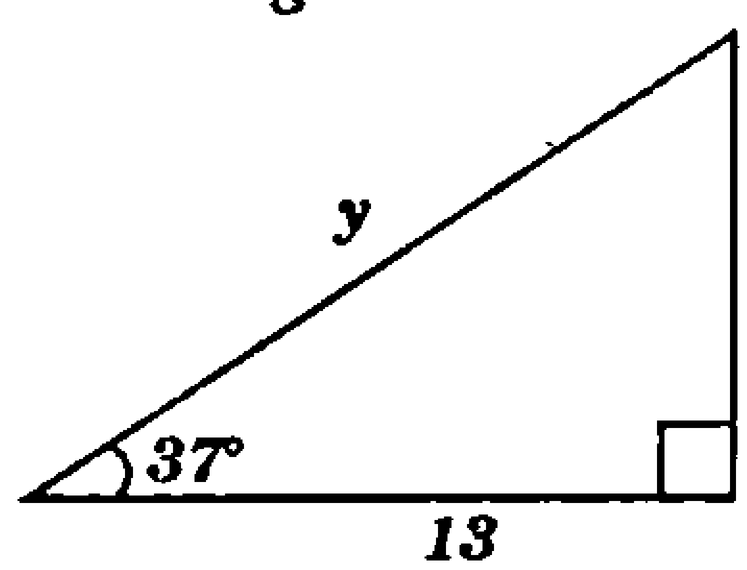
$\Rightarrow \boxed{\text{Cateto Opuesto} = \text{Cateto Adyacente} \times \text{Tan}\theta}$

II) $\text{Sec}\theta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}}$

$\Rightarrow \boxed{\text{Hipotenusa} = \text{cateto Adyacente} \times \text{Sec}\theta}$



Así por ejemplo en la figura mostrada afirmamos :



$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Cateto Opuesto} = x = 13\text{Tan}37° = 13 \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{39}{4} \\ \text{Hipotenusa} = y = 13\,\text{Sec}37° = 13 \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{65}{4} \end{cases}$$

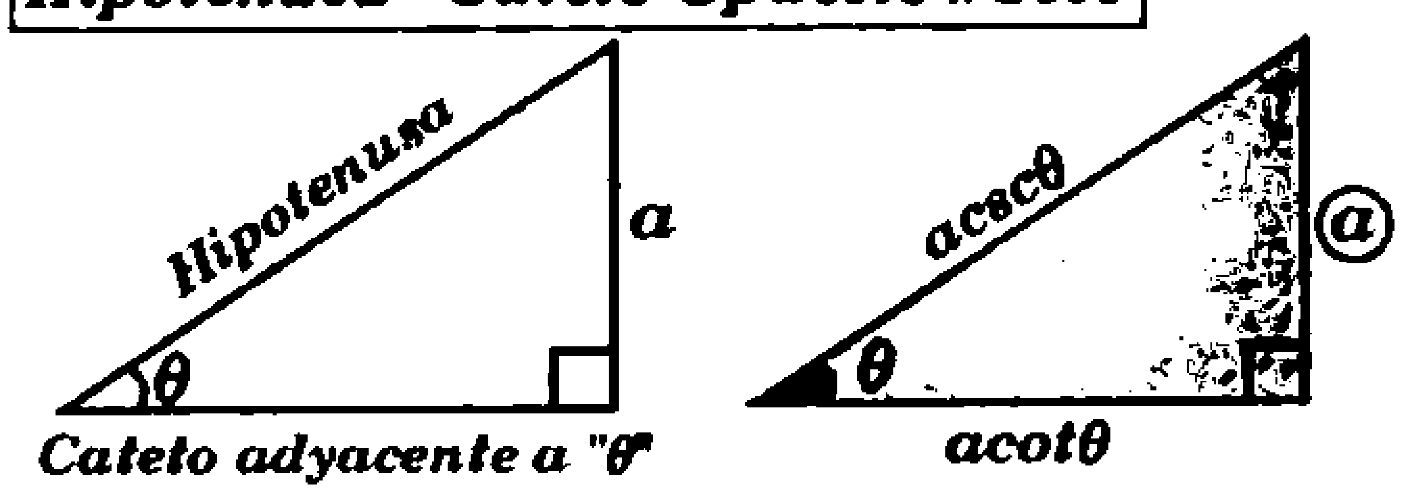
CONOCIENDO UN CATETO OPUESTO (a) Y UN ÁNGULO AGUDO (θ)

I) $\text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}} \Rightarrow$

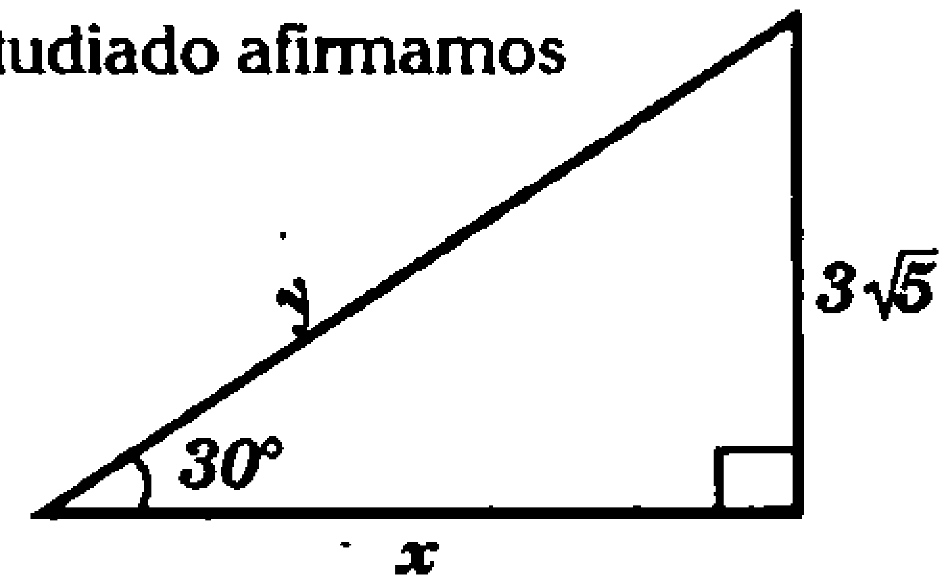
$\boxed{\text{Cateto Adyacente} = \text{Cateto Opuesto} \times \text{Cot}\theta}$

II) $\text{Csc}\theta = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}} \Rightarrow$

$\boxed{\text{Hipotenusa} = \text{Cateto Opuesto} \times \text{Csc}\theta}$



En base a lo estudiado afirmamos

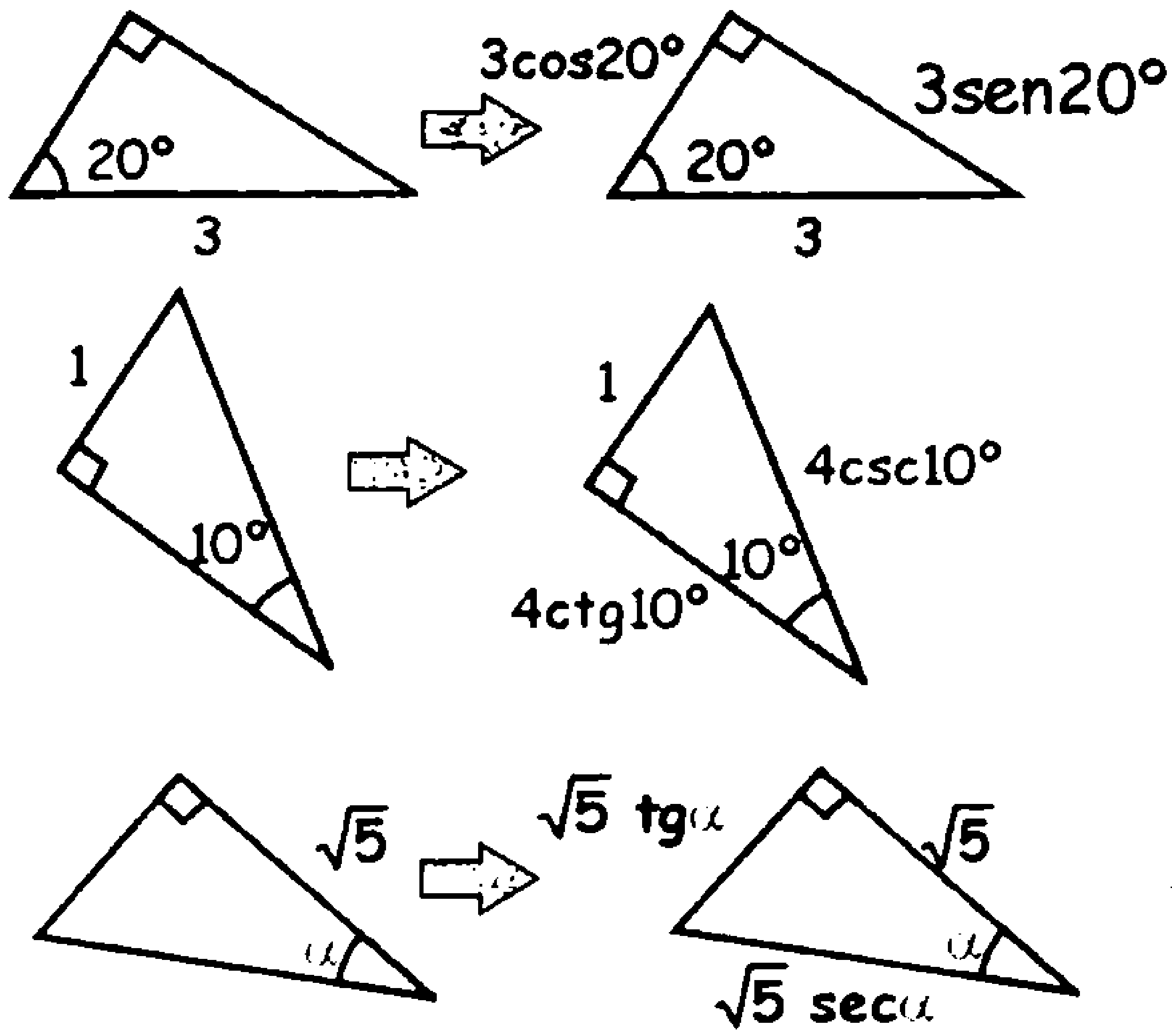


Cateto Adyacente $= x = 3\sqrt{5} \times Cot30°$

$= 3\sqrt{5} \times 3 = 3\sqrt{15}$

Hipotenusa $= y = 3\sqrt{5} \times Csc30° = 3\sqrt{5} \times 2 = 6\sqrt{5}$

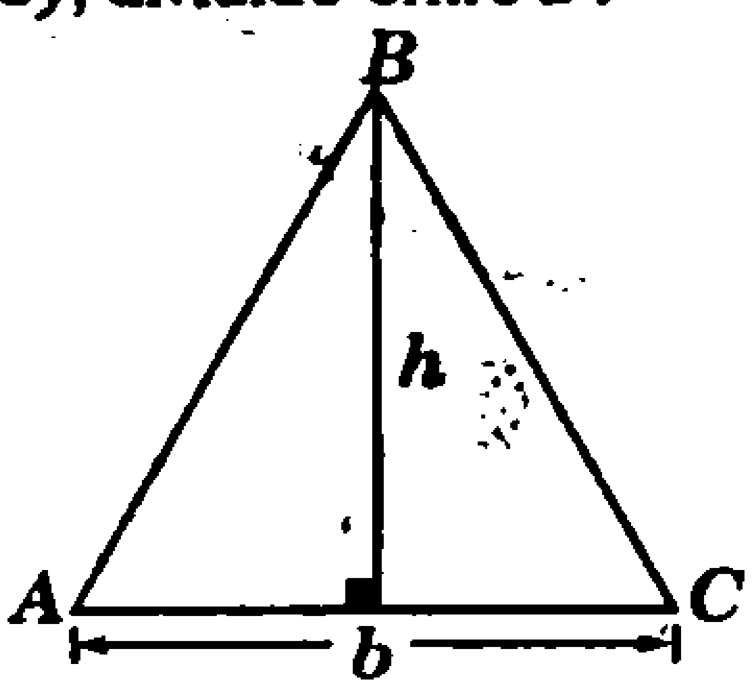
MAS EJEMPLOS :



ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR

CONOCIENDO LA BASE Y ALTURA

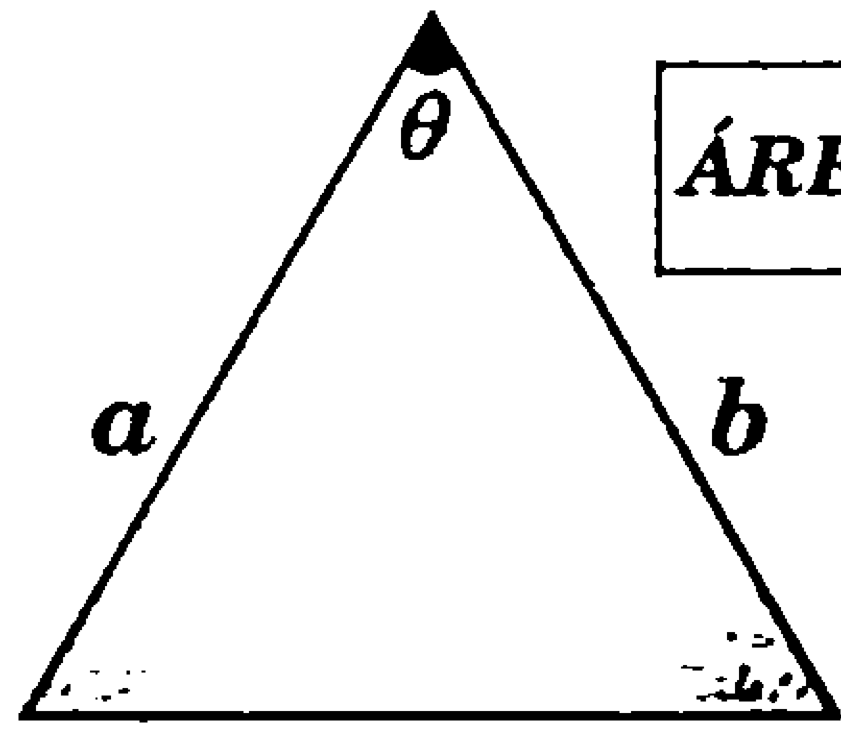
El área de una región triangular se calcula multiplicando la base *(un lado)* por su altura *(relativa al lado)*, dividido entre *2* .



$$ÁREA = \frac{b \times H}{2}$$

CONOCIDOS DOS LADOS Y LA MEDIDA DEL ÁNGULO ENTRE ELLOS

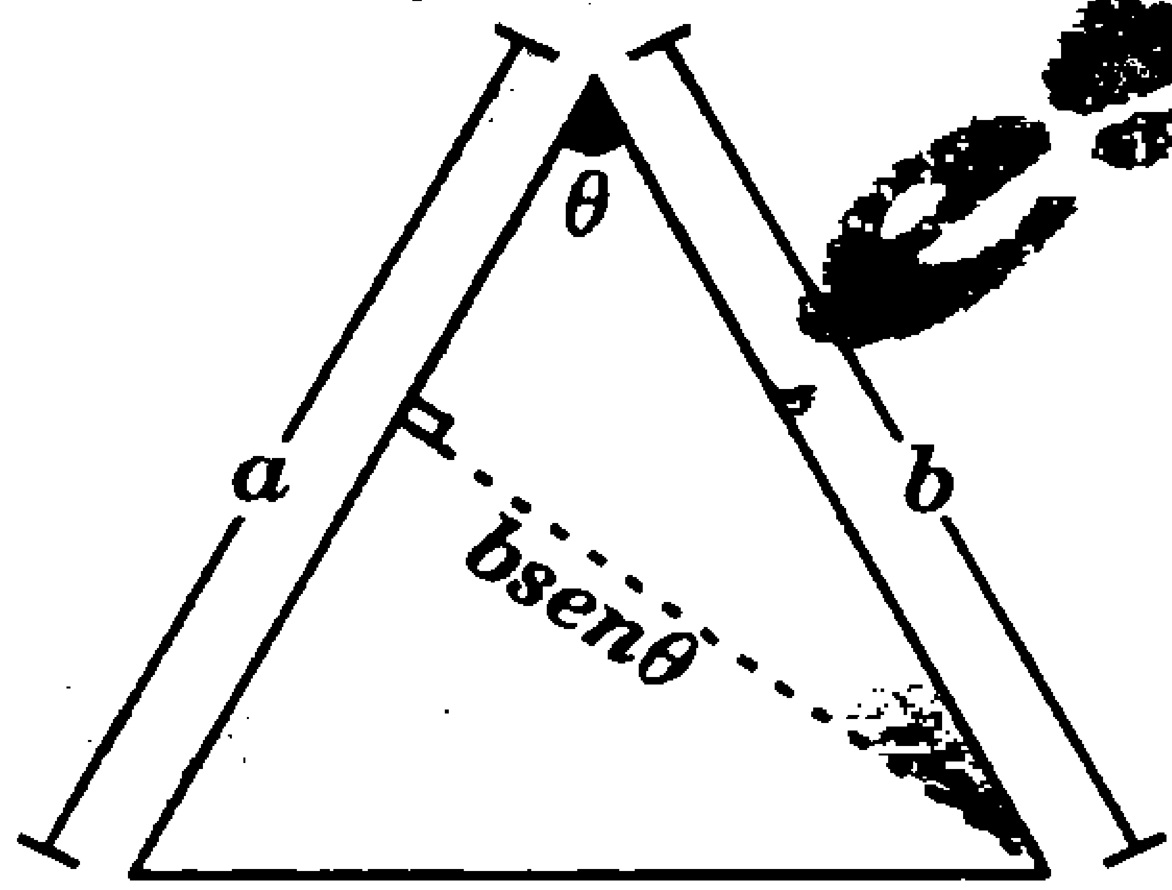
El área de una región triangular se calcula multiplicando dos lados y el seno del ángulo entre ellos , dividido entre *2*.



$$ÁREA_{\Delta} = \frac{a \times b}{2} sen\theta$$

DEMOSTRACIÓN:

* Usando un trazo auxiliar notamos en la figura, que la altura mide *"bSenθ"*

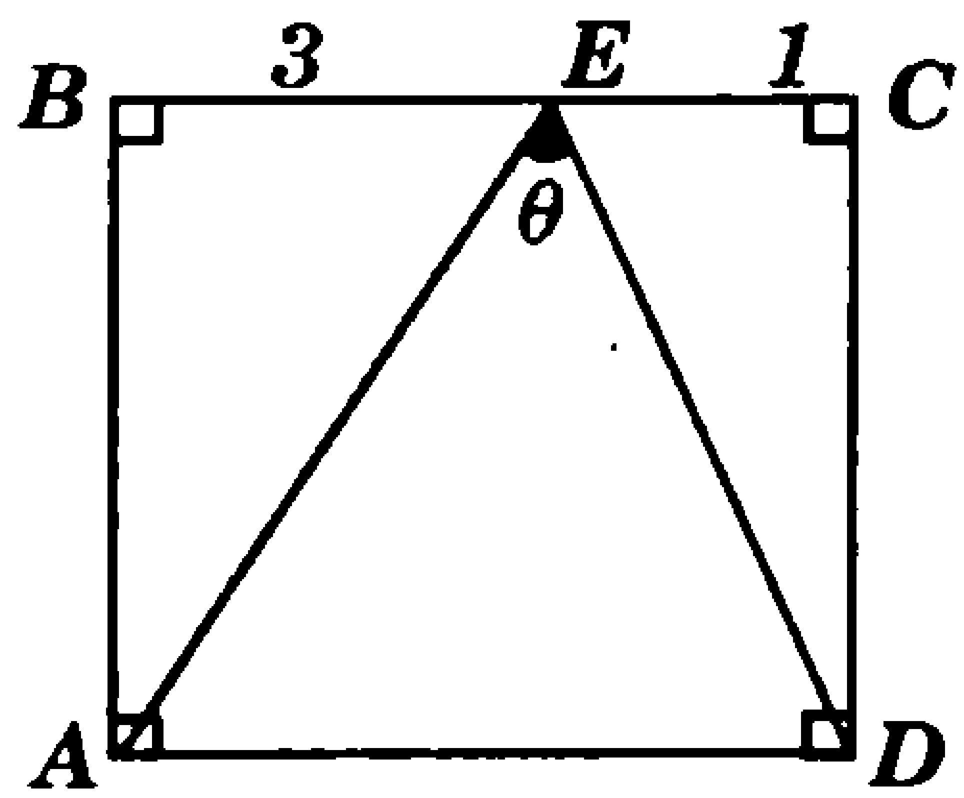


* Sabemos:

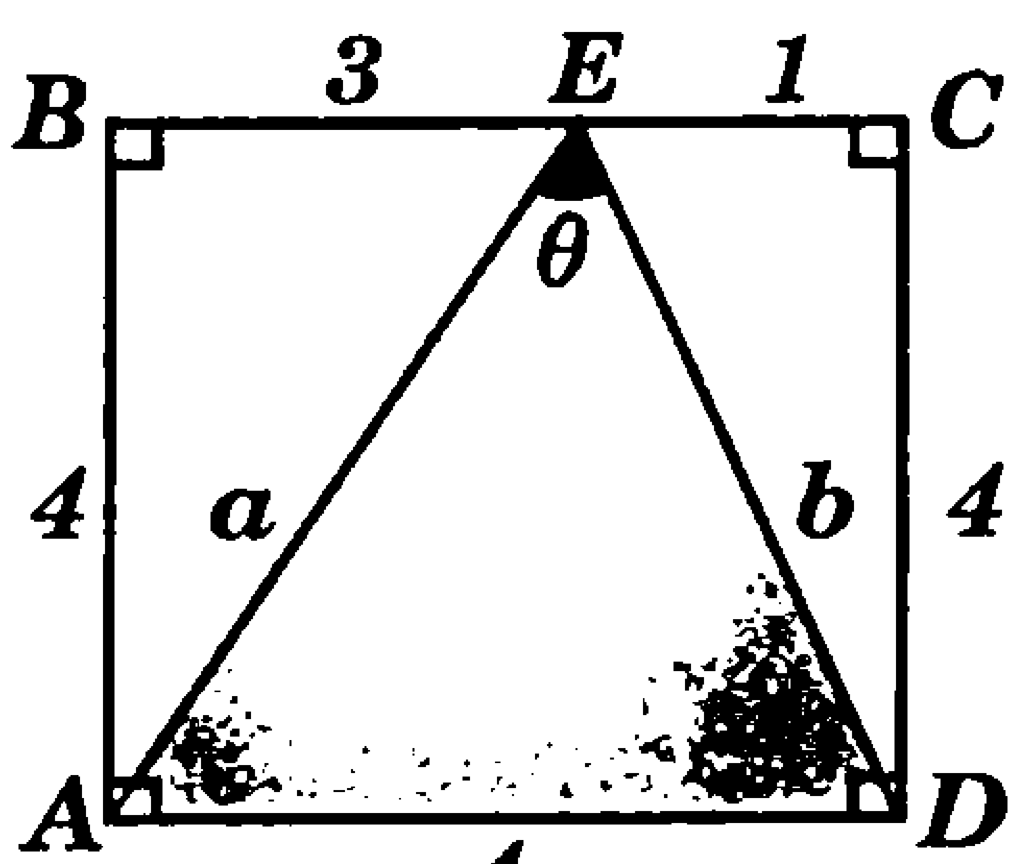
$$ÁREA_{\Delta} = \frac{BASE \times ALTURA}{2} \Rightarrow \boxed{ÁREA_{\Delta} = \frac{a \times bSen\theta}{2}}$$

EJEMPLO 14 :

En la figura mostrada *ABCD* en un cuadrado. Calcular *"Sen θ"*



RESOLUCIÓN :



Por el teorema de Pitágoras

$a=5 \quad \wedge \quad b=\sqrt{17}$

Cálculo del área de la región triangular *AED*

$$* \ Área_{\triangle AED}=\frac{Base\times Altura}{2}=\frac{4\times 4}{2}=8$$

$$** \ Área_{\triangle AED}=\frac{a\times b}{2}\ Sen\theta=\frac{5\times\sqrt{17}}{2}Sen\theta$$

Igualando *(*)* y *(**)* tenemos :

$$Área_{\triangle AED}=Área_{\triangle AED}$$

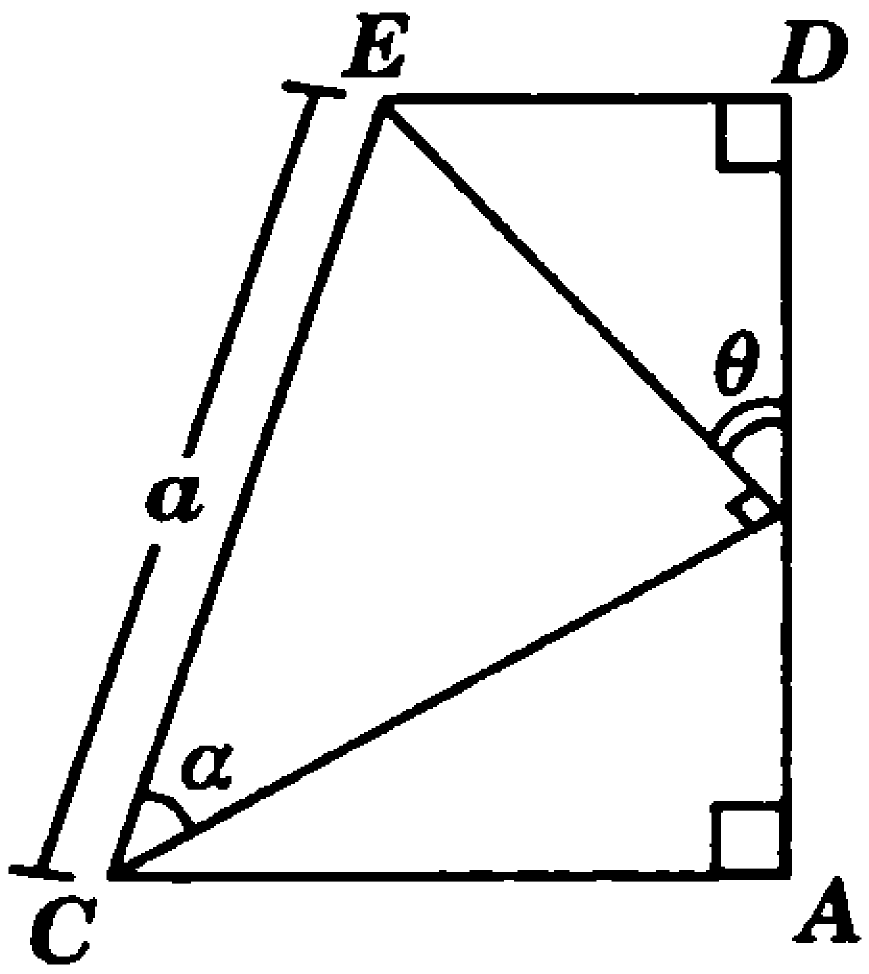
$$\Rightarrow\frac{5\sqrt{17}}{2}Sen\theta=\frac{4\times 4}{2}\Rightarrow Sen\theta=\frac{16}{5\sqrt{17}}=\frac{16\sqrt{17}}{85}$$

NOTA :

* Recuerde que el cálculo del área , será una herramienta importante; para el cálculo de la *R.T.* Seno

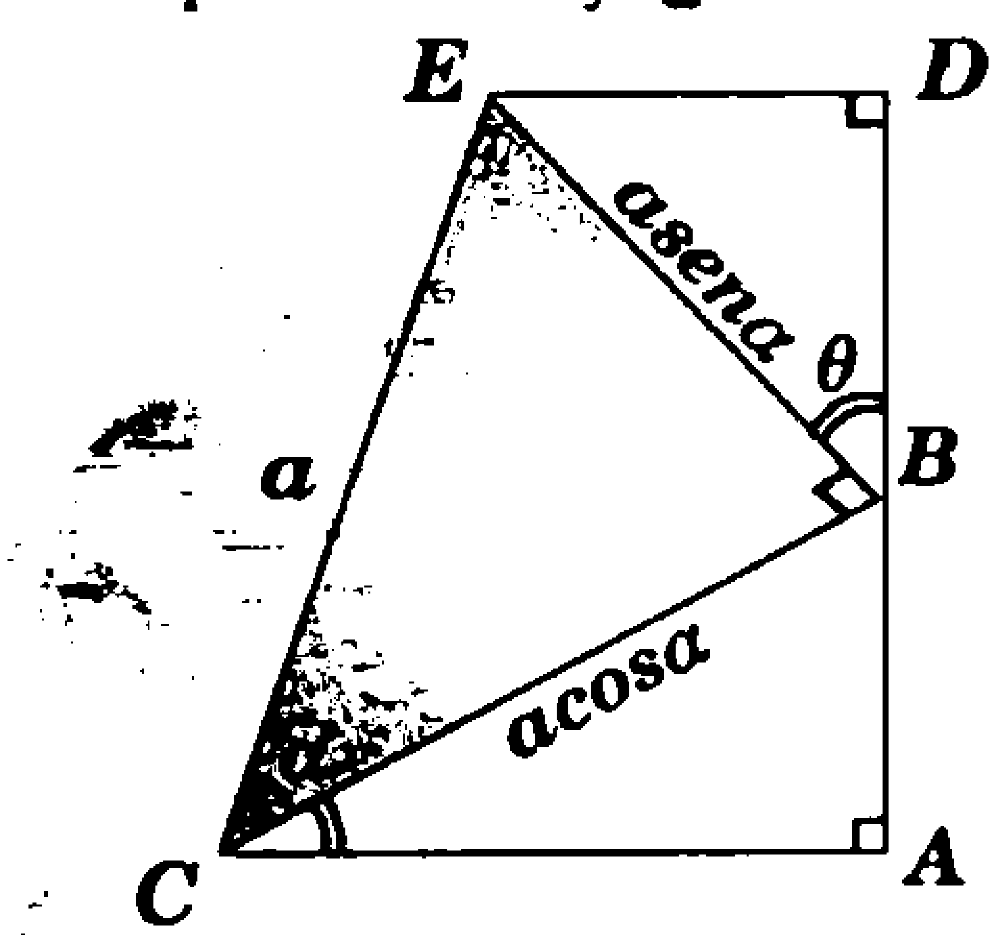
EJEMPLO 15 :

Halle *AB* en función de "*a*"; "*α*" y "*θ*"

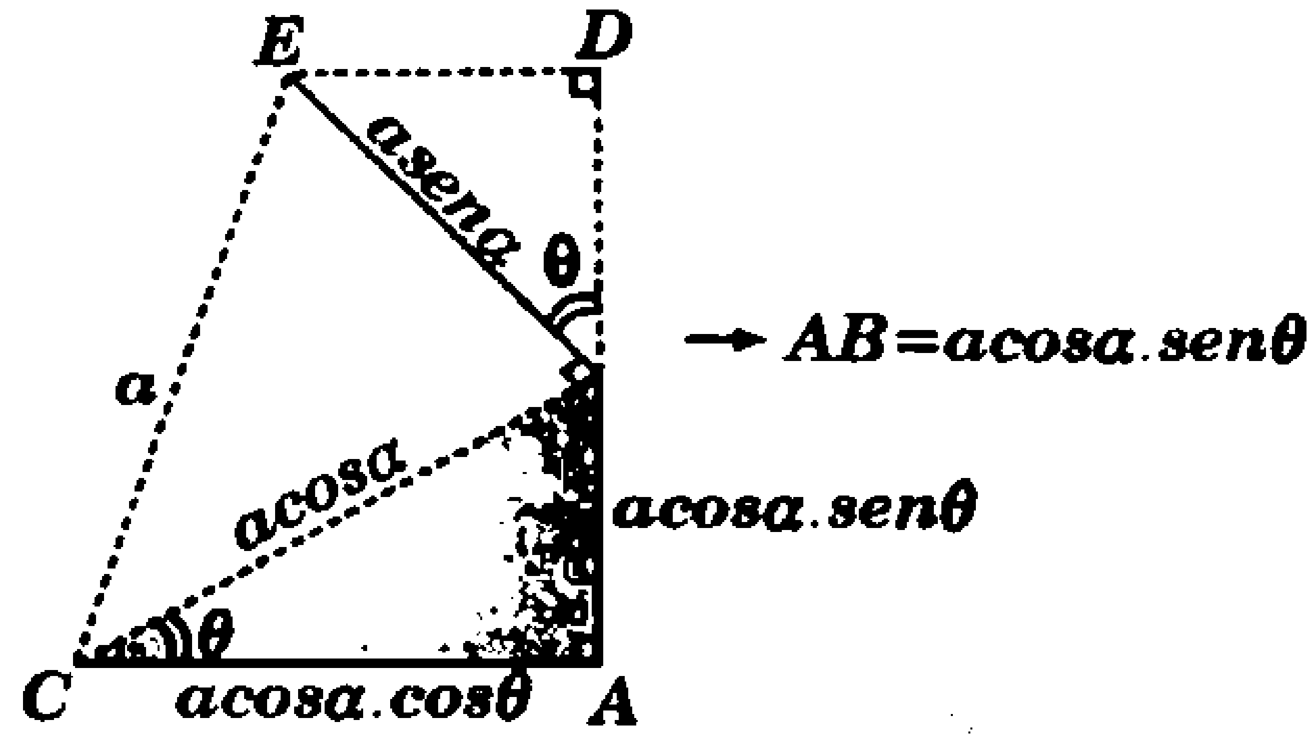


RESOLUCIÓN :

* Por resolución del triángulo rectángulo ⊿*CBE*: conocida la hipotenusa *CE* y "*α*"

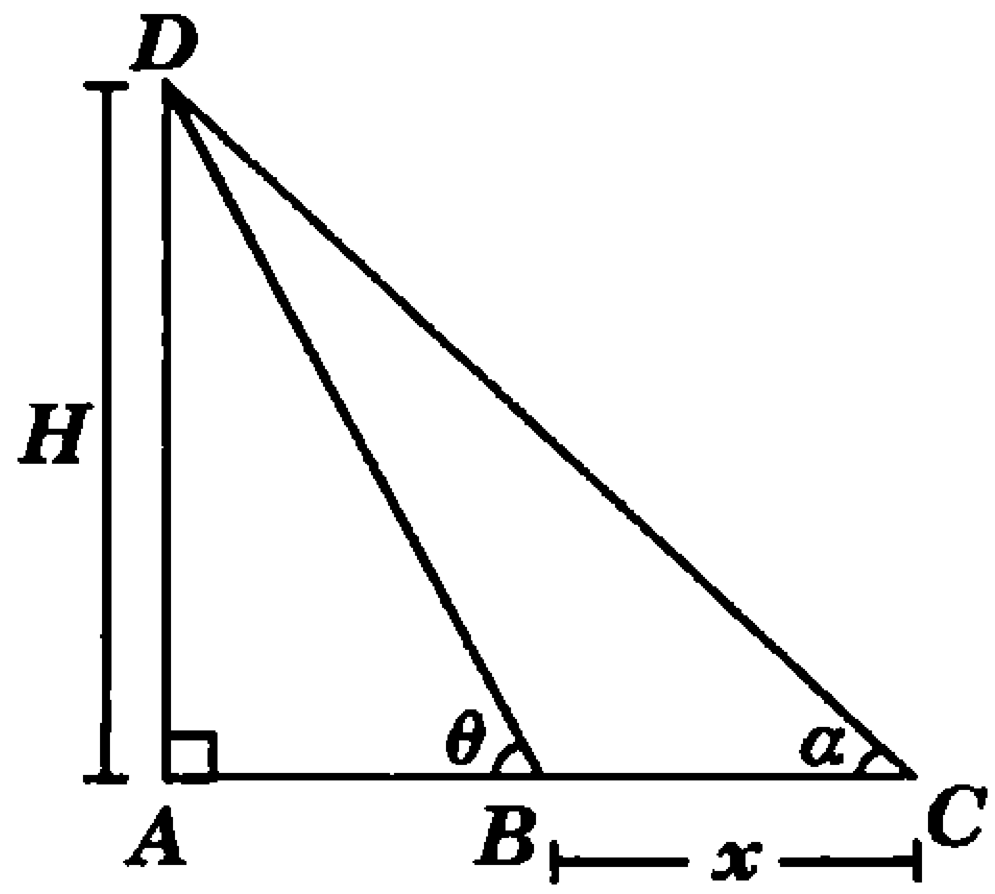


⊿*BAC*: conocida la hipotenusa *CB* y "*θ*"



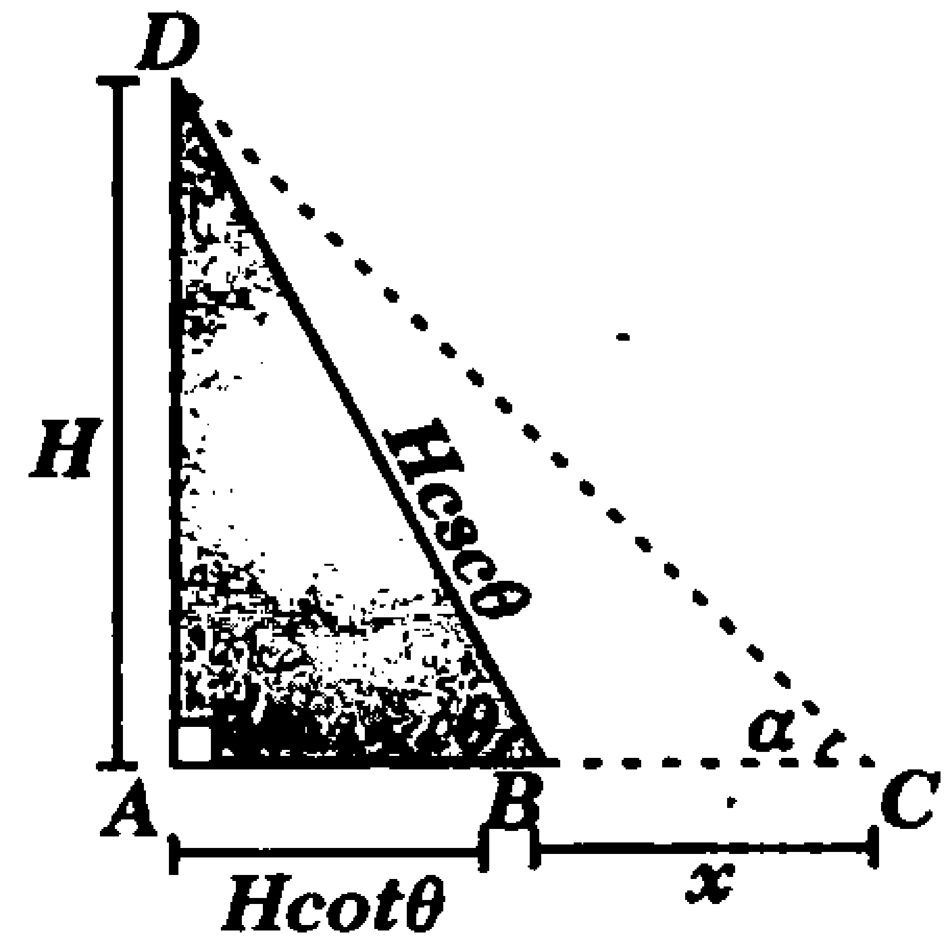
EJEMPLO 16:

Calcular "*x*" dada la figura:

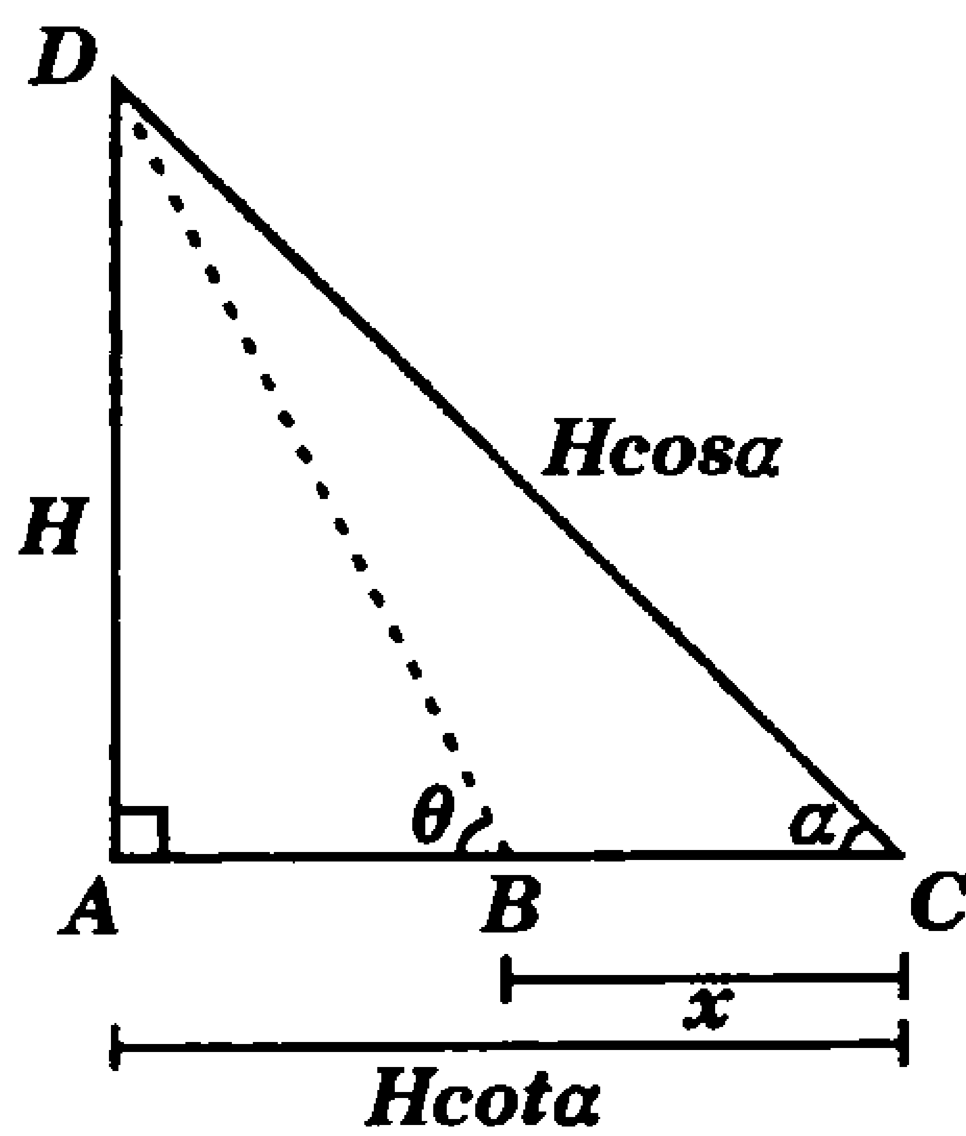


RESOLUCIÓN :

* ⊿*BAD:* Conocido "*H*" y "*θ*"



* ⊿*CAD*: Conocido "*H*" y "*α*"



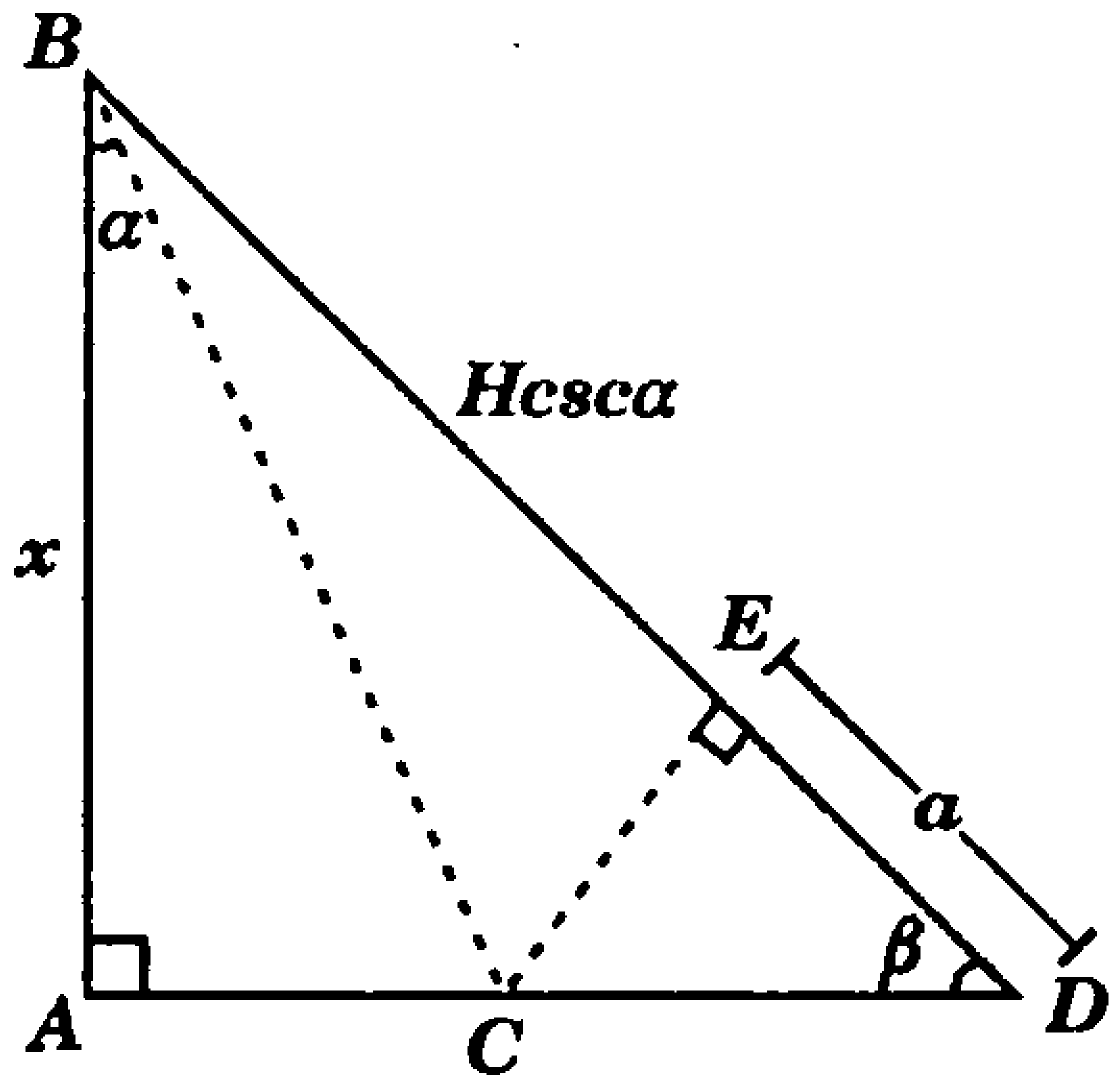
AB+BC=AC

Luego :

$$H\cot\theta + x = HCot\alpha$$
$$\Rightarrow x = H(Cot\alpha - Cot\theta)$$

EJEMPLO 17 :

Hallar "x" en función de "a", "α" y "β"



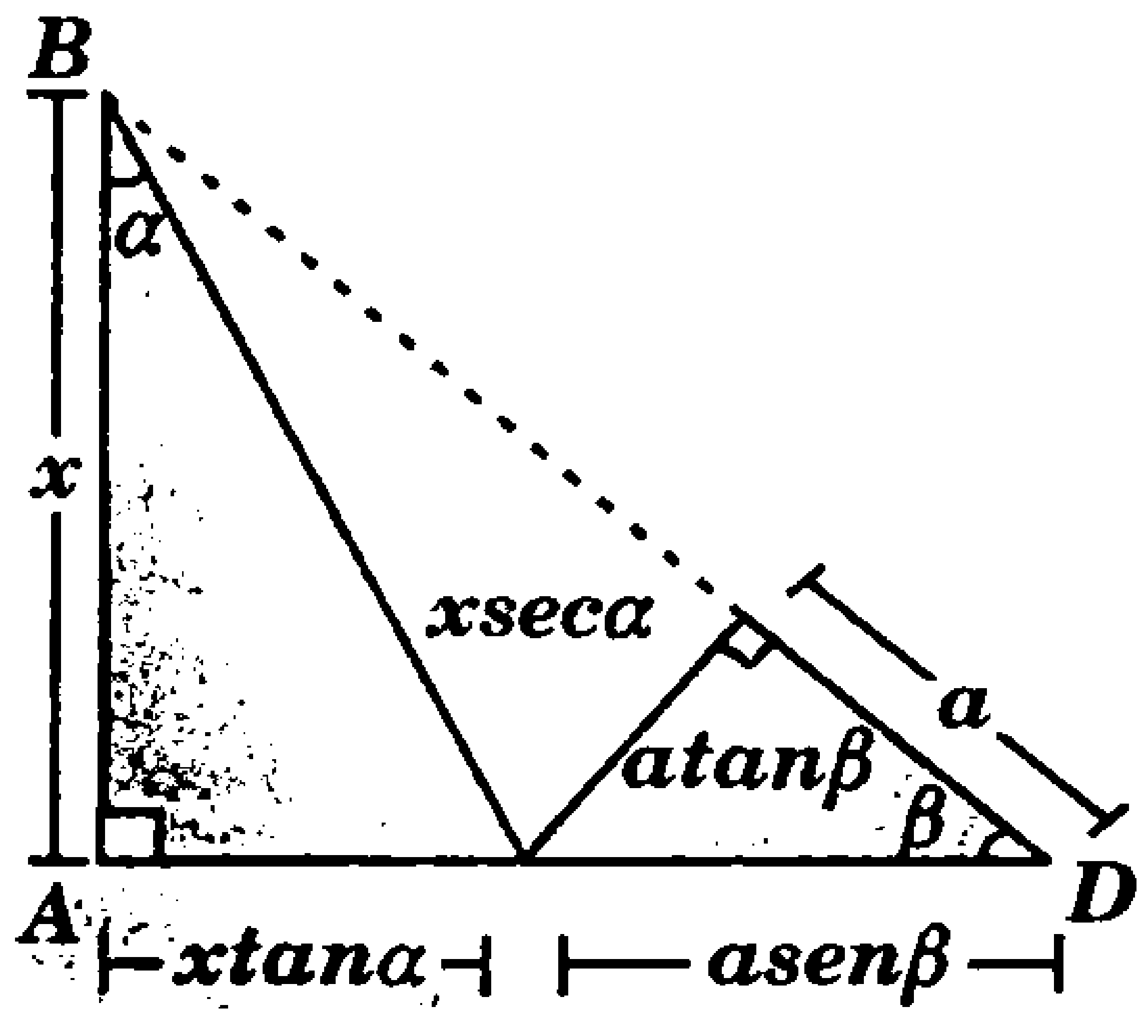
RESOLUCIÓN :

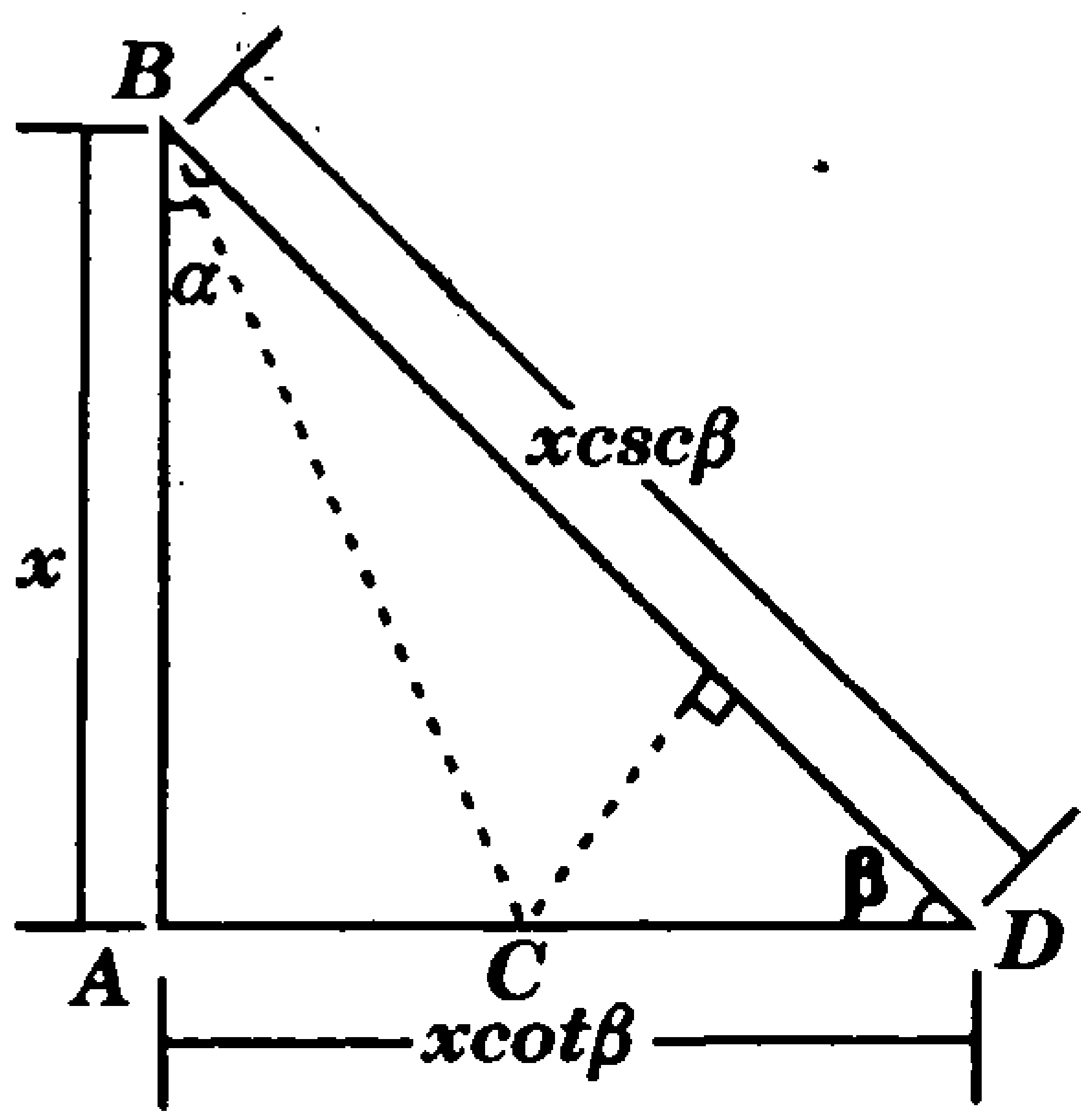
* Aplicando resolución de triángulos rectángulos.

a) ⊿*BAC:* Conocidos "x" y "α"

b) ⊿*CED:* conocidos "a" y "α"

c) ⊿*BAD:* conocidos "x" y "β"





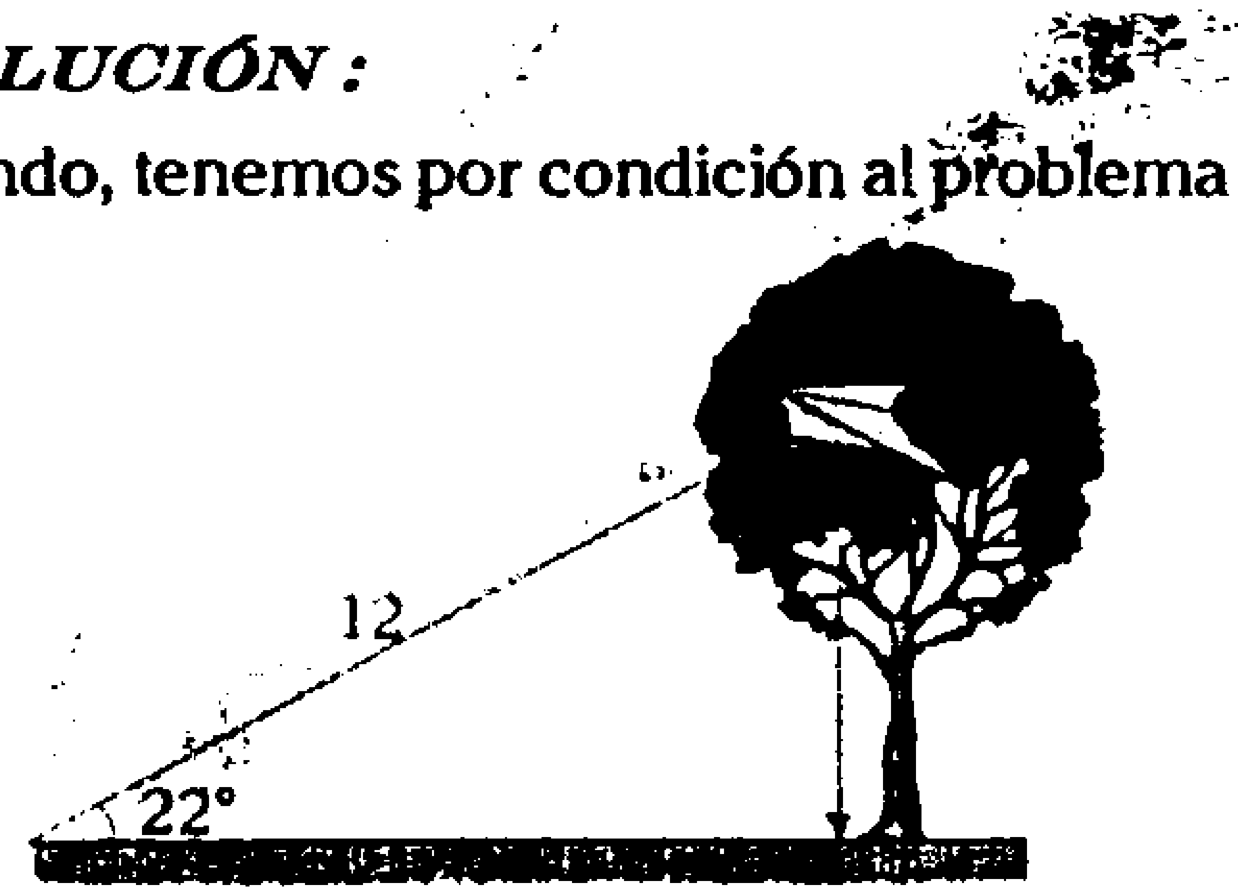
$$AC + CB = AD$$
$$xTan\alpha + aSec\beta = xCot\beta$$
$$aSec\beta = xCot\beta - xTan\alpha$$
$$\Rightarrow x = \frac{aSec\beta}{Cot\beta - Tan\alpha}$$

EJEMPLO 18 :

Una cometa se queda atascada en la rama más alta de un árbol, si la cuerda de la cometa mide ***12 m*** y forma un ángulo de ***22°*** con el suelo, estime la altura del árbol encontrando la distancia que hay entre la cometa y el suelo (***Sen22° = 0,374***)

RESOLUCIÓN :

Graficando, tenemos por condición al problema :



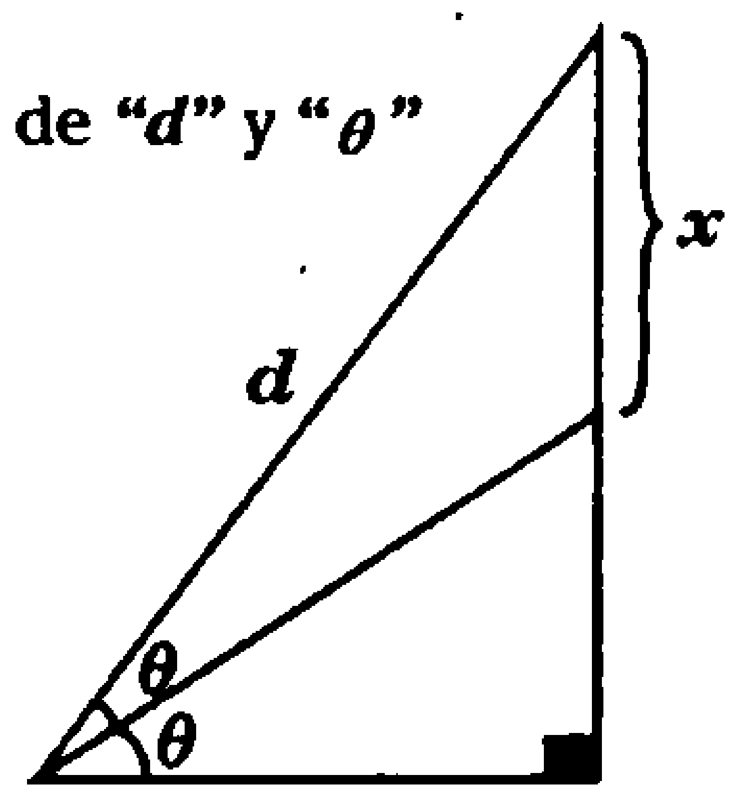
Sea h la altura a la cual se encuentra la cometa, a partir de la figura vemos que: $\frac{h}{12}$ = sen22°

$\Rightarrow$ ***h = 12 sen 22°*** $\Rightarrow$ ***h = 12(0,374) = 4,488***

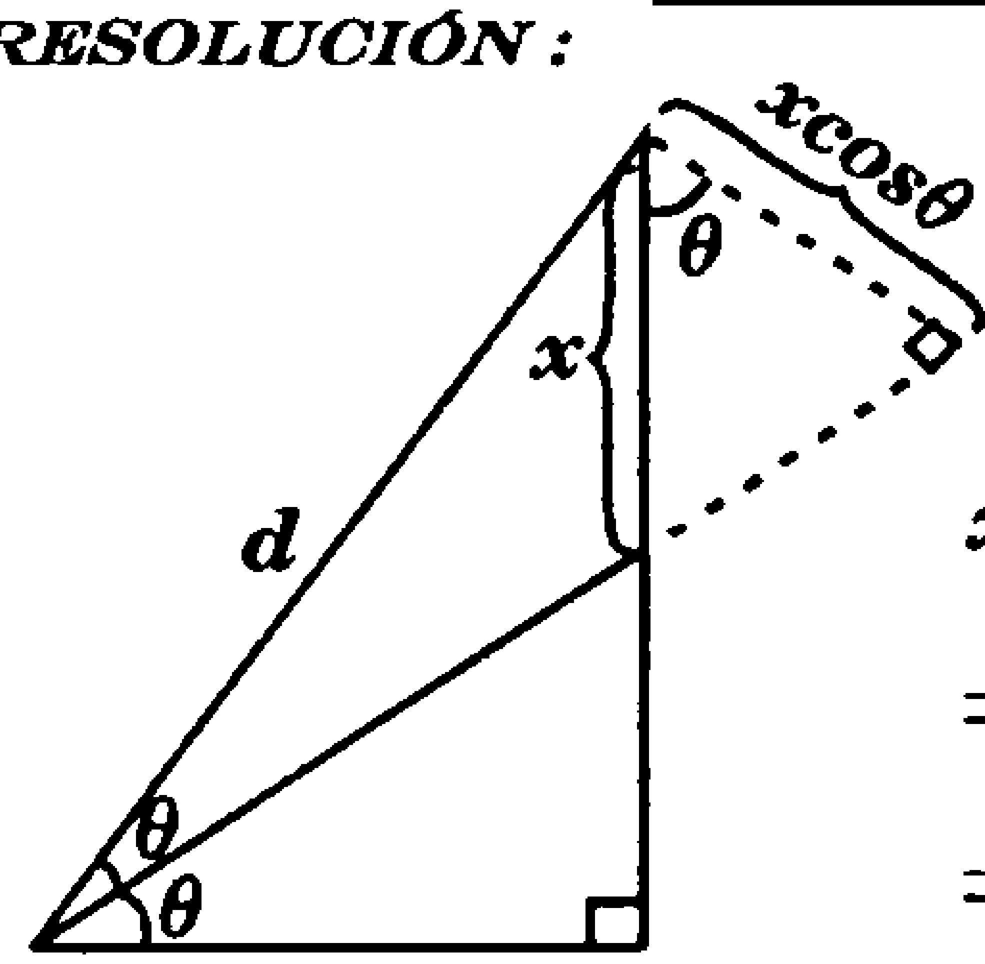
$\Rightarrow$ ***h = 4,488 m***

EJEMPLO 19 :

Hallar "x" en función de "d" y "θ"



RESOLUCIÓN :



$$x\cos\theta = d\,sen\theta$$
$$\Rightarrow x = \frac{d\,sen\theta}{\cos\theta}$$
$$\Rightarrow x = d\,tg\theta$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

En un triángulo $ABC(B=90°)$; reducir : $L=TanATanC+1$

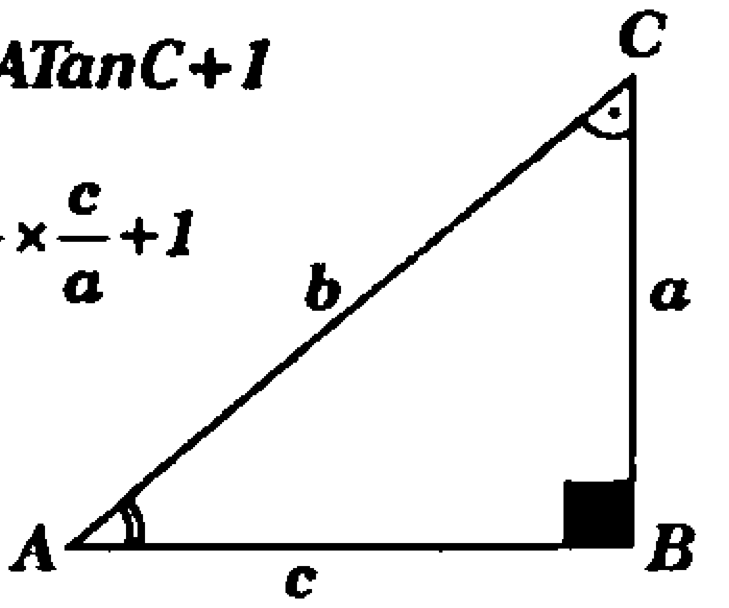
A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando, tenemos :

$L=TanATanC+1$

$\Rightarrow L=\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}+1$



* Reduciendo :

$L=1+1 \Rightarrow L=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

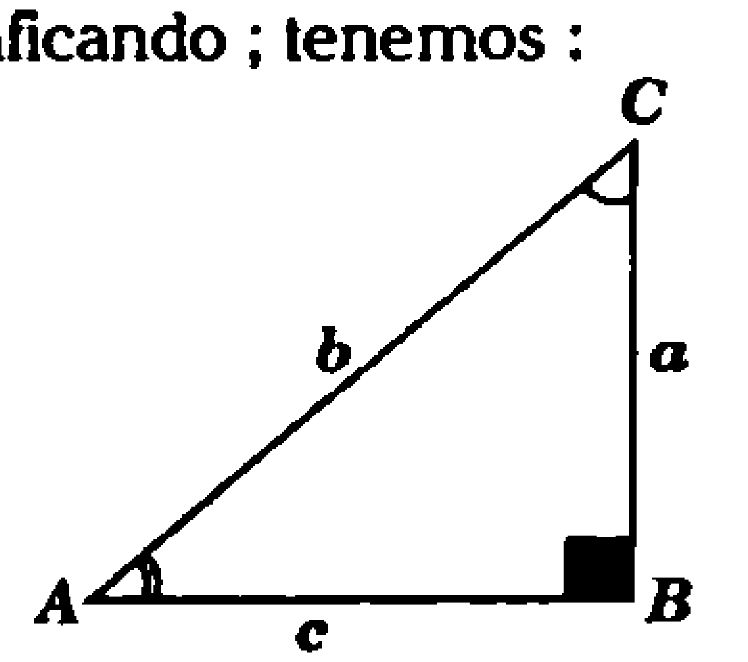
En un triángulo rectángulo ABC $(B=90°)$; reducir :

$$L=senAsecC+cosCcscA$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando ; tenemos :



$$L=senAsecC+cosC\,cscA$$

$$\Rightarrow L=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}$$

* Reduciendo : $L=1+1 \Rightarrow L=2$

RPTA : "B"

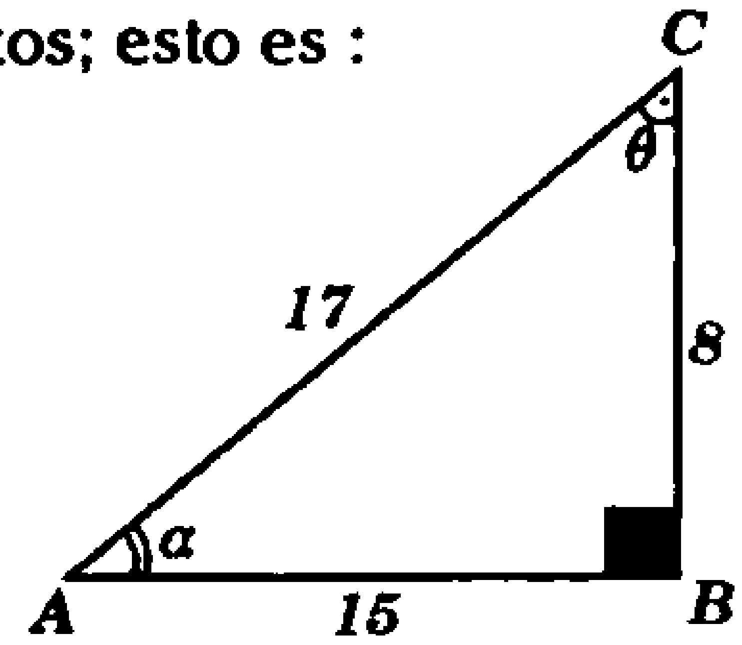
PROBLEMA 3 :

En un triángulo rectángulo, los lados mayores miden *17cm* y *15cm*. Calcular el seno del menor ángulo agudo.

A) $\frac{8}{15}$ B) $\frac{15}{17}$ C) $\frac{8}{17}$ D) $\frac{3}{17}$ E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

Entiende que los lados mayores son la hipotenusa y el mayor de los catetos; esto es :



I) Por Pitágoras :

$$BC^2=17^2-15^2 \Rightarrow BC^2=64$$
$$\Rightarrow BC=8$$

II) Como a menor ángulo se opone menor lado, el menor ángulo agudo es "α" ; luego :

$$sen\alpha=\frac{8}{17}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

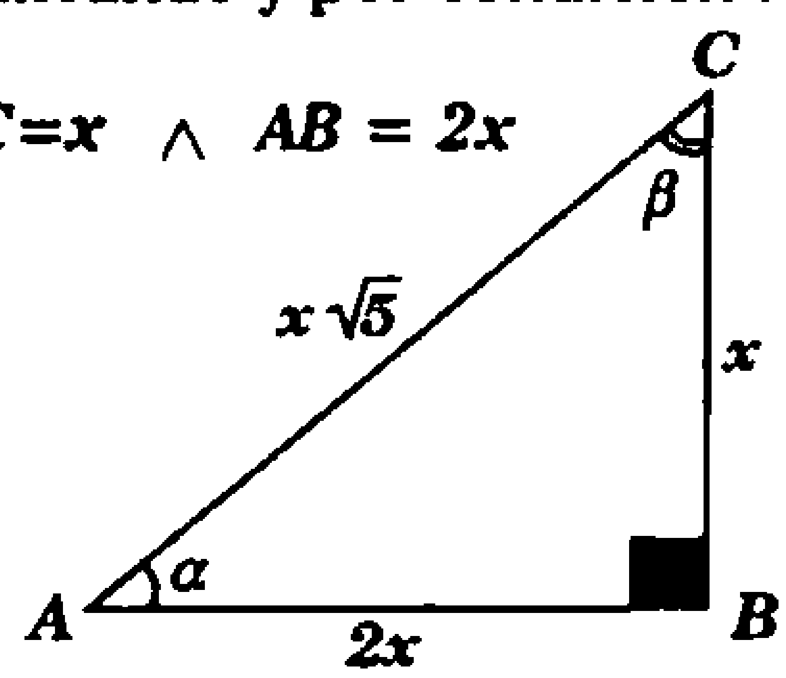
En triángulo rectángulo un cateto es el doble del otro.Calcular la secante del mayor ángulo agudo de dicho triángulo.

A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) $2\sqrt{5}$ D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando y por condición :

$BC=x \wedge AB=2x$



I) $AC^2=x^2+(2x)^2 \Rightarrow AC^2=5x^2$

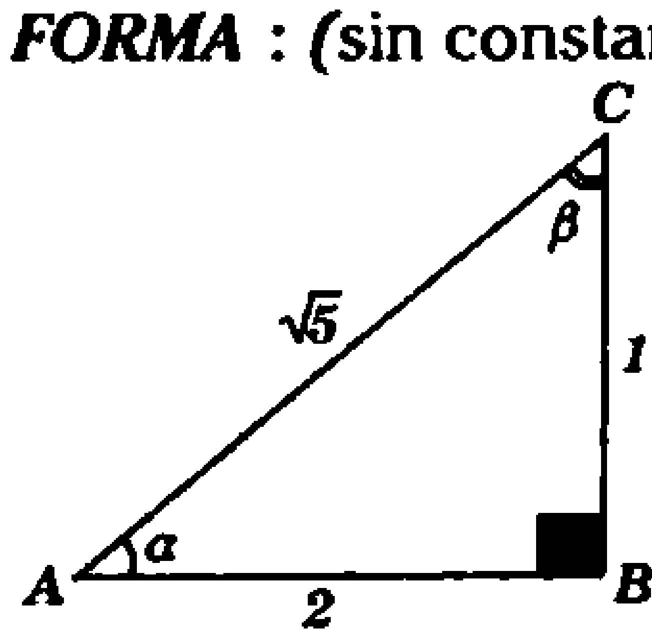
$\Rightarrow AC=x\sqrt{5}$

II) El mayor ángulo agudo, se opone al mayor cateto ; por lo tanto, piden : "$sec\beta$". Luego :

$$sec\beta=\frac{x\sqrt{5}}{x} \Rightarrow sec\beta=\sqrt{5}$$

RPTA : "A"

OTRA FORMA : (sin constantes)



I) $BC=1 \Rightarrow AB=2$

II) $AC^2=1^2+2^2 \Rightarrow AC^2=5 \Rightarrow AC=\sqrt{5}$

III) El mayor ángulo agudo, se pone al mayor cateto ; luego piden: $sec\beta$

$$sec\beta=\frac{\sqrt{5}}{1} \Rightarrow sec\beta=\sqrt{5}$$

OJO :

Notese que los resultados son los mismos.

Este último criterio se puede aplicar siempre que pidan calcular una razón trigonométrica.

PROBLEMA 5 :

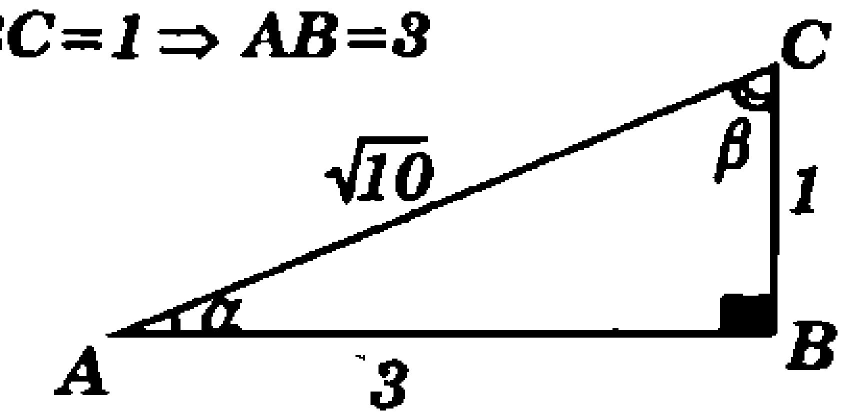
En un triángulo rectángulo, un cateto es el triple del otro. Calcular el seno del mayor ángulo agudo.

A) $0,1\sqrt{10}$ B) $0,2\sqrt{10}$ C) $0,3\sqrt{10}$ D) $0,4\sqrt{10}$ E) $0,5\sqrt{10}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando y por condición :

$BC=1 \Rightarrow AB=3$



I) $AC^2=1^2+3^2 \Rightarrow AC^2=10$

$\Rightarrow AC=\sqrt{10}$

II) El mayor ángulo agudo es "β", pues se opone al mayor cateto .

Piden : $sen\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ racionalizando :

$$sen\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow sen\beta=0,3\sqrt{10}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

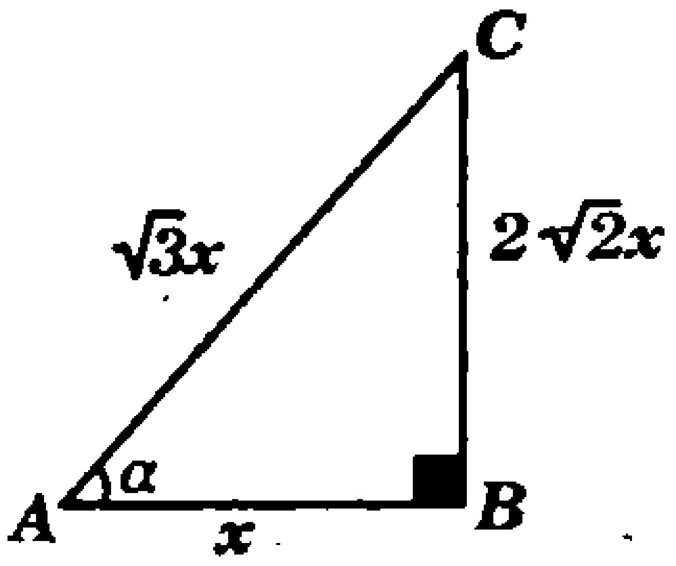
Si "α" es un ángulo agudo; tal que: $cos\alpha=\frac{1}{3}$; calcular "$tan\,\alpha$"

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$$cos\alpha=\frac{1}{3}=\frac{cat.\,adyacente}{hipotenusa}$$



I) Cat. adyacente $= x$

$\wedge$ hipotenusa $=3x$

II) $BC^2=(3x)^2-x^2 \Rightarrow BC^2=8x^2$

$\Rightarrow BC=2\sqrt{2}x$

III) Piden :

$$tan\alpha=\frac{2\sqrt{2}x}{x} \Rightarrow tan\alpha=2\sqrt{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Si "α" es un ángulo agudo, tal que $sen\alpha = 0,6$; calcular :

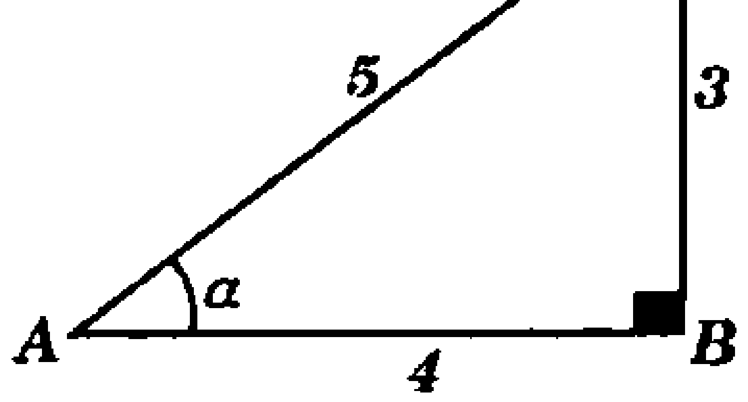
$$L=sec\alpha+tan\alpha$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

De la condición :

$$sen\alpha=0,6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{C.O}{H}$$



*A diferencia del problema anterior; trabajemos sin constantes; esto es:

$C.O.=3$

$H=5$

I) $AB^2=5^2-3^2 \Rightarrow AB^2=16 \Rightarrow AB=4$

II) Piden : $L=sec\alpha+tan\alpha$

$$\Rightarrow L=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8}{4} \Rightarrow L=2$$

RPTA : "B"

OJO :

Solo se utiliza cuando se tenga que calcular razones trigonométricas.

PROBLEMA 8 :

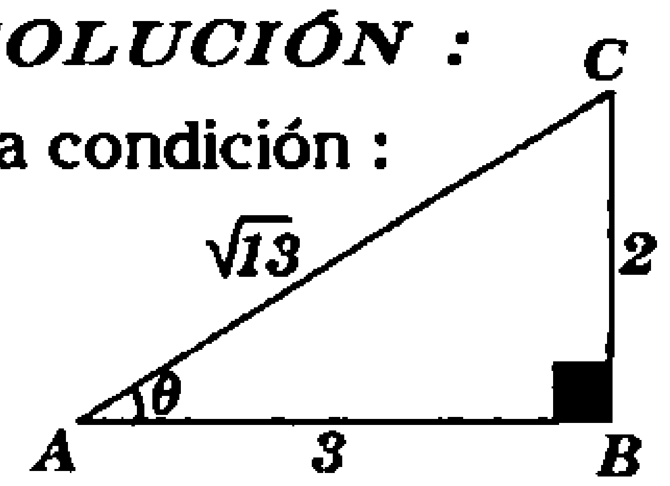
Sabiendo que : $tan\theta=\frac{2}{3}$; "θ" es un ángulo agudo, calcular :

$$L=sen\theta cos\theta$$

A) $\frac{2}{13}$ B) $\frac{5}{13}$ C) $\frac{6}{13}$ D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{13}{15}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición :



$$tan\theta=\frac{2}{3}=\frac{C.O.}{C.A.}$$

I) $AC^2=3^2+2^2 \Rightarrow AC^2=13$

$\Rightarrow AC=\sqrt{13}$

II) $L=sen\theta\times cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}\times\frac{3}{\sqrt{13}}$

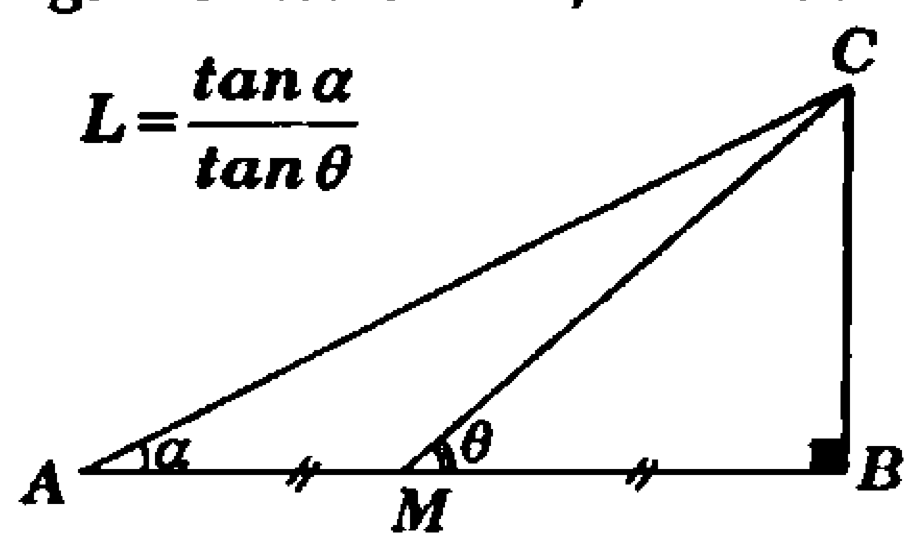
$$\Rightarrow L=\frac{6}{13}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Del gráfico mostrado; calcular :

$$L=\frac{tan\alpha}{tan\theta}$$

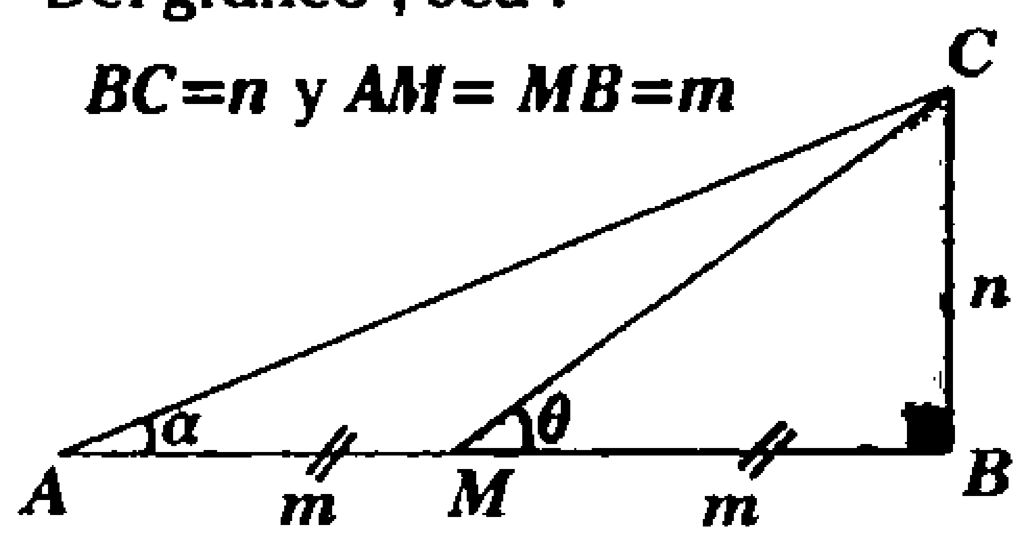


A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 2

RESOLUCIÓN:

* Del gráfico ; sea :

$BC=n$ y $AM=MB=m$



$$L=\frac{tan\alpha}{tan\theta}\text{..............................(I)}$$

$\triangle ABC: tan\alpha=\frac{n}{2m}$

$\triangle MBC: tan\theta=\frac{n}{m}$ ....(II)

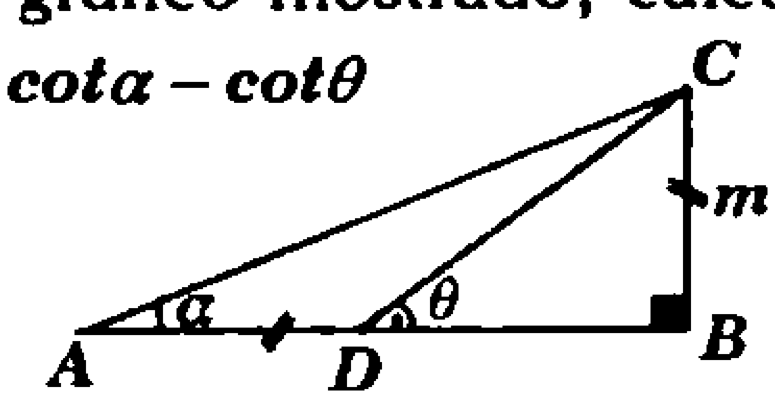
$$\text{(II) en (I): } L=\frac{\frac{n}{2m}}{\frac{n}{m}} \Rightarrow L=\frac{1}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10 :

Del gráfico mostrado; calcular :

$$L=cot\alpha-cot\theta$$

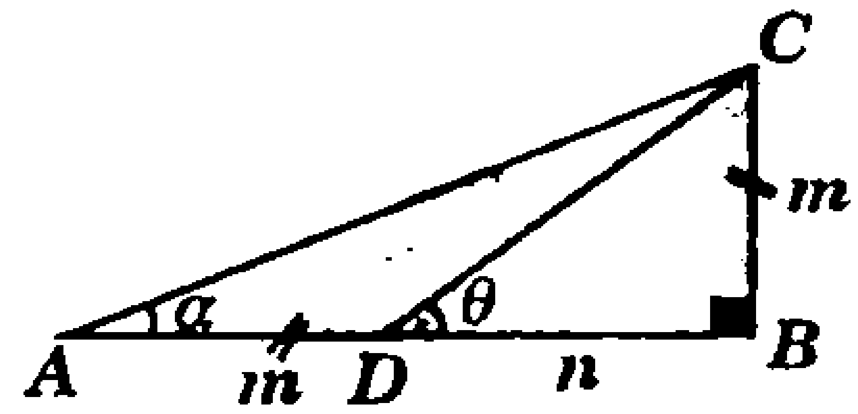


A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) 4

RESOLUCIÓN :

En la figura ; sea $BC=AD=m$ y $DB=n$

$L=cot\alpha-cot\theta$ ....(I)



$\triangle ABC: cot\alpha=\frac{m+n}{m}$

$\triangle DBC: cot\theta=\frac{n}{m}$

(II) en **(I)** :

$$L=\frac{m+n}{m}-\frac{n}{m}=\frac{m+n-n}{m}$$

$$\Rightarrow L=\frac{m}{m} \Rightarrow L=1$$

RPTA : "A"

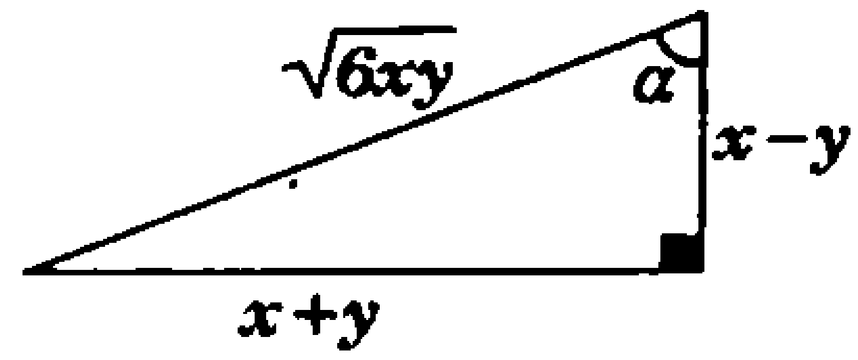
PROBLEMA 11:

En un triángulo rectángulo los catetos miden "$x+y$" y "$x-y$"; mientras que las hipotenusa mide $\sqrt{6xy}$. Calcular la tangente del mayor ángulo agudo del triángulo.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{7}$ E) 3

RESOLUCIÓN :

* Graficando; note que piden :



* $tan\alpha=\frac{x+y}{x-y}$ ....(I)

* Pero también ; por Pitágoras :

$$\underbrace{(x+y)^2+(x-y)^2}_{2(x^2+y^2)=6xy}=\sqrt{6xy}^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=3xy$$

En **(I)** :

$$tan^2\alpha=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy}=\frac{3xy+2xy}{3xy-2xy}=5$$

$$\Rightarrow tan^2\alpha=5 \Rightarrow tan\alpha=\sqrt{5}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 12 :

En un triángulo rectángulo *ABC*

($B=90°$) se traza la ceviana AD tal que : $DC=2AB$. Si :

$\measuredangle BAD=\alpha$ y $\measuredangle BCA=\beta$; calcular :

$$K=\cot\beta-\tan\alpha$$

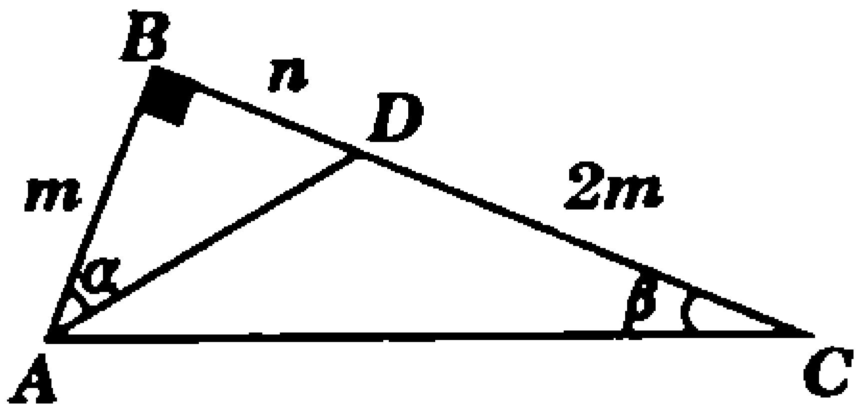
A) 1 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando ; tenemos :

$$AB=m \Rightarrow DC=2m.$$

Si : $BD=n$



$\triangle ABC$: $\cot\beta=\dfrac{n+2m}{m}$

$\triangle ABD$: $\tan\alpha=\dfrac{n}{m}$

Piden : $K=\cot\beta-\tan\alpha$

* Reemplazando :

$$K=\frac{n+2m}{m}-\frac{n}{m}=\frac{2m}{m}\Rightarrow K=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Sabiendo que "α" es agudo , y además : $\tan\alpha=\operatorname{sen}30°$.

Calcular : $L=4\sec^2\alpha+\cot\alpha$

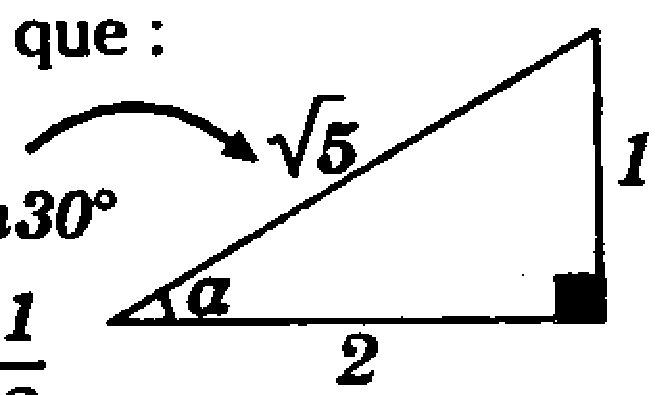
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$\tan\alpha=\operatorname{sen}30°$

$\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{1}{2}$



con la ayuda del triángulo :

$$L=4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{2}{1}\Rightarrow L=4\times\frac{5}{4}+2$$

$$\Rightarrow L=7$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14 :

Sabiendo que $\operatorname{sen}\theta=\cos60°\cos45°$; θ es agudo, calcular :

$$L=\sqrt{\cot^2\theta+2}$$

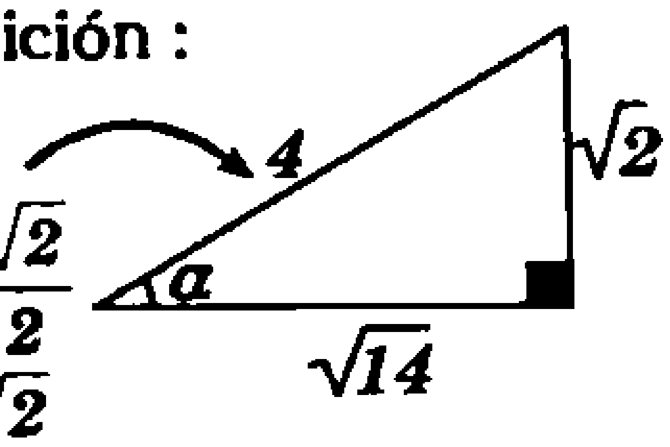
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$$



* Con la ayuda del triángulo :

$$L=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}\right)^2+2}\Rightarrow L=\sqrt{(\sqrt{7})^2+2}$$

$$\Rightarrow L=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Calcular "x" en la igualdad :

$$x\operatorname{sen}30°+\sec^2 60°=4x\tan37°+\tan^4 45°$$

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{6}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Con la ayuda de la tabla de los valores de la *R.T.* de los ángulos notables ; tenemos :

$$x\operatorname{sen}30°+\sec^2 60°=4x\tan37°+\tan^4 45°$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{1}{2}\right)+(2)^2=4x\left(\frac{3}{4}\right)+(1)^4$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}+4=3x+1\Rightarrow 4-1=3x-\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 3=\frac{6x-x}{2}\Rightarrow 3=\frac{5x}{2}\Rightarrow x=\frac{6}{5}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

Del gráfico mostrado, calcular "$\tan\alpha$"

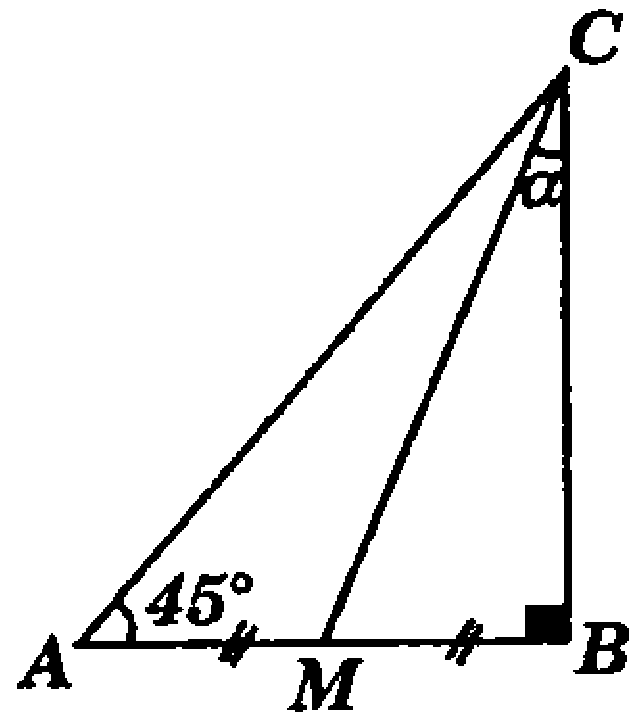
A) 1

B) $\frac{1}{2}$

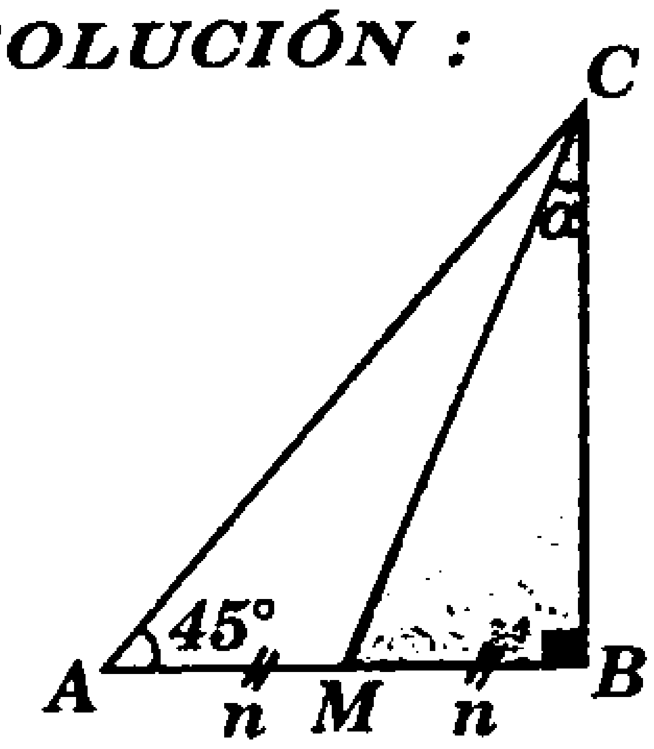
C) $\frac{1}{4}$

D) 2

E) 4



RESOLUCIÓN :



I) Como :

$$AM=MB\Rightarrow AM=MB=n$$

II) ABC: isósceles $\Rightarrow BC=AB=2n$

III) MBC : $\tan\alpha=\dfrac{n}{2n}\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

RPTA : "B"

NOTA :

que la constante "n" que asumimos al comienzo, se anuló al final. Se pudo haber colocado valores numéricos y la respuesta no cambiará ; quedando a tu criterio, colocar "*letras*" o valores numéricos.

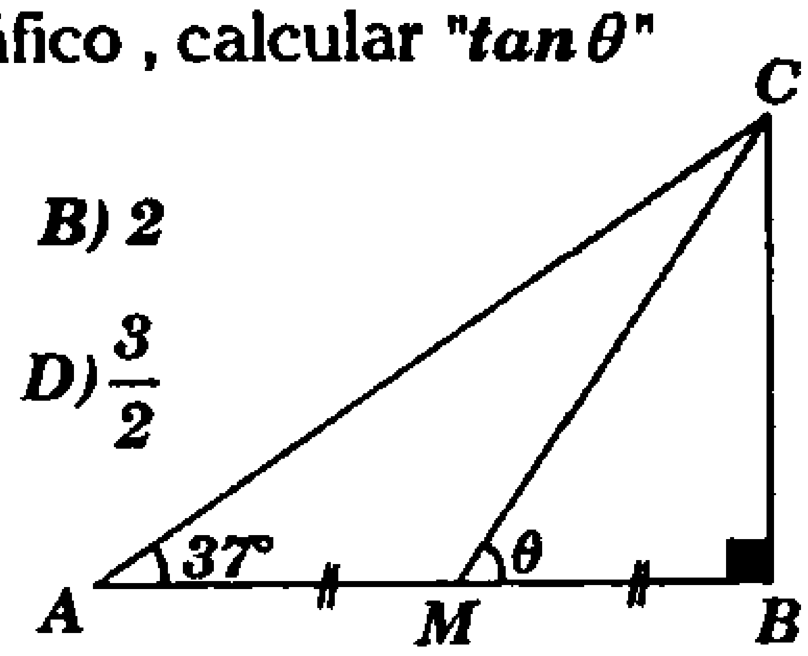
PROBLEMA 17 :

Del gráfico , calcular "$\tan\theta$"

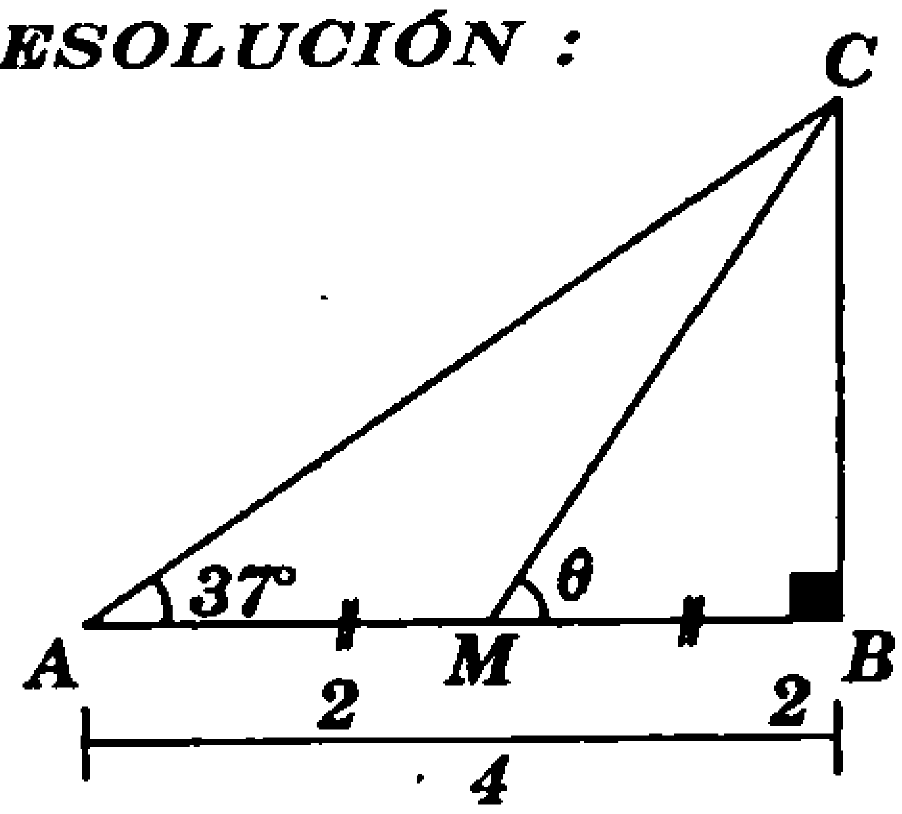
A) $\frac{1}{2}$ B) 2

C) 3 D) $\frac{3}{2}$

E) $\frac{2}{3}$



RESOLUCIÓN :



I) $\triangle ABC$: notable $\Rightarrow BC=3$; $AB=4$

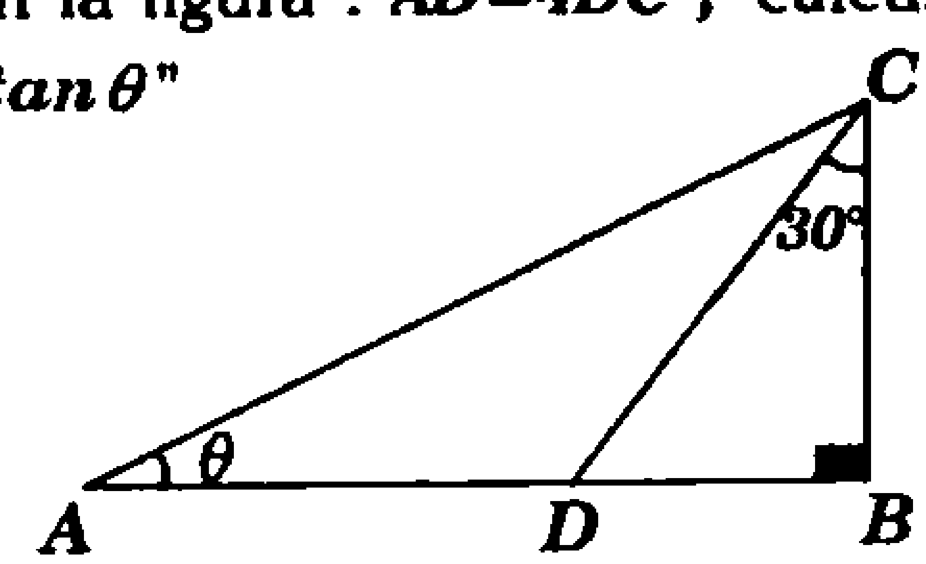
II) Como : $AM=MB\Rightarrow AM=MB=2$

III) $\triangle MBC$: $\tan\theta=\dfrac{3}{2}$

RPTA : "D"

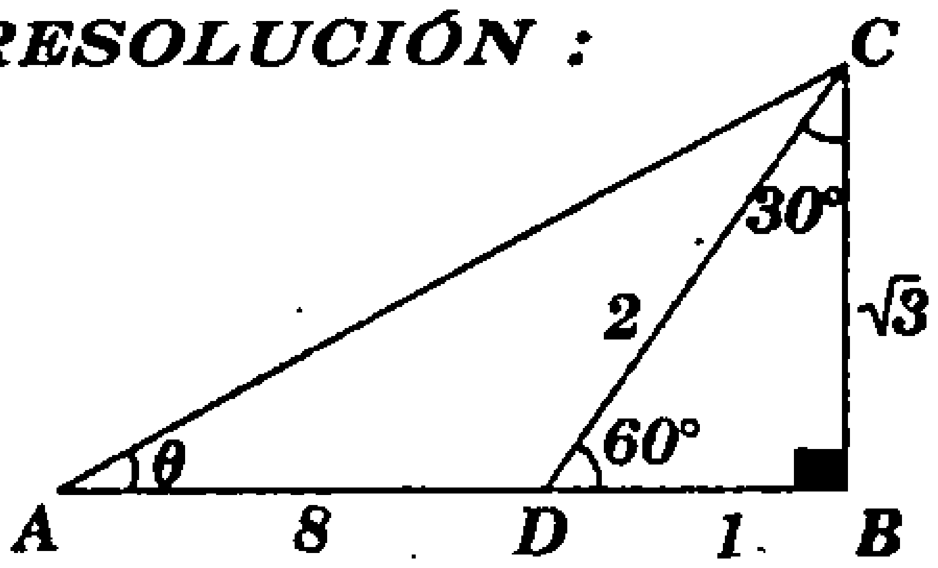
PROBLEMA 18 :

En la figura : $AD=4DC$; calcular "$\tan\theta$"



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

RESOLUCIÓN :



I) ◺ *DBC :*

notable $\Rightarrow DB=1;\ BC=\sqrt{3};\ DC=2$

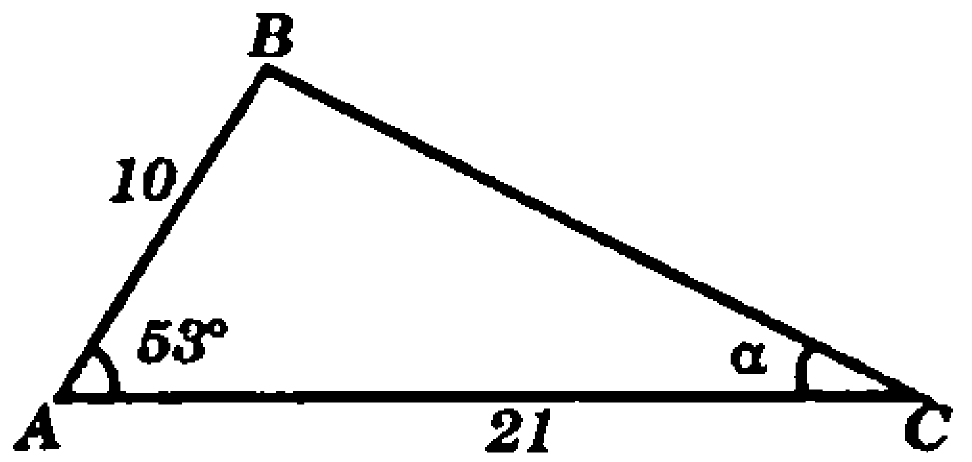
II) Como: $AD=4DC \Rightarrow AD=8$

III) ◺ $ABC:\ tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 19:

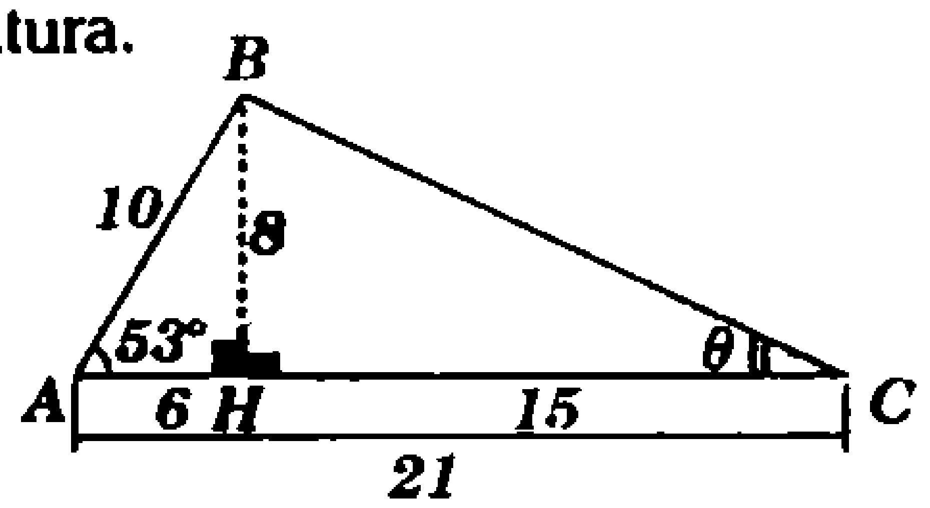
Del gráfico, calcular "$tan\,\theta$"



A) $\dfrac{3}{7}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{8}{7}$ D) $\dfrac{8}{15}$ E) $\dfrac{7}{15}$

RESOLUCIÓN :

Notese que el ángulo θ no está en un triángulo rectángulo. En estos casos, el problema se soluciona trazando convenientemente una altura.



I) Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

II) ◺ABH : notable ; $AB=10$

$\Rightarrow BH=8$ y $AH=6$

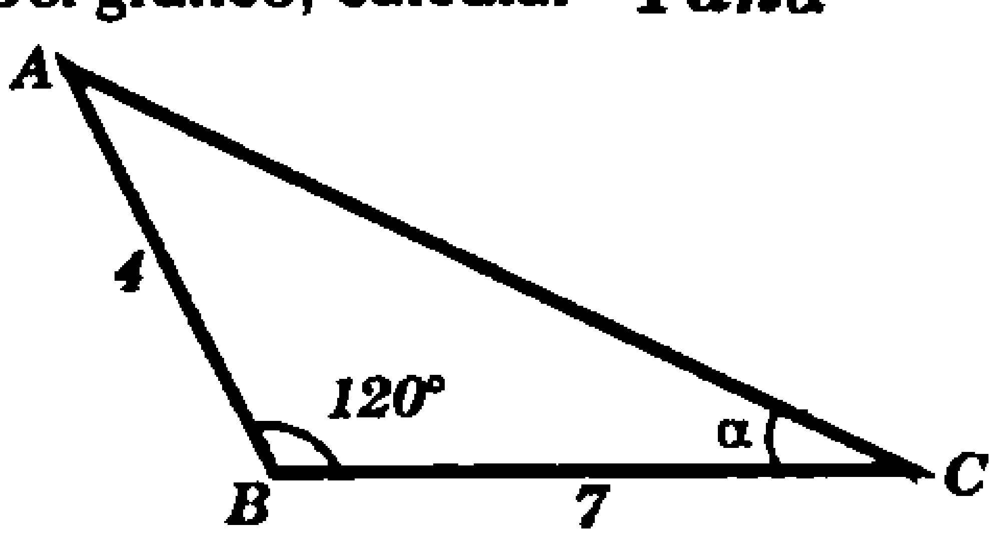
III) Como : $AH=6 \Rightarrow HC=15$

◺ $BCH:\ tan\theta=\dfrac{8}{15}$

RPTA : "D"

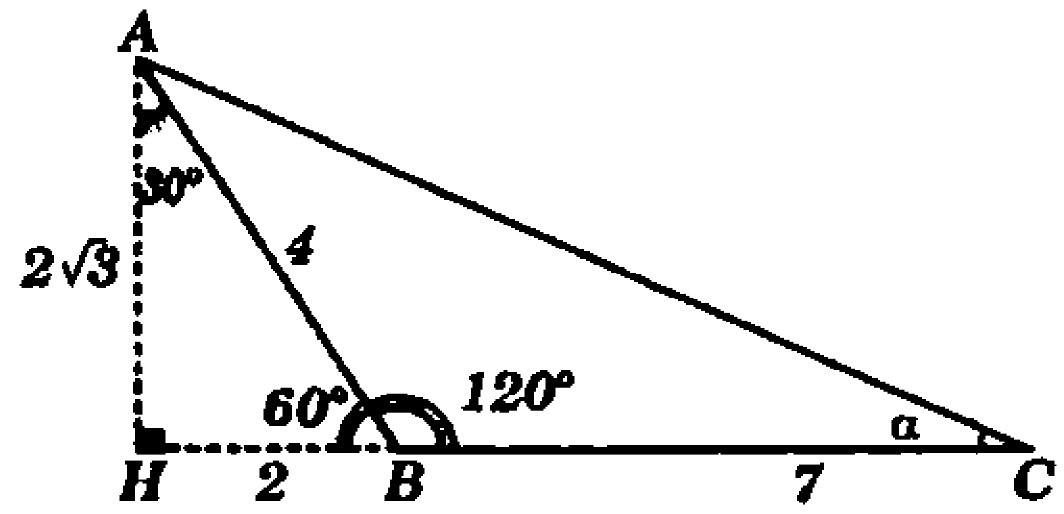
PROBLEMA 20 :

Del gráfico, calcular "$Tan\alpha$"



A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}$ B) $\dfrac{4}{7}$ C) $\dfrac{3}{7}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ E) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

RESOLUCIÓN :



I) Trazamos la altura $\overline{AH}$ (note el trazo).

II) Como

$\hat{ABC}=120° \Rightarrow \hat{ABH}=60°$

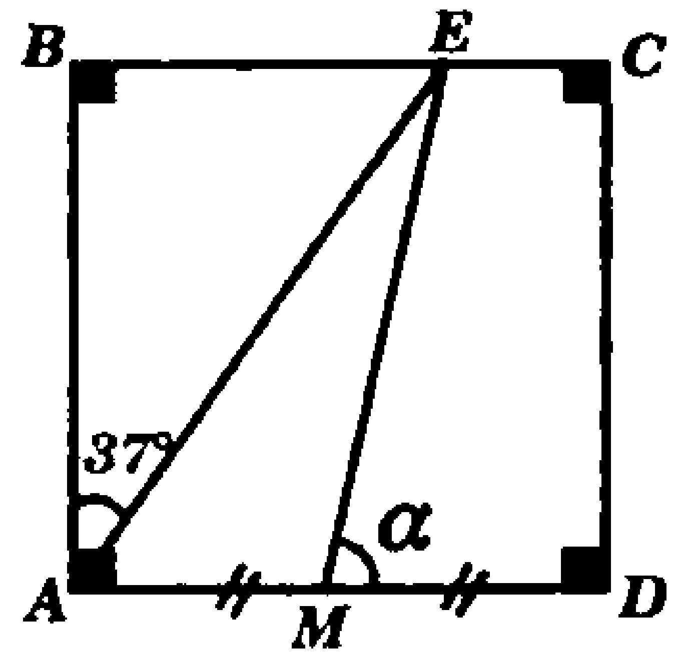
◺AHB(notable): $AB=4$

$\Rightarrow HB=2\ ;\ AH=2\sqrt{3}$

III) ◺ $AHC: Tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

PROBLEMA 21 :

Del gráfico, calcular "$tan\,\alpha$", si: *ABCD* es un cuadrado.

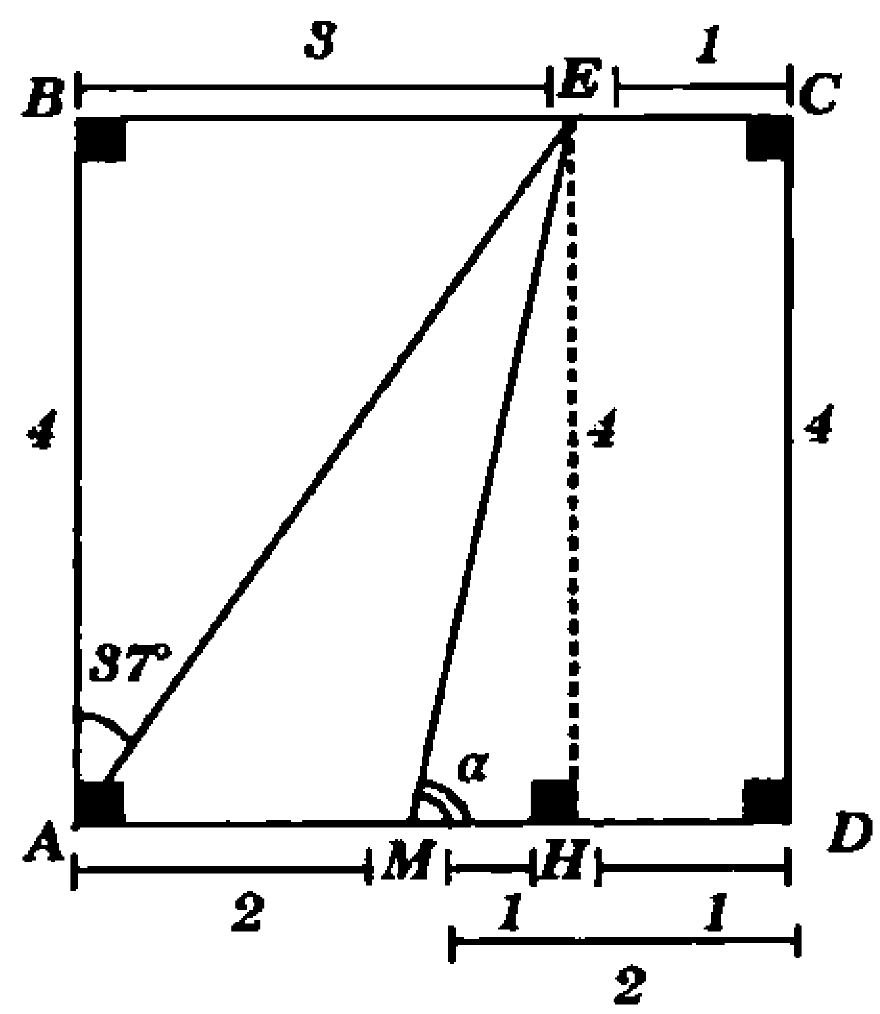


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

I) ◺ *ABE (notable):*

$BE=3\ ;\ AM=4$



II) como : $AB=BC=4$

$\Rightarrow EC=1$

III) $AM=MD=2$

IV) Trazamos : $\overline{EH} \perp \overline{AD}$

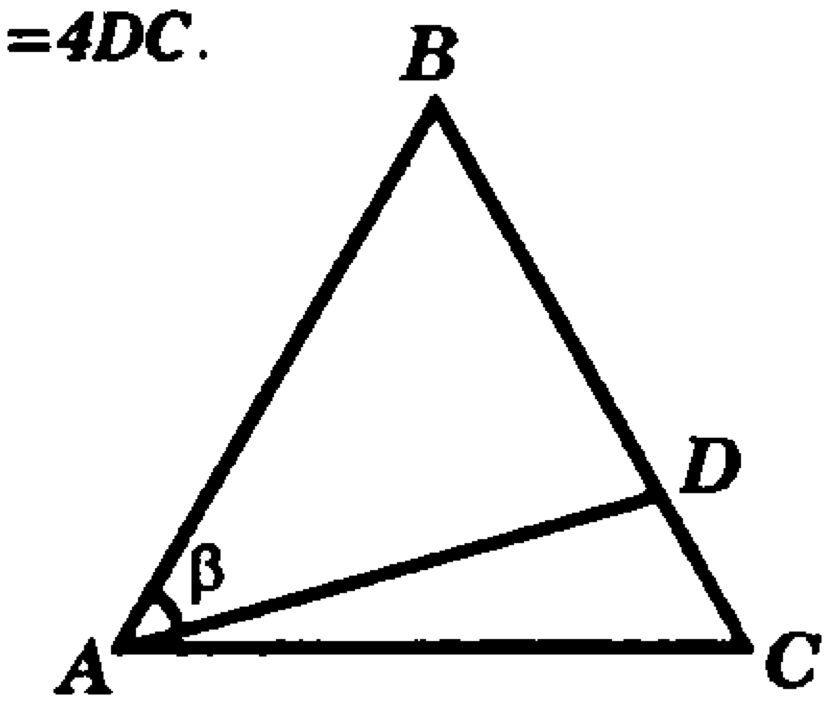
$HD=ED=1\ ;\ MH=1$

V) ◺ $MHE:\ tan\alpha=\dfrac{4}{1} \Rightarrow tan\,\alpha=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22 :

Del gráfico, calcular "$tan\,\beta$" si el triángulo *ABC* es equilátero y $BD=4DC$.



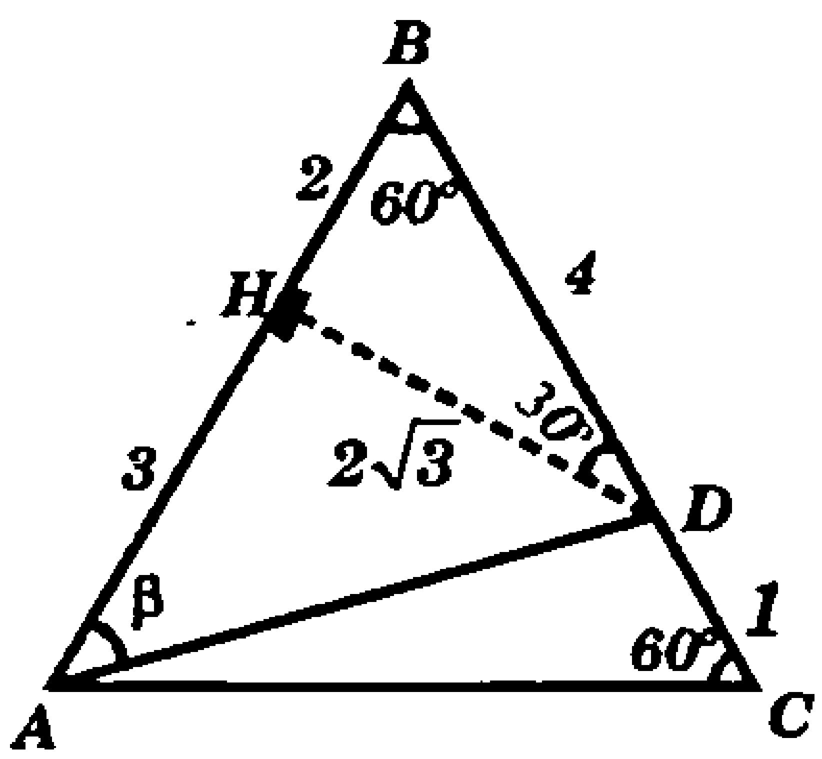
A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

RESOLUCIÓN :

I) Sea : $DC=1$

$\Rightarrow BD=4$ *(dato)*

$\Rightarrow AB=BC=AC=5$



II) Trazamos la altura $\overline{DH}$

◺ *BHD (notable):* $BD=4$

$\Rightarrow BH=2$ y $DH=2\sqrt{3}$

* como :

$AB=5 \wedge BH=2 \Rightarrow AH=3$

III) ◺AHD :

$tan\,\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Sabiendo que :

$Tan3xCot(x+40°)=1$

Hallar : "$Cos3x$"

A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Como :

$tan3x.cot(x+40°)=1 \Rightarrow 3x=x+40°$

$2x=40° \Rightarrow x=20°$

* Piden : $cos3x=cos60°=\frac{1}{2}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24:

Siendo : $sen4x=cosx$; hallar :

$L=5sen(2x+1°)+2sen(2x-6°)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

* Como :

$sen4x=cosx \Rightarrow 4x+x=90°$

$\Rightarrow 5x=90° \Rightarrow x=18°$

* Piden :

$L=5sen(2x+1°)+2sen(2x-6°)$

$\Rightarrow L=5sen37°+2sen30°=5\left(\frac{3}{5}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow L=4$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25:

Sabiendo que :

$tan3x\,cot(x+10°)=1$

$sen4x=cosy$

hallar "$y-x$"

A) 35° B) 45° C) 55° D) 65° E) 75°

RESOLUCIÓN :

* Como :

$tan3x\,cot(x+10°)=1 \Rightarrow 3x=x+10°$

$2x=10° \Rightarrow x=5°$

* También :

$Sen4x=cosy \Rightarrow 4x+y=90°$

$20°+y=90° \Rightarrow y=70°$

* Piden : $y-x=70°-5° \Rightarrow y-x=65°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26:

Sabiendo que : $tan3x\,tan2x=1$

¿Cuánto vale "x" ?

A)15° B)16° C)17° D)18° E)20°

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$tan3xtan2x=1$ *(no tiene forma de alguna propiedad cista)*

* Hacemos : $tan3xcot(90°-2x)=1$

* Debe cumplirse :

$3x=90°-2x \Rightarrow 5x=90° \Rightarrow x=18°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 27 :

Siendo :

$Sen2xCscy=1$; $Tan3x=Coty$

Calcular :

$L=sec^2(2x+9°)+csc^2(y-6°)$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$sen2x \times cscy=1 \Rightarrow 2x=y$

* También :

$tan3x=coty \Rightarrow 3x+y=90°$

$3x+2x=90° \Rightarrow 5x=90°$

$x=18°$; $y=36°$

* Luego :

$L=sec^2(2x+9°)+csc^2(y-6°)$

$\Rightarrow L=sec^2 45°+csc^2 30°=(\sqrt{2})^2+(2)^2$

$\Rightarrow L=6$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Sabiendo que : $senx=cosy$;

Calcular el valor de :

$$C=csc\left(\frac{x+y}{3}\right)+csc^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

RESOLUCIÓN :

* Como : $senx=cosy \Rightarrow x+y=90°$

* Luego :

$C=csc\left(\frac{x+y}{3}\right)+csc^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\Rightarrow C=csc30°+csc^2 45° \Rightarrow C=2+(\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow C=4$

RPTA : "B"

PROBLEMA 29 :

Reducir :

$C=(3sen20°+4cos70°)sec70°$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN :

* Notase que hay ángulos complementarios *(20° y 70°)* ; así que procuremos colocar todo en función de un sólo ángulo.

$C=(\underline{3sen20°}+4cos70°)sec70°$

$\Rightarrow C=(3cos70°+4cos70°)sec70°$

$\Rightarrow C=7\underbrace{cos70°sec70°}_{1} \Rightarrow C=7$

RPTA : "D"

PROBLEMA 30 :

Simplificar : $L=\frac{7cos10°-3sen80°}{5sen80°-2cos10°}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Notese los ángulos complementarios *(10° y 80°)* :

$L=\frac{7cos10°-3sen80°}{5sen80°-2cos10°}=\frac{7cos10°-3cos10°}{5cos10°-2cos10°}$

$\Rightarrow L=\frac{4cos10°}{3cos10°} \Rightarrow L=\frac{4}{3}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 :

Sabiendo que : $tan2x \times tan2y=1$;

Calcular :

$$C=sec^2(x+y)+csc^2\left(\frac{2x+2y}{3}\right)$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 4 E) 6

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$tan2x\,\underbrace{tan2y}=1$

$\Rightarrow tan2xcot(90°-2y)=1 \Rightarrow 2x=90°-2y$

* Luego : $2x+2y=90° \Rightarrow x+y=45°$

* Reemplazando en :

$C=sec^2(x+y)+csc^2\left(\frac{2x+2y}{3}\right)$

$\Rightarrow C=sec^2 45°+csc^2\left(\frac{90°}{3}\right)=sec^2 45°+csc^2 30°$

$\Rightarrow C=(\sqrt{2})^2+(2)^2 \Rightarrow C=6$

RPTA : "E"

PROBLEMA 32:

Siendo :

$sen(2x+10°)tan(x+40°)sec(x+20°)$

$=cot(50°-x)$

Calcular : $C=Sec3xTan4xTan\frac{x}{2}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN :

* En la condición :

$Sen(2x+10°)Tan(x+40°)Sec(x+20°)$

$=Cot(50°-x)$..................................(I)

* Note que :

$(x+40°)+(50°-x)=90°$

$\Rightarrow tan(x+20°)=cot(50°-x)$

* Luego en *(I)* :

$sen(2x+10°).\underline{cot(50°-x)}.sec(x+20°)=\underline{cot(50°-x)}$

* Quedando :

$sen(2x+10°).\underline{sec(x+20°)}=1$

$sen(2x+10°).csc(90°-x-20°)=1$

$sen(2x+10°).csc(70°-x)=1$

$\Rightarrow 2x+10°=70°-x$

Operando : $3x=60° \Rightarrow x=20°$

* Piden :

$C=sec3x tan4x tan\frac{x}{2}=sec60° tan80° tan10°$

$\Rightarrow C=2tan80°\underbrace{tan10°}_{cot80°}=2\underbrace{tan80° cot80°}_{1}$

$\Rightarrow C=2$

RPTA : "B"

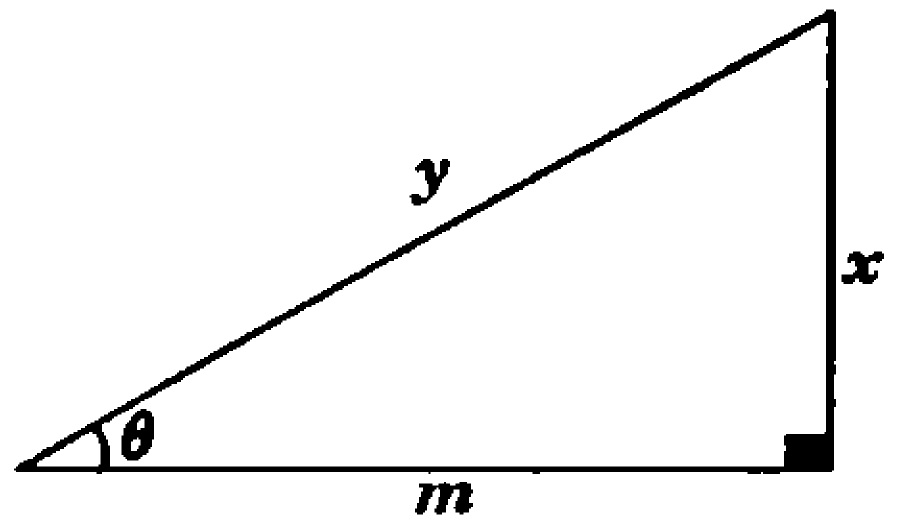
PROBLEMA 33 :

En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide "θ" y el cateto adyacente a ese ángulo mide "m". Exprese el perímetro de dicho triángulo .

A) $m(sen\theta+tan\theta+1$ B) $m(sec\theta+tan\theta+1)$
C) $m(cos\theta+cot\theta+1)$ D) $m(cos\theta+sec\theta+1)$

RESOLUCIÓN :

* Graficando el enunciado :



I) $\frac{x}{m}=tan\theta \Rightarrow x=m\,tan\theta$

II) $\frac{y}{m}=sec\theta \Rightarrow y=m\,sec\,\theta$

Luego :

Perímetro = $2p = y + x + m$

reemplazando :

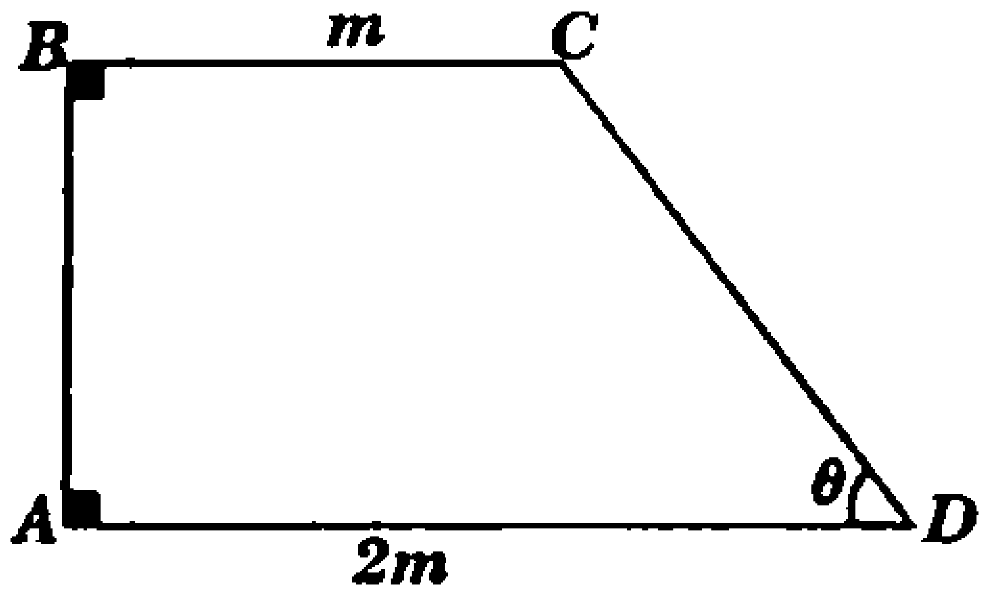
$2p=msec\theta+mtan\theta+m$

$\Rightarrow 2p=m(sec\,\theta+tan\,\theta+1)$

RPTA : "B"

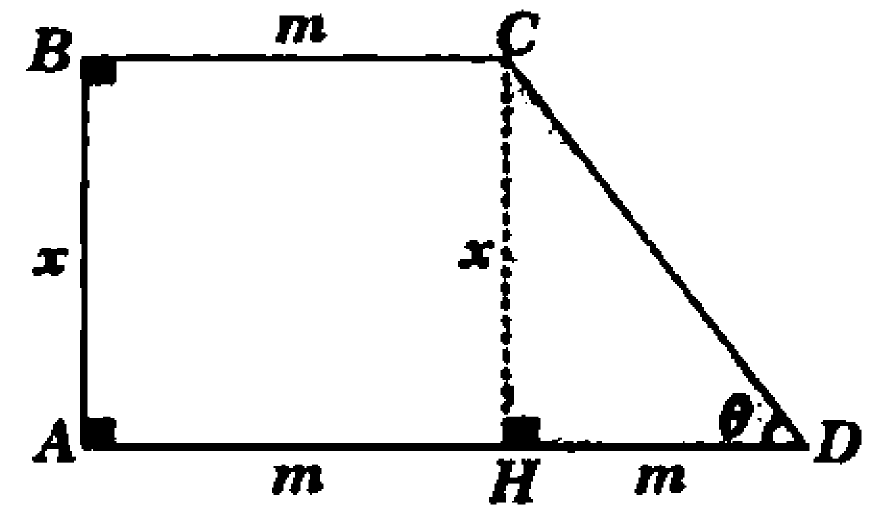
PROBLEMA 34 :

En el gráfico, hallar "AB" en función de "m" y "θ"



A) $msec\theta$ B) $mcos\theta$ C) $mtan\theta$
D) $mcot\theta$ E) $msen\theta$

RESOLUCIÓN:



I) Trazamos :

$\overline{CH}\perp\overline{AD} \Rightarrow AH=m \wedge HD=m;\ CH=x$

II) ◺ CHD: $\frac{x}{m}=tan\theta \Rightarrow x=mTan\theta$

RPTA : "C"

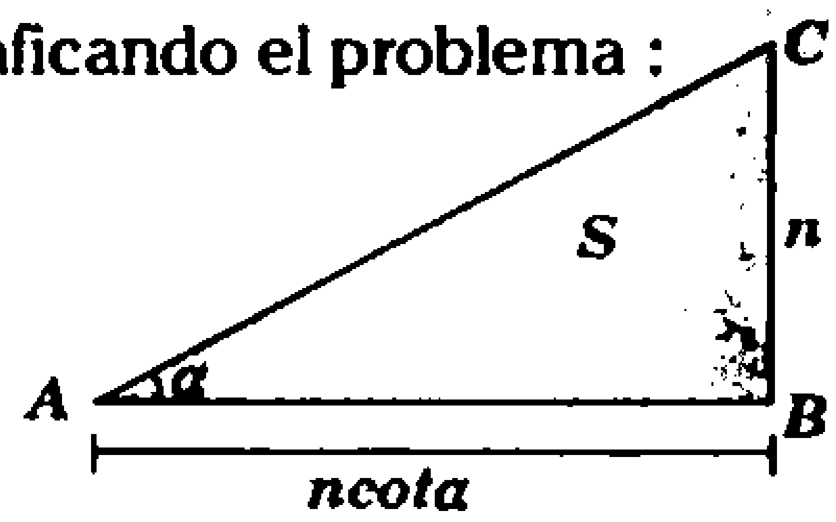
PROBLEMA 35:

En un triángulo rectángulo $ABC(\measuredangle B=90°)$. se sabe que : $BC=n \wedge m\measuredangle B=\alpha$, ¿Cuál es su área?

A) $\frac{n^2}{2}cot\alpha$ B) $\frac{n^2}{2}tan\alpha$ C) $\frac{n^2}{2}csc\alpha$

RESOLUCIÓN :

Graficando el problema :



I) $\frac{AB}{n}=cot\alpha \Rightarrow AB=n\,cot\alpha$

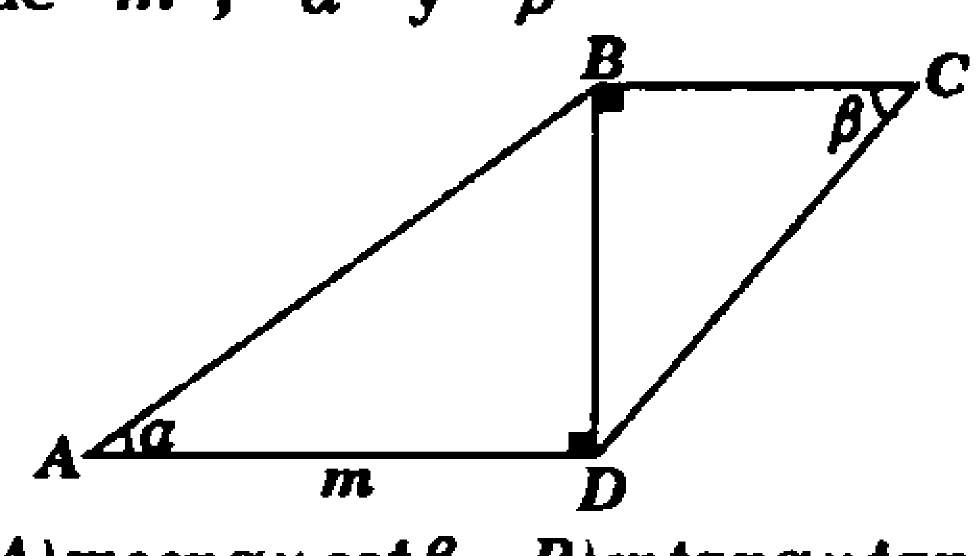
II) $S=\frac{AB\times BC}{2}=\frac{n\,cot\alpha\times n}{2}$

$\Rightarrow S=\frac{n^2}{2}cot\alpha$

RPTA : "B"

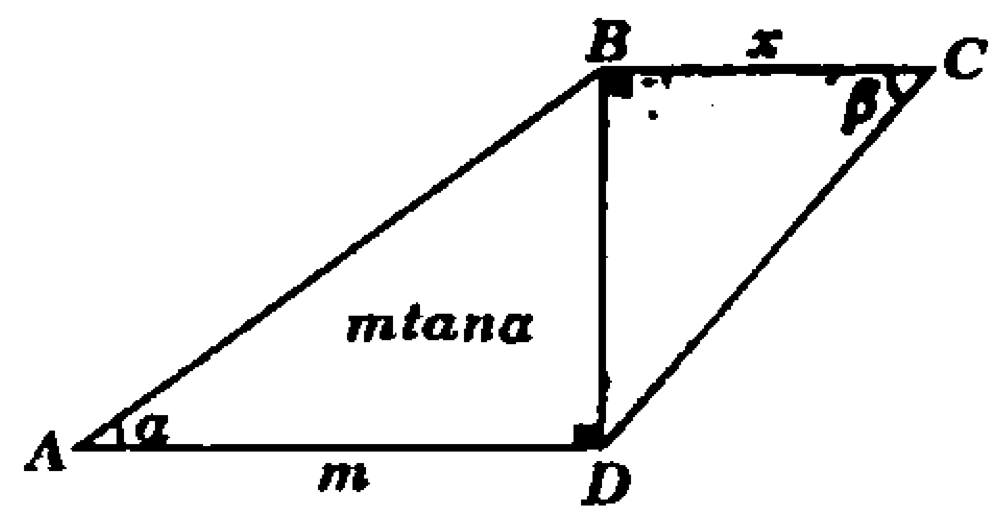
PROBLEMA 36 :

Del gráfico, hallar "BC" en función de "m", "α" y "β"



A) $msen\alpha\times cot\beta$ B) $mtan\alpha\times tan\beta$
D) $mcos\alpha\times cot\beta$ C) $mcot\alpha\times cot\beta$
E) $mtan\alpha\times cot\beta$

RESOLUCIÓN:



Trabajando por partes :

I) ADB: $\frac{BD}{m}=tan\alpha \Rightarrow BD=mtan\alpha$

II) ◺ DBC : $\frac{x}{BD}=cot\beta \Rightarrow \frac{x}{m\ tan\ \alpha}=cot\beta$

$\Rightarrow x=mtan\alpha\times cot\beta$

RPTA : "E"

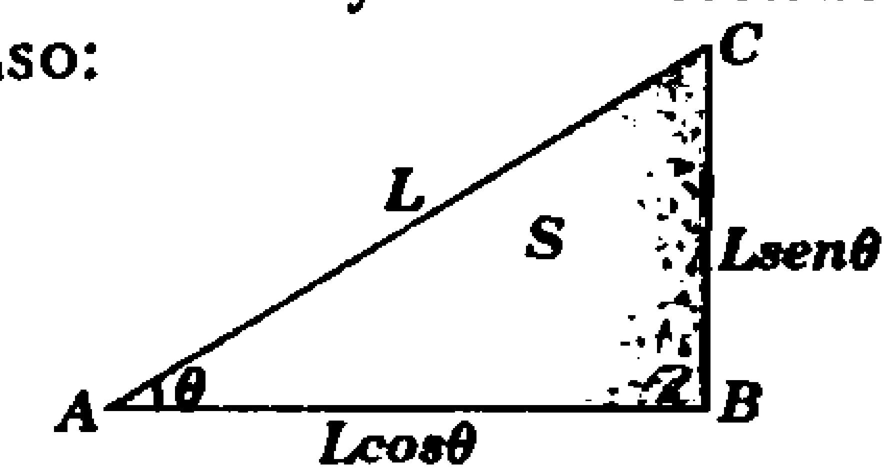
PROBLEMA 37:

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa es "L" y uno de los ángulos agudos es "θ". Exprese el área del triángulo en función de los datos indicados .

A) $L^2sen\theta$ B) $\frac{L^2}{2}sen\theta$ C) $\frac{L^2}{2}cos\theta$
D) $L^2sen\theta\times cos\theta$ E) $\frac{L^2}{2}sen\theta\times cos\theta$

RESOLUCIÓN:

Graficando y reconociendo el caso:



$S=\frac{Lsen\theta Lcos\theta}{2} \Rightarrow S=\frac{L^2}{2}sen\theta cos\theta$

RPTA : "E"

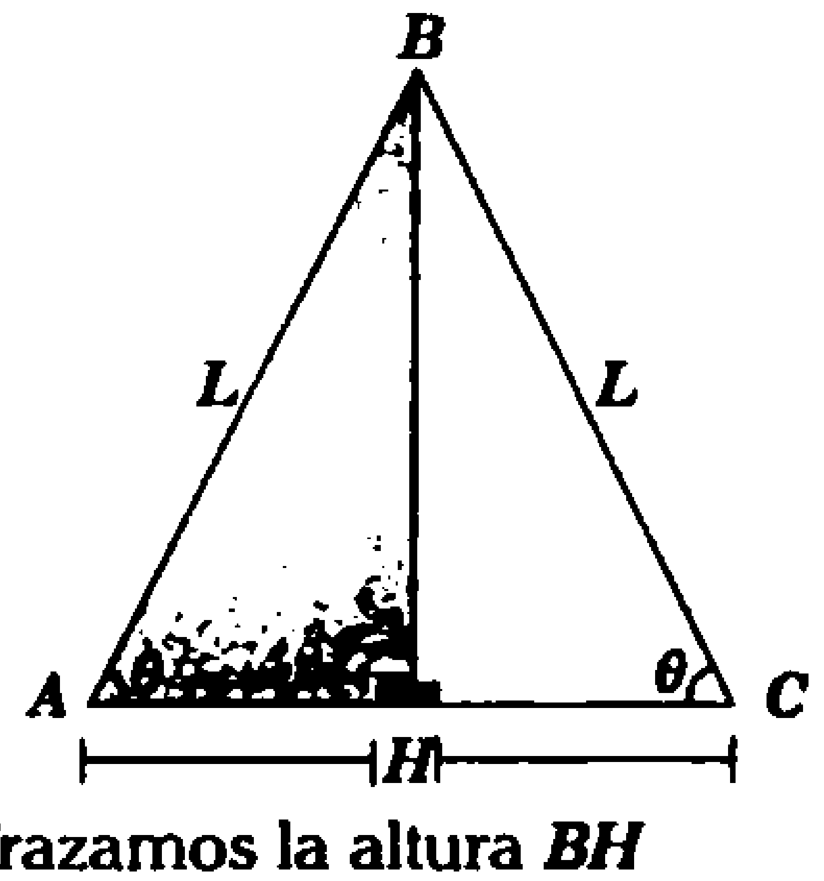
PROBLEMA 38 :

En un triángulo isósceles, los ángulos congruentes miden "θ" y los lados congruentes miden "L". Hallar el lado desigual.

A) $Lsen\theta$ B) $Lcos\theta$ C) $2Lsen\theta$
D) $2Lcos\theta$ E) $Ltan\theta$

RESOLUCIÓN:

Graficando procedemos así :



I) Trazamos la altura BH

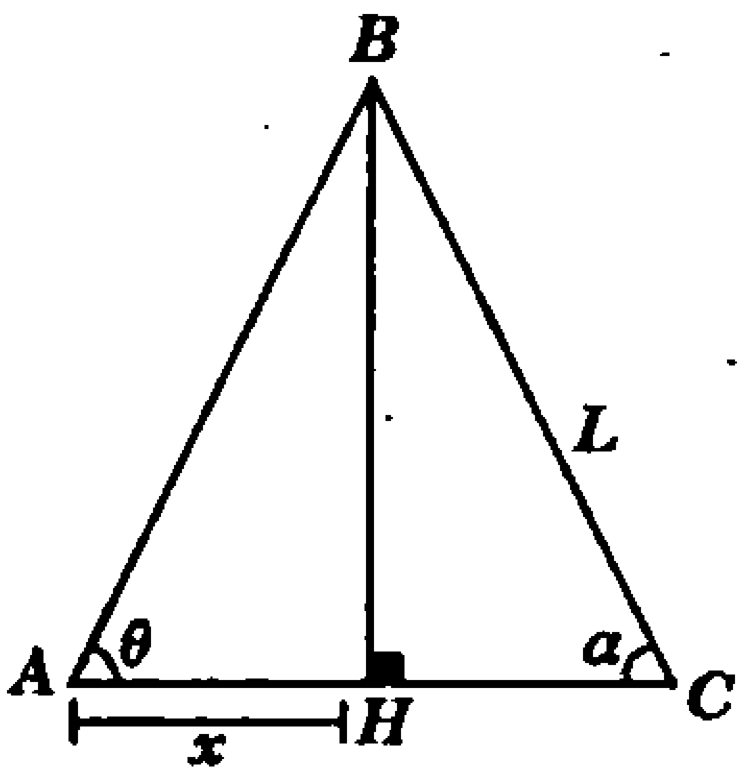
II) ◺ AHB: $AH=Lcos\theta$

$\Rightarrow x=2L\,cos\theta$

RPTA : "D"

PROBLEMA 39:

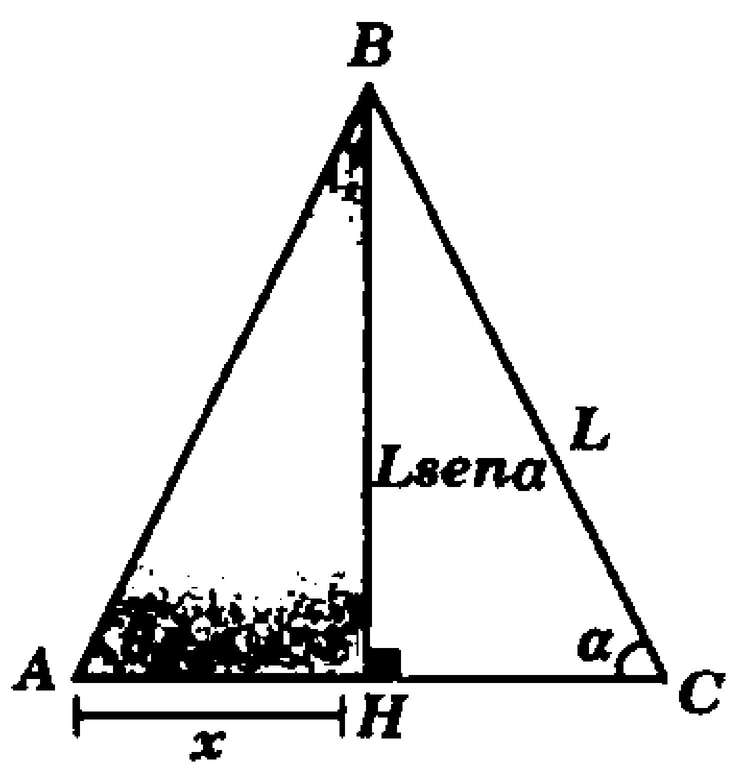
Del gráfico, hallar "x"



A) $L sen\alpha \times cos\theta$ B) $L sen\alpha \times cot\theta$

C) $L sen\alpha \times tan\theta$ D) $L sen\alpha \times csc\theta$

RESOLUCIÓN :



I) BHC : $BH = L\ sen\alpha$

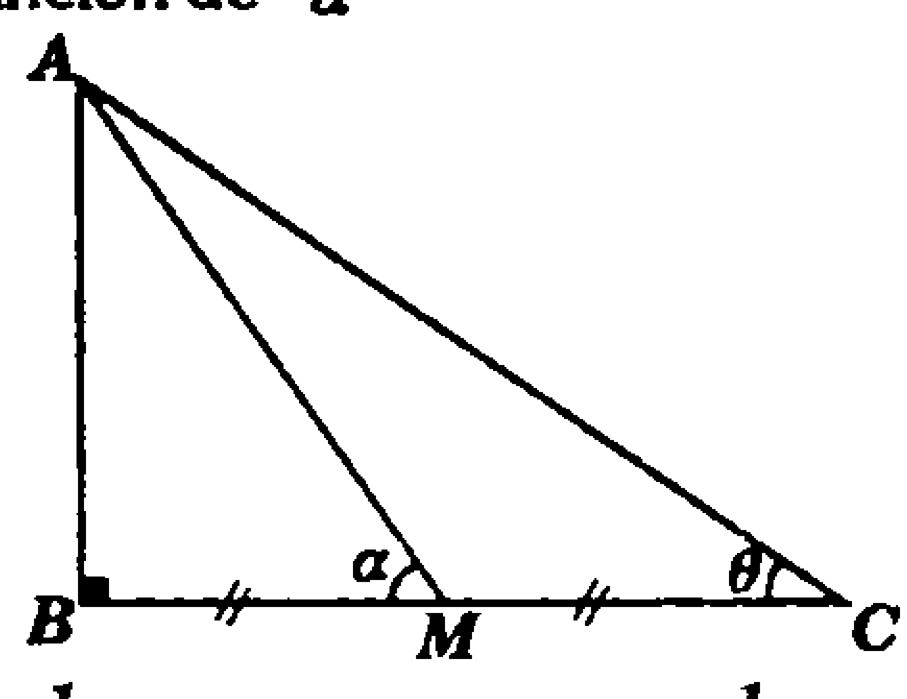
I) AHB: $\dfrac{x}{L sen\alpha} = cot\theta$

$\Rightarrow x = L sen\alpha \times cot\theta$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40:

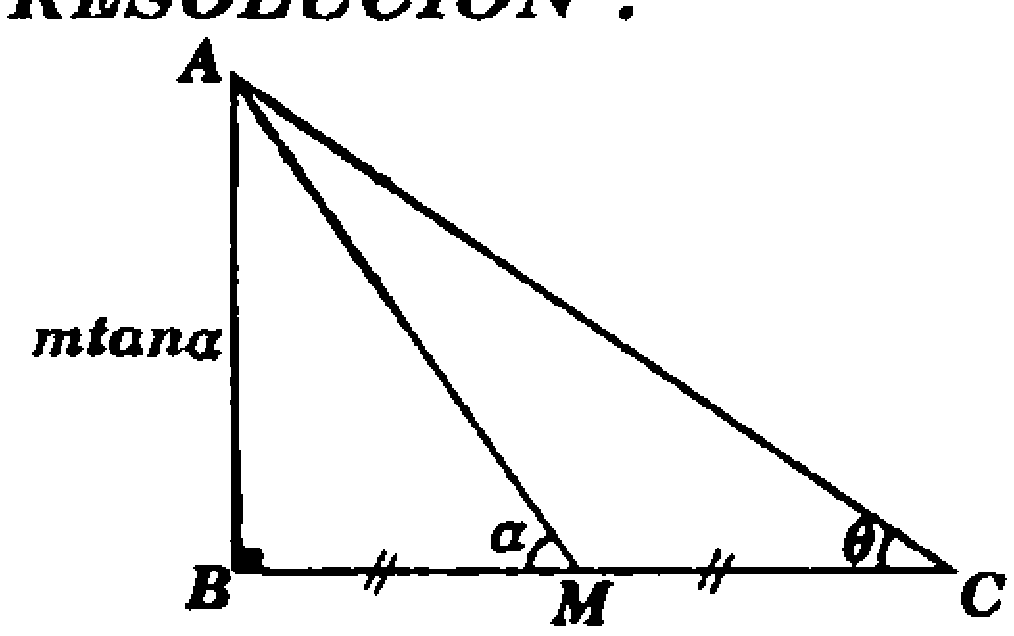
Del gráfico, hallar "$tan\theta$" en función de "α"



A) $\dfrac{1}{2}\ tan\alpha$ B) $2\ tan\alpha$ C) $\dfrac{1}{4} tan\alpha$

D) $4tan\alpha$ E) $\dfrac{3}{2}\ tan\alpha$

RESOLUCIÓN :



I) Sea : $BM = MC = m$

II) ◺ ABM: $\dfrac{AB}{m} = Tan\alpha$

$AB = m tan\alpha$

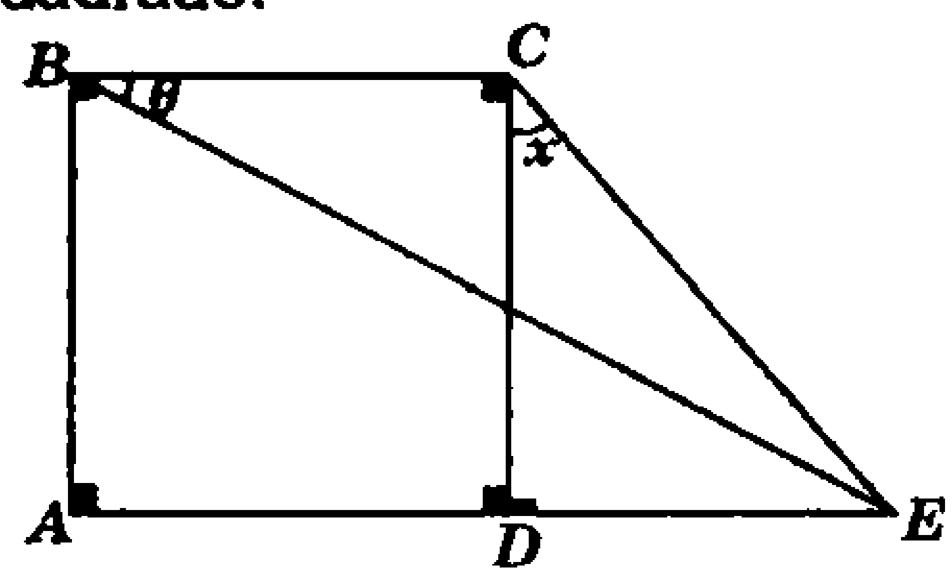
III) ABC: $tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$

$tan\theta = \dfrac{\not{m} tan\alpha}{2\not{m}} \Rightarrow tan\theta = \dfrac{1}{2} tan\alpha$

RPTA : "D"

PROBLEMA 41:

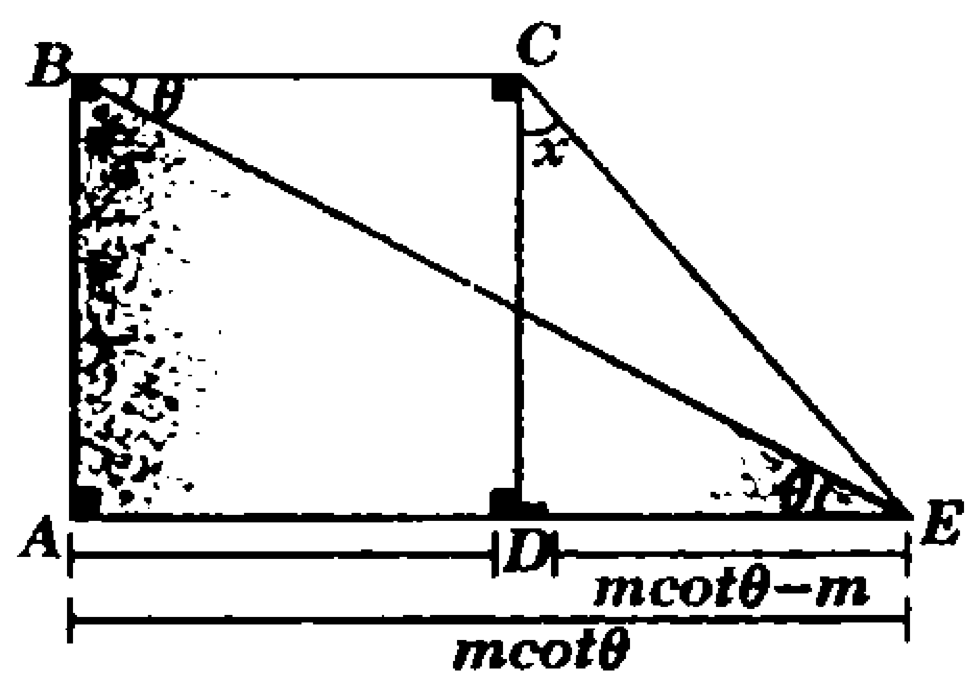
Del gráfico, hallar "$tanx$" en función de "θ", si : $ABCD$ es un cuadrado.



A) $tan\theta - 1$ B) $tan\theta + 1$ C) $cot\theta - 1$

D) $cot\theta + 1$ E) $1 - tan\theta$

RESOLUCIÓN :



I) Sea : $AB = AD = m$

II) ◺ BAE: $\dfrac{AE}{m} = cot\theta$

$AE = m cot\theta$; luego :

$DE = m cot\theta - m$

III) ◺CDE :

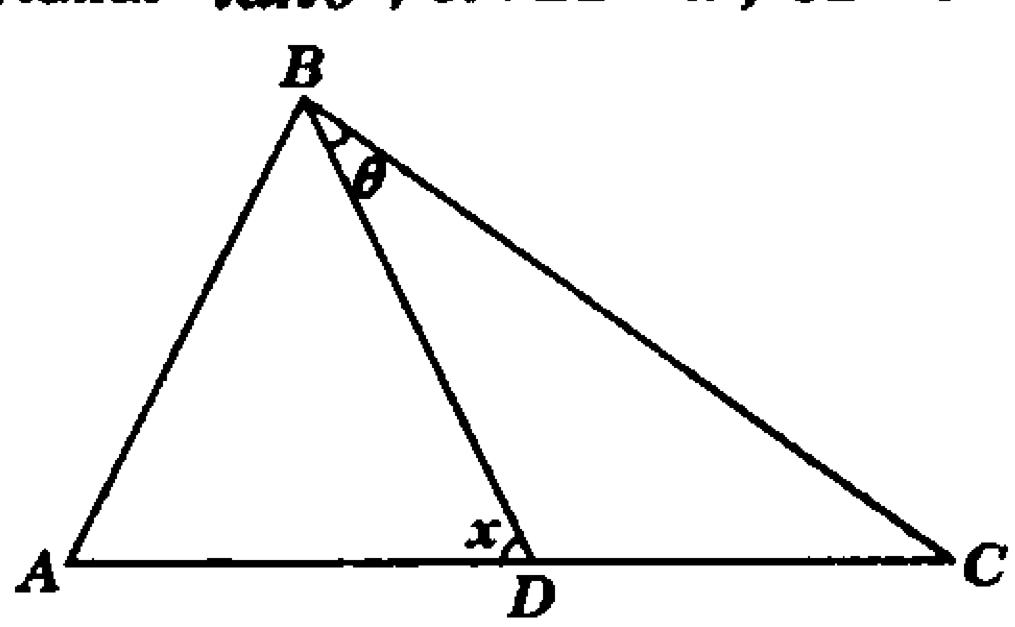
$tanx = \dfrac{m cot\theta - m}{m} \Rightarrow tanx = \dfrac{m(cot\theta - 1)}{m}$

$\Rightarrow tanx = cot\theta - 1$

RPTA : "C"

PROBLEMA 42 :

Hallar "$tan\theta$", si : $BD = a$, $CD = b$

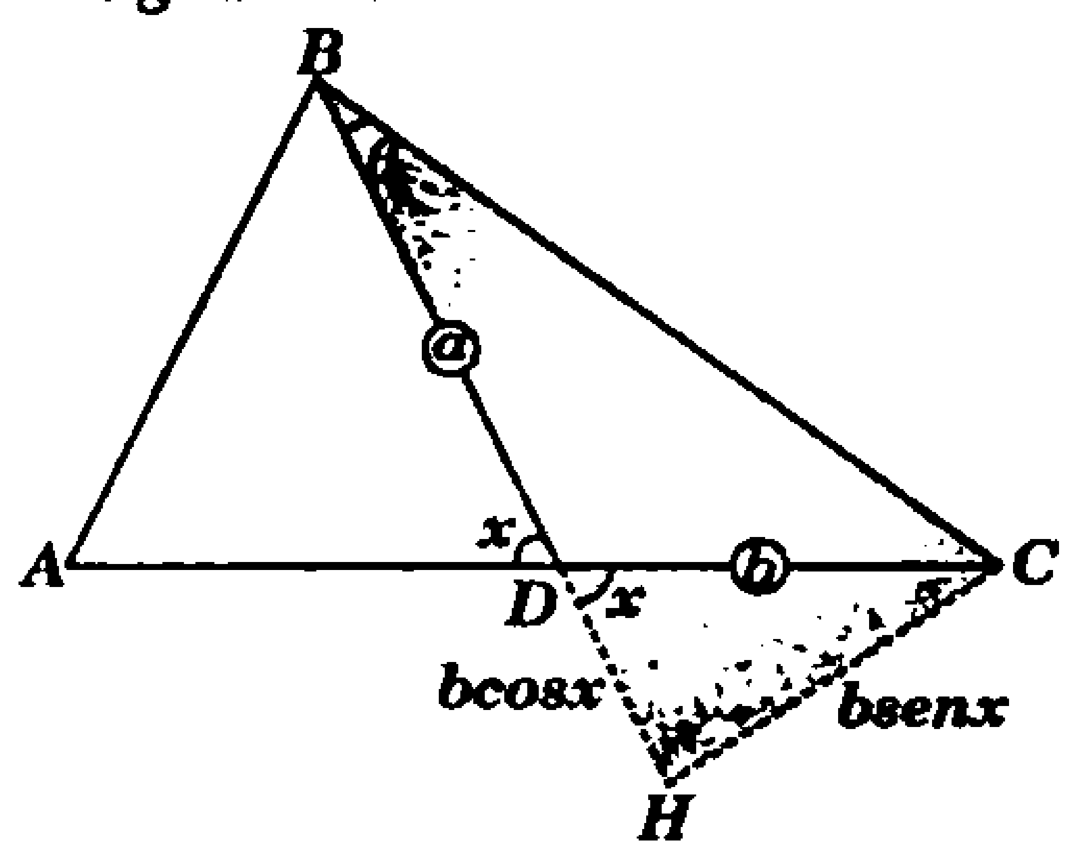


A) $\dfrac{b}{a senx + b\cos x}$ B) $\dfrac{b\cos x}{a + b senx}$ D) $\dfrac{b senx}{a + b\cos x}$

C) $\dfrac{a senx}{a - b\cos x}$ E) $a senx + b cosx$

RESOLUCIÓN :

Del gráfico :



DHC : $CH = b senx$

$DH = b cosx$

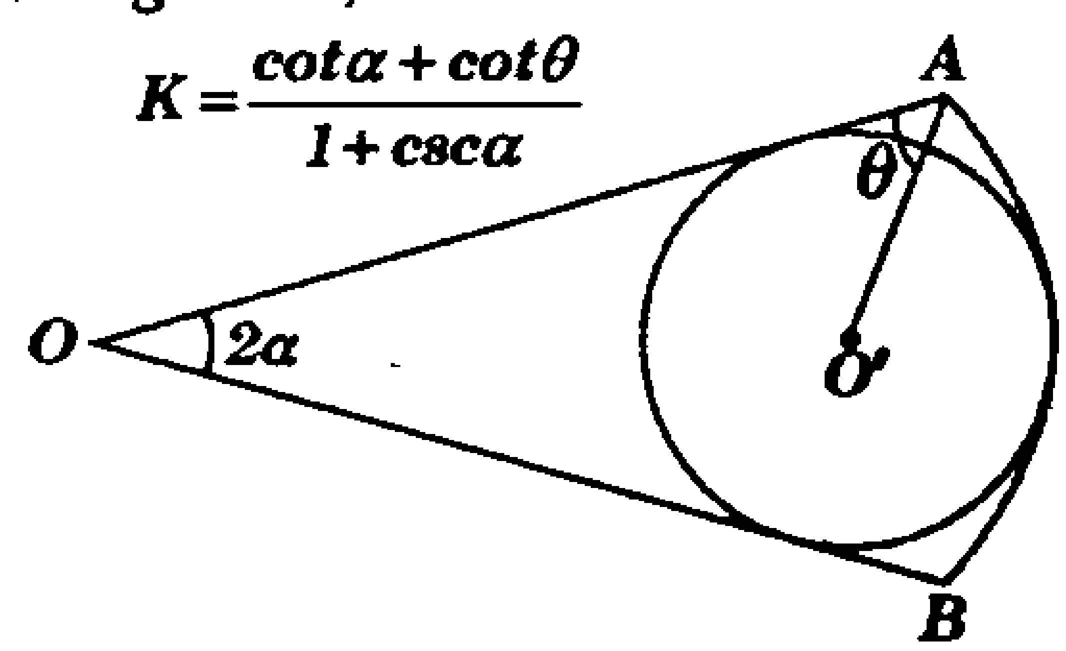
BHC : $tan\theta = \dfrac{b senx}{a + b cosx}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 43 :

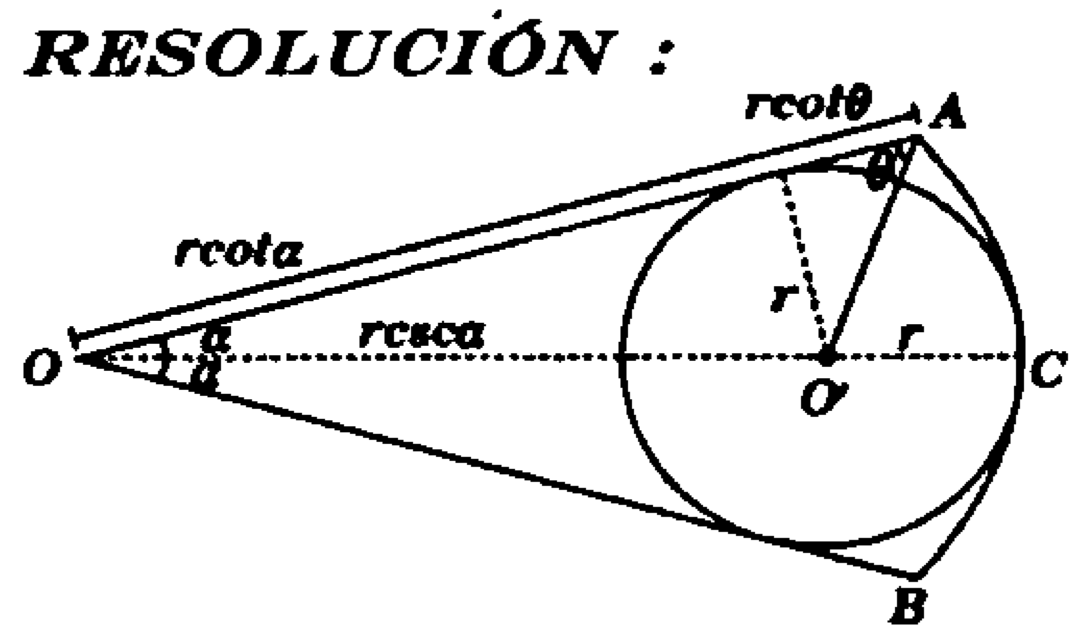
Del gráfico, obtener :

$K = \dfrac{cot\alpha + cot\theta}{1 + csc\alpha}$



A) 1 B) 2 C) $\dfrac{1}{2}$ D) 3 E) $\dfrac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :



◺ O'HO: $OH = r cot\alpha$ $OO' = r csc\alpha$

◺ O'HA: $HA = r cot\theta$ pero : $OA = OC$

$\Rightarrow r cot\alpha + r cot\theta = r csc\alpha + r$

$\Rightarrow cot\alpha + cot\theta = csc\alpha + 1$

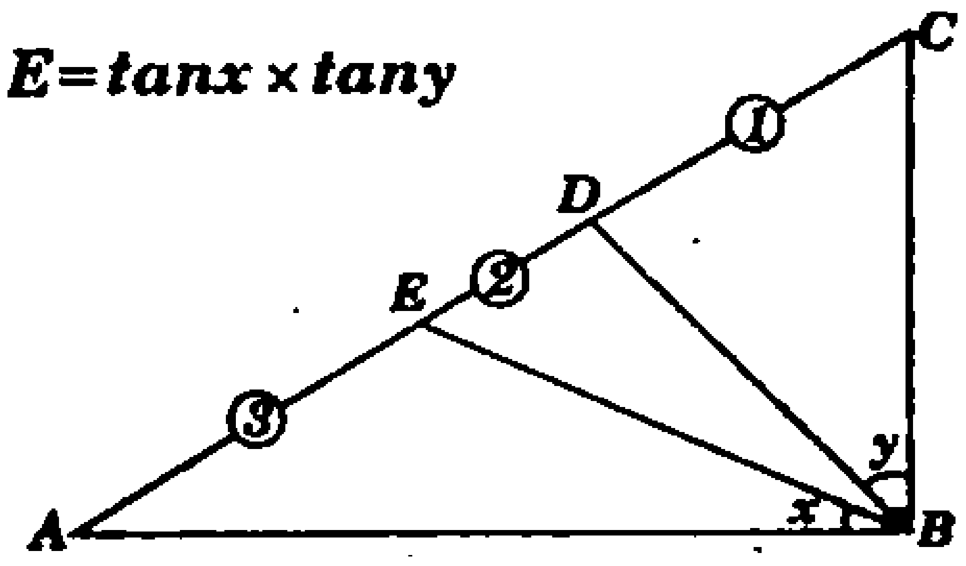
Luego : $K = \dfrac{cot\alpha + cot\theta}{1 + csc\alpha} = 1$

RPTA : "A"

PROBLEMA 44 :

Del gráfico, hallar :

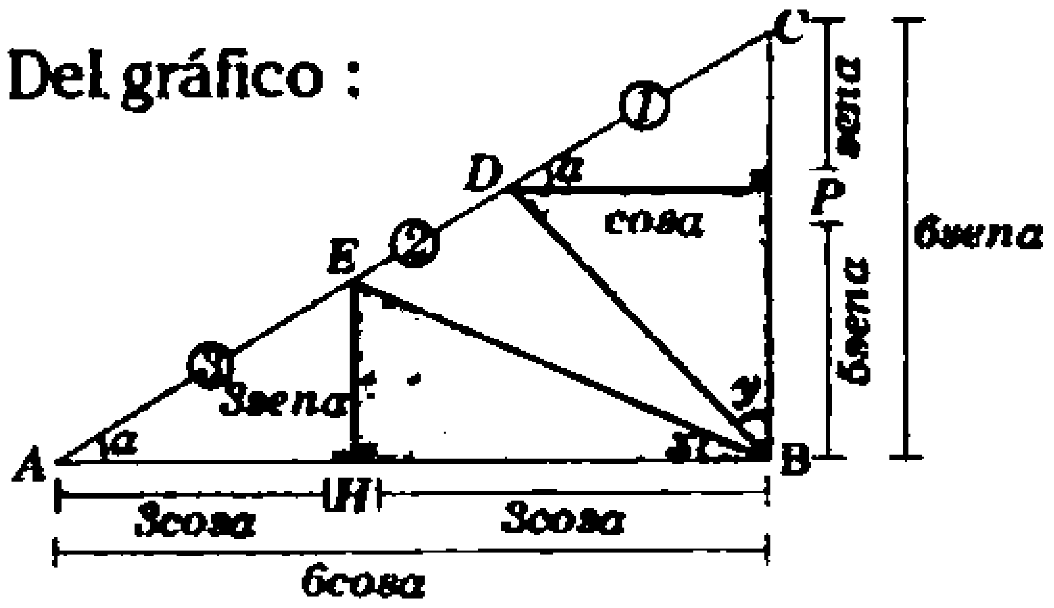
$E=\tan x\times\tan y$



A) 1 B) 0,1 C) 0,2 D) 0,3 E) 0,4

RESOLUCIÓN :

Del gráfico :



* $\triangle AHE$: $EH=3sen\alpha$ $AH=3\cos\alpha$
* $\triangle DPC$: $PC=sen\alpha$ $DP=\cos\alpha$
* $\triangle ABC$: $BC=6sen\alpha$ $AB=6\cos\alpha$
* Luego :

$\triangle EHB$: $\tan x=\dfrac{3sen\alpha}{3\cos\alpha}\Rightarrow \tan x=\tan\alpha$

$\triangle DPB$: $\tan y=\dfrac{\cos\alpha}{5sen\alpha}\Rightarrow \tan y=\dfrac{\cot\alpha}{5}$

* Entonces :

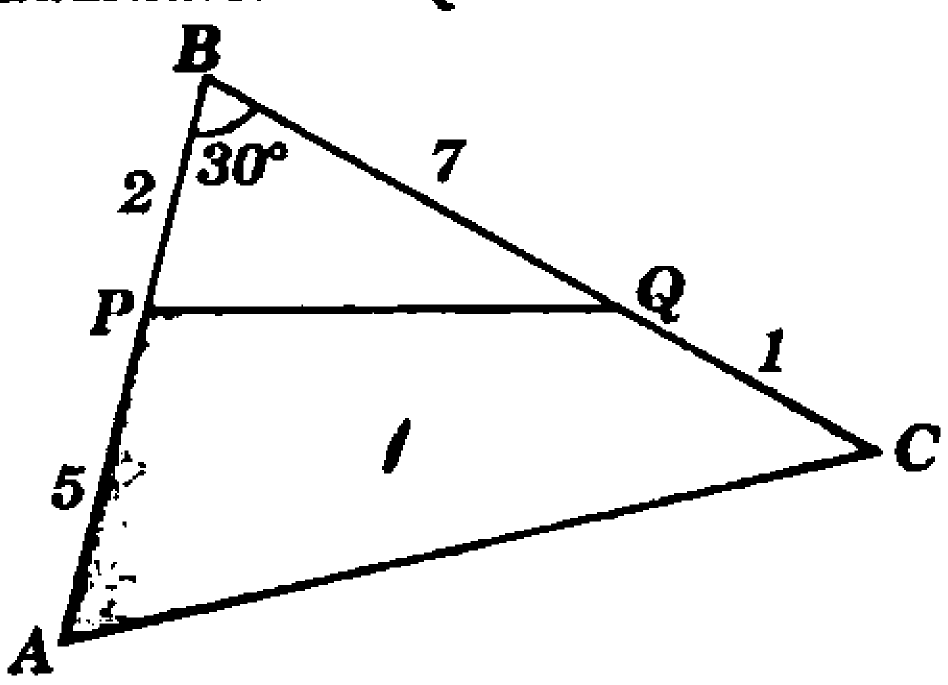
$E=\tan x\times\tan y=\tan\alpha\times\dfrac{\cot\alpha}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow E=0,2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 45 :

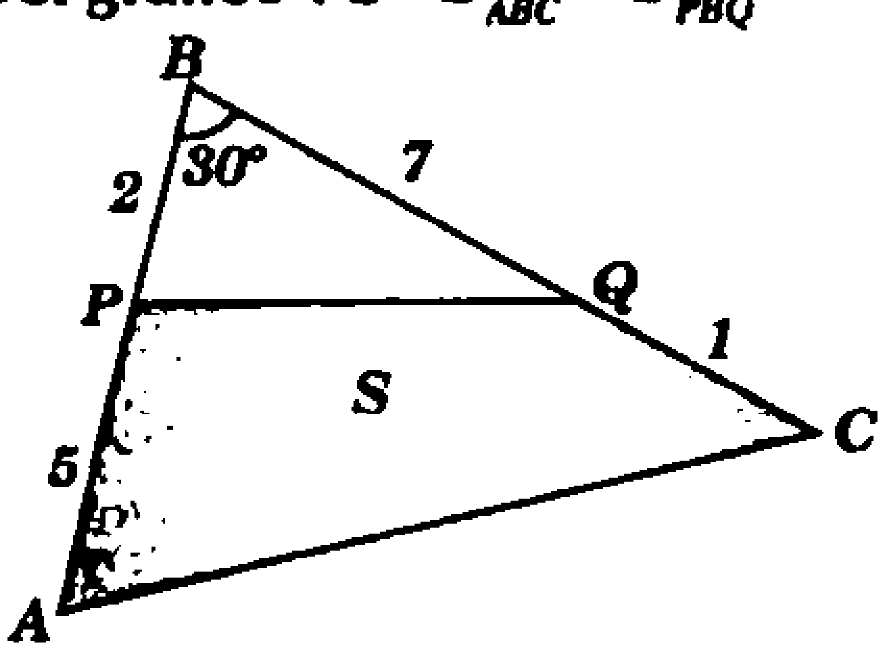
Del gráfico, calcular el área del cuadrilátero *APQC*.



A) 7 B) 10 C) 12 D) 12,5 E) 10,5

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico : $S=S_{ABC}-S_{PBQ}$



I) $S_{ABC}=\dfrac{AB\times BC}{2}sen30^\circ=\dfrac{7\times 8}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=14$

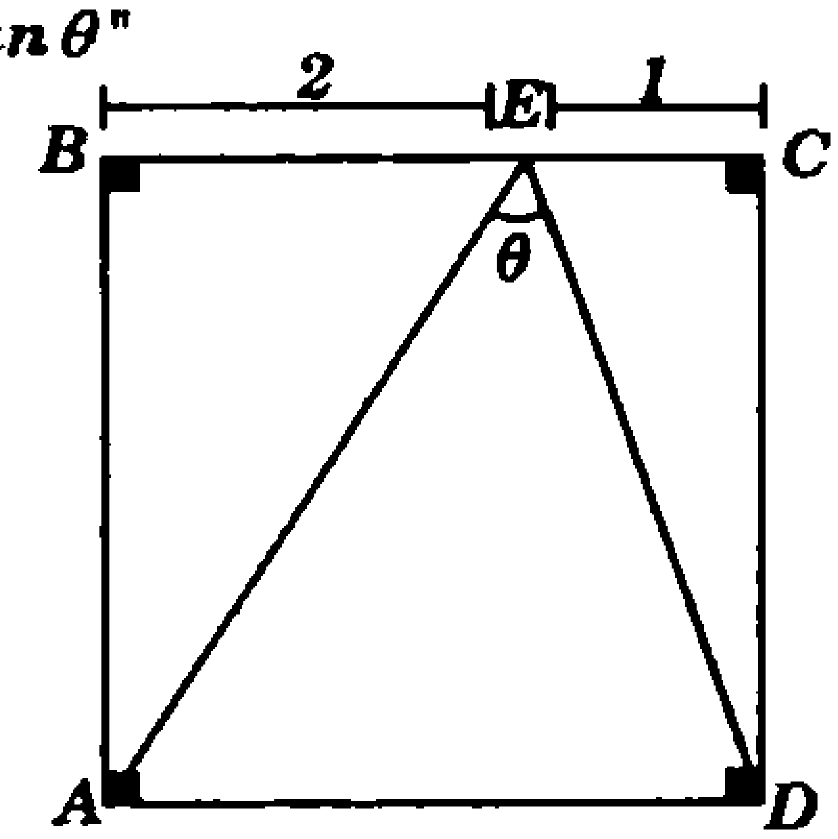
II) $S_{PBQ}=\dfrac{PB\times BQ}{2}sen30^\circ=\dfrac{2\times 7}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}$

Luego : $S=14-\dfrac{7}{2}=\dfrac{21}{2}=10,5$

RPTA : "E"

PROBLEMA 46 :

Si : *ABCD* es un cuadrado, calcular "$\tan\theta$"



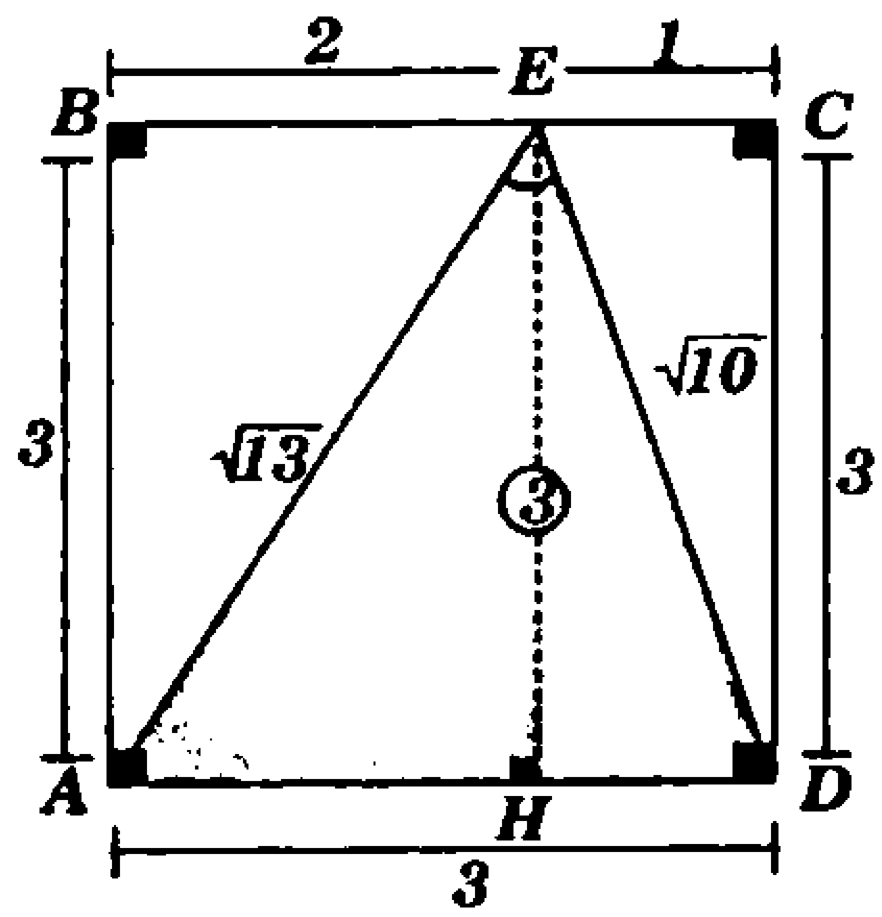
A) $\dfrac{7}{3}$ B) $\dfrac{3}{7}$ C) $\dfrac{5}{7}$ D) 1 E) $\dfrac{9}{7}$

RESOLUCIÓN :

* $\triangle ABE$: $AE=\sqrt{13}$
* $\triangle ECD$: $ED=\sqrt{10}$

$$S_{AED}=\frac{3\times 3}{2}=\frac{9}{2}$$

También : $S_{AED}=\dfrac{\sqrt{13}\sqrt{10}}{2}sen\theta$

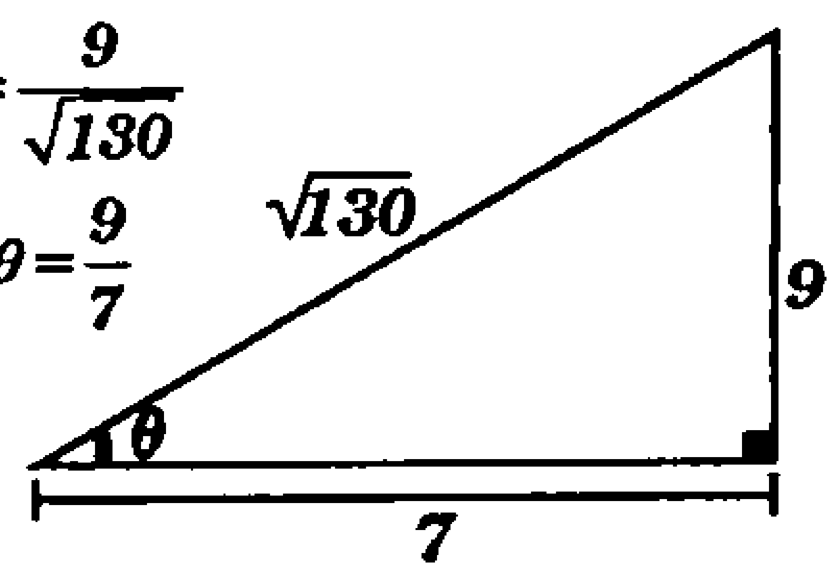


Igualando :

$\dfrac{\sqrt{130}}{2}sen\theta=\dfrac{9}{2}$

$sen\theta=\dfrac{9}{\sqrt{130}}$

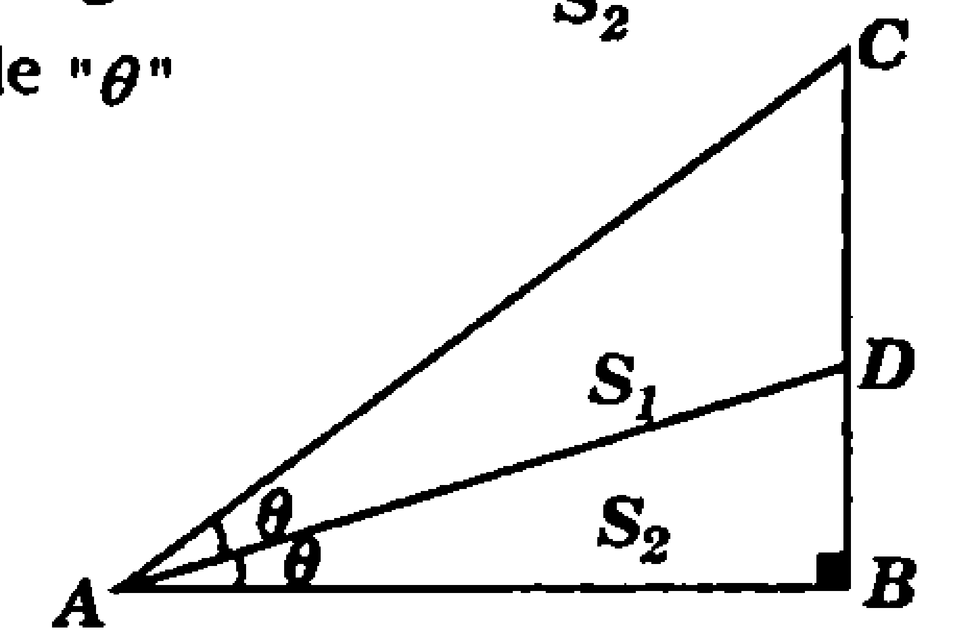
$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{9}{7}$



RPTA : "E"

PROBLEMA 47 :

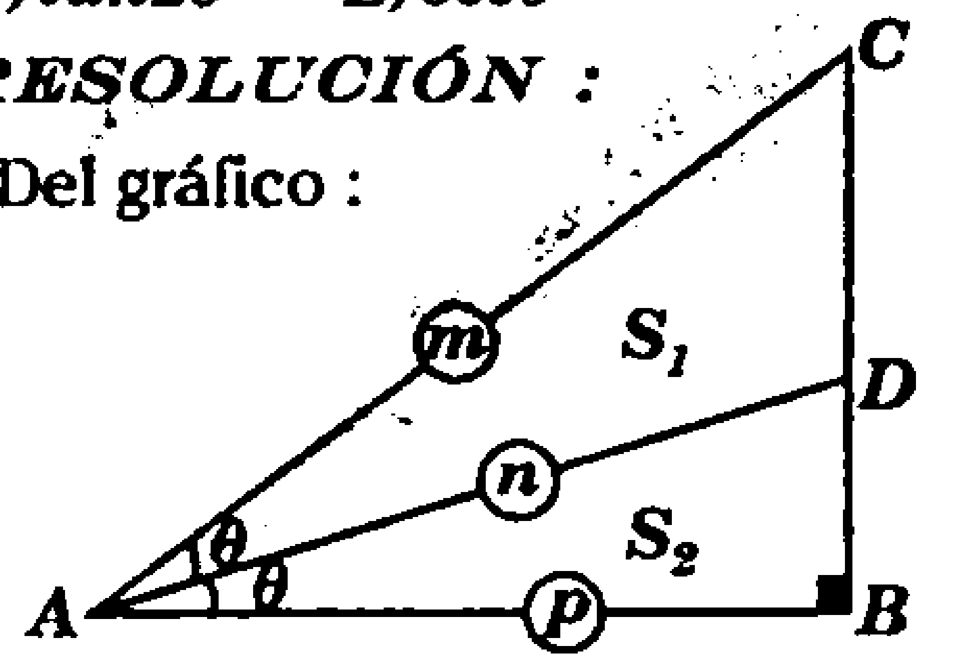
Del gráfico, hallar "$\dfrac{S_1}{S_2}$" en función de "θ"



A) $sen2\theta$ B) $\cos\theta$ C) $\cot2\theta$ D) $\tan2\theta$ E) $\sec\theta$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



$S_1=\dfrac{mn}{2}sen\theta$ ....(I)

$S_2=\dfrac{np}{2}sen\theta$ ....(II)

* Luego :

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\dfrac{mn}{2}sen\theta}{\dfrac{np}{2}sen\theta}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{p}$$

$\Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2}=\sec2\theta$

RPTA : "E"

PROBLEMA 48 :

α y θ son ángulos agudos si :

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{4}$$

Además : $Tan(2\alpha+\beta)=Cot2\alpha$

calcular en radianes : $M=5\alpha+3\beta$

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{3\pi}{4}$ D) π E) $\dfrac{5\pi}{4}$

RESOLUCIÓN :

* De las condiciones :

$\alpha=3k$ y $\beta=4k$; $(2\alpha+\beta)+(2\beta)=\dfrac{\pi}{2}$

* Reemplazando :

$6k+4k+8k=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow k=\dfrac{\pi}{36}$

* Luego :

$M=5\dfrac{(3\times\pi)}{36}+3\times\dfrac{(4\times\pi)}{36}=\dfrac{3\pi}{4}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 49 :

Si se cumple :

$$Sec(2y+z+5°)Cos2x=1$$
$$Sen(2x+3°)Csc(y+18°)=1$$
$$Tan\ (8y-5°)=Cot\ 13z$$

Calcular : $N=x-y-z$

A) -2° B) -1° C) 0° D) 1° E) 2°

RESOLUCIÓN :

* De las condiciones :

* $2y+z+5°=2x$
* $2x+3°=y+18$
* $8y-5+13z=90°$

Resolviendo: $x=11°\ ;\ y=7°$; $z=3°$

* Luego : $N=11°-7°-3°=1°$

RPTA : "D"

PROBLEMA 50:

Dada la igualdad :

$$Sen(2a+b)=Cos(a+2b)$$

Calcule el valor de :

$$E=\frac{sen3a}{cos3b}+tan^2(a+b)$$

A) tan53° B) 4/5 C) 1
D) 3/5 E) tan37°

RESOLUCIÓN :

* Por razones trigonométricas de ángulos complementarios .

$$Sen(2a+b)=Cos(a+2b)$$
$$\Leftrightarrow (2a+b)+(a+2b)=90°$$
$$3a+3b=90° \text{ ....(I)}$$
$$\Rightarrow (a+b)=30° \text{ ....(II)}$$

* Reemplazando (I) ^ (II) en la expresión :

$$E=\frac{Sen3a}{Sen3a}+Tan^2(30°)$$

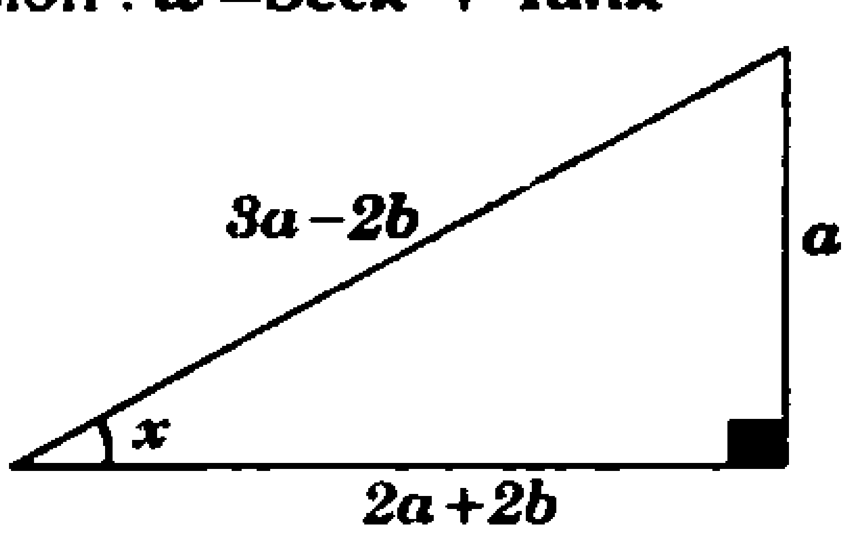
* Por lo tanto :

$$E=1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4}{3}=Tg53°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 51 :

De la figura hallar el valor de la expresión : $w=Secx+Tanx$



A) 1,5
B) 2,0
C) 2,5
D) 3,0
E) 3,5

RESOLUCIÓN :

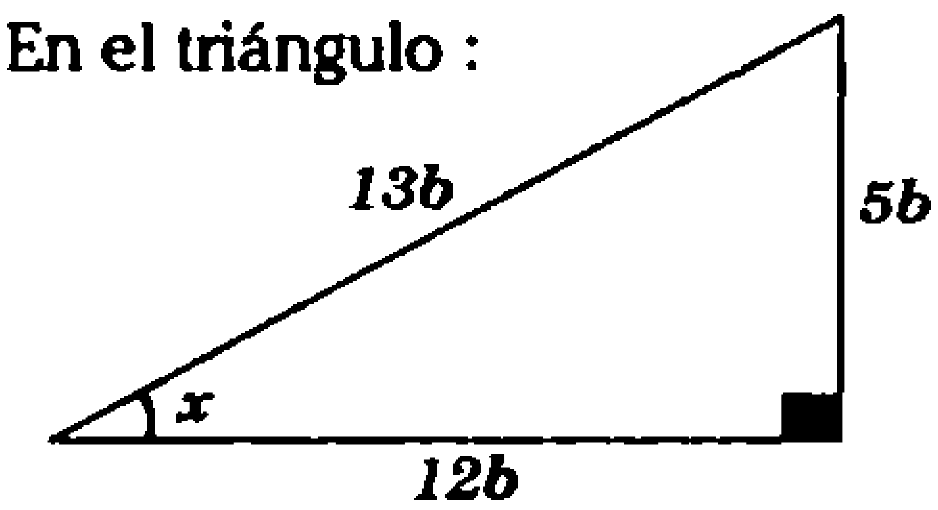
* Aplicamos Pitágoras :

$$(3a-2b)^2=a^2+(2a+2b)^2$$

* Reduciendo

$$5a(a-4b)=a^2$$
$$5a-20b=a \Rightarrow 4a=20b \Rightarrow a=5b$$

* En el triángulo :



* Se pide : $w=\frac{13\not b}{12\not b}+\frac{5\not b}{12\not b}=1,5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 52 :

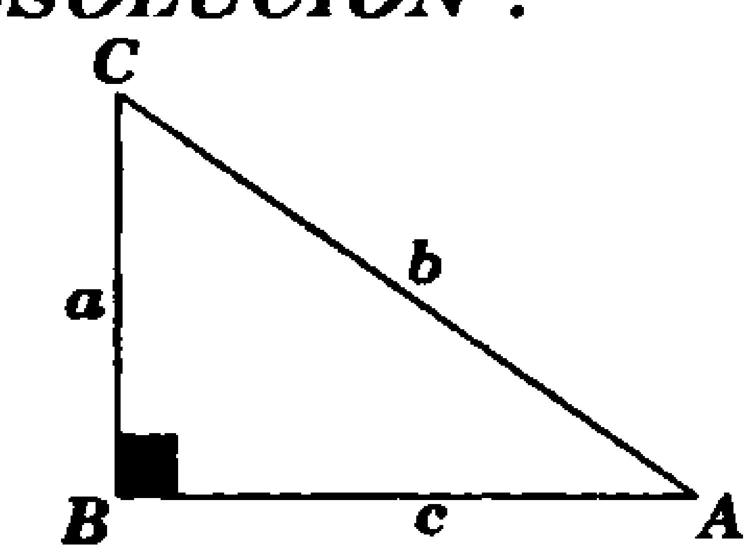
En un triángulo ABC (recto en B); la expresión :

$$E=\frac{C\times CosC}{2Sen\ A\ CosA}$$

representa :

A) Perímetro
B) El área
C) La altura relativa a la hipotenusa
D) La mediana relativa a la Hipotenusa
E) Faltan datos

RESOLUCIÓN :



$$E=\frac{c\frac{a}{b}}{2\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b}\right)}=\frac{\frac{ac}{b}}{\frac{2ac}{b^2}}=\frac{b}{2}$$

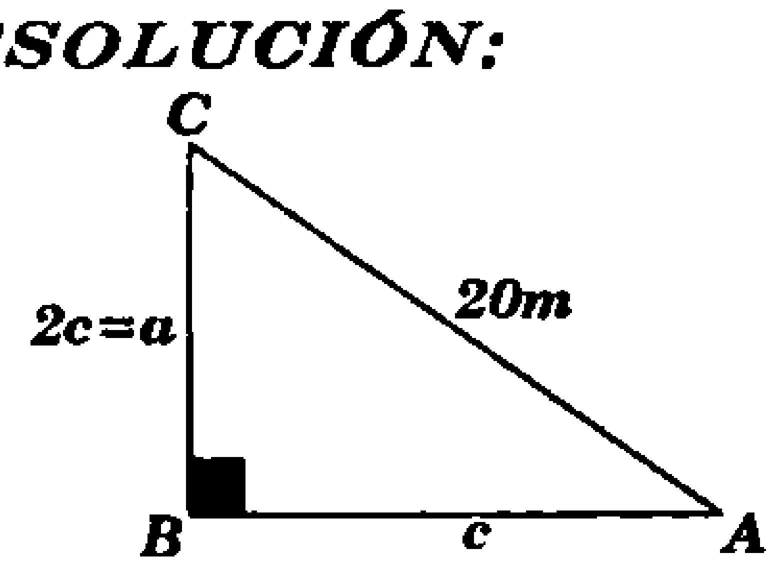
RPTA : "D"

PROBLEMA 53 :

En un triángulo ABC recto en B la hipotenusa mide 20 metros además se tiene que $TgA=4TgC$. Hallar el área de dicho triángulo .

A) $10m^2$ B) $15m^2$ C) $20m^2$
D) $25m^2$ E) $80m^2$

RESOLUCIÓN:



* Del dato :

$$Tg\ A=4TgC$$
$$\frac{a}{c}=\frac{4c}{a}\Rightarrow a^2=4c^2$$
$$\Rightarrow a=2c$$

* Por Pitágoras :

$$4c^2+c^2=400$$
$$5c^2=400\Rightarrow c=4\sqrt{5}m$$
$$a=8\sqrt{5}m$$

* Luego :

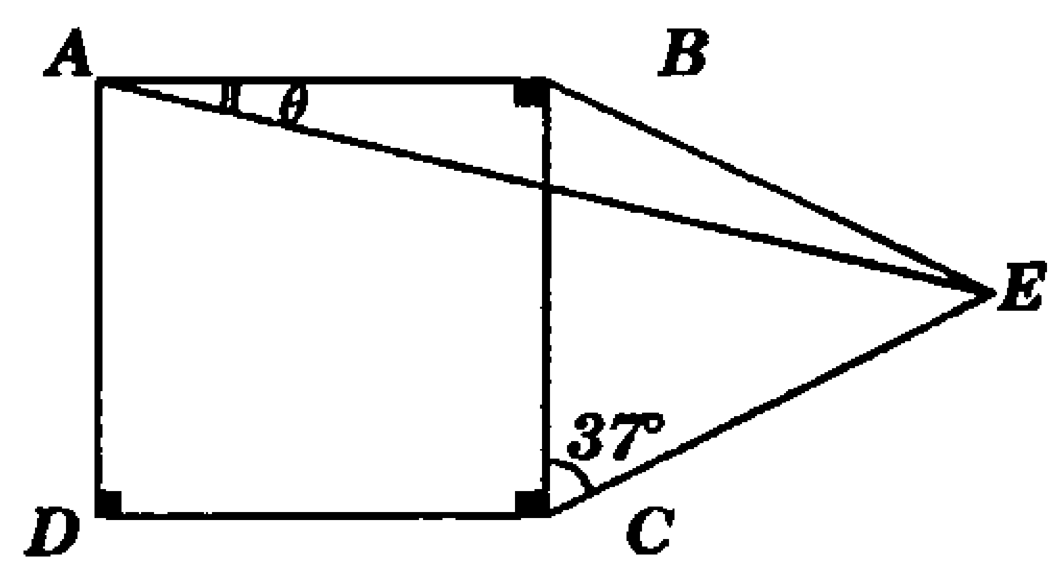
$$=\frac{(8\sqrt{5})(4\sqrt{5})}{2}\ m^2=80m^2$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 54 :

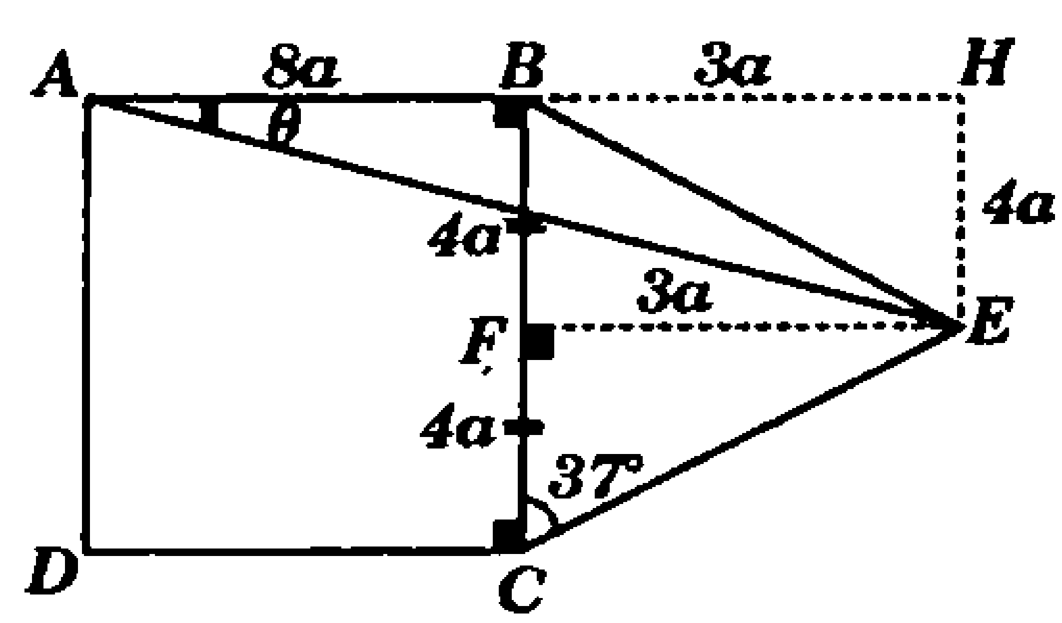
Calcular "$tg\,\theta$"; $\overline{BE}=\overline{EC}$

ABCD es un cuadrado .



A) $\frac{12}{11}$ B) $\frac{2}{11}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{5}{11}$

RESOLUCIÓN :



* Se forma el triángulo EHB:
* Se traza $\overline{EF}$

⊿EFC:

Notable (Sea : $\overline{EF}=3a\ ;\ \overline{FC}=4a$)

* Entonces:

$$\overline{AB}=\overline{BC}=8a \text{ y } \overline{FE}=\overline{BH}=3a$$

* Ahora :

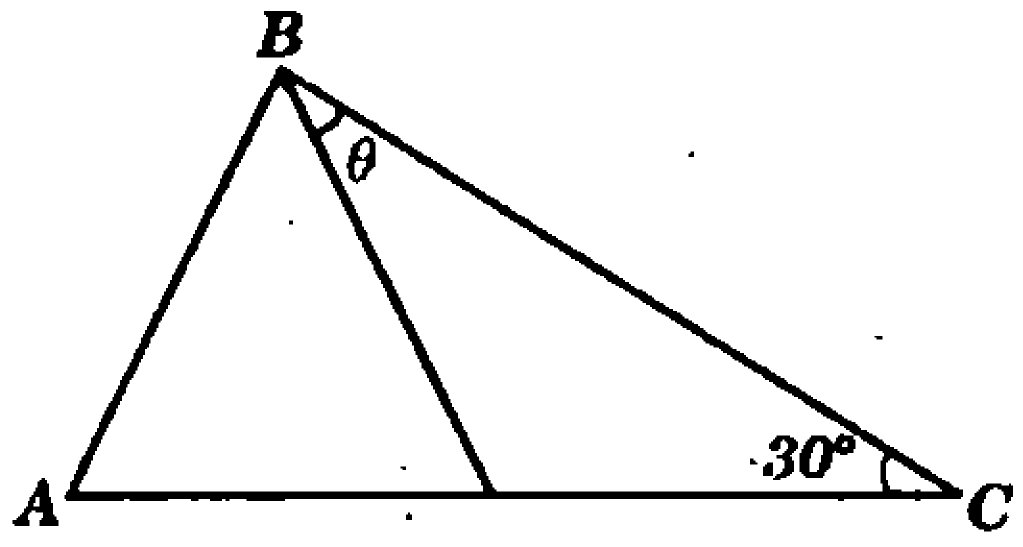
⊿AHE : $Tg\theta=\frac{4a}{11a}=\frac{4}{11}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 55 :

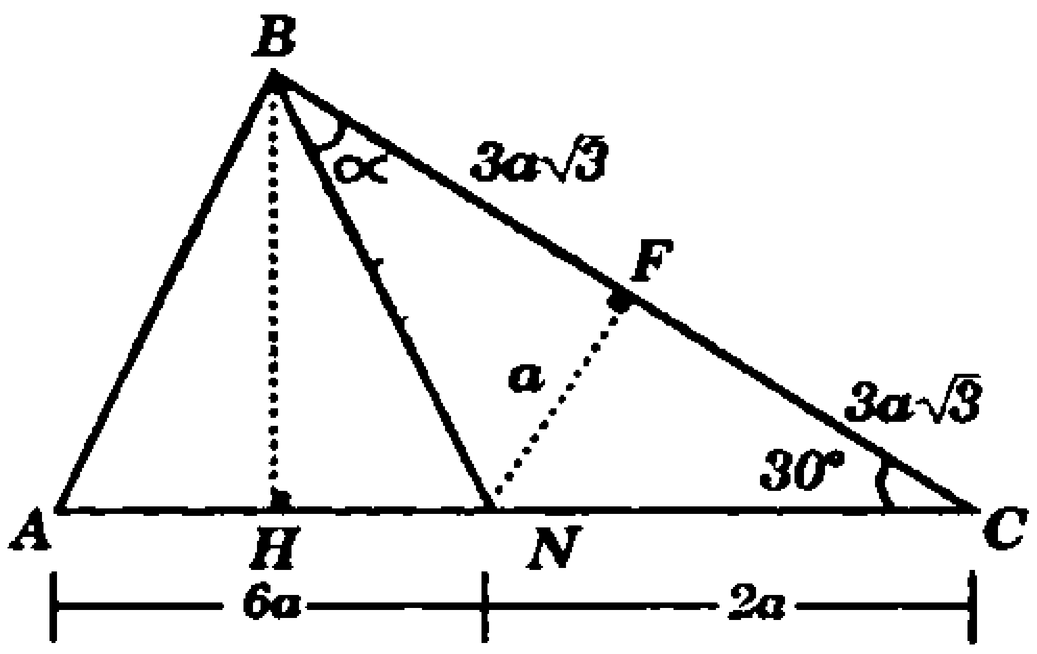
De la figura el valor de $Cot\,\theta$

Si : $\overline{AC} = 4\overline{NC}$



A) 2 *B)* $\sqrt{3}$ *C)* $3\sqrt{3}$ *D)* 1 *E)* $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :



* Sea :

$\overline{NC} = 2a$

$\overline{AC} = 8a$

* Sea traza la altura $\overline{NF}$:

* ⊾ *NFC :*

$\overline{NF} = 2a\ Sen\ 30° \Rightarrow \overline{NF} = a$

$\overline{FC} = 2a\ Cos\ 30° \Rightarrow \overline{FC} = a\sqrt{3}$

* ⊾ *ABC :*

$\overline{BC} = 8aCos30° \Rightarrow \overline{BC} = 4a\sqrt{3}$

$\overline{BF} = 3a\sqrt{3}$

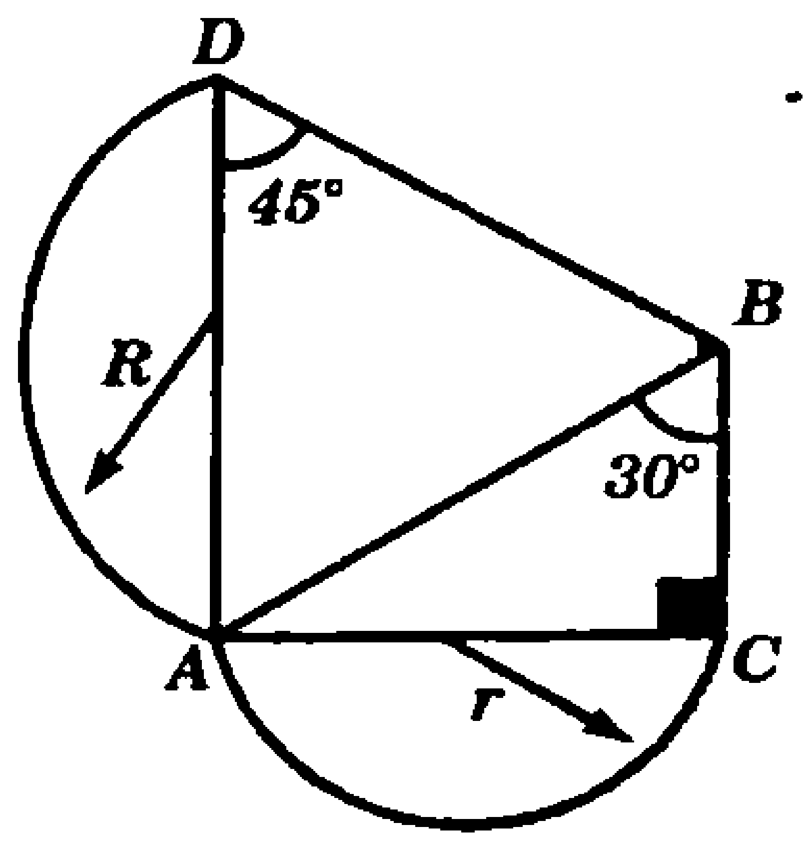
* ⊾ *ABC :* $Cotg\alpha = \dfrac{3a\sqrt{3}}{a} = 3\sqrt{3}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 56 :

En la figura mostrada calcular la relación $\left(\dfrac{R}{r}\right)$ Sabiendo que :

$AB = DB$



A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\sqrt{2}$

D) $2\sqrt{2}$

D) $3\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* ⊾ *ACB :*

$\overline{AB} = 2rCsc30° = 2r(2)$

$\Rightarrow \overline{AB} = 4r$

* ⊾ *ABD :* $\overline{AB} = \overline{BD} = 4r$

$Cos45° = \dfrac{4r}{2R}$

$\Rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{4}{2} \Rightarrow \dfrac{R}{r} = 2\sqrt{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 57 :

De la figura mostrada es un cubo , calcular el valor de :

$$E = Cos^2\theta + Sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + Tg\left(\frac{3\theta}{4}\right)$$

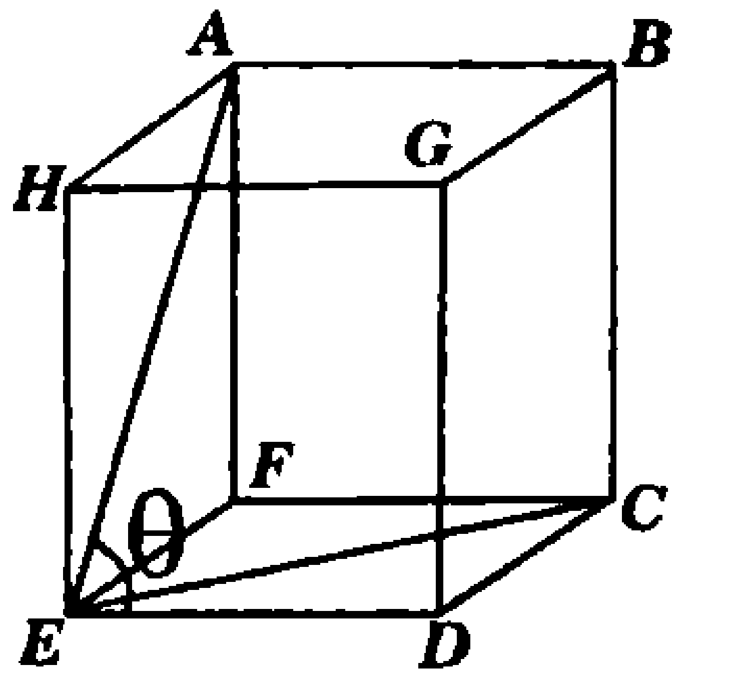
A) 1

B) 2

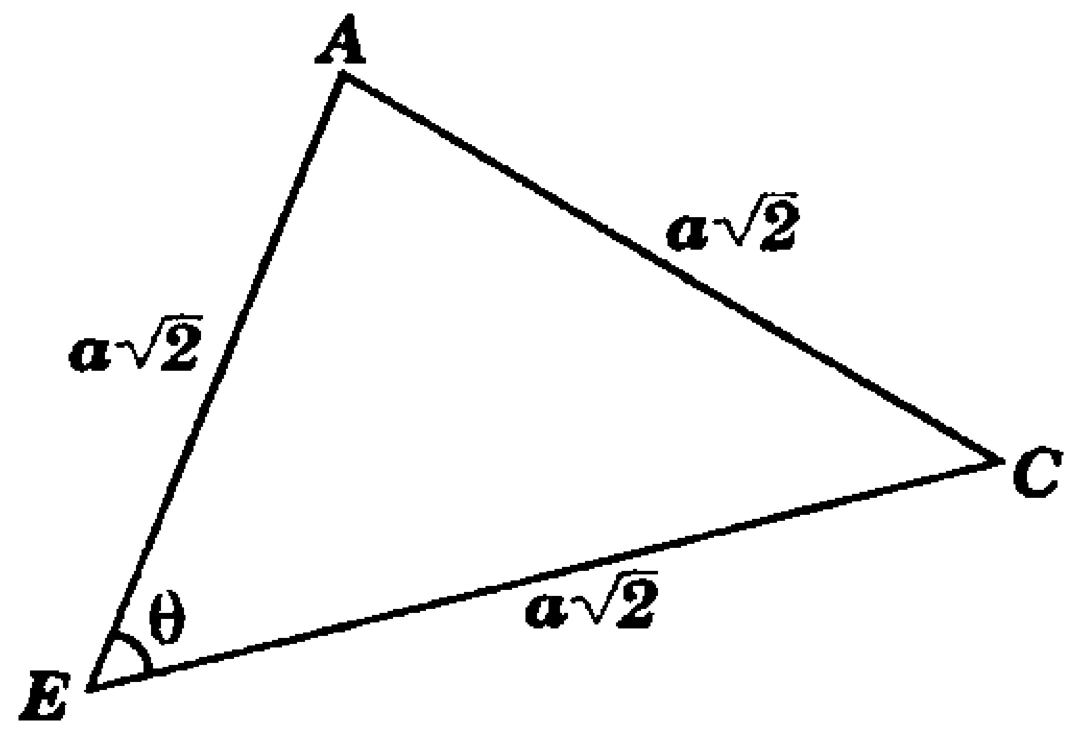
C) 3

D) 4

E) 5



RESOLUCIÓN :



* De la figura se traza *AC* y es diagonal del cuadrado.

$\Rightarrow \Delta$ es equilátero $\Rightarrow \theta = 60°$

$E = Cos^2 60° + Sec^2 30° + Tg45°$

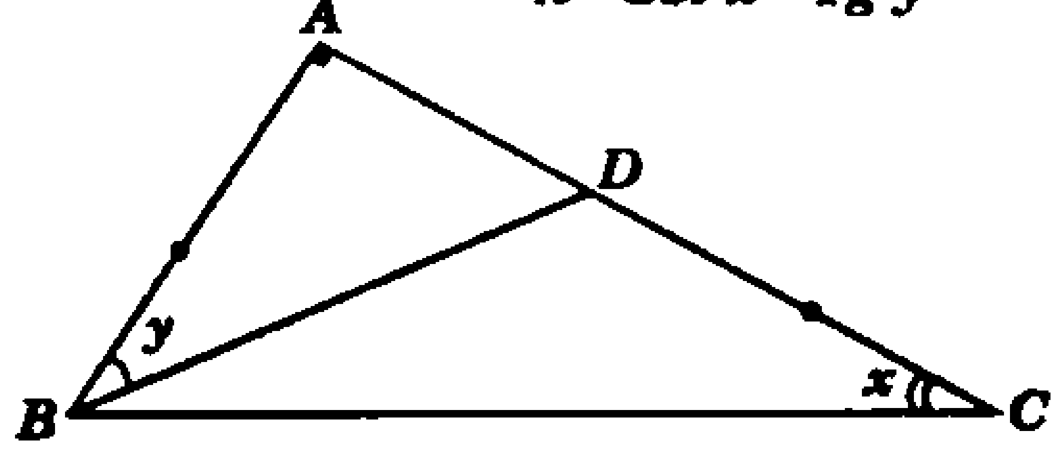
$E = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} + 1 = 2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 58 :

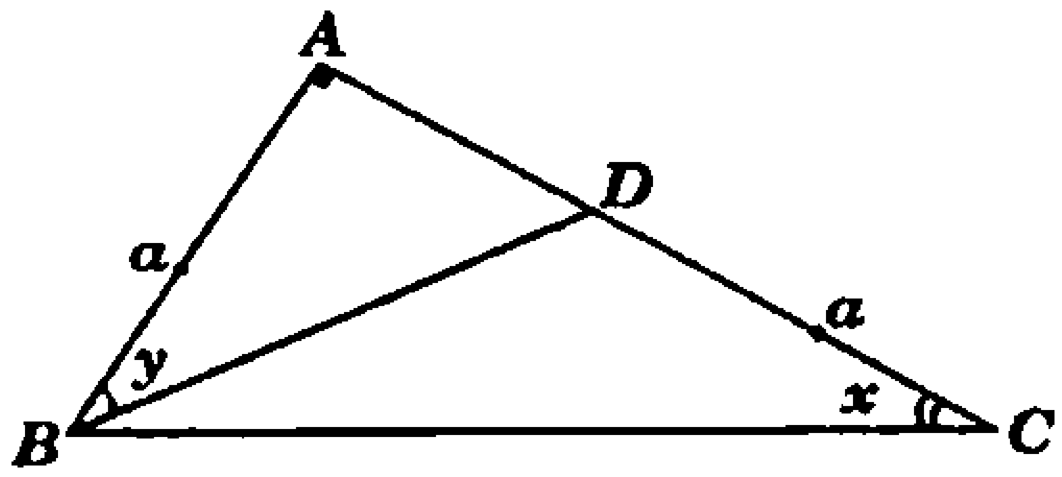
En la figura calcular :

$n = Cot\ x - Tg\ y$



A) –1 *B)* 1 *C)* 2 *D)* –2 *E)* 0

RESOLUCIÓN :



* Sea : $\overline{AB} = \overline{DC} = a$

* ⊾ *BAD* : $\overline{AD} = a\ Tg\ y$

* ⊾ *BAC* : $Cotgx = \dfrac{a + aTgy}{a}$

* Despejando lo pedido , se obtendrá

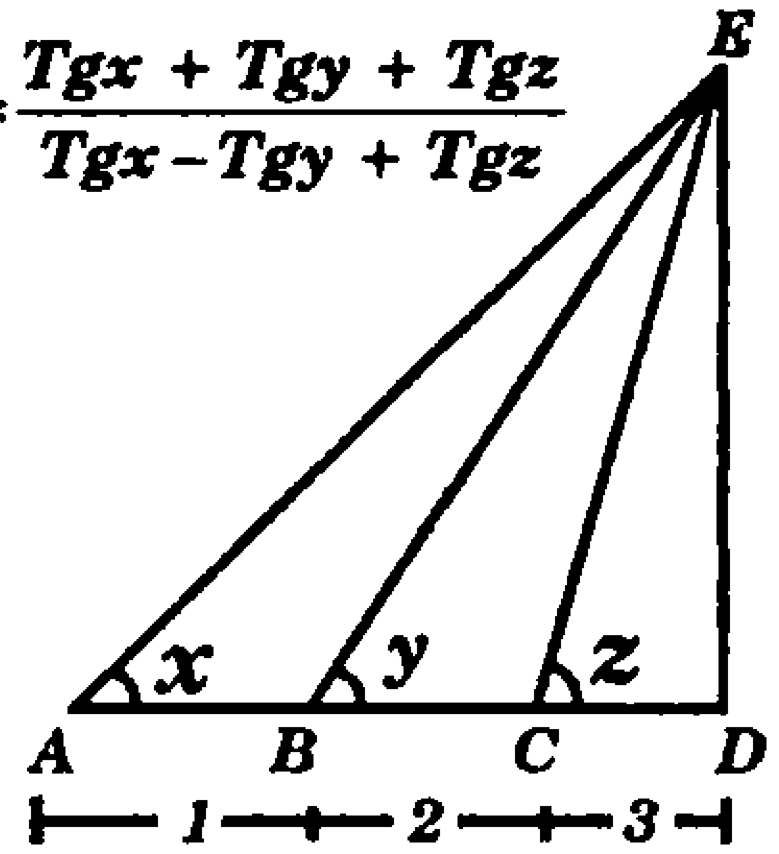
$Ctgx - Tgy = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 59 :

En la figura mostrada, hallar :

$$E = \frac{Tgx + Tgy + Tgz}{Tgx - Tgy + Tgz}$$



A) 11 *B)* 9 *C)* $\dfrac{1}{11}$ *D)* $\dfrac{1}{9}$ *E)* 99

RESOLUCIÓN :

* ⊾ *CDE :* $\overline{ED} = 3\ Tgz$ ....(I)

* ⊾ *BDE :* $\overline{ED} = 5Tgy$ ....(II)

* ⊾ *ADE :* $\overline{ED} = 6Tgx$ ....(III)

* De *(I)* , *(II)* y *(III)*:

$Tgz = 2Tgx$; $5Tgy = 6Tgx$

$\Rightarrow Tgy = \dfrac{6}{5}Tgx$

* Reemplazando :

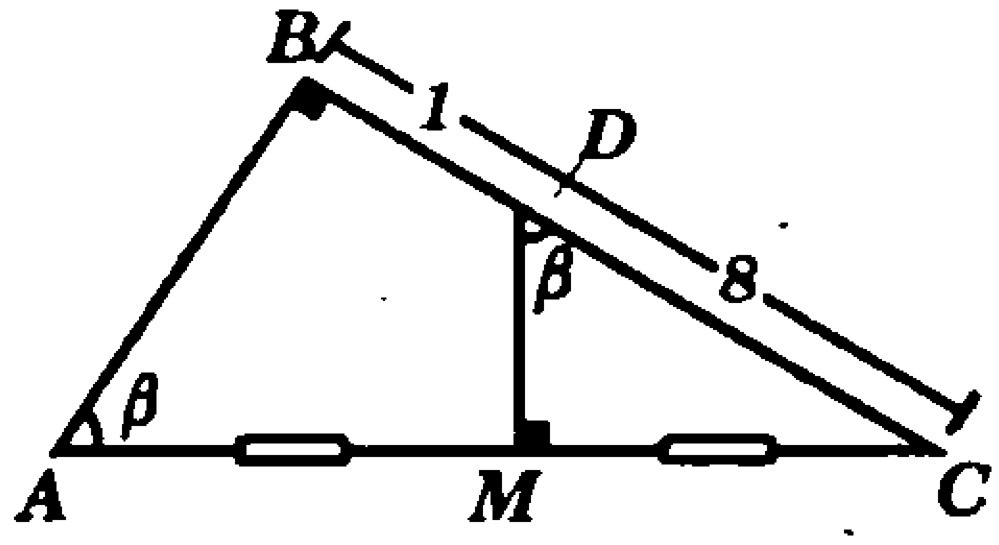
$$E = \frac{Tgx + \frac{6}{5}Tgx - 2Tgx}{Tgx - \frac{6}{5}Tgx + 2Tgx} = \frac{1}{9}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 60 :

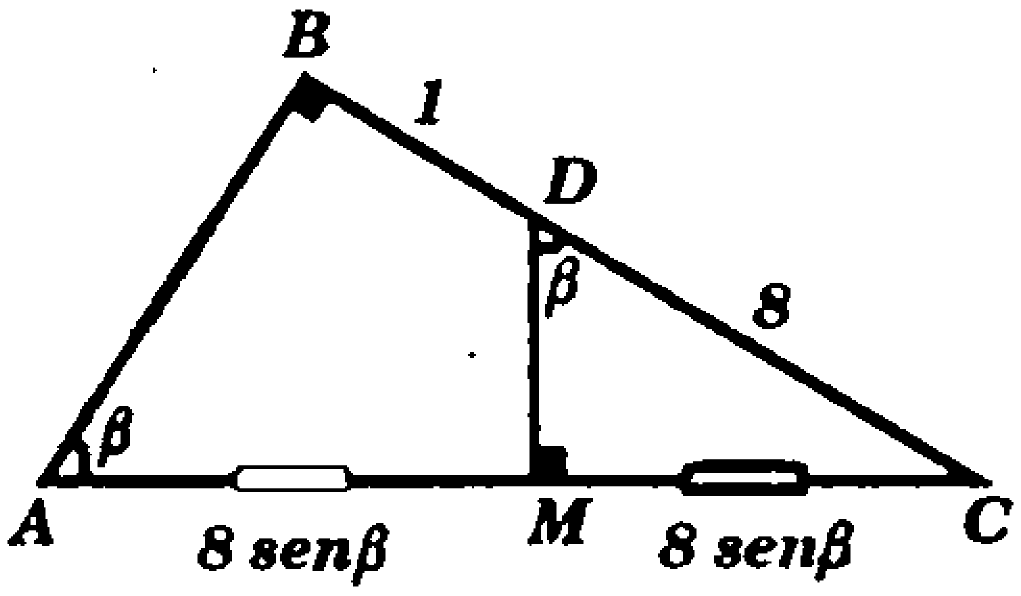
Según el gráfico, calcular el valor de :

$E = \sqrt{7}\ Cos\beta - Sen\ \beta$



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :



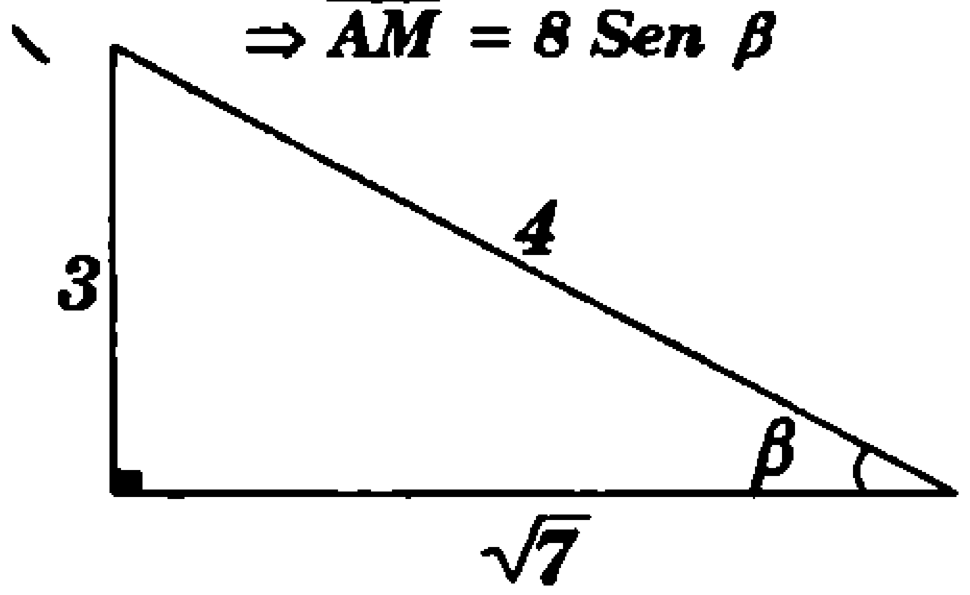
* Si : ⊾ABC: $m\sphericalangle BAC = b$

$\Rightarrow m\sphericalangle BCA = 90° - \beta$

⊾DMC : $m\sphericalangle MCD = \beta$

* ⊾DMC : $\overline{MC} = 8Sen\ \beta$

$\Rightarrow \overline{AM} = 8\ Sen\ \beta$



⊾ABC : $Sen\beta = \dfrac{9}{16Sen\beta}$

$Sen^2\beta = \dfrac{9}{16}$

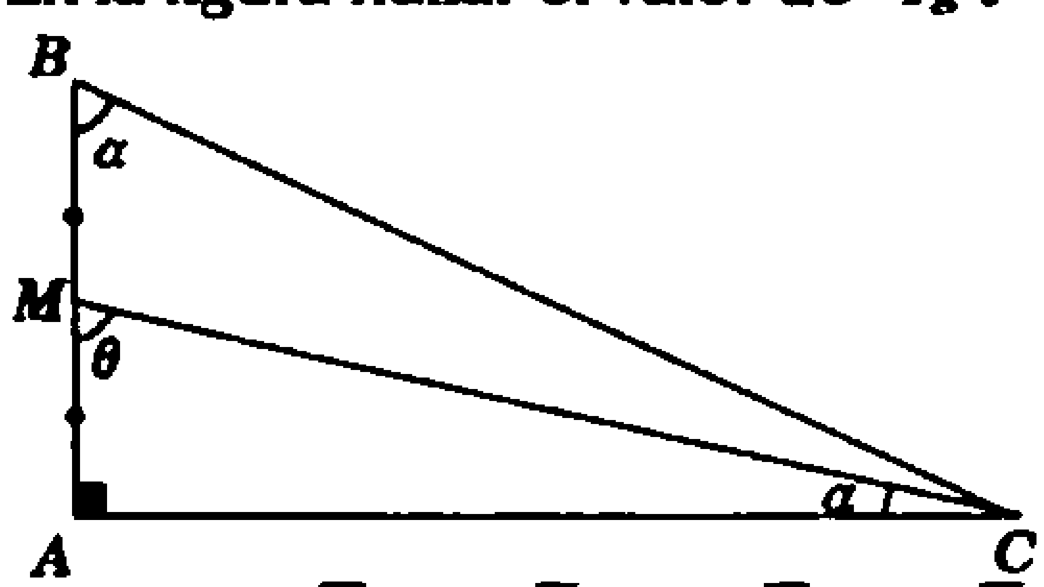
$\Rightarrow Sen\beta = \dfrac{3}{4}$

$E = \sqrt{7}\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right) - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 61 :

En la figura hallar el valor de "$Tg\ \theta$"



A) $\sqrt{2}$ *B)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *C)* $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ *D)* $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ *E)* $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Sea : $\overline{AM} = \overline{MB} = a$

* ⊾ABC : $\overline{BC} = 2a\ Tg\alpha$

* ⊾MBC : $Tg\alpha = \dfrac{a}{2a\ Tg\alpha}$

$\Rightarrow Tg^2\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow Tg\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

* Entonces :

$Tg\theta = \dfrac{2aTg\alpha}{a} = 2Tg\alpha$

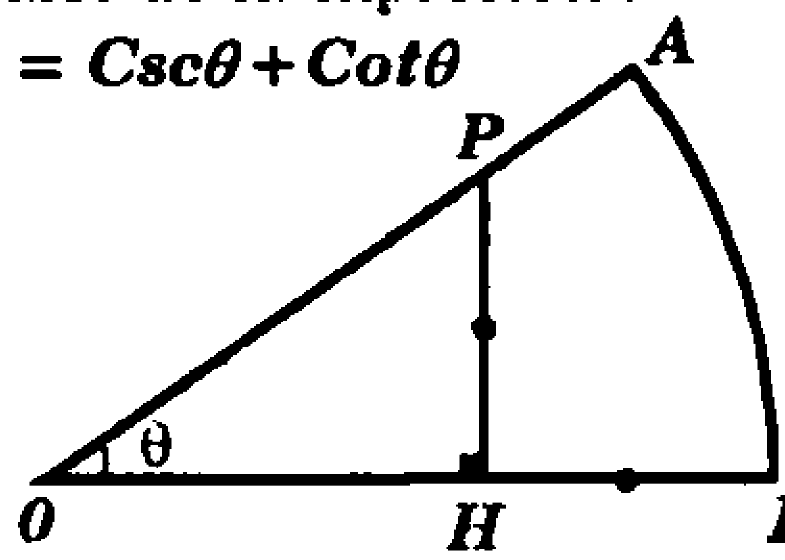
$\Rightarrow Tg\theta = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 62 :

Siendo *AOB* un sector circular, además *AP = 6* y *BH = 8*, calcular el valor de la expresión :

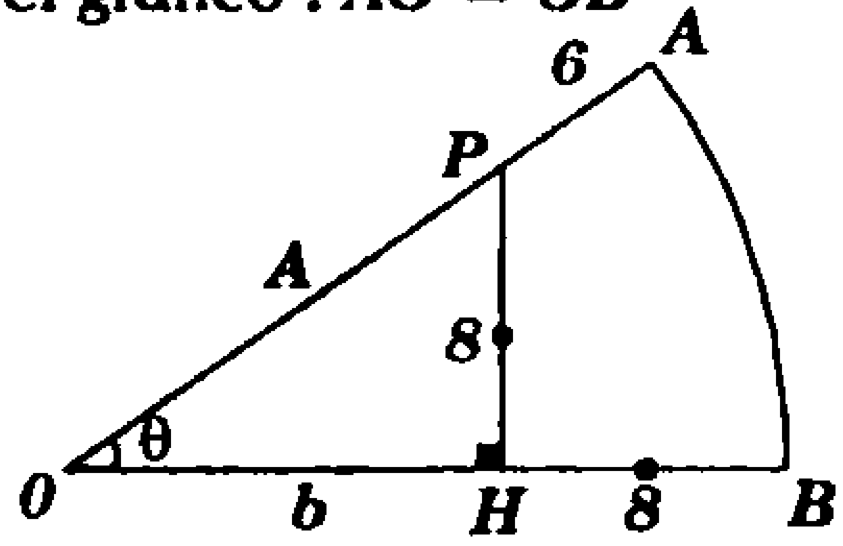
$N = Csc\theta + Cot\theta$



A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

RESOLUCIÓN :

En el gráfico : *AO = OB*



$\Rightarrow a + 6 = b + 8 \Rightarrow a - b = 2 ....(I)$

* En el ⊾OHP (Pitágoras)

$a^2 = b^2 + 8^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 8^2$

$(a+b)\underbrace{(a-b)}_{2} = 64 \Rightarrow a + b = 32...(II)$

* Resolviendo *(I)* y *(II)* :

$a = 17 ; b = 15$

* Luego :

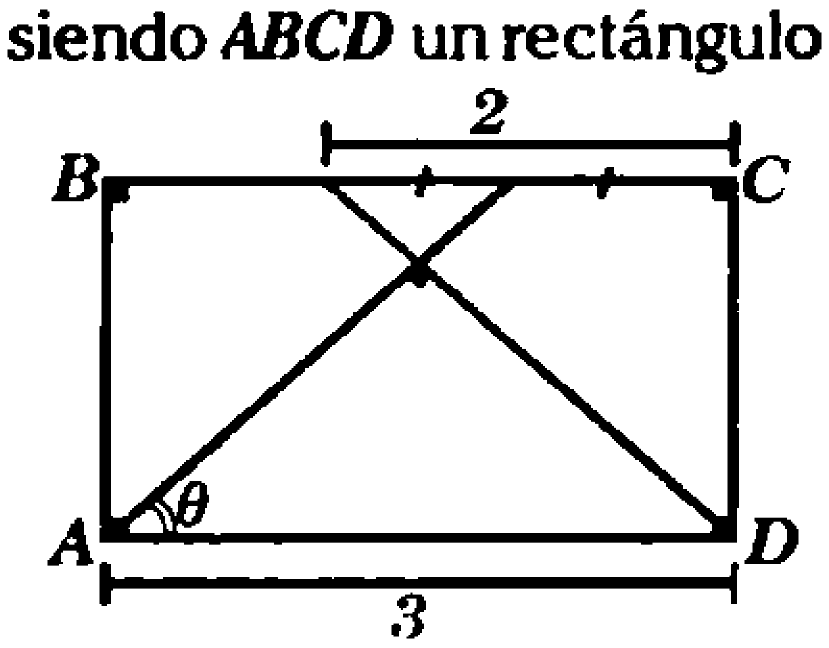
$N = Csc\theta + Cot\theta = \dfrac{17}{8} + \dfrac{15}{8} = 4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 63 :

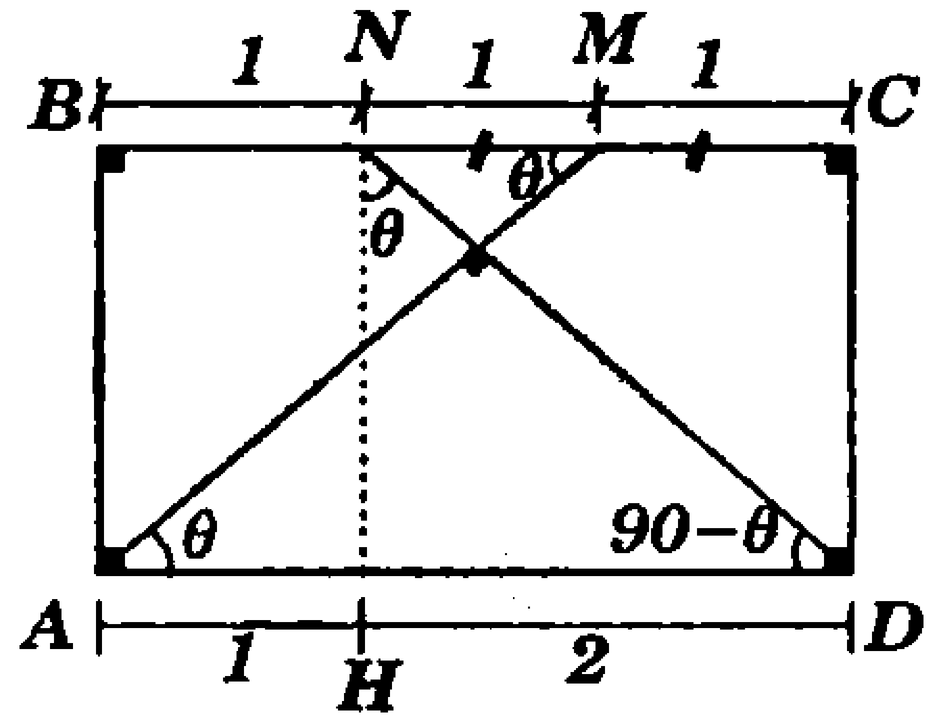
De la figura adjunta , obtener "$Cot\ \theta$" siendo *ABCD* un rectángulo

A) 1
B) 2
C) 3
D) $\sqrt{2}$
E) 5



RESOLUCIÓN :

* El gráfico :



* En el ⊾ABM : $AB = 2Tan\theta$

* En el ⊾NHD : $NH = 2Cos\theta$

Pero : $AB = NH$

$\Rightarrow 2Tan\theta = 2Cot\theta \Rightarrow Tan\theta = Cot\theta$

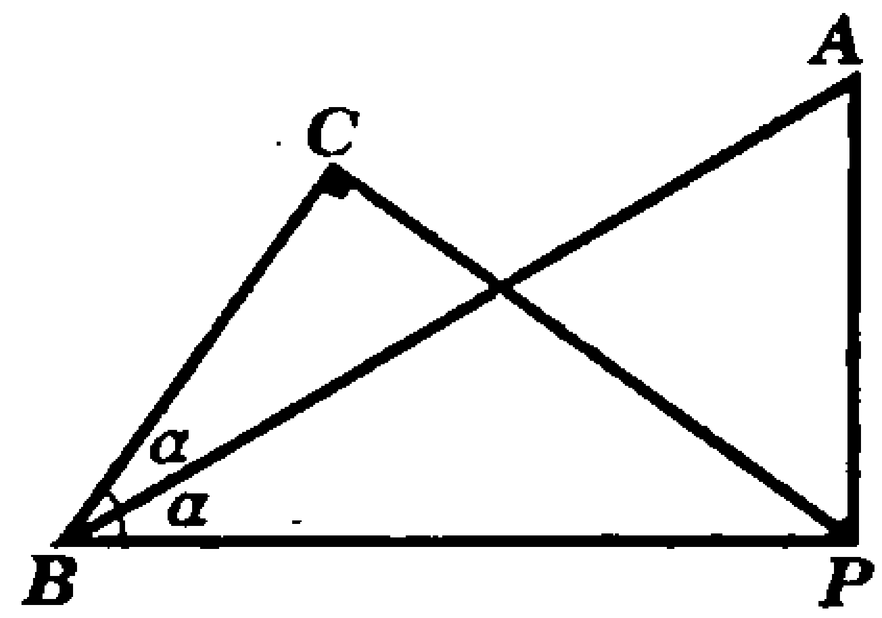
$\Rightarrow \theta + \theta = 90° \Rightarrow \theta = 45°$

$\Rightarrow Cot\theta = 1$

RPTA : "A"

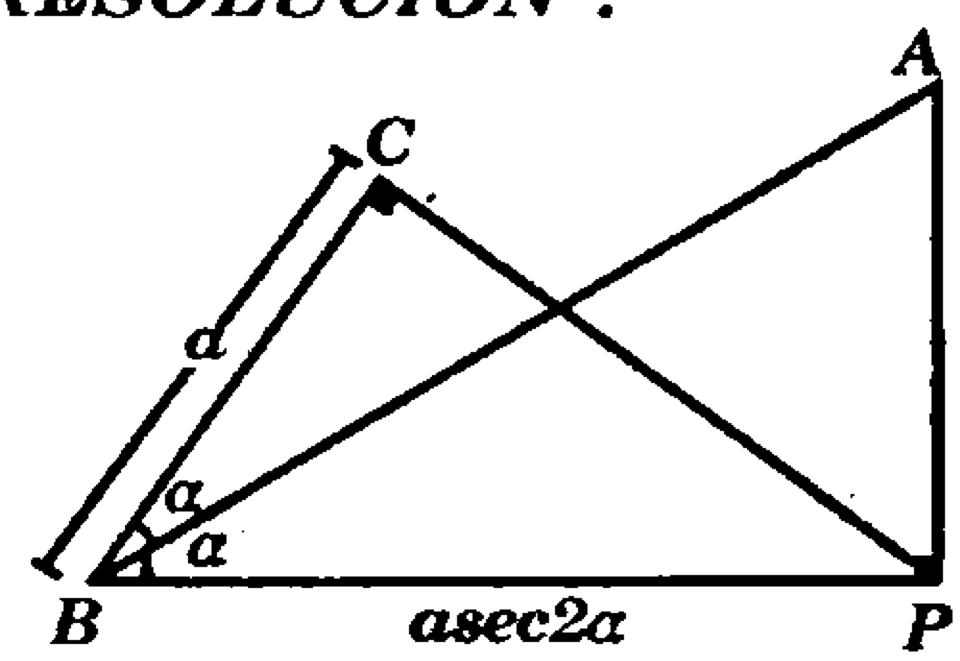
PROBLEMA 64 :

Del gráfico mostrado, si *BC=a*, hallar *AP* en términos de "α" y "a"



A) a sec 2α sen α B) a sec 2α tan α
C) acsc 2α cot α D) a csc α cot 2α

RESOLUCIÓN :



* Resolviendo el *BCP* del *BPA* :

$\dfrac{AP}{asec2\alpha} = Tan\alpha$

$\Rightarrow AP = asec2\alpha Tan\alpha$

RPTA : "B"

PROBLEMA 65 :

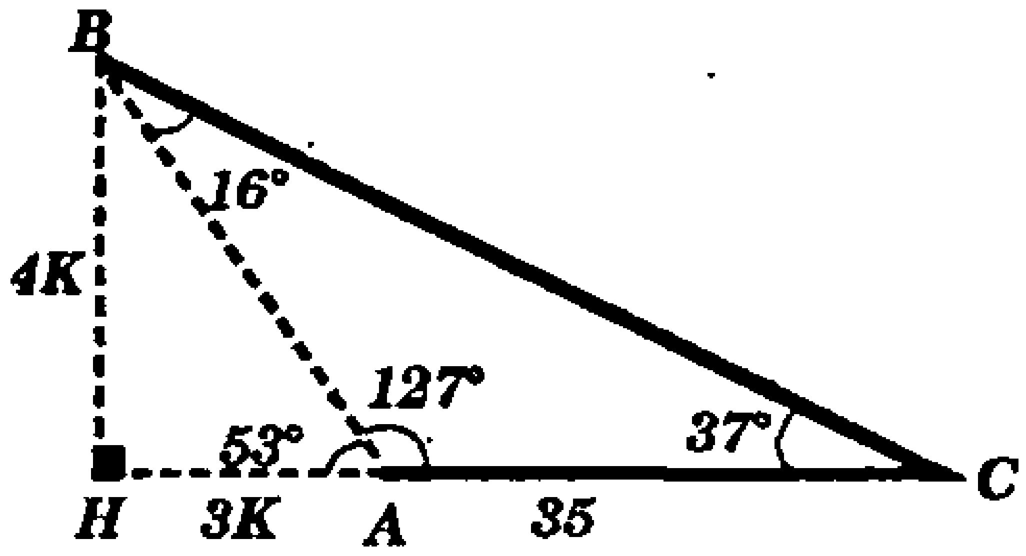
Hallar la medida del lado *BC* de un triángulo *ABC*, sabiendo que : *A=127°*.

$B = 16° ; b = 35cm$

A) 60 B) 75 C) 100 D) 85 E)90

RESOLUCIÓN :

* Gráficando :



* En el ⊿BHC :

$$\tan 37° = \frac{4K}{3K+35} = \frac{3}{4}$$

* De donde :

$K=15 \Rightarrow BH=60$ y $HC=80$

* Por Pitágoras : $BC^2 = BH^2 + HC^2$

$$BC=\sqrt{60^2+80^2}=100$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 66 :

En un triángulo ABC, se tiene los siguientes datos : $C=1m$; $A=29°$ y $b=16°$. Hallar la altura relativa al lado c, en cm.

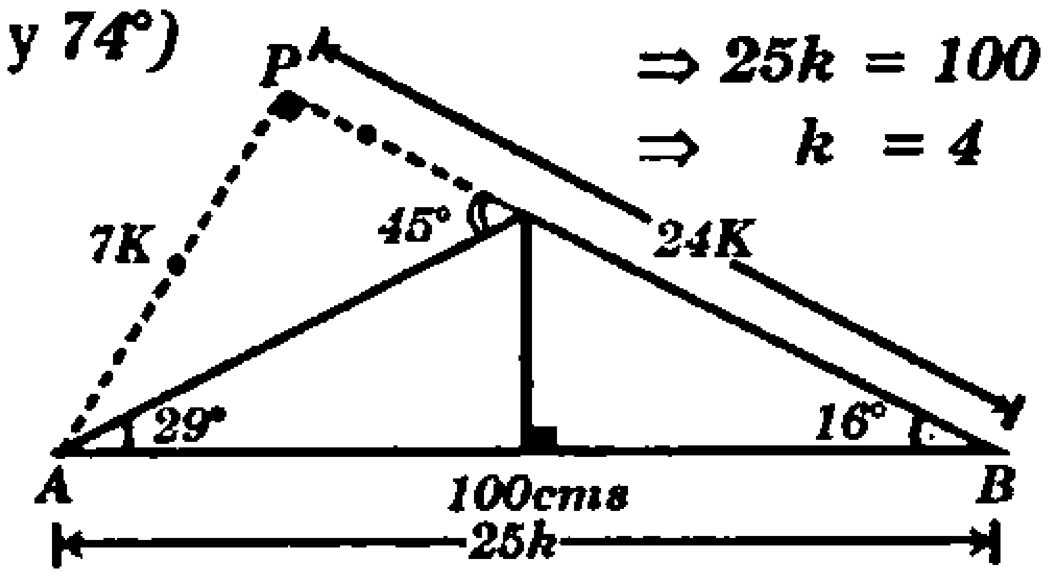
A) 16,04 cms B) 15,04 C) 13,04
D) 19,04 E) 20

RESOLUCIÓN :

* APB es un triángulo notable $(16°$ y $74°)$

$\Rightarrow 25k = 100$

$\Rightarrow k = 4$



* ⊿ APC : $(45°$ y $45°) \Rightarrow PC = 7k$

Luego : $BC = 24k - 7k = 17k = 68$

* ⊿ Sombreado :

$$\frac{x}{68} = Sen16° \Rightarrow x = 68\,Sen16°$$

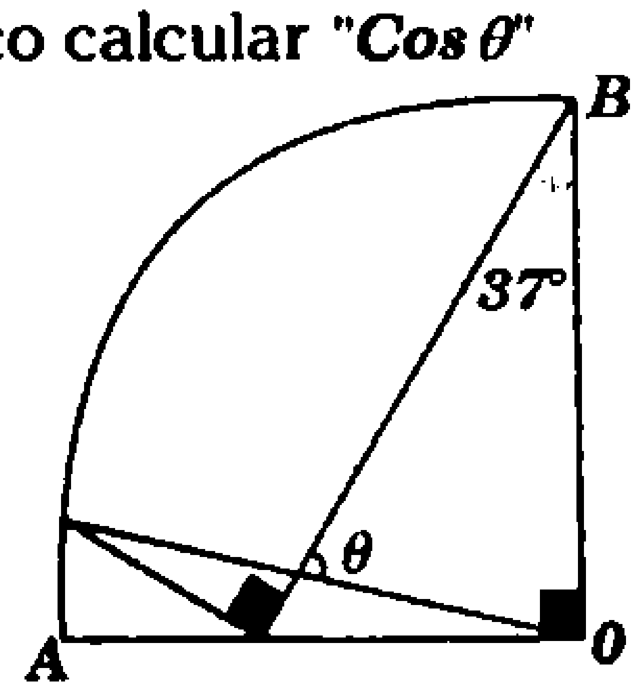
$$\Rightarrow x = 68\left(\frac{7}{25}\right) = 19,04$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 67 :

Del gráfico calcular "$Cos\,\theta$"

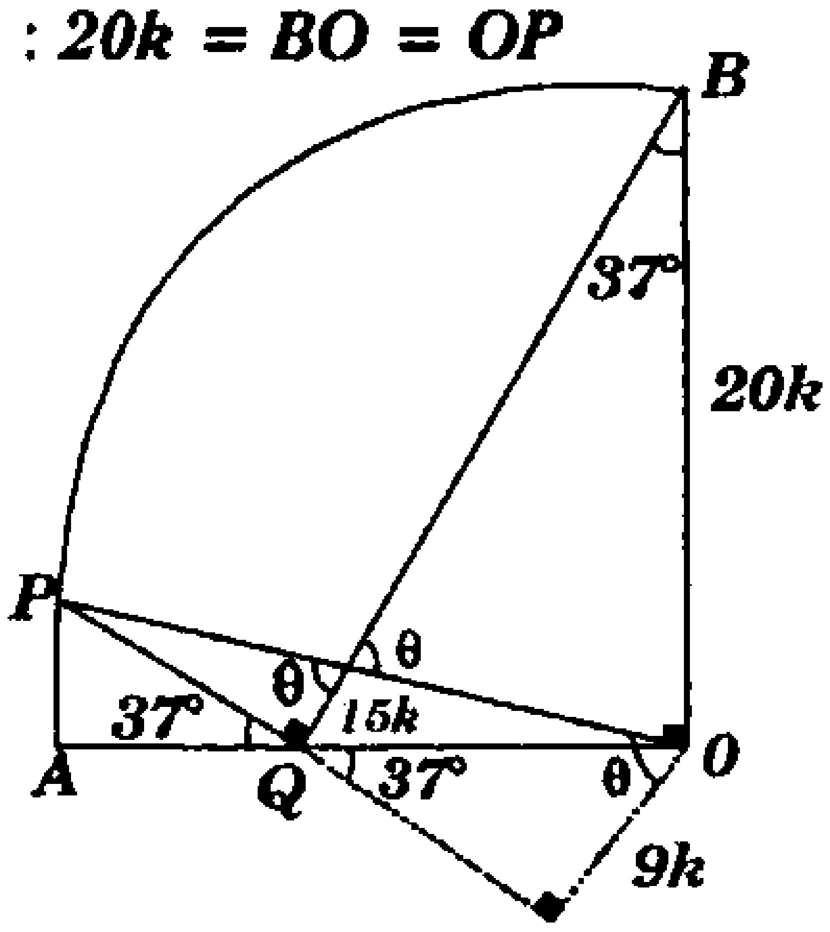
A) 0,24
B) 0,45
C) 0,36
D) 0,54
E) 0,48



RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :

Sea : $20k = BO = OP$



* Prolongamos PQ y desde "O" trazamos una perpendicular

* Luego : $Cos\theta = \dfrac{9k}{20k} = 0,45$

RPTA : "B"

EN SÍNTESIS :

Tema : Razones Trigonométricas de Ángulos Agudos : Definición – Propiedades

• El valor de una razón trigonométrica es independiente de la magnitud de los lados del triángulo.

• ***Razones Recíprocas*** :

$SenA\,CscA = 1$
$CosA\,SecA = 1$
$TanA\,CotA = 1$

• ***Razones Complementarias :***

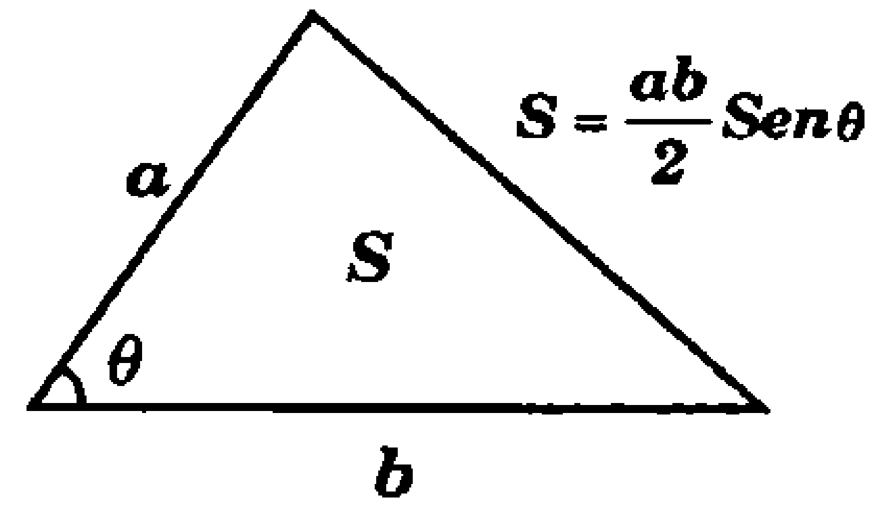
$Senx = Cosy$	
$Tanx = Coty$	$x + y = 90°$
$Secx = Cscy$	

• Dado el valor de una razón trigonométrica se pueden obtener las otras cinco

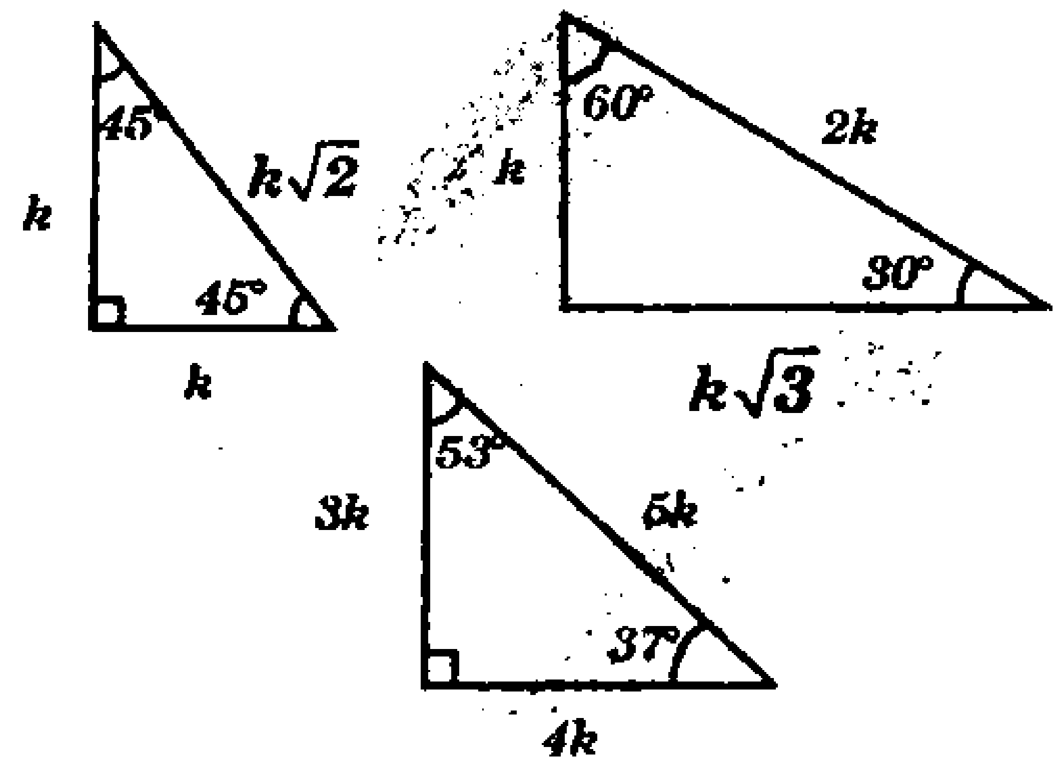
Tema : Resolución De Triángulos: Notables – Resolución

En todo triángulo rectángulo si se conoce la medida de un ángulo y la longitud de uno de los lados se puede calcular la longitud de los otros 2 lados.

La fórmula trigonométrica para calcular el arco de la región triangular.



• Los triángulos rectángulos notables básicos son :



PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Marcar (V) o (F) para un ángulo "θ" agudo

( ) $Sen\theta = \dfrac{C.O}{H}$

( ) $Cos\theta = \dfrac{C.A}{H}$

( ) $Tan\theta = \dfrac{C.A}{C.O}$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFF

02 Si : $Cos\theta = \dfrac{3}{5}$ (θ es agudo)

calcular : $Sen\theta$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

03 Si $Tan\alpha = \sqrt{x}$ (α es agudo) calcular : "$Csc\alpha$"

A) 2 B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) 5 D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ E) 3

04 Calcular $2Sen\theta + 4Cos\theta$

si : $Tan\theta = \dfrac{4}{3}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Marcar (V) o (F):

( ) $Sen\theta . Cos\theta = 1$

( ) $Sen\alpha . Csc\alpha = 1$

( ) $Tan\alpha . Cot\alpha = 2$

A) FFF B) VFV C) FVF
D) FFV E) FVV

06 Marcar **(V)** o **(F)** :

( ) $Sen50° = Cos40°$

( ) $Sen\theta = Cos(90° - \theta)$

( ) $Tan45° = Cot54°$

A) VVV B) VVF C) VFF
D) VFV E) FFV

07 Si se sabe que : $\alpha - \theta = 30°$

además : $Sen\alpha = Cos\theta$

calcular : $\dfrac{\alpha}{\theta}$

A) $\dfrac{5}{2}$ B) $\dfrac{4}{3}$ C) 2 D) $\dfrac{6}{5}$ E) 3

08 Si : $Sen\alpha . Csc\theta = 1$

además : $\alpha + \theta = 40°$

calcular : $\dfrac{\alpha}{2}$

A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 50°

09 Si : $x + y = 90°$

calcular : $M = \dfrac{Senx}{Cosy} + \dfrac{Tanx}{Coty}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10 Calcular «x» en :

$x.Sen30°.Sec60° = 2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 Calcular : Sen^2x

si se cumple que : $Cosx = \dfrac{1}{2}$

además x es agudo

A) 4/3 B) 3/4 C) 4/5
D) $\sqrt{3}/2$ E) 1/2

12 Si se cumple que :

$$Sec\theta + Tan\theta = 4$$

calcular : $Sen\theta$

A) 15/7 B) 17/8 C) 15/8
D) 17/15 E) 8/17

13 Si : $Sen(\alpha - \theta) = Cos(\alpha + \theta)$

calcular (α)

A) 45° B) 30° C) 60° D) 43° E) 20°

14 Si : $Sen(a + \beta) = Cos a$

además : $Tan a . Cot\beta = 1$

calcular : $(a + \beta)$

A) 180° B) 60° C) 30°
D) 150° E) 120°

15 Marcar **(V)** o **(F)** :

( ) $Sen\alpha . Cos\theta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \theta$

( ) $Tan\alpha . Cot\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

( ) $Senx . Secy = 1 \Leftrightarrow x + y = 90°$

A) FVV B) FFF C) VVV
D) FVF E) VFV

16 Si : $Sen\theta = Tan37°$

Calcular : $Cot^2\theta$

A) 7/4 B) 7/9 C) 7/10
D) 7/8 E) $\sqrt{7}/8$

17 Calcular :

$E = Sen\alpha . Csc\alpha + Tan\beta . Cot\beta + Cos\phi . Sec\phi$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 Calcular : $M = \dfrac{Tan\alpha . Cot\alpha}{Tanx . Tany}$

si : $x + y = 90°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19 Calcular $x + y$; si : $\alpha + \beta = 90°$

$x = \dfrac{Sen\alpha + Cos\beta}{2Sen\alpha}$; $y = \dfrac{Tan\beta + Cot\alpha}{Cot\alpha}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 Calcular M/N, si :

$$M = \frac{Sen30°.Cosx}{0,5}$$

además se cumple que $x + y = 90°$

$N = Seny$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 Marcar **(V)** o **(F)**:

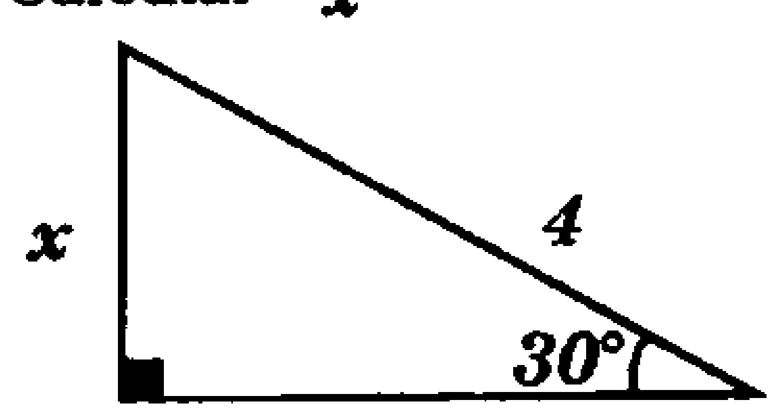
( ) $Sen37° = \dfrac{3}{4}$

( ) $Cos30° = \dfrac{1}{2}$

( ) $Sen60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

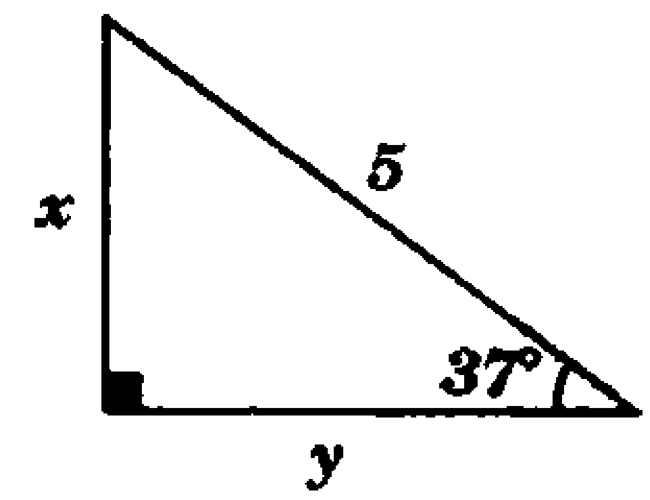
A) FVF B) FVV C) FFV
D) FFF E) VVV

02 Calcular " x "



A) 2 B) 4 C) 1 D) 1/2 E) 3

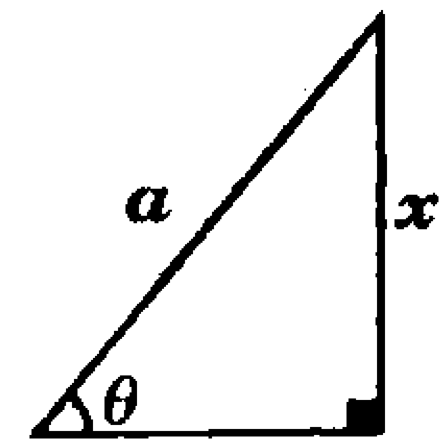
03



Calcular $x + y$:

A) 7 B) 5 C) 8 D) 9 E) 10

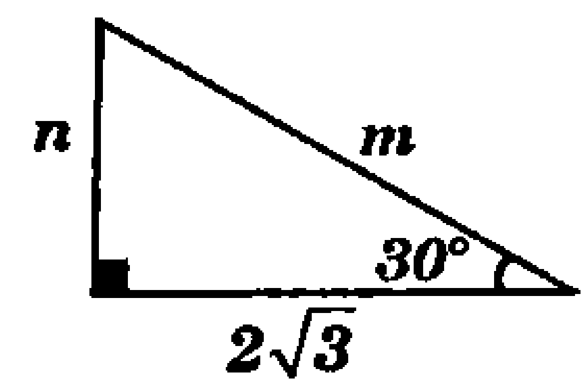
04



Calcular " x ":

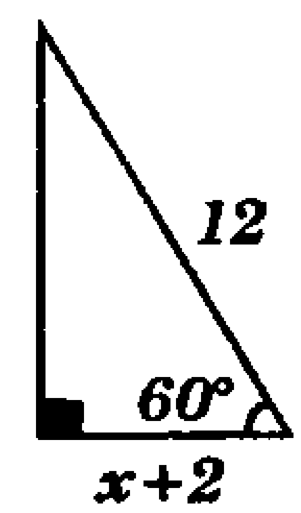
A) $aSen\theta$ B) $aCos\theta$ C) $aTan\theta$
D) $aSen\alpha$ E) $aCos\alpha$

05 Calcular $m + n$:



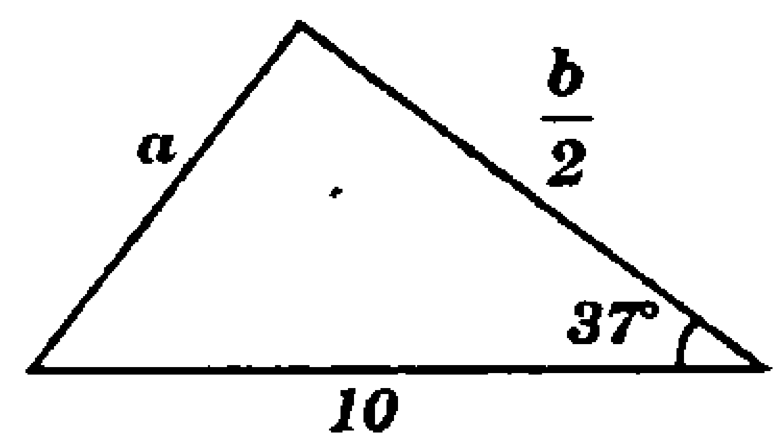
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

06 Calcular x



A) 4 B) 6 C) 8 D) 9 E) 7

07 Calcular $a.b$



A) 94 B) 96 C) 97 D) 98 E) 99

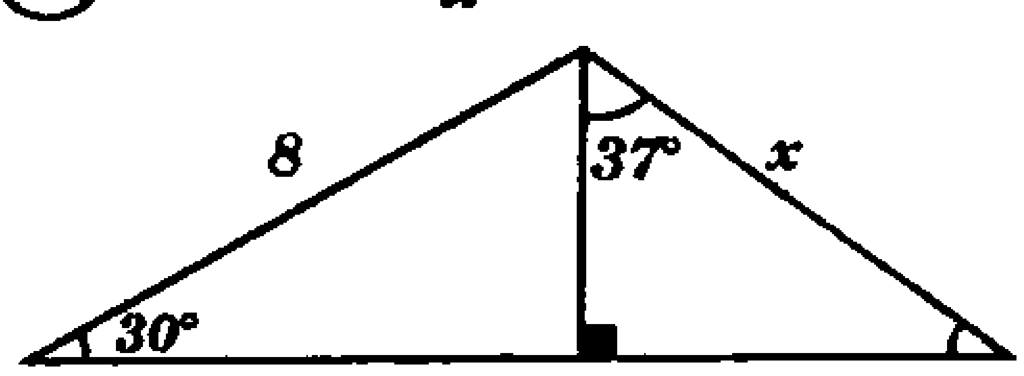
08 Se cumple :

$$Cos37° = m$$
$$Sen30° = n$$

calcular $m.n$

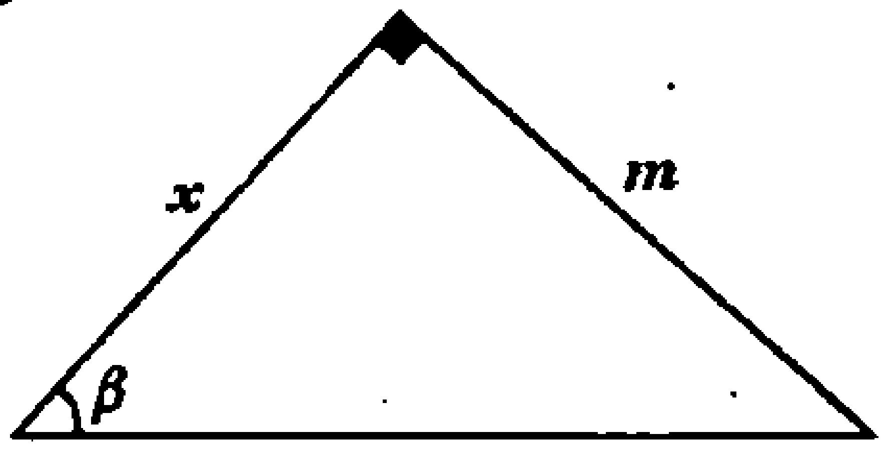
A) $\dfrac{5}{4}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) $\dfrac{9}{2}$ D) $\dfrac{2}{5}$ E) $\dfrac{5}{8}$

09 Calcular " x "



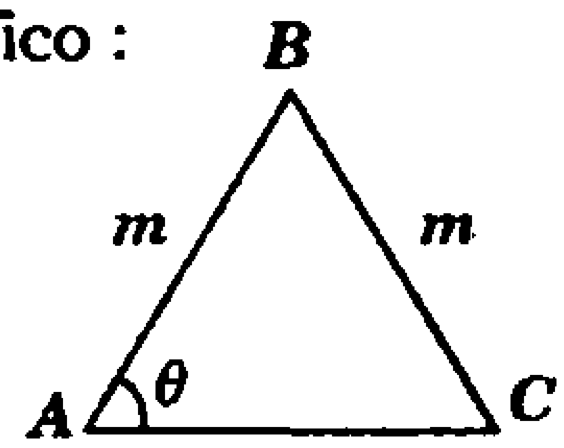
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

10 Calcular " x "



A) $mTan\beta$ B) $mSec\beta$ C) $mCot\beta$
D) $mSen\beta$ E) $mCos\beta$

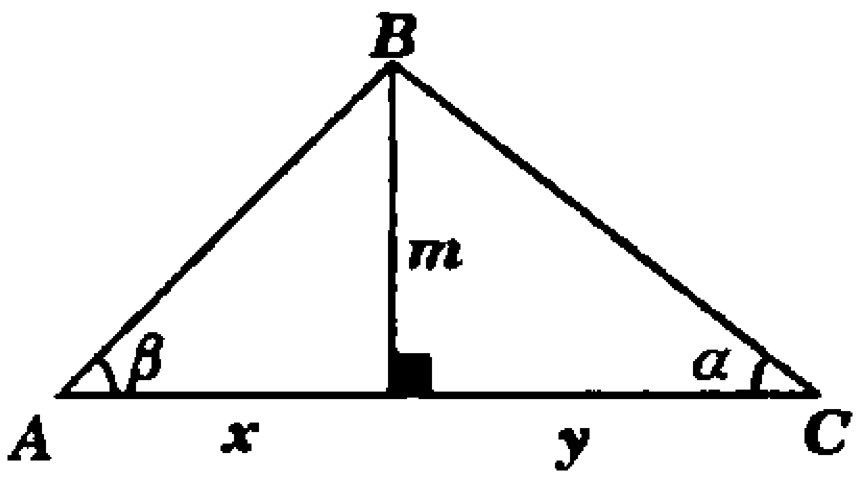
11 Del gráfico :



calcule $\overline{AC}$

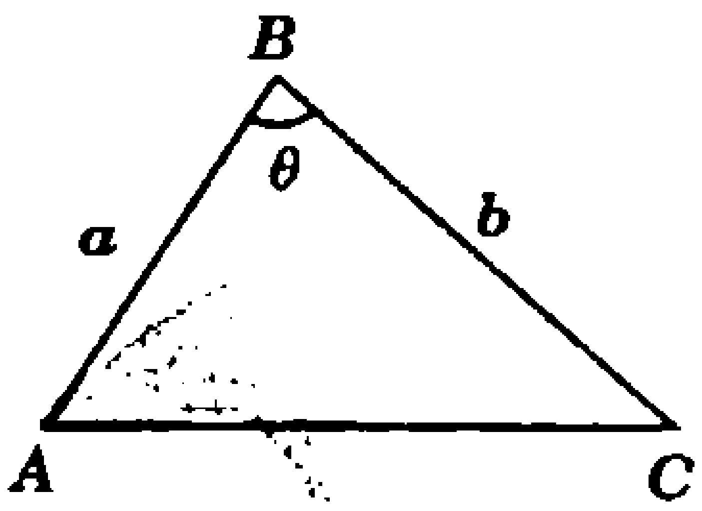
A) $mCos\theta$ B) $2mSen\theta$ C) $2mCos\theta$
D) $2mTan\theta$ E) $2m$

12 Calcular $x+y$



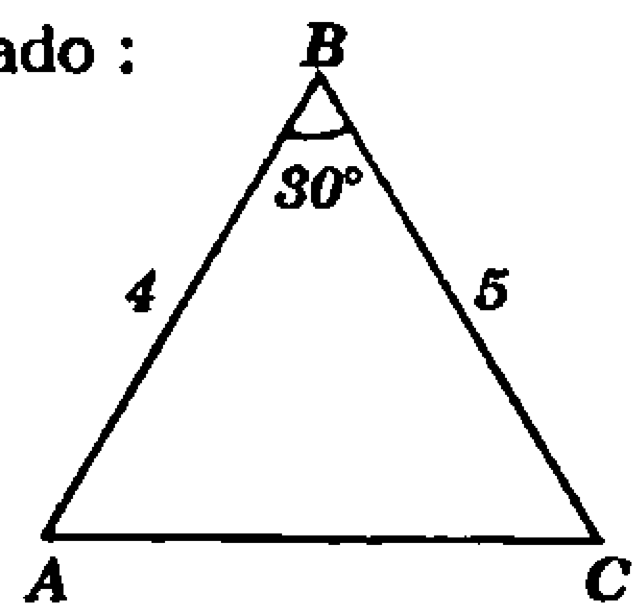
A) $m(Cot\beta + Cot\alpha)$
B) $m(Tan\alpha + Tan\beta)$
C) $m(Cos\alpha + Cos\beta)$
D) $mSen\alpha$
E) $mCos\beta$

13 Calcular el área del triángulo ABC



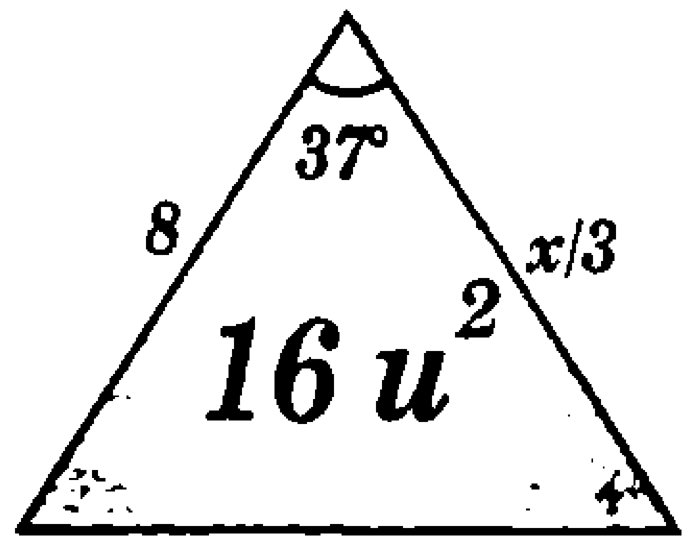
A) $abSen\theta$ B) $abSen2\theta$ C) $abCos\theta$
D) $\frac{ab}{2}Sen\theta$ E) $\frac{ab}{2}Tan\theta$

14 Calcular el área del triángulo mostrado :



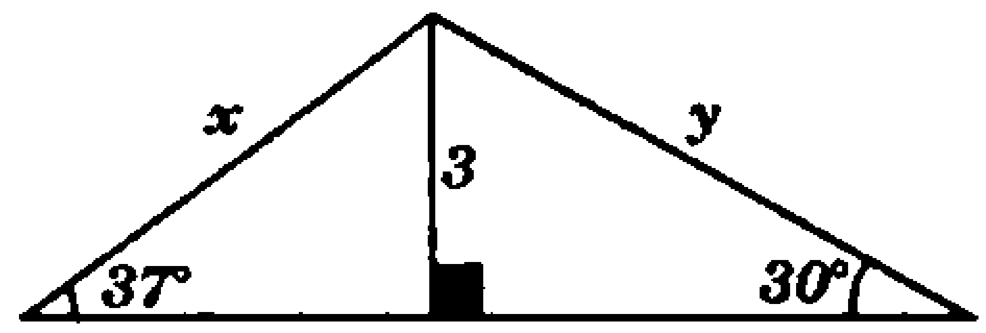
A) $12u^2$ B) $10u^2$ C) $9u^2$
D) $14u^2$ E) $16u^2$

15 Calcular «x» :



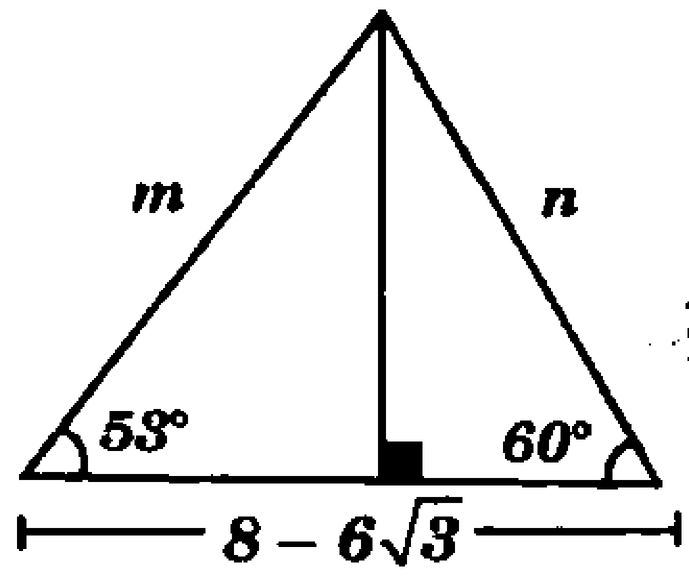
A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

16 Calcular $x+y$:



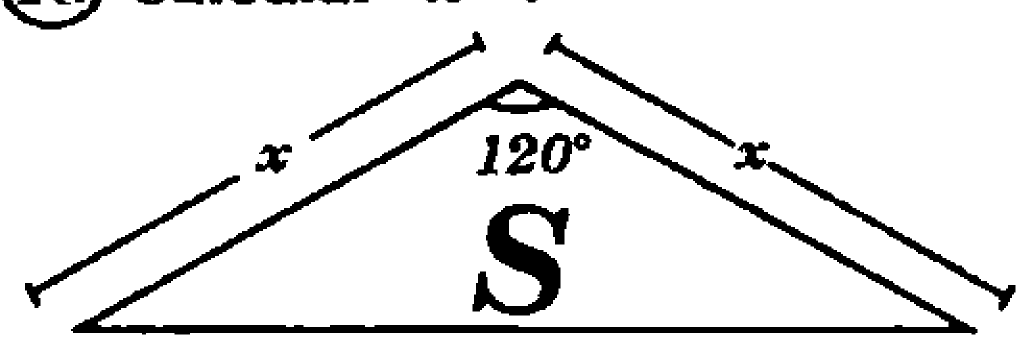
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

17 Calcular : $m-n$:



A) 4 B) $10\sqrt{3}-16$ C) 12
D) $10\sqrt{2}-7$ E) $10\sqrt{3}-8$

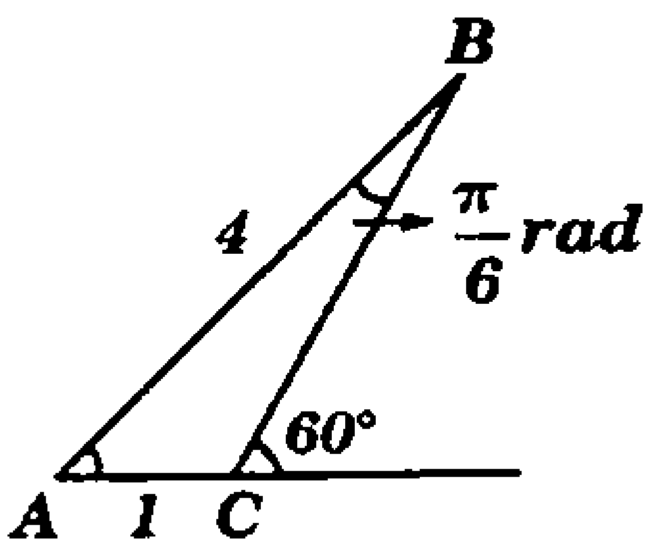
18 Calcular «x» :



si $S=\sqrt{3}u^2$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

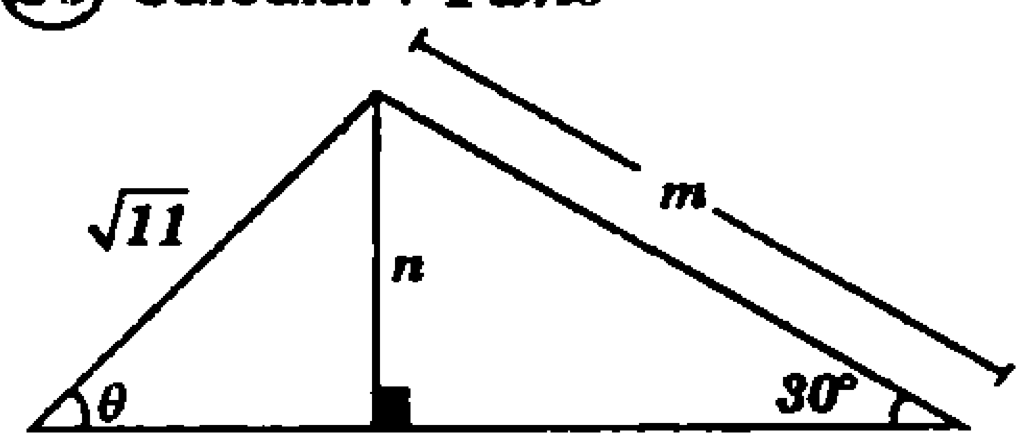
19



Calcular el área del triángulo

A) $1u^2$ B) $2u^2$ C) $3u^2$
D) $4u^2$ E) $5u^2$

20 Calcular : $Tan\theta$



si $m.n=8$

A) 1/2 B) 2/3 C) 5/4 D) 2/5 E) 2/9

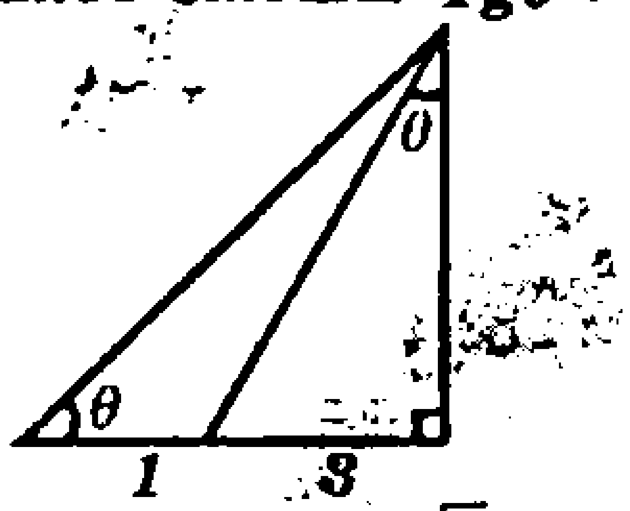
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En un triángulo rectángulo ABC se cumple : $3Sen\,A-\sqrt{2}=0$

Calcular : TgA

A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ B) $\sqrt{\frac{2}{5}}$ C) $\sqrt{\frac{2}{7}}$ D) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ E) $\sqrt{\frac{2}{11}}$

02 Del gráfico calcular $Tg\theta$:



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

03 En un triángulo ABC (recto en C) se cumple $TgA=3TgB$.

Calcular : $E=\sqrt{3}TgA + Cosec\,B$

A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

04 En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide $50cm$ y el coseno de uno de sus ángulos agudos es $0,28$. Hallar el perímetro .

A) 98cm B) 100 C) 112 D) 165 E) 170

05 Calcular "x" (agudos)

$$Tg\left(\frac{8x+1^\circ}{5}\right)ctg\left(\frac{x+7^\circ}{2}\right)=1$$

A) 1° B) 3° C) 4° D) 5° E) 6°

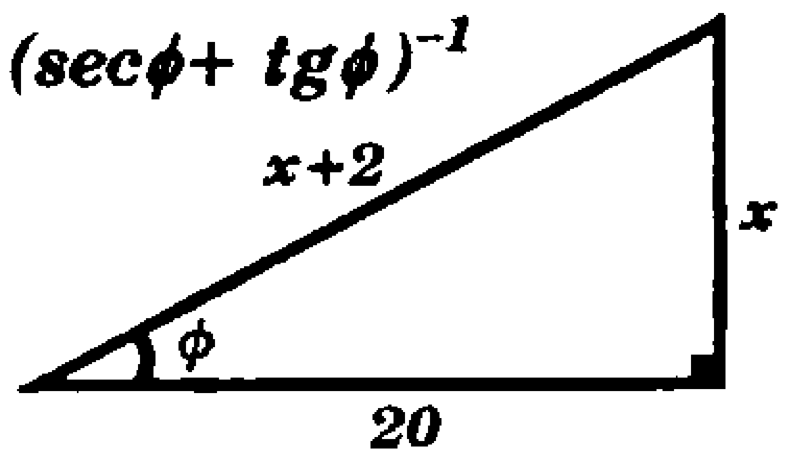
06 Simplificar :

$M=2\,[7\,sen22^\circ-3\cos 68^\circ]\,cosec\,22^\circ$

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

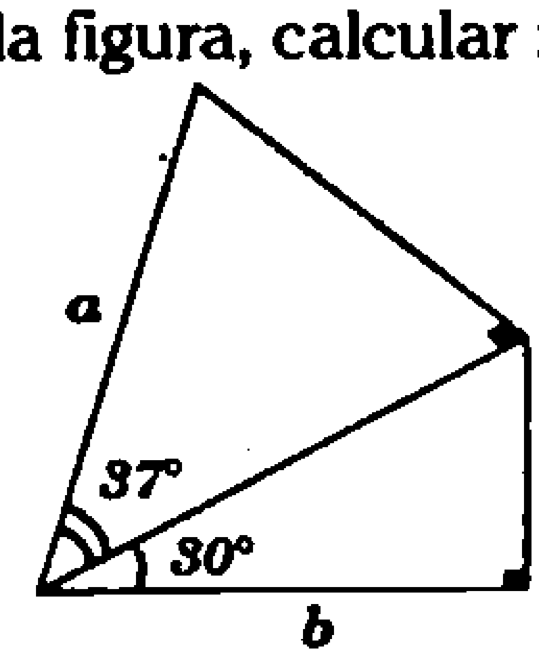
07 De la figura calcular :

$A=(sec\phi+tg\phi)^{-1}$



A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{1}{30}$ D) $\frac{1}{40}$ E) $\frac{1}{50}$

08 De la figura, calcular : $\frac{a}{b}$



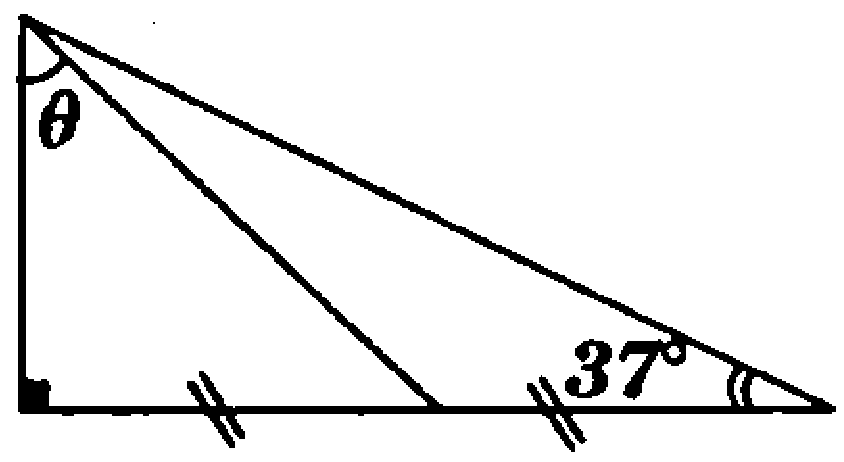
A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{5\sqrt{3}}{5}$

09 Si : $tg\theta - Sen45^\circ\, Tg60^\circ = 0$; θ : agudo Calcular :

$$E = 10sen^2\theta + 6Cosec^2\theta$$

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 20

10 Calcular : $Sec\ \theta$



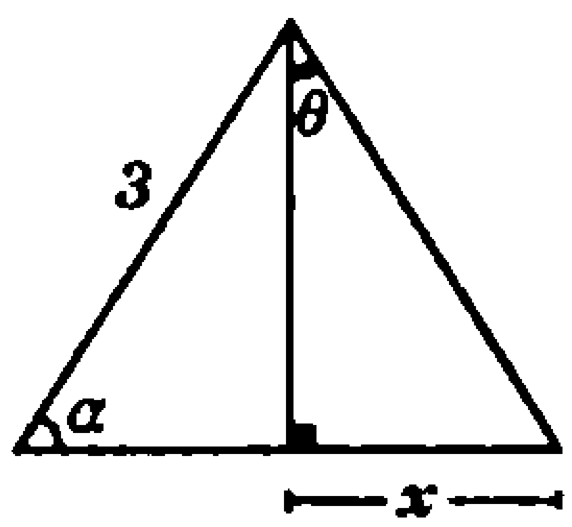
A) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{13}}{7}$

11 Calcular el valor de :

$$A = \frac{tg^2 60^\circ + sec^2 45^\circ + 4cos60^\circ}{ctg45^\circ - sen30^\circ}$$

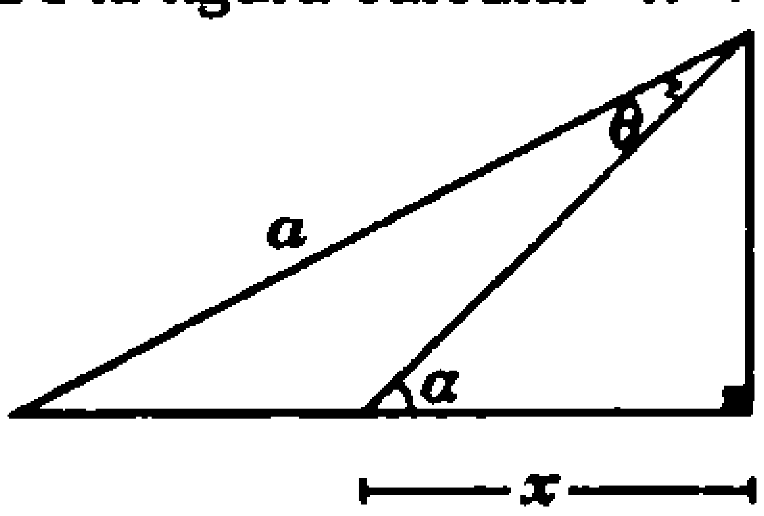
A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

12 Hallar "x"



A) $3sen\alpha\ ctg\theta$
B) $3sen\alpha\ ctg\theta$
C) $3sen\alpha\ sen\theta$
D) $3cos\alpha\ sen\theta$
E) $3cos\alpha\ ctg\theta$

13 De la figura calcular "x":



A) $a\,sen(\theta-\alpha)tg\alpha$ B) $a\,sen(\theta-\alpha)ctg\alpha$
C) $a\,sen(\theta-\alpha)sec\alpha$ D) $a\,sen(\alpha-\theta)tg\alpha$
E) $a\,sen(\alpha-\theta)ctg\alpha$

14 Si : $sen\theta - tg37^\circ = 0$

Calcular $A = \sqrt{\sqrt{7} + tg\theta + 1}$

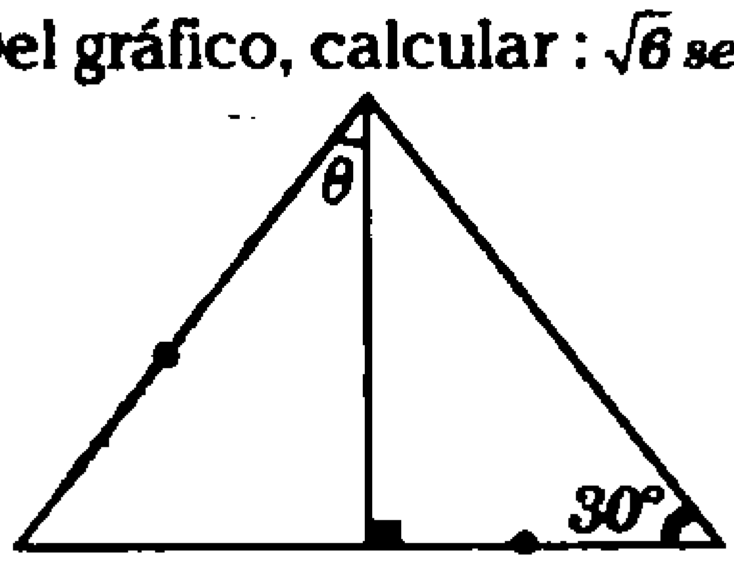
A) 2 B) 3 C) 5 D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

15 Calcular :

$$E = (2sen30^\circ + sec60^\circ)tg53^\circ + 3tg60^\circ$$

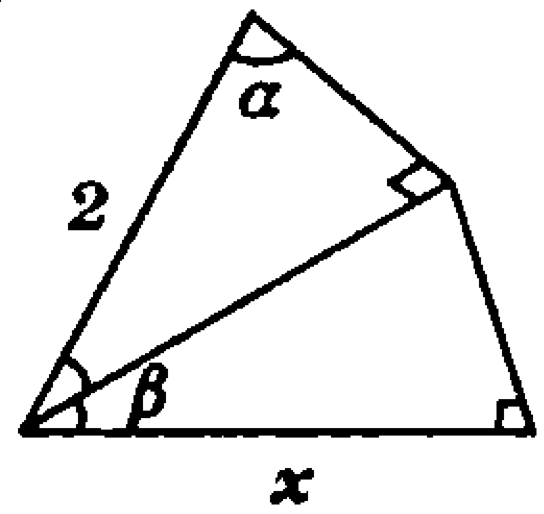
A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

16 Del gráfico, calcular : $\sqrt{6}\,sen\theta + 1$



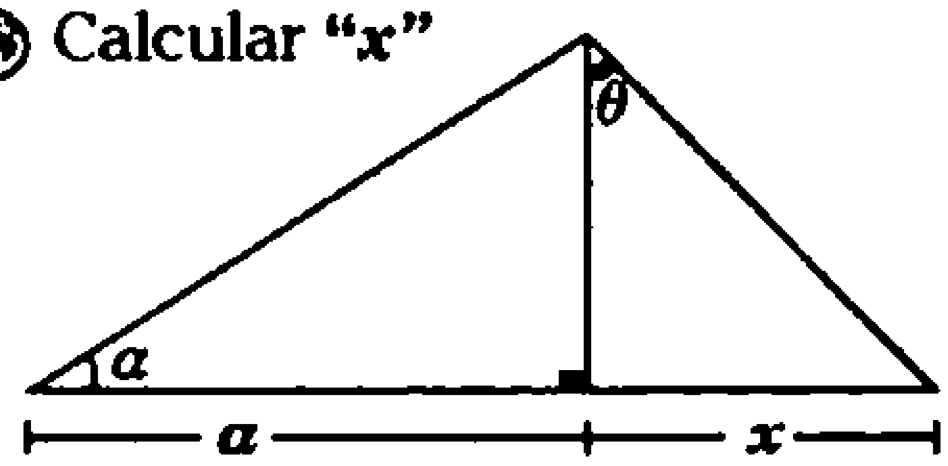
A) 3 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

17 Calcular "x"



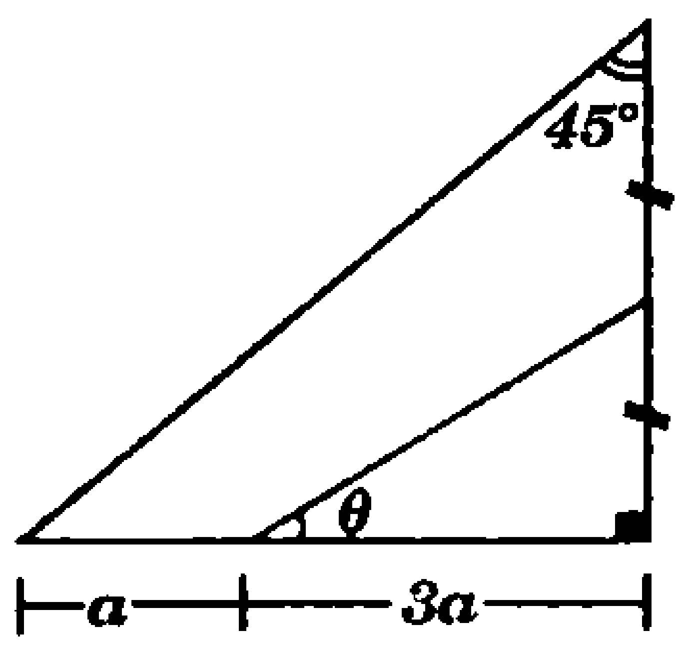
A) $2sen\alpha\ cos\beta$
B) $2sen\alpha\ cos\beta$
C) $2cos\alpha\ cos\beta$
D) $2sec\alpha\ cos\beta$
E) $2sec\alpha\ sec\beta$

18 Calcular "x"



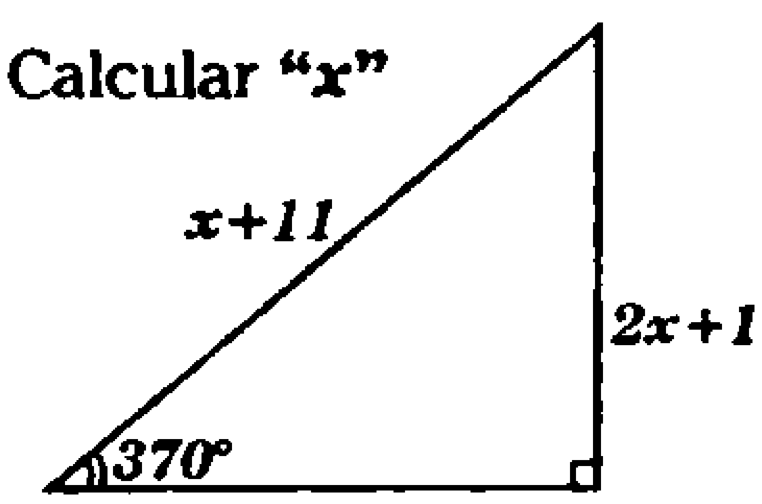
A) $a\,tg\alpha\, tg\theta$ B) $a\,tg\alpha\, ctg\theta$
C) $a\,ctg\alpha\, ctg\theta$ D) $a\,tcg\alpha\, sen\theta$
E) $a\,tg\alpha\, sec\theta$

19 De la figura , calcular $tg\,\theta$



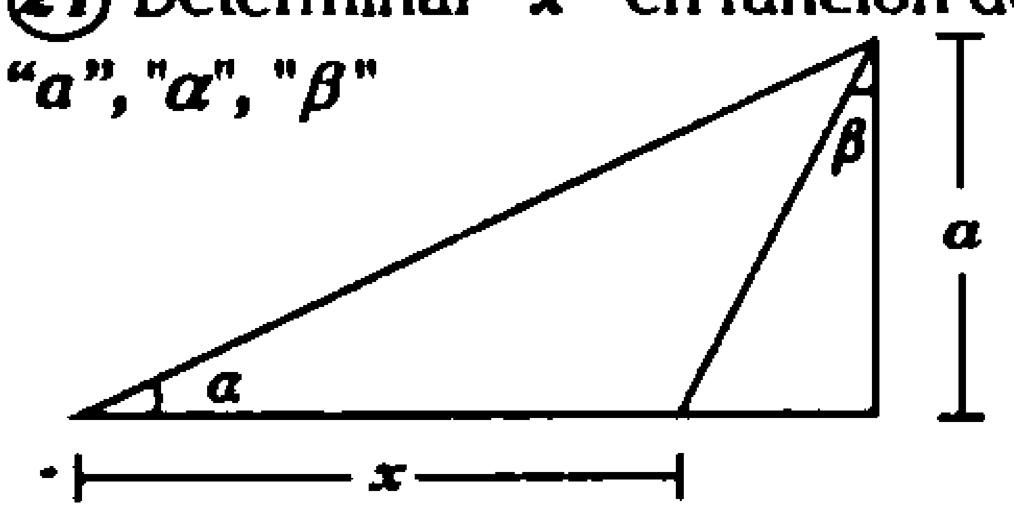
A) 1/3 B) 1/4 C) 3/4 D) 2/3 E) 3/2

20 Calcular "x"



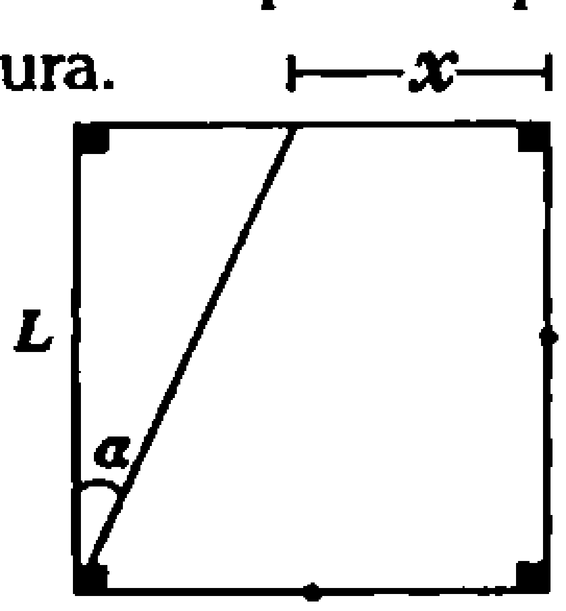
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

21 Determinar "x" en función de "a", "α", "β"



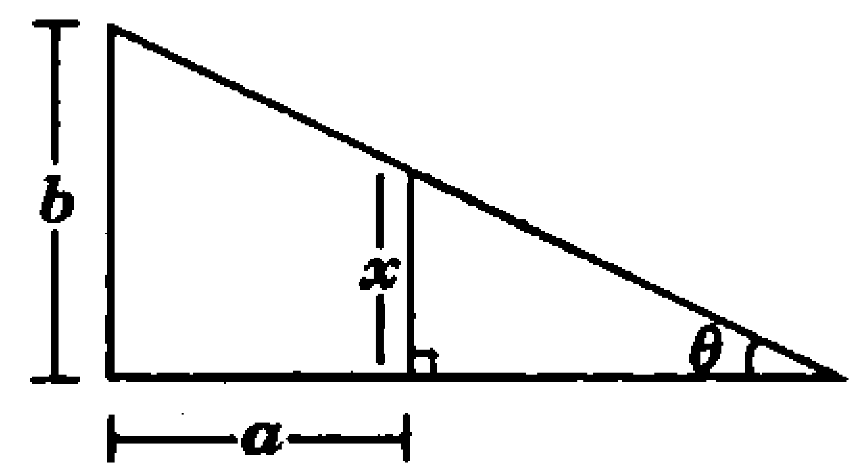
A) $a(Ctg\beta - Ctg\alpha)$ B) $a(Tg\alpha - Tg\beta)$
C) $a(Ctg\alpha - Ctg\beta)$ D) $a(Tg\alpha - Tg\alpha\beta)$
E) $a(Ctg\alpha - Tg\beta)$

22 Hallar la expresión para "x": en la figura.



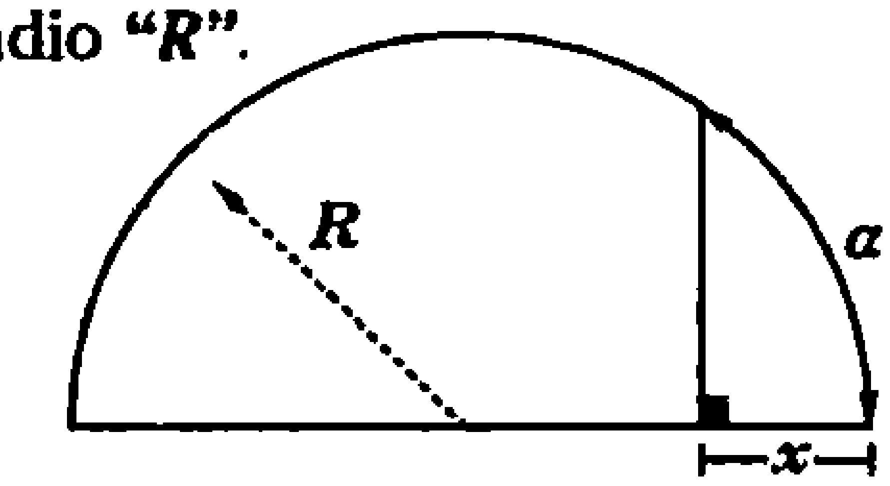
A) $LCtg\,\alpha$ B) $L(1-Ctg\alpha)$ C) $LTg\alpha$
D) $L(1+Tg\alpha)$ E) $L(1-Tg\alpha)$

23 Determinar "x" en función de "a", "b" y "θ"



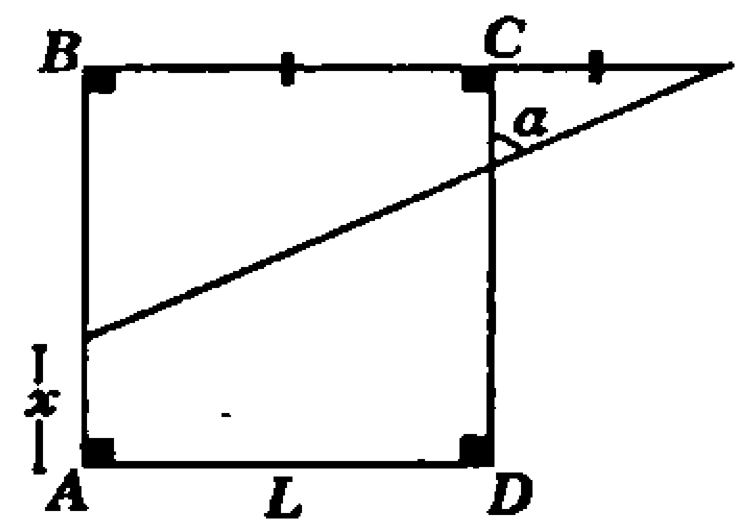
A) $b - aTg\theta$ B) $aTg\theta - b$ C) $aTg\theta$
D) $bCtg\theta - a$ E) $b + aTg\theta$

24 Encontrar las expresiones para "x" en la semicircunferencia de radio "R".



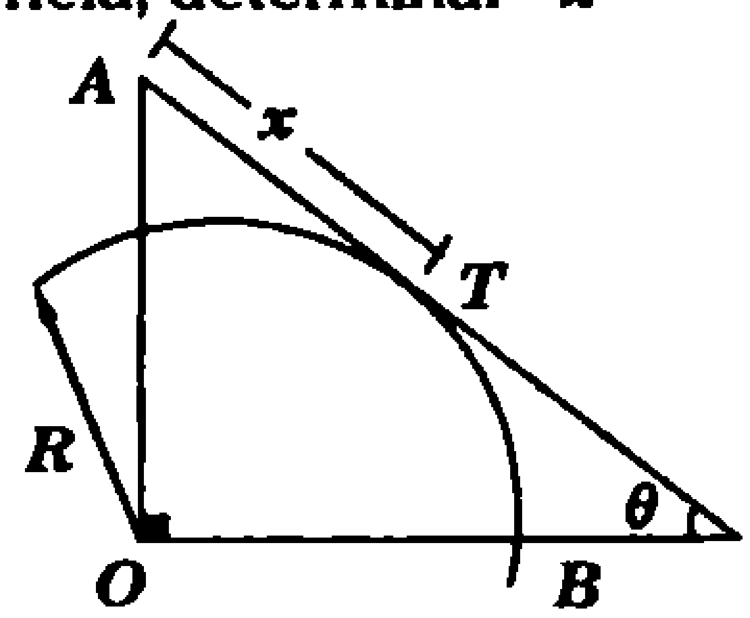
A) $R(1-Cos\alpha)$ B) $2R - Cos\alpha$ C) $RCos\alpha$
D) $R(2-Cos\alpha)$ E) $2R(1-Cos\alpha)$

25 Si $ABCD$ es un cuadrado, hallar "x"



A) $-LCtg\alpha$ B) $(1-2Ctg\alpha)$ C) $LCt\alpha$
D) $L(2Ctg\alpha - 1)$ E) $R(2-Cos\alpha)$

26 Si: BOA, es un cuarto de circunferencia y "T" punto de tangencia, determinar "x"



A) $RCtg\,\theta$ B) $RCos\,\theta$ C) $RTg\,\theta$
D) $R(1-Sec\,\theta)$ E) $R(1-Cos\,\theta)$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $Tg\alpha = 11/2$; α es agudo calcular: $E = \frac{Sec\alpha}{Sen\alpha + Cos\alpha}$

A) 25/9 B) 25/6 C) 125/9

D)125/26 E)26/5

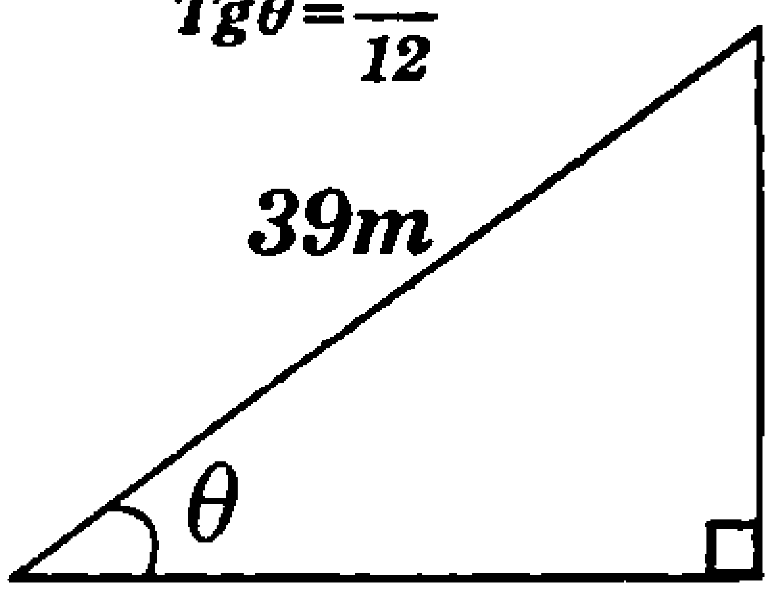
(02) En un triángulo rectángulo recto en B, reducir:

$E=(SenA+SenC)^2+(CosA-CscC)^2$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(03) Calcular el perímetro del triángulo, si:

$Tg\theta=\frac{5}{12}$



A)35m B)60m C)70m D)50 m E)90 m

(04) En un triángulo rectángulo ABC, recto en C, hallar en función de los lados del triángulo la siguiente expresión:

$E=CscA+SecA+CtgA$
$+TgA-CosA-SenA$

A) $\frac{a+b+c}{abc}$ B) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

C) $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ D) $\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$

(05) Calcular "x" sabiendo que:

$Tg(x+10°)-Ctg(3x+40°)=0$

A)10° B)20° C)30° D)40° E)50°

(06) Calcular "$x+y$", sabiendo que:

$Cos(3x+10)Csc(y-40°)=1$

$Tg(x+35°)Ctg(2y-65°)=1$

A)60° B)70° C)75° D)80° E)90°

(07) En un triángulo ABC ($A=90°$) . la mediana $\overline{BM}$ y el cateto $\overline{AC}$ forman un angula agudo "α". Hallar $Tg\alpha$.

A)2TgC B)TgC+CtgC C)2CtgC D)2TgB E)2(TgB+CtgC)

(08) En un triángulo rectángulo ABC, recto en A, calcular el cateto "b", si se cumple:

$SenBSenCtgB=\frac{16}{a^2}$

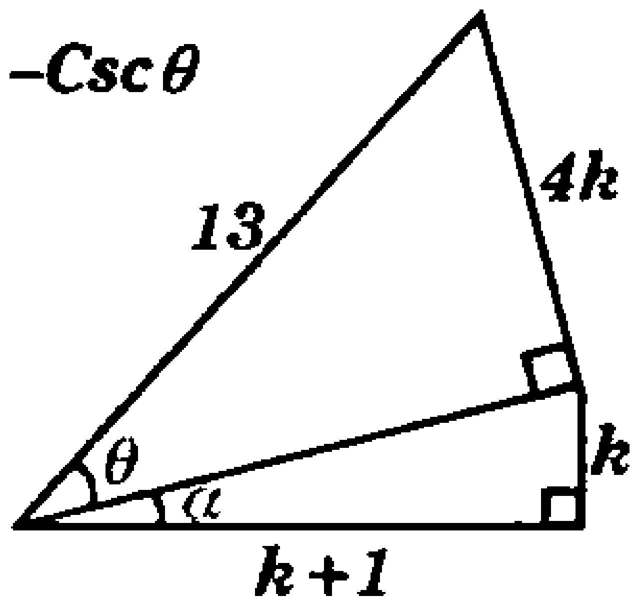
A)16 B)9 C)6 D)4 E)2

(09) En un triángulo rectángulo ABC, recto en A, de superficie $0,5\ m^2$, calcular: $E=\frac{b^2}{TgB}+\frac{c^2}{TgC}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

(10) En la figura, calcular

$Ctg\alpha-Csc\theta$



A1/4 B)2/5 C)4/3 D)3/4 E)5/3

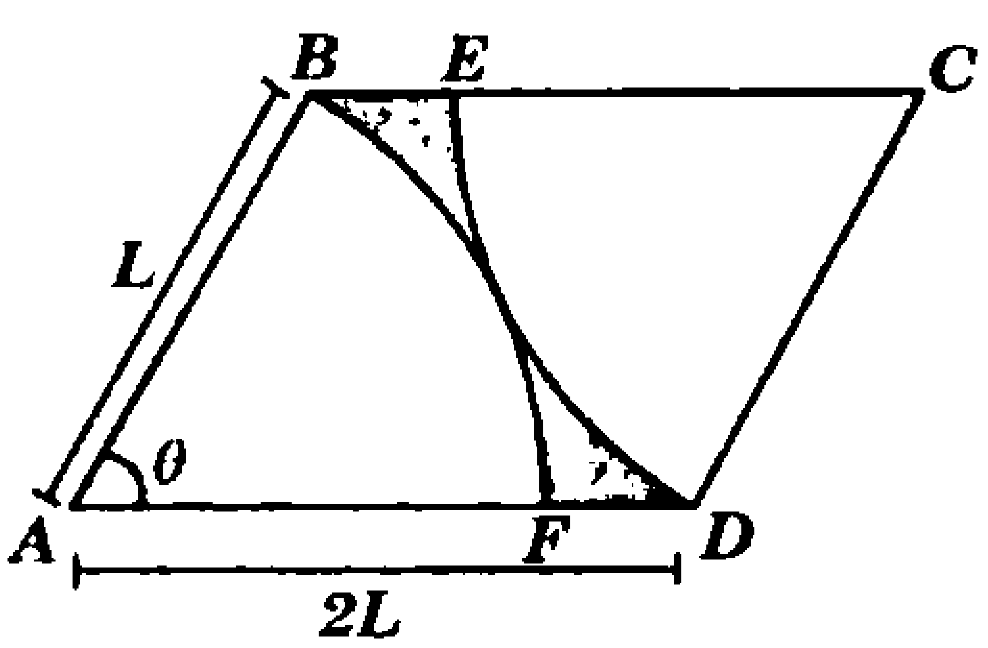
(11) Hallar el perímetro de un triángulo isósceles en función del lado desigual (b) y su ángulo igual (θ).

A) $bSen(\theta+1)$ B) $2b(Csc\theta+1)$
C) $b(Sec\theta+1)$ D) $2b(Sen\theta+1)$
E) $2bCos\theta$

(12) Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. El coseno del mayor ángulo agudo de ese triángulo es:

A)3/2 B)3/4 C)1/2 D)3/5 E)4/5

(13) Hallar el área de la región sombreada donde "θ" está expresado en radianes y $ABCD$ es un paralelogramo; FAB y ECD son sectores circulares.



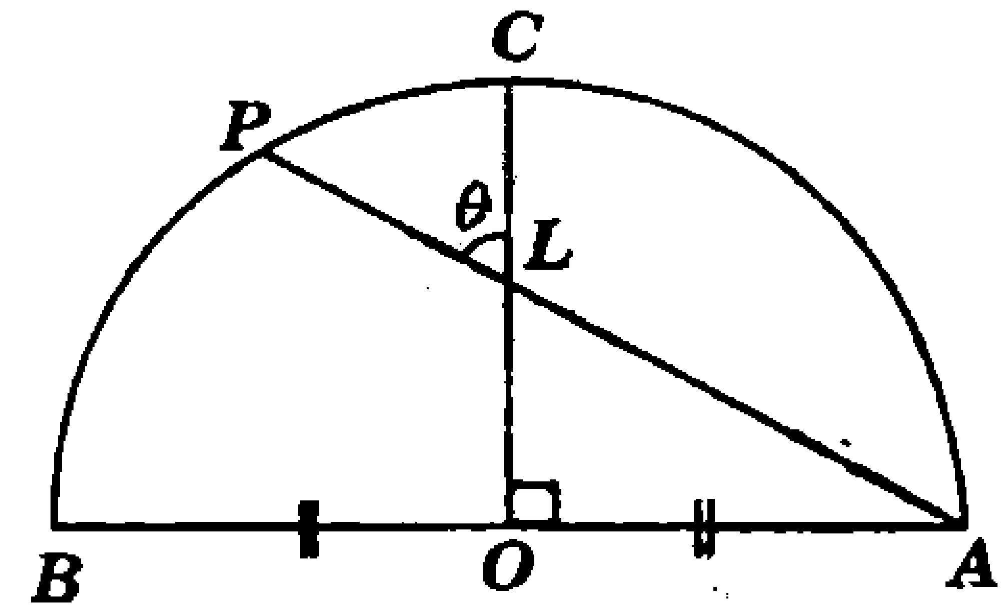
A) $L^2(Sen\theta-\theta)$ B) $L^2(Cos\theta-\theta)$
C) $L^2(Sen\theta+\theta)$ D) $L^2(Cos\theta+\theta)$
E) $L^2(2Sen\theta-\theta)$

(14) En un triángulo rectángulo, la suma de sus lados mayores es 27 cm y la diferencia de sus lados menores es 3 cm. Calcular la suma de las tangentes de los ángulos agudos.

A) 12/25 B) 25/12 C) 50/13 D) 63/25 E) 50/19

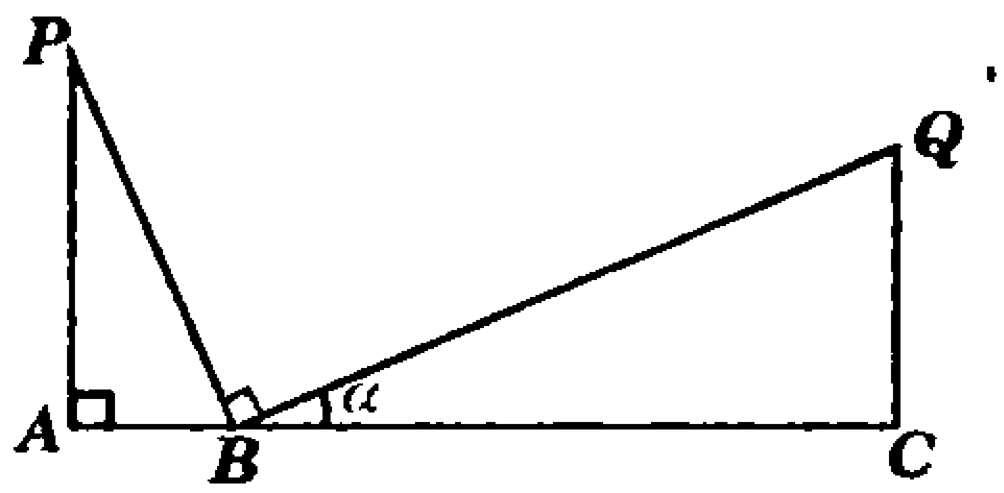
(15) Si: $AL=a$; $PL=b$, hallar

$2Sen^2\theta-1$



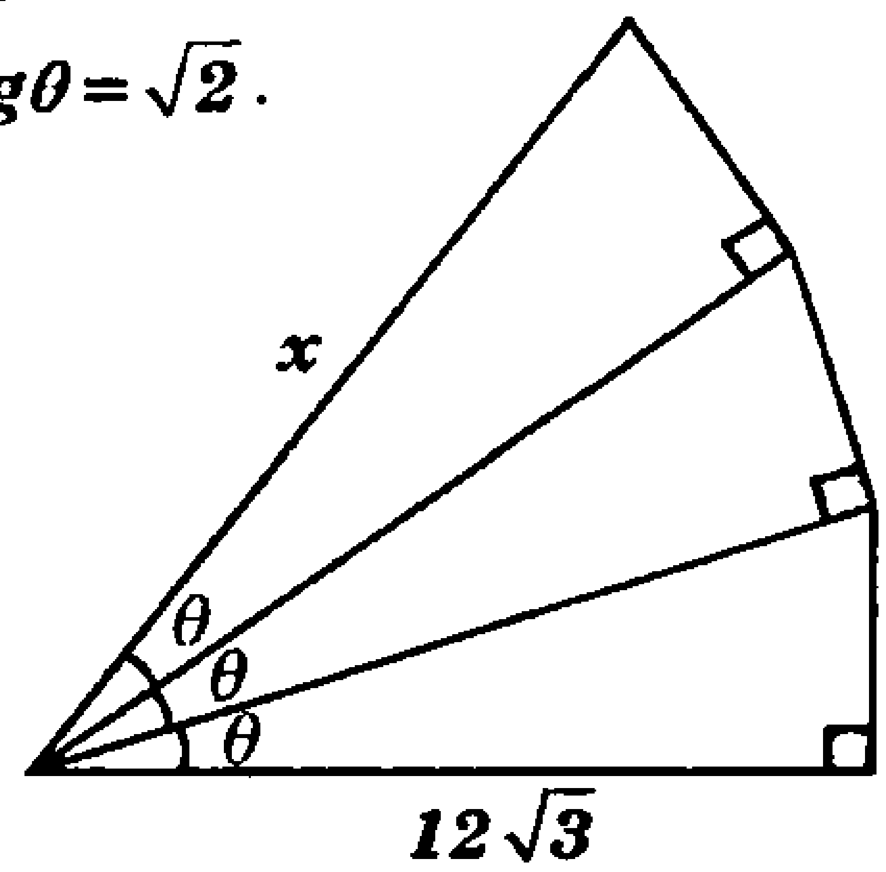
A) $\frac{a}{2b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{a}{b}$ D) $\frac{a+b}{b}$ E) $\frac{a-b}{b}$

(16) En la figura mostrada, se tiene $AB=a$; $BC=7a$; $AP+QC=8a$, calcular el menor valor que puede tomar $Tg\alpha$.



A)1/4 B)1/3 C)1/5 D)1/7 E)1/9

(17) De la figura, calcular "x", si: $Tg\theta=\sqrt{2}$.

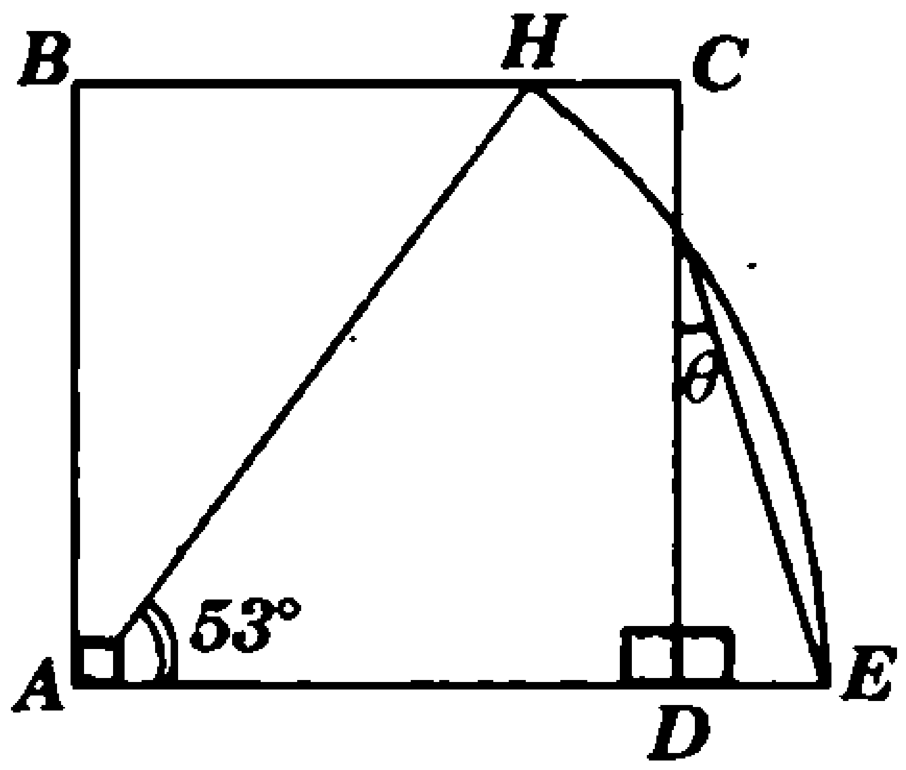


A)108 B)64 C)48 D)106 E)181

(18) En un triángulo rectángulo, la suma de las tangentes de sus ángulos agudos es 25/12. Calcular dichos ángulos.

A)30°; 60° B)45°; 45° C)16°;74° D)37°; 53° E)15°; 75°

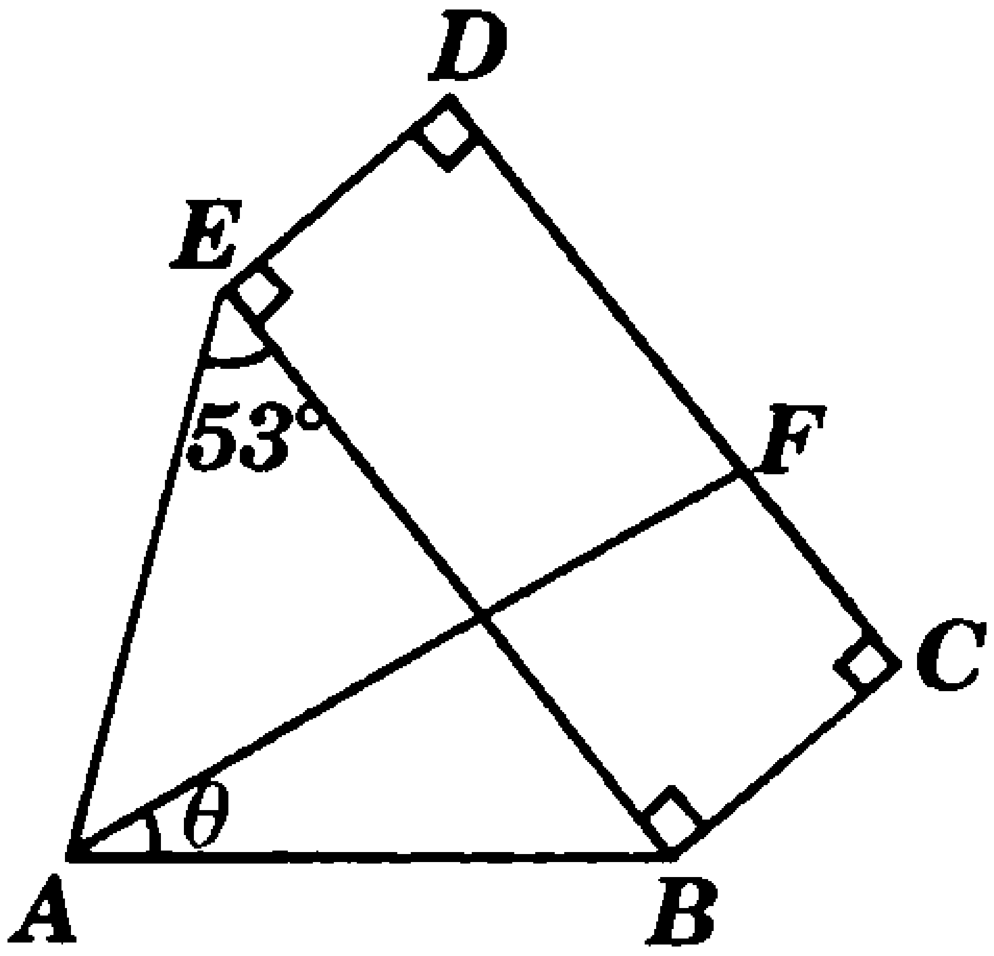
(19) Del gráfico, determinar: $Ctg\theta$ si: $ABCO$ es un cuadrado y HAE es un sector circular.



A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

20 De la figura, determinar $Tg\,\theta$, si:

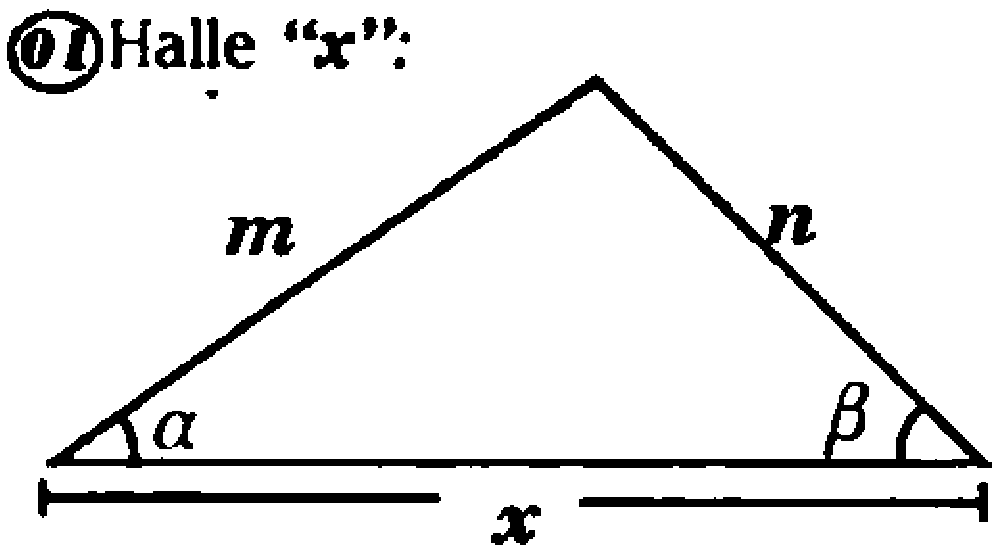
$$\frac{AB}{12}=\frac{EB}{12}=\frac{DF}{9}=\frac{BC}{4}$$



A)4/15 B)3/15 C)2/15 D)1/15 E)1

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Halle "x":



A) $mSen\beta + nSen\alpha$

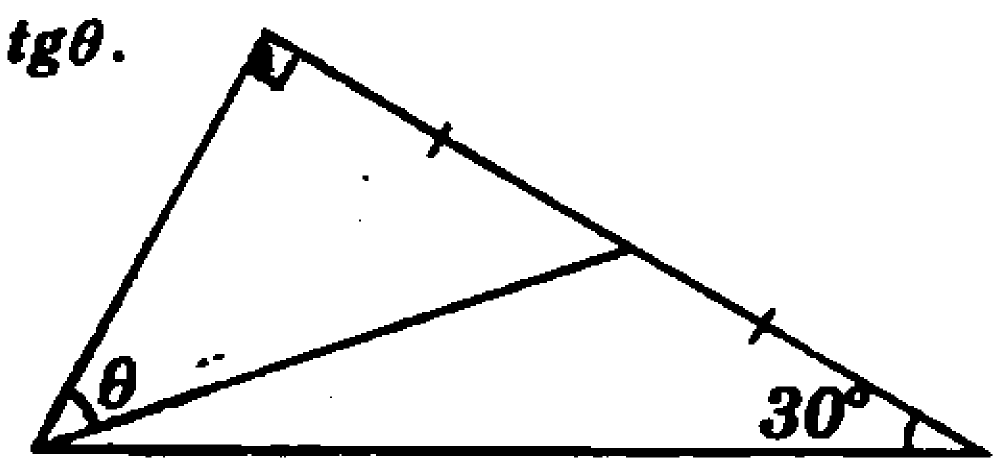
B) $mCos\alpha + nCos\beta$

C) $mSen\alpha + nTg\alpha$

D) $mTg\alpha + nSen\beta$

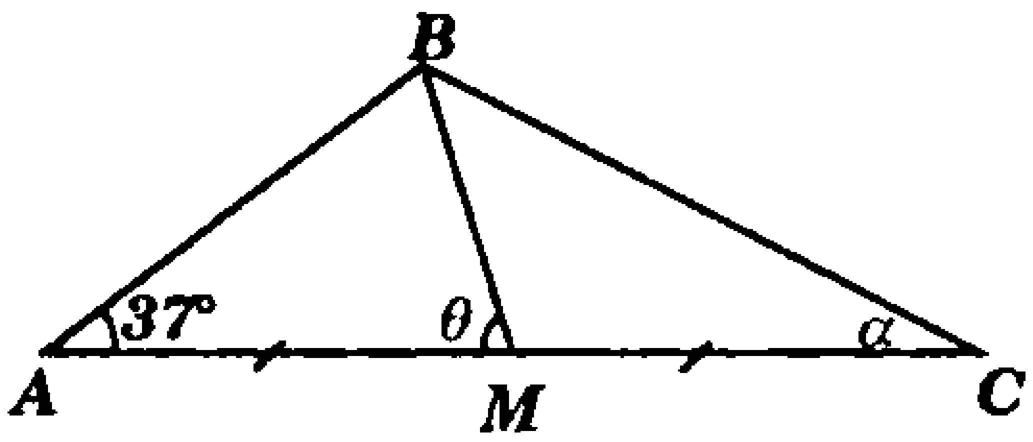
E) $mSec\alpha + nCsc\beta$

02 Del gráfico mostrado ,calcular $tg\theta$.



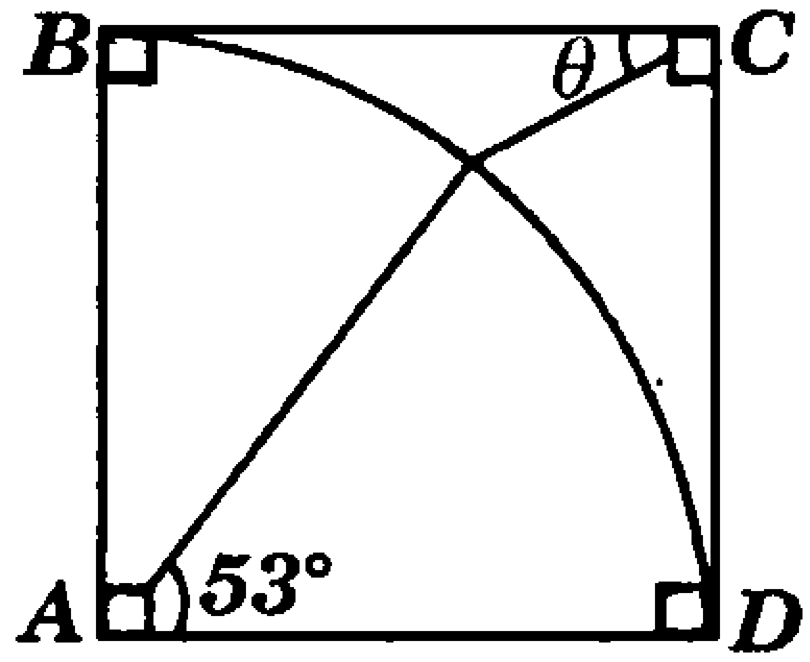
A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

03 Del gráfico mostrado, calcular $tg\theta$, si se tiene que: $tg\alpha=\frac{3}{10}$



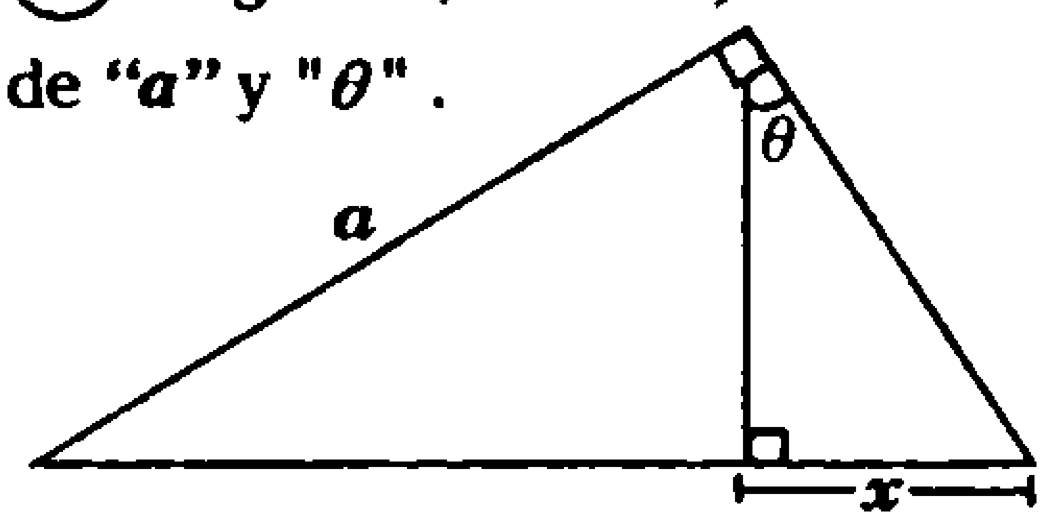
A)1 B)3/2 C)1/3 D)3/5 E)2/5

04 Del gráfico mostrado, calcular $tg\theta$; *ABCD* es un cuadrado.



A)1/3 B)1/2 C)1/5 D)1/6 E)1/4

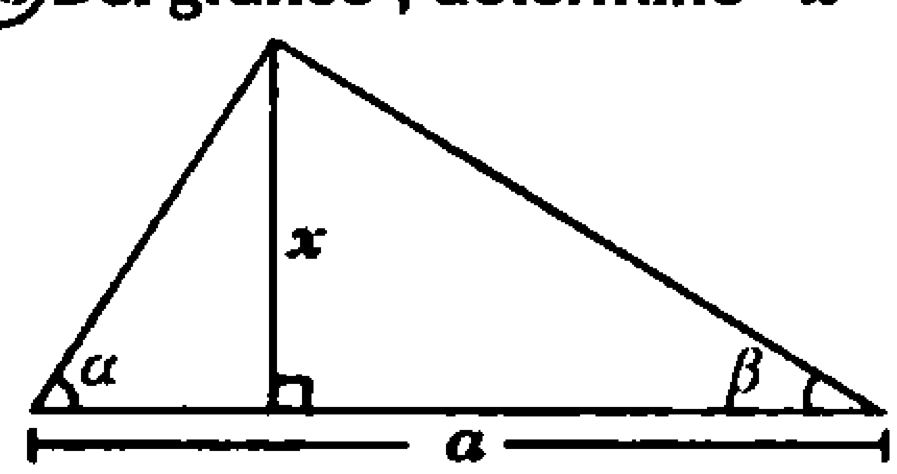
05 Del gráfico, halle "x", en función de "a" y "θ" .



A) $aTg\theta$ B) $aCtg\theta$ C) $aSen\theta Tg\theta$

D) $aCos\theta$ E) $aTg^2\theta$

06 Del gráfico , determine "x"



A) $a(Sen\alpha + Sen\beta)^{-1}$

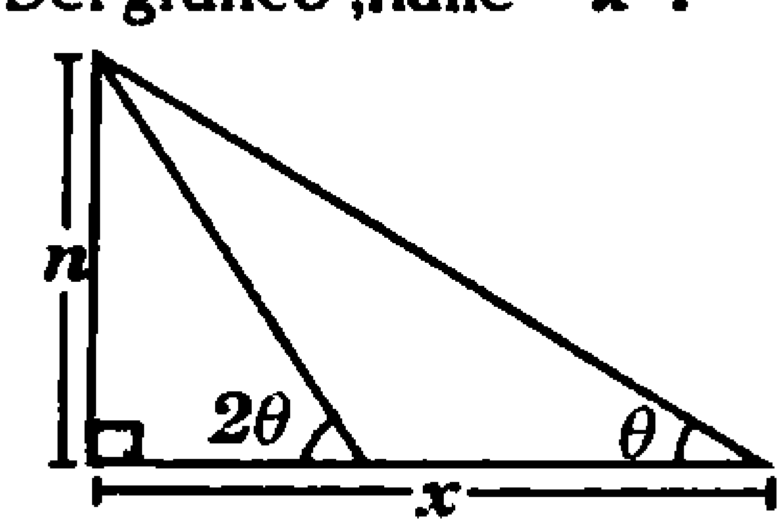
B) $a(Tg\alpha + Tg\beta)^{-1}$

C) $a(Ctg\alpha + Ctg\beta)^{-1}$

D) $a(Sen\alpha - Sen\beta)^{-1}$

E) $a(Cos\alpha + Cos\beta)^{-1}$

07 Del gráfico ,halle "x".



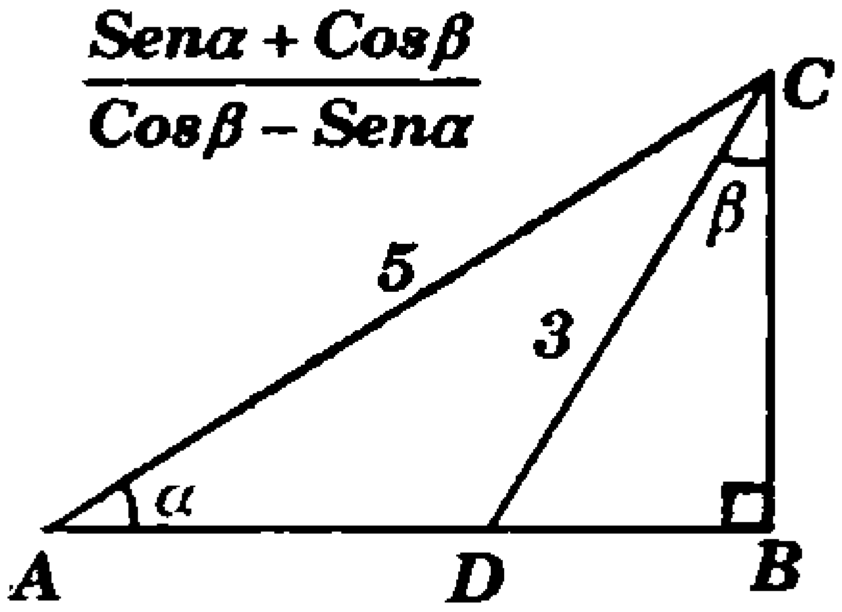
A) $n(Sen\theta+Cos\theta)$ B) $n(Tg\theta+Cos\theta)$

C) $n(Tg\theta+Tg2\theta)$ D) $n(Csc2\theta+Ctg2\theta)$

E) $n(Sec2\theta+Tg2\theta)$

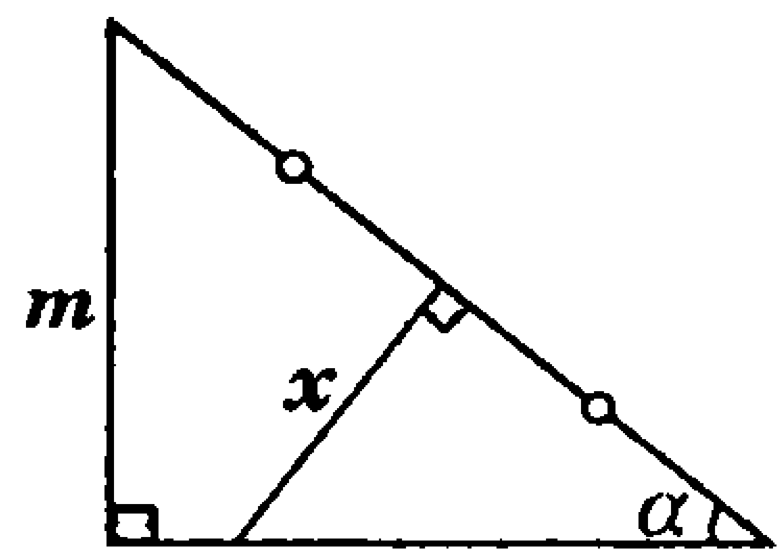
08 Del gráfico, calcular;

$$\frac{Sen\alpha+Cos\beta}{Cos\beta-Sen\alpha}$$



A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

09 Halle "x":

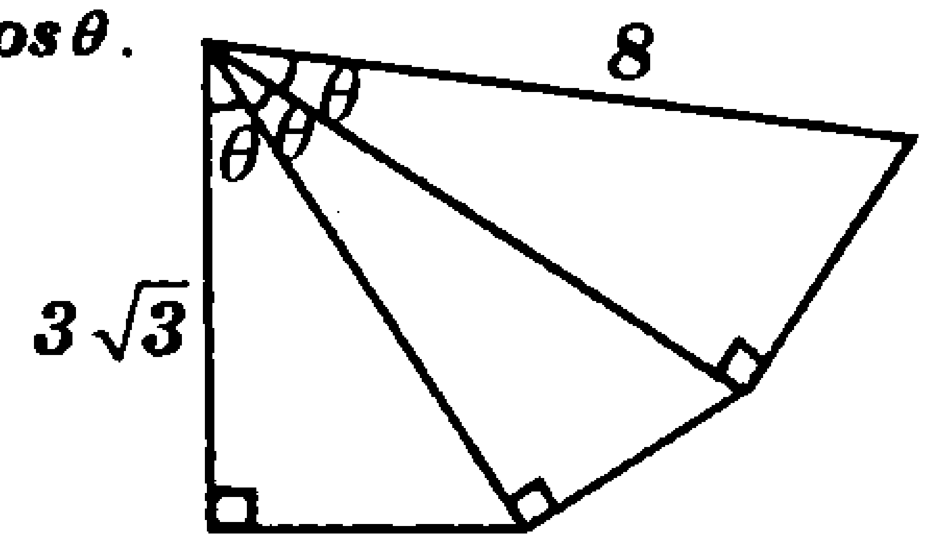


A) $mSec\alpha Tg\alpha$ B) $mCsc\alpha Cos\alpha$

C) $0{,}5mSec\alpha Sen\alpha$ D) $0{,}5mCsc\alpha Tg\alpha$

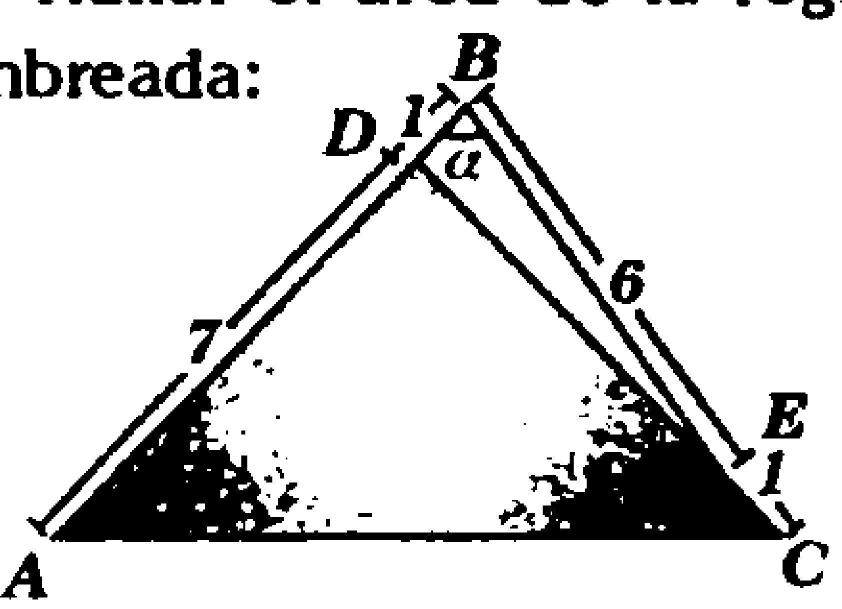
E) $0{,}5mSen\alpha Cos\alpha$

10 En la figura mostrada, calcule $Cos\,\theta$.



A) $\frac{6}{7}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

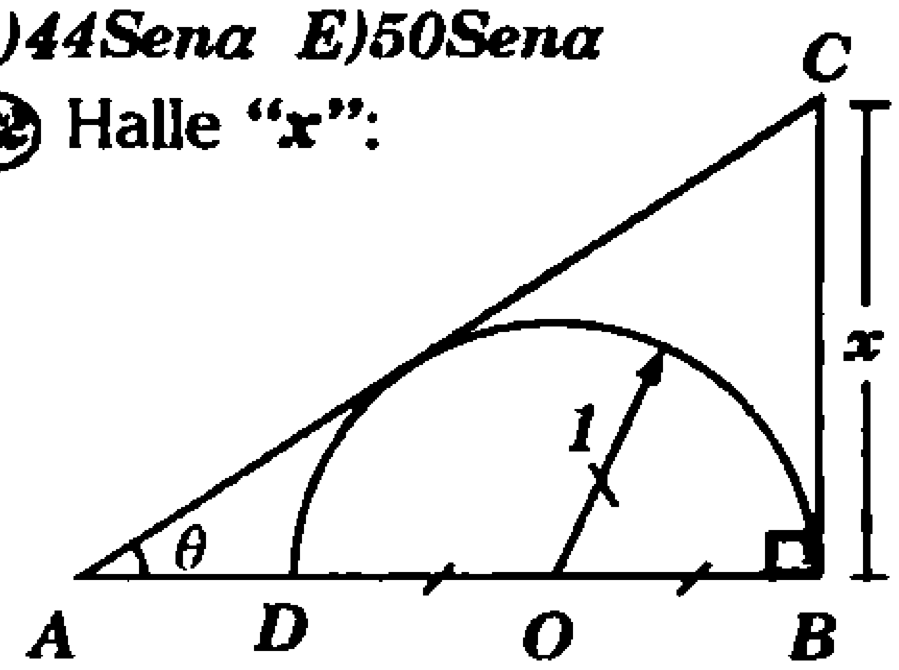
11 Hallar el área de la región sombreada:



A) $22Sen\alpha$ B) $25Sen\alpha$ C) $30Sen\alpha$

D) $44Sen\alpha$ E) $50Sen\alpha$

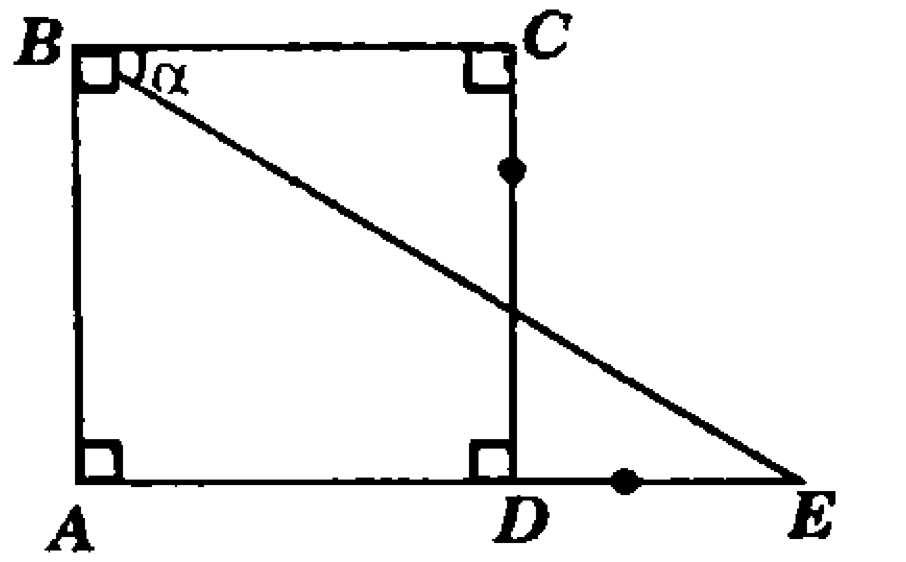
12 Halle "x":



A) $Tg\theta(Csc\theta + 1)$ B) $Ctg\theta(Csc\theta+1)$
C) $CTg\theta(Sec\theta+1)$ D) $Ctg\theta(Sec\theta+1)$
E) $Ctg\theta(Sec\theta-1)$

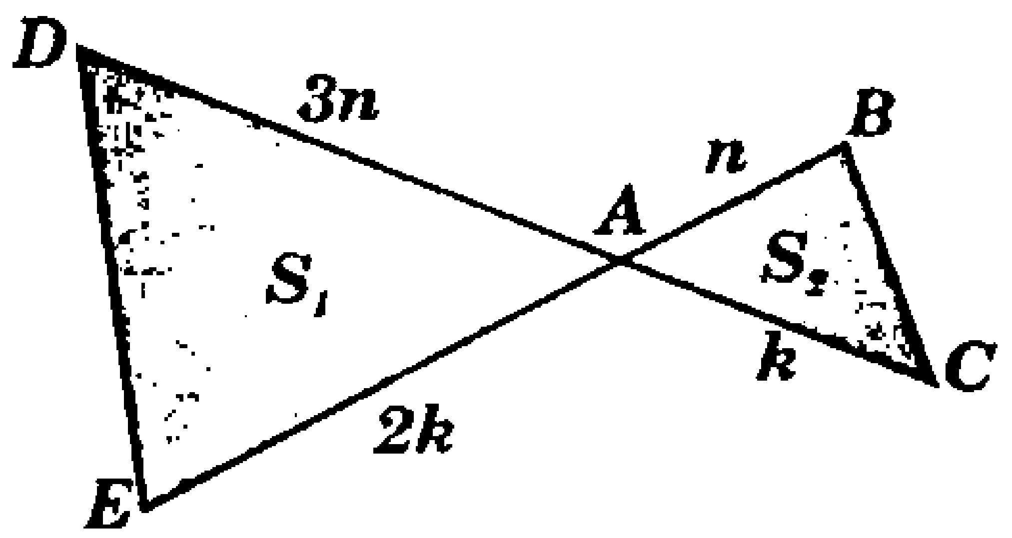
(13) Siendo $ABCD$ un cuadrado, calcular el valor de:

$$E=1+(2Tg\alpha+1)^2$$



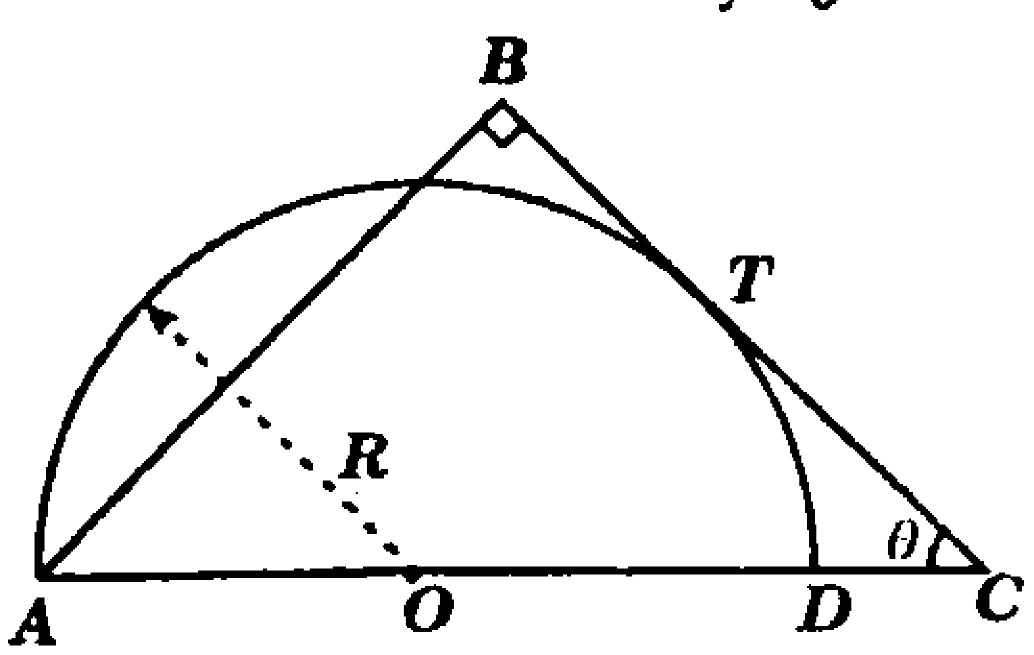
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(14) En el gráfico, calcule $\frac{S_1}{S_2}$, siendo S_1 y S_2 las áreas de las regiones sombreadas.



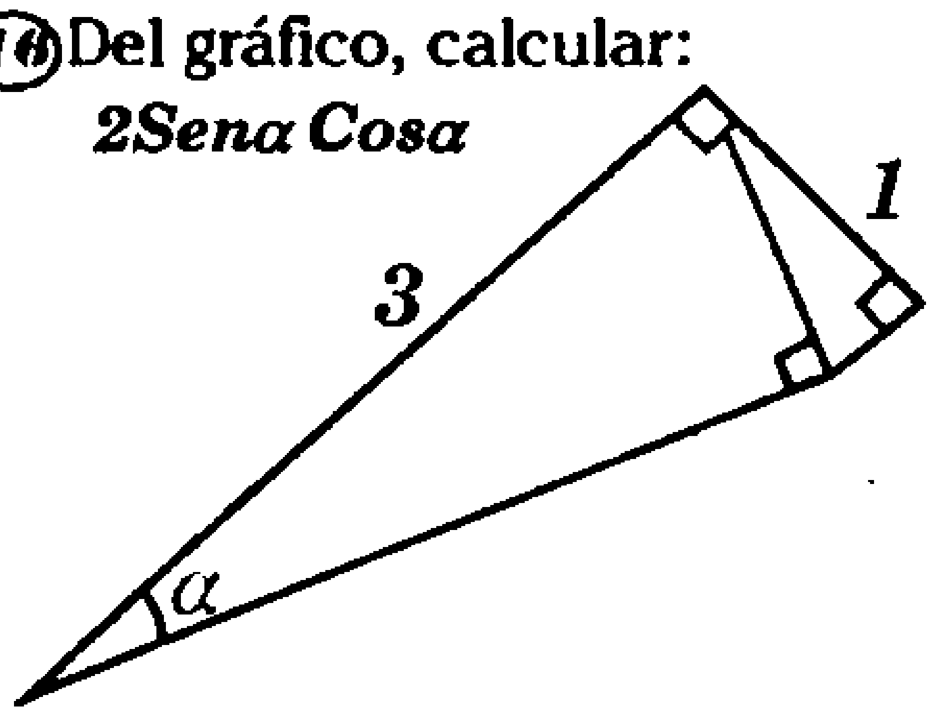
A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 8/3

(15) Del gráfico mostrado, hallar AB en términos en "R" y "θ".



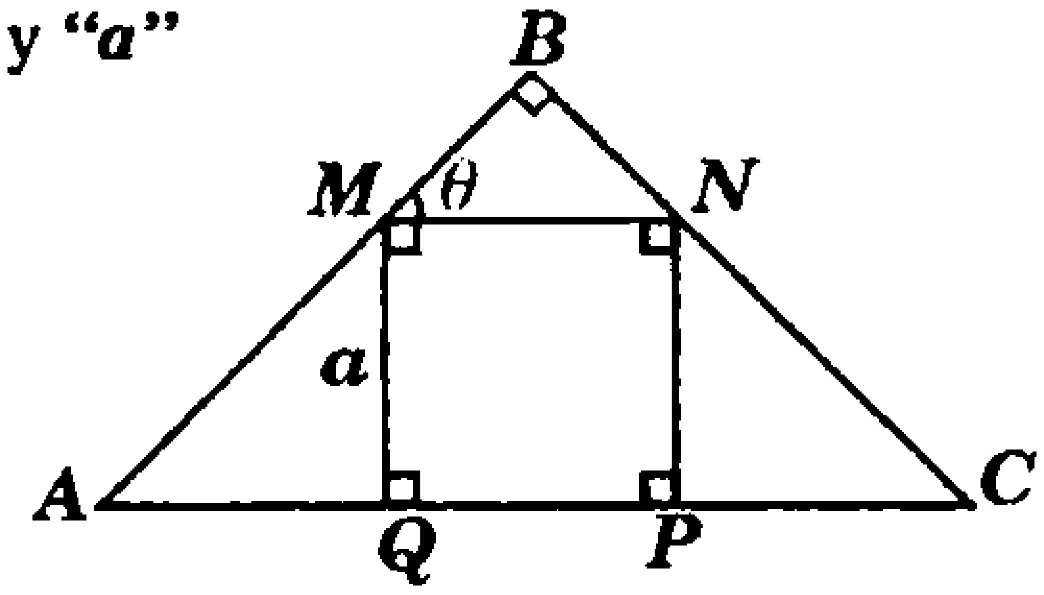
A) $R(1+Tg\theta)$ B) $R(1+Ctg\theta)$
C) $R(1+Cos\theta)$ D) $R(1+Sen\theta)$
E) $R(1+Csc\theta)$

(16) Del gráfico, calcular:
$2Sen\alpha\,Cos\alpha$



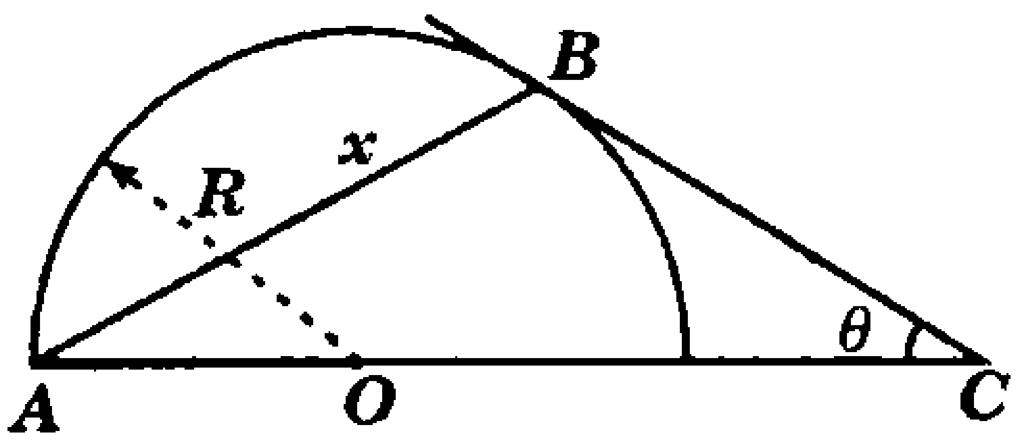
A) 1/5 B) 1/3 C) 2/5 D) 2/3 E) 3/5

(17) En el gráfico mostrado: $MNPQ$ es un cuadrado de lado "a". Halle $\overline{AC}$ en términos de "θ" y "a"



A) $a(1+Sen\theta+Cos\theta)$ B) $a(1+Tg\theta+Ctg\theta)$
C) $a(1+Sec\theta+Csc\theta)$ D) $a(Sec\theta+Tg\theta)$
E) $a(1+Sen\theta+Tg\theta)$

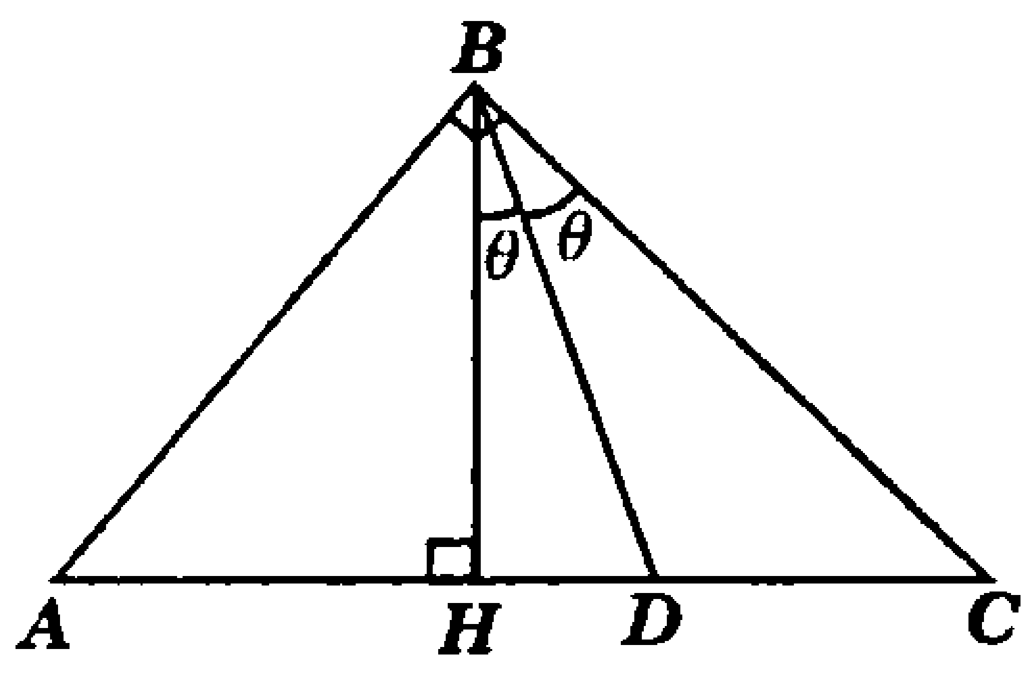
(18) Siendo "O" centro de la semicircunferencia y "B" un punto de tangencia, hallar x en términos de "θ" y "R".



A) $RSen\theta$ B) $2Sen(\theta-45°)$
C) $2RCos\left(45°-\frac{\theta}{2}\right)$ D) $2Rsen\left(45°-\frac{\theta}{2}\right)$
E) $2RCos(45°-\theta)$

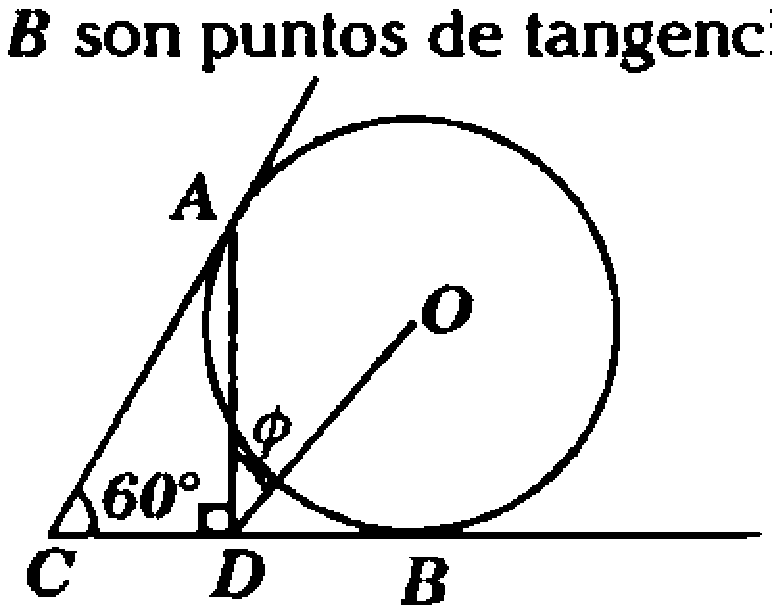
(19) En la figura mostrada
$AD = 6$ y $DC = 3$

Calcular: $Cos2\theta + Sec2\theta$



A) 12/5 B) 13/6 C) 5/7
D) 13/12 E) 15/7

(20) Del gráfico, calcular $Tg\phi$
(A y B son puntos de tangencia)



A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

CLAVES DE PRACTICA DE EJERCICIOS #1									
1)B	2)C	3)B	4)E	5)C	6)B	7)C	8)A	9)B	10)B
11)B	12)A	13)A	14)E	15)A	16)E	17)C	18)A	19)C	[illegible]

CLAVES DE PRACTICA DE EJERCICIOS #2									
1)C	2)A	3)A	4)A	5)B	6)A	7)B	8)B	9)B	10)C
11)C	12)A	13)C	14)B	15)C	16)B	17)B	18)A	19)A	20)E

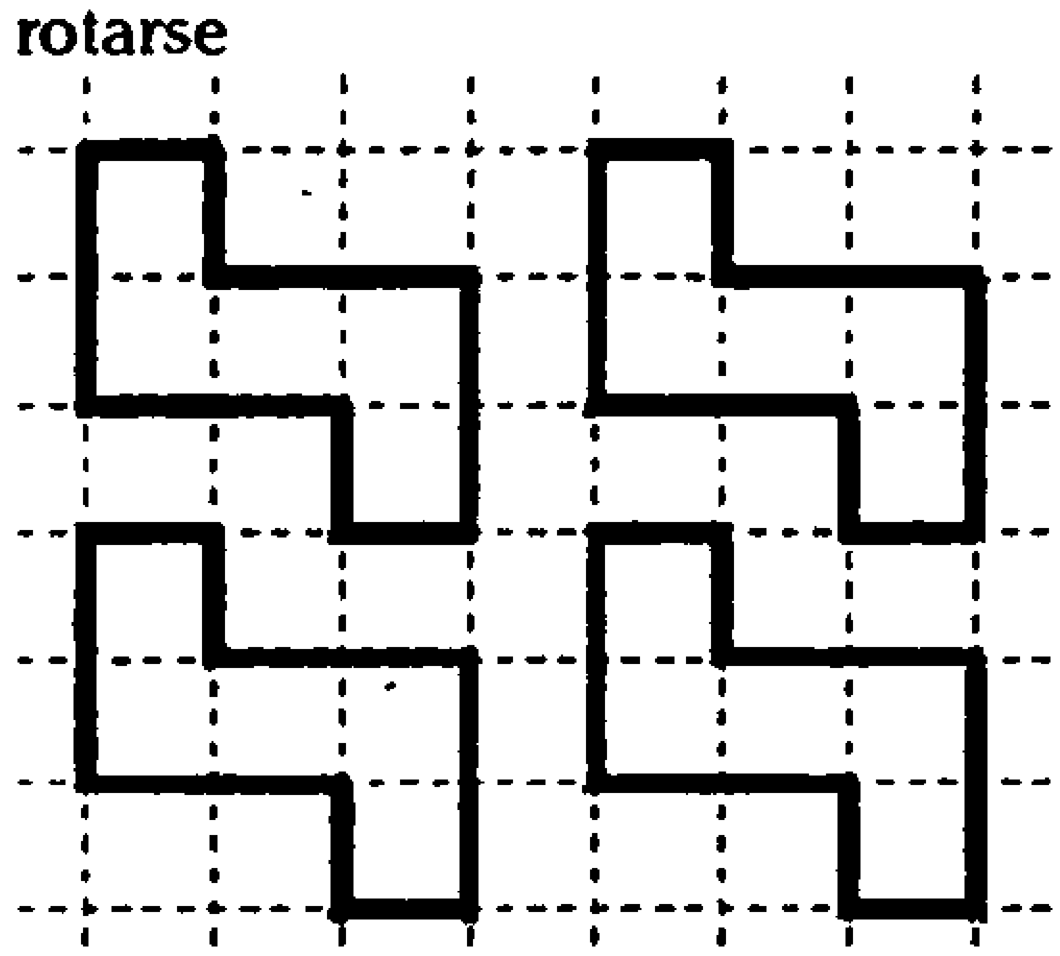
CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)D	3)A	4)C	5)B	6)D	7)A	8)B	9)D	10)A
11)C	12)A	13)D	14)A	15)C	16)B	17)B	18)A	19)D	20)D
21)C	22)E	23)A	24)D	25)B	26)C	27)B			

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)D	2)B	3)E	4)C	5)A	6)D	7)A	8)D	9)B	10)B
11)C	12)B	13)E	14)B	15)B	16)D	17)A	18)C	19)D	20)A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA									
1)B	2)C	3)A	4)B	5)C	6)C	7)D	8)D	9)D	10)E
11)B	12)A	13)E	14)C	15)D	16)B	17)B	18)C	19)B	20)A

RETO :

Acomode las piezas de modo de formar una cruz. Las piezas pueden rotarse



RETO :

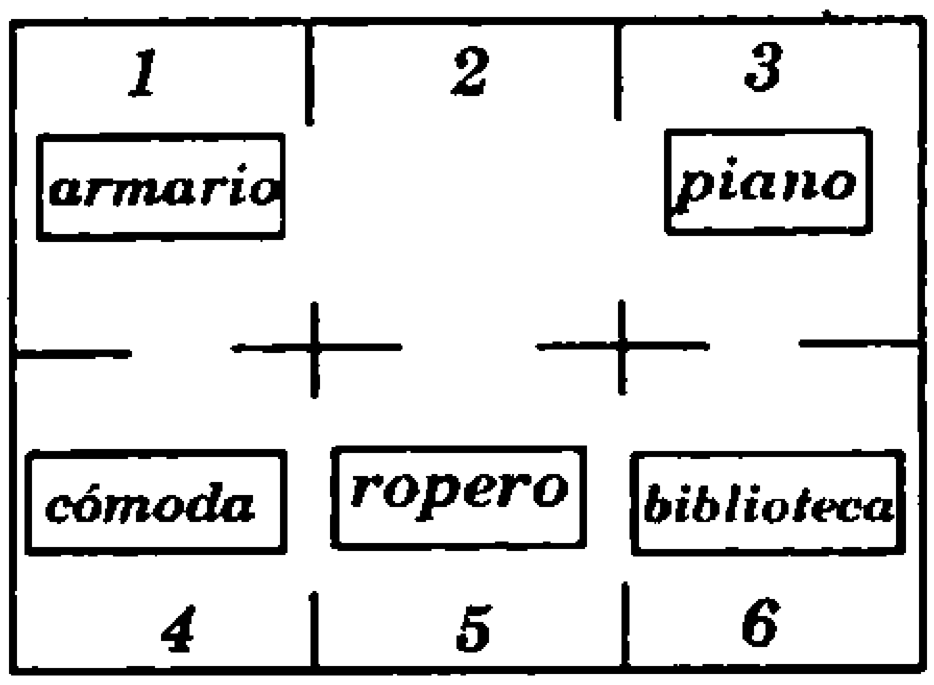
Debe Ud. encontrar las edades de 9 hermanos, sabiendo que:

* Hay trillizos y dos pares de gemelos.
* Todas las edades son números primos.
* Con las edades podemos formar un cuadrado mágico de orden 3.
* La suma de todas las edades es igual a 153.

¿Con sólo esos datos, será capaz?

EL ACERTIJO DE LOS PUEBLOS EN LA PENSIÓN

Los Durán alquilaron departamentos en una ciudad balnearia. Habían seis habitaciones en el mismo piso, todas comunicadas entre sí, como lo indica el diagrama.

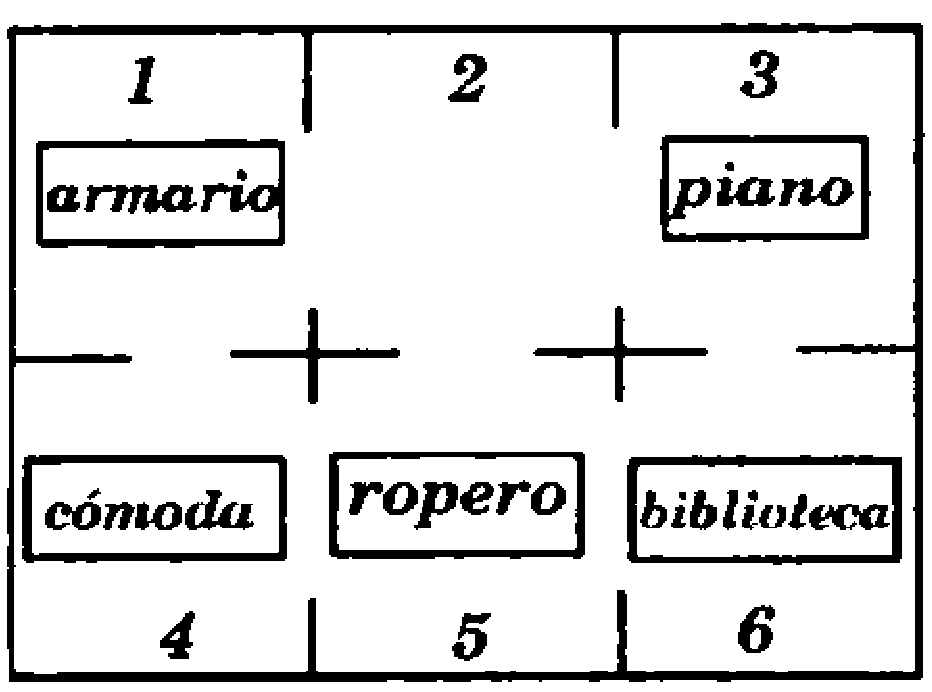


Las habitaciones tenían los números *1, 2, 3, 4, 5* y *6*, y todas daban al mar.

Pero surgió una pequeña dificultad. El señor Durán insistió en pasar el piano a la habitación de la biblioteca, y viceversa. Se trataba de un acto previsor, pues los Durán no amaban la música pero querían impedir que cualquier otro tocara el instrumento. Ahora bien, las habitaciones eran muy pequeñas y los muebles eran muy grandes, así que no podía haber dos muebles en ninguna habitación al mismo tiempo. ¿Cómo se realizaría el cambio con el menor trabajo posible? Supongamos, por ejemplo, que primero movemos el ropero a la *N° 2*; luego podemos trasladar la biblioteca a la *N° 5* y el piano a la *N° 6*, y así sucesivamente.

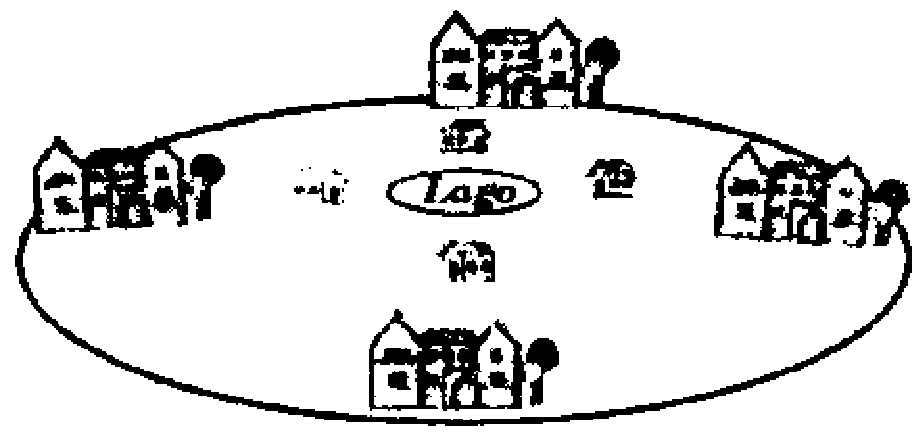
Es un acertijo fascinante, pero la dueña de la pensión tenía buenas razones para no apreciarlo. Trate de resolver esta dificultad con la menor cantidad posible de movimientos, usando fichas de papel.

RESOLUCIÓN :



El método más breve consiste en desplazar los muebles en este orden: piano, biblioteca, ropero, piano, armario, cómoda, piano, ropero, biblioteca, armario, ropero, piano, cómoda, ropero, armario, biblioteca, piano. Se necesita, pues, de diecisiete movimientos. La propietaria luego podía mover cómoda, ropero y armario. Al señor Durán no le importaba que el ropero y la cómoda cambiaran de habitación, mientras tuviera el piano a buen recaudo.

EL ACERTIJO DE LA PARED



Había un pequeño lago en torno cual cuatro humildes hombres pobres construyeron sus cabañas. Luego cuatro hombres ricos construyeron sus mansiones, como se muestra en la ilustración, y deseaban quedarse con el lago, de modo que pidieron a un constructor que edificara un cerco de cemento y ladrillo, lo más corto posible, que excluyera a las cabañas pero que les brindara libre acceso al lago solamente a ellos. ¿Cómo se construyó el cerco? Hay dos soluciones posibles, pero sólo una es la más corta.

RESOLUCIÓN :

La solución tradicional es la que mostramos en la figura *1*, en la que la pared curva impide que las cabañas tengan acceso al lago. Pero al buscar la pared «más corta posible» la mayoría de los lectores de hoy, recordando que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta, adoptarán el método indicado en la figura *2*.

Por cierto que es una mejora, aunque la respuesta correcta es la que se indica en la figura *3*. Una medición de las líneas demostrará que hay un considerablea ahorro de longitud.

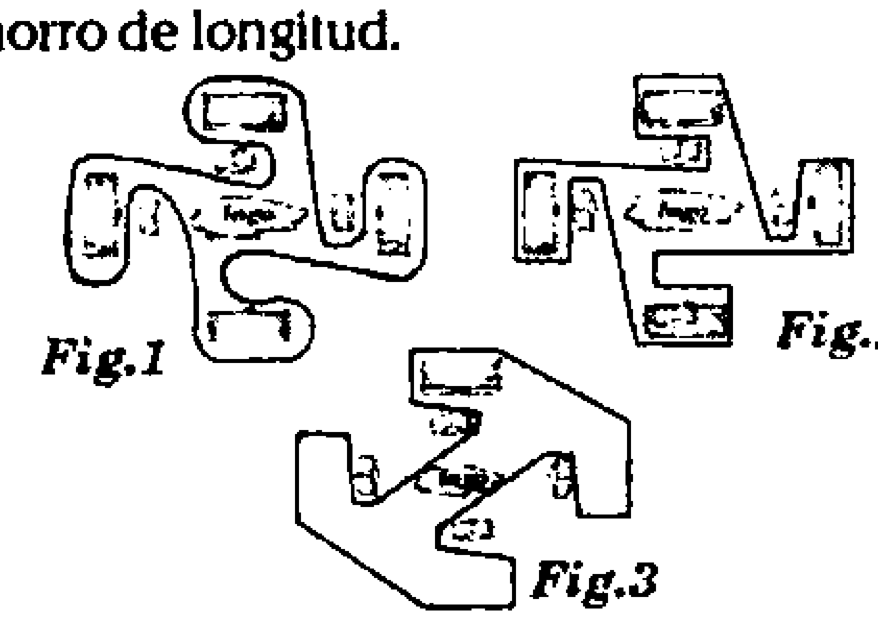
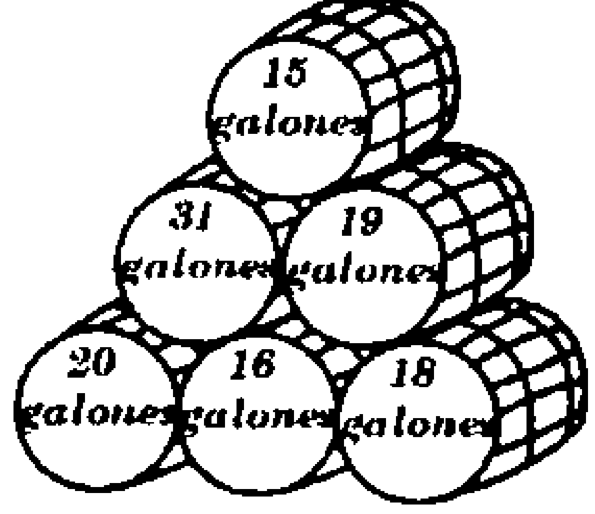


Fig.1 *Fig.2* *Fig.3*

EL ACERTIJO DEL TONEL CON AGUA

Un hombre compró un lote de vino en toneles, pero uno de ellos contenía agua. Éstos se muestran en la ilustración, en la que se indica la cantidad de galones que contenía cada tonel. Vendió una parte del vino a un hombre y el doble de esa cantidad a otro, pero se quedó con el agua. El acertijo consiste en señalar qué tonel contiene agua. ¿Puede usted decir cuál es?. Desde luego, el hombre vendió toneles tal como los había comprado, sin manipular los contenidos.



RESOLUCIÓN :

Si el comprador adquirió el doble de vino que el otro, el total vendido debe ser divisible por *3*. Se sabe que si una cantidad es divisible por *3*, también debe serlo la suma de sus dígitos. Ahora bien, la suma de los dígitos de cada uno de los toneles es, respectivamente, *6*; *4*; *1*; *2*; *7* y *9*. La suma total de estos es *29*, que al ser dividido por *3* arroja un resto de *2*. Luego, la suma de los dígitos del tonel de agua debe ser *2* o un número múltiplo de *3* más *2*, y el único tonel que cumple esto es el de *20* galones. El comerciante se quedó con el tonel de *20* galones, vendió a un hombre *33* galones (los toneles de *15* y *18* galones) y al otro *66* galones (los toneles de *16*; *19* y *31* galones).

EL ACERTIJO DEL CAMARERO TRAMPOSO

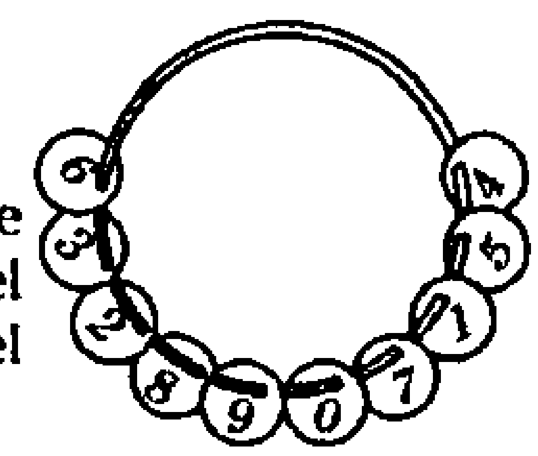
En el restaurante de José, un cliente se sobresaltó al encontrar una mosca en su café.

Pidió al camarero que le trajese una taza nueva. Tras tomar un sorbo, el cliente golpeó la mesa y gritó:¡Esta es la misma taza de café que tenía antes! ¿Cómo lo supo?

RESOLUCIÓN :

El cliente había puesto azúcar en el café antes de hallar la mosca. Cuando más tarde probó un café dulce, supo que el camarero le había traído de nuevo el mismo café.

EL ACERTIJO DE LOS DISCOS NUMERADOS



En el gráfico se ve que hay diez discos en el anillo, numerados del *0* al *9*.

El acertijo consiste en dividirlos en tres grupos sin sacar ninguno del anillo, para que el número que formen los dígitos del primer grupo, multiplicado por el número que formen los del segundo grupo, resulte el número formado por el tercer grupo. Por ejemplo, llevando el *6* y el *3* al lado del *4*, podemos dividir luego en *3* grupos: *28-907-15463*. Pero, lamentablemente, cuando multiplicamos los dos primeros números no dan como resultado el tercero $(28\times907 \neq 15463)$. ¿Puede usted separarlos correctamente? Desde luego, puede tener tantos discos como desee en cualquier grupo. El acertijo exige cierto ingenio, a menos que dé con la respuesta por casualidad.

RESOLUCIÓN :

La solución que da la menor suma posible de dígitos en los productos es $23\times174=58\times69=4002$, y la solución que da la mayor suma posible de dígitos es $9\times654=18\times327=5886$. En el primer caso, los dígitos suman *6* y en el segundo *27*. No hay modo de obtener la solución, salvo mediante el ensayo y error.

INTRODUCCION :

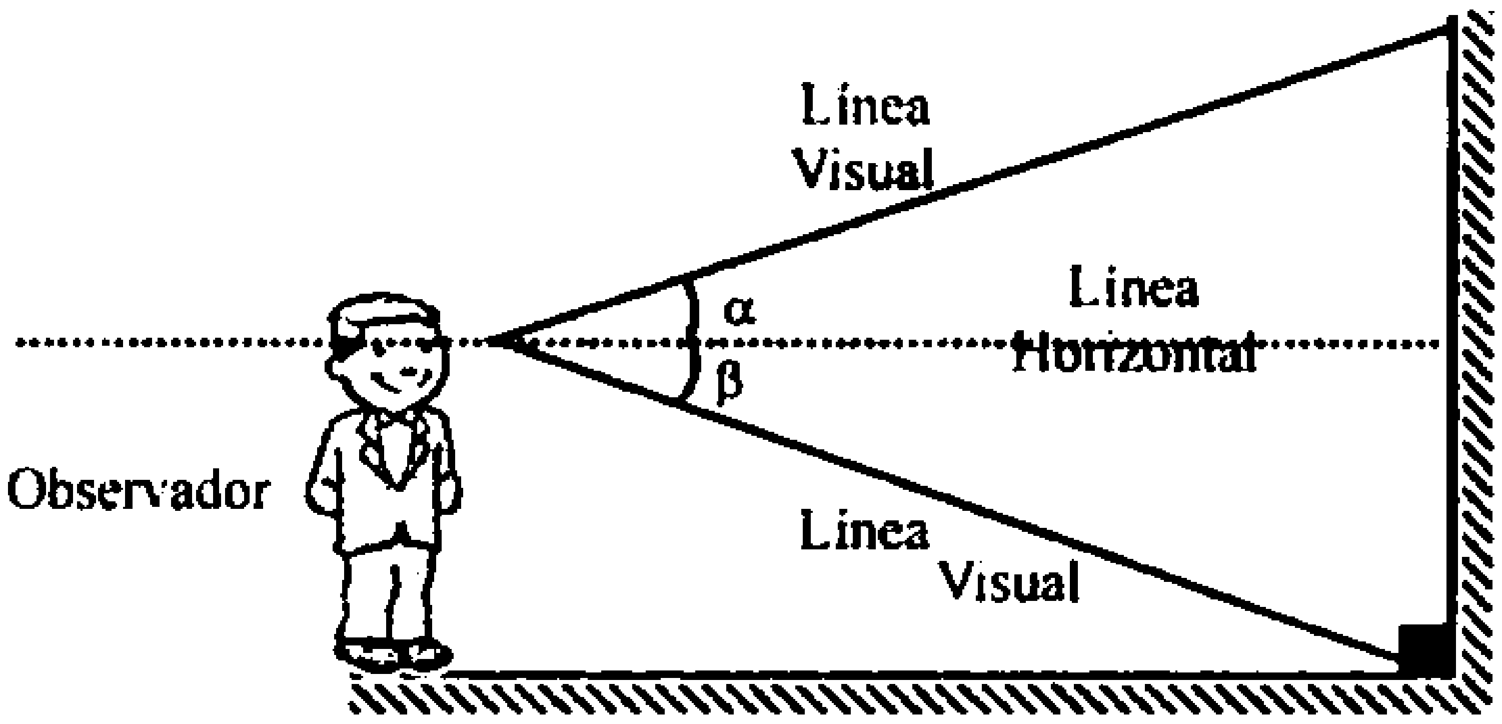
En el presente capítulo veremos problemas donde es necesario graficar el enunciado de un texto en forma precisa. Para ello es necesario tener presente los siguientes conceptos u observaciones analizando las distintas posibilidades que se nos pueden presentar.

LÍNEA VISUAL :

Es la línea recta que une el ojo de un observador (generalmente una persona) con un objeto que se observa.

LÍNEA HORIZONTAL :

Es la línea recta paralela a la superficie horizontal referencial que pasa por el ojo del observador.

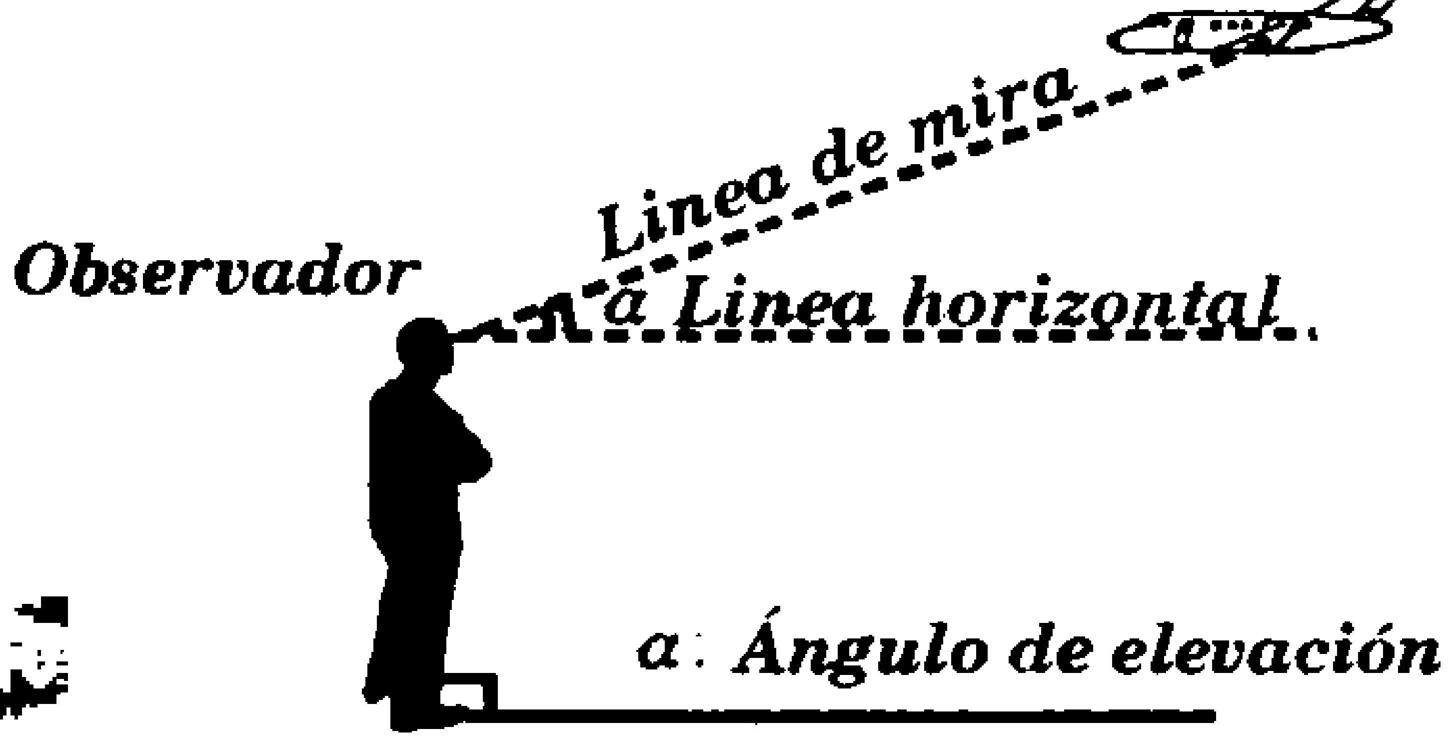


ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos obtenidos en un plano vertical formados por las lineas de mira *(o visual)* y la línea horizontal que parten de la vista del observador . Los ángulos verticales pueden ser :

ÁNGULOS DE ELEVACIÓN

Es el ángulo formado por linea horizontal y la línea de mira cuando el objetivo se encuentra por encima de la línea horizontal.

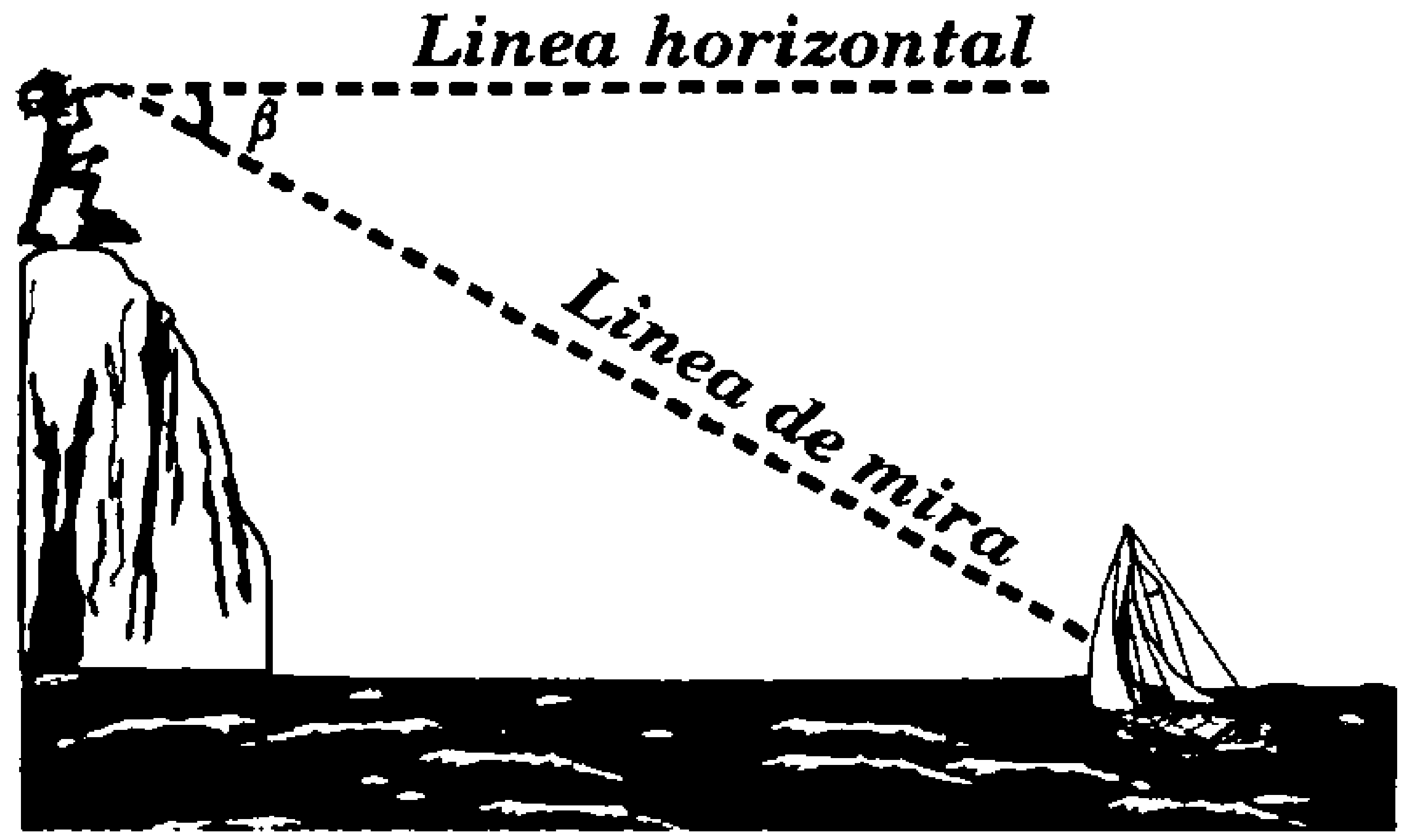


α: Ángulo de elevación

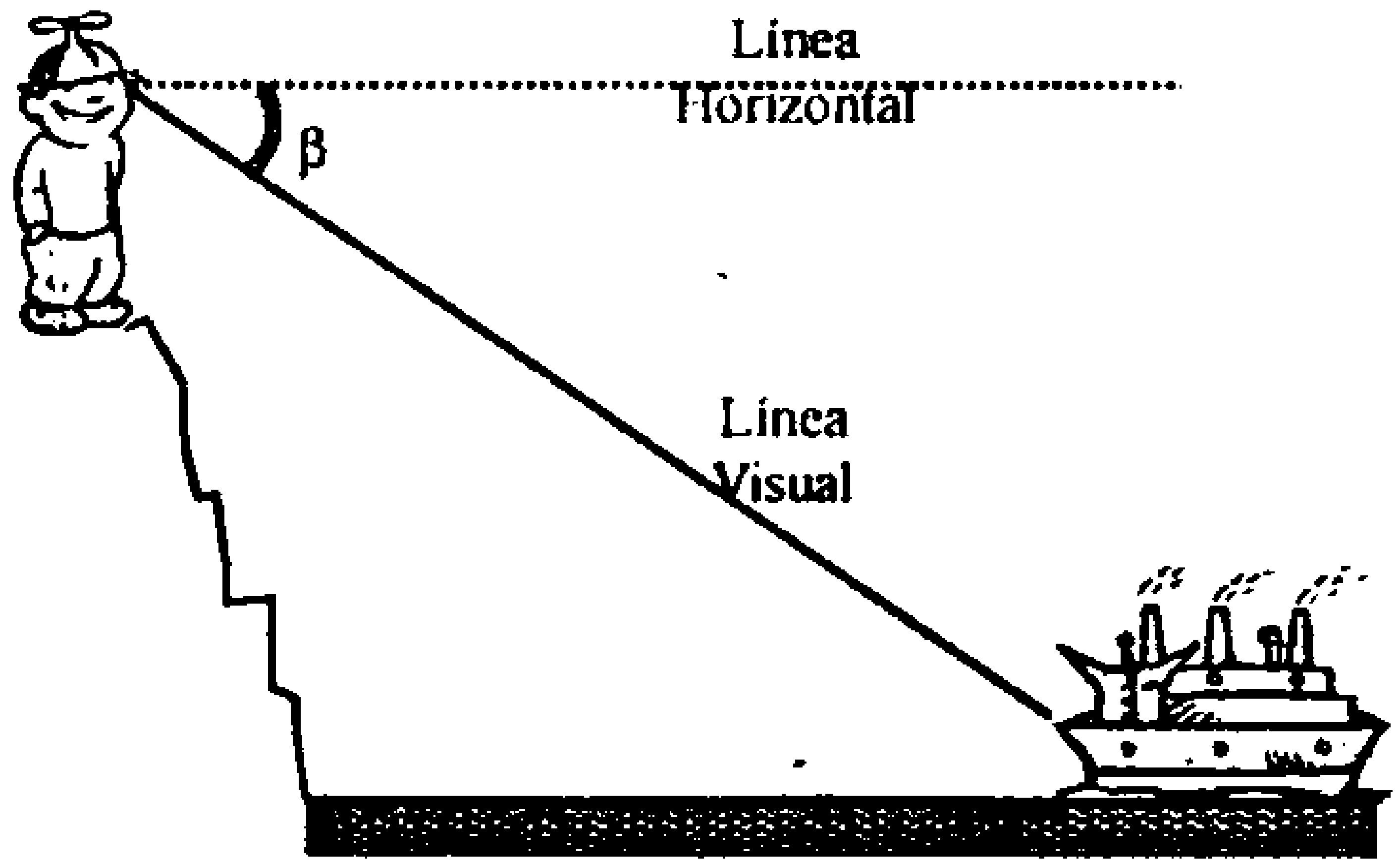
ÁNGULOS DE DEPRESIÓN

Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal .

b **:** ángulo de depresión

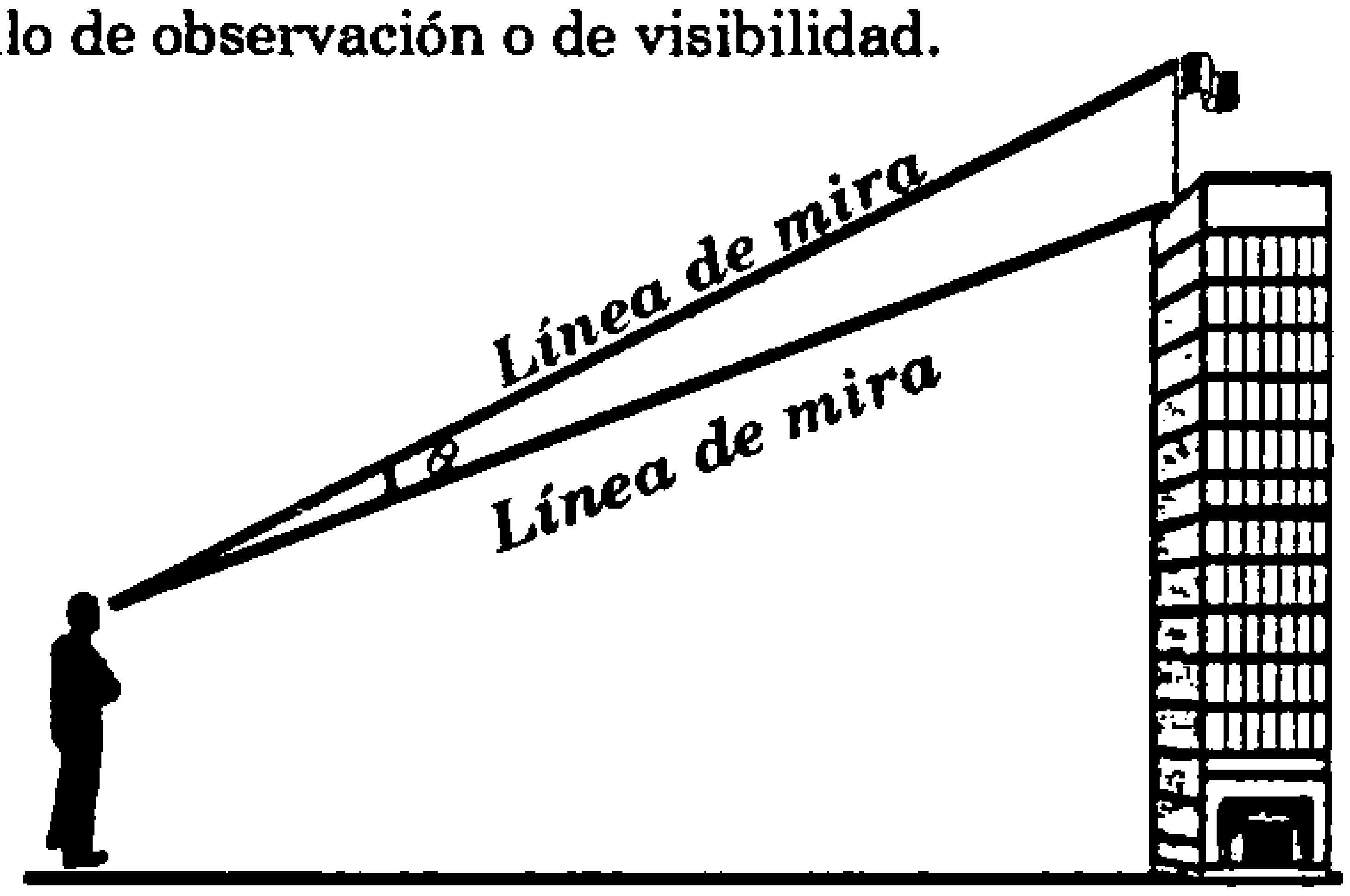


β:ángulo de depresión



NOTAS :

Al ángulo formado por dos líneas de mira se denomina ángulo de observación o de visibilidad.

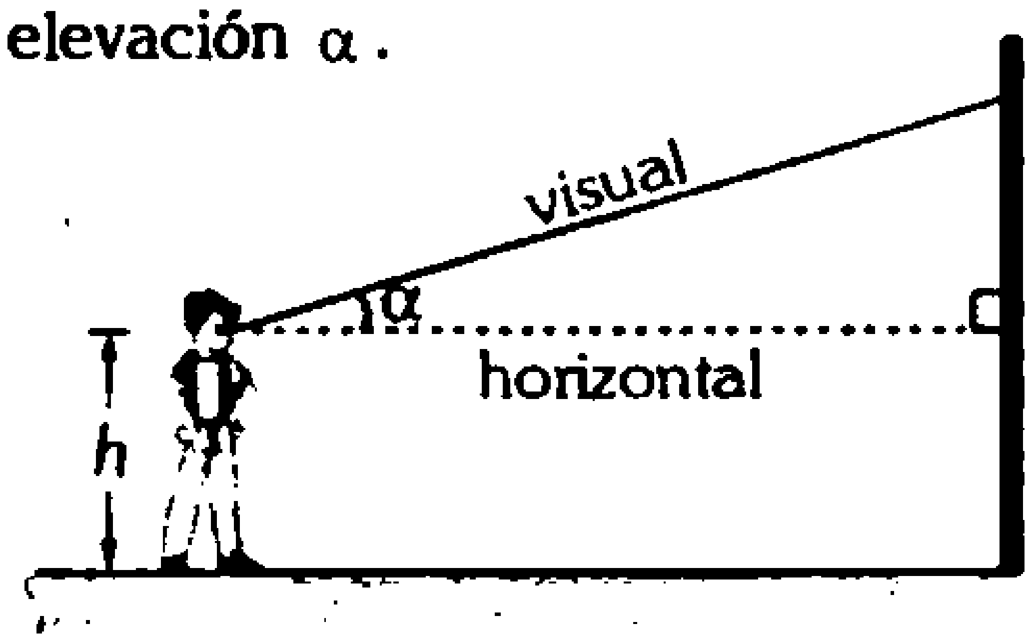


θ: ángulo de observación

* Los problemas en este capítulo, son básicamente para dibujar correctamente el enunciado, reconociendo los ángulos de elevación y depresión para su correcto trazo.

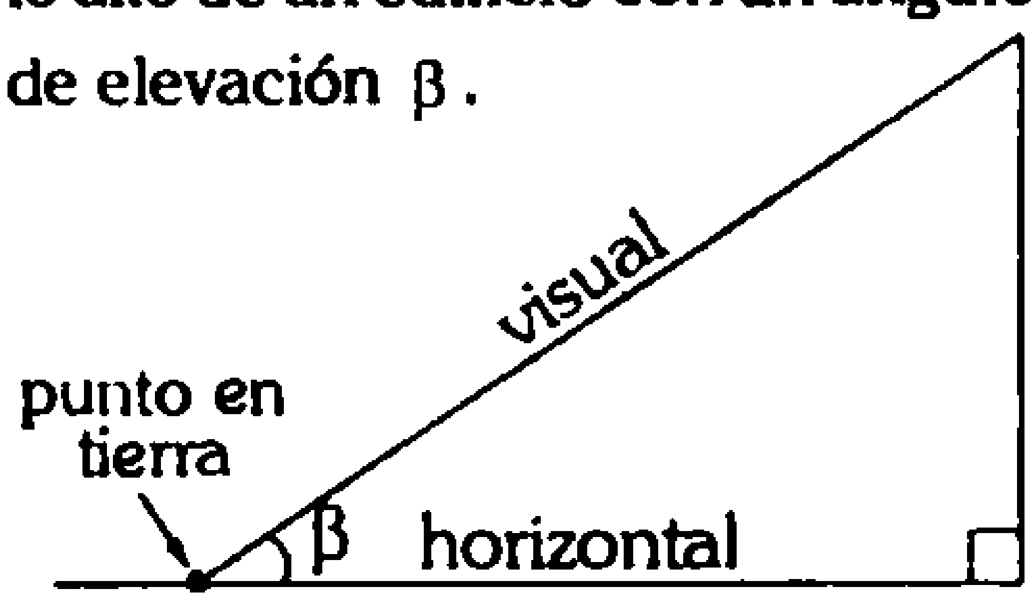
EJEMPLO 1 :

Un niño de estatura h observa lo alto de un poste con un ángulo de elevación α.



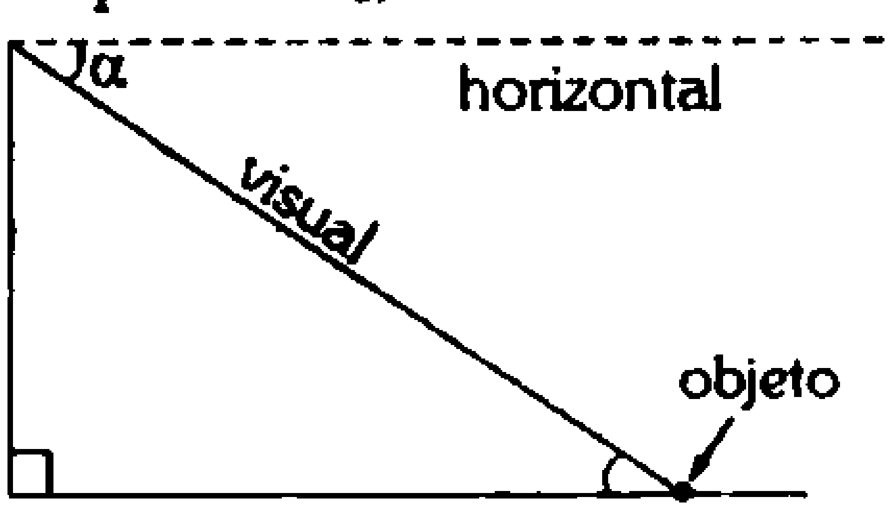
EJEMPLO 2 :

Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación β.



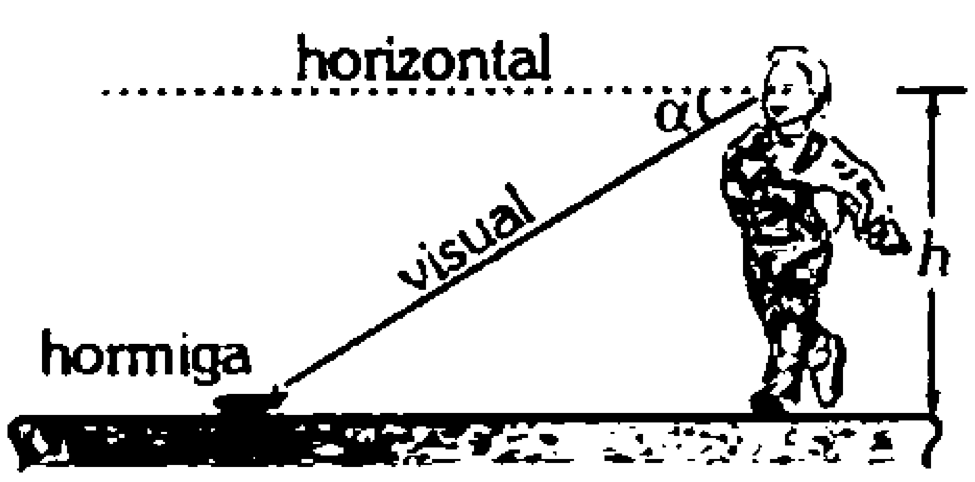
EJEMPLO 3 :

Desde lo alto de una torre se divisa un objeto en el suelo con un ángulo de depresión α.



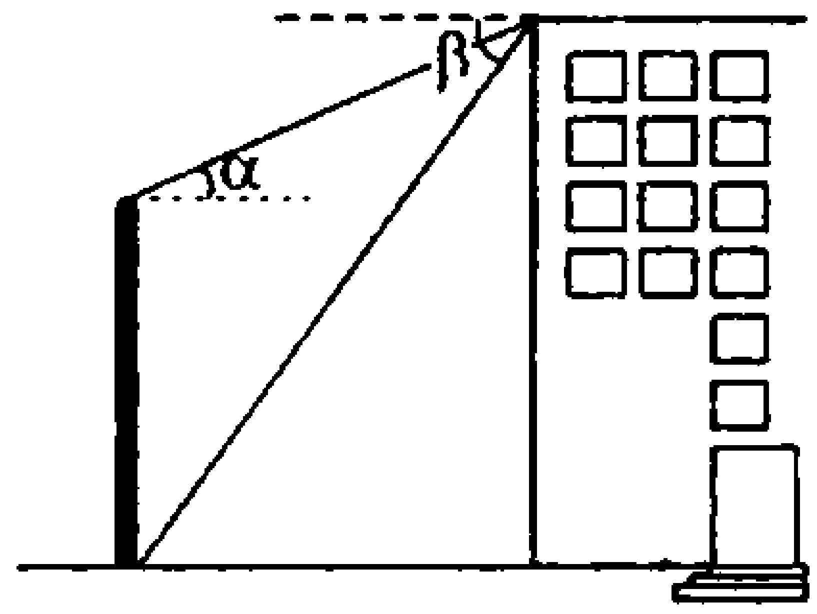
EJEMPLO 4 :

Un niño de estatura h divisa una hormiga en el suelo con un ángulo de depresión θ.



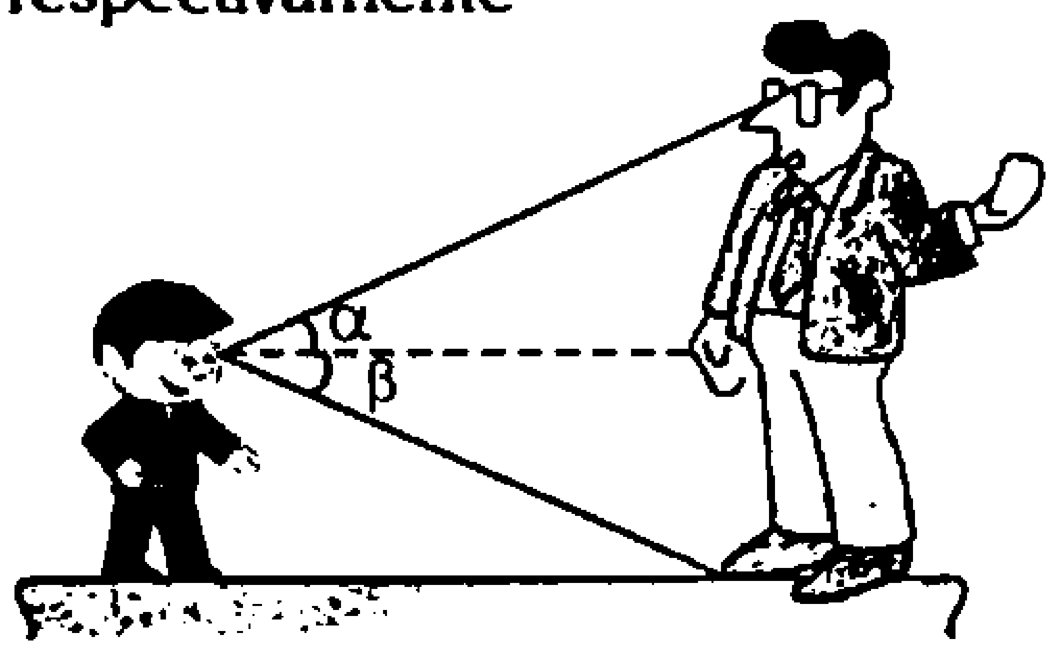
EJEMPLO 5 :

Desde lo alto de un poste se ve lo alto de un edifico con un ángulo de elevación α y desde lo alto del edificio se ve la base del poste con un ángulo de depresión β.



EJEMPLO 6 :

Un niño observa los ojos y pies de su padre, con ángulos de elevación y depresión α y β, respectivamente



NOTA :

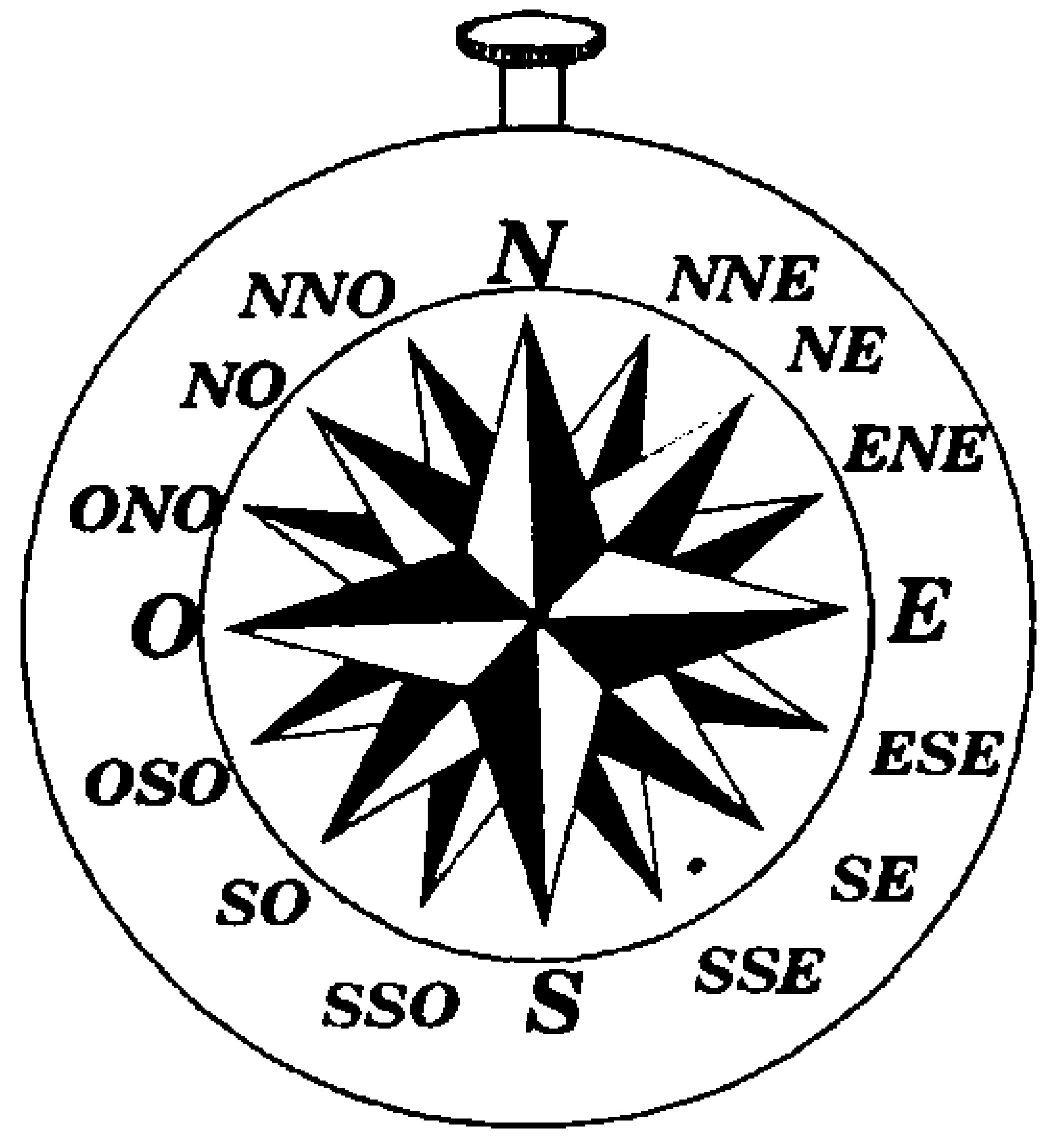
Los gráficos en realidad, deben ser referenciales y lo más concretos posibles.

ÁNGULOS HORIZONTALES

En la superficie de la tierra es frecuente definir las direcciones por las que marca la aguja magnética en el compás náutico o brújula . Dichas direcciones llamados rumbos del compás, se obtienen dividiendo en ocho partes cada uno de los cuadrantes comprendidos entre los cuatros puntos cardinales: Norte***(N)***, Sur***(S)***, Este***(E)*** y Oeste***(O)*** .

Estos cuatro rumbos y los correspondientes a las bisectríces de los cuadrantes: Norte- Este, Sur-Este , Sur-Oeste y Nor-Oeste, constituyen los rumbos principales se consideran otro cuatros a las que llamaremos cuartas de compás . En total la Rosa Náutica tiene ***32*** cuartas.

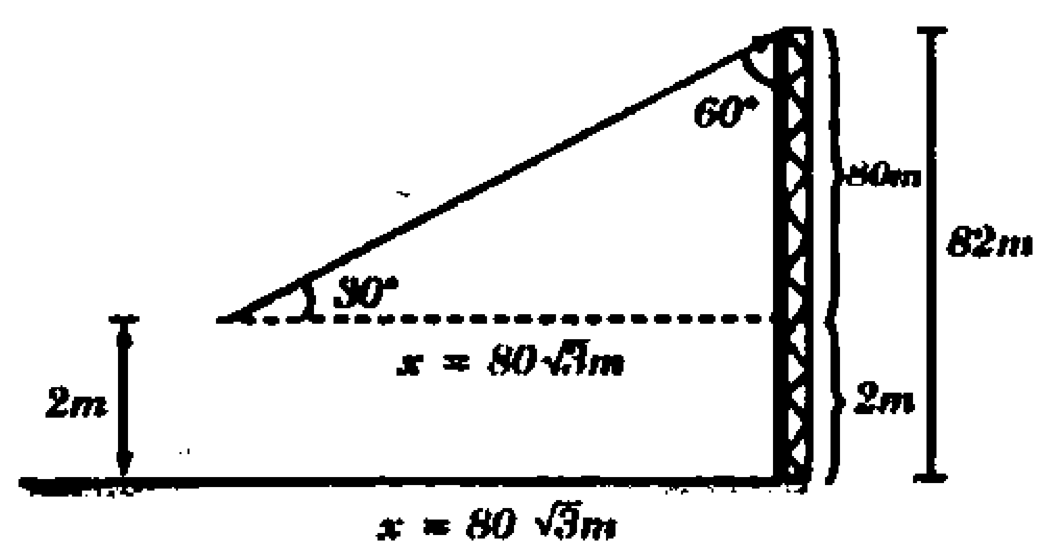
ROSA NÁUTICA O ROSA MARINA



EJERCICIO 1 :

Una persona de **2** metros de estatura observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación de ***30°*** ¿A que distancia se encuentran de la base de la torre , si esta mide ***82m***.?.

RESOLUCIÓN :

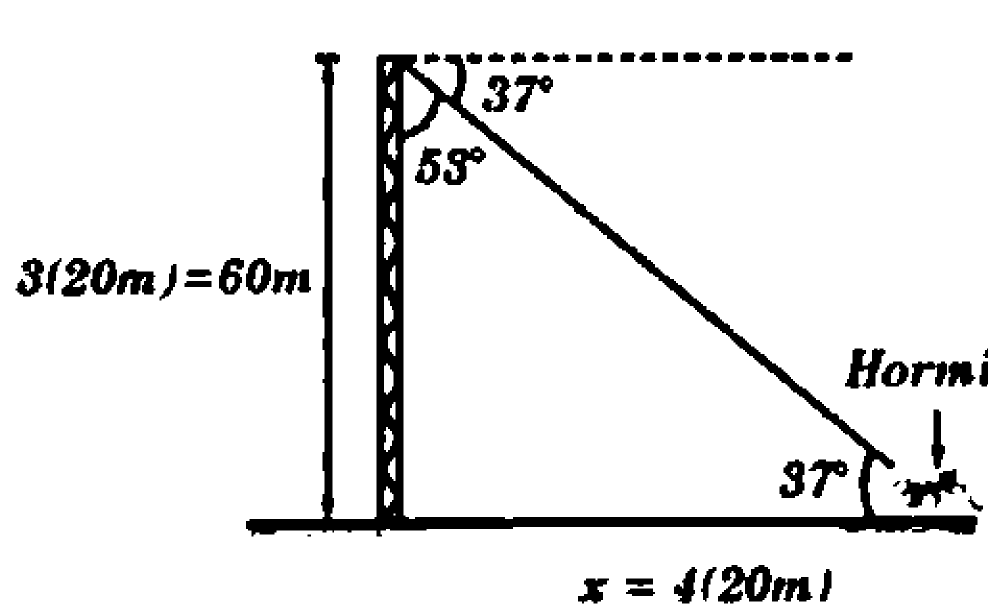


* La distancia pedida es $80\sqrt{3}m$

EJERCICIO 2 :

Desde la parte mas alta de una torre de ***60m.*** de longitud se observa a una hormiga con un ángulo de depresión de ***37°***. ¿ A que distancia de la base de la torre se encuentra la hormiga.

RESOLUCIÓN :



* La distancia pedida es: ***"80m"***

PROBLEMAS RESUELTOS

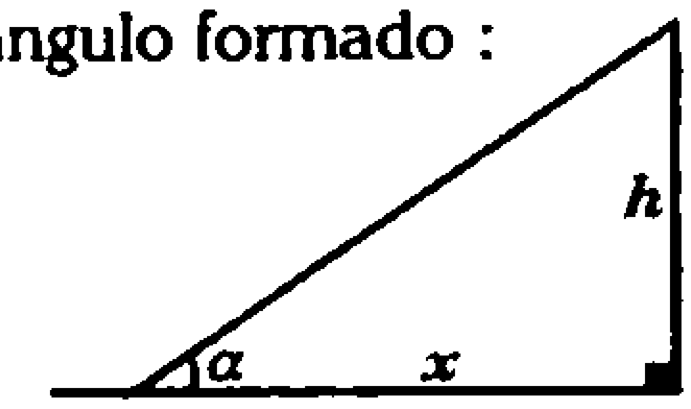
PROBLEMA 1 :

Desde un punto en tierra , se divisa de lo alto de un edificio con un ángulo de elevación "α". Si la altura del edificio es "h", ¿A qué distancia del edificio se encuentra el punto de observación?.

A) $h\text{sen}\,\alpha$ B) $h\cos\alpha$ C) $h\tan\alpha$
D) $h\cot\alpha$ E) $h\sec\alpha$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico, en el triángulo rectángulo formado :



$$\frac{x}{h}=\cot\alpha \Rightarrow x=h\cot\alpha$$

(estamos calculando lados)

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Desde un punto ubicado desde una distancia de ***20m*** de una torre, se divisa una parte más alta que un ángulo de elevación "α". Calcular la altura de la torre , si:

$$\tan\alpha=\frac{3}{2}$$

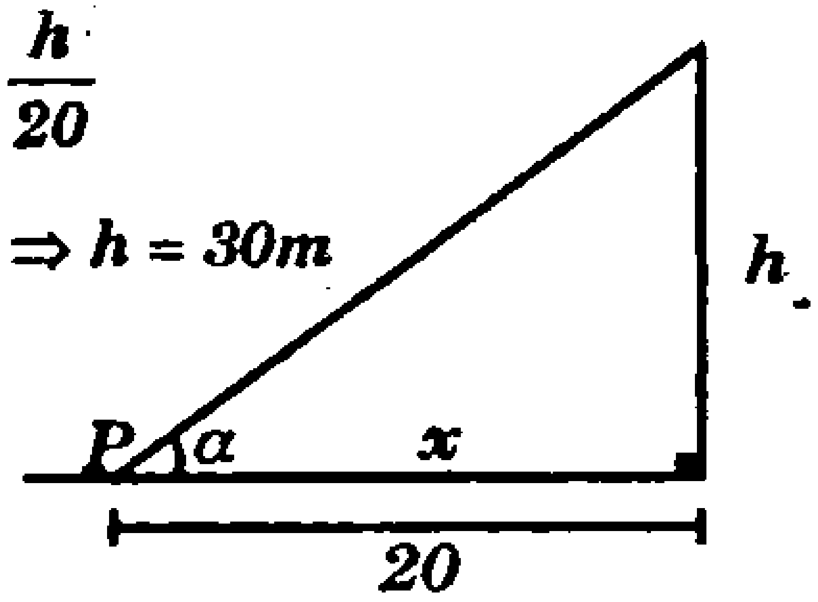
A) 10m B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Graficamos el enunciado :

$$\tan\alpha=\frac{h}{20}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{h}{20}\Rightarrow h=30m$$



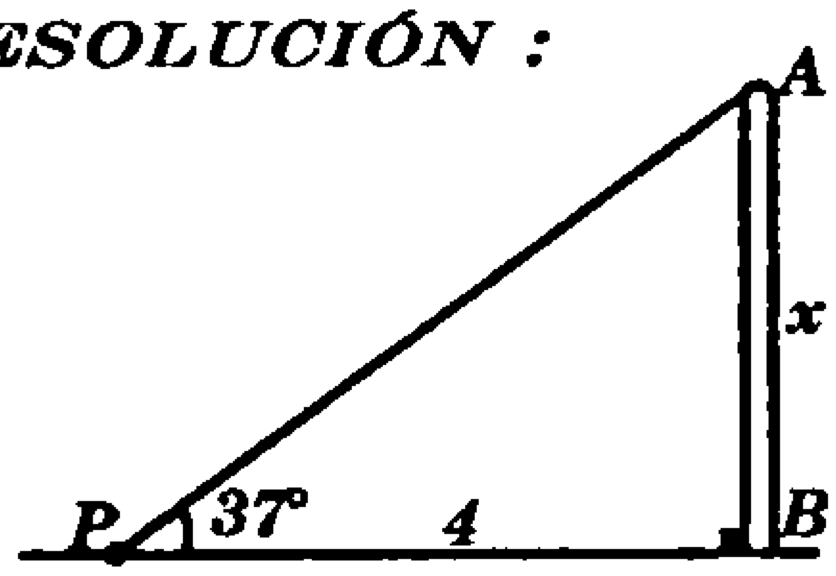
RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Desde un punto en tierra ubicado a ***4m*** de un poste ,se divisa su parte alta con un ángulo de elevación de ***37°***. ¿Cuál es la altura del poste?.

A) $\frac{8}{3}m$ B) 4 C) 3 D) 6 E) 9

RESOLUCIÓN :



* Como el triángulo rectángulo formado es notable ***(37° y 53°)***, además : $PB=4m$

* Piden : $AB=x\Rightarrow x=3m$

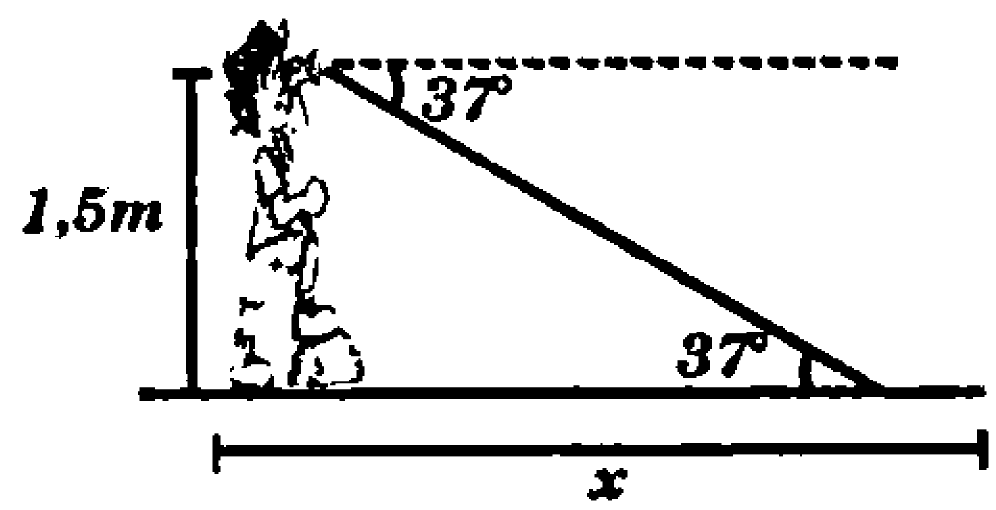
RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Un niño de ***1,5m*** de estatura divisa una piedra en el suelo con un ángulo de depresión de ***37°***. ¿a qué distancia del niño se encuentra la piedra?.

A) 1m B) 2 C) 3 D) 2,5 E) 4

RESOLUCIÓN :



* Como se forma un triángulo rectángulo notable, decimos :

$$1{,}5=3a\Rightarrow a=0{,}5$$

(proporción ya conocida)

$$x=4a=4(0{,}5)\Rightarrow x=2m$$

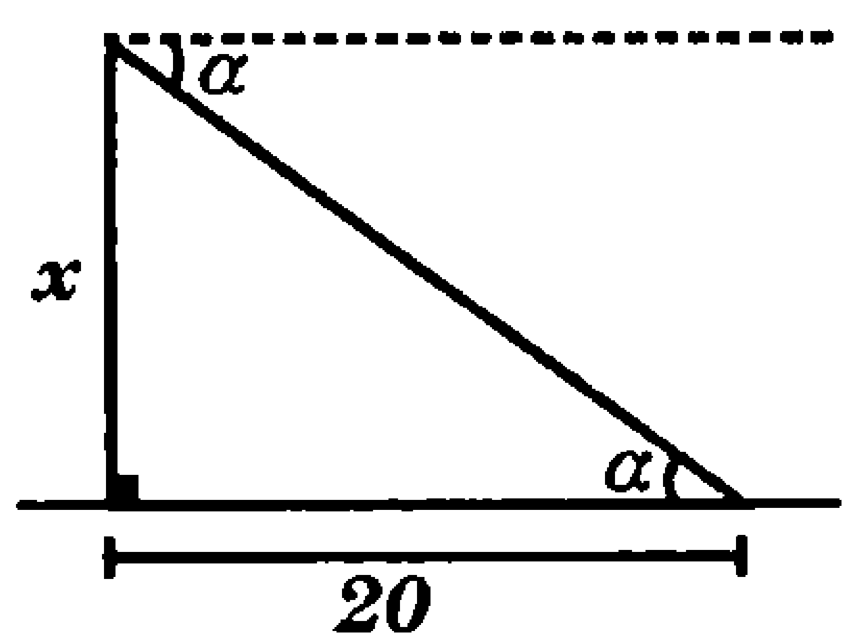
RPTA : "B"

PROBLEMA 5 :

Desde lo alto de un poste se divisa un objetivo en el suelo con un ángulo de depresión "α" ($\cot\alpha=4$). Si el objeto se halla a ***20m*** del poste, ¿Qué altura tiene el poste? .

A) 2m B) 3 C) 4 D) 5 E) 10

RESOLUCIÓN :



En el triángulo rectángulo formado:

$$\cot\alpha=\frac{20}{x}\Rightarrow 4=\frac{20}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{20}{4}\Rightarrow x=5m$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

Desde un punto en tierra se divisa lo alto de un edificio con un ángulo de elevación "α". Nos acercamos una distancia igual al doble de la altura del edificio y el ángulo de elevación es ahora "β". Calcular :

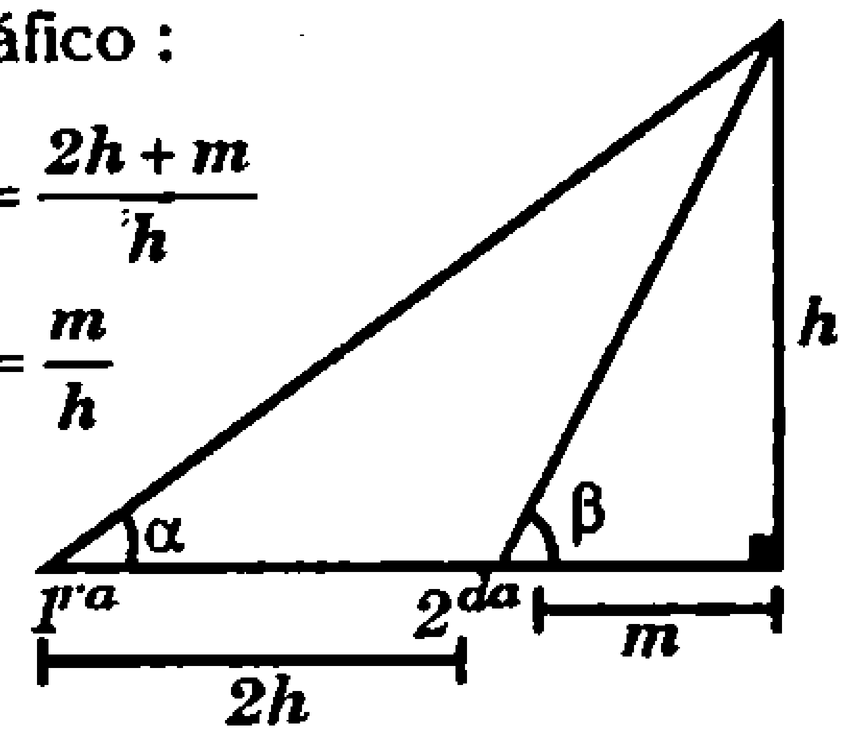
$$L=\cot\alpha-\cot\beta$$

RESOLUCIÓN :

Del gráfico :

$$\cot\alpha=\frac{2h+m}{h}$$

$$\cot\beta=\frac{m}{h}$$



Piden : $L=\cot\alpha-\cot\beta$

$$\Rightarrow L=\frac{2h+m}{h}-\frac{m}{h}$$

$$\Rightarrow L=\frac{2h}{h}\Rightarrow L=2$$

RPTA : "B"

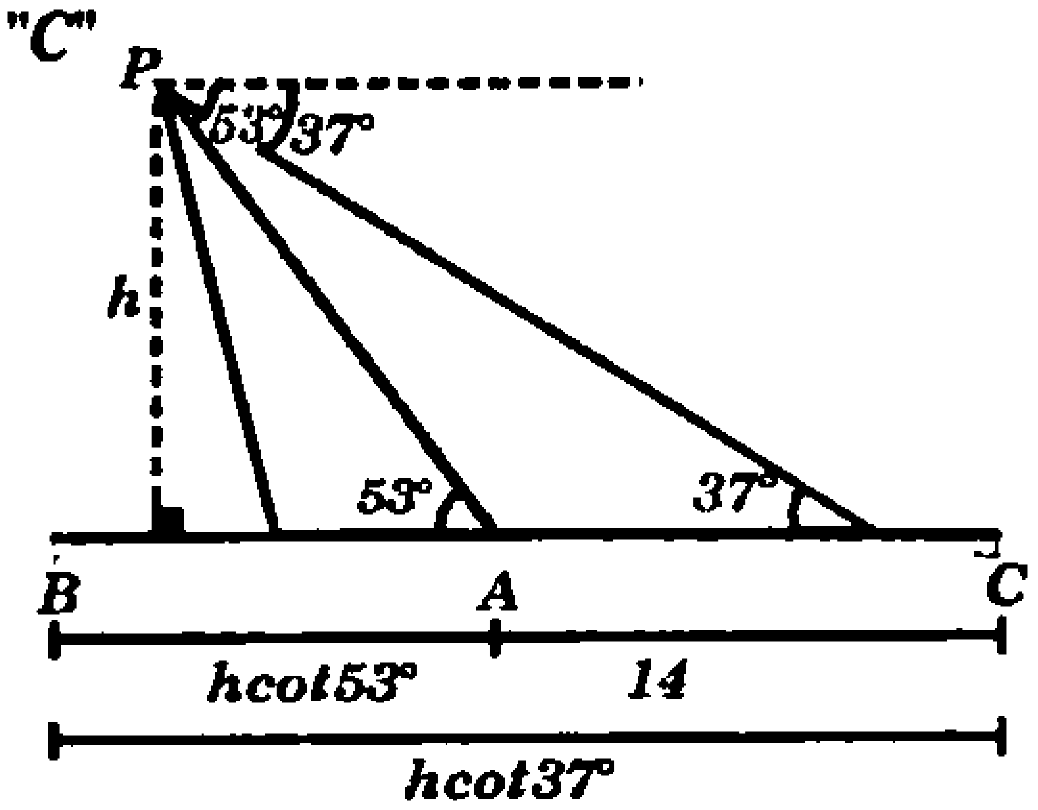
PROBLEMA 7 :

Desde lo alto de un faro, se observa un mismo lado, dos barcos anclados, con un ángulo de depresión de ***53°*** y ***37°***. Si los barcos están separados una distancia de ***14m***, ¿Cuál es la altura del faro ?.

A) 16m B) 12 C) 24 D) 32 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico: Los barcos en "A" y "C"



$I)\ \Delta PBA: \dfrac{BA}{h} = \cot 53°$

$\Rightarrow BA = h\cot 53°$

$II)\ \Delta PBC: \dfrac{BC}{h} = \cot 37°$

$\Rightarrow BC = h\cot 37°$

* Luego, decimos :

$h\cot 37° - h\cot 53° = 14$

$\Rightarrow h(\cot 37° - \cot 53°) = 14 \Rightarrow h\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{4}\right) = 14$

$\Rightarrow h \times \dfrac{7}{12} = 14 \Rightarrow h = 24$

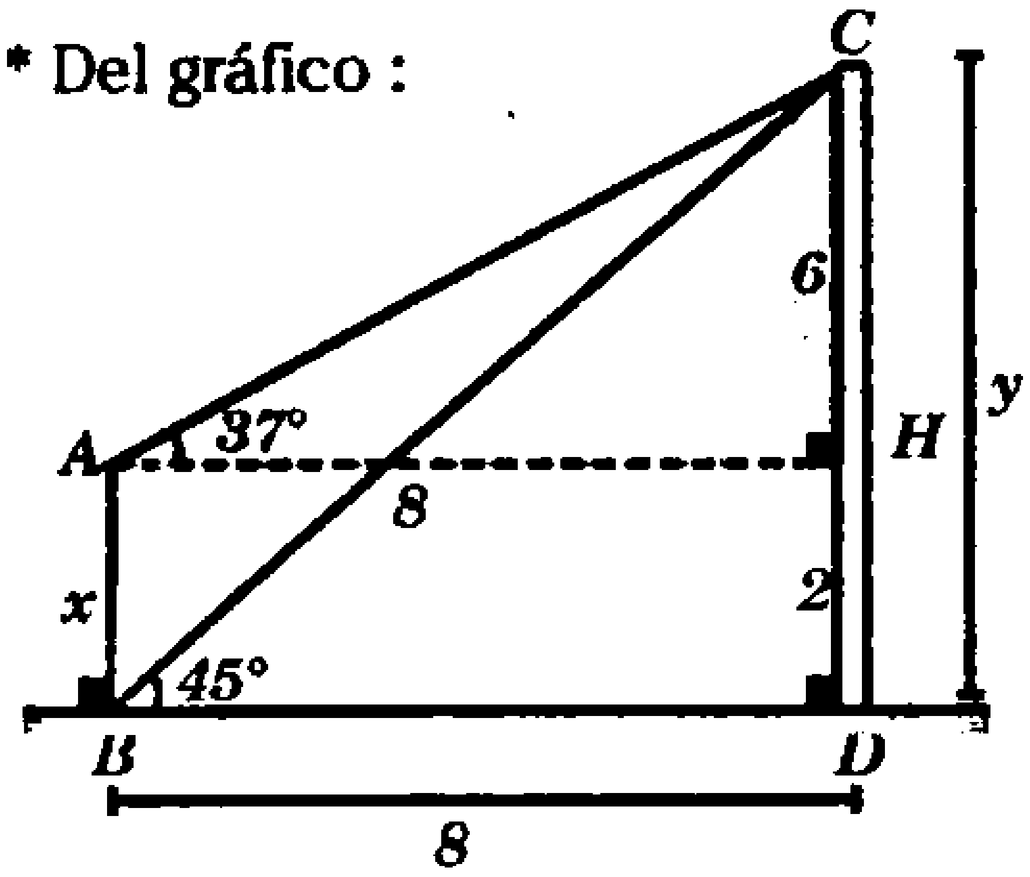
RPTA : "C"

PROBLEMA 8 :

Desde lo alto y bajo de un muro se observa lo alto de un poste con ángulos de elevación de *37° y 45°*, respectivamente. Si la distancia entre muro y poste es *8m* , halle la suma de sus alturas.

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



$I)$ ⊾ $BDC: BD = 8$

$\Rightarrow DC = y = 8$

$II)\ AH = BD = 8$

$III)$ ⊾ $AHC: AH = 8 \Rightarrow HC = 6$

$\Rightarrow HD = 2$

$IV)\ BA = HD \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow x + y = 10m$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

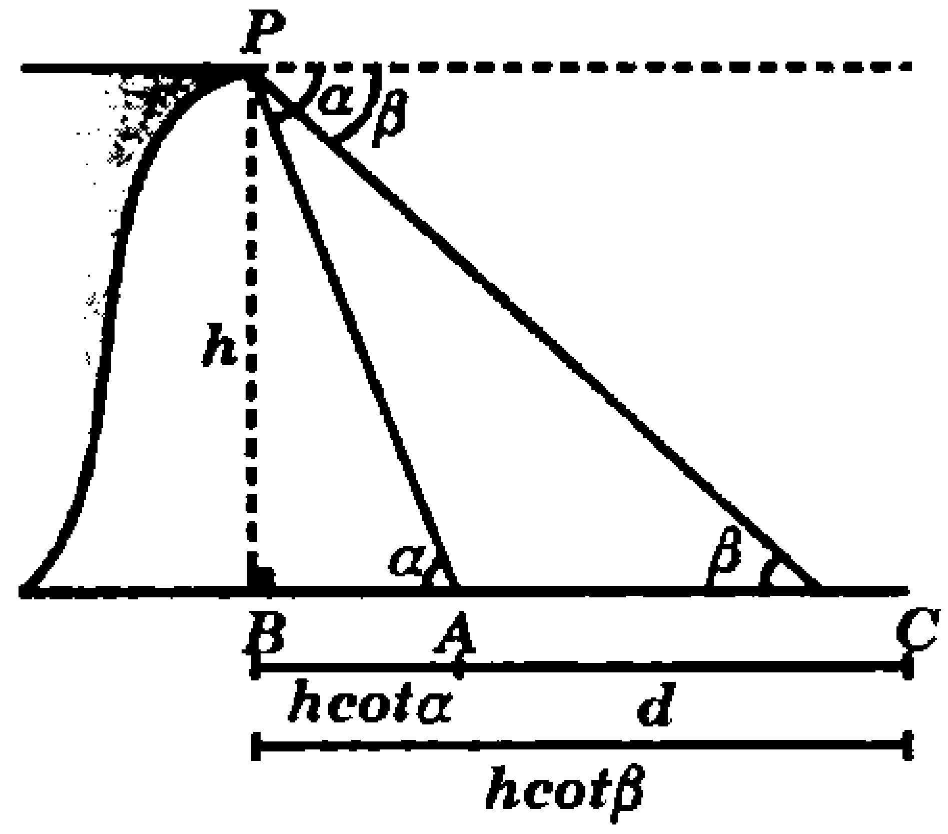
Desde lo alto de un acantilado se divisa dos objetos en el suelo con ángulos de depresión "α" y "β" $(\alpha > \beta)$. Si la distancia entre dicho objetos es "*d*", ¿Cuál es la altura del acantilado?

A) $d(\cot\beta - \cot\alpha)$ B) $\dfrac{d}{\cot\alpha + \cot\beta}$ C) $\dfrac{d}{\tan\alpha + \tan\beta}$

D) $\dfrac{d}{\tan\alpha - \tan\beta}$ E) $\dfrac{d}{\cot\beta - \cot\alpha}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



$I)\ PBA: BA = h\cot\alpha$

$PBC: BC = h\cot\beta$

$II)\ h\cot\beta - h\cot\alpha = d$

$h(\cot\beta - \cot\alpha) = d$

$\Rightarrow h = \dfrac{d}{\cot\beta - \cot\alpha}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Desde lo alto de una torre se divisan dos puntos en tierra "A" y "B", con ángulo de depresión "α" y "$90° - \alpha$" respectivamente. Si: "A" equidista de la torre y de "B", calcular "$\cot\alpha$".

A) 1 B) 2 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) 2 E) $\sqrt{3}$

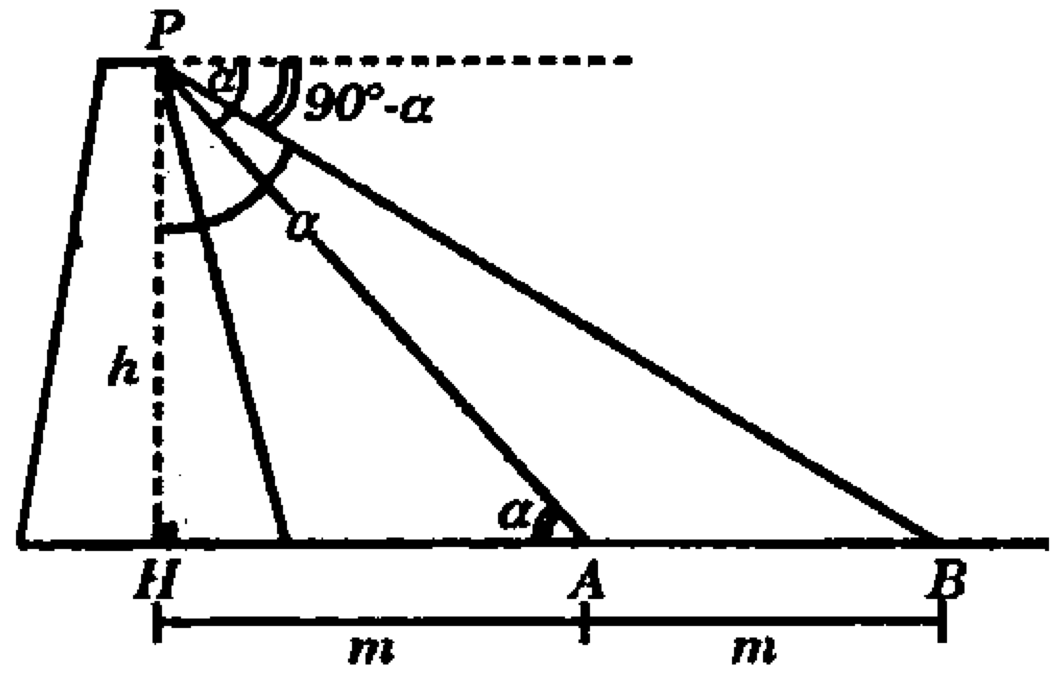
RESOLUCIÓN :

* Graficando :

$I)\ AH = AB = m$ y $PH = h$

$II)$ ⊾ $PBH:\ \tan\alpha = \dfrac{2m}{h}$ ....(I)

⊾ $PHA:\ \tan\alpha = \dfrac{h}{m}$ ....(II)



$\tan^2\alpha = \dfrac{2m}{h} \cdot \dfrac{h}{m} \Rightarrow \tan^2\alpha = 2$

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11 :

Una cometa se queda atascada en la rama más alta de un árbol . Si la cuerda de la cometa mide *12m* y forma un ángulo de *22°* con el suelo, estimar la altura del árbol encontrando la distancia que hay entre la cometa y el suelo.

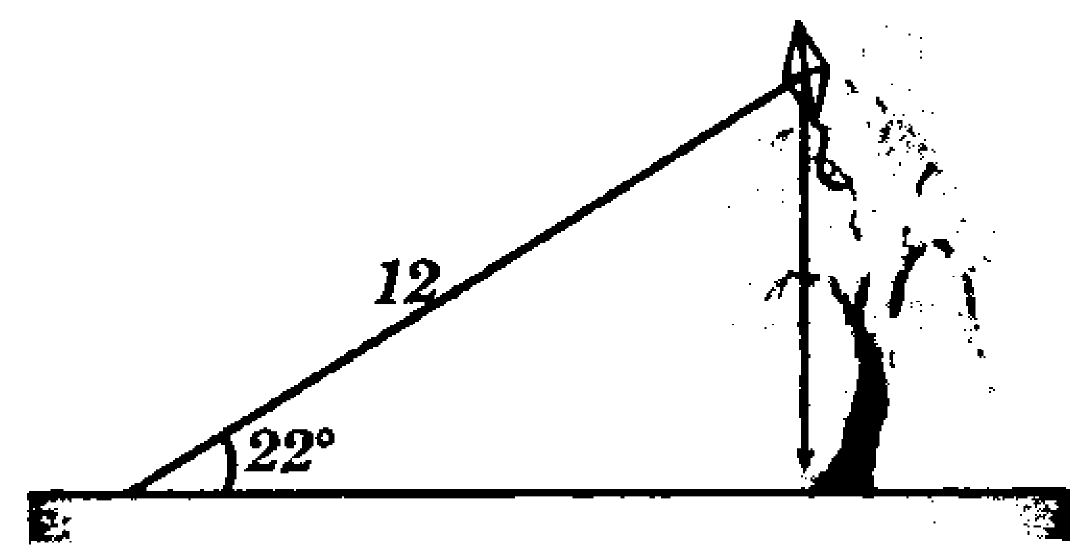
$(sen22° = 0,374)$.

A) 2,792m B) 3,928 C) 4,488

D) 5 E) 5,202

RESOLUCIÓN :

* Graficanco , tenemos por condición al problema.



* Sea *h* la altura a la cual se encuentra la cometa, a partir de la figura vemos que :

$\dfrac{h}{12} = sen22° \Rightarrow h = 12sen22°$

$\Rightarrow h = 12(0,374) = 4,488$

RPTA : "C"

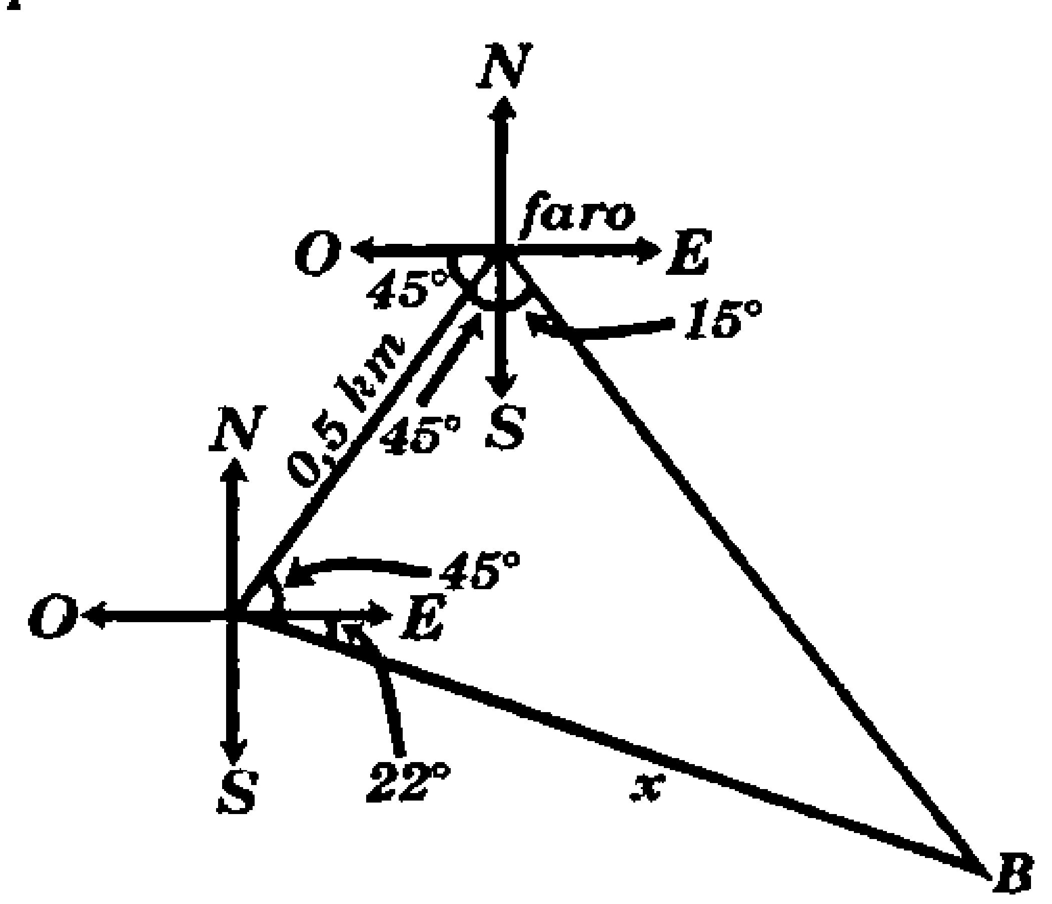
PROBLEMA 12 :

Desde un faro observan dos barcos *A* y *B* en las direcciones *SO* y *15°* al Este del Sur respectivamente, al mismo tiempo *B* se observa desde *A* en la dirección *E22° S*. Si la distancia del barco *A* al faro ès de *0,5m*. Hállese la distancia entre los barcos.

A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}m$ B) $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ C) $3\sqrt{7}$ D) 15 E) $\dfrac{5\sqrt{3}}{16}$

RESOLUCIÓN :

* De acuerdo al enunciado del problema tenemos :



* En el triángulo del gráfico mostrado : $m\measuredangle B=53°$

Por ley de senos , tenemos :

$$\frac{x}{sen60°}=\frac{0,5km}{sen\beta}\Rightarrow\frac{x}{sen60°}=\frac{0,5km}{sen53°}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)0,5}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{3}}{16}$$

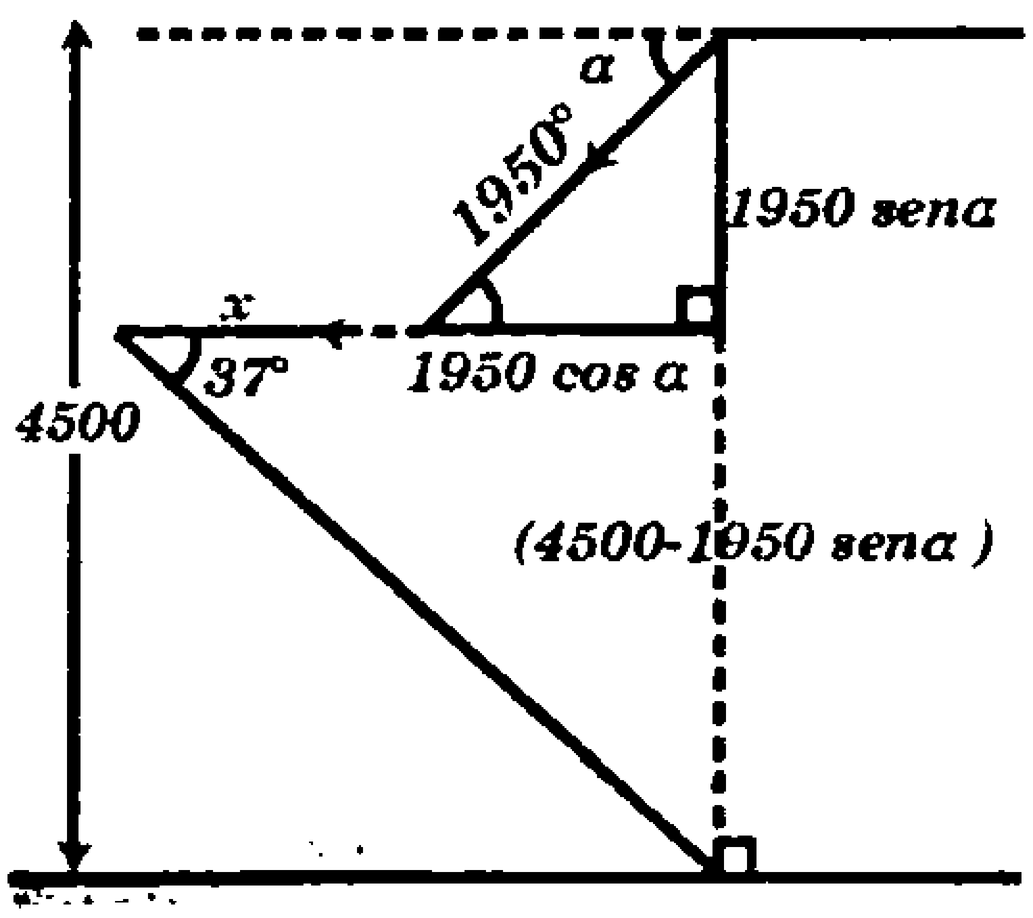
RPTA : "E"

PROBLEMA 13 :

Un avión que vuela de *Norte* a *Sur* está descendiendo con un ángulo de depresión "α" Cuando este está a **4500** metros de altura, se encuentra sobre un puerto. Desde dicho instante recorre *1950* metros, para enseguida volar horizontalmente. ¿Qué distancia debe recorrer en éste último tramo para llegar a observar al puerto con un ángulo de depresión igual a *37°*?. Se sabe que $Tg\alpha=5/12$

A)3200m B)3400m C)3600 D)3800m E)4000m

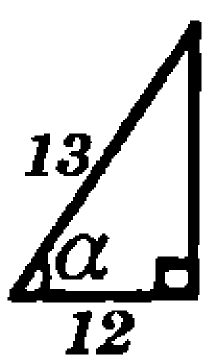
RESOLUCIÓN :



* En el ⊾ sombreado :

$$\frac{x+1950\cos\alpha}{4500-1950sen\alpha}=ctg37°$$

* Datos : $tg\alpha=\frac{5}{12°}\Rightarrow$



* Luego :

$$\frac{x+1950\times\frac{12}{13}}{4500-1950\times\frac{5}{13}}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{x+150\times12}{4500-150\times5}=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{x+1800}{3750}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=3200$$

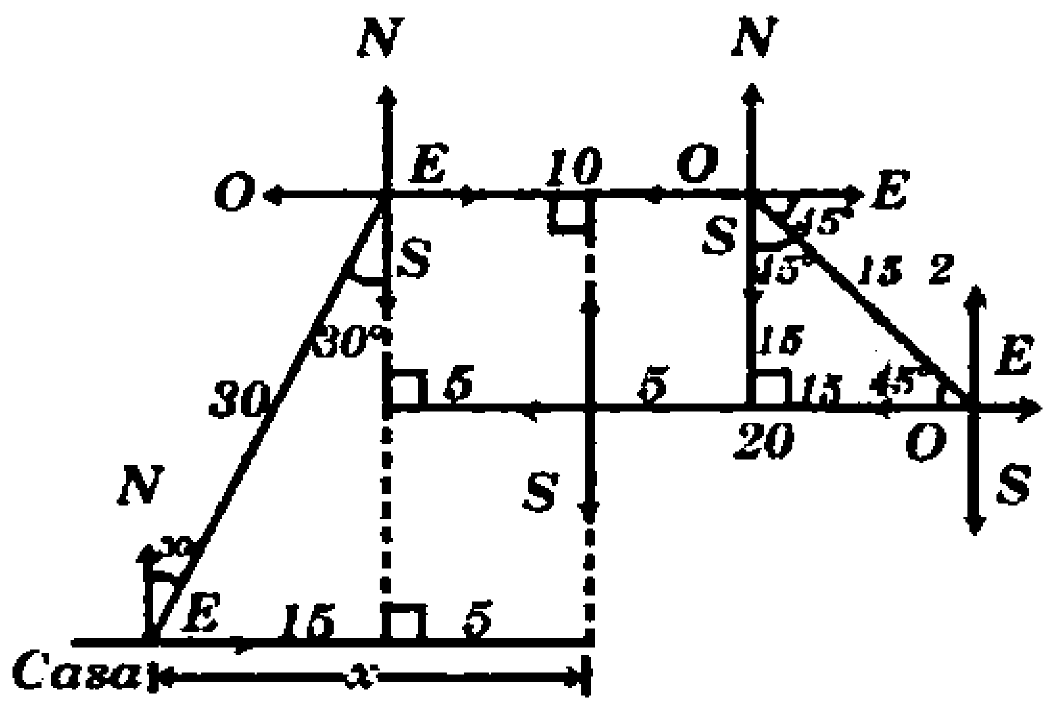
RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

Un caminante hace el siguiente recorrido : Parte de su casa caminando *30m.* con rumbo *N 30° E.* Luego, *10m*. hacia el Este; después $15\sqrt{2}m$. al sudeste; enseguida *20m*. al oeste y finalmente hacia el Sur hasta un punto que se encuentra al Este de su casa ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?.

A)30m B)25 C)20 D)15 E)10

RESOLUCIÓN :



vemos que : $x=15+5=20$

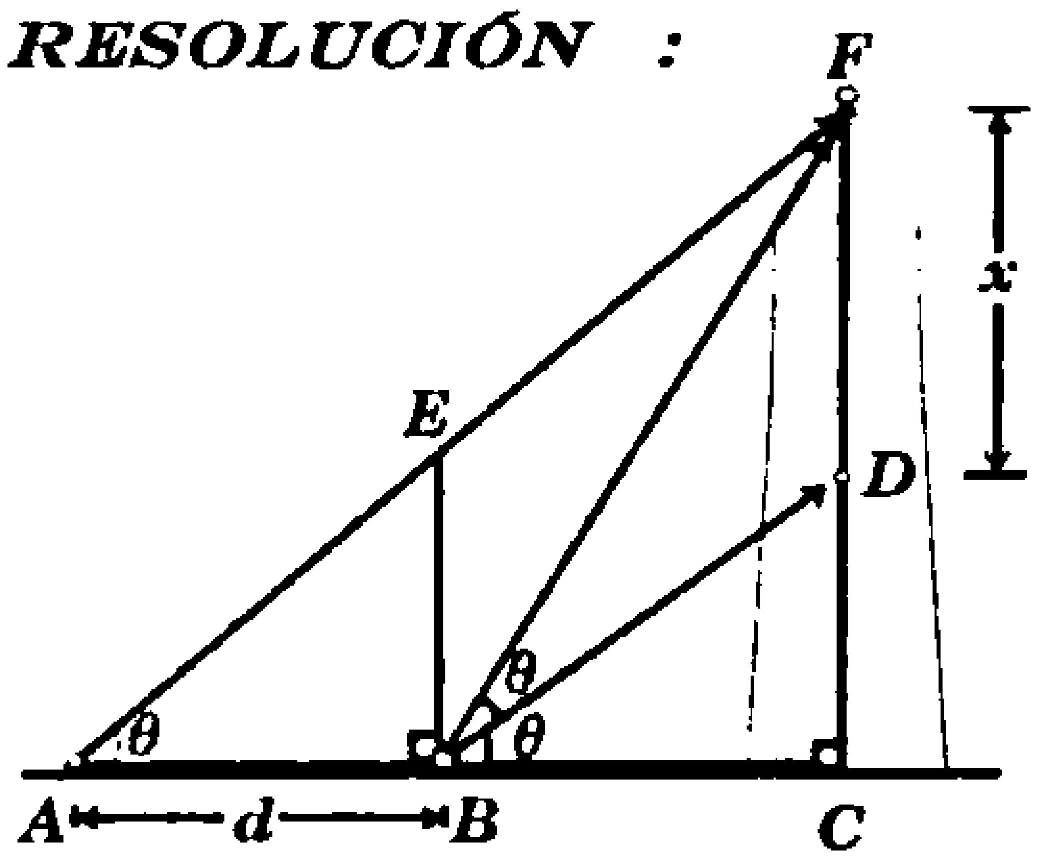
RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Una persona observa la parte más alta de un faro , con elevación θ. Si camina "*d*" metros hacia el faro, observaría al punto anterior con la elevación 2θ y a otro punto que está "*x*" metros más abajo que el primero con elevación θ. Hallar *x*.

A) $dTg\theta$ B) $dCos\theta$ C) $dSen\theta$ D) $\frac{d}{2}Csc\theta$ E) $dCtg\,2\theta$

RESOLUCIÓN :



* Se traza $\overline{BE}$ y se forma el paralelogramo *BDFE(pues* $\overline{AF}//\overline{BD}$*),* por ángulo correspondientes).

Luego : $EB=x$

$\triangle ABE:\ \frac{EB}{d}=Tg\theta\Rightarrow x=dTg\theta$

RPTA : "A"

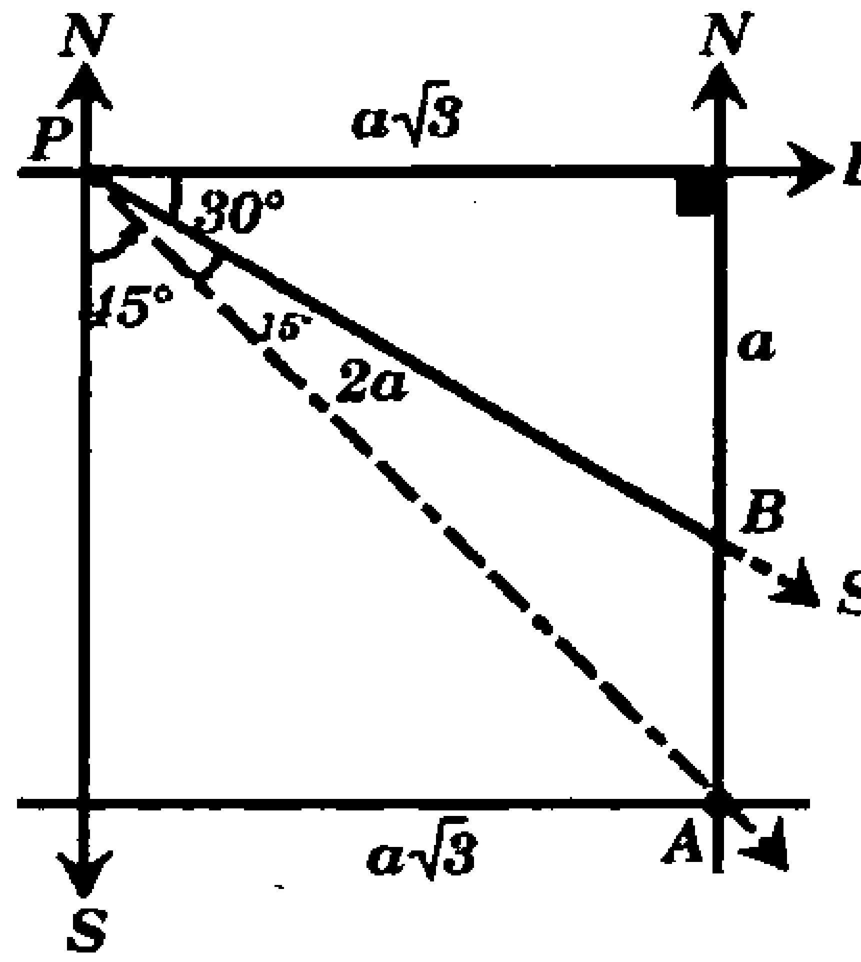
PROBLEMA 16 :

Dos embarcaciones salen de puerto al medio día y siguen las direcciones *SE* y *S60°E.* Determinar la relación que guardan sus velocidades, si en todo instante, uno se halla al Norte del otro .

A) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

RESOLUCIÓN :

Las embarcaciones son *A* y *B,* que parten de *P.*



* Velocidades :

$$\left.\begin{array}{l}V_B=e_B\times t=PB\times t\\V_A=e_A\times t=PA\times t\end{array}\right\}\frac{V_B}{V_A}=\frac{PB}{PA}$$

* $PB=2a$

$$PA=(a\sqrt{3})\sqrt{2}=a\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\frac{V_B}{V_A}=\frac{2a}{a\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

RPTA : "C"

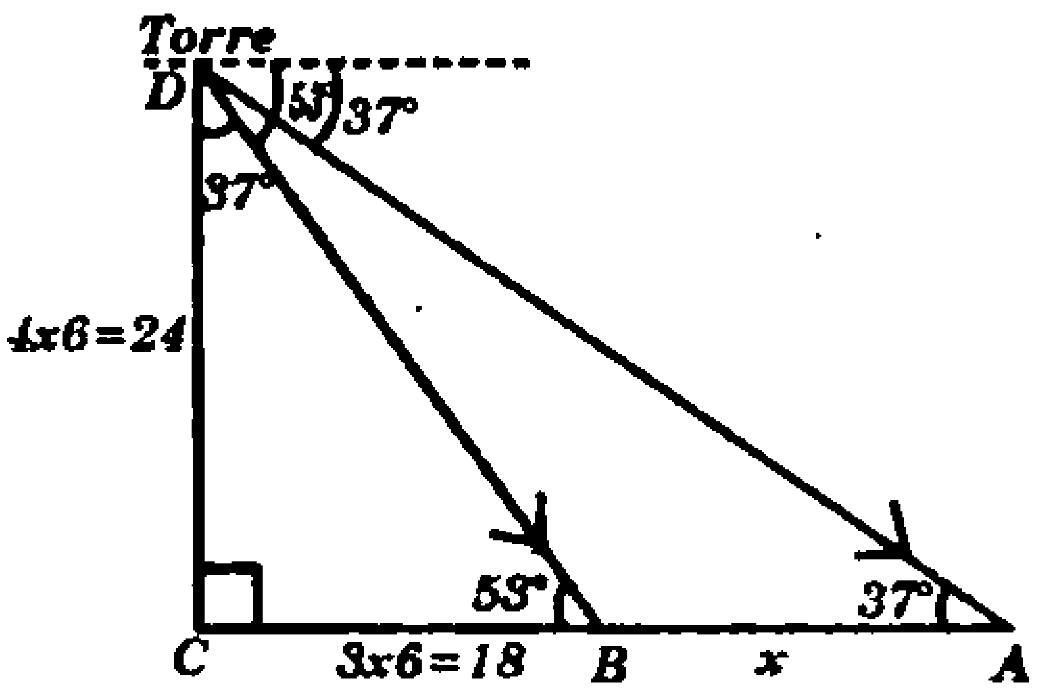
PROBLEMA 17 :

Desde el extremo superior de una torre de *24m* de altura se observan los puntos "*A*" y "*B*" con ángulos de depresión de *37°* y *53°* respectivamente, si los puntos *A* y *B* se encuentran alineados con la torre. Determinar la distancia entre dichos puntos .

A)14m B)18 C)32 D)6 E)16

RESOLUCIÓN :

* Graficamos el enunciado



* Nos piden "x"

$\triangle DCA$: $Tan\ 37° = \dfrac{24}{18+x} = \dfrac{3}{4}$

$$\frac{8}{18+x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 14$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 18 :

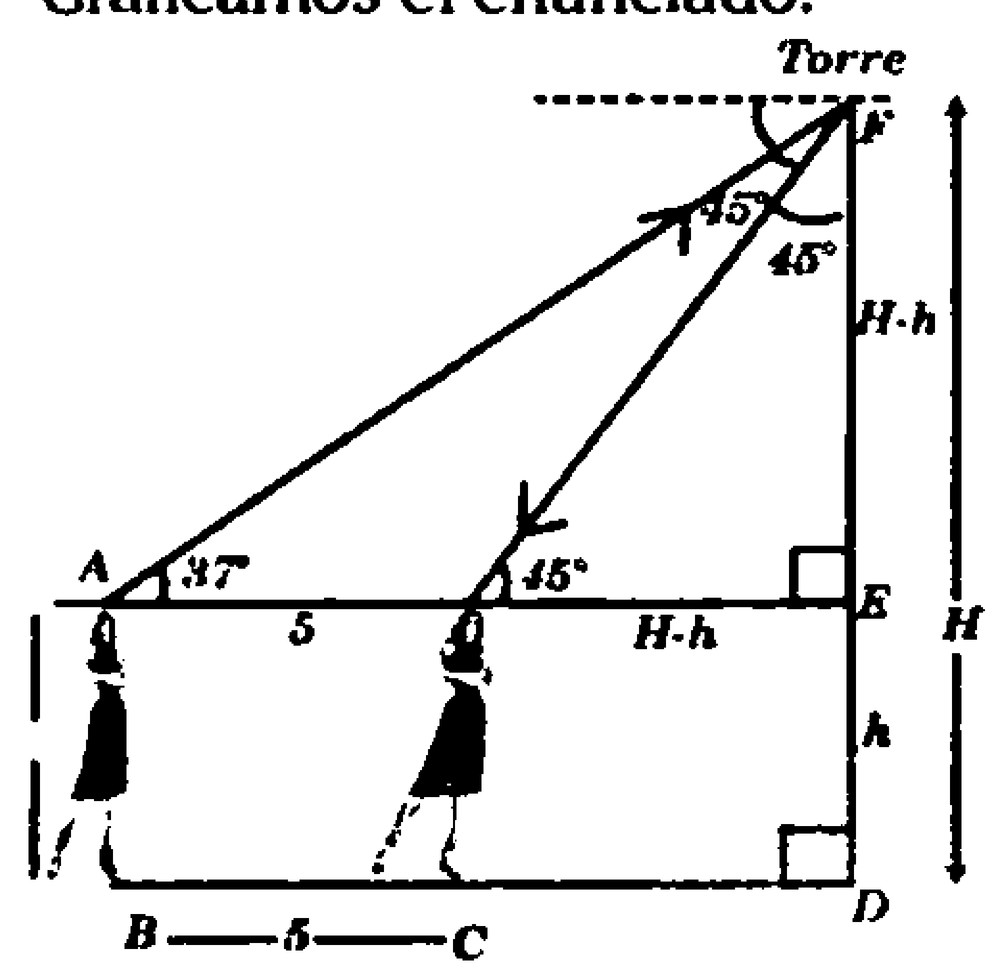
Una persona de *1,75m* de altura observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de *37°*. Después de avanzar *5m* en dirección a la torre, desde el extremo superior de la persona con un ángulo de depresión de *45°*.

Calcular la altura de la torre.

A) 15m B) $15\sqrt{2}$ C) 15,75
D) 16,75 E) 17

RESOLUCIÓN :

* Graficamos el enunciado.



* Nos piden "H"

$\triangle AEF$: $Tan\ 37° = \dfrac{H-h}{H-h+5} = \dfrac{3}{4}$

$4H - 4h = 3H - 3h + 15$

$H = 15 + h$, pero: $h = 1,75$

$\Rightarrow H = 15 + 1,75 \Rightarrow H = 16,75$

RPTA : "D"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Una persona de *2m* de estatura divisa lo alto de un poste con un ángulo de elevación de *45°*. Si la altura del poste es de *20m*. ¿A qué distancia de él se halla la persona?.

RPTA.:..

02 Desde lo alto de un edificio de *8* pisos, se ve un punto en tierra con un ángulo de depresión de *45°*. ¿Cuánto mide cada piso del edificio?, si el punto observado se halla a *24m* del mismo.

RPTA.:..

03 Desde lo alto de un árbol se ve un pajarito en tierra con un ángulo de depresión "α" $\left(ctg\alpha = \dfrac{1}{3}\right)$. ¿A qué distancia de la base del árbol se halla el pajarito; si el árbol mide *9m?*

RPTA.:..

04 Una colina está inclinada un ángulo "θ" respecto a la horizontal. A una distancia *d* del inicio de la colina y sobre ella se encuentra un objeto. ¿A qué altura se encuentra éste respecto a la horizontal?

RPTA.:..

05 Desde la parte más alta de un edificio situado a una distancia *d* de una torre se le ve la parte más alta con un ángulo de elevación α y la más baja con un ángulo de depresión β. Calcule la altura de la torre.

RPTA.:..

06 Un niño de *1,5m* de estatura; está ubicado a *6m* de una torre y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de *53°*. ¿Cuál es la altura de la torre?

RPTA.:..

07 Desde un punto en tierra se divisa una antena que se halla sobre una casa bajo un ángulo de *60°*. La parte superior de la casa de elevación de *30°*. Si la antena mide *8m*, ¿cuál es la altura de la casa?

RPTA.:..

08 Desde un punto ubicado a *24m* de una torre, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de *53°*. ¿Cuál es la altura de la torre?

RPTA.:..

09 Una persona de *2m* de estatura, ubicada a *32m* de una torre de *34m* de altura; divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de :

RPTA.:..

10 Desde lo alto de un edificio de altura *h* se divisa una piedra en el suelo con un ángulo de depresión β. ¿A qué distancia de la base del edificio, se halla la piedra?

RPTA.:..

11 Desde un punto de tierra ubicado a *10m* de una torre, se observa la parte más alta con un ángulo de elevación α. Calcule la altura de la torre; si : $tg\,\alpha = 2/5$.

A) 2m B) 3 C) 4 D) 1 E) 5

12 Un niño de *1,5m* de estatura divisa una piedra en el suelo con un ángulo de depresión de *37°*. ¿A qué distancia del niño se encuentra la piedra?

A) 1m B) 3 C) 5 D) 4 E) 2

13 Desde un punto en Tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación α. Si el observador se acerca *20m* el ángulo de elevación sería β. Calcule la altura de la torre, si además se sabe que :

$ctg\alpha - ctg\beta = 0,25$

RPTA.:..

14 Desde lo alto de un faro se obverva a un mismo lado, dos barcos con ángulos de depresión α y $\beta (\alpha < \beta)$. Si la altura del faro es de *15m*, calcule la distancia de separación de los barcos, si :
$ctg\alpha - ctg\,\beta = 0,8$

RPTA.:..

(15) Desde un punto en tierra se observa lo alto del tercer piso con un ángulo de elevación α y la parte baja del quinto piso con un ángulo de elevación β, calcule $tg\beta/tg\alpha$.

RPTA.:...

(16) Desde la parte superior de un muro de ***2 m***, se observa la base de un árbol con un ángulo de depresión de ***30º*** y con un ángulo de elevación de ***60º*** la parte superior, calcule la altura del árbol.

RPTA.:...

(17) Francisco observa la parte superior de un muro con un ángulo de elevación θ , cuando la distancia que los separa se ha reducido a la tercera parte, el ángulo de elevación se ha duplicado, ¿cuál es el valor del ángulo θ?

RPTA.:...

(18) A ***10 m*** de un poste el ángulo de elevación para lo alto de la misma es α ($ctg\alpha = 0{,}8$). Si retrocedemos ***6 m*** el ángulo de elevación es θ. Calcule: $tg\theta$.

RPTA.:...

(19) A ***20 m*** de una torre se observa su parte más alta con un ángulo de elevación α y si nos alejamos ***10 m*** el ángulo de elevación es el complemento de α.

Calcule $tg\alpha$.

RPTA.:...

(20) Calcule la altura de un árbol. Si el ángulo de elevación de su parte más alta aumenta de ***37º*** hasta ***45º***, cuando el observador avanza ***3 m*** hacia el árbol.

RPTA.:...

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) Desde un punto en el terreno se observa la parte alta de un árbol con un ángulo de elevación de ***30º***, si nos acercamos ***40m*** hacia él, notaremos que el nuevo ángulo de elevación es el complemento del anterior . Hallar la altura de dicho árbol .

A) 20m B) $20\sqrt{3}$ m C) 40m D) 10m E) 10 3m

(02) Desde la parte superior de una torre se observan dos piedras en el suelo con ángulos de depresión de ***37º*** y ***53º*** respectivamente: si la altura de la torre es de ***12m*** y las piedras está en línea recta y a un mismo lado de la base de la torre. Calcular la distancia entre las piedras.

A)16m B)15 C)12 D)9 E)7

(03) Un árbol proyecta una sombra que es uno menos que su altura. Si el ángulo de depresión es ***53°***. Calcule la proyección de la sombra.

A)3μ B)5μ C)3μ D)4μ E)2μ

(04) Desde la parte superior de un campanario los ángulos de depresión de la parte más alta y baja de un poste de ***8m*** de altura son ***30°*** y ***45°*** respectivamente. ¿Cuál es la altura del campanario?.

A)$2(3\sqrt{3})$ B)$4(3-\sqrt{3})$m C)$4(3+\sqrt{3})$m D)$2(3-\sqrt{3})$m E)$4(3+\sqrt{2})$m

(05) Una hormiga observa la copa de un árbol con un ángulo de elevación de ***37º***, luego se acerca ***7m*** y observa el mismo punto con un ángulo de elevación de ***53°***, calcular la altura del árbol.

A)10m B)12 C)14 D)16 E)20

(06) Un enano tiene una estatura menor en un centímetro que su sombra, una hormiga situada en el extremo de su sombra.Mira la cabeza de ese enano ,con un ángulo de elevación tal que su seno vale ***119/169.*** Calcular dicha estatura en metros .

A)1.14m B)1,16m C)1,18m D)1,19 E)1,20m

(07) En la frontera limítrofe con el Ecuador (de superficie horizontal) está izada una bandera peruana en la parte superior de un muro de ***4,5m*** de altura. Al otro lado de la línea divisoria se encuentra un soldado el cual se observa la parte alta del muro y el asta de la bandera con ángulo de elevación α y 2α respectivamente.Hallar la distancia del soldado al pie del muro sabiendo que el asta de la bandera mide ***7,5m .***

A)9m B)7 C)10 D)12 E)6

(08) El ángulo de elevación a la parte superior de un muro es ***68°11'*** sobre dicho muro se encuentra verticalmente el asta de una bandera de ***7,2m*** de longitud la cual forma un ángulo de ***2º 10'*** a la vista del observador. Calcular la altura del muro sabiendo que :

$Tg70°21' = 2{,}8$ y $Ctg68°11' = 0{,}4$

A)40m B)50 C)60 D)70 E)80

(09) Una persona de ***30m*** de estatura observa la parte superior e inferior sobre un pedestal con elevación angular de ***60°*** y ***37º*** respectivamente. Hallar la longitud del pedestal si la estatua mide .

$(20\sqrt{3}+15)m$

A) 15m B) 17m C) 20m D) 27m E) 30m

(10) Un farolero situado a ***1200m*** sobre el nivel del mar observa un barco con un ángulo de depresión ***x.*** Seis minutos más tarde observa en la misma dirección al barco ahora con un ángulo de depresión ***"y".*** Calcular la velocidad del barco en ***Km/h*** sabiendo que :

$Ctgx = 2{,}4142\ ,\ Ctgy = 0{,}4142$

A)20Km/h B)22Km/h C)24Km/h D)25Km/h E)28 Km/h

(11) La torre está al pie de una colina cuya inclinación respecto al plano horizontal es de ***9°***, desde un punto de la colina ***12m*** arriba , la torre subtiene un ángulo de ***54º***. ¿Cuál es su altura ?

A) 12(Sen9º+Cos9º)
B) 12(Sen9º – Cos9º)

C) 8(Sen9° + Cos9°
D) 12 (Sen9° +2Cos9°)
E) 12(2Sen9°+ Cos9°)

(12) El camino hacia la cima de una colina está inclinada un ángulo a respecto a la horizontal. Si desde la cima de divisa un punto del plano horizontal que pasa por la base de la colina con un ángulo de depresión θ, calcular la altura de la colina si dicho punto se encuentra a **180m** de la base de la colina. Además :

$$Ctg\alpha=\frac{3}{5}\wedge Ctg\theta=\frac{12}{5}$$

A) 100m B) 120m C) 150m
C) 200m E) 220m

(13) Piero observa a un basquetbolista con un ángulo de elevación igual a **"4x"**. Retrocede luego una distancia igual a la estatura del basquetbolista observando éste ahora a Piero con un ángulo de depresión de **"x"**. Sabiendo que las estaturas de ambos están en la relación de *2* a *1*. Calcular **"x"**.

A) 7°30' B) 15° C) 18°30'
D) 22°30' E) 26°30'

(14) Un alumno de **2m** de estatura observa la parte más alta de una torre con un ángulo de elevación θ. Luego se acerca **14m** y observa nuevamente al mismo punto con un ángulo de elevación que es el complemento de θ. Calcular la distancia que le falta recorrer para llegar a la torre si se cumple :

$$Sec7(\theta-10°)-Csc3(4°-\theta)=0$$

A) 6m B) 18 C) 24 D) 26 E) 30

(15) Allison observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación **60°**, pero si se acerca hacia la torre una cierta distancia, el nuevo ángulo de elevación es **"θ"** y finalmente si se acerca hacia la torre la misma distancia que la anterior al ángulo de elevación es **75°**.

Calcular *Tg* **"θ"**.

A) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ *B)* $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ *C)* $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ *E)* $\frac{\sqrt{6}}{4}$

(16) Desde un punto situado sobre una colina se observa que el ángulo de elevación de su cima es de **45°** después de caminar **500m** hacia el observador de **30°** con la horizontal, el observador encuentra en el ángulo de elevación de la cima de **75°**. ¿A qué altura está la cima respecto al primer punto de observación?.

A) 250 B) 500 C) $250\sqrt{3}$

D) $500\sqrt{3}$ *E)* $250\sqrt{6}$

(17) La altura de una colina es de **990m** sobre el nivel del plano horizontal, desde un punto *A* de dicho plano de elevación angular de la cima de **60°** un globo se eleva desde el punto *A* y asciende verticalmente con velocidad uniforme, luego de **5min.** la elevación angular de la cima para un observador que ésta en el globo es de **30°**. Hallar la velocidad del globo en **Km/h**.

A) 6,6 B) 1,32 C) 7,92
D) 6,8 E) 4,95

(18) Desde tres puntos no alienados y ubicados sobre el plano horizontal, se observa de un mismo instante una paloma que se encuentra a **60m** de altura, con ángulo de la elevación cuya suma de senos es **0,47** y con visuales proporcionales a los números **3; 4** y **5.** Determine la suma de las cosecantes de estos tres ángulos de elevación.

A) 47 B) 37 C) 27 D) 20 E) 4,95

(19) Desde las bases de dos edificios de altura *h* y *H (H > b)* se observa las partes superiores de los mismos con ángulos de elevación "α" y "θ". Luego desde el punto medio entre las bases se vuelve a observar las partes superiores de los edificios con un ángulo de elevación que son complementarios ,calcular el valor de : $M = Ctg\alpha\, Ct\theta$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1 D) 2 E) 4

(20) Desde un punto en tierra ubicado a **4m** de un poste ,se divisa su parte alta con un ángulo de elevación de **37°**. ¿Cuál es la altura del poste?.

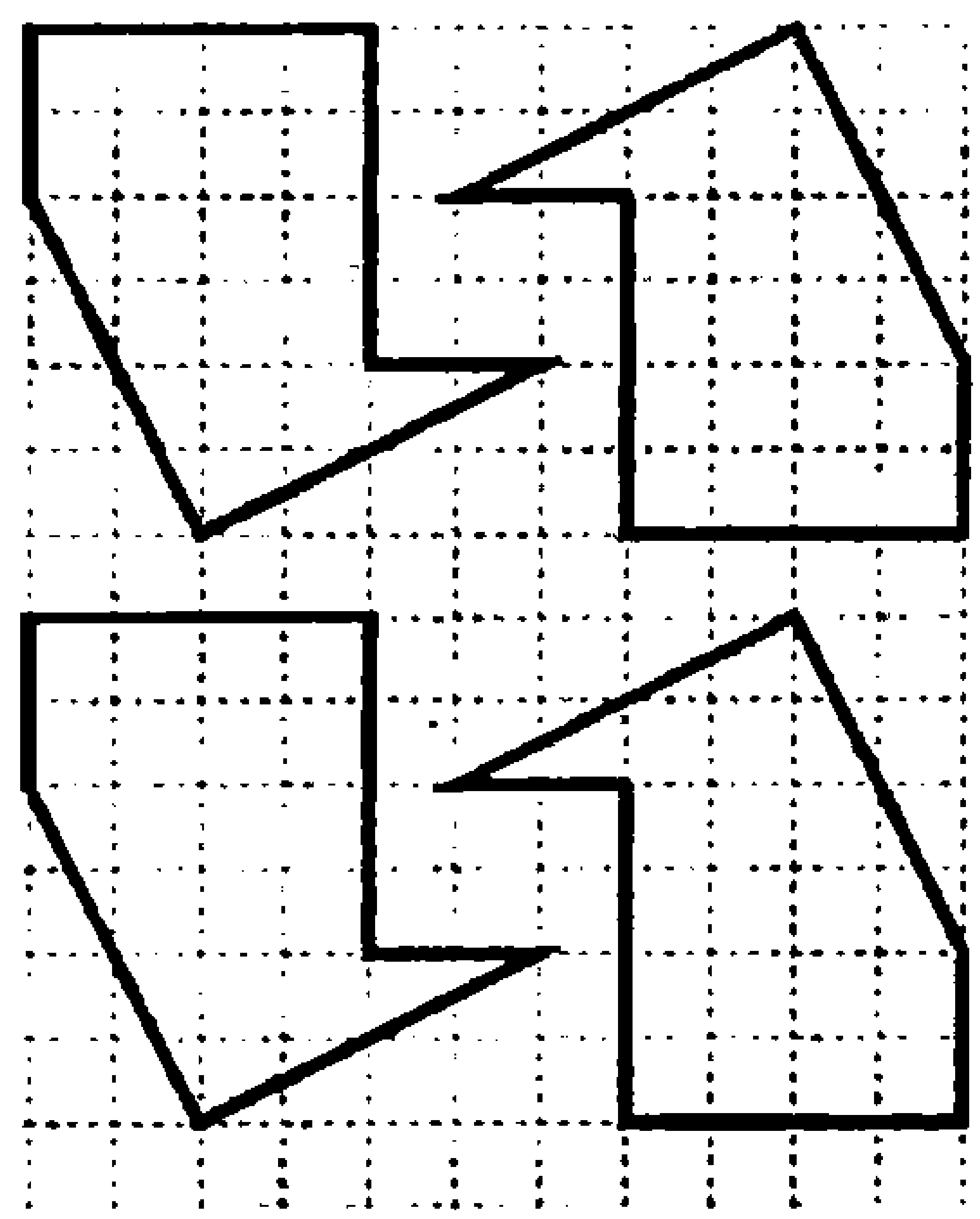
A) $\frac{8}{3}m$ *B) 4 C) 3 D) 6 E) 9*

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)B	2)E	3)D	4)C	5)B	6)D	7)A	8)C	9)A	10)C
11)A	12)A	13)C	14)B	15)B	16)C	17)C	18)D	19)C	20)C

RETO :

Acomode las fichas de modo de formar una cruz. Las piezas pueden rotarse.

* Acomode las fichas de modo de formar un cuadrado. Las piezas pueden rotarse.



Este es un ejemplo de problema de disección, donde hay que cortar una forma geométrica en la menor cantidad posible de piezas que pueden ser reacomodadas para formar una nueva forma.

OBJETIVOS :

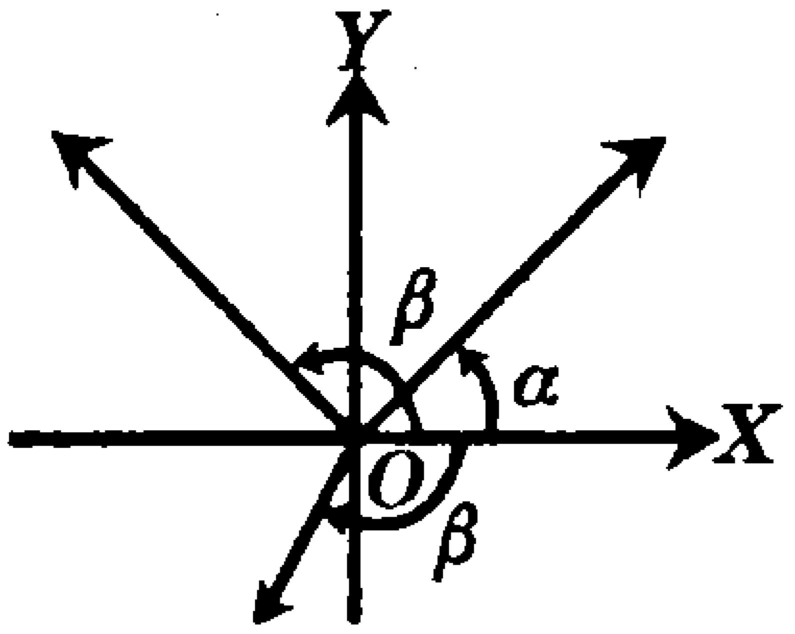
- *El objetivo principal del capítulo, es calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo, así como reconocer los ángulos en posición normal.*
- *Adaptar la teoría a determinadas situaciones geométricas.*
- *Reconocer los signos de las razones trigonométricas, según la posición del ángulo.*
- *Realizar operaciones con las razones trigonométrica de ángulos en posición normal.*
- *Reconocer los ángulos cuadrantales.*
- *Calcular los valores de las razones trigonométricas de ángulos cuadrantales y coterminales.*
- *Reconocer propiedades para los ángulos cuadrantales y coterminales.*

ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Un ángulo trigonométrico está en *POSICIÓN NORMAL* si su vértice esta en el origen de coordenadas y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje *X*. Si el lado final esta en el segundo cuadrante, el ángulo se denomina *ÁNGULO DEL SEGUNDO CUADRANTE* y análogamente para los otros cuadrantes. Si el lado final coincide con un eje se dice que el *ÁNGULO NO PERTENECE A NINGÚN CUADRANTE.*

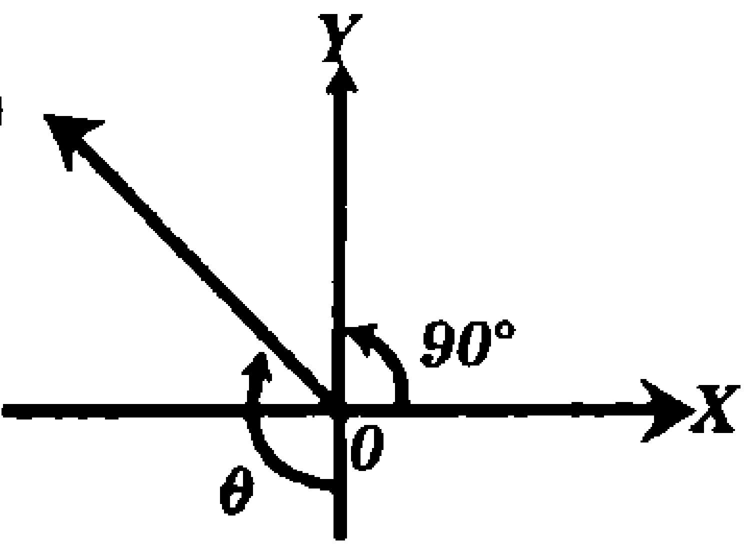
EJEMPLOS :

1)



$\alpha \in I$
$\beta \in II$
$\theta \in III$

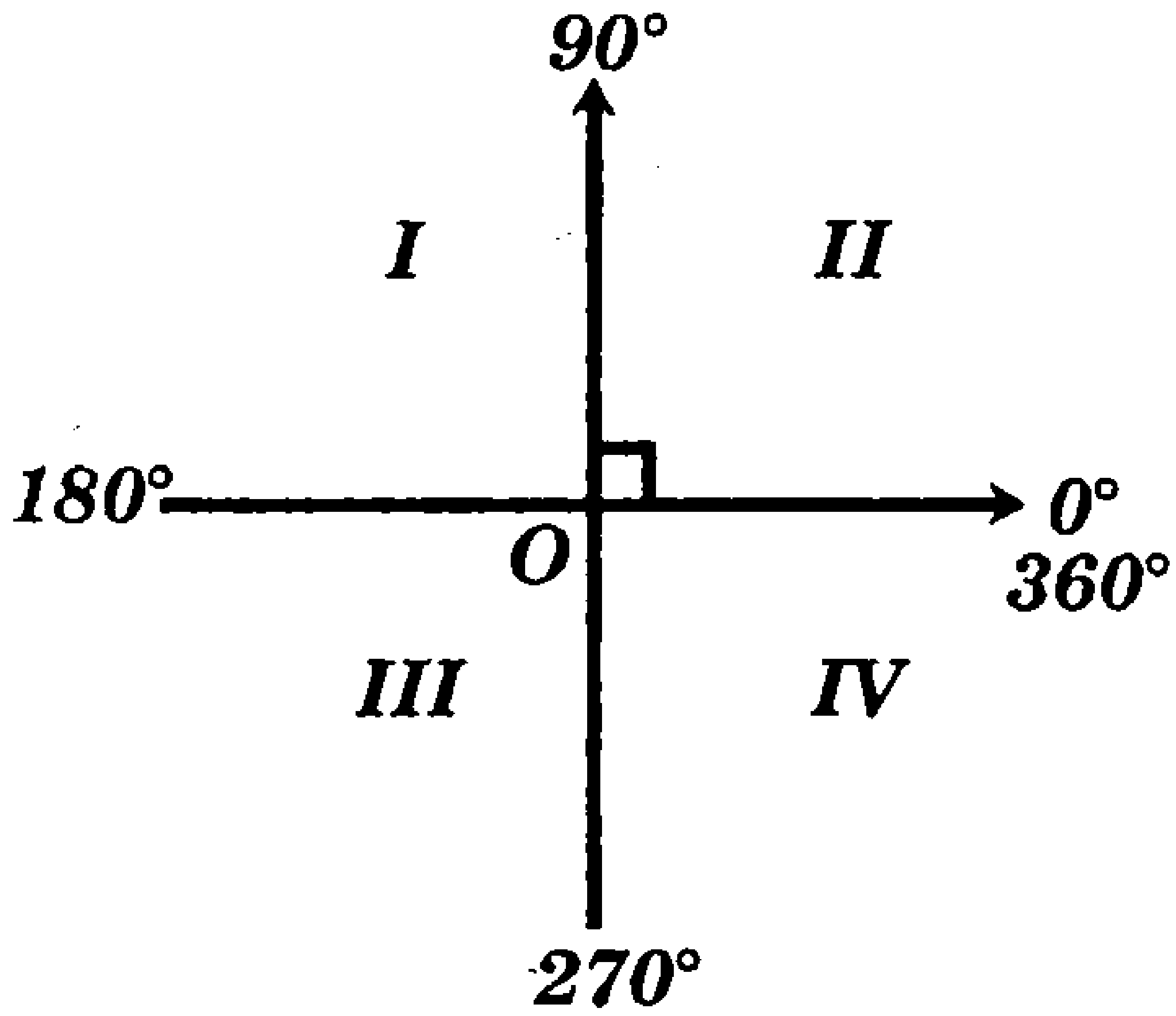
2)



90° ∈ a ningún cuadrante
θ no esta en posición normal

ÁNGULO CUADRANTAL

Un ángulo en posición normal se llamará **CUADRANTAL** cuando su lado final coincide con un eje. En consecuencia no pertenece a ningún cuadrante. Los principales ángulos cuadrantes son: ***0°, 90°, 180°, 270°*** y ***360°***, que por "***comodidad gráfica***" se escribirán en los extremos de los ejes.



PROPIEDAD :

Si θ es un ángulo en posición normal positivo y menor que una vuelta entonces se cumple :

Si	θ	∈	I	⇒	0	<	θ	<	90°
Si	θ	∈	II	⇒	90°	<	θ	<	180°
Si	θ	∈	III	⇒	180°	<	θ	<	270°
Si	θ	∈	IV	⇒	270°	<	θ	<	360°

EJEMPLO 1 :

Si $\theta \in III$, En que cuadrante esta $2\theta/3$?

RESOLUCIÓN :

* Si $\theta \in III$ $180° < \theta < 270°$

$$\Rightarrow 60° < \frac{\theta}{3} < 90° \Rightarrow 120° < \frac{2\theta}{3} < 180°$$

$\Rightarrow$ Como $\frac{"2\theta"}{3}$ esta entre *120°* y *180°*, entonces: pertenece al "***II Cuadrante***"

EJEMPLO 2 :

Si $\alpha \in II$ A que cuadrante pertenece ?

$$\frac{\alpha}{2}+70^\circ$$

RESOLUCIÓN :

* Si $\alpha \in II \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\Rightarrow 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow 115^\circ < \frac{\alpha}{2}+70^\circ < 160^\circ$$

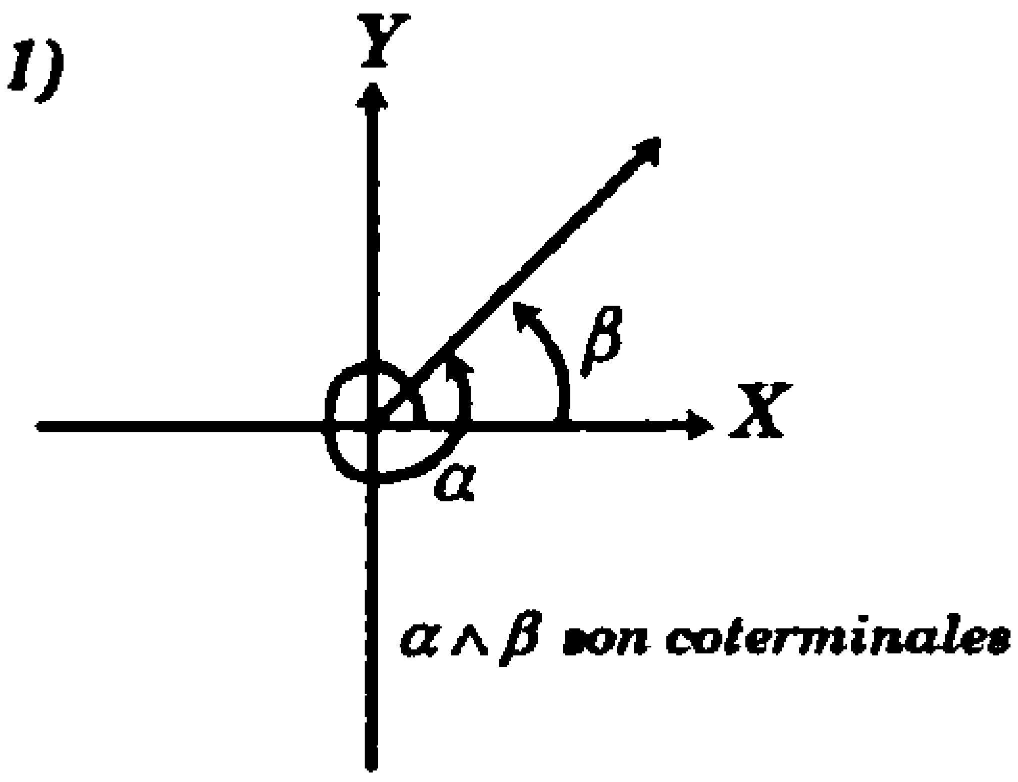
Como $\alpha/2 + 70^\circ$ está entre 115° y 160°, entonces pertenece al ***"II Cuadrante"***

ÁNGULOS COTERMINALES

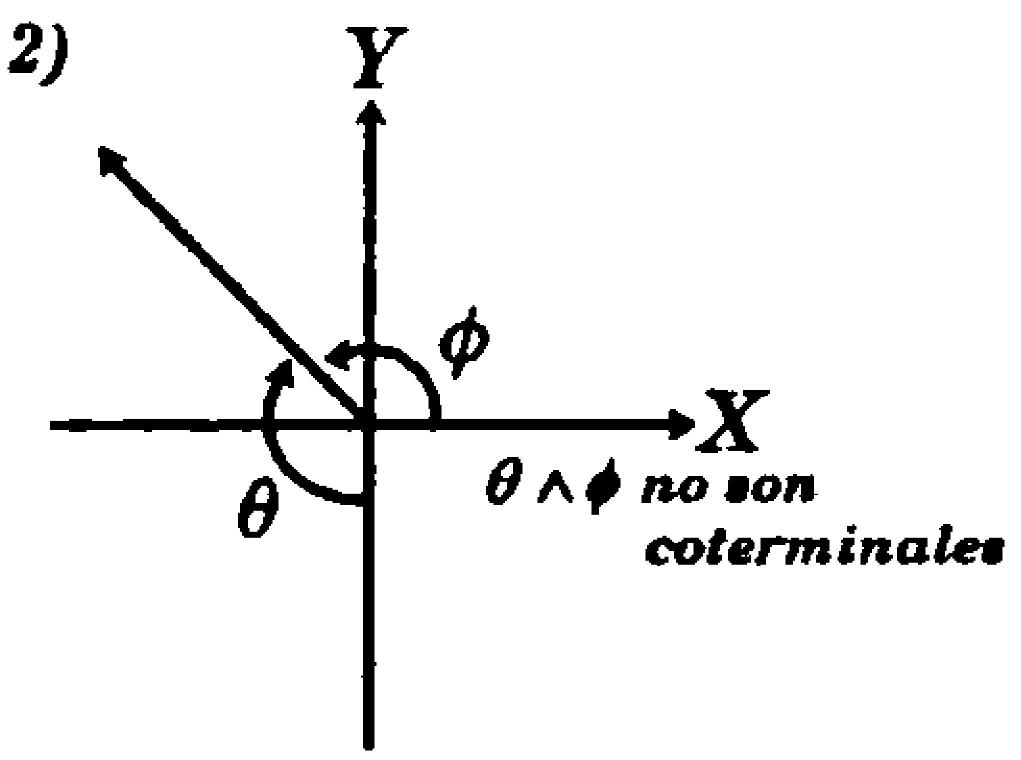
Dos ángulos en posición normal se llama ***COTERMINALES o COFINALES*** si tienen el mismo lado final y mismo lado inicial.

EJEMPLOS :

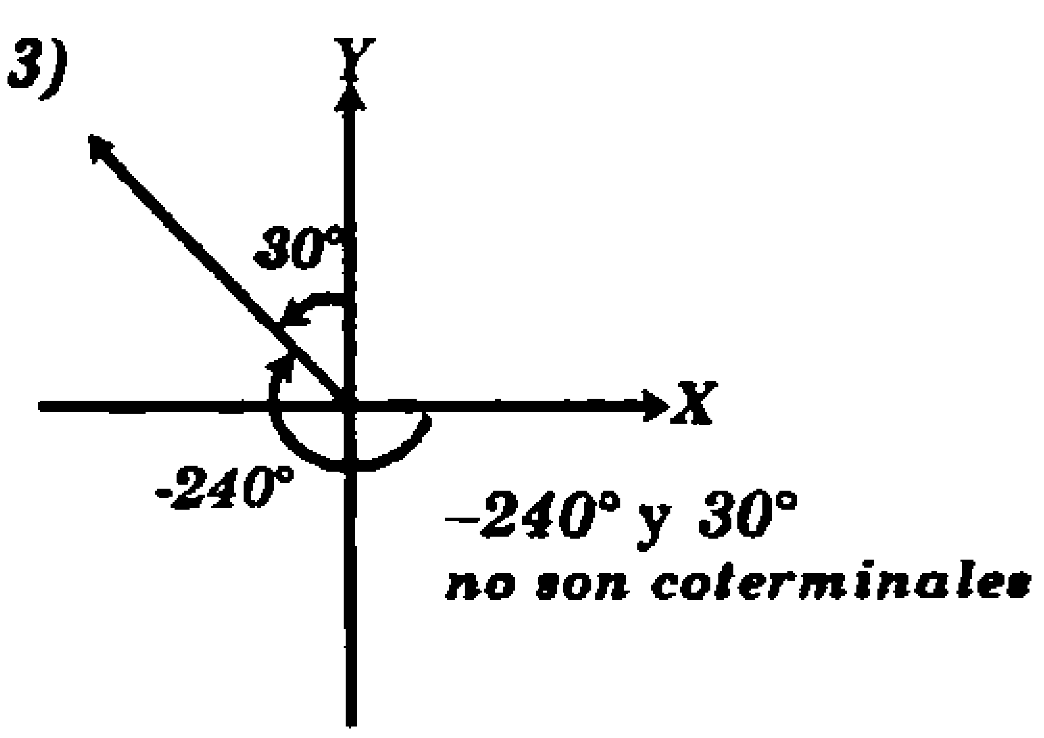
1)



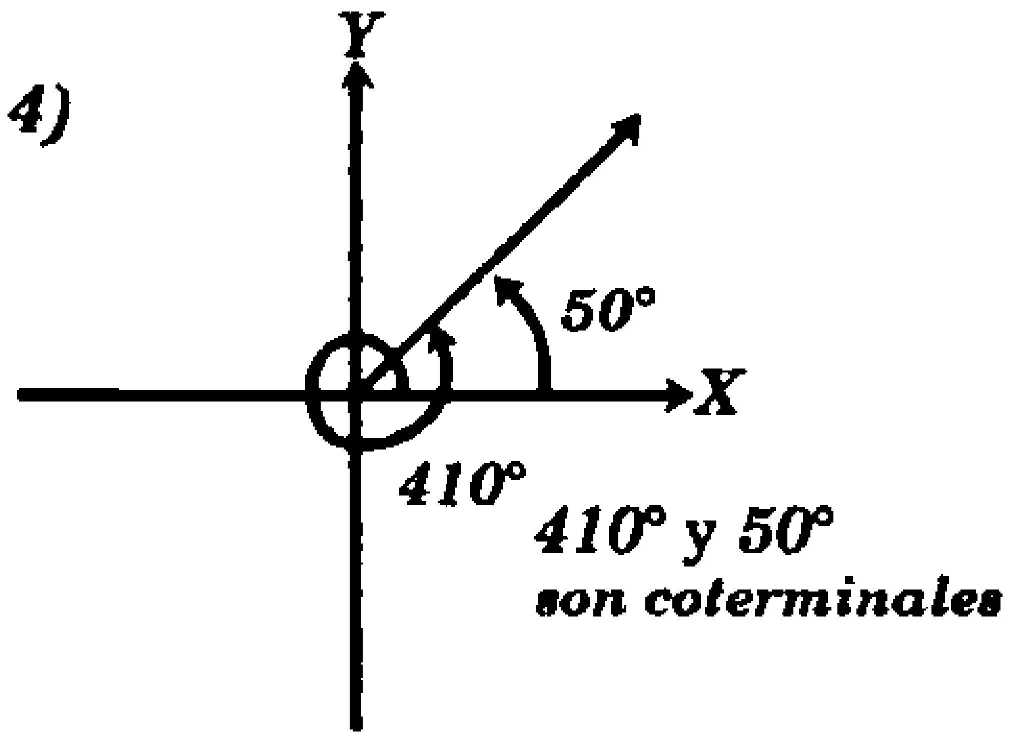
2)



3)



4)



PROPIEDADES :

La diferencia de las medida de dos ángulos coterminales siempre nos dará como resultado un número entero positivo de vueltas.

Si $\alpha \wedge \beta$ son coterminales tal que $\alpha > \beta$ entonces se cumple :

$$\boxed{\alpha - \beta = k(360^\circ)\ ;\ k \in Z^+}$$

EJEMPLOS :

1) 750° y 30° coterminales porque

$$750^\circ - 30^\circ = 720^\circ \ \ (2\ vueltas)$$

2) 330° y -30° coterminales porque

$$330^\circ - (-30^\circ) = 360^\circ \ \ (1\ vuelta)$$

3) 7π y 3π coterminales porque

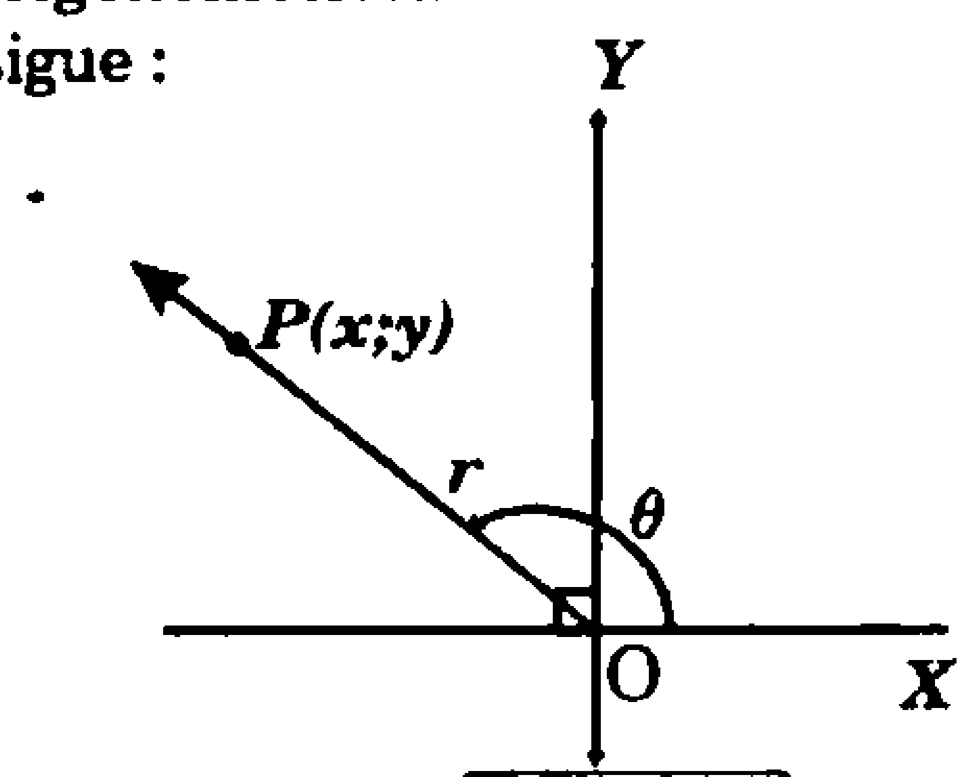
$$7\pi - 3\pi = 4\pi \ \ (2vueltas)$$

4) 450° y -90° coterminales porque

$450^\circ-(-90^\circ)=540^\circ$ No tiene vueltas exactas).

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Si θ es un ángulo cualquiera en posición normal , sus razones trigonométricas se definen como sigue :



$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\begin{cases} x = abscisa \\ y = ordenada \\ r = radio\ vector \end{cases}$$

$$\boxed{Sen\,\theta = \frac{ordenada}{radio\ vector}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{radio\ vector}{ordenada}}$$

$$\boxed{Cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{abscisa}{radio\ vector}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Sec\,\theta = \frac{r}{x} = \frac{radio\ vector}{abscisa}}$$

$$\boxed{Tan\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{ordenada}{abscisa}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Ctg\theta = \frac{r}{y} = \frac{abscisa}{ordenada}}$$

OBSERVACIONES :

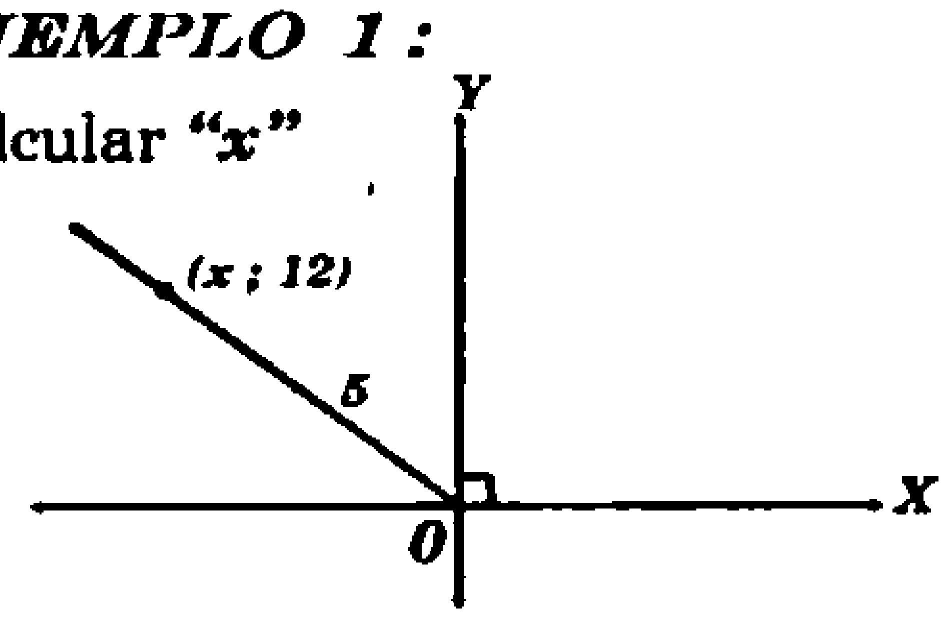
1) En verdad ***"r"*** es la longitud de radio vector ***OP*** , por cuestiones practicas vamos a denominar a ***"r"*** como vector.

2) Para RECORDAR las definiciones anteriores, utilice el siguiente cambio:

CATETO OPUESTO	= ORDENADA
CATETO ADYACENTE	= ABSCISA
RADIO VECTOR	= HIPOTENUSA

EJEMPLO 1 :

Calcular ***"x"***



RESOLUCIÓN :

* Aplicamos la fórmula

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

* Que es lo mismo $r^2 = x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

*Reemplazando ***"y"*** por ***12*** ^ ***"r"*** por ***13*** en la igualdad anterior.

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + 144 = 169$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

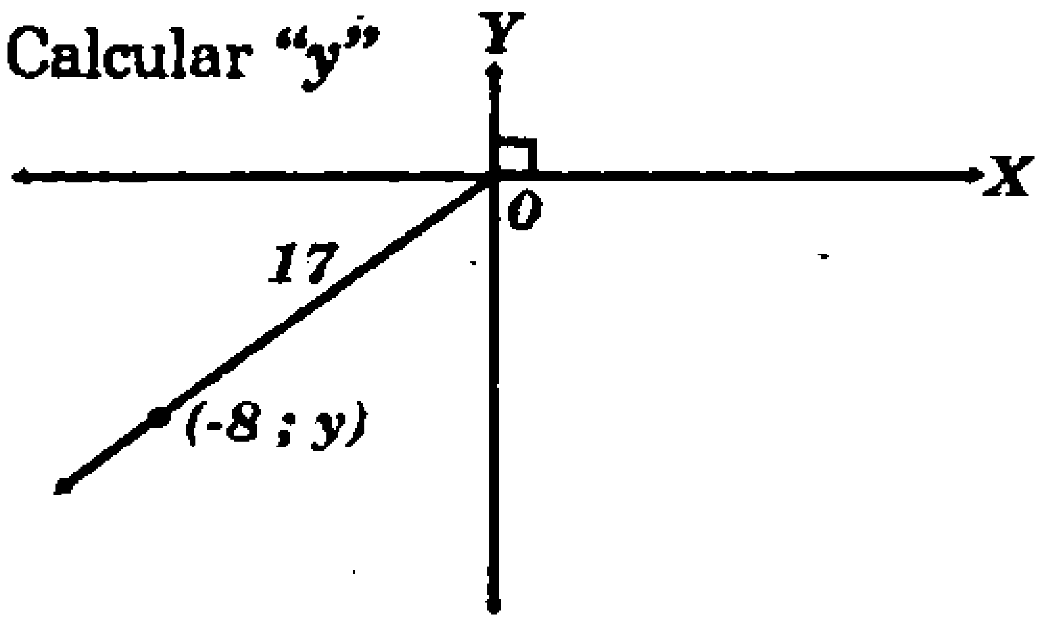
* Como ***"x"*** esta en el segundo cuadrante entonces tiene que ser

negativo.

$$\Rightarrow x=-5$$

EJEMPLO 2:

Calcular "*y*"



RESOLUCIÓN:

*Analogamente aplicamos

$$x^2+y^2=r^2$$

* Reemplazamos "*x*" por *8* ^ "*r*" por *17* en la igualdad anterior.

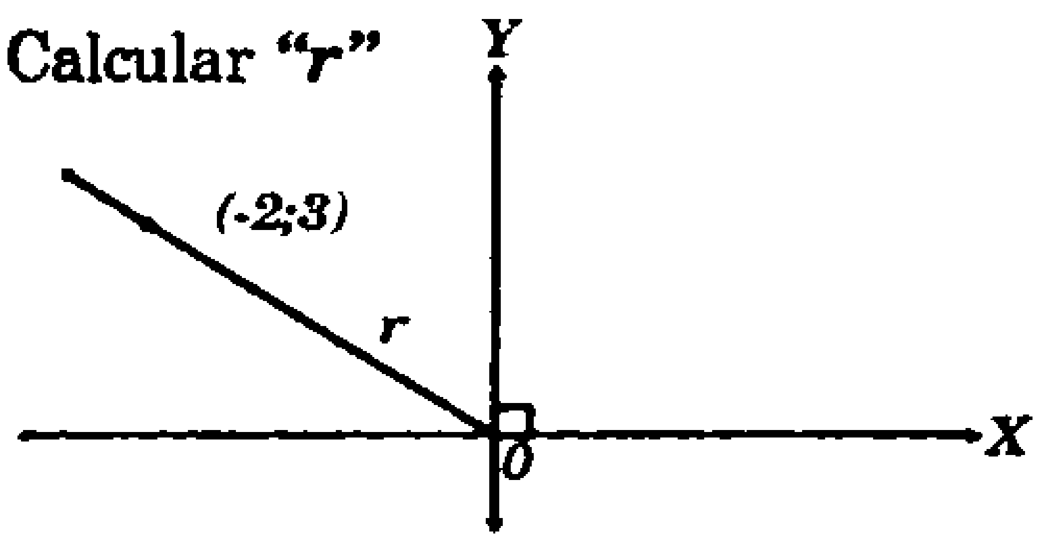
$$(-8)^2+y^2=17^2 \Rightarrow 64+y^2=289$$

$$\Rightarrow y^2=225 \Rightarrow y=\pm 15$$

* Como "*y*" esta en el tercer cuadrante entonces tiene que ser negativo: $y=-15$

EJEMPLO 3:

Calcular "*r*"



RESOLUCIÓN:

*Analogamente aplicamos

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

* Reemplazamos "*x*" por -2 ∧ "*y*" por *3* en la igualdad anterior.

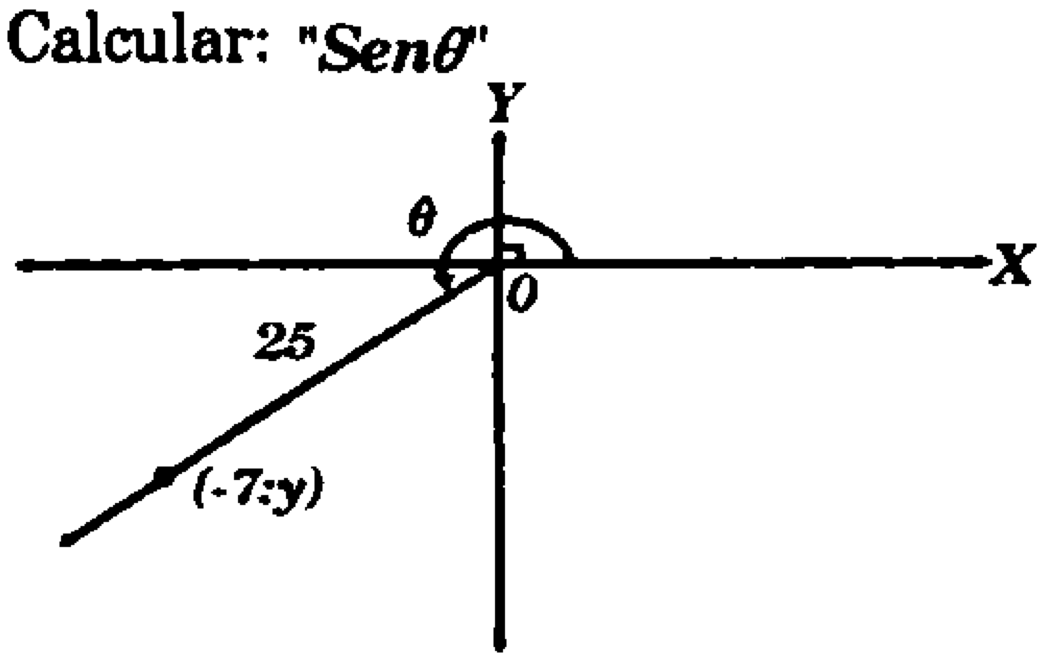
$$r=\sqrt{(-2)^2+3^2}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

* ***NOTA:*** "*r*" es siempre ***POSITIVO*** por ser ***LONGITUD***

EJEMPLO 4:

Calcular: "*Senθ*"



RESOLUCIÓN:

* Aplicamos el Ejemplo *#2* y obtenemos $y=-24$

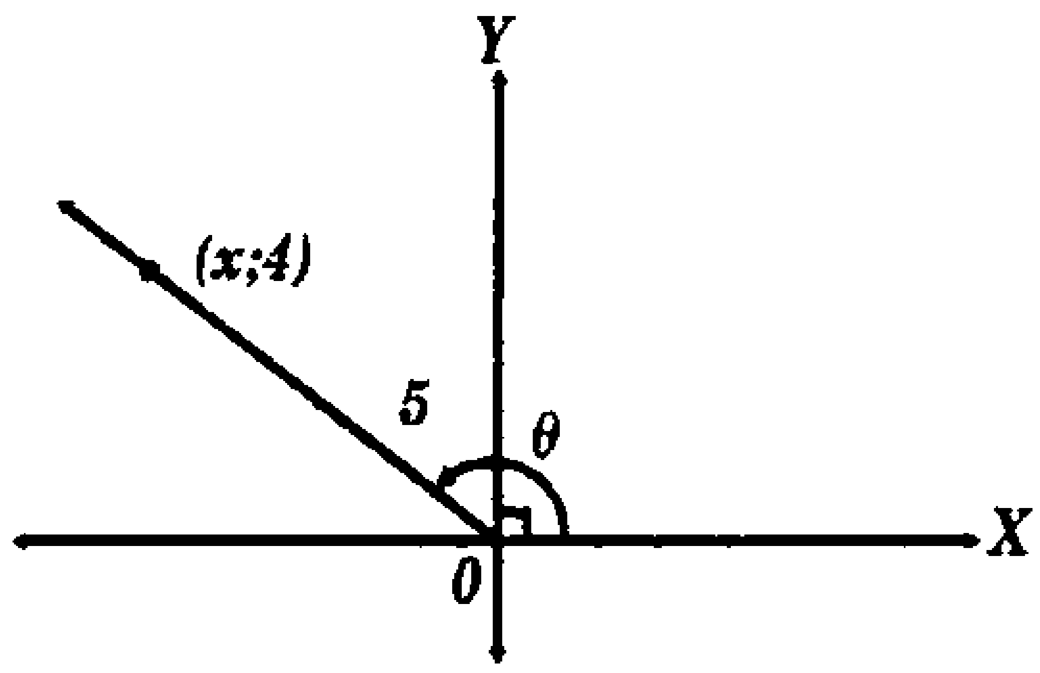
* Del gráfico obtenemos los valores de $x=-7 \wedge r=25$

* Nos piden $Sen\theta$, aplicamos la definición

$$Sen\theta=\frac{y}{r}=\frac{-24}{25}$$

EJEMPLO 5:

Calcular: "*Cosθ*"



RESOLUCIÓN:

*Aplicamos el ejemplo *#1* obtenemos $x=-3$

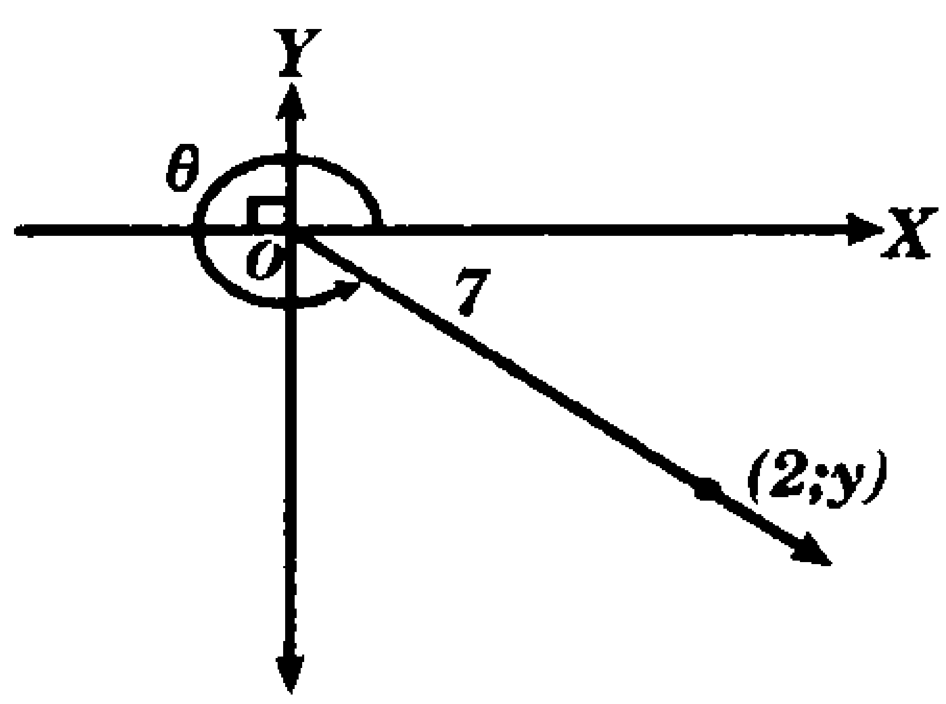
* Del gráfico obtenemos los valores de $y=4 \wedge r=5$

* Nos piden $Cos\theta$, aplicamos la definición.

$$Cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}$$

EJEMPLO 6:

Calcular: "*Tan α*" .



RESOLUCIÓN:

* Aplicamos el ejemplo *#2* y obtenemos $y=-3\sqrt{5}$

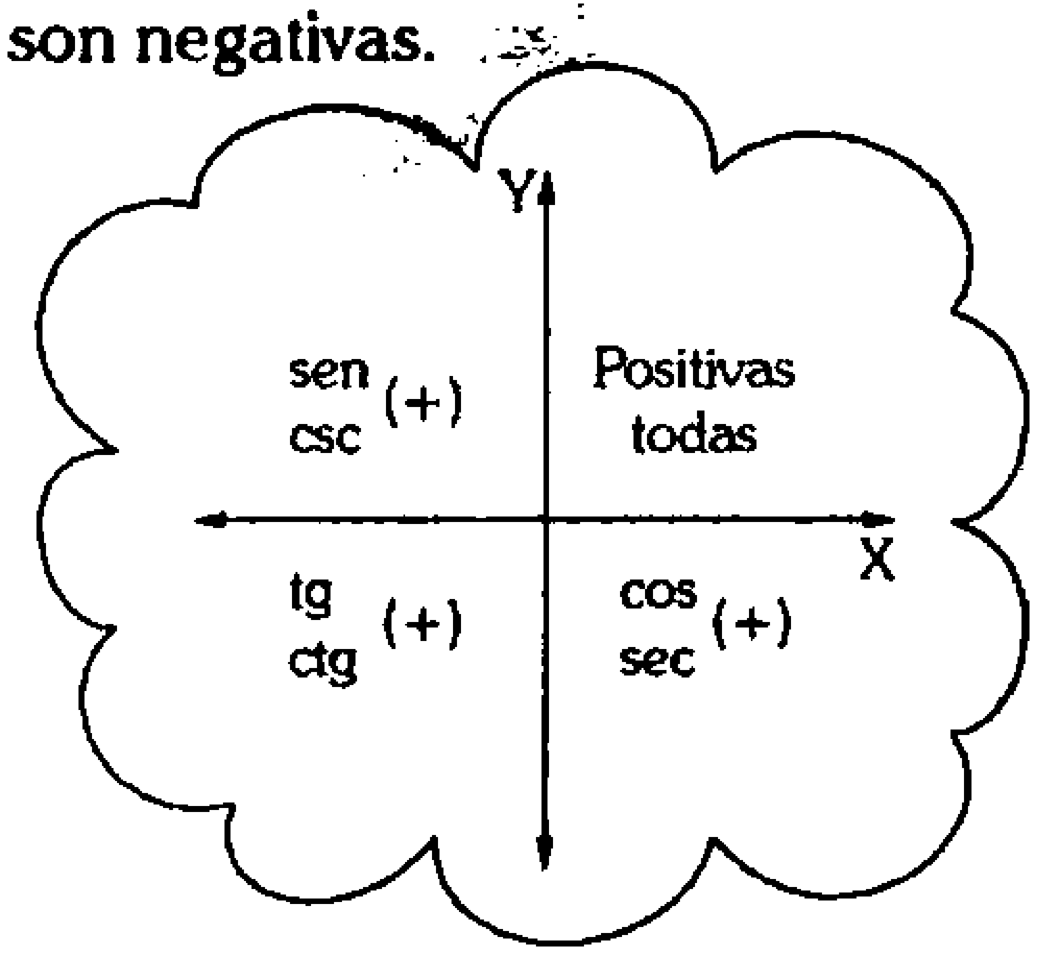
* Del gráfico obtenemos los valores de $x=2 \wedge r=7$

* Nos piden $Tan\,\theta$, aplicamos la definición.

$$Tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-3\sqrt{5}}{2}$$

SIGNOS DE LAS R.T. EN CADA CUADRANTE

En los ejemplos anteriores algunas razones trigonométricas resultaron positivas y otras negativas. Esto dependerá del cuadrante en el que se ubique el ángulo considerado, en el cuadro adjunto se aprecia un criterio para recordar los signos; entendiéndose que están indicadas las que son positivas y sobreentendiendo que las no mencionadas en cada cuadrante, son negativas.



PRIMER CUADRANTE:

En el primer cuadrante ***TODAS*** las ***R.T.*** son ***POSITIVAS***, porque ***LA ABSCISA (x)***, la ordenada ***(y)***, el radio vector ***(r)*** son positivos.

SEGUNDO CUADRANTE:

En el segundo cuadrante el ***SENO*** y la ***COSECANTE son positivas*** por la ordenada ***(y)***, el radio vector ***(r)*** son positivas.Las demás ***R.T.*** son negativas.

TERCER CUADRANTE:

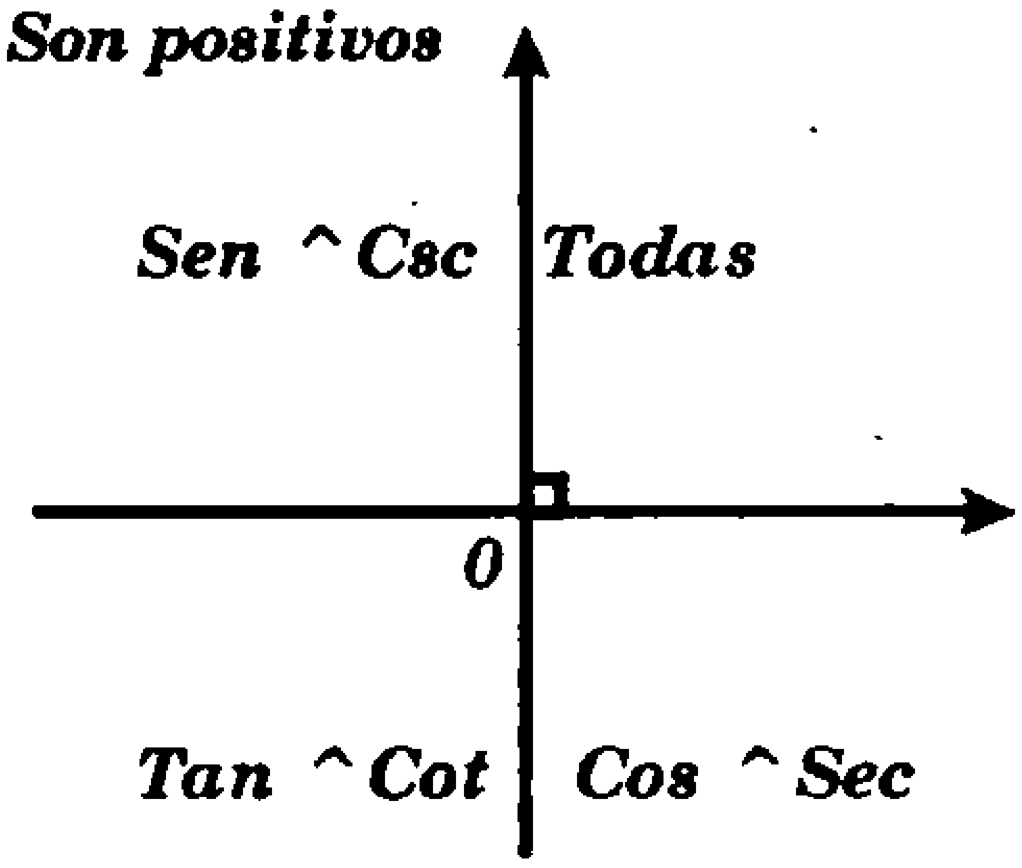
En el tercer cuadrante la ***TANGENTE*** y ***COTANGENTE*** son ***positivas*** por la abscisa ***(x)***, la ordenada ***(y)*** son negativas. La demás ***R.T***: son negativas.

CUARTO CUADRANTE:

En el cuarto cuadrante el ***COSENO*** y la ***SECANTE*** son ***positivas*** porque la abscisa ***(x)*** y el radio vector ***(r)*** positivos. Las demás ***R.T.*** son negativas.

REGLA PRÁCTICA:

Son positivos



EJEMPLO 7:

¿Qué signo tiene?

$$E=\frac{Sen100^\circ\times Cos200^\circ}{Tan300^\circ}$$

RESOLUCIÓN:

$100^\circ\in II \Rightarrow Sen100^\circ$ *es* $(+)$

$200^\circ\in III \Rightarrow Cos200^\circ$ *es* $(-)$

$300^\circ\in IV \Rightarrow Tan300^\circ$ *es* $(-)$

* Reemplazando

$$E=\frac{(+)\ (-)}{(-)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{(+)\ (-)}{(-)}=+$$

EJEMPLO 8:

Si $\theta\in III\wedge Cos^2\theta=\frac{2}{9}$, hallar $Cos\theta$

RESOLUCIÓN:

* Despejando $Cos\theta$ de la igualdad dato.

$$Cos^2\theta=\frac{2}{9}\Rightarrow Cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

*Como $\theta\in III$ entonces $Cos\theta$ es negativo, por tanto.

$$Cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

EJEMPLO 9:

Si $\theta\in IV\wedge Tan^2\theta=\frac{4}{25}$.

hallar $Tan\theta$

RESOLUCIÓN:

* Despejamos $Tan\theta$ de la igualdad dada:

$$Tan^2\theta=\frac{4}{25}$$

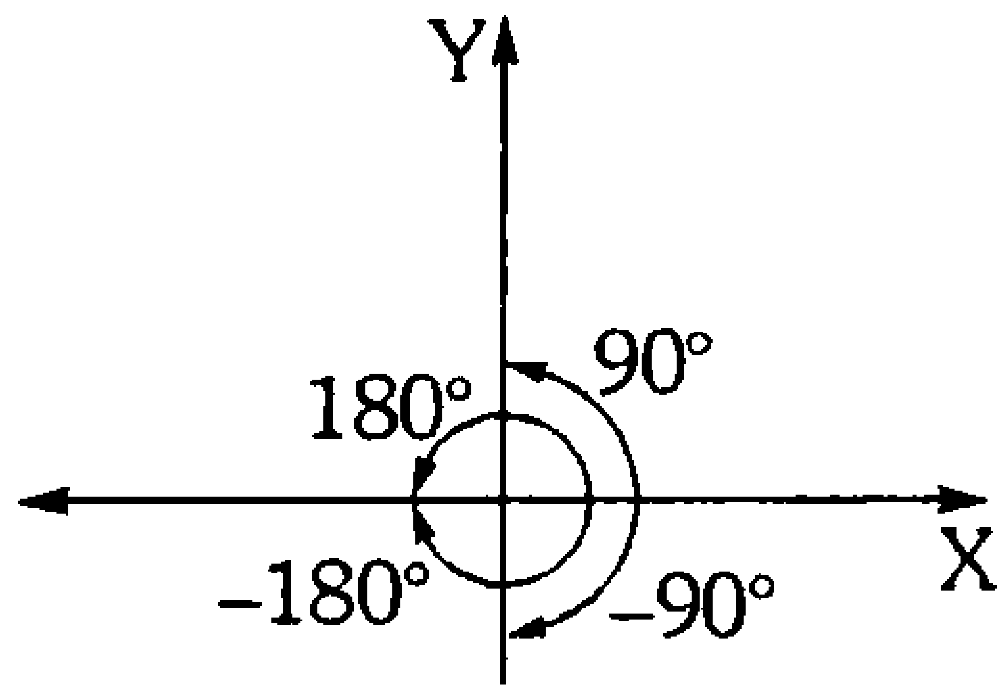
$$\Rightarrow Tan\theta=\pm\frac{2}{5}$$

*Como $\theta\in IV$ entonces la $Tan\theta$ es negativa, por tanto :

$$Tan\theta=-\frac{2}{5}$$

ÁNGULOS CUADRANTALES

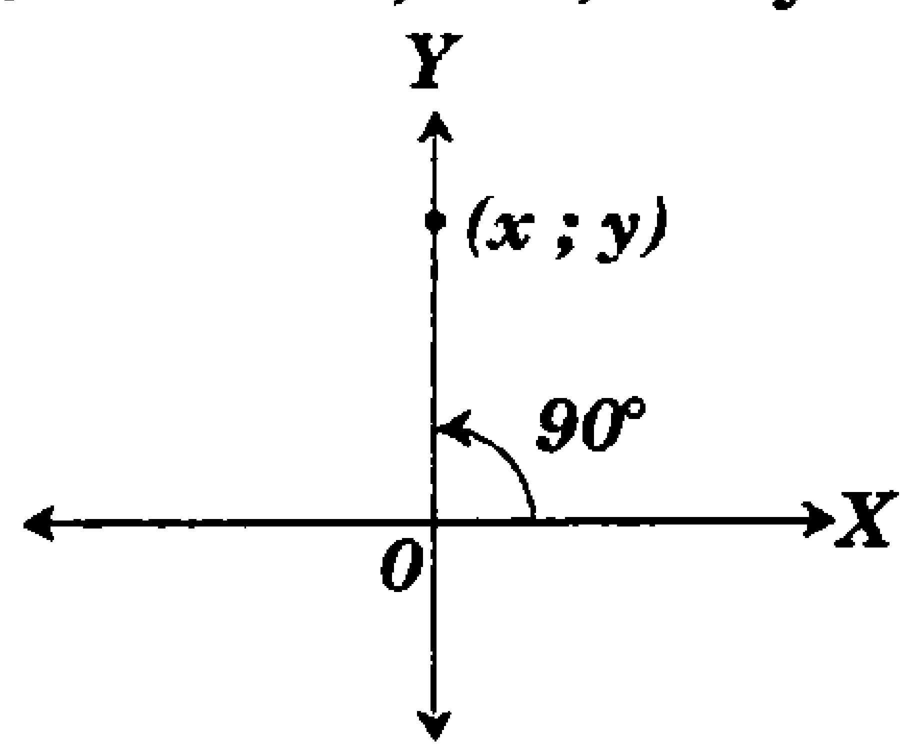
Son aquellos ángulos canónicos, cuyo lado final coincide con cualquiera de los semiejes cartesianos. Su medida es siempre múltiplo de **90°** y no pertenecen a ningun cuadrante.



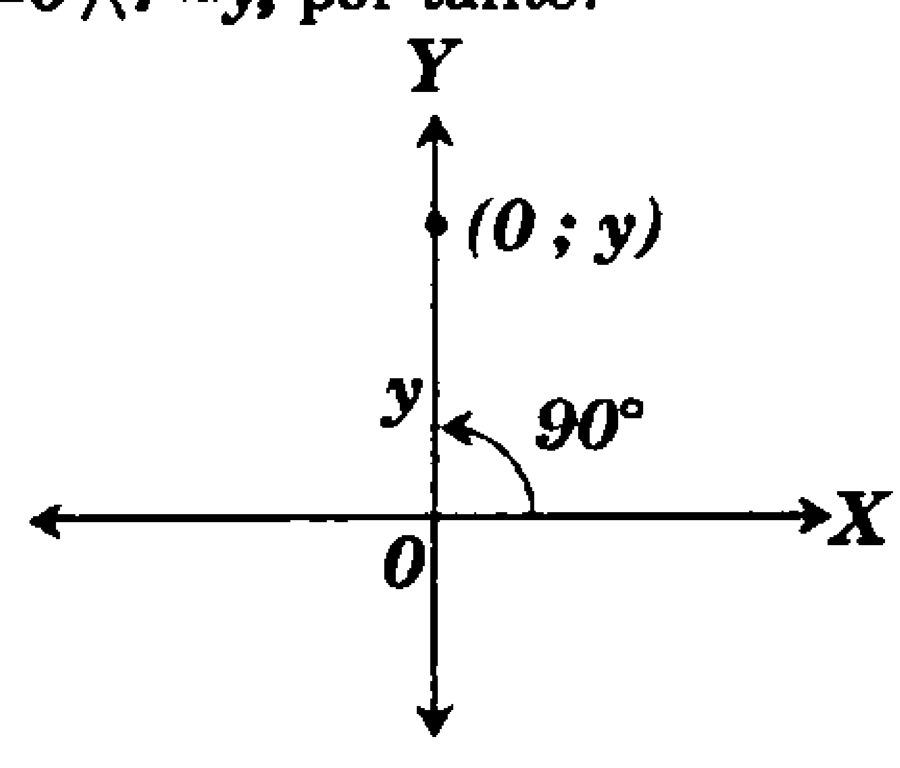
medida de un ángulo cuadrantal $=90^\circ n;\ n\in Z$

R.T. DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Como ejemplo modelo vamos a calcular la ***R.T.*** de ***90°***, análogamente se va a calcular las otras ***R.T.*** de ***0°; 180°; 270° y 360°***



*Del gráfico observamos que $x=0\wedge r=y$, por tanto:



* $Sen90^\circ=\frac{y}{r}=\frac{y}{y}=\boxed{1}$

* $Cos90^\circ=\frac{x}{r}=\frac{0}{y}=\boxed{0}$

* $Tan90^\circ=\frac{y}{x}=\frac{y}{0}=\boxed{\text{no definido}}=ND$

* $Cot90^\circ=\frac{x}{y}=\frac{0}{y}=\boxed{0}$

* $Sec90^\circ=\frac{r}{x}=\frac{y}{0}=\boxed{\text{No definido}}=ND$

* $Csc90^\circ=\frac{r}{y}=\frac{y}{y}=\boxed{1}$

Análogamente :

R.T. \ ∢	0°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	1	0	-1	0
Cos	1	0	-1	0	1
Tan	0	ND	0	ND	0
Cot	ND	0	ND	0	ND
Sec	1	ND	-1	ND	1
Csc	ND	1	ND	-1	ND

→	0°; 360° 2π	90°; π/2	180°; π	270°; 3π/2
sen	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0
tg	0	N.D.	0	N.D.
ctg	N.D.	0	N.D	0
sec	1	N.D.	−1	N.D.
csc	N.D.	1	N.D.	−1

EJEMPLO 1 :

Calcular :

$$E=\frac{2Sen(\pi/2)-Cos\pi}{Cot(3\pi/2)+Sec2\pi}$$

RESOLUCIÓN:

* Los ángulos están en radianes, haciendo la conversión obtenemos.

$\boxed{\frac{\pi}{2}=90^\circ}$ $\boxed{\pi=180^\circ}$

$\boxed{\frac{3\pi}{2}=270^\circ}$ $\boxed{2\pi=360^\circ}$

* Reemplazamos :

$$E=\frac{2Sen90^\circ-Cos180^\circ}{Cot270^\circ+Sec360^\circ}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2\ (1)-(-1)}{0+1}=3$$

EJEMPLO 2 :

Calcular el valor de **"E"** para $x=45°$

$$E=\frac{Sen2x+Cos6x}{Tan4x+Cos8x}$$

RESOLUCIÓN :

Reemplazamos $x=45°$ *en E:*

$$E=\frac{Sen90°+Cos270°}{Tan180°+Cos360°}=\frac{1+0}{0+1}=1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

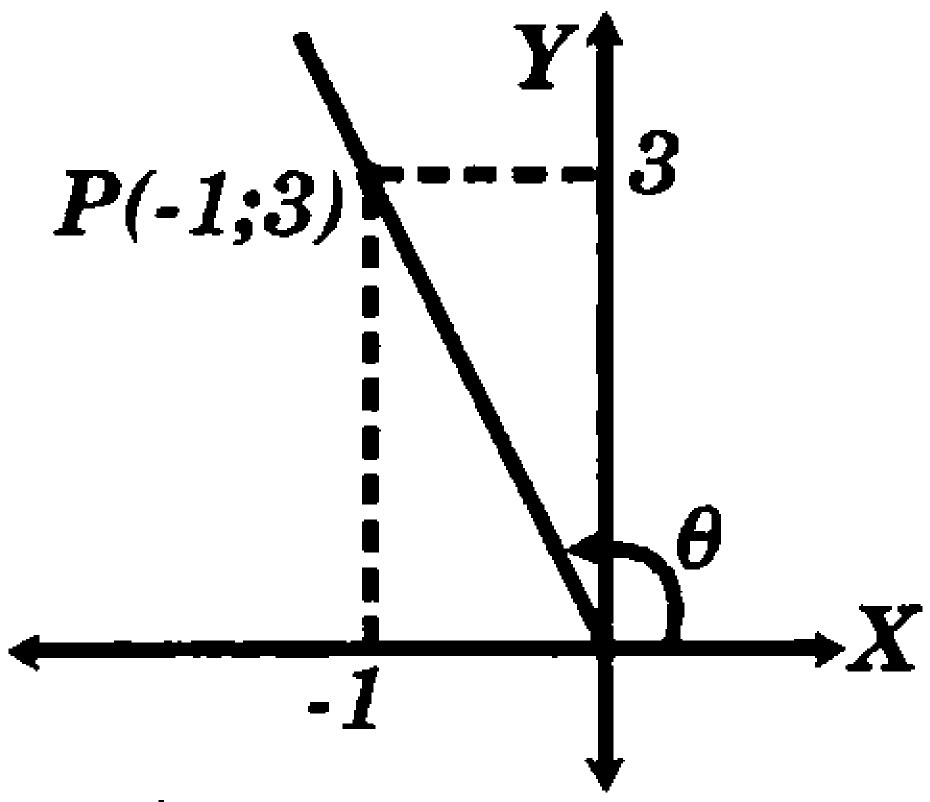
PROBLEMA 1 :

Si el punto $P(-1;3)$ pertenece al lado final del ángulo en posición normal "θ"; calcular:

$$K=sen\theta\times cos\theta$$

A) 0,2 B) 0,3 C) -0,2 D) -0,3 E) -05

RESOLUCIÓN :



$$\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=3\end{array}\right\}r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{10}$$

Piden:

$$K=sen\theta\times cos\theta=\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$\Rightarrow K=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\Rightarrow K=\frac{-3}{10}\Rightarrow K=-0,3$$

RPTA : "D"

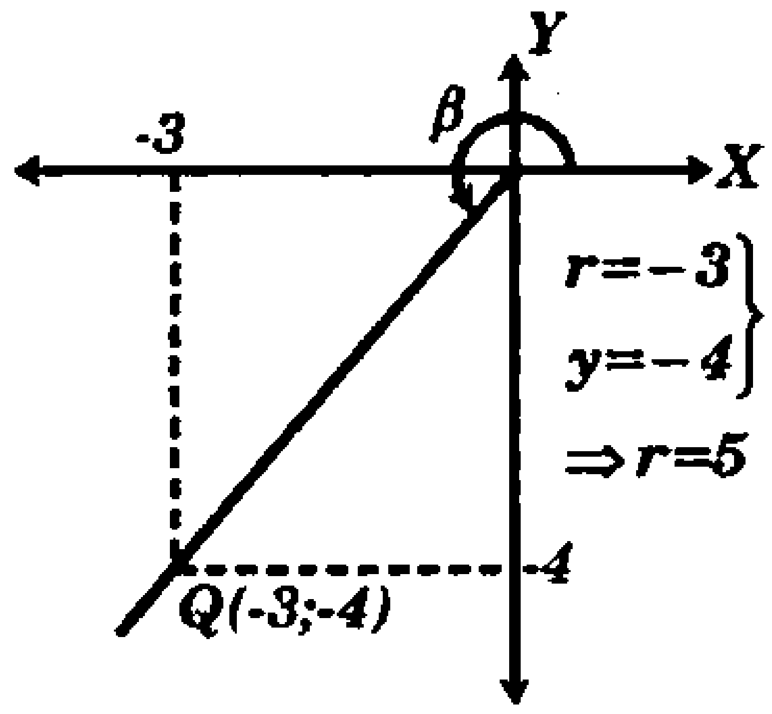
PROBLEMA 2 :

Si el punto $Q(-3;-4)$ pertenece al lado final del ángulo canónico "β", Calcular :

$$E=sec\beta+tan\beta$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN :



$$\left.\begin{array}{l}r=-3\\y=-4\end{array}\right\}r=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow r=5$$

Nos piden :

$$E=sec\beta+tan\beta=\frac{r}{x}+\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow E=\frac{5}{-3}+\frac{-4}{-3}=\frac{-5}{3}+\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow E=-\frac{5+4}{3}\Rightarrow E=-\frac{1}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Sabiendo que: $sen\phi=\frac{-3}{5};\phi\in IVC$, Calcular:

$$S=sec\phi-tan\phi$$

A) 1 B) 2 C) -2 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* En este tipo de problemas se puede proceder así:

* Como:

$$sen\phi=\frac{-3}{5}=\frac{y}{r}\left\}\begin{array}{l}y=-3\\r=5\end{array}\right.$$

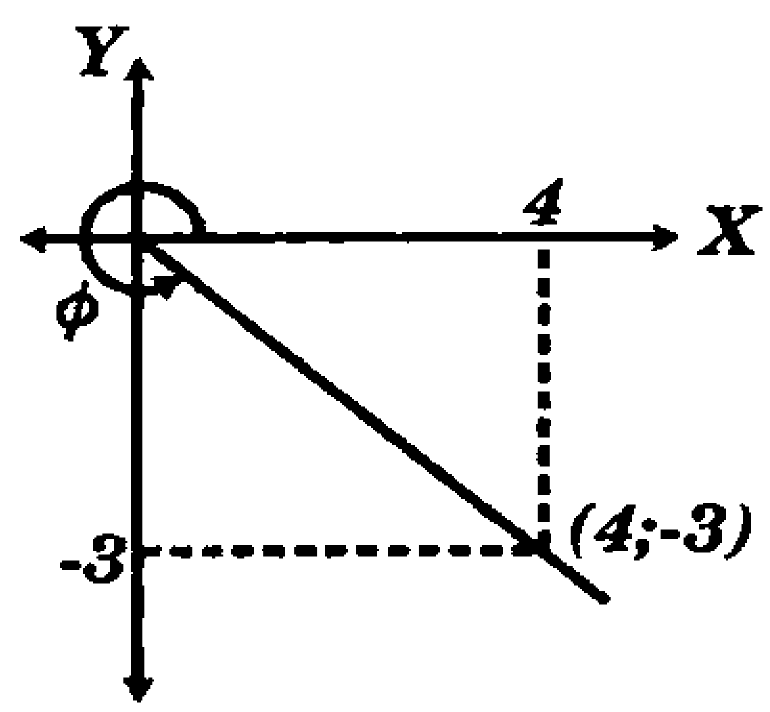
* Luego:

$$r^2=x^2+y^2\Rightarrow x^2=r^2-y^2$$

$$x^2=25-9=16\Rightarrow x=\pm4$$

$x=-4$ (no lo toma: $\phi\in IVC$)

* Graficando ; reconocemos el punto del lado final de "ϕ", luego podemos ubicar el punto $(4;-3)$ así:



Entonces :

$$S=sec\phi-tan\phi=\frac{r}{x}-\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow S=5-\frac{-3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\Rightarrow S=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Sabiendo que:

$$tan\beta=0,5;\ \beta\in IIIC,$$

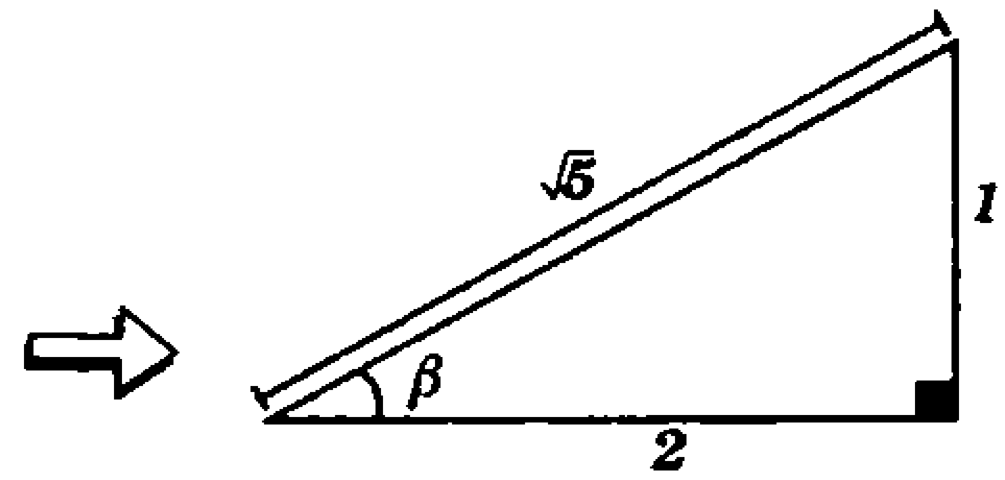
Calcular: $C=sen\beta\times cos\beta$

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0,6 E) 0,8

RESOLUCIÓN :

Otra forma de resolver estos problemas, es decir conocida una *R.T.* calculamos cualquier otra; es con la ayuda de un triángulo rectángulo, pero teniendo muy en cuenta el cuadrante al cual pertenece el ángulo considerado. Así en el ejercicio:

$$tan\beta=0,5=\frac{5}{10}\Rightarrow tan\beta=\frac{1}{2}=\frac{C.O.}{C.A.}$$



* *Luego, no olvide que* $\beta\in IIIC$: $sen\beta=\frac{1}{-\sqrt{5}}$

$$cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

* Entonces :

$$C=-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{5}\Rightarrow C=0,4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Sabiendo que :

$$Cos\theta=-0,8;\ \theta\in IIC$$

Calcular : $E=csc\theta+cot\theta$

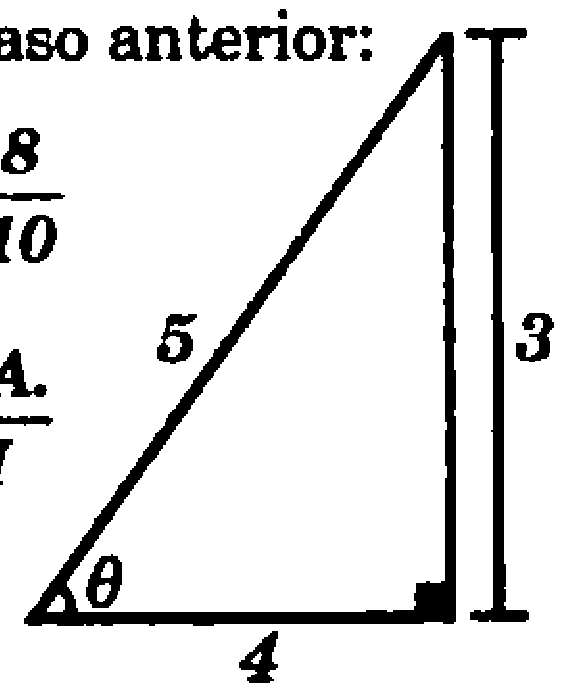
A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) $-\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Aplicando el caso anterior:

$$cos\theta=-0,8=-\frac{8}{10}$$

$$cos\theta=-\frac{4}{5}=\frac{C.A.}{H}$$



Como: $\theta\in IIC: csc\theta=+\frac{5}{3}$

$$\Rightarrow cot\theta=-\frac{4}{3}$$

Entonces:

$$E=\frac{5}{3}+\frac{-4}{3}+\frac{5-4}{3}\Rightarrow E=\frac{1}{3}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 6 :

Señale el signo de :

$$E=\frac{sen100°\times cos200°}{tan140°}$$

A)(+) B)(-) C)(+) y (-)
D)(+)ó(-) E)no se puede determinar

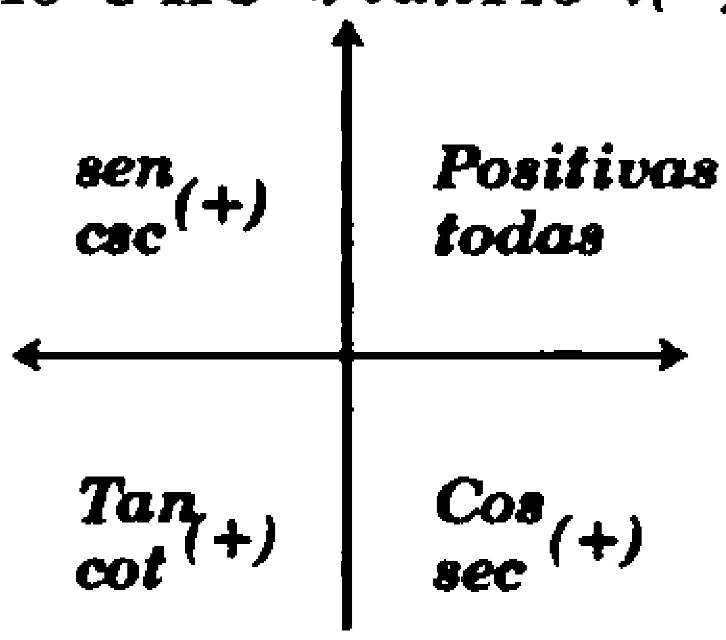
RESOLUCIÓN :

Identificando los cuadrantes:

$100° \in IIC \Rightarrow sen100° :(+)$

$200° \in IIIC \Rightarrow cos200° :(-)$

$140° \in IIC \Rightarrow tan140° :(-)$



Luego :

$$E=\frac{(+)\,(-)}{(-)}=\frac{(-)}{(-)}\Rightarrow E=(+)$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 7 :

Señale el signo de:

$$C=\frac{sen200°+tan150°}{cos300°}$$

A) (+) B) (-) C) (+) y (-)
D)(+) ó(-) E)no se puede precisar

RESOLUCIÓN :

$200° \in III\ C \Rightarrow sen200° :(-)$

$150° \in II\ C \Rightarrow tan150° :(-)$

$300° \in IV\ C \Rightarrow cos300° :(+)$

Luego:

$$C=\frac{(-)+(-)}{(+)}=\frac{(-)}{(+)}\Rightarrow C=(-)$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Calcular:

$$L=\frac{sen90°\ -\ cos^3 180°}{2sen^4 270°}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) -1 E) -2.

RESOLUCIÓN :

* Colocando la ayuda del cuadro de las *R.T.* de los ángulos cuadrantales:

$$L=\frac{sen90°-cos^3 180°}{2sen^4 270°}=\frac{1-(-1)^3}{2(-1)^4}=\frac{1-(-1)}{2}$$

$$L=\frac{2}{2}\Rightarrow L=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 :

Calcular:

$$J=\frac{(a+b)^2 sen^4\frac{\pi}{2}+(a-b)^2 sen^3\frac{3\pi}{2}}{ab\cos\pi}$$

A) 2 B) -2 C) - 4

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que:

$$sen\frac{\pi}{2}=sen90°=1$$

$$sen\frac{3\pi}{2}=sen270°=-1$$

$$cos\pi=cos180°=-1$$

Luego :

$$J=\frac{(a+b)^2 sen^4 90°+(a-b)^2 sen^3 270°}{abcos180°}$$

$$=\frac{(a+b)^2(1)^4+(a-b)^2(-1)^3}{ab(-1)}$$

* Desarrollando:

$$J=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{-ab}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{-ab}$$

* Reduciendo :

$$J=\frac{4ab}{-ab}\Rightarrow J=-4$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Siendo *P(-1;2)* un punto que pertenece al lado final del ángulo θ en posición normal.

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 5

RESOLUCIÓN :

*Como *P* pertenece al lado final ángulo θ se tiene:

$x=-1$

$y=2$

$$\Rightarrow r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

* Reemplazamos:

$$M=\sqrt{5}\ (sen\theta+cos\theta)$$

$$\Rightarrow M=\sqrt{5}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow M=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\Rightarrow M=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11:

Si θ es un ángulo positivo menor que una vuelta, perteneciente al tercer y cuarto cuadrante cuyo seno es negativo . Determinar θ.

A) 180° B) 90° C) 270°
D) 215° E) 300°

RESOLUCIÓN :

Del enunciado :

$$sen\theta<0\ ,\ \theta\in IIIC\wedge IVC$$

$\Rightarrow$ el único valor que cumple es $\theta=270°$

RPTA : "A"

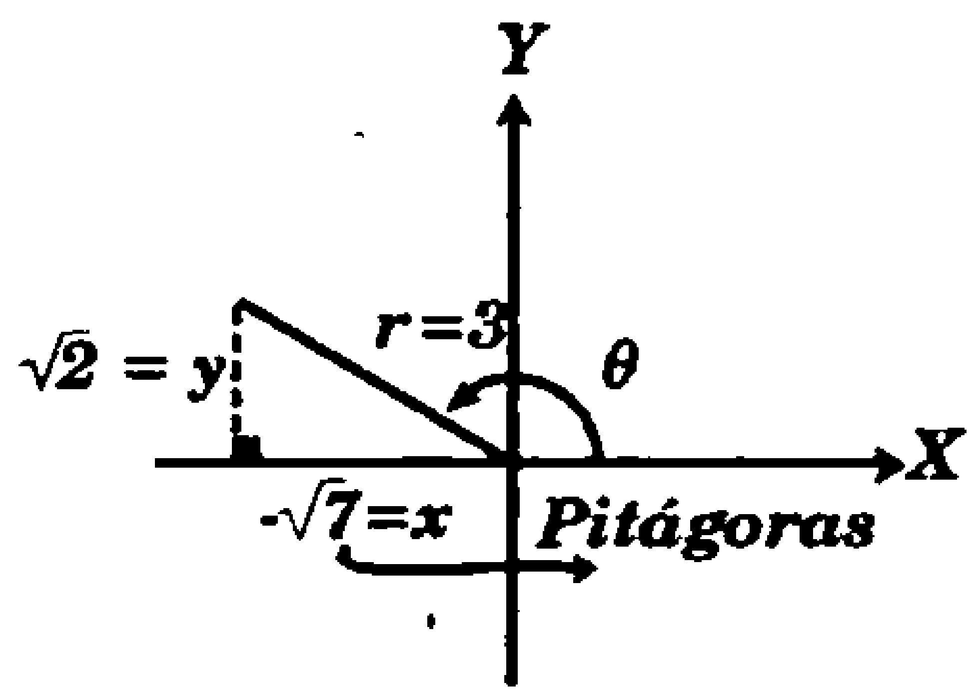
PROBLEMA 12:

Si: $Sen\,\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$;Siendo "θ" perteneciente al segundo cuadrante. Hallar el valor de:

$$A=2Cot^2\theta-\sqrt{7}Sec\theta$$

A) 3 B) 7 C) 9 D) 10 E) 4

RESOLUCIÓN :



$$x=\sqrt{3^2-(\sqrt{2}\,)^2}=-\sqrt{9-2}=-\sqrt{7}$$

* Ahora :

$$A=2\left(\frac{-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2-\sqrt{7}\left(\frac{3}{-\sqrt{7}}\right)$$

$$\Rightarrow A=2\left(\frac{7}{2}\right)+3=10$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13 :

Determinar el signo de la expresión; si: "θ" pertenece el *3er* cuadrante y "α" pertenece al *4to* cuadrante.

$$A=\frac{sen\theta\ tg\alpha\ sec\theta}{cos\theta\ ctg\theta\ cos\alpha}$$

A) (+) B)(-) C)(+) ó (-)

RESOLUCIÓN :

$180° < \theta < 270°$; *3er* cuadrante

$(+) = \begin{cases} tg\theta \\ Cotg\theta \end{cases} ; (-) = \begin{cases} Sen\theta \ ; Cosec\theta \\ Cos\theta \ ; Sec\theta \end{cases}$

$270° < \alpha < 360°$; *4to* cuadrante

$$(+) = \left.\begin{matrix} Cos\alpha \\ Sec\alpha \end{matrix}\right\} ; (-) = \begin{cases} Sen\alpha \\ tg\alpha \\ Cotg\alpha \\ Cosec\alpha \end{cases}$$

Entonces :

$$A = \frac{(-)(-)(-)}{(-)(+)(+)} = \frac{-}{-} = +$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

Dada la ecuación:

$(Cos\alpha)^{2cos\alpha-1} = 4$; $20° < \alpha < 360°$

entonces "α" en que cuadrante se ubica.

A)I B)II C)III D)IV E)"B"o"C"

RESOLUCIÓN :

* $(Cos\alpha)^{2cos\alpha-1} = 4$

* Al resolver la ecuación exponencial se obtendrá:

$Cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in II$ y III cuadrante

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Si: $Sen\frac{\theta}{2} = 0,8$ y $\theta \in$ *3er* cuadrante calcular el valor de:

$$E = 6Tg\frac{\theta}{2} - 9\ Sec\frac{\theta}{2}$$

A)0 B)1 C)5 D)7 E)9

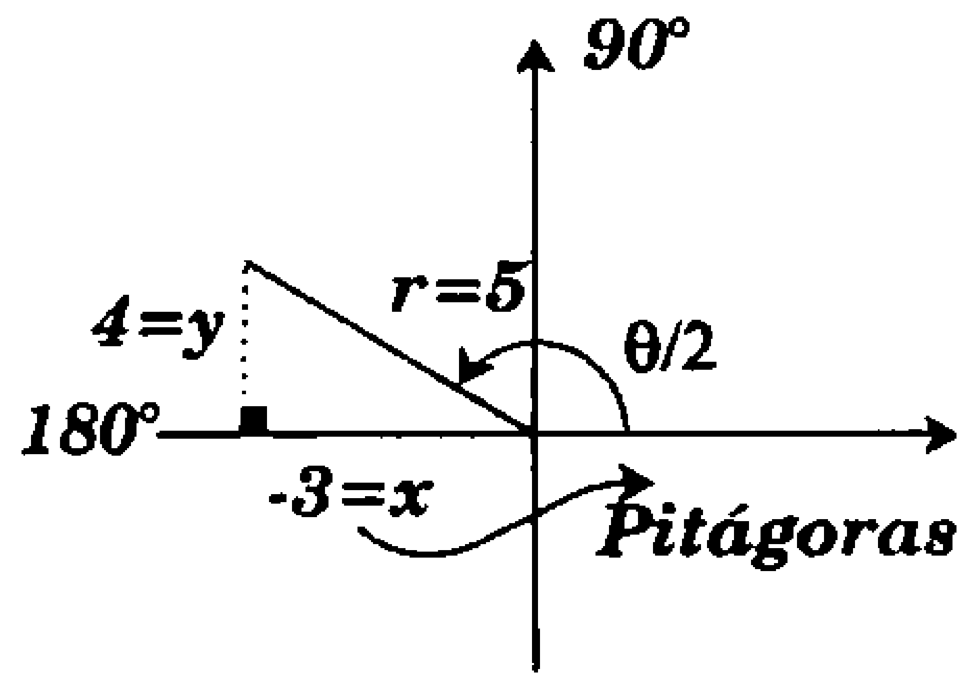
RESOLUCIÓN :

* Si: $\theta \in 3er$ cuadrante

$180° < \theta < 270°$

$\Rightarrow\Rightarrow \frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2} \in < 90°\ ;\ 135°> \ \Rightarrow sen\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$



$$E = 6\left(\frac{4}{-3}\right) - 9\left(\frac{5}{-3}\right) = 7$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Si : $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5-13\ Cos\theta}}} = 1;$

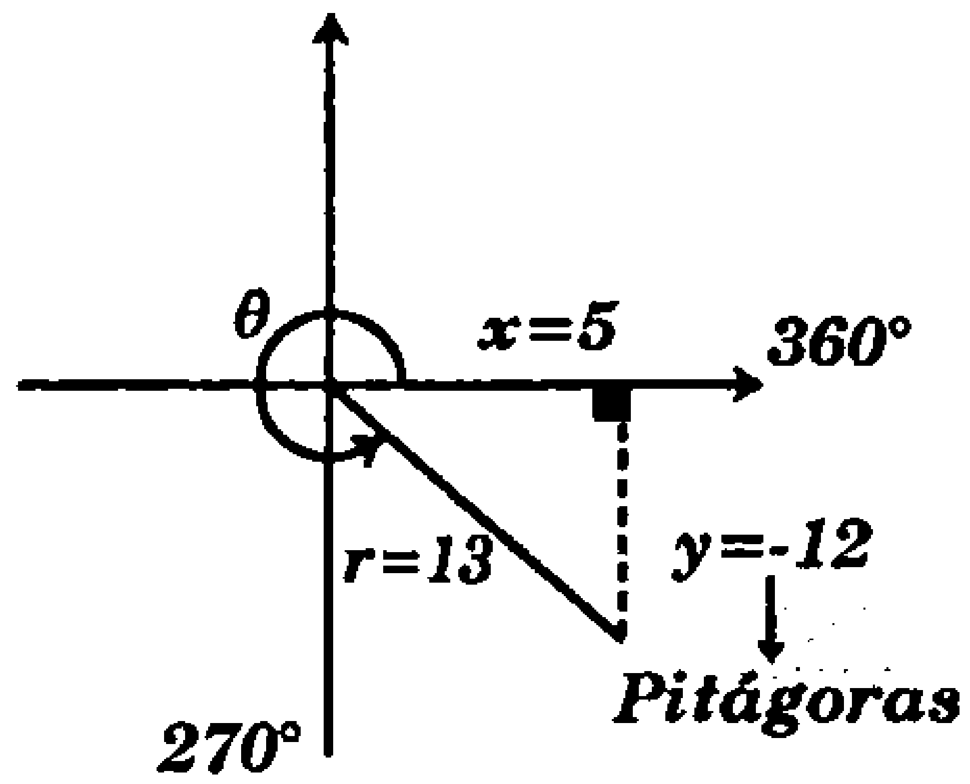
$270° < \theta < 360°$

Hallar el valor de:

$$n = Sec\theta - Tg\theta$$

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

RESOLUCIÓN :



$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5-13\ Cos\theta}}} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt{1+\sqrt{5-13Cos\theta}}$$

* Elevando al cuadrado :

$1 = 1 + \sqrt{5-13Cos\theta}$

$\Rightarrow \sqrt{5-13Cos\theta} = 0 \Rightarrow Cos\theta = \frac{5}{13}$

* Reemplazando:

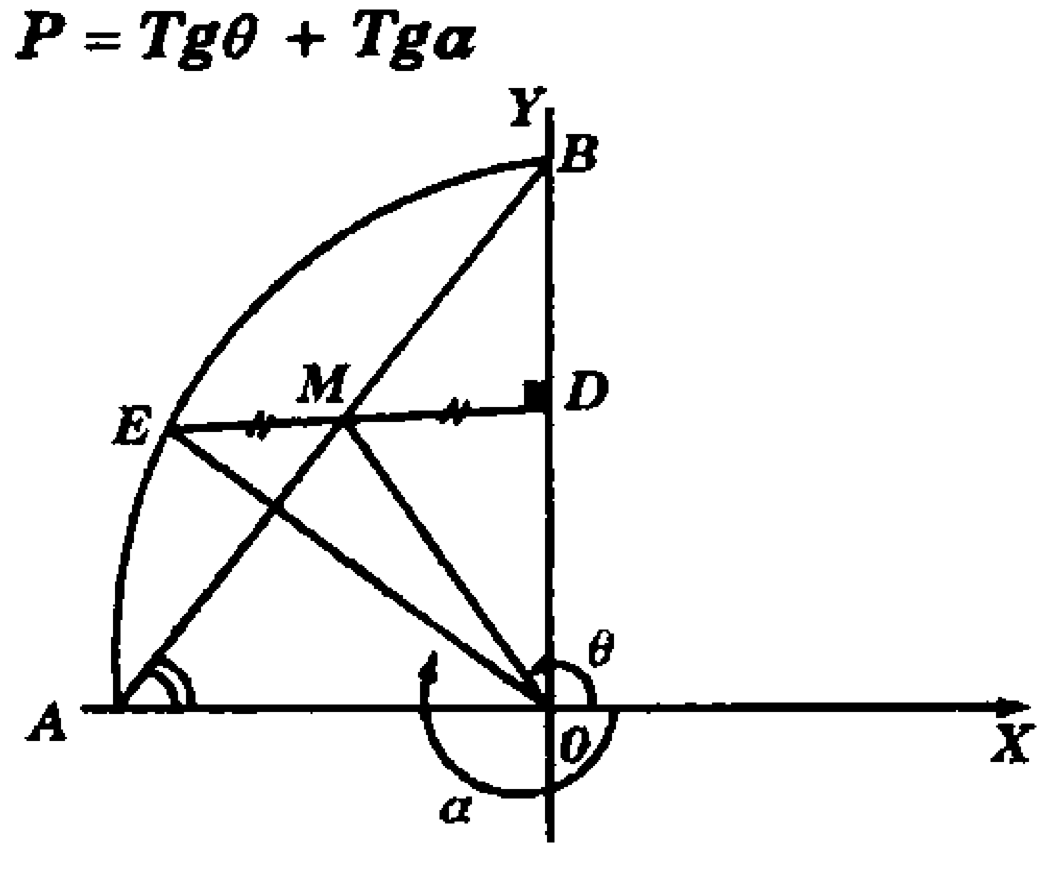
$$n = \frac{13}{5} - \left(\frac{-12}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

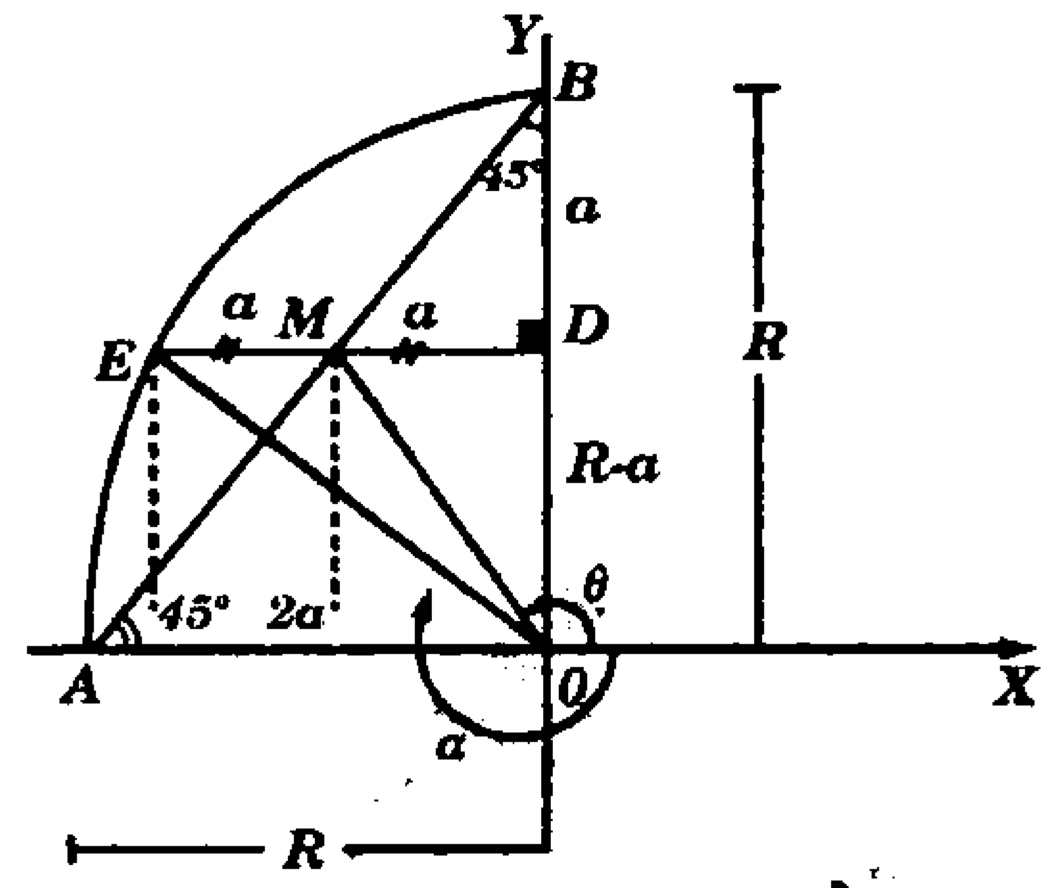
De la figura calcular el valor de :

$P = Tg\theta + Tg\alpha$



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{-3}{4}$ D) $\frac{-9}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :



* ⊾ AOB :

Isósceles ($\overline{AO} = \overline{OB} = R$) y $\overline{OE} = R$

* ⊾ MDB :

Isósceles ($\overline{MD} = \overline{DB} = a$) y $\overline{EM} = a$

* ⊾ EDO:

Pitágoras: $(2a)^2 + (R-a)^2 = R^2$

$$4a^2 + R^2 - 2Ra + a^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 5a^2 = 2Ra \Rightarrow R = \frac{5a}{2}$$

* Ahora : $OD = R - a = \frac{5a}{2} - a = \frac{3a}{2}$

* Luego :

$P = Tg\theta + Tg\alpha = \left(-\frac{\overline{OD}}{\overline{MD}}\right) + \left(-\frac{\overline{OD}}{\overline{ED}}\right)$

$\Rightarrow P = \left(\frac{-\frac{3a}{2}}{a}\right) + \left(\frac{-\frac{3a}{2}}{2a}\right) = \frac{-9}{4}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

Hallar todos los valores que puede tomar el ángulo θ del primer cuadrante, cuyo ángulo doble está en el segundo cuadrante, su ángulo triple está en el tercer cuadrante y su cuádruple en el cuarto cuadrante, pero inferior a 2π.

A) $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{12} < \theta < \frac{\pi}{2}$

D) $\frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{2}$ E) falta datos

RESOLUCIÓN :

* por dato : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \pi < 3\theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < 4\theta < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \text{intersectamos estos cuatro conjuntos}$$

* Conclusión:

$$\frac{3\pi}{8}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 19:

Dando :

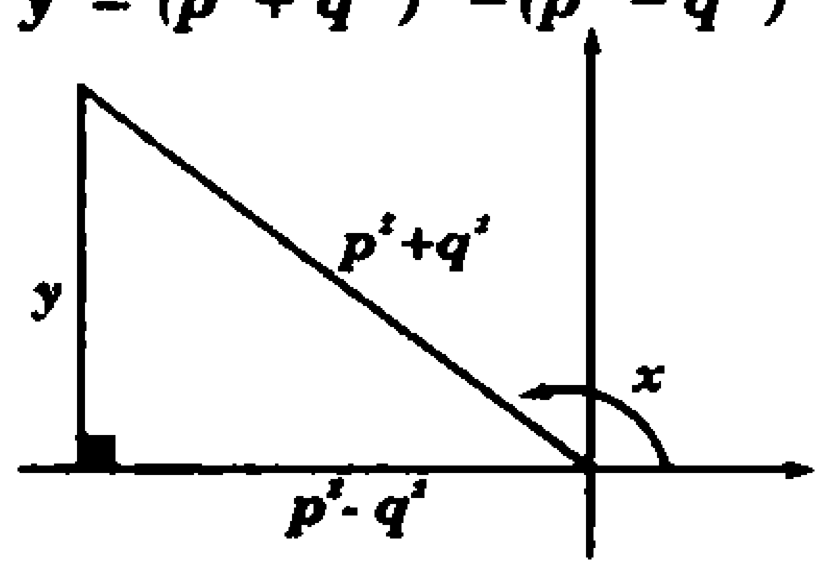
$$\cos x=-\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}\ ;\ p>q>0$$

Calculando Tgx, con x en el segundo cuadrante.

A) $-\frac{2pq}{q^2-p^2}$ B) $\frac{2pq}{q^2-p^2}$ C) $-\frac{2\sqrt{pq}}{q^2-p^2}$

RESOLUCIÓN :

$$y^2=(p^2+q^2)^2-(p^2-q^2)^2$$



$$y^2=4p^2q^2 \Rightarrow y=2pq$$

$$\Rightarrow tg\,x=-\frac{2pq}{p^2-q^2}$$

$$\Rightarrow Tg\,x=\frac{2pq}{q^2-p^2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 20:

Sabiendo que:

$$A=\frac{Sec285°\times Tan^2 138°\times Sen^3 210°}{Csc^3 215°\times Cot\,338°}$$

$$B=\frac{Sen^3 260°\times Cot115°\times Cos^3 116°}{Csc195°\times Tan336°}$$

Indicar los signos de A y B

A) + y - B) + y + C) - y +

D) - y - E) No tiene signo

RESOLUCIÓN :

* Reemplazando los signos :

$$A=\frac{(+)\times(-)^2\times(-)^3}{(-)^3\times(-)}=\frac{(+)\times(+)\times(-)}{(-)\times(-)}=\frac{(-)}{(+)}=-$$

$$B=\frac{(-)^3\times(-)\times(-)^3}{(-)\times(-)}=\frac{(-)\times(-)\times(-)}{(-)\times(-)}=\frac{(-)}{(+)}=-$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 21:

Determinar el signo de:

$$Sen^3Q\ sec^5Q\ ctg^4Q$$

A) – ; Si Q pertenece al IC
B) + ; Si Q pertenece al IIC
C) + ; Si Q pertenece al IIIC
D) + ; Si Q pertenece al IVC
E) N.A.

RESOLUCIÓN :

* Sea : $F=sen^3Q\ sec^5Q\ ctg^4Q$

A) si $Q\in IC$ $F:(+)(+)(+)\Rightarrow F(+)$
B) si $Q\in IIC$ $F:(+)(-)(+)\Rightarrow F(-)$
C) si $Q\in IIIC$ $F:(-)(-)(+)\Rightarrow F(+)$
D) si $Q\in IVC$ $F:(-)(+)(+)\Rightarrow F(-)$

RPTA : "C"

PROBLEMA 22:

Si: $\alpha\in IIC$ y:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{sen^2\alpha}}}=(sen\alpha)^{-\cos\alpha}$$

Calcular : $tg\alpha-sen\alpha$

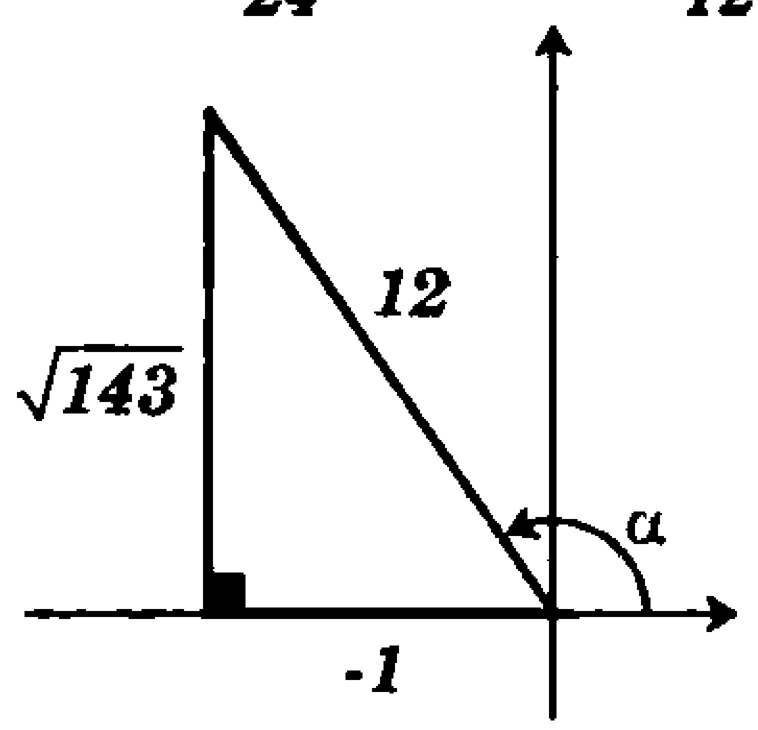
A) $-\frac{11}{12}\sqrt{143}$ B) $\frac{9}{12}\sqrt{143}$ C) $\frac{13}{12}\sqrt{143}$

D) $\frac{11}{12}\sqrt{143}$ E) $-\frac{13}{12}\sqrt{143}$

RESOLUCIÓN :

* Igualando:

$$-\cos\alpha=\frac{2}{24}\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{12}$$



* Por dato : $\alpha\in IIC$

$$\Rightarrow Tg\alpha-sen\alpha=-\sqrt{143}-\frac{\sqrt{143}}{12}$$

$$=-\frac{13}{12}\sqrt{143}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 23:

Determinar el signo de S en cada uno de los cuadrantes *(I, II, III, IV)*

$$S=ctgx+senx-cscx$$

	I	II	III	IV
A)	+	+	+	+
B)	+	–	+	+
C)	+	–	+	+
D)	–	+	–	+
E)	+	+	–	–

RESOLUCIÓN :

$$S=ctgx+\frac{sen^2x-1}{senx}=ctgx+\frac{\cos^2x}{senx}$$

$$\Rightarrow S=ctgx-\left(\frac{\cos x}{senx}\right)\cos x=$$

$$=ctgx-ctgx\cos x$$

$$\Rightarrow S=ctgx\,(1-\cos x)$$

* Observar que la expresión : $(1-\cos x)$ es positiva para todo valor que puede tomar la variable x ; por lo tanto, el signo de S depende de la ctg x.

* Si :

$x\in IC \Rightarrow S$ es positiva (+)
$x\in IIC \Rightarrow S$ es negativa(–)
$x\in IIIC \Rightarrow S$ es positiva (+)
$x\in IVC \Rightarrow S$ es negativa(–)

RPTA: "C"

PROBLEMA 24:

Si el ángulo x es positivo, pertenece el cuarto cuadrante y es tal que $0<x\le 2\pi$; entonces, hallar el signo de las siguientes expresiones trigonométricas:

$$\frac{tg\left(\frac{x}{4}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)csc\left(\frac{x}{4}\right)};\ \frac{ctg\left(\frac{x}{3}\right)sec\left(\frac{3x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{5}\right)};\ \frac{sen\left(\frac{x}{3}\right)tg\left(\frac{2x}{3}\right)}{sec\left(\frac{3x}{4}\right)}$$

A) (+) (+) (+) B) (–) (–) (–)
C) (+) (+) (–) D) (–) (+) (–)
E) (–) (–) (+)

RESOLUCIÓN :

*Datos : $0<x\le 2\pi$ y pertenece al cuarto cuadrante.

se deduce que: $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$, para facilidad expresaremos que :

$$270°<x<360°$$

* Luego :

$$67{,}5°<\frac{x}{4}<90°\Rightarrow\frac{x}{4}\in I$$

$$90°<\frac{x}{3}<120°\Rightarrow\frac{x}{3}\in II$$

$$135°<\frac{x}{2}<180°\Rightarrow\frac{x}{2}\in II$$

$$202{,}5°<\frac{3x}{4}<270°\Rightarrow\frac{3x}{4}\in III$$

$$180° < \frac{2x}{3} < 240° \Rightarrow \frac{2x}{3} \in III$$

$$54° < x < 72° \Rightarrow x \in I$$

* Ahora que hemos determinado las cuadrantes, determinemos al signo de cada expresión:

* $\dfrac{tg\left(\frac{x}{4}\right)}{sen\left(\frac{x}{2}\right)csc\left(\frac{x}{4}\right)} \Rightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = \oplus$
* $\dfrac{ctg\left(\frac{x}{3}\right)\ sec\left(\frac{3x}{4}\right)}{cos\left(\frac{x}{5}\right)} \Rightarrow \dfrac{(-)(-)}{(+)} = \oplus$
* $\dfrac{sen\left(\frac{x}{3}\right) tg\left(\frac{2x}{3}\right)}{sec\left(\frac{3x}{4}\right)} \Rightarrow \dfrac{(+)(+)}{(-)} = \ominus$

RPTA: "C"

PROBLEMA 25:

Determinar los cuadrantes donde es negativa la expresión: $\dfrac{sen\ x - 1}{ctg\ x}$

A) I y III **B)** II y IV **C)** sólo II
D) sólo IV **E)** Todos.

RESOLUCIÓN :

* Sea : $F = \dfrac{sen\ x - 1}{ctg\ x}$
* Sabemos que:

$$-1 < Sen\ x < 1 \Rightarrow -2 < Sen\ x - 1 < 0$$

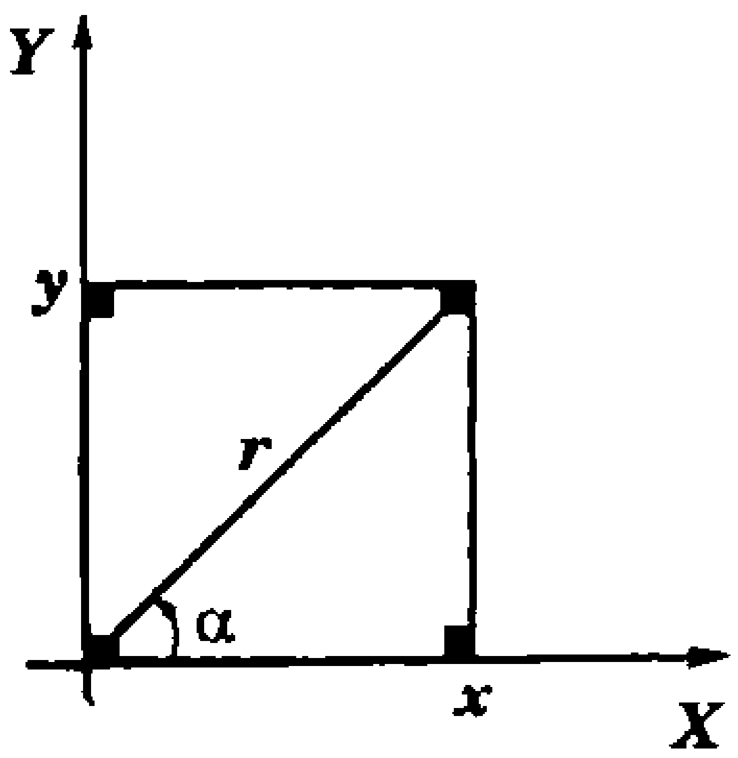
* Observamos que el numerador del F es negativo en cada cuadrante. Entonces para que F sea negativo el denominador debe ser positivo.

$$\Rightarrow Ctg\ x > 0 \Leftrightarrow x \in IC \lor III\ C$$

RPTA: "A"

Tema: Razones Trigonométricas de Ángulos Estándar

Las razones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud ubicado en un plano cartesiano (ángulo estándar) se dan a partir de:



$$Sen\alpha = \frac{y}{r}; Cot\alpha = \frac{x}{y}$$

$$Cos\alpha = \frac{x}{r}; Sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$Tan\alpha = \frac{y}{x}; Csc\alpha = \frac{r}{y}$$

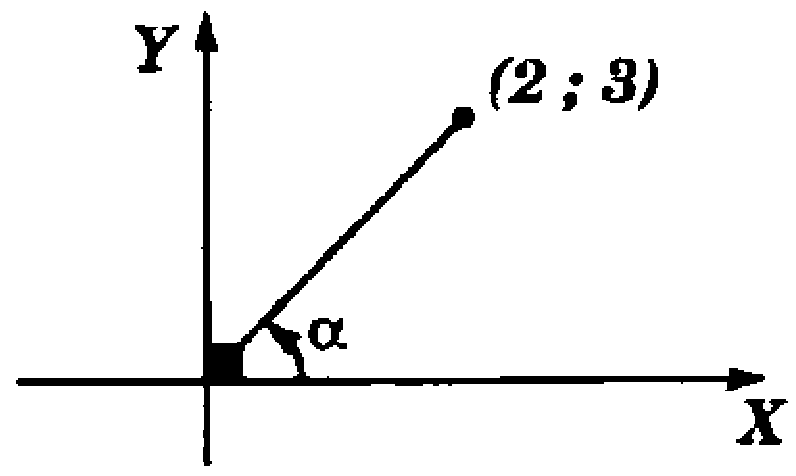
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

Al finalizar el tema el alumno será capaz de:

* Identificar y ubicar un ángulo en posición estándar.
* Calcular razones trigonométricas de ángulos en posición estándar.

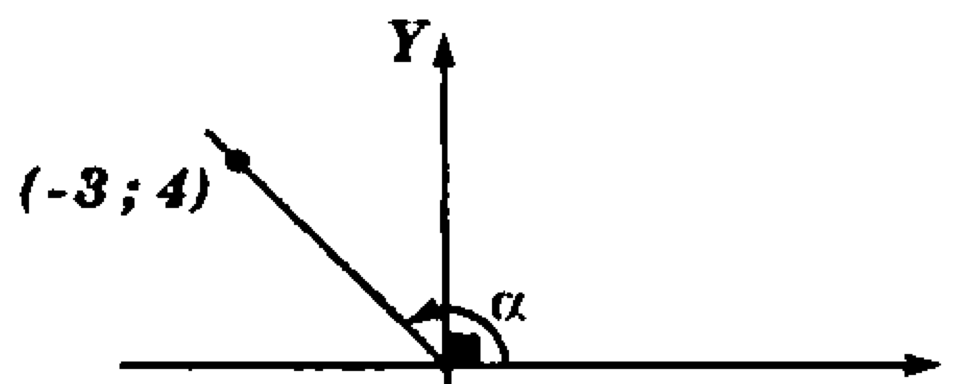
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular "$Sen\alpha$" en la figura:



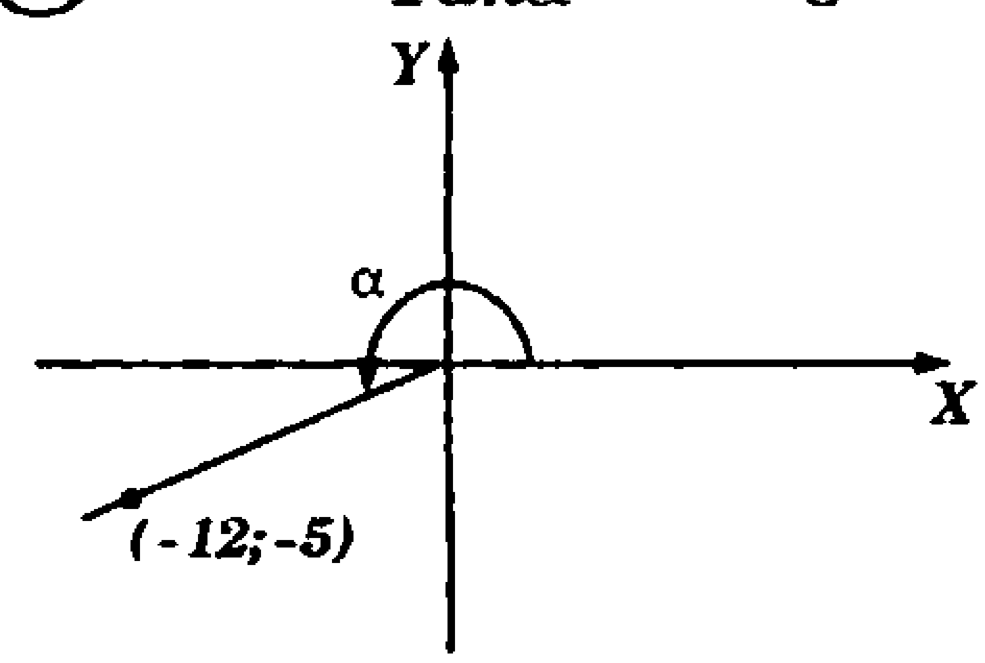
A) $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$ **B)** $\dfrac{3\sqrt{13}}{4}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$ **E)** $\dfrac{2}{3}$

02 Calcular "$Cos\alpha$" en la figura:



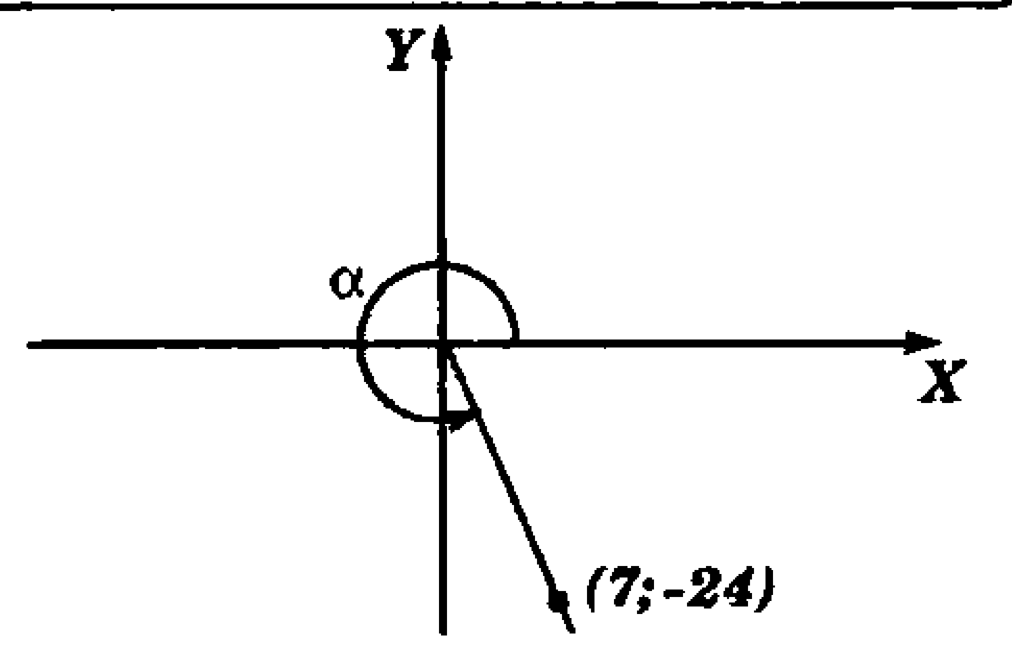
A) 3/5 **B)** – 3/5 **C)** 3/4 **D)** 3/2 **E)** 3/8

03 Calcular $Tan\alpha$ en la figura:



A) 12/5 **B)** 5/12 **C)** 5/13
D) 12/13 **E)** 3/4

04 Calcular "$Cot\alpha$" en la figura:



A) 1/2 **B)** 24/25 **C)** 7/24
D) 7/25 **E)** 25/24

05 Señalar **(V)** o **(F)** en:

( ) $90° < \alpha < 180° \Rightarrow Sen\alpha = -\dfrac{2}{5}$

( ) $270° < \theta < 360° \Rightarrow Cos\theta = \dfrac{1}{3}$

( ) $180° < \beta < 270° \Rightarrow Cot\beta = \dfrac{7}{5}$

A) VFF **B)** FVV **C)** FFF
D) VVV **E)** FVF

06 Si: $Senx < 0 \land Cosx > 0$ indicar en qué cuadrante se encuentra el ángulo:

A) I **B)** I O II **C)** III
D) IV **E)** II

07 Indicar el signo de:

$P = Cos110° . Tan50° . Csc300°$
$Q = Sen220° . Sec120° . Sec300°$
$R = Sen330° . Cos100° . Cot200°$

A) –,–,– **B)** +,+,+ **C)** +,–,+
D) +,–,– **E)** –,+,–

08 Si $Tan\alpha < 0 \land Secx > 0$, indicar el cuadrante al que pertenece el ángulo:

A) I **B)** II **C)** III
D) IV **E)** I o III

09 Si $Senx.Cosx < 0$; $Cosx > 0$, indicar el cuadrante al que pertenece dicho ángulo:

A) I **B)** II **C)** III
D) IV **E)** I o III

10 Calcular el valor de:

$$P = Cos0° . Cos1° . Cos2° . Cos3° ....$$

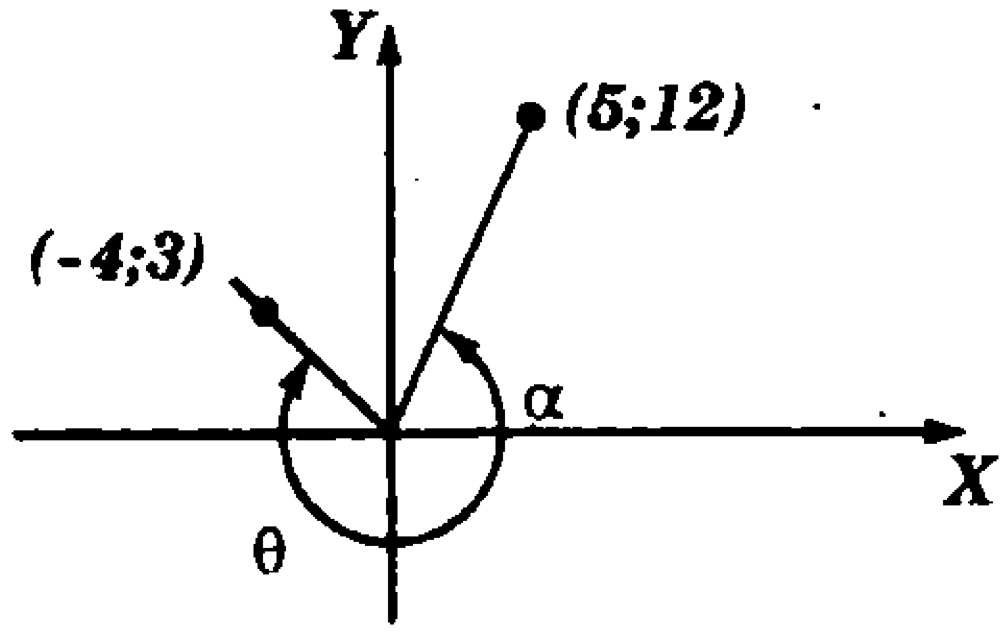
A) Sen30° **B)** Cos180° **C)** Tg45°
D) Cos90° **E)** Sen40°

11 Si $P(-3;4)$ pertenece al lado final de un $\measuredangle\theta$ en posición normal, calcular: $E = Sec\alpha + Tan\alpha$

A) 1 **B)** –2 **C)** –3 **D)** 4 **E)** 3

12 Del gráfico, calcular:

$E = Tan\alpha + Cos\theta$



A) 8/7 B) 8/5 C) 1/4
D) 3/7 E) 1/8

13 Calcular:

$$E = \frac{Sen90° + Cos180° + Tan0°}{Cos360°}$$

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 1/2

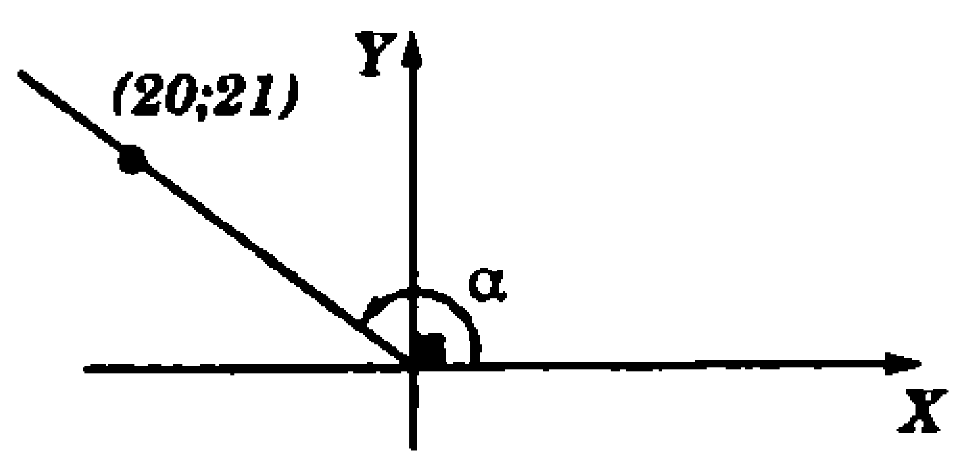
14 Calcular el valor de:

$$P = \frac{Sen270° + Cos180°}{Tan0° + Sen270°}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) –2 E) –1

15 Del gráfico, calcular:

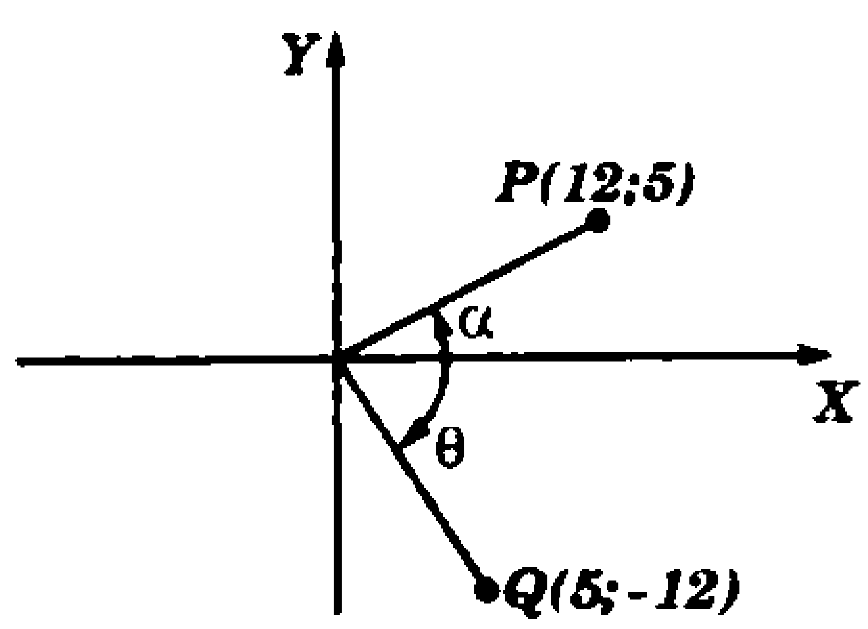
"$Sec\alpha + Tan\alpha$"



A) 1,5 B) 2,3 C) 2,5 D) 3,2 E) 1,6

16 De la figura calcular:

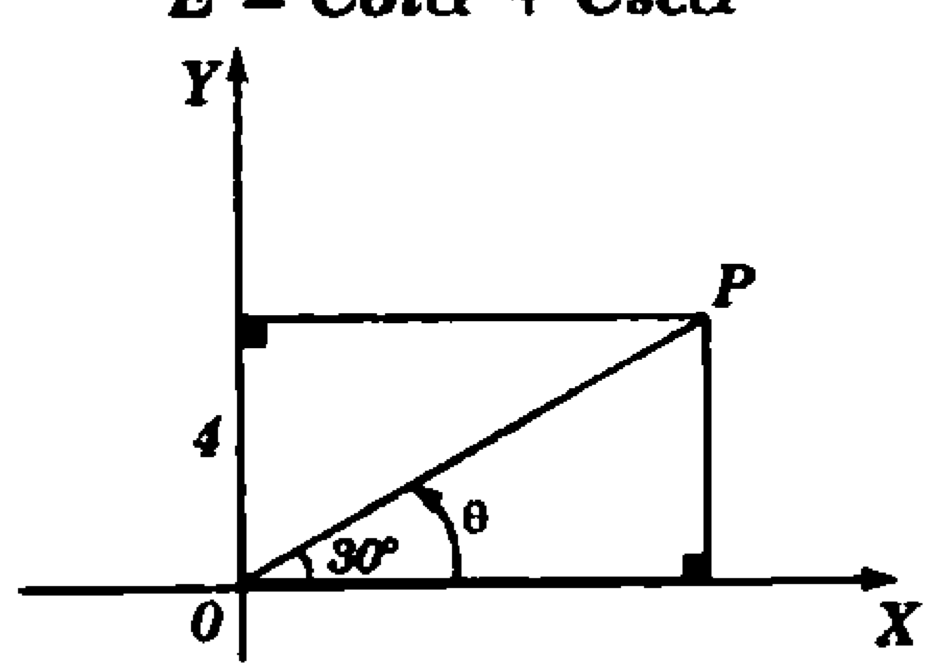
$P = Sen\alpha + Cos\theta$



A) 10/13 B) 5/13 C) 12/13
D) 5/12 E) 6/5

17 Del gráfico calcular

$E = Cot\alpha + Csc\alpha$

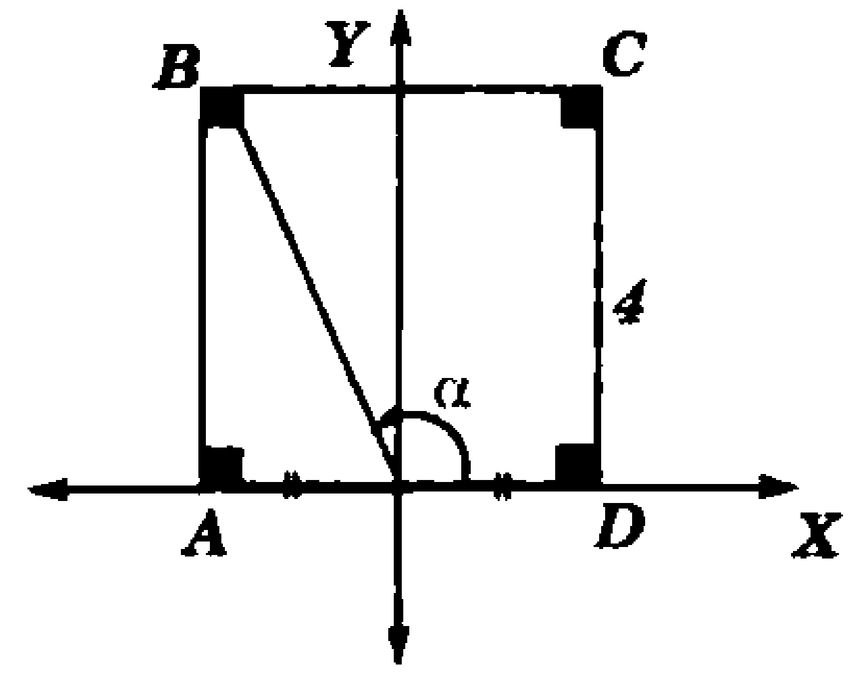


A) $\sqrt{3}-1$ B) $\sqrt{3}+2$ C) $\sqrt{3}+3$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

18 De la figura calcular:

$M = Sec\alpha + Tan\alpha$

ABCD es un cuadrado.



A) $\sqrt{5}+2$ B) $-\sqrt{5}-2$ C) $-\sqrt{5}+2$
D) $\sqrt{5}+3$ E) $\sqrt{5}$

19 Si: $Senx = \frac{1}{2}$; $90° < x < 180°$

calcular: $E = Tanx + Cotx$

A) -2 B) 2 C) 1 D) 0 E) 4

20 Si: $Cosx = \frac{4}{9}$; $180° < x < 270°$

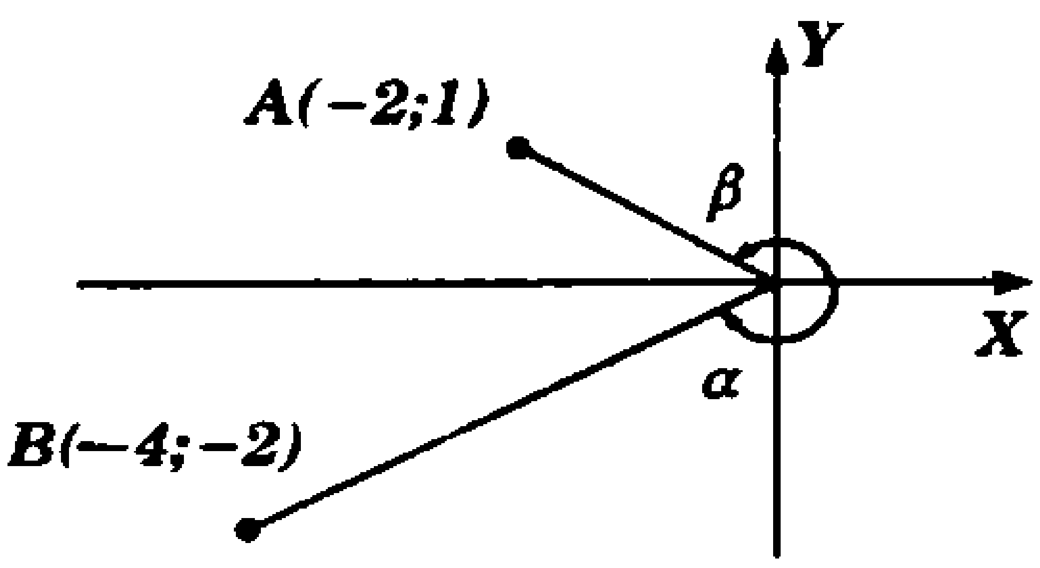
calcular: $E = Senx + Cosx$

A) $\frac{-\sqrt{5}+2}{3}$ B) $\frac{-\sqrt{5}-2}{3}$ C) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Del gráfico mostrado, calcular:

$M = Ctg\alpha + Ctg\beta$

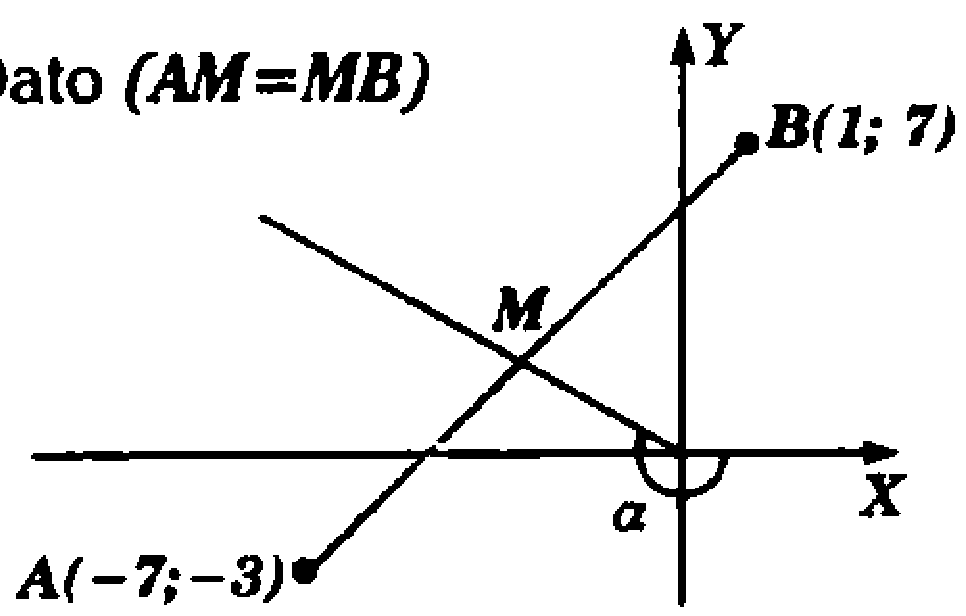


A) -2 B) 0 C) 2 D) 4 E) –1

02 De la figura mostrada, calcular:

$E = Sec\alpha + Csc\alpha$

Dato *(AM=MB)*

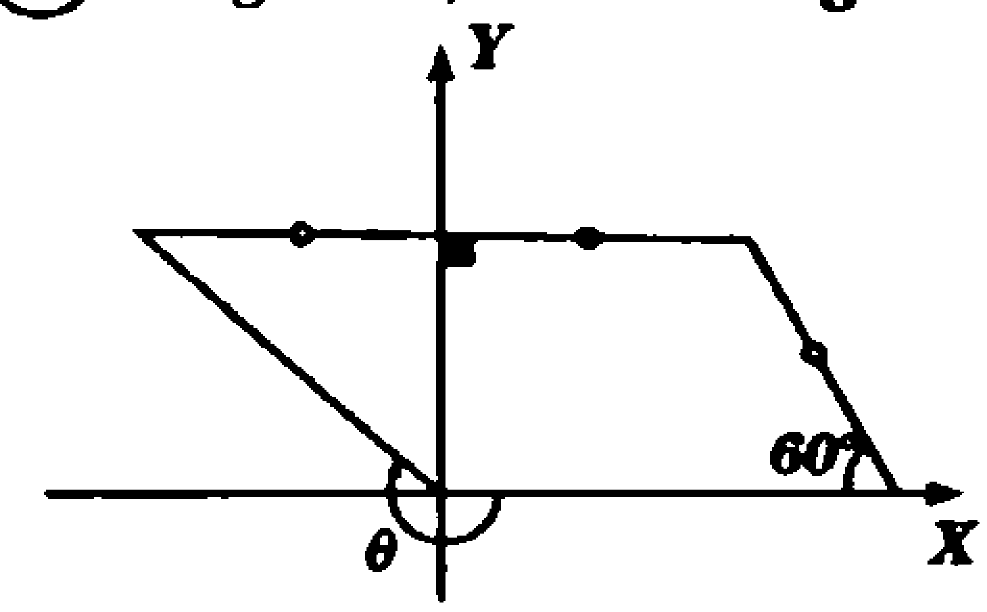


A) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ B) $-\frac{\sqrt{13}}{6}$ C) $-\frac{5\sqrt{13}}{6}$

03 Los puntos **A(a; 3)** y **B(–3; 1)** pertenecen al lado final del ángulo en posición normal α, calcular el valor de: $P = 2Ctg\alpha - a$

A) 3 B) 6 C) 9 D) –3 E) 0

04 Del gráfico, calcular $Ctg\theta$:



A) $\sqrt{3}-2$ B) $1-\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{3}$
D) $-\frac{\sqrt{13}}{2}$ E) $-\frac{2\sqrt{13}}{3}$

05 Si: $\sqrt{5}Sen\alpha - \sqrt{2} = 0 \wedge \alpha \in IIC$

calcular el valor de :

$$F = \sqrt{6}Tg\alpha + \sqrt{15}Sec\alpha$$

A) –3 B) –5 C) –7 D) 5 E) 7

06 Si $\alpha \in IIIC \wedge \beta \in IVC$; además:

$$5^{3Tg\alpha-4} = 7^{4Csc\beta+5}$$

calcular el valor de:

$$M = Cos\alpha + Sen\beta$$

A) 1/5 B) –7/5 C) –3/5 D) 3/5 E) –2/5

07 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) $Sen100° - Cos220° > 0$

( ) $Sec350°Csc200° < 0$

( ) $\frac{Cos320°}{Csc130°} > 0$

A) VFF B) VVV C) VVF
D) FVV E) VFV

08 Calcular el cuadrante al cual pertenece el ángulo "θ" a partir de:

$Sec\theta < Ctg330° \wedge Tg\theta > Sen120°$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) A ó B

09 Sabiendo que:

$$Sen\alpha < 0 \wedge Tg\alpha = -\frac{3}{4}$$

calcular el valor de :

$$M = Sen\alpha + Cos\alpha$$

A) 1/2 B) 3/5 C) 1/5
D) 2/3 E) 4/5

(10) Determine a qué cuadrante pertenece "θ" si se cumple:

$x^2 Sec\theta < 0 \wedge (Sec\theta + Cos\theta)Tg\theta < 0$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) A ó B

(11) Si $\alpha \in IIC$, además:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{Sen^2\alpha}}} = (Sen\alpha)^{-Cos\alpha}$$

calcular: $M = Tg\alpha - Sen\alpha$

A) $-\frac{11}{12}\sqrt{143}$ B) $-\frac{13}{12}\sqrt{143}$ C) $\frac{13}{12}\sqrt{143}$
D) $\frac{11}{12}\sqrt{143}$ E) $-\frac{12}{13}\sqrt{143}$

(12) Si: $\alpha \in IIC \wedge 6Sen^2\alpha = Sen\alpha + 2$

calcular el valor de :

$$F = \sqrt{5}Ctg\alpha + Csc\alpha$$

A) -1 B) 1 C) 3/2 D) -3/2 E) 0

(13) Calcular el valor de:

$$M = \frac{Sec\pi + Ctg\frac{3\pi}{2} - Cos(Sen2\pi)}{Sen\frac{3\pi}{2} + Cos\frac{5\pi}{2} + Tg3\pi}$$

A) -1 B) 1 C) 3/2 D) -3/2 E) 2

(14) Si $\theta = R\ rad$ es un ángulo cuadrantal, determine el valor de :

$$M = cos\theta + Sen\theta + Tg\theta$$

sabiendo que:

$$\sqrt{R - \frac{3\pi}{4}} + \sqrt{\frac{5\pi}{4} - R} = \sqrt{\pi}$$

A) -1 B) 1 C) 2 D) - 2 E) 0

(15) Si $\alpha \in IIIC \wedge \beta \in IIC$; además:

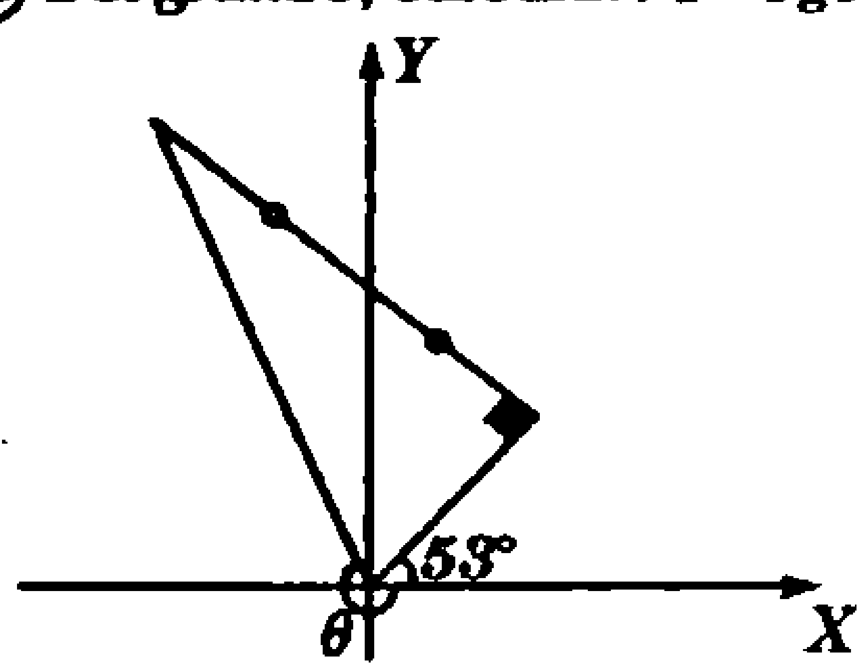
$Tg^2\alpha + Ctg^2\beta + 13 = 2(2Tg\alpha - 3Ctg\beta)$

calcular el valor de:

$$E = \sqrt{5}Sec\alpha + \sqrt{10}Csc\beta$$

A) 3 B) 5 C) 7 D) 0 E) 12

(16) Del gráfico, calcular: $F = Tg\theta + 3$

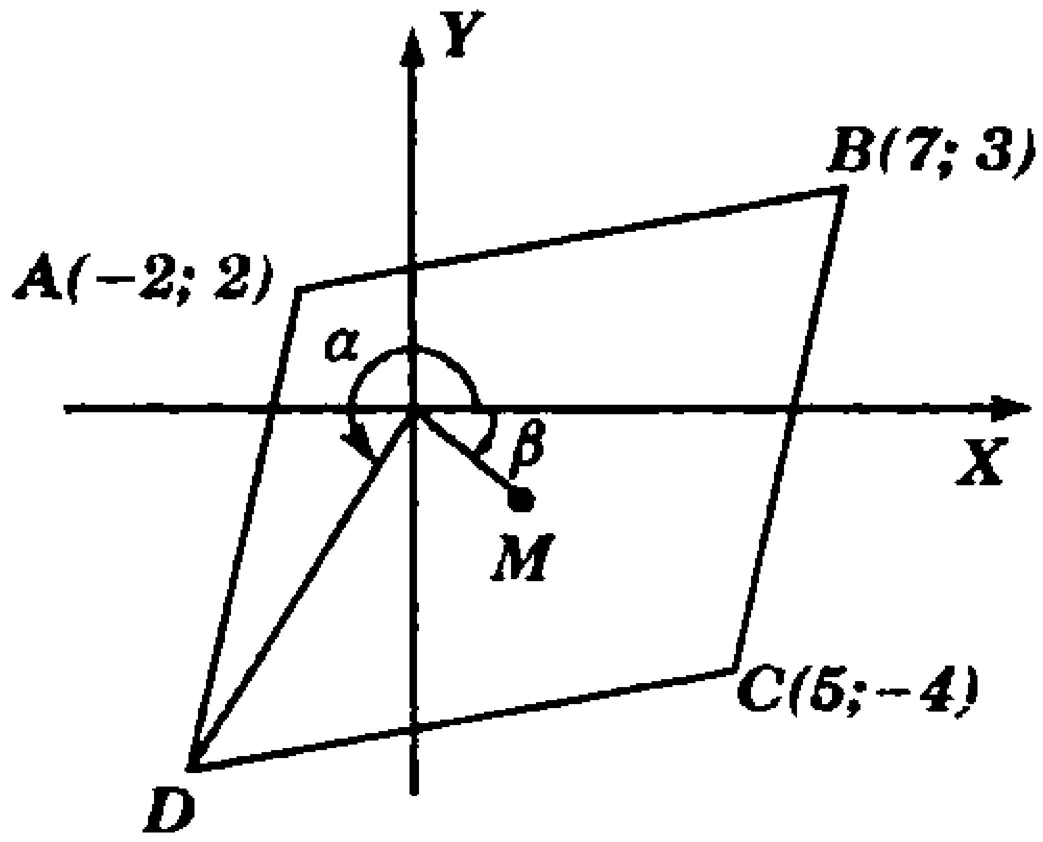


A) 1/6 B) 11/6 C) 1/12 D) 0 E) -1

(17) Del gráfico mostrado, calcular:

$$N = Tg\alpha + Tg\beta$$

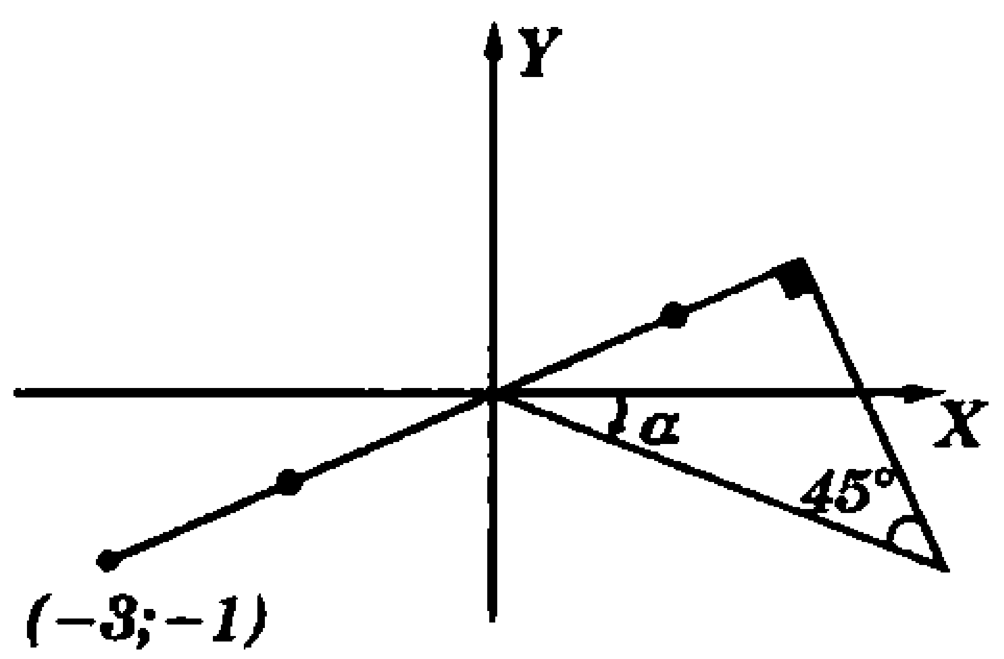
sabiendo que $ABCD$ es un paralelogramo y M es el punto de corte de sus diagonales.



A) -5/7 B) -7/12 C) 7/12
D) 5/12 E) -5/12

(18) Del gráfico mostrado, calcular:

$$M = \sqrt{5}Cos\alpha + Ctg\alpha$$



A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

(19) Determine las medidas de dos ángulos coterminales que estén en la relación de 3 a 5 y la suma está comprendida entre $4032°$ y $4608°$

A) 1620°; 2700° B) 1260°; 2940°
C) 1790°; 2640° D) 1540°; 1750°
E) 1560°; 2600°

(20) Si: $-\pi < \theta < 0 \wedge \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

determinar el signo de :

$$A = Sen\theta + Cos\alpha$$

$$B = Cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + Sen\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$

$$C = Sen\left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)$$

A) (+); (+); (–) B) (–); (+); (–)
C) (–); (–); (+) D) (+); (+); (+)
E) (–); (+); (+)

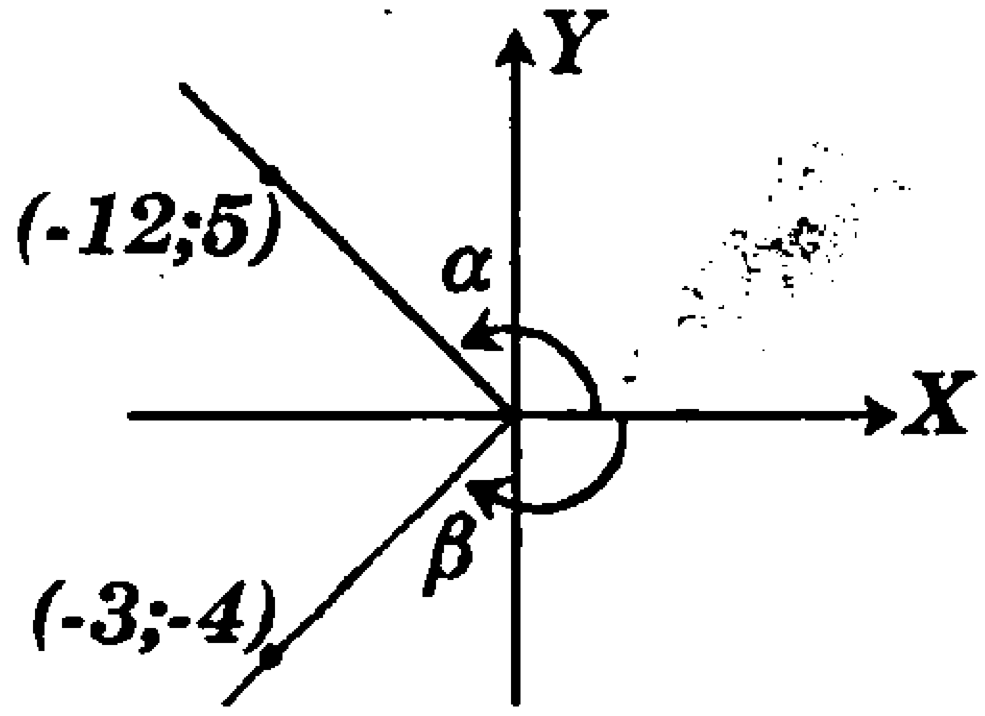
SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) Si el punto $(6; -8)$ pertenece al lado final del ángulo a en posición normal, calcular :

$$5Cos\alpha + 6Tg\alpha$$

A) - 3 B) - 4 C) - 5 D) -10 E) -11

(02) Calcular: $Csc\alpha + Cos\beta$



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(03) Si : $sen\alpha > 0 \wedge Cos\alpha < 0$ hallar el signo de la expresión:

$$(Tg\alpha + Ctg\alpha)Sen\alpha$$

A) + B) – C) + ó – D) + y – E) F.D

(04) Si : $sen\,\alpha\sqrt{Cos\alpha} < 0$, hallar el signo de la expresión :

$$\frac{cos\alpha}{Sen\alpha + Tg\alpha}$$

A) + B) – C) + ó –

(05) Si : $\alpha \in IIIC$, además $Tg\alpha = 1,5$; calcular $\sqrt{13}\ (Sen\alpha - Cos\alpha)$

A) 1 B) -1 C) 5 D) - 5 E) 0

(06) Si $\theta \in IIC$, además :

$$Sec\theta = Tg^2 45° - Sec^2 60°$$

calcular : $3Sen\theta + Tg\theta$

A) $4\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 0

(07) Calcular :

$$2Sen90° + 3Cos180° + 4Tg360° + 5Ctg270°$$

A) 14 B) 7 C) 6 D) 5 E) -1

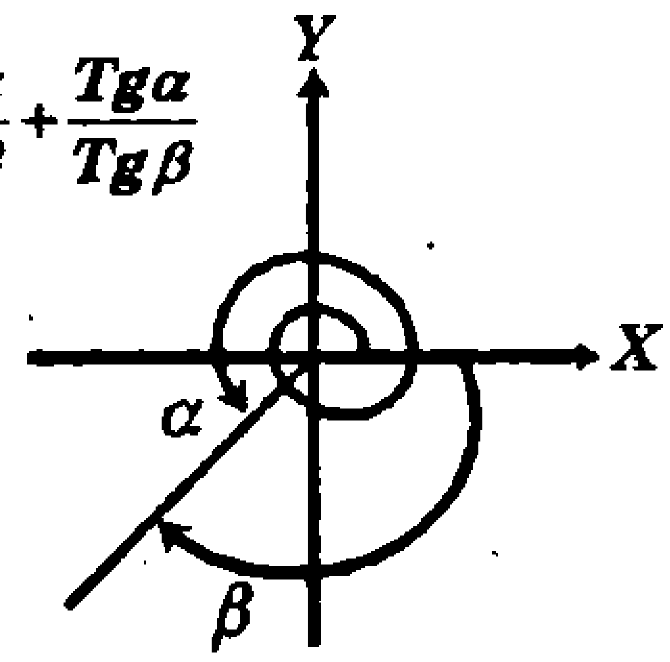
(08) Reducir:

$$\frac{(a+b)^2 Cos360° + (a-b)^2 Sen270°}{aSen180° + abSen270° + bSen360°}$$

A) - 4 B) - 2 C) 1 D) 2 E) 4

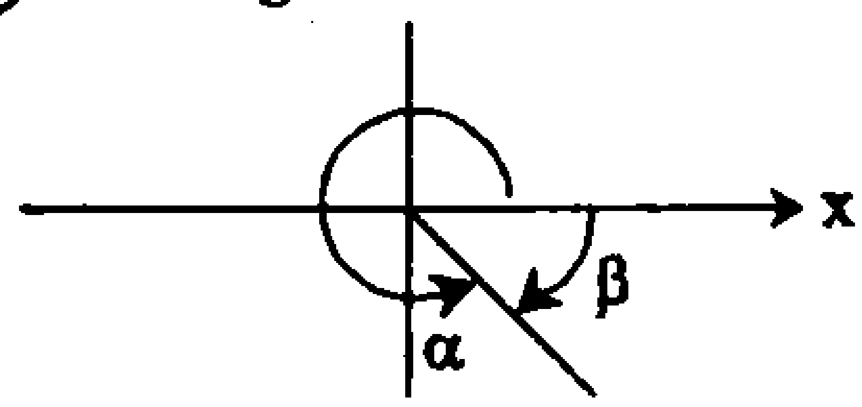
(09) De la figura hallar :

$\frac{Sen\alpha}{Sen\beta}+\frac{Cos\alpha}{Cos\beta}+\frac{Tg\alpha}{Tg\beta}$



A) 1 B) 2 C) 3 D) –1 E) – 2

(10) De la figura



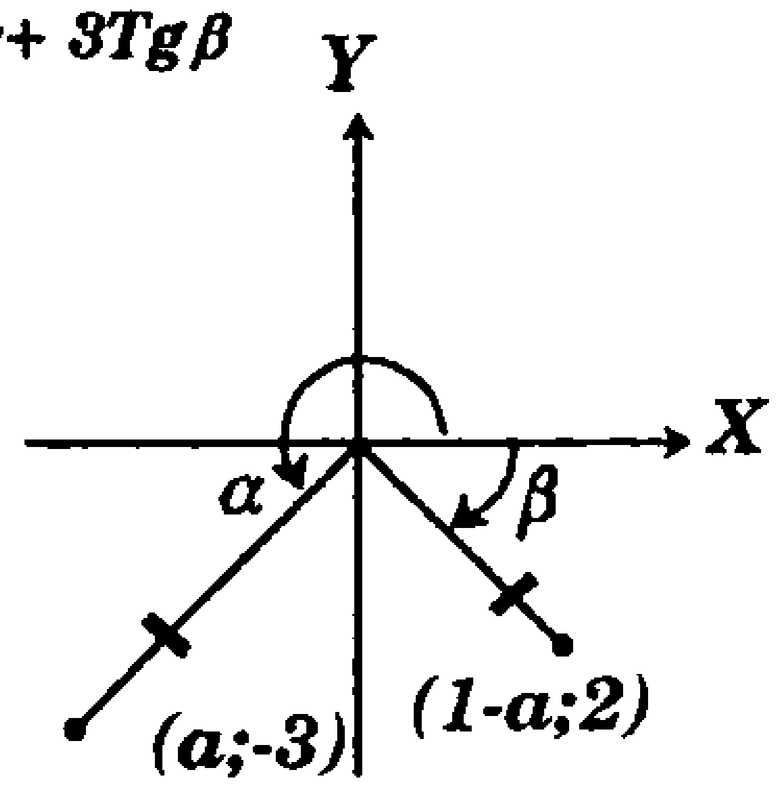
hallar : $Sen\alpha$

sabiendo que $Tg\alpha + Tg\beta = -6$

A) $\sqrt{10}/10$ B) $3\sqrt{10}/10$ C) $-\sqrt{10}/10$
D) $-3\sqrt{10}/10$ E) $-\sqrt{10}/5$

(11) Del gráfico, calcular:

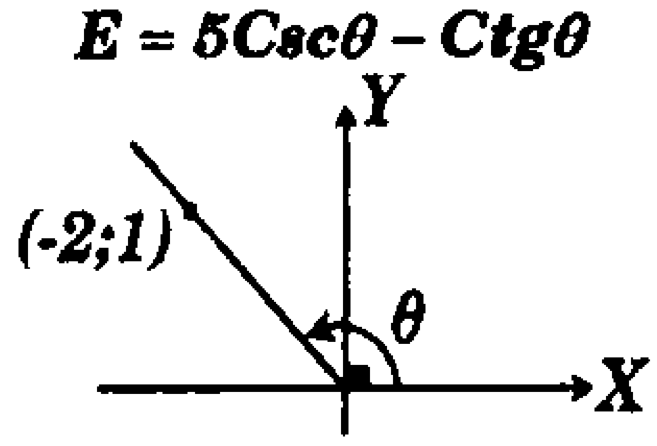
$2Tg\alpha + 3Tg\beta$



A) 1 B) –1 C) 5 D) -5 E) 0

(12) De la figura calcular el valor de:

$$E = 5Csc\theta - Ctg\theta$$



A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(13) Si : $ctg\alpha = 2,4$ siendo "α" un ángulo standar del tercer cuadrante, calcular el valor de:

$$E = 2Sen\alpha + \frac{1}{4}\ Cos\alpha$$

A) – 2 B) –1 C) 1/2 D) 1 E) 2

(14) A qué cuadrante pertenece el ángulo "θ" si se cumple :

$$Cos\theta < Cos\ \pi/2$$
$$Tg\theta > Tg\ \pi$$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) N.A.

(15) Si : $0<x<2\pi \wedge Senx = Tg\,2\pi$, calcular el valor de:

$$P = Sen\left(\frac{x}{2}\right)+Ctg\left(\frac{x}{4}\right)+Csc\left(\frac{x}{6}\right)$$

A) $2\sqrt{3}/3$ B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

(16) Indicar el cuadrante de "α", si :

$$Sen\alpha<0\ \ y\ \ Cos\alpha<0$$

A) IC B) IIC C) IIIC
D) IVC E) F.D.

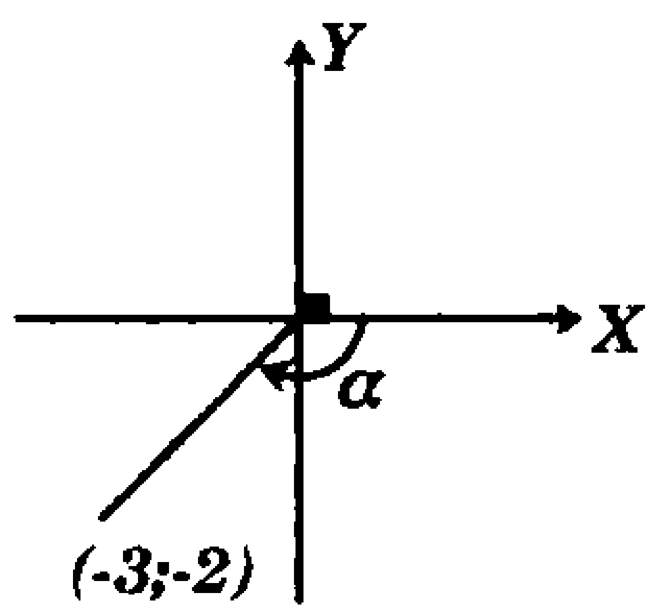
(17) Siendo θ y α ángulos del *II* y *III* cuadrante respectivamente, hallar el signo de:

$$E = \frac{Sen\theta \times Cos\alpha \times Tg\theta}{Ctg\theta \times Sec\alpha \times Csc\theta}$$

A) + B) – C) (±)
D) cero E) Falta datos

(18) De la figura calcular el valor de:

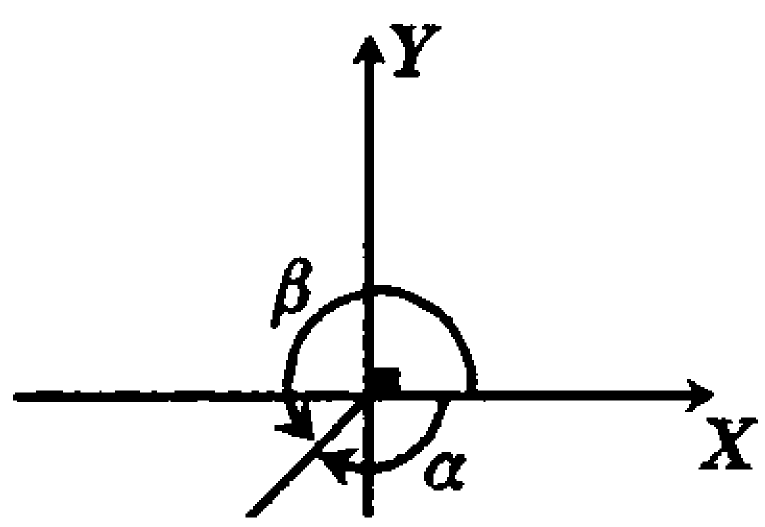
$$P = \sqrt{13}\,(Sen\alpha - Cos\alpha)$$



A) – 5 B) – 3 C) – 2 D) 1 E) 2

(19) Del gráfico, hallar:

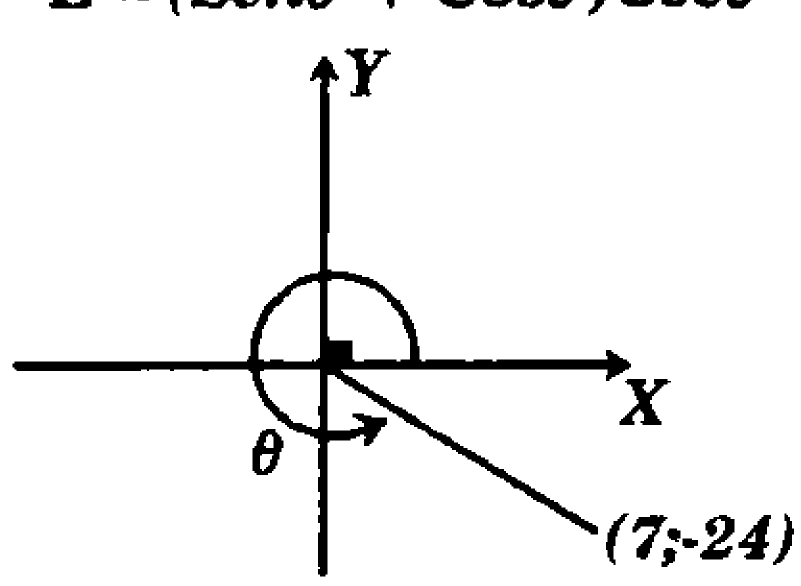
$$Q = \frac{2Cos\alpha}{Cos\beta}+\frac{Tg\beta}{Tg\alpha}$$



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(20) De la figura , hallar:

$$E = (Sen\theta + Cos\theta)Csc\theta$$



A) 17/24 B) 24/17 C) 7/24
D) –17/24 E) –7/24

(21) Determinar si es verdadero *(V)* o falso *(F)*:

I) Todo ángulo en posición estándar perteneciente al *IC* es positivo .

II) La mitad de todo ángulo perteneciente al *IC* también perteneciente al *IC* .

III) Un ángulo que mide $\frac{5\pi}{2}$ rad pertenece al *IIC*.

IV) $180°+\alpha$,pertenece al *IIIC* .

A) FFFF B) VVFF C) VFVF
D) FVFV E) FVVV

(22) Si: $2530°<\alpha<2610°$ y

$$-1530° < \theta < -1440°$$

Determinar a qué cuadrante pertenecen α y θ

A) I y IV B) I y III C) II y III
D) II y IV E) III y IV

(23) Sea : $\alpha = 1°+2°+3°+.....+n°, n \in Z$.

Si a es un ángulo en posición normal menor de una vuelta , calcular el mayor valor de α perteneciente al *IIC* .

A) 156° B) 162° C) 171°
D) 136° E) 144°

(24) Determinar el signo en cada caso :

$$P = sen100° + sen380° - sen350°$$
$$Q = cos200° + cos100° - cos300°$$
$$R = Ptg300° + Qtg200°$$

A) + ,+ ;+ B) +;+;– C) – :–; +
D) – ;– ; – E) + ; – ;–

CLAVES DE LA PRACTICA DE EJERCICIOS #1

1)A	2)B	3)B	4)C	5)B	6)D	7)B	8)D	9)D	10)D
11)C	12)B	13)C	14)B	15)C	16)A	17)B	18)B	19)A	20)B

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)A	3)A	4)E	5)C	6)B	7)B	8)C	9)C	10)C
11)B	12)A	13)E	14)A	15)B	16)A	17)C	18)C	19)E	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)B	3)B	4)B	5)A	6)A	7)E	8)A	9)C	10)D
11)C	12)D	13)B	14)C	15)D	16)C	17)A	18)D	19)C	20)A
21)A	22)A	23)C	24)E	25)A	26)A	27)C	28)D	29)A	20)A

REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE

CAPITULO 118

OBJETIVOS :

- *Calcular las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, expresándolo en términos de un ángulo agudo, reconociendo para ello el caso en que nos encontremos.*
- *Aplicar los signos de las razones trigonométricas de acuerdo a la medida del ángulo.*

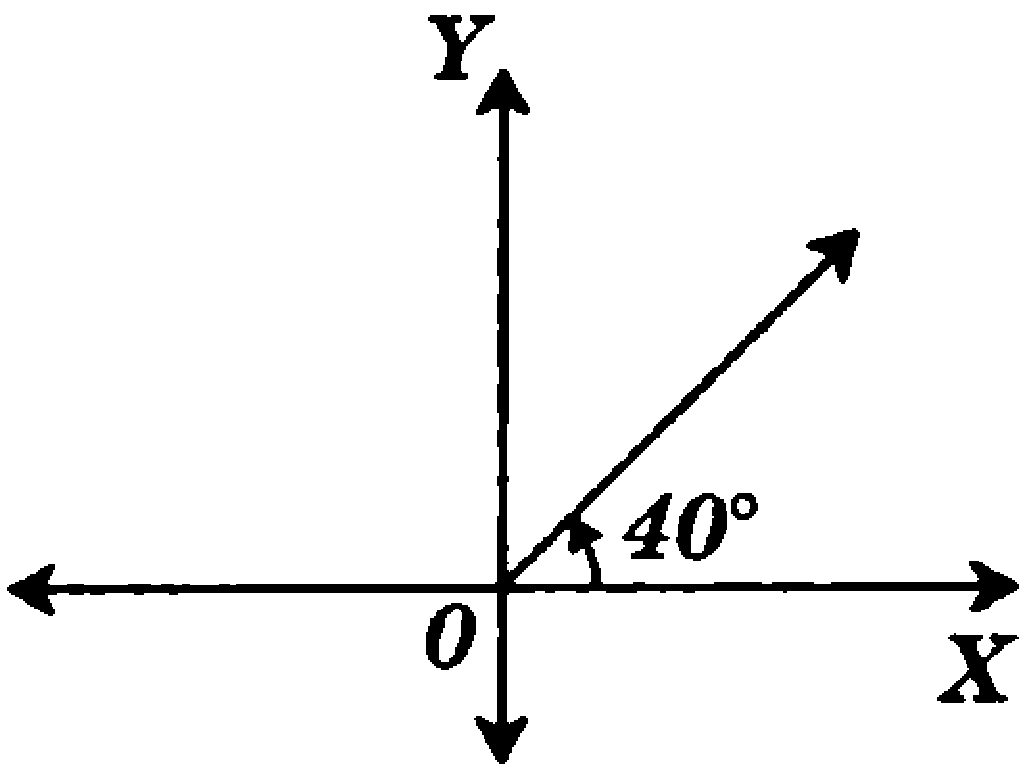
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Es el procedimiento mediante el cual se calcula las razones trigonométricas de ángulos que no son agudos, en términos de un ángulo que si lo sea.

ÁNGULO DE REFERENCIA

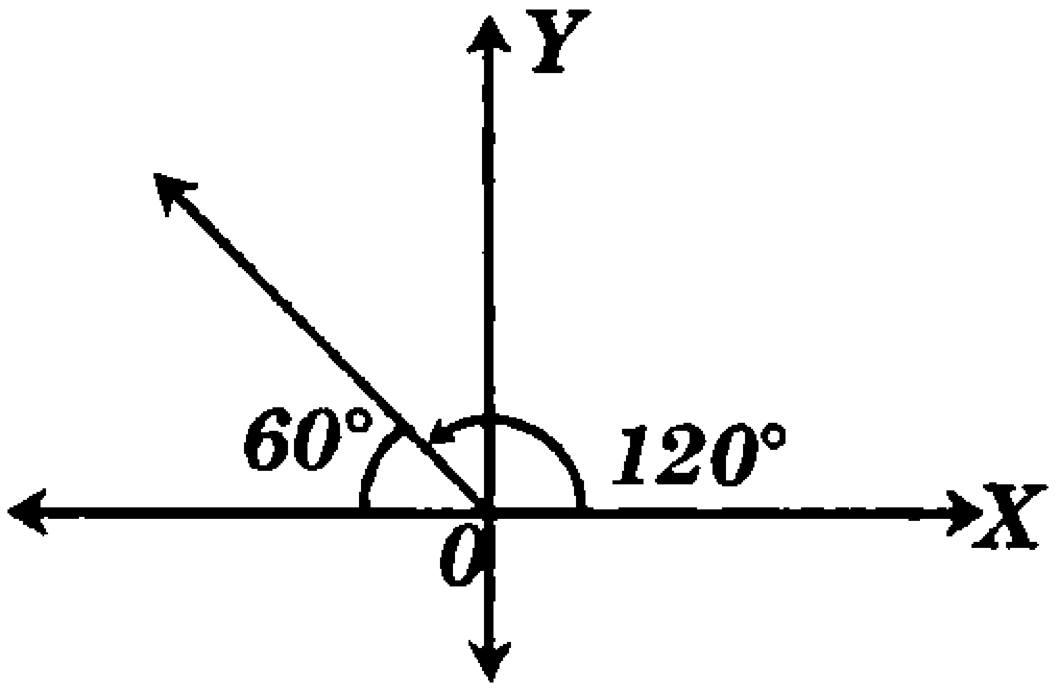
Al ángulo agudo formado por el lado final de un ángulo positivo en posición normal "θ" con el lado positivo o negativo del eje "X" se llama *ÁNGULO DE REFERENCIA* y se denota por θ_R.

EJEMPLO 1 :



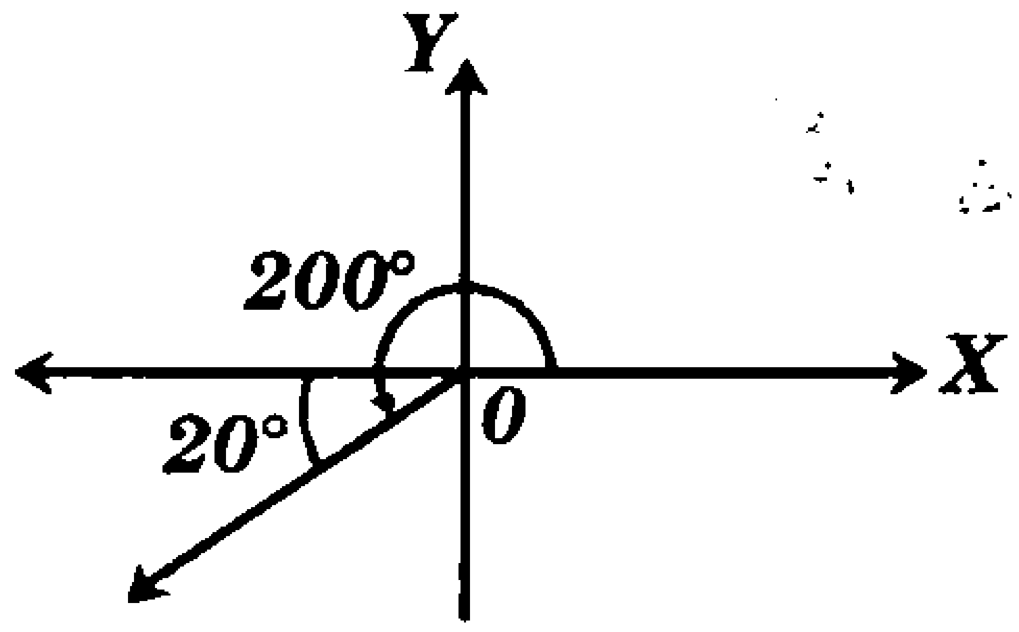
El ángulo de referencia de *40°* es *40°*

EJEMPLO 2 :



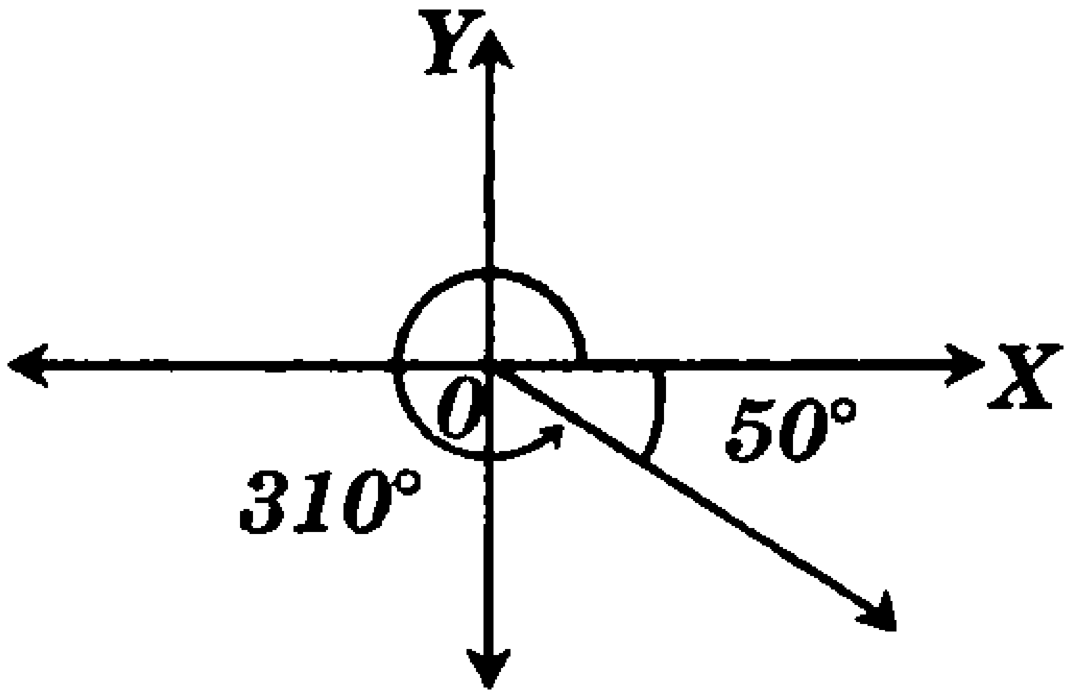
El ángulo de *120° es 60°*

EJEMPLO 3 :



El ángulo de referencia de *200° es 20°*

EJEMPLO 4 :



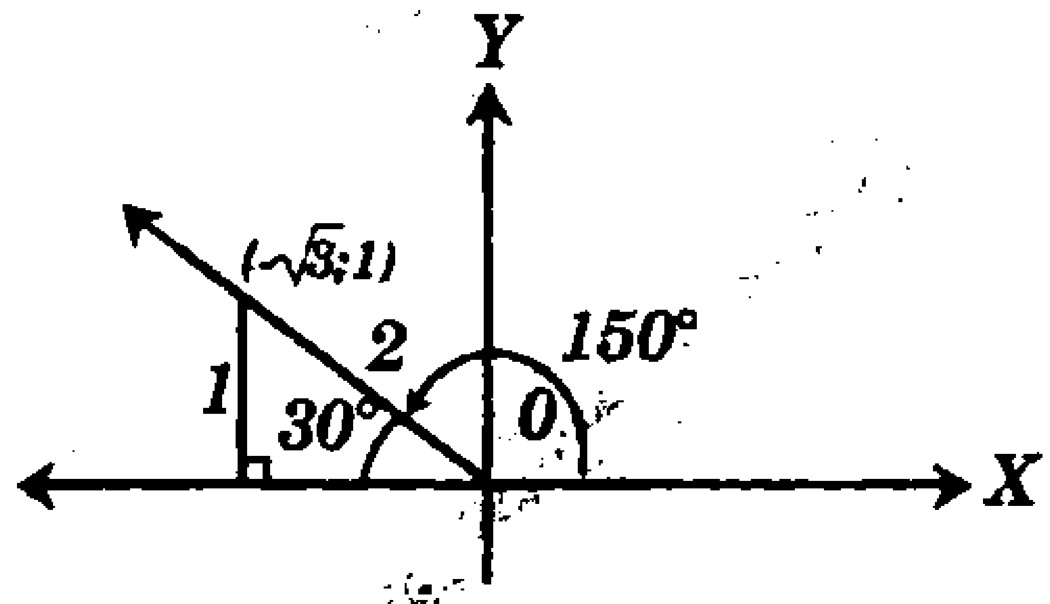
El ángulo de referencia de *310° es 50°*

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

Si θ es un ángulo positivo normal menor que una vuelta y θ_R su ángulo de referencia, entonces se cumple que las *R.T.* de θ y los *R.T.* de θ_R va a tener los mismos valores y en algunos casos difieren en el signo es decir:

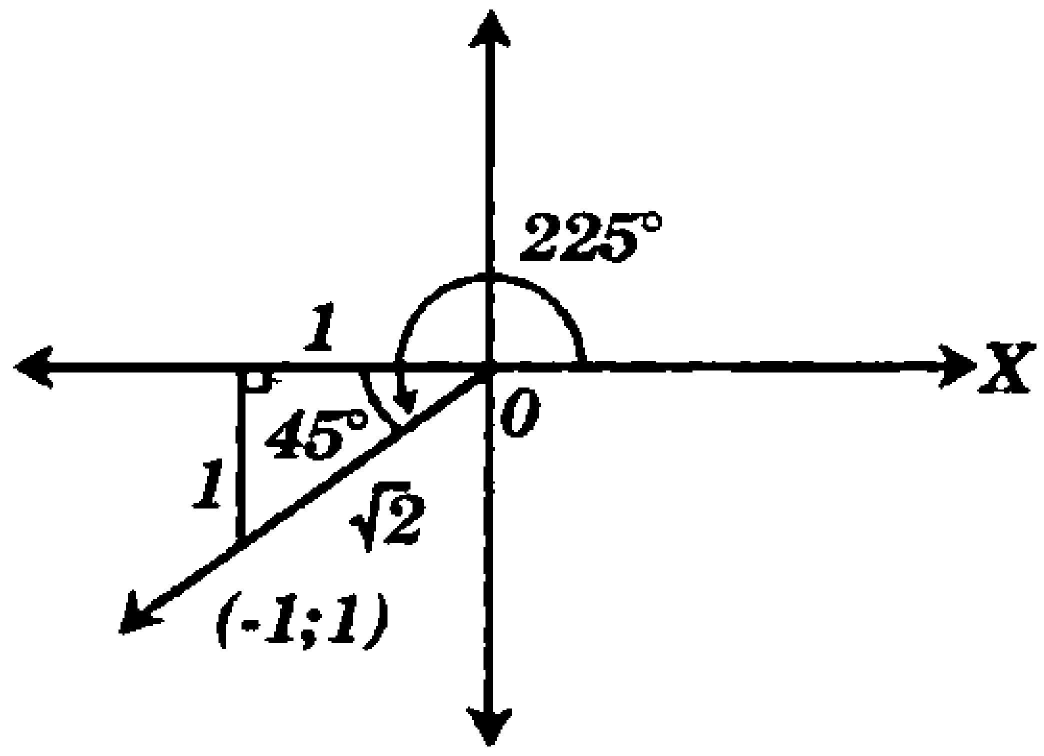
$$R.T(\theta) = \pm R.T.(\theta_R)$$

EJEMPLO 1 :



- $Sen\ 150° = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2}$
- $Sen\ 30° = \dfrac{CO}{H} = \dfrac{1}{2}$
- Entonces : *Sen 150° = Sen 30°*

EJEMPLO 2 :



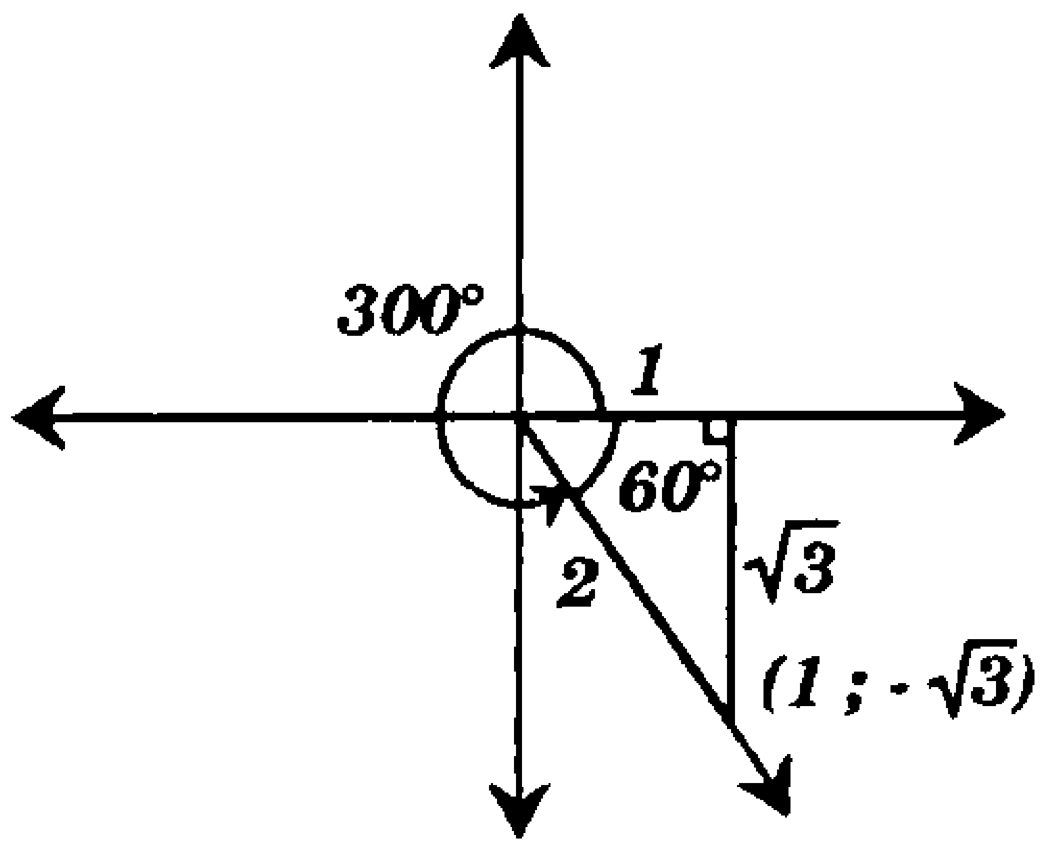
$*Cos\ 225° = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$*Cos\ 45° = \dfrac{CA}{H} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- Entonces :

$$Cos\ 225° = -Cos45°$$

EJEMPLO 3 :



$*Tan300° = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$*Tan\ 60° = \frac{CO}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

EJEMPLOS :

$1) Sen100° = Sen(90°+10°) = +Cos10°$

$2) Cos200° = Cos(270°-70°) = -Sen70°$

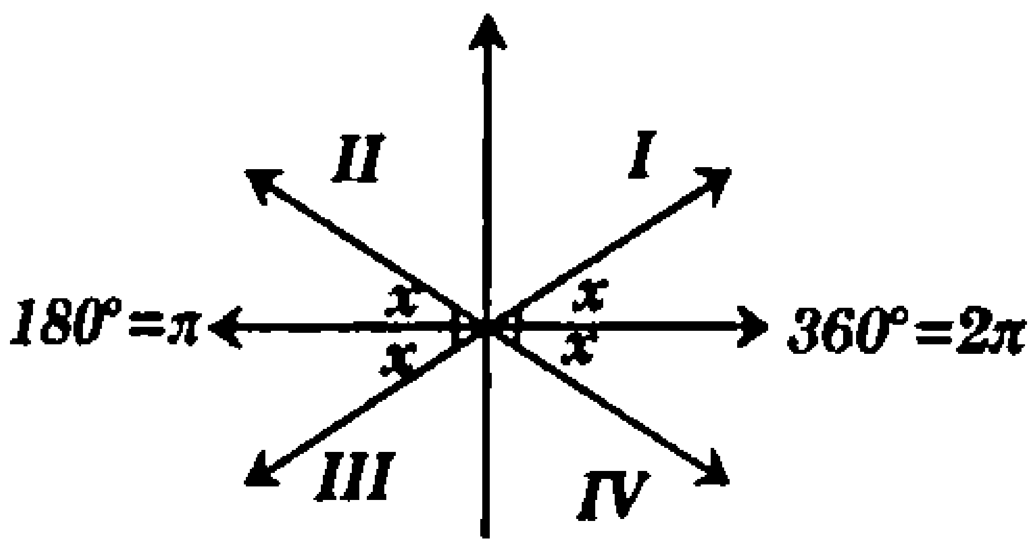
$3) Tan310° = Tan(270°+40°) = -Cos40°$

$4)\ Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = +Cosx$

$5)\ Cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -Senx$

$6)\ Tan\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -Cotx$

Para entender la propiedad , nos ayudamos del siguiente gráfico.



Si x es un ángulo agudo , es fácil darse cuenta que :

$*(180°-x) \in II \vee (\pi-x) \in I$

$*(180°+x) \in III \vee (\pi+x) \in III$

$*(360°-x) \in IV \vee (3\pi-x) \in IV$

Los ***R.T.*** de los ángulos anteriores se reducen a ***R.T.*** de ***(x)*** aplicando las siguientes fórmulas:

$R.T.(180°-x) = \pm R.T.(x)$
$R.T.(180°+x) = \pm R.T.(x)$
$R.T.(360°-x) = \pm R.T.(x)$

NOTA :

El signo $\pm$ depende del cuadrante al cual pertenece el ángulo que queremos reducir .

EJEMPLOS :

$1) Sen100° = Sen(180°-70°) = +Sen70°$

$2) Cos230° = Cos(180°+50°) = -Cos50°$

$3) Tan340° = Tan(360°-20) = -Tan20°$

$4) Cot320° = Cot(360°-40°) = -Cot40°$

$5) Sen(\pi-x) = Senx$

$6) Sen(\pi+x) = -Senx$

$7) Tan(2\pi-x) = -Tanx$

PROPIEDAD II :

Para ángulos positivos mayores que una vuelta:

Si un ángulo positivo θ mayor que una vuelta lo dividimos entre 360° nos da como cociente "n" y residuo "α". Es decir :

$$\theta = n(360°)+\alpha$$

La ***R.T.*** de θ y los ***R.T.*** de α son iguales por tanto :

$$\boxed{R.T.[n(360°)+\alpha] = R.T(\alpha)}$$

EJEMPLO 1 :

Calcular : ***Sen 750°***

RESOLUCIÓN :

750° |360
30° 2

$Sen750° = Sen\ 30° = \frac{1}{2}$

EJEMPLO 2 :

Calcular : ***Cos540°***

RESOLUCIÓN :

540° |360°
180° 1

$Cos540° = Cos180° = -1$

EJEMPLO 3 :

Calcular : ***Tan 900°***

RESOLUCIÓN :

900° |360°
180° 1

$Tan900° = Tan180° = 0$

EJEMPLO 4 :

Reducir al primer cuadrante : ***Sen3010°***

RESOLUCIÓN :

3010° |360°
130° 8

$Sen3010° = Sen130°$

$Sen3010° = Sen(180°-50°)$

$Sen3010° = +Sen50°$

EJEMPLO 5 :

Reducir al primer cuadrante : ***Cos4910°***

RESOLUCIÓN :

4910° |360°
230° 13

$Cos4910° = Cos230°$

$Cos4910° = Cos(180°-50°)$

$Cos4910° = -Cos50°$

EJEMPLO 6 :

Reducir al primer cuadrante : ***Tan 10000°***

RESOLUCIÓN :

10000° |360°
280° 27

$Tan10000° = Tan280°$

$Tan10000° = Tan(360°-80°)$

$Tan10000° = -Tan80°$

$7) Sen(10\pi+x) = Sen(10\pi+x) = Sen\ x$

$8) Cos(416\pi+x) = Cos(416\pi+x) = Cos\ x$

$9) Tan(35\pi+x) = Tan(34\pi+\pi+x) = Tan(\pi+x) = Tanx$

$10) Cot(499\pi+x) = Cot(498\pi+\pi+x) = Cot(\pi+x) = cotx$

$11) Sen1275\pi = Sen(1274\pi+\pi) = Sen\pi = 0$

$12) Cos4377\pi = Cos(4376\pi+\pi) = Cos\pi = -1$

$13) Sen43\frac{\pi}{7}$ Dividimos sin el π:

43 |7
1 6

$\frac{43}{7} = 6+\frac{1}{7}$

$Sen\ 43\frac{\pi}{7} = Sen\left(6+\frac{1}{7}\right)\pi$

$= Sen\left(6\pi+\frac{\pi}{7}\right) = Sen\frac{\pi}{7}$

$14)\ Cos\ \frac{237}{5}\pi$ dividimos sin el π :

237 |5
2 47

$\frac{237}{5} = 47+\frac{2}{5}$

$Cos\frac{237}{5}\pi = Cos\left(47+\frac{2}{5}\right)\pi = Cos\left(47\pi+\frac{2\pi}{5}\right)$

$= Cos\left(46\pi+\pi+\frac{2\pi}{5}\right) = -Cos\frac{2\pi}{5}$

$15)\ Tan\ \frac{315\pi}{8}$ Dividimos sin el π :

315 |8
3 39

$\frac{315}{8} = 39+\frac{3}{8}$

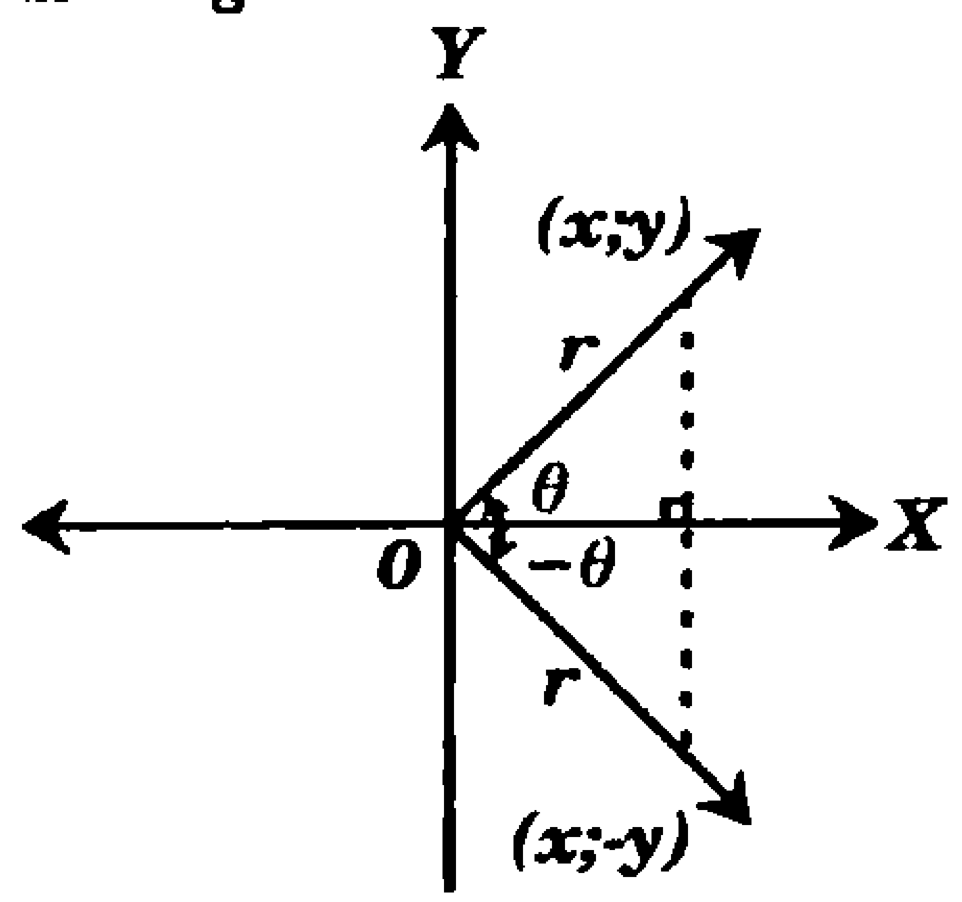
$Tan\frac{315}{8}\pi = Tan\left(39+\frac{3}{8}\right)\pi = Tan\left(39\pi+\frac{3\pi}{8}\right)$

$= Tan\left(38\pi+\pi+\frac{3\pi}{8}\right) = Tan\frac{3\pi}{8}$

PROPIEDAD III :

Para ángulos negativos :

Si θ es un ángulo positivo, entonces "$-\theta$" es un ángulo negativo como se muestra en el gráfico siguiente .



* Calcular el seno, coseno y Tangente de ***(θ)*** y ***(-θ)*** y obtenemos :

$$Sen\theta = \frac{y}{r} \wedge Sen(-\theta) = \frac{-y}{r}$$

$\Rightarrow \boxed{Sen(-\theta)=-Sen\theta}$

$Cos\theta=\dfrac{x}{r} \wedge Cos(-\theta)=\dfrac{x}{r}$

$\Rightarrow \boxed{Cos(-\theta)=Cos\theta}$

$Tan\theta=\dfrac{y}{x} \wedge Tan(-\theta)=\dfrac{-y}{x}$

$\Rightarrow \boxed{Tan(-\theta)=-Tan\theta}$

ANÁLOGAMENTE :

$Cot(-\theta)=-Cot\theta$
$Sec(-\theta)=Sec\theta$
$Csc(-\theta)=-Csc\theta$

* ***NÓTESE*** que para el coseno y la secante el ángulo negativo es indiferente .

EJEMPLOS :

1) $Sen(-30°)=-Sen30°=-\dfrac{1}{2}$

2) $Cos(-45°)=Cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3) $Tan(-60°)=-Tan60°=-3$

4) $Sen(-130°)=-Sen130°=-Sen$

$Sen(180°-50°)=-(+Sen50°)$

$=-Sen50°$

5) $Cos(-200°)=Cos200°$

$=Cos(180°+20°)=-Cos20°$

6) $Tan(-325°)=-Tan325°$

$=-Tan(360°-35°)=-(-Tan35°)$

$=Tan35°$

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Si $\alpha+\beta$ son suplementarios entonces : $\alpha+\beta=180°$

$\Rightarrow \alpha=180°-\beta$

$\Rightarrow Sen\alpha=Sen(180°-\beta)$

$\Rightarrow Sen\alpha=Sen\beta$

Análogamente :

$Cos\,\alpha=-Cos\beta$
$Tan\,\alpha=-Tan\beta$
$Cot\,\alpha=-Cot\beta$
$Sec\,\alpha=-Sec\beta$
$Csc\,\alpha=-Csc\beta$

EJEMPLOS :

1) $Sen130°=Sen50°$

porque: $130°+50°=180°$

2) $Cos110°=-Cos70$

porque: $110°+70°=180°$

3) $Tan140°=-Tan40°$

porque: $140°+40°=180°$

4) $Sen\dfrac{2\pi}{3}=Sen\dfrac{\pi}{3}$

porque: $\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi$

5) $Cos\dfrac{4\pi}{5}=-Cos\dfrac{\pi}{5}$

porque: $\dfrac{4\pi}{5}+\dfrac{\pi}{5}=\pi$

6) $Tan\dfrac{4\pi}{7}=-Tan\dfrac{3\pi}{7}$

porque: $\dfrac{4\pi}{7}+\dfrac{3\pi}{7}=\pi$

Resumen :

* Para razones trigonométricas de la forma :

$$\boxed{R.T.\begin{pmatrix}180°\pm x\\360°\pm x\end{pmatrix}=\pm R.T.(x)}$$

$$\boxed{R.T.\begin{pmatrix}90°\pm x\\270°\pm x\end{pmatrix}=\pm Co.R.T.(x)}$$

NOTA:

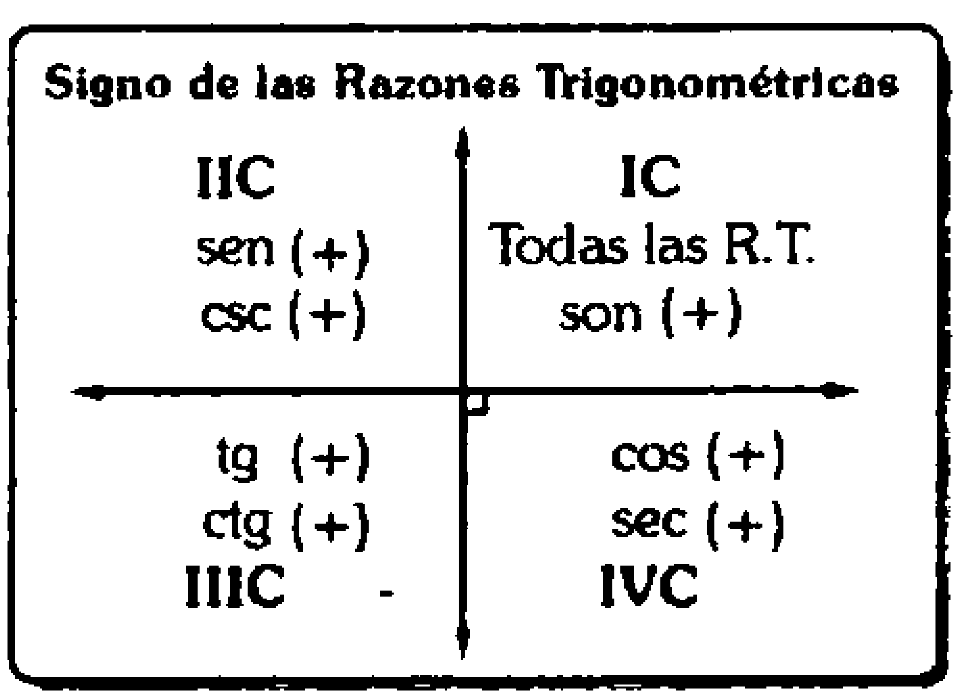
para determinar el signo ***(+) ó (–)*** se asume x como agudo ***(así no lo sea)***, con el único fin de determinar el signo ***(ver figura adjunta).***

EJEMPLOS :

$$\in IIC\begin{cases}90°+x\\180°-x\end{cases}\quad\begin{rcases}90°-x\\160°+x\end{rcases}\in IC$$

$$\in IIIC\begin{cases}180°+x\\270°-x\end{cases}\quad\begin{rcases}360°-x\\270°+x\end{rcases}\in IVC$$

RECORDAR:



NOTA :

En el ***IIC; IIIC; IVC*** las demas presentan signo negativo.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Reducir : $C=\dfrac{sen(-\alpha)}{sen\alpha}+\dfrac{cos(-\alpha)}{cos\alpha}$

A)1 B)2 C)–2 D)–1 E)0

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$C=\dfrac{sen(-\alpha)}{sen\alpha}+\dfrac{cos(-\alpha)}{cos\alpha}$

$C=\dfrac{-sen\alpha}{sen\alpha}+\dfrac{cos-\alpha}{cos\alpha}$

* Reduciendo : $C=-1+1 \Rightarrow C=0$

RPTA: "E"

PROBLEMA 2 :

Calcular : $L=\dfrac{tan(-60°)}{cos(-45°)}$

A)$\sqrt{3}$ B)$-\sqrt{3}$ C)$\sqrt{6}$ D)$-\sqrt{6}$ E)–6

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$tan(-60°)=-tan60°=-\sqrt{3}$

$cos(-45°)=cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

* Luego :

$L=\dfrac{-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow L=\dfrac{-2\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow L=-\sqrt{6}$ **RPTA: "D"**

PROBLEMA 3 :

Calcular : ***"tan 2933°"***

A)$\frac{3}{4}$ B)$-\frac{3}{4}$ C)$\frac{4}{3}$ D)$-\frac{4}{3}$ E)$-\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

* En este caso :

$2933° \,\underline{|360°}\Rightarrow tan2933°=tan53°$

$\underline{2880°}\quad 8$

$\;\;53°$

$\Rightarrow tan2933°=\dfrac{4}{3}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 4 :

Calcular : $E=\dfrac{sen900°+cos^2 540°}{sen^4 3870°}$

A)1 B)2 C) -1 D) - 2 E)0

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$900° \div 360° = 2$, residuo $180°$ ($720°$) ; $540° \div 360° = 1$, residuo $180°$ ($360°$) ; $3870° \div 360° = 10$, residuo $270°$ ($360°$)

* Luego :

$sen900° = sen180° = 0$

$cos540° = cos180° = -1$

$sen3870° = sen270° = -1$

$$\Rightarrow E = \frac{sen900° + cos^2 540°}{sen^4 3870°}$$

$$\Rightarrow E = \frac{0+(-1)^2}{(-1)^4} = \frac{0+1}{1} \Rightarrow E = 1$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 5 :

Reducir :

$$C = \frac{sen(24\pi + x)}{cos(4\pi - x)} + tan(80\pi - x)$$

A)2tanx B) – 2tanx C) 0
D)1 E) – 2

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$sen(24\pi + x) = sen(12vtas + x)$
$= senx$

$cos(4\pi - x) = cos(2vtas - x)$
$= cos(-x) = cosx$

$tan(80\pi - x) = tan(40vtas - x)$
$= tan(-x) = - \ tanx$.

* Luego : $\left(\frac{sen}{cos} = tan\right)$

$$C = \frac{senx}{cosx} + (-tanx)$$

$C = tanx - tanx \Rightarrow C = 0$

RPTA:"C"

PROBLEMA 6 :

Calcular : $B = \dfrac{sen240°}{cos120°}$

A)1 B)–1 C) 3 D)$-\sqrt{3}$ E)$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN :

* En al expresión, por partes :

$sen240° = sen(180° + 60°) = -sen60°$

$$\Rightarrow sen240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$cos120° = cos(180° - 60°) = -cos60°$

$$\Rightarrow cos120° = -\frac{1}{2}$$

* Reemplazando :

$$B = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow B = \sqrt{3}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 7 :

Calcular : $D = \dfrac{tan225°}{sen330°}$

A)1 B)– 1 C)2 D)– 2 E)$-\dfrac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$tan225° = tan(180° + 45°) = +tan45°$

$\Rightarrow tan225° = 1$

$sen330° = sen(360° - 30°) = -sen30°$

$$\Rightarrow sen330° = -\frac{1}{2}$$

* Luego :

$$D = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow D = -2$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8 :

A qué es igual : $Sen(90° + x)$

A) senx B) – senx C) cosx
D)–cosx E)1 + senx

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\underbrace{Sen(\underbrace{90° + x}_{IIC})}_{+} = +cosx$$

$\Rightarrow sen(90° + x) = cosx$

RPTA: "C"

PROBLEMA 9 :

A qué es igual :

$tan(180° - x)$

A) tanx B) – tanx C) cosx
D) – cotx E) 0

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\underbrace{tan(\underbrace{\overline{\overline{180°}} + x}_{IIC})} = -tanx$$

$\Rightarrow tan(180° + x) = -tanx$

RPTA:"B"

PROBLEMA 10 :

Calcular :

$$J = tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) tan(\pi + x)\ sec\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

A)cosx B)cscx C)tanx
D)cotx E)secx

RESOLUCIÓN :

* Por partes :

$tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = tan(90° + x) = -cotx$

$tan(\pi + x) = tan(180° + x) = tanx$

$sec\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = (sec270° - x) = -cscx$

* Reemplazando :

$J = (-cotx)tanx(-cscx)$

$J = \underbrace{cotx \times tanx}_{1} \times cscx$

$\Rightarrow J = cscx$

RPTA:"B"

PROBLEMA 11 :

Si : $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$, evaluar :

$$F = Sen\left(\frac{\pi}{2} + A\right) + Cos(\pi + A) + Tg\left(\frac{3\pi}{2} + A\right) + Sec(\pi + A) + Ctg(2\pi + A) + Csc(\pi + A)$$

A)2SenA B)– 2SenA C)2CscA
D)– 2CscA E)2CosA

RESOLUCIÓN :

* $Sen\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = CosA$
* $Sec\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = -CscA$
* $Cos(\pi + A) = -CosA$
* $Ctg(2\pi + A) = -CtgA$
* $Tg\left(\frac{3\pi}{2} + A\right) = -CtgA$
* $Csc(\pi + A) = -CscA$

* Reemplazando :

$F = CosA - CosA - CtgA - CscA$
$+ CtgA - CscA$

$\Rightarrow F = -2cscA$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

Hallar el valor de :

$$\frac{Cos345°\ Sen105°\ Csc255°\ Sec195°}{Ctg162°\ Sen288°\ Csc108°\ Ctg252°}$$

A) $\sqrt{2} - 1$ B)1 C)$\dfrac{6+\sqrt{2}}{4}$

RESOLUCIÓN :

* $Cos345° = Cos(360° - 345°) = Cos15°$
* $Sen105° = Sen(180° - 105°) = Sen75°$
* $Csc255° = -Csc(255° - 180°) = -Csc75°$
* $Sec195° = -Sec(195° - 180°) = -Sec15°$
* $Ctg162° = Ctg(180° - 162°) = -Ctg18°$
* $Sen288° = Sen(360° - 288°) = -Sen72$

* $Csc108° = Csc(108° - 108°) = Csc72°$

* $Ctg252° = Ctg(252° - 180°) = Ctg72°$

* Luego :

$$F=\frac{(\cos 15°)(sen 75°)(-\csc 75°)(-\sec 15°)}{(-ctg18°)(-sen72°)(\csc 72°)(ctg72°)}$$

1

RPTA: "B"

PROBLEMA 13 :

En un triángulo ABC, se cumple: $Sen(B+C)=\cos C$

A) Escaleno B) Rectángulo
C) Isósceles D) Acutángulo
E) Equilátero

RESOLUCIÓN :

$sen(B+C)=\cos C$ ....(I)

$A+B+C=180° \Rightarrow A+B=180°-A$

$\Rightarrow sen(B+C)=sen\,A$

* En (I) $sen\,A = \cos C$

* Entonces : $A + C = 90°$

* Esto implica que $B = 90°$, luego, se trata de un triángulo rectángulo.

RPTA:"B"

PROBLEMA 14 :

Hallar el valor numérico de :

$$F=\frac{sen^2 225° + tg^2 330° - sen^2 780°}{tg^2 780° - tg^2 330° + ctg^2 225°}$$

A) $\frac{31}{12}$ B) $\frac{33}{20}$ C) $\frac{1}{44}$ D) $\frac{-33}{20}$ E) $\frac{-31}{12}$

RESOLUCIÓN :

$sen225° = sen(180°+45°)$

$$=-sen45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$tg330° = tg(360° - 30°)$

$$=-tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$sen780° = sen(720°+60°) = Sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg780° = tg(720°+60°) = tg60° = \sqrt{3}$

$ctg225° = ctg(180°+45°) = +ctg45° = 1$

* Reemplazando :

$$\Rightarrow F=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{(\sqrt{3})^2-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(1)^2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4}}{3-\frac{1}{3}+1} \Rightarrow F=\frac{1}{44}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

El valor de la expresión :

$$E=\frac{sen\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(\pi-\theta)-tg\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{ctg(2\pi-\theta)-\sec(-\theta)+\csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

Cuando $\theta=\frac{\pi}{6}$ es :

A) 1 B) -1 C) θ D) 2 E) -2

RESOLUCIÓN :

$sen\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta; \sec(-\theta)=\sec\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta; \csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sec\theta$

* Reemplazando :

$$\Rightarrow F=\frac{(-\cos\theta)+(-\cos\theta)-tg\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{(-ctg\theta)-(\sec\theta)+\sec\theta}$$

$$\Rightarrow F=\frac{-2\cos\theta-tg\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}{-ctg\theta}$$

* Dato:

$$\theta=\frac{\pi}{6} \Rightarrow F=\frac{-2\cos\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{3}}{-ctg\frac{\pi}{6}}$$

$$F=\frac{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=2$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 16 :

Si : $tgx + ctg\,y = 2 ; x + y = \pi$

Hallar : $ctg\,x$

A) $\sqrt{2}$ B) $-1\pm\sqrt{2}$ C) $\pm\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

D) $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$ E) $\pm\sqrt{2}-1$

RESOLUCIÓN :

* Como : $x+y=\pi \Rightarrow y=\pi-x$

* Entonces : $ctgy = -ctg\,x$

* Reemplazando :

$tg\,x - ctg\,x = 2 \Rightarrow \frac{1}{ctgx} - ctg\,x = 2$

$\Rightarrow 1 - ctg^2x = 2ctgx$

$\Rightarrow ctg^2x + 2\cot x - 1 = 0$

$\Rightarrow Ctg\,x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow ctg\,x=-1\pm\sqrt{2}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 17 :

Simplificar la expresión :

$$E=\frac{sen(180°+\alpha)\cos(\alpha-90°)tg(1260°+\alpha)}{\cos(540°-\alpha)sen(450°+\alpha)tg(360°+\alpha)}$$

sabiendo que $\sec^2\alpha = 2$.

Entonces , E es igual a :

A) 2 B) 1 C) 1 D) -2 E) 0

RESOLUCIÓN :

$sen(180°+\alpha)=-sen\alpha$

$\cos(\alpha-90°)=\cos(90°+\alpha)=sen\alpha$

$tg(1260°+\alpha)=tg[7\times180°+\alpha]=tg\alpha$

$\cos(540°-\alpha)=\cos[3\times180°-\alpha]=-\cos\alpha$

$sen(450°+\alpha)=sen[5\times90°+\alpha]=\cos\alpha$

$tg(360°+\alpha)=tg\alpha$

* Reemplazando :

$$E=\frac{(-sen\alpha)(sen\alpha)(tg\alpha)}{(-\cos\alpha)(\cos\alpha)(tg\alpha)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha=\sec^2\alpha-1$$

* Dato : $\sec^2\alpha=2 \Rightarrow E=2-1=1$

RPTA:"B"

PROBLEMA 18 :

Marque Ud. la afirmación incorrecta:

A) $-sen(-750°)=0,5$

B) $-\cos(1110°)=-0,5\sqrt{3}$

C) $-tg(1830')=-3/\sqrt{3}$

D) $+ctg(-3270°)=-\sqrt{3}$

E) $+sen2534°=\cos14°$

RESOLUCIÓN :

*Cada una de las alternativas la analizaremos y ; luego, las comparamos :

A) $-sen(-750°)=sen750°$

$$=sen(2\times360°+30°)=sen30°=\frac{1}{2}$$

B) $-\cos(1110°)=-\cos(1110°)$

$$=-\cos(3\times360°+30°)=-\cos30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

C) $-tg(1830')$. En este caso , el ángulo está en minutos; entonces, lo pasamos a grados :

1830 | 60 $\Rightarrow tg(1830')=-tg(30°30')$
30   30

D) $ctg(-3270°) = -ctg3270°$

3270° | 360° $\Rightarrow ctg3270° = ctg30°$
30   9

E) $sen2534° = \cos14°$

$2534° \underline{|360°} \Rightarrow sen2534° = sen14°$
14 7

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

Simplificar :

$$K = \frac{tg\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)sen\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)sec\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}{cos(5\pi+\alpha)csc(7\pi-\alpha)ctg(9\pi+\alpha)}$$

A)0 B)–1 C)1 D–2 E)2

RESOLUCIÓN :

* $tg\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\,\alpha$
* $cos\,(5\pi+\alpha) = -cos\,\alpha$
* $sen\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right) = -cos\,\alpha$
* $csc\,(7\pi-\alpha) = -csc\,\alpha$
* $sec\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right) = -csc\,\alpha$
* $ctg(9\pi+\alpha) = ctg\,\alpha$
* Reemplazando :

$$K = \frac{(-ctg\alpha)(-cos\alpha)(-csc\alpha)}{(-cos\alpha)(csc\alpha)(ctg\alpha)}$$

* Simplificando : $K = 1$

RPTA:"C"

PROBLEMA 20 :

Calcular el valor de :

$cos10°+cos30°+cos50°+...+cos170°$

A)1/2 B)0 C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ D)1 E)N.A.

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$F = cos10°+cos30°+cos50° +...+cos130°+cos150°+cos170°$

*Observar que los ángulos de los términos equidistantes son suplementarios , esto implica que:
$cos170° = -cos10°; cos150° = -cos30°; cos130° = -cos50°; ......$

* Volvemos a escribir la suma :

$F = cos10°+cos30°+cos50°+cos70°+cos90° - cos70° - cos50° - cos30° - cos10°$

* Simplificando : $F = 0$

RPTA: "B"

PROBLEMA 21 :

Si :

$M = tg400° + cos810°$

$N = ctg760°\,sen450°$

$T = tg1125°\,sec720°$

El valor de $M^2N^2T^2$ es :

A)–1 B)1 C)$tg^240°$ D)$ctg^240°$ E)0

RESOLUCIÓN :

$tg400° = tg(360°+40°) = tg40°$

$cos810° = cos(720°+90°) = cos90° = 0$

*Entonces es : $M = tg40°$..........(I)

$ctg760° = ctg(720°+40°) = ctg40°$

$sen450° = sen(360°+90°) = sen90° = 1$

* Entonces : $N = ctg40°$............(II)

$tg1125° = tg(3\times360°+45°) = tg45° = 1$; $sec720° = sec0° = 1$

* Entonces : $T = 1$................(III)

* De (I) , (II) y (III) :

$\Rightarrow M^2N^2T^2 = (tg40°)^2(ctg40°)^2(1)^2 = 1$

RPTA:"B"

PROBLEMA 22 :

El valor de la siguiente expresión :

$$\frac{sen\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}+\frac{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)}{cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

es igual a :

A)0 B)1 C)–1 D)2 E)–2

RESOLUCIÓN :

$$sen\left(\frac{7\pi}{12}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

* Reemplazamos en la expresión dada :

$$\frac{cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}+\frac{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)}{-sen\left(\frac{\pi}{12}\right)} = 1-1 = 0$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 23 :

El valor que asume la expresión

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+cos(2\pi-\theta)+tg\,(\pi-\theta)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-sec(-\theta)-csc\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$ es :

A)$\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$ B)$\frac{1-3\sqrt{3}}{13}$ C)$\frac{3\sqrt{3}-1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Analizamos el numerador :

$Sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = cos\,\theta$

$tg\,(\pi-\theta) = -tg\,\theta$

$cos\,(2\pi-\theta) = cos\,\theta$

* Analizamos el denominador :

$ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = tg\,\theta$

$sec\,(-\theta) = sec\,\theta$

* Reemplazamos en la expresión dada :

$$\frac{cos\theta+cos\theta-tg\theta}{tg\theta-sec\theta-csc\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}$$

* Reemplazamos el valor indicado :

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow F = \frac{cos\frac{\pi}{3}+cos\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{3}}{tg\frac{\pi}{3}-sec\frac{\pi}{3}-sec\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-4} = \frac{3\sqrt{3}-1}{13}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :

Sabiendo que :

$$m\,sen\left(\frac{55\pi}{2}-\theta\right)cos\left(\frac{77\pi}{2}+\theta\right) = 1$$

Calcular :

$E = tg\,\theta + cot\,\theta$, en términos de m.

A)m^2 B)$-m^2$ C)$2m$ D)$-m$ E)m

RESOLUCIÓN :

* $sen\left(\frac{55\pi}{2}-\theta\right) = sen(26\pi+\frac{3\pi}{2}-\theta) = -cos\theta$

* $cos\left(\frac{77\pi}{2}+\theta\right) = cos\left(38\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -sen\theta$

* Entonces :

$m(-cos\theta)(-sen\theta) = 1 \Rightarrow \boxed{sen\theta\,cos\theta = \frac{1}{m}}$

$$E = tg\theta+ctg\theta = \frac{sen\theta}{cos\,\theta}+\frac{cos\,\theta}{sen\theta} = \frac{sen^2\theta+cos^2\theta}{sen\theta\,cos\,\theta}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{sen\theta cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{m}} = m$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 25 :

En un triángulo ABC, se cumple que: $\cos(A+B)=\cos C$

Entonces , el valor de $A+B$ es :

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{6}$ E) $\frac{\pi}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que : $A+B+C=180°$
* Entonces : $A+B=180°-C$
* Luego: $\cos(A+B)=-\cos C$.....(I)
* Del datos : $\cos(A+B)=\cos C$...(II)
* De (I) y (II) :

$-\cos C=\cos C \Rightarrow \cos C=0$

* Entonces : $C=90°$ esto implica que :

$A+B=90°=\frac{\pi}{2}$ radianes

RPTA: "E"

PROBLEMA 26 :

Que relación existe entre a y b, sabiendo que :

$$tg\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+ctg\left(\frac{6\pi+3a-2b}{4}\right)=0$$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

RESOLUCIÓN :

$$tg\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+ctg\left(\frac{6\pi}{4}+\frac{3a-2b}{4}\right)=0$$

$$tg\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3a-2b}{4}\right)=0$$

$$tg\left(\frac{2a-3b}{8}\right)+\left(-tg\left(\frac{3a-2b}{4}\right)\right)=0$$

$$tg\left(\frac{2a-3b}{8}\right)=tg\left(\frac{3a-2b}{4}\right)$$

$$\frac{2a-3b}{8}=\frac{3a-2b}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2a-3b}{2}=3a-2b$$

$$\Rightarrow 2a-3b=6a-4b \Rightarrow 4b-3b=6a-2a$$

$$\Rightarrow b=4a \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{4}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27:

Simplificar :

$$\frac{sen(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(x-\pi)sen\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\csc(\pi+x)\sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)ctg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

A) -1 B) $-tg^2x$ C) $sen^2x\cos^2x$

D) ctg^2x E) $(2\sec^2x-1)-1$

RESOLUCIÓN :

* $sen(\pi+x)=-sen x$
* $\csc(\pi+x)=-\csc x$
* $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sen x$
* $\sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\csc x$
* $\cos(x-\pi)=-\cos x$
* $tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-ctg x$
* $sen\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$
* $ctg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=tg x$

Reemplazando en M :

$$M=\frac{(-senx)(-senx)+(-cosx)(-cosx)}{(-cscx)(cscx)-(-ctgx)(tgx)}$$

$$=-tg^2x$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 28 :

Sabiendo que . $sen A-2\cos A=0$

Simplificar :

$$E=\frac{tg(90°+A)\sec(180°-A)ctg(270°-A)}{sen(360°+A)\csc(180°+A)\cos(180°+A)}$$

A) -5 B) -4 C) 5 D) 4 E) -2

RESOLUCIÓN :

* Dato : $sen A-2\cos A=0$

$$senA=2\cos A \Rightarrow \frac{senA}{\cos A}=2 \Rightarrow tgA=2$$

* $tg(90°+A)=-ctgA$
* $sen(360°-A)=-senA$
* $\sec(180°-A)=-\sec A$
* $\csc(180°+A)=-\csc A$
* $crg(270°-A)=tgA$
* $\cos(180°+A)=-\cos A$
* Reemplazando en E :

$$\Rightarrow E=\frac{(-ctgA)(-\sec A)(tgA)}{(-senA)(-\csc A)(-\cos A)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{\overbrace{(ctgA\,TgA)}^{1}\sec A}{\underbrace{(senA\,\csc A)}_{1}(-\cos A)}$$

$$\Rightarrow E=-\frac{\sec A}{\frac{1}{\sec A}}=\sec^2A=-(1+tg^2A)$$

$$\Rightarrow E=-(1+2^2)=-5$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 29 :

Si A y B son ángulos complementarios, al simplificar:

$$E=\frac{sen(A+2B)tg(2A+3B)}{\cos(2A+B)tg(4A+3B)}$$

se obtiene :

A) 3 B) 2 C) -2 D) 2 E) 1

RESOLUCIÓN :

* Como A y B son complementarios

$\Rightarrow A+B=90° \Rightarrow A=90°-B$

* Reemplazamos en E :

$$\frac{sen(90°-B+2B)tg(180°-2B+3B)}{\cos(180°-2B+B)tg(360°-4B+3B)}$$

pero : $sen(90°+B)=\cos B$; $tg(180°+B)=tgB$

$$=\frac{sen(90°+B)\,tg\,(180°+B)}{\cos(180°-B)\,tg\,(360°-B)}...(I)$$

$\cos(180°-B)=-\cos B$; $tg(360°-B)=-tgB$

* Reemplazando en (I) :

$$E=\frac{(\cos B)(tgB)}{(-\cos B)(-tgB)} \Rightarrow E=1$$

RPTA: "E"

OBJETIVO DE APRENDIZAJE :

Al finalizar el tema el alumno será capaz de :

Utilizar las reglas de reducción al *IC* y poder calcular razones trigonométricas de manera más sencilla para ángulos no agudos; en una variedad de ejercicios y problemas propuestos.

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Marcar (V) o (F):

( ) $Sen\alpha=Sen(180°-\alpha)$

( ) $Cos\beta=Sen(270°-\beta)$

( ) $Senx=Cos(90°-x)$

A) VFV B) VVV C) FFF
D) VFF E) FVF

02 Calcular: $E=Sen150°$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/8
D) 2/3 E) $-4/5$

03 Calcular $Cos120°$:

A) $-1/2$ B) 1/4 C) 1/2
D) 1/3 E) $-\sqrt{3}/2$

04 Calcular: $Cos\alpha$; (α : agudo)

$Sen\alpha = Sen(180° - 30°)$

A) $-1/2$ B) $1/2$ C) $1/4$
D) $1/5$ E) $2/5$

05 Calcular: $M=\dfrac{Sen(180°-\alpha)}{Sen\alpha}$

A) 1 B) 21 C) 2 D) 3 E) 4

06 Calcular:

$$M=\frac{Cos(270°-\alpha)+Sen\alpha}{2}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

07 Marcar (V) o (F):

( ) $Cos\alpha = -Sen(180° - \alpha)$

( ) $Cos\theta = Cos(-\theta)$

( ) $Tg\theta = Tg(-\theta)$

A) FVV B) FVF C) FFF
D) VFV E) VVV

08 Relaciona:

$a = Sen\theta$ I $= Sen(90° - \theta)$

$b = Cos\theta$ II $= Sen(180° - \theta)$

$c = Tg\theta$ III $= -Tg(-\theta)$

A) aII – bI – cIII B) aI – bII – cIII
C) bII – aIII – cI D) aI – bIII – cII
E) aIII–bI–cII

09 Calcular: $\dfrac{3Tg(360°+\theta)}{Ctg\alpha}$

si : $\alpha + \theta = 90°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10 Calcular:

$M = Sen120° + Cos120° + Cos150°$

A) 0,5 B) 0,25 C) 0,2
D) 0,3 E) 0,4

11 Calcular: $x \times y$

$x = Sen(270°+\alpha)$; $y = Sec(180° - \alpha)$

A) –1 B) 1 C) –2 D) 2 E) 1/2

12 Si: $\alpha + \theta = 270°$

calcular: $M=\dfrac{Tg\alpha}{Ctg\beta}$

A) 1 B) – 1 C) 2 D) 3 E) 4

13 Calcular:

$$M=\frac{Sen(90°+\alpha)+Cos\alpha}{Cos(360°+\alpha)}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14 Calcular:

$$P=\frac{Sen30° - Cos120°}{2}$$

A) $-1/2$ B) $1/2$ C) $1/4$
D) $2/3$ E) $3/5$

15 Si: $\dfrac{Cos(-\alpha)+Sen(-\alpha)}{Cos\alpha - Sen\alpha}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Se cumple que:

$$-Sen(-\theta)=Cos\alpha$$

además: α y θ son agudos y su diferencia es $60°$, calcular el menor ángulo

A) 15° B) 30° C) 12°
D) 16° E) 18°

17 Calcular:

$$M = \frac{Sen(90°+\theta) + Cos\theta + Cos(270°+\alpha)}{Cos\theta}$$

si : $\alpha + \theta = 90°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18 Calcular:

$$G=\frac{Cos(\pi-\alpha)+Sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

19 Se sabe que: $\alpha + \theta = 45°$

Calcular: $\dfrac{2Sen2\alpha}{Cos2\theta}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20 Calcular:

$$E=\frac{Cos\alpha + Sen\theta + 1}{-Cos(-\alpha)+Sen(-\theta)-1}$$

A) 1 B) –1 C) 2 D) 3 E) 4

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indicar verdadero o falso:

( ) $Sen\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=Cosx$

( ) $Cos(3\pi+x)=-Cosx$

( ) $Tg(-x)=-Tgx$

A) FFF B) VVF C) VVV
D) VFV E) FFV

02 Simplificar:

$$\frac{Tgx}{Tg(-x)}+\frac{Sec(2\pi+x)}{Sec(2\pi-x)}-\frac{Sen(\pi-x)}{Sen(\pi+x)}$$

A) 0 B) 1 C) –1 D) 2 E) –2

03 Reducir:

$$P=\frac{3Sen20° - 2Cos110°}{Cos70°}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

04 Reducir:

$$Y=\frac{Sen140° - Sen220°}{Sen130° - Sen310°}$$

A) $-Tg40°$ B) $Tg40°$ C) $Ctg40°$
D) $-Ctg40°$ E) 0

05 Calcular:

$$E=Cos\frac{5\pi}{3}Tg\frac{16\pi}{3}+Cos\frac{41\pi}{6}$$

A) 1/2 B) –1/2 C) 0 D) 1 E) –1

06 Reducir:

$$P=\frac{Sec\left(\dfrac{25\pi}{2}-\alpha\right)Sen\left(\dfrac{7\pi}{2}+\alpha\right)}{Sec(15\pi-\alpha)Cos(5\pi-\alpha)}$$

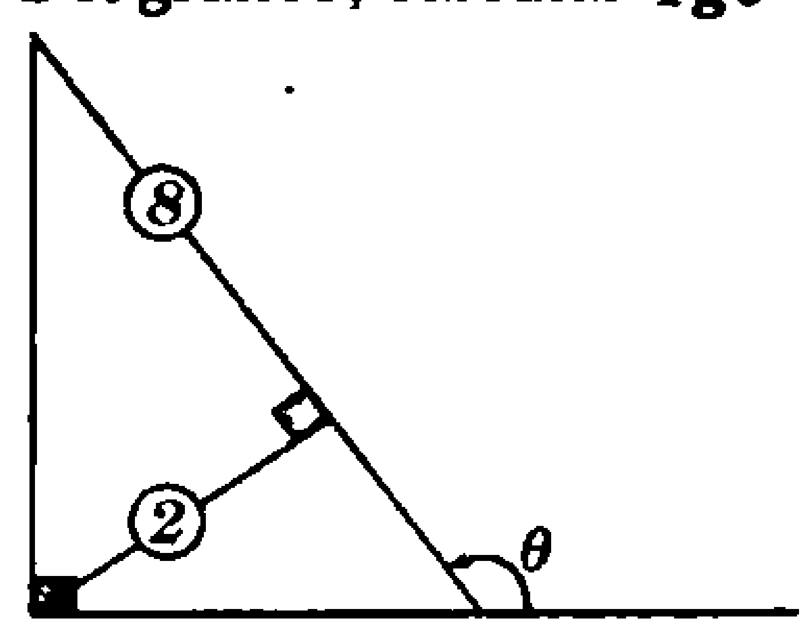
A) $Tg\alpha$ B) $Ctg\alpha$ C) $-Tg\alpha$
D) $-Ctg\alpha$ E) 1

07 Si: $Tg10° = -k$

calcular: $Csc1000°$

A) $\sqrt{1+k^2}$ B) $-\sqrt{1+k^2}$ C) $1/k$
D) $2k$ E) $-\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

08 Del gráfico, calcular $Tg\theta$



A) 4 B) –4 C) 8 D) –8 E) –1/2

09 Reducir:

$$P=Vers\frac{\pi}{8}+Vers\frac{3\pi}{8}+Vers\frac{5\pi}{8}+Vers\frac{7\pi}{8}$$

Nota: $Vers\theta = 1 - Cos\theta$

A) 0 B) 4 C) – 4 D) 8 E) 2

10 Simplificar:

$$S=Sen\frac{\pi}{13}+Sen\frac{7\pi}{13}+Sen\frac{19\pi}{13}Sen\frac{25\pi}{13}$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 1/4 E) 1/2

(11) Reducir:

$$P=\frac{Sen(-x)}{Cos(90°+x)}-\frac{Tg(270°-x)}{Ctg(-x)}$$

A) -1 B) 1 C) 0 D) 2 E) -2

(12) Reducir:

$$P=\frac{Sen(b-a)}{Cos(90°-a+b)}+Tg(a-b)Ctg(b-a)$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 0

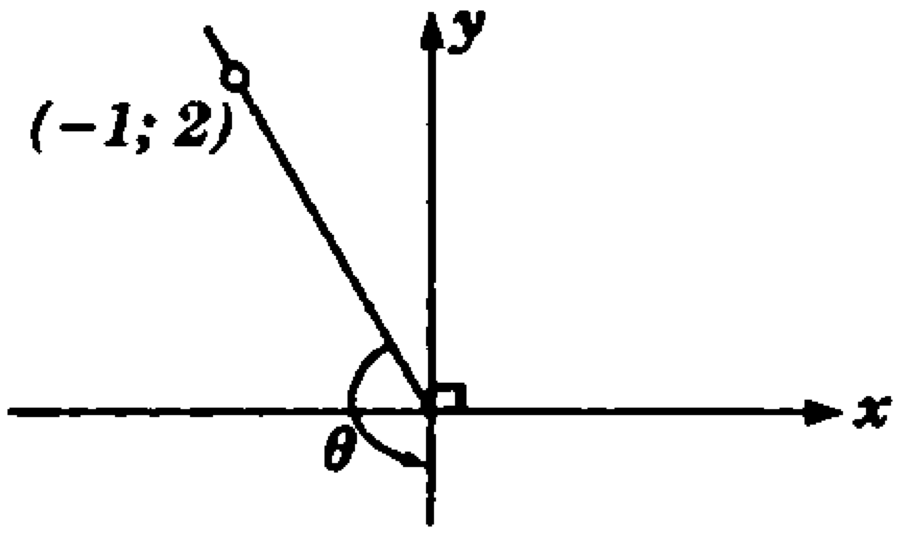
(13) Si: $\alpha+\beta=60°$

reducir: $y=\frac{Sen(2\alpha+\beta)}{Sen(\alpha+2\beta)}+\frac{Cos6\alpha}{Cos6\beta}$

A) 1 B) -1 C) 2 D) 3 E) 0

(14) Del gráfico, calcular:

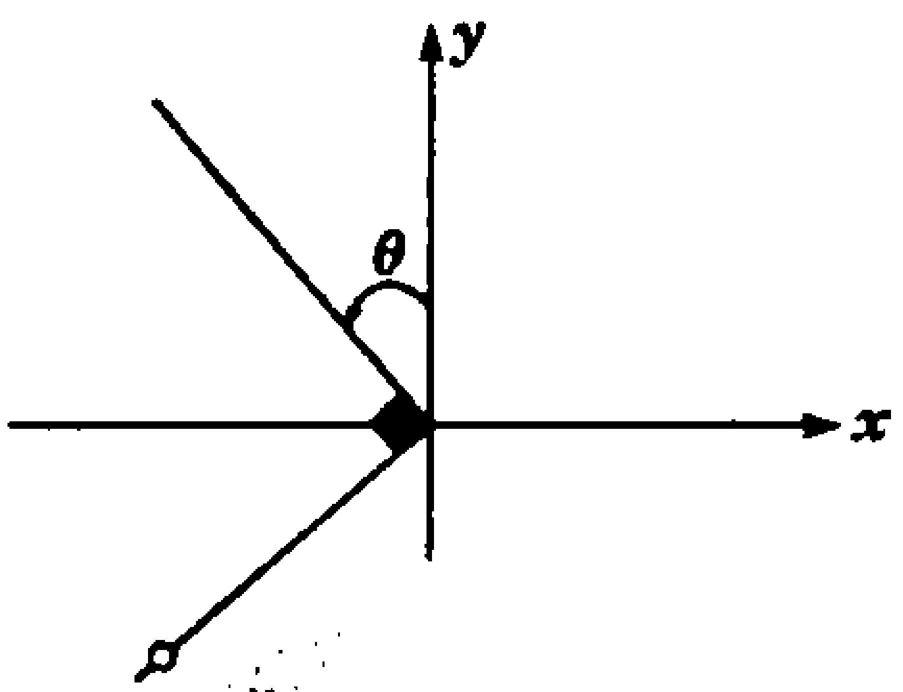
$$P=\sqrt{5}Csc\theta-Ctg\theta$$



A) 1 B) -1 C) 7 D) -7 E) 2

(15) Del gráfico, calcular:

$$P=\sqrt{5}Sen\theta-\sqrt{2}Tg\theta$$



A) 1 B) -1 C) 2 D) 0 E) -2

(16) Para un triángulo ABC, reducir:

$$Y=\frac{Cos(2A+B+C)Sen\left(\frac{3A+B+C}{2}\right)}{Cos^2(A+2B+2C)}$$

A) -2 B) 2 C) 0 D) 1 E) -1

(17) Si:

$$Sen\left(\frac{39\pi}{2}-\alpha\right)=0{,}75 \ \wedge \ \frac{3\pi}{2}>\alpha>\pi$$

Calcular: $P=\sqrt{7}Ctg\alpha+3Sec\alpha$

A) -2 B) 1 C) -1 D) 2 E) 0

(18) Si: $2CscA-SenA=n$

reducir:

$$Y=\left[\frac{Cos^2(3\pi-A)-SenA}{Sen(6\pi-A)}\right]-Sec\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)$$

A) 1+n B) 1-n C) 2n D) -2n E) n^2

(19) Reducir:

$$\frac{Sen(k\pi+\alpha)-Cos\left[k\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right]}{Tg(k\pi+\alpha)};k\in\mathbb{Z}$$

A) $(-1)^k$ B) $(-1)^kSen\alpha$ C) $Tg\alpha$ D) $(-1)^kSen\alpha$ E) $2(-1)^kCos\alpha$

(20) Reducir:

$$P=Sen(3k\pi+2\pi-\theta)Sec\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$k\in\mathbb{Z}$

A) $(-1)^k$ B) 1 C) 0 D) $(-1)^{k+1}$ E) 2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Simplificar:

$$\frac{sen(90°-x)}{sen\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}+\frac{Tan(270°-x)}{Tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

(02) Simplificar:

$$\frac{Cos(180°-x)}{Cos(2\pi-x)}-\frac{Cot(360°-x)}{Cot(\pi+x)}$$

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

(03) Simplificar:

$$\frac{Csc(270°+x)+Sec(90°+x)}{Sec(360°-x)+Csc(180°-x)}$$

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 2Tanx

(04) Calcular:

$E=Sen150°+cos240°-Tan315°$

A) −2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

(05) Calcular:

$$\frac{2Cos300°-Sen^2120°}{2Tan^3135°}$$

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

(06) Si : $Sen40°=k$ ¿A que es igual?

$$\frac{Sen140°\times Cos130°}{Sec310°\times Csc320°}$$

A) k^4 B) $-k^4$ C) k^{-4} D) $-k^{-4}$ E) 1

(07) Calcular:

$Sen36270°\times Cos36180°$

A) 0 B) −1 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

(08) Calcular:

$$E=Tan(100\pi+x)\times Tan\left(89\frac{\pi}{2}-x\right)$$

A) −1 B) 0 C) 1 D) −2 E) 2

(09) Simplificar:

$$\frac{Cos(90°+x)}{Cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}+\frac{Cot(270°+x)}{Cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

A) 0 B) −1 C) 1 D) −2 E) 2

(10) Simplificar:

$$\frac{Sen(180°+x)}{Sen(\pi-x)}+\frac{Tan(360°-x)}{Tan(\pi-x)}$$

A) 0 B) −2 C) 2 D) −1 E) 1

(11) Simplificar:

$$\frac{Csc(270°-x)-Sec(90°-x)}{Sec(360°-x)-Csc(180°+x)}$$

A) −1 B) −2 C) 1 D) 2 E) 2Tanx

(12) Calcular:

$Cos150°-Sen240°+Tan300°$

A) 0 B) $-\sqrt{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $-2\sqrt{3}$

(13) Calcular:

$$E=\frac{4Sen^2300°-Cos120°}{3Tan^3150°}$$

A) 1 B) $-\frac{7}{6}$ C) $\frac{7}{6}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $-\frac{7}{3}$

(14) Si : $Sen20°=k$ ¿A que es igual?

$$E=\frac{Sen160°\times Cos110°}{Sec290°\times Csc340°}$$

A) k^4 B) $-k^4$ C) 1 D) k^{-4} E) $-k^{-4}$

(15) Calcular:

$E=Tan1920°\times Cot36135°$

A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B $-\sqrt{3}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\sqrt{3}$

(16) Calcular :

$$Sen(135\pi+x)\times Sec\left(97\frac{\pi}{2}+x\right)$$

A) −1 B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

(17) Indicar el apareamiento incorrecto

A) Sen (90°+x) I) Sen x

B) Sen (180° + x) II) − Senx

C) $Cos(270° + x)$ III) $Cosx$
D) $Cos(360° - x)$ IV) $-Cosx$

A) a ; III B) b; II C) c ; I D) d ; IV
E) Todas son incorrectas

18 Simplificar :

$$\frac{Sec(x-360°)}{Csc(90°+x)}+\frac{tan(x-270°)}{Cot(-x)}$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) Tan^2x

19 Si : $x + y = 2\pi \times sen\frac{\pi}{2}$

Calcular : $Tan(sen\ x + sen\ y)$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 1/2 E) $-1/2$

20 Calcular el máximo valor de :

$$3\,Sen(\pi - x) - 2Sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

A) 1 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{13}$ D) 4 E) $\sqrt{7}$

21 Calcular :

$Tan20°Tan70° + Tan150°Tan60° + Tan110°Tan20°$

A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) 3

22 Calcular :

$Sen1°Sen2°Sen3°...Sen200°\ Sen201°$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

23 Calcular : $Tan150°\ Tan1500°$

A) -1 B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ D) -3 E) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

24 Simplificar :

$$\frac{Sen(\pi+x)}{Cos\left(3\frac{\pi}{2}+x\right)}+\frac{Tan(2\pi-x)}{Cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

A) 0 B) 2 C) -2
D) Sec^2x E) $-Sec^2x$

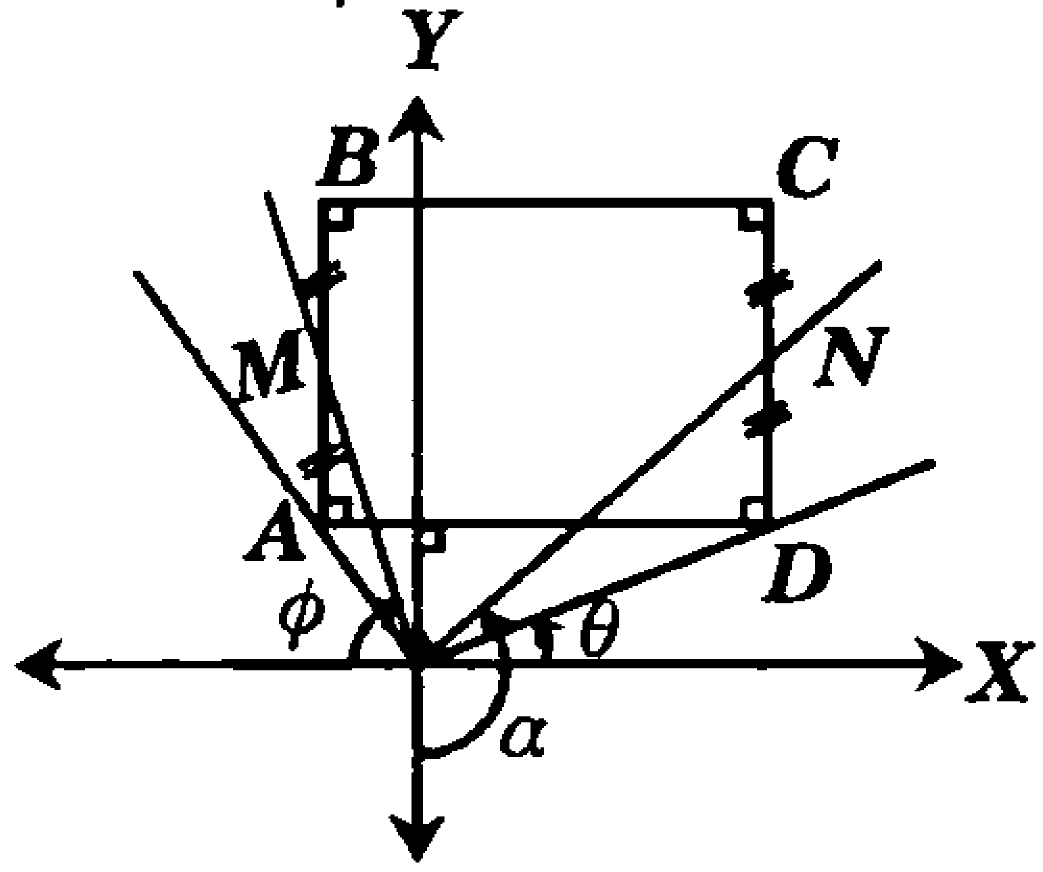
25 Si :

$Sen(90°+x) + Cos(720°-x) = 1$

Calcular: "$Tan\ x$" sabiendo que $x \in IC$

A) $\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $-2\sqrt{3}$

26 De acuerdo al gráfico mostrado ; señale el equivalente de : $Tan\alpha\ Tan\phi$



A) $Tan2\theta$ B) $Cot2\theta$ C) $-Tan2\theta$
D) $-Cot2\theta$ E) $Tan\theta$

TERCERA PRÁCTICA DIRIGIDA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

01 Calcule la distancia entre los puntos :

$P(a+1; b+4)$ y $Q(a+5; b+1)$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

02 Determine un punto en el eje de ordenadas que equidiste de los puntos $(3; 1)$ y $(6; 4)$

A) (0; 3) B) (0; 4) C) (0; 5)
D) (0; 6) E) (0; 7)

03 Los vértices de un triángulo ABC, son $A(6; 5)$; $B(3; 7)$ y $C(2;-1)$. Determine la mediana relativa al lado $\overline{AC}$

A) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{21}$ B) $\sqrt{26}$ D) $\sqrt{31}$ E) $\sqrt{41}$

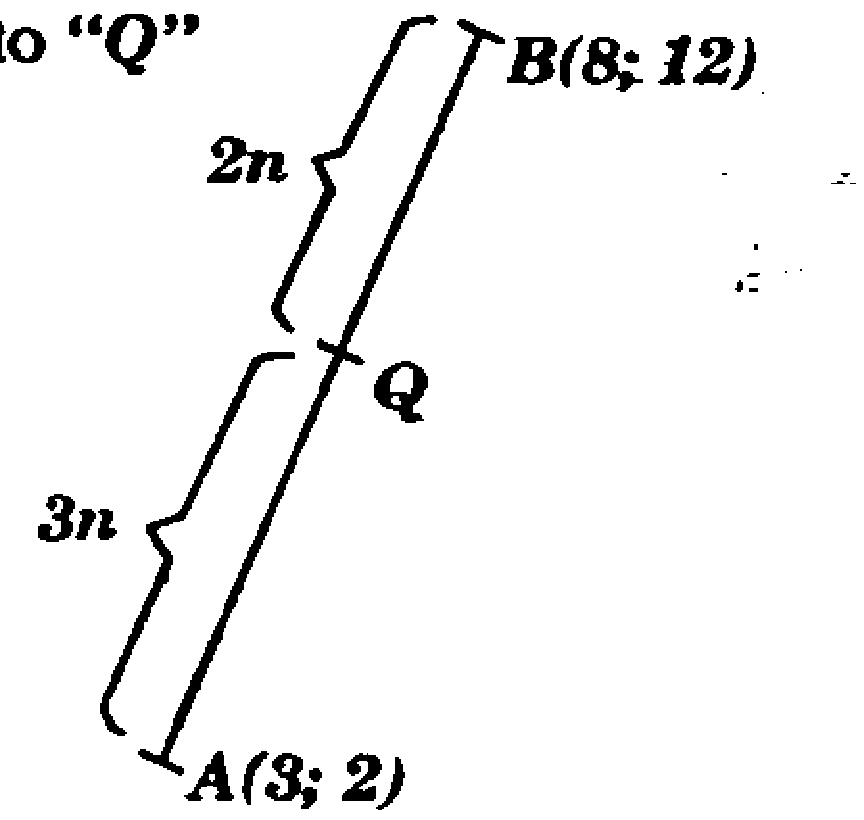
04 Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(a+2; 4-b)$; $B(9; b+3)$; $C(7-a; 11)$. Determine las coordenadas del baricentro

A) (3; 3) B) (a; b) C) (a+3; b+3)
D) (6; 6) E) (6; 9)

05 Tomando como centro el punto (5; 3) se dibuja una circunferencia que es tangente al eje de ordenadas en "A" e intersecta al eje de abscisas en B y C. Calcule el área del triángulo ABC

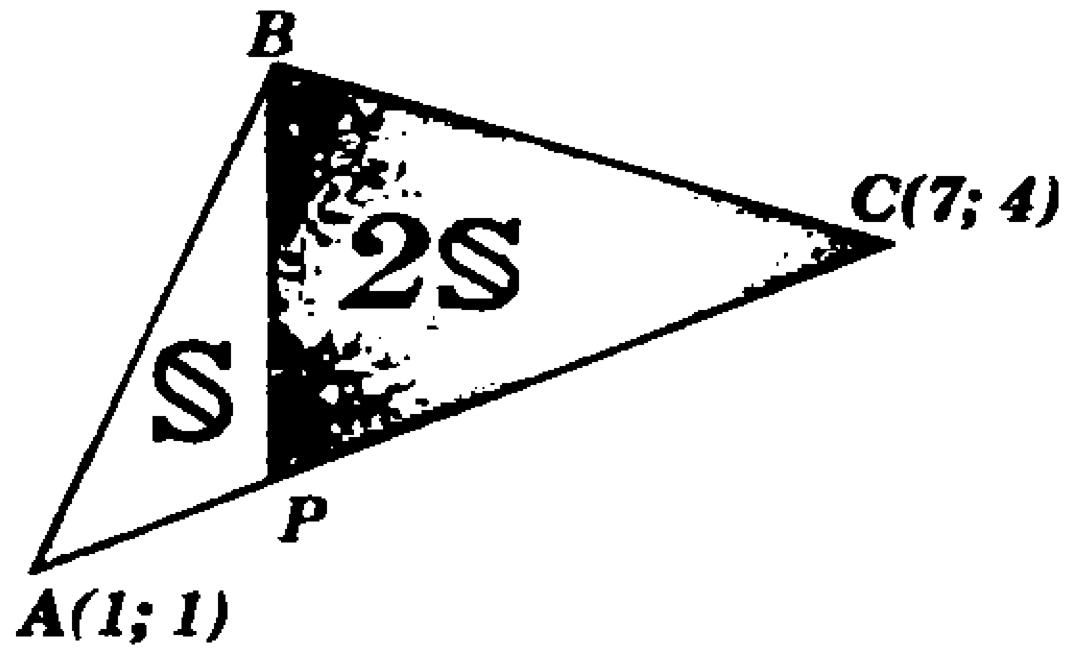
A) 6 u^2 B) 12 u^2 C) 24 u^2
D) 8 u^2 E) 16 u^2

06 Del gráfico mostrado, determine las coordenadas del punto "Q"



A) (6; 8) B) (8; 6) C) (6; 5)
D) (5; 6) E) (5; 8)

07 Del gráfico mostrado, determine las coordenadas del punto "P"



A) (2; 3) B) (3; 2) C) (2; 5/2)
D) (4; 3) E) (4; 2)

08 Los extremos de un segmento $\overline{AB}$ son $A(1; 5)$ y $B(10; 20)$. Determine las coordenadas de los puntos que trisecan a dicho segmento.

A) (4; 10) y (8; 15) B) (4; 10) y (7; 15)
C) (6; 10) y (8; 15) D) (3; 10) y (7; 15)
E) (5; 10) y (9; 15)

09 Se tiene un paralelogramo ABCD, cuyas coordenadas son

$A(3; 1)$, $B(5; 5)$ y $C(9; 6)$.

Determine las coordenadas del vértice "D"

A) (6; 3) B) (3; 2) C) (6; 7)
D) (7; 5) E) (7; 2)

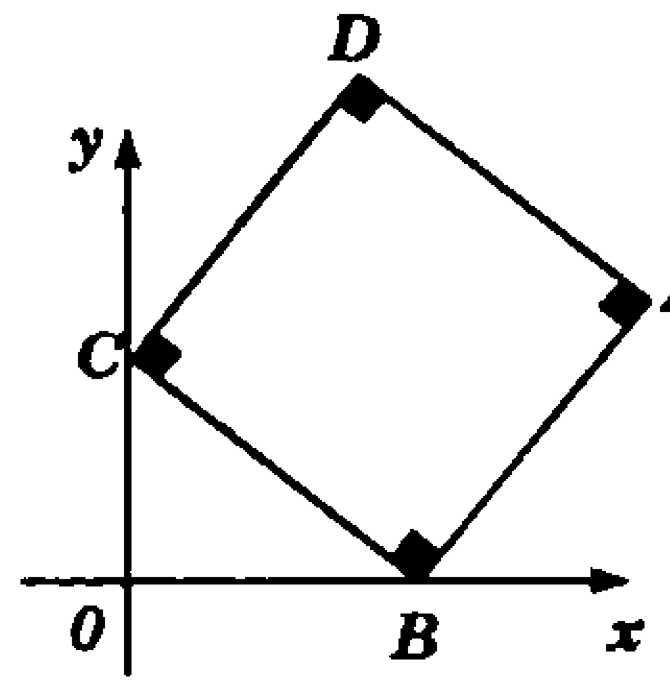
10 Hallar las coordenadas del vértice "C" de un triángulo equilátero ABC , sabiendo que $A(-3; 4)$ y $B(-3; -2)$. Además el vértice "C" pertenece al primer cuadrante

A) $(3\sqrt{3}-3; 1)$ B) $(-3\sqrt{3}; 1)$ C) $(3+\sqrt{3}; 1)$
D) $(3\sqrt{3}+3; 1)$ E) $(1-\sqrt{3}; 3)$

11 Por el punto $A(4;\ 2)$ se ha trazado una circunferencia tangente a los ejes coordenados. Calcular su radio

A)8   B) 10   C) 13   D) 14   E) 18

12 Si $ABCD$ es un cuadrado, hallar las coordenadas del punto D



A) (8; 17)   B) (8; 23)   C) (4; 15)
D) (4; 21)   E) (6; 25)

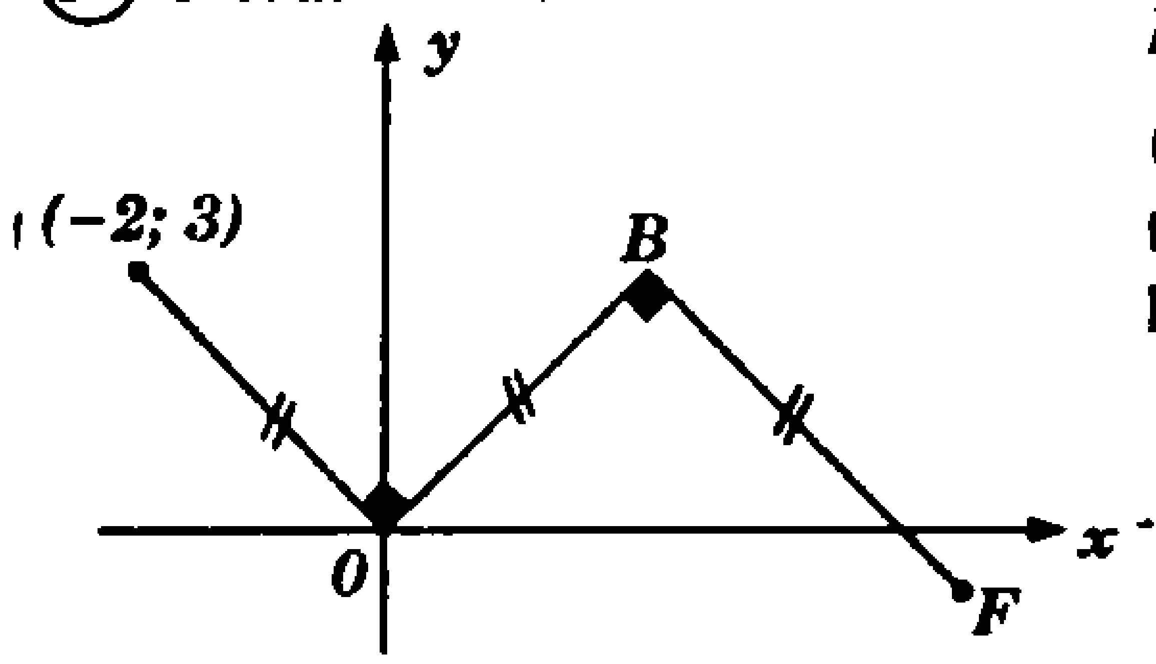
13 Dos vértices de un triángulo ABC son $A(3;\ 1)$ y $B(1;\ -3)$ siendo su área $3\ u^2$, el tercer vértice C está en el eje Y. Calcular la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$, sabiendo que es la menor posible.

A) $\sqrt{3}$ *B)* $\sqrt{5}$ *C)* $\sqrt{7}$ *D)* $\sqrt{11}$ *E)* $\sqrt{53}$

14 Si A es el simétrico de $P(3;\ 5)$ respecto al eje Y, B es el simétrico de $Q(-2;\ 3)$ respecto al origen, calcular el área del cuadrilátero que se obtiene al unir dichos puntos

A) $20\ u^2$ *B)* $25\ u^2$ *C)* $30\ u^2$

15 Calcular las coordenadas de F



A) (6; −2)   B) (7; −2)   C) (8; −1)
D) (5; −1)   E) (3; −2)

16 Los vértices de un triángulo son $A(-2;\ 1)$, $B(-2;\ 6)$ y $C(10;\ 1)$. Hallar las coordenadas del incentro del triángulo ABC

A)(0; 3)   B)(− 1; 3)   C)(1; 3)

D) $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$ *E)* $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$

17 El centro de una circunferencia es $(h;\ k) \in IIIC$. Si la circunferencia es tangente a los ejes coordenados y su área $4\pi\ u^2$, hallar las coordenadas del punto más lejano del origen de coordenadas que pertenece a dicha circunferencia.

A) $(2-\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$

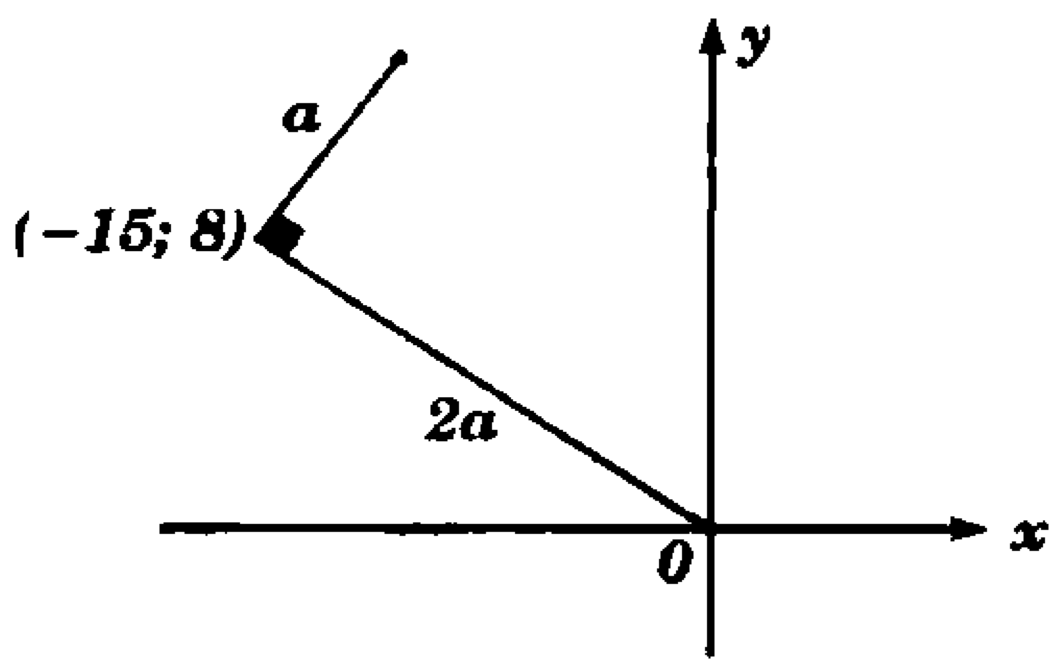
B) $(-2+\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2})$

C) $(-2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2})$

D) $(-2-\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2})$

E) $(-2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$

18 Hallar las coordenadas de P



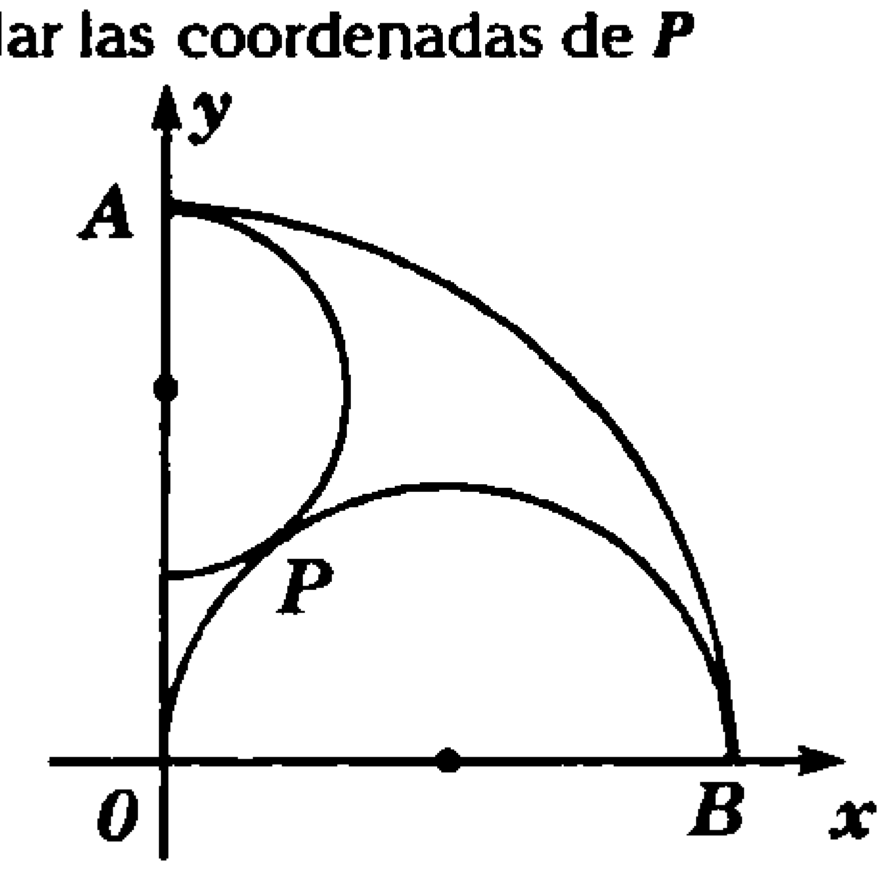
A) $\left(-\frac{15}{2};\ 12\right)$ *B)* $(-9;\ 17)$ *C)* $\left(-\frac{15}{2};\ \frac{17}{2}\right)$

D) $\left(-10;\ \frac{17}{2}\right)$ *E)* $\left(-11;\ \frac{31}{2}\right)$

19 Dados los puntos $P(1;\ 1)$ y $Q(10;\ 2)$, hallar las coordenadas de un punto M que pertenece al eje de abscisas y la suma de las distancias a P y Q es mínima

A) (2; 0)   B) (3; 0)   C) (4; 0)
D) (5; 0)   E) (7/2; 0)

20 Si: $B=(6;\ 0)$ y P es punto de tangencia de las semicircunferencias, hallar las coordenadas de P



A) $\left(\frac{3}{5};\ \frac{3}{5}\right)$ *B)* $\left(\frac{6}{5};\ \frac{6}{5}\right)$ *C)* $\left(\frac{6}{5};\ \frac{12}{5}\right)$

D) $\left(\frac{12}{5};\ \frac{6}{5}\right)$ *E)* $\left(\frac{4}{5};\ \frac{6}{5}\right)$

CLAVES DE LA PRACTICA DE EJERCICIOS #1

1)A	2)B	3)A	4)B	5)A	6)A	7)[illegible]	8)A	9)C	10)A
11)B	12)A	13)A	14)B	15)A	16)A	17)C	18)A	19)B	20)B

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)E	4)B	5)C	6)D	7)B	8)B	9)E	10)C
11)D	12)D	13)C	14)C	15)D	16)B	17)C	18)[illegible]	19)E	20)[illegible]

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

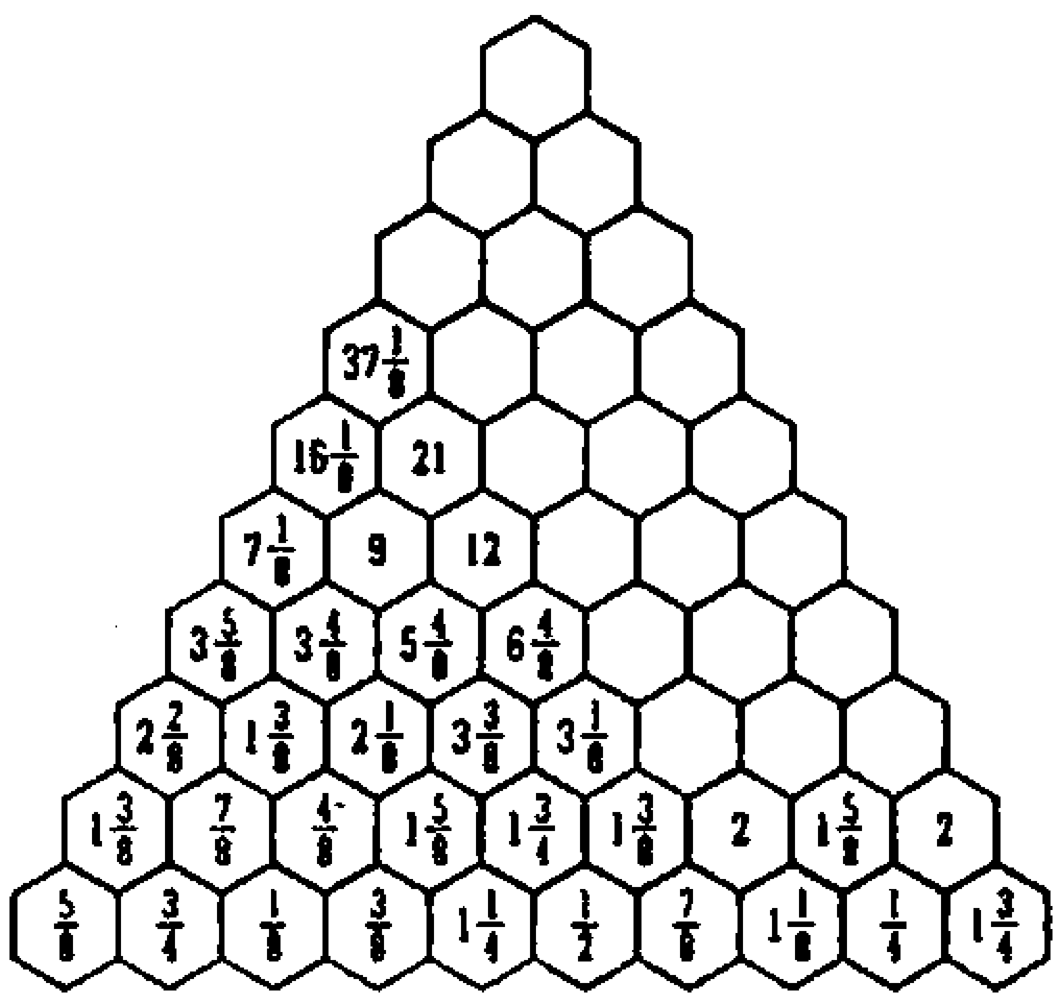
1)A	2)C	3)A	4)C	5)A	6)A	7)C	8)C	9)A	10)C
11)A	12)[illegible]	13)B	14)[illegible]	15)E	16)C	17)D	18)C	19)C	20)C
21)C	22)C	23)A	24)C	25)A					

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)E	2)E	3)C	4)D	5)[illegible]	6)A	7)E	8)B	9)E	10)A
11)B	12)[illegible]	13)B	14)[illegible]	15)D	16)A	17)D	18)E	19)C	20)C

RETO 1 :

Observa cuidadosamente la figura y anota los números que faltan en los hexágonos vacíos.



¿Cómo supiste qué números faltaban en los hexágonos vacíos?

RETO 2 :

Un explorador se disponía atravesar una selva, dicho viaje representa 6 días de marcha, pero él solo puede transportar alimentos para *4* días. Para lo cual decide contratar algunos nativos de la zona, pero lamentablemente ellos también sólo pueden transportar (c/u) alimentos para *4* mínimos. ¿Calcular cuántos nativos como mínimo debe contratar dicho explorador para lograr atravesar dicha selva?

A)no se puede atravesar la selva.

B)2 nativos   C)4 nativos

D)6 nativos   E)8 nativos

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

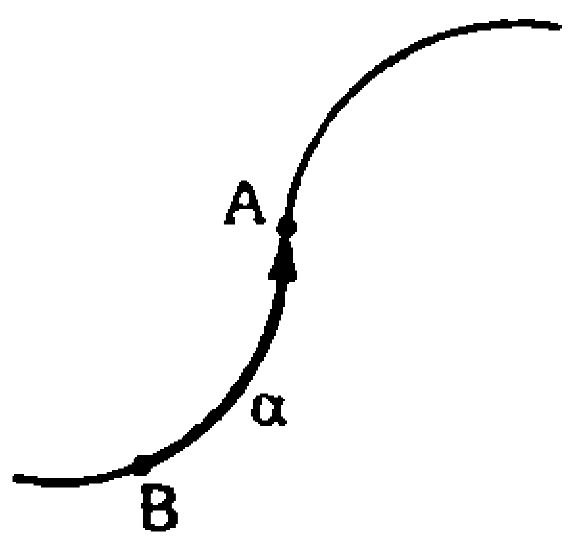
CAPITULO 119

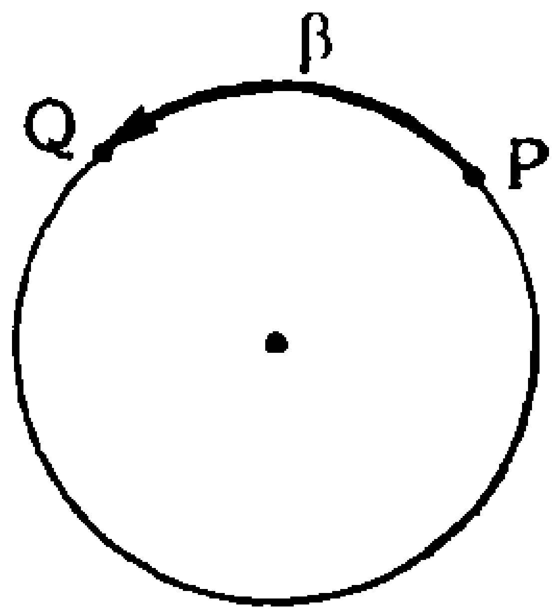
OBJETIVOS :

* *Representar gráficamente las razones trigonométricas Seno y Coseno de un ángulo y de un número real en general, siempre que la razón trigonométrica esté definida.*
* *Establecer relaciones de orden entre las razones trigonométricas de un ángulo.*
* *Conocer las variaciones del Seno y Coseno de una variable; y a partir de ellas, determinar la de otras expresiones que las contengan.*
* *Adaptar las representaciones gráficas de las razones trigonométricas a la resolución de problemas geométricos.*

ARCO ORIENTADO

Es la trayectoria descrita por un punto al desplazarse sobre una curva, en un determinado sentido. Estos arcos poseen un origen y un extremo.





Para α : $B \rightarrow$ origen
$A \rightarrow$ extremo

Para β : $P \rightarrow$ origen
$Q \rightarrow$ extremo

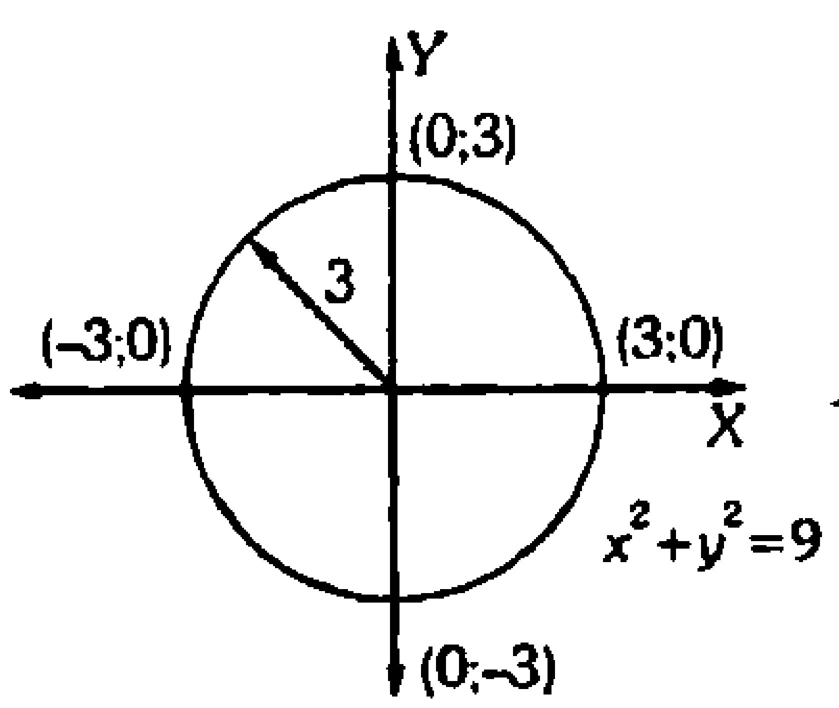
CIRCUNFERENCIA CANÓNICA

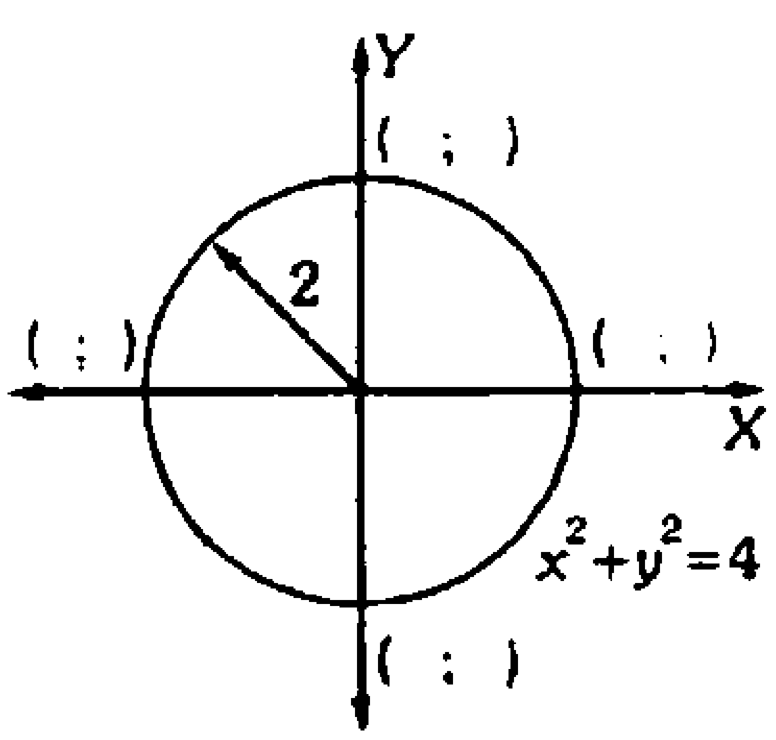
Es aquella circunferencia cuyo centro es el origen del sistema cartesiano. Estas circunferencias, en la geometría analítica, poseen una ecuación de la forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

donde r es el radio de la circunferencia.

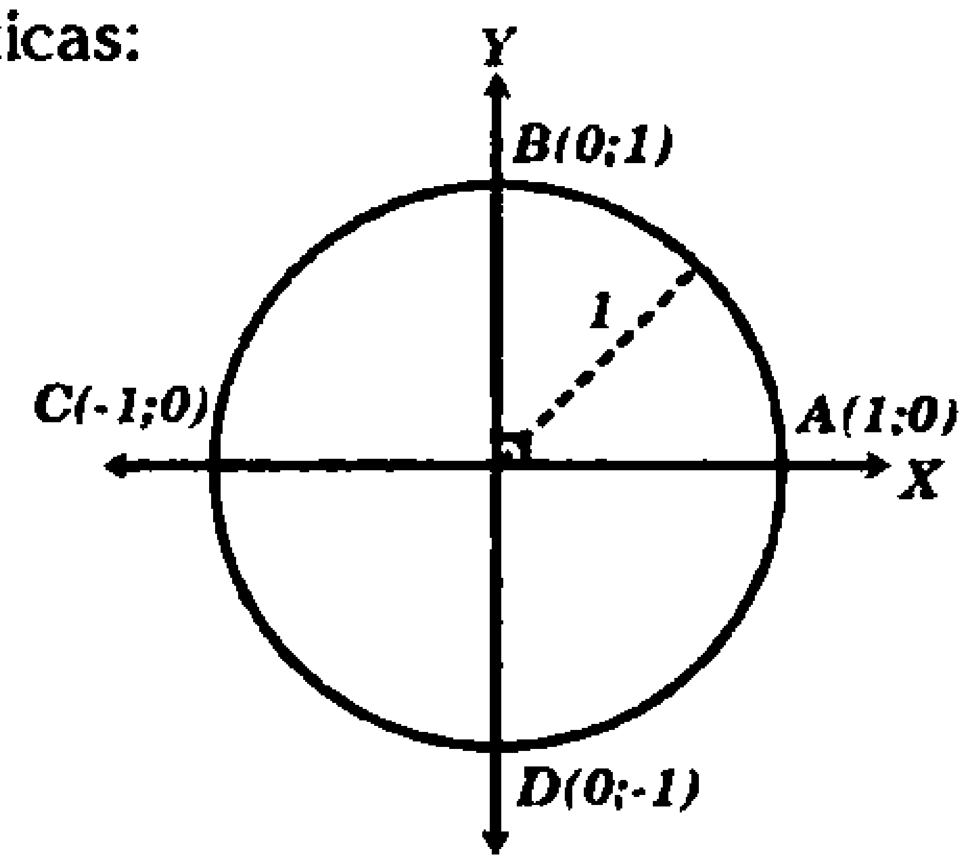
Por ejemplo :

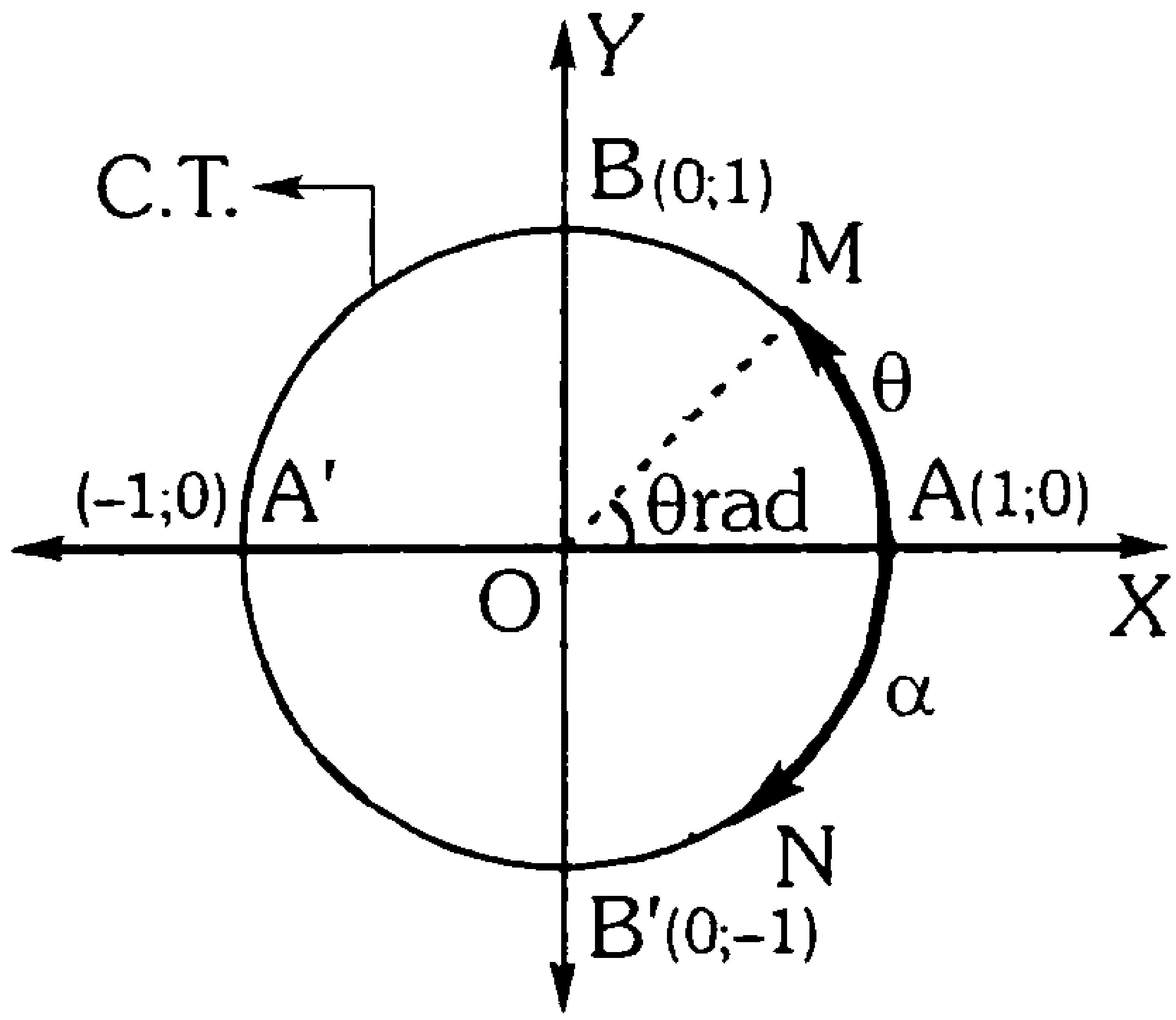




CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Es aquella circunferencia canónica cuyo radio es igual a la unidad del sistema. Se pueden notar las siguientes características:





A : *Origen de arcos*

$M \wedge N$: *Extremos de arco* $\begin{cases} \theta : (+) \\ \alpha : (-) \end{cases}$

B' : Origen de complementos de arcos

A' : Origen de suplementos de arcos

Además; se cumple que:

$\sphericalangle AOM\,(en\ rad) = \widehat{AM}\,(numéricamente)$; y debido a esta observación se cumple: $\boxed{R.T.(\theta rad) = R.T.(\theta)}$

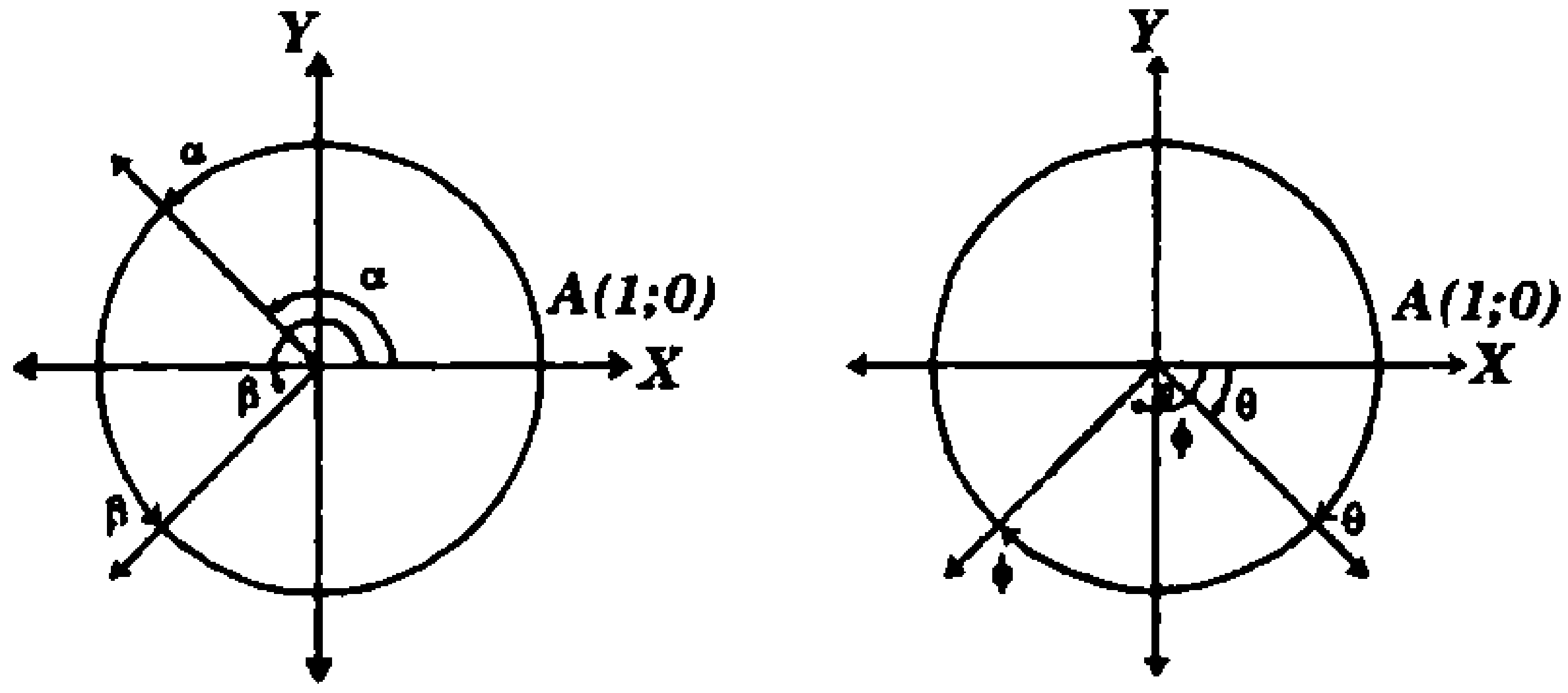
EJEMPLOS :

* $Sen\left(\frac{\pi}{3}rad\right)=Sen\frac{\pi}{3}$ * $Tan(2rad)=Tan2$

Es decir, con esta propiedad fundamental es posible calcular las razones trigonométricas de cualquier número real, siempre y cuando ésta se encuentre definida.

ARCO DIRIGIDO EN POSICIÓN NORMAL

Todo ángulo en posición normal será representado en la circunferencia trigonométrica por un arco dirigido a partir de punto *A(1 ; 0)*.



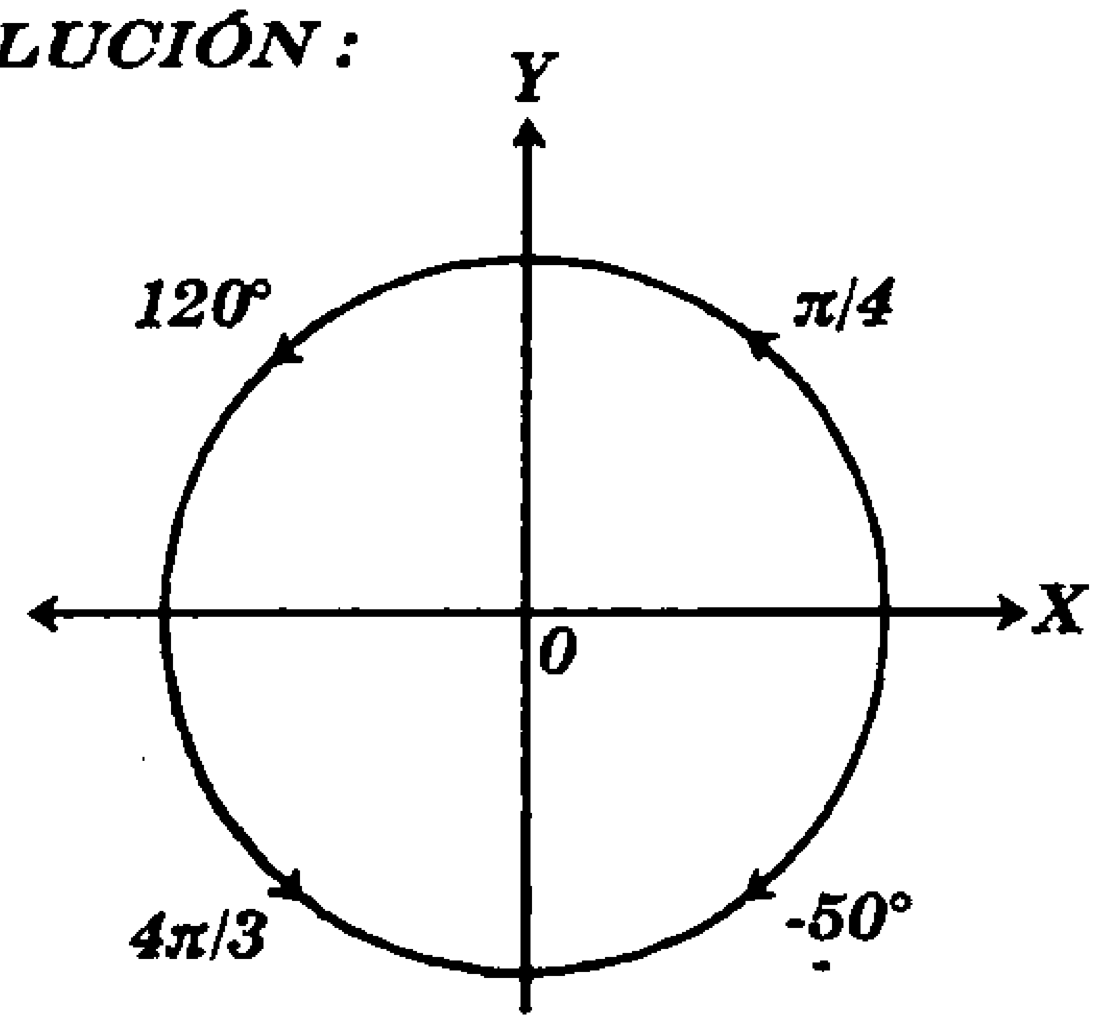
Nótase que $\alpha \wedge \beta$ son positivos y $\theta \wedge \phi$ son negativos.

EJEMPLO :

Ubicar los siguientes ángulos en la circunferencia trigonométrica.

$$120°\,;-50°\,;\frac{4\pi}{3}\,;\frac{\pi}{4}$$

RESOLUCIÓN :



LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Son segmentos de medida positiva o negativa que van a representar el valor numérico de una razón trigonométrica de un ángulo o un número cualquiera.

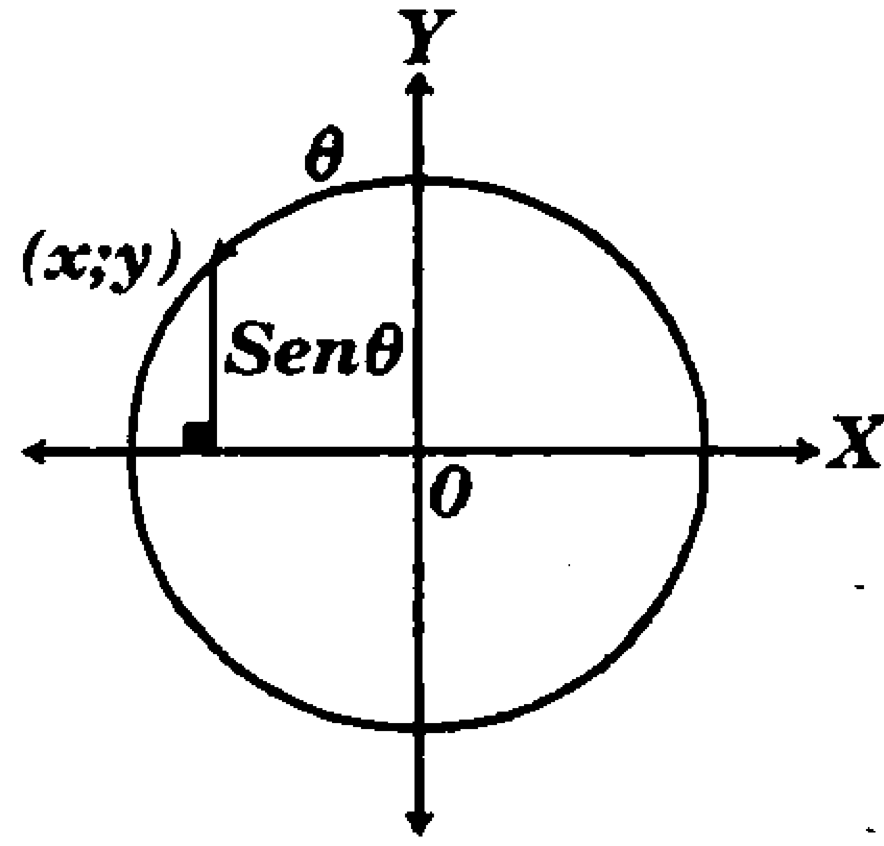
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ARCOS DIRIGIDOS EN POSICIÓN NORMAL

Si θ es un arco dirigido en posición normal, sus razones trigonométricas se van a calcular como sigue:

SENO DE UN ARCO θ

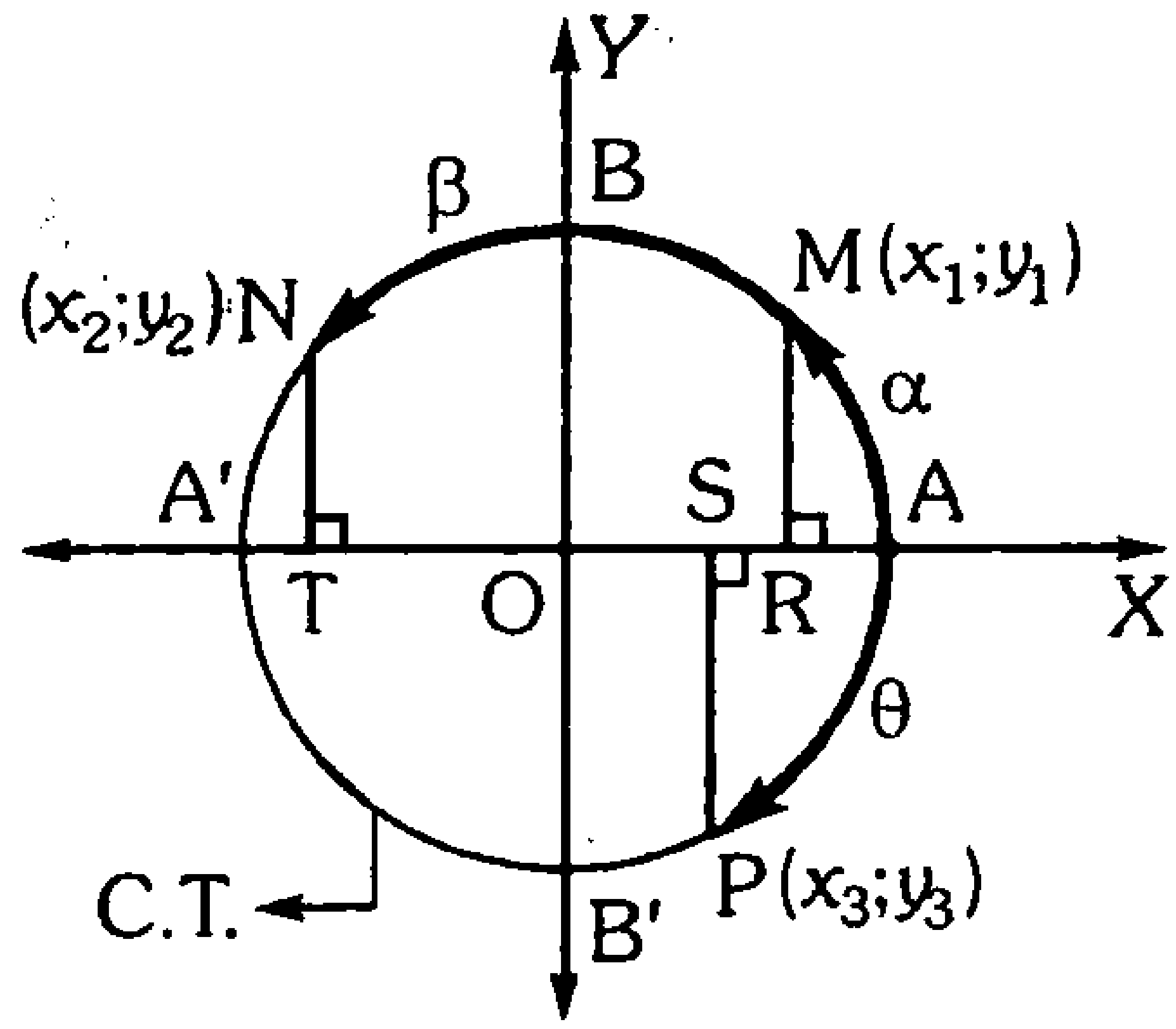
El seno de un arco θ es la *ORDENADA* de su extremo.

Es decir es el segmento determinado por la perpendicular trazada desde el extremo del arco considerado hacia el eje de abscisas.



$$\boxed{Sen\theta=y}$$

En el gráfico, tenemos entonces que:



$y_1=Sen\alpha....(+)$ $y_2=Sen\beta...(+)$ $y_3=Sen\theta...(-)$

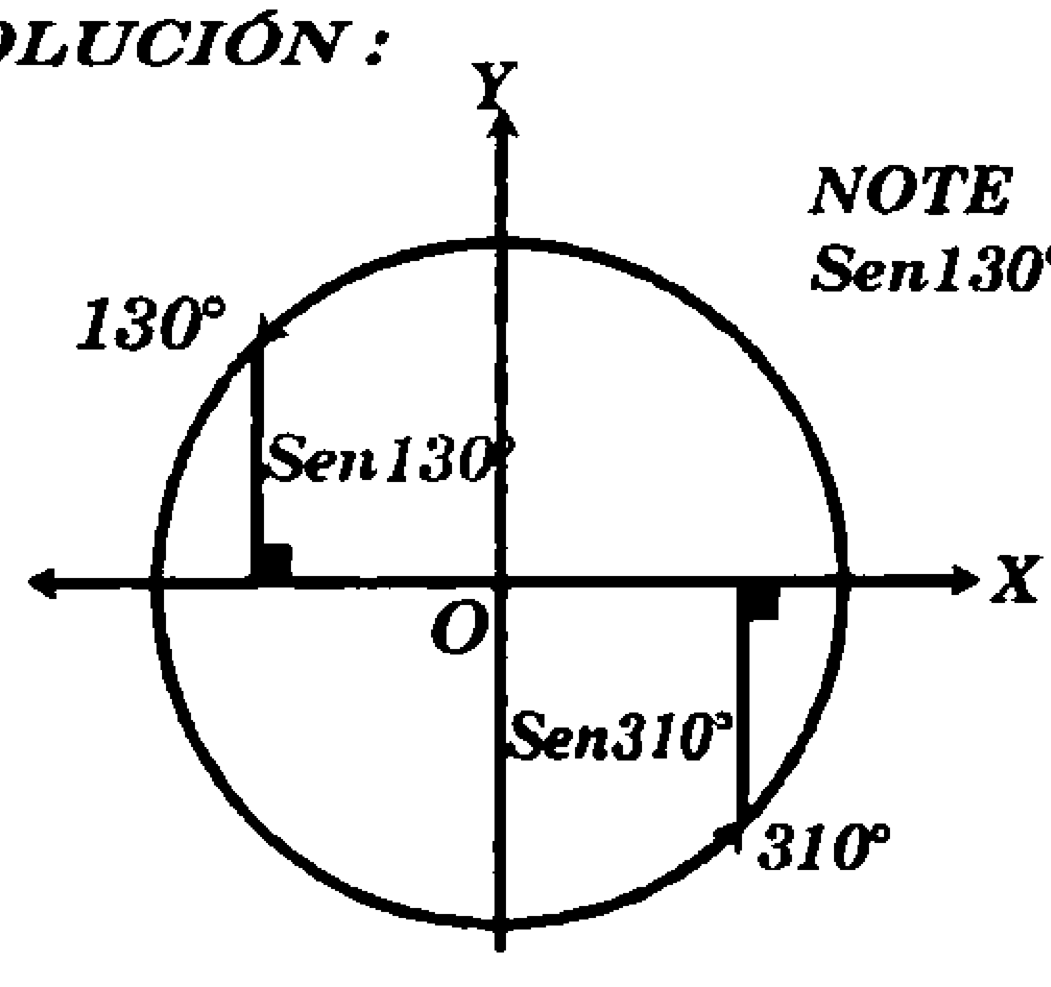
Debe notarse además que la L.T.Seno puede ser trazada para cualquier arco θ, verificándose además:

$$\boxed{-1\leq Sen\theta\leq 1}\begin{cases}(Sen\theta)_{máx}=1\\(Sen\theta)_{mín}=-1\end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Ubicar el seno de los siguiente arcos $130° \wedge 310°$

RESOLUCIÓN :

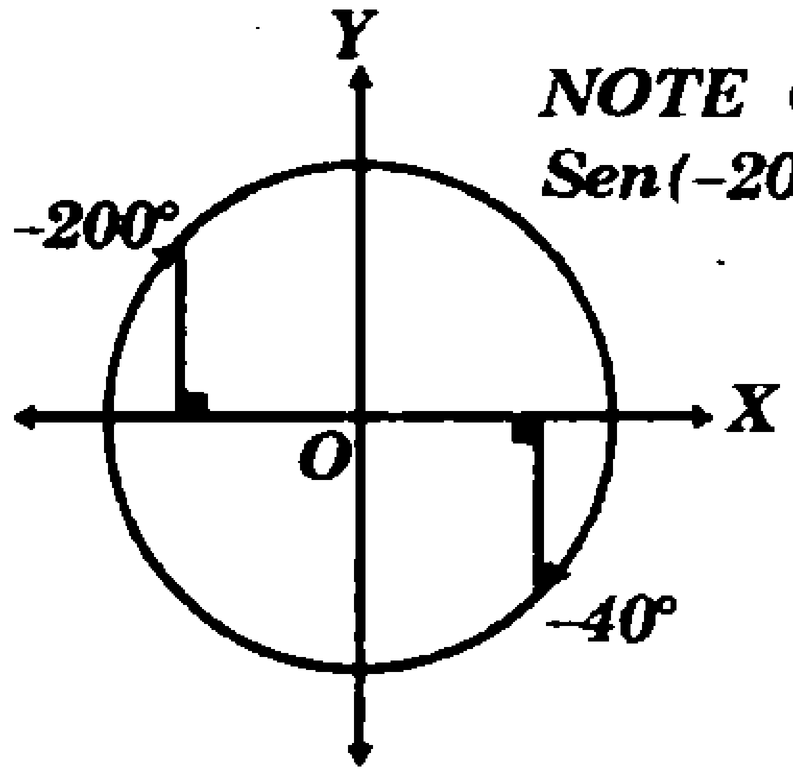


NOTE QUE :
Sen130°>Sen310°

EJEMPLO 2 :

Ubicar el Seno de los siguientes arcos : $-40° \wedge -200°$

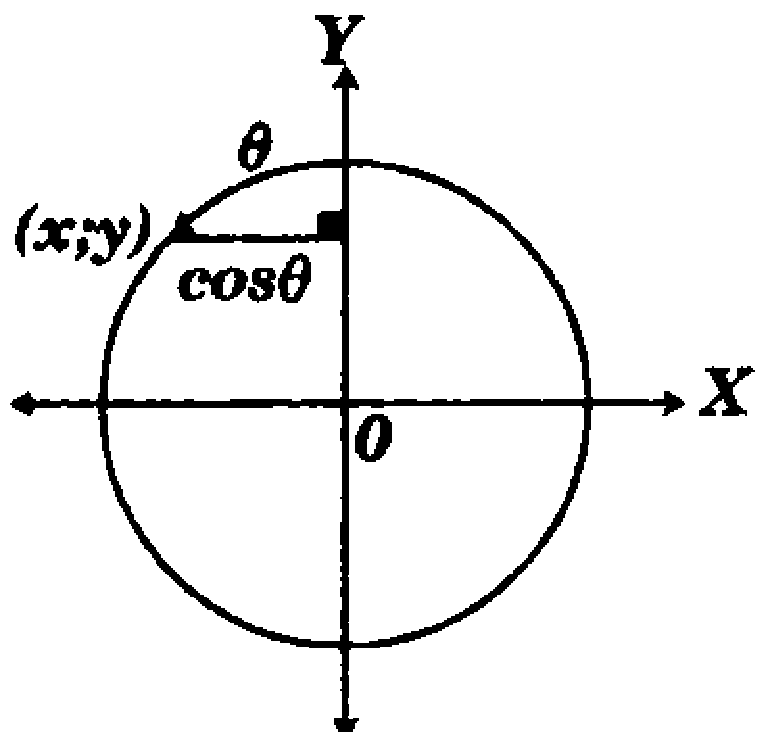
RESOLUCIÓN :



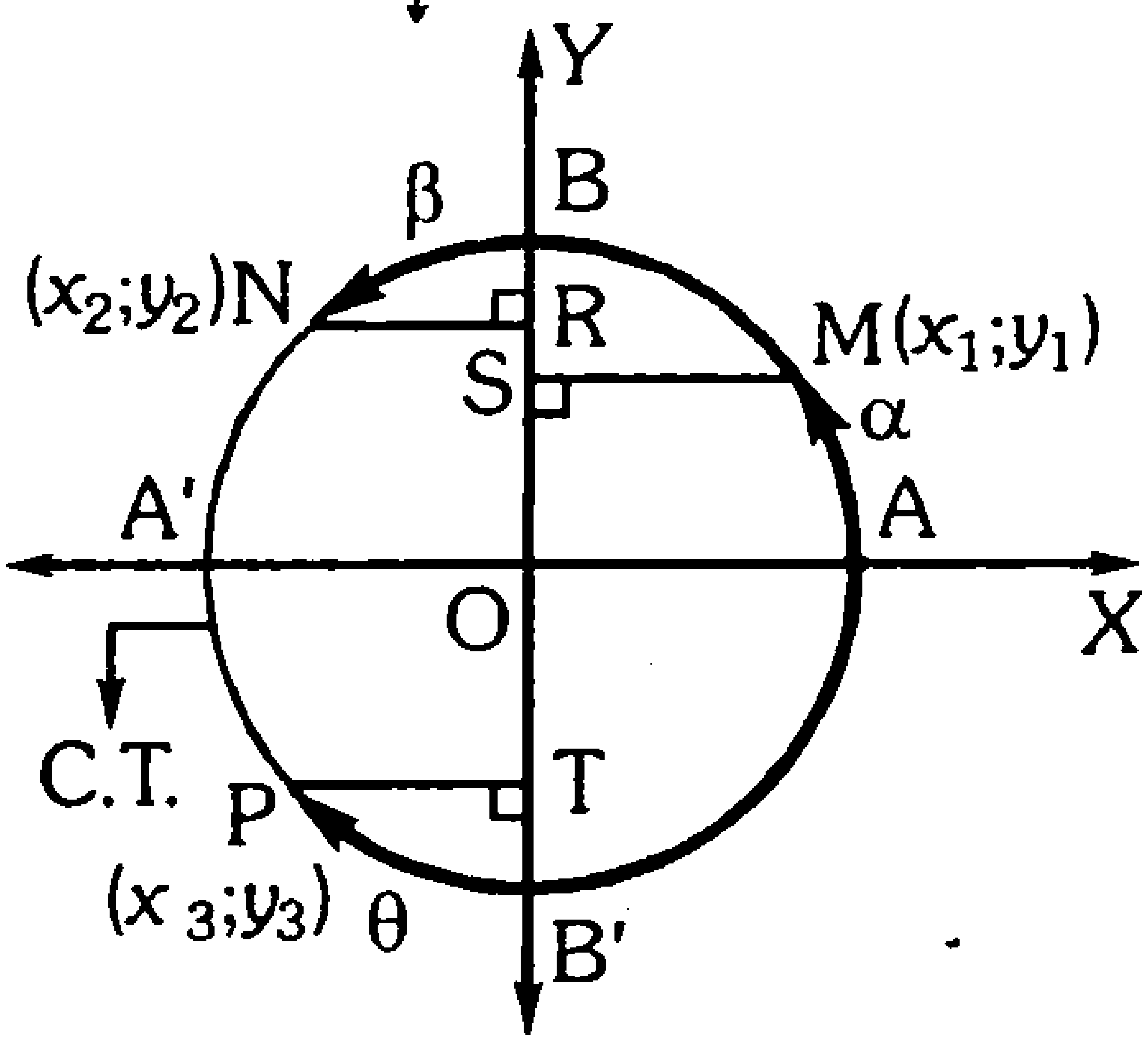
NOTE QUE :
$Sen(-200°) > Sen(-40°)$

COSENO DE UN ARCO θ

El coseno de un arco θ es la ABSCISA de su extremo , es decir es el segmento determinado por la perpendicular trazada desde el extremo del arco considerado hacia el eje de ordenadas.



$Cos\theta = x$



$x_1 = cos\,\alpha ...(+)$ $\quad x_2 = cos\,\beta ...(-)$ $\quad x_3 = cos\,\theta ...(-)$

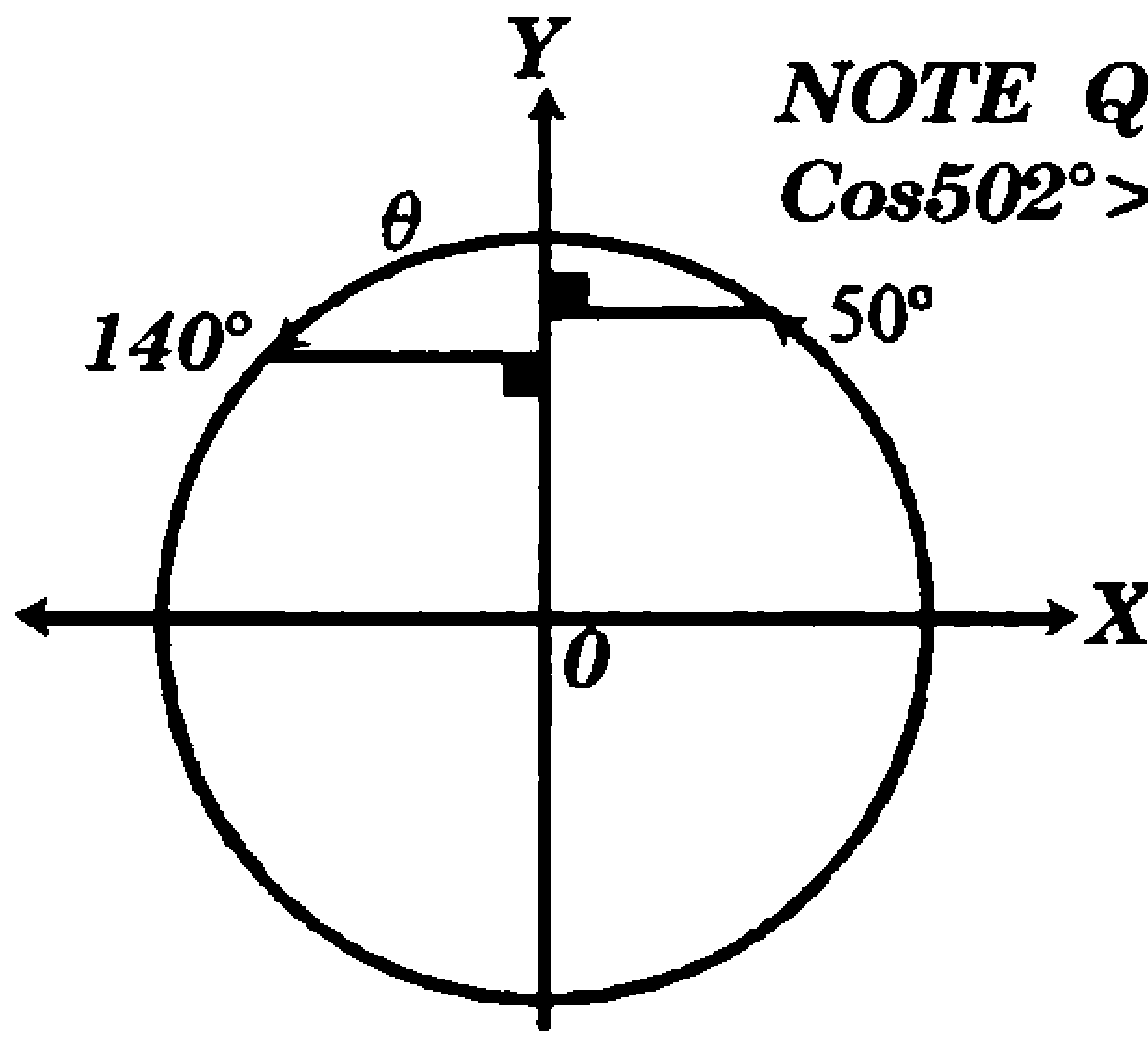
Debe notarse además que la L.T. Coseno puede ser trazada para cualquier arco θ, verificándose además:

$$\boxed{-1 \le Cos\theta \le 1} \begin{cases} (Cos\theta)_{máx} = 1 \\ (Cos\theta)_{mín} = -1 \end{cases}$$

EJEMPLO 1 :

Ubicar el coseno de los siguientes arcos : $50°$ y $140°$.

RESOLUCIÓN :

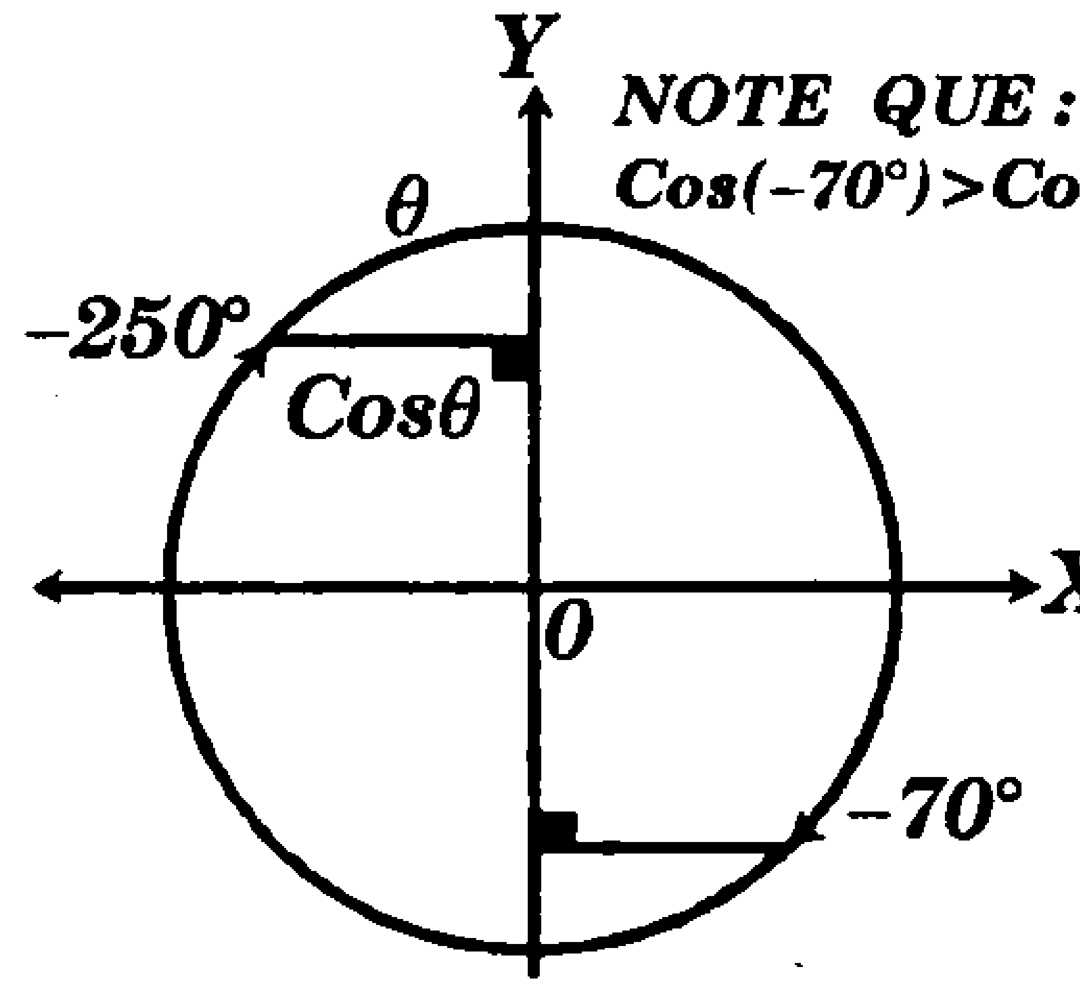


NOTE QUE :
$Cos502° > Cos140°$

EJEMPLO 2 :

Ubicar el coseno de los siguientes arcos : $-70°$ y $-250°$.

RESOLUCIÓN :



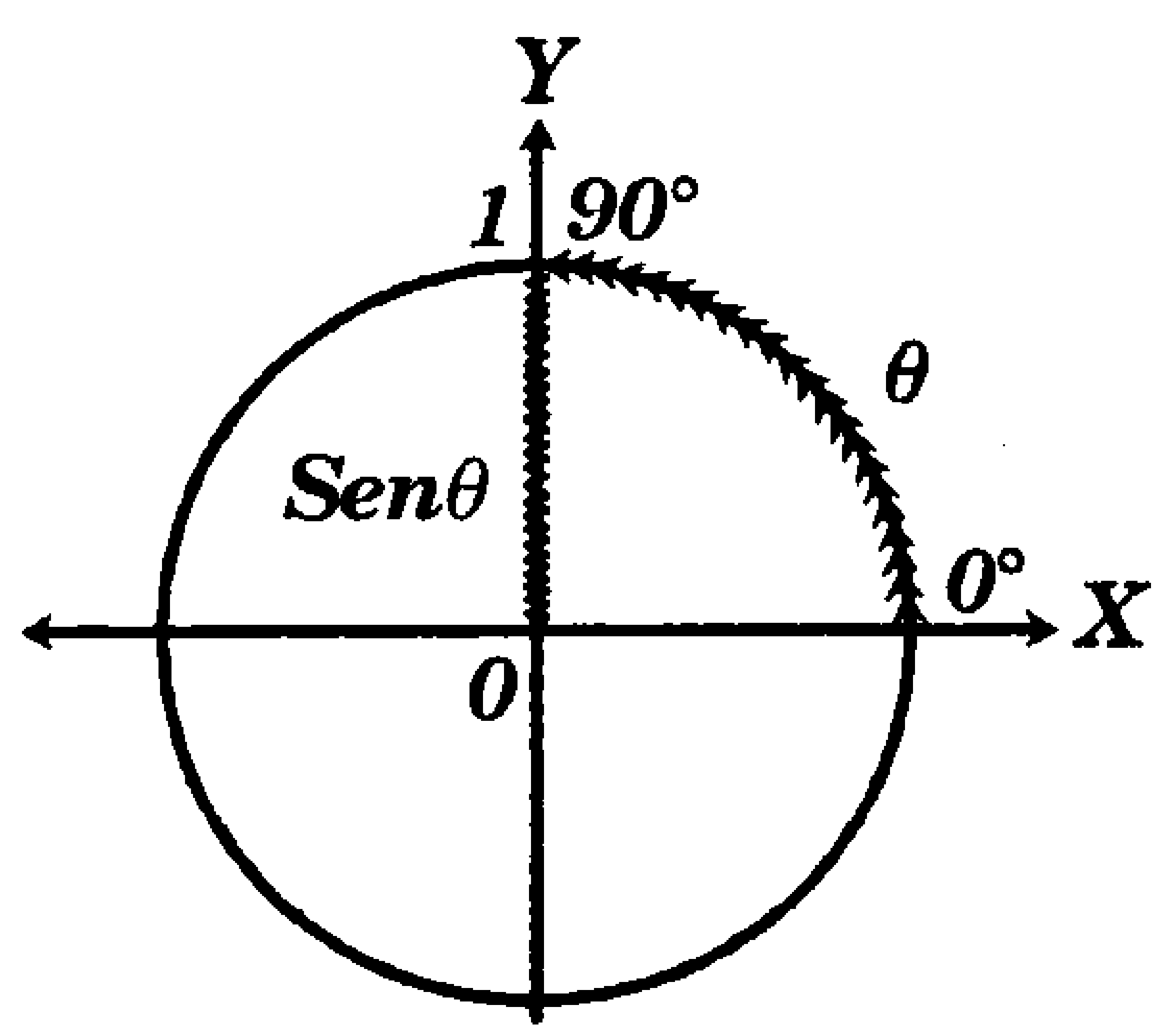
NOTE QUE :
$Cos(-70°) > Cos(-250°)$

VARIACIONES DE LA R.T. DE ARCOS DIRIGIDOS EN POSICIÓN NORMAL

VARIACIÓN DEL SENO DE UN ARCO θ :

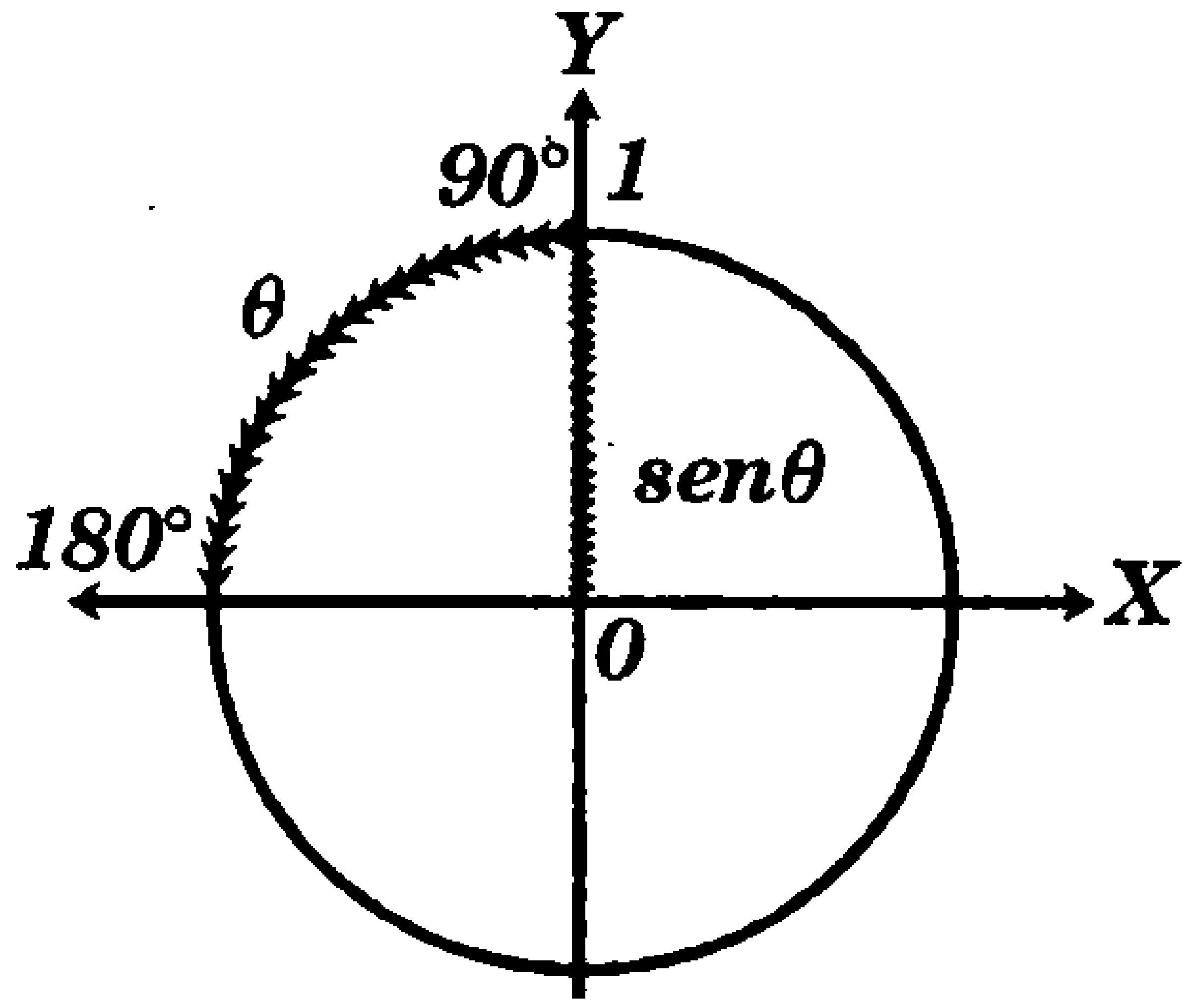
A continuación analizaremos la variación del seno cuando θ esta en cada uno de los cuadrantes .

PRIMER CUADRANTE :



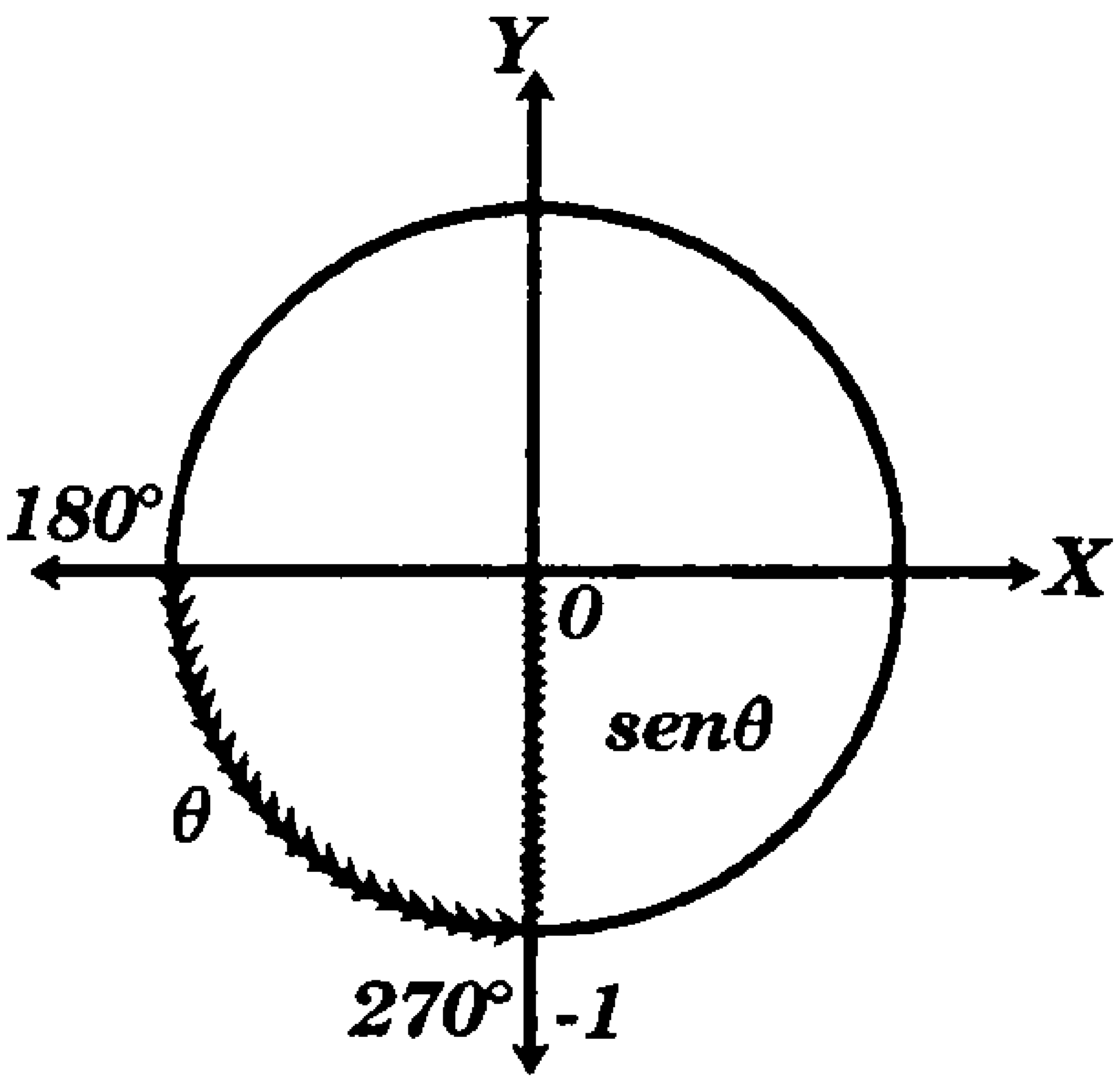
Si : $0° < \theta < 90° \Rightarrow 0 < Sen\theta < 1$

SEGUNDO CUADRANTE :



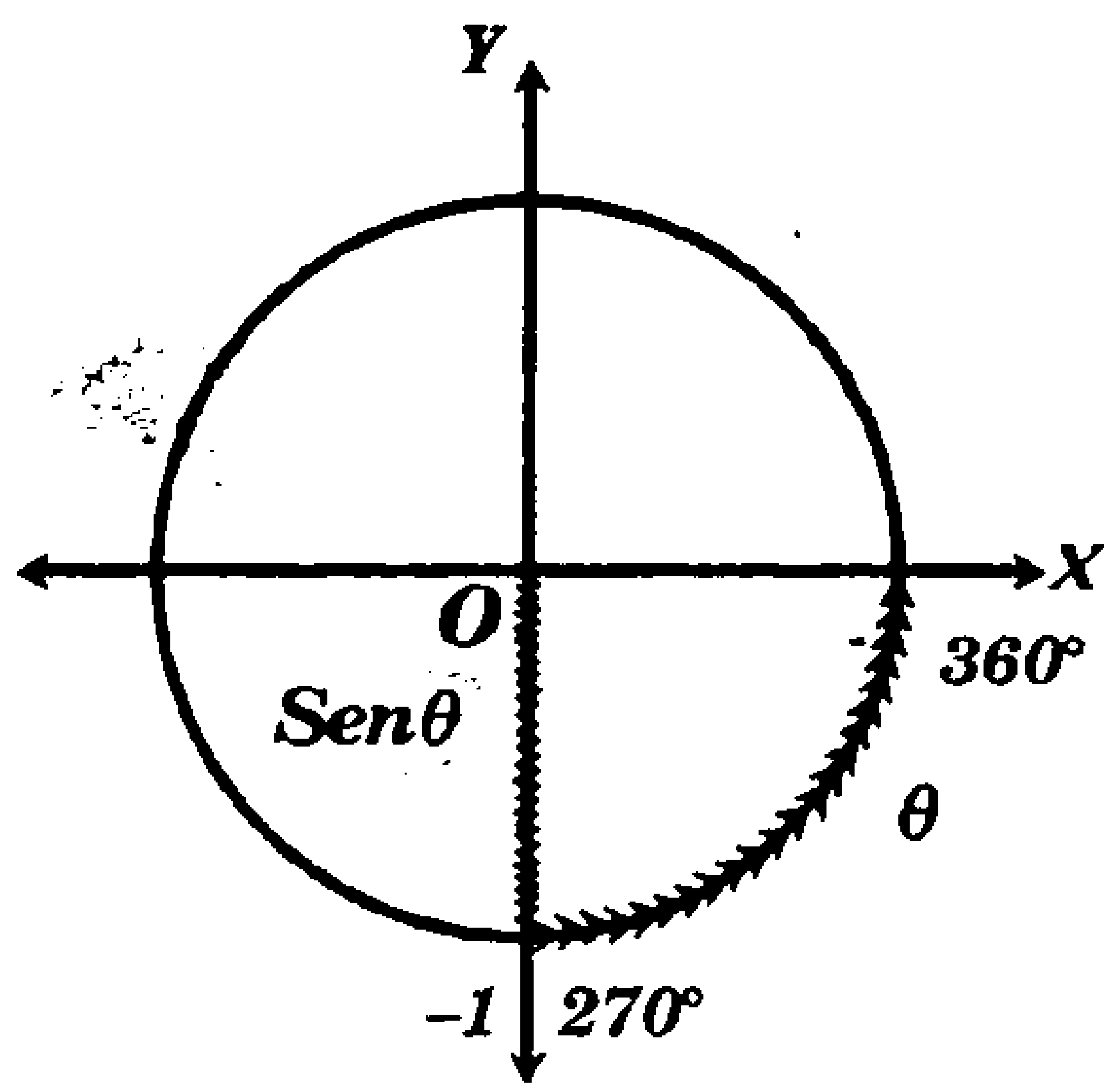
Si : $90° < \theta < 180° \Rightarrow 0 < Sen\theta < 1$

TERCER CUADRANTE :



Si : $180° < \theta < 270° \Rightarrow -1 < Sen\theta < 0$

CUARTO CUADRANTE :

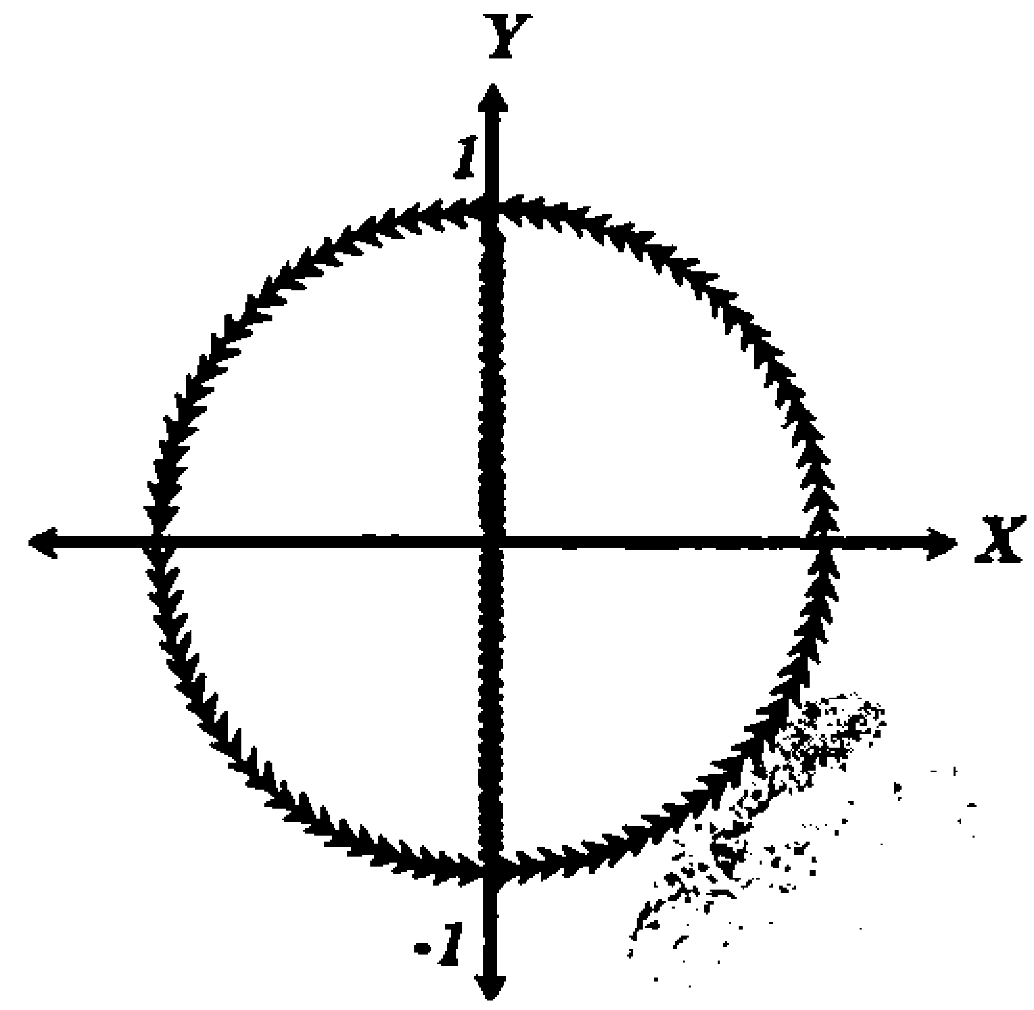


Si : $270° < \theta < 360° \Rightarrow -1 < Sen\theta < 0$

EN GENERAL :

Si θ recorre de $0°$ a $360°$ entonces el seno de θ se extiende de -1 a 1

Es decir :



Si : $0° < \theta < 360° \Rightarrow -1 < Sen\theta < 1$

$MAX(Sen\theta) = 1$
$MIN(Sen\theta) = -1$

EJEMPLO 1 :

Hallar el máximo valor de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$Sen\theta = 2k - 3$$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que : $-1 \leq \underbrace{Sen\theta} \leq 1$

* Reemplazamos

$$-1 \leq 2k - 3 \leq 1 \Rightarrow -1 + 3 \leq 2k \leq 1 + 3$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2k \leq 1 + 3 \Rightarrow \frac{2}{2} \leq k \leq \frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq k \leq 2$$

↑ MAX

Luego el máximo valor de k es 2

EJEMPLO 2 :

Si $\theta \in III$. Hallar todos los valores enteros de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$Sen\theta = \frac{2k-7}{3}$$

RESOLUCIÓN :

si : $\theta \in III \Rightarrow -1 < \underbrace{sen\theta} < 0$

$$\Rightarrow -1 < \frac{2k-7}{3} < 0$$

$$-3 < 2k - 7 < 0 \Rightarrow -3 + 7 < 2k < 0 + 7$$

$$\Rightarrow 4 < 2k < 7 \Rightarrow \frac{4}{2} < k < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < k < 3,5$$

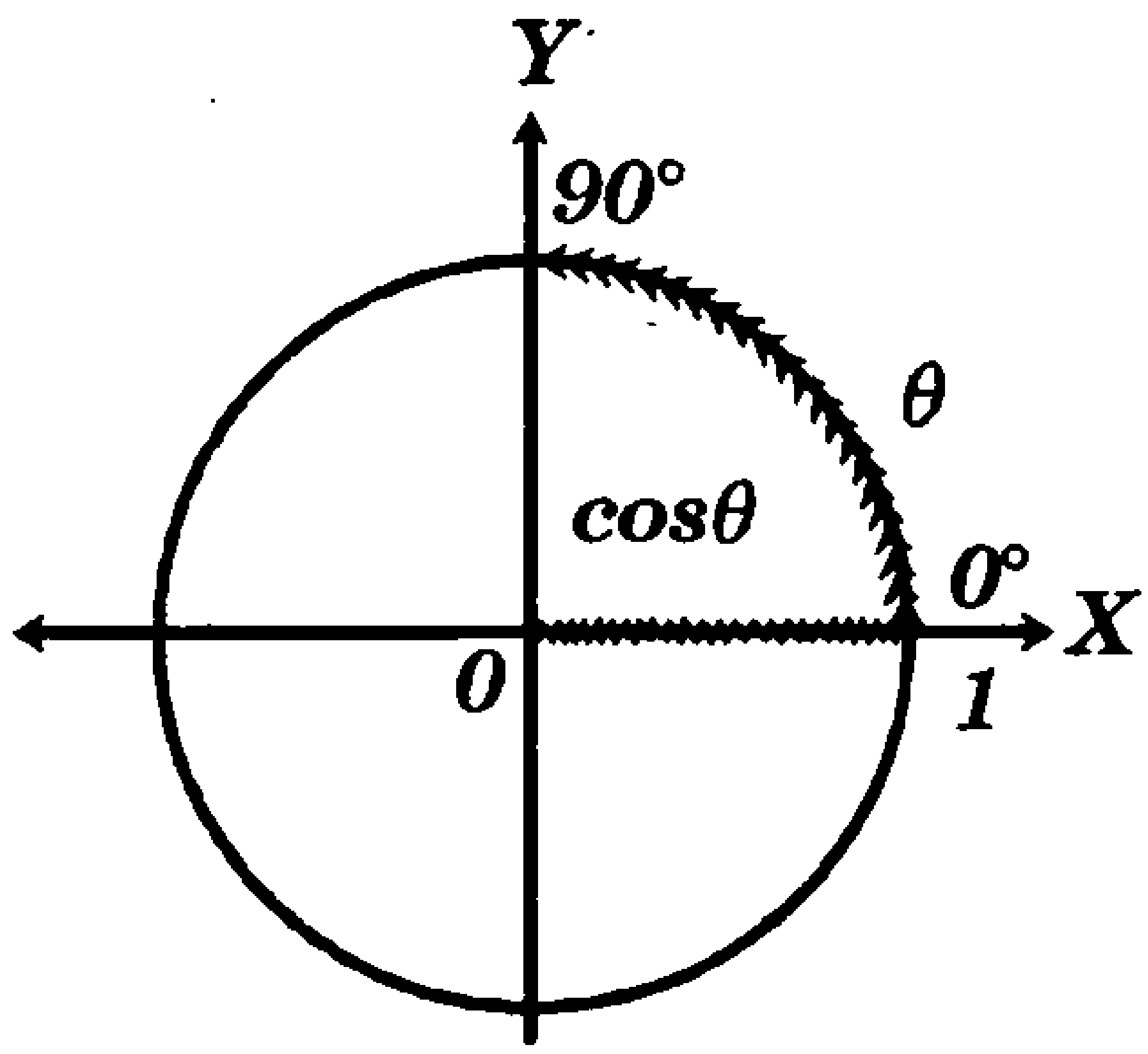
El único valor entero que toma k es 3

VARIACIÓN DEL COSENO DE UN ARCO θ

A continuación analizaremos la variación del coseno

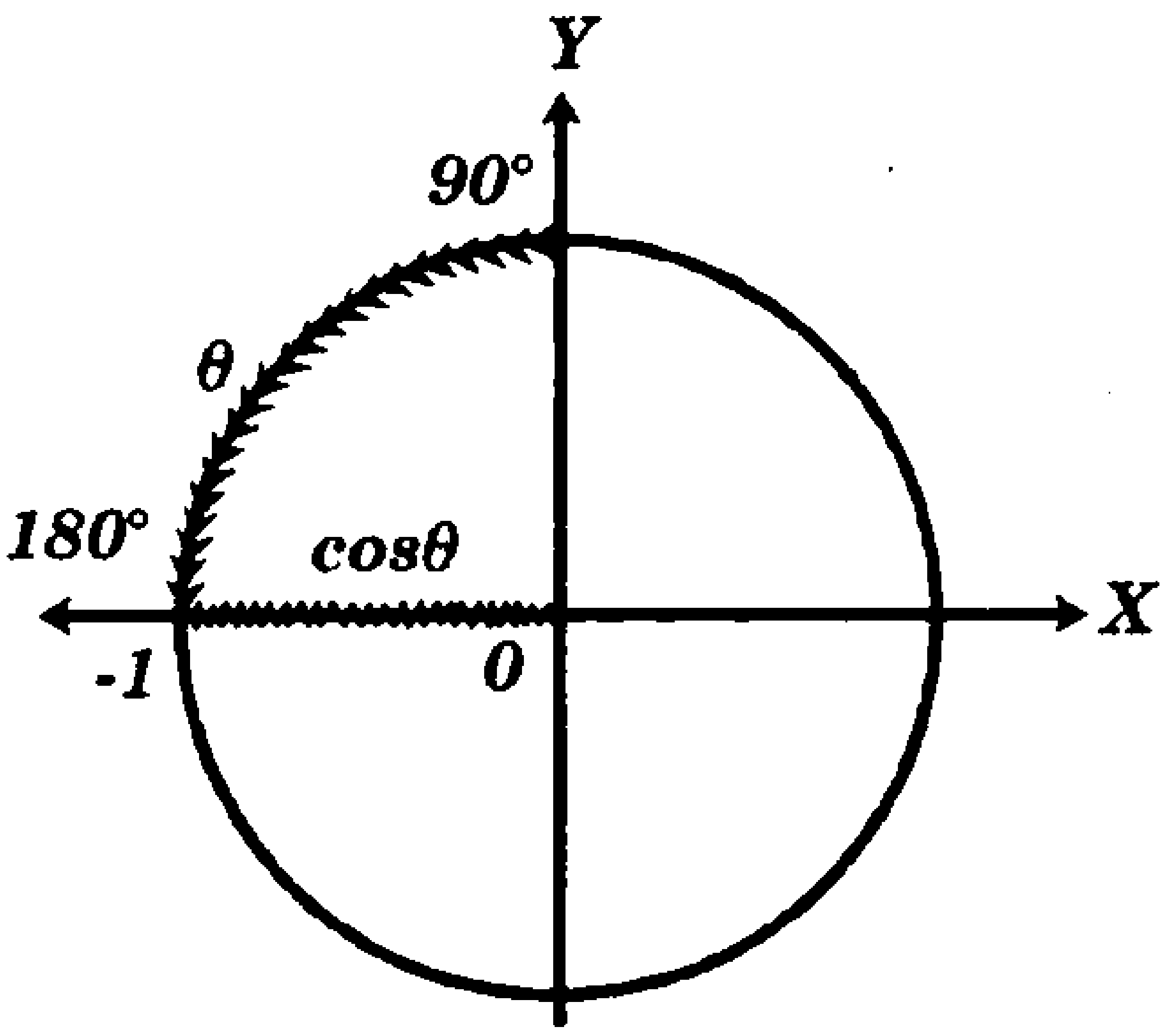
cuando θ esta cada uno de los cuadrantes .

PRIMER CUADRANTE :



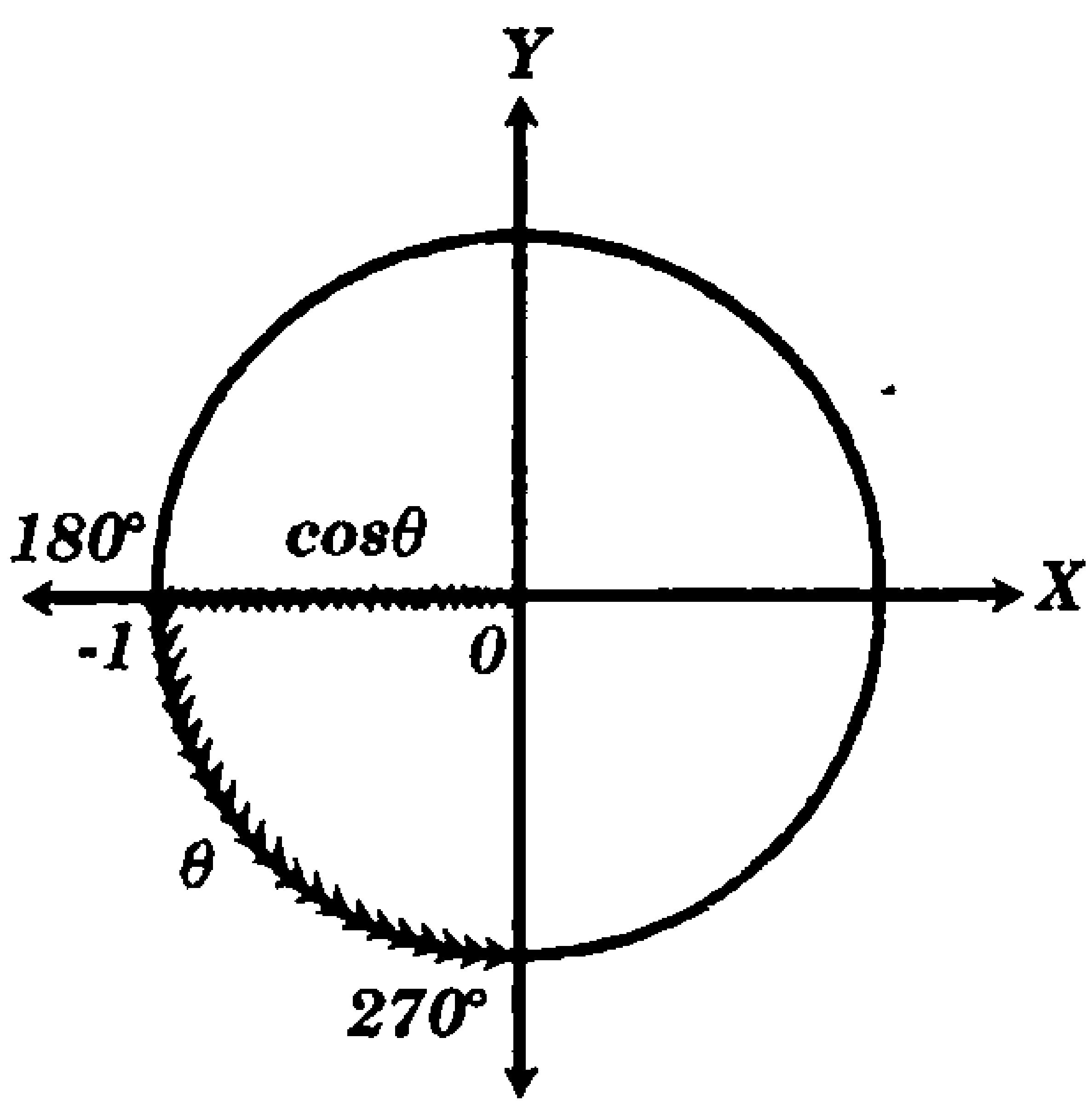
Si : $0° < \theta < 90° \Rightarrow 0 < Cos\,\theta < 1$

SEGUNDO CUADRANTE :



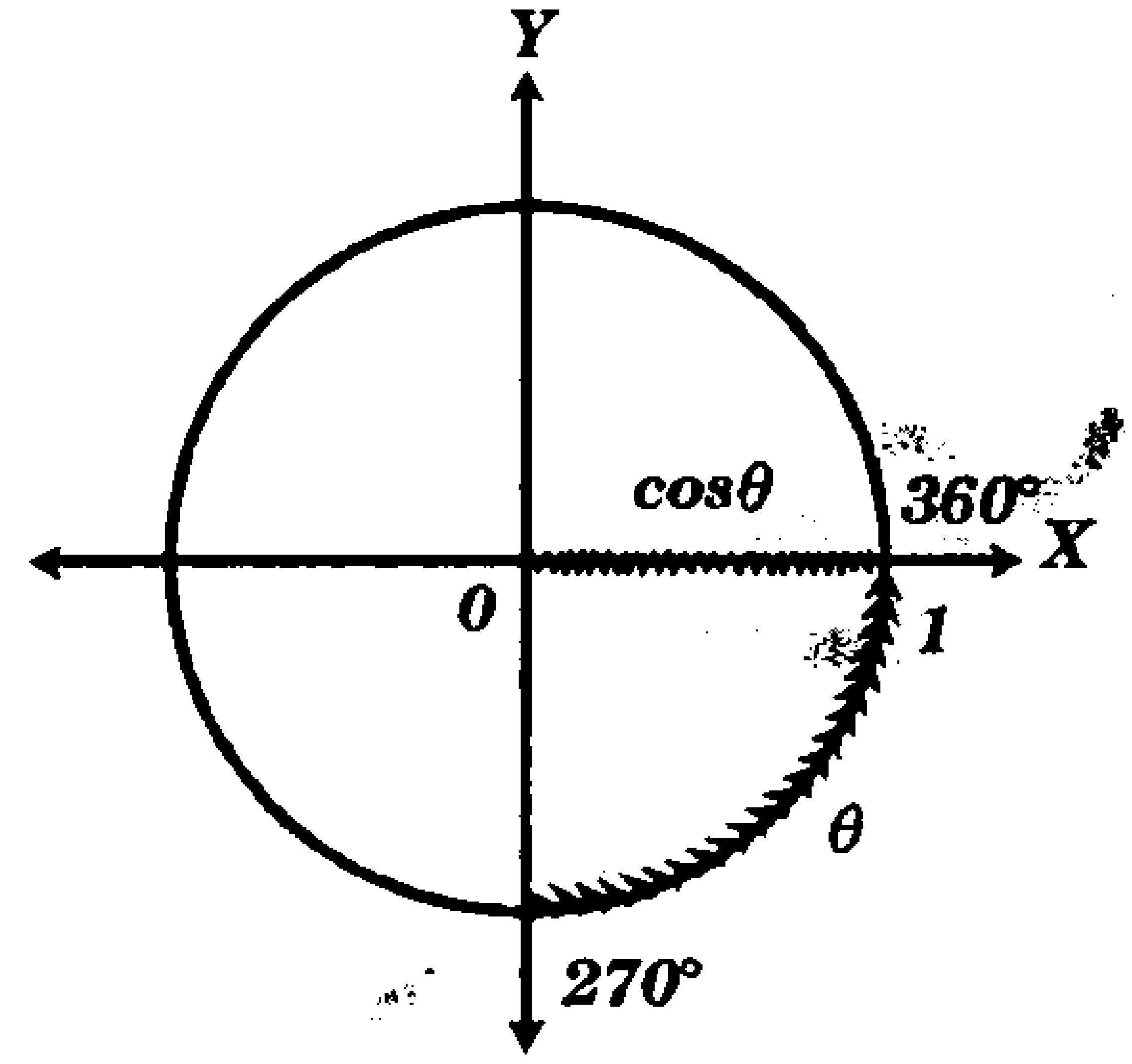
Si: $90° < \theta < 180° \Rightarrow -1 < Cos\theta < 0$

TERCER CUADRANTE :



Si : $180° < \theta < 270° \Rightarrow -1 < Cos\theta < 0$

CUARTO CUADRANTE :

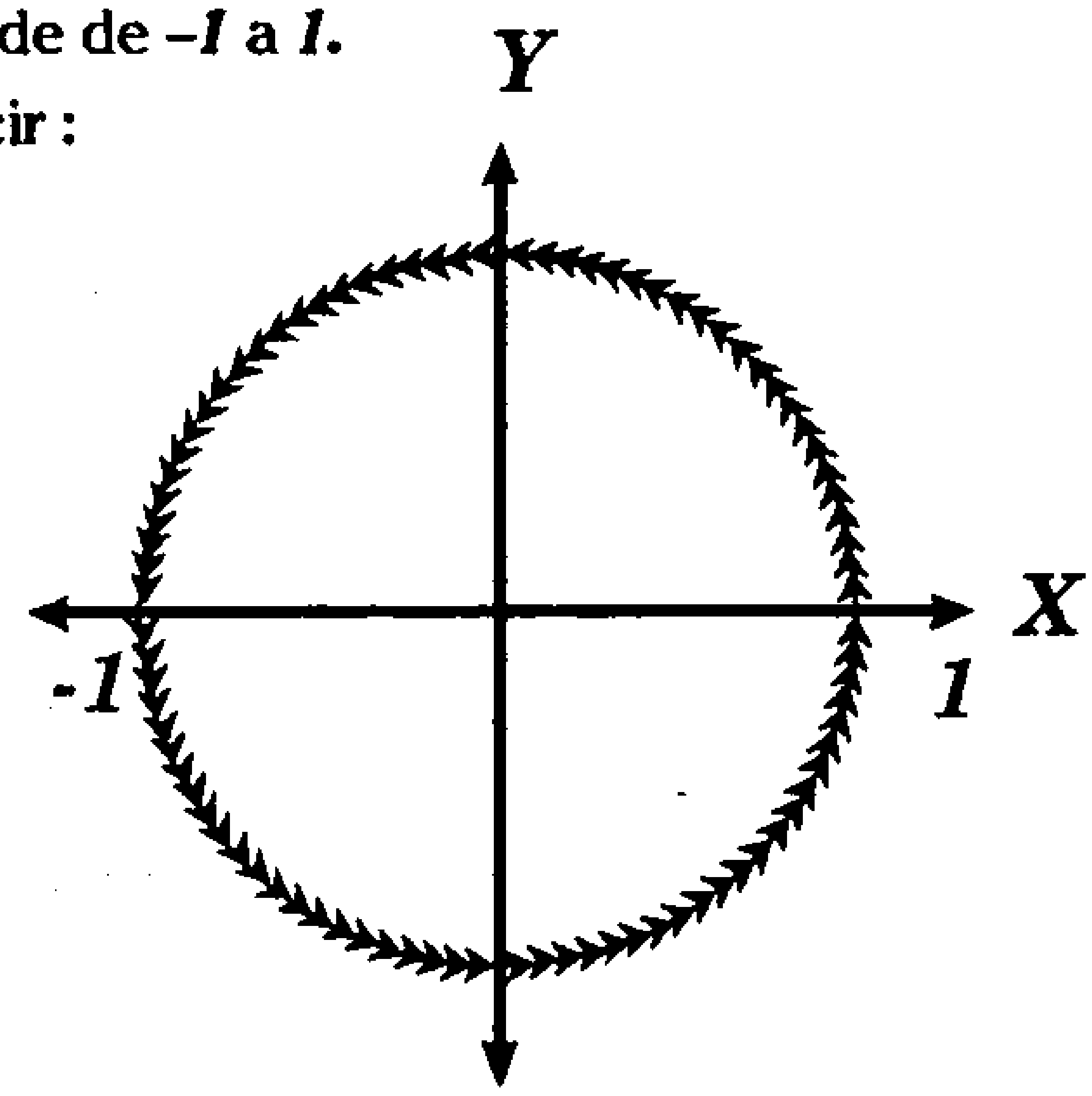


Si : $270° < \theta < 360° \Rightarrow 0 < Cos\theta < 1$

EN GENERAL :

Si θ recorre de $0°$ a $360°$ entonces el coseno de θ se extiende de -1 a 1.

Es decir :



Si: $0° < \theta < 360° \Rightarrow -1 < Cos\theta < 1$

$MAX(Cos\,\theta) = 1$
$MIN(Cos\,\theta) = -1$

EJEMPLO 1:

Hallar el mínimo valor de "k" para que la siguiente igualdad exista.

$$Cos\theta = 4k - 5$$

RESOLUCIÓN :

Sabemos que : $\Rightarrow -1 \leq Cos\theta \leq 1$

$$-1 \leq 4k - 5 \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 + 5 \leq 4k \leq 1 + 5 \Rightarrow 4 \leq 4k \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4} \leq k \leq \frac{6}{4} \Rightarrow 1 \leq k \leq 3/2$$

* Luego el mínimo valor de k es 1

EJEMPLO 2 :

Si $\theta \in II$. Hallar todos los valores enteros de "k" para que la siguiente igualdad exista .

$$Cos\theta = \frac{3k+5}{7}$$

RESOLUCIÓN :

Si :

$$\theta \in II \Rightarrow -1 < Cos\theta < 0$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{3k+5}{7} < 0 \Rightarrow -7 < 3k+5 < 0$$

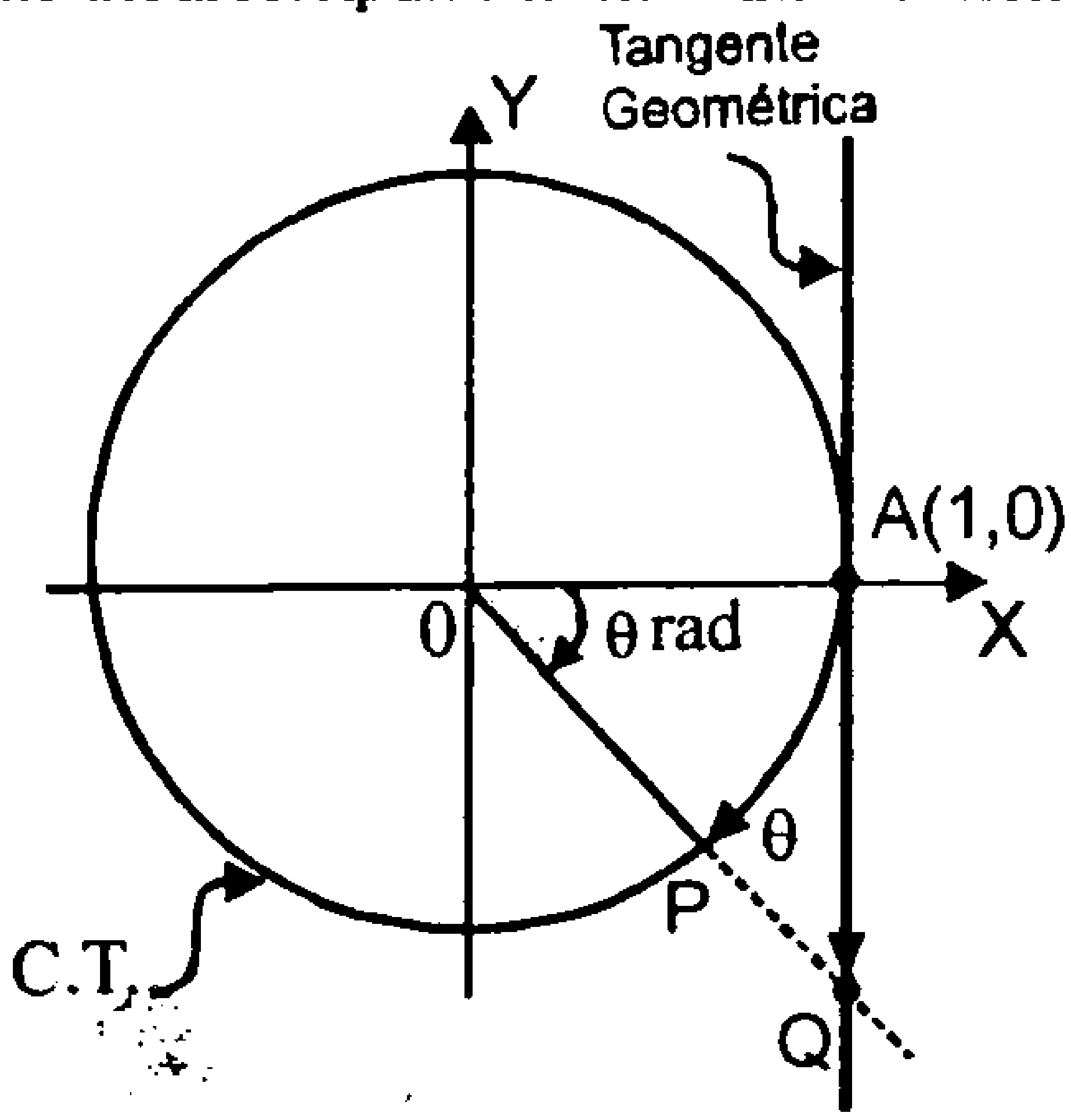
$$\Rightarrow -5-7 < 3k < 0-5 \Rightarrow -12 < 3k < -5$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{3} < k < -\frac{5}{3} \Rightarrow -4 < k < -\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow$ Los únicos valores enteros que toman "k" son : -3 y -2 .

LÍNEA TANGENTE

Es una parte de la tangente geométrica trazada por el origen de arcos *A(1;0)*. Se mide desde el origen e arcos y termina en la intersección de la tangente geométrica con el radio prolongado de la C.T. que pasa por el extremo del arco. Apunta hacia la intersección.

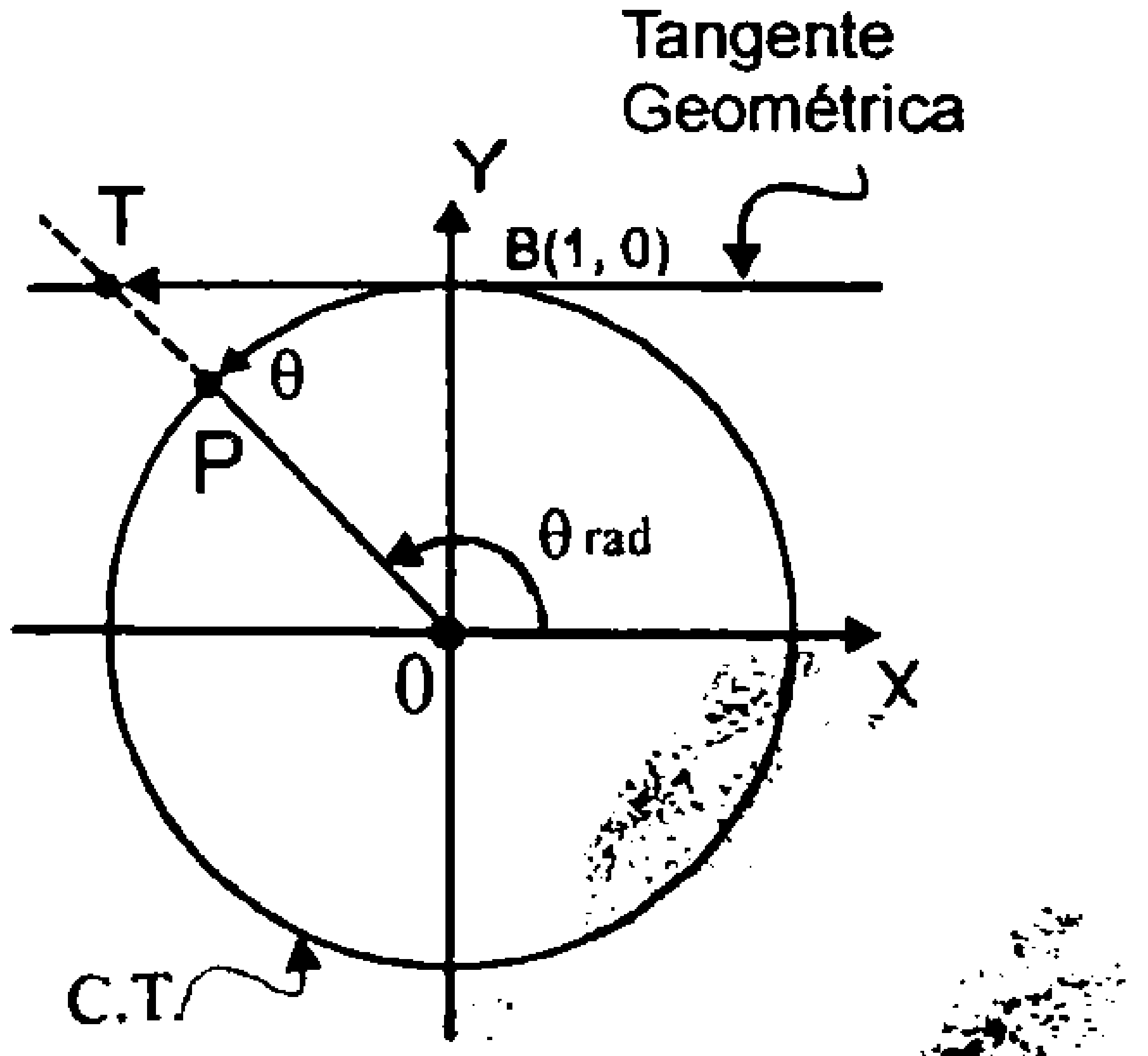


Se observa que $\overline{AQ}$ representa a la tangente del Arco Trigonométrico θ.

Como en el ejemplo el segmento está dirigido, hacia abajo entonces la tangente es negativa.

LÍNEA COTANGENTE

Es una porción de la tangente geométrica que pasa por el origen de complementos *B(0;1)*, se empieza a medir desde el origen de complemento y termina en la intersección de la tangente mencionada con el radio prolongado de la C.T. que pasa por el extremo del arco, Apunta hacia dicha intersección.



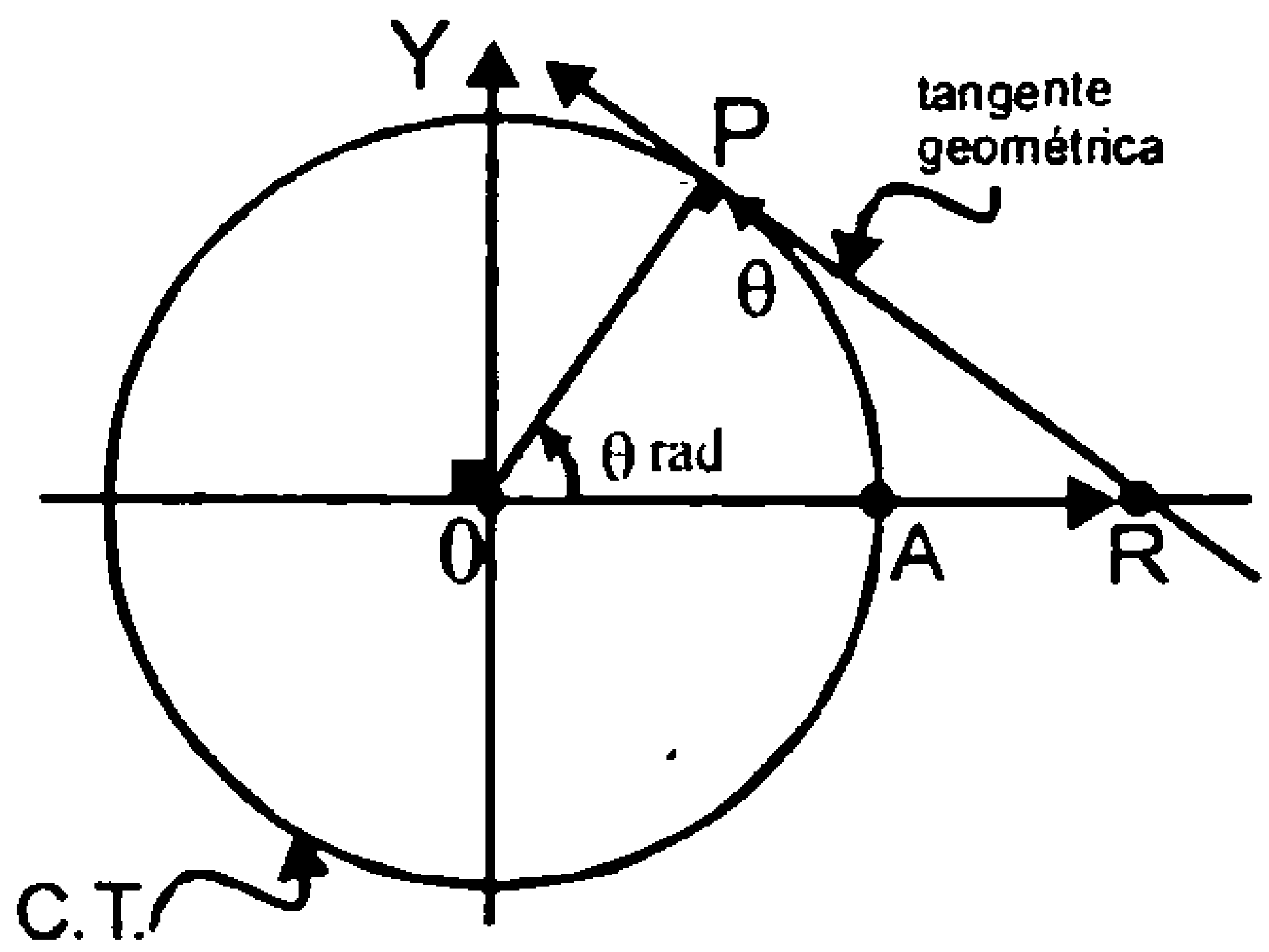
En el gráfico:

Se observa que $\overline{BT}$ representa a la cotangente del arco trigonométrico θ.

Como en el ejemplo, el segmento está dirigido hacia la izquierda entonces la cotangente es negativa.

LÍNEA SECANTE:

Es una porción del diámetro prolongado que pasa por el origen de arcos *A(1;0)* y que se mide desde el centro de la C.T. hasta la intersección del diámetro prolongado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco. Apunta hacia la intersección.



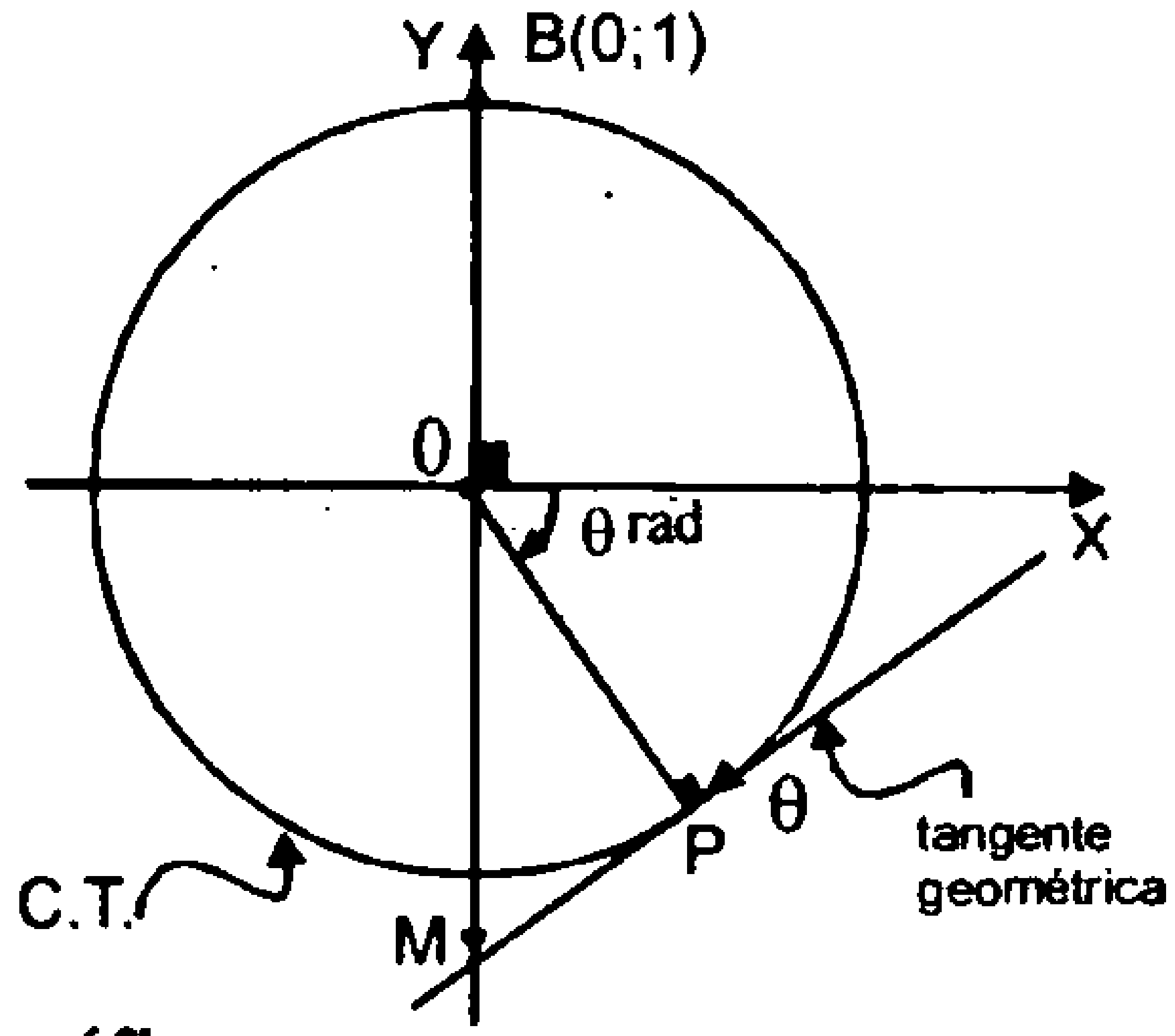
En el gráfico:

Se observa que $\overline{OR}$ representa a la secante del arco trigonométrico θ.

Como en el ejemplo, el segmento está dirigido hacia la derecha entonces la secante es positiva.

LÍNEA COSECANTE

Es una parte del diámetro prolongado que pasa por el origen del complemento *B(0; 1)*, y que se mide desde el centro de la C.T. hasta la intersección del diámetro prolongado mencionado con la tangente geométrica trazada por el extremo del arco apunta hacia la intersección.



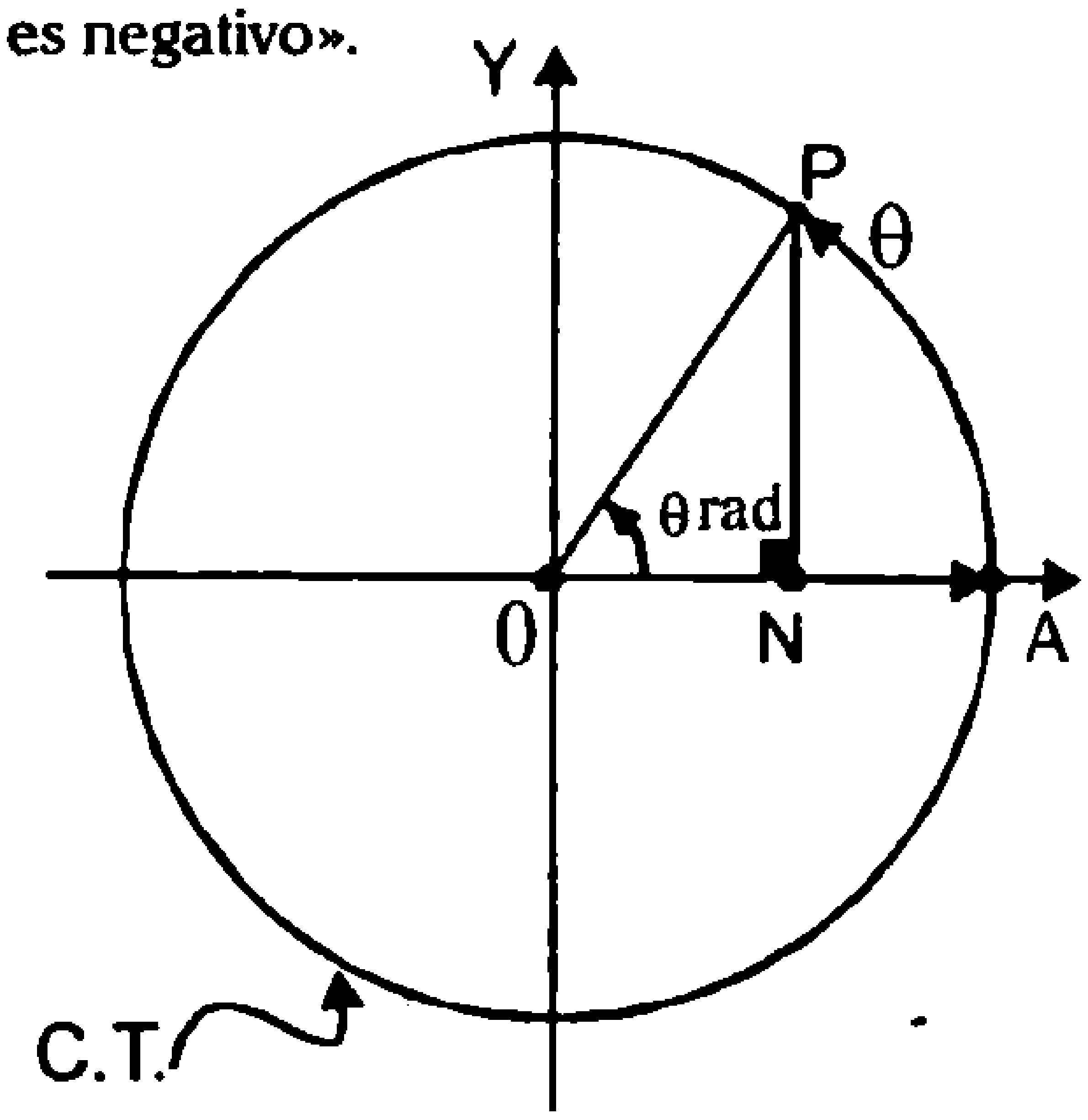
En el gráfico:

Se observa que $\overline{OM}$ representa a la cosecante del arco trigonométrico *θ*.

Como en el ejemplo, el segmento está dirigido hacia abajo entonces la cosecante es negativa.

LÍNEA AUXILIAR VERSO O SENO VERSO

«Es lo que le falta al coseno de un arco para valer la unidad» se mide a partir de origen de arcos *A(1; 0)*, hasta el pie de la perpendicular trazada desde el extremo del arco, al diámetro horizontal del (Eje X) . apunta hacia el origen de arcos es decir « el verso jamás es negativo».



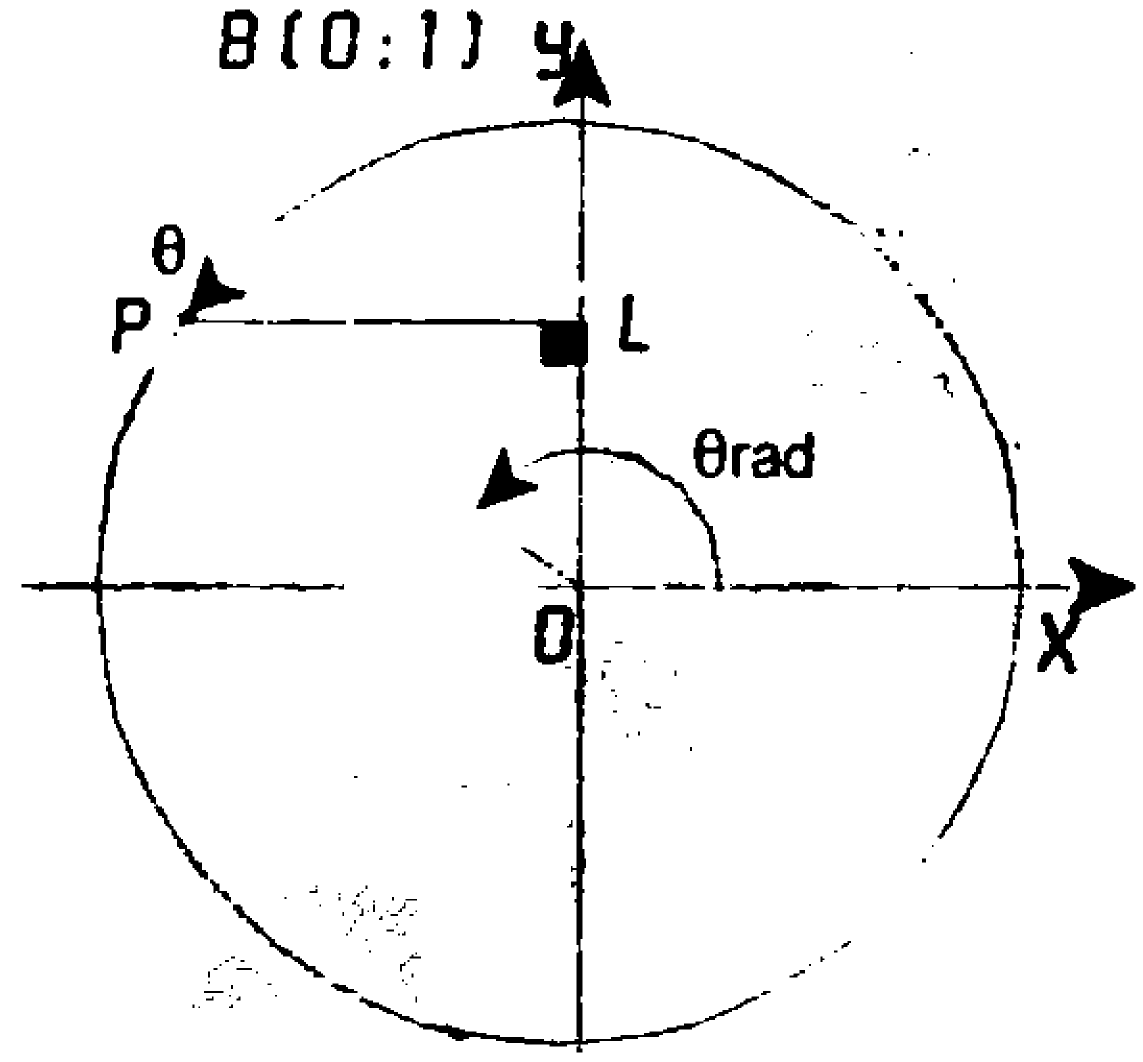
En el gráfico :

Se observa que $\overline{NA}$, representa al verso del arco trigonométrico θ .

Cumple la fórmula : $Verso\,\theta = 1 - Cos\ \theta$

LÍNEA AUXILIAR COVERSO O COSENO VERSO

«Es lo que le falta al seno para valer la unidad» el coverso se mide a partir de origen de complementos *B(0; 1)*, hasta el pie de la perpendicular trazada desde el extremo del arco a diámetro vertical de la C.T. (Eje *Y*). Apunta hacia el origen de complementos « el coverso jamás es negativo»

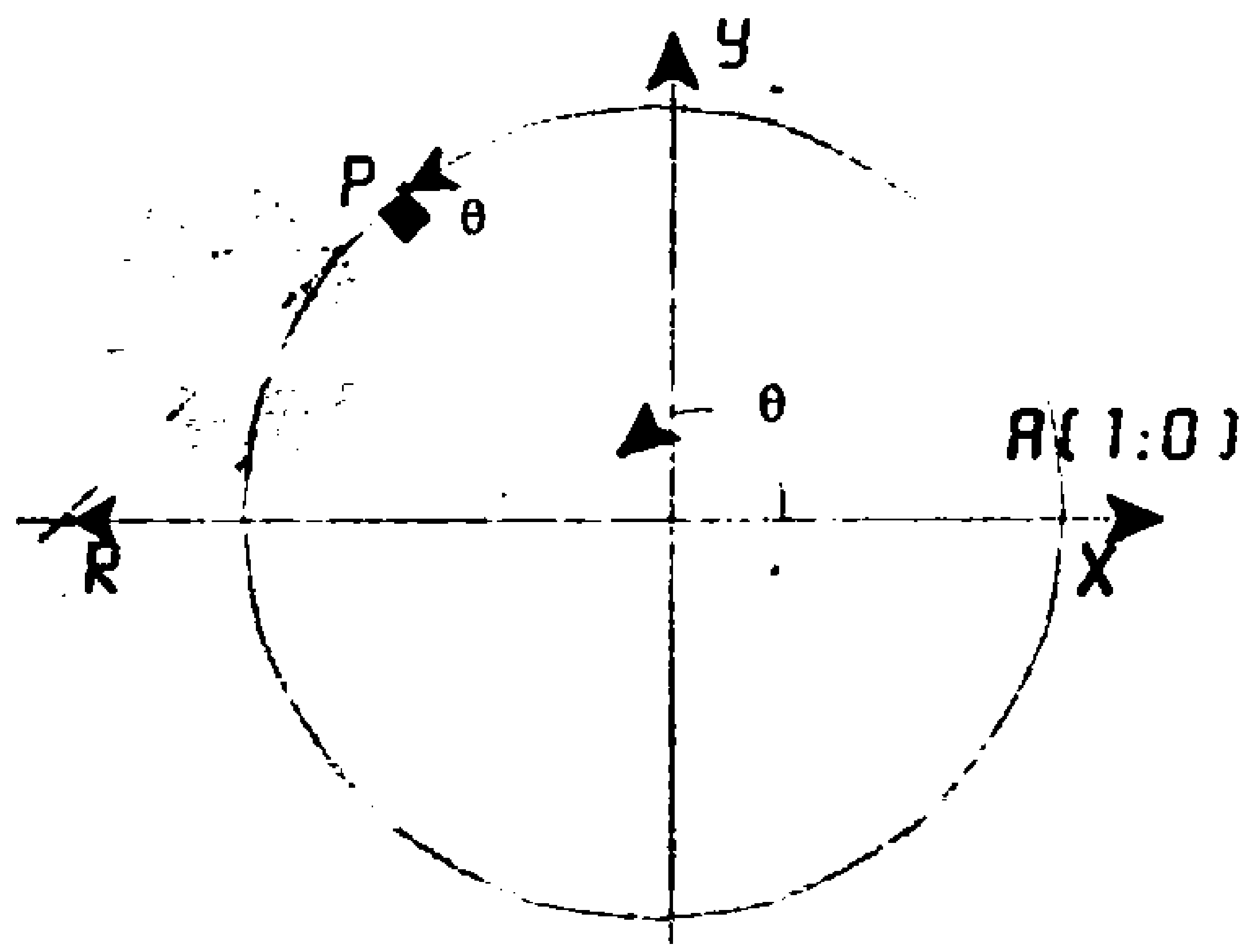


Se observa que $\overline{LB}$ representa al arco trigonométrico θ.

Cumple la Fórmula: $Coverso\,\theta = 1 - Sen\,\theta$

LÍNEA AUXILIAR EX-SECANTE

««Es el exceso de la secante a partir de la unidad ». Se mide a partir del origen de arcos *A(1; 0)*, hasta el punto donde termina la secante de ese arco. apunta hacia el punto donde termina la secante.

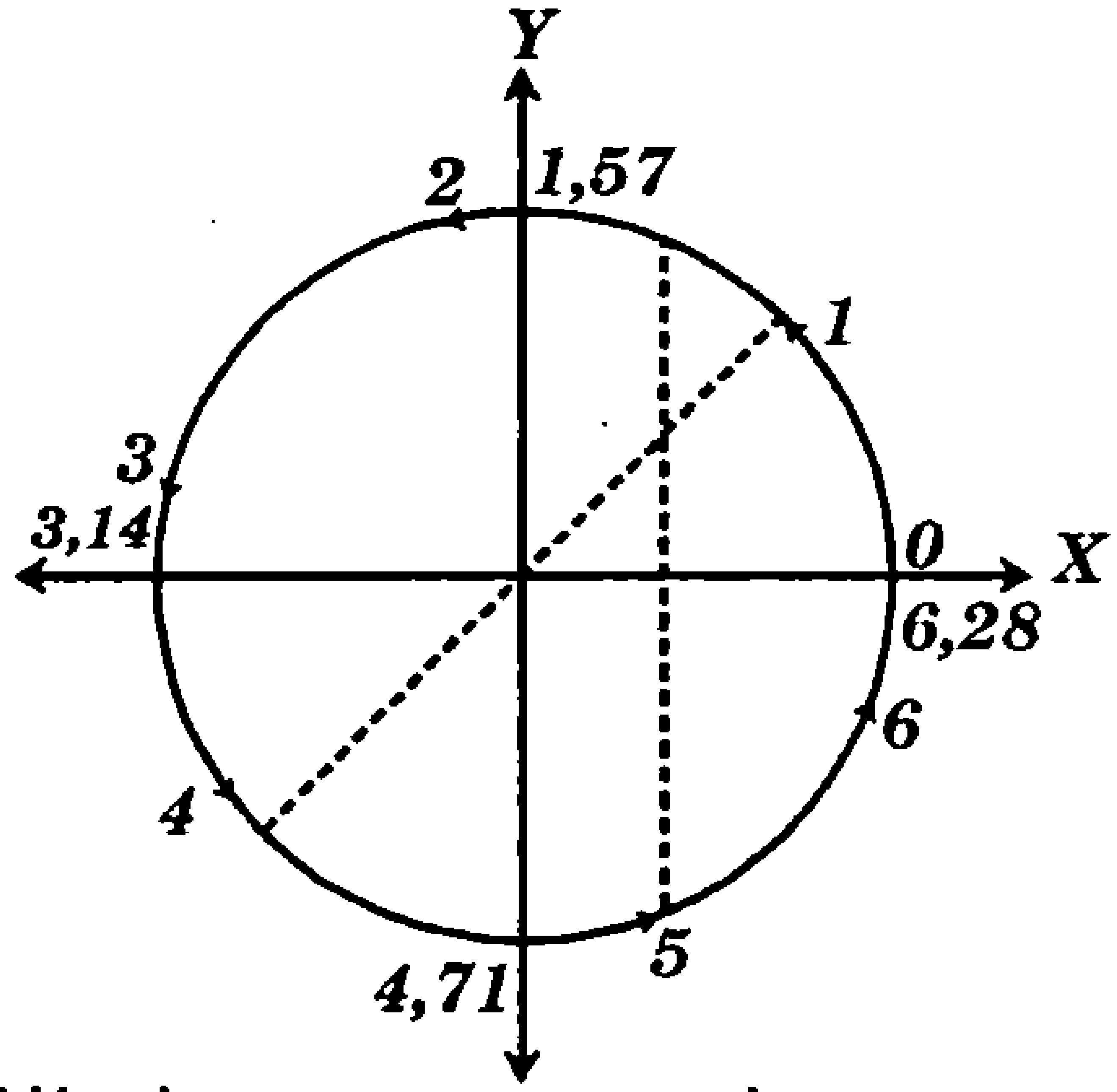


Se observa que $\overline{AR}$ representa a la Ex-Secante del arco trigonométrico *θ*.

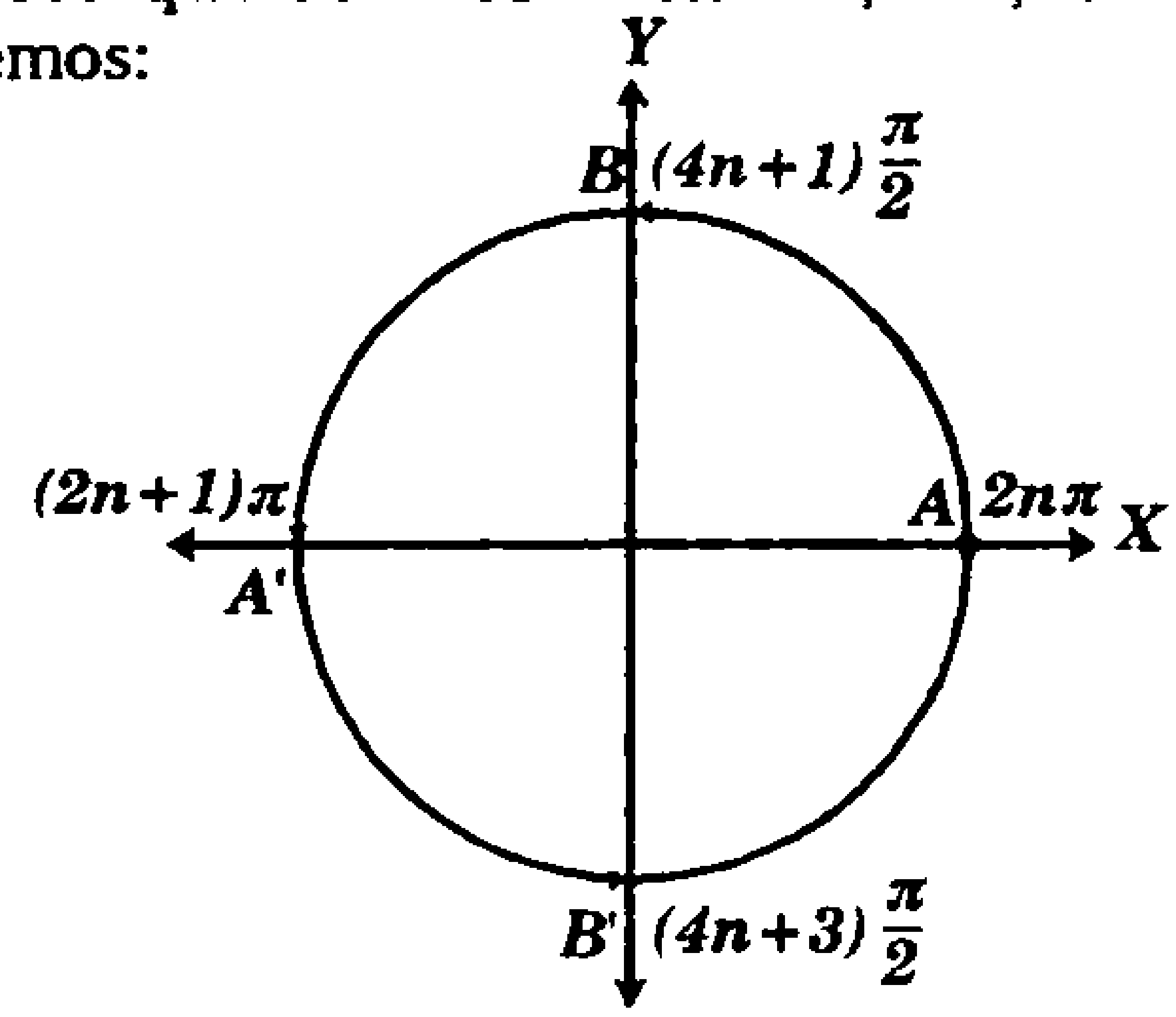
Cumple la Fórmula: $ExSec\,\theta = Sec\,\theta - 1$

OBSERVACIÓN :

En algunos casos habrá necesidad de ubicar un arco cuya medida es un número entero y se recomienda, en esos casos, tener en cuenta la siguiente *C.T.* :



También, si tenemos representar de manera genérica los arcos que se ubican en "A", "B", "A'" o "B'" tendremos:

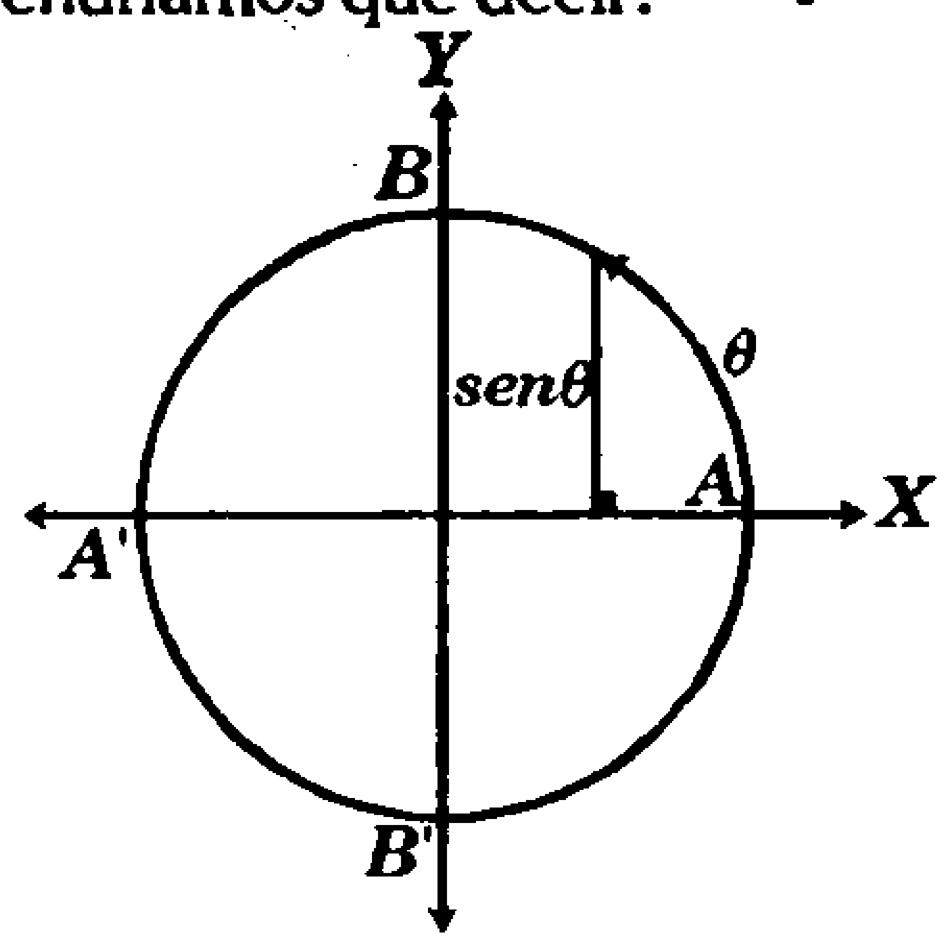


ubicamos en : $(n \in Z)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A\ :2n\pi \\ A':(2n+1)\pi \end{array}\right\} \quad n\pi \\ \left.\begin{array}{l} B:(4n+1)\frac{\pi}{2} \\ B':(4n+3)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad (2n+1)\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{n\pi}{2}$$

POR EJEMPLO :

si nos preguntasen para que arco de "θ" se cumple: $Sen\,\theta=0$; tendríamos que decir:

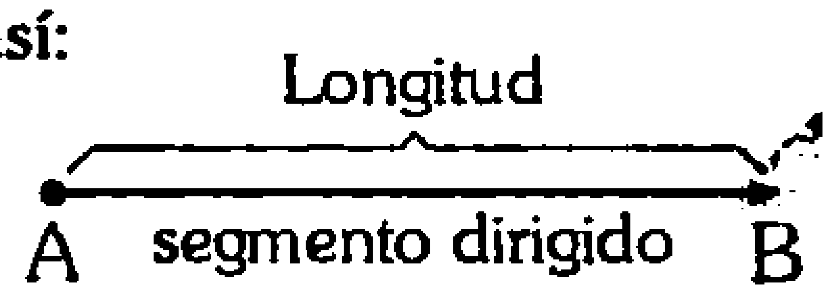


Para que: $sen\,\theta=0$

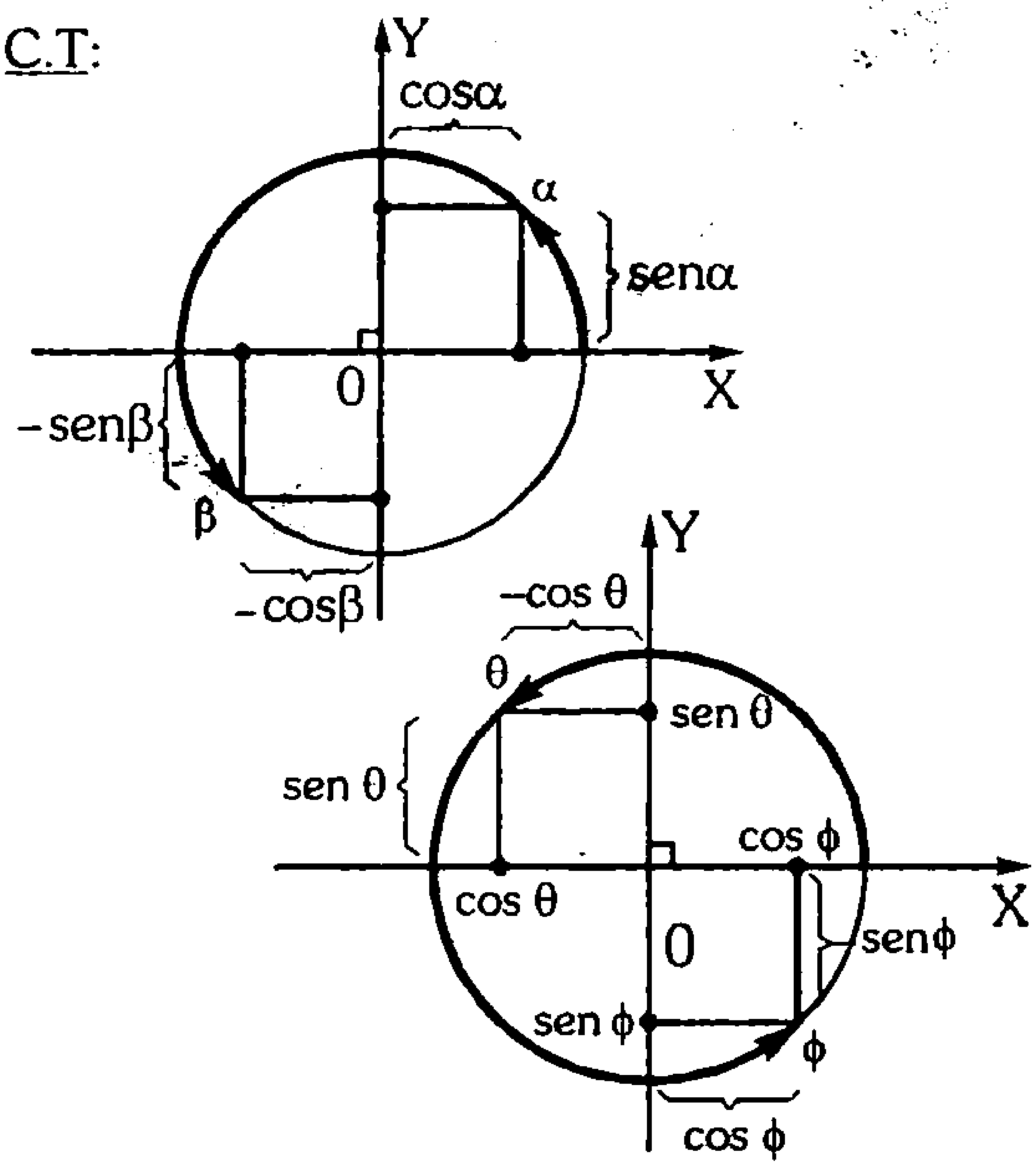
"θ" debe ser arco en posición normal ubicado su posición terminal en A o en A', luego : $\theta=n\pi,\ n\in Z$

PROPIEDAD PARA PROBLEMAS GEOMÉTRICOS - LONGITUDES

La longitud de un segmento dirigido es un número real positivo, cuando querramos calcular la longitud de un segmento dirigido indicaremos mediante una llave así:

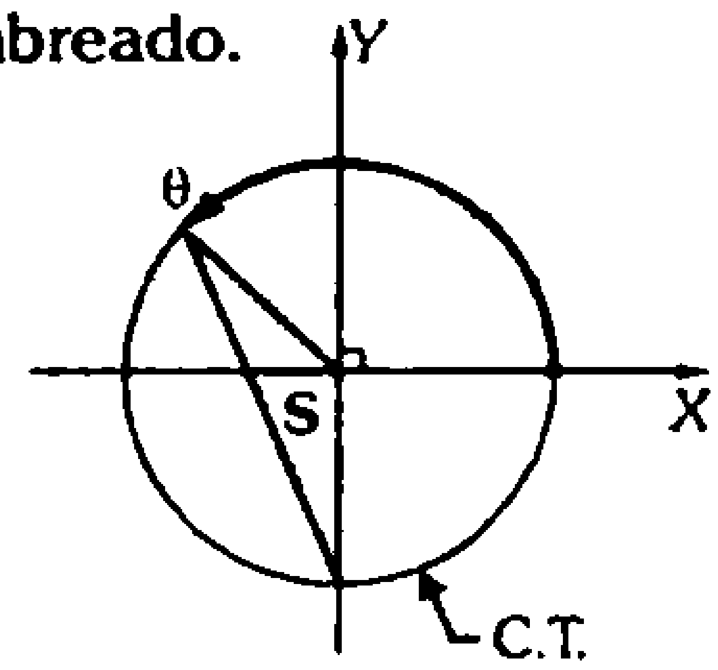


C.T:

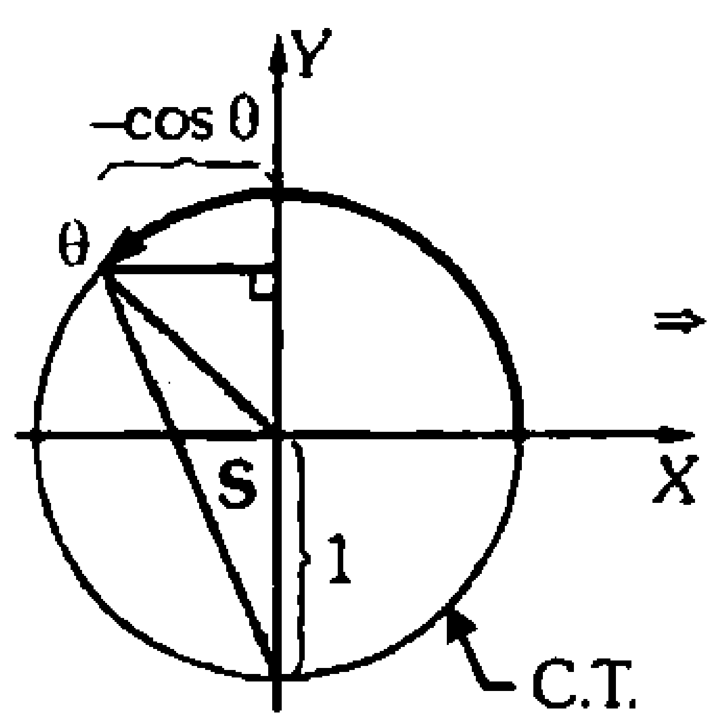


EJEMPLO:

La circunferencia es trigonométrica, calcular el área (S) del triángulo sombreado.



RESOLUCIÓN:



$$S=\frac{(base)(altura)}{2} \Rightarrow S=\frac{(1)(-cos\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow S=-\frac{cos\theta}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

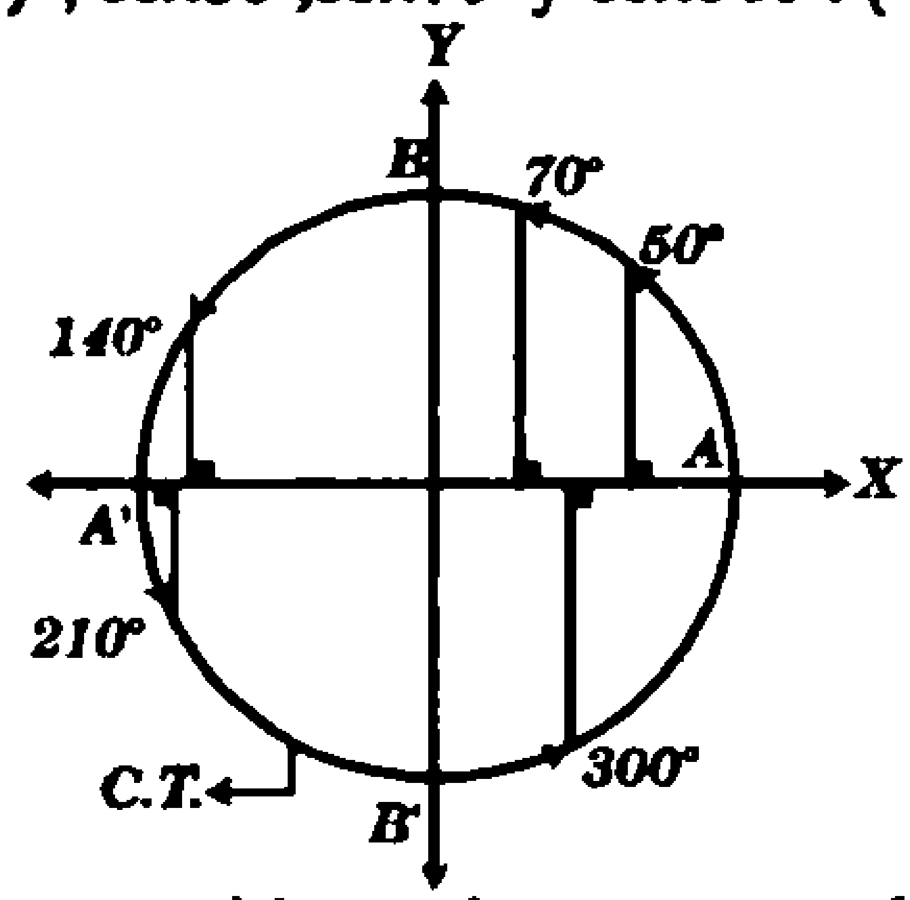
PROBLEMA 1 :

Con la ayuda de la circunferencia trigonométrica, señale la expresión de mayor valor :

A) sen50° B) sen70° C) sen140°

RESOLUCIÓN :

* Graficamos una ***C.T.*** y ubicamos en ellos los arcos mencionados; luego trazamos la línea trigonométrica seno correspondiente a cada uno de ellos y notamos que: ***sen210°*** y ***sen300°: (-)*** ; ***sen50°,sen70°*** y ***sen140°: (+)***



Como piden el mayor sólo comparamos entre los positivos (el *¿porqué?* es obvio) , y notamos que el mayor es: ***sen70°***

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 :

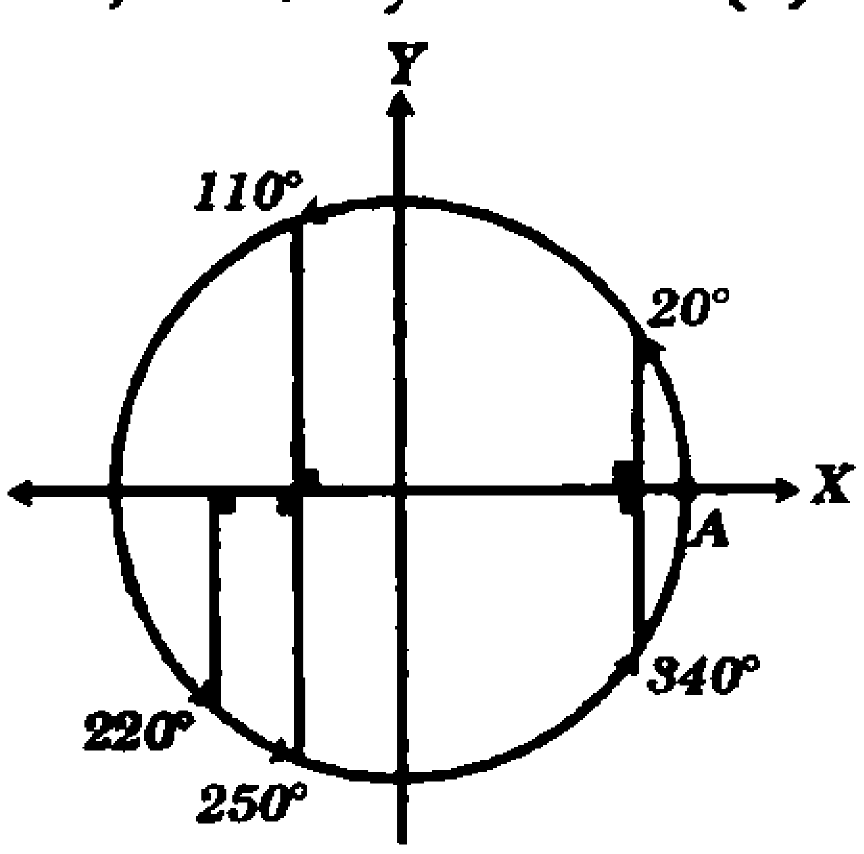
Con la ayuda de una ***C. T.***, señale la expresión de menor valor:

A) sen20° B) sen110° C) sen220°
D) sen250° E) sen340°

RESOLUCIÓN :

Graficando una ***C.T.*** y ubicamos los arcos mencionados, luego trazamos la ***L.T.*** Seno correspondiente a cada uno y notamos que: ***sen20° y sen110°: (+)***

sen22°,sen250° y sen340°: (-)



Como piden el menor, comparamos entre los negativos ; y notamos que el más negativo es ***sen250°***, por lo tanto el menor es : ***sen250°***

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

Señale la expresión de mayor valor entre :

A) cos10° B) cos50° C) cos140°
D) cos240° E) cos300°

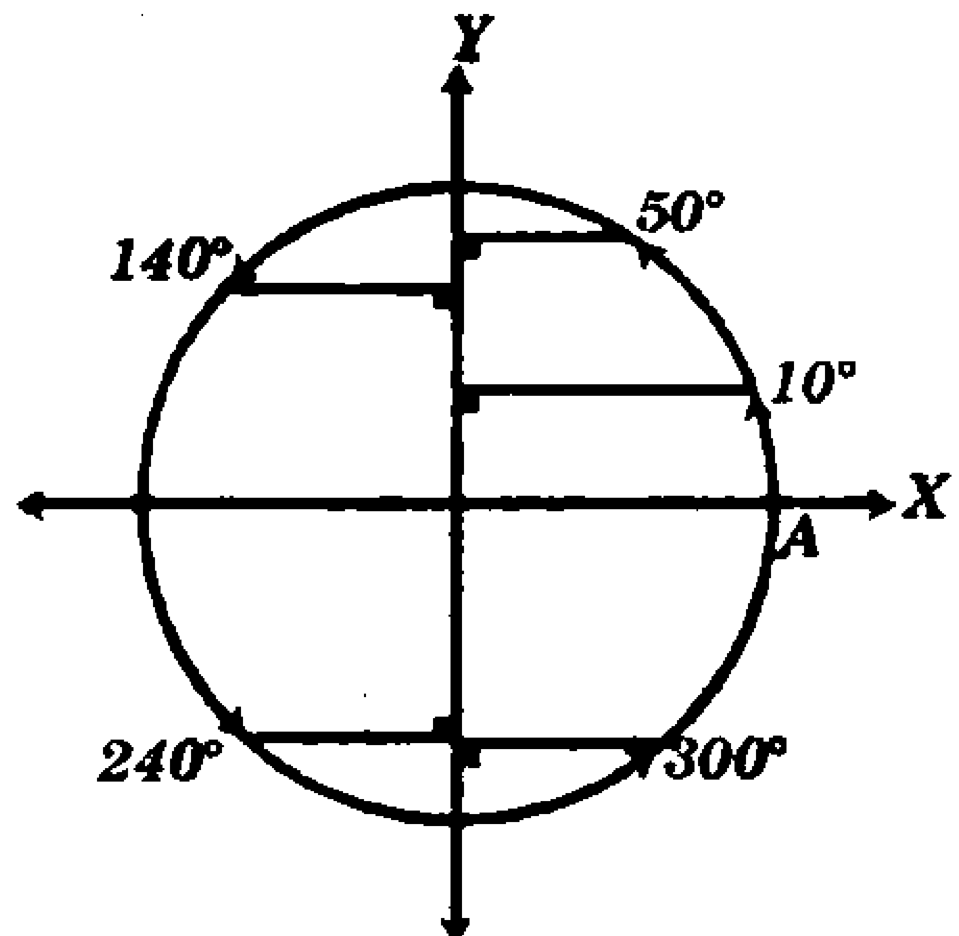
RESOLUCIÓN :

*Graficando la ***C.T.*** y ubicamos los arcos correspondientes, notamos que las ***L.T.*** Cosenos de estos arcos cumplen :

Cos10°, cos50° y cos300°:(+)

Cos140° ; cos240°: (-)

* Comparando entre los positivos , notamos que el mayor es : ***cos10°***



RPTA : "A"

OBSERVACIÓN :

Note que ***cos240°***y ***cos300°***son simétricamente opuestos.

PROBLEMA 4 :

Señale la expresión de menor valor entre :

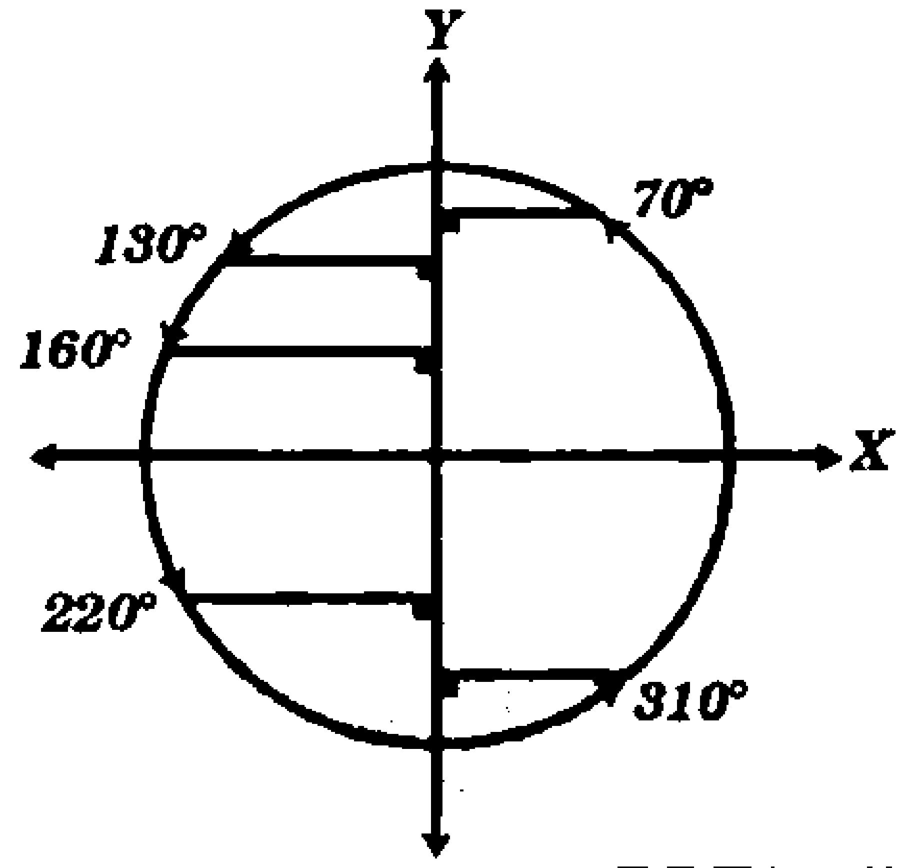
A) cos70° B) cos130° C) cos160°
D) cos220° E) cos310°

RESOLUCIÓN :

*Graficando en la ***C.T.*** los arcos mencionados, trazamos las ***L.T.*** Coseno correspondientes notamos que: ***cos70° y cos310°: (+)***

cos130° ; cos160° y cos220°: (-)

* Comparando entre los negativos, notamos que el más negativo, es decir el menor es: ***cos160°***



RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

Señale verdadero ***(V)*** o falso***(F)*** según corresponda, en:

I) sen100° > sen170°

II) cos100° > cos140°

III) sen210° < cos210°

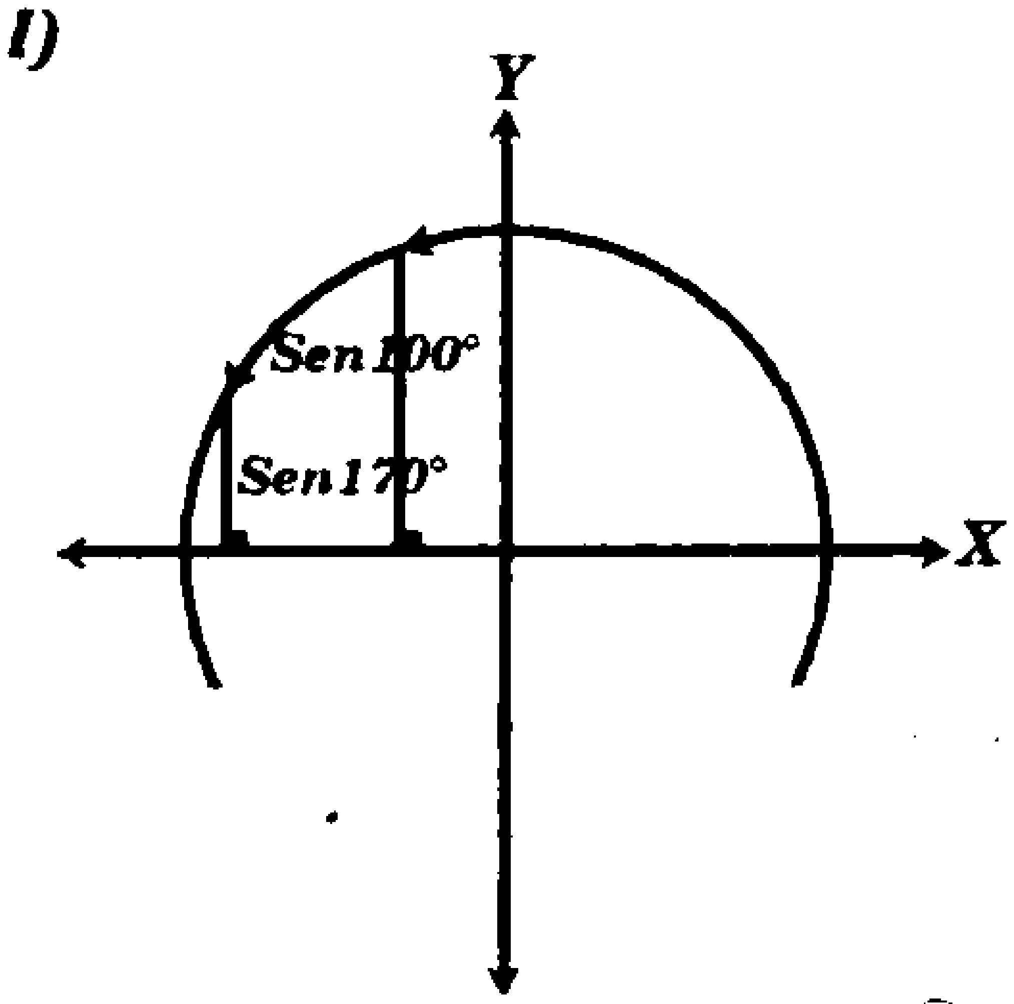
A) VFV B) FFV C) VVV
D) FVV E) VVF

RESOLUCIÓN :

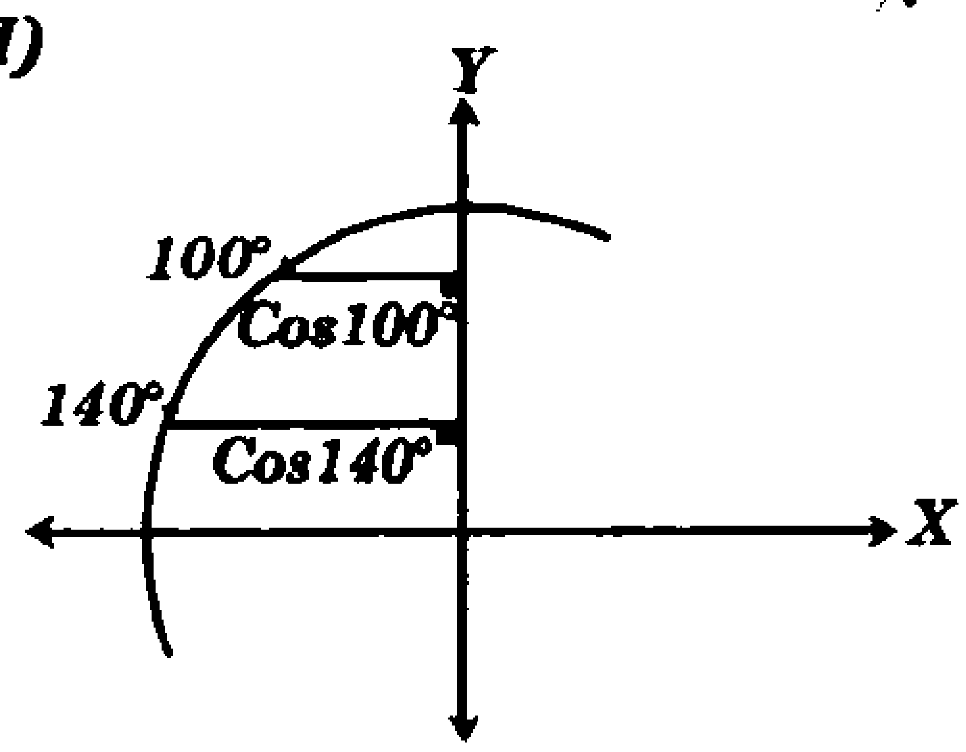
* Cada caso lo representamos en una ***C.T.*** :

Note que : ***sen100° > sen170°***

I)



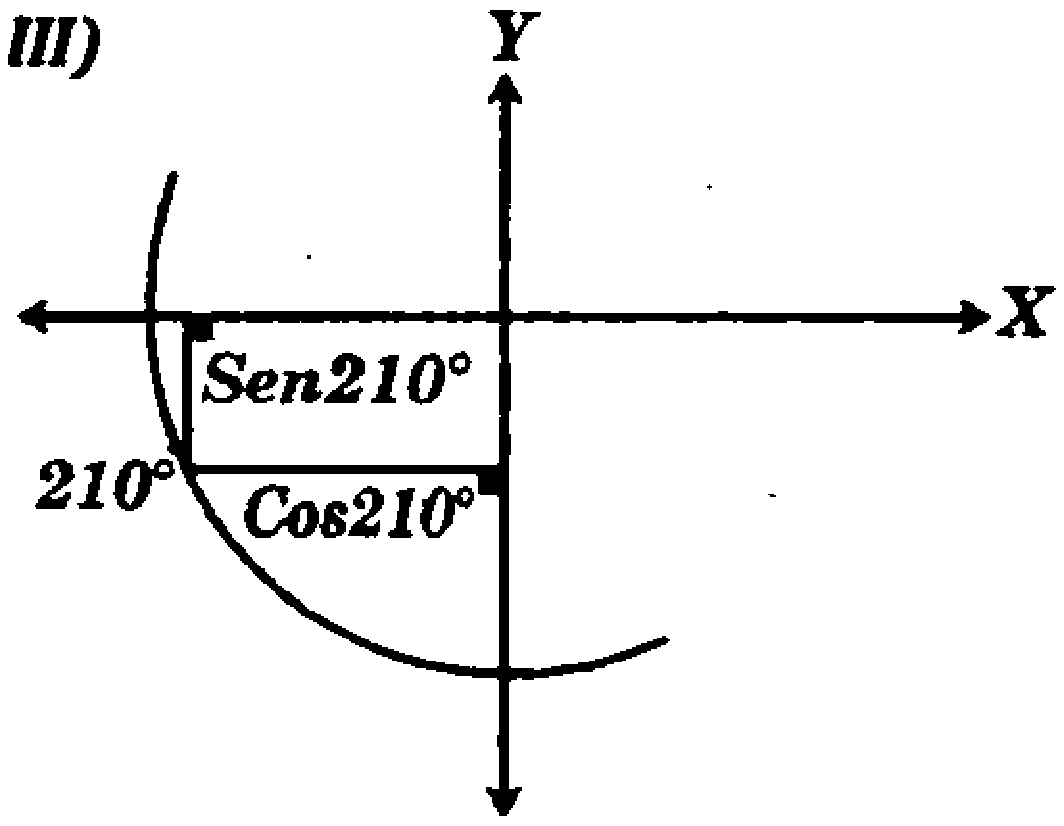
II)



NOTESE QUE :

cos100° y ***cos140° (-)*** pero ***cos140°*** es más negativo , luego: ***cos100° > cos140°***

III)



NOTE QUE :

sen 210° y ***cos210° (–)***, pero ***cos210°*** es más negativo, luego: ***sen210° > cos210°***

Después de analizar cada caso:

I) V ***II) V*** ***III) F***

RPTA : "E"

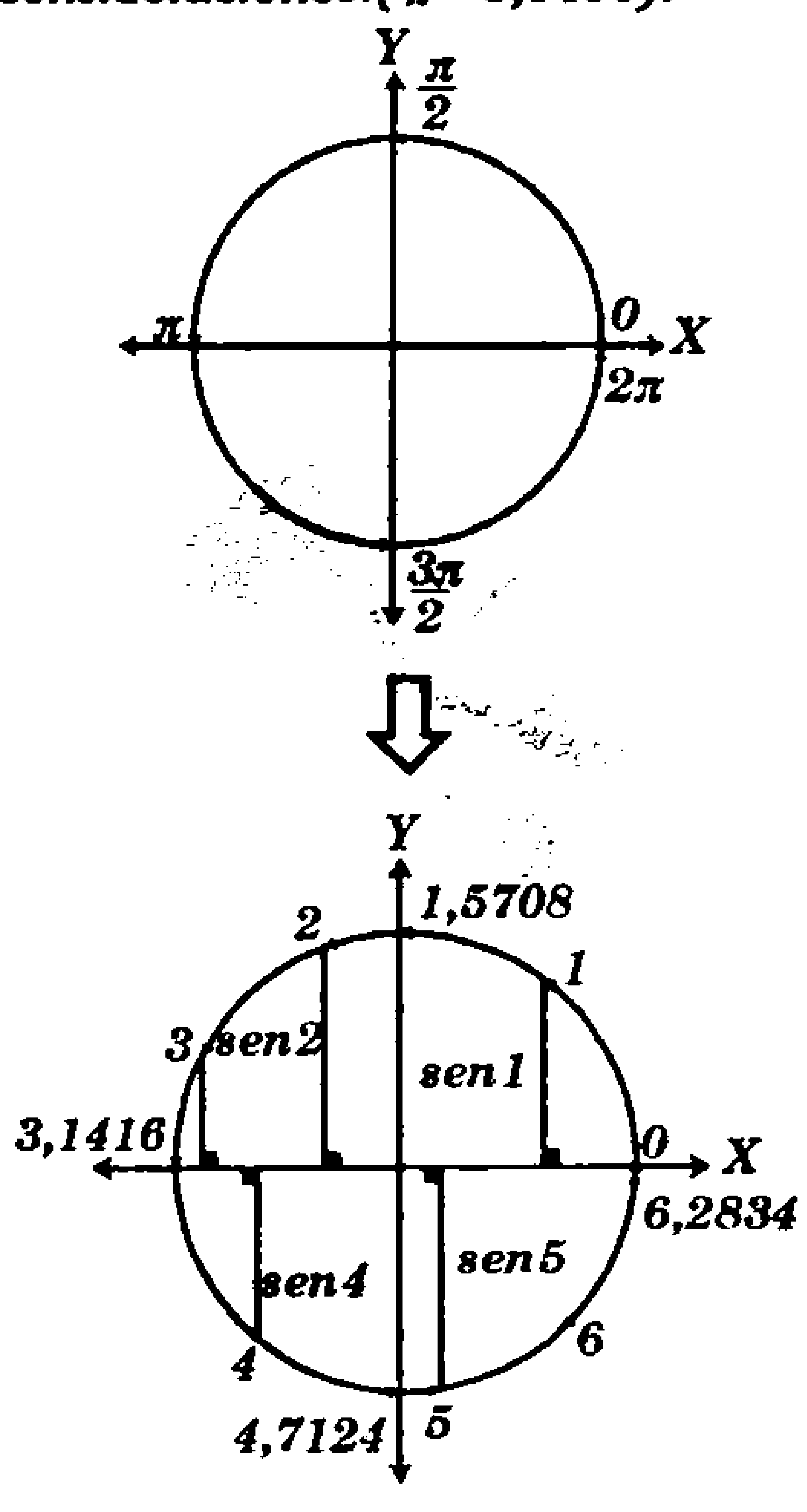
PROBLEMA 6 :

Señale la expresión de mayor valor en:

A) sen1 *B) sen2* *C) sen3*
D) sen4 *E) sen5*

RESOLUCIÓN :

* En este caso, no vamos a ubicar al arco expresados en unidades angulares sino como números reales . En este caso se usa ***C.T.*** con las siguientes consideraciones:***(π =3,1416).***

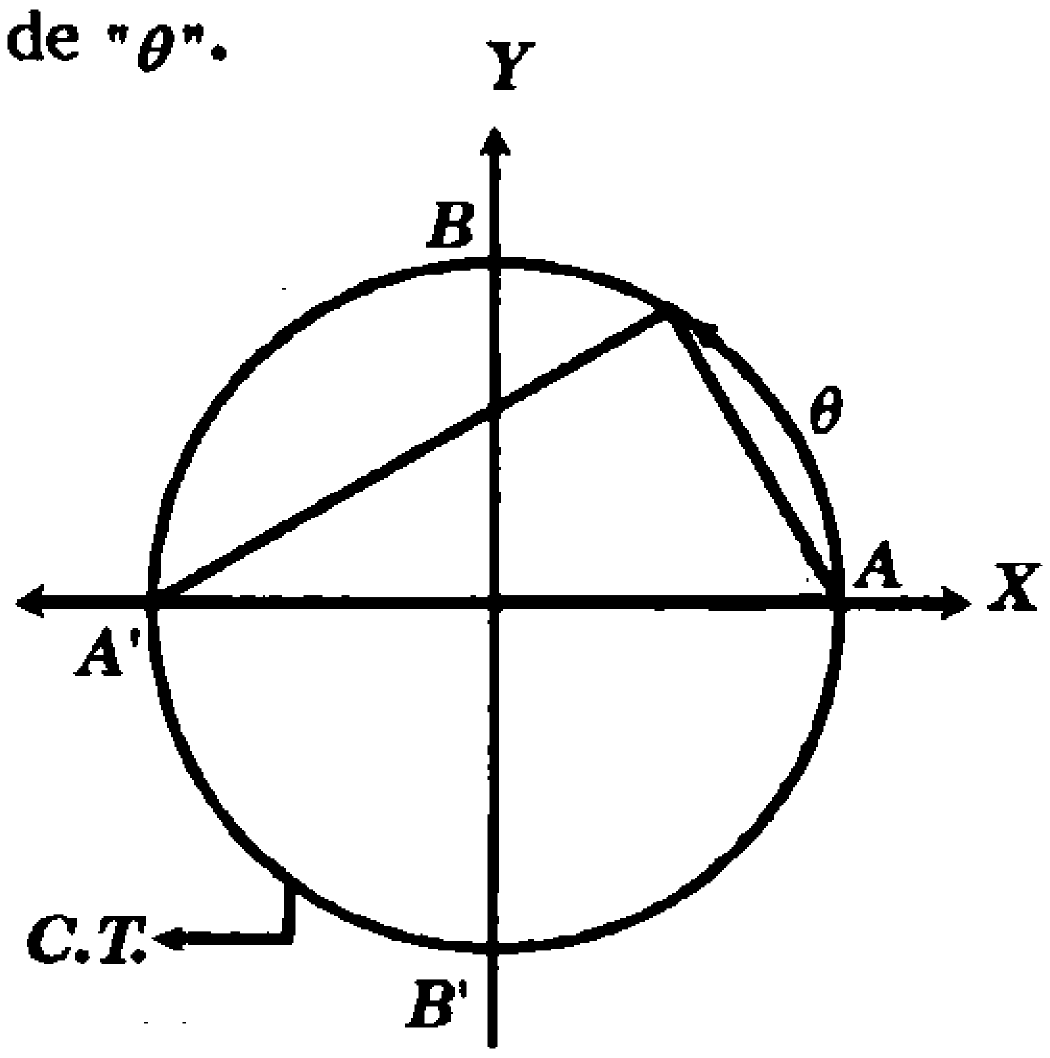


* Del gráfico, se puede notar que el valor mayor es : ***sen2***

RPTA : "B"

PROBLEMA 7 :

En la ***C.T.*** mostrada, hallar el área de la región sombreada en función de "θ".

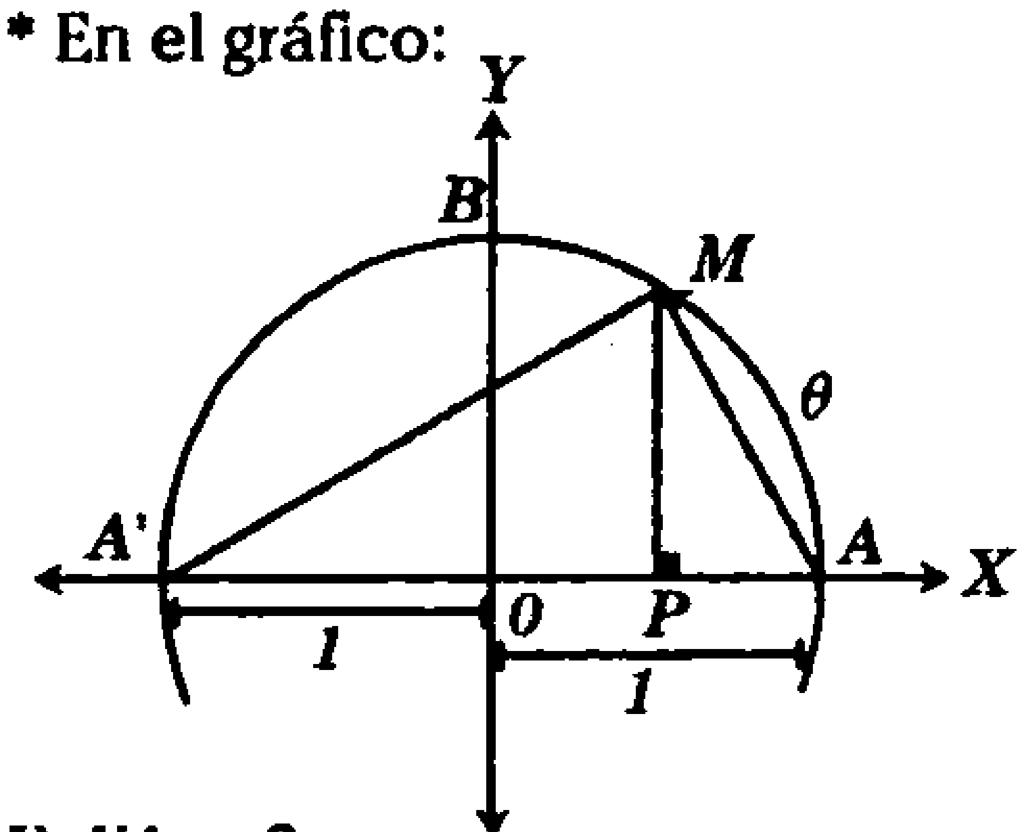


A) sen θ *B) cos θ* *C)* $\frac{1}{2}$ *sen θ*
D) $\frac{1}{2}$*cos θ* *E)2sen θ*

RESOLUCIÓN :

*En este tipo de problemas, se usaran líneas trigonométricas para determinar lo pedido; por ello es necesario aplicarle valor absoluto a la ***L.T.*** usada, para garantizar el signo positivo del segmento utilizado.

* En el gráfico:



I) A'A = 2

II)

$$S=\frac{\overline{A'A}\times\overline{MP}}{2}\ ;\ MP=\underbrace{|sen\theta|}_{+}\Rightarrow MP=sen\theta$$

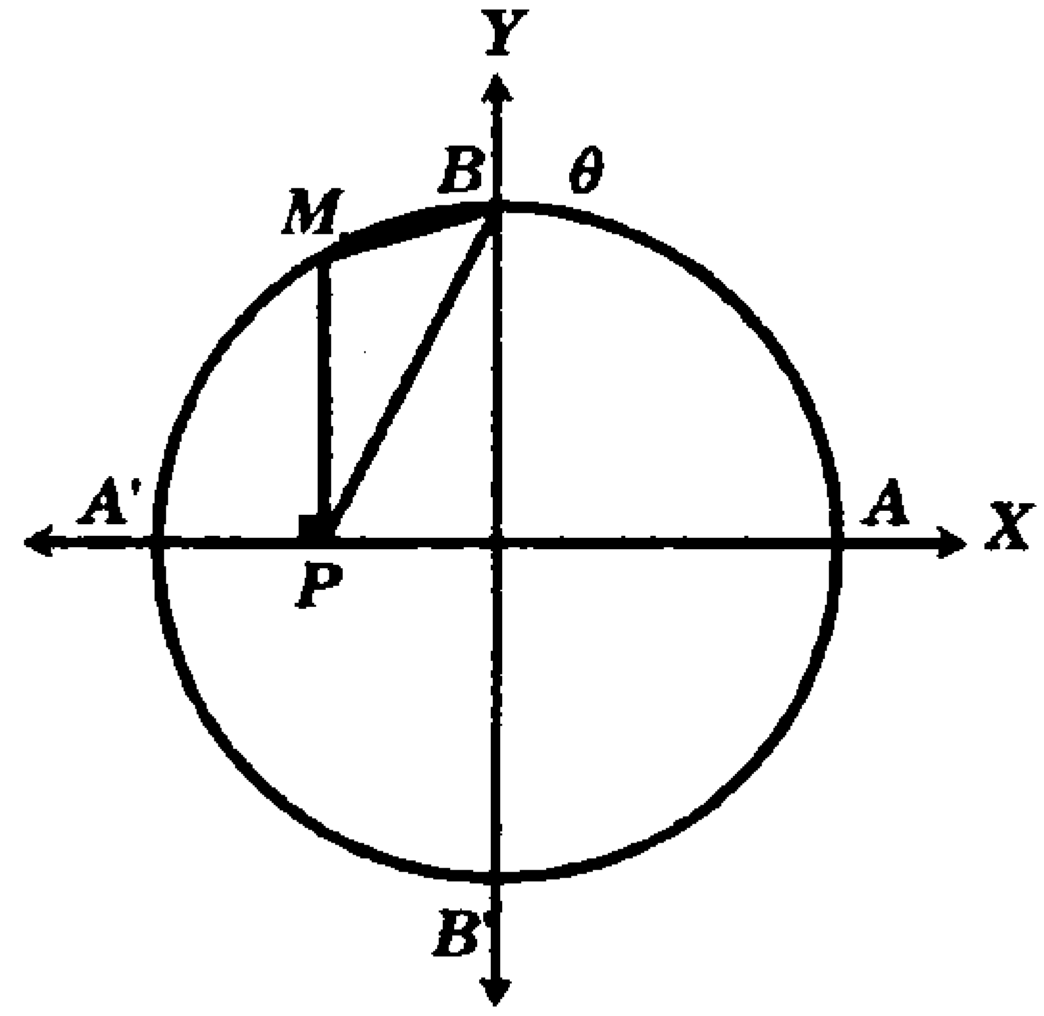
Reemplazando:

$$S=\frac{2\,sen\theta}{2}\Rightarrow S=sen\theta$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 :

En la ***C.T.*** mostrada, hallar el área de la región sombreada , en función de "θ"

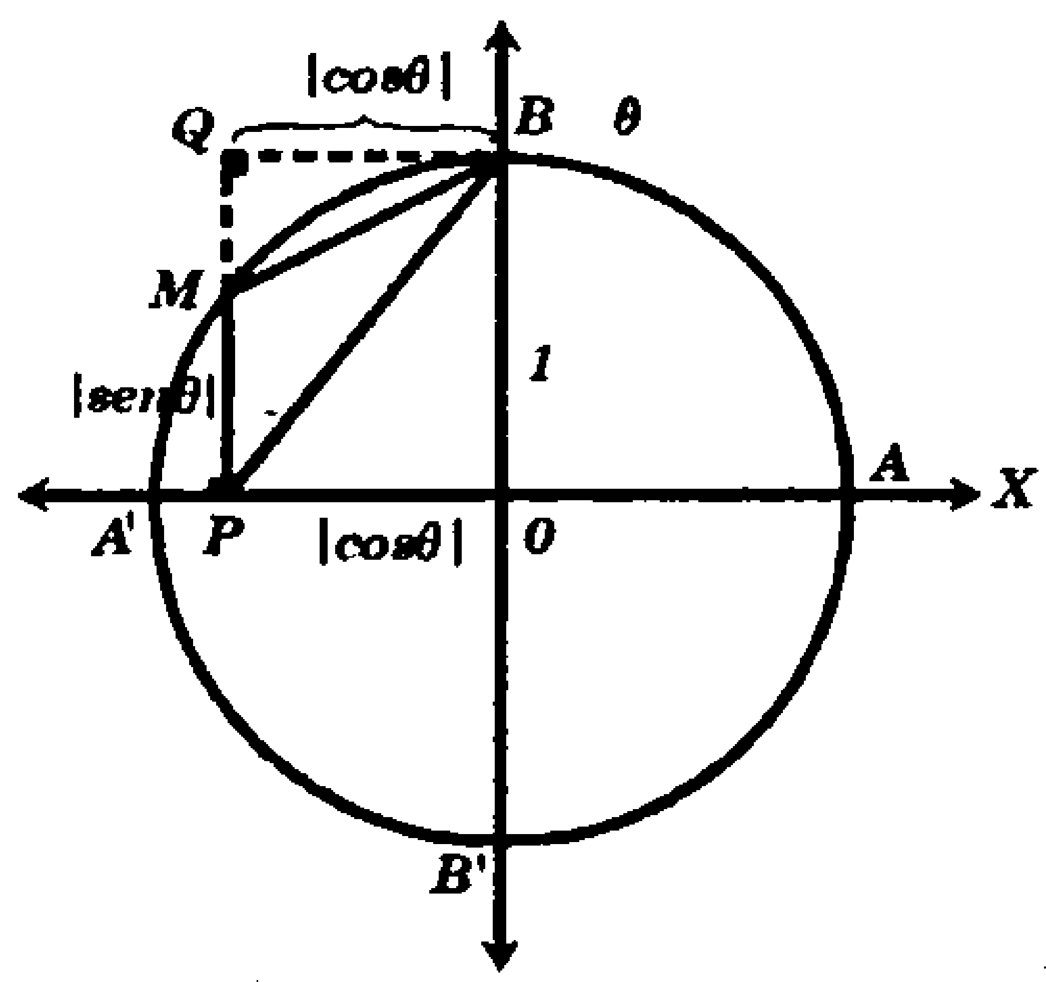


A) $\frac{1}{2}sen\theta(1-cos\theta)$ *B)* $\frac{1}{2}sen\theta(1+cos\theta)$
C) $\frac{1}{2}cos\theta(1-sen\theta)$ *D)* $-\frac{1}{2}cos\theta(1-sen\theta)$
E) $-\frac{1}{2}sen\theta cos\theta$

RESOLUCIÓN :

* Calculando los elementos necesarios , tenemos:

$$S=\frac{\overline{MP}\times\overline{BQ}}{2}=\frac{\overline{MP}\times\overline{OP}}{2}$$



* ***NOTE QUE :***

$$MP=\underbrace{|sen\theta|}_{(+)}\Rightarrow MP=sen\theta$$

$$OP=\underbrace{|cos\theta|}_{(-)}\Rightarrow OP=-cos\theta$$

* Luego:

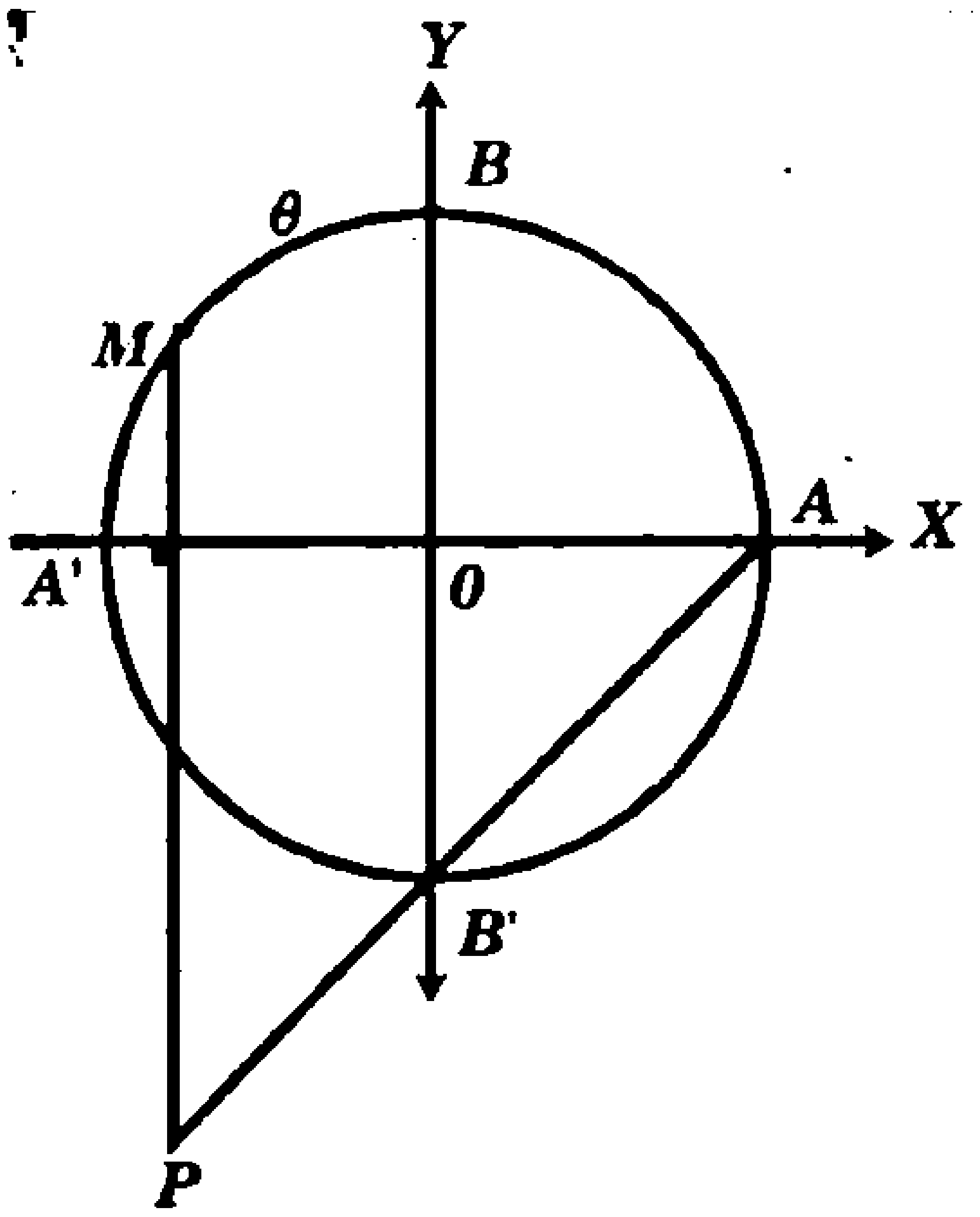
$$S=\frac{sen\theta(-cos\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow S=-\frac{1}{2}\ sen\theta cos\theta$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 9 :

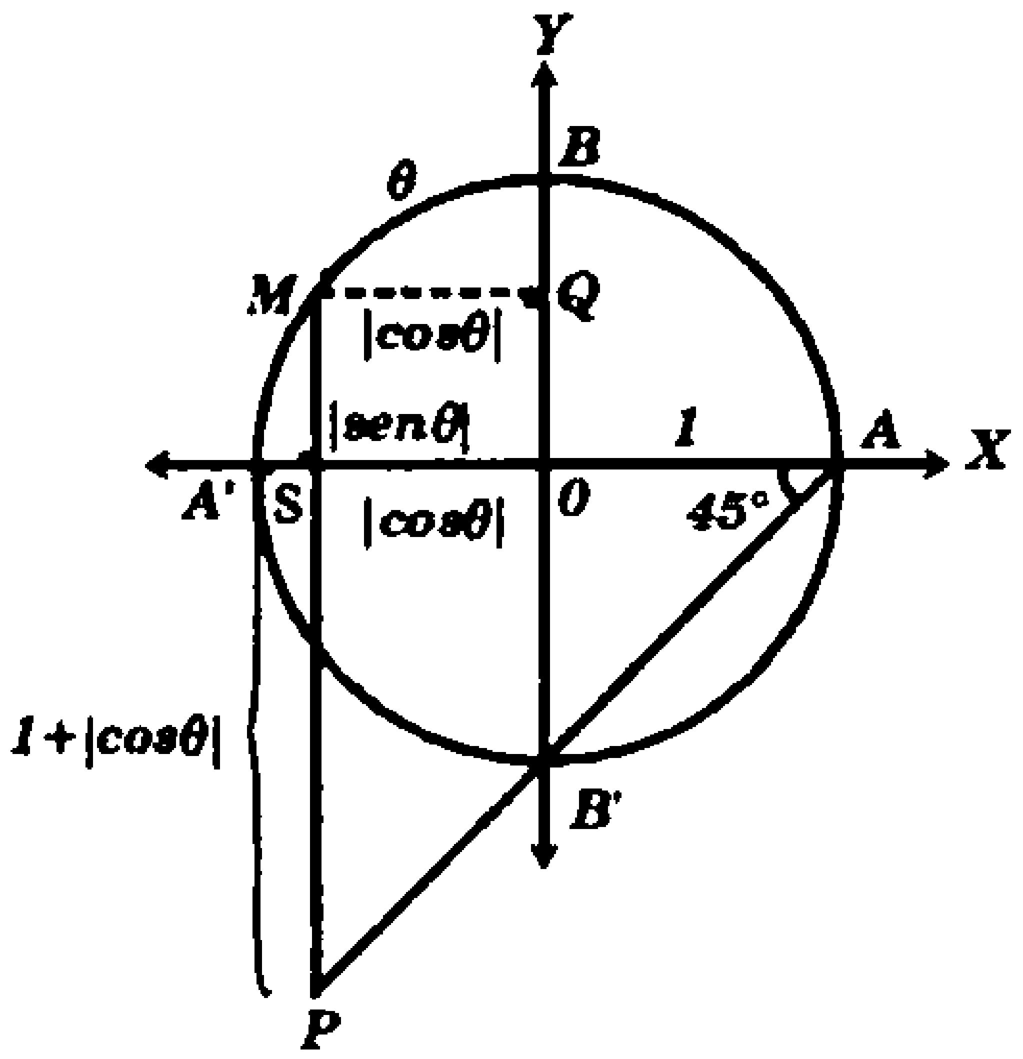
En la ***C.T.*** mostrada, hallar "***MP***" en función de "θ".



A) $1+sen\,\theta+\cos\theta$ B) $1-sen\,\theta+\cos\theta$
C) $1+sen\,\theta-\cos\theta$ D) $1-sen\,\theta-\cos\theta$
E) $sen\,\theta-\cos\theta$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico , tenemos que:



I) $OA = OB' \Rightarrow \measuredangle OAB' = 45°$

II) $MQ=OS=\underbrace{|\cos\theta|}_{(-)}=-\cos\theta$

III) $\triangle PSA : AS=SP=1+|\cos\theta|$

$SP=1-\cos\theta$

IV) $MP=MS+SP$

$MP=\underbrace{|sen\theta|}_{(+)}+1-\cos\theta$

$MP=sen\theta+1-\cos\theta$

$\Rightarrow MP=1+sen\theta-\cos\theta$

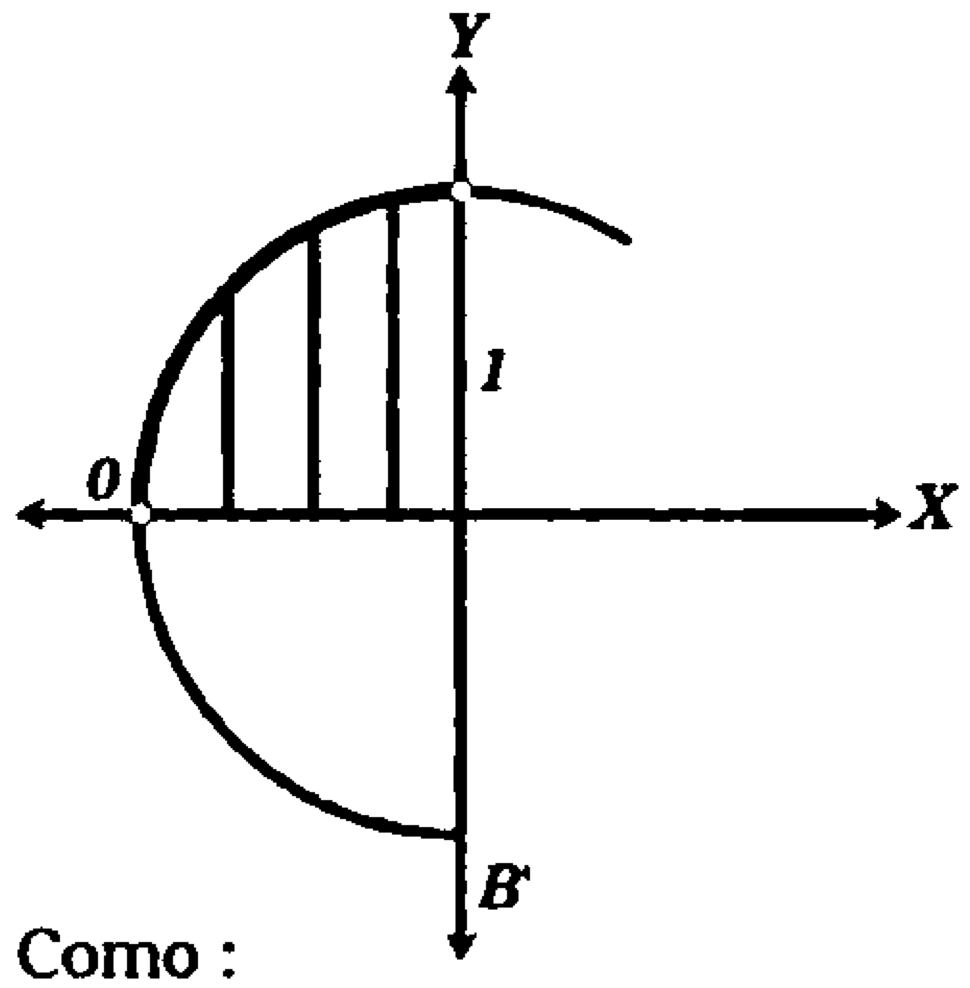
RPTA : "C"

PROBLEMA 10 :

Sabiendo que : $\theta\in IIC$; señale la variación de: $L = 3sen\,\theta -1$

A) $<0;3>$ B) $<-1;3>$ C) $<-1;2>$
D) $<0;2>$ E) $<-1;1>$

RESOLUCIÓN :



* Como :

$\theta\in IIC \Rightarrow 0 < sen\theta < 1$

$0 < 3sen\,\theta < 3$

$\Rightarrow 0-1<\underbrace{3sen\theta-1}_{L}<3-1$

$\Rightarrow -1 < L < 2$

RPTA : "C"

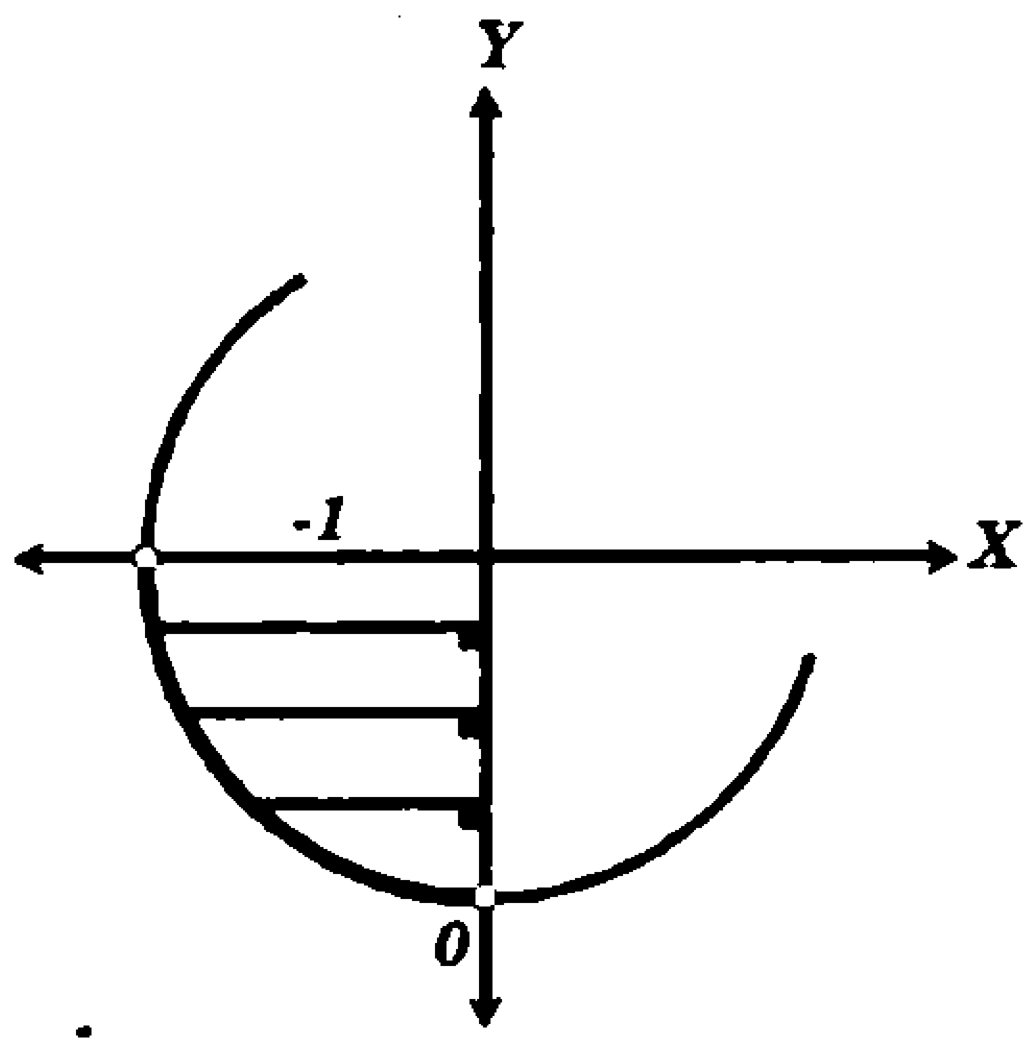
PROBLEMA 11 :

Sabiendo que : $\theta\in IIIC$; señale la variación de:

$$M = 2-3\cos\theta$$

A) $< 2;5>$ B) $< 1;3>$ C) $< 1;5>$
D) $< 3;4>$ E) $< 3;5>$

RESOLUCIÓN :



* Como : $\theta\in IIIC \Rightarrow -1<\cos\theta<0$

$(-3)(-1)>-3\cos\theta>-3(0)$

$2+3>\underbrace{2-3\cos\theta}_{M}>2+0$

$5>M>2 \Rightarrow 2< M < 5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 12 :

Sabiendo que : $\frac{\pi}{6}\le\alpha<\pi$; señale la variación de :

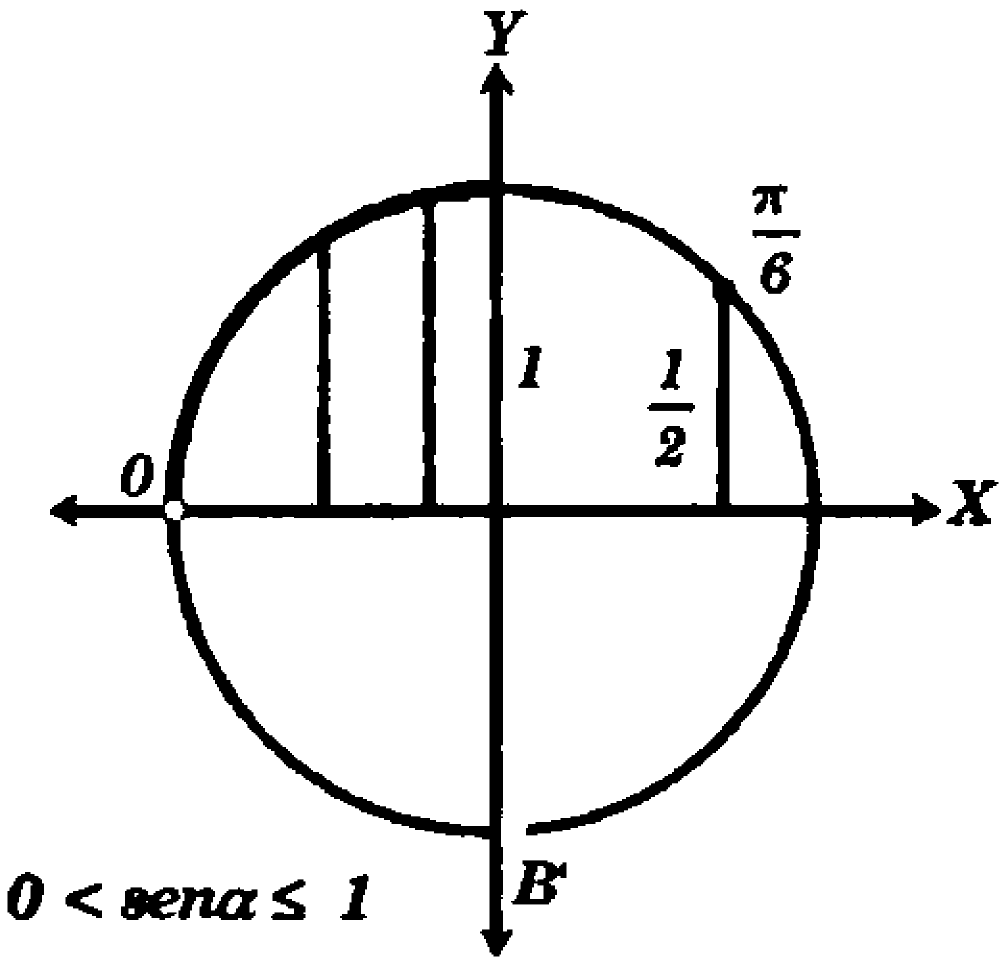
$$L=4sen\,\alpha+1$$

A) $[1;5]$ B) $<1;5]$ C) $<1;5>$
D) $[2;5]$ E) $<2;5]$

RESOLUCIÓN :

*Trabajando en el intervalo correspondiente a "α", tenemos:

$\begin{cases} mayor\ valor\ (sen\alpha)=1 \\ menor\ valor\ (sen\alpha)=0 \end{cases}$



$0 < sen\alpha \le 1$

$\Rightarrow 0 < 4sen\alpha \le 4$

$\Rightarrow 0+1 < \underbrace{4sen\alpha+1}_{L} \le 4+1$

$\Rightarrow 1 < L \le 5 \Rightarrow L\in <1;5]$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 :

Sume el máximo y el mínimo valor de :

$$L=3Senx-2; x\in R$$

A) -2 B) -3 C) 2 D) 3 E) -4

RESOLUCIÓN :

* En este caso como $x\in R$:

$-1 \le senx \le 1 \Rightarrow -3<3senx<3$

$-3-2\le\underbrace{3senx-2}_{L}\le 3-2$

$\Rightarrow -5\le L\le 1\begin{cases} L_{máx}=1 \\ L_{mín}=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow L_{máx}+L_{mín}=-4$

RPTA : "E"

PROBLEMA 14 :

Sume el máximo y el mínimo valor de :

$$L=sen^2x+senx+1; x\in R$$

A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{7}{4}$ C) 2 D) 7 E) $\frac{15}{4}$

RESOLUCIÓN :

*En este caso , lo más recomendable es completar cuadrados en la expresión :

$L=\underbrace{sen^2x+senx}_{\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}+1 \Rightarrow L=\frac{3}{4}+\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2; x\in R$

* 1ER. MÉTODO :

$x\in R \Rightarrow -1<senx<1 \Rightarrow -1+\frac{1}{2}<senx+\frac{1}{2}<1+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<sen+\frac{1}{2}<\frac{3}{2} \Rightarrow 0<\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{9}{4}$

$\Rightarrow \frac{3}{4}<\underbrace{\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}_{L}<\frac{9}{4}+\frac{3}{4}$

$L \Rightarrow \frac{3}{4}\le L\le 3 \begin{cases} máx=3 \\ mín=\frac{3}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow máx+mín=\frac{15}{4}$

* 2DO MÉTODO :

• Como:

$-1\le senx\le 1$ y $L=\frac{3}{4}+\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2$

I) $\underset{máx}{L}=\frac{3}{4}+\underbrace{\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2}_{máx\Rightarrow senx=1} \Rightarrow L_{máx}=\frac{3}{4}+\frac{9}{4}=3$

II) $\underset{mín}{L}=\frac{3}{4}+\underbrace{\left(senx+\frac{1}{2}\right)^2}_{mín=0\Rightarrow senx=-\frac{1}{2}} \Rightarrow L_{mín}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow L_{máx}+L_{mín}=\frac{15}{4}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Sume el máximo y mínimo valor de:

$K=3sen\alpha+2cos\beta-sen\phi$;

Si : "α" , "β" y "ϕ" son independientes .

A) 2 B) 12 C) 6 D) –1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* En la expresión:

$K=3sen\alpha+2cos\beta-sen\phi$

I) Si $K_{máx}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} sen\alpha: máx=1 \\ cos\beta: máx=1 \\ sen\phi: mín=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_{máx}= \\ 3(1)+2(1)-(-1) \end{array}$

$\Rightarrow K_{máx}=6$

II) Si : $K_{mín}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} sen\alpha: mín=-1 \\ cos\beta: mín=-1 \\ sen\phi: máx=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_{mín}= \\ 3(-1)+2(-1)-1 \end{array}$

$\Rightarrow K_{mín}=-6 \Rightarrow K_{máx}+K_{mín}=0$

RPTA : "E"

PROBLEMA 16 :

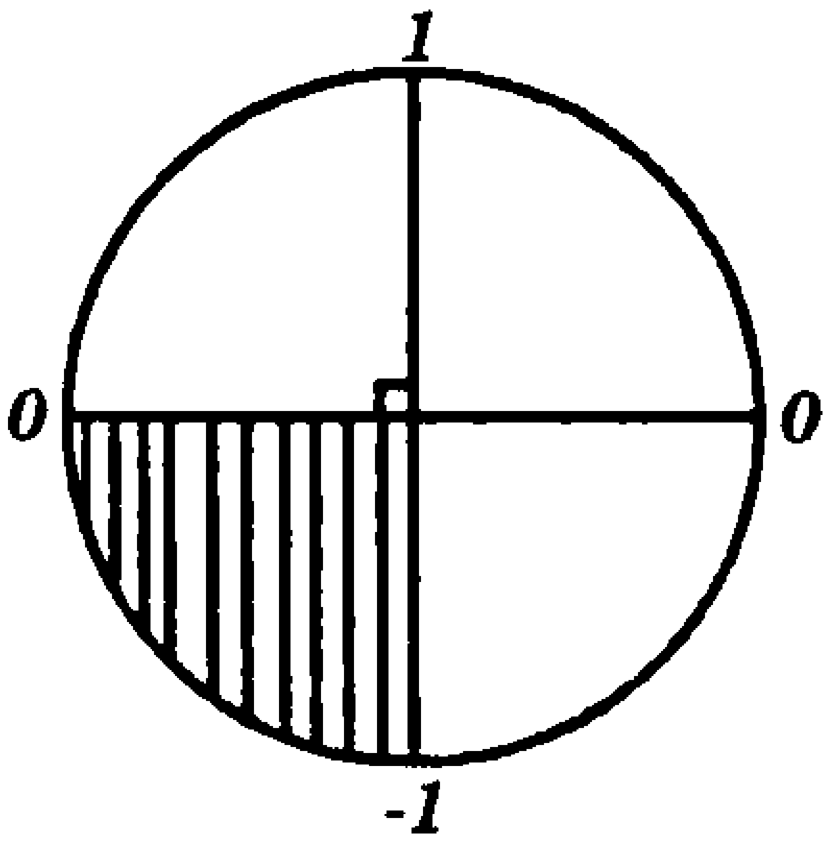
Si : $sen\theta=\frac{2a-1}{3} \wedge \theta\in IIIC$

¿Entre qué límites está "α"?

A) $<-1;0>$ B) $<-\frac{1}{2};1>$ C) $<-1;1>$ D) $<-1;\frac{1}{2}>$ E) $<\frac{1}{2};\frac{1}{3}>$

RESOLUCIÓN :

Variación del "*Sen*"



* Si $\theta\in III \Rightarrow -1<Sen\theta<0$

* Pero por dato: $Sen\ \theta=\frac{2a-1}{3}$

* Reemplazamos: $-1<\frac{2a-1}{3}<0$

$-3<2a-1<0 \Rightarrow -2<2a<1$

$\Rightarrow -1<a<\frac{1}{2}$

* Finalmente: $a\in<-1;\frac{1}{2}>$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 :

Indicar con *(V)* si es verdadera y con *(F)* si es falso las siguientes proposiciones:

I) Sen 1°> Sen 1

II) Sen 1°> Cos 1

III) Sen 1°= Sen 1

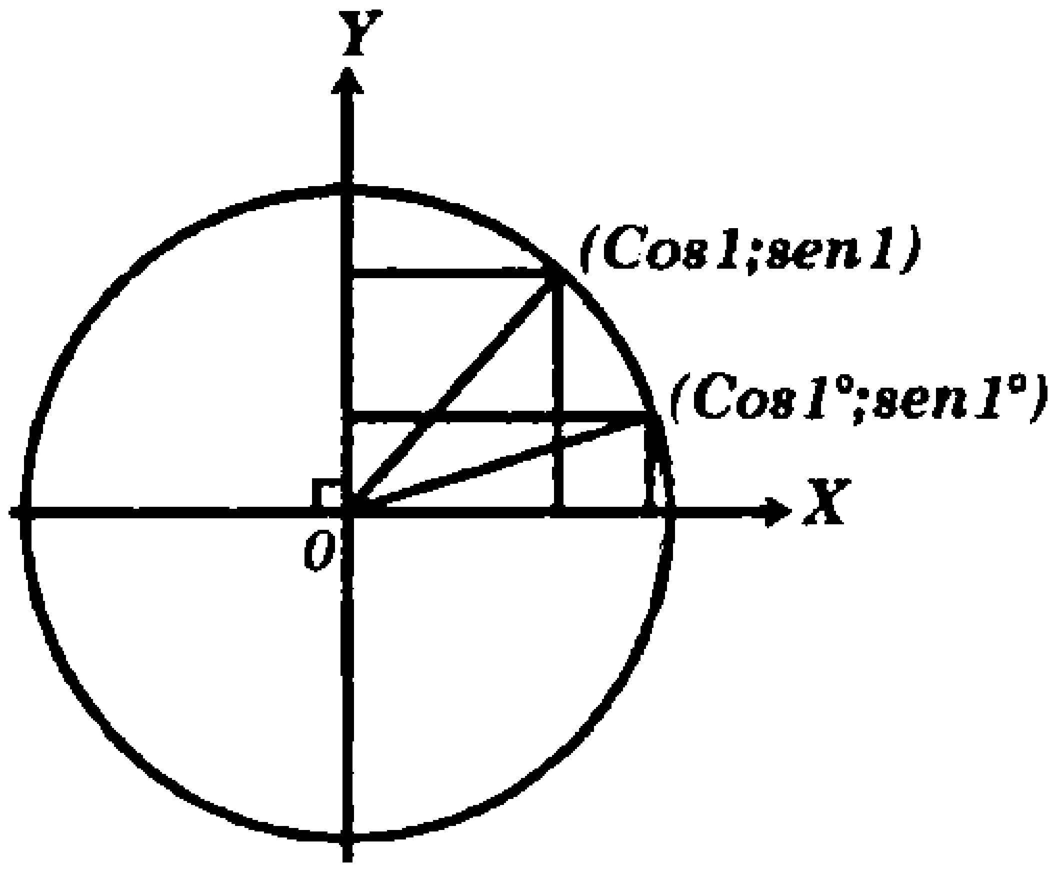
A) VFF B) FFF C) VVF D) FVF E) FVV

RESOLUCIÓN :

* Recordemos :

$1=1\ rad\approx 57°17'45'$

Graficamos la "*C.T.*"



* observando el gráfico afirmamos:

I)Sen 1°> Sen1(Falso)

II)Cos 1° > Cos1(Verdadero)

III)Sen 1°= Sen1(Falso)

RPTA : "D"

PROBLEMA 18 :

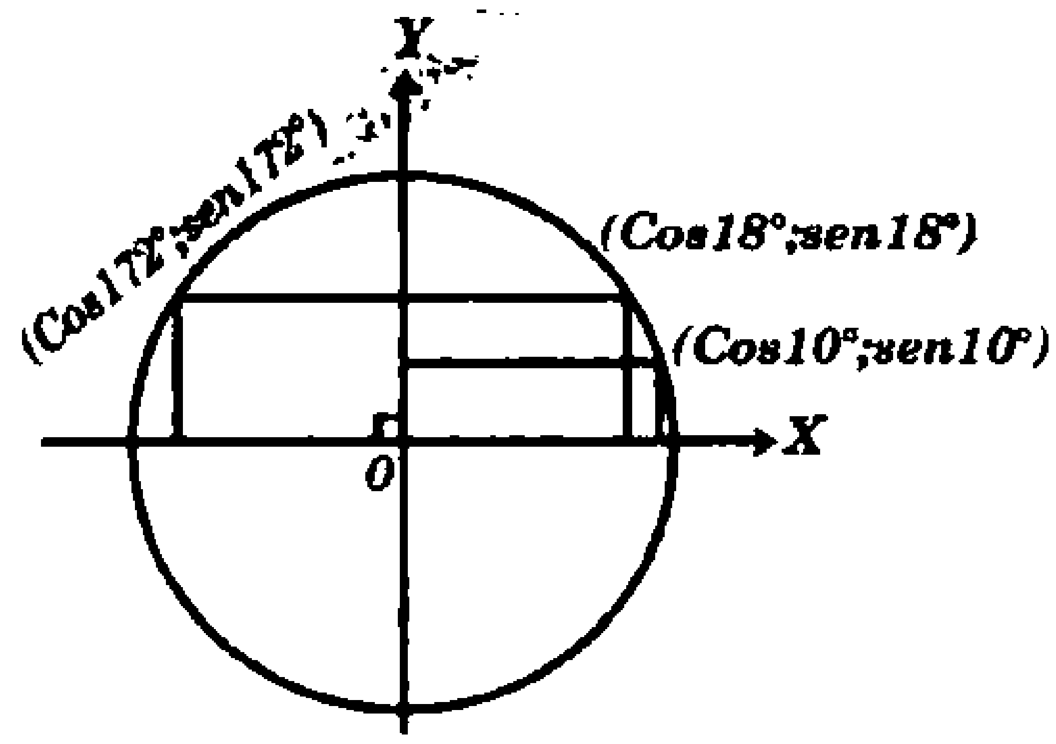
Ordenar de mayor a menor:

Sen 10°, Cos18°, Sen172°

A) Sen 10° >Cos 18° >Sen 172°
B) Sen 172° > Sen 10° >Cos 18°
C) Sen 10° > Sen 172°>Cos18°
D) Cos 18° > Sen 10° > Sen 172°
E) Cos 18° > Sen 172° > Sen 10°

RESOLUCIÓN :

* Graficamos los datos de la circunferencia trigonométrica :



*Nos piden ordenar de mayor a menor:

Sen 10°; Cos 18°; Sen 172°

* Observando el gráfico ordenamos:

Cos 18°>Sen 172° > Sen 10°

RPTA : "E"

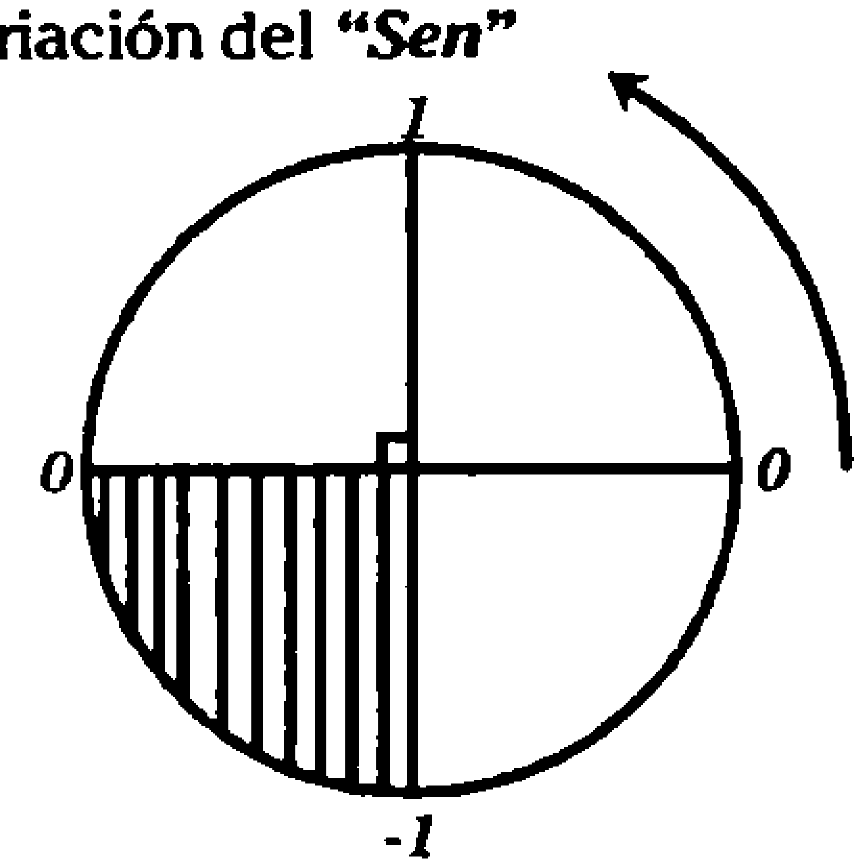
PROBLEMA 19 :

En qué cuadrante se cumple que mientras el arco crece el seno decrece mientras el coseno crece.

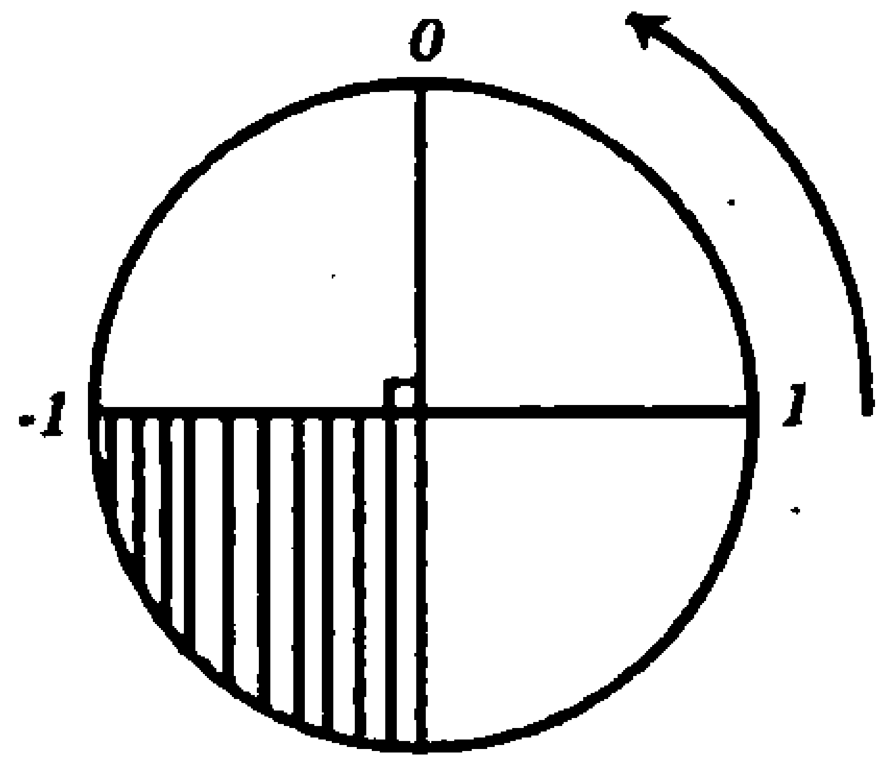
A)I B)II C)III D)IV E)N.A.

RESOLUCIÓN :

Variación del "*Sen*"



Variación del "*Cos*"



* De los gráficos observamos que: El seno decrece y el coseno crece en el tercer cuadrante , cuando el arco crece.

RPTA : "C"

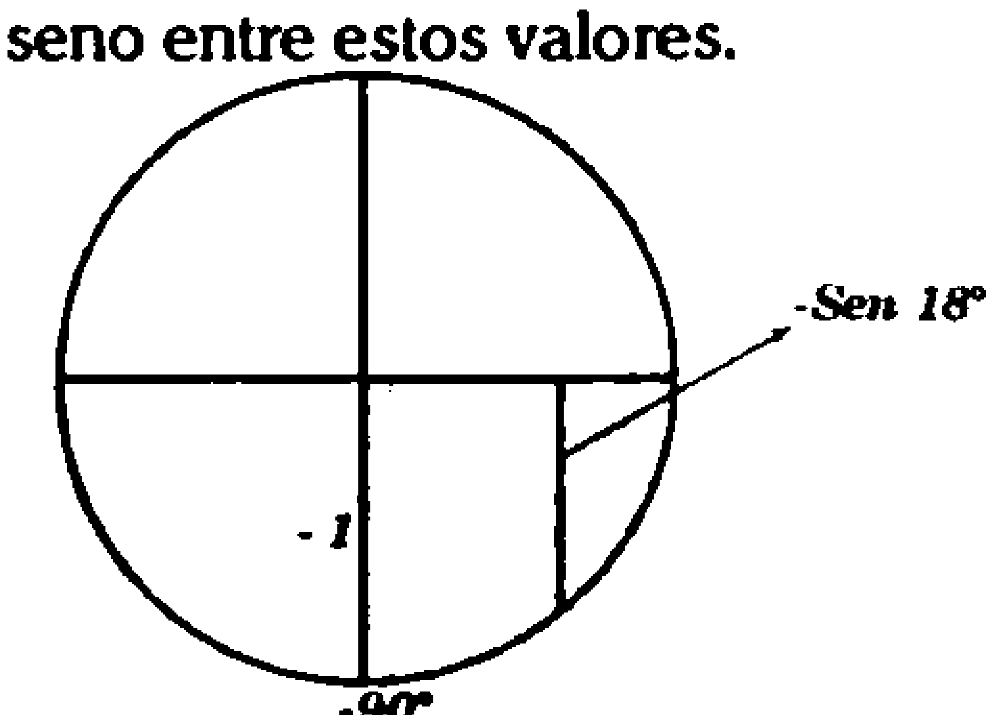
PROBLEMA 20 :

¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la función $f(x)=Sen(x-90°)$ en el intervalo $[0°;72°]$

A) $sen(-20°)$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$
D) $-0,55$ E) $-sen\ 18°$

RESOLUCIÓN :

* Datos : $0°<x<72°$
* Entonces : $0°-90°<x-90°<72°-90°$
* Analizamos cómo varía la función seno entre estos valores.

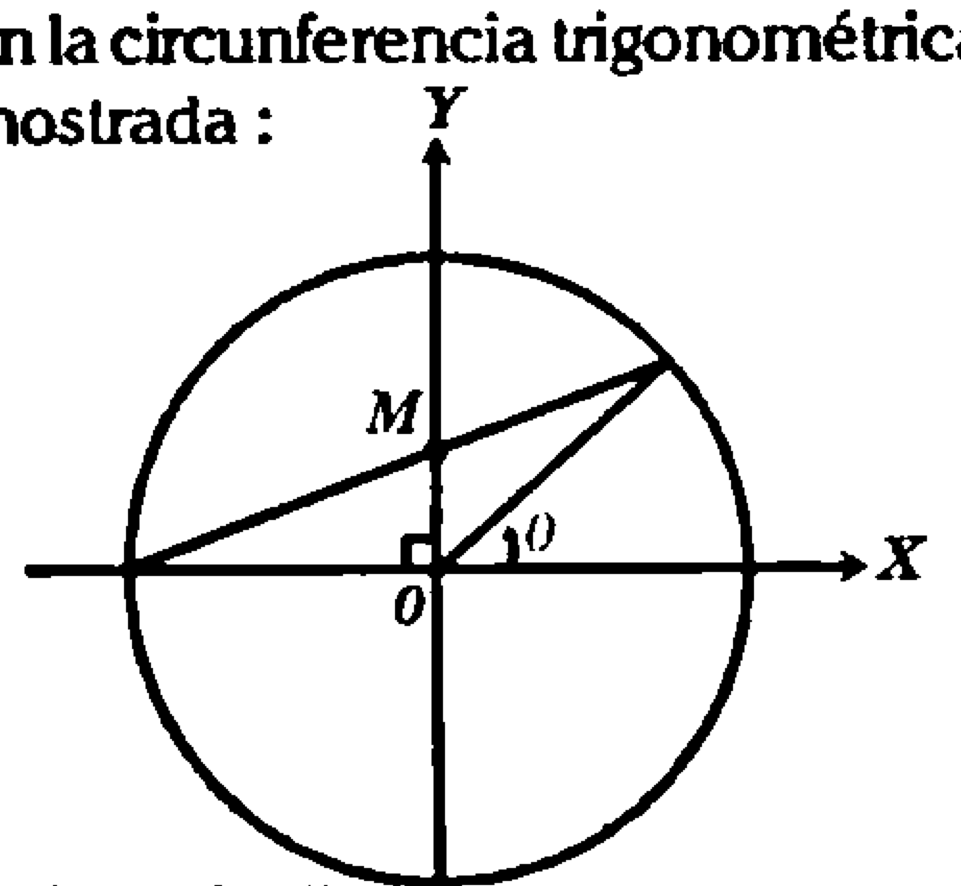


* Observamos que el mayor es $-sen18°$ y el menor valor es -1.

RPTA : "E"

PROBLEMA 21:

En la circunferencia trigonométrica mostrada :

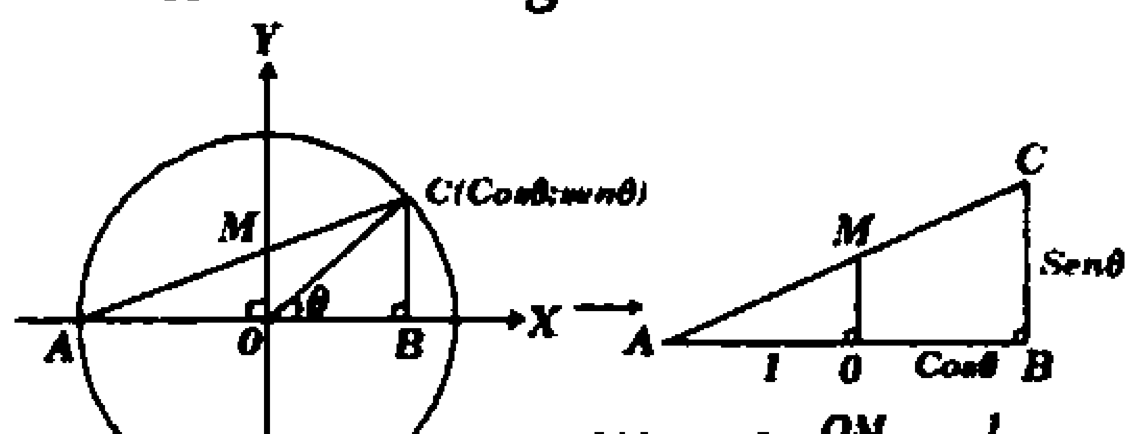


Hallar "*OM*" en términos de "θ"

A) $\frac{Sen\theta}{2}$ B) $\frac{Sen\theta}{1+Cos\theta}$ C) $\frac{Cos\theta}{1+Sen\theta}$
D) $Sen\theta\times Cos\theta$ E) $Sen\ \theta-Cos\theta$

RESOLUCIÓN :

Para hallar "*OM*" graficamos la circunferencia trigonométrica:



$\triangle AOM \sim \triangle ABC: \frac{OM}{sen\theta}=\frac{1}{1+cos\theta}$

$\Rightarrow$ *Finalmente:* $OM=\frac{Sen\ \theta}{1+Cos\theta}$

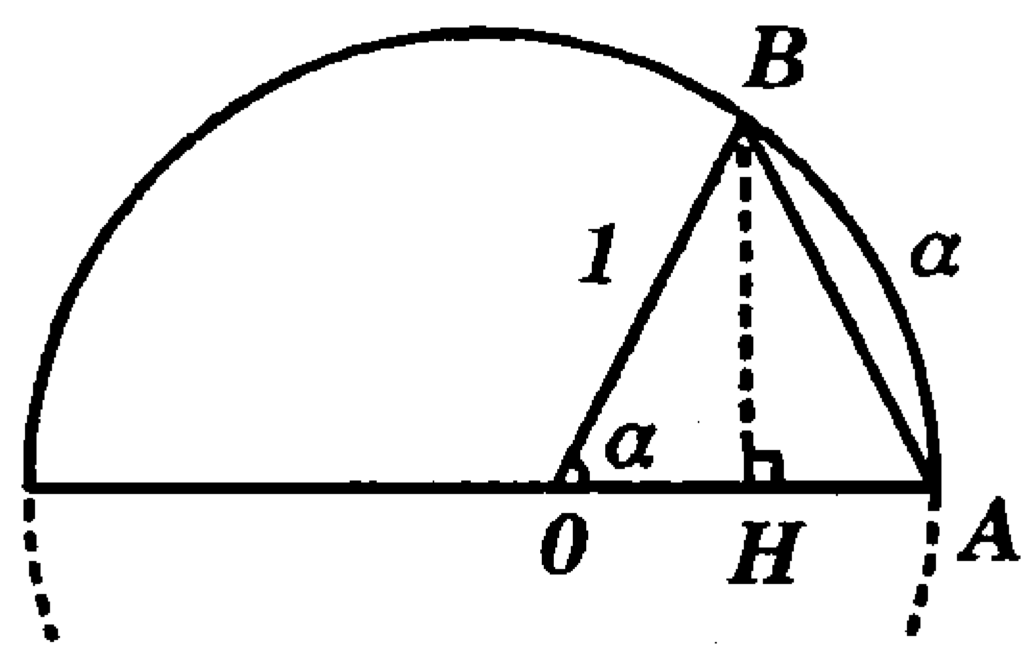
RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Se tiene un arco *AB* de longitud a, de una circunferencia de radio *1*. Hallar una expresión en términos de *a*, para la longitud de la cuerda $\overline{AB}$.

A) $\sqrt{2}\sqrt{1-Cos\alpha}$ B) $\sqrt{7}\sqrt{1-Cos\alpha}$ C) $\sqrt{2-Cos\ \alpha}$
D) $\sqrt{2-Sen\alpha}$ E) $\sqrt{2}\sqrt{1+Cos\alpha}$

RESOLUCIÓN :



* Como el radio de la circunferencia es *1*; entonces:

$$m\hat{AOB}=\alpha\ (radianes)$$

* Trazamos $\overline{BH}\perp\overline{OA}$
* ⊾*OHB*: Como la hipotenusa es igual a *1*; entonces:

$BH=Sen\,\alpha$ y $OH=Cos\,\alpha$

* Observar que : $HA=OA-OH$

$\Rightarrow HA=1-Cos\,\alpha$

* ⊾ *AHB* : aplicamos el teorema de Pitágoras:

$AB^2=HA^2+BH^2\Rightarrow AB^2$

$=(1-cos\alpha)^2+(sen\alpha)^2$

$AB^2=1-2cos\alpha+\underbrace{cos^2\alpha+sen^2\alpha}_{=1}$

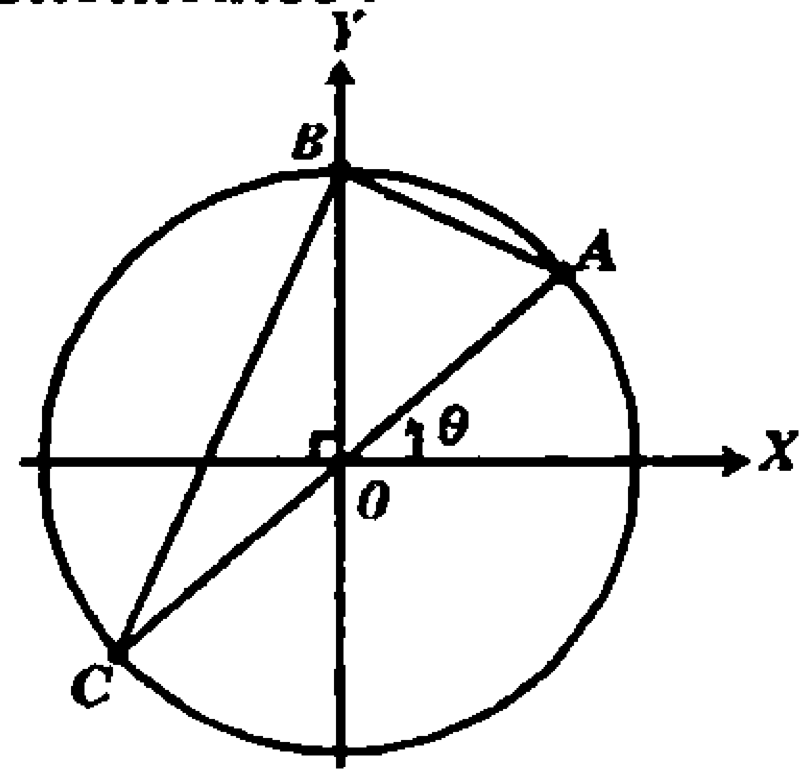
$=2-2cos\,\alpha$

$AB^2=2(1-cos\alpha)\Rightarrow AB=\sqrt{2}\sqrt{1-cos\alpha}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

Del siguiente círculo trigonométrico :

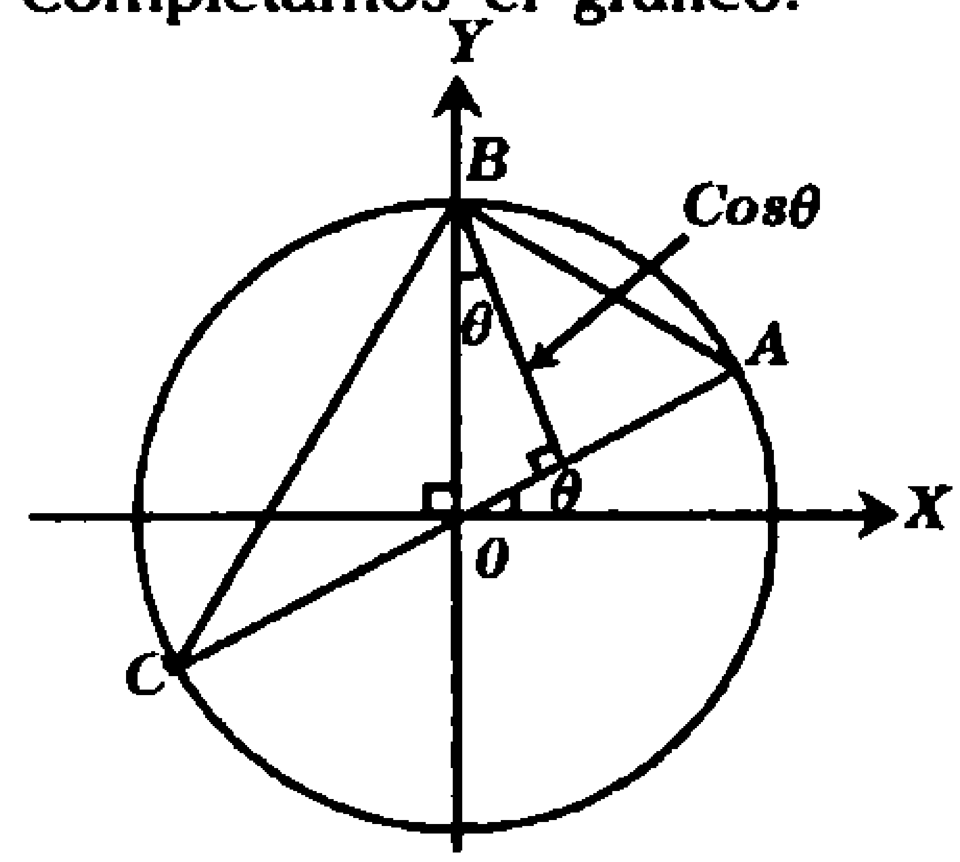


Calcular el área del triángulo *ABC*.

A) $\frac{Cos\ \theta}{2}$ B) $\frac{Sen\theta}{2}$ C) $Cos\theta$ D) $Sen\theta$ E) 1

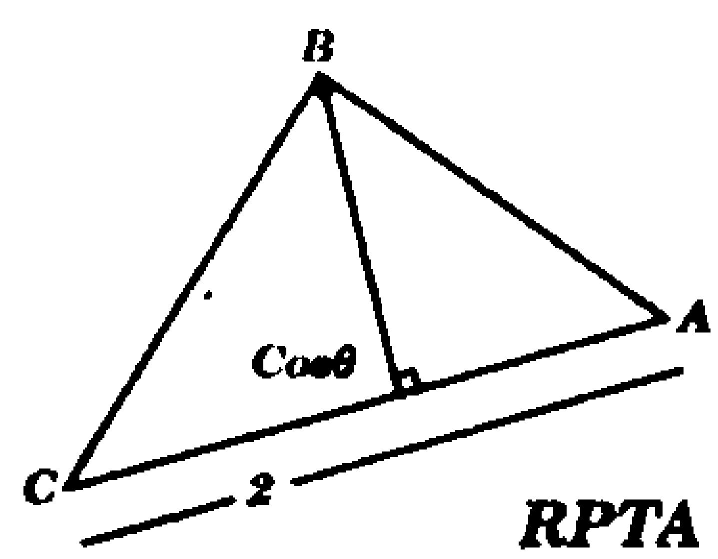
RESOLUCIÓN :

* Completamos el gráfico:



* Finalmente el área del triángulo *ABC* se calcula así:

$$A=\frac{2\times Cos\ \theta}{2}=Cos\theta$$

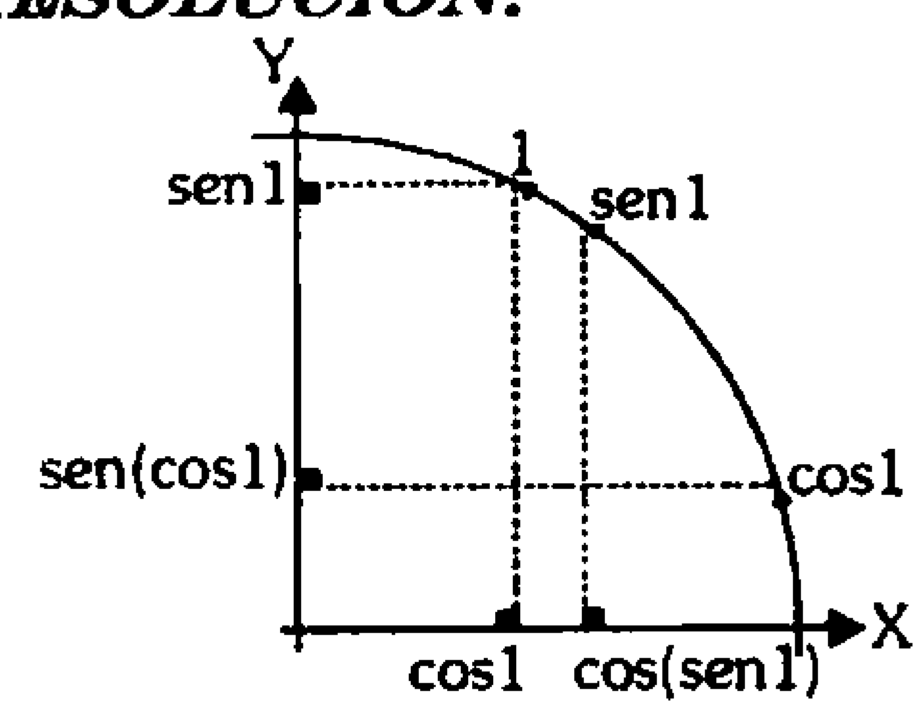


RPTA : "C"

PROBLEMA 24:

Demostrar que la expresión: $Sen(Cos1)<Cos(Sen1)$ es verdadera.

RESOLUCIÓN:

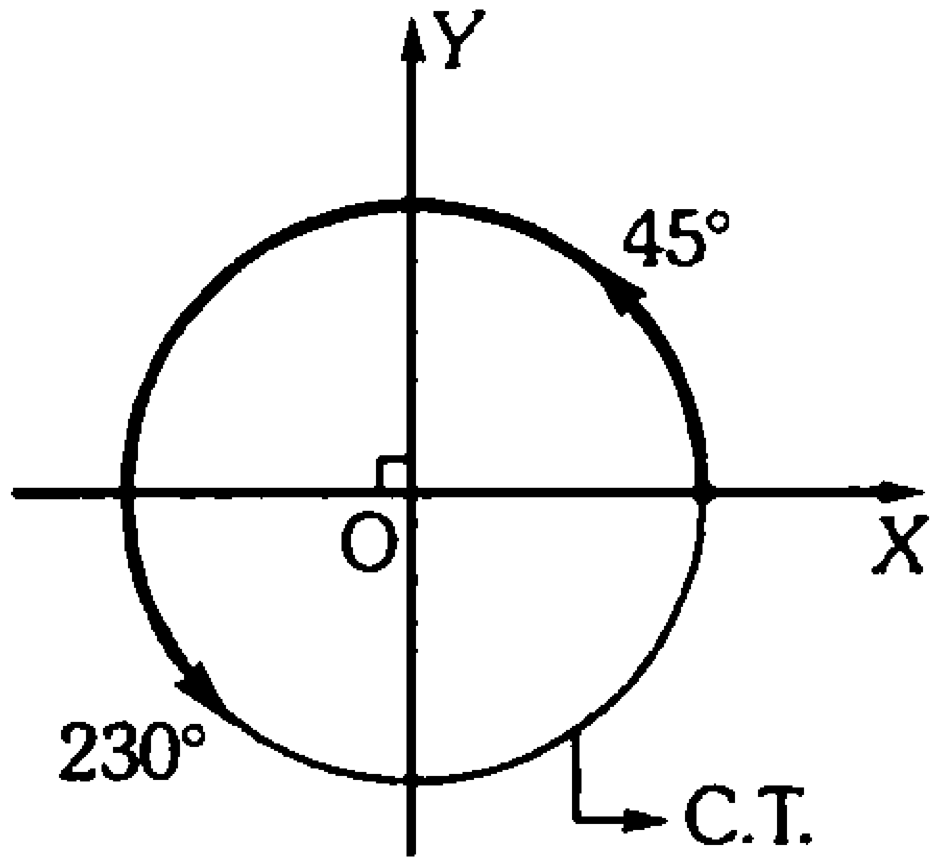


Por lo tanto :

$$Sen(Cos1) < Cos(Sen1)$$

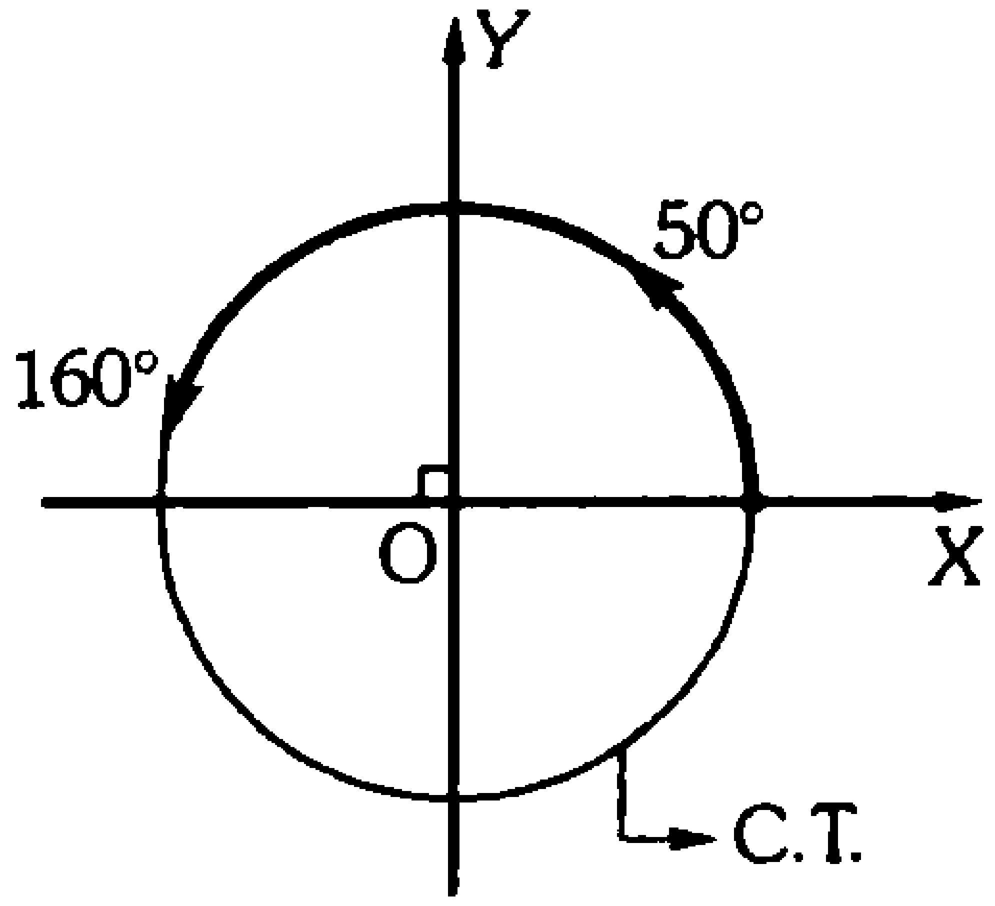
PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Trazar las líneas trigonométricas seno y coseno para los arcos mostrados.



RPTA.:..

02 En la C.T. mostrada indicar la alternativa correcta:



I) $sen50^o > sen160^o$

II) $cos50^o < cos160^o$

III) $sen50^o = sen160^o$

IV) $sen50^o < 0$

V) $cos160^o > 0$

RPTA.:..

03 Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I) $sen20^o > sen70^o$

II) $sen200^o > sen250^o$

RPTA.:..

04 En la C.T. ordenar de mayor a menor:

(a) $sen10^o$; (b) $sen80^o$; (c) $sen125^o$

RPTA.:..

05 Ordenar de mayor a menor:

$sen20^o$; $sen75^o$; $sen135^o$

RPTA.:..

06 Ordenar en forma decreciente:

$cos30^o$; $cos80^o$; $cos130^o$

RPTA.:..

07 Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I) $cos10^o > cos50^o$

II) $cos230^o < cos260^o$

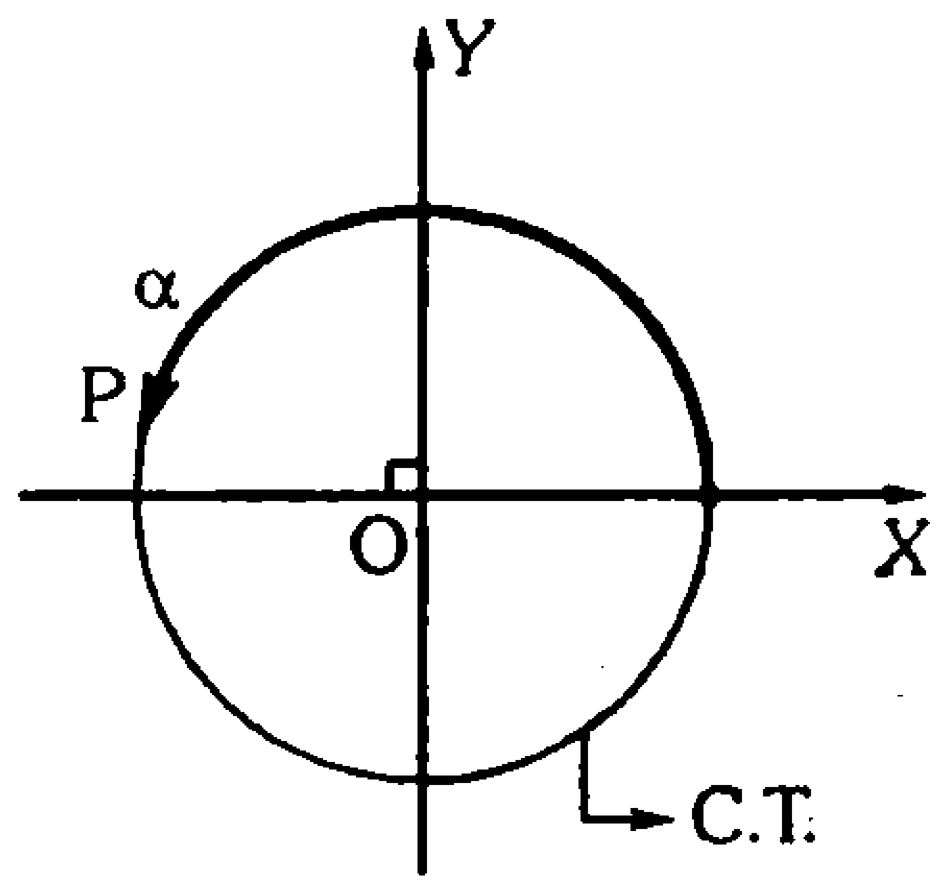
RPTA.:..

08 Ordenar en forma decreciente:

(a) $cos80^o$; (b) $cos130^o$; (c) $cos290^o$

RPTA.:..

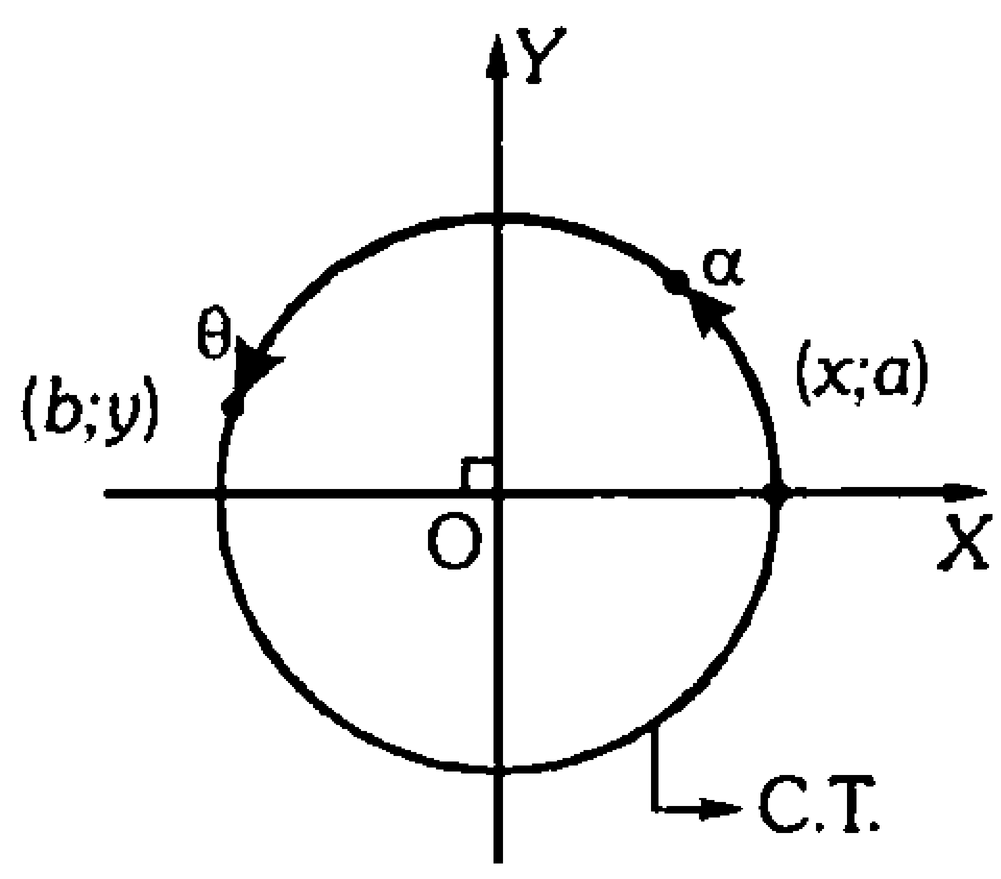
09 En la C.T. hallar las coordenadas de «P»



RPTA.:..

10 En la C.T. Calcular:

$$E = \frac{a}{Sen\alpha} + \frac{b}{Cos\theta}$$



RPTA.:..

11 Señale la variación de:

$C = 2senx$; $\forall x \in R$

RPTA.:..

12 Señale la variación de:

$M = 2senx + 3$; $\forall x \in R$

RPTA.:..

13 Calcular el máximo valor de:

$M = 2senx + 1$; $\forall x \in R$

RPTA.:..

14 Calcular el máximo valor de:

$E = 3senx + 1$; $\forall x \in R$

RPTA.:..

15 Si: $\theta \in IIC$; señale la variación de: $P = 3sen\theta - 1$

RPTA.:..

16 Si: $\theta \in IIC$; señale la variación de: $C = 3cos\theta - 1$

RPTA.:..

17 Sume el máximo y el mínimo valor de:

$C = 3senx - 2$; $\forall x \in R$

RPTA.:..

18 Calcular la suma del máximo y mínimo valor de:

$Y = cos\theta + 2 \wedge \theta \in R$

RPTA.:..

19 Si: $\theta \in IIC$; calcular la variación de: $E = 3Sen\theta - 1$

RPTA.:..

20 Si: $x \in IVC$, calcular la variación de: $R = 2cos\theta + 3$

RPTA.:..

21 Si: $\theta \in IIIC$; calcular la variación de: $E = 3 + 2sen\theta$

RPTA.:..

22 Sume el máximo y mínimo valor de: $K = 3sen\alpha + 2cos\theta$; si α y θ son independientes.

RPTA.:..

23 Calcular el mínimo valor de *m*

para que la igualdad exista:

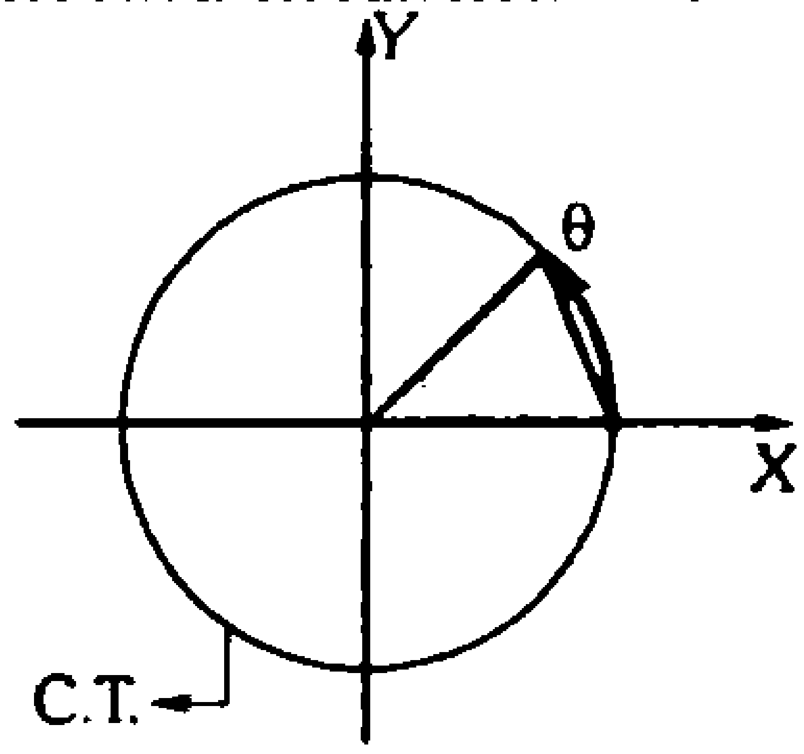
$$\cos\alpha = \frac{1-3m}{4}$$

RPTA.:...

24 Hallar el mínimo valor de k para que la siguiente igualdad exista: $\cos\alpha = 4k-5$

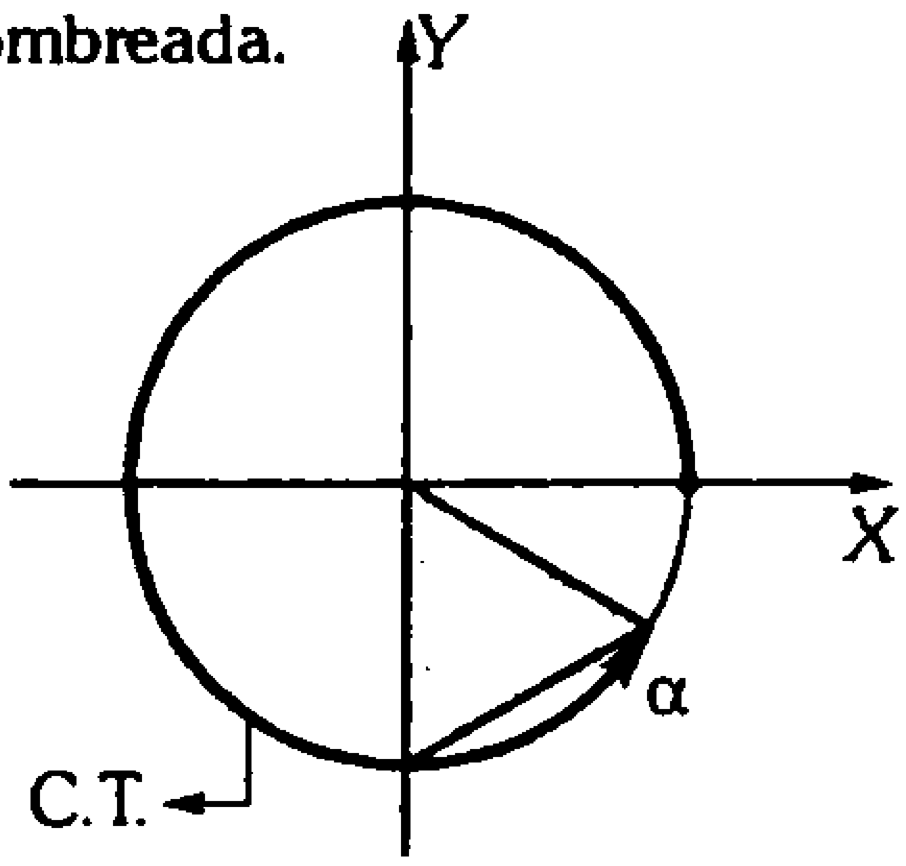
RPTA.:...

25 Calcular el área de la región sombreada en función de θ.



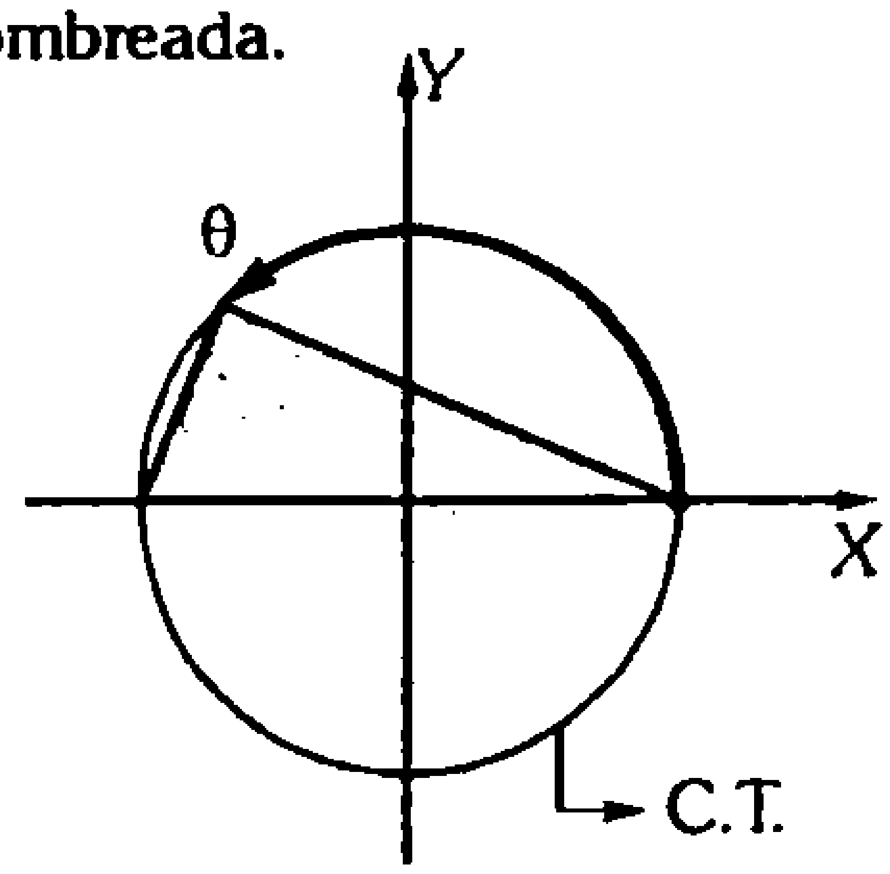
RPTA.:...

26 Calcular el área de la región sombreada.



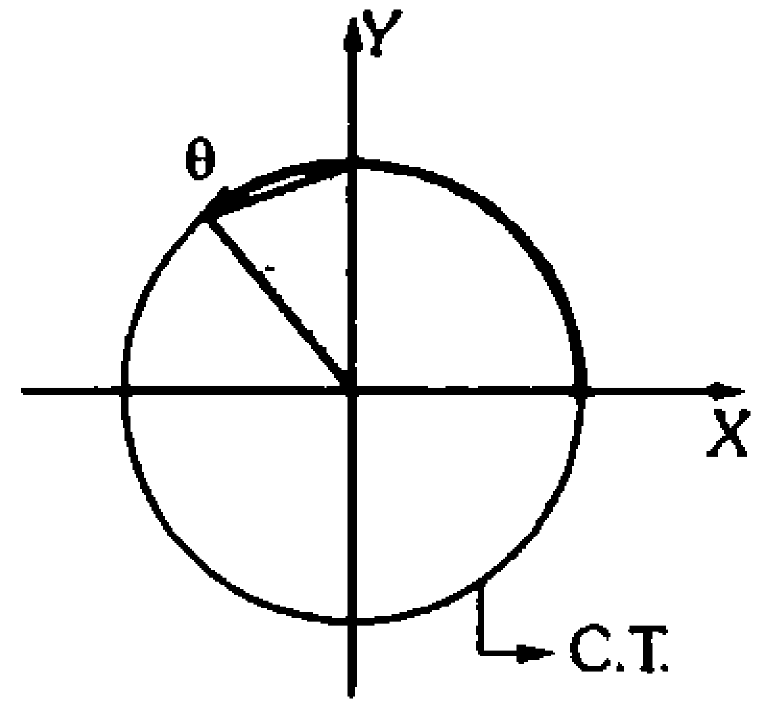
RPTA.:...

27 Calcular el área de la región sombreada.



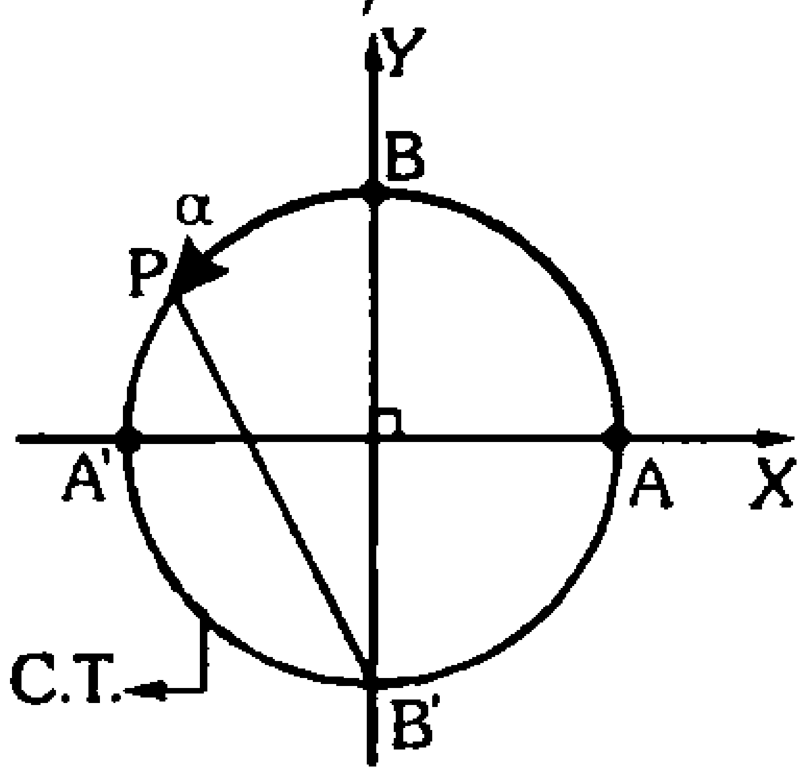
RPTA.:...

28 Calcular el área de la región sombreada.



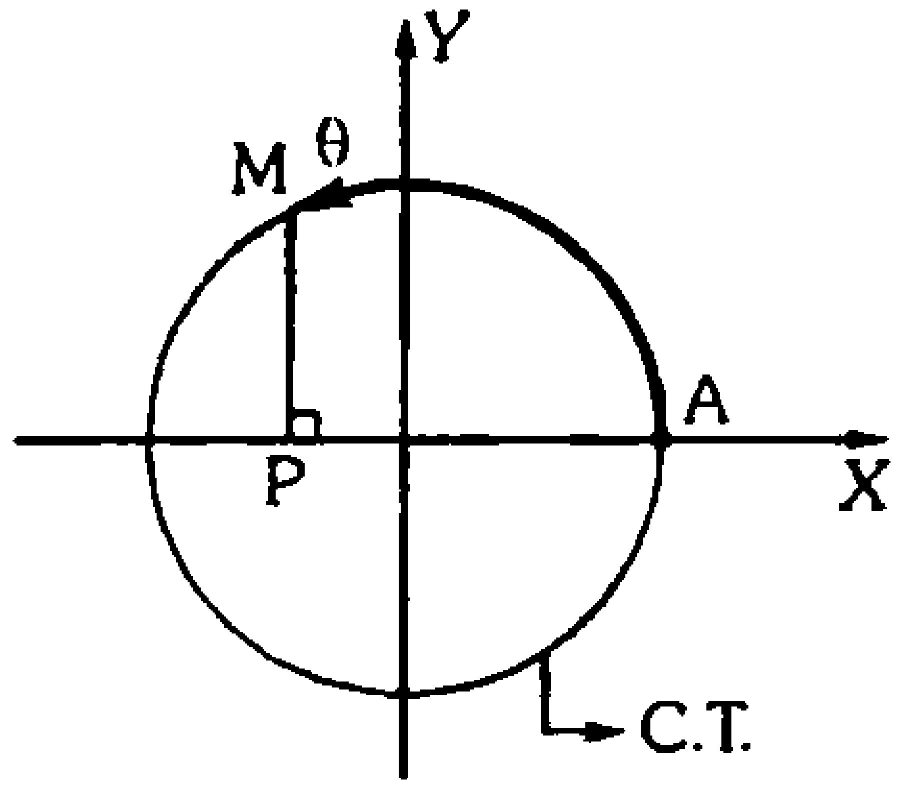
RPTA.:...

29 En la C.T. mostrada; calcular la longitud del segmento $\overline{PD}$ $(sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1)$



RPTA.:...

30 En la C.T. mostrada, calcular la longitud del segmento $\overline{PA}$



RPTA.:...

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Afirmar si es verdadero *(V)* o falso *(F)* en la *C.T*:

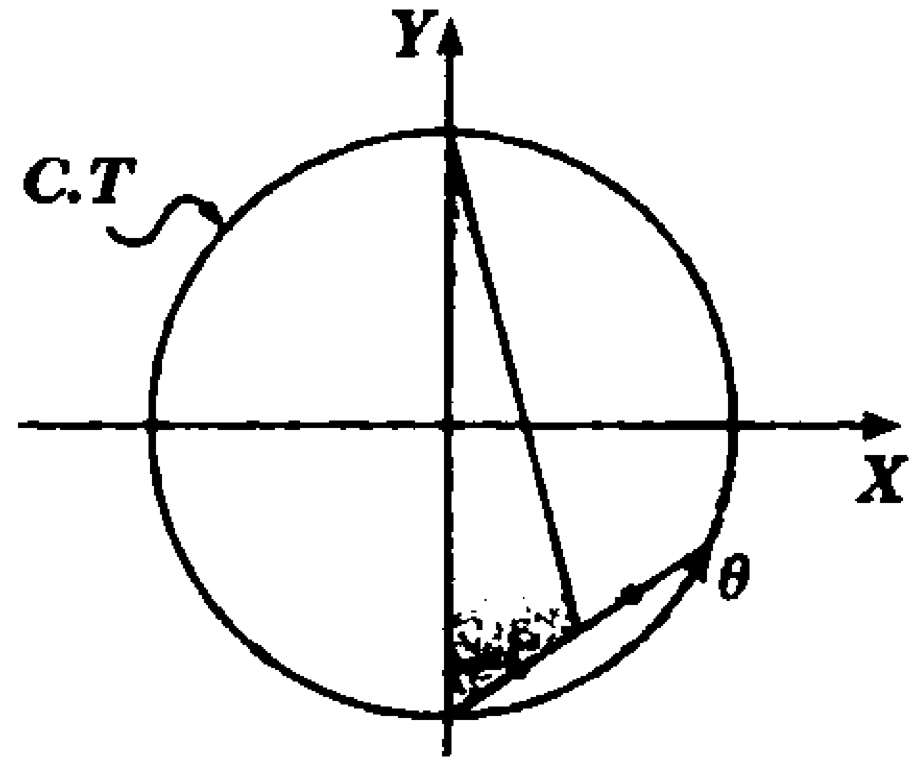
( ) $\theta \in IIC$ entonces $-1 \le Cos\theta \le 0$

( ) $Sen^2\alpha \in [-1; 1]$

( ) $Cos\beta \in [-1; 1]$

A) VVV *B) FVV* *C) FFV*
D) FVF *E) VVF*

02 Hallar el área de la región sombreada:



A) $\frac{1}{2}Sen\theta$ *B)* $\frac{1}{2}Cos\theta$ *C)* $\frac{1}{3}Sen\theta$
D) $\frac{1}{3}Cos\theta$ *E)* $\frac{1}{4}Cos\theta$

03 Indicar el intervalo común de x tal que verifique simultáneamente:

$$Sen\theta = \frac{x+1}{2} \wedge Cos\alpha = \frac{x-1}{2}$$

A) $]-1; 1[$ *B)* $[-1; 1]$ *C)* $[0; 1]$
D) $[-1; 0]$ *E)* $[-1; 2]$

04 Sabiendo que $\theta \in IIIC$, indicar el intervalo de x: $Sen\theta = \frac{3x+1}{5}$

A) $]-1/3; 2[$ *B)* $]-1/3; 1[$ *C)* $]-2; -1/3[$
D) $]1; 1/3[$ *E)* $]-1/3; 2/3[$

05 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) $Tg5Csc3>0$

( ) $Cos2 + Ctg6 > 0$

( ) $Tg4 - Sen3 > 0$

A)FFF *B)VVF* *C)FVF*
D)FFV *E)VVV*

06 Respecto a la *C.T* afirmar si es verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) $\theta \in IIIC$, el coseno decrece a medida que el arco crece

( ) $\theta \in IIIC$, el seno decrece a medida que el arco crece

( ) $\theta \in IVC$, el coseno crece a medida que el arco crece

A) FVF *B) VFF* *C) VVF*
D) VVV *E) FVV*

07 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)*:

( ) $|Cos4| + Cos4 = 0$

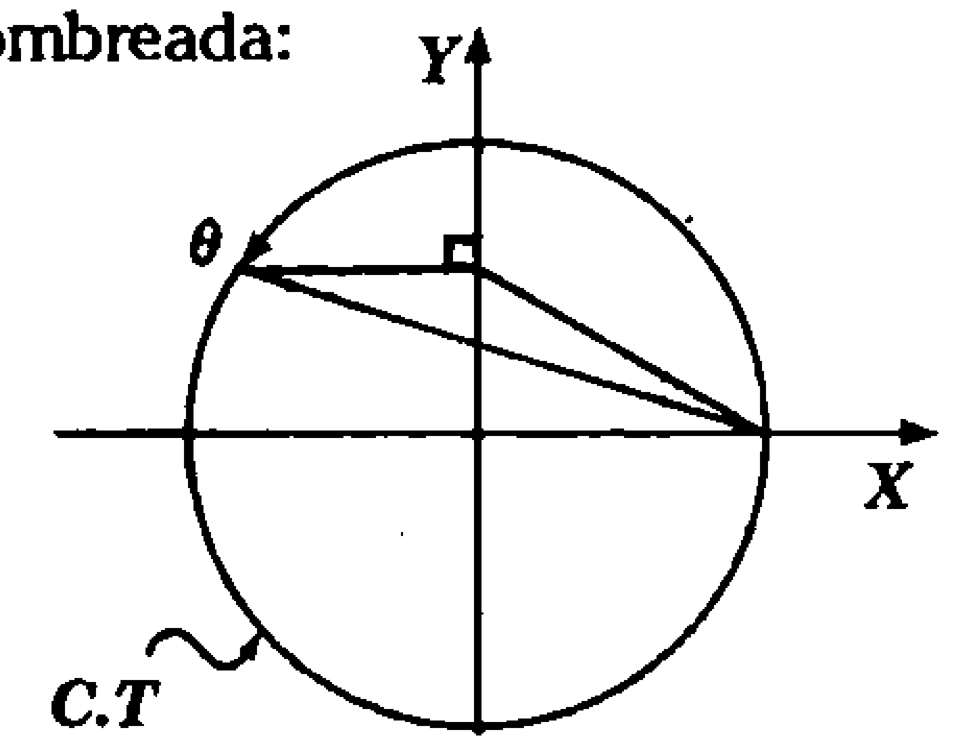
( ) $|Sen2| + Sen2 = 0$

( ) $|Ctg5| + Ctg5 = 0$

A) VVV *B) FFF* *C) VFV*
D) VFF *E) FFV*

08 Hallar el área de la región

sombreada:



A) $\frac{1}{2}Sen\theta Cos\theta$ B) $-\frac{1}{2}Sen\theta Cos\theta$

C) $\frac{1}{2}Sen\theta Sec\theta$ D) $-\frac{1}{2}Csc\theta Cos\theta$

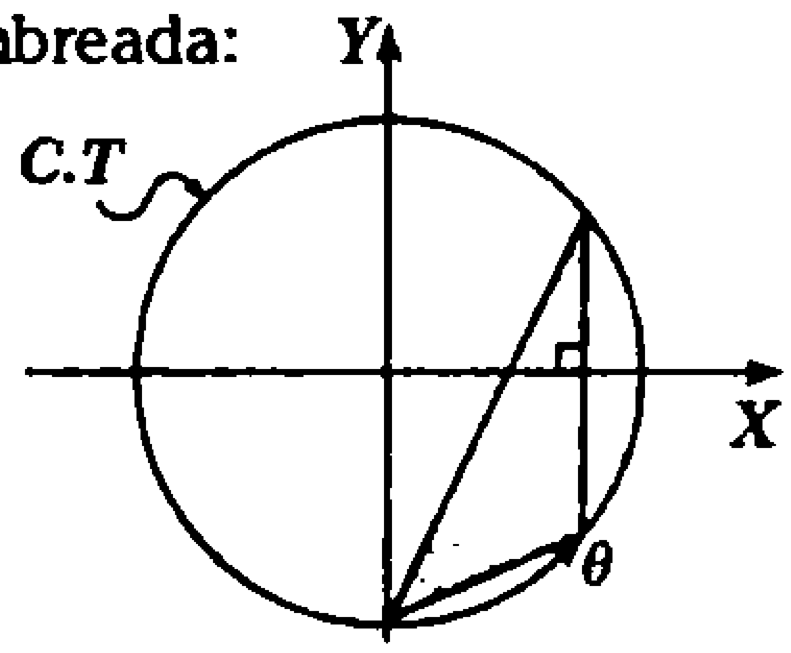
E) $-\frac{1}{2}Sen\theta Sec\theta$

09 Si x, y, z son independientes entre sí, calcular la diferencia entre el máximo y mínimo valor de:

$$F=3Sen^3x - 7Sen^2y + 2Cos^2z$$

A) –5 B) 5 C) 10 D) –10 E) 15

10 Hallar el área de la región sombreada:

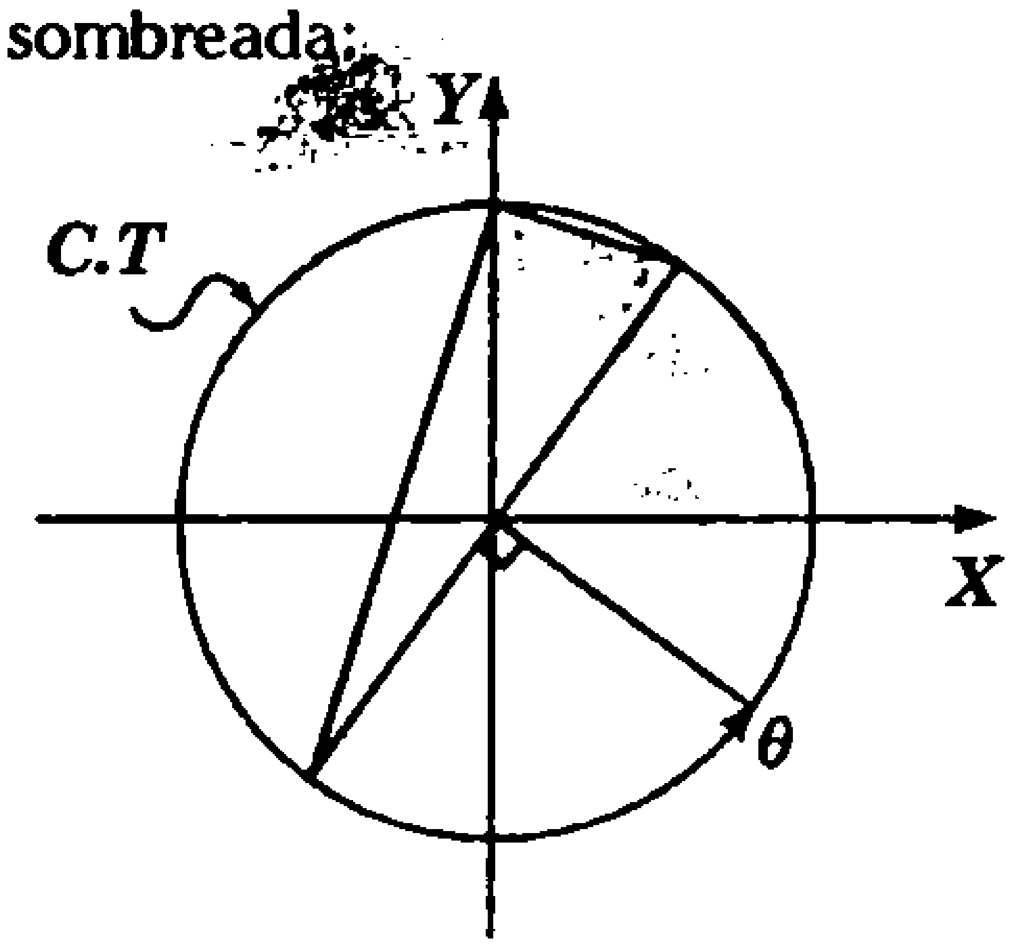


A) $Sen\theta Cos\theta$ B) $2Sen\theta Cos\theta$

C) $-Sen\theta Cos\theta$ D) $-2Sen\theta Cos\theta$

E) $-\frac{1}{2}Sen\theta Cos\theta$

11 Hallar el área de la región sombreada:



A) $Sen\,\theta$ B) $Cos\,\theta$ C) $-Cos\,\theta$
D) $-Sen\,\theta$ E) $Sen\,\theta Cos\,\theta$

12 Si $0<x<\pi/2$, afirmar si es (V) o (F):

( ) $Sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ decrece

( ) $Cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ crece

( ) $Sen(x+\pi)$ decrece

A) FFV B) FVF C) VFV
D) VVF E) VVV

13 Indicar verdadero (V) o falso (F) con respecto a la C.T:

( ) $Cos4Sen2 > 0$

( ) $Cos2 > Cos3$

( ) $Sen5 > Sen6$

A) FFV B) FVF C) VVV
D) VFF E) FFV

14 Si: $\pi<x_1<x_2<\frac{3\pi}{2}$

indicar verdadero (V) o falso (F):

( ) $Senx_1 > Senx_2$

( ) $Cosx_1 < Cosx_2$

( ) $|Senx_1|>|Senx_2|$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFV E) VFF

15 Si: $-\frac{3\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<-\pi$

indicar verdadero (V) o falso (F):

( ) $Sen\,\theta_2 > Sen\,\theta_1$

( ) $Cos\,\theta_2 > Cos\,\theta_1$

( ) $Sen\,\theta_1 > Cos\,\theta_2$

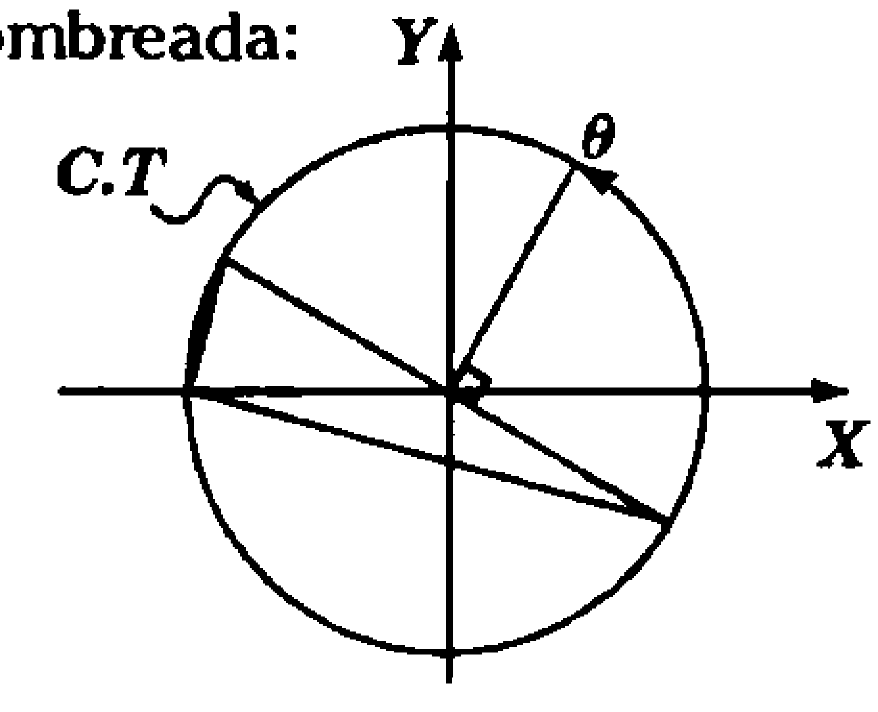
A) FVF B) FVV C) VFV
D) FFV E) FFF

16 Indicar el intervalo de x:

$$Cos\theta=\frac{2x-1}{x-1}$$

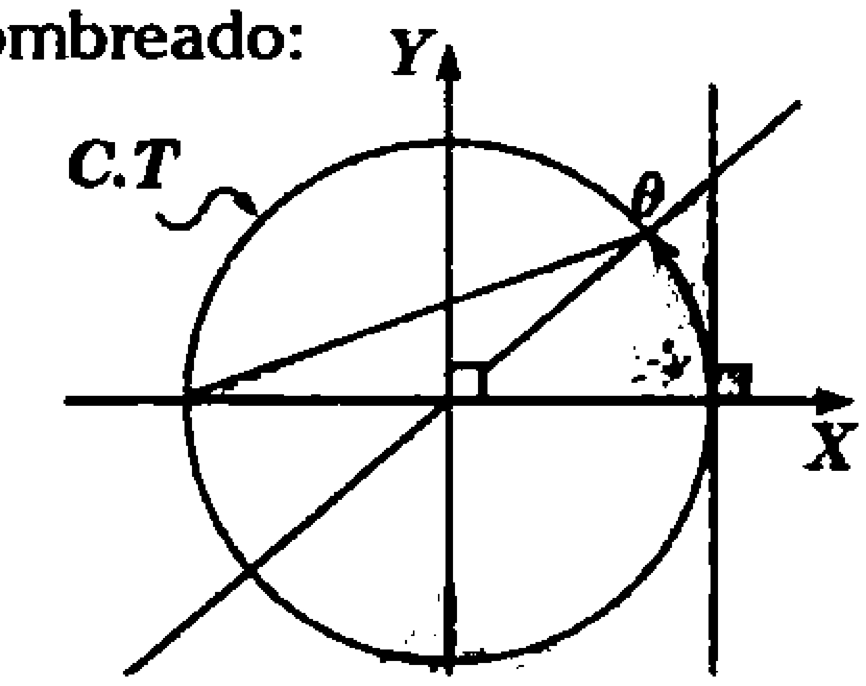
A) [0; 2/3] B)]0; 2/3[C)]–1; 2/3[
D) [–1; 2/3] E)]–2/3; 1[

17 Hallar el área de la región sombreada:



A) $Sen\,\theta$ B) $Cos\,\theta$ C) $2Sen\,\theta$
D) $2Cos\,\theta$ E) $-2Cos\,\theta$

18 Hallar el área de la región sombreado:



A) $1/2(Sen\,\theta+Cos\,\theta)$
B) $1/2(Sen\,\theta+Tg\theta)$
C) $1/2(Cos\,\theta+Tg\theta)$
D) $1/2(Tg\,\theta-Sen\,\theta)$
E) $1/2Sen\,\theta Tg\,\theta$

19 Si $\theta\in\langle 0;2\pi\rangle$, indicar el intervalo de θ tal que:

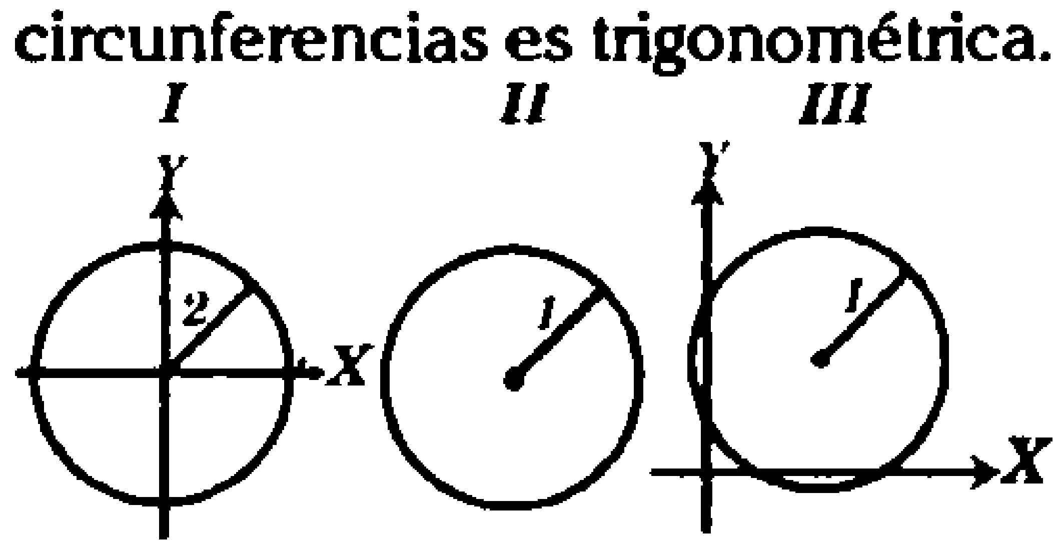
A) $[\pi/4;3\pi/4]$ B) $[\pi/4;5\pi/4]$
C) $[3\pi/4;5\pi/4]$ D) $[\pi/4;9\pi/4]$
E) $[3\pi/4;9\pi/4]$

20 Si: $\frac{5\pi}{6}<\theta<6$, indicar la extensión de $A=2Sen\,\theta+3$

A) [1; 4] B)]1; 4[C)]1; 4]
D) [1; 4[E)]–1; 4]

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

01 Indicar, cual de las siguientes circunferencias es trigonométrica.



A) Solo I B) Solo II
C) Solo III D) II y III
E) Ninguna es trigonométrica

02 Ubicar los siguientes ángulos en posición normal en la circunferencia trigonométrica.

I) 120° II) -50° II) $\frac{4\pi}{3}$ III) $\frac{\pi}{4}$

03 Si θ y ϕ son arcos en posición normal, ubicar θ y ϕ tal que:

I) $120°<\theta<150°$ II) $-70<\phi<-10°$

04 Ubicar el seno de los siguientes arcos: I) 140° II) – 100°

05 Ubicar el coseno de los siguientes arcos :

I) 200° II) – 50°

06 Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones :

I) sen20° > sen70°
II) Cos200° < Cos250°

A) VF B) FV C) VV
D) FF E) Falta datos

07 Indicar el valor de la verdad de las siguientes proposiciones .

I) Sen100° < Cos100°

II) Sen310° > Cos310°

A) VV B) VF C) FF
D) FV E) Falta Datos

08 Si :

$120° < \theta < 150° \Rightarrow a < Sen\theta < b$

Indicar el valor de $(a - b)$

A) $\frac{3\sqrt{-1}}{2}$ B) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

D) $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ E) 0

09 Si :

$127° < \theta < 143° \Rightarrow m < Cos\theta < n$

Indicar el valor de $(m - n)$.

A) $\frac{1}{5}$ B) $-\frac{1}{5}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $-\frac{7}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

10 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda.

I) $Sen\theta = \sqrt{2} - 1$ II) $Cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

III) $Sen\theta + Cos\theta = 2$

A) VVV B) VFF C) FFF D) FVF

11 Poner el signo *> ; < ó = en*:

I) Sen20° ( ) Sen80°
II) Cos10° ( ) Cos40°
III) Sen200° ( ) Sen300°

A) >;>;< B) <;<;< C) >;>;<
D) <;>;> E) >;<;<

12 Poner el signo en :

I) cos80° ( ) cos100°

II) cos200° ( ) cos300°

III) cosx ( ) cos(x+20°)x ; agudo

A) <;<;> B) > ;> ;< C) > ;<;<
D) >;<;= E) < ; > ; <

13 Si : *cosx > cos70°*; el valor que no puede tomar *"x"* es :

A) 10° B) 80° C) 295° D) 50° E) 120°

14 Si : *senx < sen70°*. El valor de *"x"* que no puede asumir es :

A) 15° B) 80° C) 40° D) 150° E) 300°

15 Si : $90° < \alpha < \beta < 180°$ poner *V* o *F*.

I) $sen\,\alpha > sen\,\beta$ II) $sen\,\alpha < sen\,\beta$

III) $sen\,\alpha = sen\,\beta$

A) VFF B) VVF C) FVV
D) FFV E) VFV

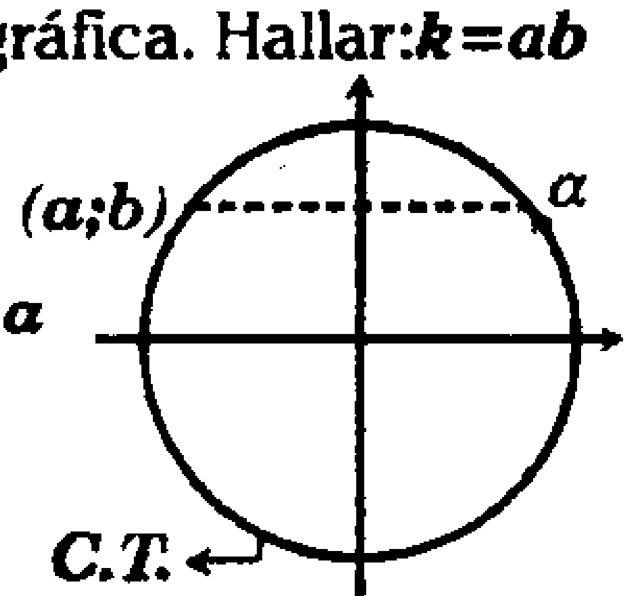
16 Si: $180° < \alpha < \beta < 270°$ Poner V o F.

I) $Cos\,\alpha > Cos\,\beta$ II) $Cos\,\alpha < Cos\,\beta$

III) $|Cos\,\alpha| > |Cos\,\beta|$

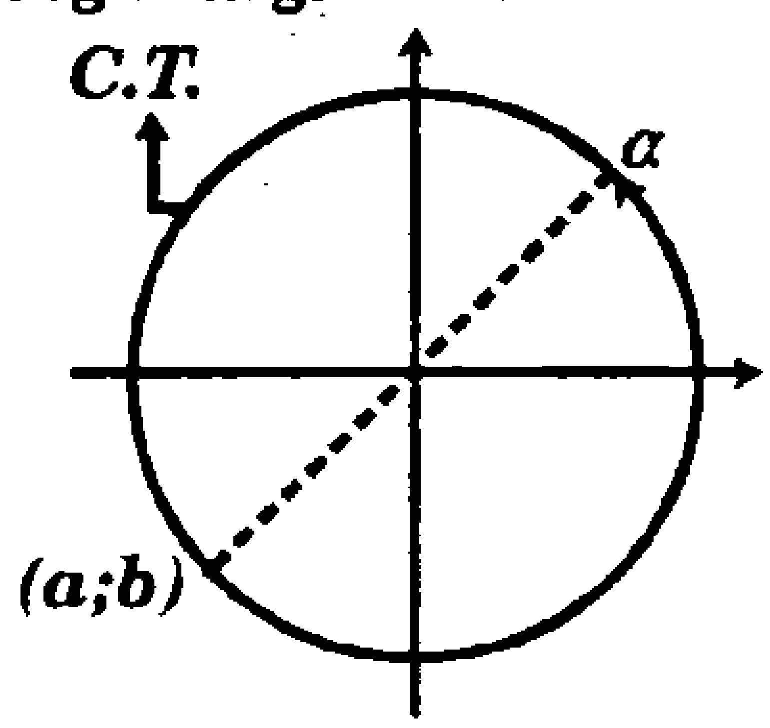
A) FFV B) FVV C) FVF
D) VFF E) VFV

17 Según la gráfica. Hallar: $k = ab$



A) $sen\alpha\, cos\,\alpha$
B) $-sen\alpha\, cos\,\alpha$
C) $sen\,\alpha$
D) $cos\,\alpha$
E) –1

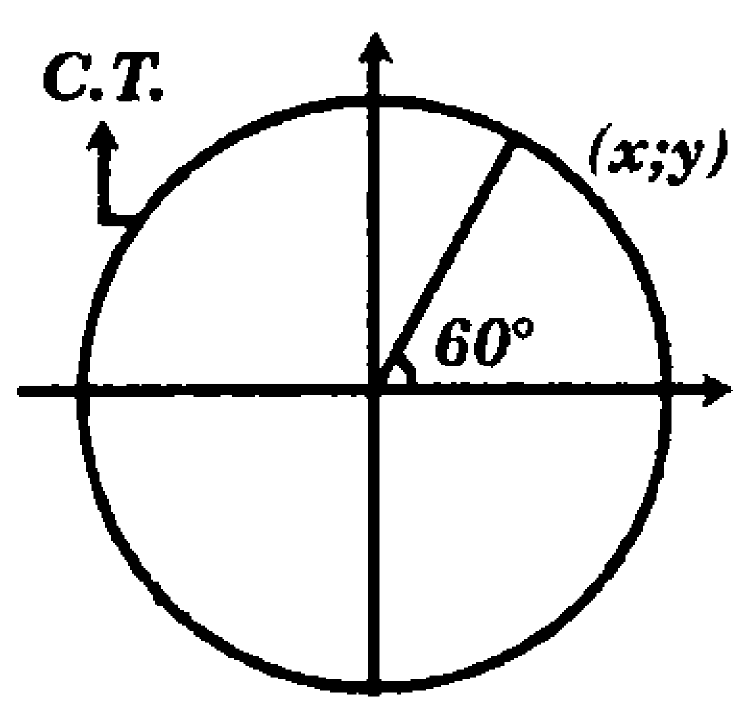
18 Según la gráfica .



Hallar de valor de α.

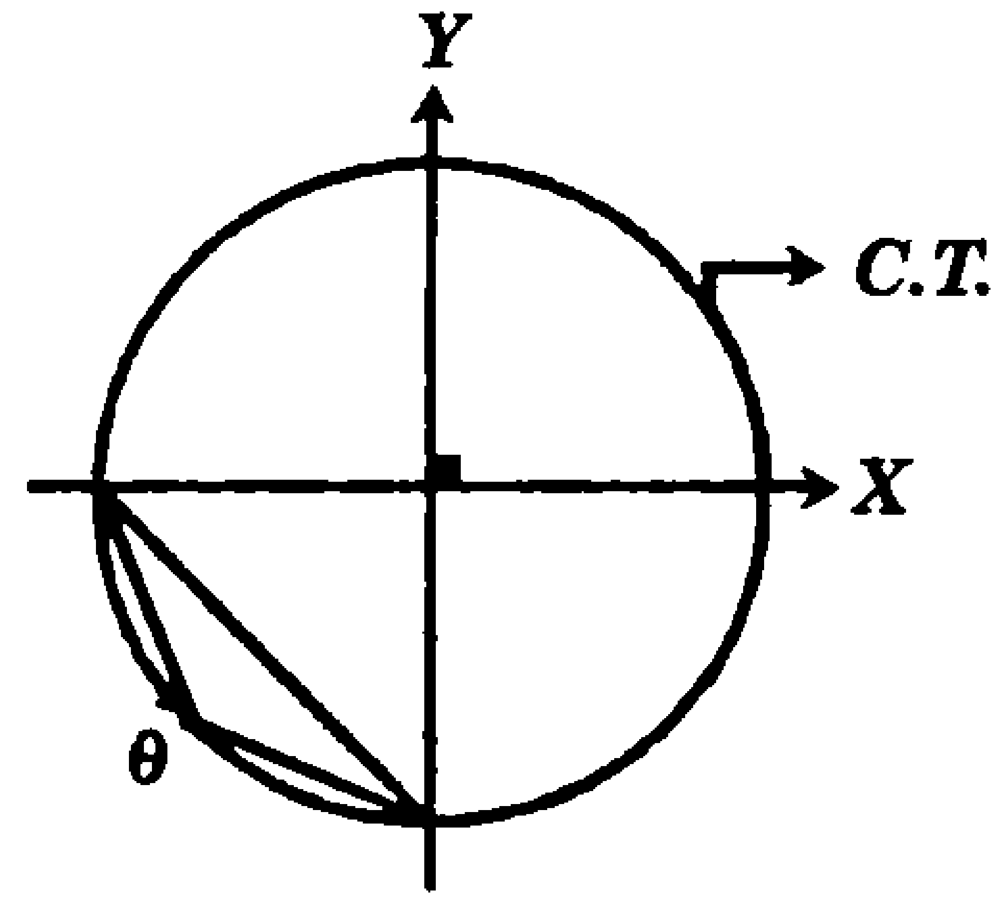
A) $-sen\,\alpha$ B) $sen\,\alpha$ C) $cos\,\alpha$
D) $-cos\,\alpha$ E) 1

19 En la *C.T.* Hallar : $k = x + \sqrt{3}\,y$



A) 1 B) 0 C) 2 D) 4 E) 3

20 Hallar el área de la región triángular.



A) $\frac{Sen\theta + cos\theta}{2}$ B) $\frac{1 + sen\theta + cos\theta}{2}$

C) $\frac{sen\theta - cos\theta}{2}$ D) 1/2 E) $sen\theta + cos\theta + 1$

21 ¿En qué cuadrante*(s)* el sen y cos decrecen?.

A) IC B) IIIC C) IIC D) IVC E) ayb

22 ¿En qué cuadrante*(s)* el sen crece y cos decrece?

A) IIC B) IC C) IIIC D) b y c E) IVC

23 ¿En qué cuadrante el cos decrece y es negativo?

A) IIC B) IC C) IIIC D) ayb E) IVC

24 El *sen* en el ....es........y además......

A) IIIC : positivo , decrece
B) IIC ; negativo , crece
C) IIIC ; negativo , crece
D) IVC ; negativo , decrece
E) IIIC; negativo , decrece

25 Indicar el menor valor de :

$k = 2cosx + 3seny - 4; \forall\, x, y \in R$

A) – 8 B) 1 C) 9 D) – 9 E) – 2

26 Indicar el mayor valor de :

$K = 3cos\alpha - 2sen\beta + 10; \forall\, \alpha, \beta \in R$

A) 15 B) 1 C) 9 D) – 9 E) – 2

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)E	4)C	5)D	6)E	7)C	8)B	9)E	10)C
11)D	12)E	13)B	14)B	15)D	16)A	17)B	18)B	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)A	2)*	3)*	4)*	5)*	6)B	7)C	8)B	9)B	10)B
11)D	12)C	13)E	14)B	15)A	16)[illegible]	17)B	18)[illegible]	19)C	20)[illegible]
21)C	22)B	23)A	24)E	25)D	26)A	27)A	28)A	29)B	20)C

OBJETIVOS :

* *Conocer las relaciones básicas entre las razones trigonométricas de una cierta variable.*
* *Reconocer las diferentes identidades trigonométricas*
* *Aplicar correctamente las identidades trigonométricas en las demostraciones*
* *Utilizar adecuadamente las identidades fundamentales en la simplificación de ejercicios.*
* *Reconocer las identidades trigonométricas auxiliares.*
* *Aplicar correctamente las identidades trigonométricas auxiliares.*
* *Reconocer un problema condicional.*

INTRODUCCION :

Este capitulo es muy importante a su vez por que va a servir como base para capítulos posteriores, esta considerado como clave dentro de la trigonometría, y definitivamente tendremos que razones por las cuales se les considera de gran importancia en el desarrollo de la asignatura.

* La Igualdad $(x-2)(x+2)=0$;- Es cierto si solamente si ; cuando $x=2$ ó $x=-2$

A este tipo de igualdad se le denomina «Ecuación Condicional»

En cambio la igualdad : $(x-2)(x+2)\equiv x^2-9$, cumple para todo valor de *«x»*

A este tipo de igualdad se le denomina *«Identidad»*

* Recordar que no existe la división entre cero
* Para indicar una identidad, se utiliza el símbolo «$\equiv$» que se lee: *«Idéntico a»*

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas que se cumplen para todo valor admisible del ángulo.

EJEMPLOS:

* Identidad Algebraica :

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$$

* Identidad Trigonométrica :

$$Sen^2\theta+Cos^2\theta\equiv 1$$

* Ecuación Trigonométrica :

$$Sen\,\theta+Cos\,\theta=1$$

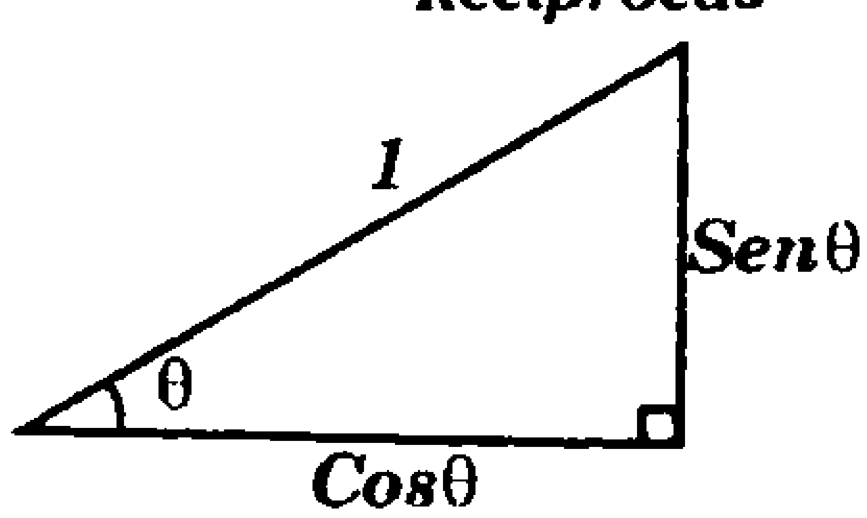
Para : $\theta=90°$ Cumple

Para : $\theta=30°$ No cumple

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Las identidades trigonométricas fundamentales sirven de base para demostración de otras identidades más complejas .

Se clasifican: * *Pitagóricas*
* *Por cociente*
* *Recíprocas*



Del triángulo rectángulo mostrado, se puede deducir:

IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$
$1+Tan^2\theta=Sec^2\theta$
$1+Cot^2\theta=Csc^2\theta$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que: $x^2+y^2=r^2$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1\quad\Rightarrow\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=1$$

$$\Rightarrow\ Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$$

IDENTIDADES POR COCIENTE:

$Tan\theta=\dfrac{Sen\theta}{Cos\theta}$
$Cot\theta=\dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}$

DEMOSTRACIÓN:

$$Tan\theta=\frac{ORDENADA}{ABSCISA}=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{Sen\theta}{Cos\theta}$$

IDENTIDADES RECIPROCAS

$Sen\theta Csc\theta=1$
$Cos\theta\,Sec\theta=1$
$Tan\theta\,Cot\theta=1$

DEMOSTRACIÓN:

$$1=1$$

$$\frac{y}{r}\times\frac{r}{y}=1$$

$$Sen\theta\times Csc\theta=1$$

OBSERVACIÓN :

* *De :* $Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$

* Despejando: $Sen^2\theta = 1 - Cos^2\theta$

$\Rightarrow$ $Sen^2\theta = (1+Cos\theta)(1-Cos\theta)$

* Así mismo: $Cos^2\theta = 1 - Sen^2\theta$

$\Rightarrow$ $Cos^2\theta = (1+Sen\theta)(1-Sen\theta)$

IDENTIDADES AUXILIARES

A) $Sen^4\theta + Cos^4\theta = 1 - 2Sen^2\theta Cos^2\theta$

B) $Sen^6\theta + Cos^6\theta = 1 - 3Sen^2\theta Cos^2\theta$

C) $Tan\theta + Cot\theta = Sec\theta Csc\theta$

D) $Sec^2\theta + Csc^2\theta = Sec^2\theta Csc^2\theta$

E) $(1+Sen\theta+Cos\theta)^2 = 2(1+Sen\theta)(1+Cos\theta)$

DEMOSTRACIONES:

A) $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$ al cuadrado:

$(Sen^2\theta + Cos^2\theta)^2 = 1^2$

$Sen^4\theta + Cos^4\theta + 2Sen^2\theta \times Cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow$ $Sen^4\theta + Cos^4\theta = 1 - 2Sen^2\theta \times Cos^2\theta$

B) $Sen^2\theta + Cos^2\theta = 1$ al cubo:

$(Sen^2\theta + Cos^2\theta)^3 = 1^3$

$Sen^6\theta + Cos^6\theta + 3(Sen^2\theta \times Cos^2\theta)$

$\underbrace{(Sen^2\theta + Cos^2\theta)}_{1} = 1$

$Sen^6\theta + Cos^6\theta + 3Sen^2\theta \times Cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow$ $Sen^6\theta + Cos^6\theta = 1 - 3Sen^2\theta \times Cos^2\theta$

C) $Tan\theta + Cot\theta = \dfrac{Sen\theta}{Cos\theta} + \dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}$

$$Tan\theta + Cot\theta = \frac{\overbrace{Sen^2\theta + Cos^2\theta}^{1}}{Cos\theta \times Sen\theta}$$

$$Tan\theta + Cot\theta = \frac{1 \times 1}{Cos\theta \times Sen\theta}$$

$\Rightarrow$ $Tan\theta + Cot\theta = Sec\theta \times Csc\theta$

D) $Sec^2\theta + Csc^2\theta = \dfrac{1}{Cos^2\theta} + \dfrac{1}{Sen^2\theta}$

$$Sec^2\theta + Csc^2\theta = \frac{\overbrace{Sen^2\theta + Cos^2\theta}^{1}}{Cos^2\theta \times Sen^2\theta}$$

$$Sec^2\theta + Csc^2\theta = \frac{1 \times 1}{Cos^2\theta \times Sen^2\theta}$$

$\Rightarrow$ $Sec^2\theta + Csc^2\theta = Sec^2\theta \times Csc^2\theta$

E) $(1+sen\theta+cos\theta)^2 = 1^2 + (sen\theta)^2 + (cos\theta)^2$

$+ 2sen\theta + 2cos\theta + 2sen\theta \times cos\theta = 1 + Sen^2\theta$

$+ Cos^2\theta + 2Sen\theta + 2Cos\theta + 2Sen\theta \times Cos\theta$

$= 2 + 2Sen\theta + 2Cos\theta + 2Sen\theta \times Cos\theta$

* Agrupando convenientemente :

$= 2(1+Sen\theta) + 2Cos\theta(1+Sen\theta)$

$= (1+Sen\theta)(2+2Cos\theta)$

$= 2(1+Sen\theta)(1+Cos\theta)$

* Finalmente :

$\Rightarrow$ $(1+sen\theta+cos)^2 = 2(1+sen\theta)(1+cos\theta)$

PROBLEMAS PARA DEMOSTRAR

Demostrar una identidad consiste en que ambos miembros de la igualdad propuesta sean equivalentes, para lograr dicho objetivo se siguen los siguientes pasos :

i) Se escoge el miembro "más complicado".

ii) Se lleva a Senos y Cosenos por lo general .

iii) Se utilizan las identidades fundamentales y las diferentes operaciones algebraicas .

EJEMPLO 1 :

DEMOSTRAR:

$Secx(1 - Sen^2x)Cscx = Cotx$

RESOLUCIÓN :

* Se escoge el *1er* miembro:

$Secx \times (1 - Sen^2x) \times Cscx = ?$

* Se lleva a Senos y Cosenos:

$$\frac{1}{Cosx} \times (Cos^2x) \times \frac{1}{Senx} = Cosx \times \frac{1}{Senx}$$

$$= \frac{Cosx}{Senx} = Cotx$$

EJEMPLO 2 :

DEMOSTRAR:

$[Secx+Tanx-1][1+Secx-Tanx] = 2Tanx$

RESOLUCIÓN :

Se escoge el *1er* mienbro:

$[Secx+Tanx-1]\ [Secx-Tanx+1]$

$= [Secx+(Tanx-1)][Secx-(Tanx-1)]$

$\Rightarrow = (Secx)^2 - (Tanx-1)^2$

$= (1+Tan^2x) - (Tan^2x - 2Tanx + 1)$

$= 1 + Tan^2x - Tan^2x + 2tanx - 1 = 2Tanx$

PROBLEMAS PARA SIMPLIFICAR Y REDUCIR

Con la ayuda de las identidades trigonométricas estudiadas podemos reducir al máximo expresiones trigonométricas que contengan diversos grados de dificultad .

EJEMPLO 4 :

Reduzca la siguiente expresión:.

$$G = 1 - \frac{Cotx}{Secx - Tanx}$$

RESOLUCIÓN:

Multiplicando por el factor conjugado del denominador tenemos:

$$G = 1 - \frac{Cotx(Secx + Tanx)}{Sec^2x - Tan^2x}$$

Aplicando la identidad *pitagórica* y desarrollando el numerador:

$G = 1 - (CotxSecx + TanxCotx)$

Aplicando la identidad **reciproca** y simplificando: $G = -CotxSecx$

Llevando la expresión a terminos de seno y cosenos:

$$G = -\frac{Cosx}{Senx} \times \frac{1}{Cosx}$$

Finalmente reduciendo la expresión: $G = -Cscx$

EJEMPLO 2 :

Reducir:

$$k = Sen^4x - Cos^4x + 2Cos^2x$$

RESOLUCIÓN :

Por diferencia de cuadrados :

$\overbrace{(sen^2x + Cos^2x)}^{1}(Sen^2x - Cos^2x) + 2Cos^2x$

$\Rightarrow k = Sen^2x - Cos^2x + 2Cos^2x$

$\Rightarrow k = Sen^2x + Cos^2 \ \Rightarrow \ k = 1$

EJEMPLO 3 :

Simplificar: $E = \dfrac{1+Cosx}{Senx} - \dfrac{Senx}{1-Cosx}$

RESOLUCIÓN :

$$E = \frac{\overbrace{(1+Cosx)(1-Cosx)}^{1-Cos^2x} - (Senx)(Senx)}{Senx\,(1-Cosx)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{Sen^2x-Sen^2x}{Senx(1-Cosx)} \Rightarrow E=\frac{0}{Senx(1-Cosx)}=0$$

PROBLEMAS CONDICIONALES

Dada una condición, se trata de calcular, hallar o reducir una expresión trigonométrica específica, en función de la condición . Para este tipo de problemas se puede trabajar indistintamente con el dato , así como con la expresión a determinarse.

EJEMPLO 1 :

Si: $\dfrac{Secx-Cosx}{Cscx-Senx}=(Tanx)^k$

Cacule el valor de k.

RESOLUCIÓN:

Llevando el primer miembro a términos de senos y

cosenos:

$$\frac{\frac{1}{Cosx}-Cosx}{\frac{1}{Senx}-Senx}=(Tanx)^k$$

Operando la expresión queda reducida a:

$$\frac{(1-Cos^2x)Senx}{(1-Sen^2x)Cosx}=(Tanx)^k$$

Aplicando la identidad pitagórica:

$$\frac{Sen^3x}{Cos^3x}=(Tanx)^k$$

La expresión equivale a:

$Tan^3x=(Tanx)^k$

Finalmente, por igualdad de términos: $k=3$

EJEMPLO :

Si : $Senx+Cosx=\dfrac{1}{2}$

Hallar : $SenxCosx$

RESOLUCIÓN :

Dada una condición se pide hallar una relación en términos de dicha condición .

* Del dato: $(Senx+Cosx)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$\underbrace{Sen^2x+Cos^2x}_{1}+2Senx\times Cosx=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow 2Senx\,Cosx=-1$

$\Rightarrow 2SenxCosx=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow SenxCosx=-\dfrac{3}{8}$

PROBLEMAS PARA ELIMINAR ÁNGULOS

La idea central es eliminar todas las expresiones algebraicas, y que al final quede relaciones independientes de la variable .

EJEMPLO :

Eliminar "x", a partir de:

$Senx=a \quad Cosx=b$

RESOLUCIÓN:

* De:

$$\left.\begin{array}{l} Senx=a \Rightarrow Sen^2x=a^2 \\ Cosx=b \Rightarrow Cos^2x=b^2 \end{array}\right\} sumamos$$

$$Sen^2x+Cos^2x=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow 1=a^2+b^2$$

RESUMEN DE FORMULAS

* Fundamentales :

PITAGORAS

- $Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$ → $Sen^2\theta=1-Cos^2\theta$; $Cos^2\theta=1-Sen^2\theta$
- $1+Tan^2\theta=Sec^2\theta$ → $Tan^2\theta=Sec^2\theta-1$; $Sec^2\theta-Tan^2\theta=1$
- $1+Cot^2\theta=Csc^2\theta$ → $Cot^2\theta=Csc^2\theta-1$; $Csc^2\theta-Cot^2\theta=1$

DE COCIENTE

- $Tan\theta=\dfrac{Sen\theta}{Cos\theta}$
- $Cot\theta=\dfrac{Cos\theta}{Sen\theta}$

RECIPROCAS

- $Sen\theta\times Csc\theta=1$ → $Sen\theta=\dfrac{1}{Csc\theta}$; $Csc\theta=\dfrac{1}{Sen\theta}$
- $Cos\theta\times Sec\theta=1$ → $Cos\theta=\dfrac{1}{Sec\theta}$; $Sec\theta=\dfrac{1}{Cos\theta}$
- $Tan\theta\times Cot\theta=1$ → $Tan\theta=\dfrac{1}{Cot\theta}$; $Cot\theta=\dfrac{1}{Tan\theta}$

AUXILIARES :

- $Versx=1-Cosx$
- $Covx=1-Senx$
- $Sen^4\theta+Cos^4\theta=1-2Sen^2\theta Cos^2\theta$
- $Sen^6\theta+Cos^6\theta=1-3Sen^2\theta Cos^2\theta$
- $Tan\theta+Cot\theta=Sec\theta Csc\theta$
- $Sec^2\theta+Csc^2\theta=Sec^2\theta Csc^2\theta$
- $(1+Sen\theta+Cos\theta)^2=2(1+Sen\theta)(1+Cos\theta)$
- $Secx+Tanx=n\Rightarrow Secx-Tanx=\dfrac{1}{n}$
- $Cscx+Cotx=m\Rightarrow Cscx-Cotx=\dfrac{1}{m}$

RECOMENDACIÓN:

Cuando en un problema de identidades trigonométricas estés frente a esta expresión:

$E=(Senx\pm Cosx)$ y se te pide «$SenxCosx$», se recomienda que eleves al cuadrado ambos miembros .

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Demostrar que :

$Tan^2xCosxCscx=Tanx$

RESOLUCIÓN:

* En este problema, la idea es reducir el miembro de la igualdad más complicado y obtener un resultado igual al otro miembro. Uno de los criterios más utilizados, es colocar la expresión a reducir, en términos de senos y/o cosenos; y para ello es bueno recordar:

$$cscx=\frac{1}{senx}\ ;\ sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$$
$$tanx=\frac{sen\,x}{cos\,x}\ ;\ cot\,x=\frac{cos\,x}{senx}$$

* En el problema :

$tan^2xcosxcscx=tanx$; note que:

$$tan^2x=\frac{sen^2x}{cos^2x}$$

$$\frac{sen^2x}{cos^2x}\times cosx\times\frac{1}{senx}=tanx$$

* Reduciendo :

$$\underbrace{\frac{sen\,x}{cos\,x}}_{tan\,x}=tan\,x\Rightarrow \boxed{tanx=tanx}$$

PROBLEMA 2:

Simplificar:

$$L=\tan x\cos^2x-\cot x\,sen^2x$$

A) $senx\cos x$ B) 1 C) $sen^2x-\cos^2x$
D) $\cos x-senx$ E) 0

RESOLUCIÓN :

* Vamos a colocar la expresión en términos de senos y cosenos; así:

$$L=\tan x\times\cos^2x-\cot x\times sen^2x$$

$$\Rightarrow L=\frac{senx}{\cos x}\cos^2x-\frac{\cos x}{senx}sen^2x$$

* Reduciendo:

$$L=senx\cos x-\cos x\,senx$$

$$\Rightarrow L=0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 3:

Reducir:

$$J=(\sec x-\cos x)(\csc x-senx)$$

A) 1 B) $senx$ C) $\cos x$
D) $senx-\cos x$ E) $\sec x-\csc x$

RESOLUCIÓN :

* Pasando a senos y cosenos

$$J=\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)\left(\frac{1}{senx}-senx\right)$$

* Operando:

$$J=\left(\frac{1-\cos^2x}{\cos x}\right)\left(\frac{1-sen^2x}{senx}\right);\text{ pero}$$

$$1-\cos^2x=sen^2x$$
$$1-sen^2x=\cos^2x$$

* Reemplazando :

$$J=\frac{sen^2x}{\cos x}\times\frac{\cos^2x}{sen\,x}\Rightarrow\boxed{J=senx\cos x}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 4 :

Simplificar:

$$A=\left(\frac{\sec x+senx}{\csc x+\cos x}\right)\cot x$$

A) $\tan x$ B) $\cot^2x$ C) $\cot x$
D) $\tan^2x$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Vamos a colocar toda la expresión en términos de senos y cosenos ; así;

$$A=\left(\frac{\sec x+senx}{\csc x+\cos x}\right)\cot x=\left(\frac{\frac{1}{\cos x}+senx}{\frac{1}{senx}+\cos x}\right)\frac{\cos x}{senx}$$

* Operando y ordenando:

$$A=\left(\frac{\frac{1+senx\cos x}{\cos x}}{\frac{1+\cos x\,senx}{senx}}\right)\frac{\cos x}{senx}$$

* Reduciendo:

$$L=\left(\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{senx}}\right)\frac{\cos x}{senx}\Rightarrow L=\frac{senx}{\cos x}\times\frac{\cos x}{senx}$$

$$\Rightarrow\boxed{L=1}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 5:

Reducir:

$$B=(\sec x+\tan x-1)(\sec x-\tan x+1)$$

A) $\tan x$ B) $\sec x$ C) $2\sec x$
D) $2\tan x$ E) 2

RESOLUCIÓN :

* Si bien, el pasar a senos y cosenos, es un criterio muy generalizado; no siempre es necesario tales cambios ;sino también el manejar las otras razones trigonométricas siempre que tenga relación. En el problema, por ejemplo :

$$B=(\sec x+\tan x-1)(\sec-\tan x+1)$$

* Operando:

$$B=\sec^2-\sec x\tan x+\sec x+\tan x\sec x$$
$$-\tan^2x+\underbrace{\tan x-\sec x+\tan x}_{2\tan x}-1$$

* Reduciendo :

$$B=\underbrace{\sec^2x-\tan^2x}_{1}+2\tan x-1$$

$$=1+2\tan x-1\Rightarrow B=2\tan x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

Reducir:

$$C=\frac{sen^4x-\cos^4x}{sen\,x-\cos x}-\cos x$$

A) 1 B) 0 C) $senx$
D) $senx-2\cos x$ E) $-\cos x$

RESOLUCIÓN :

En muchos problemas; el uso de los productos notables es necesario para simplificar expresiones; siendo en este caso, importante, la adaptación de las propiedades algebraicas a la expresión trigonométrica a analizar . En el problema , tenemos :

$$C=\frac{sen^4x-\cos^4x}{senx-\cos x}-\cos x;\text{ note que:}$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

* En la expresión:

$$\Rightarrow C=\frac{(sen^2x)^2-(\cos^2x)^2}{senx-\cos x}-\cos x$$

$$\Rightarrow C=\frac{(sen^2x+\cos^2x)(sen^2x-\cos^2x)}{senx-\cos x}-\cos x$$

* Pero: $sen^2x+\cos^2x=1$

* Luego:

$$C=\frac{sen^2x-\cos^2x}{senx-\cos x}-\cos x$$

* Note:

$$sen^2x-\cos^2x=(senx+\cos x)(senx-\cos x)$$

$$C=\frac{(senx+\cos x)(senx-\cos x)}{senx-\cos x}-\cos x$$

* Reduciendo :

$$C=senx+\cos x-\cos x$$

$$\Rightarrow C=senx$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Si: $\tan x+senx=2(1+\cos x);\ x\in IIIC$

Calcular : $D=\sec x\csc x$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $-\frac{7}{2}$ E) $-\frac{5}{2}$

RESOLUCIÓN :

* En estos problemas con condición; es ideal relacionar datos con la incognita; para decidir que expresión se reduce primero. En elproblema, trabajamos el dato:

$\tan x+senx=2(1+\cos x)$, pasamos a senos y cosenos.

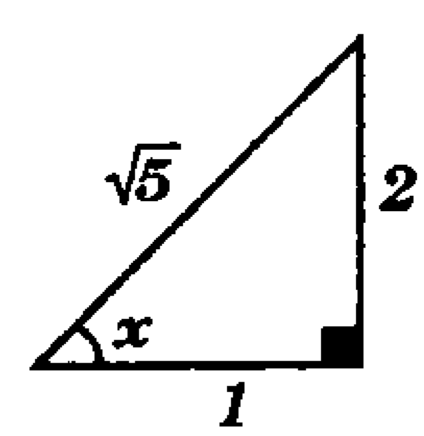
$\frac{senx}{\cos x}+senx=2(1+\cos x)$; operando :

$$\frac{senx+senx\cos x}{\cos x}=2(1+\cos x)$$

* Factorizando "*senx*":

$$\frac{senx(1+\cos x)}{\cos x}=2(1+\cos x)$$

$$\frac{senx}{\cos x}=2\Rightarrow\tan x=2\quad(x\in IIIC)$$



$$\begin{cases}\sec x=-\sqrt{5}\\ \csc x=-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

* Luego; en la expresión pedida :

$$C=\sec x\times\csc x=(-\sqrt{5})\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\Rightarrow C=\frac{5}{2}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8:

Siendo: $SecxCscx = 4Cotx$; $x \in IIC$ calcular "x"

A) 135° B) 120° C) 150°
D) 127° E) 143°

RESOLUCIÓN:

* En la condición; pasamos a senos y cosenos:

$$secx \times cscx = 4cotx \Rightarrow \frac{1}{cosx} \times \frac{1}{senx} = 4 \times \frac{cosx}{senx}$$

* Reduciendo:

$$\frac{1}{cosx} = 4cosx \Rightarrow \frac{1}{4} = cos^2x \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} cosx = \frac{1}{2} \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

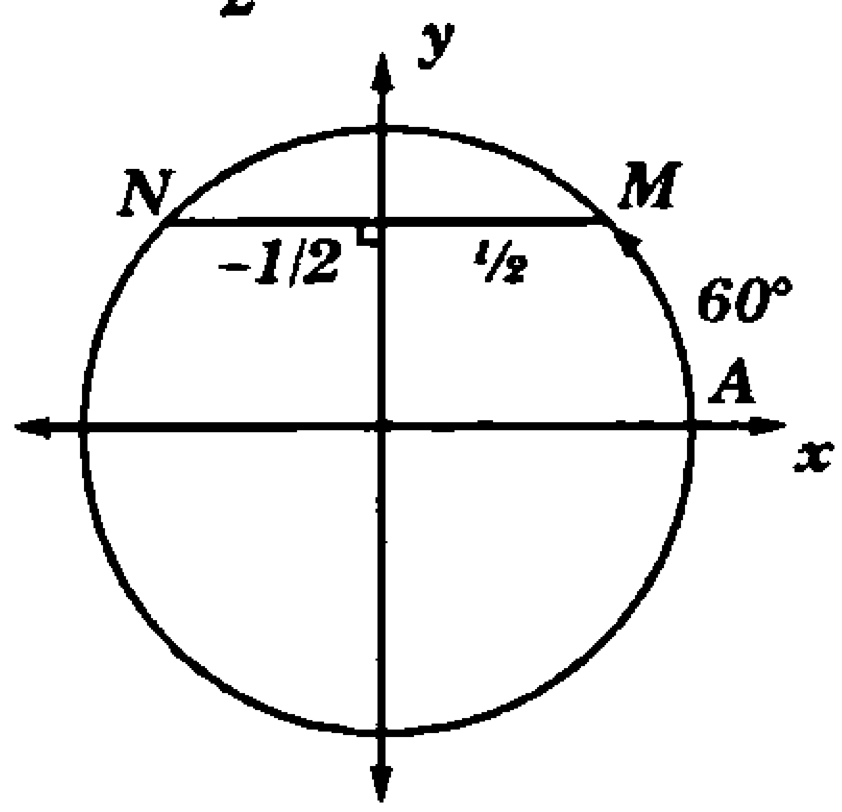
* Como $x \in IIC$: $cosx = -\dfrac{1}{2}$

* Con la ayuda de una *C.T.* ; note que:

$$cos60° = \frac{1}{2}$$

* Como:

$$cosx = -\frac{1}{2};\ x \in IIC \Rightarrow x = 120°$$



RPTA : "B"

PROBLEMA 9:

Sabiendo que: $tanx + cotx = 4$

calcular: $C = senx \times cosx$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN:

* De la condición:

$$tanx + cotx = 4;$$

* Piden : $C = senx \times cosx$

* Pasando a senos y cosenos:

$$\frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = 4$$

Operando :

$$\frac{sen^2x + cos^2x}{cosxsenx} = 4 \Rightarrow \frac{1}{D} = 4 \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{4}}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 10:

Siendo: $tanx + cotx = 3$

calcular : $E = tan^2x + cot^2x$

A) 3 B) 9 C) 5 D) 7 E) 11

RESOLUCIÓN :

A partir de dato: $tanx + cotx = 3$

elevando al cuadrado :

$(tanx + cotx)^2 = 3^2$

$$\Rightarrow tan^2x + \underbrace{2tanxcotx}_{1} + cot^2x = 9$$

$$\Rightarrow \underbrace{tan^2x + cot^2x}_{E} + 2 = 9 \Rightarrow E + 2 = 9$$

$\Rightarrow E = 7$

RPTA : "D"

PROBLEMA 11:

Siendo :

$$\frac{sen^3x + cos^3x}{senx + cosx} = \frac{7}{8}$$

Calcular : $C = tanx + cotx$

A) 16 B) 14 C) 7 D) 4 E) 8

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

* En la condición:

$$sen^3x + cos^3x = (senx + cosx)$$
$$(sen^2x - senx\,cosx + cos^2x)$$

* Luego:

$$\frac{(senx+cosx)sen^2x - senxcosx + cos^2x)}{(senx+cosx)} = \frac{7}{8}$$

* Reduciendo :

$$sen^2x - senx \times cosx + cos^2x = \frac{7}{8};$$

pero : $sen^2x + cos^2x = 1$

$$1 - senx\,cosx = \frac{7}{8} \Rightarrow senxcosx = \frac{1}{8}$$

* Piden:

$$C = tanx + cotx = \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx}$$

* Operando:

$$C = \frac{sen^2x + cos^2x}{cosxsenx} = \frac{1}{senxcosx}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{8}} \Rightarrow \boxed{C = 8}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 12:

Eliminar "x" si: $tanx = a$; $cotx = b$

A) $a^2 + b^2 = 1$ B) $a^2 - b^2 = 1$
C) $a^2 + b^2 = 2$ D) $ab = 1$

RESOLUCIÓN :

* Los problemas de eliminación de variables; consiste en encontrar relaciones entre los parámetros diferentes de la variable a eliminar que intervienen en el problema. Este problema , es el caso más simple, ya que se conocen *2* razones trigonométricas de la variable "x"; y lo único que haremos es buscar una relación entre estas *RT*.

* Tenemos: $tanx = a \wedge cotx = b$

* Sabemos: $tanxcotx = 1 \Rightarrow ab = 1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 13:

Eliminar "x" si:

$$secx = m\ ;\ cscx = n$$

A) $m^2+n^2=1$ B) $m^2-n^2=1$
C) $m^2+n^2=m^2n^2$ D) $m^2+n^2=mn$

RESOLUCIÓN :

* De la condiciones:

$$secx = m \Rightarrow cosx = \frac{1}{m}$$

$$cscx = n \Rightarrow senx = \frac{1}{n}$$

* Pero :

$$sen^2x + cos^2x = 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} = 1$$

* Operando :

$$\frac{m^2 + n^2}{n^2m^2} = 1 \Rightarrow m^2 + n^2 = m^2n^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14:

Eliminar "x" si : $3senx + cosx = m$

$$senx - 3\,cosx = n$$

A) $m^2+n^2=5$ B) $m^2+n^2=10$
C) $m^2+n^2=15$ D) $m^2+n^2=20$
E) $m^2+n^2=25$

RESOLUCIÓN:

* Si bien en algunos casos, es posible encontrar relaciones entre la *R.T.* que intervienen; en otro es bueno relacionar las expresiones en su conjunto. Por ejemplo en las expresiones:

$\underline{m = 3senx + cosx}$

$\Rightarrow m^2 = 9sen^2x + cos^2x + 2(3senx)cosx$

$m^2 = 9sen^2x + cos^2x + 6senxcosx \ldots (I)$

$\underline{n = senx - 3cosx}$

$\Rightarrow n^2 = sen^2x + 9cos^2x - 2(senx)3cosx$

$\Rightarrow n^2=sen^2x+9cos^2x-6senxcosx\;...(II)$

* $(I)+(II)$:

$m^2+n^2=10sen^2x+10cos^2x$

$\Rightarrow m^2+n^2=10\underbrace{(sen^2x+cos^2x)}_{1}$

$\Rightarrow m^2+n^2=10$ RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Eliminar "x" si:

$secx+csc\,x=m$ ....(I)

$senx+cos\,x=n$ ....(II)

A) $n=m\,(n^2+1)$ B) $n=m(n^2-1)$
C) $2n=m(n^2+1)$ D) $2n=m(n^2-1)$

RESOLUCIÓN :

* Obviamente, las condiciones actuales, son muy diferentes a las anteriores ; pero la idea es la misma: buscar relaciones entre los datos

* De la *(I)*:

$secx+cscx=m$; pasando a senos y cosenos:

$\frac{1}{cosx}+\frac{1}{senx}=m\Rightarrow\frac{senx+cosx}{cosxsenx}=m;$

* Pero: $senx+cosx=n$

* Reemplazando:

$\frac{n}{senxcosx}=m$ ....(III)

* Busquemos ahora: $senxcosx$

* Como:

$senx+cosx=n\Rightarrow(senx+cos)^2=n^2$

$\underbrace{sen^2x+2senx\times cosx+cos^2x}_{1}=n^2$

$1+2senx\,cos\,x=n^2\Rightarrow senx\,cos\,x=\frac{n^2-1}{2}$

En *(III)*:

$\frac{n}{\frac{n^2-1}{2}}=m\Rightarrow\frac{2n}{n^2-1}=m$

$\Rightarrow 2n=m(n^2-1)$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Reducir: $L=(secx\times csc\,x-cotx)cosx$

A) 1 B) senx C) cosx
D) secx E) cscx

RESOLUCIÓN :

* En la expresión al reducir :

$secx\times cscx=tanx+cotx$

* Luego :

$L=(tanx+\cancel{cotx}-\cancel{cotx})cosx$

$\Rightarrow L=tanx\times cosx$; pero : $tanx=\frac{senx}{cosx}$

$\Rightarrow L=\frac{senx}{\cancel{cosx}}\times\cancel{cosx}\Rightarrow L=senx$

RPTA : "B"

PROBLEMA 17 :

Calcular "x":

$secx\,cscx=cotx+1$; $0°<x<360°$

A) 45° B) 135° C) 225°
D) A v B E) A v C

RESOLUCIÓN:

* Como: $secxcscx=tanx+cotx$

* Tenemos:

$tanx+cotx=cotx+1\Rightarrow tanx=1$

$\Rightarrow x\in IC$ ó $IIIC$

$\Rightarrow x=45°;\,225°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Si: $tanx+cotx=3$

calcular: $J=(secx+cscx)^2$

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

RESOLUCIÓN:

* Note que el dato:

$\underbrace{tanx+cotx=3}_{secxcscx}\Rightarrow secxcscx=3$

* Desarrollando la expresión pedida:

$J=(sec\,x+cscx)^2$

$\Rightarrow J=sec^2x+2secxcscx+csc^2x$

* Pero recuerde que :

$sec^2x+csc^2x=sec^2x\,csc^2x$

* Luego :

$J=\underline{sec^2x+csc^2x}+2secxcscx$

$\Rightarrow J=sec^2xcsc^2x+2secxcscx$

* Ordenando :

$J=(secxcscx)^2+2secx\;cscx$

* Reemplazando valores :

$J=3^2+2(3)=9+6\Rightarrow J=15$

RPTA : "D"

PROBLEMA 19:

Calcular "x" :

$Sec^2x+Csc^2x=2Cot^2xSec^3x$

; $0°<x<360°$

A) 60° B) 240° C) 300°
D) B v C E) A v C

RESOLUCIÓN :

* En la condición:

sabemos que : $\boxed{sec^2x+csc^2x=csc^2xsec^2x}$

$\Rightarrow sec^2xcsc^2x=2cot^2xsec^3x$

* Reduciendo:

$csc^2x=2cot^2xsecx$; pasamos a senos y cosenos

$\frac{1}{sen^2x}=2\frac{cos^2x}{sen^2x}\times\frac{1}{cosx}$

* Reducicendo :

$\frac{1}{2}=cosx\Rightarrow cosx=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{x=60°;300°}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 20:

Reducir :

$3(sen^4x+cos^4x)-2(sen^6x+cos^6x)$

A) 1 B) – 1 C) 2 D) – 2 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Recordando que:

$sen^4x+cos^4x=1-2sen^2x\,cos^2x$

$sen^6x+cos^6x=1-3sen^2xcos^2x$

* Reemplazamos:

$3(1-2sen^2xcos^2x)-2(1-3sen^2xcos^2x)$

* Operando :

$3-6\cancel{sen^2xcos^2x}-2+6\cancel{sen^2xcos^2x}=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 21:

Siendo: $Tanx+cotx=4$,

Calcular: $J=sen^6x+cos^6x$

A) $\frac{9}{8}$ B) $\frac{8}{9}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{13}{16}$ E) $\frac{9}{16}$

RESOLUCIÓN :

Note que lo pedido es :

$J=sen^6x+cos^6=1-3sen^2xcos^2x$ ...(I)

Entonces busquemos ahora:

sen^2xcos^2x

Del dato:

$tan\,x+cot\,x=4\Rightarrow sec\,xcsc\,x=4$

$\frac{1}{cosx}\times\frac{1}{senx}=4\Rightarrow\frac{1}{senxcosx}=4$

$\Rightarrow senxcosx=\frac{1}{4}$

Reemplazamos en *(I)*:

$$J=1-3\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{3}{16}\Rightarrow J=\frac{13}{16}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 22:

Siendo:

$$1-sen^4x-cos^4x=\frac{1}{2}cos^2x\ ;\ x\in IIC$$

Determinar : $J=senxtanx$

A) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* En la condición:

$$1-\underbrace{(sen^4x+cos^4x)}_{1-sen^2x\,cos^2x}=\frac{1}{2}cos^2x$$

$$1-1+2sen^2x\times cos^2x=\frac{1}{2}cos^2x$$

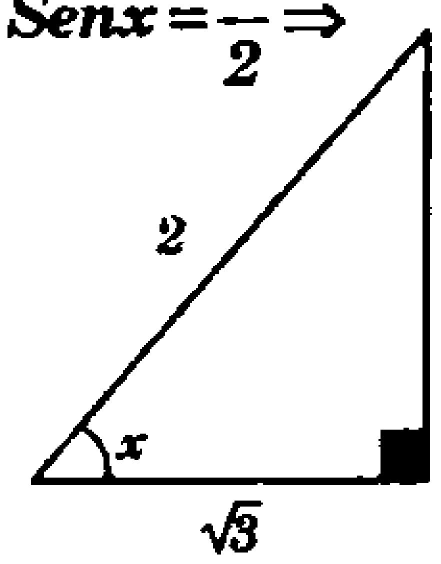
$$\Rightarrow 2sen^2x\times cos^2x=\frac{1}{2}cos^2x$$

* Reduciendo :

$$sen^2x=\frac{1}{4}\Rightarrow senx=\frac{1}{2}\ \text{ó}\ senx=-\frac{1}{2}$$

* Como $x\in IIC$:

* $Senx=\frac{1}{2}\Rightarrow$



$$\begin{cases} sen=\frac{1}{2} \\ tan\,x=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

* Luego:

$$J=senxtanx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow J=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 23:

Simplificar:

$$P=\left\{\frac{(senx+cosx)^2-1}{senx}\right\}secx$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Note que el numerador :

$$(senx+cosx)^2=1+2senx\times cosx$$

* Luego:

$$P=\left\{\frac{(senx+cosx)^2-1}{senx}\right\}sec\,x$$

$$\Rightarrow P=\left\{\frac{1+2senxcosx-1}{senx}\right\}sec\,x$$

* Reduciendo:

$$P=2\underbrace{cos\,x\,sec\,x}_{1}\Rightarrow P=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Si: $senx+cosx=\sqrt{\frac{4}{3}}$

calcular: $C=tanx+cotx$

A) 3 B) 6 C) 9 D) $2\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Como en el dato, hay seno y coseno; trabajamos en lo pedido:

$$C=tanx+cot\,x\Rightarrow C=sec\,xcsc\,x$$

* Pasando a senos y cosenos:

$$C=\frac{1}{cosx}\times\frac{1}{senx}$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{senx\times cosx}\ ....(I)$$

* Debemos buscar el producto "*senxcosx*"; del dato:

$$1+2senx\times cosx=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2senx\times cosx=\frac{4}{3}-1$$

* Luego:

$$1+2senx\times cosx=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 2senx\times cosx=\frac{4}{3}-1$$

* Es decir :

$$2senx\times cosx=\frac{1}{3}\Rightarrow senx\times cosx=\frac{1}{6}$$

* En (I) : $C=\frac{1}{\frac{1}{6}}\Rightarrow C=6$

RPTA: "B"

PROBLEMA 25:

Hallar "*x*" agudo que cumple:

$$(senx+cosx)^2=1+tanx$$

A) 30° B) 15° C) 60° D) 45° E) 22°30'

RESOLUCIÓN :

* Note que:

$$(senx+cosx)^2=1+2senxcosx$$

* Luego en la condición:

$$1+2senxcosx=1+tan\,x$$

$$\Rightarrow 2senxcosx=tanx$$

* Pero:

$$tan\,x=\frac{senx}{cosx}$$

$$\Rightarrow 2\,senxcosx=\frac{senx}{cosx}\Rightarrow 2cosx=\frac{1}{cosx}$$

* ordenando :

$$cos^2x=\frac{1}{2}\Rightarrow cosx=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x=45°$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 26 :

Simplificar :

$$Q=\frac{(1+senx-cosx)^2}{2(1-cosx)}$$

A) 1 – senx B) 1 + senx C) senx D) 2senx E) 1 + 2senx

RESOLUCIÓN :

* Reconozca en la expresión:

$$(1+senx-cosx)^2=2(1+senx)(1-cosx)$$

* Luego:

$$Q=\frac{(1+senx-cosx)^2}{2(1-cosx)}$$

$$\Rightarrow Q=\frac{\cancel{2}(1+senx)\cancel{(1-cosx)}}{\cancel{2}\cancel{(1-cosx)}}$$

* Reduciendo:

$$Q=1+senx$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27 :

Siendo:

$$senx+cosx=\frac{1}{3}$$

calcular : $Q=(1+senx)(1+cosx)$

A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{8}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{8}{9}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos como dato:

$$senx+cosx=\frac{1}{3}$$

* Y piden:

$$Q=(1+senx)(1+cosx)$$

$$\Rightarrow 2Q=2(1+senx)(1+cosx)$$

* Note que :

$$2(1+senx)(1+cosx)=(1+senx+cosx)^2$$

* Luego:

$$2Q=(\underbrace{1+senx+cosx}_{\frac{1}{3}})^2\Rightarrow 2Q=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$$

$\Rightarrow 2Q=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9} \quad \Rightarrow Q=\frac{8}{9}$

RPTA: "E"

PROBLEMA 28:

Sabiendo que:

$secx+tanx=3$, calcular: $secx$

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{7}{6}$

RESOLUCIÓN :

* En el dato: $secx + tanx = 3$
* Luego, se cumple: $secx - tanx=\frac{1}{3}$
* Sumando:

$$2secx=3+\frac{1}{3} \Rightarrow 2secx=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow secx=\frac{5}{3}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 29 :

Eliminar "x" si :

$$sen^4x + cos^4x = m \text{ ....(I)}$$

$$senx + cosx = n \text{ ....(II)}$$

A) $1-m=(n^2-1)^2$ B) $1+m=(n^2-1)^2$
C) $2(1-m)=(n^2-1)^2$ D) $2m=(n^2-1)^2$

RESOLUCIÓN :

* De *(I)*:

$$sen^4x+cos^4x=m$$

$$\Rightarrow 1-2sen^2x\times cos^2x=m$$

$$\Rightarrow 1-m^2=sen^2x\times cos^2x \text{ ....(III)}$$

* De *(II)* :

$$senx+cosx=n \Rightarrow (senx+cosx)^2=n^2$$

$$1+2senx\times cosx=n^2$$

$$\Rightarrow 2senx\times cosx=n^2-1$$

* En *(III)*:

$$1-m=2sen^2x\times cos^2x$$

$$\Rightarrow 2(1-m)=4sen^2x\times cos^2x$$

$$\Rightarrow 2(1-m)=\underbrace{(2senx\times cosx)^2}_{n^2-1}$$

$$\Rightarrow 2(1-m)=(n^2-1)^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 30:

Eliminar "x" de:

$$secx + tanx = m \text{ ...(I)}$$

$$secx \times tanx = n \text{ ...(II)}$$

A) $4mn^2=m^4+1$ B) $4nm=m^2-1$
C) $4nm^2=m^4-1$ D) $4nm=m^2+1$

RESOLUCIÓN :

* De la primera condición:

$$secx+tanx=m$$

$$\Rightarrow secx-tanx=\frac{1}{m}$$

* Sumando las condiciones:

$$2secx=m+\frac{1}{m} \text{ .... (III)}$$

* Restando las condiciones:

$$2\,tanx=m-\frac{1}{m} \text{ .... (IV)}$$

* Multiplicando:

$$\underbrace{4secx\times tanx}_{n}=\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)$$

$$4n=\left(\frac{m^2+1}{m}\right)\left(\frac{m^2-1}{m}\right)$$

* Operando :

$$4n=\frac{(m^2+1)(m^2-1)}{m^2}$$

$$\Rightarrow 4nm^2(m^2+1)(m^2-1)$$

$$\Rightarrow 4nm^2=m^4-1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31:

La expresión: $p=\frac{Sen^4\alpha-cos^4\alpha}{1+Tg^2\alpha}$

A) $\frac{1+2Cos^2\alpha}{Sec^2\alpha}$ B) $\frac{1-2Cos^2\alpha}{Sec^2\alpha}$ C) $Cos2\alpha$

RESOLUCIÓN :

Por diferencia de cuadrados:

$$P=\frac{(Sen^2\alpha+Cos^2\alpha)(Sen^2\alpha-Cos^2\alpha)}{Sec^2\alpha}$$

$$P=\frac{1-Cos^2\alpha-Cos^2\alpha}{Sec^2\alpha} \Rightarrow P=\frac{1-2cos^2\alpha}{sec^2\alpha}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 32:

Efectuar :

$$P=\frac{1}{Tg\alpha-Sec\alpha}+\frac{1}{Tg\alpha+Sec\alpha}$$

A) $tg\alpha$ B) $-Tg\alpha$ C) $Sec\alpha$
D) $-Sec\alpha$ E) $-2Tg\alpha$

RESOLUCIÓN :

Sabemos que:

$$1=Sec^2\alpha-Tg^2\alpha$$

$$1=(Sen\alpha+Tg\alpha)(Sec\alpha-Tg\alpha)$$

$$\Rightarrow P=\frac{(Sec\alpha+Tg\alpha)(Sec\alpha-Tg\alpha)}{-(Sec\alpha-Tg\alpha)}+\frac{(Sec\alpha-Tg\alpha)(Sec\alpha+Tg\alpha)}{Sena+Tg\alpha}$$

$$\Rightarrow P=-Sec\alpha-Tg\alpha+Sec\alpha-Tg\alpha$$

$$\Rightarrow P=-2Tg\alpha$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 33:

Simplificar :

$$E=\frac{Tg\,\alpha+Tg\beta}{Cot\alpha+Cot\beta}-Tg\alpha\times Tg\beta$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) $Tg\,\alpha$ E) $Tg\,\beta$

RESOLUCIÓN:

Se sabe que :

$$Tg\,x\times Cotg\,x=1$$

$$\Rightarrow Cotg\,x=\frac{1}{Tgx}$$

Ahora:

$$E=\frac{Tg\,\alpha+Tg\,\beta}{\frac{1}{Tg\alpha}+\frac{1}{Tg\beta}}-Tg\alpha\,Tg\beta$$

$$\Rightarrow E=\frac{Tg\alpha+Tg\beta}{\frac{Tg\alpha+Tg\beta}{Tg\alpha Tg\beta}}-Tg\alpha\,Tg\beta$$

$$\Rightarrow E=Tg\alpha\,Tg\beta-Tg\alpha\,Tg\beta=0$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 34:

Simplificar:

$$B=\frac{Sec^4\theta Csc^4\theta-Sec^4\theta-Csc^4\theta}{Csc^2\theta Sec^2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) $Sen\,\theta\,Cos\,\theta$ E) $Sen^2\theta\,Cos^2\theta$

RESOLUCIÓN :

Expresando todo a función Seno y Coseno

$$B=\frac{\left(\frac{1}{Cos^4\theta}\right)\left(\frac{1}{Sen^4\theta}\right)-\frac{1}{Cos^4\theta}-\frac{1}{Sen^4\theta}}{\frac{1}{Sen^2\theta\,Cos^2\theta}}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1-(Sen^4\theta+Cos^4\theta)}{sen^2\theta Cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow B=\frac{1-(1-2Sen^2\theta Cos^2\theta)}{Sen^2\theta Cos^2\theta}=\frac{2Sen^2\theta Cos^2\theta}{Sen^2\theta Cos^2\theta}=2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 35:

Reducir la expresión :

$$\frac{Sen^2\alpha(1+Cot^2\alpha)+Cos^2\alpha(1+Tg^2\alpha)}{Cos^2\alpha(Sec^2\alpha-Tg^2\alpha)+Sen^2\alpha(Csc^2\alpha-Cot^2\alpha)}$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{1}$ E) 0

RESOLUCIÓN :

* Se sabe que :

$1+Tg^2\alpha = Sec2\alpha\ ;\ 1+Cot^2\alpha = Csc^2\alpha$

$\Rightarrow F=\dfrac{Sen^2\alpha Csc^2\alpha+Cos^2\alpha Sec^2\alpha}{Cos^2\alpha+Sen^2\alpha}$

$\Rightarrow F=\dfrac{1^2+1^2}{1}=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 36:

Si : $Sen\theta+Cos\theta=\sqrt{2}$

Hallar: $M=Sen\theta\ Cos\theta$

A) 0,5 B) 1 C) 1,5 D) 2 E) 2,5

RESOLUCIÓN :

* Del dato : $(Sen\theta+Cos\theta)^2=(\sqrt{2})^2$

$Sen^2\theta+Cos^2\theta+2Sen\theta\ Cos\theta=2$

$\Rightarrow Sen\theta Cos\theta=\dfrac{1}{2}=0,5$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37:

Si se cumple que:

$a\ Sec\,\theta+b\ Cos\,\theta=b$

Hallar el valor de:

$E=Sen^2\theta+Cos\,\theta$

A) $a+b$ B) $(a+b)a^{-1}$ C) $(a+b)b^{-1}$ D) $(a+b)^1-$ E) $2a$

RESOLUCIÓN:

$E=1-Cos^2\theta+Cos\,\theta$

$E=1+Cos\,\theta-Cos^2\theta$ ....(I)

* Ahora del dato:

$\dfrac{a}{Cos\theta}+bCos\theta=b$

$a=b\ Cos\theta-b\ Cos^2\theta\Rightarrow Cos\theta-Cos^2\theta=\dfrac{a}{b}$

* En (I):

$E=1+\dfrac{a}{b}=(a+b)b^{-1}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 38:

Si : $16Cos^2\alpha+3Sen^2\alpha=7$

Calcular el valor de $Tg\alpha$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $-\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{2}{3}$ D) $\pm\dfrac{3}{2}$ E) $\pm\dfrac{2}{3}$

RESOLUCIÓN:

* Del dato se divide por $Cos^2\alpha$:

$\dfrac{16Cos^2\alpha}{Cos^2\alpha}+\dfrac{3Sen^2\alpha}{Cos^2\alpha}=7\left(\dfrac{1}{Cos^2\alpha}\right)$

$\Rightarrow 16+3Tg^2\alpha=7(1+Tg^2\alpha)$

$\Rightarrow 16+3Tg^2\alpha=7+7\,Tg^2\alpha$

$\Rightarrow Tg^2\alpha=\dfrac{9}{4}\ \Rightarrow\ Tg\alpha=\pm\dfrac{3}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39:

Si: $Sec\alpha-Tg\alpha=n$

calcular el valor de:

$E=Sec\,\alpha+Tg\,\alpha$

A) n B) $-n$ C) n^{-1} D) $-n^{-1}$ E) 0

RESOLUCIÓN :

* Si:

$1=Sec^2\alpha-Tg^2\alpha$: (propiedad)

$\Rightarrow 1=(Sec\alpha+Tg\,\alpha)(Sec\alpha-Tg\alpha)$

$\Rightarrow 1=E\times n\Rightarrow E=n^{-1}$

$\Rightarrow E=n^{-1}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 40:

Si se cumple:

$Sen\,\alpha=A\ sen\theta\ ;\ Tg\,\alpha=BTg\theta$

Calcular el valor de "$Cos\ \alpha$":

A) $\pm\sqrt{\dfrac{1-A^2}{1-B^2}}$ B) $\pm\sqrt{\dfrac{1+A^2}{1+B^2}}$ C) $\pm\sqrt{\dfrac{1-B^2}{1-A^2}}$ D) $\pm\sqrt{\dfrac{1-B^2}{1+A^2}}$ E) $\pm\sqrt{\dfrac{1+B^2}{1-A^2}}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato a función seno y coseno:

$\dfrac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}=\dfrac{BSen\theta}{Cos\theta}$

* Elevando al cuadrado:

$\dfrac{Sen^2\alpha}{Cos^2\alpha}=\dfrac{B^2Sen^2\theta}{Cos^2\theta}$

$\Rightarrow Sen^2\alpha\ Cos^2\theta=B^2Sen^2\theta\ Cos^2\alpha$

* A función Seno de θ:

$Sen^2\alpha(1-Sen^2\theta)=B^2Sen^2\theta Cos^2\alpha$

$Sen^2\alpha=B^2Sen^2\theta Cos^2\alpha+Sen^2\alpha\,Sen^2\theta$ ...(*)

* Si :

$Sen\,\alpha=A\ Sen\,\theta\Rightarrow Sen\,\theta=\dfrac{Sen\alpha}{A}$

* En (*):

$Sen^2\alpha=\dfrac{Sen^2\alpha}{A^2}(B^2Cos^2\alpha+1-Cos^2\alpha)$

$\Rightarrow\ A^2=B^2Cos^2\alpha+1-Cos^2\alpha$

$\Rightarrow A^2-1=Cos^2\alpha(B^2-1)$

RPTA : "A"

PROBLEMA 41 :

Reducir :

$W=\sqrt[3]{\dfrac{Sec\,x\ -Cos\,x}{Csc\,x\ -Sen\,x}}$

A) $\dfrac{Ctgx}{2}$ B) $Sec\,x$ C) $Csc\,x$ D) $Tg\,x$ E) $Sen\,x$

RESOLUCIÓN :

$W=\sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{1}{cos\,x}-cos\,x}{\dfrac{1}{sen\,x}-sen\,x}}$

$\Rightarrow W=\sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{1-cos^2x}{cosx}}{\dfrac{1-sen^2x}{senx}}}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{sen^2x}{cos\,x}}{\dfrac{cos^2\,x}{senx}}}$

$\Rightarrow W=\sqrt[3]{\dfrac{sen^3x}{cos^3\,x}}=\dfrac{sen\,x}{cos\,x}=tgx$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42:

Hallar el valor de:

$E=sen^21°+sen^22°+sen^23°+...sen^290°$

A) 22,5 B) 30 C) 45 D) 45,5

RESOLUCIÓN :

* Sea:

$E=\underbrace{sen^21°+sen^22°+.....+sen^244°}_{A}+sen^245°+\underbrace{sen^246°+...+sen^289°}_{B}+sen^290°$

* Entonces:

$E=A+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+B+1\Rightarrow E=A+B+1,5$ ...(I)

* Pero :

$sen46°=cos44°, sen47°=cos43°,....,$

$.....sen88°=cos2°,\ sen89°=cos1°$

* Entonces:

$B=cos^244°+cos^243°+...+cos^22°+cos^21°+$

$A=sen^244°+sen^243°+...+sen^22°+sen^21°$

* Sumando:

$A+B=\underbrace{1+1+1+.....+1+1}_{\text{observar que hay 44 términos}}$

* Entonces, $A+B=44$

* Reemplazando en (I)

$E=44+1,5=45,5$

RPTA : "D"

PROBLEMA 43 :

Hallar a, b, c tal que:

$\dfrac{2sen\,x\,cos\,x}{sen\,x+cos\,x-1}=a\ senx+b\ cosx+c$

RESOLUCIÓN :

* Sea:

$F=\frac{2sen\,x\,.\,cosx}{senx+cosx-1}$

$\Rightarrow F=\left(\frac{2senx\cos x}{senx+\cos x-1}\right)\left(\frac{senx+\cos x+1}{senx+\cos x+1}\right)$

$\Rightarrow F=\frac{2senx\,cosx\,(senx+cosx+1)}{(senx+cosx)^2-1}$

$\Rightarrow F=\frac{2senx\,cosx(senx+cosx+1)}{sen^2x+2senx\cos x+\cos^2x-1}$

$\underbrace{\qquad}_{=1}$

* Simplificando se obtiene:

$F=sen\,x+\cos\,x+1$

* Por datos:

$sen\,x+\cos x+1=a\,sen\,x+b\cos x+c$

* Comparando términos:

$a=1\ ;\ b=1$ y $c=1$

RPTA : "D"

PROBLEMA 44 :

Si: $sec^2x=n\,tgx$

Hallar: $\frac{sen^3x+\cos^3x}{(senx+\cos x)^3}$

A) $\frac{n+1}{n+2}$ B) $\frac{n-2}{n-1}$ C) $\frac{n-1}{n+2}$

D) $\frac{n+2}{n+1}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Datos: $sec^2x=n\ tg\,x$

$\frac{1}{\cos^2x}=\frac{nsen\,x}{cosx}\Rightarrow senx\,cosx=\frac{1}{n}...(I)$

* Sea:

$F=\frac{sen^3x+\cos^3x}{(senx+cosx)^3}$

$\Rightarrow F=\frac{(senx+cosx)(sen^2x-senxcosx+cos^2x)}{(senx+cosx)^3}$

$\Rightarrow F=\frac{1-senx\,cosx}{(senx+cosx)^2}=\frac{1-senx\,cosx}{1+senx\,cosx}$

* Reemplazamos (I) en F:

$F=\frac{1-\frac{1}{n}}{1+2\left(\frac{1}{n}\right)}\quad\Rightarrow\quad F=\frac{n-1}{n+2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 45:

P , Q , R son constantes que satisfacen la siguiente relación:

$P+Q\,tg^Rx=\frac{1}{1+senx}+\frac{1}{cscx-1}$

Calcular el producto $P\times Q\times R$.

A) – 6 B) 2 C) 4 D) 8 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Sea: $F=P+Qtg^Rx$

* Pero:

$F=\frac{1}{1+senx}+\frac{1}{cscx-1}$

$F=\frac{1}{1+senx}+\frac{1}{\frac{1}{senx}-1}$

$\Rightarrow F=\frac{1}{1+senx}+\frac{senx}{1-senx}$

$\Rightarrow F=\frac{(1-senx)+(1+senx)senx}{(1+senx)(1-senx)}$

$\Rightarrow F=\frac{1-senx+senx+sen^2x}{1-sen^2x}$

$\Rightarrow F=\frac{1}{\cos^2x}+\frac{sen^2x}{\cos^2x}=sec^2x+tg^2x$

$\Rightarrow F=1+tg^2x+tg^2x$

$\Rightarrow F==1+2tg^2x=P+Qtg^Rx$

* Se deduce:

$P=1\,;\,Q=2\,;\,R=2\ \Rightarrow\ PQR=4$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Marcar (V) o (F)

( ) $Sen^2\theta+Cos^2\theta=1$

( ) $Tan\theta\ Ctg\theta=1$

( ) $Tan\theta\ Cos\theta=Sen\theta$

A)VFF B)VVV C)FFF
D)VFV E)FVV

02 Calcular :

$M=Tan\alpha Ctg\alpha+Sen\theta Csc\theta$

A)2 B) 3 C) 4 D)5 E) 6

03 Reducir:

$P=Tan\alpha Cos\alpha-Sen\alpha$

A) 1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

04 Simplificar: $E=\frac{Sen^2x+Cos^2x}{Cosx}$

A)Cscx B) Secx C)Tgx
D)Ctgx E)Senx

05 Marcar (V) o (F):

( ) $Tanx=\frac{Senx}{Cosx}$ ( ) $Secx=\frac{1}{Senx}$

( ) $Cotx=\frac{Cosx}{Senx}$

A)VFV B)VVV C)FFF
D)VFF E)VVF

06 Calcular:

$G=Sen^2x+Cos^2x+Tg^2x$

A)Secx B) Sec²x C)Sen²x
D)1 E)2

07 Simplificar:

$M=\frac{Sen^2x+1-Cos^2x}{Tanx\ Senx\ Cosx}$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E) 5

08 Si : $Sen\alpha=Cos\theta$

calcular: $Sec\theta-Csc\alpha$

A) 1 B)0 C)2 D)3 E) 4

09 Reducir : $E=\frac{Sec^2x-Tg^2x}{Cosy}$

A) Secy B)Tgy C)Sen x
D) Cosx E)Secx

10 Si : $Senx+Cosx=2$

calcular: $SenxCosx$

A) 1,2 B)1,3 C)1,4 D)1,5 E) 1,6

11 Si : $Tgx+1=Secx$

Calcular: $2Tgx+1$

A) 0 B)1 C)2 D)3 E) 4

12 Si se sabe que: $Tgx+Ctgx=3$

calcular: Tg^2x+Ctg^2x

A) 0 B)1 C)2 D)7 E) 9

13 Calcular:

$M=\frac{Senx\ Secx-Tgx}{4}$

A) 0 B)1 C)2 D)3 E) 4

14 Si se sabe que:

$Senx\ Cosx=\frac{3}{2}$

calcular $(Senx+Cosx)^2$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E) 5

15 Si: $Tgx+Ctgx=2$

calcular: $SecxCscx$

A) 1 B)2 C)3 D)4 E) 5

16 Si: $Sec^2x+Csc^2x=\frac{1}{16}$

Calcular: $\sqrt{SenxCosx}$

A) 2 B)4 C)8 D)9 E) 1/2

17 Calcular:

$M=\frac{2SenxCosx+1}{(Senx+Cosx)^2}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(18) Si: $Senx + Cosx = \sqrt{2}$

calcular: $SecxCscx$

(19) Simplificar:

$$M = \frac{Secx - Cosx}{Senx}$$

A) Tgx B) Ctgx C) Senx
D) Cosx E) Secx

(20) Reducir: $N = \frac{Cscx - Senx}{Cosx}$

A) Tgx B) Ctgx C) Senx
D) Cosx E) Secx

PRIMERA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) Sabiendo:

$A = CtgxCosx - Cscx(1 - 2Sen^2x)$

$B = Tgx + \frac{Cosx}{1+Senx}$

hallar: $1+(AB)^2$

A) Sen^2x B) Cos^2x C) Sec^2x
D) Tg^2x E) Csc^2x

(02) Simplificar:

$$\frac{1}{1+Sec^2x}+\frac{1}{1+Ctg^2x}+\frac{1}{1+Cos^2x}+\frac{1}{1+Tg^2x}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Csc^2x

(03) Simplificar:

$$A=\frac{1}{(Secx-Cosx)(Cscx-Senx)}-\frac{Secx}{Cscx}$$

A) Senx B) Cosx C) Tgx
D) Ctgx E) Secx

(04) Reducir:

$$K=\left(\frac{Cosx}{1-Senx}-Tgx\right)\left(\frac{Cscx+Ctgx}{Secx+1}\right)$$

A) Cscx B) Secx C) Cosx
D) Senx E) Tgx

(05) Calcular el valor de:

$$A=[(SecxCscx-Tgx)^2-Cos^2x]Sen^2x$$

A) Cos^2x B) Cos^4x C) Sen^2x
D) Sen^4x E) Sen^2xCos^2x

(06) Simplificar:

$$A=Tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\frac{Sen(\pi-x)}{1-Sen\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

A) Cscx B) Senx C) Secx
D) Cosx E) Tgx

(07) Si: 0°< x <90°, simplificar:

$$A=\sqrt{\frac{Tgx+Ctgx+2}{\sqrt{Sec^2x+Csc^2x}}}-Senx$$

A) Senx B) Cosx C) 2Senx
D) 2Cosx E) Senx –Cosx

(08) Si:

$$A=\frac{1}{Cos^2 1°}+\frac{2}{Cos^2 2°}+\frac{3}{Cos^2 3°}+....$$

$$B=\frac{1}{Ctg^2 1°}+\frac{2}{Ctg^2 2°}+\frac{3}{Ctg^2 3°}+....$$

hallar la diferencia de **A** y **B** si cada uno tiene "*n*" términos

A) n(n +1) B) n(n–1) C) n –1
D) $\frac{n}{2}(n-1)$ E) $\frac{n}{2}(n+1)$

(09) Simplificar:

$A=Tg^2x(1-Sec^2x-Sec^4x)+Sec^6x-1$

A) Tg^2x B) $2Tg^2x$ C) $3Tg^2x$
D) $-3Tg^2x$ E) $-2Tg^2x$

(10) Si: $2Cos\theta+Sen\theta=2$

Calcular: $Tg\theta$

A) 1/3 B) 3 C) 3/4 D) 4/3 E) 2/3

(11) Si: $\sqrt{2}Senx+\sqrt{7}Cosx=Tg^2\frac{\pi}{3}$

Calcular: $K=\sqrt{8}Tgx+Secx$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

(12) Si: $\frac{1}{Cosx}+\frac{1}{Ctgx}=2$

Calcular: A=Senx + Cosx

A) 1/5 B) 2/5 C) 3/5 D) 6/5 E) 7/5

(13) Si: $Sec\alpha+Csc\alpha=m$

hallar:

$$K=\frac{2+Sen\alpha Sec\alpha+Cos\alpha Csc\alpha}{\sqrt{1+2Sen\alpha Cos\alpha}}$$

α: agudo

A) m–1 B) m+1 C) m
D) 2m E) 2m+1

(14) Si: $Secx+Cscx=2\sqrt{6}$

calcular: A=Tgx+Ctgx ; 0°<x<90°

A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

(15) Expresar en función de *Ctgx* la expresión:

$$A=\frac{Sec^2xCsc^2x+Sec^2x-Csc^2x-1}{Tg^2x-Csc^2x+1}$$

A) $\frac{1+Ctg^2x}{1-Ctg^4x}$ B) $\frac{2+Ctg^2x}{1-Ctg^4x}$ C) $\frac{1+Ctg^4x}{1-Ctg^2x}$
D) $\frac{2+Ctg^4x}{1-Ctg^2x}$ E) $\frac{1-Ctg^4x}{1-Ctg^2x}$

(16) Eliminar "*x*" a partir de:

$$\frac{a}{Secx+Tgx}=\frac{b}{Secx-Tgx}=\frac{c}{Senx}=\frac{d}{Cosx}$$

A) $a^2+b^2=cd$ B) $a^2-b^2=ab$
C) $c^2+d^2=ab$ D) $c^2-d^2=ab$
E) $a^2+c^2=bd$

(17) Simplificar:

$$A=\sqrt{\frac{1+Senx}{1-Senx}}+\sqrt{\frac{Secx-Tgx}{Secx+Tgx}}$$

0°< x <90°

A) 2Senx B) 2Cosx C) 2Cscx
D) 2Secx E) 2Tgx

(18) Simplificar:

$$A=\frac{1+Senx+Cosx}{1-Senx+Cosx}$$

A) Secx –Tgx B) Secx – Ctgx
C) Cscx –Tgx D) Secx + Tgx
E) Cscx – Ctgx

(19) Si: Tgx+ Senx=a
Tgx – Senx=b

Eliminar *x*

A) $a^2-b^2=16ab$ B) $(a^2-b^2)^2=16ab$
C) $(a^2+b)^2=4ab$ D) $(a^2+b^2)^2=16ab$
E) $(a^2-b^2)=4ab$

(20) Si:

$$\frac{Tg\theta}{Senx}-\frac{Tg\Phi}{Tgx}=Tg^2\theta-Tg^2\Phi$$

Hallar *Cosx*

A) $Tg\theta Tg\Phi$ B) $Ctg\theta Ctg\Phi$ C) $Tg\theta Ctg\Phi$
D) $Cot\theta Tg\Phi$ E) $-Tg\theta Tg\Phi$

SEGUNDA PRÁCTICA DIRIGIDA

(01) Reducir:

$Sen\theta Cos\theta-\sqrt{(1-Sen^2\theta)(1-Cos^2\theta)}$; "θ" ∊ I C

A) 1 B) 0 C) – 1
D) $4sen\theta\cos\theta$ E) $-4sen\theta\cos\theta$

(02) Reducir:

$N=Cos\theta-\sqrt{1+2Cos\theta\times Sen\theta}$; 0°<θ<90°

A) $sen\theta$ B) $-sen\theta$ C) 0
D) $Cos\theta$ E) $-Cos\theta$

03 Reducir:

$$C=(1+Tan^2\theta)^2-(Sec^2\theta-1)^2-2Tan^2\theta$$

A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) 1

04 Simplificar:

$$Z=\frac{Csc^4\theta-Cot^2\theta-1}{(Csc\theta+Cot\theta)(Csc\theta-Cot\theta)(1+Cot^2\theta)}$$

05 Reducir:

$$H=Cos\theta Tan\theta-Cot\theta Sen\theta+Sen(90^\circ-\theta)$$

A) $-Cos\theta$ B) $Cos\theta$ C) 0
D) $-Sen\theta$ E) $Sen\theta$

06 Simplificar:

$$V=\frac{Cos\theta}{1-Sen\theta}-\frac{Cos\theta}{1+Sen\theta}$$

A) $-2Tan\theta$ B) $2Tan\theta$ C) $2Sec\theta$
D) $-2Cot\theta$ E) $2Cot\theta$

07 Reducir:

$$\sqrt{\frac{Tan\theta Cot\theta}{Cos^2\theta}-\frac{Cos\theta Sec\theta}{Sen^2\theta}+\frac{Csc\theta Sen\theta}{Tan^2\theta}}$$

A) $Tan^2\theta$ B) $Tan\theta$ C) $Sec^2\theta$
D) $Sec\theta$ E) $Sec\theta^{-1}$

08 Si la siguiente igualdad:

$$\frac{Tan\theta}{Cot\theta}+\frac{Cos\theta}{Sec\theta}+\frac{Sen\theta}{Csc\theta}=\left[-(A^2-1)\right]^{-1}$$

Es una entidad triginométrica.

Hallar "A"

A) $sen\theta$ B) $Cos\theta$ C) $Cos2\theta$
D) $Cos\theta$ E) $-Sen\theta$

09 Reducir:

$$2\sqrt{(1-Cos^2\theta)(1-Sen^2\theta)}-(Cos\theta+Sen\theta)^2$$

; "θ" $\in$ IC

A) 0 B) 1 C) -1
D) $4sen\theta Cos\theta$ E) $-4Sen\theta Cos\theta$

10 Reducir:

$$M=\sqrt{1+2Sen\theta\times Cos\theta}-Sen\theta;\ 0^\circ<\theta 90^\circ$$

A) $Sen\theta$ B) $-Sen\theta$ C) 0
D) $Cos\theta$ E) $-Cos\theta$

11 Reducir:

$$Y=\frac{Sec^4\theta-Tan^2\theta-1}{(Sec\theta+Tan\theta)(Sec\theta-Tan\theta)(1+Tan^2\theta)}$$

A) 1 B) $Sec^2\theta$ C) $Sec\theta$
D) $Tan^2\theta$ E) $Tan\theta$

12 Reducir:

$$D=(1+Cot^2\theta)^2-(Csc^2\theta-1)^2-2Cot^2\theta$$

A) 1 B) -1 C) 0 D) 2 E) -2

13 Reducir:

$$Tan\theta Cos\theta+Sen\theta Cot\theta-Cos(90^\circ-\theta)$$

A) $Cos\theta$ B) $-Cos\theta$ C) 0
D) $Sen\theta$ E) $-Sen\theta$

14 Simplificar:

$$U=\frac{Sen\theta}{1+Cos\theta}-\frac{Sen\theta}{1-Cos\theta}$$

A) $2Cot\theta$ B) $2Tan\theta$ C) $-2Cot\theta$
D) $-2Tan\theta$ E) $2Csc\theta$

15 Reducir:

$$\frac{Cot\theta Tan\theta}{Sen^2\theta}-\frac{Sen\theta Csc\theta}{Cos^2\theta}+\frac{Sec\theta\ Cos\theta}{Cot^2\theta}$$

Siendo "θ" la medida de un ángulo agudo.

A) $Cot\theta$ B) $Cot^2\theta$ C) $Csc\theta$
D) $Csc^2\theta$ E) $Csc\theta-1$

16 Si la siguiente igualdad:

$$\frac{Cot\theta}{Tan\theta}+\frac{Cos\theta}{Sec\theta}+\frac{Sen\theta}{Csc\theta}=-(A-1)^{-1}$$

Es una identidad trigonométrica; hallar "A"

A) $Sen^2\theta$ B) $-Sen^2\theta$ C) $Cos^2\theta$
D) $-Cos^2\theta$ E) $Cos\theta$

17 Simplificar:

$$A=(Sec\theta-1)\times(Csc\theta+Cot\theta)$$

A) 1 B) $Tan\theta$ C) $Tan^2\theta$
D) $Cot\theta$ E) $Cot^2\theta$

18 El equivalente de:

$$\frac{1+Cot18^\circ+Csc18^\circ}{1+Tan18^\circ+Sec18^\circ}\ es$$

A) 1 B) $Sen72^\circ$ C) $Cos72^\circ$
D) $Tan72^\circ$ E) $Cot72^\circ$

19 Simplificar la expresión:

$$E=\frac{Tgx+Secx}{Secx-Cosx+Tgx}$$

A) $Senx$ B) $Cosx$ C) $Secx$
D) $Cscx$ E) Tgx

20 Reducir la expresión:

$$E=\frac{Cscx-\sqrt{Ctg^2x+Cos^2x}}{Secx-\sqrt{Tg^2x-Sen^2x}}$$

A) Sen^2x B) Cos^2x C) Tg^2x
D) Tgx E) $Ctgx$

21 Simplificar la expresión:

$$E=Sen^3x+\sqrt{1+Cos^2x-Cos^4x-Cos^6x}$$

A) $Senx$ B) $Cosx$ C) Tgx
D) $2Senx$ E) $2Cosx$

22 Reducir la expresión:

$$E=(1+Senx+Cosx)\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Senx}}$$

A) $2Senx$ B) $2Cosx$ C) $2Tgx$
D) $Senx$ E) $Cosx$

23 Reducir la expresión:

$$M=\frac{1+Senx+Cosx}{1+Senx}+Secx(Cscx-1)$$

A) $1+senx$ B) $1+cosx$ C) $1+tgx$
D) $1+ctgx$ E) $1+cscx$

24 Reducir la expresión:

$$(Sen^2x-Cos^2x)(Sen^4x+Cos^4x)+Cos^8x$$

A) Sen^6x B) Cos^6x C) Sen^8x
D) Cos^4x E) 1

25 Dada la igualdad:

$$Senx+Cosx=\frac{2}{3}$$

Calcular el valor de:

$$M=Tgx+Ctgx$$

A) $-1,8$ B) $-0,9$ C) $-2,4$
D) $-2,7$ E) $-3,6$

CLAVES DE LA PRACTICA DE EJERCICIOS # 1

1)B	2)A	3)B	4)B	5)A	6)B	7)B	8)B	9)A	10)D
11)B	12)D	13)A	14)B	15)B	16)A	17)B	18)B	19)A	20)B

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)B	3)D	4)A	5)B	6)A	7)B	8)E	9)B	10)D
11)E	12)E	13)C	14)B	15)B	16)C	17)D	18)D	19)B	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)B	3)E	4)D	5)E	6)B	7)B	8)A	9)C	10)D
11)D	12)A	13)A	14)C	15)B	16)C	17)B	18)D	19)D	20)D
21)D	22)A	23)D	24)C	25)E					

ÁNGULO COMPUESTO

CAPÍTULO 121

OBJETIVOS :

• *Desarrollar fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y/o diferencia de ángulos; para calcular el valor de razones trigonométricas de ángulos desconocidos.*

• *Aplicar convenientemente las fórmulas en la simplificación de expresiones y en la resolución de problemas condicionales.*

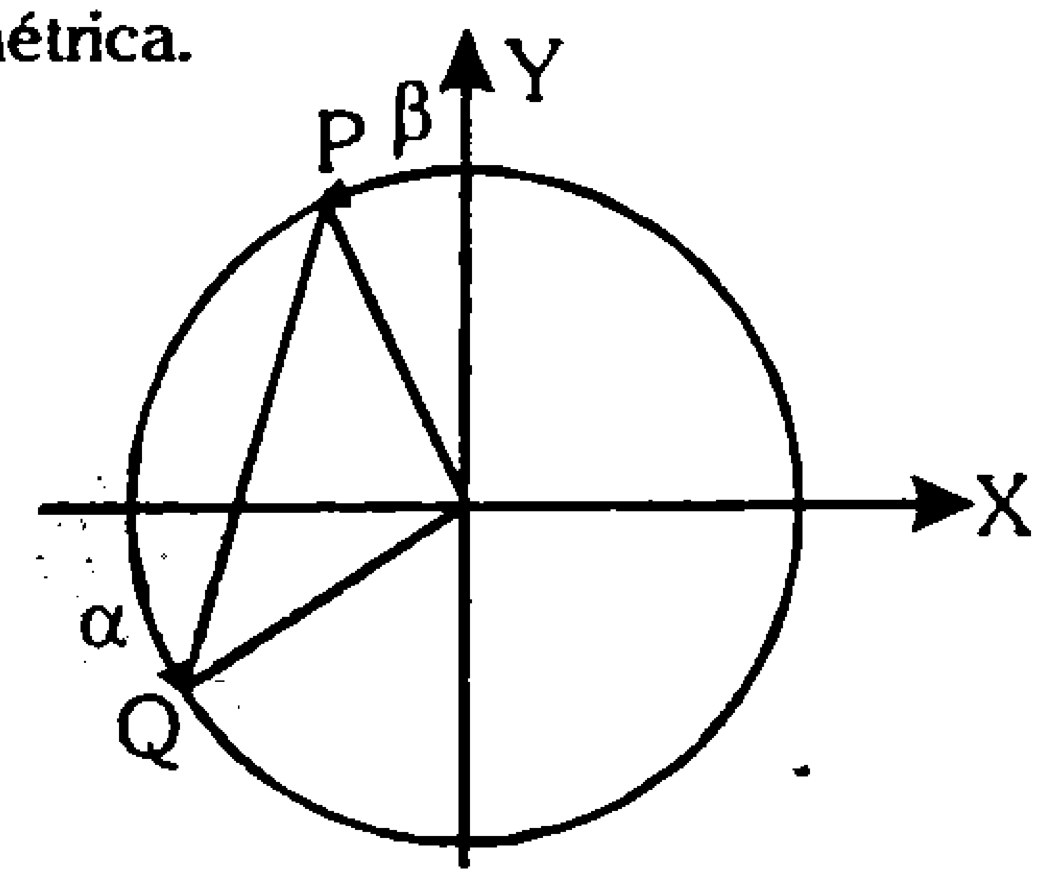
INTRODUCCIÓN :

Este capítulo constituye la generalización de las identidades trigonométricas y esto se da porque a partir de aquí encontraremos relaciones entre las identidades que efectúen entre sí operaciones algebraicas de adición o sustracción.

En este capítulo compararemos que las identidades trigonométricas no son algebraicas como por ejemplo:

$Sen(x+y) = Senx + Seny$, de este modo el resultado del operador *(sen)* y el número *(x+y)*, no es una operación algebraica de simple multiplicación, sino una operación de tipo trascendente.

Tomemos dos puntos cualesquiera $P(\cos\beta\,;\,sen\beta)$ y $Q(\cos\alpha\,;\,sen\alpha)$ que están en una circunferencia trigonométrica.



Entonces calculando la distancia *PQ* :

$$PQ=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2}$$

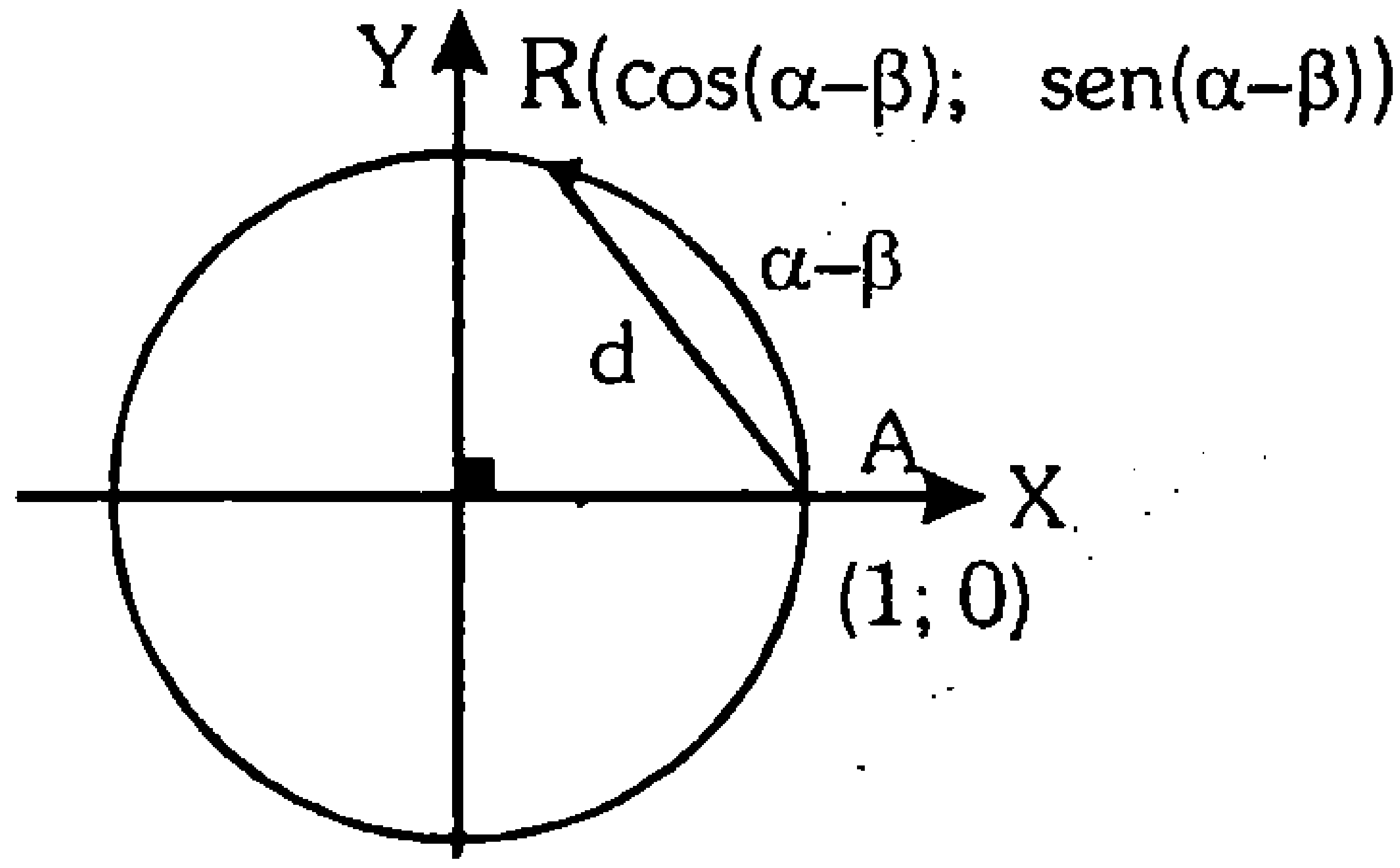
$$\Rightarrow\ PQ=\sqrt{2-2\cos\alpha\cos\beta-2sen\alpha sen\beta}\quad ...(I)$$

$P = (Cos\beta; Sen\beta)$

$Q = (Cos\alpha; Sen\alpha)$

$\overset{\frown}{QP} = \alpha - \beta$

Ahora tomemos un arco igual a $(\alpha-\beta)$ en el primer cuadrante con una cuerda "*d*" :



de los gráficos $QP = AR = d$

$$d=\sqrt{(1-\cos(\alpha-\beta))^2+(0-sen(\alpha-\beta))^2}$$

$$\Rightarrow\ d=\sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)}............(II)$$

Luego de (I) = (II) tenemos :

$$\Rightarrow 2-2Cos(\alpha-\beta)=2-2(Cos\alpha Cos\beta+Sen\alpha Sen\beta)$$

$$\therefore\ \boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+sen\alpha\ sen\beta}\ \ .....\ (i)$$

* Sustituyendo β por –β

$$\Rightarrow Cos(\alpha-(-\beta))=Cos\alpha\,Cos(-\beta)+Sen\alpha Sen(-\beta)$$

$$\therefore\ \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-sen\alpha\ sen\beta}\ \ .....\ (ii)$$

* Se sabe que : $Sen(\alpha+\beta)=Cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)$

$$Q=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(sen\alpha-sen\beta)^2}$$

$$\Rightarrow Sen(\alpha+\beta)=Cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\alpha\right)$$

$$\Rightarrow Sen(\alpha+\beta)=Cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)Cos\alpha+Sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)Sen\alpha$$

$$\therefore\ \boxed{Sen(\alpha+\beta)=Sen\alpha\ Cos\beta+Cos\alpha Sen\beta}\ \ .....\ (iii)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} * \ Cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=Sen\beta \\ * \ Sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=Cos\beta \end{array}}$$

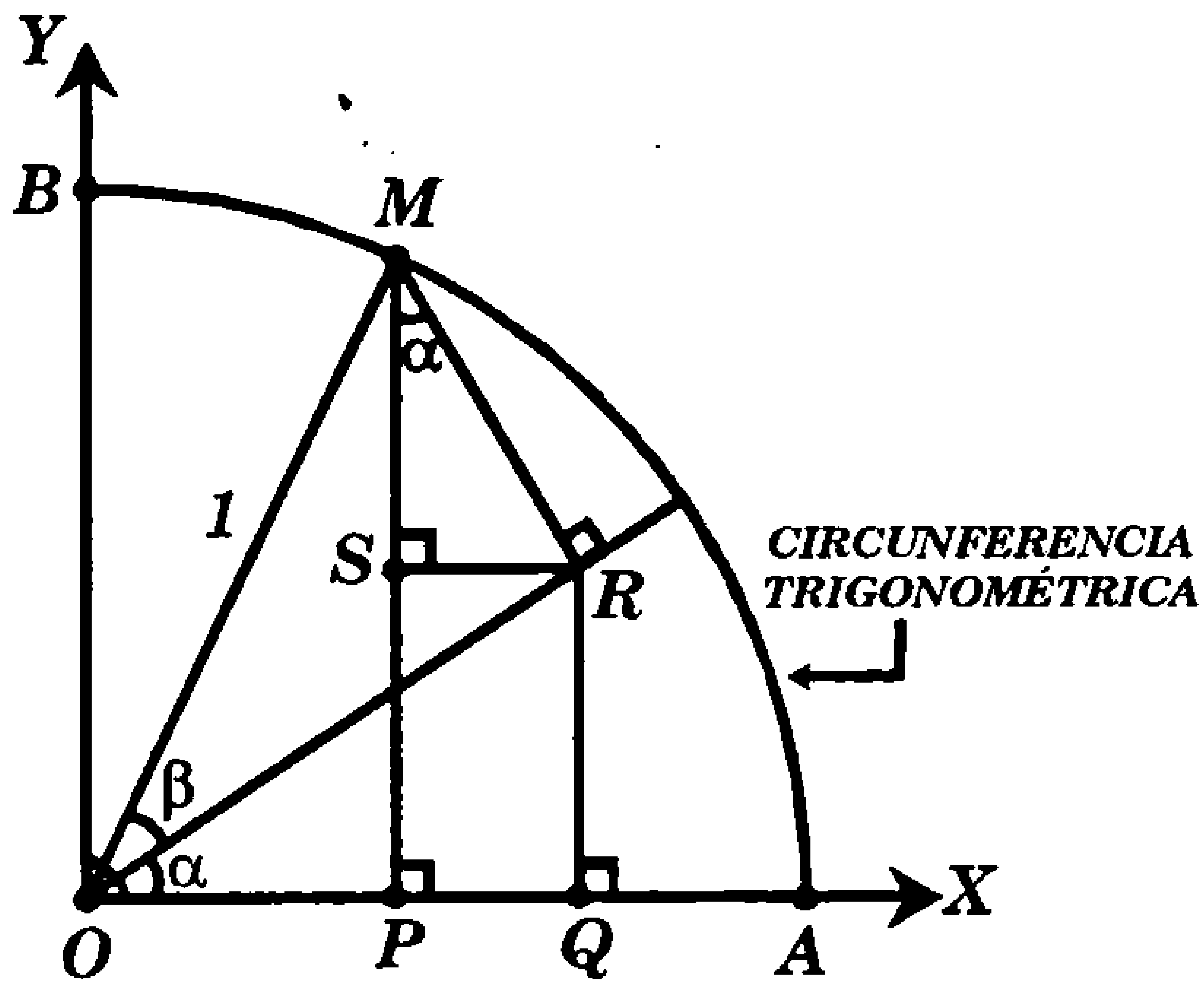
* Sustituyendo β por –β :

$$\Rightarrow Sen(\alpha+(-\beta))=Sen\alpha\,Cos(-\beta)+Cos\alpha\,Sen(-\beta)$$

$$\therefore\ \boxed{Sen(\alpha-\beta)=Sen\alpha\ Cos\beta-Cos\alpha Sen\beta}\ \ .....\ (iv)$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA LA SUMA DE DOS ARCOS

A partir del gráfico :



* $Sen(\alpha+\beta)=?$
* $Sen(\alpha+\beta)=MP=PS+SM=QR+SM$
* $\triangle OQR \Rightarrow QR=\underbrace{OR}_{cos\beta}Sen\alpha=Sen\alpha\times Cos\beta$
* $\triangle MSR \Rightarrow SM=\underbrace{MR}_{sen\beta}Cos\alpha=Cos\alpha\times Sen\beta$
* Luego : $\boxed{Sen(\alpha+\beta)=Sen\alpha Cos\beta+Cos\alpha Sen\beta}$

* $Cos(\alpha+\beta)=?$
* $Cos(\alpha+\beta)=OP=OQ-PQ=OQ-SR$
* $OQR \Rightarrow OQ=\underbrace{OR}_{cos\beta}Cos\alpha=Cos\alpha Cos\beta$
* $\triangle MSR \Rightarrow SR=\underbrace{MR}_{Sen\beta}Sen\alpha=Sen\alpha Sen\beta$
* Luego : $\boxed{Cos(\alpha+\beta)=Cos\alpha Cos\beta-Sen\alpha Sen\beta}$

* $Tan(\alpha+\beta)=?$
* $Tan(\alpha+\beta)=\dfrac{Sen(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{Sen\alpha\times Cos\beta+Cos\alpha\times Sen\alpha}{Cos\alpha\times Cos\beta-Sen\alpha\times sen\beta}$
* Dividiendo a la expresión por $Cos\alpha Cos\beta$

$$*\ Tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{Sen\alpha\times Cos\beta}{Cos\alpha\times Cos\beta}+\dfrac{Cos\alpha\times Sen\beta}{Cos\alpha\times Cos\beta}}{\dfrac{Cos\alpha\times Cos\beta}{Cos\alpha\times Cos\beta}-\dfrac{Sen\alpha\times Sen\beta}{Cos\alpha\times Cos\beta}}$$

* Luego :

$$\boxed{Tan(\alpha+\beta)=\dfrac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}}$$

OBSERVACIONES :

$$\boxed{Cot(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{Tan(\alpha+\beta)}}\quad\boxed{Sec(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{Cos(\alpha+\beta)}}$$

$$\boxed{Csc(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{Sen(\alpha+\beta)}}$$

EJEMPLO :

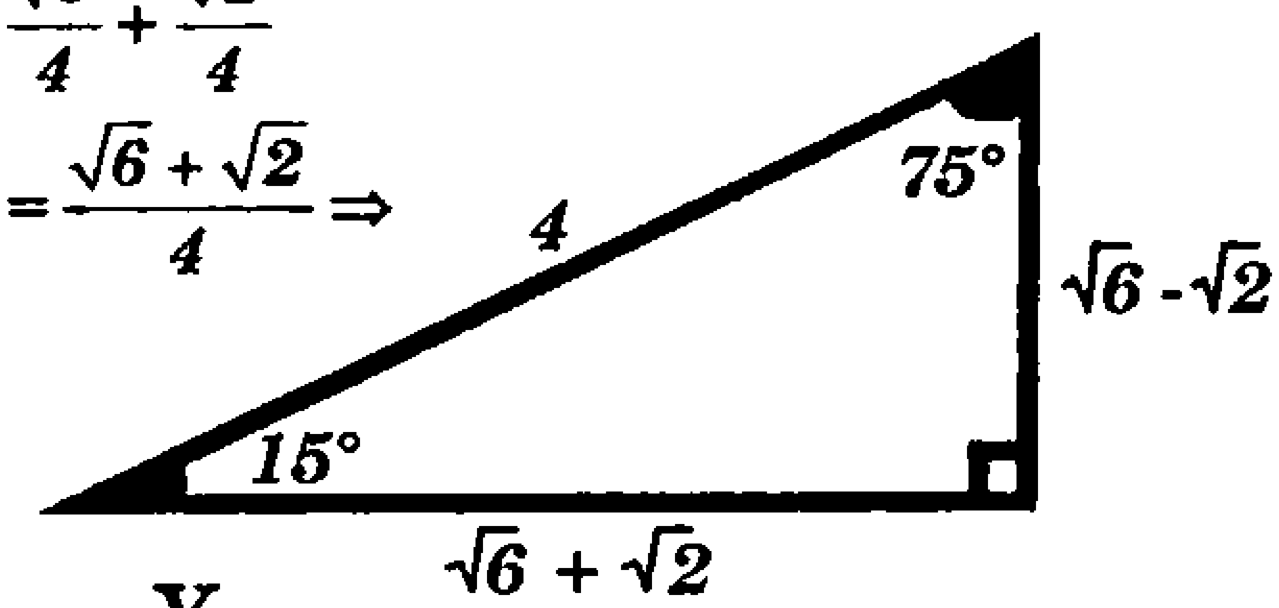
* $Sen\ 75° = ?$

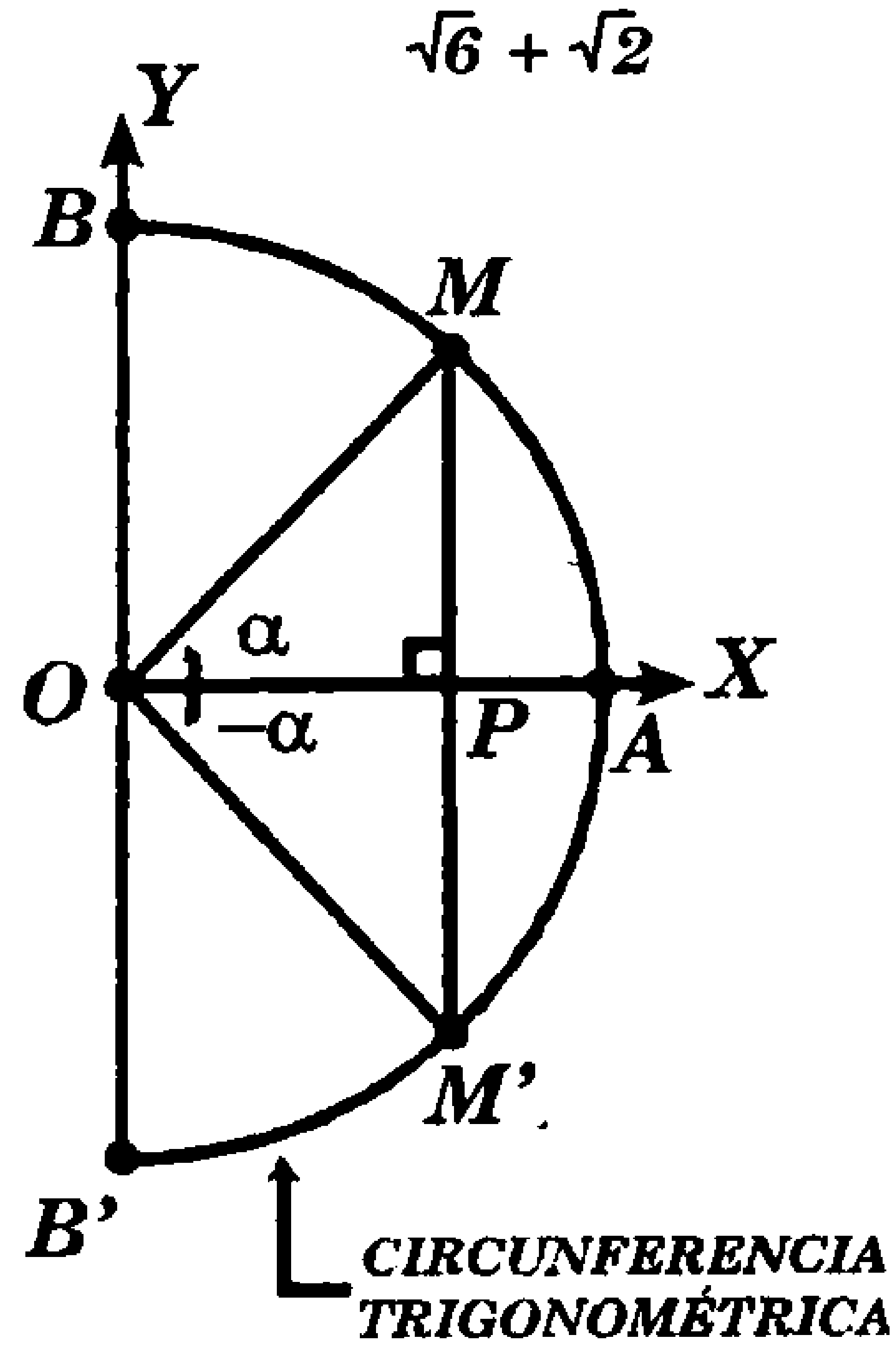
$$Sen(45°+30°)=Sen45°\times Cos30°+Sen30°\times Cos45°$$

$$Sen75°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sen75°=\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow Sen75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$





De la circunferencia trigonométrica se observa que :

$Sen(-\alpha)=M'P$

$Sen(\alpha)=MP$

$\Rightarrow M'P=-MP \Rightarrow \boxed{Sen(-\alpha)=-Sen\alpha}$

* $Cos(-\alpha)=OP$

$Cos(\alpha)=OP \Rightarrow \boxed{Cos(-\alpha)=Cos\alpha}$

Así mismo :

* $\boxed{Cot(-\alpha)=-Cot\alpha}$
* $\boxed{Sec(-\alpha)=Sec\alpha}$
* $\boxed{Csc(-\alpha)=-Csc\alpha}$
* $\boxed{Tan(-\alpha)=-Tan}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA LA DIFERENCIA DE DOS ARCOS

$Sen(\alpha+\beta)=?$

* $Sen[\alpha+(-\beta)]=$

$Sen\alpha \times \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\theta} + Cos \times \underbrace{Sen(-\theta)}_{-Sen\theta}$

* Luego:

$$\boxed{Sen(\alpha-\beta)=Sen\alpha Cos\beta - Cos\alpha Sen\beta}$$

$Cos(\alpha-\beta)=?$

* $Cos[\alpha+(-\beta)]=$

$Cos\alpha \times \underbrace{Cos(-\beta)}_{Cos\beta} - Sen\alpha \times \underbrace{Sen(-\beta)}_{-Sen\alpha}$

* Luego :

$$\boxed{Cos(\alpha-\beta)=Cos\alpha Cos\beta + Sen\alpha sen\beta}$$

$Tan(\alpha-\beta)=?$

* $Tan[\alpha+(-\beta)]=\dfrac{Tan\alpha + \overbrace{Tan(-\beta)}^{-Tan\beta}}{1-Tan\alpha \times \underbrace{Tan(-\beta)}_{-Tan\beta}}$

* Luego :

$$\boxed{Tan(\alpha-\beta)=\frac{Tan\alpha - Tan\beta}{1+Tan\alpha Tan\beta}}$$

OBSERVACIÓN :

Así mismo :

$$\boxed{Cot(\alpha-\beta)=\frac{1}{Tan(\alpha-\beta)}}$$

$$\boxed{Sec(\alpha-\beta)=\frac{1}{Cos(\alpha-\beta)}}$$

$$\boxed{Csc(\alpha-\beta)=\frac{1}{Sen(\alpha-\beta)}}$$

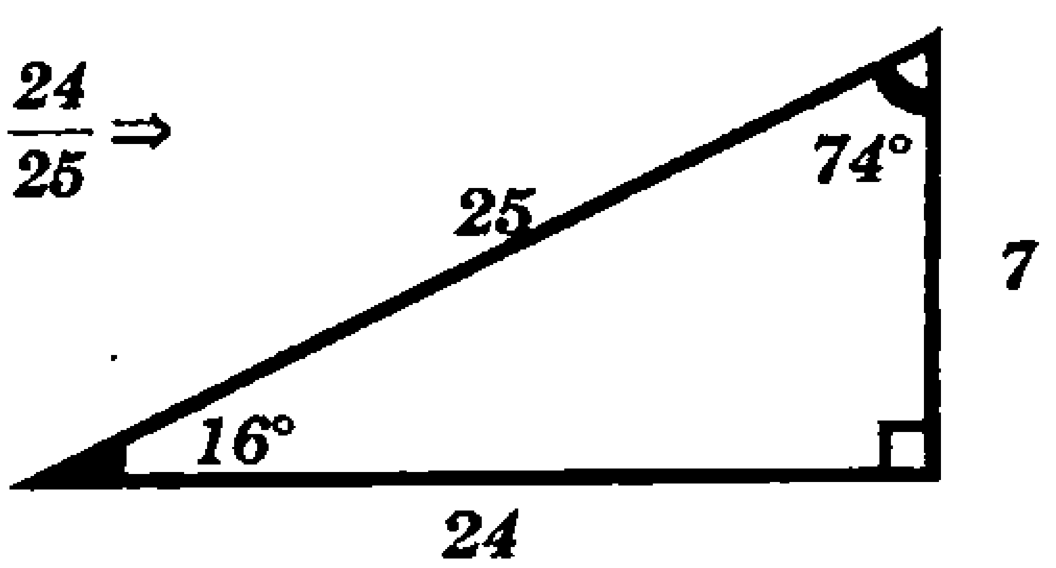
EJEMPLOS :

* $Cos16°=?$

$Cos(53°-37°)=Cos53°Cos37°+Sen53°Sen37°$

$Cos16°=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} \Rightarrow Cos16°=\frac{12}{25}+\frac{12}{25}$

$\Rightarrow Cos16°=\frac{24}{25}\Rightarrow$

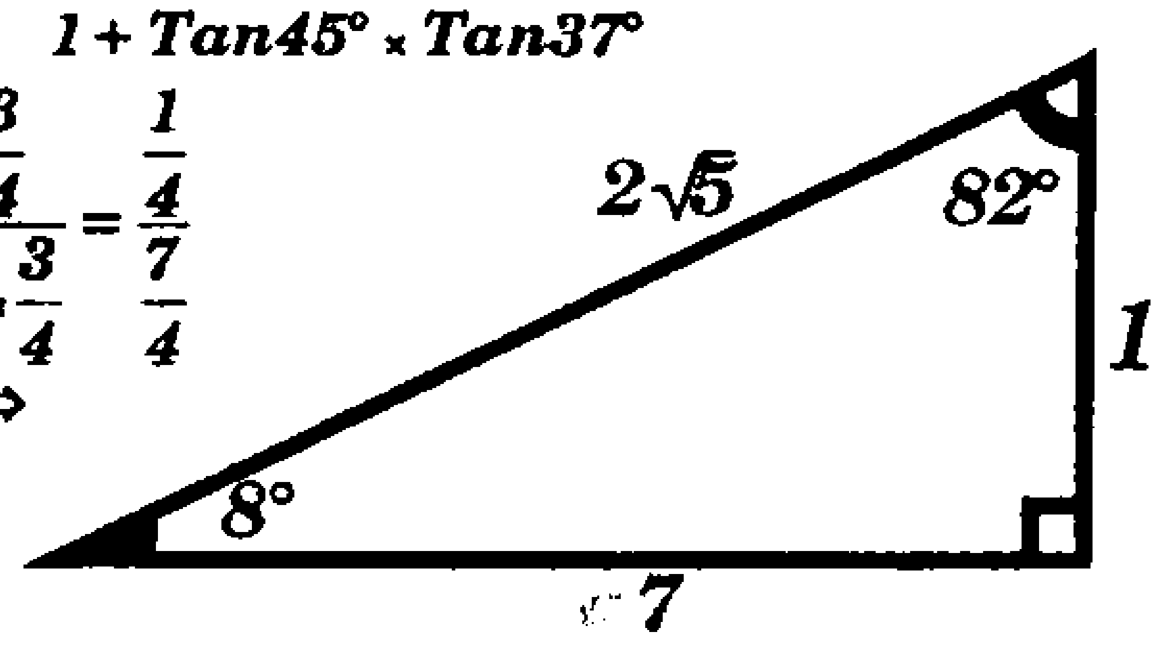


* $Tan8°=?$

$Tan(45°-37°)=\dfrac{Tan45°-Tan37°}{1+Tan45°\times Tan37°}$

$Tan16°=\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+1\times\frac{3}{4}}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}$

$\Rightarrow Tan8°=\frac{1}{7}\Rightarrow$



PROPIEDADES :

$$\boxed{Sen(\alpha+\beta)Sen(\alpha-\beta)=Sen^2\alpha-Sen^2\beta}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

$Sen(\alpha+\beta)=Sen\alpha\times Cos\beta+Cos\alpha\times Sen\alpha...(I)$

$Sen(\alpha-\beta)=Sen\alpha\times Cos\beta-Cos\alpha\times Sen\beta...(II)$

Multiplicando miembro a miembro $I\times II$, tenemos:

$Sen(\alpha+\beta)\times Sen(\alpha-\beta)=$

$[(Sen\alpha\times Cos\beta)^2-(Cos\alpha\times Sen\beta)^2]$

$=Sen^2\alpha\times Cos^2\beta-Cos^2\beta\times Sen^2\beta$

$=Sen^2\alpha\times(1-Sen^2\beta)-Cos^2\beta\times Sen^2\beta$

$=Sen^2\alpha-Sen^2\alpha\times Sen^2\beta-Sen^2\beta+Sen^2\alpha\times Sen^2\beta$

Y $Sen(\alpha+\beta)\times Sen(\alpha-\beta)=Sen^2\alpha-Sen^2\beta$

EJEMPLOS :

$Sen(45°+\theta)\times Sen(45°-\theta)$

$=Sen^2 45°-Sen^2\theta=\frac{1}{2}-Sen^2\theta$

$Sen^2 3x - Sen^2 2x$

$=Sen(3x+2x)\times Sen(3x-2x)=Sen5x\times Senx$

$$\boxed{Tan\alpha+Tan\beta+Tan(\alpha+\beta)Tan\alpha Tan\beta=Tan(\alpha+\beta)}$$

DEMOSTRACIÓN:

* Sabemos que :

$$\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha\times Tan\beta}=Tan(\alpha+\beta)$$

$\Rightarrow Tan\alpha + Tan\beta = Tan(\alpha+\beta)[1-Tan\alpha\times Tan\beta]$

$\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta=Tan(\alpha+\beta)-Tan(\alpha+\beta)Tan\alpha Tan\beta$

$\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta+Tan(\alpha+\beta)Tan\alpha Tan\beta=Tan(\alpha+\beta)$

EJEMPLOS :

* $M=Tan^2\theta+Tan\theta+\underbrace{Tan3\theta}_{Tan(2\theta+\theta)}\times Tan2\theta Tan\theta$

$\Rightarrow M=Tan(2\theta+\theta)\Rightarrow M=Tan3\theta$

* $N=Tan70°+Tan10+\underbrace{Tan80°}_{Tan(70°+10°)}\times Tan70°\times Tan10°$

$\Rightarrow N=Tan(70°+10°) \Rightarrow N=Tan80°$

$\bullet P=Tan55°+Tan5°+\underbrace{\sqrt{3}}_{\underset{Tan(55°+5°)}{Tan60°}}\times Tan55°\times Tan5°$

$\Rightarrow P=Tan(55°+5°) \Rightarrow P=Tan60°=3$

$=Tan13°+Tan32°+\underbrace{1}_{\underset{Tan(13°+32°)}{Tan45°}}\times Tan13°\times Tan32°$

$\Rightarrow Q=Tan(13°+32°)=Tan45°$

Si :

$\alpha+\beta+\theta=180° \Rightarrow \boxed{Tan\alpha+Tan\beta+Tan\theta=Tan\alpha Tan\beta Tan\beta}$

DEMOSTRACIÓN :

* Por condición :

$\alpha+\beta+\theta=180° \Rightarrow \alpha+\beta=180°-\theta$

$\Rightarrow Tan(\alpha+\theta)=Tan(180°-\theta) \Rightarrow \dfrac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha\times Tan\beta}=-Tan\theta$

$\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta=-Tan\theta\times(1-Tan\alpha\times Tan\beta)$

$\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta=-Tan\theta+Tan\alpha\times Tan\beta\times Tan\theta$

$\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta+Tan\theta=Tan\alpha\times Tan\beta\times Tan\theta$

EJEMPLO:

En un ΔABC :

$TanA=3$ y $TanB=2$; Hallar: $TanC$

RESOLUCIÓN:

* En todo ΔABC: $A+B+C=180°$, entonces:
* Se cumplirá:

$$\underbrace{TanA}_{3}+\underbrace{TanB}_{2}+\underbrace{TanC}_{?}=\underbrace{TanA}_{3}\times\underbrace{TanB}_{2}\times\underbrace{TanC}_{?}$$

* Reemplazando datos :

$3+2+TanC=3\times 2\times TanC \Rightarrow 5+TanC=6\times TanC$

$\Rightarrow 5=5\times TanC \Rightarrow TanC=1$

EJEMPLO:

Calcular :

$$E=Tan\frac{\pi}{7}+Tan\frac{2\pi}{7}+Tan\frac{4\pi}{7}-Tan\frac{\pi}{7}Tan\frac{2\pi}{7}Tan\frac{4\pi}{7}$$

RESOLUCIÓN :

* Se nota que : $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$

$$\Rightarrow Tan\frac{\pi}{7}+Tan\frac{2\pi}{7}+Tan\frac{4\pi}{7}=Tan\frac{\pi}{7}Tan\frac{2\pi}{7}Tan\frac{4\pi}{7}$$

* Reemplazamos :

$$E=Tan\frac{\pi}{7}\cancel{Tan\frac{2\pi}{7}}Tan\frac{4\pi}{7}-Tan\frac{\pi}{7}\cancel{Tan\frac{2\pi}{7}}Tan\frac{4\pi}{7} \Rightarrow E=0$$

Si :

$\alpha+\beta+\theta=90° \Rightarrow \boxed{Tan\alpha Tan\beta+Tan\beta Tan\theta+Tan\alpha Tan\theta=1}$

DEMOSTRACIÓN:

* Por condición :
* $\alpha+\beta+\theta=90° \Rightarrow \alpha+\beta=90°-\theta$

$\Rightarrow Tan(\alpha+\beta)=Tan(90°-\theta) \Rightarrow \dfrac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=Cot\theta$

* $\dfrac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha\times Tan\beta}=\dfrac{1}{Tan\theta}$

$\Rightarrow (Tan\alpha+Tan\beta)\times Tan\theta=1-Tan\alpha\times Tan\beta$

* $Tan\alpha Tan\beta-Tan\beta tan\theta=1-Tan\alpha Tan\beta$

$\Rightarrow Tan\alpha\times Tan\beta+Tan\beta\times Tan\theta+Tan\alpha\times Tan\theta=1$

EJEMPLO:

Calcular:

$W=Tan20°Tan30°+Tan30°Tan40°+Tan20°Tan40°$

RESOLUCIÓN :

* Notase que: $20°+30°+40°=90°$, entonces
* Se cumple que:

$\underbrace{Tan20°\times Tan30°+Tan30°Tan40°+Tan20°\times Tan40°}_{W}=1 \Rightarrow W=1$

PROPIEDAD :

Siendo $f_{(x)}=aSenx+bCosx$; $\forall x\in R$

Se cumple:

$$\boxed{-\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}}$$

RESUMEN DE FÓRMULAS

BÁSICAS :

* $\boxed{Sen(\alpha\pm\beta)=Sen\alpha\,Cos\beta\pm Cos\alpha\,Sen\beta}$
* $\boxed{Cos(\alpha\pm\beta)=Cos\alpha\,Cos\beta\mp Sen\alpha\,Sen\beta}$
* $\boxed{Tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{Tan\alpha\pm Tan\beta}{1\mp Tan\alpha Tan\beta}}$

OBSERVACIONES :

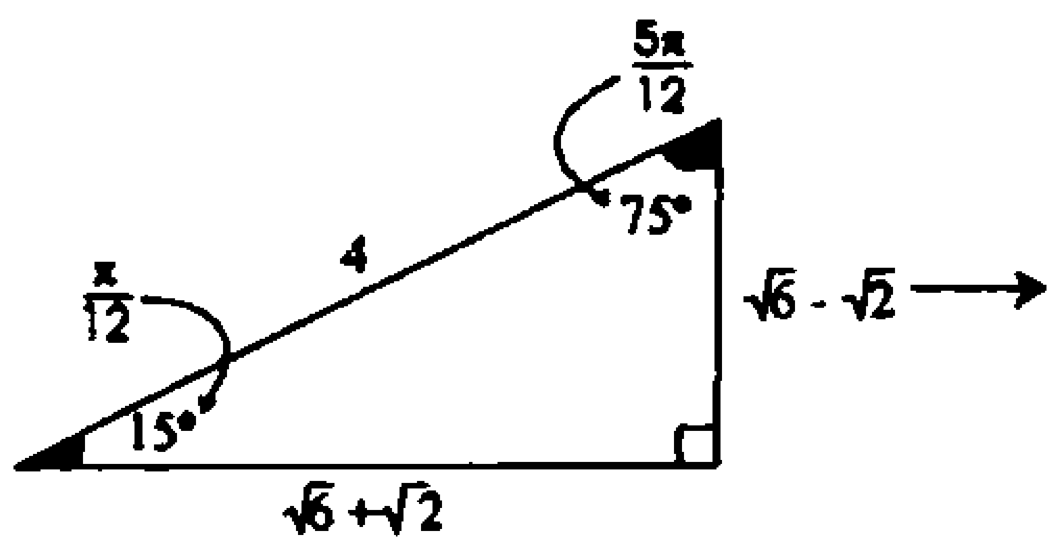
* $Cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1}{Tan(\alpha\pm\beta)}$
* $Sec(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1}{Cos(\alpha\pm\beta)}$
* $Csc(\alpha\pm\beta)=\dfrac{1}{Sen(\alpha\pm\beta)}$

PROPIEDADES :

* $Sen(\alpha+\beta)sen(\alpha-\beta)=Sen^2\alpha-Sen^2\beta$
* $Tan\alpha+Tan\beta+Tan(\alpha+\beta)\ Tan\alpha\ Tan\beta=Tan(\alpha+\beta)$
* $Si:\ \alpha+\beta+\theta=180°$
  $\Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta+Tan\theta=Tan\alpha Tan\beta Tan\theta$
* $Si:\ \alpha+\beta+\theta=90°$
  $\Rightarrow Tan\alpha Tan\beta+Tan\beta\ Tan\theta\ +Tan\alpha\ Tan\theta=1$

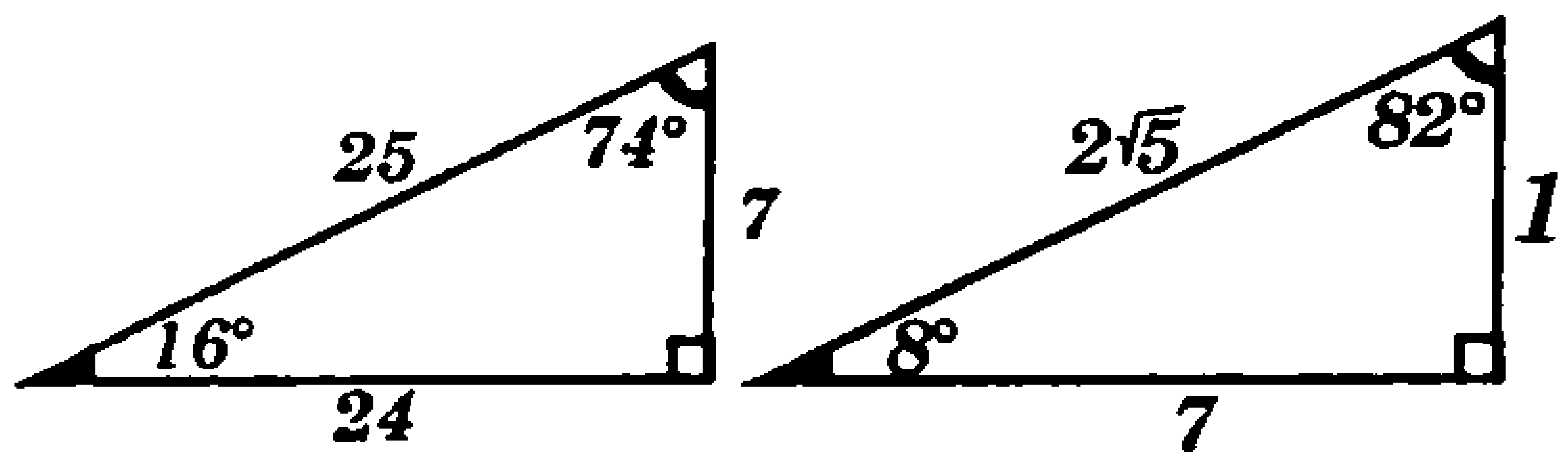
NOTAS :

* ⊿ Notable exacto



R.T. / ∢	$15°=\frac{\pi}{12}$	$75°=\frac{5\pi}{12}$
Sen y Cos	$\frac{\sqrt6\mp\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6\pm\sqrt2}{4}$
Tan y Cot	$2\mp\sqrt3$	$2\pm\sqrt3$
Sec y Csc	$\sqrt6\mp\sqrt2$	$\sqrt6\pm\sqrt2$

* ⊿ Notables aproximados



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Simplificar :

$$L=\frac{sen(60°+x)+sen(60°-x)}{cosx}$$

$A)\sqrt3$ $B)1$ $C)tanx$ $D)\sqrt3 tanx$ $E)\frac{\sqrt3}{3}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión, desarrollado cada término del numerador:

$$L=\frac{sen(60°+x)+sen(60°-x)}{cosx}$$

$$L=\frac{sen60°\times cosx+\cancel{senx\times cos60°}+sen60°\times cosx-\cancel{senx\times cos60°}}{cosx}$$

* Simplificando : $L=\dfrac{2sen60°cosx}{cosx}=2\times\dfrac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$

RPTA : "A"

PROBLEMA 2 :

Determinar el valor de :

$$L=\frac{sen3xcos2x+sen2xcos3x}{sen4xcosx+senxcos4x}$$

$A)1$ $B)tanx$ $C)\frac{senx}{sen5x}$ $D)\frac{sen5x}{sen3x}$ $E)cotx$

RESOLUCIÓN :

* Recuerda que :

$$sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha=sen(\alpha+\beta)$$

* Luego, si: $\alpha=3x\wedge\beta=2x\Rightarrow$

$$sen3xcos2x+sen2xcos3x=sen(3x+2x)=sen5x$$

* En la expresión :

$$L=\frac{sen3x\times cos2x+sen2x\times cos3x}{sen4x\times cosx+senx\times cos4x}$$

$$\Rightarrow L=\frac{sen5x}{sen5x}\Rightarrow \boxed{L=1}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 3 :

Calcular el valor de "*sen 75°*"

$A)\frac{\sqrt3+1}{2}$ $B)\frac{\sqrt3-1}{2}$ $C)\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$ $D)\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$ $E)\frac{\sqrt3+\sqrt2}{4}$

RESOLUCIÓN :

* En este caso, descomponemos "*75°*" como la suma de dos ángulos conocidos, por ejemplo :

$$sen75°=sen(45°+30°)$$

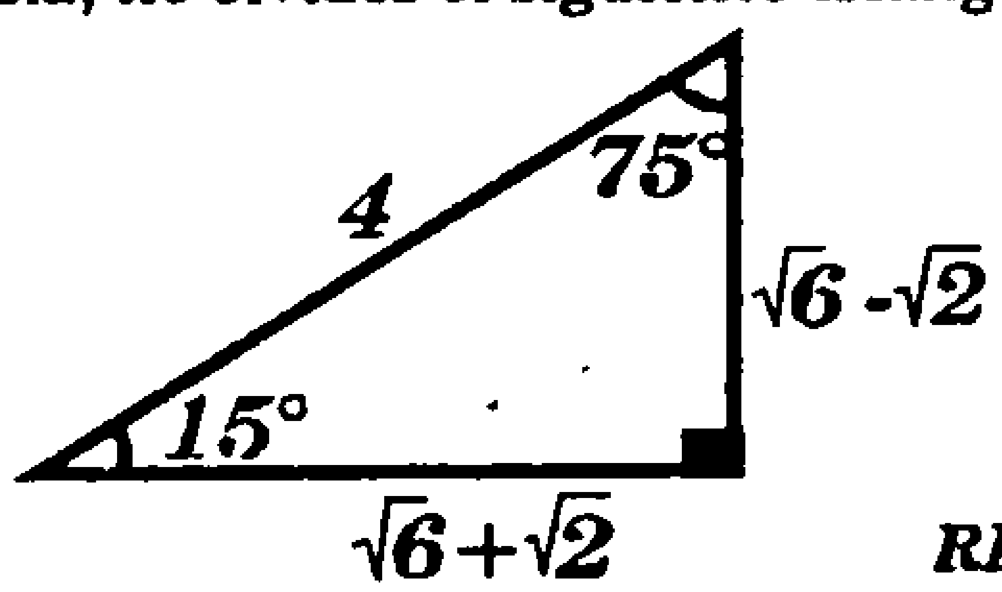
* Desarrollando :

$$sen75°=sen45°\times cos30°+sen30°\times cos45°$$

* Reemplazando valores notables :

$$sen75°=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow sen75°=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

* Sugerencia; no olvides el siguiente triángulo:



RPTA : "C"

PROBLEMA 4 :

Reducir :

$$L=\frac{sen(\alpha+x)-sen\alpha\times cosx}{cos(\alpha+x)+sen\alpha\times senx}$$

A) $tanx$ B) $tan\alpha$ C) $cot\alpha$ D) $cotx$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* vamos a desarrollar los términos conocidos, así:

$$L=\frac{Sen(\alpha+x)-Sen\alpha\times Cosx}{Cos(\alpha+x)+Sen\alpha\times Senx}$$

$$\Rightarrow L=\frac{Sen\alpha Cosx+SenxCos\alpha-Sen\alpha Cosx}{Cos\alpha Cosx-Sen\alpha Senx+Sen\alpha Senx}$$

* Reduciendo:

$$L=\frac{senx\times cosa}{cosa\times cosx}\Rightarrow L=tanx$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 :

Calcular el valor de : "$cos8°$"

A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ C) $\frac{5\sqrt{2}}{7}$ D) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ E) $\frac{9\sqrt{2}}{10}$

RESOLUCIÓN :

*Descomponemos $8°$ usando dos ángulos conocidos $8°=45°-37°$

* Esto es:

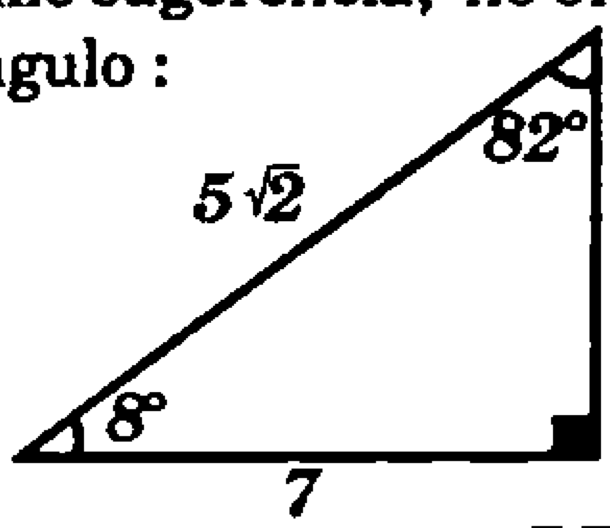
$cos8°=cos(45°-37°)$

$cos8°=cos45°\times cos37°+sen45°\times sen37°$

* Reemplazando valores conocidos:

$$cos8°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}\Rightarrow \boxed{cos8°=\frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

* Como sugerencia; no olvides este triángulo :



RPTA : "C"

PROBLEMA 6 :

Simplificar:

$$L=\frac{sen(\alpha+\beta)}{cos\alpha\times cos\beta}-tan\beta$$

A) $cos\beta$ B) $cot\alpha$ C) $tan\alpha$ D) $tan\beta$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* En estos casos; lo ideal es desarrollar la fórmula:

$$L=\frac{sen\alpha\times cos\beta+sen\beta\times cos\alpha}{cos\alpha\times cos\beta}-tan\beta$$

* Luego la fracción al desdoblar en homogéneas , tenemos :

$$L=\frac{sen\alpha\times cos\beta}{cos\alpha\times cos\beta}+\frac{sen\beta\times cos\alpha}{cos\alpha\times cos\beta}-tan\beta$$

* Reduciendo:

$$L=\frac{sen\alpha}{cos\alpha}+\frac{sen\beta}{cos\beta}-tan\beta$$

$$\Rightarrow L=tan\alpha+tan\beta-tan\beta\Rightarrow L=tan\alpha$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Siendo:

$\alpha+\beta=45°$; $tan\alpha=\frac{3}{5}$;calcular : "$tan\beta$"

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición:

$$\alpha+\beta=45°\Rightarrow\beta=45-\alpha$$

* Piden hallar:

$tan\beta=tan(45°-\alpha)$; no olvide que:

$tan\,\alpha=\frac{3}{5}$

* Desarrollando:

$$tan\beta=\frac{tan\,45°-tan\alpha}{1+tan45°\times tan\alpha}$$

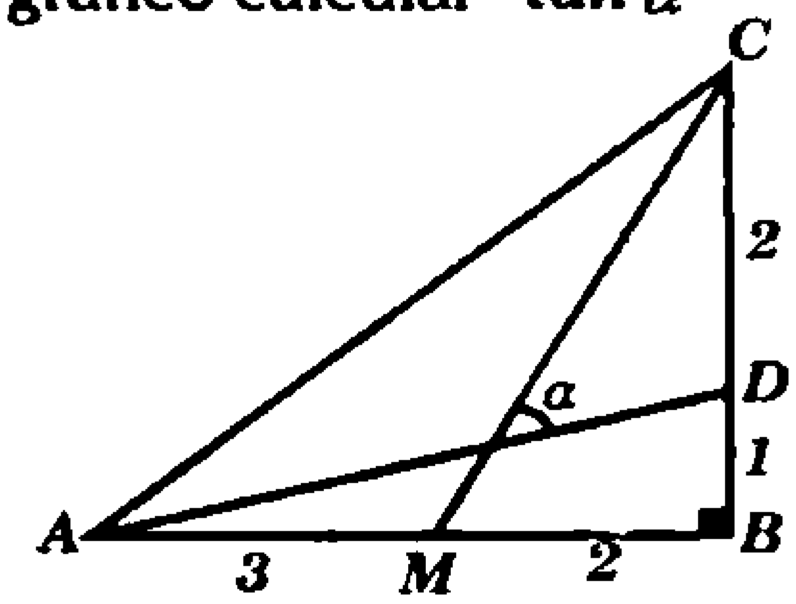
* Reemplazando valores:

$$tan\beta=\frac{1-\frac{3}{5}}{1+1\times\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}\Rightarrow\boxed{tan\beta=\frac{1}{4}}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Del gráfico calcular "$tan\,\alpha$"

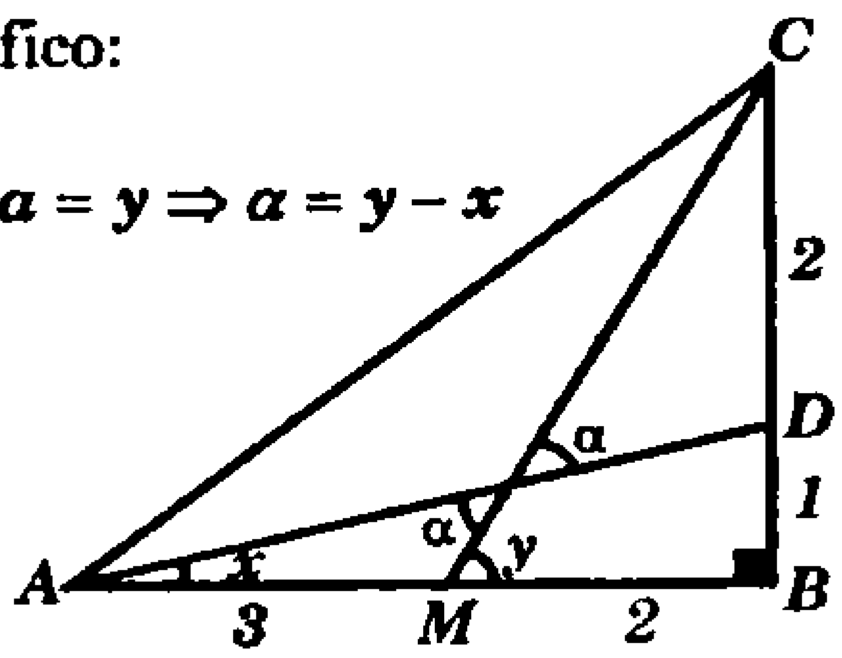


A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{8}$

RESOLUCIÓN :

* En este problema gráfico ,el ángulo desconocido se debe de expresar como la suma de otros dos si conocidos. Por ejemplo, en el gráfico:

$$x+\alpha=y\Rightarrow\alpha=y-x$$



* Piden: $tan\alpha=tan(y-x)$

* Desarrollando:

$$tan\alpha=\frac{tany-tanx}{1+tany\times tanx}\,.........(I)$$

* Pero $\triangle MBC: tany=\frac{3}{2}$

$\triangle ABD: tanx=\frac{1}{5}$

* En (I):

$$tan\alpha=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{5}}{1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{\frac{13}{10}}{\frac{13}{10}}\Rightarrow\boxed{tan\,\alpha=1}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 9 :

Siendo: $sen(\alpha+x)=8sen(\alpha-x)$

calcular : $L=\frac{tan\alpha}{tanx}$

A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{6}{7}$ C) $\frac{9}{8}$ D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{9}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Desarrollemos los términos en la condición; así:

$$sen(\alpha+x)=8sen(\alpha-x)$$

$$\Rightarrow sen\alpha\,cosx+senx\,cos\alpha=8sen\alpha\,cosx-8senx\,cos\alpha$$

* Agrupando :

$$sen\alpha\,cosx+8senxcos\alpha=8sen\alpha\times cosx-sen\alpha\,cosx$$

$$\Rightarrow 9senxcos\alpha=7sen\alpha\,cosx$$

* Transponiendo términos :

$$\frac{9senx}{cosx}=\frac{7sen\alpha}{cos\alpha}\left(\text{no olvides que}: \frac{sen\theta}{cos\theta}=tan\theta\right)$$

$$9tanx=7tan\alpha\Rightarrow\frac{9}{7}tanx=tan\alpha$$

* Luego; nos piden :

$$L=\frac{tan\alpha}{tanx}=\frac{\frac{9}{7}\,tanx}{tanx}\Rightarrow\boxed{L=\frac{9}{7}}$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 10 :

Hallar un valor agudo de "x" que cumple :

$$sen2x\times cosx+senx\times cos2x=\frac{1}{2}$$

A) $10°$ B) $20°$ C) $25°$ D) $30°$ E) $15°$

RESOLUCIÓN :

* En la condición:

$$\underbrace{sen2x\times cosx+senx\times cos2x}_{sen(2x+x)}=\frac{1}{2}$$

* Luego:

$$\underbrace{sen2x\times cosx+senx\times cos2x}_{sen(2x+x)}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow sen3x=\frac{1}{2}\Rightarrow 3x=30°\Rightarrow x=10°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 11 :

Si: $sen\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $cos\beta=\frac{3}{\sqrt{3}}$ "α" y "β" son agudos,

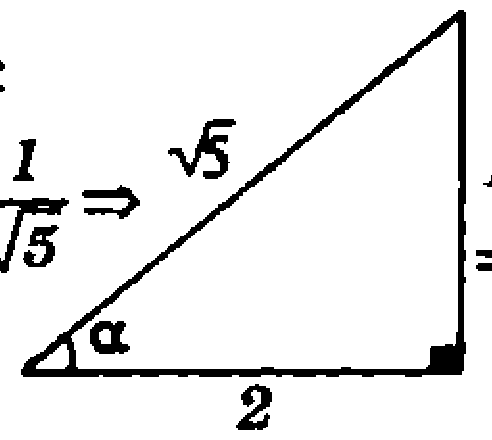
Calcular: $tan(\alpha+\beta)$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{7}{3}$

RESOLUCIÓN :

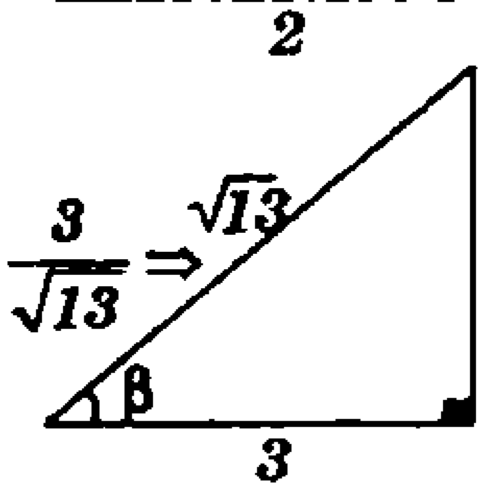
* Como:

$sen\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow$



$\Rightarrow tan\alpha=\frac{1}{2}$

$cos\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow$



$\Rightarrow tan\beta=\frac{2}{3}$

* Luego; piden :

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha\, tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}$$

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{7\times3}{6\times2}\Rightarrow tan(\alpha+\beta)=\frac{7}{4}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 12:

Calcular la suma del máximo valor de: $C=3senx+4cosx+5$

con el mínimo valor de:

$$L=senx+\sqrt{3}cosx+1$$

A) 3 B) 7 C) 9 D) 11 E) 12

RESOLUCIÓN :

* Analizando cada expresión :

I) $C=\underbrace{3senx+4cosx}_{\alpha}+5$; para que

$C:máx\Rightarrow\alpha:máx$

* Como:

$\alpha=3senx+4cosx\Rightarrow\alpha_{máx}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

* Luego: $C_{máx}=5+5\Rightarrow C_{máx}=10$

II) $L=\underbrace{senx+\sqrt{3}cosx}_{\beta}+1$; para que

$L: mín\Rightarrow\beta: mín$

* Como :

$$\beta=1\times senx+\sqrt{3}cos\,x$$

$$\Rightarrow\beta_{min}=-\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=-2$$

* Luego :

$$L_{min}=-2+1\Rightarrow L_{min}=-1$$

III) Piden calcular:

$$C_{máx}+L_{mín}=10+(-1)$$

$$\Rightarrow C_{máx}+L_{mín}=9$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 13 :

Señale la variación de :

$$L=2\sqrt{2}\,sen(x+45°)+senx+2cosx+1$$

A) [-1;3] B) [-2;4] C) [-3;5] D) [-4;6] E) [-5;5]

RESOLUCIÓN :

* En este caso, primero, desarrollaremos la expresión

$$L=2\sqrt{2}sen(x+45°)+senx+2cosx+1$$

$$L=2\sqrt{2}(senx\times cos45°+sen45°\times cosx)+senx+2cosx+1$$

$$L=2\sqrt{2}\left(senx\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times cosx\right)+senx+2cosx+1$$

* Reduciendo :

$$L=2senx+2cosx+senx+2cosx+1$$

$$\Rightarrow L=3senx+4cosx+1$$

* Pero, note que :

$$3senx+4cosx\begin{cases}máx=5\\ mín=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}L_{máx}=5+1=6\\ L_{mín}=-5+1=-4\end{matrix}$$

$$\Rightarrow L\in[-4;6]$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 14:

Reducir :

$$L=\frac{tan34°+tan26°+\sqrt{3}tan24°\times tan26°}{tan33°+tan12°+tan33°\times tan12°}$$

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) 2 E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* En el numerador:

$$tan34°+tan26°+\underbrace{\sqrt{3}}_{tan60°}tan34°\times tan26°=$$

$$tan34°+tan26°+tan34°\times tan26°\times tan\underbrace{60°}_{34°+26°}$$

$$=tan60°=\sqrt{3}$$

* En el denominador:

$$tan33°+tan12°+\underbrace{1}_{tan45°}tan33°\,tan12°=$$

$$tan33°+tan12°+tan33°\,tan12°\,tan\underbrace{45°}_{33°+12°}$$

$$=tan45°=1$$

* En la expresión:

$$L=\frac{tan34°+tan26°+\sqrt{3}tan34°\times tan26°}{tan33°+tan12°+tan33°\times tan12°}$$

$$L=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\boxed{L=\sqrt{3}}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 15 :

Reducir:

$$L=(1+tan40°)(1+tan5°)$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Desarrollando la expresión:

$$L=(1+tan40°)(1+tan5°)$$

$$L=1+\underbrace{tan40°+tan5°+tan40°\times tan5°}_{\alpha}$$

* Note "α" :

$$\alpha=tan40°+tan5°+\underbrace{1}_{tan45°}\times tan40°\times tan5°$$

$$\alpha=tan40°+tan5°+tan40°\times tan5°\times tan45°$$

$$=tan45°\Rightarrow\alpha=1$$

* Luego: $L=1+\alpha\Rightarrow L=2$

RPTA : "B"

PROBLEMA 16 :

En un triángulo *ABC*: $tanA=2$; $tanB=4$

Calcular : "$tanC$"

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{2}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Como en un triángulo *ABC*:

$$A+B+C=180°$$

* Se cumple :

$TanA+tanB+tanC=TanA\times tanB\times tanC$;

$tanA=2\wedge tanB=4$

* Reemplazando :

$$2+4+tanC=2\times4\times tanC$$

$$\Rightarrow 6+tanC=8tanC$$

$$\Rightarrow 6=7tanC\Rightarrow\boxed{tanC=\frac{6}{7}}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17:

En un triángulo *ABC:*

$$tanA+tanB=5tanC$$

Calcular: $L=tanA\times tanB$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN :

* Como en un triángulo

$$ABC: A+B+C=180°$$

* Se cumple:

$$\underbrace{tanA+tanB}_{5tanC}+tanC=\underbrace{tanA\times tanB\times tanC}_{L}$$

* Pero: $tanA+tanB=5tanC$

* Luego:

$$5tanC+tanC=L\times tanC$$

$$\Rightarrow 6tanC=LtanC\Rightarrow L=6$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 :

En un triángulo ABC, reducir :

$$L=\frac{cos(A-B)}{senA\,senB}+\frac{cos(B-C)}{senB\,senC}+\frac{cos(C-A)}{senC\,senA}$$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

RESOLUCIÓN:

* En la expresión :

$$L=\frac{cos(A-B)}{senA\times senB}+\frac{cos(B-C)}{senB\times senC}+\frac{cos(C-A)}{senC\times senA}$$

* *Note que los términos son muy similares; por ese motivo, analizaremos sólo el primero, obteniéndose los otros dos por analogía:*

$$\frac{cos(A-B)}{senA\,senB}=\frac{cosA\,cosB+senA\,senB}{senA\,senB};$$

* Descomponemos en fracciones homogéneas:

$$\frac{cos(A-B)}{senA\times senB}=\frac{cosA\times cosB}{senA\times senB}+\frac{senA\times senB}{senA\times senB}$$

* No olvide que:

$$\frac{cos\theta}{sen\theta}=cot\theta$$

$$\frac{cos(A-B)}{senA\,senB}=cotA\times cotB+1$$

* Luego, por analogía :

$$L=cosA\times cotB+1+cotBcotC+1+cotC\times cotA+1$$

* ordenando:

$$L=3+cotAcotB+cotBcotC+cotCcotA$$

* Pero, como: $A+B+C=180°$

$$\Rightarrow cotAcotB+cotBcotC+cotCcotA=1$$

* Luego: $L=3+1\Rightarrow L=4$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Siendo: $\alpha+\beta+\theta=90°$, además:

$$\frac{tan\alpha}{2}=\frac{tan\beta}{3}=\frac{tan\theta}{5};$$

Calcular: "$cot\,\theta$" ("θ" es agudo)

A) $\frac{\sqrt{31}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{31}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{17}}{5}$ E) $\frac{\sqrt{21}}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$$\frac{tan\alpha}{2}=\frac{tan\beta}{3}=\frac{tan\theta}{5}=k\Rightarrow \begin{cases}tan\alpha=2k\\ tan\beta=3k\\ tan\theta=5k\end{cases}$$

* Como : $\alpha+\beta+\theta=90°$

$$\Rightarrow tan\alpha\,tan\beta+tan\beta tan\theta+tan\theta\,tan\alpha=1$$

* Reemplazando:

$$2k\times 3k+3k\times 5k+5k\times 2k=1$$

$$\Rightarrow 6k^2+15k^2+10k^2=1$$

$$\Rightarrow 31k^2=1\Rightarrow k^2=\frac{1}{31}\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{31}}$$

* Luego:

$$tan\theta=5k=5\left(\frac{1}{\sqrt{31}}\right)=\frac{5}{\sqrt{31}}$$

$$\Rightarrow cot\theta=\frac{\sqrt{31}}{5}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 20 :

Si: $\alpha+\beta+\theta=90°$, "α", "β", "θ" y "x" son agudos.

Además:

$sec^2x=sen^2\alpha+sec^2\beta+sec^2\theta$;hallar:

$$J=\frac{tan\alpha+tan\beta+tan\theta}{tanx}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN :

* En la condición :

$$sec^2x=sec^2\alpha+sec^2\beta+sec^2\theta$$

* Recuerde que : $sec^2\phi=1+tan^2\phi$

* Luego; tendríamos :

$$1+tan^2x=1+tan^2\alpha+1+tan^2\beta+1+tan^2\theta$$

$$\Rightarrow tan^2x=tan^2\alpha+tan^2\beta+tan^2\theta+2$$

* Note :

$$tan^2x=tan^2\alpha+tan^2\beta+tan^2\theta+2\times 1$$

* Recuerde:

$$tan\alpha tan\beta+tan\beta tan\theta+tan\theta tan\alpha=1$$

$$;(\alpha+\beta+\theta=90°)$$

* Entonces:

$$tan^2x=\underbrace{tan^2\alpha+tan^2\beta+tan^2\theta+2(tan\alpha\times tan\beta+tan\beta\times tan\theta+tan\theta\times tan\alpha)}_{(tan\alpha+tan\beta+tan\theta)^2}$$

$$tan^2x=(tan\alpha+tan\beta+tan\theta)^2$$

$$tanx=tan\alpha+tan\beta+tan\theta\Rightarrow J=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 21 :

Calcular : $Tg105°$

A) $2+\sqrt{3}$ B) $-(2+\sqrt{3})$ C) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ E) $2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

$$tg(105°)=-Tg75°=-(2+\sqrt{3})$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Calcular : $sen75°+cos75°$

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Reemplazando el valor de cada término.

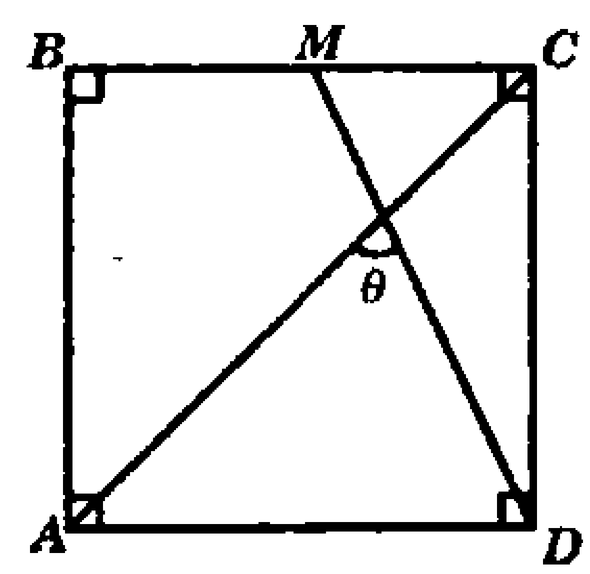
$$sen75°+cos75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 23 :

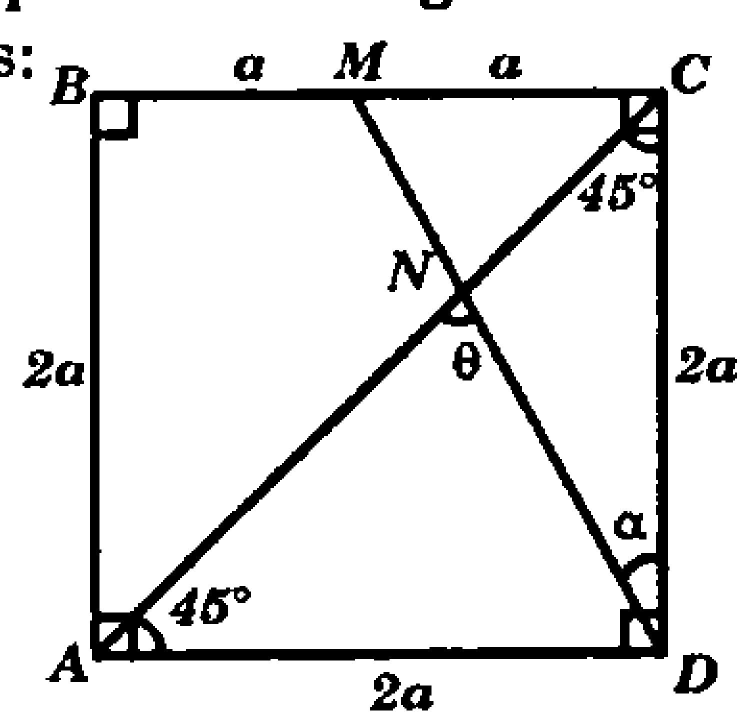
Siendo "$ABCD$" un cuadrado y "M" punto medio. Hallar: $Tan\,\theta$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) $\frac{1}{6}$
E) 6



RESOLUCIÓN :

Completamos el gráfico con los datos:



Por ángulo exterior ΔNCD:

$$\theta=45°+\alpha$$

Luego : $Tan\theta=Tan(45°+\alpha)$,

Desarrollamos :

$$Tan\theta=\frac{Tan45°+Tan\alpha}{1-Tan45°\,Tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-(1)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 24 :

Simplificar : $P=\dfrac{Tg\theta+\dfrac{1}{ctg(\phi-\theta)}}{1-\dfrac{tg\theta}{ctg(\phi-\theta)}}$

A) $tg\,\theta\cdot tg\,\phi$ B) $Tg\,\theta+tg\,\phi$ C) $ctg\,\phi$
D) $tg\,\phi$ E) $ctg\,\theta$

RESOLUCIÓN :

* La expresión P es equivalente a la siguiente :

$$P=\frac{tg\theta+tg(\phi-\theta)}{1-tg\theta tg(\phi-\theta)}$$

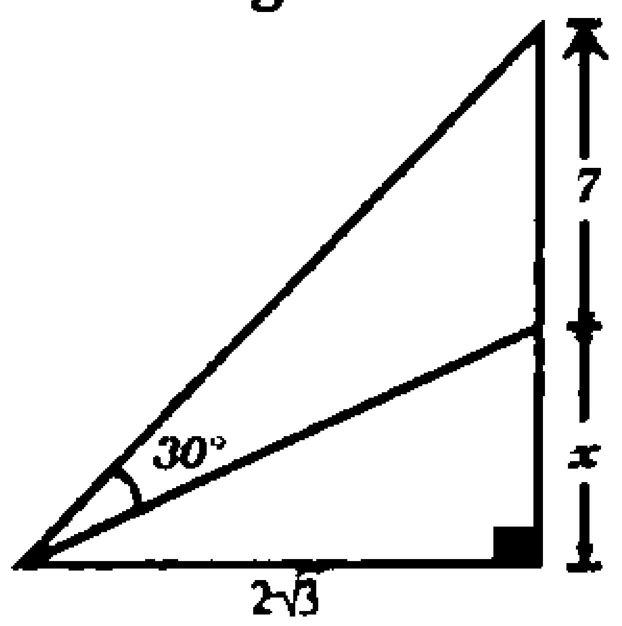
* La expresión es el desarrollo de la tangente de una de dos ángulos, es decir :

$$P=tg[\theta+(\phi-\theta)]=Tg\phi$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 25 :

A partir de la figura: hallar "x"



A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7

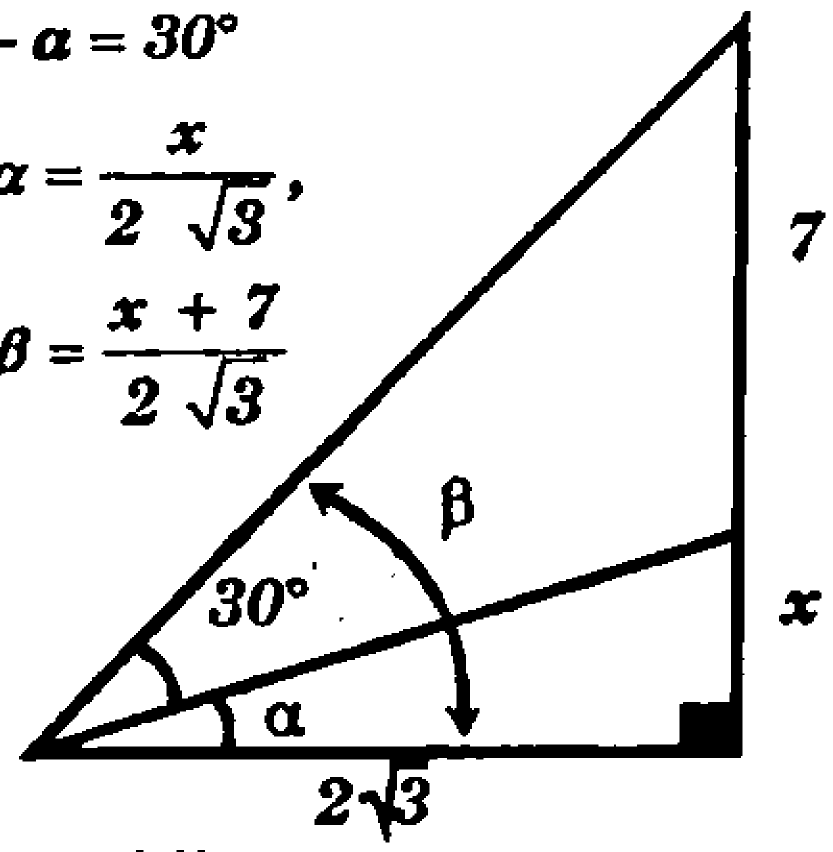
RESOLUCIÓN :

* Observar de la figura que :

$\beta-\alpha=30°$

$tg\alpha=\dfrac{x}{2\sqrt{3}}$,

$tg\beta=\dfrac{x+7}{2\sqrt{3}}$



$\beta=\alpha+30°$

$tg\beta=tg(\alpha+30°)$

$$\Rightarrow\frac{x+7}{2\sqrt{3}}=\frac{tg\alpha+tg30°}{1-tg\alpha\,tg30°}$$

$$\Rightarrow\frac{x+7}{2\sqrt{3}}=\frac{\dfrac{x}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\dfrac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{x+7}{2\sqrt{3}}=\frac{3(x+2)}{\sqrt{3}(6-x)}$$

$\Rightarrow(x+7)(6-x)=6(x+2)$

* Simplificando:

$x^2+7x-30=0$

$(x+10)(x-3)=\Longrightarrow x=3$

RPTA : "B"

PROBLEMA 26 :

Si : $tg(a+b+c)=\dfrac{3}{5}$; $tg\,b=3$

Calcular : $tg(a-b+c)$

A) $-\dfrac{6}{7}$ B) $\dfrac{21}{7}$ C) $\dfrac{27}{11}$ D) $-\dfrac{29}{17}$ E) $-\dfrac{11}{27}$

RESOLUCIÓN :

* Dato : $tg(\underbrace{a+c}_{\alpha}+b)=\dfrac{3}{5}$ y $tgb=3$

* Sea :

$$\frac{tg\alpha+tgb}{1-tan\alpha\,tan\,b}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{Tg\alpha+3}{1-3tg\alpha}=\frac{3}{5}$$

$$5tg\alpha+15=3-9\,tg\alpha\Rightarrow tg\alpha=-\frac{6}{7}$$

* Luego :

$tg(a-b+c)=tg(\alpha-b)$

$$\frac{tg\alpha-tgb}{1+tg\alpha tgb}=\frac{-\dfrac{6}{7}-3}{1+-\dfrac{6}{7}(3)}=\frac{27}{11}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Si : $A+B=45$; hallar :

$$y=\frac{1}{tgA+tgB}-\frac{1}{ctgA+ctgB}$$

A) -1 B) 1 C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

$$y=\frac{1}{tgA+tgB}-\frac{1}{\dfrac{tgA+tgB}{tgAtgB}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1-tgAtgB}{tgA+tgB}=\frac{1}{tg(A+B)}=\frac{1}{tg45°}=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 28:

Calcular el valor de :

$$tg13°+tg32°+tg13°\times tg32°$$

A) $2+\sqrt{2}$ B) $1+\sqrt{2}$ C) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

Propiedad:

Sea: $L=tg\,x+tgy+tgx\ \ tgy\ \ tg\,\alpha$

Si : $\alpha=x+y$; entonces : $L=tg\,\alpha$

$tg13°+tg32°+tg(13°+32°)tg13°\,tg32°=$

$tg(13°+32°)=Tan45°=1$

RPTA : "E"

PROBLEMA 29 :

En la siguiente figura, la medida del lado x es:

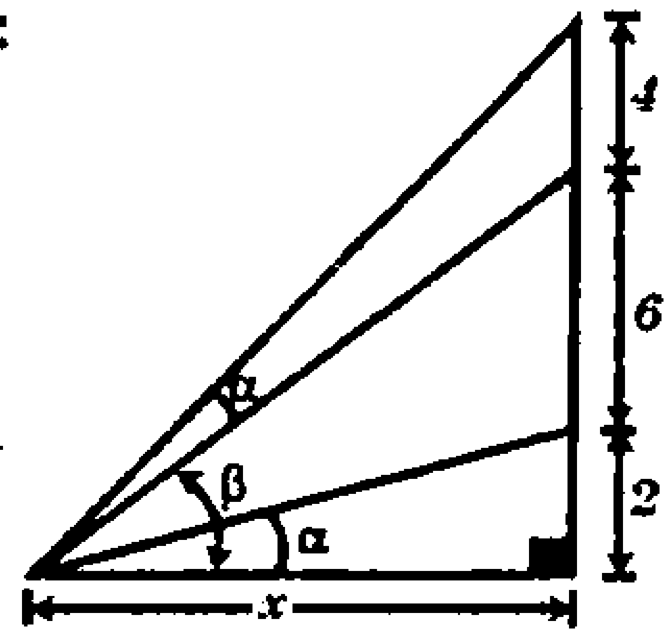
A) $4\sqrt{6}$

B) $4\sqrt{23}$

C) $4\sqrt{13}$

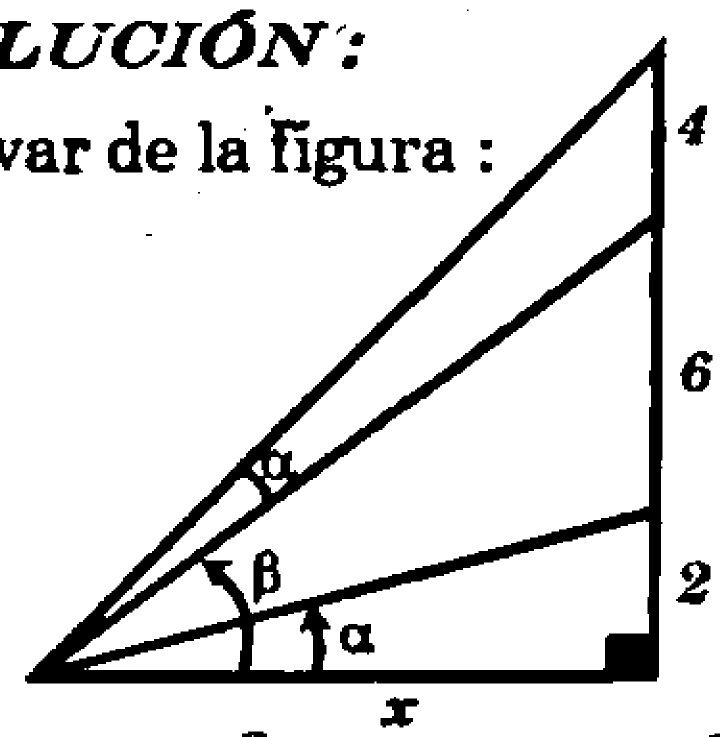
D) $3\sqrt{17}$

E) $3\sqrt{6}$



RESOLUCIÓN :

* Observar de la figura :



$$tg\alpha=\frac{2}{x},\ tg\beta=\frac{8}{x},\ tg\ (\alpha+\beta)=\frac{12}{x}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}\Rightarrow\frac{12}{x}=\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{8}{x}}{1-\left(\dfrac{2}{x}\right)\left(\dfrac{8}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{12}{x}=\frac{10x}{x^2-16}$$

$\Rightarrow6(x^2-16)=5x^2\Rightarrow6x^2-96=5x^2$

$\Rightarrow x^2=96\Rightarrow x=\sqrt{96}=\sqrt{16\times6}$

$\Rightarrow x=4\sqrt{6}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 30 :

Hallar el valor de $V=ctg\,\beta-ctg\alpha$

En términos de K, si :

$$\frac{2sen(\alpha-\beta)}{cos(\alpha-\beta)-cos(\alpha+\beta)}=K^2$$

A) K B) K^2 C) $2K$ D) $3K$ E) K^3

RESOLUCIÓN :

$$\frac{2sen(\alpha-\beta)}{cos\alpha\,cos\beta+sen\alpha\,sen\beta-cos\alpha\,cos\beta+sen\alpha\,sen\beta}=K^2$$

$$\Rightarrow\frac{2sen(\alpha-\beta)}{2sen\alpha sen\beta}=K^2$$

$$\Rightarrow\frac{sen\alpha\,cos\beta}{sen\alpha\,cos\beta}-\frac{cos\alpha\,sen\beta}{sen\alpha\,sen\beta}=K^2$$

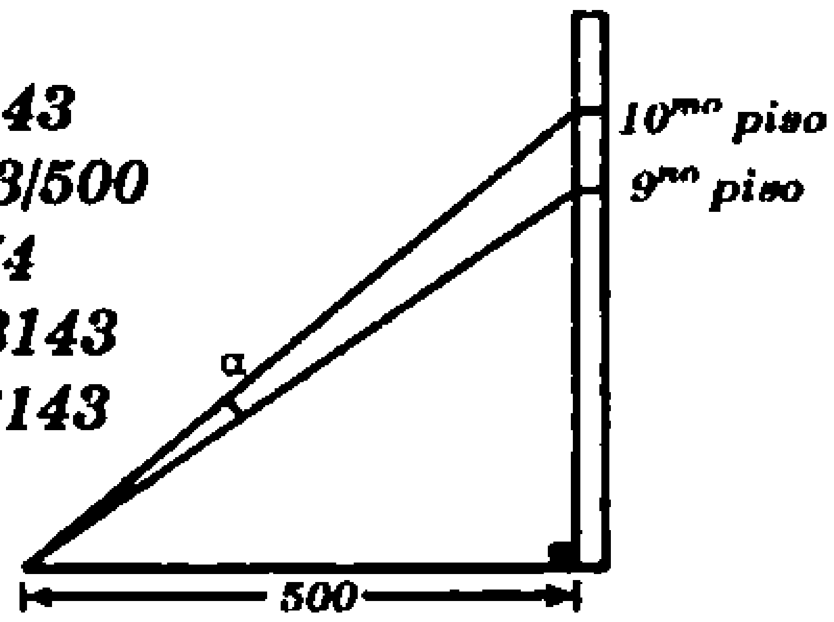
$\Rightarrow ctg\beta-ctg\,\alpha=K^2\Rightarrow V=K^2$

RPTA : "E"

PROBLEMA 31 :

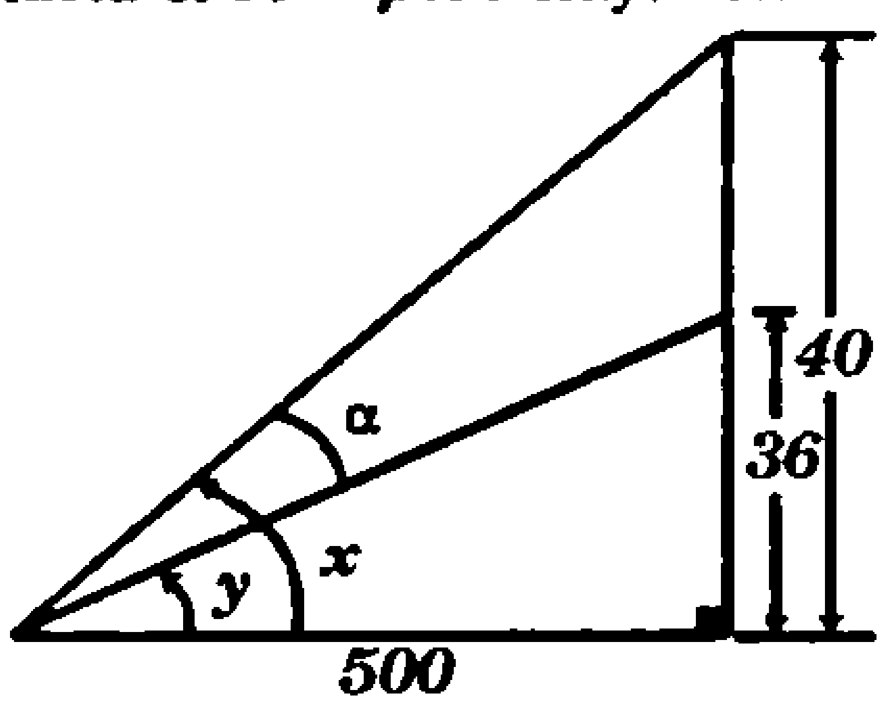
Si nos situamos a una distancia de *500* metros de un edificio de *100m* de altura que tiene *25* pisos idénticos, hallar el valor de la tangente del ángulo α mostrado.

A) 5/3143
B) 3143/500
C) 1/274
D) 25/3143
E) 36/3143



RESOLUCIÓN :

* Un edificio tiene *100 m* de altura y *25* pisos idénticos; entonces, la altura de cada piso es de *4m*.
* Hasta el *9no piso* hay : *36m*
* Hasta el *10mo piso* hay: *40m*



* Observar de la figura :

a) $tgx = \dfrac{40}{500}$; $tgy = \dfrac{36}{500}$

b) $tg\alpha = tg(x - y)$

$$tg\alpha = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx\ tgy} = \frac{\frac{2}{25} - \frac{9}{125}}{1 + \left(\frac{2}{25}\right)\left(\frac{9}{125}\right)}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\frac{250 - 225}{25 \times 125}}{\frac{3125 + 18}{25 \times 125}}$$

* Simplificando : $tg\ \alpha = \dfrac{25}{3143}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

Determinar el mayor valor de A y el menor valor de B tal que :

$$A \le senx + 2\cos x \le B$$

A) $-3;3$ B) $-\sqrt{3};\sqrt{3}$ C) $-2\sqrt{2};2\sqrt{2}$
D) $-\sqrt{5};\sqrt{5}$ E) $-2\sqrt{5};2\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* Propiedad:

$$-\sqrt{p^2+q^2} < p\ senx + q\cos x < \sqrt{p^2+q^2}$$

* Luego :

$$\underbrace{-\sqrt{1^2+2^2}}_{A} < senx + 2\cos x < \underbrace{\sqrt{1^2+2^2}}_{B}$$

$$\Rightarrow A = -\sqrt{5} \ \wedge \ B = \sqrt{5}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

El valor de la expresión:

$(tg80° - tg10°)\ ctg70°$ es :

A) 1 B) 3 C) 2 D) 0,5 E) tg5°

RESOLUCIÓN :

$$(tg80° - tg10°)ctg70° = \frac{tg80° - tg10°}{tg70°}$$

$$= \frac{tg80° - tg10°}{tg(80° - 10°)} = \frac{tg80° - tg10°}{\frac{tg80° - tg10°}{1 + tg80°\ tg10°}}$$

* Simplificando , se obtiene :

$$1 + tg80°tg10° = 1 + ctg10°tg10° = 2$$

RPTA : "C"

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Calcular el valor de: $Cos67°$

RPTA.: ....

02 Calcular el valor de: $Cos7°$

RPTA.: ....

03 Calcular el valor de:

$$M = Sen70°Cos10° - Sen10°Cos70°$$

RPTA.: ....

04 Calcular el valor de:

$$E = Sen30°Cos7° + Sen7°Cos30°$$

A) Sen23° B) Cos7° C) Sen37°
D) Sen7° E) Cos37°

05 Calcular un valor agudo de x; si:

$$SenxCos20° + Sen20°Cosx = Sen70°$$

RPTA.: ....

06 Calcular un valor agudo de x, si:

$$CosxCos10° - Sen10°Senx = Cos80°$$

A) 60° B) 50° C) 70°
D) 90° E) 100°

07 Determinar el valor de:

$$C = \frac{sen3x \cdot cos2x + sen2x \cdot cos3x}{sen4x \cdot cosx + senx \cdot cos4x}$$

RPTA.: ....

08 Calcular el valor de:

$$E = \frac{cos20° \cdot cos10° - sen20° \cdot sen10°}{sen25° \cdot cos5° + sen5° \cdot cos25°}$$

RPTA.: ....

09 Determinar el valor de:

$$E = Cos25°Cos35° - Sen35°Sen25°$$

RPTA.: ....

10 Calcular el valor de:

$$P = Cos20°Cos17° - Sen17°Sen20°$$

RPTA.: ....

11 Determinar el valor de:

$$N = Cos(x - 30°) - Cos(x + 30°)$$

RPTA.: ....

12 Calcular el valor de:

$$E = (Cos50° + Cos20°)^2 + (Sen50° + Sen20°)^2$$

RPTA.: ....

13 Si: $SenxCosy = \dfrac{1}{3}$

$$SenyCosx = \frac{1}{2}$$

Calcular: $E = 6cos(x + y)$

RPTA.: ....

14 Si: $Senx = \dfrac{5}{13} \wedge Tany = \dfrac{3}{4}$

Calcular: $Sen(x + y)$

RPTA.: ....

15 Calcular el valor de:

$$\frac{Tg50° - Tg40°}{Tg10°}$$

A) 1/3 B) 1/2 C) 1 D) 2 E) 3

16 Calcular el valor de:

$$(1 + Tg32°)\ (1 + Tg13°)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17 Si: $B = 45°$, calcular el valor de la expresión:

$$\frac{Sen(A + B)}{CosACosB} - TgA$$

A) -1 B) $-/2$ C) $/2$ D) 1 E) N.A.

(18) Simplificar la expresión :

$$\frac{\sqrt{2}Cosa-2Sen(45^\circ-\alpha)}{2Sen(60^\circ+\alpha)\sqrt{3}Cosa}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

(19) Si: $A-B=53^\circ$ y $TanB=\dfrac{2}{3}$

Calcular "*CotA*"

A) 2 B) $\dfrac{1}{6}$ C) 6 D) $\dfrac{1}{18}$ E) 18

(20) Calcular:

$$N=\frac{Tan40^\circ}{Tan65^\circ-Tan25^\circ}$$

A) 0 B) C) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) -1

(21) Si: $x-y=60^\circ$; hallar el valor de :

$$H=(Senx+Cosy)^2+(Cosx-Seny)^2$$

A) $2-\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) 3 D) $\dfrac{5}{2}$ E) $\dfrac{3}{2}$

(22) Calcular:

$$V=Cos25^\circ-2Sen35^\circ\times Sen10^\circ$$

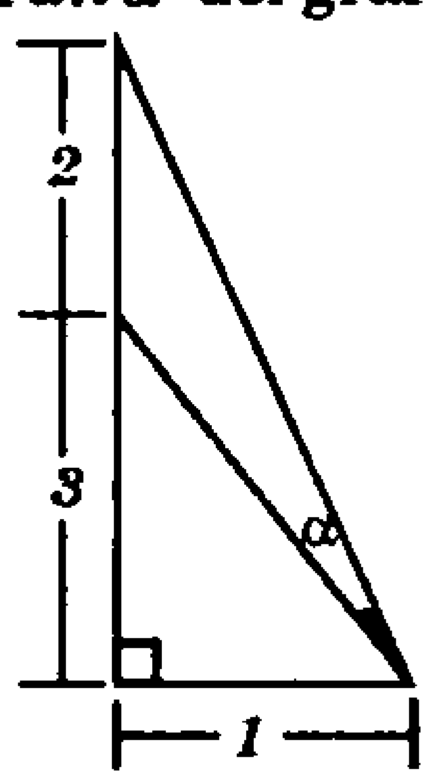
A) 0 B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(23) Hallar "*K*", en la igualdad :

$$3\times Cos20^\circ+Sen20^\circ=K\times Sen80^\circ$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(24) Hallar "$Tan\,\alpha$" del gráfico:



A) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

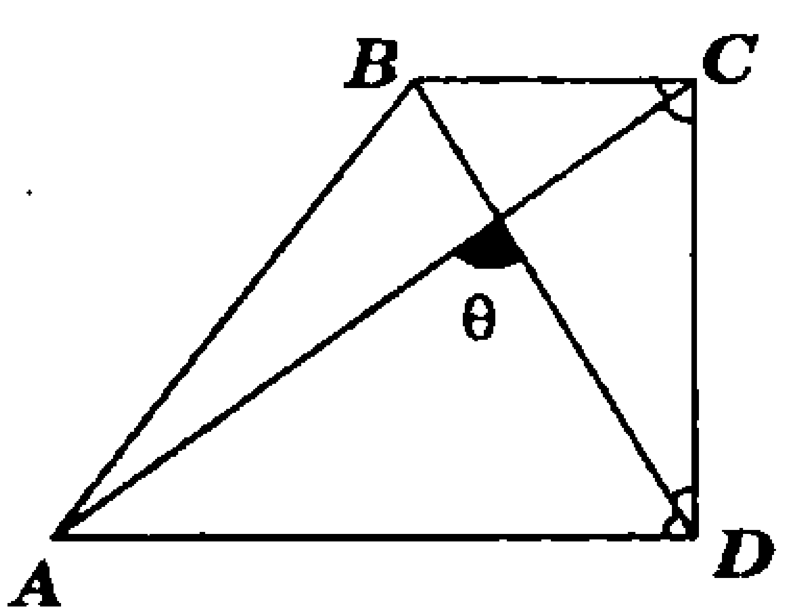
B) $\dfrac{1}{8}$

C) $\dfrac{1}{7}$

D) 8

E) 7

(25) En la figura mostrada del triángulo *ABD* es equilátero. Hallar "$Cot\,\theta$"



A) $3\sqrt{3}$

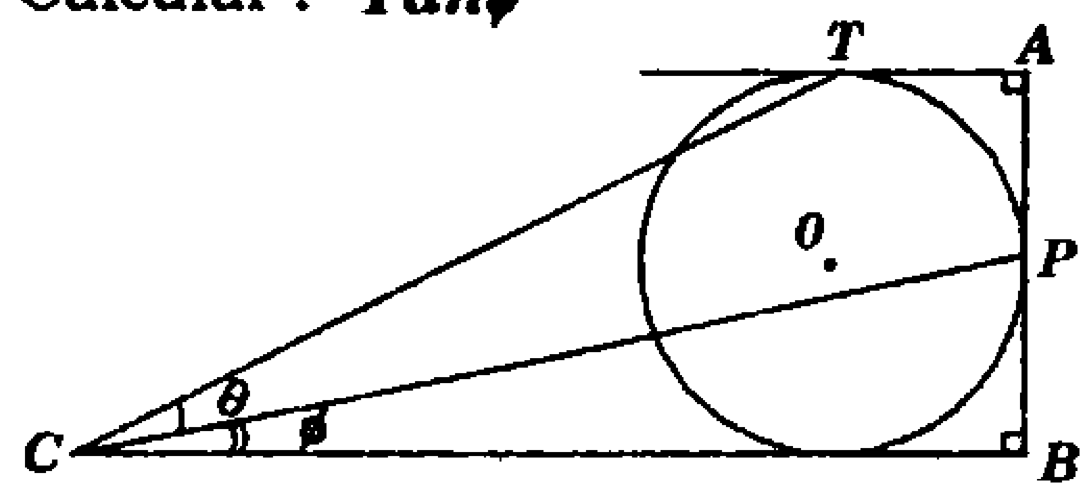
B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(26) Si en el gráfico. $Tan\theta=\dfrac{2}{11}$;

Calcular : "$Tan\phi$"



A) $0{,}2$ B) $1/6$ C) 1 D) $0{,}1$ E) $1/7$

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Al simplificar:

$$\frac{Sen(x+y)}{CosxCosy}-Tgx$$

se obtiene:

A) $Senx$ B) $Cosx$ C) Tgx
D) Tgy E) $Cosy$

(02) Reducir: $A=1+Tg2\theta Tg\theta$

A) $Sen2\theta$ B) $Cos2\theta$ C) $Tg2\theta$
D) $Ctg2\theta$ E) $Sec2\theta$

(03) Si: $Tgx=3\wedge x-y=\dfrac{\pi}{4}$

Calcular: *Ctgy*

A) 1 B) $1/2$ C) 2 D) $1/3$ E) $1/4$

(04) Reducir:

$$M=Tg(45^\circ+x)-\frac{2Tgx}{1-Tgx}$$

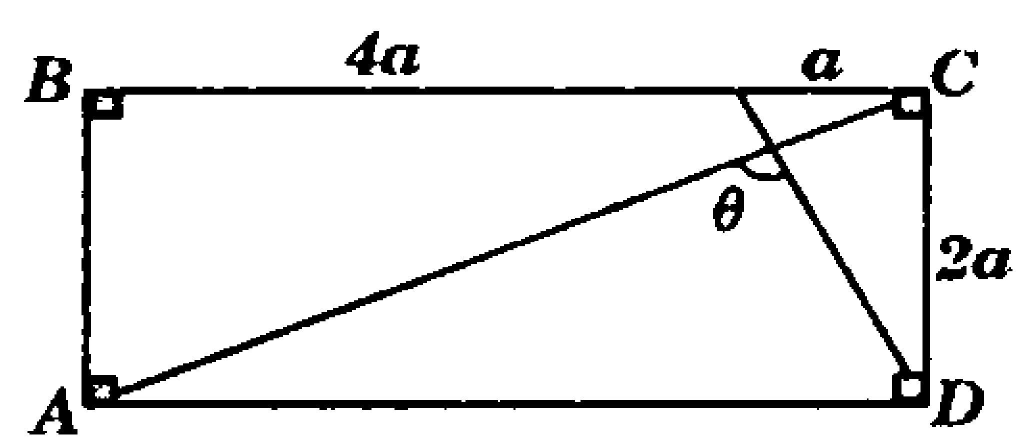
A) $1/2$ B) 1 C) $3/2$ D) 2 E) $5/2$

(05) Calcular el valor de:

$$M=\frac{Sen50^\circ+Sen40^\circ}{Cos5^\circ}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}/2$ C) 1 D) $1/2$ E) $2\sqrt{2}$

(06) Si *ABCD* es un rectángulo, calcular "$Tg\theta$"



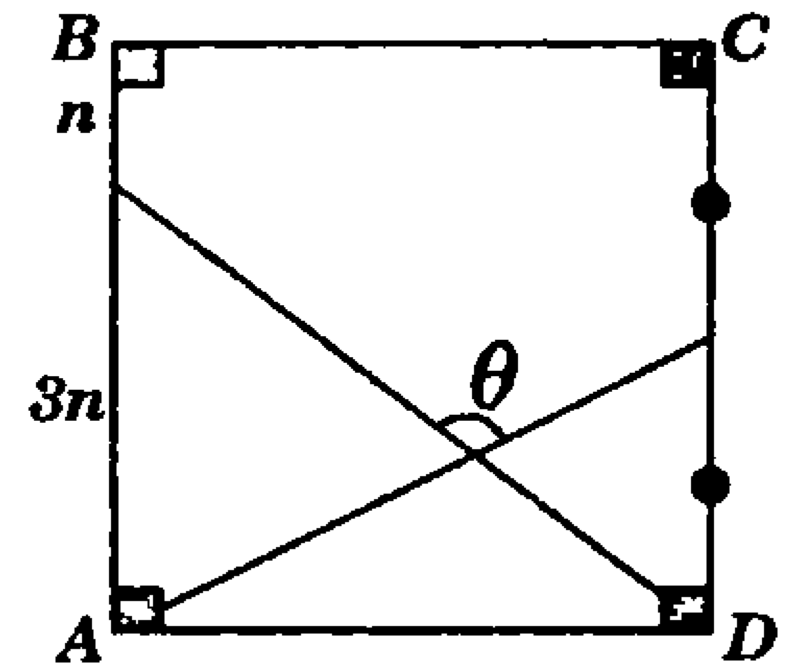
A) 0 B) -5 C) -6 D) -12 E) -4

(07) Si: $Sen(x+2y)=3Senx$

hallar: $Ctg(x+y)$

A) $\dfrac{1}{2}Ctgy$ B) $\dfrac{1}{2}Tgy$ C) $2Tgy$
D) $2Ctgy$ E) $Ctgy$

(08) En la figura se tiene que *ABCD* es un cuadrado. Calcule $Tg\theta$



A) $-1/2$

B) $-1/3$

C) -2

D) -1

E) -3

(09) Si se tiene que:

$$Tg(a+b)=\frac{2}{3}\ \wedge\ Tg(b-a)=\frac{1}{5}$$

Calcule: $Tg2a$

A) $7/17$ B) $7/13$ C) $7/5$
D) $5/3$ E) $12/17$

(10) Si se sabe: $Sen\beta=\frac{4}{5}\wedge 0<\beta<\frac{\pi}{2}$

Simplificar:

$$P=\frac{\sqrt{3}Sen(\alpha+\beta)-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}Cos(\alpha+\beta)}{Sen\alpha}$$

A) $5\sqrt{3}$ B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ E) $\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$

(11) Reducir:

$$M=\frac{Sen(\beta+\alpha)}{Ctg\alpha+Ctg\beta}+\frac{Sen(\beta-\alpha)}{Ctg\beta-Ctg\alpha}-Tg\frac{7\pi}{8}$$

A) $1-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\sqrt{2}+2$
D) 0 E) -1

(12) Si: $Tgx+Tgy=2$

Calcular: $L=\dfrac{Sen(x+y-45^\circ)}{Cos(x-y)}$

A) 2 B) $1/2$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}/2$ E) $2\sqrt{2}$

(13) Simplificar:

$$M=\frac{Sen^2(A+B)-Sen^2A-Sen^2B}{SenASenBCos(A+B)}$$

A) 1 B) 2 C) $SenASenB$
D) $2SenASenB$ E) $SenBSenA$

(14) Calcular el valor de:

$$L=Csc38^\circ+Csc22^\circ$$

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{23}$ B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{23}$ C) $\dfrac{70\sqrt{2}}{23}$

D) $\dfrac{35\sqrt{2}}{13}$ E) $\dfrac{35\sqrt{2}}{23}$

15 Si: $Tg(\theta+\alpha)=2$

además: $Ctg\alpha Ctg\theta=1/3$

calcular: $Tg(\theta-\alpha)$

A) ± 1 B) 4 C) $\pm 1/2$ D) $1/3$ E) $1/4$

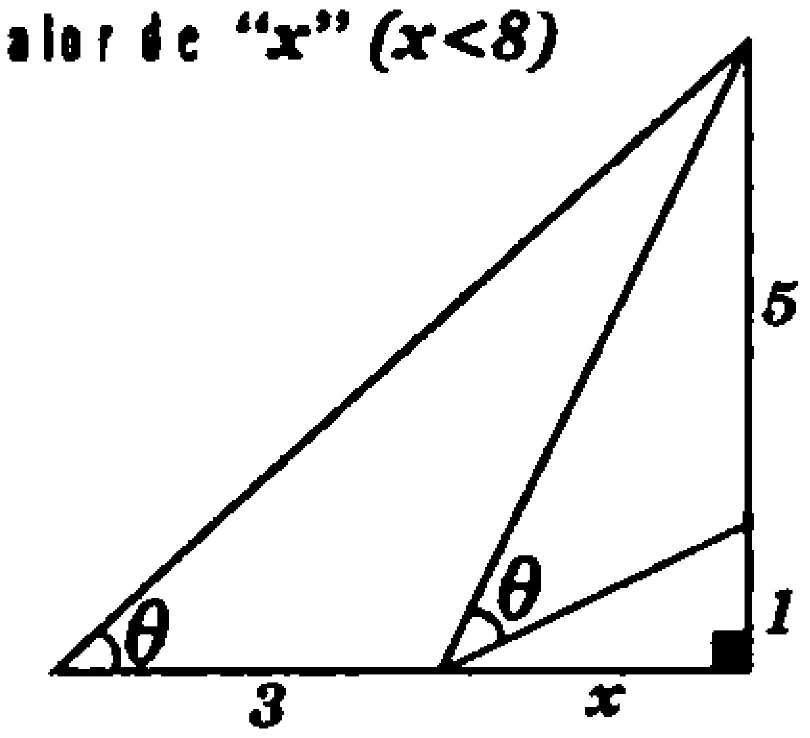
16 Calcular el valor de:

$$K=Ctg35°+\sqrt{3}Tg5°Ctg35°+Tg5°$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}/3$ C) $\sqrt{3}+1$

D) $\sqrt{3}-1$ E) 1

17 Del gráfico mostrado, calcular el valor de "x" $(x<8)$



A) 6 B) 2 C) 5 D) 3 E) 7

18 Si:

$$Tgx+Ctgy=1;\ Tgy+Ctgx=4$$

Calcular: $Cos(x+y)+Sen^2(x+y)$

A) 2 B) 1 C) 3 D) −2 E) 4

19 Siendo:

$$\frac{Senx}{Seny}=\frac{a}{b};\ \frac{Cosx}{Cosy}=\frac{c}{d}$$

determinar: $Cos(x-y)$ en términos de $a; b; c$ y d

A) $\frac{bd+ac}{ad-bc}$ B) $\frac{a+c}{b+d}$ C) $\frac{bd+ac}{ad+bc}$

D) $\frac{a-c}{b-d}$ E) $\frac{ac+bd}{bc}$

20 Sabiendo que:

$$Tg\theta Csc\theta=4(Cosx-Cos\theta)$$

Calcular:

$$P=Sen(\theta-x)Sen(\theta+x)Sec^2xSec^2\theta$$

A) 3 B) 2 C) 4 D) −5 E) 8

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si: $Cota=\frac{4}{3}\ \wedge\ Tan\beta=\frac{5}{12}$

Calcular :

$$N=\frac{Sen(\alpha+\beta)}{Cos\alpha\times Sen\beta}$$

A) $\frac{14}{5}$ B) $\frac{14}{9}$ C) 2 D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{5}{9}$

02 Reducir :

$$Q=\sqrt{2}\times Sen(45°-x)+\frac{Tanx}{Secx}$$

A) 0 B) Senx C) −Senx

D) Cosx E) −Cosx

03 Calcular :

$$B=\frac{Sen30°\times Cos60°+Cos30°\times Sen60°}{Sen75°\times Cos15°-Cos75°\times Sen15°}$$

A) 0 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

04 Calcular:

$$U=Cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-Cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

A) $-\sqrt{3}Sen\theta$ B) $\sqrt{3}Sen\theta$ C) 0

D) $-Sen\theta$ E) $Sen\theta$

05 Reducir:

$$J=\frac{Cos(53°-x)Cosx-Sen(53°-x)Senx}{Cos(x+37°)Cosx+Sen(x+37°)Senx}$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

06 Calcular:

$$F=\frac{(Sen15°+Cos15°)^2-(Sen15°-Cos15°)^2}{(Sen75°+Cos75°)^2+(Sen75°-Cos75°)^2}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{4}$ E) 4

07 Si: $Tan(\alpha+\beta)=4$ y $Tan\beta=5$

Hallar: "$Tan\,\alpha$"

A) −1 B) $\frac{1}{21}$ C) $-\frac{1}{21}$ D) $\frac{1}{19}$ E) $-\frac{1}{19}$

08 Calcular :

$$A=\frac{Cot40°+Tan25°}{Cot75°\times Cot15°-Tan50°\times Cot65°}$$

A) $2-\sqrt{3}$ B) $2+\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $2\sqrt{3}$

09 Si A y B son ángulos agudos donde : $SenA=3/5$ y $Sen\,B=5/13$, calcular el valor de :

$$\frac{Sen(A+B)}{Cos(A+B)}$$

A) −9 B) 8/9 C) 56/33 D) 8 E) −8/9

10 Al reducir la expresión :

$$Cos(60°-x)Cosx-Sen(60°-x)Senx$$

Se obtiene :

A) Senx B) Cosx C) 0 D) ½ E) 1

11 Calcular el valor de :

$$\frac{Sen21°}{Cos24°-Sen24°}$$

A) 1/3 B) $\sqrt{2}/2$ C) 1 D) $\sqrt{2}$ E) 3

12 En un triángulo ABC, se cumple que :

$Cos(A-B)=2SenASenB$; Luego el triángulo es:

A) Escaleno B) isósceles

D) Equilátero C) Rectangular

13 Simplificar la expresión :

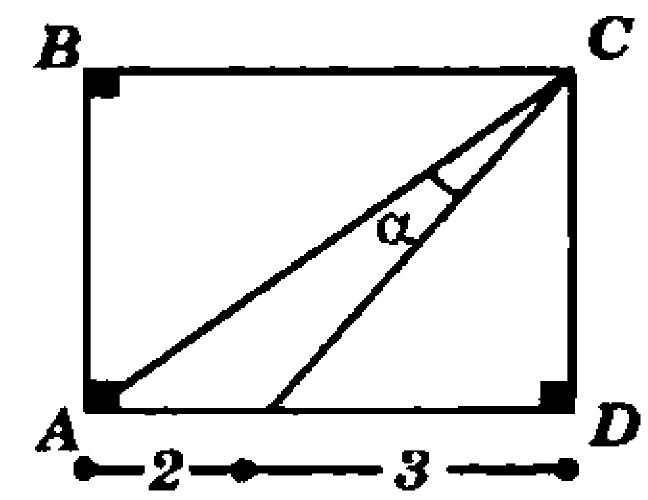
$$\frac{tg\theta-tg(\theta-x)}{1+tg\theta tg(\theta-x)}$$

A) $tg\theta$ B) tgx C) $Ctg\theta$

D) $ctgx$ E) $tgx\,tg\theta$

14 De la figura calcular: $Ctg\,\alpha$ si $ABCD$ es un cuadrado.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)D	2)E	3)C	4)B	5)A	6)D	7)A	8)C	9)A	10)D
11)B	12)[illegible]	13)B	14)C	15)C	16)A	17)D	18)[illegible]	19)E	20)[illegible]

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

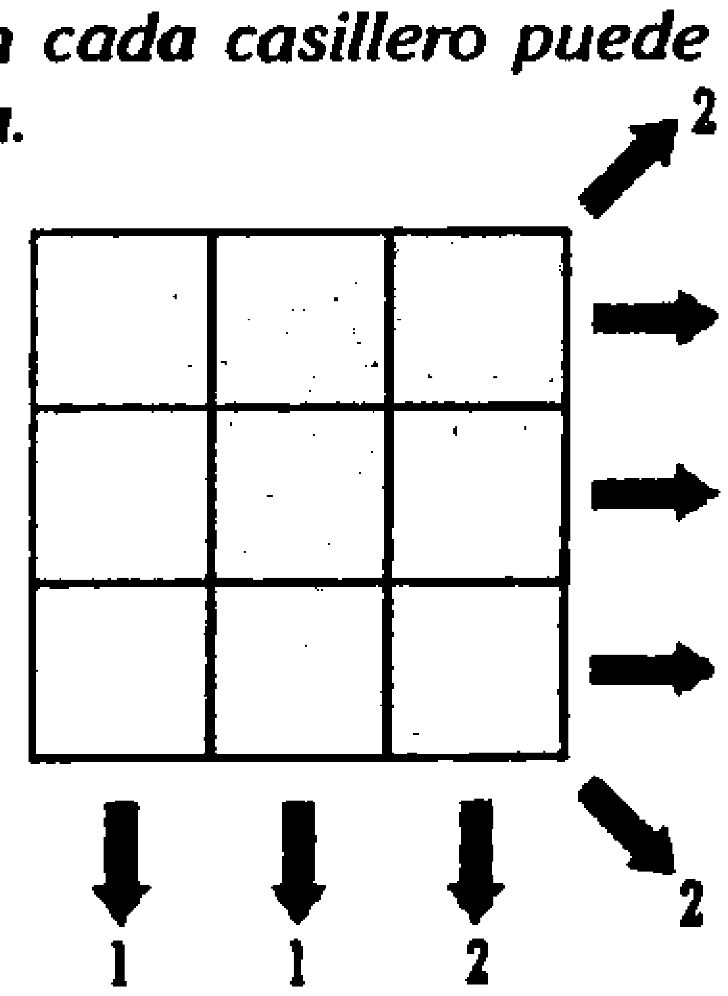
1)[illegible]	2)C	3)D	4)A	5)B	6)B	7)C	8)B	9)C	10)D
11)B	12)[illegible]	13)B	14)[illegible]						

RETO 1 :

¿Cuántas fichas como mínimo son necesarias situar sobre el tablero para que cada fila, columna y diagonal haya la cantidad de círculos que se indica?

Nota: en cada casillero puede ir una ficha.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7



ÁNGULO DOBLE

CAPÍTULO 122

OBJETIVOS:

• *Reconocer y aplicar convenientemente las fórmulas para el cálculo de las razones trigonométricas del doble de un ángulo.*

• *Aplicar las propiedades de degradación de manera correcta en la simplificación de expresiones.*

SENO DEL ARCO DOBLE

$$\boxed{Sen2x = 2SenxCosx}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordar que :

$Sen(x + y) = SenxCosy + Cosx\,Seny$

* Hacemos : $y = x$, entonces tendremos :

$$Sen(x+x) = Senx \times Cosx + Cosx \times Senx$$

$$\Rightarrow Sen2x = 2SenxCosx$$

EJEMPLOS :

* $Sen20° = Sen2(10°) = 2Sen10°Cos10°$

* $Sen4\alpha = Sen2(2\alpha) = 2Sen2\alpha \times Cos2\alpha$

* $2Sen7°30' \times Cos7°30' = Sen2(7°30') = Sen14°60'$
 $= Sen15°$

* $2 \times Sen\frac{\theta}{2} \times Cos\frac{\theta}{2} = Sen2\left(\frac{\theta}{2}\right) = Sen\theta$

COSENO DEL ARCO DOBLE

$$\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordar que :

$Cos(x+y) = Cosx\,Cosy - Senx\,Seny$

* Hacemos $y=x$, entonces tendremos :

$$\Rightarrow Cos2x = Cos^2x - Sen^2x$$

EJEMPLOS :

* $Cos8\phi = Cos2(4\phi) = Cos^2 4\phi - Sen^2 4\phi$

* $Cos50° = Cos2(25°) = Cos^2 25° - Sen^2 25°$

* $Cos^2(A+B) - Sen^2(A+B) = Cos2(A+B) = Cos(2A+2B)$

* $Cos^2\frac{\pi}{8} - Sen^2\frac{\pi}{8} = Cos2\left(\frac{\pi}{8}\right) = Cos\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{Cos2x = 1 - 2Sen^2x}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordar que :

$Sen^2x + Cos^2x = 1 \Rightarrow Cos^2x = 1 - Sen^2x$

* Reemplazamos en :

$Cos2x = Cos^2x - Sen^2x \Rightarrow Cos2x = (1 - Sen^2x) - Sen^2x$

$\Rightarrow Cos2x = 1 - 2Sen^2x$

EJEMPLOS :

* $Cos86° = Cos2(43°) = 1 - 2Sen^2 43°$

* $Cosy = Cos2\left(\frac{y}{2}\right) = 1 - 2Sen^2\left(\frac{y}{2}\right)$

* $1 - 2Sen^2 1° = Cos2(1°) = Cos2°$

* $1 - 2Sen^2(45° - \theta) = Cos2(45° - \theta) = Cos(90° - 2\theta) = Sen2\theta$

$$\boxed{Cos2x = 2Cos^2x - 1}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordamos que :

$Sen^2x + Cos^2x = 1 \Rightarrow Sen^2x = 1 - Cos^2x$

* Reemplazando en :

$Cos2x = Cos^2x - Sen^2x \Rightarrow Cos2x = Cos^2x - (1 - Cos^2x)$

$\Rightarrow Cos2x = 2Cos^2x - 1$

EJEMPLOS :

* $Cos9° = Cos2\left(\frac{9°}{2}\right) = Cos2(4°30') = 2Cos^2 4°30' - 1$

* $Cos6\gamma = Cos2(3\gamma) = 2Cos^2 3\gamma - 1$

* $2Cos^2 11°15 - 1 = Cos2(11°15') = Cos22°30'$

* $2Cos^2(30°+\alpha) - 1 = Cos2(30°+\alpha) = Cos(60°+2\alpha)$

DEGRADACIÓN DEL EXPONENTE "2" Ó "CUADRADO"

La fórmulas expuestas a continuación son empleadas, en expresiones trigonométricas, donde se presentan "Senos" ó "Cosenos" de un cierto arco elevado al exponente"2".

DEGRADACIÓN DEL "CUADRADEL" SENO DE UN ARCO SIMPLE "x"

Se ha demostrado que :

$$Cos2x=1-2Sen^2x \Rightarrow \boxed{2Sen^2x=1-Cos2x}$$

EJEMPLOS :

$*2Sen^2 18°=1-Cos2(18)° = 1- Cos36°$

$$*Sen^2 2\alpha=\frac{2Sen^2 2\alpha}{2}=\frac{1-Cos2(2\alpha)}{2}=\frac{1-Cos4\alpha}{2}$$

$* \ 2Sen^2(a-b) = 1 - Cos2(a-b) = 1 - Cos(2a-2b)$

$*2Sen^2 22°30' = - Cos2(22°30')=1 - Cos44°60'$

$=1 - Cos45°$

$*1-Cos80°=1-Cos2(40°)= 2Sen^2 40$

$$*1-CosA=1-Cos2\left(\frac{A}{2}\right)=2Sen^2\frac{A}{2}$$

$$*1-Cos37°=1-Cos^2\left(\frac{37°}{2}\right)=2Sen^2\left(\frac{37°}{2}\right)=2Sen^2 18°30'$$

DEGRADACIÓN DEL "CUADRADO" DEL COSENO UN ARCO SIMPLE "x"

* Se ha demostrado que :

$$Cos2x=2Cos^2x-1= \Rightarrow \boxed{2Cos^2x=1+Cos2x}$$

EJEMPLOS :

$* \ 2Cos^2 3\phi=1+Cos2(3\phi)=1+Cos6\phi$

$$* \ Cos^2 75°=\frac{2Cos^2 75}{2}=\frac{1+Cos2(75°)}{2}=\frac{1+Cos150°}{2}$$

$$* \ 2Cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1+Cos2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1+Cos\alpha$$

$*4Cos^2 10°=2[2Cos^2 10°]=2[1+Cos2(10°)]=2[1+Cos20°]$

$=2+2Cos20°$

$*1+Cos40°=1+Cos2(20°)=2Cos^2 20°$

$*1+Cos10b=1+Cos2(5b)=2Cos^2 5b$

$$*1+Cos(x+y)=1+Cos2\left(\frac{x+y}{2}\right)=2Cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$*1+Cos53°=1+Cos2\left(\frac{53°}{2}\right)=2Cos^2\left(\frac{53°}{2}\right)=2Cos^2 26°30'$$

TANGENTE DEL ARCO DOBLE

$$\boxed{Tan2x=\frac{2Tanx}{1-Tan^2x}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordamos que : $Tan(x+y)=\dfrac{Tanx+Tany}{1-Tanx \times Tanx}$

hacemos $y=x$

$$\Rightarrow Tan(x+x)=\frac{Tanx+Tanx}{1-TanxTanx} \Rightarrow Tan2x=\frac{2Tanx}{1-Tan^2x}$$

EJEMPLOS :

$$*Tan36°=Tan2(18°)=\frac{2Tan18°}{1-Tan^2 18°}$$

$$* \ \frac{2Tan8°}{1-Tan^2 8°}=Tg2(8°)=Tg16°$$

$$* \ Tan4\theta=Tan2(2\theta)=\frac{2Tan2\theta}{1-Tan^2 2\theta}$$

$$* \ \frac{2Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-Tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=Tan2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=Tan\alpha$$

COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE DEL ARCO DOBLE

Tomaremos las identidades recíprocas aplicadas al arco doble, es decir :

$$* \ Como : Tan2xCot2x=1 \Rightarrow \boxed{Cot2x=\frac{1}{Tan2x}}$$

$$* \ Como: Cos2xSec2x=1 \Rightarrow \boxed{Sec2x=\frac{1}{Cos2x}}$$

$$* \ Como : Sen2xCsc2x=1 \Rightarrow \boxed{Csc2x=\frac{1}{Sen2x}}$$

EJEMPLO :

* Siendo: $\dfrac{Sec2x}{Csc2x}=1,2$; calcular el valor de : "*Cot2x*"

RESOLUCIÓN :

Sabemos :

$$\frac{Sec2x}{Csc2x}=1,2\Rightarrow\frac{\frac{1}{Cos2x}}{\frac{1}{Sen2x}}=\frac{12}{10}\Rightarrow\frac{Sen2x}{Cos2x}=\frac{6}{5}\Rightarrow Tan2x=\frac{6}{5}$$

Luego :

$$\Rightarrow Cot2x=\frac{1}{Tan2x}\Rightarrow Cot=\frac{1}{\frac{6}{5}}=\frac{5}{6}$$

FÓRMULAS ESPECIALES DEL ARCO DOBLE

I) $\boxed{Sen2x=\dfrac{2Tanx}{1+Tan^2x}}$ y $\boxed{Cos2x=\dfrac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}}$

DEMOSTRACIÓN:

* Como tangente del Arco Simple "x" Recordemos que:

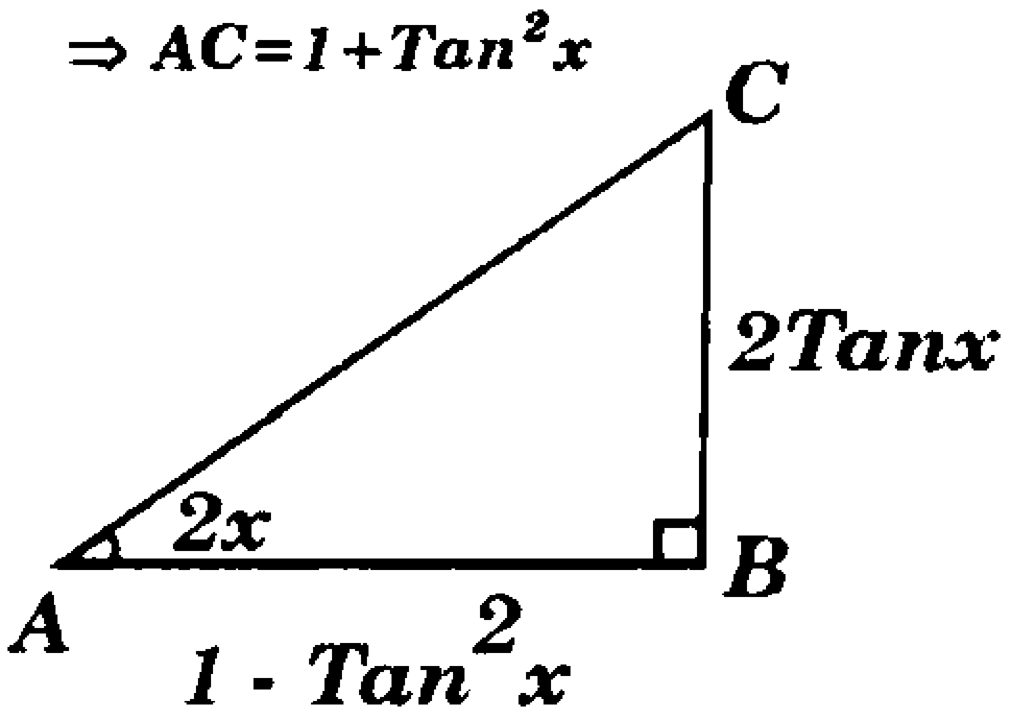
$$Tan2x=\frac{2Tanx}{1-Tan^2x}$$

y suponiendo "$2x$" ángulo agudo, formaremos el siguiente triángulo rectángulo ABC.

* Calculamos luego la hipotenusa con aplicación del teorema de Pitágoras, es decir :

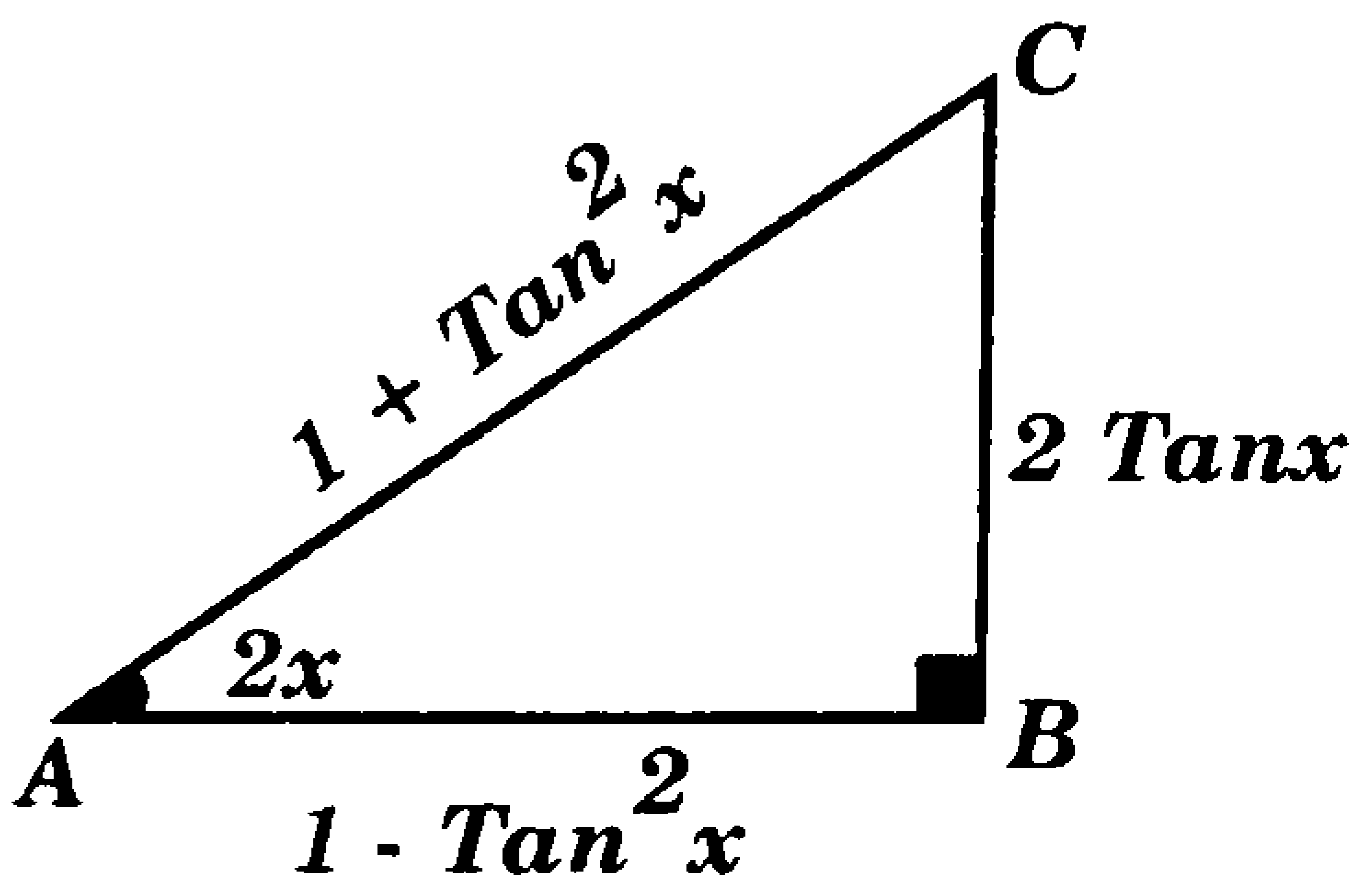
$AC^2=(2Tanx)^2+(1-Tan2x)^2$

$\Rightarrow AC=1+Tan^2x$



* Del ⊿ ABC mostrado, tenemos :

$$Sen2x=\frac{2Tanx}{1+Tan^2x}\ ;\ Cos2x=\frac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}$$



EJEMPLOS :

$$*\ \frac{2Tan7°30'}{1+Tan^27°30'}=Sen2(7°30')=Sen15°$$

$$*\ \frac{1-Tan^24\theta}{1+Tan^24\theta}=Cos2(4\theta)=Cos8\theta$$

EJEMPLO :

Si : $Tanx=3$;

Hallar el valor de : $P=Sen2x-Cos2x$

RESOLUCIÓN :

$$*\ Sen2x=\frac{2Tanx}{1+Tan^2x}=\frac{2(3)}{1+(3)^2}=\frac{6}{10}\Rightarrow Sen2x=\frac{3}{5}$$

$$*\ Cos2x=\frac{1-Tan^2x}{1+Tan^2x}=\frac{1-(3)^2}{1+(3)^2}=\frac{-8}{10}\Rightarrow Cos2x=\frac{-4}{5}$$

Finalmente :

$$P=Sen2x-Cosx=\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{-4}{5}\right)=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\Rightarrow\boxed{P=1,4}$$

II) $\boxed{Cotx+Tanx=2Csc\,2x}$ y

$\boxed{Cotx-Tanx=2Cot2x}$

Demostraremos que :

$Cotx-Tanx=2Csc2x$, se efectuara de izquierda a derecha.

$$\Rightarrow Cotx-Tanx=\frac{Cosx}{Senx}-\frac{Senx}{Cosx}=\frac{Cos^2x-Sen^2x}{SenxCosx}$$

$$\Rightarrow Cotx-Tanx=\frac{2(Cos^2x-Sen^2x)}{(2SenxCosx)}=\frac{2Cos2x}{Sen2x}$$

$$\Rightarrow Cotx-Tan\,x=2Cot2x$$

*Análogamente se demuestra que :

$$Cotx+Tanx=2Csc2x$$

EJEMPLOS :

* $Cot10°+Tan10°=2Csc2(10°)=2Csc20°$
* $Cot4\alpha-Tan4\alpha=2Cot2(4\alpha)=2Cot8\alpha$
* $2Csc4\theta=2Csc2(2\theta)=Cot2\theta+Tan2\theta$
* $2Cot70°=2Csc2(35°)=Cot35°-Tan35°$

EJEMPLO APLICATIVO :

Si $Cos^2x=n$;hallar

$$W=Cot^2x-Tan^2x$$

RESOLUCIÓN :

$W=Cot^2x-Tan^2x=(Cotx+Tanx)(Cotx-Tanx)$

$=(2Csc2x)(2Cot2x)=\left(2\times\frac{1}{Sen2x}\right)\left(2\times\frac{Cos2x}{Sen2x}\right)$

$=\frac{4Cos2x}{Sen^2 2x}=\frac{4Cos2x}{1-Cos^2 2x}$,

Pero: $Cos2x=n \Rightarrow W=\frac{4n}{1-n^2}$

RESUMEN DE FÓRMULAS

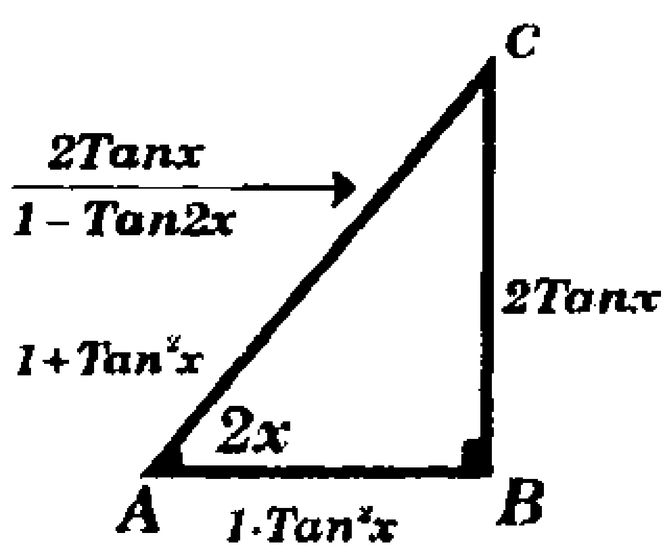
BÁSICAS :

* $Sen2x=2SenxCosx$

Degradan "Cuadrados"

* $Cos2x=Cos^2x-Sen^2x$
  - → $Cos2x=1-2Sen^2x$ → $2Sen^2x=1-Cos2x$
  - → $Cos2x=2Cos^2x-1$ → $2Cos^2x=1+Cos2x$

* $Tan2x=\frac{2Tanx}{1-Tan2x}$



* $Sen2x=\frac{2Tanx}{1+Tan^2x}$
* $Cos2x=\frac{1-Tan2x}{1+Tan2x}$

OBSERVACIONES :

* $Cot2x=\frac{1}{Tan2x}$ * $Sec2x=\frac{1}{Cos2x}$
* $Csc2x=\frac{1}{Sen2x}$

ESPECIALES :

* $Cotx+Tanx=2Csc2x$
* $Cotx-Tanx=2Cot2x$
* $(Senx+Cosx)^2=1+Sen2x$
* $Sec2x+1=\frac{Tan2x}{Tanx}$
* $Sec2x-1=Tan2xTanx$
* $Sen^4x+Cos^4x=\frac{3+Cos4x}{4}$
* $Sen^6x+Cos^6x=\frac{5+3Cos4x}{8}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Reducir : $A=\left(\frac{sen2x}{cosx}\right)^2+\left(\frac{sen2x}{senx}\right)^2$

A)5 B)4 C)1 D)8 E)6

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$sen2x=2senx\times cosx$$

* Luego :

$A=\left(\frac{2senx\times cosx}{cosx}\right)^2+\left(\frac{2senx\times cosx}{senx}\right)^2$

$\Rightarrow A=4sen^2x+4cos^2x=4(\underbrace{sen^2x+cos^2x}_{1})$

$\Rightarrow A=4$ RPTA:"B"

PROBLEMA 2 :

Simplificar :

$$B=\frac{sen2x-2senx}{1-cosx}$$

A)senx B)2senx C)-senx
D)- cosx C)- 2senx

RESOLUCIÓN :

* Reemplazado la fórmula en el numerador:

$$B=\frac{sen2x-2senx}{1-cosx}=\frac{2senxcosx-2senx}{1-cosx}$$

* Agrupando : $B=\frac{2senx(cosx-1)}{1-cosx}=\frac{-2senx\,(1-cosx)}{1-cosx}$

* Simplificando : $B=-2senx$

RPTA:"E"

PROBLEMA 3 :

Reducir : $C=4senx\,cosx\,cos2x$

A)4sen4x B)sen4x C)2sen4x
D)$\frac{1}{2}$sen4x E)$\frac{1}{4}$sen4x

RESOLUCIÓN :

* Ordenando la expresión :
  $C=4senx\times cosx\times cos2x$
  $\Rightarrow C=2\times\underline{2senx\times cosx}\times cos2x$

* Reconozca que : $2senx\times cosx=sen2x$

* Luego : $C=\underline{2sen2x\times cos2x}$

* También :

$$2sen2xcos2x=sen4x \Rightarrow C=sen4x$$

RPTA:"B"

PROBLEMA 4 :

Simplifique :

$C = senx \times cos^3x - sen^3x \times cosx$

A) $sen2x$ B) $sen2x$ C) $sen4x$

D) $\frac{1}{2}sen4x$ E) $\frac{1}{4}sen4x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$C = senx \times cos^3x - sen^3x \times cosx$

Factorizando :

$C = senx \times cosx \underbrace{(cos^2x - sen^2x)}_{cos2x};$

pero: $cos^2x - sen^2x = cos2x$

* Luego :

$C = senx \times cosx\ cos2x$

*Multiplique por 2 a cada miembro:

$2C = \underbrace{2senx \times cosx}_{sen2x} \times cos2x;$

note: $2senx \times cosx = sen2x$

* Luego :

$2C = sen2x \times cos2x$; y multiplicado por 2 a cada miembro tenemos :

$4C = \underbrace{2sen2x \times cos2x}_{sen4x};$

note: $2sen2x \times cos2x = sen4x$

$4C = sen4x \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{4}sen4x}$

RPTA:"E"

PROBLEMA 5 :

Calcular un valor agudo de "x" que cumple :

$\frac{1}{8}secx = senx \times cos2x$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{18}$ D) $\frac{\pi}{24}$ E) $\frac{\pi}{48}$

RESOLUCIÓN :

* En la condición :

$\frac{1}{8}secx = senx \times cos2x$

$\Rightarrow \frac{1}{8} \times \frac{1}{cosx} = senx \times cos2x$

$\Rightarrow \frac{1}{8} = senx \times cosx \times cos2x$

* Multiplicando por 2 :

$\frac{1}{8} \times 2 = \underbrace{2senx \times cosx} \times cos2x ...$

(recuerde : $2sen \times cosx = sen2x$)

$\frac{1}{2} = sen2x \times cos2x;$

ahora multiplicamos por 2 :

$\frac{1}{4} = \underbrace{2sen2x \times cos2x}_{sen4x}$

$\frac{1}{2} = sen4x$... recuerde:

$sen30° = \frac{1}{2} \wedge 30° = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow 4x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{24}}$

RPTA:"D"

PROBLEMA 6 :

Siendo "θ" un ángulo, tal que :

$sen\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Calcular : "$tan2\theta$"

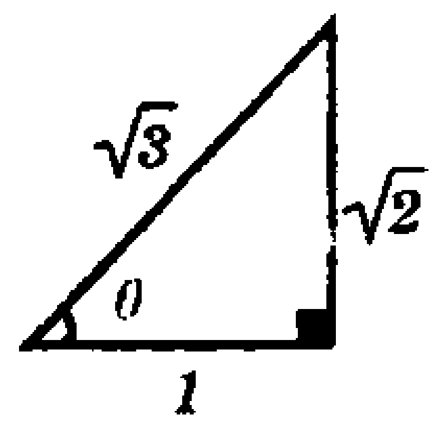
A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $-2\sqrt{2}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Como :

$sen\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$



$\Rightarrow tan\theta = \sqrt{2}$

* Piden, calcular :

$tan2\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}^2}$

$\Rightarrow tan2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} \Rightarrow \boxed{tan2\theta = -2\sqrt{2}}$

RPTA:"C"

PROBLEMA 7 :

Si : $tan\alpha = \frac{2}{3}$; "α" es agudo,

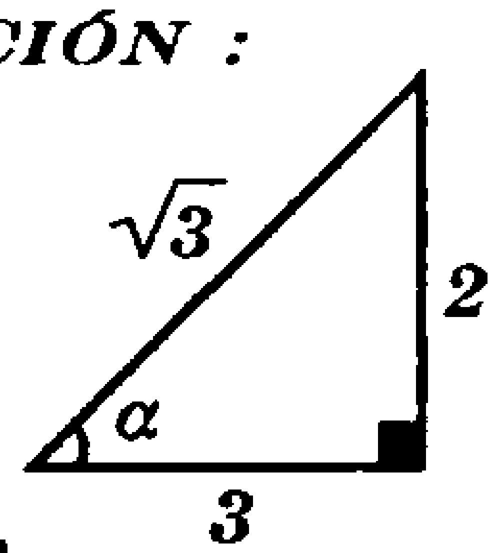
Calcular: "$sen2\alpha$"

A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{7}{13}$ D) $\frac{6}{13}$ E) $\frac{13}{14}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$tan\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow$



* Piden calcular :

$sen2\alpha = 2sen\alpha \times cos\alpha$

* Con ayuda del triángulo :

$sen2\alpha = 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \boxed{sen2\alpha = \frac{12}{13}}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 8 :

Siendo :

$senx + cosx = \sqrt{\frac{4}{3}}$; calcular: "$sen2x$"

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$senx + cosx = \sqrt{\frac{4}{3}}$

* Elevando al cuadrado :

$(senx + cosx)^2 = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$

* por propiedad :

$1 + sen2x = \frac{4}{3} \Rightarrow sen2x = \frac{4}{3} - 1$

$\Rightarrow \boxed{sen2x = \frac{1}{3}}$

RPTA:"A"

PROBLEMA 9 :

Sabiendo que $sen\phi + cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$; calcular un valor agudo de ϕ

A) 10° B) 15° C) 30° D) 60° E) 45°

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$sen\phi + cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* Elevando al cuadrado :

$(sen\phi + cos\phi)^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}^2 \Rightarrow 1 + sen2\phi = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow sen2\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\phi = 30°$

$\Rightarrow \boxed{\phi = 15°}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Demuestre que :

$cotx + tanx = 2csc2x$

RESOLUCIÓN :

En el primer miembro :

$cotx + tanx = 2csc2x$

* pasamos a senos y cosenos :

$\frac{cosx}{senx} + \frac{senx}{cosx} = 2csc2x$

* Operando :

$$\frac{cos^2x+sen^2x}{senx\ cosx}=2csc2x;$$

pero: $cos^2x+sen^2x=1$

* Luego :

$$\frac{1}{senx\times cosx}=2csc2x$$

* multiplicando por 2 :

$$\frac{2}{2senx\times cosx}=2csc2x$$

* Note que :

$\frac{2\times1}{sen2x}=2csc2x$; pero: $\frac{1}{sen2x}=csc2x$

$$\Rightarrow \boxed{2csc2x=2csc2x}$$

PROBLEMA 11 :

Reducir :

$$L=cot\alpha-tan\alpha-2tan2\alpha$$

A) $cot2\alpha$ B) $cot4\alpha$ C) $2cot4\alpha$

D) $4cot4\alpha$ E) $8cot4\alpha$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$L=\underline{cot\alpha-cot\alpha}-2tan2\alpha;$$

no olvide: $cotx-tanx=2cot2x$

* Luego :

$$L=2cot2\alpha-2tan2\alpha$$

* Factorizando :

$$L=2\underbrace{(cot2\alpha-tan2\alpha)}_{2cot4\alpha};$$

pero: $cot2\alpha-tan2\alpha=2cot4\alpha$

$$\Rightarrow L=4cot4\alpha$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

Simplificar :

$$C=\left(\frac{1-cos2\beta}{2sen\beta}+\frac{1+cos2\beta}{2cos\beta}\right)^2-1$$

A) $sen\beta$ B) $cos\beta$ C) $sen2\beta$

D) $cos\beta$ E) $\frac{1}{2}sen2\beta$

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que :

$$\left.\begin{array}{l}1-cos2\beta=2sen^2\beta\\1+cos2\beta=2cos^2\beta\end{array}\right\}\text{por degradación}$$

* Luego :

$$C=\left\{\frac{1-cos2\beta}{2sen\beta}+\frac{1+cos2\beta}{2cos\beta}\right\}^2-1$$

$$\Rightarrow C=\left\{\frac{2sen^2\beta}{2sen\beta}+\frac{2cos^2\beta}{2cos\beta}\right\}^2-1$$

* Reduciendo :

$$C=\{sen\beta+cos\beta\}^2-1;$$

pero: $(sen\beta+cos\beta)^2=1+sen2\beta$

* Luego :

$$C=1+sen2\beta-1\Rightarrow C=sen2\beta$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13:

Reducir :

$$J=\left(\frac{1-cos2x}{senx}\right)^2+\left(\frac{1+cos2x}{cosx}\right)^2$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que :

$$1-cos2x=2sen^2x$$

$$1+cos2x=2cos^2x$$

* Luego :

$$J=\left(\frac{2sen^2x}{senx}\right)^2+\left(\frac{2cos^2x}{cosx}\right)^2$$

* Reduciendo :

$$J=4sen^2x+4cos^2x$$

$$\Rightarrow J=4\underbrace{(sen^2x+cos^2x)}_{1}\Rightarrow \boxed{J=4}$$

RPTA:"C"

PROBLEMA 14 :

Calcular :

$$cos^2x+cos^2(x+60°)+cos^2(x-60°)$$

A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 3 E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión; multiplicada por 2 :

$$2E=2cos^2x+2cos^2(x+60°)+2cos^2(x-60°)$$

.......(recuerde: $2cos^2\phi=1+cos2\phi$)

$\Rightarrow 2E=$

$$1+cos2x+1+cos(2x+120°)+1+cos(2x-120°)$$

.............($cos(\alpha\pm\beta)=cos\alpha cos\beta\pm sen\alpha sen\beta$)

$$\Rightarrow 2E=3+cos2x+cos2xcos120°-\cancel{sen2xsen120°}+cos2xcos120°+\cancel{sen2xsen120°}$$

$$\Rightarrow 2E=3+cos2x+2cos2x\times cos120°$$

....($cos120°=-1/2$)

$$\Rightarrow 2E=3+cos2x+2cos2x\left(-\frac{1}{2}\right)$$

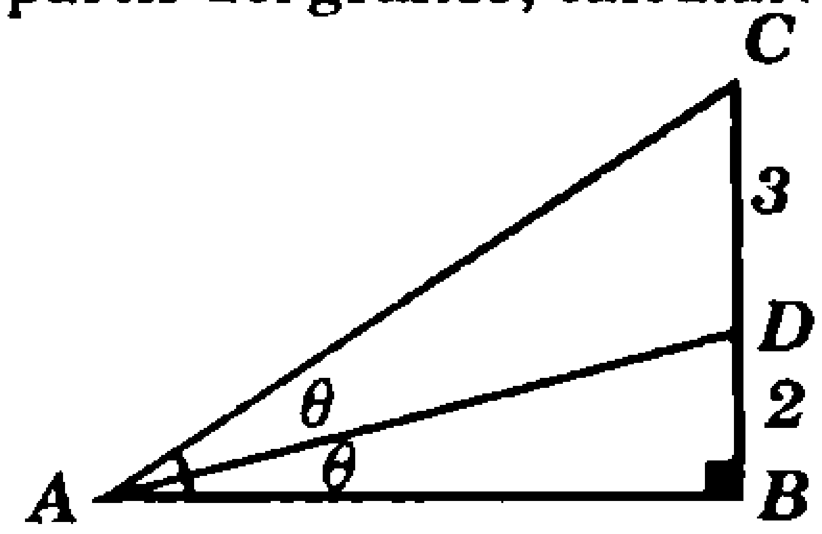
* Reduciendo :

$$2E=3+cos2x-cos2x\Rightarrow \boxed{E=\frac{3}{2}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 15 :

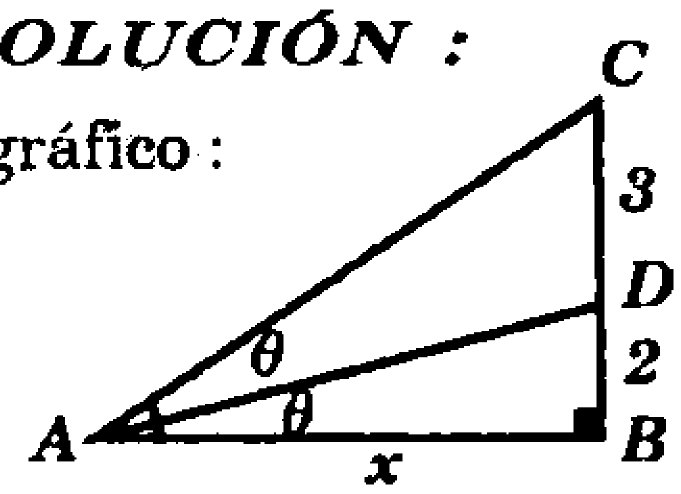
A partir del gráfico; calcular: "$tan\theta$"



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{7}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



1ERA. FORMA:

* Note que :

$$tan\theta=\frac{2}{x}\wedge tan2\theta=\frac{5}{x}$$

pero: $tan2\theta=\frac{2tan\theta}{1-tan^2\theta}$

* Reemplazando :

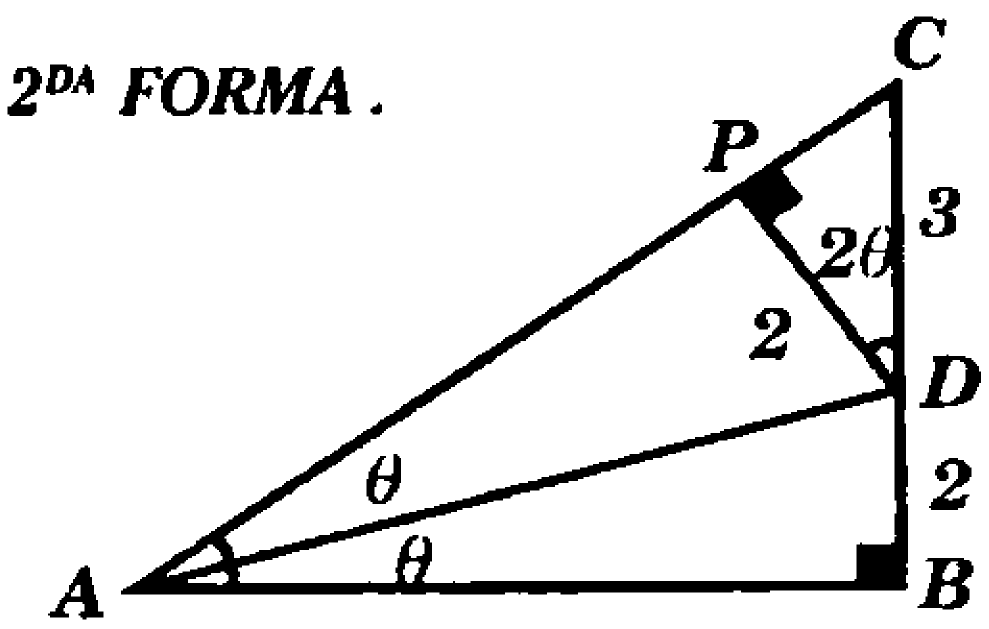
$$\frac{5}{x}=\frac{2\times\frac{2}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2-4}{x^2}};\text{Luego}:\frac{5}{x}=\frac{4x}{x^2-4}$$

$$\Rightarrow 5x^2-20=4x^2\Rightarrow x^2=20\Rightarrow x=2\sqrt{5}$$

* Luego :

$$tan\theta=\frac{2}{x}=\frac{2}{2\sqrt{5}}\Rightarrow \boxed{tan\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

2DA FORMA .



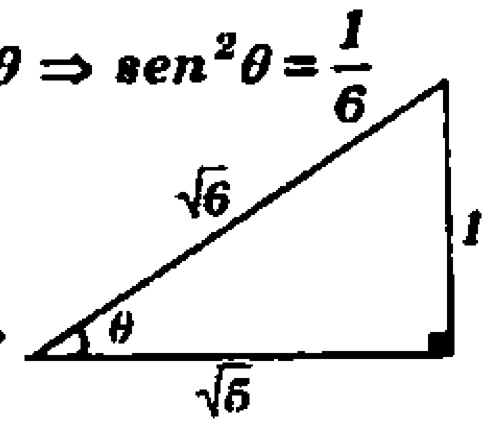
*Trazamos $\overline{DP}\perp\overline{AC}\Rightarrow DP=2$; note que : $\measuredangle CDP=2\theta$

* Luego:

$cos2\theta=\frac{2}{3}$; pero: $cos2\theta=1-2sen^2\theta=\frac{2}{3}$

$$1-\frac{2}{3}=2sen^2\theta\Rightarrow sen^2\theta=\frac{1}{6}$$

$$sen\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

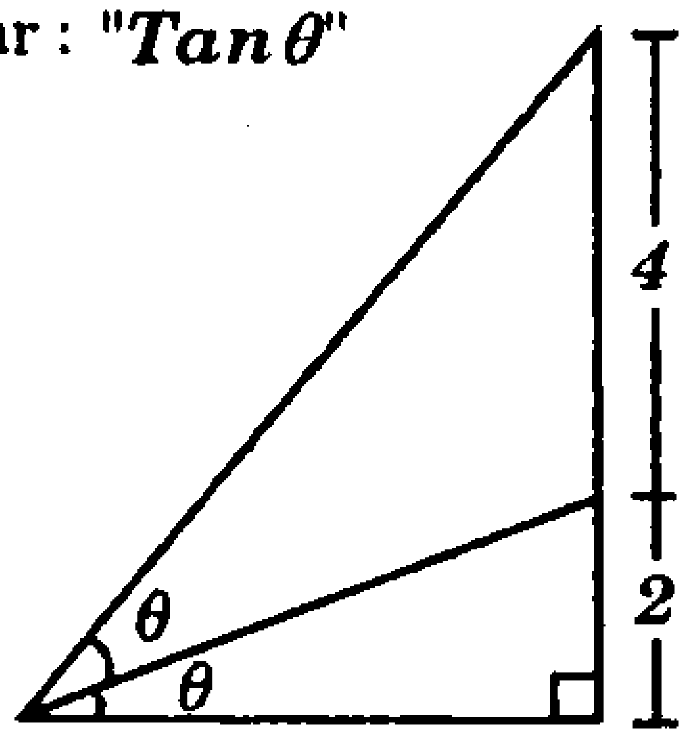
Calcular : "$Tan\,\theta$"

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B) $2\sqrt{3}$

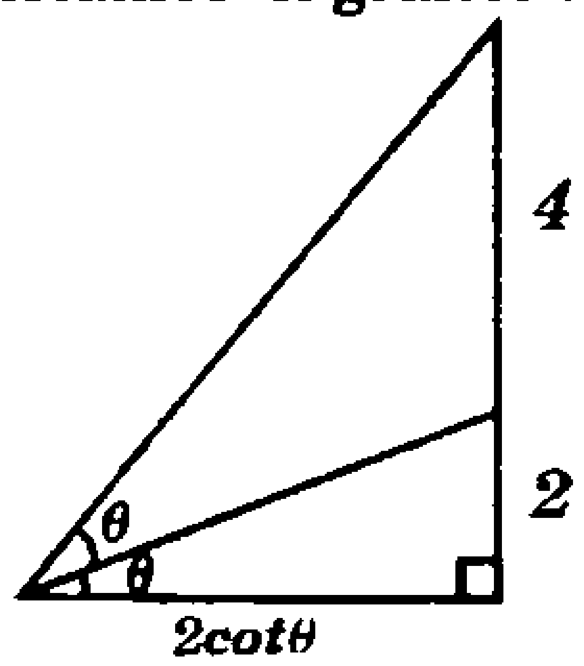
C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{2}$



RESOLUCIÓN :

* Completamos el gráfico :



* Del gráfico obtenemos :

$$Tan2\theta=\frac{6}{2Cot\theta}\Rightarrow Tan2\theta=3Tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{2Tan\,\theta}{1-Tan^2\theta}=3\times Tan\theta$$

* Simplificamos :

$$\frac{2}{1-Tan^2\theta}=3\Rightarrow 2=3-3Tan^2\theta$$

$$\Rightarrow 3\,Tan^2\theta=1\Rightarrow Tan^2\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow Tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 17 :

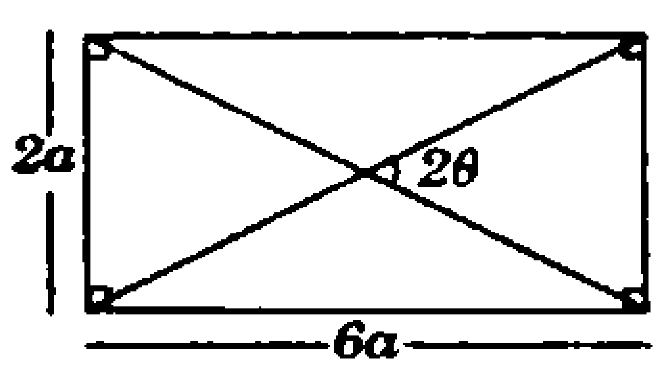
Calcular la tangente del menor ángulo que forman las diagonales de un rectángulo cuya base es igual al triple de su altura.

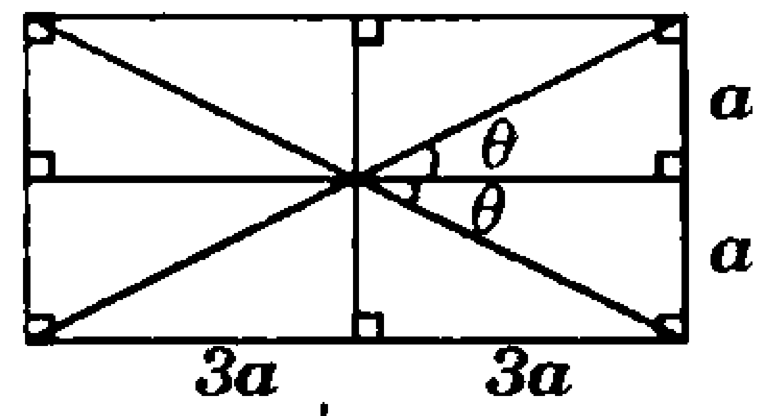
A) 24/25 B) 3/4 C) 4/3

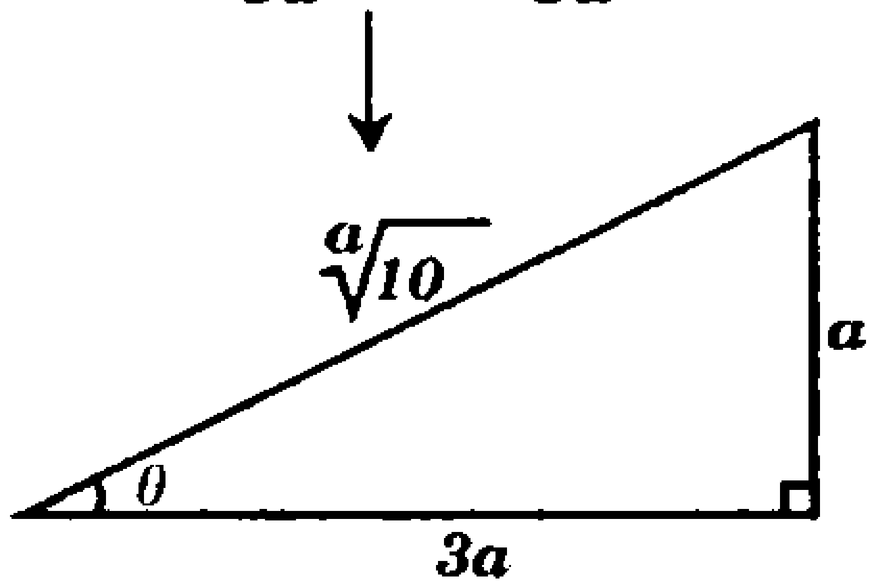
D) $\sqrt{2}-1$ E) $\sqrt{2}+1$

RESOLUCIÓN :

* Graficamos de acuerdo a los datos :







* Nos piden :

$$Tan2\theta=\frac{2Tan\theta}{1-Tan^2\theta}$$

* Pero :

$$Tan\theta=\frac{1}{3}\Rightarrow Tan\,2\theta=\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$*\ Tan\,2\theta=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 18:

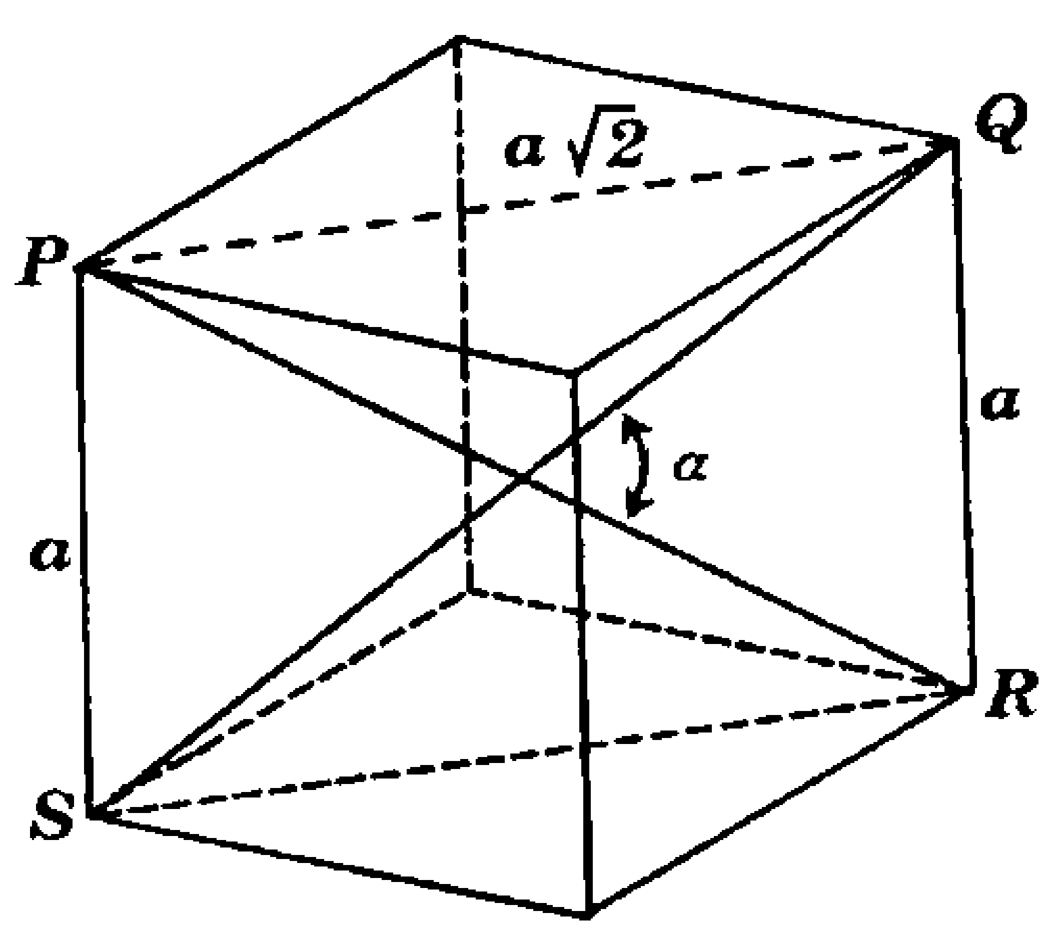
Determinar la tangente del menor ángulo formado por las diagonales de un cubo.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

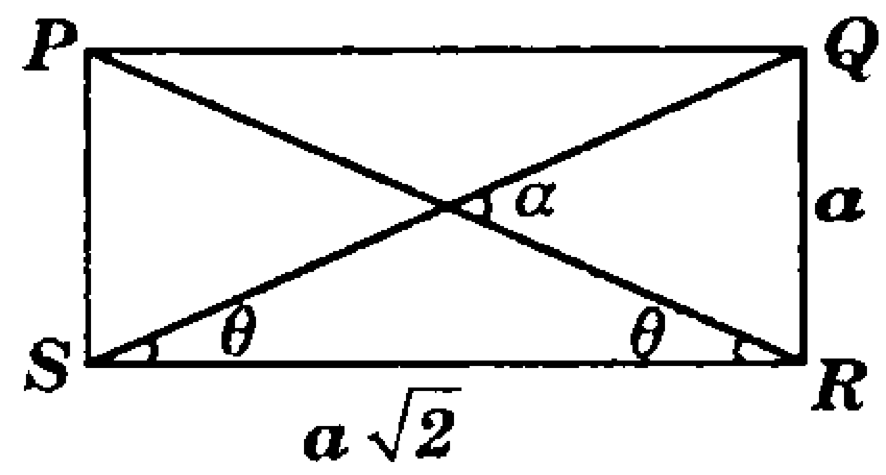
RESOLUCIÓN :

* En la figura observamos que el plano $PQRS$ es un rectángulo.



* Sea θ el ángulo PRS entonces :

$$A\widehat{S}R=\theta$$



* Luego $\alpha=2\theta$

$$tg\alpha=tg2\theta\Rightarrow tg\alpha=\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}$$

$$\Rightarrow tg\alpha=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow tg\alpha=2\sqrt{2}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 19 :

Sabiendo que :

$$sen\,x\,sen\,y=\frac{3}{4};\,x+y=\pi$$

Hallar : $cos2(\,x-y\,)$

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{7}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

RESOLUCIÓN :

Como : $x+y=\pi\Rightarrow y=\pi-x$

* $senx\,seny=\frac{3}{4}\Rightarrow senx\,sen(\pi-x)=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow Sen^2x=\frac{3}{4}$..................(I)

* $cos2(x-y)=cos2(x-\pi+x)$
$=cos(4x-2\pi)=cos4x$
$=2cos^2 2x-1$......................(II)

*De (I): $Cos2x=1-2sen^2x=1-2\left(\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow cos2x=-\frac{1}{2}$

* Reemplazando en (II) :

$$cos2(x-y)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 20 :

Si : $Sen18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,

hallar el valor de M.

Si : $M\,sec15°sec9°=sen15°sen9°$

A) $\frac{1}{8\sqrt{5}+8}$ B) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$

RESOLUCIÓN :

$$\frac{M}{cos15°cos9°}=sen15°sen9°$$

$$\Rightarrow M=(sen15°cos15°)(sen9°cos9°)$$

$$\Rightarrow M=\left(\frac{sen30°}{2}\right)\left(\frac{sen18°}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M=\frac{1}{4}sen30°\ sen18°=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow M=\frac{\sqrt{5}-1}{32}$$

* Como no hay esta respuesta en las alternativas, hacemos lo siguiente :

$$M=\frac{\sqrt{5}-1}{32}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{4}{32(\sqrt{5}+1)}$$

$$\Rightarrow M=\frac{1}{8(\sqrt{5}+1)}$$

RPTA:"A"

PROBLEMA 21 :

Sabiendo que:

$$ctg\alpha=1+\sqrt{2}$$

Calcular el ángulo α

A) 15°30' B)30°30' C)45°
D) 22°30' E)75°30'

RESOLUCIÓN :

$ctg\ \alpha=1+\sqrt{2}$ ....dato.

$$\Rightarrow ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}=\frac{(1+\sqrt{2})^2-1}{2(1+\sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow ctg2\alpha=\frac{3+2\sqrt{2}-1}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow ctg2\alpha=1\Rightarrow 2\alpha==45°\Rightarrow\alpha=22°\ 30'$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 22 :

Expresar en función de $tg\ x$, la expresión :

$$E=\frac{2(tg2x-sec2x)}{ctg2x}+sec^2 2x-tg^2 2x$$

A) $\left(\frac{1-tgx}{1+tgx}\right)^2$ B) $\left(\frac{1-tgx}{1+tgx}\right)$ C) $1-2tgx$

RESOLUCIÓN :

$$E=\frac{2(tg2x-sec2x)}{\frac{1}{tg2x}}+sec^2 2x-tg^2 2x$$

$$\Rightarrow E=2tg2x\ (tg2x-sec2x)+sec^2 2x-tg^2 2x$$

$$\Rightarrow E=2tg^2 2x-2tg2xsec2x+sec^2 2x-tg^2 2x$$

$$E=tg^2 2x-2tg2x\ sec2x+sec^2 2x$$

$$\Rightarrow E=(tg2x-sec2x)^2$$

$$\Rightarrow E=\left(\frac{tgx}{1-tg^2x}-\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow E=\left(\frac{-(1-2tgx+tg^2x)}{1-tg^2x}\right)^2$$

$$\Rightarrow E=\left(\frac{(1-tgx)^2}{(1-tgx)(1+tgx)}\right)^2$$

*Simplificando : $E=\left(\frac{1-tgx}{1+tgx}\right)^2$

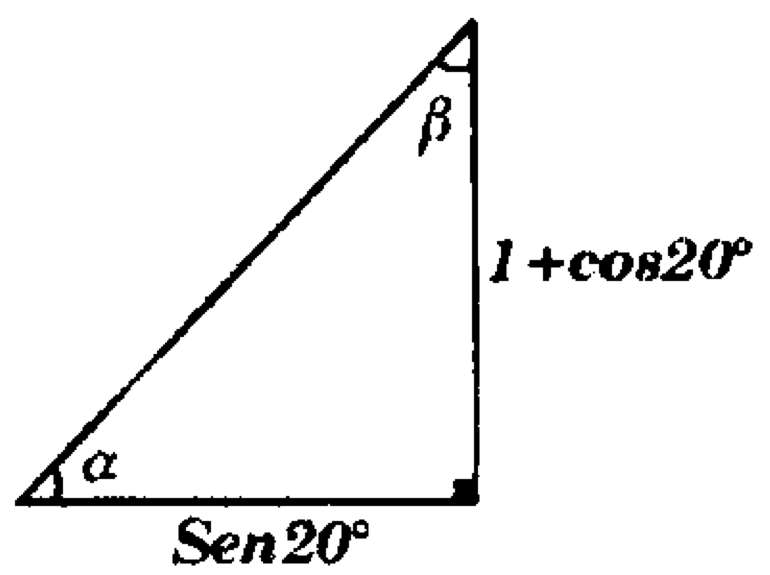
RPTA:"A"

PROBLEMA 23 :

Los catetos de un triángulo rectángulo miden $(1+cos20°)$ y $sen20°$. Calcular los ángulos agudos.

A)20°y70° B)30°y 60° C)25°y 65°
D)10° y 80° E) 15° y 75°

RESOLUCIÓN :



$$tg\alpha=\frac{1+cos20°}{sen\ 20°}\Rightarrow tg\alpha=\frac{2cos^2 10°}{2sen10°cos10°}$$

$$tg\alpha=\frac{cos10°}{sen\ 10°}\Rightarrow tg\alpha=ctg10°$$

$$\Rightarrow\alpha=80°\ \wedge\beta=10°$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 24 :

Si se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B con A ángulo menor, la relación de catetos es $5/7$

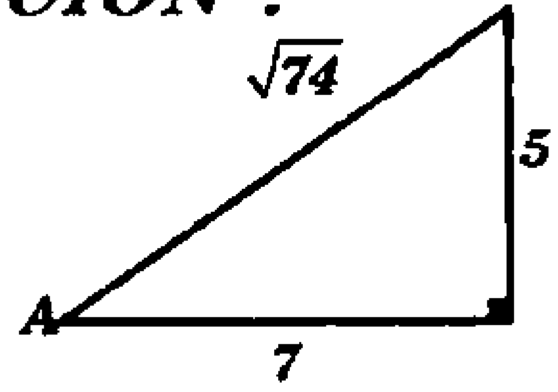
Se tiene la relación :

$$E=7\ cos2A+5sen2A$$

Determinar el valor de E.

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

RESOLUCIÓN :



$$E=7(2Cos^2A-1)+5(2senAcosA)$$

$$E=7\left(2\left(\frac{7}{\sqrt{74}}\right)^2-1\right)+5\left(2\times\frac{5}{\sqrt{74}}\times\frac{7}{\sqrt{74}}\right)$$

$$\Rightarrow E=7\left(\frac{98}{74}-1\right)+5\left(\frac{70}{74}\right)$$

$$E=7\left(\frac{24}{74}\right)+5\left(\frac{70}{74}\right)=\frac{160+350}{74}\Rightarrow E=\frac{518}{74}=7$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 25 :

Si: $tg\ x=2$;entonces, una sola de las siguientes igualdades es correcta:

A) $sen2x=\frac{1}{2}$ B) $sen2x=-\frac{3}{5}$

C) $sen2x=-\frac{4}{3}$ D) $sen2x=\frac{4}{3}$

E) $sen2x=\frac{4}{5}$

RESOLUCIÓN:

$$sen2x=\frac{2tgx}{1+tg2x};Tgx=2(dato)$$

$$\Rightarrow sen2x=\frac{2(2)}{1+2^2}=\frac{4}{5}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 26 :

Simplificar la expresión :

$$(2Senx-sen2x)csc^2\frac{x}{2}$$

A) $2senx$ B) $4senx$ C) $2senx\ ctg^2\frac{x}{2}$

D) $4cos^2\frac{x}{2}$ E) $4sen\ xen^2\frac{x}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Sea: $F=(2senx-sen2x)csc^2\frac{x}{2}$

$$F=(2sen\ x-2senxcosx)csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F=2senx(1-cosx)csc^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow F=\left(2senx\ \ 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F=4sen\ x\ \underbrace{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\ csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{=1}$$

$$\Rightarrow F=4senx$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 27 :

Calcular el valor de :

$$\frac{sen3\theta cos^2\theta sen\theta-cos3\theta sen^2\theta cos\theta}{(sen\theta\ cos\theta)^2}$$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) 1/2

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$F=\frac{sen3\theta cos^3\theta sen\theta - cos3\theta sen^3\theta cos\theta}{(sen\theta\ cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{sen\theta cos\theta[sen3\theta cos\theta - cos3\theta sen\theta]}{(sen\theta cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow F=\frac{sen3\theta cos\theta - cos3\theta sen\theta}{sen\theta cos\theta}=\frac{sen(3\theta-\theta)}{sen\theta cos\theta}$$

$$\Rightarrow F=\frac{sen2\theta}{sen\theta cos\theta}=\frac{2sen\theta cos\theta}{sen\theta cos\theta}=2$$

RPTA:"C"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 ¿Cuál de las siguientes expresiones no representa al $Cos2x$?

I) $2Cos^2x-1$ II) $1-2Sen^2x$

III) Cos^2x-Sen^2x IV) $\frac{1-Tg^2x}{1+Tg^2x}$

V) $\frac{1-Ctg^2x}{1+Ctg^2x}$

A) I B) II C) III D) IV E) V

02 Simplificar:

$$M=\frac{(Senx+Cosx)^2-(Senx-Cosx)^2}{(Senx+Cosx)^2+(Senx-Cosx)^2}$$

A) $Sen2x$ B) $2Senx$ C) Sen^2x D) $\frac{Sen2x}{2}$ E) $4Senx$

03 Simplificar:

$$\frac{(1+Tgx+Secx)(1+Tgx-Secx)}{Sec^2x}$$

A) $Sen2x$ B) $Cos2x$ C) $Tg2x$
D) $Ctg2x$ E) 1

04 Si: $Ctgx-Tgx=a$

hallar: $Ctg2x$

A) $a/4$ B) $a/3$ C) $a/2$
D) $a/8$ E) $a/5$

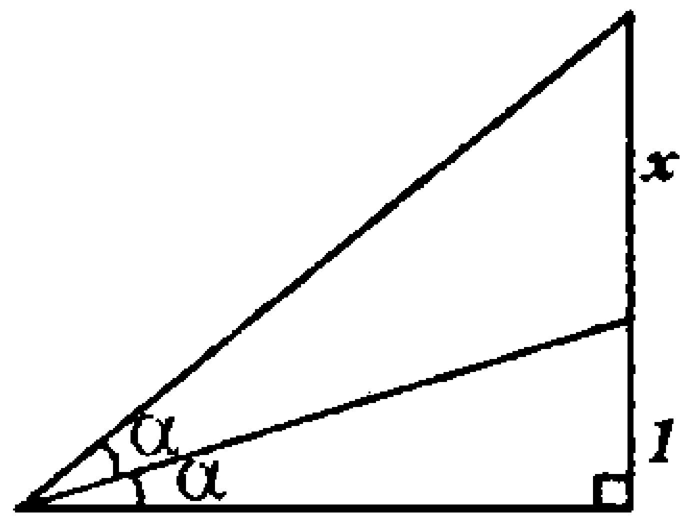
05 Calcular "M" en la siguiente identidad:

$$\sqrt{\frac{Cos2x+3}{Sec^2x+1}}=MCosx$$

si: $0<x<\pi/2$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 2/2 E) $\sqrt{2}$

06 Del gráfico, calcular "x"



A) 1,5 B) 1,25 C) 0,5
D) 0,75 E) 2,5

07 Si: $2Tg^2\alpha-Tg\alpha=2$

calcular: $E=2Tg^2 2\alpha-Tg2\alpha$

A) 32 B) –32 C) 34 D) – 34 E) 36

08 Si: $Tg^2x + Tg^2y = 3$

Calcular: $M=\frac{Tgx}{Sen2x}+\frac{Tgy}{Sen2y}$

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5 E) 3

09 Reducir:

$$M=\frac{CosxCos2x}{Cosx-Senx}+\frac{1}{2}Sen2x-Cos^2x$$

A) $Sen2x$ B) $Senx$ C) $Cos2x$
D) $Cosx$ E) $2Senx$

10 Reducir:

$$P=\sqrt{1+Sen2x}+Senx$$

Si: $\pi<x<3\pi/2$

A) $2Senx$ B) $Cosx$ C) $2Cosx$
D) $-Senx$ E) $-Cosx$

11 Calcular:

$$Sen^4\frac{\pi}{8}+Cos^4\frac{\pi}{8}$$

A) 0,5 B) 0,75 C) 0,25
D) 0,35 E) 0,6

12 Reducir:

$$A=Sec2x(4Sen^4x-4Sen^2x+1)$$

A) $Sen2x$ B) $Cos2x$ C) $Tg2x$
D) $Sec2x$ E) $Csc2x$

13 A partir de la condición:

$$Csc2\theta-1=Ctg2\theta-Vers\theta$$

Calcular el valor de:

$$(3+Cos2\theta)(1+Cos2\theta)$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14 Calcular el $CosxCosy$, si se cumple:

$Cosx+Cosy=a$ ....(1)

$Cos2x+Cos2y=b$......................(2)

A) $\frac{2a^2-b}{4}$ B) $\frac{a-2b}{4}$ C) $\frac{2a^2-2-b}{4}$
D) $\frac{a+b}{4}$ E) $\frac{a-b}{4}$

15 Si: $\frac{Sec\theta}{2}=\frac{Csc\theta}{3}$

Calcular el valor de:

$$P=\frac{3Csc2\theta+2Sec2\theta}{Sec2\theta Csc2\theta}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Si: $2Sen\alpha=Sen\beta+Cos\beta$

calcular el valor de:

$$P=\frac{Cos^2(45°+\beta)}{Cos2\alpha}$$

A) 1/2 B) 1/3 C) 1 D) 1/4 E) 2

17 Sabiendo que: $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{Secx-Cscx}{Secx+Cscx}=2\sqrt{3}$$

Calcular: $Tg2x$

A) $\frac{11\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{12}$
D) $\frac{13\sqrt{3}}{12}$ E) $2\sqrt{3}$

18 Reducir:

$$M=(Tg3x+Tgx+Tg4xTg3xTgx)Ctg2x$$

A) $Sec2x+1$ B) $Sec4x+1$
C) $Csc2x+1$ D) $Csc4x+1$
E) $Sec4x-1$

19 Si $\theta\in IIC$, tal que:

$$Sen\theta=\frac{Cos^4\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+Cos^4\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{3-Cos4x}$$

Calcular: "$Sen2\theta$"

A) $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ B) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$ C) $-\frac{\sqrt{15}}{6}$
D) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ E) $-\frac{1}{4}$

20 Al reducir:

$$(1+Sec16\theta)(1+Sec8\theta)(1+Sec4\theta)(1+Sec2\theta)$$

Dado: $17\theta=\pi$ se obtiene:

A) 0 B) 3 C) 1 D) –1 E) 2

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si : $senx=\frac{1}{4}$; Calcular: "$sen2x$"

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{16}$

02 Simplificar : $E=\frac{Sen2x+Cosx}{2Senx+1}$

A) $senx$ B) $cosx$ C) $secx$
D) $Cscx$ E) $Tanx$

03 Simplificar :

$$E=8sen7°cos7°cos14°\ cos28°$$

A) Sen56° B) Sec56° C) Cos80°
D) Cos56° E) Tan56°

04 Si : $Senx-Cosx=\frac{1}{4}$;

Hallar : $Sen2x$

A) $\frac{16}{17}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $-\frac{16}{17}$ D) $-\frac{17}{16}$ E) $\frac{1}{2}$

05 Reducir :

$$E=\sqrt{1+Sen40°}-Sen20°$$

A) Cos20° B) cos40° C) – Cos40°
D) –Cos20° E) 0

06 Simplificar :

$$E=\frac{Cos^2x-Cos2x}{Sen^2x+Cos2x}$$

A) 1 B) Tan^2x C) $-Tan^2x$
D) Tan^2x E) $-Cot^2x$

07 ¿A qué es igual?

$$E=cos^4 12°-sen^4 12°$$

A) 1 B) cos6° C) cos12°
D) cos24° E) cos48°

08 Calcular en forma directa los valores de "$Cos2x$" en :

I) Si: $Cosx=\frac{1}{3} \Rightarrow cos2x=.....$

II) Si: $Senx=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow Cos2x=.....$

09 ¿A que es igual?

$$E=\frac{2Cos^2 23°-1}{1-2Sen^2 23°}$$

A) Cost46° B) Tan46° C) Tan22°
D) Tan23° E) 1

10 Si : $M=2Sen^2 10°+Sen70°$

$$N=2Cos^2 20°-Sen50°$$

Indicar el valor de MN

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

11 Indicar el valor simplificado de:

$$E=\sqrt{\frac{1+Cos40°}{1-Cos40°}}$$

A) Tan40° B) Cot40° C) Tan20°
C) Cot20° E) 1

12 Si : $Tanx=2$,

Hallar el valor de : $Tan2x$

A) 4 B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $-\frac{4}{3}$ E) $-\frac{3}{4}$

13 ¿A que es igual? $E=\frac{2Tan40°}{1-Cot^2 50°}$

A) 1 B) Tan20° C) Tan10°
D) Tan80° E) Cot80°

14 Si: $Cotx-Tanx=4$;

Hallar: $Cot2x$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) $\frac{1}{3}$ E) 3

15 Si: $3Tan2x=1-2Tanx$;

Calcular: $E=Cot2x+Tan2x$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16 Simplificar : $A=\frac{Sen2x+2Senx}{1+Cosx}$

A) Sen x B) Cosx C) 2Senx
D) 2Cosx E) – 2Senx

17 Simplificar : $\frac{SenxCos2x}{Cosx-Senx}-1$

A) Csc x B) Secx C) Ctgx
D) Tg x E) Cos x

18 Simplificar:

$$A=\frac{Sen2x+Senx}{1+Cosx+Cos2x}$$

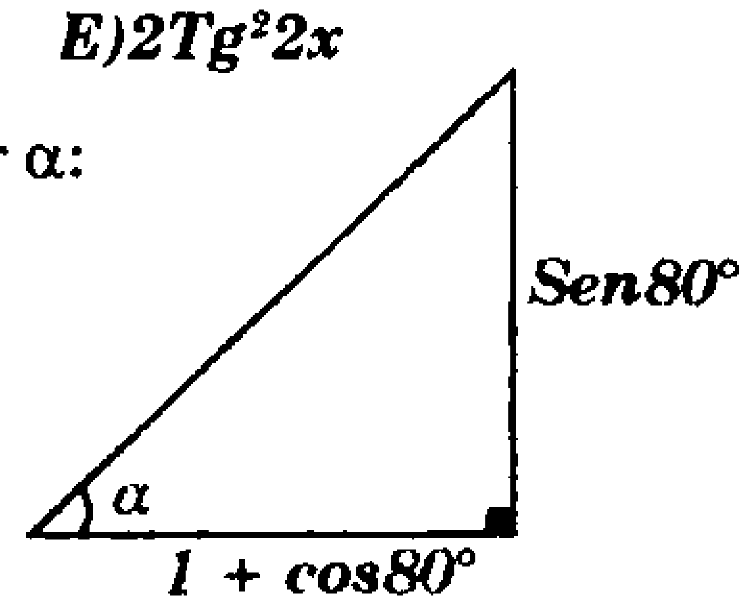
A) tgx B) Ctgx C) Secx
D) Csc x E) Cosx

19 Simplificar :

$$A=[(Ctgx+Tgx)Sen30°]^2-Tg45°$$

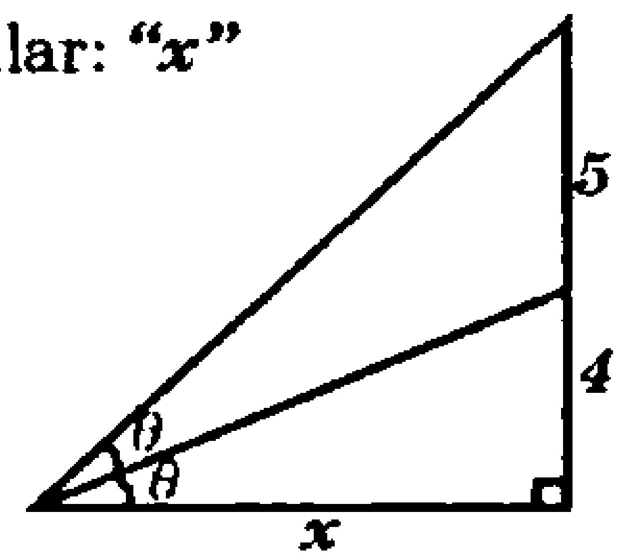
A) $Tg^2 2x$ B) $Tg2x$ C) $Ctg2x$
D) $Ctg^2 2x$ E) $2Tg^2 2x$

20 Hallar α:



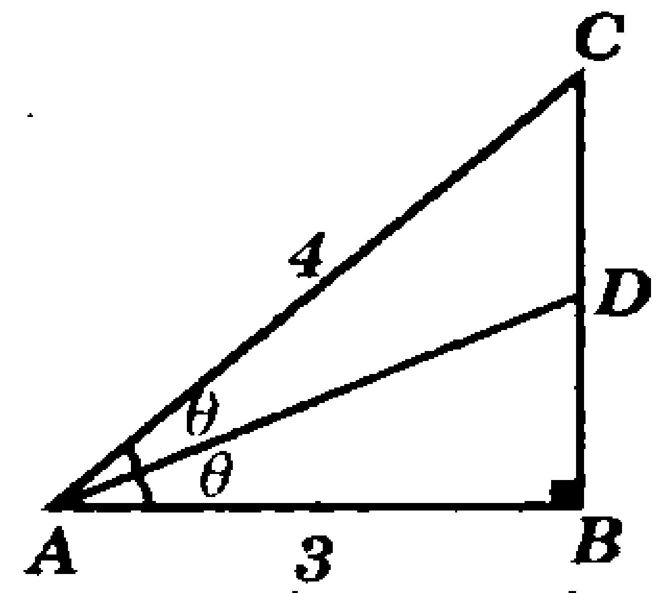
A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 50°

21 Hallar: "x"



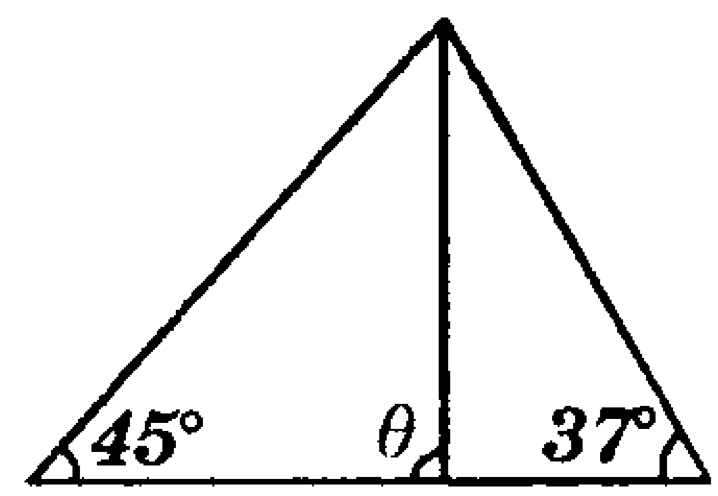
A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

22 Del gráfico, calcular "$Tan\ \theta$"



A) $\sqrt{3}/3$
B) 1/2
C) $\sqrt{5}/5$
D) $\sqrt{6}/6$
E) $\sqrt{7}/7$

23 A partir de la figura calcular $tan2\theta$



A) 12/35
B) 11/35
C) 35/11
D) –12/35
E) –35/11

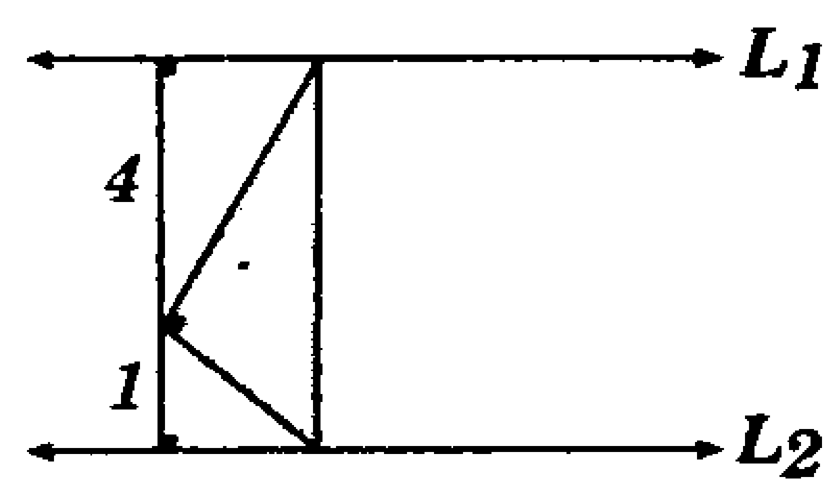
24 Dando un triángulo ABC,

Donde : $Tan\ A=1$; $Tan\ B=2$

Calcular : $Sen\ 2C$

A) 3/5 B) 1/2 C) 1/2 D) E) $\sqrt{3}/2$

25 Si: $L_1//L_2$, calcular el área mínima del triángulo sombreado.



A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 C) 16

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)E	2)A	3)A	4)C	5)E	6)B	7)E	8)D	9)A	10)E
11)B	12)B	13)D	14)C	15)C	16)C	17)A	18)B	19)A	20)D

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA									
1)C	2)B	3)A	4)B	5)B	6)B	7)D	8)*	9)B	10)B
11)D	12)B	13)D	14)C	15)D	16)C	17)D	18)A	19)D	20)D
21)E	22)E	23)C	24)A	25)C					

ANGULO MITAD
CAPITULO 123

SENO DEL ARCO MITAD

$$Sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordar que :

$Cos2y=1-2Sen^2y \Rightarrow 2Sen^2y=1-Cos2y$

$\Rightarrow Sen^2y=\frac{1-Cos2y}{2} \Rightarrow Seny=\pm\sqrt{\frac{1-Cos2y}{2}}$

hacemos . $y=\frac{x}{2} \Rightarrow 2y=x$, tendremos :

$$\Rightarrow Sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}$$

OBSERVACIÓN GENERAL :

La elección del signo "+" ó "–" en las fórmulas expuestas que presentan radicales, dependerá del cuadrante al cual pertenece el arco "$x/2$", así como del operador trigonométrico que lo afecta.

EJEMPLOS :

* $Sen50°=Sen\left(\frac{100°}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-Cos100°}{2}}$ (IC)

* $Sen200°=Sen\left(\frac{400°}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-Cos400°}{2}}$ (IIIC)

COSENO DEL ARCO MITAD

$$Cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Recordar que :

$Cos2y=2Cos^2y-1 \Rightarrow 2Cos^2y=1+Cos2y$

$\Rightarrow Cos^2y=\frac{1+Cos2y}{2} \Rightarrow Cosy=\pm\sqrt{\frac{1+Cos2y}{2}}$

hacemos : $y=\frac{x}{2} \Rightarrow 2y=x$, tendremos :

$$\Rightarrow Cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}$$

EJEMPLOS :

* $Cos100°=Cos\left(\frac{200°}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+Cos200°}{2}}$ (IIC)

* $Cos300°=COS\left(\frac{600°}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+Cos600°}{2}}$ (IV)

TANGENTE DEL ARCO MITAD

$$Tanx=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Cosx}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Observar que :

$$Tan\frac{x}{2}=\frac{Sen\frac{x}{2}}{Cos\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}}{\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1-Cosx}{2}}{\frac{1+Cosx}{2}}}$$

$$\Rightarrow Tanx=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Cosx}}$$

EJEMPLOS :

* $Tan50°=Tan\left(\frac{100°}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-Cos100°}{1+Cos100°}}$ (IC)

* $Tan300°=Tan\left(\frac{600°}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1-Cos600°}{1+Cos600°}}$ (IVC)

PROPIEDAD:

$$Tan\frac{x}{2}=Cscx-Cotx$$

DEMOSTRACIÓN :

* Notemos que también :

$$Tan\frac{x}{2}=\frac{Sen\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}=\frac{Sen\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}\times\frac{2Sen\frac{x}{2}}{2sen\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2Sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2sen\frac{x}{2}\times cos\frac{x}{2}}=\frac{1-cos2\frac{x}{2}}{sen2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-cosx}{senx}=\frac{1}{senx}-\frac{cosx}{senx}$$

$$\Rightarrow Tan\frac{x}{2}=Cscx-Cotx$$

EJEMPLOS :

$Tan50°=Tan\left(\frac{100°}{2}\right)=Csc100°-Cot100°$

* $Tan300°=Tan\left(\frac{600°}{2}\right)=Csc600°-Cot600°$

COTANGENTE DEL ARCO MITAD

$$Cot\ x=\pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{1-Cosx}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Observar que :

$$cot\frac{x}{2}=\frac{cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}}{\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1+cosx}{2}}{\frac{1-cosx}{2}}}$$

$$\Rightarrow cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}}$$

EJEMPLOS :

* $cot100°=cos\left(\frac{200°}{2}\right)=-\sqrt{\frac{1+cos200°}{1-cos200°}}$ (IIC)

* $Cot200°=cot\left(\frac{400°}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+cos400°}{1-cos400°}}$ (IIIC)

PROPIEDAD :

$$cot\frac{x}{2}=cscx+cotx$$

DEMOSTRACIÓN :

* Notemos que también :

$$cot\frac{x}{2}=\frac{cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}=\frac{cos\frac{x}{2}}{sen\frac{x}{2}}\times\frac{2cos\frac{x}{2}}{2cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2cos^2\frac{x}{2}}{2sen\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}=\frac{1+cos2\left(\frac{x}{2}\right)}{sen2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+cosx}{senx}$$

$$=\frac{1}{senx}+\frac{cosx}{senx}\Rightarrow cot\frac{x}{2}=cscx+cotx$$

EJEMPLOS :

* $Cot100°=Cot\left(\frac{200°}{2}\right)=Csc200°+Cot200°$

* $Cot200°=Cot\left(\frac{400°}{2}\right)=Csc400°+Cot400°$

SECANTE DEL ARCO MITAD

$$Sec\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+Cosx}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

$$\cos\frac{x}{2}\times Sec\frac{x}{2}=1$$

$$\Rightarrow Secx=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$$

$$\Rightarrow Sec\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+Cosx}}$$

COSECANTE DEL ARCO MITAD

$$\boxed{Csc\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1-Cosx}}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Sabemos que :

* $Sen\frac{x}{2}\times Csc\frac{x}{2}=1$

$$\Rightarrow Csc\frac{x}{2}=\frac{1}{sen\frac{x}{2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}}$$

$$Csc\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1-Cosx}}$$

EJEMPLO :

Si: $Cosx=0,6\wedge 270°<x<360°$; calcular los valores de "$Csc\frac{x}{2}$" y "$Sec\frac{x}{2}$"

RESOLUCIÓN :

* $Cosx=0,6\Rightarrow Cosx=\frac{6}{10}\Rightarrow Cosx=\frac{3}{5}$

* $270°<x<360°\Rightarrow 135°<\frac{x}{2}<180°$

$$\Rightarrow "\frac{x}{2}"\in IIC$$

Entonces tenemos :

I) $Csc\frac{x}{2}=+\sqrt{\frac{2}{1-Cosx}}=\sqrt{\frac{2}{1-\frac{3}{5}}}$ (IIC)

$$\Rightarrow Csc\frac{x}{2}=\sqrt{5}$$

II) $Sec\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{2}{1+Cosx}}=-\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3}{2}}}$ (IIC)

$$\Rightarrow Sec\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

RESUMEN DE FÓRMULAS

Básicas :

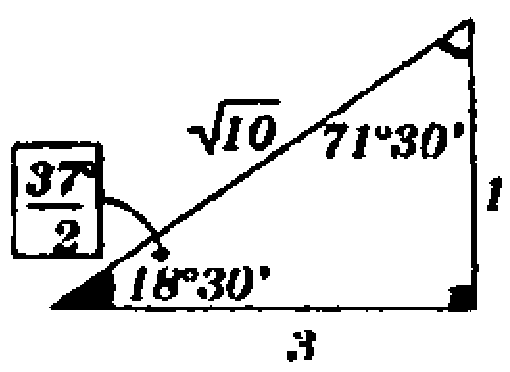
* $Sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{2}}$
* $Cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{2}}$
* $Tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosx}{1+Cosx}}=Cscx-Cotx$
* $Cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cosx}{1-Cosx}}=Cscx+Cotx=\frac{1}{Tan\frac{x}{2}}$

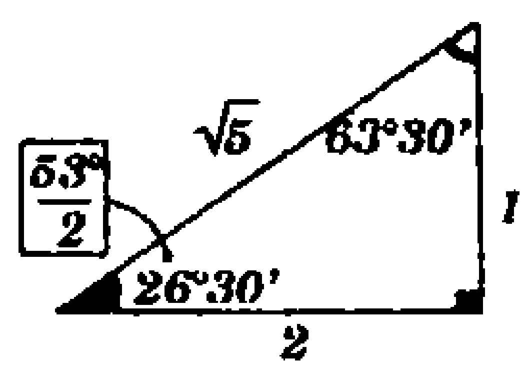
OBSERVACIONES :

* $Sec\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow Sec\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}$
* $Csc\frac{x}{2}=\frac{1}{sen\frac{x}{2}}\Rightarrow Csc\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{2}{1-\cos x}}$

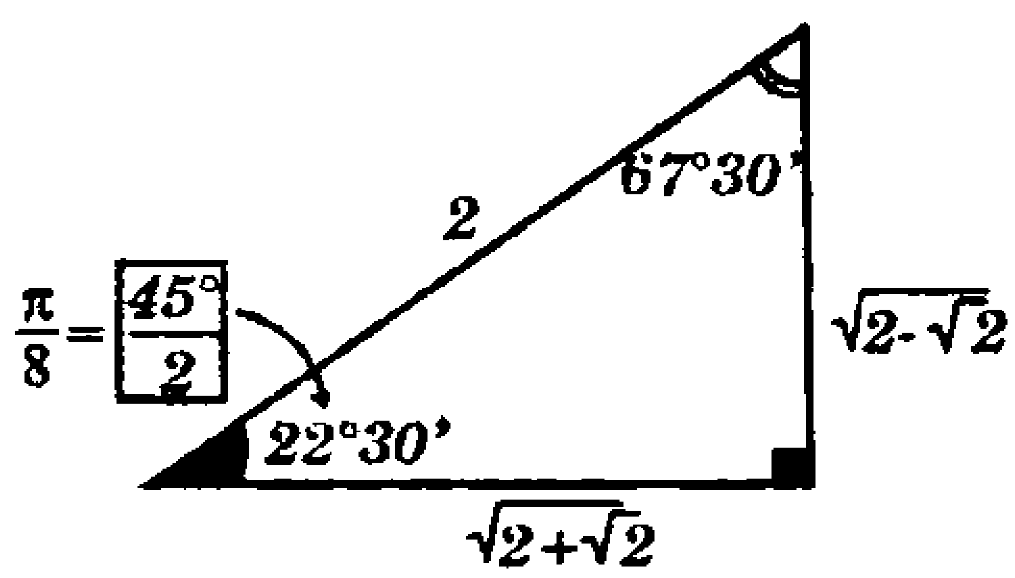
NOTAS :

* ◺s Notables Aproximados :





* ◺s Notables Exacto:



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

Sabiendo que :

$$0°<\alpha<90°\ ;\ \cos\alpha=\frac{1}{5}$$

Calcular : "$sen\frac{\alpha}{2}$"

A) $\sqrt{0,1}$ B) $\sqrt{0,2}$ C) $\sqrt{0,3}$
D) $\sqrt{0,4}$ E) $\sqrt{0,5}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos que :

$\cos\alpha=\frac{1}{5}$; como: $0°<\alpha<90°$

$0°<\frac{\alpha}{2}<45°\Rightarrow\frac{\alpha}{2}\in IC\Rightarrow sen\frac{\alpha}{2}\ es(+)$

* Luego :

$$sen\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}}$$

$$sen\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{4}{10}}\Rightarrow sen\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0,4}$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 2 :

Sabiendo que :

$$90°<\alpha<180°;\cos\alpha=-\frac{3}{4};$$

Calcular : "$\cos\frac{\alpha}{2}$"

A) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ B) $\sqrt{\frac{1}{6}}$ C) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ D) $\sqrt{\frac{1}{7}}$ E) $\sqrt{\frac{1}{8}}$

RESOLUCIÓN :

Tenemos :

$$90°<\alpha<180°\Rightarrow 45°<\frac{\alpha}{2}<90°$$

$$\Rightarrow IC\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}\ es(+)$$

$\cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; pero : $\cos\alpha=-\frac{3}{4}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}}{2}}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{8}}$$

RPTA:"E"

PROBLEMA 3 :

Si : $180°<\theta<270°$; $sen\theta=\frac{-\sqrt{5}}{3}$,

Caclcular : "$\cos\frac{\theta}{2}$"

A) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ B) $-\sqrt{\frac{1}{4}}$ C) $-\sqrt{\frac{1}{6}}$
D) $-\sqrt{\frac{1}{8}}$ E) $-\sqrt{\frac{1}{2}}$

RESOLUCIÓN :

* Note que :

$$180°<\theta<270°\Rightarrow 90°<\frac{\theta}{2}<135°$$

$$\Rightarrow IIC\Rightarrow\cos\frac{\theta}{2}\ es\ (-)$$

* Luego :

$$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\ ....(I)$$

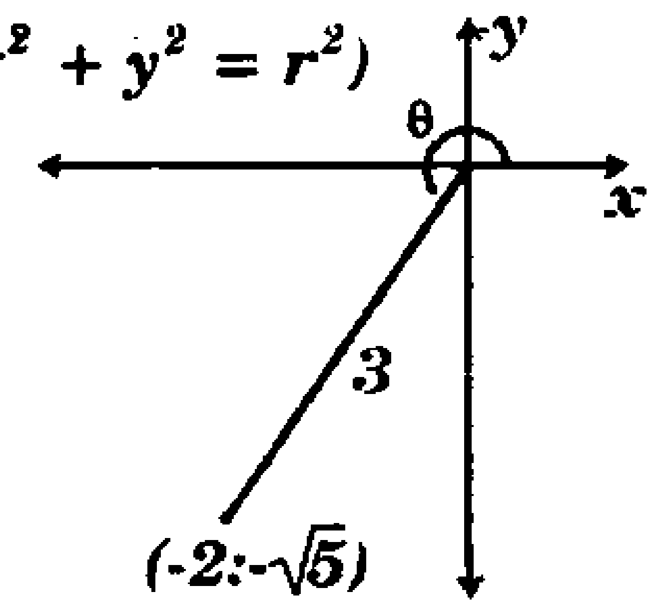
* Pero, no conocemos "$cos\theta$", sino :

$$sen\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3},\ \theta\in IIIC$$

* Como :

$$sen\theta=\frac{-\sqrt{5}}{3}=\frac{y}{r};\ y=-\sqrt{5};\ r=3\Rightarrow x=-2$$

(ya que : $x^2+y^2=r^2$)



* Luego :

$$cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{2}{3}\Rightarrow en\ (I):$$

$$cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}}$$

$$cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}\Rightarrow cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{6}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 4 :

Siendo :

$$270°<\alpha<360°;\ sen\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4};$$

Calcular : "$tan\ \frac{\alpha}{2}$"

A)$+\sqrt{\frac{3}{5}}$ B)$-\sqrt{\frac{2}{3}}$ C)$-\sqrt{\frac{3}{2}}$ D)$-\sqrt{\frac{3}{5}}$ E)$\sqrt{\frac{4}{5}}$

RESOLUCIÓN :

* El problema es muy similar al anterior; pero lo resolvemos de otra forma :

* Como :

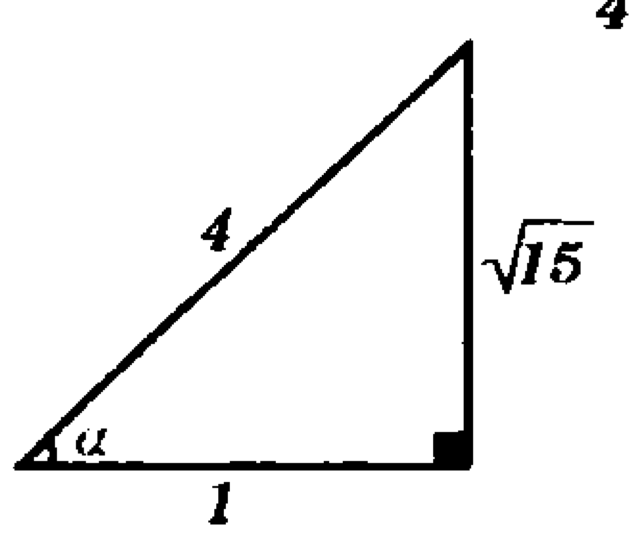
$$270°<\alpha<360°\Rightarrow 135°<\frac{\alpha}{2}<180°$$

$$\Rightarrow IIC\Rightarrow tan\alpha\ es\ (-)$$

* Luego : $tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\alpha}}$

* Busquemos ahora "$cos\ \alpha$"

* Como : $sen\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4};\ \alpha\in IVC$



$$\Rightarrow cos\alpha=\frac{1}{4}$$

* Ahora, reemplacemos en :

$$tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-cos\ \alpha}{1+cos\ \alpha}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}}$$

$$tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}}\Rightarrow tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{3}{5}}$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 5 :

Siendo :

$sen\phi=\frac{m-n}{m+n}$; hallar:"$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)$"

A)$\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$ B)$\sqrt{\frac{2n}{m}}$ C)$-\sqrt{\frac{2m}{n}}$

D)$-\sqrt{\frac{3n}{2m}}$ E)$\pm\sqrt{\frac{m}{n}}$

RESOLUCIÓN :

* Piden :

$$tan\underbrace{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)}_{x}=tanx=\pm\sqrt{\frac{1-cos2x}{1+cos2x}}$$

* Como: $x=\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-\phi$

* Luego :

$$tan\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}{1+cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)}};$$

pero: $cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)=sen\phi$

* Entonces :

$$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-sen\phi}{1+sen\phi}}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{m-n}{m+n}}{1+\frac{m-n}{m+n}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\frac{m+n-m+n}{m+n}}{\frac{m+n+m-n}{m+n}}}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2n}{2m}}$$

$$\Rightarrow tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 6 :

Reducir : $\frac{csc4x+csc8x+cot8x}{cot2x}$

A)1 B)$cot^2 2x$ C)$tan2x$
D)$tan^2 2x$ E) $cot2x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C=\frac{csc4x+\overline{csc8x+cot8x}}{cot2x}$$

* En el numerador, note :

$csc8x+cot8x=cot4x$ (fórmula racionalizada),

* Luego : $C=\frac{csc4x+cot4x}{cot2x}$

* Pero :

$$csc4x+cot4x=cot2x$$

$$\Rightarrow C=\frac{cot2x}{cot2x}\Rightarrow C=1$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 7 :

Reducir :

$$C=cscx+csc2x+csc4x+csc8x$$

A)$cotx-cot8x$ B) $cotx-cot16x$
B)$cot\frac{x}{2}-cot16$ D)$cot\frac{x}{2}-cot8x$
E)$cotx+cot8x$

RESOLUCIÓN :

*En los casos de sumas de cosecantes de ángulos que se van duplicando; se recomienda sumarle y restarle la tangente del mayor ángulo, así:

$$C=cscx+csc2x+csc4x+$$
$$+\underbrace{csc8x+cot8x}_{cot4x}-cot8x$$

.... $\left(csc\theta+cot\theta=cot\frac{\theta}{2}\right)$

$$C=cscx+csc2x+\underbrace{csc4x+cot4x}_{cot2x}-cot\ 8x$$

$$C=cscx+\underbrace{csc2x+cot2x}_{cotx}-cot8x$$

$$=\underbrace{cscx+cotx}_{cot\frac{x}{2}}-cot8x$$

$$\Rightarrow C=cot\ \frac{x}{2}-cot8x$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 8 :

Reducir :

$$C=\frac{sec40°-tan40°}{cot65°}$$

A)1 B)2 C)$\sqrt{3}$ D)$2\sqrt{3}$ E)$\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C=\frac{sec40°-tan40°}{cot65°}$$

* Recuerde que :

$$\left.\begin{matrix} sec40°=csc50° \\ tan40°=cot50° \end{matrix}\right\} \text{ángulos complementarios}$$

* Luego:

$C=\frac{csc50°-cot50°}{cos65°}$;pero: $cscx-cotx=tan\frac{x}{2}$

$C=\frac{tan25°}{cot65°}$;además : $tan25°=cot65°(suman 90°)$

$\Rightarrow C=1$

RPTA:"A"

PROBLEMA 9 :

Siendo :

$csc2x+csc2y+csc2z$
$=cot2x+cot2y+cot2z$

Calcular : $C=\frac{tanx+tan\,y}{tan\,z}$

A) 1 B) 2 C) –1 D) – 2 E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición:

$csc2x+csc2y+csc2z$
$=cot2x+cot2y+cot2z$

$csc2x+csc2y+csc2z-cot2x-cot2y-cot2z=0$

* Ordenando :

$$\underbrace{csc2x-cot2x}_{tanx}+\underbrace{csc2y-cot2y}_{tan\,y}+\underbrace{csc2z-cot2z}_{tanz}=0$$

* Quedando :

$tanx+tany+tanz=0$

$\Rightarrow tanx+tany=-tanz$

* Piden :

$$C=\frac{tanx+tan\,y}{tanz}=\frac{-tanz}{tanz}\Rightarrow C=-1$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 10 :

Siendo : $(csc2x+cot2x)senx=\frac{1}{2}$

¿Cuál es el valor agudo de *"x"*?

A) 30° B) 15° C) 45° D) 60° E) 75°

RESOLUCIÓN :

* En la condición :

$$\underbrace{(csc2x+cot2x)}_{cotx}senx=\frac{1}{2}$$

* Quedaría :

$cotx\times senx=\frac{1}{2}$; pero: $cotx=\frac{cosx}{senx}$

$\frac{cosx}{senx}\times senx=\frac{1}{2}\Rightarrow cos\,x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=60°$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11:

Reducir :

$$C=\sqrt{1-sen40°}+sen20°$$

A) cos20° B) 1 C) sen20°
D) – cos20° E) – sen20°

RESOLUCIÓN :

* Recuerde del capítulo anterior :

$(senx-cosx)^2=1-sen2x$

* Luego :

$1-sen40°=(sen20°-cos20°)^2$

* Entonces :

$C=\sqrt{1-sen40°}+sen20°$

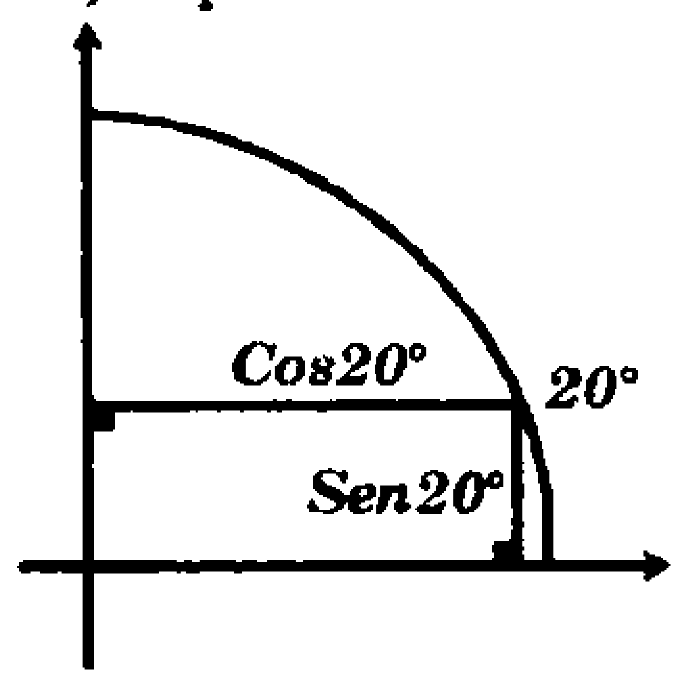
$C=\sqrt{(sen20°-cos20°)^2}+sen20°$;

recuerde : $\sqrt{a^2}=|a|,\forall a\in\mathbb{R}$

$C=|sen20°-cos20°|+sen20°$,

además : $|a|=\begin{cases} a;\ a\ge 0 \\ -a; a\le 0\end{cases}$

* Tenemos que averiguar el signo de: $sen20°-cos20°$ con la ayuda de una *C.T.*, se puede observar que :



$sen20°<cos20°$

$sen20°-cos20°<0\Rightarrow(-)$

* Luego:

$|sen20°-cos20°|=-(sen20°-cos20°)$
$=cos20°-sen20°$

* Entonces :

$C=|sen20°-cos20°|+sen20°$

$C=cos20°-sen20°+sen20°$

$\Rightarrow C=cos20°$

RPTA: "A"

PROBLEMA 12 :

Siendo: $0°<x<90°$; reducir

$$C=\sqrt{1-senx}+sen\frac{x}{2}$$

A) $cos\frac{x}{2}$ B) $sen\frac{x}{2}$ C) $cosx$

RESOLUCIÓN :

* Recuerde que :

$1-senx=\left(sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2$

* Luego :

$\sqrt{1-senx}=\sqrt{\left(sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)^2}$

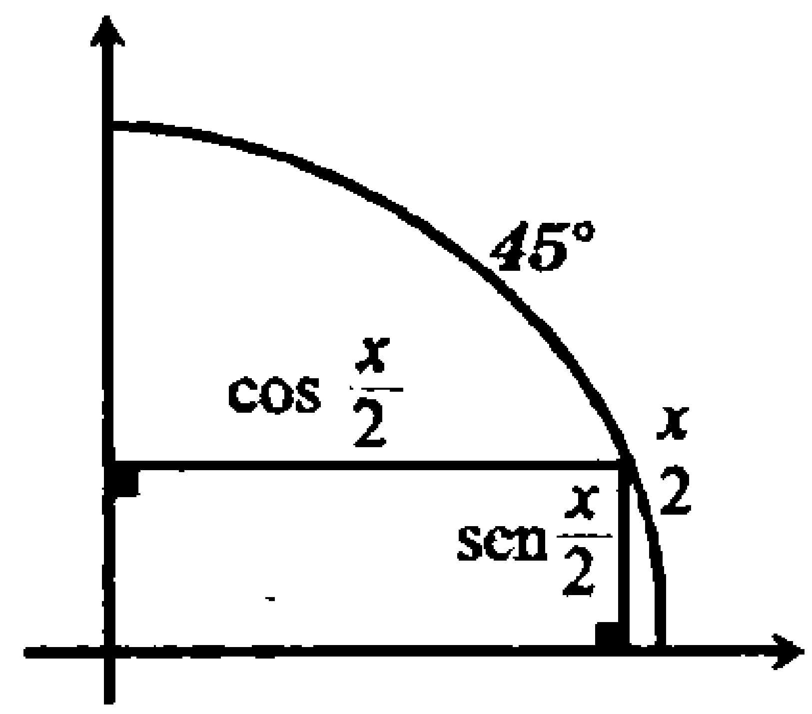
$=\left|sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right|$

* Pero :

$0°<x<90°\Rightarrow 0°<\frac{x}{2}<45°$

* En la *C.T.*; notamos que :

$sen\frac{x}{2}<cos\frac{x}{2}\Rightarrow sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}<0\Rightarrow(-1)$



* Luego :

$\left|sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right|=-\left(sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right)$

$\left|sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right|=cos\frac{x}{2}-sen\frac{x}{2}$

* piden :

$C=\sqrt{1-senx}+sen\frac{x}{2}$

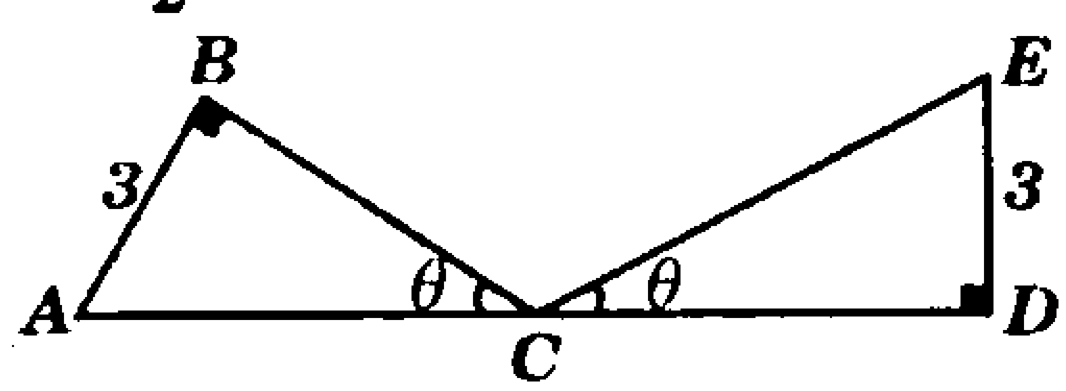
$\Rightarrow C=\left|sen\frac{x}{2}-cos\frac{x}{2}\right|+sen\frac{x}{2}$

$\Rightarrow C=cos\frac{x}{2}-sen\frac{x}{2}+sen\frac{x}{2}\Rightarrow C=cos\frac{x}{2}$

RPTA:"A"

PROBLEMA 13 :

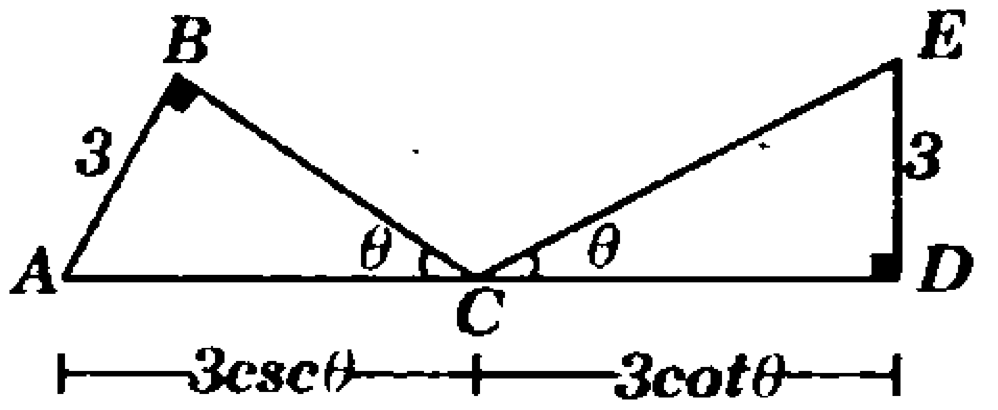
Si el gráfico $AD=8$; Calcular : "$cot\frac{\theta}{2}$"



A) 8 B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



$\triangle ABC: \frac{AC}{3}=\csc\theta \Rightarrow AC=3\csc\theta;$

$\triangle CDE: \frac{CD}{3}=\cot\theta \Rightarrow CD=3\cot\theta$

* Pero :

$AD=8$

$3\csc\theta+3\cot\theta=8$

$3\underbrace{(\csc\theta+\cot\theta)}_{\cot\frac{\theta}{2}}=8 \Rightarrow 3\cot\frac{\theta}{2}=8$

$\Rightarrow \cot\frac{\theta}{2}=\frac{8}{3}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 14 :

Si :

$\cos 2\beta=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$; hallar :

$J=\tan\beta\sqrt{\cot x}$; , si "β" y "x" son agudos.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $2\sqrt{2}$ E) $\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Como : $\cos 2\beta=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

* Sabemos :

$\tan^2\beta=\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos\beta} \Rightarrow \tan^2\beta=\frac{1-\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}{1-\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

$\tan^2\beta=\frac{\frac{1+\tan x-1+\tan x}{1+\tan x}}{\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}}=\frac{2\tan x}{2}$

* Quería :

$\tan^2\beta=\tan x \Rightarrow \tan\beta=\sqrt{\tan x}$

* Piden :

$J=\tan\beta\ \sqrt{\cot x}=\sqrt{\tan x}\times\sqrt{\cot x}$

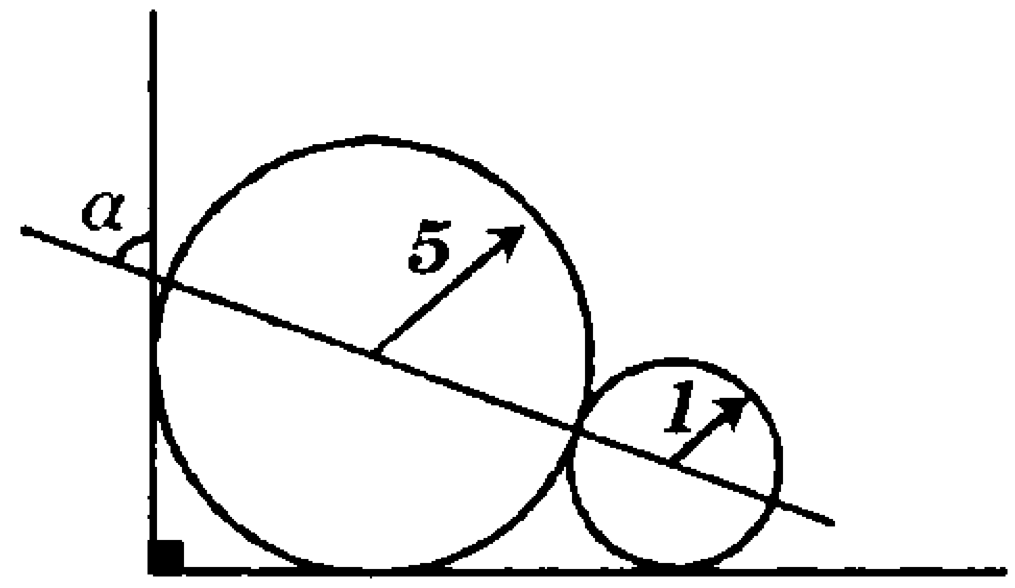
$J=\sqrt{\tan x\times\cot x}$; pero : $\tan x\cot x=1$

$\Rightarrow J=1$

RPTA: "A"

PROBLEMA 15 :

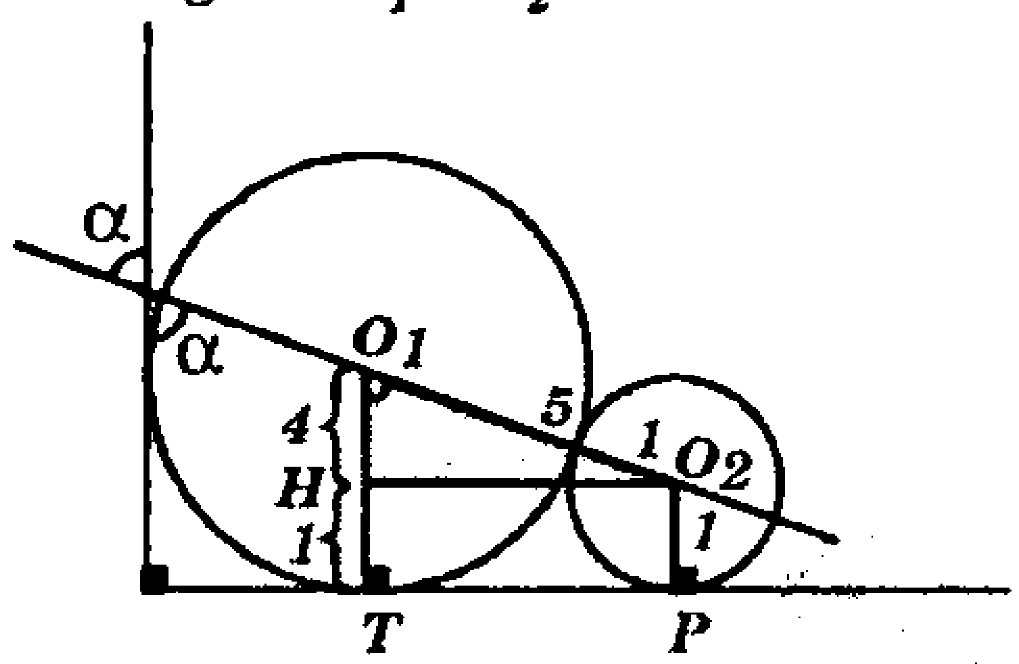
Del gráfico, calcular: "$\tan\frac{\alpha}{2}$"



A) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ C) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ D) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ E) $\sqrt{\frac{1}{6}}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico, en el triángulo rectángulo O_1HO_2:



* $\cos\alpha=\frac{4}{6} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}$

* Piden :

$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}}$

$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{5}}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 16:

Simplificar : $\frac{\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}}{\csc 2x+\cot 2x}$

A) $\cot x$ B) 1 C) $\tan x$ D) 2 E) $\sec x$

RESOLUCIÓN :

* Recordamos : $\tan\frac{\theta}{2}=\csc\theta-\cot\theta$

$\cot\frac{\theta}{2}=\csc\theta+\cot\theta$

Aplicamos en :

$\frac{\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}}{\csc 2x+\cot 2x}=\frac{\csc x+\cot x-\csc x+\cot x}{\cot x}$

$=\frac{2\cot x}{\cot x}=2$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17 :

Si : $\cos\theta=0,75$

$\theta\in III$ cuadrante, hallar : $\sec\frac{\theta}{2}$

A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $-2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

RESOLUCIÓN :

* Nos piden :

$\sec\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$

* Pero :

$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

* Por datos :

$\theta\in III \Rightarrow 180°<\theta<270° \Rightarrow \frac{90°}{2}<\theta<135°$

$\Rightarrow \frac{\theta}{2}\in II$

* Luego :

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

*Reemplazamos :

$\cos\theta=-0,75=-\frac{3}{4}$

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}}=-\sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{8}}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

* Finalmente :

$\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)=-2\sqrt{2}$

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

Calcular : $\tan 112°30'$

A) $1-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+1$ C) $\sqrt{2}-1$

D) $-\sqrt{2}-1$ E) $-2-\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Nos piden :

$\tan 112°30'=\tan(90°+22°30')$

$=-\cot 22°30'=-\cot\left(\frac{45°}{2}\right)$

$=-(\csc 45°+\cot 45°)=-(\sqrt{2}+1)$

$=-\sqrt{2}-1$

RPTA: "D"

PROBLEMA 19 :

Simplificar :

$ctg\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}\ ctgx$

siendo x diferente de cero y de un múltiplo de 2π.

A) $sen\ x$ B) $\cos x$ C) $tg\ x$

D) $ctg\ x$ E) $\sec x$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$F = ctg\left(\frac{x}{2}\right) - 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)ctgx$$

* Recordar : $ctg\frac{\alpha}{2} = csc\alpha + ctg\alpha$

* Entonces :

$$F = cscx + ctgx - 2cos^2\frac{x}{2}ctg\,x$$

$$F = cscx + ctgx\underbrace{\left[1 - 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}_{-cos\,\alpha}$$

$$F = cscx + \frac{cosx}{senx}(-cosx)$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{senx} - \frac{cos^2x}{senx} = \frac{1 - cos^2x}{senx}$$

$$= \frac{sen^2x}{senx} = senx$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Expresar : $tg\left(\frac{\pi - \alpha}{4}\right)$ en función de : $tg\frac{\alpha}{2}$ y $sec\frac{\alpha}{2}$

A) $sen\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2}$ B) $tg\frac{\alpha}{2} + sec\frac{\alpha}{2}$

C) $\left(\frac{1}{2}tg\frac{\alpha}{2} + sec\frac{\alpha}{2}\right)$ D) $-tg\frac{\alpha}{2} - sec\frac{\alpha}{2}$

E) $2\left(tg\frac{\alpha}{2} + sec\frac{\alpha}{2}\right)$

RESOLUCIÓN :

* Recordar :

$$tg\frac{x}{2} = cscx - ctgx$$

$$tg\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right) = \left(csc\frac{\pi-\alpha}{2}\right) - \left(ctg\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

$$= csc\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) - ctg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= sen\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 21 :

Si: $cos\alpha = -4/5$ y $180° < \alpha < 270°$

Hallar : $tg\frac{\alpha}{2}$

A) 3 B) $\frac{4}{5}$ C) -3 D) $-\frac{5}{4}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* Recordar : $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$

* Como :

$$180° < \alpha < 270° \Rightarrow 90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$$

* Observar que : $\frac{\alpha}{2} \in IIC$; entonces , $tg\frac{\alpha}{2}$ es negativa .

$$tg\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{5}\right)}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}}$$

$$\Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = -3$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

Hallar el valor numérico de la siguiente expresión trigonométrica

$$T = (tg35° + tg55°)(sen35° + sen55° + 1) \times (cos35° + cos55° - 1)$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) -2 D) $\sqrt{2}$ E) -2

RESOLUCIÓN :

* Observar que :

$$tg55° = ctg35°$$

$$cos55° = sen35°$$

$$T = (tg35° + ctg35°)(sen35° + cos35° - 1)\ (sen35° + cos35° - 1)$$

$$T = \underbrace{(tg35° + ctg35°)}_{2csc70°}[(sen35° + cos35°)^2 - 1]$$

$$\Rightarrow T = 2csc70°[1 + sen70° - 1]$$

$$\Rightarrow T = 2csc70°sen70° = 2$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

Al simplificar :

$$F = \frac{ctg\,x \cdot csc\,x + 1}{ctg\,x - csc\,x - 1};\ \neq 2k\pi,\ k \in Z$$

A) $\frac{tg\frac{x}{2} - 1}{tg\frac{x}{2} + 1}$ B) $sen\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}$

C) $sen\frac{x}{2} - 1$ D) $tg\frac{x}{2} - sen\frac{x}{2}$

RESOLUCIÓN :

$$F = \frac{\overbrace{ctg\,x - csc\,x}^{-tg\frac{x}{2}} + 1}{\underbrace{ctg\,x - csc\,x}_{-tg\frac{x}{2}} - 1}$$

$$\Rightarrow F = \frac{-tg\frac{x}{2} + 1}{-tg\frac{x}{2} - 1} = \frac{tg\frac{x}{2} - 1}{tg\frac{x}{2} + 1}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 24 :

Calcular :

$$E = sen^4\left(\frac{\pi}{16}\right) + sen^4\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \frac{1}{2}cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Recordar :

$$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cosx}{2}};\ cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cosx}{2}}$$

$$sen\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1 - cos\frac{\pi}{8}}{2}};\ sen\frac{3\pi}{16} = \sqrt{\frac{1 - cos\frac{3\pi}{8}}{2}}$$

* Reemplazando en E :

$$E = \left(\sqrt{\frac{1 - cos\frac{\pi}{8}}{2}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{1 - cos\frac{3\pi}{8}}{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}cos\frac{3\pi}{8}$$

$$E = \left(\frac{1 - cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - cos\frac{3\pi}{8}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}cos\frac{3\pi}{8}$$

$$E = \frac{1 - cos\frac{\pi}{8}}{4} + \frac{1 - 2cos\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8}}{4} + \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}cos\frac{3\pi}{8}$$

$$E = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}cos^2\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}cos\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}cos^2\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}cos\frac{3\pi}{8}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$$

pero : $cos\frac{3\pi}{8} = sen\frac{\pi}{8}$

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(cos^2\frac{\pi}{8} + sen^2 + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow E = \frac{3}{4}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25 :

Hallar la suma de valores máximo y mínimo de la siguiente expresión:

$$E = Acos^2\left(\frac{x}{2}\right) + Bcos\,x$$

A) A B) B C) B/4 D) A/5 E) 0

RESOLUCIÓN :

$E=A\cos^2\dfrac{x}{2}+B\cos x$

$\Rightarrow E=A\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)+B\cos x$

$\Rightarrow E=\dfrac{A}{2}+\dfrac{A}{2}\cos x+B\cos x$

$\Rightarrow =\dfrac{A}{2}+\left(\dfrac{A}{2}+B\right)\cos x$

* Máximo valor :

$E_{máx}=\dfrac{A}{2}+\left(\dfrac{A}{2}+B\right)(1)=A+B$

*Mínimo valor :

$E_{mín}=\dfrac{A}{2}+\left(\dfrac{A}{2}+B\right)(-1)=-B$

* Luego :

$E_{máx}+E_{mín}=A+B+(-B)=A$

RPTA:"A"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Si : $\cos x=\dfrac{1}{8}$; (x:agudo),

calcular : $\cos\dfrac{x}{2}$

A)1/4 B)1/2 C)3/4 D)1/8 E)3/8

02 Reducir :

$$A=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\dfrac{1}{\mathrm{Ctg}\,\dfrac{x}{2}}$$

A)1 B)−1 C)1/2 D)−1/2 E)0

03 Simplificar:

$$A=\mathrm{Csc}\theta+\mathrm{Ctg}\theta$$

A) $\mathrm{sen}\dfrac{\theta}{2}$ B) $\mathrm{Cos}\dfrac{\theta}{2}$ C) $\mathrm{Tg}\dfrac{\theta}{2}$

D) $\mathrm{Ctg}\dfrac{\theta}{2}$ E) $\mathrm{Sec}\dfrac{\theta}{2}$

04 Reducir :

$$A=\mathrm{Csc}x+\mathrm{Csc}2x+\mathrm{Csc}4x+\mathrm{Ctg}4x$$

A) $\mathrm{Ctg}\dfrac{x}{2}$ B) $\mathrm{Tg}\dfrac{x}{2}$ C) $2\mathrm{Ctg}\dfrac{x}{2}$

D) $2\mathrm{Tg}\dfrac{x}{2}$ E) $4\mathrm{Ctg}\dfrac{x}{2}$

05 Reducir :

$$M=\mathrm{Ctg}x\,\mathrm{Tg}\dfrac{x}{2}(1+\mathrm{Cos}x)$$

A) Senx B) Cosx C) Tg x

D) Ctg x E) Secx

06 Reducir :

$$A=\mathrm{Sen}30°\mathrm{Csc}^2x(\mathrm{Csc}2x-\mathrm{Ctg}2x)$$

A) Sen2x B) Csc2x C) Cos2x

D) Sec2x E) Tg2x

07 Reducir :

$$A=(1+\mathrm{Sec}x)\mathrm{Tg}\dfrac{x}{2}$$

A) Senx B) Cscx C) Cosx

D) Secx E) Tgx

08 Simplificar :

$$A=\mathrm{Csc}2x-\dfrac{1}{2}\mathrm{Tg}\,x$$

A) Ctgx B) Tgx C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Tg}x$

D) $\dfrac{1}{2}\mathrm{Ctg}x$ E) 2Tgx

09 Dado un triángulo rectángulo *ABC*, a que es igual:

$$N=\dfrac{a}{2}\left(\mathrm{Ctg}\dfrac{A}{2}+1\right)$$

A) Área B) Doble de área

C) Perímetro D) Semiperímetro

E) Doble del perímetro

10 Reducir :

$$A=\mathrm{Ctg}x\mathrm{Cos}x+\mathrm{Sen}x-\mathrm{Tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$$

A) $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ B) $\mathrm{Ctg}\dfrac{x}{2}$ C) $\mathrm{Sec}\dfrac{x}{2}$

D) $\mathrm{Csc}\dfrac{x}{2}$ E) $\mathrm{Cos}\dfrac{x}{2}$

11 Si :

$180°<x<270°$; $64\mathrm{Cos}^2x-9=0$,

Calcular: $\mathrm{Sen}\frac{x}{2}$

A) $\dfrac{\sqrt{11}}{16}$ B) $\dfrac{\sqrt{11}}{8}$ C) $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

D) $\dfrac{\sqrt{21}}{8}$ E) $\dfrac{\sqrt{21}}{4}$

12 Si :

$$\mathrm{Cos}^2\alpha=\dfrac{4}{9}\ ;\ \alpha\in\,]180°;270°[$$

Hallar : $\sqrt{30}\,\mathrm{sen}\dfrac{\alpha}{2}$

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

13 Si :

$270°<x<360° \wedge \mathrm{sen}x=\dfrac{8}{17}$

Calcular el valor de : $\mathrm{Tg}\,\dfrac{x}{2}$

A)0,1 B)0,2 C)0,5 D)0,25 E)0,125

14 Si : $\mathrm{Cos}x=0,2$; $x\in IIIQ$.

Hallar: " $\mathrm{Tg}\,\dfrac{x}{2}$ "

A) $-\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ B) $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ C) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

D) $\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ E) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{6}}$

15 Si : $\alpha\in IIIC$, donde :

$\mathrm{Sen}\alpha=-\dfrac{12}{13}$, calcular el valor de :

$$\mathrm{Sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)-5\,\mathrm{Cos}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$$

A)1 B) $\sqrt{13}$ C)3 D) $\sqrt{5}$ E)5

16 Calcular : $2\mathrm{Cos}22°30'$

A) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

D) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

17 Simplificar:

$$A=\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{Cos}x}{1-\mathrm{Cos}x}}-\mathrm{Ctg}\dfrac{x}{2}$$

A)1 B)−1 C)2 D)−2 E)0

18 Calcular el valor de: $\mathrm{Sen}67°30'$

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D) $\frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}$

19 Reducir : $\sqrt{\dfrac{\mathrm{Sec}x-1}{\mathrm{Sec}x+1}}$

A) Tgx B) Tg(x/2) C) Ctg(x/2)

D) Ctgx E) Sec(x/2)

20 Si :

$\mathrm{Cos}x=\dfrac{1}{8}$ Calcular $\mathrm{Cos}\dfrac{x}{2}$

$$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

A)1/4 B)1/2 C)3/4 D)2/5 E) 3/5

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA									
1)C	2)E	3)D	4)A	5)B	6)B	7)E	8)D	9)D	10)B
11)C	12)E	13)B	14)B	15)B	16)E	17)E	18)B	19)B	20)C

ANGULO TRIPLE

CAPITULO 124

SENO DEL ARCO TRIPLE

$$\boxed{Sen3x = 3Senx - 4\,Sen^3x}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Notamos que :

$Sen3x = Sen(2x + x)$

$= Sen2xCosx + Cos2xSenx$

$= (2SenxCosx)Cosx + SenxCos2x$

$= 2SenxCos^2x + Senx(1 - 2Sen^2x)$

$= 2Senx(1 - Sen^2x) + Senx - 2Sen^3x$

$= 2Senx - 2Sen^3x + Senx - 2Sen^3x$

$\Rightarrow \boxed{Sen3x = 3senx - 4Sen^3x}$

EJEMPLOS :

* $Sen6\alpha = Sen3(2\alpha) = 3Sen2\alpha - 4Sen^3 2\alpha$
* $Sen27° = Sen3(9°) = 3Sen9° - 4Sen39°$
* $3Sen40° - 4Sen340° = Sen3(40°) = Sen120°$
* $3Sen\dfrac{\theta}{3} - 4Sen^3\dfrac{\theta}{3} = Sen3\dfrac{\theta}{3} = Sen\theta$

COSENO DEL ARCO TRIPLE

$$\boxed{Cos^3x = 4Cos^3x - 3Cosx}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Notamos que:

$Cos3x = Cos(2x+x)$

$= Cos2xCosx - Sen2xSenx$

$= CosxCos2x - (2SenxCosx)Senx$

$= Cosx(2cos2x - 1) - 2CosxSen2x$

$= 2Cos3x - Cosx - 2Cosx(1 - Cos2x)$

$= 2Cos3x - Cosx - 2Cosx + 2Cos3x$

$\Rightarrow \boxed{Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx}$

EJEMPLOS :

* $Cos33° = Cos3(11°)$

$= 4Cos^311° - 3Cos11°$

* $Cos9\beta = Cos3(3\beta) = 4Cos^3(3\beta) - 3Cos3\beta$
* $4Cos^3(60°+\phi) - 3Cos(60°+\phi) = Cos3(60°+\phi)$
$= Cos(180°+3\phi) = Cos3\phi$
* $4Cos^3 8°20' - 3Cos8°20' = Cos3(8°20')$
$= cos24°60' = Cos25°$

DEGRADACIÓN DEL EXPONENTE "3" O "CUBO"

Las fórmulas expuestas a continuación son empleadas, en las expresiones trigonométricas, donde se presenten "senos" ó "cosenos" de un cierto arco elevado al exponente "*3*".

DEGRADACIÓN DEL "CUBO" DEL SENO DE UN ARCO SIMPLE "x"

Se ha demostrado que :

$Sen3x = 3senx - 4sen^3x$

Y $\boxed{4sen^3x = 3senx - sen3x}$

EJEMPLOS :

* $4sen^3 5° = 3sen5° - sen3(5°) = 3sen5° - sen15°$
* $4sen^3 3a = 3sen3a - sen3(3a) = 3sen3a - sen9a$
* $sen^3 15° = \dfrac{4sen^3 15°}{4} = \dfrac{3sen15° - sen3(15°)}{4}$
$= \dfrac{3sen15° - sen45°}{4}$
* $3sen2\theta - sen6\theta = 3sen2\theta - sen3(2\theta) = 4sen^3 2\theta$

DEGRADACIÓN DEL "CUBO" DEL COSENO DE UN ARCO SIMPLE "x"

Se ha demostrado que :

$Cos3x = 4Cos^3x - 3Cosx$

Y $\boxed{4Cos^3x = 3Cosx + Cos3x}$

EJEMPLOS :

* $4Cos^3 5\alpha = 3Cos5\alpha + Cos3(5\alpha) = 3Cos5\alpha + Cos15\alpha$
* $4Cos^3 12° = 3Cos12° + Cos3(12°) = 3Cos12° + Cos36°$
* $Cos^3 2\beta = \dfrac{4Cos^3 2\beta}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + +Cos3(2\beta)}{4} = \dfrac{3Cos2\beta + Cos6\beta}{4}$
* $3Cos10° + Cos30° = 3Cos10° + Cos3(10°) = 4Cos^3 10°$

TANGENTE DEL ARCO TRIPLE

$$\boxed{Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x}}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Notamos que :

$Tan3x = Tan(x + 2x)$

$$= \frac{Tanx + Tan2x}{1 - TanxTan2x} = \frac{Tanx + \left(\dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}\right)}{1 - Tanx\left(\dfrac{2Tanx}{1 - Tan^2x}\right)}$$

* Efectuando tenemos :

$$\Rightarrow \boxed{Tan3x = \frac{3Tanx - Tan^3x}{1 - 3Tan^2x}}$$

EJEMPLOS :

* $Tan66° = Tan3(22°) = \dfrac{3Tan22° - Tan^3 22°}{1 - 3Tan^2 22°}$
* $Tan9\alpha = Tan3(3\alpha) = \dfrac{3Tan3\alpha - Tan^3 3\alpha}{1 - 3Tan^2 3\alpha}$
* $\dfrac{3Tan10° - Tan^3 10°}{1 - 3Tan^2 10°} = Tan3(10°) = Tan30°$

COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE DEL ARCO TRIPLE

Tomaremos las identidades reciprocas aplicadas el arco triple, es decir :

* Como $Tan3x\ Cot3x = 1$ Y $Cot3x = \dfrac{1}{Tan3x}$
* Como $Cos3x\ Sec3x = 1$ Y $Sec3x = \dfrac{1}{Cos3x}$
* Como $Sen3xCsc3x = 1$ Y $Csc3x = \dfrac{1}{Sen3x}$

EJEMPLO APLICATIVO:

Siendo: $\dfrac{Sec3x}{Csc3x} = \sqrt{0,444...}$; calcular: "cot3x"

RESOLUCIÓN :

* Sabemos :

$$\frac{Sec3x}{Csc3x} = \sqrt{0,4} \quad Y \quad \frac{\dfrac{1}{Cos3x}}{\dfrac{1}{Sen3x}} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\rightarrow \frac{Sen3x}{Cos3x} = \frac{2}{3} \quad Y \quad Tan3x = \frac{2}{3}$$

* Finalmente :

$$Cot3x = \frac{1}{tan3x} \rightarrow Cot3x = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

FÓRMULAS ESPECIALES

$\boxed{Sen3x = Senx(2Cos2x + 1)}$

$\boxed{Cos3x = Cosx(2Cos2x - 1)}$

Y $\boxed{Tan3x = Tanx\left(\dfrac{2Cos2x + 1}{2Cos2x - 1}\right)}$

$4SenxSen(60° - x)Sen(60°+x)=Sen3x$

$4CosxCos(60° - x)Cos(60°+x)=Cos3x$

$TanxTan(60° - x)Tan(60°+x)=Tan3x$

NOTAS :

$*Sen18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ $\quad Cos36° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

$*Csc18° = \sqrt{5}+1$ $\quad Sec18° = \sqrt{5}-1$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Siendo :

$sen\beta=\dfrac{1}{3}$; Calcular: "$sen3\beta$"

A) $\dfrac{1}{27}$ B) $\dfrac{5}{27}$ C) $\dfrac{2}{9}$ D) $\dfrac{13}{27}$ E) $\dfrac{23}{27}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$sen3\beta=3sen\beta-4sen^3\beta$; pero: $sen\beta=\dfrac{1}{3}$

* Luego :

$$sen3\beta = 3\left(\frac{1}{3}\right)-4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

* Operando :

$$sen3\beta = \frac{13}{27}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 2 :

Si: $cosa = \dfrac{1}{4}$;

Calcular: $J=Cos3aSeca$

A) $\dfrac{11}{4}$ B) $-\dfrac{11}{4}$ C) $\dfrac{7}{4}$ D) $-\dfrac{7}{4}$ E) $-\dfrac{5}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$cos3a=4cos^3a-3cosa$$

* Luego :

$\underbrace{cos3\alpha\times sec\alpha}_{J}=(4cos^3\alpha-3cos\alpha)\times sec\alpha$

$=\underbrace{\underline{cos\alpha}(4cos2\alpha-3)\times \underline{sec\alpha}}_{1}$

* Queda :

$$J=4cos^2\alpha-3=4\left(\frac{1}{4}\right)^2-3$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{4}-3\Rightarrow J=-\frac{11}{4}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 3 :

Siendo :

$cosa = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$; "$\alpha$" es agudo , calcular : "$tan3\alpha$"

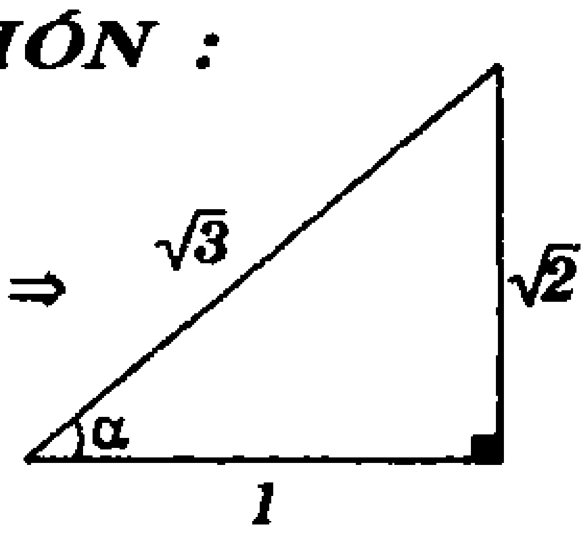
A) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ C) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ E) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow$

$\Rightarrow tan\alpha=\sqrt{2}$



* Piden : $tan3\alpha=\dfrac{3tan\alpha-tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha}$

* Reemplazando :

$$tan3\alpha=\frac{3(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3}{1-3(\sqrt{2})^2}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1-3(2)}=\frac{\sqrt{2}}{-5}$$

$$\Rightarrow Tan3\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{5}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 4 :

Si : $sen\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\beta\in IIIC$,

Calcular : $B=tan3\beta\times cot\beta$

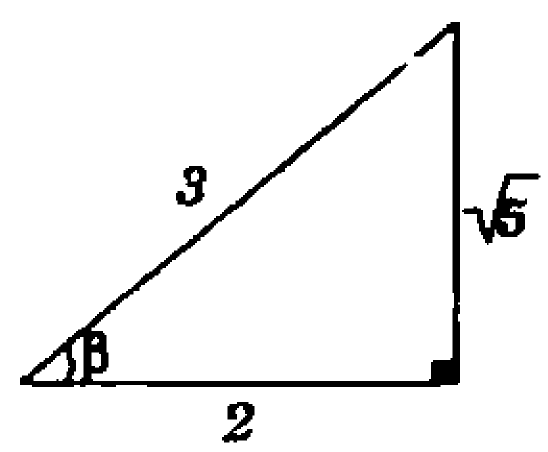
A) $\dfrac{7}{11}$ B) $-\dfrac{7}{11}$ C) $\dfrac{5}{11}$ D) $-\dfrac{5}{11}$ E) $-\dfrac{3}{11}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$sen\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\beta\in IIIC\Rightarrow$

$\Rightarrow tan\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



* Piden : $J=tan\beta\times cot\beta$

$$B=\frac{(3tan\beta-tan^3\beta)}{1-3tan^2\beta}\times cot\beta$$

$$=\overbrace{tan\beta\times\frac{(3-tan^2\beta)}{1-3tan^2\beta}\times cot\beta}^{1}$$

* Queda :

$$B=\frac{3-tan^2\beta}{1-3tan^2\beta}=\frac{3-\frac{5}{4}}{1-3\times\frac{5}{4}}=\frac{\frac{7}{4}}{-\frac{11}{4}}=-\frac{7}{11}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 5 :

Reducir : $C=\dfrac{sen3x+senx}{cos^2x}$

A) $senx$ B) $2senx$ C) $4senx$ D) $2tanx$ E) $4tanx$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C=\frac{sen3x+senx}{cos^2x}$$

* Reemplazando la fórmula:

$$C=\frac{\overbrace{3senx}-4sen^3x+\overbrace{senx}}{cos^2x}$$

$$C=\frac{4senx-4sen^3x}{cos^2x}$$

* Factorizando :

$$C=\frac{4senx\times(1-sen^2x)}{cos^2x},$$

pero: $1-sen^2x=cos^2x$

* Luego :

$$C=\frac{4senx\times cos^2x}{cos^2x}\Rightarrow C=4senx$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 6 :

Reducir : $D=\dfrac{cos3x+cosx}{cos2x}$

A) $cosx$ B) $senx$ C) $2cosx$ D) $2senx$ E) $sen2x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$D=\frac{cos3x+cosx}{cos2x}=\frac{4cos^3x-3cosx+cosx}{cos2x}$$

$$\Rightarrow D=\frac{4cos^3x-2cosx}{cos2x}$$

* Factorizando "2cosx"

$D=\dfrac{2cosx(2cos^2x-1)}{cos2x}$; pero: $2cos^2x-1=cos2x$

$\Rightarrow D=2cosx$

RPTA:"C"

PROBLEMA 7 :

Simplificar : $E=\dfrac{sen3x}{senx}-1$

A) $cosx$ B) $cos2x$ C) $2cosx$ D) $2cos2x$ E) cos^2x

RESOLUCIÓN :

* En este caso usamos :

$$sen3x = senx(2cos2x+1)$$

* luego :

$$E=\frac{senx(2cos2x+1)}{senx}-1$$

$\Rightarrow E=2cos2x+1-1 \Rightarrow E=2cos2x$

RPTA: "D"

PROBLEMA 8 :

Señale un valor agudo de "x" que cumple :

$$\frac{sen3x}{senx}=\sqrt{3}+1$$

A)20° B)15° C)30° D)45° E)18°

RESOLUCIÓN :

* En el dato :

$$\frac{sen3x}{senx}=\sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow \frac{senx(2cos2x+1)}{senx}=\sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow 2cos2x+1=\sqrt{3}+1$$

$$\Rightarrow cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x=30°$$

$$\Rightarrow x=15°$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 9:

Siendo :

$sen3x=\frac{5}{3}\ senx$; señale el valor de "cos2x" $(senx \neq 0)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{4}{5}$

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$$sen3x=\frac{5}{3}\ senx$$

* Por fórmula especial :

$$sen3x = senx(2cos2x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}senx=senx(2cos2x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3}=2cos2x+1 \Rightarrow cos2x=\frac{1}{3}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

Hallar :

$$L=\frac{sen3x}{senx}+\frac{cos3x}{cosx}$$

A)cos2x B)2cos2x C)4cos2x D) 4 E) 2

RESOLUCIÓN :

* En la expresión, aplicamos la fórmula especial :

$$L=\frac{senx(2cos2x+1)}{senx}+\frac{cosx(2cos2x-1)}{cosx}$$

* Reduciendo : $\Rightarrow L=4cos2x$

RPTA: "C"

PROBLEMA 11 :

Calcular : "sen18°"

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ D) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Procedemos de la siguiente forma:

* Sabemos que : $sen36°=cos54°$ (son complementarios)

* Luego :

$$2sen18°cos18°=4cos^3 18°-3cos18°$$

(por ángulo doble y triple respectivamente)

$$2sen18°cos18°=cos18°(4cos^2 18°-3)$$

$$\Rightarrow 2sen18° = 4cos^2 18°-3$$

pero : $cos^2 18°=1-sen^2 18°$

* Tenemos :

$$2sen18° = 4(1-sen^2 18°)-3$$

$$2sen18° = 4-4sen^2 18°-3$$

* Ordenando :

$$4sen^2 18° + 2sen18° - 1 = 0$$

* Recuerde que si :

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

* En el problema :

$x = sen18°;\ a = 4;\ b = 2;\ c = -1$

$$sen18°=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$\Rightarrow sen18°=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4} \Rightarrow sen18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

* Nota : No olvidar

$$\boxed{sen18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}} \quad \boxed{sen36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 12 :

Calcular :

$$J = sen10° \times sen50° \times sen70$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{32}$

RESOLUCIÓN :

$$J = sen10° \times sen50° \times sen70°$$

$$J=sen10° \times sen(60°-10°) \times sen(60°+10°)$$

$$=\frac{sen3(10°)}{4}$$

$$\Rightarrow J=\frac{sen30°}{4} \Rightarrow J=\frac{\frac{1}{2}}{4} \Rightarrow J=\frac{1}{8}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 13 :

Señale el valor de :

$$C = sec20° \times sec40° \times sec80°$$

A)8 B)6 C)16 D)4 E)32

RESOLUCIÓN :

* ordenando la expresión :

$$C=sec20° \times sec40° \times sec80°$$

$$C=\frac{1}{cos20°}\times\frac{1}{cos40°}\times\frac{1}{cos80°}$$

$$=\frac{1}{cos20° \times cos40° \times cos80°}$$

$$C=\frac{1}{cos20° \times cos(60°-20°) \times cos(60°+20°)}$$

$$=\frac{1}{\frac{cos3(20°)}{4}}$$

$$\Rightarrow C=\frac{1}{\frac{cos60°}{4}}=\frac{4}{\frac{1}{2}} \Rightarrow C=8$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 14 :

Hallar "x" , si :

$$\frac{tanx}{tan12°}=\frac{tan72°}{tan42°}$$

A)36° B)18° C)24° D)54° E)28°

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$$\frac{tanx}{tan12°}=\frac{tan72°}{tan42°}$$

$$tanx=\frac{tan12° \times tan72°}{tan42°}$$

$$= tan12° \times tan72° \times cot42°$$

* Pero :

$cot42°=tan48°$

$\Rightarrow tanx=tan12° \times tan72° \times tan48°$

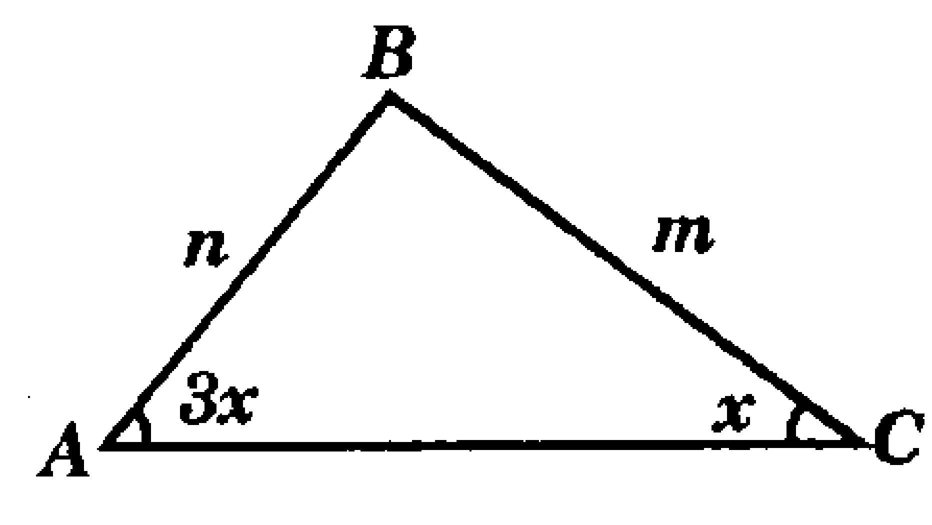
$\Rightarrow tanx=tan12° \times tan(60°+12°) \times tan(60°-12°)$

$\Rightarrow tanx=tan3(12°)=tan36° \Rightarrow x=36°$

RPTA: "A"

PROBLEMA 15 :

Del gráfico, hallar "cos2x"

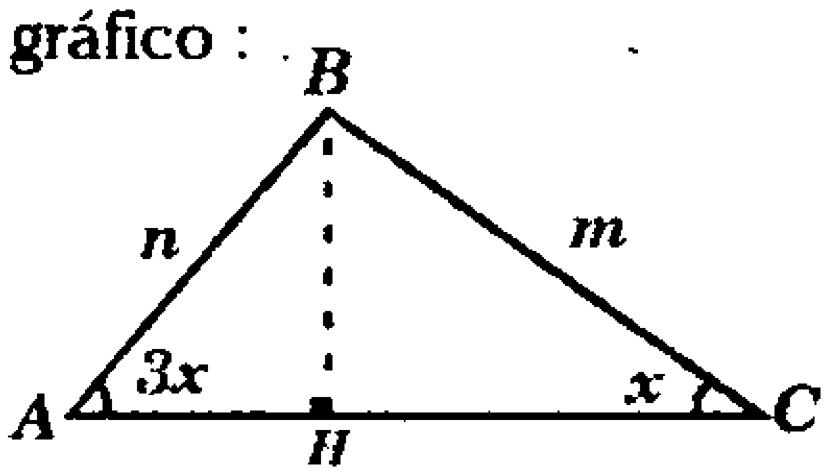


A) $\dfrac{m-n}{2m}$ B) $\dfrac{m-n}{n}$ C) $\dfrac{m-n}{2n}$

D) $\dfrac{m-n}{m}$ E) $\dfrac{m+n}{2m}$

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



$AHB: BH = nsen3x$

$BHC: BH = msenx$

* Igualando : $nsen3x = msenx$

* Pero :

$sen3x = senx(2cos2x + 1)$

$nsenx(2cos2x + 1) = msenx$

$2cos2x + 1 = \dfrac{m}{n}$

$2cos2x = \dfrac{m}{n} - 1 \Rightarrow 2cos2x = \dfrac{m-n}{n}$

$\Rightarrow cos2x = \dfrac{m-n}{2n}$

RPTA: "C"

PROBLEMA 16 :

Reducir :

$$J = 4sen^3(60° + x) - sen3x$$

A) $sen(60° - x)$ B) $sen(60° + x)$
C) $3sen(60° - x)$ D) $3sen(60° + x)$
E) $3senx$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$4sen^3\theta = 3sen\theta - sen3\theta$ (degradación)

* Luego :

$J = 3sen(60°+x) - sen(180°+3x) - sen3x$

* Pero :

$sen(180°+3x) = -sen3x$

$\Rightarrow J = 3sen(60° + x) + sen3x - sen3x$

$\Rightarrow J = 3sen(60° + x)$

RPTA: "D"

PROBLEMA 17:

Reducir : $J = \dfrac{sen^3 10° + cos^3 20°}{sen 10° + cos 20°}$

A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{4}{3}$ D) $\dfrac{2}{3}$ E) $\dfrac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Degradando el numerador :

$$4J = \frac{4sen^3 10° + 4cos^3 20°}{sen 10° + cos 20°}$$

$$\Rightarrow 4J = \frac{3sen 10° - \overbrace{sen 30°}^{1/2} + 3cos 20° + \overbrace{cos 60°}^{1/2}}{sen 10° + cos 20°}$$

$$\Rightarrow 4J = \frac{3sen 10° + 3cos 20°}{sen 10° + cos 20°} = \frac{3(sen 10° + cos 20°)}{sen 10° + cos 20°}$$

Reduciendo : $4J = 3 \Rightarrow J = \dfrac{3}{4}$

RPTA: "B"

PROBLEMA 18 :

Reducir :

$M = cos^3x + cos^3(120° - x) + cos^3(120° + x)$

A) $cos3x$ B) $\dfrac{cos3x}{4}$ C) $\dfrac{cos3x}{2}$

D) $\dfrac{3cos3x}{2}$ E) $\dfrac{3cos3x}{4}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión, multiplicamos por 4 :

$4M = 4cos^3x + 4cos^3(120° - x)$
$+ 4cos^3(120° + x)$

* Degradando :

$(4cos^3\theta = 3cos\theta + cos3\theta)$

$4M = 3cosx + cos3x + 3cos(120° - x)$
$+ cos(360° - 3x)$
$+ 3cos(120° + x) + cos(360° + 3x)$

* Agrupando :

$$4M = 3(cosx + \underbrace{cos(120° - x) + cos(120° + x)}_{2\,cos120°\,\times\,cosx})$$
$$+ cos3x + \underbrace{cos(360° - 3x)}_{cos\,3x} + \underbrace{cos(360° + 3x)}_{cos3x}$$

$$\Rightarrow 4M = \underbrace{3\left(cosx + 2\left(-\frac{1}{2}\right)cosx\right)}_{0} + 3cos3x$$

$\Rightarrow 4M = 3cos3x \Rightarrow M = \dfrac{3}{4}cos3x$

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

Simplificar :

$$\frac{sen3x + sen^3x}{cos^3x - cos3x}$$

A) $cot\ x$ B) $sec\ x$ C) $cscx$
D) $tanx$ E) $sen\ x$

RESOLUCIÓN :

* De :

$$\frac{sen3x + sen^3x}{cos^3x - cos3x} = \frac{3senx - 4sen^3x + sen^3x}{cos^3x - 4cos^3x + 3cosx}$$

$$= \frac{3senx - 3sen^3x}{3cosx - 3cos^3x} = \frac{3senx(1 - sen^2x)}{3cosx(1 - cos^2x)}$$

* Simplificamos :

$$= \frac{senx \times cos^2x}{cos\ x \times sen^2x} = \frac{cosx}{senx} = cotx$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 20 :

Simplificar :

$$\frac{cos^3\theta - cos3\theta}{cos\theta} + \frac{sen^3\theta + sen3\theta}{sen\theta}$$

A) $cos\theta$ B) $sen\theta$ C) 1 D) 3 E) 0

RESOLUCIÓN :

* De :

$$\frac{cos^3\theta - cos3\theta}{cos\theta} + \frac{sen^3\theta + sen3\theta}{sen\theta}$$

$$= \frac{cos^3\theta - 4cos^3\theta + 3cos\theta}{cos\theta} +$$

$$+ \frac{sen^3\theta + 3sen\theta - 4sen^3\theta}{sen\theta}$$

$$= \frac{3cos\theta - 3cos^3\theta}{cos\theta} + \frac{3sen\theta - 3sen^3\theta}{sen\theta}$$

$$= \frac{3cos\theta(1 - cos^2\theta)}{cos\theta} + \frac{3sen\theta(1 - sen^2\theta)}{sen\theta}$$

$= 3sen^2\theta + 3cos^2\theta = 3(sen^2\theta + cos^2\theta)$

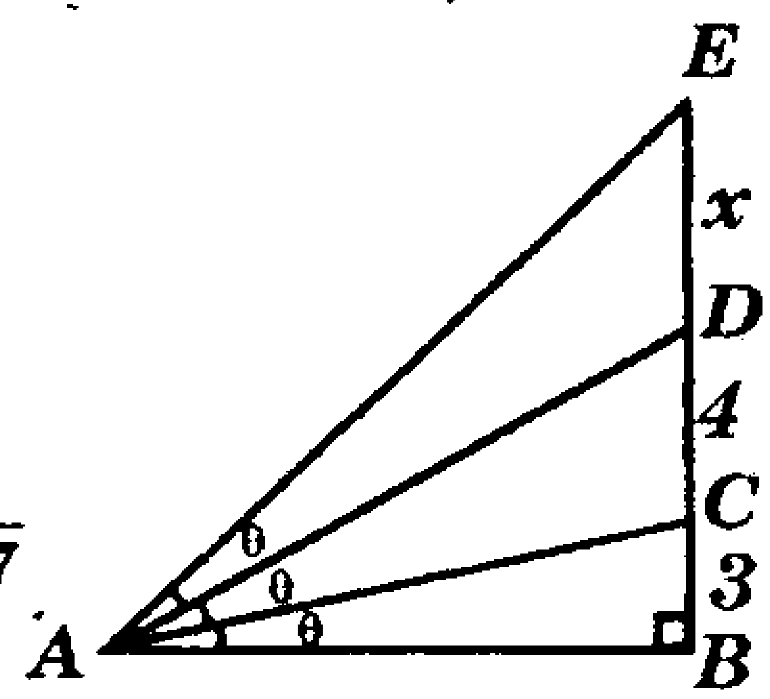
$= 3\ (1) = 3$

RPTA: "D"

PROBLEMA 21 :

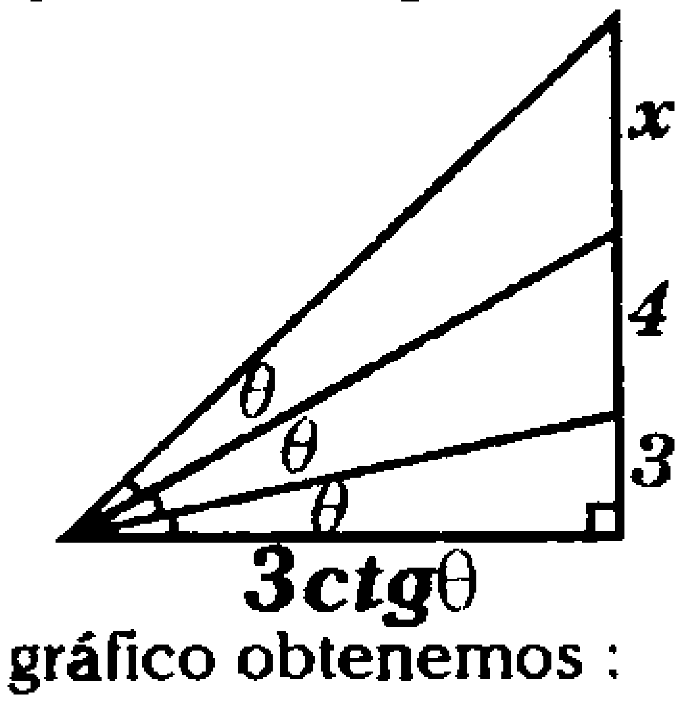
Del gráfico mostrado; hallar: "x"

A) 4
B) 7
C) 17
D) 8
E) $2\sqrt{7}$



RESOLUCIÓN :

* Completando el gráfico :



* Del gráfico obtenemos :

$tan2\theta = \dfrac{7}{3cot\theta}$ Y $tan2\ \theta = \dfrac{7tan\theta}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta} = \dfrac{7tan\theta}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{1 - tan^2\theta} = \dfrac{7}{3}$

$\Rightarrow 6 = 7 - 7\ tan^2\theta$

$\Rightarrow 7tan^2\theta = 1 \Rightarrow tan^2\theta = \dfrac{1}{7}$

$\Rightarrow tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$ " por otro lado"

$tan3\theta = \dfrac{x+7}{3cot\theta} \Rightarrow tan^3\theta = \dfrac{(x+7)tan\theta}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{3tan\theta - tan^3\theta}{1-3tan^2\theta} = \dfrac{(x+7)tan\theta}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{3-tan^2\theta}{1-3tan^2\theta} = \dfrac{x+7}{3}$ pero : $tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$;

Reemplazamos :

$$\frac{3-\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{7}} = \frac{x+7}{3} \Rightarrow \frac{\frac{20}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{x+7}{3}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{x+7}{3} \Rightarrow 15 = x+7 \Rightarrow x = 8$$

RPTA:"D"

PROBLEMA 22:

Simplificar : $\dfrac{cos^3 20° + cos^3 40°}{cos20° + cos40°}$

A)3 B)4 C)4/3 D)¾ E)3/2

RESOLUCIÓN :

* Le llamamos *"E"* a la expresión :

$E = \dfrac{cos^3 20° + cos^3 40°}{cos20° + cos40°}$

$\Rightarrow 4E = \dfrac{4cos^3 20° + 4cos^3 40°}{cos20° + cos40°}$

$\Rightarrow 4E = \dfrac{3cos20° + cos60° + 3cos40° + cos120°}{cos20° + cos40°}$

$\Rightarrow 4E = \dfrac{3cos20° + 3cos40° + cos60° - cos60°}{cos20° + cos40°}$

$\Rightarrow 4E = \dfrac{3(cos20° + cos40°)}{cos20° + cos40°} \Rightarrow 4E = 3 \Rightarrow E = \dfrac{3}{4}$

RPTA: "D"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Calcular:

$$P = 3Sen\,10° - 4Sen^3 10°$$

A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D)2 E) $\sqrt{3}$

02 ¿A qué es igual?

$$P = Cos2\alpha(4Cos^2 2\alpha - 3)$$

A) $Cos3\alpha$ B) $Cos6\alpha$ C) $Sen6\alpha$
D) $Sen4\alpha$ E) $Cos4\alpha$

03 Calcular:

$$P = \frac{Tg^3 20° - 3Tg20°}{1 - 3Tg^2 20°}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E) -1

04 Reducir:

$$Y = 9Sen^2x - 24Sen^4x + 16Sen^6x$$

A) $Sen6x$ B) $Sen^2 3x$ C) $Cos6x$
D) $Cos^2 3x$ E) $Sen9x$

05 Reducir:

$$P = \frac{Sen3A + Sen^3 A}{Cos^3 A - Cos3A}$$

A) TgA B) CtgA C) –TgA
D) –CtgA E) – 1

06 Si: $Sen\alpha = \dfrac{2}{3}$

calcular: $\sqrt[3]{\dfrac{Sen3\alpha}{22}}$

A)1/3 B)1/2 C)1/4 D)1/6 E)1/9

07 Calcular:

$$P = (1-Cos40°)(1-Cos80°)(1-Cos160°)$$

A)5/8 B)1/2 C)3/2 D)3/8 E)1/8

08 Reducir:

$$P = 2Cos6\alpha Sen3\alpha + Sen3\alpha$$

A) $Cos9\alpha$ B) $Cos6\alpha$ C) $Sen3\alpha$
D) $Sen6\alpha$ E) $Sen9\alpha$

09 Calcular:

$$P = \frac{Sen21°}{Sen7°} - \frac{Cos21°}{Cos7°}$$

A)–2 B) 0 C) 2 D)1 E) –1

10 Si : $Senx = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$; $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$

Calcular: $Cos3x$

A) $\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$ B) $-\dfrac{\sqrt{15}}{25}$ C) $-\dfrac{3\sqrt{15}}{25}$
D) $\dfrac{\sqrt{15}}{25}$ E) $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

11 Si : $Senx - Cosx = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Calcular: $Sen6x$

A) $\dfrac{23}{27}$ B) $\dfrac{17}{27}$ C) $\dfrac{13}{27}$ D) $\dfrac{22}{27}$ E) $\dfrac{11}{27}$

12 Simplificar:

$$P = \frac{Sen3x}{Senx} - 3Cos^2x$$

A) Sen^2x B) $-Sen^2x$ C) Cos^2x
D) $-Cos^2x$ E) Sen^3x

13 Si: $Tg(x+15°) = \dfrac{1}{2}$

Calcular: $Tg3x$

A) 7/13 B) 9/13 C) 11/13
D) 11/8 E) 7/8

14 Calcular:

$$P = (Tg9° + Ctg9°) + (Tg27° + Ctg27°)$$

A) – 4 B)4 C) $4\sqrt{5}$ D) – 4/5 E) 2

15 Simplificar:

$$P = 3Tgx - Tg^3x + 3Tg^2x\,Tg3x$$

A) Tg6x B) –Tg4x C) Tg4x
D) –Tg3x E) Tg3x

16 Calcular:

$$P = Sen54° - Sen18°$$

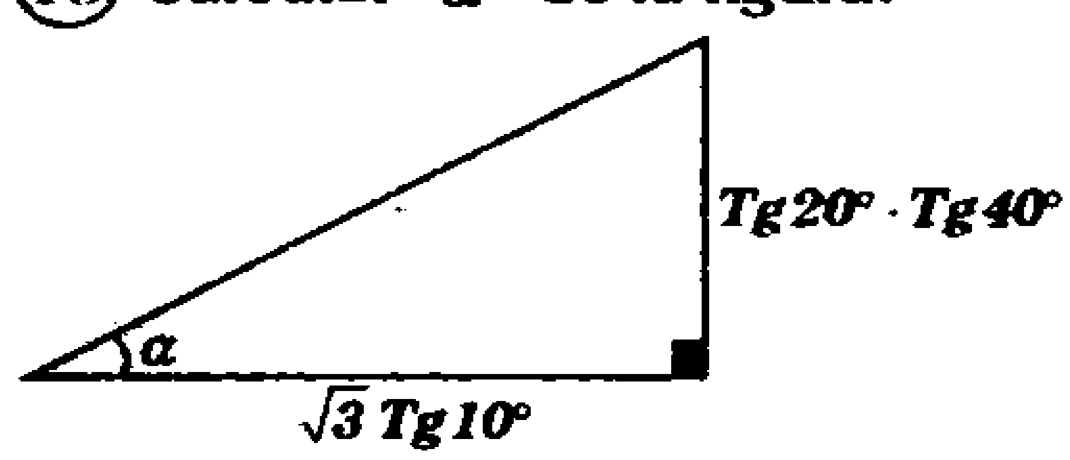
A)1 B) 2 C) 0,5 D)–0,5 E)–1

17 Eliminar "θ", si:

$$\begin{cases} Cos\theta - Sen\theta = a \\ Cos3\theta + Sen3\theta = b \end{cases}$$

A) $3a = b + 2a^3$ B) $5a = b + 2a^3$
C) $a = b^3$ D) $a = 2b^3$
E) $a^3 + b^3 = \theta$

18 Calcular "α" de la figura:



A)60° B)30° C)45° D)15° E)20°

19 Reducir:

$$P = \frac{(2Cos2x+1)(2Cos6x+1)(2Cos18x+1)}{(2Cos2x-1)(2Cos6x-1)(2Cos18x-1)}$$

A) $\dfrac{Tg9x}{Tgx}$ B) $\dfrac{Tg27x}{Tgx}$ C) $\dfrac{Tg18x}{Tgx}$
D) $\dfrac{Tg3x}{Tgx}$ E) $\dfrac{Tg54x}{Tgx}$

20 Reducir:

$$Cos^3x + Cos^3(120° - x) + Cos^3(120° + x)$$

A) $Cos3x$ B) $-Cos3x$ C) $\dfrac{3}{4}Cos3x$
D) $-\dfrac{3}{4}Cos3x$ E) $2Sen3x$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)B	2)B	3)C	4)B	5)B	6)A	7)[illegible]	8)E	9)[illegible]	10)A
11)D	12)B	13)B	14)C	15)E	16)C	17)A	18)C	19)B	20)C

OBJETIVOS

Al finalizar el presente capítulo, el Alumno estará en la capacidad de:

* *Conocer las equivalencias que transforman sumas o diferencias de razones* trigonométricas *(senos o cosenos) a producto. Dichas identidades permiten simplificar expresiones complicadas.*

* *Conocer las equivalencias que nos permitan transformar el producto de dos razones trigonométricas (senos o cosenos) a una suma o diferencias de dos razones trigonométricas (senos o cosenos).*

* *Conocer las propiedades que se deducen a partir de las identidades de las transformaciones trigonométricas.*

INTRODUCCIÓN :

A menudo se presenta el problema de transformar la suma o diferencia de dos funciones trigonométricas y viceversa. Esto permitirá las simplificaciones de expresiones complicadas. Dichas transformaciones son demostradas a partir de las identidades de arcos compuestos.

TRANSFORMACIÓN DE UNA SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

* Recordar que :

$$Sen(x+y)=Senx\times Cosy+Cosx\times Seny \;....(I)$$

$$Sen(x-y)=Senx\times Cosy-Cosx\times Seny \;....(II)$$

(I) + (II):

$$Sen(x+y)+Sen(x-y)=2SenxCosy \;....(III)$$

* Haciendo :

$$x+y=A\wedge x-y=B\Rightarrow\left\{x=\frac{A+B}{2}\wedge y=\frac{A-B}{2}\right\}$$

* Reemplazando en *(III)*:

$$SenA+SenB=2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

* Análogamente y en resumen tendremos :

$$\boxed{SenA+SenB=2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\boxed{SenA-SenB=2Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\boxed{CosA+CosB=2Cos\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\boxed{CosB-CosA=2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

Donde : $\boxed{A>B}$

OJO

$$\boxed{CosA-CosB=-2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Sen\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

EJEMPLOS :

* $Sen6x+Sen2x=2Sen\left(\frac{6x+2x}{2}\right)Cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right)=2Sen4x\,Cos2x$
* $Sen80^\circ-Sen40^\circ=2Cos\left(\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\right)Sen\left(\frac{80-40^\circ}{2}\right)=2Cos60^\circ Sen20^\circ$
* $Cos12\theta+Cos4\theta=2Cos\left(\frac{12\theta+4\theta}{2}\right)Cos\left(\frac{12\theta-4\theta}{2}\right)=2Cos8\theta\,Cos4\theta$
* $Cos5^\circ-Cos55^\circ=2Sen\left(\frac{55^\circ+5^\circ}{2}\right)Sen\left(\frac{55^\circ-5^\circ}{2}\right)=2Sen30^\circ Sen25^\circ$
* $cos55^\circ-cos5^\circ=-2sen\left(\frac{55^\circ+5^\circ}{2}\right)sen\left(\frac{55^\circ-5^\circ}{2}\right)=-2sen30^\circ sen25^\circ$

TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTO A UNA SUMA O DIFERENCIA

* Recordar que :

$$Senx\times Cosy+Cosx\times Seny=Sen(x+y)\;.....(I)$$

$$Senx\times Cosy-Cosx\times Seny=Sen(x-y)\;.....(II)$$

(I)+(II): $2Senx\times Cosy=Sen(x+y)+Sen(x-y)$

* Análogamente y en resumen tendremos :

$$\boxed{2Senx\,Cosy=Sen(x+y)+Sen(x-y)}$$

$$\boxed{2CosxSeny=Sen(x+y)-Sen(x-y)}$$

$$\boxed{2CosxCosy=Cos(x+y)+Cos(x-y)}$$

$$\boxed{2SenxSeny=Cos(x-y)-Cos(x+y)}$$

Donde $\boxed{x>y}$

EJEMPLOS :

* $2Sen5\alpha Cos\alpha=Sen(5\alpha+\alpha)+Sen(5\alpha-\alpha)=Sen\alpha+Sen4\alpha$
* $2Cos30^\circ Sen15^\circ=Sen(30^\circ+15^\circ)+Sen(30^\circ-15^\circ)=Sen45^\circ+Sen15^\circ$
* $2Cos75^\circ Cos5^\circ=Cos(75^\circ+5^\circ)+Cos(75^\circ-5^\circ)=Cos80^\circ+Cos70^\circ$
* $2Sen6\theta Sen4\theta=Cos(6\theta-4\theta)-Cos(6\theta+4\theta)=Cos2\theta+Cos10\theta$

EJERCICIO 1 :

Factorizar : $E = cos5xsen2x + cos2xsenx$

RESOLUCIÓN :

* Multiplicando por *(2)* a ambos miembros:

$$2E = 2cos5xsen2x + 2cos2x2senx$$

* Transformamos a diferencia de senos

$$2E = sen7x - \cancel{sen3x} + \cancel{sen3x} - senx$$

$$\Rightarrow 2E = sen7x - senx$$

* Transformamos a producto :

$$2E = 2cos4xsen3x \Rightarrow E = cos4xsen3x$$

EJERCICIO 2 :

Demostrar que:

$$SenA + SenB + SenC = 4Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}$$

Si: $A + B + C = 180°$

RESOLUCIÓN:

Tenemos la expresión: $SenA+SenB+SenC$

$$\Rightarrow 2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2Sen\frac{C}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \text{si } A+B+C = 180° \Rightarrow A+B = 180° - C$$

$$\Rightarrow 2Sen\left(\frac{180°-C}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2Sen\frac{C}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2Sen\left(90° - \frac{C}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2Sen\frac{C}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2Sen\frac{C}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}\left[Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + Sen\frac{C}{2}\right] \quad \text{pero } C = 180° - (A+B)$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}\left[Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + Sen\frac{(180° - (A+B))}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}\left[Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + Sen\left(90° - \frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}\left[Cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + Cos\left(-\frac{2B}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2Cos\frac{C}{2}\left[2Cos\left(\frac{2A}{4}\right)Cos\left(-\frac{2B}{4}\right)\right] \quad \text{pero } Cos\left(-\frac{B}{2}\right) = Cos\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow 4Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}$$

Por lo tanto: $SenA + SenB + SenC = 4Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}$

PROPIEDAD :

Si $A+B+C = 180°$ se cumple :

$$\boxed{SenA + SenB + SenC = 4Cos\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}}$$

$$\boxed{CosA + CosB + CosC = 4Sen\frac{A}{2}Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2} + 1}$$

$$\boxed{Sen2A + Sen2B + Sen2C = 4SenASenBSenC}$$

$$\boxed{Cos2A + Cos2B + Cos2C = 4CosACosBCosC - 1}$$

SUMATORÍA DE SENOS Y COSENOS DE ÁNGULOS EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Para simplificar sumatorias de senos o cosenos de ángulos en progresión aritmética se deben reconocer:

$P \Rightarrow$ primer ángulo

$n \Rightarrow$ *Número* de términos

$r \Rightarrow$ razón de la P.A. de los ángulos

$u \Rightarrow$ último ángulo

Luego aplicamos :

$$\boxed{SenP + Sen(P+r) + Sen(P+2r) + ... + Senu = \frac{Sen\frac{nr}{2}}{Sen\frac{r}{2}}Sen\left(\frac{P+u}{2}\right)}$$

$$\boxed{CosP + Cos(P+r) + Cos(P+2r) + ... + Cosu = \frac{Sen\frac{nr}{2}}{Sen\frac{r}{2}}Cos\left(\frac{P+u}{2}\right)}$$

EJEMPLO 1:

$sen2° + sen4° + sen6° + ... + sen48°$

$P = 2°; n = 24; r = 2°; u = 48°$

$$= \frac{sen\frac{24 \times 2°}{2}}{sen\frac{2°}{2}} \times sen\left(\frac{2° + 48°}{2}\right) = \frac{sen24° \times sen25°}{sen\,1°}$$

$cos4° + cos8° + cos12° + ... + cos48°$

$P = 4°; n = 12; r = 4°; u = 48°$

$$= \frac{sen\frac{12 \times 2°}{2}}{sen\frac{4°}{2}} \times cos\left(\frac{4° + 48°}{2}\right) = \frac{sen24° \times cos26°}{sen\,2°}$$

EJEMPLO 2 :

Calcular :

$$T = sen2° + sen4° + sen6° + ... + sen180°$$

RESOLUCIÓN :

Es evidente que la serie tiene *90* términos, además reconocemos que 2° y *180°* son el primer y último ángulo de la serie, respectivamente, donde la razón de la progresión aritmética del ángulo es 2°,

es decir, $n = 90$, $r=2$, $P\measuredangle := 2°$, $U\measuredangle := 180°$.

Aplicando la fórmula para la sumatoria de senos

$$T = \frac{sen\left(\frac{90°(2°)}{2}\right)}{sen\left(\frac{2°}{2}\right)} \times sen\left(\frac{2° + 180°}{2}\right)$$

$T=\frac{sen90°}{sen1°}\times sen91°=\frac{1}{sen1°}\times cos1°$

$\Rightarrow$ ...(se utilizo $sen91°=sen(90°+1°)=cos1°$)

$\Rightarrow T=cot1°$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Reducir :
$$A=\frac{sen7x+sen5x}{sen6x+sen4x}$$

A) $\frac{sen5x}{sen4x}$ B) $\frac{sen6x}{sen5x}$ C) $\frac{sen7x}{sen5x}$
D) $\frac{sen7x}{senx}$ E) $\frac{sen12x}{sen10x}$

RESOLUCIÓN :

$$A=\frac{sen7x+sen5x}{sen6x+sen4x}$$

$$\Rightarrow A=\frac{2sen\left(\frac{7x+5x}{2}\right)cos\left(\frac{7x-5x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{6x+4x}{2}\right)cos\left(\frac{6x-4x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{\cancel{2}sen6x\ \cancel{cosx}}{\cancel{2}sen5x\ \cancel{cosx}}$$

* Reduciendo : $A=\frac{sen6x}{sen5x}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 2:

Reducir :
$$B=\frac{sen5x+senx}{sen4x+sen2x}$$

A) $\frac{cos2x}{cos3x}$ B) $\frac{cos3x}{cos2x}$ C) $\frac{cos2x}{cosx}$
D) $\frac{sen2x}{cos3x}$ E) $\frac{sen3x}{sen2x}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$B=\frac{sen5x+senx}{sen4x+sen2x}$$

$$B=\frac{2sen\left(\frac{5x+x}{2}\right)cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{4x+2x}{2}\right)cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{2sen3x}\times cos2x}{\cancel{2sen3x}\times cosx}$$

* Reduciendo : $B=\frac{cos2x}{cosx}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Simplificar : $J=\frac{sen7\theta-sen3\theta}{cos7\theta+cos3\theta}$

A) $tan\theta$ B) $tan2\theta$ C) $tan3\theta$
D) $tan5\theta$ E) $tan7\theta$

RESOLUCIÓN :

* Transformando en la expresión :

$$J=\frac{sen7\theta-sen3\theta}{cos7\theta+cos3\theta}$$

$$=\frac{2sen\left(\frac{7\theta-3\theta}{2}\right)cos\left(\frac{7\theta+3\theta}{2}\right)}{2cos\left(\frac{7\theta+3\theta}{2}\right)cos\left(\frac{7\theta-3\theta}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow J=\frac{\cancel{2}sen2\theta\times\cancel{cos5\theta}}{\cancel{2}\cancel{cos5\theta}\times cos2\theta}$$

* Reduciendo :

$\boxed{\frac{senx}{cosx}=tanx}$

$$J=\frac{sen2\theta}{cos2\theta}$$
$$J=tan2\theta$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Simplificar : $K=\frac{cosx-cos5x}{sen5x+senx}$

A) $tan2x$ B) $cot2x$ C) $cos2x$
D) $sen3x$ E) $csc2x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$K=\frac{cosx-cos5x}{sen5x+senx}$$

$$\Rightarrow K=\frac{2sen\left(\frac{5x-x}{2}\right)sen\left(\frac{5x+x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{5x+x}{2}\right)cos\left(\frac{5x-x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cancel{2sen2x}\times sen3x}{\cancel{2sen3x}\times cos2x}$$

* Reduciendo :

$$K=\frac{sen2x}{cos2x}\Rightarrow K=tan2x$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 5 :

Simplificar :
$$L=\frac{sen80°+sen20°}{cos20°-cos80°}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $tan50°$ D) $cost50°$ E) $-\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$L=\frac{sen80°+sen20°}{cos20°-cos80°}$$

$$\Rightarrow L=\frac{2sen\left(\frac{80°+20°}{2}\right)cos\left(\frac{80°-20°}{2}\right)}{2sen\left(\frac{80°-20°}{2}\right)sen\left(\frac{80°+20°}{2}\right)}$$

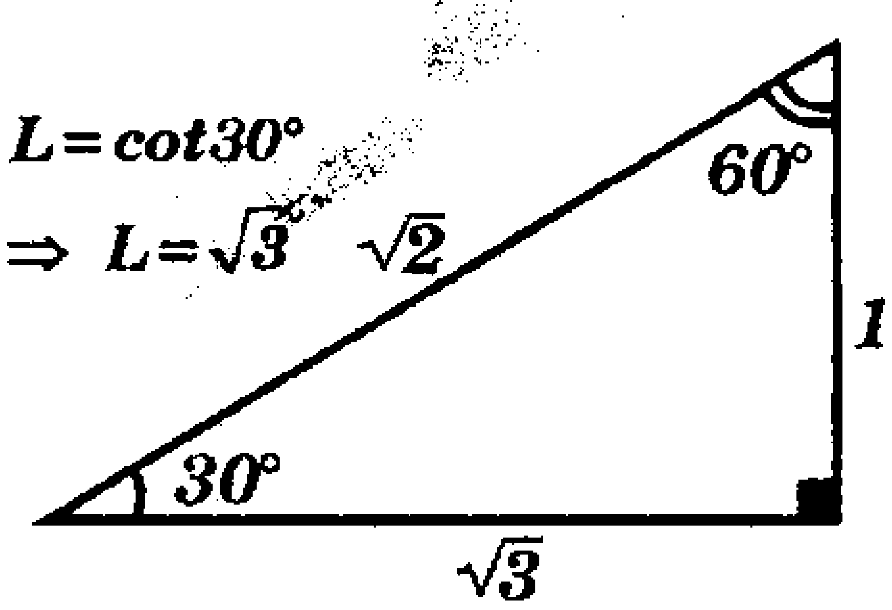
$\boxed{\frac{cosx}{senx}=cotx}$

$$\Rightarrow L=\frac{\cancel{2}\ \cancel{sen50°}\times cos30°}{\cancel{2}sen30°\times\cancel{sen50°}}=\frac{cos30°}{sen30°}$$

* Luego, tendríamos :

$L=cot30°$

$\Rightarrow L=\sqrt{3}$



RPTA :"A"

PROBLEMA 6 :

Reducir : $C=\frac{sen7x-sen3x}{cos7x-cos3x}$

A) $cot5x$ B) $cost2x$ C) $-cot2x$
D) $-cot5x$ E) $-cot3x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C=\frac{sen7x-sen3x}{cos7x-cos3x}$$

* Pasamos a producto :

$$C=\frac{2sen\left(\frac{7x-3x}{2}\right)cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right)}{2sen\left(\frac{3x-7x}{2}\right)sen\left(\frac{3x+7x}{2}\right)}$$

$\boxed{sen(-\beta)=-sen\beta}$

$$C=\frac{\cancel{2}sen2x\times cos5x}{\cancel{2}sen(-2x)\times sen5x}$$

$$\Rightarrow C=\frac{\cancel{sen2x}\times cos5x}{-\cancel{sen2x}\times sen5x}$$

* Reduciendo :

$$C=-\frac{cos5x}{sen5x}\Rightarrow C=-cot5x$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 7 :

En un triángulo *ABC*; reducir :

$$E=\frac{sen2A+senB}{cos(A-B)}$$

A) $tanC$ B) $-tanC$ C) $senC$
D) $2senC$ E) $-2senC$

RESOLUCIÓN :

* Note que un triángulo *ABC*;

$$A+B+C=180°$$

* En la expresión :

$$E=\frac{sen2A+senB}{cos(A-B)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2sen\left(\frac{2A+2B}{2}\right)cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right)}{cos(A-B)}$$

$$\Rightarrow E=\frac{2sen(A+B)\times cos(A-B)}{cos(A-B)}$$

$x+y=180° \rightarrow senx=seny$

$$\Rightarrow E=2sen(A+B)$$

* Como :

$$A+B+C=180° \Rightarrow sen(A+B)=senC$$

$$\Rightarrow E=2senC$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 8 :

Transformar a producto :

$$F=2senA+sen2B+Sen2C$$

en un triángulo *ABC*.

A) $2senA\times cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$ B) $2senA\times sen^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$
C) $2cosA\times sen^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$ D) $4senA\times cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$
E) $4senA\times sen^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión, agrupando convenientemente los dos últimos términos :

$$F=2senA+\underline{sen2B+sen2C}$$

$$\Rightarrow F=2senA+2sen\left(\frac{2B+2C}{2}\right)cos\frac{2B-2C}{2}$$

$$\Rightarrow F=2senA+2sen(B+C)\,cos(B-C)$$

* Pero, como :

$$A+B+C=180° sen(B+C)=senA$$

* Quería :

$$F=2senA+2senA\times cos(B-C)$$

* Factorizando :

$1+cos\theta=2cos^2\frac{\theta}{2}$

$$F=2senA\{1+cos(B-C)\}$$

* Pero :

$$1+cos(B-C)=2cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

* Luego :

$$F=2senA\times 2cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F=4senA\times cos^2\frac{B-C}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 9 :

Simplificar :

$$G=\frac{2sen2x-sen4x+sen8x}{sen5x-senx}$$

A) $cosx$ B) $2cosx$ C) $cos3x$
D) $2cos3x$ E) $2cos2x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$G=\frac{2sen2x-sen4x+sen8x}{sen5x-senx}$$

* Agrupando :

$$G=\frac{2sen2x+\overline{sen8x-sen4x}}{\underline{sen5x-senx}}$$

* Transformando :

$$G=\frac{2sen2x+2sen2x\times cos6x}{2sen2x\times cos3x}$$

* Factorizando :

$$G=\frac{2sen2x(1+cos6x)}{2sen2x\times cos3x}$$

* Reduciendo :

$$G=\frac{1+cos6x}{cos3x}=\frac{2cos^2 3x}{cos3x}$$

* Simplificando : $G=2cos3x$

RPTA : "D"

PROBLEMA 10:

Transforme a producto :

$$J=senx+sen3x+sen5x+sen7x$$

A) $sen4x\times cos2x\times cosx$
B) $2sen4x\times cos2x\times cosx$
C) $4sen4x\times cos2x\times cosx$
D) $2cos4x\times cos2x\times cosx$
E) $4cos4x\times cos2x\times cosx$

RESOLUCIÓN :

* En estos casos, lo más conveniente es agrupar de a dos

$$J=\underline{senx}+\underline{sen3x}+\underline{sen5x}+\underline{sen7x}$$

$$J=(sen7x+senx)+(sen5x+sen3x)$$

* Transformando :

$$J=\underline{2sen4x}\times cos3x+\underline{2sen4x}\times cosx$$

* Factorizando :

$$J=2sen4x\underbrace{(cos3x+cosx)}_{2cos2x\times cosx}$$

$$\Rightarrow J=4senx\times cos2x\times cosx$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Transforme a producto de cosenos

$$P=1+\sqrt{2}$$

A) $2cos52°30'\times cos7°30'$
B) $cos52°30'\times cos7°30'$
C) $cos42°30'\times cos17°30'$
D) $4cos52°30'\times cos7°30'$
E) $4cos42°30'\times cos17°30'$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión, esas cantidades deben convertirse en seno o coseno de un ángulo agudo conocido, esto es :

$$P=1+\sqrt{2}\Rightarrow P=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

* Recuerde que :

$$\frac{1}{2}=cos60° \wedge \frac{\sqrt{2}}{2}=cos45°$$

* Luego:

$$P=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2(cos60°+cos45°)$$

* Transformando:

$$P=2\left(2cos\frac{105°}{2}cos\frac{15°}{2}\right)$$

OBSERVACIÓN :

$$\frac{105°}{2}=52°30' \wedge \frac{15°}{2}=7°30'$$

* Luego :

$$P=4cos52°30'\times cos7°30'$$

RPTA :"D"

PROBLEMA 12 :

Reducir :

$$J=2Sen3x\ Cosx-Sen4x$$

A) cos2x *B) cot2x* *C) tan2x*
D) sen2x *E) csc2x*

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$J = 2sen3x \times cosx - sen4x$$

* Transformando :

$J = sen(3x+x) + sen(3x-x) - sen4x$

$J = sen4x + sen2x - sen4x$

* Reduciendo : $J = sen2x$

RPTA :"D"

PROBLEMA 13 :

Simplificar :

$$I = \frac{2sen2x \times cos3x + senx}{2sen4x \times cosx - sen3x}$$

A) 1 *B) −1* *C)* $\frac{sen3x}{sen2x}$ *D)* $\frac{sen5x}{sen4x}$ *E)* $\frac{sen3x}{senx}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$I = \frac{2sen2x \times cos3x + senx}{2sen4x \times cosx - sen3x}$$

* Transformando :

$$I = \frac{sen(2x+3x) + sen(2x-3x) + senx}{sen(4x+x) + sen(4x-x) - sen3x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{sen5x + sen(-x) + senx}{sen5x + sen3x - sen3x}$$

$$\Rightarrow I = \frac{sen5x - senx + senx}{sen5x + sen3x \;\; sen3x}$$

* Reduciendo :

$$I = \frac{sen5x}{sen5x} \Rightarrow I = 1$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 14 :

Simplificar :

$$J = \frac{2sen4x \times cosx - sen5x}{2cos5x \times cos2x - cos7x}$$

A) tanx *B) tan2x* *C) tan3x*
D) tan4x *E) tan5x*

RESOLUCIÓN :

* Transformando :

$$J = \frac{sen(4x+x) + sen(4x-x) - sen5x}{cos(5x+2x) + cos(5x-2x) - cos7x}$$

* Operando :

$$J = \frac{\cancel{sen5x} + sen3x - \cancel{sen5}}{\cancel{cos7x} + cos3x - \cancel{cos7x}} = \frac{sen3x}{cos3x}$$

$\Rightarrow J = tan3x$

RPTA : "C"

PROBLEMA 15 :

Reducir :

$$A = \frac{sen5x \times senx + cos7x \times cosx}{cos6x}$$

A) cosx *B) 2cosx* *C) cos2x*
D) 2cos2x *E) cos4x*

RESOLUCIÓN :

* Multiplicamos × 2 :

$$2A = \frac{2sen5x \times senx + 2cos7x \times cosx}{cos6x}$$

* Transformando :

$$2A = \frac{cos(5x-x) - cos(5x+x) + cos(7x+x) + cos(7x-x)}{cos6x}$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{cos4x - \cancel{cos6x} + cos8x + \cancel{cos6x}}{cos6x}$$

* Reduciendo :

$$2A = \frac{cos8x + cos4x}{cos6x}$$

* Transformando a producto :

$$cos8x + cos4x = 2cos\left(\frac{8x+4x}{2}\right)cos\left(\frac{8x-4x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2A = \frac{2cos6x \times cos2x}{cos6x}$$

* Simplificando : $A = cos2x$

RPTA : "C"

PROBLEMA 16 :

Simplificar :

$J = sen3x \times cos2x + sen3x \times cos4x + senx \times cos6x$

A) 0 *B) senx* *C) sen5x*
D) sen3x *E) sen7x*

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$J = sen3x \times cos2x + sen3x \times cos4x + senx \times cos6x$$

* Multiplicamos × 2.

$$2J = \underline{2sen3x \times cos2x} + \underline{2sen3x \times cos4x} + \underline{2senx \times cos6x}$$

* Transformando :

$$2J = sen5x + senx + sen7x - senx + sen7x - sen5x$$

* Reduciendo :

$$2J = 2sen7x \Rightarrow J = sen7x$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 17 :

Reducir :

$B = cos5x \times cos2x + sen6x \times senx - cos4x \times cosx$

A) cosx *B) cos2x* *C) − cosx*
D) − cos2x *E) 0*

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$B = cos5x \times cos2x + sen6x \times senx - cos4x \times cosx$

* Multiplicamos × 2 :

$$2B = 2cos5x \times cos2x + 2sen6x \times senx - 2cos4x \times cosx$$

* Transformando :

$2B = cos7x + cos3x + cos5x - cos7x - (cos5x + cos3x)$

$2B = cos7x + cos3x + cos5x - cos7x - cos5x - cos3x$

* Reduciendo :

$$2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 18 :

Transforme a suma ó diferencia de senos o cosenos :

$$C = 4Senx\ Cos2x\ Cos4x$$

A) sen7x − sen5x + sen3x − senx
B) sen7x + sen5x − sen3x − senx
C) sen7x − sen5x − sen3x + senx
D) sen7x + sen5x + sen3x + senx
E) sen7x + sen5x + sen3x − senx

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C = 4senx \times cos2x \times cos4x$$

* Agrupamos y transformamos :

$$C = 2(2senx \times cos2x)cos4x$$
$$C = 2(sen3x - senx)cos4x$$

* Desarrollando :

$$C = 2sen3x \times cos4x - 2senx \times cos4x$$

* Transformando nuevamente :

$$C = sen7x - senx - (sen5x - sen3x)$$
$$C = sen7x - senx - sen5x + sen3x$$

* Ordenando :

$C = sen7x - sen5x + sen3x - senx$

RPTA :"A"

PROBLEMA 19:

En un triángulo *ABC*; transforme a suma o diferencia:

$$J = 4SenACosB\ CosC$$

A) sen2A + sen2B − senC
B) sen2A − sen2B − sen2C

C) sen2A – sen2B + sen2C D) sen2B + sen2C – sen2A
E) sen2B – sen2C – sen2A

RESOLUCIÓN :

* Ordenando la expresión :

$J = 4senA \times cosB \times cosC = 2(2senA \times cosB) \times cosC$

* Transformando : $J = 2[sen(A+B) + sen(A-B)]cosC$

* Pero recuerde que : $A+B+C=180° \Rightarrow sen(A+B)=senC$

* Luego :

$J = 2\{senC + sen(A-B)\}\ cosC$

$sen2\beta = 2sen\beta \times cos\beta$

$J = 2senC \times cosC + 2sen(A-B)\ cosC$

$J = sen2C + 2sen(A-B)\ cosC$

* Pero como : $A+B+C=180° \Rightarrow cosC = -cos(A+B)$

(ángulo suplementarios)

$J = sen2C + 2sen(A-B)[-cos(A+B)]$

$J = sen2C - 2sen(A-B)cos(A+B) \ldots (\alpha)$

OBSERVACIÓN:

$2sen(A-B)cos(A+B) = sen(A-B+A+B) + sen(A-B-A-B)$

$2sen(A-B)cos(A+B) = sen2A + sen(-2B)$

$2sen(A-B)cos(A+B) = sen2A - sen2B$

En (α):

$J = sen2C - (sen2A - sen2B)$

$\Rightarrow J = sen2B + sen2C - Sen2A$

RPTA :"D"

PROBLEMA 20 :

Calcular el valor máximo de : $J = cos(30°+x)\ cosx$

A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión : $J = cos(30°+x)\ cosx$

* Tratemos de que "x" aparezca en un solo término; multiplicamos por 2 y transformamos :

$2J = 2cos(30°+x)\ cosx \Rightarrow 2J = cos(30°+2x) + cos30°$

$\Rightarrow 2J = cos30° + cos(30°+2x) \Rightarrow 2J = \frac{\sqrt{3}}{2} + cos(30°+2x)$

$\Rightarrow 2J = \frac{\sqrt{3}}{2} + cos(30°+2x)$

* Como : $J = máx \Rightarrow cos(30°+2x) : máx = 1$

* Es decir :

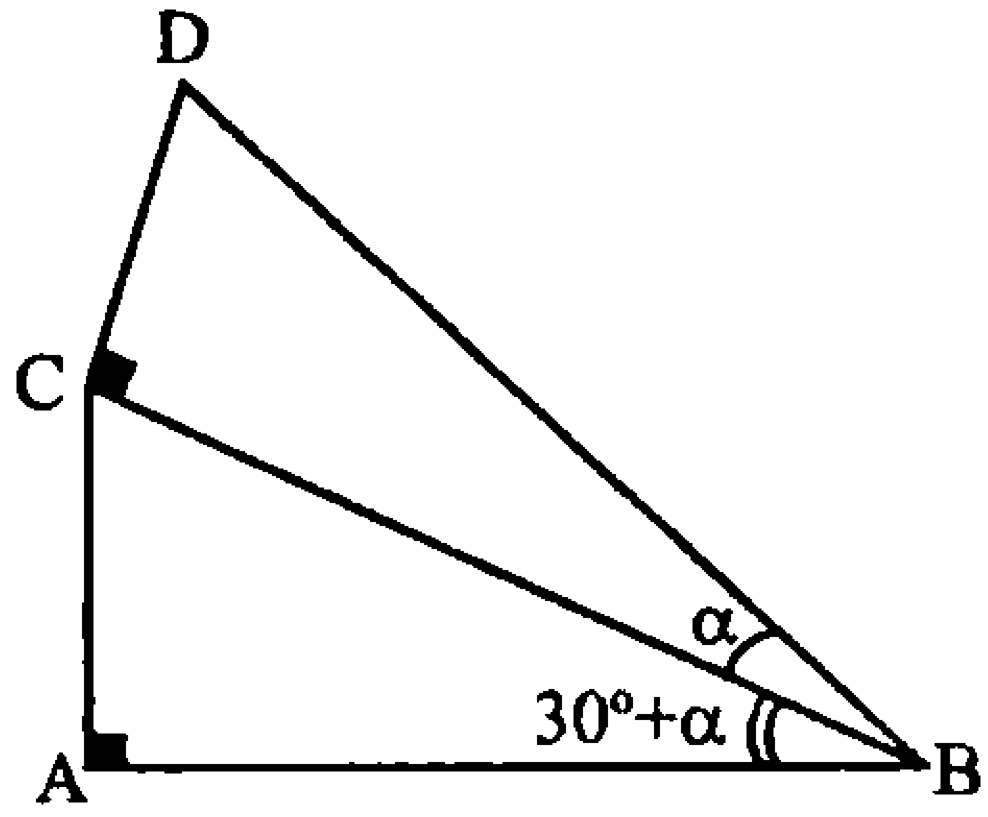
$$2\underbrace{J}_{máx} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \underbrace{cos(30°+2x)}_{máx=1}$$

$$\Rightarrow 2J_{máx} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \Rightarrow J_{máx} = \frac{\sqrt{3}+2}{4}$$

RPTA : "D"

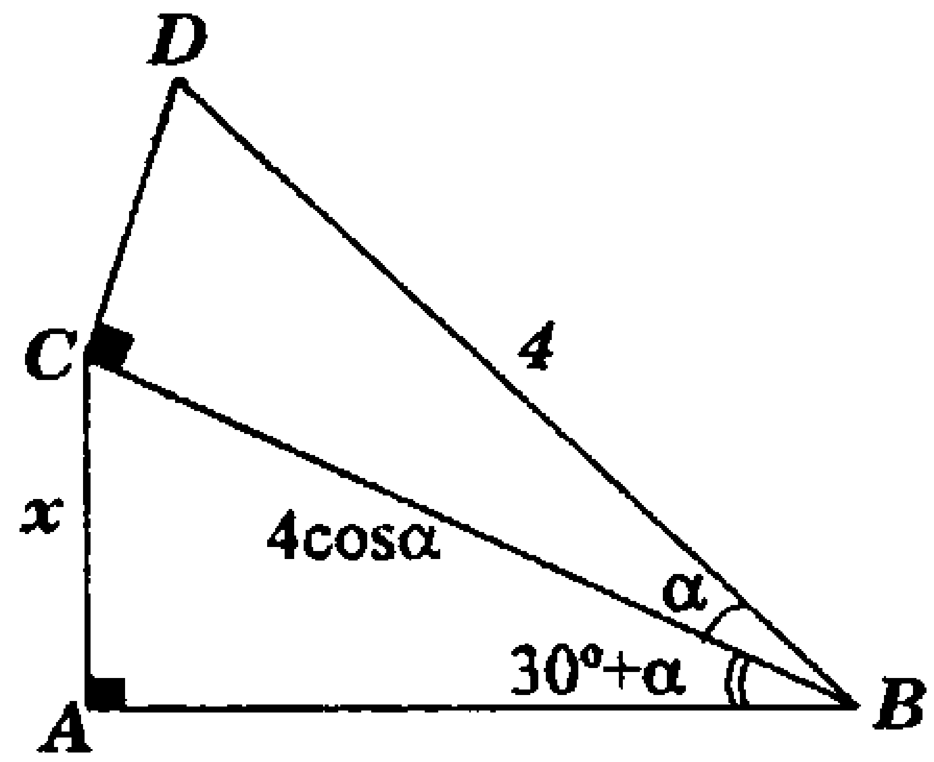
PROBLEMA 21 :

En el gráfico, calcular el valor máximo de "*AC*"; si: *BD = 4*



A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 5

RESOLUCIÓN :



I) DCB: $BC = 4co\alpha$

II) BAC: $x = (4cos\alpha)sen(30°+\alpha) = 4sen(30°+\alpha)cos\alpha$

* Ordenando : $x = 2[2sen(30°+\alpha)cos\alpha]$

* Transformando : $x = 2[sen(30°+2\alpha) + sen30°]$

* Como :

$x_{máx} \Rightarrow sen(30°+2\alpha) : máx = 1$

* Es decir :

$$\underbrace{x}_{máx} = 2\{sen30° + \underbrace{sen(30°+2\alpha)}_{máx=1}\}$$

$$x_{máx} = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \Rightarrow x_{máx} = 3$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 22 :

Simplificar : $J = sen2° + sen4° + sen6° + \ldots + sen178°$

A) tan1° B) tan2° C) cot1°
D) cot2° E) tan4°

RESOLUCIÓN :

En la sumatoria :

$J = sen2° + sen4° + sen6° + \ldots + sen178°$ $\begin{cases} P = 2° \\ n = 89 \\ r = 2° \\ u = 178° \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \frac{sen\frac{89 \times 2°}{2}}{sen\frac{2°}{2}} \times sen\left(\frac{2°+178°}{2}\right)$$

$$\Rightarrow J = \frac{sen89°}{sen1°} \times sen90°;\ pero : sen90° = 1 \Rightarrow J = \frac{sen89°}{sen1°}$$

pero : $89° + 1° = 90° \Rightarrow sen89° = cos1°$

* Luego :

$$J=\frac{sen89^\circ}{sen1^\circ}=\frac{cos1^\circ}{sen1^\circ}\Rightarrow J=cot1^\circ$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 23 :

Reducir :

$A=cos2x+cos4x+cos6x+...+cos2nx$

Si: $(n+1)x=\pi$

A) 1 B) -1 C) –cotx D) - tanx E) cotx

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$A=cos2x+cos4x+cos6x+..+cos2nx\begin{cases}P=2x\\ \#T=n\\ r=2x\\ u=2nx\end{cases}$$

$$A=\frac{sen\frac{n\times 2x}{2}}{sen\frac{2x}{2}}\times cos\left(\frac{2x+2nx}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A=\frac{sennx}{senx}\times cos(n+1)x$$

note que :

$nx+x=(n+1)x=\Rightarrow sennx=senx$

Luego :

$$A=\frac{senx}{senx}\times cos\pi;\ \text{pero}: cos\pi=-1$$

$\Rightarrow A=1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 24 :

Simplificar :

$$B=cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}$$

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$B=cos\frac{\pi}{11}+cos\frac{3\pi}{11}+cos\frac{5\pi}{11}+cos\frac{7\pi}{11}+cos\frac{9\pi}{11}$$

$$\begin{cases}P=\frac{\pi}{11};n=5\\ r=\frac{2\pi}{11};u=\frac{9\pi}{11}\end{cases}$$

$$B=\frac{sen\frac{5}{2}\times\frac{2\pi}{11}}{sen\frac{2}{2}\times\frac{\pi}{11}}\times cos\left(\frac{\frac{\pi}{11}+\frac{9\pi}{11}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow B=\frac{sen\frac{5\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}\times cos\frac{5\pi}{11}$$

* Recuerde que : $2sen\phi cos\phi=sen2\phi$

multiplicamos $\times 2$:

$$2B=\frac{2sen\frac{5\pi}{11}cos\frac{5\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}\Rightarrow 2B=\frac{sen\frac{10\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}$$

* Note que :

$$\frac{10\pi}{11}+\frac{\pi}{11}=\pi\Rightarrow sen\frac{10\pi}{11}=sen\frac{\pi}{11}$$

* Luego :

$$2B=\frac{sen\frac{\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}\Rightarrow 2B=1\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 25 :

$$C=cos\frac{2\pi}{11}+cos\frac{4\pi}{11}+cos\frac{6\pi}{11}+cos\frac{8\pi}{11}+cos\frac{10\pi}{11}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$C=cos\frac{2\pi}{11}+cos\frac{4\pi}{11}+cos\frac{6\pi}{11}+cos\frac{8\pi}{11}+cos\frac{10\pi}{11}$$

$$\begin{cases}P=\frac{2\pi}{11};n=5\\ r=\frac{2\pi}{11};u=\frac{10\pi}{11}\end{cases}$$

$$C=\frac{sen\frac{5}{2}\frac{2\pi}{11}}{sen\frac{2}{2}\frac{\pi}{11}}cos\left[\frac{\frac{2\pi}{11}+\frac{10\pi}{11}}{2}\right]\Rightarrow C=\frac{sen\frac{\pi}{11}}{sen\frac{6\pi}{11}}cos\frac{6\pi}{11}$$

* **Note :**

$$\frac{5\pi}{11}+\frac{6\pi}{11}=\pi\Rightarrow cos\frac{6\pi}{11}=-cos\frac{5\pi}{11}$$

* Luego :

$$C=\frac{sen\frac{5\pi}{11}\left[-cos\frac{5\pi}{11}\right]}{sen\frac{\pi}{11}}=\frac{-sen\frac{5\pi}{11}-cos\frac{5\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}$$

* Multiplicamos $\times 2$:

$$2C=\frac{-2sen\frac{5\pi}{11}\times cos\frac{5\pi}{11}}{sen\frac{\pi}{11}}$$

* Pero : $2sen\phi\ cos\phi=sen2\phi$

$$2C=\frac{-sen\ \frac{10\pi}{11}}{sen\ \frac{\pi}{11}}$$

* Note que :

$$\frac{10\pi}{11}+\frac{\pi}{11}=\pi\Rightarrow sen\ \frac{10\pi}{11}=sen\ \frac{\pi}{11}\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

RPTA :"A"

PROPIEDAD :

$\forall\in Z^+;\ impar>1$

$$Cos\frac{\pi}{n}+Cos\frac{3\pi}{n}+Cos\frac{5\pi}{n}+...+Cos(n-2)\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}$$

$$Cos\frac{2\pi}{n}+Cos\frac{4\pi}{n}+Cos\frac{6\pi}{n}+...+Cos(n-1)\frac{\pi}{n}=-\frac{1}{2}$$

PROBLEMA 26 :

Calcular :

$$Q=cos^2\frac{\pi}{7}+cos^2\frac{2\pi}{7}+cos^2\frac{3\pi}{7}$$

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{2}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{7}{3}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$Q=cos^2\frac{\pi}{7}+cos^2\frac{2\pi}{7}+cos^2\frac{3\pi}{7}$$

* La idea es degradar este tipo de sumatorias, en este caso multiplicamos por 2 :

$$2Q=2\ cos^2\frac{\pi}{7}+2cos^2\frac{2\pi}{7}+2cos^2\frac{3\pi}{7}$$

* Recuerde que : $2cos^2\beta=1+cos\beta$

$$2Q=1+cos\frac{2\pi}{7}+1+cos\frac{4\pi}{7}+1\ cos\frac{6\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 2Q=3+\underbrace{cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{4\pi}{7}+cos\frac{6\pi}{7}}_{-\frac{1}{2}\ (propiedad)}$$

* Luego :

$$2Q=3-\frac{1}{2}\Rightarrow 2Q=\frac{5}{2}\Rightarrow Q=\frac{5}{4}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 27 :

Simplificar :

$$\frac{sen2x+sen3x+sen4x}{cos2x+cos3x+cos4x}$$

A) 1 B) tgx C) tg4x D) tg3x E) ctgx

RESOLUCIÓN :

* Llamemos "A" a la expresión :

$$A=\frac{sen2x+sen3x+sen4x}{cos2x+cos3x+cos4x}$$

* Transformando a producto :

$$\Rightarrow A=\frac{2sen3x\ cosx+sen3x}{2cos3x\ cosx+cos3x}$$

* Factorizando :

$$A=\frac{sen3x\ (2cosx+1)}{cos3x\ (2cosx+1)}=tan3x$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 28 :

Calcular :

$$B=\frac{1-4sen10^\circ\,sen70^\circ}{2sen10^\circ}$$

A) 0 B) 1 C) –1 D) ½

RESOLUCIÓN :

* De la expresión :

$$B=\frac{1-2\overline{(2sen70^\circ sen10^\circ)}}{2sen10^\circ}$$ Transformamos a diferencia

$$B=\frac{1-(cos60^\circ-cos80^\circ)}{2sen10^\circ}$$

$$B=\frac{1-(1/2-cos80^\circ)}{2sen10^\circ}$$

$$B=\frac{1-1+2cos80^\circ}{2sen10^\circ}=\frac{2cos80^\circ}{2sen10^\circ}=\frac{sen10^\circ}{sen10^\circ}=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 29 :

Calcular :

$$C=cos20^\circ-cos80^\circ+cos140^\circ$$

A) ½ B) – ½ C) 1 D)–1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* De la expresión "C"

$$C=\underbrace{cos140^\circ+cos20^\circ}_{Transformamos}-cos80^\circ$$

$$\Rightarrow C=2cos80^\circ cos60^\circ-cos80^\circ$$

$$\Rightarrow C=2\times cos80^\circ\left(\frac{1}{2}\right)-cos80^\circ=0$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 30 :

Simplificar :

$$D=\frac{(tan2x+tanx)(cos3x+cosx)}{sen3x}$$

A) 1 B) 2 C) ½ D) 4 E) ¼

RESOLUCIÓN :

* La expresión :

$$D=\frac{\left(\frac{sen2x}{cos2x}+\frac{senx}{cosx}\right)(cos3x+cosx)}{sen3x}$$

(Transformamos)

$$D=\frac{(sen2xcosx+senxcosx)(cos3x+cosx)}{cos2x\,cosx\,sen3x}$$

$$D=\frac{sen3x\times 2cos2xcosx=2}{cos2x\,cosx\,sen3x}$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 31 :

Hallar el máximo valor de :

$$E=sen(50^\circ+x)-sen(10^\circ-x)$$

A) 1/2 B) $\sqrt{5}$ C) 1 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3/4}$

RESOLUCIÓN :

* Transformando a producto

$$E=2sen(20^\circ+x)cos30^\circ$$

$$\Rightarrow E=\sqrt{3}\,sen(20^\circ+x)$$

* Para que "E" sea máximo :

$$sen(20^\circ+x)=1\Rightarrow E=\sqrt{3}(1)=\sqrt{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 32 :

Factorizar :

$$M=1-2cos72^\circ+4sen6^\circ$$

A)2sen6° cos12° B) 2sen6° cos²12° C)sen6° cos12° D)8sen6°cos²12°

RESOLUCIÓN :

* De la expresión "M"

$$M=1-2cos72^\circ+4sen6^\circ$$

$$M=2cos60^\circ-2cos72^\circ+4sen6^\circ$$

$$M=2\underbrace{(cos60^\circ-cos72^\circ)}_{(transformamos\ a\ producto)}+4sen6^\circ$$

$$M=4sen66^\circ sen6^\circ+4sen6^\circ$$

* Factorizamos :

$$M=4sen6^\circ(1+sen66^\circ)$$

$$\Rightarrow M=4sen6^\circ(1+cos24^\circ)$$

$$\Rightarrow M=4sen6^\circ 2cos^2 12^\circ=8\,sen6^\circ cos^2 12^\circ$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 33 :

Calcular : $\sqrt{3}\,cot20^\circ-4cos20^\circ$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Sea "E" la expresión :

$$E=\sqrt{3}\,cot20^\circ-4cos20^\circ$$

$$E=\frac{\widehat{\sqrt{3}cos20^\circ}-2\times\overline{2sen20^\circ cos20^\circ}}{sen20^\circ}$$

$$E=\frac{\widehat{2cos30^\circ}\,cos20^\circ-2sen40^\circ}{sen20^\circ}$$

$$E=\frac{cos50^\circ+cos10^\circ-2cos50^\circ}{sen20^\circ}$$

$$E=\frac{cos10^\circ-cos50^\circ}{sen20^\circ}=\frac{2sen30^\circ sen20^\circ}{sen20^\circ}$$

$$E=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 34 :

Reducir :

$$\frac{sen7x}{senx}-2cos2x-2cos4x-2cos6x$$

A)senx B)1 C)–1 D)0 E)cosx

RESOLUCIÓN :

* Llamemos "E" a la expresión :

$$E=\frac{sen7x}{senx}-2cos2x-2cos4x-2cos6x$$

* Multipliquemos a "E" por "senx"

$$\Rightarrow senx\,E=sen7x-2cos2xsenx-2cos4xsenx-2cos6xsenx$$

$$\Rightarrow senx\,E=sen7x-(sen3x-senx)-(sen5x-sen3x)(sen7x-sen5x)$$

$$\Rightarrow senx\,E=sen7x-sen3x+senx-sen5x+sen3x-sen7x+sen5x$$

* Reduciendo :

$$senx\,E=senx\Rightarrow E=1$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 36 :

Factorizar :

$$cot30^\circ+cot40^\circ+cot50^\circ+cot60^\circ$$

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}sen70^\circ$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}cos50^\circ$ C) $2\sqrt{3}cos20^\circ$

D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}sen70^\circ$ E) $\frac{10\sqrt{3}}{3}sen70^\circ$

RESOLUCIÓN :

* Le llamamos "E" a la expresión :

$$E=cot30^\circ+cot40^\circ+cot50^\circ+cot60^\circ$$

* Ordenando :

$$E=tan30^\circ+cot30^\circ+tan40^\circ+cot40^\circ$$

* Recordar : $tanx+cotx=2csc2x$

$$E=2csc\,60^\circ+2csc80^\circ$$

$$E=2(csc60^\circ+csc80^\circ)$$

$$E=\frac{2(sen80^\circ+sen60^\circ)}{sen60^\circ sen80^\circ}$$

(transformamos a producto)

$$E=\frac{4sen70^\circ cos10^\circ}{sen60^\circ cos10^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}sen70^\circ$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 37 :

En un triángulo *ABC*; transformar a producto

$$sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}-1$$

A) 2sen(A/2)sen(B/2)sen(C/2)
B) 4sen(A/2)sen(B/2)sen(C/2)
C) – 2sen(A/2)sen(b/2)sen(C/2)
D) – 4sen(A/2)sen(B/2)sen(C/2)
E) – 2sen(A/2)sen(B/2)cos(C/2)

RESOLUCIÓN :

* Llamemos "P" a la expresión :

$$P=sen^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{B}{2}+sen^2\frac{C}{2}-1$$

* Multiplicamos por 2 :

$$P=2sen^2\frac{A}{2}+2sen^2\frac{B}{2}+2sen^2\frac{C}{2}-2$$

* Recordar :

$$2sen^2x=1-cos2x$$

$$\Rightarrow P=1-(cosA+cosB+cosC)$$

* Transformamos a producto :

$$P=1-cosA-\left[2cos\left(\frac{B+C}{2}\right)cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]$$

$$(B+C=180°-A)$$

$$P=2sen^2\frac{A}{2}-2sen\frac{A}{2}cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$P=2sen^2\frac{A}{2}\left[sen\frac{A}{2}-cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]$$

* Además :

$$(A=180-(B+C))$$

$$P=2sen\frac{A}{2}\left[cos\left(\frac{B+C}{2}\right)-cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]$$

* Transformando a producto :

$$P=-4sen\frac{A}{2}sen\frac{B}{2}sen\frac{C}{2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 :

En qué tipo triángulo se cumple :

$$sen^2A+sen^2B+sen^2C=2$$

A) Acutángulo *B)Oblicuángulo*
C) Equilátero *D)Obtusángulo*
E) Rectángulo

RESOLUCIÓN :

* Recordar que todo triángulo ABC se cumple :

* $cos^2A+cos^2B+cos^2C$
$=1-2cosA\,cosB\,cosC$

* $sen^2A+sen^2B+sen^2C$
$=2+cosA\,cosB\,cosC$

* Usamos la última relación :

$$2=2+2cosAcosBcosC$$

$$\Rightarrow cosAcosBcosC=0$$

* De esta igualdad, se deduce que algunos de los tres factores es cero. Esto ocurre si al menos uno de los ángulos mide $90°$

RPTA : "E"

PROBLEMA 39 :

Transformar la expresión en producto :

$$E=senA+sen2A+sen3A$$

A) $4sen\frac{3A}{2}cos\frac{A}{2}cosA$ B) $senAcos\frac{3A}{2}$

C) $2cos\frac{3A}{2}senAsen\frac{A}{2}$ D) $4cos\frac{3A}{2}senAsen\frac{A}{2}$

E) $3cos\frac{3A}{2}cos2AcosA$

RESOLUCIÓN :

$$E=sen3A+senA+sen2A$$

$$E=2sen\left(\frac{3A+A}{2}\right)cos\left(\frac{3A-A}{2}\right)+sen2A$$

$$E=2sen2AcosA+2senAcosA$$

$$E=2cosA\,[\underbrace{sen2A+senA}_{2sen\left(\frac{2A+A}{2}\right)cos\left(\frac{2A-A}{2}\right)}]$$

$$\Rightarrow E=4cosAsen\frac{3A}{2}cos\frac{A}{2}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 40 :

Si : $sen\alpha+sen\beta=a$; $(a^2+b^2\neq 0)$
$cos\alpha+cos\beta=b$

Calcular $cos(\alpha+\beta)$

A) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ C) $\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}$

D) $\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$ E) $\frac{b^2-a^2}{2ab}$

RESOLUCIÓN :

Sea : $\alpha+\beta=x$

$$sen\alpha+sen\beta=a$$

$$2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=a$$

$$\Rightarrow 2sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=a\,.........(I)$$

$$cos\,\alpha+cos\,\beta=b$$

$$\Rightarrow 2cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=b$$

$$\Rightarrow 2cos\frac{x}{2}cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=b\,.........(II)$$

* De $(1)\div(2)$, se obtiene : $tg\frac{x}{2}=\frac{a}{b}$

* Nos piden calcular :

$$cos(\alpha+\beta)=cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 41 :

Calcular el valor de la siguiente expresión :

$$\frac{1}{2}Csec\,80°-2sen\,70°$$

A) $tg10°$ B) $ctg10°$ C) -1

D) 1 E) $\frac{1}{2}ctg10°$

RESOLUCIÓN :

* Sea :

$$F=\frac{1}{2}\;csc80°-2sen\,70°$$

$$\Rightarrow F=\frac{1}{2}\;sen10°-2sen\,70°$$

$$\Rightarrow F=\frac{1}{2sen\,10°}-2sen\,70°$$

$$\Rightarrow F=\frac{1-4sen70°\,sen10°}{2sen10°}$$

$$\Rightarrow F=\frac{1-2\,(2sen70°sen10°)}{2sen10°}$$

$$\Rightarrow F=\frac{1-2(cos60°-cos80°)}{2sen10°}$$

$$\Rightarrow F=\frac{1-2cos60°+2cos80°}{2sen10°}$$

$$\Rightarrow F=\frac{2cos80°}{2sen10°}=\frac{sen10°}{sen10°}\Rightarrow F=1$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 42 :

Si : $2sen5x=3sen3x;$

Hallar : $M=25ctg^24x-ctg^2x$

A) -2 B) -1 C) 2 D) 1 E) 0

RESOLUCIÓN :

* Dato : $\frac{sen5x}{sen3x}=\frac{3}{2}$

*Aplicando propiedades de proporciones :

$$\frac{sen5x+sen3x}{sen5x-sen3x}=\frac{3+2}{3-2}$$

$$\Rightarrow\frac{2sen4x\,cosx}{2cos4x\,senx}=\frac{5}{1}$$

$$tg4x\,ctgx=5\Rightarrow tg4x=5tgx$$

$$\Rightarrow ctg4x=\frac{1}{5}ctgx$$

$$5ctg4x=ctgx\Rightarrow 25ctg^24x-ctg^2x=0$$

RPTA : "E"

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

TRANSFORMACIONES TRIGONOMETRICAS DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

01 Reducir: $A = \dfrac{Cos80° + Cos40°}{Cos20°}$

A) 1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,5

02 Reducir: $K = \dfrac{Sen75° + Sen15°}{Sen75° - Sen15°}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{7}$ E) 3

03 Calcular: $M = \dfrac{Cos40° + Cos20°}{Sen40° + Sen20°}$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{3}/3$ D) 1/2 E) 1

04 Reducir: $Cos(300° + \alpha) + Cos(300° - \alpha)$

A) $\sqrt{3}Cos\alpha$ B) -1 C) $Cos\alpha$ D) 1 E) $-Cos\alpha$

05 Calcular: $W = \dfrac{Cos40° - Sen70°}{2Cos85° \times Cos5°}$

A) 1 B) -1 C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) $-\sqrt{3}$

06 Calcular "*k*" en: $Sen13° + Cos13° = kSen58°$

A) 0,5 B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

07 Calcular el valor de:

$$E = Cos40° + cos80° + Cos160°$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

08 Hallar $Tg2x$ en términos de a y b:

$$Cos5x - Cos9x = b$$
$$Sen9x + Sen5x = a$$

A) $-\dfrac{a}{b}$ B) $\dfrac{b}{a}$ C) $-\dfrac{b}{a}$ D) $\dfrac{a}{b}$ E) 1

09 Calcular "*x*" si:

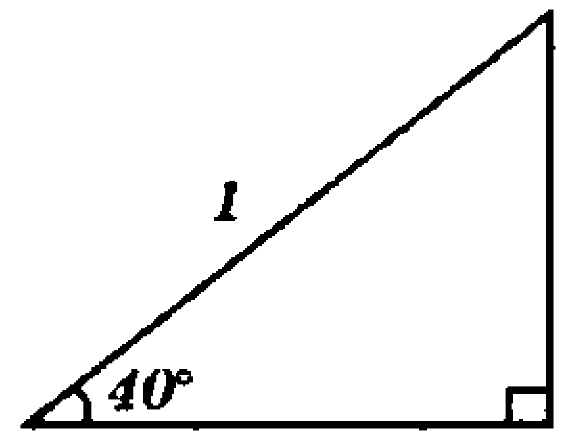
$$Sen20° + xSen80° + Sen40° = 0$$

A) 2 B) 1/2 C) $-1/2$ D) -2 E) -1

10 Simplificar: $R = \dfrac{Sen^2 5x - Sen^3 3x}{Sen8x}$

A) $Cos2x$ B) $Sen2x$ C) $2Senx$ D) $2Cosx$ E) $4Sen2x$

11 Si la suma de catetos es: $\sqrt{2}Cosx$ con $x \in IC$, calcular "*x*".



A) 85° B) 25° C) 5° D) 40° E) 20°

12 Calcular el valor de "*x*". (*x* agudo)

$$Tgx = \frac{Cos20° - Sen50°}{Cos80°}$$

A) 30° B) 60° C) 45° D) 37° E) 53°

13 Simplificar: $M = \dfrac{Senx - 2Sen3x + Sen5x}{Cos5x - Cosx}$

A) $Ctgx$ B) $-Tgx$ C) $-Ctgx$ D) 1 E) Tgx

14 Simplificar: $A = 1 - \left(\dfrac{Sen3x + Senx}{2Sen2x}\right)^2$

A) $Sen^2 x$ B) $Sen^2 2x$ C) $Sen^2 3x$
D) $Sen^2 4x$ E) $Sen^2 5x$

15 Reducir: $A = \dfrac{Senx + Sen3x + Sen5x}{Cosx + Cos3x + Cos5x}$

A) $Tg4x$ B) $Tg3x$ C) Tgx D) $Tg5x$ E) $Tg2x$

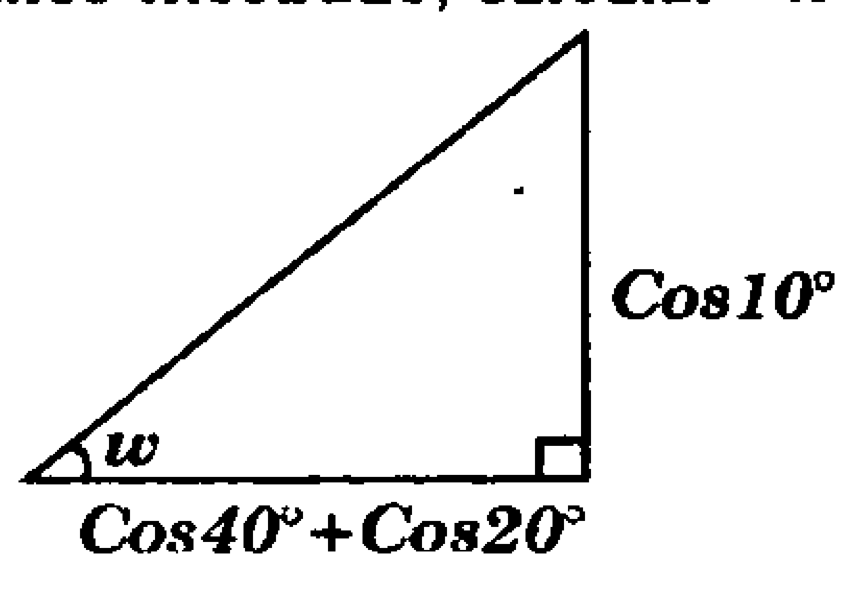
16 De la igualdad:

$$\frac{Cos6x + Cos4x + Cos2x + 1}{Cos3xCosx} = mCosnx$$

indicar $m + n$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

17 Del gráfico mostrado, calcular "*w*".



A) 20° B) 26°30' C) 30° D) 37° E) 42°

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

TRANSFORMACIONES TRIGONOMETRICAS DE PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA

01 Calcular: $\dfrac{2Sen40°Sen10° + Cos50°}{Tg30°}$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{3}{2}$ C) $\dfrac{5}{2}$ D) $\dfrac{7}{2}$ E) $\dfrac{9}{2}$

02 Indicar verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) $2SenxCos2x = Sen3x - Senx$

( ) $2Cos3xCosx = Cos4x + Cos2x$

( ) $2Sen3xSen2x = Cos5x - Cosx$

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFV E) FVV

03 Reducir:

$$K = 2Cos50°Sen10° + 2Cos40°Cos10°$$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}/2$ D) $\sqrt{3}$ E) 1/2

04 Calcular: $\dfrac{2Cos61°Cos19°}{Sen\,10° + Cos42°}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

05 Simplificar: $A = 2Sen7xCos2x - Sen5x$

para $x = \dfrac{\pi}{18}$

A) −1 B) 1 C) 1/2 D) −1/2 E) 0

06 Simplificar: $E = \left(2Sen\,10°Cos40° + \dfrac{1}{2}\right)2Csc50°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

07 Simplificar: $\dfrac{Sen50° - 2Cos40°Sen10°}{Cos80° + 2Sen10°Sen70°}$

A) 1/2 B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

08 Reduzca la expresión:

$$M = 4Sen5°Cos5°(Cos^2 10° - Sen^2 10°) + Sen10°$$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{5}$ C) $\dfrac{1}{6}$ D) $\dfrac{1}{3}$ E) $\dfrac{1}{2}$

09 Calcular: $M = 8Sen\,10°Cos10°Cos^2 20° - Sen20°$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $-\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10 Calcular k, si:

$$2Sen3\alpha Cos6\alpha + Sen3\alpha \doteq Senk\alpha$$

A) 5 B) 9 C) 8 D) 7 E) 6

11 Calcular:

$$E = 2[2Sen39°Cos\theta° - 2Cos43°30'Cos1°30']$$

A) $\sqrt{2} + 1$ B) $1 - \sqrt{2}$ C) $2 - \sqrt{2}$

D) $2 + \sqrt{2}$ E) $\sqrt{2} - 1$

12 Si $10x = \pi$, calcular: $Cos3xSen2x - Cos4xSenx$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{6}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{1}{16}$ E) $\dfrac{1}{8}$

13 Simplificar:

$$R = Sen3xSen7x + Cos2xCos8x$$

A) $-Sen5xSenx$ B) $Sen5xSenx$ C) $-Cos5xCosx$

D) $Cos5xCosx$ E) $SenxCosx$

14 Transformar a monomio:

$$Sen3\theta Cos\theta + Sen2\theta Cos4\theta$$

A) $Sen5\theta Sen\theta$ B) $Cos5\theta Sen\theta$ C) $Sen5\theta Cos\theta$

D) $Sen5\theta Sen3\theta$ E) $Cos5\theta Cos\theta$

15 Calcular:

$$M = Sen85° - \frac{Sen40°Sen25°}{Cos20°}$$

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

16 Si se cumple: $Cos10°Sen140° = a$

calcular : $4a - 2Sen\,130°$

A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) a

17 Reducir:

$$E = (Cos3\alpha Cos2\alpha + Sen4\alpha Sen\alpha)Sec\alpha$$

A) $Cos\alpha$ B) $Cos3\alpha$ C) $Sen2\alpha$

D) $Sen\alpha$ E) $Cos2\alpha$

18 Simplificar:

$$N = \frac{Sen5\theta Cos\theta - Sen4\theta Cos2\theta}{Cos4\theta Cos\theta - Cos5\theta Cos2\theta}$$

A) $\dfrac{1}{2}Sen3\theta$ B) $\dfrac{1}{2}Sec3\theta$ C) $Csc3\theta$

D) $Sec\theta$ E) $\dfrac{1}{2}Csc3\theta$

19 Reduzca la expresión:

$$E = Sen7xSen2x - Sen6xSen3x + Cos6xCos3x$$

A) $Sen2x$ B) $Cos7x$ C) $Cos7xCos2x$

D) $Sen7xCos2x$ E) $Cos2x$

20 Reducir: $E = \sqrt{Cos4xCos2x + Sen^2 3x}$

A) $Cosx$ B) $Cos5x$ C) $Cos4x$ D) $Cos3x$ E) $Cos2x$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)B	3)A	4)C	5)B	6)C	7)A	8)B	9)E	10)B
11)C	12)C	13)E	14)A	15)B	16)D	17)C	18)B	19)C	20)B

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)B	2)B	3)D	4)A	5)B	6)B	7)E	8)E	9)A	10)B
11)B	12)A	13)D	14)C	15)D	16)B	17)E	18)E	19)C	20)A

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

CAPITULO 127

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo el lector estará en la capacidad de:

* *Analizar y determinar el campo de definición, campo de variación y representación cartesiana de una función.*
* *Reconocer las funciones seno y coseno.*
* *Reconocer sus características.*
* *Analizar sus características.*
* *Realizar las gráficas de las funciones trigonométricas (F.T.) básicas del seno y del coseno.*
* *Identificar las gráficas de los F.T. básicas del seno y el coseno*
* *Identificar el dominio y el rango de las F.T. básicas del seno y del coseno*
* *Obtener el máximo y el mínimo valor de las F.T. básicas del seno y del coseno.*
* *Aplicar el estudio de las funciones trigonométricas a situaciones de la vida cotidiana.*

INTRODUCCIÓN :

Los fenómenos naturales como el sonido, la luz, los movimientos telúricos, en fin, los fenómenos ondulatorios; así como los latidos del corazón, el péndulo, etc. son muy bien caracterizadas matemáticamente mediante ciertas funciones trigonométricas.

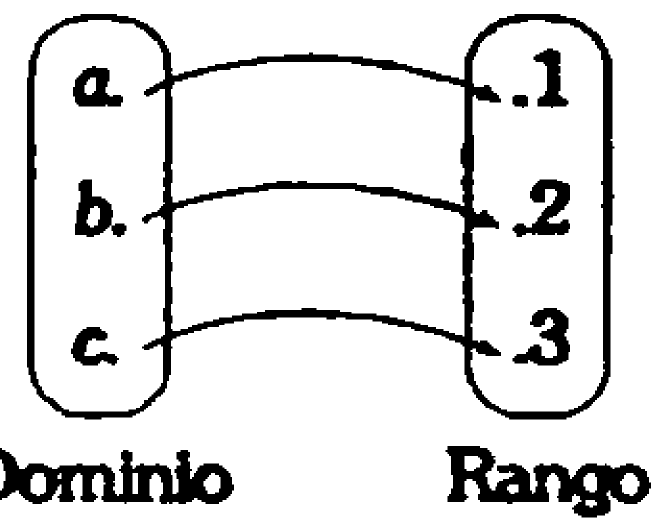
El hecho de que una función se pueda representar gráficamente, permite estudiar sus características y el comportamiento a lo largo de la variable independiente.

Antes de pasar a definir una función, daremos algunos conceptos básicos para la mejor comprensión del tema.

PRODUCTO CARTESIANO

Sean dos conjuntos no vacíos *A* y *B*, entonces su producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto de pares ordenadas *(a; b)* donde $a \in A$ y $b \in B$.

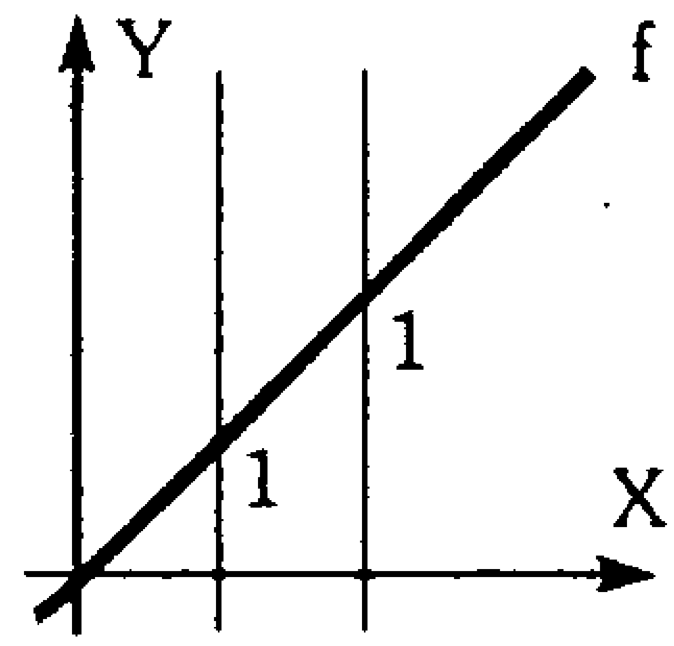
$$A \times B = \{(a;b) / a \in A \wedge b \in B\}$$



Dominio = $\{a, b, c\}$

Rango = $\{1, 2, 3\}$

Si una recta vertical perpendicular al eje *X* corta al gráfico de una función en un sólo punto, se dirá que es una función.



f; es una función

EJEMPLO:

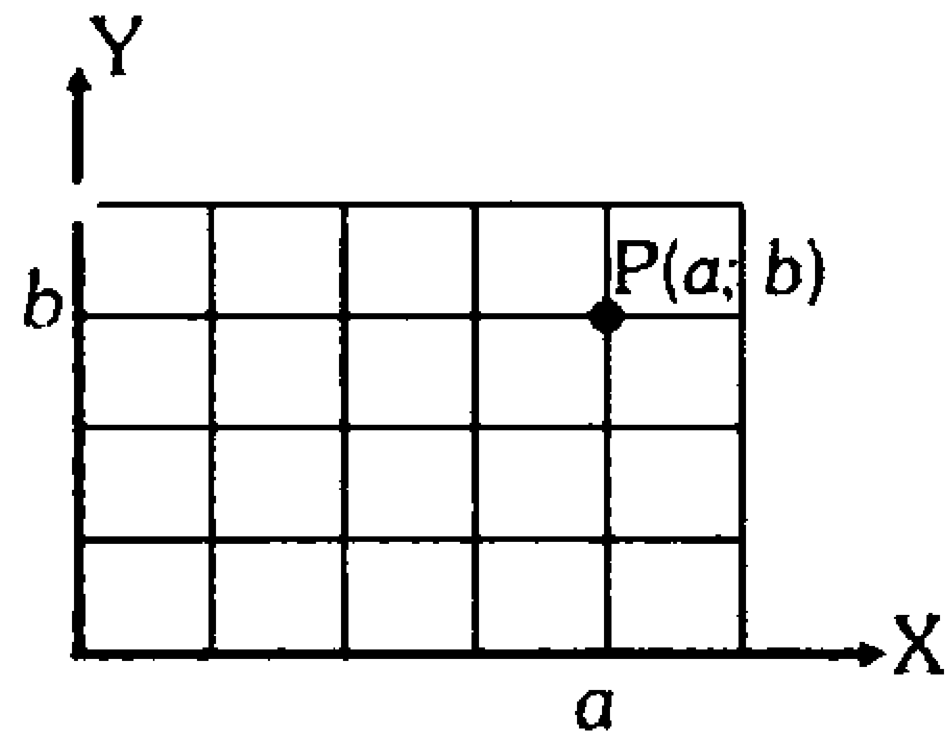
Si: $A = \{3; 5\}$ y $B = \{2; 4; 6\}$

entonces:

$A \times B = \{(3; 2), (3; 4), (3; 6), (5; 2), (5; 4), (5; 6)\}$

RELACIÓN BINARIA

Es un subconjunto del producto $A \times B$, el cual se caracteriza por un regla de correspondencia la cual rige la formación de cada por ordenado en la relación.



El par ordenado *(a; b)* define la posición del punto *P* en el plano cartesiano.

* $(a; b) = (c; d) \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

* $(a; b) = (b; a) \Leftrightarrow a = b$

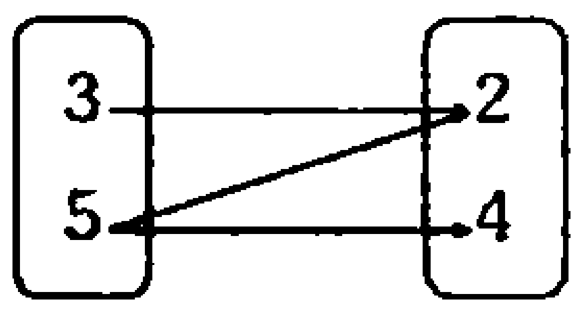
EJEMPLO:

Del ejemplo anterior, escogemos aquellos elementos de $A_x B$ donde la primera componente sea mayor que la segunda. Matemáticamente esta relación se define:

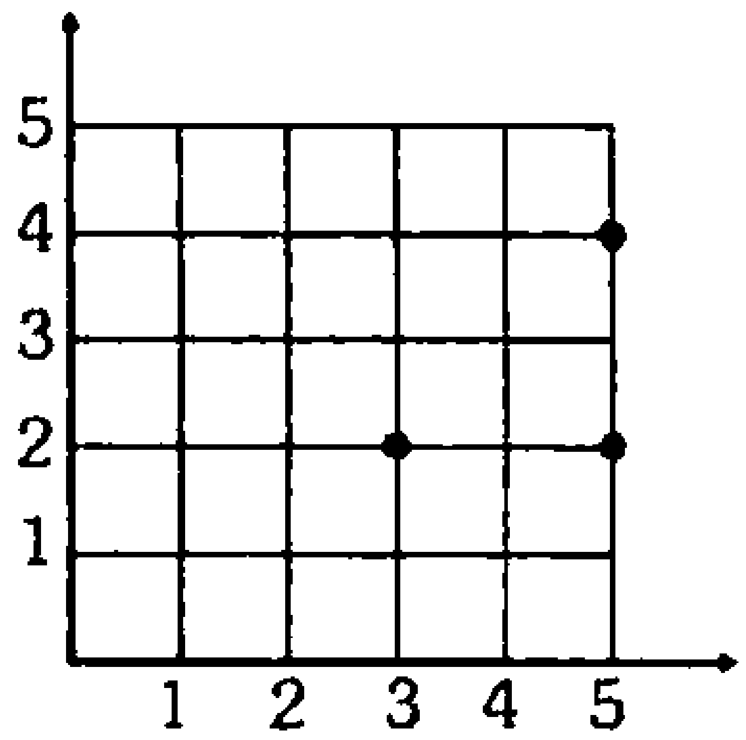
$R = \{(x;\ y) \in A \times B / x > y\} \Rightarrow R = \{(3;\ 2),(5;2),(5;4)\}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA:

Diagrama de flechas



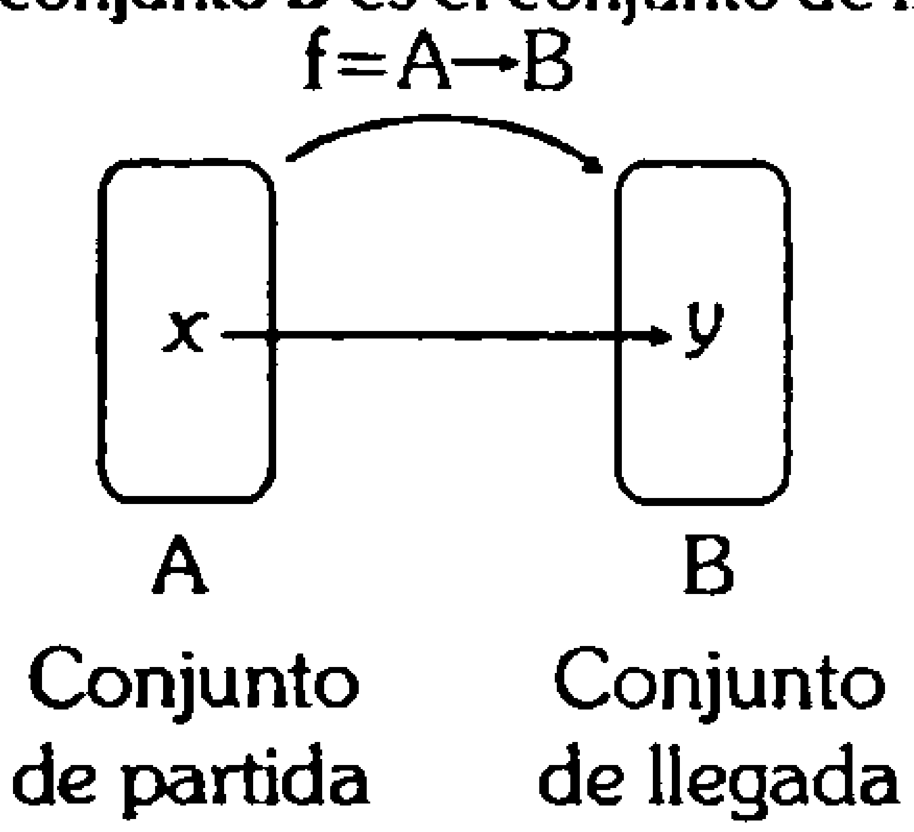
Sistema Cartesiano



FUNCIÓN

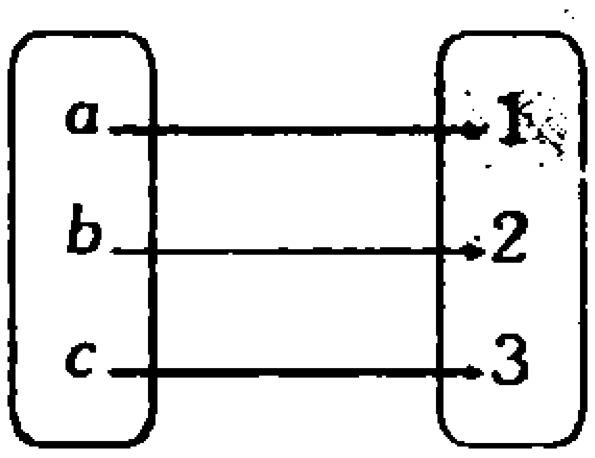
Sean A y B dos conjuntos no vacíos, se llama función de A en B a la relación donde cada uno de los elementos de A le corresponde un único elemento de B.

Al conjunto A se le conoce como conjunto de partida y al conjunto B es el conjunto de llegada.

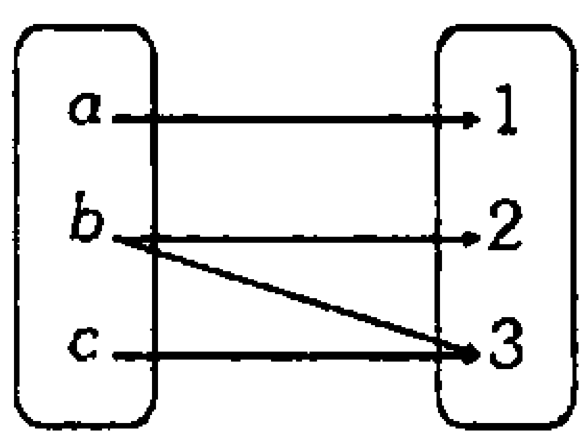


* a x le corresponde y" vía f
* también $\boxed{y = f(x)}$

Esta relación permite afirmar que y depende de x, es decir que y está en función de x.



Es una función



No es una función

Una función también se puede definir como todo conjunto no vacío de pares ordenados, con la condición de que no hay dos pares diferentes con una misma primera componente.

EJEMPLO:

Dado: $f = \{(3;\ 2),\ (2;\ 1),\ (1;\ 0)\}$

Por definición, sabemos que ninguna de las primeras componentes de los pares ordenados se puede repetir, entonces se afirma que f es una función

Dado: $g = \{a;\ 1),(b;2),(b;\ 3)\}$

Notamos que hay dos pares ordenados que tienen las primeras componentes iguales entonces, g no es función.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función.

$$\boxed{Df = \{x / (x;y) \in f\}}$$

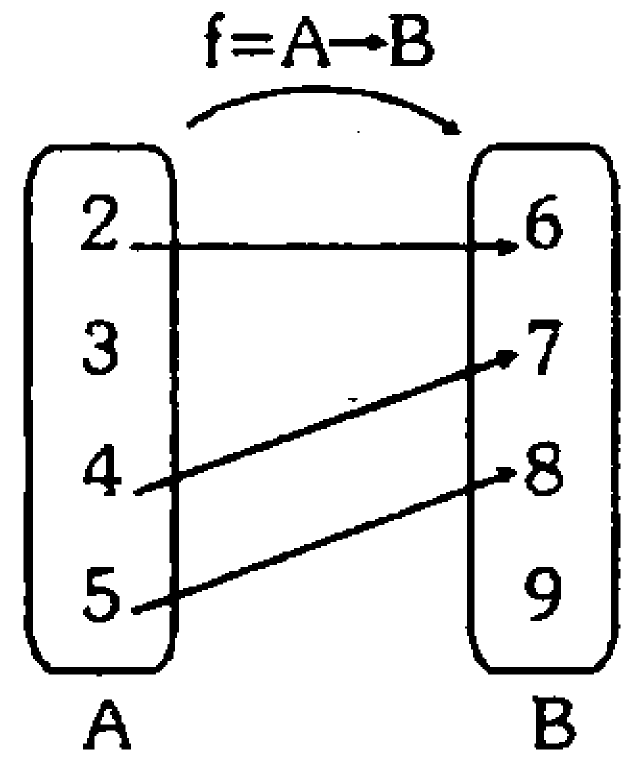
EJEMPLOS:

i) Dar el dominio de la función f

$f = \{3,\ 2),(4;\ 3),(5;\ 6),(6;\ 8)\}$

Por definición tenemos: $Df = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

ii) Dar el dominio de la función de acuerdo al diagrama.



Del diagrama se tiene: $Df = \{2,\ 4,\ 5\}$

RANGO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función.

$$\boxed{Rf = \{y / (x;y) \in f\}}$$

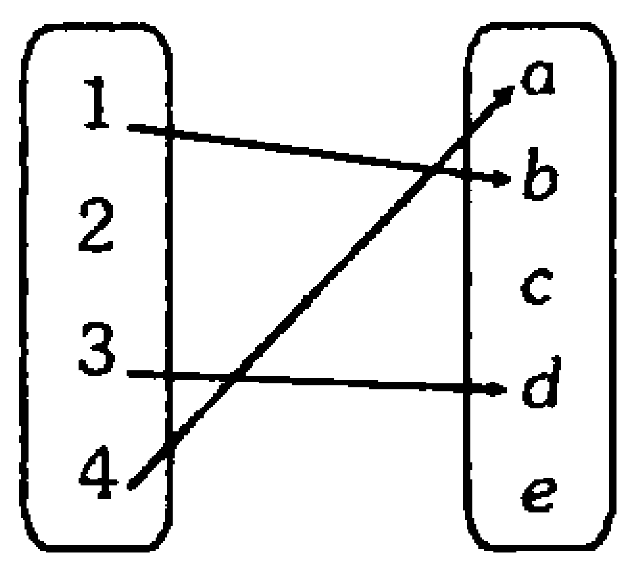
EJEMPLOS:

i) Dar el rango de la función f

$f = \{(1;\ 2),(2;\ 4),\ (3;\ 5),(4;\ 8)\}$

Por definición tenemos: $Rf = \{2\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 8\}$

ii) Dar el rango de la función de acuerdo al diagrama



Del diagrama se tiene: $Rf=\{a, b, d\}$

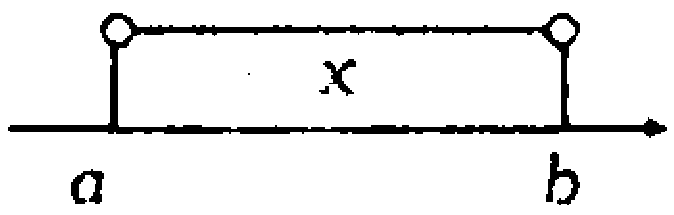
INTERVALOS

Es un subconjunto del conjunto de los números reales, definiéndose como aquel conjunto de infinitos elementos que representan a todos los números reales comprendidos entre dos extremos.

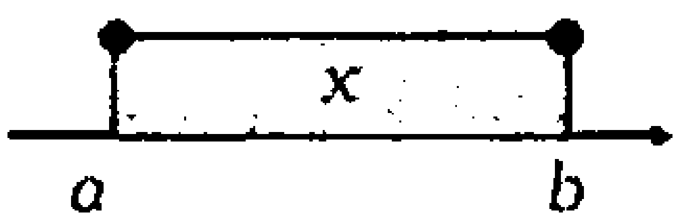
INTERVALO ACOTADO:

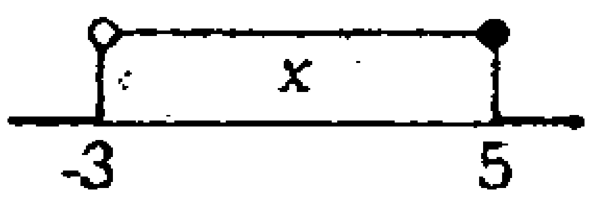
Es aquel cuyos extremos son finitos, dados dos números reales a y b tales que $a<b$, se define los conjuntos.

a) Abierto : $\langle a;b\rangle=\{x\in\mathbb{R}/a<x<b\}$

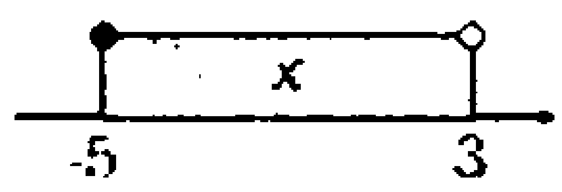


b) Cerrado : $[a;b]=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}$



* 

$-3<x\leq 5\Rightarrow x\in\langle -3;5]$

* 

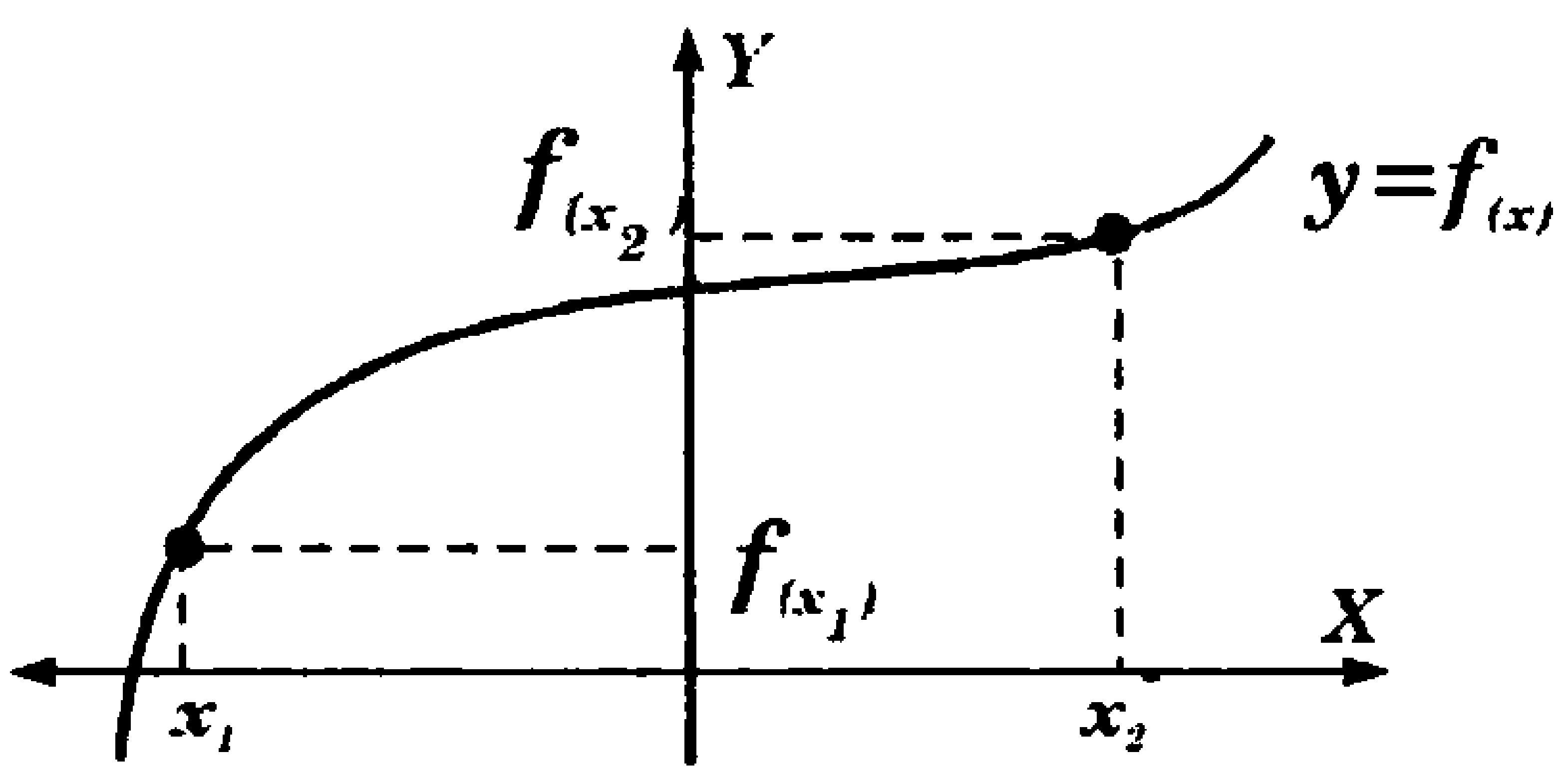
$-5\leq x<3\Rightarrow x\in[-5;3\rangle$

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

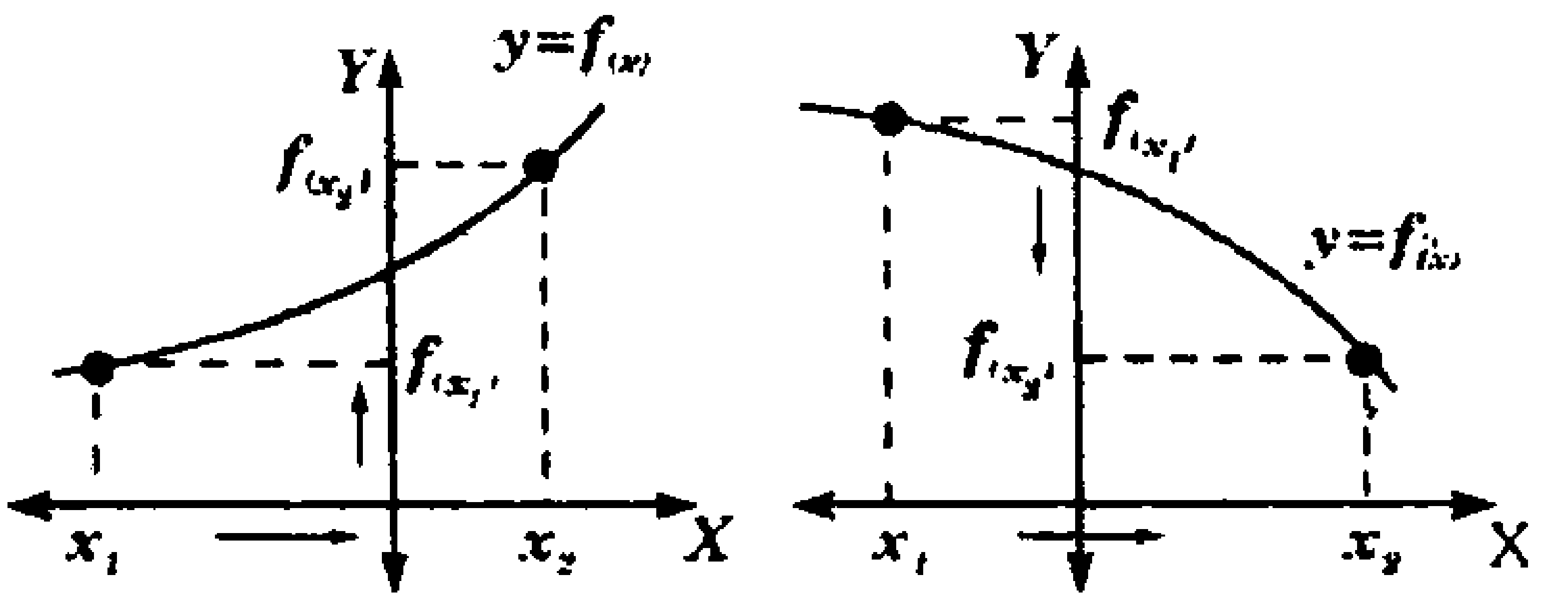
Dada la función: $y=f(x)$

x: variable independiente (dominio)

y: variable dependiente (rango)



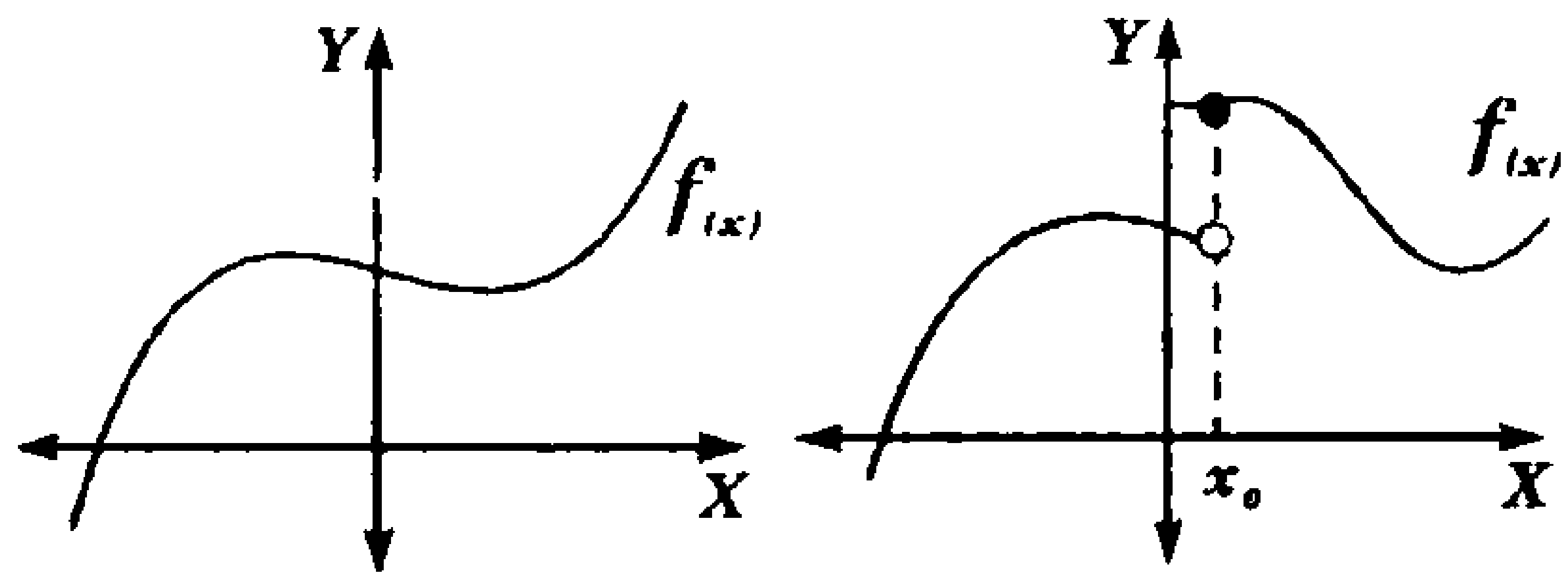
FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE



Una función $f(x)$ es estrictamente creciente en un intervalo si para cualquier par de números a , b de dicho intervalo tales que a sea menor b se verifica que $f(a)$ es menor que $f(b)$

Una función $f(x)$ es **estrictamente decreciente** en un intervalo si para cualquier par de números a , b de dicho intervalo tales que a sea menor b se verifica que $f(a)$ es mayor que $f(b)$

FUNCIÓN CONTINUA Y DISCONTINUA



Una **función es continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo, es decir, si no presenta puntos de discontinuidad.

Una **función es discontinua** si tiene puntos en los cuales una pequeña variación de la variable independiente produce un salto en los valores de la variable dependiente. A estos puntos se les denomina puntos de discontinuidad.

FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Se denomina *FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA* al conjunto de pares ordenados $(x;y)$, tal que la primera componente "x" es la medida de un ángulo cualquiera en radianes y la segunda componente "y" es la razón trigonométrica de "x".

Es decir : $F.T.=\{(x;y)/y=R.T.(x)\}$

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$$F.T.=\{(x;y)/y=R.T.(x), x\in Dom(F.T.)\}$$

Por ejemplo, la *F.T. Seno* sería:

$$F.T.(seno)=\{(x;y)/y=senx\ ;\ x\in Dom(sen)\}$$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION TRIGONOMÉTRICA

Si tenemos una función trigonométrica cualquiera :

$$y=R.T.(x)$$

* Se llama *DOMINIO(Dom)* de la función trigonométrica al conjunto de valores que toma la variable "x" :

$$Dom=\{x/y=R.T.(x)\}$$

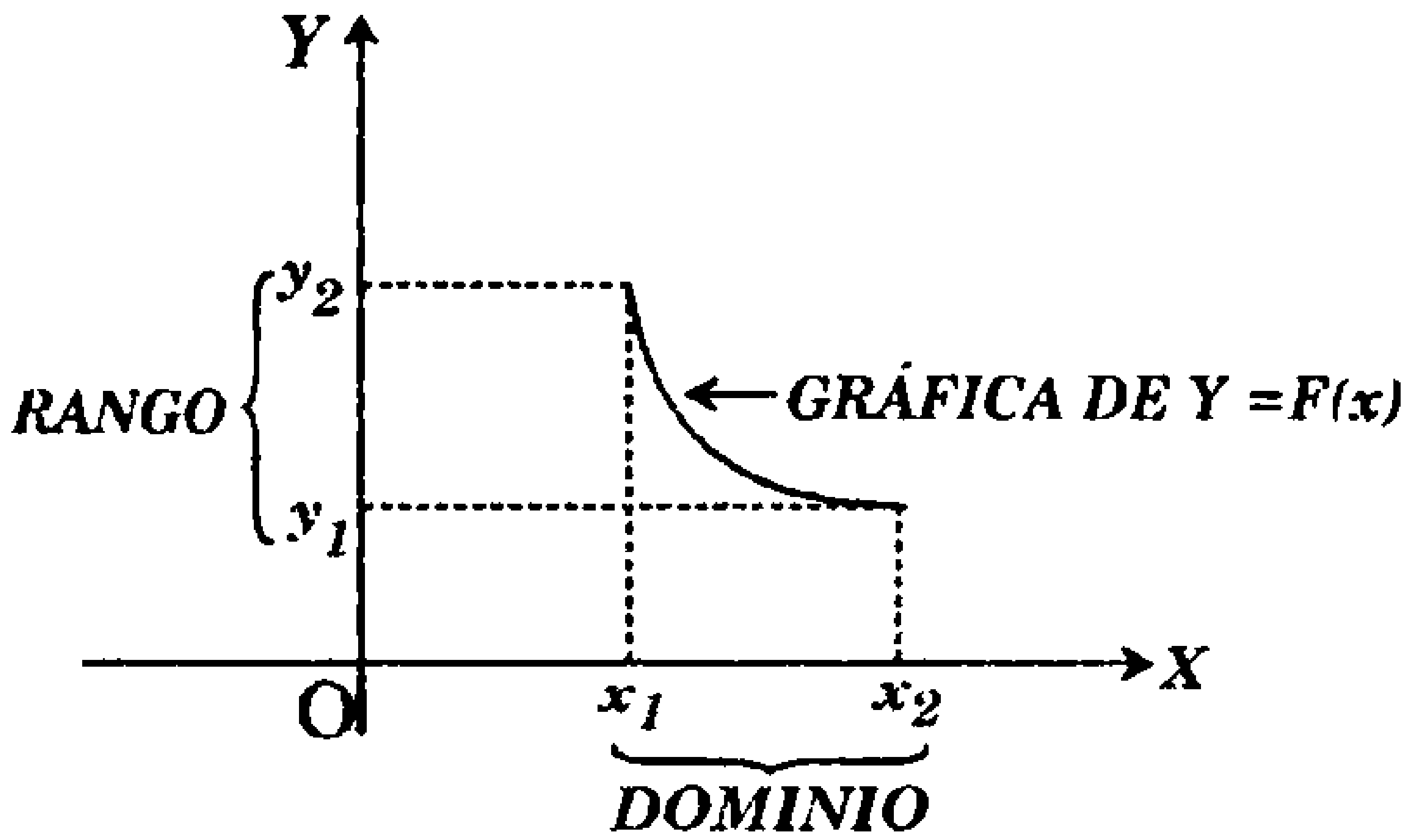
*Se llama *RANGO(Ran)* de la función trigonométrica

al conjunto de valores que toma la variable "y".

$$Ran = \{\, y \,/ y = R.T.(x)\}$$

¡RECUERDA!

La gráfica corresponde a una función $y = F(x)$ donde su DOMINIO es la proyección de la gráfica al eje X y el RANGO es la proyección de la gráfica al eje Y:



$DOM(F) = [x_1 ; x_2]$	$RAN(F) = [\, y_1 ; y_2]$

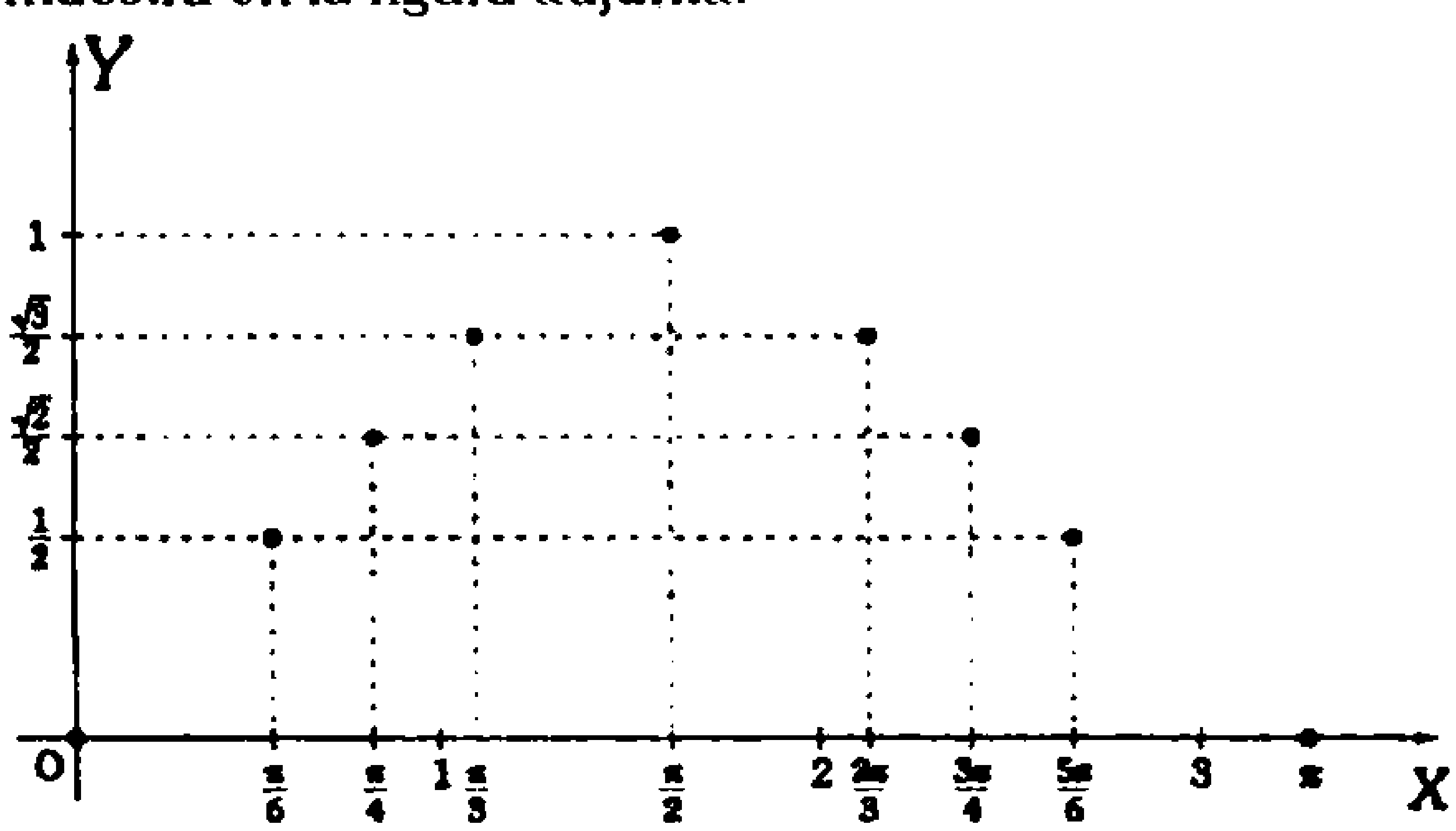
FUNCIÓN SENO

El dominio de la función y =Sen$x$ son todos los números reales. En la siguiente tabla listamos algunos pares ordenados de dicha función. Nótese que los valores del dominio (x) están expresados en radianes y son ángulos especiales del primer y segundo cuadrante, de tal forma que los valores correspondientes de la imagen (y) son fáciles de calcular.

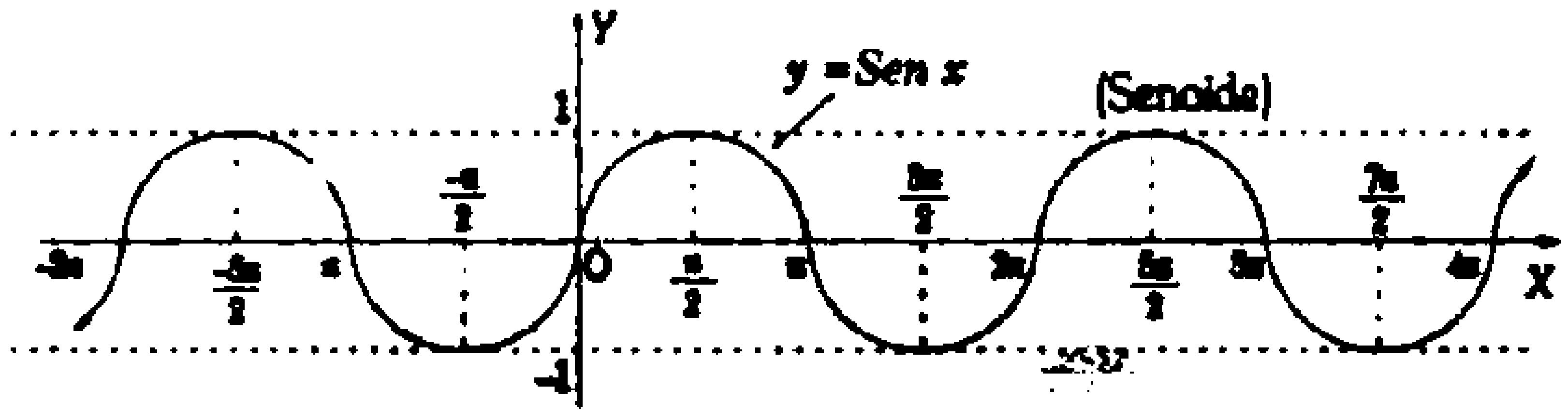
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = Senx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Luego marcamos en el plano cartesiano las parejas ordenadas obtenidas en la tabla anterior, tal como se muestra en la figura adjunta.

Luego marcamos en el plano cartesiano las parejas ordenadas obtenidas en la tabla anterior, tal como se muestra en la figura adjunta.



Al marcar otros pares ordenados (utilizando una calculadora científica) y unirlos mediante una curva suave o lisa se obtendrá la gráfica de la función y =Sen$x$, llamada *senoide*.



De la gráfica de la función $y = Senx$ tenemos:

$Dom\ f = \mathbb{R}$, es decir, $x \in \mathbb{R}$

$Ran\ f = [-1; 1]$, es decir, $-1 \leq Senx \leq 1$.

- Es una función impar, ya que $Sen(-x) = -Senx$ (la gráfica presenta simetría con respecto al origen de coordenadas).

- Es creciente $\forall\, x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$

y decreciente $\forall\, x \in \left\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;;\; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$; donde $k \in \mathbb{Z}$.

- Es periodo 2π es decir $Sen(x+2\pi) = Senx$
- Es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$, o sea es continua en su dominio.

También es de uso frecuente la definición siguiente para la función seno:

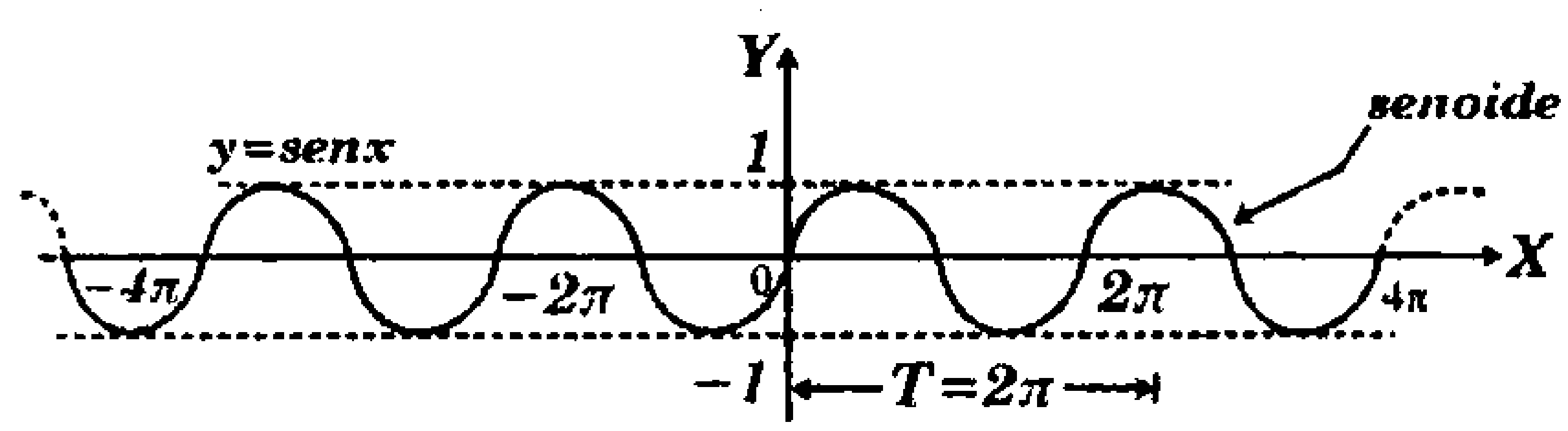
$$f = \{(x; y) \,/\, y = Senx \;;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

DEFINICIÓN:

Si una función f cumple la propiedad $f(x + T) = f(x)$ para todo x de su dominio, siendo T una constante real diferente de cero, entonces f es periódica. El menor número positivo T se denomina *período* (período principal o período mínimo) de la función f.

$$Sen = \{(x\,;y) \,/\, y = Senx\}$$

GRÁFICO DE LA FUNCIÓN SENO:



* *EL DOMINIO* de la función *Seno* es la proyección de su gráfica al eje X por lo tanto :

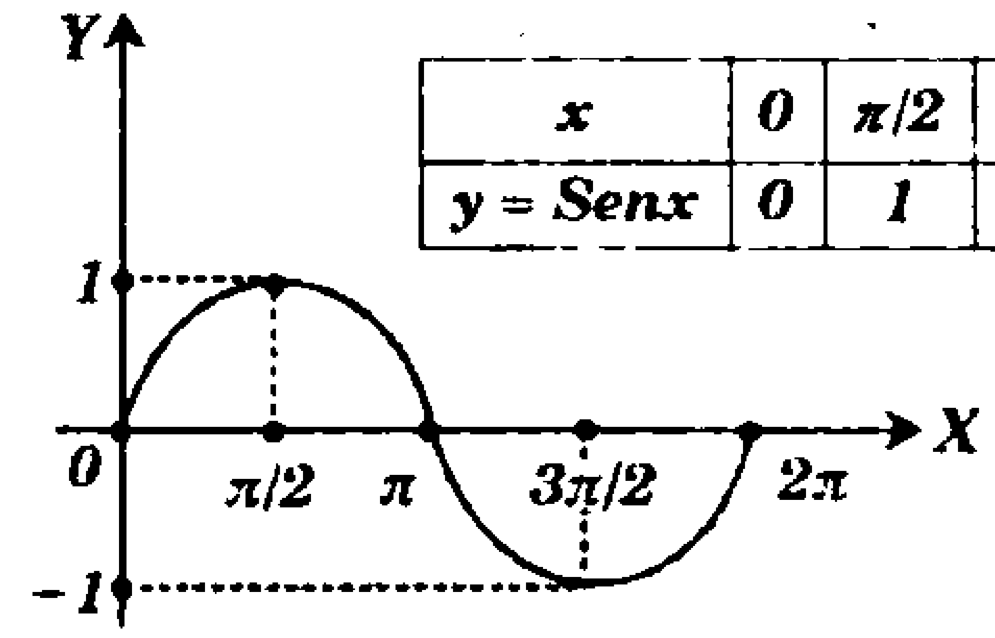
$Dom(Senx) = \langle -\infty; +\infty \rangle$ ó $\mathbb{R}$

**EL RANGO* de la función seno es la proyección de su gráfica al eje Y por lo tanto :

$$Ran(Sen)=[-1;1]$$

Una parte de la gráfica de la función seno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función Seno es *PERIÓDICA* de periodo 2π. Por lo tanto todo análisis y calculo de dominio y rango se hace en el siguiente gráfico :

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = Senx$	0	1	0	-1	0



El periodo de una función se representa por la letra "*T*". entonces el periodo de la función seno se denota así : $T(Senx)=2\pi$

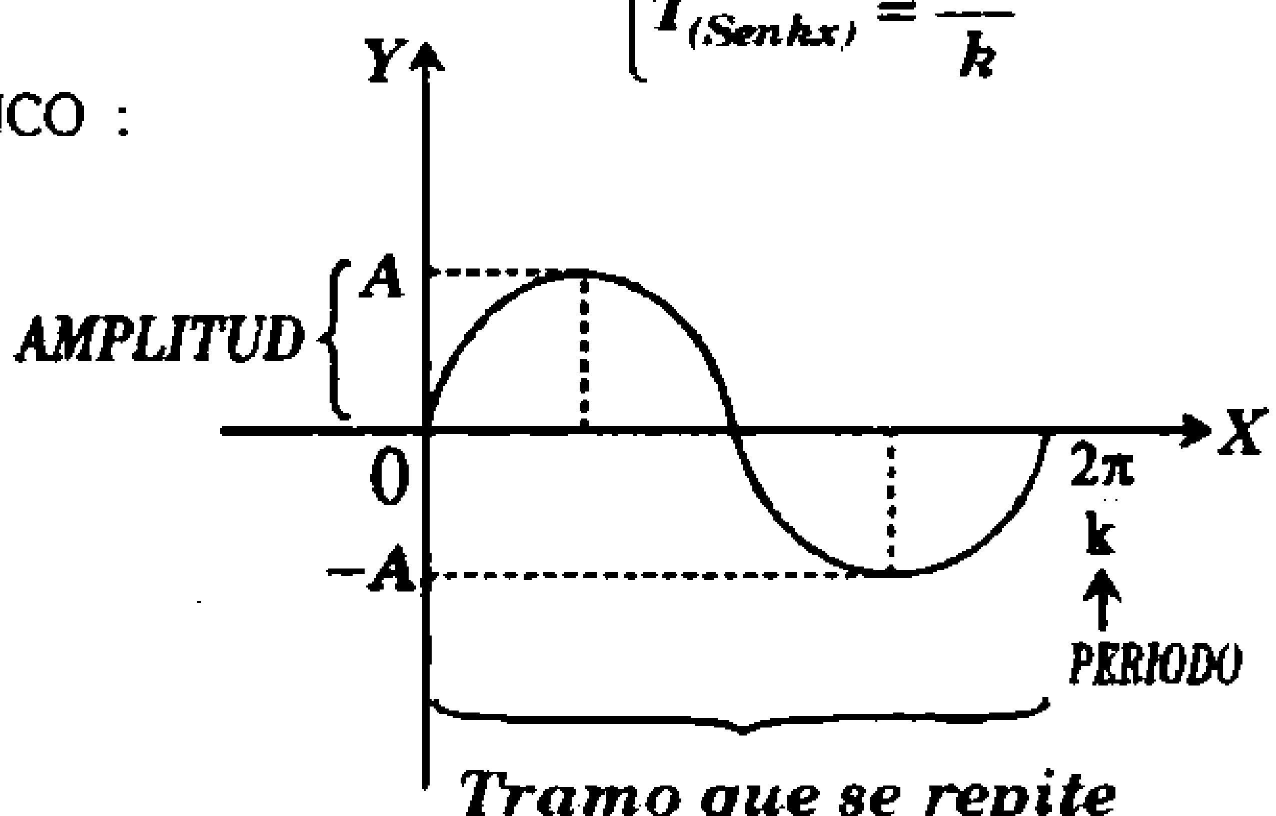
PROPIEDAD :

Si tenemos la función trigonométrica : $y=\pm Asenk\,x$, entonces el número "*A*" se le va a llamar *AMPLITUD* y el periodo de esta función es $2\pi/k$.

* Es decir :

$$y=\pm Asenkx \Rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = A \\ T_{(Senkx)}=\dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

GRÁFICO :



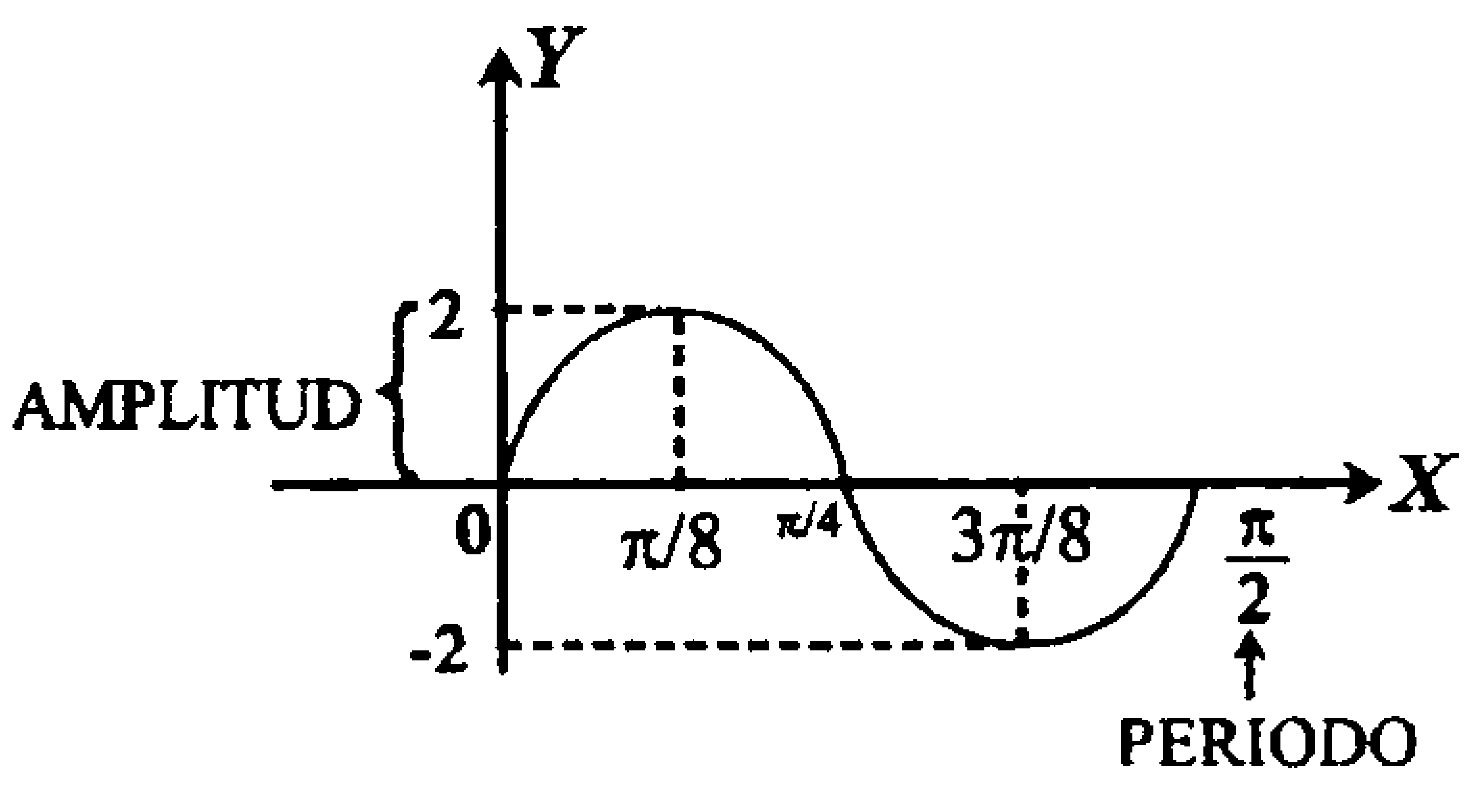
EJEMPLO :

Graficar la función $y = 2Sen4x$. Indicar la amplitud y el periodo .

RESOLUCIÓN :

$$y=2Sen4x \Rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = 2 \\ T_{(Senkx)}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

* Graficamos la función :



FUNCIÓN COSENO

El dominio de la función y =Cos$x$ son todos los números reales. En la siguiente tabla listamos algunos pares ordenados de dicha función. Nótese que los valores del dominio *(x)* están expresados en radianes y son ángulos notables de uso muy frecuente, esto se hizo porque los valores correspondientes de la imagen *(y)* son fáciles de calcular.

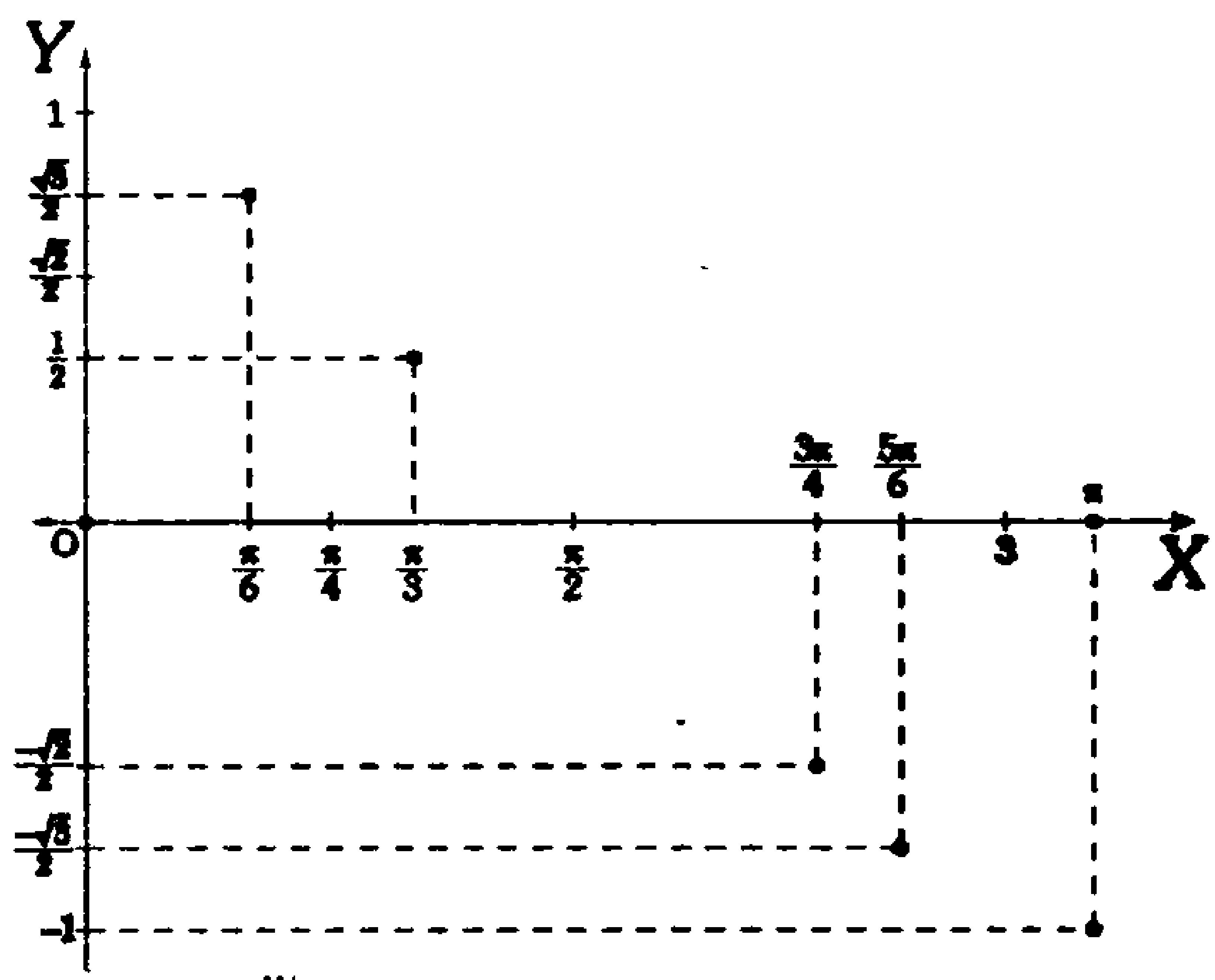
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = Cos\,x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

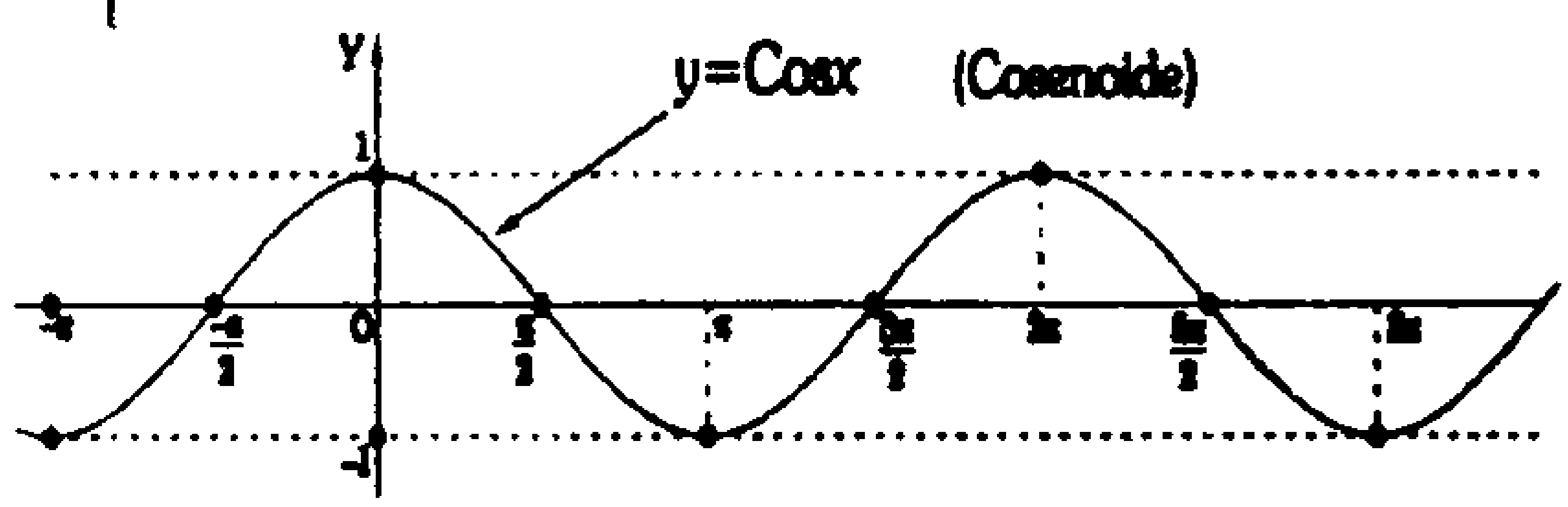
Luego la función coseno como conjunto de pares ordenados será:

$$f=\{(x\,;y)\,/\,y=\cos x\,;\forall\,x\in\mathbb{R}\}\ \text{ó}$$

$$f=\left\{(0\,;1)\,;\left(\frac{\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{\pi}{3}\,;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{\pi}{2}\,;0\right)....\right\}$$

Al marcar otros pares ordenados obtenidos a través de una calculadora o un programa y unirlos mediante una curva suave y lisa, se obtendrá la gráfica de función y =Cos$x$ llamada ***cosenoide***, la cual se representa a continuación.





A partir de la gráfica de la función, podemos obtener las siguientes conclusiones:

Domf $=\mathbb{R}$, es decir: $x\in\mathbb{R}$

Ranf $=[-1\,;1]$ es decir : $-1\le \cos x\le 1$.

- Es una función par, ya que ***Cos(–x) = Cosx***. Esto se

muestra porque la gráfica presenta simetría respecto del eje de ordenadas.

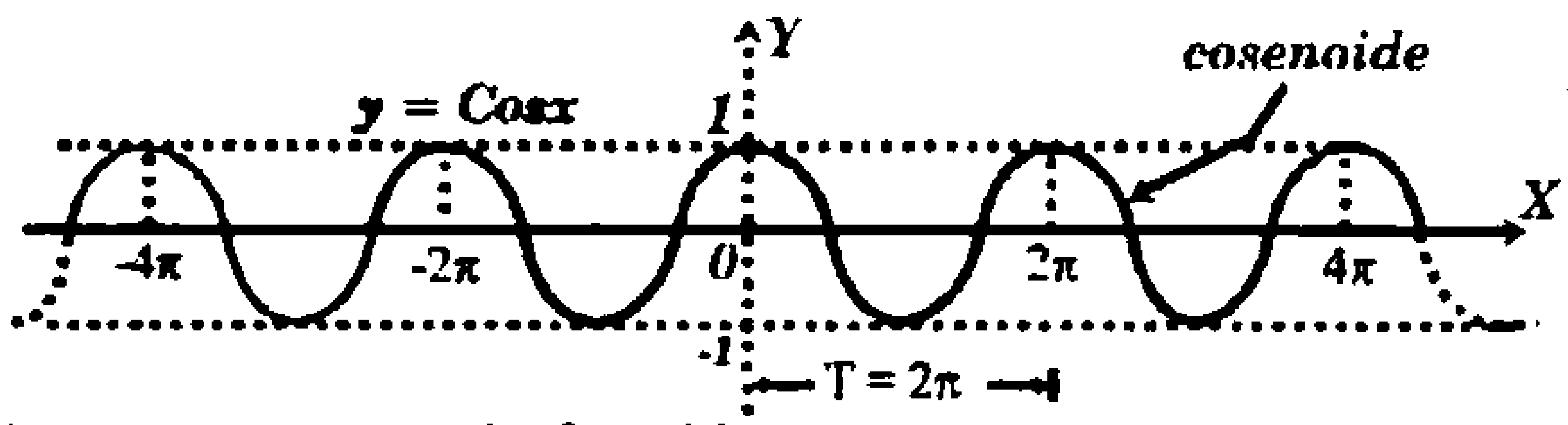
• Es decreciente: $\forall x \in \langle 2k\pi \,;\, (2k+1)\pi \rangle$ y creciente: $\forall x \in \langle (2k+1)\pi \,;\, (2k+2)\pi \rangle$ donde: $k \in Z$.

• Es periódica y su período es: 2π ; $Cos(x+2\pi)=Cosx$

• Es continua: $\forall x \in R$, esto quiere decir que es continua en su dominio.

Definición: $Cos=\{(x;y)/y=Cosx\}$

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO



* ***EL DOMINIO*** de la función coseno es la proyección de su gráfica al eje X por lo tanto :

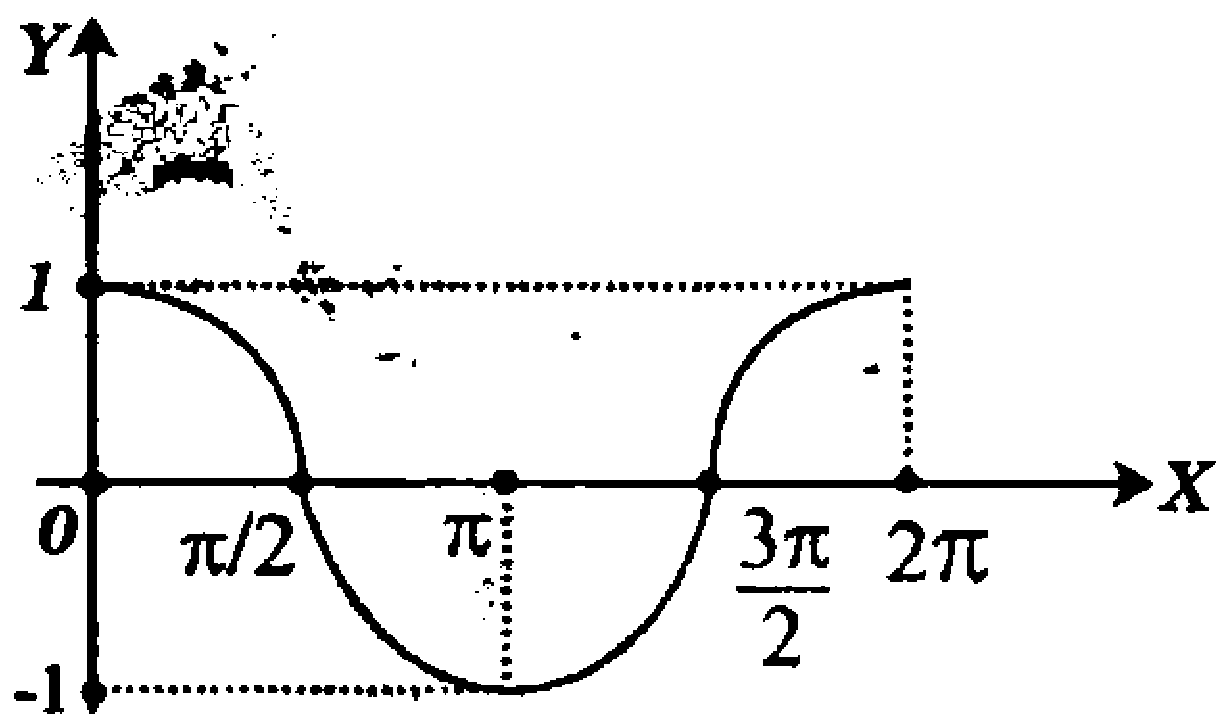
$$Dom(Cos) = \langle -\infty \,;\, +\infty \rangle \text{ ó } R$$

* ***EL RANGO*** de la función coseno es la proyección de su gráfica el eje Y por lo tanto $Ran(Cos) = [-1 \,;\, 1]$.

OBSERVACIÓN :

Una parte de la gráfica de la función coseno se repite por tramos de longitud 2π. Esto quiere decir que la gráfica de la función coseno es periodo 2π. Por lo tanto todo análisis y calculo del dominio y rango se hace en el siguiente gráfico.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=Cosx$	1	0	-1	0	1



El periodo de la función coseno se denota así :

$$T_{(Cosx)} = 2\pi$$

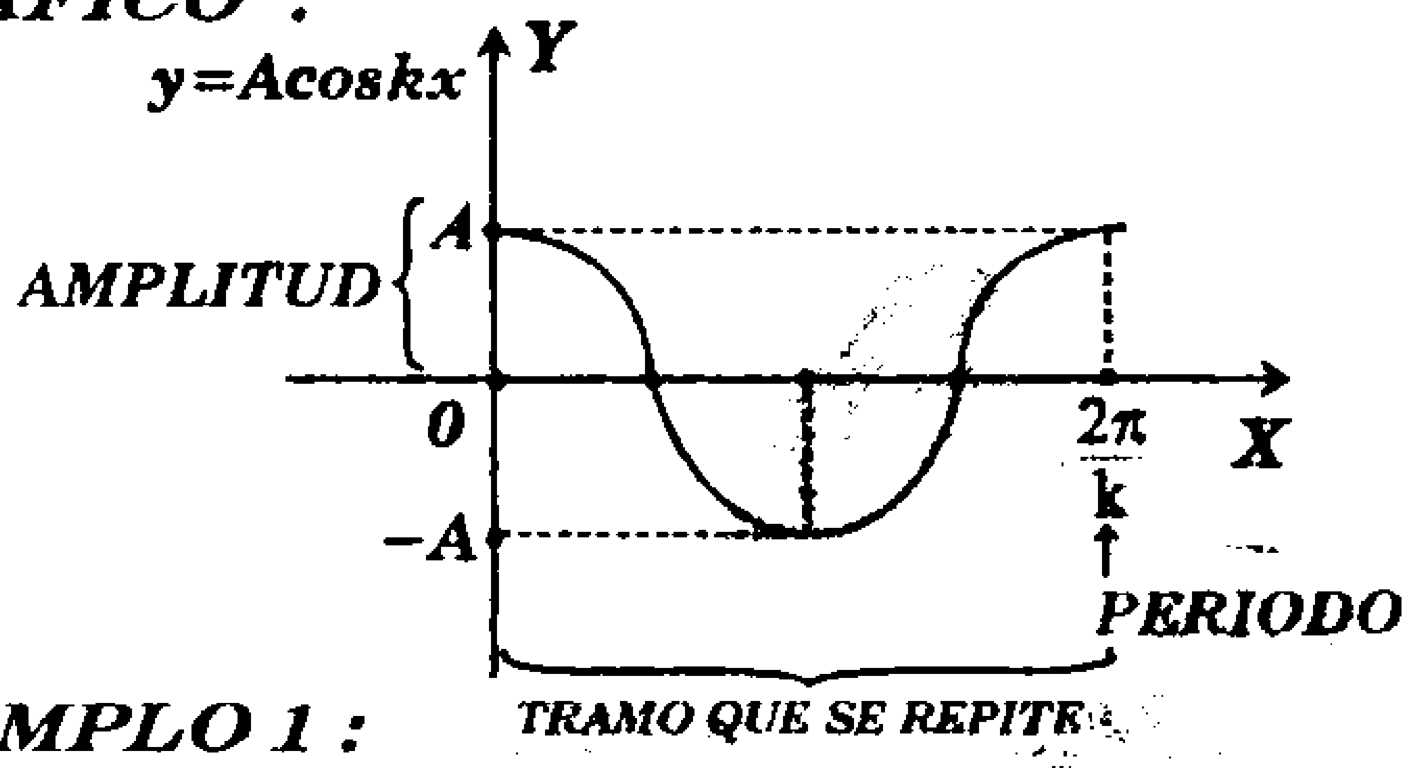
PROPIEDAD :

Si tenemos la función trigonométrica: $y=\pm\, ACoskx$, entonces el número "A" se le va a llamar ***AMPLITUD*** y el periodo de esta función es $2\pi/k$.

Es decir :

$$y=\pm\, ACoskx \Rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = A \\ T_{(Coskx)} = \dfrac{2\pi}{k} \end{cases}$$

GRÁFICO :



EJEMPLO 1 :

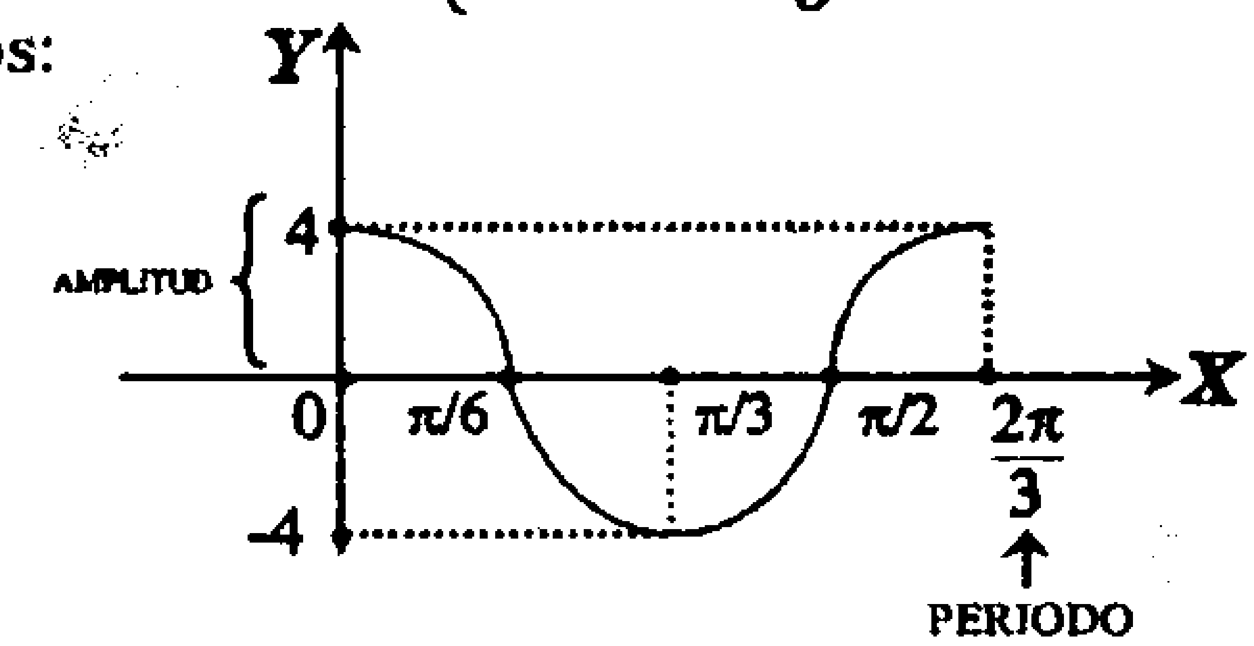
Graficar la función : $y = 4Cos3x$

Indicar la amplitud y el periodo

RESOLUCIÓN :

$$y = 4Cos3x \Rightarrow \begin{cases} AMPLITUD = 4 \\ T_{(Cos3x)} = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

* Graficamos:

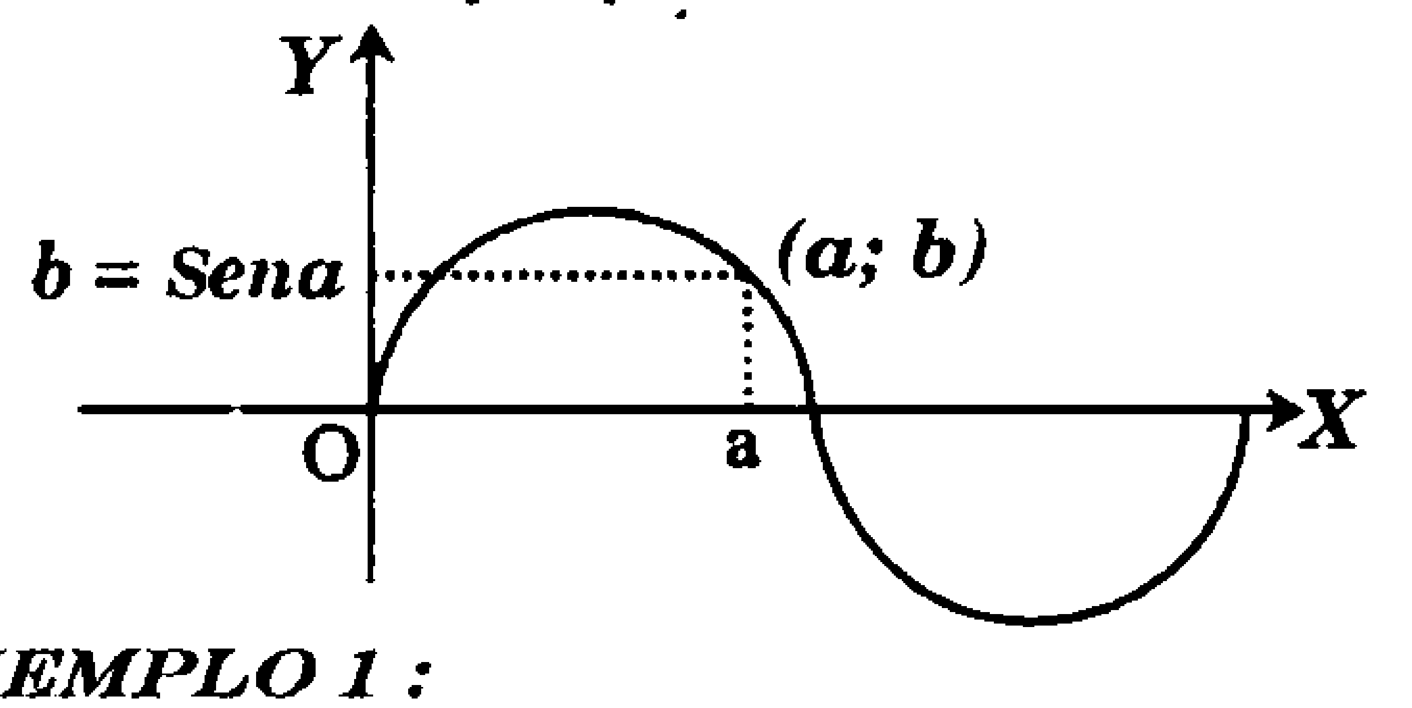


PROPIEDAD FUNDAMENTAL PARA SENO Y COSENO

PARA LA FUNCIÓN SENO :

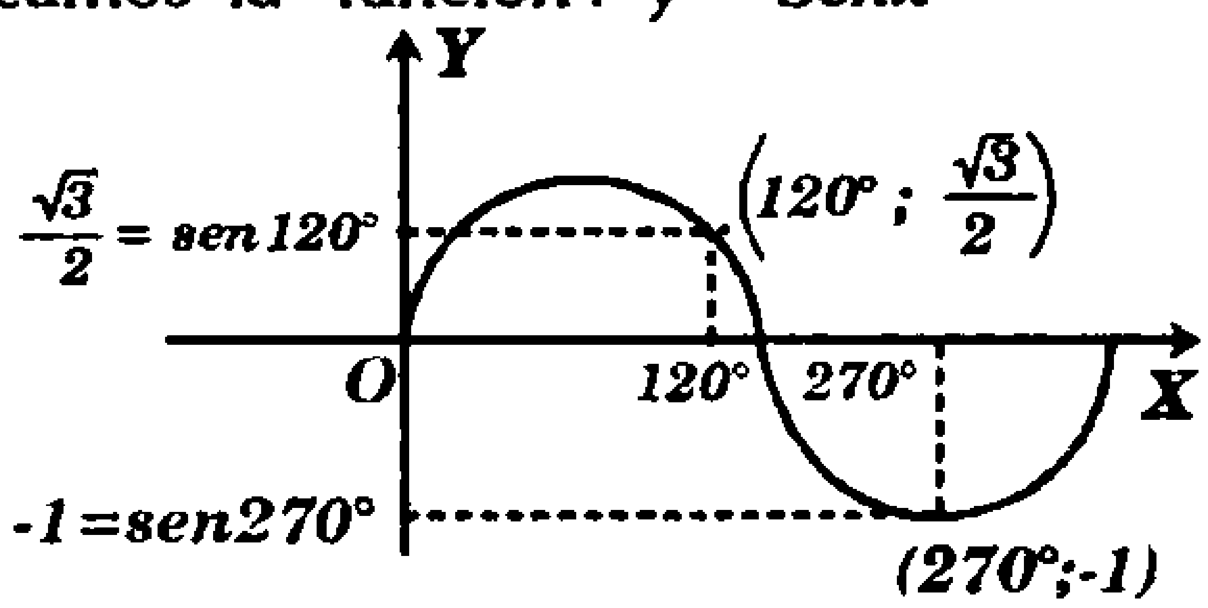
Si $(a \,;\, b)$ es un punto que pertenece la gráfica de la función : $y = Senx$

* Entonces se cumple que : $b = Sena$



EJEMPLO 1 :

* Graficamos la función : $y = Senx$



EJEMPLO 2:

Si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y = Senx$; determinar "n".

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos la propiedad, si $\left(\frac{\pi}{6}; 2n+1\right)$ pertenece a : $y=senx$

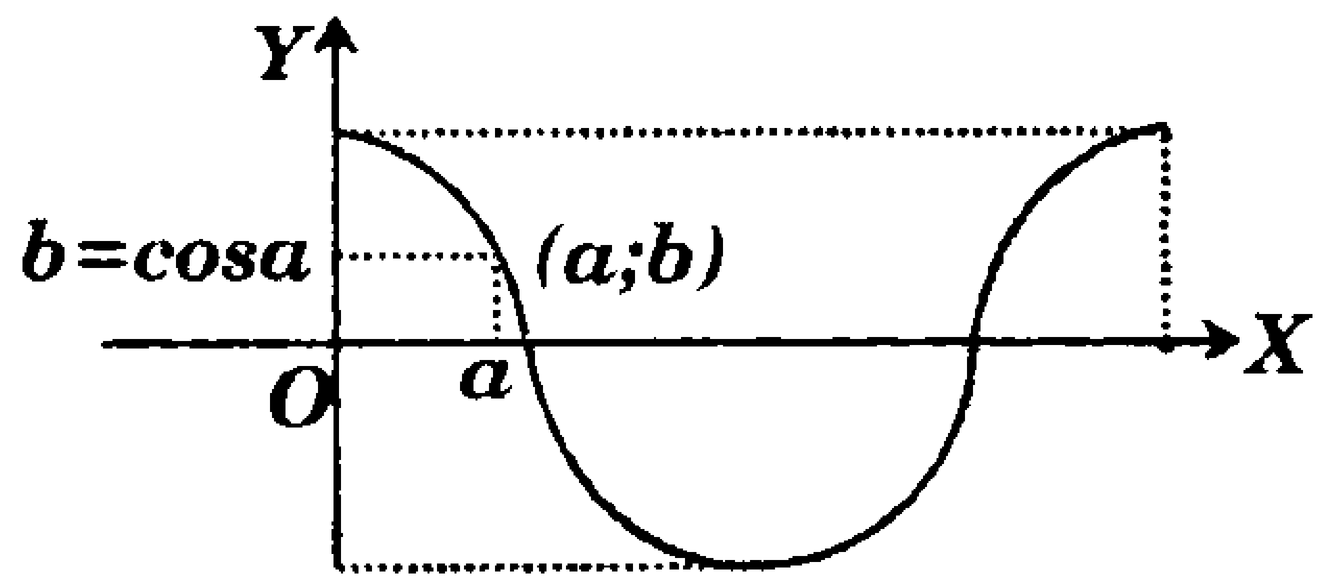
$$\Rightarrow 2n+1 = sen\,\frac{\pi}{6}$$

$$2n+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2n = -\frac{1}{2} \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$$

PARA LA FUNCIÓN COSENO:

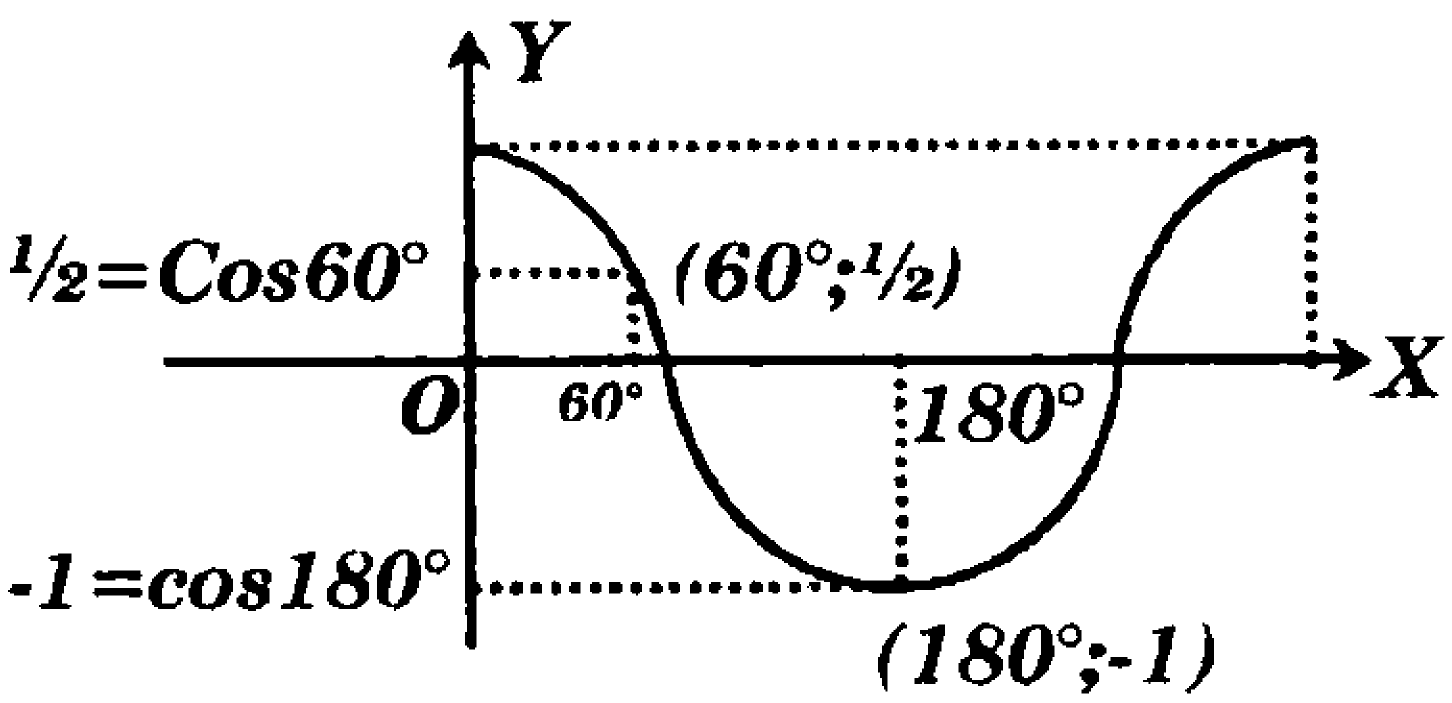
Si $(a\,;b)$ es el punto que pertenece a la gráfica de la función : $y = Cosx$

* Entonces se cumple que : $b=Cosa$



EJEMPLO 1:

* Graficamos las función : $y = Cosx$



EJEMPLO 2:

$\left(\frac{\pi}{4}; 2n+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y=cosx$. Determinar : "n"

RESOLUCIÓN:

* Aplicamos la propiedad :

Si: $\left(\frac{\pi}{4}; 2n+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ pertenece a: $y=Cosx$

$$\Rightarrow 2n+\frac{\sqrt{2}}{4} = Cos\,\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2n+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

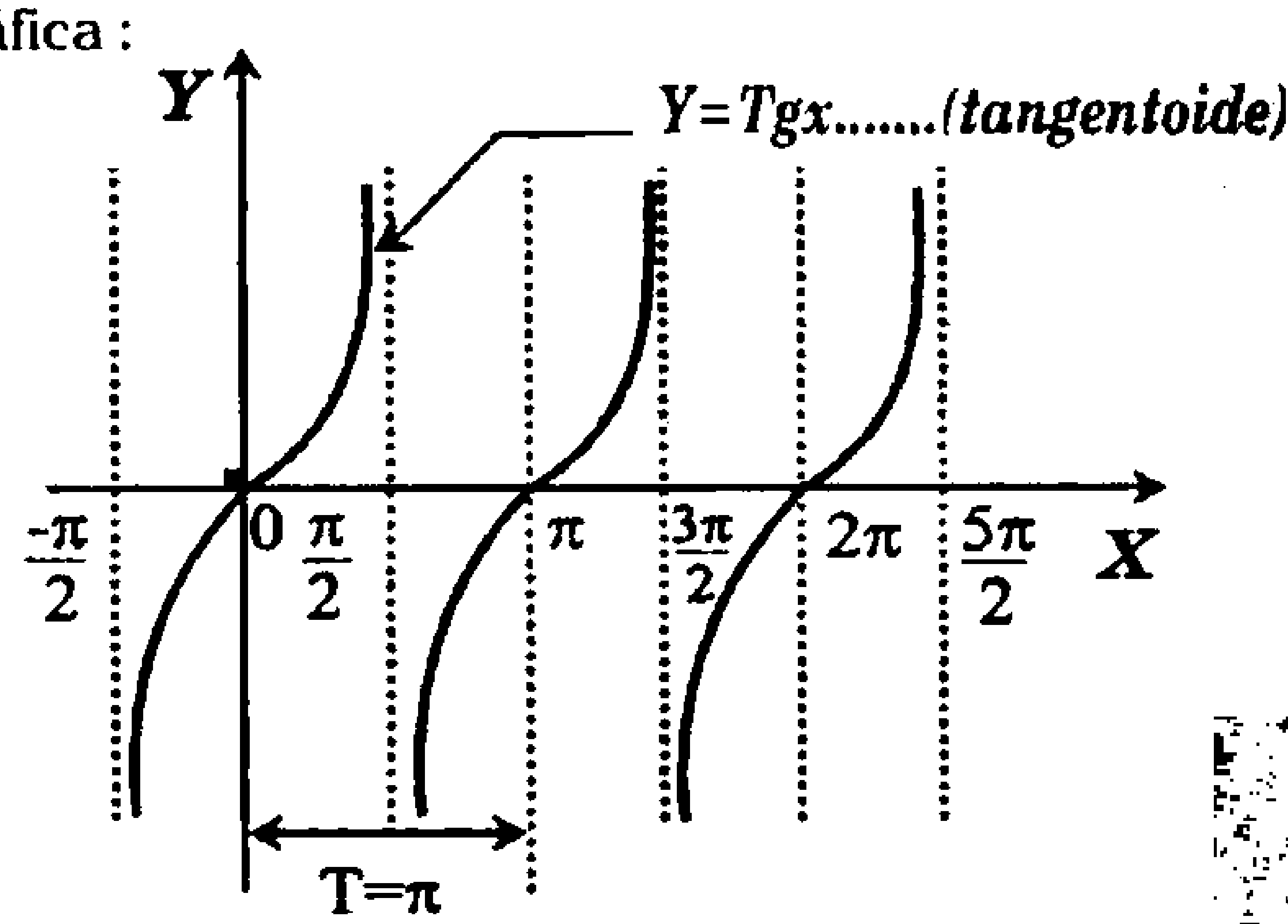
$$\Rightarrow 2n = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

pertenece a : $y = Cosx$

FUNCIÓN TANGENTE

$$F = \{(x\,;y)/\ y = Tanx\,;\ x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Gráfica :



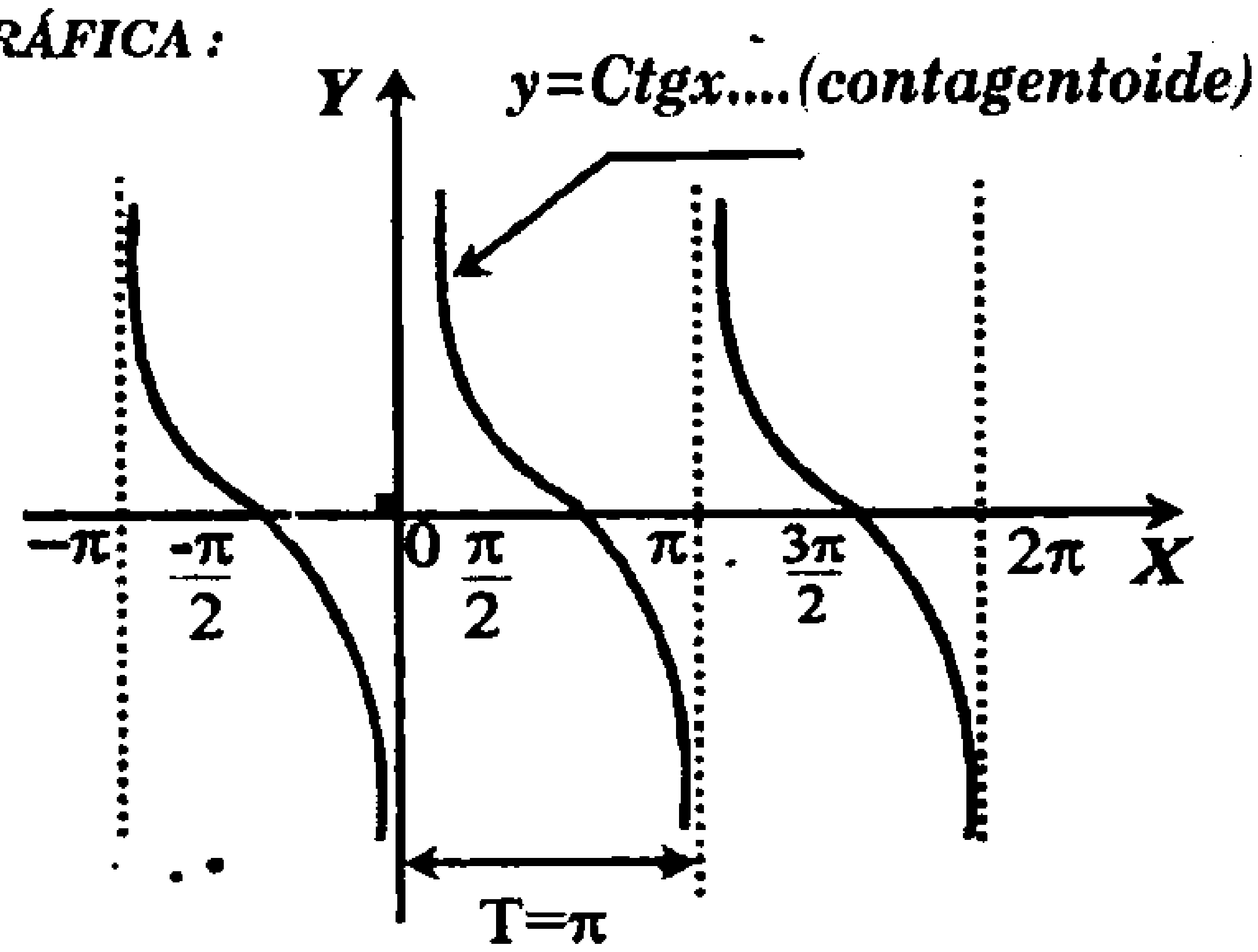
Análisis de Gráfico :

* Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}; n \in Z$
* Rango : $RanF \in \mathbb{R}$
* Periodo : $T = \pi$

FUNCIÓN COTANGENTE

$$F = \{(x;y)/y = Cotx\ ;\ x \in \mathbb{R} - n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

GRÁFICA:



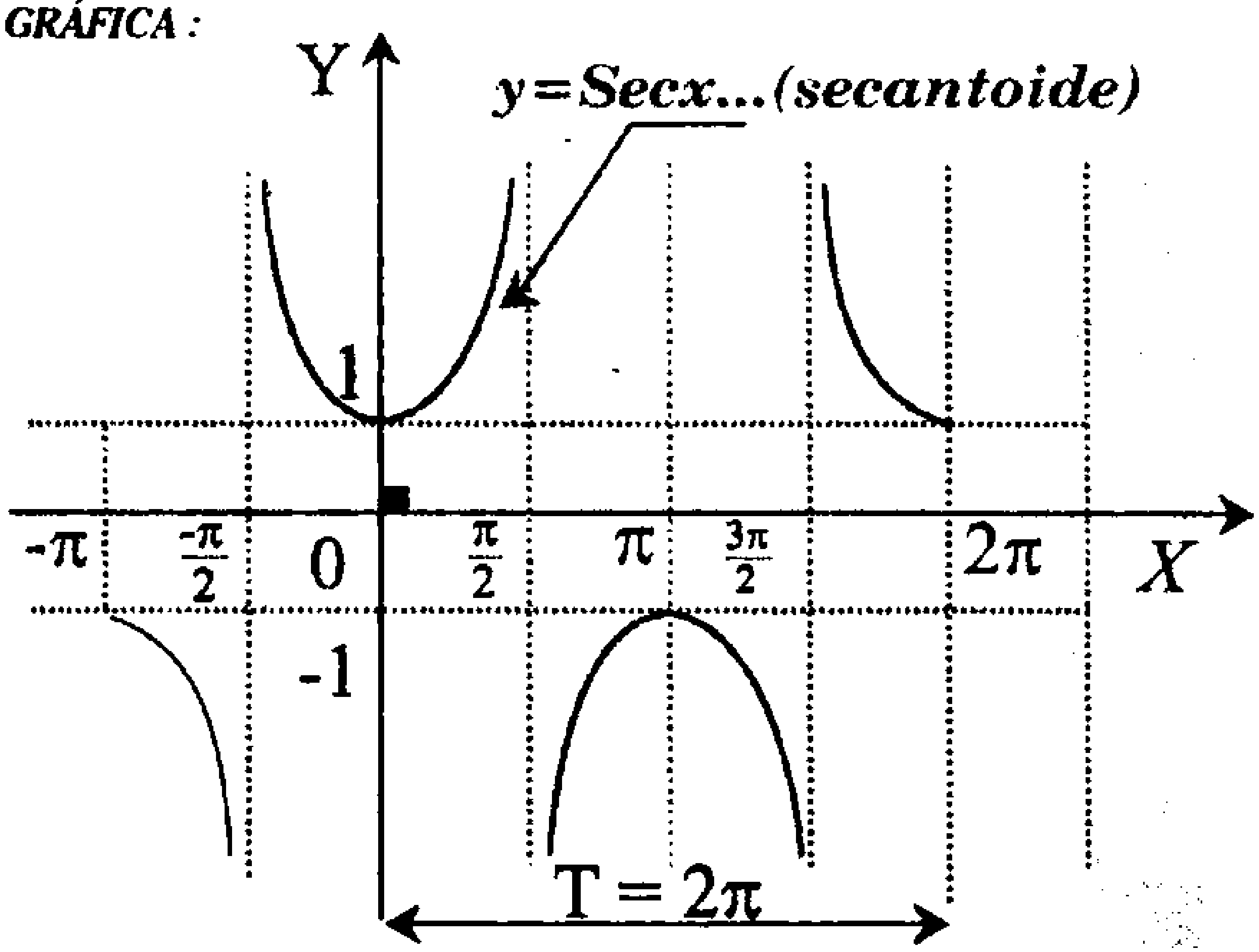
ANÁLISIS DEL GRÁFICO:

* Dominio : $DomF \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in Z$
* Rango : $RanF \in \mathbb{R}$
* Período : $T = \pi$

FUNCIÓN SECANTE

$$F = \{(x\,;y)/y = Secx\,;\ x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}\,;\ n \in Z\}$$

GRÁFICA :



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

* Dominio :

$$Df \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\}; n \in Z$$

* Rango : $Rf \in \mathbb{R} - <-1\,;1>$

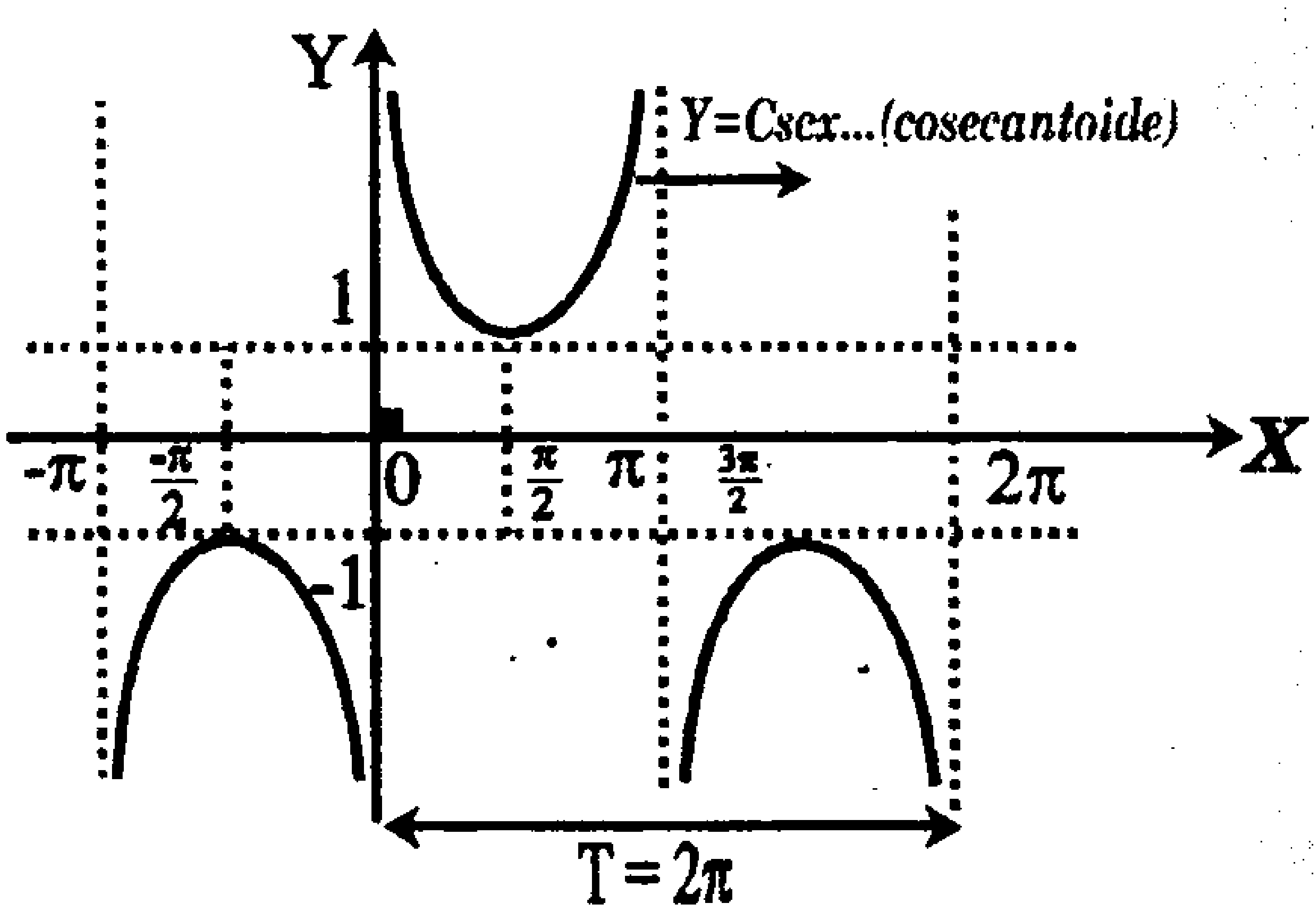
$$\Rightarrow Secx \in <-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty>$$

* Período : $T = 2\pi$

FUNCIÓN COSECANTE

$$F=\{(x;y)/y=Cscx\ ;\ x \in \mathbb{R} - n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$$

GRÁFICA :



ANÁLISIS DEL GRÁFICO :

* Dominio : $Df \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in Z$

* Rango : $Rf \in \mathbb{R} - <-1;1>$

$$\Rightarrow Csecx \in <-\infty;\ -1] \cup [1\,;+\infty>$$

* Periodo : $T = 2\pi$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Señale verdadero *(V)* o falso *(F)* en :

I) En $<0;\pi>$ la función : $y=senx$, posee un máximo.

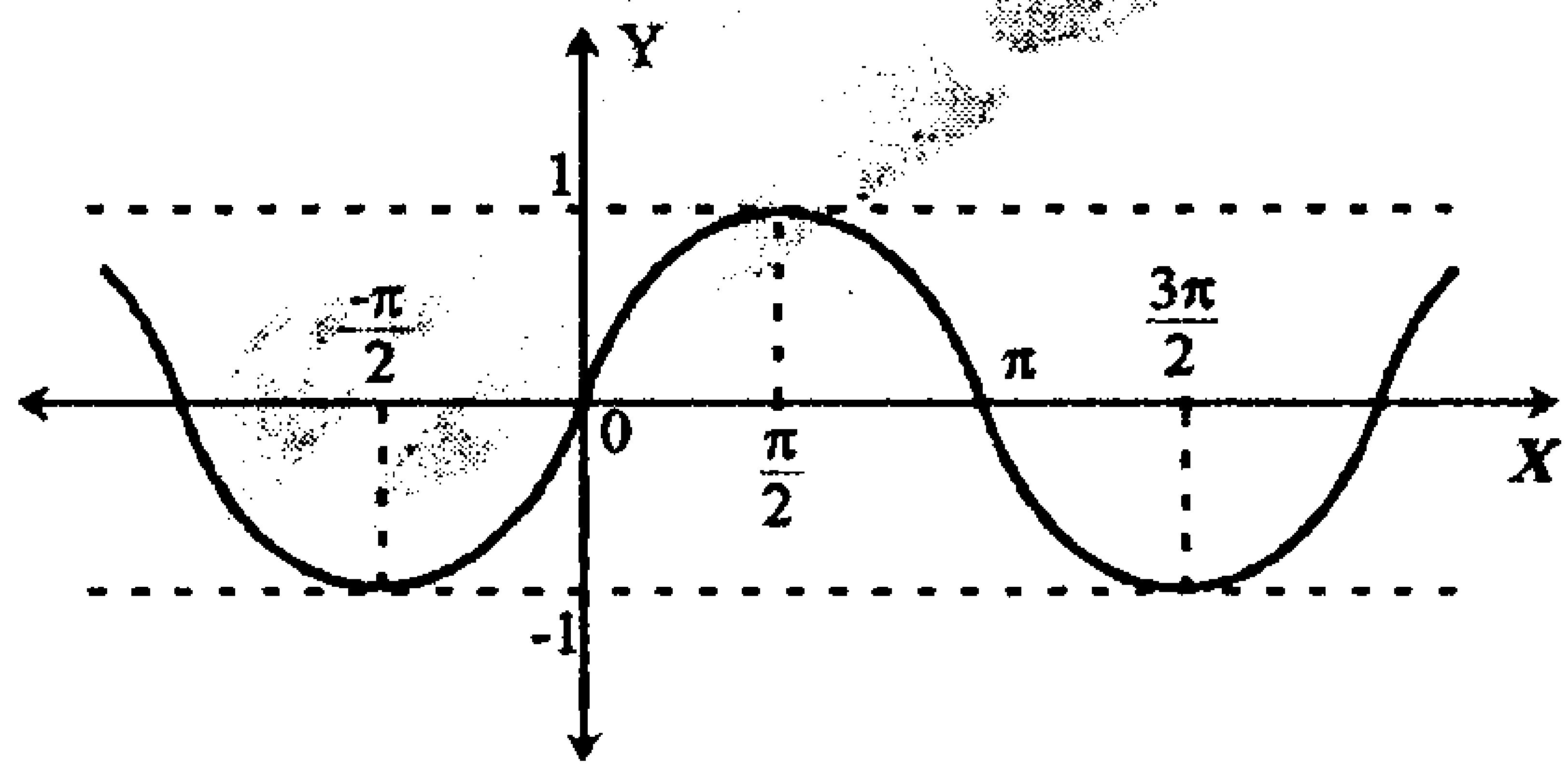
II) En $<\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}>$ la función : $y=senx$, es decreciente

III) En $<-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}>$ la función: $y=senx$, es creciente.

A) VVF B) FVV C)VVV D) VFV E) FVF

RESOLUCIÓN :

* Graficando la función : $y = Senx$ diremos :



I) VERDADERA : máx = 1

II) VERDADERA : ✓

III) VERDADERA : ✓

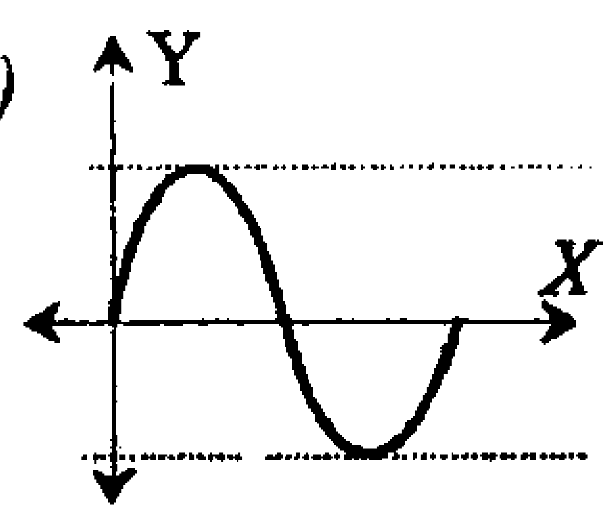
RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

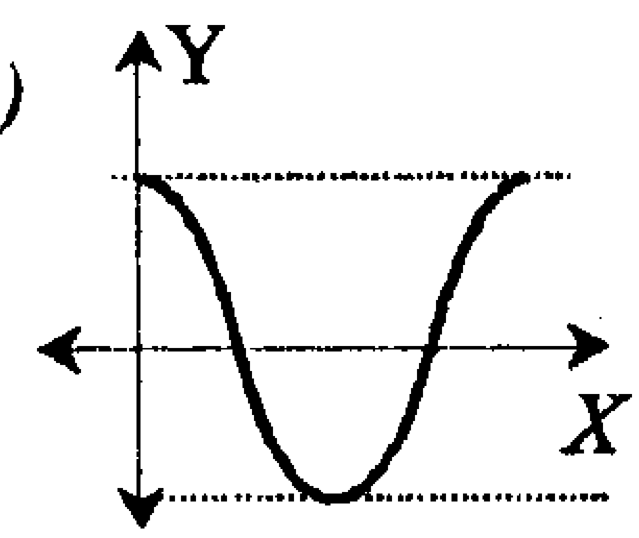
Grafique en $[0\,;2\pi]$, la función :

$$y=TanxCosx$$

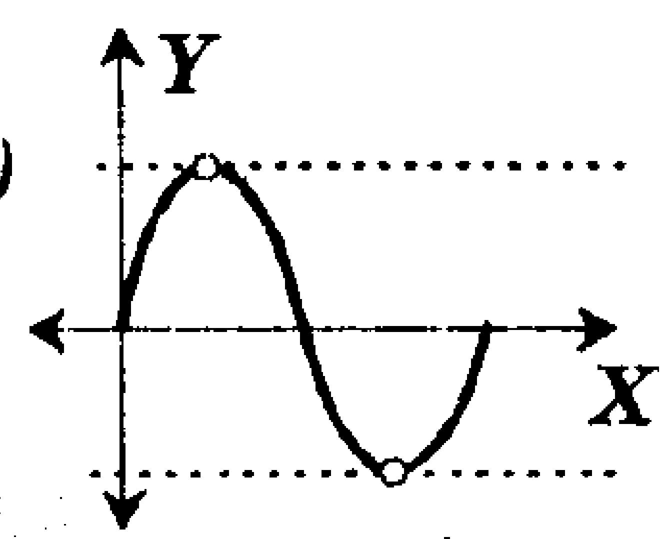
A)



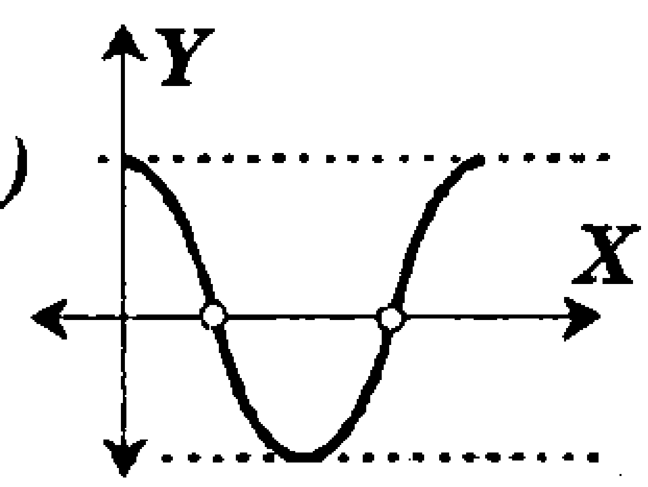
B)



C)



D)



RESOLUCIÓN :

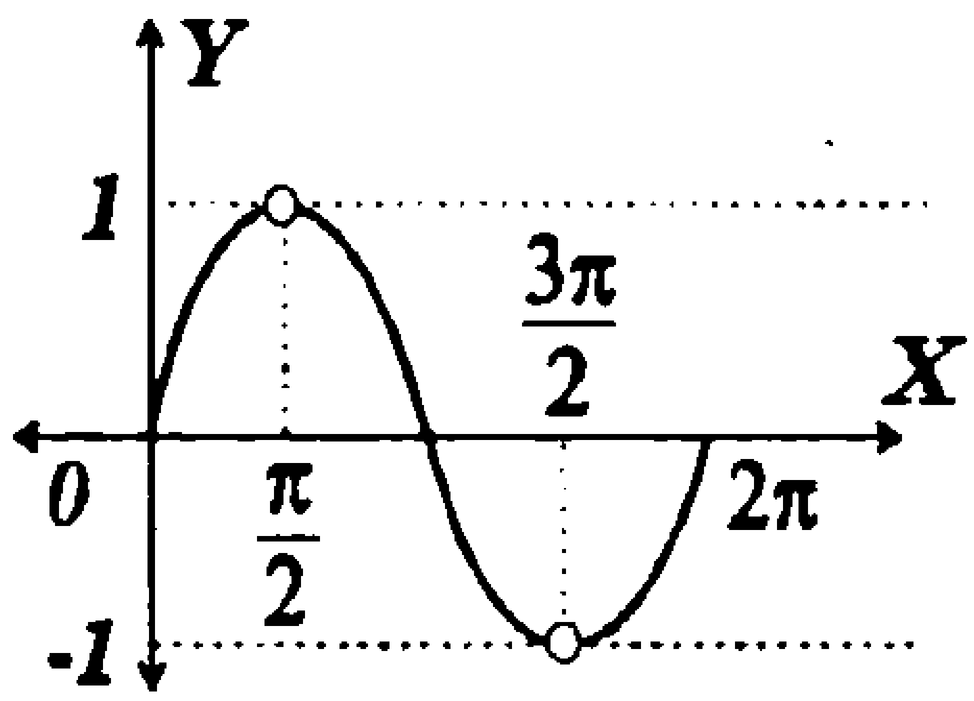
* En la función :

$$y = TanxCosx \Rightarrow y = \frac{Senx}{Cosx}Cosx$$

* Recuerde que :

$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq 90°$ y $270° \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$

* Quedaría :



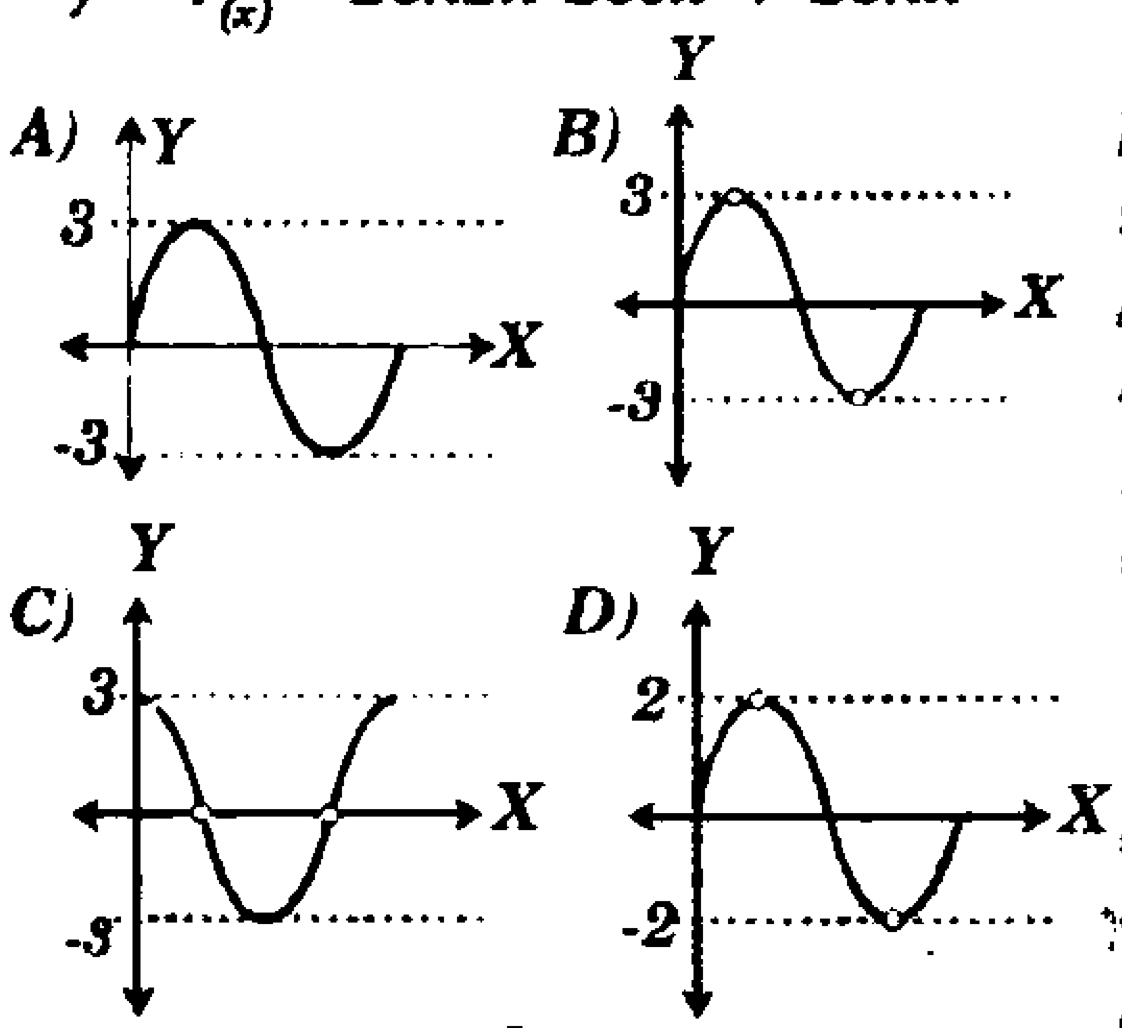
$y = Sen\ x$; $x \neq \frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$

RPTA : "C"

PROBLEMA 3 :

Grafique en $[0 ; 2\pi]$, la función :

$$y = f_{(x)} = Sen2x\ Secx + Senx$$



RESOLUCIÓN :

* En la función :

$$y = sen2x \times secx + senx$$

$$\Rightarrow y = sen2x\frac{1}{cosx} + senx$$

* Note que :

$$cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}$$

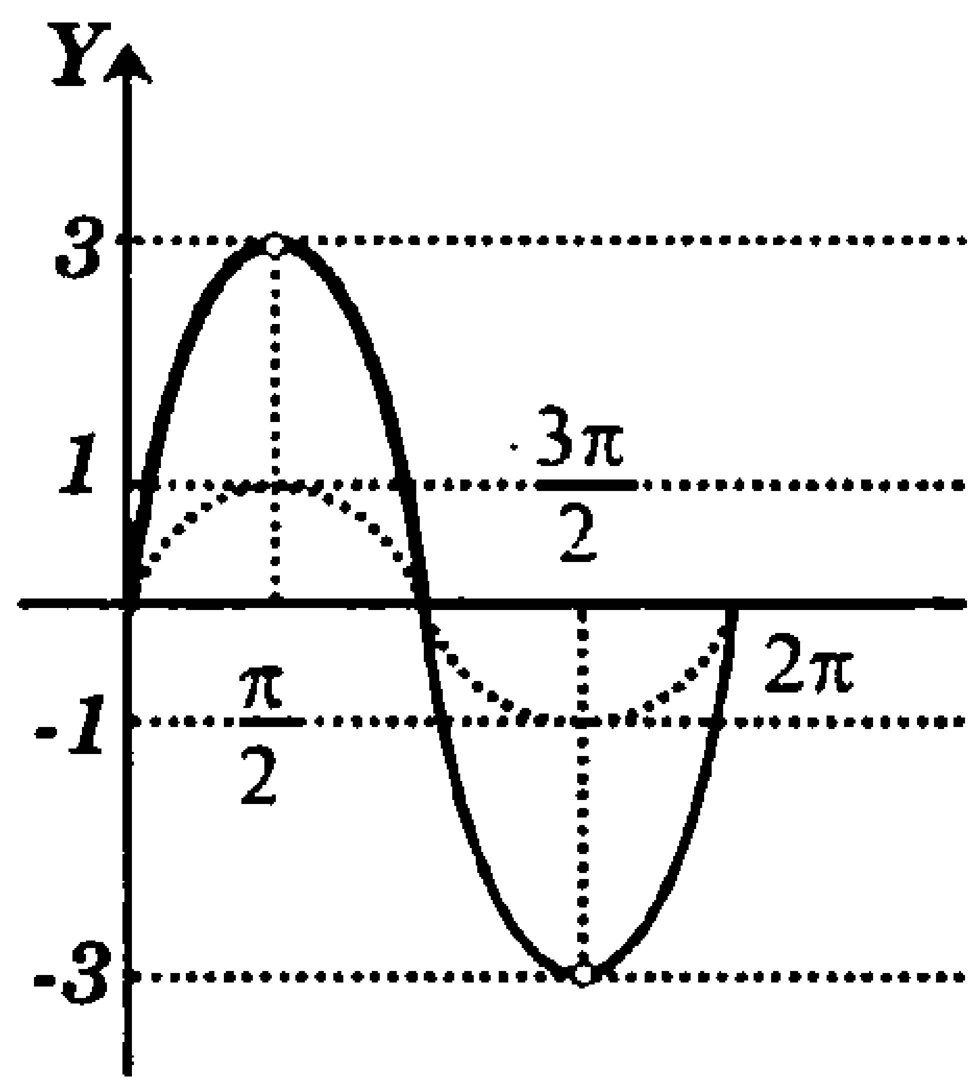
* Reduciendo :

$sen2x = 2senx \times cosx$

$$y = 2senx \times cosx \times \frac{1}{cosx} + senx$$

$$y = 2senx + senx \rightarrow y = 3senx$$

* Note que esta función "triplica" los valores del "*senx*", lo que se va reflejar en la gráfica como un estiramiento de la curva: $y = senx$. Así :



RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

Acerca de la función :

$y = f_{(x)} = 2senx + |senx|$ se afirma

I) Su valor máximo es *3*.

II) Su valor mínimo es *-1*

III) Su periodo es 2π ¿Cuáles son verdaderas?

A) Sólo I ***B) I y III*** ***C) I y II***
D) Sólo III ***E) Todas***

RESOLUCIÓN :

* En este caso, recuerde:

$$|x| = \begin{cases} x ; x \geq 0 \\ -x ; x < 0 \end{cases}$$

* Como el valor absoluto afecta a "senx"; tenemos que analizar por cuadrantes, así:

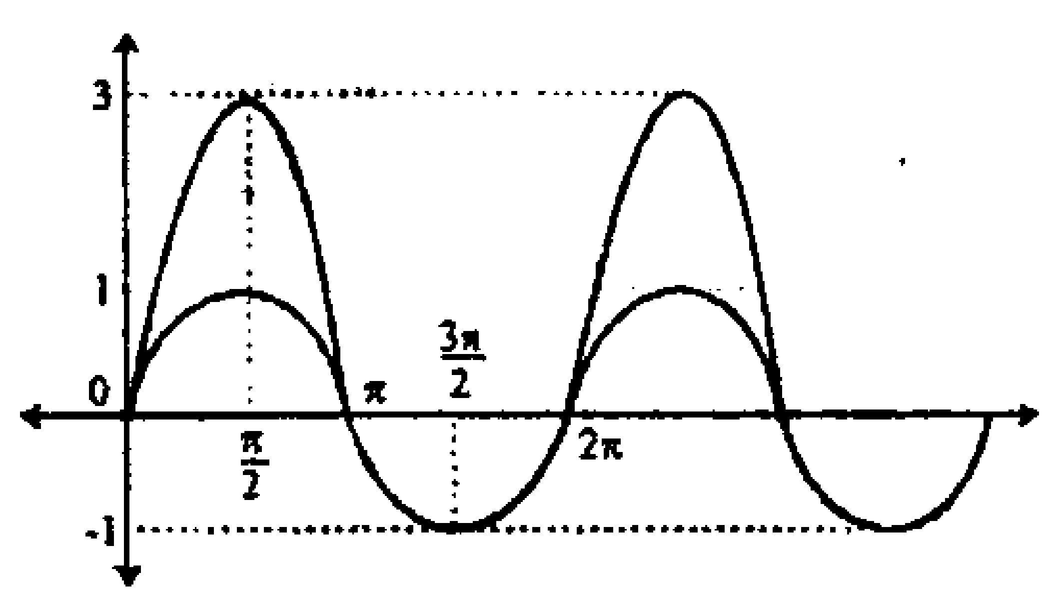
$$\left.\begin{array}{l} IC: y = 2senx + senx = 3senx \\ IIC: y = 2senx + senx = 3senx \end{array}\right\}$$

se triplica "*senx*"

$$\left.\begin{array}{l} IIIC: y = 2senx - senx = senx \\ IVC: y = 2senx - senx = senx \end{array}\right\}$$

sale igual que "*senx*"

* Graficándo y revisando las proposiciones :

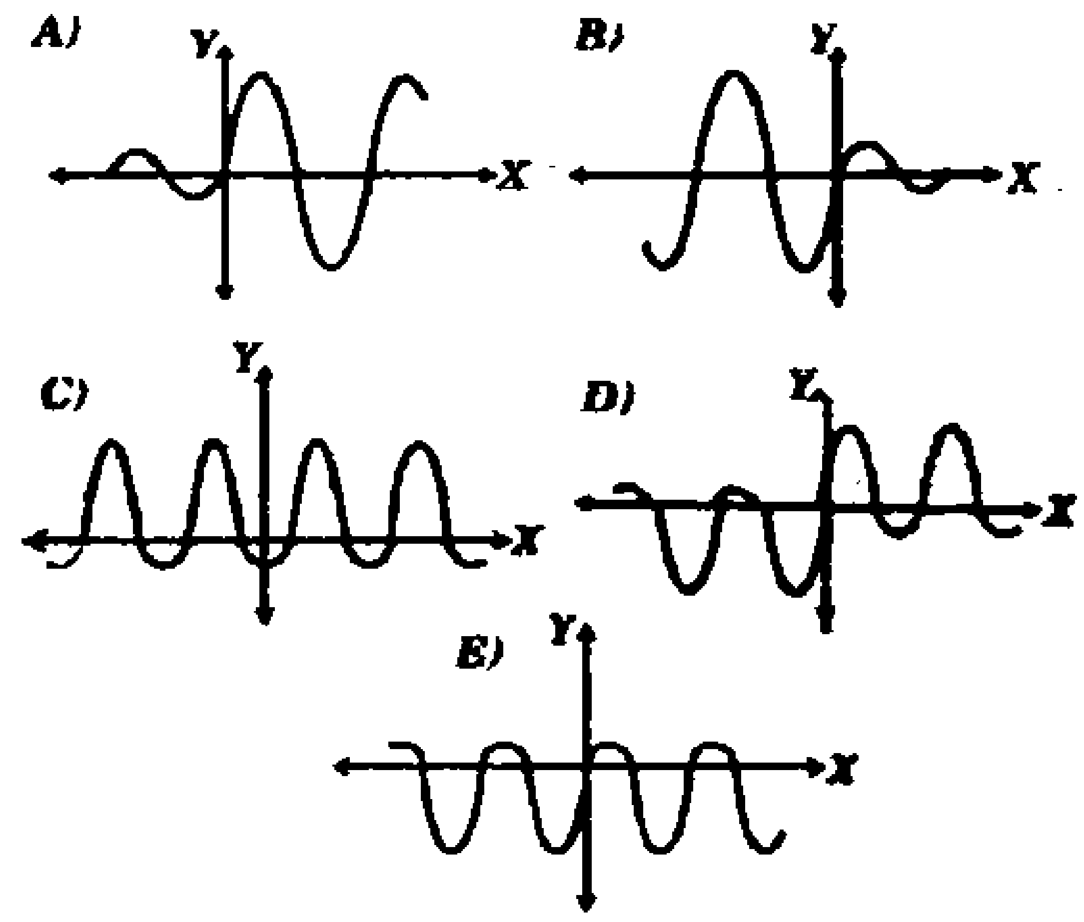


I) Verdadera ***II) Verdadera***
III) Verdadera

RPTA : "E"

PROBLEMA 5 :

Grafique : $y = f_{(x)} = 2Senx + Sen|x|$



RESOLUCIÓN :

* Como el valor absoluto afecta a la variable "*x*", tendremos que partir $\mathbb{R}$ en dos intervalos :

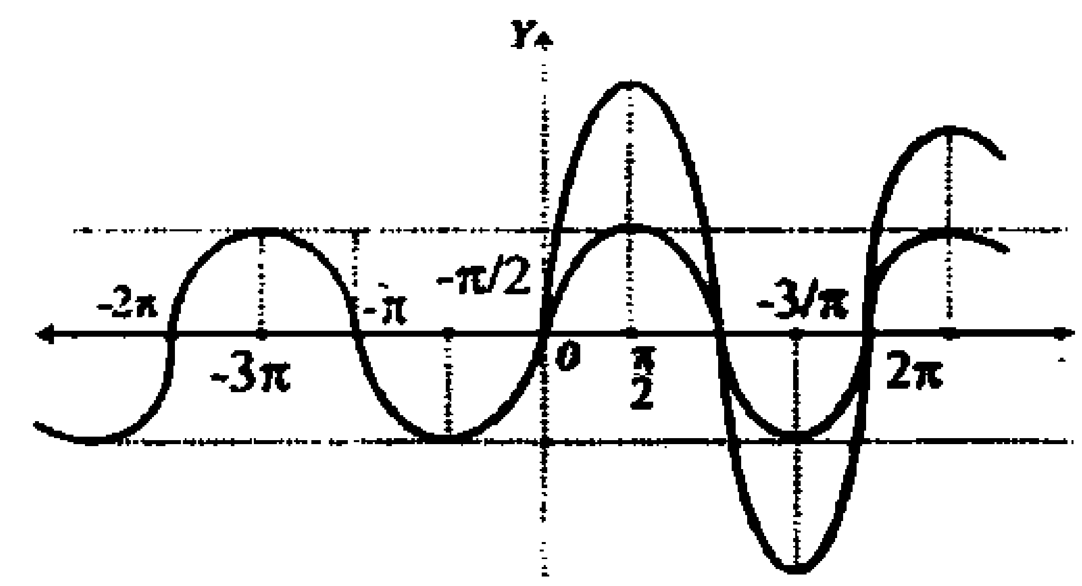
I) $x \geq 0$: $y = 2senx + sen|x| = 2senx + senx$

$y = 3senx$

II) $x < 0$: $y = 2senx + sen|x|$

$= 2senx + sen(-x)$

$y = 2senx - senx \Rightarrow y = senx$



RPTA : "A"

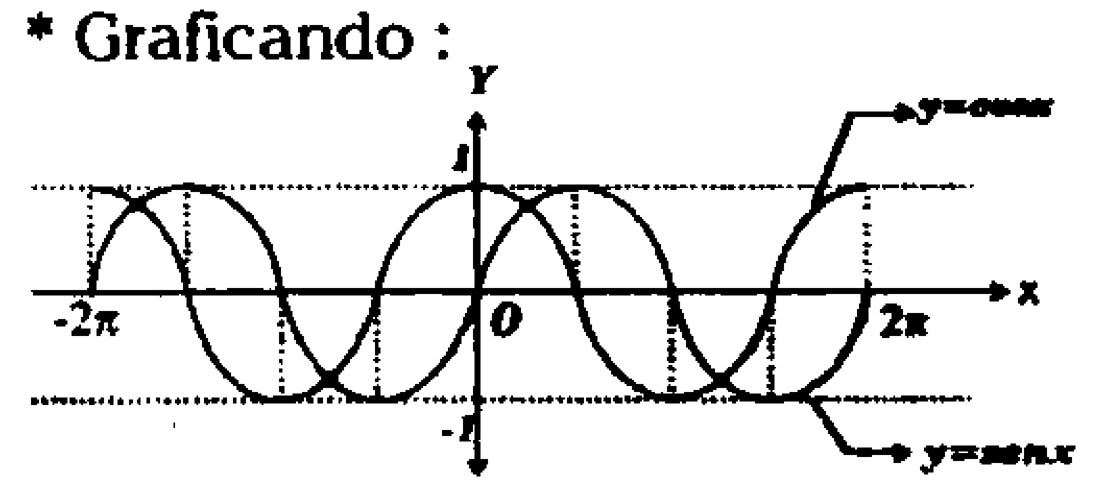
PROBLEMA 6 :

¿Cuátos puntos de intersección tienen las curvas : $y = senx$; $y = cosx$ en : $< -2\pi ; 2\pi >$?

A)Ninguno ***B)1*** ***C)2*** ***D)3*** ***E)4***

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$\Rightarrow$ Hay *4* puntos

RPTA : "E"

PROBLEMA 7 :

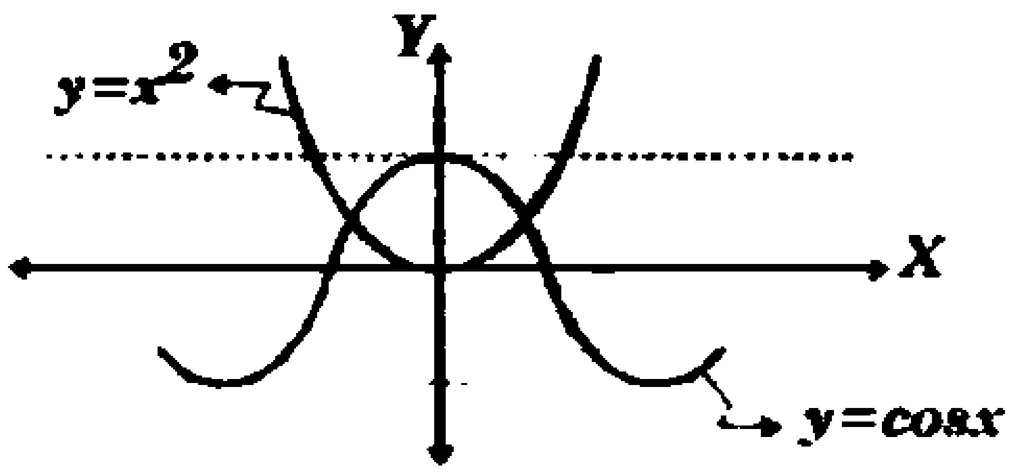
¿Cuántos valores de "*x*" hacen posible que: $x^2 = cosx$?

A) ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN:

* En estos casos sólo interesa averiguar "cuantos x" cumplen, no "cuales x" cumplen. El procedimiento es construir dos funciones: $\underbrace{x^2}_{f_{(x)}} = \underbrace{\cos x}_{g_{(x)}}$

* Graficarlas y ver cuántos puntos de corte hay.

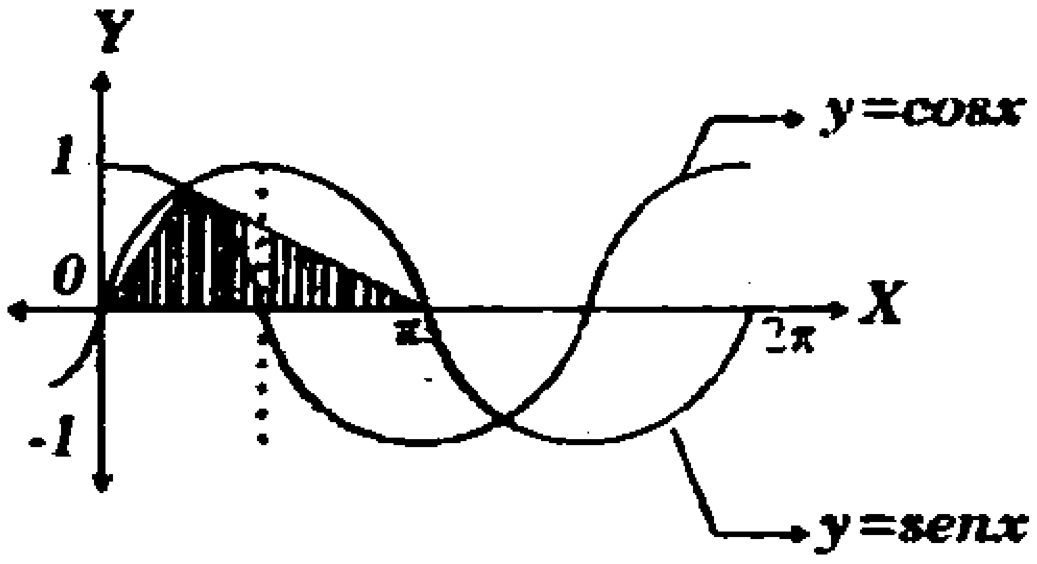


* Así, notaremos que hay dos puntos de corte; por lo tanto existen dos valores de "x" que cumplen: $x^2 = \cos x$

RPTA: "C"

PROBLEMA 8:

Del gráfico, calcular el área de la región sombreada.



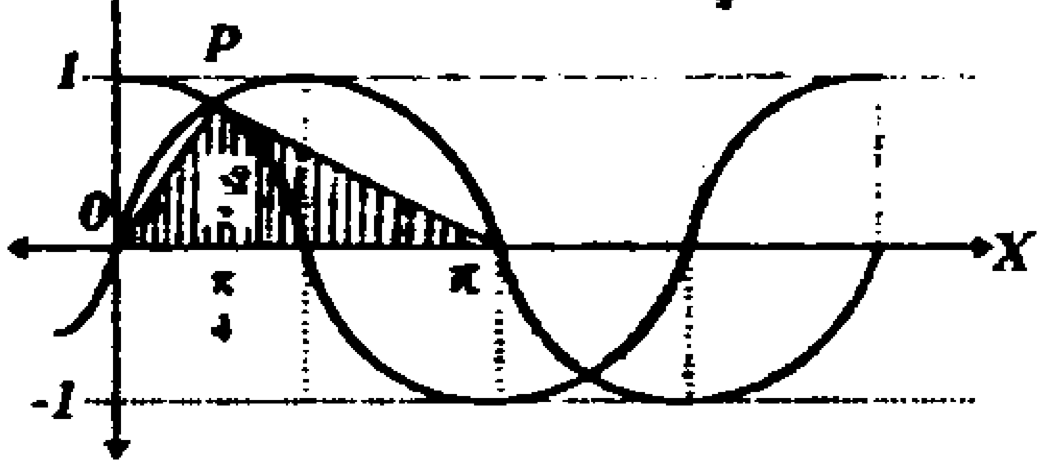
A) $\pi\sqrt{2}$ B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi^2}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{4}$

RESOLUCIÓN:

* Note que en "P": $\operatorname{sen}x = \cos x$

$$\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1$$

$$x = 45° = \frac{\pi}{4}$$



* luego la ordenada de "P" será:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

* Entonces:

$$S = \frac{b \times h}{2} = \frac{\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 9:

Señale el rango de la función:

$$y = f_{(x)} = 3\operatorname{Sen}x - 1$$

A) [-1 ; 4] B) [-2 ; 4] C) [-3;2] D) [-3 ; 3] E) [-3 ; 4]

RESOLUCIÓN:

* Tenemos: $y = f_{(x)} = 3\operatorname{Sen}x - 1$

* Pero: $-1 \le \operatorname{Sen}x \le 1$

* Multiplico por 3: $-3 \le 3\operatorname{Sen}x \le 3$

* Sumamos 1:

$$-3 + 1 \le \underbrace{3\operatorname{sen}x + 1}_{y} \le 3 + 1$$

$$-2 \le y \le 4 \Rightarrow \text{Rango: } [-2 ; 4]$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10:

Señale el rango de la función:

$$y = h_{(x)} = \operatorname{Sen}x \times \operatorname{Cos}x \times \operatorname{Cos}2x$$

A) [-1 ; 1] B) [-4 ; 4] C) $\left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$ D) $\left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right]$ E) [-2 ; 2]

RESOLUCIÓN:

* En estos casos, debemos tratar de reducir la expresión, así:

$y = \operatorname{sen}x \times \cos x \cos 2x$ (por variable doble)

$$\Rightarrow 2y = 2\operatorname{sen}x \times \cos x \times \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2y = \operatorname{sen}2x \times \cos 2x$$

$$\Rightarrow 4y = 2\operatorname{sen}2x \times \cos 2x$$

$$\Rightarrow 4y = \operatorname{sen}4x \Rightarrow y = \frac{1}{4}\operatorname{sen}4x$$

Pero:

$$-1 \le \operatorname{sen}4x \le 1 \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\times\frac{1}{4} : -\frac{1}{4} \le \underbrace{\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x}_{y} \le \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Rango: } \left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right]$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 11:

Señale el rango de la función:

$$y = \operatorname{Sen}x + \operatorname{Cos}x$$

A) [-2 ; 2] B) [-1 ; 1] C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D) $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$ E) $\left[-\frac{1}{2} ; 1\right]$

RESOLUCIÓN:

* Tenemos: $y = \operatorname{sen}x + \cos x$

* Por propiedad:

$$y = A\operatorname{sen}x + B\cos x \begin{cases} máx = \sqrt{A^2 + B^2} \\ mín = -\sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

* Luego:

$$1\operatorname{sen}x + 1\cos x \begin{cases} máx. = \sqrt{2} \\ mín. = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{rango: } [-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12:

Señale el rango de la función:

$$y = (1 + \operatorname{Sen}x)(1 + \operatorname{Cos}x)$$

A) $\left[\frac{3-\sqrt{2}}{2} ; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right]$ B) $\left[\frac{3-2\sqrt{2}}{2} ; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right]$ C) $\left[\frac{3-2\sqrt{2}}{4} ; \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\right]$ D) $\left[0 ; \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right]$ E) $\left[0 ; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right]$

RESOLUCIÓN:

* En la función:

$$y = (1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x) \Rightarrow 2y = 2(1+\operatorname{sen}x)(1+\cos x)$$

$$\Rightarrow 2y = (1 + \operatorname{sen}x + \cos x)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sen}x+\cos x)^2$$

* Luego:

$$y_{máx.} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

$y_{mín.} = 0$ (ya que: $a^2{}_{min} = 0$)

$$\Rightarrow \text{Rango: } \left[0 ; \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right]$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 13:

Señale el rango de:

$$y = f_{(x)} = \operatorname{sen}^2x + 2\operatorname{sen}x.\cos x + 3\cos^2x$$

A) $[1-\sqrt{2} ; 1+\sqrt{2}]$ B) $[2-\sqrt{2} ; 2+\sqrt{2}]$ C) $[3-\sqrt{2} ; 3+\sqrt{2}]$ D) $[1+\sqrt{2} ; 2+\sqrt{2}]$ E) $[2+\sqrt{2} ; 4+\sqrt{2}]$

RESOLUCIÓN:

* En este caso, multiplico todas las funciones por 2:

$$2y = \underline{2\operatorname{sen}^2x} + 2 \times \underline{2\operatorname{sen}x \times \cos x} + \underline{2 \times 3\cos^2x}$$

$$2y = 1 - \cos 2x + 2\operatorname{sen}2x + 3(1 + \cos 2x)$$

$$2y = 1 - \cos 2x + 2\operatorname{sen}2x + 3 + 3\cos 2x$$

$$2y = 4 + 2\operatorname{sen}2x + 2\cos 2x$$

$$\Rightarrow y = 2 + \operatorname{sen}2x + \cos 2x$$

* Luego:

$y_{máx.} = 2+\sqrt{2}$

$y_{mín.} = 2-\sqrt{2}$

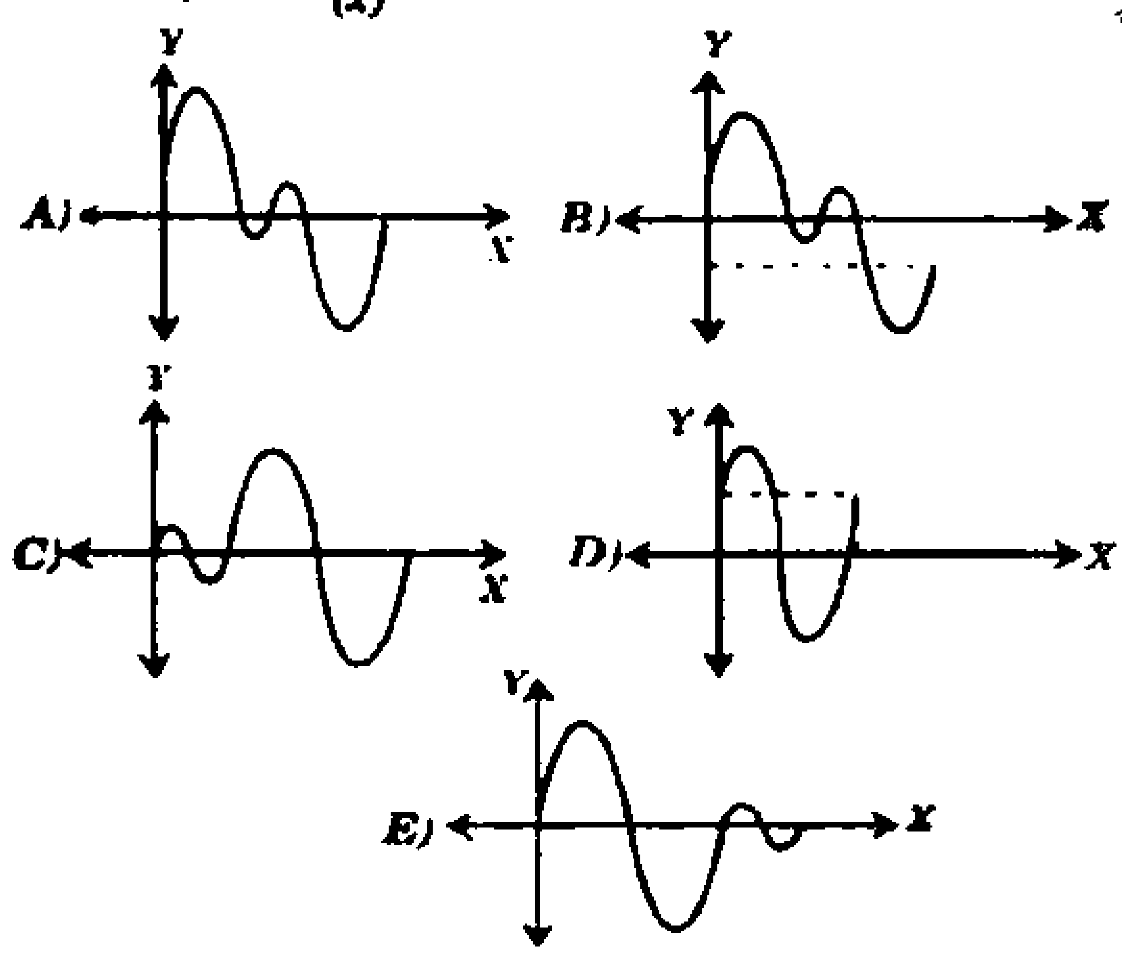
$\Rightarrow$ *Rango:* $[2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}]$

RPTA : "B"

PROBLEMA 14 :

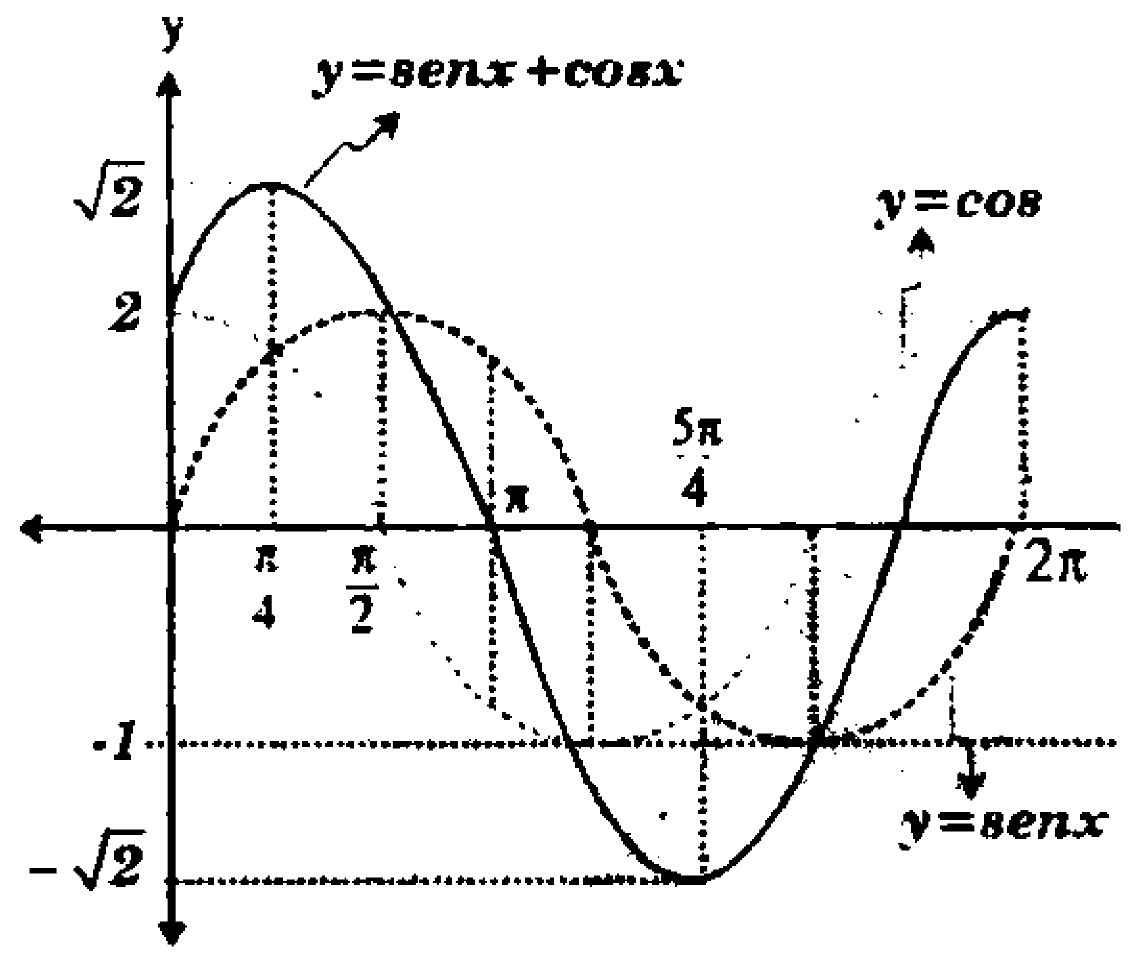
Grafique en $[0; 2\pi]$:

$$y = f_{(x)} = Senx + Cosx$$



RESOLUCIÓN :

*En estos casos, lo más recomendable es gráficar cada función "sumando" y luego aplicar el método de "suma de ordenadas", implica sumar las ordenadas correspondientes a una abscisa en cada función. Así de esta manera, la respuesta aparece en negrita.

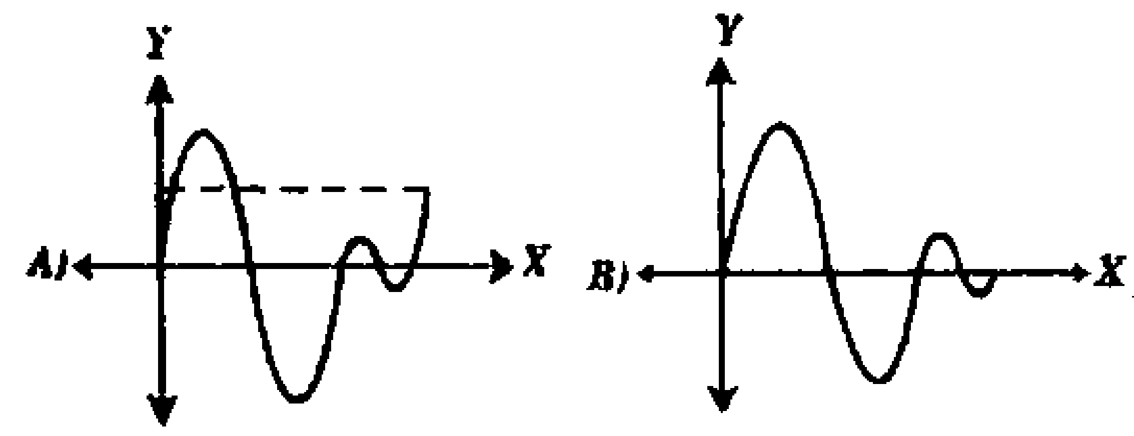


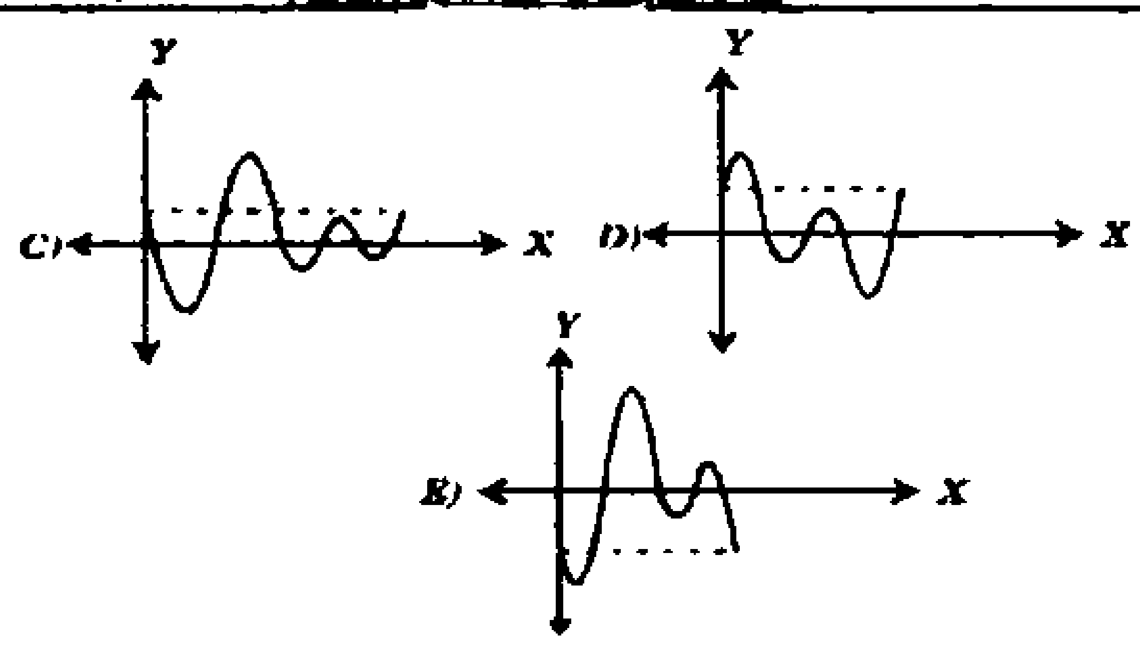
RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Grafique en $[0; 2\pi]$

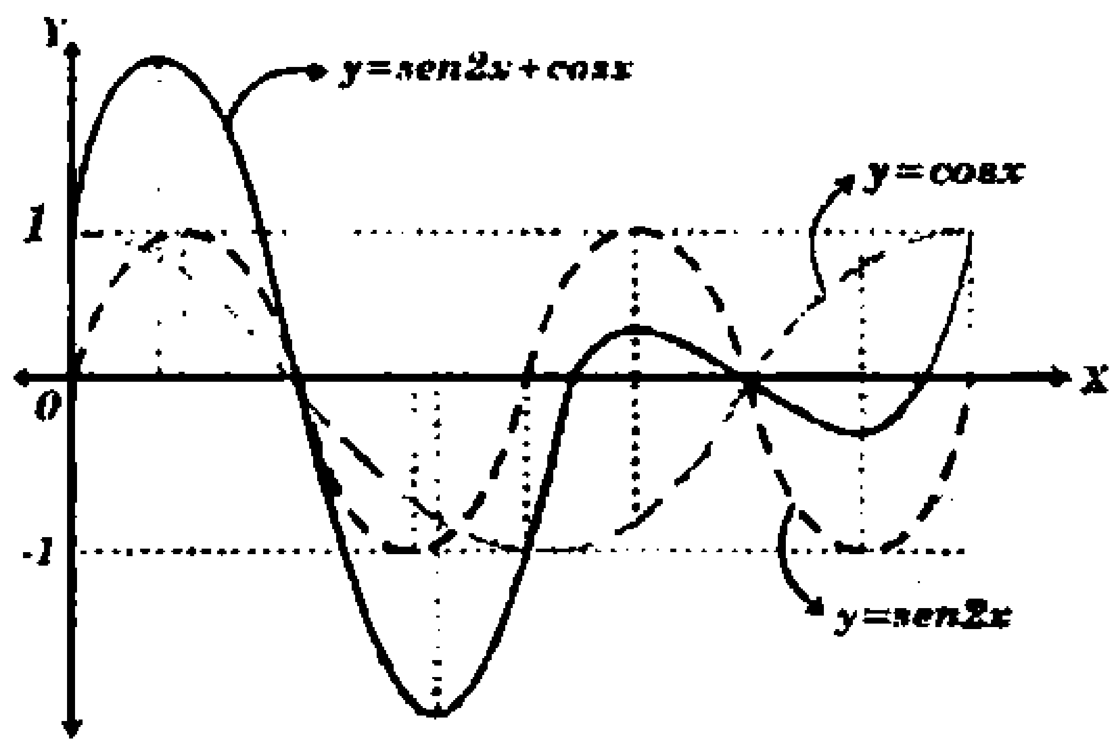
$$y = f_{(x)} = Sen2x + Cosx$$





RESOLUCIÓN :

* En este caso, deberá previamente tabular el trazado de: "*Sen2x*" y luego aplicar suma de ordenadas.



RPTA : "A"

PROBLEMA 16 :

Hallar el periodo, dominio, rango y graficar la función: $y = 2sen\ 6x$.

RESOLUCIÓN :

* Para el periodo de la función, primero buscamos el periodo de $y = senx$, el cual es $2\pi rad$.

* Para nuestro caso : $6x = 2\pi$

* El periodo pedido será:

$$T=\frac{2\pi}{6} \Rightarrow T=\frac{\pi}{3}$$

* Para el dominio :

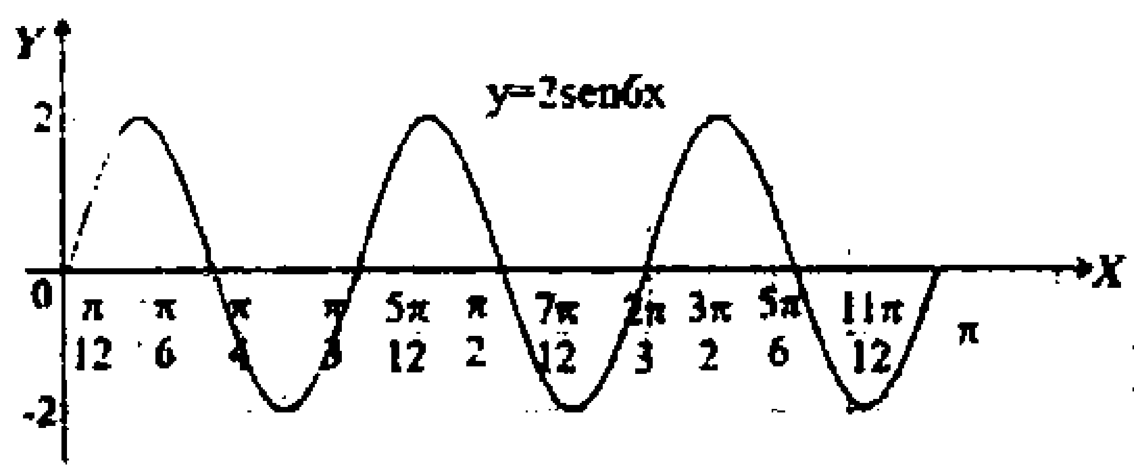
$-1 \le sen\ 6x \le 1 \Rightarrow x \in R \Rightarrow Dom:R$

Para el rango :

$-2 \le 2\ sen6x \le 2$

$\Rightarrow -2 \le\ y\ \le 2 \Rightarrow Rang: [-2;2]$

Gráficando la Función :



PROBLEMA 17 :

Hallar el periodo, dominio, rango y gráfica de : $y = 4\cos 6x$.

RESOLUCIÓN :

* El período de : $y = senx$ es $2\pi rad$.

* El período de : $y = 4\cos 6x$ será:

$$T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} rad$$

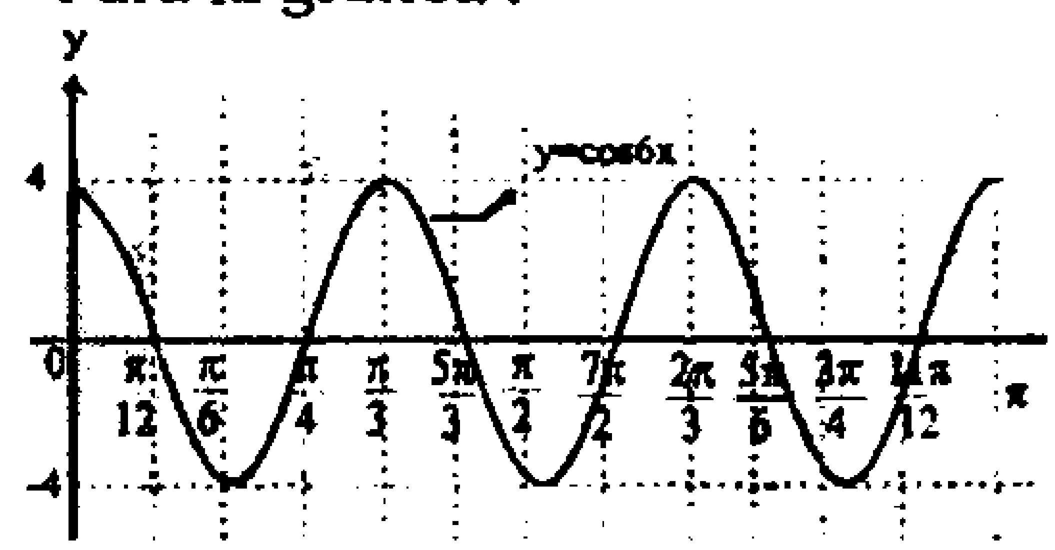
* Para el dominio : $x \in R$

* Para el rango tendremos :

$$-1 \le \cos 6x \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\cos 6x \le 4$$

$$y \in [-4\ ;\ 4]$$

* Para la gráfica :



PROBLEMA 18:

Da la siguiente función :

$$F_{(x)} = 1 + 5\ Sen2x$$

"*A*" es la amplitud y "*T*" el periodo simplificar la expresión :

$$\frac{A\pi + T}{A\pi - T}$$

A) $\frac{1}{2}$ *B)* 2 *C)* 3 *D)* $\frac{1}{2}$ *E)* $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que, si :

$$F(x) = a + b\ F.T.^{n}(Kx+\theta)$$

"*b*" nos representa la amplitud de la función trigonométrica.

* Por dato: $F(x) = 1+5Sen2x$; Entonces su amplitud es : $A = 5$ y su periodo "*T*" es :

$$T = \frac{T_{(Sen\ x)}}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

* Reemplazamos para evaluar en :

$$\frac{A\pi + T}{A\pi - T} = \frac{5\pi + \pi}{5\pi - \pi} = \frac{6\pi}{4\pi} = \frac{3}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 19 :

Hallar el máximo valor de.

$$y = Sen\alpha + 2Cos\beta + 3$$

A) 2 *B)* 3 *C)* 4 *D)* 5 *E)* 6

RESOLUCIÓN :

* Para hallar el máximo valor de :

$$y = sen\alpha + 2cos\beta + 3$$

* Debemos recordar :

$$-1 \le sen\ \alpha \le 1 \text{ y } -1 \le cos\ \beta \le 1$$

* Para que "y" sea máximo se le da los valores coreespondientes :

$$y_{MAXÍMO} = (1) + 2(1) + 3 = 6$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

De la siguiente función :

$$F(x) = 3 - cos2x$$

Indicar el valor de :

$$F_{MINÍMO} + F_{MAXÍMO}$$

A) 0 B)6 C)5 D)3 E)2

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$$-1 \le cos\ x \le 1 \Rightarrow 0 \le cos^2 x \le 1$$

* Por dato :

$F(x) = 3 - cos^2x$; Nos piden : $F_{MIN} + F_{MAX}$

* Le damos los valores correspondientes :

$F_{MIN} = 3 - cos^2x = 3 - (1)^2 = 2$ y
$F_{MAX} = 3 - cos^2x - (0)^2 = 3$

* Piden :

$$F_{MIN} + F_{MAX} = 2 + 3 = 5$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 :

Demostrar que el máximo valor que toma la función $f(x)$ es igual a 9/8. $f(x) = Senx + Cos2x$

RESOLUCIÓN:

• Sabemos que: $Cos2x = 1 - 2Sen^2x$

• Al reemplazar:

$$f(x) = senx + 1 - 2sen^2x$$

• Completando cuadrados:

$$-2\left(Sen^2x - \frac{1}{2}Senx + \frac{1}{16}\right) + 1 + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2\left(Senx - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$-1 \le Senx \le 1 \Rightarrow -\frac{5}{4} \le Senx - \frac{1}{4} \le \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(Senx - \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{25}{16} \Rightarrow -\frac{25}{8} \le -2\left(senx - \frac{1}{4}\right)^2 \le 0$$

$$\Rightarrow -2 \le \underbrace{-2\left(Senx - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}_{f(x)} \le \frac{9}{8}$$

$$\Rightarrow Ran\,f = \left[\underset{Min}{-2} ; \underset{Max}{\frac{9}{8}}\right]$$

PROBLEMA 22 :

Demostrar que el periodo de la función $Senx$ es 2π

RESOLUCIÓN:

Por definición se tiene:

$$f(x + T) = f(x) ; T > 0$$

Entonces: $Sen(x + T) = Senx$

Desarrollando:

$$SenxCosT + SenT\,Cosx = Senx$$

Completamos al 2° miembro de la igualdad.

$$SenxCosT + SenTCosx = 1 \times Senx + 0 \times Cosx$$

Luego:

* $SenxCosT = Senx \times 1 \Rightarrow CosT = 1$ ... (i)
* $SenTCosx = 0 \times Cosx \Rightarrow SenT = 0$ .... (ii)

Las condiciones (i) y (ii) tienen que cumplirse simultáneamente, entonces:

como $T > 0$ se tiene:

Si $CosT = 1 \Rightarrow T = 2\pi, 4\pi; 6\pi; 8\pi; 10\pi$ ...
Si $SenT = 0 \Rightarrow T = \pi, 2\pi; 3\pi; 4\pi; 5\pi$ ...

De los valores obtenidos, se escoge el menor valor común; es decir, 2π.

Luego podemos afirmar que el periodo de la función seno es 2π.

PRÁCTICA DE EJERCICIOS #1

01 Hallar el rango de la función

$$y = 3\ Senx + 2$$

A) [-1 ;1] B)[-1 ; 5] C)[1 ;5]
D)[0; 5] E)[- 5 ; 1]

02 Hallar el rango de la función

$$y = 5\ Cosx - 2$$

A)[- 3 ; 7] B)[3 ;7] C)[-7 ; 3]
D)[0 ; 5] E) [0 ;7]

03 Graficar la función :

$$y = 2Sen\frac{4x}{3}$$

04 Indicar su amplitud y su periodo , al graficar la función :

$$y = \frac{1}{4}Cos3x$$

Indicando su amplitud y su periodo

05 Hallar la amplitud (A) y el periodo (T) de las siguientes funciones. SIN GRAFICAR.

I) $y = 4\ Sen3x \Rightarrow \begin{cases} A = ... \\ T = ... \end{cases}$

II) $y = \frac{1}{3}\ Sen\ \frac{x}{4} \Rightarrow \begin{cases} A = ... \\ T = ... \end{cases}$

06 Hallar la amplitud (A) y el periodo (T) de los siguientes funciones. SIN GRAFICAR

I) $y = 6\ Cos4x \Rightarrow \begin{cases} A = ... \\ T = ... \end{cases}$

II) $y = \frac{1}{3}Cos\frac{2x}{5} \Rightarrow \begin{cases} A = ... \\ T = ... \end{cases}$

07 Graficar las siguientes funciones

I) $y = -Senx$ II) $y = -3Sen2x$

Indicando su amplitud y su periodo

08 Graficar las siguientes funciones

I) $y = -Cosx$
II) $y = -2Cos4x$

Indicando su amplitud y su periodo

09 Graficar las siguientes funciones

I) $y = Senx + 1$
II) $y = 2Senx - 1$

Indicando su amplitud y su periodo

10 Graficar las siguientes funciones

I) $y = Cosx + 1$
II) $y = 2Cosx - 1$

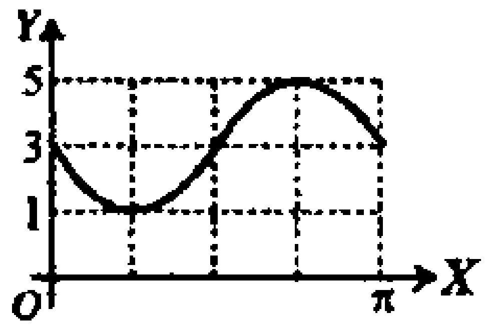
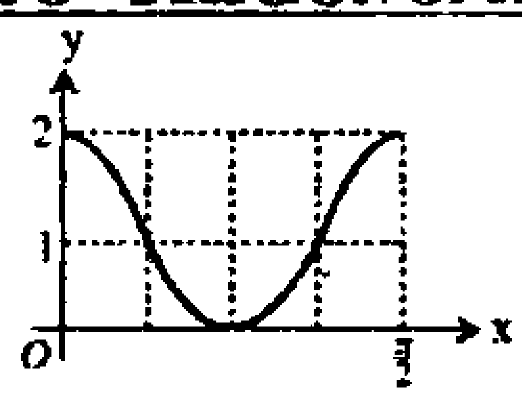
Indicando su amplitud y su periodo

11 Graficar las siguientes funciones

I) $y = 3 - 2Cos4x$
II) $y = 2 + 3Cos2x$

Indicando su amplitud y su periodo

12 Escribir la ecuación de las siguientes graficas.

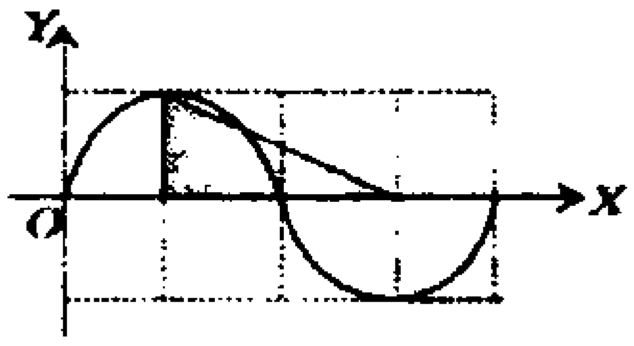



y=........ y=........

13 La ecuación de la gráfica es :

$$y = 4Sen2xCos2x$$

calcular el área del triángulo sombreado.

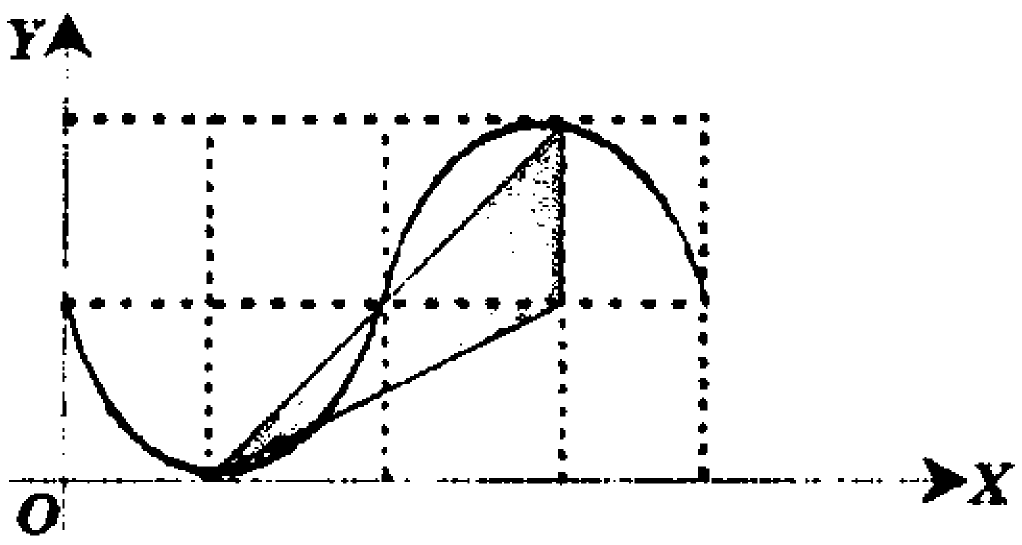


A) $\frac{\pi}{4}u^2$ B) $\frac{\pi}{8}u^2$ C) $\frac{\pi}{2}u^2$ D) πu^2 E) $2\pi u^2$

14 La ecuación de la gráfica es :

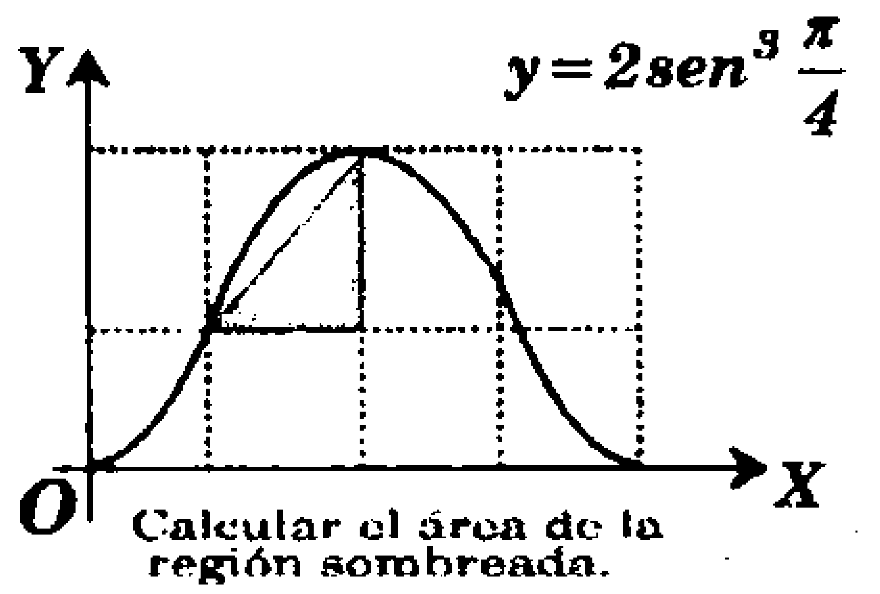
$$y=(Senx - Cosx)^2$$

Calcular el área del triángulo sombreado.



A) $\frac{\pi}{16}u^2$ B) $\frac{\pi}{8}u^2$ C) $\frac{\pi}{4}u^2$ D) $\frac{\pi}{2}u^2$ E) πu^2

15 La ecuación de la gráfica es :



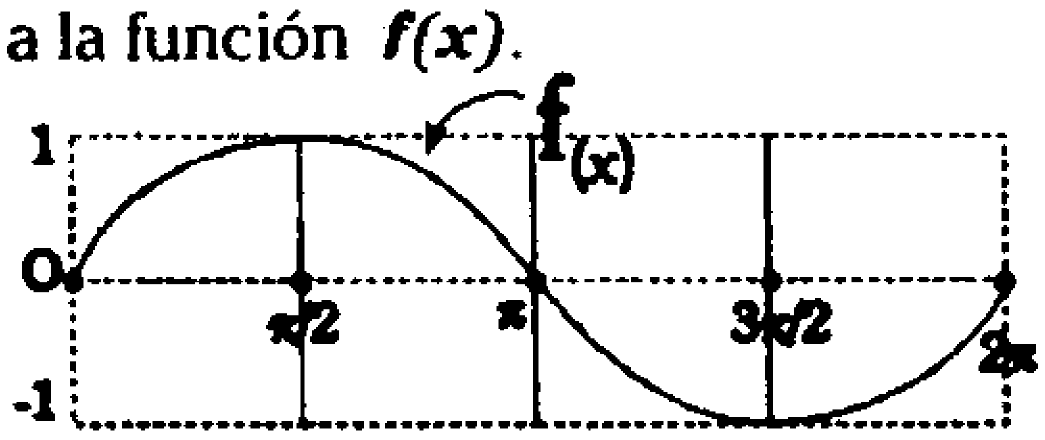
A) $\frac{\pi}{4}u^2$ B) $\frac{\pi}{2}u^2$ C) πu^2 D) $2\pi u^2$

16 Hallar el rango de *f*, si :

$$f(x)= \frac{1 + senx}{2 + senx};\ \forall\ x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$$

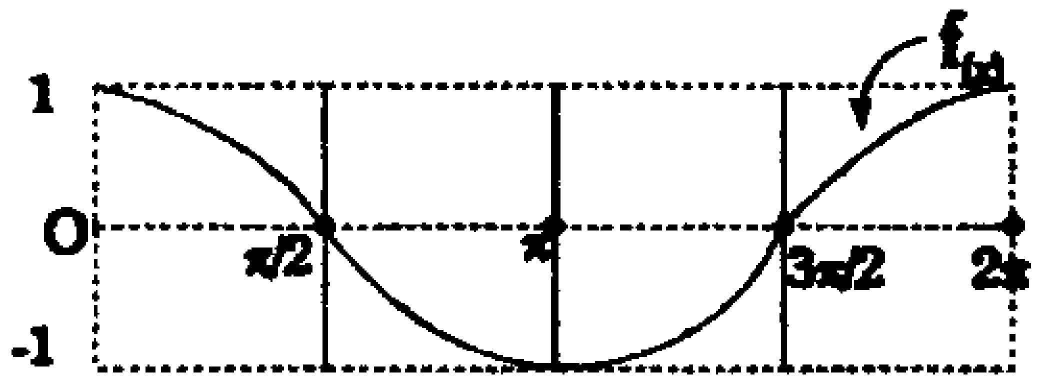
A) $\left\langle 0;\ \frac{2}{3}\right\rangle$ B) $\left[1;\ \frac{2}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle 1;\ \frac{2}{3}\right\rangle$ D) $\left\langle 0;\ \frac{2}{3}\right]$ E) $\left[0;\ \frac{2}{3}\right]$

17 La siguiente gráfica representa a la función *f(x)*.



RPTA.: ....

18 La siguiente gráfica representa a la función *f(x)*.



RPTA.: ....

19 Graficar las funciones:

$$Sen2x\ ;\ Sen3x$$

RPTA.: ....

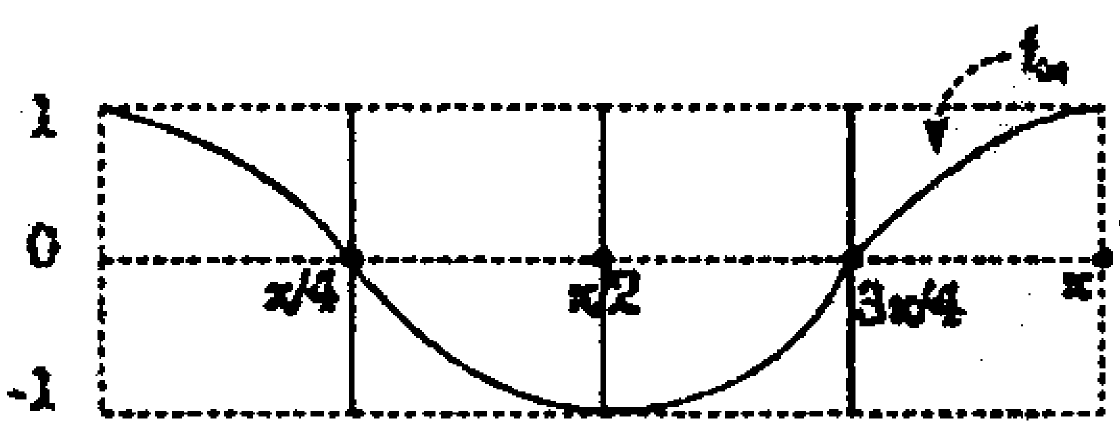
20 Graficar las funciones :

$$Cos2x\ ;\ Cos3x$$

RPTA.: ....

PRACTICA DE EJERCICIOS #2

01 La siguiente gráfica representa a la función $f_{(x)}$.

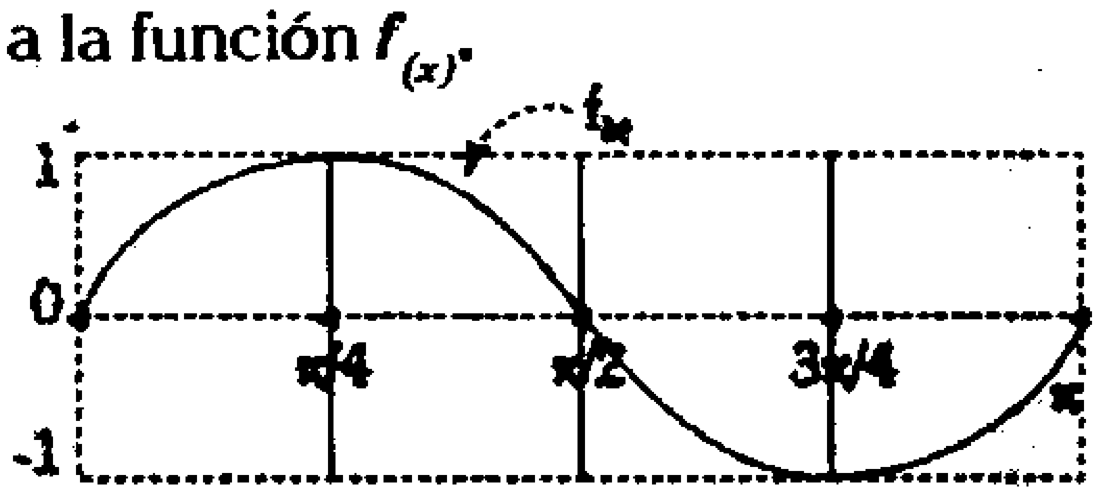


A) Cosx B) Cos2x C) Cos3x
D) Cos4x E) Cos5x

02 Si $Q(\frac{\pi}{3}\ ;\ n+1)$ pertenece al cosenoide, calcule *n*.

RPTA.: ....

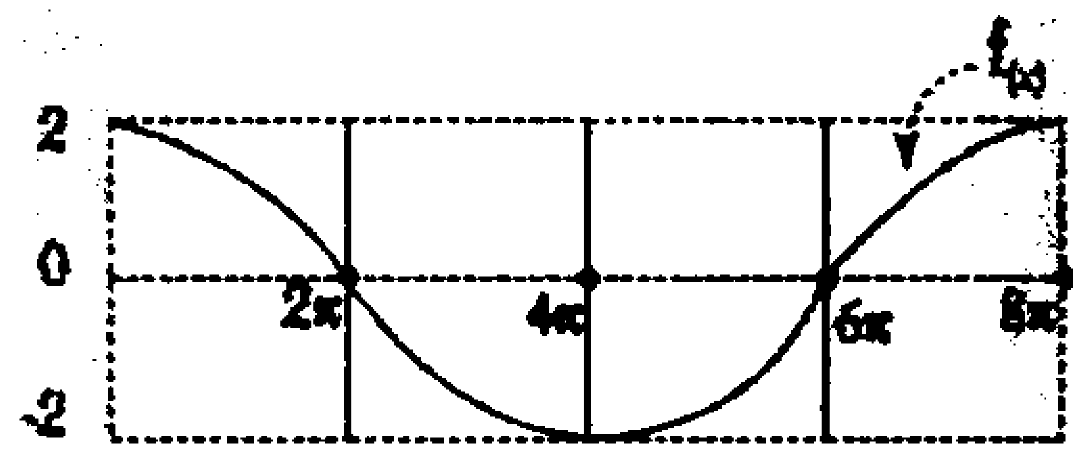
03 La siguiente gráfica representa a la función $f_{(x)}$.



A) Senx B) Sen2x C) Sen3x
D) Sen4x E) Sen5x

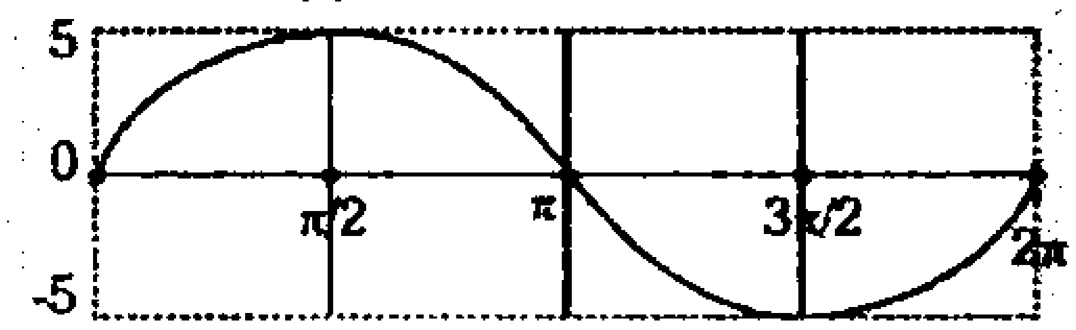
04 Si $P(\frac{\pi}{4}\ ;\ 2n + \frac{\sqrt{2}}{4})$ pertenece a la gráfica de la función *y =Senx*, calcule *n*.

05 De la siguiente gráfica, calcular el dominio y rango de la función $f_{(x)}$.



A) [0; 2π] ; [–1; 1]
B) [0; 4π] ; [–2; 2]
C) [0; 6π] ; [–2; 2]
D) [0; 8π] ; [–1; 1]
E) [0; 8π] ; [–2; 2]

06 De la gráfica, calcular el máximo y mínimo valor de la función $f_{(x)}$.



A) 5; –5 B) 4; –4 C) 3; –3
D) 2; –2 E) 1; –1

07 Si: $Cos\alpha = \frac{2n-1}{3}$, calcular el máximo valor de *n*.

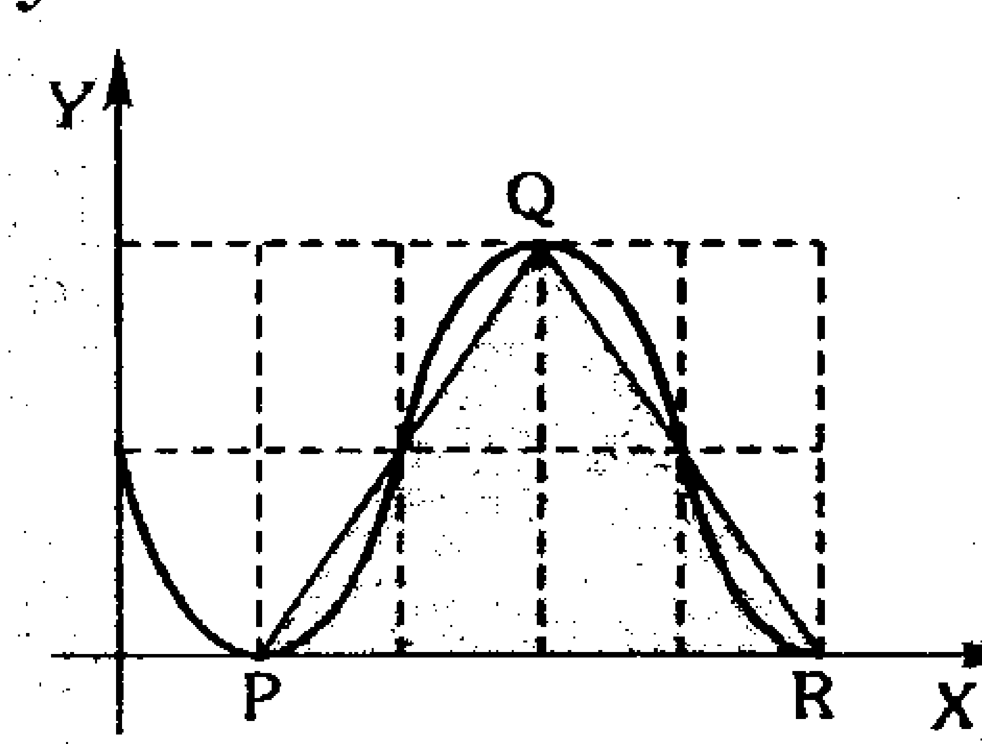
A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

08 Indique la amplitud y el período de la función: $y = 2Sen\frac{4x}{3}$

RPTA.: ....

09 Grafique la función $y = 4Sen\frac{x}{3}$ y determine la amplitud y el periodo.

10 Determine el área del triángulo sombreado *PQR*, si $y = 1 - Sen2x$



RPTA.: ....

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Cuántos puntos de intersección tienen las curvas:

$y = Senx; \quad y = Cosx$ en: $\langle -2\pi ; 2\pi \rangle$

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

02 Si el punto $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{3n-1}{2}\right)$ pertenece a la gráfica de la función: $y = Cos2x$. Calcular el valor de "*n*"

A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

03 Cuántos valores de "x" hacen posible que: $x^2 = Cosx$

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

04 Indicar el dominio de: $y = \frac{1}{1+Cosx}$; $n \in Z$

A) R B) $R - n\pi$ C) $R - \frac{n\pi}{2}$ D) $R-(2n-1)\pi$ E) $R-(n+1)\pi$

05 Hallar el dominio de la función:

$$F(x) = \sqrt{Cosx - 1}$$

A) $x = n\pi \Leftrightarrow n \in Z$ B) $n\pi \le x \le 2n\pi \Leftrightarrow n \in Z$
C) $n\pi < x < 2n\pi \Leftrightarrow n \in Z$ D) $x = 2n\pi \Leftrightarrow n \in Z$
E) $x = (2n+1)\pi \Leftrightarrow n \in Z$

06 Señale el dominio de: $y = \frac{2Senx - 1}{Senx + 1}$

A) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ B) $R - \{n\pi\}$ C) $R - \{(2n+1)\pi\}$
D) $R - \left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}\right\}$ E) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$

07 Señale el dominio de: $y = F(x) = \frac{3Sen2x + 1}{1 - Cos4x}$

A) $R - \left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$ B) $R - \left\{(4n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$ C) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$
D) $R - \{n\pi\}$ E) $R - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$

08 Señale el dominio de la función:

$$y = F(x) = 2Tg4x + 1$$

A) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$ B) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$ C) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$
D) $R - \left\{\frac{n\pi}{8}\right\}$ E) $R - \left\{\frac{n\pi}{4}\right\}$

09 Señale el dominio de la función:

$$y = F(x) = 4Ctg6x - 1$$

A) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{6}\right\}$ B) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{12}\right\}$ C) $R - \{6n\pi\}$
D) $R - \left\{\frac{n\pi}{3}\right\}$ E) $R - \left\{\frac{n\pi}{6}\right\}$

10 Señale el dominio de la función:

$$y = G(x) = 2Sec8x - 1$$

A) $R - \left\{\frac{n\pi}{6}\right\}$ B) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{16}\right\}$ C) $R - \left\{\frac{n\pi}{8}\right\}$
D) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{8}\right\}$ E) $R - \{2n\pi\}$

11 Señale el dominio de la función:

$$y = G(x) = 3Csc5x + 1$$

A) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{5}\right\}$ B) $\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{10}\right\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{5}\right\}$
D) $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{10}\right\}$ E) $\mathbb{R} - \left\{\frac{2n\pi}{5}\right\}$

12 Señale el rango de: $y = F(x) = 3Senx + 1$

A) $[-2; 3]$ B) $[-1; 5]$ C) $[-2; 4]$ D) $[-2; 5]$ E) $[-1; 4]$

13 Señale el rango de: $y = F(x) = 2Cos4x - 1$

A) $[-3; 0]$ B) $[-3; 1]$ C) $[-3; 2]$ D) $[-1; 1]$ E) $[-3; 3]$

14 Hallar el rango de la función:

$$F(x) = 8Sen^2x + 5$$

A) $[6; 7]$ B) $[8; 12]$ C) $[6; 9]$ D) $[5; 13]$ E) $[3; 10]$

15 Hallar el rango de la función:

$$F(x) = 9Cos^2x - 4$$

A) $[-3; 6]$ B) $[-1; 5]$ C) $[6; 9]$ D) $[3; 10]$ E) $[-4; 5]$

16 Calcule el mínimo valor de:

$$F(x) = Sen^2x - 3Senx + 5; \ (x \in R)$$

A) $\frac{11}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{11}{4}$ D) $\frac{8}{3}$ E) 6

17 Señale el rango de:

$$y = H(x) = Senx\ Cosx\ Cos2x$$

A) $[-1; 1]$ B) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ C) $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$
D) $\left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right]$ E) $\left[-\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right]$

18 Si *F* es función definida por:

$$F(x) = 2Sen4xCosx - Sen3x + 1$$

entonces su rango es:

A) [0; 1] B) [0; 2] C) [1; 3] D) [0; 4] E) [1; 4]

19 Señale el rango de: $G(x)=\dfrac{Sen3x+Senx}{Cosx}$

A) [–2; 2] – {0} B) [–1; 1] – {0} C) [–2; 2> – {0}
D) <–2; 2] – {0} E) <–1; 1] – {0}

20 Señale el rango de:

$$y=G(x)=\frac{Sen5x-Senx}{Sen2x}$$

A) <–2; 2> – {0} B) [–2; 2] – {0} C) [–2; 2]
D) <–2; 2] – {0} E) [–2; 2> – {0}

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) La función: $y = Senx$, es creciente en $\langle 0; \pi\rangle$

( ) La función: $y = Senx$, es decreciente en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

( ) La función: $y = Senx$, es creciente en $\left\langle \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\rangle$

A) FVF B) FFF C) FFV D) VFF E) VVF

02 Indique verdadero *(V)* o falso *(F)* según corresponda:

( ) La función: $y = Cosx$, es creciente en <0; π>
( ) La función: $y = Cosx$, es decreciente en <π; 2π>
( ) La función: $y = Cosx$, es creciente y decreciente en $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

A) FFF B) FFV C) FVF D) VFF E) VVF

03 Indicar la función de mayor amplitud:

A) $F(x) = 3Sen2x$ B) $F(x) = -4Cos2x$ C) $F(x) = -5Sen2x$
D) $F(x) = 10Cos2x$ E) $F(x) = 6Sen2x$

04 Calcular "*n*", si el periodo de: $y=3Sen2nx$ es igual al de: $y = 2Cos6x$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

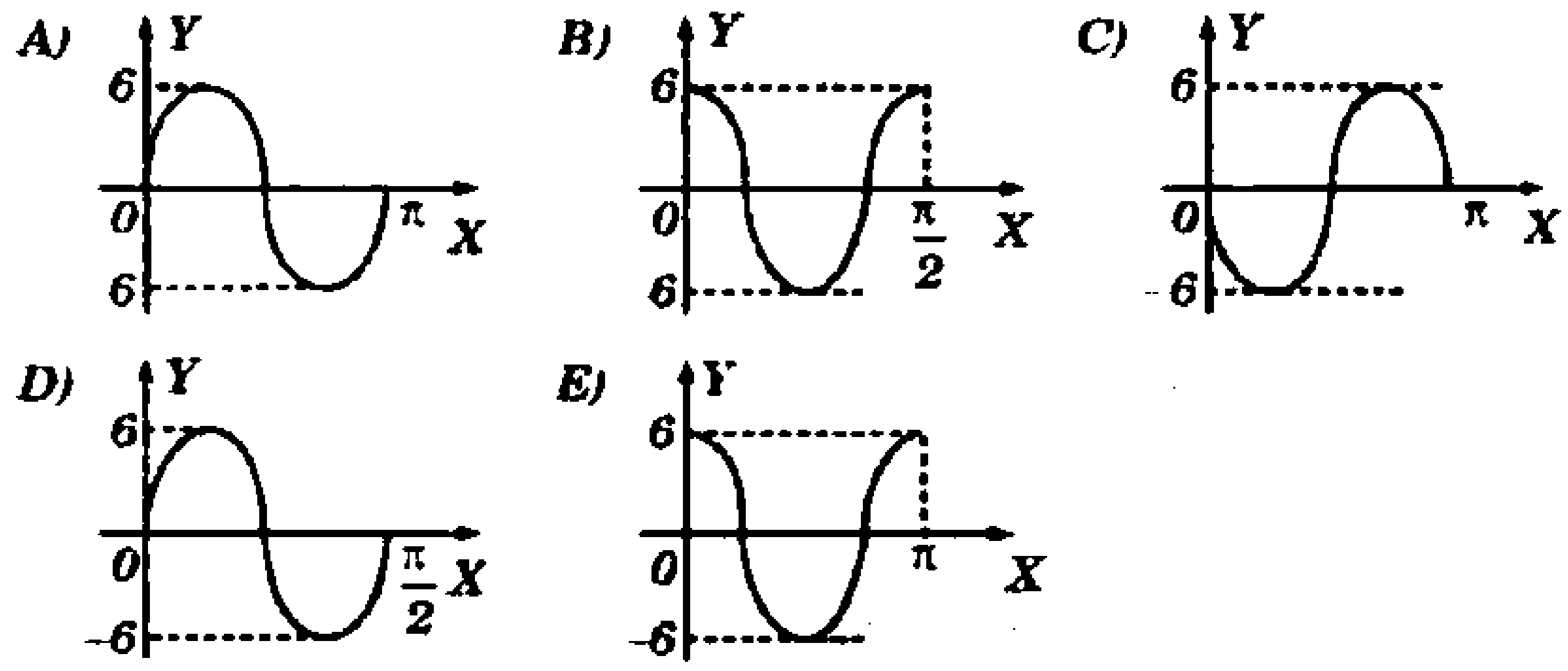
05 Sea T_1 el periodo de la función:

$F(x) = Senax$, y T_2 el periodo de la función: $G(x) = Cos8x$. Calcular el valor de:

$$a^2+3a, \text{ si: } T_1+T_2=\frac{5\pi}{4}$$

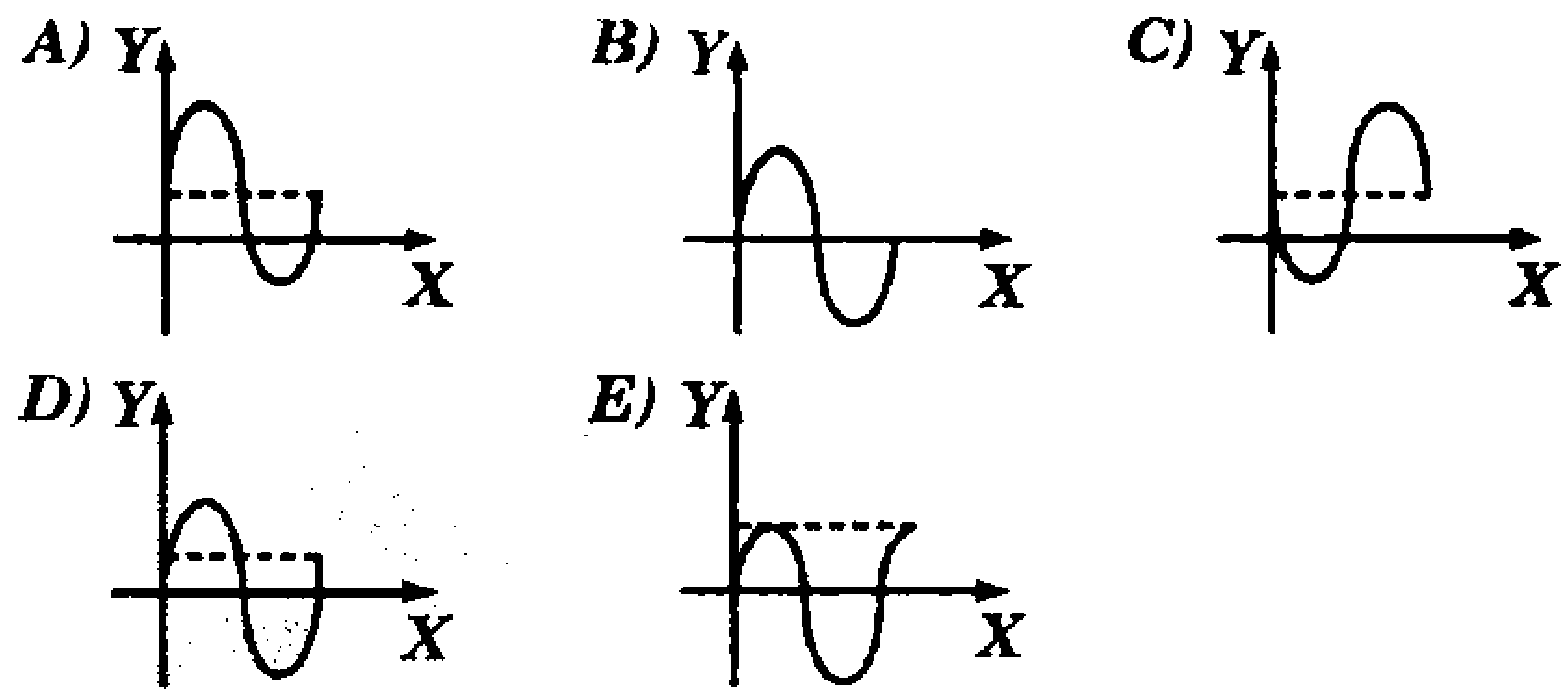
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

06 Graficar: $y = 6Sen4x$

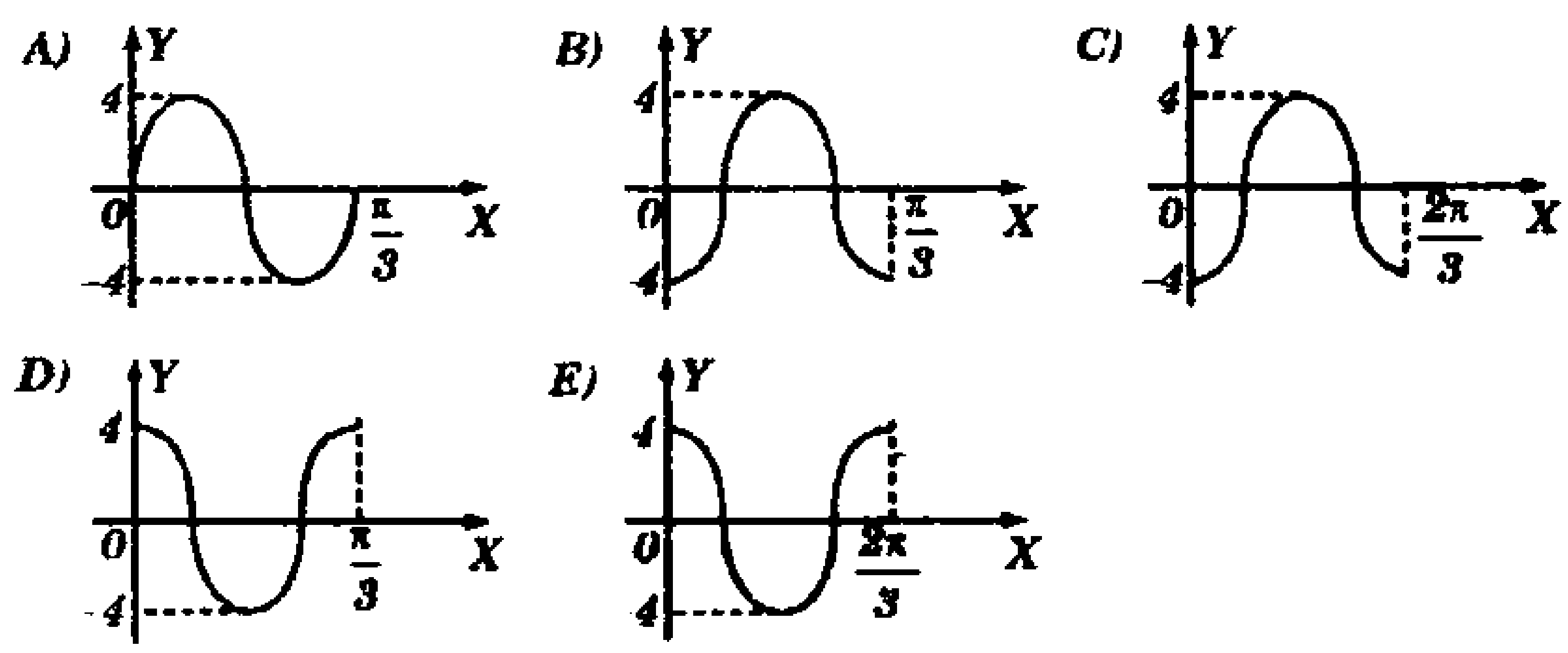


07 Grafique en $[0; 2\pi]$:

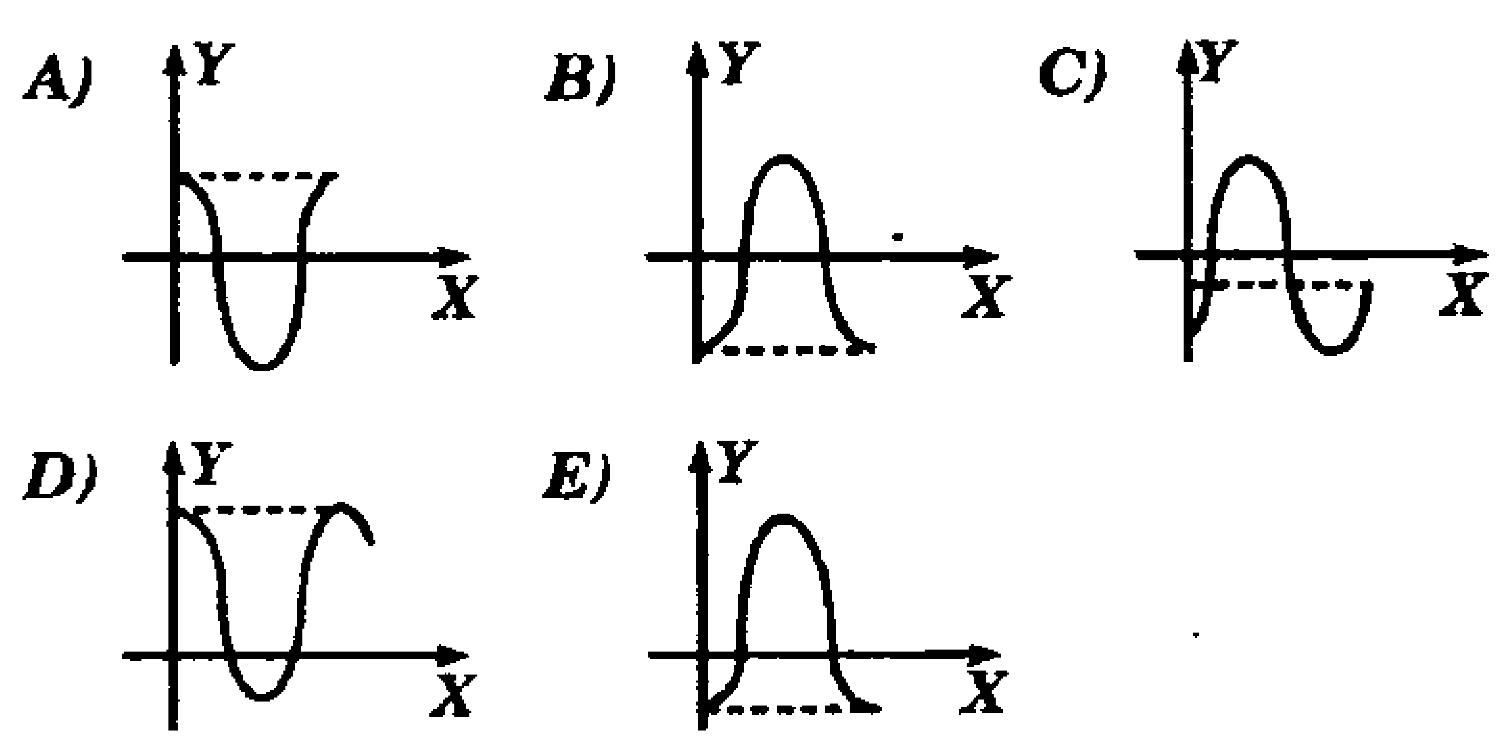
$$y = F(x) = 2Senx + 1$$



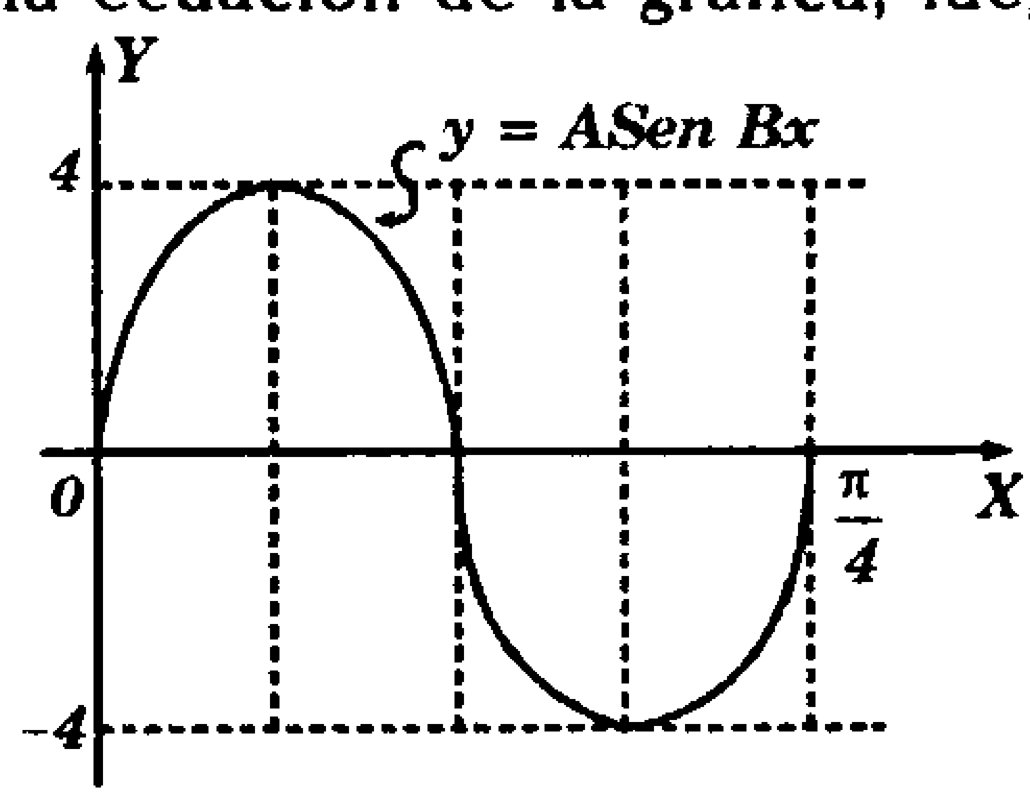
08 Graficar: $y = 4Cos6x$



09 Grafique en $[0; 2\pi]$: $y = H(x) = 3Cosx - 1$

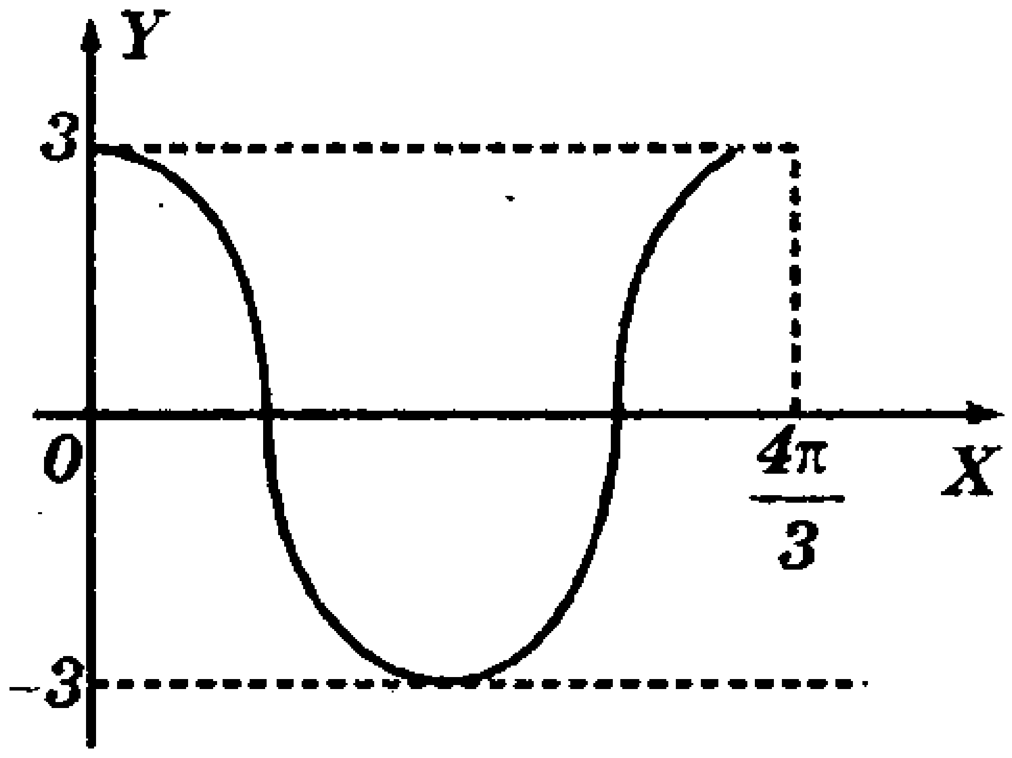


10 Diga Ud. la ecuación de la gráfica, luego calcular *(A+B)*



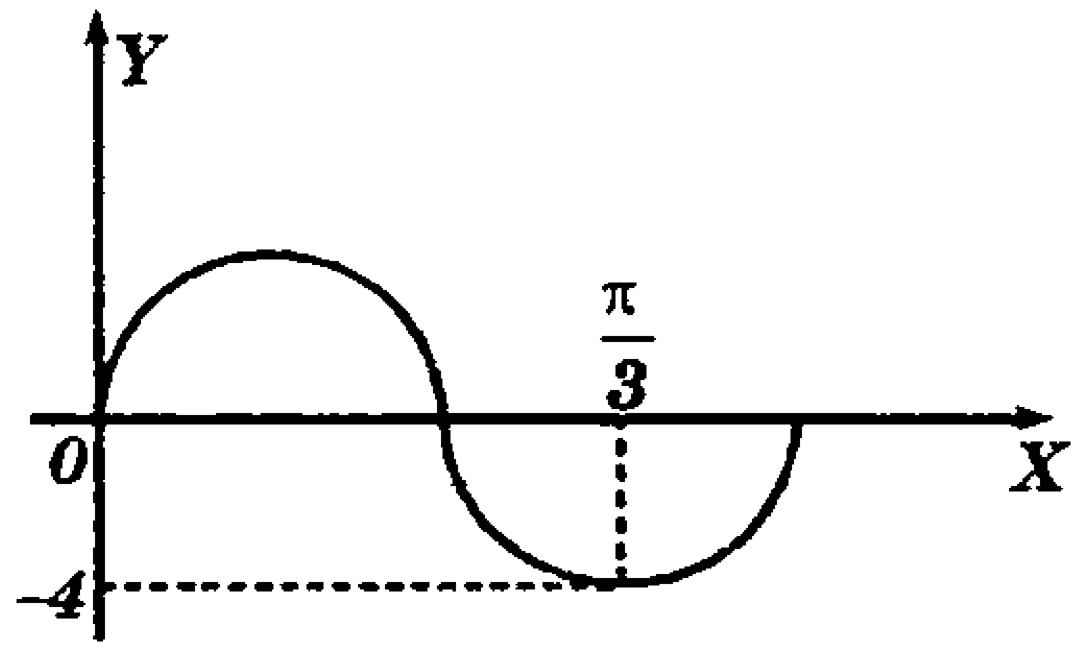
A) 10 *B) 12* *C) 14* *D) 16* *E) 18*

(11) Sea $F(x) = ACosBx$ una función cuyo gráfico se muestra en la figura adjunta. Calcular: $A + B$



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

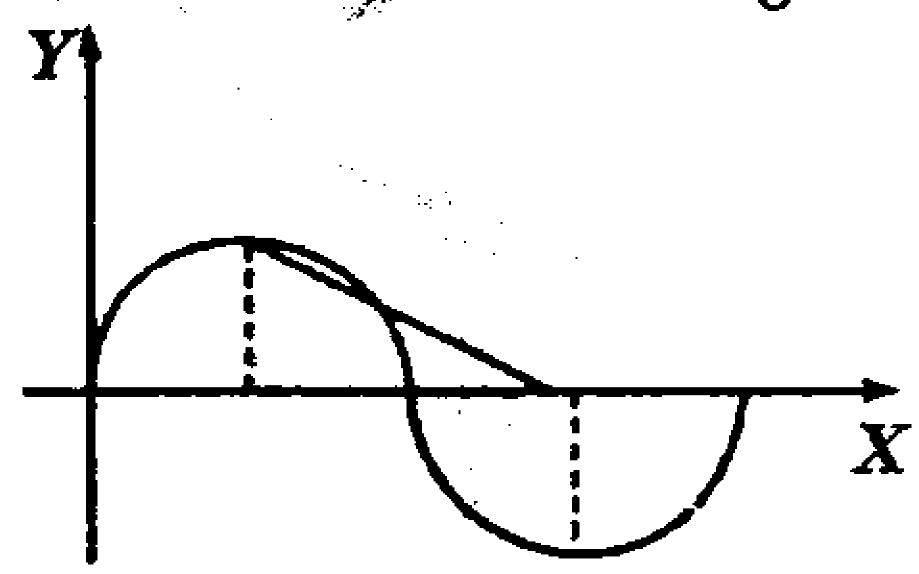
(12) Del gráfico mostrado, calcule ab, si la función es de la forma: $y = aSen(bx)$



A) 12 *B) 18* *C) 20* *D) 14* *E) 16*

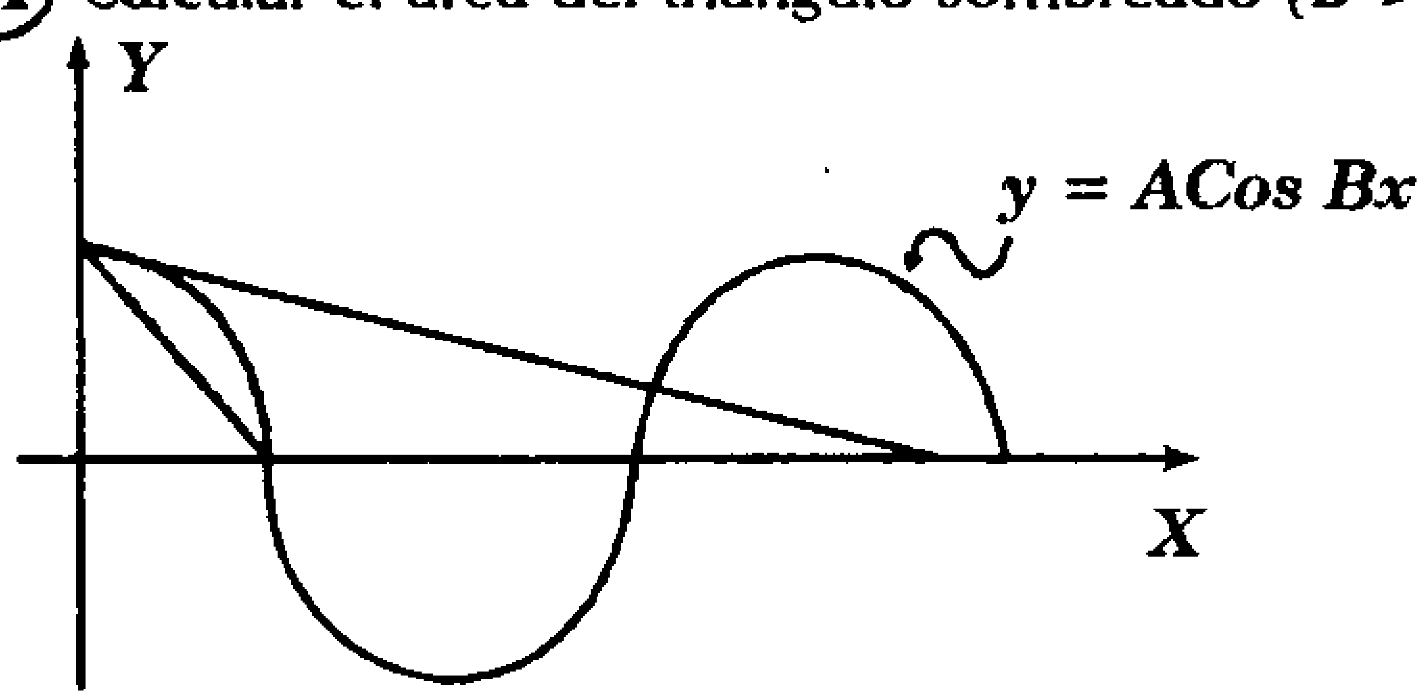
(13) La ecuación de la gráfica es:

$y = 2Sen4x$. Calcular el área del triángulo sombreado.



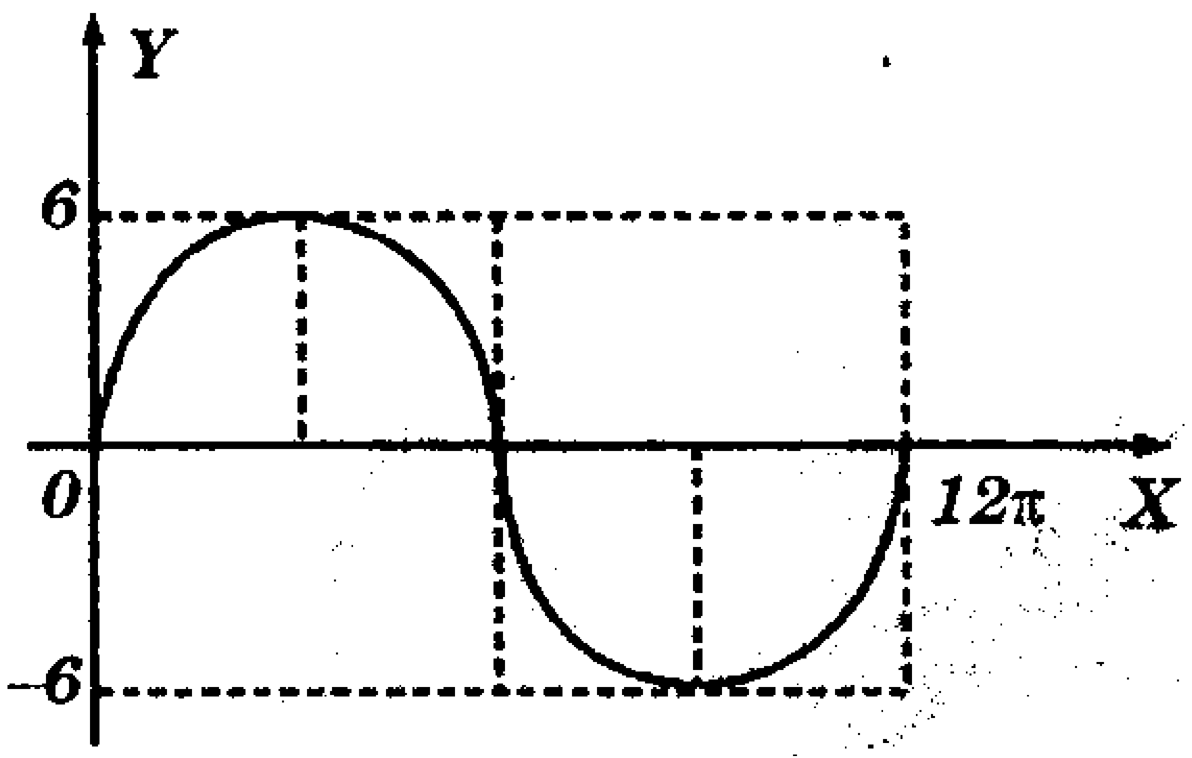
A) $\frac{\pi}{4}u^2$ B) $\frac{\pi}{8}u^2$ C) $\frac{\pi}{2}u^2$ D) πu^2 E) $2\pi u^2$

(14) Calcular el área del triángulo sombreado $(B > 0)$



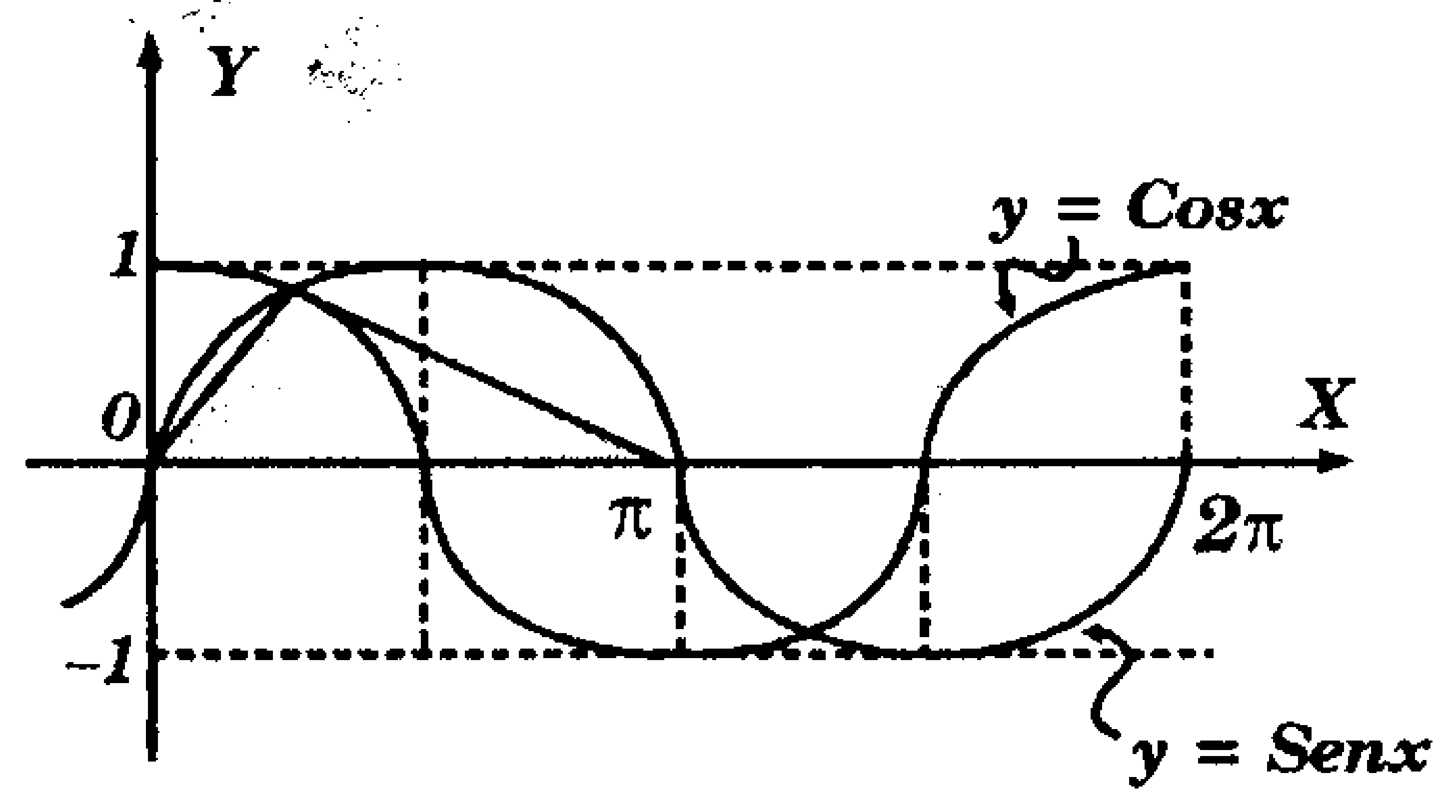
A) $\frac{2B\pi}{A}$ B) $\frac{2A\pi}{B}$ C) $\frac{A\pi}{B}$

(15) Calcular el área de la región sombreada.



A) $36\pi u^2$ B) $25\pi u^2$ C) $16\pi u^2$ D) $9\pi u^2$ E) $4\pi u^2$

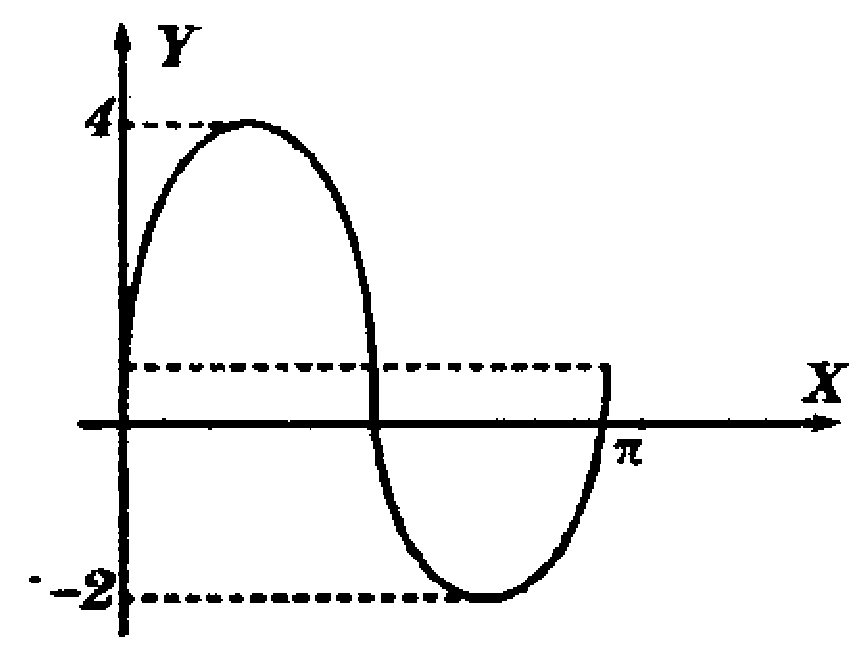
(16) Del gráfico, calcular el área de la región sombreada.



A) $\pi\sqrt{2}$ B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

(17) Halle la ecuación de la curva mostrada, si es de la forma: $y = aSenbx + c$

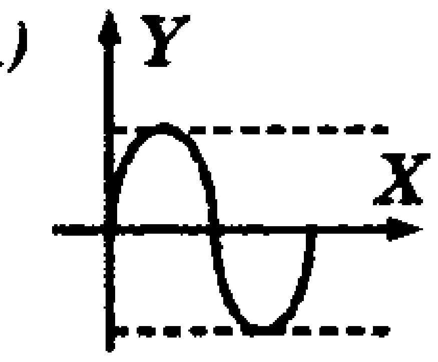
A) $y = 2Sen2x + 1$
B) $y = 3Sen2x - 1$
C) $y = 3Sen2x + 1$
D) $y = Sen2x - 1$
E) $y = Sen2x + 2$



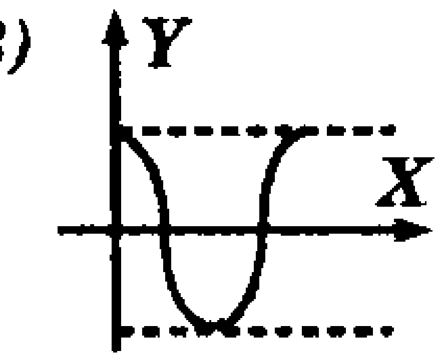
(18) Grafique en $[0; 2\pi]$, la función:

$$y = Tgx\ Cosx$$

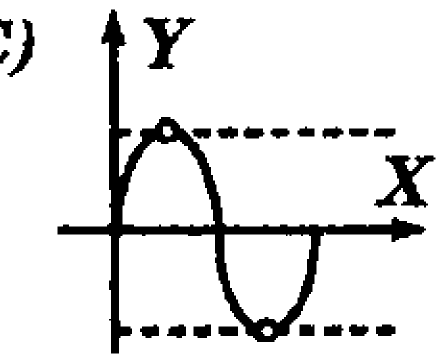
A)



B)



C)



CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)E	2)E	3)C	4)D	5)D	6)D	7)A	8)A	9)E	10)B
11)C	12)C	13)B	14)D	15)E	16)C	17)C	18)*	19)A	20)A

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)B	3)D	4)C	5)D	6)D	7)A	8)D	9)A	10)B
11)E	12)E	13)A	14)C	15)A	16)E	17)C	18)C	19)E	20)C

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

CAPITULO 127

OBJETIVOS :

Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:

* *Reconocer una función inversa.*
* *Definir una función inversa.*
* *Comprender el significado de expresiones de la forma arcsenx.*
* *Conocer el dominio y el rango de funciones que tienen por regla de correspondencia las expresiones arcsenx, arccosx, ... etc*
* *Aplicar las propiedades de la función inversa.*

INTRODUCCIÓN

*En el capítulo anterior se realizó el estudio de las funciones trigonométricas directas (seno, coseno ..... etc) Por ejemplo se observó que el valor de una función trigonométrica de un número real (**y=senx**) depende del valor numérico del arco (**x**), es decir: si $x \in R$ los valores de **y** pertenecen al intervalo cerrado de -1 a 1 .*

*Recíprocamente el valor del arco (**x**) depende del valor de la función trigonométrica de dicho arco (y). Por ejemplo si **senx=3/4**, diremos que **x** es un arco cuyo valor del seno es **3/4**.*

*Utilizando la notación siguiente diremos que **x=arcsen 3/4**. En general se definirá la función inversa del seno (llamada arco seno) cuya regla de correspondencia será: **y=arcsenx**, donde los valores de $x \in [-1;1]$ además los valores de $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.*

MAS EJEMPLOS :

$Sen\theta = \frac{2}{3}$ entonces se cumple: $\theta = ArcSen\frac{2}{3}$

y se lee : θ es un arco o ángulo cuyo seno es *2/3*. Lo mismo ocurre para cualquier otra razón trigonométrica.

En general si se tiene que : $\boxed{R.T(\theta)=a}$

Se cumple que : $\boxed{\theta = ArcR.T.(a)}$, lo que significa que estas dos relaciones son equivalentes entre sí , es decir : $R.T.(\theta) = a <> \theta = Arc\ R.T.(a)$

Donde "a" es un valor que define al arco

EJEMPLO :

* $Cos\beta = 5/7 <> \beta = ArcCos5/7$
* $\phi = ArcTg\sqrt{2} <> Tg\phi = \sqrt{2}$
* $Sen\theta = \frac{1}{4} <> \theta = ArcSen\frac{1}{4}$
* $Ctg\alpha = 6 <> \alpha = Arc\ Ctg6$
* $\alpha = ArcSen\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$
* $\theta = ArcTg(-1) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$
* $\phi = ArcCsc1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$
* $\alpha = ArcCos\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
* $\beta = ArcCtg(-\sqrt{3}) \Rightarrow \beta = \frac{5\pi}{6}$
* $\phi = ArcSec\ 1 \Rightarrow \theta = 0$

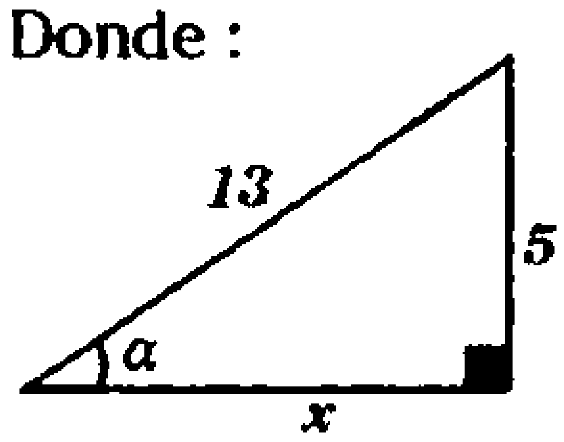
EJERCICIO 1 :

Calcular : $E = Cos(ArcSen5/13)$

RESOLUCIÓN :

$$E = Cos\underbrace{\left(ArcSen\frac{5}{13}\right)}_{\alpha} \Rightarrow E = Cos\alpha$$

Donde :



$\alpha = ArcSen5/13 <> Sen\alpha = 5/13$

* Por Pitágoras : $x = 12$

$$\Rightarrow E = Cos\alpha = 12/13$$

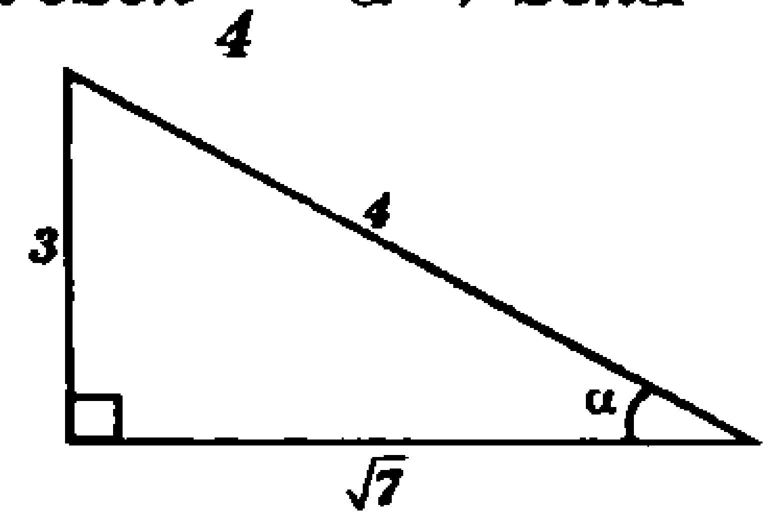
EJERCICIO 2 :

Calcule:

$$\sqrt{7}Tan\left(ArcSen\frac{3}{4}\right) + \sqrt{5}Csc\left(ArcCos\frac{2}{3}\right)$$

RESOLUCIÓN

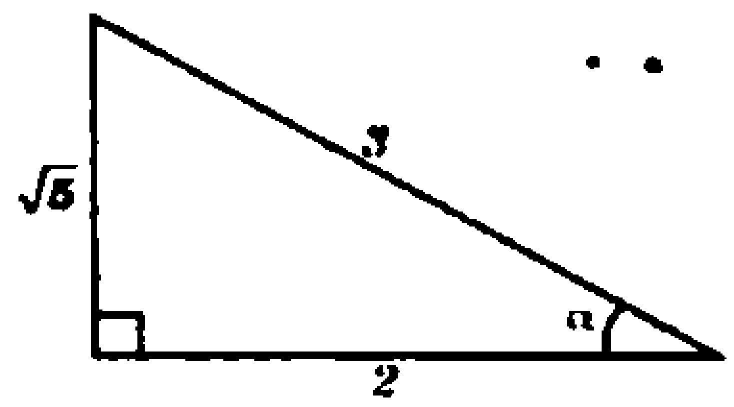
Haciendo: $ArcSen\frac{3}{4} = \alpha \Rightarrow Sen\alpha = \frac{3}{4}$



Luego se forma un triángulo rectángulo :

$$\sqrt{7}Tan\left(ArcSen\frac{3}{4}\right)=\sqrt{7}Tan\alpha=\sqrt{7}\times\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)=3$$

Por otro lado, $ArcCos\frac{2}{3}=\beta\Rightarrow Cos\beta=\frac{2}{3}$



Entonces : $\sqrt{5}Csc\left(ArcCos\frac{2}{3}\right)=\sqrt{5}Csc\beta=\sqrt{5}\times\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)=3$

Por lo tanto: $3+3=6$

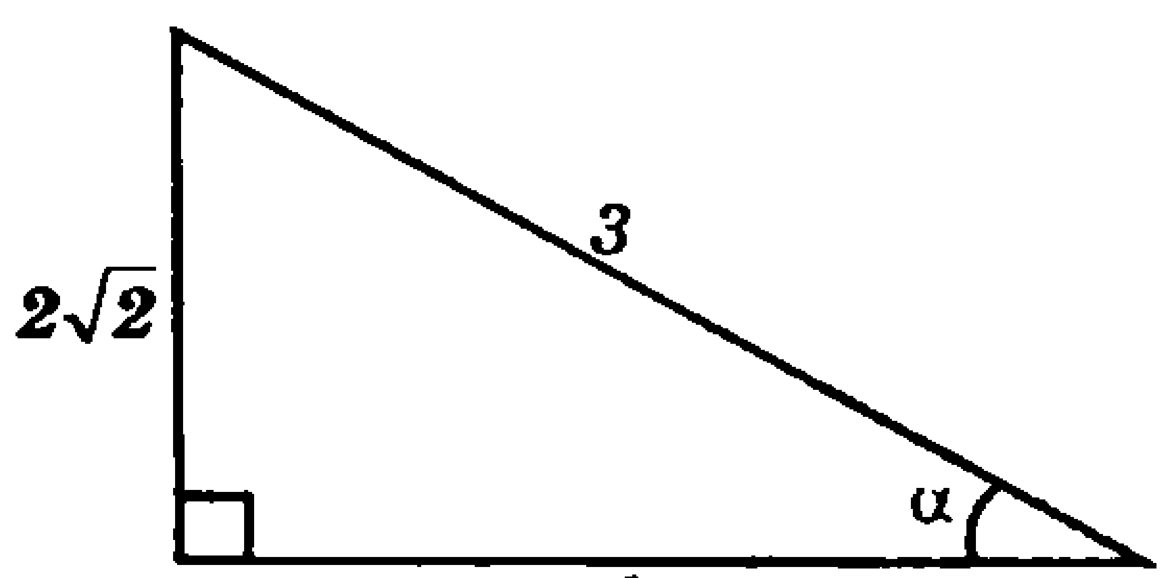
EJERCICIO 3 :

Halle «x» en: $ArcSec(3)=ArcSen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{ArcSec(3)}_{\alpha}=\underbrace{ArcSen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}_{\alpha}$$

Se observa que: $ArcSec(3)=\alpha\Rightarrow Sec\alpha=3$



$ArcSen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\alpha\Rightarrow Sen\alpha=\frac{x}{\sqrt{2}}$

$Si: Sec\alpha=3\Rightarrow Sen\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Igualandose tiene: $\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{x}{\sqrt{2}}\Rightarrow 4=3x\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

FUNCIÓN ARCO SENO

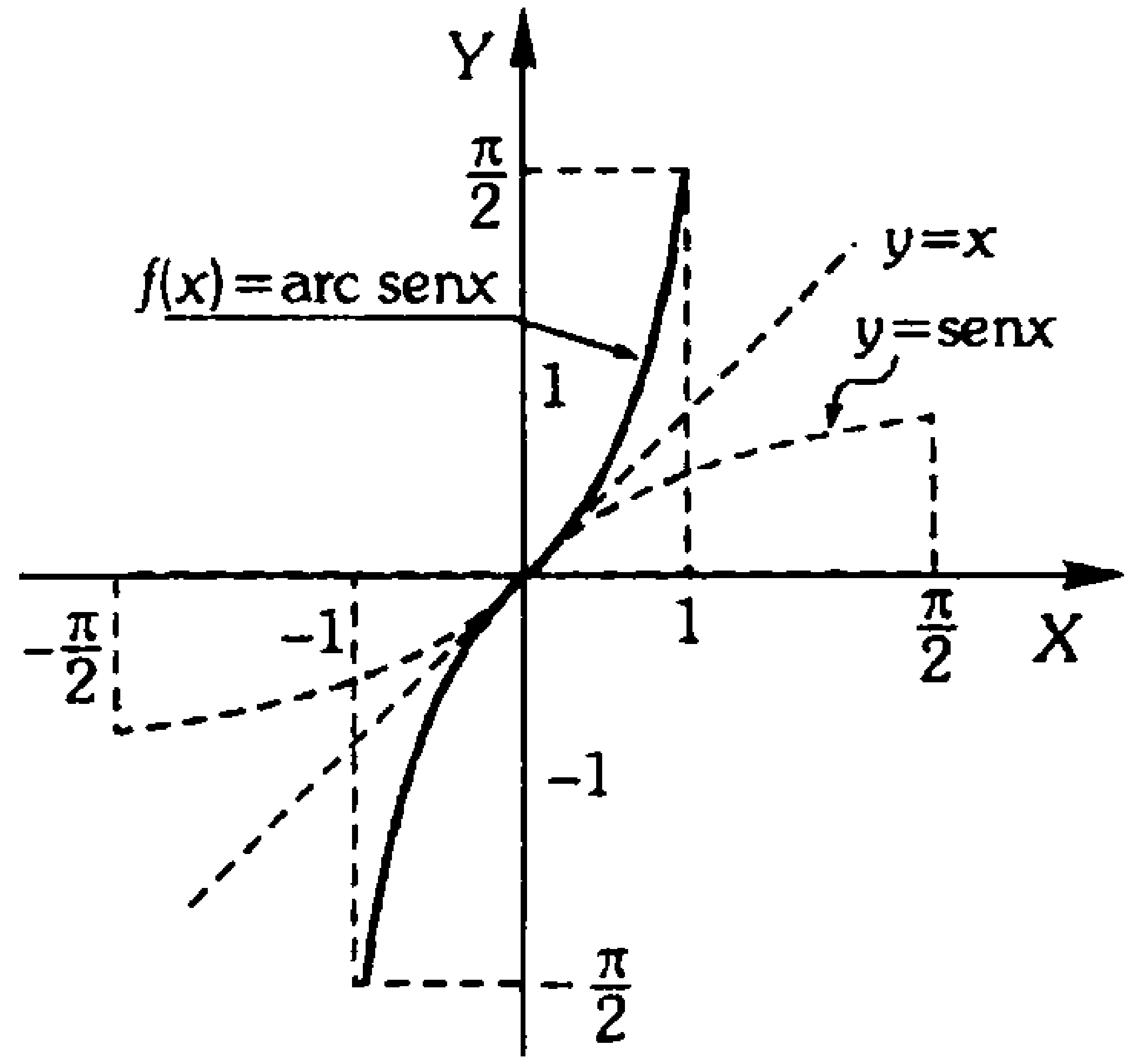
A partir de la función $y=Senx$ dado que $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ obtenemos su función inversa considerando el siguiente procedimiento:

- Despejando "x" en términos de "y" :

$$x=arc\,Seny \quad ó \quad x=Sen^{-1}y$$

- Cambiando la variable "x" por "y" ∧ "y" por "x" se tiene: $x=arc\,Seny$ ó $x=Sen^{-1}y$ (se lee: "y" es un arco cuyo seno es "x").

Obteniéndose así la función inversa definida con regla de correspondencia ***f(x)=arc Senx.***



Del gráfico observamos que la función:

- Dom $f\in[-1;1]$
- Ran $f\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
- Es inyectiva
- Es impar
- No es periódica
- La función es creciente en todo su dominio.

DEFINICIONES :

I) Si :

$$Sen\theta=x\Rightarrow\theta=ArcSenx\;;\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],x\in[-1;1]$$

* Esto es : $-\frac{\pi}{2}\le ArcSenx\le\frac{\pi}{2}\;;\;-1\le x\le 1$

* Nota : $ArcSen(-x)=-ArcSenx$

EJEMPLOS :

* $ArcSen\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ * $ArcSen\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$

* $ArcSen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-arcSen\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$

* $ArcSen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-arcSen\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$

* $ArcSen\,2=\nexists$

Complete :

* $ArcSen\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ =............................
* $ArcSen\ 1$ =............................
* $ArcSen(-2)$ =............................
* $ArcSen(-1)$ =............................
* $ArcSen\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ =............................

FUNCIÓN ARC COSENO

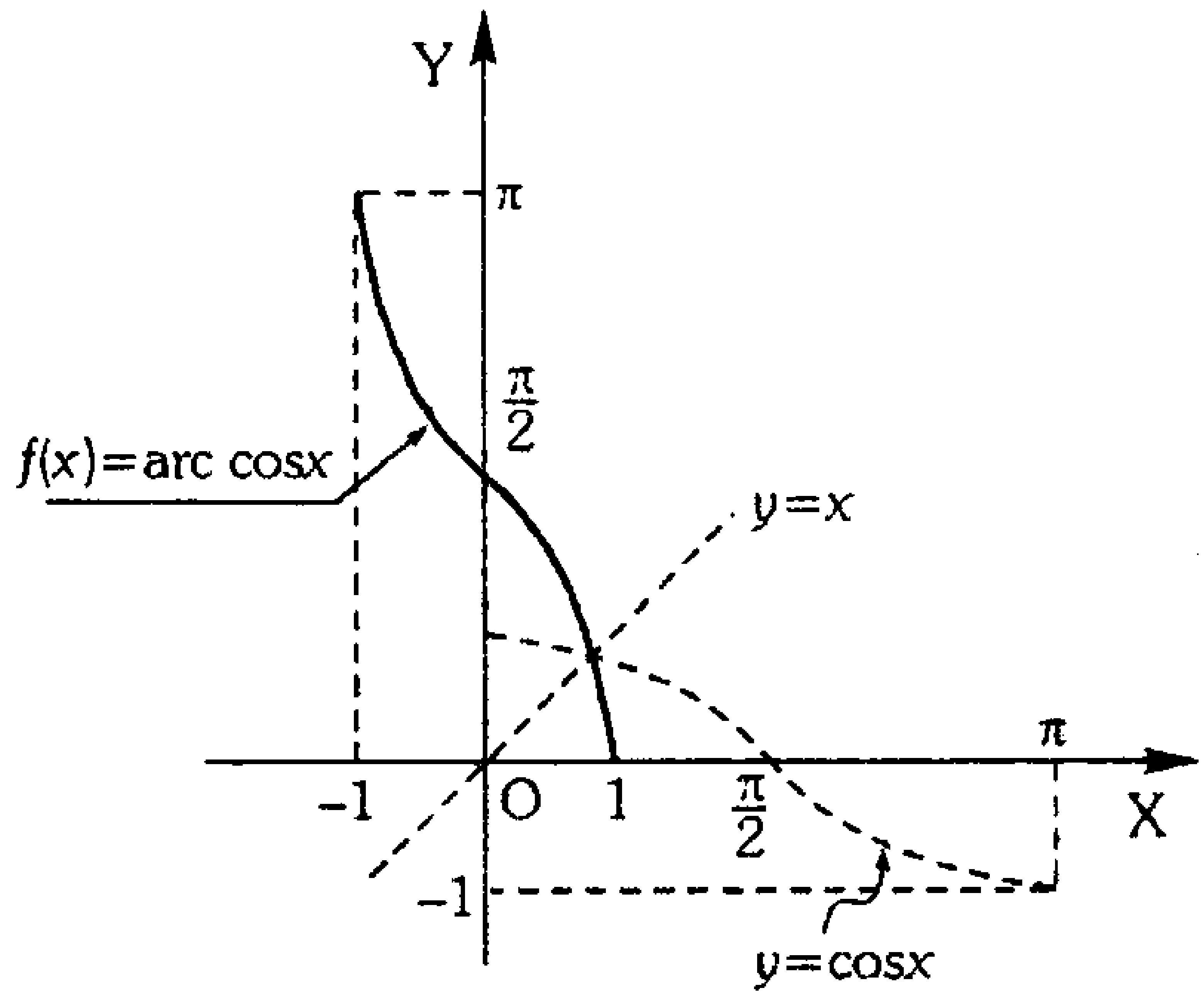
A partir de la función $y = Cosx$ dado que $0 \le x \le \pi$ obtenemos su función inversa considerando que:

$x = arc\ Cosy$ ó $x = Cos^{-1}y$, además, cambiando la variable "x" por "y" . "y" por "x", obteniéndose:

$x = arc\ Cosy$ ó $x = Cos^{-1}y$ (se lee: "y" es un arco cuyo coseno es "x").

Obteniéndose la regla de correspondencia:

$f(x) = arc\ Cosx$



Del gráfico observamos que:

- Dom $f \in [-1;\ 1]$ • Ran $f \subset [0;\ \pi]$
- Es univalente • No es par, ni impar.
- No es periódica
- La función es decreciente en todo su dominio.

II) Si :

$$Cos\theta = x \Rightarrow \theta = ArcCosx;\ \theta \in [0\ ;\ \pi],\ x \in [-1;1]$$

* Esto es : $0 \le ArcCosx \le \pi\ ;\ -1 \le x \le 1$

* Nota : $ArcCos(-x) = -ArcCosx + \pi$

EJEMPLOS :

* $ArcCos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ *$ArcCos1 = 0$ * $ArcCos3 = \nexists$
* $ArcCos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -ArcCos\dfrac{1}{2} + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$
* $ArcCos(-1) = -ArcCos1 + \pi = -0 + \pi = \pi$

Complete :

* $ArcCos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ =..........................
* $ArcCos\dfrac{1}{2}$ =..........................
* $ArcCos\sqrt{2}$ =..........................
* $ArcCos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ =..........................
* $ArcCos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ =..........................

III) Si :

$$Tan\theta = x \Rightarrow \theta = ArcTanx\ ;\theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle \wedge x \in \mathbb{R}$$

* Esto es :
$-\dfrac{\pi}{2} < ArcTanx < \dfrac{\pi}{2}\ ;-\infty < x < +\infty$

* Nota : $ArcTan(-x) = -ArcTanx$

EJEMPLOS :

* $ArcTan\ \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$
* $ArcTan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -ArcTan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$

Complete :

* $ArcTan1$ =....................................
* $ArcTan(-\sqrt{3})$ =..............................
* $ArcTan0$ =....................................

PROPIEDADES :

1) $ArcSenx + ArcCosx = \dfrac{\pi}{2};\ \forall x \in [-1\ ;1]$

2) $ArcTanx + ArcCotx = \dfrac{\pi}{2}\ ;\forall x \in \mathbb{R}$

3) $ArcSecx + ArcCscx = \dfrac{\pi}{2};$
$\forall x \in \langle -\infty\ ;-1] \cup [1\ ;+\infty\rangle$

EJEMPLOS :

* $ArcSen\dfrac{1}{3} + ArcCos\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ ya que : $\dfrac{1}{3} \in [-1;1]$

* $ArcTan\ 2 + ArcCot2 = \frac{\pi}{2}$; ya que : $2 \in R$

* $ArcSec\frac{1}{4} + ArcCsc\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$; .

  ya que: $\frac{1}{4} \in <-\infty; -1] \cup [1; +\infty>$

* $ArcSen\left(-\frac{2}{3}\right) + ArcCos\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$;

  ya que: $-\frac{2}{3} \in [-1; 1]$

* $arcSec(5) + arc\ Csc(5) = \frac{\pi}{2}$

* $arcTan(2) + arcCot(2) = \frac{\pi}{2}$

* $arc\ Sen\left(\frac{3}{4}\right) + arc\ Cos\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{arcTanx + arcTan\,y = arcTan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi}$$

Si : $xy < 1 \Rightarrow k = 0$
Si : $xy > 1;\ x > 0 \Rightarrow k = 1$
Si : $xy > 1;\ x < 0 \Rightarrow k = -1$

EJEMPLO:

$$arcTan2 + arcTan4 = arctg\left(\frac{2+4}{1-2\times 4}\right)$$

$$= arcTan\left(\frac{8}{-7}\right) + \pi$$

$2\times 4 > 1;\ 2 > 0 \Rightarrow k = 1$

$$\Rightarrow arcTan2 + arcTan4 = \pi - arcTan\left(\frac{8}{7}\right)$$

VALORES PRINCIPALES

PARA LOS ARCOS

Función	Dominio	Rango
$y = ArcSenx$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = ArcCosx$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = ArcTgx$	R	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
$y = ArcCtgx$	R	$]0; \pi[$
$y = ArcSecx$	$R - [-1; 1]$	$[0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$y = ArcCscx$	$R - [-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

* Una función f se llama inyectiva ó univalente $\forall x_1;\ x_2 \in$ Dominio F.

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Calcular :

$$\theta = ArcSen\frac{1}{2} + ArcCos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A) $\frac{\pi}{12}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{12}$ D) $\frac{7\pi}{12}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\theta = \underbrace{ArcSen\frac{1}{2}}_{\alpha} + \underbrace{ArcCos\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\beta} = \alpha + \beta$$

* Hacemos :

$$ArcSen\frac{1}{2} = \alpha$$

$\Rightarrow$ "α es un arco cuyo Seno vale $\frac{1}{2}$"
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$ .....(30°)

$$ArcCos\frac{\sqrt{2}}{2} = \beta$$

$\Rightarrow$ "β es un arco cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$"

$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$ ....(45°)

* Luego :

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{12}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 2 :

Calcular :

$$\theta = ArcSen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + ArcCos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\theta = \underbrace{Arcsen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\alpha} + \underbrace{ArcCos\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\beta} = \alpha + \beta$$

* Hacemos :

$$\alpha = ArcSen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -ArcSen\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\beta = ArcCos\left(-\frac{1}{2}\right) = -ArcCos\frac{1}{2} + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

* Luego :

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 3 :

Calcular :

$$\theta = ArcCos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - ArcTan(-\sqrt{3})$$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{7\pi}{6}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) π

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

$$\theta = \underbrace{ArcCos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\alpha} - \underbrace{ArcTan(-\sqrt{3})}_{\beta} = \alpha - \beta$$

* Hacemos :

$$\alpha = ArcCos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -ArcCos\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$\beta = ArcTan(-\sqrt{3}) = -ArcTan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

* Luego :

$$\theta = \alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}$$

RPTA : B

PROBLEMA 4 :

Calcular : $J = Tan\left(ArcCos\frac{1}{5}\right)$

A) $\sqrt{6}$ B) 5 C) $\sqrt{5}$ D) $2\sqrt{6}$ E) 6

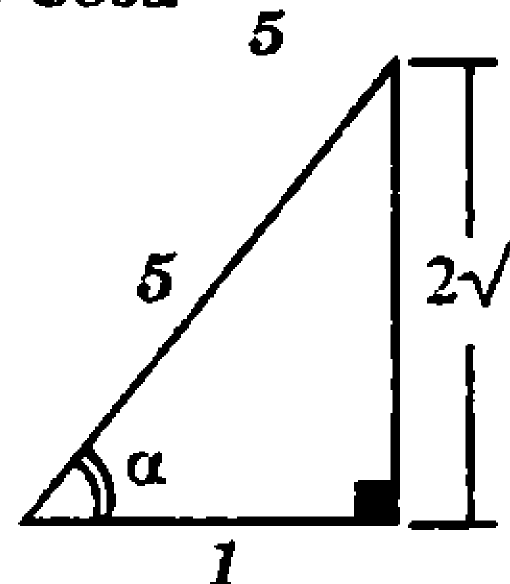
RESOLUCIÓN :

* En la igualdad , por lo general se recomienda hacer cambios de variable ; así :

$$J = Tan\left(\underbrace{arcCos\frac{1}{5}}_{\alpha}\right) \Rightarrow J = Tan\alpha$$

* Pero :

$$\alpha = ArcCos\frac{1}{5} \Rightarrow Cos\alpha = \frac{1}{5}$$



* Como piden :

$J = Tan\alpha \Rightarrow J = 2\sqrt{6}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 5 :

Calcular :

$$J = Tan\left(ArcSen\frac{2}{3}\right) \times Cot\left(ArcCos\frac{1}{3}\right)$$

A) $\frac{2\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $3\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

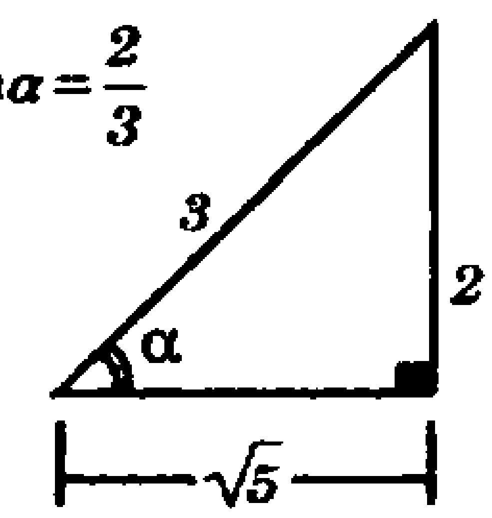
* Tenemos :

$$J = Tan\left(\underbrace{ArcSen\frac{2}{3}}_{\alpha}\right) \times Cot\left(\underbrace{ArcCos\frac{1}{3}}_{\beta}\right)$$

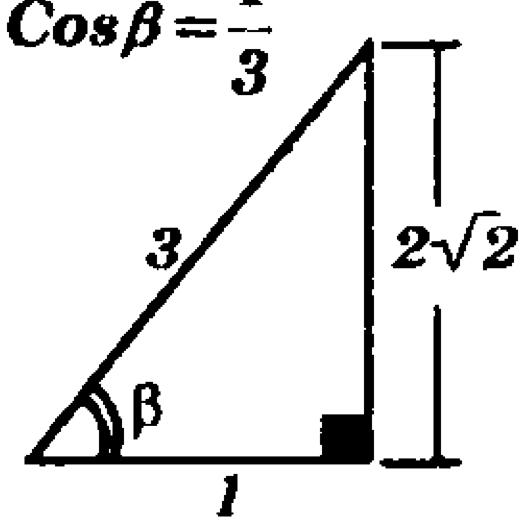
$$= Tan\alpha \times Cot\beta$$

* El cambio :

$$\alpha = ArcSen\frac{2}{3} \Rightarrow Sen\alpha = \frac{2}{3}$$



$$\beta = ArcCos\ \frac{1}{3} \Rightarrow Cos\beta = \frac{1}{3}$$



* Luego :

$$J = Tan\alpha\ Cot\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow J = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 6 :

Calcular :

$$B = Sen\left(ArcTan\frac{1}{3} + ArcTan\frac{1}{2}\right)$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Tenemos :

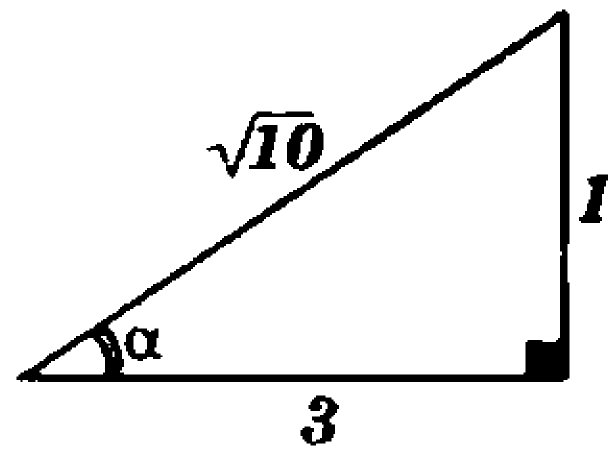
$$B = Sen\left(\underbrace{ArcTan\frac{1}{3}}_{\alpha} + \underbrace{ArcTan\frac{1}{2}}_{\beta}\right)$$

$$= Sen(\alpha + \beta)$$

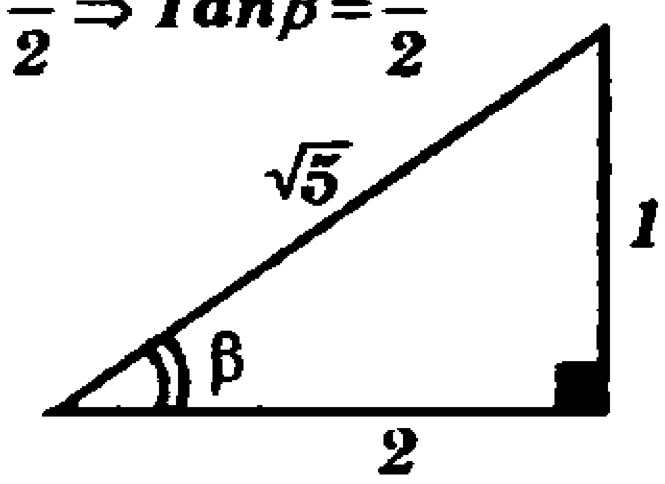
$$\Rightarrow B = sen\alpha \times cos\beta + sen\beta \times cos\alpha \ ...(I)$$

* Pero :

$$\alpha = ArcTan\frac{1}{3} \Rightarrow Tan\alpha = \frac{1}{3}$$



$$\beta = ArcTan\frac{1}{2} \Rightarrow Tan\beta = \frac{1}{2}$$



* En (I) :

$$B = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{50}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}} \Rightarrow B = \frac{5}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow J = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 7 :

Calcular : $F = Cos\left(2\ ArcCos\frac{1}{4}\right)$

A) $-\frac{1}{8}$ B) $-\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $-\frac{7}{8}$

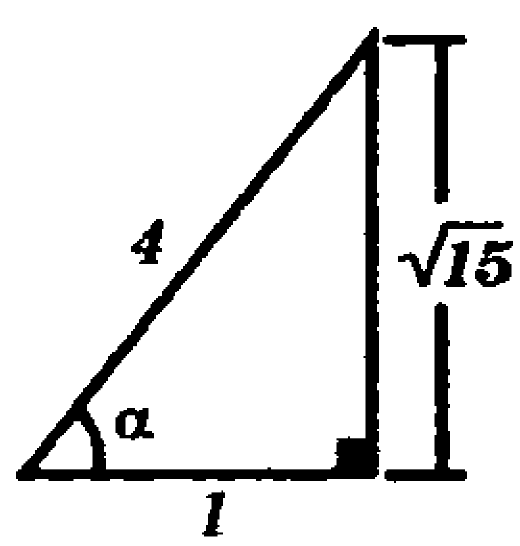
RESOLUCIÓN :

* Tenemos : $\boxed{Cos2x = Cos^2x - Sen^2x}$

$$F = Cos\left(2\underbrace{ArcCos\frac{1}{4}}_{\alpha}\right) = Cos2\alpha = Cos^2\alpha - Sen^2\alpha$$

* Pero :

$$cos\ \alpha = \frac{1}{4}$$



* Luego :

$$F = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{14}{16} \Rightarrow F = -\frac{7}{8}$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 8 :

Reducir :

$$H = Sen(3ArcSenx) + 4Sen^3(ArcSenx)$$

A) x B) $2x$ C) $3x$ D) $4x$ E) $6x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$H = Sen3\underbrace{(ArcSenx)}_{a} + 4Sen^3\underbrace{(ArcSenx)}_{a}$$

$$\Rightarrow H = sen3a + 4sen^3a$$

* Hacemos :

$$a = ArcSenx \Rightarrow Sena = x$$

* Luego :

$$H = \underline{Sen3a} + 4Sen^3a;$$

pero : $Sen3a = 3Sena - 4Sen^3a$

$$H = 3Sena - 4Sen^3a + 4Sen^3a$$

* Reduciendo :

$$H = 3\underbrace{Sena}_{x} \Rightarrow H = 3x$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 9 :

Calcular :

$$P = Sen^2\left(ArcSen\frac{1}{3}\right) + Tan(ArcTan4)$$

A) $\frac{37}{9}$ B) $\frac{9}{37}$ C) $\frac{3}{37}$ D) $\frac{5}{33}$ E) $\frac{33}{5}$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión:

$$P = Sen^2\left(ArcSen\frac{1}{3}\right) + Tan(ArcTan4)$$

$$\Rightarrow P = \left[Sen\left(ArcSen\frac{1}{3}\right)\right]^2 + Tan(ArcTan4)$$

* No olvide que :

$$\left.\begin{matrix} Sen\left(ArcSen\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ Tan(ArcTan4) = 4 \end{matrix}\right\} \text{propiedad}$$

* Luego :

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 = \frac{1}{9} + 4 \Rightarrow P = \frac{37}{9}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 10 :

Reducir :

$$Q = \frac{Sec^2(ArcTanx) - Csc^2(ArcCoty)}{Sen(ArcSenx) - Cos(ArcCosy)}$$

A) x B) y C) $x + y$ D) $x - y$ E) $2xy$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$Q = \frac{Sec^2(ArcTanx) - Csc^2(ArcCot\ y)}{Sen(ArcSenx) - Cos(ArcCosy)}$$

* Observe que :

$$Sen(ArcSenx) = x$$

$$Cos(ArcCosy) = y$$

* También :

• $Sec^2(ArcTanx)=1+Tan^2(ArcTanx)=1+x^2$
• $Csc^2(ArcCoty)=1+Cot^2(ArcCoty)=1+y^2$
* Luego :

$$Q=\frac{1+x^2-(1+y^2)}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x-y}$$

$$\Rightarrow Q=\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}\Rightarrow Q=x+y$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 11 :

Reducir :

$$M=Sen(ArcSenx+2ArcCosx)\quad ;x\in <0;1>$$

A) x B) 1 C) 0 D) $-x$ E) $1-x$

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$M=Sen(ArcSenx+2Arccosx)$

$\Rightarrow M=Sen(\underbrace{ArcSenx+ArcCosx}_{\frac{\pi}{2}}+ArcCosx)$

* Note que :

$$ArcSenx+ArcCos\,x=\frac{\pi}{2}$$

* Luego :

$$M=Sen\left(\frac{\pi}{2}+ArcCosx\right)$$

$$=Cos(ArcCos\,x)\Rightarrow M=x$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 12 :

Si : $ArcSenx+ArcSeny=\frac{2\pi}{3}$

Cacular : $\theta=ArcCosx+ArcCosy$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) π D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{\pi}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$$ArcSenx+ArcSeny=\frac{2\pi}{3}$$
$$ArcCosx+ArcCosy=\theta$$

* Sumando miembro a miembro :

$$\underbrace{ArcSenx+ArcCosx}_{\frac{\pi}{2}}+\underbrace{ArcSeny+ArcCosy}_{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}+\theta$$

* Quería :

$$\pi=\frac{2\pi}{3}+\theta\Rightarrow\theta=\pi-\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

RPTA: "A"

PROBLEMA 13 :

Calcular "x" , si :

$$ArcSenx=ArcCosx$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$ArcSenx=ArcCosx=\alpha\begin{cases}\alpha=ArcSenx & Sen\alpha=x\\ \alpha=ArcCosx & Cos\alpha=x\end{cases}$

* Pero tendríamos :

$$Sen\alpha=Cos\alpha \text{ Y } \alpha+\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

* Es decir : $x=sen\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 :

Calcular "x" , si :

$$ArcSenx=2ArcCosx$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN :

* Del dato :

$$ArcSenx=2ArcCosx$$

* Sabemos que :

$$\underbrace{ArcSenx}_{2ArcCosx}+ArcCosx=\frac{\pi}{2}$$

* Quedaría :

$$3ArcCosx=\frac{\pi}{2}\Rightarrow ArcCosx=\frac{\pi}{6}$$

* Luego :

$$x=Cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

RPTA : "B"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

(01) Determine:

$$\theta=arc\,Sen\frac{\sqrt{3}}{2}+arc\,Cos\frac{1}{2}$$

RPTA.: ....

(02) Determine

$$\alpha=arc\,Tan1+arc\,Sen\frac{\sqrt{2}}{2}$$

RPTA.: ....

(03) Calcule:

$$R=2(arc\,Cos\,0-arc\,Sec2)$$

RPTA.: ....

(04) Calcule:

$$N=3\,Csc\left[arc\,Cos\left(Sen\left(arcTan\sqrt{3}\right)\right)\right]$$

RPTA.: ....

(05) Simplifique:

$$G=Tan\left[arcTan\left[Sen\left[arc\,Cos\left[Tan\left[arcTan\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right]\right]\right]\right]^2$$

RPTA.: ....

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

(01) Calcular:

$$M=Sen\left(ArcSen\frac{\sqrt{3}}{2}-ArcTg1\right)$$

A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ C) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

(02) Calcular:

$$N=Sen(ArcTg\sqrt{3}+ArcCsc2)$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

(03) Calcular: $F=Tg\left(2ArcTg\frac{1}{3}\right)$

A) 4/3 B) 3/4 C) 3/5 D) 3/7 E) 1/5

(04) Calcular:

$$D=Tg\left(ArcTg\frac{3}{5}+Arcsen\frac{3}{5}\right)$$

A) 25/3 B) 21/3 C) 23/11
D) 22/5 E) 27/11

(05) Calcular:

$$F=Cos\left(ArcSen\frac{4}{5}+ArcCos\frac{12}{13}\right)$$

A) 11/3 B) 16/65 C) 15/7
D) 17/8 E) 16/25

(06) Calcular:

$$N=Cos\left(ArcSen\frac{2}{3}-2ArcSen\frac{1}{3}\right)$$

A) $\frac{7\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{27}$ B) $\frac{3\sqrt{2}-11\sqrt{3}}{6}$

C) $\frac{7\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{8}$ D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

E) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

07 Calcular:

$$P = ArcCos\frac{3}{\sqrt{10}} + ArcCos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

A) $\pi/3$ B) $\pi/5$ C) $\pi/2$ D) $\pi/4$ E) π

08 Calcular:

$$P = Sen\left(2ArcTg\frac{2}{3}\right)$$

A) 15/6 B) 13/8 C) 12/13
D) 15/7 E) 8/3

09 Calcular:

$$C = Cos\left(3ArcCos\frac{1}{3}\right)$$

A) -25/6 B) 22/7 C) -23/27
D) 25/4 E) 28/9

10 Calcular:

$$R = Tg\left(\frac{1}{2}ArcCos\frac{1}{3}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

11 Calcular:

$$F = Cos\left(4ArcSen\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

A) 1/5 B) – 2/5 C) – 7/9
D) – 1/3 E) – 3/11

12 Calcular:

$$F = Sec(2ArcTg2)$$

A) – 1/5 B) – 5/3 C) – 1/3
D) – 1/7 E) – 3/8

13 Calcular:

$$A = Tg(3ArcCtg3)$$

A) 5/6 B) 12/5 C) 13/12
D) 13/5 E) 13/9

14 Determine el valor numérico de:

$$N = Sen(ArcTg(-\sqrt{3}) + ArcSen1)$$

A) 1/4 B) –1/4 C) 1/2 D) –1/2 E) 0

15 Calcule:

$$M = Tg\left[\frac{\pi}{2} - ArcCos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$$

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

16 Determinar el valor de :

$$P = Sen\left[ArcTg\frac{3}{4} + ArcCos\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$$

A) $\frac{12\sqrt{7}-3}{40}$ B) $\frac{12\sqrt{7}}{39}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{40}$

D) $\frac{12\sqrt{7}}{40}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{10}$

17 Resolver:

$$ArcCtgx + ArcCtg2x = \frac{3\pi}{4}$$

A) $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$ B) $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$ C) $\frac{\sqrt{17}+3}{8}$

D) $\frac{\sqrt{17}\ \ 3}{8}$ E) $\frac{\sqrt{17}+9}{4}$

18 Resuelva:

$$ArcSenx - 2ArcCosx = \frac{\pi}{4}$$

A) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ C) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

D) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ E) 5

19 Resuelva:

$$ArcCos\left(x\sqrt{7}\right) + ArcCosx = \frac{\pi}{2}$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ E) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

20 De la ecuación , calcule el menor valor de x :

$$ArcTgx + 2ArcTg(2x) = ArcTg(7x)$$

A) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ B) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ C) 0

D) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ E) $-\frac{\sqrt{23}}{6}$

TAREA DOMICILIARIA

01 Calcular : $ArcSen1 + ArcTan1$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{5\pi}{2}$ D) $\frac{5\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

02 Calcular : $Sen\left(ArcSen\frac{1}{3}\right)$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) 2 D) 0,6 E) $0,\widehat{3}$

03 Calcular : $Sen\left[ArcCos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$

04 Calcular : $2ArcSec2 - ArcSec\sqrt{2}$

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{3\pi}{5}$

05 Calcular: $3ArcSen\frac{1}{2} - 2ArcCos\frac{1}{2}$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $-\frac{\pi}{6}$ D) 1 E) π

06 Calcular: $Cos\,[\,Arc\,Cot(1)]$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

07 Calcular :

$$Cos\left[ArcSen\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{\sqrt{8}}{3}$

08 Calcule :

$$Cos\left[4\left(ArcSen\frac{1}{2}\right)\right] - Sen\left(3ArcCos\frac{1}{2}\right)$$

A) -½ B) ½ C) 0 D) –3/2 E) 3/2

09 Halle el valor de :

$$Sen(A\,rcTan2)$$

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{5}/5$ C) $2\sqrt{5}/5$
D) $3\sqrt{10}/10$ E) $2\sqrt{5}/5$

10 Calcule :

$$Sen\left\{ArcCos\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} - ArcCos\frac{m}{1+m^2}\right\}$$

A) $\frac{m+1}{m^2+1}$ B) $\frac{m^2-1}{m^2+1}$ D) $\frac{m-1}{m^2+1}$

C) $\frac{m^2}{m^2+1}$ E) $\frac{2m}{m^2-1}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)A	2)E	3)B	4)E	5)B	6)A	7)D	8)C	9)C	10)D
11)C	12)B	13)E	14)C	15)D	16)A	17)A	18)B	19)C	20)C
1)A	2)E	3)D	4)C	5)E	6)C	7)E	8)A	9)C	10)B

RETO :

Se dan ***98*** puntos sobre una circunferencia , Lenin y Joan juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre sí.

El juego termina cuando los ***98*** puntos han sido usados como extremo de un segmento al menos una vez.

El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si Joan inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

A) Lenin B) Joan
C) Mary D) Joana
E) ninguno

OBJETIVOS :

- Reconocer una ecuación trigonométrica básica.
- Resolver ecuaciones trigonométricas básicas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas utilizando las expresiones de solución general.
- Resolver ecuaciones trigonométricas utilizando identidades trigonométricas.
- Transformar una ecuación no básica en una ecuación básica.

INTRODUCCION :

El estudio de la trigonometría se remonta a la época de Babilonia, y gran parte de los fundamentos de trigonometría fueron desarrollados por los matemáticos de la Antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes.

El primer uso de la función seno aparece en el *Sulba Sutras* escrito en India del siglo VIII al VI a. C. Las funciones trigonométricas fueron estudiadas por Hiparco de Nicea (180-125 a. C.), Aryabhata (476-550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulugh Beg (Siglo XIV), Madhava (ca. 1400), Rheticus, y el alumno de éste, Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum* (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas «Fórmulas de Euler».

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA

Una ecuación se llama TRIGONOMÉTRICA si ella contiene la incógnita "x" solo bajo los operadores trigonométricos

EJEMPLOS :

- $Senx = Cosx$
- $Tanx - Cot2x = secx$
- $Sen\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{2}$
- $Tan2x = 3x - 1$

NOTA :

La ecuación $Tan2x = 3x - 1$ no se llama trigonométrica, porque en ésta la incógnita "x" se encuentra no solo bajo el operador *Tan*, si no también sin otro operador trigonométrico.

¿CÓMO RECONOCER UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA?

En una ecuación trigonométrica se verifica que los arcos o ángulos de la forma x, ax ó $(ax + b)$ se encuentran afectados siempre de algún operador trigonométrico, como ***"sen, cos, tg"***, etc.

EJEMPLOS:

i) $sen\,x + cos\,2x = 1$ .... Sí es ecuación trigonométrica.

ii) $x^2 + cosx = 2$ .... No es ecuación trigonométrica (porque x^2 no está afectado por ningún operador trigonométrico).

iii) $tg^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 = tg\,x$ .... Si es ecuación trigonométrica.

iv) $sen^2x + cos^2x = 1$ .... Es identidad, ya que la igualdad se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$

v) $sen(cos\,x) - x = 0$ .... No es ecuación trigonométrica.

La mayor parte de este capítulo está abocado a resolver ecuaciones trigonométricas. Para esto, partimos de la ecuación trigonométrica elemental.

Es de la forma: $\boxed{FT\ (ax + b) = N}$

donde a , b y "N" son constantes reales y x es la variable o incógnita; además $a \neq 0$ y "N" debe tomar valores correspondientes a la FT (por ejemplo, si FT fuese el operador seno, entonces $N \in [-1;\ 1]$).

A continuación se presentan ejemplos de ecuaciones trigonométricas elementales:

$$sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad cos\,3x = 0\ ;\quad tg\,3x = -\sqrt{3}$$

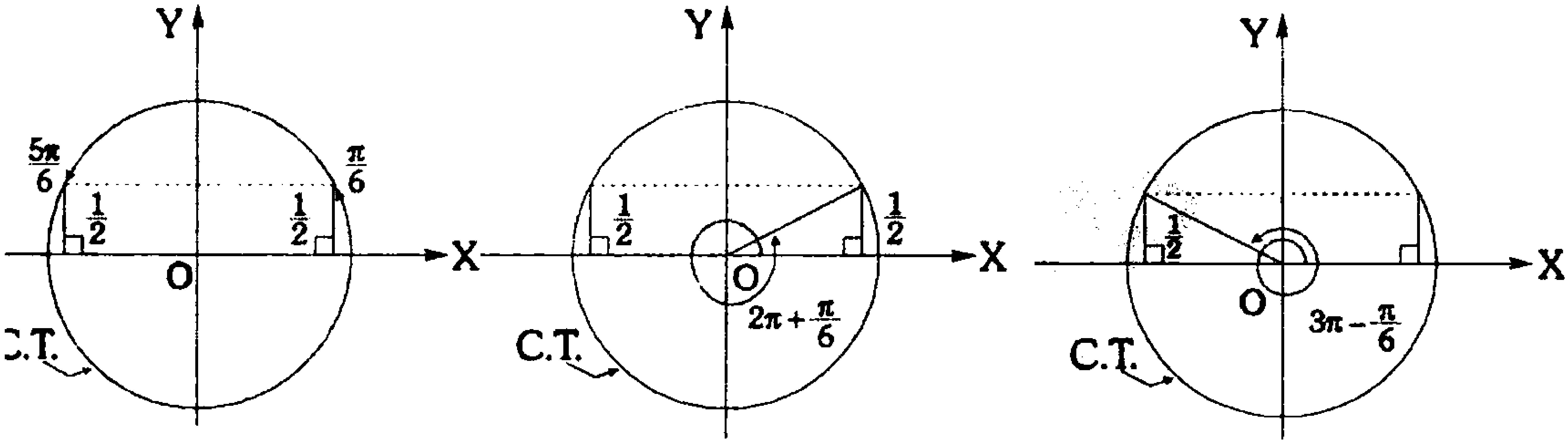
Antes de plantear reglas generales para resolver una ecuación trigonométrica elemental, resolveremos algunas de éstas sin necesidad de ninguna regla (utilizaremos definiciones en circunferencia trigonométrica).

EJERCICIO 1 :

Resuelva la ecuación: $sen\ x = \frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN:

Los valores de x que resuelven la ecuación están dados por $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y sus respectivos coterminales,



*Observamos que el menor ángulo positivo que resuelve la ecuación es: ***30°***

* Así mismo, en el segundo cuadrante el seno es positivo, luego la segunda solución positiva será: ***150°***

* A continuación buscando las siguientes soluciones, notamos que en el tercero y cuarto cuadrante no hay solución dado que el seno es negativo en dichos cuadrantes.

* Finalmente las otras soluciones serán todos los coterminales con ***30°*** y ***150°***, es decir: ***30°***, ***390°***, ***750°***, ... y ***150°***,***510°***,***870°***, ...

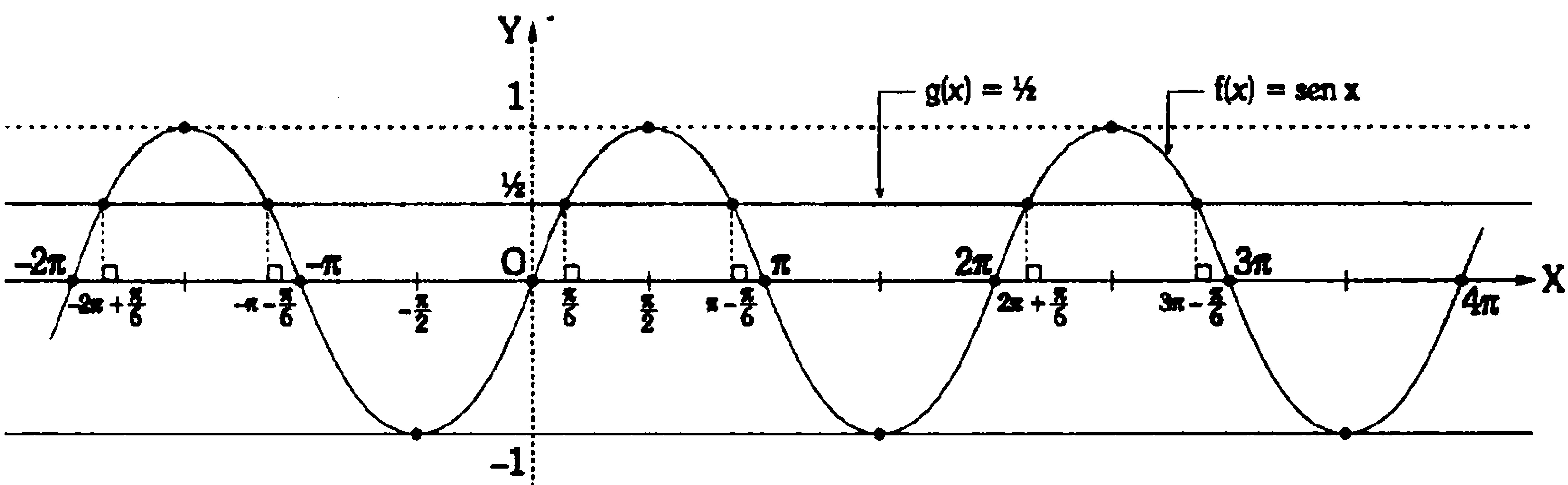
Ordenando, el conjunto solución será : $C.S. = \{ ..;30°;150°;390°;510°;750°;870°; ... \}$

es decir: $x = ...\ \frac{\pi}{6};\ \pi - \frac{\pi}{6};\ 2\pi + \frac{\pi}{6};\ 3\pi - \frac{\pi}{6};\ 4\pi + \frac{\pi}{6};\ ...$

En general: $x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

Observación

Las soluciones de la ecuación $sen\ x = \frac{1}{2}$ son las abscisas de los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \frac{1}{2}$; veamos:



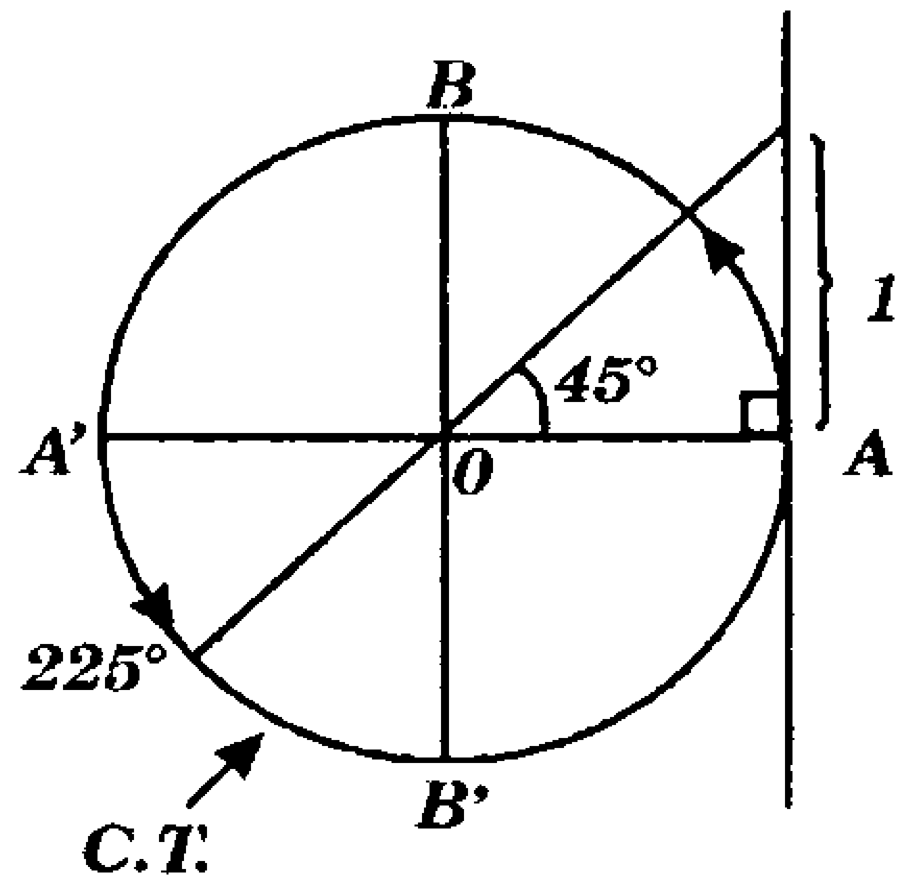
EJERCICIO 2 :

Resuelva: $Sen\ x - Cos\ x = 0$

RESOLUCIÓN:

Dándole otra forma a la ecuación, tendremos:

$Sen\ x = Cos\ x \Rightarrow Tan\ x = 1$



*Como la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrante, en dichos cuadrantes tendremos soluciones.

* Así, en el primer cuadrante la solución será $45°$ y en el tercer cuadrante la solución será: $180°+45°=225°$
* Luego, todos sus ángulos coterminales, serán soluciones de la ecuación.

* Así: $45°; 405°; ....$ y $225°; 585°, ...$

* Finalmente: $C.S. = \{ ..., 45°, 225°, 405°, 585°, ... \}$

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Una ecuación trigonométrica se llama *ELEMENTAL o BÁSICA o SIMPLE* si tiene la siguiente estructura :

$$F.T.(Kx) = a$$

EJEMPLOS :

* $Senx = \frac{1}{2}$ * $Cos2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ * $Tan\frac{x}{3} = -\sqrt{3}$

VALOR PRINCIPAL DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Se llama valor principal *(VP)* al menor ángulo positivo o mayor ángulo negativo que satisface una ecuación trigonométrica elemental.

Es decir :

Si : $FT : \underbrace{(Kx)}_{ángulo} = a \Rightarrow VP = ángulo$

VALOR PRINCIPAL PARA : SenKx=a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \le a \le 1$.

* Si "*a*" es positivo entonces su *VP* es un ángulo agudo.

* Si "*a*" es negativo entonces su *VP* es el negativo del ángulo agudo.

* Si "*a*" es *1* entonces su *VP* es *90°*

* Si "*a*" es *– 1* entonces su *VP* es *– 90°*

* Si "*a*" es *0* entonces su *VP* es *0°*

EJEMPLOS :

Calcular el *VP* de las siguientes ecuaciones

* $Senx = \frac{1}{2} \Rightarrow Sen\underbrace{x}_{30°} = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = 30°$

* $Senx = -\frac{1}{2} \Rightarrow Sen\underbrace{x}_{-30°} = -\frac{1}{2} \Rightarrow VP = -30°$

* $Sen4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Sen\underbrace{4x}_{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = 45°$

* $Sen4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Sen\underbrace{4x}_{-45°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = -45°$

* $Sen2x = 1 \Rightarrow Sen\underbrace{2x}_{90°} = 1 \Rightarrow VP = 90°$

* $Sen2x = -1 \Rightarrow Sen\underbrace{2x}_{-90°} = -1 \Rightarrow VP = 90°$

* $Sen\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow Sen\underbrace{\frac{x}{3}}_{0°} = 0 \Rightarrow VP = 0°$

* $Sen3x = 2$; La ecuación no tiene soluciones.

OJO :

El Valor principal no siempre es la incognita "x"

VALOR PRINCIPAL PARA CosKx=a

La ecuación tendrá soluciones solamente cuando $-1 \le a \le 1$.

* Si "*a*" es positivo entonces su *VP* es un ángulo agudo

* Si "*a*" es negativo entonces su *VP* es el suplemento del ángulo agudo.

* Si "*a*" es *1* entonces su *VP* es *0°*

* Si "*a*" es *–1* entonces su *VP* es *180°*

* Si "*a*" es *0* entonces su *VP* es *90°*

EJEMPLOS :

* Calcular el *VP* de las siguiente ecuaciones.

* $Cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow Cos\underbrace{x}_{60°} = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = 60$

* $Cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow Cos\underbrace{x}_{120°} = -\frac{1}{2} \Rightarrow VP = 120°$

* $Cos4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Cos\underbrace{4x}_{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = 45°$

* $Cos4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow Cos\underbrace{4x}_{135°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = 135°$

* $Cos2x = 1 \Rightarrow Cos \underbrace{2x}_{0°} = 1 \Rightarrow VP = 0°$

* $Sen\frac{x}{3} = 1 \Rightarrow Cos \underbrace{2x}_{180°} = -1 \Rightarrow VP = 180°$

* $Cos\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow Sen \underbrace{\frac{x}{3}}_{90°} = 0 \Rightarrow VP = 90°$

* $Cos3x = 3$

VALOR PRINCIPAL PARA TanKx= a

La ecuación tendrá soluciones para cualquier valor de "*a*"

* Si "*a*"es positivo entonces su *VP* es un ángulo agudo.
* Si "*a*" es negativo entonces su *VP* es el negativo del ángulo agudo.
* Si "*a*" es *1* entonces su *VP* es *0°*.

EJEMPLOS :

Calcular el *VP* de las siguientes ecuaciones:

* $Tanx = \sqrt{3} \Rightarrow Tan \underbrace{x}_{60°} = \sqrt{3} \Rightarrow VP = 60°$

* $Tanx = -\sqrt{3} \Rightarrow Tan \underbrace{x}_{-60°} = -\sqrt{3} \Rightarrow VP = -60°$

* $Tan3x = 1 \Rightarrow Tan \underbrace{3x}_{45°} = 1 \Rightarrow VP = 45°$

* $Tan3x = \quad 1 \Rightarrow Tan \underbrace{3x}_{45°} = -1 \Rightarrow VP = -45°$

* $Tanx = 0 \Rightarrow Tan \underbrace{x}_{0°} = 0 \Rightarrow VP = 0°$

* $Tan\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow Tan \underbrace{\frac{x}{4}}_{0°} = 0 \Rightarrow VP = 0°$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ELEMENTALES

Resolver una ecuación trigonométrica elemental significa hallar todos los valores de la incógnita "*x*" que satisfacen dicha ecuación . Es decir, que reducen la ecuación a una igualdad después de la sustitución de la incógnita . Así , por ejemplo la ecuación :

$$Sen \underbrace{2x}_{30°} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 30° \Rightarrow x = 15°$$

Tiene por solución *15°* , Pero no es la única solución , porque también satisfacen los siguientes valores *75° ; 195° ; 255° ; 375° ; 435° ; ......*

El motivo de estos resultados es que las funciones trigonométricas son *PERIÓDICAS* , a continuación citaremos para las ecuaciones que involucran seno ; coseno y tangente a fin de hallar todas sus infinitas soluciones.

RESOLUCIÓN DE SenKx = a

* Se aplica las siguiente formulas :

$$\boxed{SenKx = a \Rightarrow Kx = n(180°) + (-1)^n\ VP} \text{ "}n\text{"} \in Z$$

* Denominándose *CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL* al resultado :

$$\boxed{x = \frac{n(180°) + (-1)^n VP}{k}} \text{ "}n\text{"} \in Z$$

EJEMPLO 1 :

Resolver la ecuación y hallar las *4* primeras soluciones positivas : $Sen2x = \frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Calculamos el valor principal : $VP=30°$
* Aplicamos la formula :

$$2x = n(180°) + (-1)^n 30°$$

$$\Rightarrow 2x = n(180°) + (-1)^n 30°$$

* Despejamos "*x*": $x = \dfrac{n(180°) + (-1)^n 30°}{2}$

* Obteniendo así el conjunto solución : $x = n(90°) + (-1)^n 15°$

* Para calcular las *4* primeras soluciones positivas damos valores enteros positivos a "*n*", en el conjunto solución :

Para $n=0$: $x = 0(90°) + (-1)^0 15° \Rightarrow \boxed{x=15°}$

Para $n=1$: $x = 1(90°) + (-1)^1 15° \Rightarrow \boxed{x=75°}$

Para $n=2$: $x = 2(90°) + (-1)^2 15° \Rightarrow \boxed{x=195°}$

Para $n=3$: $x = 3(90°) + (-1)^3 15° \Rightarrow \boxed{x=255°}$

EJEMPLO 2 :

Resolver la ecuación y hallar las *3* primeras soluciones positivas en radianes.

$$Sen3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

RESOLUCIÓN :

* Calculamos el valor principal : $VP = -45° = -\frac{\pi}{4}$
* Aplicamos la fórmula :

$$3x = n(180°) + (-1)^n VP$$

* Pasamos a radianes :

$$3x = n(\pi) + (-1)^n \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

* Despejamos "*x*":

$$x=\frac{n\pi-(-1)^n\times\frac{\pi}{4}}{3}$$

* Obteniendo el conjunto solución :

$$\boxed{x=\frac{n\pi}{3}-(-1)^n\times\frac{\pi}{12}}$$

* Para calcular las *3* primeras soluciones positivas , damos valores enteros positivas a "n" en el conjunto solución.

* Para $n=0\Rightarrow x=0\times\frac{\pi}{3}-(-1)^0\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=-\frac{\pi}{12}$ *(No se toma)*
* Para $n=1\Rightarrow x=1\times\frac{\pi}{3}-(-1)^1\times\frac{\pi}{12}\Rightarrow\boxed{x=\frac{5\pi}{12}}$
* Para $n=2\Rightarrow x=2\times\frac{\pi}{3}-(-1)^2\times\frac{\pi}{12}\Rightarrow\boxed{x=\frac{7\pi}{12}}$
* Para $n=3\Rightarrow x=3\times\frac{\pi}{3}-(-1)^3\times\frac{\pi}{12}\Rightarrow\boxed{x=\frac{3\pi}{12}}$

RESOLUCIÓN DE CosKx=a

* Se aplica la siguiente formula :

$$\boxed{Cos\,Kx=a\Rightarrow Kx=n(360°)\pm VP}$$

"n" $\in Z$

* Se denomina *CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL* al resultado.

$$\boxed{x=\frac{n(360°)\pm VP}{k}}\quad "n"\in Z$$

EJEMPLO 1 :

Resolver la ecuación y hallar las *5* primeras soluciones positivas de : $Cos\,2x=\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Calculamos el valor principal : $VP=60°$
* Aplicamos la fórmula : $2x=n(360°)\pm VP$
* Despejamos "x" : $2x=n(360°)\pm 60°$
* Obtenemos el conjunto solución : $x=n(180°)\pm 30°$
* Para calcular las *5* primeras soluciones , positivas damos valores enteros positivas a "n", en el conjunto solución :

* *Para* $n=0\Rightarrow x=0(180°)\pm 30°$
  $\Rightarrow x=\pm 30°\Rightarrow x=30°$
* *Para* $n=1\Rightarrow x=1(180°)\pm 30°$
  $\Rightarrow x=180°+30°\vee x=180°-30°\Rightarrow x=210°\vee x=150°$
* *Para* $n=2\Rightarrow x=2(180°)\pm 30°$
  $\Rightarrow x=360°-30°\vee x=360°+30\Rightarrow x=330°\vee x=390°$

EJEMPLO 2 :

Resolver la ecuación y hallar las *3* primeras soluciones positivas en radianes : $Cos\,3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Calculamos el valor principal: $VP=135°=\frac{3\pi}{4}$
* Aplicamos la fórmula : $3x=n(360°)\pm VP$
* Despejamos "x" : $3x=n(2\pi)\pm\frac{3\pi}{4}$
* Obteniendo el conjunto solución : $x=n\left(\frac{2\pi}{3}\right)\pm\frac{\pi}{4}$
* Para calcular las *3* primeras soluciones positivas , damos valores enteros positivos a "n" en el conjunto solución.

* *Para* $n=0\Rightarrow x=0\left(\frac{2\pi}{3}\right)\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{4}}$
* *Para* $n=1\Rightarrow x=1\left(\frac{2\pi}{3}\right)\pm\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow\left(\boxed{x=\frac{5\pi}{12}}\vee\boxed{x=\frac{11\pi}{12}}\right)$$

RESOLUCIÓN DE TanKx = a

* Se aplica la siguiente fórmula :

$$\boxed{TanKx=a\Rightarrow Kx=n(180°)+VP}$$

"n" $\in Z$

* Denominándose *CONJUNTO SOLUCIÓN o SOLUCIÓN GENERAL* al resultado : $\boxed{x=\frac{n(180°)+VP}{k}}$ "n" $\in Z$

EJEMPLO 1 :

Resolver la ecuación y hallar la *3* primeras soluciones positivas de : $Tan2x=\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN :

* Calculamos el valor principal : $VP=60$
* Aplicamos la fórmula : $2x=n(180°)+VP$
* Despejamos "x": $2x=n(180°)+60°$
* Obtenemos el conjunto solución: $x=n(90°)+30°$
* Para calcular las *3* primeras soluciones positivas damos valores enteros positivos a "n". en el conjunto solución.

Para $n=0:\Rightarrow x=0(90°)+30°\Rightarrow\boxed{x=30°}$

Para $n=1:\Rightarrow x=1(90°)+30°\Rightarrow\boxed{x=120°}$

Para $n=2:\Rightarrow x=2(90°)+30°\Rightarrow\boxed{x=210°}$

EJEMPLO 2:

Resolver la ecuación y hallar las *3* primeras soluciones positivas en radianes. $Tan3x = -1$

RESOLUCIÓN:

* Calculamos el valor principal: $VP = -45° = -\frac{\pi}{4}$

* Aplicamos la fórmula : $3x = n(180°) + VP$

* Pasamos a radianes: $3x = n(\pi) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

*Despejamos "*x*": $3x = n\pi - \frac{\pi}{4}$

* Obteniendo el conjunto solución : $\boxed{x = n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}}$

* Para calcular las *3* primeras soluciones positivas , damos valores enteros positivos a "*n*" en el conjunto solución.

* Para $n = 0 \Rightarrow x = 0 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}$ *(no se toma)*

* Para $n = 1 \Rightarrow x = 1 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$

* Para $n = 2 \Rightarrow x = 2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{12}}$

* Para $n = 3 \Rightarrow x = 3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{12}}$

RESOLUCIÓN DE $CotKx=a$, $SecKx=a$, $CscKx=a$

Para resolver ecuaciones trigonométricas elementales que involucran *Cot* , *Sec* y *Csc* se invierten y se obtienen *Tan* , *Cos* y *Sen* respectivamente.

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación : $Cot2x = \sqrt{3}$

RESOLUCIÓN:

* Invertimos :

$$Cot2x = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{Cot2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow Tan2x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow VP = 30°$$

$$\Rightarrow 2x = n(180°) + VP \Rightarrow 2x = n(180°) + 30° \Rightarrow x = n(90°) + 15°$$

EJEMPLO 2:

Resolver la ecuación : $Sec3x = 2$

RESOLUCIÓN:

* Invertimos :

$$Sec3x = 2 \Rightarrow \frac{1}{Sec3x} = \frac{1}{2} \Rightarrow Cos3x = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = 60°$$

$$\Rightarrow 3x = n(360°) \pm VP \Rightarrow 3x = n(360°) \pm 60° \Rightarrow x = n(120°) \pm 20$$

EJEMPLO 3:

Resolver la ecuación : $Csc\frac{x}{2} = \sqrt{2}$

RESOLUCIÓN:

* Invertimos :

$$Csc\frac{x}{2} = \sqrt{2} \quad Y \quad \frac{1}{Csc\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow Sen\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = 45°$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = n(180°) + (-1)^n VP \Rightarrow \frac{x}{2} = n(180°) + (-1)^n 45°$$

$$\Rightarrow x = 2[n(180°) + (-1)^n 45°] \Rightarrow x = n(360°) + (-1)^n 90°$$

¡RECUERDA!

Para resolver ecuaciones trigonométricas; se reduce aplicando las identidades trigonométricas , identidades de transformación a ecuaciones elementales para luego seguir el procedimiento ya conocido.

EJEMPLO 1:

Resolver la ecuación y hallar segunda solución positiva : $Senx = Cosx$

RESOLUCIÓN:

$$Senx = Cosx \Rightarrow \frac{Senx}{Cosx} = 1$$

* Identidades :

$$Tanx = 1 \Rightarrow VP = 45°$$
$$\Rightarrow x = n(180°) + VP$$
$$\Rightarrow x = n(180°) + 45°$$

* Para $n=0 \Rightarrow x = 0(180°) + 45° \Rightarrow x = 45°$

* Para $n=1 \Rightarrow x = 1(180°) + 45° \Rightarrow x = 225°$

EJEMPLO 2:

Resolver la ecuación y hallar la suma de las primeras soluciones positivas en : $Sen2x = Cosx$

RESOLUCIÓN:

$$Sen2x = Cosx \Rightarrow Sen2x - Cosx = 0$$

* Arco doble :

$$2SenxCosx - Cosx = 0 \Rightarrow Cosx(2Senx - 1) = 0$$

* Igualmos a cero cada factor , obtenemos, *2* ecuaciones elementales por lo tanto dos conjuntos soluciones:

$$Cosx = 0 \Rightarrow VP = 90° \ \vee \ Senx = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = 30°$$

$$x = n(360°) \pm VP \quad x = n(180°) + (-1)^n \times VP$$

$$x = n(360°) \pm 90° \quad x = n(180°) + (-1)^n \times 30°$$

* El conjunto solución de la ecuación será la siguiente unión : $x = n(360°) \pm 90° \vee n(180°) + (-1)^n 30°$

* Para $n=0$ en el primer conjunto tenemos:

$x = \pm 90° \Rightarrow x = 90°$

* para $n=0$ en el segundo conjunto tenemos : $x=30°$

* Luego la suma de las dos primeras soluciones positivas son : $30° + 90° = 120°$

EJEMPLO 3 :

Resolver la ecuación y hallar la tercera solución positiva de : $2Sen^2x = Cos2x$

RESOLUCIÓN :

$$2Sen^2x = Cos2x$$

* Por Arco doble : $1 \quad Cos2x = Cos2x$

$$\Rightarrow Cos2x + Cos2x = 1$$

$$\Rightarrow 2Cos2x = 1 \rightarrow Cos2x = \frac{1}{2} \rightarrow VP = 60°$$

$\Rightarrow 2x = n(360°) \pm 60°$

$\Rightarrow x = \dfrac{n(360°) \pm 60°}{2} \rightarrow x = n(180°) \pm 30°$

* Para $n=0 \Rightarrow x = 0(180°) \pm 30°$

$\Rightarrow x = \ 30° \vee x = 30°$

* Para $n=1 \rightarrow x = 1(180°) \pm 30°$

$\rightarrow x = 180° - 30° \vee x = 180° + 30°$

$\rightarrow x = 150° \vee x = 210°$

* Luego la tercera solución positiva es $210°$.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS NO ELEMENTALES

Si una ecuación trigonométrica no es de la forma elemental, aplicaremos las identidades trigonométricas para obtener un mismo tipo de arco trigonométrico (en lo posible); luego se realizan operaciones algebraicas para reducirle y finalmente aplicamos los procedimientos para resolver una ecuación trigonométrica elemental.

No existen reglas generales para transformar una ecuación trigonométrica dada la forma de una ecuación trigonométrica elemental.

Cuando se haya logrado una solución por medio de una elevación a alguna potencia de los dos lados de la ecuación o por medio de multiplicaciones o divisiones de expresiones que comprenden a la variable, debemos comprobar cada solución potencial por medio de sustituciones dentro de la ecuación. Las soluciones potenciales que no satisfagan la ecuación son rechazadas, éstas se denominan **soluciones extrañas.**

Los ejercicios que se dan a continuación muestran algunas clases de soluciones de ecuaciones trigonométricas.

EJERCICIO 1 :

Resuelva la ecuación:

$senx + cosx = -1 \quad para \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

RESOLUCIÓN:

A partir de la ecuación $sen\,x + cos\,x = -1$

$(sen\,x + cos\,x)^2 = (-1)^2$ elevando al cuadrado se obtiene $1 + sen\,2x = 1$ para su mayor comprensión revise identidad de arco doble $sen\,2x = 0$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + (-1)^k \underline{arc\,sen\,(0)}$$

$$\Rightarrow 2x = 2\pi + (-1)^k\ 0$$

ya que $arc\,sen\,(0) = 0$

Despejando x se obtiene: $x = \dfrac{k\pi}{2}\ ;\ k \in Z$

Como $0 \leq x \leq 2\pi$, tenemos

$x = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi$, como posibles soluciones.

A continuacón, dichas soluciones tendrán que ser comprobadas en la ecuación original:

$(sen\,x + cos\,x = 1)$

$sen0 + cos0 = 1 \neq -1 ... x = 0$, *solución extraña (no verifica)*

$sen\frac{\pi}{2} + cos\frac{\pi}{2} = 1 \neq -1 ..... x = \frac{\pi}{2}$, *solución extraña (no verifica)*

$sen\,\pi + cos\,\pi = -1 .... x = \pi$, *es solución (sí verifica)*

$sen\,\frac{3\pi}{2} + cos\,\frac{3\pi}{2} = -1 .... x = \frac{3\pi}{2}$, *es solución (sí verifica)*

$sen2\pi + cos\,2\pi = 1 \neq -1 .... x = 2\pi$, *solución extraña (no verifica)*

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación

$senx + cos\,x = -1$; tal que $0 \leq x \leq 2\pi$, es $\left\{\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$

EJERCICIO 2 :

¿Cuántas Soluciones tiene la Ecuación?

$$x + |x - 1| = 2Senx \ ;\ en \ \langle -2\pi ; 2\pi \rangle$$

RESOLUCIÓN:

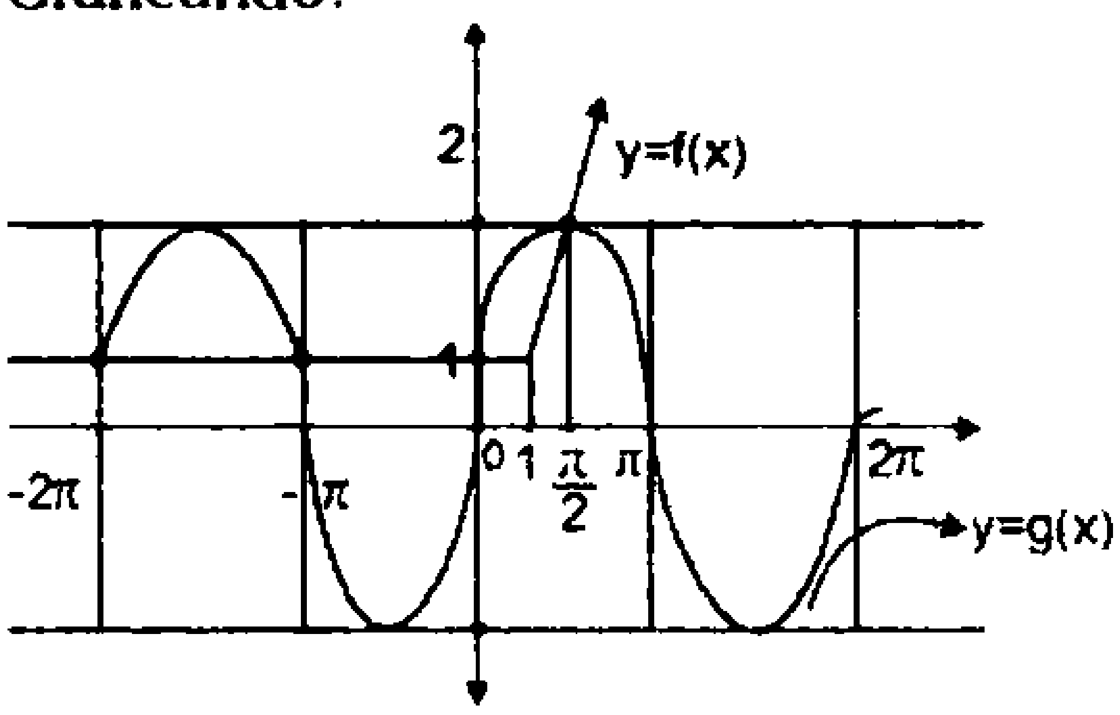
* Esta ecuación no típica; ya que su resolución permite usar criterios no tan «Convencionales» como en las aplicaciones anteriores. En este caso; sólo nos interesa «Cuántas» soluciones existen en el intervalo dado; así que el análisis que haremos; será el de gráficas de funciones.

* Entonces: $\underbrace{x + |x - 1|}_{f(x)} = \underbrace{2Senx}_{g(x)}$

Entenderemos que los valores de «x» que cumplen la

ecuación; son los mismos. Son los que hacen que ambas funciones sean iguales. Lo cual ocurre cuando las curvas que representan las funciones, se cortan. Es decir; el número de Soluciones estará dado por el número de puntos de Corte de ambas curvas; en el problema graficáremos simultáneamente ambas funciones:

Graficando:



En el gráfico, se pueden contar *4* puntos de corte; por lo tanto; existen *4* valores de *«x»* en $\langle 0;2\pi \rangle$ que cumplen la ecuación original.

¡Recuerda!

Expresiones generales de todos los arcos que tiene una misma función trigonométrica

I) Para el Seno : $E_G = k\pi + (-1)^k\ V.p.$

II) Para el Coseno : $E_G = k\pi \pm V.p.$

III) Para el Tangente: $E_G = k\pi + V.p.$

Donde: $k \in Z$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1 :

Resolver : $Sen2x = \dfrac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que : *VP*: $arcsen\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

* Luego aplicando la forma general

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6};\ k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{12}$$

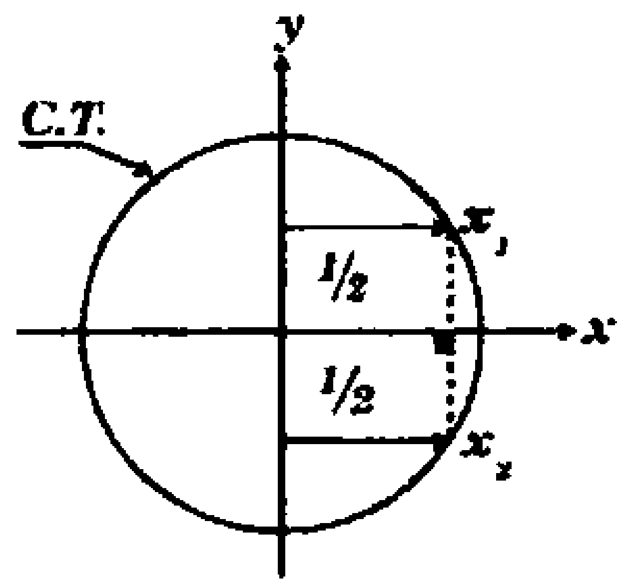
PROBLEMA 2 :

Resolver la siguiente ecuación :

$$Cos\ x = \frac{1}{2};\ para\ x \in [0;2\pi]$$

RESOLUCIÓN :

*Analizando en la *C.T.* la ecuación : $cosx = \dfrac{1}{2}$



* Se observa los valores de x ($x_1 \wedge x_2$) que satisfacen ; $cos\ x = \dfrac{1}{2}$ son :

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}\ ;\ x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3}$$

* Por consiguiente las soluciones son : $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{5\pi}{3}$

PROBLEMA 3 :

Resolver : $Tg\left(\dfrac{3x}{2}\right) = 1$

RESOLUCIÓN :

* Se deduce que :

$$VP = arctg\ (1) = \frac{\pi}{4}$$

* Luego :

$$\frac{3x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

PROBLEMA 4 :

Resolver : $cosx - senx = -1$

RESOLUCIÓN :

$$\underline{Cosx - senx} = -1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Rightarrow cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{* } Vp = arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow Vp = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

* Luego :

$$x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}\ ó\ x = 2k\pi - \pi$$

PROBLEMA 5 :

Determinar el conjunto solución de

$$tg11x = -tg\ 2x$$

RESOLUCIÓN :

* Transformando la ecuación tendremos :

$$tg11x = tg(\pi - 2x) \Rightarrow 11x = k\pi + (\pi - 2x)$$

$$\Rightarrow 13x = (k+1)\pi \Rightarrow x = (k+1)\frac{\pi}{13}$$

* Si tratamos la ecuación anterior considerando que :

$$tg\ 11x = tg\ (-2x) \Rightarrow 11x = k\pi + (-2x)$$

$$\Rightarrow 13x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{13}$$

PROBLEMA 6 :

Resolver la siguiente ecuación :

$$2\ senx + cscx = 3$$

RESOLUCIÓN :

* Transformando la *Csc* :

$$2senx + \frac{1}{senx} = 3$$

$$\Rightarrow 2\ sen^2x + 1 = 3\ senx$$

$$\Rightarrow 2sen^2x - 3senx + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2senx - 1)(senx - 1) = 0$$

* Si :

$$2sen\ x - 1 = 0 \Rightarrow senx = \frac{1}{2}$$

$$senx = sen\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}$$

* Si:

$$sen\ x - 1 = 0 \Rightarrow sen\ x = 1$$

$$senx = sen\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 7 :

Resolver :

$$a(2\ cos^2x - 1) + 2b(cosx + 1) = 0$$

RESOLUCIÓN :

$$a[2cos^2x - 1 - 1] + 2b(cos\ x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2acos^2x - 2a + 2bcosx + 2b = 0$$

$$acos^2x - a + bcosx + b = 0$$

$$\Rightarrow a(cosx - 1)(cosx + 1) + b(cosx + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (cosx + 1)[a(cosx - 1) + b] = 0$$

* Si:

$Cos\,x+1=0 \Rightarrow Cosx=-1$

$Cosx=\cos 180° \Leftrightarrow \cos x=\cos\pi$

$\Rightarrow x=2k\pi \pm \pi$

* Si:

$a\cos x-a+b=0 \Rightarrow \cos x=\dfrac{a-b}{a}$

$\Rightarrow x=2k\pi \pm arc\cos\left(\dfrac{a-b}{a}\right)$

PROBLEMA 8 :

Resolver : $\cos(45°-x)=\sqrt{3}\cos x$

RESOLUCIÓN :

$Cos\,45°\cos x+sen\,45°\,senx=\sqrt{3}\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\cos x+senx}{\cos x}\right)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow 1+tg\,x=\sqrt{6} \Rightarrow tg\,x=\sqrt{6}-1$

$\Rightarrow x=arc\,tg\,(\sqrt{6}-1)$

PROBLEMA 9 :

Resolver :

$$\frac{14\cos x-9}{8\cos x-3}=\frac{2+sen^2x}{1+\cos x}+\cos x$$

RESOLUCIÓN :

* Operando en el miembro derecho

$\dfrac{14\cos x-9}{8\cos x-3}=\dfrac{2+sen^2x+\cos x+\cos^2x}{1+\cos x}$

$\Rightarrow \dfrac{14\cos x-9}{8\cos x-3}=\dfrac{3+\cos x}{1+\cos x}$

$\Rightarrow 14\cos^2x+5\cos x=8\cos^2x+21\cos x$

$\Rightarrow 6\cos^2x-16\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x(3\cos x-8)=0$

* $3\cos x-8=0$........*(no es solución)*

* $\cos x=0 \Rightarrow x=2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} / k\in N$

PROBLEMA 10 :

Resuélvase la ecuación :

$$Tgx-\sqrt{3}\,ctgx+1=\sqrt{3}$$

RESOLUCIÓN :

* $tgx+1=\sqrt{3}(ctgx+1)$

$\Rightarrow (tgx+1)=\sqrt{3}\,\dfrac{(1+tgx)}{tg\,x}$

$\Rightarrow tgx(tgx+1)=\sqrt{3}(1+tgx)$

$\Rightarrow tgx(tgx+1)-\sqrt{3}(1+tgx)=0$

$\Rightarrow (tg\,x+1)(tg\,x-\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow tgx+1=0 \vee tgx-\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow tgx=-1 \vee tgx=\sqrt{3}$

$\Rightarrow tg\,x=tg\,\dfrac{3\pi}{4} \vee tg\,x=tg\,\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{3\pi}{4} \vee x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$

PROBLEMA 11:

Resolver el sistema :

$x-y=\dfrac{\pi}{4}$ .... (I)

$\cos 2x+\cos 2y=-1$ .... (II)

RESOLUCIÓN :

* En la segunda ecuación tendremos que :

$2\cos(x+y)\cos(x-y)=-1$

$\Rightarrow 2\cos(x+y)\cos\dfrac{\pi}{4}=-1$

$\Rightarrow 2\cos(x+y)\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-1$

$\Rightarrow \cos(x+y)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

* Luego tendremos S.P.:

$\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ x+y=\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right\} x=\dfrac{\pi}{2} \wedge y=\dfrac{\pi}{4}$

S.G.: $\left.\begin{array}{l} x-y=\dfrac{\pi}{4} \\ x+y=2k\pi\pm\dfrac{3\pi}{4}\end{array}\right| \begin{array}{l} x=(8k+1)\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{3\pi}{8} \\ y=(8k-1)\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{3\pi}{8}\end{array}$

PROBLEMA 12 :

Resolver :

$5\,sen^4x+6\,sen^2x\cos^2x+5\cos^4x=4$

RESOLUCIÓN :

* Agrupando adecuadamente :

$5(sen^4x+\cos^4x)+6sen^2x\cos^2x=4$

$\Rightarrow 5(1-2sen^2x\cos^2x)+6sen^2x\cos^2x=4$

$\Rightarrow (2senx.\cos x)^2=1$

$\Rightarrow 2sen^2 2x=2 \Rightarrow 1-\cos 4x=2 \Rightarrow \cos 4x=-1$

$\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\pi \Rightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}\pm\dfrac{\pi}{4};\ k\in N$

PROBLEMA 13 :

Si $0<2\beta<\alpha$, encontrar el menor valor positivo de x que satisfaga :

$1+\cos\alpha x-\cos(\alpha-2\beta)x=\cos 2\beta x$

A) $x=\dfrac{\pi}{\alpha}$ B) $x=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ C) $x=\dfrac{\pi}{\beta}$ D) $x=\dfrac{2\pi}{\beta}$ E) $x=\dfrac{2\pi}{\alpha-2\beta}$

RESOLUCIÓN :

$1+\cos\alpha x-\cos 2\beta x-\cos(\alpha-2\beta)x=0$

$\Rightarrow 2\cos^2\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)-2\cos\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-4\beta}{2}\right)x=0$

$\Rightarrow 2\cos\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)[\cos\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{\alpha-4\beta}{2}\right)x]=0$

* Transformando a producto , se obtiene :

$4\cos\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)sen(\alpha x)\,sen\left(\dfrac{\alpha-2\beta}{2}\right)x=0$

* Igualamos cada factor a cero , e indicamos una solución :

* $Cos\left(\dfrac{\alpha x}{2}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{\alpha x}{2}=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{\alpha}$

* $Sen\,(\alpha x)=0 \Rightarrow \beta\,x=\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{\beta}$

* $Sen\left(\dfrac{\alpha-2\beta}{2}\right)x=0 \Rightarrow \left(\dfrac{\alpha-2\beta}{2}\right)x=\pi$

$\Rightarrow x=\dfrac{2\pi}{\alpha-2\beta}$

Como $\alpha>2\beta$; entonces , el menor valor de x es : $x=\dfrac{\pi}{\alpha}$

RPTA : "A"

PROBLEMA 14 :

Si x e y son ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones

$2\,sen\,x\,sen\,y=1$..........(I)

$ctg\,x+ctg\,y=2$.........(II)

El producto "xy" es :

A) $\dfrac{\pi^2}{4}$ B) $\dfrac{\pi^2}{9}$ C) $\dfrac{\pi^2}{12}$ D) $\dfrac{\pi^2}{16}$ E) $\dfrac{\pi^2}{25}$

RESOLUCIÓN :

$Ctg\,x+ctg\,y=2$

$\Rightarrow \dfrac{Cos\,x}{Sen\,x}+\dfrac{\cos y}{sen\,y}=2$

$\Rightarrow Cosx\,seny+senx\cos y=$
$=2senx\,seny$

$\Rightarrow Sen\,(x+y)=1$

* Como $x \wedge y \in \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Entonces : $x+y=\dfrac{\pi}{2}$ ....(I)

* De (I) se deduce que : $sen\,y=\cos x$

* Luego :

$2senx(\cos x) = 1 \Rightarrow sen2x = 1$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

* Reemplazando en *(I)*, se obtiene : $\frac{\pi}{4} + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

* Entonces : $x\ y = \left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 15 :

Al resolver la ecuación :

$\sqrt{3}\cos x = 1 + sen\,x$; donde $0 \le x \le 2\pi$,

la suma de todas sus soluciones es:

A) $\frac{5\pi}{4}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) π D) $\frac{5\pi}{6}$ E) 5π

RESOLUCIÓN :

* Ecuación :

$sen\,x - \sqrt{3}\cos x = -1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}sen\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}\ sen\,x \quad sen\frac{\pi}{3}\cos x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \quad \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \quad \frac{\pi}{3} = k\pi + (\ \ 1)^k\left(\ \ \frac{\pi}{6}\right)$

$$\boxed{x = k\pi + (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}}$$

* $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

* $k = 1 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

* $k = 2\pi \Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$

Esta solución es mayor de 2π

*Entonces, las soluciones en $[0;2\pi]$ son : $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right\}$

* Suma de soluciones : $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 :

Calcular el valor del seno de un ángulo, para el cual se verifica que su secante es igual a la suma de su seno y coseno .

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}; 0$ B) $\frac{1}{2}; 1$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}; 0$

D) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}; 0$

RESOLUCIÓN :

* Del enunciado plantearemos :

* $Sec\,x = sen\,x + \cos x$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = senx + \cos x$

$\Rightarrow 1 = senx\cos x + \cos^2 x$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - senx\cos x = 0$

$\Rightarrow sen^2 x - senx\cos x = 0$

$\Rightarrow sen\,x\,(senx - \cos x) = 0$

* Cada factor se iguala a cero :

$Sen\,x = 0$..........................*(I)*

* O también : $sen\,x - \cos x = 0$

$senx = \cos x \Rightarrow \frac{senx}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\,x = 1$

*Un valor de x es $45°$; entonces :

$senx = sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.........*(II)*

* De *(I)* y *(II)*, observamos que el seno puede tomar dos valores :

$$0 \wedge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 17 :

Sea la ecuación : $tg\,x + \frac{3}{tg\,x} = 4$

Un valor de x en el primer cuadrante es :

A) 23° B) 22° C) 22°30 D) 45° E) 75°

RESOLUCIÓN :

* Operando adecuadamente : y

$tgx + \frac{3}{tg\,x} = 4 \Rightarrow tg^2 x - 4\,tg\,x + 3 = 0$

$\Rightarrow (tg\,x - 1)(tg\,x - 3) = 0$

$\Rightarrow tg\,x - 1 = 0 \Rightarrow tg\,x = 1 \Rightarrow x = 45°$ ...*(I)*

$\Rightarrow tg\,x - 3 = 0 \Rightarrow tgx = 3$

* Como solo nos piden un valor de x, en el primer cuadrante de las alternativas planteadas, la respuesta es $45°$.

RPTA :"D"

PROBLEMA 18 :

Si Ud. elige dos raíces de la ecuación

$$Tg2x + Tg\,x = sen\,3x\,\sec x$$

Entre $0 < x \le \pi$; entonces , el cociente entre la raíz de mayor valor y la de menor es igual a:

A) 3 B) 4 C) 0 D) 2 E) 4/3

RESOLUCIÓN :

* Ecuación :

$tg2x + tgx = sen3x\sec x$

$\Rightarrow \frac{Sen(2x + x)}{\cos 2x\cos x} = \frac{sen\,3x}{\cos x}$

$\Rightarrow \frac{Sen\,3x}{\cos 2x\cos x} = \frac{sen\,3x}{\cos x}$

$\Rightarrow Sen\,3x = sen3x\ \cos 2x$

(Observar que se ha cancelado $\cos x$, esto implica que:

$$x \neq 2n\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$sen3x\,(1 - \cos 2x) = 0$$

* De donde : $sen3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{3}$.......$k \in Z$...........*(I)*

* O también :

$1 - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 1$

$2x = m\pi \Rightarrow x = m\pi/2\ ; m \in Z$.....*(II)*

* Soluciones comprendidas en $<0;\pi>$:

de *(I)* : $\left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\right\}$

de *(II)*: $\{\pi\}$

* De todas estas , la mayor solución es π, y la menor es $\frac{\pi}{3}$; el cociente entre estas soluciones es: $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 19 :

Dada la ecuación :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Hallar la suma de todas las soluciones de dicha ecuación , si éstas están comprendidas entre 0 y 2π (radianes)

A) π B) 2π C) 4π D) 3π E) 6π

RESOLUCIÓN :

* De lo dado se obtiene :

$$\cos x + \cos 3x + \cos 2x = 0$$
$$\Rightarrow 2\cos 2x \cos x + \cos 2x = 0$$
$$\Rightarrow \cos 2x\,(2\cos x + 1) = 0$$

Luego :

* I) $\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$x = (2n+1)\frac{\pi}{4} \ldots\ldots\ldots (I)$$

* II) $2\cos x + 1 = 0$ Y $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \ldots\ldots\ldots (II)$$

* Como sólo nos piden las soluciones en $<0;2\pi>$, damos valores convenientes a n y k, obteniendo :

* De (I) : $\left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right\}$

* De (II) : $\left\{\frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right\}$

* La suma de estas soluciones es 6π.

RPTA : "E"

PROBLEMA 20 :

Al resolver la ecuación :

$$Sen2x = \cos^2 x \operatorname{tg} x \csc x$$

Calcular la diferencia entre dos de dichas soluciones.

A) $2\pi/3$ B) $\pi/6$ C) $\pi/12$
D) $2\pi/15$ E) $3\pi/4$

RESOLUCIÓN :

* Transformando a senos y cosenos , así :

$$2\operatorname{sen}x \cos x = \cos^2 x\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

* Simplificando y considerando que $\cos x \neq 0$; $\operatorname{sen} x \neq 0$, se obtiene :

$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6};\ n \in \mathbb{Z}$$

* Asignando valores a n, se obtiene el siguiente conjunto :

$$\left\{\ldots;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{17\pi}{6};\ldots\right\}$$

* Observamos que las dos menores soluciones positivas son: $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$

su diferencia es : $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

RPTA : "A"

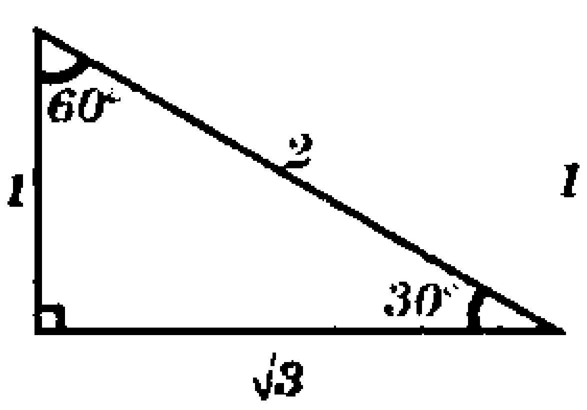
PROBLEMA 21 :

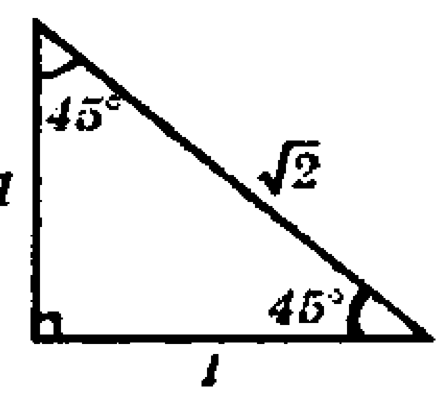
Halle el valor de x en la ecuación :

$$6(x-1)\cos^2 45^\circ - (x-4)\csc 30^\circ = \frac{x}{2}\tan^2 60^\circ$$

A) 10 B) 21/5 C) 15 D) 21/4 E) 14

RESOLUCIÓN :





$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2\ ;\ \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

* Reemplazando en la ecuación :

$$6(x-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (x-4)\times 2 = \frac{x}{2}\times\left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3x - 3 - 2x + 8 = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 10$$

RPTA :"A"

PROBLEMA 22:

Halle $\cos(2x-y)$, si x, y satisfacen las cuatro condiciones siguientes:

$$0 < x - y < \pi/2$$
$$0 < x + y \leq \pi/2$$
$$4\operatorname{sen}(x)\cos(y) = 3$$
$$\frac{1}{\cot(x) + \tan(y)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A) 1 B) 0 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1/2 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* Dato :

$$4\operatorname{sen}x \cos y = 3 \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\frac{1}{\cot x + \tan y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots\ldots\ldots (II)$$

* De (I) : $\operatorname{sen}x \cos y = \frac{3}{4}$

* De (II) : $\dfrac{1}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + \frac{\operatorname{sen}y}{\cos y}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\operatorname{sen}x \cos y}{\cos x \cos y + \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen}a.\operatorname{sen}b}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\cos(x-y)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

* Como :

$$0^\circ < x - y < 90^\circ \ \wedge\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow x - y = 30^\circ \ldots\ldots\ldots (III)$$

* De (I):

$$2\operatorname{sen}x \cos y = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{2\operatorname{sen}A\cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}$$

* Luego :

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}30^\circ = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y) = 1$$

* Como :

$$0^\circ < x + y \leq 90^\circ \ \wedge\ \operatorname{sen}90^\circ = 1$$
$$\Rightarrow x + y = 90^\circ \ldots\ldots\ldots (IV)$$

* De (III) y (IV) :

$$x = 60^\circ \ \wedge\ y = 30^\circ$$
$$\Rightarrow \cos(2x - y) = \cos 90^\circ = 0$$

RPTA :"B"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01) Resolver : $Sen(x - 20^\circ) = \frac{1}{2}$

RPTA.: ....

02) Resolver : $Tan(x + 10^\circ) = 1$

si $x \in I$ cuadrante

RPTA.: ....

03) Resolver : $Cos(x + 10^\circ) = -\frac{1}{2}$

Si $x \in [0; 2\pi]$

RPTA.: ....

04) Resolver : $Sen3x = Cos2x$

si $x \in I$ cuadrante

RPTA.: ....

05 Resolver e indicar la solución general: $Sen\,2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

RPTA.: ....

06 Resolver : $Sen^2x=\dfrac{1}{4}$

si $x \in I$ *cuadrante*

RPTA.: ....

PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resolver : $sen\,2x=\dfrac{1}{2};\ x\in IQ$

A) 60° B) 45° C) 30° D) 15° E) 0°

02 Resolver: $cos\,3x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x\in IQ$

A) 0° B) 15° C) 30° D) 45° E) 60°

03 Resolver : $sen\,3x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x\in IIQ$

A) 45° B) 90° C) 135° D) 180° E) 225°

04 Resolver : $sec\,x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\ x\in IVQ$

A) $\dfrac{\pi}{2}$ B) $\dfrac{5\pi}{6}$ C) $\dfrac{7\pi}{6}$ D) $\dfrac{9\pi}{4}$ E) $\dfrac{11\pi}{6}$

05 Resolver :

$$ctg\,x=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\ x\in IIIQ$$

A) $\dfrac{\pi}{4}$ B) $\dfrac{3\pi}{4}$ C) $\dfrac{5\pi}{4}$ D) $\dfrac{7\pi}{4}$ E) $\dfrac{2\pi}{3}$

06 Resuelve: $sen\,x=-\dfrac{1}{2};\ x\in IIIQ$

A) $\dfrac{7\pi}{6}$ B) $\dfrac{5\pi}{6}$ C) $\dfrac{3\pi}{4}$ D) $\dfrac{\pi}{6}$ E) $\dfrac{\pi}{4}$

07 Resuelve : $cos\,x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ x\in IIQ$

A) $\dfrac{7\pi}{6}$ B) $\dfrac{5\pi}{6}$ C) $\dfrac{\pi}{2}$ D) $\dfrac{\pi}{6}$ E) 3

08 Resuelve : $tg\,x=-1;\ x\in IVQ$

A) 255° B) 270° C) 285° D) 300° E) 315°

09 Resolver :

$$sen\,x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ x\in IIQ$$

A) $\dfrac{3\pi}{12}$ B) $\dfrac{5\pi}{12}$ C) $\dfrac{7\pi}{12}$ D) $\dfrac{9\pi}{12}$ E) $\dfrac{11}{12}\pi$

10 Resolver : $cos\,x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ x\in IVQ$

A) 315^g B) 330^g C) 345^g D) 350^g E) 360^g

11 Resuelve : $tg\,x=\dfrac{3}{4};\ x\in IIIQ$

A) 200° B) 217° C) 234° D) 251° E) 268°

12 Resolver : $sen\,x=sen\,70°;\ x\in IIQ$

A) $\dfrac{4\pi}{9}$ B) $\dfrac{\pi}{2}$ C) $\dfrac{5\pi}{9}$ D) $\dfrac{11\pi}{18}$ E) $\dfrac{2\pi}{3}$

13 Resuelve :

$$cos(20°-x)=cos\,x;\ x\in IQ$$

A) 10^g B) 20^g C) 30^g D) 40^g E) 50^g

14 Resuelve :

$$tg\,x=tg\left(\frac{\pi}{2}-3x\right);x\in IQ$$

A) $\dfrac{9\pi}{8}$ B) $\dfrac{7\pi}{8}$ C) $\dfrac{5\pi}{8}$ D) $\dfrac{3\pi}{8}$ E) $\dfrac{\pi}{8}$

15 Resolver :

$$csc\,x=sec\,x;\ x\in IIIQ$$

A) 225° B) 235° C) 0° D) 45° E) 245°

16 Resuelve :

$$sen\,x=\sqrt{sen\,x};\ 0<x<2\pi$$

A) 200^g B) 100^g C) 50^g D) 25^g E) 0

17 Resolver :

$$(1-cos\,x)(3+cos\,x)=0;\ x<360°$$

A) $\pi\,rad$ B) $2\pi\,rad$ C) $3\pi\,rad$ D) $4\pi\,rad$ E) $5\pi\,rad$

18 Resolver :

$$5sen^2x-14sen\,x+8=0;\ x\in IIQ$$

A) 53° B) 37° C) 127° D) 143° E) 0°

19 Resolver :

$$2cos^2x+(\sqrt{2}-4)cos\,x-2\sqrt{2}=0;\ x\in IVQ$$

A) 315° B) 300° C) 360° D) 135° E) 45°

20 Resolver : $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$

A) 500° B) 400° C) 480° D) 600° E) 240°

TAREA DOMICILIARIA

01 Resolver :

$$2\,cos\,2x\,tg\,2x-1=0;\ x\in IQ$$

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 75°

02 Resuelve: $2sen^2x+sen\,x=0$

Dar el *4to* valor no negativo menor a *360°*.

A) 300° B) 330° C) 60° D) 270° E) 360°

03 Resolver : $3\cos^2x+sen^2x=3$

A) 0° B) 90° C) 180° D) 270° E) 360°

04 Resuelve : $3+3\cos x=2(1-\cos^2x)$ y dar el valor del ángulo menor a media vuelta.

A) $\dfrac{\pi}{3}rad$ B) $\dfrac{\pi}{2}rad$ C) $\dfrac{2\pi}{3}rad$ D) $\pi\,rad$ E) $\dfrac{5\pi}{3}rad$

05 Resuelve

$sen\,x+1=\sqrt{1-sen^2x}$ Dar la suma de soluciones que cumplen $0<x<2\pi$

A) $\dfrac{\pi}{6}rad$ B) $\dfrac{\pi}{3}rad$ C) $\dfrac{\pi}{2}rad$ D) $2\pi\,rad$ E) $4\pi\,rad$

SEGUNDA PRACTICA DIRIGIDA

01 Resuelve:

$$2Senx-1=Cos90°$$

A) 50° B) 37° C) 30° D) 60° E) 45°

02 Resolver:

$$(2Cosx-1)(Cosx+3)=0$$

A) 30° B) 45° C) 37° D) 80° E) 60°

03 Resolver: $Tg^2x-6Tgx+5=0$

A) ArcTg2 B) ArcTg3 C) ArcTg4 D) ArcTg5 E) ArcTg6

04 Calcule la suma de soluciones, al resolver:

$2Sen^2x-11Senx+5=0;\ x\in\,]0;\pi[$

A) $\pi/2$ B) π C) $\pi/3$ D) $3\pi/2$ E) $\pi/6$

05 Calcule la suma de soluciones, al resolver:

$$(2Cosx-\sqrt{3})(Senx-6)(Cosx-2)=Sen0°;\ x\in[0;2\pi]$$

A) π B) 2π C) 3π D) $\pi/2$ E) $\pi/3$

06 Resolver:

$(Cosx-6)(2Senx-\sqrt{3})(Senx-3)=0;\ (k\in\mathbb{Z})$

A) $k\pi+(-1)^k\times\frac{\pi}{3}$ B) $2k\pi+(-1)^k\times\frac{\pi}{3}$

C) $k\pi+(-1)^k\times\frac{\pi}{6}$ D) $2k\pi+(-1)^k\times\frac{\pi}{7}$

E) $k\pi+(-1)^k\times\frac{\pi}{4}$

07 Resuelva:

$$3-3Cosx=Sen^2x;\ (k\in\mathbb{Z})$$

A) $k\pi$ B) $3k\pi$ C) $4k\pi$ D) $2k\pi$ E) $\frac{k\pi}{2}$

08 Resolver e indicar un conjunto solución:

$$Tg^2x+2Tgx-3=0(k\in\mathbb{Z})$$

A) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ B) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ C) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$

D) $2k\pi-\frac{\pi}{3}$ E) $k\pi+\frac{\pi}{6}$

09 Resolver:

$$3(1-Cosx)=Cos^2x;\ (k\in\mathbb{Z})$$

A) $2k\pi$ B) $k\pi$ C) $ArcCos\left(\frac{\sqrt{21}-3}{3}\right)$

D) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ E) $k\pi+\frac{\pi}{6}$

10 Resolver:

$$Secx-Cosx=Senx;\ (k\in\mathbb{Z})$$

A) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ B) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ C) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$

D) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ D) $k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

11 Resolver: $2Sen^2xCos2x=-2$

A) 0° B) 90° C) 180° D) 270° E) 360°

12 Resuelva: $Tg\frac{x}{2}+Ctg\frac{x}{2}=4$

indicando el tercer ángulo positivo.

A) 210° B) 120° C) 390°
D) 150° E) 30°

13 Resuelva:

$$Sen2x=4Cosx;\ x\in[0;2\pi]$$

indicando la suma de soluciones.

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) $\pi/2$

14 Resuelva:

$Sen2x-Senx+2Cosx=1;\ x\in[0;2\pi]$

indicando el número de soluciones.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15 Calcular las tres primeras soluciones positivas de :

$$Cos(2x+15°)=\frac{1}{2}$$

Indicar la suma de éstas.

A) $\frac{360°}{2}$ B) $\frac{335°}{2}$ C) $\frac{715°}{2}$

D) $\frac{725°}{2}$ D) $\frac{735°}{2}$

16 Resuelva:

$$Sen^2\left(\frac{\pi}{8}+x\right)-Sen^2\left(\frac{\pi}{8}-x\right)=\frac{1}{2}$$

Calcule las dos primeras soluciones positivas.

A) $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{2};\pi$ E) $\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}$

17 Resuelva: $4Cos^23x-Cos^26x=3$

indicando la suma de los dos menores valores positivos.

A) π B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{6}$ D) 2π E) $\frac{3\pi}{2}$

18 Resuelva la siguiente ecuación:

$$Sen\frac{x}{2}+Sen\frac{3x}{2}=Senx$$

e indique la suma de soluciones de $[0;2\pi]$

A) $\frac{13\pi}{3}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{7\pi}{3}$ D) $\frac{11\pi}{3}$ E) $\frac{8\pi}{3}$

19 Resuelva:

$$\frac{Cos3x}{Cosx}+\frac{Sen3x}{Senx}=0;\ (k\in\mathbb{Z})$$

A) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$ B) $(2k+1)\frac{\pi}{5}$

C) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ D) $2k+1$

E) $(2k+1)\frac{\pi}{3}$

20 Resolver la ecuación:

$$Sen^3x+Cos^3x=Cos2x$$

Indicar un conjunto solución.

A) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ B) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ C) $k\pi+\frac{\pi}{8}$

D) $k\pi-\frac{\pi}{2}$ E) $k\pi-\frac{\pi}{3}$

TERCERA PRACTICA DIRIGIDA

01 Determinar el conjunto solución de la ecuación : $Sen\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$ B) $n\pi+(-1)^n\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{n\pi}{3}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$

D) $3n\pi+(-1)^n\frac{3\pi}{4}$ E) $3n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

02 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Sen\ 5x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 90° B) 100° C) 110° D) 120° E) 130°

03 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Sen\ 4x=0$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π E) $\frac{5\pi}{2}$

04 Determinar el conjunto solución de la ecuación : $Cos\ 4x=\frac{1}{2}$

A) $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ B) $2n\pi\pm\frac{\pi}{12}$ C) $2n\pi\pm\frac{\pi}{24}$

D) $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}$

05 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Cos3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 225° B) 305° C) 315° D) 405° E) 450°

06 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Cos\ 2x=\frac{1}{3}$

A) 12π B) 14π C) 16π D) 18π E) 20π

07 Determinar el conjunto solución de la ecuación: $Tan\ 2x=1$

A) $n\pi+\frac{\pi}{4}$ B) $n\pi+\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{2n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{16}$

08 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Tan\ 6x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

A) $\frac{7\pi}{12}$ B) $\frac{5\pi}{12}$ C) $\frac{11\pi}{12}$ D) $\frac{13\pi}{12}$ E) $\frac{\pi}{4}$

09 Determinar el conjunto solución de la ecuación :

$$Sen4x = \frac{1}{2}$$

A) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ B) $4n\pi + (-1)^n \frac{2\pi}{3}$

C) $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$ D) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$

E) $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{24}$

10 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Sen3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) 165° B) 185° C) 195° D) 205° E) 215°

11 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Sen\frac{2x}{3} = 0$

A) 12π B) 9π C) 6π D) 6π E) π

12 Determinar el conjunto solución de la ecuación : $Cos\,8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

A) $n\pi \pm \frac{\pi}{16}$ B) $2n\pi + \frac{\pi}{32}$ C) $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{32}$

D) $\frac{n\pi}{4} \pm \frac{\pi}{32}$ E) $\frac{n\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$

13 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Cos\,5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A) 136° B) 146° C) 156° D) 166° E) 176°

14 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Cos6x = 1$

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

15 Determinar el conjunto solución de la ecuación : $Tan2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A) $n\pi + \frac{\pi}{12}$ B) $2n\pi + \frac{\pi}{12}$ C) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$

D) $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ E) $n\pi + \frac{\pi}{6}$

16 Determinar la suma de las tres primeras soluciones positivas de la ecuación : $Tan4x = \sqrt{3}$

A) $\frac{\pi}{2}$ B) π C) $\frac{3\pi}{2}$ D) 2π E) $\frac{5\pi}{2}$

17 Resolver : $\frac{1 + senx + cosx}{1 + senx - cosx} = 1$

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{7\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{4}$ E) $\frac{9\pi}{2}$

18 Resolver : $Sen^4x + cos^4x = 0$

Calcular la suma de las cuatro primeras soluciones positivas.

A) 2π B) 3π C) 4π D) 5π E) 6π

19 Resolver : $Senx + cos2x = 0$

Calcular la suma de las soluciones para el intervalo $x \in [0 ; 2\pi]$.

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

20 Resolver : $2Cos^2x - 3Senx = 0$

Indicar la suma de las 3 primeras soluciones positivas.

A) $\frac{23\pi}{6}$ B) $\frac{19\pi}{6}$ C) $\frac{17\pi}{6}$ D) $\frac{13\pi}{6}$ E) $\frac{11\pi}{6}$

21 Resolver :

$Tanx + Tany = 4$

$Tan^2x + Tan^2x = 14;\ (n, k \in Z)$

A) $x = n\pi + \frac{\pi}{12}$, $y = k\pi + \frac{5\pi}{12}$ B) $x = n\pi + \frac{5\pi}{12}$, $y = k\pi + \frac{\pi}{12}$

C) $x = n\pi - \frac{\pi}{12}$, $y = k\pi - \frac{5\pi}{12}$ D) A y B son respuesta

E) B y C son respuesta

22 Resolver :

$$cos^2 4x + cos^2 2x \cdot sen3x = 5 + cos6x + cos2x$$

A) $n\pi + \frac{\pi}{2}$ B) $n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ C) $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$

D) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ E) $n\pi - \frac{\pi}{2}$

23 Resolver :

$$tan^2[\pi(x+y)] + cos^2[\pi(x+y)] = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1$$

A) $x = 1$, $y = \frac{4n-3}{4}$ B) $x = 1$, $y = \frac{4n+1}{4}$

C) $x = 1$, $y = \frac{4n-5}{5}$ D) A y B son rpta.

E) A y C son rpta.

CLAVES DE LA SEGUNDA PRACTICA

1)C	2)E	3)D	4)B	5)B	6)A	7)D	8)B	9)C	10)D
11)B	12)C	13)B	14)D	15)E	16)E	17)A	18)D	19)A	20)A

CLAVES DE LA TERCERA PRACTICA

1)B	2)D	3)C	4)D	5)D	6)D	7)D	8)A	9)C	10)C
11)B	12)D	13)C	14)B	15)C	16)B	17)E	18)A	19)C	20)B
21)D	22)D	23)E							

RETO 1 :

Las teclas numéricas de una calculadora (sin contar la del cero) están dispuestas formando tres filas y tres columnas. El juego consiste en pulsar por turno una tecla e ir sumando las puntuaciones correspondientes. Pero ha de hacerse de modo que la tecla pulsada por el jugador de turno ha de estar en la misma fila o columna que la pulsada por su oponente. Pierde el primer jugador que sume *31* o más .

RETO 2 :

Juego para dos jugadores. Se utiliza un dado convencional con las caras punteadas de *1* a *6*, de manera que las caras opuestas suman *7*. El primer jugador coloca o lanza el dado sobre la mesa y se anota la puntuación de la cara superior. El segundo jugador voltea el dado sobre una de las aristas de la cara inferior, de manera que queda en la cara superior una de las que estaba en una lateral. Se suma la puntuación de esta cara a la anotada inicialmente. Los jugadores continúan volteando alternativamente el dado de esta forma. Pierde el primero que eleva la suma a *50* ó más puntos. Se trata de determinar si existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

RETO 3 :

Tienes que encontrar **4** números de **2** cifras/dígitos que cumplen:

	1	2
1		
2		

(no hay ceros)

Horizontales:

Es un múltiplo de **5** y de **3**.

Es un múltiplo de **9**.

Verticales:

Es un múltiplo de **4**.

Es un múltiplo de **11**.

RESOLUCION DE TRIANGULOS OBLICUANGULOS — CAPÍTULO 129

OBJETIVOS :

* Conocer la técnicas y relaciones para resolver los triángulos oblicuángulos y afines .

* Aplicar los teoremas fundamentales (senos y cosenos).

* Calcular los elementos principales de un triángulo a partir de ciertas condiciones.

INTRODUCCIÓN :

Johannes Müller (Alemania, 1436-1476), llamado Regiomontano, posiblemente el matemático que más influencia tuvo en el s. XV y , además , un eminente astrónomo , fue el primer editor de textos de matemática y astronomía de uso comercial. Sus obras más conocidas son: el primer tratado de trigonometría que tuvo gran influencia en su tiempo (escrito en latín: «De triangulis omnimodis», Sobre los triángulos de toda clase)y «Ephemerides». En el primero está el enunciado de la ley de los senos y la regla para calcular el área de un triángulo ; en notación actual , $S=(bcSen\,\alpha)/2$, y mostró cómo resolver cualquier triángulo plano (o esférico) utilizando la ley de los senos o la del seno de su complemento (el coseno). En la otra hay tablas para la posición del Sol , de la Luna y de los planetas (cada día en los años 1475-1506).

Cristóbal Colón disponía de una copia de esta obra en su cuarto viaje al Nuevo Mundo (1504) y la utilizó para predecir el eclipse lunar del 29 de febrero de 1504, lo cual causó gran impacto en la población indígena que le era hostil y a partir de este evento logró la ayuda de dicha población.

TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

El triángulo que no contiene el ángulo recto se denomina OBLICUÁNGULO

* Los elementos básicos de todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.

* Un triángulo esta determinado si se conocen *3* de sus elementos básicos (uno de ellos es necesariamente uno de los lados).

* Resolver un triángulo significa que dados *3* elementos básicos, calcular los otros *3* elementos.

¿ QUÉ ES RESOLVER UN TRIÁNGULO ?

Dado el triángulo ΔABC , oblicuángulo; resolverlo significa determinar las medidas de sus elementos básicos ; es decir , sus tres lados *(a , b y c)* y sus tres ángulos (*A* , *B* y *C*) ; *a* partir de ciertos datos que definan el triángulo.

¿ CÓMO RESOLVER UN TRIÁNGULO ?

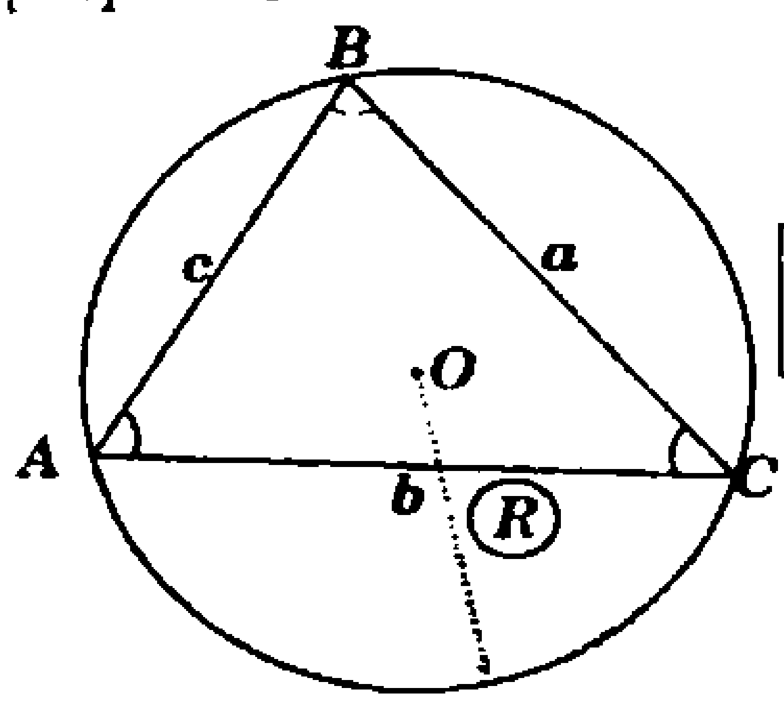
Una vez que reconocemos los datos del triángulo y verificamos que se encuentra definido ; para resolverlo se utilizaran algunas propiedades geométricas , relaciones trigonométricas ya conocidas y otras propias del capítulo como las siguientes :

LEYES FUNDAMENTALES

El objetivo del presente capítulo es determinar las medidas de los elementos básicos de un triángulo; es decir sus tres lados y tres ángulos a partir de ciertos datos conocidos utilizando propiedades geométricas y otras que son propias del curso tales como:

LEY DE SENOS

" En todo triángulo las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos ".



En el ΔABC, se cumple :

$$\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}=2R$$

"R" → Circunradio
"O" → Circuncentro

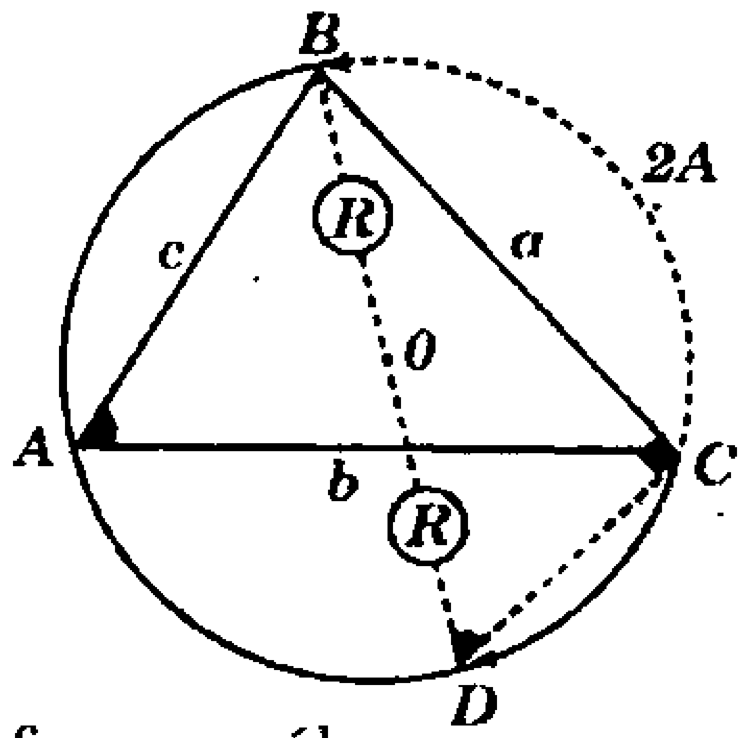
OBSERVACIONES :

$a=2RSenA$ $\quad$ $b=2RSenB$ $\quad$ $c=2RSenC$

DEMOSTRACIÓN :

* En el ΔBCD :

$$SenA=\frac{a}{2R} \text{ Y } \frac{a}{SenA}=2R$$



* En forma análoga :

$$\frac{b}{SenB}=2R \Rightarrow \frac{c}{SenC}=2R$$

CONCLUSIONES :

$$\boxed{\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}=2R}$$

EJEMPLO 1 :

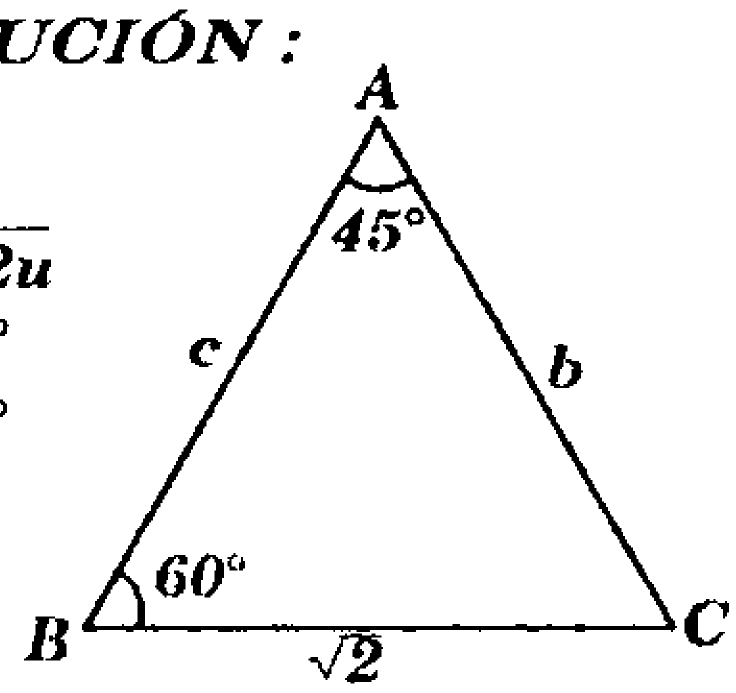
En un triángulo ABC, si se cumple que :

$a=\sqrt{2}\,u$; $B=60°$ y $A=45°$; calcular el lado AC .

RESOLUCIÓN :

* Datos :

$a=\sqrt{2u}$
$B=60°$
$A=45°$
$B=??$



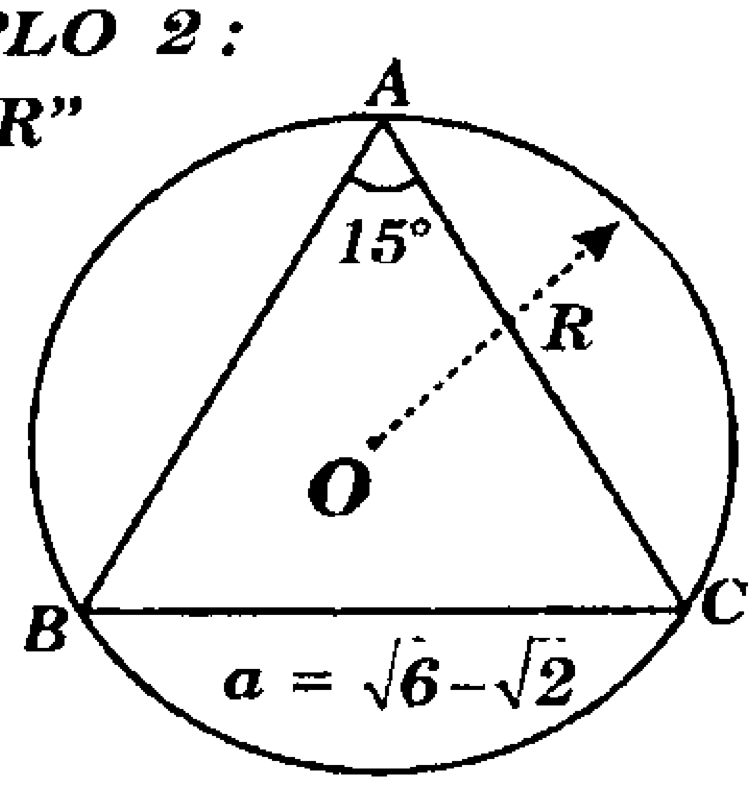
* Aplicando Ley de senos :

$$\frac{b}{Sen60°}=\frac{\sqrt{2}}{Sen45°}$$

$$Y\ b=\frac{\sqrt{2}\ Sen60°}{Sen45°}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}/2)}{\sqrt{2}/2}=\sqrt{3}$$

EJEMPLO 2 :

Hallar ***"R"***



RESOLUCIÓN :

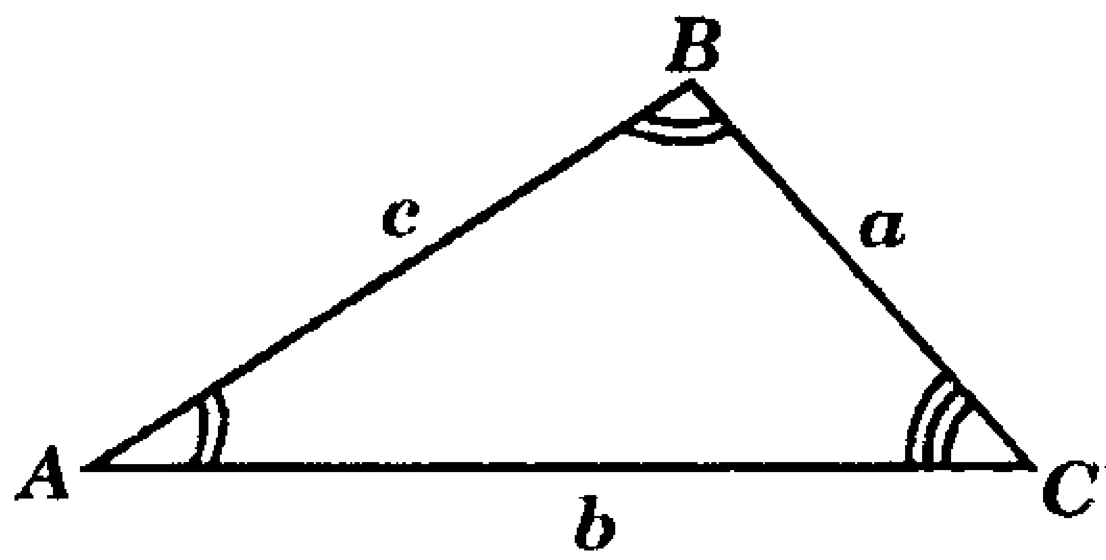
* Aplicamos : $a=2R\ SenA$
* Reemplazamos datos, según la figura : $\sqrt{6}-\sqrt{2}=2RSen15°$

$$\Rightarrow \sqrt{6}-\sqrt{2}=2R\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow R=2$$

LEY DE COSENOS

"En todo triángulo la medida de cualesquiera de sus lados al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos , menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

* En el ΔABC , se cumple :



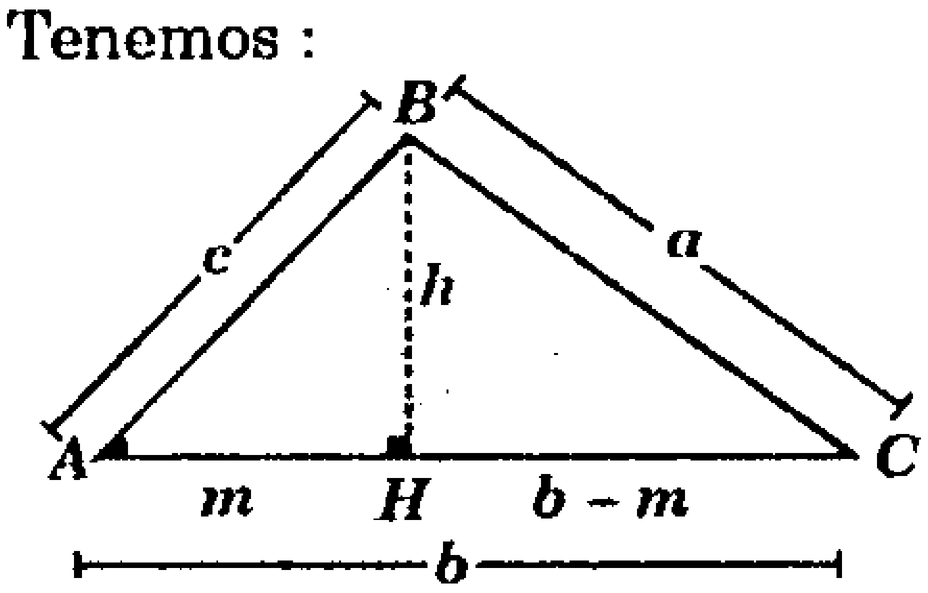
$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bcCosA}$$

$$\boxed{b^2=a^2+c^2-2acCosB}$$

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2abCosC}$$

DEMOSTRACIÓN :

* Tenemos :



* En el AHB :

$h^2=c^2-m^2$........................(I)

* En el BHC :

$h^2=a^2-(b-m)^2$................(II)

* Igualmente (I) y (II) :

$c^2-m^2=a^2-b^2+2bm-m^2$ .....(III)

* En el AHB :

$$\frac{m}{c}=CosA \Rightarrow m=cCosA$$

* Reemplazamos en (III) :

$$c^2=a^2-b^2+2bcCosC$$

* En conclusión :

$$a^2=b^2+c^2-2b\times CosA$$

* En forma análoga se demuestran las otras dos igualdades .

OBSERVACIONES :

Da la ley de cosenos se deducen:

$$\boxed{CosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} \quad \boxed{CosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$$

$$\boxed{Cos\ C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

EJEMPLO 1 :

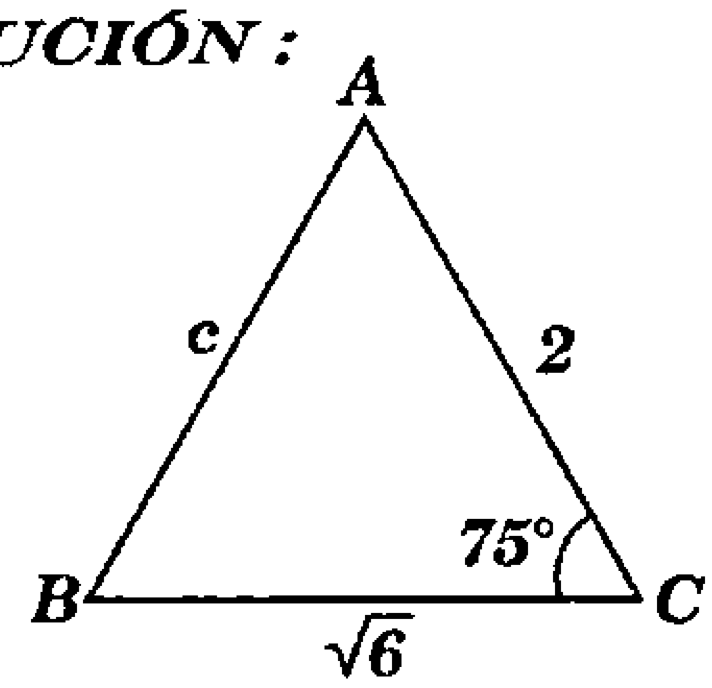
En un ΔABC ; se tiene que :

$$a=\sqrt{6}u\ ;\ b=2u\ \ y\ \ C=75°$$

RESOLUCIÓN :

* Datos:

$a=\sqrt{6}\,u$
$b=2u$
$C=75°$
$c=??$



* Aplicamos Ley de Cosenos :

$$c^2=(\sqrt{6})^2+(2)^2-2(\sqrt{6})(2)Cos75°$$

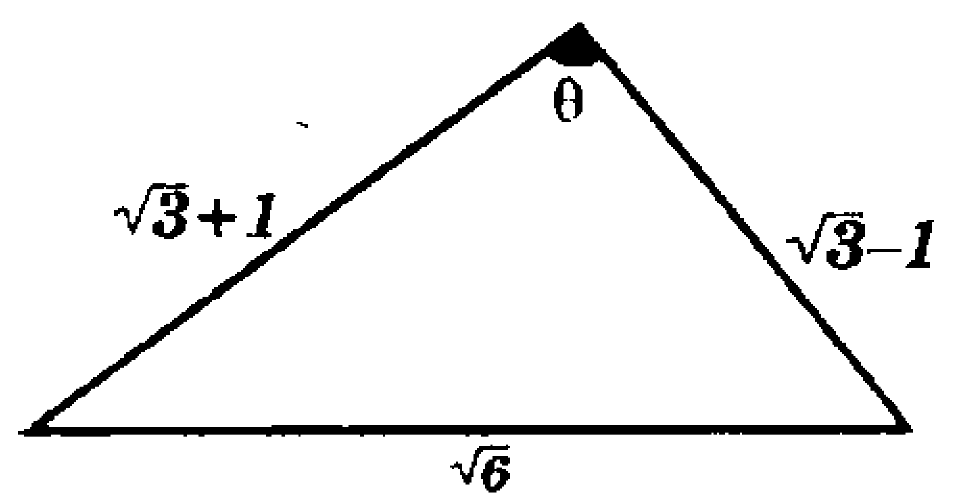
$$\Rightarrow c^2=6+4-4\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow c^2-4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$$

$$\Rightarrow c=(\sqrt{3}+1)$$

EJEMPLO 2 :

En la figura encontrar: "$Cos\theta$" y "θ"



RESOLUCIÓN :

*Aplicando la ley de cosenos (Observaciones), tenemos del triángulo mostrado que:

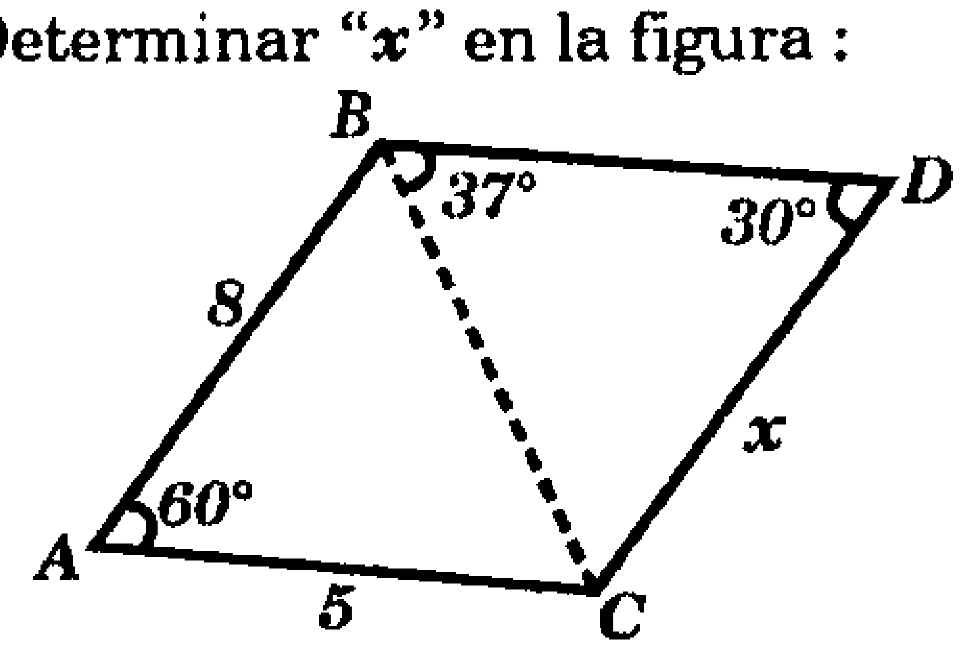
$$Cos\theta=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

*Efectuando tenemos:

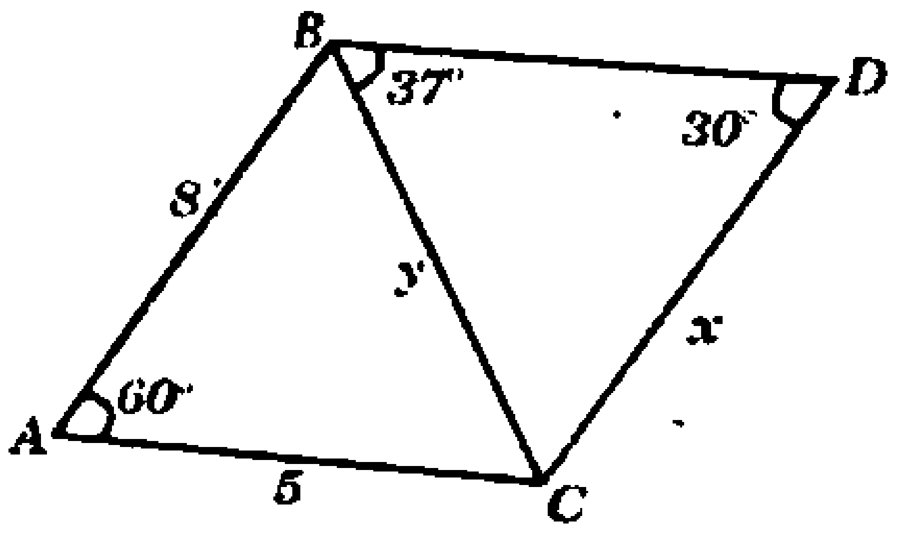
$$Cos\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60°$$

EJEMPLO 3 :

Determinar "x" en la figura :



RESOLUCIÓN :



* Hallamos "y" por ley de cosenos en el ΔABC

$$y^2=8^2+5^2-2(8)(5)Cos60° =$$

$$= 64+25-80°\times\frac{1}{2}= 89-49$$

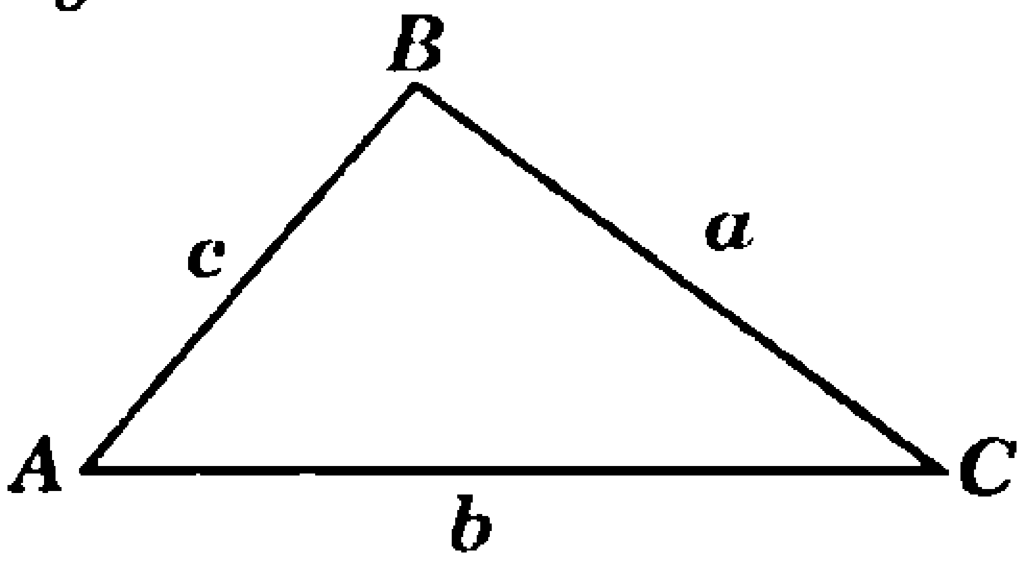
$$y^2=49 \Rightarrow y=7$$

* Hallamos "x" por ley de Senos en el ΔABC :

$$\frac{x}{Sen37°}=\frac{y}{Sen30°} \text{ Y } \frac{x}{3/5}=\frac{7}{1/2} \text{ Y } x=8,4$$

LEY DE TANGENTES

En todo triángulo se cumple que la suma de longitudes de sus lados, es a su diferencia ; como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos a dichos lados, es a la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.



* Del gráfico , se cumple :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)} \qquad \frac{b+c}{b-c}=\frac{Tan\left(\frac{B+C}{2}\right)}{Tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{Tan\left(\frac{C+A}{2}\right)}{Tan\left(\frac{C-A}{2}\right)}$$

EJEMPLO :

En un triángulo *ABC* , se cumple: $m\angle C=60°$ y $a = 3b$. Calcule el valor de $tg\left(\frac{A-B}{2}\right)$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 3 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN :

* En todo triángulo :

$$A+B+C=180°$$

$$\Rightarrow A+B+60°=180°$$

$$\Rightarrow A+B=120°$$

* Por la ley de tangentes :

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tg\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

* Reemplazando :

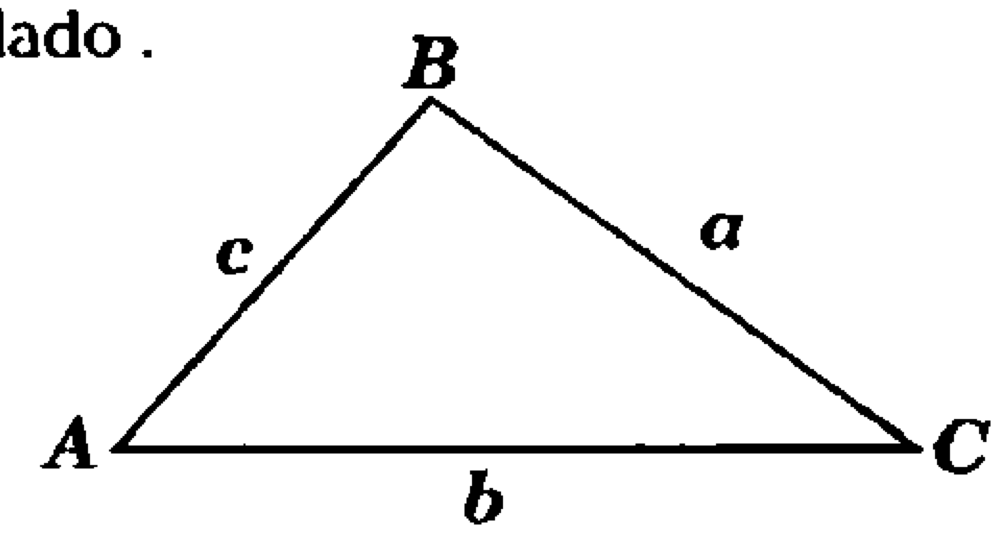
$$\frac{3b-b}{3b+b}=\frac{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tg\left(\frac{120°}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{4b}=\frac{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)}{tg\,60°} \Rightarrow tg\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

RPTA : "D"

LEY DE PROYECCIONES

En todo triángulo , la longitud de un lado es igual a la suma de los productos de cada una de las otras 2 longitudes con el coseno del ángulo que forman con el primer lado .



* Del gráfico , se cumple :

$$a = b\,cosC + c\,cosB$$

$$b = a\,cosC + c\,cosA$$

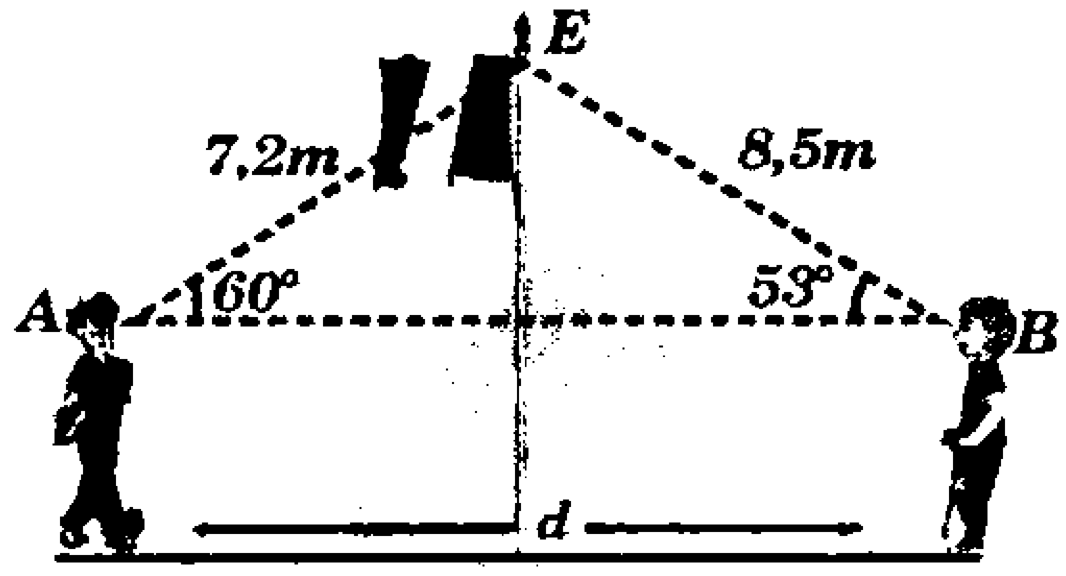
$$c = a\,cosB + c\,cosA$$

EJEMPLO :

Dos alumnos observan la parte superior del asta de una bandera con ángulos de elevación de *60°* y *53°*. Si las visuales miden *7,2m* y *8,5m* respectivamente. Calcule la distancia que separa a los escolares, si ellos tiene la misma estatura.(Los alumnos y el asta se encuentra en un mismo plano vertical)

A) 7m B) 8 C) 7,2 D) 8,7 E) 9,1

RESOLUCIÓN :



*En el triangulo *AEB* , aplicamos la Ley de Proyecciones :

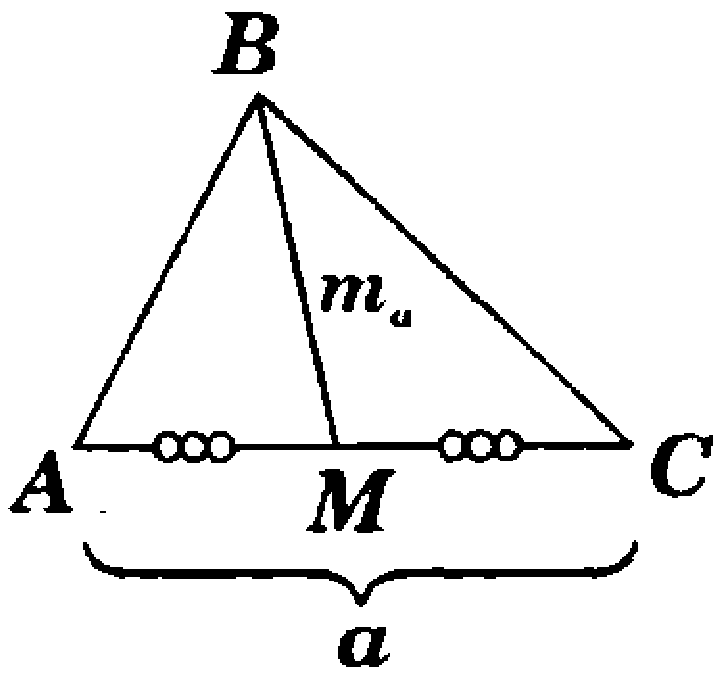
$$d = (7,2m)cos60°+(8,5m)\,cos53°$$

$$\Rightarrow d = (7,2m)\left(\frac{1}{2}\right)+(8,5m)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow d=3,6m+5,1m = 8,7m$$

RPTA : "D"

LINEAS NOTABLES

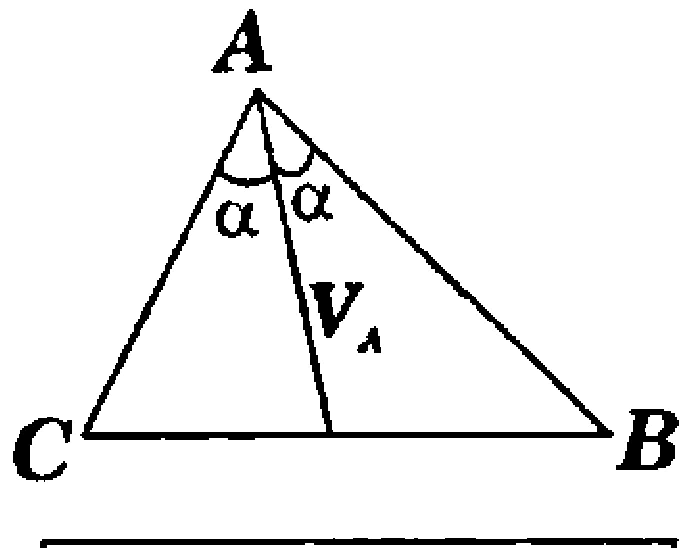


$$4m_a^2 = b^2+c^2+2bcCosA$$

$$4m_b^2 = a^2+c^2+2acCosB$$

$$4m_c^2 = a^2+b^2+2abCosC$$

m_a : mediana relativa de «a»

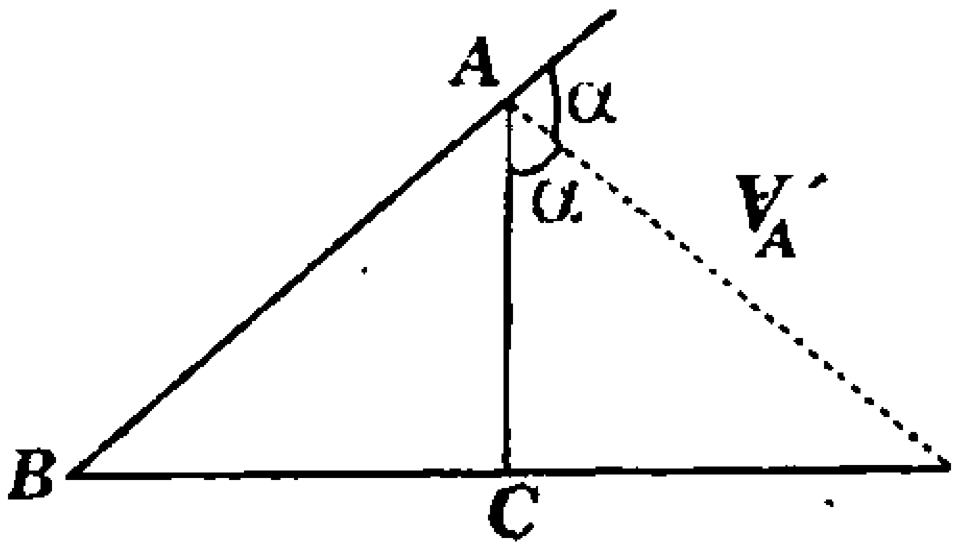


$$V_A=\left(\frac{2bc}{b+c}\right)Cos\frac{A}{2}$$

$$V_B=\left(\frac{2ac}{a+c}\right)Cos\frac{B}{2}$$

$$V_C=\left(\frac{2ab}{a+b}\right)Cos\frac{C}{2}$$

V_A: Bisectriz interior del « $\widehat{A}$ »



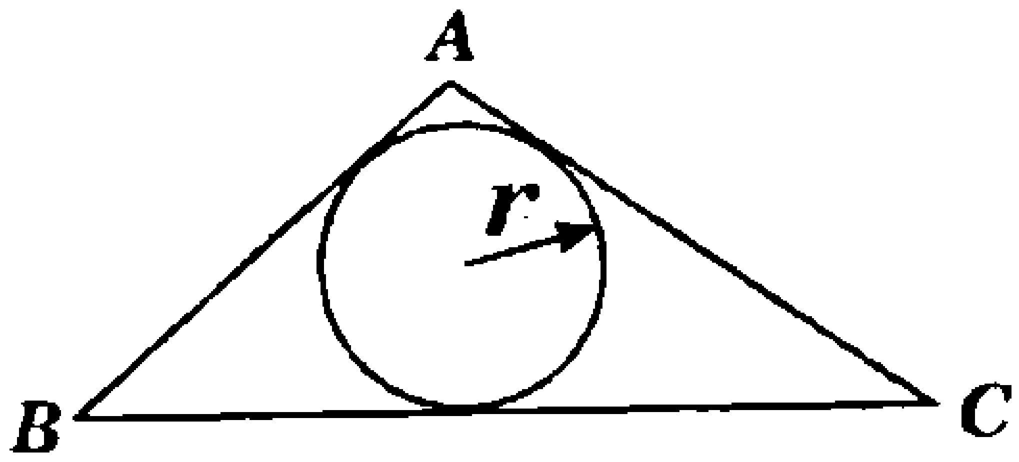
$$V_A' = \left(\frac{2bc}{|b-c|}\right) Sen\frac{A}{2}$$

$$V_B' = \left(\frac{2ac}{|a-c|}\right) Sen\frac{B}{2}$$

$$V_C' = \left(\frac{2ab}{|a-b|}\right) Sen\frac{C}{2}$$

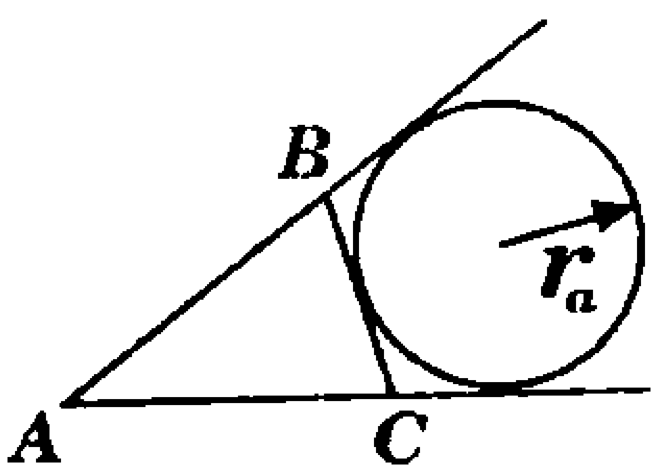
V_A' : *Bisectriz exterior "Â"*

RADIOS NOTABLES :



$$r = 4RSen\frac{A}{2}Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2}$$

r : Inradio ; *R:* Circunradio



$$r_a = 4RSen\frac{A}{2}Cos\frac{B}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$r_b = 4RSen\frac{B}{2}Cos\frac{A}{2}Cos\frac{C}{2}$$

$$r_c = 4RSen\frac{C}{2}CosACos\frac{B}{2}$$

r_a: exradio relativo al lado «*a*»

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1:

En un triángulo *ABC* :

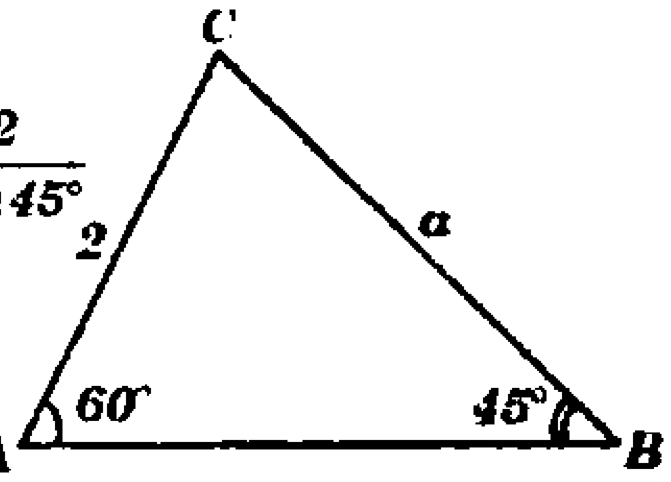
$\measuredangle A = 60° ; b = 2 ; \measuredangle B = 45°$

Calcular : "*a*".

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando el problema , tenemos



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{sen60°} = \frac{2}{sen45°}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2sen60°}{sen45°}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 2 :

En un triángulo *ABC*: $\measuredangle A = 60°$; $\measuredangle C = 45°$; $a = \sqrt{3} - 1$.

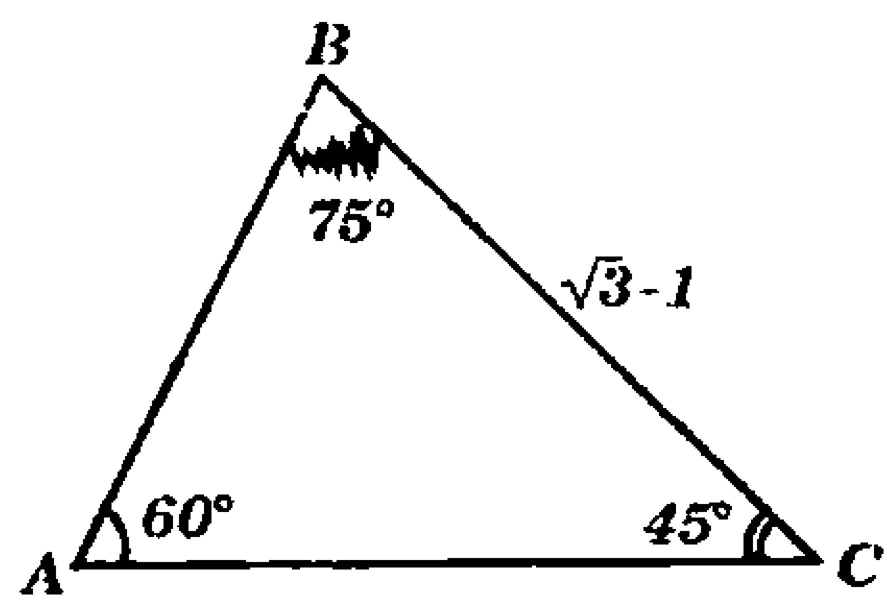
Calcular "*b*".

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{6}{6}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando , tenemos :

$\measuredangle A = 60°$ y $\measuredangle C = 45° \Rightarrow \measuredangle B = 75°$



$$\frac{b}{sen75°} = \frac{3-1}{sen60°}$$

$$\Rightarrow b = (\sqrt{3}-1)\frac{sen75°}{sen60°}$$

$$\Rightarrow b = (\sqrt{3}-1)\frac{\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}}{\frac{3}{2}}$$

* Operando :

$$b = (\sqrt{3}-1)\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{(3-1}{2\sqrt{3}}) \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 :

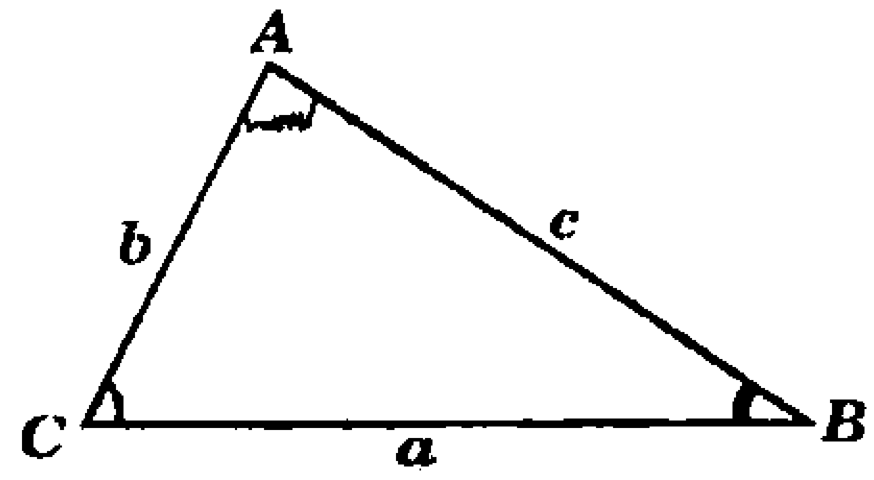
En un ΔABC : $a = 2b$

Determinar : $E = \frac{senA}{senB}$

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) 4 E) $\frac{1}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Del Gráfico :



* Se tiene :

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow \frac{a}{b} = \underbrace{\frac{senA}{senB}}_{E}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a}{b} = \frac{2b}{b} \Rightarrow E = 2$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 4 :

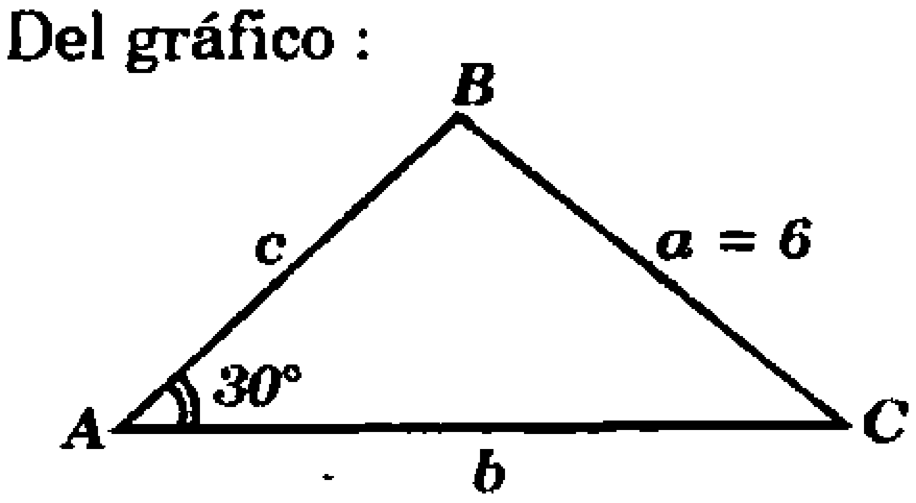
en un ΔABC : $A=6$ y $\measuredangle A = 30°$

¿Cuánto mide el circunradio del ΔABC ?.

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9 E) F.D.

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



* Tenemos que :

$$\frac{a}{senA} = 2R \Rightarrow \frac{6}{sen30°} = 2R$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{sen30°} = \frac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow R = 6$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 5 :

En un ΔABC :

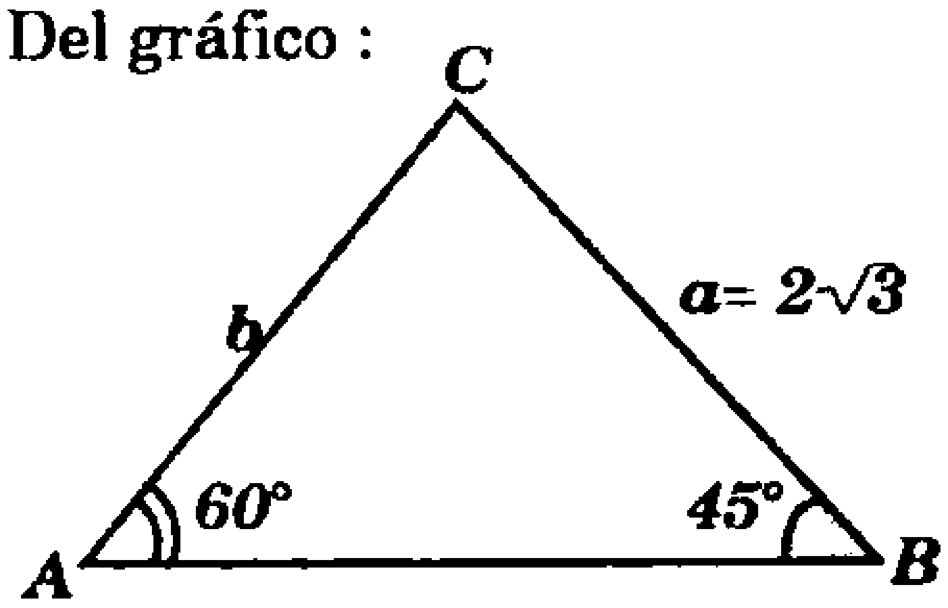
$a = 2\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 60°$; $\measuredangle B = 45°$

Calcular : "*b*".

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$ D) 2 E) 4

RESOLUCIÓN :

* Del gráfico :



* Se tiene que :

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}\Rightarrow b=\frac{asenB}{senA}$$

* Reemplazando valores :

$$b=\frac{2\sqrt{3}\times sen45^\circ}{sen60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow b=2\sqrt{2}$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 6 :

En un ΔABC ; simplificar :

$$E=\frac{asenB+bsenA}{asenC+csenA};\ si:\ b=3c$$

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 6 D) $\frac{1}{6}$ E) 9

RESOLUCIÓN :

* Por propiedad :

$$\left.\begin{matrix}asenB=bsenA\\ asenC=csenA\end{matrix}\right\}$$

$$E=\frac{bsenA+bsenA}{csenA+csenA}=\frac{2b\,senA}{2\,csenA}\Rightarrow E=\frac{b}{c}$$

* Pero : $b=3c$ $\Rightarrow E=\frac{3c}{c}\Rightarrow E=3$

RPTA: "A"

PROBLEMA 7 :

En un triángulo ΔABC ; reducir :

$$J=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{senAsenBsenC}$$

Si su circunradio es "R".

A) R B) $2R$ C) $4R$ D) $\frac{R}{2}$ E) $\frac{R}{4}$

RESOLUCIÓN :

* Sabemos que :

$a=2RsenA$; $b=2RsenB$; $c=2RsenC$

* Luego :

$$J=\frac{2RsenAcosA+2RsenBcosB+2RsenCcosC}{senA\times senB\times senC}$$

$$\Rightarrow J=\frac{Rsen2A+Rsen2B+Rsen2C}{senA\times senB\times senC}$$

$$\Rightarrow J=\frac{R(sen2A+sen2B+sen2C)}{senA\times senB\times senC}$$

* Pero , como :

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow sen2A+sen2B+sen2C$$

$$=4senA\times senB\times senC$$

$$\Rightarrow J=\frac{R\,4senA\times senB\times senC}{SenA\times senB\times senC}$$

$$\Rightarrow J=4R$$

RPTA: "C"

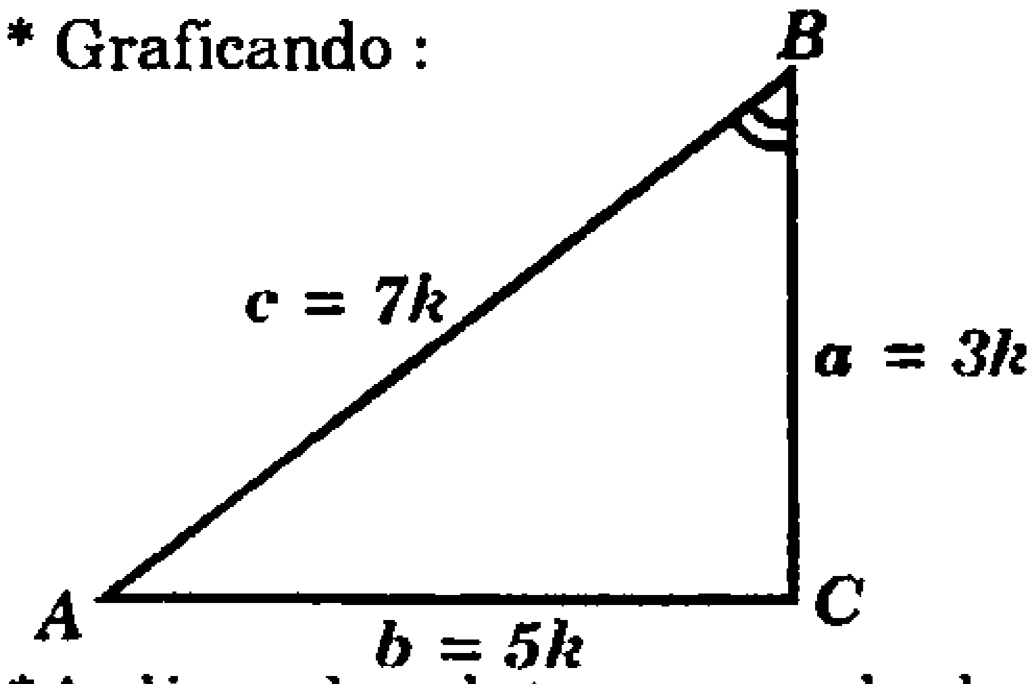
PROBLEMA 8 :

En un ΔABC : $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$; calcular "$\measuredangle C$".

A) 60° B) 120° C) 135° D) 30° E) 45°

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



*Aplicando el teorema de los cosenos:

$$C^2=a^2+b^2-2abcosC$$

$$\Rightarrow 49k^2=9k^2+25k^2-2(3k)(5k)cosC$$

$$\Rightarrow 49=25+9-30cosC\Rightarrow 15=-30cosC$$

$$\Rightarrow cosC=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=120^\circ$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 9 :

En un ΔABC : $a^2=b^2+c^2+bc$

Hallar "$\measuredangle A$"

A) 60 B) 120° C) 135° D) 150° E) 30°

RESOLUCIÓN :

* De la condición :

$$a^2=b^2+c^2+bc$$

$$\Rightarrow b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc$$

$$\Rightarrow -2bc\cos=bc$$

$$\Rightarrow cosA=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=120^\circ$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 10 :

En un triángulo ΔABC :

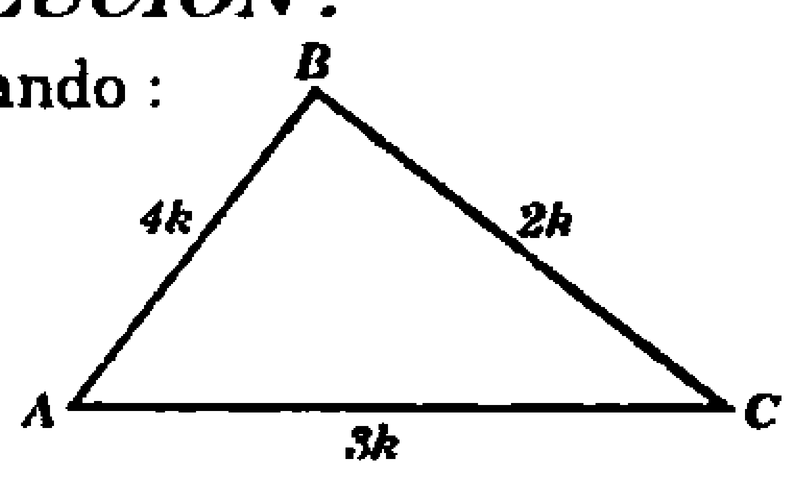
$$\frac{senA}{2}=\frac{senB}{3}=\frac{senC}{4}$$

Calcular : "$\measuredangle B$".

A) $arccos\frac{7}{16}$ B) $arccos\frac{7}{11}$ C) $arccos\frac{11}{16}$
C) $arccos\frac{11}{15}$ E) $arccos\frac{7}{15}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando :



$$\frac{senA}{2}=\frac{senB}{3}=\frac{senC}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{2RsenA}{2}=\frac{2RsenB}{3}=\frac{2RsenC}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k\begin{cases}a=2k\\ b=3k\\ c=4k\end{cases}$$

* Luego :

$$(3k)^2=(4k)^2+(2k)^2-2(4k)(2k)cosB$$

$$\Rightarrow 9=16+4-16cosB\Rightarrow 16cosB=1$$

$$\Rightarrow cosB=\frac{11}{16}\Rightarrow B=arccos\frac{11}{16}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 11:

En un ΔABC ; reducir :

$$J=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$$

A) $\frac{tanA}{tanB}$ B) $\frac{tanA}{tanC}$ C) $\frac{tanC}{tanA}$
D) $\frac{tanB}{tanC}$ E) $\frac{tanB}{tanA}$

RESOLUCIÓN :

* Del teorema de los cosenos :

$$c^2=a^2+b^2-2abcosC$$

$$\Rightarrow 2abcosC=a^2+b^2-c^2$$

$$b^2=a^2+c^2-2accosB$$

$$\Rightarrow 2accosB=a^2+c^2-b^2$$

* En la expresión :

$$J=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$$

$$\Rightarrow J=\frac{2abcos\,C}{2accosB}=\frac{bcosC}{c\,cosB}$$

* Pero; por el teorema de los senos :

$b=2RsenB$; $c=2RsenC$

* En la expresión:

$$J=\frac{2R\,senB\times cosC}{2R\,senC\times senB}=\frac{senB\,cosC}{senC\,cosB}$$

* Ordenando :

$$J=\frac{senB}{cosB}\times\frac{cosC}{senC}=tanB\times cotC$$

$$\Rightarrow J=tanB\times\frac{1}{tanC}\Rightarrow J=\frac{tanB}{tanC}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 12 :

En triángulo ΔABC , reducir :

$$E=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}-cosA$$

A) $cosA$ B) $2cosA$ C) $-cosA$

D) $-2\cos A$ *E)* -1

RESOLUCIÓN :

* En la expresión :

$$E=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}-\cos A$$

* Se conoce :

$$b^2+c^2-a^2=2bc\times\cos A$$

* Luego :

$$E=\frac{2bc\times\cos A}{bc}-\cos A$$

$$\Rightarrow E=2\cos A-\cos A\Rightarrow E=\cos A$$

RPTA: "A"

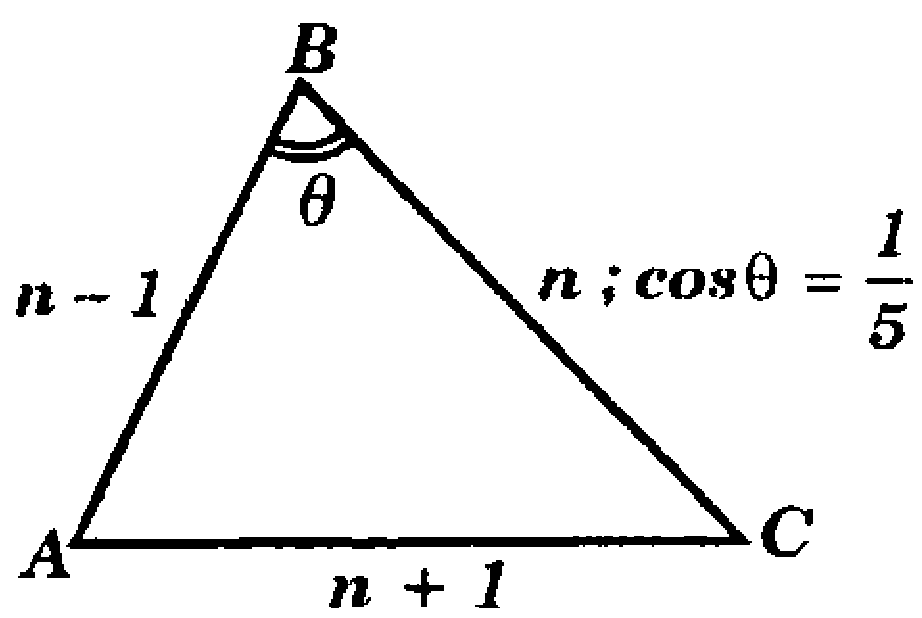
PROBLEMA 13 :

El coseno del mayor ángulo de un triángulo cuyas longitudes de sus lados son tres números enteros y consecutivos es igual a $1/5$. Calcular el perímetro de dicho triángulo.

A)15 B)10 C)20 D)18 E)19

RESOLUCIÓN :

* Según los datos:



* Pero sabemos por el teorema de los cosenos:

$$(n+1)^2=(n-1)^2+n^2-2(n-1)n\cos\theta$$

$$2(n-1)n\cos\theta=(n-1)^2+n^2-(n+1)^2$$

$$\Rightarrow 2(n-1)n\times\frac{1}{5}=n^2-2n+1+n^2-(n^2+2n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{5}(n-1)=n^2-4n$$

* Ordenando :

$$\frac{2n}{5}(n-1)=\not{n}(n-4)\Rightarrow 2(n-1)=5(n-4)$$

$$\Rightarrow 2n-2=5n-20\Rightarrow 3n=18$$

* Piden el perímetro :

$$2p=n+\not{1}+n+n-\not{1}=3n\Rightarrow 2p=18$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 14 :

En un ΔABC ; reducir :

$$J=\frac{a-b\cos C}{\cos B}+\frac{b-C\cos A}{\cos C}+\frac{a\cos B}{\cos A}$$

si su perímetro es **20cm**.

A)10cm B)20 C) 40 D) 8 E)N.A.

RESOLUCIÓN:

* Como :

$$a=b\cos C+c\cos B\Rightarrow a-b\cos C=c\cos B$$
$$b=a\cos C+c\cos A\Rightarrow b-c\cos A=a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A\Rightarrow c-a\cos B=b\cos A$$

* Luego :

$$J=\frac{c\cos B}{\cos B}+\frac{a\cos C}{\cos C}+\frac{b\cos A}{\cos A}=\underbrace{c+a+b}_{perímetro}$$

$$\Rightarrow J=20cm$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 15 :

En un ΔABC de perímetro **20cm**, calcular.

$K=(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(c+a)\cos B$

A)10cm B)20 C)30 D)40 E) 50

RESOLUCIÓN :

* Operando en la expresión :

$$K=a\cos C+b\cos C+b\cos A+c\cos A+$$
$$+c\cos B+a\cos B$$

* Ordenando :

$$K=\underbrace{a\cos C+c\cos A}_{b}+\underbrace{b\cos C+c\cos B}_{a}+$$
$$+\underbrace{b\cos A+a\cos B}_{c}$$

$$\Rightarrow K=a+b+c=2p\Rightarrow K=20$$

RPTA: "B"

PROBLEMA 16 :

En un ΔABC , su lado $\overline{AB}$ es igual a $4u$ y la $m\measuredangle A=15°$ y $m\measuredangle C=45°$. Calcule la longitud del lado $\overline{AC}$.

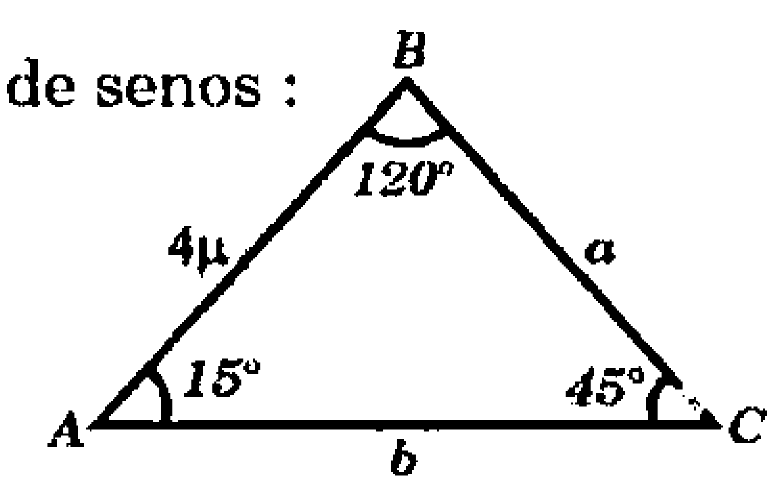
A) 3μ *B)* 4 *C)* $2\sqrt{3}$ *D)* $2\sqrt{6}$ *E)* $\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* En todo triángulo se tiene :

$$A+B+C=180°$$
$$\Rightarrow 15°+B+45°=180°\Rightarrow B=120°$$

* Por ley de senos :



$$\frac{b}{\operatorname{Sen}B}=\frac{c}{\operatorname{Sen}C}\Rightarrow\frac{b}{\operatorname{Sen}120°}=\frac{4}{\operatorname{Sen}45°}$$

$$\Rightarrow\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\mu}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow b=2\sqrt{6}$$

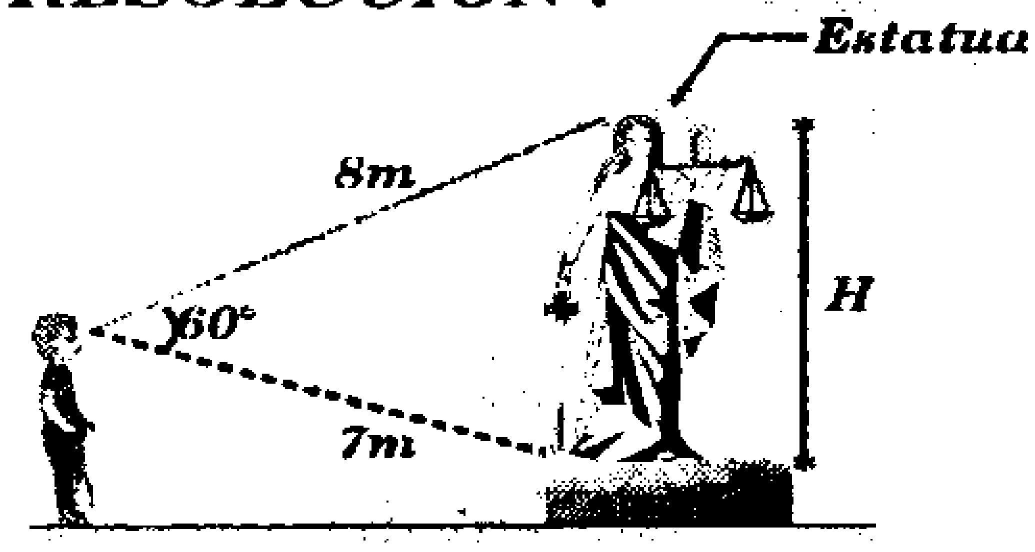
RPTA:"D"

PROBLEMA 17 :

Un estudiante observa una estatua, con visuales que miden **8m** y **7m**; las cuales forman un ángulo de **60°**. Calcule la altura de la estatura.

A)8m B) $2\sqrt{10}$ *C)* $\sqrt{65}$ *D)* $\sqrt{57}$ *E)* $2\sqrt{17}$

RESOLUCIÓN :



* En el triángulo formado del gráfico , por ley de cosenos :

$$(H)^2=(8)^2+(7)^2\Rightarrow 2(8)(7)\cos 60°$$

$$\Rightarrow H^2=64+49-2(8)(7)\left(\frac{1}{2}\right)$$

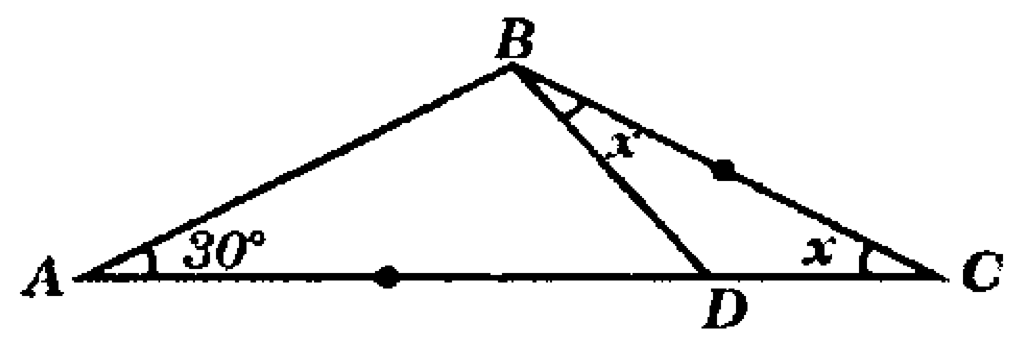
$$\Rightarrow H^2=113-56\Rightarrow H^2=57$$

$$\Rightarrow H=\sqrt{57}m$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 18 :

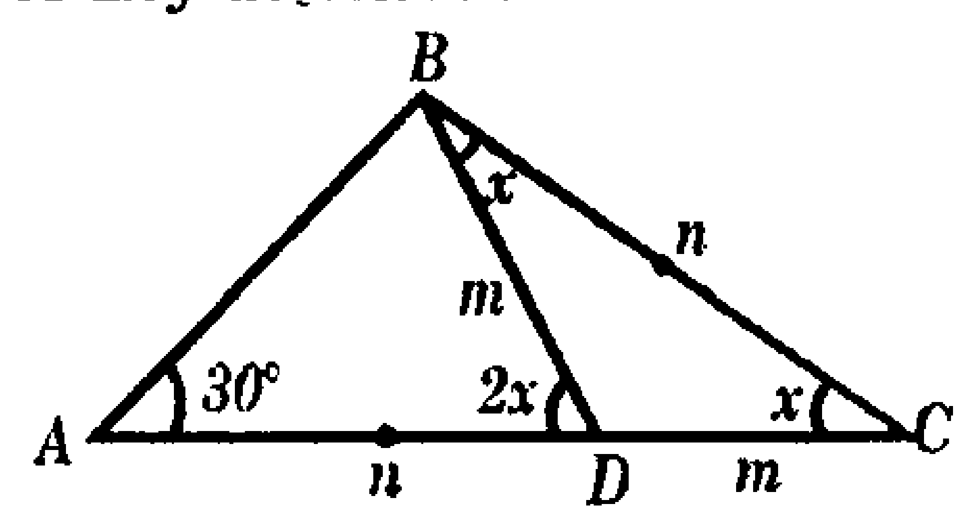
Calcular "x", en :



A)30° B)20° C)45° D)60° E)"B" o "D"

RESOLUCIÓN :

Por Ley de senos :



$$\begin{cases}\dfrac{m}{n}=\dfrac{\overset{\Delta ABC}{\operatorname{sen}30°}}{\operatorname{sen}[180°-(2x)]}=\dfrac{\overset{\Delta BDC}{\operatorname{sen}x}}{\operatorname{sen}[180°-2x]}\\ \Rightarrow \operatorname{sen}30°\operatorname{sen}2x=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(30°+2x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}x\cos x)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(30°+2x)$$

$$\Rightarrow\cos x=\operatorname{sen}(30°+2x)$$

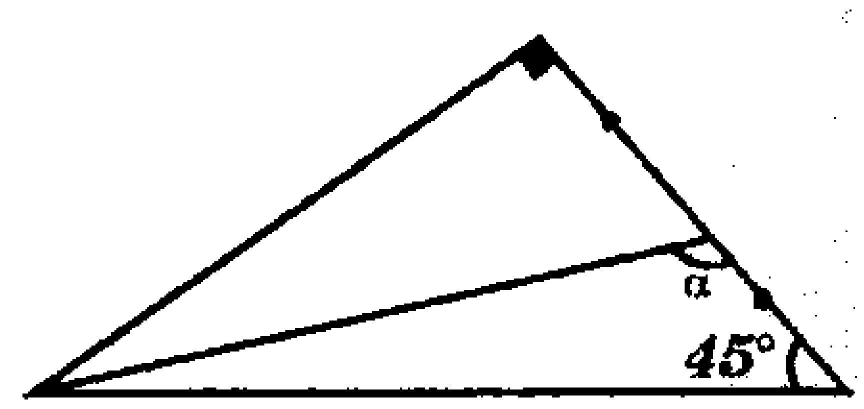
$$\Rightarrow x+30°+2x=90°\ \text{ó}\ -x+(30°+2x)=90°$$

$$\Rightarrow x=20°\ \text{ó}\ x=60$$

RPTA: "E"

PROBLEMA 19 :

Calcular "$\operatorname{sen}\alpha$", en:



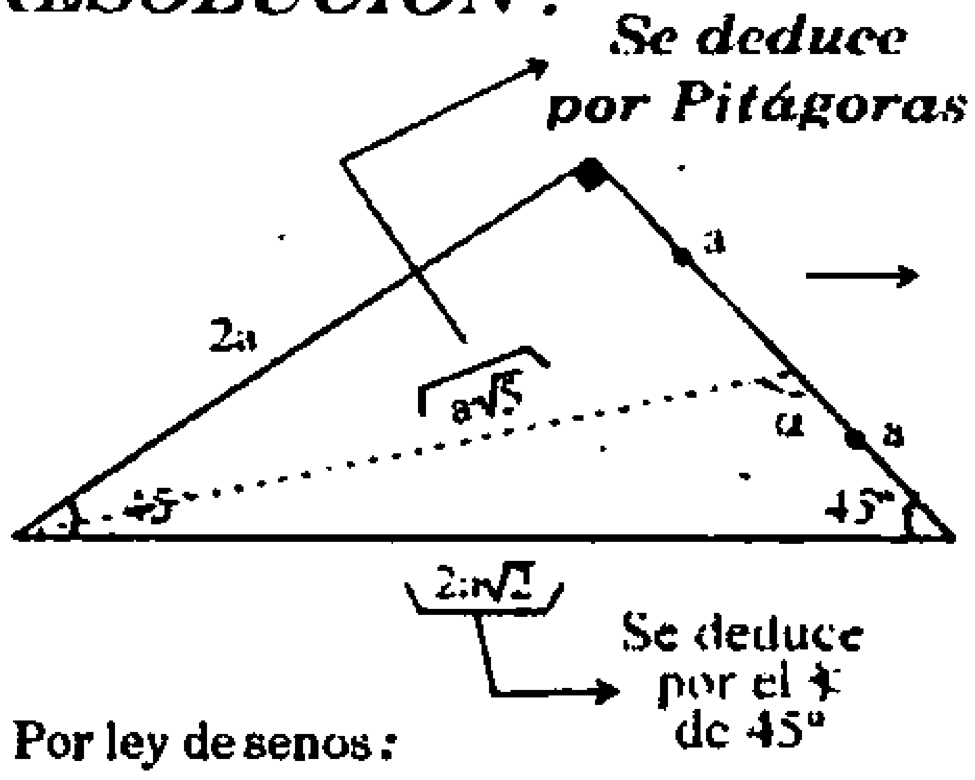
A) $\frac{1}{2}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ *E)* 1

RESOLUCIÓN :



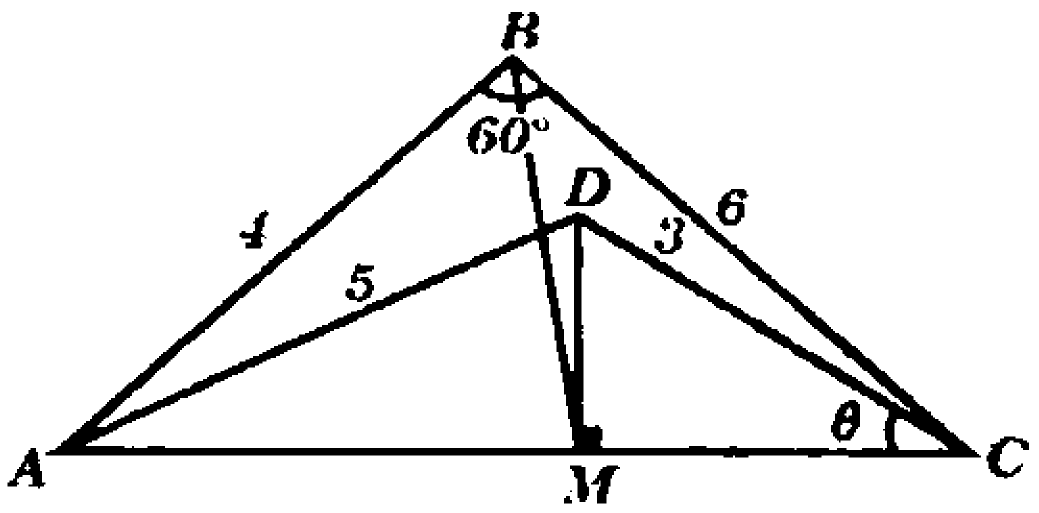
* Por ley de senos :

$$\begin{cases} \dfrac{sen\alpha}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{sen45°}{a\sqrt{5}} \\ \Rightarrow sen\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 20 :

Calcular : " *BM* ", en:



A) 2 *B)* $3\sqrt{2}$ *C)* $3\sqrt{3}$ *D)* 3 *E)* 6

RESOLUCIÓN :

* Por ley de cosenos en el ΔABC :

$AC^2 = 4^2 + 6^2 - 2(4)(6)Cos60° \Rightarrow AC = \sqrt{28}$

* En el ΔADC :

$$Cos\theta = \frac{\sqrt{28}^2 + 3^2 - 5^2}{2(\sqrt{28})(3)} = \frac{2}{\sqrt{28}}$$

$$\Rightarrow MC = 3Cos\theta = \frac{6}{\sqrt{28}}$$

* En el ΔABC :

$$Cos\hat{C} = \frac{6^2 + \sqrt{28}^2 - 4^2}{2(\sqrt{28})(6)} = \frac{4}{\sqrt{28}}$$

* En el ΔBMC :

$$BM^2 = 6^2 + \left(\frac{6}{\sqrt{28}}\right)^2 - 2\left(\frac{6}{\sqrt{28}}\right)6Cos\hat{C}$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{36 + \frac{36}{28} - \frac{72}{\sqrt{28}} \times \frac{4}{\sqrt{28}}} = 3\sqrt{3}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 21 :

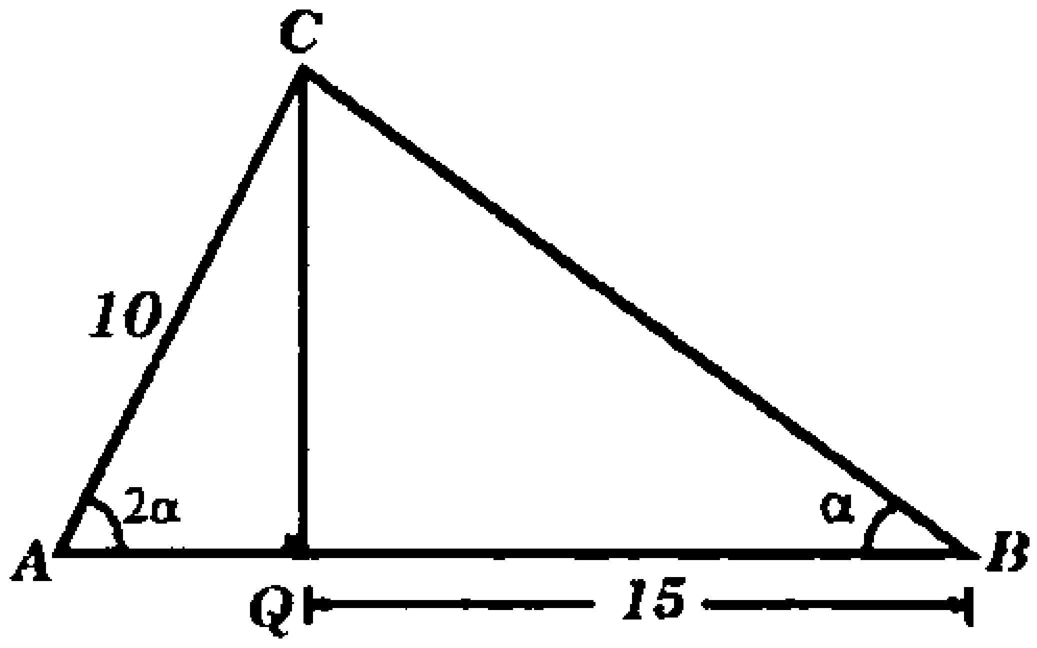
En un ΔABC , $C = 10m$, $\hat{A} = 2\hat{B}$ y la longitud, desde el pie de la altura trazada del vértice *C* hasta el punto *B* , es igual a *15m* ; luego , el ángulo *C* mide :

A) $\frac{3\pi}{8}$ *B)* $\frac{3\pi}{4}$ *C)* $\frac{\pi}{2}$ *D)* $\frac{2\pi}{5}$ *E)* $\frac{3\pi}{7}$

RESOLUCIÓN :

* . AQC : $CQ = 10sen\,2\alpha$

* . CQB : $Tg\,\alpha = \dfrac{CQ}{15}$



$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{10sen\,2\alpha}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{2(2sen\alpha\,cos\alpha)}{3} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

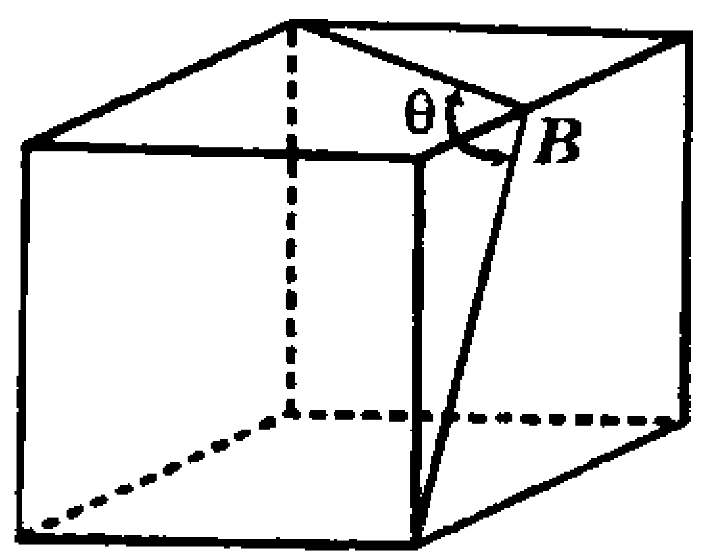
* Entonces :

$$A = \frac{\pi}{3} \;,\; B = \frac{\pi}{6} \;\text{ y }\; C = \frac{\pi}{2}$$

RPTA: "C"

PROBLEMA 22 :

En la figura adjunta , calcular "*sen0*"; si *B* es el punto medio y el sólido es un cubo.



A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ *B)* $\frac{\sqrt{5}}{3}$ *C)* $\frac{\sqrt{5}}{6}$ *D)* $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ *E)* $\frac{\sqrt{3}}{5}$

RESOLUCIÓN :

* Sea $2x$ el lado del cubo ; entonces

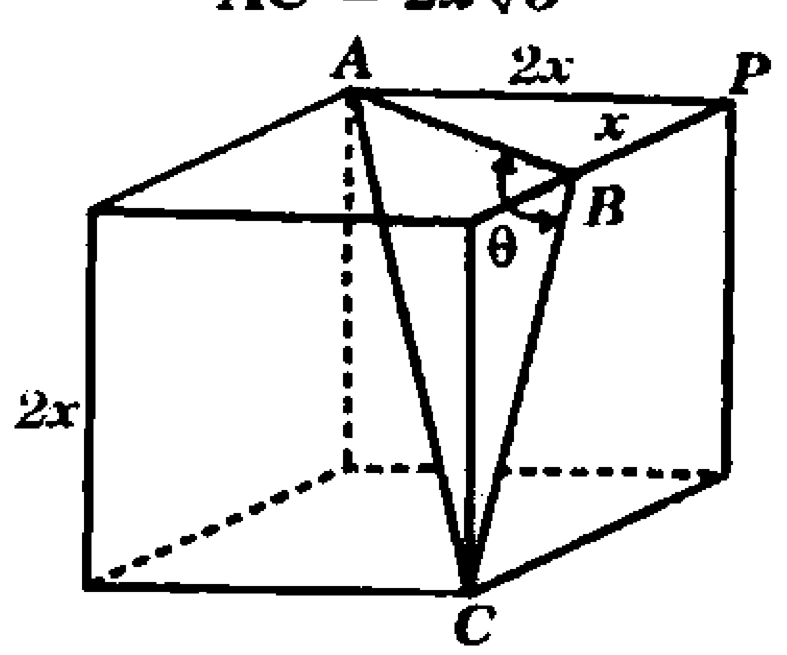
$$AB = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5}$$

* Además:

$$CB = AB \Rightarrow CB = x\sqrt{5}$$

*Como AC es una diagonal; entonces :

$$AC = 2x\sqrt{3}$$



*Aplicamos ley de cosenos en ΔABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)Cos\theta$$

$$(2x\sqrt{3})^2 = (x\sqrt{5})^2 + (x\sqrt{5})^2 - 2(x\sqrt{5})(x\sqrt{5})cos\theta$$

$$\Rightarrow 12x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 10x^2cos\theta$$

$$\Rightarrow Cos\theta = \frac{-1}{5} \Rightarrow Sen\theta = \sqrt{1 - Cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}}$$

$$\Rightarrow Sen\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 23 :

Sea el triángulo ΔABC y sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados opuestos a los vértices *A, B* y *C,* respectivamente. Si cumple la relación :

$$\frac{a}{Cos\,A} = \frac{b}{Cos\,B} = \frac{c}{Cos\,C}$$

Entonces, el triángulo ΔABC es:

A) Acutángulo *B) Obtusángulo*
C) Isósceles *D) Equilátero*
E) Rectángulo

RESOLUCIÓN:

* De la ley de senos, sabemos:

$$\frac{a}{Cos\,A} = \frac{b}{Cos\,B} = \frac{c}{Cos\,C} = 2R$$

(R: circunradio)

* Entonces :

$a = 2RsenA$; $b = 2RsenB$; $c = 2RsenC$

* Reemplazando en la expresión dada, se obtiene:

$$\frac{2RsenA}{cosA} = \frac{2RsenB}{cosB} = \frac{2RsenC}{cosC}$$

$$\Rightarrow tgA = tgB = tgC \Rightarrow A = B = C$$

⇒Se trata de un triángulo equilátero.

RPTA: "D"

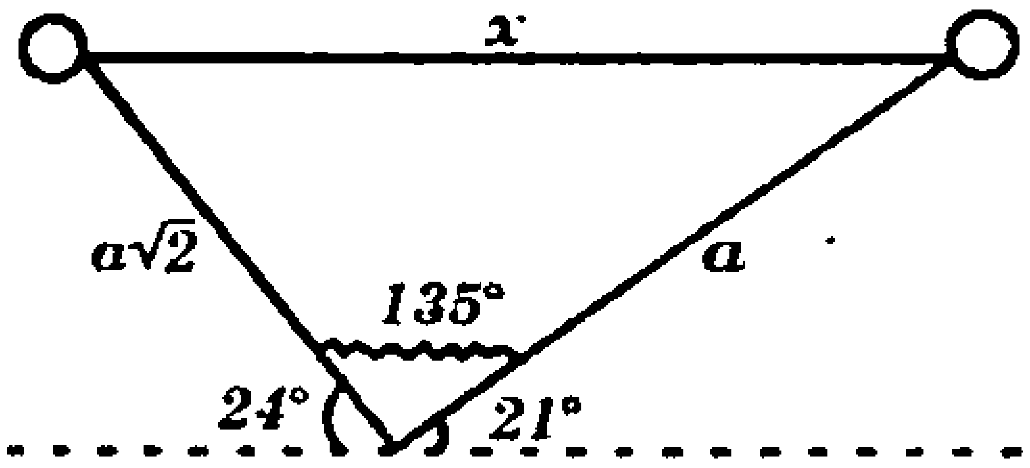
PROBLEMA 24 :

Un niño sostiene dos globos . El ángulo de elevación del globo que tiene en la mano derecha es de *21°* y la cuerda mide "*a*"*m.* el ángulo de elevación del globo que sostiene en la mano izquierda es de *24°* y la cuerda mide $a\sqrt{2}\,m$ ¿Cuál es la distancia que hay entre los dos globos?

A) $(1+\sqrt{2})\,a$ *B)* $(2+\sqrt{2})a$ *C)* $2a\sqrt{5}$
D) $a\sqrt{5}$ *E)* $2+\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN :

* Graficando se obtiene :



* Del gráfico podemos deducir que para calcular x tenemos que aplicar la ley de cosenos :

$$x^2=(a)^2+(a\sqrt{2})^2-2(a)(a\sqrt{2})\cos 135°$$

$$\Rightarrow x^2=a^2+2a^2-2\sqrt{2}a^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2=3a^2+2a^2 \Rightarrow x^2=5a^2 \Rightarrow x=\sqrt{5a}$$

RPTA: "D"

PROBLEMA 25 :

En un triángulo $\triangle ABC$, $\hat{C}=60°$ y $a=3b$.

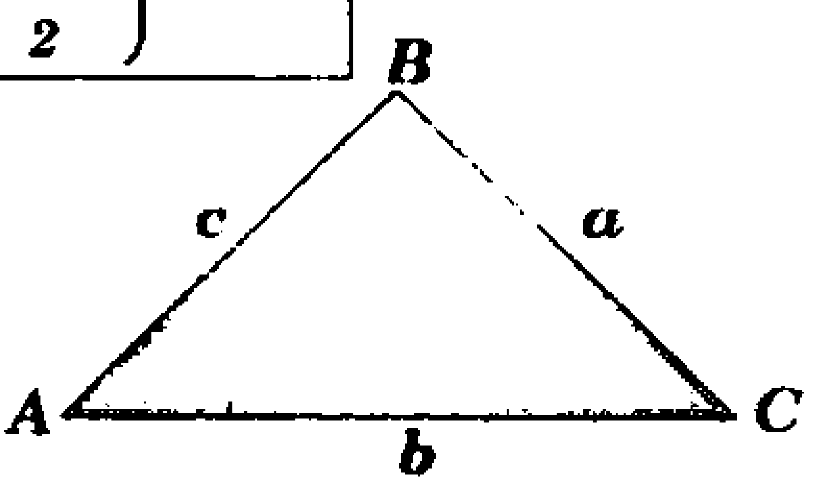
Determinar el valor : $E=Tan(A-B)$

A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 1

RESOLUCIÓN:

* Recordar la ley de tangentes :

$$\frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\frac{a-b}{a+b}$$

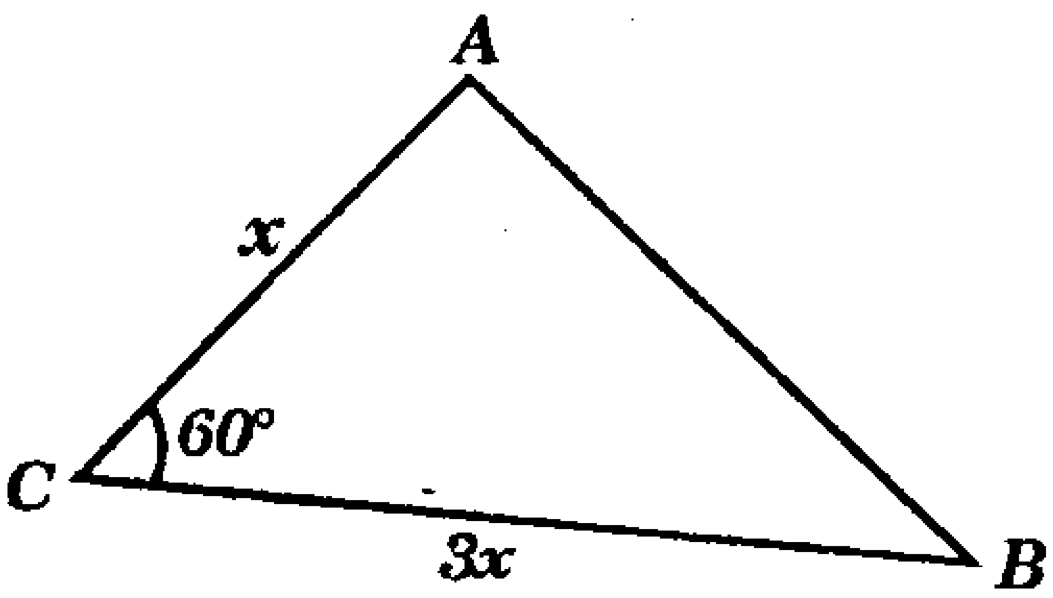


* De acuerdo a los datos del problema , observamos que :

$$A+B=120°$$

* Entonces , aplicando la fórmula anterior , se obtiene :

$$\frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan\left(\frac{120°}{2}\right)}=\frac{3x-x}{3x+x}$$



$$\frac{Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{Tan60°}=\frac{2x}{4x}\Rightarrow Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

* Pero :

$$\Rightarrow Tan(A-B)=\frac{2Tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{1-Tan^2\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=4\sqrt{3}$$

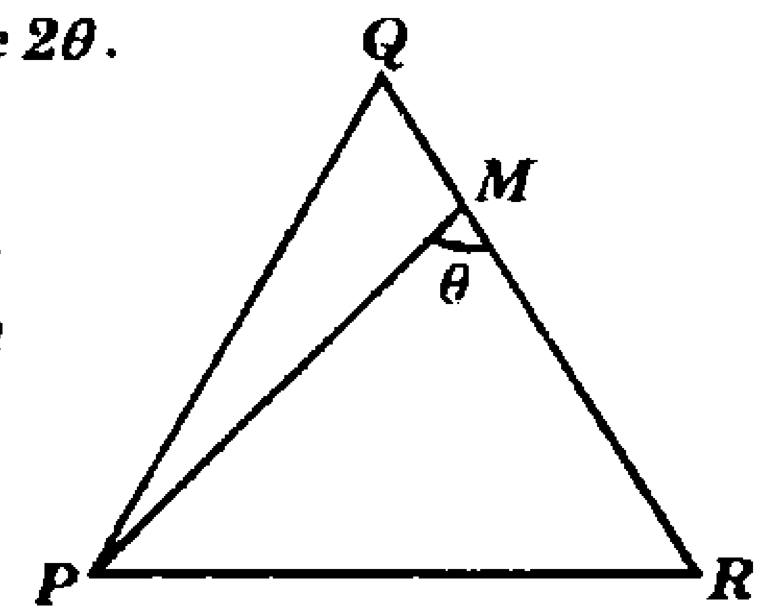
RPTA: "A"

PROBLEMA 26 :

En el gráfico , el triángulo PQR es equilátero y $QR=3QM$.

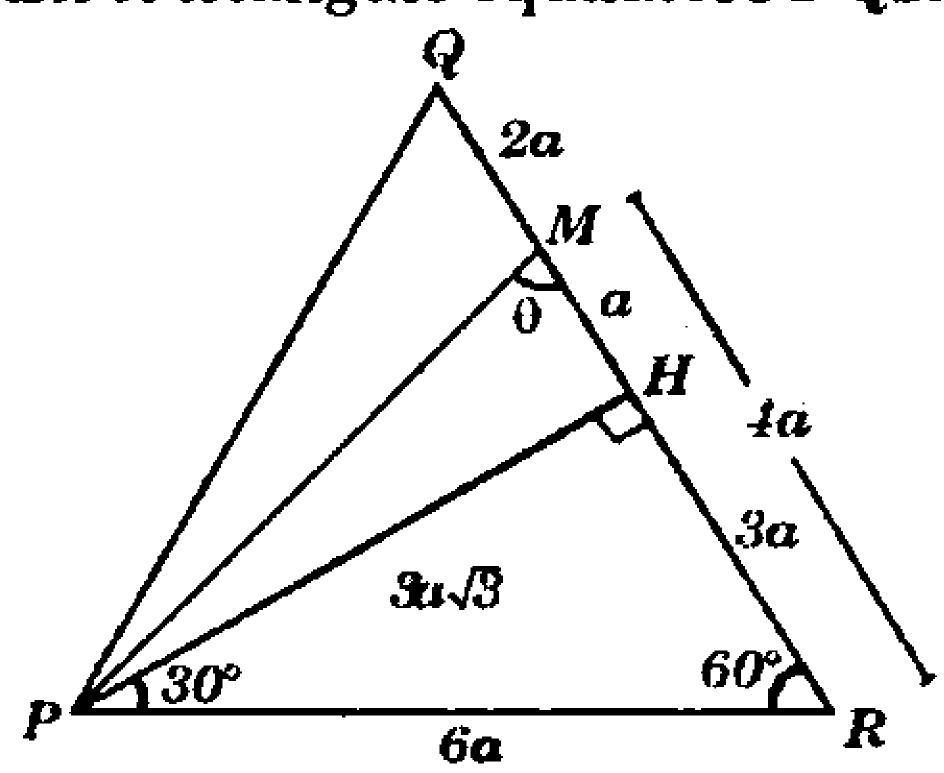
Halle $Sec\,2\theta$.

A) $-14/13$
B) $-12/11$
C) $-16/15$
D) $-13/12$
E) $-15/14$



RESOLUCIÓN :

* En el triángulo equilátero PQR :



* Del dato : $QR=3QM$.
* Si : $QM=2a \Rightarrow QR=6a$
* Trazamos la altura PH :

$$\Rightarrow HR=3a \quad y \quad PH=3a\sqrt{3}$$

* En el ⊿ rectángulo PHM :

$$Tan\theta=\frac{3a\sqrt{3}}{a}=3\sqrt{3}$$

* Por identidad de arco doble :

$$Sec2\theta=\frac{1+Tan^2\theta}{1-Tan^2\theta}=\frac{1+\left(3\sqrt{3}\right)^2}{1-\left(3\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow Sec2\theta=-\frac{14}{13}$$

RPTA :"A"

PRACTICA DE EJERCICIOS #1

01 En un $\triangle ABC$; además : $a=2b$

Hallar : $E=\frac{SenA}{SenB}$

RPTA :...

02 En un $\triangle ABC$; se sabe que : $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$. Calcular : $E=\frac{SenB}{SenA}$

RPTA :...

03 Si los lados de un $\triangle ABC$; son $a=10$; $b=13$; $c=15$.

Calcular : $E=\frac{SenA+SenB+SenC}{SenC-SenB}$

RPTA :...

04 En un triángulo rectángulo, recto en B se tiene que: $a=10$ y $b=20$. Determine la medida del ángulo A.

RPTA :...

05 En un triángulo ABC, se sabe que: $a=2,5\ m$; $b=4\ m$; $m\measuredangle B=2\measuredangle A$. Hallar el valor de la medida del ángulo A

RPTA :...

06 En un triángulo ABC , $m\measuredangle A=30°$; $m\measuredangle B=53°$ y $b=8\ m$. Determine la longitud del lado «a»

RPTA :...

07 En un triángulo ABC si $m\measuredangle A=45°$; $m\measuredangle B=120°$; $a=2$. Calcular la longitud del lado «b»

RPTA :...

08 En un triángulo ABC, se pide calcular : $\frac{aSenB-bSenA}{aCosB+bCosA}$

RPTA :...

09 En un triángulo ABC: $a-b=2$, $c=5$. Hallar : $\frac{SenA-SenB}{SenC}$

RPTA :...

10 En un triángulo ABC.

$$a^2=b^2+c^2-bc$$

Calcular la $m\measuredangle A$.

RPTA :...

11 En un triángulo ABC : $m\measuredangle A=60°$; $b=c=5$. Hallar: «a»

RPTA :...

12 En un triángulo ABC:

$b^2 + c^2 + \frac{bc}{2}$. Calcular: $CosA$

RPTA :..

⑬ Los lados de un triángulo *ABC* tienen longitudes, $BC=5;\ AC=3;\ AB=6$, calcular $CosA$

RPTA :..

⑭ En un triángulo ABC se cumple que : $a=\sqrt{b^2+c^2-bc}$

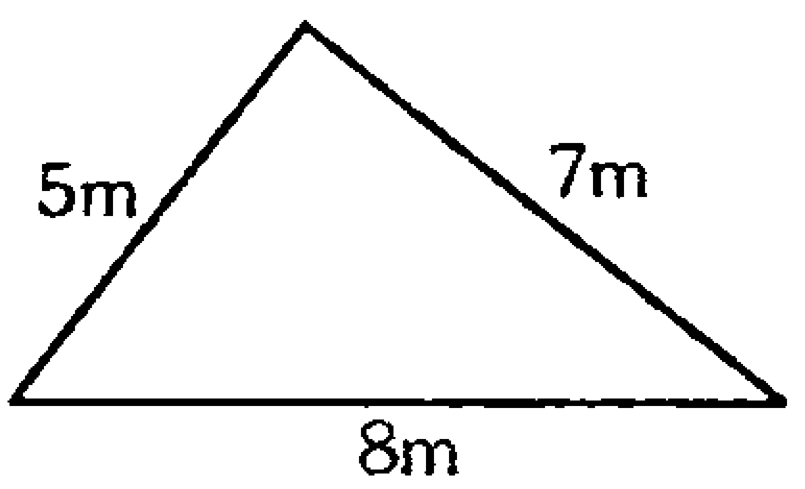
Calcular : $m\measuredangle A$.

RPTA :..

⑮ Sea un triángulo *ABC*, tal que se tiene : $a=5\ u\ ;\ b=7\ u\ ;\ c=8\ u$, hallar la medida de $m\measuredangle B$.

RPTA :..

⑯Del gráfico. Calcule el coseno del ángulo mayor interno .



RPTA :..

⑰ En un triángulo *ABC* calcular:

$$2(abCosC+bcCosA+acCosB)$$

RPTA :..

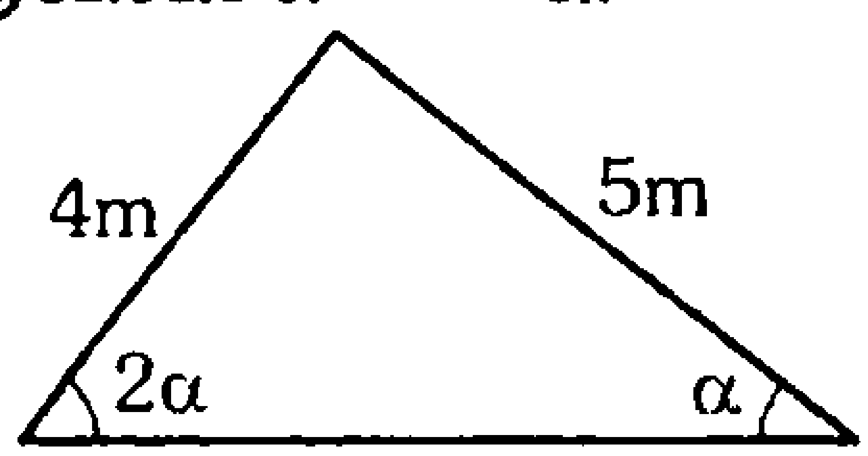
⑱ En un triángulo *ABC*, si $m\measuredangle A=45°; a=2; b=\sqrt{6}$. Calcule la medida del ángulo *C*.

RPTA :..

⑲Determinar el mayor ángulo de un triángulo cuyos lados son proporcionales a los números *7 ; 8 ; 13*

RPTA :..

⑳Calcule el $Cos\alpha$ si:



RPTA :..

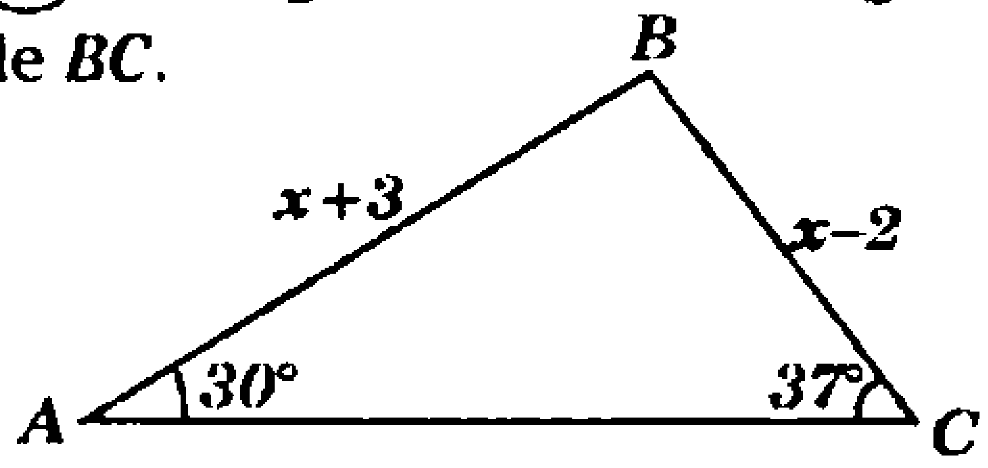
㉑Dado un triángulo *ABC*, reduce

$$E=a\csc A-2b\csc B+c\csc C$$

RPTA :..

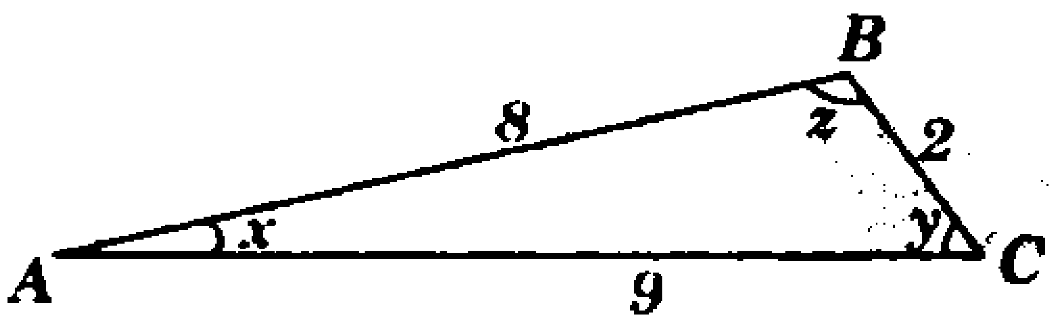
PRIMERA PRACTICA DIRIGIDA

01 En la figura, calcular la longitud de *BC*.



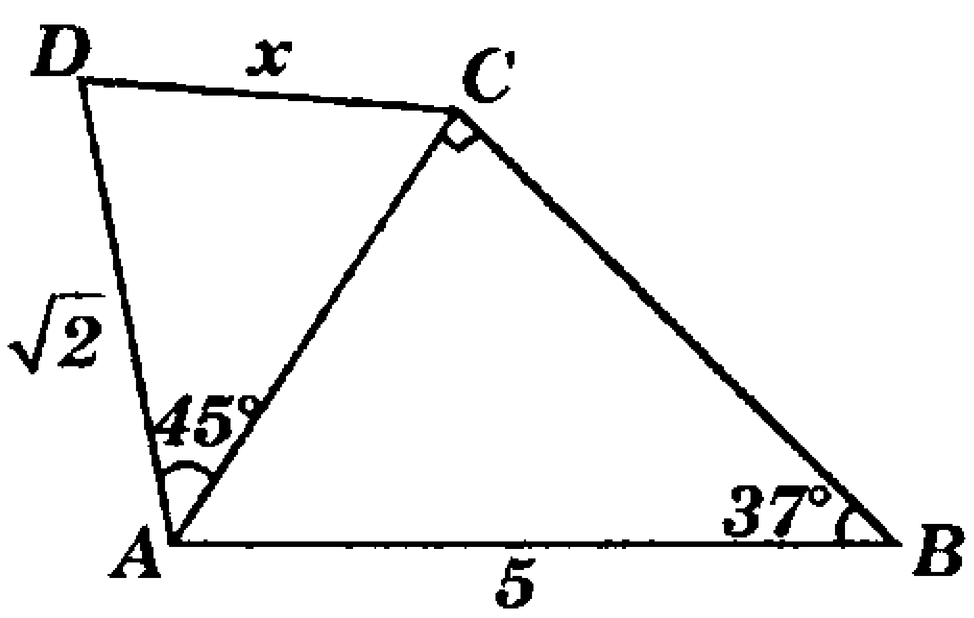
A) 29 B) 27 C) 25 D) 30 E) 26

02 Calcular: $\frac{Sen^2z}{SenxSeny}$



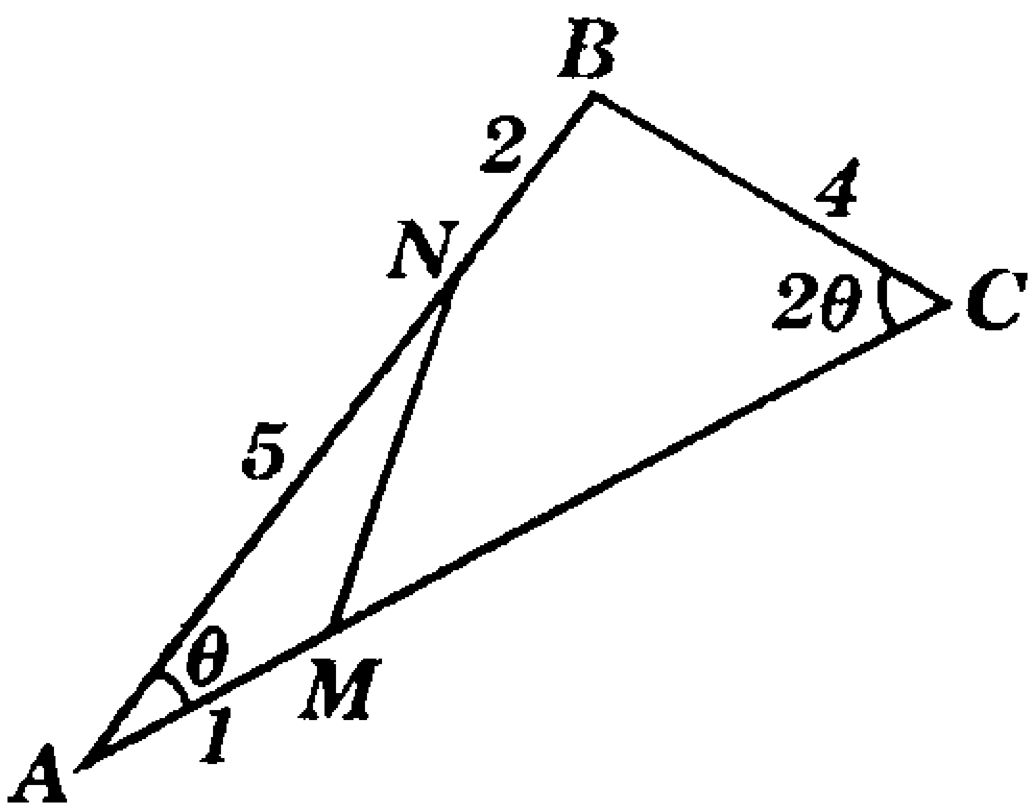
A) 9/16 B) 16/81 C) 16/9 D) 4/9 E) 81/16

03 En la figura, calcular "*x*".



A) $\sqrt{3}$ *B)* $\sqrt{6}$ *C)* $\sqrt{5}$ *D)* $\sqrt{4}$ *E) 26*

04 De la figura, calcule $\overline{MN}$.



A) $\sqrt{69}$ *B)* $\frac{\sqrt{69}}{2}$ *C)* $\frac{\sqrt{65}}{2}$ *D)* $\frac{\sqrt{61}}{5}$ *E)* $\sqrt{61}$

05 En un triángulo *ABC*, se cumple: $A+B=74°$ y $A-B=53°$

Calcular: $\frac{a+b}{a-b}$

A) 2/3 B) 3/2 C) 1/3 D) 3 E) 2

06 Si $b=\sqrt{2}; c=\sqrt{3}+1; A=45°$ son valores de dos lados y un ángulo interior de un triángulo *ABC*, calcule la longitud del lado "*a*".

A) $\sqrt{6}$ *B)* $\sqrt{2}+1$ *C) 2 D) 3 E) 1/3*

07 Calcule *C* en un triángulo *ABC*, si $a=3b$, además:

$$Ctg\left(\frac{A-B}{2}\right)=2$$

A) 45° B) 90° C) 135° D) 30° E) 120°

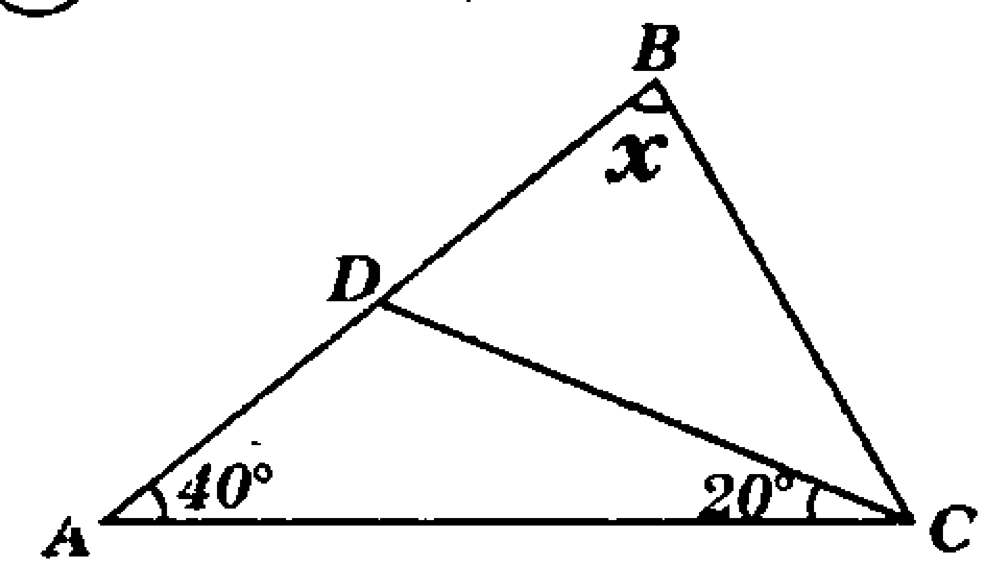
08 En un triángulo *ABC*, simplifique:

$$M=\left(\frac{aCosA+bCosB}{RSenC}\right)Sec(B-A)$$

siendo *R* circunradio del $\triangle ABC$.

A) 2 B) 4 C) −1 D) −2 E) 1/2

09 Calcule "*x*", si $BC=\sqrt{3}AD$

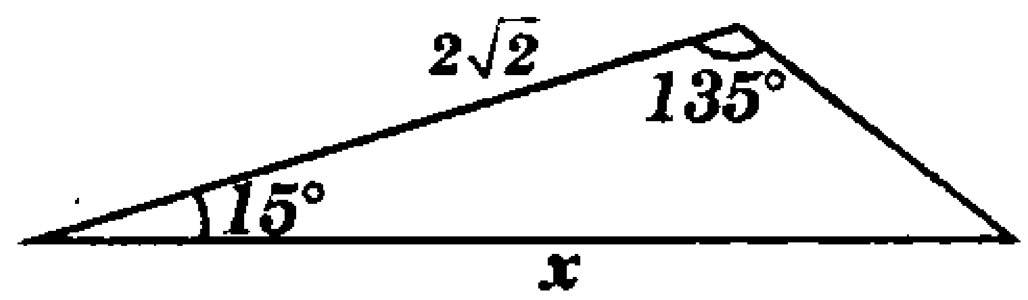


A) 20° ó 50 B) 60° ó 120° C) 70° ó 110° D) 50° ó 100° E) 80° ó 120°

10 En un cubo de vértices *ABCD −A'B'C'D'*, en la arista *AA'* se toma el punto *N* de modo que $AN=3(NA')$. Si $\theta=m\measuredangle BNC'$, calcule: $\sqrt{33}Cos\theta$.

A) 13/3 B) 13/4 C) 13 D) 13/5 E) 13/6

11 Calcular "*x*" de la figura:



A) 8 B) 4 C) 2 D) 6 E) 10

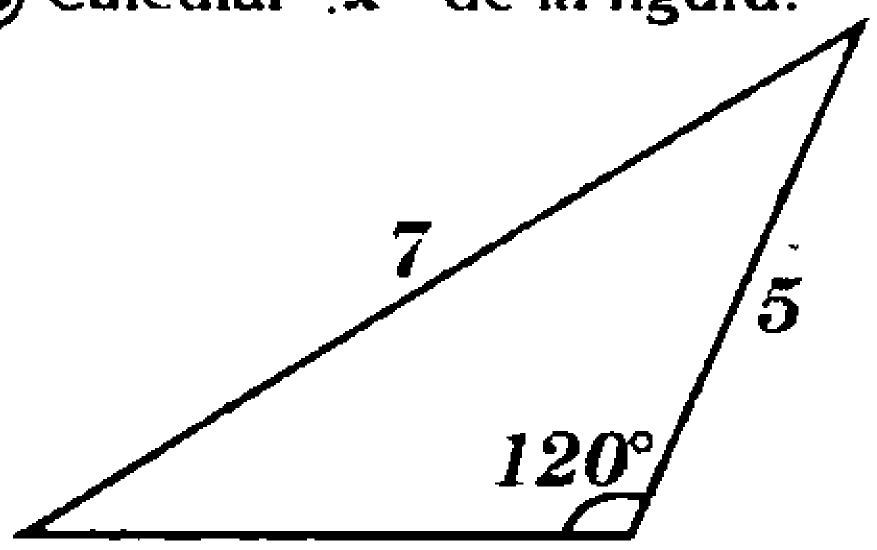
12 En un triángulo *ABC* se cumple:

$$\frac{a}{CosA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{CosC}$$

Diga *Ud*. qué tipo de triángulo es:

A) Isósceles *B) Equilátero*
C) Rectángulo *D) Escaleno*
E) Rectángulo isósceles

13 Calcular "x" de la figura:



A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 3 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}$

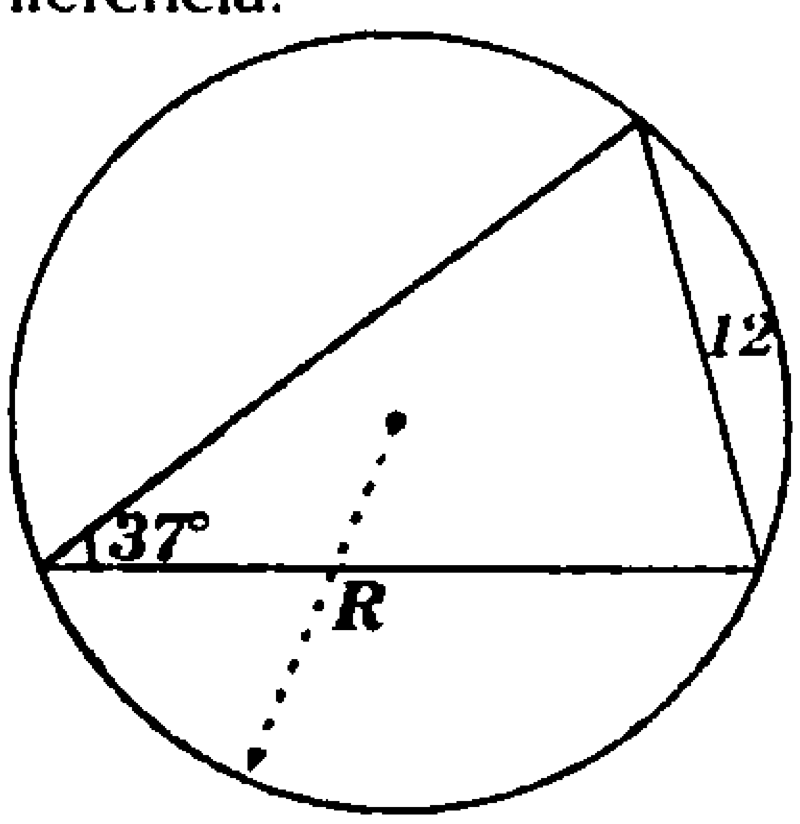
14 En un triángulo ABC se cumple:

$$\frac{SenA}{2}=\frac{SenB}{3}=\frac{SenC}{4}$$

Calcular: $y=\frac{b^2+c^2}{b^2\quad a^2}$

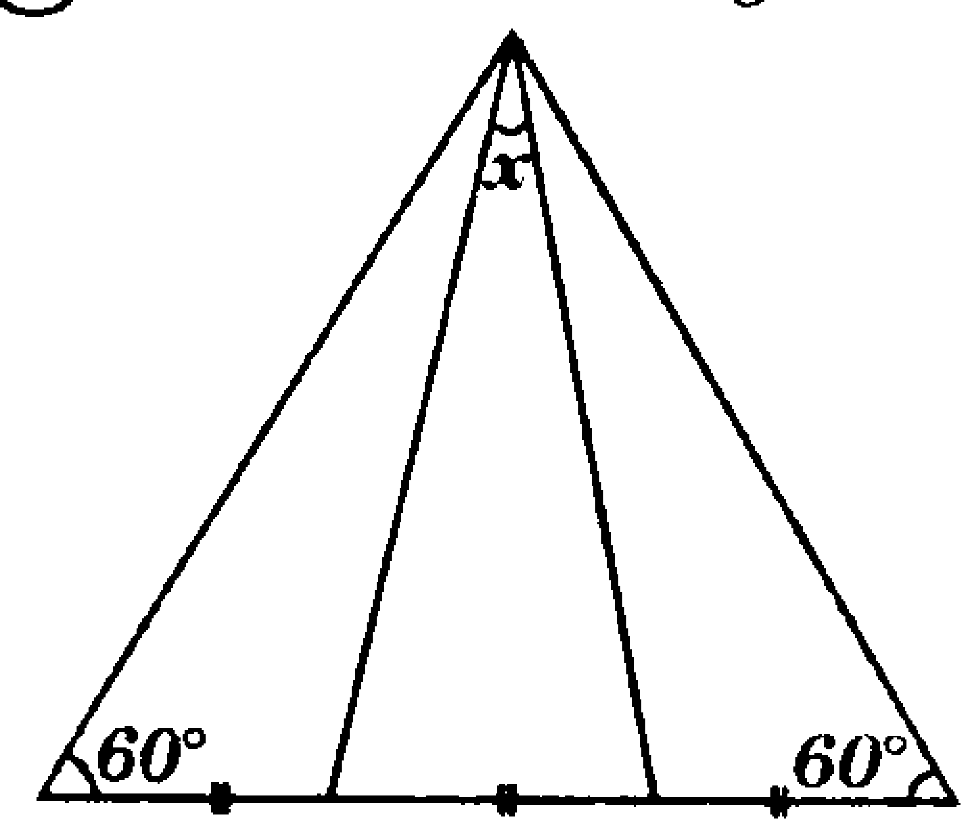
A) 0 B) –5 C) 5 D) 2 E) –2

15 Calcular el radio de la circunferencia.



A) 14 B) 12 C) 20
D) 10 E) 15

16 Calcular $Cosx$ de la figura:



A) 3/4 B) 1/2 C) 1/14
D) 2/7 E) 13/14

17 Para un triángulo ABC, a qué es igual:

$$aCosB + bCosA$$

A) ab B) $a+b$ C) $a-c$
D) c E) $-c$

18 Para un triángulo ABC, a qué es igual:

$$E=R(aSenA-bSenB+cSenC)$$

si R es circunradio.

A) abc B) $aSenB$ C) $bSenA$
D) $aCosC$ E) $acCosB$

19 En un triángulo ABC se cumple:

$$a^2=b^2+c^2-\frac{3}{2}bc$$

Calcular $SenA$.

A) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

20 En un triángulo ABC, reducir:

$$bcSen(B+C)(CtgB+CtgC)$$

A) c^2 B) $2b$ C) b^2 D) a E) a^2

TAREA DOMICILIARIA

01 Sea el ΔABC ("R" es el circunradio), reducir:

$$\left(\frac{sen\,A+sen\,B-sen\,C}{2a-2c+2b}\right)R$$

A) $\frac{1}{2}$ B) -2 C) $\frac{1}{4}$ D) -4 E) R

02 Sea el:

$$\Delta ABC\,(m\sphericalangle A=30°;\ m\sphericalangle C=37°)$$

Reducir: $E=\frac{c-a}{c+b}$

A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{7}{11}$ C) 11 D) $\frac{11}{7}$ E) 1

03 Sea el $\Delta ABC\left(R=\frac{1}{2}\right)$

Reducir: $M=\frac{a+2R}{sen\,A+1}$

A) $\frac{1}{2}$ B) -2 C) -1 D) 2 E) 1

04 Para un ΔABC:

$$cos\,A=\frac{a}{b};\ a=2$$

Determinar: b^2+c^2

A) 2 B) 3 C) 18 D) 12 E) 5

05 Calcule el $CosC$ en un ΔABC oblicuángulo $(a=1;\ b=c=2)$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) 1

06 Calcule el lado "C" en un ΔABC.

$$(m\sphericalangle A=30°;\ m\sphericalangle C=37°;\ a=5)$$

A) 8 B) 5 C) 6 D) 3 E) 10

07 En un ΔABC:

$$\frac{b}{c}=3;\ sen\,C=\frac{1}{5}$$

Determinar: $m\sphericalangle B$

A) 37° B) 16° C) 74° D) 53° E) 30°

08 Para un ΔABC

Si: $\frac{sen\,A}{sen\,B}=\frac{3}{2}$; Determinar: $\frac{b-a}{a}$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $-\frac{5}{3}$ E) 1

09 En un $\Delta ABC\,(R=3)$.

Calcular: $ab\ sen^{-1}A\ \ sen^{-1}B$

A) 36 B) 24 C) 25 D) 39 E) 50

10 Calcular el circunradio para un ΔABC.

Si: $m\sphericalangle A=37°$ y $m\sphericalangle A=37°$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11 En un ΔABC:

$AC=\sqrt{5}$; $m\angle B=45°\ \wedge\ AB=2\sqrt{2}$

Determinar: BC

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12 En un ΔABC:

$m\sphericalangle A=105°;\ m\sphericalangle C=15°;\ a=\sqrt{3}+1$

Determinar AB.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}-1$ C) $2\sqrt{3}$ D) $\sqrt{3}+1$ E) $3\sqrt{3}$

13 Determinar la $m\sphericalangle B$

Si: $AC=2\sqrt{3}$; $AB=\sqrt{6}$ y $m\sphericalangle C=30°$

A) 45° B) 30° C) 90° D) 60° E) 10°

14 En un ΔABC:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{2};\ m\sphericalangle C=60°$$

Determinar: $\frac{c^2}{ab}$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

CLAVES DE LA PRIMERA PRACTICA

1)C	2)E	3)C	4)B	5)B	6)C	7)B	8)A	9)C	10)D
11)B	12)E	13)C	14)C	15)D	16)E	17)D	18)E	19)A	20)E

EXAMEN DE ADMISION UNI-SAN MARCOS 2011

CAPITULO 130

PROBLEMA 1 : (UNI 2011 - I)

Seis hermanas: Ana, Carmen, Celia, Luisa, Martha y Rosa viven en un edificio, cada una en un piso diferente. La mayor vive en el *1er* piso y la última en el *6to* piso. Ana es la segunda y vive en el *2do* piso. Carmen es la penúltima y vive en un piso superior a Luisa. Martha vive entre Luisa y Ana.

Si Rosa es mayor que Celia, ¿en qué pisos viven Rosa y Celia?

A) 1er y 3er piso B) 1er y 6to piso C) 1er y 4to piso
D) 3er y 5to piso E) 3er y 6to piso

RESOLUCIÓN :

De acuerdo a las condiciones del ejercicio, tenemos:

menor	
2.ª hermana	*Ana*
mayor	

• También

Carmen
Luisa

Luisa
Martha
Ana

• Rosa>Celia

Luego:

Cecilia
Carmen
Luisa
Martha
Ana
Rosa

Entonces, Rosa y Celia viven en el *1er* y *6to* piso, respectivamente.

RPTA : "B"

PROBLEMA 2 : (UNI 2011 - I)

En un determinado mes existen *5* jueves y *5* sábados. ¿Cuál es la suma del número correspondiente al tercer domingo del mes y el número de días de dicho mes?

A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta que los días son consecutivos, afirmar que existen *5* jueves y *5* sábados deja implícito que del mismo modo deben existir *5* viernes.

Por otro lado, se sabe que, como mínimo, un mes tiene *28* días (*4* semanas con todos sus días), y como se afirma que hay *5* jueves, *5* viernes y *5* sábados, se deduce que hay *3* días de más, es decir, el mes trae *31* días (inicia el jueves y concluye el sábado).

Lu	Ma	Mi	Ju	Vi	Sa	Do
			1	2	3	4
			8			11
			15			18
			22			
			29	30	31	

Nos piden hallar:

3^{er} domingo+número de días que tiene el mes$=18+31=49$

RPTA : "D"

PROBLEMA 3 : (UNI 2011 - I)

En una cancha de fútbol, cuatro jugadores miran desde cada ángulo al centro. El jugador peruano se encuentra al noreste de la cancha y frente al jugador boliviano, quien a la vez está a la izquierda del jugador chileno.

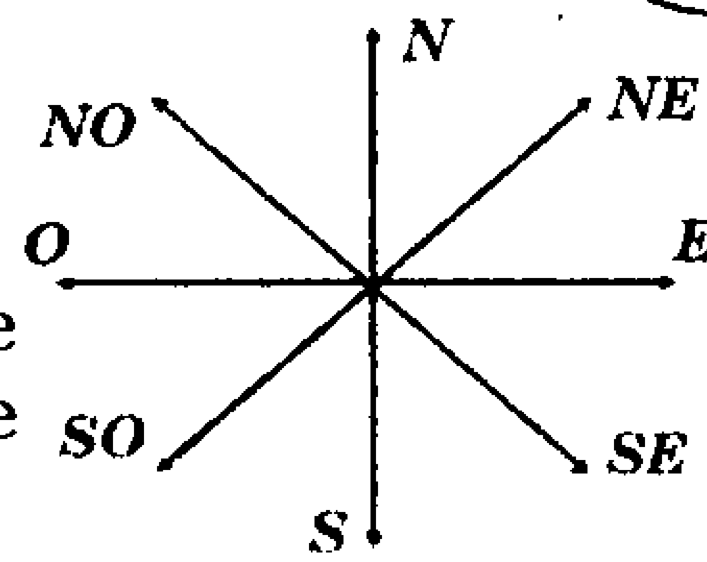
Determine dónde se encuentra el jugador argentino.

A) A la derecha del jugador peruano.
B) A la izquierda del jugador chileno.
C) Al sur del jugador boliviano.
D) A la derecha del jugador boliviano.
E) Frente al jugador peruano.

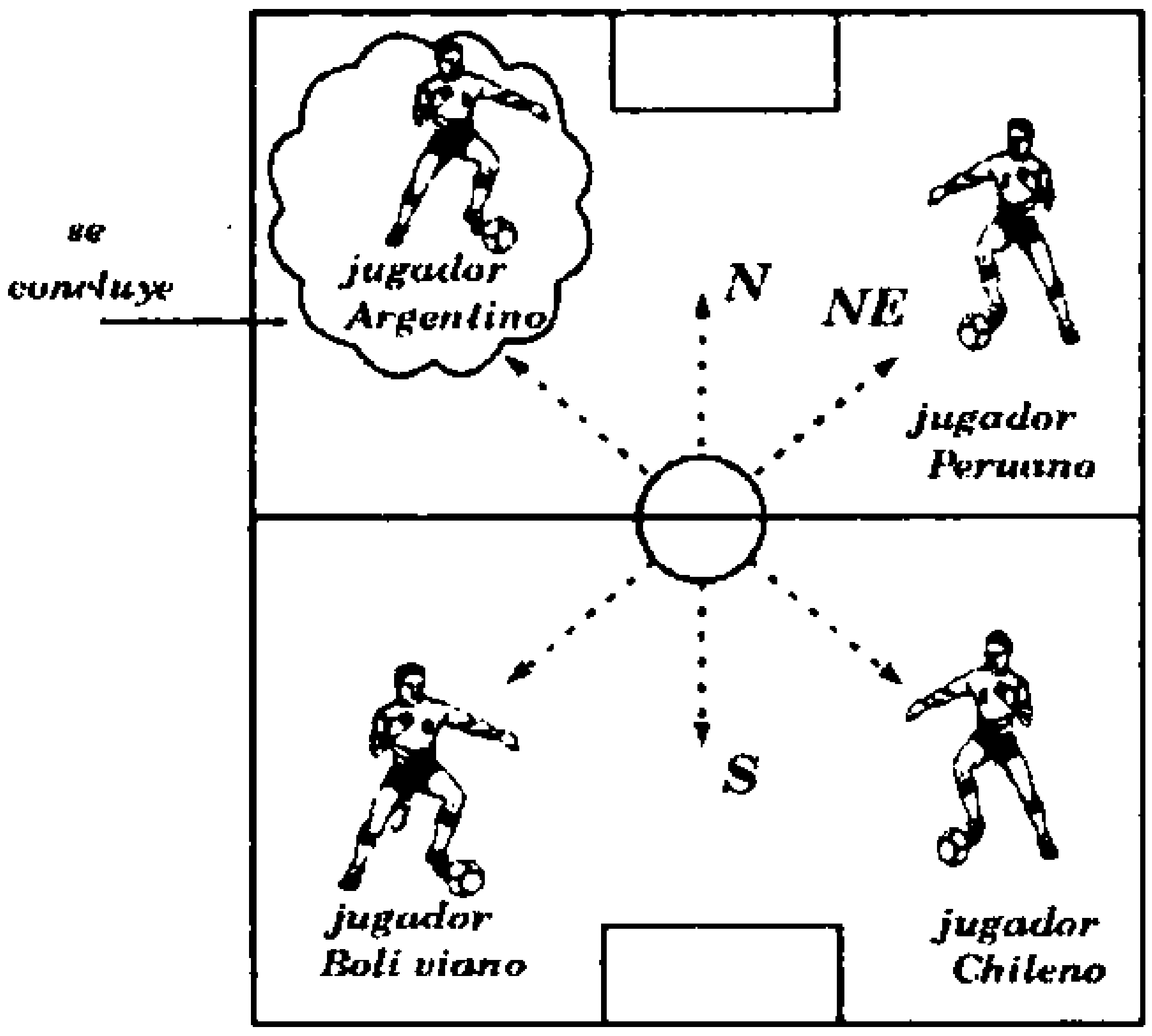
RESOLUCIÓN :

Recordando que la ubicación de los puntos cardinales es la siguiente:

Del enunciado:



- El jugador peruano se encuentra al noreste y frente al boliviano.
- El boliviano está a la izquierda del chileno.



Nos piden hallar la ubicación en la que se encuentra el jugador argentino.

*Finalmente, se deduce que el argentino está a la derecha del peruano.

RPTA : "A"

PROBLEMA 4 : (SAN MARCOS 2011-II)

Cuatro estudiantes, luego de rendir un examen, obtuvieron ***10, 11, 14*** y ***15*** de nota. Si Aldo obtuvo nota impar; Hugo y Dante obtuvieron, cada uno, menos nota que Juan; y Hugo obtuvo más nota que Aldo, ¿cuál es el promedio de las notas de Juan y Dante?

A) 12,5 B) 10,5 C) 14,5 D) 12 E) 13

RESOLUCIÓN :

Dado el enunciado, tenemos lo siguiente:

- Obtuvieron ***10; 11; 14*** y ***15*** de nota.
- Aldo obtuvo nota impar ***(11 ó 15)***.
- Juan obtuvo mayor nota que Hugo y Dante.
- Hugo obtuvo más nota que Aldo.

De lo que se tiene :

nota de Aldo < *nota de Hugo* < *nota de Juan*

impar (nota de Aldo)

nota de Dante < *nota de Juan*

$\Rightarrow$ ***nota de Juan = 15*** $\Rightarrow$ ***nota de Aldo = 11***

$\Rightarrow$ ***nota de Hugo = 14*** $\Rightarrow$ ***nota de Dante = 10***

Entonces, se tiene que el promedio de notas de Juan y Dante es ***12,5.***

RPTA : "A"

PROBLEMA 5 : (SAN MARCOS 2011-II)

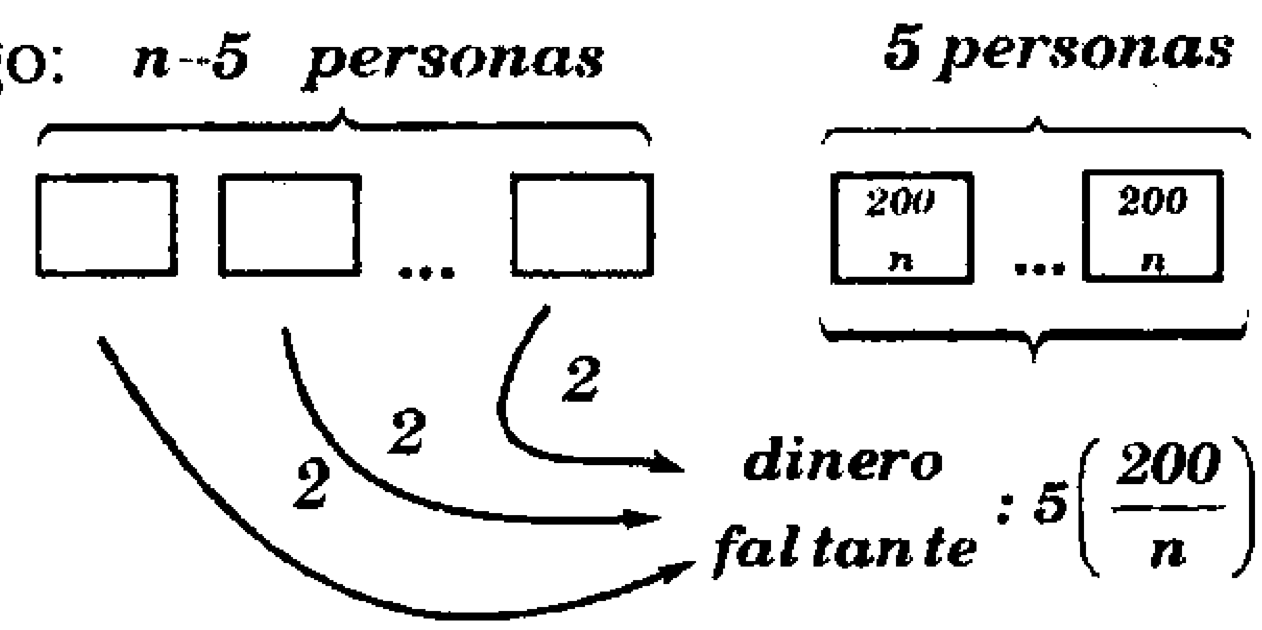
Pedro y sus amigos desean entrar al cine, por lo cual deben pagar en total ***S/.200***; pero ***5*** de ellos no tienen dinero para la entrada, por lo que los demás deben aportar ***S/.2*** más de lo previsto. ¿Cuánto pagó Pedro?

A) S/.20 B) S/.8 C) S/.12 D) S/.9 E) S/.10

RESOLUCIÓN :

Sea n el número total de personas. Como en conjunto tienen ***S/.200***, quiere decir que cada uno aporta $S/.\dfrac{200}{n}$

Luego:



Como lo que aporta adicionalmente cada uno es para cubrir lo faltante, se tiene:

$$2(n-5)=5\left(\frac{200}{n}\right)\Rightarrow n\times(n-5)=500=25\times 20$$

$$\Rightarrow n=25\ ;\qquad \Rightarrow \frac{200}{n}+2=\frac{200}{25}+2=10$$

Se concluye que Pedro pagó ***S/.10.***

RPTA : "E"

PROBLEMA 6 : (SAN MARCOS 2011-II)

De cinco amigos que rindieron un examen, se sabe que: Juan obtuvo ***20*** puntos más que el doble del puntaje de Luis; Aldo, el triple del puntaje de Pedro; Pedro, el doble del puntaje de Carlos; y Juan, el cuádruple del puntaje de Carlos.

¿Quién obtuvo el mayor puntaje?

A) Pedro B) Carlos C) Juan
D) Aldo E) Luis

RESOLUCIÓN :

De los datos:

- Juan obtuvo ***20*** puntos más que el doble de Luis.. ***(I)***
- Aldo el triple de Pedro............... ***(II)***
- Pedro el doble de Carlos........... ***(III)***
- Juan el cuádruple de Carlos...... ***(IV)***

Ya que no es de vital importancia conocer el número exacto de puntos que tiene cada uno, vamos a suponerle a Luis una cantidad cualquiera, por ejemplo, ***50***.

* Así tendríamos:

De ***(I)*** : Luis ⇒ ***50*** y Juan ⇒ $20+2(50)=120$

De ***(IV)*** : Juan ⇒ ***120*** y Carlos ⇒ ***30***

De ***(II)*** : Carlos ⇒ ***30*** y Pedro ⇒ ***60***

De ***(III)*** : Pedro ⇒ ***60*** y Aldo ⇒ ***180***

Luego, Aldo obtuvo el mayor puntaje.

RPTA : "D"

PROBLEMA 7 : (SAN MARCOS 2011-II)

Al multiplicar el número de mis hijos por ***31*** y la edad del mayor por ***12***, la suma de los productos resultantes es ***170***. ¿Cuál es la edad de mi hijo mayor?

A) 9 años *B) 2 años* *C) 7 años*
D) 8 años *E) 13 años*

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar la edad del hijo mayor.

* Sean:

H = número de hijos

M = edad del hijo mayor

Según el enunciado:

$$\overbrace{31\,H}^{par}+\overbrace{12\,M}^{par}=\overbrace{170}^{par}$$

H ↓ 2, M ↓ 9

4 ⇒ no hay solución

6 ⇒ se pasa

Entonces, la edad del hijo mayor es ***9***.

RPTA : "A"

PROBLEMA 8 : (SAN MARCOS 2011-II)

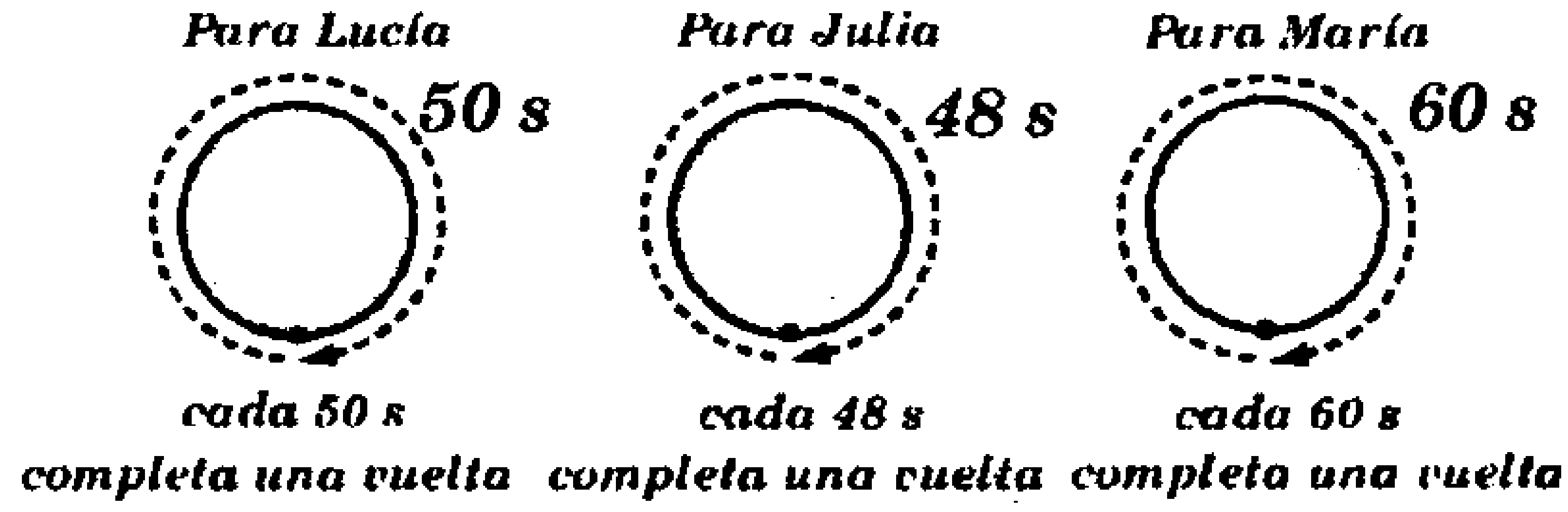
Lucía, Julia y María están en una competencia ciclística sobre una pista circular y comienzan, simultáneamente, de la misma línea de partida y en la misma dirección. Si Lucía completa una vuelta en ***50*** segundos, Julia la completa en ***48*** segundos y María en ***60*** segundos; ¿después de cuántos segundos pasarán las tres juntas por la línea de partida?

A) 600 *B) 1200* *C) 900* *D) 800* *E) 1800*

RESOLUCIÓN :

Se nos pide el tiempo que debe transcurrir para que las tres personas pasen por la línea de partida.

Del enunciado, tenemos :



Entonces, el tiempo ***(t)*** que debe transcurrir es: ***MCM (50; 48; 60)***

$\Rightarrow t=MCM(50;48;60)=1200$

RPTA : "B"

PROBLEMA 9 : (SAN MARCOS 2011-II)

Un señor tiene cien mil cabellos. Si cada tres días pierde ***360*** cabellos y cada semana le crecen ***140***, ¿en cuántos días se quedará completamente calvo?

A) 1000 *B) 820* *C) 960* *D) 780* *E) 980*

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar el número de días necesarios para que el señor pierda completamente el cabello. Según los datos, analicemos qué ocurre en ***21*** días.

×7 (***en 3 días → pierde 360 cabellos***
en 21 días → pierde 2520 cabellos

×3 (***en 7 días → le crecen 140 cabellos***
en 21 días → le crecen 420 cabellos

Entonces:

en 21 días → (***pierde 2520 y le crecen 420 cabellos***) = (***pierde 2100 cabellos***)

×100

en x días ⇒ perderá 100 000 cabellos *(quedará completamente calvo)*

$\Rightarrow x=1000$

RPTA : "A"

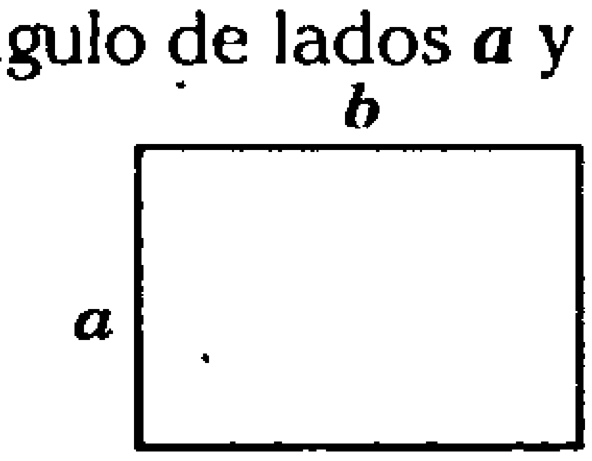
PROBLEMA 10 : (SAN MARCOS 2011-II)

¿Cuál es el menor semiperímetro que puede tener un rectángulo de área $357cm^2$ si la medida de sus lados, en centímetros, son números enteros?

A) 58 cm *B) 51cm* *C) 17 cm* *D) 28 cm* *E) 38 cm*

RESOLUCIÓN :

Dado el rectángulo de lados a y b



Sea el perímetro del rectángulo: $2(a+b)$, y el semiperímetro: $a+b$.

Según dato: $a \wedge b \in Z; a < b$

Del enunciado:

Ordenando los 2 factores: $a \times b = 357 = 3 \times 7 \times 17$

4 casos:

a	b	$a+b$
1	357	→ 358
3	119	→ 122
7	51	→ 58
17	21	→ 38

Se nos pide: $(a+b)_{min.}$

De el total de casos: $(a+b)_{min.}=38$

RPTA : "E"

PROBLEMA 11 : (SAN MARCOS 2011-II)

El peso de dos botellas es $(2x-3)$ kg y el peso de media docena de ellas es $(a+x)$ kg. Si todas las botellas tienen el mismo peso y nueve botellas pesan $\left(2a+\frac{x}{2}\right)$ kg, halle el peso de una botella.

A) 2 kg B) 2,5 kg C) 1,5 kg
D) 3 kg E) 3,5 kg

RESOLUCIÓN :

Se pide hallar el peso de una botella (b).

De los datos tenemos:

$$2b=2x-3 \xrightarrow{\text{multiplicó por 3}} 6b=6x-9 \ldots\ldots\ldots(I)$$

$$6b=a+x \xrightarrow{\text{multiplicó por 8}} 48b=8a+8x \ldots.(II)$$

$$9b=2a+\frac{x}{2} \xrightarrow{\text{multiplicó por 4}} 36b=8a+2x\ (III)$$

De operar las ecuaciones así : $(II)-((I)+(III))$ nos resulta:

$$6b=9 \Rightarrow b=\frac{3}{2} \Rightarrow b=1,5$$

Entonces, una botella pesa $1,5$ kg.

RPTA : "C"

PROBLEMA 12 : (SAN MARCOS 2011-II)

Un número racional de denominador 112 es mayor que $\frac{1}{8}$, pero menor que $\frac{1}{7}$. Halle la suma de las cifras de su numerador.

A) 15 B) 6 C) 8 D) 14 E) 9

RESOLUCIÓN :

Sea nuestro número racional de la forma:

$$\frac{a}{112}; a \in Z^+$$

Según las condiciones del problema, tenemos:

* $\frac{a}{112} > \frac{1}{8} \Rightarrow a > \frac{112}{8} \Rightarrow a > 14$
* $\frac{a}{112} > \frac{1}{7} \Rightarrow a > \frac{112}{7} \Rightarrow a > 16$

Luego:

* La suma de cifras del numerador pedido es : $1+5=6$

RPTA : "B"

PROBLEMA 13 : (SAN MARCOS 2011-II)

Dos cajas contienen en total 825 naranjas y una de las cajas tiene 125 naranjas más que la otra. ¿Cuál es el valor de la caja que tiene más naranjas si una docena de naranjas cuesta S/.3,60?

A) S/.105,00 B) S/.171,00 C) S/.142,50
D) S/.152,40 E) S/.123,50

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar el valor de la caja que contiene mayor número de naranjas.

* Según el enunciado, tenemos:

	1ra caja	2da caja
Cantidad de naranjas	$x+125$	x

Una de las cajas contiene 125 naranjas más que la otra

Además: $(x+125)+x=825 \Rightarrow x=350$

Es así que, la caja con más naranjas tiene 475.

El precio de cada naranja es igual a $\frac{S/.3,60}{12}$.

Entonces, el valor de la caja que contiene más naranjas es: $(475)\left(\frac{S/.3,60}{12}\right)=S/.142,50.$

RPTA : "C"

PROBLEMA 14 : (SAN MARCOS 2011-II)

Si la suma de los dígitos del número $\overline{abc}$ es 9, calcule $\sum_{i=1}^{n}\overline{abc}+\sum_{i=1}^{n}\overline{cab}+\sum_{i=1}^{n}\overline{bca}.$

A) 909n B) 989n C) 969n
D) 979n E) 999n

RESOLUCIÓN :

Recordando la siguiente propiedad de sumatorias:

$$\sum_{i=1}^{n} a = n(a)$$

Se nos pide:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{abc}+\sum_{i=1}^{n}\overline{cab}+\sum_{i=1}^{n}\overline{bca}$$

Según el enunciado, la suma de los dígitos del número $\overline{abc}$ es 9.

$$a+b+c=9$$

Entonces, teniendo en cuenta la propiedad de sumatorias en la expresión pedida, obtenemos:

$$n(\overline{abc})+n(\overline{cab})+n(\overline{bca})$$

$$=n[\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}]$$

$$\begin{array}{r}\overline{abc}+\\ \overline{cab}\\ \overline{bca}\\ \hline 999\end{array}$$

Concluimos que: $n=[999]$

RPTA : "E"

PROBLEMA 15 : (SAN MARCOS 2011-II)

Halle la edad de cierta persona sabiendo que la suma de los años que tiene más su edad en meses es igual a *470*.

A) 34 años, 8 meses *B) 35 años, 5 meses*
C) 37 años, 4 meses *D) 36 años, 2 meses*
E) 38 años, 9 meses

RESOLUCIÓN :

* Siendo la edad de la persona: $x_{años+}y_{meses}$

Ya que se trata de meses: $y<12$

Del enunciado:

$$\underbrace{x}_{\text{años que tiene}}+\overbrace{12x+y}^{\text{su edad en meses}}=470$$

$$\Rightarrow 13x+y=470$$

Dividiendo en el sistema, se tiene:

$$\begin{array}{r|l}470 & 13\\ 2 & 36\end{array}$$

$$\Rightarrow 13(36)+2=470$$

De la ecuación:

$$\begin{array}{c}13x+y=470\\ \Downarrow\quad\Downarrow\\ 36\quad 2\end{array}$$

Luego, la edad de la persona es *36* años y *2* meses.

RPTA : "D"

PROBLEMA 16 : (SAN MARCOS 2011-II)

Se compra un artículo en p nuevos soles; ¿en cuánto debe venderse si se desea ganar el $r\%$ del precio de venta?

A) $\frac{100p}{100+r}$ *nuevos soles* B) $\frac{p(100+r)}{100}$ *nuevos soles*
C) $\frac{p(100-r)}{100}$ *nuevos soles* D) $\frac{100p}{100-r}$ *nuevos soles*
E) $\frac{100rp}{100-r}$ *nuevos soles*

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar el precio de venta (P_V).

En el gráfico: P_V

Precio de costo	*Ganancia*
P	$r\%.(P_V)$

$$P+r\%(P_V)=P_V\Rightarrow P=(100-r)\%(P_V)$$

$$\Rightarrow P_V=\frac{100p}{100-r}$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 17 : (SAN MARCOS 2011-II)

Se tiene *127* números consecutivos enteros positivos. Al dividir el mayor entre el menor de ellos, se obtiene 29 de residuo. ¿Cuál es la cifra de las unidades del producto del centésimo segundo y del vigésimo tercer número?

A) 1 *B) 2* *C) 3* *D) 4* *E) 6*

RESOLUCIÓN :

Del enunciado :

$$\begin{array}{ccccccc}1^{er} & 2^{o} & 3^{er} & & 23^{o} & & 102^{o} & & 127^{o}\\ x; & x+1; & x+2; & \dots; & x+22; & \dots; & x+101; & \dots; & x+126\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}mayor & menor\\ 29 & q\end{array}\Rightarrow\begin{array}{r|l}x+126 & x\\ 29 & q\end{array}$$

restando 29 al dividendo y al residuo

$$\begin{array}{r|l}x+97 & x\\ 0 & q\end{array}$$

$$q=\frac{x+97}{x}=1+\frac{97}{x}$$

Luego:

$$t_{23}=x+22=97+22=119$$

$$t_{102}=x+101=97+101=198$$

$$t_{23}\times t_{102}=119\times198=\dots2$$

Finalmente, la cifra de las unidades del producto es **2**.

RPTA : "B"

PROBLEMA 18 : (SAN MARCOS 2011-II)

Un joyero fabrica un total de *16* anillos, unos de oro y otros de plata. Si vende *3* anillos de cada metal precioso, le queda un número de anillos tal que el número de los de plata es el cuádruple de los de oro. Indique la proposición verdadera referida al número de anillos que fabricó el joyero.

A) 11 anillos de oro
B) 5 anillos de plata
C) 10 anillos de plata y 6 de oro
D) 5 anillos de oro
E) 6 anillos de plata y 10 de oro

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, se considera:

x : *anillos de oro*

$16-x$: *anillos de plata*

Como se venden tres de cada metal precioso, quedando cuatro anillos de plata por cada anillo de oro, entonces:

$$4(x-3)=(16-x-3)$$

$$\Rightarrow 4x-12=13-x \Rightarrow x=5$$

Entonces, el joyero fabricó *5* anillos de oro y *11* de plata.

RPTA : "D"

PROBLEMA 19 : (SAN MARCOS 2011-II)

Un vendedor tiene cierto número de naranjas; vende la mitad a Juan y la tercera parte del resto a Pedro; si le quedan aún *20*, ¿cuántas naranjas tenía al inicio?

A) 80 B) 90 C) 60 D) 40 E) 50

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar la cantidad de naranjas que el vendedor tenía al inicio. Ya que en el enunciado se menciona "mitad" y "tercera parte", vamos a asumir que el total es "$6n$".

total: 6n

Vende a Juan	queda
$3n$	$3n$

Vende a Pedro	queda
n	$2n$

Dado el enunciado:

$$2n=20 \Rightarrow n=10$$

$$\Rightarrow inicio : 6n=6(10) \Rightarrow 60$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 20 : (SAN MARCOS 2011-II)

Halle el residuo que se obtiene al dividir $(58)^{36}$ entre *9*.

A) 5 B) 2 C) 1 D) 3 E) 4

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta que: $(\overset{o}{9}+r)^n=\overset{o}{9}+r^n$

Según los datos, se plantea: $(58)^{36}=\overset{o}{9}+r$

Se nos pide hallar el valor de r.

$$(58)^{36}=(\overset{o}{9}+4)^{36}=\overset{o}{9}+4^{36}$$

$$=\overset{o}{9}+(4^3)^{12}=\overset{o}{9}+(\overset{o}{9}+1)^{12}$$

$$\Rightarrow (58)^{36}=\overset{o}{9}+1 \Rightarrow r=1$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 21 : (SAN MARCOS 2011-II)

Sean x e y dos números positivos.

$$Si\sqrt{\frac{x}{4y}}-3\sqrt{\frac{y}{4x}}=1\text{ , } halle\frac{x-y}{x}$$

A) $\frac{8}{9}$ B) $\frac{13}{16}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{15}{16}$ E) $\frac{5}{8}$

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar el valor de: $\frac{x-y}{x}=1-\frac{y}{x}$

Según el enunciado: $\sqrt{\frac{x}{4y}}-3\sqrt{\frac{y}{4x}}=1;$

siendo $x \wedge y$ son positivos.

Operando se tiene:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}=1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}}-3\sqrt{\frac{y}{x}}=2..........(I)$$

Realizando:

$\sqrt{\frac{y}{x}}=a \Rightarrow \frac{y}{x}=a^2$; donde a es positivo

En *(I)*

$$\frac{1}{a}-3a=2$$

$$\Rightarrow 3a^2+2a-1=0$$

$3a \quad -1 \to a=1/3$ ✓

$a \quad +1 \to a=-1$ ×

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9} \Rightarrow 1-\frac{y}{x}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 22 : (SAN MARCOS 2011-II)

Indique la expresión que se obtiene al simplificar

$$M=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2-ab}{2-ab}$$

siendo $ab>2$.

A) $\frac{2}{ab}-1$ B) $\frac{2}{ab}+1$ C) $1-\frac{2}{ab}$

D) $2-\frac{1}{ab}$ E) $2+\frac{1}{ab}$

RESOLUCIÓN :

Recordando las siguientes identidades y productos notables:

* Identidad de Legendre : $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$
* Diferencia de cuadrados : $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$

Se nos pide simplificar la expresión M.

$$M=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2-ab}{2-ab};ab>2$$

Se aplica la segunda identidad de Legendre en el numerador.

$$M=\frac{4\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)-ab}{2-ab}\Rightarrow M=\frac{4-a^2b^2}{ab(2-ab)}$$

Entonces, factorizamos la diferencia de cuadrados $M=\frac{(2+ab)\cancel{(2-ab)}}{ab\cancel{(2-ab)}}\Rightarrow M=\frac{2}{ab}+1$

RPTA : "B"

PROBLEMA 23 : (SAN MARCOS 2011-II)

La suma, el producto y el cociente de dos números son iguales a K. Halle K.

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar el valor de K.

Según el enunciado:

$$\underbrace{a+b=a\times b}_{I}=\overbrace{\frac{a}{b}}=K \quad (II: a\times b=\tfrac{a}{b})$$

De I tenemos:

$a+b-a\times b=0$

$a(1-b)=-b$

$a=\frac{-b}{1-b}=\frac{b}{b-1}$ ← $\boxed{b\neq 1}$

De II tenemos:

$a\times b^2=a$

$b^2=1$

$b^2-1=0$

$(b+1)(b-1)=0$ $\boxed{\text{De } I: b\neq 1}$

$b=-1 \vee b=1$

Por lo tanto: $b=-1\wedge a=\frac{1}{2}\Rightarrow K=a\times b=-\frac{1}{2}$

RPTA : "E"

PROBLEMA 24 : (SAN MARCOS 2011-II)

Asuma la existencia de todas las raíces reales, para A, B y C números reales adecuados, en la expresión.

$$\sqrt{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}}$$

Halle C.

A) $2B-A$ B) $A-B$ C) $2\sqrt{A}-\sqrt{B}$

D) $\sqrt{A}-\frac{1}{2}\sqrt{B}$ E) $\frac{A-B}{2}$

RESOLUCIÓN :

Recordando las siguientes propiedades:

* Binomio al cuadrado: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
* Diferencia de cuadrados: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Nos piden hallar el valor de C en:

$$\sqrt{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}}$$

Se eleva al cuadrado *m.a.m.*

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}+\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}-2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}\right)}$$

$$\cancel{\sqrt{A}}-\sqrt{B}=\cancel{\sqrt{A}}-\cancel{2}\sqrt{\frac{A-C}{\cancel{4}}}$$

$$\sqrt{B}=\sqrt{A-C}$$

$$B=A-C\Rightarrow C=A-B$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 25 : (SAN MARCOS 2011-II)

Sea $f:\langle -2;7]\Rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=5-|x-1|$. Halle el rango de f.

A) $\langle -2,1\rangle$ B) $[-1,2\rangle$ C) $\langle -2,6]$ D) $[-1,5]$ E) $\langle -1,2]$

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar el rango $f_{(x)}=5-|x-1|$

Del enunciado:

$$f\ :\langle -2;7] \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$-2 < x \le 7$$

$$-1:\ -3 < x-1 \le 6$$

$$||:\ 0 \le |x-1| \le 6$$

$$\times(-1): -6 \le -|x-1| \le 0$$

$$+5: -1 \le \underbrace{5-|x-1|} \le 5$$

$$-1 \le f(x) \le 5$$

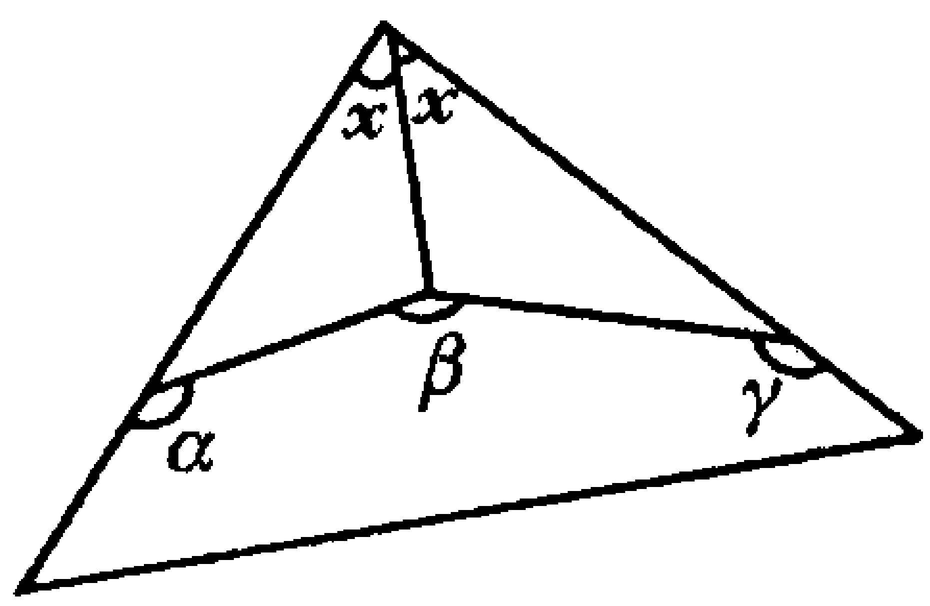
$$\Rightarrow R_f = [-1;5]$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 26 : (SAN MARCOS 2011-II)

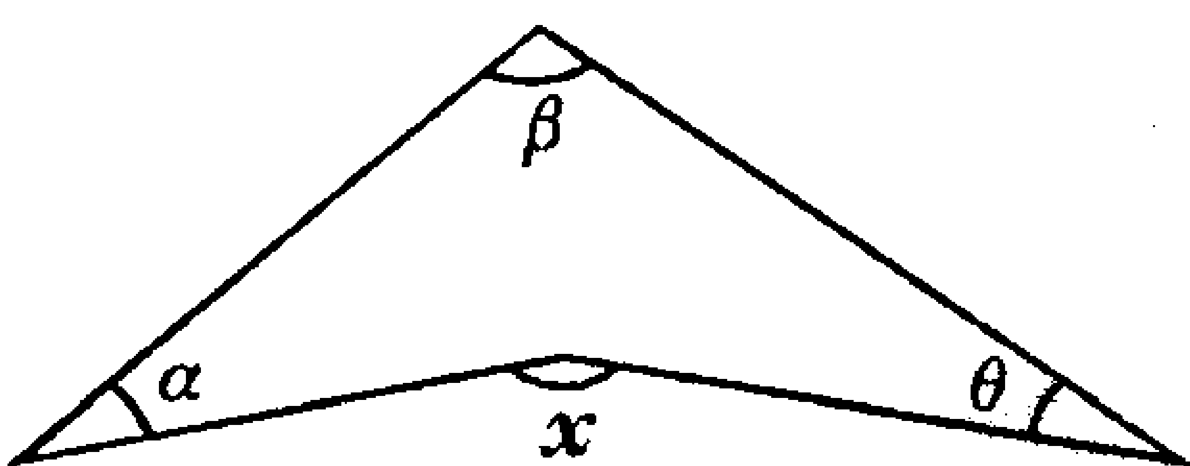
En la figura, si $\alpha+\beta+\gamma=400°$, halle x

A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 50°
E) 60°



RESOLUCIÓN :

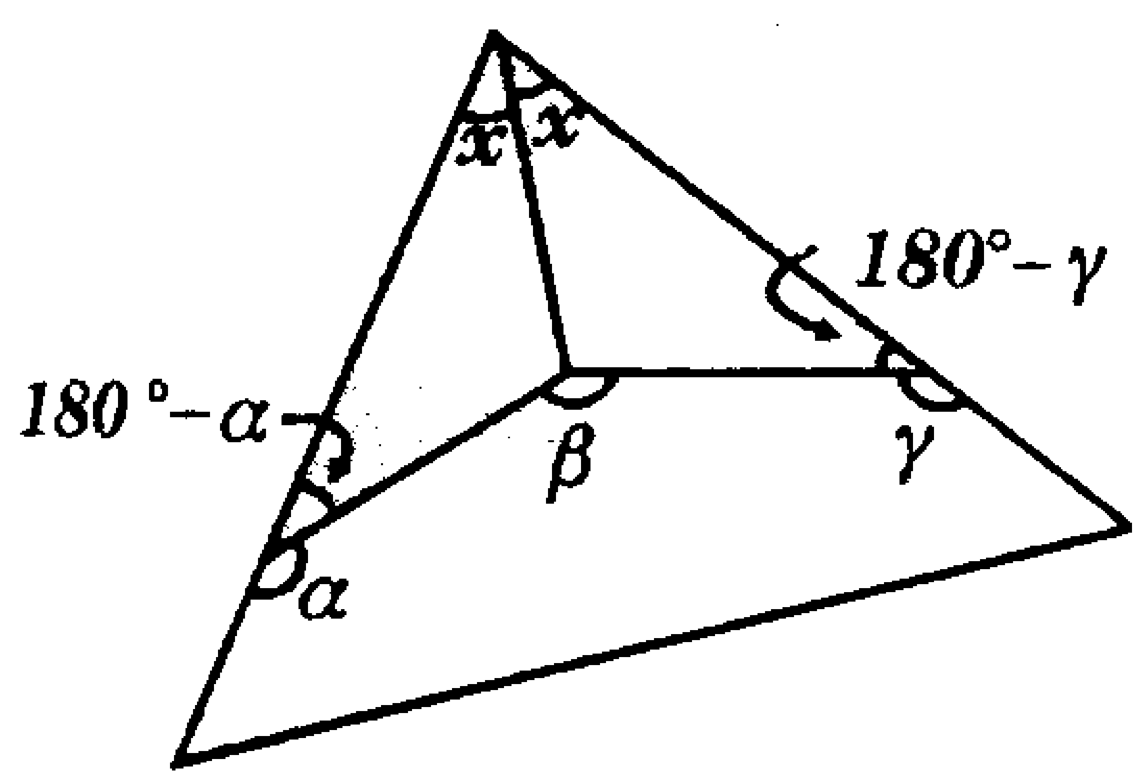
Recordando al siguiente propiedad auxiliar:



$$\boxed{x=\alpha+\beta+\theta}$$

Nos piden hallar el valor de x.

Según enunciado: $\alpha+\beta+\gamma=400°$



De la imagen, se tiene:

$$2x+180-\alpha+180-\gamma=\beta$$

$$2x+360=\alpha+\beta+\gamma=400(dato)$$

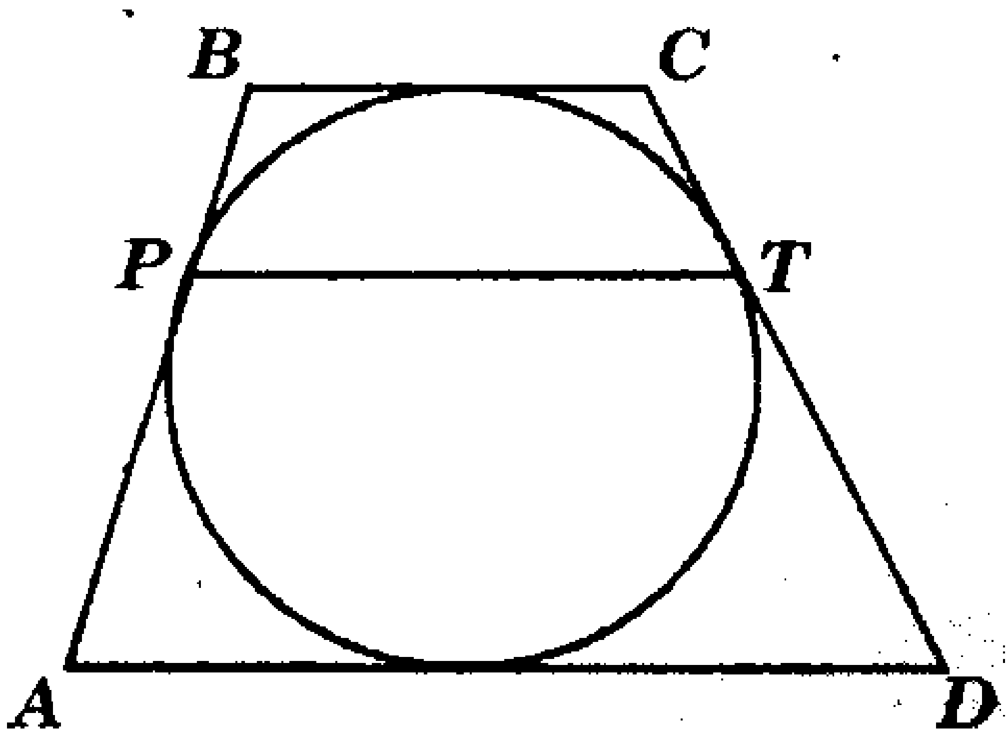
$$2x=40 \Rightarrow x=20°$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 27 : (SAN MARCOS 2011-II)

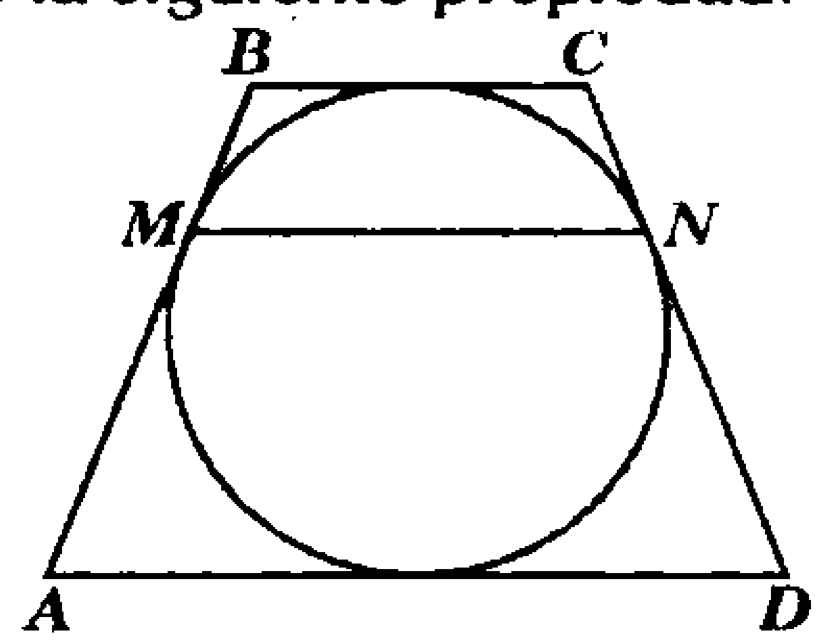
En la figura, $ABCD$ es un trapecio isósceles; P y T son puntos de tangencia. Si la longitud de la base mayor es el triple de la base menor y $PT=4,8\ cm$, halle la longitud de la base menor.

A) 3,5 cm
B) 3,6 cm
C) 3 cm
D) 3,8 cm
E) 3,2 cm



RESOLUCIÓN :

Recordando la siguiente propiedad:



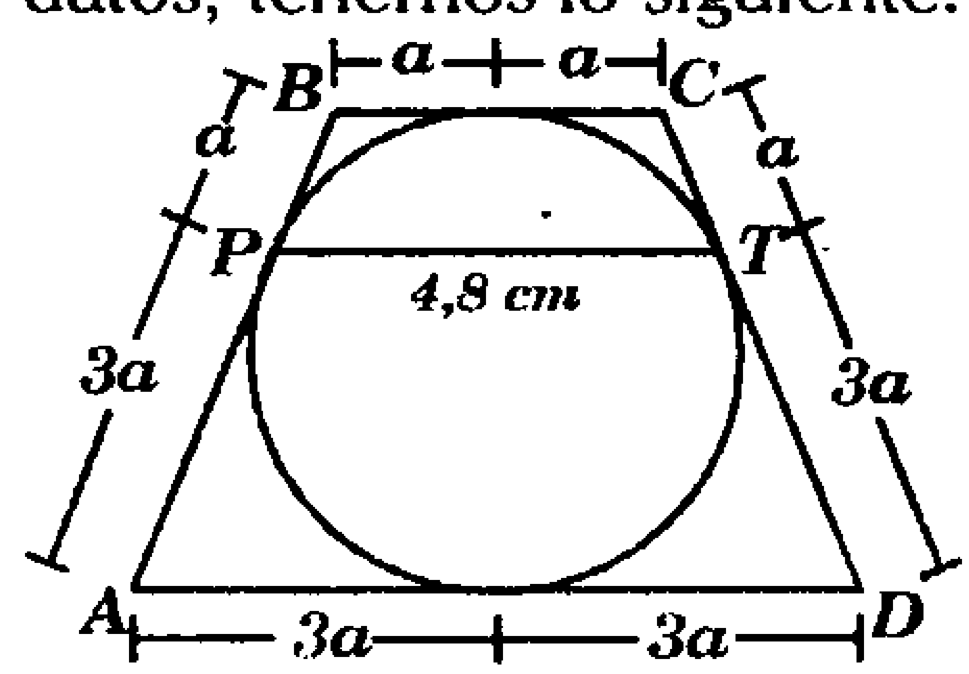
Si $ABCD$ es un trapecio $\overline{MN} // \overline{BC}$, entonces:

$$MN=\frac{(BC)ND+(AD)CN}{ND+CN}$$

Según enunciado: $AD=3BC$; $PT=4,8\ cm$;$ABCD$ es trapecio isósceles.

Piden BC

Según los datos, tenemos lo siguiente:



En el trapecio $ABCD$, se aplica la propiedad indicada .

$$4,8=\frac{(2a)3a+(6a)a}{3a+a}=\frac{12a^2}{4a}$$

Luego: $a=1,6 \Rightarrow BC=2a=3,2$

RPTA : "E"

PROBLEMA 28 : (SAN MARCOS 2011-II)

Un triángulo tiene dos lados de igual longitud $L=4\ m$. Si el área del triángulo es $6m^2$, ¿cuál es la longitud de su altura respecto al tercer lado?

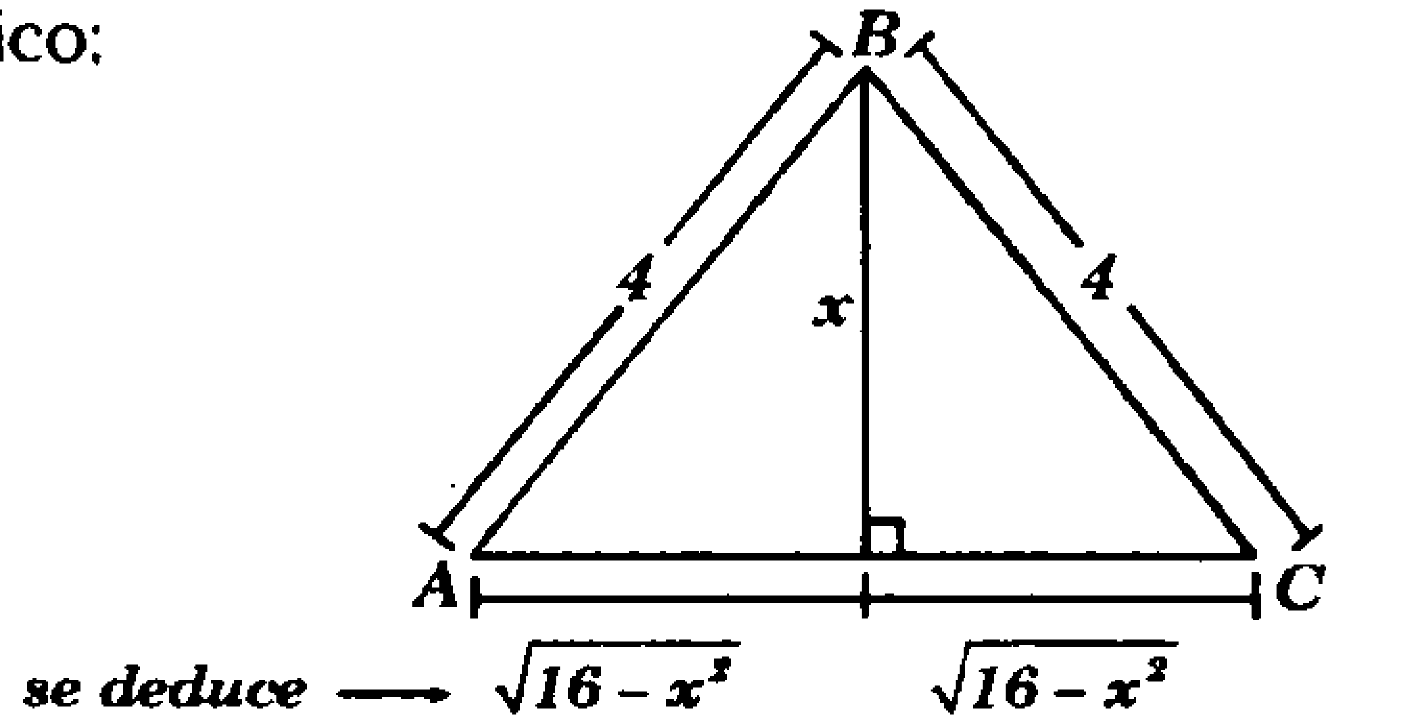
A) $\sqrt{2+8\sqrt{7}}\,m$ B) $\sqrt{7+8\sqrt{7}}\,m$ C) $\sqrt{2+7\sqrt{7}}\,m$

D) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}\,m$ E) $\sqrt{7+2\sqrt{7}}\,m$

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar la altura respecto al tercer lado=x

Según los datos del enunciado, se da el siguiente gráfico:



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$Área\Delta ABC = \frac{2\sqrt{16-x^2}.x}{2} = \sqrt{16-x^2}.x = \underset{dato}{6}$$

Elevando al cuadrado, se tiene:

$$(16-x^2)x^2 = 36 \Rightarrow 0 = \underline{x^4-16x^2+36}$$

$$(x^2-8)^2-28=0$$

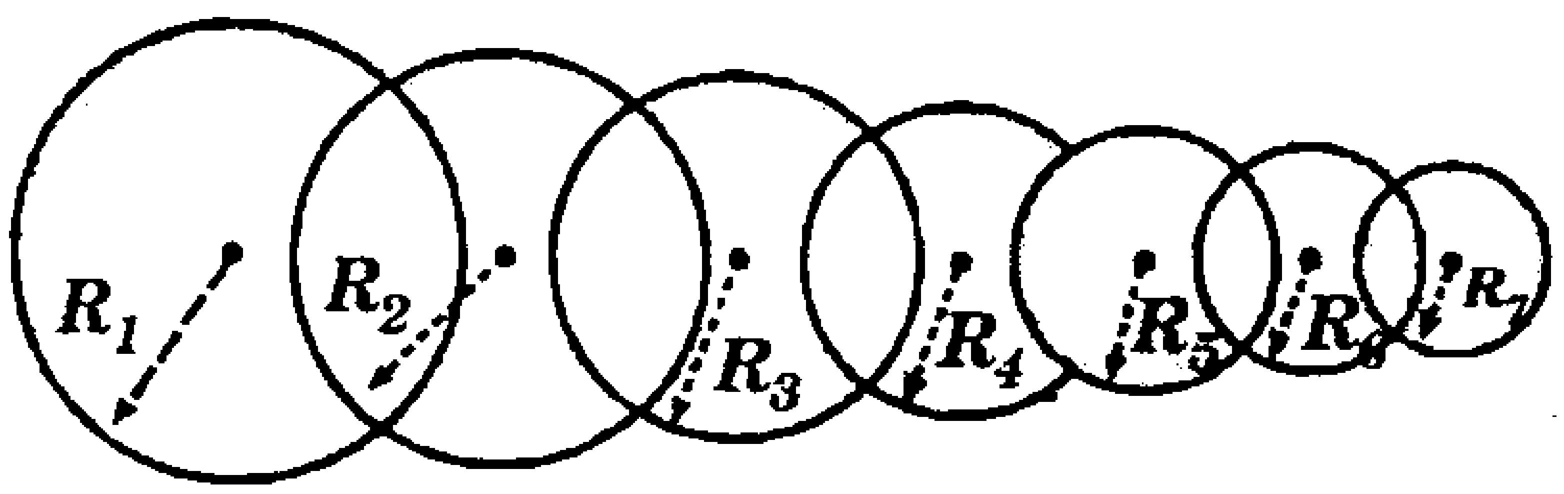
$$\Rightarrow x^2 = 8\pm\sqrt{28} \Rightarrow x=\sqrt{8+2\sqrt{7}} \text{ ó } x=\sqrt{8-2\sqrt{7}}$$

Finalmente, se hallan dos valores para x; pero sólo la segunda aparece como alternativa.

RPTA : "D"

PROBLEMA 29 : (SAN MARCOS 2011-II)

En la figura $\sum_{i=1}^{7} R_i = \sum_{i=1}^{7} i^2$. Halle el perímetro de la región sombreada, en centímetros.

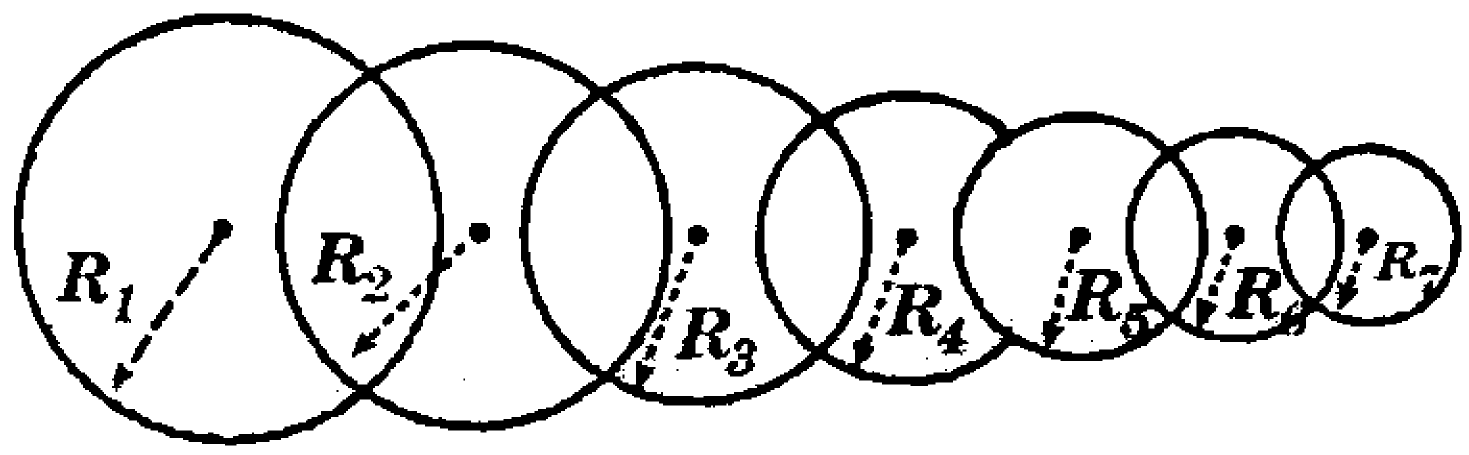


A) 280πcm B) 300πcm C) 250πcm

D) 320πcm E) 270πcm

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar el perímetro de la región sombreada.



De la imagen se desprende que el perímetro de la región sombreada equivale a la suma de longitudes de todas las circunferencias.

$$\Rightarrow Perímetro = 2\pi R_1 + 2\pi R_2 + ... + 2\pi R_7$$
$$= 2\pi(R_1+R_2+R_3+...+R_7)$$

Según el enunciado, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{7} R_i = \sum_{i=1}^{7} i^2 \Rightarrow R_1+R_2+...+R_7$$
$$= 1^2+2^2+3^2+...+7^2 = 140$$

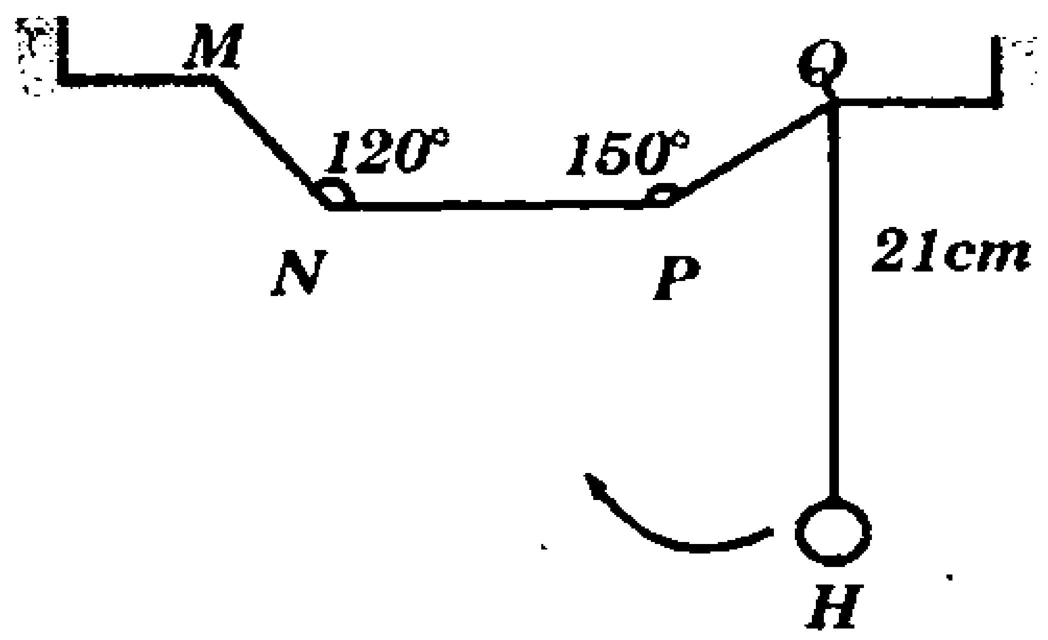
Entonces:

$$Perímetro = 2\pi(140) = 280\pi$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 30 : (SAN MARCOS 2011-II)

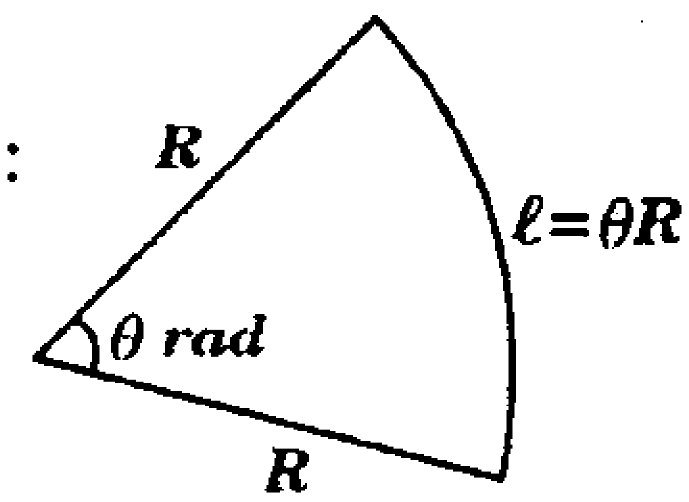
La figura muestra una esferita de acero suspendida por la cuerda flexible $\overline{QH}$. Se impulsa la esferita en el sentido indicado de tal forma que manteniéndose siempre tensa la cuerda, la esferita llega a $\overline{MN}$. Calcule la longitud recorrida por la esferita, si $MN=NP=PQ=9$ cm.



A) 12πcm B) 6πcm C) 10πcm D) 9πcm E) 8πcm

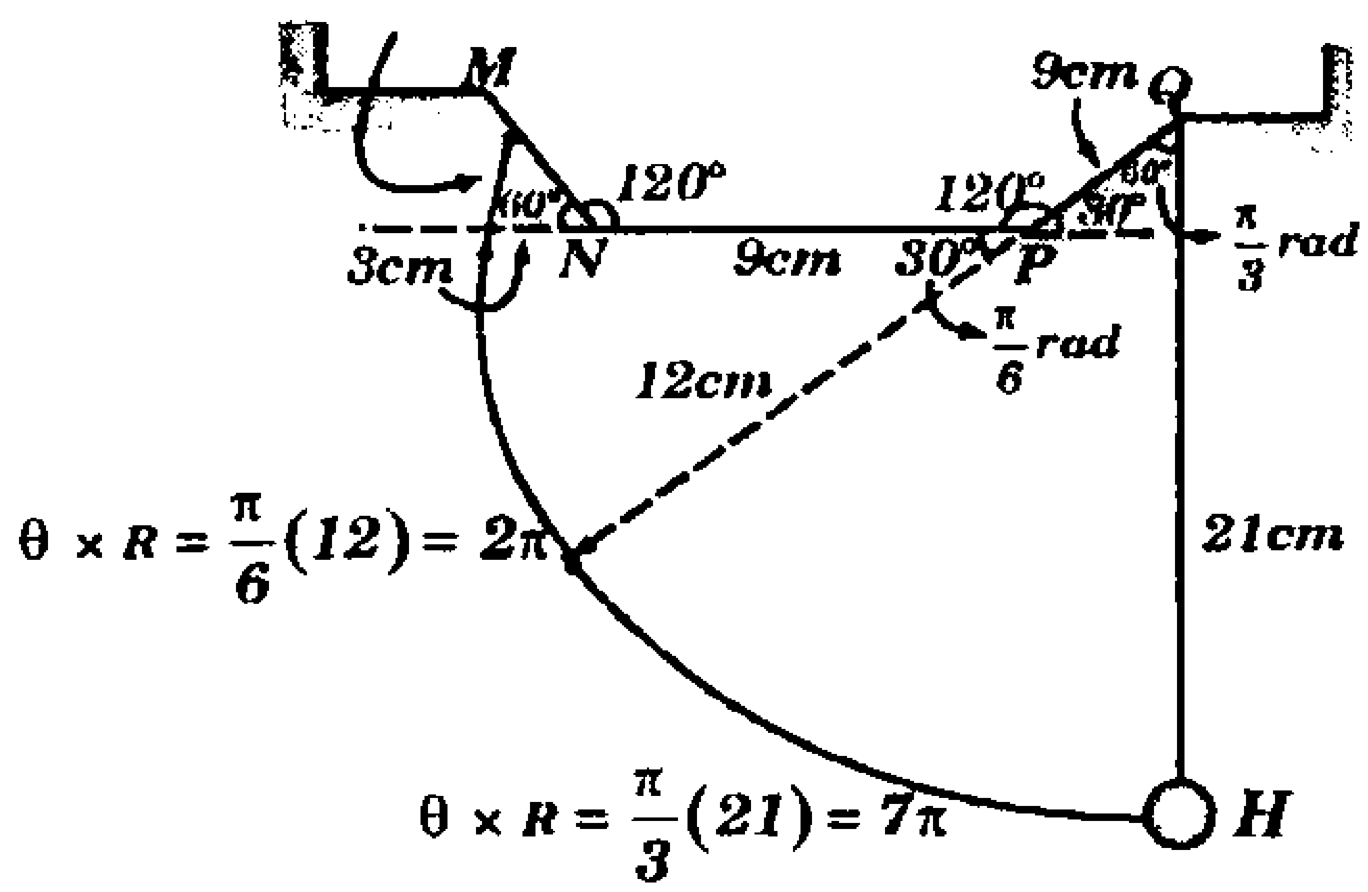
RESOLUCIÓN :

* Por teoría sabemos que:



* Se nos pide hallar la longitud que recorre la esferita.

$$\theta \times R = \frac{\pi}{3}(3) = \pi$$



* Finalmente, la longitud recorrida por la esfera es:
$7\pi + 2\pi + \pi = 10\pi$

RPTA : "C"

PROBLEMA 31 : (SAN MARCOS 2011-II)

Si cierta cantidad de bolas se cuenta de *4* en *4*, sobran *3* ; si se cuenta de *6* en *6*, sobran *5* ; y si se cuenta de *10* en *10*, sobran *9*. ¿Cuál es el número mínimo de bolas que se tiene?

A) 59 B) 57 C) 129 D) 60 E) 119

RESOLUCIÓN :

* Recordando:
$$N = \begin{cases} \overset{o}{a} + r \\ \overset{o}{b} + r \\ \overset{o}{c} + r \end{cases} \Rightarrow N = \overline{MCM(a;b;c)} + r$$

Sea *N* el número de bolas.

* De lo dado en el enunciado, tenemos:
$$N = \overset{o}{4} + 3 = \overset{o}{4} - 1$$
$$N = \overset{o}{6} + 5 = \overset{o}{6} - 1$$
$$N = \overset{o}{10} + 9 = \overset{o}{10} - 1$$

* Se desprende que: $N = \overset{o}{\overline{MCM(4;6;10)}} - 1$
$$N = \overset{o}{60} - 1$$
$$\downarrow$$
$$N_{min} = 60 - 1 = 59$$

Por lo tanto, el número mínimo de bolas es *59*.

RPTA : "A"

PROBLEMA 32 : (SAN MARCOS 2011-II)

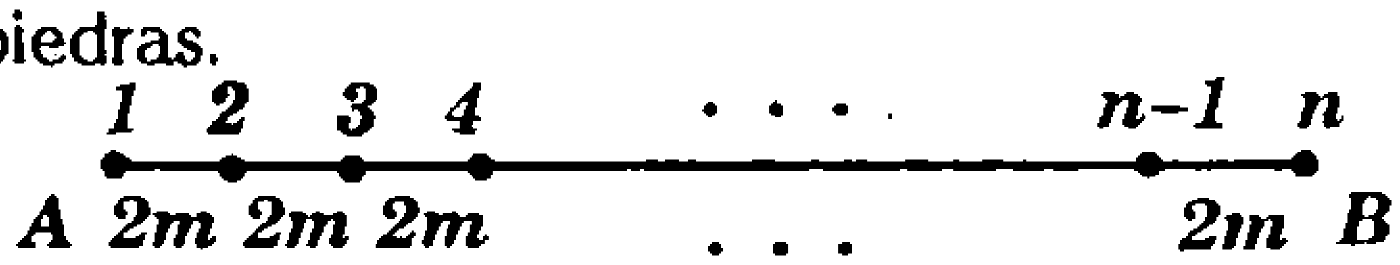
A lo largo de un camino $\overline{AB}$; se coloca *n* piedras separadas *2* metros una de otra; la primera en *A* y la última en *B*. Se coge la primera piedra y se la lleva a *B* recorriendo la menor distancia; se coge la segunda piedra y se la lleva a *B*, recorriendo también la menor distancia; y así sucesivamente. Si al terminar se ha recorrido *20* veces la distancia entre la primera y la última piedra, halle *n*.

A) 19 B) 20 C) 22 D) 23 E) 21

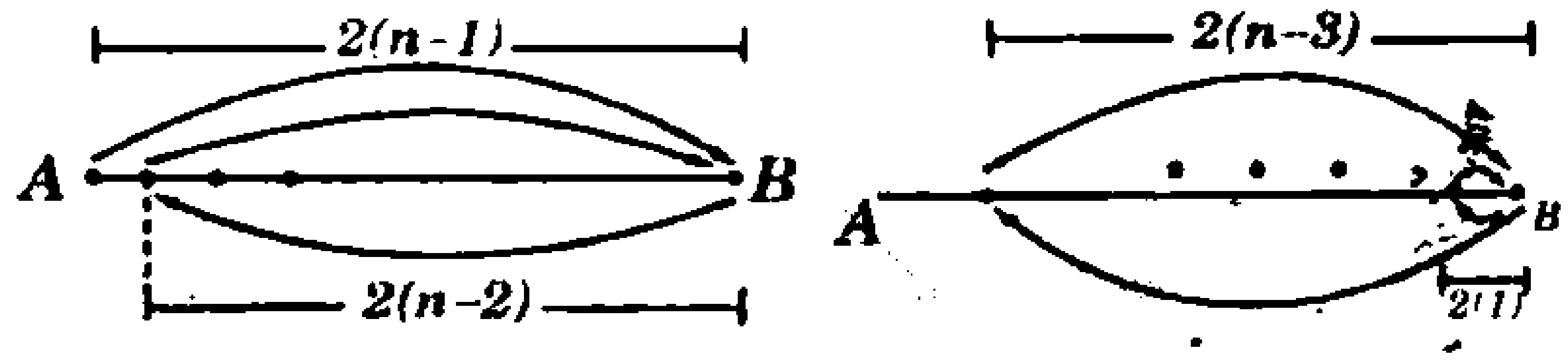
RESOLUCIÓN :

Recordemos la siguiente serie notable:
$$1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En el camino $\overline{AB}$, se sabe que se han colocado *n* piedras.



De acuerdo a las condiciones del enunciado, debemos llevar piedras del punto A hacia el punto *B*; y al hacerlo debemos recorrer la menor distancia posible. Se sabe que los recorridos son los siguientes.



El recorrido total es
$$[2(n-1)] + 2[2(n-2) + 2(n-3) + ... + 2(2) + 2(1)]$$
$$= \overbrace{20[2(n-1)]}^{por\ dato}$$
$$4[(n-2)+(n-3)+...+2+1] = 19[2(n-1)]$$
$$\Rightarrow 4\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right] = 19[2(n-1)] \Rightarrow n-2 = 19$$

Ya que se nos pide hallar el valor de *n*, entonces: ***n=21.***

RPTA : "D"

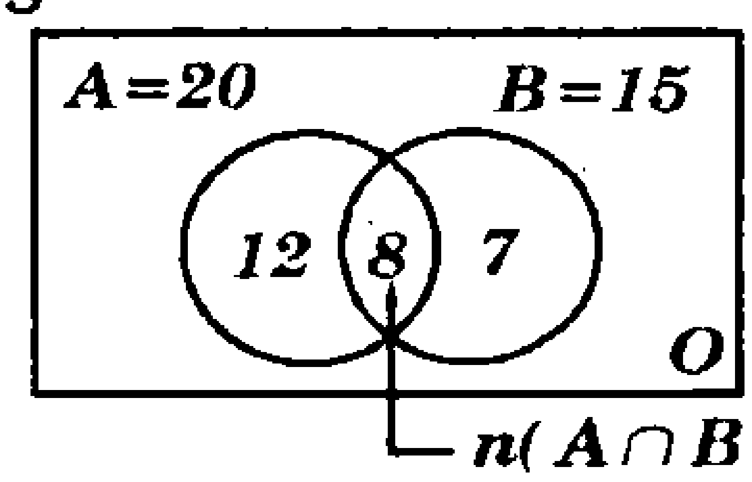
PROBLEMA 33 : (SAN MARCOS 2011-II)

En un estante se ha colocado *120* juguetes : *95* de ellos usan pilas, *86* tienen ruedas, *94* son de color rojo, *110* son de plástico y *100* tienen sonido. De todos estos juguetes, ¿cuántos tienen todas las características mencionadas?

A) 25 B) 5 C) 15 D) 12 E) 10

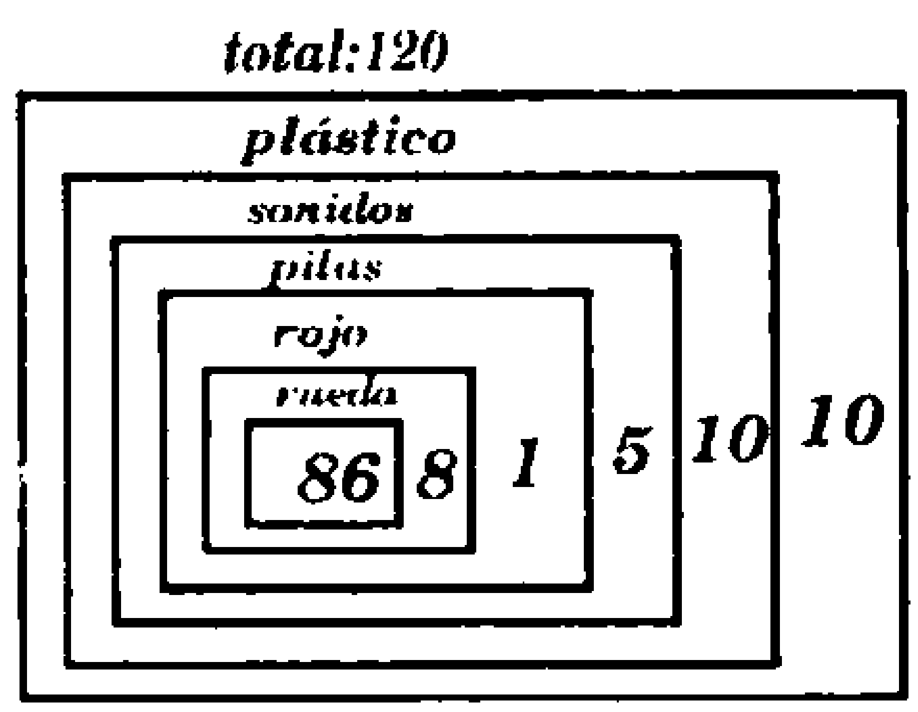
RESOLUCIÓN :

Según el enunciado: *U:27*



$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(U)$
$8 = 20 + 15 - 27$

Graficando los datos, tenemos:



El gráfico nos muestra que los juguetes que presentan las *5* características serían *86*, lo cual sería la cantidad máxima posible.

Es así que concluimos que la cantidad de juguetes que presenta las *5* características no es única

existe una cantidad máxima; por tanto, es posible que exista una cantidad mínima.

No sabemos si se pide la cantidad mínima o máxima; pero, teniendo en cuenta las opciones, debe pedirse "la cantidad mínima de juguetes con las *5* características".

* Por los datos sabemos que :

Total de juguetes : ***120***

Pilas : 96, *Ruedas : 86* } $181 \Rightarrow Pi \cap Ru = 181 - 120 = 61$

Rojo = 94, *Plástico = 110* } $204 \Rightarrow Ro \cap Pl = 204 - 120 = 84$

$145 \Rightarrow Pi \cap Ru \cap Ro \cap Pl = 145 - 120 = 25$

Sonido = 100 → *125*

$$Pi \cap Ru \cap Ro \cap Pl \cap So = 125 - 120 = 5$$

Así vemos que, como mínimo, ***5*** jugetes presentan las ***5*** características.

RPTA : "B"

PROBLEMA 34 : (SAN MARCOS 2011-II)

Halle el mayor número real r que satisface la relación : $r \leq x^2 + 4x + 6,\ \forall x \in \mathbb{R}$

A) -2 *B) 2* *C) 0* *D) 1* *E) -1*

RESOLUCIÓN :

Recordemos que:

*En todo a real se cumple que: $a^2 \geq 0 \Rightarrow$ el mínimo valor de a^2 es cero.

*Si $M \leq f(x);\ M \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}$, entonces, el máximo valor de M es igual al mínimo valor de $f_{(x)}$. Nos piden hallar el mayor número real r que cumpla lo siguiente:

$$r \leq \underbrace{x^2 + 4x + 6}_{f_{(x)}};\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego, el mayor valor de r es el mínimo valor de $f_{(x)}$.

Entonces completamos los cuadrados en $f_{(x)}$ para luego minimizarla.

$$f_{(x)} = (x^2 + 4x + 4) + 2 \Rightarrow f_{(x)} = (x+2)^2 + 2$$

Siendo el mínimo valor de $f_{(x)} = \underbrace{(x+2)^2}_{\substack{\text{mínimo valor} \\ \text{es } 0}} + 2 = 2$

Se concluye que el mayor valor de r es 2

RPTA : "B"

PROBLEMA 35 : (SAN MARCOS 2011-II)

Si $ab=3$ y $a^2+b^2=19$, calcule el valor de a^3+b^3.

A) 75 *B) 60* *C) 80* *D) 120* *E) 90*

RESOLUCIÓN :

* Recordando algunos productos notables:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad \text{ó}$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

Nos piden hallar el valor de a^3+b^3

Según el enunciado:

$$ab = 3\ ;\ a^2 + b^2 + = 19$$

Resolviendo el sistema, lograremos dar con el valor de $a+b$, y luego en dicho valor hallar lo que se nos pide.

1°) $(a+b)^2 = \underbrace{a^2+b^2} + 2ab$

$$(a+b)^2 = 19 + 2(3) = 25$$

$\Rightarrow a+b=5 \vee a+b=-5$ (no obtiene alternativa)

* Consideraremos : $a+b=5$

2°) $\underbrace{(a+b)^3} = a^3 + b^3 + \underbrace{3ab}\underbrace{(a+b)}$

$$5^3 = a^3 + b^3 + 3\,(3)\ \ (5)$$

$\Rightarrow a^3+b^3=80$

RPTA : "C"

PROBLEMA 36 : (SAN MARCOS 2011-II)

Halle el conjunto de los números reales x, tal que la suma del número x y su inverso multiplicativo sea mayor que 2.

A) $\{x \in \mathbb{R} / x>0 \wedge x \neq 1\}$ *B)* $\{x \in \mathbb{R} / x>1\}$ *C)* $\{x \in \mathbb{R} / x<1\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} / x<-1\}$ *E)* $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

RESOLUCIÓN :

De acuerdo a las condiciones del problema, tenemos: $x + \dfrac{1}{x} > 2 \Rightarrow x + \dfrac{1}{x} - 2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x}$$

Siendo: $(x-1)^2 \geq 0\ ;\ x \neq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \wedge x \neq 1\}$$

RPTA : "A"

PROBLEMA 37 : (SAN MARCOS 2011-II)

La suma de los cuadrados de dos números reales positivos es ***11*** y la diferencia de sus logaritmos, en base ***10***, es ***1/2***. Determine el producto de dichos números.

A) $\sqrt{11}$ *B)* $\sqrt{10}$ *C)* $\sqrt{7}$ *D)* $\sqrt{10}$ *E)* $\sqrt[4]{10}$

RESOLUCIÓN :

Recordando las siguientes propiedades:

• Definición de logaritmos:

$Log_b N=x \leftrightarrow b^x=N$

$x > 0; b > 0 \wedge b \neq 1$

• Propiedad de logaritmos

$$Log_b M - Log_b N = Log_b \frac{M}{N}$$

* Sean a y b números reales positivos .

Del dato:

$$Loga - Logb = \frac{1}{2} \Rightarrow Log\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{10} \qquad (I)$$

Asimismo, del enunciado se tiene que:

$$a^2 + b^2 = 11 \ ; \ \div(ab): \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{11}{ab}$$

De (I) : $\sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{11}{ab} \Rightarrow ab = \sqrt{10}$

RPTA : "D"

PROBLEMA 38 : (SAN MARCOS 2011-II)

Si $2^{2y+1}+5\times2^y=12$, halle $2(y+1)$

A) $Log_2 3$ B) $3Log_2 5$ C) $Log_2 9$

D) $7Log_2 7$ E) $\frac{1}{2}Log_2 3$

RESOLUCIÓN :

Recordando los siguientes criterios:

* Definición de logaritmo

$Log_b N=x \leftrightarrow b^x=N; x>0; b>0 \wedge b \neq 1$

* Propiedad de logaritmos (regla del sombrero)

$KLog_b N=Log_b N^K$

Nos piden hallar $2(y+1)$

Del enunciado tenemos:

$2^{2y+1}+5\times2^y=12$

$2(2^y)^2+5(2^y)-12=0$

$2(2^y) \quad -3 \rightarrow 2^y=3/2$

$1(2^y) \quad +4 \rightarrow 2^y=-4(\nexists y)$

Entonces: $2^y=3/2$

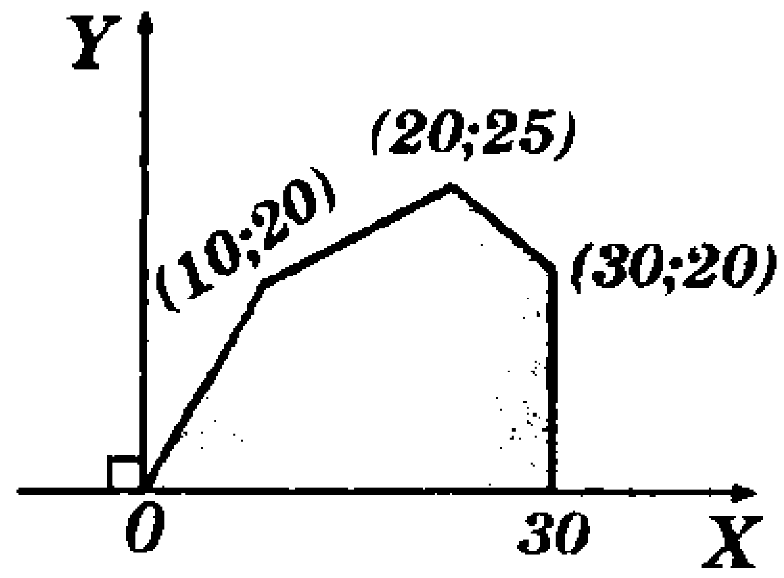
$2^{y+1}=3 \Rightarrow Log_2 3=y+1$

$\times2 : 2(y+1)=2Log_2 3=Log_2 9$

RPTA : "C"

PROBLEMA 39 : (SAN MARCOS 2011-II)

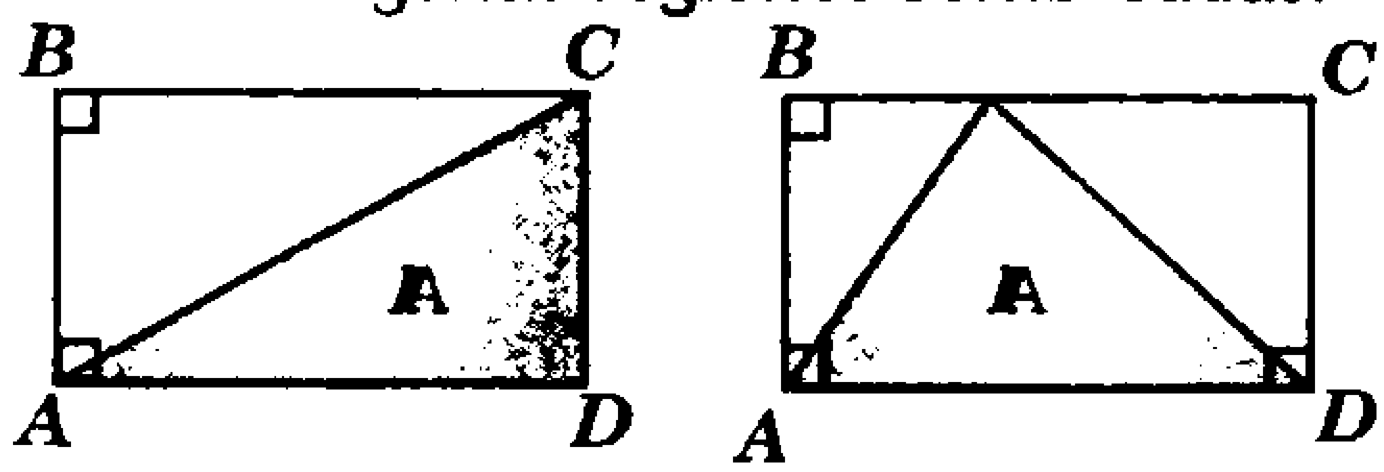
En la figura, la región sombreada se divide en dos partes equivalentes. Halle el área de una de ellas.



A) $572\ u^2$ B) $275u^2$ C) $550u^2$ D) $375u^2$ E) $250u^2$

RESOLUCIÓN :

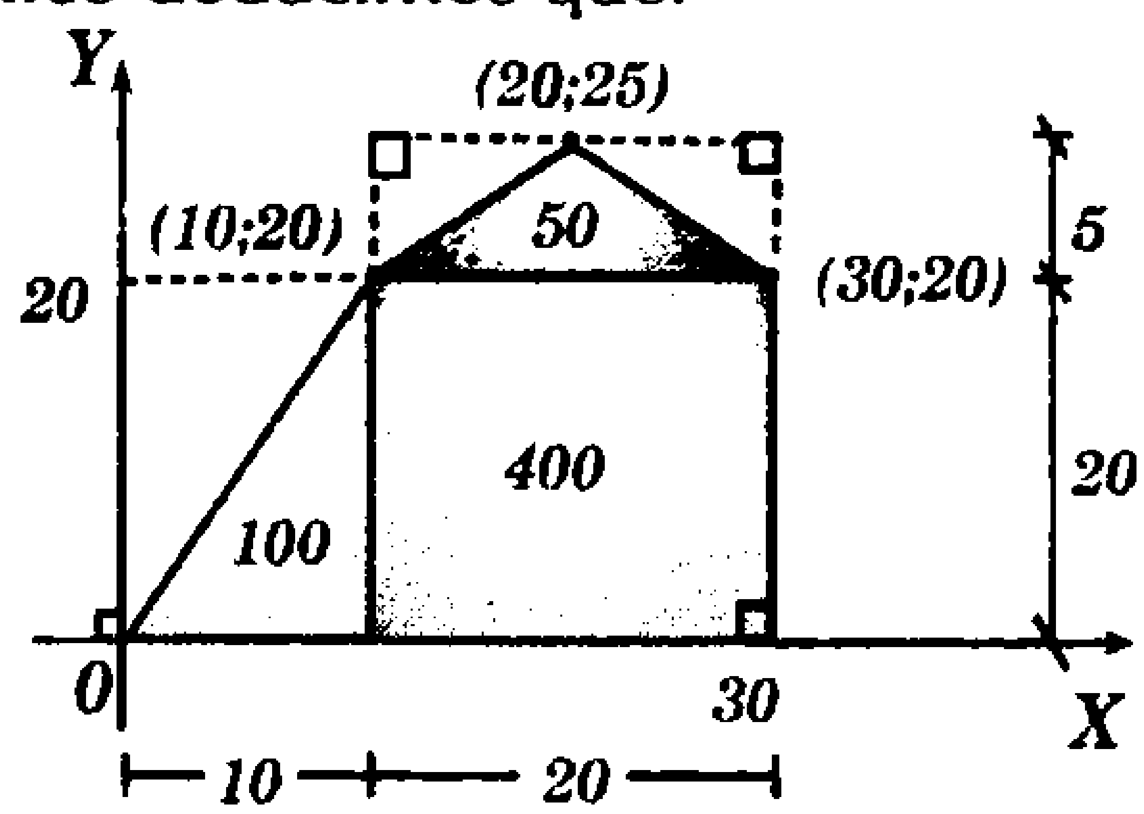
Recordando algunas regiones sombreadas:



$$A = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

Nos piden hallar la mitad del área sombreada.

Del gráfico deducimos que:

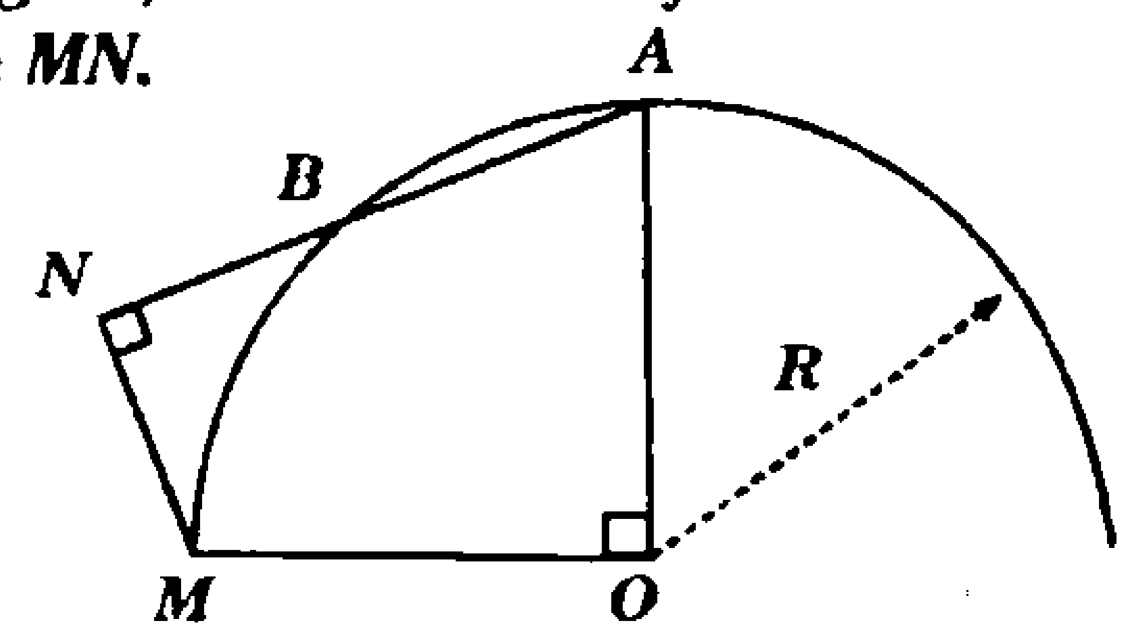


$$\Rightarrow \frac{\text{Área sombreada}}{2} = \frac{100+400+50}{2} = 275$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 40 : (SAN MARCOS 2011-II)

En la figura, si $m\widehat{BA}=30°$ y el radio mide R cm, calcule MN.

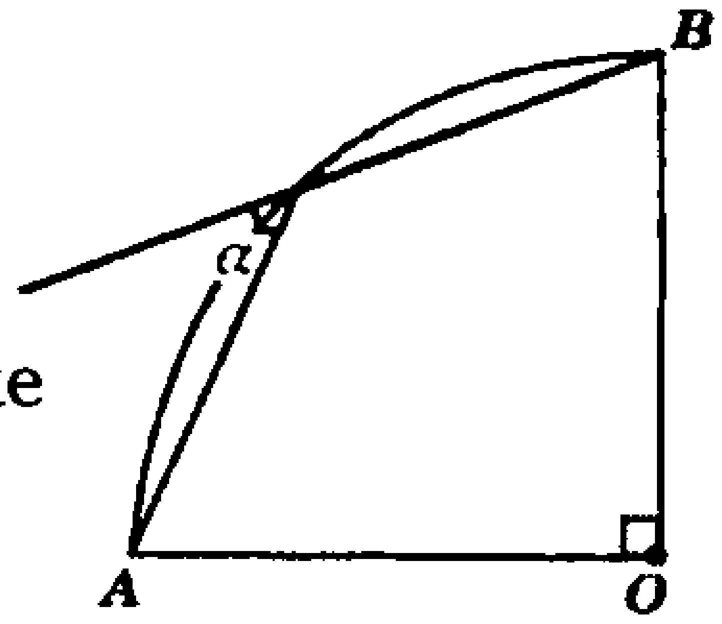


A) $\sqrt{2R}$ cm B) $2\sqrt{2R}$ cm C) $4\sqrt{2}R$ cm

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}R$ cm E) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ cm

RESOLUCIÓN :

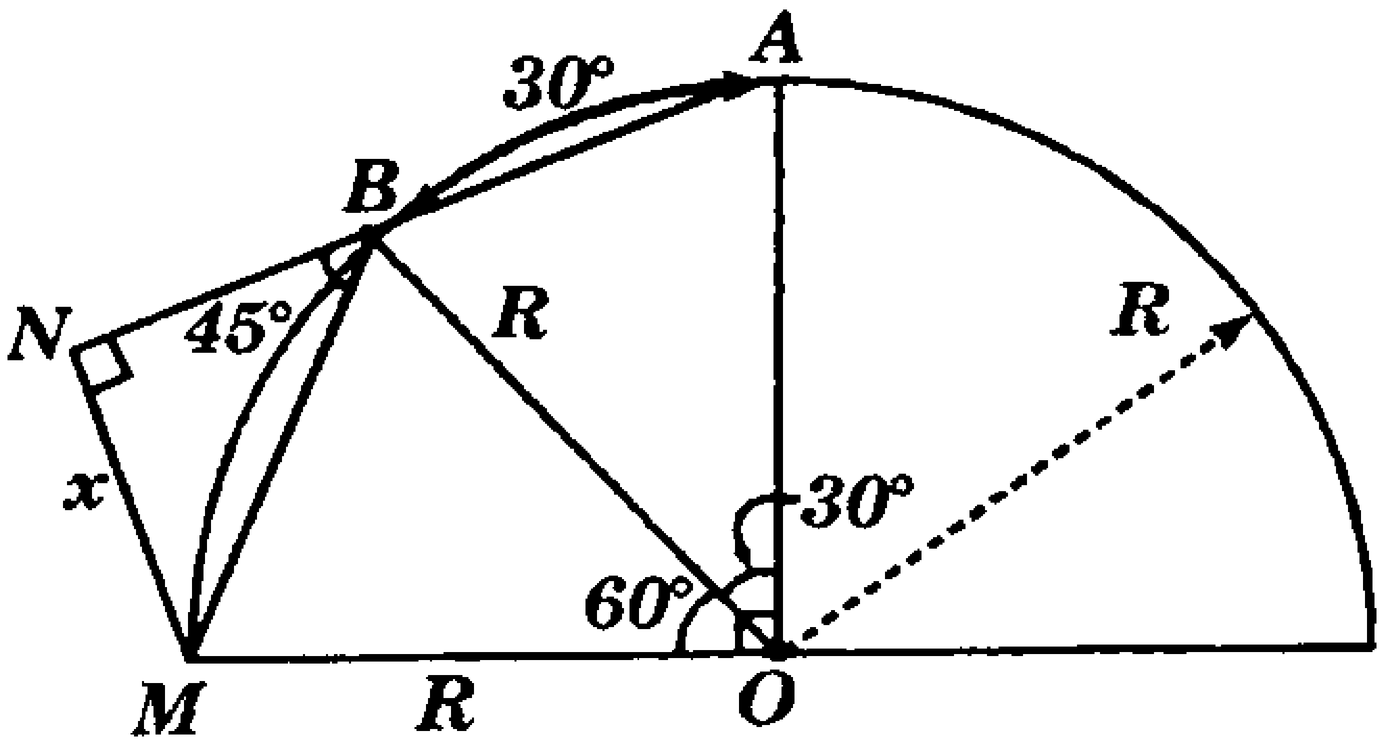
Recordando la siguiente propiedad geométrica:



Se cumple en el cuadrante *AOB*: $\alpha = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Se nos pide hallar: $MN = x$.

Del enunciado, resulta el siguiente gráfico:



Donde ΔMNB (equilátero): $MB = R$

En el ⊿MNB notable de 45°

$$MB = x\sqrt{2} = R \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Por lo tanto}: MN = \frac{\sqrt{2}}{2} R\ cm$$

RPTA : "E"

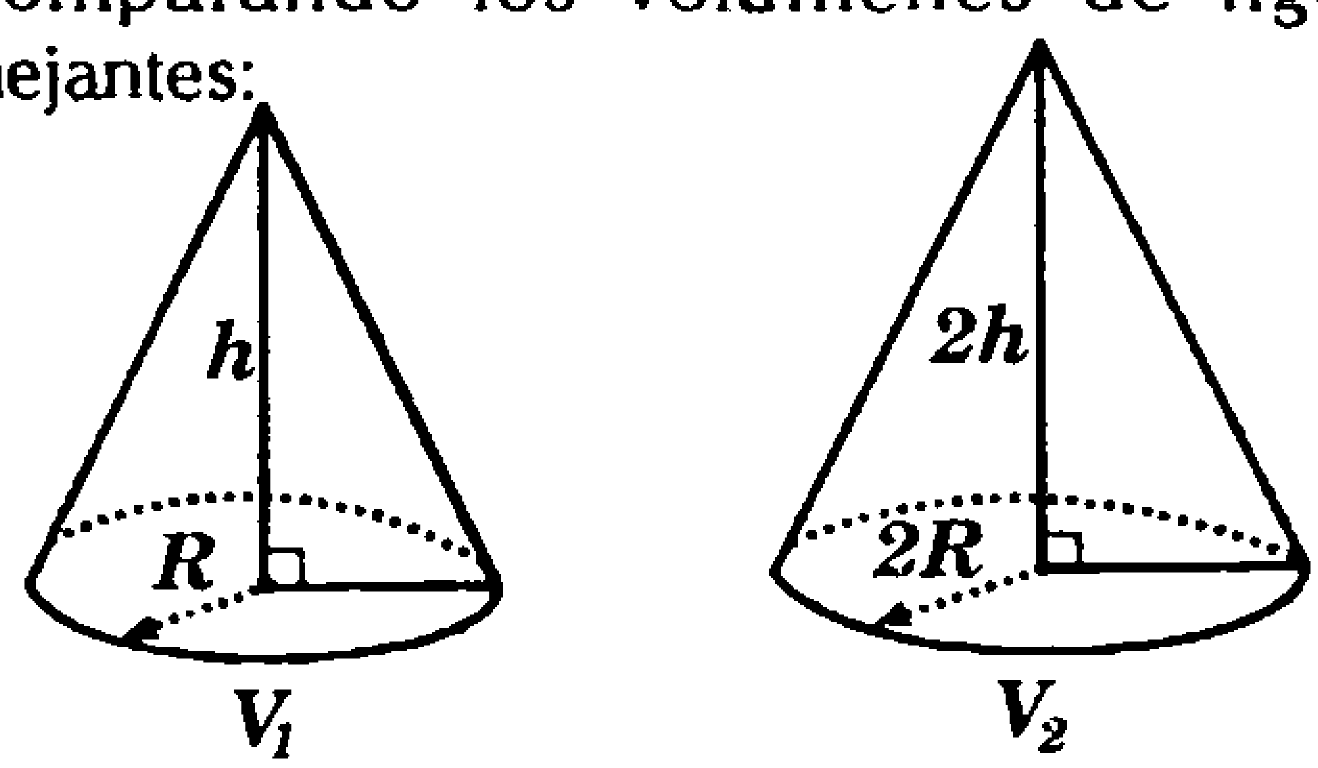
PROBLEMA 41 : (SAN MARCOS 2011-II)

Se divide la altura de un cono circular recto en *3* partes iguales por *2* planos paralelos a la base. Si el volumen del cono es $54m^3$, determine el volumen del tronco de cono con bases en los planos paralelos.

A)$16m^3$ B)$12m^3$ C)$15m^3$ D)$10m^3$ E)$14m^3$

RESOLUCIÓN :

* Comparando los volúmenes de figuras semejantes:

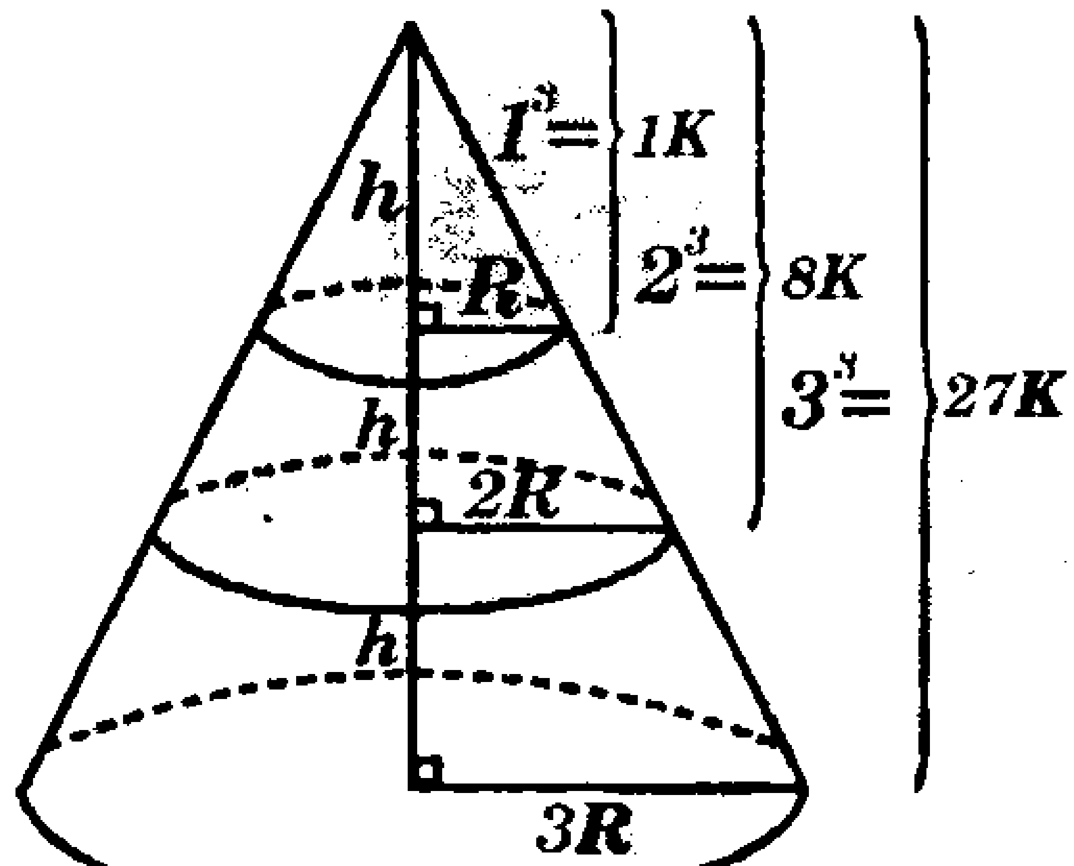


$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(1)^3}{(2)^3} = \frac{1}{8}$$

Dichos volúmenes están en proporción de sus medidas al cubo.

Se nos pide hallar el volumen del tronco de cono central.

Dado sus conos semejantes, sus volúmenes serán:



Del enunciado:

$$27K = 54\ m^3 \Rightarrow K = 2\ m^3$$

Entonces, el volumen del tronco de cono central es $8K - K = 7K = 14m^3$

RPTA : "E"

PROBLEMA 42 : (SAN MARCOS 2011-II)

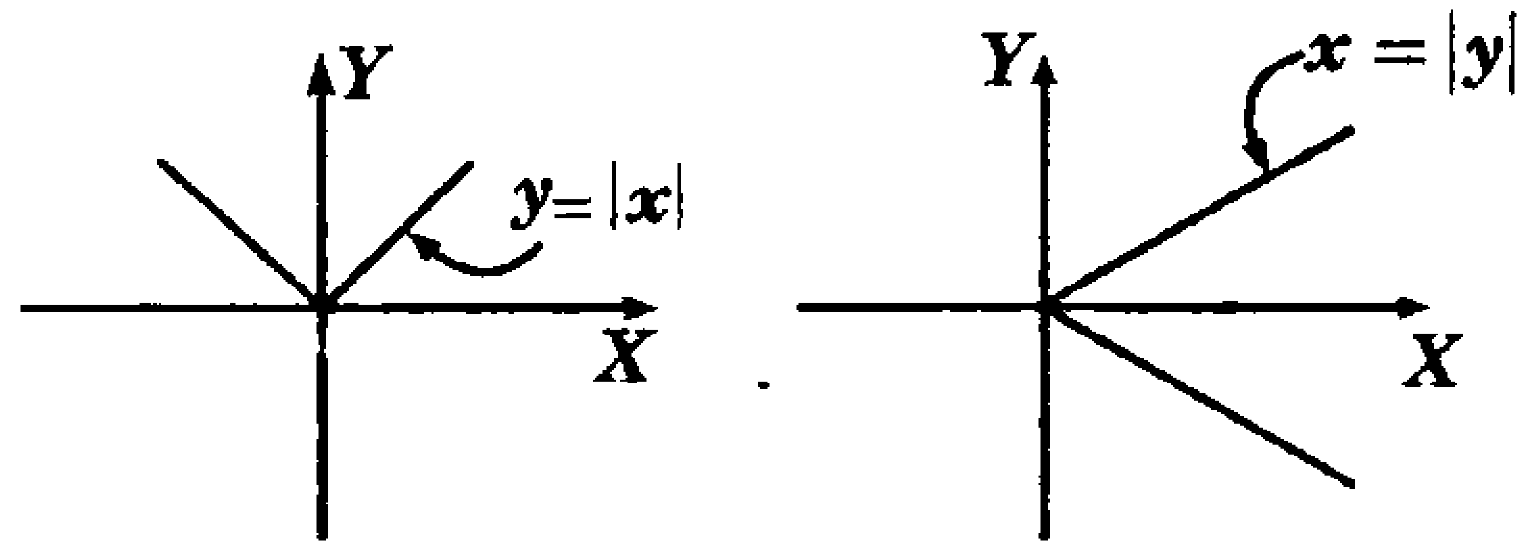
Halle el área de la región limitada por el gráfico de la relación.

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x = |y| \vee x = 5\}$$

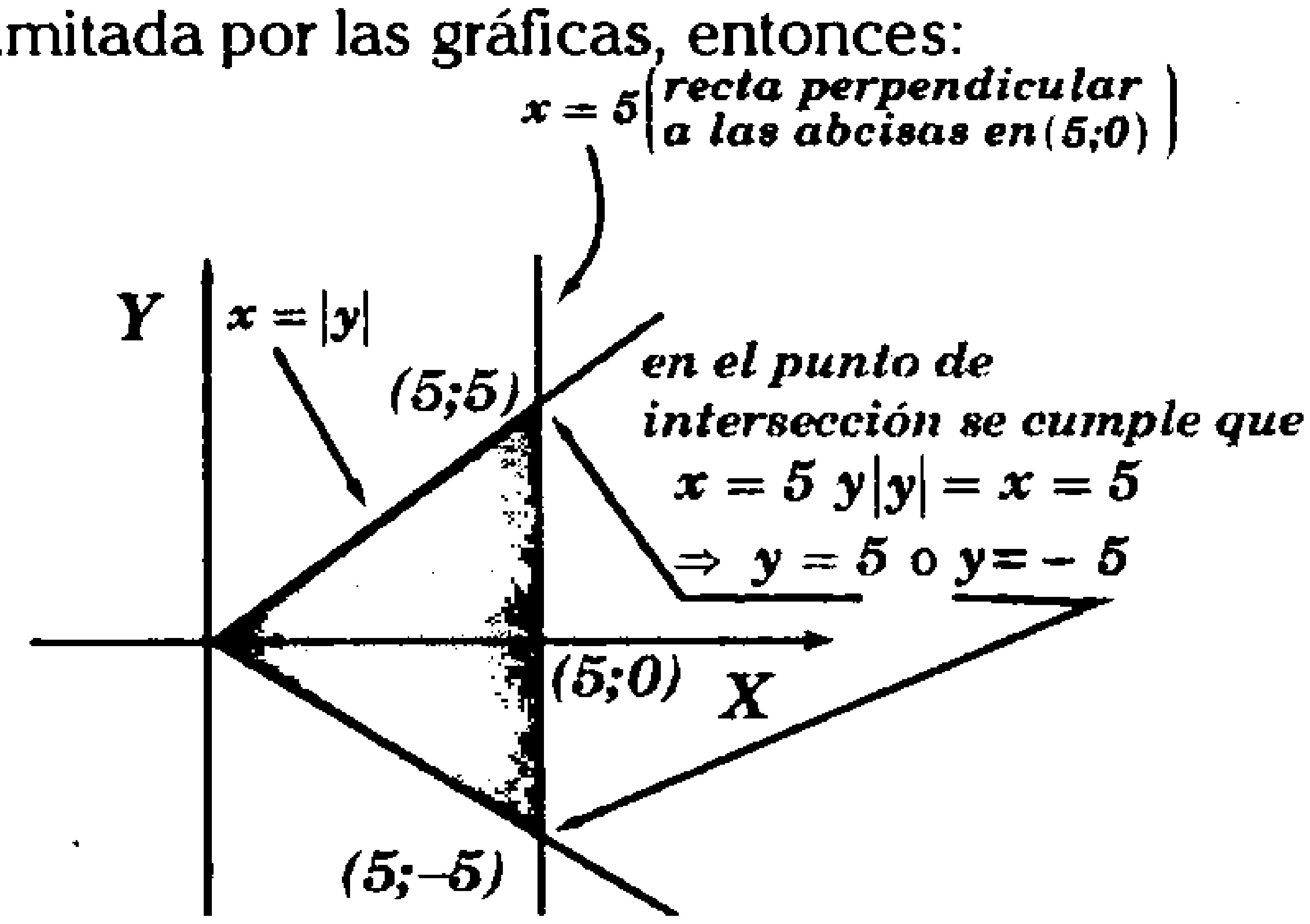
A)$20\ u^2$ B)$30u^2$ C)$25u^2$ D)$15u^2$ E)$12,5u^2$

RESOLUCIÓN :

* Recordando las siguientes gráficas:



Como nos piden hallar el área de la región limitada por las gráficas, entonces:



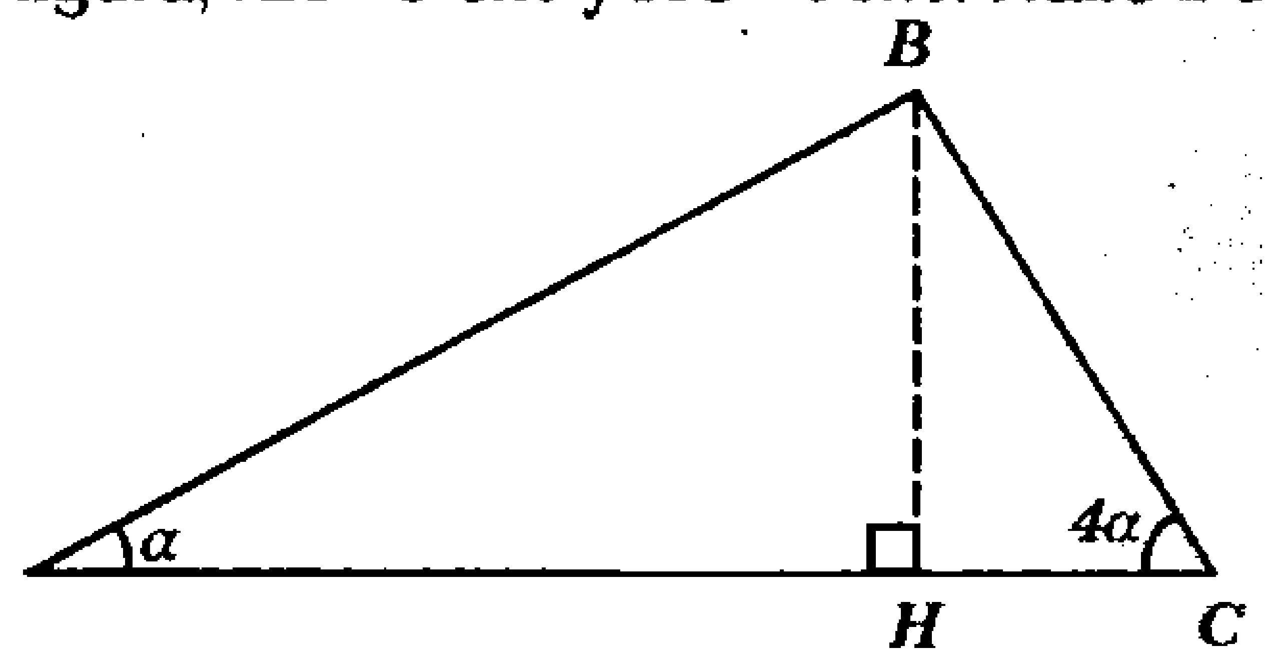
Por lo tanto:

$$\text{Área de la región sombreada} = \frac{\overset{base}{10}\times\overset{altura}{5}}{2} = 25u^2$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 43 : (SAN MARCOS 2011-II)

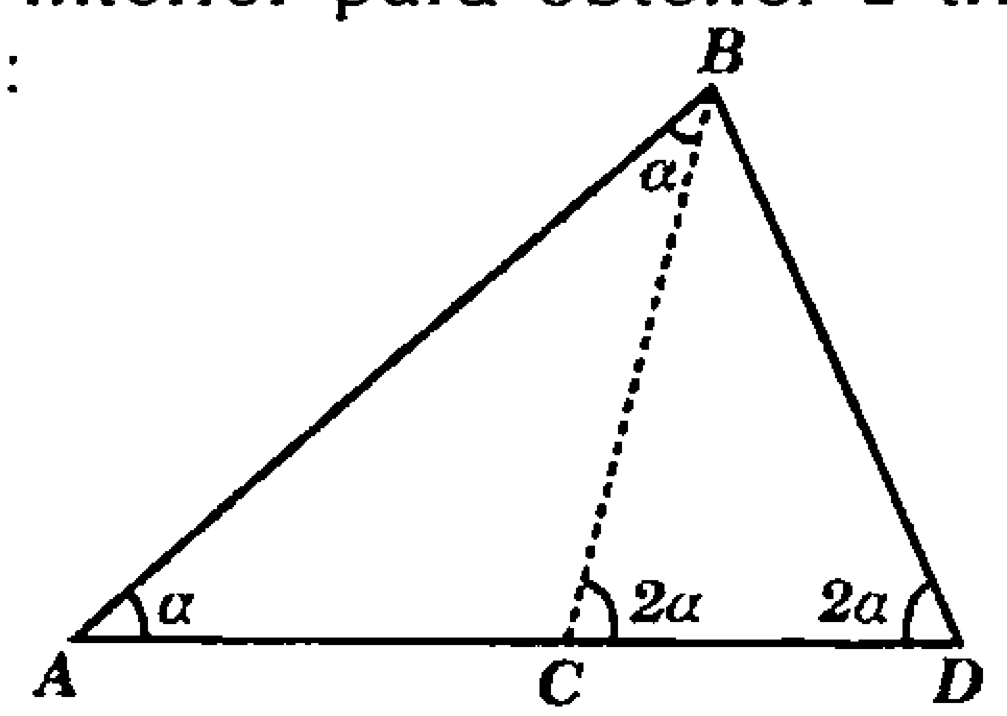
En la figura, $AH=8$ cm y $HC=1$cm. Halle BC.



A) $(\sqrt{110}-8)$cm B) $(\sqrt{113}-8)$cm C) $(\sqrt{115}-8)$cm
D) $(\sqrt{107}-8)$cm E) $(\sqrt{119}-8)$ cm

RESOLUCIÓN :

Si un triángulo muestra que uno de sus ángulos es el doble que el otro, conviene trazar una ceviana interior para obtener 2 triángulos isósceles:



$$m\sphericalangle ABC = \alpha \Rightarrow AC = BC \text{ y } BC = BD$$

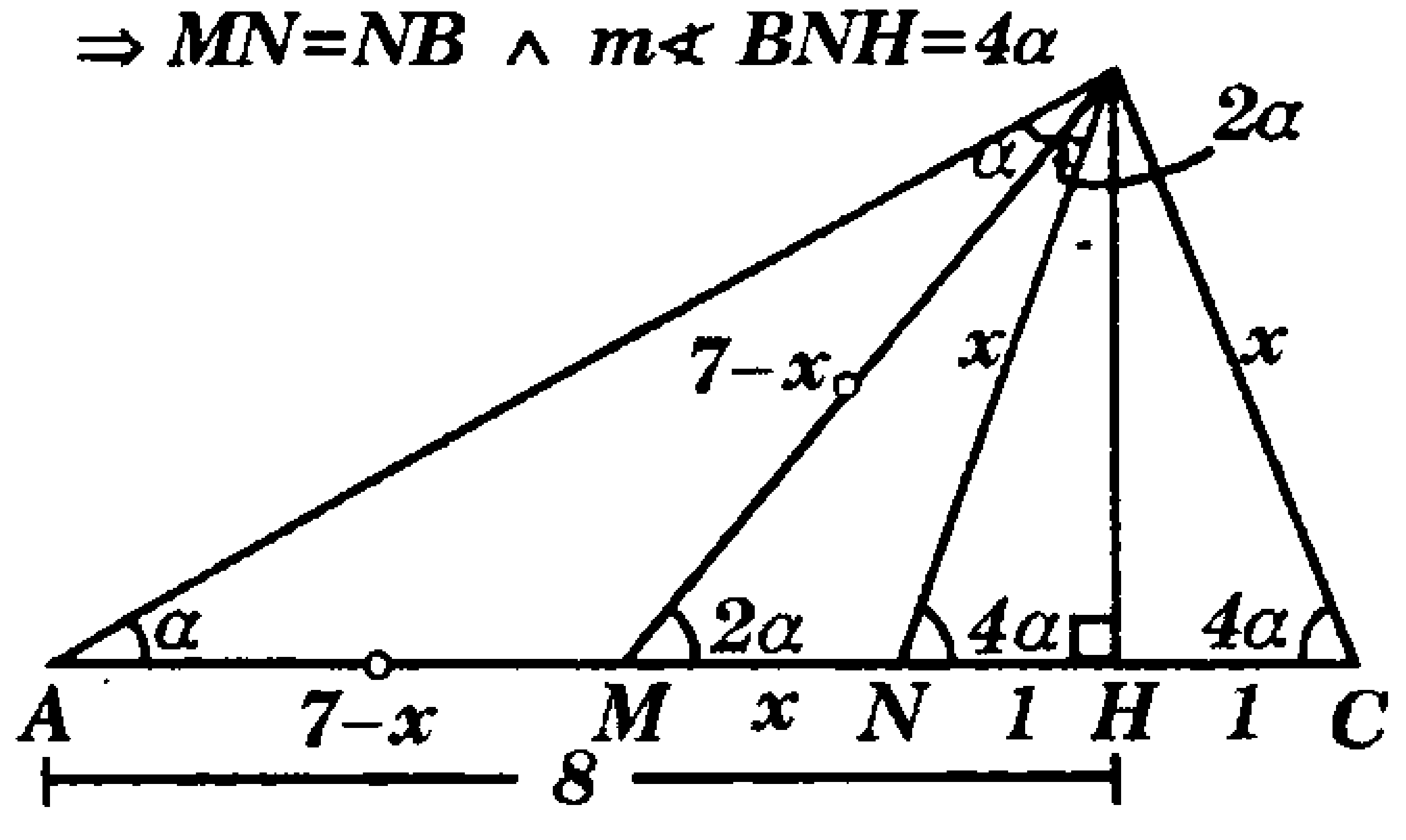
Se trazan las siguientes líneas en el gráfico:

Trazamos $\overline{BM}$ tal que $m\sphericalangle ABM=\alpha$.

$\Rightarrow AM=BM \wedge m\sphericalangle BMN=2\alpha$

Trazamos $\overline{BN}$, tal que $m\sphericalangle MBN=2\alpha$.

$\Rightarrow MN=NB \wedge m\sphericalangle BNH=4\alpha$



Como el ΔNBC es isósceles, $\Rightarrow BN=BC=x$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el $\triangle MHB$ y $\triangle BHC$, tenemos:

$$(7-x)^2-(x+1)^2=x^2-1^2$$

Por tanto: $x^2+16x-49=0$

Se completan los cuadrados:

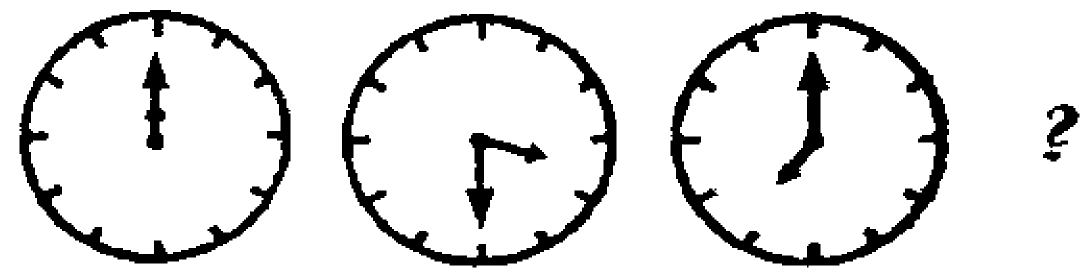
$$x^2+16x+64-113=0 \Rightarrow (x+8)^2=113$$

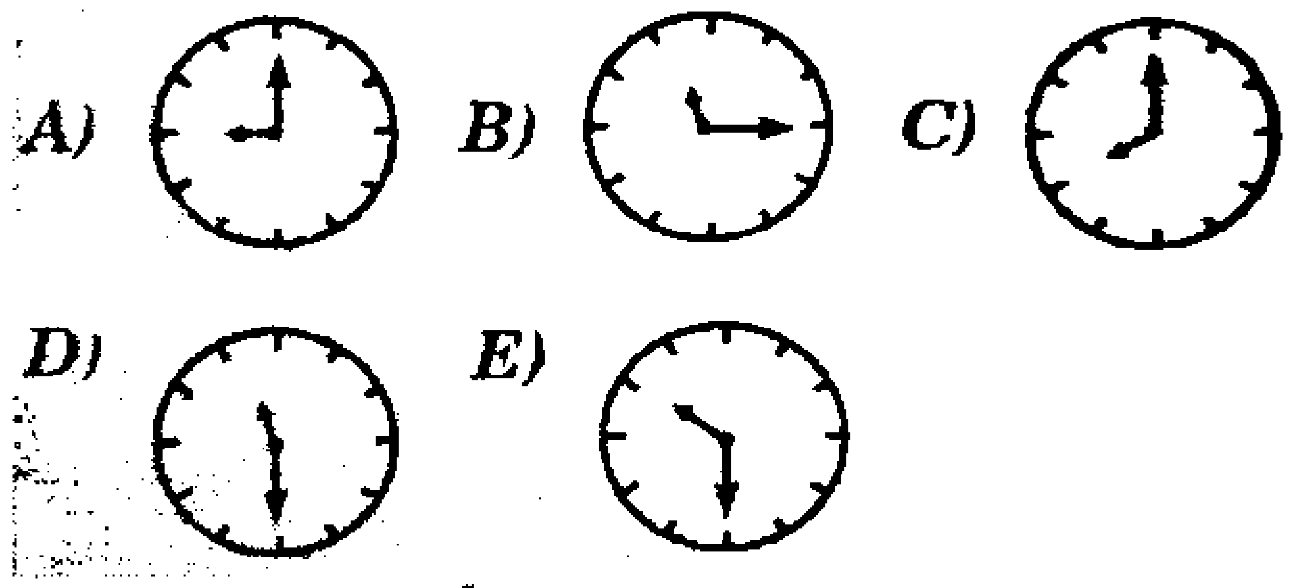
$$\Rightarrow x+8=\sqrt{113} \Rightarrow x=\sqrt{113}-8$$

RPTA : "B"

PROBLEMA 44 : (UNI 2011 - I)

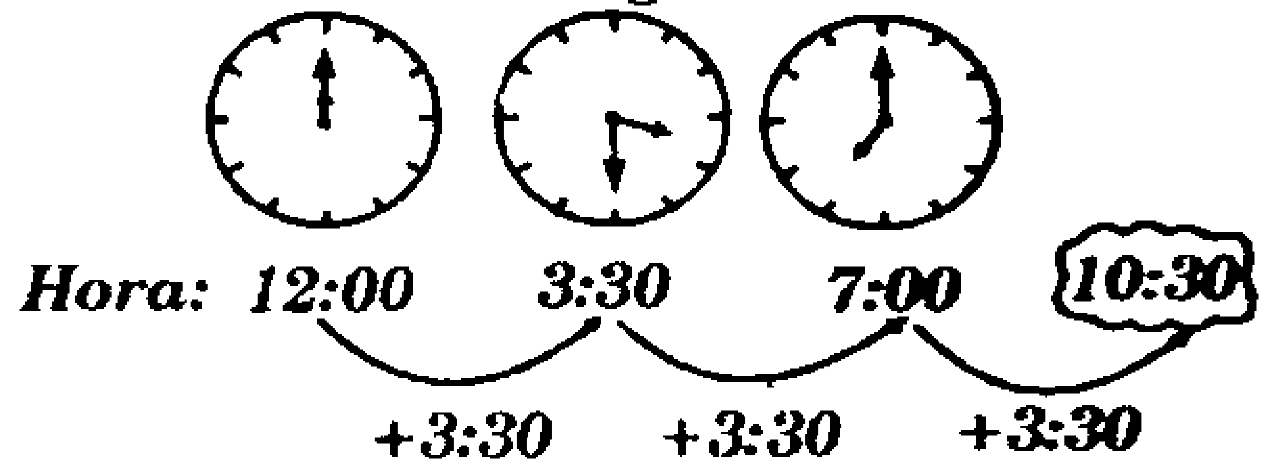
Indique la alternativa que mejor continúa en la secuencia.

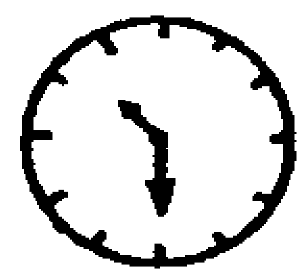




RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta las horas que indican los relojes en la secuencia gráfica del enunciado:



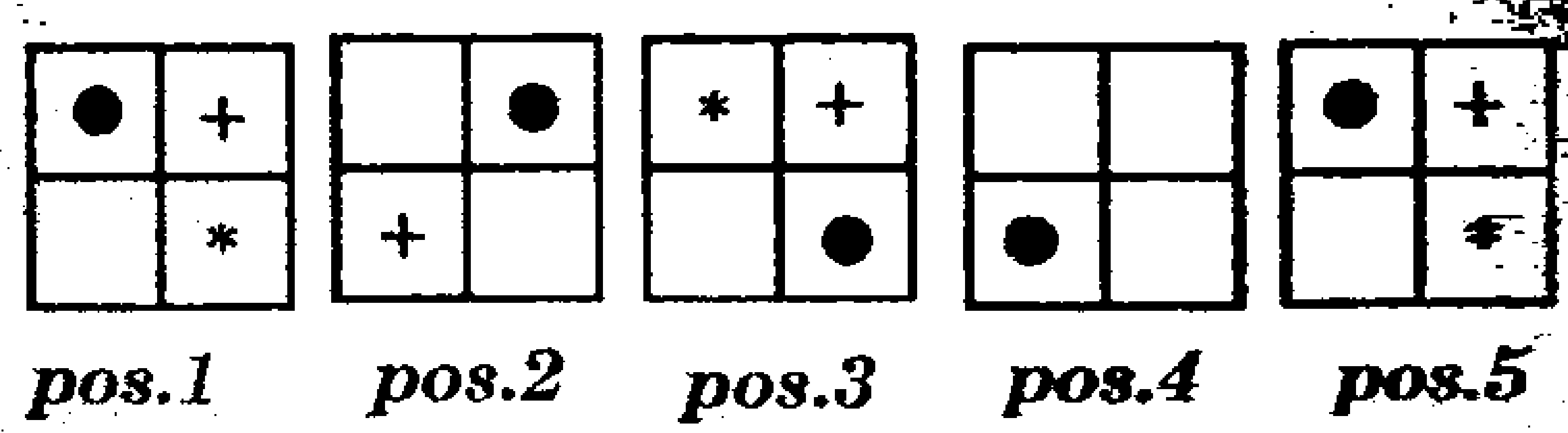
La cual sería representada por 

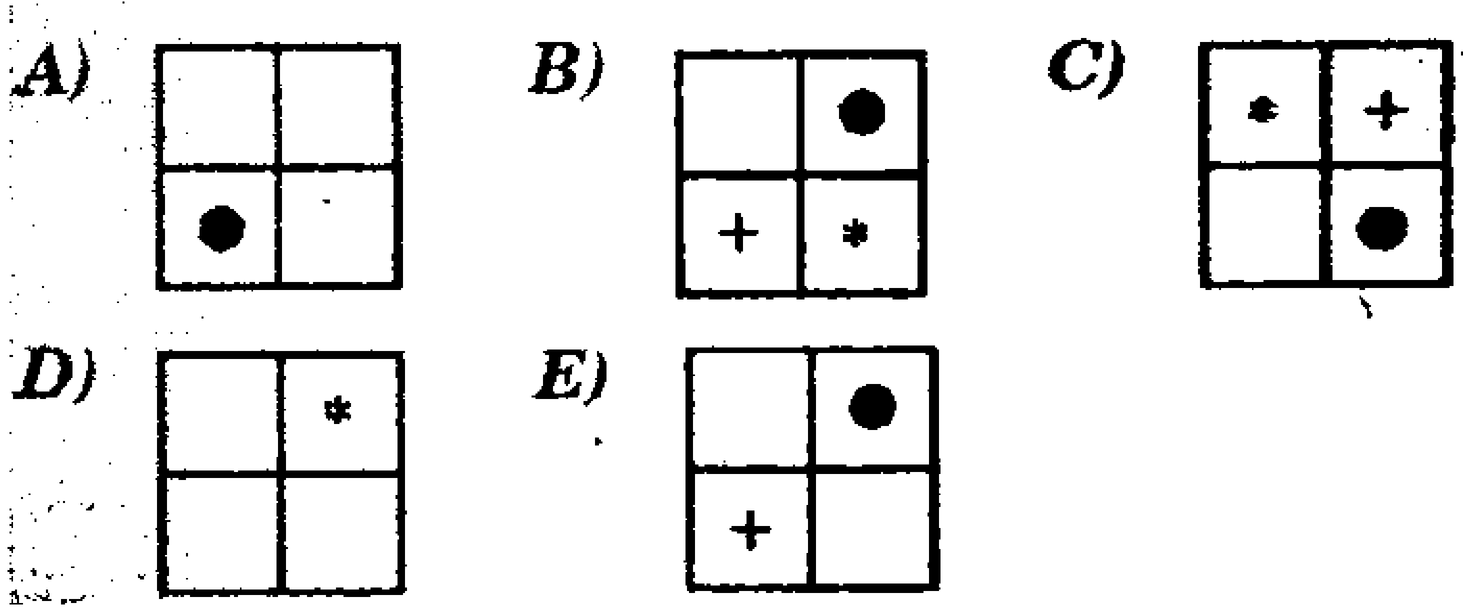
Entonces, el reloj debe marcar las **10:30.**

RPTA : "E"

PROBLEMA 45 : (UNI 2011 - I)

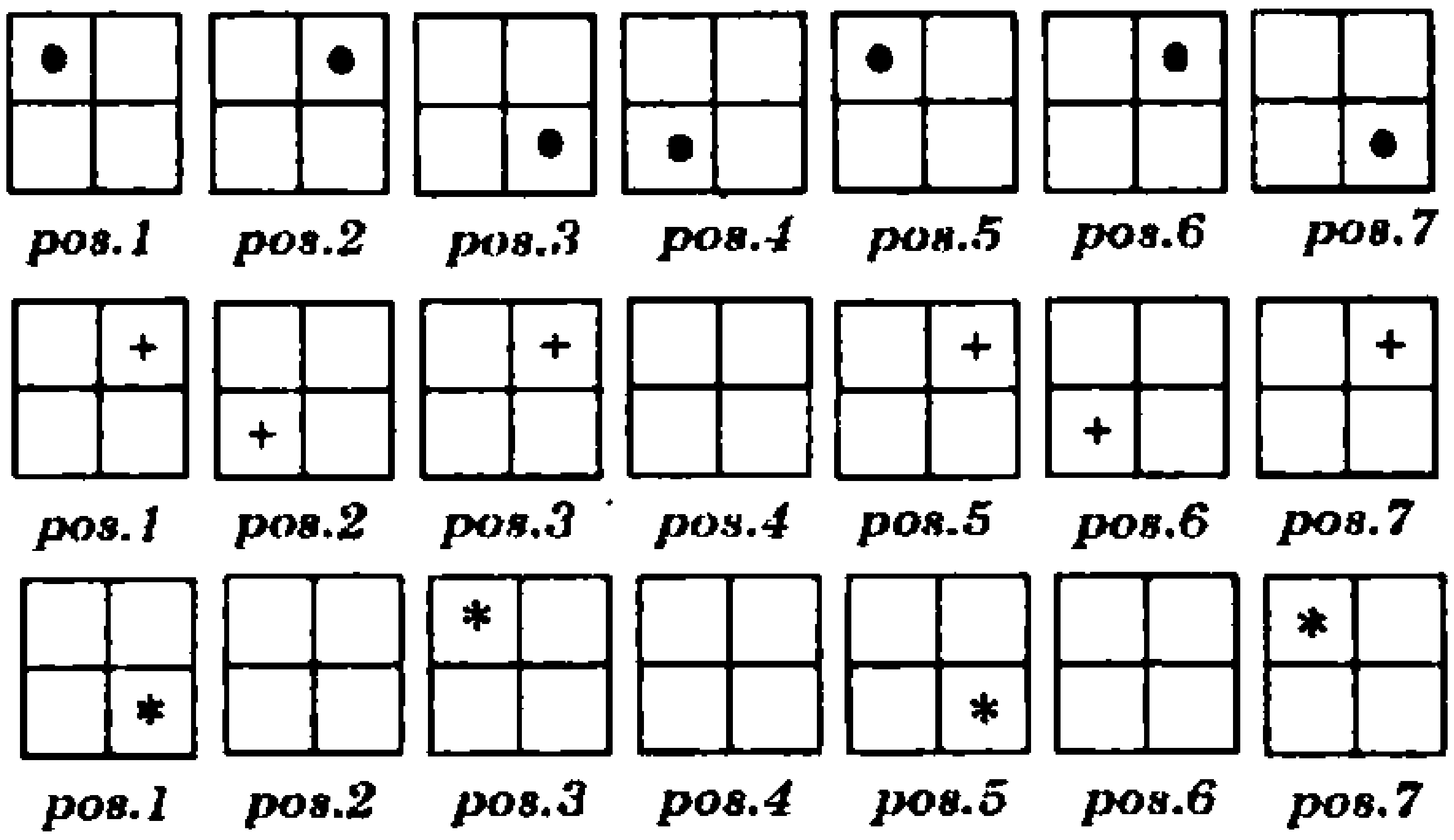
Indique la alternativa que debería ocupar la posición 7.



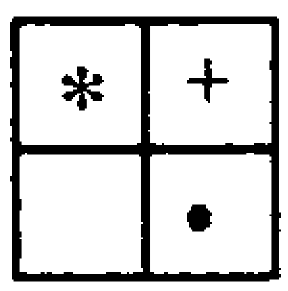


RESOLUCIÓN :

Analizando el desplazamiento de cada uno de los elementos de las cuadrículas, tenemos:



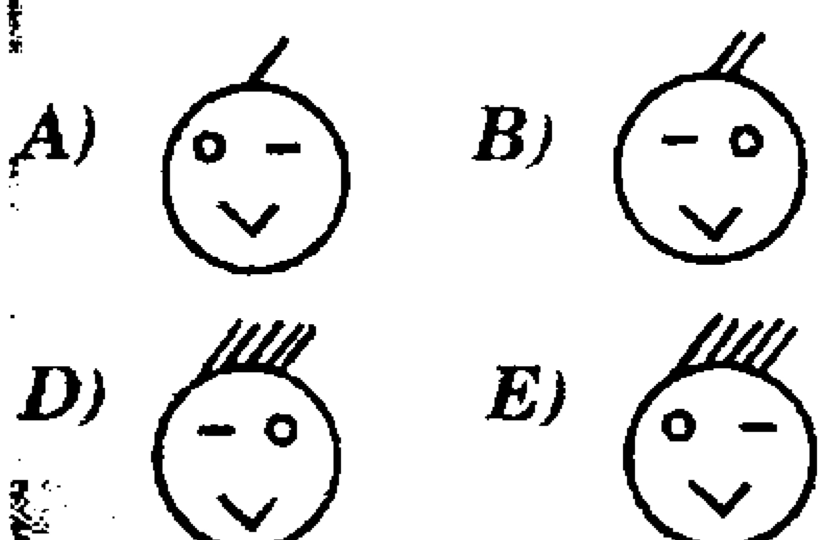
* Luego, la figura que ocupa la posición 7 es:



RPTA : "C"

PROBLEMA 46 : (UNI 2011 - I)

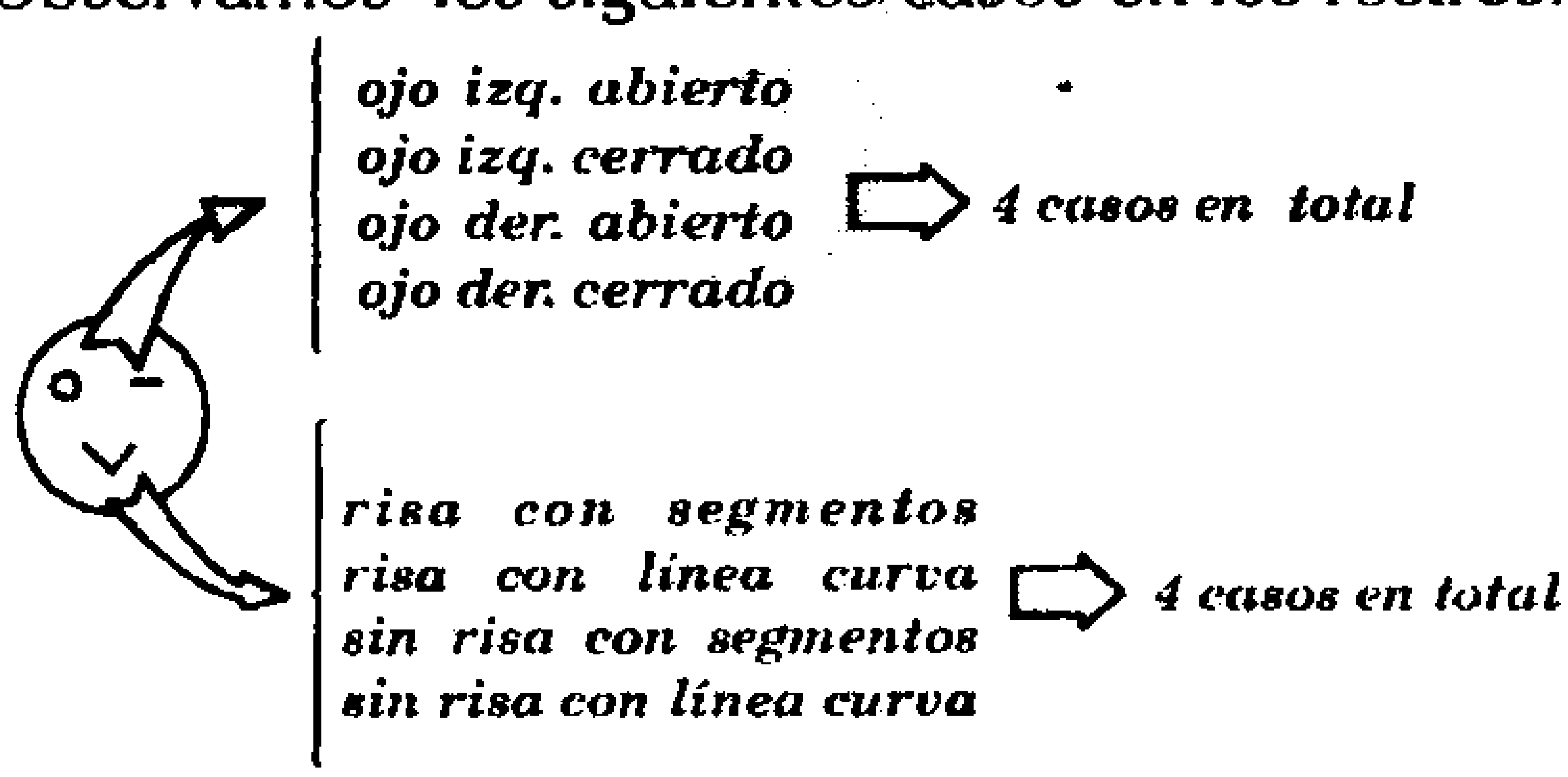
Determine la alternativa que continúa en la secuencia de figuras mostradas .



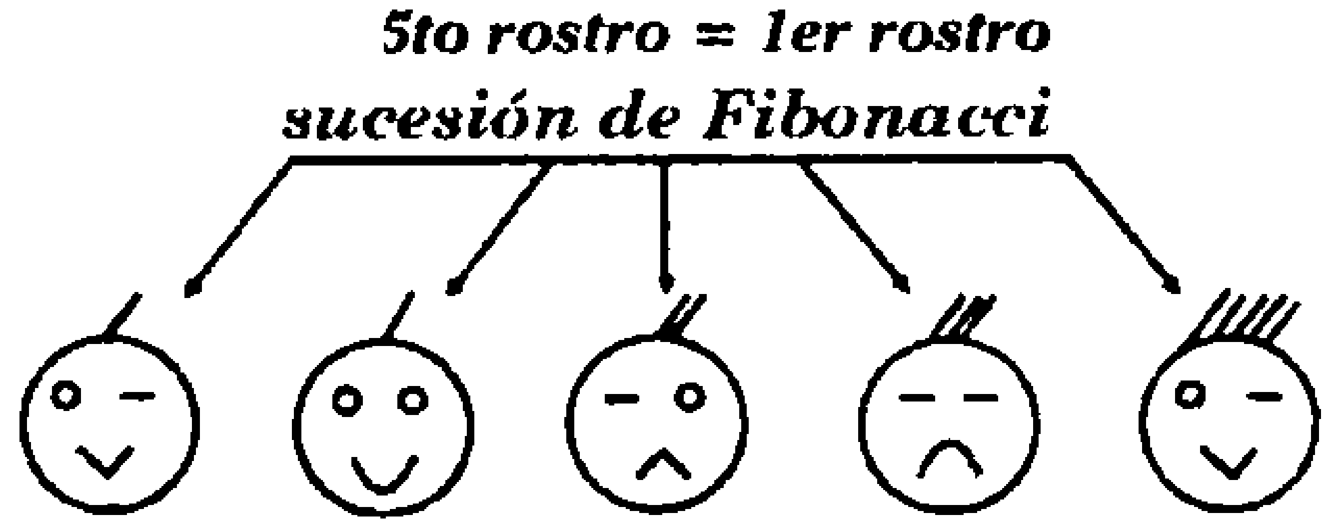
RESOLUCIÓN :

Recordando la Sucesión de Fibonacci: ***1; 1; 2; 3; 5; 8; ...***

Observamos los siguientes casos en los rostros:



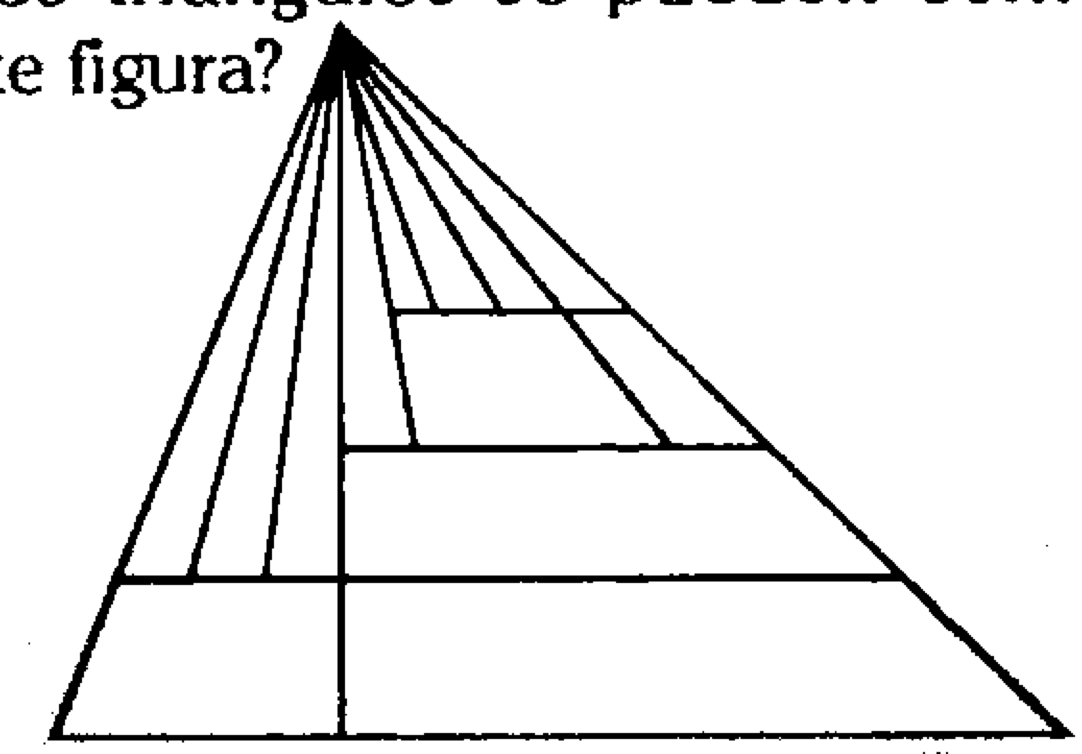
De la observación anterior notamos que en el rostro a partir del quinto término se repetirá la misma secuencia, por ello se tiene lo siguiente:



RPTA : "E"

PROBLEMA 47 : (UNI 2011 - I)

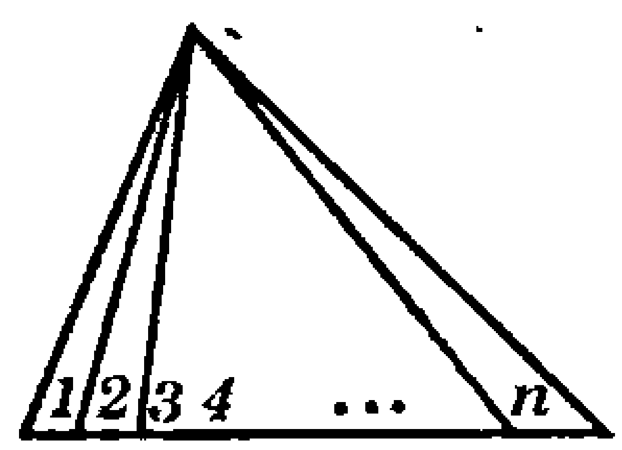
¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



A) 29 *B) 30* *C) 31* *D) 32* *E) 33*

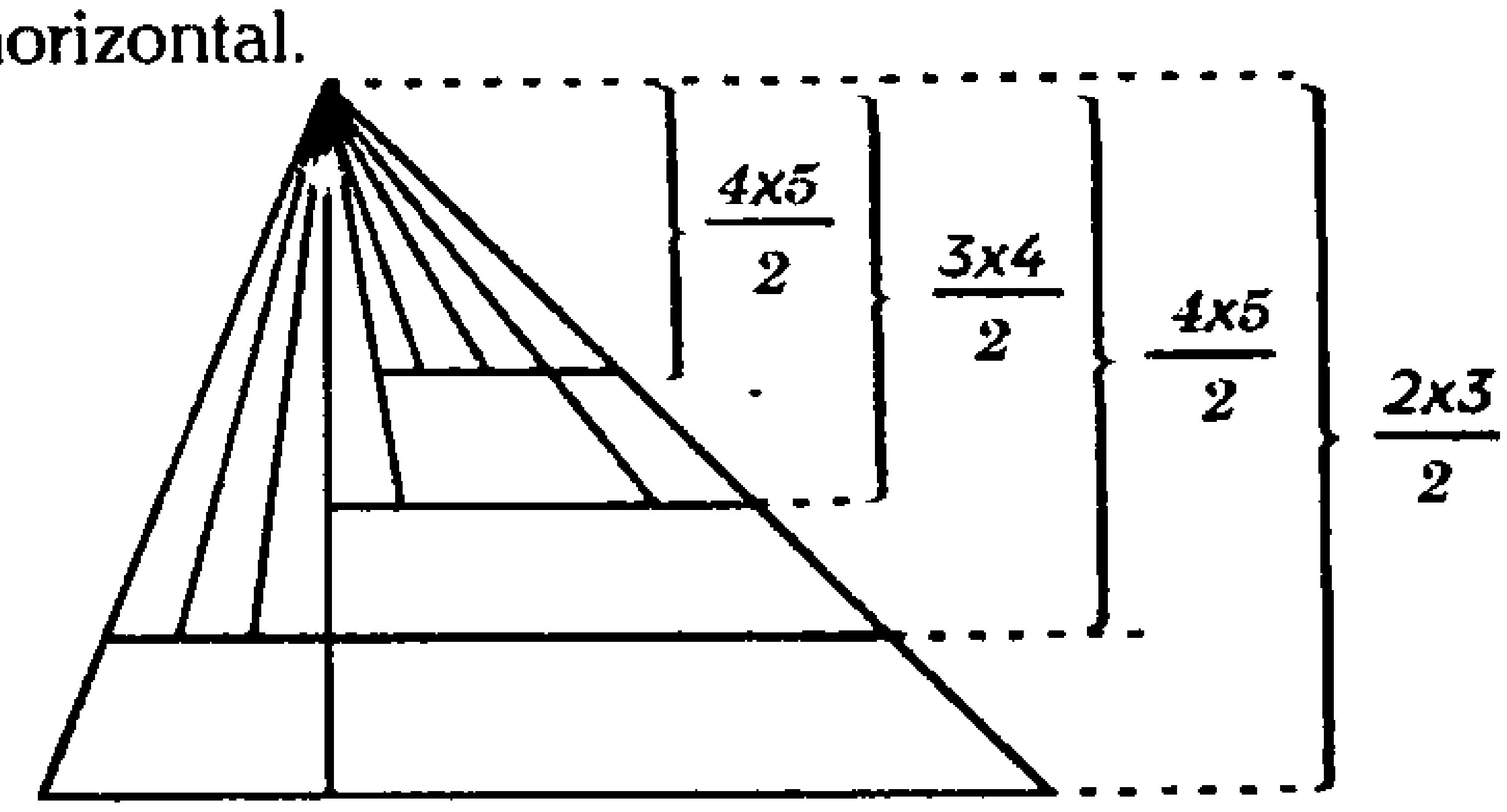
RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta que :



$$\text{número de triángulos} = \frac{n\times(n+1)}{2}$$

En la figura del enunciado aplicamos la fórmula anterior en función de cada línea (base) horizontal.



Entonces, el número de triángulos = ***10+6+10+3=29***

RPTA : "A"

PROBLEMA 48 : (UNI 2011 - I)

Si:

$$p\square q \equiv (p\wedge q)\rightarrow q$$

$$p\oplus q \equiv p\rightarrow (p\vee q)$$

Simplifique: $\left[\left(r\square s\right)\rightarrow t\right]\leftrightarrow\left[\sim(t\oplus s)\right]$

A) t B) $\sim r$ C) $\sim t$
D) $r \leftrightarrow \sim s$ E) $r \leftrightarrow \sim t$

RESOLUCIÓN :

Se sabe que:

* $p \to q \equiv \sim p \vee q$ * $p \vee V \equiv V$
* $\sim p \vee p \equiv V$ * $V \to q \equiv q$
* $p \leftrightarrow F \equiv \sim p$

* Se simplifica las nuevas definiciones dadas:

$p \square q \equiv (p \wedge q) \to q \equiv \sim(p \wedge q) \vee q \equiv \sim p \vee \underbrace{\sim q \vee q}\equiv \sim p \vee V \equiv V$

$p \oplus q \equiv p \to (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q) \equiv \underbrace{\sim p \vee p} \vee q \equiv V \vee q \equiv V$

Se remplaza lo pedido y aplicando algunas propiedades, tenemos:

$$[(r \square s) \to t] \leftrightarrow [\sim(t \oplus s)]$$

$$\Rightarrow [V \to t] \leftrightarrow [\sim V] \equiv t \leftrightarrow F \equiv \sim t$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 49 : (UNI 2011 - I)

Determine el número que continúa en la sucesión mostrada. *5 ; 13 ; 25 ; 41 ; 61 ;...*

A) 77 B) 85 C) 92 D) 96 E) 109

RESOLUCIÓN :

Nos piden determinar el número que continúa en la sucesión, al cual le hemos denominado "*X*"; para ello debemos encontrar las diferencias constantes :

$$5;\ 13;\ 25;\ 41;\ 61;\ X$$
$$+8\ \ +12\ \ +16\ \ +20\ \ +24$$
$$+4\ \ +4\ \ +4\ \ +4$$

Entonces, el valor de X es $=85$.

RPTA : "B"

PROBLEMA 50 : (UNI 2011 - I)

Indique el término que completa la sucesión numérica expresada en base n.

10 ; 11 ; 101 ; 111 ; 1011 ; 1101 ; ...

A) 1110 B) 1111 C) 10001 D) 10010 E) 10100

RESOLUCIÓN :

Nos piden hallar el término que continúa en la siguiente sucesión:

10; 11; 101; 111; 1011; 1101; ...

Observamos que la sucesión dada está formada por ceros y unos. De lo cual deducimos que son números escritos bajo el sistema binario:

$10_{(2)}; 11_{(2)}; 101_{(2)}; 111_{(2)}; 1011_{(2)}; 1101_{(2)}$

Pasándolos al sistema decimal, nos queda:

$$10_2;\ 11_2;\ 101_2;\ 111_2;\ 1011_2;\ 1101_2;\ \square$$
$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$
$$\underbrace{2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17}_{\text{secuencia de números primos}}$$

Luego: $17 = 1001_2$

RPTA : "C"

PROBLEMA 51 : (UNI 2011 - I)

Determine el término que continúa en la sucesión.

$A\ ;\ C_2^4\ ;\ E_4^9\ ;\ G_8^{16};\ ...$

A) I_{16}^{25} B) I_{12}^{25} C) H_{16}^{25} D) I_{16}^{32} E) I_{16}^{36}

RESOLUCIÓN :

En la secuencia dada, observamos que se cumple:

$(\text{Letra})_{\text{potencias de 2}}^{\text{cuadrados perfectos}}$; luego:

$$A_1^1\ ;\quad C_2^4;\quad E_4^9\ ;\quad G_8^{16};\quad I_{16}^{25}$$

1.ª Letra, 3.ª Letra, 5.ª Letra, 7.ª Letra, 9.ª Letra

$$A_{2^0}^{1^2}\quad C_{2^1}^{2^2}\quad E_{2^2}^{3^2}\quad G_{2^3}^{4^2}\quad I_{2^4}^{5^2}$$

Por lo tanto, lo pedido será : I_{16}^{25}

RPTA : "A"

PROBLEMA 52 : (UNI 2011 - I)

En la siguiente sucesión:

50	50	48	42	x	y

Determine el valor numérico de $x+y$.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar el valor de $x+y$.

50	50	48	42	x	y

$$-0\qquad -2\qquad -6\qquad -12\qquad -20$$
$$\overline{0\times1}\quad \overline{1\times2}\quad \overline{2\times3}\quad \overline{3\times4}\quad \overline{4\times5}$$

Se determina que: $x=30$; $y=10$

Entonces: $x+y = 40$

RPTA : "D"

PROBLEMA 53 : (UNI 2011 - I)

Veinte países mantienen relaciones diplomáticas, cada país tiene un embajador en los otros países. Indique la cantidad de embajadores que hay en total.

A) 40   B) 80   C) 190   D) 240   E) 380

RESOLUCIÓN :

Según las condiciones dadas en el enunciado, cada país tiene un embajador en los otros países.

Entonces, como son **20** países, cada país debe tener **19** embajadores.

Es así que, el número total de embajadores es:

$20\times 19=380$

RPTA : "E"

PROBLEMA 54 : (UNI 2011 - I)

En una granja se crían pavos, gallinas y conejos. El número de conejos es igual a la mitad del número de gallinas y si hubiese **2** pavos menos, el número de pavos sería igual al número de conejos. Indicar la suma total de animales, si se han contado un total de **104** patas.

A) 38   B) 42   C) 46   D) 50   E) 52

RESOLUCIÓN :

Del enunciado:

- Las gallinas son el doble del número de conejos.
- Los pavos exceden a los conejos en **2**.
- El total de patas es **104**.

Animales	Nº. de animales	Nº de patas
pavos	$x+2$	$2x+4$
gallinas	$2x$	$4x$
conejos	x	$4x$
Total	$4x+2$	$10x+4$

Entonces, el número total de patas será:

$$10x+4=104 \Rightarrow x=10$$

Luego, el número total de animales será: $4x+2=42$.

RPTA : "B'

PROBLEMA 55 : (UNI 2011 - I)

Considere un dado "trucado', de tal forma que la probabilidad de que salga cierto número es inversamente proporcional al mismo. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar **2** dados trucados idénticos, la suma de los números obtenidos sea **5**?

A) 0,14   B) 0,24   C) 0,28   D) 0,34   E) 0,39

RESOLUCIÓN :

Se nos pide hallar la probabilidad de que al lanzar dos dados trucados se obtenga de suma **5**.

Considerando las probabilidades de obtener cada uno de los puntajes del dado, se plantea lo siguiente:

puntaje	1	2	3	4	5	6
probabilidad	60k	30k	20k	15k	12k	10k
producto constante =	60k	60k	60k	60k	60k	60k

(I.P.; x)

Según las condiciones del enunciado, tenemos lo siguiente:

Probabilidad total: $=60k+30k+20k+15k+12k+10k$

$=147k=1$

Se nos pide obtener de suma **5**, por ello, los puntajes a obtener serán: **(1 y 4)** ó **(2 y 3)** ó **(3 y 2)** ó **(4 y 1)**.

Probabilidad:

$$\left(\frac{60}{147}\times\frac{15}{147}\right)+\left(\frac{30}{147}\times\frac{20}{147}\right)+\left(\frac{20}{147}\times\frac{30}{147}\right)+\left(\frac{15}{147}\times\frac{60}{147}\right)=0,147$$

Por lo tanto, la probabilidad será. apróximadamente: $P = 0,14$

RPTA : "A"

PROBLEMA 56 : (UNI 2011 - I)

Si: $\overline{TRES}+\overline{SIETE}=100\,000$; halle $\overline{TIGRES}$

Información:

I) G=S   II) I=E   III) T=R

para resolver este problema se requiere utilizar:

A) I solamente
B) I y II en conjunto
C) I y III en conjunto
D) I, II y III en conjunto
E) Información adicional

RESOLUCIÓN :

Se tiene la siguiente operación:

(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)
	8	8	1	9
	T	R	E	S
9	1	1	8	1
S	I	E	T	E
1 0	0	0	0	0

Analizando las columnas, observamos:

Columna **(I)**: $S=9$; Columna **(II)**: $I=1$

Columna *(III)*: $R=8$; Columna *(IV)*: $T=8$

Columna *(V)* : $E=1$

Ya que debemos hallar $\overline{TIGRES}$, aún nos faltaría encontrar el valor de G.

Por tal motivo, solo necesitamos utilizar el dato I.

RPTA : "A"

PROBLEMA 57 : (UNI 2011 - I)

Sea la operación δ definida en la siguiente tabla:

δ	0	1	2	3
1	0	0	0	0
2	1	1/2	1/3	1/4
3	2	1	2/3	2/4
4	3	3/2	1	3/4

Determine el valor de : $T=\dfrac{(5\delta 2)(4\delta 3)}{(13\delta 7)}$

A) 1/3 B) 2/3 C) 1 D) 3/2 E) 5/2

RESOLUCIÓN :

Observamos las siguientes relaciones en la tabla:

δ	0	1	2	3
1	0	0	0	0
2	1	½	1/3	1/4
3	2	1	2/3	2/4
4	3	3/2	1	3/4

-1 $\div 2$ $\div 3$ $\div 4$

Deducimos que : $a\delta b=\dfrac{a-1}{b+1}$

Entonces $T=\dfrac{(5\delta 2)(4\delta 3)}{13\delta 7}=\dfrac{\left(\dfrac{5-1}{2+1}\right)\left(\dfrac{4-1}{3+1}\right)}{\dfrac{13-1}{7+1}}=\dfrac{\left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\dfrac{12}{8}}=\dfrac{2}{3}$

RPTA : "B"

PROBLEMA 58 : (UNI 2011 - I)

Si una operación se define por:

$$\bigcirc(n+1)=\begin{cases} n! & ;\ n\ par \\ 2n-1 & ;\ n\ impar \end{cases}$$

Determine el valor de:

$$E=\frac{1}{3}\left[\bigcirc\left(\frac{\bigcirc 14}{5}\right)+\bigcirc\bigcirc\left(\frac{\bigcirc 5}{6}\right)\right]$$

A) 3 B) 6 C) 9 D) 11 E) 16

RESOLUCIÓN :

Según la regla de definición, se determina lo siguiente:

$\bigcirc 5=\bigcirc(4+1)=4!=24$ ← par

$\bigcirc 14=\bigcirc(13+1)=2(13)-1=25$ ← impar

Entonces:

$\bigcirc 4=\bigcirc(3+1)=2(3)-1=5$

$$E=\frac{1}{3}\left[\bigcirc\left(\frac{\bigcirc 14}{5}\right)+\bigcirc\bigcirc\left(\frac{\bigcirc 5}{6}\right)\right]=\frac{1}{3}\left[\bigcirc 5+\bigcirc\bigcirc 4\right]=\frac{1}{3}\left[\bigcirc 5+\bigcirc 5\right]$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{3}[24+24]=\frac{48}{3}=16$$

RPTA : "E"

PROBLEMA 59 : (UNI 2011 - I)

Se define: $Q(x)=2x-3\ ;\ si\ x\geq 2$

$Q(x)=x^2+1\ ;\ si\ x<2$

Hallar el valor de $Q(w)$

Si: $w=\dfrac{Q(7)+Q(-3)}{Q(5)}$

A) -1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN :

Teniendo en cuenta la regla de definición, obtenemos:

$Q(7)=2(7)-3=11$; $Q(-3)=(-3)^2+1=10$

$Q(5)=2(5)-3=7$

Entonces:

$$Q(w)=Q(3)=2(3)-3=3$$

RPTA : "C"

PROBLEMA 60 : (UNI 2011 - I)

En $\mathbb{R}$ se definen :

$$a*b=2a+b \quad y \quad a\#b=a+b^2$$

Determine la suma de los valores de x que satisfacen:

$$1\#(x * 1) = 1\#3$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

RESOLUCIÓN :

Según los datos: $a * b = 2a + b$ y $a\#b = a + b^2$ nos piden hallar la suma de valores de x que satisfacen: $1\#(x * 1) = 1\#3$

$$1\#(x*1) = 1\#3 \Rightarrow 1\#(x*1) = 1 + 3^2$$

$$\Rightarrow 1\#(x*1) = 10 \Rightarrow 1 + (x*1)^2 = 10$$

$$\Rightarrow (x*1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} (x*1) = 3 \\ \text{ó} \\ (x*1) = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 3 \quad \vee \quad 2x + 1 = -3$$

$$\Rightarrow 2x = 2 \quad \vee \quad 2x = -4$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -2$$

Nos piden la suma de valores de x :

$$\Rightarrow (1) + (-2) = -1$$

RPTA : "A"

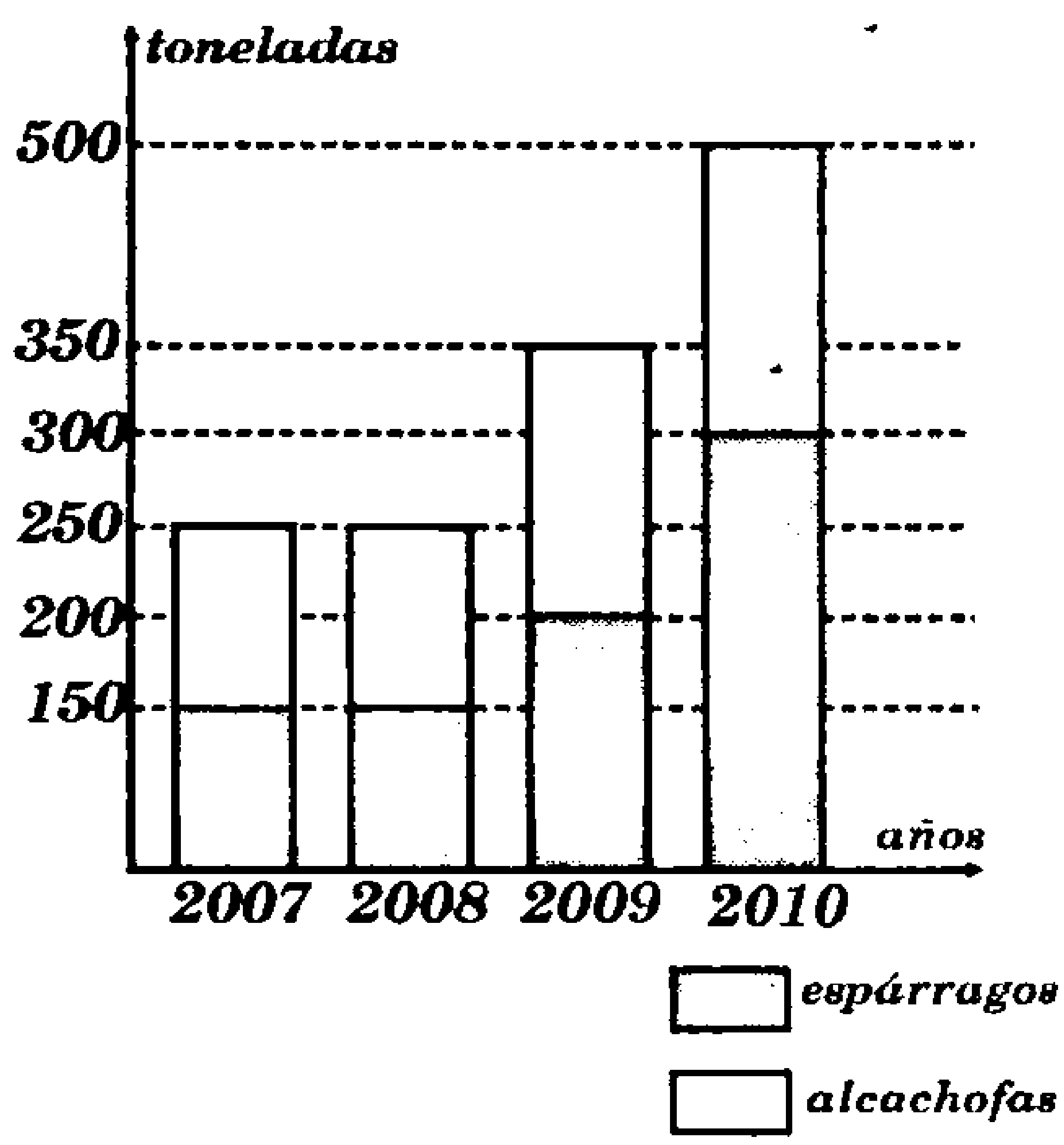
PROBLEMA 61 : (UNI 2011 - I)

La gráfica muestra la producción anual, en toneladas, de alcachofas y espárragos. Del gráfico se puede afirmar:

I) La producción promedio de espárragos es de **200** toneladas.

II) La producción promedio de alcachofas es el **70%** de la producción promedio de espárragos.

III) La producción de espárragos se incrementa en **50** toneladas cada año.



Seleccione la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera *(V)* o falsa *(F)*.

A) VVV B) VVF C) FFV D) FFF E) VFF

RESOLUCIÓN :

Según el gráfico:

* espárragos

Año	Producción (en tonelada)
2007	150
2008	150
2009	200
2010	300

* alcachofas

Año	Producción (en tonelada)
2007	100
2008	100
2009	150
2010	200

Se pide seleccionar la secuencia correcta, después de determinar si las proposiciones son verdaderas *(V)* o falsas *(F)*.

I) VERDADERO : La producción promedio de espárragos es de **200** toneladas.

$$\underset{(\text{espárragos})}{\text{Producción promedio}} = \frac{150+150+200+300}{4} = 200$$

II) FALSO: La producción promedio de alcachofas es el **70%** de la producción promedio de espárragos. Sabemos que la producción promedio de espárragos es **200**.

$$\underset{(\text{alcachofas})}{\text{Producción promedio}} = 70\% \underset{(\text{espárragos})}{\text{Producción promedio}}$$

$$\frac{100+100+150+200}{4} = 70\%(200) \Rightarrow 137{,}5 \neq 140$$

III) FALSO: La producción de espárragos se incrementa en **50** toneladas cada año.

Producción de espárragos	2007	2008	2009	2010
	150	150	200	300

incremento 0 · incremento 50 · incremento 100

RPTA : "E"

PROBLEMA 62 : (UNI 2011 - I)

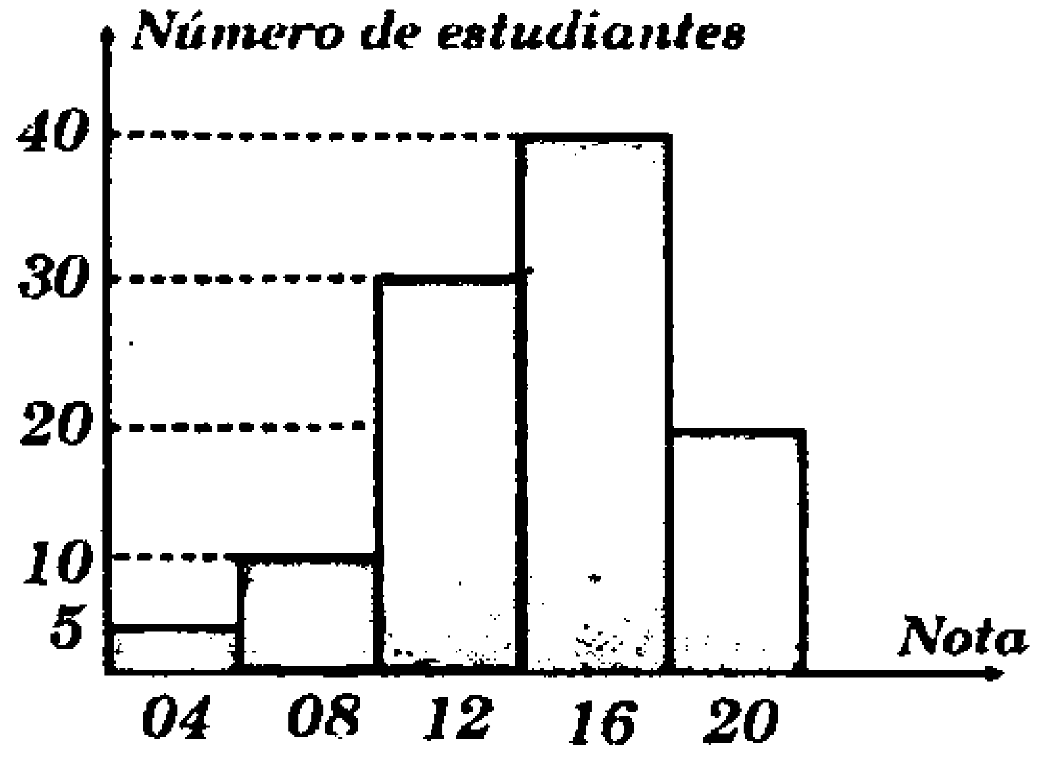
La gráfica representa la distribución de las notas de los estudiantes del curso "Negocios Internacionales". De la información de la gráfica se puede afirmar:

I) La nota *16* es la moda.

II) La media es superior a la moda.

III) Más del **50%** de los estudiantes obtuvo una nota igual o superior a *16*.

Después de determinar la falsedad *(F)* o veracidad *(V)* de cada proposición, señale la alternativa que presenta la secuencia correcta.



A) VVV B) VFF C) VVF D) VFV E) FVV

RESOLUCIÓN :

Recordando que:

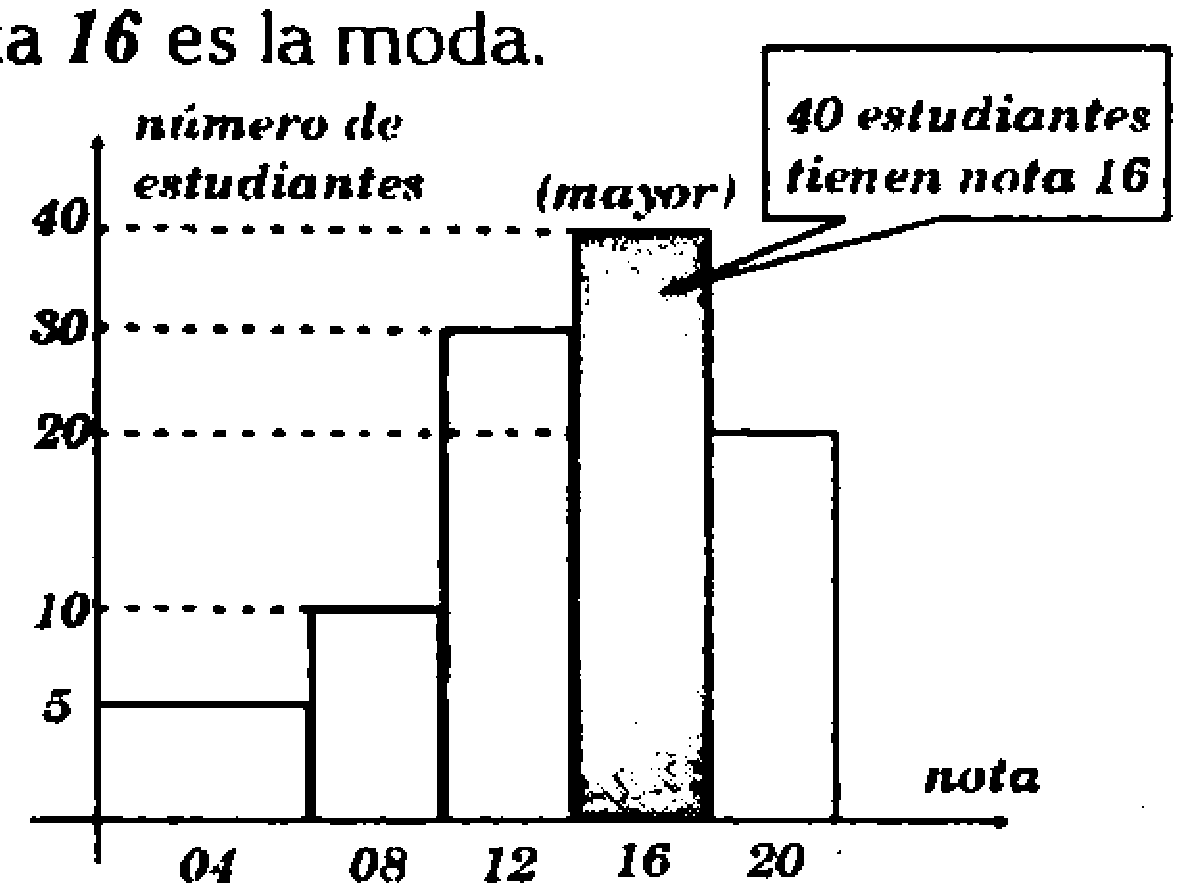
Moda: Valor que aparece mayor cantidad de veces.

$$Media: \frac{\sum f_i \times n_i}{\sum n_i}$$

Nos piden determinar las categorías de verdad o falsedad en cada proposición.

I) VERDADERO

La nota ***16*** es la moda.



II) FALSO

La media es superior a la moda.

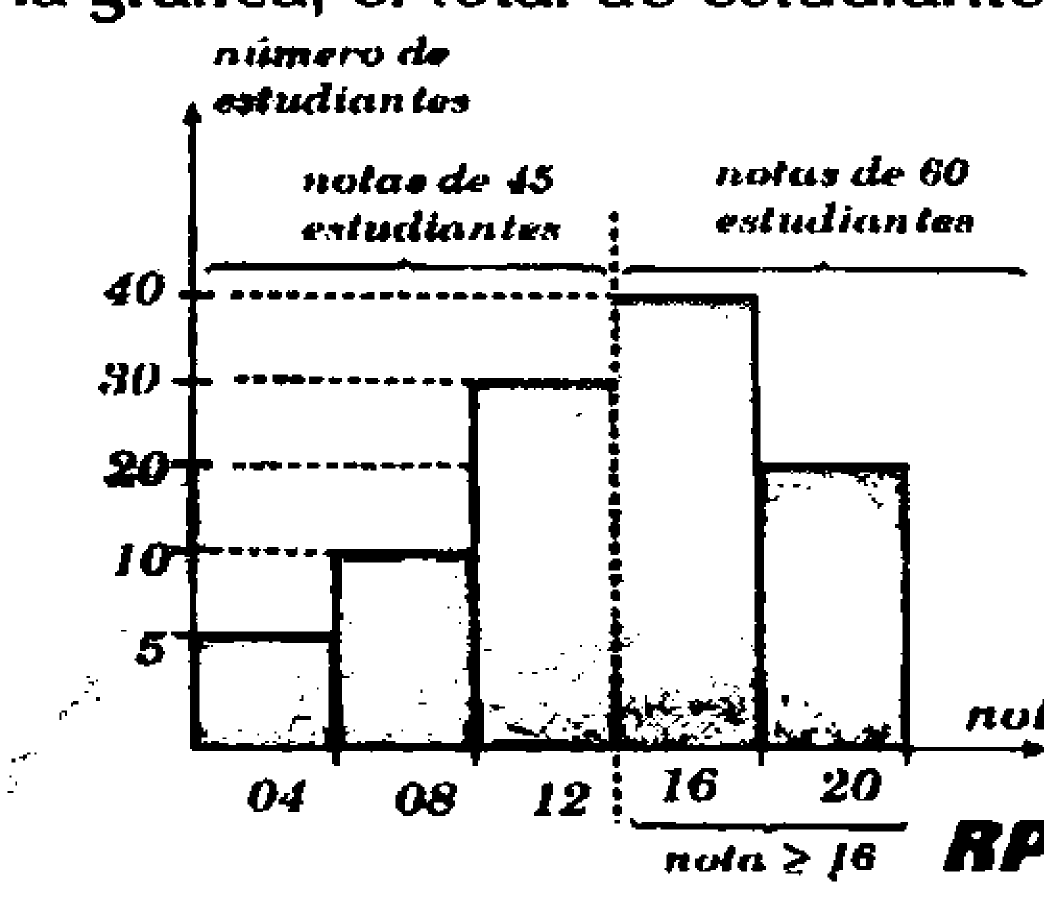
$$\text{nota media} = \frac{5(4)+10(8)+20(20)+30(12)+40(16)}{40+30+20+10+5}$$

$$\Rightarrow \text{nota media} = 14{,}2 \quad ; \quad moda = 16$$

III) VERDADERO

Más del ***50%*** de los estudiantes obtuvo una nota igual o superior a ***16***.

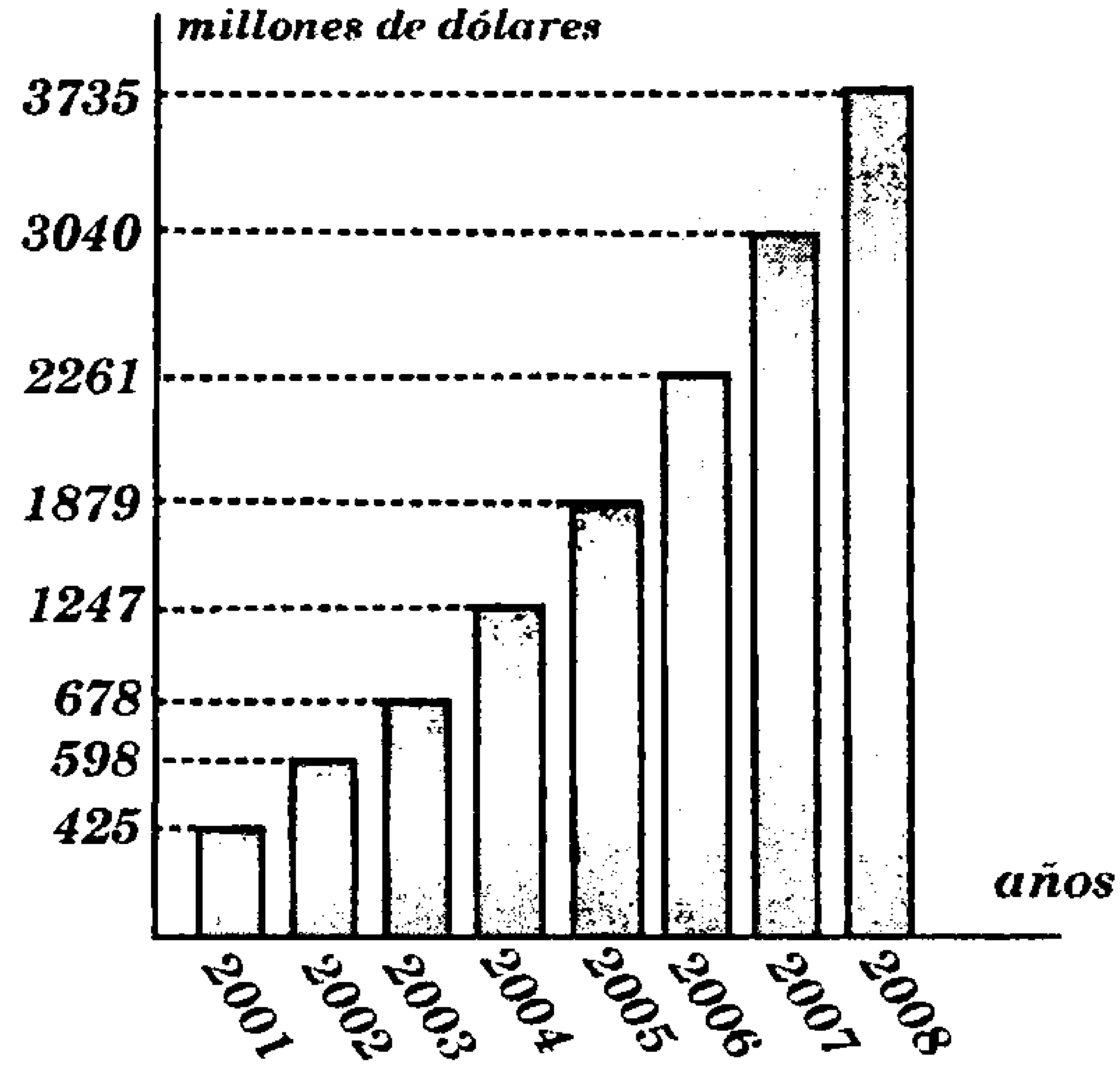
Según la gráfica, el total de estudiantes es ***105***.



RPTA : "D"

PROBLEMA 63 : (UNI 2011 - I)

El gráfico muestra el valor en millones de dólares, de las exportaciones del Perú a China, desde el año ***2001*** al ***2008***.



De la información determine si las proposiciones son verdaderas o falsas.

I) El crecimiento porcentual de las exportaciones del ***2001*** al ***2008*** fue de ***778,82%***.

II) El mayor crecimiento porcentual por año fue del ***2007*** al ***2008***.

III) El menor crecimiento porcentual por año fue del ***2002*** al ***2003***.

Marque la alternativa correcta.

A) VVV B) VVF C) VFF D) VFV E) FFV

RESOLUCIÓN :

Como nos piden hallar el crecimiento porcentual de una cantidad, aplicaremos lo siguiente:

$$\text{Cantidad porcentual} = \left(\frac{\text{Cantidad final} - \text{Cantidad inicial}}{\text{Cantidad inicial}}\right) \times 100\%$$

Según el gráfico:

Años	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Exportaciones (en millones de dólares)	425	598	678	1247	1879	2261	3040	3735
Crecimiento porcentual		+40,7%	+13,4%	+83,9%	+50,7%	+20,3%	+34,5%	+22,9%

Se nos pide determinar si las proposiciones son verdaderas o falsas.

I) VERDADERA: el crecimiento porcentual de las

exportaciones del ***2001*** al ***2008*** fue de ***778,82%.***

$$\text{Crecimiento porcentual}_{(2001-2008)} = \left(\frac{3735 - 425}{425}\right) \times 100\% = 778{,}82\%$$

II) FALSA: el mayor crecimiento porcentual por año fue del ***2007*** al ***2008***.

$$\text{Crecimiento porcentual}_{(2007-2008)} = 22{,}9\% \quad ; \quad \text{Crecimiento porcentual}_{(2003-2004)} = 83{,}9\%$$

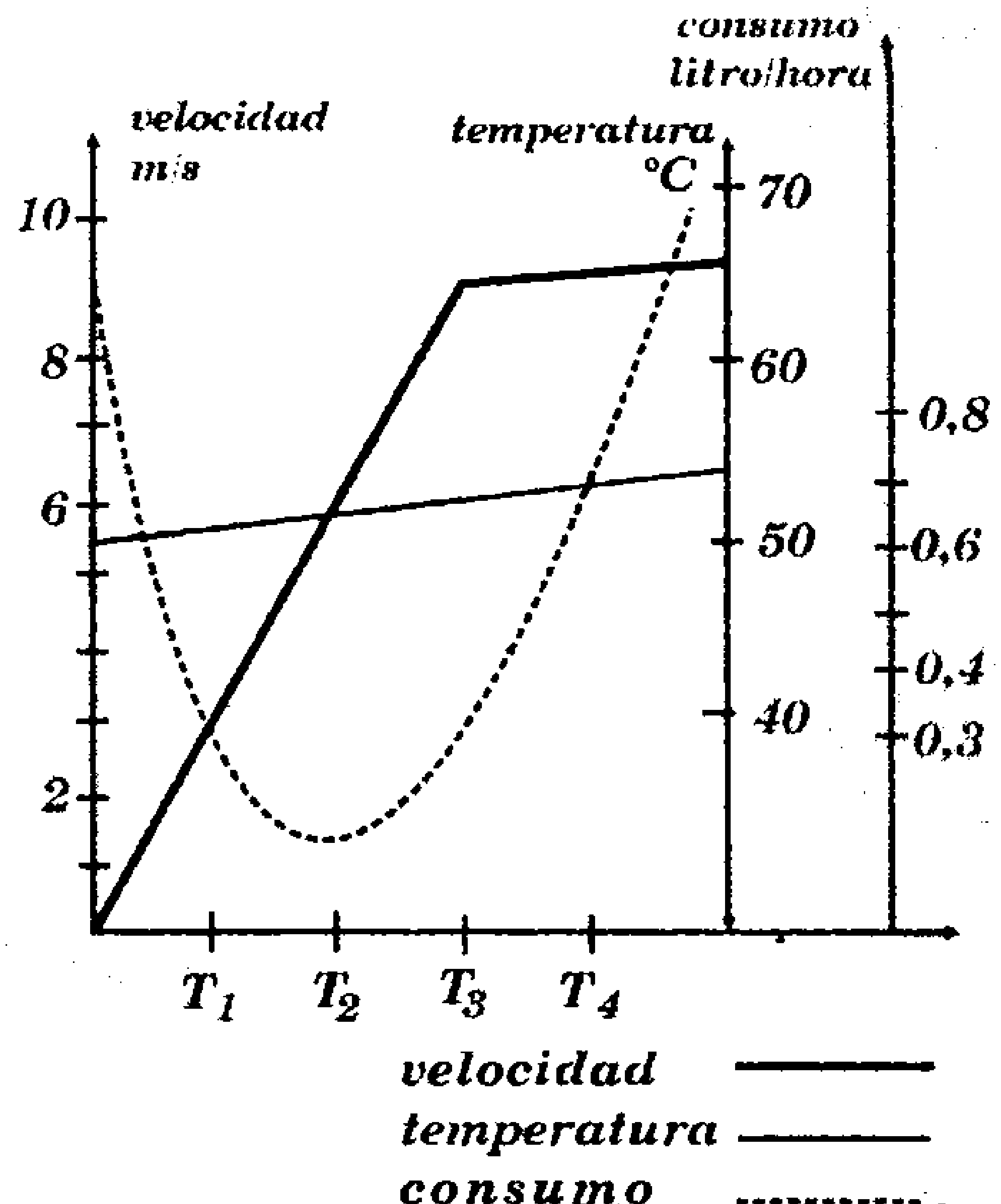
III) VERDADERA: el menor crecimiento porcentual por año fue del ***2002*** al ***2003***.

$$\text{Crecimiento porcentual}_{(2002-2003)} = 13{,}4\%$$

RPTA : "D"

PROBLEMA 63 : (UNI 2011 - I)

El gráfico muestra la variación de los parámetros velocidad, temperatura del aceite y consumo de combustible de una máquina, en diferentes momentos de su funcionamiento.



Indique la alternativa cuya(s) afirmación(es) es verdadera.

I) A la velocidad de ***6m/s***, el consumo de combustible es menor.

II) La temperatura se incrementa a ***50 °C*** cuando la máquina pasa de ***0*** a ***6*** m/s de velocidad.

III) La velocidad es directamente proporcional al consumo de combustible.

A) I y II ***B) solo II*** ***C) solo III***
D) solo I ***E) II y III***

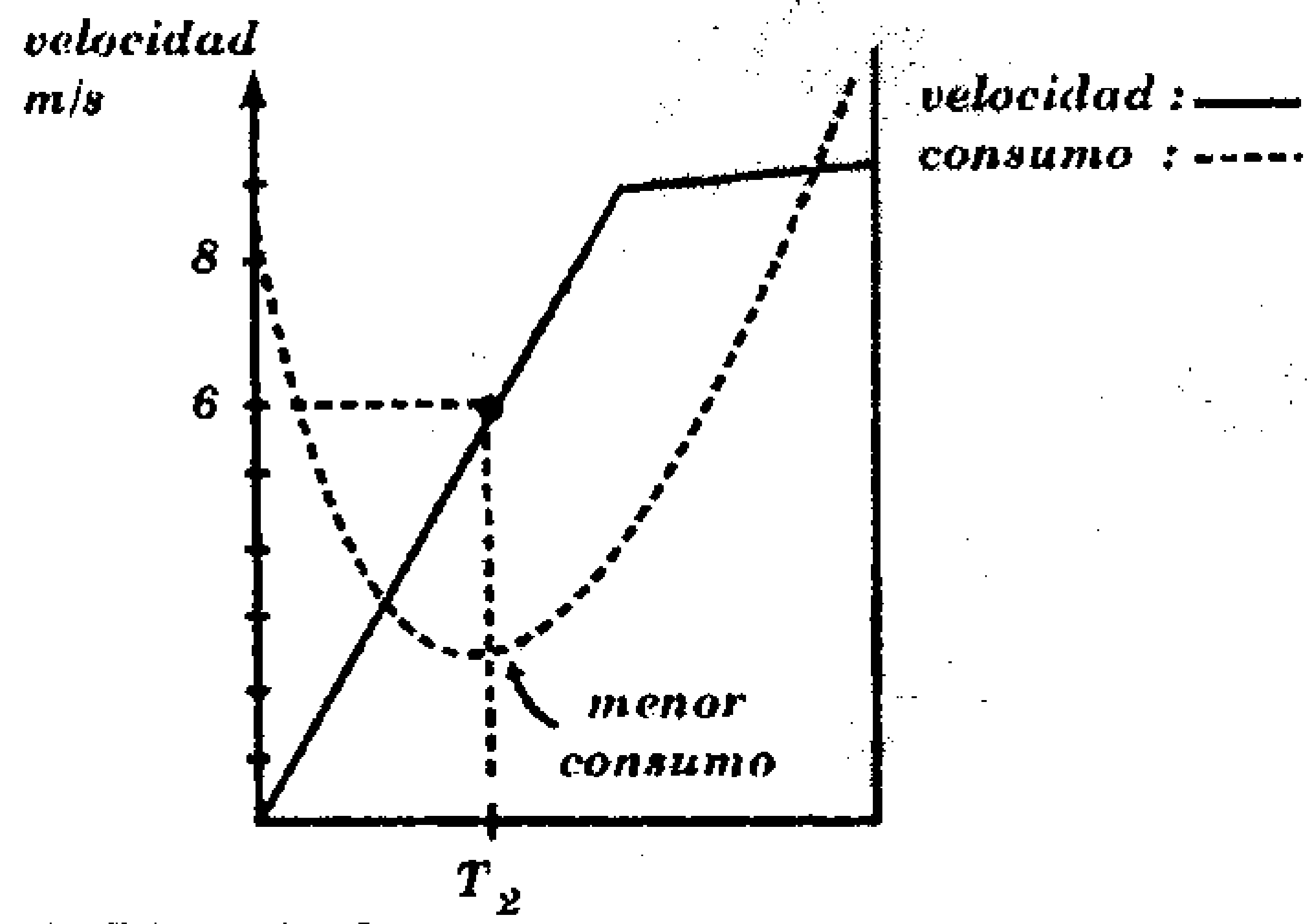
RESOLUCIÓN :

Se analiza el gráfico según lo referente a cada proposición.

La primera y tercera proposición nos informan:

I) A la velocidad de ***6m/s***, el consumo de combustible es menor.

III) La velocidad es directamente proporcional al consumo de combustible.



I) VERDADERO

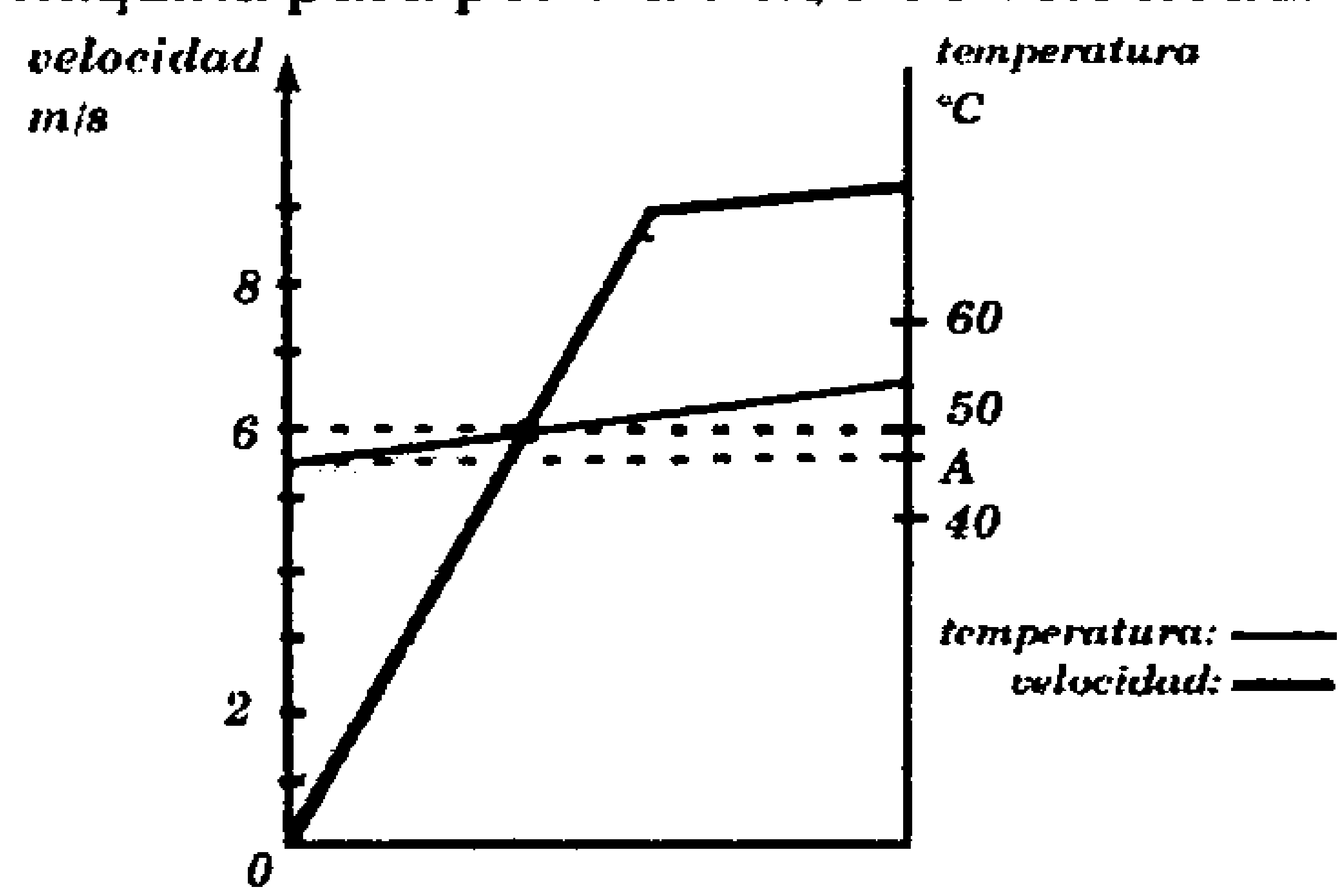
Según el gráfico, observamos que en el periodo T_2 se obtiene el menor consumo, y ello se da a una velocidad de ***6m/s.***

III) FALSO

Del gráfico, observamos que cuando la velocidad se incrementa de ***0*** a ***6*** m/s, la línea de consumo decae; lo cual nos indica que la velocidad es I.P. al consumo de combustible.

La segunda proposición nos dice:

II) La temperatura se incrementa a ***50 °C*** cuando la máquina pasa por ***0*** a ***6*** m/s de velocidad.



I) VERDADERO

Se observa en la región sombreada que la temperatura se ha incrementado de ***A °C*** a ***50 °C*** y la velocidad ha pasado de ***0*** a ***6m/s.***

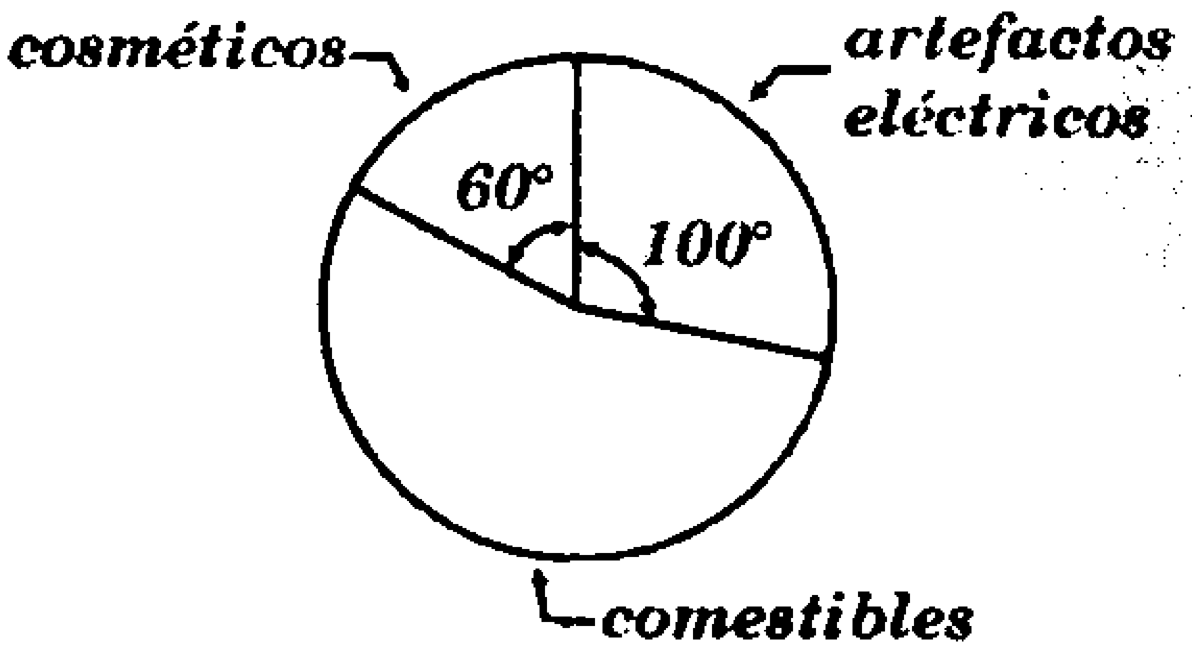
* Se concluye que las afirmaciones verdaderas son ***I*** y ***II***.

RPTA : "A"

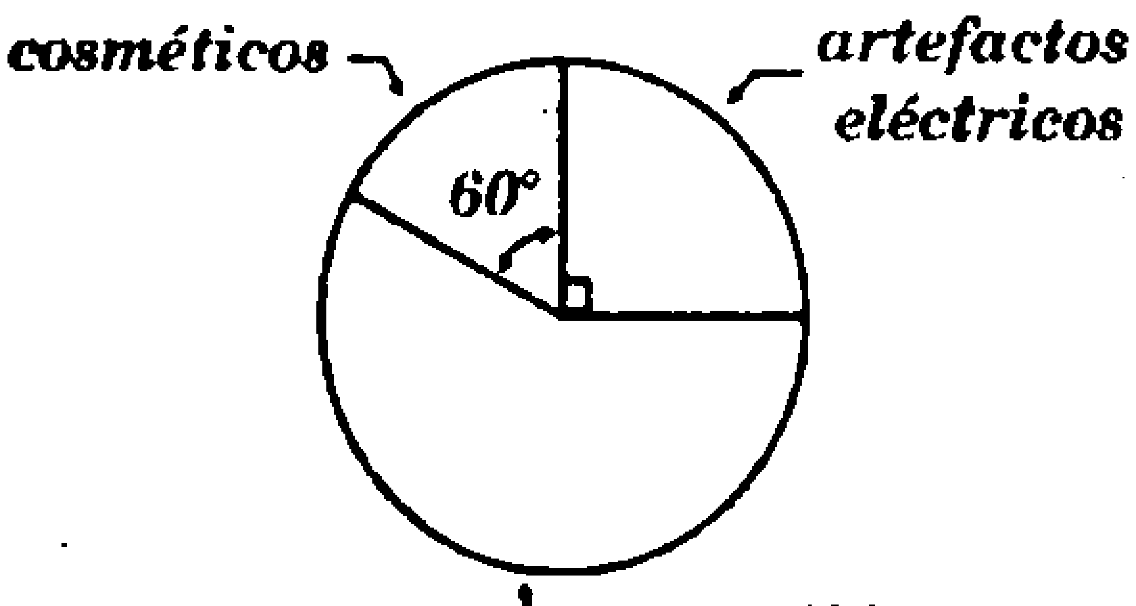
PROBLEMA 64 : (UNI 2011 - I)

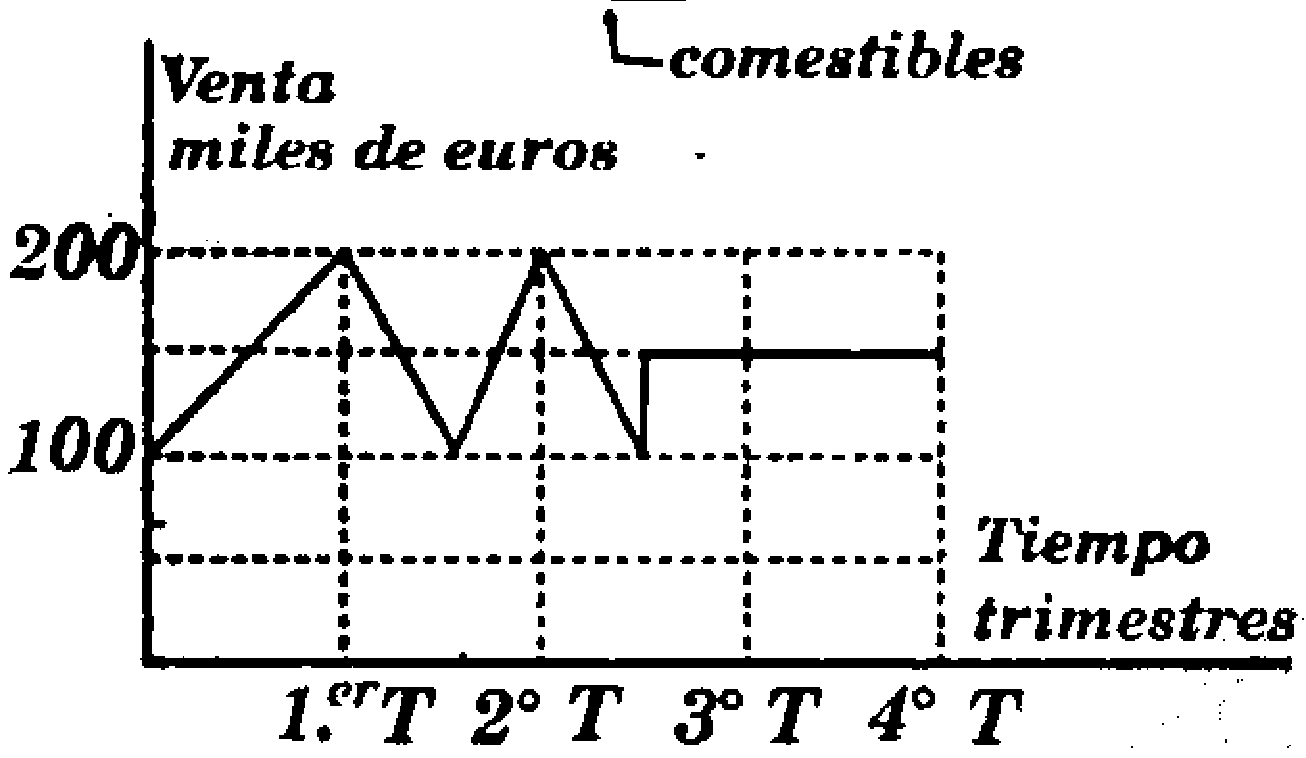
Para el año **2009**, los gráficos circulares muestran la venta de los principales productos de una tienda, y la gráfica de línea muestra la venta en miles de euros en cada trimestre.

Primer y segundo trimestre



Tercer y cuatro trimestre





Indique la alternativa cuya(s) afirmación(es) es verdadera.

I) En los cuatro trimestres ha habido una venta promedio de **150** mil euros.

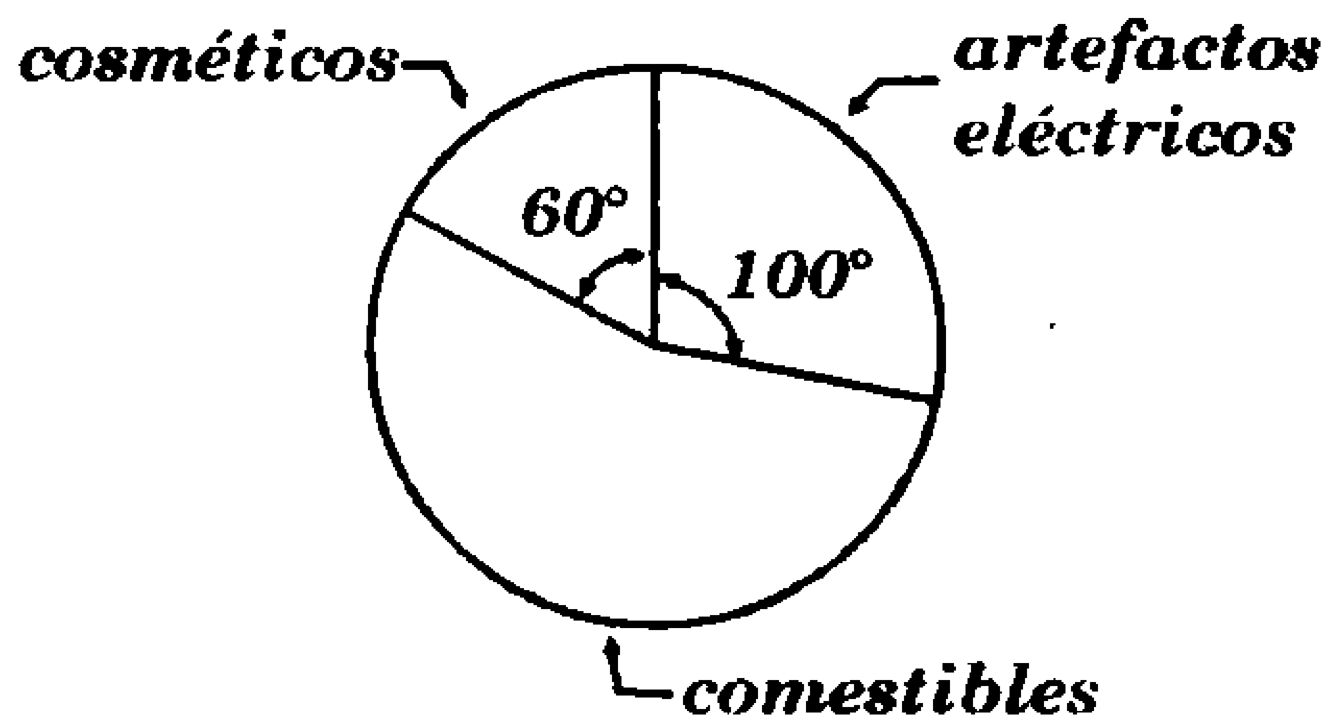
II) El ingreso por venta de comestibles fue mayor en los trimestres **3°** y **4°**

III) La venta en el rubro cosméticos fue en promedio de **25 000** euros en cada trimestre.

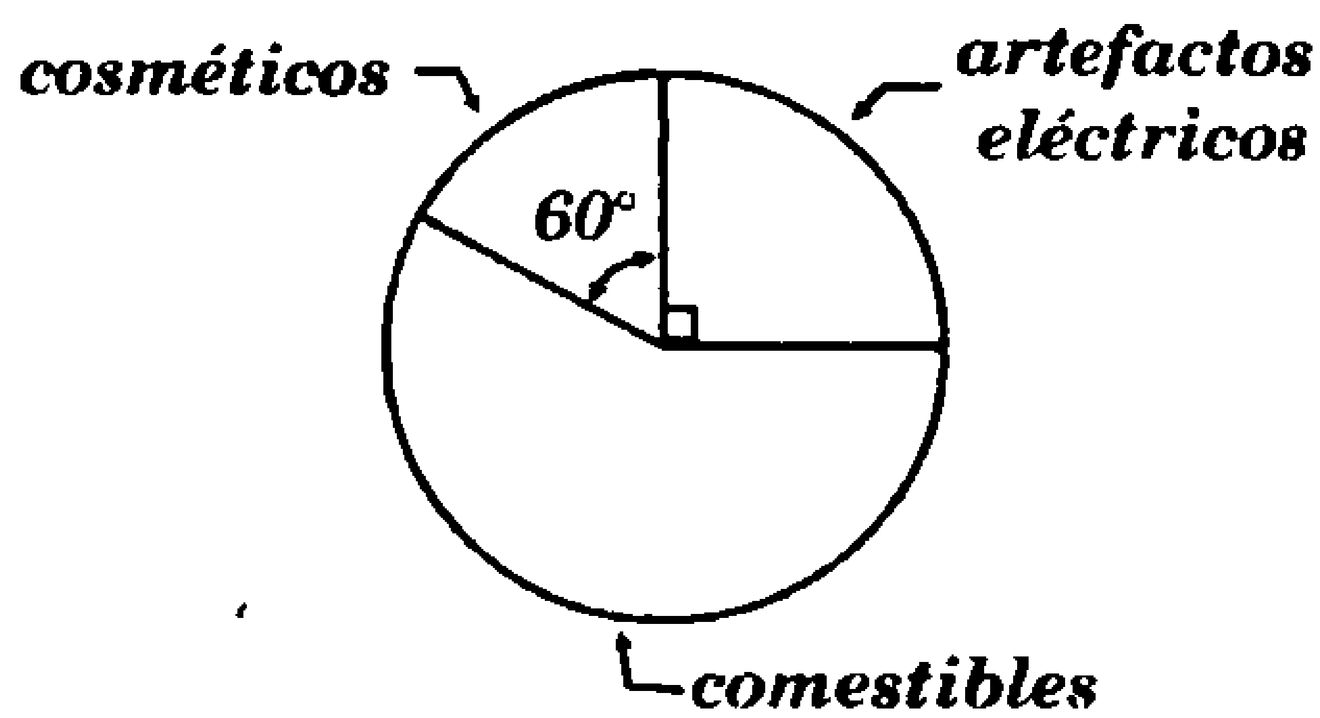
A) I y II *B) I, II y III* *C) solo I*
D) solo II *E) solo III*

RESOLUCIÓN :

Trimestre	Ventas
1.er	150
2°	150



Trimestre	Ventas
3.er	150
4°	150



I) VERDADERO

$$\text{Venta promedio} = \frac{150+150+150+150}{4} = 150$$

Se observa que en los cuatro primeros trimestres hubo una venta promedio de **150** mil euros.

II) VERDADERO

Analizando el ingreso por la venta de comestibles

1er y **2do** trismestre:

$$\frac{200°}{360°}\times 150+\frac{200°}{360°}\times 150 = 166{,}67$$

3er y **4to** trismestre:

$$\frac{210°}{360°}\times 150+\frac{210°}{360°}\times 150 = 175$$

El ingreso por la venta de comestibles fue mayor .

III) VERDADERO

Ya que el ingreso por trimestres es el mismo e igual a **150** , entonces la venta promedio será igual a:

$$\frac{60°}{360°}\times 150=25$$

Con lo cual se determina que la venta promedio, en cosméticos, fue de **25 000** euros.

RPTA : "B"

COLECCIÓN "RUBIÑOS 2012"

1000 PÁGINAS

1700 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1100 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1400 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1000 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1700 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1500 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia

1148 PÁGINAS

Incluye 2 DVDs multimedia